

# MATEMÁTICAS PARA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA

Decimosegunda edición



ERNEST F. HAEUSSLER, JR. | RICHARD S. PAUL | RICHARD J. WOOD



## Reglas algebraicas para los números reales

$$\begin{aligned}
a + b &= b + a \\
ab &= ba \\
a + (b + c) &= (a + b) + c \\
a(bc) &= (ab)c \\
a(b + c) &= ab + ac \\
a(b - c) &= ab - ac \\
(a + b)c &= ac + bc \\
(a - b)c &= ac - bc \\
a + 0 &= a \\
a \cdot 0 &= 0 \\
a \cdot 1 &= a \\
a + (-a) &= 0 \\
-(-a) &= a \\
(-1)a &= -a \\
a - b &= a + (-b) \\
a - (-b) &= a + b \\
a \left( \frac{1}{a} \right) &= 1 \\
\frac{a}{b} &= a \cdot \frac{1}{b} \\
(-a)b &= -(ab) = a(-b) \\
(-a)(-b) &= ab \\
\frac{-a}{-b} &= \frac{a}{b} \\
\frac{-a}{b} &= -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} \\
\frac{a}{c} + \frac{b}{c} &= \frac{a+b}{c} \\
\frac{a}{c} - \frac{b}{c} &= \frac{a-b}{c} \\
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \\
\frac{a \cancel{b}}{c \cancel{d}} &= \frac{ad}{bc} \\
\frac{a}{b} &= \frac{ac}{bc} \quad (c \neq 0)
\end{aligned}$$

## Exponentes

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1 \quad (a \neq 0) \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0) \\
a^m a^n &= a^{m+n} \\
(a^m)^n &= a^{mn} \\
(ab)^n &= a^n b^n \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \\
\frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}
\end{aligned}$$

## Radicales

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a} &= a^{\frac{1}{n}} \\
(\sqrt[n]{a})^n &= a, \sqrt[n]{a^n} = a \quad (a > 0) \\
\sqrt[n]{a^m} &= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} \\
\sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \\
\sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\
\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a}
\end{aligned}$$

## Productos especiales

$$\begin{aligned}
x(y + z) &= xy + xz \\
(x + a)(x + b) &= x^2 + (a + b)x + ab \\
(x + a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2 \\
(x - a)^2 &= x^2 - 2ax + a^2 \\
(x + a)(x - a) &= x^2 - a^2 \\
(x + a)^3 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \\
(x - a)^3 &= x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3
\end{aligned}$$

## Fórmulas de factorización

$$\begin{aligned}
ab + ac &= a(b + c) \\
a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\
a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\
a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2 \\
a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\
a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)
\end{aligned}$$

### Fórmula cuadrática

Si  $ax^2 + bx + c = 0$ , donde  $a \neq 0$ , entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Líneas rectas

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{fórmula de la pendiente})$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (\text{forma punto-pendiente})$$

$$y = mx + b \quad (\text{forma punto-intersección})$$

$$x = \text{constante} \quad (\text{recta vertical})$$

$$y = \text{constante} \quad (\text{recta horizontal})$$

### Desigualdades

Si  $a < b$ , entonces  $a + c < b + c$ .  
Si  $a < b$  y  $c > 0$ , entonces  $ac < bc$ .  
Si  $a < b$  y  $c > 0$ , entonces  $a(-c) > b(-c)$ .

### Logaritmos

$$\log_b x = y \text{ si y sólo si } x = b^y$$

$$\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$$

$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$

$$\log_b m^r = r \log_b m$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b b^r = r$$

$$b^{\log_b m} = m$$

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

### Conteo

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

### Alfabeto griego

alfa	A	$\alpha$	nu	N	$\nu$
beta	B	$\beta$	xi	$\Xi$	$\xi$
gamma	$\Gamma$	$\gamma$	ómicron	O	$\circ$
delta	$\Delta$	$\delta$	pi	$\Pi$	$\pi$
épsilon	E	$\epsilon$	ro	P	$\rho$
zeta	Z	$\zeta$	sigma	$\Sigma$	$\sigma$
eta	H	$\eta$	tau	T	$\tau$
theta	$\Theta$	$\theta$	ípsilon	Y	$\nu$
iota	I	$\iota$	fi	$\Phi$	$\phi, \varphi$
kappa	K	$\kappa$	ji	X	$\chi$
lambda	$\Lambda$	$\lambda$	psi	$\Psi$	$\psi$
mu	M	$\mu$	omega	$\Omega$	$\omega$



# Matemáticas para administración y economía

---



# Matemáticas para administración y economía

Decimosegunda edición

**Ernest F. Haeussler, Jr.**

*The Pennsylvania State University*

**Richard S. Paul**

*The Pennsylvania State University*

**Richard J. Wood**

*Dalhousie University*

## TRADUCCIÓN

**Jesús Elmer Murrieta Murrieta**

*Maestro en Investigación de Operaciones  
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores  
de Monterrey, campus Morelos*

## REVISIÓN TÉCNICA

**Irma Beatriz Rumbos Pellicer**

*Departamento Académico de Matemáticas  
Instituto Tecnológico Autónomo de México*

**Leopoldo Xavier Cárdenas González**

*Facultad de Ingeniería y Matemáticas  
Universidad del Valle de Atemajac,  
Guadalajara, México*

**María Graciela Scápolo**

*Facultad de Ciencias Económicas  
Pontificia Universidad Católica Argentina*

**Jorge Augusto Pérez Alcázar**

*Departamento de Matemáticas  
Escuela de Administración de Negocios,  
Bogotá, Colombia*

**María Nubia Quevedo Cubillos**

*Facultad de Ciencias Económicas  
Universidad Militar Nueva Granada,  
Bogotá, Colombia*

**Sergio Iván Restrepo Ochoa**

**Mauricio Restrepo López**  
*Facultad de Ciencias Económicas  
Universidad de Antioquia,  
Medellín, Colombia*

**Vilma Ortiz de Jofre**

*Departamento de Ciencias Básicas  
Facultad de Ingeniería  
Universidad Rafael Landívar,  
Guatemala*

**Manuel Emilio Fuenzalida Álamos**

**Miguel Ángel Olivares Barrientos**  
*Facultad de Ciencias y Tecnología  
Universidad Adolfo Ibáñez, Chile*



Datos de catalogación bibliográfica

Haeussler, Jr., Ernest F; Richard S. Paul y

Richard J. Wood

Matemáticas para administración y economía.

Decimosegunda edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2008

ISBN: 978-970-26-1147-9

Área: Matemáticas

Formato: 21 x 27 cm

Páginas: 920

Authorized translation from the English language edition, entitled *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, and the Life and Social Sciences 12ed.* by Ernest F. Haeussler, Jr., Richard S. Paul and Richard J. Wood published by Pearson Education, Inc., publishing as PRENTICE HALL, INC., Copyright © 2008. All rights reserved.

ISBN 013-240422-2

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, and the Life and Social Sciences 12 ed.*, por Ernest F. Haeussler, Jr., Richard S. Paul and Richard J. Wood publicada por Pearson Education, Inc., publicada como PRENTICE HALL, INC., Copyright © 2008. Todos los derechos reservados.

**Edición en español:**

Editor: Rubén Fuerte Rivera  
e-mail: ruben.fuerte@pearsoned.com  
Editor de desarrollo: Bernardino Gutiérrez Hernández  
Supervisor de producción: Enrique Trejo Hernández

**Edición en inglés:**

Acquisitions Editor: Chuck Synovec  
Vice President and Editorial Director, Mathematics: Christine Hoag  
Project Manager: Michael Bell  
Production Editor: Debbie Ryan  
Senior Managing Editor: Linda Mihatov Behrens  
Executive Managing Editor: Kathleen Schiaparelli  
Manufacturing Buyer: Maura Zaldivar  
Manufacturing Manager: Alexis Heydt-Long  
Marketing Manager: Wayne Parkins  
Marketing Assistant: Jennifer de Leeuwer  
Editorial Assistant/Print Supplements Editor: Joanne Wendelken  
Art Director: Maureen Eide  
Interior Designer: Dina Curro

Cover Designer: Kris Carney  
Art Editor: Thomas Benfatti  
Creative Director: Juan R. López  
Director of Creative Services: Paul Belfanti  
Cover Photo: Ian Cumming/Axiom Photographic Agency/Getty Images  
Manager, Cover Visual Research & Permissions: Karen Sanatar  
Director, Image Resource Center: Melinda Patelli  
Manager, Rights and Permissions: Zina Arabia  
Manager, Visual Research: Beth Brenzel  
Image Permission Coordinator: Nancy Seise  
Photo Researcher: Rachel Lucas  
Art Studio: Laserwords

**DECIMOSEGUNDA EDICIÓN, 2008**

D.R. © 2008 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.  
Atlacomulco 500-5° piso  
Col. Industrial Atoto, C.P. 53519,  
Naucalpan de Juárez, Edo. de México  
E-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.

Prentice Hall es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.



**ISBN 10: 970-26-1147-4**  
**ISBN 13: 978-970-26-1147-9**  
Impreso en México. Printed in Mexico.  
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 11 10 09 08

**Para Lesly**



# AGRADECIMIENTOS

Pearson Educación agradece a los centros de estudios y profesores usuarios de esta obra por su apoyo y retroalimentación, elemento fundamental para esta nueva edición de *Matemáticas para administración y economía*.

## MÉXICO

### **UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA**

Humberto Mondragón Suárez  
Cristóbal Cárdenas Oviedo  
Víctor Manuel Mendoza Olivares  
Mariangela Borello  
Gretel Ana Keller Cortina  
Lázaro Francisco Vinicio Mendive Abreu  
Esperanza Rojas Oropeza  
Hugo Serrato González  
Aurelio Morales Macías  
Ramiro Garibay Jiménez  
Efraín González Castillo  
Irma Irian García Salazar  
Alejandro Guillén Santiago  
Marco Antonio Rodríguez Vélez  
Patricia Novo Covarrubias  
Erik Leal Enríquez  
Miguel Ángel Álvarez Rodríguez  
Daniel Smeke Zwaiman

### **UNIVERSIDAD DEL VALLE DE ATEMAJAC (UNIVA)**

Ignacio Navarro Ruiz  
Felipe Oregel Sánchez  
Mónica Juárez Valenzuela  
Leopoldo Xavier Cárdenas González

### **UNIVERSIDAD PANAMERICANA GUADALAJARA**

Alberto Lancaster Jones  
Cristina Eccius Wellmann  
Carlos Guillermo Cedeño

### **UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUADALAJARA**

Mario Mesino González

## COLOMBIA

### **UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA**

Jamer Carmona López  
Janeth Carolina Rendón Aguirre  
Luis Eduardo Tobón Cardona  
James Serna Mesa  
Camilo Restrepo Estrada

### **INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TEPIC**

Víctor Manuel Lamas Huízar

### **ITESM-CAMPUS SANTA FÉ**

Teresa de Jesús Cotera Rivera  
Sergio Rogelio Morales Vargas

### **ITESM-CAMPUS QUERÉTARO**

Sithanantham Kanthinathinathan  
Lauro Ayala Centeno  
Dulce Hernández Méndez  
María Rosa Hernández Mondragón  
María Griselda Tapia Mercado

### **ITESM-CAMPUS CHIHUAHUA**

Sofía Flores  
Carlos Manzanera Quintana  
Gabriela Athanea Luna

### **ITESM-CAMPUS CIUDAD JUÁREZ**

Judith Camargo

### **INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CIUDAD JUÁREZ**

Josefina Reyes Lomelí  
José Jiménez Jiménez

### **UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ**

Eduardo Encerrado

### **UNIVERSIDAD CEIPA**

Pablo Gallo  
Francisco Jaramillo

### **UNIVERSIDAD DE LA SALLE**

Marco Fidel Castillo

**ESCUELA DE ADMINISTRACIÓN**

**DE NEGOCIOS-EAN**

María Teresa Vargas

**UNIVERSIDAD CENTRAL**

Myriam Rodríguez

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA**

**DE BUCARAMANGA**

Nohora Nájera

**COLEGIO UNIVERSIDAD MAYOR**

**DE CUNDINAMARCA**

José Diafonte Gutiérrez Muñoz

**UNIVERSIDAD MILITAR NUEVA  
GRANADA**

Edgar Pinto Montenegro

Jose Tito Turga Arévalo

Juan de Jesús Díaz

Juan de Jesús Guerrero

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA**

**Y TECNOLÓGICA DE**

**COLOMBIA-UPTC-TUNJA**

Publio Suárez Sotomonte

Miguel Díaz Moreno

José Francisco Leguizamón

**UNIVERSIDAD SUR COLOMBIANA**

Julio Roberto Cano Barrera

**UNIVERSIDAD DE LA SABANA**

Mauricio Restrepo

**UNIVERSIDAD PILOTO**

**DE COLOMBIA**

Marisol Camacho

Esperanza Florez

Carlos Garzón

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA**

Gladys Villamarín

Hilda González

Óscar Prada

**UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO**

Álvaro Suárez

José René Camacho

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD**

**JAVERIANA**

Álvaro Moros

Fabio Molina

**UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS**

Héctor Ruiz

**ECUADOR**

**UNIVERSIDAD CENTRAL**

**DEL ECUADOR**

Flavio Parra

Patricio Ruales

**ESCUELA POLITÉCNICA  
DEL EJÉRCITO**

Arturo Zurita

Iván Ñúñez

Verónica Reina

**UNIVERSIDAD TÉCNICA  
PARTICULAR DE LOJA**

Lupe Beatriz Espejo

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA**

**EQUINOCCIAL**

Mauricio García

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DEL ECUADOR**

Germán Luna

Casar Monroy

**UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO  
DE QUITO**

Eduardo Alba

**PERÚ**

**UNIVERSIDAD DE SAN MARTÍN DE  
PORRES**

Randy Guardales Vásquez

**UNIVERSIDAD PERUANA DE  
CIENCIAS APLICADAS**

Agustín Curo Cubas

Gloria Espinoza Colán

# CONTENIDO

## Prefacio xvii

CAPÍTULO 0	<b>Repaso de álgebra</b>	1
	0.1 Conjuntos de números reales 2	
	0.2 Algunas propiedades de los números reales 3	
	0.3 Exponentes y radicales 9	
	0.4 Operaciones con expresiones algebraicas 14	
	0.5 Factorización 19	
	0.6 Fracciones 21	
	0.7 Ecuaciones, en particular ecuaciones lineales 27	
	0.8 Ecuaciones cuadráticas 37	
	Aplicación práctica: <i>Modelado del comportamiento de una celda de carga</i> 44	
CAPÍTULO 1	<b>Aplicaciones y más álgebra</b>	46
	1.1 Aplicaciones de ecuaciones 47	
	1.2 Desigualdades lineales 54	
	1.3 Aplicaciones de las desigualdades 58	
	1.4 Valor absoluto 61	
	1.5 Notación de sumatoria 65	
	1.6 Repaso 69	
	Aplicación práctica: <i>Grabación de calidad variable</i> 72	
CAPÍTULO 2	<b>Funciones y gráficas</b>	74
	2.1 Funciones 75	
	2.2 Funciones especiales 82	
	2.3 Combinaciones de funciones 86	
	2.4 Funciones inversas 91	
	2.5 Gráficas en coordenadas rectangulares 94	
	2.6 Simetría 103	
	2.7 Traslaciones y reflexiones 108	
	2.8 Repaso 110	
	Aplicación práctica: <i>Una experiencia con impuestos</i> 114	
CAPÍTULO 3	<b>Rectas, paráolas y sistemas de ecuaciones</b>	116
	3.1 Rectas 117	
	3.2 Aplicaciones y funciones lineales 124	
	3.3 Funciones cuadráticas 130	
	3.4 Sistemas de ecuaciones lineales 138	
	3.5 Sistemas no lineales 148	
	3.6 Aplicaciones de sistemas de ecuaciones 150	
	3.7 Repaso 157	
	Aplicación práctica: <i>Planes de cobro en telefonía celular</i> 160	

<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>Funciones exponenciales y logarítmicas</b>	162
<b>4.1</b>	Funciones exponenciales	163
<b>4.2</b>	Funciones logarítmicas	175
<b>4.3</b>	Propiedades de los logaritmos	181
<b>4.4</b>	Ecuaciones logarítmicas y exponenciales	186
<b>4.5</b>	Repasso	191
	<i>Aplicación práctica: Dosis de medicamento</i>	194
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>Matemáticas financieras</b>	196
<b>5.1</b>	Interés compuesto	197
<b>5.2</b>	Valor presente	201
<b>5.3</b>	Interés compuesto continuamente	205
<b>5.4</b>	Anualidades	208
<b>5.5</b>	Amortización de préstamos	218
<b>5.6</b>	Repasso	222
	<i>Aplicación práctica: Bonos del tesoro</i>	224
<b>CAPÍTULO 6</b>	<b>Álgebra matricial</b>	226
<b>6.1</b>	Matrices	227
<b>6.2</b>	Suma de matrices y multiplicación por un escalar	232
<b>6.3</b>	Multiplicación de matrices	238
<b>6.4</b>	Resolución de sistemas mediante la reducción de matrices	249
<b>6.5</b>	Resolución de sistemas mediante la reducción de matrices <i>(continuación)</i>	259
<b>6.6</b>	Inversas	263
<b>6.7</b>	Ánálisis de insumo-producto de Leontief	271
<b>6.8</b>	Repasso	275
	<i>Aplicación práctica: Requerimientos de insulina como un proceso lineal</i>	278
<b>CAPÍTULO 7</b>	<b>Programación lineal</b>	280
<b>7.1</b>	Desigualdades lineales en dos variables	281
<b>7.2</b>	Programación lineal	284
<b>7.3</b>	Soluciones óptimas múltiples	294
<b>7.4</b>	Método simplex	296
<b>7.5</b>	Degeneración, soluciones no acotadas y soluciones óptimas múltiples	309
<b>7.6</b>	Variables artificiales	314
<b>7.7</b>	Minimización	325
<b>7.8</b>	El dual	330
<b>7.9</b>	Repasso	338
	<i>Aplicación práctica: Terapias con medicamentos y radiación</i>	342

<b>CAPÍTULO 8</b>	<b>Introducción a la probabilidad y la estadística</b>	344
<b>8.1</b>	Principio básico de conteo y permutaciones	345
<b>8.2</b>	Combinaciones y otros principios de conteo	351
<b>8.3</b>	Espacios muestrales y eventos	362
<b>8.4</b>	Probabilidad	369
<b>8.5</b>	Probabilidad condicional y procesos estocásticos	381
<b>8.6</b>	Eventos independientes	394
<b>8.7</b>	Fórmula de Bayes	403
<b>8.8</b>	Repaso	412
	<i>Aplicación práctica: Probabilidad y autómatas celulares</i>	418
<b>CAPÍTULO 9</b>	<b>Temas adicionales en probabilidad</b>	420
<b>9.1</b>	Variables aleatorias discretas y valor esperado	421
<b>9.2</b>	La distribución binomial	428
<b>9.3</b>	Cadenas de Markov	433
<b>9.4</b>	Repaso	442
	<i>Aplicación práctica: Cadenas de Markov en la teoría de juegos</i>	446
<b>CAPÍTULO 10</b>	<b>Límites y continuidad</b>	448
<b>10.1</b>	Límites	449
<b>10.2</b>	Límites (continuación)	458
<b>10.3</b>	Continuidad	466
<b>10.4</b>	Continuidad aplicada a desigualdades	472
<b>10.5</b>	Repaso	476
	<i>Aplicación práctica: Deuda nacional</i>	478
<b>CAPÍTULO 11</b>	<b>Diferenciación</b>	480
<b>11.1</b>	La derivada	481
<b>11.2</b>	Reglas para la diferenciación	489
<b>11.3</b>	La derivada como una razón de cambio	497
<b>11.4</b>	La regla del producto y la regla del cociente	506
<b>11.5</b>	La regla de la cadena y la regla de la potencia	515
<b>11.6</b>	Repaso	523
	<i>Aplicación práctica: Propensión marginal al consumo</i>	526

<b>CAPÍTULO 12</b>	<b>Temas adicionales de diferenciación</b>	528
	12.1 Derivadas de funciones logarítmicas 529	
	12.2 Derivadas de funciones exponenciales 534	
	12.3 Elasticidad de la demanda 539	
	12.4 Diferenciación implícita 544	
	12.5 Diferenciación logarítmica 549	
	12.6 Método de Newton 553	
	12.7 Derivadas de orden superior 557	
	12.8 Repaso 560	
	Aplicación práctica: <i>Cantidad económica de pedido</i> 564	
<b>CAPÍTULO 13</b>	<b>Trazado de curvas</b>	566
	13.1 Extremos relativos 567	
	13.2 Extremos absolutos en un intervalo cerrado 578	
	13.3 Concavidad 580	
	13.4 Prueba de la segunda derivada 587	
	13.5 Asíntotas 589	
	13.6 Aplicación de máximos y mínimos 599	
	13.7 Repaso 611	
	Aplicación práctica: <i>Cambio de la población a lo largo del tiempo</i> 616	
<b>CAPÍTULO 14</b>	<b>Integración</b>	618
	14.1 Diferenciales 619	
	14.2 La integral indefinida 623	
	14.3 Integración con condiciones iniciales 629	
	14.4 Más fórmulas de integración 633	
	14.5 Técnicas de integración 640	
	14.6 La integral definida 645	
	14.7 Teorema fundamental del cálculo integral 651	
	14.8 Integración aproximada 659	
	14.9 Área 664	
	14.10 Área entre curvas 668	
	14.11 Excedentes de los consumidores y de los productores 675	
	14.12 Repaso 678	
	Aplicación práctica: <i>Cargos de envío</i> 682	
<b>CAPÍTULO 15</b>	<b>Métodos y aplicaciones de la integración</b>	684
	15.1 Integración por partes 685	
	15.2 Integración mediante fracciones parciales 689	
	15.3 Integración por medio de tablas 695	
	15.4 Valor promedio de una función 700	
	15.5 Ecuaciones diferenciales 702	
	15.6 Más aplicaciones de las ecuaciones diferenciales 709	
	15.7 Integrales impropias 716	
	15.8 Repaso 719	
	Aplicación práctica: <i>Dietas</i> 722	

<b>CAPÍTULO 16</b>	<b>Variables aleatorias continuas</b>	724
<b>16.1</b>	Variables aleatorias continuas	725
<b>16.2</b>	La distribución normal	732
<b>16.3</b>	Aproximación normal a la distribución binomial	737
<b>16.4</b>	Repaso	740
	Aplicación práctica: <i>Distribución acumulada de datos</i>	742
<b>CAPÍTULO 17</b>	<b>Cálculo de varias variables</b>	744
<b>17.1</b>	Funciones de varias variables	745
<b>17.2</b>	Derivadas parciales	750
<b>17.3</b>	Aplicaciones de las derivadas parciales	755
<b>17.4</b>	Diferenciación parcial implícita	761
<b>17.5</b>	Derivadas parciales de orden superior	763
<b>17.6</b>	Regla de la cadena	766
<b>17.7</b>	Máximos y mínimos para funciones de dos variables	769
<b>17.8</b>	Multiplicadores de Lagrange	778
<b>17.9</b>	Rectas de regresión	785
<b>17.10</b>	Integrales múltiples	790
<b>17.11</b>	Repasso	794
	Aplicación práctica: <i>Análisis de datos para un modelo de enfriamiento</i>	798
<b>APÉNDICE A</b>	<b>Conjuntos</b>	801
<b>APÉNDICE B</b>	<b>Tablas de interés compuesto</b>	821
<b>APÉNDICE C</b>	<b>Tabla de integrales seleccionadas</b>	837
<b>APÉNDICE D</b>	<b>Áreas bajo la curva normal estándar</b>	841
	<b>Respuestas a los problemas con número impar</b>	R-1
	<b>Índice</b>	I-1



# PREFACIO

**L**a decimosegunda edición de *Matemáticas para administración y economía* continúa proporcionando los fundamentos matemáticos para los estudiantes de negocios, economía, y ciencias sociales y de la vida. Inicia con temas que no son de cálculo, como funciones, ecuaciones, matemáticas financieras, álgebra de matrices, programación lineal y probabilidad. Después avanza a través del cálculo de una y de varias variables, incluyendo las variables aleatorias continuas. Las demostraciones técnicas, las condiciones y comparaciones se describen de manera suficiente pero sin abundar demasiado. La filosofía que guía este texto nos ha llevado a incluir aquellas demostraciones y cálculos generales que den luz sobre la manera como se realizaron los cálculos correspondientes en los problemas aplicados. A menudo también se dan argumentos intuitivos informales.

## Cambios en la organización de la decimosegunda edición

Los cambios en la organización de esta edición reflejan los comentarios de usuarios y revisores. El material del antiguo Apéndice A (como apareció en las ediciones 9 a 11) se ha incluido en el cuerpo del texto. En particular, la Notación de la sumatoria ahora aparece como la sección 5 del capítulo 1. La antigua sección de la Sumatoria del capítulo 14 también se ha incluido en la nueva sección 5 del capítulo 1. Muchos profesores opinaron que hacer coincidir la introducción de la notación de la sumatoria con otros conceptos importantes como la integral, podría representar una distracción. Nuestra intención al ubicar la sumatoria en el capítulo 1 es que este tema obtenga un estatus más apropiado. La notación de la sumatoria es simple, pero como será nueva para muchos alumnos, revitalizará un capítulo que de otra manera sólo sería un repaso para la mayoría de los estudiantes. Contar con la notación de la sumatoria al inicio del libro nos permite practicarla varias veces, de manera notable en el trabajo sobre análisis combinatorio y probabilidad (capítulo 8), antes de volverse indispensable, junto con la integral (capítulo 14).

El tema de interés compuesto continuamente se ha movido del capítulo 10 para convertirse en la sección 3 del capítulo 5, que está dedicado a las matemáticas financieras. Como las funciones exponenciales y el número  $e$  se introducen en el capítulo 4, se trata de un movimiento bastante natural que permite un tratamiento más unificado de las tasas de interés. Algunos profesores consideraron importante poder comparar el interés compuesto continuamente con el interés compuesto ordinario mientras este último todavía está fresco en la mente de los estudiantes. Sin embargo, las anualidades continuas aún se encuentran en el capítulo 15 como una aplicación de la integración.

Por último, diferenciabilidad y continuidad, que antes era una sección independiente, ahora se incluye como parte de la sección 1 en el capítulo 11, y se ha eliminado la sección “un comentario sobre funciones homogéneas” del capítulo 17.

## Aplicaciones

Este libro incluye una gran cantidad y variedad de aplicaciones, destinadas al lector; de esta forma, los estudiantes ven cómo pueden utilizar las matemáticas que están aprendiendo. Estas aplicaciones cubren áreas tan diversas como administración, economía, biología, medicina, sociología, psicología, ecología, estadística, ciencias de la tierra y arqueología. Muchas de estas situaciones de la vida cotidiana se tomaron de la literatura existente, y están documentadas mediante referencias (en ocasiones de la Web). En algunas aplicaciones se ofrecen los antecedentes y el contexto con el fin de estimular el interés en el tema. Sin embargo, el texto es independiente, en el sentido de que no supone un conocimiento previo de los conceptos sobre los cuales están basadas esas aplicaciones. El elemento **Principios en práctica** proporciona a los estudiantes aún más aplicaciones. Ubicados en los márgenes (ladillos) de los capítulos 1 a 17, estos ejercicios adicionales ofrecen a los estudiantes aplicaciones del mundo real y más oportunidades de práctica.

dades para ver el material del capítulo puesto en la práctica. Un ícono indica los problemas de Principios en práctica que pueden resolverse mediante el uso de una calculadora graficadora. Las respuestas a estos problemas específicos aparecen al final del texto.

## Se ha simplificado el lenguaje y la terminología

En esta edición se ha hecho un esfuerzo especial para utilizar terminología adecuada, sin introducir de manera simultánea una palabra o frase alternativa conectada mediante la palabra *o*. Por ejemplo, cuando se presenta la terminología para un punto  $(a, b)$  en el plano, “*a* se llama *abscisa* o *coordenada x* ...” se ha sustituido por “*a* se llama *coordenada x* ...”. En general, se ha tratado de emplear un lenguaje más coloquial cuando esto puede hacerse sin sacrificar la precisión matemática.

## Pedagogía mejorada

Al revisar la sección 9.3, sobre Cadenas de Markov, nos dimos cuenta que se simplifica considerablemente el problema de encontrar vectores de estado estable si se escriben vectores de estado como columnas en lugar de filas. Esto requiere que una matriz de transición  $\mathbf{T} = [t_{ij}]$  tenga

$t_{ij}$  = probabilidad de que el siguiente estado sea  $i$  dado que el estado actual es  $j$

pero evita las transposiciones artificiales posteriores.

En el capítulo 13, que trata sobre el trazado de curvas, se ha incrementado el uso de gráficas de signo. En particular, una gráfica de signo para una primera derivada siempre está acompañada por una línea adicional que interpreta los resultados para la función que será graficada. Así, en un intervalo donde se registra ‘+’ para  $f'$  también se registra ‘/’ para  $f''$  y en un intervalo donde se registra ‘-’ para  $f'$  también se registra ‘\’ para  $f''$ . Las cadenas resultantes de dichos elementos, por ejemplo /\, con adornos adicionales que se describen en el texto, proporcionan un bosquejo muy preliminar de la curva en cuestión. Reconocemos que ésta es una técnica de pizarrón usada por muchos profesores pero que aparece muy pocas veces en libros de texto.

A lo largo del texto se ha conservado el popular enfoque “Ahora resuelva el problema  $n$ ” de otros libros de Pearson Educación. El objetivo es que después de un ejemplo los estudiantes resuelvan un problema al final de la sección que refuerce las ideas del ejemplo. En su mayoría, estos problemas tienen número impar, de modo que los alumnos pueden verificar su trabajo con las respuestas que aparecen al final del texto.

En el mismo sentido, se ha extendido el uso de advertencias precautorias para el estudiante. Estas notas se indican con el título **ADVERTENCIA** y destacan errores que se cometen con frecuencia. Como sucedía con anterioridad, las **definiciones** se establecen y se muestran de manera clara. Los conceptos importantes, así como las reglas y fórmulas principales, se colocan dentro de recuadros para enfatizar su importancia.

Cada capítulo (excepto el 0) tiene una sección de repaso con una lista de términos y símbolos importantes, un resumen y una gran cantidad de problemas de repaso. En esta decimosegunda edición se incluye una lista que hace referencia a los ejemplos clave que corresponden a cada grupo de términos y símbolos relevantes.

Las respuestas a los problemas con número impar aparecen al final del libro. Para muchos de los problemas de diferenciación, las respuestas aparecen en forma “no simplificada” y “simplificada”. (Por supuesto, “simplificada” es en cualquier caso un término subjetivo cuando se aplica a expresiones matemáticas, que tienden a presuponer la naturaleza de los cálculos subsecuentes con tales expresiones.) Esto permite a los estudiantes verificar con rapidez su trabajo.

## Ejemplos y ejercicios

Se resuelven con detalle más de 850 ejemplos. Algunos incluyen una estrategia diseñada de manera específica para guiar al estudiante a través de la logística de la solución,

antes de obtener ésta. Se incluye una gran cantidad de diagramas (casi 500) y ejercicios (más de 5000); de estos últimos, más de 900 son nuevos en esta edición. En cada serie de ejercicios, los grupos de problemas están organizados en orden creciente de dificultad. En muchos casos los problemas van desde los que sirven para practicar y se resuelven en forma mecánica, hasta los más interesantes que obligan a reflexionar. También se incluye gran variedad de problemas de la vida cotidiana con datos reales. Se ha hecho un esfuerzo considerable para alcanzar el equilibrio entre los ejercicios de entrenamiento y los problemas que requieren de la integración de los conceptos aprendidos.

## Tecnología

Con el propósito de que el estudiante aprecie el valor de la *tecnología* actual, a lo largo del texto se presenta material opcional para calculadoras graficadora, tanto en la exposición como en los ejercicios, por varias razones: como una herramienta matemática, como una ayuda computacional y para visualizar y reforzar conceptos. Aunque el análisis de la tecnología correspondiente se ilustra con las pantallas de una calculadora TI-83 Plus, el enfoque es suficientemente general, de modo que pueda aplicarse en otras calculadoras graficadoras.

 En las series de ejercicios, los problemas que se resuelven con calculadora se indican por medio de un ícono como el que aparece al margen de este párrafo. Para dar al instructor flexibilidad en la planeación de tareas, estos problemas están colocados al final de las series de ejercicios.

## Planeación del curso

Existe un número considerable de cursos que pueden utilizar este libro como texto. Como los profesores planifican el curso para que sirva a las necesidades específicas de una clase y de un temario en particular, no proporcionaremos directrices detalladas. Sin embargo, dependiendo de los antecedentes de los estudiantes, algunos profesores elegirán omitir el capítulo 0 (Repaso de álgebra).

Un programa que incluya tres trimestres de matemáticas, para estudiantes de administración bien preparados, puede iniciar un primer curso con el capítulo 1 y con los temas que le interese de los capítulos 2 a 9. Por ejemplo, si los estudiantes están tomando al mismo tiempo un curso de finanzas, podría optar por excluir el capítulo 5, que trata de matemáticas financieras (y así evitar la duplicidad de material para créditos distintos). Otros podrían considerar que el capítulo 7, que está dedicado a la programación lineal, incluye más material del que requieren sus estudiantes. En este caso, se puede prescindir de secciones específicas como las 7.3, 7.5 y 7.8, sin perder continuidad. Por otro lado, en la sección 1.1 se introducen algunos términos de administración, como ingresos totales, costo fijo, costo variable y rendimiento, que son recurrentes a lo largo del libro. De manera similar, en la sección 3.2 se introducen las nociones sobre las ecuaciones de oferta y demanda, y en la sección 3.6 se analiza el punto de equilibrio y el punto de quiebre, todos ellos de importancia fundamental para las aplicaciones de negocios.

Un segundo curso, de un solo trimestre, sobre cálculo diferencial podría utilizar el capítulo 10 sobre Límites y continuidad, seguido por los tres capítulos de diferenciación: del 11 al 13. Aquí, la sección 12.6, sobre el Método de Newton, puede omitirse sin perder continuidad, mientras que otros profesores pueden preferir revisar el capítulo 4, que habla sobre Funciones exponenciales y logarítmicas antes de su estudio como funciones diferenciales.

Por último, con los capítulos 14 a 17 podría definirse un tercer curso de un solo trimestre sobre cálculo integral, con una introducción al cálculo multivariado. En un curso con aplicaciones resulta conveniente enfatizar el uso de tablas para encontrar integrales, y por ende el uso de técnicas “por partes” y “de fracciones parciales”, las secciones 15.1 y 15.2 respectivamente, deben considerarse como opcionales. El capítulo 16 ciertamente no es prerequisito para el capítulo 17, y la sección 15.7, que trata de las integrales impropias, puede omitirse con seguridad si no se cubre el capítulo 16.

Las escuelas con dos períodos académicos por año tienden a dar a los estudiantes de administración un semestre dedicado a las matemáticas finitas y otro destinado al cálculo. Se recomiendan los capítulos 1 a 9 para el primer curso, iniciando donde lo permita la preparación de los estudiantes, y los capítulos 10 a 17 para el segundo semestre —sin incluir el material opcional.

## Suplementos

---

El *Manual de soluciones del profesor* tiene respuestas desarrolladas para todos los problemas, incluyendo los ejercicios de Principios en práctica y los ejemplos de final de capítulo.

El *Test Item File* (Archivo de preguntas de examen), usado por algunos profesores proporciona más de 1700 preguntas de examen, clasificadas por capítulo y por sección. Incluye una herramienta de edición que permite agregar o modificar preguntas. También para el uso de los maestros contamos con el *TestGen*, un generador de exámenes algorítmico, completamente editable, que permite la creación de múltiples pruebas. Cabe mencionar que todo el material complementario se encuentra sólo en idioma inglés.

## Reconocimientos

---

Agradecemos a los siguientes colegas su contribución con comentarios y sugerencias valiosos para el desarrollo de este libro:

E. Adibi (*Chapman University*); R. M. Alliston (*Pennsylvania State University*); R. A. Alo (*University of Houston*); K. T. Andrews (*Oakland University*); M. N. de Arce (*University of Puerto Rico*); E. Barbut (*University of Idaho*); G. R. Bates (*Western Illinois University*); D. E. Bennett (*Murray State University*); C. Bennett (*Harper College*); A. Bishop (*Western Illinois University*); P. Blau (*Shawnee State University*); R. Blute (*University of Ottawa*); S. A. Book (*California State University*); A. Brink (*St. Cloud State University*); R. Brown (*York University*); R. W. Brown (*University of Alaska*); S. D. Bulman-Fleming (*Wilfrid Laurier University*); D. Calvetti (*National College*); D. Cameron (*University of Akron*); K. S. Chung (*Kapiolani Community College*); D. N. Clark (*University of Georgia*); E. L. Cohen (*University of Ottawa*); J. Dawson (*Pennsylvania State University*); A. Dollins (*Pennsylvania State University*); G. A. Earles (*St. Cloud State University*); B. H. Edwards (*University of Florida*); J. R. Elliott (*Wilfrid Laurier University*); J. Fitzpatrick (*University of Texas at El Paso*); M. J. Flynn (*Rhode Island Junior College*); G. J. Fuentes (*University of Maine*); L. Gerber (*St. John's University*); T. G. Goedde (*The University of Findlay*); S. K. Goel (*Valdosta State University*); G. Goff (*Oklahoma State University*); J. Goldman (*DePaul University*); J. T. Gresser (*Bowling Green State University*); L. Griff (*Pennsylvania State University*); F. H. Hall (*Pennsylvania State University*); V. E. Hanks (*Western Kentucky University*); R. C. Heitmann (*The University of Texas at Austin*); J. N. Henry (*California State University*); W. U. Hodgson (*West Chester State College*); B. C. Horne. Jr. (*Virginia Polytechnic Institute and State University*); J. Hradnansky (*Pennsylvania State University*); P. Huneke (*The Ohio State University*); C. Hurd (*Pennsylvania State University*); J. A. Jimenez (*Pennsylvania State University*); W. C. Jones (*Western Kentucky University*); R. M. King (*Gettysburg College*); M. M. Kostreva (*University of Maine*); G. A. Kraus (*Gannon University*); J. Kucera (*Washington State University*); M. R. Latina (*Rhode Island Junior College*); P. Lockwood-Cooke (*West Texas A&M University*); J. F. Longman (*Villanova University*); I. Marshak (*Loyola University of Chicago*); D. Mason (*Elmhurst College*); F. B. Mayer (*Mt. San Antonio College*); P. McDougle (*University of Miami*); F. Miles (*California State University*); E. Mohnike (*Mt. San Antonio College*); C. Monk (*University of Richmond*); R. A. Moreland (*Texas Tech University*); J. G. Morris (*University of Wisconsin-Madison*); J. C. Moss (*Paducah Community College*); D. Mullin (*Pennsylvania State University*); E. Nelson (*Pennsylvania State University*); S. A. Nett (*Western Illinois University*); R. H. Oehmke (*University of Iowa*); Y. Y. Oh (*Pennsylvania State University*); J. U. Overall (*University of La Verne*); A. Panayides (*William Patterson University*); D. Parker (*University of Pacific*); N. B.

Patterson (*Pennsylvania State University*); V. Pedwaydon (*Lawrence Technical University*); E. Pemberton (*Wilfrid Laurier University*); M. Perkel (*Wright State University*); D. B. Priest (*Harding College*); J. R. Provencio (*University of Texas*); L. R. Pulsinelli (*Western Kentucky University*); M. Racine (*University of Ottawa*); N. M. Rice (*Queen's University*); A. Santiago (*University of Puerto Rico*); J. R. Schaefer (*University of Wisconsin-Milwaukee*); S. Sehgal (*The Ohio State University*); W. H. Seybold, Jr. (*West Chester State College*); G. Shilling (*The University of Texas at Arlington*); S. Singh (*Pennsylvania State University*); L. Small (*Los Angeles Pierce College*); E. Smet (*Huron College*); J. Stein (*California State University, Long Beach*); M. Stoll (*University of South Carolina*); T. S. Sullivan (*Southern Illinois University Edwardsville*); E. A. Terry (*St. Joseph's University*); A. Tierman (*Saginaw Valley State University*); B. Toole (*University of Maine*); J. W. Toole (*University of Maine*); D. H. Trahan (*Naval Postgraduate School*); J. P. Tull (*The Ohio State University*); L. O. Vaughan, Jr. (*University of Alabama in Birmingham*); L. A. Vercoe (*Pennsylvania State University*); M. Vuilleumier (*The Ohio State University*); B. K. Waits (*The Ohio State University*); A. Walton (*Virginia Polytechnic Institute and State University*); H. Walum (*The Ohio State University*); E. T. H. Wang (*Wilfrid Laurier University*); A. J. Weidner (*Pennsylvania State University*); L. Weiss (*Pennsylvania State University*); N. A. Weigmann (*California State University*); S. K. Wong (*Ohio State University*); G. Woods (*The Ohio State University*); C. R. B. Wright (*University of Oregon*); C. Wu (*University of Wisconsin-Milwaukee*); B. F. Wyman (*Ohio State University*).

Algunos ejercicios se tomaron de los problemas utilizados por los estudiantes de la Wilfrid Laurier University. Deseamos extender agradecimientos especiales al Departamento de Matemáticas de la Wilfrid Laurier University por conceder permiso a Prentice Hall para utilizar y publicar este material, y también agradecer a Prentice Hall por permitir utilizarlo.

Por último, expresamos nuestra sincera gratitud a los profesores y coordinadores de cursos de la Ohio State University y la Columbus State University, quienes tuvieron un gran interés en ésta y otras ediciones, y ofrecieron una gran cantidad de valiosas sugerencias.

En especial agradecemos a Cindy Trimble de C Trimble & Associates por su cuidadosa revisión de los manuscritos, de los manuales de solución y las páginas de respuestas. Su trabajo fue extraordinariamente detallado y útil para los autores.

*Ernest F. Haeussler, Jr.  
Richard S. Paul  
Richard J. Wood*



# 0

## REPASO DE ÁLGEBRA

- 0.1 Conjuntos de números reales
- 0.2 Algunas propiedades de los números reales
- 0.3 Exponentes y radicales
- 0.4 Operaciones con expresiones algebraicas
- 0.5 Factorización
- 0.6 Fracciones
- 0.7 Ecuaciones, en particular ecuaciones lineales
- 0.8 Ecuaciones cuadráticas

### Aplicación práctica

Modelado del comportamiento de una celda de carga

**L**esley Griffith trabaja para una compañía de artículos de navegación en Antibes, Francia. Con frecuencia, necesita examinar recibos en los que sólo se reporta el pago total y después debe determinar la cantidad del total que representa el impuesto al valor agregado de Francia, conocido como el TVA que significa “Taxe à la Valeur Ajouté”. La tasa del TVA francés es de 19.6%. Muchos de los negocios de Lesley provienen de proveedores o compradores italianos, por lo que debe lidiar con un problema similar en el caso de los recibos que contienen el impuesto italiano a las ventas, que es del 18%.

Un problema de este tipo parece reclamar una fórmula, pero mucha gente es capaz de resolverlo con el uso de números específicos, sin conocer la fórmula. Por lo tanto, si Lesley tiene un recibo francés de 200 euros, podría razonar de la siguiente manera: si el artículo cuesta 100 euros antes del impuesto, entonces el recibo final sería por 119.6 euros con un impuesto de 19.6 —y después en un acto de fe— *el impuesto en un recibo total de 200 es a 200 como 19.6 es a 119.6*. Establecido en forma matemática,

$$\frac{\text{impuesto en } 200}{200} = \frac{19.6}{119.6} \approx 16.4\%$$

En este punto es bastante claro que la cantidad de TVA en un recibo de 200 euros es aproximadamente el 16.4% de 200 euros, lo cual es de 32.8 euros, aproximadamente. De hecho, mucha gente podrá ahora inferir que

$$\text{impuesto en } R = R \left( \frac{p}{100 + p} \% \right)$$

da el impuesto en un recibo  $R$ , cuando la tasa del impuesto es  $p\%$ . Así, si Lesley está satisfecha con su deducción, puede multiplicar sus recibos italianos por  $\frac{18}{118}\%$  para determinar el impuesto que contienen.

Por supuesto, la mayoría de la gente no recuerda las fórmulas por mucho tiempo y no se siente segura si basa un cálculo monetario en un acto de fe. El propósito de este capítulo es revisar el álgebra necesaria para que el estudiante pueda construir sus propias fórmulas, *con confianza*, cuando las requiera. En particular se obtendrá la fórmula de Lesley, sin ninguna invocación misteriosa de la proporción, a partir de principios con los que todos están familiarizados. Este uso del álgebra aparecerá a lo largo del libro, a medida que se realicen *cálculos generales con cantidades variables*.

En este capítulo se revisarán los números reales, las expresiones algebraicas y las operaciones básicas que pueden realizarse con ellos. Este capítulo está diseñado para dar un repaso breve sobre algunos términos y métodos para la manipulación del cálculo simbólico. Sin duda usted ha estado expuesto a gran parte de este material con anterioridad. Sin embargo, como estos temas son importantes para el manejo de las matemáticas que vienen después, una rápida exposición de los mismos puede resultar beneficiosa. Destine el tiempo que sea necesario para las secciones en que necesita un repaso.

**OBJETIVO**

Familiarizarse con los conjuntos, la clasificación de los números reales y la recta de los números reales.

## 0.1 Conjuntos de números reales

Un **conjunto** es una colección de objetos. Por ejemplo, se puede hablar del conjunto de números pares entre 5 y 11, a saber, 6, 8 y 10. Cada objeto de un conjunto se denomina **elemento** de ese conjunto. No se preocupe si esto suena un poco circular. Las palabras *conjunto* y *elemento* son semejantes a *línea* y *punto* en geometría plana. No puede pedirse definirlos en términos más primitivos, es sólo con la práctica que es posible entender su significado. La situación es también parecida a la forma en la que un niño aprende su primer idioma. Sin conocer ninguna palabra, un niño infiere el significado de unas cuantas palabras muy simples y termina usándolas para construir un vocabulario funcional. Nadie necesita entender el mecanismo de este proceso para aprender a hablar. De la misma forma, es posible aprender matemáticas prácticas sin involucrarse con términos básicos no definidos.

Una manera de especificar un conjunto es haciendo una lista de sus elementos, en cualquier orden, dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto anterior es  $\{6, 8, 10\}$ , que puede denotarse mediante una letra, como  $A$ , lo que permite escribir  $A = \{6, 8, 10\}$ . Observe que  $\{8, 10, 6\}$  también denota el mismo conjunto, así como  $\{10, 8, 6\}$ . Un conjunto está determinado por sus elementos y ni las repeticiones ni los reordenamientos de una lista afectan al conjunto. Se dice que un conjunto  $A$  es un subconjunto de un conjunto  $B$  si y sólo si todo elemento de  $A$  también es un elemento de  $B$ . Por ejemplo, si  $A = \{6, 8, 10\}$  y  $B = \{6, 8, 10, 12\}$ , entonces  $A$  es un subconjunto de  $B$ .

Ciertos conjuntos de números tienen nombres especiales. Los números 1, 2, 3, y así sucesivamente, forman el conjunto de los **enteros positivos** (o **números naturales**):

$$\text{conjunto de los enteros positivos} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Los tres puntos significan que el listado de elementos continúa sin fin, aunque sí se sabe cuáles son los elementos.

Los enteros positivos junto con el cero, y los **enteros negativos**  $-1, -2, -3, \dots$ , forman el conjunto de los **enteros**:

$$\text{conjunto de los enteros} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

**ADVERTENCIA**

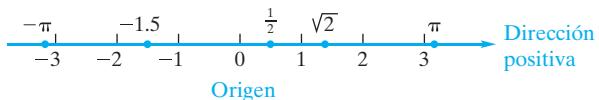
La razón por la que  $q \neq 0$  es que no es posible dividir entre cero.

**Todo entero es un número racional.**

El conjunto de los **números racionales** consiste en números como  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{5}{3}$ , que pueden escribirse como una razón (cociente) de dos enteros. Esto es, un número racional es aquél que puede escribirse como  $\frac{p}{q}$ , donde  $p$  y  $q$  son enteros y  $q \neq 0$ . (El símbolo “ $\neq$ ” se lee “no es igual a”.) Por ejemplo, los números  $\frac{19}{20}, -\frac{2}{7}$  y  $-\frac{6}{2}$  son racionales. Se observa que  $\frac{2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{-4}{-8}$ , 0.5 y 50% representan todos al mismo número racional. El entero 2 es racional puesto que  $2 = \frac{2}{1}$ . De hecho, todo entero es racional.

Todos los números racionales pueden representarse por medio de números decimales que *terminan*, como  $\frac{3}{4} = 0.75$  y  $\frac{3}{2} = 1.5$ , o bien por *decimales periódicos que no terminan* (compuesto por un grupo de dígitos que se repiten sin fin), como  $\frac{2}{3} = 0.666\dots$ ,  $\frac{-4}{11} = -0.3636\dots$ , y  $\frac{2}{15} = 0.1333\dots$ . Los números que se representan mediante decimales *no periódicos que no terminan* se conocen como **números irracionales**. Un número irracional no puede escribirse como un entero dividido entre un entero. Los números  $\pi$  (pi) y  $\sqrt{2}$  son ejemplos de números irracionales. Juntos, los números racionales y los números irracionales forman el conjunto de los **números reales**.

Los números reales pueden representarse por puntos en una recta. Primero se selecciona un punto en la recta para representar el cero. Este punto se denomina *origen* (vea la figura 0.1). Despues se elige una medida estándar de distancia, llamada *distancia unitaria*, y se marca sucesivamente en ambas direcciones a la derecha y a la izquierda del origen. Con cada punto sobre la recta se asocia una distancia dirigida, que depende de la posición del punto con respecto al origen. Las posiciones a la derecha del origen se con-

**Algunos puntos y sus coordenadas**

**FIGURA 0.1** La recta de los números reales.

sideran positivas (+) y las de la izquierda negativas (-). Por ejemplo, al punto ubicado a  $\frac{1}{2}$  de unidad a la derecha del origen, le corresponde el número  $\frac{1}{2}$ , que se denomina la **coordenada** de ese punto. En forma similar, la coordenada del punto situado a 1.5 unidades a la izquierda del origen es  $-1.5$ . En la figura 0.1 están marcadas las coordenadas de algunos puntos. La punta de la flecha indica que la dirección hacia la derecha a lo largo de la recta se considera la dirección positiva.

A cada punto sobre la recta le corresponde un número real único, y a cada número real le corresponde un punto único de la recta. Por esta razón se dice que hay una *correspondencia uno a uno* entre los puntos de la recta y los números reales. A esta recta se le llama la **recta de los números reales**. Se tiene la libertad para tratar a los números reales como puntos sobre dicha recta y viceversa.

## Problemas 0.1

Clasifique los enunciados 1 a 12 como verdaderos o falsos. Si es falso, dé una razón.

1.  $-13$  es un entero.
3.  $-3$  es un número natural.
5.  $5$  es racional.
7.  $\sqrt{25}$  no es un entero positivo.

2.  $\frac{-2}{7}$  es racional.
4.  $0$  no es racional.
6.  $\frac{7}{0}$  es un número racional.

8.  $\sqrt{2}$  es un número real.
9.  $\frac{0}{0}$  es racional.
10.  $\sqrt{3}$  es un número natural.
11.  $-3$  está a la derecha de  $-4$  sobre la recta de los números reales.
12. Todo entero es positivo o negativo.

### OBJETIVO

Nombrar, ilustrar y relacionar las propiedades de los números reales en términos de sus operaciones.

## 0.2 Algunas propiedades de los números reales

A continuación se establecerán algunas propiedades importantes de los números reales. Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  números reales.

### 1. Propiedad transitiva de la igualdad

Si  $a = b$  y  $b = c$ , entonces  $a = c$ .

Por lo tanto, dos números que sean iguales a un tercer número son iguales entre sí. Por ejemplo, si  $x = y$  y  $y = 7$ , entonces  $x = 7$ .

### 2. Propiedad de cerradura de la suma y la multiplicación

Para todo número real  $a$  y  $b$ , existen números reales únicos  $a + b$  y  $ab$ .

Esto significa que cualesquiera dos números pueden sumarse o multiplicarse y el resultado en cada caso es un número real.

### 3. Propiedad conmutativa de la suma y la multiplicación

$$a + b = b + a \quad y \quad ab = ba$$

Esto significa que dos números pueden sumarse o multiplicarse en cualquier orden. Por ejemplo,  $3 + 4 = 4 + 3$  y  $7(-4) = (-4)(7)$ .

### 4. Propiedad asociativa de la suma y la multiplicación

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad y \quad a(bc) = (ab)c$$

Esto significa que en la suma o multiplicación, los números pueden agruparse en cualquier orden. Por ejemplo,  $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$ ; en ambos casos la suma es 9. En forma semejante,  $2x + (x + y) = (2x + x) + y$  y  $6(\frac{1}{3} \cdot 5) = (6 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 5$ .

## 5. Propiedad de la identidad

Existen números reales únicos denotados 0 y 1 tales que para todo número real  $a$ ,

$$0 + a = a \quad \text{y} \quad 1a = a$$

## 6. Propiedades del inverso

Para cada número real  $a$ , existe un único número real denotado por  $-a$  tal que

$$a + (-a) = 0$$

El número  $-a$  se denomina el **inverso aditivo** de  $a$ .

Por ejemplo, como  $6 + (-6) = 0$ , el inverso aditivo de 6 es  $-6$ . El inverso aditivo de un número no necesariamente es un número negativo. Por ejemplo, el inverso aditivo de  $-6$  es 6, puesto que  $(-6) + (6) = 0$ . Esto es, el inverso aditivo de  $-6$  es 6, de modo que puede escribirse  $-(-6) = 6$ .

Para cada número real  $a$ , *excepto 0*, existe un único número real denotado por  $a^{-1}$  tal que

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

El número  $a^{-1}$  se conoce como el **recíproco** o **inverso multiplicativo** de  $a$ .

Por lo tanto, todos los números *excepto 0*, tienen un recíproco. Como se recordará,  $a^{-1}$  puede escribirse como  $\frac{1}{a}$ . Por ejemplo, el recíproco de 3 es  $\frac{1}{3}$ , puesto que  $3(\frac{1}{3}) = 1$ . Por ende,  $\frac{1}{3}$  es el recíproco de 3. El recíproco de  $\frac{1}{3}$  es 3, puesto que  $(\frac{1}{3})(3) = 1$ . *El recíproco de 0 no está definido.*



### ADVERTENCIA

El cero no tiene un inverso multiplicativo porque no existe un número que, al multiplicarlo por 0, dé 1.

## 7. Propiedades distributivas

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{y} \quad (b + c)a = ba + ca$$

Por ejemplo, aunque  $2(3 + 4) = 2(7) = 14$ , también puede escribirse

$$2(3 + 4) = 2(3) + 2(4) = 6 + 8 = 14$$

De manera similar,

$$(2 + 3)(4) = 2(4) + 3(4) = 8 + 12 = 20$$

y

$$x(z + 4) = x(z) + x(4) = xz + 4x$$

La propiedad distributiva puede ser extendida a la forma

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

De hecho, puede extenderse a sumas que involucran cualquier cantidad de términos.

La **resta** se define en términos de la suma:

$$a - b \quad \text{significa} \quad a + (-b)$$

donde  $-b$  es el inverso aditivo de  $b$ . Así,  $6 - 8$  significa  $6 + (-8)$ .

De manera semejante, se define la **división** en términos de la multiplicación. Si  $b \neq 0$ , entonces  $a \div b$ , o  $\frac{a}{b}$  o  $a/b$ , está definida por

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1})$$

Como  $b^{-1} = \frac{1}{b}$

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1}) = a\left(\frac{1}{b}\right)$$

Así,  $\frac{1}{5}$  significa 3 veces  $\frac{1}{5}$ , donde  $\frac{1}{5}$  es el recíproco de 5. Algunas veces se hace referencia a  $a \div b$  o  $\frac{a}{b}$  como la *razón* de  $a$  entre  $b$ . Se observa que como 0 no tiene recíproco, la **división entre 0 no está definida**.

$\frac{a}{b}$  significa  $a$  veces el recíproco de  $b$ .

Los ejemplos siguientes muestran algunas aplicaciones de las propiedades anteriores.

### EJEMPLO 1 Aplicación de las propiedades de los números reales

- $x(y - 3z + 2w) = (y - 3z + 2w)x$ , por la propiedad conmutativa de la multiplicación.
- Por la propiedad asociativa de la multiplicación,  $3(4 \cdot 5) = (3 \cdot 4)5$ . Por lo tanto, el resultado de multiplicar 3 por el producto de 4 y 5 es el mismo que el de multiplicar el producto de 3 y 4 por 5. En cualquier caso el resultado es 60.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9 

### EJEMPLO 2 Aplicación de las propiedades de los números reales

- Muestre que  $2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$ .

**Solución:** Por la definición de resta,  $2 - \sqrt{2} = 2 + (-\sqrt{2})$ . Sin embargo, por la propiedad conmutativa de la suma,  $2 + (-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + 2$ . Así, por la propiedad transitiva de la igualdad,  $2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$ . Para hacerlo de manera más concisa, se omiten pasos intermedios y se escribe directamente

$$2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$$

- Muestre que  $(8 + x) - y = 8 + (x - y)$ .

**Solución:** Si se comienza por el lado izquierdo, se tiene que

$$\begin{aligned}(8 + x) - y &= (8 + x) + (-y) && \text{(definición de la resta)} \\ &= 8 + [x + (-y)] && \text{(propiedad asociativa)} \\ &= 8 + (x - y) && \text{(definición de resta)}\end{aligned}$$

Así que, por la propiedad transitiva de la igualdad,

$$(8 + x) - y = 8 + (x - y)$$

- Muestre que  $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$

**Solución:** Por la propiedad distributiva,

$$3(4x + 2y + 8) = 3(4x) + 3(2y) + 3(8)$$

Pero por la propiedad asociativa de la multiplicación,

$$3(4x) = (3 \cdot 4)x = 12x \quad \text{y de manera similar } 3(2y) = 6y$$

Por lo tanto,  $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21 

### EJEMPLO 3 Aplicación de las propiedades de los números reales

- Muestre que  $\frac{ab}{c} = a \left( \frac{b}{c} \right)$  para  $c \neq 0$ .

**Solución:** Por la definición de división,

$$\frac{ab}{c} = (ab) \cdot \frac{1}{c} \quad \text{para } c \neq 0$$

Pero por la propiedad asociativa,

$$(ab) \cdot \frac{1}{c} = a \left( b \cdot \frac{1}{c} \right)$$

Sin embargo, por la definición de la división,  $b \cdot \frac{1}{c} = \frac{b}{c}$ . Así que,

$$\frac{ab}{c} = a\left(\frac{b}{c}\right)$$

También se puede mostrar que  $\frac{ab}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)b$ .

- b.** Muestre que  $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$  para  $c \neq 0$ .

**Solución:** Por la definición de la división y la propiedad distributiva,

$$\frac{a+b}{c} = (a+b)\frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c}$$

Sin embargo,

$$a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Por lo que,

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27 

Puede encontrarse el producto de varios números al considerar los productos de los números tomados de dos en dos. Por ejemplo, para encontrar el producto de  $x$ ,  $y$  y  $z$  podría multiplicarse primero  $x$  por  $y$  y después multiplicar el producto resultante por  $z$ ; esto es, encontrar  $(xy)z$ . O bien, la alternativa sería multiplicar  $x$  por el producto de  $y$  y  $z$ ; esto es, encontrar  $x(yz)$ . La propiedad asociativa de la multiplicación garantiza que ambos resultados sean idénticos, sin importar cómo se agrupen los números. Por lo tanto, no es ambiguo escribir  $xyz$ . Este concepto puede ampliarse a más de tres números y se aplica de la misma manera a la suma.

No sólo debe tenerse cuidado con los aspectos de la manipulación de las propiedades de los números reales, también debe conocerse y estar familiarizado con la terminología que involucra.

La lista siguiente establece las propiedades importantes de los números reales que deben estudiarse a fondo. La capacidad para manejar los números reales es esencial para tener éxito en matemáticas. A cada propiedad le sigue un ejemplo numérico. Todos los denominadores son diferentes de cero.

### Propiedad

1.  $a - b = a + (-b)$

2.  $a - (-b) = a + b$

3.  $-a = (-1)(a)$

4.  $a(b + c) = ab + ac$

5.  $a(b - c) = ab - ac$

6.  $-(a + b) = -a - b$

7.  $-(a - b) = -a + b$

8.  $-(-a) = a$

9.  $a(0) = 0$

10.  $(-a)(b) = -(ab) = a(-b)$

11.  $(-a)(-b) = ab$

12.  $\frac{a}{1} = a$

### Ejemplo(s)

2 - 7 = 2 + (-7) = -5

2 - (-7) = 2 + 7 = 9

-7 = (-1)(7)

6(7 + 2) = 6 · 7 + 6 · 2 = 54

6(7 - 2) = 6 · 7 - 6 · 2 = 30

-(7 + 2) = -7 - 2 = -9

-(2 - 7) = -2 + 7 = 5

-(-2) = 2

2(0) = 0

(-2)(7) = -(2 · 7) = 2(-7) = -14

(-2)(-7) = 2 · 7 = 14

$\frac{7}{1} = 7, \frac{-2}{1} = -2$

**Propiedad****Ejemplo(s)**

**13.**  $\frac{a}{b} = a \left( \frac{1}{b} \right)$

$$\frac{2}{7} = 2 \left( \frac{1}{7} \right)$$

**14.**  $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$

$$\frac{2}{-7} = -\frac{2}{7} = \frac{-2}{7}$$

**15.**  $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

$$\frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$$

**16.**  $\frac{0}{a} = 0$  cuando  $a \neq 0$

$$\frac{0}{7} = 0$$

**17.**  $\frac{a}{a} = 1$  cuando  $a \neq 0$

$$\frac{2}{2} = 1, \frac{-5}{-5} = 1$$

**18.**  $a \left( \frac{b}{a} \right) = b$

$$2 \left( \frac{7}{2} \right) = 7$$

**19.**  $a \cdot \frac{1}{a} = 1$  cuando  $a \neq 0$

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

**20.**  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

**21.**  $\frac{ab}{c} = \left( \frac{a}{c} \right) b = a \left( \frac{b}{c} \right)$

$$\frac{2 \cdot 7}{3} = \frac{2}{3} \cdot 7 = 2 \cdot \frac{7}{3}$$

**22.**  $\frac{a}{bc} = \left( \frac{a}{b} \right) \left( \frac{1}{c} \right) = \left( \frac{1}{b} \right) \left( \frac{a}{c} \right)$

$$\frac{2}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7}$$

**23.**  $\frac{a}{b} = \left( \frac{a}{b} \right) \left( \frac{c}{c} \right) = \frac{ac}{bc}$  cuando  $c \neq 0$

$$\frac{2}{7} = \left( \frac{2}{7} \right) \left( \frac{5}{5} \right) = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5}$$

**24.**  $\frac{a}{b(-c)} = \frac{a}{(-b)(c)} = \frac{-a}{bc} =$

$$\frac{2}{3(-5)} = \frac{2}{(-3)(5)} = \frac{-2}{3(5)} =$$

$$\frac{-a}{(-b)(-c)} = -\frac{a}{bc}$$

$$\frac{-2}{(-3)(-5)} = -\frac{2}{3(5)} = -\frac{2}{15}$$

**25.**  $\frac{a(-b)}{c} = \frac{(-a)b}{c} = \frac{ab}{-c} =$

$$\frac{2(-3)}{5} = \frac{(-2)(3)}{5} = \frac{2(3)}{-5} =$$

$$\frac{(-a)(-b)}{-c} = -\frac{ab}{c}$$

$$\frac{(-2)(-3)}{-5} = -\frac{2(3)}{5} = -\frac{6}{5}$$

**26.**  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

$$\frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{2+3}{9} = \frac{5}{9}$$

**27.**  $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

$$\frac{2}{9} - \frac{3}{9} = \frac{2-3}{9} = \frac{-1}{9}$$

**28.**  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{22}{15}$$

**29.**  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$

**30.**  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

$$\frac{2}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

**31.**  $\frac{a}{b} \div \frac{b}{c} = a \div \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$

$$\frac{2}{\frac{3}{5}} = 2 \div \frac{3}{5} = 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3}$$

**32.**  $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$

$$\frac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

La propiedad 23 podría llamarse el **principio fundamental de las fracciones**, el cual establece que *multiplicar o dividir tanto el numerador como el denominador de una fracción por el mismo número distinto de cero, tiene como resultado una fracción que es igual a la fracción original*. Así,

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 8}{\frac{1}{8} \cdot 8} = \frac{56}{1} = 56$$

Por las propiedades 28 y 23 se tiene que

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2 \cdot 15 + 4 \cdot 1}{5 \cdot 15} = \frac{50}{75} = \frac{2 \cdot 25}{3 \cdot 25} = \frac{2}{3}$$

Este problema también puede resolverse al convertir  $\frac{2}{5}$  y  $\frac{4}{15}$  en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y después utilizar la propiedad 26. Las fracciones  $\frac{2}{5}$  y  $\frac{4}{15}$  pueden escribirse con un denominador común de  $5 \cdot 15$ :

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 15}{5 \cdot 15} \quad \text{y} \quad \frac{4}{15} = \frac{4 \cdot 5}{15 \cdot 5}$$

Sin embargo, 15 es el *menor* de dichos denominadores comunes, el cual se conoce como el *mínimo común denominador* (MCD) de  $\frac{2}{5}$  y  $\frac{4}{15}$ . Por lo tanto,

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6+4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} - \frac{5}{12} &= \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} && (\text{MCD} = 24) \\ &= \frac{9}{24} - \frac{10}{24} = \frac{9-10}{24} \\ &= -\frac{1}{24} \end{aligned}$$

## Problemas 0.2

Clasifique los enunciados 1 a 10 como verdaderos o falsos.

1. Todo número real tiene un recíproco.

2. El recíproco de  $\frac{7}{3}$  es  $\frac{3}{7}$ .

3. El inverso aditivo de 7 es  $\frac{-1}{7}$ .

4.  $2(3 \cdot 4) = (2 \cdot 3)(2 \cdot 4)$

5.  $-x + y = -y + x$

6.  $(x+2)(4) = 4x + 8$

7.  $\frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + 1$

8.  $3\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{3x}{4}$

\*9.  $x(5 \cdot y) = (x5) \cdot (xy)$

10.  $x(4y) = 4xy$

Establezca cuál propiedad de los números reales se usa en los problemas 11 a 20.

11.  $2(x+y) = 2x + 2y$

12.  $(x+5) + y = y + (x+5)$

13.  $2(3y) = (2 \cdot 3)y$

14.  $\frac{5}{11} = \frac{1}{11} \cdot 5$

15.  $5(b-a) = (a-b)(-5)$

16.  $y + (x+y) = (y+x) + y$

17.  $8 - y = 8 + (-y)$

18.  $5(4+7) = 5(7+4)$

19.  $(8+a)b = 8b + ab$

20.  $(-1)[-3+4] = (-1)(-3) + (-1)(4)$

En los problemas 21 a 26, muestre que los enunciados son verdaderos, para ello utilice las propiedades de los números reales.

\*21.  $2x(y-7) = 2xy - 14x$

22.  $(a-b) + c = a + (c-b)$

23.  $(x+y)(2) = 2x + 2y$

24.  $2[27 + (x+y)] = 2[(y+27) + x]$

25.  $x[(2y+1)+3] = 2xy + 4x$

26.  $(1+a)(b+c) = b+c+ab+ac$

\*27. Muestre que  $x(y-z+w) = xy - xz + xw$ .

[Sugerencia:  $b+c+d = (b+c)+d$ .]

Simplifique, si es posible, cada una de las siguientes expresiones.

28.  $-2 + (-4)$       29.  $-6 + 2$       30.  $6 + (-4)$

31.  $7 - 2$       32.  $7 - (-4)$       33.  $-5 - (-13)$

34.  $-a - (-b)$       35.  $(-2)(9)$       36.  $7(-9)$

37.  $(-2)(-12)$       38.  $19(-1)$       39.  $\frac{-1}{9}$

40.  $-(-6+x)$       41.  $-7(x)$       42.  $-12(x-y)$

43.  $-[-6 + (-y)]$       44.  $-3 \div 15$       45.  $-9 \div (-27)$

46.  $(-a) \div (-b)$       47.  $2(-6+2)$       48.  $3[-2(3) + 6(2)]$

49.  $(-2)(-4)(-1)$     50.  $(-12)(-12)$     51.  $X(1)$     52.  $3(x - 4)$     53.  $4(5 + x)$     54.  $-(x - 2)$
55.  $0(-x)$     56.  $8\left(\frac{1}{11}\right)$     57.  $\frac{5}{1}$     58.  $\frac{14x}{21y}$     59.  $\frac{3}{-2x}$     60.  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$
61.  $\frac{a}{c}(3b)$     62.  $(5a)\left(\frac{7}{5a}\right)$     63.  $\frac{-aby}{-ax}$     64.  $\frac{7}{y} \cdot \frac{1}{x}$     65.  $\frac{2}{x} \cdot \frac{5}{y}$     66.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
67.  $\frac{5}{12} + \frac{3}{4}$     68.  $\frac{3}{10} - \frac{7}{15}$     69.  $\frac{4}{5} + \frac{6}{5}$
70.  $\frac{X}{\sqrt{5}} - \frac{Y}{\sqrt{5}}$     71.  $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$     72.  $\frac{2}{5} - \frac{3}{8}$
73.  $\frac{6}{\frac{x}{y}}$     74.  $\frac{\frac{l}{3}}{m}$     75.  $\frac{-x}{\frac{y^2}{z}}$
76.  $\frac{7}{0}$     77.  $\frac{0}{7}$     78.  $\frac{0}{0}$
79.  $0 \cdot 0$

**OBJETIVO**

Repasar los exponentes enteros positivos, el exponente cero, los exponentes enteros negativos, los exponentes racionales, las raíces principales, los radicales y el procedimiento de racionalización del denominador.

**ADVERTENCIA**

Algunos autores dicen que  $0^0$  no está definido. Sin embargo,  $0^0 = 1$  es una definición consistente y a menudo útil.

**0.3 Exponentes y radicales**

El producto de  $x \cdot x \cdot x$  de 3 veces  $x$  se abrevia  $x^3$ . En general, para un entero positivo  $n$ ,  $x^n$  es la abreviatura del producto de  $n$  veces  $x$ . La letra  $n$  en  $x^n$  se denomina *exponente* a  $x$  se le llama *base*. De manera más específica, si  $n$  es un entero positivo se tiene que:

1. $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots \cdot x}_{\text{factores } n}$	2. $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots \cdot x}_{\text{factores } n}}$ para $x \neq 0$
3. $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$	4. $x^0 = 1$

**EJEMPLO 1 Exponentes**

- a.  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$   
b.  $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{243}$   
c.  $\frac{1}{3^{-5}} = 3^5 = 243$   
d.  $2^0 = 1, \pi^0 = 1, (-5)^0 = 1$   
e.  $x^1 = x$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Si  $r^n = x$ , donde  $n$  es un entero positivo, entonces  $r$  es una *raíz  $n$ -ésima de  $x$* . Las segundas raíces, el caso  $n = 2$ , se llaman *raíces cuadradas*; y las raíces terceras, el caso  $n = 3$ , se llaman *raíces cúbicas*. Por ejemplo,  $3^2 = 9$  y así 3 es una raíz cuadrada de 9. Como  $(-3)^2 = 9$ ,  $-3$  también es una raíz cuadrada de 9. De manera similar,  $-2$  es una raíz cúbica de  $-8$ , puesto que  $(-2)^3 = -8$ , mientras que 5 es una raíz cuarta de 625 puesto que  $5^4 = 625$ .

Algunos números no tienen una raíz  $n$ -ésima que sea un número real. Por ejemplo, como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, no existe un número real que sea una raíz cuadrada de  $-4$ .

La *raíz  $n$ -ésima principal<sup>1</sup>* de  $x$  es la raíz  $n$ -ésima de  $x$  que sea positiva si  $x$  es positiva, y es negativa si  $x$  es negativa y  $n$  es impar. La raíz  $n$ -ésima principal de  $x$  se denotará mediante  $\sqrt[n]{x}$ . Así,

$$\sqrt[n]{x} \text{ es } \begin{cases} \text{positiva si } x \text{ es positiva} \\ \text{negativa si } x \text{ es negativa y } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por ejemplo,  $\sqrt[3]{9} = 3$ ,  $\sqrt[3]{-8} = -2$  y  $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ . Se define  $\sqrt[0]{0} = 0$ .

<sup>1</sup>El uso que se hace aquí de “ $n$ -ésima raíz principal” no coincide con el de los textos avanzados.

**ADVERTENCIA**

Aunque 2 y -2 son raíces cuadradas de 4, la raíz cuadrada principal de 4 es 2, no -2. Por lo que,  $\sqrt{4} = 2$ .

El símbolo  $\sqrt[n]{x}$  se denomina **radical**. Aquí  $n$  es el *índice*,  $x$  es el *radicando* y  $\sqrt[n]{\cdot}$  es el *signo radical*. Con las raíces cuadradas principales, por lo regular se omite el índice y se escribe  $\sqrt{x}$  en lugar de  $\sqrt[2]{x}$ . Por lo tanto,  $\sqrt{9} = 3$ .

Si  $x$  es positiva, la expresión  $x^{p/q}$ , donde  $p$  y  $q$  son enteros, sin factores comunes, y  $q$  es positiva, se define como  $\sqrt[q]{x^p}$ . Por lo que,

$$x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}; \quad 8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$4^{-1/2} = \sqrt[2]{4^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

A continuación se presentan las leyes básicas de los exponentes y radicales:<sup>2</sup>

**Ley**

$$1. \quad x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$2. \quad x^0 = 1$$

$$3. \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$4. \quad \frac{1}{x^{-n}} = x^n$$

$$5. \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}}$$

$$6. \quad \frac{x^m}{x^m} = 1$$

$$7. \quad (x^m)^n = x^{mn}$$

$$8. \quad (xy)^n = x^n y^n$$

$$9. \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$10. \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$$

$$11. \quad x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

$$12. \quad x^{-1/n} = \frac{1}{x^{1/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$$

$$13. \quad \sqrt[n]{x} \sqrt[m]{y} = \sqrt[mn]{xy}$$

$$14. \quad \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{y}} = \sqrt[mn]{\frac{x}{y}}$$

$$15. \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

$$16. \quad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

$$17. \quad (\sqrt[n]{x})^m = x$$

**Ejemplo(s)**

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256; \quad x^2 \cdot x^3 = x^5$$

$$2^0 = 1$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2^{-3}} = 2^3 = 8; \quad \frac{1}{x^{-5}} = x^5$$

$$\frac{2^{12}}{2^8} = 2^4 = 16; \quad \frac{x^8}{x^{12}} = \frac{1}{x^4}$$

$$\frac{2^4}{2^4} = 1$$

$$(2^3)^5 = 2^{15}; \quad (x^2)^3 = x^6$$

$$(2 \cdot 4)^3 = 2^3 \cdot 4^3 = 8 \cdot 64 = 512$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$3^{1/5} = \sqrt[5]{3}$$

$$4^{-1/2} = \frac{1}{4^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{9} \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{18}$$

$$\frac{\sqrt[3]{90}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\frac{90}{10}} = \sqrt[3]{9}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$$

$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$$

$$(\sqrt[3]{7})^8 = 7$$

**ADVERTENCIA**

Cuando se calcula  $x^{m/n}$ , con frecuencia resulta más fácil primero encontrar  $\sqrt[n]{x}$  y después elevar el resultado a la  $m$ -ésima potencia. Así,  $(-27)^{4/3} = (\sqrt[3]{-27})^4 = (-3)^4 = 81$ .

**EJEMPLO 2 Exponentes y radicales**

- a. Por la ley 1,

$$x^6 x^8 = x^{6+8} = x^{14}$$

$$a^3 b^2 a^5 b = a^3 a^5 b^2 b^1 = a^8 b^3$$

$$x^{11} x^{-5} = x^{11-5} = x^6$$

$$z^{2/5} z^{3/5} = z^1 = z$$

$$x x^{1/2} = x^1 x^{1/2} = x^{3/2}$$

<sup>2</sup>Aunque algunas leyes incluyen restricciones, éstas no son vitales para el presente estudio.

b. Por la ley 16,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

c.  $\left(-\frac{8}{27}\right)^{4/3} = \left(\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}\right)^4$  (Leyes 16 y 14)

$$= \left(\frac{-2}{3}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

d.  $(64a^3)^{2/3} = 64^{2/3}(a^3)^{2/3}$  (Ley 8)

$$= (\sqrt[3]{64})^2 a^2$$
 (Leyes 16 y 7)

$$= (4)^2 a^2 = 16a^2$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 39 

La *racionalización del denominador* de una fracción es un procedimiento en el que una fracción que tiene un radical en su denominador se expresa como una fracción equivalente sin radical en su denominador. Se utiliza el principio fundamental de las fracciones, como lo muestra el ejemplo 3.

### EJEMPLO 3 Racionalización de denominadores

a.  $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5^{1/2}} = \frac{2 \cdot 5^{1/2}}{5^{1/2} \cdot 5^{1/2}} = \frac{2 \cdot 5^{1/2}}{5^1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

b.  $\frac{2}{\sqrt[6]{3x^5}} = \frac{2}{\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[6]{x^5}} = \frac{2}{3^{1/6}x^{5/6}} = \frac{2 \cdot 3^{5/6}x^{1/6}}{3^{1/6}x^{5/6} \cdot 3^{5/6}x^{1/6}}$

$$= \frac{2(3^5x)^{1/6}}{3x} = \frac{2\sqrt[6]{3^5x}}{3x}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 63 

Los ejemplos siguientes ilustran varias aplicaciones de las leyes de los exponentes y radicales. Se entiende que todos los denominadores son distintos a cero.

### EJEMPLO 4 Exponentes

a. Elimine los exponentes negativos en  $\frac{x^{-2}y^3}{z^{-2}}$ .

**Solución:**

$$\frac{x^{-2}y^3}{z^{-2}} = x^{-2} \cdot y^3 \cdot \frac{1}{z^{-2}} = \frac{1}{x^2} \cdot y^3 \cdot z^2 = \frac{y^3z^2}{x^2}$$

Al comparar esta respuesta con la expresión original, se concluye que puede llevarse un factor del numerador al denominador, y viceversa, al cambiar el signo del exponente.

b. Simplifique  $\frac{x^2y^7}{x^3y^5}$ .

**Solución:**

$$\frac{x^2y^7}{x^3y^5} = \frac{y^{7-5}}{x^{3-2}} = \frac{y^2}{x}$$

- c. Simplifique  $(x^5y^8)^5$ .

**Solución:**

$$(x^5y^8)^5 = (x^5)^5(y^8)^5 = x^{25}y^{40}$$

- d. Simplifique  $(x^{5/9}y^{4/3})^{18}$ .

**Solución:**

$$(x^{5/9}y^{4/3})^{18} = (x^{5/9})^{18}(y^{4/3})^{18} = x^{10}y^{24}$$

- e. Simplifique  $\left(\frac{x^{1/5}y^{6/5}}{z^{2/5}}\right)^5$ .

**Solución:**

$$\left(\frac{x^{1/5}y^{6/5}}{z^{2/5}}\right)^5 = \frac{(x^{1/5}y^{6/5})^5}{(z^{2/5})^5} = \frac{xy^6}{z^2}$$

- f. Simplifique  $\frac{x^3}{y^2} \div \frac{x^6}{y^5}$ .

**Solución:**

$$\frac{x^3}{y^2} \div \frac{x^6}{y^5} = \frac{x^3}{y^2} \cdot \frac{y^5}{x^6} = \frac{y^3}{x^3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 51



## EJEMPLO 5 Exponentes

- a. Elimine los exponentes negativos en  $x^{-1} + y^{-1}$  y simplifique.

**Solución:**

$$x^{-1} + y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy}$$

- b. Simplifique  $x^{3/2} - x^{1/2}$  con el uso de la ley distributiva.

**Solución:**

$$x^{3/2} - x^{1/2} = x^{1/2}(x - 1)$$

- c. Elimine los exponentes negativos en  $7x^{-2} + (7x)^{-2}$ .

**Solución:**

$$7x^{-2} + (7x)^{-2} = \frac{7}{x^2} + \frac{1}{(7x)^2} = \frac{7}{x^2} + \frac{1}{49x^2}$$

- d. Elimine los exponentes negativos en  $(x^{-1} - y^{-1})^{-2}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} (x^{-1} - y^{-1})^{-2} &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{y-x}{xy}\right)^{-2} \\ &= \left(\frac{xy}{y-x}\right)^2 = \frac{x^2y^2}{(y-x)^2} \end{aligned}$$

- e. Aplique la ley distributiva a  $x^{2/5}(y^{1/2} + 2x^{6/5})$ .

**Solución:**

$$x^{2/5}(y^{1/2} + 2x^{6/5}) = x^{2/5}y^{1/2} + 2x^{8/5}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 41



### EJEMPLO 6 Radicales

- a. Simplifique  $\sqrt[4]{48}$ .

**Solución:**

$$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{16} \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}$$

- b. Reescriba  $\sqrt{2 + 5x}$  sin utilizar el signo de radical.

**Solución:**

$$\sqrt{2 + 5x} = (2 + 5x)^{1/2}$$

- c. Racionalice el denominador de  $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{6}}$  y simplifique.

**Solución:**

$$\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{2^{1/5} \cdot 6^{2/3}}{6^{1/3} \cdot 6^{2/3}} = \frac{2^{3/15} 6^{10/15}}{6} = \frac{(2^3 6^{10})^{1/15}}{6} = \frac{\sqrt[15]{2^3 6^{10}}}{6}$$

- d. Simplifique  $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ .

**Solución:**

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 71



### EJEMPLO 7 Radicales

- a. Simplifique  $\sqrt[3]{x^6 y^4}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^6 y^4} &= \sqrt[3]{(x^2)^3 y^3 y} = \sqrt[3]{(x^2)^3} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{y} \\ &= x^2 y \sqrt[3]{y}\end{aligned}$$

- b. Simplifique  $\sqrt{\frac{2}{7}}$ .

**Solución:**

$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{14}{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

- c. Simplifique  $\sqrt{250} - \sqrt{50} + 15\sqrt{2}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\sqrt{250} - \sqrt{50} + 15\sqrt{2} &= \sqrt{25 \cdot 10} - \sqrt{25 \cdot 2} + 15\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{10} - 5\sqrt{2} + 15\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{10} + 10\sqrt{2}\end{aligned}$$

- d. Si  $x$  es cualquier número real, simplifique  $\sqrt{x^2}$ .

**Solución:**

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto,  $\sqrt{2^2} = 2$  y  $\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 75



## Problemas 0.3

Simplifique y exprese todas las respuestas en términos de exponentes positivos en los problemas 1 a 14.

1.  $(2^3)(2^2)$

2.  $x^6x^9$

3.  $w^4w^8$

4.  $z^3zz^2$

\*5.  $\frac{x^3x^5}{y^9y^5}$

6.  $(x^{12})^4$

7.  $\frac{(a^3)^7}{(b^4)^5}$

8.  $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^5$

9.  $(2x^2y^3)^3$

10.  $\left(\frac{w^2s^3}{y^2}\right)^2$

11.  $\frac{x^9}{x^5}$

12.  $\left(\frac{2a^4}{7b^5}\right)^6$

13.  $\frac{(x^3)^6}{x(x^3)}$

14.  $\frac{(x^2)^3(x^3)^2}{(x^3)^4}$

En los problemas 15 a 28, evalúe las expresiones.

15.  $\sqrt{25}$

16.  $\sqrt[4]{81}$

17.  $\sqrt[3]{-128}$

18.  $\sqrt{0.04}$

19.  $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

20.  $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$

21.  $(49)^{1/2}$

22.  $(64)^{1/3}$

23.  $9^{3/2}$

24.  $(9)^{-5/2}$

25.  $(32)^{-2/5}$

26.  $(0.09)^{-1/2}$

27.  $\left(\frac{1}{32}\right)^{4/5}$

28.  $\left(-\frac{64}{27}\right)^{2/3}$

En los problemas 29 a 40, simplifique las expresiones.

29.  $\sqrt{50}$

30.  $\sqrt[3]{54}$

31.  $\sqrt[3]{2x^3}$

32.  $\sqrt{4x}$

33.  $\sqrt{16x^4}$

34.  $\sqrt[4]{\frac{x}{16}}$

35.  $2\sqrt{8} - 5\sqrt{27} + \sqrt[3]{128}$

36.  $\sqrt{\frac{3}{13}}$

37.  $(9z^4)^{1/2}$

38.  $(16y^8)^{3/4}$

\*39.  $\left(\frac{27t^3}{8}\right)^{2/3}$

40.  $\left(\frac{256}{x^{12}}\right)^{-3/4}$

En los problemas 41 a 52, escriba las expresiones sólo en términos de exponentes positivos. Evite todos los radicales en la forma final. Por ejemplo:

$$y^{-1}\sqrt{x} = \frac{x^{1/2}}{y}$$

\*41.  $\frac{a^5b^{-3}}{c^2}$

42.  $\sqrt[5]{x^2y^3z^{-10}}$

43.  $5m^{-2}m^{-7}$

44.  $x + y^{-1}$

45.  $(3t)^{-2}$

46.  $(3 - z)^{-4}$

47.  $\sqrt[5]{5x^2}$

48.  $(X^3Y^{-3})^{-3}$

49.  $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

50.  $\frac{u^{-2}v^{-6}w^3}{vw^{-5}}$

\*51.  $x^2\sqrt[4]{xy^{-2}z^3}$

52.  $\sqrt[4]{a^{-3}b^{-2}a^5b^{-4}}$

### OBJETIVO

Sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones algebraicas. Definir un polinomio, utilizar productos especiales y emplear la división larga para dividir polinomios.

En los problemas 53 a 58, escriba las formas exponenciales usando radicales.

53.  $(2a - b + c)^{2/3}$

55.  $x^{-4/5}$

57.  $3w^{-3/5} - (3w)^{-3/5}$

54.  $(ab^2c^3)^{3/4}$

56.  $2x^{1/2} - (2y)^{1/2}$

58.  $[(x^{-4})^{1/5}]^{1/6}$

En los problemas 59 a 68, racionalice los denominadores.

59.  $\frac{6}{\sqrt{5}}$

62.  $\frac{y}{\sqrt{2y}}$

65.  $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

68.  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$

60.  $\frac{3}{\sqrt[4]{8}}$

\*63.  $\frac{1}{\sqrt[3]{3x}}$

66.  $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

61.  $\frac{4}{\sqrt{2x}}$

64.  $\frac{2}{\sqrt[3]{y^2}}$

67.  $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{a^2b}}$

En los problemas 69 a 90, simplifique las expresiones. Exprese todas las respuestas en términos de exponentes positivos. Racionalice el denominador donde sea necesario para evitar la existencia de exponentes fraccionarios en el denominador.

69.  $2x^2y^{-3}x^4$

70.  $\frac{3}{u^{5/2}v^{1/2}}$

\*71.  $\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{3}}$

72.  $\{[(3a^3)^2]^{-5}\}^{-2}$

73.  $\frac{2^0}{(2^{-2}x^{1/2}y^{-2})^3}$

74.  $\frac{\sqrt{s^5}}{\sqrt[3]{s^2}}$

\*75.  $\sqrt[3]{x^2yz^3}\sqrt[3]{xy^2}$

76.  $(\sqrt[4]{3})^8$

77.  $3^2(32)^{-2/5}$

78.  $(\sqrt[5]{x^2y})^{2/5}$

79.  $(2x^{-1}y^2)^2$

80.  $\frac{3}{\sqrt[3]{y}\sqrt[4]{x}}$

81.  $\sqrt{x}\sqrt{x^2y^3}\sqrt{xy^2}$

82.  $\sqrt{75k^4}$

83.  $\frac{(ab^{-3}c)^8}{(a^{-1}c^2)^{-3}}$

84.  $\sqrt[3]{7(49)}$

85.  $\frac{(x^2)^3}{x^4} \div \left[\frac{x^3}{(x^3)^2}\right]^2$

86.  $\sqrt{(-6)(-6)}$

87.  $-\frac{8s^{-2}}{2s^3}$

88.  $(a^5b^{-3}\sqrt{c})^3$

89.  $(3x^3y^2 \div 2y^2z^{-3})^4$

90.  $\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}x^{-2}}{\sqrt{16x^3}}\right)^2}$

## 0.4 Operaciones con expresiones algebraicas

Si se combinan números, representados por símbolos, mediante una o más operaciones de suma, resta, multiplicación, división, exponentiación o extracción de raíces, entonces la expresión resultante se llama *expresión algebraica*.

### EJEMPLO 1 Expresiones algebraicas

- a.  $\sqrt[3]{\frac{3x^3 - 5x - 2}{10 - x}}$  es una expresión algebraica en la variable  $x$ .

- b.  $10 - 3\sqrt{y} + \frac{5}{7+y^2}$  es una expresión algebraica en la variable  $y$ .  
 c.  $\frac{(x+y)^3 - xy}{y} + 2$  es una expresión algebraica en las variables  $x$  y  $y$ .



La expresión algebraica  $5ax^3 - 2bx + 3$  consta de tres *términos*:  $+5ax^3$ ,  $-2bx$  y  $+3$ . Algunos de los *factores* del primer término,  $5ax^3$ , son  $5$ ,  $a$ ,  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $5ax$  y  $ax^2$ . También,  $5a$  es el *coeficiente numérico* de  $ax^3$ . Si a lo largo del análisis de un problema  $a$  y  $b$  representan números fijos, entonces  $a$  y  $b$  se denominan *constantes*.

Las expresiones algebraicas que tienen exactamente un término se denominan *monomios*. Aquellas que tienen exactamente dos términos son *binomios* y las que tienen exactamente tres términos son *trinomios*. Las expresiones algebraicas con más de un término se denominan *multinomios*. Así, el multinomio  $2x - 5$  es un binomio; el multinomio  $3\sqrt{y} + 2y - 4y^2$  es un trinomio.

Un *polinomio en  $x$*  es una expresión algebraica de la forma<sup>3</sup>

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde  $n$  es un entero no negativo y los coeficientes  $c_0, c_1, \dots, c_n$  son constantes con  $c_n \neq 0$ . Se llama a  $n$  el *grado* del polinomio. Por lo tanto,  $4x^3 - 5x^2 + x - 2$  es un polinomio en  $x$  de grado 3, y  $y^5 - 2$  es un polinomio en  $y$  de grado 5. Una constante distinta de cero es un polinomio de grado cero; así, 5 es un polinomio de grado cero. La constante 0 se considera un polinomio, sin embargo, no se le asigna ningún grado.

En los ejemplos siguientes se ilustrarán operaciones con expresiones algebraicas.



### ADVERTENCIA

Las palabras *polinomio* y *multinomio* no son intercambiables. Por ejemplo,  $\sqrt{x+2}$  es un multinomio, pero no un polinomio. Por otro lado,  $x+2$  es un multinomio y un polinomio.

### EJEMPLO 2 Suma de expresiones algebraicas

Simplifique  $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3)$ .

**Solución:** Primero deben eliminarse los paréntesis. Después, con el uso de la propiedad comutativa de la suma, se reúnen todos los términos semejantes. Los *términos semejantes* son aquellos que sólo difieren por sus coeficientes numéricos. En este ejemplo,  $3x^2y$  y  $4x^2y$  son semejantes, así como los pares  $-2x$  y  $6x$ , y  $1$  y  $-3$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3) &= 3x^2y - 2x + 1 + 4x^2y + 6x - 3 \\ &= 3x^2y + 4x^2y - 2x + 6x + 1 - 3\end{aligned}$$

Por la propiedad distributiva,

$$\begin{aligned}3x^2y + 4x^2y &= (3 + 4)x^2y = 7x^2y \\ y \\ -2x + 6x &= (-2 + 6)x = 4x\end{aligned}$$

Por ende,  $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3) = 7x^2y + 4x - 2$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7



### EJEMPLO 3 Resta de expresiones algebraicas

Simplifique  $(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3)$ .

**Solución:** Aquí aplicamos la definición de la resta y la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3) &= (3x^2y - 2x + 1) + (-1)(4x^2y + 6x - 3) \\ &= (3x^2y - 2x + 1) + (-4x^2y - 6x + 3)\end{aligned}$$

<sup>3</sup>Los tres puntos indican todos los demás términos que, se entiende, están incluidos en la suma.

$$\begin{aligned}
 &= 3x^2y - 2x + 1 - 4x^2y - 6x + 3 \\
 &= 3x^2y - 4x^2y - 2x - 6x + 1 + 3 \\
 &= (3 - 4)x^2y + (-2 - 6)x + 1 + 3 \\
 &= -x^2y - 8x + 4
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13



### EJEMPLO 4 Eliminación de símbolos de agrupación

Simplifique  $3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - (3 - 4x)]\}$ .

**Solución:** Primero deben eliminarse los símbolos de agrupación más internos (los paréntesis). Despues se repite el proceso hasta eliminar todos los símbolos de agrupación, y se combinan los términos semejantes siempre que sea posible. Se tiene

$$\begin{aligned}
 3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - (3 - 4x)]\} &= 3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - 3 + 4x]\} \\
 &= 3\{4x^2 + 6x + 20x^2 - 15 + 20x\} \\
 &= 3\{24x^2 + 26x - 15\} \\
 &= 72x^2 + 78x - 45
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



La propiedad distributiva es la herramienta clave al multiplicar expresiones. Por ejemplo, para multiplicar  $ax + c$  por  $bx + d$ , puede considerarse  $ax + c$  como un solo número y despues utilizar la propiedad distributiva:

$$(ax + c)(bx + d) = (ax + c)bx + (ax + c)d$$

Nuevamente se usa la propiedad distributiva, tenemos,

$$\begin{aligned}
 (ax + c)bx + (ax + c)d &= abx^2 + cbx + adx + cd \\
 &= abx^2 + (ad + cb)x + cd
 \end{aligned}$$

Por lo que,  $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + cb)x + cd$ . En particular, si  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 3$  y  $d = -2$ , entonces

$$\begin{aligned}
 (2x + 3)(x - 2) &= 2(1)x^2 + [2(-2) + 3(1)]x + 3(-2) \\
 &= 2x^2 - x - 6
 \end{aligned}$$

A continuación se proporciona una lista de productos especiales que pueden obtenerse a partir de la propiedad distributiva y son útiles al multiplicar expresiones algebraicas.

#### Productos especiales

- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| 1. $x(y + z) = xy + xz$                         | (propiedad distributiva)        |
| 2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$       |                                 |
| 3. $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + cb)x + cd$ |                                 |
| 4. $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$                | (cuadrado de un binomio)        |
| 5. $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$                | (cuadrado de un binomio)        |
| 6. $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$                 | (producto de suma y diferencia) |
| 7. $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$      | (cubo de un binomio)            |
| 8. $(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$      | (cubo de un binomio)            |

### EJEMPLO 5 Productos especiales

a. Por la regla 2,

$$\begin{aligned}(x+2)(x-5) &= [x+2][x+(-5)] \\ &= x^2 + (2-5)x + 2(-5) \\ &= x^2 - 3x - 10\end{aligned}$$

b. Por la regla 3,

$$\begin{aligned}(3z+5)(7z+4) &= 3 \cdot 7z^2 + (3 \cdot 4 + 5 \cdot 7)z + 5 \cdot 4 \\ &= 21z^2 + 47z + 20\end{aligned}$$

c. Por la regla 5,

$$\begin{aligned}(x-4)^2 &= x^2 - 2(4)x + 4^2 \\ &= x^2 - 8x + 16\end{aligned}$$

d. Por la regla 6,

$$\begin{aligned}(\sqrt{y^2+1}+3)(\sqrt{y^2+1}-3) &= (\sqrt{y^2+1})^2 - 3^2 \\ &= (y^2+1) - 9 \\ &= y^2 - 8\end{aligned}$$

e. Por la regla 7,

$$\begin{aligned}(3x+2)^3 &= (3x)^3 + 3(2)(3x)^2 + 3(2)^2(3x) + (2)^3 \\ &= 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19 

### EJEMPLO 6 Multiplicación de multinomios

Encuentre el producto  $(2t-3)(5t^2+3t-1)$ .

**Solución:** Se trata a  $2t-3$  como un solo número y se aplica la propiedad distributiva dos veces:

$$\begin{aligned}(2t-3)(5t^2+3t-1) &= (2t-3)5t^2 + (2t-3)3t - (2t-3)1 \\ &= 10t^3 - 15t^2 + 6t^2 - 9t - 2t + 3 \\ &= 10t^3 - 9t^2 - 11t + 3\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35 

En el ejemplo 3(b) de la sección 0.2, se muestra que  $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ . De manera similar,  $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ . Con el uso de estos resultados, es posible dividir un multinomio entre un monomio, si se divide cada término del multinomio entre el monomio.

### EJEMPLO 7 División de un multinomio entre un monomio

a.  $\frac{x^3+3x}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{3x}{x} = x^2 + 3$

b.  $\frac{4z^3-8z^2+3z-6}{2z} = \frac{4z^3}{2z} - \frac{8z^2}{2z} + \frac{3z}{2z} - \frac{6}{2z}$   
 $= 2z^2 - 4z + \frac{3}{2} - \frac{3}{z}$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 47 

### División larga

Para dividir un polinomio entre un polinomio se usa la llamada división larga cuando el grado del divisor es menor o igual que el del dividendo, como se muestra en el ejemplo siguiente.

#### EJEMPLO 8 División larga

*Divida  $2x^3 - 14x - 5$  entre  $x - 3$ .*

**Solución:** Aquí  $2x^3 - 14x - 5$  es el *dividendo* y  $x - 3$  es el *divisor*. Para evitar errores, es mejor escribir el dividendo como  $2x^3 + 0x^2 - 14x - 5$ . Observe que las potencias de  $x$  están en orden decreciente. Se tiene

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 6x + 4 \leftarrow \text{cociente} \\ \text{divisor} \rightarrow x - 3 \overline{)2x^3 + 0x^2 - 14x - 5} \leftarrow \text{dividendo} \\ 2x^3 - 6x^2 \\ \hline 6x^2 - 14x \\ 6x^2 - 18x \\ \hline 4x - 5 \\ 4x - 12 \\ \hline 7 \leftarrow \text{residuo} \end{array}$$

Observe que  $x$  (el primer término del divisor) dividió a  $2x^3$  y se obtuvo  $2x^2$ . Después se multiplicó  $2x^2$  por  $x - 3$  y se obtuvo  $2x^3 - 6x^2$ . Después de restar  $2x^3 - 6x^2$  de  $2x^3 + 0x^2$ , se obtuvo  $6x^2$  y después “se bajó” el término  $-14x$ . Este proceso continúa hasta que se llega a 7, el *residuo*. Siempre se detendrá el proceso cuando el residuo sea 0 o un polinomio cuyo grado sea menor que el grado del divisor. La respuesta puede escribirse como

$$2x^2 + 6x + 4 + \frac{7}{x - 3}$$

Esto es, la respuesta a la pregunta

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = ?$$

tiene la forma

$$\text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$$

Una manera de comprobar una división es verificar que

$$(\text{cociente})(\text{divisor}) + \text{residuo} = \text{dividendo}$$

El resultado del ejemplo puede verificarse mediante el uso de esta ecuación.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 51



## Problemas 0.4

Realice las operaciones indicadas y simplifique.

1.  $(8x - 4y + 2) + (3x + 2y - 5)$
2.  $(6x^2 - 10xy + 2) + (2z - xy + 4)$
3.  $(8t^2 - 6s^2) + (4s^2 - 2t^2 + 6)$
4.  $(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 3\sqrt{x})$
5.  $(\sqrt{a} + 2\sqrt{3b}) - (\sqrt{c} - 3\sqrt{3b})$
6.  $(3a + 7b - 9) - (5a + 9b + 21)$
- \*7.  $(6x^2 - 10xy + \sqrt{2}) - (2z - xy + 4)$
8.  $(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) - (\sqrt{x} + 3\sqrt{x})$

9.  $(\sqrt{x} + \sqrt{2y}) - (\sqrt{x} + \sqrt{3z})$
10.  $4(2z - w) - 3(w - 2z)$
11.  $3(3x + 3y - 7) - 3(8x - 2y + 2)$
12.  $(u - 3v) + (-5u - 4v) + (u - 3)$
- \*13.  $5(x^2 - y^2) + x(y - 3x) - 4y(2x + 7y)$
14.  $2 - [3 + 4(s - 3)]$
- \*15.  $2[3[3(x^2 + 2) - 2(x^2 - 5)]]$
16.  $4[3(t + 5) - t[1 - (t + 1)]]$
17.  $-5(4x^2(2x + 2) - 2(x^2 - (5 - 2x)))$

18.  $-\{-3[2a + 2b - 2] + 5[2a + 3b] - a[2(b + 5)]\}$
- \*19.  $(x + 4)(x + 5)$
20.  $(u + 2)(u + 5)$
21.  $(w + 2)(w - 5)$
22.  $(z - 7)(z - 3)$
23.  $(2x + 3)(5x + 2)$
24.  $(t - 5)(2t + 7)$
25.  $(X + 2Y)^2$
26.  $(2x - 1)^2$
27.  $(x - 5)^2$
28.  $(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 5)$
29.  $(\sqrt{3x} + 5)^2$
30.  $(\sqrt{y} - 3)(\sqrt{y} + 3)$
31.  $(2s - 1)(2s + 1)$
32.  $(z^2 - 3w)(z^2 + 3w)$
33.  $(x^2 - 3)(x + 4)$
34.  $(x + 1)(x^2 + x + 3)$
- \*35.  $(x^2 - 4)(3x^2 + 2x - 1)$
36.  $(3y - 2)(4y^3 + 2y^2 - 3y)$
37.  $x\{2(x + 5)(x - 7) + 4[2x(x - 6)]\}$
38.  $[(2z + 1)(2z - 1)](4z^2 + 1)$
39.  $(x + y + 2)(3x + 2y - 4)$
40.  $(x^2 + x + 1)^2$
41.  $(2a + 3)^3$
42.  $(3y - 2)^3$
43.  $(2x - 3)^3$
44.  $(x + 2y)^3$
45.  $\frac{z^2 - 18z}{z}$
46.  $\frac{2x^3 - 7x + 4}{x}$
- \*47.  $\frac{6x^5 + 4x^3 - 1}{2x^2}$
48.  $\frac{(3y - 4) - (9y + 5)}{3y}$
49.  $(x^2 + 5x - 3) \div (x + 5)$
50.  $(x^2 - 5x + 4) \div (x - 4)$
- \*51.  $(3x^3 - 2x^2 + x - 3) \div (x + 2)$
52.  $(x^4 + 2x^2 + 1) \div (x - 1)$
53.  $x^3 \div (x + 2)$
54.  $(6x^2 + 8x + 1) \div (2x + 3)$
55.  $(3x^2 - 4x + 3) \div (3x + 2)$
56.  $(z^3 + z^2 + z) \div (z^2 - z + 1)$

**OBJETIVO****0.5 Factorización**

Establecer las reglas básicas para factorizar y aplicarlas en la factorización de expresiones.

Cuando se multiplican entre sí dos o más expresiones, éstas reciben el nombre de *factores* del producto. Por lo que si  $c = ab$ , entonces  $a$  y  $b$  son factores del producto  $c$ . Al proceso por el cual una expresión se escribe como el producto de sus factores se le llama *factorización*.

A continuación se enlistan las reglas para la factorización de expresiones, la mayoría de las cuales surge de los productos especiales vistos en la sección 0.4. El lado derecho de cada identidad es la forma factorizada de la expresión del lado izquierdo.

**Reglas para la factorización**

1.  $xy + xz = x(y + z)$  (factor común)
2.  $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$
3.  $abx^2 + (ad + cb)x + cd = (ax + c)(bx + d)$
4.  $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$  (trinomio cuadrado perfecto)
5.  $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$  (trinomio cuadrado perfecto)
6.  $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$  (diferencia de dos cuadrados)
7.  $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$  (suma de dos cubos)
8.  $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$  (diferencia de dos cubos)

Por lo general, cuando se factoriza un polinomio se eligen factores que a su vez sean polinomios. Por ejemplo,  $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ . Usualmente, no se escribirá  $x - 4$  como  $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$  a menos que esto permita simplificar otros cálculos.

Siempre factorice completamente. Por ejemplo,

$$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x + 2)(x - 2)$$

**EJEMPLO 1 Factores comunes**

- a. Factorice completamente  $3k^2x^2 + 9k^3x$ .

**Solución:** Como  $3k^2x^2 = (3k^2x)(x)$  y  $9k^3x = (3k^2x)(3k)$ , cada término de la expresión original contiene el factor común  $3k^2x$ . Así que, por la regla 1,

$$3k^2x^2 + 9k^3x = 3k^2x(x + 3k)$$

Observe que, aunque  $3k^2x^2 + 9k^3x = 3(k^2x^2 + 3k^3x)$ , no puede decirse que la expresión esté completamente factorizada, puesto que  $k^2x^2 + 3k^3x$  todavía puede factorizarse.

- b.** Factorice completamente  $8a^5x^2y^3 - 6a^2b^3yz - 2a^4b^4xy^2z^2$ .

**Solución:**

$$8a^5x^2y^3 - 6a^2b^3yz - 2a^4b^4xy^2z^2 = 2a^2y(4a^3x^2y^2 - 3b^3z - a^2b^4xyz^2)$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5 

### EJEMPLO 2 Factorización de trinomios

- a.** Factorice completamente  $3x^2 + 6x + 3$ .

**Solución:** Primero se remueve un factor común. Después se factoriza por completo la expresión resultante. Así, se tiene

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x + 3 &= 3(x^2 + 2x + 1) \\ &= 3(x + 1)^2 \end{aligned} \quad (\text{Regla 4})$$

- b.** Factorice completamente  $x^2 - x - 6$ .

**Solución:** Si este trinomio puede factorizarse en la forma  $(x + a)(x + b)$ , que es el producto de dos binomios, entonces deben determinarse los valores de  $a$  y de  $b$ . Como  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ , se sigue que

$$x^2 + (-1)x + (-6) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Al igualar los coeficientes correspondientes, se quiere

$$a + b = -1 \text{ y } ab = -6$$

Si  $a = -3$  y  $b = 2$ , entonces ambas condiciones se cumplen y por ende,

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

Como verificación, es recomendable multiplicar el lado derecho para ver si coincide con el izquierdo.

- c.** Factorice completamente  $x^2 - 7x + 12$ .

**Solución:**  $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9 

### EJEMPLO 3 Factorización

Enseguida se presenta una variedad de expresiones completamente factorizadas. Los números entre paréntesis hacen referencia a las reglas utilizadas.

- a.**  $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$  (4)
- b.**  $9x^2 + 9x + 2 = (3x + 1)(3x + 2)$  (3)
- c.**  $6y^3 + 3y^2 - 18y = 3y(2y^2 + y - 6)$  (1)  
 $= 3y(2y - 3)(y + 2)$  (3)
- d.**  $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$  (5)
- e.**  $z^{1/4} + z^{5/4} = z^{1/4}(1 + z)$  (1)
- f.**  $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$  (6)  
 $= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$  (6)
- g.**  $x^{2/3} - 5x^{1/3} + 4 = (x^{1/3} - 1)(x^{1/3} - 4)$  (2)
- h.**  $ax^2 - ay^2 + bx^2 - by^2 = a(x^2 - y^2) + b(x^2 - y^2)$  (1), (1)  
 $= (x^2 - y^2)(a + b)$  (1)  
 $= (x + y)(x - y)(a + b)$  (6)

i.  $8 - x^3 = (2)^3 - (x)^3 = (2 - x)(4 + 2x + x^2)$  (8)

j.  $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$  (6)

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$  (7), (8)



Observe en el ejemplo 3(f) que  $x^2 - 1$  es factorizable, pero  $x^2 + 1$  no lo es. En el ejemplo 3(h), note que el factor común de  $x^2 - y^2$  no fue evidente de inmediato.

## Problemas 0.5

Factorice completamente las expresiones siguientes.

- |                                      |                        |
|--------------------------------------|------------------------|
| 1. $2ax + 2b$                        | 2. $6y^2 - 4y$         |
| 3. $10xy + 5xz$                      | 4. $3x^2y - 9x^3y^3$   |
| *5. $8a^3bc - 12ab^3cd + 4b^4c^2d^2$ |                        |
| 6. $6u^3v^3 + 18u^2vw^4 - 12u^2v^3$  |                        |
| 7. $z^2 - 49$                        | 8. $x^2 - x - 6$       |
| *9. $p^2 + 4p + 3$                   | 10. $s^2 - 6s + 8$     |
| 11. $16x^2 - 9$                      | 12. $x^2 + 2x - 24$    |
| 13. $a^2 + 12a + 35$                 | 14. $4t^2 - 9s^2$      |
| 15. $x^2 + 6x + 9$                   | 16. $y^2 - 15y + 50$   |
| 17. $5x^2 + 25x + 30$                | 18. $3t^2 + 12t - 15$  |
| 19. $3x^2 - 3$                       | 20. $9y^2 - 18y + 8$   |
| 21. $6y^2 + 13y + 2$                 | 22. $4x^2 - x - 3$     |
| 23. $12s^3 + 10s^2 - 8s$             | 24. $9z^2 + 30z + 25$  |
| 25. $u^{13/5}v - 4u^{3/5}v^3$        | 26. $9x^{4/7} - 1$     |
| 27. $2x^3 + 2x^2 - 12x$              | 28. $x^2y^2 - 4xy + 4$ |

- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| 29. $(4x + 2)^2$                              | 30. $2x^2(2x - 4x^2)^2$         |
| 31. $x^3y^2 - 14x^2y + 49x$                   | 32. $(5x^2 + 2x) + (10x + 4)$   |
| 33. $(x^3 - 4x) + (8 - 2x^2)$                 | 34. $(x^2 - 1) + (x^2 - x - 2)$ |
| 35. $(y^4 + 8y^3 + 16y^2) - (y^2 + 8y + 16)$  |                                 |
| 36. $x^3y - 4xy + z^2x^2 - 4z^2$              |                                 |
| 37. $b^3 + 64$                                | 38. $x^3 - 1$                   |
| 39. $x^6 - 1$                                 | 40. $27 + 8x^3$                 |
| 41. $(x + 3)^3(x - 1) + (x + 3)^2(x - 1)^2$   |                                 |
| 42. $(a + 5)^3(a + 1)^2 + (a + 5)^2(a + 1)^3$ |                                 |
| 43. $P(1 + r) + P(1 + r)r$                    |                                 |
| 44. $(X - 3I)(3X + 5I) - (3X + 5I)(X + 2I)$   |                                 |
| 45. $x^4 - 16$                                | 46. $81x^4 - y^4$               |
| 47. $y^8 - 1$                                 | 48. $t^4 - 4$                   |
| 49. $X^4 + 4X^2 - 5$                          | 50. $x^4 - 10x^2 + 9$           |
| 51. $x^4y - 2x^2y + y$                        | 52. $4x^3 - 6x^2 - 4x$          |

## OBJETIVO

Simplificar, sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones algebraicas. Racionalizar el denominador de una fracción.

## 0.6 Fracciones

Los alumnos deben poner un cuidado especial en el estudio de las *fracciones*. En la vida cotidiana, es común que se pierdan de vista las fracciones numéricas debido al uso de las calculadoras. Sin embargo, la comprensión de cómo manipular las fracciones de expresiones algebraicas es un prerequisito esencial para el cálculo. La mayoría de las calculadoras no son de mucha ayuda.

### Simplificación de fracciones

Mediante el uso del principio fundamental de las fracciones (sección 0.2), es posible simplificar expresiones algebraicas que son fracciones. Ese principio permite multiplicar o dividir el numerador y denominador de una fracción entre la misma cantidad diferente de cero. La fracción resultante será equivalente a la original. Se supone que las fracciones que se consideren tendrán denominadores distintos de cero. Por ende, asumimos que todos los factores de los denominadores en los ejemplos son distintos a cero. Con frecuencia, esto significará que se excluyen ciertos valores para las variables que se encuentran en los denominadores.

#### EJEMPLO 1 Simplificación de fracciones

a. Simplifique  $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12}$ .

**Solución:** Primero se factoriza completamente el numerador y el denominador:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)(x - 4)}$$

Al dividir el numerador y el denominador entre el factor común  $x - 3$ , se tiene

$$\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)} = \frac{1(x+2)}{1(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}$$

Por lo general, sólo se escribe

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{(x-3)}(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}$$

o bien

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}$$

El proceso de eliminar el factor común,  $x - 3$ , se conoce comúnmente como “cancelación”.

**b.** Simplifique  $\frac{2x^2 + 6x - 8}{8 - 4x - 4x^2}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 + 6x - 8}{8 - 4x - 4x^2} &= \frac{2(x^2 + 3x - 4)}{4(2 - x - x^2)} = \frac{2(x-1)(x+4)}{4(1-x)(2+x)} \\ &= \frac{2(x-1)(x+4)}{2(2)[(-1)(x-1)](2+x)} \\ &= \frac{x+4}{-2(2+x)} = -\frac{x+4}{2(x+2)}\end{aligned}$$

Observe que  $1 - x$  se escribe como  $(-1)(x - 1)$  para facilitar la cancelación.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3



## Multiplicación y división de fracciones

La regla para multiplicar  $\frac{a}{b}$  por  $\frac{c}{d}$  es

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

### EJEMPLO 2 Multiplicación de fracciones

a.  $\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x-5} = \frac{x(x+3)}{(x+2)(x-5)}$

b.  $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x - 3} \cdot \frac{6x^2 - 6}{x^2 + 2x - 8} = \frac{[(x-2)^2][6(x+1)(x-1)]}{[(x+3)(x-1)][(x+4)(x-2)]}$   
 $= \frac{6(x-2)(x+1)}{(x+3)(x+4)}$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



Para dividir  $\frac{a}{b}$  entre  $\frac{c}{d}$ , donde  $c \neq 0$ , se tiene

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

En pocas palabras: para dividir entre una fracción se invierte el divisor y se multiplica.

### EJEMPLO 3 División de fracciones

a.  $\frac{x}{x+2} \div \frac{x+3}{x-5} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x-5}{x+3} = \frac{x(x-5)}{(x+2)(x+3)}$

$$\mathbf{b.} \frac{\frac{x-5}{x-3}}{\frac{2x}{1}} = \frac{x-5}{\frac{x-3}{2x}} = \frac{x-5}{x-3} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{x-5}{2x(x-3)}$$

$$\mathbf{c.} \frac{\frac{4x}{x^2-1}}{\frac{x-1}{2x^2+8x}} = \frac{4x}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{2x^2+8x} = \frac{4x(x-1)}{[(x+1)(x-1)][2x(x+4)]}$$

$$= \frac{2}{(x+1)(x+4)}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11 

### Racionalización del denominador

Algunas veces el denominador de una fracción tiene dos términos e incluye raíces cuadradas, como  $2 - \sqrt{3}$  o  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ . Entonces, el denominador puede racionalizarse al multiplicarlo por una expresión que lo convierta en una diferencia de dos cuadrados. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} &= \frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} \\ &= \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3}\end{aligned}$$

La **racionalización del numerador** es un procedimiento similar.

### EJEMPLO 4 Racionalización de denominadores

$$\mathbf{a.} \frac{x}{\sqrt{2}-6} = \frac{x}{\sqrt{2}-6} \cdot \frac{\sqrt{2}+6}{\sqrt{2}+6} = \frac{x(\sqrt{2}+6)}{(\sqrt{2})^2 - 6^2}$$

$$= \frac{x(\sqrt{2}+6)}{2-36} = -\frac{x(\sqrt{2}+6)}{34}$$

$$\mathbf{b.} \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{5-2} = \frac{5-2\sqrt{5}\sqrt{2}+2}{3} = \frac{7-2\sqrt{10}}{3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 53 

### Suma y resta de fracciones

En el ejemplo 3(b) de la sección 0.2, se mostró que  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ . Esto es, si se suman dos fracciones que tienen un denominador común, entonces el resultado será una fracción cuyo denominador es el denominador común. El numerador será la suma de los numeradores de las fracciones originales. De manera similar,  $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ .

### EJEMPLO 5 Suma y resta de fracciones

$$\mathbf{a.} \frac{p^2-5}{p-2} + \frac{3p+2}{p-2} = \frac{(p^2-5)+(3p+2)}{p-2}$$

$$= \frac{p^2+3p-3}{p-2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } & \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x - 3} - \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+3)} - \frac{x(x+2)}{(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{x-4}{x+3} - \frac{x}{x+3} = \frac{(x-4)-x}{x+3} = -\frac{4}{x+3} \\
 \text{c. } & \frac{x^2 + x - 5}{x - 7} - \frac{x^2 - 2}{x - 7} + \frac{-4x + 8}{x^2 - 9x + 14} = \frac{x^2 + x - 5}{x - 7} - \frac{x^2 - 2}{x - 7} + \frac{-4}{x - 7} \\
 &= \frac{(x^2 + x - 5) - (x^2 - 2) + (-4)}{x - 7} \\
 &= \frac{x - 7}{x - 7} = 1
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29 

Para sumar (o restar) dos fracciones con denominadores *diferentes*, utilice el principio fundamental de las fracciones para escribirlas como fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Después proceda con la suma (o resta) por el método descrito anteriormente.

Por ejemplo, para encontrar

$$\frac{2}{x^3(x-3)} + \frac{3}{x(x-3)^2}$$

es posible convertir la primera fracción en una fracción equivalente, multiplicando el numerador y el denominador por  $x-3$ :

$$\frac{2(x-3)}{x^3(x-3)^2}$$

también se puede convertir la segunda fracción multiplicando el numerador y el denominador por  $x^2$ :

$$\frac{3x^2}{x^3(x-3)^2}$$

Estas fracciones tienen el mismo denominador. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{x^3(x-3)} + \frac{3}{x(x-3)^2} &= \frac{2(x-3)}{x^3(x-3)^2} + \frac{3x^2}{x^3(x-3)^2} \\
 &= \frac{3x^2 + 2x - 6}{x^3(x-3)^2}
 \end{aligned}$$

Se podrían haber convertido las fracciones originales en fracciones equivalentes con *cualquier* denominador común. Sin embargo, se prefirió convertirlas en fracciones con el denominador  $x^3(x-3)^2$ . Éste es el **mínimo común denominador (MCD)** de las fracciones  $2/[x^3(x-3)]$  y  $3/[x(x-3)^2]$ .

En general, para encontrar el MCD de dos o más fracciones, primero se factoriza completamente cada denominador. El *MCD* es el producto de cada uno de los distintos factores que aparecen en los denominadores, cada uno elevado a la potencia más grande con la que aparece en alguno de los denominadores.

### EJEMPLO 6 Suma y resta de fracciones

a. Reste:  $\frac{t}{3t+2} - \frac{4}{t-1}$ .

**Solución:** El MCD es  $(3t+2)(t-1)$ . Así, se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{t}{(3t+2)} - \frac{4}{t-1} &= \frac{t(t-1)}{(3t+2)(t-1)} - \frac{4(3t+2)}{(3t+2)(t-1)} \\
 &= \frac{t(t-1) - 4(3t+2)}{(3t+2)(t-1)} \\
 &= \frac{t^2 - t - 12t - 8}{(3t+2)(t-1)} = \frac{t^2 - 13t - 8}{(3t+2)(t-1)}
 \end{aligned}$$

b. Sume:  $\frac{4}{q-1} + 3$ .

**Solución:** El MCD es  $q-1$ .

$$\begin{aligned}\frac{4}{q-1} + 3 &= \frac{4}{q-1} + \frac{3(q-1)}{q-1} \\ &= \frac{4+3(q-1)}{q-1} = \frac{3q+1}{q-1}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 33 

### EJEMPLO 7 Resta de fracciones

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x^2+6x+9} - \frac{x+2}{2(x^2-9)} &= \frac{x-2}{(x+3)^2} - \frac{x+2}{2(x+3)(x-3)} \quad [\text{MCD} = 2(x+3)^2(x-3)] \\ &= \frac{(x-2)(2)(x-3)}{(x+3)^2(2)(x-3)} - \frac{(x+2)(x+3)}{2(x+3)(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{(x-2)(2)(x-3) - (x+2)(x+3)}{2(x+3)^2(x-3)} \\ &= \frac{2(x^2-5x+6) - (x^2+5x+6)}{2(x+3)^2(x-3)} \\ &= \frac{2x^2-10x+12-x^2-5x-6}{2(x+3)^2(x-3)} \\ &= \frac{x^2-15x+6}{2(x+3)^2(x-3)}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 39 

En el ejemplo 8 se muestran dos métodos para simplificar una fracción "complicada".

### EJEMPLO 8 Operaciones combinadas con fracciones

*Simplifique  $\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$ , donde  $h \neq 0$ .*

**Solución:** Primero se combinan las fracciones en el numerador y se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} &= \frac{\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\ &= \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}\end{aligned}$$

La fracción original también puede simplificarse multiplicando el numerador y el denominador por el MCD de las fracciones implicadas en el numerador (y denominador), a saber,  $x(x+h)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} &= \frac{\left[ \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right] x(x+h)}{h[x(x+h)]} \\ &= \frac{x-(x+h)}{x(x+h)h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 47 



**OBJETIVO**

Analizar las ecuaciones equivalentes y desarrollar técnicas para resolver ecuaciones lineales, incluyendo las ecuaciones con literales y las ecuaciones fraccionarias y radicales, que conducen a ecuaciones lineales.

## 0.7 Ecuaciones, en particular ecuaciones lineales

### Ecuaciones

Una **ecuación** es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que forman una ecuación se denominan **lados** (o **miembros**), y están separadas por el **signo de igualdad**, =.

#### EJEMPLO 1 Ejemplos de ecuaciones

- a.  $x + 2 = 3$
- b.  $x^2 + 3x + 2 = 0$
- c.  $\frac{y}{y - 4} = 6$
- d.  $w = 7 - z$



En el ejemplo 1 cada ecuación contiene al menos una variable. Una **variable** es un símbolo que puede ser reemplazado por un número cualquiera de un conjunto de números diferentes. Los símbolos más comunes para las variables son las últimas letras del alfabeto:  $x, y, z, w$  y  $t$ . En consecuencia, se dice que las ecuaciones (a) y (c) son ecuaciones en las variables  $x$  y  $y$ , respectivamente. La ecuación (d) es una ecuación en las variables  $w$  y  $z$ . En la ecuación  $x + 2 = 3$ , los números 2 y 3 se conocen como *constantes*, puesto que son números fijos.

Nunca se permite que en una ecuación haya una variable que tenga un valor para el cual esa ecuación no esté definida. Por ejemplo, en

$$\frac{y}{y - 4} = 6$$

y no puede ser 4, porque provocaría que el denominador fuese cero; mientras que en

$$\sqrt{x - 3} = 9$$

debe cumplirse que  $x \geq 3$ , de manera que la expresión dentro del símbolo de raíz cuadrada no sea negativa. (No es posible dividir entre cero ni obtener raíces cuadradas de números negativos.) En algunas ecuaciones los valores permisibles de una variable están restringidos por razones físicas. Por ejemplo, si la variable  $t$  representa el tiempo, los valores negativos de  $t$  pueden no tener sentido. Entonces debe suponerse que  $t \geq 0$ .

*Resolver* una ecuación significa encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación es verdadera. Estos valores se denominan *soluciones* de la ecuación y se dice que *satisfacen* la ecuación. Cuando sólo está involucrada una variable, la solución también se conoce como *raíz*. Al conjunto de todas las soluciones se le llama *conjunto solución* de la ecuación. En ocasiones, a una letra que representa una cantidad desconocida en una ecuación se le denomina simplemente *incógnita*. A continuación se ilustrarán estos términos.

#### EJEMPLO 2 Terminología para las ecuaciones

- a. En la ecuación  $x + 2 = 3$ , la variable  $x$  es la incógnita. Obviamente, el único valor de  $x$  que satisface la ecuación es 1. De aquí que 1 sea una raíz y el conjunto solución sea  $\{1\}$ .
- b.  $-2$  es una raíz de  $x^2 + 3x + 2 = 0$  porque al sustituir  $-2$  por  $x$  se logra que la ecuación sea verdadera:  $(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$ . Así que  $-2$  es un elemento del conjunto solución, pero en este caso no es el único. Existe uno más, ¿podría usted encontrarlo?
- c.  $w = 7 - z$  es una ecuación con dos incógnitas. Una solución es el par de valores  $w = 4$  y  $z = 3$ . Sin embargo, existe un número infinito de soluciones. ¿Podría pensar en otra?



## Ecuaciones equivalentes

Se dice que dos ecuaciones son *equivalentes* si ambas tienen las mismas soluciones; lo que significa, precisamente, que el conjunto solución de una es igual al conjunto solución de la otra. Resolver una ecuación puede implicar el realizar operaciones con ella. Es preferible que al aplicar cualquiera de tales operaciones se obtenga una ecuación equivalente. Existen tres operaciones que garantizan dicha equivalencia:

1. Sumar (o restar) el mismo polinomio a (de) ambos lados de una ecuación, donde el polinomio está en la misma variable que aparece en la ecuación.

Por ejemplo, si  $-5x = 5 - 6x$ , entonces al sumar  $6x$  en ambos lados se obtiene la ecuación equivalente  $-5x + 6x = 5 - 6x + 6x$ , que a su vez equivale a  $x = 5$ .

2. Multiplicar (o dividir) ambos lados de una ecuación por la misma constante distinta de cero.

Por ejemplo, si  $10x = 5$ , entonces al dividir ambos lados entre 10 se obtiene la ecuación equivalente  $\frac{10x}{10} = \frac{5}{10}$ , que también equivale a  $x = \frac{1}{2}$ .

3. Reemplazar cualquiera de los lados de una ecuación por una expresión equivalente.

Por ejemplo, si  $x(x + 2) = 3$ , entonces al reemplazar el miembro izquierdo por la expresión equivalente  $x^2 + 2x$  se obtiene la ecuación equivalente  $x^2 + 2x = 3$ .

De nuevo: la aplicación de las operaciones 1 a 3 garantiza que la ecuación resultante sea equivalente a la original. Sin embargo, algunas veces, para resolver una ecuación, es necesario aplicar otras operaciones distintas de la 1 a la 3. Dichas operaciones *no* necesariamente resultan en ecuaciones equivalentes. Se incluyen las siguientes:

### Operaciones que pueden no producir ecuaciones equivalentes

4. Multiplicar ambos lados de una ecuación por una expresión que involucre la variable.
5. Dividir ambos lados de una ecuación por una expresión que involucre la variable.
6. Elevar ambos lados de una ecuación al mismo exponente.

Se ilustrarán las tres últimas operaciones. Por ejemplo, por inspección, la única raíz de  $x - 1 = 0$  es 1. Al multiplicar cada miembro por  $x$  (operación 4) se obtiene  $x^2 - x = 0$ , que se satisface si  $x$  es 0 o 1 (verifíquelo por sustitución). Pero 0 *no* satisface la ecuación *original*. Por lo tanto, las ecuaciones no son equivalentes.

De la misma forma, puede verificar que la ecuación  $(x - 4)(x - 3) = 0$  se satisface cuando  $x$  es 4 o 3. Al dividir ambos lados entre  $x - 4$  (operación 5) se obtiene  $x - 3 = 0$ , cuya única raíz es 3. Nuevamente no se tiene una equivalencia, puesto que en este caso se ha “perdido” una raíz. Observe que cuando  $x$  es 4, la división entre  $x - 4$  implica dividir entre 0, una operación que no es válida.

Por último, si se eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación  $x = 2$  (operación 6) se obtiene  $x^2 = 4$ , la cual es verdadera si  $x = 2$  o  $-2$ . Pero  $-2$  no es raíz de la ecuación dada.

De este análisis, resulta claro que cuando se realicen las operaciones 4 a 6 es necesario ser cuidadosos con las conclusiones concernientes a las raíces de una ecuación dada. Las operaciones 4 y 6 *pueden* producir una ecuación con más raíces. Por lo tanto, debe verificarse si la “solución” obtenida por estas operaciones satisface la ecuación *original*. La operación 5 *puede* producir una ecuación con menos raíces. En este caso, tal vez nunca pueda determinarse la raíz “perdida”. Por ello, siempre que sea posible debe evitarse la operación 5.

En resumen, una ecuación puede pensarse como un conjunto de restricciones sobre cualquier variable de la ecuación. Las operaciones 4 a 6 pueden aumentar o disminuir las restricciones, y generar soluciones diferentes a la ecuación original. Sin embargo, las operaciones 1 a 3 nunca afectan las restricciones.



### ADVERTENCIA

La equivalencia no está garantizada si ambos lados se multiplican o dividen por una expresión que involucra una variable.

**La operación 6 incluye la obtención de raíces en ambos lados.**

## TECNOLOGÍA

Puede utilizarse una calculadora graficadora para comprobar una raíz. Por ejemplo, suponga que se desea determinar si  $3/2$  es una raíz de la ecuación

$$2x^3 + 7x^2 = 19x + 60$$

Primero, se reescribe la ecuación de modo que un lado sea 0. Al restar  $19x + 60$  de ambos lados se obtiene la ecuación equivalente

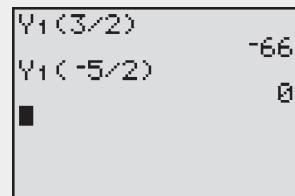
$$2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0$$

En una calculadora graficadora TI-83 Plus se introduce la expresión  $2x^3 + 7x^2 - 19x - 60$  como  $Y_1$  y después se evalúa  $Y_1$  en  $x = 3/2$ . En la figura 0.2 se muestra que el resultado es  $-66$ , el cual es diferente de cero. Por lo tanto,  $3/2$  no es una raíz. Sin embargo, si  $Y_1$  se evalúa en  $x = -5/2$  se obtiene 0. Entonces  $-5/2$  es una raíz de la ecuación original.

Conviene destacar que si la ecuación original hubiera estado en términos de la variable  $t$ , esto es,

$$2t^3 + 7t^2 = 19t + 60$$

entonces debería reemplazarse  $t$  por  $x$ , puesto que la calculadora evalúa  $Y_1$  en un valor específico de  $x$ , no de  $t$ .



**FIGURA 0.2** Para  $2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0$ ,  $3/2$  no es una raíz, pero  $-5/2$  sí lo es.

## Ecuaciones lineales

Los principios presentados hasta aquí se demostrarán ahora en la solución de una *ecuación lineal*.

### DEFINICIÓN

Una **ecuación lineal** en la variable  $x$  es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax + b = 0 \quad (1)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes y  $a \neq 0$ .

Una ecuación lineal también se conoce como ecuación de primer grado o una ecuación de grado uno, puesto que la potencia más alta de la variable que aparece en la ecuación (1) es la primera.

Para resolver una ecuación lineal se realizan operaciones sobre ella hasta obtener una ecuación equivalente cuyas soluciones sean obvias, lo que significa hallar una ecuación en la que la variable quede aislada en un lado de la ecuación, como lo muestran los ejemplos siguientes.

### EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación lineal

Resuelva  $5x - 6 = 3x$ .

**Solución:** Se empieza por dejar los términos que incluyen a  $x$  en un lado y las constantes en el otro. Entonces se despeja  $x$  por medio de las operaciones matemáticas adecuadas. Se tiene

$$5x - 6 = 3x$$

$$5x - 6 + (-3x) = 3x + (-3x) \quad (\text{al sumar } -3x \text{ en ambos lados})$$

$$2x - 6 = 0 \quad (\text{al simplificar, esto es, operación 3})$$

$$2x - 6 + 6 = 0 + 6 \quad (\text{al sumar 6 en ambos lados})$$

$$2x = 6 \quad (\text{al simplificar})$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \quad (\text{al dividir ambos lados entre 2})$$

$$x = 3$$

Resulta claro que 3 es la única raíz de la última ecuación. Como cada ecuación es equivalente a la anterior, se concluye que 3 debe ser la única raíz de  $5x - 6 = 3x$ . Esto es, el conjunto solución es {3}. Puede describirse el primer paso en la solución de una ecuación como el acto de mover un término de un lado a otro cambiando su signo; esto se conoce comúnmente como *transposición*. Observe que como la ecuación original puede escribirse en la forma  $2x + (-6) = 0$ , es una ecuación lineal.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23



#### EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación lineal

Resuelva  $2(p + 4) = 7p + 2$ .

**Solución:** Primero, se quitan los paréntesis. Después se agrupan los términos semejantes y se resuelve. Se tiene que

$$\begin{aligned} 2(p + 4) &= 7p + 2 \\ 2p + 8 &= 7p + 2 && \text{(propiedad distributiva)} \\ 2p &= 7p - 6 && \text{(al restar 8 de ambos lados)} \\ -5p &= -6 && \text{(al restar } 7p \text{ de ambos lados)} \\ p &= \frac{-6}{-5} && \text{(al dividir ambos lados entre } -5) \\ p &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27



#### EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación lineal

Resuelva  $\frac{7x + 3}{2} - \frac{9x - 8}{4} = 6$ .

**Solución:** Primero se eliminan las fracciones al multiplicar *ambos* lados de la ecuación por el mínimo común denominador (MCD), que es 4. Después se realizan varias operaciones algebraicas para obtener una solución. Así,

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{7x + 3}{2} - \frac{9x - 8}{4}\right) &= 4(6) \\ 4 \cdot \frac{7x + 3}{2} - 4 \cdot \frac{9x - 8}{4} &= 24 && \text{(propiedad distributiva)} \\ 2(7x + 3) - (9x - 8) &= 24 && \text{(al simplificar)} \\ 14x + 6 - 9x + 8 &= 24 && \text{(propiedad distributiva)} \\ 5x + 14 &= 24 && \text{(al simplificar)} \\ 5x &= 10 && \text{(al restar 14 de ambos lados)} \\ x &= 2 && \text{(al dividir ambos lados entre 5)} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31



#### ADVERTENCIA

La propiedad distributiva requiere que ambos términos dentro del paréntesis se multipliquen por 4.

Toda ecuación lineal tiene exactamente una raíz.

Cada ecuación de los ejemplos 3 a 5 tiene una sola raíz. Esto es cierto para toda ecuación lineal en una variable.

#### Ecuaciones con literales

Las ecuaciones en las que algunas de las constantes no están especificadas pero están representadas por letras, como  $a$ ,  $b$ ,  $c$  o  $d$ , se llaman **ecuaciones con literales** y las letras se conocen como **constants literales**. Por ejemplo, en la ecuación con literales  $x + a = 4b$ , puede considerarse  $a$  y  $b$  como constantes arbitrarias. Las fórmulas como  $I = Prt$ , que expresan una relación entre ciertas cantidades, pueden considerarse como ecuaciones con literales. Si se quiere expresar una letra en particular en términos de las otras, esta letra es considerada la incógnita.

### EJEMPLO 6 Resolución de ecuaciones con literales

- a. La ecuación  $I = Prt$  es la fórmula para el interés simple  $I$  sobre un capital de  $P$  dólares a una tasa de interés anual  $r$  en un periodo de  $t$  años. Expresé  $r$  en términos de  $I$ ,  $P$  y  $t$ .

**Solución:** Aquí se considera que  $r$  es la incógnita. Para aislar a  $r$ , se divide ambos lados entre  $Pt$ . Se tiene

$$\begin{aligned} I &= Prt \\ \frac{I}{Pt} &= \frac{Prt}{Pt} \\ \frac{I}{Pt} &= r \text{ entonces } r = \frac{I}{Pt} \end{aligned}$$

Cuando se dividen ambos lados entre  $Pt$ , se supone que  $Pt \neq 0$ , puesto que no es posible dividir entre 0. Se harán suposiciones semejantes al resolver otras ecuaciones con literales.

- b. La ecuación  $S = P + Prt$  es la fórmula para el valor  $S$  de una inversión de un capital de  $P$  dólares a una tasa de interés anual simple  $r$  durante un periodo de  $t$  años. Resuelva para  $P$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} S &= P + Prt \\ S &= P(1 + rt) \quad (\text{al factorizar}) \\ \frac{S}{1 + rt} &= P \quad (\text{al dividir ambos lados entre } 1 + rt) \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 87



### EJEMPLO 7 Resolución de una ecuación con literales

Resuelva  $(a + c)x + x^2 = (x + a)^2$  para  $x$ .

**Solución:** Primero debe simplificarse la ecuación y después colocar todos los términos que incluyan  $x$  en un lado:

$$\begin{aligned} (a + c)x + x^2 &= (x + a)^2 \\ ax + cx + x^2 &= x^2 + 2ax + a^2 \\ ax + cx &= 2ax + a^2 \\ cx - ax &= a^2 \\ x(c - a) &= a^2 \\ x &= \frac{a^2}{c - a} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 89



### EJEMPLO 8 Resolución del problema del “impuesto en un recibo”

Recuerde a Lesley Griffith, que se mencionó en el problema que aparece en los primeros párrafos de este capítulo. Ahora se generalizará esa situación para ilustrar con mayor profundidad el uso de ecuaciones con literales. Lesley tiene un recibo por una cantidad  $R$  y ella sabe que la tasa del impuesto sobre las ventas es  $p$ . Lesley desea conocer la cantidad que fue pagada por concepto de impuesto sobre la venta. Se sabe que

$$\text{precio} + \text{impuesto} = \text{recibo (monto del)}$$

Si se escribe  $P$  para denotar el precio (el cual todavía no se conoce), el impuesto es  $(p/100)P$  de manera que se tiene

$$\begin{aligned} P + \frac{p}{100}P &= R \\ P \left(1 + \frac{p}{100}\right) &= R \\ P &= \frac{R}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)} \\ &= \frac{R}{\frac{100+p}{100}} \\ &= \frac{100R}{100+p} \end{aligned}$$

Se sigue que el impuesto pagado es

$$R - P = R - \frac{100R}{100+p} = R \left(1 - \frac{100}{100+p}\right) = R \left(\frac{p}{100+p}\right)$$

donde sería necesario verificar las manipulaciones con fracciones, y proporcionar más detalle, si fuera necesario. Recuerde que la tasa del impuesto francés es de 19.6% y el impuesto italiano es de 18%. Se concluye que Lesley sólo tiene que multiplicar un recibo francés por  $\frac{19.6}{119.6} \approx 0.16388$  para determinar el impuesto que contiene, mientras que para un recibo italiano debe multiplicar la cantidad por  $\frac{18}{118}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 107



## Ecuaciones fraccionarias

Una **ecuación fraccionaria** es una ecuación en la que hay una incógnita en un denominador. En esta sección, se demostrará que al resolver una ecuación no lineal de este tipo puede obtenerse una ecuación lineal.

### EJEMPLO 9 Resolución de una ecuación fraccionaria

$$\text{Resuelva } \frac{5}{x-4} = \frac{6}{x-3}.$$

**Solución:**

**Estrategia** Primero se escribe la ecuación de manera que no tenga fracciones. Después se utilizan las técnicas algebraicas estándar para resolver la ecuación lineal resultante.

Al multiplicar ambos lados por el MCD,  $(x-4)(x-3)$ , se tiene

$$\begin{aligned} (x-4)(x-3) \left(\frac{5}{x-4}\right) &= (x-4)(x-3) \left(\frac{6}{x-3}\right) \\ 5(x-3) &= 6(x-4) \quad (\text{ecuación lineal}) \\ 5x-15 &= 6x-24 \\ 9 &= x \end{aligned}$$

Una solución alternativa, que evita multiplicar ambos lados por el MCD, es la siguiente:

$$\frac{5}{x-4} - \frac{6}{x-3} = 0$$

Si se supone que  $x$  no es 3 ni 4, y se combinan las fracciones se obtiene

$$\frac{9-x}{(x-4)(x-3)} = 0$$

Una fracción puede ser 0 sólo cuando su numerador es 0 y su denominador no lo es. Así que  $x = 9$ .

En el primer paso, se multiplica cada lado por una expresión que incluya a la *variable*  $x$ . Como se mencionó con anterioridad, esto significa que no se tiene garantía de que la última ecuación sea equivalente a la *original*. Así que es necesario verificar si 9 satisface o no la ecuación *original*. Como

$$\frac{5}{9-4} = \frac{5}{5} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{6}{9-3} = \frac{6}{6} = 1$$

se observa que 9 sí satisface la ecuación original.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 55



Algunas ecuaciones que no son lineales no tienen solución. En ese caso se deduce que el conjunto solución es el **conjunto vacío**, que se denota por  $\emptyset$ . En el ejemplo 10 se ilustra lo anterior.

### EJEMPLO 10 Resolución de ecuaciones fraccionarias

a. Resuelva  $\frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4} = \frac{12}{x^2-2x-8}$ .

**Solución:** Al observar los denominadores y notar que

$$x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$$

se concluye que el MCD es  $(x + 2)(x - 4)$ . Al multiplicar ambos lados por el MCD, se obtiene

$$\begin{aligned} (x+2)(x-4) \left( \frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4} \right) &= (x+2)(x-4) \cdot \frac{12}{(x+2)(x-4)} \\ (x-4)(3x+4) - (x+2)(3x-5) &= 12 \\ 3x^2 - 8x - 16 - (3x^2 + x - 10) &= 12 \\ 3x^2 - 8x - 16 - 3x^2 - x + 10 &= 12 \\ -9x - 6 &= 12 \\ -9x &= 18 \\ x &= -2 \end{aligned} \tag{2}$$

Sin embargo, la ecuación *original* no está definida para  $x = -2$  (no es posible dividir entre cero), de modo que no existen raíces. Así, el conjunto solución es  $\emptyset$ . Aunque  $-2$  es una solución de la ecuación (2), no lo es de la ecuación *original*.

b. Resuelva  $\frac{4}{x-5} = 0$ .

**Solución:** La única manera en que una fracción puede ser igual a cero es cuando el numerador es 0, pero su denominador no. Como el numerador, 4, nunca es 0, el conjunto solución es  $\emptyset$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 49 

### EJEMPLO 11 Ecuación con literales

Si  $s = \frac{u}{au+v}$ , exprese  $u$  en términos de las letras restantes; esto es, resuelva para  $u$ .

**Solución:**

**Estrategia** Como la incógnita,  $u$ , está en el denominador, primero se quitan las fracciones y después se resuelve para  $u$ .

$$s = \frac{u}{au+v}$$

$$s(au+v) = u \quad (\text{al multiplicar ambos lados por } au+v)$$

$$sau + sv = u$$

$$sau - u = -sv$$

$$u(sa-1) = -sv$$

$$u = \frac{-sv}{sa-1} = \frac{sv}{1-sa}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 91 

## Ecuaciones con radicales

Una **ecuación con radicales** es aquélla en la que una incógnita aparece en un radicando. Los dos ejemplos siguientes ilustran las técnicas empleadas para resolver tales ecuaciones.

### EJEMPLO 12 Resolución de una ecuación con radicales

Resuelva  $\sqrt{x^2 + 33} - x = 3$ .

**Solución:** Para resolver esta ecuación radical, se elevan ambos lados a la misma potencia para eliminar el radical. Esta operación *no* garantiza la equivalencia, de modo que es necesario verificar las “soluciones” resultantes. Se comienza por aislar el radical en un lado. Después se elevan al cuadrado ambos lados y se despeja utilizando las técnicas estándar. Así,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 33} &= x + 3 \\ x^2 + 33 &= (x + 3)^2 \quad (\text{al elevar al cuadrado ambos lados}) \\ x^2 + 33 &= x^2 + 6x + 9 \\ 24 &= 6x \\ 4 &= x\end{aligned}$$

Por sustitución debe mostrarse que 4 es en realidad una raíz.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 79

Con algunas ecuaciones radicales, puede ser necesario elevar ambos lados a la misma potencia en más de una ocasión, como se muestra en el ejemplo 13.

### EJEMPLO 13 Resolución de una ecuación con radicales

Resuelva  $\sqrt{y - 3} - \sqrt{y} = -3$ .

**Solución:** Cuando una ecuación tiene dos términos que involucran radicales, primero se escribe de modo que en cada lado haya un radical, si es posible. Después se eleva al cuadrado y se resuelve. Se obtiene:

$$\begin{aligned}\sqrt{y - 3} &= \sqrt{y} - 3 \\ y - 3 &= y - 6\sqrt{y} + 9 \quad (\text{al elevar al cuadrado ambos lados}) \\ 6\sqrt{y} &= 12 \\ \sqrt{y} &= 2 \\ y &= 4 \quad (\text{al elevar al cuadrado ambos lados})\end{aligned}$$

Al sustituir 4 en el lado izquierdo de la ecuación *original* se obtiene  $\sqrt{1} - \sqrt{4}$  que es  $-1$ . Como este resultado no es igual al del lado derecho,  $-3$ , no existe solución. Esto es, el conjunto solución es  $\emptyset$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 77

**La razón por la que se desea un radical en cada lado es para evitar elevar al cuadrado un binomio con dos radicales diferentes.**

## Problemas 0.7

En los problemas 1 a 6, determine por sustitución cuáles de los números dados satisfacen la ecuación, si es que alguno lo hace.

- \*1.  $9x - x^2 = 0$ ; 1, 0
- 2.  $12 - 7x = -x^2$ ; 4, 3
- 3.  $z + 3(z - 4) = 5$ ;  $\frac{17}{4}$ , 4
- 4.  $2x + x^2 - 8 = 0$ ; 2,  $-4$
- 5.  $x(6 + x) - 2(x + 1) - 5x = 4$ ;  $-2$ , 0
- 6.  $x(x + 1)^2(x + 2) = 0$ ; 0,  $-1$ , 2

En los problemas 7 a 16, determine qué operaciones se aplicaron a la primera ecuación para obtener la segunda. Establezca si las operaciones garantizan o no que las ecuaciones sean equivalentes. No resuelva las ecuaciones.

- 7.  $x - 5 = 4x + 10$ ;  $x = 4x + 15$
- 8.  $8x - 4 = 16$ ;  $x - \frac{1}{2} = 2$
- 9.  $x = 4$ ;  $x^3 = 64$
- 10.  $2x^2 + 4 = 5x - 7$ ;  $x^2 + 2 = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$
- 11.  $x^2 - 2x = 0$ ;  $x - 2 = 0$

12.  $\frac{2}{x-2} + x = x^2; 2 + x(x-2) = x^2(x-2)$

13.  $\frac{x^2-1}{x-1} = 3; x^2 - 1 = 3(x-1)$

14.  $(x+3)(x+11)(x+7) = (x+3)(x+2); (x+11)(x+7) = x+2$

15.  $\frac{2x(3x+1)}{2x-3} = 2x(x+4); 3x+1 = (x+4)(2x-3)$

16.  $2x^2 - 9 = x; x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{9}{2}$

Resuelva las ecuaciones 17 a 80.

17.  $4x = 10$

18.  $0.2x = 7$

19.  $3y = 0$

20.  $2x - 4x = -5$

21.  $-8x = 12 - 20$

22.  $4 - 7x = 3$

\*23.  $5x - 3 = 9$

24.  $\sqrt{2}x + 3 = 8$

25.  $7x + 7 = 2(x+1)$

26.  $4s + 3s - 1 = 41$

\*27.  $5(p-7) - 2(3p-4) = 3p$

28.  $t = 2 - 2[2t - 3(1-t)]$

29.  $\frac{x}{5} = 2x - 6$

30.  $\frac{5y}{7} - \frac{6}{7} = 2 - 4y$

\*31.  $7 + \frac{4x}{9} = \frac{x}{2}$

32.  $\frac{x}{3} - 4 = \frac{x}{5}$

33.  $r = \frac{4}{3}r - 5$

34.  $\frac{3x}{5} + \frac{5x}{3} = 9$

35.  $3x + \frac{x}{5} - 5 = \frac{1}{5} + 5x$

36.  $y - \frac{y}{2} + \frac{y}{3} - \frac{y}{4} = \frac{y}{5}$

37.  $\frac{2y-3}{4} = \frac{6y+7}{3}$

38.  $\frac{t}{4} + \frac{5}{3}t = \frac{7}{2}(t-1)$

39.  $w - \frac{w}{2} + \frac{w}{6} - \frac{w}{24} = 120$

40.  $\frac{7+2(x+1)}{5} = \frac{6x}{5}$

41.  $\frac{x+2}{3} - \frac{2-x}{6} = x-2$

42.  $\frac{x}{5} + \frac{2(x-4)}{10} = 7$

43.  $\frac{9}{5}(3-x) = \frac{3}{4}(x-3)$

44.  $\frac{2y-7}{3} + \frac{8y-9}{14} = \frac{3y-5}{21}$

45.  $\frac{4}{3}(5x-2) = 7[x-(5x-2)]$

46.  $(2x-5)^2 + (3x-3)^2 = 13x^2 - 5x + 7$

47.  $\frac{5}{x} = 25$

48.  $\frac{4}{x-1} = 2$

\*49.  $\frac{7}{3-x} = 0$

50.  $\frac{3x-5}{x-3} = 0$

51.  $\frac{3}{5-2x} = \frac{7}{2}$

52.  $\frac{x+3}{x} = \frac{2}{5}$

53.  $\frac{q}{5q-4} = \frac{1}{3}$

54.  $\frac{4p}{7-p} = 1$

\*55.  $\frac{1}{p-1} = \frac{2}{p-2}$

56.  $\frac{2x-3}{4x-5} = 6$

57.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

58.  $\frac{2}{x-1} = \frac{3}{x-2}$

59.  $\frac{3x-2}{2x+3} = \frac{3x-1}{2x+1}$

60.  $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+1}{3-x} = 0$

61.  $\frac{y-6}{y} - \frac{6}{y} = \frac{y+6}{y-6}$

62.  $\frac{y-2}{y+2} = \frac{y-2}{y+3}$

63.  $\frac{-5}{2x-3} = \frac{7}{3-2x} + \frac{11}{3x+5}$

64.  $\frac{1}{x-3} - \frac{3}{x-2} = \frac{4}{1-2x}$

65.  $\frac{9}{x-3} = \frac{3x}{x-3}$

66.  $\frac{x}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{3x-4}{x^2-9}$

67.  $\sqrt{x+5} = 4$

68.  $\sqrt{z-2} = 3$

69.  $\sqrt{3x-4} - 8 = 0$

70.  $4 - \sqrt{3x+1} = 0$

71.  $\sqrt{\frac{x}{2} + 1} = \frac{2}{3}$

72.  $(x+6)^{1/2} = 7$

73.  $\sqrt{4x-6} = \sqrt{x}$

74.  $\sqrt{4+3x} = \sqrt{2x+5}$

75.  $(x-5)^{3/4} = 27$

\*76.  $\sqrt{y^2-9} = 9-y$

77.  $\sqrt{y} + \sqrt{y+2} = 3$

78.  $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 1$

\*79.  $\sqrt{z^2+2z} = 3+z$

80.  $\sqrt{\frac{1}{w}} - \sqrt{\frac{2}{5w-2}} = 0$

En los problemas 81 a 92, exprese el símbolo indicado en términos de los símbolos restantes.

81.  $I = Prt; r$

82.  $P\left(1 + \frac{p}{100}\right) - R = 0; P$

83.  $p = 8q - 1; q$

84.  $p = -3q + 6; q$

85.  $S = P(1+rt); r$

86.  $r = \frac{2mI}{B(n+1)}; I$

\*87.  $A = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}; R$

88.  $S = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}; R$

\*89.  $r = \frac{d}{1-dt}; t$

90.  $\frac{x-a}{b-x} = \frac{x-b}{a-x}; x$

\*91.  $r = \frac{2mI}{B(n+1)}; n$

92.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}; q$

93. **Geometría** Use la fórmula  $P = 2l + 2w$  para encontrar la longitud  $l$  de un rectángulo cuyo perímetro  $P$  es de 660 m y cuyo ancho  $w$  es de 160 m.

94. **Geometría** Use la fórmula  $V = \pi r^2 h$  para encontrar la altura  $h$  de una lata de refresco cuyo volumen  $V$  es de 355 ml y cuyo radio  $r$  es 2 cm.



95. **Impuesto de venta** Un agente de ventas necesita calcular el costo de un artículo cuyo impuesto de venta de 8.25%. Escriba una ecuación que represente el costo total  $c$  de un artículo que cuesta  $x$  dólares.

96. **Ingreso** El ingreso mensual total de una guardería por concepto del cuidado de  $x$  niños está dado por  $r = 450x$ , y sus

costos mensuales totales son  $c = 380x + 3500$ . ¿Cuántos niños necesitan inscribirse mensualmente para alcanzar el punto de equilibrio? En otras palabras, ¿cuándo los ingresos igualan a los costos?

- 97. Depreciación lineal** Si usted compra un artículo para uso empresarial, puede repartir su costo entre toda la vida útil del artículo cuando prepare la declaración de impuestos. Esto se denomina *depreciación*. Un método de depreciación es la *depreciación lineal*, en la cual la depreciación anual se calcula al dividir el costo del artículo, menos su valor de rescate, entre su vida útil. Suponga que el costo es  $C$  dólares, la vida útil es  $N$  años y no hay valor de rescate. Entonces el valor  $V$  (en dólares) del artículo al final de  $n$  años está dado por

$$V = C \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

Si el mobiliario nuevo de una oficina se compró por \$3200, tiene una vida útil de 8 años y no tiene valor de rescate, ¿después de cuántos años tendrá un valor de \$2000?

- 98. Señal de radar** Cuando se utiliza un radar para determinar la velocidad de un automóvil en una carretera, se envía una señal que es reflejada por el automóvil en movimiento. La diferencia  $F$  (en ciclos por segundo) de la frecuencia entre la señal original y la reflejada está dada por

$$F = \frac{vf}{334.8}$$

donde  $v$  es la velocidad del automóvil en millas por hora y  $f$  es la frecuencia de la señal original (en megaciclos por segundo).

Suponga que usted está manejando en una autopista que tiene un límite de velocidad de 65 millas por hora. Un oficial de policía dirige la señal de radar con una frecuencia de 2450 megaciclos por segundo a su auto, y observa que la diferencia en las frecuencias es de 495 ciclos por segundo. ¿Puede reclamarle por conducir a exceso de velocidad?



- 99. Ahorros** Bronwyn y Steve quieren comprar una casa, de manera que han decidido ahorrar, cada uno, la quinta parte de sus salarios. Bronwyn gana \$27.00 por hora y recibe un ingreso adicional de \$18.00 a la semana, por declinar las prestaciones de la compañía, mientras que Steve gana \$35.00 por hora más prestaciones. Entre los dos, quieren ahorrar al menos \$550.00 cada semana. ¿Cuántas horas debe trabajar cada uno de ellos cada semana?

- 100. Relación presa-depredador** Para estudiar cierta relación presa-depredador, se realizó un experimento<sup>4</sup> en el que un sujeto con los ojos vendados, el “depredador”, se puso al frente de

una mesa cuadrada de 3 pies por lado en la que se colocaron discos de papel de lija, a manera de “presa”. Durante un minuto el “depredador” buscó los discos palpando con un dedo. Siempre que se encontraba con un disco lo retiraba y reanudaba la búsqueda. El experimento se repitió con varias densidades de los discos (número de discos por 9 pies cuadrados). Se estimó que si  $y$  es el número de discos que se han retirado en 1 minuto cuando hay  $x$  discos sobre la mesa, entonces

$$y = a(1 - bx)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. Resuelva esta ecuación para  $y$ .

- 101. Densidad de presas** En cierta área, el número  $y$  de larvas de polilla que ha consumido un solo escarabajo a lo largo de un periodo determinado, está dado por

$$y = \frac{1.4x}{1 + 0.09x}$$

donde  $x$  es la *densidad de presas* (el número de larvas por unidad de área). ¿Qué densidad de larvas le permitiría sobrevivir a un escarabajo, si necesita consumir 10 larvas a lo largo del periodo dado?

- 102. Horas de servicio** Suponga que fuera constante la razón del número de horas que una tienda de video está abierta, al número de clientes diarios. Cuando la tienda está abierta 8 horas, el número de clientes es 92 menos que el número máximo de clientes. Cuando la tienda está abierta 10 horas, el número de clientes es 46 menos que el número máximo de clientes. Escriba una ecuación que describa esta situación y determine el número máximo de clientes diarios.

- 103. Tiempo de viaje** El tiempo que le toma a un bote viajar una distancia dada río arriba (en contra de la corriente) puede calcularse al dividir la distancia entre la diferencia de la velocidad del bote y la velocidad de la corriente. Escriba una ecuación para calcular el tiempo  $t$  que le toma a un bote, que se mueve a una velocidad  $r$  en contra de una corriente  $c$ , recorrer una distancia  $d$ . Resuelva su ecuación para  $c$ .

- 104. Torre inalámbrica** Una torre inalámbrica tiene 100 metros de altura. Un ingeniero determina electrónicamente que la distancia desde la punta de la torre hasta una casa cercana es 1 metro mayor que la distancia horizontal desde la base de la torre hasta la casa. Escriba una ecuación para la diferencia en términos de la distancia horizontal desde la base de la torre hasta la casa. Resuelva la ecuación y posteriormente determine la distancia desde la punta de la torre hasta la casa.

- 105. Derrape de un automóvil** La policía ha usado la fórmula  $s = \sqrt{30fd}$  para estimar la velocidad  $s$  (en millas por hora) de un automóvil, que derrapó un tramo de  $d$  pies al frenar. La literal  $f$  es el coeficiente de fricción, determinado por la clase de camino [como concreto, asfalto, grava o chapopote (brea)] y si está húmedo o seco. En la tabla 0.1 se dan algunos valores de  $f$ . ¿A 45 millas por hora, aproximadamente cuántos pies derrapará un automóvil en un camino de concreto seco? Redondee su respuesta al pie más cercano.

TABLA 0.1

	Concreto	Chapopote
Húmedo	0.4	0.5
Seco	0.8	1.0

<sup>4</sup>C. S. Holling, “Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism”, *Canadian Entomologist* 91, núm. 7 (1959), 385-98.

- 106. Interés ganado** Allison Bennett descubre que tiene \$1257 en una cuenta de ahorros que no ha usado por un año. La tasa de interés fue de 7.3% compuesto anualmente. ¿Cuánto interés ganó por esa cuenta a lo largo del último año?

- \*107. Impuesto en un recibo** En Nueva Escocia los consumidores pagan HST (*un impuesto de ventas*) de 15%. Tom Wood viaja desde Alberta, que tiene sólo el impuesto federal GST (*por bienes y servicios*) de 7%, hasta Nueva Escocia a una conferencia sobre química. Cuando después envía su reporte de gastos en Alberta, el contador se encuentra con el problema que su multiplicador usual de  $\frac{7}{107}$  para determinar los impuestos en un recibo no produce los resultados correctos. ¿Qué porcentaje de los recibos que trajo Tom de Nueva Escocia son por el HST?

En los problemas 108 a 111 utilice una calculadora graficadora para determinar cuáles de los números especificados son raíces de las ecuaciones dadas.

108.  $112x^2 = 6x + 1$ ;  $\frac{1}{8}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{14}$

109.  $8x^3 + 11x + 21 = 58x^2$ ;  $5, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

110.  $\frac{3.1t - 7}{4.8t - 2} = 7$ ;  $\sqrt{6}, -\frac{47}{52}, \frac{14}{61}$

111.  $\left(\frac{v}{v+3}\right)^2 = v$ ;  $0, \frac{27}{4}, \frac{13}{3}$

## OBJETIVO

Resolver ecuaciones cuadráticas por medio de factorización o mediante el uso de la fórmula cuadrática.

## 0.8 Ecuaciones cuadráticas

Para aprender a resolver problemas más complejos, se abordarán los métodos de solución de *ecuaciones cuadráticas*.

### DEFINICIÓN

Una **ecuación cuadrática** en la variable  $x$  es una ecuación que puede escribirse de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

donde  $a, b$  y  $c$  son constantes y  $a \neq 0$ .

Una ecuación cuadrática también se conoce como *ecuación de segundo grado* o una *ecuación de grado dos*, puesto que la potencia más grande que aparece en ella es la segunda. Mientras que una ecuación lineal sólo tiene una raíz, una ecuación cuadrática puede tener dos raíces diferentes.

### Solución por factorización

Un método útil para resolver ecuaciones cuadráticas se basa en la factorización, como lo muestran los ejemplos siguientes.

#### EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

- a. Resuelva  $x^2 + x - 12 = 0$ .

**Solución:** El lado izquierdo se factoriza con facilidad:

$$(x - 3)(x + 4) = 0$$

Considere  $x - 3$  y  $x + 4$  como dos cantidades cuyo producto es cero. **Siempre que el producto de dos o más cantidades sea cero, entonces, al menos una de ellas debe ser cero.** Esto significa que

$$x - 3 = 0 \quad \text{o bien} \quad x + 4 = 0$$

Al resolver estas ecuaciones se tiene que  $x = 3$  y  $x = -4$ . Por lo tanto, las raíces de la ecuación original son  $3$  y  $-4$ , y el conjunto solución es  $\{-4, 3\}$ .

- b. Resuelva  $6w^2 = 5w$ .

**Solución:** La ecuación se escribe como

$$6w^2 - 5w = 0$$

de modo que un lado sea 0. Al factorizar se obtiene

$$w(6w - 5) = 0$$



### ADVERTENCIA

No se dividen ambos lados entre  $w$  (una variable) porque la equivalencia no está garantizada y puede "perderse" una raíz.

Si se hace cada factor igual a cero, se tiene

$$w = 0 \quad \text{o} \quad 6w - 5 = 0$$

$$w = 0 \quad \text{o} \quad 6w = 5$$

Por lo tanto, las raíces son  $w = 0$  y  $w = \frac{5}{6}$ . Observe que si se hubiera dividido ambos miembros de  $6w^2 = 5w$  entre  $w$  y se hubiera obtenido  $6w = 5$ , la única solución sería  $w = \frac{5}{6}$ . Esto es, se habría perdido la raíz  $w = 0$ . Esto confirma el análisis de la operación 5 en la sección 0.7.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3



### ADVERTENCIA

Un problema como éste debe abordarse con cuidado. Si el producto de dos cantidades es igual a  $-2$ , no es cierto que al menos una de las dos cantidades deba ser  $-2$ . ¿Por qué?

### EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación cuadrática por factorización

*Resuelva*  $(3x - 4)(x + 1) = -2$ .

**Solución:** Primero se multiplican los factores del lado izquierdo:

$$3x^2 - x - 4 = -2$$

Al reescribirla de modo que 0 aparezca en un lado, se tiene

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

$$(3x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -\frac{2}{3}, 1$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7



Algunas ecuaciones que no son cuadráticas pueden resolverse por factorización, como lo muestra el ejemplo 3.

### EJEMPLO 3 Resolución de ecuaciones de grado superior por factorización

a. *Resuelva*  $4x - 4x^3 = 0$ .

**Solución:** Ésta es una *ecuación de tercer grado*. Se resuelve de la siguiente manera:

$$4x - 4x^3 = 0$$

$$4x(1 - x^2) = 0 \quad (\text{al factorizar})$$

$$4x(1 - x)(1 + x) = 0 \quad (\text{al factorizar})$$

Al hacer cada uno de los factores igual a cero, se obtiene  $4 = 0$  (lo cual es imposible),  $x = 0$ ,  $1 - x = 0$ , o bien  $1 + x = 0$ . Así,

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1 \quad \text{o} \quad x = -1$$

de manera que el conjunto solución es  $\{-1, 0, 1\}$ .

b. *Resuelva*  $x(x + 2)^2(x + 5) + x(x + 2)^3 = 0$ .

**Solución:** Tras factorizar  $x(x + 2)^2$  en ambos términos del lado izquierdo, se tiene

$$x(x + 2)^2[(x + 5) + (x + 2)] = 0$$

$$x(x + 2)^2(2x + 7) = 0$$

De aquí que,  $x = 0$ ,  $x + 2 = 0$ , o bien  $2x + 7 = 0$ , de lo cual se concluye que el conjunto solución es  $\{-\frac{7}{2}, -2, 0\}$ .



### ADVERTENCIA

No olvide que el factor  $x$  da lugar a una raíz.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23



 **EJEMPLO 4** Una ecuación fraccionaria que conduce a una ecuación cuadrática

Resuelva

$$\frac{y+1}{y+3} + \frac{y+5}{y-2} = \frac{7(2y+1)}{y^2+y-6} \quad (2)$$

**Solución:** Al multiplicar ambos lados por el MCD,  $(y+3)(y-2)$ , se obtiene

$$(y-2)(y+1) + (y+3)(y+5) = 7(2y+1) \quad (3)$$

Como la ecuación (2) se multiplicó por una expresión que incluye a la variable  $y$ , recuerde (sección 0.7) que la ecuación (3) no es necesariamente equivalente a la (2). Después de simplificar la ecuación (3) se tiene

$$\begin{aligned} 2y^2 - 7y + 6 &= 0 && \text{(ecuación cuadrática)} \\ (2y-3)(y-2) &= 0 && \text{(al factorizar)} \end{aligned}$$

Se ha mostrado que *si*  $y$  satisface la ecuación original *entonces*  $y = \frac{3}{2}$  o  $y = 2$ . Por lo tanto,  $\frac{3}{2}$  y 2 son las únicas raíces *posibles* de la ecuación dada. Pero 2 no puede ser raíz de la ecuación (2) puesto que la sustitución conduce a un denominador de 0. Sin embargo, puede verificarse que  $\frac{3}{2}$  en verdad satisface la ecuación *original*. Por lo tanto su única raíz es  $\frac{3}{2}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 53 



**ADVERTENCIA**

No concluya de inmediato que la solución de  $x^2 = 3$  consiste sólo en  $x = \sqrt{3}$ .

 **EJEMPLO 5** Solución por factorización

Resuelva  $x^2 = 3$ .

**Solución:**

$$x^2 = 3$$

$$x^2 - 3 = 0$$

Factorizando, se obtiene

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

Por lo tanto,  $x - \sqrt{3} = 0$  o bien  $x + \sqrt{3} = 0$ , de modo que  $x = \pm\sqrt{3}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9 

Una forma más general de la ecuación  $x^2 = 3$ , es  $u^2 = k$ . Igual que antes, puede mostrarse que

$$\text{Si } u^2 = k \quad \text{entonces} \quad u = \pm\sqrt{k}. \quad (4)$$

**Fórmula cuadrática**

Resolver ecuaciones cuadráticas por factorización puede ser muy difícil, esto será evidente al tratar ese método en la ecuación  $0.7x^2 - \sqrt{2}x - 8\sqrt{5} = 0$ . Sin embargo, existe una fórmula llamada *fórmula cuadrática* que proporciona las raíces de cualquier ecuación cuadrática.

**Fórmula cuadrática**

Las raíces de la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$ , donde  $a, b$  y  $c$  son constantes y  $a \neq 0$ , están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En realidad la fórmula cuadrática no es difícil de obtener si primero se escribe la ecuación cuadrática de la forma

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

y después como

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - K^2 = 0$$

para un número  $K$ , que aún debe determinarse. Esto conduce a

$$\left(x + \frac{b}{2a} - K\right) \left(x + \frac{b}{2a} + K\right) = 0$$

lo que a su vez lleva a  $x = -\frac{b}{2a} + K$  o bien  $x = -\frac{b}{2a} - K$  mediante los métodos que ya se han considerado. No es difícil inferir lo que debe ser  $K$ , pero se requiere un razonamiento más profundo para entender cómo es posible descubrir el valor de  $K$  sin conocer previamente la respuesta.

### EJEMPLO 6 Una ecuación cuadrática con dos raíces reales

*Resuelva  $4x^2 - 17x + 15 = 0$  mediante la fórmula cuadrática.*

**Solución:** Aquí  $a = 4$ ,  $b = -17$  y  $c = 15$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(4)(15)}}{2(4)} \\ &= \frac{17 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{17 \pm 7}{8} \end{aligned}$$

Las raíces son  $\frac{17+7}{8} = \frac{24}{8} = 3$  y  $\frac{17-7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

### EJEMPLO 7 Una ecuación cuadrática con una raíz real

*Resuelva  $2 + 6\sqrt{2}y + 9y^2 = 0$  mediante la fórmula cuadrática.*

**Solución:** Vea el acomodo de los términos. Aquí  $a = 9$ ,  $b = 6\sqrt{2}$  y  $c = 2$ . Así que,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2(9)}$$

Y por ende,

$$y = \frac{-6\sqrt{2} + 0}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{o bien} \quad y = \frac{-6\sqrt{2} - 0}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Por lo tanto, la única raíz es  $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 33

### EJEMPLO 8 Una ecuación cuadrática sin raíces reales

*Resuelva  $z^2 + z + 1 = 0$  mediante la fórmula cuadrática.*

**Solución:** Aquí  $a = 1$ ,  $b = 1$  y  $c = 1$ . Las raíces son

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Ahora bien,  $\sqrt{-3}$  denota un número cuyo cuadrado es  $-3$ . Sin embargo, no existe tal número real, puesto que el cuadrado de todo número real es no negativo. Entonces, la ecuación no tiene raíces reales.<sup>5</sup>

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37

### ESTO DESCRIBE LA NATURALEZA DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA.

De los ejemplos 6 al 8 puede verse que una ecuación cuadrática tiene dos diferentes raíces reales, exactamente una raíz real, o bien no tiene raíces reales, dependiendo de que  $b^2 - 4ac > 0$ ,  $= 0$  o  $< 0$ , respectivamente.

## TECNOLOGÍA

Mediante la característica de programación de una calculadora graficadora, puede crearse un programa que proporcione las raíces reales de la ecuación cuadrática  $Ax^2 + Bx + C = 0$ . La figura 0.3 muestra un programa para la calculadora graficadora TI-83 Plus. A fin de ejecutarlo

```
PROGRAM: QUADROOT
:Prompt A,B,C
:If B^2-4AC<0
:Then
:Disp "NOREALROO
T"
:Stop
:End■
```

```
PROGRAM: QUADROOT
:Disp (-B+√(B^2-4
AC))/(2A)
:Disp (-B-√(B^2-4
AC))/(2A)■
```

```
PRGMQUADROOT
A=?20
B=?-33
C=?10
1.25
.4
Done■
```

**FIGURA 0.3** Programa para encontrar las raíces reales de  $Ax^2 + Bx + C = 0$ .

para

$$20x^2 - 33x + 10 = 0,$$

se le pide que introduzca los valores de A, B y C (vea la figura 0.4). Las raíces resultantes son  $x = 1.25$  y  $x = 0.4$ .

**FIGURA 0.4** Raíces de  $20x^2 - 33x + 10 = 0$ .

## Ecuaciones de formas cuadráticas

Algunas veces, una ecuación que no es cuadrática puede transformarse en cuadrática por medio de una sustitución adecuada. En ese caso se dice que la ecuación dada tiene **forma cuadrática**. El ejemplo siguiente lo ilustrará.

### EJEMPLO 9 Resolución de una ecuación que tiene forma cuadrática

$$\text{Resuelva } \frac{1}{x^6} + \frac{9}{x^3} + 8 = 0.$$

**Solución:** Esta ecuación puede escribirse como

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{x^3}\right) + 8 = 0$$

entonces es cuadrática en  $1/x^3$ , por lo que tiene forma cuadrática. Al sustituir la variable  $w$  por  $1/x^3$  se obtiene una ecuación cuadrática en la variable  $w$ , la cual puede resolverse:

$$w^2 + 9w + 8 = 0$$

$$(w + 8)(w + 1) = 0$$

$$w = -8 \quad \text{o} \quad w = -1$$



### ADVERTENCIA

No suponga que  $-8$  y  $-1$  son soluciones de la ecuación *original*.

<sup>5</sup>  $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$  puede expresarse como  $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$  donde  $i = \sqrt{-1}$  se denomina la *unidad imaginaria*. Debe enfatizarse que  $i = \sqrt{-1}$  no es un número real. Los números complejos tienen la forma  $a + ib$ , en donde  $a$  y  $b$  son reales, pero no se estudian en este libro.

Si se regresa a la variable  $x$ , se tiene

$$\frac{1}{x^3} = -8 \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{x^3} = -1$$

Así,

$$x^3 = -\frac{1}{8} \quad \text{o bien} \quad x^3 = -1$$

de donde se concluye que

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{o bien} \quad x = -1$$

Al verificar, se encuentra que estos valores de  $x$  satisfacen la ecuación original.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 49



## Problemas 0.8

Resuelva por factorización los problemas 1 a 30.

- |  |  |
|--|--|
| <b>1.</b> $x^2 - 4x + 4 = 0$             | <b>2.</b> $t^2 + 3t + 2 = 0$               |
| <b>*3.</b> $t^2 - 8t + 15 = 0$           | <b>4.</b> $x^2 + 3x - 10 = 0$              |
| <b>5.</b> $x^2 - 2x - 3 = 0$             | <b>6.</b> $x^2 - 16 = 0$                   |
| <b>*7.</b> $u^2 - 13u = -36$             | <b>8.</b> $3w^2 - 12w + 12 = 0$            |
| <b>*9.</b> $x^2 - 4 = 0$                 | <b>10.</b> $3u^2 - 6u = 0$                 |
| <b>11.</b> $t^2 - 5t = 0$                | <b>12.</b> $x^2 + 9x = -14$                |
| <b>13.</b> $4x^2 + 1 = 4x$               | <b>14.</b> $2z^2 + 9z = 5$                 |
| <b>15.</b> $v(3v - 5) = -2$              | <b>16.</b> $2 + x - 6x^2 = 0$              |
| <b>17.</b> $-x^2 + 3x + 10 = 0$          | <b>18.</b> $\frac{1}{7}y^2 = \frac{3}{7}y$ |
| <b>19.</b> $2p^2 = 3p$                   | <b>20.</b> $-r^2 - r + 12 = 0$             |
| <b>21.</b> $x(x + 4)(x - 1) = 0$         | <b>22.</b> $(w - 3)^2(w + 1)^2 = 0$        |
| <b>*23.</b> $t^3 - 49t = 0$              | <b>24.</b> $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$           |
| <b>25.</b> $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0$        | <b>26.</b> $(x + 1)^2 - 5x + 1 = 0$        |
| <b>27.</b> $(x - 3)(x^2 - 4) = 0$        | <b>28.</b> $5(x^2 + x - 12)(x - 8) = 0$    |
| <b>29.</b> $p(p - 3)^2 - 4(p - 3)^3 = 0$ | <b>30.</b> $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$            |

En los problemas 31 a 44, encuentre todas las raíces reales con el uso de la fórmula cuadrática.

- |                                  |                                       |
|----------------------------------|---------------------------------------|
| <b>*31.</b> $x^2 + 2x - 24 = 0$  | <b>32.</b> $x^2 - 2x - 15 = 0$        |
| <b>*33.</b> $4x^2 - 12x + 9 = 0$ | <b>34.</b> $q^2 - 5q = 0$             |
| <b>35.</b> $p^2 - 2p - 7 = 0$    | <b>36.</b> $2 - 2x + x^2 = 0$         |
| <b>*37.</b> $4 - 2n + n^2 = 0$   | <b>38.</b> $2x^2 + x = 5$             |
| <b>39.</b> $4x^2 + 5x - 2 = 0$   | <b>40.</b> $w^2 - 2w + 1 = 0$         |
| <b>41.</b> $0.02w^2 - 0.3w = 20$ | <b>42.</b> $0.01x^2 + 0.2x - 0.6 = 0$ |
| <b>43.</b> $2x^2 + 4x = 5$       | <b>44.</b> $-2x^2 - 6x + 5 = 0$       |

En los problemas 45 a 54, resuelva la ecuación de forma cuadrática dada.

- |  |
|--|
| <b>45.</b> $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$                    |
| <b>46.</b> $X^4 - 3X^2 - 10 = 0$                   |
| <b>47.</b> $\frac{3}{x^2} - \frac{7}{x} + 2 = 0$   |
| <b>48.</b> $x^{-2} + x^{-1} - 12 = 0$              |
| <b>*49.</b> $x^{-4} - 9x^{-2} + 20 = 0$            |
| <b>50.</b> $\frac{1}{x^4} - \frac{9}{x^2} + 8 = 0$ |

**51.**  $(X - 5)^2 + 7(X - 5) + 10 = 0$

**52.**  $(3x + 2)^2 - 5(3x + 2) = 0$

**\*53.**  $\frac{1}{(x - 2)^2} - \frac{12}{x - 2} + 35 = 0$

**54.**  $\frac{2}{(x + 4)^2} + \frac{7}{x + 4} + 3 = 0$

Resuelva por cualquier método los problemas 55 a 76.

**55.**  $x^2 = \frac{x + 3}{2}$

**56.**  $\frac{x}{2} = \frac{7}{x} - \frac{5}{2}$

**57.**  $\frac{3}{x - 4} + \frac{x - 3}{x} = 2$

**58.**  $\frac{2}{2x + 1} - \frac{6}{x - 1} = 5$

**59.**  $\frac{3x + 2}{x + 1} - \frac{2x + 1}{2x} = 1$

**60.**  $\frac{6(w + 1)}{2 - w} + \frac{w}{w - 1} = 3$

**61.**  $\frac{2}{r - 2} - \frac{r + 1}{r + 4} = 0$

**62.**  $\frac{2x - 3}{2x + 5} + \frac{2x}{3x + 1} = 1$

**63.**  $\frac{t + 1}{t + 2} + \frac{t + 3}{t + 4} = \frac{t + 5}{t^2 + 6t + 8}$

**64.**  $\frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x} = \frac{4}{x + 2}$

**65.**  $\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x(x - 1)} = \frac{2}{x^2}$

**66.**  $5 - \frac{3(x + 3)}{x^2 + 3x} = \frac{1 - x}{x}$

**67.**  $\sqrt{2x - 3} = x - 3$

**68.**  $3\sqrt{x + 4} = x - 6$

**69.**  $q + 2 = 2\sqrt{4q - 7}$

**70.**  $x + \sqrt{4x} - 5 = 0$

**71.**  $\sqrt{z + 3} - \sqrt{3z} - 1 = 0$

**72.**  $\sqrt{x} - \sqrt{2x - 8} - 2 = 0$

**73.**  $\sqrt{x} - \sqrt{2x + 1} + 1 = 0$

74.  $\sqrt{y-2} + 2 = \sqrt{2y+3}$

75.  $\sqrt{x+3} + 1 = 3\sqrt{x}$

76.  $\sqrt{\sqrt{t}+2} = \sqrt{3t-1}$

En los problemas 77 y 78, encuentre las raíces redondeadas a dos posiciones decimales.

77.  $0.04x^2 - 2.7x + 8.6 = 0$

78.  $0.01x^2 + 0.2x - 0.6 = 0$

**79. Geometría** El área de un dibujo rectangular, que tiene un ancho de 2 pulgadas menor que el largo, es de 48 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles son las dimensiones del dibujo?

**80. Temperatura** La temperatura se ha incrementado  $X$  grados por día durante  $X$  días. Hace  $X$  días fue de 15 grados. Hoy es de 51 grados. ¿Cuánto se ha incrementado la temperatura por día? ¿Durante cuántos días se ha estado incrementando?

**81. Economía** Una raíz de la ecuación proveniente de la economía

$$\bar{M} = \frac{Q(Q+10)}{44}$$

es  $-5 + \sqrt{25 + 44\bar{M}}$ . Verifíquela utilizando la fórmula cuadrática para despejar  $Q$  en términos de  $\bar{M}$ . Aquí  $Q$  es el ingreso real y  $\bar{M}$  es el nivel de oferta de dinero.

**82. Dieta para ratas** Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales en ratas alimentadas con una dieta que contenía 10% de proteínas.<sup>6</sup> La proteína estaba compuesta de levadura y harina de maíz. Al cambiar el porcentaje  $P$  (expresado como un decimal) de levadura en la mezcla proteínica, el grupo estimó que el promedio de aumento de peso  $g$  (en gramos) de una rata, durante cierto periodo, estaba dado por

$$g = -200P^2 + 200P + 20$$

¿Cuál es el porcentaje de levadura que proporciona un aumento promedio de peso de 60 gramos?

**83. Posología** Existen varias reglas para determinar la dosis de medicinas adecuada para los niños una vez que se ha especificado la de los adultos. Tales reglas pueden tener como base el peso, la altura, etcétera. A continuación se presentan dos reglas en donde  $A$  es la edad del niño,  $d$  es la dosis para adulto y  $c$  la dosis para niño:

$$\text{Regla de Young: } c = \frac{A}{A+12}d$$

$$\text{Regla de Cowling: } c = \frac{A+1}{24}d$$

¿A qué edad las dosis para niños son las mismas bajo ambas reglas? Redondee su respuesta al año más cercano. Se presume que el niño se ha convertido en adulto cuando  $c = d$ . ¿A qué edad un niño se convierte en adulto de acuerdo con la regla de Cowling? ¿Y según la regla de Young? Si sabe cómo graficar funciones, grafique tanto  $Y(A) = \frac{A}{A+12}$  y  $C(A) = \frac{A+1}{24}$

como funciones de  $A$ , para  $A \geq 0$ , en el mismo plano. Con el empleo de las gráficas, haga una comparación más razonada de las reglas de Young y Cowling que la que se logra sólo cuando la edad en ambas coinciden.



**84. Precio de envío de un bien** En un análisis acerca del precio de envío de un bien desde una fábrica a un cliente, DeCanio<sup>7</sup> plantea y resuelve las dos ecuaciones cuadráticas siguientes

$$(2n-1)v^2 - 2nv + 1 = 0$$

y

$$nv^2 - (2n+1)v + 1 = 0$$

donde  $n \geq 1$ .

(a) Resuelva la primera ecuación para  $v$ .

(b) Resuelva la segunda ecuación para  $v$  si  $v < 1$ .

**85. Movimiento** Suponga que la altura  $h$  de un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba desde el piso está dada por

$$h = 39.2t - 4.9t^2,$$

donde  $h$  está en metros y  $t$  es el tiempo transcurrido en segundos.

(a) ¿Después de cuántos segundos el objeto cae al piso?

(b) ¿Cuándo se encuentra a una altura de 68.2 m?

En los problemas 86 a 91 utilice un programa para determinar las raíces reales de la ecuación. Redondee las respuestas a tres posiciones decimales. Para los problemas 86 y 87, confirme sus resultados de manera algebraica.

86.  $2x^2 - 3x - 27 = 0$

87.  $8x^2 - 18x + 9 = 0$

88.  $10x^2 + 5x - 2 = 0$

89.  $27x^2 - \frac{11}{8}x + 5 = 0$

90.  $\frac{9}{2}z^2 - 6.3 = \frac{z}{3}(1.1 - 7z)$

91.  $(\pi t - 4)^2 = 4.1t - 3$

<sup>6</sup>Adaptado de R. Bressani, "The use of Yeast in Human Foods", en R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (eds.), *Single-Cell Protein* (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

<sup>7</sup>S. J. DeCanio, "Delivered Pricing and Multiple Basing Point Equilibria: A Revolution", *Quarterly Journal of Economics* 99, núm. 2 (1984), 329-49.

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Modelado del comportamiento de una celda de carga<sup>8</sup>

Una celda de carga es un dispositivo que mide una fuerza, como el peso, y lo traduce en una señal eléctrica. Las celdas de carga se encuentran en muchas aplicaciones, por ejemplo, en las básculas de baño. Cuando usted se pone de pie sobre la báscula, la celda de carga traduce la fuerza que su cuerpo ejerce sobre la plataforma en una señal eléctrica de voltaje variable, dependiendo de su peso. La señal eléctrica se convertirá en la información digital que aparece en la pantalla de la báscula.

Como todo dispositivo de medición, las celdas de carga tienen que ser predecibles y consistentes. Aunque una báscula de baño poco confiable no sobrevivirá en el mercado por mucho tiempo, probablemente no se considerará como un artículo peligroso. La confiabilidad en otras aplicaciones de las celdas de carga a menudo es considerablemente más seria. Las herramientas de elevación, como las grúas, deben contener celdas de carga que informen cuando el equipo esté alcanzando su límite de operación segura. En una aplicación de este tipo, un error puede resultar desastroso.

Un requerimiento común es que la salida de voltaje,  $V$ , esté vinculada con la fuerza de entrada,  $F$ , mediante una ecuación lineal como la que se analizó en la sección 0.7:

$$V = aF + b$$

Una respuesta lineal permite una sencilla transformación de voltaje a una lectura digital.

Suponga que una compañía que fabrica celdas de carga para grúas coloca una celda de prueba durante un ensayo de calibración, y obtiene los datos siguientes (la fuerza se mide en miles de libras y el voltaje en voltios).

Fuerza	Voltaje	Fuerza	Voltaje
150.000	0.11019	1650.000	1.20001
300.000	0.21956	1800.000	1.30822
450.000	0.32949	1950.000	1.41599
600.000	0.43899	2100.000	1.52399
750.000	0.54803	2250.000	1.63194
900.000	0.65694	2400.000	1.73947
1050.000	0.76562	2550.000	1.84646
1200.000	0.87487	2700.000	1.95392
1350.000	0.98292	2850.000	2.06128
1500.000	1.09146	3000.000	2.16844

Si la celda de carga funciona de manera adecuada, una ecuación lineal será un buen modelo para estos datos. En



otras palabras, al ubicar los valores de los datos como puntos en una gráfica, debe ser posible trazar una recta que pase a través de todos los puntos dentro de un margen de error aceptable.

Las matemáticas necesarias para determinar la recta que mejor modela los datos no son triviales. Por fortuna, una calculadora graficadora puede hacerlo de manera automática. El resultado es

$$V = 0.0007221F + 0.006081368 \quad (5)$$

Al graficar tanto los datos como la ecuación se obtiene el resultado que se muestra en la figura 0.5.

Parece como si en verdad el modelo lineal coincidiera adecuadamente, pero, ¿es lo suficientemente bueno? Enseguida se verán las diferencias entre los voltajes medidos y los valores respectivos que pronostica el modelo lineal. Para cada magnitud de la fuerza en la tabla de datos, se resta del voltaje medido el voltaje correspondiente pronosticado mediante la ecuación (5).

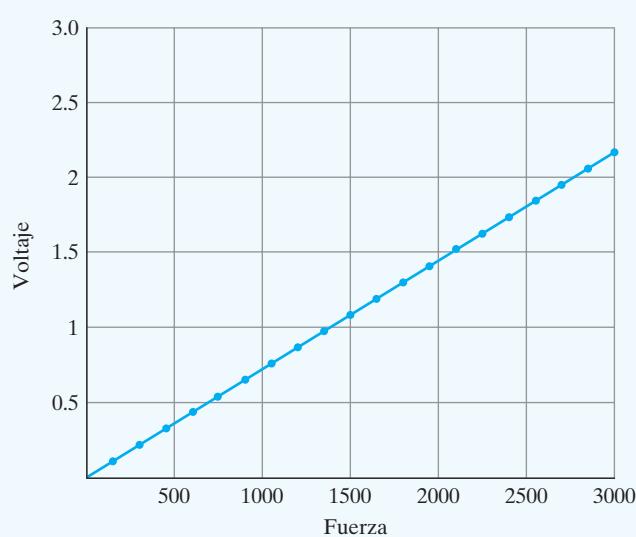


FIGURA 0.5 El modelo lineal.

<sup>8</sup>Basado en la sección 4.6.1 de *Engineering Statistics Handbook*, National Institute of Standards and Technology/SEMATECH, [www.nist.gov/itl/div898/handbook/pmd/section6/pmd61.htm](http://www.nist.gov/itl/div898/handbook/pmd/section6/pmd61.htm).

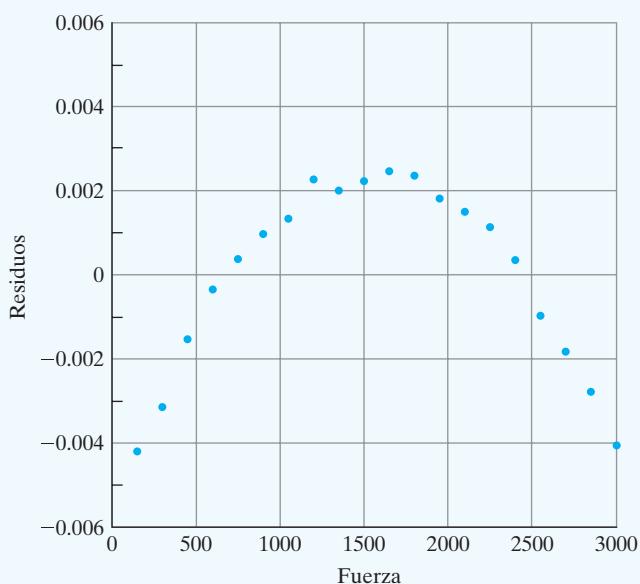


FIGURA 0.6 Gráfica de los residuos.

Por ejemplo, para el valor de fuerza, 450000, se calcula  $0.32949 - (0.0007221(450000) + 0.006081368) = -0.00154$

Las diferencias calculadas se denominan los *residuos*.

Si se calcula el residuo correspondiente para cada valor de fuerza entonces es posible graficar puntos con coordenadas horizontales, dadas por la fuerza, y coordenadas verticales, dadas por los residuos, como en la figura 0.6.

Por ejemplo, uno de los puntos graficados es (450000, -0.00154).

En apariencia, los datos que se localizan a la mitad de la figura 0.5 están ligeramente por arriba de la recta (residuos positivos), mientras que los que se encuentran en los extremos de la recta están ligeramente debajo de ella (residuos negativos). En otras palabras, el patrón de los datos tiene una ligera curvatura, la cual se hace evidente sólo cuando se grafican los residuos y se hace un “acercamiento” en la escala vertical.

La gráfica de los residuos parece una parábola (vea el capítulo 3). Puesto que la ecuación de una parábola tiene un término cuadrático, es de esperarse que una ecuación cuadrática sea un mejor modelo para predecir los datos, que uno lineal. Con base en la función de regresión cuadrática de una calculadora graficadora, se obtiene la ecuación

$$V = (-3.22693 \times 10^{-9})F^2 + 0.000732265F - 0.000490711$$

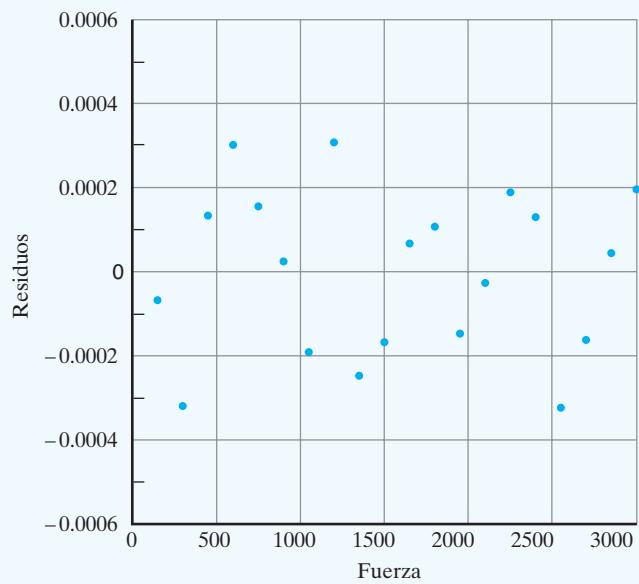
El coeficiente pequeño en el término de  $F$  al cuadrado indica una ligera falta de linealidad en los datos.

La ligera falta de linealidad obligará al fabricante de celdas de carga a tomar una decisión. Por un lado, una respuesta no lineal de la celda de carga podría producir mediciones pe-

ligrosamente imprecisas en algunas aplicaciones, en especial si la celda se utilizará para medir fuerzas que se encuentren fuera del rango de la prueba. (Las grúas montadas en barcos de carga algunas veces sostienen pesos de hasta 5000 toneladas o 10 millones de libras.) Por otra parte, todos los procesos de manufactura implican un compromiso entre lo que es ideal y lo que es factible en la práctica.

## Problemas

- Introduzca los valores de fuerza y voltaje como dos listas separadas en una calculadora graficadora, y luego utilice la función de regresión lineal del menú de estadística para generar una ecuación de regresión. Compare su resultado con la ecuación lineal dada en el análisis precedente.
- En la mayoría de las calculadoras graficadoras, si usted multiplica la lista de fuerzas por 0.0007221 y suma 0.006081368 y luego resta el resultado de la lista de voltajes, tendrá la lista de residuos. ¿Por qué se obtiene esto? Almacene los residuos como una nueva lista: luego grafíquelos y compare sus resultados con la figura 0.6.
- Utilice la función de regresión cuadrática de la calculadora graficadora para generar una nueva ecuación de regresión. Compare su resultado con la ecuación del análisis precedente.
- El modelo cuadrático también tiene residuos, que cuando se grafican se observan de la siguiente manera:



Compare la escala del eje vertical con la respectiva de la figura 0.6. ¿Qué le sugiere esta comparación? ¿Qué sugiere el patrón de los datos para los residuos cuadráticos?

# 1

## APLICACIONES Y MÁS ÁLGEBRA

- 1.1 Aplicaciones de ecuaciones
- 1.2 Desigualdades lineales
- 1.3 Aplicaciones de las desigualdades
- 1.4 Valor absoluto
- 1.5 Notación de sumatoria
- 1.6 Repaso

**E**n este capítulo se aplicarán las ecuaciones a diferentes situaciones cotidianas. Después se hará lo mismo con las desigualdades, que son proposiciones en las que una cantidad es menor que ( $<$ ), mayor que ( $>$ ), menor o igual que ( $\leq$ ), o mayor o igual que ( $\geq$ ) alguna otra cantidad.

Una aplicación de las desigualdades consiste en la regulación de equipamiento deportivo. En un juego típico de las ligas mayores, se utilizan docenas de pelotas de béisbol, y no sería lógico esperar que todas pesasen exactamente  $5\frac{1}{8}$  onzas; pero es razonable pedir que cada una pese no menos de 5 onzas ni más de  $5\frac{1}{4}$ , que es lo que señalan las reglas oficiales ([www.majorleaguebaseball.com](http://www.majorleaguebaseball.com)). Observe que *no menos que* es sinónimo de *mayor o igual que*, mientras que *no más que* es sinónimo de *menor o igual que*. Cuando se traducen los enunciados verbales a términos matemáticos, el primer paso es procurar evitar las palabras negativas. De cualquier forma, se tiene

$$\text{peso de la pelota} \geq 5 \text{ onzas} \quad \text{y} \quad \text{peso de la pelota} \leq 5\frac{1}{4} \text{ onzas}$$

que pueden combinarse para obtener

$$5 \text{ onzas} \leq \text{peso de la pelota} \leq 5\frac{1}{4} \text{ onzas}$$

que resulta más sencillo de leer si se dice que la pelota debe pesar entre 5 y  $5\frac{1}{4}$  onzas (*entre* incluye los valores extremos).

Se aplica otra desigualdad en el caso de los veleros de las carreras de la Copa América, la cual se efectúa cada tres o cuatro años. La International America's Cup Class (IACC) emplea la siguiente regla para definir un yate:

$$\frac{L + 1.25 \sqrt{S} - 9.8\sqrt[3]{DSP}}{0.679} \leq 24.000 \text{ m}$$

El símbolo “ $\leq$ ” significa que la expresión del lado izquierdo debe ser menor o igual a los 24 m del lado derecho.  $L$ ,  $S$  y  $DSP$  se especifican mediante complicadas fórmulas, pero en términos generales,  $L$  es la longitud,  $S$  es el área de las velas y  $DSP$  es el desplazamiento (el volumen del casco bajo la línea de flotación).

La fórmula de la IACC permite a los diseñadores de Yates cierta flexibilidad. Suponga que un yate tiene  $L = 20.2$  m,  $S = 282$  m<sup>2</sup> y  $DSP = 16.4$  m<sup>3</sup>. Como la fórmula es una desigualdad, el diseñador podría reducir el área de las velas y dejar sin cambios la longitud y el desplazamiento. Sin embargo, los valores típicos de  $L$ ,  $S$  y  $DSP$  son tales que hacen que la expresión de lado izquierdo resulte tan cercana como sea posible a 24 m.

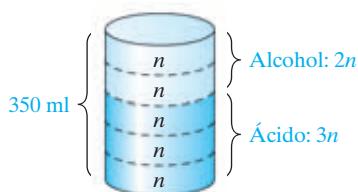
Además de analizar algunas aplicaciones de ecuaciones y desigualdades lineales, en este capítulo se revisará el concepto de valor absoluto y se introducirá la notación de la sumatoria.



Grabación de calidad variable

**OBJETIVO**

Modelar situaciones que se describen por medio de ecuaciones lineales o cuadráticas.



**FIGURA 1.1** Solución química (ejemplo 1).

**ADVERTENCIA**

Observe que la solución a una ecuación no es necesariamente la solución al problema dado.

## 1.1 Aplicaciones de ecuaciones

En la mayoría de los casos, para resolver problemas prácticos, deben traducirse las relaciones a símbolos matemáticos. Esto se conoce como *modelado*. Los ejemplos siguientes ilustran las técnicas y conceptos básicos. Examine cada uno de ellos de manera cuidadosa antes de pasar a los ejercicios.

### EJEMPLO 1 Mezcla

*Un químico debe preparar 350 ml de una solución compuesta por dos partes de alcohol y tres partes de ácido. ¿Cuánto debe utilizar de cada una?*

**Solución:** Sea  $n$  el número de mililitros de cada parte. La figura 1.1 muestra la situación. A partir del diagrama se tiene

$$2n + 3n = 350$$

$$5n = 350$$

$$n = \frac{350}{5} = 70$$

Pero  $n = 70$  no es la respuesta al problema original. Cada parte tiene 70 ml. La cantidad de alcohol es  $2n = 2(70) = 140$ , y la cantidad de ácido es  $3n = 3(70) = 210$ . Así, el químico debe utilizar 140 ml de alcohol y 210 ml de ácido. Este ejemplo muestra cómo un diagrama es útil para plantear un problema escrito.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

### EJEMPLO 2 Plataforma de observación

*Se construirá una plataforma rectangular de observación que dominará un valle [vea la figura 1.2(a)]. Sus dimensiones serán de 6 m por 12 m. Habrá un cobertizo rectangular de 40 m<sup>2</sup> de área en el centro de la plataforma. La parte descubierta consistirá de un pasillo de anchura uniforme. ¿Cuál debe ser el ancho de este pasillo?*

**Solución:** La figura 1.2(b) muestra un diagrama de la plataforma. Sea  $w$  el ancho (en metros) del pasillo. Entonces, la parte destinada al cobertizo tiene dimensiones de  $12 - 2w$  por  $6 - 2w$ . Como su área debe ser de 40 m<sup>2</sup>, donde área = (largo)(ancho), se tiene

$$(12 - 2w)(6 - 2w) = 40$$

$$72 - 36w + 4w^2 = 40 \quad (\text{al multiplicar})$$

$$4w^2 - 36w + 32 = 0$$

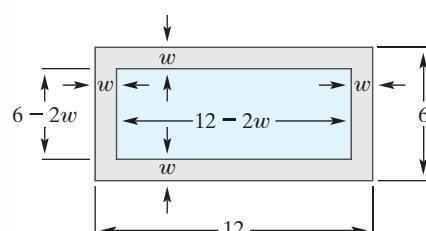
$$w^2 - 9w + 8 = 0 \quad (\text{al dividir ambos lados entre } 4)$$

$$(w - 8)(w - 1) = 0$$

$$w = 8, 1$$



(a)



(b)

**FIGURA 1.2** Pasillo en la plataforma (ejemplo 2).

Aunque 8 es una solución de la ecuación, *no* es la respuesta del problema, puesto que una de las dimensiones de la plataforma es de sólo 6 m. Así, la única solución posible es que el pasillo mida 1 m de ancho.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7



**Las palabras clave que se presentan aquí son costo fijo, costo variable, costo total, ingreso total y utilidad. Éste es el momento de familiarizarse con dichos términos porque se utilizarán a lo largo del libro.**

En el ejemplo siguiente se hace referencia a algunos términos de negocios y a su relación con una compañía manufacturera. **Costo fijo** es la suma de todos los costos que son independientes del nivel de producción, como renta, seguros, etcétera. Este costo debe pagarse independientemente de que la fábrica produzca o no. **Costo variable** es la suma de todos los costos dependientes del nivel de producción, como mano de obra y materiales. **Costo total** es la suma de los costos variable y fijo:

$$\text{costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}$$

**Ingreso total** es el dinero que un fabricante recibe por la venta de su producción:

$$\text{ingreso total} = (\text{precio por unidad}) (\text{número de unidades vendidas})$$

**Utilidad** es el ingreso total menos el costo total:

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

### EJEMPLO 3 Utilidad

*La compañía Anderson fabrica un producto para el cual el costo variable por unidad es de \$6 y el costo fijo de \$80 000. Cada unidad tiene un precio de venta de \$10. Determine el número de artículos que deben venderse para obtener una utilidad de \$60 000.*

**Solución:** Sea  $q$  el número de unidades que deben venderse (en muchos problemas de administración de negocios,  $q$  representa la cantidad). Entonces, el costo variable (en dólares) es  $6q$ . Por lo tanto, el costo total será  $6q + 80\,000$ . El ingreso total por la venta de  $q$  unidades es  $10q$ . Como

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

el modelo para este problema es

$$60\,000 = 10q - (6q + 80\,000)$$

Al resolver se obtiene

$$60\,000 = 10q - 6q - 80\,000$$

$$140\,000 = 4q$$

$$35\,000 = q$$

Por lo tanto, deben venderse 35 000 unidades para obtener una ganancia de \$60 000.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



### EJEMPLO 4 Precios

*Sportcraft produce ropa deportiva para dama y planea vender su nueva línea de pantalones a las tiendas minoristas. El costo para ellos será de \$33 por pantalón. Para mayor comodidad del minorista, Sportcraft colocará una etiqueta con el precio en cada par de pantalones. ¿Qué cantidad debe ser impresa en las etiquetas de modo que el minorista pueda reducir este precio en un 20% durante una venta y aún obtener una ganancia de 15% sobre el costo?*

**Solución:** Tome en cuenta el hecho de que

$$\text{precio de venta} = \text{costo por pantalón} + \text{utilidad por pantalón}$$

Observe que  $\text{precio} = \text{costo} + \text{utilidad}$ .

Sea  $p$  el precio en dólares impreso en la etiqueta de cada pantalón. Durante la venta, el minorista realmente recibe  $p - 0.2p$ . Esto debe ser igual al costo, 33, más la utilidad,  $(0.15)(33)$ . Por ende,

$$\begin{aligned} \text{precio de venta} &= \text{costo} + \text{utilidad} \\ p - 0.2p &= 33 + (0.15)(33) \\ 0.8p &= 37.95 \\ p &= 47.4375 \end{aligned}$$

Desde un punto de vista práctico, el fabricante debe imprimir las etiquetas con un precio de \$47.44.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

### EJEMPLO 5 Inversión

Se invirtió un total de \$10 000 en acciones de dos compañías, A y B. Al final del primer año, A y B tuvieron rendimientos de 6% y  $5\frac{3}{4}\%$ , respectivamente, sobre las inversiones originales. ¿Cuál fue la cantidad original asignada a cada empresa, si la utilidad total fue de \$588.75?

**Solución:** Sea  $x$  la cantidad, en dólares, invertida al 6%. Entonces se invirtió  $10\,000 - x$  al  $5\frac{3}{4}\%$ . El interés ganado en A fue  $(0.06)(x)$  y en B fue  $(0.0575)(10\,000 - x)$ , que en total asciende a 588.75. De ahí que,

$$\begin{aligned} (0.06)x + (0.0575)(10\,000 - x) &= 588.75 \\ 0.06x + 575 - 0.0575x &= 588.75 \\ 0.0025x &= 13.75 \\ x &= 5500 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se invirtieron \$5500 al 6%, y  $\$10\,000 - \$5500 = \$4500$  al  $5\frac{3}{4}\%$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

### EJEMPLO 6 Redención de un bono

El consejo de administración de Maven Corporation acuerda redimir algunos de sus bonos en dos años. Para entonces se requerirán \$1 102 500. Suponga que en la actualidad la compañía reserva \$1 000 000. ¿A qué tasa de interés compuesto anual, capitalizado anualmente, debe invertirse este dinero a fin de que su valor futuro sea suficiente para redimir los bonos?

**Solución:** Sea  $r$  la tasa de interés anual requerida. Al final del primer año, la cantidad acumulada será \$1 000 000 más el interés,  $1 000 000r$ , para un total de

$$1\,000\,000 + 1\,000\,000r = 1\,000\,000(1 + r)$$

Bajo interés compuesto, al final del segundo año la cantidad acumulada será de  $1\,000\,000(1 + r)$  más el interés de esto, que es  $1\,000\,000(1 + r)r$ . Así, el valor total al final del segundo año será

$$1\,000\,000(1 + r) + 1\,000\,000(1 + r)r$$

Esto debe ser igual a \$1 102 500:

$$1\,000\,000(1 + r) + 1\,000\,000(1 + r)r = 1\,102\,500 \quad (1)$$

Como  $1\,000\,000(1 + r)$  es un factor común de ambos términos del lado izquierdo, se tiene que

$$\begin{aligned} 1\,000\,000(1 + r)(1 + r) &= 1\,102\,500 \\ 1\,000\,000(1 + r)^2 &= 1\,102\,500 \\ (1 + r)^2 &= \frac{1\,102\,500}{1\,000\,000} = \frac{11\,025}{10\,000} = \frac{441}{400} \\ 1 + r &= \pm \sqrt{\frac{441}{400}} = \pm \frac{21}{20} \\ r &= -1 \pm \frac{21}{20} \end{aligned}$$

Así,  $r = -1 + (21/20) = 0.05$  o  $r = -1 - (21/20) = -2.05$ . Aunque  $0.05$  y  $-2.05$  son raíces de la ecuación (1), se rechaza  $-2.05$ , puesto que es necesario que  $r$  sea positiva. Así que  $r = 0.05$ , de modo que la tasa buscada es  $5\%$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

A veces puede haber más de una manera de modelar un problema escrito, como lo muestra el ejemplo 7.

### EJEMPLO 7 Renta de un departamento

*Una compañía de bienes raíces es propietaria del conjunto de departamentos Jardines de Parklane, que comprende 96 departamentos (pisos). Si la renta es de \$550 mensuales, todos los departamentos se ocupan. Sin embargo, por cada \$25 mensuales de aumento en la renta, se tendrán tres departamentos desocupados sin posibilidad de que se renten. La compañía quiere recibir \$54 600 mensuales de rentas. ¿Cuál debe ser la renta mensual de cada departamento?*

**Solución:**

**Método I:** Suponga que  $r$  es la renta (en dólares) que se cobrará por cada departamento. Entonces el incremento sobre el nivel de \$550 es  $r - 550$ . Así, el número de

aumentos de \$25 es  $\frac{r - 550}{25}$ . Como cada aumento de \$25 causa que tres departamen-

tos se desocupen, el número total de departamentos vacantes será  $3\left(\frac{r - 550}{25}\right)$ . De aquí que el número total de departamentos rentados será  $96 - 3\left(\frac{r - 550}{25}\right)$ . Como renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados) se tiene

$$\begin{aligned} 54\,600 &= r \left[ 96 - \frac{3(r - 550)}{25} \right] \\ 54\,600 &= r \left[ \frac{2400 - 3r + 1650}{25} \right] \\ 54\,600 &= r \left[ \frac{4050 - 3r}{25} \right] \\ 1\,365\,000 &= r(4050 - 3r) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$3r^2 - 4050r + 1\,365\,000 = 0$$

Mediante la fórmula cuadrática,

$$\begin{aligned} r &= \frac{4050 \pm \sqrt{(-4050)^2 - 4(3)(1\,365\,000)}}{2(3)} \\ &= \frac{4050 \pm \sqrt{22\,500}}{6} = \frac{4050 \pm 150}{6} = 675 \pm 25 \end{aligned}$$

Así que la renta para cada departamento debe ser de \$650 o \$700.

**Método II.** Suponga que  $n$  es el número de incrementos de \$25. Entonces el aumento en la renta por departamento será  $25n$  y habrá  $3n$  departamentos vacantes. Como renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados) se tiene

$$54\,600 = (550 + 25n)(96 - 3n)$$

$$54\,600 = 52\,800 + 750n - 75n^2$$

$$75n^2 - 750n + 1800 = 0$$

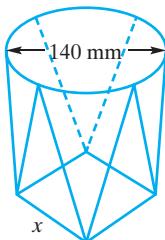
$$n^2 - 10n + 24 = 0$$

$$(n - 6)(n - 4) = 0$$

Así,  $n = 6$  o  $n = 4$ . La renta que debe cobrarse es  $550 + 25(6) = \$700$  o bien  $550 + 25(4) = \$650$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29

## Problemas 1.1

- 1. Cercado** Se colocará una cerca alrededor de un terreno rectangular de modo que el área cercada sea de 800 pies cuadrados y el largo del terreno sea el doble de su ancho. ¿Cuántos pies de cerca se utilizarán?
- 2. Geometría** El perímetro de un rectángulo es de 300 pies y su largo es dos veces el ancho. Determine las dimensiones del rectángulo.
- 3. Oruga lagarta** Uno de los insectos desfoliadores más perjudiciales es la oruga lagarta, que se alimenta del bosque, de plantas de sombra y de árboles frutales. Cierta persona vive en un área en la que esta oruga se ha convertido en un problema, y desea fumigar los árboles de su propiedad antes de que ocurra una mayor desfoliación. Necesita 145 onzas de una solución compuesta de 4 partes de insecticida *A* y 5 partes de insecticida *B*. Después de preparada, la solución se mezcla con agua. ¿Cuántas onzas de cada insecticida deben usarse?
- 4. Mezcla de concreto** Un constructor prepara cierto tipo de concreto, al mezclar una parte de cemento portland (hecho de cal y arcilla), 3 partes de arena y 5 partes de piedra pulverizada (en volumen). Si se necesitan 765 pies cúbicos de concreto, ¿cuántos pies cúbicos de cada ingrediente necesita el constructor?
- \***5. Acabado de muebles** De acuerdo con *The Consumer's Handbook* [Paul Fargis, ed. (Nueva York: Hawthorn, 1974)], un buen aceite para el acabado de muebles de madera contiene dos partes de aceite de linaza hervido y una parte de aguarrás. Si debe prepararse una pinta (16 onzas líquidas) de este producto, ¿cuántas onzas líquidas de aguarrás se necesitan?
- 6. Administración de bosques** Una compañía maderera posee un bosque de forma rectangular de 1 milla por 2 millas. Si la compañía corta una franja uniforme de árboles a lo largo de los bordes exteriores de este bosque, ¿cuál debe ser el ancho de la franja para conservar  $\frac{3}{4}$  de milla cuadrada de bosque?
- \***7. Vereda de jardín** Se va usar un terreno rectangular de 4 m por 8 m, para plantar un jardín. Se decide construir un corredor pavimentado en todo el borde, de manera que queden 12 metros cuadrados del terreno para cultivar flores. ¿Cuál debe ser el ancho del corredor?
- 8. Conducto de ventilación** El diámetro de un conducto de ventilación es de 140 mm, y está unido a un conducto cuadrado, como se muestra en la figura 1.3. Para asegurar un flujo suave de aire, las áreas de las secciones circular y cuadrada deben ser iguales. Redondeando al milímetro más cercano, ¿cuál debe ser la longitud *x* de un lado de la sección cuadrada?
- 
- FIGURA 1.3** Conducto de ventilación (problema 8).
- \***9. Utilidad** Una compañía de refinación de maíz produce gluten para alimento de ganado, con un costo variable de \$82 por tonelada. Si los costos fijos son \$120 000 al mes y el alimento se vende a \$134 la tonelada, ¿cuántas toneladas deben venderse al mes para que la compañía obtenga una utilidad mensual de \$560 000?
- 10. Ventas** La gerencia de la compañía Smith quiere saber cuántas unidades de su producto necesita vender para obtener una utilidad de \$150 000. Se cuenta con los siguientes datos: precio unitario de venta, \$50; costo variable por unidad, \$25; costo fijo total, \$500 000. A partir de esta información, determine las unidades que deben venderse.
- \***11. Inversión** Una persona desea invertir \$20 000 en dos empresas de modo que el ingreso total por año sea de \$1440. Una empresa paga el 6% anual; la otra tiene mayor riesgo y paga un  $7\frac{1}{2}\%$  anual. ¿Cuánto debe invertir en cada empresa?
- 
- 12. Inversión** Una persona invirtió \$20 000, parte a una tasa de interés de 6% anual y el resto al 7% anual. El interés total al final de un año fue equivalente a una tasa de  $6\frac{3}{4}\%$  anual sobre el total inicial de \$20 000. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa?
- \***13. Precios** El costo de un producto al menudeo es de \$3.40. Si el minorista desea obtener una ganancia del 20% sobre el precio de venta, ¿a qué precio debe vender el producto?
- 14. Retiro de bonos** En tres años, una compañía requerirá de \$1 125 800 con el fin de retirar algunos bonos. Si hoy invierte \$1 000 000 para este propósito, ¿cuál debe ser la tasa de interés, capitalizado anualmente, que debe recibir sobre este capital para retirar los bonos?
- \***15. Programa de expansión** En dos años, una compañía iniciará un programa de expansión. Ha decidido invertir \$3 000 000 ahora, de modo que en dos años el valor total de la inversión sea de \$3 245 000, la cantidad requerida para la expansión. ¿Cuál es la tasa de interés anual, compuesta anualmente, que la compañía debe recibir para alcanzar su objetivo?
- 16. Negocios** Una compañía determina que si produce y vende *q* unidades de un producto, el ingreso total por las ventas, en dólares, será  $100\sqrt{q}$ . Si el costo variable por unidad es de \$2 y el costo fijo de \$1200, encuentre los valores de *q* para los que
- $$\text{ingreso total por ventas} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}$$
- (Esto es, que la utilidad sea cero.)
- 17. Alojamiento en dormitorio** El dormitorio de una universidad puede alojar a 210 estudiantes. Este otoño hay cuartos disponibles para 76 jóvenes de nuevo ingreso. En promedio, un 95% de aquellos estudiantes de nuevo ingreso que pidieron una solicitud realmente reservan un cuarto. ¿Cuántas solicitudes debe distribuir el colegio si quiere recibir 76 reservaciones?
- 18. Encuestas** Se aplicó una encuesta a un grupo de personas, y el 20%, o 700, de ellas prefirió un nuevo producto que la marca de mayor venta. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
- 19. Salario de una guardia de prisión** Se reportó que en cierta prisión para mujeres, el salario de las guardias era 30% menor (\$200 menos) por mes, que el de los hombres que ejercen el mismo trabajo. Determine el salario anual de un guardia masculino. Redondee su respuesta al dólar más cercano.

- 20. Huelga de conductores** Hace algunos años, los transportistas de cemento sostuvieron una huelga durante 46 días. Antes de la huelga recibían \$7.50 por hora y trabajaban 260 días, 8 horas diarias durante un año. ¿Qué porcentaje de incremento en el ingreso anual fue necesario para compensar la pérdida de esos 46 días en un año?



- 21. Punto de equilibrio** Un fabricante de juegos de video, vende cada copia en \$21.95. El costo de fabricación de cada copia es de \$14.92. Los costos fijos mensuales son de \$8500. Durante el primer mes de ventas de un juego nuevo, ¿cuántos debe vender para llegar al punto de equilibrio (esto es, para que el ingreso total sea igual al costo total)?

- 22. Club de inversión** Un club de inversión compró un bono de una compañía petrolera por \$4000. El bono da un rendimiento de 7% anual. El club ahora quiere comprar acciones de una compañía de suministros para hospitales. El precio de cada acción es de \$15 y se gana un dividendo de \$0.60 al año por acción. ¿Cuántas acciones debe comprar el club para obtener el 6% anual de su inversión total en acciones y bonos?

- 23. Cuidado de la vista** Como un beneficio complementario para sus empleados, una compañía estableció un plan de cuidado de la vista. Bajo este plan, cada año la compañía paga los primeros \$35 de los gastos de cuidado de la vista y el 80% de todos los gastos adicionales de ese tipo, hasta cubrir un *total* máximo de \$100. Determine los gastos anuales totales en cuidado de la vista cubiertos por este programa para un empleado.



- 24. Control de calidad** El fabricante de una barra de dulce con centro de caramelo determinó que 3.1% de las barras habían sido devueltas por imperfecciones durante cierto tiempo.

- (a) Si  $c$  barras de dulce se fabrican en un año, ¿cuántas barras puede esperar el fabricante por concepto de devolución?  
 (b) Se proyecta que este año el consumo anual del dulce será de 600 millones de barras. ¿Cuántas barras aproximadamente tendrá que producir el fabricante, si toma en cuenta las devoluciones?

- 25. Negocios** Suponga que los clientes comprarán  $q$  unidades de un producto si el precio es de  $(80 - q)/4$  dólares *cada uno*. ¿Cuántas unidades deben venderse para que el ingreso por ventas sea de \$400?

- 26. Inversión** ¿En cuánto tiempo se triplicará una inversión a interés simple con una tasa del 4.5% anual? [Una pista: Vea el ejemplo 6(a) de la sección 0.7 y exprese el 4.5% como 0.045.]

- 27. Alternativas en los negocios** El inventor de un juguete nuevo ofrece a la compañía Kiddy Toy los derechos de exclusividad para su fabricación y venta por la suma total de \$25 000. Después de estimar que las posibles ventas futuras al cabo de

un año serán nulas, la compañía está revisando una propuesta alternativa: dar un pago total de \$2000 más una regalía de \$0.50 por cada unidad vendida. ¿Cuántas unidades deben venderse el primer año para hacer esta alternativa tan atractiva al inventor como la petición original? [Una pista: Determine cuándo son iguales los ingresos con ambas propuestas.]

- 28. Estacionamiento** Un estacionamiento mide 120 pies de largo por 80 pies de ancho. Debido a un incremento en el personal, se decidió duplicar el área del lote aumentando franjas de igual anchura en un extremo y en uno de los lados. Encuentre el ancho de cada franja.



- 29. Rentas** Usted es el jefe de asesores financieros de una compañía que posee un complejo con 50 oficinas. Si la renta es de \$400 mensuales, todas las oficinas se ocupan. Sin embargo, por cada incremento de \$20 mensuales se quedarán dos oficinas vacantes sin posibilidad de que sean ocupadas. La compañía quiere obtener un total de \$20 240 mensuales por concepto de rentas en ese complejo. Se le pide determinar la renta que debe cobrarse por cada oficina. ¿Cuál es su respuesta?

- 30. Inversión** Hace seis meses, una compañía de inversiones tenía una cartera de \$3 100 000, que consistía en acciones de primera y acciones atractivas. Desde entonces, el valor de la inversión en acciones de primera aumentó en  $\frac{1}{10}$ , mientras que el valor de las acciones atractivas disminuyó en  $\frac{1}{10}$ . El valor actual de la cartera es \$3 240 000. ¿Cuál es el valor *actual* de la inversión en acciones de primera?

- 31. Ingreso** El ingreso mensual de cierta compañía está dado por  $R = 800p - 7p^2$ , donde  $p$  es el precio en dólares del producto que fabrica esa compañía. ¿A qué precio el ingreso será de \$10 000, si el precio debe ser mayor de \$50?

- 32. Razón precio-utilidad** La razón *precio-utilidad* ( $P/U$ ) de una compañía es la razón que se obtiene al dividir el valor de mercado de una acción común en circulación, entre las utilidades por acción. Si  $P/U$  se incrementa en 10% y los ingresos por acción aumentan en 20%, determine el incremento porcentual en el valor de mercado por acción para las acciones comunes.

- 33. Equilibrio de mercado** Si el precio de un producto es  $p$  dólares por unidad, suponga que un fabricante suministrará  $2p - 10$  unidades del producto al mercado, y que los consumidores demandarán  $200 - 3p$  unidades. En el valor de  $p$  para el cual la oferta es igual a la demanda, se dice que el mercado está en equilibrio. Encuentre ese valor de  $p$ .

- 34. Equilibrio de mercado** Repita el problema 33 para las condiciones siguientes: A un precio de  $p$  dólares por unidad, la oferta es  $2p^2 - 3p$  y la demanda es  $20 - p^2$ .

- 35. Cerca de seguridad** Por razones de seguridad, una compañía cercará un área rectangular de 11 200 pies cuadrados en la parte posterior de su planta. Un lado estará delimitado por el edificio y los otros tres lados por la barda (vea la figura 1.4). Si se van a utilizar 300 pies de cerca, ¿cuáles serán las dimensiones del área rectangular?

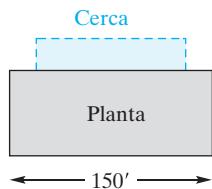


FIGURA 1.4 Cerca de seguridad (problema 35).

- 36. Diseño de empaque** Una compañía está diseñando un empaque para su producto. Una parte del empaque será una caja abierta fabricada a partir de una pieza cuadrada de aluminio, de la que se cortará un cuadrado a 2 pulgadas desde cada esquina para así doblar hacia arriba los lados (vea la figura 1.5). La caja deberá contener 50 pulgadas cúbicas. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la pieza cuadrada de aluminio?

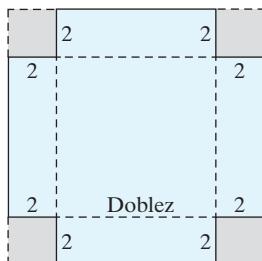


FIGURA 1.5 Construcción de una caja (problema 36).

- 37. Diseño de producto** Una compañía de dulces fabrica la popular barra Dandy. La golosina de forma rectangular tiene 10 cm de largo, 5 cm de ancho y 2 cm de grosor (vea la figura 1.6). Debido a un incremento en los costos, el fabricante ha decidido disminuir el volumen de la barra en un drástico 28%. El grosor será el mismo, pero el largo y el ancho se reducirán en la misma cantidad. ¿Cuál será el largo y el ancho de la nueva Dandy?



FIGURA 1.6 Barra de dulce (problema 37).

- 38. Diseño de producto** Una compañía fabrica un dulce en forma de arandela (un dulce con un agujero en medio); vea la figura 1.7. Debido a un incremento en los costos, la compañía reducirá el volumen de cada dulce en un 22%. Para hacerlo,

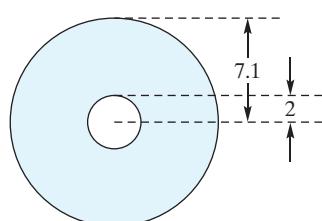


FIGURA 1.7 Dulce en forma de arandela (problema 38).

se conservará el mismo grosor y radio exterior, pero el radio interno se hará mayor. En la actualidad, el grosor es de 2.1 mm, el radio interno es de 2 mm y el radio exterior de 7.1 mm. Encuentre el radio interno del nuevo estilo de arandela. (*Una pista:* el volumen  $V$  de un disco sólido es  $\pi r^2 h$ , donde  $r$  es el radio y  $h$  el grosor del disco.)

- 39. Saldo compensatorio** Un *saldo compensatorio* se refiere a la práctica en la cual un banco requiere a quien solicita un crédito, mantenga en depósito una cierta parte del préstamo durante el plazo del mismo. Por ejemplo, si una empresa obtiene un préstamo de \$100 000, el cual requiere de un saldo compensatorio del 20%, tendría que dejar \$20 000 en depósito y usar sólo \$80 000. Para satisfacer los gastos de renovación de sus herramientas, la compañía Barber Die debe pedir prestados \$195 000. El banco Third National, con el que no han tenido tratos previos, requiere de un saldo compensatorio del 16%. Redondeando a la unidad de millar de dólares más cercana, ¿cuál debe ser el monto total del préstamo para obtener los fondos necesarios? Ahora resuelva el problema general de determinar la cantidad  $L$  de un préstamo que se necesita para manejar gastos de tamaño  $E$  si el banco requiere un saldo compensatorio de  $p\%$ .



- 40. Plan de incentivos** Una compañía de maquinaria tiene un plan de incentivos para sus agentes de ventas. La comisión por cada máquina que un agente vende es de \$40. La comisión de *cada* máquina vendida se incrementa en \$0.04; por cada máquina que se venda en exceso de 600 unidades. Por ejemplo, la comisión sobre cada una de 602 máquinas vendidas será de \$40.08. ¿Cuántas máquinas debe vender un agente para obtener ingresos por \$30 800?

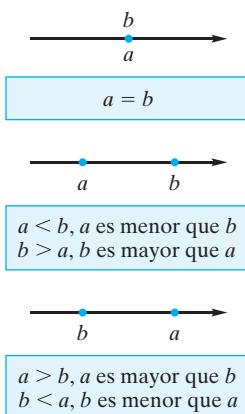
- 41. Bienes raíces** Una compañía fraccionadora compra un terreno en \$7200. Después de vender todo, excepto 20 acres, con una ganancia de \$30 por acre sobre su costo original, recuperó el costo total de la parcela. ¿Cuántos acres se vendieron?

- 42. Margen de utilidad** El *margen de utilidad* de una compañía es su ingreso neto dividido entre sus ventas totales. El margen de utilidad en cierta empresa aumentó en 0.02 con respecto al año pasado. El año pasado vendió su producto en \$3.00 por unidad y tuvo un ingreso neto de \$4500. Este año incrementó el precio de su producto en \$0.50 por unidad, vendió 2000 más y tuvo un ingreso neto de \$7140. La compañía nunca ha tenido un margen de utilidad mayor que 0.15. ¿Cuántas unidades vendió el año pasado y cuántas vendió este año?

- 43. Negocios** Una compañía fabrica los productos *A* y *B*. El costo de producir cada unidad de *A* es \$2 más que el de *B*. Los costos de producción de *A* y *B* son \$1500 y \$1000, respectivamente, y se producen 25 unidades más de *A* que de *B*. ¿Cuántas unidades de cada producto se fabrican?

**OBJETIVO**

Resolver desigualdades lineales con una variable e introducir la notación de intervalos.



**FIGURA 1.8** Posiciones relativas de dos puntos.

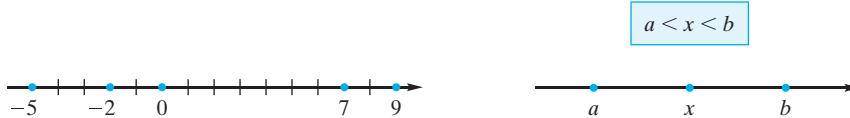
## 1.2 Desigualdades lineales

Suponga que  $a$  y  $b$  son dos puntos sobre la recta de los números reales. O bien  $a$  y  $b$  coinciden, o bien,  $a$  se encuentra a la izquierda de  $b$ , o  $a$  se encuentra a la derecha de  $b$  (vea la figura 1.8).

Si  $a$  y  $b$  coinciden entonces  $a = b$ . Si  $a$  se encuentra a la izquierda de  $b$ , se dice que  $a$  es menor que  $b$  y se escribe  $a < b$ , donde el símbolo de desigualdad “ $<$ ” se lee “es menor que”. Por otro lado, si  $a$  se encuentra a la derecha de  $b$ , decimos que  $a$  es mayor que  $b$  y se escribe  $a > b$ . Los enunciados  $a > b$  y  $b < a$  son equivalentes.

Otro símbolo de desigualdad, “ $\leq$ ” se lee “es menor o igual a” y se define como:  $a \leq b$  si y sólo si  $a < b$  o  $a = b$ . De manera semejante, el símbolo “ $\geq$ ” está definido como:  $a \geq b$  si y sólo si  $a > b$  o  $a = b$ . En este caso, se dice que  $a$  es mayor o igual a  $b$ .

Se usarán las palabras *números reales* y *puntos* de manera intercambiable, puesto que existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos que están sobre una recta. Así, puede hablarse de los puntos  $-5, -2, 0, 7$  y  $9$ , y escribir  $7 < 9, -2 > -5, 7 \leq 7$  y  $7 \geq 0$ . (Vea la figura 1.9.) Resulta claro que si  $a > 0$ , entonces  $a$  es positiva; si  $a < 0$ , entonces  $a$  es negativa.



**FIGURA 1.9** Puntos sobre la recta numérica.

**FIGURA 1.10**  $a < x$  y  $x < b$ .

Suponga que  $a < b$ , y  $x$  está entre  $a$  y  $b$ . (Vea la figura 1.10.) Entonces no sólo  $a < x$ , sino que también  $x < b$ . Esto se indica al escribir  $a < x < b$ . Por ejemplo,  $0 < 7 < 9$ . (Vea de nuevo la figura 1.9.)

La siguiente definición se establece en términos de la relación menor que ( $<$ ), pero se aplica también a las otras relaciones ( $>, \leq, \geq$ ).

### DEFINICIÓN

Una **desigualdad** es un enunciado que establece que un número es menor que otro.

Por supuesto, las desigualdades se representan por medio de símbolos de desigualdad. Si los símbolos de dos desigualdades apuntan en la misma dirección, entonces se dice que tienen el *mismo sentido*. Si no, se dice que son de *sentidos opuestos* o que una tiene el *sentido contrario* de la otra. Por lo tanto,  $a < b$  y  $c < d$  tienen el mismo sentido, pero  $a < b$  tiene el sentido contrario de  $c > d$ .

Resolver una desigualdad, como  $2(x - 3) < 4$ , significa encontrar todos los valores de la variable para los cuales dicha desigualdad es cierta. Esto implica la aplicación de ciertas reglas que se establecen a continuación.

#### Reglas para las desigualdades

- Si un mismo número se suma o resta en ambos lados de una desigualdad, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b, \text{ entonces } a + c < b + c \text{ y } a - c < b - c.$$

Por ejemplo,  $7 < 10$ , de modo que  $7 + 3 < 10 + 3$ .

- Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número positivo, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original.

Recuerde que las reglas también se aplican  $\leq, >$  y  $\geq$ .

**ADVERTENCIA**

El sentido de una desigualdad debe invertirse cuando ambos lados se multiplican o se dividen por un número negativo.

En forma simbólica

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } ac < bc \text{ y } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Por ejemplo,  $3 < 7$  y  $2 > 0$ , de modo que  $3(2) < 7(2)$  y  $\frac{3}{2} < \frac{7}{2}$ .

3. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número **negativo**, entonces la desigualdad resultante tendrá el sentido **contrario** de la original. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } a(c) > b(c) \text{ y } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Por ejemplo,  $4 < 7$  y  $-2 < 0$  pero  $4(-2) > 7(-2)$  y  $\frac{4}{-2} > \frac{7}{-2}$ .

4. Cualquier lado de una desigualdad puede reemplazarse por una expresión equivalente a ella. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } a = c, \text{ entonces } c < b.$$

Por ejemplo, si  $x < 2$  y  $x = y + 4$ , entonces  $y + 4 < 2$ .

5. Si los lados de una desigualdad son ambos positivos o negativos, y se toma el recíproco de cada lado, entonces resulta otra desigualdad con sentido contrario a la original. De manera simbólica,

$$\text{si } 0 < a < b \text{ o bien } a < b < 0, \text{ entonces } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Por ejemplo,  $2 < 4$ , entonces  $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$  y  $-4 < -2$ , entonces  $\frac{1}{-4} > \frac{1}{-2}$ .

6. Si ambos lados de una desigualdad son positivos y se eleva cada lado a la misma potencia positiva, entonces la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. De manera simbólica,

$$\text{si } 0 < a < b \text{ y } n > 0, \text{ entonces } a^n < b^n.$$

Para el entero positivo  $n$ , esta regla también da

$$\text{si } 0 < a < b, \text{ entonces } \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

Por ejemplo,  $4 < 9$  de modo que  $4^2 < 9^2$  y  $\sqrt{4} < \sqrt{9}$ .

Se dice que un par de *desigualdades* es *equivalente* si cuando cualquiera de ellas es verdadera la otra también lo es. Es fácil mostrar que cuando se aplica cualquiera de las reglas 1 a 6 a una desigualdad, el resultado es una desigualdad equivalente. Ahora se aplicarán las reglas 1 a 4 a una *desigualdad lineal*.

**DEFINICIÓN**

Una **desigualdad lineal** en la variable  $x$  es una desigualdad que puede escribirse en la forma

$$ax + b < 0,$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes y  $a \neq 0$ .

Es de esperarse que la desigualdad sea verdadera para algunos valores de  $x$  y falsa para otros. Para **resolver** una desigualdad que involucra una variable deben encontrarse todos los valores de la variable para los cuales la desigualdad es verdadera.

La definición también se aplica a  $\leq, >$  y  $\geq$ .

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

## CRECIMIENTO DE BACTERIAS

Un vendedor tiene un ingreso mensual dado por  $I = 200 + 0.8S$ , donde  $S$  es el número de productos vendidos en un mes. ¿Cuántos productos debe vender para obtener al menos \$4500 al mes?

$$x < 5$$


**FIGURA 1.11** Todos los números reales menores que 5.

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

## RESOLUCIÓN DE UNA DESIGUALDAD LINEAL

El veterinario de un zoológico puede comprar cuatro tipos de alimentos con distintos valores nutricionales para los animales de pastoreo del zoológico. Sea  $x_1$  el número de bolsas de alimento 1,  $x_2$  el número de bolsas de alimento 2, y así sucesivamente. El número de bolsas necesarias de cada tipo de alimento puede describirse mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_1 &= 150 - x_4 \\x_2 &= 3x_4 - 210 \\x_3 &= x_4 + 60\end{aligned}$$

Desarrolle cuatro desigualdades que contengan a  $x_4$  a partir de estas ecuaciones, para ello suponga que ninguna variable puede ser negativa.



## ADVERTENCIA

Al dividir ambos lados entre  $-2$  se invierte el sentido de la desigualdad.

## EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva  $2(x - 3) < 4$ .

**Solución:**

**Estrategia** Es necesario reemplazar la desigualdad dada por desigualdades equivalentes hasta que la solución sea evidente.

$$\begin{aligned}2(x - 3) &< 4 \\2x - 6 &< 4 && \text{(Regla 4)} \\2x - 6 + 6 &< 4 + 6 && \text{(Regla 1)} \\2x &< 10 && \text{(Regla 4)} \\\frac{2x}{2} &< \frac{10}{2} && \text{(Regla 2)} \\x &< 5 && \text{(Regla 4)}\end{aligned}$$

Todas las desigualdades son equivalentes. Por lo tanto, la desigualdad original es cierta para *todos* los números reales  $x$  tales que  $x < 5$ . Por ejemplo, la desigualdad es cierta para  $x = -10, -0.1, 0, \frac{1}{2}$  y 4.9. La solución puede escribirse simplemente como  $x < 5$  y puede representarse de manera geométrica por medio de la semirrecta azul de la figura 1.11. El paréntesis indica que 5 no está incluido en la solución.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



En el ejemplo 1, la solución consistió en un conjunto de números, a saber, todos los menores que 5. En general, es común utilizar el término **intervalo** para referirse a tales conjuntos. En el caso del ejemplo 1, el conjunto de todas las  $x$  tales que  $x < 5$  puede denotarse por la *notación de intervalo*  $(-\infty, 5)$ . El símbolo  $-\infty$  no es un número, sino sólo una convención para indicar que el intervalo incluye todos los números menores a 5.

Existen otros tipos de intervalos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números  $x$  para los cuales  $a \leq x \leq b$  se conoce como un **intervalo cerrado**, que incluye los números  $a$  y  $b$ , los cuales se llaman *extremos* del intervalo. Este intervalo se denota por  $[a, b]$  y se muestra en la figura 1.12(a). Los corchetes indican que  $a$  y  $b$  están incluidos en el intervalo. Por otra parte, el conjunto de todas las  $x$  para las que  $a < x < b$  se llama **intervalo abierto** y se denota por  $(a, b)$ . Los extremos *no* son parte de este conjunto [vea la figura 1.12(b)]. Para ampliar estos conceptos, se tienen los intervalos mostrados en la figura 1.13.

## EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva  $3 - 2x \leq 6$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}3 - 2x &\leq 6 \\-2x &\leq 3 && \text{(Regla 1)} \\x &\geq -\frac{3}{2} && \text{(Regla 3)}\end{aligned}$$

La solución es  $x \geq -\frac{3}{2}$ , en notación de intervalo,  $[-\frac{3}{2}, \infty)$ . Esto se representa geométricamente en la figura 1.14.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7



Intervalo cerrado  $[a, b]$

(a)



Intervalo abierto  $(a, b)$

(b)

**FIGURA 1.12** Intervalos cerrado y abierto.

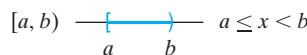
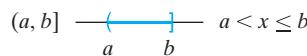


FIGURA 1.13 Intervalos.

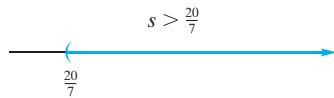
FIGURA 1.14 El intervalo  $[-\frac{3}{2}, \infty)$ .

### EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva  $\frac{3}{2}(s - 2) + 1 > -2(s - 4)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(s - 2) + 1 &> -2(s - 4) \\ 2 \left[ \frac{3}{2}(s - 2) + 1 \right] &> 2[-2(s - 4)] \quad (\text{Regla 2}) \\ 3(s - 2) + 2 &> -4(s - 4) \\ 3s - 4 &> -4s + 16 \\ 7s > 20 & \quad (\text{Regla 1}) \\ s > \frac{20}{7} & \quad (\text{Regla 2}) \end{aligned}$$

FIGURA 1.15 El intervalo  $(\frac{20}{7}, \infty)$ .

La solución es  $(\frac{20}{7}, \infty)$ ; vea la figura 1.15.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19



### EJEMPLO 4 Resolución de desigualdades lineales

- a. Resuelva  $2(x - 4) - 3 > 2x - 1$ .

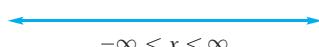
**Solución:**

$$\begin{aligned} 2(x - 4) - 3 &> 2x - 1 \\ 2x - 8 - 3 &> 2x - 1 \\ -11 &> -1 \end{aligned}$$

Como nunca será cierto que  $-11 > -1$ , no existe solución y el conjunto solución es  $\emptyset$ .

- b. Resuelva  $2(x - 4) - 3 < 2x - 1$ .

**Solución:** Si se procede como en el inciso (a), se obtiene  $-11 < -1$ . Esto es verdadero para todos los números reales  $x$ , de modo que la solución es  $(-\infty, \infty)$ ; vea la figura 1.16.

FIGURA 1.16 El intervalo  $(-\infty, \infty)$ 

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



## Problemas 1.2

Resuelva las desigualdades de los problemas 1 a 34. Dé su respuesta en notación de intervalo y represéntela en forma geométrica sobre la recta de los números reales.

1.  $3x > 12$
  2.  $4x < -2$
  3.  $5x - 11 \leq 9$
  4.  $5x \leq 0$
  5.  $-4x \geq 2$
  6.  $2y + 1 > 0$
  - \*7.  $5 - 7s > 3$
  8.  $4s - 1 < -5$
  - \*9.  $3 < 2y + 3$
  10.  $4 \leq 3 - 2y$
  11.  $x + 5 \leq 3 + 2x$
  12.  $-3 \geq 8(2 - x)$
  13.  $3(2 - 3x) > 4(1 - 4x)$
  14.  $8(x + 1) + 1 < 3(2x) + 1$
  - \*15.  $2(4x - 2) > 4(2x + 1)$
  16.  $4 - (x + 3) \leq 3(3 - x)$
  17.  $x + 2 < \sqrt{3} - x$
  18.  $\sqrt{2}(x + 2) > \sqrt{8}(3 - x)$
  - \*19.  $\frac{5}{6}x < 40$
  20.  $-\frac{2}{3}x > 6$
  21.  $\frac{9y + 1}{4} \leq 2y - 1$
  22.  $\frac{3y - 2}{3} \geq \frac{1}{4}$
  23.  $-3x + 1 \leq -3(x - 2) + 1$
  24.  $0x \leq 0$
  25.  $\frac{1-t}{2} < \frac{3t-7}{3}$
  26.  $\frac{3(2t-2)}{2} > \frac{6t-3}{5} + \frac{t}{10}$
  27.  $2x + 13 \geq \frac{1}{3}x - 7$
  28.  $3x - \frac{1}{3} \leq \frac{5}{2}x$
29.  $\frac{2}{3}r < \frac{5}{6}r$
  30.  $\frac{7}{4}t > -\frac{8}{3}t$
  31.  $\frac{y}{2} + \frac{y}{3} > y + \frac{y}{5}$
  32.  $9 - 0.1x \leq \frac{2 - 0.01x}{0.2}$
  33.  $0.1(0.03x + 4) \geq 0.02x + 0.434$
  34.  $\frac{3y - 1}{-3} < \frac{5(y + 1)}{-3}$
  35. **Ahorros** Cada mes del año pasado, Brittany ahorró más de \$50 pero menos de \$150. Si  $S$  representa sus ahorros totales del año, describa  $S$  con el uso de desigualdades.
  36. **Trabajo** Con el uso de desigualdades, simbolice el enunciado siguiente: El número de horas de trabajo  $x$  necesarias para fabricar un producto no es menor que  $2\frac{1}{2}$  ni mayor que 4.
  37. **Geometría** En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos  $x$  es menor que 3 veces el otro ángulo agudo más 10 grados. Resuelva para  $x$ .
  38. **Gasto** Una estudiante tiene \$360 para gastar en un sistema estereofónico y algunos discos compactos. Si compra un estéreo que cuesta \$219 y el costo de los discos es de \$18.95 cada uno, determine el mayor número de discos que puede comprar.

### OBJETIVO

Modelar situaciones reales en términos de desigualdades.

## 1.3 Aplicaciones de las desigualdades

La resolución de problemas expresados con palabras algunas veces puede implicar desigualdades, como lo ilustran los ejemplos siguientes.

### EJEMPLO 1 Utilidad

Para una compañía que fabrica calentadores para acuarios, el costo combinado de mano de obra y material es de \$21 por calentador. Los costos fijos (costos en que se incurre en un periodo dado, sin importar la producción) son \$70 000. Si el precio de venta de un calentador es \$35, ¿cuántos debe vender para que la compañía genere utilidades?

**Solución:**

**Estrategia** Recuerde que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

Debe encontrarse el ingreso total y después determinar cuándo su diferencia es positiva.

Sea  $q$  el número de calentadores que deben venderse. Entonces su costo es  $21q$ . Por lo tanto, el costo total para la compañía es  $21q + 70\,000$ . El ingreso total de la venta de  $q$  calentadores será  $35q$ . Ahora,

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

y se desea la utilidad  $> 0$ . Así que,

$$\text{ingreso total} - \text{costo total} > 0$$

$$35q - (21q + 70\,000) > 0$$

$$14q > 70\,000$$

$$q > 5000$$

Como el número de calentadores debe ser un entero no negativo, se observa que deben venderse al menos 5001 calentadores para que la compañía genere utilidades.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

### EJEMPLO 2 Renta versus compra

Un constructor debe decidir entre rentar o comprar una máquina excavadora. Si fuese a rentar la máquina, el costo de la renta sería de \$3000 mensuales (sobre la base de un año) y el costo diario (gas, aceite y operador) sería de \$180 por cada día que la máquina se utilice. Si fuese a comprarla, sus costos fijos anuales serían de \$20 000 y los costos diarios de operación y mantenimiento serían de \$230 por cada día que la máquina se utilizará. ¿Cuál es el número mínimo de días al año que tendría que utilizar el constructor la máquina para justificar la renta en lugar de la compra?

**Solución:**

**Estrategia** Se determinarán expresiones para el costo anual de la renta y el costo anual de la compra, así se encontrará cuándo el costo de la renta es menor que el de la compra.

Sea  $d$  el número de días de cada año que la máquina será utilizada. Si la máquina se renta, el costo total anual consiste en los gastos de la renta, que son  $(12)(3000)$ , y los costos diarios de  $180d$ . Si la máquina se compra, el costo por año es  $20\,000 + 230d$ . Se desea que

$$\begin{aligned} \text{costo}_{\text{renta}} &< \text{costo}_{\text{compra}} \\ 12(3000) + 180d &< 20\,000 + 230d \\ 36\,000 + 180d &< 20\,000 + 230d \\ 16\,000 &< 50d \\ 320 &< d \end{aligned}$$

Por lo tanto, el constructor debe utilizar la máquina al menos 321 días para justificar su renta.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3 

### EJEMPLO 3 Razón de circulante

La *razón de circulante* de un negocio es el cociente de sus activos circulantes (como efectivo, inventario de mercancías y cuentas por cobrar), sobre sus pasivos circulantes (como préstamos a corto plazo e impuestos).

Después de consultar con el contralor, el presidente de la compañía Ace Sports Equipment decide pedir un préstamo a corto plazo para aumentar su inventario. La compañía tiene activos circulantes de \$350 000 y pasivos de \$80 000. ¿Cuánto puede pedir prestado si quiere que su razón de circulante no sea menor que 2.5? (Nota: los fondos recibidos se consideran como activo circulante y el préstamo como pasivo circulante.)

**Solución:** Sea  $x$  la cantidad que la compañía puede pedir prestada. Entonces sus activos circulantes serán  $350\,000 + x$  y sus pasivos circulantes  $80\,000 + x$ . Así,

$$\text{razón de circulante} = \frac{\text{activo circulante}}{\text{pasivo circulante}} = \frac{350\,000 + x}{80\,000 + x}$$

Se quiere que

$$\frac{350\,000 + x}{80\,000 + x} \geq 2.5$$

Aunque la desigualdad que debe resolverse no es lineal, conduce a una desigualdad lineal.

Como  $x$  es positiva, también lo es  $80\,000 + x$ . Por lo que pueden multiplicarse ambos lados de la desigualdad por  $80\,000 + x$  y su sentido permanecerá igual. Se tiene

$$350\,000 + x \geq 2.5(80\,000 + x)$$

$$150\,000 \geq 1.5x$$

$$100\,000 \geq x$$

En consecuencia, la compañía puede pedir prestado hasta \$100 000 y aún mantener una razón de circulante no menor que 2.5.



#### EJEMPLO 4 Publicaciones

Una editorial determina que el costo de publicar cada ejemplar de una cierta revista es de \$1.50. El ingreso recibido de los distribuidores es \$1.40 por revista. El ingreso por publicidad es 10% del ingreso recibido de los distribuidores por todos los ejemplares vendidos por arriba de 10 000. ¿Cuál es el número mínimo de revistas que deben venderse de modo que se obtengan utilidades?

**Solución:**

**Estrategia** Se tiene que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

entonces se encuentra una expresión para la utilidad y después se establece como mayor que 0.

Sea  $q$  el número de revistas vendidas. El ingreso recibido de los distribuidores es  $1.40q$  y el recibido por publicidad es  $(0.10)[(1.40)(q - 10\,000)]$ . El costo total de la publicación es  $1.50q$ . Así que,

$$\begin{aligned} & \text{ingreso total} - \text{costo total} > 0 \\ & 1.40q + (0.10)[(1.40)(q - 10\,000)] - 1.50q > 0 \\ & 1.4q + 0.14q - 1400 - 1.5q > 0 \\ & 0.04q - 1400 > 0 \\ & 0.04q > 1400 \\ & q > 35\,000 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el número total de revistas debe ser mayor que 35 000. Esto es, deben venderse al menos 35 001 ejemplares para garantizar utilidades.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5



## Problemas 1.3

- \*1. **Utilidad** La compañía Davis fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de \$20 y un costo unitario de \$15. Si los costos fijos son de \$600 000, determine el número mínimo de unidades que deben venderse para que la empresa tenga utilidades.
- 2. **Utilidad** Para producir una unidad de un producto nuevo, una compañía determina que el costo del material es de \$2.50 y el de mano de obra de \$4. El costo fijo constante, sin importar el volumen de ventas, es de \$5000. Si el precio para un mayorista es de \$7.40 por unidad, determine el número mínimo de unidades que deben venderse para que la compañía obtenga utilidades.

- \*3. **Arrendamiento versus compra** Una mujer de negocios quiere determinar la diferencia entre el costo de comprar un automóvil y el de arrendarlo con opción a compra. Puede rentar un automóvil por \$420 al mes (cotizado anualmente). Bajo este plan, el costo por milla (gasolina y aceite) es \$0.06. Si compra el automóvil, el gasto fijo anual sería de \$4700, y los otros costos ascenderían a \$0.08 por milla. ¿Cuál es el mínimo de millas que tendría que conducir por año para que el arrendamiento no fuese más caro que la compra?
- 4. **Fabricación de camisetas** Una fábrica de camisetas produce  $N$  prendas con un costo de mano de obra total (en dólares)

de  $1.3N$  y un costo total por material de  $0.4N$ . Los costos fijos constantes de la planta son de \$6500. Si cada camiseta se vende en \$3.50, ¿cuántas deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?



- \*5. Publicaciones** El costo unitario de publicación de una revista es de \$0.55. Cada revista se vende al distribuidor en \$0.60, y la cantidad que se recibe por publicidad es el 10% de la cantidad recibida por todas las revistas vendidas por arriba de las 30 000. Encuentre el número mínimo de revistas que pueden publicarse sin pérdida —esto es, tal que la utilidad  $\geq 0$ — suponiendo que se venderán 90% de los ejemplares.

- 6. Asignación de producción** Una compañía produce relojes despertadores. Durante una semana normal de trabajo, el costo por mano de obra para producir un reloj es de \$2.00. Sin embargo, si un despertador se produce durante horas extra su costo asciende a \$3.00. La gerencia ha decidido no gastar más de \$25 000 por semana en mano de obra. La compañía debe producir 11 000 aparatos esta semana. ¿Cuál es la cantidad mínima de relojes que deben producirse durante una semana normal de trabajo?

- 7. Inversión** Una compañía invierte un total de \$30 000 de sus fondos excedentes a dos tasas de interés anual: 5% y  $6\frac{3}{4}\%$ . Desea un rendimiento anual que no sea menor al  $6\frac{1}{2}\%$ . ¿Cuál es la cantidad mínima que debe invertir a la tasa de  $6\frac{3}{4}\%$ ?

- 8. Razón de circulante** La razón de circulante de Precision Machine Products es 3.8. Si sus activos circulantes son de \$570 000, ¿cuáles son sus pasivos circulantes? Para elevar sus fondos de reserva, ¿cuál es la cantidad máxima que puede pedir prestada a corto plazo si quiere que su razón de circulante no sea menor que 2.6? (Vea el ejemplo 3 para una explicación de la razón de circulante.)

- 9. Asignación de ventas** En la actualidad, un fabricante tiene 2500 unidades de un producto en inventario. Hoy, su precio unitario es de \$4. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en \$0.50. El fabricante quiere que el ingreso total

recibido por la venta de las 2500 unidades no sea menor que \$10 750. ¿Cuál es el número máximo de unidades que pueden venderse este mes?

- 10. Ingresos** Suponga que los consumidores compraran  $q$  unidades de un producto al precio de  $\frac{100}{q} + 1$  dólares por cada una. ¿Cuál es el número mínimo que deben venderse para que el ingreso por ventas sea mayor que \$5000?
- 11. Sueldo por hora** Con frecuencia se paga a los pintores por hora, o bien, por trabajo terminado. El tipo de pago que reciben puede hacer variar la velocidad a la que trabajan. Por ejemplo, suponga que pueden trabajar por \$9.00 la hora, o bien, por \$320 más \$3 por cada hora trabajada por debajo de 40, si completan el trabajo en menos de 40 horas. Suponga que el trabajo les toma  $t$  horas. Si  $t \geq 40$ , resulta claro que el sueldo por hora es mejor. Si  $t < 40$ , ¿para qué valores de  $t$  el salario por hora es mejor?



- 12. Compensación** Suponga que una compañía le ofrece un puesto en ventas en el que usted elige entre dos métodos para determinar su salario anual. Un método paga \$35 000 más un bono del 3% sobre sus ventas del año. El otro método paga una comisión directa del 5% sobre sus ventas. ¿Para qué nivel de ventas anuales es mejor seleccionar el primer método?

- 13. Razón de la prueba del ácido** La *razón de la prueba del ácido* (*o razón rápida*) de un negocio es la razón de sus activos líquidos —efectivo y valores más cuentas por cobrar— sobre sus pasivos circulantes. La mínima razón para que una compañía tenga finanzas sólidas es de 1.0 aproximadamente, pero, por lo general, esto varía un poco de una industria a otra. Si una compañía tiene \$450 000 en efectivo y valores, y tiene \$398 000 en pasivos circulantes, ¿cuánto necesita tener en cuentas por cobrar para mantener la razón rápida en 1.3 o por arriba de este valor?

## OBJETIVO

Resolver ecuaciones y desigualdades que involucran valores absolutos.

**El valor absoluto de un número real es su valor cuando no se toma en cuenta su signo.**

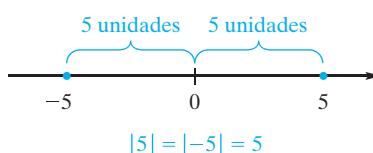


FIGURA 1.17 Valor absoluto.

## 1.4 Valor absoluto

### Ecuaciones con valor absoluto

En la recta de los números reales, la distancia desde el cero hasta un número  $x$  se llama **valor absoluto** de  $x$ , y se denota por  $|x|$ . Por ejemplo,  $|5| = 5$  y  $|-5| = 5$ , porque tanto el 5 como el  $-5$  están a 5 unidades del 0 (vea la figura 1.17). En forma similar,  $|0| = 0$ . Advierta que  $|x|$  nunca puede ser negativa, esto es  $|x| \geq 0$ .

Si  $x$  es positiva o cero, entonces  $x$  es simplemente la misma  $x$ , de modo que pueden omitirse las líneas verticales y escribir  $|x| = x$ . Por otra parte, considere el valor absoluto de un número negativo, como  $x = -5$ .

$$|x| = |-5| = 5 = -(-5) = -x$$

Por lo tanto, si  $x$  es negativa, entonces  $|x|$  es el número positivo  $-x$ . El signo menos indica que se ha cambiado el signo de  $x$ . La definición geométrica del valor absoluto es equivalente a lo siguiente:

**DEFINICIÓN**

El **valor absoluto** de un número real  $x$ , escrito  $|x|$ , se define como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**ADVERTENCIA**

$\sqrt{x^2}$  no necesariamente es  $x$ , sino  $\sqrt{x^2} = |x|$ . Por ejemplo,  $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$  no  $-2$ . Esto concuerda con el hecho que  $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ .

Observe que  $|-x| = |x|$  es consecuencia de la definición.

Si se aplica la definición, se tiene  $|3| = 3$ ,  $|-8| = -(-8) = 8$  y  $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ . También,  $-|2| = -2$  y  $-|-2| = -2$ .

También,  $|-x|$  no necesariamente es  $x$ , así  $|-x - 1|$  no es necesariamente  $x + 1$ .

Por ejemplo, si se hace  $x = -3$ , entonces  $|-(-3)| \neq -3$ , y

$$|(-3) - 1| \neq -3 + 1$$

**EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones con valor absoluto**

- a. *Resuelva  $|x - 3| = 2$ .*

**Solución:** Esta ecuación establece que  $x - 3$  es un número que está a 2 unidades del cero. Por lo tanto,

$$x - 3 = 2 \quad \text{o bien} \quad x - 3 = -2$$

Al resolver estas ecuaciones se obtiene  $x = 5$  o  $x = 1$ .

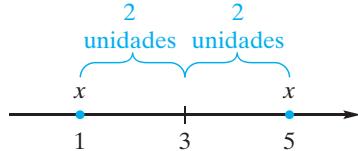
- b. *Resuelva  $|7 - 3x| = 5$ .*

**Solución:** Esta ecuación es cierta si  $7 - 3x = 5$  o si  $7 - 3x = -5$ . Al resolver estas ecuaciones se obtiene  $x = \frac{2}{3}$  o  $x = 4$ .

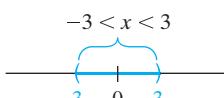
- c. *Resuelva  $|x - 4| = -3$ .*

**Solución:** El valor absoluto de un número nunca es negativo, de modo que el conjunto solución es  $\emptyset$ .

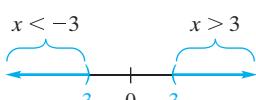
AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19



**FIGURA 1.18** La solución de  $|x - 3| = 2$  es 1 o 5.



(a) Solución de  $|x| < 3$



(b) Solución de  $|x| > 3$

**FIGURA 1.19** Soluciones para  $|x| < 3$  y  $|x| > 3$ .

Puede interpretarse  $|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|$  como la distancia entre  $a$  y  $b$ . Por ejemplo, la distancia entre 5 y 9 puede calcularse

$$\text{con } |9 - 5| = |4| = 4$$

$$\text{o con } |5 - 9| = |-4| = 4$$

En forma similar, la ecuación  $|x - 3| = 2$  establece que la distancia entre  $x$  y 3 es de 2 unidades. Por lo tanto,  $x$  puede ser 1 o 5, como se muestra en el ejemplo 1(a) y en la figura 1.18.

**Desigualdades con valor absoluto**

Ahora se estudiarán las desigualdades que incluyen valores absolutos. Si  $|x| < 3$ , entonces  $x$  está a menos de 3 unidades del cero. Por lo tanto,  $x$  debe estar entre  $-3$  y  $3$ , esto es, en el intervalo  $-3 < x < 3$  [vea la figura 1.19(a)]. Por otro lado, si  $|x| > 3$ , entonces  $x$  debe estar a más de 3 unidades del cero. Así que existen dos intervalos en la solución:  $x < -3$  o  $x > 3$  [vea la figura 1.19(b)]. Estas ideas pueden extenderse de la manera siguiente: Si  $|x| \leq 3$ , entonces  $-3 \leq x \leq 3$ ; si  $|x| \geq 3$ , entonces  $x \leq -3$  o bien  $x \geq 3$ . En la tabla 1.1 se da un resumen de las soluciones para desigualdades con valor absoluto.

**TABLA 1.1**

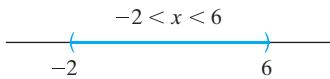
Desigualdad ( $d > 0$ )	Solución
$ x  < d$	$-d < x < d$
$ x  \leq d$	$-d \leq x \leq d$
$ x  > d$	$x < -d$ o $x > d$
$ x  \geq d$	$x \leq -d$ o $x \geq d$

### EJEMPLO 2 Resolución de desigualdades con valor absoluto

- a. *Resuelva*  $|x - 2| < 4$ .

**Solución:** El número  $x - 2$  debe estar a menos de 4 unidades del 0. Con base en el análisis anterior, esto significa que  $-4 < x - 2 < 4$ . El procedimiento para resolver esta desigualdad puede establecerse como sigue:

$$\begin{aligned} -4 &< x - 2 < 4 \\ -4 + 2 &< x < 4 + 2 \quad (\text{al sumar } 2 \text{ a cada miembro}) \\ -2 &< x < 6 \end{aligned}$$



**FIGURA 1.20** La solución de  $|x - 2| < 4$  es el intervalo  $(-2, 6)$ .

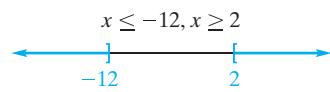
- b. *Resuelva*  $|3 - 2x| \leq 5$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} -5 &\leq 3 - 2x \leq 5 \\ -5 - 3 &\leq -2x \leq 5 - 3 \quad (\text{al restar } 3) \\ -8 &\leq -2x \leq 2 \\ 4 &\geq x \geq -1 \quad (\text{al dividir entre } -2) \\ -1 &\leq x \leq 4 \quad (\text{al reescribir}) \end{aligned}$$

Observe que el sentido de la desigualdad original se *invirtió* al dividir entre un número negativo. La solución es el intervalo cerrado  $[-1, 4]$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29



**FIGURA 1.21** La unión  $(-\infty, -12] \cup [2, \infty)$ .



#### ADVERTENCIA

Las desigualdades  $x \leq -12$  o  $x \geq 2$  en (a) y  $x < 1$  o  $x > \frac{5}{3}$  en (b) no pueden combinarse en un solo intervalo como se hizo en los ejemplos 1 y 2.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

##### NOTACIÓN DE VALOR ABSOLUTO

Expresé el enunciado siguiente con el uso de la notación de valor absoluto: el peso real  $w$  de una caja de cereal puede tener una diferencia de 0.3 onzas en comparación con el peso establecido en la caja, que es de 22 onzas.

### EJEMPLO 3 Resolución de desigualdades con valor absoluto

- a. *Resuelva*  $|x + 5| \geq 7$ .

**Solución:** Aquí  $x + 5$  debe estar *al menos* a 7 unidades del 0. Así que,  $x + 5 \leq -7$  o bien  $x + 5 \geq 7$ . Esto significa que  $x \leq -12$  o bien  $x \geq 2$ . Por lo tanto, la solución consiste en dos intervalos:  $(-\infty, -12] \cup [2, \infty)$ . Esta colección de números puede abreviarse escribiendo

$$(-\infty, -12] \cup [2, \infty)$$

donde el símbolo  $\cup$  es llamado el símbolo de la **unión** (vea la figura 1.21). Expresado de manera formal, la **unión** de los conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto que consiste de todos los elementos que están en  $A$  o en  $B$  (o en ambos).

- b. *Resuelva*  $|3x - 4| > 1$ .

**Solución:**  $3x - 4 < -1$  o bien  $3x - 4 > 1$ . Así que  $3x < 3$  o bien  $3x > 5$ . Por lo tanto,  $x < 1$  o  $x > \frac{5}{3}$ , de modo que la solución consiste en todos los números reales en el conjunto  $(-\infty, 1) \cup (\frac{5}{3}, \infty)$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

### EJEMPLO 4 Notación de valor absoluto

Use la notación de valor absoluto para expresar los enunciados siguientes:

- a.  $x$  está a menos de 3 unidades de 5.

**Solución:**

$$|x - 5| < 3$$

- b.  $x$  difiere de 6 en por lo menos 7.

**Solución:**

$$|x - 6| \geq 7$$

- c.  $x < 3$  y al mismo tiempo  $x > -3$ .

**Solución:**

$$|x| < 3$$

- d.  $x$  está a más de 1 unidad de  $-2$ .

**Solución:**

$$|x - (-2)| > 1$$

$$|x + 2| > 1$$

- e.  $x$  está a menos de  $\sigma$  (letra griega “sigma”) unidades de  $\mu$  (letra griega “mu”).

**Solución:**

$$|x - \mu| < \sigma$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11



### Propiedades del valor absoluto

Cinco propiedades básicas del valor absoluto son:

1.  $|ab| = |a| \cdot |b|$
2.  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3.  $|a - b| = |b - a|$
4.  $-|a| \leq a \leq |a|$
5.  $|a + b| \leq |a| + |b|$

Por ejemplo, la propiedad 1 establece que el valor absoluto del producto de dos números es igual al producto de los valores absolutos de esos números. La propiedad 5 se conoce como la *desigualdad del triángulo*.

#### EJEMPLO 5 Propiedades del valor absoluto

- a.  $|(-7) \cdot 3| = |-7| \cdot |3| = 21$
- b.  $|4 - 2| = |2 - 4| = 2$
- c.  $|7 - x| = |x - 7|$
- d.  $\left|\frac{-7}{3}\right| = \frac{|-7|}{|3|} = \frac{7}{3}; \left|\frac{-7}{-3}\right| = \frac{|-7|}{|-3|} = \frac{7}{3}$
- e.  $\left|\frac{x - 3}{-5}\right| = \frac{|x - 3|}{|-5|} = \frac{|x - 3|}{5}$
- f.  $-|2| \leq 2 \leq |2|$
- g.  $|(-2) + 3| = |1| = 1 \leq 5 = 2 + 3 = |-2| + |3|$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5



## Problemas 1.4

Evalúe la expresión de valor absoluto en los problemas 1 a 10.

- |              |               |                     |                      |                         |                        |
|--------------|---------------|---------------------|----------------------|-------------------------|------------------------|
| 1. $ -13 $   | 2. $ 2^{-1} $ | 3. $ 8 - 2 $        | 4. $ (-4 - 6)/2 $    | *5. $ 2(-\frac{7}{2}) $ | 6. $ 3 - 5  -  5 - 3 $ |
| 7. $ x  < 4$ | 8. $ x  < 10$ | 9. $ 2 - \sqrt{5} $ | 10. $ \sqrt{5} - 2 $ |                         |                        |

\*11. Utilice el símbolo de valor absoluto para expresar cada uno de los siguientes enunciados:

- (a)  $x$  está a menos de 3 unidades de 7.
- (b)  $x$  difiere de 2 en menos de 3.
- (c)  $x$  no está a más de 5 unidades de 7.

- (d) La distancia entre 7 y  $x$  es 4.  
 (e)  $x + 4$  está a menos de 2 unidades de 0.  
 (f)  $x$  está entre  $-3$  y  $3$ , pero no es igual a  $3$  ni a  $-3$ .  
 (g)  $x < -6$  o  $x > 6$ .  
 (h) El número  $x$  de horas que una máquina funcionará de manera eficiente difiere de  $105$  en menos de 3 unidades.  
 (i) El ingreso promedio mensual  $x$  (en dólares) de una familia difiere de  $850$  en menos de  $100$  unidades.
12. Utilice la notación de valor absoluto para indicar que  $f(x)$  y  $L$  difieren en menos de  $\epsilon$  unidades.
13. Utilice la notación de valor absoluto para indicar que los precios  $p_1$  y  $p_2$  de dos productos pueden diferir en no más de  $9$  (dólares).
14. Determine todos los valores de  $x$  tales que  $|x - \mu| \leq 2\sigma$ .
- Resuelva la ecuación o desigualdad dada en los problemas 15 a 36.*
15.  $|x| = 7$       16.  $|-x| = 2$       17.  $\left|\frac{x}{5}\right| = 7$   
 18.  $\left|\frac{5}{x}\right| = 12$       \*19.  $|x - 5| = 8$       20.  $|4 + 3x| = 6$
21.  $|5x - 2| = 0$       22.  $|7x + 3| = x$       23.  $|7 - 4x| = 5$   
 24.  $|5 - 3x| = 2$       25.  $|x| < M$ , para  $M > 0$   
 26.  $|-x| < 3$       27.  $\left|\frac{x}{4}\right| > 2$       28.  $\left|\frac{x}{3}\right| > \frac{1}{2}$

\*29.  $|x + 9| < 5$       30.  $|2x - 17| < -4$       \*31.  $\left|x - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$   
 32.  $|1 - 3x| > 2$       33.  $|5 - 8x| \leq 1$       34.  $|4x - 1| \geq 0$   
 35.  $\left|\frac{3x - 8}{2}\right| \geq 4$       36.  $\left|\frac{x - 7}{3}\right| \leq 5$

*Exprese el enunciado utilizando la notación de valor absoluto en los problemas 37 y 38.*

37. En un experimento científico, la medida de una distancia  $d$  es  $35.2$  m, con un margen de precisión de  $\pm 20$  cm.
38. La diferencia en temperatura entre dos sustancias químicas que se van a mezclar no debe ser menor que  $5$  grados ni mayor que  $10$  grados.
39. **Estadística** En el análisis estadístico, la desigualdad de Chebyshev establece que si  $x$  es una variable aleatoria,  $\mu$  es su media, y  $\sigma$  es su desviación estándar, entonces  
 (probabilidad de que  $|x - \mu| > h\sigma$ )  $\geq \frac{1}{h^2}$
- Encuentre los valores de  $x$  tales que  $|x - \mu| > h\sigma$ .
40. **Margen de error en manufactura** En la fabricación de cierto artefacto, la dimensión promedio de una parte es  $0.01$  cm. Con el uso del símbolo de valor absoluto, exprese el hecho de que una medida individual  $x$  de un artefacto, no debe diferir del promedio en más de  $0.005$  cm.

## OBJETIVO

Escribir y evaluar sumas en notación de sumatoria.

## 1.5 Notación de sumatoria

Hubo un tiempo en el que los profesores hacían a sus estudiantes sumar todos los enteros positivos de  $1$  a  $105$  (por ejemplo), tal vez como castigo por un comportamiento incorrecto mientras el profesor estaba fuera del salón de clases. En otras palabras, los estudiantes debían encontrar

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots + 104 + 105 \quad (1)$$

Un ejercicio similar consistía en encontrar

$$1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + 81 + 100 + 121 \quad (2)$$

La notación de los tres puntos implica la idea de continuar la tarea, usando el mismo patrón, hasta que el último de los términos dados explícitamente haya sido sumado. En esta notación no hay reglas definidas acerca de cuántos términos del principio y del final deben especificarse. Se deben proporcionar los que sean necesarios para asegurarse de que el lector no encuentre ambigua la expresión. Lo anterior es demasiado impreciso para muchas aplicaciones matemáticas.

Suponga que para cualquier entero positivo  $i$  se define  $a_i = i^2$ . Entonces, por ejemplo,  $a_6 = 36$  y  $a_8 = 64$ . La instrucción, “Sume todos los números  $a_i$ , donde  $i$  toma los valores enteros desde  $1$  hasta el  $11$  inclusive” es un enunciado preciso de la ecuación (2). Sería preciso aún sin considerar la fórmula que define los valores  $a_i$ , y esto conduce a lo siguiente:

### DEFINICIÓN

Si, para cada entero positivo  $i$ , se da un número único  $a_i$ , y  $m$  y  $n$  son enteros positivos, donde  $m \leq n$ , entonces **la suma de los números  $a_i$ , donde  $i$  toma sucesivamente los valores desde  $m$  hasta  $n$  se denota**

$$\sum_{i=m}^n a_i$$

Así

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n \quad (3)$$

La  $\sum$  es la letra griega sigma mayúscula, a partir de la cual obtuvimos la letra S. Significa “suma” y la expresión  $\sum_{i=m}^n a_i$ , puede leerse como la suma de todos los números  $a_i$ , donde  $i$  va desde  $m$  hasta  $n$  (se entiende que a través de los enteros positivos). La descripción de  $a_i$  puede ser muy simple. Por ejemplo, en la ecuación (1) tenemos  $a_i = i$  y

$$\sum_{i=1}^{105} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 105 \quad (4)$$

mientras que la ecuación (2) es

$$\sum_{i=1}^{11} i^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 121 \quad (5)$$

Se ha definido solamente una notación, que se llama **notación de sumatoria**. En la ecuación (3),  $i$  es el *índice de sumatoria* y  $m$  y  $n$  se llaman las *cotas de la sumatoria*. Es importante entender de esta explicación que el índice de sumatoria puede reemplazarse por cualquier otro, de manera que se tiene

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m}^n a_j = \sum_{\alpha=m}^n a_\alpha = \sum_{N=m}^n a_N$$

por ejemplo. En cada caso, al remplazar el índice de sumatoria por los enteros positivos desde  $m$  hasta  $n$  y sumar se obtiene

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

A continuación se ilustran estos conceptos con algunos ejemplos concretos.

### EJEMPLO 1 Evaluación de sumas

Evalué las sumas dadas.

a.  $\sum_{n=3}^7 (5n - 2)$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^7 (5n - 2) &= [5(3) - 2] + [5(4) - 2] + [5(5) - 2] + [5(6) - 2] + [5(7) - 2] \\ &= 13 + 18 + 23 + 28 + 33 \\ &= 115 \end{aligned}$$

b.  $\sum_{j=1}^6 (j^2 + 1)$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 (j^2 + 1) &= (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1) + (4^2 + 1) + (5^2 + 1) + (6^2 + 1) \\ &= 2 + 5 + 10 + 17 + 26 + 37 \\ &= 97 \end{aligned}$$



 **EJEMPLO 2** Escritura de una suma con el uso de la notación de sumatoria

Escriba la suma  $14 + 16 + 18 + 20 + 22 + \cdots + 100$  en notación de sumatoria.

**Solución:** Existen muchas formas de expresar esta suma en notación de sigma. Un método consiste en resaltar que los valores que se suman son  $2n$ , para  $n = 7$  a 50. Entonces, la suma puede escribirse como

$$\sum_{n=7}^{50} 2n$$

Otro método consiste en destacar que los valores que se suman son  $2k + 12$ , para  $k = 1$  a 44. La suma puede representarse entonces como

$$\sum_{k=1}^{44} (2k + 12)$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9 

Como la notación de sumatoria se usa para expresar la adición de términos, pueden usarse las propiedades de la suma cuando se realizan operaciones de adición escritas en notación de sumatoria. Al aplicar estas propiedades, puede crearse una lista de propiedades y fórmulas para la notación de sumatoria.

Por la propiedad distributiva de la suma

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Por lo tanto, en notación de sumatoria

$$\sum_{i=m}^n ca_i = c \sum_{i=m}^n a_i \quad (6)$$

Observe que  $c$  debe ser constante con respecto a  $i$  para que la ecuación (6) pueda usarse.

Por la propiedad conmutativa de la suma,

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_n + b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

Entonces, se tiene

$$\sum_{i=m}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i \quad (7)$$

Algunas veces se desea cambiar las cotas de la sumatoria:

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=p}^{p+n-m} a_{i+m-p} \quad (8)$$

Una suma de 37 términos puede verse como la suma de los primeros 17 términos más la suma de los siguientes 20. La siguiente regla generaliza esta observación

$$\sum_{i=m}^{p-1} a_i + \sum_{i=p}^n a_i = \sum_{i=m}^n a_i \quad (9)$$

Además de estas cuatro reglas básicas, existen algunas otras reglas útiles. Las primeras dos surgen, respectivamente, de las ecuaciones (6) y (7):

$$\sum_{i=1}^n c = cn \quad (10)$$

$$\sum_{i=m}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^n a_i - \sum_{i=m}^n b_i \quad (11)$$

El establecimiento de las siguientes tres fórmulas se perfeccionan mediante un método para realizar demostraciones conocido como inducción matemática, y cuya validez no demostraríamos aquí.

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (14)$$

Sin embargo, la ecuación (12) puede deducirse. Si se suman las siguientes ecuaciones de manera vertical, término por término,

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\sum_{i=1}^n i = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$$

se obtiene

$$2 \sum_{i=1}^n i = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$$

y como existen  $n$  términos a la derecha, se concluye

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Observe que si el profesor asigna la tarea de calcular

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots + 104 + 105$$

como un *castigo*, y si él conoce la fórmula dada por la ecuación (12), entonces el trabajo de un estudiante puede revisarse de manera rápida con

$$\sum_{i=1}^{105} i = \frac{105(106)}{2} = 105 \cdot 53 = 5300 + 265 = 5565$$

### EJEMPLO 3 Aplicación de las propiedades de la notación de sumatoria

Evalúe las sumas dadas.

a.  $\sum_{j=30}^{100} 4$

b.  $\sum_{k=1}^{100} (5k + 3)$

c.  $\sum_{k=1}^{200} 9k^2$

**Soluciones:**

a.

$$\begin{aligned} \sum_{j=30}^{100} 4 &= \sum_{j=1}^{71} 4 && [\text{por la ecuación (8)}] \\ &= 4 \cdot 71 && [\text{por la ecuación (10)}] \\ &= 284 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} (5k + 3) &= \sum_{k=1}^{100} 5k + \sum_{k=1}^{100} 3 && [\text{por la ecuación (7)}] \\ &= 5 \left( \sum_{k=1}^{100} k \right) + 3 \left( \sum_{k=1}^{100} 1 \right) && [\text{por la ecuación (6)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 5 \left( \frac{100 \cdot 101}{2} \right) + 3(100) && [\text{por las ecuaciones (12) y (10)}] \\
 &= 25\,250 + 300 \\
 &= 25\,550
 \end{aligned}$$

**c.**

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{200} 9k^2 &= 9 \sum_{k=1}^{200} k^2 && [\text{por la ecuación (6)}] \\
 &= 9 \left( \frac{200 \cdot 201 \cdot 401}{6} \right) && [\text{por la ecuación (13)}] \\
 &= 24\,180\,300
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5 

## Problemas 1.5

En los problemas 1 y 2, proporcione las cotas y el índice de la sumatoria para cada expresión.

**1.**  $\sum_{t=12}^{17} (8t^2 - 5t + 3)$

**2.**  $\sum_{m=3}^{450} (8m - 4)$

Evalúe las sumas dadas en los problemas 3 a 6.

**3.**  $\sum_{i=1}^7 6i$

**4.**  $\sum_{p=0}^4 10p$

**\*5.**  $\sum_{k=3}^9 (10k + 16)$

**6.**  $\sum_{n=7}^{11} (2n - 3)$

Exprese las sumas dadas en notación de sumatoria en los problemas 7 a 12.

**7.**  $36 + 37 + 38 + 39 + \dots + 60$

**8.**  $1 + 4 + 9 + 16 + 25$

**\*9.**  $5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + 5^7 + 5^8$

**10.**  $11 + 15 + 19 + 23 + \dots + 71$

**11.**  $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256$

**12.**  $10 + 100 + 1000 + \dots + 100\,000\,000$

Evalué las sumas dadas en los problemas 13 a 26.

**13.**  $\sum_{k=1}^{43} 100$

**14.**  $\sum_{k=35}^{135} 2$

**15.**  $\sum_{k=1}^n \left( 5 \cdot \frac{1}{n} \right)$

**16.**  $\sum_{k=1}^{200} (k - 100)$

**17.**  $\sum_{k=51}^{100} 10k$

**18.**  $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n+1} k^2$

**\*19.**  $\sum_{k=1}^{20} (5k^2 + 3k)$

**20.**  $\sum_{k=1}^{100} \frac{3k^2 - 200k}{101}$

**21.**  $\sum_{k=51}^{100} k^2$

**22.**  $\sum_{k=1}^{50} (k + 50)^2$

**23.**  $\sum_{k=1}^{10} \left\{ \left[ 4 - \left( \frac{2k}{10} \right)^2 \right] \left( \frac{2}{10} \right) \right\}$

**24.**  $\sum_{k=1}^{100} \left\{ \left[ 4 - \left( \frac{2}{100}k \right)^2 \right] \left( \frac{2}{100} \right) \right\}$

**25.**  $\sum_{k=1}^n \left\{ \left[ 5 - \left( \frac{3}{n} \cdot k \right)^2 \right] \frac{3}{n} \right\}$

**26.**  $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(n+1)(2n+1)}$

## 1.6 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

#### Sección 1.1

#### Aplicaciones de ecuaciones

costo fijo      costo variable      costo total      ingreso total      utilidad

Ej. 3, p. 48

#### Sección 1.2

#### Desigualdades lineales

$a < b$        $a \leq b$        $a > b$        $a \geq b$        $a < x < b$

Ej. 1, p. 56

desigualdad      sentido de una desigualdad

Ej. 2, p. 56

desigualdades equivalentes      desigualdad lineal

Ej. 1, p. 56

intervalo      intervalo abierto      intervalo cerrado      extremos

Ej. 3, p. 57

$(a, b)$        $[a, b]$        $(-\infty, b)$        $(-\infty, b]$        $(a, \infty)$        $[a, \infty)$        $(-\infty, \infty)$

<b>Sección 1.3</b>	Aplicaciones de las desigualdades renta <i>versus</i> compra	Ej. 2, p. 59
	activos circulantes      pasivos circulantes      razón de circulante	Ej. 3, p. 59
<b>Sección 1.4</b>	<b>Valor absoluto</b> distancia      valor absoluto, $ x $ unión, $\cup$	Ej. 3, p. 63
<b>Sección 1.5</b>	Notación de sumatoria notación $\sum$ índice      cotas	Ej. 1, p. 66

## Resumen

Cuando un problema se expresa con palabras, no trae consigo una ecuación. En lugar de ello, es necesario replantearlo al traducir los enunciados verbales en una ecuación (o en una desigualdad). Esto se conoce como *modelado matemático*. Es importante leer primero el problema más de una vez hasta entender con claridad cuál es la información que se proporciona y cuál es la que se debe encontrar. Después, se debe seleccionar una variable para representar la cantidad desconocida que se desea determinar. Se utilizan las relaciones y datos dados en el problema, y se traducen en una ecuación que involucre a la variable. Por último, se resuelve la ecuación, y se comprueba si su solución responde lo que se desea conocer. Algunas veces la solución de la *ecuación* no será la respuesta al *problema*, pero puede ser útil en la obtención de dicha respuesta.

Algunas relaciones básicas que se utilizan para resolver problemas de administración son las siguientes:

$$\text{costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}$$

$$\text{ingreso total} = (\text{precio por unidad})(\text{número de unidades vendidas})$$

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

Los símbolos de desigualdad  $<$ ,  $\leq$ ,  $>$  y  $\geq$  se utilizan para representar una desigualdad, que es un enunciado en el que un número

es, por ejemplo, menor que otro. Tres operaciones básicas que al ser aplicadas a una desigualdad garantizan una desigualdad equivalente son:

1. Sumar (o restar) el mismo número a (o de) ambos lados.
2. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número positivo.
3. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número negativo e invertir el sentido de la desigualdad.

Una definición algebraica de valor absoluto es:

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \quad y \quad |x| = -x \text{ si } x < 0$$

Se interpreta  $|a - b|$  o  $|b - a|$  como la distancia entre  $a$  y  $b$ . Si  $d > 0$ , entonces la solución de la desigualdad  $|x| < d$  es el intervalo  $(-d, d)$ . La solución a  $|x| > d$  consiste en dos intervalos y está dada por  $(-\infty, -d) \cup (d, \infty)$ . Algunas propiedades básicas del valor absoluto son:

- |   |  |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math> ab  =  a  \cdot  b </math></li> <li>3. <math> a - b  =  b - a </math></li> <li>5. <math> a + b  \leq  a  +  b </math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>2. <math>\left  \frac{a}{b} \right  = \frac{ a }{ b }</math></li> <li>4. <math>- a  \leq a \leq  a </math></li> </ol> |
|---|--|

## Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

Resuelva la ecuación o la desigualdad de los problemas 1 a 15.

1.  $5x - 2 \geq 2(x - 7)$
2.  $2x - (7 + x) \leq x$
3.  $-(5x + 2) < -(2x + 4)$
4.  $-2(x + 6) > x + 4$
5.  $3p(1 - p) > 3(2 + p) - 3p^2$
6.  $3\left(5 - \frac{7}{3}q\right) < 9$
7.  $\frac{x+5}{3} - \frac{1}{2} \leq 2$
8.  $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} < \frac{x}{5}$
9.  $\frac{1}{4}s - 3 \leq \frac{1}{8}(3 + 2s)$
10.  $\frac{1}{3}(t + 2) \geq \frac{1}{4}t + 4$
11.  $|3 - 2x| = 7$
12.  $\left| \frac{5x - 6}{13} \right| = 0$

13.  $|2z - 3| < 5$
14.  $4 < \left| \frac{2}{3}x + 5 \right|$
15.  $|3 - 2x| \geq 4$
16. Evalúe  $\sum_{i=1}^5 (i + 2)^3$  al elevar al cubo el binomio, primero y después usar las ecuaciones (10), (12), (13) y (14) de la sección 1.5.
17. Evalúe  $\sum_{i=3}^7 i^3$  usando  $\sum_{i=1}^7 i^3 - \sum_{i=1}^2 i^3$ . Explique por qué funciona y cite algunas ecuaciones de la sección 1.5 que puedan usarse. Explique por qué la respuesta es necesariamente la misma que en el problema 16.
18. **Utilidad** ¿A qué porcentaje de la utilidad sobre el costo es equivalente una utilidad del 40% sobre el precio de venta de un producto?
19. **Bolsa de Valores** En cierto día, se negociaron 1132 diferentes títulos en el mercado de acciones de Nueva York. Había 48 emisiones más que mostraban ganancias de las que mostraban una pérdida, y ninguna emisión permaneció sin cambio. ¿Cuántas emisiones sufrieron pérdidas?
20. **Impuesto a las ventas** El impuesto sobre las ventas en cierto estado es de 6.5%. Si durante un año hubo un total de \$3039.29 en compras, incluyendo el impuesto, ¿cuánto corresponde al impuesto?

- 21. Asignación de producción** Una compañía fabricará un total de 10 000 unidades de su producto en las plantas A y B. Los datos disponibles son los siguientes:

	Planta A	Planta B
Costo unitario por mano de obra y material	\$5	\$5.50
Costos fijos	\$30 000	\$35 000

Considerando las dos plantas, la compañía ha decidido asignar no más de \$117 000 para costos totales. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe producir la planta A?

- 22. Tanques de propano** Una compañía va a reemplazar dos tanques de propano por un tanque nuevo. Los tanques viejos son cilíndricos, cada uno tiene 25 pies de altura. El primero tiene un radio de 10 pies y el otro un radio de 20 pies. El tanque nuevo es esencialmente esférico y tendrá la misma capacidad

que los dos antiguos tanques juntos. Determine su radio. [Una pista: El volumen  $V$  de un tanque cilíndrico es  $V = \pi r^2 h$ , donde  $r$  es el radio de la base circular y  $h$  es la altura del tanque. El volumen de un tanque esférico es  $W = \frac{4}{3} \pi R^3$ , donde  $R$  es el radio del tanque.]

- 23. Razón operativa** La razón operativa de un negocio de ventas al menudeo es la razón, expresada como un porcentaje, de los costos de operación (todo, desde gastos en publicidad hasta depreciación del equipo) sobre las ventas netas (es decir, ventas brutas menos devoluciones y rebajas). Una razón operativa menor al 100% indica una operación rentable, mientras que una razón operativa en el rango de 80 a 90% es extremadamente buena. Si una compañía tiene ventas netas de \$236 460 en un periodo, formule una desigualdad que describa los costos de operación que mantendrían la razón operativa por debajo de 90%.

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Grabación de calidad variable<sup>1</sup>

**E**n la actualidad, existe una gran variedad de equipo tecnológico para grabar películas, programas de televisión, programas de computadora, juegos y canciones. Independientemente de que sea un iPod, un DVD, un CD o incluso una videocámara, casi siempre es posible grabar a relaciones de compresión variables con calidad variable.



(Si usted utiliza un antiguo dispositivo de cinta con diferentes *velocidades*, entonces la velocidad más rápida tiene una relación de 1 a 1, mientras que la más lenta, que permite almacenar  $r$  veces más tiene una compresión de  $r$  a 1. Por ejemplo el estándar del VHS, SP, es 1 a 1, mientras que el LP es 2 a 1 y el EP es 3 a 1.)

El medio de almacenamiento puede ser un disco, una cinta (o algo que aún no se encuentra en el mercado), pero siempre existe una relación cantidad-calidad que es inherente a cualquier dispositivo de grabación imaginable. Para cualquier medio, entre más información se almacene gracias a una mayor compresión, se obtiene menor calidad.

A manera de ejemplo, suponga que desea grabar una película de 210 minutos en un DVD. Para lograr que quepa en un solo disco a una relación de compresión fija, necesitaría la relación que permite entre 3 y 4 horas de tiempo de grabado. La relación que logra la calidad adecuada para una película permite sólo 2 horas de grabación aproximadamente y, por lo tanto, usar únicamente esa no sería suficiente. Sin embargo, quizás usted desee grabar tanto como fuera posible, a la mejor calidad, al cambiar de una relación a otra a un tiempo determinado.

Se resolverá el problema de encontrar el tiempo de *cambio* de un modo general que sea útil para todas las aplicaciones de este tipo. Se desea almacenar  $M$  minutos en un dispositivo que con una compresión de 1 a 1 almacenará  $m$  minutos. Existen relaciones de compresión disponibles de  $r$  a 1 y  $R$  a 1, digamos que  $1 < r < R$ , de manera que  $R$  corresponde a empaquetar más, a una calidad menor. El número  $\frac{M}{r}$  da el número de minutos 1 a 1 o minutos reales que se necesitarán para almacenar  $M$  minutos a una relación de  $r$  a 1. Si el

número  $\frac{M}{r}$  es mayor que  $m$ , entonces no se podrán almacenar todos los  $M$  minutos en nuestro dispositivo a una relación  $r$ . Suponiendo que  $\frac{M}{R}$  es menor que  $m$ , deseamos encontrar el tiempo  $t$  cuando será necesario cambiar de  $r$  a  $R$  para grabar todos los  $M$  minutos.

Si se graban  $t$  minutos con la relación  $r$ , entonces se consumirán  $\frac{t}{r}$  de los  $m$  minutos disponibles con relación 1 a 1 de tiempo de grabación. Los restantes  $M - t$  minutos consumirán otros  $\frac{M - t}{R}$  de los  $m$  minutos disponibles 1 a 1 a relación  $R$ . Así, para usar *todo* el espacio de grabación disponible, debemos encontrar  $t$  tal que

$$\frac{t}{r} + \frac{M - t}{R} = m$$

Aunque esta ecuación, que es completamente literal, podría parecer complicada, es muy sencilla con respecto a  $t$ , la variable que se desea encontrar. De hecho es *lineal* en  $t$ , y se necesitan sólo unos cuantos pasos para obtener una solución general.

$$\begin{aligned}\frac{t}{r} + \frac{M}{R} - \frac{t}{R} &= m \\ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)t &= m - \frac{M}{R} \\ \left(\frac{R - r}{rR}\right)t &= \frac{mR - M}{R} \\ t &= \frac{mR - M}{R} \cdot \frac{rR}{R - r} \\ t &= \frac{r(mR - M)}{R - r}\end{aligned}$$

Observe que la fórmula no es simétrica con respecto a  $r$  y  $R$ . Si inicia a los cuántos minutos después de empezar a grabar en alta calidad se debe cambiar a la calidad menor, con la intención de completar la grabación en el espacio disponible. Si se desea guardar el componente de calidad más alta para el *final* de la grabación, sería necesario ajustar la fórmula. Vea los problemas 1, 2, 3, 4 y 7. Debe enfatizarse que no hace falta memorizar la fórmula (a menos que se planee utilizarla con mucha frecuencia). Es el método lo que es más importante. La existencia de la solución general asegura que el método siempre funcionará. Trate de plantear y resolver los problemas específicos usando el método, en vez de sustituir en la fórmula, cuando pase a los ejercicios.

Para aprender más acerca de los esquemas de compresión de datos visite [wikipedia.org](https://en.wikipedia.org) y busque “*data compression*” y términos relacionados.

<sup>2</sup>Adaptado de Gregory N. Fiore, “An Application of Linear Equations to the VCR”, *Mathematics Teacher*, 81 (octubre de 1988), 570-72. Con permiso del National Council of Teachers of Mathematics.

## Problemas

Una videograbadora que usa cinta estándar T-120 graba durante 2 horas en modo SP. Así que  $m = 120$  para dicho equipo de grabación estándar. Utilice este valor en los problemas 1 a 4.

1. Si se usan los modos LP y SP, en ese orden, para grabar una película de  $2\frac{1}{2}$  horas, ¿cuánto tiempo después de iniciada la película debe cambiarse de LP a SP?
2. Si se utilizan los modos EP y SP, en ese orden, para grabar un programa de  $2\frac{1}{2}$  horas, ¿cuántos minutos después de iniciado el programa debe cambiarse de EP a SP?
3. Si los modos LP y SP se utilizan en ese orden para grabar una película de  $M$  minutos de duración, ¿cuánto tiempo después de iniciada la película debe hacerse el cambio de LP a SP?
4. Los modos EP y SP se utilizan en ese orden para grabar una película de  $M$  minutos de duración, ¿cuánto tiempo después de iniciada la película debe hacerse el cambio de EP a SP?

5. Para un CD estándar, el valor de  $m$  es de 74 aproximadamente. Utilice la función Solver de una calculadora graficadora para resolver la ecuación

$$\frac{x}{12} + \frac{1080 - x}{20} = 74$$

Después, de manera similar, resuelva la ecuación

$$\frac{x}{15} + \frac{1590 - x}{24} = 74$$

6. En el contexto de la grabación comprimida de audio en CD, ¿qué representa cada una de las ecuaciones del problema 5?
7. Obtenga la fórmula general para encontrar el tiempo necesario para cambiar la relación de grabación si la calidad más alta (relación  $r$ ) debe reservarse para el final de la grabación.

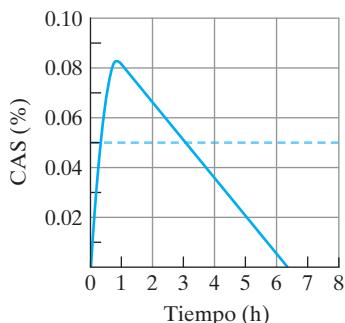
# 2

## FUNCIONES Y GRÁFICAS

- 2.1 Funciones
- 2.2 Funciones especiales
- 2.3 Combinaciones de funciones
- 2.4 Funciones inversas
- 2.5 Gráficas en coordenadas rectangulares
- 2.6 Simetría
- 2.7 Traslaciones y reflexiones
- 2.8 Repaso

### Aplicación práctica

Una experiencia con impuestos



**S**upongamos que un hombre de 180 libras bebe cuatro cervezas, una tras otra. Se sabe que su concentración de alcohol en la sangre, CAS, primero se elevará y después disminuirá y regresará en forma paulatina hasta cero. Pero, ¿cuál es la mejor manera de describir qué tan rápido se eleva la CAS, en dónde alcanza su punto máximo y qué tan rápido disminuye de nuevo?

Si se obtienen los valores medidos de la CAS para este bebedor en particular, pueden mostrarse en una tabla, como sigue:

Tiempo (h)	1	2	3	4	5	6
CAS(%)	0.0820	0.0668	0.0516	0.0364	0.0212	0.0060

Sin embargo, una tabla sólo puede mostrar un número limitado de valores y en realidad no proporciona la imagen global.

En lugar de lo anterior, podría relacionarse la CAS con el tiempo  $t$  utilizando una combinación de ecuaciones lineales y cuadráticas (recuerde el capítulo 0):

$$\text{CAS} = -0.1025t^2 + 0.1844t \quad \text{si } t \leq 0.97$$

$$\text{CAS} = -0.0152t + 0.0972 \quad \text{si } t > 0.97$$

Sin embargo, como con la tabla, después de ver las ecuaciones resulta difícil entender de inmediato lo que sucede con la CAS a lo largo del tiempo.

Quizá la mejor descripción de los cambios en la CAS a través del tiempo es una gráfica como la de la izquierda. Aquí, se observa con facilidad qué es lo que sucede. La concentración de alcohol en la sangre asciende rápidamente, alcanza un máximo de 0.083% después de una hora aproximadamente, y luego desciende de manera gradual durante las siguientes cinco horas y media. Observe que por más de tres horas la CAS de este bebedor está por arriba de 0.05%, el punto en el que, por lo regular, las habilidades para conducir un vehículo empiezan a fallar. La curva variará de un bebedor a otro, pero por lo general las mujeres se ven afectadas con mayor severidad que los hombres, no sólo por la diferencia de peso, sino también a consecuencia del diferente contenido de agua en el cuerpo de ambos sexos.

La relación entre tiempo y contenido de alcohol en la sangre, es un ejemplo de una función. En este capítulo se tratan a fondo las funciones y sus gráficas.

**OBJETIVO**

Entender lo que es una función y determinar sus dominios y valores.

## 2.1 Funciones

En el siglo XVII, Gottfried Wilhelm Leibniz, uno de los inventores del cálculo, introdujo el término *función* en el vocabulario matemático. Se trata de uno de los conceptos más elementales de las matemáticas, y es esencial para el estudio del cálculo.

Con frecuencia escuchamos en el habla cotidiana de personas educadas frases como “las tasas de interés están en función de los precios del petróleo” o “el monto de la pensión está en función de los años trabajados” o “la concentración de alcohol en la sangre después de beber cerveza es una función del tiempo”. Algunas veces, tales expresiones concuerdan con el uso matemático, pero no siempre. Debemos ser más cuidadosos con el uso que hacemos de la palabra *función*, a fin de que sea útil matemáticamente, sin embargo hay características dentro de su uso cotidiano que vale la pena destacar.

Por ejemplo, el espíritu que fundamenta los ejemplos anteriores podría enunciarse como “las cantidades de tipo  $Y$  están en función de las cantidades de tipo  $X$ ”. Existen dos tipos de cantidades —aunque es posible que  $Y$  sea igual que  $X$ — y el valor de  $X$  parece *determinar* de alguna manera el valor de  $Y$ . En general, el uso no es simétrico en  $X$  y en  $Y$ . A modo de ilustración: la frase “los precios del petróleo están en función de las tasas de interés” no parece verdadera. La mayor parte de la gente no cree que ni siquiera la manipulación de las tasas de interés que lleva a cabo la Reserva Federal de Estados Unidos pueda determinar los precios del petróleo. La mayoría de los economistas recordarán aquella ocasión en la que la tasa de interés federal estuvo al 6% y el precio del barril de petróleo fue de \$30; y la vez en que la tasa de interés también era de 6%, pero el precio del barril de petróleo ascendió a \$40. Una tasa de interés dada no asegura un único precio del petróleo. Por lo tanto, la cantidad de *entrada*, la tasa de interés, no *determina* la cantidad de *salida*, el precio del petróleo. Por otro lado, suponga que una persona que acaba de beber cinco cervezas se somete a una prueba de concentración de alcohol en la sangre a partir de ese momento y cada hora durante las siguientes seis. Para cada uno de los valores de tiempo  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , la medición de la concentración de alcohol en la sangre producirá *exactamente un valor*.

Para nuestros propósitos, este último ejemplo proporciona la clave para que el uso de la palabra *función* sea preciso: *para cada valor de entrada,  $x$  (un tiempo), existe exactamente un valor de salida,  $y$  (una concentración de alcohol en la sangre)*.

De hecho, con este criterio *no* es correcto decir que “las tasas de interés están en función de los precios del petróleo”. Aunque podría pensarse que los altos precios del petróleo son la *causa* de las dificultades económicas, no es cierto que un valor del precio del petróleo determine una tasa de interés única. Para ver esto con mayor claridad puede visitar

[http://www.wtrg.com/oil\\_graphs/oilprice1947.gif](http://www.wtrg.com/oil_graphs/oilprice1947.gif)

y

[http://www.goldeagle.com/editorials\\_00/leopold011400.html](http://www.goldeagle.com/editorials_00/leopold011400.html)

A partir del primer sitio de Internet, pueden determinarse dos ocasiones (bastante recientes) en las que el precio del petróleo fue el mismo. Si el segundo sitio indica que en ambas existieron diferentes tasas de interés, entonces se tiene la prueba de que un precio particular del petróleo no da lugar a una cierta tasa de interés. Tampoco es cierto que “el monto de una pensión está en función de los años trabajados”. Si el valor de los “años trabajados” es 25, el valor del “monto de la pensión” aún no puede determinarse. En la mayoría de las organizaciones, el director general y el gerente de sistemas tendrán pensiones de retiro muy diferentes después de 25 años de servicio. Sin embargo, en este ejemplo podría decirse que, *de acuerdo con el perfil del puesto*, el monto de la pensión está en función de los años trabajados.

Si se invierten \$100 a una tasa de interés simple del 6%, entonces el interés ganado  $I$  es una función de la cantidad de tiempo  $t$  que el dinero permanece invertido. Estas cantidades están relacionadas por la fórmula

$$I = 100(0.06)t \quad (1)$$

Aquí, para cada valor de  $t$ , existe exactamente un valor de  $I$  dado por la ecuación (1). En una situación como ésta, con frecuencia se escribe  $I(t) = 100(0.06)t$  para reforzar la idea de que el valor de  $I$  está determinado por el valor de  $t$ . Algunas veces se escribe  $I = I(t)$  para expresar que  $I$  es una función de  $t$  aun si no se conoce una fórmula que lo especifique. La fórmula (1) asigna la salida 3 a la entrada  $\frac{1}{2}$  y la salida 12 a la entrada 2. Puede pensarse en la fórmula (1) como la definición de una *regla*: Multiplicar  $t$  por  $100(0.06)$ . La regla asigna a cada número de entrada  $t$  exactamente un número de salida  $I$ , el cual se simboliza mediante la siguiente notación con flechas:

$$t \mapsto I \quad \text{o} \quad t \mapsto 100(0.06)t$$

Una fórmula proporciona el modo de describir una regla para cubrir potencialmente un número infinito de casos, pero si existe sólo una cantidad finita de valores para la variable de entrada, como en el caso al inicio del capítulo, entonces la *regla* obtenida a partir de las observaciones registradas en la tabla, puede no ser parte de ninguna *fórmula* reconocible. A continuación, se usará la palabra *regla* en lugar de *fórmula* para poder incluir esta útil generalización.

### DEFINICIÓN

Una *función* es una regla que asigna a cada número de entrada exactamente un número de salida. Al conjunto de números de entrada para los cuales se aplica la regla se le llama el **dominio** de la función. Al conjunto de todos los números posibles de salida se le llama **rango** (o **codomínio**).

Para la función del interés definida por la ecuación (1), el número de entrada  $t$  no puede ser negativo, puesto que en este ejemplo el tiempo negativo no tiene sentido. Así, el dominio consiste en todos los números no negativos (esto es, todo  $t \geq 0$ , donde la variable proporciona el tiempo transcurrido desde el momento en que se hizo la inversión).

Hasta aquí se ha usado el término *función* en un sentido restringido porque, en general, las entradas o salidas no tienen por qué ser números. Por ejemplo, una lista de estados y sus capitales asigna a cada estado su capital (exactamente una salida), de modo que hay una función implícita. Sin embargo, por el momento sólo se considerarán las funciones cuyos dominios y rangos consistan en números reales.

Una variable que representa los números de entrada para una función se denomina **variable independiente**. Una variable que representa los números de salida se denomina **variable dependiente**, porque su valor *depende* del valor de la *variable independiente*. Se dice que la variable dependiente es una *función de la variable independiente*. Esto es, la salida es una función de la entrada. Así, para la fórmula de interés  $I = 100(0.06)t$ , la variable independiente es  $t$ , la variable dependiente es  $I$ , e  $I$  es una función de  $t$ .

Como otro ejemplo, la ecuación:

$$y = x + 2 \tag{2}$$

define a  $y$  como una función de  $x$ . La ecuación proporciona la regla, “sumar 2 a  $x$ ”. Esta regla asigna a cada entrada  $x$  exactamente una salida  $x + 2$ , que es  $y$ . Si  $x = 1$ , entonces  $y = 3$ ; si  $x = -4$ , entonces  $y = -2$ . La variable independiente es  $x$  y la variable dependiente es  $y$ .

No todas las ecuaciones en  $x$  y  $y$  definen a  $y$  como una función de  $x$ . Por ejemplo, sea  $y^2 = x$ . Si  $x$  es 9, entonces  $y^2 = 9$ , de modo que  $y = \pm 3$ . Por lo tanto, para la entrada 9 se asigna no uno, sino *dos* números de salida, 3 y -3. Esto viola la definición de función, de modo que  $y$  **no** es una función de  $x$ .

Por otra parte, algunas ecuaciones con dos variables definen a cualquiera de las variables como una función de la otra variable. Por ejemplo, si  $y = 2x$ , entonces para cada entrada  $x$ , existe exactamente una salida,  $2x$ . Así que  $y$  es una función de  $x$ . Sin embargo, al despejar  $x$  de la ecuación se obtiene  $x = y/2$ . Para cada entrada  $y$ , existe exactamente una salida,  $y/2$ . En consecuencia,  $x$  es una función de  $y$ .

Por lo general, las letras  $f, g, h, F, G$ , etcétera, se usan para representar reglas de funciones. Por ejemplo, la ecuación (2),  $y = x + 2$ , define a  $y$  como una función de  $x$ , donde la regla es “sumar 2 a la entrada”. Suponga que se elige  $f$  para representar esta regla.



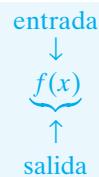
### ADVERTENCIA

En  $y^2 = x$ ,  $x$  y  $y$  están relacionadas, pero esta relación no es una función de  $x$ .

Entonces se dice que  $f$  es la función. Para indicar que  $f$  asigna a la entrada 1 la salida 3, se escribe  $f(1) = 3$ , que se lee “ $f$  de 1 es igual a 3”. De manera similar,  $f(-4) = -2$ . En general, si  $x$  es cualquier entrada, se tiene la notación siguiente:

*f(x)* es un número de salida.

$f(x)$ , que se lee “ $f$  de  $x$ ”, representa el número de salida en el rango de  $f$  que corresponde al número de entrada  $x$  en el dominio de  $f$ .



Así, la salida  $f(x)$  es lo mismo que  $y$ . Pero como  $y = x + 2$ , puede escribirse  $y = f(x) = x + 2$  o simplemente,

$$f(x) = x + 2$$

Por ejemplo, para encontrar  $f(3)$ , que es la salida correspondiente a la entrada 3, se reemplaza con 3 cada  $x$  en  $f(x) = x + 2$ :

$$f(3) = 3 + 2 = 5$$

Del mismo modo,

$$f(8) = 8 + 2 = 10$$

$$f(-4) = -4 + 2 = -2$$



### ADVERTENCIA

$f(x)$  no significa  $f$  por  $x$ ,  $f(x)$  es la salida que corresponde a la entrada  $x$ .

La notación funcional es muy utilizada en cálculo.

La idea de reemplazo es muy importante en la determinación de los valores funcionales.

Los números de salida como  $f(-4)$  se llaman **valores de la función**. Tenga en mente que dichos valores están en el rango de  $f$ .

Con mucha frecuencia, las funciones se definen por medio de la “notación de funciones”. Por ejemplo, la ecuación  $g(x) = x^3 + x^2$ , define a la función  $g$  que asigna a cada número de entrada  $x$  el número de salida  $x^3 + x^2$ :

$$g: x \mapsto x^3 + x^2$$

En otras palabras,  $g$  suma el cubo y el cuadrado de un número de entrada. Algunos valores de la función son:

$$g(2) = 2^3 + 2^2 = 12$$

$$g(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$$

$$g(t) = t^3 + t^2$$

$$g(x+1) = (x+1)^3 + (x+1)^2$$

Observe que  $g(x+1)$  se encontró al reemplazar cada  $x$  en  $x^3 + x^2$  por la entrada  $x+1$ .

Cuando se haga referencia a la función  $g$  definida por  $g(x) = x^3 + x^2$ , se puede decir con toda libertad que la ecuación es una función. Así, se habla de “la función  $g(x) = x^3 + x^2$ ” y, de manera análoga, “la función  $y = x + 2$ ”.

Seamos más específicos acerca del dominio de una función. A menos que se establezca otra cosa, el dominio consiste en todos los números reales para los cuales la regla de la función tenga sentido, esto es, el conjunto de todos los números reales para los cuales la regla proporciona valores de la función que también son números reales.

Por ejemplo, suponga que

$$h(x) = \frac{1}{x-6}$$

Aquí puede usarse cualquier número real para  $x$  excepto 6, porque el denominador es 0 cuando  $x$  es 6. Así que se entiende que el dominio de  $h$  consiste en todos los números reales excepto 6.

### Igualdad de funciones

Decir que dos funciones  $f$  y  $g$  son iguales, denotado por  $f = g$ , es igual a decir que

1. El dominio de  $f$  es igual al dominio de  $g$ .
2. Para toda  $x$  en el dominio de  $f$  y  $g$ ,  $f(x) = g(x)$ .

El requisito 1 dice que un número  $x$  está en el dominio de  $f$  si y sólo si está en el dominio de  $g$ . Así que, si se tiene que  $f(x) = x^2$ , sin mención explícita del dominio, y  $g(x) = x^2$  para  $x \geq 0$ , entonces  $f \neq g$ . Aquí, el dominio de  $f$  es toda la recta real  $(-\infty, \infty)$  y el dominio de  $g$  es  $[0, \infty)$ . Por otro lado, si se tiene  $f(x) = (x + 1)^2$  y  $g(x) = x^2 + 2x + 1$ , entonces se entiende que tanto para  $f$  como para  $g$  el dominio es  $(-\infty, \infty)$  y el criterio para decidir si  $f = g$  consiste en saber si, para cada número real  $x$ , se tiene que  $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ . Pero esto es cierto; es un caso especial, el número 4, expuesto en la sección 0.4 correspondiente a los productos especiales. De hecho, los antiguos libros de texto se refieren a los enunciados del tipo  $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$  como “identidades”, para indicar que son ciertos para cualquier valor admisible de la variable, y para distinguirlos de los enunciados del tipo  $(x + 1)^2 = 0$ , que son verdaderos sólo para algunos valores de  $x$ .

Dadas las funciones  $f$  y  $g$ , se tiene que  $f \neq g$  ya sea porque el dominio de  $f$  es diferente del dominio de  $g$  o porque existe alguna  $x$  para la cual  $f(x) \neq g(x)$ .

### EJEMPLO 1 Determinación de la igualdad de funciones

Determine cuáles de las siguientes funciones son iguales.

a.  $f(x) = \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x - 1)}$

b.  $g(x) = x + 2$

c.  $h(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

d.  $k(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

**Solución:** El dominio de  $f$  es el conjunto de todos los números reales diferentes de 1, mientras que el de  $g$  es el conjunto de todos los números reales. (Aquí se sigue la convención de que el dominio es el conjunto de todos los números reales para los cuales la regla tiene sentido.) Se tendrá que decir más acerca de funciones como  $h$  y  $k$ , que se definen por *casos* en el ejemplo 4 de la sección 2.2. Aquí se observa que tanto el dominio de  $h$  como el de  $k$  es  $(-\infty, \infty)$ , puesto que para ambos existe una regla que tiene sentido para todos los números reales. Los dominios de  $g$ ,  $h$  y  $k$  son iguales entre sí, pero el de  $f$  es diferente. Entonces, por el requerimiento 1 para la igualdad de funciones  $f \neq g$ ,  $f \neq h$  y  $f \neq k$ . Por definición,  $g(x) = h(x) = k(x)$  para toda  $x \neq 1$ , de manera que la igualdad de  $g$ ,  $h$  y  $k$  depende de sus valores en 1. Como  $g(1) = 3$ ,  $h(1) = 0$  y  $k(1) = 3$ , se concluye que  $g = k$  y que  $g \neq h$  (y que  $h \neq k$ ). Aunque este ejemplo pudiera parecer artificial, es representativo de las situaciones que surgen frecuentemente en el cálculo.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3



#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

##### DETERMINACIÓN DE DOMINIOS

El área de un círculo depende de la longitud de su radio.

- Escriba una función  $a(r)$  para el área de un círculo cuando la longitud del radio es  $r$ .
- ¿Cuál es el dominio de esta función fuera de contexto?
- ¿Cuál es el dominio de esta función en el contexto dado?

### EJEMPLO 2 Determinación de dominios

Encuentre el dominio de cada función.

a.  $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2}$

**Solución:** No es posible dividir entre cero, así que deben encontrarse todos los valores de  $x$  que hacen que el denominador sea cero. Éstos no pueden ser números de entrada. Así que se iguala el denominador a cero y se resuelve para  $x$ :

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad (\text{ecuación cuadrática})$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0 \quad (\text{al factorizar})$$

$$x = 2, -1$$

Por lo tanto, el dominio de  $f$  consiste en todos los números reales excepto 2 y -1.

b.  $g(t) = \sqrt{2t - 1}$

**Solución:**  $\sqrt{2t - 1}$  es un número real si  $2t - 1$  es mayor o igual a cero. Si  $2t - 1$  es negativo, entonces  $\sqrt{2t - 1}$  no es un número real. (Es un número imaginario.)

Como los valores de la función deben ser números reales, por lo menos hasta este momento, debe suponerse que:

$$2t - 1 \geq 0$$

$$2t \geq 1 \quad (\text{al sumar 1 en ambos lados})$$

$$t \geq \frac{1}{2} \quad (\text{al dividir ambos lados entre 2})$$

Así, el dominio es el intervalo  $[\frac{1}{2}, \infty)$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

#### DETERMINACIÓN DEL DOMINIO Y DE LOS VALORES DE LA FUNCIÓN

El tiempo necesario para recorrer una cierta distancia depende de la velocidad a la cual se haga el recorrido.

- Escriba una función  $t(r)$  para el tiempo si la distancia a recorrer es 300 millas y la velocidad es  $r$ .
- ¿Cuál es el dominio de esta función fuera de contexto?
- ¿Cuál es el dominio de esta función en el contexto dado?
- Encuentre  $t(x)$ ,  $t\left(\frac{x}{2}\right)$  y  $t\left(\frac{x}{4}\right)$ .
- ¿Qué le pasa al tiempo si la velocidad se reduce (divide) por una constante  $c$ ? Describa esta situación con el uso de una ecuación.

### EJEMPLO 3 Determinación del dominio y de los valores funcionales

Sea  $g(x) = 3x^2 - x + 5$ . Puede utilizarse cualquier número real como  $x$ , de modo que el dominio de  $g$  son todos los números reales.

- Encuentre  $g(z)$ .

**Solución:** Al reemplazar cada  $x$  por  $z$  en  $g(x) = 3x^2 - x + 5$  se obtiene

$$g(z) = 3(z)^2 - z + 5 = 3z^2 - z + 5$$

- Encuentre  $g(r^2)$ .

**Solución:** Al reemplazar cada  $x$  por  $r^2$  en  $g(x) = 3x^2 - x + 5$  se obtiene

$$g(r^2) = 3(r^2)^2 - r^2 + 5 = 3r^4 - r^2 + 5$$

- Encuentre  $g(x + h)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} g(x + h) &= 3(x + h)^2 - (x + h) + 5 \\ &= 3(x^2 + 2hx + h^2) - x - h + 5 \\ &= 3x^2 + 6hx + 3h^2 - x - h + 5 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31(a)



#### ADVERTENCIA

No confunda la notación. En el ejemplo 3(c), se encontró  $g(x + h)$  al reemplazar cada  $x$  en  $g(x) = 3x^2 - x + 5$  por la entrada  $x + h$ .

Pero  $g(x + h)$ ,  $g(x) + h$  y  $g(x) + g(h)$  son cantidades totalmente distintas.

### EJEMPLO 4 Determinación de un cociente de diferencia

Si  $f(x) = x^2$ , determine  $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ .

**Solución:** La expresión  $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$  se conoce como un **cociente de diferencia**.

Aquí el numerador es una diferencia de valores de la función. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h \end{aligned}$$

El cociente de diferencia de una función es un concepto importante para el cálculo.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35

En algunos casos, el dominio de una función está restringido por razones físicas o económicas. Por ejemplo, la función de interés estudiada con anterioridad,  $I = 100(0.06)t$ , tiene  $t \geq 0$  porque  $t$  representa el tiempo. El ejemplo 5 ilustra algo similar.

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

## FUNCIÓN DE DEMANDA

Suponga que la demanda semanal de pizzas en un restaurante es  $p = 26 - \frac{q}{40}$ .

- Si el precio actual es de \$18.50 por pizza, ¿cuántas se venden cada semana?
- Si se venden 200 pizzas semanales, ¿cuál es el precio actual?
- Si el propietario desea duplicar el número de pizzas vendidas cada semana (a 400), ¿cuál debe ser el precio?

## EJEMPLO 5 Función de demanda

Suponga que la ecuación  $p = 100/q$  describe la relación entre el precio por unidad  $p$  de cierto producto, y el número de unidades  $q$  que los consumidores comprarán (demanda) por semana a ese precio. Esta ecuación se llama *ecuación de demanda* para el producto. Si  $q$  es un número de entrada, entonces para cada valor de  $q$  se asigna exactamente un número de salida  $p$ :

$$q \mapsto \frac{100}{q} = p$$

Por ejemplo,

$$20 \mapsto \frac{100}{20} = 5$$

esto es, cuando  $q$  es 20, entonces  $p$  es 5. Así, el precio  $p$  es una función de la cantidad demandada,  $q$ . Esta función se llama **función de demanda**. La variable independiente es  $q$ , y la variable dependiente es  $p$ . Como  $q$  no puede ser 0 (la división entre 0 no está definida) y no puede ser negativa ( $q$  representa una cantidad), el dominio consiste en todos los valores de  $q$  tales que  $q > 0$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 43



## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

## PROGRAMA DE OFERTA

Precio por unidad en dólares	Cantidad ofrecida por semana
500	11
600	14
700	17
800	20

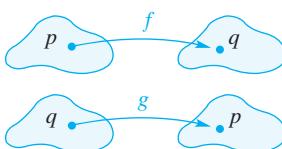


FIGURA 2.2 Programa de oferta y funciones de oferta.

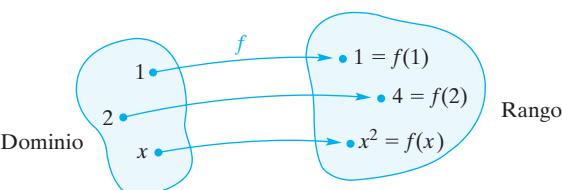


FIGURA 2.1 Correspondencia funcional para  $f(x) = x^2$ .

## EJEMPLO 6 Programa de la oferta

La tabla de la figura 2.2 es un *programa de oferta*. Indica una correspondencia entre el precio  $p$  de cierto producto y la cantidad  $q$  que los fabricantes surtirán por semana a ese precio. A cada precio le corresponde exactamente una cantidad y viceversa.

Si  $p$  es la variable independiente, entonces  $q$  es una función de  $p$ , es decir  $q = f(p)$ , y

$$f(500) = 11 \quad f(600) = 14 \quad f(700) = 17 \quad y \quad f(800) = 20$$

Observe que cuando el precio por unidad se incrementa, los fabricantes están dispuestos a surtir más unidades por semana.

Por otra parte, si  $q$  es la variable independiente, entonces  $p$  es una función de  $q$ , es decir  $p = g(q)$ , y

$$g(11) = 500 \quad g(14) = 600 \quad g(17) = 700 \quad y \quad g(20) = 800$$

Se habla de  $f$  y  $g$  como **funciones de oferta**.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 53



## T E C N O L O G I A

Los valores de una función pueden calcularse fácilmente con una calculadora graficadora. Por ejemplo, suponga que

$$f(x) = 17x^4 - 13x^3 + 7$$

y que se quiere encontrar  $f(0.7)$ ,  $f(-2.31)$  y  $f(10)$ . Con una calculadora TI-83 Plus, primero se introduce la función como  $Y_1$ :

$$Y_1 = 17X^4 - 13X^3 + 7$$

Después se presiona la tecla “Table” y de manera sucesiva se introducen los valores de  $x$  .7, -2.31 y 10. Los resulta-

dos se muestran en la figura 2.3. Debe notarse que existen otros métodos para evaluar funciones por medio de la TI-83 Plus.

X	$Y_1$
.7	6.6227
-2.31	651.3
10	157007

$X=10$

**FIGURA 2.3** Tabla de valores para la función para  $f(x) = 17x^4 - 13x^3 + 7$ .

## Problemas 2.1

En los problemas 1 a 4, determine si las funciones dadas son iguales.

1.  $f(x) = \sqrt{x^2}$ ;  $g(x) = x$
2.  $G(x) = (\sqrt{x+1})^2$ ;  $H(x) = x+1$
- \*3.  $h(x) = \frac{|x|}{x}$ ;  $k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
4.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$   
 $g(x) = x-1$

En los problemas 5 a 16, obtenga el dominio de cada función.

5.  $f(x) = \frac{8}{x}$
6.  $g(x) = \frac{x}{5}$
- \*7.  $h(x) = \sqrt{x-3}$
8.  $K(z) = \frac{1}{\sqrt{z-1}}$
9.  $f(z) = 3z^2 + 2z - 4$
10.  $H(x) = \frac{x}{x+8}$
11.  $f(x) = \frac{9x-9}{2x+7}$
12.  $g(x) = \sqrt{4x+3}$
13.  $g(y) = \frac{4}{y^2 - 4y + 4}$
14.  $\phi(x) = \frac{x+5}{x^2+x-6}$
15.  $h(s) = \frac{4-s^2}{2s^2-7s-4}$
16.  $G(r) = \frac{2}{r^2+1}$

Determine los valores de la función para cada una de las funciones de los problemas 17 a 28.

17.  $f(x) = 2x+1$ ;  $f(0)$ ,  $f(3)$ ,  $f(-4)$
18.  $H(s) = 5s^2 - 3$ ;  $H(4)$ ,  $H(\sqrt{2})$ ,  $H\left(\frac{2}{3}\right)$
19.  $G(x) = 2 - x^2$ ;  $G(-8)$ ,  $G(u)$ ,  $G(u^2)$
20.  $F(x) = -5x$ ;  $F(s)$ ,  $F(t+1)$ ,  $F(x+3)$
21.  $\gamma(u) = 2u^2 - u$ ;  $\gamma(-2)$ ,  $\gamma(2v)$ ,  $\gamma(x+a)$
22.  $h(v) = \frac{1}{\sqrt{v}}$ ;  $h(16)$ ,  $h\left(\frac{1}{4}\right)$ ,  $h(1-x)$
23.  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ;  $f(1)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(x+h)$
24.  $H(x) = (x+4)^2$ ;  $H(0)$ ,  $H(2)$ ,  $H(t-4)$
25.  $k(x) = \frac{x-7}{x^2+2}$ ;  $k(5)$ ,  $k(3x)$ ,  $k(x+h)$
26.  $k(x) = \sqrt{x-3}$ ;  $k(4)$ ,  $k(3)$ ,  $k(x+1) - k(x)$
27.  $f(x) = x^{4/3}$ ;  $f(0)$ ,  $f(64)$ ,  $f\left(\frac{1}{8}\right)$

28.  $g(x) = x^{2/5}$ ;  $g(32)$ ,  $g(-64)$ ,  $g(t^{10})$

En los problemas 29 a 36 encuentre (a)  $f(x+h)$  y (b)  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ , simplifique sus respuestas.

29.  $f(x) = 4x - 5$
30.  $f(x) = \frac{x}{2}$
- \*31.  $f(x) = x^2 + 2x$
32.  $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$
33.  $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$
34.  $f(x) = x^3$
- \*35.  $f(x) = \frac{1}{x}$
36.  $f(x) = \frac{x+8}{x}$
37. Si  $f(x) = 5x + 3$ , encuentre  $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ .
38. Si  $f(x) = 2x^2 - x + 1$ , encuentre  $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ .

En los problemas 39 a 42, ¿es  $y$  una función de  $x$ ? ¿Es  $x$  una función de  $y$ ?

39.  $9y - 3x - 4 = 0$
40.  $x^2 + y = 0$
41.  $y = 7x^2$
42.  $x^2 + y^2 = 1$
- \*43. La fórmula para el área de un círculo de radio  $r$  es  $A = \pi r^2$ . ¿Es el área una función del radio?
44. Suponga que  $f(b) = a^2b^3 + a^3b^2$ . (a) Encuentre  $f(a)$ . (b) Encuentre  $f(ab)$ .
45. **Valor de un negocio** Un negocio cuyo capital original es de \$25 000, tiene ingresos y gastos semanales de \$6500 y \$4800, respectivamente. Si se conservan todas las utilidades, exprese el valor  $V$  del negocio al final de  $t$  semanas, como una función de  $t$ .
46. **Depreciación** Si una máquina de \$30 000 se depreció 2% de su valor original cada año, determine una función  $f$  que exprese el valor  $V$  de la máquina después que han transcurrido  $t$  años.
47. **Función de utilidad** Cuando se venden  $q$  unidades de cierto producto ( $q$  es no negativa), la utilidad  $P$  está dada por la ecuación  $P = 1.25q$ . ¿Es  $P$  una función de  $q$ ? ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
48. **Función de demanda** Suponga que la función de demanda anual para que cierto actor protagonice una película es  $p = \frac{1200000}{q}$ , donde  $q$  es el número de películas que protagoniza durante el año. Si el artista actualmente cobra \$600 000 por película, ¿cuántas protagoniza cada año? Si quiere protagonizar cuatro cintas por año, ¿cuánto cobrará por esto?

- 49. Función de oferta** Suponga que la función de oferta semanal por una libra de café, la mezcla propia de un expendio local es  $p = \frac{q}{48}$ , donde  $q$  es el número de libras de café que se ponen en venta cada semana. ¿Cuántas libras semanales deben ofrecerse si el precio es de \$8.39 por libra? ¿Cuántas libras a la semana deben ofrecerse para su venta si el precio de cada una es de \$19.49? ¿Cómo cambia la oferta conforme el precio se incrementa?
- 50. Altas de un hospital** Una compañía de seguros examinó los registros de un grupo de individuos hospitalizados por una enfermedad en particular. Se encontró que la proporción total de pacientes dados de alta al final de  $t$  días de hospitalización está dada por

$$f(t) = 1 - \left( \frac{300}{300 + t} \right)^3$$

Evalúe (a)  $f(0)$ , (b)  $f(100)$  y (c)  $f(900)$ . (d) ¿Al cabo de cuántos días se habrá dado de alta a la mitad ( $1/2 = 0.500$ ) del grupo?

- 51. Psicología** Se realizó un experimento para analizar la respuesta humana a las descargas eléctricas.<sup>1</sup> Los sujetos recibieron una descarga de cierta intensidad. Se les pidió que le asignaran una magnitud de 10, y la llamaron estímulo estándar. Después se les aplicaron otras descargas (estímulos) de varias intensidades. Para cada una de éstas, la respuesta  $R$  consistía en un número que indicaba la magnitud percibida de la descarga en relación con la del estímulo estándar. Se encontró que  $R$  era una función de la intensidad  $I$  de la descarga ( $I$  en microamperes) y se estimó mediante

$$R = f(I) = \frac{I^{4/3}}{2500} \quad 500 \leq I \leq 3500$$

Evalúe (a)  $f(1000)$  y (b)  $f(2000)$ . (c) Suponga que  $I_0$  y  $2I_0$  están en el dominio de  $f$ . Exprese  $f(2I_0)$  en términos de  $f(I_0)$ . ¿Qué efecto sobre la respuesta tiene el hecho de duplicar la intensidad?

- 52. Psicología** En un experimento de aprendizaje,<sup>2</sup> la probabilidad de una respuesta correcta como función del número  $n$  de intentos tiene la forma

$$P(n) = 1 - \frac{1}{2}(1 - c)^{n-1} \quad n \geq 1$$

donde el valor estimado de  $c$  es 0.344. Con el uso de este valor de  $c$ , determine  $P(1)$  y  $P(2)$ .

- \*53. Programa de demanda** La tabla siguiente se conoce como un *programa de demanda*, y proporciona una correspondencia entre el precio  $p$  de un producto y la cantidad  $q$  que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) a ese precio. (a) Si  $p = f(q)$ , haga una lista con los números en el dominio de  $f$ . Encuentre  $f(2900)$  y  $f(3000)$ . (b) Si  $q = g(p)$ , liste los números en el dominio de  $g$ . Encuentre  $g(10)$  y  $g(17)$ .

Precio por unidad, $p$	Cantidad de demanda por semana, $q$
\$10	3000
12	2900
17	2300
20	2000

En los problemas 54 a 57, utilice su calculadora para determinar los valores funcionales indicados para la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

- 54.**  $f(x) = 2.03x^3 - 5.27x^2 - 13.71$ ; (a)  $f(1.73)$ , (b)  $f(-5.78)$ , (c)  $f(\sqrt{2})$
- 55.**  $f(x) = \frac{14.7x^2 - 3.95x - 15.76}{24.3 - x^3}$ ; (a)  $f(4)$ , (b)  $f(-17/4)$ , (c)  $f(\pi)$
- 56.**  $f(x) = (20.3 - 3.2x)(2.25x^2 - 7.1x - 16)^4$ ; (a)  $f(0.3)$ , (b)  $f(-0.02)$ , (c)  $f(1.9)$
- 57.**  $f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}x^2 + 7.31(x+1)}{5.03}}$ ; (a)  $f(12.35)$ , (b)  $f(-123)$ , (c)  $f(0)$

## OBJETIVO

Introducir los conceptos de función constante, función polinomial, función racional, función definida por partes, función valor absoluto y notación factorial.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### FUNCIONES CONSTANTES

Suponga que las primas mensuales de un seguro médico para un individuo son \$125.00.

- a. Escriba las primas mensuales del seguro médico como una función del número de visitas que el individuo hace al doctor.
- b. ¿Cómo cambian las primas del seguro médico conforme aumentan las visitas al doctor?
- c. ¿Qué tipo de función es ésta?

## 2.2 Funciones especiales

En esta sección se verán funciones que tienen formas y representaciones especiales. Se iniciará con la *función constante*, tal vez el tipo más sencillo de función que existe:

### EJEMPLO 1 Función constante

Sea  $h(x) = 2$ . El dominio de  $h$  consiste en todos los números reales. Todos los valores funcionales son 2. Por ejemplo,

$$h(10) = 2 \quad h(-387) = 2 \quad h(x+3) = 2$$

Se llama a  $h$  una *función constante*, puesto que todos los valores de la función son iguales. En forma más general, se tiene esta definición:

Una función de la forma  $h(x) = c$ , donde  $c$  es una constante, se llama **función constante**.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19



<sup>1</sup>Adaptado de H. Babkoff, "Magnitude Estimation of Short Electrocuteaneous Pulses", *Psychological Research*, 39, núm. 1 (1976), 39-49.

<sup>2</sup>D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York; Academic Press, 1983).

Una función constante pertenece a una clase más amplia de funciones llamadas *funciones polinomiales*. En general, una función de la forma

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde  $n$  es un entero no negativo y  $c_n, c_{n-1}, \dots, c_0$  son constantes en las que  $c_n \neq 0$ , se llama **función polinomial** (en  $x$ ). El número  $n$  se llama el **grado** del polinomio, y  $c_n$  es el **coeficiente principal**. Así,

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 9$$

es una función polinomial de grado 2 con coeficiente principal 3. Del mismo modo,  $g(x) = 4 - 2x$  tiene grado 1 y coeficiente principal  $-2$ . Las funciones polinomiales de grado 1 o 2 son llamadas **funciones lineales** o **cuadráticas**, respectivamente. Por ejemplo,  $g(x) = 4 - 2x$  es lineal y  $f(x) = 3x^2 - 8x + 9$  es cuadrática. Observe que una función constante distinta de cero, como  $f(x) = 5$  [la cual puede escribirse como  $f(x) = 5x^0$ ], es una función polinomial de grado cero. La función constante  $f(x) = 0$  también se considera una función polinomial, pero no tiene ningún grado asignado. El dominio de cualquier función polinomial consiste en todos los números reales.

Cada término de una función polinomial es, o bien una constante, o bien, una constante por una potencia entera positiva de  $x$ .

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

### FUNCIONES POLINOMIALES

La función  $d(t) = 3t^2$ , para  $t \geq 0$ , representa la distancia en metros que un automóvil puede recorrer en  $t$  segundos cuando tiene una aceleración constante de 6 m por segundo.

- a. ¿Qué tipo de función es ésta?
- b. ¿Cuál es el grado?
- c. ¿Cuál es su coeficiente principal?

Toda función polinomial es una función racional.

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

### FUNCIÓN DEFINIDA POR PARTES

Para reducir el inventario, una tienda departamental cobra tres precios. Si un cliente compra de 0 a 5 pares de medias, el precio es de \$3.50 por par. Si compra de 6 a 10 pares, el precio es de \$3.00 por par. Si compra más de 10 pares, el precio es de \$2.75 por par. Escriba una función definida por partes para representar el costo de compra de  $n$  pares de medias.

### EJEMPLO 2 Funciones polinomiales

- a.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$  es una función polinomial de grado 3 con coeficiente principal 1.
- b.  $g(x) = \frac{2x}{3}$  es una función lineal con coeficiente principal  $\frac{2}{3}$ .
- c.  $f(x) = \frac{2}{x^3}$  no es una función polinomial. Como  $f(x) = 2x^{-3}$  y el exponente para  $x$  no es un entero no negativo, esta función no tiene la forma propia de las polinomiales. En forma similar,  $g(x) = \sqrt{x}$  no es función polinomial porque  $g(x) = x^{1/2}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

Una función que es un cociente de funciones polinomiales se llama **función racional**.

### EJEMPLO 3 Funciones racionales

- a.  $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 5}$  es una función racional, puesto que el numerador y el denominador son funciones polinomiales. Observe que esta función racional no está definida para  $x = -5$ .
- b.  $g(x) = 2x + 3$  es una función racional, porque  $2x + 3 = \frac{2x + 3}{1}$ . De hecho, toda función polinomial también es una función racional.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Algunas veces es necesaria más de una expresión para definir una función, como lo muestra el ejemplo 4.

### EJEMPLO 4 Funciones definidas por partes

Sea

$$F(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq s < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq s \leq 2 \\ s - 3 & \text{si } 2 < s \leq 8 \end{cases}$$

Ésta se llama **función definida por partes**, puesto que su regla está dada por más de una expresión. Aquí  $s$  es la variable independiente, y el dominio  $F$  es toda  $s$  tal que  $-1 \leq s \leq 8$ . El valor de  $s$  determina cuál expresión debe usarse.

Determine  $F(0)$ : como  $-1 \leq 0 < 1$ , se tiene  $F(0) = 1$ .

Determine  $F(2)$ : como  $1 \leq 2 \leq 2$ , se tiene  $F(2) = 0$ .

Determine  $F(7)$ : como  $2 < 7 \leq 8$ , se sustituye 7 por la  $s$  en  $s - 3$ .

$$F(7) = 7 - 3 = 4$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

## TECNOLOGÍA

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=2X(X<0)+X^2(X
≤X)(X<10)-X(X≥10)
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=

```

Para ilustrar cómo introducir una función definida por partes en una calculadora TI-83 Plus, la figura 2.4 muestra una secuencia de pasos para la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 10 \\ -x & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

Como  $|x|$  proporciona un número real único para cada número real  $x$ , el valor absoluto,  $|-|$ , es una función.

**FIGURA 2.4** Introducción de una función definida por partes.

### EJEMPLO 5 Función valor absoluto

La función  $|-|(x) = |x|$  se denomina la *función valor absoluto*. Recuerde que el **valor absoluto** de un número real  $x$  se denota por  $|x|$  y se define por

La función valor absoluto puede considerarse una función definida por partes.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, el dominio de  $|-|$  son todos los números reales. Algunos valores de esta función son

$$\begin{aligned} |16| &= 16 \\ \left|-\frac{4}{3}\right| &= -\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} \\ |0| &= 0 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

En los ejemplos siguientes se utiliza la *notación factorial*.

El símbolo  $r!$ , donde  $r$  es un entero positivo, se lee “ **$r$  factorial**”. Representa el producto de los primeros  $r$  enteros positivos:

$$r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r$$

También se define

$$0! = 1$$

Para cada entero no negativo  $n$ ,  $(-)!n = n!$  determina un número único, de manera que puede decirse que  $(-)!n$  es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros no negativos.

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

### FACTORIALES

Deben colocarse siete libros diferentes en una repisa. ¿De cuántas formas pueden acomodarse? Represente la pregunta como un problema de factoriales y dé la solución.

### EJEMPLO 6 Factoriales

a.  $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

b.  $3!(6-5)! = 3! \cdot 1! = (3 \cdot 2 \cdot 1)(1) = (6)(1) = 6$

c.  $\frac{4!}{0!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = \frac{24}{1} = 24$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

### EJEMPLO 7 Genética

Los factoriales aparecen con frecuencia en la teoría de probabilidad.

Suponga que se reproducen dos conejillos de indias de color negro, y tienen cinco crías. Bajo ciertas condiciones puede mostrarse que la probabilidad  $P$  de que exactamente  $r$  de las crías sean de color café y las otras negras, es una función de  $r$ , por ejemplo,  $P = P(r)$ , donde

$$P(r) = \frac{5! \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{5-r}}{r!(5-r)!} \quad r = 0, 1, 2, \dots, 5$$

La letra  $P$  en  $P = P(r)$  se usa de dos formas. En el lado derecho,  $P$  representa la regla de la función. En el izquierdo representa la variable dependiente. El dominio de  $P$  consiste en todos los enteros desde 0 hasta 5, inclusive. Determine la probabilidad de que exactamente tres conejillos de Indias sean de color café.

**Solución:** Para encontrar  $P(3)$ , se tiene

$$P(3) = \frac{5! \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2}{3!2!} = \frac{120 \left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{9}{16}\right)}{6(2)} = \frac{45}{512}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35 

## Problemas 2.2

En los problemas 1 a 4 determine si la función dada es una función polinomial.

1.  $f(x) = x^2 - x^4 + 4$

2.  $f(x) = \frac{x^3 + 7x - 3}{3}$

\*3.  $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$

4.  $g(x) = 3^{-2}x^2$

En los problemas 5 a 8 determine si la función dada es una función racional.

\*5.  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 + 4}$

6.  $f(x) = \frac{3}{2x + 1}$

7.  $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 5 \\ 4 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

8.  $g(x) = 4x^{-4}$

Determine el dominio de cada función de los problemas 9 a 12.

9.  $h(z) = 19$

10.  $f(x) = \sqrt{\pi}$

11.  $f(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } x > 1 \\ 4 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

12.  $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 3 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x < 3 \end{cases}$

Establezca (a) el grado y (b) el coeficiente principal de la función polinomial dada en los problemas 13 a 16.

13.  $F(x) = 7x^3 - 2x^2 + 6$

14.  $g(x) = 7x$

15.  $f(x) = \frac{1}{\pi} - 3x^5 + 2x^6 + x^7$

16.  $f(x) = 9$

Evalúe las funciones para cada caso de los problemas 17 a 22.

17.  $f(x) = 8$ ;  $f(2)$ ,  $f(t + 8)$ ,  $f(-\sqrt{17})$

18.  $g(x) = |x - 3|$ ;  $g(10)$ ,  $g(3)$ ,  $g(-3)$

\*19.  $F(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

$F(10)$ ,  $F(-\sqrt{3})$ ,  $F(0)$ ,  $F\left(-\frac{18}{5}\right)$

20.  $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \geq 0 \\ 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ ;  $f(3)$ ,  $f(-4)$ ,  $f(0)$

\*21.  $G(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 3 \\ 3 - x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

$G(8)$ ,  $G(3)$ ,  $G(-1)$ ,  $G(1)$

22.  $F(\theta) = \begin{cases} 2\theta - 5 & \text{si } \theta < 2 \\ \theta^2 - 3\theta + 1 & \text{si } \theta > 2 \end{cases}$

$F(3)$ ,  $F(-3)$ ,  $F(2)$

En los problemas 23 a 28 determine el valor de cada expresión.

23.  $6!$

24.  $0!$

25.  $(4 - 2)!$

26.  $6! \cdot 2!$

\*27.  $\frac{n!}{(n-1)!}$

28.  $\frac{8!}{5!(8-5)!}$

29. **Viaje en tren** Un boleto de viaje redondo en tren a la ciudad cuesta \$4.50. Escriba su costo como función del ingreso del pasajero. ¿Qué tipo de función es?

30. **Geometría** Un prisma rectangular tiene una longitud tres veces mayor que su ancho, y altura una unidad menor que el doble del ancho. Escriba el volumen del prisma rectangular como una función del ancho. ¿Qué clase de función es?

31. **Función de costo** En la fabricación de un componente para una máquina, el costo inicial de un dado es de \$850, y todos los otros costos adicionales son de \$3 por unidad producida. (a) Exprese el costo total  $C$  (en dólares) como una función lineal del número  $q$  de unidades producidas. (b) ¿Cuántas unidades se producen si el costo total es de \$1600?

32. **Inversión** Se invierte un capital de  $P$  dólares a una tasa de interés simple anual  $r$  durante  $t$  años, exprese la cantidad total acumulada del capital y del interés como una función de  $t$ . ¿Su resultado es una función lineal de  $t$ ?

33. **Ventas** Para estimular las ventas a grupos grandes, un teatro cobra dos precios. Si su grupo es menor de 12, cada boleto cuesta \$9.50. Si su grupo es de 12 o más, cada boleto cuesta \$8.75. Escriba una función definida por partes para representar el costo de comprar  $n$  boletos.

34. **Factoriales** El grupo que cursa matemáticas financieras ha elegido a un comité integrado por cuatro personas, para quejarse con el magisterio por la inclusión de la notación factorial en el curso. Decidieron que, para ser más eficaces, los miembros se harían nombrar A, G, M y S, y que el miembro A

cabildearía con los profesores cuyos apellidos iniciaran con las letras A a la F, el miembro G con los profesores cuyas iniciales fueran de la G a la L y así sucesivamente. ¿De cuántas maneras puede el comité nombrar a sus miembros con este procedimiento? ¿De cuántas formas podría nombrarse un comité integrado por cinco personas con cinco letras diferentes?

- \*35. **Genética** Bajo ciertas condiciones, si dos adultos con ojos de color café tienen exactamente tres hijos, la probabilidad  $P$  de que tengan exactamente  $r$  hijos con ojos azules está dada por la función  $P = P(r)$ , donde

$$P(r) = \frac{3! \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{3-r}}{r!(3-r)!}, \quad r = 0, 1, 2, 3$$

Determine la probabilidad de que exactamente dos de los hijos tengan los ojos azules.

36. **Genética** En el ejemplo 7, determine la probabilidad de que los ojos de las cinco crías sean de color café.

37. **Crecimiento de bacterias** Existe un cultivo en el cual se están desarrollando las bacterias. El tiempo  $t$  (en horas) para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación), es una función de la temperatura  $T$  (en °C) del cultivo. Si esta función está dada por<sup>3</sup>

$$t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4} & \text{si } 30 \leq T \leq 36 \\ \frac{4}{3}T - \frac{175}{4} & \text{si } 36 < T \leq 39 \end{cases}$$

- (a) determine el dominio de  $f$  y (b) encuentre  $f(30)$ ,  $f(36)$  y  $f(39)$ .

*En los problemas 38 a 41, use su calculadora para encontrar los valores de las funciones indicados para cada caso. Redondee las respuestas a dos decimales.*

38.  $f(x) = \begin{cases} 0.19x^4 - 27.99 & \text{si } x \geq 5.99 \\ 0.63x^5 - 57.42 & \text{si } x < 5.99 \end{cases}$

- (a)  $f(7.98)$  (b)  $f(2.26)$  (c)  $f(9)$

39.  $f(x) = \begin{cases} 29.5x^4 + 30.4 & \text{si } x < 3 \\ 7.9x^3 - 2.1x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

- (a)  $f(2.5)$  (b)  $f(-3.6)$  (c)  $f(3.2)$

40.  $f(x) = \begin{cases} 4.07x - 2.3 & \text{si } x < -8 \\ 19.12 & \text{si } -8 \leq x < -2 \\ x^2 - 4x^{-2} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

- (a)  $f(-5.8)$  (b)  $f(-14.9)$  (c)  $f(7.6)$

41.  $f(x) = \begin{cases} x/(x+3) & \text{si } x < -5 \\ x(x-4)^2 & \text{si } -5 \leq x < 0 \\ \sqrt{2.1x+3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- (a)  $f(-\sqrt{30})$  (b)  $f(46)$  (c)  $f(-2/3)$

## OBJETIVO

## 2.3 Combinaciones de funciones

Combinar funciones por medio de suma, resta, multiplicación, división, multiplicación por una constante y composición.

Existen diferentes formas de combinar dos funciones para crear una nueva función. Suponga que  $f$  y  $g$  son las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 3x$$

Al sumar  $f(x)$  y  $g(x)$  se obtiene

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3x$$

Esta operación define una nueva función llamada *suma* de  $f$  y  $g$ , que se denota por  $f + g$ . Su valor funcional en  $x$  es  $f(x) + g(x)$ . Esto es,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x$$

Por ejemplo,

$$(f + g)(2) = 2^2 + 3(2) = 10$$

En general, para cualesquiera funciones  $f$  y  $g$ , se define la **suma**  $f + g$ , la **diferencia**

$f - g$ , el **producto**  $fg$  y el **cociente**  $\frac{f}{g}$  como sigue:<sup>4</sup>

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{para } g(x) \neq 0$$

<sup>3</sup>Adaptado de F. K. E. Imrie y A. J. Vlitos, "Production of Fungal Protein from Carob", en *Single-Cell Protein II*, ed. S. R. Tannenbaum y D. I. C. Wang (Cambridge, MA: MIT Press, 1975).

<sup>4</sup>En cada una de las cuatro combinaciones, se supone que  $x$  se encuentra en los dominios tanto de  $f$  como de  $g$ . En el cociente tampoco se permite ningún valor de  $x$  para el cual  $g(x)$  sea 0.

Un caso especial de  $fg$  merece una mención especial. Para cualquier número real  $c$  y cualquier función  $f$ , se define  $cf$  mediante

$$(cf)(x) = c \cdot f(x)$$

Este tipo restringido de producto se llama **producto escalar**. El producto escalar tiende a compartir algunas propiedades con las sumas (y las restas), a diferencia de los productos (y cocientes) en general.

Para  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = 3x$ , se tiene

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = x^2 + 3x \\(f-g)(x) &= f(x) - g(x) = x^2 - 3x \\(fg)(x) &= f(x) \cdot g(x) = x^2(3x) = 3x^3 \\\frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3} \quad \text{para } x \neq 0 \\(\sqrt{2}f)(x) &= \sqrt{2}f(x) = \sqrt{2}x^2\end{aligned}$$

### EJEMPLO 1 Combinación de funciones

Si  $f(x) = 3x - 1$  y  $g(x) = x^2 + 3x$ , encuentre

- a.  $(f+g)(x)$
- b.  $(f-g)(x)$
- c.  $(fg)(x)$
- d.  $\frac{f}{g}(x)$
- e.  $(\frac{1}{2}f)(x)$

**Solución:**

- a.  $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (3x - 1) + (x^2 + 3x) = x^2 + 6x - 1$
- b.  $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (3x - 1) - (x^2 + 3x) = -1 - x^2$
- c.  $(fg)(x) = f(x)g(x) = (3x - 1)(x^2 + 3x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x$
- d.  $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - 1}{x^2 + 3x}$
- e.  $\left(\frac{1}{2}f\right)(x) = \frac{1}{2}(f(x)) = \frac{1}{2}(3x - 1) = \frac{3x - 1}{2}$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3(a)-(f)

### Composición

También pueden combinarse dos funciones al aplicar primero una función a un número, y después la otra función al resultado. Por ejemplo, suponga que  $g(x) = 3x$ ,  $f(x) = x^2$  y  $x = 2$ . Entonces  $g(2) = 3 \cdot 2 = 6$ . Así,  $g$  envía la entrada 2 a la salida 6:

$$2 \xrightarrow{g} 6$$

Después, se determina que la salida 6 se convierte en la entrada para  $f$ :

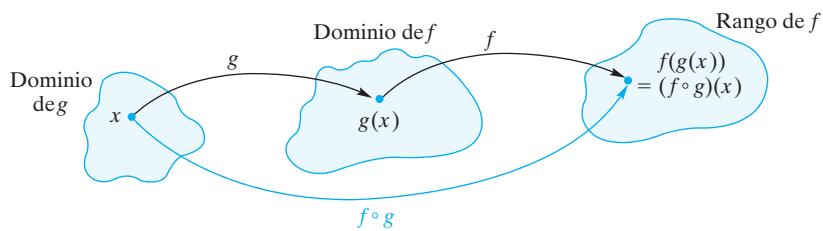
$$f(6) = 6^2 = 36$$

De modo que  $f$  envía 6 al 36:

$$6 \xrightarrow{f} 36$$

Al aplicar primero  $g$  y después  $f$ , se envía el 2 al 36:

$$2 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} 36$$

FIGURA 2.5 Composición de  $f$  con  $g$ .

De manera más general, se reemplazará el 2 por  $x$ , donde  $x$  está en el dominio de  $g$  (vea la figura 2.5). Al aplicar  $g$  a  $x$ , se obtiene el número  $g(x)$ , el cual se supone está en el dominio de  $f$ . Al aplicar  $f$  a  $g(x)$ , se obtiene  $f(g(x))$ , se lee “ $f$  de  $g$  de  $x$ ”, que está en el rango de  $f$ . Esta operación de aplicar  $g$  y después aplicar  $f$  al resultado se llama *composición*, y la función que se obtiene, denotada por  $f \circ g$ , se conoce como la *función compuesta* de  $f$  con  $g$ . Dicha función asigna al número de entrada  $x$  el número de salida  $f(g(x))$ . (Vea la flecha inferior en la figura 2.5.) De esta manera,  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .

### DEFINICIÓN

Si  $f$  y  $g$  son funciones, la *composición de  $f$  con  $g$*  es la función  $f \circ g$  definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

donde el dominio de  $f \circ g$  es el conjunto de todas las  $x$  en el dominio de  $g$ , tales que  $g(x)$  esté en el dominio de  $f$ .

Para  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = 3x$ , puede obtenerse una forma sencilla para  $f \circ g$ :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 = 9x^2$$

Por ejemplo,  $(f \circ g)(2) = 9(2)^2 = 36$ , como se vio anteriormente.

Cuando se trata con números reales y la operación de suma, 0 es un caso especial, para cualquier número real  $a$ , se tiene

$$a + 0 = a = 0 + a$$

El número 1 tiene una propiedad similar con respecto a la multiplicación. Para cualquier número real  $a$ , se tiene

$$a1 = a = 1a$$

A manera de referencia, en la sección 2.4 se observa que la función  $I$  definida por  $I(x) = x$ , satisface, para cualquier función  $f$ ,

$$f \circ I = f = I \circ f$$

donde se considera la igualdad de funciones como se definió en la sección 2.1. De hecho, para cualquier  $x$ ,

$$(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x) = I(f(x)) = (I \circ f)(x)$$

La función  $I$  se llama la función *identidad*.

### EJEMPLO 2 Composición

Sean  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = x + 1$ . Encuentre

- a.  $(f \circ g)(x)$
- b.  $(g \circ f)(x)$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### COMPOSICIÓN

Un CD cuesta  $x$  dólares al mayoreo. El precio que la tienda paga al mayorista está dado por la función  $s(x) = x + 3$ . El precio que el cliente paga es  $c(x) = 2x$ , donde  $x$  es el precio que la tienda paga. Escriba una función compuesta para determinar el precio al cliente como una función del precio al mayoreo.

**ADVERTENCIA**

Por lo general,  $f \circ g$  y  $g \circ f$  son muy diferentes. En el ejemplo 2,

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x+1}$$

pero se tiene

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x} + 1$$

Observe que  $(f \circ g)(1) = \sqrt{2}$ , mientras que  $(g \circ f)(1) = 2$ . Tampoco confunda  $f(g(x))$  con  $(fg)(x)$ , esta última es el producto  $f(x)g(x)$ . Aquí

$$f(g(x)) = \sqrt{x+1}$$

pero

$$f(x)g(x) = \sqrt{x}(x+1)$$

**Solución:**

- a.  $(f \circ g)(x)$  es  $f(g(x))$ . Ahora  $g$  suma 1 a  $x$ , y  $f$  obtiene la raíz cuadrada del resultado. Así que,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{x+1}$$

El dominio de  $g$  consiste en todos los números reales  $x$ , y el de  $f$  en todos los números reales no negativos. De aquí que el dominio de la composición esté constituido por todas las  $x$  para las que  $g(x) = x+1$  sea no negativa. Esto es, el dominio está formado por todas las  $x \geq -1$ , o de manera equivalente, el intervalo  $[-1, \infty)$ .

- b.  $(g \circ f)(x)$  es  $g(f(x))$ . Ahora  $f$  toma la raíz cuadrada de  $x$ , y  $g$  suma 1 al resultado. De esta manera  $g$  suma 1 a  $\sqrt{x}$ , y se tiene

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$$

El dominio de  $f$  consiste en todas las  $x \geq 0$ , y el dominio de  $g$  en todos los números reales. Por lo que el dominio de la composición está constituido por todas las  $x \geq 0$ , para las cuales  $f(x) = \sqrt{x}$  es real, a saber, toda  $x \geq 0$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

La composición es *asociativa*, lo que significa que para cualesquiera tres funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$ ,

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

**EJEMPLO 3 Composición**

Si  $F(p) = p^2 + 4p - 3$ ,  $G(p) = 2p + 1$  y  $H(p) = |p|$ , encuentre

- a.  $F(G(p))$
- b.  $F(G(H(p)))$
- c.  $G(F(1))$

**Solución:**

- a.  $F(G(p)) = F(2p+1) = (2p+1)^2 + 4(2p+1) - 3 = 4p^2 + 12p + 2 = (F \circ G)(p)$
- b.  $F(G(H(p))) = (F \circ (G \circ H))(p) = ((F \circ G) \circ H)(p) = (F \circ G)(H(p)) = (F \circ G)(|p|) = 4|p|^2 + 12|p| + 2 = 4p^2 + 12|p| + 2$
- c.  $G(F(1)) = G(1^2 + 4 \cdot 1 - 3) = G(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

En cálculo, a veces es necesario pensar en una función en particular como una composición de dos funciones más sencillas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 4 Expresión de una función como una composición**

Exprese  $h(x) = (2x - 1)^3$  como una composición.

**Solución:** Se observa que  $h(x)$  se obtiene al encontrar  $2x - 1$  y elevar al cubo el resultado. Suponga que se determina  $g(x) = 2x - 1$  y  $f(x) = x^3$ . Entonces

$$h(x) = (2x - 1)^3 = [g(x)]^3 = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

que da  $h$  como una composición de dos funciones.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2****EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN COMO UNA COMPOSICIÓN**

Suponga que el área de un jardín cuadrado es  $g(x) = (x + 3)^2$ . Exprese  $g$  como una composición de dos funciones, y explique qué representa cada función.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

## T E C N O L O G I A

Se pueden combinar dos funciones con el uso de una calculadora graficadora. Considere las funciones

$$f(x) = 2x + 1 \quad g(x) = x^2$$

que se introducen como  $Y_1$  y  $Y_2$ , según se muestra en la figura 2.6. La suma de  $f$  y  $g$  está dada por  $Y_3 = Y_1 + Y_2$  y la composición de  $f \circ g$  por  $Y_4 = Y_1(Y_2)$ . Por ejemplo,  $f(g(3))$  se obtiene al evaluar  $Y_4$  en 3.

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=2X+1
Y2=X^2
Y3=Y1+Y2
Y4=Y1(Y2)
Y5=
Y6=
Y7=
```

**FIGURA 2.6**  $Y_3$  y  $Y_4$  son combinaciones de  $Y_1$  y  $Y_2$ .

## Problemas 2.3

1. Si  $f(x) = x + 3$  y  $g(x) = x + 5$ , encuentre lo siguiente.

- |                      |                      |                      |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| (a) $(f + g)(x)$     | (b) $(f + g)(0)$     | (c) $(f - g)(x)$     |
| (d) $(fg)(x)$        | (e) $(fg)(-2)$       | (f) $\frac{f}{g}(x)$ |
| (g) $(f \circ g)(x)$ | (h) $(f \circ g)(3)$ | (i) $(g \circ f)(x)$ |
| (j) $(g \circ f)(3)$ |                      |                      |

2. Si  $f(x) = 2x$  y  $g(x) = 6 + x$ , encuentre lo siguiente.

- |                      |                      |                      |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| (a) $(f + g)(x)$     | (b) $(f - g)(x)$     | (c) $(f - g)(4)$     |
| (d) $(fg)(x)$        | (e) $\frac{f}{g}(x)$ | (f) $\frac{f}{g}(2)$ |
| (g) $(f \circ g)(x)$ | (h) $(g \circ f)(x)$ | (i) $(g \circ f)(2)$ |

\*3. Si  $f(x) = x^2 + 1$  y  $g(x) = x^2 - x$ , encuentre lo siguiente.

- |                      |                      |                                 |
|----------------------|----------------------|---------------------------------|
| (a) $(f + g)(x)$     | (b) $(f - g)(x)$     | (c) $(f - g)(-\frac{1}{2})$     |
| (d) $(fg)(x)$        | (e) $\frac{f}{g}(x)$ | (f) $\frac{f}{g}(-\frac{1}{2})$ |
| (g) $(f \circ g)(x)$ | (h) $(g \circ f)(x)$ | (i) $(g \circ f)(-3)$           |

4. Si  $f(x) = x^2 + 1$  y  $g(x) = 5$ , encuentre lo siguiente.

- |                      |                            |                      |
|----------------------|----------------------------|----------------------|
| (a) $(f + g)(x)$     | (b) $(f + g)(\frac{2}{5})$ | (c) $(f - g)(x)$     |
| (d) $(fg)(x)$        | (e) $(fg)(7)$              | (f) $\frac{f}{g}(x)$ |
| (g) $(f \circ g)(x)$ | (h) $(f \circ g)(12\ 003)$ | (i) $(g \circ f)(x)$ |

5. Si  $f(x) = 3x^2 + 6$  y  $g(x) = 4 - 2x$ , encuentre  $f(g(2))$  y  $g(f(2))$ .

6. Si  $f(p) = \frac{4}{p}$  y  $g(p) = \frac{p-2}{3}$ , encuentre  $(f \circ g)(p)$  y  $(g \circ f)(p)$ .

\*7. Si  $F(t) = t^2 + 7t + 1$  y  $G(t) = \frac{2}{t-1}$ , encuentre  $(F \circ G)(t)$  y  $(G \circ F)(t)$ .

8. Si  $F(t) = \sqrt{t}$  y  $G(t) = 3t^2 + 4t + 2$ , encuentre  $(F \circ G)(t)$  y  $(G \circ F)(t)$ .

\*9. Si  $f(v) = \frac{1}{v^2 + 1}$  y  $g(v) = \sqrt{v + 2}$ , encuentre  $(f \circ g)(v)$  y  $(g \circ f)(v)$ .

10. Si  $f(x) = x^2 + 2x - 1$ , encuentre  $(f \circ f)(x)$ .

En los problemas 11 a 16, determine las funciones  $f$  y  $g$  tales que  $h(x) = f(g(x))$ .

11.  $h(x) = 11x - 7$

12.  $h(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

\*13.  $h(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$

14.  $h(x) = (9x^3 - 5x)^3 - (9x^3 - 5x)^2 + 11$

15.  $h(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 1}{x + 3}}$

16.  $h(x) = \frac{2 - (3x - 5)}{(3x - 5)^2 + 2}$

17. **Utilidad** Cierto expendio de café vende una libra de café por \$9.75. Los gastos mensuales son \$4500 más \$4.25 por cada libra vendida.

(a) Escriba una función  $r(x)$  para el ingreso mensual total como una función del número de libras vendidas.

(b) Escriba una función  $e(x)$  para los gastos mensuales totales como una función del número de libras de café vendidas.

(c) Escriba una función  $(r - e)(x)$  para la utilidad mensual total como una función del número de libras vendidas.

18. **Geometría** Suponga que el volumen de un cubo es  $v(x) = (4x - 2)^3$ . Exprese  $v$  como una composición de dos funciones, y explique qué representa cada función.

19. **Negocios** Un fabricante determina que el número total de unidades de producción por día,  $q$ , es una función del número de empleados,  $m$ , donde

$$q = f(m) = \frac{(40m - m^2)}{4}$$

El ingreso total,  $r$ , que se recibe por la venta de  $q$  unidades, está dado por la función  $g$ , donde  $r = g(q) = 40q$ . Determine  $(g \circ f)(m)$ . ¿Qué es lo que describe esta función compuesta?

20. **Sociología** Se han hecho estudios concernientes a la relación estadística entre posición social, educación e ingresos.<sup>5</sup> Se denota con  $S$  el valor numérico de la posición social, con base en el ingreso anual  $I$ . Para cierto tipo de población suponga

$$S = f(I) = 0.45(I - 1000)^{0.53}$$

<sup>5</sup>R. K. Leik y B. F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975).

Además, suponga que el ingreso de una persona  $I$  es una función del número de años de educación  $E$ , donde

$$I = g(E) = 7202 + 0.29E^{3.68}$$

Determine  $(f \circ g)(E)$ . ¿Qué es lo que describe esta función?

Determine los valores indicados para las funciones  $f$  y  $g$  dadas en los problemas 21 a 24. Redondee las respuestas a dos decimales.

**21.**  $f(x) = (4x - 13)^2, g(x) = 0.2x^2 - 4x + 3$

- (a)  $(f + g)(4.5)$ , (b)  $(f \circ g)(-2)$

**22.**  $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+1}}, g(x) = 11.2x + 5.39$

- (a)  $\frac{f}{g}(-2)$ , (b)  $(g \circ f)(-10)$

**23.**  $f(x) = x^{4/5}, g(x) = x^2 - 8$

- (a)  $(fg)(7)$ , (b)  $(g \circ f)(3.75)$

**24.**  $f(x) = \frac{5}{x+3}, g(x) = \frac{2}{x^2}$

- (a)  $(f - g)(7.3)$ , (b)  $(f \circ g)(-4.17)$

## OBJETIVO

Introducir las funciones inversas, sus propiedades y usos.

## 2.4 Funciones inversas

Así como  $-a$  es el número para el cual

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

y, para  $a \neq 0, a^{-1}$  es el número para el cual

$$aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$$

entonces, dada una función  $f$ , cabe preguntarse acerca de la existencia de una función  $g$  que satisfaga

$$f \circ g = I = g \circ f \quad (1)$$

donde  $I$  es la función identidad, que se explicó en el fragmento titulado “composición” de la sección 2.3, y dada por  $I(x) = x$ . Suponga que se tiene  $g$  como se indicó antes, y una función  $h$  que también satisface (1) de manera que

$$f \circ h = I = h \circ f$$

Entonces

$$h = h \circ I = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = I \circ g = g$$

muestra que hay, a lo más, una función que satisface los requerimientos de  $g$  en (1). En la jerga matemática,  $g$  está determinada de forma única por  $f$  y, por lo tanto, se le da un nombre,  $g = f^{-1}$ , lo cual refleja su dependencia de  $f$ . La función  $f^{-1}$  se lee como **f inversa** y se llama la **inversa** de  $f$ .

El inverso aditivo  $-a$  existe para cualquier número  $a$ ; el inverso multiplicativo  $a^{-1}$  existe precisamente si  $a \neq 0$ . La existencia de  $f^{-1}$  impone a una función  $f$  un fuerte requisito. Puede mostrarse que  $f^{-1}$  existe si y sólo si, para toda  $a$  y  $b$ , siempre que  $f(a) = f(b)$ , entonces  $a = b$ . Puede ser útil pensar que una  $f$  así, puede *cancelarse* (*a la izquierda*).



### ADVERTENCIA

No confunda  $f^{-1}$ , la inversa de  $f$ ,

y  $\frac{1}{f}$ , el recíproco multiplicativo

de  $f$ . Desafortunadamente, la nomenclatura para las funciones inversas interfiere con el uso numérico de  $(-)^{-1}$ . Por lo general,  $f^{-1}(x)$  es diferente de  $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$ .

Por ejemplo,  $I^{-1} = 1$  (puesto que  $I \circ I = I$ ) entonces  $I^{-1}(x) = x$ ,

pero  $\frac{1}{I}(x) = \frac{1}{I(x)} = \frac{1}{x}$ .

Una función  $f$  que satisface

para toda  $a$  y  $b$ , si  $f(a) = f(b)$ , entonces  $a = b$

se llama una función **uno a uno**.

De este modo, puede decirse que una función tiene una inversa precisamente si es uno a uno. Una forma equivalente de expresar la condición de uno a uno es:

para toda  $a$  y  $b$ , si  $a \neq b$ , entonces  $f(a) \neq f(b)$

así que entradas distintas dan lugar a salidas diferentes. Observe que esta condición no se cumple para muchas funciones simples. Por ejemplo si  $f(x) = x^2$ , entonces  $f(-1) = (-1)^2 = 1 = (1)^2 = f(1)$  y  $-1 \neq 1$  muestra que la función cuadrática no es uno a uno. De manera similar,  $f(x) = |x|$  no es uno a uno.

En general, el dominio de  $f^{-1}$  es el rango de  $f$  y el rango de  $f^{-1}$  es el dominio de  $f$ .

Aquí debe hacerse notar que (1) es equivalente a

$$f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x)) \quad (2)$$

La primera ecuación se aplica para toda  $x$  en el dominio de  $f^{-1}$  y la segunda ecuación es aplicable para toda  $x$  en el dominio de  $f$ . En general, el dominio de  $f^{-1}$ , que es igual al rango de  $f$ , puede ser muy diferente al dominio de  $f$ .

### EJEMPLO 1 Inversas de funciones lineales

De acuerdo con la sección 2.2, una función de la forma  $f(x) = ax + b$ , donde  $a \neq 0$ , es una función lineal. *Muestre que una función lineal es uno a uno. Encuentre la inversa de  $f(x) = ax + b$  y muestre que también es lineal.*

**Solución:** Suponga que  $f(u) = f(v)$ , esto es

$$au + b = av + b \quad (3)$$

Para mostrar que  $f$  es uno a uno, debe comprobarse que de esta suposición se sigue que  $u = v$ . Al restar  $b$  de ambos lados de (3) se obtiene  $au = av$ , de donde se sigue que  $u = v$  al dividir ambos lados entre  $a$ . (Se supone que  $a \neq 0$ .) Como  $f$  se obtuvo tras multiplicar primero por  $a$  y luego sumar  $b$ , es de esperarse que el efecto de  $f$  pueda eliminarse al restar primero  $b$  y dividir después entre  $a$ . Entonces, considere  $g(x) = \frac{x - b}{a}$ . Se tiene

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a \frac{x - b}{a} + b = (x - b) + b = x$$

y

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{(ax + b) - b}{a} = \frac{ax}{a} = x$$

Como  $g$  satisface los requerimientos de (1), se sigue que  $g$  es la inversa de  $f$ . Esto es  $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a} = \frac{1}{a}x + \frac{-b}{a}$  y la última igualdad muestra que  $f^{-1}$  también es una función lineal.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

### EJEMPLO 2 Identidades para las inversas

*Muestre que*

- a. Si  $f$  y  $g$  son funciones uno a uno, la composición  $f \circ g$  también es uno a uno y  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ .
- b. Si  $f$  es uno a uno  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

**Solución:**

- a. Suponga que  $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(b)$ , esto es  $f(g(a)) = f(g(b))$ . Como  $f$  es uno a uno,  $g(a) = g(b)$ . Dado que  $g$  es uno a uno,  $a = b$  y esto muestra que  $f \circ g$  es uno a uno. Las ecuaciones

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ I \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = I$$

y

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g = g^{-1} \circ I \circ g = g^{-1} \circ g = I$$

muestran que  $g^{-1} \circ f^{-1}$  es la inversa de  $f \circ g$ , lo cual, de manera simbólica, corresponde a la igualdad  $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$ .

- b.** En las ecuaciones (2) reemplace  $f$  por  $f^{-1}$ . Al tomar  $g$  como  $f$  se muestra que las ecuaciones (1) están resueltas, y de esto de obtiene  $(f^{-1})^{-1} = f$ .



### EJEMPLO 3 Uso de inversas para resolver ecuaciones

Muchas ecuaciones toman la forma  $f(x) = 0$ , donde  $f$  es una función. Si  $f$  es una función uno a uno, entonces la ecuación tiene  $x = f^{-1}(0)$  como su única solución.

**Solución:** Si se aplica  $f^{-1}$  a ambos lados de  $f(x) = 0$  se obtiene  $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(0)$  y  $f^{-1}(f(x)) = x$  muestra que  $x = f^{-1}(0)$  es la única solución posible. Como  $f(f^{-1}(0)) = 0$ ,  $f^{-1}(0)$  es realmente una solución.



### EJEMPLO 4 Restricción del dominio de una función

Puede suceder que una función  $f$  cuyo dominio sea el natural, que consiste en todos los números para los cuales la regla de definición tiene sentido, no sea uno a uno, y aún así pueda obtenerse una función  $g$  uno a uno al restringir el dominio de  $f$ .

**Solución:** Por ejemplo, se ha mostrado que la función  $f(x) = x^2$  no es uno a uno, pero la función  $g(x) = x^2$  donde el dominio explícito dado como  $[0, \infty)$  sí lo es. Como  $(\sqrt{x})^2 = x$  y  $\sqrt{x^2} = x$ , para  $x \geq 0$ , se sigue que  $\sqrt{\phantom{x}}$  es la inversa de la función cuadrática restringida  $g$ . A continuación se presenta un ejemplo más artificial. Sea  $f(x) = |x|$  (con su dominio natural). Sea  $g(x) = |x|$  en donde el dominio está dado explícitamente como  $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$ . La función  $g$  es uno a uno y por ende tiene una inversa.



### EJEMPLO 5 Determinación de la inversa de una función

Para determinar la inversa de una función  $f$  uno a uno, resuelva la ecuación  $y = f(x)$  para  $x$  en términos de  $y$  para obtener  $x = g(y)$ . Entonces  $f^{-1}(x) = g(x)$ . Para ilustrar, encuentre  $f^{-1}(x)$  si  $f(x) = (x - 1)^2$ , para  $x \geq 1$ .

**Solución:** Seay=(x−1)2, para x≥1. Entonces x−1=√y y, por lo tanto, x=√y+1. Se sigue que f−1(x)=√x+1.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5



## Problemas 2.4

Encuentre la inversa de la función dada en los problemas 1 a 6.

- |  |  |
|--|--|
| *1. $f(x) = 3x + 7$                    | 2. $g(x) = 2x + 1$                                 |
| 3. $F(x) = \frac{1}{2}x - 7$           | 4. $f(x) = (4x - 5)^2$ , para $x \geq \frac{5}{4}$ |
| *5. $A(r) = \pi r^2$ , para $r \geq 0$ | 6. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$                     |

En los problemas 7 a 10, determine si la función es uno a uno o no.

- |   |
|---|
| 7. $f(x) = 5x + 12$                                   |
| 8. $g(x) = (5x + 12)^2$                               |
| 9. $h(x) = (5x + 12)^2$ , para $x \geq -\frac{12}{5}$ |
| 10. $F(x) =  x - 9 $                                  |

Resuelva cada ecuación de los problemas 11 y 12, mediante la determinación de una función inversa.

11.  $(4x - 5)^2 = 23$ , para  $x \geq \frac{5}{4}$

12.  $\frac{4}{3}\pi r^3 = 100$

13. **Función de demanda** La función

$$p = p(q) = \frac{1200000}{q} \quad q > 0$$

expresa el sueldo  $p$  de una actriz, por película, como una función del número de películas  $q$  que protagoniza. Exprese el número de cintas en las que actúa, en términos de su sueldo por película. Muestre que la expresión es una función de  $p$ . Muestre que la función resultante es inversa a la función que especifica a  $p$  en términos de  $q$ .

14. **Función de oferta** La función de la oferta semanal de una libra de café, la mezcla de la casa, en una cafetería es

$$p = p(q) = \frac{q}{48} \quad q > 0$$

donde  $q$  es la oferta de café en libras por semana, y  $p$  es el precio por libra. Exprese  $q$  como una función de  $p$  y demuestre la relación entre las dos funciones.

**OBJETIVO**

Graficar ecuaciones y funciones en coordenadas rectangulares, determinar intersecciones, aplicar la prueba de la recta vertical y la recta horizontal, y determinar el dominio y rango de una función a partir de una gráfica.

## 2.5 Gráficas en coordenadas rectangulares

El **sistema de coordenadas rectangulares** permite especificar y localizar puntos en un plano. También proporciona una manera geométrica de representar ecuaciones de dos variables, así como funciones.

En un plano, se trazan dos rectas de números reales, llamadas *ejes de coordenadas*, perpendiculares entre sí, de modo que sus orígenes coincidan, como en la figura 2.7. Su punto de intersección se llama *origen* del sistema de coordenadas. Por ahora se llamará a la recta horizontal el *eje x* y a la vertical el *eje y*. La distancia unitaria sobre el eje *x* no necesariamente es la misma que la del eje *y*.

El plano en el que se encuentran los ejes de coordenadas se llama *plano de coordenadas rectangulares* o simplemente, *plano x, y*. Todos los puntos que contiene pueden marcarse para indicar su posición. Para marcar el punto *P* en la figura 2.8(a), se trazan líneas perpendiculares al eje *x* y al eje *y*, que pasen por el punto *P*. Dichas líneas cruzan los ejes en 4 y 2, respectivamente. Por lo tanto, *P* determina dos números, 4 y 2, entonces se dice que las **coordenadas rectangulares** de *P* están dadas por el **par ordenado** (4, 2). La palabra *ordenado* es importante. En la figura 2.8(b), el punto correspondiente a (4, 2) no es el mismo que para (2, 4).

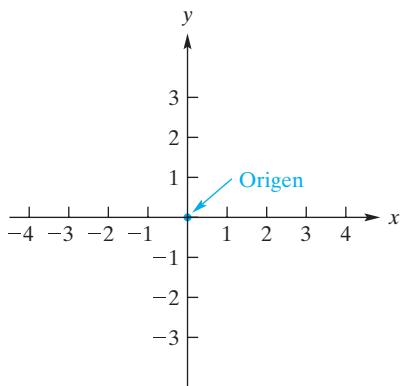


FIGURA 2.7 Ejes de coordenadas.

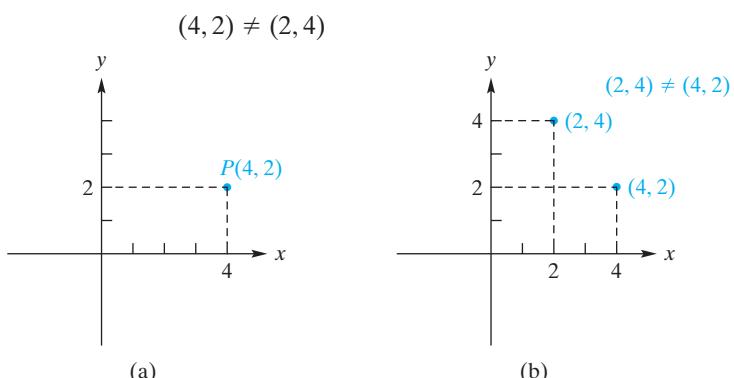


FIGURA 2.8 Coordenadas rectangulares.

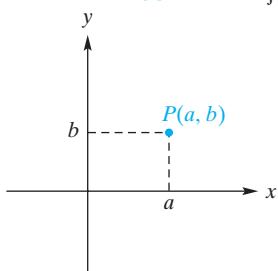


FIGURA 2.9 Coordenadas de *P*.

En general, si *P* es un punto cualquiera, entonces sus coordenadas rectangulares se determinan por un par ordenado de la forma  $(a, b)$ . (Vea la figura 2.9.) Se llama *a* a la *abscisa*, o *coordenada x* de *P*, y *a b* la *ordenada* o *coordenada y* de *P*.

De esta manera, cada punto en un plano coordenado puede asociarse exactamente con un par ordenado  $(a, b)$  de números reales. Asimismo, es claro que cada par ordenado  $(a, b)$  de números reales, puede asociarse exactamente con un punto en ese plano. Como existe una *correspondencia uno a uno* entre los puntos en el plano y todos los pares ordenados de números reales, se hace referencia al punto *P* con coordenada *x*, *a*, y coordenada *y*, *b*, simplemente como el punto  $(a, b)$ , o como  $P(a, b)$ . Además, se usan las palabras *punto* y *par ordenado* en forma intercambiable.

En la figura 2.10 están indicadas las coordenadas de varios puntos. Por ejemplo, el punto  $(1, -4)$  está localizado una unidad a la derecha del eje *y*, y cuatro unidades por debajo del eje *x*. El origen es  $(0, 0)$ . La coordenada *x* de todo punto en el eje *y* es 0, y la coordenada *y* de todo punto sobre el eje *x* es 0.

Los ejes coordinados dividen al plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes* (figura 2.11). Por ejemplo, el cuadrante I consiste en todos los puntos  $(x_1, y_1)$  en donde  $x_1 > 0$  y  $y_1 > 0$ . Los puntos sobre los ejes no están en ninguno cuadrante.

Con el uso de un sistema de coordenadas rectangulares, pueden representarse geométricamente ecuaciones de dos variables. Por ejemplo, considere

$$y = x^2 + 2x - 3 \quad (1)$$

Una solución de esta ecuación es un valor de *x* y uno de *y* que hagan verdadera a la ecuación. Por ejemplo, si *x* = 1, al sustituir en la ecuación (1) se obtiene

$$y = 1^2 + 2(1) - 3 = 0$$

FIGURA 2.10 Coordenadas de puntos.

FIGURA 2.10 Coordenadas de puntos.

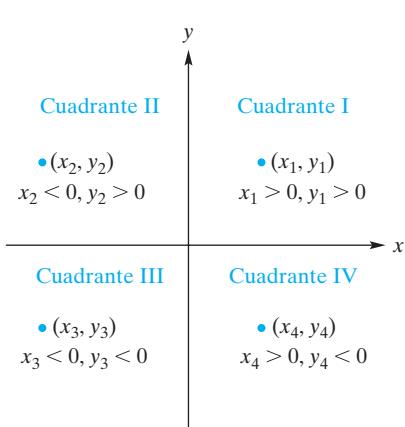
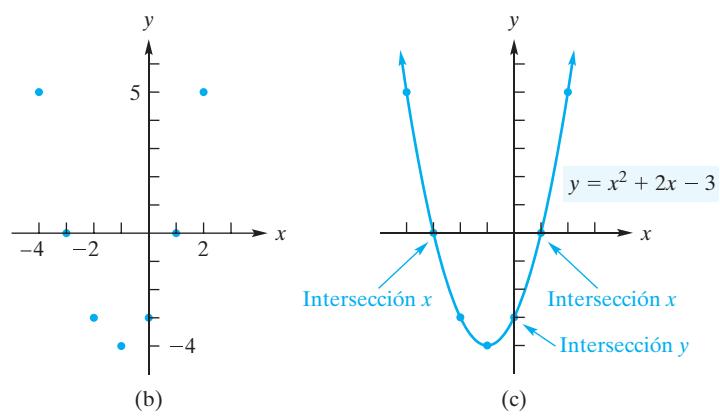


FIGURA 2.11 Cuadrantes.

x	y
-4	5
-3	0
-2	-3
-1	-4
0	-3
1	0
2	5

(a)

FIGURA 2.12 Graficando de  $y = x^2 + 2x - 3$ .

Así, una solución es  $x = 1, y = 0$ . De manera similar,

$$\text{si } x = -2 \text{ entonces } y = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -3$$

y entonces  $x = -2, y = -3$ , también es una solución. Al seleccionar otros valores para  $x$ , se obtienen más soluciones [vea la figura 2.12(a)]. Debe quedar claro que existe una cantidad infinita de soluciones para la ecuación (1).

Cada solución da origen a un punto  $(x, y)$ . Por ejemplo, a  $x = 1$  y  $y = 0$  le corresponde  $(1, 0)$ . La **gráfica** de  $y = x^2 + 2x - 3$  es la representación geométrica de todas sus soluciones. En la figura 2.12(b) se han graficado los puntos correspondientes a las soluciones dadas en la tabla.

Como la ecuación tiene un número infinito de soluciones, parece imposible determinar su gráfica con precisión. Sin embargo, sólo es de interés la forma general de la gráfica. Por esta razón se grafican suficientes puntos de modo que pueda inferirse su forma. (Las técnicas de cálculo que se estudiarán en el capítulo 13 harán que esta “inferencia” sea mucho más clara.) Despues, se unen esos puntos por medio de una curva suave siempre que las condiciones lo permitan. Al hacer esto, se obtiene la curva de la figura 2.12(c). Por supuesto, entre más puntos se marquen, mejor será la gráfica. Aquí se supone que la gráfica se extiende de manera indefinida hacia arriba, lo cual se indica con la flechas.

El punto  $(0, -3)$  donde la curva interseca al eje  $y$  se llama *intersección y*. Los puntos  $(-3, 0)$  y  $(1, 0)$  en donde la curva interseca al eje  $x$  se llaman las *intersecciones x*. En general, se tiene la definición siguiente.

### DEFINICIÓN

Una **intersección x** de la gráfica de una ecuación en  $x$  y  $y$  es el punto donde la gráfica interseca al eje  $x$ . Una **intersección y** es el punto donde la gráfica interseca al eje  $y$ .

Para encontrar las intersecciones  $x$  de la gráfica de una ecuación en  $x$  y  $y$ , primero se determina que  $y = 0$ , y se resuelve para  $x$  la ecuación resultante. Para encontrar las intersecciones  $y$ , primero se establece que  $x = 0$  y se resuelve para  $y$ . Por ejemplo, para la gráfica de  $y = x^2 + 2x - 3$ , se desea determinar las intersecciones  $x$ . Sea  $y = 0$ , al resolver para  $x$  se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2x - 3 \\ 0 &= (x + 3)(x - 1) \\ x &= -3, 1 \end{aligned}$$

Así, las intersecciones  $x$  son  $(-3, 0)$  y  $(1, 0)$ , como se vio con anterioridad. Si  $x = 0$ , entonces

$$y = 0^2 + 2(0) - 3 = -3$$

De modo que  $(0, -3)$  es la intersección  $y$ . Tenga en mente que para una intersección  $x$  su coordenada  $y$  es igual a 0, mientras que para una intersección  $y$  su coordenada  $x$  es igual a 0. Las intersecciones son útiles porque indican con precisión dónde interseca la gráfica a los ejes.

Con frecuencia sólo se dice que la intersección  $y$  es  $-3$  y las intersecciones  $x$  son  $-3$  y  $1$ .

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1****INTERSECCIONES Y GRÁFICA**

Rachel ha ahorrado \$7250 para su educación universitaria. Planea gastar \$600 por mes de esta cuenta. Escriba una ecuación que represente la situación e identifique las intersecciones con los ejes.

**EJEMPLO 1 Intersecciones y gráfica**

Determine las intersecciones  $x$  y  $y$  de la gráfica de  $y = 2x + 3$  y haga el bosquejo de su gráfica.

**Solución:** Si  $y = 0$ , entonces

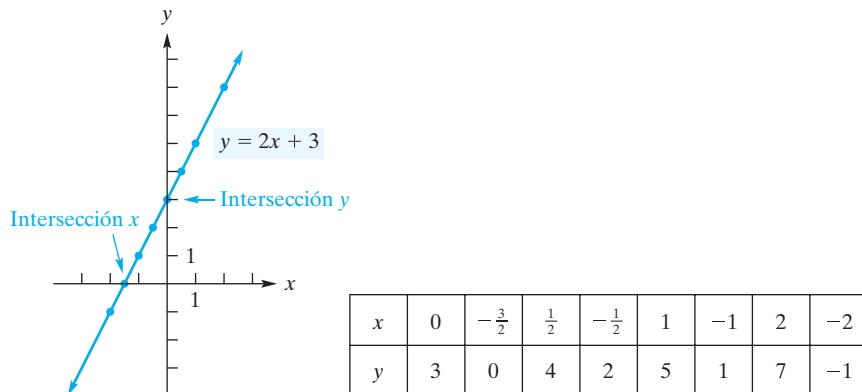
$$0 = 2x + 3 \quad \text{de modo que} \quad x = -\frac{3}{2}$$

Así, la intersección  $x$  es  $(-\frac{3}{2}, 0)$ . Si  $x = 0$ , entonces

$$y = 2(0) + 3 = 3$$

De modo que la intersección  $y$  es  $(0, 3)$ . La figura 2.13 muestra una tabla de otros puntos sobre la gráfica y un bosquejo de ésta.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

FIGURA 2.13 Gráfica de  $y = 2x + 3$ .**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2****INTERSECCIONES Y GRÁFICA**

El precio de admisión a un parque de diversiones es de \$24.95. Este pago permite al cliente utilizar todas las atracciones del parque tantas veces como quiera. Escriba una ecuación que represente la relación entre el número de juegos  $x$  que el cliente utiliza, y el costo de admisión  $y$  para ese cliente. Describa la gráfica de esta ecuación e identifique las intersecciones con los ejes. Suponga que  $x > 0$ .

**EJEMPLO 2 Intersecciones y gráfica**

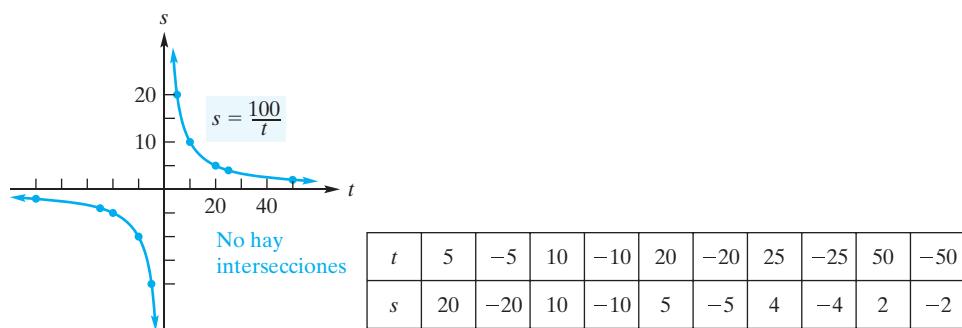
Determine las intersecciones, si las hay, de la gráfica de  $s = \frac{100}{t}$ , y haga un bosquejo de la gráfica.

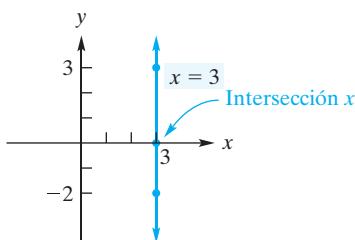
**Solución:** Para trazar la gráfica, se marcará el eje horizontal con  $t$  y el eje vertical con  $s$  (figura 2.14). Como  $t$  no puede ser igual a 0 (la división entre 0 no está definida), no existe intersección con el eje  $s$ . Así, la gráfica no tiene un punto correspondiente a  $t = 0$ . Además, no existe intersección con el eje  $t$ , puesto que si  $s = 0$ , entonces la ecuación

$$0 = \frac{100}{t}$$

no tiene solución. Recuerde, la única forma en que una fracción puede ser 0 es con un numerador que valga 0. En la figura 2.14 se muestra la gráfica. En general, la gráfica de  $s = k/t$ , donde  $k$  es una constante diferente de 0, corresponde a una *hipérbola rectangular*.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

FIGURA 2.14 Gráfica de  $s = \frac{100}{t}$ .



x	3	3	3
y	0	3	-2

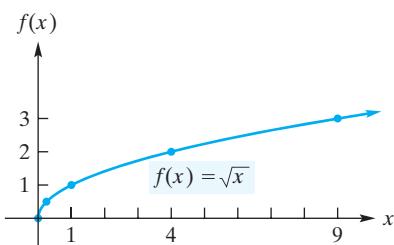
FIGURA 2.15 Gráfica de  $x = 3$ .

### EJEMPLO 3 Intersecciones y gráfica

Determine las intersecciones de la gráfica de  $x = 3$ , y bosqueje la gráfica.

**Solución:** Puede pensarse en  $x = 3$  como una ecuación en las variables  $x$  y  $y$ , si se escribe como  $x = 3 + 0y$ . Aquí  $y$  puede tomar cualquier valor, pero  $x$  debe ser igual a 3. Porque  $x = 3$  cuando  $y = 0$ , la intersección  $x$  es  $(3, 0)$ . No existe intersección  $y$ , puesto que  $x$  no puede ser 0. (Vea la figura 2.15.) La gráfica es una recta vertical.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13



x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3

FIGURA 2.16 Gráfica de  $f(x) = \sqrt{x}$ .

Cada función  $f$  da lugar a una ecuación, a saber  $y = f(x)$ , la cual es un caso especial de las ecuaciones que se han estado graficando. Su gráfica consiste en todos los puntos  $(x, f(x))$ , donde  $x$  está en el dominio de  $f$ . Los ejes verticales pueden etiquetarse como  $y$  o  $f(x)$ , donde  $f$  es el nombre de la función, y se denomina **eje de los valores de la función**. Suele etiquetarse el eje horizontal con la variable independiente, pero tome en cuenta que los economistas etiquetan el eje vertical con la variable independiente. Observe que al graficar una función se obtienen las “soluciones”  $(x, y)$  que hacen verdadera la función  $y = f(x)$ . Para cada  $x$  en el dominio de  $f$ , se tiene exactamente una  $y$ , que se consiguió al evaluar  $f(x)$ . El par resultante  $(x, f(x))$  es un punto sobre la gráfica y éstos son los únicos puntos sobre la gráfica de la ecuación  $y = f(x)$ .

Una observación geométrica útil es que la gráfica de una función tiene cuando mucho un punto de intersección con alguna recta vertical en el plano. Recuerde que la ecuación de una recta vertical necesariamente es de la forma  $x = a$ , donde  $a$  es una constante. Si  $a$  no está en el dominio de la función  $f$ , entonces  $x = a$  no intersecará la gráfica de  $y = f(x)$ . Si  $a$  está en el dominio de la función  $f$  entonces  $x = a$  intersecará la gráfica de  $y = f(x)$  en el punto  $(a, f(a))$  y sólo ahí. Y viceversa, si un conjunto de puntos en el plano tiene la propiedad de que cualquier recta vertical interseca al conjunto al menos una vez, entonces el conjunto de puntos es en realidad la gráfica de una función. (El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales  $a$  que presentan la propiedad de que la línea  $x = a$  interseca el conjunto de puntos dado, y de que para tal  $a$  el valor funcional correspondiente es la coordenada  $y$  del único punto de intersección de la línea  $x = a$  y el conjunto de puntos dado.) Ésta es la base de la **prueba de la recta vertical** que se analizará después del ejemplo 7.

### EJEMPLO 4 Gráfica de la función raíz cuadrada

Haga la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x}$ .

**Solución:** La gráfica se muestra en la figura 2.16. Se marca el eje vertical como  $f(x)$ . Recuerde que  $\sqrt{x}$  denota la raíz cuadrada principal de  $x$ . Así,  $f(9) = \sqrt{9} = 3$ , no  $\pm 3$ . Tampoco pueden elegirse valores negativos de  $x$ , puesto que no se desean números imaginarios para  $\sqrt{x}$ . Esto es, debe tenerse  $x \geq 0$ . Ahora se considerarán las intersecciones. Si  $f(x) = 0$ , entonces  $\sqrt{x} = 0$  o  $x = 0$ . También, si  $x = 0$ , entonces  $f(x) = 0$ . Así, las intersecciones  $x$  y  $y$  son las mismas, a saber,  $(0, 0)$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

#### GRÁFICA DE LA FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Brett rentó una bicicleta en una tienda de alquiler, condujo a una velocidad constante de 12 mi/h durante 2.5 horas a lo largo de una pista, y después regresó por el mismo camino. Grafique la función tipo valor absoluto para representar la distancia recorrida desde el negocio de alquiler, como una función del tiempo en el dominio apropiado.

### EJEMPLO 5 Gráfica de la función valor absoluto

Grafique  $p = G(q) = |q|$ .

**Solución:** Se usa la variable independiente  $q$  para marcar el eje horizontal. El eje de los valores funcionales puede marcarse como  $G(q)$  o  $p$  (vea la figura 2.17). Note que las intersecciones  $q$  y  $p$  se ubican en el mismo punto  $(0, 0)$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

### DEFINICIÓN

Una **raíz** de una función  $f$  es cualquier valor de  $x$  para el cual  $f(x) = 0$ .

$q$	0	1	-1	3	-3	5	-5
$p$	0	1	1	3	3	5	5

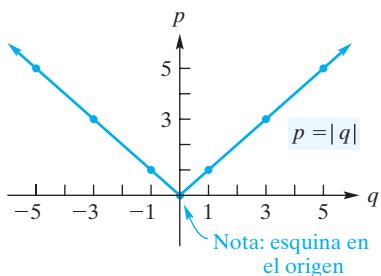
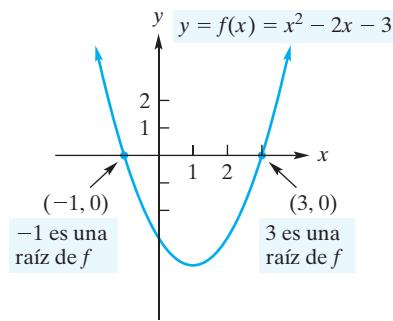
FIGURA 2.17 Gráfica de  $p = |q|$ .

FIGURA 2.18 Raíces de una función.

Por ejemplo, una raíz de la función  $f(x) = 2x - 6$  es 3 porque  $f(3) = 2(3) - 6 = 0$ . Aquí, 3 se llama *raíz real*, puesto que es un número real. Se observa que las raíces de  $f$  pueden encontrarse al establecer  $f(x) = 0$  y resolver para  $x$ . Así, las raíces de una función son precisamente las intersecciones  $x$  de su gráfica, ya que es en estos puntos donde  $f(x) = 0$ .

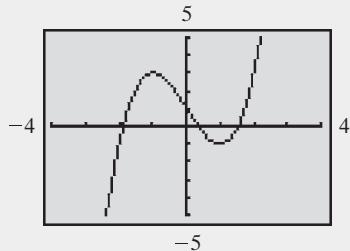
Para ilustrarlo, en la figura 2.18 se muestra la gráfica de la función de  $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ . Las intersecciones  $x$  de la gráfica son -1 y 3. Así, -1 y 3 son raíces de  $f$ , o de manera equivalente, -1 y 3 son las soluciones de la ecuación  $x^2 - 2x - 3 = 0$ .

## TECNOLOGÍA

Para resolver la ecuación  $x^3 = 3x - 1$  con una calculadora graficadora, primero se expresa la ecuación en la forma  $f(x) = 0$ :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

Después se grafica  $f$  y luego se estiman las intersecciones  $x$ , ya sea con el uso de zoom y trace o por medio de la operación de extracción de raíces (vea la figura 2.19). Observe que se define la ventana para  $-4 \leq x \leq 4$  y  $-5 \leq y \leq 5$ .

FIGURA 2.19 Las raíces de  $x^3 - 3x + 1 = 0$  son aproximadamente -1.88, 0.35 y 1.53.

La figura 2.20 muestra la gráfica de una función  $y = f(x)$ . El punto  $(x, f(x))$  implica que al número de entrada  $x$  en el eje horizontal le corresponde el número de salida  $f(x)$  en el eje vertical, como lo indica la flecha. Por ejemplo, a la entrada 4 le corresponde la salida 3, de modo que  $f(4) = 3$ .

A partir de la forma de la gráfica, parece razonable suponer que para cualquier valor de  $x$  existe un número de salida, de modo que el dominio de  $f$  consiste en todos los números reales. Observe que el conjunto de todos los puntos en la coordenada  $y$  en la gráfica se compone del conjunto de todos los números no negativos.

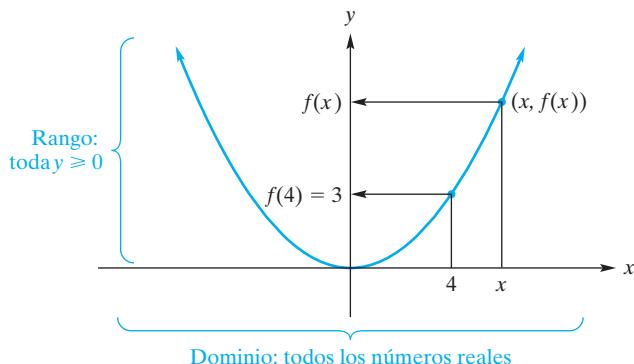
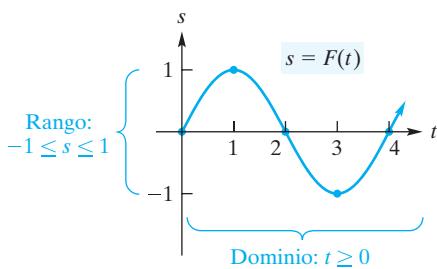


FIGURA 2.20 Dominio, rango y valores de la función.



**FIGURA 2.21** Dominio, rango y valores funcionales.

Así, el rango de  $f$  es toda  $y \geq 0$ . Esto muestra que puede hacerse una deducción acertada acerca del dominio y rango de una función al examinar su gráfica. *En general, el dominio consiste en todos los valores  $x$  que están incluidos en la gráfica, y el rango son todos los valores  $y$  en esa gráfica.* Por ejemplo, la figura 2.16 implica que el dominio y el rango de  $f(x) = \sqrt{x}$  son todos los números no negativos. A partir de la figura 2.17 queda claro que el dominio de  $p = G(q) = |q|$  son todos los números reales y que el rango es toda  $p \geq 0$ .

### EJEMPLO 6 Dominio, rango y valores de la función

La figura 2.21 muestra la gráfica de una función  $F$ . Se supone que la gráfica se repite indefinidamente a la derecha de 4. Entonces el dominio de  $F$  es toda  $t \geq 0$ . El rango es  $-1 \leq s \leq 1$ . Algunos valores que toma la función son

$$F(0) = 0 \quad F(1) = 1 \quad F(2) = 0 \quad F(3) = -1$$

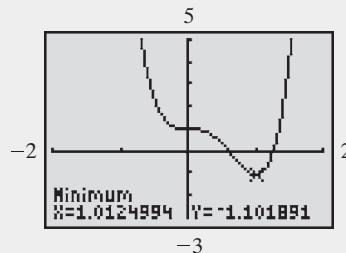
AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

## TECNOLOGÍA

Con el uso de una calculadora graficadora puede estimarse el rango de una función. La gráfica de

$$f(x) = 6x^4 - 8.1x^3 + 1$$

se muestra en la figura 2.22. El punto más bajo en la gráfica corresponde al valor mínimo de  $f(x)$ , y el rango está compuesto de todos los números reales mayores o iguales a este mínimo. Puede estimarse el valor mínimo para  $y$ , ya sea con el uso de trace y zoom o al seleccionar la operación “minimum”.



**FIGURA 2.22** El rango de  $f(x) = 6x^4 - 8.1x^3 + 1$  es aproximadamente  $[-1.10, \infty)$ .

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

### GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DEFINIDA POR PARTES

Para alentar el ahorro, una compañía de gas cobra dos tarifas. Los clientes pagan \$0.53 por termia (1 millón de calorías) para un consumo que va de 0 a 70 termias, y \$0.74 por cada termia por encima de 70. Grafique la función definida por partes que representa el costo mensual de  $t$  termias de gas.

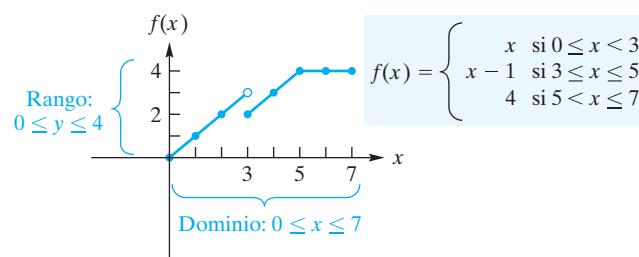
### EJEMPLO 7 Gráfica de una función definida por partes

Grafique la función definida por partes.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x - 1 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ 4 & \text{si } 5 < x \leq 7 \end{cases}$$

**Solución:** El dominio de  $f$  es  $0 \leq x \leq 7$ . Se presenta la gráfica en la figura 2.23, donde el punto que no está relleno significa que éste no se incluye en la gráfica. Observe que el rango de  $f$  se compone de todos los números reales y tales que  $0 \leq y \leq 4$ .

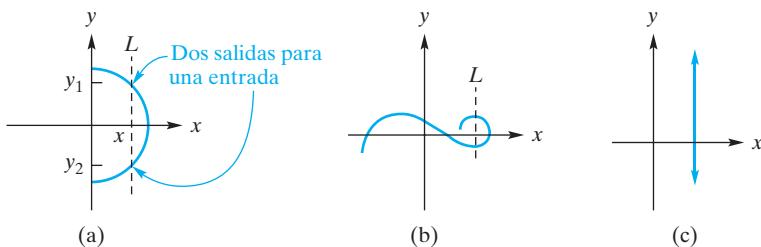
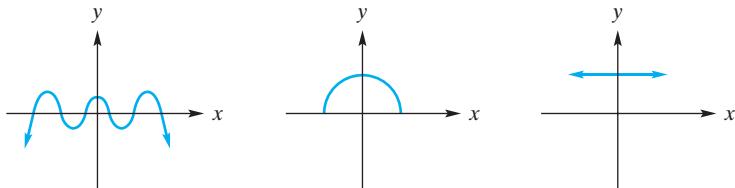
AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35



$x$	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	1	2	2	3	4	4	4

**FIGURA 2.23** Gráfica de una función definida por partes.

Existe una manera fácil de determinar si una curva es o no la gráfica de una función. En la figura 2.24(a) observe que la  $x$  dada está asociada con *dos* valores de  $y$ :  $y_1$  y  $y_2$ . Por lo tanto, la curva *no* es la gráfica de una función de  $x$ . Visto de otra manera, se tiene la siguiente regla general llamada **prueba de la recta vertical**. Si una recta *vertical*  $L$  puede dibujarse de modo que interseque a una curva en dos puntos al menos, entonces la curva *no* es la gráfica de una función de  $x$ . Cuando no puede dibujarse dicha recta vertical, la curva *sí* es la gráfica de una función de  $x$ . En consecuencia, las curvas de la figura 2.24 no representan funciones de  $x$ , pero las de la figura 2.25 sí.

FIGURA 2.24  $y$  no es una función de  $x$ .FIGURA 2.25 Funciones de  $x$ .

### EJEMPLO 8 Una gráfica que no representa una función de $x$

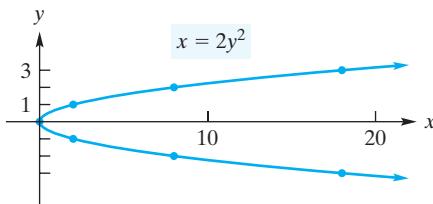
Grafique  $x = 2y^2$ .

**Solución:** Aquí es más fácil seleccionar valores de  $y$ , y después encontrar los correspondientes a  $x$ . En la figura 2.26 se muestra la gráfica. Por medio de la prueba de la recta vertical, la ecuación  $x = 2y^2$  no define una función de  $x$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 39

Después de haber determinado si una curva es la gráfica de una función, quizás mediante la prueba de la recta vertical, existe una forma fácil de decir si la función en cuestión es uno a uno. En la figura 2.20 se observa que  $f(4) = 3$  y, en apariencia, también  $f(-4) = 3$ . Como los valores de entrada diferentes  $-4$  y  $4$  producen la misma salida, la función no es uno a uno. Visto de otra manera, se tiene la siguiente regla general, llamada la **prueba de la recta horizontal**. Si puede dibujarse una recta *horizontal*  $L$  que interseca la gráfica de una función en dos puntos al menos, entonces la función *no* es uno a uno. Cuando no se puede dibujar tal recta horizontal, la función es uno a uno.

$x$	0	2	2	8	8	18	18
$y$	0	1	-1	2	-2	3	-3

FIGURA 2.26 Gráfica de  $x = 2y^2$ .

## Problemas 2.5

En los problemas 1 y 2, localice y marque cada uno de los puntos dados y, si es posible, indique el cuadrante al que pertenece cada punto.

1.  $(2, 7), (8, -3), (-\frac{1}{2}, -2), (0, 0)$

2.  $(-4, 5), (3, 0), (1, 1), (0, -6)$

3. En la figura 2.27(a) se muestra la gráfica de  $y = f(x)$ .

(a) Estime  $f(0), f(2), f(4)$  y  $f(-2)$ .

(b) ¿Cuál es el dominio de  $f$ ?

(c) ¿Cuál es el rango de  $f$ ?

(d) ¿Cuál es una raíz real de  $f$ ?

4. En la figura 2.27(b) se muestra la gráfica de  $y = f(x)$ .

(a) Estime  $f(0)$  y  $f(2)$ .

(b) ¿Cuál es el dominio de  $f$ ?

(c) ¿Cuál es el rango de  $f$ ?

(d) ¿Cuál es una raíz real de  $f$ ?

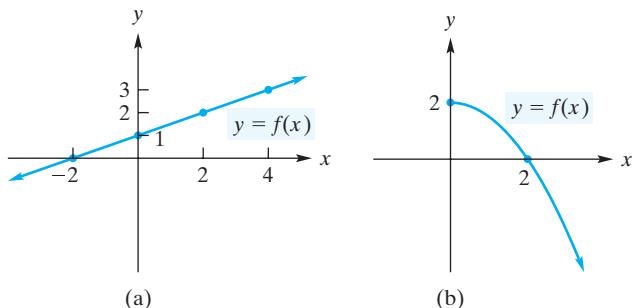


FIGURA 2.27 Diagrama para los problemas 3 y 4.

\*5. En la figura 2.28(a) se muestra la gráfica de  $y = f(x)$ .  
 (a) Estime  $f(0), f(1)$  y  $f(-1)$ .

(b) ¿Cuál es el dominio de  $f$ ?

(c) ¿Cuál es el rango de  $f$ ?

(d) ¿Cuál es una raíz real de  $f$ ?

6. En la figura 2.28(b) se muestra la gráfica de  $y = f(x)$ .  
 (a) Estime  $f(0), f(2), f(3)$  y  $f(4)$ .

(b) ¿Cuál es el dominio de  $f$ ?

(c) ¿Cuál es el rango de  $f$ ?

(d) ¿Cuál es una raíz real de  $f$ ?

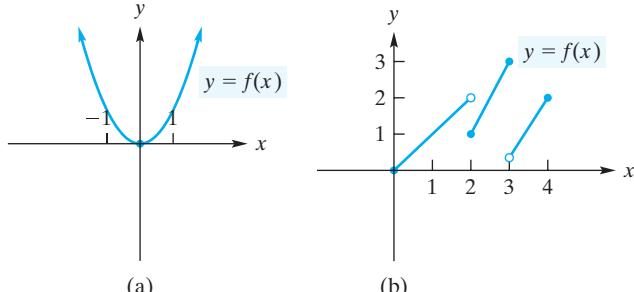


FIGURA 2.28 Diagrama para los problemas 5 y 6.

En los problemas 7 a 20, determine las intersecciones de la gráfica de cada ecuación y haga su bosquejo. Con base en la gráfica, responda: ¿es  $y$  una función de  $x$ ? Si es así, ¿se trata de una función uno a uno? ¿Cuál es su dominio y cuál su rango?

7.  $y = 2x$

8.  $y = x + 1$

\*9.  $y = 3x - 5$

10.  $y = 3 - 2x$

\*11.  $y = x^4$

12.  $y = \frac{2}{x^2}$

\*13.  $x = 0$

14.  $y = 4x^2 - 16$

15.  $y = x^3$

16.  $x = -9$

17.  $x = -|y|$

18.  $x^2 = y^2$

19.  $2x + y - 2 = 0$

20.  $x + y = 1$

En los problemas 21 a 34, grafique cada función y determine su dominio y rango. También determine las intersecciones.

21.  $s = f(t) = 4 - t^2$

22.  $f(x) = 5 - 2x^2$

23.  $y = h(x) = 3$

24.  $g(s) = -17$

25.  $y = h(x) = x^2 - 4x + 1$

26.  $y = f(x) = x^2 + 2x - 8$

27.  $f(t) = -t^3$

28.  $p = h(q) = 1 + 2q + q^2$

\*29.  $s = f(t) = \sqrt{t^2 - 9}$

30.  $F(r) = -\frac{1}{r}$

\*31.  $f(x) = |2x - 1|$

32.  $v = H(u) = |u - 3|$

33.  $F(t) = \frac{16}{t^2}$

34.  $y = f(x) = \frac{2}{x-4}$

En los problemas 35 a 38, grafique cada función definida por partes y determine su dominio y rango.

\*35.  $c = g(p) = \begin{cases} p+1 & \text{si } 0 \leq p < 7 \\ 5 & \text{si } p \geq 7 \end{cases}$

36.  $\phi(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ 20-x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

37.  $g(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

38.  $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ 4 & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ x-1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

\*39. ¿Cuáles de las gráficas de la figura 2.29 representan funciones de  $x$ ?

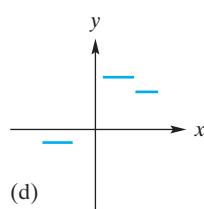
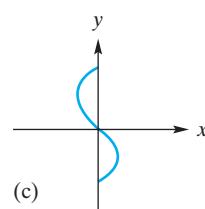
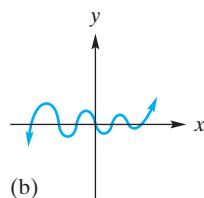
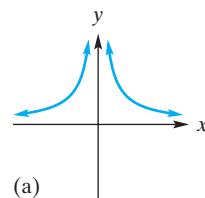
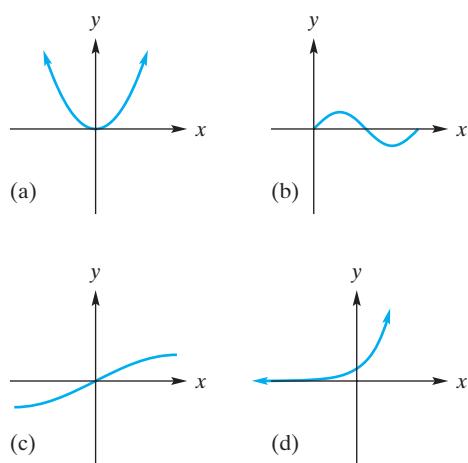


FIGURA 2.29 Diagrama para el problema 39.

40. ¿Cuáles de las gráficas de la figura 2.30 representan funciones de  $x$  uno a uno?



**FIGURA 2.30** Diagrama para el problema 40.

41. **Pagos de una deuda** Tara tiene cargos por \$2400 en sus tarjetas de crédito. Planea liquidarlas por medio de pagos mensuales de \$275. Escriba una ecuación que represente el monto de su deuda, excluyendo los cargos financieros, después de haber hecho  $x$  pagos, e identifique las intersecciones con los ejes.
42. **Determinación de precios** Para alentar un flujo constante de clientes, un restaurante varía el precio de cierto platillo a lo largo del día. De 6:00 p.m. a 8:00 p.m., los clientes pagan el precio completo. En el almuerzo, de 10:30 a.m. hasta las 2:30 p.m., pagan la mitad del precio. De 2:30 p.m. hasta las 4:30 p.m., los clientes obtienen un dólar de ahorro del precio del almuerzo. De 4:30 p.m. hasta las 6:00 p.m., obtienen \$5.00 de ahorro con respecto al precio de la cena. De 8:00 p.m. hasta el cierre, a las 10:00 p.m., se concede a los clientes \$5.00 de ahorro con respecto al precio de la cena. Grafique la función definida por partes para representar el costo del platillo a lo largo del día para un precio de cena de \$18.

43. **Programa de oferta** De acuerdo con el siguiente programa de oferta (vea el ejemplo 6 de la sección 2.1), grafique cada pareja cantidad-precio; seleccione el eje horizontal para las cantidades posibles. Aproxime los puntos entre los datos por medio de una curva suave. El resultado es la *curva de oferta*. Con base en la gráfica, determine la relación entre el precio y la oferta (es decir, ¿qué le pasa a la cantidad ofrecida a medida que se incrementa el precio?). ¿Es el precio por unidad una función de la cantidad ofrecida?

Cantidad ofrecida por semana, $q$	Precio por unidad, $p$
30	\$10
100	20
150	30
190	40
210	50

44. **Programa de demanda** La tabla siguiente se conoce como *programa de demanda*. Indica la cantidad de la marca X que los consumidores demandan (esto es, compran) cada semana a cierto precio (en dólares) por unidad. Grafique cada par precio-cantidad; seleccione el eje vertical para los precios posibles, y una los puntos con una curva suave. De esta manera,

se aproximan los puntos entre los datos dados. El resultado se llama *curva de demanda*. Con base en la gráfica, determine la relación entre el precio de la marca X y la cantidad que será demandada (es decir, ¿qué le pasa a la cantidad demandada a medida que el precio disminuye?). ¿Es el precio por unidad una función de la cantidad demandada?

Cantidad demandada, $q$	Precio por unidad, $p$
5	\$20
10	10
20	5
25	4

45. **Inventario** Haga un bosquejo de la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 1000 & \text{si } 0 \leq x < 7 \\ -100x + 1700 & \text{si } 7 \leq x < 14 \\ -100x + 2400 & \text{si } 14 \leq x < 21 \end{cases}$$

Una función como ésta podría describir el inventario  $y$  de una compañía en el tiempo  $x$ .

46. **Psicología** En un experimento psicológico sobre información visual, un sujeto observó brevemente un patrón de letras, después se le pidió que recordara tantas letras como le fuese posible. El procedimiento se repitió varias veces. Suponga que  $y$  es el número promedio de letras recordadas de patrones con  $x$  letras. La gráfica de los resultados se ajusta aproximadamente a la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{si } 4 < x \leq 5 \\ 4.5 & \text{si } 5 < x \leq 12 \end{cases}$$

Grafique esta función.<sup>6</sup>

En los problemas 47 a 50, utilice una calculadora graficadora para determinar todas las raíces reales de la ecuación dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

47.  $5x^3 + 7x = 3$

48.  $x^2(x - 3) = 2x^4 - 1$

49.  $(9x + 3.1)^2 = 7.4 - 4x^2$

50.  $(x - 2)^3 = x^2 - 3$

En los problemas 51 a 54, utilice una calculadora graficadora para determinar todas las raíces reales de la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

51.  $f(x) = x^3 + 5x + 7$

52.  $f(x) = 2x^4 - 1.5x^3 + 2$

53.  $g(x) = x^4 - 1.7x^2 + 2x$

54.  $g(x) = \sqrt{3}x^5 - 4x^2 + 1$

En los problemas 55 a 57, utilice una calculadora graficadora para determinar (a) el valor máximo de  $f(x)$  y (b) el valor mínimo de  $f(x)$  para los valores indicados de  $x$ . Redondee las respuestas a dos decimales.

55.  $f(x) = x^4 - 4.1x^3 + x^2 + 10 \quad 1 \leq x \leq 4$

<sup>6</sup>Adaptado de G. R. Loftus y E. F. Loftus. *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley & Sons, Inc., 1976).

56.  $f(x) = x(2.1x^2 - 3)^2 - x^3 + 1 \quad -1 \leq x \leq 1$

57.  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 5} \quad 3 \leq x \leq 5$

58. A partir de la gráfica de  $f(x) = \sqrt{2}x^3 + 1.1x^2 + 4$ , encuentre (a) el rango y (b) las intersecciones. Redondee los valores a dos lugares decimales.

59. Con base en la gráfica de  $f(x) = 1 - 4x^3 - x^4$ , encuentre (a) el valor máximo de  $f(x)$ , (b) el rango de  $f$  y (c) las raíces reales de  $f$ . Redondee los valores a dos lugares decimales.

60. De la gráfica de  $f(x) = \frac{x^3 + 1.1}{3.8 + x^{2/3}}$ , encuentre (a) el rango de  $f$  y (b) las intersecciones. (c) ¿ $f$  tiene raíces reales? Redondee los valores a dos lugares decimales.

61. Grafique  $f(x) = \frac{4.1x^3 + \sqrt{2}}{x^2 - 3}$  para  $2 \leq x \leq 5$ . Determine (a) el valor máximo de  $f(x)$ , (b) el valor mínimo de  $f(x)$ , (c) el rango de  $f$  y (d) todas las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

## OBJETIVO

Estudiar la simetría con respecto al eje  $x$ , al eje  $y$  y al origen, y aplicar la simetría en el trazado de curvas.

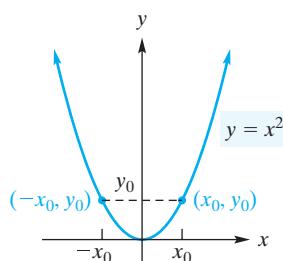


FIGURA 2.31 Simetría con respecto al eje  $y$ .

## 2.6 Simetría

Examinar el comportamiento gráfico de las ecuaciones es parte fundamental de las matemáticas. En esta sección se analizarán varias ecuaciones para determinar si sus gráficas tienen *simetría*. En un capítulo posterior se verá que el cálculo es de *gran* utilidad en la graficación, pues ayuda a determinar la forma de la gráfica. Proporciona técnicas muy poderosas para establecer si una curva “ondula” o no entre los puntos.

Consideré la gráfica de  $y = x^2$  de la figura 2.31. La parte que se ubica a la izquierda del eje  $y$  es la reflexión sobre dicho eje de la parte de la derecha del mismo eje, y viceversa. Con mayor precisión, si  $(a, b)$  es cualquier punto sobre la gráfica, entonces el punto  $(-a, b)$  también debe pertenecer a la gráfica. Se dice que esta gráfica es *simétrica con respecto al eje  $y$* .

### DEFINICIÓN

Una gráfica es **simétrica con respecto al eje  $y$**  si y sólo si  $(-a, b)$  está en la gráfica cuando  $(a, b)$  lo está.

### EJEMPLO 1 Simetría con respecto al eje $y$

Utilice la definición anterior para demostrar que la gráfica de  $y = x^2$  es simétrica con respecto al eje  $y$ .

**Solución:** Suponga que  $(a, b)$  es cualquier punto de la gráfica de  $y = x^2$ . Entonces

$$b = a^2$$

Debe mostrarse que las coordenadas de  $(-a, b)$  satisfacen  $y = x^2$ . Pero

$$(-a)^2 = a^2 = b$$

muestra que esto es cierto. Así se ha *probado* con álgebra simple lo que la imagen de la gráfica permitía suponer: La gráfica de  $y = x^2$  es simétrica con respecto al eje  $y$ .

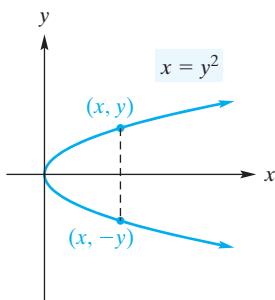


FIGURA 2.32 Simetría con respecto al eje  $x$ .

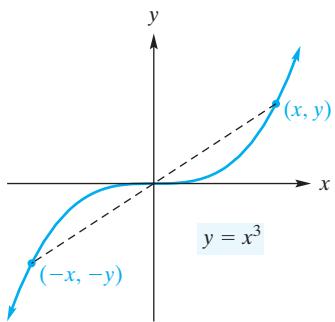
AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

Cuando se prueba la simetría en el ejemplo 1,  $(a, b)$  pudo haber sido cualquier punto sobre la gráfica. Por conveniencia, de aquí en adelante se escribirá  $(x, y)$  para hacer referencia a cualquier punto en la gráfica. Esto significa que una gráfica es simétrica con respecto al eje  $y$ , si al reemplazar  $x$  por  $-x$  en su ecuación, resulta una ecuación equivalente.

Se muestra otro tipo de simetría mediante la gráfica de  $x = y^2$  en la figura 2.32. Aquí la parte de la gráfica que se localiza debajo del eje  $x$  es la reflexión respecto al eje  $x$ , de la parte que se encuentra por arriba de éste, y viceversa. Si el punto  $(x, y)$  pertenece a la gráfica, entonces  $(x, -y)$  también pertenece a ella. Se dice que es *simétrica con respecto al eje  $x$* .

### DEFINICIÓN

Una gráfica es **simétrica con respecto al eje  $x$**  si y sólo si  $(x, -y)$  pertenece a la gráfica cuando  $(x, y)$  pertenece a ella.



**FIGURA 2.33** Simetría con respecto al origen.

Así, la gráfica de una ecuación en  $x$  y  $y$  tendrá simetría con respecto al eje  $x$ , si al reemplazar  $y$  por  $-y$  resulta una ecuación equivalente. Por ejemplo, al aplicar esta prueba a la gráfica de  $x = y^2$ , se observa que  $(-y)^2 = x$  si y sólo si  $y^2 = x$ , simplemente porque  $(-y)^2 = y^2$ . Por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje  $x$ .

Se ilustra un tercer tipo de simetría, *simetría con respecto al origen*, mediante la gráfica de  $y = x^3$  (figura 2.33). Siempre que el punto  $(x, y)$  pertenezca a la gráfica,  $(-x, -y)$  también pertenecerá a ella.

### DEFINICIÓN

Una gráfica es **simétrica con respecto al origen** si y sólo si  $(-x, -y)$  pertenece a la gráfica cuando  $(x, y)$  pertenece a ella.

Así, la gráfica de una ecuación en  $x$  y  $y$  tendrá simetría con respecto al origen si al reemplazar  $x$  por  $-x$  y  $y$  por  $-y$ , resulta una ecuación equivalente. Por ejemplo, si se aplica esta prueba a la gráfica de  $y = x^3$ , que se mostró en la figura 2.33, se obtiene

$$\begin{aligned} -y &= (-x)^3 \\ -y &= -x^3 \\ y &= x^3 \end{aligned}$$

donde las tres ecuaciones son equivalentes, en particular la primera y la última. De acuerdo con esto, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

En la tabla 2.1 se resumen las pruebas para la simetría. Cuando se sabe que una gráfica tiene simetría, puede hacerse su bosquejo con menos puntos de los que, de otra manera, serían necesarios.

**TABLA 2.1** Pruebas para la simetría

Simetría con respecto al eje $x$	Reemplace $y$ por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje $y$	Reemplace $x$ por $-x$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplace $x$ por $-x$ y $y$ por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.

### EJEMPLO 2 Graficación con intersecciones y simetría

Pruebe la simetría con respecto al eje  $x$ , al eje  $y$  y al origen de  $y = \frac{1}{x}$ . Despues determine las intersecciones y haga el bosquejo de la gráfica.

**Solución:**

**Simetría Con respecto al eje  $x$ :** Al reemplazar  $y$  por  $-y$  en  $y = 1/x$ , se obtiene

$$-y = \frac{1}{x} \quad \text{esto es} \quad y = -\frac{1}{x}$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la gráfica *no* es simétrica con respecto al eje  $x$ .

**Con respecto al eje  $y$ :** Al reemplazar  $x$  por  $-x$  en  $y = 1/x$ , se obtiene

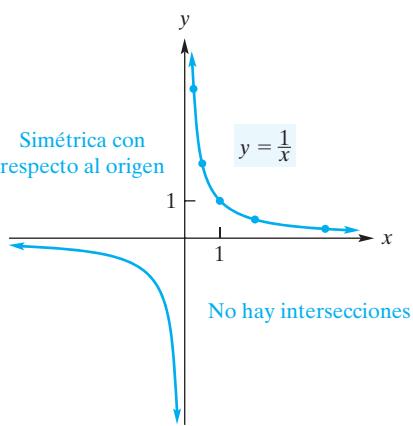
$$y = \frac{1}{-x} \quad \text{esto es} \quad y = -\frac{1}{x}$$

que no es equivalente a la ecuación dada. De este modo la gráfica *no* es simétrica con respecto al eje  $y$ .

**Con respecto al origen:** Al reemplazar  $x$  por  $-x$  y  $y$  por  $-y$  en  $y = 1/x$ , se obtiene

$$-y = \frac{1}{-x} \quad \text{esto es} \quad y = \frac{1}{x}$$

que es equivalente a la ecuación dada. En consecuencia, la gráfica *sí* es simétrica con respecto al origen.

FIGURA 2.34 Gráfica de  $y = \frac{1}{x}$ .

$x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

**Intersecciones** Como  $x$  no puede ser 0, la gráfica no tiene intersecciones con el eje  $y$ . Si  $y$  es 0, entonces  $0 = 1/x$ , pero esta ecuación no tiene solución. Por lo tanto, no existen intersecciones con el eje  $x$ .

**Análisis** Como no existen intersecciones, la gráfica no puede intersecar a ninguno de los ejes. Si  $x > 0$ , sólo se obtienen puntos en el primer cuadrante. En la figura 2.34 se muestra una parte de la gráfica en el cuadrante I. Por simetría, esa parte se refleja con respecto al origen para obtener la gráfica completa.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

### EJEMPLO 3 Graficación con intersecciones y simetría

Pruebe la simetría con respecto al eje  $x$ , al eje  $y$  y al origen de  $y = f(x) = 1 - x^4$ . Después encuentre las intersecciones y haga el bosquejo de la gráfica.

**Solución:**

**Simetría** Con el eje  $x$ : Al reemplazar  $y$  por  $-y$  en  $y = 1 - x^4$ , se obtiene

$$-y = 1 - x^4 \text{ esto es } y = -1 + x^4$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la gráfica *no* es simétrica con respecto al eje  $x$ .

Con el eje  $y$ : Al reemplazar  $x$  por  $-x$  en  $y = 1 - x^4$ , se obtiene

$$y = 1 - (-x)^4 \text{ esto es } y = 1 - x^4$$

que es equivalente a la ecuación dada. Por ende, la gráfica *sí* es simétrica con respecto al eje  $y$ .

Con el origen: Al reemplazar  $x$  por  $-x$  y  $y$  por  $-y$  en  $y = 1 - x^4$ , se obtiene

$$-y = 1 - (-x)^4 \text{ esto es } -y = 1 - x^4 \text{ esto es } y = -1 + x^4$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Así, la gráfica *no* es simétrica con respecto al origen.

**Intersecciones** Para examinar las intersecciones con el eje  $x$  se establece que  $y = 0$  en  $y = 1 - x^4$ . Entonces

$$1 - x^4 = 0$$

$$(1 - x^2)(1 + x^2) = 0$$

$$(1 - x)(1 + x)(1 + x^2) = 0$$

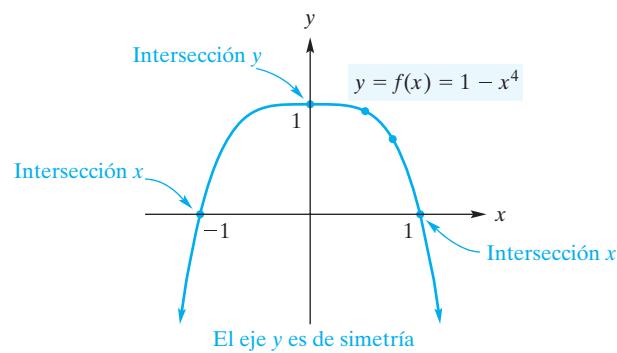
$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Por tanto, las intersecciones  $x$  son  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$ . Para examinar las intersecciones  $y$ , se determina que  $x = 0$ . Entonces  $y = 1$ , por lo que  $(0, 1)$  es la única intersección  $y$ .

**Análisis** Si se grafican las intersecciones y algunos puntos  $(x, y)$  a la derecha del eje  $y$ , puede hacerse el bosquejo de la gráfica *completa* mediante la simetría con respecto al eje  $y$  (figura 2.35).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

$x$	$y$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{175}{256}$
1	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{65}{16}$

FIGURA 2.35 Gráfica de  $y = 1 - x^4$ .

**La única función cuya gráfica es simétrica con respecto al eje  $x$  es la función constante 0.**

La función constante  $f(x) = 0$ , para toda  $x$ , puede identificarse fácilmente como simétrica con respecto al eje  $x$ . En el ejemplo 3, se mostró que la gráfica de  $y = f(x) = 1 - x^4$  no tiene simetría respecto al eje  $x$ . Para cualquier función  $f$ , suponga que la gráfica de  $y = f(x)$  tiene simetría con el eje  $x$ . De acuerdo con la definición, esto significa que también se tiene que  $-y = f(x)$ . Lo anterior indica que para una  $x$  arbitraria en el dominio de  $f$  se tiene  $f(x) = y$  y  $f(x) = -y$ . Puesto que para una función cada valor de  $x$  determina un solo valor de  $y$ , se debe tener que  $y = -y$ , y esto implica  $y = 0$ . Como  $x$  es arbitraria, se sigue que si la gráfica de una función es simétrica con respecto al eje  $x$ , entonces la función debe ser la constante 0.

#### EJEMPLO 4 Grafación con intersecciones y simetría

Examine la gráfica  $4x^2 + 9y^2 = 36$ , para las intersecciones y simetrías. Haga el bosquejo de la gráfica.

**Solución:**

**Intersecciones** Si  $y = 0$ , entonces  $4x^2 = 36$ , de esta manera  $x = \pm 3$ . Por lo tanto, las intersecciones con el eje  $x$  son  $(3, 0)$  y  $(-3, 0)$ . Si  $x = 0$ , entonces  $9y^2 = 36$  y de esta manera,  $y = \pm 2$ . Por lo tanto, las intersecciones con el eje  $y$  son  $(0, 2)$  y  $(0, -2)$ .

**Simetría** Con el eje  $x$ : Al reemplazar  $y$  por  $-y$  en  $4x^2 + 9y^2 = 36$ , se obtiene

$$4x^2 + 9(-y)^2 = 36 \quad \text{esto es } 4x^2 + 9y^2 = 36$$

como se obtiene la ecuación original, puede afirmarse que existe simetría con respecto al eje  $x$ .

Con el eje  $y$ : Al reemplazar  $x$  por  $-x$  en  $4x^2 + 9y^2 = 36$ , se obtiene

$$4(-x)^2 + 9y^2 = 36 \quad \text{esto es } 4x^2 + 9y^2 = 36$$

de nuevo se obtiene la ecuación original, de modo que también existe simetría con respecto al eje  $y$ .

Con el origen: Al reemplazar  $x$  por  $-x$  y  $y$  por  $-y$  en  $4x^2 + 9y^2 = 36$ , se obtiene

$$4(-x)^2 + 9(-y)^2 = 36 \quad \text{esto es } 4x^2 + 9y^2 = 36$$

como ésta es la ecuación original, la gráfica también es simétrica con respecto al origen.

**Análisis** En la figura 2.36 se grafican las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante. Después los puntos se unen por medio de una curva suave. Los puntos del cuarto cuadrante se obtienen por simetría con respecto al eje  $x$ . Después, por simetría con respecto al eje  $y$ , se determina toda la gráfica. Existen otras formas de graficar la ecuación mediante la simetría. Por ejemplo, después de graficar las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante, por simetría con respecto al origen puede obtenerse el tercer cuadrante. Por simetría con respecto al eje  $x$  (o al eje  $y$ ) puede obtenerse la gráfica completa.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23



En el ejemplo 4, la gráfica es simétrica con respecto al eje  $x$ , al eje  $y$  y al origen. Puede mostrarse que **para cualquier gráfica, si existen dos de los tres tipos de simetría, entonces el tipo restante también debe existir**.

$x$	$y$
$\pm 3$	0
0	$\pm 2$
1	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$
2	$\frac{2\sqrt{5}}{3}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{\sqrt{11}}{3}$

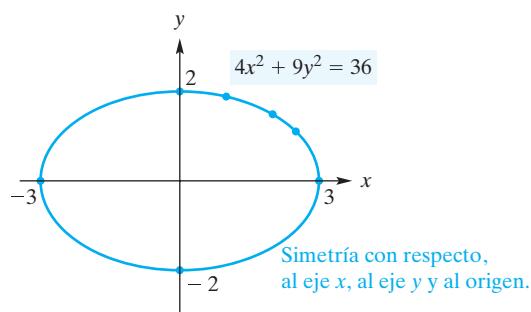


FIGURA 2.36 Gráfica de  $4x^2 + 9y^2 = 36$ .

Este hecho puede ayudar a ahorrar tiempo durante la verificación de las simetrías.

**EJEMPLO 5** Simetría con respecto a la recta  $y = x$

**DEFINICIÓN**

Una gráfica es **simétrica con respecto a la recta  $y = x$**  si y sólo si  $(b, a)$  está en la gráfica cuando  $(a, b)$  lo está.

Otra forma de establecer la definición es decir que al intercambiar los papeles de  $x$  y  $y$  en la ecuación dada se obtiene una ecuación equivalente.

Use la definición anterior para mostrar que  $x^2 + y^2 = 1$  es simétrica con respecto a la línea  $y = x$ .

**Solución:** Al intercambiar los papeles de  $x$  y  $y$  se obtiene  $y^2 + x^2 = 1$ , lo cual es equivalente a  $x^2 + y^2 = 1$ . Así que  $x^2 + y^2 = 1$  es simétrica con respecto a  $y = x$ .



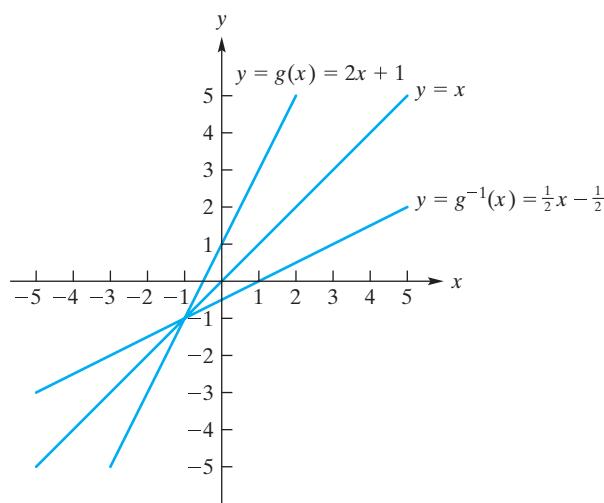
El punto con coordenadas  $(b, a)$  es la reflexión sobre (imagen especular en) la línea  $y = x$  del punto  $(a, b)$ . Si  $f$  es una función uno a uno,  $b = f(a)$  si y sólo si  $a = f^{-1}(b)$ . Así que la gráfica de  $f^{-1}$  es la reflexión (imagen especular) en la línea  $y = x$  de la gráfica de  $f$ . Es interesante notar que para *cualquier* función  $f$  puede obtenerse la reflexión de la gráfica de  $f$ . Sin embargo, la imagen resultante puede no ser la gráfica de una función. Para que esta imagen reflejada sea la gráfica de una función, debe pasar la prueba de la recta vertical. No obstante, las rectas verticales y horizontales son reflejos, una de la otra, sobre la línea  $y = x$ , y se observa que para que la imagen reflejada de la gráfica de  $f$  pase la prueba de la recta vertical, la gráfica de  $f$  debe pasar la prueba de la línea horizontal. Ocurre esto último precisamente si  $f$  es uno a uno, que a su vez sucede si y sólo si  $f$  tiene una inversa.

**EJEMPLO 6** Simetría y funciones inversas

Bosqueje la gráfica de  $g(x) = 2x + 1$  y su inversa en el mismo plano.

**Solución:** Como se estudiará a detalle en el capítulo 3, la gráfica de  $g$  es la línea recta con pendiente 2 e intersección de  $y$ . Esta línea, la recta  $y = x$ , y el reflejo de  $y = 2x + 1$  en  $y = x$  se muestran en la figura 2.37.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27



**FIGURA 2.37** Gráfica de  $y = g(x)$  y  $y = g^{-1}(x)$ .

## Problemas 2.6

En los problemas 1 a 16, determine las intersecciones con el eje  $x$  y con el eje  $y$  de las gráficas de las ecuaciones. También pruebe la simetría con respecto al eje  $x$ , al eje  $y$ , al origen y a la línea  $y = x$ . No haga el bosquejo de las gráficas.

1.  $y = 5x$

3.  $2x^2 + y^2 - 4 = 8 - y$

5.  $16x^2 - 9y^2 = 25$

\*7.  $x = -2$

\*9.  $x = -y^{-4}$

11.  $x - 4y - y^2 + 21 = 0$

12.  $x^2 + xy + y^3 = 0$

13.  $y = f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + 1}$

14.  $x^2 + xy + y^2 = 0$

15.  $y = \frac{3}{x^3 + 8}$

2.  $y = f(x) = x^2 - 4$

4.  $x = y^3$

6.  $y = 57$

8.  $y = |2x| - 2$

10.  $y = \sqrt{x^2 - 25}$

En los problemas 17 a 24, determine las intersecciones con el eje  $x$  y con el eje  $y$  de las gráficas de las ecuaciones. También, pruebe la simetría con respecto al eje  $x$ , al eje  $y$ , al origen y a la línea  $y = x$ . Despues haga el bosquejo de las gráficas.

17.  $3x + y^2 = 9$

\*19.  $y = f(x) = x^3 - 4x$

21.  $|x| - |y| = 0$

\*23.  $9x^2 + 4y^2 = 25$

18.  $x - 1 = y^4 + y^2$

20.  $3y = 5x - x^3$

22.  $x^2 + y^2 = 16$

24.  $x^2 - y^2 = 4$

25. Pruebe que la gráfica de  $y = f(x) = 5 - 1.96x^2 - \pi x^4$  es simétrica con respecto al eje  $y$ , y después grafique la función. (a) Haga uso de la simetría en donde sea posible para encontrar todas las intersecciones. Determine (b) el valor máximo de  $f(x)$ , y (c) el rango de  $f$ . Redondee todos los valores a dos lugares decimales.

26. Pruebe que la gráfica de  $y = f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 5$  es simétrica con respecto al eje  $y$ , y después grafique la función. Determine todas las raíces reales de  $f$ . Redondee sus respuestas a dos lugares decimales.

- \*27. Bosqueje la gráfica de  $f(x) = -3x + 2$  y su inversa en el mismo plano.

### OBJETIVO

Familiarizarse con las formas de las gráficas de seis funciones básicas, y considerar la traslación, la reflexión y el alargamiento y contracción verticales de la gráfica de una función.

## 2.7 Traslaciones y reflexiones

Hasta ahora, el enfoque de este texto en relación con las gráficas se ha basado en la graficación de puntos y en el uso de cualquier posible simetría. Pero esta técnica no es necesariamente la ruta predilecta. Más adelante se analizarán gráficas con otras técnicas. Sin embargo, algunas funciones y las gráficas a las que están asociadas aparecen con tanta frecuencia, que resulta útil memorizarlas. En la figura 2.38 se muestran seis de tales funciones.

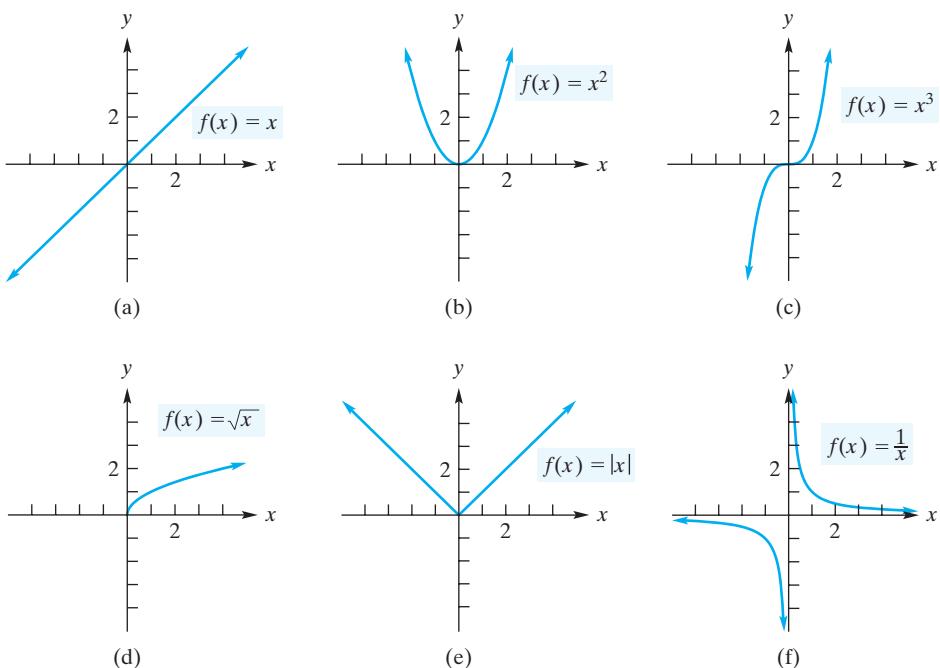
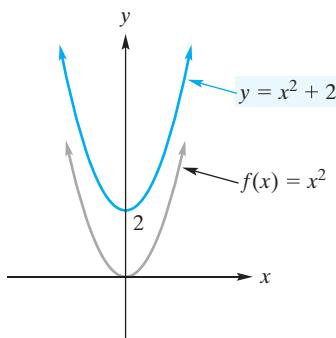


FIGURA 2.38 Funciones utilizadas con frecuencia.

FIGURA 2.39 Gráfica de  $y = x^2 + 2$ .

A veces, al modificar una función mediante una manipulación *algebraica*, puede obtenerse la gráfica de la nueva función a partir de la gráfica de la función original, mediante una manipulación *geométrica*. Por ejemplo, puede utilizarse la gráfica de  $f(x) = x^2$  para graficar  $y = x^2 + 2$ . Observe que  $y = f(x) + 2$ . Por lo tanto, para cada  $x$ , la ordenada correspondiente para la gráfica de  $y = x^2 + 2$ , es 2 unidades mayor que la ordenada para la gráfica de  $f(x) = x^2$ . Esto significa que la gráfica de  $y = x^2 + 2$  es simplemente la gráfica de  $f(x) = x^2$  desplazada o *trasladada*, 2 unidades hacia arriba (vea la figura 2.39). Se dice que la gráfica de  $y = x^2 + 2$  es una *transformación* de la gráfica de  $f(x) = x^2$ . La tabla 2.2 presenta una lista de los tipos básicos de transformaciones.

TABLA 2.2 Transformaciones,  $c > 0$ 

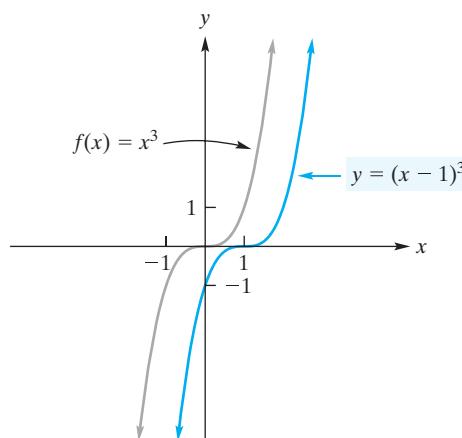
Ecuación	Cómo transformar la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación
$y = f(x) + c$	Desplazar $c$ unidades hacia arriba
$y = f(x) - c$	Desplazar $c$ unidades hacia abajo
$y = f(x - c)$	Desplazar $c$ unidades hacia la derecha
$y = f(x + c)$	Desplazar $c$ unidades hacia la izquierda
$y = -f(x)$	Reflejar con respecto al eje $x$
$y = f(-x)$	Reflejar con respecto al eje $y$
$y = cf(x) \quad c > 1$	Alargar verticalmente alejándose del eje $x$ por un factor $c$
$y = cf(x) \quad c < 1$	Contraer verticalmente hacia el eje $x$ por un factor $c$

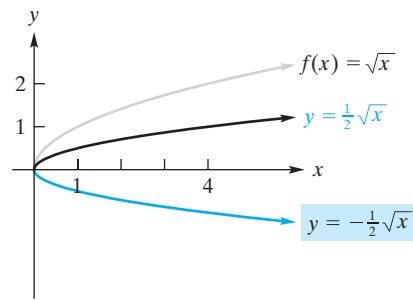
### EJEMPLO 1 Traslación horizontal

Haga el bosquejo de la gráfica de  $y = (x - 1)^3$ .

**Solución:** Se observa que  $(x - 1)^3$  es  $x^3$  en donde  $x$  ha sido reemplazada por  $x - 1$ . Por lo tanto, si  $f(x) = x^3$ , entonces  $y = (x - 1)^3 = f(x - 1)$ , que tiene la forma  $f(x - c)$ , donde  $c = 1$ . De la tabla 2.2, la gráfica de  $y = (x - 1)^3$  es la gráfica de  $f(x) = x^3$  desplazada una unidad a la derecha (vea la figura 2.40).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

FIGURA 2.40 Gráfica de  $y = (x - 1)^3$ .



**FIGURA 2.41** Para graficar  $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ , comprima  $y = \sqrt{x}$  y refleje el resultado con respecto al eje  $x$ .

### EJEMPLO 2 Contracción y reflexión

Bosqueje la gráfica de  $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ .

**Solución:** Este problema puede resolverse en dos pasos. Primero, observe que  $\frac{1}{2}\sqrt{x}$  es  $\sqrt{x}$  multiplicada por  $\frac{1}{2}$ . Así, si  $f(x) = \sqrt{x}$ , entonces  $\frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2}f(x)$ , que tiene la forma  $cf(x)$ , donde  $c = \frac{1}{2}$ . De modo que la gráfica de  $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$  es la gráfica de  $f$  comprimida verticalmente hacia el eje  $x$  por un factor de  $\frac{1}{2}$  (transformación 8, tabla 2.2; vea la figura 2.41). Segundo, el signo menos en  $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$  provoca una reflexión en la gráfica de  $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$  con respecto al eje  $x$  (transformación 5, tabla 2.2; vea la figura 2.41).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5



## Problemas 2.7

En los problemas 1 a 12 utilice las gráficas de las funciones de la figura 2.38 y las técnicas de transformación para graficar las funciones dadas.

1.  $y = x^3 - 1$

\*3.  $y = \frac{1}{x-2}$

\*5.  $y = \frac{2}{3x}$

7.  $y = |x+1| - 2$

9.  $y = 1 - (x-1)^2$

11.  $y = \sqrt{-x}$

2.  $y = -x^2$

4.  $y = \sqrt{x+2}$

6.  $y = |x| - 2$

8.  $y = -\frac{1}{3}\sqrt{x}$

10.  $y = (x-1)^2 + 1$

12.  $y = \frac{5}{2-x}$

En los problemas 13 a 16, describa qué debe hacerse a la gráfica de  $y = f(x)$  para obtener la gráfica de la ecuación dada.

13.  $y = -2f(x+3) + 2$

14.  $y = f(x+3) - 4$

15.  $y = f(-x) - 5$

16.  $y = f(3x)$

17. Grafique la función  $y = \sqrt[3]{x+k}$  para  $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$  y  $-3$ . Observe las traslaciones verticales comparadas con la primera gráfica.

18. Grafique la función  $y = \sqrt[3]{x+k}$  para  $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$ , para  $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$  y  $-3$ . Observe las traslaciones horizontales comparadas con la primera gráfica.

19. Grafique la función  $y = k\sqrt[3]{x}$  para  $k = 1, 2, \frac{1}{2}$  y  $3$ . Observe la contracción y el alargamiento verticales comparados con la primera gráfica. Grafique la función para  $k = -2$ . Observe que la gráfica es la misma que la que se obtiene por medio de un alargamiento, en un factor de 2, de la reflexión de  $y = \sqrt[3]{x}$  con respecto al eje  $x$ .

## 2.8 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

#### Sección 2.1 Funciones

función dominio rango variable independiente

Ej. 2, p. 78

variable dependiente valor funcional,  $f(x)$

Ej. 3, p. 79

cociente de diferencia,  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Ej. 4, p. 79

función de demanda función de oferta

Ej. 5, Ej. 6, p. 80

#### Sección 2.2 Funciones especiales

función constante función polinomial (lineal y cuadrática)

Ej. 1, Ej. 2, p. 82, 83

función racional función definida por partes

Ej. 3, Ej. 4, p. 83

valor absoluto,  $|x|$  factorial,  $r!$

Ej. 5, Ej. 6, p. 84

<b>Sección 2.3</b>	<b>Combinaciones de funciones</b>	
	$f + g$ $f - g$ $fg$ $f/g$ función compuesta, $f \circ g$	Ej. 1, Ej. 2, p. 87, 88
<b>Sección 2.4</b>	<b>Funciones inversas</b>	
	función inversa, $f^{-1}$ función uno a uno	Ej. 1, p. 92
<b>Sección 2.5</b>	<b>Gráficas en coordenadas rectangulares</b>	
	sistema de coordenadas rectangulares ejes de coordenadas	
	origen plano $x, y$ par ordenado $(x, y)$ coordenadas de un punto	Ej. 1, p. 96
	cuadrante gráfica de una ecuación intersección $x$ intersección $y$	Ej. 4, p. 97
	gráfica de una función eje de valores de la función raíces de una función	Ej. 8, p. 100
	prueba de la recta vertical prueba de la recta horizontal	
<b>Sección 2.6</b>	<b>Simetría</b>	
	simetría con respecto al eje $x$ simetría con respecto al eje $y$	Ej. 1, p. 103
	simetría con respecto al origen simetría con respecto a $y = x$	Ej. 6, p. 107
<b>Sección 2.7</b>	<b>Traslaciones y reflexiones</b>	
	traslaciones horizontales y verticales	Ej. 1, p. 109
	alargamiento y reflexión	Ej. 2, p. 110

## Resumen

Una función  $f$  es una regla de correspondencia que asigna exactamente un número de salida  $f(x)$  a cada número de entrada  $x$ . Por lo general, una función se especifica por medio de una ecuación que indica lo que debe hacerse a una entrada  $x$  para obtener  $f(x)$ . Para conseguir un valor particular  $f(a)$  de la función, se reemplaza cada  $x$  en la ecuación por  $a$ .

El dominio de una función consiste en todos los números de entrada, y el rango consiste en todos los números de salida. A menos que se especifique lo contrario, el dominio de  $f$  consiste en todos los números reales  $x$  para los cuales  $f(x)$  también es un número real.

Algunos tipos especiales de funciones son las funciones constantes, las funciones polinomiales y las funciones racionales. Una función que está definida por más de una expresión se denomina función definida por partes.

Una función tiene una inversa si y sólo si es uno a uno.

En economía, las funciones de oferta (o demanda) indican una correspondencia entre el precio  $p$  de un producto y el número de unidades  $q$  del producto que los productores (o consumidores) ofrecerán (o comprarán) a ese precio.

Dos funciones  $f$  y  $g$  pueden combinarse para formar una suma, diferencia, producto, cociente o composición como sigue:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\(f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\(fg)(x) &= f(x)g(x) \\\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\(f \circ g)(x) &= f(g(x))\end{aligned}$$

Un sistema de coordenadas rectangulares permite representar de manera geométrica ecuaciones con dos variables, en particular aquellas que surgen de funciones. La gráfica de una ecuación en  $x$  y  $y$  consiste en todos los puntos  $(x, y)$  que corresponden a las soluciones de la ecuación. Se grafica un número suficiente de puntos y se conectan (donde sea apropiado), de modo que la forma básica de la gráfica sea evidente. Los puntos donde la gráfica interseca al eje  $x$  y al eje  $y$  se denominan intersección  $x$  e intersección  $y$ , respectivamente. Una intersección  $x$  se encuentra al determinar  $y$  igual a 0 y resolver para  $x$ ;

una intersección  $y$  se encuentra al determinar  $x$  igual a 0 y resolver para  $y$ .

La gráfica de una función  $f$  es la gráfica de la ecuación  $y = f(x)$  y consiste en todos los puntos  $(x, f(x))$  tales que  $x$  está en el dominio de  $f$ . Las raíces de  $f$  son los valores de  $x$  para los cuales  $f(x) = 0$ . Con base en la gráfica de una función, es fácil determinar su dominio y rango.

Para verificar que una gráfica representa una función se utiliza la prueba de la recta vertical. Una recta vertical no puede cortar la gráfica de una función en más de un punto.

Para verificar que una función es uno a uno, se utiliza la prueba de la recta horizontal. Una recta horizontal no puede cortar la gráfica de una función uno a uno en más de un punto. Cuando la función pasa la prueba de la recta horizontal, la gráfica de la inversa puede obtenerse al reflejar la gráfica original en la línea  $y = x$ .

Cuando la gráfica de una ecuación tiene simetría, el efecto de reflexión (imagen specular) permite bosquejar la gráfica con menos puntos que los que serían necesarios de otro modo. Las pruebas para simetría son las siguientes:

Simetría con respecto al eje $x$	Reemplace $y$ por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje $y$	Reemplace $x$ por $-x$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplace $x$ por $-x$ y $y$ por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto a $y = x$	Intercambie $x$ y $y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.

Algunas veces la gráfica de una función puede obtenerse a partir de una función conocida, por medio de un desplazamiento vertical hacia arriba o hacia abajo, un desplazamiento horizontal hacia la derecha o hacia la izquierda, una reflexión con respecto al eje  $x$  o al eje  $y$ , o bien un alargamiento o una contracción vertical en dirección del eje  $x$ . Tales transformaciones están indicadas en la tabla 2.2 de la sección 2.7.

## Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

Proporcione el dominio de cada función de los problemas 1 a 6.

1.  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x + 5}$

2.  $g(x) = x^4 + 5|x - 1|$

3.  $F(t) = 7t + 4t^2$

4.  $G(x) = 18$

5.  $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$

6.  $H(s) = \frac{\sqrt{s} - 5}{4}$

En los problemas 7 a 14, encuentre los valores de la función para la función dada.

7.  $f(x) = 3x^2 - 4x + 7; f(0), f(-3), f(5), f(t)$

8.  $h(x) = 7; h(4), h\left(\frac{1}{100}\right), h(-156), h(x + 4)$

9.  $G(x) = \sqrt[4]{x - 3}; G(3), G(19), G(t + 1), G(x^3)$

10.  $F(x) = \frac{x - 3}{x + 4}; F(-1), F(0), F(5), F(x + 3)$

11.  $h(u) = \frac{\sqrt{u + 4}}{u}; h(5), h(-4), h(x), h(u - 4)$

12.  $H(s) = \frac{(s - 4)^2}{3}; H(-2), H(7), H\left(\frac{1}{2}\right), H(x^2)$

13.  $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 1 \\ 4 + x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}; f(4), f(-2), f(0), f(1)$

14.  $f(q) = \begin{cases} -q + 1 & \text{si } -1 \leq q < 0 \\ q^2 + 1 & \text{si } 0 \leq q < 5 \\ q^3 - 99 & \text{si } 5 \leq q \leq 7 \end{cases}; f\left(-\frac{1}{2}\right), f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(5), f(6)$

En los problemas 15 a 18 encuentre (a)  $f(x + h)$  y (b)  $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ , simplifique sus respuestas.

15.  $f(x) = 3 - 7x$

16.  $f(x) = 11x^2 + 4$

17.  $f(x) = 4x^2 + 2x - 5$

18.  $f(x) = \frac{7}{x + 1}$

19. Si  $f(x) = 3x - 1$  y  $g(x) = 2x + 3$ , encuentre lo siguiente:

(a)  $(f + g)(x)$

(b)  $(f + g)(4)$

(c)  $(f - g)(x)$

(d)  $(fg)(x)$

(e)  $(fg)(1)$

(f)  $\frac{f}{g}(x)$

(g)  $(f \circ g)(x)$

(h)  $(f \circ g)(5)$

(i)  $(g \circ f)(x)$

20. Si  $f(x) = -x^2$  y  $g(x) = 3x - 2$ , determine lo siguiente:

(a)  $(f + g)(x)$

(b)  $(f - g)(x)$

(c)  $(f - g)(-3)$

(d)  $(fg)(x)$

(e)  $\frac{f}{g}(x)$

(f)  $\frac{f}{g}(2)$

(g)  $(f \circ g)(x)$

(h)  $(g \circ f)(x)$

(i)  $(g \circ f)(-4)$

En los problemas 21 a 24, encuentre  $(f \circ g)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$ .

21.  $f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = x + 1$

22.  $f(x) = \frac{x + 1}{4}, g(x) = \sqrt{x}$

23.  $f(x) = \sqrt{x + 2}, g(x) = x^3$

24.  $f(x) = 2, g(x) = 3$

En los problemas 25 y 26, encuentre las intersecciones de la gráfica de cada ecuación, y pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y, al origen y a  $x = y$ . No haga un bosquejo de las gráficas.

25.  $y = 3x - x^3$

26.  $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2 + 1} = 4$

En los problemas 27 y 28, encuentre las intersecciones con el eje x y con el eje y de la gráfica de cada ecuación. También examine la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. Despues haga un bosquejo de las gráficas.

27.  $y = 9 - x^2$

28.  $y = 3x - 7$

En los problemas 29 a 32, trace la gráfica de cada función y proporcione su dominio y rango. También determine las intersecciones.

29.  $G(u) = \sqrt{u + 4}$

30.  $f(x) = |x| + 1$

31.  $y = g(t) = \frac{2}{|t - 4|}$

32.  $h(u) = \sqrt{-5u}$

33. Grafique la siguiente función definida por partes y proporcione su dominio y rango:

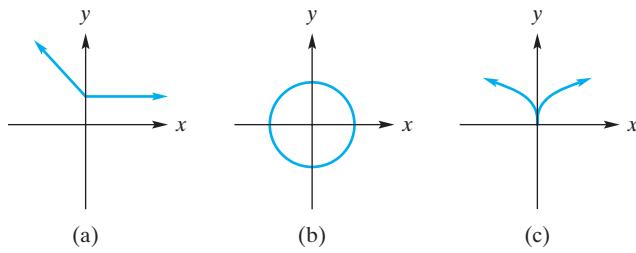
$$y = f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

34. Utilice la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x}$  para hacer un bosquejo de la gráfica de  $y = \sqrt{x - 2} - 1$ .

35. Utilice la gráfica de  $f(x) = x^2$  para hacer un bosquejo de la gráfica de  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ .

36. **Ecuación de tendencia** Las ventas anuales proyectadas (en dólares) de un producto nuevo están dadas por la ecuación  $S = 150\,000 + 3000t$ , donde  $t$  es el tiempo en años, contados a partir de 2001. Tal ecuación se denomina *ecuación de tendencia*. Encuentre las ventas anuales proyectadas para 2006. ¿Es  $S$  una función de  $t$ ?

- 37.** En la figura 2.42, ¿cuáles gráficas representan funciones de  $x$ ?



**FIGURA 2.42** Diagrama para el problema 37.

- 38.** Si  $f(x) = (x^2 - x + 7)^3$ , encuentre (a)  $f(2)$  y (b)  $f(1.1)$ . Redondee sus respuestas a dos decimales.

- 39.** Encuentre todas las raíces reales de la ecuación

$$5x^3 - 7x^2 = 4x - 2$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

- 40.** Encuentre todas las raíces reales de la ecuación

$$x^4 - 4x^3 = (2x - 1)^2$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

- 41.** Encuentre todas las raíces reales de

$$f(x) = x(2.1x^2 - 3)^2 - x^3 + 1$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

- 42.** Determine el rango de

$$f(x) = \begin{cases} -2.5x - 4 & \text{si } x < 0 \\ 6 + 4.1x - x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 43.** Con base en la gráfica de  $f(x) = -x^3 + 0.04x + 7$ , encuentre (a) el rango y (b) las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

- 44.** Con base en la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x+5}(x^2 - 4)$ , encuentre (a) el valor mínimo de  $f(x)$ , (b) el rango de  $f$  y (c) todas las raíces reales de  $f$ . Redondee los valores a dos decimales.

- 45.** Grafique  $y = f(x) = x^2 + x^k$ , donde  $k = 0, 1, 2, 3$  y  $4$ . ¿Para cuáles valores de  $k$  la gráfica tiene (a) simetría con respecto al eje  $y$ , (b) simetría con respecto al origen?

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Una experiencia con impuestos

En ocasiones, escuchará a algún estadounidense quejarse de que una fuente de ingresos inesperada lo *empujará al tabulador* siguiente en la clasificación de los impuestos, y la subsecuente especulación de que esto significará una reducción en sus *ingresos netos*. Es verdad que en Estados Unidos el impuesto federal sobre el ingreso se determina mediante funciones definidas por partes (estas partes son llamadas frecuentemente *tabuladores*), pero veremos que no hay *saltos* en el pago de impuestos como una función del ingreso. La creencia de que un incremento en el ingreso antes de impuestos significará una reducción en el ingreso neto es una leyenda urbana.

Examinaremos las tasas de impuestos federales en 2006 para un matrimonio que hace una declaración conjunta. El documento correspondiente es la forma Y-1, que está disponible en <http://www.irs.gov/formspub/article/0,,id=5150856,00.html> (vea la figura 2.43).

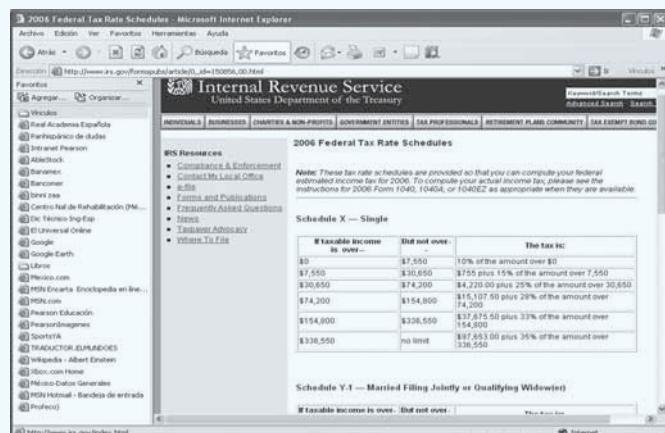


FIGURA 2.43 Página principal de la Internal Revenue Service (oficina recaudadora de impuestos en Estados Unidos).

La forma Y-1 define una función, llámela  $f$ , de ingreso  $x$ , para  $x \geq 0$ . De hecho, para cualquier  $x \geq 0$ ,  $x$  pertenece exactamente a uno de los intervalos

$$\begin{aligned} &[0, 15\,100] \\ &(15\,100, 61\,300] \\ &(61\,300, 123\,700] \\ &(123\,700, 188\,450] \\ &(188\,450, 336\,550] \\ &(336\,550, \infty) \end{aligned}$$

y tan pronto como se determina el intervalo, existe una regla simple que se aplica para calcular un valor único  $f(x)$ .

Por ejemplo, para calcular  $f(79\,500)$ , los impuestos sobre un ingreso de \$79 500, observe primero que 79 500 pertenece al intervalo  $(61\,300, 123\,700]$  y para dicha  $x$  la fórmula de impuestos es  $f(x) = 8440 + 0.25(x - 61\,300)$ , dado que  $x - 61\,300$  es el ingreso por encima de \$61 300 y se grava a la tasa del  $25\% = 0.25$ .



Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(79\,500) &= 8\,440 + 0.25(79\,500 - 61\,300) \\ &= 8\,440 + 0.25(18\,200) \\ &= 8\,440 + 4\,550 \\ &= 12\,990 \end{aligned}$$

Con propósitos de ilustrar mejor el ejemplo, se ha escrito la forma Y-1 en una notación genérica para una función definida por partes.

$$f(x) = \begin{cases} 0.10x & \text{si } 0 \leq x \leq 15\,100 \\ 1510 + 0.15(x - 15\,100) & \text{si } 15\,100 < x \leq 61\,300 \\ 8440 + 0.25(x - 61\,300) & \text{si } 61\,300 < x \leq 123\,700 \\ 24\,040 + 0.28(x - 123\,700) & \text{si } 123\,700 < x \leq 188\,450 \\ 42\,170 + 0.33(x - 188\,450) & \text{si } 188\,450 < x \leq 336\,550 \\ 91\,043 + 0.35(x - 336\,550) & \text{si } x > 336\,550 \end{cases}$$

Con estas fórmulas, podemos representar geométricamente la función de impuesto al ingreso, como en la figura 2.44.

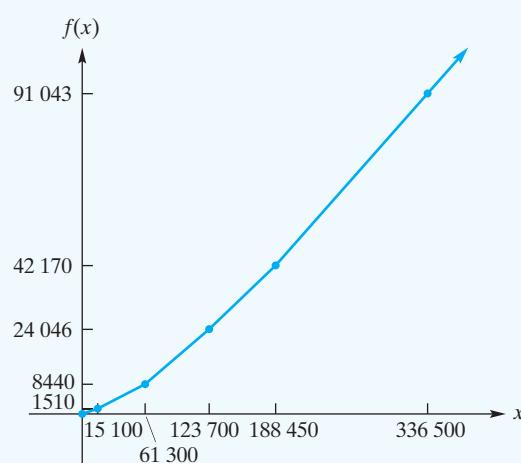


FIGURA 2.44 Función del impuesto con respecto al ingreso.



## Problemas

Use la función de impuesto al ingreso, para determinar el impuesto sobre el ingreso gravable durante el año 2006.

1. \$23 000
2. \$85 000
3. \$290 000

4. \$462 700
5. Busque la forma X más reciente en <http://www.irs.gov/formspubs/article/0,,id5150856,00.html> y repita los problemas 1 a 4 para el caso de un solo contribuyente.
6. ¿Por qué es relevante que  $f(15\ 100) = \$1510, f(61\ 300) = \$8440$ , etcétera?
7. Defina la función  $g$  por  $g(x) = x - f(x)$ . Así que  $g = I - f$ , donde  $I$  es la función identidad en la sección 2.3. La función  $g$  proporciona, para cada ingreso antes de impuestos, la cantidad que el contribuyente retiene de su ingreso y es, como  $f$ , una función definida por partes. Escriba una descripción completa para  $g$ , en términos de las clasificaciones, como lo hicimos para  $f$ .
8. Grafique la función  $g$  definida en el problema 7. Observe que si  $a < b$ , entonces  $g(a) < g(b)$ . Esto muestra que si se incrementa el ingreso antes de impuestos, entonces el ingreso neto aumenta, independientemente de que haya un salto o un tabulador más alto (con lo que se derrumba una leyenda urbana).

# 3

## RECTAS, PARÁBOLAS Y SISTEMAS DE ECUACIONES

- 3.1 Rectas
- 3.2 Aplicaciones y funciones lineales
- 3.3 Funciones cuadráticas
- 3.4 Sistemas de ecuaciones lineales
- 3.5 Sistemas no lineales
- 3.6 Aplicaciones de sistemas de ecuaciones
- 3.7 Repaso

### Aplicación práctica

Planes de cobro en telefonía celular

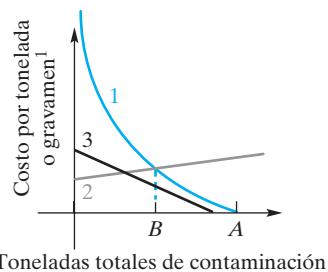
Para resolver el problema de la contaminación industrial, algunas personas recomiendan una solución basada en el mercado: dejar que las fábricas contaminen, pero obligarlas a que paguen por ese privilegio. Entre mayor contaminación, mayor pago o gravamen. El objetivo es dar a los fabricantes un incentivo para no contaminar más de lo necesario.

¿Funciona este enfoque? En la figura de abajo, la curva 1 representa el costo por tonelada de reducir la contaminación. Una compañía que contamina de manera indiscriminada normalmente puede reducir de alguna forma su contaminación a un costo pequeño. Sin embargo, conforme la cantidad de contaminación se reduce, el costo por tonelada se eleva y en algún momento crece de manera indefinida. Esto se ilustra por medio de la curva 1, que se eleva indefinidamente conforme las toneladas totales de contaminación producidas se aproximan a 0. (Se recomienda al lector tratar de entender por qué este *modelo* es razonablemente exacto.)

La recta 2 es un esquema de gravamen menos estricto con una operación industrial limpia, pero que cobra una cantidad creciente por tonelada conforme la cantidad de contaminación total crece. En contraste, la recta 3 es un esquema en el que los fabricantes que contaminan poco pagan un gravamen alto por tonelada, mientras que los grandes contaminadores pagan menos por cada tonelada (pero más de manera global). Si se pasa por alto la cuestión de si se trata de algo justo o no, ¿qué tan bien funcionará cada esquema como una medida de control de contaminación?

Al enfrentarse con un gravamen por contaminar, una compañía tiende a disminuir la contaminación *mientras ahorre más en costos de gravamen que en costos por reducción de contaminación*. Los esfuerzos de reducción continúan hasta que los costos por reducir la contaminación superan el ahorro en gravámenes.

En la segunda mitad de este capítulo se estudian los sistemas de ecuaciones. Aquí, la curva 1 y la recta 2 representan un sistema de ecuaciones, mientras que la curva 1 y la recta 3 representan otro. Una vez que haya aprendido cómo resolver sistemas de ecuaciones, puede regresar a esta página y verificar que el esquema de la recta 2 conduce a una reducción de contaminación de una cantidad  $A$  a una cantidad  $B$ , mientras que el esquema de la recta 3 no funciona como una medida de control de contaminación, puesto que deja el nivel de contaminación en el  $A$ .



<sup>1</sup>Técnicamente, éste es el costo *marginal* por tonelada (vea la sección 11.3).

**OBJETIVO**

Desarrollar la noción de pendiente y formas diferentes de las ecuaciones de rectas.

## 3.1 Rectas

### Pendiente de una recta

Muchas de las relaciones que se establecen entre cantidades pueden representarse de manera adecuada por medio de rectas. Una característica de las rectas es su “inclinación”. Por ejemplo, en la figura 3.1 la recta  $L_1$  crece más rápido, conforme va de izquierda a derecha, que la recta  $L_2$ . En este sentido  $L_1$  está más inclinada o empinada.

Para medir la inclinación de una recta se usa la noción de *pendiente*. En la figura 3.2, a medida que nos movemos a lo largo de la recta  $L$  de  $(1, 3)$  a  $(3, 7)$ , la coordenada  $x$  aumenta de 1 a 3, y la coordenada  $y$  aumenta de 3 a 7. La tasa promedio de cambio de  $y$  con respecto a  $x$  es la razón

$$\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{7 - 3}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

La razón de 2 significa que por cada unidad de aumento en  $x$  hay un *incremento* de 2 unidades en  $y$ . Debido a este aumento, la recta se *eleva* de izquierda a derecha. Puede demostrarse que, sin importar cuáles puntos de  $L$  se elijan para calcular la razón del cambio en  $y$  sobre el cambio en  $x$ , el resultado siempre es 2, que se llama la *pendiente* de la recta.

### DEFINICIÓN

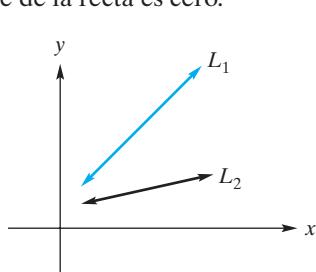
Sean  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  dos puntos diferentes sobre una recta no vertical. La pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \left( = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} \right) \quad (1)$$

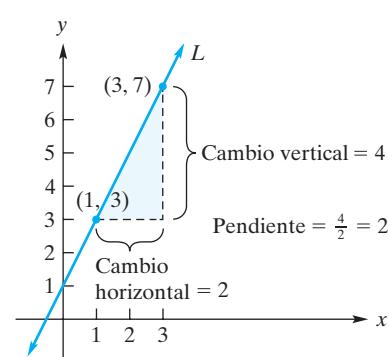


### ADVERTENCIA

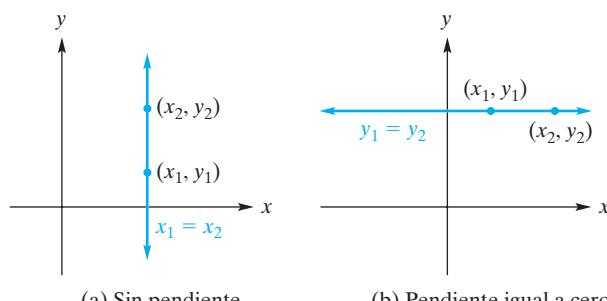
No tener pendiente es diferente a tener una pendiente de cero.



**FIGURA 3.1** La recta  $L_1$  está “más inclinada” que la recta  $L_2$ .



**FIGURA 3.2** Pendiente de una recta.



**FIGURA 3.3** Rectas vertical y horizontal.

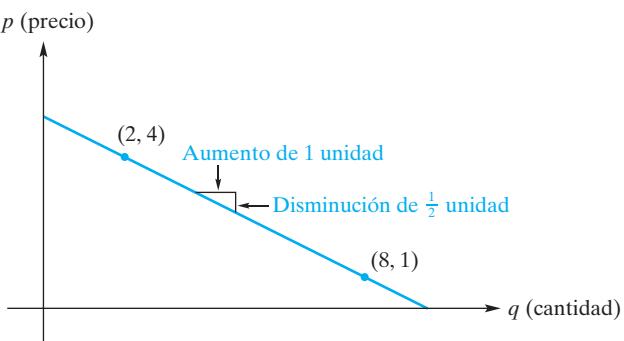


FIGURA 3.4 Recta precio-cantidad.

Este ejemplo muestra cómo puede interpretarse la pendiente.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

##### RELACIÓN PRECIO-CANTIDAD

Un doctor compró un automóvil nuevo en el año 2001 por \$32 000. En el 2004 lo vendió a un amigo en \$26 000. Dibuje una recta que muestre la relación entre el precio de venta y el año en que se vendió. Determine e interprete la pendiente.

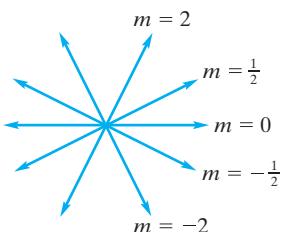
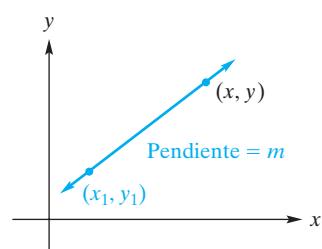


FIGURA 3.5 Pendientes de rectas.

FIGURA 3.6 Recta que pasa por  $(x_1, y_1)$  con pendiente  $m$ .

#### EJEMPLO 1 Relación precio-cantidad

La recta de la figura 3.4 muestra la relación entre el precio  $p$  de un artículo (en dólares) y la cantidad  $q$  de artículos (en miles) que los consumidores comprarán a ese precio. Encuentre e interprete la pendiente.

**Solución:** En la fórmula de la pendiente (1), se reemplaza  $x$  por  $q$  y  $y$  por  $p$ . Puede seleccionarse cualquier punto de la figura 3.4 como  $(q_1, p_1)$ . Si  $(2, 4) = (q_1, p_1)$  y  $(8, 1) = (q_2, p_2)$ , se tiene que

$$m = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} = \frac{1 - 4}{8 - 2} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

La pendiente es negativa,  $-\frac{1}{2}$ . Esto significa que por cada unidad que aumente la cantidad (un millar de artículos) corresponde una **disminución** de  $\frac{1}{2}$  (dólar por artículo). Debido a esta disminución, la recta **desciende** de izquierda a derecha.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

Pendiente cero:	recta horizontal
Pendiente indefinida:	recta vertical
Pendiente positiva:	recta que sube de izquierda a derecha
Pendiente negativa:	recta que desciende de izquierda a derecha

En resumen, la orientación de una recta puede caracterizarse por su pendiente:

Entre más cercana a 0 es la pendiente, la recta está más cerca de ser horizontal. Entre mayor valor absoluto tenga la pendiente, la recta estará más cerca de ser vertical. Es necesario remarcar que dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o ambas son verticales.

#### Ecuaciones de rectas

Si se conocen un punto y la pendiente de una recta, es posible encontrar una ecuación cuya gráfica represente dicha recta. Suponga que la recta  $L$  tiene pendiente  $m$  y pasa a través del punto  $(x_1, y_1)$ . Si  $(x, y)$  es *cualquier* otro punto sobre  $L$  (vea la figura 3.6), puede encontrarse una relación algebraica entre  $x$  y  $y$ . Si se utiliza la fórmula de la pendiente con los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x, y)$ , se obtiene

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \quad y - y_1 = m(x - x_1) \quad (2)$$

Todo punto de  $L$  satisface la ecuación (2). También es cierto que todo punto que satisface la ecuación (2) debe pertenecer a  $L$ . Por lo tanto, la ecuación (2) es una ecuación para  $L$ , y se le da un nombre especial:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

es la **forma punto-pendiente** de una ecuación de la recta que pasa por  $(x_1, y_1)$  y tiene pendiente  $m$ .

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2****FORMA PUNTO-PENDIENTE**

La nueva licenciatura de matemáticas aplicadas de una universidad ha aumentado su matrícula en 14 estudiantes por año, durante los últimos cinco años. Si la carrera tenía matriculados 50 estudiantes en su tercer año, ¿cuál es una ecuación para el número de estudiantes  $S$  inscritos en la licenciatura como una función del número de años  $T$  desde su inicio?

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3****DETERMINACIÓN DE UNA RECTA A PARTIR DE DOS PUNTOS**

Determine una ecuación de la recta que pasa a través de los puntos dados. Una temperatura de  $41^{\circ}\text{F}$  es equivalente a  $5^{\circ}\text{C}$  y una temperatura de  $77^{\circ}\text{F}$  es equivalente a  $25^{\circ}\text{C}$ .

Al seleccionar  $(4, -2)$  como  $(x_1, y_1)$  se obtiene el mismo resultado.

**EJEMPLO 2 Forma punto-pendiente**

Determine una ecuación de la recta que tiene pendiente 2 y pasa por el punto  $(1, -3)$ .

**Solución:** Al utilizar una forma punto-pendiente con  $m = 2$  y  $(x_1, y_1) = (1, -3)$ , se obtiene

$$\begin{aligned}y - y_1 &= m(x - x_1) \\y - (-3) &= 2(x - 1) \\y + 3 &= 2x - 2\end{aligned}$$

que puede reescribirse como

$$2x - y - 5 = 0$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

Se puede encontrar con facilidad una ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, como lo muestra el ejemplo 3.

**EJEMPLO 3 Determinación de una recta a partir de dos puntos**

Encuentre una ecuación de la recta que pasa por  $(-3, 8)$  y  $(4, -2)$ .

**Solución:**

**Estrategia** Primero se determinará la pendiente de la recta a partir de los puntos dados. Después se sustituirá la pendiente y uno de los puntos en la forma punto-pendiente.

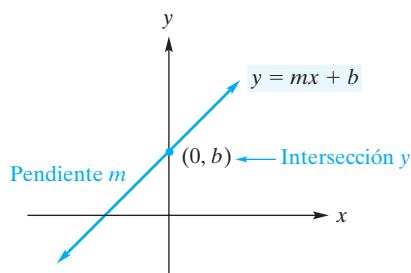
La recta tiene pendiente

$$m = \frac{-2 - 8}{4 - (-3)} = -\frac{10}{7}$$

Al usar una forma punto-pendiente con  $(-3, 8)$  como  $(x_1, y_1)$ , se obtiene

$$\begin{aligned}y - 8 &= -\frac{10}{7}[x - (-3)] \\y - 8 &= -\frac{10}{7}(x + 3) \\7y - 56 &= -10x - 30 \\10x + 7y - 26 &= 0\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13



**FIGURA 3.7** Recta con pendiente  $m$  e intersección y igual a  $b$ .

Recuerde que un punto  $(0, b)$  donde una gráfica interseca al eje y se llama una intersección y (o intersección vertical) (vea la figura 3.7). Si se conocen la pendiente  $m$  y la intersección y,  $b$ , de una recta, una ecuación para la recta es [mediante el uso de una forma punto-pendiente con  $(x_1, y_1) = (0, b)$ ]

$$y - b = m(x - 0)$$

Al resolver para  $y$  se obtiene  $y = mx + b$ , llamada la *forma pendiente-intersección* de una ecuación de la recta:

$$y = mx + b$$

es la **forma pendiente-intersección** de una ecuación de la recta con pendiente  $m$  e intersección y igual a  $b$ .

**EJEMPLO 4 Forma pendiente-ordenada al origen (intersección)**

Encuentre una ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y igual a  $-4$ .

**Solución:** Al utilizar la forma pendiente-intersección  $y = mx + b$  donde  $m = 3$  y  $b = -4$ , se obtiene

$$\begin{aligned}y &= 3x + (-4) \\y &= 3x - 4\end{aligned}$$

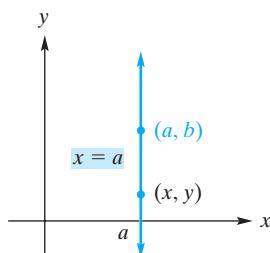
AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4****DETERMINACIÓN DE LA PENDIENTE E INTERSECCIÓN CON EL EJE Y DE UNA RECTA**

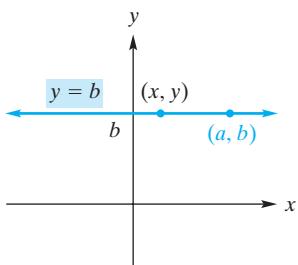
Una fórmula para obtener la dosis recomendada (en miligramos) de medicamento para un niño de  $t$  años de edad es

$$y = \frac{1}{24}(t + 1)a$$

donde  $a$  es la dosis para adultos. Un medicamento contra el dolor que no requiere prescripción médica tiene  $a = 1000$ . Determine la pendiente y la intersección  $y$  de esta ecuación.



**FIGURA 3.8** Recta vertical que pasa por  $(a, b)$ .



**FIGURA 3.9** Recta horizontal que pasa por  $(a, b)$ .

**ADVERTENCIA**

No confunda las formas de las ecuaciones de las rectas horizontales y verticales. Recuerde cuál tiene la forma  $x = \text{constante}$  y cuál de ellas tiene la forma  $y = \text{constante}$ .

**EJEMPLO 5 Determinación de la pendiente e intersección con el eje y de una recta**

Determine la pendiente y la intersección  $y$  de la recta con ecuación  $y = 5(3 - 2x)$ .

**Solución:**

**Estrategia** Se reescribirá la ecuación de modo que tenga la forma pendiente-intersección  $y = mx + b$ . Entonces, la pendiente es el coeficiente de  $x$  y la intersección  $y$  es el término constante.

Se tiene

$$y = 5(3 - 2x)$$

$$y = 15 - 10x$$

$$y = -10x + 15$$

Por lo tanto,  $m = -10$  y  $b = 15$ , de modo que la pendiente es  $-10$  y la intersección  $y$  es  $15$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25



Si una recta *vertical* pasa por  $(a, b)$  (vea la figura 3.8), entonces cualquier otro punto  $(x, y)$  pertenece a la recta si y sólo si  $x = a$ . La coordenada  $y$  puede tener cualquier valor. Por ende, una ecuación de la recta es  $x = a$ . En forma similar, una ecuación de la recta *horizontal* que pasa por  $(a, b)$  es  $y = b$  (vea la figura 3.9). Aquí la coordenada  $x$  puede tener cualquier valor.

**EJEMPLO 6 Ecuaciones de rectas horizontales y verticales**

- Una ecuación de la recta vertical que pasa por  $(-2, 3)$  es  $x = -2$ . Una ecuación de la recta horizontal que pasa por  $(-2, 3)$  es  $y = 3$ .
- Los ejes  $x$  y  $y$  son rectas horizontal y vertical, respectivamente. Como  $(0, 0)$  pertenece a ambos ejes, una ecuación del eje  $x$  es  $y = 0$  y una del eje  $y$  es  $x = 0$ .

AHORA RESUELVA LOS PROBLEMAS 21 Y 23



A partir del análisis previo puede demostrarse que toda línea recta es la gráfica de una ecuación de la forma  $Ax + By + C = 0$ , donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes, y ni  $A$  ni  $B$  son simultáneamente igual a cero. A ésta se le llama la **ecuación lineal general** (o **ecuación de primer grado**) **en las variables  $x$  y  $y$** , y se dice que  $x$  y  $y$  están **relacionadas linealmente**. Por ejemplo, una ecuación lineal general para  $y = 7x - 2$  es  $(-7)x + (1)y + (2) = 0$ . Y viceversa, la gráfica de una ecuación lineal general es una recta. En la tabla 3.1 se presentan las diferentes formas de ecuaciones para rectas.

**TABLA 3.1** Formas de ecuaciones de rectas

Forma punto-pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Forma pendiente-intersección	$y = mx + b$
Forma lineal general	$Ax + By + C = 0$
Recta vertical	$x = a$
Recta horizontal	$y = b$

El ejemplo 3 sugiere que podría añadirse otro renglón a la tabla. Para el caso en el que se sabe que los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  son puntos sobre una recta, entonces la pendiente de esa recta es  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  y podría decirse que  $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$  es la **forma de dos puntos** para una ecuación de una recta que pasa por los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . En gran medida, la decisión entre memorizar muchas fórmulas o sólo unos cuantos principios para la resolución de problemas es una cuestión de gusto.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5****CONVERSIÓN ENTRE FORMAS DE ECUACIONES DE RECTAS**

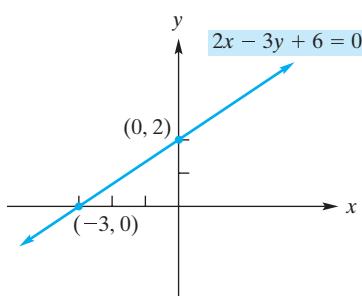
Determine una forma lineal general de la ecuación de conversión Fahrenheit-Celsius cuya forma pendiente-intersección es  $F = \frac{9}{5}C + 32$ .

**ADVERTENCIA**

Esto ilustra que la forma lineal general de una recta no es única.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6****GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN LINEAL GENERAL**

Haga un bosquejo de la gráfica de la ecuación de conversión Fahrenheit-Celsius que encontró en la sección Principios en práctica 5. ¿Cómo puede usar esta gráfica para convertir una temperatura expresada en Celsius a Fahrenheit?



**FIGURA 3.10** Gráfica de  $2x - 3y + 6 = 0$ .

**TECNOLOGÍA**

Para graficar la ecuación del ejemplo 8 con una calculadora graficadora, primero se expresa  $y$  en términos de  $x$ :

$$2x - 3y + 6 = 0$$

$$3y = 2x + 6$$

$$y = \frac{1}{3}(2x + 6)$$

En esencia,  $y$  se expresa como una función de  $x$ ; la gráfica se muestra en la figura 3.11.

**EJEMPLO 7 Conversión entre formas de ecuaciones de rectas**

- a. Encuentre una forma lineal general de la recta cuya forma pendiente-intersección es

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

**Solución:** Si se determina que un lado de la ecuación sea igual a 0, se tiene

$$\frac{2}{3}x + y - 4 = 0$$

que es la forma lineal general con  $A = \frac{2}{3}$ ,  $B = 1$  y  $C = -4$ . Una forma alternativa puede obtenerse al eliminar las fracciones:

$$2x + 3y - 12 = 0$$

- b. Encuentre la forma pendiente-intersección de la recta que tiene una forma lineal general  $3x + 4y - 2 = 0$ .

**Solución:** Se desea la forma  $y = mx + b$ , de modo que se resolverá la ecuación dada para  $y$ . Se tiene

$$3x + 4y - 2 = 0$$

$$4y = -3x + 2$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

que es la forma pendiente-intersección. Note que la recta tiene pendiente de  $-\frac{3}{4}$  e intersección  $y$  igual a  $\frac{1}{2}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37

**EJEMPLO 8 Gráfica de una ecuación lineal general**

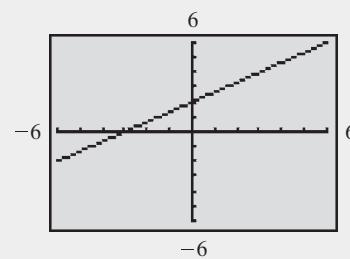
Haga el bosquejo de la gráfica  $2x - 3y + 6 = 0$ .

**Solución:**

**Estrategia** Como ésta es una ecuación lineal general, su gráfica es una línea recta. Por lo tanto, sólo es necesario determinar dos puntos diferentes para poder hacer el bosquejo. Se encontrarán las intersecciones con los ejes coordenados.

Si  $x = 0$ , entonces  $-3y + 6 = 0$ , de modo que la intersección  $y$  es 2. Si  $y = 0$ , entonces  $2x + 6 = 0$ , de manera que la intersección  $x$  es -3. Ahora es posible dibujar la recta que pasa por  $(0, 2)$  y  $(-3, 0)$ . (Vea la figura 3.10.)

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27



**FIGURA 3.11** Gráfica en calculadora de  $2x - 3y + 6 = 0$ .

### Rectas paralelas y perpendiculares

Como se estableció previamente, existe una regla para rectas paralelas:

**Rectas paralelas** *Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o si ambas son verticales.*

De aquí que cualquier recta sea paralela a sí misma.

También existe una regla para rectas perpendiculares. Vea otra vez la figura 3.5 y observe que la recta con pendiente  $-\frac{1}{2}$  es perpendicular a la recta con pendiente 2. El hecho de que la pendiente de cada una de ellas sea el recíproco negativo de la pendiente de la otra recta, no es coincidencia, como lo establece la siguiente regla.

**Rectas perpendiculares** *Dos rectas con pendientes  $m_1$  y  $m_2$  son perpendiculares entre sí, si y sólo si*

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

*Aún más, toda recta horizontal y toda vertical son perpendiculares entre sí.*

En lugar de limitarse a recordar esta ecuación para la condición de perpendicularidad, se recomienda observar la razón por la que tiene sentido. Para que dos rectas sean perpendiculares, cuando ninguna de ellas es vertical, necesariamente una se elevará de izquierda a derecha mientras que la otra descenderá de izquierda a derecha. Así que las pendientes deben tener signos diferentes. Además, si una está muy inclinada, entonces la otra será relativamente plana, lo cual sugiere una relación como la proporcionada por los recíprocos.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7

##### RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Muestre que un triángulo con vértices en  $A(0, 0)$ ,  $B(6, 0)$  y  $C(7, 7)$  no es un triángulo rectángulo.

#### EJEMPLO 9 Rectas paralelas y perpendiculares

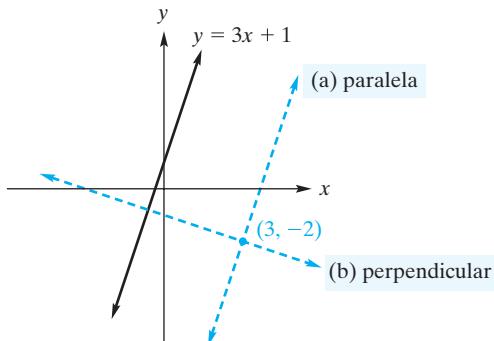
En la figura 3.12 se muestran dos rectas que pasan por  $(3, -2)$ . Una es paralela y la otra es perpendicular a la recta  $y = 3x + 1$ . Determine las ecuaciones de estas rectas.

**Solución:** La pendiente de  $y = 3x + 1$  es 3. Por tanto, la recta que pasa por  $(3, -2)$ , que es paralela a  $y = 3x + 1$ , también tiene pendiente 3. Al utilizar la forma punto-pendiente, se obtiene

$$y - (-2) = 3(x - 3)$$

$$y + 2 = 3x - 9$$

$$y = 3x - 11$$



**FIGURA 3.12** Rectas paralela y perpendicular a  $y = 3x + 1$  (ejemplo 9).

La pendiente de la recta perpendicular a  $y = 3x + 1$  debe ser  $-\frac{1}{3}$  (el recíproco negativo de 3). Mediante la forma punto-pendiente, se obtiene

$$\begin{aligned}y - (-2) &= -\frac{1}{3}(x - 3) \\y + 2 &= -\frac{1}{3}x + 1 \\y &= -\frac{1}{3}x - 1\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 55 

## Problemas 3.1

En los problemas 1 a 8, encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

- |                        |                       |
|------------------------|-----------------------|
| 1. $(4, 1), (7, 10)$   | 2. $(-2, 10), (5, 3)$ |
| *3. $(6, -2), (8, -3)$ | 4. $(2, -4), (3, -4)$ |
| 5. $(5, 3), (5, -8)$   | 6. $(0, -6), (3, 0)$  |
| 7. $(5, -2), (4, -2)$  | 8. $(1, -7), (9, 0)$  |

En los problemas 9 a 24, encuentre una ecuación lineal general ( $Ax + By + C = 0$ ) de la recta que tiene las propiedades indicadas, y haga el bosquejo de cada recta.

- \*9. Pasa por  $(-1, 7)$  y tiene pendiente  $-5$
- 10. Pasa por el origen y tiene pendiente  $75$
- 11. Pasa por  $(-2, 5)$  y tiene pendiente  $-\frac{1}{4}$
- 12. Pasa por  $(-\frac{5}{2}, 5)$  y tiene pendiente  $\frac{1}{3}$
- \*13. Pasa por  $(-6, 1)$  y  $(1, 4)$
- 14. Pasa por  $(5, 2)$  y  $(6, -4)$
- 15. Pasa por  $(-3, -4)$  y  $(-2, -8)$
- 16. Pasa por  $(0, 0)$  y  $(2, 3)$
- \*17. Tiene pendiente  $2$  y su intersección  $y$  es  $4$
- 18. Tiene pendiente  $5$  y su intersección  $y$  es  $-7$
- 19. Tiene pendiente  $-\frac{1}{2}$  y su intersección  $y$  es  $-3$
- 20. Tiene pendiente  $0$  y su intersección  $y$  es  $-\frac{1}{2}$
- \*21. Es horizontal y pasa por  $(-5, -3)$
- 22. Es vertical y pasa por  $(-1, -1)$
- \*23. Pasa por  $(2, -3)$  y es vertical
- 24. Pasa por el origen y es horizontal

En los problemas 25 a 34 encuentre, si es posible, la pendiente y la intersección y de la recta determinada por la ecuación, y haga el bosquejo de la gráfica.

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| *25. $y = 4x - 6$      | 26. $x - 2 = 6$        |
| *27. $3x + 5y - 9 = 0$ | 28. $y + 4 = 7$        |
| 29. $x = -5$           | 30. $x - 9 = 5y + 3$   |
| 31. $y = 3x$           | 32. $y - 7 = 3(x - 4)$ |
| 33. $y = 3$            | 34. $6y - 24 = 0$      |

En los problemas 35 a 40 encuentre una forma lineal general y la forma pendiente-intersección de la ecuación dada.

- |                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| 35. $2x = 5 - 3y$ | 36. $3x + 2y = 6$ |
|-------------------|-------------------|

\*37.  $4x + 9y - 5 = 0$       38.  $3(x - 4) - 7(y + 1) = 2$

39.  $-\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -4\frac{3}{4}$       40.  $y = \frac{1}{300}x + 8$

En los problemas 41 a 50 determine si las rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

- 41.  $y = 7x + 2$ ,  $y = 7x - 3$
- 42.  $y = 4x + 3$ ,  $y = 5 + 4x$
- 43.  $y = 5x + 2$ ,  $-5x + y - 3 = 0$
- 44.  $y = x$ ,  $y = -x$
- 45.  $x + 3y + 5 = 0$ ,  $y = -3x$
- 46.  $x + 3y = 0$ ,  $x + 6y - 4 = 0$
- 47.  $y = 3$ ,  $x = -\frac{1}{3}$
- 48.  $x = 3$ ,  $x = -3$
- 49.  $3x + y = 4$ ,  $x - 3y + 1 = 0$
- 50.  $x - 2 = 3$ ,  $y = 2$

En los problemas 51 a 60 encuentre una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas. Si es posible, dé la respuesta en la forma pendiente-intersección.

- 51. Pasa por  $(1, 1)$  y es paralela a  $y = -\frac{x}{4} - 2$
- 52. Pasa por  $(2, -8)$  y es paralela a  $x = -4$
- 53. Pasa por  $(2, 1)$  y es paralela a  $y = 2$
- 54. Pasa por  $(3, -4)$  y es paralela a  $y = 3 + 2x$
- \*55. Es perpendicular a  $y = 3x - 5$  y pasa por  $(3, 4)$
- 56. Es perpendicular a  $y = -4$  y pasa por  $(1, 1)$
- 57. Pasa por  $(5, 2)$  y es perpendicular a  $y = -3$
- 58. Pasa por  $(4, -5)$  y es perpendicular a la recta  $3y = -\frac{2x}{5} + 3$
- 59. Pasa por  $(-7, -5)$  y es paralela a la recta  $2x + 3y + 6 = 0$
- 60. Pasa por  $(-4, 10)$  y es paralela al eje  $y$
- 61. Una recta pasa por  $(1, 2)$  y por  $(-3, 8)$ . Determine el punto en la recta que tiene coordenada  $x$  de 5.
- 62. Una recta tiene pendiente 3 e interseca al eje  $y$  en  $(0, 1)$ . ¿El punto  $(-1, -2)$  pertenece a la recta?
- 63. **Acciones** En 1996, las acciones de una compañía de hardware computacional se cotizaron en \$37 cada una. Sin embargo, en 2006 la compañía empezó a tener problemas y el precio de las acciones cayó a \$8. Dibuja una recta que muestre la relación entre el precio por acción y el año en que se comerció para el periodo 1996-2006, en donde los años se ubiquen en el

eje  $x$  y el precio en el eje  $y$ . Encuentre una interpretación para la pendiente.

*En los problemas 64 y 65 determine una ecuación de la recta que describa la información siguiente.*

- 64. Cuadrangulares** En una temporada, un jugador de las ligas mayores de béisbol anotó 14 cuadrangulares al final del tercer mes y 20 al final del quinto mes.
- 65. Negocios** La propietaria de una salchichonería inicia su negocio con una deuda de \$100 000. Después de cinco años de operación, ha acumulado una utilidad de \$40 000.
- 66. Fecha de parto** Puede estimarse la longitud,  $L$ , de un feto humano de más de 12 semanas por medio de la fórmula  $L = 1.53t - 6.7$ , donde  $L$  está en centímetros y  $t$  en semanas desde la concepción. Un obstetra utiliza la longitud del feto, medido por medio de ultrasonido, para determinar la edad aproximada del feto y establecer una fecha de parto para la madre. La fórmula debe reescribirse para tener como resultado una edad,  $t$ , dada la longitud fetal,  $L$ . Determine la pendiente y la intersección con el eje  $L$  de la ecuación.
- 67. Lanzamiento de disco** Un modelo matemático puede aproximar la distancia con que se ganó en el lanzamiento de disco en los Juegos Olímpicos mediante la fórmula  $d = 184 + t$ , donde  $d$  está en pies y  $t = 0$  corresponde al año 1948. Determine una forma lineal general de esta ecuación.
- 68. Mapa del campus** Un mapa de coordenadas de un campus universitario indica las coordenadas  $(x, y)$  de tres edificios importantes como sigue: centro de cómputo,  $(3.5, -1.5)$ ; laboratorio de ingeniería,  $(0.5, 0.5)$ , y biblioteca  $(-1, -2.5)$ . Encuentre las ecuaciones (en la forma pendiente-intersección) de las trayectorias en línea recta que conectan (a) el laboratorio de ingeniería con el centro de cómputo, y (b) el laboratorio de ingeniería con la biblioteca. ¿Son estas dos trayectorias perpendiculares entre sí?
- 69. Geometría** Muestre que los puntos  $A(0, 0)$ ,  $B(0, 4)$ ,  $C(2, 3)$  y  $D(2, 7)$  son los vértices de un paralelogramo (los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos).

- 70. Ángulo de aproximación** Una avioneta aterriza en un aeropuerto con un ángulo de aproximación de 45 grados, o pendiente de  $-1$ . Inicia su descenso cuando tiene una elevación de 3600 pies. Determine la ecuación que describe la

relación entre la altitud de la aeronave y la distancia recorrida, suponiendo que el ángulo de aproximación comienza en la distancia 0. Haga una gráfica de su ecuación en una calculadora graficadora. Si el aeropuerto está a 3800 pies desde donde el aeroplano inicia su aterrizaje, ¿qué le dice la gráfica acerca de la aproximación?

- 71. Ecuación de costo** El costo diario promedio,  $C$ , de un cuarto en un hospital de la ciudad se elevó \$59.82 por año, durante la década de 1990 a 2000. Si el costo promedio en 1996 fue \$1128.50, ¿cuál es una ecuación que describe el costo promedio durante esta década como una función del número de años,  $T$ , desde 1990?
- 72. Ecuación de ingreso** Un pequeño negocio realiza sus pronósticos de ingreso de acuerdo con el método de la línea recta con una pendiente de \$50 000 por año. En su quinto año, el negocio tuvo ingresos por \$330 000. Encuentre una ecuación que describa la relación entre los ingresos,  $R$ , y el número de años,  $T$ , desde la apertura del negocio.
- 73.** Grafique  $y = -0.9x + 7.3$  y verifique que la intersección y sea 7.3.
- 74.** Grafique las rectas cuyas ecuaciones son
- $$y = 1.5x + 1$$
- $$y = 1.5x - 1$$
- $y$
- $$y = 1.5x + 2.5$$

¿Qué observa en las orientaciones de estas rectas? ¿Por qué este resultado es de esperarse, a partir de las ecuaciones de las rectas?

- 75.** Grafique la recta  $y = 7.1x + 5.4$ . Determine las coordenadas de cualesquier dos puntos de la recta y utilícelos para estimar la pendiente. ¿Cuál es la pendiente real de la recta?
- 76.** Con el uso de la pantalla estándar y el mismo rectángulo de visualización, grafique las rectas con ecuaciones

$$0.1875x - 0.3y + 0.94 = 0$$

$y$

$$0.32x + 0.2y + 1.01 = 0$$

Ahora, cambie a una pantalla cuadrada (por ejemplo, en la calculadora TI-83, utilice ZOOM, ZSquare). Observe que las rectas aparecen ser perpendiculares entre sí. Pruebe que esto es cierto.

## OBJETIVO

Desarrollar la noción de curvas de demanda y oferta, e introducir las funciones lineales.

## 3.2 Aplicaciones y funciones lineales

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### NIVELES DE PRODUCCIÓN

Un fabricante de artículos deportivos asigna 1000 unidades de tiempo por día para fabricar esquís y botas para esquiar. Si la fabricación de un esquí toma 8 unidades de tiempo y la fabricación de una bota toma 14, determine una ecuación que describa todos los posibles niveles de producción de los dos artículos.

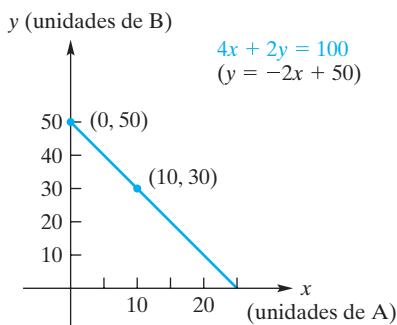
#### EJEMPLO 1 Niveles de producción

Suponga que un fabricante utiliza 100 libras de material para elaborar los productos A y B, que requieren de 4 y 2 libras de material por unidad, respectivamente. Si  $x$  y  $y$  denotan el número de unidades producidas de A y B, respectivamente, entonces todos los niveles de producción están dados por las combinaciones de  $x$  y  $y$  que satisfacen la ecuación

$$4x + 2y = 100 \quad \text{donde } x, y \geq 0$$

Por lo tanto, los niveles de producción de A y B están relacionados linealmente. Al despejar  $y$  se obtiene

$$y = -2x + 50 \quad (\text{forma pendiente-intersección})$$



**FIGURA 3.13** Niveles de producción relacionados linealmente.



### ADVERTENCIA

Usualmente, una curva de demanda desciende de izquierda a derecha y una curva de oferta asciende de izquierda a derecha. Sin embargo, existen excepciones. Por ejemplo, podría representarse la demanda de insulina por medio de una recta vertical, puesto que esta demanda permanece constante sin importar el precio.

de manera que la pendiente es  $-2$ . La pendiente refleja la tasa de cambio del nivel de producción de B con respecto al de A. Por ejemplo, si se produce una unidad adicional de A, se requerirán 4 libras más de material, de lo que resultan  $\frac{4}{2} = 2$  unidades *menos* de B. De acuerdo con lo anterior, cuando  $x$  aumenta en 1 unidad, el valor correspondiente de  $y$  disminuye en 2 unidades. Para bosquejar la gráfica de  $y = -2x + 50$ , puede utilizarse la intersección con el eje  $y$  ( $0, 50$ ) y el hecho de que cuando  $x = 10$ ,  $y = 30$ . (Vea la figura 3.13).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

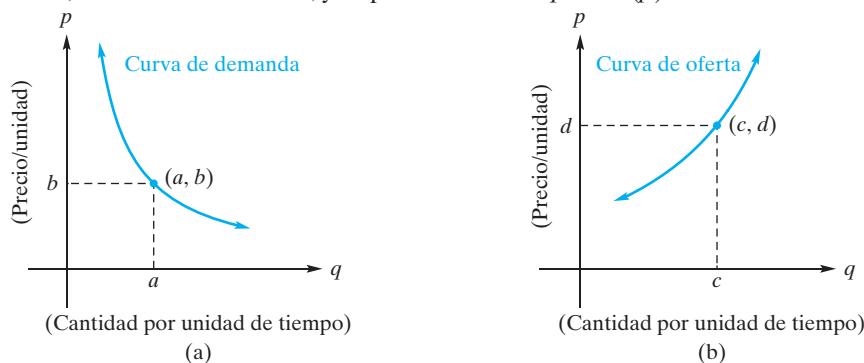


### Curvas de demanda y de oferta

Para cada nivel de precio de un producto existe una cantidad correspondiente, de ese producto, que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) durante cierto periodo. Por lo general, a mayor precio la cantidad demandada es menor; cuando el precio baja la cantidad demandada aumenta. Si el precio por unidad está dado por  $p$ , y la cantidad correspondiente (en unidades) está dada por  $q$ , entonces una ecuación que relaciona  $p$  y  $q$  se llama **ecuación de demanda**. Su gráfica es la **curva de demanda**. En la figura 3.14(a) se muestra dicha curva. De acuerdo con la práctica de la mayoría de los economistas, el eje horizontal es el eje  $q$  y el vertical es el eje  $p$ . Aquí se supondrá que el precio por unidad está dado en dólares y el periodo es una semana. Así, el punto  $(a, b)$  en la figura 3.14(a) indica que a un precio de  $b$  dólares por unidad, los consumidores demandarán  $a$  unidades por semana. Como ni los precios ni las cantidades negativas tienen sentido, tanto  $a$  como  $b$  deben ser no negativos. Para la mayoría de los productos, un incremento en la cantidad demandada corresponde a una disminución en el precio. Así que, por lo general, una curva de demanda desciende de izquierda a derecha, como en la figura 3.14(a).

Como respuesta a los diferentes precios, existe una cantidad correspondiente de artículos que los *productores* están dispuestos a proveer al mercado durante algún periodo. Por lo general, a mayor precio por unidad es mayor la cantidad que los productores están dispuestos a proveer; cuando el precio disminuye también lo hace la cantidad suministrada. Si  $p$  denota el precio por unidad y  $q$  la cantidad correspondiente, entonces una ecuación que relaciona  $p$  y  $q$  se llama **ecuación de oferta**, y su gráfica es una **curva de oferta**. La figura 3.14(b) muestra una curva de oferta. Si  $p$  está en dólares y el periodo es una semana, entonces el punto  $(c, d)$  indica que a un precio de  $d$  dólares cada una, los productores proveerán  $c$  unidades por semana. Al igual que antes,  $c$  y  $d$  son no negativos. Una curva de oferta casi siempre asciende de izquierda a derecha, como en la figura 3.14(b). Esto indica que un fabricante suministrará una mayor cantidad del producto a precios mayores.

Observe que una función cuya gráfica desciende de izquierda a derecha o se eleva de izquierda a derecha *a lo largo de todo su dominio* pasará la prueba de la recta horizontal de la sección 2.5. Puede afirmarse que tanto la curva de demanda como la curva de oferta de la figura 3.15 intersecan cuando mucho una sola vez a cualquier recta horizontal. Así, si la curva de demanda es la gráfica de una función  $p = D(q)$ , entonces  $D$  tendrá una inversa y es posible despejar sólo  $q$  y así obtener  $q = D^{-1}(p)$ . De manera similar, si la curva de oferta es la gráfica de una función  $p = S(q)$ , entonces  $S$  también es uno a uno, tiene una inversa  $S^{-1}$ , y es posible escribir  $q = S^{-1}(p)$ .



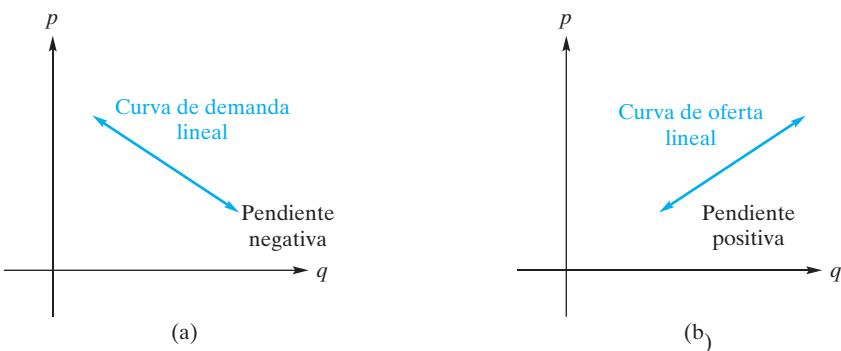


FIGURA 3.15 Curvas de demanda y oferta lineales.

Ahora centraremos la atención en las curvas de oferta y de demanda que son rectas (vea la figura 3.15). Se les denomina curvas de oferta *lineal* y de demanda *lineal*. Tienen ecuaciones en las que  $p$  y  $q$  se relacionan de manera lineal. Debido a que una curva de demanda por lo general desciende de izquierda a derecha, tiene pendiente negativa [vea la figura 3.15(a)]. Sin embargo, la pendiente de una curva de oferta lineal es positiva, porque la curva asciende de izquierda a derecha [vea la figura 3.15(b)].

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

### DETERMINACIÓN DE UNA ECUACIÓN DE DEMANDA

La demanda semanal de televisores de 26 pulgadas es 1200 unidades cuando el precio es de \$575 cada uno y 800 unidades cuando el precio es de \$725 por televisor. Determine la ecuación de demanda para los televisores, suponga un comportamiento lineal.

### EJEMPLO 2 Determinación de una ecuación de demanda

*Imagine que la demanda por semana de un producto es de 100 unidades, cuando el precio es de \$58 por unidad, y de 200 a un precio de \$51 cada una. Determine la ecuación de demanda, suponga que es lineal.*

#### Solución:

**Estrategia** Dado que la ecuación de demanda es lineal, la curva de demanda debe ser una recta. Se sabe que la cantidad  $q$  y el precio  $p$  se relacionan linealmente de modo que  $p = 58$  cuando  $q = 100$  y  $p = 51$  cuando  $q = 200$ . Por lo que los datos dados pueden representarse en un plano de coordenadas  $q, p$  [vea la figura 3.15(a)] por los puntos  $(100, 58)$  y  $(200, 51)$ . Con ellos es posible encontrar una ecuación de la recta —esto es, la ecuación de demanda.

La pendiente de la recta que pasa por  $(100, 58)$  y  $(200, 51)$  es

$$m = \frac{51 - 58}{200 - 100} = -\frac{7}{100}$$

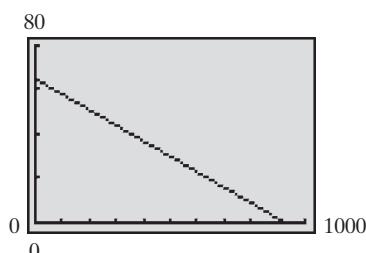
Una ecuación de la recta (forma punto-pendiente) es

$$\begin{aligned} p - p_1 &= m(q - q_1) \\ p - 58 &= -\frac{7}{100}(q - 100) \end{aligned}$$

Al simplificar, se obtiene la ecuación de demanda

$$p = -\frac{7}{100}q + 65 \quad (1)$$

Por costumbre, una ecuación de demanda (así como una ecuación de oferta) expresa  $p$  en términos de  $q$ , lo que en realidad define una función de  $q$ . Por ejemplo, la ecuación (1) define  $p$  como una función de  $q$ , y por ello se le llama la *función de demanda* para el producto (vea la figura 3.16).

FIGURA 3.16 Gráfica de la función de demanda  $p = -\frac{7}{100}q + 65$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



### Funciones lineales

En la sección 2.2 se describió una *función lineal* como una función polinomial de grado 1. A continuación se da una definición más explícita.

### DEFINICIÓN

Una función  $f$  es una *función lineal* si y sólo si  $f(x)$  puede escribirse en la forma  $f(x) = ax + b$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes y  $a \neq 0$ .

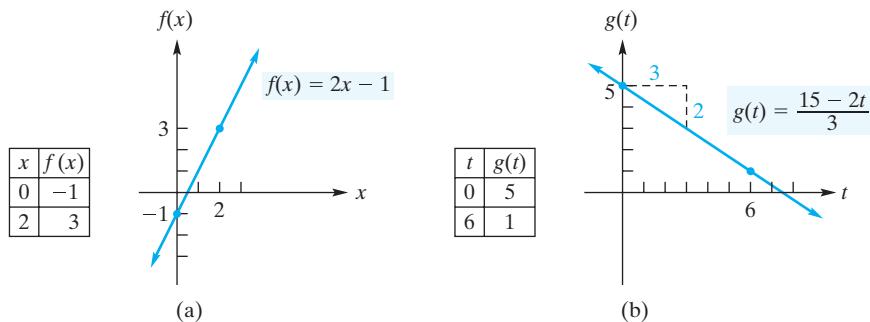


FIGURA 3.17 Gráficas de funciones lineales.

Suponga que  $f(x) = ax + b$  es una función lineal y que  $y = f(x)$ . Entonces  $y = ax + b$ , la cual es la ecuación de una recta con pendiente  $a$  e intersección  $y$  igual a  $b$ . Así, la **gráfica de una función lineal es una recta que no es vertical ni horizontal**. Se dice que la función  $f(x) = ax + b$  tiene pendiente  $a$ .

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

#### GRÁFICAS DE FUNCIONES LINEALES

Una compañía que se dedica a reparar computadoras cobra una cantidad fija por servicio, más una tarifa por hora. Si  $x$  es el número de horas necesarias para un servicio, el costo total se describe mediante la función  $f(x) = 40x + 60$ . Grafique la función después de encontrar y dibujar dos puntos.

### EJEMPLO 3 Gráficas de funciones lineales

- a. Grafique  $f(x) = 2x - 1$ .

**Solución:** Aquí  $f$  es una función lineal (con pendiente 2), de modo que su gráfica es una recta. Como dos puntos determinan una recta, sólo se necesita graficar dos puntos y después dibujar una recta que pase por ellos [vea la figura 3.17(a)]. Observe que uno de los puntos que se han graficado es la intersección con el eje vertical,  $-1$ , que ocurre cuando  $x = 0$ .

- b. Grafique  $g(t) = \frac{15 - 2t}{3}$ .

**Solución:** Observe que  $g$  es una función lineal porque puede expresarse en la forma  $g(t) = at + b$ .

$$g(t) = \frac{15 - 2t}{3} = \frac{15}{3} - \frac{2t}{3} = -\frac{2}{3}t + 5$$

La gráfica de  $g$  se muestra en la figura 3.17(b). Como la pendiente es  $-\frac{2}{3}$ , observe que cuando  $t$  aumenta en 3 unidades,  $g(t)$  disminuye en 2.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

#### DETERMINACIÓN DE UNA FUNCIÓN LINEAL

La altura de los niños entre los 6 y 10 años de edad puede modelarse mediante una función lineal de la edad  $t$  en años. La altura de una niña cambia en 2.3 pulgadas por año, y tiene una estatura de 50.6 pulgadas a los 8 años. Encuentre una función que describa la altura de esta niña a la edad de  $t$  años.

### EJEMPLO 4 Determinación de una función lineal

Suponga que  $f$  es una función lineal con pendiente 2 y  $f(4) = 8$ . Encuentre  $f(x)$ .

**Solución:** Como  $f$  es lineal, tiene la forma  $f(x) = ax + b$ . La pendiente es 2, de modo que  $a = 2$ , y se tiene

$$f(x) = 2x + b \quad (2)$$

Ahora se determinará  $b$ . Como  $f(4) = 8$ , en la ecuación (2) se reemplaza  $x$  por 4 y se despeja  $b$ :

$$f(4) = 2(4) + b$$

$$8 = 8 + b$$

$$0 = b$$

Entonces,  $f(x) = 2x$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5

## DETERMINACIÓN DE UNA FUNCIÓN LINEAL

Es de suponer que un collar antiguo tenga un valor de \$360 después de 3 años y de \$640 luego de 7 años. Determine una función que describa el valor del collar después de  $x$  años.

## EJEMPLO 5 Determinación de una función lineal

*Si  $y = f(x)$  es una función lineal tal que  $f(-2) = 6$  y  $f(1) = -3$ , encuentre  $f(x)$ .*

## Solución:

**Estrategia** Los valores de la función corresponden a puntos sobre la gráfica de  $f$ . Con ellos es posible determinar una ecuación de la recta  $y$ , por lo tanto, de la función lineal.

La condición  $f(-2) = 6$  significa que cuando  $x = -2$ , entonces  $y = 6$ . Por lo tanto,  $(-2, 6)$  pertenece a la gráfica de  $f$ , que es una recta. De manera similar,  $f(1) = -3$  implica que  $(1, -3)$  también pertenece a la recta. Si se establece  $(x_1, y_1) = (-2, 6)$  y  $(x_2, y_2) = (1, -3)$ , la pendiente de la recta está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 6}{1 - (-2)} = \frac{-9}{3} = -3$$

Puede encontrarse una ecuación de la recta mediante el uso de la forma punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 6 = -3[x - (-2)]$$

$$y - 6 = -3x - 6$$

$$y = -3x$$

Como  $y = f(x)$ ,  $f(x) = -3x$ . Por supuesto, se obtiene el mismo resultado si se establece  $(x_1, y_1) = (1, -3)$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



En numerosas investigaciones se recopilan y se grafican los datos en un sistema de coordenadas. Un análisis de los resultados podría indicar una relación funcional entre las variables involucradas. Por ejemplo, los datos pueden ser aproximados por puntos en una recta. Esto indicaría una relación funcional lineal, como en el ejemplo que se presenta a continuación.

## EJEMPLO 6 Dieta para gallinas

*Al probar una dieta experimental para gallinas, se determinó que el peso promedio  $w$  (en gramos) de una gallina fue, según las estadísticas, una función lineal del número de días  $d$  después de que se inició la dieta, donde  $0 \leq d \leq 50$ . Suponga que el peso promedio de una gallina al inicio la dieta fue de 40 gramos, y 25 días después fue de 675 gramos.*

- a. Determine  $w$  como una función lineal de  $d$ .

**Solución:** Como  $w$  es una función lineal de  $d$ , su gráfica es una línea recta. Cuando  $d = 0$  (al inicio de la dieta),  $w = 40$ . Por lo tanto,  $(0, 40)$  pertenece a la gráfica (vea la figura 3.18). De manera similar,  $(25, 675)$  pertenece a la gráfica. Si se establece  $(d_1, w_1) = (0, 40)$  y  $(d_2, w_2) = (25, 675)$ , la pendiente de la recta es

$$m = \frac{w_2 - w_1}{d_2 - d_1} = \frac{675 - 40}{25 - 0} = \frac{635}{25} = \frac{127}{5}$$

Después de usar la forma punto-pendiente, se tiene

$$w - w_1 = m(d - d_1)$$

$$w - 40 = \frac{127}{5}(d - 0)$$

$$w - 40 = \frac{127}{5}d$$

$$w = \frac{127}{5}d + 40$$

que expresa  $w$  como una función lineal de  $d$ .

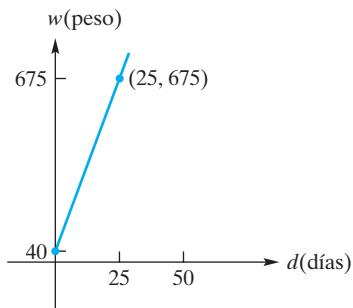


FIGURA 3.18 Función lineal que describe la dieta para gallinas.

- b. Determine el peso promedio de una gallina cuando  $d = 10$ .

**Solución:** Cuando  $d = 10$ ,  $w = \frac{127}{5}(10) + 40 = 254 + 40 = 294$ . Así, el peso promedio de una gallina 10 días después del inicio de la dieta es de 294 gramos.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19 

## Problemas 3.2

En los problemas 1 a 6, determine la pendiente y la intersección con el eje vertical de la función lineal, luego bosqueje la gráfica.

1.  $y = f(x) = -4x$
2.  $y = f(x) = x + 1$
- \*3.  $h(t) = 5t - 7$
4.  $f(s) = 3(5 - s)$
5.  $h(q) = \frac{2 - q}{7}$
6.  $h(q) = 0.5q + 0.25$

En los problemas 7 a 14, determine  $f(x)$ , si  $f$  es una función lineal que tiene las propiedades dadas.

- \*7. pendiente = 4,  $f(2) = 8$
8.  $f(0) = 3$ ,  $f(4) = -5$
- \*9.  $f(1) = 2$ ,  $f(-2) = 8$
10. pendiente =  $-2$ ,  $f(\frac{2}{3}) = -7$
11. pendiente =  $-\frac{2}{3}$ ,  $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3}$
12.  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$
13.  $f(-2) = -1$ ,  $f(-4) = -3$
14. pendiente = 0.01,  $f(0.1) = 0.01$

- \*15. **Ecuación de demanda** Suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de \$12.75 por unidad, y 25 unidades cuando el precio es de \$18.75 cada una. Encuentre la ecuación de la demanda, suponga que es lineal. Determine el precio unitario cuando se demandan 37 unidades.
16. **Ecuación de demanda** La demanda semanal para un CD es de 26 000 unidades cuando el precio es \$12 cada una, y de 10 000 cuando el precio unitario es de \$18. Encuentre una ecuación de demanda para el CD, suponga que es lineal.
17. **Ecuación de oferta** Un fabricante de refrigeradores producirá 3000 unidades cuando el precio sea de \$940 y 2200 unidades cuando el precio sea \$740. Suponga que el precio,  $p$ , y la cantidad producida,  $q$ , están relacionadas de manera lineal. Encuentre la ecuación de oferta.
18. **Ecuación de oferta** Imagine que un fabricante de zapatos colocará en el mercado 50 (miles de pares) cuando el precio es 35 (dólares por par) y 35 cuando el precio es 30. Encuentre la ecuación de oferta, suponga que el precio  $p$  y la cantidad  $q$  se relacionan linealmente.



- \*19. **Ecuación de costo** Suponga que el costo para producir 10 unidades de un producto es \$40 y para 20 unidades es de \$70. Si el costo,  $c$ , se relaciona linealmente con la producción,  $q$ , encuentre una ecuación lineal que relacione  $c$  y  $q$ . Encuentre el costo de producir 35 unidades.
20. **Ecuación de costo** Un anunciante contrata a un impresor y éste le cobra \$79 por 100 copias de un volante y \$88 por 400 copias de otro volante. El impresor cobra un costo fijo, más un cargo adicional por cada copia de volantes de una sola página. Determine una función que describa el costo de un trabajo de impresión, si  $x$  es el número de copias que se hacen.

- \*21. **Tarifas de electricidad** Una compañía de electricidad cobra 12.5 centavos por kilowatt-hora más un cargo base mensual a los clientes residenciales. La factura mensual de un cliente es de \$51.65 por 380 kilowatt-hora. Encuentre una función lineal que describa el monto total por concepto de electricidad, si  $x$  es el número de kilowatt-hora utilizados en un mes.
22. **Terapia con radiación** Un paciente con cáncer recibirá terapias mediante medicamentos y radiación. Cada centímetro cúbico de la droga que será utilizada contiene 210 unidades curativas, y cada minuto de exposición a la radiación proporciona 305 unidades curativas. El paciente requiere 2410 unidades curativas. Si se administran  $d$  centímetros cúbicos de droga y  $r$  minutos de radiación, determine una ecuación que relacione  $d$  y  $r$ . Grafique la ecuación para  $d \geq 0$  y  $r \geq 0$ ; etiquete el eje horizontal como  $d$ .
23. **Depreciación** Suponga que el valor de una bicicleta de montaña disminuye cada año en 10% de su valor original. Si el valor inicial es de \$1800, encuentre una ecuación que exprese el valor  $v$  de la bicicleta  $t$  años después de su compra, donde  $0 \leq t \leq 10$ . Bosqueje la ecuación, seleccione  $t$  como el eje horizontal y  $v$  como el eje vertical. ¿Cuál es la pendiente de la recta resultante? Este método para considerar el valor del equipo se denomina *depreciación lineal*.
24. **Depreciación** Un televisor nuevo se deprecia \$120 por año, y tiene un valor de \$340 después de cuatro años. Encuentre una función que describa su valor, si  $x$  es la edad en años del aparato.
25. **Apreciación** Un nuevo edificio de departamentos se vendió por \$960 000 cinco años después de que se compró. Los propietarios originales calcularon que el edificio se apreciaba \$45 000 por año, mientras ellos fueron los propietarios. Encuentre una función lineal que describa la apreciación del inmueble, si  $x$  es el número de años desde la compra original.
26. **Apreciación** Se espera que una casa que fue comprada en \$245 000 duplique su valor en 15 años. Encuentre una ecuación lineal que describa el valor de la casa después de  $t$  años.
27. **Cargos por reparación** Una compañía que repara copiadoras para negocios, cobra una cantidad fija por servicio, más una tarifa por hora. Si un cliente recibe un cargo por \$159 de un servicio de una hora, y otro cargo por \$287 por un servicio de tres horas, determine una función lineal que describa el precio de un servicio, donde  $x$  es el número de horas.
28. **Longitud de la lana de las ovejas** Las ovejas a las que se les mantiene a altas temperaturas ambientales aumentan su ritmo respiratorio,  $r$  (por minuto), a medida que la longitud de la lana,  $l$  (en centímetros) disminuye.<sup>2</sup> Suponga que ciertas ovejas, cuya lana presenta una longitud de 2 cm, tienen un ritmo respiratorio (promedio) de 160, y que otras ovejas, cuya lana mide 4 cm, tienen un ritmo respiratorio de 125. Suponga que  $r$  y  $l$  se

<sup>2</sup>Adaptado de G. E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physiology*. 2a. ed. (Philadelphia: Lea & Febiger, 1974).

- relacionan linealmente. (a) Encuentre una ecuación que proporcione  $r$  en términos de  $l$ . (b) Encuentre el ritmo respiratorio de una oveja cuya lana tiene una longitud de 1 cm.
- 29. Línea de isocostos** En análisis de producción, una *línea de isocostos* es una recta cuyos puntos representan todas las combinaciones de dos factores de producción que pueden comprarse por el mismo monto. Suponga que un granjero ha asignado \$20 000 para la compra de  $x$  toneladas de fertilizante (que cuesta \$200 por tonelada) y ha destinado  $y$  acres de tierra (cuyo costo es de \$2000 por acre). Encuentre una ecuación de la línea de isocostos que describa las distintas combinaciones que pueden comprarse con \$20 000. Observe que ni  $x$  ni  $y$  pueden ser negativas.
- 30. Línea de isoutilidad** Un fabricante produce los productos  $X$  y  $Y$  para los cuales las ganancias por unidad son de \$4 y \$6, respectivamente. Si se venden  $x$  unidades de  $X$ , y  $y$  unidades de  $Y$ , entonces la ganancia total  $P$  está dada por  $P = 4x + 6y$ , donde  $x, y \geq 0$ . (a) Bosqueje la gráfica de esta ecuación para  $P = 240$ . El resultado se conoce como *línea de isoutilidad*, y sus puntos representan todas las combinaciones de ventas que producen una utilidad de \$240. (b) Determine la pendiente para  $P = 240$ . (c) Si  $P = 600$ , determine la pendiente. (d) ¿Son paralelas las rectas de isoutilidad para los productos  $X$  y  $Y$ ?
- 31. Escala de calificaciones** A fin de poder comparar, un profesor quiere cambiar la escala de calificaciones de un conjunto de exámenes escritos, de manera que la calificación máxima siga siendo 100, pero que el promedio sea 65 en lugar de 56. (a) Encuentre una ecuación lineal que lo logre. [Una pista: Se quiere que 56 se convierta en 65 y 100 permanezca como 100. Considere los puntos (56, 65) y (100, 100), y de manera más general,  $(x, y)$ , donde  $x$  es la calificación anterior y  $y$  es la nueva. Encuentre la pendiente y utilice la forma punto-pendiente. Exprese  $y$  en términos de  $x$ .] (b) Si en la nueva escala 62 es la calificación mínima para acreditar, ¿cuál fue la calificación mínima para acreditar en la escala original?
- 32. Psicología** El resultado del experimento psicológico de Stemberg<sup>3</sup> sobre la recuperación de información es que el tiempo de reacción,  $R$ , de una persona, en milisegundos, de acuerdo con las estadísticas, es una función lineal del tamaño del conjunto de memoria  $N$  de la manera siguiente:

$$R = 38N + 397$$

Bosqueje la gráfica para  $1 \leq N \leq 5$ . ¿Cuál es la pendiente?

- 33. Psicología** En cierto experimento de aprendizaje que requiere repetición y memoria,<sup>4</sup> se estimó que la proporción  $p$  de elementos recordados se relacionaba linealmente con un tiempo de estudio efectivo  $t$  (en segundos), donde  $t$  se ubica entre 5 y 9. Para un tiempo de estudio efectivo de 5 segundos, la proporción de elementos recordados fue de 0.32. Por cada segundo adicional en el tiempo de estudio, la proporción recordada aumentaba en 0.059. (a) Encuentre una ecuación que exprese  $p$  en términos de  $t$ . (b) ¿Qué proporción de elementos se recordaron con 9 segundos de tiempo efectivo de estudio?

- 34. Dieta para cerdos** Tras las pruebas realizadas con una dieta experimental para cerdos, se determinó que el peso (promedio)  $w$  (en kilogramos) de un cerdo, de acuerdo con las estadísticas, era una función lineal del número de días,  $d$ , después de haber iniciado la dieta, donde  $0 \leq d \leq 100$ . Si el peso de un cerdo al inicio del régimen fue de 21 kg, y a partir de entonces ganó 6.3 kg cada 10 días, determine  $w$  como una función de  $d$ , y calcule el peso de un cerdo 55 días después de que inició la dieta.



- 35. Canto de grillos** Los biólogos han descubierto que el número de cantos (sonidos) por minuto que emiten los grillos de cierta especie están relacionados con la temperatura. La relación es casi lineal. A 68°F, los grillos emiten casi 124 cantos (sonidos) por minuto. A 80°F producen 172 por minuto aproximadamente. (a) Encuentre una ecuación que proporcione la temperatura en grados Fahrenheit,  $t$ , en términos del número de cantos,  $c$ , por minuto. (b) Si se cuentan los cantos sólo durante 15 segundos, ¿cómo puede estimarse rápidamente la temperatura?



## OBJETIVO

Hacer bosquejos de paráolas que surgen de funciones cuadráticas.

## 3.3 Funciones cuadráticas

En la sección 2.2 se describió una *función cuadrática* como una función polinomial de grado 2. En otras palabras,

### DEFINICIÓN

Una función  $f$  es una **función cuadrática** si y sólo si  $f(x)$  puede escribirse en la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde  $a, b$  y  $c$  son constantes y  $a \neq 0$ .

Por ejemplo, las funciones  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  y  $F(t) = -3t^2$  son cuadráticas. Sin embargo,  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  no es cuadrática, porque no puede escribirse en la forma  $g(x) = ax^2 + bx + c$ .

<sup>3</sup>G. R. Loftus y E. F. Loftus, *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley & Sons, Inc., 1976).

<sup>4</sup>D. L. Hintzman, "Repetition and Learning", en *The Psychology of Learning*, vol. 10, ed. G. H. Bower (Nueva York: Academic Press, Inc., 1976), p. 77.

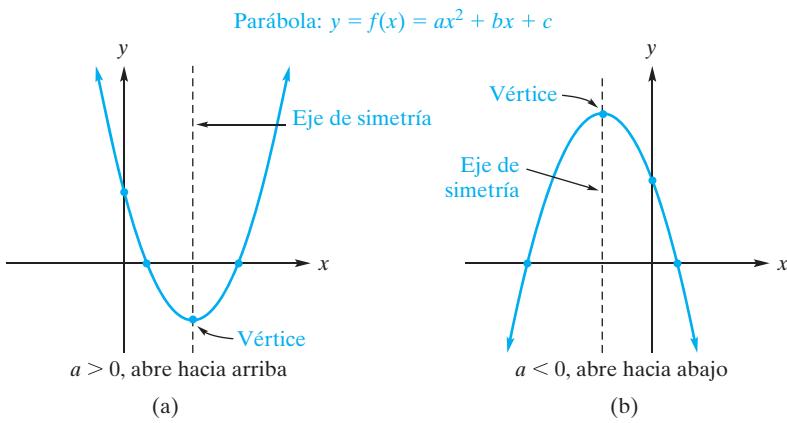


FIGURA 3.19 Paráboles.

La gráfica de la función cuadrática  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  se llama **parábola** y su forma se asemeja a la de las curvas de la figura 3.19. Si  $a > 0$ , la gráfica se extiende hacia arriba de manera indefinida, y se dice que la parábola *abre hacia arriba* [figura 3.19(a)]. Si  $a < 0$ , entonces la parábola *abre hacia abajo* [figura 3.19(b)].

Cada parábola de la figura 3.19 es *simétrica* con respecto a una recta vertical, que se llama el **eje de simetría** de la parábola. Es decir, si se doblara la página a lo largo de una de estas rectas, las dos mitades de la parábola correspondiente coincidirían. El eje (de simetría) *no* es parte de la parábola, pero resulta útil para bosquejarla.

En la figura 3.19 también se muestran puntos con la etiqueta **vértice**, donde el eje corta a la parábola. Si  $a > 0$ , el vértice es el punto “más bajo” de la parábola. Esto significa que  $f(x)$  tiene un valor mínimo en ese punto. Al realizar manipulaciones algebraicas sobre  $ax^2 + bx + c$  (lo que se conoce como *completar el cuadrado*), no sólo puede determinarse este valor mínimo, sino también dónde ocurre. Se tiene

$$f(x) = ax^2 + bx + c = (ax^2 + bx) + c$$

Al sumar y restar  $\frac{b^2}{4a}$  se obtiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \left( ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} \right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

de modo que

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Puesto que  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$  y  $a > 0$ , se sigue que  $f(x)$  tiene un valor mínimo cuando

$x + \frac{b}{2a} = 0$ , esto es, cuando  $x = -\frac{b}{2a}$ . La coordenada  $y$  correspondiente a este valor de

$x$  es  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ . Así, el vértice está dado por

$$\text{vértice} = \left( -\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right)$$

Éste también es el vértice de la parábola que abre hacia abajo ( $a < 0$ ), pero en este caso  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$  es el valor máximo de  $f(x)$ . [Vea la figura 3.19(b).]

Observe que una función cuya gráfica es una parábola no es uno a uno, ya sea en el caso donde la parábola se abre hacia arriba o donde abre hacia abajo, puesto que existen muchas líneas horizontales que cortarán la gráfica dos veces. Sin embargo, si se

restringe el dominio de una función cuadrática a  $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$  o bien a  $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ , entonces la función restringida pasará la prueba de la recta horizontal y por lo tanto será uno a uno. (Existen muchas otras restricciones de una función cuadrática que son uno a uno; sin embargo, sus dominios consisten en más de un intervalo.) Se sigue que dichas funciones cuadráticas restringidas tienen funciones inversas.

El punto donde la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  interseca al eje  $y$  (esto es, la intersección  $y$ ) se da cuando  $x = 0$ . La coordenada  $y$  de este punto es  $c$ , de modo que la intersección con el eje  $y$  es  $c$ . En resumen, se tiene lo siguiente.

### Gráfica de una función cuadrática

La gráfica de la función cuadrática  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  es una parábola.

1. Si  $a > 0$ , la parábola abre hacia arriba. Si  $a < 0$ , abre hacia abajo.
2. El vértice es  $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ .
3. La intersección  $y$  es  $c$ .

Puede hacerse un rápido bosquejo de la gráfica de una función cuadrática al localizar primero el vértice, la intersección  $y$  y unos cuantos puntos más, como aquéllos donde la parábola interseca al eje  $x$ . Las *intersecciones*  $x$  se encuentran al establecer que  $y = 0$  y resolver para  $x$ . Una vez que se encuentran las intersecciones y el vértice, es relativamente fácil trazar la parábola apropiada a través de estos puntos. En el caso de que las intersecciones con el eje  $x$  estén muy cercanas al vértice o que no existan intersecciones con el eje  $x$ , se determina un punto en cada lado del vértice, de modo que pueda hacerse un bosquejo razonable de la parábola. Tenga en cuenta que al trazar una recta vertical (con línea punteada) a través del vértice se obtiene el eje de simetría. Si se grafican puntos a un lado del eje, pueden obtenerse, por simetría, los correspondientes del otro lado.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Un vendedor de automóviles cree que su utilidad diaria por la venta de furgonetas está dada por  $P(x) = -x^2 + 2x + 399$ , donde  $x$  es el número de vehículos vendidos. Determine el vértice de la función y sus intersecciones con los ejes, y haga una gráfica de la función. Si su modelo es correcto, comente sobre la factibilidad de vender furgonetas.

#### EJEMPLO 1 Gráfica de una función cuadrática

Grafique la función cuadrática  $y = f(x) = -x^2 - 4x + 12$ .

**Solución:** Aquí  $a = -1$ ,  $b = -4$  y  $c = 12$ . Como  $a < 0$ , la parábola abre hacia abajo y, por lo tanto, tiene un punto más alto. La coordenada  $x$  del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(-1)} = -2$$

La coordenada  $y$  es  $f(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) + 12 = 16$ . Así, el vértice es  $(-2, 16)$ , de modo que el valor máximo de  $f(x)$  es 16. Como  $c = 12$ , la intersección  $y$  es 12. Para encontrar las intersecciones  $x$ , se determina que  $y$  igual a 0 en  $y = -x^2 - 4x + 12$  y se despeja  $x$ :

$$0 = -x^2 - 4x + 12$$

$$0 = -(x^2 + 4x - 12)$$

$$0 = -(x + 6)(x - 2)$$

Entonces,  $x = -6$  o  $x = 2$ , de modo que las intersecciones  $x$  son  $-6$  y  $2$ . Ahora se traza el vértice, el eje de simetría y las intersecciones [vea la figura 3.20(a)]. Como  $(0, 12)$  está a *dos* unidades a la *derecha* del eje de simetría, existe un punto correspondiente *dos* unidades a la *izquierda* del eje con la misma coordenada  $y$ . Por lo tanto, se obtiene el punto  $(-4, 12)$ . Al unir todos los puntos, se traza una parábola que abre hacia abajo. [Vea la figura 3.20(b).]

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

#### EJEMPLO 2 Gráfica de una función cuadrática

Grafique  $p = 2q^2$ .

**Solución:** Aquí  $p$  es una función cuadrática de  $q$ , donde  $a = 2$ ,  $b = 0$  y  $c = 0$ . Como  $a > 0$ , la parábola abre hacia arriba y, por lo tanto, tiene un punto más bajo. La coorde-

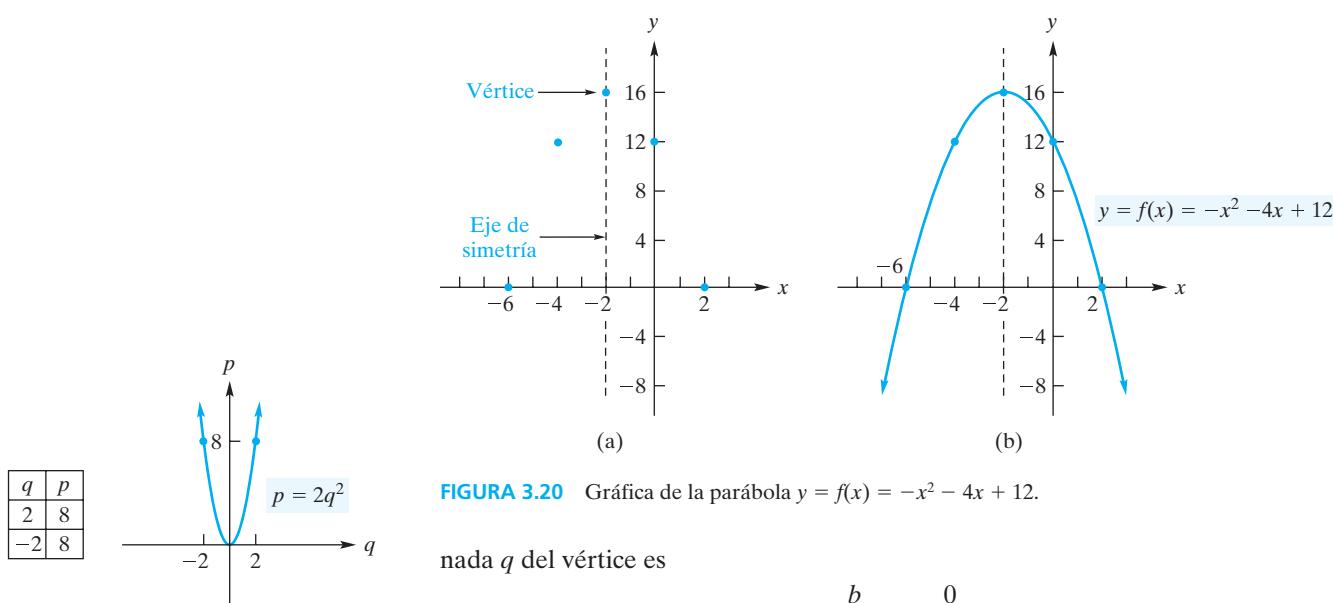


FIGURA 3.21 Gráfica de la parábola  $p = 2q^2$ .

El ejemplo 3 ilustra que la determinación de las intersecciones puede requerir el uso de la fórmula cuadrática.

FIGURA 3.20 Gráfica de la parábola  $y = f(x) = -x^2 - 4x + 12$ .

nada  $q$  del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(2)} = 0$$

y la coordenada  $p$  es  $2(0)^2 = 0$ . En consecuencia, el valor *mínimo* de  $p$  es 0 y el vértice es  $(0, 0)$ . En este caso, el eje  $p$  es el eje de simetría. Una parábola que abre hacia arriba con vértice en  $(0, 0)$  no puede tener ninguna otra intersección. De ahí que para hacer un buen bosquejo de esta parábola, se grafica un punto a cada lado del vértice. Si  $q = 2$ , entonces  $p = 8$ . Esto da el punto  $(2, 8)$  y, por simetría, el punto  $(-2, 8)$ . (Vea la figura 3.21.)

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

### GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Un hombre que está parado sobre el montículo del lanzador lanza una bola recta a una velocidad inicial de 32 pies por segundo. La altura  $h$  de la bola, en pies,  $t$  segundos después de que fue lanzada se describe mediante la función  $h(t) = -16t^2 + 32t + 8$ , para  $t \geq 0$ . Encuentre el vértice, las intersecciones con los ejes, y trace su gráfica.

### EJEMPLO 3 Gráfica de una función cuadrática

Grafique  $g(x) = x^2 - 6x + 7$ .

**Solución:** Aquí  $g$  es una función cuadrática, donde  $a = 1$ ,  $b = -6$  y  $c = 7$ . La parábola abre hacia arriba, porque  $a > 0$ . La coordenada  $x$  del vértice (el punto más bajo) es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3$$

y  $g(3) = 3^2 - 6(3) + 7 = -2$ , que es el valor mínimo de  $g(x)$ . Por lo tanto, el vértice es  $(3, -2)$ . Ya que  $c = 7$ , la intersección con el eje vertical es 7. Para encontrar las intersecciones  $x$ , se establece que  $g(x) = 0$ .

$$0 = x^2 - 6x + 7$$

El lado derecho no puede factorizarse con facilidad, de modo que se usará la fórmula cuadrática para encontrar los valores de  $x$ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{6}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

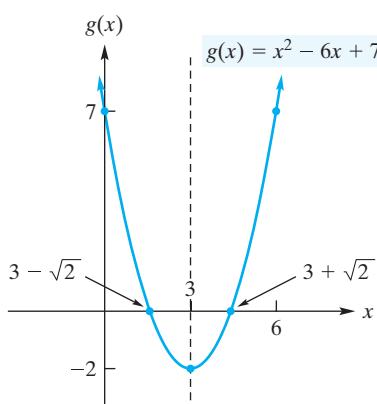
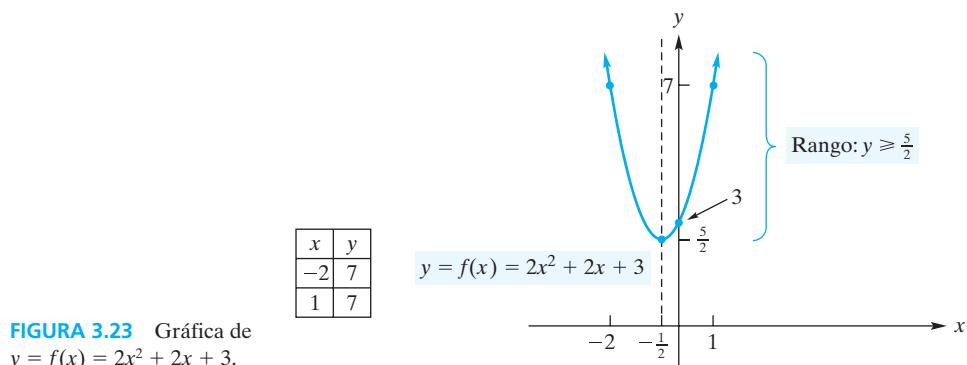


FIGURA 3.22 Gráfica de la parábola  $g(x) = x^2 - 6x + 7$ .

Por lo tanto, las intersecciones  $x$  son  $3 + \sqrt{2}$  y  $3 - \sqrt{2}$ . Después de graficar el vértice, las intersecciones  $y$  (por simetría) el punto  $(6, 7)$ , se dibuja una parábola que se abre hacia arriba en la figura 3.22.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17



### ● EJEMPLO 4 Gráfica de una función cuadrática

Grafique  $y = f(x) = 2x^2 + 2x + 3$  y determine el rango de  $f$ .

**Solución:** Esta función es cuadrática, donde  $a = 2$ ,  $b = 2$  y  $c = 3$ . Como  $a > 0$  la gráfica es una parábola que se abre hacia arriba. La coordenada  $x$  del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(2)} = -\frac{1}{2}$$

y la coordenada  $y$  es  $2(-\frac{1}{2})^2 + 2(-\frac{1}{2}) + 3 = \frac{5}{2}$ . Por ende, el vértice es  $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ . Como  $c = 3$ , la intersección  $y$  es 3. Una parábola que abre hacia arriba y que tiene vértice por encima del eje  $x$  no tiene intersecciones  $x$ . En la figura 3.23 se grafica la intersección  $y$ , el vértice y un punto adicional  $(-2, 7)$  a la izquierda del vértice. Por simetría, también se obtiene el punto  $(1, 7)$ . Al trazar una parábola a través de estos puntos se obtiene la gráfica deseada. Con base en la figura, se ve que el rango de  $f$  es toda  $y \geq \frac{5}{2}$ , esto es, el intervalo  $[\frac{5}{2}, \infty)$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

### ● EJEMPLO 5 Determinación y gráfica de una inversa

Para la parábola dada por la función

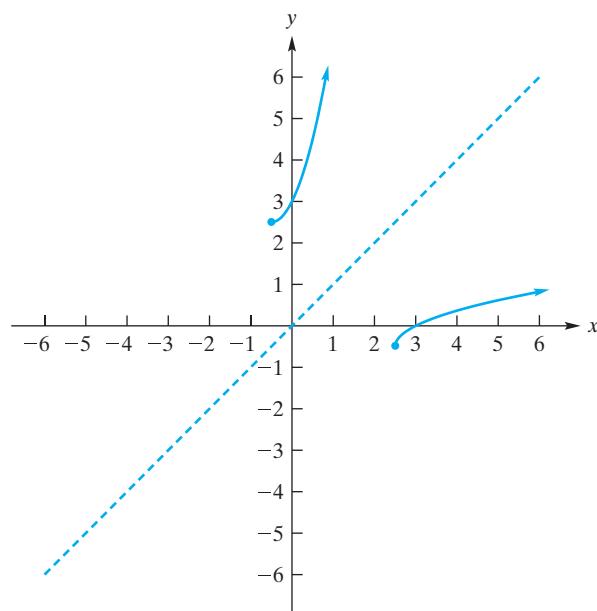
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

determine la inversa de la función restringida dada por  $g(x) = ax^2 + bx + c$ , para  $x \geq -\frac{b}{2a}$ .

Grafique  $g$  y  $g^{-1}$  en el mismo plano, en el caso donde  $a = 2$ ,  $b = 2$  y  $c = 3$ .

**Solución:** A fin de seguir el procedimiento descrito en el ejemplo 5 de la sección 2.4, se comienza por resolver  $y = ax^2 + bx + c$ , donde  $x \geq -\frac{b}{2a}$ , para  $x$  en términos de  $y$ . Esto se hace por medio de la aplicación de la fórmula cuadrática  $ax^2 + bx + c - y = 0$ , de donde se obtiene  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a}$ . Siempre que  $\sqrt{b^2 - 4a(c - y)}$  está definido (como un número real) su valor es no negativo. Por lo tanto, el signo de  $\frac{\sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a}$  depende de  $a$ . Es no negativo cuando  $a$  es positiva, es decir, cuando la parábola abre hacia arriba; y es no positiva cuando  $a$  es negativa, es decir, cuando la parábola abre hacia abajo. Así, para satisfacer  $x \geq -\frac{b}{2a}$  debe tomarse el  $+$  de  $\pm$  cuando  $a > 0$  y la parábola abre hacia arriba y el  $-$  de  $\pm$  cuando  $a < 0$  y la parábola abre hacia abajo. Para mayor claridad, se optará ahora por el caso de  $a > 0$ . Una vez más, se recurre al procedimiento del ejemplo 5 de 2.4, de donde se sigue que

$$g^{-1}(x) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c - x)}}{2a}$$
. El vértice de cualquier parábola tiene coordenada  $y$  dada por  $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ . Por definición, el dominio de  $g$  es  $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ . Ahora es evidente que en el caso de la apertura hacia arriba, el

FIGURA 3.24 Gráfica de  $g$  y  $g^{-1}$ .

rango de  $g$  es  $\left[-\frac{b^2 - 4ac}{4a}, \infty\right)$ . Como se estableció en la sección 2.4, es un hecho generalmente aceptado que el dominio de  $g^{-1}$  es el rango de  $g$ . Ahora se verificará esta aseveración al considerar directamente el dominio de  $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}$ . El dominio consiste en el conjunto de todas las  $x$  para las cuales  $b^2 - 4a(c-x) \geq 0$ . Evidentemente, esta desigualdad es equivalente a  $b^2 - 4ac + 4ax \geq 0$ , que a su vez es equivalente a  $4ax \geq -(b^2 - 4ac)$ . En otras palabras,  $x \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$  tal como se requirió.

Para completar el ejercicio, observe que en la figura 3.23 se proporciona la gráfica de  $y = 2x^2 + 2x + 3$ . Para la tarea que nos ocupa, se traza de nuevo la parte de la curva que cae a la derecha del eje de simetría. Esto da la gráfica de  $g$ . Después se presenta una copia punteada de la recta  $y = x$ . Finalmente, se dibuja la imagen de espejo de  $g$  en la recta  $y = x$  para obtener la gráfica de  $g^{-1}$  como en la figura 3.24.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

#### INGRESO MÁXIMO

La función de demanda para la colección de libros de cocina de un editor es  $p = 6 - 0.003q$ , donde  $p$  es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan  $q$  unidades (por día). Encuentre el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

Debe agregar la relación para el ingreso total a su repertorio de fórmulas de negocios y economía.

#### EJEMPLO 6 Ingreso máximo

*La función de demanda para un producto es  $p = 1000 - 2q$ , donde  $p$  es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan  $q$  unidades (por semana). Encuentre el nivel de producción que maximiza el ingreso total del productor, y determine este ingreso.*

**Solución:**

**Estrategia** Para maximizar el ingreso, debe determinarse la función de ingreso,  $r = f(q)$ . Si se utiliza la relación

$$\text{ingreso total} = (\text{precio})(\text{cantidad})$$

se tiene

$$r = pq$$

Si se usa la ecuación de demanda,  $p$  puede expresarse en términos de  $q$ , de modo que  $r$  será una función de  $q$ .

Se tiene

$$\begin{aligned} r &= pq \\ &= (1000 - 2q)q \\ r &= 1000q - 2q^2 \end{aligned}$$

Observe que  $r$  es una función cuadrática de  $q$ , donde  $a = -2$ ,  $b = 1000$  y  $c = 0$ . Como  $a < 0$  (la parábola abre hacia abajo),  $r$  es máximo en el vértice  $(q, r)$ , donde

$$q = -\frac{b}{2a} = -\frac{1000}{2(-2)} = 250$$

El valor máximo de  $r$  está dado por

$$\begin{aligned} r &= 1000(250) - 2(250)^2 \\ &= 250\,000 - 125\,000 = 125\,000 \end{aligned}$$

Así, el ingreso máximo que el fabricante puede recibir es de \$125 000, que ocurre en un nivel de producción de 250 unidades. En la figura 3.25(a) se muestra la gráfica de la función de ingreso. Sólo se dibuja la parte en la que  $q \geq 0$  y  $r \geq 0$ , puesto que la cantidad y el ingreso no pueden ser negativos.

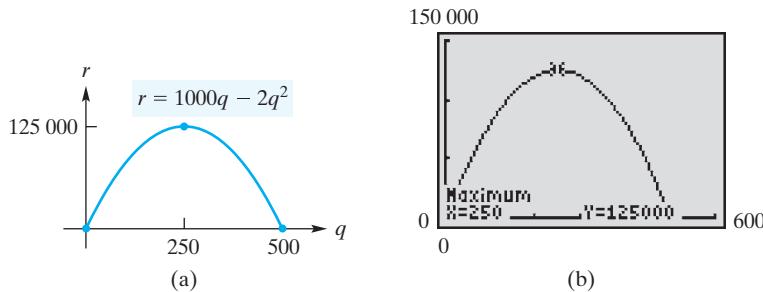


FIGURA 3.25 Gráfica de la función de ingreso.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29

## TECNOLOGÍA

El valor máximo (o mínimo) de una función puede encontrarse de manera conveniente con una calculadora grafadora, mediante Trace y Zoom, o bien con la operación de “maximum” (o “minimum”). En la figura 3.25(b) se

muestra la pantalla para la función de ingreso del ejemplo 6, a saber, la gráfica de  $y = 1000x - 2x^2$ . Observe que se reemplazó  $r$  por  $y$  y  $q$  por  $x$ .

## Problemas 3.3

Establezca si la función de los problemas 1 a 8 es cuadrática o no.

1.  $f(x) = 5x^2$
2.  $g(x) = \frac{1}{2x^2 - 4}$
3.  $g(x) = 7 - 6x$
4.  $k(v) = 3v^2(v^2 + 2)$
5.  $h(q) = (3 - q)^2$
6.  $f(t) = 2t(3 - t) + 4t$
7.  $f(s) = \frac{s^2 - 9}{2}$
8.  $g(t) = (t^2 - 1)^2$

No incluya una gráfica en los problemas 9 a 12.

9. (a) Encuentre el vértice de la parábola  $y = f(x) = -4x^2 + 8x + 7$ . (b) ¿Corresponde al punto más bajo o al más alto de la gráfica?
10. Repita el problema 9, si  $y = f(x) = 8x^2 + 4x - 1$ .

11. Para la parábola  $y = f(x) = x^2 + x - 6$ , encuentre (a) la intersección  $y$ , (b) las intersecciones  $x$ , y (c) el vértice.

12. Repita el problema 11, si  $y = f(x) = 5 - x - 3x^2$ .

Grafique cada función de los problemas 13 a 22. Obtenga el vértice y las intersecciones, y determine el rango.

- \*13.  $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$
- \*14.  $y = f(x) = -4x^2$
- \*15.  $y = g(x) = -2x^2 - 6x$
- \*16.  $y = f(x) = x^2 - 4$
- \*17.  $s = h(t) = t^2 + 6t + 9$
- \*18.  $s = h(t) = 2t^2 + 3t - 2$
19.  $y = f(x) = -9 + 8x - 2x^2$
20.  $y = H(x) = 1 - x - x^2$
- \*21.  $t = f(s) = s^2 - 8s + 14$
22.  $t = f(s) = s^2 + 6s + 11$

En los problemas 23 a 26, establezca si  $f(x)$  tiene un valor máximo o mínimo y encuentre dicho valor.

23.  $f(x) = 49x^2 - 10x + 17$     24.  $f(x) = -3x^2 - 18x + 7$   
 25.  $f(x) = 4x - 50 - 0.1x^2$     26.  $f(x) = x(x + 3) - 12$

En los problemas 27 y 28, restrinja la función cuadrática a aquellas  $x$  que satisfagan  $x \geq v$ , donde  $v$  es la coordenada  $x$  del vértice de la parábola. Determine la inversa de la función restringida. Grafique la función restringida y su inversa en el mismo plano.

\*27.  $f(x) = x^2 - 2x + 4$     28.  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

- \*29. **Ingreso** La función de demanda para el fabricante de un producto es  $p = f(q) = 200 - 5q$ , donde  $p$  es el precio (en dólares) por unidad cuando se demandan  $q$  unidades (por semana). Encuentre el nivel de producción que maximiza el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

30. **Ingreso** La función de demanda para la línea de reglas de plástico de una compañía de artículos de oficina es  $p = 0.85 - 0.00045q$ , donde  $p$  es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan  $q$  unidades (diarias). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

31. **Ingreso** La función de demanda para la línea de lap-tops de una compañía de electrónica es  $p = 2400 - 6q$ , donde  $p$  es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan  $q$  unidades (semanales). Encuentre el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

32. **Marketing** Una compañía de marketing estima que  $n$  meses después de la introducción del nuevo producto de un cliente,  $f(n)$  miles de familias lo usarán, donde

$$f(n) = \frac{10}{9}n(12 - n), \quad 0 \leq n \leq 12$$

Estime el número máximo de familias que usarán el producto.

33. **Utilidad** La utilidad diaria proveniente de la venta de árboles en el departamento de jardinería de una tienda está dada por  $P(x) = -x^2 + 18x + 144$ , donde  $x$  es el número de árboles vendidos. Determine el vértice y las intersecciones de la función y grafique la función.

34. **Psicología** Uno de los pronósticos de los precursores de la psicología relaciona la magnitud de un estímulo,  $x$ , con la magnitud de una respuesta,  $y$ , lo cual se expresa mediante la ecuación  $y = kx^2$ , donde  $k$  es una constante del experimento. En un experimento sobre reconocimiento de patrones,  $k = 2$ . Determine el vértice de la función y haga la gráfica de su ecuación (suponga que no hay restricción sobre  $x$ ).

35. **Biología** Ciertos biólogos estudiaron los efectos nutricionales sobre ratas que fueron alimentadas con una dieta que contenía 10% de proteína,<sup>5</sup> la cual consistía en levadura y harina de maíz. Al variar el porcentaje  $P$  de levadura en la mezcla, el grupo de científicos estimó que el peso promedio (en gramos) que una rata había aumentado durante un periodo fue

$$f(P) = -\frac{1}{50}P^2 + 2P + 20, \quad 0 \leq P \leq 100$$

Encuentre el peso máximo aumentado.

<sup>5</sup>Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single-Cell Protein*, ed. R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

36. **Altura de una pelota** Suponga que la altura,  $s$ , de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el piso está dada por

$$s = -4.9t^2 + 62.3t + 1.8$$

donde  $s$  está en metros y  $t$  es el tiempo transcurrido en segundos (vea la figura 3.26). ¿Después de cuántos segundos alcanza la pelota su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

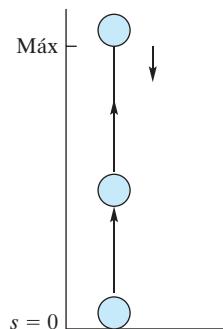


FIGURA 3.26 Pelota lanzada verticalmente hacia arriba (problema 36).

37. **Tiro con arco** Un muchacho que está parado en una colina, tira una flecha directamente hacia arriba a una velocidad inicial de 85 pies por segundo. La altura,  $h$ , de la flecha en pies,  $t$  segundos después de que se lanzó, se describe mediante la función  $h(t) = -16t^2 + 85t + 22$ . ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la flecha? ¿Después de cuántos segundos de ser disparada alcanza esta altura?

38. **Lanzamiento de muñeca** Una niña de 6 años de edad que está parada sobre una caja de juguetes lanza una muñeca directamente hacia arriba, a una velocidad inicial de 16 pies por segundo. La altura  $h$  de la muñeca en pies,  $t$  segundos después de que se lanzó se describe mediante la función  $h(t) = -16t^2 + 16t + 4$ . ¿Cuánto tiempo le toma alcanzar su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

39. **Lanzamiento de un cohete** Un cohete de juguete se lanza verticalmente hacia arriba desde el techo de una cochera a una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La altura,  $h$ , del cohete en pies,  $t$  segundos después de haber sido lanzado, se describe por medio de la función  $h(t) = -16t^2 + 80t + 16$ .

Encuentre el vértice y las intersecciones, y grafique la función.

40. **Área** Exprese el área del rectángulo que se muestra en la figura 3.27 como una función cuadrática de  $x$ . ¿Para qué valor de  $x$  el área será máxima?

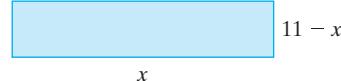


FIGURA 3.27 Diagrama para el problema 40.

41. **Terreno cercado** Un contratista quiere cercar un terreno rectangular adyacente a una carretera recta, y desea utilizar la orilla de la carretera como uno de los lados del área cercada (vea la figura 3.28). Si el constructor cuenta con 500 pies de cerca, encuentre las dimensiones del área máxima que se puede delimitar.

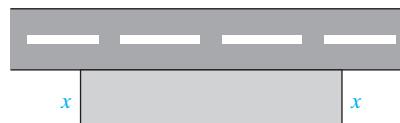


FIGURA 3.28 Diagrama para el problema 41.

42. Encuentre dos números cuya suma es 78 y su producto es un máximo.
43. A partir de la gráfica de  $y = 1.4x^2 - 3.1x + 4.6$ , determine las coordenadas del vértice. Redondee los valores a dos decimales. Verifique su respuesta con el uso de la fórmula para el vértice.
44. Encuentre los ceros de  $f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 3x + 8.5$  al examinar la gráfica de  $f$ . Redondee los valores a dos decimales.
45. Determine el número de ceros reales de cada una de las siguientes funciones cuadráticas:
- $f(x) = 4.2x^2 - 8.1x + 10.4$
  - $f(x) = 5x^2 - 2\sqrt{35}x + 7$
  - $f(x) = \frac{5.1 - 7.2x - x^2}{4.8}$
46. Encuentre el valor máximo (redondeado a dos decimales) de la función  $f(x) = 5.4 + 12x - 4.1x^2$  a partir de su gráfica.
47. Encuentre el valor mínimo (redondeado a dos decimales) de la función  $f(x) = 20x^2 - 13x + 7$  a partir de su gráfica.

**OBJETIVO**

Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres variables por medio de la técnica de eliminación por adición o por sustitución.  
(En el capítulo 6 se presentan otros métodos.)

## 3.4 Sistemas de ecuaciones lineales

### Sistemas con dos variables

Cuando una situación debe describirse matemáticamente, no es raro que surja un *conjunto* de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que el gerente de una fábrica establece un programa de producción para dos modelos de un producto nuevo. El modelo A requiere de 4 resistores y 9 transistores. El modelo B requiere de 5 resistores y 14 transistores. La fábrica obtiene de sus proveedores 335 resistores y 850 transistores diarios. ¿Cuántos productos de cada modelo debe producir diariamente, de modo que se utilicen todos los transistores y resistores?

Es buena idea elaborar una tabla que resuma la información importante. En la tabla 3.2 se muestra el número de resistores y transistores requeridos para cada modelo, así como el número total disponible.

TABLA 3.2

	Modelo A	Modelo B	Total disponible
Resistores	4	5	335
Transistores	9	14	850

Suponga que  $x$  es el número de artículos del modelo A fabricados cada día, y  $y$  es el número del modelo B. Entonces se requieren de  $4x + 5y$  resistores, y de  $9x + 14y$  transistores. Como hay 335 resistores y 850 transistores disponibles, se tiene

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335 \\ 9x + 14y = 850 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Este conjunto de ecuaciones se llama **sistema** de dos ecuaciones lineales en las variables  $x$  y  $y$ . El problema es encontrar valores de  $x$  y  $y$  para los cuales *ambas* ecuaciones sean verdaderas de manera *simultánea*. Estas parejas de valores  $(x, y)$  se llaman *soluciones* del sistema.

Como las ecuaciones (1) y (2) son lineales, sus gráficas son líneas rectas; pueden llamarse  $L_1$  y  $L_2$ . Ahora, las coordenadas de cualquier punto sobre una línea satisfacen la ecuación de esa línea; es decir, hacen a la ecuación verdadera. Por lo tanto, las coordenadas de cualquier punto de intersección de  $L_1$  y  $L_2$  satisfacen ambas ecuaciones. Esto significa que un punto de intersección proporciona una solución del sistema.

Si se dibujan  $L_1$  y  $L_2$  en el mismo plano, podrían ocurrir tres situaciones:

- $L_1$  y  $L_2$  pueden intersecarse en un punto único, por ejemplo  $(a, b)$ . (Vea la figura 3.29.) Así, el sistema tiene la solución  $x = a$  y  $y = b$ .
- $L_1$  y  $L_2$  pueden ser paralelas y no tener puntos en común. (Vea la figura 3.30.) En este caso no existe solución.
- $L_1$  y  $L_2$  pueden ser la misma recta. (Vea la figura 3.31.) Aquí, las coordenadas de cualquier punto sobre la recta constituyen una solución del sistema. En consecuencia, existe un número infinito de soluciones.



### ADVERTENCIA

Observe que *cada una* de las soluciones está dada por un par de valores.

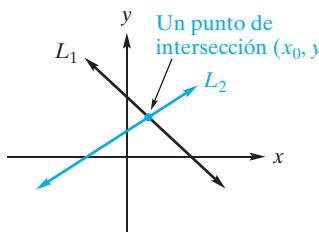


FIGURA 3.29 Sistema lineal (una solución).

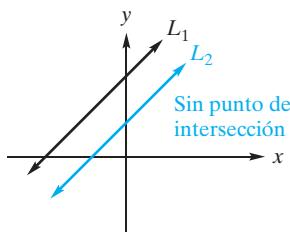


FIGURA 3.30 Sistema lineal (sin solución).

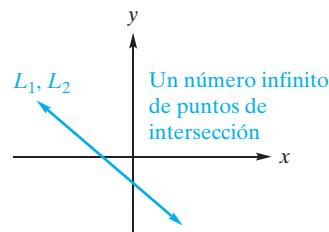


FIGURA 3.31 Sistema lineal (un número infinito de soluciones).

El objetivo principal de esta sección es estudiar los métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Se reemplazará de manera sucesiva el sistema por otros que tengan las mismas soluciones. Para generalizar, la terminología de la sección 0.7, subsección titulada “Ecuaciones equivalentes” se dice que dos sistemas son *equivalentes* si sus conjuntos de soluciones son iguales. Los sistemas de reemplazo tienen formas progresivamente más deseables para determinar la solución. En términos más precisos, se busca un sistema equivalente que contenga una ecuación en la que una de las variables no aparezca. (En este caso se dice que la variable ha sido *eliminada*.) Al tratar con sistemas de ecuaciones *lineales*, el paso de un sistema a otro equivalente siempre se logra mediante uno de los siguientes procedimientos:

1. Intercambio de dos ecuaciones.
2. Multiplicación de una ecuación por una constante distinta de cero.
3. Reemplazo de una ecuación por sí misma más un múltiplo de otra ecuación.

Estos procedimientos se abordarán con más detalle en el capítulo 6. Por el momento, puesto que en este capítulo también se considerarán sistemas no lineales, es conveniente expresar las soluciones en términos de los principios generales de la sección 0.7, que garantizan la equivalencia de las ecuaciones.

Este procedimiento se ilustrará para el sistema del problema propuesto originalmente:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335 \\ 9x + 14y = 850 \end{cases} \quad (3) \quad (4)$$

Para empezar, se obtendrá un sistema equivalente en el que  $x$  no aparezca en una ecuación. Primero se encuentra un sistema equivalente en el que los coeficientes de los términos en  $x$  de cada ecuación sean iguales excepto por el signo. Despues de multiplicar la ecuación (3) por 9 [es decir, multiplicar ambos lados de la ecuación (3) por 9] y multiplicar la ecuación (4) por -4 se obtiene

$$\begin{cases} 36x + 45y = 3015 \\ -36x - 56y = -3400 \end{cases} \quad (5) \quad (6)$$

Los lados izquierdo y derecho de la ecuación (5) son iguales, de modo que cada lado puede *sumarse* al correspondiente de la ecuación (6). Esto resulta en

$$-11y = -385$$

que sólo tiene una variable, como se planeó. Al resolverla:

$$y = 35$$

así se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} -36x - 56y = -3400 \\ y = 35 \end{cases} \quad (7) \quad (8)$$

Al reemplazar  $y$  en la ecuación (7) por 35, se llega a

$$\begin{aligned} -36x - 56(35) &= -3400 \\ -36x - 1960 &= -3400 \\ -36x &= -1440 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Así, el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} x = 40 \\ y = 35 \end{cases}$$

Esta respuesta puede verificarse al sustituir  $x = 40$  y  $y = 35$  en *ambas* ecuaciones originales. En la ecuación (3) se obtiene  $4(40) + 5(35) = 335$ , o  $335 = 335$ . En la ecuación (4) se obtiene  $9(40) + 14(35) = 850$ , o bien,  $850 = 850$ . Por lo tanto, la solución es

$$x = 40 \quad y = 35$$

El administrador debe planear la fabricación de 40 productos del modelo A y 35 del modelo B diarios. El procedimiento efectuado se conoce como **eliminación por adición**. Aunque se eligió eliminar primero  $x$ , pudo haberse hecho lo mismo para  $y$ , mediante un procedimiento similar.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### MÉTODO DE ELIMINACIÓN POR ADICIÓN

Un consultor en computadoras tiene invertidos \$200 000 para su retiro, parte al 9% y parte al 8%. Si el ingreso anual total por las inversiones es de \$17 200, ¿cuánto está invertido a cada tasa?

#### EJEMPLO 1 Método de eliminación por adición

Utilice eliminación por adición para resolver el sistema.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 3y + 2x = 3 \end{cases}$$

**Solución:** Por conveniencia se alinean los términos en  $x$  y en  $y$  para obtener

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13 & (9) \\ 2x + 3y = 3 & (10) \end{cases}$$

Para eliminar  $y$ , se multiplica la ecuación (9) por 3 y la ecuación (10) por 4:

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39 & (11) \\ 8x + 12y = 12 & (12) \end{cases}$$

Al sumar la ecuación (11) a la (12) se obtiene  $17x = 51$ , de la cual  $x = 3$ . Se tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39 \\ x = 3 \end{cases} \quad (13) \quad (14)$$

Al reemplazar  $x$  por 3 en la ecuación (13) se obtiene

$$\begin{aligned} 9(3) - 12y &= 39 \\ -12y &= 12 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

de modo que el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

La solución es  $x = 3$  y  $y = -1$ . En la figura 3.32 se muestra una gráfica del sistema.

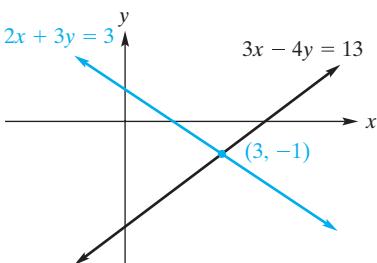


FIGURA 3.32 Sistema lineal del ejemplo 1: una solución.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



El sistema del ejemplo 1,

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13 & (15) \\ 2x + 3y = 3 & (16) \end{cases}$$

puede resolverse de otra manera. Primero se elige una de las ecuaciones —por ejemplo, la ecuación (15)— y se despeja una de las incógnitas en términos de la otra, por ejemplo  $x$  en términos de  $y$ . Así la ecuación (15) es equivalente a  $3x = 4y + 13$  que a su vez es equivalente a

$$x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3}$$

y se obtiene

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3} \\ 2x + 3y = 3 \end{cases} \quad (17)$$

(18)

Tras *sustituir* el valor de  $x$  de la ecuación (17) en la ecuación (18), se obtiene

$$2\left(\frac{4}{3}y + \frac{13}{3}\right) + 3y = 3 \quad (19)$$

De este modo ya se eliminó  $x$ . Al resolver la ecuación (19), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{8}{3}y + \frac{26}{3} + 3y &= 3 \\ 8y + 26 + 9y &= 9 \quad (\text{al eliminar fracciones}) \\ 17y &= -17 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Al reemplazar  $y$  en la ecuación (17) por  $-1$ , se obtiene  $x = 3$ , y el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

como antes. Este método se llama **eliminación por sustitución**.

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

### MÉTODO DE ELIMINACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Dos especies de ciervos, A y B que viven en un refugio de vida salvaje comen alimento adicional en el invierno. Cada semana reciben 2 toneladas de alimento en forma de croqueta y 4.75 toneladas de heno. Cada ciervo de la especie A requiere de 4 libras de croquetas y 5 de heno. Cada ciervo de la especie B requiere de 2 libras de croquetas y 7 de heno. ¿Cuántos ciervos de cada especie se podrán sostener con el alimento, de modo que cada semana se consuma toda la comida?

### EJEMPLO 2 Método de eliminación por sustitución

*Utilice la eliminación por sustitución para resolver el sistema*

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 2x + 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

**Solución:** Es fácil resolver la primera ecuación para  $x$ . Al hacerlo se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} x = -2y + 8 \\ 2x + 4y + 4 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

(21)

Al sustituir  $-2y + 8$  por  $x$  en la ecuación (21), se obtiene

$$\begin{aligned} 2(-2y + 8) + 4y + 4 &= 0 \\ -4y + 16 + 4y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación se simplifica a  $20 = 0$ . Por lo tanto, se tiene el sistema

$$\begin{cases} x = -2y + 8 \\ 20 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

(23)

Como la ecuación (23) *nunca* es verdadera, **no existe solución** para el sistema original. La razón es clara si se observa que las ecuaciones originales pueden escribirse en la forma pendiente-intersección como

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

y

$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$

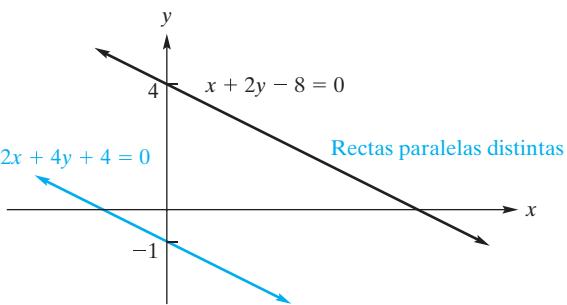


FIGURA 3.33 Sistema lineal del ejemplo 2; no hay solución.

Estas ecuaciones representan líneas rectas que tienen pendientes de  $-\frac{1}{2}$ , pero diferentes intersecciones  $y$ , 4 y  $-1$ . Esto es, determinan rectas paralelas diferentes (vea la figura 3.33).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

#### UN SISTEMA LINEAL CON UN NÚMERO INFINITO DE SOLUCIONES

Una granja piscícola está criando dos especies de peces A y B, a las cuales se les alimenta con dos suplementos vitamínicos. La granja recibe cada día 100 gramos del primer suplemento y 200 gramos del segundo. Cada pez de la especie A requiere de 15 mg del primer suplemento y 30 mg del segundo. Cada pez de la especie B requiere de 20 mg del primer suplemento y 40 mg del segundo. ¿Cuántos peces de cada especie se pueden mantener de modo que diariamente se consuman todos los suplementos?

#### EJEMPLO 3 Un sistema lineal con un número infinito de soluciones

Resuelva

$$\begin{cases} x + 5y = 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y = 1 \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} x + 5y = 2 \\ -x - 5y = -2 \end{cases} \quad (25)$$

**Solución:** Se comienza por eliminar  $x$  de la segunda ecuación. Al multiplicar la ecuación (25) por  $-2$ , se tiene

$$\begin{cases} x + 5y = 2 \\ -x - 5y = -2 \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Al sumar la ecuación (26) a la (27) se obtiene

$$\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (29)$$

Puesto que la ecuación (29) *siempre* es cierta, cualquier solución de la ecuación (28) es una solución del sistema. Ahora se verá cómo puede expresarse esta respuesta. De la ecuación (28) se tiene  $x = 2 - 5y$ , donde  $y$  puede ser cualquier número real, digamos  $r$ . Por lo tanto, puede escribirse  $x = 2 - 5r$ . La solución completa es

$$x = 2 - 5r$$

$$y = r$$

donde  $r$  es cualquier número real. En esta situación,  $r$  se denomina un **parámetro**, y se dice que hay una familia de soluciones con un parámetro. Cada valor de  $r$  determina una solución particular. Por ejemplo, si  $r = 0$ , entonces  $x = 2$  y  $y = 0$ , es una solución; si  $r = 5$ , entonces  $x = -23$  y  $y = 5$  es otra solución. Es claro que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Es útil notar que al escribir las ecuaciones (24) y (25) en sus formas pendiente-intersección, se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} \end{cases}$$

en el que ambas ecuaciones representan la misma recta. De aquí que las rectas coincidan (vea la figura 3.34) y las ecuaciones (24) y (25) sean equivalentes. La solución al sistema consiste en las parejas de coordenadas de todos los puntos sobre la recta  $x + 5y = 2$ , puntos que están dados por la solución paramétrica.

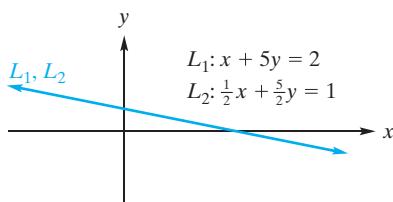


FIGURA 3.34 Sistema lineal del ejemplo 3; un número infinito de soluciones.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19



## T E C N O L O G I A

Resuelva de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} 9x + 4.1y = 7 \\ 2.6x - 3y = 18 \end{cases}$$

**Solución:** Primero se resuelve cada ecuación para  $y$ , de modo que cada ecuación tenga la forma  $y = f(x)$ :

$$y = \frac{1}{4.1}(7 - 9x)$$

$$y = -\frac{1}{3}(18 - 2.6x)$$

Ahora se introducen estas funciones como  $Y_1$  y  $Y_2$  y se despliegan sobre el mismo rectángulo de visualización (vea la figura 3.35). Por último, con los comandos trace y

zoom, o bien con el de intersección, se estima la solución como  $x = 2.52$ ,  $y = -3.82$ .

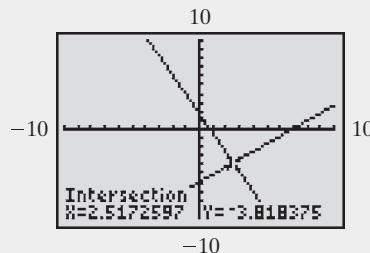


FIGURA 3.35 Solución gráfica del sistema.

### EJEMPLO 4 Mezcla

Un fabricante de productos químicos debe surtir una orden de 500 litros de solución de ácido al 25% (veinticinco por ciento del volumen es ácido). Si hay disponibles en existencia soluciones al 30% y al 18%, ¿cuántos litros de cada una debe mezclar para surtir el pedido?

**Solución:** Sean  $x$  y  $y$ , respectivamente, el número de litros de las soluciones al 30% y 18% que deben mezclarse. Entonces

$$x + y = 500$$

Para ayudar a visualizar la situación, se dibuja el diagrama en la figura 3.36. En 500 litros de una solución al 25%, habrá  $0.25(500) = 125$  litros de ácido. Este ácido proviene de dos fuentes:  $0.30x$  litros de la solución al 30% y  $0.18y$  litros provienen de la solución al 18%. Entonces,

$$0.30x + 0.18y = 125$$

Estas dos ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Al resolver la primera para  $x$  se obtiene  $x = 500 - y$ . Después de sustituir en la segunda se obtiene

$$0.30(500 - y) + 0.18y = 125$$

Al resolver ésta para  $y$ , se encuentra que  $y = 208\frac{1}{3}$  litros. Así  $x = 500 - 208\frac{1}{3} = 291\frac{2}{3}$  litros (vea la figura 3.37).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25

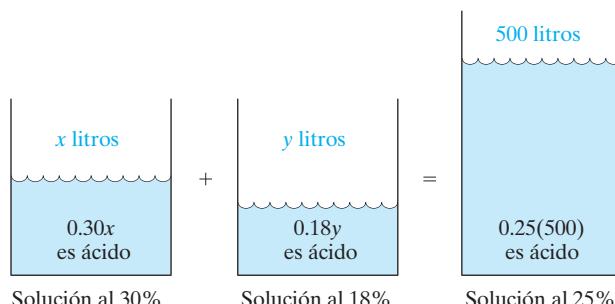


FIGURA 3.36 Problema de la mezcla.

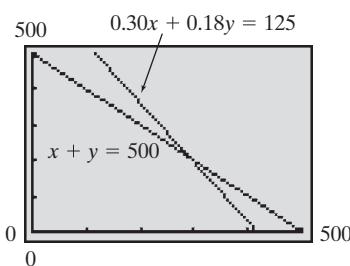


FIGURA 3.37 Gráfica para el ejemplo 4.

### Sistemas con tres variables

Los métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos variables también pueden utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables. Una **ecuación lineal general con tres variables**  $x, y$  y  $z$  es una ecuación que tiene la forma

$$Ax + By + Cz = D$$

donde  $A, B, C$  y  $D$  son constantes y  $A, B$  y  $C$  al menos una de ellas es diferente de cero. Por ejemplo,  $2x - 4y + z = 2$  es una de esas ecuaciones. Desde un punto de vista geométrico, una ecuación lineal general con tres variables representa un *plano* en el espacio, y una solución a un sistema de tales ecuaciones es la intersección de los planos. En el ejemplo 5 se muestra cómo resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

##### RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA LINEAL DE TRES VARIABLES

Una cafetería se especializa en mezclas de café de calidad superior para conocedores. Con base en café de tipo A, tipo B y tipo C, el dueño quiere preparar una mezcla que venderá en \$8.50 por bolsa de una libra. El costo por libra de estos granos es de \$12, \$9 y \$7, respectivamente. La cantidad del tipo B debe ser el doble de la cantidad del tipo A. ¿Cuánto café de cada tipo contendrá la mezcla final?

#### EJEMPLO 5 Resolución de un sistema lineal con tres variables

Resuelva

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x - y - 3z = -6 \end{array} \right. \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x - y - 3z = -6 \end{array} \right. \quad (31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 3 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ x - y - 3z = -6 \end{array} \right. \quad (32)$$

**Solución:** Este sistema consiste en tres ecuaciones lineales con tres variables. De la ecuación (32),  $x = y + 3z - 6$ . Al sustituir este valor para  $x$  en las ecuaciones (30) y (31), se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(y + 3z - 6) + y + z = 3 \\ -(y + 3z - 6) + 2y + 2z = 1 \\ x = y + 3z - 6 \end{array} \right.$$

Si se simplifica, resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} 3y + 7z = 15 \\ y - z = -5 \\ x = y + 3z - 6 \end{array} \right. \quad (33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3y + 7z = 15 \\ y - z = -5 \\ x = y + 3z - 6 \end{array} \right. \quad (34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3y + 7z = 15 \\ y - z = -5 \\ x = y + 3z - 6 \end{array} \right. \quad (35)$$

Observe que  $x$  no aparece en las ecuaciones (33) y (34). Como cualquier solución del sistema original debe satisfacer las ecuaciones (33) y (34), primero debe considerarse su solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3y + 7z = 15 \\ y - z = -5 \end{array} \right. \quad (33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3y + 7z = 15 \\ y - z = -5 \end{array} \right. \quad (34)$$

De la ecuación (34),  $y = z - 5$ . Esto significa que puede reemplazarse la ecuación (33) por

$$3(z - 5) + 7z = 15, \text{ esto es, } z = 3$$

Como  $z$  es 3, puede reemplazarse la ecuación (34) por  $y = -2$ . De aquí que el sistema anterior sea equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 3 \\ y = -2 \\ x = y + 3z - 6 \end{array} \right.$$

El sistema original se transforma en

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 3 \\ y = -2 \\ x = y + 3z - 6 \end{array} \right.$$

de donde  $x = 1$ . La solución es  $x = 1, y = -2$  y  $z = 3$ , que usted ha de verificar.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



Al igual que un sistema de dos variables puede tener una familia de soluciones con un parámetro, un sistema con tres variables puede tener una familia de soluciones con uno o dos parámetros. Los dos ejemplos siguientes lo ilustran.

 **EJEMPLO 6** Familia de soluciones con un parámetro

Resuelva

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 3y + 2z = -2 \\ 4x - 7y + 2z = 6 \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 3y + 2z = -2 \\ 4x - 7y + 2z = 6 \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 3y + 2z = -2 \\ 4x - 7y + 2z = 6 \end{cases} \quad (37)$$

**Solución:** Observe que, como la ecuación (35) puede escribirse como  $x - 2y + 0z = 4$ , pueden considerarse las ecuaciones (35) a (37) como un sistema de tres ecuaciones lineales en las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ . De la ecuación (35) se tiene  $x = 2y + 4$ . Con el empleo de esta ecuación y el método de sustitución puede eliminarse  $x$  de las ecuaciones (36) y (37):

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ 2(2y + 4) - 3y + 2z = -2 \\ 4(2y + 4) - 7y + 2z = 6 \end{cases}$$

que se simplifica hasta obtener,

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ y + 2z = -10 \\ y + 2z = -10 \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ y + 2z = -10 \\ y + 2z = -10 \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ y + 2z = -10 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Al multiplicando la ecuación (40) por  $-1$  se tiene

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ y + 2z = -10 \\ -y - 2z = 10 \end{cases}$$

Al sumar la segunda ecuación a la tercera resulta

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ y + 2z = -10 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Como la ecuación  $0 = 0$  siempre es verdadera, el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ y + 2z = -10 \end{cases} \quad (41)$$

$$(42)$$

Tras resolver la ecuación (42) para  $y$ , se tiene

$$y = -10 - 2z$$

que expresa a  $y$  en términos de  $z$ . También puede expresarse a  $x$  en términos de  $z$ . De la ecuación (41),

$$\begin{aligned} x &= 2y + 4 \\ &= 2(-10 - 2z) + 4 \\ &= -16 - 4z \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{cases} x = -16 - 4z \\ y = -10 - 2z \end{cases}$$

El hecho de que no haya restricciones sobre  $z$ , indica una familia de soluciones paramétricas. Si se establece  $z = r$ , se tiene la familia de soluciones siguiente para el sistema dado:

$$x = -16 - 4r$$

$$y = -10 - 2r$$

$$z = r$$

donde  $r$  puede ser cualquier número real. Entonces, se ve que el sistema dado tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, si se establece  $r = 1$ , se obtiene la solución

particular  $x = -20, y = -12$  y  $z = 1$ . No hay nada especial acerca del nombre del parámetro. De hecho, como  $z = r$ , podría considerarse a  $z$  como el parámetro.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19



### EJEMPLO 7 Familia de soluciones con dos parámetros

*Resuelva el sistema*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + 4y + 2z = 8 \end{cases}$$

**Solución:** Éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables. Se eliminará  $x$  de la segunda ecuación al multiplicarla primero por  $-\frac{1}{2}$ :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ -x - 2y - z = -4 \end{cases}$$

Al sumar la primera ecuación a la segunda se obtiene

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación, resulta

$$x = 4 - 2y - z$$

Como no existe restricción sobre  $y$  o  $z$ , éstos pueden ser números reales arbitrarios, lo que proporciona una familia de soluciones con dos parámetros. Si se establece  $y = r$  y  $z = s$ , se encuentra que la solución del sistema es

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2r - s \\ y &= r \\ z &= s \end{aligned}$$

donde  $r$  y  $s$  pueden ser cualesquiera números reales. Cada asignación de valores a  $r$  y a  $s$  da una solución del sistema, de modo que existe un número infinito de soluciones. Por ejemplo, al hacer  $r = 1$  y  $s = 2$  se obtiene la solución particular  $x = 0, y = 1$  y  $z = 2$ . Como en el último ejemplo, no hay nada especial acerca de los nombres de los parámetros. En particular, como  $y = r$  y  $z = s$ , podría considerarse a  $y$  y  $z$  como los dos parámetros.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23



## Problemas 3.4

*Resuelva algebraicamente los sistemas de los problemas 1 a 24.*

\*1.  $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$

2.  $\begin{cases} 4x + 2y = 9 \\ 5y - 4x = 5 \end{cases}$

13.  $\begin{cases} 5p + 11q = 7 \\ 10p + 22q = 33 \end{cases}$

14.  $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ -10x + 6y = 4 \end{cases}$

3.  $\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

4.  $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$

\*15.  $\begin{cases} 2x + y + 6z = 3 \\ x - y + 4z = 1 \\ 3x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$

16.  $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 3x + y + z = 1 \\ 4x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

5.  $\begin{cases} u + v = 5 \\ u - v = 7 \end{cases}$

6.  $\begin{cases} 2p + q = 16 \\ 3p + 3q = 33 \end{cases}$

17.  $\begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ 4x + 2y - 2z = -2 \\ 3x - y + z = 11 \end{cases}$

18.  $\begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - y - z = 12 \\ 3x + y + 4z = 4 \end{cases}$

7.  $\begin{cases} x - 2y = -7 \\ 5x + 3y = -9 \end{cases}$

8.  $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 5x + 9y = 7 \end{cases}$

\*19.  $\begin{cases} x - 2z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$

20.  $\begin{cases} 2y + 3z = 1 \\ 3x - 4z = 0 \end{cases}$

\*9.  $\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 3x - 7y \\ x + 5y - 2 = y + 4 \end{cases}$

10.  $\begin{cases} 5x + 7y + 2 = 9y - 4x + 6 \\ \frac{21}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{11}{4} = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{4} \end{cases}$

11.  $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 \\ \frac{3}{8}x + \frac{5}{6}y = -\frac{11}{2} \end{cases}$

12.  $\begin{cases} \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}w = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}w = \frac{1}{6} \end{cases}$

21.  $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

22.  $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$

\*23.  $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ 4x + 4y - 2z = 6 \end{cases}$

24.  $\begin{cases} 5x + y + z = 17 \\ 4x + y + z = 14 \end{cases}$

\*25. **Mezcla** Un fabricante de productos químicos desea surtir un pedido de 800 galones de una solución de ácido al 25%. En

existencia tiene soluciones al 20% y 35%. ¿Cuántos galones de cada solución debe mezclar para surtir el pedido?

- 26. Mezcla** Un jardinero tiene dos fertilizantes que contienen diferentes concentraciones de nitrógeno. Uno tiene 3% y el otro tiene 11%. ¿Cuántas libras de cada fertilizante debe mezclar para obtener 20 libras con una concentración de 9%?
- 27. Telas** Una fábrica textil produce telas elaboradas a partir de diferentes fibras. El propietario necesita producir una tela que cueste \$3.25 por libra con algodón, poliéster y nylon. El costo por libra de estas fibras es de \$4.00, \$3.00 y \$2.00, respectivamente. La cantidad de nylon debe ser la misma que la de poliéster. ¿Cuánto de cada fibra debe tener el producto final?
- 28. Impuesto** Una compañía tiene ingresos gravables por \$312 000. El impuesto federal es el 25% de la parte que queda después que el impuesto estatal ha sido pagado. El impuesto estatal es un 10% de la parte que queda después que el federal ha sido pagado. Encuentre los impuestos federal y estatal.

- 29. Velocidad de un avión** Un avión recorre 900 millas en 2 horas y 55 minutos con viento a favor. El viaje de regreso le toma 3 horas 26 minutos volando en contra del viento. Encuentre la velocidad del avión sin viento, calcule también la velocidad del viento.



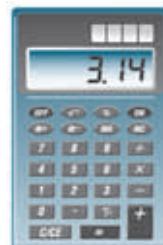
- 30. Velocidad de una balsa** Una balsa recorrió 10 millas aguas abajo durante media hora. El viaje de regreso tomó  $\frac{3}{4}$  de hora. Encuentre la velocidad de la balsa con el agua en calma, y calcule la velocidad de la corriente.

- 31. Venta de muebles** Un fabricante de comedores produce dos estilos: americano antiguo y contemporáneo. Por su experiencia, la gerencia ha determinado que pueden venderse 20% más comedores del estilo americano antiguo que del contemporáneo. Cada venta de un americano antiguo reporta una utilidad de \$250, mientras que se gana \$350 en cada contemporáneo. Si para el año próximo la gerencia desea una ganancia total de \$130 000, ¿cuántas unidades de cada estilo deben venderse?

- 32. Encuesta** A Encuestas Nacionales se le concedió un contrato para realizar una encuesta de preferencia de producto para Crispy Crackers. Un total de 250 personas fueron entrevistadas. La empresa contratada informó que a 62.5% más de las personas les gustaba Crispy Crackers que a las que no les gustaba. Sin embargo, el informe no indicó que el 16% de los entrevistados no había contestado. ¿A cuántas de las personas entrevistadas les gustó Crispy Crackers? ¿A cuántas no? ¿Cuántas no contestaron?

- 33. Costo de igualación** United Products Co. fabrica calculadoras y tiene plantas en las ciudades de Exton y Whyton. En Exton, los costos fijos son de \$7000 al mes, y el costo de producir cada calculadora es de \$7.50. En la planta de Whyton, los

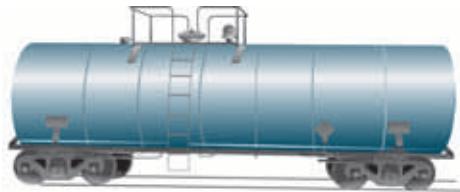
costos fijos ascienden a \$8800 al mes y la producción de cada artículo cuesta \$6.00. Para el mes que viene United Products necesita 1500 calculadoras. ¿Cuántas debe producir cada planta si el costo total en cada una debe ser el mismo?



- 34. Mezcla de café** Un comerciante de café mezcla tres tipos de granos que cuestan \$2.20, \$2.30 y \$2.60 por libra, para obtener 100 libras de café que vende a \$2.40 por libra. Si utiliza la misma cantidad de los dos cafés más caros, ¿cuánto de cada tipo debe utilizar en la mezcla?
- 35. Comisiones** Una compañía paga a sus agentes de ventas con base en un porcentaje de los primeros \$100 000 en ventas, más otro porcentaje sobre cualquier cantidad por encima de los \$100 000. Si un agente recibió \$8500 por ventas de \$175 000, y otro recibió \$14 800 por ventas de \$280 000, encuentre los dos porcentajes.
- 36. Utilidades anuales** En los informes financieros, es frecuente comparar las utilidades de una compañía en el año actual ( $T$ ) con las del año anterior ( $L$ ), pero no siempre se dan los valores reales de  $T$  y  $L$ . Este año una compañía tuvo una utilidad de \$25 millones más que el año pasado. Las utilidades fueron 30% mayores. A partir de estos datos determine  $T$  y  $L$ .
- 37. Empaque de frutas** La compañía de productos orgánicos Ilovetiny.com tiene 3600 libras de duraznos que debe empacar en cajas. La mitad de ellas se llenará con duraznos sueltos, cada una con 20 libras de fruta; las otras cajas se empacarán con ocho contenedores plásticos de apertura rápida, cada uno de los cuales contendrá 2.2 libras de durazno. Determine el número de cajas y el número de contenedores que se requerirán.
- 38. Inversiones** Una persona tiene dos inversiones, y el porcentaje de ganancia por año en cada una de ellas es el mismo. Del total de la cantidad invertida,  $\frac{3}{10}$  más \$600, se invirtieron en una empresa de riesgo. Al final de un año la persona recibió un rendimiento de \$384 de esa empresa. Si el rendimiento total después de un año fue de \$1120, encuentre la cantidad total invertida.
- 39. Corrida de producción** Una compañía produce tres tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones reclinables. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, en cantidades que se indican en la tabla siguiente. La compañía tiene en existencia 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1500 de aluminio. Para la corrida de fin de temporada, se quiere utilizar todo el inventario. Para hacer esto, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones deben fabricarse?

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón reclinable	1 unidad	2 unidades	5 unidades

- 40. Inversiones** Un total de \$35 000 se invirtieron a tres tasas de interés: 7, 8 y 9%. El interés en el primer año fue de \$2830, que no se reinvirtió. El segundo año la cantidad invertida originalmente al 9% ganó 10%, y las otras tasas permanecieron iguales. El interés total en el segundo año fue de \$2960. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa?
- 41. Contratación de trabajadores** Una compañía paga a sus trabajadores calificados \$16 por hora en su departamento de ensamblado. Los operadores semicalificados de ese departamento ganan \$9.50 por hora. Los empleados de envíos reciben \$10 por hora. A causa de un incremento en los pedidos, la compañía necesita contratar un total de 70 trabajadores en los departamentos de ensamblaje y envíos. Pagará un total de \$725 por hora a estos nuevos empleados. A causa de un contrato con el sindicato, deben emplearse el doble de trabajadores semicalificados que de trabajadores calificados. ¿Cuántos operadores semicalificados, calificados y empleados de envíos debe contratar la compañía?
- 42. Almacenamiento de un solvente** Un tanque de ferrocarril de 10 000 galones se llenará con solvente proveniente de dos



tanques de almacenamiento, *A* y *B*. El solvente de *A* se bombea a una tasa de 25 gal/min. El solvente *B* se bombea a una velocidad de 35 gal/min. Por lo general, ambas bombas operan al mismo tiempo. Sin embargo, a causa de un fusible fundido, la bomba en *A* dejó de funcionar durante 5 minutos. Las dos bombas terminaron de operar al mismo tiempo. ¿Cuántos galones de cada tanque de almacenamiento se utilizarán para llenar el tanque del ferrocarril?

- 43.** Verifique su respuesta al problema 1 con el uso de su calculadora graficadora.
- 44.** Verifique su respuesta al problema 11 con el uso de su calculadora graficadora.
- 45.** Resuelva gráficamente el sistema

$$\begin{cases} 0.24x - 0.34y = 0.04 \\ 0.11x + 0.21y = 0.75 \end{cases}$$

- 46.** Resuelva gráficamente el sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{1}{4}x + \frac{2}{5}y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Redondee los valores de *x* y *y* a dos decimales.

- 47.** Resuelva gráficamente el sistema

$$\begin{cases} 0.5736x - 0.3420y = 0 \\ 0.8192x + 0.9397y = 20 \end{cases}$$

Redondee los valores de *x* y *y* a un decimal.

## OBJETIVO

Utilizar la sustitución para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

## 3.5 Sistemas no lineales

Un sistema de ecuaciones en el que al menos una ecuación es no lineal se llama **sistema no lineal**. Con frecuencia, un sistema no lineal puede resolverse por sustitución, como se hizo con los sistemas lineales. Los ejemplos siguientes lo ilustran.

### EJEMPLO 1 Resolución de un sistema no lineal

Resuelva

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y - 7 = 0 & (1) \\ 3x - y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Solución:

**Estrategia** Si un sistema no lineal contiene una ecuación lineal, por lo general, se despeja una de las variables de la ecuación lineal y se sustituye esa variable en la otra ecuación.

Si se despeja *y* de la ecuación (2), se obtiene

$$y = 3x + 1 \quad (3)$$

Al sustituir en la ecuación (1) y simplificar, se obtiene

$$x^2 - 2x + (3x + 1) - 7 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x = -3 \text{ o } x = 2$$

Si *x* = −3, entonces la ecuación (3) implica que *y* = −8; si *x* = 2, entonces *y* = 7. Debe verificar que cada pareja de valores satisfaga el sistema dado. De aquí que las soluciones sean *x* = −3, *y* = −8 y *x* = 2, *y* = 7. La solución geométrica se presenta en la gráfica del sistema de la figura 3.38. Observe que la gráfica de la ecuación (1) es una parábola y la

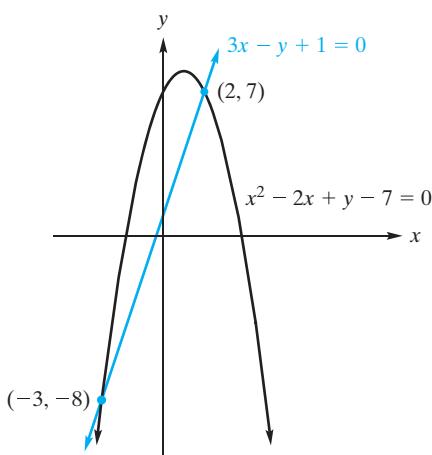


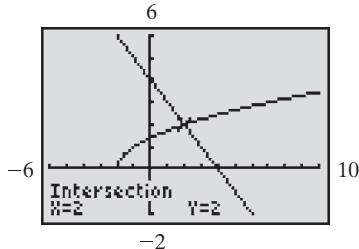
FIGURA 3.38 Sistema de ecuaciones no lineales.

de la ecuación (2) una recta. Las soluciones corresponden a los puntos de intersección  $(-3, -8)$  y  $(2, 7)$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

**ADVERTENCIA**

Este ejemplo ilustra la necesidad de verificar todas las "soluciones".



**FIGURA 3.39** Sistema no lineal del ejemplo 2.

**EJEMPLO 2 Resolución de un sistema no lineal**

Resuelva

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+2} \\ x + y = 4 \end{cases}$$

**Solución:** Al despejar  $y$  de la segunda ecuación, que es lineal, se obtiene

$$y = 4 - x \quad (4)$$

Después de sustituir en la primera ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} 4 - x &= \sqrt{x+2} \\ 16 - 8x + x^2 &= x + 2 \quad (\text{al elevar al cuadrado ambos lados}) \\ x^2 - 9x + 14 &= 0 \\ (x - 2)(x - 7) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $x = 2$  o  $x = 7$ . De la ecuación (4), si  $x = 2$ , entonces  $y = 2$ ; si  $x = 7$ , entonces  $y = -3$ . Como se realizó la operación de elevar al cuadrado en ambos lados, es necesario verificar los resultados. Aunque el par  $x = 2, y = 2$  satisface ambas ecuaciones originales, éste no es el caso para  $x = 7, y = -3$ . Por lo tanto, la solución es  $x = 2, y = 2$  (véase la figura 3.39).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

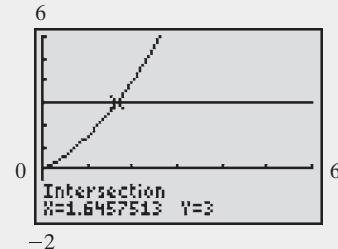
**TECNOLOGÍA**

Resuelva gráficamente la ecuación  $0.5x^2 + x = 3$ , donde  $x \geq 0$ .

**Solución:** Para resolver la ecuación, podrían encontrarse los ceros de la función  $f(x) = 0.5x^2 + x - 3$ . De manera alternativa, puede pensarse en este problema como la solución del sistema no lineal

$$\begin{aligned} y &= 0.5x^2 + x \\ y &= 3 \end{aligned}$$

En la figura 3.40, se estima que el punto de intersección es  $x = 1.65, y = 3$ . Observe que la gráfica de  $y = 3$  es una recta horizontal. La solución de la ecuación dada es  $x = 1.65$ .



**FIGURA 3.40** Solución de  $0.5x^2 + x = 3$ .

**Problemas 3.5**

En los problemas 1 a 14, resuelva el sistema no lineal dado.

\*1.  $\begin{cases} y = x^2 - 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

2.  $\begin{cases} y = x^3 \\ x - y = 0 \end{cases}$

3.  $\begin{cases} p^2 = 5 - q \\ p = q + 1 \end{cases}$

4.  $\begin{cases} y^2 - x^2 = 28 \\ x - y = 14 \end{cases}$

5.  $\begin{cases} x = y^2 \\ y = x^2 \end{cases}$

6.  $\begin{cases} p^2 - q + 1 = 0 \\ 5q - 3p - 2 = 0 \end{cases}$

7.  $\begin{cases} y = 4x - x^2 + 8 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$

8.  $\begin{cases} x^2 + 4x - y = -4 \\ y - x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$

9.  $\begin{cases} p = \sqrt{q} \\ p = q^2 \end{cases}$

10.  $\begin{cases} z = 4/w \\ 3z = 2w + 2 \end{cases}$

11.  $\begin{cases} x^2 = y^2 + 13 \\ y = x^2 - 15 \end{cases}$

12.  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 1 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

\*13.  $\begin{cases} x = y + 1 \\ y = 2\sqrt{x+2} \end{cases}$

14.  $\begin{cases} y = \frac{x^2}{x-1} + 1 \\ y = \frac{1}{x-1} \end{cases}$

15. **Decoraciones** La forma de una serpentina suspendida por encima de una pista de baile, puede describirse por medio de la función  $y = 0.01x^2 + 0.01x + 7$ , donde  $y$  es la altura a la que se encuentra la serpentina (en pies) por encima del piso, y  $x$  es la distancia horizontal (en pies) desde el centro del salón. Una cuerda descrita por medio de la función  $y = 0.01x + 8.0$ , y que

sujeta otra decoración toca a la serpentina. ¿En dónde toca la cuerda a la serpentina?

- 16. Marquesina** La forma de una marquesina decorativa sobre una fachada puede describirse por medio de la función  $y = 0.06x^2 + 0.012x + 8$ , donde  $y$  es la altura del borde de la marquesina (en pies) por encima de la acera, y  $x$  es la distancia (en pies) medida desde el centro del portal de la tienda. Un vándalo mete un palo a través de la marquesina y le hace dos perforaciones. La posición del palo puede describirse por medio de la función  $y = 0.912x + 5$ . ¿En qué parte de la marquesina están los agujeros que hizo el vándalo?

- 17.** Determine gráficamente cuántas soluciones tiene el sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

- 18.** Resuelva gráficamente el sistema

$$\begin{cases} 2y = x^3 \\ y = 8 - x^2 \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

- 19.** Resuelva gráficamente el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = x^3 + x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

- 20.** Resuelva gráficamente el sistema

$$\begin{cases} y = x^3 - x + 1 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

En los problemas 21 a 23, resuelva gráficamente la ecuación como si fuera un sistema. Redondee las respuestas a dos decimales.

- 21.**  $0.8x^2 + 2x = 6$  cuando  $x \geq 0$

- 22.**  $\sqrt{x+2} = 5 - x$

- 23.**  $x^3 - 3x^2 = x - 8$

## OBJETIVO

Resolver sistemas que describen situaciones de equilibrio y puntos de equilibrio.

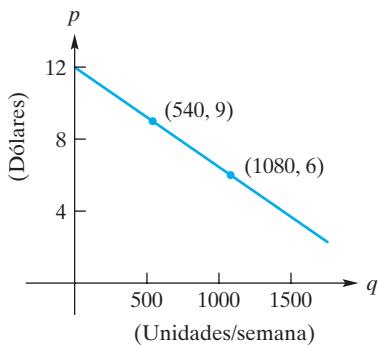


FIGURA 3.41 Curva de demanda.

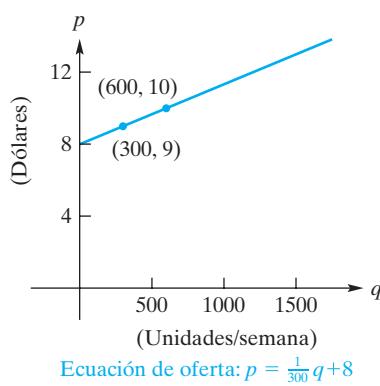


FIGURA 3.42 Curva de oferta.

## 3.6 Aplicaciones de sistemas de ecuaciones

### Equilibrio

Recuerde que en la sección 3.2 se expuso que una ecuación que relaciona el precio por unidad y la cantidad demandada (suministrada), se llama *ecuación de demanda (ecuación de oferta)*. Suponga que para un producto Z la ecuación de demanda es

$$p = -\frac{1}{180}q + 12 \quad (1)$$

y la ecuación de oferta es

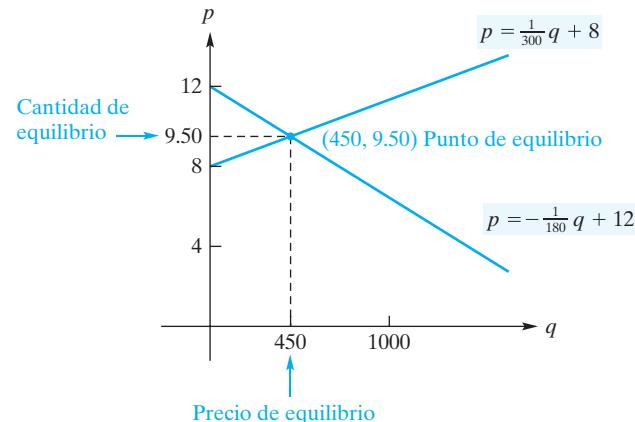
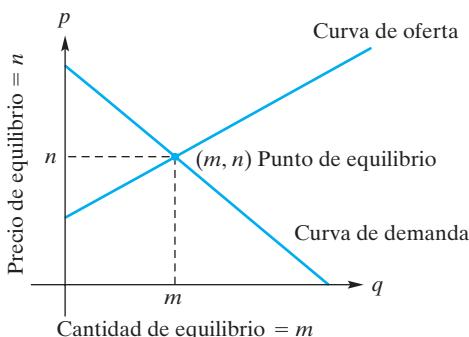
$$p = \frac{1}{300}q + 8 \quad (2)$$

donde  $q, p \geq 0$ . Las correspondientes curvas de demanda y oferta son las líneas de las figuras 3.41 y 3.42, respectivamente. Al analizar la figura 3.41, se observa que los clientes comprarán 540 unidades por semana cuando el precio sea \$9 por unidad, 1080 unidades cuando el precio sea \$6, y así sucesivamente. En la figura 3.42 se muestra que cuando el precio es de \$9 por unidad, los productores colocarán 300 unidades por semana en el mercado, a \$10 colocarán 600 unidades, y así sucesivamente.

Cuando las curvas de demanda y oferta de un producto se representan en el mismo plano de coordenadas, el punto  $(m, n)$  donde las curvas se intersecan se llama **punto de equilibrio** (vea la figura 3.43). El precio,  $n$ , llamado **precio de equilibrio**, es aquél al que los consumidores comprarán la misma cantidad que los productores ofrecen a ese precio. En pocas palabras,  $n$  es el precio en el que se da una estabilidad entre productor y consumidor. La cantidad  $m$  se llama **cantidad de equilibrio**.

Para determinar con precisión el punto de equilibrio, se resolverá el sistema formado por las ecuaciones de oferta y demanda. Esto se hará para los datos anteriores, es decir, el sistema

$$\begin{cases} p = -\frac{1}{180}q + 12 & \text{(ecuación de demanda)} \\ p = \frac{1}{300}q + 8 & \text{(ecuación de oferta)} \end{cases}$$



Al sustituir  $p$  por  $\frac{1}{300}q + 8$  en la ecuación de demanda, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{300}q + 8 &= -\frac{1}{180}q + 12 \\ \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{180}\right)q &= 4 \\ q &= 450 \quad (\text{cantidad de equilibrio})\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}p &= \frac{1}{300}(450) + 8 \\ &= 9.50 \quad (\text{precio de equilibrio})\end{aligned}$$

y el punto de equilibrio es  $(450, 9.50)$ . Por lo tanto, al precio de \$9.50 por unidad, los fabricantes producirían exactamente la cantidad (450) de unidades por semana que los consumidores comprarían a ese precio (vea la figura 3.44).

### EJEMPLO 1 Efecto de los impuestos sobre el equilibrio

Sea  $p = \frac{8}{100}q + 50$  la ecuación de oferta para el producto de un fabricante y suponga que la ecuación de demanda es  $p = -\frac{7}{100}q + 65$ .

- a. Si se cobra al fabricante un impuesto de \$1.50 por unidad, ¿cómo se afectará el precio de equilibrio original si la demanda permanece igual?

**Solución:** Antes del impuesto, el precio de equilibrio se obtiene al resolver el sistema

$$\begin{cases} p = \frac{8}{100}q + 50 \\ p = -\frac{7}{100}q + 65 \end{cases}$$

Por sustitución,

$$\begin{aligned}-\frac{7}{100}q + 65 &= \frac{8}{100}q + 50 \\ 15 &= \frac{15}{100}q \\ 100 &= q\end{aligned}$$

y

$$p = \frac{8}{100}(100) + 50 = 58$$

Por lo tanto, \$58 es el precio de equilibrio original. Antes del impuesto el fabricante ofrecía  $q$  unidades a un precio de  $p = \frac{8}{100}q + 50$  por unidad. Despues del impuesto venderá las mismas  $q$  unidades con el \$1.50 adicional por unidad. El precio por unidad será  $\left(\frac{8}{100}q + 50\right) + 1.50$ , de modo que la nueva ecuación de oferta es

$$p = \frac{8}{100}q + 51.50$$

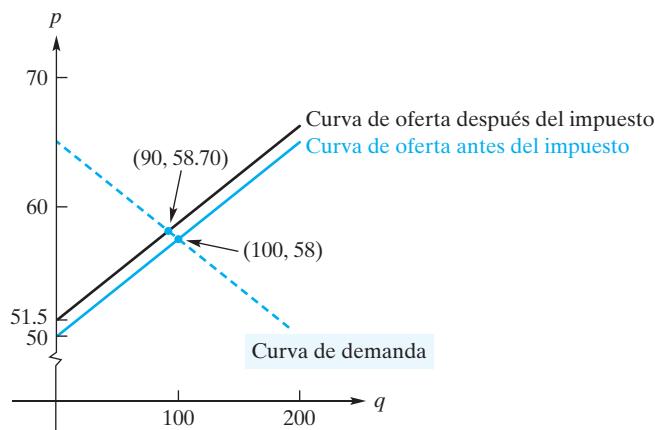
La resolución del sistema

$$\begin{cases} p = \frac{8}{100}q + 51.50 \\ p = -\frac{7}{100}q + 65 \end{cases}$$

dará el nuevo precio de equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{8}{100}q + 51.50 &= -\frac{7}{100}q + 65 \\ \frac{15}{100}q &= 13.50 \\ q &= 90 \\ p &= \frac{8}{100}(90) + 51.50 = 58.70 \end{aligned}$$

El impuesto de \$1.50 por unidad incrementó el precio de equilibrio en \$0.70 (vea la figura 3.45). Observe que también existe una disminución en la cantidad de equilibrio, de  $q = 100$  a  $q = 90$ , a causa del cambio en el precio de equilibrio. (En los problemas se le pide que determine el efecto de un subsidio dado al fabricante, lo cual reducirá el precio del producto.)



**FIGURA 3.45** Equilibrio antes y después del impuesto.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



- b. Determinar el ingreso total obtenido por el fabricante en el punto de equilibrio antes y después del impuesto.

**Solución:** Si se venden  $q$  unidades de un producto a un precio de  $p$  dólares cada una, entonces el ingreso total está dado por

$$y_{TR} = pq$$

Antes del impuesto, el ingreso en (100, 58) es (en dólares)

$$y_{TR} = (58)(100) = 5800$$

Después del impuesto es

$$y_{TR} = (58.70)(90) = 5283$$

que es una disminución.



### EJEMPLO 2 Equilibrio con demanda no lineal

Encuentre el punto de equilibrio si las ecuaciones de oferta y demanda de un producto son  $p = \frac{q}{40} + 10$  y  $p = \frac{8000}{q}$ , respectivamente.

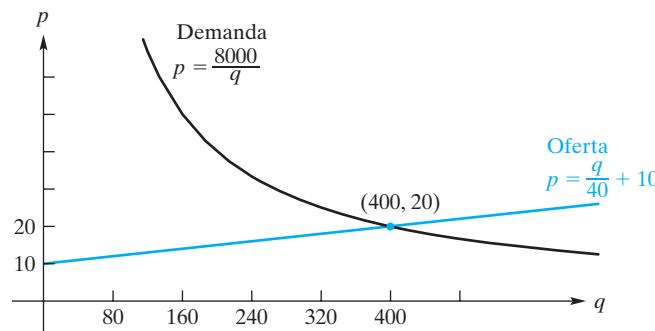
**Solución:** Aquí la ecuación de demanda no es lineal. Al resolver el sistema

$$\begin{cases} p = \frac{q}{40} + 10 \\ p = \frac{8000}{q} \end{cases}$$

por sustitución se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{8000}{q} &= \frac{q}{40} + 10 && \text{(al multiplicar ambos lados por } 40q\text{)} \\ 320\,000 &= q^2 + 400q \\ q^2 + 400q - 320\,000 &= 0 \\ (q + 800)(q - 400) &= 0 \\ q = -800 \quad \text{o} \quad q &= 400 \end{aligned}$$

Se descarta  $q = -800$ , puesto que  $q$  representa una cantidad. Al elegir  $q = 400$ , se tiene  $p = (8000/400) = 20$ , de modo que el punto de equilibrio es (400, 20). (Vea la figura 3.46.)



**FIGURA 3.46** Equilibrio con demanda no lineal.



### Puntos de equilibrio

Suponga que un fabricante produce un producto A y lo vende a \$8 por unidad. Entonces, el ingreso total  $y_{TR}$  recibido (en dólares) de la venta de  $q$  unidades es

$$y_{TR} = 8q \quad \text{(ingreso total)}$$

La diferencia entre el ingreso total recibido por  $q$  unidades y el costo total de  $q$  unidades, es la utilidad del fabricante (o su pérdida, si es negativa):

$$\text{utilidad (o pérdida)} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

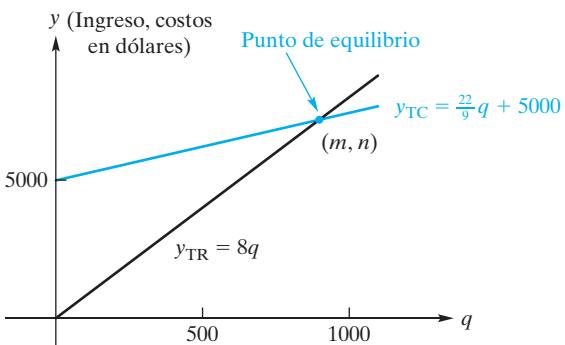


FIGURA 3.47 Gráfica de equilibrio.

El **costo total**,  $y_{TC}$ , es la suma de los costos totales variables  $y_{VC}$ , y los costos totales fijos  $y_{FC}$ :

$$y_{TC} = y_{VC} + y_{FC}$$

Los **costos fijos** son aquellos que, bajo condiciones normales, no dependen del nivel de producción; es decir, en algún periodo permanecen constantes en todos los niveles de producción (ejemplos son la renta, el salario de los oficinistas y el mantenimiento). Los **costos variables** son los que cambian con el nivel de producción (como el costo de materiales, mano de obra, mantenimiento debido al uso y desgaste, etcétera). Suponga que, para  $q$  unidades de producto A,

$$y_{FC} = 5000 \quad (\text{costo fijo})$$

$$y_{VC} = \frac{22}{9}q \quad (\text{costo variable})$$

Entonces

$$y_{TC} = \frac{22}{9}q + 5000 \quad (\text{costo total})$$

En la figura 3.47 se presentan las gráficas del costo total y del ingreso total. El eje horizontal representa el nivel de producción,  $q$ , y el eje vertical representa el valor total, en dólares, del ingreso o del costo. El **punto de equilibrio** es donde el ingreso total es igual al costo total ( $TR = TC$ ). Ocurre cuando los niveles de producción y de ventas tienen como resultado cero pérdidas y cero utilidades. En el diagrama llamado *gráfica del punto de equilibrio* se localiza el punto  $(m, n)$ , en el que las gráficas de  $y_{TR} = 8q$  y  $y_{TC} = \frac{22}{9}q + 5000$  se intersecan. Se llama a  $m$  la **cantidad de equilibrio** y a  $n$  el **ingreso de equilibrio**. Cuando el costo total y el ingreso total están relacionados de manera lineal con la producción, como es este caso, para cualquier nivel de producción mayor que  $m$ , el ingreso total es mayor que el costo total, lo que resulta en una utilidad. Sin embargo, en cualquier nivel menor de  $m$  unidades, el ingreso total es menor que el costo total, lo que resulta en una pérdida. Para una producción de  $m$  unidades la utilidad es cero. En el ejemplo siguiente se examinarán los datos con mayor detalle.

### EJEMPLO 3 Punto de equilibrio, utilidad y pérdida

Un fabricante vende un producto a \$8 por unidad, y vende todo lo que produce. El costo fijo es de \$5000 y el variable es de  $\frac{22}{9}$  (dólares) por unidad.

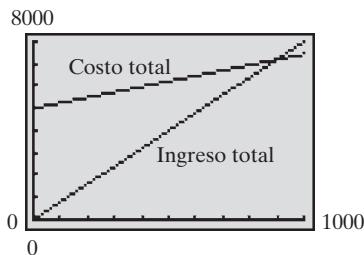
- a. Encuentre la producción y el ingreso total en el punto de equilibrio.

**Solución:** A un nivel de producción de  $q$  unidades, el costo variable es  $y_{VC} = \frac{22}{9}q$  y el ingreso total es  $y_{TR} = 8q$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y_{TR} &= 8q \\ y_{TC} &= y_{VC} + y_{FC} = \frac{22}{9}q + 5000 \end{aligned}$$

En el punto de equilibrio, el ingreso total es igual al costo total. Ahora se resuelve el sistema formado por las ecuaciones anteriores. Como

$$y_{TR} = y_{TC}$$



**FIGURA 3.48** Punto de equilibrio (900, 7200).

Se tiene

$$\begin{aligned} 8q &= \frac{22}{9}q + 5000 \\ \frac{50}{9}q &= 5000 \\ q &= 900 \end{aligned}$$

Así que la producción deseada es de 900 unidades, lo que resulta en un ingreso total (en dólares) de

$$y_{TR} = 8(900) = 7200$$

(Vea la figura 3.48.)

- b.** Encuentre la utilidad cuando se producen 1800 unidades.

**Solución:** Como utilidad = ingreso total – costo total, cuando  $q = 1800$ , se tiene

$$\begin{aligned} y_{TR} - y_{TC} &= 8(1800) - \left[ \frac{22}{9}(1800) + 5000 \right] \\ &= 5000 \end{aligned}$$

La utilidad cuando se producen y se venden 1800 unidades es de \$5000.

- c.** Encuentre la pérdida cuando se producen 450 unidades.

**Solución:** Cuando  $q = 450$ ,

$$y_{TR} - y_{TC} = 8(450) - \left[ \frac{22}{9}(450) + 5000 \right] = -2500$$

Cuando el nivel de producción es de 450 unidades, ocurre una pérdida de \$2500.

- d.** Encuentre la producción requerida para obtener una utilidad de \$10 000.

**Solución:** Para obtener una utilidad de \$10 000, se tiene

$$\begin{aligned} \text{utilidad} &= \text{ingreso total} - \text{costo total} \\ 10\,000 &= 8q - \left( \frac{22}{9}q + 5000 \right) \\ 15\,000 &= \frac{50}{9}q \\ q &= 2700 \end{aligned}$$

Por lo tanto, deben producirse 2700 unidades.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



#### EJEMPLO 4 Cantidad de equilibrio

Determine la cantidad de equilibrio de XYZ Manufacturing Co. dada la información siguiente: costo fijo total, \$1200; costo variable unitario, \$2; ingreso total por vender  $q$  unidades,  $y_{TR} = 100\sqrt{q}$ .

**Solución:** Para  $q$  unidades de producción,

$$y_{TR} = 100\sqrt{q}$$

$$y_{TC} = 2q + 1200$$

Después de igualar el ingreso total al costo total, se obtiene

$$100\sqrt{q} = 2q + 1200$$

$$50\sqrt{q} = q + 600 \quad (\text{al dividir ambos lados entre } 2)$$

Si se elevan al cuadrado ambos lados, resulta

$$2500q = q^2 + 1200q + (600)^2$$

$$0 = q^2 - 1300q + 360\,000$$

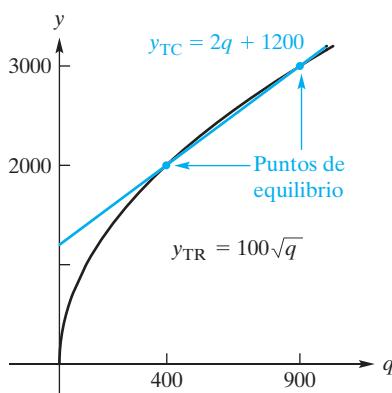


FIGURA 3.49 Dos puntos de equilibrio.

Por medio de la fórmula cuadrática,

$$q = \frac{1300 \pm \sqrt{250\,000}}{2}$$

$$q = \frac{1300 \pm 500}{2}$$

$$q = 400 \quad \text{o} \quad q = 900$$

Aunque tanto  $q = 400$ , como  $q = 900$  son cantidades de equilibrio, observe en la figura 3.49 que cuando  $q > 900$ , el costo total es mayor que el ingreso total, de modo que siempre se tendrá una pérdida. Esto ocurre porque aquí el ingreso total no está relacionado linealmente con la producción. Por lo tanto, producir más de la cantidad de equilibrio no necesariamente garantiza una utilidad.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13



## Problemas 3.6

En los problemas 1 a 8 se proporciona una ecuación de oferta y una de demanda para un producto. Si  $p$  representa el precio por unidad en dólares y  $q$  el número de unidades por unidad de tiempo, encuentre el punto de equilibrio. En los problemas 1 y 2, bosqueje el sistema.

1. Oferta:  $p = \frac{4}{100}q + 3$ , Demanda:  $p = -\frac{6}{100}q + 13$
2. Oferta:  $p = \frac{1}{1500}q + 4$ , Demanda:  $p = -\frac{1}{2000}q + 9$
3. Oferta:  $35q - 2p + 250 = 0$ , Demanda:  $65q + p - 537.5 = 0$
4. Oferta:  $246p - 3.25q - 2460 = 0$ , Demanda:  $410p + 3q - 14\,452.5 = 0$
5. Oferta:  $p = 2q + 20$ , Demanda:  $p = 200 - 2q^2$
6. Oferta:  $p = (q + 10)^2$ , Demanda:  $p = 388 - 16q - q^2$
7. Oferta:  $p = \sqrt{q + 10}$ , Demanda:  $p = 20 - q$
8. Oferta:  $p = \frac{1}{4}q + 6$ , Demanda:  $p = \frac{2240}{q + 12}$

En los problemas 9 a 14  $y_{TR}$  representa el ingreso total en dólares y  $y_{TC}$  el costo total en dólares para un fabricante. Si  $q$  representa tanto el número de unidades producidas como el número de unidades vendidas, encuentre la cantidad de equilibrio. En los problemas 9 y 10 bosqueje un diagrama de equilibrio.

- |  |   |
|--|---|
| *9. $y_{TR} = 4q$<br>$y_{TC} = 2q + 5000$                      | 10. $y_{TR} = 14q$<br>$y_{TC} = \frac{40}{3}q + 1200$ |
| 11. $y_{TR} = 0.05q$<br>$y_{TC} = 0.85q + 600$                 | 12. $y_{TR} = 0.25q$<br>$y_{TC} = 0.16q + 360$        |
| *13. $y_{TR} = 90 - \frac{900}{q+3}$<br>$y_{TC} = 1.1q + 37.3$ | 14. $y_{TR} = 0.1q^2 + 9q$<br>$y_{TC} = 3q + 400$     |

- \*15. **Negocios** Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son

$$3q - 200p + 1800 = 0$$

y

$$3q + 100p - 1800 = 0$$

respectivamente, donde  $p$  representa el precio por unidad en dólares y  $q$  el número de unidades vendidas por periodo.

- Encuentre algebraicamente el precio de equilibrio y dedúzcalo mediante una gráfica.
- Encuentre el precio de equilibrio cuando se fija un impuesto de 27 centavos por unidad al proveedor.

16. **Negocios** Un fabricante vende todo lo que produce. Su ingreso total está dado por  $y_{TR} = 7q$  y el costo total por  $y_{TC} = 6q + 800$ , donde  $q$  representa el número de unidades producidas y vendidas.

- Encuentre el nivel de producción en el punto de equilibrio y dibuje la gráfica de equilibrio.
- Encuentre el nivel de producción en el punto de equilibrio, si el costo total se incrementa en 5%.

17. **Negocios** Un fabricante vende un producto a \$8.35 por unidad, y vende todo lo que produce. Los costos fijos son de \$2116 y el costo variable es de \$7.20 por unidad. ¿A qué nivel de producción existirán utilidades de \$4600? ¿A qué nivel de producción habrá una pérdida de \$1150? ¿A qué nivel se alcanza el punto de equilibrio?

18. **Negocios** Se logra el punto de equilibrio de mercado para un producto cuando se producen 13 500 unidades a un precio de \$4.50 por unidad. El productor no proveerá unidades a \$1 y el consumidor no demandará unidades a \$20. Encuentre las ecuaciones de oferta y demanda si ambas son lineales.

19. **Negocios** Un fabricante de juguetes para niños alcanzará el punto de equilibrio en un volumen de ventas de \$200 000. Los costos fijos son de \$40 000 y cada unidad de producción se vende a \$5. Determine el costo variable por unidad.

20. **Negocios** La Bigfoot Sandals Co. fabrica sandalias cuyo material cuesta \$0.85 por par; el costo de mano de obra es de \$0.96 por par. Hay costos variables adicionales de \$0.32 por par. Los costos fijos son de \$70 500. Si cada par se vende a \$2.63, ¿cuántos pares deben venderse para que la compañía llegue al equilibrio?



21. **Negocios** Encuentre el punto de equilibrio para la compañía X, que vende todo lo que produce, si el costo variable por unidad es de \$3, los costos fijos de \$1250 y  $y_{TR} = 60\sqrt{q}$ , donde  $q$  es el número de unidades producidas.

**22. Negocios** Una compañía determinó que la ecuación de demanda para su producto es  $p = 1000/q$ , donde  $p$  es el precio por unidad para  $q$  unidades en algún periodo. Determine la cantidad demandada cuando el precio por unidad es (a) \$4, (b) \$2 y (c) \$0.50. Calcule el ingreso total que la compañía recibirá para cada uno de estos precios. ¿Cuál será el ingreso sin importar el precio? (*Una pista:* Encuentre el ingreso cuando el precio es  $p$  dólares.)

**23. Negocios** Utilice los datos del ejemplo 1, para determinar cómo se afectará el precio de equilibrio original, si la compañía recibe un subsidio del gobierno de \$1.50 por unidad.

**24. Negocios** La compañía Monroe Forging vende un producto de acero corrugado a Standard Manufacturing, y compite con otros proveedores por estas ventas. El vicepresidente de ventas de Monroe cree que reduciendo el precio del producto se podría asegurar un 40% de incremento en el volumen de unidades vendidas a Standard Manufacturing. Como gerente del departamento de costos y análisis, a usted se le ha consultado para que analice la propuesta del vicepresidente y la recomiende en caso de ser benéfica desde un punto de vista financiero. Se le pide que determine específicamente lo siguiente:

- (a) Ganancia o pérdida neta con base en el precio propuesto.
- (b) Volumen de ventas de unidades que se requieren, bajo el precio propuesto, para obtener las mismas utilidades de \$40 000 que se reciben con el precio y volumen de ventas actuales.

Utilice la siguiente información en su análisis:

	Operaciones actuales	Propuesta del vice-presidente de ventas
Precio unitario	\$2.5	\$2.00
Volumen de ventas	200 000 unidades	280 000 unidades
Costo variable		
Total	\$350 000	\$490 000
Por unidad	\$1.75	\$1.75
Costo fijo	\$110 000	\$110 000
Ganancia	\$40 000	?

**25. Negocios** Suponga que los productos A y B tienen ecuaciones de demanda y oferta que están relacionadas entre sí. Si  $q_A$  y  $q_B$  son las cantidades producidas y vendidas de A y B, respectivamente, y  $p_A$  y  $p_B$  sus respectivos precios, las ecuaciones de demanda son

$$q_A = 7 - p_A + p_B$$

y

$$q_B = 24 + p_A - p_B$$

y las ecuaciones de oferta son

$$q_A = -3 + 4p_A - 2p_B$$

y

$$q_B = -5 - 2p_A + 4p_B$$

Elimine  $q_A$  y  $q_B$  para obtener los precios de equilibrio.

**26. Negocios** La ecuación de oferta para un producto es

$$p = 0.4q^2 + 15.2$$

y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{36.1}{1 + 0.4q}$$

Aquí  $p$  representa el precio por unidad en dólares, y  $q$  el número de unidades (en miles) por unidad de tiempo. Grafique ambas ecuaciones y, a partir de su gráfica, determine el precio y la cantidad de equilibrio a un decimal.

**27. Negocios** Para un fabricante la ecuación de ingreso total es

$$y_{TR} = 20.5\sqrt{q + 4} - 41$$

y la ecuación de costo total es

$$y_{TC} = 0.02q^3 + 10.4$$

donde  $q$  representa (en miles) tanto el número de unidades producidas como el de unidades vendidas. Trace una gráfica de equilibrio y encuentre la cantidad de equilibrio.

## 3.7 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

#### Sección 3.1

##### Rectas

pendiente de una recta forma punto-pendiente  
ecuación lineal general en  $x$  y  $y$  relación lineal

forma pendiente-intersección

Ej. 1, p. 118

Ej. 7, p. 121

#### Sección 3.2

##### Aplicaciones y funciones lineales

ecuación de demanda curva de demanda  
función lineal

ecuación de oferta curva de oferta

Ej. 2, p. 126

Ej. 3, p. 127

#### Sección 3.3

##### Funciones cuadráticas

función cuadrática parábola

eje de simetría

Ej. 1, p. 132

#### Sección 3.4

##### Sistemas de ecuaciones lineales

sistema de ecuaciones sistemas equivalentes

eliminación por adición

Ej. 1, p. 140

eliminación por sustitución parámetro

Ej. 3, p. 142

ecuación lineal general en  $x$ ,  $y$  y  $z$

Ej. 5, p. 144

#### Sección 3.5

##### Sistemas no lineales

sistema no lineal

Ej. 1, p. 148

**Sección 3.6****Aplicaciones de sistemas de ecuaciones**

punto de equilibrio	precio de equilibrio	cantidad de equilibrio
punto de equilibrio	cantidad de equilibrio	ingreso de equilibrio

Ej. 1, p. 151

Ej. 3, p. 154

**Resumen**

La orientación de una recta no vertical está caracterizada por su pendiente, la cual está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

donde  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  son dos puntos diferentes sobre la recta. La pendiente de una recta vertical no está definida, y la pendiente de una recta horizontal es cero. Las rectas que ascienden tienen pendiente positiva; las rectas que descenden tienen pendiente negativa. Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o son verticales. Dos rectas con pendientes  $m_1$  y  $m_2$  son perpendiculares entre sí, si y sólo si  $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ . Una recta horizontal y una vertical son perpendiculares entre sí.

Las formas básicas de las ecuaciones de rectas son las siguientes:

$y - y_1 = m(x - x_1)$	(forma punto-pendiente)
$y = mx + b$	(forma pendiente-intersección)
$x = a$	(recta vertical)
$y = b$	(recta horizontal)
$Ax + By + C = 0$	(general)

La función lineal

$$f(x) = ax + b (a \neq 0)$$

tiene como gráfica una línea recta.

**Problemas de repaso**

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

- La pendiente de la recta que pasa por  $(2, 5)$  y  $(3, k)$  es 4. Encuentre  $k$ .
- La pendiente de la recta que pasa por  $(5, 4)$  y  $(k, 4)$  es 0. Encuentre  $k$ .

En los problemas 3 a 9, determine la forma pendiente-intersección y una forma general de una ecuación de la recta que tiene las propiedades indicadas.

- Pasa por  $(-2, 3)$  y tiene intersección y igual a  $-1$
- Pasa por  $(-1, -1)$  y es paralela a la recta  $y = 3x - 4$
- Pasa por  $(10, 4)$  y tiene pendiente  $\frac{1}{2}$
- Pasa por  $(3, 5)$  y es vertical
- Pasa por  $(-2, 4)$  y es horizontal
- Pasa por  $(1, 2)$  y es perpendicular a la recta  $-3y + 5x = 7$
- Tiene intersección y igual a  $-3$  y es perpendicular a  $2y + 5x = 2$ .
- Determine si el punto  $(3, 13)$  pertenece a la recta que pasa por  $(1, 8)$  y  $(-1, 2)$ .

Determine si las rectas de los problemas 11 a 16 son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

- $x + 4y + 2 = 0$ ,  $8x - 2y - 2 = 0$
- $y - 2 = 2(x - 1)$ ,  $2x + 4y - 3 = 0$

En economía, las funciones de oferta y demanda tienen la forma  $p = f(q)$  y juegan un papel importante. Cada una proporciona una correspondencia entre el precio  $p$  de un producto, y el número de unidades  $q$  del producto que los fabricantes (o consumidores) ofrecerán (o comprarán) a ese precio durante algún periodo.

Una función cuadrática tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Su gráfica es una parábola que se abre hacia arriba si  $a > 0$  y hacia abajo si  $a < 0$ . El vértice es

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

y  $c$  es la intersección  $y$ . El eje de simetría, así como las intersecciones  $x$  y  $y$  son útiles para hacer el bosquejo de la gráfica.

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse con los métodos de eliminación por adición y eliminación por sustitución. Una solución puede incluir uno o más parámetros. La sustitución también es útil en la solución de sistemas no lineales.

La resolución de un sistema formado por las ecuaciones de oferta y demanda para un producto proporciona el punto de equilibrio, que indica el precio al que los clientes comprarán la misma cantidad de un producto que los productores desean vender a ese precio.

Las utilidades son el ingreso total menos el costo total, donde el costo total es la suma de los costos fijos y los costos variables. El punto de equilibrio es el punto donde el ingreso total iguala al costo total.

$$13. x - 3 = 2(y + 4), \quad y = 4x + 2$$

$$14. 2x + 7y - 4 = 0, \quad 6x + 21y = 90$$

$$15. y = 3x + 5, \quad 6x - 2y = 7$$

$$16. y = 7x, \quad y = 7$$

Escriba cada recta de los problemas 17 a 20 en la forma pendiente-intersección y haga un bosquejo de su gráfica. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

$$17. 3x - 2y = 4$$

$$18. x = -3y + 4$$

$$19. 4 - 3y = 0$$

$$20. y = 2x$$

En los problemas 21 a 30, grafique cada función. Para las funciones que sean lineales, también obtenga la pendiente y la intersección con el eje vertical. Para las cuadráticas proporcione todas las intersecciones y el vértice.

$$21. y = f(x) = 17 - 5x$$

$$22. s = g(t) = 5 - 3t + t^2$$

$$23. y = f(x) = 9 - x^2$$

$$24. y = f(x) = 3x - 7$$

$$25. y = h(t) = t^2 - 4t - 5$$

$$26. y = k(t) = -3 - 3t$$

$$27. p = g(t) = -7t$$

$$28. y = F(x) = (2x - 1)^2$$

$$29. y = F(x) = -(x^2 + 2x + 3) \quad 30. y = f(x) = \frac{x}{3} - 2$$

Resuelva el sistema dado en los problemas 31 a 44.

$$31. \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} 8x - 4y = 7 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 7x + 5y = 5 \\ 6x + 5y = 3 \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$$

35. 
$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y = -4 \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 8 \end{cases}$$

37. 
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -2 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

39. 
$$\begin{cases} x^2 - y + 5x = 2 \\ x^2 + y = 3 \end{cases}$$

41. 
$$\begin{cases} x + 2z = -2 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

43. 
$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

45. Suponga que  $a$  y  $b$  están relacionadas linealmente, de modo que  $a = 1$  cuando  $b = 2$ , y  $a = 5$  cuando  $b = 3$ . Encuentre una forma lineal general de una ecuación que relacione  $a$  y  $b$ . También encuentre  $a$  cuando  $b = 5$ .

46. **Temperatura y frecuencia cardiaca** Cuando disminuye la temperatura  $T$  (en grados Celsius) de un gato, su frecuencia cardiaca  $r$  (en latidos por minuto) se reduce. Bajo condiciones de laboratorio, un gato que presenta una temperatura de  $36^\circ\text{C}$  tuvo una frecuencia cardiaca de 206, y a una temperatura de  $30^\circ\text{C}$  su frecuencia cardiaca fue de 122. Si  $r$  se relaciona linealmente con  $T$ , donde  $T$  está entre 26 y 38, (a) determine una ecuación para  $r$  en términos de  $T$ , y (b) determine la frecuencia cardiaca del gato a una temperatura de  $27^\circ\text{C}$ .



47. Suponga que  $f$  es una función lineal tal que  $f(1) = 5$ , y  $f(x)$  disminuye 4 unidades por cada incremento de 3 unidades en  $x$ . Encuentre  $f(x)$ .

48. Si  $f$  es una función lineal tal que  $f(-1) = 8$  y  $f(2) = 5$ , encuentre  $f(x)$ .

49. **Ingreso máximo** La función de demanda para el fabricante de un producto es  $p = f(q) = 200 - 2q$ , donde  $p$  es el precio (en dólares) por unidad cuando se demandan  $q$  unidades. Encuentre el nivel de producción que maximiza el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

50. **Impuesto sobre ventas** La diferencia en el precio de dos artículos antes de pagar un impuesto sobre la venta de 5% es de \$3.50. La diferencia en el precio después del impuesto es de \$4.10. Demuestre que no es posible que exista la situación que se acaba de describir.

51. **Precio de equilibrio** Si las ecuaciones de oferta y demanda de cierto producto son  $120p - q - 240 = 0$  y  $100p + q - 1200 = 0$ , respectivamente, encuentre el precio de equilibrio.

52. **Psicología** En psicología el término *memoria semántica* se refiere al conocimiento del significado y de la relación entre las palabras, así como a los medios a través de los cuales se almacena y se recupera tal información.<sup>6</sup> En un modelo que representa la red de memoria semántica, existe una jerarquización de los niveles en los que se almacena la información. En un experimento de Collins y Quillian,

36. 
$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{12} \\ \frac{4}{3}x + 3y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

38. 
$$\begin{cases} 2x + \frac{3y + x}{3} = 9 \\ y + \frac{5x + 2y}{4} = 7 \end{cases}$$

40. 
$$\begin{cases} y = \frac{18}{x+4} \\ x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

42. 
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

44. 
$$\begin{cases} 2x - 5y + 6z = 1 \\ 4x - 10y + 12z = 2 \end{cases}$$

basado en un modelo de red, se obtuvieron datos sobre el tiempo de reacción para responder a preguntas sencillas acerca de sustantivos. La gráfica de los resultados muestra que en promedio, el tiempo de reacción  $R$  (en milisegundos) es una función lineal del nivel,  $L$ , en el que una propiedad característica del sustantivo es almacenada. En el nivel 0, el tiempo de reacción es de 1310; en el nivel 2 el tiempo de reacción es de 1460. (a) Encuentre la función lineal. (b) Encuentre el tiempo de reacción en el nivel 1. (c) Encuentre la pendiente y determine su significado.

53. **Punto de equilibrio** Un fabricante de cierto producto vende todo lo que produce. Determine el punto de equilibrio, si el producto se vende a \$16 por unidad, el costo fijo es \$10 000 y el costo variable está dado por  $y_{VC} = 8q$ , donde  $q$  es el número de unidades producidas ( $y_{VC}$  se expresa en dólares).

54. **Conversión de temperatura** La temperatura Celsius,  $C$ , es una función lineal de la temperatura Fahrenheit,  $F$ . Use el hecho de que  $32^\circ\text{F}$  es igual a  $0^\circ\text{C}$  y que  $212^\circ\text{F}$  es igual a  $100^\circ\text{C}$  para encontrar esta función. También encuentre  $C$  cuando  $F = 50$ .



55. **Contaminación** En una provincia de una nación en vías de desarrollo, la contaminación del agua se analiza con el empleo de un modelo de oferta-demanda. La *ecuación de oferta ambiental*  $L = 0.0183 - \frac{0.0042}{p}$  describe el gravamen por tonelada,  $L$  (en dólares), como una función de la contaminación total,  $p$  (en toneladas por kilómetro cuadrado), para  $p \geq 0.2295$ .

La *ecuación de demanda ambiental*,  $L = 0.0005 + \frac{0.0378}{p}$  describe el costo por tonelada de disminución, como una función de la contaminación total para  $p > 0$ . Encuentre el nivel de equilibrio de la contaminación total a dos decimales.<sup>7</sup>

56. Resuelva gráficamente el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x + 4y = 20 \\ 7x + 5y = 64 \end{cases}$$

57. Resuelva gráficamente el sistema lineal

$$\begin{cases} 0.3x - 0.4y = 2.5 \\ 0.5x + 0.7y = 3.1 \end{cases}$$

Redondee  $x$  y  $y$  a dos decimales.

58. Resuelva gráficamente el sistema no lineal

$$\begin{cases} y = \frac{3}{7x} \quad \text{donde } x > 0 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$$

Redondee  $x$  y  $y$  a dos decimales.

59. Resuelva gráficamente el sistema no lineal

$$\begin{cases} y = x^3 + 1 \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$

Redondee  $x$  y  $y$  a dos decimales.

60. Resuelva gráficamente la ecuación

$$x^2 + 4 = x^3 - 3x$$

como si fuera un sistema. Redondee  $x$  a dos decimales.

<sup>6</sup>Vea Hua Wang y David Wheeler, "Pricing Industrial Pollution in China: An Economic Analysis of the Levy System", World Bank Policy Research Working Paper #1644, septiembre de 1996.

<sup>6</sup>G. R. Loftus y E. F. Loftus, *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Laurence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley and Sons, Inc., 1976).

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Planes de cobro en telefonía celular

La selección de un plan de telefonía celular puede ser bastante difícil. En la mayoría de las áreas urbanas existen muchos proveedores del servicio, cada uno de los cuales ofrece varios planes. Sus ofertas incluyen tarifas de accesos mensuales, minutos gratis, cobros por tiempo aire adicional, tarifas por *roaming* regional, por *roaming* nacional, por horas pico y horas no pico, y tarifas por larga distancia (sin mencionar costos por activación, gastos por cancelación y cargos de este tipo). Incluso si un consumidor tiene un muy buen conocimiento del uso típico que hace de su teléfono celular, debe realizar docenas de cálculos para estar absolutamente seguro de haber hecho el mejor trato.

Con frecuencia, el modelado matemático implica tomar decisiones, sustentadas en información, que aclaren cuáles factores de un problema son los menos importantes. Más tarde podrán ser pasados por alto para obtener una solución aproximada razonablemente buena —en un tiempo sensato. Quizá haya escuchado la expresión “simplificación de supuestos”. Existen muchas bromas acerca de este proceso. Por ejemplo, un apostador con mente matemática que está tratando de calcular las ventajas de los caballos de cierta carrera tal vez no debería asumir que todos los caballos son perfectamente esféricos. Aquí se simplificará la comparación entre los planes de telefonía celular al considerar sólo el número de “minutos tiempo aire locales por mes” disponible para la “cuenta de acceso mensual” y el precio por minuto de “minutos adicionales”. Muchos proveedores ofrecen planes en términos de estos parámetros básicos.

Al examinar las ofertas de Verizon para el área de Saddle River, Nueva Jersey, en la primavera de 2006, se encontraron los siguientes planes mensuales.

$P_1$ : 450 minutos por \$39.99 más \$0.45 por minuto adicional  
 $P_2$ : 900 minutos por \$59.99 más \$0.40 por minuto adicional  
 $P_3$ : 1350 minutos por \$79.99 más \$0.35 por minuto adicional  
 $P_4$ : 2000 minutos por \$99.99 más \$0.25 por minuto adicional  
 $P_5$ : 4000 minutos por \$149.99 más \$0.25 por minuto adicional  
 $P_6$ : 6000 minutos por \$199.99 más \$0.20 por minuto adicional donde se han agregado las etiquetas  $P_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, 6$ , para conveniencia posterior. Así, cada entrada anterior toma la forma:

$P_i: M_i$  minutos por  $\$C_i$  más  $\$c_i$  por minuto adicional donde, para el plan  $P_i$ ,  $M_i$  es el número de minutos tiempo aire disponible para la cuenta de acceso mensual de  $C_i$ , y cada minuto adicional cuesta  $c_i$ .

Para representar matemáticamente estos planes, se escribirá el costo mensual total como una función del tiempo, para cada uno. De hecho, se escribirá  $P_i(t)$  para el costo mensual



de  $t$  minutos con el plan  $P_i$ . Para cada plan, la función resultante es una función definida por partes, con sólo dos casos a considerar. Para cada plan deben considerarse  $t \leq M_i$  y  $t > M_i$ . Si  $t \leq M_i$ , entonces el costo es simplemente  $C_i$  pero si  $t > M_i$ , entonces el número de minutos adicionales es  $t - M_i$  y, como cada uno de éstos cuesta  $c_i$ , los minutos adicionales cuestan  $c_i(t - M_i)$ , lo que en este caso produce un costo total de  $C_i + c_i(t - M_i)$ .

Al incorporar estos valores numéricos, se tienen las siguientes seis funciones:

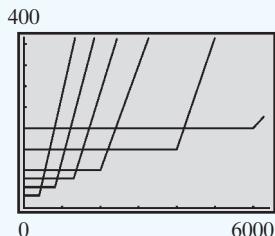
$$\begin{aligned} P_1(t) &= \begin{cases} 39.99 & \text{si } t \leq 450 \\ 39.99 + 0.45(t - 450) & \text{si } t > 450 \end{cases} \\ P_2(t) &= \begin{cases} 59.99 & \text{si } t \leq 900 \\ 59.99 + 0.40(t - 900) & \text{si } t > 900 \end{cases} \\ P_3(t) &= \begin{cases} 79.99 & \text{si } t \leq 1350 \\ 79.99 + 0.35(t - 1350) & \text{si } t > 1350 \end{cases} \\ P_4(t) &= \begin{cases} 99.99 & \text{si } t \leq 2000 \\ 99.99 + 0.25(t - 2000) & \text{si } t > 2000 \end{cases} \\ P_5(t) &= \begin{cases} 149.99 & \text{si } t \leq 4000 \\ 149.99 + 0.25(t - 4000) & \text{si } t > 4000 \end{cases} \\ P_6(t) &= \begin{cases} 199.99 & \text{si } t \leq 6000 \\ 199.99 + 0.20(t - 6000) & \text{si } t > 6000 \end{cases} \end{aligned}$$

Es fácil describir la gráfica de cada función. De hecho, para la  $P_i(t)$  genérica se tiene, en el primer cuadrante, un segmento de recta horizontal que inicia en  $(0, C_i)$  y termina en  $(M_i, C_i)$ . La gráfica continúa, a la derecha de  $(M_i, C_i)$  como un segmento de recta infinito que inicia en  $(M_i, C_i)$  con pendiente  $c_i$ . Sin

embargo, para ver cómo se comparan realmente las funciones  $P_i$ , es necesario graficarlas todas. Esto podría realizarse en forma manual, pero aquí se presenta una buena oportunidad para aprovechar la capacidad de una calculadora graficadora. Se introduce la función  $P_1(t)$  como

$$Y1 = 39.99 + 0.42(X - 450)(X > 450)$$

El símbolo  $>$  viene en el menú test y la expresión  $(X > 450)$  es igual a 1 o 0, dependiendo si  $x$  es, o no, mayor que 450. Al introducir las otras cinco funciones de manera similar, y graficándolas juntas, se obtiene la pantalla que se muestra en la figura 3.50.



**FIGURA 3.50** Costos de los diferentes planes.

Cuál es el mejor plan depende de la cantidad de tiempo de llamadas: para cualquier tiempo aire mensual dado, el mejor plan es aquél en que la gráfica es la más baja en ese punto.

Para un tiempo muy breve de llamadas, el plan  $P_1$  es mejor, pero incluso en 495 minutos mensuales de uso resulta más caro que el plan  $P_2$  y permanece así para cualquier uso mensual mayor. Para encontrar exactamente el uso al cual los planes  $P_1$  y  $P_2$  cuestan lo mismo, por supuesto se resuelve

$$P_1(t) = P_2(t)$$

pero debido a que cada una es una función definida por partes, en realidad se necesitan las gráficas para saber *dónde buscar la solución*. De éstas resulta claro que la intersección de

las curvas  $P_1$  y  $P_2$  ocurre  $P_1$  se define mediante su primera rama. Así, debe despejarse  $t$  de

$$39.99 + 0.45(t - 450) = 59.99$$

Con dos decimales se obtiene  $t = 494.44$ .

De hecho, la gráfica indica que sería útil calcular  $P_1(900)$  porque  $P_2(900)$  aún es \$59.99 aunque, por supuesto, el costo de  $P_2$  se incrementa para toda  $t > 900$ . Se encuentra

$$\begin{aligned} P_1(900) &= 39.99 + 0.45(900 - 450) = 39.99 + 0.45(450) \\ &= 39.99 + 202.50 = 242.49 \end{aligned}$$

Para buscar planes de servicio de teléfonos celulares en diferentes áreas, visite [www.point.com](http://www.point.com).

### Problemas

1. Si una persona que realmente usa muchos minutos de tiempo aire al mes, por ejemplo 6000, se siente atraído por las tarifas de acceso mensual bajo, calcule cuánto perderá usando el plan  $P_1$  en lugar del plan  $P_6$ .
2. Se ha visto que para usos mensuales menores a 494.44 minutos, el plan  $P_1$  es mejor. Determine el intervalo de uso para el cual  $P_2$  es mejor encontrando el valor de  $t$  para el cual  $P_2(t) = P_3(t)$ .
3. Repita el problema 2 para el plan  $P_3$ .
4. Repita el problema 2 para el plan  $P_4$ .
5. Repita el problema 2 para el plan  $P_5$ .
6. Repita el problema 2 para el plan  $P_6$ .
7. ¿Cómo se puede estar seguro de que para *todo* valor de  $t$  mayor que el encontrado en el problema 6, el plan  $P_6$  sigue siendo el mejor? Para ponerlo de otro modo, ¿ $P_5$  y  $P_6$  tienen algún punto de intersección en las *segundas* ramas de *ambas* curvas?

# 4

## FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

- 4.1 Funciones exponenciales
- 4.2 Funciones logarítmicas
- 4.3 Propiedades de los logaritmos
- 4.4 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales
- 4.5 Repaso

### Aplicación práctica

Dosis de medicamentos

**D**e la misma forma en que los virus biológicos se propagan a través del contacto entre organismos, también los virus de computadora se difunden cuando las computadoras interactúan vía Internet. Los científicos computacionales estudian cómo combatir los virus de computadora, que causan mucho daño ya que borran o alteran archivos. Uno de sus esfuerzos consiste en diseñar modelos matemáticos acerca de la rapidez con que se propagan los virus. Por ejemplo, el viernes 26 de marzo de 1999 se reportó el primer caso del virus conocido como Melissa; para el lunes 29 de marzo, Melissa había alcanzado a más de 100 000 computadoras.

Las funciones exponenciales, que se estudian con detalle en este capítulo, proporcionan un modelo plausible. Considere un virus de computadora que se oculta en un archivo adjunto de correo electrónico y que una vez que se baja, de manera automática provoca el envío de un mensaje y de un archivo adjunto similar a todas las direcciones de la libreta de direcciones de correo electrónico de la computadora anfitriona. Si una libreta de direcciones típica contiene 20 direcciones, y si el usuario común revisa su correo electrónico una vez por día, entonces el virus proveniente de una sola máquina habrá infectado a 20 en un día,  $20^2 = 400$  máquinas al cabo de dos días,  $20^3 = 8000$  después de tres días y, en general, después de  $t$  días, el número  $N$  de computadoras infectadas estará dado por la función exponencial  $N(t) = 20^t$ .

Este modelo supone que todas las computadoras implicadas están ligadas unas con otras a través de su libreta de direcciones, en un solo grupo bien conectado. Los modelos exponenciales son más precisos para pequeños valores de  $t$ , este modelo en particular, no toma en cuenta el descenso que ocurre cuando la mayoría de los correos electrónicos alcanzan computadoras que ya están infectadas; lo cual sucede después de varios días. Por ejemplo, el modelo desarrollado aquí indica que después de ocho días infectará a  $20^8 = 25.6$  miles de millones de computadoras (¡más computadoras de las que existen en la actualidad!). Pero a pesar de sus limitaciones, los modelos exponenciales ciertamente explican el porqué con frecuencia los nuevos virus infectan a miles de máquinas antes de que los expertos en antivirus tengan tiempo de reaccionar.

**OBJETIVO**

Estudiar las funciones exponenciales y sus aplicaciones en temas como interés compuesto, crecimiento poblacional y decaimiento radiactivo.

**ADVERTENCIA**

No confunda la función exponencial  $y = 2^x$  con la *función potencia*  $y = x^2$ , que tiene una base variable y un exponente constante.

**4.1 Funciones exponenciales**

Existe una función que desempeña un papel importante no sólo en matemáticas, sino también en finanzas, economía y otras áreas de estudio. Incluye una constante elevada a una potencia variable, como  $f(x) = 2^x$ . Las funciones de este tipo se llaman *funciones exponenciales*.

**DEFINICIÓN**

La función  $f$  definida por

$$f(x) = b^x$$

donde  $b > 0, b \neq 1$ , y el exponente  $x$  es cualquier número real, se llama *función exponencial* con base  $b$ .<sup>1</sup>

Como el exponente de  $b^x$  puede ser cualquier número real, el lector quizás se pregunte cómo se asigna un valor a algo como  $2^{\sqrt{2}}$ , donde el exponente es un número irracional. Simplemente se utilizan aproximaciones. Como  $\sqrt{2} = 1.41421\dots$ ,  $2^{\sqrt{2}}$  es aproximadamente  $2^{1.4} = 2^{7/5} = \sqrt[5]{2^7}$ , que sí está definido. Las mejores aproximaciones son  $2^{1.41} = 2^{141/100} = \sqrt[100]{2^{141}}$ , y así sucesivamente. De esta manera se aclara el significado de  $2^{\sqrt{2}}$ . El valor que da una calculadora para  $2^{\sqrt{2}}$  es (aproximadamente) 2.66514.

Cuando se trabaja con funciones exponenciales puede ser necesario aplicar las reglas de los exponentes. Estas reglas se presentan a continuación, donde  $m$  y  $n$  son números reales y  $a$  y  $b$  son positivos.

**APUNTADOR ➤**

Si desea revisar los exponentes, consulte la sección 0.3.

**Reglas de los exponentes**

- |                                |   |
|--------------------------------|---|
| 1. $a^m a^n = a^{m+n}$         | 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ |
| 2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ | 6. $a^1 = a$                                      |
| 3. $(a^m)^n = a^{mn}$          | 7. $a^0 = 1$                                      |
| 4. $(ab)^n = a^n b^n$          | 8. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$                       |

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1****CRECIMIENTO DE BACTERIAS**

El número de bacterias de un cultivo que duplica su número cada hora, está dado por  $N(t) = A \cdot 2^t$ , donde  $A$  es el número presente originalmente y  $t$  es el número de horas que las bacterias se han estado duplicando. Utilice una calculadora graficadora para graficar esta función con diferentes valores de  $A > 1$ . ¿En qué se parecen las gráficas? ¿Cómo altera a la gráfica el valor de  $A$ ?

Algunas funciones que no parecen tener la forma exponencial  $b^x$  pueden expresarse en esa forma al aplicar las reglas anteriores. Por ejemplo,  $2^{-x} = 1/(2^x) = (\frac{1}{2})^x$  y  $3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$ .

**EJEMPLO 1 Crecimiento de bacterias**

*El número de bacterias presentes en un cultivo después de  $t$  minutos está dado por*

$$N(t) = 300 \left(\frac{4}{3}\right)^t$$

*Observe que  $N(t)$  es un múltiplo constante de la función exponencial  $\left(\frac{4}{3}\right)^t$ .*

<sup>1</sup>Si  $b = 1$ , entonces  $f(x) = 1^x = 1$ . Esta función ya se ha estudiado antes y se conoce como función constante.

- a. ¿Cuántas bacterias están presentes inicialmente?

**Solución:** Aquí se quiere determinar  $N(t)$  cuando  $t = 0$ . Se tiene

$$N(0) = 300 \left(\frac{4}{3}\right)^0 = 300(1) = 300$$

Así que al inicio hay 300 bacterias presentes.

- b. Aproximadamente, ¿cuántas bacterias están presentes después de 3 minutos?

**Solución:**

$$N(3) = 300 \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 300 \left(\frac{64}{27}\right) = \frac{6400}{9} \approx 711$$

Por lo que, después de 3 minutos, hay casi 711 bacterias presentes.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31



## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

### GRÁFICA DE FUNCIONES EXPONENCIALES CON $b > 1$

Suponga que una inversión aumenta 10% cada año. Haga una tabla del factor por el cual la inversión aumenta a partir de la cantidad original desde los 0 hasta los 4 años. Para cada año, construya una expresión que describa el aumento como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizaría? ¿Cómo se relaciona esta base con el problema? Utilice su tabla para graficar el aumento multiplicativo como una función del número de años. Utilice su gráfica para determinar cuándo se duplica la inversión.

## Gráficas de funciones exponenciales

### EJEMPLO 2 Gráficas de funciones exponenciales con $b > 1$

Grafique las funciones exponenciales  $f(x) = 2^x$  y  $f(x) = 5^x$ .

**Solución:** Las gráficas de la figura 4.1 se obtuvieron al localizar puntos y conectarlos. No se muestran los puntos  $(-2, \frac{1}{25})$ ,  $(2, 25)$  y  $(3, 125)$  para la gráfica de  $f(x) = 5^x$ , debido a la unidad de distancia seleccionada sobre el eje y.

Pueden hacerse algunas observaciones acerca de estas gráficas. El dominio de cada función consiste en el conjunto de todos los números reales, y el rango en todos los números reales positivos. Cada gráfica tiene intersección y  $(0, 1)$ . Aún más, estas gráficas tienen la misma forma general. Cada una *asciende* de izquierda a derecha. Conforme aumenta  $x$ ,  $f(x)$  también aumenta. De hecho,  $f(x)$  aumenta indefinidamente. Sin embargo, en el primer cuadrante, la gráfica de  $f(x) = 5^x$  asciende más rápidamente que  $f(x) = 2^x$ , porque la base en  $5^x$  es *mayor* que la base en  $2^x$  (esto es,  $5 > 2$ ). En el segundo cuadrante se observa que a medida que  $x$  se hace más negativa, las gráficas de ambas funciones se aproximan al eje  $x$ .<sup>2</sup> Esto implica que los valores de las funciones se hacen muy cercanos a 0.

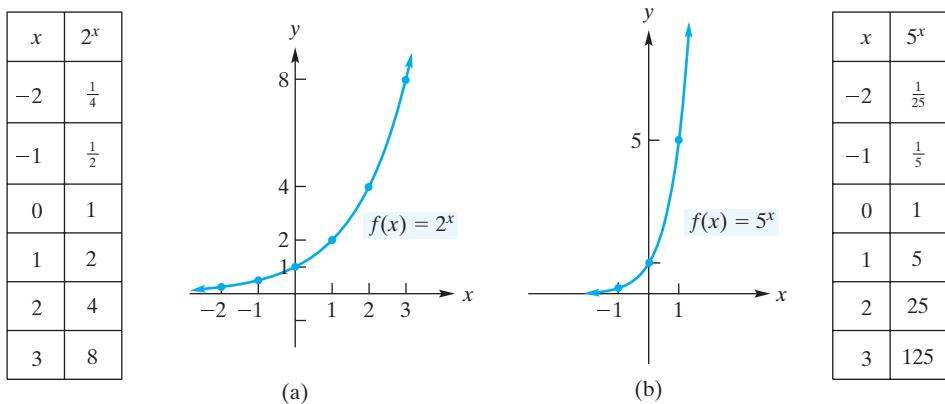


FIGURA 4.1 Gráficas de  $f(x) = 2^x$  y  $f(x) = 5^x$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



<sup>2</sup>Se dice que el eje  $x$  es una *asíntota* para cada gráfica.

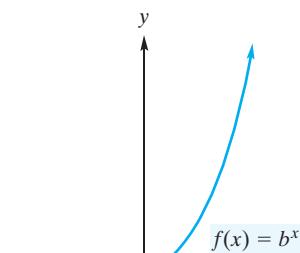
Las observaciones hechas en el ejemplo 2 son ciertas para todas las funciones exponenciales cuya base  $b$  es mayor que 1. En el ejemplo 3 se examinará el caso de una base entre 0 y 1 ( $0 < b < 1$ ).

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

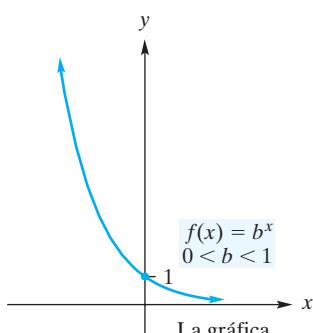
#### GRÁFICA DE FUNCIONES EXPONENCIALES CON $0 < b < 1$

Suponga que el valor de un automóvil se deprecia 15% cada año. Haga una tabla del factor por el cual disminuye su monto original desde los 0 hasta los 3 años. Para cada año, escriba una expresión para la disminución como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizaría? ¿Cómo se relaciona esta base con el problema? Utilice la tabla para graficar la disminución multiplicativa como una función del número de años. Utilice su gráfica para determinar cuándo el automóvil disminuye su valor a la mitad del valor original.

Existen dos formas básicas para las gráficas de las funciones exponenciales y dependen de la base involucrada.



(a) La gráfica asciende de izquierda a derecha



(b) La gráfica desciende de izquierda a derecha

FIGURA 4.3 Formas generales de  $f(x) = b^x$ .

#### EJEMPLO 3 Gráfica de una función exponencial con $0 < b < 1$

Grafique la función exponencial  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

**Solución:** La gráfica de la figura 4.2 se obtiene al localizar puntos y conectarlos. Observe que el dominio equivale a todos los números reales y el rango a todos los números reales positivos. La gráfica tiene intersección y  $(0, 1)$ . Comparadas con las gráficas del ejemplo 2, se observa que aquí la gráfica *desciende* de izquierda a derecha. Es decir, conforme  $x$  aumenta  $f(x)$  disminuye. Note que cuando  $x$  toma valores muy positivos,  $f(x)$  toma valores muy cercanos a 0 y la gráfica se aproxima al eje  $x$ . Sin embargo, cuando  $x$  se vuelve muy negativa los valores de la función no están acotados.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

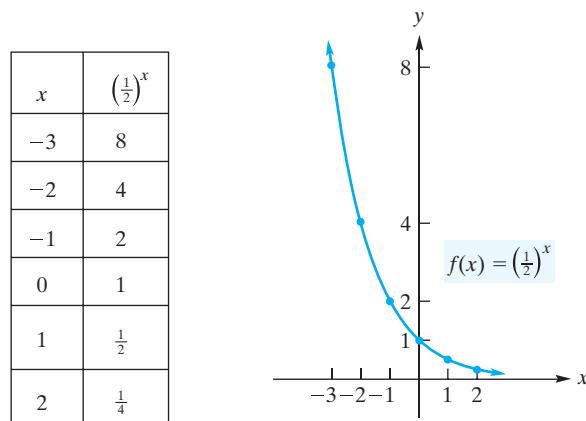


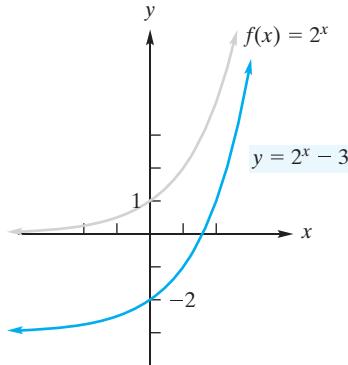
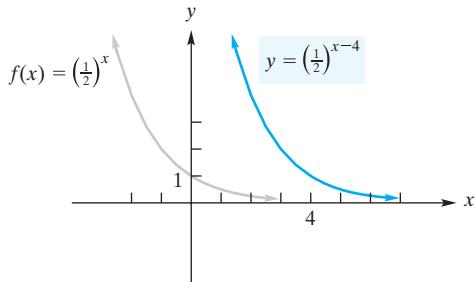
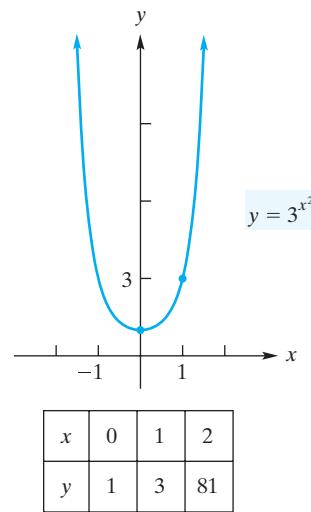
FIGURA 4.2 Gráfica de  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

En general, las gráficas de las funciones exponenciales adoptan una de dos posibles formas básicas, y dependen del valor de la base  $b$ . Esto se ilustra en la figura 4.3. Es importante observar que, en cualquier caso, la gráfica pasa la prueba de la línea horizontal. Por lo tanto, todas las funciones exponenciales son uno a uno. En la tabla 4.1 se resumen las propiedades básicas de una función exponencial y su gráfica.

Recuerde que, de acuerdo con la sección 2.7, la gráfica de una función puede estar relacionada con otra por medio de cierta transformación. El ejemplo siguiente se refiere a este concepto.

TABLA 4.1 Propiedades de la función exponencial  $f(x) = b^x$

- El dominio de una función exponencial consiste de todos los números reales. El rango consiste de todos los números positivos.
- La gráfica de  $f(x) = b^x$  tiene intersección y  $(0, 1)$ . No hay intersección x.
- Si  $b > 1$ , la gráfica asciende de izquierda a derecha. Si  $0 < b < 1$ , la gráfica desciende de izquierda a derecha.
- Si  $b > 1$ , la gráfica se acerca al eje  $x$  conforme  $x$  se vuelve más y más negativa. Si  $0 < b < 1$ , la gráfica se acerca al eje  $x$  y x se vuelve más y más negativa.

FIGURA 4.4 Gráfica de  $y = 2^x - 3$ .FIGURA 4.5 Gráfica de  $y = (\frac{1}{2})^{x-4}$ .FIGURA 4.6 Gráfica de  $y = 3^{x^2}$ .

En el ejemplo 4 se hace uso de las transformaciones de la tabla 2.2 de la sección 2.7.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

##### TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Después de observar cómo creció el dinero de su hermana durante tres años en un plan con una tasa de interés de 8% anual, George abrió una cuenta de ahorros con el mismo plan. Si  $y = 1.08^t$  representa el aumento multiplicativo en la cuenta de su hermana, escriba una ecuación que represente el aumento multiplicativo en la cuenta de George, utilice la misma referencia de tiempo. Si George tiene una gráfica de aumento multiplicativo del dinero de su hermana en el tiempo  $t$  desde que ella inició su ahorro, ¿cómo podría utilizar la gráfica para proyectar el incremento de su propio dinero?

#### EJEMPLO 4 Transformaciones de funciones exponenciales

- a. Use la gráfica de  $y = 2^x$  para graficar  $y = 2^x - 3$ .

**Solución:** La función tiene la forma  $f(x) - c$ , donde  $f(x) = 2^x$  y  $c = 3$ . Así que su gráfica se obtiene al recorrer la gráfica de  $f(x) = 2^x$  tres unidades hacia abajo (vea la figura 4.4).

- b. Use la gráfica de  $y = (\frac{1}{2})^x$  para graficar  $y = (\frac{1}{2})^{x-4}$ .

**Solución:** La función tiene la forma  $f(x - c)$ , donde  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$  y  $c = 4$ . Por lo tanto, su gráfica se obtiene al recorrer la gráfica de  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$  cuatro unidades hacia la derecha (vea la figura 4.5).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

#### EJEMPLO 5 Gráfica de una función con una base constante

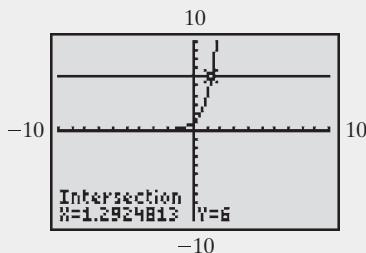
Grafique  $y = 3^{x^2}$ .

**Solución:** Aunque ésta no es una función exponencial, tiene una base constante. Se observa que al reemplazar  $x$  por  $-x$  resulta la misma ecuación. Así, la gráfica es simétrica con respecto al eje  $y$ . Al graficar algunos puntos y utilizar la simetría se obtiene la gráfica de la figura 4.6.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

#### TECNOLOGÍA

Si  $y = 4^x$ , considere el problema de encontrar  $x$  cuando  $y = 6$ . Una forma de resolverlo es encontrar la intersección de las gráficas de  $y = 6$  y  $y = 4^x$ . En la figura 4.7 se muestra que  $x$  es aproximadamente igual a 1.29.

FIGURA 4.7 Resolución de la ecuación  $6 = 4^x$ .

## Interés compuesto

Las funciones exponenciales están implicadas en el **interés compuesto**, en el cual el interés que genera una cantidad de dinero invertida (o **capital**), se invierte nuevamente de modo que también genere intereses. Es decir, el interés se convierte (o *compone*) en capital y, por lo tanto, hay “interés sobre interés”.

Por ejemplo, suponga que se invierten \$100 a una tasa de 5% compuesto anualmente. Al final del primer año, el valor de la inversión es el capital original (\$100), más el interés sobre el capital [100(0.05)]:

$$100 + 100(0.05) = \$105$$

Ésta es la cantidad sobre la cual se genera el interés para el segundo año. Al final del segundo año, el valor de la inversión es el capital del final del primer año (\$105), más el interés sobre esa cantidad [105(0.05)]:

$$105 + 105(0.05) = \$110.25$$

Así, cada año el capital se incrementa en 5%. Los \$110.25 representan el capital original más todo el interés acumulado; esta cantidad se llama **monto acumulado** o **monto compuesto**. La diferencia entre el monto compuesto y el capital original se conoce como **interés compuesto**. Aquí, el interés compuesto es  $110.25 - 100 = 10.25$ .

De manera más general, si un capital de  $P$  dólares se invierte a una tasa de  $100r$  por ciento compuesto anualmente (por ejemplo, a 5%,  $r$  es 0.05), la cantidad compuesta después de un año es  $P + Pr$ , o al factorizar,  $P(1 + r)$ . Al final del segundo año, la cantidad compuesta es

$$\begin{aligned} P(1 + r) + [P(1 + r)]r &= P(1 + r)[1 + r] && \text{(al factorizar)} \\ &= P(1 + r)^2 \end{aligned}$$

En realidad, el cálculo anterior que usa factorización no es necesario para mostrar que el monto compuesto después de dos años es  $P(1 + r)^2$ . Como *cualquier* monto  $P$  va le  $P(1 + r)$  un año después, se deduce que el monto  $P(1 + r)$  vale  $P(1 + r)(1 + r) = P(1 + r)^2$  un año más tarde, y luego de otro año el monto  $P(1 + r)^2$  valdrá  $P(1 + r)^2(1 + r) = P(1 + r)^3$ .

Este patrón continúa. Después de cuatro años la cantidad compuesta es  $P(1 + r)^4$ . En general, el **monto compuesto  $S$  del capital  $P$  al final de  $n$  años a una tasa de  $r$  compuesta anualmente**, está dado por

$$S = P(1 + r)^n \quad (1)$$

Observe que en la ecuación (1) para un capital y una tasa dados,  $S$  es una función de  $n$ . De hecho,  $S$  es una función exponencial con base  $1 + r$ .

### EJEMPLO 6 Monto compuesto e interés compuesto

*Suponga que se invierten \$1000 durante 10 años al 6% compuesto anualmente.*

- a. Encuentre el monto compuesto.

**Solución:** Se utiliza la ecuación (1) donde  $P = 1000$ ,  $r = 0.06$  y  $n = 10$ :

$$S = 1000(1 + 0.06)^{10} = 1000(1.06)^{10} \approx \$1790.85$$

En la figura 4.8 se muestra la gráfica de  $S = 1000(1.06)^n$ . Observe que conforme pasa el tiempo, el monto compuesto crece en forma dramática.

- b. Encuentre el interés compuesto.

**Solución:** Con el uso de los resultados del inciso (a), se tiene

$$\text{interés compuesto} = S - P$$

$$= 1790.85 - 1000 = \$790.85$$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5

#### Monto compuesto e interés compuesto

Suponga que se invierten \$2000 al 13% compuesto anualmente. Encuentre el valor de la inversión después de cinco años. Determine el interés ganado durante los primeros cinco años.

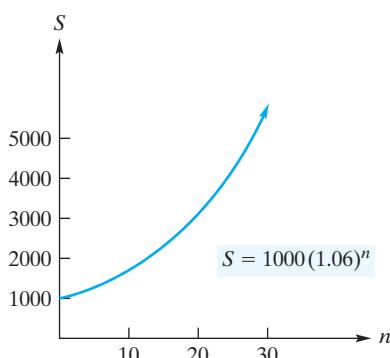


FIGURA 4.8 Gráfica de  $S = 1000(1.06)^n$ .



Suponga que el capital de \$1000 del ejemplo 6 se invierte durante 10 años como se hizo antes, pero esta vez se compone cada tres meses (esto es, *cuatro veces al año*) a una tasa de  $1\frac{1}{2}\%$  por trimestre. Entonces hay cuatro **periodos de interés** por año, y en 10 años son  $10(4) = 40$  periodos de interés. Así, el monto compuesto con  $r = 0.015$  ahora es

$$1000(1.015)^{40} \approx \$1814.02$$

y el interés compuesto es \$814.02. En general, la tasa de interés por periodo de capitalización se establece como una tasa anual. Aquí se hablaría de una tasa anual de 6% compuesta trimestralmente, de modo que la tasa del interés en cada periodo, o **tasa periódica**, es  $6\%/4 = 1.5\%$ . Esta tasa anual *cotizada* de 6% se llama **tasa nominal o tasa de porcentaje anual (TPA)**. A menos que se especifique otra cosa, todas las tasas de interés se supondrán tasas anuales (nominales). Así, una tasa de 15% compuesta mensualmente corresponde a una tasa periódica de  $15\%/12 = 1.25\%$ .

Con base en el análisis anterior, puede generalizarse la ecuación (1). La fórmula

$$S = P(1 + r)^n \quad (2)$$

proporciona el **monto acumulado  $S$  de un capital  $P$  al final de  $n$  periodos de interés a una tasa periódica de  $r$** .

Se ha visto que un capital de \$1000, a una tasa nominal de 6% en un periodo de 10 años, compuesto anualmente, tiene como resultado un interés compuesto de \$790.85, y compuesto trimestralmente da un interés de \$814.02. Es común que para una tasa nominal dada, entre más frecuentemente se componga, mayor será el interés compuesto. Sin embargo, pese a que incrementar el número de periodos de interés siempre incrementa al monto del interés ganado, el efecto no es indefinido. Por ejemplo, con una composición semanal el interés compuesto es

$$1000 \left(1 + \frac{0.06}{52}\right)^{10(52)} - 1000 \approx \$821.49$$

y compuesto diariamente es

$$1000 \left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{10(365)} - 1000 \approx \$822.03$$

En ocasiones, la frase “valor del dinero” se usa para expresar una tasa de interés anual. Por lo que, al decir que el dinero vale 6% compuesto trimestralmente, se hace referencia a una tasa anual (nominal) de 6% compuesto cada trimestre.

### Crecimiento poblacional

La ecuación (2) puede aplicarse no sólo al aumento del dinero, sino también a otros tipos de crecimiento, como al de la población. Por ejemplo, suponga que la población  $P$  de una ciudad con 10 000 habitantes, crece a una tasa de 2% por año. Entonces  $P$  es una función del tiempo  $t$ , donde  $t$  representa años. Es común indicar esta dependencia funcional mediante

$$P = P(t)$$

Aquí la letra  $P$  se utiliza en dos formas: en el lado derecho,  $P$  representa la función; en el lado izquierdo  $P$  representa la variable dependiente. De la ecuación (2), se tiene

$$P(t) = 10\,000(1 + 0.02)^t = 10\,000(1.02)^t$$



### ADVERTENCIA

Una tasa nominal de 6% no significa necesariamente que una inversión aumente en 6% cada año. El incremento depende de la frecuencia de la capitalización.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6

##### CRECIMIENTO POBLACIONAL

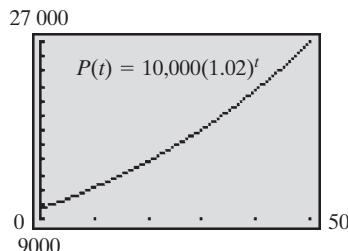
Una compañía nueva con cinco empleados espera que el número de trabajadores crezca a una tasa de 120% anual. Determine el número de asalariados dentro de cuatro años.

### EJEMPLO 7 Crecimiento poblacional

*La población de una ciudad de 10 000 habitantes crece a razón de 2% anual. Encuentre la población dentro de tres años.*

**Solución:** Del análisis anterior,

$$P(t) = 10\,000(1.02)^t$$



**FIGURA 4.9** Gráfica de la función de población  $P(t) = 10\,000(1.02)^t$ .

Para  $t = 3$ , se tiene

$$P(3) = 10\,000(1.02)^3 \approx 10\,612$$

Por lo tanto, dentro de 3 años la población será de 10 612 habitantes (vea la figura 4.9).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

### El número $e$

Es útil realizar un “experimento hipotético” con base en el análisis que siguió al ejemplo 6, a fin de presentar un número importante. Suponga que se invierte un solo dólar durante un año con una TPA de 100% (recuerde que se trata de un experimento hipotético) compuesto anualmente. Entonces el monto compuesto  $S$  al final del año está dado por

$$S = 1(1 + 1)^1 = 2^1 = 2$$

Sin cambiar ninguno de los otros datos, ahora se considerará el efecto de aumentar el número de períodos de interés por año. Si hay  $n$  períodos de interés por año, entonces el monto compuesto está dado por

$$S = 1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

En la tabla siguiente se proporcionan valores aproximados de  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$  para algunos valores de  $n$ .

**TABLA 4.2** Aproximaciones de  $e$

$n$	$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$
1	$\left(\frac{2}{1}\right)^1 = 2.00000$
2	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25000$
3	$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \approx 2.37037$
4	$\left(\frac{5}{4}\right)^4 \approx 2.44141$
5	$\left(\frac{6}{5}\right)^5 = 2.48832$
10	$\left(\frac{11}{10}\right)^{10} \approx 2.59374$
100	$\left(\frac{101}{100}\right)^{100} \approx 2.70481$
1000	$\left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} \approx 2.71692$
10 000	$\left(\frac{10\,001}{10\,000}\right)^{10\,000} \approx 2.71815$
100 000	$\left(\frac{100\,001}{100\,000}\right)^{100\,000} \approx 2.71827$
1 000 000	$\left(\frac{1\,000\,001}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000} \approx 2.71828$

Resulta evidente que los números  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$  aumentan conforme lo hace  $n$ . Sin embargo, no se incrementan en forma indefinida. Por ejemplo, es posible demostrar que para cualquier entero positivo  $n$ ,  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3$ . En términos del experimento hipotético, esto significa que si se inicia con una inversión de \$1.00 al 100%, no importa cuántos períodos de interés haya por año, siempre se tendrán menos de \$3.00 al final del año. Existe un mínimo número real que es mayor que todos los números  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ . Se denota mediante la letra  $e$ , en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783).

El número  $e$  es irracional porque su expansión decimal no se repite, como en  $\pi$  y  $\sqrt{2}$  que se mencionaron en la sección 0.1. Sin embargo, cada uno de los valores numéricos de  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$  puede considerarse como una aproximación decimal de  $e$ . El valor aproximado  $(\frac{1000001}{1000000})^{1000000} \approx 2.71828$  proporciona una aproximación de  $e$  que es correcta hasta el quinto decimal.

### Función exponencial con base $e$

El número

$$e \approx 2.718281828459$$

donde la aproximación dada es correcta hasta 12 decimales, se usa como la base para una función exponencial. La función exponencial con base  $e$  se conoce como **función exponencial natural**.

Aunque  $e$  puede parecer una base extraña, la función exponencial natural tiene una función importante en cálculo (como se verá más adelante en otro capítulo) que justifica el nombre. También surge en el análisis económico y en problemas que implican crecimiento o declinación como estudios poblacionales, interés compuesto y decaimiento radiactivo. En la mayoría de las calculadoras pueden encontrarse valores aproximados de  $e^x$  con un solo golpe de tecla. Se muestra la gráfica de  $y = e^x$  en la figura 4.10. La tabla adjunta a la figura indica los valores de  $y$  con dos decimales. Por supuesto, la gráfica tiene la forma general de una función exponencial con base mayor que 1.

$x$	$y$
-2	0.14
-1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39

Debe familiarizarse con la gráfica de la función exponencial natural de la figura 4.10.

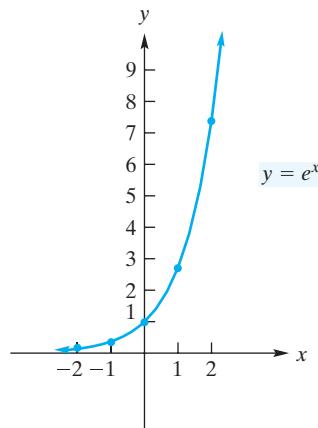


FIGURA 4.10 Gráfica de la función exponencial natural.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7

##### GRÁFICAS DE FUNCIONES QUE INCLUYEN A $e$

La disminución multiplicativa del poder de compra  $P$  después de  $t$  años de inflación al 6% puede modelarse mediante  $P = e^{-0.06t}$ . Grafique la disminución del poder de compra como una función  $t$  años.

### EJEMPLO 8 Gráficas de funciones que incluyen a $e$

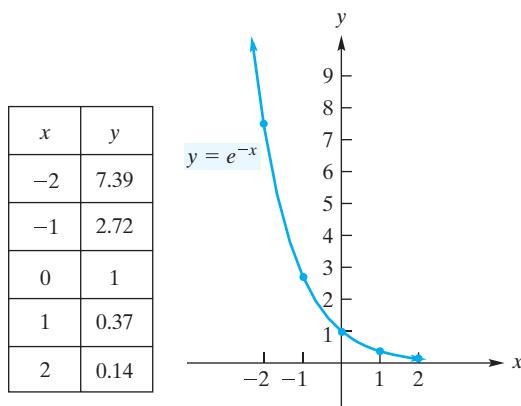
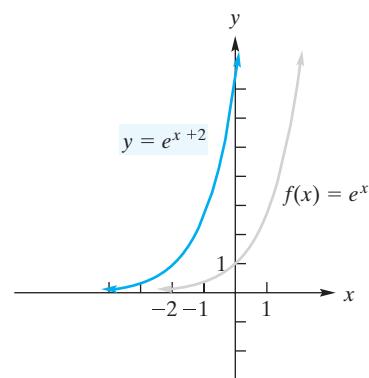
- a. Grafique  $y = e^{-x}$ .

**Solución:** Como  $e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$  y  $0 < \frac{1}{e} < 1$ , la gráfica es la de una función exponencial que desciende de izquierda a derecha (vea la figura 4.11). En forma alternativa, puede considerarse la gráfica de  $y = e^{-x}$  como una transformación de la gráfica de  $f(x) = e^x$ . Como  $e^{-x} = f(-x)$ , la gráfica de  $y = e^{-x}$  sólo es la reflexión de la gráfica de  $f$  con respecto al eje  $y$ . (Compare las gráficas de las figuras 4.10 y 4.11.)

- b. Grafique  $y = e^{x+2}$ .

**Solución:** La gráfica de  $y = e^{x+2}$  está relacionada con la de  $f(x) = e^x$ . Como  $e^{x+2}$  es  $f(x+2)$ , puede obtenerse la gráfica de  $y = e^{x+2}$  mediante un corrimiento horizontal de la gráfica de  $f(x) = e^x$  dos unidades a la izquierda. (Vea la figura 4.12.)



FIGURA 4.11 Gráfica de  $y = e^{-x}$ .FIGURA 4.12 Gráfica de  $y = e^{x+2}$ .

### EJEMPLO 9 Crecimiento poblacional

La población proyectada,  $P$ , de una ciudad está dada por

$$P = 100\,000e^{0.05t}$$

donde  $t$  es el número de años después de 1990. Pronostique la población para el año 2010.

**Solución:** El número de años desde 1990 hasta 2010 es 20, de modo que se establece  $t = 20$ . Entonces

$$P = 100\,000e^{0.05(20)} = 100\,000e^1 = 100\,000e \approx 271\,828$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35



En estadística, se utiliza una función importante como modelo para describir la ocurrencia de eventos en la naturaleza: la **función de distribución de Poisson**:

$$f(n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

El símbolo  $\mu$  (que se lee “mu”) es una letra griega. En ciertas situaciones  $f(n)$  da la probabilidad de que exactamente  $n$  eventos ocurran en un intervalo de tiempo o espacio. La constante  $\mu$  es el promedio, también llamado *media*, del número de ocurrencias en dicho intervalo. El ejemplo siguiente ilustra la distribución de Poisson.

### EJEMPLO 10 Hemocitómetro y células

Un hemocitómetro es una cámara de conteo dividida en cuadrados que se utiliza para el estudio del número de estructuras microscópicas en un líquido. En un experimento muy conocido,<sup>3</sup> se diluyeron y se mezclaron completamente algunas células de levadura en un líquido, y la mezcla se colocó en un hemocitómetro. Se contaron con un microscopio las células de levadura existentes en cada cuadrado. Se encontró que la probabilidad de que hubiera exactamente  $x$  células en cada cuadrado del hemocitómetro se ajustaba a una distribución de Poisson, en donde  $\mu = 1.8$ . Encuentre la probabilidad de hallar exactamente cuatro células en un cuadrado en particular.

**Solución:** Se usa la función de distribución de Poisson con  $\mu = 1.8$  y  $n = 4$ :

$$f(n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}$$

$$f(4) = \frac{e^{-1.8}(1.8)^4}{4!} \approx 0.072$$

<sup>3</sup>R. R. Sokal y F. J. Rohlf, *Introduction to Biostatistics* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973).

Por ejemplo, esto significa que en 400 cuadrados se *esperaría* que  $400(0.072) \approx 29$  contuvieran exactamente 4 células. (En el experimento, en 400 cuadrados el número real observado fue de 30.)



### Decaimiento radiactivo

Los elementos radiactivos tienen la característica de que su cantidad disminuye con el tiempo. Se dice que un elemento radiactivo *decae*. Si  $N$  es la cantidad en el tiempo  $t$ , entonces puede demostrarse que

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (3)$$

donde  $N_0$  y  $\lambda$  (una letra griega que se lee “lambda”) son constantes positivas. Observe que  $N$  incluye una función exponencial de  $t$ . Se dice que  $N$  sigue una **ley de decaimiento exponencial**. Si  $t = 0$ , entonces  $N = N_0 e^0 = N_0 \cdot 1 = N_0$ . Así, la constante  $N_0$  representa la cantidad del elemento presente en el tiempo  $t = 0$ , y se le llama la **cantidad inicial**. La constante  $\lambda$  depende del elemento particular involucrado, y se llama **constante de decaimiento**.

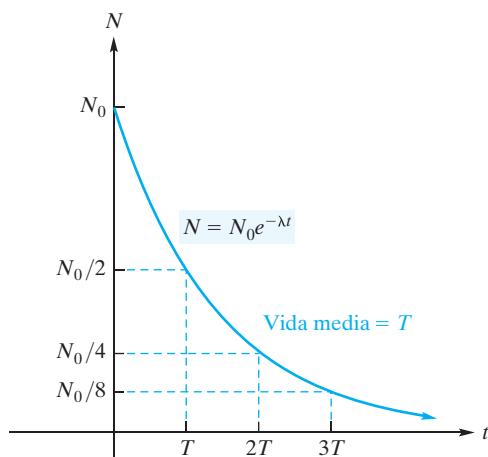
Como  $N$  disminuye conforme el tiempo pasa, suponga que  $T$  es el tiempo que tarda el elemento en disminuir a la mitad de su cantidad inicial. Entonces en el tiempo  $t = T$ , se tiene  $N = N_0/2$ . La ecuación (3) implica que

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$$

Ahora se utilizará este hecho para demostrar que en *cualquier* intervalo de longitud  $T$ , la mitad de la cantidad del elemento decaerá. Considere el intervalo desde el tiempo  $t$  hasta  $t + T$ , que tiene longitud  $T$ . En el tiempo  $t$ , la cantidad de elemento es  $N_0 e^{-\lambda t}$ , y en el tiempo  $t + T$  es

$$\begin{aligned} N_0 e^{-\lambda(t+T)} &= N_0 e^{-\lambda t} e^{-\lambda T} = (N_0 e^{-\lambda T}) e^{-\lambda t} \\ &= \frac{N_0}{2} e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} (N_0 e^{-\lambda t}) \end{aligned}$$

que es la mitad de la cantidad en el tiempo  $t$ . Esto significa que si la cantidad inicial presente  $N_0$  fuera de 1 gramo, en el tiempo  $T$  quedaría  $\frac{1}{2}$  gramo, en el tiempo  $2T$  quedaría  $\frac{1}{4}$  de gramo, y así sucesivamente. Este valor de  $T$  se conoce como la **vida media** del elemento radiactivo. La figura 4.13 muestra una gráfica de decaimiento radiactivo.

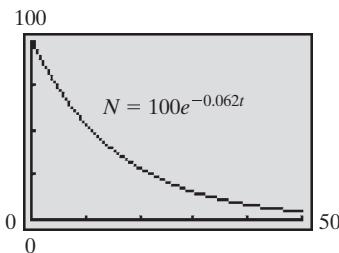


**FIGURA 4.13** Decaimiento radiactivo.

#### EJEMPLO 11 Decaimiento radiactivo

Un elemento radiactivo decae de modo que después de  $t$  días el número de miligramos presentes está dado por

$$N = 100e^{-0.062t}$$



**FIGURA 4.14** Gráfica de la función de decaimiento radiactivo  $N = 100e^{-0.062t}$ .

- a. ¿Cuántos miligramos están presentes inicialmente?

**Solución:** Esta ecuación tiene la forma de la ecuación (3),  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ , donde  $N_0 = 100$  y  $\lambda = 0.062$ .  $N_0$  es la cantidad inicial y corresponde a  $t = 0$ . Así que, en un inicio, están presentes 100 miligramos (vea la figura 4.14).

- b. ¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 días?

**Solución:** Cuando  $t = 10$ ,

$$N = 100e^{-0.062(10)} = 100e^{-0.62} \approx 53.8$$

Por lo tanto, después de 10 días, están presentes aproximadamente 53.8 miligramos.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 47

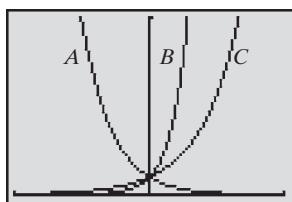
## Problemas 4.1

En los problemas 1 a 12, grafique cada función.

- \*1.  $y = f(x) = 4^x$
- \*3.  $y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
- \*5.  $y = f(x) = 2^{(x-1)^2}$
- \*7.  $y = f(x) = 3^{x+2}$
- 9.  $y = f(x) = 2^x - 1$
- 11.  $y = f(x) = 3^{-x}$
- 2.  $y = f(x) = 3^x$
- 4.  $y = f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x$
- 6.  $y = f(x) = 3(2)^x$
- 8.  $y = f(x) = 2^{x-1}$
- 10.  $y = f(x) = 3^{x-1} - 1$
- 12.  $y = f(x) = \frac{1}{2}(2^{x/2})$

Los problemas 13 y 14 se refieren a la figura 4.15, que muestra las gráficas de  $y = 0.4^x$ ,  $y = 2^x$  y  $y = 5^x$ .

13. De las curvas A, B y C, ¿cuál es la gráfica de  $y = 5^x$ ?  
14. De las curvas A, B y C, ¿cuál es la gráfica de  $y = 0.4^x$ ?



**FIGURA 4.15** Diagrama para los problemas 13 y 14.

- \*15. **Población** La población proyectada de una ciudad está dada por  $P = 125\,000(1.11)^{t/20}$ , donde  $t$  es el número de años a partir de 1995. ¿Cuál es la población que se pronostica para el año 2015?

16. **Población** Para cierta ciudad, la población  $P$  crece a una tasa de 1.5% por año. La fórmula  $P = 1527\,000(1.015)^t$  da la población  $t$  años después de 1998. Encuentre la población en (a) 1999 y (b) 2000.

17. **Aprendizaje por asociación de pares** En un experimento psicológico sobre aprendizaje,<sup>4</sup> se pidió a un conjunto de personas proporcionar respuestas específicas después de recibir ciertos estímulos. Cada estímulo consistió en un par de letras y cada respuesta era un dígito, 1 o 2. Despues de cada contestación se le revelaba al sujeto la respuesta correcta. En este experimento de aprendizaje denominado *asociación de pares*, la probabilidad teórica  $P$  de que el individuo dé la respuesta correcta en la  $n$ -ésima prueba está dada por

$$P = 1 - \frac{1}{2}(1 - c)^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad 0 < c < 1$$

donde  $c$  es una constante. Tome  $c = \frac{1}{2}$  y encuentre  $P$  cuando  $n = 1, n = 2$  y  $n = 3$ .

18. Exprese  $y = 2^{3x}$  como una función exponencial de base 8.

En los problemas 19 a 27 encuentre (a) el monto compuesto y (b) el interés compuesto para la inversión y tasa anual dadas.

- \*19. \$4000 durante 7 años a 6% compuesto anualmente.
- 20. \$5000 durante 20 años a 5% compuesto anualmente.
- 21. \$700 durante 15 años a 7% compuesto semestralmente.
- 22. \$4000 durante 12 años a 7.5% compuesto semestralmente.
- 23. \$3000 durante 16 años a  $8\frac{3}{4}\%$  compuesto trimestralmente.
- 24. \$2000 durante 12 años a 7% compuesto trimestralmente.
- 25. \$5000 durante  $2\frac{1}{2}$  años a 9% compuesto mensualmente.
- 26. \$500 durante 5 años a 11% compuesto semestralmente.
- 27. \$8000 durante 3 años a  $6\frac{1}{4}\%$  compuesto diariamente. (Suponga que hay 365 días en un año.)
- 28. **Inversiones** Suponga que se colocan \$900 en una cuenta de ahorros que gana intereses a una tasa de 4.5% compuesto semestralmente. (a) ¿Cuál es el valor de la cuenta al final de cinco años? (b) Si hubiera generado intereses a una tasa de 4.5% compuesto anualmente, ¿cuál sería su valor después de cinco años?



29. **Inversión** Se compra un certificado de depósito por \$6500 y se conserva durante seis años. Si gana 4% compuesto trimestralmente, ¿cuál es el valor del certificado al cabo de seis años?

30. **Crecimiento poblacional** La población de una ciudad de 5000 habitantes crece a razón de 3% anual. (a) Determine una ecuación que proporcione la población después de  $t$  años a partir de ahora. (b) Encuentre la población dentro de 3 años. Obtenga la respuesta para (b) al entero más cercano.

- \*31. **Crecimiento de bacterias** En cierto cultivo crecen bacterias, y su número se incrementa a razón de 5% cada hora. Al inicio existían 400 bacterias. (a) Determine una ecuación que proporcione el número,  $N$ , de bacterias presentes después de  $t$  horas. (b) ¿Cuántas habrá al cabo de 1 hora? (c) ¿Y después de 4 horas? Dé sus respuestas a (b) y (c) al entero más cercano.

<sup>4</sup>D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press Inc., 1973).

- 32. Reducción de bacterias** Cierta medicina reduce las bacterias presentes en una persona en 10% cada hora. Actualmente, existen 100 000 bacterias. Elabore una tabla de valores para el número de bacterias presentes en cada hora, desde 0 hasta 4 horas. Para cada hora, escriba una expresión para el número de bacterias como un producto de 100 000 y una potencia de  $\frac{9}{10}$ . Utilice las expresiones para construir una entrada en su tabla para el número de bacterias después de  $t$  horas. Escriba una función  $N$  para el número de bacterias después de  $t$  horas.
- 33. Reciclado** Suponga que la cantidad de plástico que se reciclará aumenta 30% cada año. Haga una tabla del factor por el cual aumenta el reciclado sobre la cantidad original desde 0 hasta 3 años. Para cada año, escriba una expresión para el aumento como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizará? ¿Cómo se relaciona esa base con el problema? Utilice su tabla para graficar el aumento multiplicativo como una función de los años. Use su gráfica para determinar el momento en que el reciclado se triplica.
- 34. Crecimiento poblacional** En la actualidad, las ciudades A y B tienen poblaciones de 70 000 y 60 000 habitantes, respectivamente. La ciudad A crece a razón de 4% anual y la de B a razón de 5% anual. Determine la diferencia entre las poblaciones al final de cinco años. Dé su respuesta al entero más cercano.

Los problemas 35 y 36 involucran una población que declina. Si una población disminuye a una tasa de  $r$  por periodo, entonces la población  $P$  después de  $t$  periodos está dada por

$$P = P_0(1 - r)t$$

donde  $P_0$  es la población inicial (la población cuando  $t = 0$ ).

- \*35. Población** A causa de una recesión económica, la población de cierta área urbana disminuye a razón de 1.5% anual. Al inicio había 350 000 habitantes. ¿Cuántos habrá después de tres años? Dé su respuesta al entero más cercano.
- 36. Inscripciones** Después de un cuidadoso análisis demográfico, una universidad pronostica que las inscripciones de estudiantes se reducirán a una tasa de 3% anual durante los próximos 12 años. Si en la actualidad se cuentan 14 000 estudiantes, ¿cuántos habrá dentro de 12 años?

En los problemas 37 a 40, utilice una calculadora para encontrar el valor (redondeado a cuatro decimales) de cada expresión.

37.  $e^{1.5}$

38.  $e^{3.4}$

39.  $e^{-0.7}$

40.  $e^{-2/3}$

En los problemas 41 y 42 grafique las funciones.

41.  $y = -e^{-(x+1)}$

42.  $y = 2e^x$

- 43. Llamadas telefónicas** La probabilidad de que un operador de teléfonos reciba exactamente  $x$  llamadas durante cierto periodo está dada por

$$P = \frac{e^{-3}3^x}{x!}$$

Encuentre la probabilidad de que reciba exactamente tres llamadas. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

- 44. Distribución normal** Una función importante utilizada en economía y decisiones de negocios es la *función de densidad de la distribución normal*, cuya forma estándar es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{1}{2})x^2}$$

Evalúe  $f(0)$ ,  $f(-1)$  y  $f(1)$ . Redondee sus respuestas a tres decimales.

45. Exprese  $e^{kt}$  en la forma  $b^t$ .

46. Exprese  $\frac{1}{e^x}$  en la forma  $b^x$ .

- \*47. Decaimiento radiactivo** En el caso de cierto elemento radiactivo, se conservan  $N$  gramos de elemento después de  $t$  horas, donde

$$N = 12e^{-0.031t}$$

(a) ¿Cuántos gramos están presentes inicialmente? (b) A la décima de gramo más cercana, ¿cuántos gramos permanecen después de 10 horas? (c) ¿Y de 44 horas? (d) Con base en su respuesta al inciso (c), ¿cuál es su estimación de la vida media del elemento?

- 48. Decaimiento radiactivo** A un cierto tiempo hay 75 miligramos de una sustancia radiactiva, la cual decae de modo que después de  $t$  años el número de miligramos presentes,  $N$ , está dado por

$$N = 75e^{-0.045t}$$

¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 años? Dé su respuesta al miligramo más cercano.

- 49. Decaimiento radiactivo** Si una sustancia radiactiva tiene una vida media de 8 años, ¿en cuánto tiempo un gramo alcanza  $\frac{1}{16}$  de gramo?

- 50. Mercadotecnia** Una compañía de ventas por correo se anuncia en una revista nacional. La compañía determina que de todas las ciudades pequeñas, el porcentaje (dado como un decimal) en el que exactamente  $x$  personas respondan a un anuncio se ajusta a una distribución de Poisson, donde  $\mu = 0.5$ . ¿En qué porcentaje de ciudades pequeñas puede la compañía esperar que exactamente dos personas respondan? Redondee su respuesta a cuatro decimales.

- 51. Admisión en la sala de emergencias** Suponga que el número de pacientes admitidos en la sala de emergencias de un hospital durante cierta hora del día tiene una distribución de Poisson donde la media es 4. Encuentre la probabilidad de que haya exactamente dos pacientes de urgencia durante esa hora. Redondee su respuesta a cuatro decimales.



52. Grafique  $y = 17^x$  y  $y = (\frac{1}{17})^x$  en la misma pantalla. Determine el punto de intersección.

53. Sea  $a$  una constante mayor que 0. Grafique  $y = 2^x$  y  $y = 2^a \cdot 2^x$  en la misma pantalla, para valores constantes  $a = 2$  y  $a = 3$ . Parece que la gráfica de  $y = 2^a \cdot 2^x$  es la gráfica de  $y = 2^x$  recorrida  $a$  unidades a la izquierda. Pruebe algebraicamente que esto es cierto.

54. Para  $y = 7^x$ , encuentre  $x$  si  $y = 4$ . Redondee su respuesta a dos decimales.

55. Para  $y = 2^x$ , determine  $x$  si  $y = 9$ . Redondee su respuesta a dos decimales.

56. **Crecimiento de células** El número de células de un cultivo se incrementa a razón de 7% por hora. Al inicio están presentes 1000 células. ¿Después de cuántas horas completas habrá al menos 3000?

57. **Crecimiento de bacterias** De acuerdo con el ejemplo 1, ¿en cuánto tiempo existirán 1000 bacterias? Redondee su respuesta a la décima de minuto más cercana.

- 58. Ecuación de demanda** La ecuación de demanda para un juguete nuevo es

$$q = 10\,000(0.95123)^p$$

- (a) Evalúe  $q$  al entero más cercano cuando  $p = 10$ .  
 (b) Convierta la ecuación de demanda a la forma

$$q = 10\,000e^{-xp}$$

(Una pista: Encuentre un número  $x$  tal que  $0.95123 \approx e^{-x}$ .)

- (c) Utilice la ecuación del inciso (b) para evaluar  $q$  al entero más cercano cuando  $p = 10$ . Sus respuestas en los incisos (a) y (c) deben ser iguales.

- 59. Inversión** Si se invierten \$2500 en una cuenta de ahorros que genera interés a 4.3% compuesto anualmente, ¿después de cuántos años completos la cantidad al menos se duplicará?

## OBJETIVO

Introducir las funciones logarítmicas y sus gráficas. Las propiedades de los logaritmos se estudiarán en la sección 4.3.

## APUNTADOR ➤

Para repasar las funciones inversas, vaya a la sección 2.4.

## 4.2 Funciones logarítmicas

Debido a que todas las funciones exponenciales pasan la prueba de la recta horizontal, todas son funciones uno a uno. De esto se deduce que cada función exponencial tiene una inversa. Dichas funciones inversas a las funciones exponenciales se llaman *funciones logarítmicas*.

De manera más precisa, si  $f(x) = b^x$ , la función exponencial base  $b$  (donde  $0 < b < 1$  o  $1 < b$ ), entonces la función inversa  $f^{-1}(x)$  se llama la *función logarítmica base b* y se denota  $\log_b x$ . Esto surge de las observaciones generales acerca de las funciones inversas expuestas en la sección 2.4:

$$y = \log_b x \quad \text{si y sólo si} \quad b^y = x$$

y se tienen las siguientes ecuaciones fundamentales:

$$\log_b b^x = x \tag{1}$$

$$b^{\log_b x} = x \tag{2}$$

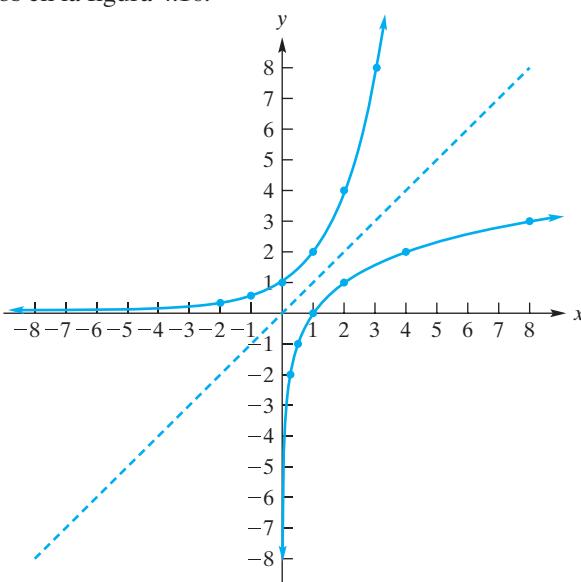
donde la ecuación (1) se aplica para toda  $x$  en  $(-\infty, \infty)$  —que es el dominio de la función exponencial base  $b$ — y la ecuación (2) se aplica para toda  $x$  en el rango de la función exponencial base  $b$  —que es  $(0, \infty)$  y necesariamente el dominio de la función logarítmica base  $b$ —. Dicho de otra forma, dada  $x$  positiva,  $\log_b x$  es el número único con la propiedad de que  $b^{\log_b x} = x$ . Las generalidades sobre las funciones inversas también permiten ver de inmediato cómo se ve una función logarítmica.

En la figura 4.16 se muestra la gráfica de la función exponencial particular  $y = f(x) = 2^x$ , cuya forma general es típica de las funciones exponenciales  $y = b^x$  para la cual la base  $b$  satisface  $1 < b$ . Se ha agregado una copia (punteada) de la recta  $y = x$ . La gráfica de  $y = f^{-1}(x) = \log_2 x$  se obtiene como la imagen de espejo de  $y = f(x) = 2^x$  en la línea  $y = x$ .

En la tabla 4.3 se han tabulado los valores de la función que aparece como las coordenadas y de los puntos en la figura 4.16.

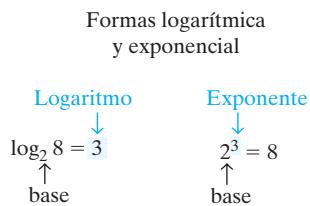
**TABLA 4.3** Valores seleccionados de la función

$x$	$2^x$	$x$	$\log_2 x$
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-2
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3



**FIGURA 4.16** Gráficas de  $y = 2^x$  y  $y = \log_2 x$ .

Resulta claro que la función exponencial base 2 y la función logarítmica base 2 “deshacen” sus efectos entre sí. Por lo tanto, para toda  $x$  en el dominio de  $2^x$ , [que es  $(-\infty, \infty)$ ], se tiene



**FIGURA 4.17** Un logaritmo puede considerarse un exponente.

y, para toda  $x$  en el dominio de  $\log_2 x$  [que es el rango de  $2^x$ , el cual es  $(0, \infty)$ ], se tiene

$$2^{\log_2 x} = x$$

No puede decirse muy a menudo que

$$y = \log_b x \text{ significa } b^y = x$$

y viceversa

$$b^y = x \text{ significa } y = \log_b x$$

En este sentido, el *logaritmo de un número es un exponente*:  $\log_b x$  es la potencia a la cual debe elevarse  $b$  para obtener  $x$ . Por ejemplo,

$$\log_2 8 = 3 \text{ porque } 2^3 = 8$$

Se dice que  $\log_2 8 = 3$  es la **forma logarítmica** de la **forma exponencial**  $2^3 = 8$ . (Vea la figura 4.17.)

### EJEMPLO 1 Conversión de forma exponencial a forma logarítmica

	<i>Forma exponencial</i>	<i>Forma logarítmica</i>
a.	Como $5^2 = 25$	se concluye que $\log_5 25 = 2$
b.	Como $3^4 = 81$	se concluye que $\log_3 81 = 4$
c.	Como $10^0 = 1$	se concluye que $\log_{10} 1 = 0$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



### EJEMPLO 2 Conversión de forma logarítmica a forma exponencial

	<i>Forma logarítmica</i>	<i>Forma exponencial</i>
a.	$\log_{10} 1000 = 3$	significa $10^3 = 1000$
b.	$\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$	significa $64^{1/2} = 8$
c.	$\log_2 \frac{1}{16} = -4$	significa $2^{-4} = \frac{1}{16}$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3



### EJEMPLO 3 Gráfica de una función logarítmica con $b > 1$

Examine de nuevo la gráfica de  $y = \log_2 x$  de la figura 4.16. Es típica para una función logarítmica con  $b > 1$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA CON  $0 < b < 1$ 

Suponga que un bote se deprecia 20% cada año. Haga la gráfica del número de años que cierto propietario conserva el bote como una función de la disminución multiplicativa de su valor original. Marque la gráfica con el nombre de la función.

EJEMPLO 4 Gráfica de una función logarítmica con  $0 < b < 1$ 

Grafique  $y = \log_{1/2} x$ .

**Solución:** Para graficar los puntos se usa la forma exponencial equivalente  $y = (\frac{1}{2})^x$  y se refleja la gráfica en la recta  $y = x$ .

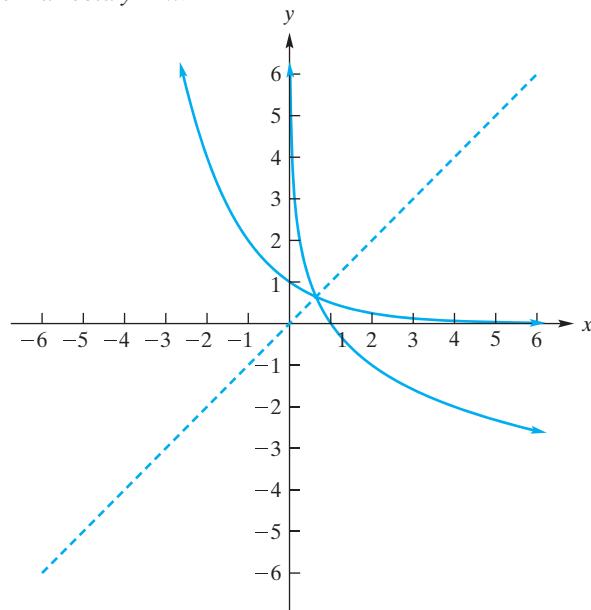


FIGURA 4.18 Gráficas de  $y = (\frac{1}{2})^x$  y  $y = \log_{1/2} x$ .

A partir de la gráfica, puede verse que el dominio de  $y = \log_{1/2} x$  está conformado por el conjunto de todos los números reales positivos, que es el rango de  $y = (\frac{1}{2})^x$ , y el rango de  $y = \log_{1/2} x$  consiste en todos los números reales, que a su vez es el dominio de  $y = (\frac{1}{2})^x$ . La gráfica desciende de izquierda a derecha. Los números entre 0 y 1 tienen logaritmos base  $\frac{1}{2}$  positivos y, entre más cerca estén del 0, mayor es su logaritmo base  $\frac{1}{2}$ . Los números mayores que 1 tienen logaritmos base  $\frac{1}{2}$  negativos. El logaritmo de 1 es 0, sin importar la base  $b$ , y corresponde a la intersección  $x = 1$  (0,0). Esta gráfica es representativa para una función logarítmica con  $0 < b < 1$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

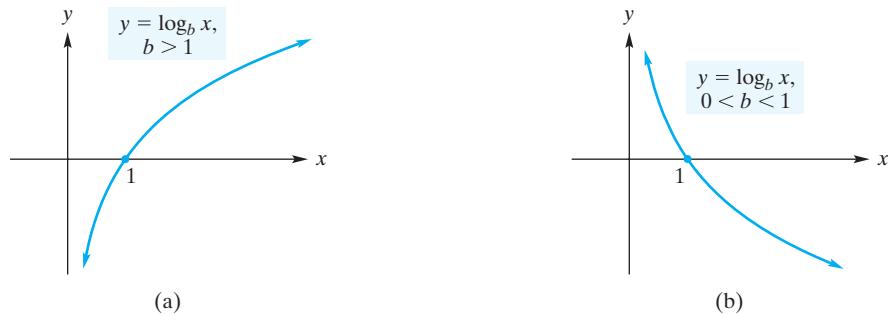
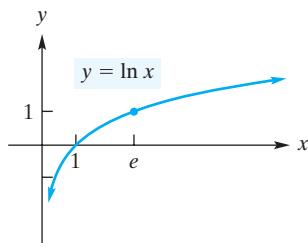


FIGURA 4.19 Formas generales de  $y = \log_b x$ .

Para resumir los resultados de los ejemplos 3 y 4, puede decirse que la gráfica de una función logarítmica tiene una de dos formas generales, dependiendo si  $b > 1$  o si  $0 < b < 1$  (vea la figura 4.19). Para  $b > 1$  la gráfica asciende de izquierda a derecha; conforme  $x$  se acerca a 0, los valores de la función disminuyen indefinidamente y la gráfica se hace cada vez más próxima al eje  $y$ . Para  $0 < b < 1$ , la gráfica desciende de izquierda a derecha; conforme  $x$  se acerca a 0, los valores de la función crecen indefinidamente y la gráfica se acerca al eje  $y$ . En cada caso observe que:

1. El dominio de una función logarítmica es el intervalo  $(0, \infty)$ . Esto es, no existe logaritmo de números negativos ni del 0.

Debe familiarizarse con la gráfica del logaritmo natural de la figura 4.20.



**FIGURA 4.20** Gráfica de la función logaritmo natural.

2. El rango es el intervalo  $(-\infty, \infty)$ .
3. El logaritmo de 1 es 0, que corresponde a la intersección  $x$  (1, 0).

Los logaritmos de base 10 son llamados **logaritmos comunes**. Se utilizaban con frecuencia para propósitos de cómputo antes de la época de las calculadoras. En general, se omite el subíndice 10 de la notación:

$$\log x \text{ significa } \log_{10} x$$

Los logaritmos de base  $e$  son importantes en el cálculo y se conocen como **logaritmos naturales**. Para tales logaritmos se usa la notación “ln”:

$$\ln x \text{ significa } \log_e x$$

El símbolo  $\ln x$  puede leerse “logaritmo natural de  $x$ ”. Su calculadora da valores aproximados para los logaritmos naturales y comunes. Por ejemplo, verifique que  $\ln 2 \approx 0.69315$ . Esto significa que  $e^{0.69315} \approx 2$ . La figura 4.20 muestra la gráfica de  $y = \ln x$ . Como  $e > 1$ , la gráfica tiene la forma general de una función logarítmica donde  $b > 1$  [vea la figura 4.19(a)] y asciende de izquierda a derecha. Aunque están bien establecidas las convenciones acerca de  $\log$ , sin subíndice, y  $\ln$  en los libros elementales, debe tener cuidado al leer textos avanzados. En ese tipo de libros, por lo general  $\log x$  significa  $\log_e x$ , y  $\ln$  no se utiliza, además los logaritmos base 10 se escriben de manera explícita como  $\log_{10} x$ .

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5

### CÁLCULO DE LOGARITMOS

El número de años que necesita una cantidad invertida a una tasa anual de  $r$ , compuesta de manera continua, para cuadruplicar su valor es una función de la tasa anual  $r$ , dada por  $t(r) = \frac{\ln 4}{r}$ . Use una calculadora para encontrar la tasa necesaria para cuadruplicar una inversión en 10 años.

Recuerde la manera en la que un logaritmo se convierte en un exponente.

### EJEMPLO 5 Cálculo de logaritmos

- a. Encuentre  $\log 100$ .

**Solución:** Aquí la base es 10. Así que  $\log 100$  es el exponente al que debe elevarse 10 para obtener 100. Como  $10^2 = 100$ ,  $\log 100 = 2$ .

- b. Encuentre  $\ln 1$ .

**Solución:** Aquí la base es  $e$ . Como  $e^0 = 1$ ,  $\ln 1 = 0$ .

- c. Encuentre  $\log 0.1$ .

**Solución:** Como  $0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$ ,  $\log 0.1 = -1$ .

- d. Encuentre  $\ln e^{-1}$ .

**Solución:** Como  $\ln e^{-1}$  es el exponente al que debe elevarse  $e$  para obtener  $e^{-1}$ , es claro que  $\ln e^{-1} = -1$ .

- e. Encuentre  $\log_{36} 6$ .

**Solución:** Como  $36^{1/2} (= \sqrt{36})$  es 6,  $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3



Muchas ecuaciones que incluyen formas logarítmica o exponencial, pueden resolverse para una cantidad desconocida transformando primero de la forma logarítmica a la exponencial o viceversa. El ejemplo 6 ilustra esta acción.

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6

### RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

El aumento multiplicativo  $m$  de un monto invertido a una tasa anual de  $r$ , capitalizable de manera continua durante un tiempo  $t$  está dado por  $m = e^{rt}$ . ¿Qué tasa anual es necesaria para triplicar la inversión en 12 años?

### EJEMPLO 6 Resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

- a. Resuelva  $\log_2 x = 4$ .

**Solución:** Puede obtenerse una expresión explícita para  $x$  al escribir la ecuación en forma exponencial. Resulta

$$2^4 = x$$

de modo que  $x = 16$ .

- b. Resuelva  $\ln(x + 1) = 7$ .

**Solución:** De la forma exponencial resulta  $e^7 = x + 1$ . Así,  $x = e^7 - 1$ .

c. Resuelva  $\log_x 49 = 2$ .

**Solución:** En la forma exponencial,  $x^2 = 49$ , de modo que  $x = 7$ . Se rechaza  $x = -7$ , porque un número negativo no puede ser una base de una función logarítmica.

d. Resuelva  $e^{5x} = 4$ .

**Solución:** Puede obtenerse una expresión explícita para  $x$  al escribir la ecuación en forma logarítmica. Se tiene

$$\ln 4 = 5x$$

$$x = \frac{\ln 4}{5}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 49



### Decaimiento radiactivo y vida media

A partir del estudio de decaimiento de un elemento radiactivo de la sección 4.1, se sabe que la cantidad presente en el instante  $t$  está dada por

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (3)$$

donde  $N_0$  es la cantidad inicial (la cantidad en el instante  $t = 0$ ) y  $\lambda$  es la constante de decaimiento. Ahora se determinará la vida media  $T$  del elemento. En el instante  $T$ , se encuentra presente la mitad de la cantidad inicial. Esto es, cuando  $t = T$ ,  $N = N_0/2$ . Así, de la ecuación (3), se tiene

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$$

Al resolver para  $T$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= e^{-\lambda T} \\ 2 &= e^{\lambda T} \quad (\text{al tomar recíprocos de ambos lados}) \end{aligned}$$

Para obtener una expresión explícita para  $T$ , se convierte a la forma logarítmica. Esto resulta en

$$\lambda T = \ln 2$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Para resumir, se tiene lo siguiente:

*Si un elemento radiactivo tiene una constante de decaimiento  $\lambda$ , entonces la vida media  $T$  del elemento está dada por*

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (4)$$

### EJEMPLO 7 Determinación de la vida media

Una muestra de 10 miligramos de polonio radiactivo  $^{210}\text{Po}$  (que se denota por  $^{210}\text{Po}$ ) decae de acuerdo con la ecuación

$$N = 10e^{-0.00501t}$$

donde  $N$  es el número de miligramos presentes después de  $t$  días (vea la figura 4.21). Determine la vida media del  $^{210}\text{Po}$ .

**Solución:** Aquí la constante de decaimiento  $\lambda$  es 0.00501. Por la ecuación (4), la vida media está dada por:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0.00501} \approx 138.4 \text{ días}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 63

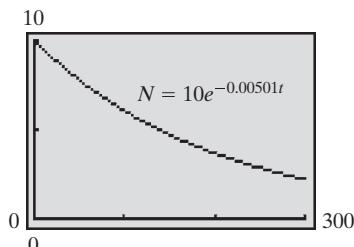


FIGURA 4.21 Función de decaimiento radiactivo  $N = 10e^{-0.00501t}$ .

## Problemas 4.2

En los problemas 1 a 8, exprese cada forma logarítmica de manera exponencial y cada forma exponencial de manera logarítmica.

\*1.  $10^4 = 10\,000$

2.  $2 = \log_{12} 144$

\*3.  $\log_2 64 = 6$

4.  $8^{2/3} = 4$

5.  $e^3 = 20.0855$

6.  $e^{0.33647} = 1.4$

7.  $\ln 3 = 1.09861$

8.  $\log 5 = 0.6990$

En los problemas 9 a 16, grafique las funciones.

\*9.  $y = f(x) = \log_3 x$

10.  $y = f(x) = \log_4 2x$

\*11.  $y = f(x) = \log_{1/4} x$

12.  $y = f(x) = \log_{1/5} x$

13.  $y = f(x) = \log_2(x - 4)$

14.  $y = f(x) = \log_2(-x)$

15.  $y = f(x) = -2 \ln x$

16.  $y = f(x) = \ln(x + 2)$

En los problemas 17 a 28, evalúe la expresión.

17.  $\log_6 36$

18.  $\log_2 64$

19.  $\log_3 27$

20.  $\log_{16} 4$

21.  $\log_7 7$

22.  $\log 10\,000$

23.  $\log 0.01$

24.  $\log_2 \sqrt[3]{2}$

25.  $\log_5 1$

26.  $\log_5 \frac{1}{25}$

27.  $\log_2 \frac{1}{8}$

28.  $\log_4 \sqrt[3]{4}$

Encuentre  $x$  en los problemas 29 a 48.

29.  $\log_3 x = 4$

30.  $\log_2 x = 8$

31.  $\log_5 x = 3$

32.  $\log_4 x = 0$

33.  $\log x = -1$

34.  $\ln x = 1$

35.  $\ln x = -3$

36.  $\log_x 25 = 2$

37.  $\log_x 8 = 3$

38.  $\log_x 3 = \frac{1}{2}$

39.  $\log_x \frac{1}{6} = -1$

40.  $\log_x y = 1$

41.  $\log_3 x = -3$

42.  $\log_x(2x - 3) = 1$

43.  $\log_x(6 - x) = 2$

44.  $\log_8 64 = x - 1$

45.  $2 + \log_2 4 = 3x - 1$

46.  $\log_3(x + 2) = -2$

47.  $\log_x(2x + 8) = 2$

48.  $\log_x(6 + 4x - x^2) = 2$

Encuentre  $x$  en los problemas 49 a 52 además exprese su respuesta en términos de logaritmos naturales.

\*49.  $e^{3x} = 2$

50.  $0.1e^{0.1x} = 0.5$

51.  $e^{2x-5} + 1 = 4$

52.  $6e^{2x} - 1 = \frac{1}{2}$

En los problemas 53 a 56, utilice su calculadora para encontrar el valor aproximado de cada expresión. Redondee su respuesta a cinco decimales.

53.  $\ln 5$

54.  $\ln 4.27$

55.  $\ln 7.39$

56.  $\ln 9.98$

57. **Apreciación** Suponga que una antigüedad incrementa su valor en 10% cada año. Haga una gráfica del número de años que cierto propietario la conserva como una función del aumento multiplicativo de su valor original. Marque la gráfica con el nombre de la función.

58. **Ecuación de costo** Para una compañía, el costo por producir  $q$  unidades de un producto está dado por la ecuación

$$c = (3q \ln q) + 12$$

Evalúe el costo cuando  $q = 6$ . (Redondee su respuesta a dos decimales.)

59. **Ecuación de oferta** La ecuación de oferta de un fabricante es

$$p = \log \left( 10 + \frac{q}{2} \right)$$

donde  $q$  es el número de unidades ofrecidas al precio unitario  $p$ . ¿A qué precio el fabricante ofrecerá 1980 unidades?

60. **Terremoto** La magnitud,  $M$ , de un terremoto y su energía,  $E$ , están relacionadas por la ecuación<sup>5</sup>

$$1.5M = \log \left( \frac{E}{2.5 \times 10^{11}} \right)$$

donde  $M$  está dada en términos de la escala preferencial de Richter de 1958 y  $E$  se encuentra en ergios. Resuelva la ecuación para  $E$ .

61. **Biología** Para cierta población de células, el número de ellas en el instante  $t$  está dado por  $N = N_0(2^{kt})$ , donde  $N_0$  es el número de células en  $t = 0$  y  $k$  es una constante positiva. (a) Encuentre  $N$  cuando  $t = k$ . (b) ¿Cuál es el significado de  $k$ ? (c) Demuestre que el tiempo necesario para tener una población de  $N_1$  puede escribirse como

$$t = k \log_2 \frac{N_1}{N_0}$$

62. **Bienes secundarios** En un análisis de bienes secundarios, Persky<sup>6</sup> resuelve una ecuación de la forma

$$u_0 = A \ln(x_1) + \frac{x_2^2}{2}$$

para  $x_1$ , donde  $x_1$  y  $x_2$  son cantidades de dos productos,  $u_0$  es una medida de la utilidad y  $A$  es una constante positiva. Determine  $x_1$ .

- \*63. **Decaimiento radiactivo** Una muestra de 1 gramo de plomo 211 radiactivo ( $^{211}\text{Pb}$ ) decae de acuerdo con la ecuación  $N = e^{-0.01920t}$ , donde  $N$  es el número de gramos presentes después de  $t$  minutos. Encuentre la vida media del  $^{211}\text{Pb}$  a la décima de minuto más cercana.

64. **Decaimiento radiactivo** Una muestra de 100 miligramos de actinio 277 radiactivo ( $^{277}\text{Ac}$ ) decae de acuerdo con la ecuación

$$N = 100e^{-0.03194t}$$

donde  $N$  es el número de miligramos presentes después de  $t$  años. Encuentre la vida media del  $^{277}\text{Ac}$  a la décima de año más cercana.

65. Si  $\log_y x = 3$  y  $\log_z x = 2$ , encuentre una fórmula para  $z$  como una función explícita que dependa sólo de  $y$ .

66. Despeje  $y$  como una función explícita de  $x$  si

$$x + 3e^{2y} - 8 = 0$$

67. Suponga que  $y = f(x) = x \ln x$ . (a) ¿Para qué valores de  $x$  es  $y < 0$ ? (Una pista: Determine el momento en que la gráfica está por debajo del eje  $x$ .) (b) Determine el rango de  $f$ .

68. Encuentre la intersección con el eje  $x$  de  $y = x^2 \ln x$ .

69. Use la gráfica de  $y = e^x$  para estimar  $\ln 3$ . Redondee su respuesta a dos decimales.

70. Utilice la gráfica de  $y = \ln x$  para estimar  $e^2$ . Redondee su respuesta a dos decimales.

71. Determine los valores en  $x$  de los puntos de intersección de las gráficas de  $y = (x - 2)^2$  y  $y = \ln x$ . Redondee sus respuestas a dos decimales.

<sup>5</sup>K. E. Bullen, *An Introduction to the Theory of Seismology* (Cambridge, Reino Unido: Cambridge at the University Press, 1963).

<sup>6</sup>A. L. Persky, "An Inferior Good and a Novel Indifference Map", *The American Economist*, XXIX, núm. 1 (primavera de 1985).

**OBJETIVO**

Estudiar las propiedades básicas de las funciones logarítmicas.

**ADVERTENCIA**

Asegúrese de que entiende claramente las propiedades 1, 2 y 3, las cuales no se aplican al logaritmo de una suma [ $\log_b(m + n)$ ], al logaritmo de una diferencia [ $\log_b(m - n)$ ], al producto de dos logaritmos [ $(\log_b m)(\log_b n)$ ], ni a la división de dos logaritmos  $\left[\frac{\log_b m}{\log_b n}\right]$ .

**4.3 Propiedades de los logaritmos**

La función logarítmica tiene muchas propiedades importantes. Por ejemplo,

$$1. \log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$$

que dice que el logaritmo del producto de dos números es la suma de los logaritmos de esos números. Esta propiedad puede probarse al derivar la forma exponencial de la ecuación:

$$b^{\log_b m + \log_b n} = mn$$

Si se usa primero una regla conocida para los exponentes, se tiene

$$\begin{aligned} b^{\log_b m + \log_b n} &= b^{\log_b m} b^{\log_b n} \\ &= mn \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad usa dos instancias de la ecuación fundamental (2) de la sección 4.2. Las dos propiedades siguientes no se probarán, porque sus demostraciones son similares a la de la propiedad 1.

$$2. \log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$

Es decir, el logaritmo de una división es la diferencia del logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$3. \log_b m^r = r \log_b m$$

Es decir, el logaritmo de una potencia de un número es el exponente por el logaritmo del número.

En la tabla 4.4 se proporcionan los valores de algunos logaritmos comunes. La mayoría de las entradas son aproximadas. Por ejemplo,  $\log 4 \approx 0.6021$ , que significa  $10^{0.6021} \approx 4$ . Para ilustrar el uso de las propiedades de los logaritmos, se usará esta tabla en algunos de los ejemplos siguientes.

**EJEMPLO 1 Determinación de logaritmos con el uso de la tabla 4.4**

- a. Encuentre  $\log 56$ .

**Solución:**  $\log 56$  no está en la tabla. Pero puede escribirse 56 como el producto de  $8 \cdot 7$ . Así, por la propiedad 1,

$$\log 56 = \log(8 \cdot 7) = \log 8 + \log 7 \approx 0.9031 + 0.8451 = 1.7482$$

- b. Encuentre  $\log \frac{9}{2}$ .

**Solución:** Por la propiedad 2,

$$\log \frac{9}{2} = \log 9 - \log 2 \approx 0.9542 - 0.3010 = 0.6532$$

- c. Encuentre  $\log 64$ .

**Solución:** Como  $64 = 8^2$ , por la propiedad 3,

$$\log 64 = \log 8^2 = 2 \log 8 \approx 2(0.9031) = 1.8062$$

- d. Encuentre  $\sqrt{5}$ .

**Solución:** Por la propiedad 3, se tiene

$$\log \sqrt{5} = \log 5^{1/2} = \frac{1}{2} \log 5 \approx \frac{1}{2}(0.6990) = 0.3495$$

**TABLA 4.4** Logaritmos comunes

$x$	$\log x$	$x$	$\log x$
2	0.3010	7	0.8451
3	0.4771	8	0.9031
4	0.6021	9	0.9542
5	0.6990	10	1.0000
6	0.7782	$e$	0.4343

Aunque los logaritmos del ejemplo 1 pueden encontrarse con una calculadora, se hará uso de las propiedades de los logaritmos.

- e. Encuentre  $\log \frac{16}{21}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\log \frac{16}{21} &= \log 16 - \log 21 = \log(4^2) - \log(3 \cdot 7) \\ &= 2 \log 4 - [\log 3 + \log 7] \\ &\approx 2(0.6021) - [0.4771 + 0.8451] = -0.1180\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

### EJEMPLO 2 Reescritura de expresiones logarítmicas

- a. Exprese  $\log \frac{1}{x^2}$  en términos de  $\log x$ .

**Solución:**

$$\log \frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2 \log x \quad (\text{Propiedad 3})$$

Aquí se ha supuesto que  $x > 0$ . Aunque  $\log(1/x^2)$  está definido para  $x \neq 0$ , la expresión  $-2 \log x$  sólo está definida si  $x > 0$ . Observe que se tiene

$$\log \frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2 \log |x|$$

para toda  $x \neq 0$ .

- b. Exprese  $\log \frac{1}{x}$  en términos de  $\log x$ , para  $x > 0$ .

**Solución:** Por la propiedad 3,

$$\log \frac{1}{x} = \log x^{-1} = -1 \log x = -\log x$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

Del ejemplo 2(b), se observa que  $\log(1/x) = -\log x$ . Si se generaliza se obtiene la propiedad siguiente:

4.  $\log_b \frac{1}{m} = -\log_b m$

Es decir, el logaritmo del recíproco de un número es el negativo del logaritmo del número.

Por ejemplo,  $\log \frac{2}{3} = -\log \frac{3}{2}$ .

### EJEMPLO 3 Escritura de logaritmos en términos de logaritmos más simples

- a. Escriba  $\ln \frac{x}{zw}$  en términos de  $\ln x$ ,  $\ln z$  y  $\ln w$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\ln \frac{x}{zw} &= \ln x - \ln(zw) \quad (\text{Propiedad 2}) \\ &= \ln x - (\ln z + \ln w) \quad (\text{Propiedad 1}) \\ &= \ln x - \ln z - \ln w\end{aligned}$$

- b. Escriba  $\ln \sqrt[3]{\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}}$  en términos de  $\ln x$ ,  $\ln(x-2)$  y  $\ln(x-3)$ .

Las manipulaciones como las del ejemplo 3 se utilizan con frecuencia en cálculo.

**Solución:**

$$\begin{aligned}\ln \sqrt[3]{\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}} &= \ln \left[ \frac{x^5(x-2)^8}{x-3} \right]^{1/3} = \frac{1}{3} \ln \frac{x^5(x-2)^8}{x-3} \\ &= \frac{1}{3} \{ \ln [x^5(x-2)^8] - \ln(x-3) \} \\ &= \frac{1}{3} [\ln x^5 + \ln(x-2)^8 - \ln(x-3)] \\ &= \frac{1}{3} [5 \ln x + 8 \ln(x-2) - \ln(x-3)]\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29 **PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1****COMBINACIÓN DE LOGARITMOS**

La medida en la escala de Richter de un terremoto está dada por  $R = \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$ , donde  $I$  es la intensidad del terremoto e  $I_0$  es la intensidad de un terremoto de nivel cero. ¿Cuántas veces es mayor, en la escala de Richter, un terremoto con intensidad 900 000 veces la intensidad de un terremoto con nivel cero, que un terremoto con intensidad 9000 veces la intensidad de un terremoto de nivel cero? Escriba la respuesta como una expresión que incluya logaritmos. Simplifique la expresión por medio de reducción de logaritmos, y después evalúe la expresión resultante.

**EJEMPLO 4 Combinación de logaritmos**

- a. Escriba  $\ln x - \ln(x+3)$  como un solo logaritmo.

**Solución:**

$$\ln x - \ln(x+3) = \ln \frac{x}{x+3} \quad (\text{Propiedad 2})$$

- b. Escriba  $\ln x + \ln 7 - \ln 2 - 2 \ln 4$  como un solo logaritmo.

**Solución:**

$$\begin{aligned}&\ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - 2 \ln 4 \\ &= \ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - \ln(4^2) \quad (\text{Propiedad 3}) \\ &= \ln 3 + \ln 7 - [\ln 2 + \ln(4^2)] \\ &= \ln(3 \cdot 7) - \ln(2 \cdot 4^2) \quad (\text{Propiedad 1}) \\ &= \ln 21 - \ln 32 \\ &= \ln \frac{21}{32} \quad (\text{Propiedad 2})\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37 

Como  $b^0 = 1$  y  $b^1 = b$ , al convertir a formas logarítmicas se tienen las propiedades siguientes:

5.  $\log_b 1 = 0$

6.  $\log_b b = 1$

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2****SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES LOGARÍTMICAS**

Si un terremoto es 10 000 veces más intenso como un terremoto de nivel cero, ¿cuál es su medida en la escala de Richter? Escriba la respuesta como una expresión logarítmica y simplifíquela. (Para obtener la fórmula, vea Principios en práctica 1.)

**EJEMPLO 5 Simplificación de expresiones logarítmicas**

- a. Encuentre  $\ln e^{3x}$ .

**Solución:** Por la ecuación fundamental (1) expuesta en la sección 4.2, donde  $b = e$ , se tiene  $\ln e^{3x} = 3x$ .

- b. Encuentre  $\log 1 + \log 1000$ .

**Solución:** Por la propiedad 5,  $\log 1 = 0$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\log 1 + \log 1000 &= 0 + \log 10^3 \\ &= 0 + 3 \\ &= 3 \quad (\text{Ecuación fundamental (1)} \\ &\quad \text{de la sección 4.2 donde } b = 10)\end{aligned}$$

- c. Encuentre  $\log_7 \sqrt[9]{7^8}$ .

**Solución:**

$$\log_7 \sqrt[9]{7^8} = \log_7 7^{8/9} = \frac{8}{9}$$

- d. Encuentre  $\log_3 \left( \frac{27}{81} \right)$ .

**Solución:**

$$\log_3 \left( \frac{27}{81} \right) = \log_3 \left( \frac{3^3}{3^4} \right) = \log_3 (3^{-1}) = -1$$

- e. Encuentre  $\ln e + \log \frac{1}{10}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\ln e + \log \frac{1}{10} &= \ln e + \log 10^{-1} \\ &= 1 + (-1) = 0\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 41



No confunda  $\ln x^2$  con  $(\ln x)^2$ . Se tiene

$$\ln x^2 = \ln(x \cdot x)$$

pero

$$(\ln x)^2 = (\ln x)(\ln x)$$

Algunas veces  $(\ln x)^2$  se escribe como  $\ln^2 x$ . Ésta no es una nueva fórmula, sino sólo una notación. De manera más general, algunas personas escriben  $f^2(x)$  para  $(f(x))^2$ . Se recomienda evitar la notación  $f^2(x)$ .

### EJEMPLO 6 Uso de la ecuación (2) de la sección 4.2

- a. Encuentre  $e^{\ln x^2}$ .

**Solución:** Por (2), donde  $b = e$ ,  $e^{\ln x^2} = x^2$ .

- b. Resuelva  $10^{\log x^2} = 25$  para  $x$ .

**Solución:**

$$10^{\log x^2} = 25$$

$$x^2 = 25 \quad [\text{Por la ecuación (2) de la sección 4.2}]$$

$$x = \pm 5$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 45



### EJEMPLO 7 Evaluación de logaritmos de base 5

Utilice una calculadora para encontrar  $\log_5 2$ .

**Solución:** Las calculadoras comunes tienen teclas para logaritmos de base 10 y de base  $e$ , pero no para base 5. Sin embargo, es posible convertir logaritmos de una base a otra. Ahora se convertirá de base 5 a base 10. Primero, se establece  $x = \log_5 2$ . Entonces  $5^x = 2$ . Al tomar los logaritmos comunes en ambos lados de  $5^x = 2$ , se obtiene

$$\log 5^x = \log 2$$

$$x \log 5 = \log 2$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 5} \approx 0.4307$$

Si se hubieran tomado logaritmos naturales en ambos lados, el resultado sería  $x = (\ln 2)/(\ln 5) \approx 0.4307$ , igual que antes.

Si se generaliza el método utilizado en el ejemplo 7 se obtiene la llamada fórmula de *cambio de base*:

#### Fórmula de cambio de base

$$7. \log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

Algunos estudiantes opinan que la fórmula para el cambio de base es más fácil de recordar cuando se expresa en la forma

$$(\log_a b)(\log_b m) = \log_a m$$

en la cual aparentemente se cancelan las dos instancias de  $b$ . Ahora se verá cómo probar esta identidad, pues la capacidad de comprobar la verdad de dichos enunciados mejora la habilidad de usarlos en aplicaciones prácticas. Como  $\log_a m = y$  precisamente si  $a^y = m$ , esta tarea es equivalente a mostrar que

$$a^{(\log_a b)(\log_b m)} = m$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} a^{(\log_a b)(\log_b m)} &= (a^{\log_a b})^{\log_b m} \\ &= b^{\log_b m} \\ &= m \end{aligned}$$

si se usa una regla para exponentes y la ecuación fundamental (2) dos veces.

La fórmula de cambio de base permite la conversión de logaritmos de base  $b$  a base  $a$ .

### EJEMPLO 8 Fórmula de cambio de base

Expresé  $\log x$  en términos de logaritmos naturales.

**Solución:** Debe transformarse de base 10 a base  $e$ , por lo que se utiliza la fórmula de cambio de base (propiedad 7) donde  $b = 10$ ,  $m = x$  y  $a = e$ .

$$\log x = \log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 49



## TECNOLOGÍA

**Problema:** Despliegue la gráfica de  $y = \log_2 x$ .

**Solución:** Para introducir la función, primero se convierte a la base  $e$  o a la base 10. Se elige la base  $e$ . Por la propiedad 7,

$$y = \log_2 x = \frac{\log_e x}{\log_e 2} = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

Ahora se grafica  $y = (\ln x)/(\ln 2)$ , que se muestra en la figura 4.22.

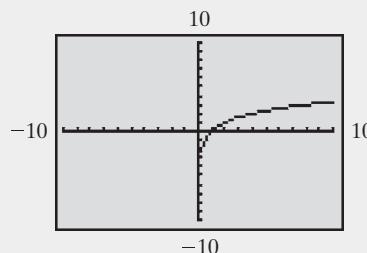


FIGURA 4.22 Gráfica de  $y = \log_2 x$ .

## Problemas 4.3

En los problemas 1 a 10 se establece que  $\log 2 = a$ ,  $\log 3 = b$  y  $\log 5 = c$ . Exprese el logaritmo indicado en términos de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

1.  $\log 30$

2.  $\log 16$

\*3.  $\log \frac{2}{3}$

4.  $\log \frac{5}{2}$

5.  $\log \frac{8}{3}$

6.  $\log \frac{6}{25}$

7.  $\log 36$

8.  $\log 0.00003$

9.  $\log_2 3$

10.  $\log_3 5$

En los problemas 11 a 20, determine el valor de la expresión sin el uso de una calculadora.

11.  $\log_7 7^{48}$

12.  $\log_5(5\sqrt{5})^5$

13.  $\log 0.0000001$

14.  $10^{\log 3.4}$

15.  $\ln e^{5.01}$

16.  $\ln e$

17.  $\ln \frac{1}{e^2}$

18.  $\log_3 81$

\*19.  $\log \frac{1}{10} + \ln e^3$

20.  $e^{\ln \pi}$

En los problemas 21 a 32, escriba la expresión en términos de  $\ln x$ ,  $\ln(x+1)$  y  $\ln(x+2)$ .

21.  $\ln(x(x+1)^2)$

22.  $\ln \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

23.  $\ln \frac{x^2}{(x+1)^3}$

24.  $\ln(x(x+1))^3$

25.  $\ln \left( \frac{x+1}{x+2} \right)^4$

27.  $\ln \frac{x}{(x+1)(x+2)}$

\*29.  $\ln \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2(x+2)^3}$

31.  $\ln \left( \frac{1}{x+2} \sqrt[5]{\frac{x^2}{x+1}} \right)$

26.  $\ln \sqrt{x(x+1)(x+2)}$

28.  $\ln \frac{x^2(x+1)}{x+2}$

30.  $\ln \frac{x}{(x+1)(x+2)}$

32.  $\ln \sqrt[3]{\frac{x^3(x+2)^2}{(x+1)^3}}$

En los problemas 33 a 40, exprese cada una de las formas dadas como un solo logaritmo.

33.  $\log 6 + \log 4$

34.  $\log_3 10 - \log_3 5$

35.  $\log_2(2x) - \log_2(x+1)$

36.  $2 \log x - \frac{1}{2} \log(x-2)$

\*37.  $5 \log_2 10 + 2 \log_2 13$

38.  $5(2 \log x + 3 \log y - 2 \log z)$

39.  $2 + 10 \log 1.05$

40.  $\frac{1}{2}(\log 215 + 8 \log 6 - 3 \log 169)$

En los problemas 41 a 44, determine los valores de las expresiones sin utilizar una calculadora.

\*41.  $e^{4 \ln 3 - 3 \ln 4}$

42.  $\log_2 [\ln(\sqrt{5} + e^2) + \sqrt{5}] + \ln(\sqrt{5} + e^2 - \sqrt{5})]$

43.  $\log_6 54 - \log_6 9$

44.  $\log_3 \sqrt{3} - \log_2 \sqrt[3]{2} - \log_5 \sqrt[4]{5}$

Encuentre  $x$  en los problemas 45 a 48.

\*45.  $e^{\ln(2x)} = 5$

46.  $4^{\log_4 x + \log_4 2} = 3$

47.  $10^{\log x^2} = 4$

48.  $e^{3 \ln x} = 8$

En los problemas 49 a 53, escriba cada expresión en términos de logaritmos naturales.

\*49.  $\log_2(2x+1)$

50.  $\log_3(x^2 + 2x + 2)$

51.  $\log_3(x^2 + 1)$

52.  $\log_5(9 - x^2)$

## OBJETIVO

Desarrollar técnicas para la resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

## 4.4 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Aquí se resolverán *ecuaciones logarítmicas y exponenciales*. Una **ecuación logarítmica** incluye al logaritmo de una expresión que contiene una incógnita. Por ejemplo,  $2 \ln(x+4) = 5$  es una ecuación logarítmica. Por otro lado, en una **ecuación exponencial** la incógnita aparece en un exponente, como en  $2^{3x} = 7$ .

Para resolver algunas ecuaciones logarítmicas, es conveniente aprovechar el hecho de que para cualquier base  $b$ , la función  $y = \log_b x$  es uno a uno. Por supuesto, esto significa que

$$\text{si } \log_b m = \log_b n \text{ entonces } m = n$$

Esto es evidente de manera visual al inspeccionar las dos formas posibles de  $y = \log_b x$  que se dan en la figura 4.19. En cualquiera de los casos, es claro que la función pasa la prueba de la línea horizontal de la sección 2.5. Por otro lado, ya se ha observado que las funciones exponenciales  $y = b^x$  son uno a uno, lo que significa que

$$\text{si } b^m = b^n \text{ entonces } m = n$$

<sup>7</sup>C. Brown, "Military Enlistments: What Can We Learn from Geographic Variation?", *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), 228-234.

<sup>8</sup>C. F. Richter, *Elementary Seismology* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1958).

de manera que cada una tiene una inversa, a saber  $y = \log_b x$ , y como  $(f^{-1})^{-1} = f$ , cada función  $y = \log_b x$  tiene una inversa y por lo tanto es uno a uno. Las ecuaciones fundamentales para las ecuaciones (1) y (2) de la sección 4.2 también resultan útiles para resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales (aquí se han hecho deliberadamente algunas repeticiones para revisar algunos fundamentos).

### EJEMPLO 1 Composición de oxígeno

*Se llevó a cabo un experimento con cierto tipo particular de animal de talla pequeña.<sup>9</sup> En él se determinó el logaritmo de la cantidad de oxígeno consumido por hora para algunos de los animales, y se graficó contra los logaritmos de su peso. Se encontró que*

$$\log y = \log 5.934 + 0.885 \log x$$

*donde  $y$  fue el número de microlitros de oxígeno consumidos por hora y  $x$  el peso del animal (en gramos). Resuelva para  $y$ .*

**Solución:** Primero se combinan los términos del lado derecho en un solo logaritmo:

$$\begin{aligned}\log y &= \log 5.934 + 0.885 \log x \\ &= \log 5.934 + \log x^{0.885} \quad (\text{Propiedad 3 de la sección 4.3}) \\ \log y &= \log(5.934x^{0.885}) \quad (\text{Propiedad 1 de la sección 4.3})\end{aligned}$$

Como los logaritmos son uno a uno, se tiene

$$y = 5.934x^{0.885}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN EXPONENCIAL

Greg escogió un número y lo multiplicó por una potencia de 32. Jean inició con el mismo resultado, cuando ella lo multiplicó por 4 elevado a un número que era nueve unidades menor que tres veces el exponente que utilizó Greg. ¿Qué potencia de 32 utilizó Greg?

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

#### USO DE LOGARITMOS PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN EXPONENCIAL

El gerente de ventas de una cadena de comida rápida determina que las ventas del desayuno empiezan a disminuir el final de una campaña promocional. La venta en dólares, como una función del número de días  $d$  después de que termina la campaña, está dada por

$$S = 800 \left(\frac{4}{3}\right)^{-0.1d}$$

Si el gerente no quiere que las ventas caigan por debajo de 450 por día antes de iniciar una nueva campaña, ¿cuándo debe iniciar dicha campaña?

### EJEMPLO 2 Solución de una ecuación exponencial

Determine  $x$  si  $(25)^{x+2} = 5^{3x-4}$ .

**Solución:** Como  $25 = 5^2$ , ambos lados de la ecuación pueden expresarse como potencias de 5:

$$\begin{aligned}(25)^{x+2} &= 5^{3x-4} \\ (5^2)^{x+2} &= 5^{3x-4} \\ 5^{2x+4} &= 5^{3x-4}\end{aligned}$$

Como  $5^x$  es una función uno a uno,

$$2x + 4 = 3x - 4$$

$$x = 8$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7



Algunas ecuaciones exponenciales pueden resolverse al tomar el logaritmo de ambos lados, después de escribir la ecuación en la forma adecuada. El ejemplo siguiente lo ilustra.

### EJEMPLO 3 Uso de logaritmos para resolver una ecuación exponencial

Resuelva  $5 + (3)4^{x-1} = 12$ .

**Solución:** Primero se aísla la expresión exponencial  $4^{x-1}$  en un lado de la ecuación:

$$\begin{aligned}5 + (3)4^{x-1} &= 12 \\ (3)4^{x-1} &= 7 \\ 4^{x-1} &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

<sup>9</sup>R.W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

Ahora se toma el logaritmo natural de ambos lados:

$$\ln 4^{x-1} = \ln \frac{7}{3}$$

Al simplificar se obtiene

$$(x-1) \ln 4 = \ln \frac{7}{3}$$

$$x-1 = \frac{\ln \frac{7}{3}}{\ln 4}$$

$$x = \frac{\ln \frac{7}{3}}{\ln 4} + 1 \approx 1.61120$$

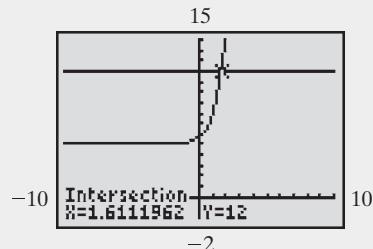
AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

En el ejemplo 3, se utilizan logaritmos naturales para resolver la ecuación dada. Sin embargo, pueden emplearse logaritmos de cualquier base. Por lo general, se usan logaritmos naturales o logaritmos comunes si se desea una forma decimal de la solución. Si se utilizan logaritmos comunes se obtendría

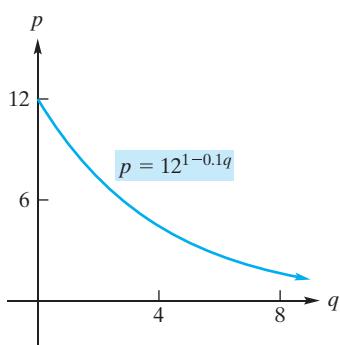
$$x = \frac{\log \frac{7}{3}}{\log 4} + 1 \approx 1.61120$$

## TECNOLOGÍA

En la figura 4.23 se muestra una solución gráfica de la ecuación  $5 + (3)4^{x-1} = 12$  del ejemplo 3. Esta solución ocurre en la intersección de las gráficas de  $y = 5 + (3)4^{x-1}$  y  $y = 12$ .



**FIGURA 4.23** La solución de  $5 + (3)4^{x-1} = 12$  es aproximadamente igual a 1.61120.



**FIGURA 4.24** Gráfica de la ecuación de demanda  $p = 12^{1-0.1q}$ .

### EJEMPLO 4 Ecuación de demanda

La ecuación de demanda para un producto es  $p = 12^{1-0.1q}$ . Utilice logaritmos comunes para expresar  $q$  en términos de  $p$ .

**Solución:** En la figura 4.24 se muestra la gráfica de esta ecuación de demanda para  $q \geq 0$ . Como es común para una ecuación de demanda, la gráfica desciende de izquierda a derecha. Es necesario resolver la ecuación para  $q$ . Al tomar logaritmos comunes de ambos lados de  $p = 12^{1-0.1q}$ , se obtiene

$$\log p = \log(12^{1-0.1q})$$

$$\log p = (1 - 0.1q) \log 12$$

$$\frac{\log p}{\log 12} = 1 - 0.1q$$

$$0.1q = 1 - \frac{\log p}{\log 12}$$

$$q = 10 \left( 1 - \frac{\log p}{\log 12} \right)$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 43

Para resolver algunas ecuaciones exponenciales que incluyen la base  $e$  o la base 10, como  $10^{2x} = 3$ , el proceso de tomar logaritmos de ambos lados puede combinarse con la identidad  $\log_b b^r = r$  [Ecuación fundamental (1) de la sección 4.2] para transformar la ecuación en una forma logarítmica. En este caso, se tiene

$$\begin{aligned} 10^{2x} &= 3 \\ 2x &= \log 3 && \text{(forma logarítmica)} \\ x &= \frac{\log 3}{2} \approx 0.2386 \end{aligned}$$

### EJEMPLO 5 Relación depredador-presa

*En un artículo que concierne a presas y depredadores, Holling<sup>10</sup> hace referencia a una ecuación de la forma*

$$y = K(1 - e^{-ax})$$

*donde  $x$  es la densidad de presas,  $y$  es el número de presas atacadas, y tanto  $K$  como  $a$  son constantes. Verifique su afirmación de que*

$$\ln \frac{K}{K-y} = ax$$

**Solución:** Para encontrar  $ax$ , se resuelve la ecuación dada para  $e^{-ax}$ :

$$\begin{aligned} y &= K(1 - e^{-ax}) \\ \frac{y}{K} &= 1 - e^{-ax} \\ e^{-ax} &= 1 - \frac{y}{K} \\ e^{-ax} &= \frac{K-y}{K} \end{aligned}$$

Ahora se convierte a la forma logarítmica:

$$\begin{aligned} \ln \frac{K-y}{K} &= -ax \\ -\ln \frac{K-y}{K} &= ax \\ \ln \frac{K}{K-y} &= ax && \text{(propiedad 4 de la sección 4.3)} \end{aligned}$$

como quería mostrarse.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7 

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

#### RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LOGARÍTMICA

La medición de un terremoto en la escala de Richter está dada por  $R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ , donde  $I$  es la intensidad del terremoto, y  $I_0$  es la intensidad de un terremoto de nivel cero. Un terremoto que es 675 000 veces tan intenso como un terremoto de nivel cero, tiene una magnitud en la escala de Richter que es 4 veces mayor que otro terremoto. ¿Cuál es la intensidad de este otro terremoto?

Pueden resolverse algunas ecuaciones logarítmicas al reescribirlas en forma exponencial.

### EJEMPLO 6 Solución de una ecuación logarítmica

Resuelva  $\log_2 x = 5 - \log_2(x + 4)$ .

**Solución:** Aquí, primero debe suponerse que  $x$  y  $x + 4$  son positivos, de modo que sus logaritmos estén definidos. Ambas condiciones se satisfacen si  $x > 0$ . Para resolver la ecuación, primero se colocan todos los logaritmos en un lado de modo que puedan combinarse:

$$\log_2 x + \log_2(x + 4) = 5$$

$$\log_2[x(x + 4)] = 5$$

<sup>10</sup>C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism". *The Canadian Entomologist*, 91, núm. 7 (1959), 385-398.

En forma exponencial, se tiene

$$\begin{aligned}x(x+4) &= 2^5 \\x^2 + 4x &= 32 \\x^2 + 4x - 32 &= 0 \quad (\text{ecuación cuadrática}) \\(x-4)(x+8) &= 0 \\x = 4 \quad \text{o} \quad x &= -8\end{aligned}$$

Como debe tenerse que  $x > 0$ , la única solución es 4, lo cual puede verificarse al sustituir en la ecuación original. De hecho, al reemplazar  $x$  por 4 en  $\log_2 x$  se obtiene  $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$  mientras que al reemplazar  $x$  por 4 en  $5 - \log_2(x+4)$  se obtiene  $5 - \log_2(4+4) = 5 - \log_2(8) = 5 - \log_2 2^3 = 5 - 3 = 2$ . Como los resultados son iguales, 4 es una solución de la ecuación.

Es recomendable verificar las soluciones extrañas al resolver una ecuación logarítmica.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5 

## Problemas 4.4

Encuentre  $x$  en los problemas 1 a 36. Redondee sus respuestas a tres decimales.

- \*1.  $\log(3x+2) = \log(2x+5)$
2.  $\log x - \log 5 = \log 7$
3.  $\log 7 - \log(x-1) = \log 4$
4.  $\log_2 x + 3 \log_2 2 = \log_2 \frac{2}{x}$
- \*5.  $\ln(-x) = \ln(x^2 - 6)$
6.  $\ln(4-x) + \ln 2 = 2 \ln x$
- \*7.  $e^{2x} \cdot e^{5x} = e^{14}$
8.  $(e^{3x-2})^3 = e^3$
9.  $(81)^{4x} = 9$
10.  $(27)^{2x+1} = \frac{1}{3}$
11.  $e^{2x} = 9$
12.  $e^{4x} = \frac{3}{4}$
- \*13.  $2e^{5x+2} = 17$
14.  $5e^{2x-1} - 2 = 23$
15.  $10^{4/x} = 6$
16.  $\frac{4(10)^{0.2x}}{5} = 3$
17.  $\frac{5}{10^{2x}} = 7$
18.  $2(10)^x + (10)^{x+1} = 4$
19.  $2^x = 5$
20.  $7^{2x+3} = 9$
21.  $7^{3x-2} = 5$
22.  $4^{x/2} = 20$
23.  $2^{-2x/3} = \frac{4}{5}$
24.  $5(3^x - 6) = 10$
25.  $(4)5^{3-x} - 7 = 2$
26.  $\frac{7}{3^x} = 13$
27.  $\log(x-3) = 3$
28.  $\log_2(x+1) = 4$
29.  $\log_4(9x-4) = 2$
30.  $\log_4(2x+4) - 3 = \log_4 3$
31.  $\log(3x-1) - \log(x-3) = 2$
32.  $\log(x-3) + \log(x-5) = 1$
33.  $\log_2(5x+1) = 4 - \log_2(3x-2)$
34.  $\log(x+2)^2 = 2$ , donde  $x > 0$
35.  $\log_2 \left( \frac{2}{x} \right) = 3 + \log_2 x$
36.  $\ln(x-2) = \ln(2x-1) + 3$

**37. Plantas arraigadas** En un estudio sobre plantas arraigadas en cierta región geográfica,<sup>11</sup> se determinó que en terrenos de tamaño  $A$  (en metros cuadrados), el número promedio de especies encontradas era  $S$ . Cuando se graficó  $\log S$  como una función de  $\log A$ , el resultado fue una línea recta dada por

$$\log S = \log 12.4 + 0.26 \log A$$

Resuelva para  $S$ .

<sup>11</sup>R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

**38. Producto nacional bruto** En un artículo, Taagepera y Hayes se refieren a una ecuación de la forma

$$\log T = 1.7 + 0.2068 \log P - 0.1334 (\log P)^2$$

Aquí  $T$  es el porcentaje del producto nacional bruto (PNB) de un país correspondiente al comercio exterior (exportaciones más importaciones), y  $P$  es la población del país (en unidades de 100 000).<sup>12</sup> Verifique la afirmación de que

$$T = 50P^{(0.2068 - 0.1334 \log P)}$$

Puede suponer que  $\log 50 = 1.7$ . También verifique que, para cualquier base  $b$ ,  $(\log_b x)^2 = \log_b(x^{\log_b x})$ .

**39. Radiactividad** El número de miligramos presentes de una sustancia radiactiva después de  $t$  años está dado por

$$Q = 100e^{-0.035t}$$

- (a) ¿Cuántos miligramos estarán presentes después de 0 años?  
 (b) ¿Después de cuántos años habrá 20 miligramos? Dé su respuesta al año más cercano.

**40. Muestra de sangre** En la superficie de un portaobjetos se halla una retícula que divide la superficie en 225 cuadrados iguales. Suponga que se esparce una muestra de sangre que contiene  $N$  células rojas en el portaobjetos, y que las células se distribuyen aleatoriamente. El número de cuadrados que no tienen células está dado (de manera aproximada) por  $225e^{-N/225}$ . Si 100 de los cuadrados no tienen células, estime el número de células que contenía la muestra.



**41. Población** En una ciudad la población,  $P$ , crece a razón de 2% por año. La ecuación  $P = 1000000(1.02)^t$  da la población  $t$  años después de 1998. Encuentre el valor de  $t$  para el que la población es 1 500 000. Dé su respuesta a la décima más cercana.

<sup>12</sup>R. Taagepera y J. P. Hayes, "How Trade/GNP Ratio Decreases with Country Size", *Social Science Research*, 6 (1977), 108-132.

- 42. Penetración de mercado** En un análisis de penetración de mercado de nuevos productos, Hurter y Rubenstein<sup>13</sup> hacen referencia a la función

$$F(t) = \frac{q - pe^{-(t+C)(p+q)}}{q[1 + e^{(t+C)(p+q)}]}$$

donde  $p$ ,  $q$  y  $C$  son constantes. Aseguran que si  $F(0) = 0$ , entonces

$$C = -\frac{1}{p+q} \ln \frac{q}{p}$$

Demuestre que su afirmación es cierta.

- \*43. Ecuación de demanda** La ecuación de demanda para un producto es  $q = 80 - 2^p$ . Resuelva para  $p$  y exprese su respuesta en términos de logaritmos comunes, como en el ejemplo 4. Evalúe  $p$  con dos decimales cuando  $q = 60$ .

- 44. Inversión** La ecuación  $A = P(1.105)^t$  da el valor  $A$ , al final de  $t$  años de una inversión de  $P$  dólares compuesta anualmente a una tasa de interés de 10.5%. ¿En cuántos años se duplicará una inversión? Dé su respuesta al año más cercano.

- 45. Ventas** Despues de  $t$  años el número de unidades de un producto vendidas en un año está dado por  $q = 1000 \left(\frac{1}{2}\right)^{0.8t}$ . Tal ecuación se llama *ecuación de Gompertz*, y describe el crecimiento natural en muchas áreas de estudio. Resuelva esta ecuación para  $t$  de la misma manera que en el ejemplo 4 y muestre que

$$t = \frac{\log \left( \frac{3 - \log q}{\log 2} \right)}{\log 0.8}$$

También, para cualquier  $A$  y para las  $b$  y  $a$  apropiadas, resuelva  $y = Ab^{ax}$  para  $x$  y explique por qué la solución previa es un caso especial.

- 46. Ecuación de aprendizaje** Suponga que la producción diaria de unidades de un nuevo producto en el  $t$ -ésimo día de una corrida de producción está dada por

$$q = 500(1 - e^{-0.2t})$$

Tal ecuación se llama *ecuación de aprendizaje*, e indica que conforme pasa el tiempo, la producción por día aumentará. Lo anterior puede atribuirse a mejorías en el desempeño de los trabajadores. Determine, a la unidad completa más cercana, la producción en (a) el primer día, y (b) en el décimo día después del inicio de una producción. (c) ¿Después de cuántos días se alcanzará una producción diaria de 400 unidades? Dé sus respuestas redondeadas al día más cercano.

- 47.** Verifique que 4 es la única solución de la ecuación logarítmica del ejemplo 6 al graficar la función

$$y = 5 - \log_2(x + 4) - \log_2 x$$

y observe el momento en que  $y = 0$ .

- 48.** Resuelva  $2^{3x+0.5} = 17$ . Redondee su respuesta a dos decimales.

- 49.** Resuelva  $\ln(x + 2) = 5 - x$ . Redondee su respuesta a dos decimales.

- 50.** Grafique la ecuación  $3(2)^y - 4x = 5$ . (*Una pista:* Despeje  $y$  como una función explícita de  $x$ .)

## 4.5 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

#### Sección 4.1

##### Funciones exponenciales

función exponencial,  $b^x$ , para  $b > 1$  y para  $0 < b < 1$   
interés compuesto capital monto compuesto  
periodo de interés tasa periódica tasa nominal  $e$  función exponencial natural,  $e^x$   
ley de decaimiento exponencial cantidad inicial constante de decaimiento vida media

Ej. 2, 3, p. 164, 165  
Ej. 6, p. 167  
Ej. 8, p. 170  
Ej. 11, p. 172

#### Sección 4.2

##### Funciones logarítmicas

función logarítmica,  $\log_b x$  logaritmo común,  $\log x$   
logaritmo natural,  $\ln x$

Ej. 5, p. 178  
Ej. 5, p. 178

#### Sección 4.3

##### Propiedades de los logaritmos

fórmula de cambio de base

Ej. 8, p. 185

#### Sección 4.4

##### Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

ecuación logarítmica ecuación exponencial

Ej. 1, p. 187

### Resumen

Una función exponencial tiene la forma  $f(x) = b^x$ . La gráfica de  $f(x) = b^x$  tiene una de dos formas generales, dependiendo del valor de la base  $b$  (vea la figura 4.3). La función exponencial está involucrada en la fórmula de interés compuesto:

$$S = P(1 + r)^n$$

donde  $S$  es el monto compuesto de un capital  $P$  al final de  $n$  períodos de interés a la tasa periódica  $r$ .

Una base utilizada con frecuencia en una función exponencial es el número irracional  $e$ , donde  $e \approx 2.71828$ . Aparece en análisis económico y en muchas situaciones que implican crecimiento o declinación, como estudios poblacionales y decaimiento radiactivo. Los elementos radiactivos siguen la ley de decaimiento exponencial,

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

<sup>13</sup>A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein, et al., "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

donde  $N$  es la cantidad presente en el tiempo  $t$ ,  $N_0$  la cantidad inicial y  $\lambda$  la constante de decaimiento. El tiempo necesario para que la mitad de la cantidad del elemento decaiga se conoce como vida media.

La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial, y viceversa. La función logarítmica de base  $b$  se denota por  $\log_b$  en tanto que  $y = \log_b x$  si y sólo si  $b^y = x$ . La gráfica de  $y = \log_b x$  tiene una de dos formas generales dependiendo del valor de la base  $b$  (vea la figura 4.19). Los logaritmos de base  $e$  se llaman logaritmos naturales y se denotan por  $\ln$ , los de base 10 se llaman logaritmos comunes y se denotan por  $\log$ . La vida media  $T$  de un elemento radiactivo puede expresarse en términos de un logaritmo natural y de la constante de decaimiento:  $T = (\ln 2)/\lambda$ .

Algunas propiedades, importantes de los logaritmos son las siguientes:

$$\begin{aligned}\log_b(mn) &= \log_b m + \log_b n \\ \log_b \frac{m}{n} &= \log_b m - \log_b n\end{aligned}$$

## Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

En los problemas 1 a 6, escriba cada una de las formas exponenciales de manera logarítmica y cada forma logarítmica de manera exponencial.

- |                      |                     |                                |
|----------------------|---------------------|--------------------------------|
| 1. $3^5 = 243$       | 2. $\log_5 625 = 4$ | 3. $\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$ |
| 4. $10^5 = 100\,000$ | 5. $e^4 = 54.598$   | 6. $\log_9 9 = 1$              |

En los problemas 7 a 12, determine el valor de la expresión sin utilizar una calculadora.

- |                               |                    |                          |
|-------------------------------|--------------------|--------------------------|
| 7. $\log_5 125$               | 8. $\log_4 16$     | 9. $\log_3 \frac{1}{81}$ |
| 10. $\log_{1/4} \frac{1}{64}$ | 11. $\log_{1/3} 9$ | 12. $\log_4 2$           |

En los problemas 13 a 18, encuentre  $x$  sin utilizar una calculadora.

- |                           |                                |                        |
|---------------------------|--------------------------------|------------------------|
| 13. $\log_5 625 = x$      | 14. $\log_x \frac{1}{81} = -4$ | 15. $\log_2 x = -5$    |
| 16. $\ln \frac{1}{e} = x$ | 17. $\ln(2x + 3) = 0$          | 18. $e^{\ln(x+4)} = 7$ |

En los problemas 19 y 20 se ha establecido  $\log 2 = a$  y  $\log 3 = b$ . Exprese el logaritmo dado en términos de  $a$  y de  $b$ .

- |                 |                               |
|-----------------|-------------------------------|
| 19. $\log 8000$ | 20. $\log \frac{9}{\sqrt{2}}$ |
|-----------------|-------------------------------|

En los problemas 21 a 26, escriba cada expresión como un solo logaritmo.

- |  |  |
|--|--|
| 21. $3 \log 7 - 2 \log 5$  | 22. $5 \ln x + 2 \ln y + \ln z$        |
| 23. $2 \ln x + \ln y - 3 \ln z$  | 24. $\log_6 2 - \log_6 4 - 9 \log_6 3$ |
| 25. $\frac{1}{2} \log_2 x + 2 \log_2(x^2) - 3 \log_2(x+1) - 4 \log_2(x+2)$ |  |
| 26. $4 \log x + 2 \log y - 3(\log z + \log w)$                             |  |

En los problemas 27 a 32, escriba la expresión en términos de  $\ln x$ ,  $\ln y$  y  $\ln z$ .

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 27. $\ln \frac{x^3 y^2}{z^{-5}}$            | 28. $\ln \frac{\sqrt{x}}{(yz)^2}$                       | 29. $\ln \sqrt[3]{xyz}$  |
| 30. $\ln \left[ \frac{xy^3}{z^2} \right]^4$ | 31. $\ln \left[ \frac{1}{x} \sqrt{\frac{y}{z}} \right]$ | 32. $\ln \left[ \left( \frac{x}{y} \right)^2 \left( \frac{x}{z} \right)^3 \right]$ |

$$\begin{aligned}\log_b m^r &= r \log_b m \\ \log_b \frac{1}{m} &= -\log_b m \\ \log_b 1 &= 0 \\ \log_b b &= 1 \\ \log_b b^r &= r \\ b^{\log_b m} &= m \\ \log_b m &= \frac{\log_a m}{\log_a b}\end{aligned}$$

Además, si  $\log_b m = \log_b n$ , entonces  $m = n$ . De manera similar, si  $b^m = b^n$ , entonces  $m = n$ . Muchas de estas propiedades se utilizan en la solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

33. Escriba  $\log_3(x+5)$  en términos de logaritmos naturales.  
 34. Escriba  $\log_2(7x^3 + 5)$  en términos de logaritmos comunes.  
 35. Suponga que  $\log_2 19 = 4.2479$  y  $\log_2 5 = 2.3219$ . Encuentre  $\log_5 19$ .

36. Utilice logaritmos naturales para determinar el valor de  $\log_4 5$ .  
 37. Si  $\ln 3 = x$  y  $\ln 4 = y$ , exprese  $\ln(16\sqrt{3})$  en términos de  $x$  y de  $y$ .

38. Exprese  $\log \frac{x^2 \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+2}}$  en términos de  $\log x$ ,  $\log(x+1)$ , y  $\log(x^2+2)$ .

39. Simplifique  $10^{\log x} + \log 10^x + \log 10$ .

40. Simplifique  $\log 10^2 + \log 1000 - 5$ .

41. Si  $\ln y = x^2 + 2$ , encuentre  $y$ .

42. Bosqueje las gráficas de  $y = 3^x$  así como  $y = \log_3 x$ .

43. Bosqueje la gráfica de  $y = 2^{x+3}$ .

44. Bosqueje la gráfica de  $y = -2 \log_2 x$ .

Encuentre  $x$  en los problemas 45 a 52.

- |                               |                                     |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| 45. $\log(5x+1) = \log(4x+6)$ | 46. $\log 3x + \log 3 = 2$          |
| 47. $3^{4x} = 9^{x+1}$        | 48. $4^{3-x} = \frac{1}{16}$        |
| 49. $\log x + \log(10x) = 3$  | 50. $\log_2(x+4) = \log_2(x-2) + 3$ |
| 51. $\ln(\log_x 3) = 2$       | 52. $\log_2 x + \log_4 x = 3$       |

Encuentre  $x$  en los problemas 53 a 58. Redondee sus respuestas a tres decimales.

- |                         |                     |                           |
|-------------------------|---------------------|---------------------------|
| 53. $e^{3x} = 14$       | 54. $10^{3x/2} = 5$ | 55. $3(10^{x+4} - 3) = 9$ |
| 56. $7e^{3x-1} - 2 = 1$ | 57. $4^{x+3} = 7$   | 58. $3^{5/x} = 2$         |

59. **Inversiones** Si se invierten \$2600 durante  $6\frac{1}{2}$  años a 6% compuesto trimestralmente, determine (a) el monto compuesto y (b) el interés compuesto.

60. **Inversiones** Encuentre el monto compuesto de una inversión de \$4000 durante cinco años a una tasa de 11% compuesto mensualmente.
61. Encuentre la tasa nominal que corresponde a una tasa periódica de  $1\frac{1}{6}\%$  mensual.
62. **Crecimiento de bacterias** El número de bacterias de un cultivo aumenta a razón de 5% por hora. Al inicio, estaban

presentes 600 bacterias. (a) Determine una ecuación que dé el número,  $N$ , de bacterias después de  $t$  horas. (b) ¿Cuántas estarán presentes después de una hora? (c) ¿Y después de cinco horas? Dé la respuesta del inciso (c) al entero más cercano.

- 63. Crecimiento poblacional** La población de un pequeño pueblo crece a razón de  $-0.5\%$  anual porque la emigración en busca de trabajo a las ciudades cercanas excede la tasa de natalidad. En 2006 la población era de 6000. (a) Determine una ecuación que dé la población,  $P$ , después de  $t$  años a partir de 2006, (b) Encuentre la población en el año 2016 (no olvide expresar su respuesta como un número entero).

- 64. Ingreso** Debido a una campaña de publicidad ineficaz, la compañía de rasuradoras Kleer-Kut encuentra que sus ingresos anuales han sufrido una reducción drástica. Además, el ingreso anual  $R$  al final de los  $t$  años de negocios satisface la ecuación
- $$R = 200000e^{-0.2t}.$$
- Encuentre el ingreso anual al final de dos años y al final de tres.



- 65. Radiactividad** Una sustancia radiactiva decae de acuerdo con la fórmula

$$N = 10e^{-0.4t}$$

donde  $N$  es el número de miligramos presentes después de  $t$  horas. (a) Determine la cantidad inicial. (b) Al décimo de miligramos más cercano, determine la cantidad presente después de 2 horas, y (c) después de 10 horas. (d) A la décima de hora más cercana, determine la vida media de la sustancia, y (e) el número de horas para que quede un milígramo.

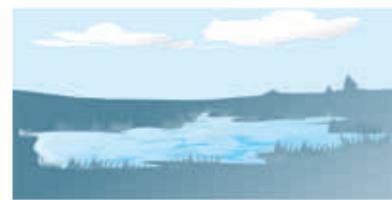
- 66. Radiactividad** Si una sustancia radiactiva tiene una vida media de 10 días, ¿en cuántos días habrá  $\frac{1}{8}$  de la cantidad inicial?

- 67. Mercadotecnia** Una compañía de investigación de mercado necesita determinar cuántas personas se adaptan al sabor de unas nuevas pastillas para la tos. En un experimento, a un individuo se le dio una pastilla para la tos y se le pidió que periódicamente asignara un número, en la escala de 0 a 10, al sabor percibido. Este número fue llamado *magnitud de la respuesta*. Al sabor inicial le correspondió el número 10. Después de repetir el experimento varias veces, la compañía estimó que la magnitud de la respuesta,  $R$ , está dada por

$$R = 10e^{-t/40}$$

donde  $t$  es el número de segundos después de que el sujeto tomó la pastilla para la tos. (a) Encuentre la magnitud de la respuesta al cabo de 20 segundos. Redondee su respuesta al entero más cercano. (b) ¿Después de cuántos segundos la persona tiene una magnitud de respuesta de 5? Aproxime su respuesta al segundo más cercano.

- 68. Sedimento en el agua** El agua de un lago contiene un sedimento cuya presencia reduce el paso de la luz a través del líquido. Los experimentos indican que la intensidad de la luz se reduce 10% al pasar a través de 20 cm de agua. Suponga que el lago es uniforme con respecto a la cantidad de sedimento que contiene. Se sumerge en el lago un instrumento de medición que puede detectar luz hasta de una intensidad de 0.17% de la luz solar total. ¿A qué profundidad empezará a registrar la ausencia de luz? Aproxime su respuesta a los 10 cm más cercanos.



- 69. Enfriamiento del cuerpo** En un análisis de la velocidad de enfriamiento de las partes aisladas del cuerpo cuando se expone a bajas temperaturas, aparece la siguiente ecuación<sup>14</sup>

$$T_t - T_e = (T_t - T_e)_o e^{-at}$$

donde  $T_t$  es la temperatura de la parte del cuerpo en el instante  $t$ ,  $T_e$  es la temperatura del medio ambiente, el subíndice  $o$  se refiere a la diferencia de temperaturas iniciales, y  $a$  es una constante. Muestre que

$$a = \frac{1}{t} \ln \frac{(T_t - T_e)_o}{T_t - T_e}$$

- 70. Depreciación** Una alternativa de la depreciación lineal es la depreciación por *saldo decreciente*. Este método supone que un artículo pierde su valor más rápidamente al inicio de su vida que en etapas posteriores. Se resta un porcentaje fijo del valor cada mes. Suponga que el costo inicial de un artículo es  $C$ , y su vida útil es de  $N$  meses. Entonces el valor,  $V$  (en dólares), del artículo al final de  $n$  meses está dado por

$$V = C \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

donde cada mes conlleva una depreciación de  $\frac{100}{N}$  por ciento. (Esto se denomina *depreciación sencilla por saldo decreciente*: si la depreciación anual fuera  $\frac{200}{N}$  por ciento, sería depreciación doble por saldo decreciente.) Se adquirió una computadora laptop nueva por \$1800, tiene una vida útil de 48 meses y sufre una depreciación por saldo decreciente. ¿Después de cuántos meses, al entero más cercano, su valor cae por debajo de \$700?

- 71.** Si  $y = f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , determine el rango de  $f$ . Redondee los valores a dos decimales.
- 72.** Determine los puntos de intersección de las gráficas de  $y = \ln(x + 2)$  y  $y = x^2 - 7$ . Redondee sus respuestas a dos decimales.
- 73.** Resuelva  $\ln x = 6 - 2x$ . Redondee su respuesta a dos decimales.
- 74.** Resuelva  $6^{3-4x} = 15$ . Redondee su respuesta a dos decimales.
- 75.** Despliegue la gráfica de  $y = \log_2(x^2 + 1)$ , y observe que la simetría con respecto al eje  $y$  y el rango de esta función le permiten restringir su pantalla al primer cuadrante.
- 76.** Despliegue la gráfica de la ecuación  $(6)5^y + x = 2$ . (*Una pista:* Despeje  $y$  como una función explícita de  $x$ .)
- 77.** Grafique  $y = 3^x$  y  $y = \frac{3^x}{9}$  en la misma pantalla. Parece que la gráfica de  $y = \frac{3^x}{9}$  es la gráfica de  $y = 3x$  recorrida dos unidades a la derecha. Pruebe de manera algebraica que esto es realmente cierto.

<sup>14</sup>R. W. Stacy *et al.*, *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Dosis de medicamento<sup>15</sup>

La determinación del medicamento y la prescripción de su dosis son aspectos extremadamente importantes en la profesión médica. Se debe tener precaución con los posibles efectos secundarios o tóxicos de las medicinas.

El cuerpo humano utiliza muchas medicinas de tal manera que la cantidad presente sigue una *ley de decaimiento exponencial*, como la que se expuso en la sección 4.1. Es decir, si  $N(t)$  es la cantidad de la sustancia activa presente en el cuerpo en el instante  $t$ , entonces

$$N = N_0 e^{-kt} \quad (1)$$

donde  $k$  es una constante positiva y  $N_0$  es la cantidad presente en el instante  $t = 0$ . Si  $H$  es la *vida media* del medicamento, lo que significa el tiempo  $H$  para el cual  $N(H) = N_0/2$ , entonces, de acuerdo con la sección 4.1,

$$H = (\ln 2)/k \quad (2)$$

Observe que  $H$  determina por completo la constante  $k$ , puesto que la ecuación (2) puede reescribirse como  $k = (\ln 2)/H$ .

Suponga que quiere analizar el caso en el que se administran dosis iguales a un paciente cada  $I$  unidades de tiempo hasta que se alcance un nivel terapéutico, y después la dosis se reduce lo suficiente para mantener dicho nivel. La razón para mantener dosis *reducidas* con frecuencia se relaciona con los efectos tóxicos de las sustancias activas.

En particular, suponga que

- (i) Hay  $d$  dosis de  $P$  unidades cada una;
- (ii) se suministra una dosis en los tiempos  $t = 0, I, 2I, \dots$ , y  $(d - 1)I$ ; y que
- (iii) el nivel terapéutico,  $T$ , se alcanza en  $t = dI$  (el cual ocurre un intervalo de tiempo después de administrar la última dosis).

Ahora se determinará una fórmula que proporcione el nivel terapéutico,  $T$ . En el instante  $t = 0$  el paciente recibe las primeras  $P$  unidades, de modo que la cantidad del medicamento en su cuerpo es  $P$ . En el instante  $t = I$  la cantidad presente de la primera dosis es  $Pe^{-kI}$  [por la ecuación (1)]. Además, en  $t = I$  se suministran las segundas  $P$  unidades. Así que la cantidad *total* de medicina presente es

$$P + Pe^{-kI}$$

En el instante  $t = 2I$ , la cantidad que queda de la primera dosis es  $Pe^{-2kI}$ ; de la segunda dosis, que ha estado en el sistema sólo durante un intervalo de tiempo, la cantidad presente es



$Pe^{-kI}$ . También, en  $t = 2I$  se suministra la tercera dosis de  $P$  unidades, de modo que la cantidad total presente es

$$P + Pe^{-kI} + Pe^{-2kI}$$

Si se continúa de esta manera, la cantidad de medicamento presente en el sistema en el tiempo  $(d - 1)I$ , el momento de la última dosis, es

$$P + Pe^{-kI} + Pe^{-2kI} + \dots + Pe^{-(d-1)kI}$$

Así que para un intervalo de tiempo después, en el instante  $dI$ , cuando no se administra una dosis de  $P$ , pero es cuando se alcanza el nivel terapéutico, se tiene

$$T = Pe^{-kI} + Pe^{-2kI} + \dots + Pe^{-dkI} \quad (3)$$

como cada término de la expresión anterior decae en un factor de  $e^{-kI}$ . Ésta es una buena oportunidad de usar la *notación de sumatoria* que se expuso en la sección 1.5, y reescribir la ecuación (3) como

$$T = P \sum_{i=1}^d e^{-ikI} \quad (4)$$

<sup>15</sup>Este análisis está adaptado de Gerald M. Armstrong y Calvin P. Midgley, "The Exponential-Decay Law Applied to Medical Dosages", *The Mathematics Teacher*, 80, núm. 3 (febrero de 1987), 110-113. Con permiso del National Council of Teachers of Mathematics.

La suma es de un tipo especial que se estudiará después, pero observe que al multiplicar ambos lados de la ecuación (4) por  $e^{-kI}$ , se obtiene

$$e^{-kI}T = P \sum_{i=2}^{d+1} e^{-ikI} \quad (5)$$

Si se restan los lados de la ecuación (5) de los correspondientes a la ecuación (4), resulta

$$(1 - e^{-kI})T = P \left( \sum_{i=1}^d e^{-ikI} - \sum_{i=2}^{d+1} e^{-ikI} \right) = P(e^{-kI} - e^{-(d+1)kI})$$

y usted debe asegurarse de verificar que la mayoría de los términos de las dos sumas *se cancelan* tal como se indica. A continuación, se obtiene

$$(1 - e^{-kI})T = Pe^{-kI}(1 - e^{-dkI})$$

$$T = \frac{Pe^{-kI}(1 - e^{-dkI})}{1 - e^{-kI}} \quad (6)$$

$$T = \frac{P(1 - e^{-dkI})}{e^{kI}(1 - e^{-kI})}$$

$$T = \frac{P(1 - e^{-dkI})}{e^{kI} - 1} \quad (7)$$

La ecuación (7) expresa el nivel terapéutico,  $T$ , en términos de la dosis,  $P$ ; los intervalos de tiempo de longitud  $I$ ; el número de dosis,  $d$ ; y la vida media  $H$ , de la medicina [ya que  $k = (\ln 2)/H$ ]. También es posible resolver la ecuación para  $P$  si se conocen  $T$ ,  $H$ ,  $I$  y  $d$ . (La resolución de la ecuación (7) para  $H$  o  $I$  en términos de las otras cantidades puede ser bastante complicada.)

Ahora el objetivo es mantener el nivel terapéutico en el paciente. Para hacerlo, se suministra una dosis reducida  $R$  en los instantes  $t = dI$ ,  $(d + 1)I$ ,  $(d + 2)I$ , y así sucesivamente. Puede determinarse una fórmula para  $R$  de la manera siguiente.

En el instante  $t = (d + 1)I$ , pero antes de suministrar la segunda dosis reducida, la cantidad de medicamento en el sistema proveniente de la primera dosis reducida es  $Re^{-kI}$ , y la cantidad que permanece del nivel terapéutico es  $Te^{-kI}$ . Suponga que se requiere que la suma de estas cantidades sea el nivel terapéutico,  $T$ ; esto es,

$$T = Re^{-kI} + Te^{-kI}$$

Al resolver para  $R$ , se obtiene

$$Re^{-kI} = T - Te^{-kI}$$

$$R = T(1 - e^{-kI})e^{kI}$$

Al reemplazar  $T$  por el lado derecho de la ecuación (6), se obtiene

$$R = \frac{Pe^{-kI}(1 - e^{-dkI})}{1 - e^{-kI}}(1 - e^{-kI})e^{kI}$$

que se simplifica como

$$R = P(1 - e^{-dkI}) \quad (8)$$

Si se continúa con las dosis reducidas a intervalos de tiempo de longitud  $I$ , se asegura que el nivel terapéutico nunca esté por debajo de  $T$  después de  $(d + 1)I$ . Además, observe que  $-dkI < 0$ , entonces  $0 < e^{-dkI} < 1$ . En consecuencia, el factor  $1 - e^{-dkI}$  de la ecuación (8) está entre 0 y 1. Esto asegura que  $R$  sea menor que  $P$ ; de aquí que  $R$  sea en realidad una dosis *reducida*.

Es interesante observar que Armstrong y Midgley establecen que “la cantidad terapéutica  $T$  debe seleccionarse de un rango de valores determinados de manera empírica. El buen juicio y la experiencia médica son necesarios para seleccionar los intervalos apropiados y su duración, cuando hay que administrar un medicamento. Incluso la vida media de éste puede variar un poco entre los pacientes”. En [www.fda.gov/cder](http://www.fda.gov/cder) puede encontrarse información adicional sobre sustancias médicas y su uso seguro.

## Problemas

- De la ecuación (7), despeje (a)  $P$  y (b)  $d$ .
- Muestre que si  $I$  es igual a la vida media de la sustancia activa, la ecuación (7) puede escribirse como

$$T = \left(1 - \frac{1}{2^d}\right)P$$

Observe que  $0 < 1 - (1/2^d) < 1$  para  $d > 0$ . Esta ecuación implica que cuando se administran dosis de  $P$  unidades a intervalos de tiempo iguales a la vida media del medicamento, en un intervalo de tiempo después de que cualquier dosis es administrada, pero antes de que se suministre la siguiente, el nivel total de medicamento en el sistema del paciente es menor que  $P$ .

- La teofilina es una sustancia utilizada en el tratamiento del asma bronquial, tiene una vida media de 8 horas en el sistema de un paciente relativamente sano y no fumador. Suponga que el enfermo alcanza el nivel terapéutico deseado en 12 horas cuando se le suministran 100 miligramos cada 4 horas. Aquí  $d = 3$ . A causa de la toxicidad, la dosis debe reducirse más adelante. Al milígramo más cercano, determine (a) el nivel terapéutico y (b) la dosis reducida.
- Utilice una calculadora graficadora para generar una gráfica de la concentración de la sustancia activa y verifique que la ecuación (8) proporciona de manera correcta la dosis de mantenimiento. Introduzca en la calculadora  $0.5 \rightarrow K$ ,  $3 \rightarrow D$ ,  $1 \rightarrow I$  y  $1 \rightarrow P$ . Después incorpore  $Y1 = P(1 - e^{(-D*K*I)})$  para representar  $R$ . Por último, teclee  $Y2 = Pe^{(-KX)} + P e^{(-K(X-I))} * (X \geq I) + P e^{(-K(X-2I))} * (X \geq 2I) + Y1 e^{(-K(X-3I))} * (X \geq 3I) + Y1 e^{(-K(X-4I))} * (X \geq 4I)$ . Después, seleccione sólo  $Y2$  para que sea graficada y grafique la función. Experimente con diferentes valores para  $K$ ,  $D$ ,  $I$  y  $P$ . ¿Qué ajuste es necesario en la expresión para  $Y2$  cuando cambia  $D$ ?

# 5

## MATEMÁTICAS FINANCIERAS

- 5.1 Interés compuesto
- 5.2 Valor presente
- 5.3 Interés compuesto continuamente
- 5.4 Anualidades
- 5.5 Amortización de préstamos
- 5.6 Repaso

### Aplicación práctica

Bonos del tesoro

**P**ara las personas a quienes les gustan los automóviles, y pueden permitirse comprar uno bueno, una visita a una concesionaria puede ser algo muy divertido. Sin embargo, comprar un auto también tiene un lado que mucha gente encuentra poco placentero: la negociación. El “regateo” verbal con el vendedor es especialmente difícil si el comprador planea comprar a plazos y no comprende los números que se le están cotizando.

Por ejemplo, ¿cómo es que el hecho de que el vendedor ofrezca el automóvil a \$12 800 se traduce en pagos mensuales de \$281.54? La respuesta es la amortización. El término proviene del francés, de la raíz latina *mort-*, que significa “muerte”; de la cual también se derivan *mortal* y *mortificado*. Una deuda que se paga gradualmente, al final “se mata” y el programa de pagos para lograrlo se denomina plan de amortización. El plan está determinado por una fórmula que usted aprenderá en la sección 5.4 y que aplicará en la sección 5.5.

Mediante dicha fórmula, es posible calcular el pago mensual para el automóvil. Si se hace un adelanto inicial de \$900 sobre un automóvil de \$12 800, y se paga el resto en un plazo de cuatro años al 4.8% de interés anual compuesto mensualmente, el pago mensual para el capital y el interés debe ser de sólo \$272.97. Si el pago es mayor que esto, podría incluir cargos adicionales, como impuestos sobre la venta, gastos de registro o primas de seguros, acerca de los cuales el comprador debe preguntar, puesto que algunos de ellos podrían ser opcionales. La comprensión de las matemáticas financieras puede ayudar al consumidor a tomar decisiones más convenientes acerca de compras e inversiones.

**OBJETIVO**

Ampliar la noción de interés compuesto para incluir tasas efectivas y resolver problemas de interés cuya solución requiere del uso de logaritmos.

## 5.1 Interés compuesto

En este capítulo se estudiarán temas de finanzas que tratan del valor del dinero en el tiempo, como inversiones, préstamos, etcétera. En los capítulos posteriores, cuando se hayan aprendido más matemáticas, se revisarán y ampliarán algunos de estos temas.

Primero se revisarán algunos tópicos de la sección 4.1, donde se introdujo la noción de interés compuesto, bajo la cual, al final de cada periodo, el interés generado durante ese periodo se agrega al *capital* (monto invertido), de modo que también genere interés en el periodo siguiente. La fórmula básica para el valor (o *monto compuesto*) de una inversión después de  $n$  periodos de interés compuesto es como sigue:

### Fórmula de interés compuesto

Para un capital original de  $P$ , la fórmula

$$S = P(1 + r)^n \quad (1)$$

proporciona el **monto compuesto**  $S$  al final de  $n$  periodos de interés a una *tasa periódica*  $r$ .

El monto compuesto también se llama *monto acumulado*, y la diferencia entre el monto compuesto y el capital original,  $S - P$ , se llama *interés compuesto*.

Recuerde que, en general, una tasa de interés se establece como una *tasa anual*, llamada *tasa nominal* o *tasa de porcentaje anual* (TPA). La tasa periódica (o tasa por periodo de interés) se obtiene al dividir la tasa nominal entre el número de periodos de interés por año.

Por ejemplo, se calculará el monto total cuando se invierten \$1000 por 5 años a la tasa nominal de 8% compuesto trimestralmente. La *tasa por periodo* es de  $0.08/4$  y el número de periodos de interés es  $5 \times 4$ .

De la ecuación (1), se tiene

$$\begin{aligned} S &= 1000 \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{5 \times 4} \\ &= 1000(1 + 0.02)^{20} \approx \$1485.95 \end{aligned}$$

Tenga a la mano una calculadora mientras lee este capítulo.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### INTERÉS COMPUESTO

Suponga que usted deja una cantidad inicial de \$518 en una cuenta de ahorros durante tres años. El interés se capitaliza diariamente (365 veces por año), utilice una calculadora graficadora para graficar el monto compuesto  $S$  como una función de la tasa de interés nominal. Con base en la gráfica, estime la tasa de interés nominal de modo que haya \$600 después de tres años.

#### EJEMPLO 1 Interés compuesto

Suponga que \$500 depositados se convierten en \$588.38 en una cuenta de ahorros después de tres años. Si el interés se compone semestralmente, encuentre la tasa de interés nominal ganada, compuesta semestralmente.

**Solución:** Sea  $r$  la tasa semestral. Existen  $2 \times 3 = 6$  periodos de interés. De la ecuación (1)

$$\begin{aligned} 500(1 + r)^6 &= 588.38 \\ (1 + r)^6 &= \frac{588.38}{500} \\ 1 + r &= \sqrt[6]{\frac{588.38}{500}} \\ r &= \sqrt[6]{\frac{588.38}{500}} - 1 \approx 0.0275 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa semestral fue de 2.75%, así que la tasa nominal fue de  $5\frac{1}{2}\%$  compuesta semestralmente.

### EJEMPLO 2 Duplicación del dinero

¿A qué tasa de interés nominal, compuesta anualmente, el dinero se duplicará en 8 años?

**Solución:** Sea  $r$  la tasa a la cual un capital de  $P$  se duplica en 8 años. Entonces el monto total es  $2P$ . De la ecuación (1),

$$\begin{aligned} P(1 + r)^8 &= 2P \\ (1 + r)^8 &= 2 \\ 1 + r &= \sqrt[8]{2} \\ r &= \sqrt[8]{2} - 1 \approx 0.0905 \end{aligned}$$

Observe que la tasa de duplicación es independiente del capital  $P$ .

Por lo tanto, la tasa deseada es de 9.05%.



Es posible determinar cuánto tiempo se necesita para que un capital dado ascienda a un monto particular con el uso de logaritmos, como se muestra en el ejemplo 3.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

##### INTERÉS COMPLETO

Suponga que usted deja un monto inicial de \$520 en una cuenta de ahorros a una tasa anual de 5.2% compuesto diariamente (365 días por año). Utilice una calculadora graficadora para graficar la cantidad compuesta  $S$  como una función de los períodos de interés. Con base en la gráfica, estime cuánto tiempo se necesita para que la cantidad se convierta en \$750.

### EJEMPLO 3 Interés compuesto

¿Cuánto tiempo tendrá que pasar para que \$600 se conviertan en \$900 a una tasa anual de 6% compuesto trimestralmente?

**Solución:** La tasa periódica es  $r = 0.06/4 = 0.015$ . Sea  $n$  el número de períodos de interés que le toma a un capital de  $P = 600$  ascender a  $S = 900$ . Entonces, de la ecuación (1),

$$\begin{aligned} 900 &= 600(1.015)^n & (2) \\ (1.015)^n &= \frac{900}{600} \\ (1.015)^n &= 1.5 \end{aligned}$$

Para despejar  $n$ , primero se toma el logaritmo natural de ambos lados:

$$\begin{aligned} \ln(1.015)^n &= \ln 1.5 \\ n \ln 1.015 &= \ln 1.5 & \text{ya que } \ln m^r = r \ln m \\ n &= \frac{\ln 1.5}{\ln 1.015} \approx 27.233 \end{aligned}$$

El número de años que corresponden a 27.233 períodos de interés trimestral es  $27.233/4 \approx 6.8083$ , que son aproximadamente 6 años y 9 meses y medio. En realidad, el capital no llega a \$900 sino hasta pasados 7 años, porque el interés se compone trimestralmente.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 20



#### TECNOLOGÍA

Es posible resolver la ecuación (2) del ejemplo 3 al graficar

$$Y_1 = 900$$

$$Y_2 = 600(1.015)^X$$

y encontrar la intersección. (Vea la figura 5.1.)

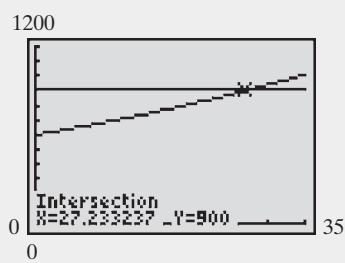


FIGURA 5.1 Solución del ejemplo 3.

### Tasa efectiva

Si se invierten  $P$  dólares a una tasa nominal de 10% compuesto trimestralmente, durante un año, el capital ganará más de 10% en ese año. De hecho, el interés compuesto es

$$\begin{aligned} S - P &= P \left(1 + \frac{0.10}{4}\right)^4 - P = [(1.025)^4 - 1]P \\ &\approx 0.103813P \end{aligned}$$

que es aproximadamente 10.38% de  $P$ . Esto es, 10.38% es la tasa aproximada de interés compuesto *anualmente* que en realidad se genera, la que se conoce como **tasa efectiva** de interés. La tasa efectiva es independiente de  $P$ . En general, la tasa efectiva de interés sólo es la tasa de interés *simple* generado durante un periodo de un año. Por lo tanto, se ha mostrado que la tasa nominal de 10% compuesta cada trimestre es equivalente a una tasa efectiva de 10.38%. De acuerdo con el procedimiento anterior, es posible generalizar el resultado:

### Tasa efectiva

La **tasa efectiva**  $r_e$  que es equivalente a una tasa nominal de  $r$  compuesta  $n$  veces durante un año está dada por

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 \quad (3)$$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

#### TASA EFECTIVA

Una inversión se capitaliza mensualmente. Utilice una calculadora graficadora para graficar la tasa efectiva  $r_e$  como una función de la tasa nominal  $r$ . Después utilice la gráfica para encontrar la tasa nominal que es equivalente a una tasa efectiva de 8%.

### EJEMPLO 4 Tasa efectiva

*¿Cuál tasa efectiva es equivalente a una tasa nominal de 6% compuesta (a) semestralmente y (b) trimestralmente?*

**Solución:**

- a. De la ecuación (3), la tasa efectiva es

$$r_e = \left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^2 - 1 = (1.03)^2 - 1 = 0.0609 = 6.09\%$$

- b. La tasa efectiva es

$$r_e = \left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^4 - 1 = (1.015)^4 - 1 \approx 0.061364 = 6.14\%$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



En el ejemplo 4 se ilustra que, para una tasa nominal dada  $r$ , la tasa efectiva aumenta conforme se incrementa el número de períodos de interés por año ( $n$ ). Sin embargo, en la sección 5.3 se muestra que, sin importar qué tan grande sea  $n$ , la máxima tasa efectiva que puede obtenerse es  $e^r - 1$ .

### EJEMPLO 5 Tasa efectiva

*¿A qué monto ascenderán \$12 000 acumulados en 15 años, si se invierten a una tasa efectiva de 5%?*

**Solución:** Como una tasa efectiva es la tasa que se compone anualmente, se tiene

$$S = 12\,000(1.05)^{15} \approx \$24\,947.14$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



### EJEMPLO 6 Duplicación de dinero

¿Cuántos años tendrán que pasar para que el dinero se duplique a la tasa efectiva de  $r$ ?

**Solución:** Sea  $n$  el número de años que pasan para que un capital  $P$  se duplique. Entonces el monto compuesto es  $2P$ . Por lo tanto,

$$2P = P(1 + r)^n$$

$$2 = (1 + r)^n$$

$$\ln 2 = n \ln(1 + r) \quad (\text{al tomar logaritmos de ambos lados})$$

Así que,

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r)}$$

Por ejemplo, si  $r = 0.06$ , el número de años deben pasar para que un capital se duplique es

$$\frac{\ln 2}{\ln 1.06} \approx 11.9 \text{ años}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

Se destaca que cuando existen tasas alternativas de interés disponibles para un inversionista, se utilizan las tasas efectivas para comparar; es decir, para determinar cuál de ellas es la “mejor”. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

##### COMPARACIÓN DE TASAS DE INTERÉS

Suponga que tiene dos oportunidades de inversión. Puede invertir \$10 000 al 11% compuesto mensualmente, o puede invertir \$9700 al 11.25% compuesto trimestralmente. ¿Cuál tiene una mejor tasa efectiva de interés? ¿Cuál es la mejor inversión en un periodo de 20 años?

### EJEMPLO 7 Comparación de tasas de interés

Si un inversionista tiene la opción de invertir dinero al 6% compuesto diariamente, o bien al  $6\frac{1}{8}\%$  compuesto trimestralmente, ¿cuál será la mejor opción?

**Solución:**

**Estrategia** Se determina la tasa de interés efectiva equivalente para cada tasa nominal, y después se comparan los resultados.

Las respectivas tasas efectivas de interés son

$$r_e = \left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365} - 1 \approx 6.18\%$$

$$r_e = \left(1 + \frac{0.06125}{4}\right)^4 - 1 \approx 6.27\%$$

Como la segunda opción es la que ofrece la tasa efectiva más alta, será la mejor elección (a pesar de que la capitalización diaria puede parecer psicológicamente más atractiva).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

## Problemas 5.1

En los problemas 1 y 2, encuentre (a) el monto compuesto y (b) el interés compuesto para la inversión y tasa dadas.

1. \$6000 durante 8 años a una tasa efectiva de 8%.
2. \$750 durante 12 meses a una tasa efectiva de 7%.

En los problemas 3 a 6, encuentre la tasa efectiva que corresponda a la tasa nominal dada. Redondee las respuestas a tres decimales.

3. 3% compuesto semestralmente.
4. 5% compuesto trimestralmente.

5. 4% compuesto diariamente.
6. 6% compuesto diariamente.
7. Encuentre la tasa efectiva de interés (redondeada a tres decimales) que es equivalente a una tasa nominal de 10% compuesta
  - (a) anualmente,
  - (b) semestralmente,
  - (c) trimestralmente,
  - (d) mensualmente,
  - (e) diariamente.

8. Encuentre (i) el interés compuesto (redondeado a dos decimales) y (ii) la tasa efectiva (redondeada a tres decimales), si se invierten \$1000 por cinco años a una tasa anual de 7%, compuesto  
 (a) trimestralmente, (b) mensualmente,  
 (c) semanalmente, (d) diariamente.
- \*9. Durante un periodo de cinco años, un capital original de \$2000 ascendió a \$2950 en una cuenta donde el interés era compuesto trimestralmente. Determine la tasa efectiva de interés redondeada a dos decimales.
10. Suponga que durante un periodo de siete años, \$1000 ascendieron a \$1835 en un certificado de inversión en el que el interés era compuesto mensualmente. Encuentre la tasa nominal de interés, compuesta cada mes, que se ganó. Redondee su respuesta a dos decimales.

*En los problemas 11 y 12, encuentre cuántos años se requieren para duplicar un capital a la tasa efectiva dada. Dé su respuesta con un decimal.*

\*11. 9%.                    12. 5%.

13. Un certificado de depósito de \$6000 se compra en \$6000 y se mantiene durante siete años. Si el certificado gana una tasa efectiva de 8%, ¿cuál es su valor al final de ese periodo?
14. ¿Cuántos años tendrán que pasar para que el dinero se triplique a la tasa efectiva de  $r$ ?
- \*15. **Costo de la universidad** Imagine que asistir a cierta universidad cuesta \$21 500 en el año escolar 2005-2006. Este precio incluye matrícula, habitación, alimentación, libros y otros gastos. Suponga una tasa efectiva de inflación de 6% para estos costos, determine cuáles serán los costos universitarios en el año escolar 2015-2016.
16. **Costo de la universidad** Repita el problema 15 para una tasa de inflación de 2% compuesta trimestralmente.
17. **Cargo financiero** Una importante compañía de tarjetas de crédito tiene un cargo financiero del  $1\frac{1}{2}\%$  mensual sobre el saldo no pagado. (a) ¿Cuál es la tasa nominal compuesta mensualmente? (b) ¿Cuál es la tasa efectiva?



## OBJETIVO

Estudiar el valor presente y resolver problemas que incluyan el valor del dinero en el tiempo por medio del uso de la ecuación del valor. Introducir el valor presente neto de flujos de efectivo.

## 5.2 Valor presente

Suponga que se depositan \$100 en una cuenta de ahorros que paga 6% compuesto anualmente. Entonces, al final de dos años la cuenta vale

$$100(1.06)^2 = 112.36$$

Para describir esta relación, se dice que el monto compuesto de \$112.36 es el *valor futuro* de los \$100, y que \$100 es el *valor presente* de los \$112.36. A veces puede conocerse el valor futuro de una inversión y se desea encontrar su valor presente. Para obtener una fórmula para esto, se resuelve la ecuación  $S = P(1 + r)^n$  para  $P$ . El resultado es  $P = S/(1 + r)^n = S(1 + r)^{-n}$ .

18. ¿Cuánto tiempo tendrá que pasar para que un capital  $P$  se duplique, si el valor del dinero es 12% compuesto mensualmente? Dé su respuesta al mes más cercano.
19. ¿A cuánto ascenderán \$2000 en ocho años, si se invirtieron a una tasa efectiva de 6% durante los primeros 4 años y de ahí en adelante al 6% compuesto semestralmente?
20. ¿Cuánto tiempo tendrá que pasar para que \$500 asciendan a \$700, si se invierten al 8% compuesto trimestralmente?
- \*21. Un inversionista tiene la opción de invertir una cantidad de dinero al 8% compuesto anualmente, o bien al 7.8% compuesto semestralmente. ¿Cuál de las dos tasas es la mejor?
22. ¿Cuál es la tasa nominal de interés compuesta mensualmente que corresponde a una tasa efectiva de 4.5%?
23. **Cuenta de ahorros** Un banco anuncia que paga interés sobre las cuentas de ahorro a la tasa de  $4\frac{3}{4}\%$  compuesto diariamente. Encuentre la tasa efectiva, si para determinar la *tasa diaria*, el banco supone que un año consta de (a) 360 días o (b) 365 días. Suponga que la capitalización ocurre 365 veces en un año y redondee su respuesta a dos decimales.
24. **Cuenta de ahorros** Suponga que en una cuenta de ahorros \$700 ascienden a \$801.06 después de dos años. Si el interés se capitalizó trimestralmente, encuentre la tasa nominal de interés, compuesta trimestralmente, que fue ganada por el dinero.
25. **Inflación** Como una protección contra la inflación, un inversionista compró una pintura en 1990 por \$100 000, que se vendió en el año 2000 por \$300 000. ¿Cuál es la tasa efectiva a la que se apreció el valor de la pintura?
26. **Inflación** Si la tasa de inflación de ciertos bienes es del  $7\frac{1}{4}\%$  compuesto diariamente, ¿cuántos años tendrán que pasar para que el precio promedio de tales bienes se duplique?
27. **Bono de cupón cero** Un *bono de cupón cero* es aquél que se vende por menos de su valor nominal (es decir, es *descuento*) y no tiene pagos periódicos de interés. En lugar de eso, el bono se redime por su valor nominal en el momento de su maduración. Por lo tanto, en este sentido, el interés se paga al vencimiento. Suponga que un bono de cupón cero se vende por \$420 y pude redimirse dentro de 14 años por su valor nominal de \$1000. ¿A qué tasa nominal compuesta semestralmente el bono gana interés?
28. **Fondos perdidos** Suponga que se colocan \$1000 en una cuenta de cheques sin intereses y después se olvidan. Cada año, el banco impone un cargo por manejo de 1%. Despues de 20 años, ¿cuánto queda de los \$1000? (*Una pista:* Consideré la ecuación (1) con  $r = -0.01$ .)

### Valor presente

El capital  $P$  que debe invertirse a la tasa periódica  $r$  durante  $n$  períodos de interés, de modo que el monto total sea  $S$ , está dado por

$$P = S(1 + r)^{-n} \quad (1)$$

y se llama el **valor presente** de  $S$ .

#### EJEMPLO 1 Valor presente

*Encuentre el valor presente de \$1000 que debe pagarse dentro de tres años, si la tasa de interés es de 9% compuesto mensualmente.*

**Solución:** Se usa la ecuación (1) donde  $S = 1000$ ,  $r = 0.09/12 = 0.0075$  y  $n = 3(12) = 36$ :

$$P = 1000(1.0075)^{-36} \approx \$764.15.$$

Esto significa que deben invertirse \$764.15 al 9% compuesto cada mes para tener \$1000 dentro de tres años.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



Si la tasa de interés del ejemplo 1 fuera de 10% compuesto mensualmente, el valor presente sería

$$P = 1000 \left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{-36} \approx \$741.74$$

que es menor que el anterior. Es común que disminuya el valor presente para un valor futuro dado, conforme crece la tasa de interés por periodo de capitalización.

#### EJEMPLO 2 Pago único a un fondo de inversión

*Se contrata un fondo de inversión para la educación de un niño, y se establece que será por medio de un solo pago, de modo que al cabo de 15 años habrá \$50 000. Si el fondo gana interés a una tasa de 7% compuesto semestralmente, ¿cuánto dinero debe pagarse al fondo?*

**Solución:** Se desea saber el valor presente de \$50 000 que se pagarán dentro de 15 años. A partir de la ecuación (1) con  $S = 50\,000$ ,  $r = 0.07/2 = 0.035$  y  $n = 15(2) = 30$ , se tiene

$$P = 50\,000(1.035)^{-30} \approx \$17\,813.92$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13



### Ecuaciones de valor

Suponga que el señor Smith debe al señor Jones dos cantidades de dinero: \$1000 pagaderos dentro de dos años y \$600 pagaderos dentro de cinco años. Si el señor Smith desea saldar ahora la deuda total por medio de un solo pago, ¿de cuánto debe ser? Suponga una tasa de interés de 8% compuesta trimestralmente.

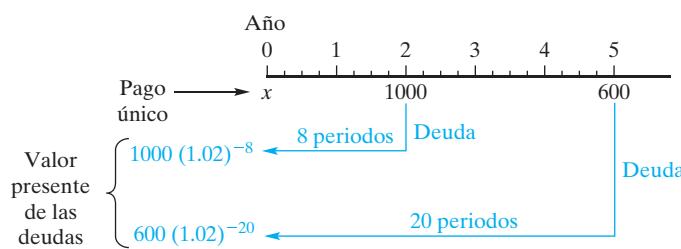
El pago único  $x$  debe ser tal que se incremente y al final pague las deudas en el momento que les corresponde. Es decir, debe ser igual a la suma de los valores presentes de los pagos futuros. Como se muestra en la figura 5.2, se tiene

$$x = 1000(1.02)^{-8} + 600(1.02)^{-20} \quad (2)$$

Esta ecuación se llama *ecuación de valor*. Se determina que

$$x \approx \$1257.27$$

Por lo tanto, el pago único ahora debe ser de \$1257.27. Se analizará la situación con mayor detalle. Hay dos métodos diferentes de pago de la deuda: un solo pago ahora o dos pagos diferentes en el futuro. Observe que la ecuación (2) indica que el valor *actual* de todos los pagos bajo un método, debe ser igual al valor *actual* de todos los pagos bajo



**FIGURA 5.2** Reemplazo de dos pagos futuros por un solo pago ahora.

**La figura 5.2 es una herramienta útil para visualizar el valor del dinero en el tiempo. Siempre dibuje una línea de tiempo para establecer una ecuación de valor.**

el otro método. En general, esto es cierto no sólo *en el momento actual* sino en *cualquier momento*. Por ejemplo, si se multiplican ambos lados de la ecuación (2) por  $(1.02)^{20}$ , se obtiene la ecuación de valor.

$$x(1.02)^{20} = 1000(1.02)^{12} + 600 \quad (3)$$

El lado izquierdo de la ecuación (3) proporciona el valor del pago único dentro de cinco años (vea la figura 5.3), mientras que el lado derecho da el valor dentro de cinco años, de todos los pagos bajo el otro método. Al resolver la ecuación (3) para  $x$  se obtiene el mismo resultado,  $x \approx 1257.27$ . En general, una **ecuación de valor** ilustra que cuando se consideran dos métodos para pagar una deuda (u otra transacción), el valor de todos los pagos bajo uno de los métodos debe ser igual, en *cualquier momento*, al valor de todos los pagos bajo el otro método.

En ciertas situaciones una ecuación de valor puede ser más conveniente que la otra, como se ilustra en el ejemplo 3.

### EJEMPLO 3 Ecuación de valor

*Se debe pagar una deuda de \$3000 dentro de seis años, pero en lugar de eso será saldada por medio de tres pagos: \$500 ahora, \$1500 dentro de tres años y un pago final al término de cinco años. ¿Cuál será este pago si se supone un interés de 6% compuesto anualmente?*

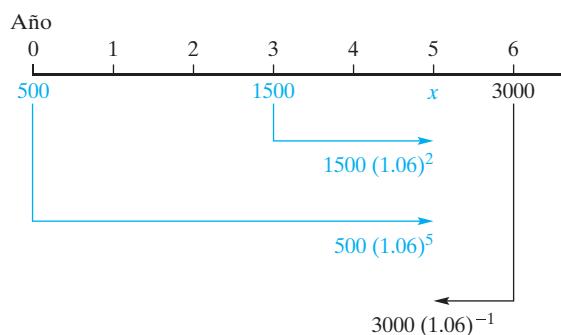
**Solución:** Sea  $x$  el pago final a los cinco años. Por conveniencia de los cálculos, se establece una ecuación de valor para representar la situación al final de ese tiempo, de tal manera que el coeficiente de  $x$  sea 1, como se muestra en la figura 5.4. Observe que en el quinto año se calculan los valores futuros de \$500, de \$1500 y el valor presente de \$3000. La ecuación de valor es

$$500(1.06)^5 + 1500(1.06)^2 + x = 3000(1.06)^{-1}$$

así que

$$\begin{aligned} x &= 3000(1.06)^{-1} - 500(1.06)^5 - 1500(1.06)^2 \\ &\approx \$475.68 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



**FIGURA 5.4** Valores de los pagos en el tiempo para el ejemplo 3.

Cuando se está considerando elegir entre dos inversiones, debe realizarse una comparación de los valores de cada inversión en cierto tiempo, como se muestra en el ejemplo 4.

#### EJEMPLO 4 Comparación de inversiones

*Suponga que usted tiene la oportunidad de invertir \$5000 en un negocio en el que el valor de la inversión después de cinco años sería de \$6300. Por otra parte, podría poner los \$5000 en una cuenta de ahorros que paga 6% compuesto semestralmente. ¿Cuál inversión es mejor?*

**Solución:** Se considerará el valor de cada inversión al final de los cinco años. En ese tiempo la inversión en el negocio sería de \$6300, mientras que la cuenta de ahorros tendrá un valor de  $5000(1.03)^{10} \approx \$6719.58$ . Es claro que la mejor elección será poner el dinero en la cuenta de ahorros.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21



#### Valor presente neto

Si una inversión inicial producirá pagos en el futuro, los pagos se denominan **flujos de efectivo**. El **valor presente neto**, denotado como VPN, de los flujos de efectivo, se define como la suma de los valores presentes de los flujos de efectivo menos la inversión inicial. Si  $VPN > 0$ , entonces la inversión es redituable; si  $VPN < 0$ , la inversión no es redituable.

#### EJEMPLO 5 Valor presente neto

*Suponga que usted puede invertir \$20 000 en un negocio que le garantiza flujos de efectivo al final de los años 2, 3 y 5, como se indica en la tabla de la izquierda. Suponga una tasa de interés de 7% compuesto anualmente y encuentre el valor presente neto de los flujos de efectivo.*

**Solución:** Al restar la inversión inicial a la suma de los valores presentes de los flujos de efectivo se obtiene

$$\begin{aligned} VPN &= 10\,000(1.07)^{-2} + 8000(1.07)^{-3} + 6000(1.07)^{-5} - 20\,000 \\ &\approx -\$457.31. \end{aligned}$$

Como  $VPN < 0$ , la empresa comercial no es redituable si se considera el valor del dinero en el tiempo. Sería mejor invertir los \$20 000 en un banco que pague 7%, puesto que en la empresa es equivalente a invertir sólo  $\$20\,000 - \$457.31 = \$19\,542.69$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19



## Problemas 5.2

En los problemas 1 a 10, encuentre el valor presente de los pagos futuros a la tasa de interés especificada.

- \*1. \$6000 pagaderos dentro de 20 años al 5% compuesto anualmente.
- 2. \$3500 pagaderos dentro de ocho años al 6% efectivo.
- 3. \$4000 pagaderos dentro de 12 años al 7% compuesto semestralmente.
- 4. \$1740 pagaderos dentro de dos años al 18% compuesto mensualmente.
- 5. \$9000 pagaderos dentro de  $5\frac{1}{2}$  años al 8% compuesto trimestralmente.
- 6. \$6000 pagaderos dentro de  $6\frac{1}{2}$  años al 10% compuesto semestralmente.
- 7. \$8000 pagaderos dentro de cinco años al 10% compuesto mensualmente.
- 8. \$500 pagaderos dentro de tres años al  $8\frac{3}{4}\%$  compuesto trimestralmente.
- 9. \$10 000 pagaderos dentro de cuatro años al  $9\frac{1}{2}\%$  compuesto diariamente.

- 10. \$1250 pagaderos dentro de  $1\frac{1}{2}$  años al  $13\frac{1}{2}\%$  compuesto semestralmente.
- 11. Una cuenta bancaria paga 5.3% de interés anual, compuesto mensualmente. ¿Cuánto debe depositarse ahora de modo que la cuenta tenga exactamente \$12 000 al final de un año?
- 12. Repita el problema 11 para una tasa nominal de 7.1% compuesto semestralmente.
- \*13. **Fondo de inversión** Se contrata un fondo de inversión para un niño que ahora tiene 10 años de edad, y se especifica que será por medio de un pago único, de modo que cuando cumpla 21 años reciba \$27 000. Encuentre el monto del pago si se supone una tasa de interés de 6% compuesto semestralmente.
- 14. Una deuda de \$550 que debe pagarse dentro de cuatro años y otra de \$550 pagadera dentro de cinco años se saldarán por medio de un pago único ahora. Encuentre de cuánto es el pago si se supone una tasa de interés de 10% compuesto trimestralmente.
- \*15. Una deuda de \$600 que debe pagarse dentro de tres años, y otra de \$800 pagadera en cuatro años, se saldarán por medio de un pago único dentro de dos años. Si la tasa de interés es de 8% compuesto semestralmente, ¿de cuánto será el pago?

- 16.** Una deuda de \$7000 que debe pagarse dentro de cinco años se saldrá por medio de un pago de \$3000 ahora, y un segundo pago al final de los cinco años. ¿De cuánto debe ser el segundo pago si la tasa de interés es de 8% compuesto mensualmente?
- 17.** Una deuda de \$5000 que debe pagarse dentro de cinco años y otra de \$5000 pagadera dentro de 10 años, serán saldadas por medio de un pago de \$2000 dentro de dos años, un pago de \$4000 dentro de cuatro años y un pago final al término de seis años. Si la tasa de interés es de 2.5% compuesto anualmente, ¿de cuánto será el pago final?
- 18.** Una deuda de \$3500 pagadera dentro de cuatro años y otra de \$5000 que debe pagarse dentro de seis años, será saldada por medio de un pago de \$1500 ahora, y tres pagos iguales que deberán realizarse en años consecutivos a partir del próximo. Si la tasa de interés es de 7% compuesto anualmente, ¿a cuánto asciende cada uno de los pagos iguales?
- \*19. Flujos de efectivo** Una inversión inicial de \$25 000 en un negocio garantiza los siguientes flujos de efectivo.

Año	Flujo de efectivo
3	\$8000
4	\$10 000
6	\$14 000

Suponga una tasa de interés de 5% compuesto semestralmente.

- (a) Encuentre el valor presente neto de los flujos de efectivo.  
(b) ¿Es reddituable la inversión?
- 20. Flujos de efectivo** Repita el problema 19 para la tasa de interés de 6% compuesto semestralmente.
- \*21. Toma de decisiones** Suponga que una persona tiene las siguientes opciones para invertir \$10 000:
- (a) Colocar el dinero en una cuenta de ahorros que paga el 6% compuesto semestralmente.

## OBJETIVO

Ampliar la noción de interés compuesto a circunstancias bajo las cuales el interés se capitaliza *continuamente*. Desarrollar, en este caso, fórmulas para el monto total compuesto y el valor presente.

## 5.3 Interés compuesto continuamente

Hasta el momento se ha visto que cuando el dinero se invierte a una tasa anual dada, el interés que se gana cada año depende de la frecuencia con que éste se capitaliza. Por ejemplo, se gana más interés si la capitalización es mensual que si fuera semestral. Puede obtenerse más interés capitalizándolo cada semana, diario, cada hora, y así sucesivamente. Sin embargo, hay un interés máximo que es posible ganar, el cual se examinará a continuación.

Suponga que un capital de  $P$  dólares se invierte durante  $t$  años a una tasa anual  $r$ . Si el interés se capitaliza  $k$  veces en un año, entonces la tasa por periodo de conversión es  $r/k$ , y hay  $kt$  periodos. De acuerdo con lo expuesto en la sección 4.1, y que se retomó en la sección 5.1, el monto total  $S$  está dado por

$$S = P \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

Si  $k$ , el número de períodos de interés por año, se aumenta de manera indefinida, como se hizo en el “experimento hipotético” de la sección 4.1 para introducir el número  $e$ , entonces la longitud de cada periodo se aproxima a 0 y se dice que el interés es **compuesto continuamente**. Lo anterior puede hacerse de modo más preciso. De hecho, con un poco de álgebra es posible relacionar el monto compuesto con el número  $e$ . Sea  $m = k/r$ , de manera que

$$P \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = P \left(\left(1 + \frac{1}{k/r}\right)^{k/r}\right)^{rt} = P \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^{rt} = P \left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^m\right)^{rt}$$

- (b)** Invertir en un negocio en el que el valor de la inversión después de ocho años es de \$16 000.  
¿Cuál es la mejor elección?

- 22.** A le debe a B dos cantidades de dinero: \$1000 más interés al 7% compuesto anualmente, que debe ser pagado dentro de cinco años, y \$2000 más interés al 8% compuesto semestralmente, que debe ser pagado dentro de siete años. Si ambas deudas se saldrán en un solo pago al cabo de seis años, encuentre el monto del pago si el valor del dinero es de 6% compuesto trimestralmente.
- 23. Incentivo de compra** Una joyería anuncia que por cada \$1000 de compras de alhajas de diamantes, el comprador recibe un bono de \$1000 sin costo alguno. En realidad, los \$1000 son el valor al vencimiento de un bono de cupón cero (vea el problema 27 del ejercicio 5.1), que la joyería compra a un precio extremadamente reducido. Si el bono devenga interés a una tasa de 7.5% compuesto trimestralmente, y vence después de 20 años, ¿cuánto le cuesta el bono a la joyería?



- 24.** Encuentre el valor presente de \$6500 pagaderos dentro de cuatro años a una tasa bancaria de 5.8% compuesto diariamente. Suponga que el banco utiliza 360 días para determinar la tasa diaria y que hay 365 días en un año, esto es, la capitalización ocurre 365 veces en un año.
- 25. Pagará** Un *pagará* es un convenio por escrito para pagar una cantidad de dinero, ya sea después de una petición de pago o a un plazo definido. Cuando se compra un *pagará* por su valor presente a una tasa de interés dada, se dice que el *pagará* se *descuenta*, y la tasa de interés se denomina *tasa de descuento*. Suponga que un *pagará* de \$10 000 debe pagarse dentro de ocho años, y se vende a una institución financiera por \$4700. ¿Cuál es la tasa de descuento nominal con capitalización trimestral?

En la sección 4.1 se observó que, para el entero positivo  $n$ , los números  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$  se incrementan conforme  $n$  aumenta, sin embargo, no de manera indefinida. (Por ejemplo, puede demostrarse que todos los números  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$  son menores que 3.) Se definió  $e$  como el mínimo número real que es mayor que todos los valores  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ , donde  $n$  es un entero positivo. Se deduce (aunque está fuera del ámbito de este libro) que no es imperativo que  $n$  sea entero. Para cualquier número arbitrario positivo  $m$ , los números  $\left(\frac{m+1}{m}\right)^m$  se incrementan conforme  $m$  aumenta, pero no indefinidamente, y el número  $e$ , según se definió en la sección 4.1, es el mínimo número real que es mayor que todos los valores  $\left(\frac{m+1}{m}\right)^m$ .

En el caso que nos ocupa, para una  $r$  fija, los números  $m = k/r$  se incrementan conforme  $k$  (un entero) aumenta, pero los  $m = k/r$  no son necesariamente enteros. Sin embargo, si se acepta que el párrafo anterior es cierto, entonces el monto compuesto  $P \left( \left( \frac{m+1}{m} \right)^m \right)^{rt}$  se aproxima al valor  $Pe^{rt}$  conforme  $k$ , y por ende  $m$ , aumentan indefinidamente y se tiene lo siguiente:

### Monto compuesto bajo interés continuo

La fórmula

$$S = Pe^{rt} \quad (1)$$

proporciona el monto compuesto  $S$  de un capital de  $P$  dólares después de  $t$  años, a una tasa de interés anual  $r$  compuesta continuamente.

#### EJEMPLO 1 Monto compuesto

*Si se invierten \$100 a una tasa anual de 5% capitalizado continuamente, encuentre el monto total al final de*

- a. 1 año.
- b. 5 años.

**Solución:**

- a. Aquí  $P = 100$ ,  $r = 0.05$  y  $t = 1$ , de modo que

$$S = Pe^{rt} = 100e^{(0.05)(1)} \approx \$105.13$$

Este valor puede compararse con el valor después de un año de una inversión de \$100 invertidos a una tasa de 5% compuesto semestralmente —a saber,  $100(1.025)^2 \approx 105.06$ .

- b. Aquí  $P = 100$ ,  $r = 0.05$  y  $t = 5$ , de modo que

$$S = 100e^{(0.05)(5)} = 100e^{0.25} \approx \$128.40$$

El interés de \$5.13 es el monto máximo de interés compuesto que puede generarse a una tasa anual de 5%.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

Puede encontrarse una expresión que proporcione la tasa efectiva que corresponde a una tasa anual  $r$  compuesta continuamente. (De acuerdo con la sección 5.1, la tasa efectiva es la tasa compuesta anualmente que produce el mismo interés en un año que el que genera el esquema de tasa y capitalización bajo consideración.) Si  $r_e$  es la correspondiente tasa efectiva, entonces después de un año el capital  $P$  se convierte en  $P(1 + r_e)$ . Esto debe ser igual a la cantidad que se acumulaba bajo interés continuo,  $Pe^r$ . Por lo tanto,  $P(1 + r_e) = Pe^r$ , de lo cual  $1 + r_e = e^r$ , así que  $r_e = e^r - 1$ .

**Tasa efectiva bajo interés compuesto continuamente**

La tasa efectiva correspondiente a una tasa anual de  $r$  compuesta continuamente es

$$r_e = e^r - 1$$

**EJEMPLO 2 Tasa efectiva**

*Encuentre la tasa efectiva que corresponda a una tasa anual de 5% compuesta continuamente.*

**Solución:** La tasa efectiva es

$$e^r - 1 = e^{0.05} - 1 \approx 0.0513$$

que es 5.13%.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5



Si se despeja  $P$  de  $S = Pe^r$ , se obtiene  $P = S/e^r = Se^{-r}$ . En esta fórmula,  $P$  es el capital que debe invertirse ahora a una tasa anual  $r$  compuesta continuamente, de modo que al final de  $t$  años el monto compuesto sea  $S$ . Se llama a  $P$  el **valor presente** de  $S$ .

**Valor presente bajo interés continuo**

La fórmula

$$P = Se^{-rt}$$

proporciona el valor presente neto  $P$  de  $S$  dólares que se deben pagar al final de  $r$  años a una tasa anual compuesta continuamente.

**EJEMPLO 3 Fondo de inversión**

*Se establece un fondo de inversión por medio de un solo pago, de modo que al cabo de 20 años haya \$25 000. Si el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual de 7%, ¿cuánto dinero (aproximado al dólar más cercano) debe pagarse inicialmente al fondo?*

**Solución:** Se desea saber el valor presente de \$25 000 pagaderos dentro de 20 años. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P &= Se^{-rt} = 25\,000e^{-(0.07)(20)} \\ &= 25\,000e^{-1.4} \approx 6165 \end{aligned}$$

Así que deben pagarse \$6165 inicialmente.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13



## Problemas 5.3

En los problemas 1 y 2, encuentre el monto total y el interés compuesto si se invierten \$4000 durante seis años y el interés se capitaliza continuamente a la tasa anual dada.

\*1.  $6\frac{1}{4}\%$

2. 9%

En los problemas 3 y 4, encuentre el valor presente de \$2500 pagaderos dentro de ocho años, si el interés es compuesto continuamente a la tasa anual dada.

3.  $6\frac{3}{4}\%$

4. 8%.

En los problemas 5 a 8, encuentre la tasa efectiva de interés que corresponde a la tasa anual dada compuesta continuamente.

\*5. 4%

6. 8%

7. 3%

8. 11%

9. **Inversión** Si se depositan \$100 en una cuenta de ahorros que gana interés a una tasa anual de  $4\frac{1}{2}\%$  compuesta continuamente, ¿cuál será el valor de la cantidad al final de dos años?

- 10. Inversión** Si se invierten \$1000 a una tasa anual de 3% compuesta continuamente, encuentre el monto total al final de ocho años.
- 11. Redención de acciones** El consejo de administración de una compañía acuerda redimir algunas de sus acciones preferentes en cinco años. Para entonces, se requerirá \$1 000 000. Si la compañía puede invertir dinero a una tasa de interés anual de 5% compuesta continuamente, ¿cuánto debe invertir en este momento de modo que el valor futuro sea suficiente para redimir las acciones?
- 12. Fondo de inversión** Se establece un fondo de inversión mediante un solo pago, de modo que al final de 30 años habrá \$50 000. Si el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual de 6%, ¿cuánto dinero debe pagarse al fondo en un inicio?
- \*13. Fondo de inversión** Como regalo para el cumpleaños 25 de su hija recién nacida, los Smith quieren darle una cantidad de dinero que tenga el mismo poder adquisitivo que \$25 000 en la fecha de su nacimiento. Para ello, realizan un único pago inicial a un fondo de inversión establecido específicamente para este propósito.
- (a) Suponga que la tasa de inflación efectiva anual es de 3.5%. Dentro de 25 años, ¿cuál suma tendrá el mismo poder adquisitivo que \$25 000 actuales? Redondee su respuesta al dólar más cercano.
- (b) ¿Cuál debe ser la cantidad de pago único inicial al fondo, si el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual de 4.5%? Redondee su respuesta al dólar más cercano.
- 14. Inversión** En la actualidad, los Smith tienen \$50 000 para invertir durante 18 meses. Tienen dos opciones:
- (a) Invertir el dinero en un certificado que paga interés a la tasa nominal de 5% compuesto trimestralmente.
- (b) Invertir el dinero en una cuenta de ahorros que genera interés a la tasa anual de 4.5% compuesta continuamente. Con cada opción, ¿cuánto dinero tendrán dentro de 18 meses?
- 15.** ¿Qué tasa anual compuesta de manera continua es equivalente a una tasa efectiva de 5%?
- 16.** ¿Qué tasa anual  $r$  compuesta de manera continua es equivalente a una tasa nominal de 6% compuesta semestralmente? (*Una pista:* Primero muestre que  $r = 2 \ln(1.03)$ .)
- 17.** Si un interés es compuesto continuamente a una tasa anual de 0.07, ¿en cuántos años puede triplicarse un capital de  $P$ ? Dé su respuesta al año más cercano.
- 18.** Si un interés es compuesto continuamente, ¿a qué tasa anual se cuadriplicará un capital de  $P$  en 30 años? Dé su respuesta al porcentaje más cercano.
- 19. Opciones de ahorro** El 1 de julio de 2001, el señor Green tenía \$1000 en una cuenta de ahorros en el First National Bank. Esta cuenta ganaba interés a una tasa anual de 3.5% compuesto continuamente. Un banco competidor intentó atraer nuevos clientes y ofreció añadir de manera inmediata \$20 a cualquier cuenta nueva que se abriera con un depósito mínimo de \$1000, y que la nueva cuenta generaría interés a la tasa anual de 3.5% compuesto semestralmente. El señor Green decidió elegir una de las siguientes tres opciones el 1 de julio de 2001:
- (a) Dejar el dinero en el First National Bank.
- (b) Cambiar el dinero al banco competidor.
- (c) Dejar la mitad del dinero en el First National Bank y cambiar la otra mitad al banco competidor.
- Para cada una de estas tres opciones, determine el monto acumulado del señor Green el 1 de julio de 2003.
- 20. Inversión**
- (a) El 1 de noviembre de 1996, la señora Rodgers invirtió \$10 000 en un certificado de depósito a 10 años que pagaba interés a la tasa anual de 4% compuesto continuamente. Cuando el certificado maduró el 1 de noviembre de 2006, ella reinvertió el monto total acumulado en bonos corporativos, los cuales ganan interés a la tasa de 5% compuesto anualmente. Al dólar más cercano, ¿cuál será el monto acumulado de la señora Rodgers el 1 de noviembre de 2011?
- (b) Si la señora Rodgers hubiera hecho una sola inversión de \$10 000 en 1996, cuya maduración fuera en 2011, con una tasa efectiva de interés de 4.5%, ¿el monto acumulado sería mayor o menor que el de el inciso (a)?, ¿por cuánto (al dólar más cercano)?
- 21. Estrategia de inversión** Suponga que usted tiene \$9000 para invertir.
- (a) Si los invierte con el First National Bank a la tasa nominal de 5% compuesto trimestralmente, determine el monto acumulado al final de un año.
- (b) El First National Bank también ofrece certificados en los que paga 5.5% compuesto continuamente. Sin embargo, se requiere un mínimo de \$10 000 de inversión. Como usted sólo tiene \$9000, el banco está dispuesto a darle un préstamo por un año por la cantidad adicional de \$1000 que usted necesita. El interés para este préstamo es una tasa efectiva de 8%, y tanto el capital como el interés se pagan al final del año. Determine si esta estrategia es preferible o no a la estrategia del inciso (a).

**OBJETIVO**

## 5.4 Anualidades

### Sucesiones y series geométricas

En matemáticas se usa la palabra **sucesión** para describir una lista de números, llamados **términos**, que se acomodan en un orden definido. Por ejemplo, la lista

$$2, 4, 6, 8$$

es una sucesión (finita). El primer término es 2, el segundo 4, y así sucesivamente. Observe que *el orden y las repeticiones sí cuentan* en una sucesión. Por ejemplo, la sucesión anterior y las dos siguientes son todas *diferentes*:

Introducir las nociones de anualidades ordinarias y anualidades anticipadas. Utilizar series geométricas para modelar el valor presente y valor futuro de una anualidad. Determinar pagos que se depositarán en un fondo de amortización.

2, 6, 4, 8

2, 6, 6, 4, 8

Sin embargo, se tienen igualdades de *conjuntos*



### ADVERTENCIA

No confunda las sucesiones con los conjuntos.

de manera que las nociones de sucesión y conjunto son muy distintas.

En la sucesión

3, 6, 12, 24, 48

cada término, después del primero, puede obtenerse al multiplicar el término anterior por 2:

$$6 = 3(2), \quad 12 = 6(2), \quad \text{y así sucesivamente}$$

Esto significa que la *razón* de cada dos términos consecutivos es 2:

$$\frac{6}{3} = 2, \quad \frac{12}{6} = 2, \quad \text{y así sucesivamente}$$

A esta sucesión se le llama una *sucesión geométrica* con *primer término* 3 y *razón común* 2. Observe que puede escribirse como

3, 3(2), 3(2)(2), 3(2)(2)(2), 3(2)(2)(2)(2)

o, de manera más compacta, como

3, 3(2), 3(2<sup>2</sup>), 3(2<sup>3</sup>), 3(2<sup>4</sup>)

En general, si una sucesión geométrica tiene  $n$  términos tales que el primer término es  $a$  y la razón común es la constante  $r$ , entonces la sucesión tiene la forma

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$$

Observe que el  $n$ -ésimo término en la sucesión es  $ar^{n-1}$ .

### DEFINICIÓN

La sucesión de  $n$  números

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}, \quad \text{donde } a \neq 0 \quad (\text{Vea la nota al pie de página 1})$$

se llama *sucesión geométrica* con *primer término*  $a$  y *razón constante*  $r$ .

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### SUCESIONES GEOMÉTRICAS

Una pelota de hule siempre rebota a  $\frac{3}{4}$  de su altura previa. Si la pelota se deja caer desde una altura de 64 pies, ¿cuáles son las siguientes cinco alturas que alcanza?

#### EJEMPLO 1 Sucesiones geométricas

- a. La sucesión geométrica con  $a = 3$ , razón común  $\frac{1}{2}$  y  $n = 5$  es

$$3, 3\left(\frac{1}{2}\right), 3\left(\frac{1}{2}\right)^2, 3\left(\frac{1}{2}\right)^3, 3\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

esto es,

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}$$

- b. Los números

$$1, 0.1, 0.01, 0.001$$

forman una sucesión geométrica con  $a = 1$ ,  $r = 0.1$  y  $n = 4$ .

- c. Los términos

$$Pe^{-kI}, Pe^{-2kI}, \dots, Pe^{-dkI}$$

<sup>1</sup>Si  $a = 0$ , la sucesión es 0, 0, 0, ... Esta sucesión constante no se considera como geométrica.

forman una sucesión geométrica donde  $a = Pe^{-kI}$ ,  $r = e^{-kI}$  y  $n = d$ . Vea la Aplicación práctica del capítulo 4.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2****SUCESIÓN GEOMÉTRICA**

Suponga que el número de bacterias crece a una tasa de 50% cada minuto, durante seis minutos. Si la población inicial es de 500, elabore una lista de la población al final de cada minuto como una sucesión geométrica.

**Cuando los términos de una sucesión se usan para formar una suma, el resultado se llama una serie.**

**EJEMPLO 2 Sucesión geométrica**

Si se invierten \$100 a la tasa de 6% compuesto anualmente, entonces la lista de montos compuestos al final de cada año durante ocho años es

$$100(1.06), 100(1.06)^2, 100(1.06)^3, \dots, 100(1.06)^8$$

Ésta es una sucesión geométrica con razón común de 1.06.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

La suma indicada de los términos de la sucesión geométrica  $a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$  se llama **serie geométrica**:

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad (1)$$

Por ejemplo,

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

es una serie geométrica donde  $a = 1$ , razón común  $r = \frac{1}{2}$  y  $n = 7$ .

Se calculará la suma  $s$  de la serie geométrica en la ecuación (1), para  $r \neq 1$ ,<sup>2</sup> y se aprovechará la oportunidad para usar y practicar la notación de sumatoria expuesta en la sección 1.5:

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} ar^i = a \sum_{i=0}^{n-1} r^i \quad (2)$$

Al multiplicar por  $r$ , se obtiene

$$rs = ra \sum_{i=0}^{n-1} r^i = a \sum_{i=0}^{n-1} r^{i+1} = a \sum_{i=1}^n r^i \quad (3)$$

Después de restar los lados correspondientes de la ecuación (3) de los de la ecuación (2) resulta

$$s - rs = a \sum_{i=0}^{n-1} r^i - a \sum_{i=1}^n r^i = a \left( \sum_{i=0}^{n-1} r^i - \sum_{i=1}^n r^i \right) = a(1 - r^n)$$

(Asegúrese de entender la operación realizada dentro del paréntesis: al restar la segunda suma de la primera resulta una cancelación de todos los términos, excepto el primero de la primera suma y el último de la segunda suma.) Ahora se tiene

$$s(1 - r) = a(1 - r^n)$$

y, por lo tanto,

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} ar^i = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{para } r \neq 1$$

Debe observarse que este resultado se obtuvo en la Aplicación práctica del capítulo 4 para un caso especial bastante complicado. Aquí, el caso es en realidad más sencillo.

<sup>2</sup>Si  $r = 1$ , entonces  $s = a + \dots + a = na$ .

### Suma de una serie geométrica

La **suma** de una serie geométrica de  $n$  términos cuyo primer término es  $a$ , y cuya razón común es  $r \neq 1$ , está dada por

$$\sum_{i=0}^{n-1} ar^i = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad (4)$$

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

##### SUMA DE UNA SERIE GEOMÉTRICA

Una pelota rebota a  $\frac{2}{3}$  de su altura previa, después de cada rebote. Si la pelota se lanza hacia arriba hasta una altura de 6 metros, ¿cuánto ha recorrido en el aire cuando golpea el piso por decimosegunda ocasión?

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

##### SUMA DE UNA SERIE GEOMÉTRICA

Una compañía gana una utilidad de \$2000 en su primer mes. Suponga que la utilidad aumenta 10% cada mes durante dos años. Determine el monto de la utilidad que la compañía gana en sus primeros dos años.

#### EJEMPLO 3 Suma de una serie geométrica

Encuentre la suma de la serie geométrica

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

**Solución:** Aquí  $a = 1$ ,  $r = \frac{1}{2}$  y  $n = 7$  (no 6). De acuerdo con la ecuación (4), se tiene

$$s = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{127}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{64}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5



#### EJEMPLO 4 Suma de una serie geométrica

Encuentre la suma de la serie geométrica

$$3^5 + 3^6 + 3^7 + \cdots + 3^{11}$$

**Solución:** Aquí  $a = 3^5$ ,  $r = 3$  y  $n = 7$ . De acuerdo con la ecuación (4),

$$s = \frac{3^5(1 - 3^7)}{1 - 3} = \frac{243(1 - 2187)}{-2} = 265\,599$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7



### Valor presente de una anualidad

La noción de serie geométrica es la base del modelo matemático de la *anualidad*. Una **anualidad** es una sucesión de pagos realizados a periodos fijos, a lo largo de un intervalo de tiempo. El periodo fijo es llamado **periodo de pago**, y el intervalo de tiempo dado es el **plazo** de la anualidad. Un ejemplo de una anualidad es el depósito de \$100 en una cuenta de ahorros cada tres meses durante un año.

El **valor presente de una anualidad** es la suma de los *valores presentes* de todos los pagos. Representa el monto que debe invertirse *ahora* para comprar los pagos que vencen en el futuro. A menos que se especifique otra cosa, se supondrá que cada pago se realiza *al final* del periodo; tal anualidad se conoce como **anualidad ordinaria**. También se supondrá que el interés se calcula al final de cada periodo de pago.

Considere una anualidad de  $n$  pagos de  $R$  (dólares) cada uno, donde la tasa de *interés por periodo* es  $r$  (vea la figura 5.5) y el primer pago se realiza en un periodo a partir de ahora. El valor presente de una anualidad está dado por

$$A = R(1 + r)^{-1} + R(1 + r)^{-2} + \cdots + R(1 + r)^{-n}$$

Ésta es una serie geométrica de  $n$  términos cuyo primer término es  $R(1 + r)^{-1}$  y cuya razón común es  $(1 + r)^{-1}$ . Por lo que, de acuerdo con la ecuación (4), se obtiene la fórmula

$$\begin{aligned} A &= \frac{R(1 + r)^{-1}(1 - (1 + r)^{-n})}{1 - (1 + r)^{-1}} \\ &= \frac{R(1 - (1 + r)^{-n})}{(1 + r)(1 - (1 + r)^{-1})} = \frac{R(1 - (1 + r)^{-n})}{(1 + r) - 1} \\ &= R \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \end{aligned}$$

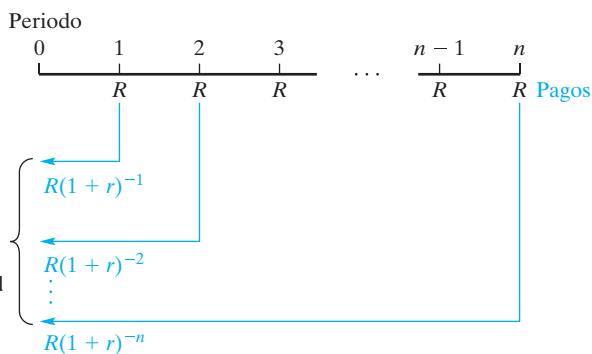


FIGURA 5.5 Valor presente de una anualidad ordinaria.

### Valor presente de una anualidad

La fórmula

$$A = R \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \quad (5)$$

proporciona el **valor presente**  $A$  de una anualidad ordinaria de  $R$  dólares por periodo de pago, durante  $n$  periodos a la tasa de interés  $r$  por periodo.

En la ecuación (5) la expresión  $[1 - (1 + r)^{-n}]/r$  se denota por  $a_{\bar{n}r}$  y (se establece  $R = 1$ , en la ecuación (5)) se observa que representa el valor presente de una anualidad de \$1 por periodo durante  $n$  periodos a la tasa de interés  $r$  por periodo. El símbolo  $a_{\bar{n}r}$  se lee “anualidad durante  $n$  periodos a una tasa  $r$ ”. Por lo tanto, la ecuación (5) puede escribirse como:

$$A = Ra_{\bar{n}r} \quad (6)$$

Con frecuencia los estudiantes preguntan, “¿qué es  $a$  en  $a_{\bar{n}r}$ ?”. La respuesta más simple es que  $a$  es el nombre de una función de dos variables. Como tal, es una indicación que asocia cada par  $(n, r)$  de números de entrada con un único valor de salida. Si se usara la notación estándar para funciones de dos variables, se escribiría  $a(n, r)$ , pero en matemáticas financieras la notación  $a_{\bar{n}r}$  es tradicional. (Por supuesto  $a_{\bar{n}r}$  no es la primera desviación de la nomenclatura estándar  $f(x)$  para las funciones. Ya se ha visto que  $\sqrt{x}$ ,  $|x|$ ,  $n$  y  $\log_2 x$  son otras notaciones creativas para funciones particulares comunes.)

En el apéndice B se proporcionan algunos valores de  $a_{\bar{n}r}$ . (La mayoría son aproximaciones.)

### EJEMPLO 5 Valor presente de una anualidad

Encuentre el valor presente de una anualidad de \$100 por mes durante  $3\frac{1}{2}$  años a una tasa de interés de 6% compuesto mensualmente.

**Solución:** Al sustituir en la ecuación (6), se establece  $R = 100$ ,  $r = 0.06/12 = 0.005$  y  $n = (3\frac{1}{2})(12) = 42$ . Por lo tanto,

$$A = 100a_{\bar{42}0.005}$$

Según el apéndice B  $a_{\bar{42}0.005} \approx 37.798300$ . De aquí que,

$$A \approx 100(37.798300) = \$3779.83$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13



### EJEMPLO 6 Valor presente de una anualidad

Dada una tasa de interés de 5% compuesto anualmente, encuentre el valor presente de una anualidad de \$2000 que vencen al final de cada año durante tres años, y \$5000 pagaderos de ahí en adelante al final de cada año durante cuatro años (vea la figura 5.6).

Cuando el valor deseado de  $a_{\bar{n}r}$  no aparezca en el apéndice B, se usará una calculadora para obtenerlo.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5

#### VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD

Dado un pago mensual de \$500 durante seis años, utilice una calculadora graficadora para hacer la gráfica de valor presente  $A$  como una función de la tasa de interés mensual,  $r$ . Determine la tasa nominal, si el valor presente de la anualidad es de \$30 000.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6

#### VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD

Suponga que un hombre compra una casa con un pago inicial de \$20 000 y después hace pagos de \$2000 al final de cada trimestre durante seis años, y de \$3500 al final de cada trimestre durante ocho años más. Dada una tasa de interés de 6% capitalizable cada trimestre, determine el valor presente de los pagos y el precio de lista de la casa.

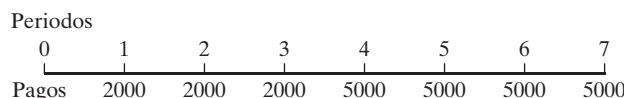


FIGURA 5.6 Anualidad del ejemplo 6.

**Solución:** El valor presente se obtiene al sumar los valores presentes de todos los pagos:

$$2000(1.05)^{-1} + 2000(1.05)^{-2} + 2000(1.05)^{-3} + 5000(1.05)^{-4} \\ + 5000(1.05)^{-5} + 5000(1.05)^{-6} + 5000(1.05)^{-7}$$

En lugar de evaluar esta expresión, es posible simplificar el trabajo considerando que los pagos serán una anualidad de \$5000 durante siete años, menos una anualidad de \$3000 durante tres años, de modo que los tres primeros pagos serán de \$2000 cada uno. Así, el valor presente es

$$5000a_{\bar{7}|0.05} - 3000a_{\bar{3}|0.05} \\ \approx 5000(5.786373) - 3000(2.723248) \\ \approx \$20\,762.12$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25



## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7

### PAGO PERIÓDICO DE UNA ANUALIDAD

Dada una anualidad con pagos iguales al final de cada trimestre durante seis años y una tasa de interés de 4.8% compuesto trimestralmente, utilice una calculadora graficadora para graficar el valor presente  $A$  como una función de los pagos mensuales  $R$ . Determine el pago mensual, si el valor presente de la anualidad es \$15 000.

### EJEMPLO 7 Pago periódico de una anualidad

*Si se utilizan \$10 000 para comprar una anualidad que consiste en pagos iguales al final de cada año durante los siguientes cuatro años, y la tasa de interés es de 6% compuesto anualmente, encuentre el monto de cada pago.*

**Solución:** Aquí  $A = \$10\,000$ ,  $n = 4$ ,  $r = 0.06$  y se desea encontrar  $R$ . De acuerdo con la ecuación (6),

$$10\,000 = Ra_{\bar{4}|0.06}$$

Al resolver para  $R$ , se obtiene

$$R = \frac{10\,000}{a_{\bar{4}|0.06}} \approx \frac{10\,000}{3.465106} \approx \$2885.91$$

En general, la fórmula

$$R = \frac{A}{a_{\bar{n}|r}}$$

proporciona el pago periódico  $R$  de una anualidad ordinaria cuyo valor presente es  $A$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27



## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 8

### ANUALIDAD ANTICIPADA

Un hombre hace pagos de su casa de \$1200 al inicio de cada mes. Si esta persona desea liquidar por anticipado un año de pagos, ¿cuánto deberá pagar, dado que la tasa de interés es de 6.8% compuesto mensualmente?

### EJEMPLO 8 Anualidad anticipada

*Las primas sobre una póliza de seguros son de \$50 por trimestre, pagaderos al inicio de cada trimestre. Si el asegurado desea pagar un año de primas por adelantado, ¿cuánto debe pagar suponiendo que la tasa de interés es de 4% compuesto trimestralmente?*

**Solución:** Se desea saber el valor presente de una anualidad de \$50 por periodo durante cuatro períodos a una tasa de 1% por periodo. Sin embargo, cada pago se realiza *al inicio* de un periodo de pago. Tal anualidad se llama **anualidad anticipada**. La anualidad dada puede pensarse como un pago inicial de \$50, seguido por una anualidad vencida de \$50 durante tres períodos (vea la figura 5.7). Por lo tanto, el valor presente es

$$50 + 50a_{\bar{3}|0.01} \approx 50 + 50(2.940985) \approx \$197.05$$

Se destaca que la fórmula general para el **valor presente de una anualidad anticipada** es  $A = R + Ra_{\bar{n-1}|r}$ , esto es

$$A = R(1 + a_{\bar{n-1}|r})$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17



Un ejemplo de anualidad anticipada, es la renta de un departamento para el que el primer pago se hace de manera inmediata.

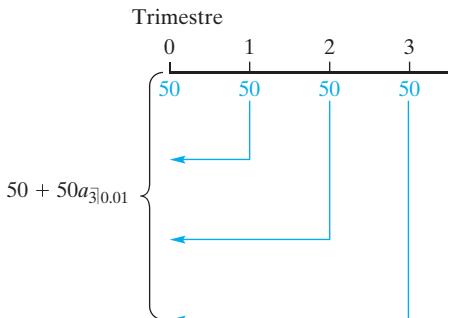


FIGURA 5.7 Anualidad anticipada (valor presente).

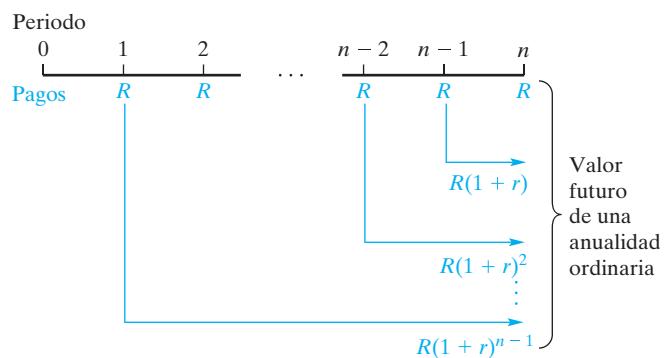


FIGURA 5.8 Valor futuro de una anualidad ordinaria.

### Monto de una anualidad

El **monto** (o **valor futuro**) de una anualidad es el valor de todos los pagos al final del plazo. Es decir, la suma de los montos compuestos de todos los pagos. Considere una anualidad de  $n$  pagos de  $R$  (dólares) cada uno, donde la tasa de interés por periodo es  $r$ . El monto compuesto del último pago es  $R$ , puesto que ocurre al final del último periodo de interés y por ende no acumula interés. (Vea la figura 5.8.) El  $(n - 1)$ -ésimo pago gana interés durante un periodo, el  $(n - 2)$ -ésimo pago gana interés durante dos periodos, y así sucesivamente, y el primer pago produce interés por  $n - 1$  periodos. Así que el valor futuro de la anualidad es

$$R + R(1+r) + R(1+r)^2 + \dots + R(1+r)^{n-1}$$

Ésta es una serie geométrica de  $n$  términos donde el primer término es  $R$  y la **razón común** es  $1+r$ . En consecuencia, su suma  $S$  es (según la ecuación (4))

$$S = \frac{R(1 - (1+r)^n)}{1 - (1+r)} = R \cdot \frac{1 - (1+r)^n}{-r} = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

### Monto de una anualidad

La fórmula

$$S = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (7)$$

proporciona el **monto**  $S$  de una anualidad ordinaria de  $R$  (dólares) por periodo de pago, durante  $n$  periodos a la tasa de interés  $r$  por periodo.

La expresión  $[(1+r)^n - 1]/r$  se abrevia como  $s_{\overline{n}|r}$ . En el apéndice B se dan algunos valores aproximados de  $s_{\overline{n}|r}$ . Por lo tanto,

$$S = s_{\overline{n}|r} \quad (8)$$

Se deduce que  $s_{\overline{n}|r}$  es el monto de una anualidad ordinaria de \$1 por periodo de pago durante  $n$  periodos a una tasa de interés  $r$  por periodo. Como  $a_{\overline{n}|r}$ ,  $s_{\overline{n}|r}$  también es una función de dos variables (con una notación que también es poco convencional).

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 9

#### MONTO DE UNA ANUALIDAD

Suponga que usted invierte en un fondo IRA: deposita \$2000 al final de cada año fiscal, durante los siguientes 15 años. Si la tasa de interés es de 5.7% compuesto anualmente, ¿cuánto tendrá al final?

#### EJEMPLO 9 Monto de una anualidad

Encuentre el monto de una anualidad que consiste en pagos de \$50 al final de cada tres meses, durante tres años, a la tasa de 6% compuesto trimestralmente. También encuentre el interés compuesto.

**Solución:** Para encontrar el monto de la anualidad se utiliza la ecuación (8) donde  $R = 50$ ,  $n = 4(3) = 12$  y  $r = 0.06/4 = 0.015$

$$S = 50s_{\overline{12}|0.015} \approx 50(13.041211) \approx \$652.06$$

El interés compuesto es la diferencia entre el monto de la anualidad y la suma de los pagos, a saber,

$$652.06 - 12(50) = 652.06 - 600 = \$52.06$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10

#### MONTO DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

Suponga que usted invierte en un fondo IRA: deposita \$2000 al inicio de cada año fiscal durante los siguientes 15 años. Si la tasa de interés es de 5.7% compuesto anualmente, ¿cuánto tendrá al final?

#### EJEMPLO 10 Monto de una anualidad anticipada

Al inicio de cada trimestre, se depositan \$50 en una cuenta de ahorros que paga 6% compuesto trimestralmente. Determine el saldo en la cuenta al cabo de tres años.

**Solución:** Como los depósitos se hacen al inicio de un periodo de pago, se desea saber el monto de una anualidad anticipada como se definió en el ejemplo 8 (vea la figura 5.9). La anualidad dada puede pensarse como una anualidad ordinaria de \$50 durante 13 periodos, menos el pago final de \$50. Por lo tanto, el monto es

$$50s_{13|0.015} - 50 \approx 50(14.236830) - 50 \approx \$661.84$$

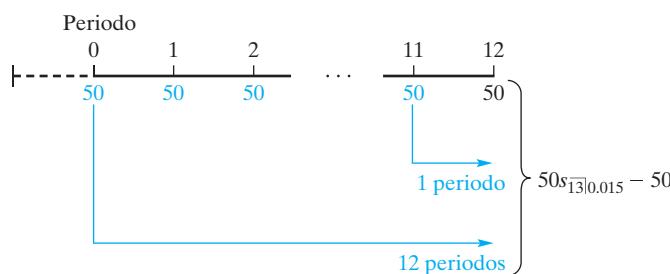


FIGURA 5.9 Valor futuro de una anualidad anticipada.

La fórmula para el **valor futuro de una anualidad anticipada** es  $S = Rs_{n+1|r} - R$ , que es

$$S = R(s_{n+1|r} - 1)$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23

### Fondo de amortización

Los últimos ejemplos de esta sección involucran la noción de *fondo de amortización*.

#### EJEMPLO 11 Fondo de amortización

Un **fondo de amortización** es aquél en el que se hacen pagos periódicos para cumplir con una obligación futura. Suponga que una máquina que cuesta \$7000 será reemplazada después de ocho años, tiempo en el cual tendrá un valor de salvamento de \$700. Con el fin de disponer de dinero en ese momento para comprar una nueva máquina que cueste lo mismo, se establece un fondo de amortización. La cantidad en el fondo al cabo de ocho años será la diferencia entre el costo de reemplazo y el valor de salvamento. Si se colocan pagos iguales al final de cada trimestre y el fondo gana 8% compuesto trimestralmente, ¿de cuánto debe ser cada pago?

**Solución:** La cantidad necesaria después de ocho años es  $7000 - 700 = \$6300$ . Sea  $R$  el pago trimestral. Los pagos al fondo de amortización forman una anualidad donde  $n = 4(8) = 32$ ,  $r = 0.08/4 = 0.02$  y  $S = 6300$ . Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (8), se tiene

$$6300 = Rs_{32|0.02}$$

$$R = \frac{6300}{s_{32|0.02}} \approx \frac{6300}{44.227030} \approx \$142.45$$

En general, la fórmula

$$R = \frac{S}{s_{n|r}}$$

proporciona el pago periódico  $R$  de una anualidad, que debe ascender a  $S$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

### EJEMPLO 12 Fondo de amortización

Una compañía arrendadora estima que si comprara una máquina, le rendiría una ganancia neta anual de \$1000 durante seis años, después de los cuales la máquina quedará sin valor. ¿Cuánto debe pagar por la máquina si quiere ganar 7% anualmente sobre su inversión y también establecer un fondo de amortización para reemplazar el precio de compra? Para el fondo, suponga pagos anuales y una tasa de 5% compuesto anualmente.

**Solución:** Sea  $x$  el precio de compra. Cada año el rendimiento sobre la inversión es de  $0.07x$ . Como la máquina da una ganancia de \$1000 anuales, la cantidad restante que se colocará en el fondo cada año es  $1000 - 0.07x$ . Estos pagos deben acumularse a  $x$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (1000 - 0.07x)s_{\bar{6}|0.05} &= x \\ 1000s_{\bar{6}|0.05} - 0.07xs_{\bar{6}|0.05} &= x \\ 1000s_{\bar{6}|0.05} &= x(1 + 0.07s_{\bar{6}|0.05}) \\ \frac{1000s_{\bar{6}|0.05}}{1 + 0.07s_{\bar{6}|0.05}} &= x \\ x &\approx \frac{1000(6.801913)}{1 + 0.07(6.801913)} \\ &\approx \$4607.92 \end{aligned}$$

Otra manera de enfocar el problema es como sigue: cada año los \$1000 deben proporcionar un rendimiento de  $0.07x$  y también un pago de  $\frac{x}{s_{\bar{6}|0.05}}$ , al fondo de amortización.

Así que se tienen  $1000 = 0.07x + \frac{x}{s_{\bar{6}|0.05}}$ , que al resolverse arroja el mismo resultado.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 33

## Problemas 5.4

Escriba la sucesión geométrica que satisface las condiciones dadas en los problemas 1 a 4. Simplifique los términos.

- \*1.  $a = 64, r = \frac{1}{2}, n = 5$       2.  $a = 2, r = -3, n = 4$   
 \*3.  $a = 100, r = 1.02, n = 3$       4.  $a = 81, r = 3^{-1}, n = 4$

En los problemas 5 a 8, encuentre la suma de las series geométricas dadas, con el uso de la ecuación (4) de esta sección.

- \*5.  $\frac{4}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{7}\right)^5$   
 6.  $1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^6$   
 \*7.  $1 + 0.1 + (0.1)^2 + \cdots + (0.1)^5$   
 8.  $(1.1)^{-1} + (1.1)^{-2} + \cdots + (1.1)^{-6}$

En los problemas 9 a 12, utilice el apéndice B y encuentre el valor de la expresión dada.

9.  $a_{\overline{35}|0.04}$       10.  $a_{\overline{15}|0.07}$   
 11.  $s_{\overline{8}|0.0075}$       12.  $s_{\overline{11}|0.0125}$

Encuentre el valor presente de la anualidad (ordinaria) dada en los problemas 13 a 16.

- \*13. \$600 por año, durante cinco años a la tasa de 6% compuesto anualmente.  
 14. \$1000 cada seis meses durante cuatro años, a la tasa de 10% compuesto semestralmente.  
 15. \$2000 por trimestre, durante  $4\frac{1}{2}$  años a la tasa de 8% compuesto a cada trimestre.

16. \$1500 por mes durante 15 meses a la tasa de 9% compuesto mensualmente

Determine el valor presente de la anualidad anticipada dada en los problemas 17 y 18.

- \*17. \$800 pagaderos al inicio de cada seis meses durante seis años, a la tasa de 7% compuesto semestralmente.  
 18. \$150 pagaderos al inicio de cada trimestre durante cinco años, a la tasa de 7% compuesto mensualmente.

Determine el valor futuro de la anualidad (ordinaria) dada en los problemas 19 a 22.

- \*19. \$2000 por mes durante tres años, a la tasa de 15% compuesto mensualmente.  
 20. \$600 por trimestre durante cuatro años, a la tasa de 8% compuesto trimestralmente.  
 21. \$5000 por año durante 20 años, a la tasa de 7% compuesto anualmente.  
 22. \$2000 cada seis meses durante 10 años, a la tasa de 6% compuesto semestralmente.

Encuentre el valor futuro de la anualidad anticipada dada en los problemas 23 y 24.

- \*23. \$1200 cada año durante 12 años, a la tasa de 8% compuesto anualmente.  
 24. \$600 cada trimestre durante  $7\frac{1}{2}$  años, a la tasa de 10% compuesto trimestralmente

- \*25. Para una tasa de interés de 4% compuesto mensualmente, encuentre el valor presente de una anualidad de \$150 al final de cada mes, durante ocho meses, y de \$175 de ahí en adelante al final de cada mes durante dos años.
26. **Arrendamiento de espacio para oficinas** Una compañía desea arrendar temporalmente un espacio para oficinas durante un periodo de seis meses. El monto de la renta es de \$1500 mensuales, que se pagan por adelantado. Suponga que la compañía quiere realizar un pago total, al inicio del periodo de renta, para cubrir la renta de los seis meses. Si el valor del dinero es de 9% compuesto mensualmente, ¿de cuánto debe ser el pago?
- \*27. Una anualidad que consiste en pagos iguales al final de cada trimestre durante tres años será comprada por \$5000. Si la tasa de interés es de 6% compuesto trimestralmente, ¿a cuánto asciende cada pago?
28. **Compra de equipo** Se compra una máquina con \$3000 de enganche, y pagos de \$250 al final de cada seis meses, durante seis años. Si el interés es de 8% compuesto semestralmente, encuentre el precio total de contado de la máquina.
29. Suponga que se colocan \$50 en una cuenta de ahorros al final de cada mes durante cuatro años. Si no se hacen depósitos posteriores, (a) ¿cuánto habrá en la cuenta después de seis años?, y (b) ¿cuánto de esto es interés compuesto? Suponga que la cuenta de ahorros paga 6% compuesto mensualmente.
30. **Opciones de liquidación de seguro** El beneficiario de una póliza de seguro tiene la opción de recibir un pago global de \$275 000 o 10 pagos anuales iguales, el primero de los cuales se da de inmediato. Si el interés es de 3.5% compuesto anualmente, encuentre el monto de los pagos anuales.
- \*31. **Fondo de amortización** En 10 años una máquina de \$40 000 tendrá un valor de salvamento de \$4000. Se espera que una máquina nueva costará entonces \$52 000. Con el fin de disponer de fondos para cubrir la diferencia entre el costo de reemplazo y el valor de salvamento, se establece un fondo de amortización en el que se colocan pagos iguales al final de cada año. Si el fondo gana 7% compuesto anualmente, ¿de cuánto debe ser el pago?
32. **Fondo de amortización** Una compañía papelera está considerando la compra de un bosque que se estima puede dar una ganancia anual de \$50 000 durante 10 años, después de los cuales no tendrá valor alguno. La compañía desea tener un rendimiento de 8% sobre su inversión, y también establecer un fondo de amortización para reemplazar el precio de compra. Si el dinero se coloca en el fondo al final de cada año, y gana 6% compuesto anualmente, encuentre el precio que la compañía deberá pagar por el bosque. Redondee su respuesta a la centena de dólares más cercana.
- \*33. **Fondo de amortización** Con el propósito de reemplazar una máquina en el futuro, cierta compañía está depositando pagos iguales en un fondo de amortización al final de cada año, de modo que después de 10 años el monto del fondo sea de \$25 000. El fondo gana 6% compuesto anualmente. Después de seis años, la tasa de interés aumenta, de manera que el fondo paga el 7% compuesto anualmente. A causa del incremento en tasa de interés, la compañía disminuye el monto de los pagos restantes. Encuentre el monto de los nuevos pagos. Redondee su respuesta al dólar más cercano.
34. A pide prestado a B la cantidad de \$5000 y acuerda pagarle \$1000 al final de cada año durante cinco años, y un pago al final del sexto año. ¿De cuánto debe ser el último pago si el interés es de 8% compuesto anualmente?

*En los problemas 35 a 43, utilice las fórmulas siguientes.*

$$a_{n|r} = \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

$$s_{n|r} = \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

$$R = \frac{A}{a_{n|r}} = \frac{Ar}{1 - (1 + r)^{-n}}$$

$$R = \frac{S}{s_{n|r}} = \frac{Sr}{(1 + r)^n - 1}$$

35. Encuentre  $s_{\overline{60}|0.017}$  con cinco decimales.
36. Encuentre  $a_{\overline{9}|0.052}$  con cinco decimales.
37. Encuentre  $750a_{\overline{480}|0.0135}$  con dos decimales.
38. Encuentre  $1000s_{\overline{120}|0.01}$  con dos decimales.
39. En una cuenta de ahorros se depositarán pagos iguales al final de cada trimestre durante cinco años, de modo que al final de ese tiempo haya \$3000. Si el interés es de  $5\frac{1}{2}\%$  compuesto trimestralmente, encuentre el pago trimestral.
40. **Beneficios de seguros** Suponga que se usan los beneficios de un seguro de \$25 000 para comprar una anualidad de pagos iguales al final de cada mes durante cinco años. Si gana interés a la tasa de 10% compuesto mensualmente, encuentre el monto de cada pago.
41. **Lotería** Mary Jones ganó una lotería estatal de \$4 000 000 y recibirá un cheque por \$200 000 ahora y uno similar cada año durante los siguientes 19 años. Para garantizar estos 20 pagos, la Comisión Estatal de Loterías compró una anualidad anticipada a la tasa de interés de 10% compuesto anualmente. ¿Cuánto le costó la anualidad a la Comisión?
42. **Opción de plan de pensión** Suponga que un empleado se jubila y puede elegir entre dos opciones de acuerdo con el plan de pensiones de su compañía. La opción A consiste en un pago garantizado de \$650 al final de cada mes durante 15 años. De manera alternativa, con la opción B el empleado recibe un solo pago que es igual al valor presente de los pagos descritos en la opción A.
- (a) Encuentre la suma de los pagos de la opción A.  
 (b) Encuentre el pago total de la opción B, use una tasa de interés de 5.5% compuesto mensualmente. Redondee su respuesta al dólar más cercano.
43. **Un inicio temprano en las inversiones** Una agente de seguros ofrece sus servicios a quienes están preocupados por su plan financiero personal para su retiro. Para enfatizar las ventajas de comenzar a invertir lo antes posible, destaca que una persona de 25 años que ahorre \$2000 anuales durante 10 años (y no haga más contribuciones después de la edad de 34 años), ganará más que si espera 10 años para ahorrar \$2000 anuales desde la edad de 35 años hasta su jubilación, a los 65 (un total de 30 contribuciones). Encuentre la utilidad neta (monto acumulado menos la contribución total) a la edad de 65 años para ambas situaciones. Suponga una tasa anual efectiva de 7%, y que los depósitos se realizan al inicio de cada año. Redondee las respuestas al dólar más cercano.
44. **Anualidad continua** Una anualidad en la que se pagan  $R$  dólares cada año mediante pagos uniformes que son pagaderos continuamente se llama una *anualidad continua*. El valor presente de una anualidad continua para  $t$  años es

$$R \cdot \frac{1 - e^{-rt}}{r}$$

donde  $r$  es la tasa de interés anual compuesta continuamente. Encuentre el valor presente de una anualidad continua de \$100 al año durante 20 años al 5% compuesto continuamente.

- 45. Utilidad** Suponga que un negocio tiene una utilidad anual de \$40 000 en los próximos cinco años, y que las utilidades se generan continuamente a lo largo de cada año. Entonces puede pensarse en las utilidades como en una anualidad continua. (Vea el problema 44.) Si el valor del dinero es de 4% compuesto continuamente, encuentre el valor presente de las utilidades.

## OBJETIVO

Aprender cómo amortizar un préstamo y establecer un programa de amortización.

## 5.5 Amortización de préstamos

Suponga que un banco hace un préstamo por \$1500 y cobra un interés a la tasa nominal de 12% compuesto mensualmente. Los \$1500 más el interés se liquidarán en pagos iguales de  $R$  dólares al final de cada mes durante tres meses. Podría decirse que al fiar al prestatario \$1500, el banco está comprando una anualidad de tres pagos de  $R$  cada uno. Mediante la fórmula del ejemplo 7 de la sección anterior, se encuentra que el pago mensual  $R$  está dado por

$$R = \frac{A}{a_{\bar{n}l} r} = \frac{1500}{a_{\bar{3}|0.01}} \approx \frac{1500}{2.940985} \approx \$510.0332$$

Se redondeará el pago a \$510.03, que puede resultar en un pago final ligeramente mayor. Sin embargo, no es raro que el banco redondee *hacia arriba* al centavo más cercano, en cuyo caso el pago final puede ser menor que los otros pagos.

La institución puede considerar cada pago como si consistiera en dos partes: (1) interés sobre el saldo insoluto, y (2) el pago de parte del préstamo. Esto se llama **amortización**. Un préstamo es **amortizado** cuando parte de cada pago se utiliza para pagar el interés y la parte restante para reducir el saldo insoluto. Como cada pago reduce el saldo insoluto, la parte del interés de un pago decrece conforme pasa el tiempo. Ahora se analizará el préstamo descrito anteriormente.

Al final del primer mes el deudor paga \$510.03. El interés sobre el saldo insoluto es  $0.01(1500) = \$15$ . El saldo del pago,  $510.03 - 15 = \$495.03$ , se aplica entonces para reducir el adeudo. De aquí, el saldo insoluto es  $1500 - 495.03 = \$1004.97$ . Al final del segundo mes, el interés será  $0.01(1004.97) \approx \$10.05$ . Por lo tanto, la cantidad del préstamo saldada será  $510.03 - 10.05 = \$499.98$  y el saldo insoluto será  $1004.97 - 499.98 = \$504.99$ . El interés que se paga al final del tercer mes será  $0.01(504.99) \approx \$5.05$  de modo que el monto del préstamo saldado es  $510.03 - 5.05 = \$504.98$ . Esto dejaría un saldo de  $504.99 - 504.98 = \$0.01$ , de modo que el último pago será de \$510.04 y la deuda estará saldada. Como se dijo antes, el pago final se ajusta para compensar los errores de redondeo. El análisis de cómo se maneja cada pago del préstamo puede exponerse en una tabla llamada **plan de amortización** (vea la tabla 5.1). El interés total pagado es de \$30.10, que con frecuencia se llama **cargo financiero**.

**TABLA 5.1** Plan de amortización

Periodo	Saldo insoluto al inicio del periodo	Interés para el periodo	Pago al final del periodo	Capital pagado al final del periodo
1	\$1500	\$15	\$510.03	\$495.03
2	1004.97	10.05	510.03	499.98
3	504.99	5.05	510.04	504.99
Total		30.10	1530.10	1500.00

Al amortizar un préstamo, al inicio de cualquier periodo, el saldo adeudado es el valor presente de los pagos pendientes. Con base en este hecho y en las explicaciones previas de este capítulo, se obtuvieron las fórmulas de la tabla 5.2, que describen la amortización de un préstamo de  $A$  dólares, a una tasa de  $r$  por periodo, mediante  $n$  pa-

**TABLA 5.2** Fórmulas de amortización

$$1. \text{ Pago periódico: } R = \frac{A}{a_{n|r}} = A \cdot \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}}$$

2. Saldo insoluto al inicio del  $k$ -ésimo periodo:

$$Ra_{n-k+1|r} = R \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n+k-1}}{r}$$

3. Interés en el  $k$ -ésimo pago:  $Rra_{n-k+1|r}$

4. Capital contenido en el  $k$ -ésimo pago:  $R(1 - ra_{n-k+1|r})$

5. Interés total pagado:  $R(n - a_{n|r}) = nR - A$

gos iguales de  $R$  dólares cada uno, y que tales pagos se hacen al final de cada periodo. Especialmente note que la fórmula 1 para el pago periódico  $R$  involucra  $a_{n|r}$  el cual, como recordará, está definido como  $(1 - (1 + r)^{-n})/r$ .

### **EJEMPLO 1** Amortización de un préstamo

Una persona amortiza un préstamo de \$170 000 para una casa nueva, por medio de una hipoteca a 20 años y a una tasa de 7.5% compuesto mensualmente. Encuentre (a) el pago mensual, (b) los cargos totales por intereses, y (c) el saldo insoluto después de cinco años.

**Solución:**

- a. El número de periodos de pago son  $n = 12(20) = 240$ , la tasa de interés por periodo es  $r = 0.075/12 = 0.00625$  y  $A = 170\ 000$ . Con base en la fórmula 1 de la tabla 5.2, el pago mensual  $R$  es  $170\ 000/a_{240|0.00625}$ . Como  $a_{240|0.00625}$  no está en el apéndice B, se utiliza la siguiente fórmula equivalente y una calculadora:

$$R = 170\ 000 \left( \frac{0.00625}{1 - (1.00625)^{-240}} \right)$$

$$\approx \$1369.51$$

- b. Con base en la fórmula 5, los cargos totales por interés son

$$240(1369.51) - 170\ 000 = 328\ 682.40 - 170\ 000$$

$$= \$158\ 682.40$$

Esto es casi tanto como el préstamo mismo.

- c. Después de 5 años, es el inicio del periodo 61. Por medio de la fórmula 2 donde  $n - k + 1 = 240 - 61 + 1 = 180$ , se encuentra que el capital restante es

$$1369.51 \left( \frac{1 - (1.00625)^{-180}}{0.00625} \right) \approx \$147\ 733.74$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

En algún tiempo, era común un tipo de pago de un préstamo que involucraba el “método aditivo” para determinar el cargo financiero. Con este método, se calculaba el cargo financiero al aplicar una tasa anual de interés simple (esto es, no compuesto) al monto del préstamo. El cargo se añadía entonces al capital y ese total se dividía entre el número de meses del préstamo para determinar el pago mensual. En préstamos de este tipo, el deudor no puede darse cuenta de inmediato que la tasa anual verdadera es mucho mayor que la tasa nominal, como lo muestra el siguiente ejemplo con tecnología.

## T E C N O L O G I A

**Problema:** Se toma un préstamo de \$1000 durante un año a una tasa de 9% de interés bajo el método aditivo. Estime la tasa de interés verdadera si se supone composición mensual.

**Solución:** Como se emplea el método aditivo, los pagos se harán cada mes. El cargo financiero para \$1000 al 9% de interés simple durante un año es  $0.09(1000) = \$90$ . Tras sumar esto al monto del préstamo se obtiene  $1000 + 90 = \$1090$ . Por lo tanto, el pago mensual es  $1090/12 \approx \$90.83$ . Así, se tiene un préstamo de \$1000 con 12 pagos iguales de \$90.83. A partir de la fórmula 1, en la tabla 5.2, se tiene

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}r}}$$

$$\frac{1090}{12} = \frac{1000}{a_{\overline{12}r}}$$

$$a_{\overline{12}r} = \frac{1000(12)}{1090} \approx 11.009174$$

Ahora se resolverá  $a_{\overline{12}r} = 11.009174$  para la tasa mensual  $r$ . Se tiene

$$\frac{1 - (1 + r)^{-12}}{r} = 11.009174$$

Al graficar

$$Y_1 = (1 - (1 + X)^{-12})/X$$

$$Y_2 = 11.009174$$

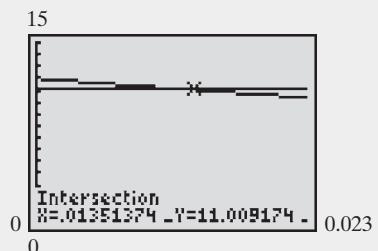


FIGURA 5.10 Solución de  $a_{\overline{12}r} = 11.009174$ .

y al encontrar la intersección (vea la figura 5.10), se obtiene

$$r \approx 0.01351374$$

que corresponde a una tasa anual del

$$12(0.01351374) \approx 0.1622 = 16.22\%$$

Así, la tasa anual verdadera es de 16.22%. (En algunos países, incluido Estados Unidos, las regulaciones federales concernientes a la veracidad en los préstamos han hecho virtualmente obsoleto el método aditivo.)

La fórmula de la anualidad

$$A = R \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

puede resolverse para  $n$  y obtener el número de períodos de un préstamo. Después de multiplicar ambos miembros por  $r/R$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{Ar}{R} &= 1 - (1 + r)^{-n} \\ (1 + r)^{-n} &= 1 - \frac{Ar}{R} = \frac{R - Ar}{R} \\ -n \ln(1 + r) &= \ln\left(\frac{R - Ar}{R}\right) \quad \text{(al tomar logaritmos de ambos lados)} \\ n &= -\frac{\ln\left(\frac{R - Ar}{R}\right)}{\ln(1 + r)} \end{aligned}$$

Mediante las propiedades de los logaritmos, se elimina el signo menos al invertir el cociente en el numerador:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R}{R - Ar}\right)}{\ln(1 + r)} \tag{1}$$

### EJEMPLO 2 Periodos de un préstamo

Muhammar Smith compró recientemente una computadora por \$1500 y acordó pagarla en abonos mensuales de \$75. Si el almacén cobra un interés de 12% compuesto cada mes, ¿cuántos meses le tomará saldar la deuda?

**Solución:** De la ecuación (1),

$$n = \frac{\ln\left(\frac{75}{75 - 1500(0.01)}\right)}{\ln(1.01)} \approx 22.4 \text{ meses}$$

En realidad son 23 pagos; sin embargo, el pago final será menor de \$75.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11 

## Problemas 5.5

- \*1. Una persona pide prestados \$8000 a un banco y acuerda liquidarlos en pagos iguales al final de cada mes durante tres años. Si el interés es de 14% compuesto mensualmente, ¿de cuánto será cada pago?
2. Una persona desea pedir un préstamo a tres años y puede realizar pagos de \$50 al final de cada mes. Si el interés es de 12% compuesto mensualmente, ¿cuánto puede pedir prestado esta persona?
3. **Costo financiero** Determine el costo financiero de un préstamo a 36 meses de \$8000, con pagos mensuales, si el interés se establece a la tasa de 4% compuesto mensualmente.
4. Para un préstamo a un año de \$500 a una tasa de 15% compuesto mensualmente, encuentre (a) el pago mensual, y (b) el cargo financiero.
5. **Préstamo para un auto** Una persona está amortizando un préstamo para un auto por \$7500, a 36 meses, con interés a la tasa de 4% compuesto mensualmente. Encuentre (a) el pago mensual, (b) el interés en el primer mes y (c) el capital saldado con el primer pago.
6. **Préstamos para bienes inmuebles** Una persona está amortizando un préstamo de \$35 000 a 48 meses para el terreno de una casa. Si la tasa de interés es de 7.8% compuesto mensualmente, encuentre (a) el pago mensual, (b) el interés en el primer pago y (c) el capital saldado en el primer pago.

En los problemas 7 a 10, configure planes de amortización para las deudas que se indican. Ajuste los pagos finales si es necesario.

7. \$5000 saldados en cuatro pagos anuales iguales con interés de 7% compuesto anualmente.
8. \$9000 saldados en ocho pagos semestrales iguales con interés del 9.5% compuesto semestralmente.
9. \$900 saldados en cinco pagos trimestrales iguales con interés de 10% compuesto trimestralmente.
10. \$10 000 saldados en cinco pagos mensuales iguales con interés de 9% compuesto mensualmente.
- \*11. Un préstamo de \$1000 se va a saldar en pagos trimestrales de \$100. Si el interés es de 8% compuesto trimestralmente, ¿cuántos pagos *completos* se realizarán?
12. Se va a amortizar un préstamo de \$2000 en 48 meses a una tasa de interés de 12% compuesto mensualmente. Encuentre
  - (a) el pago mensual;
  - (b) el saldo insoluto al inicio del mes 36;
  - (c) el interés en el pago número 36;
  - (d) el capital en el pago número 36;
  - (e) el interés total pagado.

13. Una deuda de \$18 000 se va a saldar en 15 pagos semestrales iguales, el primer pago se hará dentro de seis meses. El interés es de 7% compuesto semestralmente. Sin embargo, después de dos años la tasa de interés aumentará al 8% compuesto semestralmente. Si la deuda debe pagarse en la fecha que se acordó originalmente, encuentre el nuevo pago anual. Dé su respuesta aproximada al dólar más cercano.
14. Una persona pide prestados \$2000 y los liquidará en pagos iguales al final de cada mes durante cinco años. Si el interés es de 16.8% compuesto mensualmente, ¿de cuánto será cada pago?
15. **Hipoteca** Se obtiene una hipoteca de \$245 000 a 25 años para una casa nueva a la tasa de 9.2% compuesto mensualmente. Determine (a) el pago mensual, (b) el interés en el primer pago, (c) el capital liquidado en el primer pago y (d) el cargo financiero.
16. **Préstamo para auto** Un préstamo para un auto de \$8500 será amortizado en 48 meses a una tasa de interés de 13.2% compuesto mensualmente. Encuentre, (a) el pago mensual y (b) el cargo financiero.
17. **Préstamo para muebles** Una persona compra muebles por \$2000 y acepta pagar este monto en pagos mensuales de \$100. Si el interés aplicado es de 18% compuesto mensualmente, ¿cuántos pagos *completos* habrá?
18. Encuentre el pago mensual de un préstamo a cinco años por \$9500, si el interés es de 9.24% compuesto mensualmente.
19. **Hipoteca** Bob y Mary Rodgers quieren comprar una casa nueva y creen que pueden cumplir con pagos hipotecarios de \$600 mensuales. Podrían obtener una hipoteca a 30 años a una tasa de 7.6% (compuesto mensualmente), pero deben hacer un pago inicial de 25% del costo de la casa. Suponga que tienen ahorros suficientes para el pago inicial, ¿qué tan cara es la casa que pueden pagar? Dé su respuesta aproximada al dólar más cercano.
20. **Hipoteca** Suponga que tiene que elegir entre tomar una hipoteca de \$240 000 al 6% compuesto mensualmente, ya sea a 15 o a 25 años. ¿Cuánto se ahorraría en el cargo financiero si eligiera la hipoteca a 15 años?
21. En un préstamo de \$25 000 a cinco años, ¿cuánto se ahorraría en cada pago mensual, si la tasa fuera de 12% compuesta mensualmente, en lugar de 15% compuesta mensualmente?
22. **Préstamo para casa** El gobierno federal tiene un programa de ayuda a propietarios de casa con bajos ingresos en áreas urbanas. Dicho programa permite que los propietarios que reúnan ciertos criterios, obtengan préstamos a bajo interés para hacer mejoras a su casa. Cada préstamo se procesa por

medio de un banco comercial. El banco realiza este tipo de préstamos a una tasa anual del  $9\frac{1}{4}\%$ , compuesto mensualmente. Sin embargo, el gobierno subsidia al banco, de modo que el préstamo a los propietarios se establece a la tasa anual de 4%, compuesto mensualmente. Si el pago mensual a la tasa de 4% es de  $x$  dólares ( $x$  dólares es el pago mensual del propietario), y el pago mensual a la tasa mensual de  $9\frac{1}{4}\%$  es  $y$  dólares ( $y$  dólares es el pago mensual que el banco debe recibir),

entonces cada mes el gobierno completa la diferencia  $y - x$  al banco. Para fines prácticos, el gobierno no quiere lidiar con los pagos *mensuales*. En lugar de eso, paga el valor presente de todas las diferencias a la tasa anual de  $9\frac{1}{4}\%$  compuesto mensualmente al inicio del préstamo.

Si un propietario que reúne los requisitos obtiene un préstamo de \$5000 a cinco años, determine el pago que el gobierno hace al banco al inicio del préstamo.

## 5.6 Repaso

### Términos y símbolos importantes

			Ejemplos
Sección 5.1	<b>Interés compuesto</b> tasa efectiva		Ej. 4, p. 199
Sección 5.2	<b>Valor presente</b> valor presente valor futuro      ecuación de valor      valor presente neto		Ej. 1, p. 202 Ej. 3, p. 203
Sección 5.3	<b>Interés compuesto continuamente</b> monto compuesto		Ej. 1, p. 206
Sección 5.4	<b>Anualidades</b> sucesión geométrica      serie geométrica      razón común anualidad      anualidad ordinaria      anualidad anticipada valor presente de una anualidad, $a_{\bar{n}l}r$ monto de una anualidad, $s_{\bar{n}l}r$		Ej. 3, p. 211 Ej. 8, p. 213 Ej. 9, p. 214
Sección 5.5	<b>Amortización de préstamos</b> amortización      plan de amortización      cargo financiero		Ej. 1, p. 219

### Resumen

El concepto de interés compuesto es una parte fundamental de cualquier estudio que trate del valor del dinero en el tiempo; es decir, el valor presente del dinero que será pagado en el futuro, o el valor futuro del dinero invertido en el presente. A una tasa de interés compuesto, el interés se convierte en capital y genera interés. Las fórmulas básicas de interés compuesto son:

$$\begin{aligned} S &= P(1 + r)^n && \text{(valor futuro)} \\ P &= S(1 + r)^{-n} && \text{(valor presente)} \end{aligned}$$

donde  $S$  = monto compuesto (valor futuro)

$$\begin{aligned} P &= \text{capital (valor presente)} \\ r &= \text{tasa periódica} \\ n &= \text{número de períodos de conversión} \end{aligned}$$

Las tasas de interés, por lo general, se expresan como una tasa anual llamada tasa nominal. La tasa periódica se obtiene al dividir la tasa nominal entre el número de períodos de conversión por año. La tasa efectiva es la tasa de interés simple anual, que es equivalente a la tasa nominal de  $r$  capitalizada  $n$  veces durante un año, y está dada por

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 \quad \text{(tasa efectiva)}$$

Las tasas efectivas se emplean para comparar diferentes tasas de interés.

Si el interés se compone continuamente, entonces

$$\begin{aligned} S &= Pe^{rt} && \text{(valor futuro)} \\ P &= Se^{-rt} && \text{(valor presente)} \end{aligned}$$

donde  $S$  = monto compuesto (valor futuro)

$$P = \text{capital (valor presente)}$$

$$r = \text{tasa anual}$$

$$t = \text{número de años}$$

y la tasa efectiva está dada por

$$r_e = e^r - 1 \quad \text{(tasa efectiva)}$$

Una anualidad es una sucesión de pagos realizados en períodos fijos durante cierto tiempo. La base matemática para las fórmulas que tratan con anualidades es la noción de suma de una serie geométrica —esto es,

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} ar^i = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{(suma de una serie geométrica)}$$

donde  $s$  = suma

$$a = \text{primer término}$$

$$r = \text{razón común}$$

$$n = \text{número de términos}$$

Una anualidad vencida es aquella en la que cada pago se realiza al *final* del período de pago, mientras que una anualidad anticipada es cuando el pago se realiza al *inicio* de un período de pago. Las fórmulas que involucran anualidades vencidas son

$$A = R \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} = Ra_{\bar{n}l} \quad \text{(valor presente)}$$

$$S = R \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r} = Rs_{\bar{n}l} \quad \text{(valor futuro)}$$

donde  $A$  = valor presente de la anualidad

$S$  = monto de la anualidad (valor futuro)

$R$  = monto de cada pago

$n$  = número de periodos de pago

$r$  = tasa periódica

Las fórmulas correspondientes a una anualidad anticipada son

$$A = R(1 + a_{n-1|r}) \quad (\text{valor presente})$$

$$S = R(s_{n-1|r} - 1) \quad (\text{valor futuro})$$

Un préstamo, tal como una hipoteca, se amortiza cuando parte de cada pago se utiliza para liquidar el interés y la parte restante se aplica para reducir el capital. Una tabla de amortización presenta un análisis completo de cada pago. Las fórmulas siguientes se ocupan de la amortización de un préstamo de  $A$  dólares, a la tasa periódica de  $r$ , por medio de  $n$  pagos iguales de  $R$  dólares cada uno, de manera que cada pago se realiza al final de cada periodo.

## Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

1. Encuentre la suma de la serie geométrica

$$3 + 2 + 2 \cdot \frac{2}{3} + \cdots + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

2. Encuentre la tasa efectiva que corresponde a una tasa nominal de 5% compuesto mensualmente.
3. Un inversionista tiene que elegir entre invertir una suma de dinero ya sea a 8.5% compuesto anualmente, o bien 8.2% compuesto semestralmente. ¿Cuál es la mejor opción?
4. **Flujos de efectivo** Determine el valor presente de los siguientes flujos de efectivo, que pueden comprarse por medio de una inversión inicial de \$7000:

Año	Flujo de efectivo
2	\$3400
4	3500

Suponga que el interés es de 7% compuesto semestralmente.

5. Una deuda de \$1200 pagaderos dentro de cuatro años, y \$1000 pagaderos dentro de seis años, se saldrá por medio de un pago de \$1000 ahora y un segundo pago dentro de dos años. ¿De cuánto debe ser el segundo pago, si el interés es de 8% compuesto semestralmente?
6. Determine el valor presente de una anualidad de \$250 al final de cada mes durante cuatro años, si el interés es de 6% compuesto mensualmente.
7. Para una anualidad de \$200 al final de cada seis meses durante  $6\frac{1}{2}$  años, determine, (a) el valor presente y (b) el valor futuro a una tasa de interés de 8% compuesto semestralmente.
8. Encuentre el monto de una anualidad anticipada que consiste en 13 pagos anuales de \$150, si la tasa de interés es de 4% compuesto anualmente.
9. Suponga que inicialmente se depositan \$200 en una cuenta de ahorros y se depositan \$200 al final de cada mes, durante el

Pago periódico:

$$R = \frac{A}{a_{n|r}} = A \cdot \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}}$$

Saldo insoluto al inicio del  $k$ -ésimo periodo:

$$Ra_{n-k+1|r} = R \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n+k-1}}{r}$$

Interés en el  $k$ -ésimo pago:

$$Rra_{n-k+1|r}$$

Capital contenido en el  $k$ -ésimo pago:

$$R(1 - ra_{n-k+1|r})$$

Interés total pagado:

$$R(n - a_{n|r}) = nR - A$$

siguiente año. Si el interés es de 8% compuesto mensualmente, ¿cuánto habrá en la cuenta al final del año?

10. Una cuenta de ahorros paga interés a la tasa de 5% compuesto semestralmente. ¿Qué cantidad debe depositarse ahora, de modo que puedan retirarse \$250 al final de cada seis meses durante los siguientes 10 años?
11. **Fondo de amortización** Una compañía pide prestados \$5000 sobre los cuales pagará intereses al final de cada año, a la tasa anual de 11%. Además, establece un fondo de amortización de modo que puedan pagarse los \$5000 al cabo de los cinco años. Al final de cada año, se colocan pagos iguales en el fondo, el cual genera intereses a la tasa efectiva de 6%. Encuentre el pago anual en el fondo de amortización.
12. **Préstamo para un automóvil** Un deudor debe amortizar un préstamo para un automóvil de \$7000 por medio de pagos iguales al final de cada mes durante 36 meses. Si la tasa de interés es al 4% compuesto mensualmente, determine, (a) el monto de cada pago y (b) el cargo financiero.
13. Una persona tiene deudas de \$500 pagaderos dentro de tres años con interés de 5% compuesto anualmente, y de \$500 pagaderos dentro de cuatro años con interés al 6% compuesto semestralmente. El deudor quiere saldar este compromiso mediante dos pagos: el primer pago ahora, y el segundo, que será el doble del primero, al final del tercer año. Si el dinero tiene un valor de 7% compuesto anualmente, ¿de cuánto es el primer pago?
14. Diseñe un plan de amortización para un préstamo de \$3500 que se saldrá por medio de tres pagos mensuales con interés al 16.5% compuesto mensualmente.
15. Elabore un plan de amortización para un préstamo de \$15 000 que se saldrá por medio de cinco pagos mensuales con interés de 9% compuesto mensualmente.
16. Encuentre el valor presente de una anualidad ordinaria de \$540 cada mes durante siete años, a la tasa de 10% compuesto mensualmente.
17. **Préstamo para un automóvil** Determine el cargo financiero para un préstamo de \$11 000 a 48 meses para la compra de un automóvil, con pagos mensuales a la tasa de 5.5% compuesto mensualmente.

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Bonos del tesoro

**L**a inversión sencilla más segura consiste en emisiones de valores del Tesoro de Estados Unidos. Pagan rendimientos fijos en un plan predeterminado, que puede extenderse a períodos tan breves como tres meses o tan largos como treinta años. La fecha de vencimiento se denomina fecha de maduración.

Aunque inicialmente el gobierno vende los valores del Tesoro, se comercian en el mercado abierto. Como los precios pueden subir o bajar libremente, las tasas de rendimiento de los valores pueden cambiar con el tiempo. Por ejemplo, considere una letra del tesoro a seis meses, o T-bill, que tiene un valor nominal de \$10 000 y se compra en la fecha de emisión por \$9832.84. Los T-bill no pagan intereses antes de la fecha de maduración, pero en ella el gobierno los redime por su valor nominal. Si se conserva este T-bill durante los seis meses, redituará  $\frac{10\ 000}{9832.84} \approx 101.7\%$  de la inversión original, para una tasa de interés efectiva anual de  $1.017^2 - 1 \approx 3.429\%$ . Sin embargo, si el mismo T-bill se vende a la mitad del plazo por \$9913.75, el nuevo propietario tiene un posible rendimiento anualizado de  $(\frac{10\ 000}{9913.75})^4 - 1 \approx 3.526\%$  en los tres meses restantes.

Al igual que los T-bill, las notas y los bonos del tesoro se redimen a su valor nominal en la fecha de maduración. Además, las notas y los bonos pagan interés dos veces al año de acuerdo con una tasa nominal fija.<sup>3</sup> Una nota a siete años por \$20 000 y pagos de 6.5% reditúa  $0.065(20\ 000) = \$1300$  cada seis meses. Al final de siete años, el tenedor recibe el pago del interés final más el valor nominal, un total de \$21 300.

Matemáticamente, es más fácil calcular el valor presente de una nota o un bono de un rendimiento supuesto, que encontrar el rendimiento dado de un valor presente supuesto (o precio). Las notas y los bonos sólo difieren en los tiempos de maduración: de uno a diez años para las notas, de diez a treinta años para los bonos. Cada nota o bono es una garantía de una suma total acumulada en una fecha futura, más una anualidad hasta entonces. Por lo tanto, el valor presente de una nota o bono es la suma del valor presente de la cantidad que se recibirá en el futuro, y el valor presente de la anualidad. Se supondrá que las notas y los bonos se evalúan en los tiempos en que el siguiente pago de interés sea exactamente de seis meses; de esa manera es posible utilizar la fórmula para el valor presente de una anualidad expuesta en la sección 5.4.

Con un monto compuesto semestralmente, un rendimiento anual de  $r$  corresponde a un pago de interés de  $\sqrt{1+r} - 1$  cada seis meses. Al realizar la sustitución adecuada en las fórmulas

de las secciones 5.2 y 5.4, se obtiene la siguiente fórmula general para el valor presente de un pagaré o bono del Tesoro.

$$P = S(1 + \sqrt{1+r} - 1)^{-2n} + R \cdot \frac{1 - (1 + \sqrt{1+r} - 1)^{-2n}}{\sqrt{1+r} - 1}$$

que se simplifica como,

$$P = S(1+r)^{-n} + R \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{\sqrt{1+r} - 1}$$

donde  $S$  es el valor nominal,  $r$  es la tasa de rendimiento anual supuesta y  $n$  es el número de años para la maduración (de modo que  $2n$  es el número de períodos de seis meses).  $R$  es el monto del pago semestral de interés, que es  $S$  veces la mitad de la tasa nominal del bono (por ejemplo,  $R = 0.03S$  para un bono de 6%).

Dado que es posible tratar a un T-bill como una nota a corto plazo con una tasa nominal de 0%, esta fórmula cubre también a los T-bill en los cuales no hay componente de anualidad.

Para ilustrarlo: si se está buscando una tasa efectiva de 7.4% sobre una nueva emisión de T-bill de \$30 000 a un año (para el cual  $R = 0$ ), se debe estar dispuesto a pagar

$$30\ 000(1.074)^{-1} \approx \$27\ 932.96.$$

Pero si se está buscando una tasa efectiva de 7.4% sobre un bono de \$30 000 con cupón de 5.5% que le quedan 17 años para la maduración (aquí  $R = 0.0275 \cdot 30\ 000 = 825$ ), se debe estar dispuesto a pagar sólo

$$30\ 000(1.074)^{-17} + 825 \cdot \frac{1 - (1.074)^{-17}}{\sqrt{1.074} - 1} \approx 24\ 870.66$$

Por supuesto, puede suceder que las expectativas de rendimiento no sean reales y que ningún bono esté a la venta en el precio que se calculó. En ese caso, podría ser necesario verificar los precios de mercado y considerar si es posible aceptar los rendimientos correspondientes. Pero, ¿cómo se encuentra la tasa efectiva de rendimiento  $r$  de un valor a partir de su precio de mercado? Para los T-bill, el segundo término del lado derecho de la fórmula del valor presente se elimina, y puede despejarse  $r$  de la fórmula simplificada para obtener

$$r = \left(\frac{S}{P}\right)^{1/n} - 1$$

Los cálculos para T-bill a tres y seis meses utilizan  $n = \frac{1}{4}$  y  $n = \frac{1}{2}$  (por ejemplo, como en los cálculos del segundo párrafo de esta Aplicación práctica).

Por otro lado, el cálculo de la tasa efectiva de rendimiento de una nota o de un bono incluye la resolución de las ecuaciones completas del valor presente para  $r$  en términos de  $S$ ,  $P$  y  $n$  —y esto no se puede realizar algebraicamente—. Sin embargo, puede hacerse por medio de una calculadora graficadora. Se establece  $Y_1$  igual al lado izquierdo de la ecuación,  $Y_2$  igual

<sup>3</sup>En este contexto, *tasa nominal* no se refiere a la tasa con porcentaje anual. La primera es constante, mientras que la última cambia junto con el rendimiento.

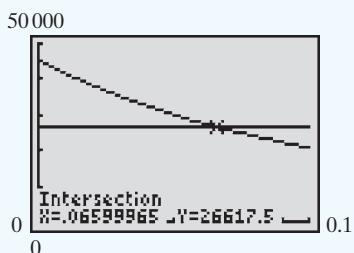
al lado derecho y se determina dónde  $Y_1$  y  $Y_2$  son iguales. Por ejemplo, suponga que un bono de \$26 000 al 6.8% se vende en \$26 617.50 a once años de su maduración. Cada uno de los 22 pagos de interés ascenderán a  $R = 0.034(26\,000) = \$884$ . Para encontrar la tasa efectiva, se hace

$$Y_1 = 26\,617.50$$

y

$$Y_2 = 26\,000(1 + X)^{11} - 11 \\ + 884(1 - (1 + X)^{11} - 11)/(\sqrt{1 + X} - 1)$$

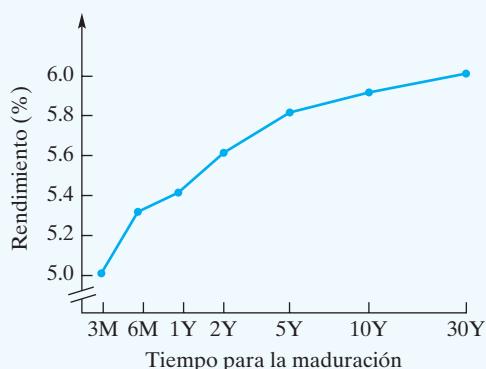
Después, se construye la gráfica de  $Y_1$  y de  $Y_2$  y se encuentra dónde se intersecan las dos gráficas (figura 5.11).



**FIGURA 5.11** Determinación del rendimiento.

Las gráficas se intersecan en  $X \approx 0.0660$ , lo que significa que la tasa efectiva es de 6.6%.

La gráfica que describe las tasas efectivas actuales de los valores del Tesoro como función del tiempo de maduración se denomina *curva de rendimiento*. Los economistas observan diariamente esta curva; usted mismo puede monitorearla en Internet. La curva de rendimiento típica es parecida a la que se muestra en la figura 5.12 (en la que el eje horizontal del tiempo se encuentra a escala).



**FIGURA 5.12** Una curva típica de rendimiento.

Usted puede ver que entre mayor es el tiempo para la maduración, el rendimiento es mayor. La explicación usual para este patrón es que tener dinero invertido a largo plazo, implica perder flexibilidad a corto plazo, lo que se llama —liquidez—. Para atraer a los compradores, por lo general, los rendimientos de los valores a largo plazo deben ser ligeramente superiores que los rendimientos de los valores a plazos más cortos.

### Problemas

1. Encuentre el valor presente de un bono de \$25 000 a 25 años y 8.5%, suponga una tasa efectiva anual de 8.25%.
2. Encuentre el rendimiento de una nota de \$10 000, 6.5%, que se vende en \$10 389 cuando faltan siete años para su maduración.
3. A finales de diciembre de 2000, la curva de rendimiento para los valores del tesoro tenía la forma atípica que se muestra en la figura 5.13.



**FIGURA 5.13** Una curva atípica de rendimiento.

Los T-bill ganaban rendimientos más altos que las notas a cinco años, que es opuesto a lo que podría esperarse. ¿Cómo es que las expectativas del inversionista acerca de las posibles ganancias futuras podrían explicar la curva de rendimiento?

# 6

## ÁLGEBRA MATRICIAL

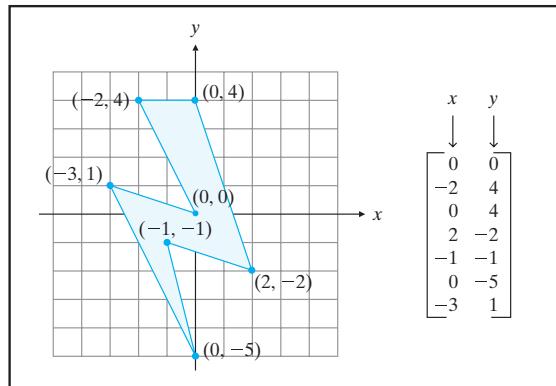
- 6.1 Matrices
- 6.2 Suma de matrices y multiplicación por un escalar
- 6.3 Multiplicación de matrices
- 6.4 Resolución de sistemas mediante la reducción de matrices
- 6.5 Resolución de sistemas mediante la reducción de matrices (continuación)
- 6.6 Inversas
- 6.7 Análisis de insumo-producto de Leontief
- 6.8 Repaso

### Aplicación práctica

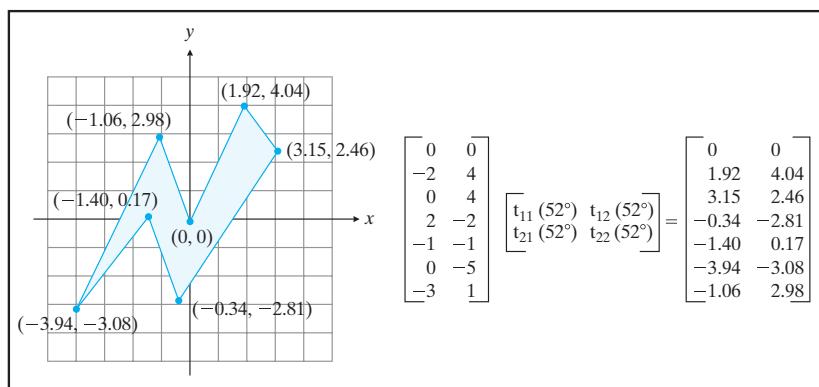
Requerimientos de insulina como un proceso lineal

Las matrices, el tema de este capítulo, son simplemente arreglos de números. Las matrices y el álgebra matricial tienen una aplicación potencial siempre que una información numérica se pueda acomodar de manera significativa en bloques rectangulares.

Una de las áreas de aplicación del álgebra matricial son las gráficas por computadora. En un sistema de coordenadas, un objeto puede representarse por medio de una matriz que contenga las coordenadas de cada vértice o esquina. Por ejemplo, podría hacerse un dibujo en el que tuvieran que unirse los puntos para formar el rayo que se muestra, y que está representado por la matriz de la derecha.



Con frecuencia las gráficas por computadora muestran objetos que giran en el espacio. Desde un punto de vista computacional, la rotación se realiza por medio de una multiplicación de matrices. El rayo gira 52 grados en el sentido de las manecillas del reloj a partir del origen, mediante la multiplicación de matrices, que incluye una matriz cuyas entradas son funciones  $t_{11}, t_{12}, t_{21}$  y  $t_{22}$ <sup>1</sup> del ángulo de rotación:



<sup>1</sup>En realidad,  $t_{11} = t_{22}$  y  $t_{12} = -t_{21}$ , pero no se pretende entrar en detalles.

**OBJETIVO**

Introducir el concepto de matriz y considerar tipos especiales de matrices.

## 6.1 Matrices

La determinación de formas para describir situaciones en matemáticas y en economía, conduce al estudio de arreglos rectangulares de números. Por ejemplo, considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 9x - 6y + 2z = 0 \end{cases}$$

Si se organiza esta notación, y se mantienen las  $x$  en la primera columna, las  $y$  en la segunda columna, etcétera; entonces lo que caracteriza a este sistema son los coeficientes numéricos en las ecuaciones, junto con sus posiciones relativas. Por esta razón, el sistema puede describirse mediante los arreglos rectangulares

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 9 & -6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**ADVERTENCIA**

No utilice barras verticales,  $||$ , en lugar de corchetes o paréntesis, porque tienen un significado diferente.

**TABLA 6.1**

	Producto		
	A	B	C
Mano de obra	10	12	16
Material	5	9	7

uno para cada *lado* de las ecuaciones, cada arreglo se llama *matriz* (en plural: *matrices*). Tales arreglos rectangulares se consideran objetos en sí mismos; se acostumbra encerrarlos entre corchetes, y también es común que se utilicen paréntesis. En la representación simbólica de matrices se usarán letras mayúsculas en negritas como **A**, **B**, **C**, etcétera.

En economía, a menudo resulta conveniente utilizar matrices para formular problemas y desplegar datos. Por ejemplo, un fabricante que manufactura los productos A, B y C, podría representar las unidades de mano de obra y material necesarios en una semana de producción de estos artículos, como se muestra en la tabla 6.1. De manera más sencilla, estos datos pueden representarse por medio de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Los renglones de una matriz están numerados de manera consecutiva de arriba hacia abajo, y las columnas están numeradas en forma consecutiva de izquierda a derecha. Para la matriz **A** anterior, se tiene

$$\begin{array}{ccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \\ \text{renglón 1} & \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \end{bmatrix} \\ \text{renglón 2} & \begin{bmatrix} 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{A}$$

Como **A** tiene dos renglones y tres columnas, se dice que **A** tiene *tamaño*  $2 \times 3$  (se lee “2 por 3”), donde se especifica primero el número de renglones. De manera similar, las matrices

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

tienen tamaños  $3 \times 3$  y  $4 \times 2$ , respectivamente.

Los números de una matriz se conocen como **entradas**. Para denotar las entradas arbitrarias de una matriz, por ejemplo una de tamaño  $2 \times 3$ , existen dos métodos comunes. Primero, pueden utilizarse letras diferentes:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Segundo, puede usarse una sola letra, digamos  $a$ , junto con subíndices *dobles* apropiados para indicar posición:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

**ADVERTENCIA**

El subíndice del renglón aparece a la izquierda del subíndice de la columna. En general  $a_{ij}$  y  $a_{ij}$  son completamente diferentes.

Para la entrada  $a_{12}$  (se lee “ $a$  sub uno-dos”, o sólo “ $a$  uno-dos”) el primer subíndice, 1, especifica el renglón, y el segundo, 2, la columna en la que aparece la entrada. De manera similar, la entrada  $a_{23}$  (se lee “ $a$  dos-tres”) es la que se encuentra en el segundo renglón y la tercera columna. En general, se dice que el símbolo  $a_{ij}$  denota la entrada en el renglón  $i$  y en la columna  $j$ .

Este capítulo centrará su atención en la operación y aplicación de varios tipos de matrices. Para completar, se dará a continuación una definición formal de matriz.

**DEFINICIÓN**

Un arreglo rectangular de números que consiste en  $m$  renglones y  $n$  columnas,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

se conoce como **matriz de  $m \times n$**  o **matriz de tamaño  $m \times n$** . Para la entrada  $a_{ij}$ , se denomina  $i$  el subíndice del renglón y  $j$  el subíndice de la columna.

**ADVERTENCIA**

No confunda la entrada general  $a_{ij}$  con la matriz  $[a_{ij}]$ .

El número de entradas de una matriz de  $m \times n$  es  $mn$ . Para ser más breves una matriz de  $m \times n$  puede denotarse por el símbolo  $[a_{ij}]_{m \times n}$ , o de manera más simple  $[a_{ij}]$ , donde se entiende que el tamaño es el apropiado para el contexto dado. Esta notación sólo indica qué tipos de símbolos se utilizan para denotar la entrada general.

Una matriz que tiene exactamente un renglón, como la matriz de  $1 \times 4$

$$\mathbf{A} = [1 \ 7 \ 12 \ 3]$$

se llama **vector renglón**. Una matriz que consiste en una sola columna, como la matriz de  $5 \times 1$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 15 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

se llama **vector columna**. Observe que una matriz es  $1 \times 1$  si y sólo si es al mismo tiempo un vector renglón y un vector columna. Es más seguro tratar a las matrices  $1 \times 1$  como simples números. En otras palabras, puede escribirse  $[7] = 7$ , y de manera más general,  $[a] = a$ , para cualquier número real  $a$ .

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1****TAMAÑO DE UNA MATRIZ**

Una fabricante que utiliza materias primas A y B está interesada en rastrear los costos de estos materiales que provienen de tres fuentes distintas. ¿Cuál es el tamaño de la matriz que podría usar?

**EJEMPLO 1 Tamaño de una matriz**

- a. La matriz  $[1 \ 2 \ 0]$  tiene tamaño  $1 \times 3$ .

- b. La matriz  $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$  tiene tamaño  $3 \times 2$ .

- c. La matriz  $[7]$  tiene tamaño  $1 \times 1$ .

- d. La matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & -2 & 4 \\ 9 & 11 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  tiene tamaño  $3 \times 5$  y  $3(5) = 15$  entradas.



**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2****CONSTRUCCIÓN DE MATRICES**

Para el análisis de una estación de trabajo se utiliza una matriz de  $3 \times 5$  que describe el tiempo invertido en cada una de las tres fases de cinco proyectos diferentes. El proyecto 1 necesita una hora en cada fase, el proyecto 2 requiere el doble de tiempo que el proyecto 1, el proyecto 3 necesita el doble de tiempo que el proyecto 2, ..., y así sucesivamente. Construya esta matriz de análisis de tiempo.

**EJEMPLO 2 Construcción de matrices**

- a. Construya una matriz columna de tres entradas tal que  $a_{21} = 6$  y para los otros casos:  $a_{il} = 0$ .

**Solución:** Como  $a_{11} = a_{31} = 0$ , la matriz es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- b. Si  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  tiene tamaño  $3 \times 4$  y  $a_{ij} = i + j$ , encuentre  $\mathbf{A}$ .

**Solución:** Aquí  $i = 1, 2, 3$  y  $j = 1, 2, 3, 4$  y  $\mathbf{A}$  tiene  $(3)(4) = 12$  entradas. Como  $a_{ij} = i + j$ , la entrada en el renglón  $i$  y columna  $j$  se obtiene al sumar los números  $i$  y  $j$ . Entonces,  $a_{11} = 1 + 1 = 2$ ,  $a_{12} = 1 + 2 = 3$ ,  $a_{13} = 1 + 3 = 4$ , etcétera. Por lo tanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & 1+4 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 & 2+4 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

- c. Construya la matriz  $\mathbf{I}$  de  $3 \times 3$ , dado que  $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$  y en cualquier otro caso:  $a_{ij} = 0$ .

**Solución:** La matriz está dada por

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

**Igualdad de matrices**

Ahora se define lo que significa decir que dos matrices son *iguales*.

**DEFINICIÓN**

Las matrices  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  y  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  son **iguales** si y sólo si tienen el mismo tamaño y  $a_{ij} = b_{ij}$  para cada  $i$  y cada  $j$  (esto es, las entradas correspondientes son iguales).

Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} 1+1 & \frac{2}{2} \\ 2 \cdot 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

pero,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{diferentes tamaños})$$

Una ecuación matricial puede definir un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que

$$\begin{bmatrix} x & y+1 \\ 2z & 5w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Después de igualar las entradas correspondientes, debe tenerse

$$\begin{cases} x = 2 \\ y + 1 = 7 \\ 2z = 4 \\ 5w = 2 \end{cases}$$

Al resolver se obtiene  $x = 2$ ,  $y = 6$ ,  $z = 2$  y  $w = \frac{2}{5}$ .

**Transpuesta de una matriz**

Si  $\mathbf{A}$  es una matriz, la matriz que se forma a partir de  $\mathbf{A}$  mediante el intercambio de sus renglones con sus columnas se conoce como la *transpuesta* de  $\mathbf{A}$ .

**DEFINICIÓN**

La **transpuesta** de una matriz  $\mathbf{A}$  de  $m \times n$ , denotada  $\mathbf{A}^T$ , es la matriz de  $n \times m$  cuyo  $i$ -ésimo renglón es la  $i$ -ésima columna de  $\mathbf{A}$ .

### EJEMPLO 3 Transpuesta de una matriz

Si  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ , encuentre  $\mathbf{A}^T$ .

**Solución:** La matriz  $\mathbf{A}$  es de  $2 \times 3$ , de modo que  $\mathbf{A}^T$  es de  $3 \times 2$ . La columna 1 de  $\mathbf{A}$  se convierte en el renglón 1 de  $\mathbf{A}^T$ , la columna 2 se convierte en el renglón 2 y la columna 3 se convierte en el renglón 3. Por lo tanto,

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

### TECNOLOGÍA

Las calculadoras graficadoras tienen la capacidad de manipular matrices. Por ejemplo, en la figura 6.1 se muestra el resultado de aplicar la operación de transposición a la matriz  $\mathbf{A}$ .

FIGURA 6.1  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}^T$ .

### Matrices especiales

Cierto tipo de matrices desempeñan funciones importantes en la teoría de matrices. Ahora se considerarán algunos de estos tipos especiales.

Una matriz de  $m \times n$  cuyas entradas son todas iguales a cero, se conoce como **matriz cero** de  $m \times n$  y se denota por  $\mathbf{O}_{m \times n}$ , o de manera más simple, por  $\mathbf{O}$  si se sobreentiende su tamaño. Así, la matriz cero de  $2 \times 3$  es

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y, en general, se tiene

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz que tiene el mismo número de columnas que de renglones, por ejemplo  $n$  renglones y  $n$  columnas, se llama **matriz cuadrada** de orden  $n$ . Esto es, una matriz  $m \times n$  es cuadrada si y sólo si  $m = n$ . Por ejemplo, las matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } [3]$$

son cuadradas con órdenes 3 y 1, respectivamente.

En una matriz cuadrada de orden  $n$ , las entradas  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ , están sobre la diagonal que va desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha de la matriz y se dice constituyen la **diagonal principal**. Así, en la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

la diagonal principal (vea la región sombreada) consiste en  $a_{11} = 1, a_{22} = 5$  y  $a_{33} = 9$ .



### ADVERTENCIA

No confunda la matriz  $\mathbf{O}$  con el número real 0.

Una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  se llama una **matriz diagonal** si todas las entradas que se encuentran fuera de la diagonal principal son cero —esto es, si  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$  para  $i > j$ . Ejemplos de matrices diagonales son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Se dice que una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  es una **matriz triangular superior** si todas las entradas *debajo* de la diagonal principal son cero —esto es, si  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$ . De manera similar, se dice que una matriz  $\mathbf{A}$  es una **matriz triangular inferior**, si todas las entradas *por arriba* de la diagonal principal son cero; esto es, si  $a_{ij} = 0$  para  $i < j$ . Cuando una matriz es triangular superior o triangular inferior se conoce como una **matriz triangular**. Así, las matrices

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son matrices triangular superior y triangular inferior, respectivamente y, por lo tanto, son matrices triangulares.

**Se deduce que una matriz es diagonal si y sólo si es tanto triangular superior como triangular inferior.**

## Problemas 6.1

\*1. Sean

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} & \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{F} &= [6 \quad 2] \\ \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} & \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{J} &= [4] \end{aligned}$$

- (a) Establezca el tamaño de cada matriz.
- (b) ¿Cuáles matrices son cuadradas?
- (c) ¿Cuáles matrices son triangulares superiores? ¿Triangulares inferiores?
- (d) ¿Cuáles son vectores renglón?
- (e) ¿Cuáles son vectores columna?

En los problemas 2 a 9 sea

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 14 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. ¿Cuál es el orden de  $\mathbf{A}$ ?

Encuentre las entradas siguientes.

3.  $a_{21}$       4.  $a_{14}$       5.  $a_{32}$   
 6.  $a_{34}$       7.  $a_{44}$       8.  $a_{55}$

9. ¿Cuáles son las entradas de la diagonal principal?  
 10. Escriba la matriz triangular superior de orden 4, dado que todas las entradas que no se requiere que sean cero, son iguales a la suma de sus subíndices. (Por ejemplo,  $a_{23} = 2 + 3 = 5$ ).  
 \*11. Construya una matriz  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  si  $\mathbf{A}$  es  $3 \times 5$  y  $a_{ij} = -2i + 3j$ .

12. Construya la matriz  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  si  $\mathbf{B}$  es  $2 \times 2$  y  $b_{ij} = (-1)^{i+j}(i^2 + j^2)$ .

13. Si  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  es de  $12 \times 10$ , ¿cuántas entradas tiene  $\mathbf{A}$ ? Si  $a_{ij} = 1$  para  $i = j$  y  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ , encuentre  $a_{33}, a_{52}, a_{10,10}$  y  $a_{12,10}$ .

14. Liste la diagonal principal de

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad &\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 7 & 0 & 4 & -1 \\ -6 & 6 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} & \text{(b)} \quad &\begin{bmatrix} x & 1 & y \\ 9 & y & 7 \\ y & 0 & z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

15. Escriba la matriz cero de orden (a) 4 y (b) 6.

16. Si  $\mathbf{A}$  es una matriz de  $7 \times 9$ , ¿cuál es el orden de  $\mathbf{A}^T$ ?

En los problemas 17 a 20 encuentre  $\mathbf{A}^T$ .

$$17. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad 18. \mathbf{A} = [2 \quad 4 \quad 6 \quad 8]$$

$$*19. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 20. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

21. Sean

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- (a) ¿Cuáles son matrices diagonales?

- (b) ¿Cuáles son matrices triangulares?

22. Una matriz es *simétrica* si  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ . ¿La matriz del problema 19 es simétrica?

23. Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

verifique la propiedad general de que  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$  al encontrar  $\mathbf{A}^T$  y después  $(\mathbf{A}^T)^T$ .

En los problemas 24 a 27 resuelva la ecuación matricial.

24.  $\begin{bmatrix} 2x & y \\ z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

25.  $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ x & 7 \\ 3y & 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

26.  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3x & y & 3z \\ 0 & w & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 9 \\ 0 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

27.  $\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 7 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 7 \\ 7 & y \end{bmatrix}$

28. **Inventario** Una tienda de abarrotes vendió 125 latas de sopa de tomate, 275 de frijoles y 400 de atún. Escriba un vector renglón que proporcione el número de artículos vendidos de cada tipo. Si cada uno de ellos se vende a \$0.95, \$1.03 y \$1.25, respectivamente, escriba esta información como un vector columna.

29. **Análisis de ventas** La compañía Widget presenta sus reportes de ventas mensuales por medio de matrices cuyos renglones representan, en orden, el número de modelos regular, de lujo y de superlujo vendidos, en tanto que las columnas proporcionan el número de unidades rojas, blancas, azules y púrpuras que se vendieron. Las matrices para enero (E) y febrero (F) son

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

- (a) En enero, ¿cuántas unidades de los modelos de superlujo blancos se vendieron? (b) En febrero, ¿cuántos modelos de lujo azules se vendieron? (c) ¿En qué mes se vendieron más modelos regulares púrpuras? (d) ¿De qué modelo y color se vendió el mismo número de unidades en ambos meses? (e) ¿En qué mes se vendieron más modelos de lujo? (f) ¿En qué mes se vendieron más artículos rojos? (g) ¿Cuántos artículos se vendieron en enero?

30. **Matriz de insumo-producto** Las matrices de insumo-producto desarrolladas por W. W. Leontief indican las interrelaciones que existen entre los diferentes sectores de una economía durante algún periodo. Un ejemplo hipotético para una economía

simplificada consiste en la matriz  $\mathbf{M}$  que se presenta al final de este problema. Los sectores consumidores son los mismos que los productores y pueden considerarse como manufactura, gobierno, acero, agricultura, doméstico, etcétera. Cada renglón muestra cómo consumen el producto de un sector dado cada uno de los cuatro sectores. Por ejemplo, del total de la producción de la industria A, se destinaron 50 unidades para la propia industria A, 70 para la B, 200 para C y 360 para todos los demás consumidores. La suma de las entradas en el renglón 1—a saber, 680—informa sobre la producción total de A para un periodo dado. Cada columna indica la producción de cada sector, que consume un sector dado. Por ejemplo, en la producción de 680 unidades, la industria A consume 50 unidades de A, 90 de B, 120 de C y 420 de todos los demás productores. Encuentre la suma de las entradas para cada columna. Haga lo mismo con cada renglón. ¿Qué observa al comparar esos totales? Suponga que el sector A aumenta su producción en 20%, es decir, en 136 unidades. Si se supone que esto provoca un aumento uniforme de 20% en todos sus insumos, ¿en cuántas unidades aumentará su producción el sector B? Responda la misma pregunta para C y para todos los demás productores.

PRODUCTORES	CONSUMIDORES			
	Industria A	Industria B	Industria C	Todos los demás consumidores
Industria A	50	70	200	360
Industria B	90	30	270	320
Industria C	120	240	100	1050
Todos los demás productores	420	370	940	4960

31. Encuentre todos los valores de  $x$  para los cuales

$$\begin{bmatrix} x^2 + 2000x & \sqrt{x^2} \\ x^2 & \ln(e^x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2001 & -x \\ 2001 - 2000x & x \end{bmatrix}$$

En los problemas 32 y 33 encuentre  $\mathbf{A}^T$ .

32.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$       33.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

## OBJETIVO

Definir la suma de matrices y la multiplicación por un escalar, y considerar las propiedades relacionadas con estas operaciones.

## 6.2 Suma de matrices y multiplicación por un escalar

### Suma de matrices

Considere un comerciante de vehículos para nieve que vende dos modelos: Deluxe y Super. Cada uno está disponible en uno de dos colores, rojo y azul. Suponga que las ventas para enero y febrero están representadas por las siguientes matrices de ventas

Deluxe	Super
$\mathbf{E} =$ rojo $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$	$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Cada renglón de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{F}$  proporciona el número de ventas de cada modelo para un color dado. Cada columna proporciona el número de ventas de cada color para un modelo dado. Al sumar las entradas correspondientes en  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{F}$  puede obtenerse una matriz que represente las ventas totales para cada modelo y color durante los dos meses.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Lo anterior proporciona la oportunidad para introducir la operación de suma de matrices para dos matrices del mismo orden.

### DEFINICIÓN

Si  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  y  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  son matrices de  $m \times n$ , entonces la **suma**  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  es la matriz de  $m \times n$  que se obtiene al sumar las entradas correspondientes de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ ; esto es,  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$ . Si el tamaño de  $\mathbf{A}$  es diferente del tamaño de  $\mathbf{B}$ , entonces  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  no está definida.

Por ejemplo, sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Como  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son del mismo tamaño ( $2 \times 3$ ), su suma está definida. Se tiene

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3+5 & 0+(-3) & -2+6 \\ 2+1 & -1+2 & 4+(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### SUMA DE MATRICES

Una compañía de muebles de oficina fabrica escritorios y mesas en dos plantas, A y B. La matriz **E** representa la producción de las dos plantas en enero, y la matriz **F** representa la producción de las dos plantas en febrero. Escriba una matriz que represente la producción total en las dos plantas para los dos meses. **E** y **F** se denotan como:

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \qquad \mathbf{B} \\ \mathbf{E} = \begin{array}{l} \text{escritorios} \\ \text{mesas} \end{array} \begin{bmatrix} 120 & 80 \\ 105 & 130 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} = \begin{array}{l} \text{escritorios} \\ \text{mesas} \end{array} \begin{bmatrix} 110 & 140 \\ 85 & 125 \end{bmatrix} \end{array}$$

Estas propiedades de la suma de matrices son semejantes a las propiedades correspondientes de la suma de números reales.

### EJEMPLO 1 Suma de matrices

a.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+7 & 2-2 \\ 3-6 & 4+4 \\ 5+3 & 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  no está definida, porque las matrices no son del mismo tamaño.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

Si **A**, **B**, **C** y **O** tienen el mismo tamaño, entonces las propiedades siguientes se cumplen para la suma de matrices:

#### Propiedades para la suma de matrices

- 1.  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$  (propiedad conmutativa)
- 2.  $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$  (propiedad asociativa)
- 3.  $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$  (propiedad de identidad)

La propiedad 1 establece que las matrices pueden sumarse en cualquier orden, y la propiedad 2 permite que las matrices se agrupen para la suma. La propiedad 3 establece que la matriz cero desempeña la misma función en la suma de matrices que el número cero en la suma de números reales. Estas propiedades se ilustran en el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 2 Propiedades de la suma de matrices

Sean

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- a. Demuestre que  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ .

**Solución:**

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ .

b. Demuestre que  $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ .

**Solución:**

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

c. Demuestre que  $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$ .

**Solución:**

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



### ● EJEMPLO 3 Vectores de demanda para una economía

Considere una economía hipotética simplificada que tiene tres industrias, por ejemplo, carbón, electricidad y acero, y tres consumidores 1, 2 y 3. Suponga que cada consumidor puede utilizar parte de la producción de cada industria y cada industria utiliza parte de la producción de cada una de las otras industrias. Entonces, las necesidades de cada consumidor y de cada industria pueden representarse por un vector (renglón) de demanda, cuyas entradas, en orden, indican la cantidad de carbón, electricidad y acero que requiere cada consumidor o industria en las cantidades que le son convenientes. Por ejemplo, los vectores de demanda para los consumidores podrían ser:

$$\mathbf{D}_1 = [3 \ 2 \ 5] \quad \mathbf{D}_2 = [0 \ 17 \ 1] \quad \mathbf{D}_3 = [4 \ 6 \ 12]$$

y para las industrias, podrían ser:

$$\mathbf{D}_C = [0 \ 1 \ 4] \quad \mathbf{D}_E = [20 \ 0 \ 8] \quad \mathbf{D}_S = [30 \ 5 \ 0]$$

donde los subíndices C, E y S se refieren a carbón, electricidad y acero, respectivamente. La demanda total de los consumidores para estos bienes está dada por la suma

$$\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3 = [3 \ 2 \ 5] + [0 \ 17 \ 1] + [4 \ 6 \ 12] = [7 \ 25 \ 18]$$

La demanda industrial total está dada por la suma

$$\mathbf{D}_C + \mathbf{D}_E + \mathbf{D}_S = [0 \ 1 \ 4] + [20 \ 0 \ 8] + [30 \ 5 \ 0] = [50 \ 6 \ 12]$$

Por lo tanto, la demanda global total está dada por

$$[7 \ 25 \ 18] + [50 \ 6 \ 12] = [57 \ 31 \ 30]$$

Así, la industria del carbón vende un total de 57 unidades, el total de unidades de electricidad vendidas es de 31 y el total de unidades de acero que se vendieron es de 30.<sup>2</sup>

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 41



### Multiplicación por un escalar

De regreso al caso del vendedor de vehículos para nieve, recuerde que en febrero las ventas estaban dadas por la matriz

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Si en marzo el vendedor duplica las ventas de febrero de cada modelo y color de vehículos para nieve, la matriz de ventas para marzo podría obtenerse al multiplicar cada entrada de  $\mathbf{F}$  por 2, de donde se obtiene

<sup>2</sup>Este ejemplo, así como algunos otros de este capítulo, es de John G. Kemeny, J. Laurie Snell y Gerald L. Thompson, *Introduction to Finite Mathematics*, 3a. edición, © 1974. Reimpreso con permiso de Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2(3) & 2(1) \\ 2(4) & 2(2) \end{bmatrix}$$

Parece razonable escribir esta operación como

$$\mathbf{M} = 2\mathbf{F} = 2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

que se considera como la multiplicación de una matriz por un número real. En el contexto de las matrices, los números reales suelen llamarse **escalares**. De hecho, se tiene la definición siguiente.

### DEFINICIÓN

Si  $\mathbf{A}$  es una matriz de  $m \times n$  y  $k$  es un número real, entonces con  $k\mathbf{A}$  se denota la matriz  $m \times n$  que se obtiene al multiplicar cada entrada de  $\mathbf{A}$  por  $k$ . La operación se llama **multiplicación por un escalar**, y  $k\mathbf{A}$  se llama **múltiplo escalar** de  $\mathbf{A}$ .

Por ejemplo,

$$-3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(1) & -3(0) & -3(-2) \\ -3(2) & -3(-1) & -3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -6 & 3 & -12 \end{bmatrix}$$

### EJEMPLO 4 Multiplicación por un escalar

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule lo siguiente.

a.  $5\mathbf{A}$ .

**Solución:**

$$5\mathbf{A} = 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(1) & 5(2) \\ 5(4) & 5(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}$$

b.  $-\frac{2}{3}\mathbf{B}$

**Solución:**

$$-\frac{2}{3}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}(3) & -\frac{2}{3}(-4) \\ -\frac{2}{3}(7) & -\frac{2}{3}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{8}{3} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

c.  $\frac{1}{2}\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{A} + 3\mathbf{B} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ 21 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{2} & -11 \\ 23 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d.  $0\mathbf{A}$

**Solución:**

$$0\mathbf{A} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$$

e.  $k\mathbf{O}$

**Solución:**

$$k\mathbf{O} = k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$$



Si  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{O}$  son del mismo tamaño, entonces para cualesquiera escalares,  $k$  y  $l$  se tienen las propiedades siguientes de multiplicación por un escalar:

### Propiedades de la multiplicación por un escalar

1.  $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$
2.  $(k + l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$
3.  $k(l\mathbf{A}) = (kl)\mathbf{A}$
4.  $0\mathbf{A} = \mathbf{O}$
5.  $k\mathbf{O} = \mathbf{O}$

Las propiedades 4 y 5 se ilustraron en los ejemplos 4(d) y (e); las otras se ilustrarán en los problemas.

También se tienen las propiedades siguientes de la operación de transposición, donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son del mismo tamaño y  $k$  es cualquier escalar:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \\ (k\mathbf{A})^T &= k\mathbf{A}^T \end{aligned}$$

La primera propiedad establece que *la transpuesta de una suma es la suma de las transpuestas*.

### Sustracción de matrices

Si  $\mathbf{A}$  es cualquier matriz, entonces el múltiplo escalar  $(-1)\mathbf{A}$  se escribe simplemente como  $-\mathbf{A}$  y se denomina **negativo de  $\mathbf{A}$** :

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}$$

Así, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

entonces

$$-\mathbf{A} = (-1) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Observe que  $-\mathbf{A}$  es la matriz que se obtiene al multiplicar cada entrada de  $\mathbf{A}$  por  $-1$ .

La sustracción de matrices se define en términos de la suma de matrices:

### DEFINICIÓN

Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tienen el mismo tamaño, entonces  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  quiere decir  $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ .

### EJEMPLO 5 Sustracción de matrices

$$\begin{aligned} \text{a. } \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -4 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 - 6 & 6 + 2 \\ -4 - 4 & 1 - 1 \\ 3 + 0 & 2 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -8 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De manera más sencilla, para encontrar  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  puede restarse cada entrada de  $\mathbf{B}$  de la entrada correspondiente de  $\mathbf{A}$ .

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2****ECUACIÓN MATRICIAL**

Una fabricante de puertas, ventanas y armarios registra su utilidad anual (en miles de dólares) para cada categoría,

en un vector como  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 248 \\ 319 \\ 532 \end{bmatrix}$ . Sus

costos fijos de producción pueden describirse por medio del vector

$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix}$ . Calcula que con una

nueva estructura de precios que genere un ingreso de 80% del ingreso de su competidor, puede duplicar su utilidad si sus costos fijos permanecen constantes. Este cálculo puede representarse por medio de

$$0.8 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 248 \\ 319 \\ 532 \end{bmatrix}$$

Resuelva para  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , las cuales representan los ingresos de su competidor para cada categoría.

b. Si  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , entonces

$$\mathbf{A}^T - 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

**EJEMPLO 6 Ecuación matricial**

Resuelva la ecuación  $2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ .

**Solución:**

**Estrategia** Primero se simplifica cada lado de una matriz. Después, por la igualdad de matrices, se igualan las entradas correspondientes.

Se tiene

$$2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - 3 \\ 2x_2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Por la igualdad de matrices se debe tener  $2x_1 - 3 = 25$ , que da  $x_1 = 14$ ; a partir de  $2x_2 - 4 = -20$ , se obtiene  $x_2 = -8$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35

**TECNOLOGÍA**

Las operaciones matriciales de suma, resta y multiplicación por un escalar pueden realizarse con una calculadora graficadora. Por ejemplo, en la figura 6.2 se muestra  $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$ , donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

**FIGURA 6.2** Operaciones matriciales con calculadoras graficadora.

**Problemas 6.2**

En los problemas 1 a 12, realice las operaciones indicadas.

\*1.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \\ 9 & 11 & -2 \end{bmatrix}$

2.  $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

3.  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

\*5.  $2[2 \quad -1 \quad 3] + 4[-2 \quad 0 \quad 1] - 0[2 \quad 3 \quad 1]$

6.  $[7 \quad 7] + 66$

\*7.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

8.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

9.  $-6 \begin{bmatrix} 2 & -6 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

10.  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

11.  $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 30 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 20 & 25 \end{bmatrix}$

12.  $3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3 \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -3 & 21 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$

En los problemas 13 a 24, calcule las matrices requeridas si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

13.  $-\mathbf{B}$

14.  $-(\mathbf{A} - \mathbf{B})$

15.  $2\mathbf{O}$

16.  $\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}$

\*17.  $3(2\mathbf{A} - 3\mathbf{B})$

18.  $0(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

19.  $3(\mathbf{A} - \mathbf{C}) + 6$

20.  $\mathbf{A} + (\mathbf{C} + \mathbf{B})$

21.  $2\mathbf{B} - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{C}$

22.  $3\mathbf{C} - 2\mathbf{B}$

23.  $\frac{1}{2}\mathbf{A} - 2(\mathbf{B} + 2\mathbf{C})$

24.  $\frac{1}{2}\mathbf{A} - 5(\mathbf{B} + \mathbf{C})$

En los problemas 25 a 28, verifique las ecuaciones para las anteriores matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ .

25.  $3(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 3\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$

26.  $(2 + 3)\mathbf{A} = 2\mathbf{A} + 3\mathbf{A}$

27.  $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$

28.  $k(\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C}) = k\mathbf{A} - 2k\mathbf{B} + k\mathbf{C}$

En los problemas 29 a 34 sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcule, si es posible, las matrices indicadas.

29.  $3\mathbf{A} + \mathbf{D}^T$

30.  $(\mathbf{B} - \mathbf{C})^T$

31.  $2\mathbf{B}^T - 3\mathbf{C}^T$

32.  $2\mathbf{B} + \mathbf{B}^T$

33.  $\mathbf{C}^T - \mathbf{D}$

34.  $(\mathbf{D} - 2\mathbf{A}^T)^T$

\*35. Exprese la ecuación matricial

$$x \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - y \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

como un sistema de ecuaciones lineales y resuévalo.

36. En forma inversa a la que utilizó en el problema 35, escriba el sistema

$$\begin{cases} 2x - 4y = 16 \\ 5x + 7y = -3 \end{cases}$$

como una ecuación matricial.

En los problemas 37 a 40 resuelva las ecuaciones matriciales.

37.  $3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

38.  $3 \begin{bmatrix} x \\ 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 7 \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ 2y \end{bmatrix}$

39.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -24 \\ 14 \end{bmatrix}$

40.  $x \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 2x + 12 - 5y \end{bmatrix}$

\*41. **Producción** Una compañía de partes automotrices fabrica distribuidores, bujías y magnetos en dos plantas, I y II. La matriz  $\mathbf{X}$  representa la producción de las dos plantas para el minorista X, y la matriz  $\mathbf{Y}$  representa la producción de las dos plantas para el minorista Y. Escriba una matriz que represente la producción total en las dos plantas para ambos minoristas. Las matrices  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}$  son:

$$\mathbf{X} = \begin{array}{c|cc} \text{I} & \text{II} \\ \hline \text{DIS} & 30 & 50 \\ \text{BUJ} & 800 & 720 \\ \text{MAG} & 25 & 30 \end{array} \quad \mathbf{Y} = \begin{array}{c|cc} \text{I} & \text{II} \\ \hline \text{DIS} & 15 & 25 \\ \text{BUJ} & 960 & 800 \\ \text{MAG} & 10 & 5 \end{array}$$

42. **Ventas** Sea  $\mathbf{A}$  la matriz que representa las ventas (en miles de dólares) de una compañía de juguetes para tres ciudades en 2003, y sea  $\mathbf{B}$  la matriz que representa las ventas para las mismas ciudades en el año 2005, donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  están dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c|ccc} \text{Acción} & \text{Educativo} & & \\ \hline & 400 & 350 & 150 \\ & 450 & 280 & 850 \end{array}$$

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c|ccc} \text{Acción} & \text{Educativo} & & \\ \hline & 380 & 330 & 220 \\ & 460 & 320 & 750 \end{array}$$

Si la compañía compra un competidor, y en 2006 duplica las ventas que consiguió en el año 2005, ¿cuál es el cambio de las ventas entre 2003 y 2006?

43. Suponga que el precio de los productos A, B y C está dado, en ese orden, por el vector de precios

$$\mathbf{P} = [p_1 \ p_2 \ p_3]$$

Si los precios se incrementan en 10%, el vector de los nuevos precios puede obtenerse al multiplicar  $\mathbf{P}$ , ¿por qué escalar?

44. Demuestre que  $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T$ . (*Una pista:* Utilice la definición de sustracción y las propiedades de la operación de transposición.)

En los problemas 45 a 47 calcule las matrices dadas si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

45.  $4\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$

46.  $-3(\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) + \mathbf{C}$

47.  $2(3\mathbf{C} - \mathbf{A}) + 2\mathbf{B}$

## OBJETIVO

## 6.3 Multiplicación de matrices

Definir la multiplicación de matrices y considerar las propiedades asociadas. Expresar un sistema como una sola ecuación matricial por medio de la multiplicación de matrices.

Además de las operaciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar, puede definirse el producto  $\mathbf{AB}$  de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  bajo ciertas circunstancias, a saber, que el número de columnas de  $\mathbf{A}$  sea igual al número de renglones de  $\mathbf{B}$ . Aunque la siguiente definición de multiplicación de matrices no parece ser muy natural, un estudio más minucioso de las matrices lo convencerá de que esta definición es apropiada y extremadamente práctica para aplicaciones.

### DEFINICIÓN

Sea **A** una matriz de  $m \times n$  y **B** una matriz  $n \times p$ . Entonces el producto **AB** es la matriz **C** de  $m \times p$  cuya entrada  $c_{ij}$  (en el renglón  $i$  y la columna  $j$ ) se obtiene mediante

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

En palabras,  $c_{ij}$  se obtiene al sumar los productos formados al multiplicar, en orden, cada entrada del renglón  $i$  de **A** por la entrada correspondiente de la columna  $j$  de **B**. Si el número de columnas de **A** no es igual al número de renglones de **B**, entonces el producto **AB** no está definido.

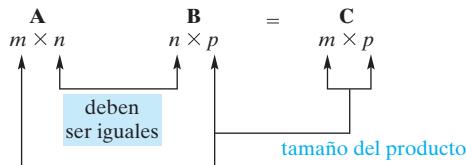
Observe que la definición es aplicable cuando **A** es un vector renglón con  $n$  entradas y **B** es un vector columna con  $n$  entradas. En este caso **A** es de  $1 \times n$ , **B** es de  $n \times 1$  y **AB** es de  $1 \times 1$ . (En la sección 6.1 se especificó que la matriz de  $1 \times n$  es sólo un número.) De hecho,

$$\text{si } \mathbf{A} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\text{entonces } \mathbf{AB} = \sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

De regreso a la definición general, ahora es claro que el *número*  $c_{ij}$  es el producto del  $i$ -ésimo renglón de **A** y la  $j$ -ésima columna de **B**. Esto es muy útil cuando se realizan cálculos reales.

Tres puntos concernientes a la definición anterior de **AB** deben comprenderse en su totalidad. Primero, la condición de que **A** sea de  $m \times n$  y **B** sea de  $n \times p$ , es equivalente a decir que el número de columnas de **A** debe ser igual al número de renglones de **B**. Segundo, el producto **AB** tendrá tantos renglones como **A** y tantas columnas como **B**.



Tercero, la definición se refiere al producto **AB**, *en ese orden*; **A** es el factor izquierdo y **B** el factor derecho. Para **AB**, se dice que **B** está *premultiplicado* por **A**, o bien, que **A** está *postmultiplicado* por **B**.

Para aplicar la definición, se encontrará el producto

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz **A** tiene tamaño  $2 \times 3$  ( $m \times n$ ) y la matriz **B** tiene tamaño  $3 \times 3$  ( $n \times p$ ). El número de columnas de **A** es igual al número de renglones de **B** ( $n = 3$ ), de modo que el producto **C** está definido y será una matriz de  $2 \times 3$  ( $m \times p$ ); esto es,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

La entrada  $c_{11}$  se obtiene al sumar los productos de cada entrada en el renglón 1 de **A** por la entrada “correspondiente” en la columna 1 de **B**. Así,

$$c_{11} = (2)(1) + (1)(0) + (-6)(-2) = 14.$$

entradas del renglón 1 de **A**  
entradas de la columna 1 de **B**

En este paso, se tiene

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Aquí puede verse que  $c_{11}$  es el producto del primer renglón de **A** y la primera columna de **B**. De manera similar, para  $c_{12}$ , se usan las entradas del renglón 1 de **A** y las entradas de la columna 2 de **B**:

$$c_{12} = (2)(0) + (1)(4) + (-6)(1) = -2.$$

entradas del renglón 1 de **A**  
columnas del renglón 2 de **B**

Ahora se tiene

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Para las restantes entradas de **AB**, se obtiene

$$c_{13} = (2)(-3) + (1)(2) + (-6)(1) = -10$$

$$c_{21} = (1)(1) + (-3)(0) + (2)(-2) = -3$$

$$c_{22} = (1)(0) + (-3)(4) + (2)(1) = -10$$

$$c_{23} = (1)(-3) + (-3)(2) + (2)(1) = -7$$

Así,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -10 \\ -3 & -10 & -7 \end{bmatrix}$$

Observe que si se invierte el orden de los factores, entonces el producto

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

no está definido, porque el número de columnas de **B** no es igual al número de renglones de **A**. Esto muestra que la multiplicación de matrices no es comutativa. Es decir, para cualesquier matrices **A** y **B** en general **AB** y **BA** son diferentes, aun si ambos productos están definidos, de modo que *el orden en el que las matrices estén escritas en un producto es extremadamente importante*.

### EJEMPLO 1 Tamaños de matrices y su producto

Sea **A** una matriz de  $3 \times 5$  y **B** una matriz de  $5 \times 3$ . Entonces **AB** está definida y es una matriz de  $3 \times 3$ . Además, **BA** también está definida y es una matriz de  $5 \times 5$ .

Si **C** es una matriz de  $3 \times 5$  y **D** es una matriz de  $7 \times 3$ , entonces **CD** no está definida, pero **DC** está definida y es una matriz de  $7 \times 5$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

La multiplicación de matrices no es comutativa.

### EJEMPLO 2 Producto de matrices

Calcular el producto de matrices

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

**Solución:** Como **A** es de  $2 \times 3$  y **B** es de  $3 \times 2$ , el producto **AB** está definido y tendrá orden de  $2 \times 2$ . Al mover de manera simultánea el dedo índice de la mano izquierda a lo largo de los renglones de **A**, y el dedo índice de la mano derecha a lo largo de las columnas de **B**, no debe ser difícil determinar mentalmente las entradas del producto.

Con esto, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19



### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### PRODUCTO DE MATRICES

Una librería tiene en existencia 100 diccionarios, 70 libros de cocina y 90 tesauros. Si el valor de cada diccionario es \$28, cada libro de cocina cuesta \$22 y cada tesauro \$16, utilice un producto de matrices para determinar el valor total del inventario de la librería.



#### ADVERTENCIA

En el ejemplo 4 se muestra que aunque los productos  $\mathbf{AB}$  y  $\mathbf{BA}$  estén ambos definidos y sean del mismo tamaño, no necesariamente son iguales.

### EJEMPLO 3 Producto de matrices

a. Calcule  $[1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ .

**Solución:** El producto tiene orden  $1 \times 1$ :

$$[1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = [32]$$

b. Calcule  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [1 \ 6]$ .

**Solución:** El producto tiene orden  $3 \times 2$ :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [1 \ 6] = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 12 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}$$

c.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -3 & 11 \\ 10 & -1 & 0 \\ -7 & -4 & 10 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25



### EJEMPLO 4 Producto de matrices

Calcule  $\mathbf{AB}$  y  $\mathbf{BA}$  si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

**Solución:** Se tiene

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}$$

Observe que aunque ambos productos  $\mathbf{AB}$  y  $\mathbf{BA}$  están definidos, y son del mismo tamaño,  $\mathbf{AB}$  y  $\mathbf{BA}$  no son iguales.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37



### TECNOLOGÍA

En la figura 6.3 se muestra el resultado obtenido con una calculadora graficadora para determinar el producto  $\mathbf{AB}$  del ejemplo 4.

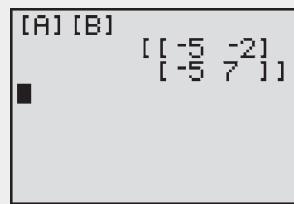


FIGURA 6.3 Resolución mediante una calculadora del producto de matrices del ejemplo 4.

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

## VECTOR DE COSTOS

Los precios (en dólares por unidad) para tres libros de texto están representados por el vector de precios  $\mathbf{P} = [26.25 \ 34.75 \ 28.50]$ . Una librería universitaria hace un pedido de estas obras en las cantidades dadas por el vector columna  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 250 \\ 325 \\ 175 \end{bmatrix}$ .

Determine el costo total (en dólares) de la compra.

## EJEMPLO 5 Vector de costos

Suponga que los precios, en dólares por unidad, para los productos A, B y C están representados por el vector de precios

$$\begin{array}{c} \text{Precio de} \\ \mathbf{A} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{C} \\ \mathbf{P} = [2 \ 3 \ 4] \end{array}$$

Si las cantidades (en unidades) de A, B y C que se compran están dadas por el vector columna

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{unidades de A} \\ \text{unidades de B} \\ \text{unidades de C} \end{array}$$

entonces, el costo total en dólares de las compras está dado por la entrada en el vector de costos

$$\mathbf{PQ} = [2 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} = [(2 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (4 \cdot 11)] = [73]$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27



## EJEMPLO 6 Utilidad para una economía

Suponga que en la economía hipotética del ejemplo 3 de la sección 6.2 el precio del carbón es de \$10 000 por unidad, el de la electricidad de \$20 000 por unidad y el del acero es de \$40 000. Estos precios pueden representarse por medio del vector (columna) de precios:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 10\,000 \\ 20\,000 \\ 40\,000 \end{bmatrix}$$

Considere la industria del acero. En total vende 30 unidades de acero a \$40 000 por unidad y por lo tanto, su ingreso total es de \$1 200 000. El costo de sus diferentes bienes está dados por el producto matricial

$$\mathbf{D}_S \mathbf{P} = [30 \ 5 \ 0] \begin{bmatrix} 10\,000 \\ 20\,000 \\ 40\,000 \end{bmatrix} = [400\,000]$$

De aquí que la ganancia de la industria del acero es \$1 200 000 – \$400 000 = \$800 000.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 67



La multiplicación de matrices satisface las propiedades siguientes, siempre y cuando todas las sumas y productos estén definidos:

## Propiedades de la multiplicación de matrices

1.  $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$  (propiedad asociativa)
2.  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ ,  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$  (propiedades distributivas)

## EJEMPLO 7 Propiedad asociativa

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule  $\mathbf{ABC}$  de dos maneras.

**Solución:** Si se agrupan  $\mathbf{BC}$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

De manera alternativa, al agrupar  $\mathbf{AB}$ , se obtiene

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})\mathbf{C} &= \left( \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -5 & 4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Observe que  $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ .



### EJEMPLO 8 Propiedad distributiva

Verifique que  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$  si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Solución:** En el lado izquierdo, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 17 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

En el lado derecho,

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} + \mathbf{AC} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 17 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 69



### EJEMPLO 9 Materia prima y costos

Suponga que un contratista ha aceptado pedidos para cinco casas con estilo rústico, siete con estilo moderno y 12 con estilo colonial. Entonces, sus pedidos pueden representarse por el vector renglón

$$\mathbf{Q} = [5 \ 7 \ 12]$$

Además, suponga que las “materias primas” que se utilizan en cada tipo de casa son acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra. Las entradas de la matriz  $\mathbf{R}$  siguiente, proporcionan el número de unidades de cada materia prima que se utilizará en cada tipo de casa (las entradas no necesariamente reflejan la realidad, pero se eligieron así por conveniencia).

	Acero	Madera	Vidrio	Pintura	Mano de obra
Rústico	5	20	16	7	17
Moderno	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

Cada renglón indica la cantidad de materia prima necesaria para un tipo dado de casa; cada columna indica la cantidad necesaria de una materia prima dada para cada tipo de casa. Ahora suponga que el contratista desea calcular la cantidad que se requiere de cada materia prima para satisfacer todos sus pedidos. Entonces, tal información está dada por la matriz

$$\mathbf{QR} = [5 \ 7 \ 12] \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} = [146 \ 526 \ 260 \ 158 \ 388]$$

Así, el contratista debe ordenar 146 unidades de acero, 526 de madera, 260 de vidrio, etcétera.

El contratista también está interesado en conocer los costos que tendrá que pagar por estas materias primas. Suponga que el acero cuesta \$2500 por unidad, la madera \$1200 por unidad, y el vidrio, la pintura y la mano de obra cuestan \$800, \$150 y \$1500 por unidad, respectivamente. Estos datos pueden escribirse como el vector columna de costo

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2500 \\ 1200 \\ 800 \\ 150 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

Entonces el costo de cada tipo de casa está dado por la matriz

$$\mathbf{RC} = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2500 \\ 1200 \\ 800 \\ 150 \\ 1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75\,850 \\ 81\,550 \\ 71\,650 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, el costo de los materiales para la casa rústica es de \$75 850, para la casa estilo moderno \$81 550 y para el estilo colonial \$71 650.

El costo total de la materia prima para todas las casas está dado por

$$\mathbf{QRC} = \mathbf{Q}(\mathbf{RC}) = [5 \ 7 \ 12] \begin{bmatrix} 75\,850 \\ 81\,550 \\ 71\,650 \end{bmatrix} = [1\,809\,900]$$

El costo total es \$1 809 900.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 65



Otra propiedad de las matrices incluye la multiplicación por un escalar y la multiplicación de matrices. Si  $k$  es un escalar y el producto  $\mathbf{AB}$  está definido, entonces

$$k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

El producto  $k(\mathbf{AB})$  puede escribirse simplemente como  $k\mathbf{AB}$ . Así

$$k\mathbf{AB} = k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} &= \left(3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Existe una propiedad interesante que concierne a la transpuesta de un producto de matrices:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

En palabras, la transpuesta de un producto de matrices es igual al producto de sus transpuestas en orden *inverso*.

Esta propiedad puede extenderse para el caso de más de dos factores. Por ejemplo,

Aquí se utiliza el hecho de que  
 $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ .

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{C})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}$$

### EJEMPLO 10 Transpuesta de un producto

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Demuestre que  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ .

**Solución:** Se tiene que

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ de modo que } (\mathbf{AB})^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (\mathbf{AB})^T$$

por lo que  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ .



Al igual que la matriz cero desempeña una función importante como identidad en la suma de matrices, existe una matriz especial, llamada *matriz identidad*, que desempeña una función correspondiente en la multiplicación de matrices.

La **matriz identidad** de  $n \times n$ , denotada por  $\mathbf{I}_n$ , es la matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal principal son números uno.

Por ejemplo, las matrices identidad  $\mathbf{I}_3$  e  $\mathbf{I}_4$  son

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuando se sobreentiende que el tamaño de una matriz identidad es el apropiado para que una operación esté definida, se omitirá el subíndice y sólo se denotará por  $\mathbf{I}$ . Debe quedar claro que

$$\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$$

La matriz identidad desempeña la misma función en la multiplicación de matrices, que el número 1 en la multiplicación de números reales. Es decir, así como el producto de un número real por 1 es igual al mismo número, el producto de una matriz y la matriz identidad es la misma matriz. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{e} \quad \mathbf{I} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

En general, si  $\mathbf{I}$  es de  $n \times n$  y  $\mathbf{A}$  tienen  $n$  columnas, entonces  $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$ . Si  $\mathbf{B}$  tiene  $n$  renglones, entonces  $\mathbf{IB} = \mathbf{B}$ . Además, si  $\mathbf{A}$  es de  $n \times n$ , entonces

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

### ● EJEMPLO 11 Operaciones con matrices que incluyen $\mathbf{I}$ y $\mathbf{O}$

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

calcule cada una de las matrices siguientes.

a.  $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ .

**Solución:**

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

b.  $3(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} 3(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) &= 3 \left( \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= 3 \left( \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c.  $\mathbf{AO}$ .

**Solución:**

$$\mathbf{AO} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$$

En general, si  $\mathbf{AO}$  y  $\mathbf{OA}$  están definidos, entonces

$$\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}$$

d.  $\mathbf{AB}$ .

**Solución:**

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 55



Si  $\mathbf{A}$  es una matriz cuadrada, puede hablarse de una *potencia* de  $\mathbf{A}$ :

Si  $\mathbf{A}$  es una matriz cuadrada y  $p$  es un entero positivo, entonces la *p*-ésima potencia de  $\mathbf{A}$ , que se escribe  $\mathbf{A}^p$ , es el producto de  $p$  factores de  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{p \text{ factores}}$$

Si  $\mathbf{A}$  es de tamaño  $n \times n$ , se define  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$ .

Se hace notar que  $\mathbf{I}^p = \mathbf{I}$ .

**EJEMPLO 12 Potencia de una matriz**

Si  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , calcule  $\mathbf{A}^3$ .

**Solución:** Como  $\mathbf{A}^3 = (\mathbf{A}^2)\mathbf{A}$  y

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Se tiene

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 45



## TECNOLOGÍA

En la figura 6.4 se muestran los resultados del cálculo de  $\mathbf{A}^4$  mediante una calculadora graficadora, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{A}]$	$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
$[\mathbf{A}]^4$	$\begin{bmatrix} -107 & -252 \\ 84 & 61 \end{bmatrix}$
$\blacksquare$	

FIGURA 6.4 Potencia de una matriz.

## Ecuaciones matriciales

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden representarse por medio de la multiplicación de matrices. Por ejemplo, considere la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

El producto del lado izquierdo tiene orden  $2 \times 1$ , así que es una matriz columna. Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Por la igualdad de matrices, las entradas correspondientes deben ser iguales, de modo que se obtiene el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

De aquí que este sistema de ecuaciones lineales puede definirse mediante la ecuación matricial (1). En general, de la ecuación (1) se dice que tiene la forma

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

donde  $\mathbf{A}$  es la matriz obtenida de los coeficientes de las variables,  $\mathbf{X}$  es una matriz columna obtenida a partir de las variables, y  $\mathbf{B}$  es una matriz columna obtenida de las constantes. La matriz  $\mathbf{A}$  se llama *matriz de coeficientes* del sistema.

**EJEMPLO 13 Forma matricial de un sistema con el uso de la multiplicación de matrices**

*Escriba el sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 4 \\ 8x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

*en forma matricial con el uso de la multiplicación de matrices.*

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

### FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA CON EL USO DE LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Escriba el siguiente par de líneas en forma matricial, para ello use la multiplicación de matrices.

$$y = -\frac{8}{5}x + \frac{8}{5}, \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

**Solución:** Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

entonces el sistema dado es equivalente a la ecuación matricial

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

esto es

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 59



## Problemas 6.3

Si  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ , y  $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = [c_{ij}]$ ,

encuentre cada uno de los elementos siguientes.

- |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|
| 1. $c_{11}$ | 2. $c_{23}$ | 3. $c_{32}$ |
| 4. $c_{33}$ | 5. $c_{31}$ | 6. $c_{12}$ |

Si  $\mathbf{A}$  es  $2 \times 3$ ,  $\mathbf{B}$  de  $3 \times 1$ ,  $\mathbf{C}$  de  $2 \times 5$ ,  $\mathbf{D}$  de  $4 \times 3$ ,  $\mathbf{E}$  de  $3 \times 2$  y  $\mathbf{F}$  de  $2 \times 3$ , encuentre el tamaño y número de entradas en cada uno de los siguientes ejercicios.

- |   |           |           |
|---|-----------|-----------|
| 7. AE                                     | 8. DE     | 9. EC     |
| 10. DB                                    | 11. FB    | 12. BC    |
| 13. $\mathbf{EE}^T \mathbf{B}$            | 14. E(AE) | 15. E(FB) |
| 16. $(\mathbf{F} + \mathbf{A})\mathbf{B}$ |           |           |

Escriba la matriz identidad que tiene el orden siguiente:

- |        |        |
|--------|--------|
| 17. 4. | 18. 6. |
|--------|--------|

Realice las operaciones indicadas en los problemas 19 a 36.

\*19.  $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$       20.  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

21.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$       22.  $[1 \ 0 \ 6 \ 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

23.  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

24.  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

\*25.  $[1 \ -2 \ 5] \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

26.  $[1 \ -4] \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$       \*27.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} [2 \ 3 \ -2 \ 3]$

28.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

29.  $3 \left( \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

30.  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

31.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right)$

32.  $3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 4 \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \right)$

33.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$       34.  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

35.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$       36.  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

En los problemas 37 a 44, calcule las matrices requeridas si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 37. $\mathbf{D} - \frac{1}{3}\mathbf{EI}$ | 38. $\mathbf{DD}$                          | 39. $3\mathbf{A} - 2\mathbf{BC}$           |
| 40. $\mathbf{B}(\mathbf{D} + \mathbf{E})$ | 41. $3\mathbf{I} - \frac{2}{3}\mathbf{FE}$ | 42. $\mathbf{FE}(\mathbf{D} - \mathbf{I})$ |
| 43. $(\mathbf{DC})\mathbf{A}$             | 44. $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$              |  |

En los problemas 45 a 58, calcule la matriz requerida, si existe, dado que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\*45.  $\mathbf{A}^2$

48.  $\mathbf{A}(\mathbf{B}^T)^2\mathbf{C}$

51.  $(\mathbf{BA}^T)^T$

54.  $(\mathbf{A}^T\mathbf{C}^T\mathbf{B})^0$

57.  $(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^T$

46.  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$

49.  $(\mathbf{A}\mathbf{C})^T$

52.  $(2\mathbf{B})^T$

\*55.  $\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{O})$

58.  $\mathbf{B}^2 - 3\mathbf{B} + 2\mathbf{I}$

47.  $\mathbf{B}^3$

50.  $\mathbf{A}^T(2\mathbf{C}^T)$

53.  $(2\mathbf{I})^2 - 2\mathbf{I}^2$

56.  $\mathbf{I}^T\mathbf{O}$

En los problemas 59 a 61, represente el sistema dado, por medio de la multiplicación de matrices.

\*59.  $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2x - 9y = 5 \end{cases}$

60.  $\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ 5x - y + 2z = 12 \end{cases}$

61.  $\begin{cases} 2r - s + 3t = 9 \\ 5r - s + 2t = 5 \\ 3r - 2s + 2t = 11 \end{cases}$

- 62. Mensajes secretos** Los mensajes secretos pueden encriptarse por medio de un código y una matriz de codificación. Suponga que se tiene el código siguiente:

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$	$j$	$k$	$l$	$m$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$n$	$o$	$p$	$q$	$r$	$s$	$t$	$u$	$v$	$w$	$x$	$y$	$z$
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Sea  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ , la matriz de codificación. Entonces es posible codificar un mensaje tomando cada dos letras del mensaje y convertirlas a sus números correspondientes para crear una matriz de  $2 \times 1$  y luego multiplicar cada matriz por  $\mathbf{E}$ . Utilice este código para encriptar el mensaje “the/falcon/has/landed” (el/halcón/ha/terrizado), deje las diagonales para separar palabras.

- 63. Inventario** Una tienda de mascotas tiene 6 gatitos, 10 perritos y 7 loros en exhibición. Si el valor de un gatito es de \$55, el de cada perrito es de \$150 y el de cada loro es de \$35, por medio de la multiplicación de matrices, encuentre el valor total del inventario de la tienda de mascotas.
- 64. Acciones** Un agente de bolsa vendió a un cliente 200 acciones tipo A, 300 tipo B, 500 tipo C y 250 tipo D. Los precios por acción de A, B, C y D son \$100, \$150, \$200 y \$300, respectivamente. Escriba un vector renglón que represente el número de acciones compradas de cada tipo. Escriba un vector columna que represente el precio por acción de cada tipo. Con el uso de la multiplicación de matrices, encuentre el costo total de las acciones.
- \*65. **Costo de construcción** Suponga que el contratista del ejemplo 9 debe construir siete casas con estilo rústico, tres con estilo moderno y cinco con estilo colonial. Con el uso de la multiplicación de matrices, calcule el costo total de la materia prima.
- 66. Costos** Suponga que el contratista del ejemplo 9 desea tomar en cuenta el costo de transportar la materia prima al lugar de

la construcción, así como el costo de compra. Imagine que los costos están dados en la matriz siguiente:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3500 & 50 \\ 1500 & 50 \\ 1000 & 100 \\ 250 & 10 \\ 3500 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Compra} \\ \text{Transporte} \end{array}$$

Acero  
Madera  
Vidrio  
Pintura  
Mano de obra

(a) A partir del cálculo de  $\mathbf{RC}$ , encuentre una matriz cuyas entradas proporcionen los costos de compra y de transporte de los materiales para cada tipo de casa.

(b) Encuentre la matriz  $\mathbf{QRC}$  cuya primera entrada proporcione el precio de compra total, y cuya segunda entrada dé el costo total de transporte.

(c) Sea  $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , calcule  $\mathbf{QRCZ}$ , que proporciona el costo total de materiales y transporte para todas las casas que serán construidas.

\*67. Realice los siguientes cálculos para el ejemplo 6.

(a) Calcule la cantidad que cada industria y cada consumidor deben pagar por los bienes que reciben.

(b) Calcule la utilidad recibida por cada industria.

(c) Encuentre la cantidad total de dinero que es pagada por todas las industrias y todos los consumidores.

(d) Encuentre la proporción de la cantidad total de dinero que se determinó en (c) pagada por las industrias. Encuentre la proporción de la cantidad total de dinero que se determinó en (c) que es pagada por los consumidores.

68. Si  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ , demuestre que  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$ .

\*69. Demuestre que si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

entonces  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ . Observe que como ni  $\mathbf{A}$  ni  $\mathbf{B}$  son la matriz cero, la regla algebraica para los números reales “si  $ab = 0$ , entonces alguno de  $a$  o  $b$  es cero” no se cumple para las matrices. También puede demostrarse que la ley de cancelación tampoco es cierta para las matrices; es decir, si  $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ , entonces no necesariamente es cierto que  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ .

70. Sean  $\mathbf{D}_1$  y  $\mathbf{D}_2$  dos matrices diagonales de  $3 \times 3$ . Calcule  $\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2$  y  $\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1$  y demuestre que

(a) Tanto  $\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2$  como  $\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1$  son matrices diagonales.

(b)  $\mathbf{D}_1$  y  $\mathbf{D}_2$  comutan, lo que significa que  $\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1$ .

En los problemas 71 a 74 calcule las matrices requeridas dado que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3.2 & -4.1 & 5.1 \\ -2.6 & 1.2 & 6.8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1.1 & 4.8 \\ -2.3 & 3.2 \\ 4.6 & -1.4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1.2 & 1.5 \\ 2.4 & 6.2 \end{bmatrix}$$

71.  $\mathbf{A}(2\mathbf{B})$

73.  $3\mathbf{C}(-\mathbf{B})$

72.  $-3.1(\mathbf{CA})$

74.  $\mathbf{C}^3$

## 6.4 Resolución de sistemas mediante la reducción de matrices

### OBJETIVO

Mostrar cómo reducir una matriz y utilizar la reducción de matrices para resolver un sistema lineal.

En esta sección se ilustrará un método por el cual las matrices pueden utilizarse para resolver un sistema de ecuaciones lineales. En el desarrollo del *método de reducción*, primero se resolverá un sistema por medio del método usual de eliminación. Despues se obtendrá la misma solución con el uso de matrices.

Considere el sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

que consiste en dos ecuaciones lineales con dos incógnitas,  $x$  y  $y$ . Aunque este sistema puede resolverse por varios métodos algebraicos, se resolverá con un método que se adapta con facilidad a las matrices.

Por razones que más adelante serán obvias, se comienza por reemplazar la ecuación (1) por la ecuación (2) y la ecuación (2) por la (1), así se obtiene el sistema equivalente,<sup>3</sup>

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \quad (3)$$

(4)

Si se multiplican ambos lados de la ecuación (3) por  $-3$ , se obtiene  $-3x - 6y = -15$ . Después de sumar los lados izquierdo y derecho de esta ecuación a los correspondientes de la ecuación (4), se obtiene un sistema equivalente en el que  $x$  se elimina de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - 7y = -14 \end{cases} \quad (5)$$

(6)

Ahora se eliminará  $y$  de la primera ecuación. Al multiplicar ambos lados de la ecuación (6) por  $-\frac{1}{7}$ , se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x + y = 2 \end{cases} \quad (7)$$

(8)

De la ecuación (8),  $y = 2$  y de aquí que  $-2y = -4$ . Tras sumar los lados de  $-2y = -4$  a los correspondientes de la ecuación (7), se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 0y = 1 \\ 0x + y = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto,  $x = 1$  en tanto que  $y = 2$ , de modo que el sistema original está resuelto.

Observe que durante la resolución, el sistema original se reemplazó de manera sucesiva por un sistema equivalente, que se obtenía al realizar una de las tres operaciones siguientes (llamadas *operaciones elementales*) que dejan la solución sin cambio:

1. Intercambio de dos ecuaciones.
2. Multiplicación de una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Suma de un múltiplo constante de los lados de una ecuación a los correspondientes lados de otra ecuación.

Antes de mostrar un método matricial para resolver el sistema original,

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

primero es necesario definir algunos términos. Recuerde que, de acuerdo con la sección 6.3, la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

es la **matriz de coeficientes** de este sistema. Las entradas en la primera columna corresponden a los coeficientes de las  $x$  en las ecuaciones. Por ejemplo, la entrada en el primer renglón y la primera columna corresponde al coeficiente de  $x$  en la primera ecuación, y la entrada en el segundo renglón y la primera columna corresponde al coeficiente de  $x$  en la segunda ecuación. En forma análoga, las entradas en la segunda columna corresponden a los coeficientes de las  $y$ .

Otra matriz asociada con este sistema es la llamada **matriz aumentada**, que está dada por

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

---

<sup>3</sup>Recuerde que según se expuso en la sección 3.4, dos o más sistemas son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

La primera y segunda columnas son la primera y segunda columnas, respectivamente, de la matriz de coeficientes. Las entradas en la tercera columna corresponden a los términos constantes del sistema: la entrada en el primer renglón de esta columna es el término constante de la primera ecuación, mientras que la entrada en el segundo renglón es el término constante de la segunda ecuación. Aunque no es necesario incluir la línea vertical en la matriz aumentada, sirve para recordar que el 1 y el 5 son los términos constantes que aparecen en el lado derecho de las ecuaciones. La matriz aumentada describe por completo el sistema de ecuaciones.

El procedimiento que se utilizó para resolver el sistema original incluye varios sistemas equivalentes. Se puede asociar cada uno de estos sistemas con su matriz aumentada. A continuación se enumeran los sistemas implicados, junto con su correspondiente matriz aumentada, las cuales se han marcado como **A**, **B**, **C**, **D** y **E**:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{array} \right. \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right] = \mathbf{A} \\ \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{array} \right. \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{array} \right] = \mathbf{B} \\ \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 0x - 7y = -14 \end{array} \right. \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array} \right] = \mathbf{C} \\ \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 0x + y = 2 \end{array} \right. \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] = \mathbf{D} \\ \left\{ \begin{array}{l} x + 0y = 1 \\ 0x + y = 2 \end{array} \right. \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] = \mathbf{E} \end{array}$$

Ahora se verá cómo están relacionadas estas matrices.

**B** puede obtenerse a partir de **A** por intercambio del primero y segundo renglones de **A**. Esta operación corresponde al intercambio de dos ecuaciones en el sistema original.

**C** puede obtenerse a partir de **B**, al sumar a cada entrada del segundo renglón de **B**  $-3$  veces la entrada correspondiente del primer renglón de **B**:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 + (-3)(1) & -1 + (-3)(2) & 1 + (-3)(5) \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Esta operación se describe como la suma de  $-3$  veces el primer renglón de **B** con el segundo renglón de **B**.

**D** puede obtenerse a partir de **C** al multiplicar cada entrada del segundo renglón de **C** por  $-\frac{1}{7}$ . Esta operación se describe como la multiplicación del segundo renglón de **C** por  $-\frac{1}{7}$ . **E** puede obtenerse a partir de **D**, al sumar  $-2$  veces el segundo renglón de **D** al primer renglón de **D**.

Observe que **E**, la cual proporciona la solución, se obtuvo a partir de **A** al realizar de manera sucesiva una de las tres operaciones matriciales, llamadas **operaciones elementales con renglones**:

### Operaciones elementales con renglones

1. Intercambio de dos renglones de una matriz.
2. Multiplicación de un renglón de una matriz por un número distinto de cero.
3. Suma de un múltiplo de un renglón de una matriz a un renglón diferente de esa matriz.

Estas operaciones elementales sobre renglones corresponden a las tres operaciones elementales utilizadas en el método algebraico de eliminación. Se dice que las matrices son **equivalentes** cuando puede obtenerse una matriz a partir de otra por una o más de las operaciones elementales con renglones. Así, **A** y **E** son equivalentes (también podría obtenerse **A** a partir de **E**, mediante operaciones similares sobre renglones en el sentido

opuesto, de modo que el término *equivalente es apropiado*). Cuando se describan operaciones elementales sobre renglones, por conveniencia se utilizará la notación siguiente:

Notación	Operación con renglón correspondiente
$R_i \leftrightarrow R_j$	Intercambiar los renglones $R_i$ y $R_j$ .
$kR_i$	Multiplicar el renglón $R_i$ por la constante $k$ distinta de cero.
$kR_i + R_j$	Sumar $k$ veces el renglón $R_i$ al renglón $R_j$ (pero el renglón $R_i$ permanece igual).

Por ejemplo, escribir

$$\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{-4R_1 + R_2} \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \\ 5 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

significa que la segunda matriz se obtuvo a partir de la primera al sumar  $-4$  veces el renglón  $1$  al renglón  $2$ . Observe que puede escribirse  $(-k)R_i$  como  $-kR_i$ .

Ahora es posible describir un procedimiento matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Primero, se forma la matriz aumentada del sistema; después, por medio de operaciones elementales sobre renglones, se determina una matriz equivalente que indique claramente la solución. Se especificará con mayor precisión lo que quiere decirse por una matriz que *indique claramente la solución*: es una matriz, llamada **matriz reducida**, que se definirá más adelante. Es conveniente definir primero lo que es **renglón cero** de una matriz, como un renglón que consiste *completamente* en ceros. Un renglón que no es un renglón cero, lo cual significa que contiene *al menos una* entrada distinta de cero, se llamará un **renglón diferente de cero**. La primera entrada distinta de cero en un renglón diferente de cero se llama la **entrada principal**.

### Matriz reducida

Se dice que una matriz es una **matriz reducida** cuando todas las afirmaciones siguientes son ciertas:

1. Todos los renglones cero están en la parte inferior de la matriz.
2. Para cada renglón diferente de cero, la entrada principal es  $1$ , y todas las otras entradas en la *columna* donde aparece la entrada principal son ceros.
3. La entrada principal en cada renglón está a la derecha de la entrada principal de cualquier renglón que esté arriba de él.

Puede mostrarse que cada matriz es equivalente a *una* matriz reducida *exactamente*. Para resolver el sistema, es necesario encontrar la matriz reducida tal que la matriz aumentada del sistema sea equivalente a ella. En el análisis previo de operaciones elementales con renglones, la matriz

$$E = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

es una matriz reducida.

### EJEMPLO 1 Matrices reducidas

Determine si cada una de las matrices que se muestran a continuación es reducida o no.

a.  $\left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} \right]$

b.  $\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$

c.  $\left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right]$

d.  $\left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$

e.  $\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$

f.  $\left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$

Solución:

- a. No es una matriz reducida porque la entrada principal en el segundo renglón no es  $1$ .
- b. Es una matriz reducida.
- c. No es una matriz reducida porque la entrada principal en el segundo renglón, no se encuentra a la derecha de la entrada principal del primer renglón.

- d. Es una matriz reducida.
- e. No es una matriz reducida porque el segundo renglón, que es un renglón cero, no está en la parte inferior de la matriz.
- f. Es una matriz reducida.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

### EJEMPLO 2 Reducción de una matriz

Reduzca la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 0 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

**Estrategia** Para reducir la matriz, debe hacerse que la entrada principal sea 1 en el primer renglón, un 1 en el segundo renglón y así sucesivamente hasta llegar a un renglón cero, si los hay. Además, debe trabajarse de izquierda a derecha porque la entrada principal de cada renglón debe encontrarse a la *izquierda* de todas las otras entradas principales en los renglones de *abajo*.

**Solución:** Como no existen renglones ceros para moverlos a la parte inferior, se procederá a encontrar la primera columna que tenga una entrada distinta de cero; resulta ser la columna 1. Esto significa que en la matriz reducida, el 1 inicial en el primer renglón estará en la columna 1. Para empezar, se intercambiarán los primeros dos renglones de modo que la entrada diferente de cero esté en el primer renglón de la columna 1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 0 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{R}_1 \leftrightarrow \text{R}_2} \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

Ahora se multiplica el renglón 1 por  $\frac{1}{3}$  de modo que la entrada principal sea un 1:

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\text{R}_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

Ahora, como deben tenerse ceros abajo (y arriba) de cada 1 inicial, se suma  $-6$  veces el renglón 1 al renglón 3:

$$\xrightarrow{-6\text{R}_1 + \text{R}_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Después se avanza a la derecha de la columna 1 para encontrar la primera columna que tenga una entrada diferente de cero en el renglón 2, o bien debajo de él; se trata de la columna 3. Esto significa que en la matriz reducida, el 1 inicial en el segundo renglón debe estar en la columna 3. La matriz anterior ya tiene el 1 ahí. Así, que todo lo que se necesita para obtener ceros abajo y arriba del 1 es sumar una vez el renglón 2 al renglón 1, y sumar  $-8$  veces el renglón 2 al renglón 3:

$$\xrightarrow{(1)\text{R}_2 + \text{R}_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

De nuevo se avanza a la derecha para encontrar la primera columna que tenga una entrada diferente de cero en el renglón 3; resulta ser la columna 4. Para hacer la entrada principal igual a 1, se multiplica el renglón 3 por  $-\frac{1}{5}$ :

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}\text{R}_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**ADVERTENCIA**

La secuencia de pasos que se utiliza para reducir una matriz, no es única; sin embargo, la forma reducida sí es única.

Por último, para hacer todas las demás entradas de la columna 4 iguales a cero, sumamos  $-2$  veces el renglón 3 a los renglones 1 y 2:

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} -2R_3 + R_1 \\ -2R_3 + R_2 \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

La última matriz está en forma reducida.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

**TECNOLOGÍA**

Aunque las operaciones elementales con renglones pueden realizarse con una calculadora graficadora, el procedimiento es muy engorroso.

El método de reducción descrito para resolver el sistema original puede generalizarse a sistemas de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas. Resolver un sistema como

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{array} \right.$$

implica

- Determinar la matriz aumentada del sistema, que es

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array} \right]$$

- Determinar una matriz reducida tal que la matriz aumentada sea equivalente a ella.

Con frecuencia, el paso 2 es llamado *reducción de la matriz aumentada*.

### EJEMPLO 3 Resolución de un sistema por reducción

Con el uso de la reducción de matrices, resuelva el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = -1 \\ 2x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{array} \right.$$

**Solución:** Al reducir la matriz aumentada del sistema, se tiene

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{array} \right]$$

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1****RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA POR REDUCCIÓN**

Una compañía de inversiones ofrece tres portafolios de acciones: A, B y C. El número de bloques de cada tipo de acciones en cada uno de estos portafolios se resume en la tabla siguiente:

	Portafolio		
	A	B	C
Alto	6	1	3
Riesgo: Moderado	3	2	3
Bajo	1	5	3

Un cliente quiere 35 bloques de acciones de alto riesgo, 22 bloques de acciones de riesgo moderado y 18 bloques de acciones de bajo riesgo. ¿Cuántos bloques de acciones de cada portafolio deben proponerse?

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{-2R_1 + R_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{(-1)R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{-R_2 + R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{-R_2 + R_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

La última matriz está reducida y corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + 0y = 4 \\ 0x + y = -3 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Como el sistema original es equivalente a este sistema, tiene una solución única, a saber

$$\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13 

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

### RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA POR REDUCCIÓN

Un spa cuida la salud de sus clientes: personaliza la dieta y los suplementos vitamínicos de cada uno de ellos. Ofrece tres diferentes suplementos vitamínicos, cada uno con distintos porcentajes de la cantidad diaria recomendada (CDR) de vitaminas A, C y D. Una tableta de suplemento X proporciona 40% de la CDR de A, 20% de la CDR de C y 10% de la CDR de D. Una tableta de suplemento Y proporciona 10% de la CDR de A, 10% de la CDR de C y 30% de la CDR de D. Una tableta de suplemento Z proporciona 10% de la CDR de A, 50% de la CDR de C y 20% de la CDR de D. El personal del spa determina que cierta clienta debe tomar 180% de la CDR de vitamina A, 200% de CDR de la vitamina C y 190% de la CDR de la vitamina D, diariamente. ¿Cuántas tabletas de cada suplemento debe tomar al día?

### EJEMPLO 4 Solución de un sistema por reducción

Con el uso de la reducción de matrices, resuelva

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 6 \\ 2z + y - 3 = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

**Solución:** Al escribir nuevamente el sistema de modo que las variables estén alineadas y los términos constantes aparezcan en los lados derechos de las ecuaciones, se tiene

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 6 \\ y + 2z = 3 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

Tras reducir la matriz aumentada, se obtiene

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_1 + R_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{-2R_2 + R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{\frac{-1}{2}R_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{-3R_3 + R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Cada vez que se obtenga un renglón con ceros del lado izquierdo de la línea vertical y una entrada diferente de cero a la derecha, no existe solución.

La última matriz es reducida y corresponde a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Como  $0 \neq 1$ , no existen valores de  $x, y$  y  $z$  para los cuales todas las ecuaciones sean satisfechas de manera simultánea. Por lo tanto, el sistema original no tiene solución.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

#### FORMA PARAMÉTRICA DE UNA SOLUCIÓN

Una veterinaria zootecnista puede comprar alimento para animales de cuatro diferentes tipos: A, B, C y D. Cada alimento viene en el mismo tamaño de bolsa y la cantidad de gramos de cada uno de tres nutrientes en cada bolsa se resume en la tabla siguiente:

	Alimento			
	A	B	C	D
N <sub>1</sub>	5	5	10	5
Nutrimiento N <sub>2</sub>	10	5	30	10
N <sub>3</sub>	5	15	10	25

Para cierto animal, la veterinaria determina que necesita combinar las bolsas para obtener 10000 g de N<sub>1</sub>, 20000 g de N<sub>2</sub> y 20000 g de N<sub>3</sub>. ¿Cuántas bolsas de cada tipo de alimento debe ordenar?

#### EJEMPLO 5 Forma paramétrica de una solución

Con el uso de la reducción de matrices, resuelva

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 10 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 3x_3 + 6x_4 = 9 \end{cases}$$

**Solución:** Al reducir la matriz aumentada, se tiene

$$\begin{array}{cc} \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 6 & 9 \end{array} \right] & \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 6 & 9 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-3R_1 + R_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -6 & -3 & -6 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-\frac{3}{2}R_2 + R_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & 3 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\frac{1}{3}R_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{2R_3 + R_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-2R_3 + R_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Esta matriz es reducida y corresponde al sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{2}x_4 = 4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$x_1 = 4 - \frac{5}{2}x_4 \quad (9)$$

$$x_2 = 0 \quad (10)$$

$$x_3 = 1 - \frac{1}{2}x_4 \quad (11)$$

El sistema no impone restricciones sobre  $x_4$ , de manera que esta variable puede tomar *cualquier* valor real. Si se agrega

$$x_4 = x_4 \quad (12)$$

a las ecuaciones anteriores, entonces de habrán expresado las cuatro incógnitas en términos de  $x_4$  y ésta es la solución *general* del sistema original.

Para cualquier valor particular de  $x_4$  las ecuaciones (9), (10), (11) y (12) determinan una solución *particular* para el sistema original. Por ejemplo, si  $x_4 = 0$ , entonces una solución *particular* es

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 0$$

Si  $x_4 = 2$ , entonces

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 2$$

es otra solución particular. Como hay una cantidad infinita de posibilidades para  $x_4$ , existe un número infinito de soluciones para el sistema original.

Recuerde (vea el ejemplo 3 de la sección 3.4) que, si se desea, es posible escribir  $x_4 = r$  y hacer referencia a esta variable nueva como un *parámetro*. (Sin embargo, no hay nada especial acerca del nombre  $r$ , de manera que podría considerarse  $x_4$  como el parámetro del cual dependen *todas* las variables originales. Observe que es posible escribir  $x_2 = 0 + 0x_4$  y  $x_4 = 0 + 1x_4$ ). Si se denota el parámetro por  $r$ , la solución del sistema original está dada por

$$x_1 = 4 - \frac{5}{2}r$$

$$x_2 = 0 + 0r$$

$$x_3 = 1 - \frac{1}{2}r$$

$$x_4 = 0 + 1r$$

donde  $r$  es cualquier número real, y se dice que se tiene una *familia* de soluciones *con un parámetro*. Ahora, con el conocimiento de la suma de matrices y la multiplicación por un escalar, se puede decir un poco más acerca de tales familias. Observe que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los lectores familiarizados con la geometría analítica verán que las soluciones forman

una línea en el espacio de  $x_1 x_2 x_3 x_4$ , que pasa a través del punto  $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  y en la dirección del segmento de recta que une a  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17 

Los ejemplos 3 al 5 ilustran el hecho de que un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución única, ninguna solución o un número infinito de soluciones.

## Problemas 6.4

Determine si la matriz de los problemas 1 a 6 es reducida o no.

\*1.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

2.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Reduzca la matriz dada en los problemas 7 a 12.

7.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

8.  $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

\*9.  $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

10.  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -6 \\ 4 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

11.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Resuelva los sistemas de los problemas 13 a 26 mediante el método de reducción.

$$\begin{aligned} *13. \quad & \begin{cases} 2x - 7y = 50 \\ x + 3y = 10 \end{cases} \\ & \begin{cases} x - 3y = -11 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *15. \quad & \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 12x + 4y = 2 \end{cases} \\ & \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -2x - 4y + 6z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *17. \quad & \begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0 \\ 3x + 2z - 5 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + 5z - 10 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19. \quad & \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ 5x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9 \\ 3x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21. \quad & \begin{cases} x - y - 3z = -5 \\ 2x - y - 4z = -8 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \\ & \begin{cases} x + y - z = 7 \\ 2x - 3y - 2z = 4 \\ x - y - 5z = 23 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. \quad & \begin{cases} 2x - 4z = 8 \\ x - 2y - 2z = 14 \\ x + y - 2z = -1 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} x + 3z = -1 \\ 3x + 2y + 11z = 1 \\ x + y + 4z = 1 \\ 2x - 3y + 3z = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25. \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26. \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Resuelva los problemas 27 a 33 con el uso de la reducción de matrices.

- 27. Impuestos** Una compañía tiene ingresos gravables por \$312 000. El impuesto federal es 25% de la parte que queda después de pagar el impuesto estatal. El impuesto estatal es 10% de la parte que queda después de pagar el impuesto federal. Encuentre el monto de los impuestos federal y estatal.

- 28. Toma de decisiones** Un fabricante elabora dos productos, A y B. Por cada unidad que vende de A la ganancia es de \$8, y por cada unidad que vende de B la ganancia es de \$11. La experiencia le indica que puede venderse 25% más de A que de B. Para el año siguiente el fabricante desea una ganancia total de \$42 000. ¿Cuántas unidades de cada producto debe vender?

- 29. Programa de producción** Un fabricante produce tres artículos, A, B y C. La utilidad por cada unidad vendida de A, B y C es \$1, \$2 y \$3, respectivamente. Los costos fijos son de \$17 000 por año y los costos de producción por cada unidad son \$4, \$5 y \$7, respectivamente. El año siguiente se producirán y venderán un total de 11 000 unidades entre los tres productos, y se obtendrá una utilidad total de \$25 000. Si el costo total será de \$80 000, ¿cuántas unidades de cada producto deberán producirse el año siguiente?

- 30. Asignación de producción** La compañía Escritorios Nacionales tiene plantas para la producción en la costa este y en la costa oeste. En la planta de la costa este, los costos fijos son de \$20 000 por año y el costo de producción de cada escritorio es de \$90. En la planta de la costa oeste, los costos fijos son de \$18 000 por año y el costo de producción de cada escritorio es de \$95. El año próximo, la compañía quiere producir un total de 800 escritorios. Determine la orden de producción para

cada una de las plantas el siguiente año si el costo total para cada planta debe ser el mismo.



- 31. Vitaminas** Por prescripción del doctor, cierta persona debe tomar diariamente 10 unidades de vitamina A, 9 unidades de vitamina D y 19 de vitamina E; y puede elegir entre tres marcas de píldoras vitamínicas. La marca X contiene 2 unidades de vitamina A, 3 de vitamina D y 5 de vitamina E; la marca Y tiene 1, 3 y 4 unidades, respectivamente; la marca Z tiene 1 unidad de vitamina A, ninguna de vitamina D y 1 de vitamina E.



- (a) Encuentre todas las combinaciones posibles de píldoras que proporcionen de manera exacta las cantidades requeridas.  
 (b) Si cada píldora de la marca X cuesta 1 centavo; de la marca Y, 6 centavos y de la marca Z, 3 centavos, ¿existe alguna combinación del inciso (a) que cueste exactamente 15 centavos por día?  
 (c) ¿Cuál es la combinación menos cara del inciso (a)? ¿Y la más cara?

- 32. Producción** Una compañía produce tres artículos: A, B y C, que requiere se procesen en tres máquinas I, II y III. El tiempo en horas requerido para el procesamiento de cada producto por las tres máquinas está dado en la siguiente tabla:

	A	B	C
I	3	1	2
II	1	2	1
III	2	4	1

La máquina I está disponible 490 horas, la II durante 310 horas y la III durante 560 horas. Encuentre cuántas unidades de cada artículo deben producirse para utilizar todo el tiempo disponible de las máquinas.

- 33. Inversiones** Una compañía de inversiones vende tres tipos de fondos de inversión, estándar (E), de lujo (D) y Gold Star (G). Cada unidad de E tiene 12 acciones tipo A, 16 tipo B y 8 tipo C. Cada unidad de D tiene 20 acciones tipo A, 12 tipo B y 28 de C. Cada unidad de G tiene 32 acciones tipo A, 28 tipo B y 36 de C.

Suponga que un inversionista desea comprar exactamente 220 acciones tipo A, 176 tipo B y 264 tipo C, y adquirir unidades de los tres fondos.

- (a) Determine las combinaciones de unidades E, D y G que satisfagan los requerimientos del inversionista.

- (b) Suponga que cada unidad de E cuesta al inversionista \$300 (las de D y G, \$400 y \$600, respectivamente). ¿Cuáles de las combinaciones del inciso (a) minimizarán el costo total del inversionista?

## OBJETIVO

Centrar la atención en sistemas no homogéneos que incluyan más de un parámetro en su solución general, y resolver y considerar la teoría de sistemas homogéneos.

## 6.5 Resolución de sistemas mediante la reducción de matrices (continuación)<sup>4</sup>

Como se vio en la sección 6.4, un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución única, ninguna solución o un número infinito de soluciones. Cuando existe un número infinito de soluciones, la solución general se expresa en términos de al menos un parámetro. Por ejemplo, la solución general en el ejemplo 5 se dio en términos del parámetro  $r$ :

$$x_1 = 4 - \frac{5}{2}r$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 1 - \frac{1}{2}r$$

$$x_4 = r$$

En ocasiones, es necesario más de un parámetro,<sup>5</sup> como lo muestra el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 1 Familia de soluciones con dos parámetros

*Con el uso de la reducción de matrices, resuelva*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

**Solución:** La matriz aumentada es

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

cuya forma reducida es

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

De aquí, se tiene que

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

a partir de lo cual

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_3 - 3x_4 \\ x_2 &= -2 - 2x_3 - x_4 \end{aligned}$$

Como no hay restricción sobre  $x_3$  ni sobre  $x_4$ , pueden ser cualesquiera números reales, lo que resulta en una familia paramétrica de soluciones. Si se establece  $x_3 = r$  y  $x_4 = s$ , puede obtenerse la solución del sistema dado como

$$x_1 = 1 - r - 3s$$

$$x_2 = -2 - 2r - s$$

$$x_3 = r$$

$$x_4 = s$$

<sup>4</sup>Esta sección puede omitirse.

<sup>5</sup>Vea el ejemplo 7 de la sección 3.4.

donde los parámetros  $r$  y  $s$  pueden ser cualquier número real. Si se asignan valores específicos a  $r$  y  $s$ , se obtienen soluciones particulares. Por ejemplo, si  $r = 1$  y  $s = 2$ , entonces la solución particular correspondiente es  $x_1 = -6, x_2 = -6, x_3 = 1$  y  $x_4 = 2$ . Como en el caso de un parámetro es posible profundizar más y escribir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que puede mostrarse para exhibir la familia de soluciones como un *plano* a través de  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  en el espacio de  $x_1x_2x_3x_4$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



Es común clasificar un sistema lineal de ecuaciones como *homogéneo* o como *no homogéneo*, dependiendo de si todos los términos constantes son o no iguales a cero.

### DEFINICIÓN

El sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{array} \right.$$

se llama **sistema homogéneo** si  $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ . El sistema es un **sistema no homogéneo** si al menos una de las  $c$  no es igual a cero.

### EJEMPLO 2 Sistemas no homogéneos y homogéneos

El sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

es no homogéneo debido al 4 de la primera ecuación. El sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

es homogéneo.



Si el sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

se resolviera por el método de reducción, primero la matriz aumentada se escribiría como:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{array} \right]$$

Observe que la última columna consiste sólo en ceros. Esto es común en la matriz aumentada de cualquier sistema homogéneo. Esta matriz se reduciría mediante las operaciones elementales con renglones:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

La última columna de la matriz reducida también contiene sólo ceros. Y no es casualidad. Cuando se realiza cualquiera de las operaciones elementales con renglones sobre una matriz que tiene una columna que consiste sólo en ceros, la columna correspondiente de la matriz resultante tendrá también solamente ceros. Cuando se resuelve un sistema homogéneo por reducción de matrices, por conveniencia se acostumbra eliminar la última columna de la matriz involucrada; es decir, se reducirá sólo la *matriz de coeficientes* del sistema. Para el sistema anterior se tendría

$$\left[ \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

Aquí la matriz reducida, llamada *matriz de coeficientes reducida*, corresponde al sistema:

$$\begin{cases} x + 0y = 0 \\ 0x + y = 0 \end{cases}$$

de modo que la solución es  $x = 0$  y  $y = 0$ .

Ahora se considerará el número de soluciones del sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

Siempre hay una solución cuando  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$  puesto que cada ecuación se satisface para estos valores. Esta respuesta, llamada **solución trivial**, es un resultado para *todo* sistema homogéneo.

Existe un teorema que permite determinar si un sistema homogéneo tiene una solución única (la solución trivial) o un número infinito de soluciones. Está basado en el número de renglones diferentes de cero que aparecen en la matriz reducida del sistema. Recuerde que un *renglón diferente de cero* es un renglón que no consiste sólo en ceros.

### TEOREMA

Sea  $\mathbf{A}$  la matriz *reducida* de un sistema homogéneo de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas. Si  $\mathbf{A}$  tiene exactamente  $k$  renglones diferentes de cero, entonces  $k \leq n$ . Además,

1. si  $k < n$ , el sistema tiene un número infinito de soluciones, y
2. si  $k = n$ , el sistema tiene una única solución (la solución trivial).

Si un sistema homogéneo consiste en  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, entonces la matriz de coeficientes del sistema tiene un tamaño de  $m \times n$ . Por lo tanto, si  $m < n$  y  $k$  es el número de renglones diferentes de cero en el coeficiente de la matriz reducida, entonces  $k \leq m$ , y entonces  $k < n$ . Por el teorema anterior, el sistema debe tener un número infinito de soluciones. En consecuencia se tiene el siguiente corolario.

### COROLARIO

Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que incógnitas tiene un número infinito de soluciones.

**ADVERTENCIA**

El teorema y el corolario anteriores sólo se aplican a sistemas **homogéneos** de ecuaciones lineales, por ejemplo, considere el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + 2y - 4z = 4 \end{cases}$$

que consiste en dos ecuaciones lineales con tres incógnitas. **No es posible** concluir que este sistema tiene un número infinito de soluciones, puesto que no es homogéneo. De hecho, debe verificarse que este sistema no tiene solución.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1****RESOLUCIÓN DE SISTEMAS HOMOGÉNEOS**

Un plano en el espacio tridimensional puede escribirse como  $ax + by + cz = d$ . Es posible determinar las intersecciones probables de esta forma, al escribirlas como sistemas de ecuaciones lineales y emplear la reducción para resolverlas. Si en cada ecuación  $d = 0$ , entonces se tiene un sistema homogéneo con solución única, o con un número infinito de soluciones. Determine si la intersección de los planos

$$5x + 3y + 4z = 0$$

$$6x + 8y + 7z = 0$$

$$3x + 1y + 2z = 0$$

tiene solución única o un número infinito de soluciones; después resuelva el sistema.

**EJEMPLO 3 Número de soluciones de un sistema homogéneo**

Determine si el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

tiene solución única o un número infinito de soluciones.

**Solución:** Hay dos ecuaciones en este sistema homogéneo y este número es menor que el número de incógnitas (tres). Por lo tanto, por el corolario anterior, el sistema tiene un número infinito de soluciones.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

**EJEMPLO 4 Resolución de sistemas homogéneos**

Determine si los sistemas homogéneos siguientes tienen solución única o un número infinito de soluciones, después resuelva los sistemas.

a.  $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$

**Solución:** Al reducir la matriz de coeficientes, se tiene

$$\left[ \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

El número de renglones diferentes de cero, 2, en la matriz reducida es menor que el número de incógnitas, 3, en el sistema. Por el teorema anterior, existe un número infinito de soluciones.

Como la matriz reducida corresponde a

$$\begin{cases} x + 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

la solución puede darse en forma paramétrica por

$$x = -3r$$

$$y = -r$$

$$z = r$$

donde  $r$  es cualquier número real.

b.  $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

**Solución:** Al reducir la matriz de coeficientes, se tiene

$$\left[ \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

El número de renglones diferentes de cero (2) en el coeficiente de la matriz reducida es igual al número de incógnitas en el sistema. Por el teorema, el sistema debe tener solución única, a saber, la solución trivial  $x = 0, y = 0$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13



## Problemas 6.5

En los problemas 1 a 8, resuelva los sistemas por reducción de matrices.

$$\begin{array}{l} \text{*1. } \begin{cases} w + x - y - 9z = -3 \\ 2w + 3x + 2y + 15z = 12 \\ 2w + x + 2y + 5z = 8 \end{cases} \\ \text{2. } \begin{cases} 2w + x + 10y + 15z = -5 \\ w - 5x + 2y + 15z = -10 \\ w + x + 6y + 12z = 9 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{3. } \begin{cases} 3w - x - 3y - z = -2 \\ 2w - 2x - 6y - 6z = -4 \\ 2w - x - 3y - 2z = -2 \\ 3w + x + 3y + 7z = 2 \end{cases} \\ \text{4. } \begin{cases} w + x + 5z = 1 \\ w - y + 2z = 1 \\ w - 3x + 4y - 7z = 1 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{5. } \begin{cases} w + x + 3y - z = 2 \\ 2w + x + 5y - 2z = 0 \\ 2w - x + 3y - 2z = -8 \\ 3w + 2x + 8y - 3z = 2 \\ w + 2y - z = -2 \end{cases} \\ \text{6. } \begin{cases} w + x + y + 2z = 4 \\ 2w + x + 2y + 2z = 7 \\ w + 2x + y + 4z = 5 \\ 3w - 2x + 3y - 4z = 7 \\ 4w - 3x + 4y - 6z = 9 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{7. } \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 10x_4 + 11x_5 = -8 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 6 \end{cases} \\ \text{8. } \begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases} \end{array}$$

Para los problemas 9 a 14, determine si el sistema tiene un número infinito de soluciones o sólo la solución trivial. No resuelva los sistemas.

$$\begin{array}{l} \text{*9. } \begin{cases} 1.06x + 2.3y - 0.05z = 0 \\ 1.055x - 0.6y + 0.09z = 0 \end{cases} \\ \text{10. } \begin{cases} 3w + 5x - 4y + 2z = 0 \\ 7w - 2x + 9y + 3z = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{11. } \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ x + 5y = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases} \\ \text{12. } \begin{cases} 2x + 3y + 12z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 0 \\ 4x + y + 14z = 0 \end{cases} \\ \text{*13. } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases} \\ \text{14. } \begin{cases} 3x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ -4y + 5z = 0 \end{cases} \end{array}$$

Resuelva cada uno de los siguientes sistemas.

$$\begin{array}{l} \text{15. } \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \\ \text{17. } \begin{cases} x + 6y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{19. } \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ 5x - 8y = 0 \end{cases} \\ \text{21. } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y - 14z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \\ -5y - 10z = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{20. } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\ \text{22. } \begin{cases} x + y + 7z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x - 3y - 6z = 0 \\ 3x + y + 13z = 0 \end{cases} \\ \text{23. } \begin{cases} w + x + y + 4z = 0 \\ w + x + 5z = 0 \\ 2w + x + 3y + 4z = 0 \\ w - 3x + 2y - 9z = 0 \end{cases} \\ \text{24. } \begin{cases} w + x + 2y + 7z = 0 \\ w - 2x - y + z = 0 \\ w + 2x + 3y + 9z = 0 \\ 2w - 3x - y + 4z = 0 \end{cases} \end{array}$$

### OBJETIVO

Determinar la inversa de una matriz invertible y utilizar las inversas para resolver sistemas.

## 6.6 Inversas

Se ha visto que el método de reducción es muy útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Pero eso no significa que sea el único que utiliza matrices. En esta sección, se estudiará un método diferente que se aplica a ciertos sistemas de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas.

En la sección 6.3 se mostró cómo puede escribirse un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial como una sola ecuación matricial  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , donde  $\mathbf{A}$  es la matriz de coeficientes. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

puede escribirse en la forma matricial  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si pueden determinarse los valores de las entradas de la matriz de incógnitas  $\mathbf{X}$ , se tiene una solución para el sistema. Así, sería deseable encontrar un método para resolver la ecuación matricial  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$  para  $\mathbf{X}$ . Una manera de hacerlo proviene de la inspección del procedimiento de solución de la ecuación algebraica  $ax = b$ . La última ecuación se resuelve simplemente al multiplicar ambos lados por el inverso multiplicativo de  $a$ . (Recuerde que el inverso multiplicativo de un número  $a$  diferente de cero está denota-

do por  $a^{-1}$  [que es  $1/a$ ] y tiene la propiedad de que  $a^{-1}a = 1$ .) Por ejemplo, si  $3x = 11$ , entonces

$$3^{-1}(3x) = 3^{-1}(11) \quad \text{de modo que } x = \frac{11}{3}$$

Si se puede aplicar un procedimiento similar a la ecuación *matricial*

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{1}$$

entonces se necesita un inverso multiplicativo de  $\mathbf{A}$  —esto es, una matriz  $\mathbf{C}$  tal que  $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$ . Entonces basta con multiplicar ambos lados de la ecuación (1) por  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(\mathbf{AX}) &= \mathbf{CB} \\ (\mathbf{CA})\mathbf{X} &= \mathbf{CB} \\ \mathbf{IX} &= \mathbf{CB} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{CB}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es  $\mathbf{X} = \mathbf{CB}$ . Por supuesto, este método está basado en la existencia de una matriz  $\mathbf{C}$  tal que  $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$ . Cuando esta matriz existe, se dice que es una *matriz inversa* (o simplemente la *inversa*) de  $\mathbf{A}$ .

### DEFINICIÓN

Si  $\mathbf{A}$  es una matriz cuadrada y existe una matriz  $\mathbf{C}$  tal que  $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$ , entonces  $\mathbf{C}$  se llama inversa de  $\mathbf{A}$ , y se dice que  $\mathbf{A}$  es *invertible*.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### INVERSA DE UNA MATRIZ

Los mensajes secretos pueden encriptarse por medio de un código y una matriz de codificación. Suponga que se tiene el código siguiente:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Sea  $\mathbf{E}$  la matriz de codificación. Entonces es posible codificar un mensaje tomando cada dos letras del mensaje, convertirlas a sus números correspondientes con una matriz de  $2 \times 1$  y luego multiplicar cada matriz por  $\mathbf{E}$ . El mensaje puede descifrarse con una matriz de decodificación que es la inversa de la matriz de codificación —esto es,  $\mathbf{E}^{-1}$ . Determine si las matrices de codificación

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

son inversas una de la otra.

#### EJEMPLO 1 Inversa de una matriz

Sea  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ . Como

$$\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

la matriz  $\mathbf{C}$  es una inversa de  $\mathbf{A}$ .



Puede demostrarse que una matriz invertible tiene una y sólo una inversa; esto es, la inversa es única. Así, en el ejemplo 1, la matriz  $\mathbf{C}$  es la *única* matriz tal que  $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$ . Por esta razón, puede hablarse de *la inversa* de una matriz invertible  $\mathbf{A}$ , que se denota por el símbolo  $\mathbf{A}^{-1}$ . De acuerdo con esto,  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ . Además, aunque la multiplicación matricial por lo general no es comutativa, es un hecho que  $\mathbf{A}^{-1}$  *commuta con A*:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

De regreso a la ecuación matricial  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , de acuerdo con la ecuación (1) puede establecerse lo siguiente:

Si  $\mathbf{A}$  es una matriz invertible, entonces la ecuación matricial  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$  tiene la solución única  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ .

Es probable que la idea de una matriz inversa provoque en el lector la impresión de haberla visto antes. En la sección 2.4 se estudiaron las funciones inversas, las cuales pueden usarse para entender con mayor profundidad las matrices inversas. Primero, se observa que la idea de una función no está limitada al mundo de los números. Por ejemplo, si se tiene una regla que puede aplicarse a las matrices y que proporciona, para cada una de ciertas matrices  $\mathbf{X}$ , una matriz única y bien definida  $f(\mathbf{X})$ , entonces podría decirse que  $f$  es una función que toma matrices a matrices. De manera más específica, suponga que  $\mathbf{A}$  es una matriz de  $m \times n$  y defina  $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX}$ , donde  $\mathbf{X}$  es cualquier matriz de  $n \times 1$ . Entonces, esta regla  $f$  proporciona una función del conjunto de matrices de  $n \times 1$  al conjunto de matrices de  $m \times 1$ . Si  $m = n$ , puede mostrarse que la función dada por  $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX}$  tiene una inversa, en el sentido de la sección 2.4, si y sólo si  $\mathbf{A}$  tiene una matriz inversa  $\mathbf{A}^{-1}$ , en cuyo caso  $f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}$ . Sólo hay una precaución que debe to-

**ADVERTENCIA**

Para las funciones en general,  $g \circ f = I$  no implica que  $f \circ g = I$ .

marse aquí. En general, para que una función  $f$  tenga una inversa, digamos  $g$ , se requiere que tanto  $g \circ f = I$  como  $f \circ g = I$ , donde  $I$  es la función identidad. Es un hecho bastante especial acerca de las matrices que  $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$  implique  $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$ .

Si  $f$  es una función, en el sentido más general posible, que tiene una inversa, entonces cualquier ecuación de la forma  $f(x) = b$  tiene una solución única, a saber,  $x = f^{-1}(b)$ .

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2****USO DE LA INVERSA PARA RESOLVER UN SISTEMA**

Suponga que se utilizó la matriz de codificación  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  para encriptar un mensaje. Utilice el código del Principio en práctica 1 y la inversa  $\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$  para decodificar el mensaje que está dividido en las siguientes partes:

28, 46, 65, 90

61, 82

59, 88, 57, 86

60, 84, 21, 34, 76, 102

**EJEMPLO 2 Uso de la inversa para resolver un sistema**

*Resuelva el sistema*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 7x_2 = 18 \end{cases}$$

**Solución:** En forma matricial se tiene  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix}$$

En el ejemplo 1, se mostró que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que,

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

de modo que  $x_1 = -1$  y  $x_2 = 3$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

Con el fin de aplicar el método del ejemplo 2 a un sistema, se deben cumplir dos condiciones:

1. El sistema debe tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.
2. La matriz de coeficientes debe ser invertible.

En lo que concierne a la condición 2, es necesario tener en cuenta que no todas las matrices cuadradas son invertibles. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+b \\ 0 & c+d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De aquí que no existe matriz que posmultipliquada por  $\mathbf{A}$  produzca la matriz identidad. Por lo tanto,  $\mathbf{A}$  no es invertible.

Existe un procedimiento mecánico interesante que permite determinar de manera simultánea si una matriz es invertible o no y encontrar su inversa si es que existe. Se basa en una observación cuya demostración puede llevarnos demasiado lejos. Primero recuerde que para una matriz  $\mathbf{A}$  existe una sucesión  $E_1, E_2, \dots, E_k$  de operaciones elementales con renglones que, cuando se aplican sobre  $\mathbf{A}$ , producen una matriz reducida. En otras palabras, se tiene

$$\mathbf{A} \xrightarrow{E_1} \mathbf{A}_1 \xrightarrow{E_2} \mathbf{A}_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{E_k} \mathbf{A}_k$$

donde  $\mathbf{A}_k$  es una matriz reducida. También recuerde que  $\mathbf{A}_k$  es única y determinada sólo por  $\mathbf{A}$  (aunque puede haber muchas sucesiones de longitud variable de operaciones elementales con renglones, que conduzcan a esta reducción). Si  $\mathbf{A}$  es cuadrada, por ejemplo de  $n \times n$ , entonces se *puede* tener que  $\mathbf{A}_k = \mathbf{I}_n$ , la matriz identidad de  $n \times n$ .

**ADVERTENCIA**

Toda matriz identidad es una matriz reducida, pero no todas las matrices reducidas (cuadradas) constituyen una matriz identidad. Por ejemplo, cualquier matriz cero  $\mathbf{O}$  es reducida.

**TEOREMA**

Para las matrices cuadradas  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}_k$ , como se definieron previamente,  $\mathbf{A}$  es invertible si y sólo si  $\mathbf{A}_k = \mathbf{I}$ . Además, si  $E_1, E_2, \dots, E_k$  es una sucesión de operaciones elementales con renglones que convierte a  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{I}$ , entonces la misma sucesión convierte a  $\mathbf{I}$  en  $\mathbf{A}^{-1}$ .

**EJEMPLO 3 Determinación de la invertibilidad de una matriz**

*Aplique el teorema para determinar si la matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

*es invertible.*

**Estrategia** Se aumentará  $\mathbf{A}$  con una copia de la matriz identidad de  $2 \times 2$  (de la misma manera que se ha aumentado una matriz mediante un vector columna). El resultado será una matriz de  $2 \times 4$ . Se aplicarán operaciones elementales con renglones a toda la matriz de  $2 \times 4$  hasta que las primeras  $n$  columnas formen una matriz reducida. Si el resultado es  $\mathbf{I}$ , entonces por el teorema,  $\mathbf{A}$  es invertible; pero debido a que se han aplicado las operaciones elementales a toda la matriz, las últimas  $n$  columnas se transformarán, también por el teorema, de  $\mathbf{I}$  a  $\mathbf{A}^{-1}$ , en el caso de que  $\mathbf{A}$  sea invertible.

**Solución:** Se tiene

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} | \mathbf{I}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right] = [\mathbf{I} | \mathbf{B}] \end{aligned}$$

Como  $[\mathbf{A} | \mathbf{I}]$  se transforma con  $\mathbf{I}$  a la izquierda de la barra de aumento, la matriz  $\mathbf{A}$  es invertible y la matriz  $\mathbf{B}$  a la derecha de la barra de aumento es  $\mathbf{A}^{-1}$ . De manera específica, se concluye que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



De hecho, este procedimiento es general.

**Método para encontrar la inversa de una matriz**

Si  $\mathbf{A}$  es una matriz de  $n \times n$ , forme la matriz de  $n \times (2n)$ ,  $[\mathbf{A} | \mathbf{I}]$ , después realice operaciones elementales con renglones hasta que las primeras  $n$  columnas formen una matriz reducida. Suponga que el resultado es  $[\mathbf{R} | \mathbf{B}]$  de manera que se tiene

$$[\mathbf{A} | \mathbf{I}] \rightarrow \cdots \rightarrow [\mathbf{R} | \mathbf{B}]$$

Si  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , entonces  $\mathbf{A}$  es invertible y  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$ . Si  $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$  entonces  $\mathbf{A}$  no es invertible, lo que significa que  $\mathbf{A}^{-1}$  no existe (y la matriz  $\mathbf{B}$  no es particularmente interesante para los temas tratados aquí).

**EJEMPLO 4 Determinación de la inversa de una matriz**

Determine  $\mathbf{A}^{-1}$  si  $\mathbf{A}$  es invertible.

$$\mathbf{a. } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

**Solución:** De acuerdo con el procedimiento anterior, se tiene

$$\begin{array}{c} [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{-4R_1 + R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{-1R_1 + R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{-2R_2 + R_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{2R_3 + R_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{\frac{9}{2}R_3 + R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Las tres primeras columnas de la última matriz forman a  $\mathbf{I}$ . Por lo que  $\mathbf{A}$  es invertible y

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

**Solución:** Se tiene

$$\begin{array}{c} [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Las primeras dos columnas de la última matriz forman una matriz reducida diferente de  $\mathbf{I}$ . Por lo tanto,  $\mathbf{A}$  no es invertible.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

## TECNOLOGÍA

La determinación de la inversa de una matriz invertible con una calculadora puede ahorrar un tiempo considerable. En la figura 6.5 se muestra la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Además, en la calculadora TI-83 Plus puede desplegarse la respuesta con entradas fraccionarias.

```
[A]-1
[[.4 -.2]
[-.1 .3]]
Ans>Frac
[[2/5 -1/5]
[-1/10 3/10]]
```

**FIGURA 6.5** Inversa de  $\mathbf{A}$  con entradas decimales y con entradas fraccionarias.

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

## USO DE LA INVERSA PARA RESOLVER UN SISTEMA

Un grupo de inversionistas tiene \$500 000 para invertir en las acciones de tres compañías. La compañía A vende a \$50 cada acción y se espera que reditúe un rendimiento de 13% al año. La compañía B vende en \$20 la acción y su rendimiento esperado es de 15% anual. La compañía C vende en \$80 una acción y se espera reporte un rendimiento de 10% anual. El grupo planea comprar el doble de acciones de la compañía A que de la compañía C. Si la meta del grupo es 12% de rendimiento anual, ¿cuántas acciones de cada compañía deben comprar los inversionistas?

Ahora se resolverá un sistema con el uso de la inversa.

## EJEMPLO 5 Uso de la inversa para resolver un sistema

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -1 \end{cases}$$

por determinación de la inversa de la matriz de coeficientes.

**Solución:** En forma matricial, el sistema es  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

es la matriz de coeficientes. Del ejemplo 4(a),

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución está dada por  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -17 \\ -4 \end{bmatrix}$$

de modo que  $x_1 = -7$ ,  $x_2 = -17$  y  $x_3 = -4$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27



## ADVERTENCIA

El método de reducción en las secciones 6.4 y 6.5 conlleva un cálculo más rápido que el de encontrar una matriz inversa.

Puede demostrarse que un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas tiene solución única si y sólo si la matriz de coeficientes es invertible. En efecto, en el ejemplo anterior la matriz de coeficientes es invertible y existe una solución única para el sistema. Cuando la matriz de coeficientes no es invertible, el sistema tiene un número infinito de soluciones, o bien, ninguna solución.

Aunque la solución de un sistema mediante una matriz inversa es muy elegante, es necesario tomar una precaución. Dado  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , el trabajo de cálculo requerido para encontrar  $\mathbf{A}^{-1}$  es mayor que el requerido para reducir  $[\mathbf{A} | \mathbf{B}]$ . Si usted tiene varias ecuaciones por resolver, todas con la misma matriz de coeficientes pero lados derechos variables, digamos,  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}_2$ , ...,  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}_k$ , entonces en el caso de una  $k$  suficientemente grande podría ser más rápido calcular  $\mathbf{A}^{-1}$  que hacer  $k$  reducciones, pero en la mayoría de las ocasiones, un análisis numérico lo convencerá de lo contrario. No olvide que aún con  $\mathbf{A}^{-1}$  a la mano es necesario calcular  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ , y si el orden de  $\mathbf{A}$  es grande, esto también requiere de un tiempo considerable.

## EJEMPLO 6 Una matriz de coeficientes que no es invertible

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

**Solución:** La matriz de coeficientes es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Como

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

la matriz de coeficientes no es invertible. De aquí que el sistema *no puede* resolverse por medio de inversas. En este caso debe utilizarse otro método. En el ejemplo 4(a) de la sección 6.5, la solución que se determinó fue  $x = -3r$ ,  $y = -r$  y  $z = r$ , donde  $r$  es cualquier número real (lo que proporciona un número infinito de soluciones).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

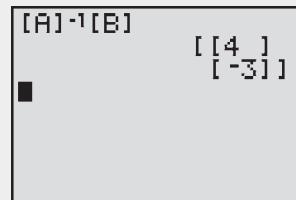


## TECNOLOGÍA

Para resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x + 4y = -8 \end{cases}$$

con una calculadora graficadora, se introduce la matriz de coeficientes como  $[A]$  y la matriz columna de constantes como  $[B]$ . El producto  $[A]^{-1}[B]$  en la figura 6.6 proporciona la solución  $x = 4, y = -3$ .



**FIGURA 6.6**  $[A]^{-1}[B]$  proporciona la solución  $x = 4, y = -3$  para el sistema de ecuaciones.

## Problemas 6.6

En los problemas 1 a 18, si la matriz dada es invertible, encuentre su inversa.

\*1.  $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

2.  $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

3.  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

4.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

5.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

6.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

\*7.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

8.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

9.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

10.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

13.  $\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14.  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

15.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

16.  $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

17.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

18.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

\*19. Resuelva  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$  si

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

20. Resuelva  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$  si

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para los problemas 21 a 34, si la matriz de coeficientes del sistema es invertible, resuelva el sistema mediante la inversa. Si no es así, resuelva el sistema por el método de reducción.

\*21.  $\begin{cases} 6x + 5y = 2 \\ x + y = -3 \end{cases}$

22.  $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ -x + 3y = -2 \end{cases}$

23.  $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

24.  $\begin{cases} 3x + 2y = 26 \\ 4x + 3y = 37 \end{cases}$

25.  $\begin{cases} 2x + 6y = 2 \\ 3x + 9y = 3 \end{cases}$

26.  $\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 3x + 9y = 7 \end{cases}$

\*27.  $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

28.  $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = -1 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$

29.  $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

30.  $\begin{cases} 2x + 8z = 8 \\ -x + 4y = 36 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$

\*31.  $\begin{cases} x + 3y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

32.  $\begin{cases} x + 3y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

33.  $\begin{cases} w + 2y + z = 4 \\ w - x + 2z = 12 \\ 2w + x + z = 12 \\ w + 2x + y + z = 12 \end{cases}$  34.  $\begin{cases} w + x - y = 1 \\ x + y + z = 0 \\ -w + x + y = 1 \\ w - x - y + 2z = 1 \end{cases}$

En los problemas 35 y 36, encuentre  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  para la matriz  $\mathbf{A}$  dada.

35.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

36.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

37. **Producción de automóviles** Resuelva los problemas siguientes con el uso de la inversa de la matriz implicada.

- (a) Una fábrica de automóviles produce dos modelos, A y B. El modelo A requiere una hora de mano de obra para pintarlo y una hora más para pulirlo; el modelo B requiere de una hora de mano de obra para cada uno de los dos procesos. Por cada hora que la línea de ensamblado funciona, existen 100 horas de mano de obra disponibles para pintura y 80 horas para pulido. ¿Cuántos automóviles de cada modelo pueden terminarse cada hora si se utilizan todas las horas de mano de obra?



- (b) Suponga que cada modelo A requiere 10 partes de tipo 1 y 14 de tipo 2, mientras que cada modelo B requiere 7 partes tipo 1 y 10 de tipo 2. La fábrica puede obtener 800 partes tipo 1 y 1130 de tipo 2 cada hora. ¿Cuántos automóviles de cada modelo se producen, si se utilizan todas las partes disponibles?

38. Si  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$  donde  $a, b, c \neq 0$ , demuestre que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}$$

39. (a) Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son matrices invertibles con el mismo orden, demuestre que  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ . [Una pista: demuestre que

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{I}$$

y utilice el hecho de que la inversa es única.]

- (b) Si

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

encuentre  $(\mathbf{AB})^{-1}$ .

40. Si  $\mathbf{A}$  es invertible, puede demostrarse que  $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ . Verifique esta relación si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

41. Se dice que una matriz  $\mathbf{P}$  es *ortogonal* si  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ . ¿La matriz  $\mathbf{P} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  es ortogonal?

42. **Mensaje secreto** Un amigo le ha enviado un mensaje secreto que consiste en tres matrices renglón de números como sigue:

$$\mathbf{R}_1 = [33 \quad 87 \quad 70] \quad \mathbf{R}_2 = [57 \quad 133 \quad 20]$$

$$\mathbf{R}_3 = [38 \quad 90 \quad 33]$$

Entre los dos han diseñado la siguiente matriz (utilizada por su amigo para codificar el mensaje):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Para descifrar el mensaje proceda de la manera siguiente:

- (a) Calcule los tres productos matriciales  $\mathbf{R}_1\mathbf{A}^{-1}$ ,  $\mathbf{R}_2\mathbf{A}^{-1}$  y  $\mathbf{R}_3\mathbf{A}^{-1}$ .

- (b) Suponga que las letras del alfabeto corresponden a los números del 1 al 26, reemplace los números en estas tres matrices por letras y determine el mensaje.

43. **Inversión** Un grupo de inversionistas decide invertir \$500 000 en las acciones de tres compañías. La compañía D vende en \$60 cada acción y de la cual se espera un rendimiento 16% anual. La compañía E vende en \$80 cada acción y se espera que su rendimiento alcance el 12% anual. El precio de las acciones de la compañía F asciende a \$30 y su rendimiento esperado es de 9% anual. El grupo planea comprar cuatro veces más acciones de la compañía F que de la E. Si la meta del grupo es 13.68% de rendimiento anual, ¿cuántas acciones de cada compañía deben comprar los inversionistas?

44. **Inversión** Los inversionistas del problema 43 deciden probar con una nueva estrategia de inversión con las mismas compañías. Desean comprar el doble de acciones de la compañía F que de la compañía E, y tienen la meta de 14.52% de rendimiento anual. ¿Cuántas acciones de cada tipo deben comprar?

Utilice una calculadora graficadora en los problemas 45 y 46 para (a) encontrar  $\mathbf{A}^{-1}$ , exprese sus entradas en forma decimal, redondee a dos decimales. (b) Expresé las entradas de  $\mathbf{A}^{-1}$  en forma fraccionaria, si su calculadora tiene esa capacidad. [Precaución: para el inciso (b), utilice la matriz  $\mathbf{A}^{-1}$  de la calculadora para convertir las entradas a forma fraccionaria: no utilice la matriz de valores redondeados del inciso (a).]

45.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{7} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

46.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 4 & 8 & 9 \\ -7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

47. Si  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.6 & -0.3 \\ -0.2 & 0.1 & -0.1 \\ -0.3 & -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$ , encuentre  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ , donde  $\mathbf{I}$  es

la matriz identidad de orden 3. Redondee las entradas a dos decimales.

En los problemas 48 y 49 utilice una calculadora graficadora para resolver el sistema con el uso de la inversa de la matriz de coeficientes.

48.  $\begin{cases} 0.9x + 3y - 4.7z = 13 \\ 2x - 0.4y + 2z = 4.7 \\ x - 0.8y - 0.5z = 7.2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}w + 4x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{7}z = \frac{14}{13} \\ \frac{5}{9}w - \frac{2}{3}x - 4y - z = \frac{7}{8} \end{cases}$$

49.  $\begin{cases} x - \frac{4}{9}y + \frac{5}{6}z = 9 \\ \frac{1}{2}w + 4y - \frac{1}{3}z = \frac{4}{7} \end{cases}$

**OBJETIVO**

Utilizar los métodos de este capítulo para analizar la producción de los sectores de una economía.

## 6.7 Análisis de insumo-producto de Leontief

Las matrices de insumo-producto desarrolladas por Wassily W. Leontief<sup>6</sup> indican las interrelaciones que se establecen entre la oferta y la demanda en los diferentes sectores de una economía durante algún periodo. La frase *insumo-producto* se utiliza porque las matrices muestran los valores de los productos de cada industria que son vendidos como insumo, tanto a las industrias como a los consumidores finales.

Un ejemplo hipotético para una economía muy simplificada que consta de dos industrias, está dado por la matriz de insumo-producto siguiente. Antes de explicar la matriz, debe considerar que los sectores *industriales* son los de manufactura, acero, agricultura, carbón, etcétera. El *otro sector de factores de producción* consiste en los costos para las respectivas industrias, como mano de obra, utilidad, etcétera. El sector de *demandas finales* podría ser el de consumo doméstico, gubernamental, etcétera. La matriz es como sigue:

		Consumidores (insumo)		
		Industria	Industria	Demandas finales
		A	B	
<b>Productores (producto):</b>				
<i>Industria A</i>		240	500	460
<i>Industria B</i>		360	200	940
<i>Otros factores de producción</i>		600	800	—
<b>Totales</b>		1200	1500	

Cada industria aparece en un renglón y en una columna. El renglón muestra las compras del producto de una industria por parte de los sectores industriales y de los consumidores finales (de aquí el término *demandas finales*). Las entradas representan los valores de los productos y podrían estar expresadas en unidades de millones de dólares de producto. Por ejemplo, de la producción total de la industria A, 240 se destinaron a servir como insumo para la propia industria A (para uso interno), 500 se asignaron a la industria B y 460 se distribuyeron directamente en el sector de la demanda final. La producción total de A es la suma de la demanda industrial y la demanda final ( $240 + 500 + 460 = 1200$ ).

La columna de cada industria da el valor de lo que ésta compró como insumo de cada una de las industrias, así como lo que se gastó por otros conceptos. Por ejemplo, a fin de producir 1200 unidades, la industria A compró 240 unidades de su producto, 360 de la producción de B y tiene gastos de mano de obra y otros por 600 unidades.

Observe que para cada industria, la suma de las entradas en su renglón es igual a la suma de las entradas en su columna. Es decir, el valor de la producción total de A es igual al valor de los insumos totales de A.

El análisis de insumo-producto permite estimar la producción total de cada sector *industrial* si existe un cambio en la demanda final, *siempre y cuando la estructura básica de la economía permanezca igual*. Este importante supuesto significa que para cada industria, la cantidad gastada en cada insumo por cada dólar de producto, debe permanecer fija.

Por ejemplo, al tener una producción con un valor de 1200 unidades, la industria A compra 240 unidades de la industria A, 360 de la industria B y gasta 600 unidades en otros conceptos. Así, por cada dólar de producción, la industria A gasta  $\frac{240}{1200} = \frac{1}{5}$  (= \$0.20) en A,  $\frac{360}{1200} = \frac{3}{10}$  (= \$0.30) en B y  $\frac{600}{1200} = \frac{1}{2}$  (= \$0.50) en otros conceptos. Al combinar estas razones fijas de la industria A con aquellas de la industria B, pueden darse los requerimientos por dólar de producción para cada industria:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ \text{Otros} \end{matrix} & \left[ \begin{matrix} \frac{240}{1200} & \frac{500}{1500} \\ \frac{360}{1200} & \frac{200}{1500} \\ \frac{600}{1200} & \frac{800}{1500} \end{matrix} \right] & = \left[ \begin{matrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{2} & \frac{8}{15} \end{matrix} \right] \begin{matrix} A \\ B \\ \text{Otros} \end{matrix} \end{array}$$

<sup>6</sup>Leontief ganó el premio Nobel de economía en 1973 por el desarrollo del método de “insumo-producto” y sus aplicaciones a problemas económicos.

Las entradas en la matriz se llaman **coeficientes de insumo-producto**. La suma de cada columna es 1.

Ahora, suponga que el valor de la demanda final cambia de 460 a 500 para la industria  $A$ , y de 940 a 1200 para la industria  $B$ . Sería deseable estimar el valor de la producción *total* que  $A$  y  $B$  deben alcanzar, tanto para la industria como para la demanda final, a fin de satisfacer esta meta, a condición de que la estructura en la matriz precedente permanezca igual.

Sean  $x_A$  y  $x_B$  los nuevos valores de producción total para las industrias  $A$  y  $B$ , respectivamente. Ahora, para  $A$ .

$$\begin{array}{c} \text{valor total de} \\ \text{la producción de } A \end{array} = \begin{array}{c} \text{valor consumido} \\ \text{por } A \end{array} + \begin{array}{c} \text{valor consumido} \\ \text{por } B \end{array} + \begin{array}{c} \text{valor consumido por} \\ \text{la demanda final} \end{array}$$

así, se tiene

$$x_A = \frac{1}{5}x_A + \frac{1}{3}x_B + 500$$

De manera similar, para  $B$ ,

$$x_B = \frac{3}{10}x_A + \frac{2}{15}x_B + 1200$$

Con el uso de la notación matricial puede escribirse

$$\begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 500 \\ 1200 \end{bmatrix} \quad (1)$$

En esta ecuación matricial, sean

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 500 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

Se llama  **$\mathbf{X}$  a la matriz de producción**,  **$\mathbf{A}$  es la matriz de coeficientes** y  **$\mathbf{D}$  la matriz de demanda final**. De la ecuación (1),

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{AX} + \mathbf{D} \\ \mathbf{X} - \mathbf{AX} &= \mathbf{D} \end{aligned}$$

Dada la producción  $\mathbf{X}$ , puede mostrarse que  $\mathbf{AX}$  es la cantidad de producción que se requiere para autosostener la economía. Si a esto le llamamos **demandा interna**, y se observa que la demanda final puede considerarse como una **demandा externa** más allá de lo que es necesario para la producción interna, entonces se llega a la ecuación conceptual:

$$\text{producción} = \text{demanda interna} + \text{demanda externa}$$

como una justificación adicional para  $\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{D}$ . Si  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ , entonces puede derivarse de la última ecuación

$$\begin{aligned} \mathbf{IX} - \mathbf{AX} &= \mathbf{D} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} &= \mathbf{D} \end{aligned}$$

que es un sistema ordinario de ecuaciones lineales escritas en forma matricial, en donde lo que se llama usualmente el coeficiente matricial está dado por  $\mathbf{I} - \mathbf{A}$  (aunque en la teoría de Leontief se ha usado el término *coeficiente matricial* para  $\mathbf{A}$ ).

Si  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  existe (y de hecho, existe, puesto que  $\mathbf{A}$  toma el lugar de una matriz de coeficientes, según lo que se ha expuesto en esta sección), entonces

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}$$

La matriz  $\mathbf{I} - \mathbf{A}$  se conoce como la **matriz de Leontief**. A pesar de la advertencia de la sección 6.6 acerca de la ineficiencia de los cálculos de matrices inversas, aquí se tiene una de las mejores ocasiones para calcular una inversa. La típica matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$  permanece constante mientras la estructura básica de la economía permanezca sin cambio. Así, la matriz de Leontief  $\mathbf{I} - \mathbf{A}$  también es una característica de una economía particular. Un planeador podría encontrar útil experimentar hasta encontrar la producción  $\mathbf{X}$  necesaria para satisfacer diferentes escenarios de demanda final  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_k$ . Si tiene a la mano la matriz  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ , entonces el experimento puede realizarse mediante  $k$  multiplicaciones de matrices:  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}_1, (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}_2, \dots, (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}_k$ .

```
(identity(2)-[A])
>[D]
[[1404.494382]
 [1870.786517]]
```

**FIGURA 6.7** Evaluación de una matriz de producción.

El aspecto de la eficiencia computacional puede ser muy serio. Mientras aquí se estudia este tema del análisis insumo-producto con ejemplos de economías divididas en dos o tres sectores, un modelo más realista podría consistir en 20 sectores —en cuyo caso, la matriz de Leontief tendría 400 entradas.

Para el caso que nos ocupa, se introducirán las matrices **A** y **D** en una calculadora graficadora. Con una TI-83, la matriz identidad de orden 2 se obtiene con el comando identity 2. Con la evaluación de  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{D}$ , como se muestra en la figura 6.7, se obtiene la matriz de producción

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1404.49 \\ 1870.79 \end{bmatrix}$$

Aquí se redondearon las entradas de **X** a dos decimales. Por lo tanto, para satisfacer la meta, la industria *A* debe producir el valor de 1404.49 unidades y la industria *B* debe producir 1870.79. Si existiera algún interés en el valor de los otros factores de producción para *A*, digamos  $P_A$ , entonces

$$P_A = \frac{1}{2}x_A = 702.25$$

### EJEMPLO 1 Análisis de insumo-producto

Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

	Industria			Demanda final
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	
<b>Industria:</b> <i>A</i>	240	180	144	36
<i>B</i>	120	36	48	156
<i>C</i>	120	72	48	240
<b>Otros</b>	120	72	240	—

suponga que la demanda final cambia a 77 para *A*, 154 para *B* y 231 para *C*. Encuentre la matriz de producción para esta economía (las entradas están en millones de dólares).

**Solución:** Se suman por separado las entradas en los primeros tres renglones. Los valores totales de producción para las industrias *A*, *B* y *C* son 600, 360 y 480, respectivamente. Para obtener la matriz de coeficientes **A**, se dividen las entradas de las industrias en cada columna entre el valor total de la producción para esa industria:

```
(identity(3)-[A])
>[D]
[[692.5]
 [380]
 [495]]
```

**FIGURA 6.8** Evaluación de la matriz de producción del ejemplo 1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{240}{600} & \frac{180}{360} & \frac{144}{480} \\ \frac{120}{600} & \frac{36}{360} & \frac{48}{480} \\ \frac{120}{600} & \frac{72}{360} & \frac{48}{480} \end{bmatrix}$$

La matriz de demanda final es

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 77 \\ 154 \\ 231 \end{bmatrix}$$

En la figura 6.8 se muestra el resultado de evaluar  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}$ . Así, la matriz de producción es

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 692.5 \\ 380 \\ 495 \end{bmatrix}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



Algunas veces, los datos para la matriz de coeficientes **A** (y por ende para la matriz de Leontief  $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ ) pueden proporcionarse de manera más directa, como lo muestra el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 2 Análisis de insumo-producto

Suponga que una economía simple consiste en tres sectores: agricultura (*A*), manufactura (*M*) y transporte (*T*). Los economistas han determinado que producir una unidad de *A* requiere de  $\frac{1}{18}$  unidades de *A*,  $\frac{1}{9}$  unidades de *M* y  $\frac{1}{9}$  unidades de *T*, mientras que la producción

de una unidad de  $M$  necesita  $\frac{3}{16}$  unidades de  $A$ ,  $\frac{1}{4}$  unidades de  $M$  y  $\frac{3}{16}$  unidades de  $T$ , y la producción de una unidad de  $T$  requiere de  $\frac{1}{15}$  unidades de  $A$ ,  $\frac{1}{3}$  unidades de  $M$  y  $\frac{1}{6}$  unidades de  $T$ . Existe una demanda externa por 40 unidades de  $A$ , 30 unidades de  $M$  y ninguna unidad de  $T$ . Determine los niveles de producción necesarios para satisfacer la demanda externa.



### ADVERTENCIA

Asegúrese de introducir la matriz de coeficientes  $A$ , y no su transpuesta. Cuando se presentan los datos de insumo-producto como en este ejemplo.

**Estrategia** Tras examinar los datos del ejemplo 1, se observa que para producir 600 unidades de  $A$  se requieren 240 unidades de  $A$ , 120 unidades de  $B$  y 120 unidades de  $C$ . Se deduce que para producir una unidad de  $A$  se requieren de  $\frac{240}{600} = \frac{2}{5}$  unidades de  $A$ ,  $\frac{120}{600} = \frac{1}{5}$  unidades de  $B$  y  $\frac{120}{600} = \frac{1}{5}$  unidades de  $C$ . Los números  $\frac{240}{600}$ ,  $\frac{120}{600}$  y  $\frac{120}{600}$  constituyen, en ese orden, la primera columna de la matriz de coeficientes. De aquí que los datos que se han dado describen la matriz de coeficientes, *columna por columna*.

**Solución:** La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{3}{16} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{3}{16} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

y la matriz de demanda externa es

$$D = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver  $(I - A)X = D$ , se reduce

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{17}{18} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{15} & 40 \\ -\frac{1}{9} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} & 30 \\ -\frac{1}{9} & -\frac{3}{16} & \frac{5}{6} & 0 \end{array} \right]$$

que se deja como un ejercicio con calculadora graficadora.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



## Problemas 6.7

1. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

	<i>Industria</i>		<i>Demanda final</i>
	<i>Acero</i>	<i>Carbón</i>	
<i>Industria: Acero</i>	200	500	500
<i>Carbón</i>	400	200	900
<i>Otros</i>	600	800	—

encuentre la matriz de producción, si la demanda final cambia a 600 para el acero y 805 para el carbón. Encuentre el valor total de los otros costos de producción que esto implica.

2. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

	<i>Industria</i>		<i>Demanda final</i>
	<i>Educación</i>	<i>Gobierno</i>	
<i>Industria: Educación</i>	40	120	40
<i>Gobierno</i>	120	90	90
<i>Otros</i>	40	90	—

encuentre la matriz de producción si la demanda final cambia a (a) 200 para educación y 300 para gobierno; (b) 64 para educación y 64 para gobierno.

3. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

	<i>Industria</i>			<i>Demanda final</i>
	<i>Grano</i>	<i>Fertilizante</i>	<i>Ganado</i>	
<i>Industria: Grano</i>	15	30	45	10
<i>Fertilizante</i>	25	30	60	5
<i>Ganado</i>	50	40	60	30
<i>Otros</i>	10	20	15	—

encuentre la matriz de producción (redondee las entradas a dos decimales), si la demanda final cambia a (a) 15 para granos, 10 para fertilizante y 35 para ganado; (b) 10 para grano, 10 para fertilizante y 10 para ganado.

4. Dada la matriz de insumo-producto,

	<i>Industria</i>			<i>Demanda final</i>
	<i>Agua</i>	<i>Electricidad</i>	<i>Agricultura</i>	
<i>Industria: Agua</i>	100	400	240	260
<i>Electricidad</i>	100	80	480	140
<i>Agricultura</i>	300	160	240	500
<i>Otros</i>	500	160	240	—

encuentre la matriz de producción, si la demanda final cambia a 500 para agua, 150 para electricidad y 700 para agricultura. Redondee sus entradas a dos decimales.

5. Dada la matriz de insumo-producto,

	<i>Industria</i>			<i>Demanda final</i>
	<i>Gobierno</i>	<i>Agricultura</i>	<i>Manufactura</i>	
<i>Industria: Gobierno</i>	400	200	200	200
<i>Agricultura</i>	200	400	100	300
<i>Manufactura</i>	200	100	300	400
<i>Otros</i>	200	300	400	—

en donde las entradas se encuentran en miles de millones de dólares, encuentre la matriz de producción para la economía, si la demanda final cambia a 300 para gobierno, 350 para agricultura y 450 para manufactura. Redondee las entradas al millar de millones de dólares más cercano.

6. Dada la matriz de insumo-producto del problema 5, encuentre la matriz de producción para la economía si la demanda final cambia a 250 para gobierno, 300 para agricultura y 350 para manufactura. Redondee las entradas al millar de millones de dólares más cercano.
7. Dada la matriz de insumo-producto del problema 5, determine la matriz de producción para la economía si la demanda final cambia a 300 para gobierno, 400 para agricultura y 500 para

manufactura. Redondee las entradas al millar de millones de dólares más cercano.

8. Una economía muy simple consiste en dos sectores: agricultura y molienda. Para producir una unidad de productos agrícolas se requieren  $\frac{1}{3}$  de unidad de productos agrícolas y  $\frac{1}{4}$  de unidad de productos de molienda. Para producir una unidad de productos de molienda se requieren  $\frac{3}{4}$  de unidad de productos agrícolas y ninguna unidad de productos de molienda. Determine los niveles de producción necesarios para satisfacer una demanda externa de 300 unidades de agricultura y 500 unidades de productos de molienda.

9. Una economía consiste de tres sectores: carbón, acero y trenes. Para producir una unidad de carbón se requiere  $\frac{1}{10}$  de unidad de carbón,  $\frac{1}{10}$  de unidad de acero y  $\frac{1}{10}$  de unidad de servicio de trenes. Para producir una unidad de acero se requiere  $\frac{1}{3}$  de unidad de carbón,  $\frac{1}{10}$  de unidad de acero y  $\frac{1}{10}$  de unidad de servicio de trenes. Para producir una unidad de servicio de trenes se requiere  $\frac{1}{4}$  de unidad de carbón,  $\frac{1}{3}$  de unidad de acero y  $\frac{1}{10}$  de unidad de servicio de trenes. Determine los niveles de producción necesarios para satisfacer una demanda externa de 300 unidades de carbón, 200 unidades de acero y 500 unidades de servicios de tren.

## 6.8 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

<b>Sección 6.1</b>	<b>Matrices</b>	
	matriz tamaño entrada, $a_{ij}$ vector renglón vector columna	Ej. 1, p. 228
	igualdad de matrices transpuesta de una matriz, $\mathbf{A}^T$ matriz cero, $\mathbf{O}$	Ej. 3, p. 230
<b>Sección 6.2</b>	<b>Suma de matrices y multiplicación por un escalar</b>	
	suma y resta de matrices multiplicación por un escalar	Ej. 4, p. 235
<b>Sección 6.3</b>	<b>Multiplicación de matrices</b>	
	multiplicación de matrices matriz identidad, $\mathbf{I}$ potencia de una matriz	Ej. 12, p. 247
	ecuación matricial, $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$	Ej. 13, p. 247
<b>Sección 6.4</b>	<b>Resolución de sistemas mediante la reducción de matrices</b>	
	matriz de coeficientes matriz aumentada	Ej. 3, p. 254
	operación elemental con renglones matrices equivalentes matriz reducida	Ej. 4, p. 255
	parámetro	Ej. 5, p. 256
<b>Sección 6.5</b>	<b>Resolución de sistemas mediante la reducción de matrices (continuación)</b>	
	sistema homogéneo sistema no homogéneo solución trivial	Ej. 4, p. 262
<b>Sección 6.6</b>	<b>Inversas</b>	
	matriz inversa matriz invertible	Ej. 1, p. 264
<b>Sección 6.7</b>	<b>Análisis de insumo-producto de Leontief</b>	
	matriz de insumo-producto matriz de Leontief	Ej. 1, p. 273

### Resumen

Una matriz es un arreglo rectangular de números encerrados entre corchetes. Hay algunos tipos especiales de matrices: matriz cero  $\mathbf{O}$ , matriz identidad  $\mathbf{I}$ , matriz cuadrada y matriz diagonal. Además de la operación básica de multiplicación por un escalar, están definidas las operaciones de suma y resta de matrices, que se aplican a matrices del mismo tamaño. El producto  $\mathbf{AB}$  está definido cuando el número de columnas de  $\mathbf{A}$  es igual al número de renglones de  $\mathbf{B}$ . Aunque la suma de matrices es conmutativa, la multiplicación no lo es. Si se utiliza la multiplicación matricial es posible expresar un sistema de ecuaciones lineales como la ecuación matricial  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ .

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución única, ninguna solución o un número infinito de soluciones. El mé-

todo principal para resolver un sistema de ecuaciones lineales con el uso de matrices consiste en aplicar las tres operaciones elementales con renglones a la matriz aumentada del sistema, hasta obtener una matriz reducida equivalente. La matriz reducida provoca que la solución o soluciones para el sistema sean obvias, y permite detectar si es que no existen soluciones. Si hay un número infinito de soluciones, la solución general implica al menos un parámetro.

En ocasiones, resulta útil encontrar la inversa de una matriz (cuadrada). La inversa (si existe) de una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  se encuentra al aumentar  $\mathbf{A}$  con  $\mathbf{I}$ , y aplicar operaciones elementales con renglones a  $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$  hasta que  $\mathbf{A}$  se reduzca, lo que resulta en  $[\mathbf{R}|\mathbf{B}]$  (donde  $\mathbf{R}$  está reducida). Si  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , entonces  $\mathbf{A}$  es invertible y

$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$ . Si  $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ , entonces  $\mathbf{A}$  no es invertible, lo que significa que  $\mathbf{A}^{-1}$  no existe. Si existe la inversa de una matriz  $\mathbf{A}$  de  $n \times n$ , entonces la solución única de  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$  está dada por  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ . Si  $\mathbf{A}$  no es invertible, el sistema no tiene solución, o bien, tiene un número infinito de soluciones.

### Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

En los problemas 1 a 8, simplifique.

1.  $2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2.  $8 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.  $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

4.  $[2 \ 3 \ 7] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

5.  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \right)$

6.  $-\left( \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \right)$

7.  $2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^2 [1 \ -2]^T$

8.  $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^T \right)^2$

En los problemas 9 a 12, calcule la matriz requerida si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

9.  $(2\mathbf{A})^T - 3\mathbf{I}^2$

10.  $\mathbf{A}(2\mathbf{I}) - \mathbf{AO}^T$

11.  $\mathbf{B}^3 + \mathbf{I}^5$

12.  $(\mathbf{ABA})^T - \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

En los problemas 13 y 14, resuelva para  $x$  y para  $y$ .

13.  $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} [x] = \begin{bmatrix} 15 \\ y \end{bmatrix}$

14.  $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & y \end{bmatrix}$

Reduzca las matrices dadas en los problemas 15 a 18.

15.  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

16.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

17.  $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

18.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

La aplicación final de matrices, en este libro, se fundamenta en las relaciones que existen entre los diferentes sectores de una economía, lo que se conoce como análisis de insumo-producto de Leontief.

Resuelva cada uno de los sistemas de los problemas 19 a 22 por el método de reducción.

19.  $\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$

20.  $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 3x + y + z = 5 \end{cases}$

21.  $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x - 2y - 4z = -7 \\ 2x - y - 2z = 2 \end{cases}$

22.  $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y + 2z + 3 = 0 \\ 2x + 2z + 7 = 0 \end{cases}$

Encuentre las inversas de las matrices de los problemas 23 a 26.

23.  $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

24.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

25.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

26.  $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

En los problemas 27 y 28, resuelva el sistema dado con el uso de la inversa de la matriz de coeficientes.

27.  $\begin{cases} 3x + y + 4z = 1 \\ x + z = 0 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$

28.  $\begin{cases} 5x = 3 \\ -5x + 2y + z = 0 \\ -5x + y + 3z = 2 \end{cases}$

29. Sea  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Encuentre las matrices  $\mathbf{A}^2$ ,  $\mathbf{A}^3$ ,  $\mathbf{A}^{1000}$  y  $\mathbf{A}^{-1}$  (si es que existe la inversa).

30.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ , muestre que  $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ .

31. Un consumidor desea completar su consumo vitamínico en *exactamente* 13 unidades de vitamina A, 22 de vitamina B y 31 de vitamina C por semana. Hay disponibles tres marcas de cápsulas vitamínicas. La marca I contiene 1 unidad de cada una de las vitaminas A, B y C por cápsula; la marca II contiene 1 unidad de vitamina A, 2 de B y 3 de C, y la marca III contiene 4 unidades de A, 7 de B y 10 de C.

(a) ¿Cuál combinación de cápsulas de las marcas I, II y III producirá *exactamente* las cantidades deseadas?

(b) Si las cápsulas de la marca I cuestan 5 centavos cada una, las de la marca II, 7 centavos cada una y las de la marca III, 20 centavos, ¿cuál combinación minimizará su costo semanal?

32. Suponga que  $\mathbf{A}$  es una matriz invertible de  $n \times n$ .
- Demuestre que  $\mathbf{A}^3$  es invertible.
  - Demuestre que si  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son matrices de  $n \times n$  tales que  $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ , entonces  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ .
  - Si  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$  (se dice que  $\mathbf{A}$  es *idempotente*), encuentre  $\mathbf{A}$ .
33. Si  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$ , encuentre  $3\mathbf{AB} - 4\mathbf{B}^2$ .
34. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 7.9x - 4.3y + 2.7z = 11.1 \\ 3.4x + 5.8y - 7.6z = 10.8 \\ 4.5x - 6.2y - 7.4z = 15.9 \end{cases}$$

con el uso de la inversa de la matriz de coeficientes. Redondee sus respuestas a dos decimales.

35. Dada la matriz de insumo-producto

	<i>Industria</i>		<i>Demanda final</i>
	A	B	
<i>Industria: A</i>	10	20	4
<i>B</i>	15	14	10
<i>Otros</i>	9	5	—

encuentre la matriz de producción, si la demanda final cambia a 10 para  $A$  y 5 para  $B$ . (Los datos están en miles de millones de dólares.)

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Requerimientos de insulina como un proceso lineal<sup>7</sup>

Una posada vacacional en las montañas del estado de Washington tiene una bien merecida reputación por la atención que brinda a las necesidades especiales de salud de sus huéspedes. El gerente de la posada espera recibir cuatro huéspedes diabéticos dependientes de insulina la semana que viene. Dichos huéspedes planean hospedarse durante 7, 14, 21 y 28 días, respectivamente.

La posada se encuentra muy alejada de la farmacia más cercana, de modo que antes de que lleguen los huéspedes, el gerente planea obtener la cantidad total de insulina que se necesitará. Se requieren tres tipos diferentes de insulina: lenta, semilenta y ultralenta. El gerente almacenará la insulina y después el personal de la posada administrará la dosis diaria de los tres tipos a cada uno de los huéspedes.

Los requerimientos diarios de los tres enfermos son:

Huésped 1	20 unidades de insulina semilenta, 30 de lenta y 10 de ultralenta.
Huésped 2	40 unidades de insulina semilenta, 0 de lenta y 0 de ultralenta.
Huésped 3	30 unidades de insulina semilenta, 10 de lenta y 30 de ultralenta.
Huésped 4	10 unidades de insulina semilenta, 10 de lenta y 50 de ultralenta.

Esta información se representa en la siguiente matriz de “requerimientos” **A**:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3 \times 4} \quad \text{donde } \mathbf{A} \text{ está dada por}$$

	Huésped 1	Huésped 2	Huésped 3	Huésped 4
insulina semilenta	20	40	30	10
insulina lenta	30	0	10	10
insulina ultralenta	10	0	30	50

Recuerde que el huésped 1 permanecerá 7 días, el 2 estará 14 días, el 3 durante 21 días y el huésped 4 durante 28 días. El vector columna **T** representará el tiempo, en días, que cada huésped estará hospedado:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{bmatrix}$$

<sup>7</sup>Adaptado de Richard F. Baum, “Insulin Requirements as a Linear Process”, en R. M. Thrall, J. A. Mortimer, K. R. Rebman y R. F. Baum (editores), *Some Mathematical Models in Biology*, ed. rev. Reporte 40241-R-7. Preparado en la Universidad de Michigan, 1967.

Para determinar las cantidades totales de los tres tipos de insulina necesarios para los cuatro huéspedes, calcule el producto matricial **AT**.

$$\begin{aligned}\mathbf{AT} &= \begin{bmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{bmatrix} \\ &= 10(7) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= 70 \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1610 \\ 700 \\ 2100 \end{bmatrix} = \mathbf{B}\end{aligned}$$

El vector **B** (o **AT**) indica que los cuatro huéspedes requerirán un total de 1610 unidades de insulina semilenta, 700 unidades de insulina lenta y 2100 unidades de insulina ultralenta.

Ahora el problema cambiará un poco. Suponga que cada huésped decidió duplicar su tiempo de estancia original. El vector que da la cantidad total de insulina necesaria de los tres tipos es

$$\mathbf{A}(2\mathbf{T}) = 2(\mathbf{AT}) = 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3220 \\ 1400 \\ 4200 \end{bmatrix}$$

En efecto, si cada huésped planeó extender por un factor  $k$  ( $k \geq 0$ ) su tiempo original en la posada (es decir, el huésped 1 planeó permanecer  $k \cdot 7$  días, el huésped 2  $k \cdot 14$  días, y así sucesivamente), entonces los requerimientos de insulina serán

$$\mathbf{A}(k\mathbf{T}) = k(\mathbf{AT}) = k\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k \cdot 1610 \\ k \cdot 700 \\ k \cdot 2100 \end{bmatrix}$$

De manera similar, si los huéspedes decidieran agregar 1, 3, 4 y 6 días, respectivamente, a los tiempos que originalmente proyectaron permanecer, entonces las cantidades de insulina requeridas serían

$$\mathbf{A}(\mathbf{T} + \mathbf{T}_1) = \mathbf{AT} + \mathbf{AT}_1 \quad \text{donde } \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Con base en los resultados obtenidos hasta aquí, es obvio que la siguiente ecuación matricial generaliza la situación:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

esto es

$$\begin{bmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

que representa al sistema lineal

$$\begin{cases} 20x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 10x_4 = b_1 \\ 30x_1 + 10x_3 + 10x_4 = b_2 \\ 10x_1 + 30x_3 + 50x_4 = b_3 \end{cases}$$

donde  $x_i$  es el número de días que el huésped  $i$  permanece en la posada, y  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  dan, respectivamente, el número total de unidades de insulina semilenta, lenta y ultralenta necesarias para los cuatro huéspedes durante su estancia completa en la posada.

Por último, suponga una vez más que el vector  $\mathbf{T}$  representa el número de días que cada huésped planeó permanecer originalmente en la posada. Además, suponga que el vector  $\mathbf{C}$  proporciona el costo (en centavos) por unidad de insulina de los tres tipos, donde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \text{matriz del costo}$$

Esto es, una unidad de insulina semilenta cuesta 9 centavos, una unidad de lenta cuesta 8 centavos y una unidad de ultralenta cuesta 10 centavos. Entonces la cantidad total que pagó la posada por toda la insulina para los cuatro huéspedes es

$$\mathbf{C}^T(\mathbf{AT}) = \mathbf{C}^T \mathbf{B} = [9 \quad 8 \quad 10] \begin{bmatrix} 1610 \\ 700 \\ 2100 \end{bmatrix} = [41\ 090]$$

es decir, 41,090 centavos o \$410.90.

## Problemas

- Suponga que el huésped 1 permanecerá en la posada 7 días, el huésped 2 durante 10 días, el huésped 3 por 7 días y el 4 durante 5 días. Suponga que los requerimientos diarios de los cuatro y la matriz de costo son los mismos que los dados en el análisis anterior. Encuentre la cantidad total que la posada debe pagar por toda la insulina necesaria para los huéspedes.
- Suponga que los requerimientos de insulina de los cuatro huéspedes ascienden a 1180 unidades de insulina semilenta, 580 de lenta y 1500 de ultralenta. Suponga que los requerimientos diarios para los cuatro huéspedes son los mismos que en el análisis anterior. Con el empleo del método de la matriz inversa en una calculadora graficadora, determine la duración de la estancia de cada huésped, si el número total de días para los cuatro huéspedes es de 52.
- Suponga que los requerimientos diarios de los cuatro huéspedes y la matriz de costo son los mismos que los del análisis anterior. Dada solamente la cantidad total (en dólares) que la posada debe pagar por toda la insulina requerida, ¿es posible determinar la duración de la estancia de cada huésped? ¿Por qué sí o por qué no?

# 7

## PROGRAMACIÓN LINEAL

- 7.1 Desigualdades lineales en dos variables
- 7.2 Programación lineal
- 7.3 Soluciones óptimas múltiples
- 7.4 Método simplex
- 7.5 Degeneración, soluciones no acotadas y soluciones óptimas múltiples
- 7.6 Variables artificiales
- 7.7 Minimización
- 7.8 El dual
- 7.9 Repaso

### Aplicación práctica

Terapias con medicamentos y radiación

**L**a frase *programación lineal* pareciera implicar la escritura de un código computacional. Sin embargo, aunque la programación lineal con frecuencia se realiza en computadoras, la palabra “programación” de su nombre en realidad proviene de la terminología militar de la época de la Segunda Guerra Mundial, durante la cual el entrenamiento, el abastecimiento y los planes de despliegue de unidades eran llamados programas. Cada programa era una solución a un problema de asignación de recursos.

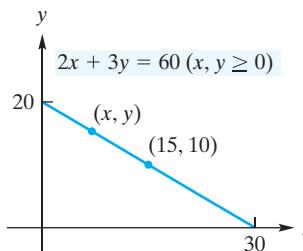
Por ejemplo, suponga que las unidades militares que se encuentran en un frente de combate necesitan combustible diesel. Cada unidad cuenta con un cierto número de tanques, camiones y otros vehículos; cada unidad utiliza sus vehículos para cumplir con la misión que se le ha encomendado, y cada misión tiene relación con la meta global de ganar la campaña. ¿Qué programa de distribución de combustible contribuirá mejor a la victoria global?

La resolución de este problema requiere de la cuantificación de sus diferentes elementos. Contar el número de galones de combustible y el número de cada tipo de vehículos es fácil, así como lo es la conversión de galones de combustible a millas que un automotor puede recorrer. La cuantificación de la relación entre millas de vehículo y el éxito de la misión de las distintas unidades incluye la identificación de restricciones: el máximo de galones que un tanque puede cargar a la vez, el número mínimo de millas que cada unidad debe recorrer para alcanzar su objetivo de combate, y así sucesivamente. Los factores cuantitativos adicionales incluyen probabilidades, como las oportunidades de que una unidad gane un combate clave si realiza cierta maniobra a lo largo de una ruta de viaje en lugar de otra.

La cuantificación de problemas complicados de la vida real con este enfoque es de la competencia de la llamada investigación de operaciones. Se utiliza la programación lineal, una de las más viejas y aún una de las más importantes herramientas de la investigación de operaciones, cuando se puede describir un problema mediante ecuaciones y desigualdades que son todas lineales.

**OBJETIVO**

Representar en forma geométrica la solución de una desigualdad lineal en dos variables y ampliar esta representación a un sistema de desigualdades lineales.



**FIGURA 7.1** Recta de presupuesto.

## 7.1 Desigualdades lineales en dos variables

Suponga que un consumidor recibe un ingreso fijo de \$60 semanales que utiliza *por completo* en la compra de los productos A y B. Si A cuesta \$2 por kilogramo y B cuesta \$3 por kilogramo y el consumidor compra  $x$  kilogramos de A y  $y$  kilogramos de B, su costo será  $2x + 3y$ . Puesto que agota sus \$60,  $x$  y  $y$  deben satisfacer

$$2x + 3y = 60 \text{ donde } x, y \geq 0$$

Las soluciones de esta ecuación, llamada *ecuación de presupuesto*, dan las posibles combinaciones de A y B que pueden comprarse con \$60. La gráfica de esta ecuación es la *recta de presupuesto* de la figura 7.1. Observe que  $(15, 10)$  pertenece a la recta. Esto significa que si se compran 15 kg de A, entonces deben comprarse 10 kg de B para tener un costo total de \$60.

Por otro lado, suponga que el consumidor no necesariamente desea gastar todos los \$60. En este caso, las posibles combinaciones están descritas por la desigualdad

$$2x + 3y \leq 60 \text{ donde } x, y \geq 0 \quad (1)$$

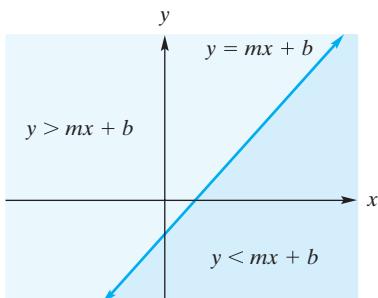
Cuando se estudiaron las desigualdades con una variable en el capítulo 1, se representó geométricamente su solución por *intervalos* sobre la recta de números reales. Sin embargo, la resolución para una desigualdad con dos variables, como en la desigualdad (1), por lo regular está representada por una *región* en el plano coordenado. Se encontrará la región correspondiente a la desigualdad (1) después de considerar las desigualdades en general.

**DEFINICIÓN**

Una **desigualdad lineal** con las variables  $x$  y  $y$  puede escribirse de una de las siguientes formas

$$ax + by + c < 0 \quad ax + by + c \leq 0 \quad ax + by + c > 0 \quad ax + by + c \geq 0$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes y ni  $a$  ni  $b$  son cero.



**FIGURA 7.2** Una recta no vertical determina dos semiplanos.

En forma geométrica, la solución (o gráfica) de una desigualdad lineal en  $x$  y  $y$  consiste en todos los puntos  $(x, y)$  en el plano, cuyas coordenadas satisfacen dicha desigualdad. Por ejemplo, una solución de  $x + 3y < 20$  es el punto  $(-2, 4)$ , puesto que la sustitución da

$$-2 + 3(4) < 20,$$

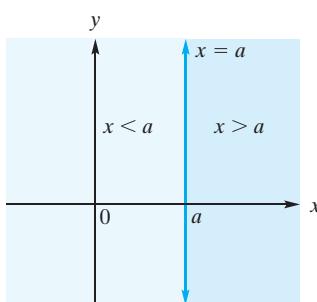
$10 < 20$ , que es verdadera

Es claro que existe un número infinito de soluciones, esto es común para toda desigualdad lineal.

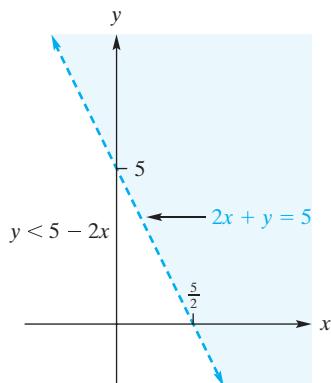
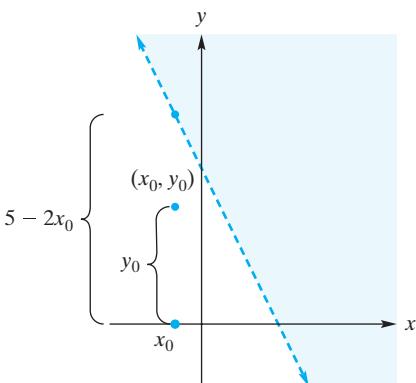
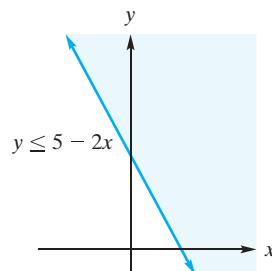
Para considerar las desigualdades lineales en general, advierta primero que la gráfica de una recta no vertical  $y = mx + b$ , separa al plano en tres partes distintas (vea la figura 7.2):

1. La recta misma, que consiste en todos los puntos  $(x, y)$  cuyas coordenadas satisfacen la ecuación  $y = mx + b$ .
2. La región *por encima* de la recta, que consiste en todos los puntos  $(x, y)$ , cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad  $y > mx + b$  (esta región se conoce como un *semiplano abierto*).
3. El semiplano abierto *por debajo* de la recta, que consiste en todos los puntos  $(x, y)$  cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad  $y < mx + b$ .

En la situación donde la desigualdad estricta “ $<$ ” se reemplaza por “ $\leq$ ” la solución de  $y \leq mx + b$  consiste en la recta  $y = mx + b$ , así como el semiplano por debajo de ella. En este caso se dice que la solución es un *semiplano cerrado*. Se puede hacer una afirmación semejante cuando “ $>$ ” se reemplaza por “ $\geq$ ”. Para una recta vertical  $x = a$  (vea la figura 7.3), se habla de un semiplano a la derecha ( $x > a$ ) de la recta o a la izquierda ( $x < a$ ). Como cualquier desigualdad lineal (en dos variables) puede expresarse en una de las formas que se han analizado, puede decirse que *la solución de una desigualdad lineal debe ser un semiplano*.



**FIGURA 7.3** Una recta vertical determina dos semiplanos.

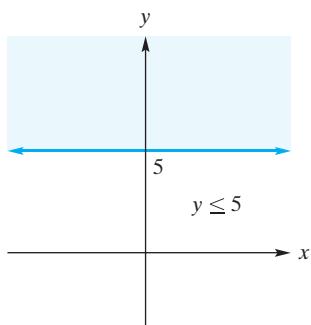
FIGURA 7.4 Gráfica de  $2x + y < 5$ .FIGURA 7.5 Análisis de un punto que satisface  $y < 5 - 2x$ .FIGURA 7.6 Gráfica de  $y \leq 5 - 2x$ .

En forma geométrica, la solución de una desigualdad lineal con una variable es un intervalo sobre la recta, pero la solución de una desigualdad lineal en dos variables es una región en el plano.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### RESOLUCIÓN DE UNA DESIGUALDAD LINEAL

Para conseguir dinero extra, usted fabrica dos tipos de imanes para refrigeradores: tipo A y tipo B. Usted hace una inversión inicial de \$50. El costo de producción para los imanes de tipo A es de \$0.90 por unidad y el costo de producción para el tipo B es de \$0.70 por imán. El precio del tipo A es de \$2.00 por imán y el precio del tipo B es de \$1.50. Sea  $x$  el número de imanes de tipo A y  $y$  el número de tipo B que se producen y venden. Escriba una desigualdad que describa que el ingreso es mayor que el costo. Resuelva la desigualdad y describa la región. También describa qué significa este resultado en términos de imanes.

FIGURA 7.7 Gráfica de  $y \leq 5$ .

Para aplicar estos hechos se resolverá la desigualdad lineal

$$2x + y < 5$$

Del estudio previo se sabe que la solución es un semiplano. Para encontrarlo se inicia por reemplazar el símbolo de desigualdad por un signo de igualdad y después se grafica la recta resultante,  $2x + y = 5$ . Esto es fácil de hacer si se seleccionan dos puntos sobre la recta —por ejemplo, las intersecciones  $(\frac{5}{2}, 0)$  y  $(0, 5)$ . (Vea la figura 7.4.) Debido a que los puntos sobre la recta no satisfacen la desigualdad " $<$ ", se utiliza una línea punteada para indicar que la recta no es parte de la solución. Ahora debe determinarse si la solución es el semiplano por *encima* de la recta o el semiplano por *debajo* de ella. Esto puede hacerse al resolver la desigualdad para  $y$ . Una vez que  $y$  esté aislada, el semiplano apropiado será evidente. Se tiene que

$$y < 5 - 2x$$

Del enunciado (3) anterior, se concluye que la solución consiste en el semiplano *por debajo* de la recta. La parte de la región que *no* satisface la desigualdad está sombreada en la figura 7.4. A partir de ahora, al graficar desigualdades se sombreará la parte de la región que *no* satisface la condición. Así, cuando  $(x_0, y_0)$  es *cualquier* punto en esta región, su ordenada  $y_0$  es menor que el número  $5 - 2x_0$ . (Vea la figura 7.5.) Por ejemplo,  $(-2, -1)$  está en la región y

$$\begin{aligned} -1 &< 5 - 2(-2) \\ -1 &< 9 \end{aligned}$$

Si, en lugar de esto, la desigualdad original hubiera sido  $y \leq 5 - 2x$ , entonces la recta  $y = 5 - 2x$  también se habría incluido en la solución. Lo anterior se indicaría mediante una línea continua en lugar de una línea punteada. Esta solución, que es un semiplano cerrado, se muestra en la figura 7.6. Tenga en mente que **una recta continua está incluida en la solución mientras que una recta punteada no lo está**.

#### EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad lineal

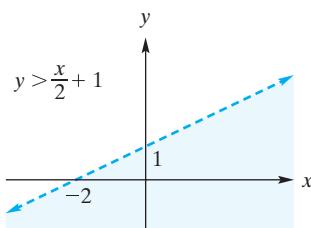
Encuentre la región definida por la desigualdad  $y \leq 5$ .

**Solución:** Debido a que  $x$  no aparece, se supone que la desigualdad es verdadera para todos los valores de  $x$ . La región consiste en la recta  $y = 5$ , junto con el semiplano por debajo de ella. (Vea la figura 7.7, donde la solución es la región *no* sombreada junto con la línea.)

#### EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad  $2(2x - y) < 2(x + y) - 4$ .

**Solución:** Primero se resuelve la desigualdad para  $y$ , de modo que el semiplano apropiado sea obvio. La desigualdad es equivalente a



**FIGURA 7.8** Gráfica de  $y > \frac{x}{2} + 1$ .

$$4x - 2y < 2x + 2y - 4$$

$$4x - 4y < 2x - 4$$

$$-4y < -2x - 4$$

$$y > \frac{x}{2} + 1$$

(al dividir ambos lados entre  $-4$  e invertir el sentido de la desigualdad)

Mediante una recta punteada ahora hacemos el bosquejo de  $y = (x/2) + 1$ , note que sus intersecciones son  $(0, 1)$  y  $(-2, 0)$ . Debido a que el símbolo de la desigualdad es  $>$ , se sombra el semiplano por debajo de la recta. Piense en el sombreado como una manera de tachar los puntos que no desea. (Vea la figura 7.8.) Cada punto de la región no sombreada es una solución.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



### ADVERTENCIA

El punto donde la gráfica de  $y = x$  se interseca con la de  $y = -2x + 3$  no está incluido en la solución. ¿Por qué?

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

#### RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Una tienda vende dos tipos de cámaras. Para cubrir los gastos generales debe vender al menos 50 por semana, y para satisfacer los requerimientos de la distribución debe vender al menos el doble del tipo I que de tipo II. Escriba un sistema de desigualdades para describir la situación. Sea  $x$  el número de cámaras de tipo I que el almacén vende en una semana y  $y$  el número de cámaras de tipo II que vende en una semana. Determine la región descrita por el sistema lineal de desigualdades.

### Sistemas de desigualdades

La solución de un *sistema* de desigualdades consiste en todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen de manera simultánea todas las desigualdades dadas. En forma geométrica, es la región común para todas las regiones determinadas por las desigualdades dadas. Por ejemplo, resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x + y > 3 \\ x \geq y \\ 2y - 1 > 0 \end{cases}$$

Primero se reescribe cada desigualdad de modo que  $y$  esté aislada. Esto resulta en el sistema equivalente

$$\begin{cases} y > -2x + 3 \\ y \leq x \\ y > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Enseguida se hace el bosquejo de las rectas correspondientes  $y = -2x + 3$ ,  $y = x$  y  $y = \frac{1}{2}$ , mediante rectas punteadas para la primera y tercera, y una línea continua para la segunda. Después se sombra la región que está por debajo de la primera recta, la región que está sobre la segunda línea y la región que está por debajo de la tercera recta. La región que no está sombreada (vea la figura 7.9) junto con cualquier línea continua que delimita una región son puntos de la solución del sistema de desigualdades.

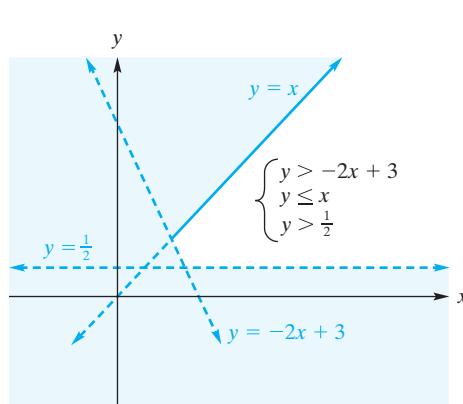
#### EJEMPLO 3 Resolución de un sistema de desigualdades lineales

Resuelva el sistema

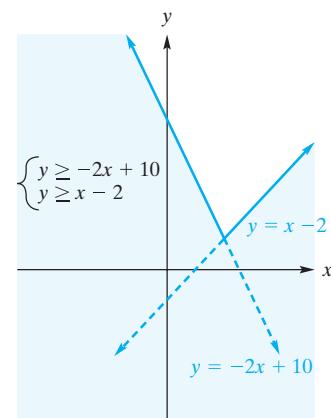
$$\begin{cases} y \geq -2x + 10 \\ y \geq x - 2 \end{cases}$$

**Solución:** La solución consiste en todos los puntos que están simultáneamente sobre o por encima de la recta  $y = -2x + 10$ , y sobre o por encima de la recta  $y = x - 2$ . Es la región que no está sombreada en la figura 7.10.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



**FIGURA 7.9** Solución de un sistema de desigualdades lineales.



**FIGURA 7.10** Solución de un sistema de desigualdades lineales.

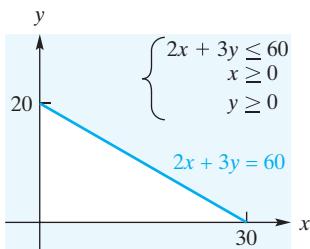


FIGURA 7.11 Solución de un sistema de desigualdades lineales.

**EJEMPLO 4 Resolución de un sistema de desigualdades lineales**

Encuentre la región descrita por

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

**Solución:** Este sistema se relaciona con la desigualdad (1) del inicio de esta sección. La primera desigualdad es equivalente a  $y \leq -\frac{2}{3}x + 20$ . Las últimas dos desigualdades restringen la solución a los puntos que están sobre o a la derecha del eje  $y$ , y al mismo tiempo, sobre o por encima del eje  $x$ . La región deseada es la que no está sombreada en la figura 7.11.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

**Problemas 7.1**

Resuelva las desigualdades de los problemas 1 a 24.

\*1.  $3x + 4y > 2$

2.  $3x - 2y \geq 12$

3.  $x + 2y \leq 7$

4.  $y > 6 - 2x$

5.  $-x \leq 2y - 4$

6.  $3x + 5y \geq 12$

7.  $3x + y < 0$

8.  $2x + 3y < -6$

\*9.  $\begin{cases} 3x - 2y < 6 \\ x - 3y > 9 \end{cases}$

10.  $\begin{cases} 2x + 3y > -6 \\ 3x - y < 6 \end{cases}$

11.  $\begin{cases} 2x + 3y \leq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$

12.  $\begin{cases} 2y - 3x < 6 \\ x < 0 \end{cases}$

13.  $\begin{cases} y - 3x < 5 \\ 2x - 3y > -6 \end{cases}$

14.  $\begin{cases} x - y < 1 \\ y - x < 1 \end{cases}$

15.  $\begin{cases} 2x - 2 \geq y \\ 2x \leq 3 - 2y \end{cases}$

16.  $\begin{cases} 2y < 4x + 2 \\ y < 2x + 1 \end{cases}$

\*17.  $\begin{cases} x - y > 4 \\ x < 2 \\ y > -5 \end{cases}$

18.  $\begin{cases} 5x + 2y < -3 \\ y > -x \\ 3x + 6 < 0 \end{cases}$

19.  $\begin{cases} y < 2x + 4 \\ x \geq -2 \\ y < 1 \end{cases}$

20.  $\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ x \leq y \\ y \leq 5x + 2 \end{cases}$

21.  $\begin{cases} x + y > 1 \\ 3x - 5 \leq y \\ y < 2x \end{cases}$

22.  $\begin{cases} 2x - 3y > -12 \\ 3x + y > -6 \\ y > x \end{cases}$

23.  $\begin{cases} 3x + y > -6 \\ x - y > -5 \\ x \geq 0 \end{cases}$

24.  $\begin{cases} 5y - 2x \leq 10 \\ 4x - 6y \leq 12 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Si un consumidor no quiere gastar más de  $P$  dólares en la compra de las cantidades  $x$  y  $y$  de dos productos que tienen

precios  $p_1$  y  $p_2$  dólares por unidad, respectivamente, entonces  $p_1x + p_2y \leq P$ , donde  $x, y \geq 0$ . En los problemas 25 y 26, encuentre geométricamente las posibles combinaciones de dichas compras, determine la solución de este sistema para los valores dados de  $p_1, p_2$  y  $P$ .

25.  $p_1 = 6, p_2 = 4, P = 0$       26.  $p_1 = 7, p_2 = 3, P = 25$

27. Si un fabricante desea comprar un total de no más de 100 libras de producto Z de los proveedores A y B, establezca un sistema de desigualdades que describa las combinaciones posibles de las cantidades que pueden comprarse a cada proveedor. Haga el bosquejo de la solución en el plano.

28. **Manufactura** La compañía XYZ produce dos modelos de computadoras caseras: el Alfa y el Beta. Sea  $x$  el número de modelos Alfa y  $y$  el número de Beta producidos a la semana en la fábrica de San Antonio. Si esta planta puede producir semanalmente a lo sumo 650 modelos Alfa y Beta en forma combinada, escriba las desigualdades que describen esta situación.

29. **Manufactura** Una compañía de sillas produce dos modelos. El modelo Secuoya toma 3 horas de ensamblado y  $\frac{1}{2}$  hora de pintura. El modelo Saratoga toma 2 horas de trabajo de ensamblado y 1 hora de pintura. El número máximo de horas de trabajo disponibles para ensamblar sillas es de 240 por día, y el número máximo de horas de trabajo disponibles para pintar es de 80 diarias. Escriba un sistema de desigualdades lineales para describir la situación. Sea  $x$  el número de modelos Secuoya producidos en un día y  $y$  el número de modelos Saratoga producidos en un día. Determine la región para este sistema de desigualdades lineales.

**OBJETIVO**

Establecer la naturaleza de un problema de programación lineal, introducir la terminología asociada con él y resolverlo geométricamente.

**7.2 Programación lineal**

Algunas veces se desea maximizar o minimizar una función sujeta a algunas limitaciones (o *restricciones*). Por ejemplo, probablemente un fabricante desee maximizar una función de utilidad sujeta a las restricciones de producción que imponen las limitaciones sobre el uso de la maquinaria y la mano de obra.

Ahora se considerará cómo resolver tales problemas cuando la función que será maximizada o minimizada es *lineal*. Una **función lineal en  $x$  y  $y$**  tiene la forma

$$Z = ax + by$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. También se requerirá que las correspondientes restricciones estén representadas por un sistema de desigualdades lineales (que incluyan “ $\leq$ ” o “ $\geq$ ”) o ecuaciones lineales en  $x$  y  $y$ , además de que ninguna de las variables sea negativa. Una situación que involucra todas estas condiciones se llama *problema de programación lineal*.

**ADVERTENCIA**

En el estudio de la programación lineal se usa una gran cantidad de terminología, por lo que se recomienda aprenderla cuanto antes.

La programación lineal fue desarrollada por George B. Dantzig al final de la década de 1940, y la Fuerza Aérea de Estados Unidos fue quien la utilizó primero, como una ayuda en la toma de decisiones. Actualmente tiene una amplia aplicación en los análisis industrial y económico.

En un problema de programación lineal, la función que se debe maximizar o minimizar se llama **función objetivo**. Aunque por lo regular existe un número infinito de soluciones para el sistema de restricciones, llamadas **soluciones factibles** o **puntos factibles**, la meta es encontrar una que sea una **solución óptima** (es decir, una que dé el valor máximo o mínimo de la función objetivo).

A continuación se expone un enfoque geométrico de la programación lineal. En la sección 7.4 se presentará el enfoque matricial, que permitirá trabajar con más de dos variables y, por lo tanto, con una mayor variedad de problemas.

Consideré el problema siguiente. Una compañía produce dos tipos de abrelistas: manuales y eléctricos. Para su fabricación, cada uno requiere del uso de tres máquinas, A, B y C. En la tabla 7.1 se proporciona la información relacionada con la fabricación de estos artículos. Cada abrelista manual requiere del uso de la máquina A durante 2 horas, de la máquina B por 1 hora y de la máquina C otra hora. Un abrelista eléctrico requiere de 1 hora de la máquina A, 2 horas de la B y 1 hora de la C. Además, suponga que el número máximo de horas disponibles por mes para el uso de las máquinas A, B y C es de 180, 160 y 100, respectivamente. La utilidad por un abrelista manual es de \$4 y por uno eléctrico es de \$6. Si la compañía vende todos los abrelistas que puede producir, ¿cuántos de cada tipo debe fabricar con el fin de maximizar la utilidad mensual?

**TABLA 7.1**

	<b>Manual</b>	<b>Eléctrico</b>	<b>Horas disponibles</b>
<b>A</b>	2 h	1 h	180
<b>B</b>	1 h	2 h	160
<b>C</b>	1 h	1 h	100
<b>Utilidad/unidad</b>	\$4	\$6	

Para resolver el problema, considere que  $x$  y  $y$  denotan el número de abrelistas manuales y eléctricos, respectivamente, fabricados en un mes. Como el número de artículos producidos no es negativo,

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Para la máquina A, el tiempo necesario para trabajar sobre  $x$  abrelistas manuales es  $2x$  horas, y el tiempo para trabajar sobre  $y$  eléctricos es  $1y$  horas. La suma de estos tiempos no puede ser mayor que 180, de modo que

$$2x + y \leq 180$$

De manera similar, las restricciones para las máquinas B y C dan

$$x + 2y \leq 160 \quad y \quad x + y \leq 100$$

La utilidad es una función de  $x$  y  $y$ , y está dada por la *función de utilidad*

$$P = 4x + 6y$$

En resumen, se desea maximizar la *función objetivo*

$$P = 4x + 6y \tag{1}$$

sujeta a las condiciones de que  $x$  y  $y$  deben ser soluciones del sistema de restricciones:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 180 \\ x + 2y \leq 160 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{2} \tag{3} \tag{4} \tag{5} \tag{6}$$

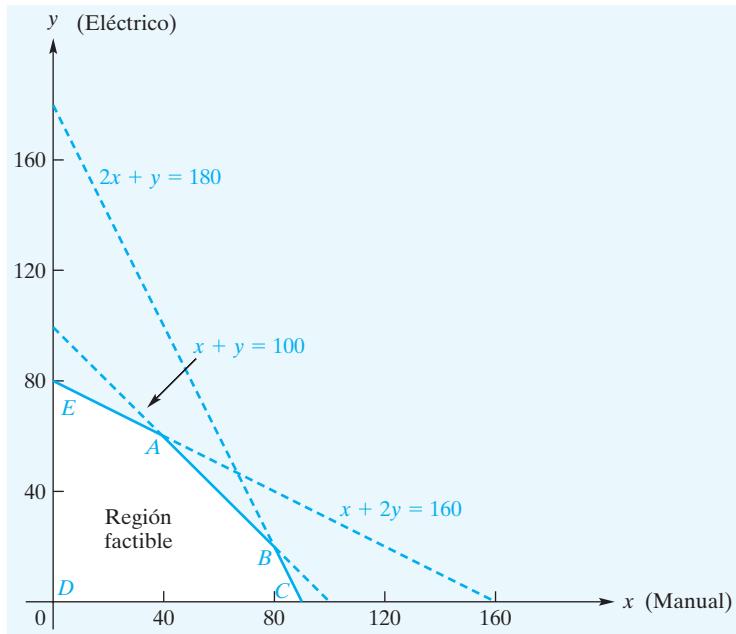


FIGURA 7.12 Región factible.

Por lo tanto, se tiene un problema de programación lineal. Las restricciones (5) y (6) se llaman **condiciones de no negatividad**. La región que satisface de manera simultánea las restricciones (2) a (6) *no* está sombreada en la figura 7.12. Cada punto de esta región representa una solución factible, y dicha región se llama **región factible**. Aunque existe un número infinito de soluciones factibles, debe encontrarse una que maximice la función de utilidad.

Como la función objetivo,  $P = 4x + 6y$ , es equivalente a

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{P}{6}$$

define una familia de rectas paralelas, cada una corresponde a un posible valor de  $P$ , cada una tiene pendiente de  $-2/3$  e intersección  $y(0, P/6)$ . Por ejemplo, si  $P = 600$ , entonces se obtiene la recta

$$y = -\frac{2}{3}x + 100$$

que se muestra en la figura 7.13. Esta recta, llamada de **línea de isoutilidad**, proporciona todas las combinaciones posibles de  $x$  y  $y$  con las que se obtiene la misma utilidad, \$600. Observe que esta línea de isoutilidad no tiene puntos en común con la región factible, mientras que la línea de isoutilidad para  $P = 300$  tiene un número infinito de puntos en común con la región factible. Ahora se buscará un elemento de la familia que tenga un

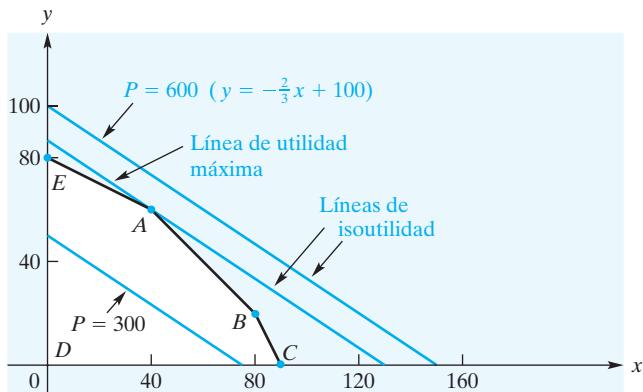


FIGURA 7.13 Líneas de isoutilidad y región factible.

punto factible y cuyo valor de  $P$  sea máximo. Ésta será la recta cuya intersección y sea la más lejana del origen (lo que da un valor máximo de  $P$ ), y que al mismo tiempo tenga al menos un punto en común con la región factible. No es difícil observar que tal recta contendrá al vértice  $A$ . Cualquier recta de isoutilidad con una utilidad mayor no contendrá puntos de la región factible.

A partir de la figura 7.12 se observa que  $A$  pertenece a las rectas  $x + y = 100$  y  $x + 2y = 160$ . Sus coordenadas pueden hallarse al resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ x + 2y = 160 \end{cases}$$

Esto da  $x = 40$  y  $y = 60$ . Al sustituir estos valores en  $P = 4x + 6y$ , se encuentra que la utilidad máxima sujeta a las restricciones es de \$520, que se obtiene al producir 40 artículos manuales y 60 eléctricos cada mes.

Si una región factible puede estar contenida dentro de un círculo, como la de la figura 7.13, se denomina entonces **región factible acotada**. De otra manera es **no acotada**. Cuando una región factible contiene al menos un punto, se dice que es **no vacía**; en caso contrario es **vacía**. Así, la región de la figura 7.13 es una región factible acotada no vacía.

Puede demostrarse que:

Una función lineal definida sobre una región factible acotada no vacía, tiene un valor máximo (mínimo) que puede encontrarse en un vértice.

Este enunciado proporciona una forma de encontrar una solución óptima sin dibujar las rectas de isoutilidad como se hizo antes. Basta con evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible, y después seleccionar un vértice en el que la función sea óptima.

Por ejemplo, en la figura 7.13 los vértices son  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$ . Se encuentra como antes, que  $A$  es  $(40, 60)$ . Para encontrar  $B$ , de la figura 7.12 debe resolverse de manera simultánea  $2x + y = 180$  y  $x + y = 100$ . Esto da el punto  $B = (80, 20)$ . De manera similar se obtiene que todos los vértices:

$$A = (40, 60) \quad B = (80, 20) \quad C = (90, 0)$$

$$D = (0, 0) \quad E = (0, 80)$$

Ahora se evalúa la función objetivo  $P = 4x + 6y$  en cada uno de los puntos:

$$P(A) = 4(40) + 6(60) = 520$$

$$P(B) = 4(80) + 6(20) = 440$$

$$P(C) = 4(90) + 6(0) = 360$$

$$P(D) = 4(0) + 6(0) = 0$$

$$P(E) = 4(0) + 6(80) = 480$$

Así,  $P$  tiene un valor máximo de 520 en  $A$ , donde  $x = 40$  y  $y = 60$ .

La solución óptima para un problema de programación lineal está dada por el valor óptimo de la función objetivo y el punto donde ocurre dicho valor.

### EJEMPLO 1 Resolución de un problema de programación lineal

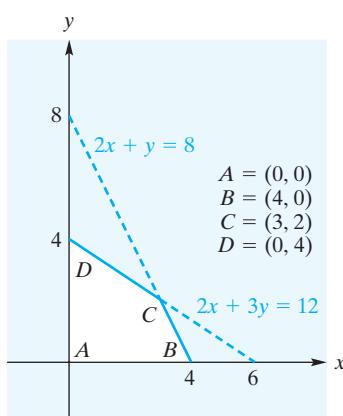
Maximice la función objetivo  $Z = 3x + y$  sujeta a las restricciones

$$2x + y \leq 8$$

$$2x + 3y \leq 12$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$



**FIGURA 7.14**  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son puntos vértice de la región factible.

**Solución:** En la figura 7.14 la región factible es no vacía y acotada. Así que  $Z$  es máxima en uno de los cuatro vértices. Las coordenadas de  $A$ ,  $B$  y  $D$  son evidentes por

inspección. Para determinar  $C$  se resuelve de manera simultánea las ecuaciones  $2x + y = 8$  y  $2x + 3y = 12$ , que dan  $x = 3$ ,  $y = 2$ . Así,

$$A = (0, 0) \quad B = (4, 0) \quad C = (3, 2) \quad D = (0, 4)$$

Después de evaluar  $Z$  en estos puntos, se obtiene

$$Z(A) = 3(0) + 0 = 0$$

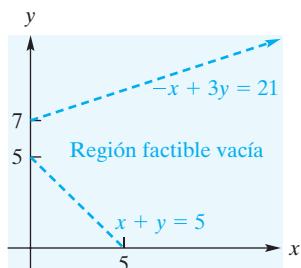
$$Z(B) = 3(4) + 0 = 12$$

$$Z(C) = 3(3) + 2 = 11$$

$$Z(D) = 3(0) + 4 = 4$$

De aquí que el valor máximo de  $Z$ , sujeto a las restricciones, sea 12 y ocurra cuando  $x = 4$  y  $y = 0$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



**FIGURA 7.15** Región factible vacía.

### Región factible vacía

El ejemplo siguiente ilustra una situación en la que no existe solución óptima

#### EJEMPLO 2 Región factible vacía

Minimice la función objetivo  $Z = 8x - 3y$ , sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} -x + 3y &= 21 \\ x + y &\leq 5 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

**Solución:** Observe que la primera restricción  $-x + 3y = 21$  es una *igualdad*. En la figura 7.15 se muestra la parte de las rectas  $-x + 3y = 21$  y  $x + y = 5$  para las cuales  $x \geq 0$  y  $y \geq 0$ . Un punto factible  $(x, y)$  debe tener  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  y estar sobre la recta superior y sobre o por debajo de la recta inferior (porque  $y \leq 5 - x$ ). Sin embargo, no existen tales puntos. De aquí que la región factible esté *vacía* y, por lo tanto, este problema *no* tenga solución óptima.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

La situación del ejemplo 2 puede hacerse más general:

Siempre que la región factible de un problema de programación lineal esté vacía, no existe una solución óptima.

### Región factible no acotada

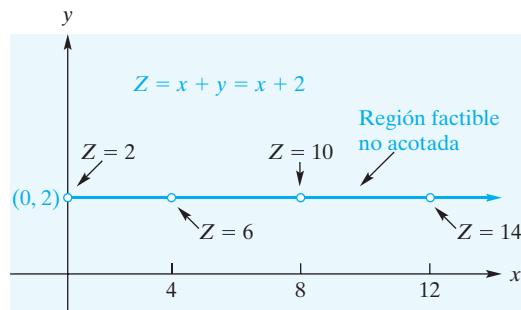
Suponga que la región factible está definida por

$$\begin{aligned} y &= 2 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Esta región es la parte de la recta horizontal  $y = 2$  indicada en la figura 7.16. Como la región no puede estar contenida dentro de un círculo, es *no acotada*. Considere maximizar

$$Z = x + y$$

sujeta a las restricciones anteriores. Como  $y = 2$ , entonces  $Z = x + 2$ . Es claro que cuando  $x$  aumenta indefinidamente, también aumenta  $Z$ . Por lo tanto, ningún punto factible maximiza  $Z$ , de modo que no existe solución óptima. En este caso se dice que



**FIGURA 7.16** Región factible no acotada en la que  $Z$  no tiene máximo.

la solución es “no acotada”. Por otra parte, suponga que se quiere *minimizar*  $Z = x + y$  sobre la misma región. Como  $Z = x + 2$ ,  $Z$  será mínima cuando  $x$  sea lo más pequeña posible, esto es, cuando  $x = 0$ . El valor mínimo de  $Z = x + y = 0 + 2 = 2$ , y la solución óptima es el vértice  $(0, 2)$ .

En general, puede demostrarse que:

Si una región factible es no acotada, y si la función objetivo tiene un valor máximo (o mínimo), entonces el valor ocurre en un vértice.

### EJEMPLO 3 Región factible no acotada

Un agricultor va a comprar fertilizante que contiene tres nutrientes: A, B y C. Los mínimos necesarios son 160 unidades de A, 200 unidades de B y 80 unidades de C. Existen dos marcas muy aceptadas de fertilizantes en el mercado. Una bolsa de Crece Rápido cuesta \$8, contiene 3 unidades de A, 5 unidades de B y 1 unidad de C. Cada bolsa de Crece Fácil cuesta \$6, y contiene 2 unidades de cada nutriente. Si el agricultor desea minimizar el costo y, al mismo tiempo, satisfacer las necesidades de nutrientes, ¿cuántas bolsas de cada marca debe comprar? La información se resume como sigue:

	Crece Rápido	Crece Fácil	Unidades requeridas
<b>A</b>	3 unidades	2 unidades	160
<b>B</b>	5 unidades	2 unidades	200
<b>C</b>	1 unidad	2 unidades	80
<b>Costo/bolsa</b>	\$8	\$6	

**Solución:** Sea  $x$  el número de bolsas de Crece Rápido que se comprará y  $y$  el número de bolsas de Crece Fácil que también se comprarán. Entonces, se desea *minimizar* la función de costo

$$C = 8x + 6y \quad (7)$$

sujeta a las restricciones

$$3x + 2y \geq 160 \quad (8)$$

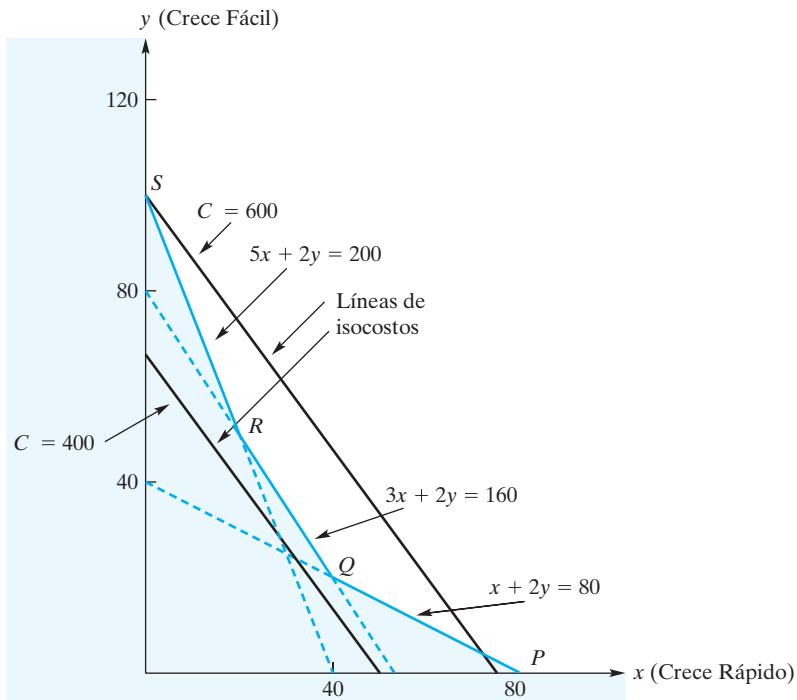
$$5x + 2y \geq 200 \quad (9)$$

$$x + 2y \geq 80 \quad (10)$$

$$x \geq 0 \quad (11)$$

$$y \geq 0 \quad (12)$$

La región factible que satisface las restricciones (8) a (12) es la que no está sombreada en la figura 7.17, junto con las líneas de isocostos donde  $C = 400$  y  $C = 600$ . La región factible es no acotada.

FIGURA 7.17 Costo mínimo en el vértice  $Q$  de la región factible no acotada.

El miembro de la familia de rectas  $C = 8x + 6y$  que da un costo mínimo, sujeto a las restricciones, interseca a la región factible en el vértice  $Q$ . Aquí se elige la línea de isocostos cuya intersección con el eje  $y$  fue la *más cercana* al origen, y que tiene al menos un punto en común con la región factible. Se encuentran las coordenadas de  $B$  al resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 160 \\ x + 2y = 80 \end{cases}$$

Por lo tanto,  $x = 40$  y  $y = 20$  dan un costo mínimo de \$440. El agricultor debe comprar 40 bolsas de Crece Rápido y 20 bolsas de Crece Fácil.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



En el ejemplo 3 se encuentra que la función  $C = 8x + 6y$  tiene un valor mínimo en un vértice de la región factible no acotada. Por otra parte, suponga que se quiere maximizar  $C$  en esa región y para ello se considera la opción de evaluar  $C$  en todos los vértices. Estos puntos son

$$P = (80, 0) \quad Q = (40, 20) \quad R = (20, 50) \quad S = (0, 100)$$

de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} C(P) &= 8(80) + 6(0) = 640 \\ C(Q) &= 8(40) + 6(20) = 440 \\ C(R) &= 8(20) + 6(50) = 460 \\ C(S) &= 8(0) + 6(100) = 600 \end{aligned}$$



#### ADVERTENCIA

Cuando se trabaja con una región factible no acotada, no se concluye simplemente que una solución óptima existe en un vértice, puesto que podría no haber solución óptima.

Una conclusión apresurada sería que el valor máximo de  $C$  es 640. Esto es *falso!* No existe valor máximo, porque las líneas de isocosto con valores arbitrariamente grandes de  $C$  intersecan a la región factible.

## T E C N O L O G I A

**Problema:** Maximizar  $Z = 4.1x - 3.2y$  sujeta a las restricciones

$$y \leq 8 - x \quad (13)$$

$$y \leq 6 - 0.2x \quad (14)$$

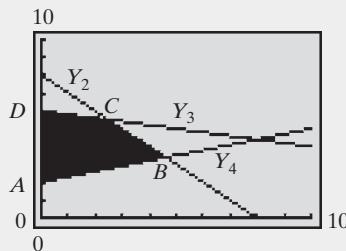
$$y \geq 2 + 0.3x \quad (15)$$

$$\begin{array}{l} y \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array}$$

**Solución:** Como se muestra en la figura 7.18, se introduce la función objetivo como  $Y_1$ , donde  $y$  se ingresa como alfa Y. Despues, las ecuaciones correspondientes a las restricciones (13)-(15) se ingresan como  $Y_2, Y_3$  y  $Y_4$ . Para empezar, se desactiva la función  $Y_1$  (es decir, el símbolo “=” no está resaltado) y se obtienen las gráficas de  $Y_2, Y_3$  y  $Y_4$  (vea la figura 7.19). Resulta útil hacer un bosquejo a lápiz de las gráficas y marcar las líneas. A partir del bosquejo se determina la región factible y se marcan los vértices. En la figura 7.19, la región factible está *sombreada*, y los vértices son  $A, B, C$  y  $D$ . Debido a que la región factible no está vacía y es acotada, el valor máximo de  $Z$  ocurrirá en uno de los vértices.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\nY1=4.1X-3.2Y
\nY2=8-X
\nY3=6-.2X
\nY4=2+.3X
\nY5=■
\nY6=
\nY7=
```

**FIGURA 7.18** Introducción de la función objetivo y las ecuaciones correspondientes a las restricciones, y desactivación de la función objetivo.



**FIGURA 7.19** Determinación de la región factible y marcación de los vértices.

El punto  $A$  es la intersección y de  $Y_4$  y es fácil advertir que es  $(0, 2)$ . El valor de  $Z$  en  $A$  se encuentra si se asigna el valor 0 a  $X$ , 2 a  $Y$  y después se evalúa  $Y_1$ . (Vea la figura 7.20.) Así,  $Z = -6.4$  en este vértice.

El punto  $B$  es la intersección de  $Y_2$  y  $Y_4$ . Para encontrar las coordenadas de  $B$  primero se desactiva la función  $Y_3$  y se resalta solamente  $Y_2$  y  $Y_4$ . Después se despliegan las gráficas de  $Y_2$  y  $Y_4$ , y se encuentra su punto de intersección. Si se usa la calculadora TI-83 Plus es conveniente utilizar la característica intersection (vea la figura 7.21). Los valores de  $X$  y  $Y$  en la intersección se almacenan de manera automática en los registros  $X$  y  $Y$ . De vuelta a la pantalla principal, se evalúa  $Y_1$  y se obtiene 8.09 (redondeado a dos decimales). Así,  $Z = 8.09$  en el vértice  $B$ .

Continúe de esta manera para encontrar las coordenadas  $C$  y  $D$ , evalúe  $Y_1$  (o  $Z$ ) allí:

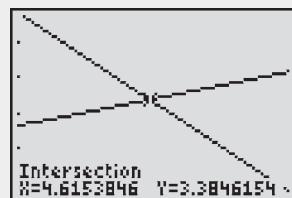
$$C = (2.5, 5.5) \quad Z = -7.35$$

$$D = (0, 6) \quad Z = -19.2$$

Por lo que el valor máximo de  $Z$  es 8.09, que ocurre en el vértice  $B$ , donde  $x \approx 4.62$  y  $y \approx 3.38$ .

0→X	0
2→Y	2
Y1	-6.4

**FIGURA 7.20** Evaluación de la función objetivo en el vértice  $A = (0,2)$ .



**FIGURA 7.21** Determinación del vértice  $B$ .

## Problemas 7.2

\*1. Maximizar

$$P = 5x + 7y$$

sujeta a

$$2x + 3y \leq 45$$

$$x - 3y \geq 2$$

$$x, y \geq 0$$

2. Maximizar

$$P = 2x + 5y$$

sujeta a

$$x + y \leq 90$$

$$4x + 3y \leq 250$$

$$x + 2y \leq 225$$

$$x, y \geq 0$$

## 3. Maximizar

$$Z = 4x - 6y$$

sujeta a

$$\begin{aligned}y &\leq 7 \\3x - y &\leq 3 \\x + y &\geq 5 \\x, y &\geq 0\end{aligned}$$

## 4. Minimizar

$$Z = x + y$$

sujeta a

$$\begin{aligned}x - y &\geq 0 \\4x + 3y &\geq 12 \\9x + 11y &\leq 99 \\x &\leq 8 \\x, y &\geq 0\end{aligned}$$

## \*5. Maximizar

$$Z = 4x - 10y$$

sujeta a

$$\begin{aligned}x - 4y &\geq 4 \\2x - y &\leq 2 \\x, y &\geq 0\end{aligned}$$

## 6. Minimizar

$$Z = 20x + 30y$$

sujeta a

$$\begin{aligned}2x + y &\leq 10 \\3x + 4y &\leq 24 \\8x + 7y &\geq 56 \\x, y &\geq 0\end{aligned}$$

## 7. Minimizar

$$Z = 7x + 3y$$

sujeta a

$$\begin{aligned}3x - y &\geq -2 \\x + y &\leq 9 \\x - y &= -1 \\x, y &\geq 0\end{aligned}$$

## 8. Maximizar

$$Z = 0.4x - 0.2y$$

sujeta a

$$\begin{aligned}2x - 5y &\geq -3 \\2x - y &\leq 5 \\3x + y &= 6 \\x, y &\geq 0\end{aligned}$$

## 9. Minimizar

$$C = 3x + 2y$$

sujeta a

$$\begin{aligned}2x + y &\geq 5 \\3x + y &\geq 4 \\x + 2y &\geq 3 \\x, y &\geq 0\end{aligned}$$

## 10. Minimizar

$$C = 2x + 2y$$

sujeta a

$$\begin{aligned}x + 2y &\geq 80 \\3x + 2y &\geq 160 \\5x + 2y &\geq 200 \\x, y &\geq 0\end{aligned}$$

## 11. Maximizar

$$Z = 10x + 2y$$

sujeta a

$$\begin{aligned}x + 2y &\geq 4 \\x - 2y &\geq 0 \\x, y &\geq 0\end{aligned}$$

## 12. Minimizar

$$Z = y - x$$

sujeta a

$$\begin{aligned}x &\geq 3 \\x + 3y &\geq 6 \\x - 3y &\geq -6 \\x, y &\geq 0\end{aligned}$$

- 13. Producción para utilidad máxima** Un fabricante de juguetes prepara un programa de producción para dos nuevos artículos, camiones y perinolas, con base en la información concerniente a sus tiempos de ensamblado dados en la tabla que sigue:

	Máquina A	Máquina B	Acabado
Camión	2 h	3 h	5 h
Perinola	1 h	1 h	1 h

Por ejemplo, cada camión requiere de 2 horas en la máquina A. Las horas que los empleados tienen disponibles por semana son: para operación de la máquina A, 80 horas; para la B, 50 horas; para acabado, 70 horas. Si las utilidades en cada camión y cada perinola son de \$7 y \$2, respectivamente, ¿cuántos juguetes de cada uno deben producirse por semana con el fin de maximizar la utilidad? ¿Cuál es esta utilidad máxima?

- 14. Producción para utilidad máxima** Un fabricante produce dos tipos de reproductores de DVD: Vista y Xtreme. Para su producción requieren del uso de dos máquinas, A y B. El número de horas necesarias para ambas está indicado en la tabla siguiente:

	Máquina A	Máquina B
Vista	1 h	2 h
Xtreme	3 h	2 h

Si cada máquina puede utilizarse 24 horas por día y las utilidades en los modelos Vista y Xtreme son de \$50 y \$80, respectivamente, ¿cuántos reproductores de cada tipo deben producirse por día para obtener una utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

- \***15. Formulación de dieta** Una dieta debe contener al menos 16 unidades de carbohidratos y 20 de proteínas. El alimento A contiene 2 unidades de carbohidratos y 4 de proteínas; el alimento B contiene 2 unidades de carbohidratos y 1 de proteínas. Si el alimento A cuesta \$1.20 por unidad y el B \$0.80 por unidad, ¿cuántas unidades de cada alimento deben comprarse para minimizar el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?
- 16. Nutrientes en fertilizantes** Un agricultor comprará fertilizantes que contienen tres nutrientes: A, B y C. Los requerimientos mínimos semanales son 80 unidades de A, 120 de B y 240 de C. Existen dos mezclas de fertilizantes de gran aceptación en el mercado. La mezcla I cuesta \$8 por bolsa, y contiene 2 unidades de A, 6 de B y 4 de C. La mezcla II cuesta \$10 por bolsa, con 2 unidades de A, 2 de B y 12 de C. ¿Cuántas bolsas de cada tipo debe comprar el agricultor para minimizar el costo de satisfacer sus requerimientos de nutrientes?



- 17. Extracción de minerales** Una compañía extrae minerales de una mina. En la tabla siguiente se indica el número de libras de los minerales A y B que pueden obtenerse de cada tonelada de la mina I y II, junto con los costos por tonelada:

	Mena I	Mena II
Mineral A	100 lb	200 lb
Mineral B	200 lb	50 lb
Costo por tonelada	\$50	\$60

Si la compañía debe producir al menos 3000 lb de A y 2500 lb de B, ¿cuántas toneladas de cada mena deben procesarse con el objetivo de minimizar el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?

- 18. Programación de producción** Una compañía petrolera que tiene dos refinerías necesita al menos 8000, 14,000 y 5000 barriles de petróleo de grados bajo, medio y alto, respectivamente. Cada día, la refinería I produce 2000 barriles de grado bajo, 3000 barriles de grado medio y 1000 barriles de grado alto, en tanto que la refinería II produce 1000 barriles de cada uno

de los grados alto y bajo, y 2000 barriles de petróleo de grado medio. Si operar la refinería I cuesta \$25 000 por día, y operar la refinería II \$20 000 diarios, ¿cuántos días debe operar cada refinería para satisfacer los requerimientos de producción a un costo mínimo? Suponga que existe un costo mínimo. ¿Cuál es?

- 19. Costo de construcción** Una compañía química diseña una planta para producir dos tipos de polímeros,  $P_1$  y  $P_2$ . La planta debe tener una capacidad de producción de al menos 100 unidades de  $P_1$  y 420 unidades de  $P_2$  cada día. Existen dos posibles diseños para las principales cámaras de reacción que se incluirán en la planta. Cada cámara de tipo A cuesta \$600 000, y es capaz de producir 10 unidades de  $P_1$  y 20 unidades de  $P_2$  por día; el tipo B es un diseño más económico, cuesta \$300 000 y es capaz de producir 4 unidades de  $P_1$  y 30 unidades de  $P_2$  por día. Debido a los costos de operación, es necesario tener al menos 4 cámaras de cada tipo en la planta. ¿Cuántas de cada tipo deben incluirse para minimizar el costo de construcción y aún así satisfacer el programa de producción requerido? (Suponga que existe un costo mínimo.)
- 20. Control de la contaminación** Debido a las nuevas reglamentaciones federales sobre la contaminación, una compañía química ha introducido en sus plantas un nuevo y más caro proceso que complementa o reemplaza al proceso anterior de fabricación de un producto químico en particular. El proceso anterior descarga 25 gramos de dióxido de carbono y 50 gramos de partículas a la atmósfera por cada litro de producto químico producido. El nuevo proceso descarga 15 gramos de dióxido de carbono y 40 gramos de partículas a la atmósfera por cada litro producido. La compañía obtiene una utilidad de 40 y 15 centavos por litro en los procesos anterior y nuevo, respectivamente. Si el gobierno no permite a la planta descargar más de 12 525 gramos de dióxido de carbono ni más de 20 000 gramos de partículas a la atmósfera por día, ¿cuántos litros de producto químico deben producirse diariamente, por cada uno de los procesos, para maximizar la utilidad diaria? ¿Cuál es la utilidad diaria?



- 21. Descuento en la construcción** El departamento de carreteras (Secretaría de Caminos) ha decidido añadir exactamente 300 kilómetros de carreteras y exactamente 200 kilómetros de autopistas a su sistema carretero en este año. El precio estándar para construcción de caminos es de \$2 millones por kilómetro de carretera y de \$8 millones por kilómetro de autopista. Sólo dos contratistas, la compañía A y la compañía B, pueden realizar esta clase de construcción, así que los 500 km de camino deben ser construidos por estas empresas. Sin embargo, la compañía A puede construir a lo sumo 400 km de camino (carretera y autopista) y la compañía B puede construir un máximo de 300 km. Por razones políticas, a cada compañía debe adjudicársele un contrato de al menos \$300 millones (antes de descuentos). La compañía A ofrece un descuento de \$2000 por kilómetro de carretera y de \$6000 por kilómetro de autopista; la compañía B ofrece un descuento de \$3000 por kilómetro de carretera y \$5000 por kilómetro de autopista.

- (a) Si  $x$  y  $y$  representan el número de kilómetros de carretera y autopista, respectivamente, adjudicados a la compañía A, demuestre que el descuento total recibido de ambas compañías está dado por

$$D = 1900 - x + y$$

donde  $D$  está expresado en miles de dólares.

- (b) El departamento de carreteras desea maximizar el descuento total,  $D$ . Demuestre que este problema es equivalente al de programación lineal dado a continuación, detallando exactamente cómo surgen las primeras seis restricciones:

$$\text{Maximizar } D = 1900 - x + y$$

sujeta a

$$x + y \leq 400$$

$$x + y \geq 500$$

$$2x + 8y \geq 300$$

$$2x + 8y \leq 1900$$

$$x \leq 300$$

$$y \leq 200$$

$$x, y \geq 0$$

- (c) Encuentre los valores de  $x$  y  $y$  que maximizan a  $D$ .

*En los problemas 22 a 25, redondee sus respuestas a dos decimales.*

### 22. Maximizar

$$Z = 2x + 0.3y$$

sujeta a

$$y \leq 6 - 4x$$

$$y \geq 2 - 0.5x$$

$$x, y \geq 0$$

### 23. Maximizar

$$Z = 14x - 3y$$

sujeta a

$$y \geq 12.5 - 4x$$

$$y \leq 9.3 - x$$

$$y \geq 4.7 + 0.8x$$

$$x, y \geq 0$$

### 24. Minimizar

$$Z = 5.1y - 3.5x$$

sujeta a

$$7.5x + 2y \geq 35$$

$$2.5x + y \leq 7.4$$

$$0.6x - y \geq -0.8$$

$$x, y \geq 0$$

### 25. Minimizar

$$Z = 17.3x - 14.4y$$

sujeta a

$$0.73x - y \leq -2.4$$

$$1.22x - y \geq -5.1$$

$$0.45x - y \geq -12.4$$

$$x, y \geq 0$$

## OBJETIVO

## 7.3 Soluciones óptimas múltiples<sup>1</sup>

Considerar situaciones en las que los problemas de programación lineal tienen más de una solución óptima.

Algunas veces una función objetivo alcanza su valor óptimo en más de un punto factible, en cuyo caso se dice que existen **soluciones óptimas múltiples**. Esto se ilustrará en el ejemplo 1.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### SOLUCIONES ÓPTIMAS MÚLTIPLES

Suponga que un distribuidor de televisores tiene tiendas A y B y bodegas C y D. El costo de enviar un televisor de C a A es de \$18, de C a B de \$9, de D a A es de \$24 y de D a B es de \$15. Suponga que la tienda A ordena 25 televisores y la B pide 30. También suponga que la bodega C tiene 45 televisores y la bodega D tiene 40 televisores disponibles. Determine la mejor manera de minimizar costos y determine el costo mínimo. [Una pista: Sea  $x$  el número de televisores enviados de C a A y  $y$  el número de televisores enviados de C a B. Entonces  $25 - x$  es el número de televisores enviados de D a A y  $30 - y$  el número de televisores enviados de D a B.]

#### EJEMPLO 1 Soluciones óptimas múltiples

Maximice  $Z = 2x + 4y$  sujetado a las restricciones

$$x - 4y \leq -8$$

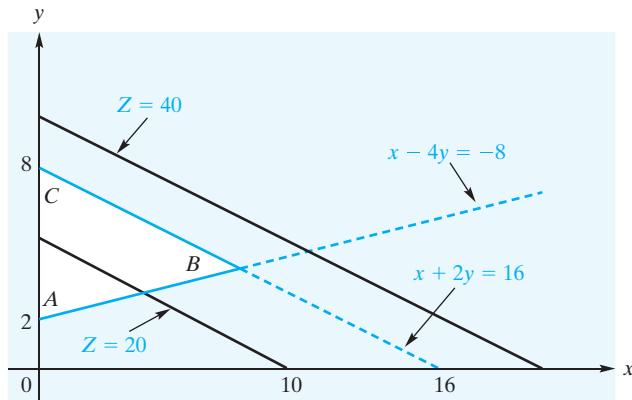
$$x + 2y \leq 16$$

$$x, y \geq 0$$

**Solución:** La región factible aparece en la figura 7.22. Como la región no está vacía y es acotada,  $Z$  tiene valor máximo en un vértice. Los vértices son  $A = (0, 2)$ ,  $B = (8, 4)$  y  $C = (0, 8)$ . Al evaluar la función objetivo en

$$A = (0, 2) \quad B = (8, 4) \quad C = (0, 8)$$

<sup>1</sup>Esta sección puede omitirse.



**FIGURA 7.22**  $Z = 2x + 4y$  se maximiza en cada punto del segmento  $\overline{BC}$ .

se obtiene

$$Z(A) = 2(0) + 4(2) = 8$$

$$Z(B) = 2(8) + 4(4) = 32$$

$$Z(C) = 2(0) + 4(8) = 32$$

Así, el valor máximo de  $Z$  sobre la región es 32 y ocurre en *dos* vértices,  $B$  y  $C$ . De hecho, este valor máximo también ocurre en *todos* los puntos sobre el segmento de recta que une los puntos  $B$  y  $C$ , por la siguiente razón: cada miembro de la familia de rectas  $Z = 2x + 4y$  tiene pendiente de  $-\frac{1}{2}$ . Además, la recta de la restricción  $x + 2y = 16$ , que contiene a  $B$  y  $C$ , también tiene pendiente de  $-\frac{1}{2}$ , y de aquí que sea paralela a cada miembro de  $Z = 2x + 4y$ . La figura 7.22 muestra líneas para  $Z = 20$  y  $Z = 40$ . Observe que el miembro de la familia que maximiza  $Z$  contiene no sólo a  $B$  y  $C$ , sino a todos los puntos del segmento de recta  $\overline{BC}$ . Por lo tanto, tiene un número infinito de puntos en común con la región factible. De aquí que este problema de programación lineal tenga un número infinito de soluciones óptimas. De hecho, puede mostrarse que

Si  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  son dos vértices en los cuales la función objetivo es óptima, entonces la función también será óptima en todos los puntos  $(x, y)$  donde

$$x = (1-t)x_1 + tx_2$$

$$y = (1-t)y_1 + ty_2$$

y

$$0 \leq t \leq 1$$

En este caso, si  $(x_1, y_1) = B = (8, 4)$  y  $(x_2, y_2) = C = (0, 8)$ , entonces  $Z$  es máximo en cualquier punto  $(x, y)$ , donde

$$x = (1-t)8 + t \cdot 0 = 8(1-t)$$

$$y = (1-t)4 + t \cdot 8 = 4(1+t)$$

$$\text{para } 0 \leq t \leq 1$$

Estas ecuaciones proporcionan las coordenadas de cualquier punto sobre el segmento de recta  $\overline{BC}$ . En particular, si  $t = 0$ , entonces  $x = 8, y = 4$ , lo que da el vértice  $B = (8, 4)$ . Si  $t = 1$ , se obtiene el vértice  $C = (0, 8)$ . El valor  $t = \frac{1}{2}$  da el punto  $(4, 6)$ . Observe que en  $(4, 6)$ ,  $Z = 2(4) + 4(6) = 32$ , que es el valor máximo de  $Z$ .



## Problemas 7.3

### \*1. Minimizar

$$Z = 3x + 9y$$

sujeta a

$$y \geq -\frac{3}{2}x + 6$$

$$y \geq -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

$$y \geq x - 3$$

$$x, y \geq 0$$

### 2. Maximizar

$$Z = 2x + 2y$$

sujeta a

$$2x - y \geq -4$$

$$x - 2y \leq 4$$

$$x + y = 6$$

$$x, y \geq 0$$

### 3. Maximizar

$$Z = 14x + 21y$$

sujeta a

$$2x + 3y \leq 12$$

$$x + 5y \leq 8$$

$$x, y \geq 0$$

- 4. Minimizar costo** Suponga que un vendedor de automóviles tiene salas de exhibición en Atherton y Berkeley, y bodegas en Concord y Dublín. El costo de enviar un automóvil de Concord a Atherton es de \$60, de Concord a Berkeley de \$45, de Dublín a Atherton de \$50 y de Dublín a Berkeley de \$35. Suponga que la sala de exhibición de Atherton pide siete automóviles y la sala de exhibición de Berkeley ordena cuatro. También suponga que la bodega en Concord tiene seis autos disponibles y la de Dublín tiene ocho. Encuentre la mejor manera para minimizar el costo y determine el costo mínimo. (*Una pista:* Sea  $x$  el número de automóviles enviados de Concord a Atherton,  $y$  el número de automóviles enviados de Concord a Berkeley. Entonces  $7 - x$  es el número de automóviles enviados de Dublín a Atherton y  $4 - y$  es el número de automóviles enviados de Dublín a Berkeley.)

## OBJETIVO

Mostrar cómo se utiliza el método simplex para resolver un problema de programación lineal estándar. Este método le permitirá solucionar problemas que no pueden resolverse de manera geométrica.

## 7.4 Método simplex

Hasta ahora se han resuelto problemas de programación lineal por un método geométrico; el cual no es práctico cuando el número de variables aumenta a tres y, desde luego, es imposible usarlo si las variables son más de tres. Ahora se verá una técnica diferente, el **método simplex**, cuyo nombre está ligado, en estudios más avanzados, a un objeto geométrico al que se denomina simple (simplex).

El método simplex empieza con una solución factible y la pone a prueba para descubrir si es óptima o no. Si no lo es, se procede a obtener una *mejor* solución. Se dice “mejor” en el sentido de que la nueva solución esté más cerca de la optimización de la función objetivo.<sup>2</sup> Si no es óptima, entonces se repite el procedimiento. En algún momento el método simplex conduce a una solución óptima, si es que existe.

Además de ser eficiente, el método simplex tiene otras ventajas. Es completamente mecánico (se usan matrices, operaciones elementales con renglones y aritmética básica). Además, no es necesario dibujar gráficas; lo que permite resolver problemas de programación lineal con cualquier número de restricciones y variables.

En esta sección se considerarán sólo los llamados **problemas estándar de programación lineal**, que pueden expresarse en la forma siguiente.

### Problema estándar de programación lineal

Maximizar la función lineal  $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ , sujeta a las restricciones

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right\} \quad (1)$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $b_1, b_2, \dots, b_m$  son no negativas.

<sup>2</sup>En la mayoría de los casos es cierto. Sin embargo, en algunas ocasiones, la nueva solución puede ser tan buena como la anterior. El ejemplo 2 ilustrará esto.

Resulta útil formular el problema en notación matricial de manera que su estructura sea más fácil de recordar. Sea

$$C = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \quad \text{y} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Entonces la función objetivo puede escribirse como

$$Z = \mathbf{CX}$$

Ahora, si se escribe

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

entonces puede decirse que un problema de programación lineal es aquél que puede expresarse en la forma



#### ADVERTENCIA

Observe que  $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$  es una condición sobre los datos del problema y no es una constante impuesta sobre la variable  $\mathbf{X}$ .

Maximizar  $Z = \mathbf{CX}$

sujeta a  $\begin{cases} \mathbf{AX} \leq \mathbf{B} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{cases}$

donde  $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$

(Las desigualdades matriciales deben entenderse como igualdad de matrices. Las comparaciones se refieren a matrices del mismo tamaño y se requiere de la desigualdad para contener todas las entradas correspondientes.)

En las secciones 7.6 y 7.7 se estudiarán otros tipos de problemas de programación lineal.

Observe que una solución factible para un problema estándar de programación lineal siempre es  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$  y que en esta solución factible el valor de la función  $Z$  es 0.

Ahora se aplicará el método simplex al problema del ejemplo 1 de la sección 7.2, que puede escribirse:

$$\text{maximizar } Z = 3x_1 + x_2$$

sujeta a las restricciones

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \tag{2}$$

y

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12 \tag{3}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Este problema es de la forma estándar. Se comienza por escribir las restricciones (2) y (3) como ecuaciones. En (2),  $2x_1 + x_2$  será igual a 8 si se suma algún número no negativo  $s_1$  a  $2x_1 + x_2$ , de forma que

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 8 \quad \text{para alguna } s_1 \geq 0$$

Se conoce a  $s_1$  como una **variable de holgura**, porque completa la “holgura” del lado izquierdo de (2), de modo que se tenga una igualdad. De manera similar, la desigualdad (3) puede expresarse como una ecuación mediante la variable de holgura  $s_2$ ; se tiene

$$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 12, \text{ para alguna } s_2 \geq 0$$

Las variables  $x_1$  y  $x_2$  son llamadas **variables de decisión**.

Ahora es posible replantear el problema en términos de ecuaciones:

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + x_2 \quad (4)$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 8 \quad (5)$$

y

$$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 12 \quad (6)$$

donde  $x_1, x_2, s_1$  y  $s_2$  son no negativas.

De la sección 7.2, se sabe que la solución óptima ocurre en un vértice de la región factible de la figura 7.23. En cada uno de estos puntos, al menos *dos* de las variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$  y  $s_2$  son iguales a 0, como lo indica la lista siguiente:

1. En  $A$ , se tiene  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$ .
2. En  $B$ ,  $x_1 = 4$  y  $x_2 = 0$ . Pero de la ecuación (5),  $2(4) + 0 + s_1 = 8$ . Entonces,  $s_1 = 0$ .
3. En  $C$ ,  $x_1 = 3$  y  $x_2 = 2$ . Pero de la ecuación (5),  $2(3) + 2 + s_1 = 8$ . Por lo tanto,  $s_1 = 0$ . De la ecuación (6),  $2(3) + 3(2) + s_2 = 12$ . Por lo tanto,  $s_2 = 0$ .
4. En  $D$ ,  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 4$ . De la ecuación (6),  $2(0) + 3(4) + s_2 = 12$ . Por lo tanto,  $s_2 = 0$ .



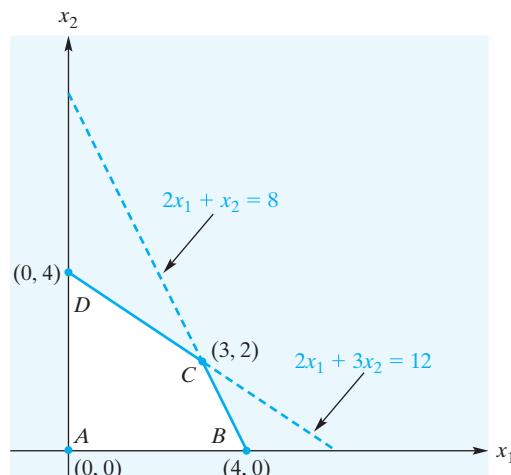
### ADVERTENCIA

Anteriormente se comentó que se usa una gran cantidad de terminología en el estudio de la programación lineal. En particular, hay muchos tipos de *variables*. Es importante entender que las variables llamadas “de decisión”  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se mantienen como tales a lo largo de la resolución de un problema, y este mismo comentario se aplica a las variables de holgura  $s_1, s_2, \dots, s_m$ .

En el proceso de examinar los vértices de la región factible, se encuentran soluciones al sistema en las que al menos  $n$  de las  $n + m$  variables son 0. Precisamente  $n$  de éstas se llaman variables no básicas, y las restantes  $m$  se llaman variables básicas.

Cuáles  $m$  de las  $n + m$  variables son *básicas* depende del vértice bajo consideración. Entre otras cosas, el procedimiento que se describe proporciona una forma mecánica de tener claro, en cualquier momento, cuáles variables son básicas.

También puede demostrarse que cualquier solución de las ecuaciones (5) y (6), tal que al menos *dos* de las cuatro variables  $x_1, x_2, s_1$  y  $s_2$  sean 0, corresponde a un vértice. Cualquier solución donde al menos dos de las variables sean 0 se llama **solución básica factible** (abreviada SBF). Este número, 2, está determinado por el número  $n$  de variables de decisión, 2 en este ejemplo. Para cualquier SBF, las dos variables que toman el valor de 0 se llaman **variables no básicas**, mientras que las otras se llaman **variables básicas** para esa SBF. Como hay un total de  $n + m$  variables, el número de variables básicas del sistema general que surge de (1) es  $m$ , el número de restricciones (diferentes a las que expresan



**FIGURA 7.23** La solución óptima debe ocurrir en un vértice de la región factible.

no negatividad). Así, para la SBF correspondiente al punto 3 de la lista anterior,  $s_1$  y  $s_2$  son las variables no básicas y  $x_1$  y  $x_2$  son las variables básicas, pero para la SBF correspondiente al punto 4, las variables no básicas son  $x_1$  y  $s_2$  y las variables básicas son  $x_2$  y  $s_1$ .

Primero se encontrará una SBF inicial, y por ende, un vértice inicial; y después se determina si el valor correspondiente de  $Z$  puede incrementarse con una SBF diferente. Como  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$  es una solución factible para este problema estándar de programación lineal, primero se encuentra la SBF, donde las variables de decisión  $x_1$  y  $x_2$  son no básicas y por lo tanto las variables de holgura  $s_1$  y  $s_2$  son básicas. Esto es, se elige  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$  y se encuentran los correspondientes valores para  $s_1$ ,  $s_2$  y  $Z$ . Esto puede hacerse de manera más adecuada por medio de técnicas matriciales, basadas en los métodos desarrollados en el capítulo 6.

Si se escribe la ecuación (4) como  $-3x_1 - x_2 + Z = 0$ , entonces las ecuaciones (5), (6) y (4) forman el sistema lineal

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + s_2 &= 12 \\ -3x_1 - x_2 + Z &= 0 \end{cases}$$

en las variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  y  $Z$ . Así, en general, cuando se agrega la función objetivo al sistema que proporciona las restricciones, se tienen  $m + 1$  ecuaciones con  $n + m + 1$  incógnitas. En términos de una matriz aumentada, llamada **tabla simplex inicial**, se tiene

B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$Z$	R
$s_1$	2	1	1	0	0	8
$s_2$	2	3	0	1	0	12
$Z$	-3	-1	0	0	1	0

Es conveniente ser generosos con las etiquetas para las matrices que se utilizarán como tablas simplex. Por lo tanto, las columnas en la matriz a la izquierda de la barra vertical se etiquetan, de manera natural y suficiente, con las variables a las cuales corresponden. Se ha elegido R (del término en inglés *Right*) para etiquetar la columna que proporciona los lados derechos del sistema de ecuaciones. Se ha elegido B (por *Base*) para marcar la lista de marcas de renglón. Los primeros dos renglones corresponden a las restricciones y el último renglón, llamado **renglón objetivo**, corresponde a la ecuación objetivo (a esto se debe la línea horizontal que lo separa). Observe que si  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$ , entonces los valores de  $s_1$ ,  $s_2$  y  $Z$  pueden leerse directamente de los renglones 1, 2 y 3:  $s_1 = 8$ ,  $s_2 = 12$  y  $Z = 0$ . Esta es la razón por la cual se colocan las letras  $s_1$ ,  $s_2$  y  $Z$  a la izquierda de los renglones. Recuerde que  $s_1$  y  $s_2$  son las variables básicas. De manera que el encabezado B de la columna puede entenderse como que es la representación de las variables Básicas. Así que la solución básica factible inicial es

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad s_1 = 8 \quad s_2 = 12$$

en la que  $Z = 0$ .

Ahora se verá si es posible encontrar una SBF que proporcione un valor mayor de  $Z$ . Las variables  $x_1$  y  $x_2$  son no básicas en la SBF anterior. Ahora se buscará una SBF en la que una de estas variables sea básica, mientras las otras permanezcan como no básicas. ¿Cuál debe elegirse como la variable básica? Se examinarán las posibilidades. Del renglón  $Z$  de la matriz anterior,  $Z = 3x_1 + x_2$ . Si a  $x_1$  se le permite volverse básica, entonces  $x_2$  permanecerá como 0 y  $Z = 3x_1$ ; así, por cada unidad de aumento en  $x_1$ ,  $Z$  aumenta en tres unidades. Por otra parte, si a  $x_2$  se le permite ser básica, entonces  $x_1$  aún será 0 y  $Z = x_2$ ; así, por cada aumento unitario de  $x_2$ ,  $Z$  aumenta en una unidad. De aquí que se obtenga un aumento *mayor* en el valor de  $Z$  si  $x_1$ , en lugar de  $x_2$ , entra a la categoría de variable básica. En este caso se llama a  $x_1$  la **variable entrante**. Así, en términos de la tabla simplex que se muestra a continuación (que es la misma de la matriz anterior salvo por algunas marcaciones adicionales) puede hallarse la variable entrante al buscar el “más negativo” de los números encerrados por la llave en el renglón  $Z$  (*más negativo* quiere decir el indicador negativo que tiene la mayor magnitud). Como ese número es

–3 y aparece en la columna de  $x_1$ , entonces  $x_1$  es la variable entrante. Los números en la llave se denominan **indicadores**.

	variable entrante					
B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Z	R
$s_1$	2	1	1	0	0	8
$s_2$	2	3	0	1	0	12
Z	–3	–1	0	0	1	0
	<u>indicadores</u>					

Se resumirá la información que puede obtenerse de esta tabla. Proporciona una SBF donde  $s_1$  y  $s_2$  son las variables básicas y  $x_1$  y  $x_2$  son las no básicas. La SBF es  $s_1 = 8$  (al extremo derecho del renglón de  $s_1$ ),  $s_2 = 12$  (al extremo derecho del renglón de  $s_2$ ),  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$ . El –3 en la columna  $x_1$  del renglón de Z indica que si  $x_1$  permanece como 0, entonces Z aumenta tres unidades por cada unidad que aumente  $x_1$ . El –1 en la columna  $x_2$  del renglón Z indica que si  $x_1$  permanece como 0, entonces Z aumenta en una unidad por cada unidad de aumento en  $x_2$ . La columna en la que se encuentra el indicador más negativo, –3 da la variable entrante  $x_1$ , esto es, la variable que debe convertirse en básica en la siguiente SBF.

En la nueva SBF, a mayor incremento en  $x_1$  (desde  $x_1 = 0$ ), mayor aumento en Z. Ahora, ¿en cuánto puede aumentarse  $x_1$ ? Como  $x_2$  aún se mantendrá en 0, de los renglones 1 y 2 de la tabla simplex anterior se sigue que

$$s_1 = 8 - 2x_1$$

y

$$s_2 = 12 - 2x_1$$

Como  $s_1$  y  $s_2$  son no negativas, se tiene

$$8 - 2x_1 \geq 0$$

y

$$12 - 2x_1 \geq 0$$

De la primera desigualdad,  $x_1 \leq \frac{8}{2} = 4$ , de la segunda,  $x_1 \leq \frac{12}{2} = 6$ . Por lo tanto,  $x_1$  debe ser menor o igual al más pequeño de los cocientes  $\frac{8}{2}$  y  $\frac{12}{2}$ , que es  $\frac{8}{2}$ . De aquí que  $x_1$  pueda aumentar cuando mucho 4. Sin embargo, en una SBF, dos variables deben ser 0. Ya se tiene que  $x_2 = 0$ . Como  $s_1 = 8 - 2x_1$ ,  $s_1$  debe ser igual a 0 para  $x_1 = 4$ . Así que se tiene una nueva SBF, donde  $x_1$  reemplaza a  $s_1$  como una variable básica. Esto es,  $s_1$  saldrá de la categoría de variables básicas de la SBF anterior, y será no básica en la nueva SBF. Se dice que  $s_1$  es la **variable saliente** para la SBF previa. En resumen, para la nueva SBF, se quiere a  $x_1$  y  $s_2$  como variables básicas donde  $x_1 = 4$ ,  $s_2 = 12$  (como antes) y a  $x_2$  y  $s_1$  como variables no básicas ( $x_2 = 0$ ,  $s_1 = 0$ ).

Antes de continuar, se actualizará la tabla. A la derecha de la tabla siguiente se indican los cocientes  $\frac{8}{2}$  y  $\frac{12}{2}$ :

	variable entrante (indicador más negativo)						
B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	Z	R	Cocientes
$s_1$	2	1	1	0	0	8	$8 \div 2 = 4$
$s_2$	2	3	0	1	0	12	$12 \div 2 = 6$
Z	–3	–1	0	0	1	0	
	<u>indicadores</u>						

Estos cocientes se obtuvieron al dividir cada entrada en los primeros dos renglones de la columna de  $R$ , entre la entrada en el renglón correspondiente de la columna de la variable entrante, es decir, la columna  $x_1$ . Observe que la variable saliente está en el mismo renglón que el cociente más pequeño,  $8 \div 2$ .

Como  $x_1$  y  $s_2$  serán básicas en la nueva SBF, será conveniente cambiar la tabla anterior por medio de operaciones elementales con renglones, en forma tal que los valores de  $x_1$ ,  $s_2$  y  $Z$  puedan leerse con facilidad (de la misma manera en que se hizo con la solución correspondiente a  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$ ). Para ello, se quiere encontrar una matriz que sea equivalente a la tabla anterior, pero que tenga la forma

$$\begin{array}{c|ccc|cc} B & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & R \\ \hline x_1 & 1 & ? & ? & 0 & 0 & ? \\ s_2 & 0 & ? & ? & 1 & 0 & ? \\ \hline Z & 0 & ? & ? & 0 & 1 & ? \end{array}$$

donde los signos de interrogación representan números que serán determinados. Observe aquí que si  $x_2 = 0$  y  $s_1 = 0$ , entonces  $x_1$  es igual al número que está en el renglón  $x_1$  de la columna  $R$ ,  $s_2$  es igual al número del renglón  $s_2$  de la columna  $R$  y  $Z$  es el número en el renglón  $Z$  de la columna  $R$ . Por lo tanto, es necesario transformar la tabla

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & \text{variable} & & & & & \\ & \text{entrante} & & & & & \\ & \downarrow & & & & & \\ \text{variable} & \leftarrow & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & R \\ \text{saliente} & & s_1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ & & s_2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline & & Z & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad (7)$$

en una matriz equivalente que tenga un 1 donde la entrada aparece “sombreada” y ceros en las demás entradas en la columna de  $x_1$ . La entrada sombreada se llama **entrada pivote** y está en la columna de la variable entrante (llamada *columna pivot*) y en el renglón de la variable saliente (llamado *renglón pivot*). Por medio de operaciones elementales con renglones, se tiene

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \\ \hline & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{array}{c|ccc|cc} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\ & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_2} \begin{array}{c|ccc|cc} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 12 \end{array}$$

Así, se forma una nueva tabla simplex:

$$\begin{array}{c|ccc|cc} B & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & R \\ \hline x_1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\ s_2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline Z & 0 & \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{indicadores}} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 12 \end{array} \quad (8)$$

Para  $x_2 = 0$  y  $s_1 = 0$ , del primer renglón tenemos que  $x_1 = 4$ ; del segundo, se obtiene  $s_2 = 4$ . Estos valores dan una nueva SBF. Observe que se reemplazó la  $s_1$  localizada a la izquierda de la tabla inicial en (7), por  $x_1$  en la nueva tabla (8), por lo que  $s_1$  salió y  $x_1$  entró. Del renglón 3, para  $x_2 = 0$  y  $s_1 = 0$ , se obtiene  $Z = 12$ , un valor mayor al que se tenía antes ( $Z = 0$ ).

En la actual SBF  $x_2$  y  $s_1$  son variables no básicas ( $x_2 = 0, s_1 = 0$ ). Suponga que se busca otra SBF que dé un valor mayor de  $Z$  tal que una de las dos,  $x_2$  o  $s_1$  sea básica. La ecuación correspondiente al renglón de  $Z$  está dada por  $\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}s_1 + Z = 12$ , lo cual puede reescribirse como

$$Z = 12 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}s_1 \quad (9)$$

Si  $x_2$  se convierte en básica y, por lo tanto,  $s_1$  permanece no básica, entonces

$$Z = 12 - \frac{1}{2}x_2 \quad (\text{ya que } s_1 = 0)$$

Aquí, cada unidad de aumento en  $x_2$  *disminuye* a  $Z$  en  $\frac{1}{2}$  unidad. Así que cualquier aumento en  $x_2$  haría que  $Z$  fuera más pequeña que antes. Por otra parte, si  $s_1$  se convierte en básica y  $x_2$  permanece como no básica, entonces de la ecuación (9),

$$Z = 12 - \frac{1}{2}x_2 \quad (\text{ya que } x_2 = 0)$$

Aquí cada unidad de aumento en  $s_1$  *disminuye* a  $Z$  en  $\frac{3}{2}$  unidades. Por lo tanto, cualquier aumento en  $s_1$  haría a  $Z$  más pequeña que antes. En consecuencia: no es posible moverse a una mejor SBF. En resumen, ninguna SBF proporciona un valor mayor de  $Z$  que la SBF  $x_1 = 4, s_2 = 4, x_2 = 0$  y  $s_1 = 0$  (lo que da  $Z = 12$ ).

De hecho, como  $x_2 \geq 0$  y  $s_1 \geq 0$  y los coeficientes de  $x_2$  y  $s_1$  en la ecuación (9) son negativos, entonces  $Z$  es máxima cuando  $x_2 = 0$  y  $s_1 = 0$ . Esto es, en (8), *tener todos los indicadores no negativos significa que se tiene una solución óptima*.

En términos del problema original, si

$$Z = 3x_1 + x_2$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \quad x_1, x_2 \geq 0$$

entonces  $Z$  es máxima cuando  $x_1 = 4$  y  $x_2 = 0$ , y el valor máximo de  $Z$  es 12. (Esto confirma el resultado del ejemplo 1 de la sección 7.2.) Observe que los valores de  $s_1$  y de  $s_2$  no han aparecido aquí.

Ahora se dará una descripción general del método simplex para un problema estándar de programación lineal con tres variables de decisión y cuatro restricciones, sin contar las condiciones de no negatividad. El propósito es señalar cómo funciona el método simplex para cualquier número de variables de decisión y de restricciones.

## Método simplex

**Problema:**

$$\text{Maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

sujeta a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \leq b_4$$

donde  $x_1, x_2, x_3$  y  $b_1, b_2, b_3, b_4$ , son no negativos.

**Método:**

- 1.** Configure la tabla simplex inicial:

B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Z	R
$s_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	1	0	0	0	0	$b_1$
$s_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	0	1	0	0	0	$b_2$
$s_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	0	0	1	0	0	$b_3$
$s_4$	$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$	0	0	0	1	0	$b_4$
Z	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	0	0	0	0	1	0

**indicadores**

Existen cuatro variables de holgura:  $s_1, s_2, s_3$  y  $s_4$  (una por cada restricción).

- Si todos los indicadores en el último renglón son no negativos, entonces Z tiene un valor máximo con la lista actual de variables básicas y el valor actual de Z. (En el caso de la tabla simplex inicial  $x_1 = 0, x_2 = 0$  y  $x_3 = 0$ , con un valor máximo de  $Z = 0$ .) Si existen indicadores negativos, localice y marque la columna en la que aparezca el indicador más negativo. Esta *columna pivot* proporciona la variable entrante (si más de una columna tiene el indicador más negativo, la elección de la columna pivot se hace de manera arbitraria).
- Divida cada entrada *positiva*<sup>3</sup> por encima del renglón objetivo en la columna de la variable entrante, con el correspondiente valor de la columna R.
- Marque la entrada en la columna pivot que corresponda al cociente más pequeño del paso 3. Ésta es la entrada pivot y el renglón en el que se encuentra es el *renglón pivot*. La variable saliente es aquélla que da nombre a la etiqueta del renglón pivot.
- Utilice operaciones elementales con renglones para transformar la tabla en una nueva tabla equivalente, que tenga un 1 en donde estaba la entrada pivot y 0 en las otras entradas de esa columna.
- En las etiquetas de la columna B de esta tabla, la variable entrante reemplaza a la variable saliente.
- Si los indicadores de la nueva tabla son todos negativos, se tiene una solución óptima. El valor máximo de Z es la entrada en el último renglón y la última columna. Esto ocurre cuando las variables básicas que se encuentran en la columna de etiquetas, B, son iguales a las entradas correspondientes en la columna R. Todas las demás variables son iguales a 0. Si al menos uno de los indicadores es negativo, repita el proceso a partir del paso 2, aplicado a la nueva tabla.

Para entender el método simplex, es útil dar una interpretación para ciertas entradas de la tabla. Suponga que se obtiene una tabla cuyo último renglón es el que se indica a continuación.

B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Z	R
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Z	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	1	$h$

La entrada  $b$ , por ejemplo, puede interpretarse como sigue: si  $x_2$  es no básica y se fuera a convertir en básica, entonces por cada aumento de 1 unidad en  $x_2$ ,

si  $b < 0$ , Z aumenta en  $|b|$  unidades

si  $b > 0$ , Z disminuye en  $|b|$  unidades

si  $b = 0$ , no hay cambio en Z.

<sup>3</sup>Esto se estudiará después del ejemplo 1.

### EJEMPLO 1 El método simplex

Maximizar  $Z = 5x_1 + 4x_2$  sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

$$2x_1 + x_2 \leq 35$$

$$-3x_1 + x_2 \leq 12$$

$$\text{y } x_1, x_2 \geq 0.$$

**Solución:** Este problema de programación lineal ya está en la forma estándar. La tabla simplex inicial es

	variable entrante								
	B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$Z$	R	Cocientes
	$s_1$	1	1	1	0	0	0	20	$20 \div 1 = 20$
variable saliente	$s_2$	2	1	0	1	0	0	35	$35 \div 2 = \frac{35}{2}$
	$s_3$	-3	1	0	0	1	0	12	no hay cociente, $-3 > 0$
	$Z$	-5	-4	0	0	0	1	0	
	indicadores								

El indicador más negativo, -5, aparece en la columna de  $x_1$ . Así que  $x_1$  es la variable entrante. El cociente más pequeño es  $\frac{35}{2}$ , de modo que  $s_2$  es la variable saliente. La entrada pivote es 2. Con el uso de las operaciones elementales con renglones, se obtiene un 1 en la posición del pivote y ceros en las demás entradas de esa columna, entonces se tiene

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & Z & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 35 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline -5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{35}{2} \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline -5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{-1R_2 + R_1} \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{35}{2} \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline -5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{3R_2 + R_3} \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{35}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{129}{2} \\ \hline 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{175}{2} \end{array} \right]
 \end{array}$$

La nueva tabla es

	variable entrante								
	B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$Z$	R	Cocientes
variable saliente	$s_1$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} \div \frac{1}{2} = 5$
	$x_1$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{35}{2}$	$\frac{35}{2} \div \frac{1}{2} = 35$
	$s_3$	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{129}{2}$	$\frac{129}{2} \div \frac{5}{2} = 25\frac{4}{5}$
	$Z$	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{175}{2}$	
	indicadores								

Observe que en la columna B, que mantiene registro de cuáles variables son básicas,  $x_1$  reemplazó a  $s_2$ . Puesto que  $-\frac{3}{2}$  es todavía un indicador negativo, se debe continuar el proceso. Evidentemente,  $-\frac{3}{2}$  es el indicador más negativo y la variable que entra, ahora es  $x_2$ . El cociente más pequeño es 5. Por lo tanto,  $s_1$  es la variable que sale y  $\frac{1}{2}$  es la entrada pivote. Si ahora se aplican operaciones elementales sobre renglones, se tiene

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & Z & R \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{35}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{129}{2} \\ \hline 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{175}{2} \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{-1R_1 + R_2} \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 & 52 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 95 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{-5R_1 + R_3} \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 & 52 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 95 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{2R_1} \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 & 52 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 95 \end{array} \right]
 \end{array}$$

La nueva tabla es

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc|c} B & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & Z & R \\ \hline x_2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ x_1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ s_3 & 0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 & 52 \\ \hline Z & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 95 \end{array} \\
 \text{indicadores}
 \end{array}$$

donde  $x_2$  reemplazó a  $s_1$  en la columna B. Como todos los indicadores son no negativos, el valor máximo de  $Z$  es 95, que ocurre cuando  $x_2 = 5$  y  $x_1 = 15$  (y  $s_3 = 52$ ,  $s_1 = 0$  y  $s_2 = 0$ ).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

Es interesante ver cómo los valores de  $Z$  obtenían de manera progresiva una “mejora” en las tablas sucesivas del ejemplo 1. Éstas son las entradas del último renglón y columna de cada tabla. En la tabla inicial se tenía  $Z = 0$ . De ahí se obtuvo  $Z = \frac{175}{2} = 87\frac{1}{2}$  y después  $Z = 95$ , el valor máximo.

En el ejemplo 1, podría sorprender que ningún cociente sea considerado en el tercer renglón de la tabla inicial. La SBF para esta tabla es

$$s_1 = 20, \quad s_2 = 35, \quad s_3 = 12, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

donde  $x_1$  es la variable que entra. Los cocientes 20 y  $\frac{35}{2}$  reflejan que para la siguiente SBF se tiene  $x_1 \leq 20$  y  $x_1 \leq \frac{35}{2}$ . Como el tercer renglón representa la ecuación  $s_3 = 12 + 3x_1 - x_2$ , y  $x_2 = 0$ , se sigue que  $s_3 = 12 + 3x_1$ . Pero  $s_3 \geq 0$ , entonces  $12 + 3x_1 \geq 0$ , lo cual implica que  $x_1 \geq -\frac{12}{3} = -4$ . Por lo tanto, se tiene

$$x_1 \leq 20, \quad x_1 \leq \frac{35}{2} \quad \text{y} \quad x_1 \geq -4$$

De aquí que pueda aumentarse  $x_1$  hasta en  $\frac{35}{2}$ . La condición  $x_1 \geq -4$  no influye en la determinación del aumento máximo en  $x_1$ . Éste es el porqué el cociente  $12/(-3) = -4$  no está considerado en el renglón 3. En general, *no se considera el cociente para un renglón, si la entrada en la columna de la variable que entra es negativa (o, por supuesto, 0)*.

Aunque el procedimiento simplex desarrollado en esta sección se aplica sólo a problemas de programación lineal de la forma estándar, se le pueden adaptar otras formas. Suponga que una restricción tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq -b$$

donde  $b > 0$ . Aquí el símbolo de desigualdad es “ $\geq$ ” y la constante del lado derecho es negativa. Por lo tanto, la restricción no está en la forma estándar. Sin embargo, al multiplicar ambos miembros por  $-1$ , se obtiene

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \leq b$$

que *tiene la forma apropiada*. De acuerdo con esto, puede ser necesario reescribir una restricción antes de proceder con el método simplex.

En una tabla simplex, varios indicadores pueden “empatar” como los más negativos. En este caso, seleccione cualquiera de ellos para obtener la columna de la variable entrante. Del mismo modo, puede haber varios cocientes que “empaten” como los más pequeños. Puede seleccionar cualquiera de estos cocientes para obtener la variable que sale y la entrada pivote. El ejemplo 2 ilustrará esto. Cuando existe un empate para el cociente más pequeño entonces, además de las variables no básicas, una SBF tendrá una variable básica igual a 0. En este caso se dice que la SBF es *degenerada* o que el problema de programación lineal tiene una *degeneración*. En la sección 7.5 se ampliará el tema.

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

## EL MÉTODO SIMPLEX

La compañía Toones tiene \$30 000 para la compra de materiales que se destinarán a fabricar tres tipos de reproductores de MP3. La empresa ha asignado un total de 1200 horas de tiempo para ensamblar y 180 horas para empaquetar los aparatos. La tabla siguiente da el costo, el número de horas y la utilidad por aparato para cada tipo:

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Costo/ aparato	\$300	\$300	\$400
Horas de ensamblado/ aparato	15	15	10
Horas de empaque/ aparato	2	2	3
Utilidad	\$150	\$250	\$200

Encuentre el número de aparatos de cada tipo que la compañía debe producir para maximizar la utilidad.

## EJEMPLO 2 El método simplex

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar } Z = 3x_1 + 4x_2 + \frac{3}{2}x_3, \text{ sujeta a} \\
 & \quad -x_1 - 2x_2 \geq -10 \\
 & \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\
 & \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

**Solución:** La restricción (10) no se ajusta a la forma estándar. Sin embargo, al multiplicar ambos lados de la desigualdad (10) por  $-1$ , se obtiene

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

que *sí tiene* la forma apropiada. De esta manera, la tabla simplex inicial es la tabla I:

## TABLA SIMPLEX I

variable  
entrante

	B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	Z	R	Cocientes
variable saliente	$\leftarrow$	$s_1$	1	2	0	1	0	0	$10 \div 2 = 5$
		$s_2$	2	2	1	0	1	0	$10 \div 2 = 5$
		Z	<u>-3</u>	<u>-4</u>	<u><math>-\frac{3}{2}</math></u>	0	0	1	0
			indicadores						

La variable entrante es  $x_2$ . Como existe empate para el cociente más pequeño, puede seleccionarse  $s_1$  o  $s_2$  como la variable saliente. Se elige  $s_1$ . La entrada pivote aparece sombreada. Al aplicar operaciones elementales sobre renglones se obtiene la tabla II:

**TABLA SIMPLEX II**

## variable entrante

La tabla II corresponde a una SBF en la que una variable básica,  $s_2$ , es 0. Por lo tanto, la SBF es degenerada. Como existen indicadores negativos, se continúa. La variable que entra ahora es  $x_3$ , la variable que sale es  $s_2$  y el pivote aparece sombreado. Al aplicar operaciones elementales con renglones se obtiene la tabla III:

**TABLA SIMPLEX III**

B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	Z	R
$x_2$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	5
$x_3$	1	0	1	-1	1	0	0
Z	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	20

*indicadores*

Como todos los indicadores son no negativos, Z es máxima cuando  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = 0$  y  $x_1 = s_1 = s_2 = 0$ . El valor máximo es  $Z = 20$ . Observe que este valor es el mismo que el correspondiente de Z en la tabla II. En problemas degenerados es posible llegar al mismo valor de Z en varias etapas del método simplex. En el problema 7, se le pedirá que resuelva este problema utilizando  $s_2$  como la variable que sale en la tabla inicial.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7 

Debido a su naturaleza mecánica, el método simplex se adapta con facilidad a las computadoras en la resolución de problemas de programación lineal que incluyan muchas variables y restricciones.

## Problemas 7.4

Utilice el método simplex para resolver los problemas siguientes.

\*1. Maximizar

$$Z = x_1 + 2x_2$$

4. Maximizar

$$Z = 4x_1 + 7x_2$$

sujeta a

sujeta a

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

5. Maximizar

$$Z = 8x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

6. Maximizar

$$Z = 2x_1 - 6x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

sujeta a

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3. Maximizar

$$Z = -x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$3x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

\*7. Resuelva el problema del ejemplo 2, seleccione  $s_2$  como la variable saliente en la tabla I.

## 8. Maximizar

$$Z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

## 9. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2 - x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

## 10. Maximizar

$$Z = -2x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 - x_2 \geq -3$$

$$x_1 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## 11. Maximizar

$$Z = x_1 + x_2$$

sujeta a

$$2x_1 - x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 20$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## 12. Maximizar

$$W = 2x_1 + x_2 - 2x_3$$

sujeta a

$$-2x_1 + x_2 + x_3 \geq -2$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

## 13. Maximizar

$$W = x_1 - 12x_2 + 4x_3$$

sujeta a

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq -2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \geq -1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

## 14. Maximizar

$$W = 4x_1 + 0x_2 - x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 10$$

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

## 15. Maximizar

$$Z = 60x_1 + 0x_2 + 90x_3 + 0x_4$$

sujeta a

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_3 + x_4 \leq 4$$

$$x_3 - 2x_4 \leq 7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

## 16. Maximizar

$$Z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4$$

sujeta a

$$x_1 + x_3 - x_4 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 + x_4 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- 17. Flete por envío** Una compañía de fletes maneja los envíos de dos corporaciones, A y B, que están ubicadas en la misma ciudad. La corporación A envía cajas que pesan 3 lb cada una y tienen un volumen de 2 pies cúbicos; B envía cajas de 1 pie cúbico que pesan 5 lb cada una. Ambas envían al mismo destino. El costo de transporte para cada caja de A es \$0.75 y para B es \$0.50. La compañía de fletes tiene un camión con capacidad de carga de 2400 pies cúbicos y una capacidad máxima de 36 800 lb. ¿Cuántas cajas desde cada corporación debe transportar en cada traslado de modo que el ingreso de la compañía de fletes sea máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

- 18. Producción** Una compañía fabrica tres productos X, Y y Z. Cada uno requiere de un tiempo de máquina y uno de acabado como se muestra en la tabla siguiente:

	Tiempo de máquina	Tiempo de acabado
X	1 h	4 h
Y	2 h	4 h
Z	3 h	8 h

El número de horas de tiempo de máquina y de tiempo de acabado disponibles por mes son 900 y 5000, respectivamente. La utilidad unitaria sobre X, Y y Z es \$6, \$8 y \$12, respectivamente. ¿Cuál es la utilidad máxima por mes que puede obtenerse?

- 19. Producción** Una compañía fabrica tres tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se muestra en la tabla siguiente:

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón	1 unidad	2 unidades	5 unidades

La compañía cuenta con 400 unidades disponibles de madera, 500 de plástico y 1450 de aluminio. Cada silla, mecedora y sillón se vende a \$21, \$24 y \$36, respectivamente. Suponga que todos los muebles pueden venderse, determine la producción para que el ingreso total sea máximo. ¿Cuál es el ingreso máximo?

## OBJETIVO

Considerar el método simplex en relación con la degeneración, soluciones no acotadas y soluciones óptimas múltiples.

## 7.5 Degeneración, soluciones no acotadas y soluciones óptimas múltiples<sup>4</sup>

### Degeneración

En la sección precedente se estableció que una solución básica factible se denomina **degenerada** si además de las variables no básicas, una de las variables básicas es 0. Suponga que  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  son las variables en una SBF degenerada, donde  $x_1$  y  $x_2$  son básicas, donde  $x_1 = 0$ ,  $x_3$  y  $x_4$  son no básicas, y donde  $x_3$  es la variable entrante. La tabla simplex correspondiente tiene la forma

$$\begin{array}{c}
 \text{variable} \\
 \text{entrante} \\
 \downarrow \\
 \begin{array}{cccc|cc}
 B & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & Z & R \\
 \text{variable} & \leftarrow & & & & & \\
 \text{saliente} & & & & & & \\
 \hline
 x_1 & 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\
 x_2 & 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & 0 & a \\
 Z & 0 & 0 & d_1 & d_2 & 1 & d_3
 \end{array} \\
 \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{indicadores}}
 \end{array}$$

Así, la SBF es

$$x_1 = 0, \quad x_2 = a, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

Suponga que  $a_{13} > 0$ . Entonces el cociente más pequeño es 0 y puede elegirse a  $a_{13}$  como la entrada pivote. Así,  $x_1$  es la variable saliente. Mediante operaciones elementales con renglones se obtiene la tabla siguiente, donde los símbolos de interrogación representan números por determinar:

$$\begin{array}{cccc|cc}
 B & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & Z & R \\
 x_3 & ? & 0 & 1 & ? & 0 & 0 \\
 x_2 & ? & 1 & 0 & ? & 0 & a \\
 \hline
 Z & ? & 0 & 0 & ? & 1 & d_3
 \end{array}$$

Para la SBF correspondiente a esta tabla,  $x_3$  y  $x_2$  son variables básicas y  $x_1$  y  $x_4$  son no básicas. La SBF es

$$x_3 = 0 \quad x_2 = a \quad x_1 = 0 \quad x_4 = 0$$

que es la misma SBF de antes. En la práctica se consideran diferentes SBF, aunque la única distinción es que  $x_1$  es básica en la primera SBF, mientras que en la segunda es no básica. El valor de  $Z$  para ambas es el mismo,  $d_3$ . Así, no se obtuvo “mejora” en  $Z$ .

En una situación de degeneración pueden presentarse algunos problemas con el método simplex. Es posible que se obtenga una secuencia de tablas que correspondan a las SBF que dan el mismo valor de  $Z$ . Además, en un momento dado puede regresarse a la primera tabla de la secuencia. En la figura 7.24 se llega a la  $SBF_1$ , se prosigue a la  $SBF_2$ , después a la  $SBF_3$ , y finalmente de vuelta a la  $SBF_1$ . Esto se llama *ciclo*. Cuando ocurre, es posible que nunca se obtenga el valor óptimo de  $Z$ . Este fenómeno se encuentra muy pocas veces en problemas de programación lineal prácticos; sin embargo, existen técnicas (que no se analizarán en este texto) para resolver tales dificultades.

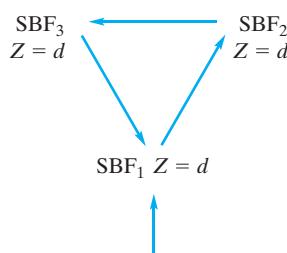


FIGURA 7.24 Ciclo.

<sup>4</sup>Esta sección puede omitirse.

Una SBF degenerada ocurrirá cuando dos cocientes en la tabla simplex empaten con los cocientes más pequeños. Por ejemplo, considere la tabla siguiente (parcial):

B	$x_3$	R	Cocientes
$x_1$	$q_1$	$p_1$	$p_1/q_1$
$x_2$	$q_2$	$p_2$	$p_2/q_2$

Aquí  $x_1$  y  $x_2$  son variables básicas. Suponga que  $x_3$  es no básica y entrante, y que  $p_1/q_1 = p_2/q_2$  son los cocientes más pequeños. Al seleccionar  $q_1$  como la entrada pivote, mediante operaciones elementales con renglones, se obtiene

B	$x_3$	R
$x_3$	1	$p_1/q_1$
$x_2$	0	$p_2 - q_2 \frac{p_1}{q_1}$

Como  $p_1/q_1 = p_2/q_2$ , se tiene que  $p_2 - q_2(p_1/q_1) = 0$ . Por lo que la SBF correspondiente a esta tabla tiene  $x_2 = 0$ , lo que da una SBF *degenerada*. Aunque esta SBF puede producir un ciclo, esa situación no se encontrará en este libro. Sin embargo vea el ejercicio 11 de los problemas de la sección 7.5.

### Soluciones no acotadas

Ahora se pondrá atención en “problemas no acotados”. En la sección 7.2 se vio que un problema de programación lineal puede no tener un valor máximo cuando su región factible es tal que la función objetivo puede ser arbitrariamente grande. En este caso, se dice que el problema tiene una **solución no acotada**. Ésta es una forma de especificar que no existe solución óptima. Esta situación ocurre cuando no existen cocientes posibles en una tabla simplex para una variable que entra. Por ejemplo, considere la tabla siguiente:

variable entrante ↓						
B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Z	R
$x_1$	1	-3	0	2	0	5
$x_3$	0	0	1	4	0	1
Z	0	-5	0	-2	1	10

indicadores

Aquí  $x_2$  es la variable que entra y por cada aumento de una unidad en  $x_2$ , Z aumenta en 5. Como no existen entradas positivas en los primeros dos renglones de la columna  $x_2$ , no existe cociente alguno. De los renglones 1 y 2, se obtiene

$$x_1 = 5 + 3x_2 - 2x_4$$

y

$$x_3 = 1 - 4x_4$$

Si se trata de pasar a la siguiente SBF, ¿cuál es una cota superior para  $x_2$ ? En esa SBF,  $x_4$  permanecerá como no básica ( $x_4 = 0$ ). Así,  $x_1 = 5 + 3x_2$  y  $x_3 = 1$ . Como  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq -\frac{5}{3}$ . Por lo tanto, no existe cota superior sobre  $x_2$ . De aquí que Z pueda ser arbitrariamente grande y se tenga una solución no acotada.

Si no existen cocientes en una tabla simplex, entonces el problema de programación lineal tiene una solución no acotada.

### EJEMPLO 1 Solución no acotada

Maximizar  $Z = x_1 + 4x_2 - x_3$ , sujeta a

$$-5x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 30$$

$$-x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**Solución:** La tabla simplex inicial es

	variable entrante						
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$Z$	R
$s_1$	-5	6	-2	1	0	0	30
$s_2$	-1	3	6	0	1	0	12
$Z$	-1	-4	1	0	0	1	0

*variable saliente* ← ↓ *variable entrante* → *Cocientes*  
*indicadores*       $30 \div 6 = 5$   
*indicadores*       $12 \div 3 = 4$

La segunda tabla es

	variable entrante						
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$Z$	R
$s_1$	-3	0	-14	1	-2	0	6
$x_2$	$-\frac{1}{3}$	1	2	0	$\frac{1}{3}$	0	4
$Z$	$-\frac{7}{3}$	0	9	0	$\frac{4}{3}$	1	16

*indicadores*

Aquí la variable entrante es  $x_1$ . Como las entradas en los primeros dos renglones de la columna  $x_1$  son negativas, no existen cocientes. De aquí que el problema tenga una solución no acotada.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3 

### Soluciones óptimas múltiples

Se concluye esta sección con un estudio de “soluciones óptimas múltiples”. Suponga que

$$x_1 = a_1 \quad x_2 = a_2 \quad \cdots \quad x_n = a_n$$

y

$$x_1 = b_1 \quad x_2 = b_2 \quad \cdots \quad x_n = b_n$$

son dos SBF *diferentes* para las cuales un problema de programación lineal es óptimo. Por “SBF diferentes” se entiende que  $a_i \neq b_i$ , para alguna  $i$ , donde  $1 \leq i \leq n$ . Puede demostrarse que los valores

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-t)a_1 + tb_1 \\ x_2 &= (1-t)a_2 + tb_2 \\ &\vdots \\ x_n &= (1-t)a_n + tb_n \end{aligned} \tag{1}$$

para cualquier  $t$  tal que  $0 \leq t \leq 1$

también dan una solución óptima (aunque no necesariamente será una SBF). Así, existen *soluciones múltiples* (*óptimas*) para el problema.

Puede determinarse la posibilidad de hallar soluciones óptimas múltiples a partir de una tabla simplex que dé una solución óptima, como en la tabla (parcial) que se muestra a continuación:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$Z$	R
$x_1$						$p_1$
$x_2$						$q_1$
$Z$	0	0	$a$	0	1	$r$

*indicadores*

Aquí  $a$  debe ser no negativa. La correspondiente SBF, es

$$x_1 = p_1 \quad x_2 = q_1 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0$$

y el valor máximo de  $Z$  es  $r$ . Si  $x_4$  se convirtiese en básica, el indicador 0 en la columna  $x_4$ , significaría que por cada aumento unitario en  $x_4$ ,  $Z$  no cambiaría. Así que puede encontrarse una SBF en la que  $x_4$  es básica y el correspondiente valor de  $Z$  es el mismo que antes. Esto se logra si  $x_4$  se trata como la variable entrante en la tabla anterior. Si, por ejemplo,  $x_1$  es la variable que sale, entonces el elemento pivote será el del renglón  $x_1$  y la columna  $x_4$ . La nueva SBF, tiene la forma

$$x_1 = 0 \quad x_2 = q_2 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = p_2$$

donde  $q_2$  y  $p_2$  son números que resultan del proceso de pivoteo. Si esta SBF es diferente de la anterior, entonces existen soluciones múltiples. De hecho, de acuerdo con las ecuaciones (1) una solución óptima está dada por cualesquiera valores de  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ , tales que

$$x_1 = (1-t)p_1 + t \cdot 0 = (1-t)p_1$$

$$x_2 = (1 - t)q_1 + tq_2$$

$$x_3 = (1-t) \cdot 0 + t \cdot 0 = 0$$

$$x_4 = (1-t) \cdot 0 + tp_2 = tp_2$$

donde  $0 \leq t \leq 1$

Observe que cuando  $t = 0$ , se obtiene la primera SBF óptima; cuando  $t = 1$ , se obtiene la segunda. Es posible repetir el procedimiento mediante la tabla correspondiente a la última SBF, y obtener soluciones óptimas con base en las ecuaciones (1).

En una tabla que da una solución óptima, un indicador igual a 0 para una variable no básica sugiere la posibilidad de soluciones óptimas múltiples.

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

## SOLUCIONES MÚLTIPLES

Una compañía produce tres clases de dispositivos que requieren de tres diferentes procesos de producción. La empresa ha asignado un total de 190 horas para el proceso 1, 180 para el 2 y 165 horas para el 3. La tabla siguiente proporciona el número de horas por dispositivo para cada procedimiento.

	Dispositivo 1	Dispositivo 2	Dispositivo 3
Proceso 1	5.5	5.5	6.5
Proceso 2	3.5	6.5	7.5
Proceso 3	4.5	6.0	6.5

Si la utilidad es de \$50 por el dispositivo 1, de \$50 por el 2 y de \$50 por el 3, encuentre el número de dispositivos de cada clase que la compañía debe producir para maximizar la utilidad. Introduzca la tabla inicial en una matriz en su calculadora grafadora, y realice las operaciones con renglones necesarias para determinar la respuesta. Redondee al entero más cercano.

## EJEMPLO 2 Soluciones múltiples

Maximizar  $Z = -x_1 + 4x_2 + 6x_3$ , sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$$

$$-2x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**Solución:** La tabla simplex inicial es

		variable entrante							
							↓		
variable saliente ←	B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	Z	R	Cocientes
	$s_1$	1	2	3	1	0	0	6	$6 \div 3 = 2$
	$s_2$	-2	-5	1	0	1	0	10	$10 \div 1 = 10$
	Z	1	-4	-6	0	0	1	0	
		<u>indicadores</u>							

Como hay un indicador negativo, se continúa para obtener

		variable entrante								
								↓		
variable saliente		B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	Z	R	Cocientes
		$x_3$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	2	$2 \div \frac{2}{3} = 3$
		$s_2$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{17}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	8	no hay cociente
		Z	3	0	0	2	0	1	12	
		indicadores								

Todos los indicadores son no negativos, por lo tanto, ocurre una solución óptima para la SBF

$$x_3 = 2 \quad s_2 = 8 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad s_1 = 0$$

y el valor máximo de  $Z$  es 12. Sin embargo, como  $x_2$  es una variable no básica y su indicador es 0, se verifica si existen soluciones múltiples. Si se trata a  $x_2$  como una variable entrante, se obtiene la tabla siguiente:

B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$Z$	R
$x_2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	3
$s_2$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{17}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	0	25
$Z$	3	0	0	2	0	1	12

Aquí la SBF es

$$x_2 = 3 \quad s_2 = 25 \quad x_1 = 0 \quad x_3 = 0 \quad s_1 = 0$$

(para la cual  $Z = 12$ , como antes) y es diferente de la anterior. Así que existen soluciones múltiples. Como sólo hay interés en los valores de las variables de decisión, se tiene una solución óptima.

$$x_1 = (1 - t) \cdot 0 + t \cdot 0 = 0$$

$$x_2 = (1 - t) \cdot 0 + t \cdot 3 = 3t$$

$$x_3 = (1 - t) \cdot 2 + t \cdot 0 = 2(1 - t)$$

para cada valor de  $t$  tal que  $0 \leq t \leq 1$ . (Por ejemplo, si  $t = \frac{1}{2}$ , entonces  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{3}{2}$  y  $x_3 = 1$  es una solución óptima.)

En la última SBF,  $x_3$  no es básica y su indicador es 0. Sin embargo, si se repite el proceso para determinar otras soluciones óptimas, se regresaría a la segunda tabla. Por lo tanto, el procedimiento no da otras soluciones óptimas.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5 

## Problemas 7.5

En los problemas 1 y 2, ¿el problema de programación lineal asociado con la tabla dada tiene degeneración? Si es así, ¿por qué?

1.

B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$Z$	R
$x_1$	1	2	4	0	0	6
$s_2$	0	1	1	1	0	3
$Z$	0	-3	-2	0	1	10

indicadores

2.

B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$Z$	R
$s_1$	2	0	2	1	1	0	4
$x_2$	3	1	1	0	1	0	0
$Z$	-5	0	1	0	-3	1	2

indicadores

4. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 \leq 7$$

$$-x_1 + x_2 \leq 5$$

$$8x_1 + 5x_2 \leq 40$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

\*5. Maximizar

$$Z = -4x_1 + 8x_2$$

Utilice el método simplex en los problemas 3 a 10.

\*3. Maximizar

$$Z = 2x_1 + 7x_2$$

sujeta a

sujeta a

$$4x_1 - 3x_2 \leq 4$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$3x_1 - x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$5x_1 \leq 8$$

$$3x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

6. Maximizar

$$Z = 8x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 - x_3 \geq -4$$

$$x_1 - 6x_2 + x_3 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

7. Maximizar

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + x_3$$

sujeta a

$$9x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 5$$

$$4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2$$

$$x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

8. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2 - 4x_3$$

sujeta a

$$6x_1 + 3x_2 - 3x_3 \leq 10$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

9. Maximizar

$$Z = 6x_1 + 2x_2 + x_3$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$$

$$-4x_1 - x_2 \geq -6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

10. Maximizar

$$P = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_2 - x_3 \leq 3$$

$$x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- 11. Producción** Una compañía fabrica tres tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se indica en la tabla que sigue.

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón	1 unidad	2 unidades	5 unidades

La compañía cuenta con 400 unidades disponibles de madera, 600 de plástico y 1500 de aluminio. Cada silla, mecedora y sillón se vende en \$24, \$32 y \$48, respectivamente. Suponga que todos los muebles pueden venderse, ¿cuál es el ingreso máximo total que puede obtenerse? Determine las posibles órdenes de producción que generarán ese ingreso.

## OBJETIVO

## 7.6 Variables artificiales

Usar variables artificiales para manejar problemas de maximización que no están expresadas en la forma estándar.

Para iniciar el método simplex se requiere de una *solución básica factible*, SBF. (Álgebraicamente, se comienza en un vértice con el uso de la tabla simplex inicial y cada tabla subsecuente conduce a otro vértice hasta que se llega al punto que representa una solución óptima.) Para un problema de programación lineal *estándar*, se empieza con la SBF, en la que todas las variables de decisión son 0. Sin embargo, para un problema de maximización que no esté en la forma estándar, tal SBF podría no existir. En esta sección se presentará la forma en que se utiliza el método simplex en estas situaciones.

Considere el problema siguiente:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 9 \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 \geq 1 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dado que la restricción (2) no puede escribirse como  $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ , donde  $b$  es no negativa, este problema no puede expresarse en la forma estándar. Observe que  $(0, 0)$  no es un punto factible, pues no satisface la restricción (2). (Puesto que  $0 - 0 = 0 \geq 1$  es *falso!*) Para resolver este problema, se comienza por escribir las restricciones (1) y (2) como ecuaciones. La restricción (1) se convierte en

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9 \quad (3)$$

donde  $s_1 \geq 0$  es una variable de holgura. Para la restricción (2),  $x_1 - x_2$  será igual a 1 si se resta una variable de holgura no negativa  $s_2$  de  $x_1 - x_2$ . Es decir, al restar  $s_2$  se compensa el “excedente” sobre el lado izquierdo de (2) de modo que se tiene la igualdad. De esta manera

$$x_1 - x_2 - s_2 = 1 \quad (4)$$

donde  $s_2 \geq 0$ . Ahora, el problema puede replantearse:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 2x_2 \quad (5)$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9 \quad (6)$$

$$x_1 - x_2 - s_2 = 1 \quad (7)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Como  $(0, 0)$  no está en la región factible, no se tiene una SBF en la que  $x_1 = x_2 = 0$ . De hecho, si  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$  se sustituyen en la ecuación (7), entonces  $0 - 0 - s_2 = 1$ , lo que da  $s_2 = -1$ . Pero ahora esto contradice la condición de que  $s_2 \geq 0$ .

Para poner en marcha el método simplex, se necesita una SBF inicial. Aunque ninguna es obvia, existe un método ingenioso para llegar a una en forma *artificial*. Requiere de considerar un problema de programación lineal relacionado que se conoce como *problema artificial*. Primero se forma una nueva ecuación al sumar una variable no negativa  $t$  al lado izquierdo de la ecuación en la que el coeficiente de la variable de holgura es  $-1$ . La variable  $t$  se llama **variable artificial**. En este caso, se reemplaza la ecuación (7) por  $x_1 - x_2 - s_2 + t = 1$ . Así, las ecuaciones (6) y (7) se convierten en

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9 \quad (8)$$

$$x_1 - x_2 - s_2 + t = 1 \quad (9)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, t \geq 0$$

Se encuentra una solución obvia para las ecuaciones (8) y (9) al considerar  $x_1, x_2$  y  $s_2$  iguales a 0. Esto da

$$x_1 = x_2 = s_2 = 0 \quad s_1 = 9 \quad t = 1$$

Observe que estos valores no satisfacen la ecuación (7). Sin embargo, es claro que cualquier solución de las ecuaciones (8) y (9) para la cual  $t = 0$  dará una solución para las ecuaciones (6) y (7), y viceversa.

En algún momento puede迫使rse que  $t$  sea 0 si se altera la función objetivo original. Se define la **función objetivo artificial** como

$$W = Z - Mt = x_1 + 2x_2 - Mt \quad (10)$$

donde la constante  $M$  es un número positivo muy grande. No hay necesidad de preocuparse por el valor particular de  $M$ , y puede procederse a maximizar  $W$  con el método simplex. Como hay  $m = 2$  restricciones (si se excluyen las condiciones de no negatividad) y  $n = 5$  variables en las ecuaciones (8) y (9), cualquier SBF debe tener al menos  $n - m = 3$  variables iguales a 0. Se comienza con la siguiente SBF:

$$x_1 = x_2 = s_2 = 0 \quad s_1 = 9 \quad t = 1 \quad (11)$$

En esta SBF inicial, las variables no básicas son las variables de decisión y la variable de “holgura”  $s_2$ . El correspondiente valor de  $W$  es  $W = x_1 + 2x_2 - Mt = -M$ , que es un número “extremadamente” negativo dado que se supuso que  $M$  era un número positivo muy grande. Una mejora significativa de  $W$  ocurrirá si es posible encontrar otra SBF para la cual  $t = 0$ . Como el método simplex busca mejorar los valores de  $W$  en cada etapa, se aplicará hasta llegar a tal SBF, si es posible. Esta solución será una SBF inicial para el problema original.

Para aplicar el método simplex al problema artificial, primero se escribe la ecuación (10) como

$$-x_1 - 2x_2 + Mt + W = 0 \quad (12)$$

La matriz aumentada de las ecuaciones (8), (9) y (12) es

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -2 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (13)$$

Una SBF inicial está dada por (11). Observe que del renglón 1, cuando  $x_1 = x_2 = s_2 = 0$ , puede leerse directamente el valor de  $s_1$ , a saber,  $s_1 = 9$ . Del renglón 2 se obtiene  $t = 1$ . Del renglón 3,  $Mt + W = 0$ . Como  $t = 1$ , entonces  $W = -M$ . Pero en una tabla simplex se desea que el valor de  $W$  aparezca en el último renglón y en la última columna. Esto no es así en (13) y, por lo tanto, esa matriz debe modificarse.

Para ello se transforma (13) en una matriz equivalente cuyo último renglón tiene la forma

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W \\ ? & ? & 0 & ? & 0 & 1 & ? \end{array}$$

Esto es, la  $M$  en la columna  $t$  es reemplazada por 0. Como resultado, si  $x_1 = x_2 = s_2 = 0$ , entonces  $W$  es igual a la última entrada. Se procede a obtener dicha matriz al pivotear el elemento sombreado en la columna  $t$ , y se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & R \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -2 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}$$

$\xrightarrow{-MR_2 + R_3}$

$$\begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & R \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 - M & -2 + M & 0 & M & 0 & 1 & -M \end{array}$$

Ahora se revisarán algunas cosas. Si  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  y  $s_2 = 0$ , entonces del renglón 1 se obtiene  $s_1 = 9$ , del renglón 2,  $t = 1$ ; del renglón 3,  $W = -M$ . Así, ahora se tiene la tabla simplex inicial I:

TABLA SIMPLEX I								
variable entrante	B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$t$	$R$	Cocientes
	$s_1$	1		1	0	0	0	9
variable saliente	$t$	1	-1	0	-1	1	0	1
	$W$	$-1 - M$	$-2 + M$	0	$M$	0	1	$-M$
	indicadores							

A partir de aquí pueden utilizarse los procedimientos de la sección 7.4. Como  $M$  es un número positivo grande, el indicador más negativo es  $-1 - M$ . De este modo la variable que entra es  $x_1$ . A partir de los cocientes, se selecciona  $t$  como la variable que sale. La entrada pivote está sombreada. Al aplicar operaciones elementales con renglones para

obtener 1 en la posición del pivote y 0 en todas las demás entradas de esa columna, se obtiene la tabla simplex II:

## TABLA SIMPLEX II

		variable entrante							
						↓			
variable saliente	B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$t$	$W$	R	Cocientes
	$s_1$	0	2	1	1	-1	0	8	$8 \div 2 = 4$
	$x_1$	1	-1	0	-1	1	0	1	no hay cociente
	$W$	0	-3	0	-1	$1 + M$	1	1	
indicadores									

De la tabla II, se tiene la siguiente SBF:

$$s_1 = 8 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 0 \quad s_2 = 0 \quad t = 0$$

Como  $t = 0$ , los valores  $s_1 = 8, x_1 = 1, x_2 = 0$  y  $s_2 = 0$  forman una SBF, para ¡el problema original! La variable artificial ha cumplido con su propósito. Para las tablas siguientes se eliminará la columna  $t$  (porque se desea resolver el problema original) y se cambiarán las  $W$  por  $Z$  (puesto que  $W = Z$  para  $t = 0$ ). De la tabla II, la variable entrante es  $x_2$ , la variable que sale es  $s_1$  y la entrada pivoté está sombreada. Al aplicar operaciones elementales con renglones (se omite la columna  $t$ ), se obtiene la tabla III:

### **TABLA SIMPLEX III**

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} B & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & R \\ x_2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ x_1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 5 \\ \hline Z & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 13 \end{array} \right]$$

indicadores

Como todos los indicadores son no negativos, el valor máximo de  $Z$  es 13. Esto ocurre cuando  $x_1 = 5$  y  $x_2 = 4$ .

Es útil revisar los pasos que se realizaron para resolver el problema:

Maximizar  $Z = x_1 + 2x_2$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 9 \quad (14)$$

$$x_1 - x_2 \geq 1 \quad (15)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Se escribe la desigualdad (14) como

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9$$

Como la desigualdad (15) involucra al símbolo  $\geq$ , y la constante al lado derecho no es negativa, se escribe la desigualdad (15) en una forma que tiene tanto una variable de excedente como una variable artificial:

$$x_1 = x_2 = s_2 + t = 1 \quad (17)$$

La ecuación objetivo artificial a considerar es  $W = x_1 + 2x_2 - Mt$ , o de manera equivalente

$$= x_1 - 2x_2 + Mt + W \equiv 0 \quad (18)$$

La matriz aumentada del sistema formado por las ecuaciones (16) a (18) es

$$\begin{array}{c|cccccc|c} \text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & R \\ \hline s_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ t & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline W & -1 & -2 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}$$

Ahora, se elimina  $M$  de la columna de la variable artificial y se reemplaza con 0 mediante el uso de operaciones elementales con renglones. La tabla simplex I resultante corresponde a la SBF inicial del problema artificial, en el que las variables de decisión,  $x_1$  y  $x_2$ , y la variable de holgura  $s_2$  son cada una igual a 0:

**TABLA SIMPLEX I**

$$\begin{array}{c|cccccc|c} \text{B} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & R \\ \hline s_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ t & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline W & -1 - M & -2 + M & 0 & M & 0 & 1 & -M \end{array}$$

Las variables básicas  $s_1$  y  $t$  en el lado izquierdo de la tabla corresponden a las que no son variables de decisión de las ecuaciones (16) y (17) que tienen coeficientes positivos. Ahora se aplicará el método simplex hasta que se obtenga una SBF en la que la variable artificial,  $t$ , sea igual a 0. Después se podrá eliminar la columna de la variable artificial, cambiar las  $W$  por  $Z$  y continuar el procedimiento hasta obtener el valor máximo de  $Z$ .

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

### VARIABLES ARTIFICIALES

La compañía GHI fabrica dos modelos de *snowboards*, estándar y de lujo, en dos diferentes plantas de manufactura. La producción máxima en la planta I es de 1200 *snowboards*, en tanto que la producción máxima en la planta II es de 1000 al mes. Debido a las obligaciones contractuales, el número de modelos de lujo producidos en la planta I no puede exceder el número de modelos estándar producidos en la misma planta I en más de 200. La utilidad por la fabricación de tablas para nieve de los modelos estándar y de lujo en la planta I es de \$40 y \$60, respectivamente, mientras que para la planta II es de \$45 y \$50, respectivamente, en tanto que para la planta II, es de \$45 y \$50, respectivamente. Este mes, GHI recibió un pedido por 1000 *snowboards* del modelo estándar y 800 del modelo de lujo. Determine cuántos de cada modelo deben producirse en cada planta para satisfacer el pedido y maximizar la utilidad. [Una pista: Sea  $x_1$  el número de modelos estándar producidos y  $x_2$  el número de modelos de lujo fabricados en la planta I.]

### EJEMPLO 1 Variables artificiales

Utilice el método simplex para maximizar  $Z = 2x_1 + x_2$  sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 12 \quad (19)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (20)$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2 \quad (21)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Solución:** Las ecuaciones para (19), (20) y (21) involucrarán dos variables de holgura,  $s_1$  y  $s_2$ , para las dos restricciones  $\leq$ , y una variable de excedencia  $s_3$ , y una variable artificial  $t$  para la restricción  $\geq$ . Entonces, se tiene

$$x_1 + x_2 + s_1 = 12 \quad (22)$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 20 \quad (23)$$

$$-x_1 + x_2 - s_3 + t = 2 \quad (24)$$

Se considera a  $W = Z - Mt = 2x_1 + x_2 - Mt$  como la ecuación objetivo artificial o, de manera equivalente,

$$-2x_1 - x_2 + Mt + W = 0 \quad (25)$$

donde  $M$  es un número positivo grande. Ahora se construye la matriz aumentada de las ecuaciones (22) a la (25):

$$\begin{array}{c|ccccccc|c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & t & W & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}$$

Para obtener la tabla simplex I, se reemplaza la  $M$  de la columna de la variable artificial por cero al sumar  $-M$  veces el renglón 3 al renglón 4:

TABLA SIMPLEX I

	variable entrante								Cocientes
	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$t$	$W$	R	Cocientes
variable saliente $\leftarrow$	$s_1$	1	1	0	0	0	0	12	$12 \div 1 = 12$
	$s_2$	1	2	0	1	0	0	20	$20 \div 2 = 10$
	$t$	-1	1	0	0	-1	1	2	$2 \div 1 = 2$
	$W$	$-2 + M$		$-1 - M$	0	0	$M$	0	$-2M$
indicadores									

Las variables  $s_1$ ,  $s_2$  y  $t$  en la columna B, es decir, las variables básicas son las variables que no son de decisión con coeficientes positivos en las ecuaciones (22) a la (24). Como  $M$  es un número positivo grande,  $-1 - M$  es el indicador más negativo. La variable entrante es  $x_2$ , la variable que sale es  $t$  y la entrada pivote está sombreada. Se continúa para obtener la tabla II:

TABLA SIMPLEX II

	variable entrante								Cocientes
	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$t$	$W$	R	Cocientes
variable saliente $\leftarrow$	$s_1$	2	0	1	0	1	-1	0	$10 \div 2 = 5$
	$s_2$	3	0	0	1	2	-2	0	$16 \div 3 = 5\frac{1}{3}$
	$x_2$	-1	1	0	0	-1	1	0	2
	$W$	-3	0	0	0	-1	$1 + M$	1	2
indicadores									

La SBF correspondiente a la tabla II tiene  $t = 0$ . Por eso se elimina la columna  $t$  y se cambian las  $W$  por  $Z$  en las tablas siguientes. A continuación se obtiene la tabla III:

TABLA SIMPLEX III

B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$Z$	R
$x_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	5
$s_2$	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1
$x_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	7
$Z$	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	17
indicadores							

Todos los indicadores son no negativos. Por lo tanto, el valor máximo de  $Z$  es 17. Esto ocurre cuando  $x_1 = 5$  y  $x_2 = 7$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

### Restricciones de igualdad

Cuando ocurre una restricción de *igualdad* de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad \text{donde } b \geq 0$$

en un problema de programación lineal, en el método simplex se utilizan variables artificiales. Para ilustrarlo, considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{26}$$

La restricción (26) ya está expresada como una ecuación, de modo que no es necesaria una variable de holgura. Como  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  no es una solución factible, no se tiene un punto de partida obvio para el método simplex. Por lo tanto, se crea un problema artificial al añadir primero una variable artificial  $t$  al lado izquierdo de la ecuación (26):

$$x_1 + x_2 - x_3 + t = 6$$

Aquí, una SBF obvia es  $x_1 = x_2 = x_3 = 0, t = 6$ . La función objetivo artificial es

$$W = Z - Mt = x_1 + 3x_2 - 2x_3 - Mt$$

donde  $M$  es un número positivo grande. Se aplica el método simplex a este problema artificial hasta que se obtenga una SBF en la que  $t = 0$ . Esta solución dará una SBF inicial para el problema original, y entonces se procederá como antes.

En general, el método simplex puede utilizarse para

$$\text{maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

sujeta a

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_m \end{array} \right\} \tag{27}$$

y  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ . El simbolismo  $\{ \leq, \geq, = \}$  significa que existe una de las relaciones “ $\leq$ ”, “ $\geq$ ” o “ $=$ ” para una restricción.

Para cada  $b_i < 0$ , se multiplica la desigualdad correspondiente por  $-1$  (lo que cambia el sentido de la desigualdad). Si con todas las  $b_i \geq 0$ , todas las restricciones incluyen “ $\leq$ ”, el problema está expresado en la forma estándar y se aplican directamente las técnicas simplex de las secciones anteriores. Si con todas las  $b_i \geq 0$ , alguna restricción incluye “ $\geq$ ” o “ $=$ ”, se empieza con un problema artificial que se obtiene como sigue.

Cada restricción que contenga “ $\leq$ ” se escribe como una ecuación que incluya una variable de holgura  $s_i$  (con coeficiente  $+1$ ):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s_i = b_i$$

Cada restricción que contenga “ $\geq$ ” se escribe como una ecuación que incluya una variable de holgura  $s_j$  (con coeficiente  $-1$ ) y una variable artificial  $t_j$ :

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - s_j + t_j = b_j$$

Se reescribe cada restricción que contenga “ $=$ ” como una ecuación con una variable artificial  $t_k$  insertada:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + t_k = b_k$$

Si las variables artificiales incluidas en este problema fueran por ejemplo,  $t_1, t_2$  y  $t_3$ , entonces la función objetivo artificial serían

$$W = Z - Mt_1 - Mt_2 - Mt_3$$

donde  $M$  es un número positivo grande. Una SBF inicial ocurre cuando  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$  y cada variable de *excedencia* es igual a 0.

Después de obtener una tabla simplex inicial, se aplica el método simplex hasta que se llegue a una tabla que corresponda a una SBF en la que *todas* las variables artificiales sean iguales a 0. Después se eliminan las columnas de las variables artificiales, se cambian las  $W$  por  $Z$  y se procede a aplicar los procedimientos de las secciones anteriores.

## EJEMPLO 2 Una restricción de igualdad

Utilice el método simplex para maximizar  $Z = x_1 + 3x_2 - 2x_3$  sujeto a

$$-x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -6 \quad (28)$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 \leq -2 \quad (29)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (30)$$

**Solución:** Las restricciones (28) y (29) tendrán las formas indicadas en (27) (esto es, las  $b$  positivas) si se multiplican ambos miembros de cada restricción por  $-1$ :

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \quad (31)$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \quad (32)$$

Como las restricciones (31) y (32) involucran “=” y “ $\geq$ ”, se incluirán dos variables artificiales,  $t_1$  y  $t_2$ . Las ecuaciones para el problema artificial son

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + t_1 = 6 \quad (33)$$

v

$$x_1 + x_2 - x_3 - s_2 + t_2 = 2 \quad (34)$$

Aquí, el subíndice 2 en  $s_2$  refleja el orden de las ecuaciones. La función objetivo artificial es  $W = Z - Mt_1 - Mt_2$ , o de manera equivalente,

$$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 + Mt_1 + Mt_2 + W = 0 \quad (35)$$

donde  $M$  es un número positivo grande. La matriz aumentada de las ecuaciones (33), (34) y (35) es

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_2$	$t_1$	$t_2$	$W$	
1	2	2	0	1	0	0	6
1	1	-1	-1	0	1	0	2
-1	-3	2	0	$M$	$M$	1	0

Ahora se usan operaciones elementales con renglones para eliminar las  $M$  del último renglón de *todas* las columnas de variables artificiales. Después de sumar  $-M$  veces el renglón 1 al renglón 3 y  $-M$  veces el renglón 2 al renglón 3, se obtiene la tabla simplex inicial J:

**TABLA SIMPLEX I**

$$\begin{array}{ccccccc|c|c}
 & & \text{variable} & & & & & \\
 & & \text{entrante} & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & \\
 \text{variable} & \leftarrow & B & x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & t_1 & t_2 & W & R & \text{Cocientes} \\
 \text{saliente} & & t_1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 6 \div 2 = 3 \\
 & & t_2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \div 1 = 2 \\
 & & W & \underbrace{-1 - 2M & -3 - 3M & 2 - M}_{\text{indicadores}} & M & 0 & 0 & 1 & -8M
 \end{array}$$

A continuación se obtienen las tablas simplex II y III:

TABLA SIMPLEX II

		variable entrante ↓								
variable saliente ←	B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_2$	$t_1$	$t_2$	$W$	R	Cocientes
	$t_1$	-1	0	4	2	1	-2	0	2	$2 \div 4 = \frac{1}{2}$
	$x_2$	1	1	-1	-1	0	1	0	2	
	$W$	$2 + M$	0	$-1 - 4M$	$-3 - 2M$	0	$3 + 3M$	1	$6 - 2M$	
		<u>indicadores</u>								

**TABLA SIMPLEX III**

variable entrante	↓								Cocientes
variable saliente		B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_2$	$t_1$	$t_2$	R
		$x_3$	$-\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0
		$x_2$	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0
		$W$	$\frac{7}{4}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4} + M$	$\frac{5}{2} + M$	1
			<u>indicadores</u>						
									$\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1$

Para la SBF correspondiente a la tabla III, las variables artificiales  $t_1$  y  $t_2$  son ambas 0. Ahora pueden eliminarse las columnas  $t_1$  y  $t_2$ , y cambiar las  $W$  por  $Z$ . A continuación se obtiene la tabla simplex IV:

**TABLA SIMPLEX IV**

B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_2$	$Z$	R
$s_2$	$-\frac{1}{2}$	0	2	1	0	1
$x_2$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	3
$Z$	$\frac{1}{2}$	0	5	0	1	9

indicadores

Como todos los indicadores son no negativos, se ha llegado a la tabla final. El valor máximo de  $Z$  es 9, que ocurre cuando  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$  y  $x_3 = 0$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5



### Regiones factibles vacías

Es posible que el método simplex termine y que no todas las variables artificiales sean iguales a 0. Puede demostrarse que en esta situación que *la región factible del problema original está vacía*, y en consecuencia *no existe solución óptima*. El ejemplo siguiente lo ilustrará.

#### EJEMPLO 3 Una región factible vacía

Utilice el método simplex para maximizar  $Z = 2x_1 + x_2$  sujeta a

$$-x_1 + x_2 \geq 2 \quad (36)$$

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (37)$$

y  $x_1, x_2 \geq 0$ .

**Solución:** Como la restricción (36) es de la forma  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ , donde  $b_1 \geq 0$ , aparecerá una variable artificial. Las ecuaciones por considerar son

$$-x_1 + x_2 - s_1 + t_1 = 2 \quad (38)$$

y

$$x_1 + x_2 + s_2 = 1 \quad (39)$$

donde  $s_1$  es una variable de excedencia,  $s_2$  es una variables de holgura, y  $t_1$  es artificial. La función objetivo artificial es  $W = Z - Mt_1$ , o de manera equivalente,

$$-2x_1 - x_2 + Mt_1 + W = 0 \quad (40)$$

La matriz aumentada de las ecuaciones (38), (39) y (40) es

$$\left[ \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & W & \\ \hline -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -2 & -1 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Las tablas simplex son como sigue:

TABLA SIMPLEX I						
	variable entrante					Cocientes
variable saliente	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$t_1$	$R$
$t_1$	-1	1	-1	0	1	0
$s_2$	1	1	0	1	0	1
$W$	$-2 + M$	$-1 - M$	$M$	0	0	$-2M$

TABLA SIMPLEX II						
	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$t_1$	$R$
$t_1$	-2	0	-1	-1	1	0
$x_2$	1	1	0	1	0	0
$W$	$-1 + 2M$	0	$M$	$1 + M$	0	$1 - M$

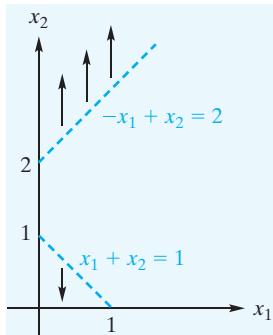


FIGURA 7.25 Región factible vacía (no existe solución).

Como  $M$  es un número positivo grande, los indicadores en la tabla simplex II son no negativos, de modo que el método simplex termina. El valor de la variable artificial  $t_1$  es 1. Por lo tanto, como se estableció antes, la región factible del problema original está vacía y, entonces, no existe solución. Este resultado puede obtenerse de manera geométrica. En la figura 7.25 se muestran las gráficas de  $-x_1 + x_2 = 2$  y  $x_1 + x_2 = 1$  para  $x_1, x_2 \geq 0$ . Puesto que no existe un punto  $(x_1, x_2)$  que al mismo tiempo esté por encima de la recta  $-x_1 + x_2 = 2$  y por debajo de  $x_1 + x_2 = 1$ , tal que  $x_1, x_2 \geq 0$ , la región factible está vacía y, por lo tanto, no existe solución.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

En la siguiente sección se usará el método simplex para resolver problemas de minimización.

## Problemas 7.6

Utilice el método simplex para resolver los siguientes problemas.

\*1. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Maximizar

$$Z = 3x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 6x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2 - x_3$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4. Maximizar

$$Z = x_1 - x_2 + 4x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**\*5.** Maximizar

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10 \\x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

**6.** Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned}x_2 - 2x_3 &\geq 5 \\x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

**7.** Maximizar

$$Z = x_1 - 10x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\leq 1 \\x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\x_1 + x_2 &\geq 5 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

**8.** Maximizar

$$Z = x_1 + 4x_2 - x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &\geq 5 \\x_1 + x_2 + x_3 &\leq 3 \\x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

**\*9.** Maximizar

$$Z = 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

sujeta a

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1 \\x_1 - x_2 + x_3 &\geq 2 \\x_1 - x_2 - x_3 &\leq -6 \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

**10.** Maximizar

$$Z = x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\x_1 + 6x_2 &\geq 12 \\x_2 &\geq 2 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

**11.** Maximizar

$$Z = -3x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\leq 4 \\-x_1 + x_2 &= 4 \\x_1 &\geq 6 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

**12.** Maximizar

$$Z = 2x_1 - 8x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &\geq -12 \\-x_1 + x_2 &\geq 2 \\x_1 + x_2 &\geq 10 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

- 13. Producción** Una compañía fabrica dos tipos de libreros: estándar y ejecutivo. Cada tipo requiere de los tiempos de ensamblado y acabado que se dan en la tabla siguiente:

	Tiempo de ensamblado	Tiempo de acabado	Utilidad por unidad
Estándar	2 h	3 h	\$35
Ejecutivo	3 h	4 h	\$40

La utilidad sobre cada unidad también está indicada. El número de horas disponibles por semana en el departamento de ensamblado son 400, y en el departamento de acabados son 500. A consecuencia de un contrato con el sindicato, al departamento de acabados se le garantizan al menos 250 horas de trabajo a la semana. ¿Cuántas unidades a la semana de cada tipo debe producir la compañía para maximizar la utilidad?

- 14. Producción** Una compañía fabrica tres productos: X, Y y Z. Cada uno requiere del uso de tiempo en las máquinas A y B que se da en la tabla siguiente:

	Máquina A	Máquina B
Producto X	1 h	1 h
Producto Y	2 h	1 h
Producto Z	2 h	2 h

El número de horas por semana que A y B están disponibles para la producción son 40 y 30, respectivamente. La utilidad por unidad de X, Y y Z es de \$50, \$60 y \$75, respectivamente. La siguiente semana deben producirse al menos cinco unidades de Z. ¿Cuál debe ser el plan de producción para ese periodo para alcanzar la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

- 15. Inversiones** El folleto informativo de un fondo de inversión establece que todo el dinero está invertido en bonos que están considerados como A, AA y AAA; no más de 30% de la inversión total se encuentra en bonos A y AA, y al menos el 50% está en bonos AA y AAA. Los bonos A, AA y AAA, respectivamente, obtienen 8, 7 y 6% anual. Determine los porcentajes de la inversión total que serán comprometidos a cada tipo de bono, de modo que el fondo maximice el rendimiento anual. ¿Cuál es ese rendimiento?

**OBJETIVO**

Mostrar cómo resolver un problema de minimización al cambiar la función objetivo de modo que resulte en un problema de maximización.

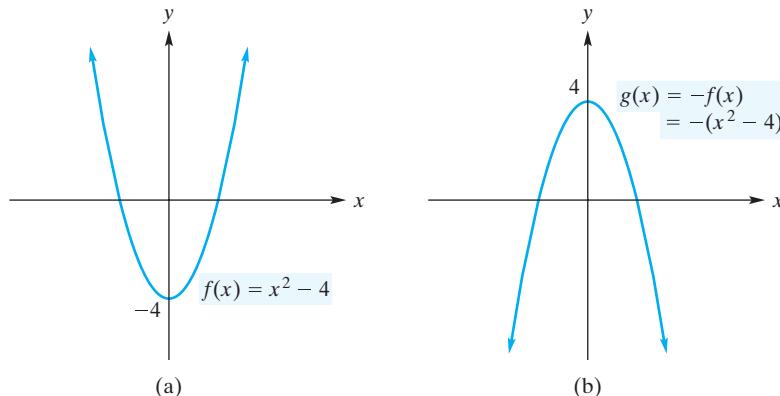
## 7.7 Minimización

Hasta aquí hemos utilizado el método simplex para *maximizar* funciones objetivo. En general, para *minimizar* una función es suficiente con maximizar su negativo. Para entender por qué, considere la función  $f(x) = x^2 - 4$ . Observe que en la figura 7.26(a) el valor mínimo de  $f$  es  $-4$ , que ocurre cuando  $x = 0$ . En la figura 7.26(b) se muestra la gráfica de  $g(x) = -f(x) = -(x^2 - 4)$ . Es la reflexión con respecto al eje  $x$  de la gráfica de  $f$ . Observe que el valor máximo de  $g$  es  $4$ , que ocurre cuando  $x = 0$ . Por lo tanto, el valor mínimo de  $x^2 - 4$  es el negativo del valor máximo de  $-(x^2 - 4)$ . Esto es,

$$\min f = -\max(-f)$$

De manera alternativa, piense en un punto  $C$  sobre la mitad positiva de la recta numérica que se mueve hacia la izquierda. Conforme esto sucede, el punto  $-C$  se mueve a la derecha. Es claro que si, por alguna razón,  $C$  se detiene, lo hace en el mínimo valor que encuentra. Si  $C$  se detiene, también  $-C$ , en el máximo valor que encuentra. Como este valor de  $-C$  es aún el negativo del valor de  $C$ , se observa que

$$\min C = -\max(-C)$$



**FIGURA 7.26** El valor mínimo de  $f(x)$  es igual al negativo del valor máximo de  $-f(x)$ .

El problema del ejemplo 1 se resolverá de manera más eficiente en el ejemplo 4 de la sección 7.8.

### EJEMPLO 1 Minimización

Utilice el método simplex para minimizar  $Z = x_1 + 2x_2$  sujeta a

$$-2x_1 + x_2 \geq 1 \quad (1)$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (3)$$

**Solución:** Para minimizar  $Z$  se puede maximizar  $-Z = -x_1 - 2x_2$ . Observe que cada una de las restricciones (1) y (2) tiene la forma  $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$ , donde  $b \geq 0$ . Por lo tanto, sus ecuaciones involucran dos variables de excedencia  $s_1$  y  $s_2$ , cada una con coeficiente  $-1$  y dos variables artificiales  $t_1$  y  $t_2$ .

$$-2x_1 + x_2 - s_1 + t_1 = 1 \quad (4)$$

$$-x_1 + x_2 - s_2 + t_2 = 2 \quad (5)$$

Como hay *dos* variables artificiales, se maximiza la función objetivo

$$W = (-Z) - Mt_1 - Mt_2$$

donde  $M$  es un número positivo grande. En forma equivalente,

$$x_1 + 2x_2 + Mt_1 + Mt_2 + W = 0 \quad (6)$$

La matriz aumentada de las ecuaciones (4), (5) y (6) es

$$\left[ \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & t_2 & W & \\ \hline -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & M & M & 1 & 0 \end{array} \right]$$

A continuación se obtienen las tablas I, II y III:

**TABLA SIMPLEX I**

	variable entrante								
variable saliente	$t_1$	B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$t_1$	$t_2$	$W$
	$t_2$		-2	1	-1	0	1	0	0
			1	1	0	-1	0	1	0
			$1 + 3M$	$2 - 2M$	$M$	$M$	0	0	1
									$1$
									$2$
									$-3M$

indicadores

**TABLA SIMPLEX II**

	variable entrante								
variable saliente	$x_2$	B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$t_1$	$t_2$	$W$
	$t_2$		-2	1	-1	0	1	0	0
			-1	0	1	-1	-1	1	0
			$5 - M$	0	$2 - M$	$M$	$-2 + 2M$	0	1
									$1$
									$1$

indicadores

**TABLA SIMPLEX III**

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$t_1$	$t_2$	$W$	R
$x_2$	-1	1	0	-1	0	1	0	2
$s_1$	-1	0	1	-1	-1	1	0	1
$W$	3	0	0	2	$M$	$-2 + M$	1	-4

indicadores

La SBF correspondiente a la tabla III presenta ambas variables artificiales iguales a 0. De este modo, las columnas  $t_1$  y  $t_2$  ya no son necesarias. Sin embargo, los indicadores en las columnas  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $s_1$ , y  $s_2$  son no negativos y, en consecuencia, se ha alcanzado una solución óptima. Como  $W = -Z$ , cuando  $t_1 = t_2 = 0$ , el valor máximo de  $-Z$  es -4. En consecuencia, el valor mínimo de  $Z$  es  $-(-4) = 4$ . Esto ocurre cuando  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 2$ .

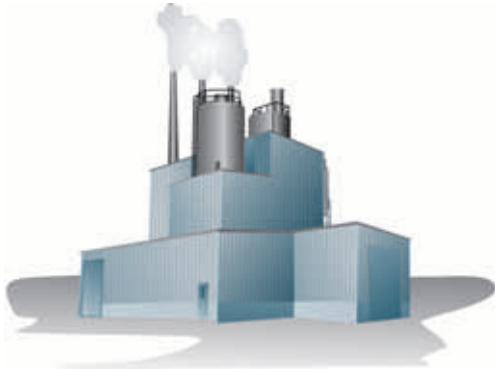
AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

Aquí se expone un ejemplo interesante que trata del control de emisiones al medio ambiente.

### EJEMPLO 2 Reducción de emisiones de polvo

Una planta produce 2 500 000 barriles de cemento por año. Los hornos emiten 2 lb de polvo por cada barril producido. Una agencia gubernamental para protección del ambiente requiere que la compañía cementera reduzca sus emisiones de polvo a no más de 800 000 lb anuales. Existen dos dispositivos de control de emisiones disponibles, A y B. El A reduce las emisiones a  $\frac{1}{2}$  lb por barril, y su costo es de \$0.20 por barril de cemento producido. En el caso del dispositivo B, la reducción es de  $\frac{1}{5}$  lb por barril y su costo de \$0.25 por barril de cemento producido. Determine el plan de acción más económico que

la planta debe emprender de modo que cumpla con el requerimiento de la agencia, y también mantenga su misma producción anual.<sup>5</sup>



**Solución:** Se debe minimizar el costo anual del control de emisiones. Sean  $x_1, x_2$  y  $x_3$  el número anual de barriles de cemento producidos en los hornos que utilizan el dispositivo A, B y sin dispositivo, respectivamente. Entonces  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$  y el costo anual del control de emisiones (en dólares) es

$$C = \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 0x_3 \quad (7)$$

Como se producen 2 500 000 barriles de cemento cada año,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2\,500\,000 \quad (8)$$

El número de libras de polvo emitidas anualmente por los hornos que utilizan el dispositivo A, el dispositivo B y sin dispositivo son  $\frac{1}{2}x_1$ ,  $\frac{1}{5}x_2$  y  $2x_3^3$ , respectivamente. Como el número total de libras de emisión de polvo no debe ser mayor que 800 000,

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + 2x_3 \leq 800\,000 \quad (9)$$

Para minimizar  $C$  sujeta a las restricciones (8) y (9), donde  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ , primero se maximiza  $-C$  con el uso del método simplex. Las ecuaciones por considerar son

$$x_1 + x_2 + x_3 + t_1 = 2\,500\,000 \quad (10)$$

y

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + 2x_3 + s_2 = 800\,000 \quad (11)$$

donde  $t_1$  y  $s_2$  son la variable artificial y la variable de holgura, respectivamente. La ecuación objetivo artificial es  $W = (-C) - Mt_1$ , o en forma equivalente,

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 0x_3 + Mt_1 + W = 0 \quad (12)$$

donde  $M$  es un número positivo grande. La matriz aumentada de las ecuaciones (10), (11) y (12) es

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & t_1 & W \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2\,500\,000 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 2 & 1 & 0 & 0 & 800\,000 \\ \hline \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array} \right]$$

<sup>5</sup>Este ejemplo está adaptado de Robert E. Kohn, "A Mathematical Model for Air Pollution Control", *School Science and Mathematics*, 69 (1969), 487-494.

Después de determinar la tabla simplex inicial, se obtiene (luego de tres tablas adicionales) la tabla final:

B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_2$	$-C$	R
$x_2$	0	1	-5	$-\frac{10}{3}$	0	1 500 000
$x_1$	1	0	6	$\frac{10}{3}$	0	1 000 000
$-C$	0	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{6}$	1	-575 000

indicadores

Observe que  $W$  es reemplazada por  $-C$  cuando  $t_1 = 0$ . El valor máximo de  $-C$  es -575 000, que ocurre cuando  $x_1 = 1 000 000$ ,  $x_2 = 1 500 000$  y  $x_3 = 0$ . Por lo tanto, el costo anual *mínimo* del control de emisiones debe ser de  $-(-575 000) = \$575 000$ . El dispositivo A debe instalarse en hornos que produzcan 1 000 000 barriles de cemento anuales, y el dispositivo B en hornos que produzcan 1 500 000 barriles anuales.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11 

## Problemas 7.7

Use el método simplex para resolver los problemas siguientes.

sujeta a

\*1. Minimizar

$$Z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 \geq 7$$

$$2x_1 + x_2 \geq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 - x_3 \leq -4$$

$$x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

6. Minimizar

$$Z = 5x_1 + x_2 + 3x_3$$

sujeta a

2. Minimizar

$$Z = 8x_1 + 12x_2$$

sujeta a

$$2x_1 + 2x_2 \geq 1$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$$

$$2x_1 + 2x_3 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

7. Minimizar

$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3$$

sujeta a

3. Minimizar

$$Z = 12x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 - x_3 \geq 18$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4. Minimizar

$$Z = x_1 + x_2 + 2x_3$$

sujeta a

8. Minimizar

$$Z = x_1 - x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$-x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

5. Minimizar

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

**9. Minimizar**

$$Z = x_1 + 8x_2 + 5x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 8$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**10. Minimizar**

$$Z = 4x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- \*11. Control de emisiones** Una planta produce 3 300 000 barriles de cemento por año. Los hornos emiten 2 libras de polvo por cada barril producido. La compañía cementera debe reducir sus emisiones a no más de 1 000 000 libras anuales. Hay dos dispositivos de control disponibles, A y B. El A reducirá las emisiones a  $\frac{1}{2}$  libra por barril, y el costo es de \$0.25 por barril de cemento producido. En el caso del dispositivo B, la reducción es de  $\frac{1}{4}$  de libra por barril, y el costo es de \$0.40 por barril de cemento producido. Determine el plan de acción más económico que la planta debe tomar de modo que mantenga exactamente la misma producción anual.

- 12. Programación de envíos por camión** A causa de un incremento en los negocios, una compañía de banquetes a domicilio encuentra que debe rentar camiones de entrega adicionales. Las necesidades mínimas son de 12 unidades de espacio con refrigeración y 12 unidades de espacio sin refrigeración. El mercado de renta ofrece dos tipos de camiones. El A tiene 2 unidades de espacio con refrigeración y 1 unidad de espacio sin refrigeración. El tipo B tiene 2 unidades de espacio con refrigeración y 3 unidades sin refrigeración. El costo por milla es de \$0.40 para A y de \$0.60 para B. ¿Cuántos camiones de cada tipo deben rentarse de modo que se minimice el costo total por milla? ¿Cuál es el costo total por milla?

- 13. Costo de transportación** Un vendedor al detalle tiene tiendas en Columbus y Dayton, y bodegas en Akron y Springfield. Cada tienda requiere de la entrega de exactamente 150 reproductores de DVD. En la bodega de Akron hay 200 reproductores de DVD y en la de Springfield hay 150.

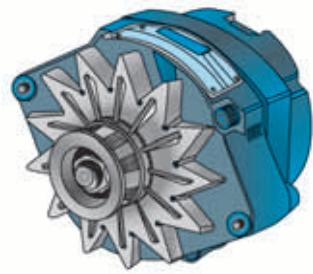


Los costos de transporte para enviar reproductores de DVD desde los almacenes a las tiendas están dados en la tabla siguiente:

	Columbus	Dayton
Akron	\$5	\$7
Springfield	\$3	\$2

Por ejemplo, el costo para enviar un reproductor desde Akron a la tienda de Columbus es de \$.5. ¿Cómo es que el detallista debe pedir los reproductores de modo que los requerimientos de las tiendas se satisfagan, y los costos totales de transportación se minimicen? ¿Cuál es el costo mínimo de transportación?

- 14. Compra de partes** Un fabricante de automóviles compra alternadores de dos proveedores, X y Y. El fabricante tiene dos plantas A y B, y requiere exactamente de 7000 alternadores para la planta A y de exactamente 5000 para la B. El proveedor X cobra \$300 y \$320 por alternador (incluye costos de transporte) a A y B, respectivamente. Para respetar estos precios, X requiere que el fabricante ordene al menos un total de 3000 alternadores; sin embargo, X no puede proveer más de 5000. El proveedor Y cobra \$340 y \$280 por alternador a A y B, respectivamente, y requiere de una orden mínima de 7000 alternadores. Determine cómo el fabricante de automóviles debe hacer los pedidos a fin de que su costo total sea mínimo. ¿Cuál es dicho costo mínimo?



- 15. Producción de papel para envoltura** Una compañía de papel almacena su papel para envoltura en rollos de 48 pulgadas de ancho, llamados rollos de almacenamiento, y los corta en anchos más pequeños de acuerdo con los pedidos de los clientes. Suponga que se recibe un pedido de 50 rollos de papel de 15 pulgadas de ancho y de 60 rollos de 10 pulgadas de ancho. De un rollo de almacenamiento la compañía puede cortar tres rollos de 15 pulgadas de ancho, y un rollo de 3 pulgadas de ancho (vea la figura 7.27). Como no puede utilizarse el rollo de 3 pulgadas de ancho en esta orden, entonces es el desperdicio que se desperdicia de este rollo.

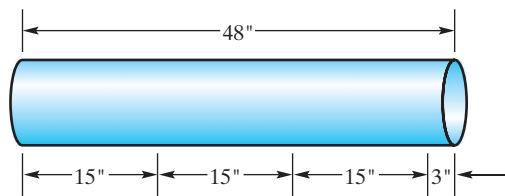


FIGURA 7.27 Diagrama para el problema 15.

Del mismo modo, de un rollo de almacenamiento se pueden cortar dos rollos de 15 pulgadas de ancho, un rollo de 10 pulgadas de ancho y otro de 8 pulgadas de ancho. En este caso el desperdicio sería de 8 pulgadas. La tabla siguiente indica el número de rollos de 15 y 10 pulgadas, junto con el desperdicio que pueden cortarse de un rollo de almacenamiento:

Ancho del rollo	15 pulgadas	3	2	1	—
	10 pulgadas	0	1	—	—
Desperdicio		3	8	—	—

- (a) Complete las últimas dos columnas de la tabla. (b) Suponga que la compañía tiene suficientes rollos de almacenamiento para cubrir la orden y que serán cortados *al menos* 50 rollos de 15 pulgadas y *al menos* 60 rollos de 10 pulgadas de ancho de papel para envoltura. Si  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  son los números de rollos de almacenamiento que se cortan en una de las formas descritas en las columnas 1 a 4 de la tabla, respectivamente, determine los valores de las  $x$ , en tal forma que se minimice el desperdicio total. (c) ¿Cuál es la cantidad mínima de desperdicio total?

**OBJETIVO****7.8 El dual**

Motivar el conocimiento del dual y después definirlo de manera formal en un problema de programación lineal.

Existe un principio fundamental llamado *dualidad*, que permite resolver un problema de maximización, al resolver el problema de minimización relacionado. Se ilustrará a continuación.

**TABLA 7.2**

	<b>Máquina A</b>	<b>Máquina B</b>	<b>Utilidad/unidad</b>
Manual	1 h	1 h	\$10
Eléctrico	2 h	4 h	\$24
Horas disponibles	120	180	

Suponga que una compañía fabrica dos tipos de podadoras, manuales y eléctricas, y cada una requiere del uso de las máquinas A y B para su producción. En la tabla 7.2 se indica que una podadora manual requiere del uso de A durante 1 hora y de B durante otra hora. Las eléctricas requieren de A durante 2 horas y de B durante 4 horas. Los números máximos de horas disponibles por mes para las máquinas A y B, son 120 y 180, respectivamente. La utilidad por una podadora manual es de \$10 y por una eléctrica es de \$24. Suponga que la compañía puede vender todos los artículos que produce, determine la utilidad mensual máxima. Si  $x_1$  y  $x_2$  son los números de podadoras manuales y eléctricas que se producen por mes, respectivamente, entonces se desea maximizar la función de utilidad mensual

$$P = 10x_1 + 24x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 120 \quad (1)$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 180 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Se escriben las restricciones (1) y (2) como ecuaciones, se tiene

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 120 \quad (3)$$

y

$$x_1 + 4x_2 + s_2 = 180$$

donde  $s_1$  y  $s_2$  son variables de holgura. En la ecuación (3),  $x_1 + 2x_2$  es el número de horas que se utiliza la máquina A. Como hay disponibles 120 horas para A, entonces  $s_1$  es el número de horas que no se utilizan para la producción. Es decir,  $s_1$  representa para A la capacidad no usada (horas). Del mismo modo,  $s_2$  representa la capacidad no utilizada para B. Al resolver este problema por el método simplex, se encuentra que la tabla final es

B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	P	R
$x_1$	1	0	2	-1	0	60
$x_2$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	30
P	0	0	8	2	1	1320

*indicadores*

Así, la utilidad máxima mensual es de \$1320, que ocurre cuando  $x_1 = 60$  y  $x_2 = 30$ .

Ahora se verá la situación desde un punto de vista diferente. Suponga que la compañía desea rentar sus máquinas A y B. ¿Cuál es la renta mensual mínima que debe cobrar? Ciertamente, si el cobro es muy alto, nadie le rentaría las máquinas. Por otra parte, si el cobro es muy bajo, no le convendría rentarlas en absoluto. Es obvio que la renta mínima debe ser de \$1320. Es decir, el mínimo que la compañía debe cobrar es la utilidad que podría tener si ella misma utilizara las máquinas. Podemos llegar a este costo de renta mínimo de manera directa, al resolver un problema de programación lineal.

Sea  $F$  el costo de la renta mensual. Para determinar  $F$ , se supone que la compañía asigna valores monetarios a cada hora de capacidad en las máquinas A y B. Sean estos valores  $y_1$  y  $y_2$  dólares, respectivamente, donde  $y_1, y_2 \geq 0$ . Entonces el valor mensual de la máquina A es  $120y_1$  y para la B es  $180y_2$ . Por lo tanto,

$$F = 120y_1 + 180y_2$$

El valor total del tiempo de máquina para producir una podadora manual es  $1y_1 + 1y_2$ . Esto debe ser al menos igual a los \$10 de utilidad que la compañía puede recibir por producir dicho artículo. De lo contrario, la compañía ganaría más dinero si destina el tiempo de la máquina a producir una podadora manual. De acuerdo con esto,

$$1y_1 + 1y_2 \geq 10$$

Del mismo modo, el valor total del tiempo de máquina para producir una podadora eléctrica debe ser al menos de \$24:

$$2y_1 + 4y_2 \geq 24$$

Por lo tanto, la compañía necesita

$$\text{minimizar } F = 120y_1 + 180y_2$$

sujeta a

$$y_1 + y_2 \geq 10 \quad (5)$$

$$2y_1 + 4y_2 \geq 24 \quad (6)$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Para minimizar  $F$ , se maximiza  $-F$ . Como las restricciones (5) y (6) tienen la forma  $a_1y_1 + a_2y_2 \geq b$ , donde  $b \geq 0$ , se considerará un problema artificial. Si  $r_1$  y  $r_2$  son variables de excedencia, y  $t_1$  y  $t_2$  son variables artificiales, entonces se quiere maximizar

$$W = (-F) - Mt_1 - Mt_2$$

donde  $M$  es un número positivo grande, tal que

$$y_1 + y_2 - r_1 + t_1 = 10$$

$$2y_1 + 4y_2 - r_2 + t_2 = 24$$

y las  $y$ ,  $r$  y  $t$  son no negativas. La tabla simplex final para este problema (donde se han eliminado las columnas de las variables artificiales y  $W$  ha sido cambiada a  $-F$ ) es

B	$y_1$	$y_2$	$r_1$	$r_2$	$-F$	R
$y_1$	1	0	-2	$\frac{1}{2}$	0	8
$y_2$	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	2
$-F$	0	0	60	30	1	-1320

indicadores

Como el valor máximo de  $-F$  es  $-1320$ , el valor *mínimo* de  $F$  es  $-(-1320) = \$1320$  (como se anticipó). Esto ocurre cuando  $y_1 = 8$  y  $y_2 = 2$ . Por lo tanto, se ha determinado el valor óptimo de un problema de programación lineal (maximización de utilidad), al encontrar el valor óptimo de otro problema de programación lineal (minimización del costo de la renta).

Los valores  $y_1 = 8$  y  $y_2 = 2$  podrían haberse anticipado a partir de la tabla final del problema de maximización. En (4), el indicador 8 en la columna  $s_1$  significa que en el nivel óptimo de producción, si  $s_1$  aumenta una unidad, entonces la utilidad  $P$  disminuye en 8. Esto es, 1 hora de capacidad sin uso de A disminuye la utilidad máxima en \$8. Entonces, una hora de capacidad de A tiene un valor monetario de \$8. Se dice que el **precio sombra** de 1 hora de capacidad de A es de \$8. Ahora, recuerde que  $y_1$  en el problema de la renta es el valor de 1 hora de capacidad de A. Así,  $y_1$  debe ser igual a 8 en la solución óptima para ese problema. De manera similar, como el indicador en la columna  $s_2$  es 2, el precio sombra de 1 hora de capacidad de B es de \$2, que es el valor de  $y_2$  en la solución óptima del problema de la renta.

Ahora se analizará la estructura de los dos problemas de programación lineal:

Maximizar $P = 10x_1 + 24x_2$ sujeta a $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1 + 4x_2 \leq 180 \end{cases}$ (7) y $x_1, x_2 \geq 0.$	Minimizar $F = 120y_1 + 180y_2$ sujeta a $\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 10 \\ 2y_1 + 4y_2 \geq 24 \end{cases}$ (8) y $y_1, y_2 \geq 0.$
--	--

Observe que en (7) las desigualdades son todas  $\leq$ , pero en (8) son todas  $\geq$ . Los coeficientes de la función objetivo del problema de minimización son los términos constantes en (7). Los términos constantes en (8) son los coeficientes de la función objetivo del problema de maximización. Los coeficientes de  $y_1$  en (8) son los coeficientes de  $x_1$  y  $x_2$  en la primera restricción de (7); los coeficientes de  $y_2$  en (8) son los de  $x_1$  y  $x_2$  en la segunda restricción de (7). El problema de minimización es llamado el *dual* del problema de maximización y viceversa.

En general, es posible asociar cualquier problema de programación lineal con otro problema de programación lineal llamado su **dual**. El problema dado se llama **primal**. Si el primal es un problema de maximización, entonces su dual es de minimización. De manera similar, si el problema primal implica minimización, su dual implica maximización.

Cualquier problema primal de maximización puede escribirse en la forma indicada en la tabla 7.3. Observe que no existen restricciones sobre las  $b$ .<sup>6</sup> El problema dual de minimización correspondiente puede escribirse en la forma de la tabla 7.4. De manera similar, cualquier problema primal de minimización puede escribirse en la forma de la tabla 7.4, y su dual es el problema de maximización que se da en la tabla 7.3.

**TABLA 7.3** Primal (dual)

Maximizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ sujeta a $\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right\}$ (9) y $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$
--	--

**TABLA 7.4** Dual (primal)

Minimizar $W = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$ sujeta a $\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_m \geq c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_m \geq c_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_m \geq c_n \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_m \geq c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_m \geq c_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_m \geq c_n \end{array} \right\}$ (10) y $y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0$
--	---

<sup>6</sup>Si una restricción de desigualdad incluye  $\geq$ , al multiplicar ambos lados por  $-1$  se obtiene una desigualdad que incluye  $\leq$ . Si una restricción es una igualdad, puede escribirse en términos de dos desigualdades: una que involucre  $\leq$  y otra que involucre  $\geq$ .

Ahora se comparará el primal y su dual en las tablas 7.3 y 7.4. Para mayor facilidad, cuando aquí se habla de restricciones, se hace referencia a aquéllas en (9) o (10); no se incluirán las condiciones de no negatividad. Observe que si todas las restricciones del problema primal involucran  $\leq$  ( $\geq$ ), entonces todas las restricciones en su dual implican  $\geq$  ( $\leq$ ). Los coeficientes en la función objetivo del dual son los términos constantes en las restricciones del primal. De manera similar, los términos constantes en las restricciones del dual son los coeficientes de la función objetivo del primal. La matriz de coeficientes de los lados izquierdos de las restricciones del dual, es la *transpuesta* de la matriz de coeficientes de los lados izquierdos de las restricciones del primal. Esto es,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Si el primal involucra  $n$  variables de decisión y  $m$  variables de holgura, entonces el dual involucra  $m$  variables de decisión y  $n$  variables de holgura. Debe notarse que el dual del *dual* es el primal.

Existe una relación importante entre el primal y el dual:

Si el primal tiene una solución óptima, también la tiene el dual, y el valor óptimo de la función objetivo del primal es el *mismo* que el del dual.

Además, suponga que la función objetivo del primal es

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

Entonces

si  $s_i$  es la variable de holgura asociada con la  $i$ -ésima restricción en el dual, entonces el indicador de la columna  $s_i$  de la tabla simplex final del dual es el valor de  $x_i$  en la solución *óptima* del primal.

Por eso es posible resolver el problema primal con sólo resolver el dual. En ocasiones, esto es más conveniente que resolver directamente el primal. La liga entre el primal y el dual puede expresarse en forma muy sucinta mediante la notación matricial. Sean

$$\mathbf{C} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \quad \text{y} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

entonces la función objetivo del problema primal puede escribirse como

$$Z = \mathbf{C}\mathbf{X}$$

Además, si se escribe

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

entonces el sistema de restricciones para el problema primal se transforma en

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{B} \quad \text{y} \quad \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

donde se entiende que  $\leq$  ( $\geq$ ) entre matrices del mismo tamaño significa que la desigualdad abarca cada par de entradas correspondientes. Ahora sea

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

El problema dual tiene una función objetivo dada por

$$W = \mathbf{B}^T \mathbf{Y}$$

y su sistema de restricciones es

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Y} \geq \mathbf{C}^T \quad \text{y} \quad \mathbf{Y} \geq \mathbf{0}$$

### EJEMPLO 1 Determinación del dual de un problema de maximización

*Encuentre el dual de lo siguiente:*

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leq 10$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$\text{y } x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

**Solución:** El primal es de la forma de la tabla 7.3. Así, el dual es

$$\text{minimizar } W = 10y_1 + 10y_2$$

sujeta a

$$y_1 + 2y_2 \geq 3$$

$$2y_1 + 2y_2 \geq 4$$

$$0y_1 + y_2 \geq 2$$

$$\text{y } y_1, y_2 \geq 0.$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### DETERMINACIÓN DEL DUAL DE UN PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN

Encuentre el dual del problema siguiente: suponga que una compañía tiene \$60 000 para la compra de materiales para fabricar tres tipos de dispositivos. La empresa ha asignado un total de 2000 horas para el ensamblado y 120 horas para el empacado de los dispositivos. La tabla siguiente proporciona los costos, el número de horas y la utilidad por dispositivo de cada tipo:

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Costo/ dispositivo	\$300	\$220	\$180
Horas de ensamblado/ dispositivo	20	40	20
Horas de empacado/ dispositivo	3	1	2
Utilidad	\$300	\$200	\$200

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

#### DETERMINACIÓN DEL DUAL DE UN PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN

Encuentre el dual del siguiente problema:

Una persona decide tomar dos diferentes suplementos dietéticos. Cada suplemento contiene dos ingredientes esenciales, A y B, para los cuales existen requerimientos mínimos diarios, y cada uno contiene un tercer ingrediente, C, que debe minimizarse.

	Suplemento 1	Suplemento 2	Requerimiento diario
A	20 mg/oz	6 mg/oz	98 mg
B	8 mg/oz	16 mg/oz	80 mg
C	6 mg/oz	2 mg/oz	

### EJEMPLO 2 Determinación del dual de un problema de minimización

*Encuentre el dual de lo siguiente:*

$$\text{Minimizar } Z = 4x_1 + 3x_2$$

sujeta a

$$3x_1 - x_2 \geq 2 \tag{11}$$

$$x_1 + x_2 \leq 1 \tag{12}$$

$$-4x_1 + x_2 \leq 3 \tag{13}$$

$$\text{y } x_1, x_2 \geq 0.$$

**Solución:** Como el primal es un problema de minimización, se desea que las restricciones (12) y (13) involucren  $\geq$  (vea la tabla 7.4). Al multiplicar ambos lados de (12) y (13) por  $-1$ , se obtiene  $-x_1 - x_2 \geq -1$  y  $4x_1 - x_2 \geq -3$ . De este modo, las restricciones (11), (12) y (13) se convierten en

$$3x_1 - x_2 \geq 2$$

$$-x_1 - x_2 \geq -1$$

$$4x_1 - x_2 \geq -3$$



El valor máximo de  $-W$  es  $-\frac{11}{2}$ , de modo que el valor *mínimo* de  $W$  es  $\frac{11}{2}$ . De aquí que el valor máximo de  $Z$  también sea  $\frac{11}{2}$ . Note que los indicadores de las columnas  $s_1$ ,  $s_2$   $\pi\tau$  y  $s_3$  son  $\frac{3}{2}$ , 0 y  $\frac{1}{2}$ , respectivamente. Por lo tanto, el valor máximo de  $Z$  ocurre cuando  $x_1 = \frac{3}{2}$ ,  $x_2 = 0$  y  $x_3 = \frac{1}{2}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11



En el ejemplo 1 de la sección 7.7 se usó el método simplex para

sujeta a

$$-2x_1 + x_2 \geq 1$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2$$

Este estudio muestra la ventaja de resolver el problema dual.

y  $x_1, x_2 \geq 0$ . La tabla simplex inicial tiene 24 entradas e involucra dos variables artificiales. La tabla del dual sólo tiene 18 entradas y *ninguna variable artificial*, y es más fácil de manipular, como lo mostrará el ejemplo 4. Por lo tanto, puede ser una clara ventaja resolver el dual para determinar la solución del primal.

## EJEMPLO 4 Uso del dual y el método simplex

*Utilice el dual y el método simplex para*

minimizar  $Z = x_1 + 2x_2$

*sujeta a*

$$-2x_1 + x_2 \geq 1$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2$$

$$y x_1, x_2 \geq 0.$$

**Solución:** El dual es

$$\text{maximizar } Z = y_1 + 2y_2$$

sujeta a

$$-2y_1 - y_2 \leq 1$$

$$y_1 + y_2 \leq 2$$

y  $y_1, y_2 \geq 0$ . La tabla simplex inicial es la tabla I:

## TABLA SIMPLEX I

variable  
entrante  
↓

Después se obtiene la tabla II.

## TABLA SIMPLEX II

B	$y_1$	$y_2$	$s_1$	$s_2$	W	R
$s_1$	-1	0	1	1	0	3
$y_2$	1	1	0	1	0	2
W	1	0	0	2	1	4

{ indicadores

Como en la tabla II todos los indicadores son no negativos, el valor máximo de  $W$  es 4. De aquí que el valor mínimo de  $Z$  también sea 4. Los indicadores 0 y 2 en las columnas  $s_1$  y  $s_2$  de la tabla II, significan que el valor mínimo de  $Z$  ocurre cuando  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 2$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9 

## Problemas 7.8

Encuentre los duales de los problemas 1 a 8. No los resuelva.

\*1. Maximizar

$$Z = x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2 - x_3$$

sujeta a

$$2x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$-x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

\*3. Minimizar

$$Z = x_1 + 8x_2 + 5x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 8$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4. Minimizar

$$Z = 8x_1 + 12x_2$$

sujeta a

$$2x_1 + 2x_2 \geq 1$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

5. Maximizar

$$Z = x_1 - x_2$$

sujeta a

$$-x_1 + 2x_2 \leq 13$$

$$-x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 \geq 11$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

6. Maximizar

$$Z = x_1 - x_2 + 4x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

7. Minimizar

$$Z = 4x_1 + 4x_2 + 6x_3,$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 3,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 3,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

8. Minimizar

$$Z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$-4x_1 + 3x_2 \geq -10$$

$$8x_1 - 10x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Resuelva mediante el uso de los duales y del método simplex los problemas 9 a 14.

\*9. Minimizar

$$Z = 2x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

10. Minimizar

$$Z = 2x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 4x_2 \geq 28$$

$$2x_1 - x_2 \geq 2$$

$$-3x_1 + 8x_2 \geq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

\*11. Maximizar

$$Z = 3x_1 + 8x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 6x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**12.** Maximizar

$$Z = 2x_1 + 6x_2,$$

sujeta a

$$3x_1 + x_2 \leq 12,$$

$$x_1 + x_2 \leq 8,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

**13.** Minimizar

$$Z = 6x_1 + 4x_2$$

sujeta a

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**14.** Minimizar

$$Z = 2x_1 + x_2 + x_3$$

sujeta a

$$2x_1 - x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- 15. Anuncios** Una compañía compara los costos de publicidad en dos medios, periódico y radio. La tabla siguiente muestra el número de personas, por grupo de ingresos, que alcanza cada uno de estos medios por cada dólar de publicidad.

	<b>Menos de \$40 000</b>	<b>Más de \$40 000</b>
Periódico	40	100
Radio	50	25

La empresa quiere captar al menos 80 000 individuos con ingresos menores de \$40 000, y al menos 60 000 con ingresos de \$40 000 o más. Utilice el dual y el método simplex para determinar las cantidades que la compañía debe gastar en publicidad en periódico y en radio, de modo que alcance a este número de personas con un costo mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo de publicidad?

- 16.** Utilice el dual y el método simplex para determinar el costo total mínimo por milla en el problema 12 del ejercicio 7.7.

- 17. Costo de mano de obra** Una compañía paga a sus trabajadores calificados y semicalificados de su departamento de ensamblado \$14 y \$8 por hora, respectivamente. En el departamento de embarques, los empleados reciben \$9 por hora y los aprendices \$6 por hora. La empresa requiere al menos de 90 trabajadores en el departamento de ensamblado y 60 empleados en el departamento de embarques. Debido a acuerdos sindicales, deben emplearse al menos el doble de trabajadores semicalificados que de calificados. También, deben contratarse al menos el doble de los empleados de embarques que de aprendices.

Utilice el dual y el método simplex para determinar el número de trabajadores de cada tipo que la compañía debe emplear, de modo que el total de salarios por hora sea mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo en salarios por hora?

## 7.9 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

<b>Sección 7.1</b>	<b>Desigualdades lineales en dos variables</b> desigualdad lineal      semiplano (abierto, cerrado) sistema de desigualdades	Ej. 2, p. 282 Ej. 3, p. 283
<b>Sección 7.2</b>	<b>Programación lineal</b> restricción      función lineal en $x$ y $y$ programación lineal función objetivo      solución factible      condiciones de no negatividad (punto extremo, esquina) región factible      línea de isoutilidad      vértice región factible acotada      región factible no acotada región factible no vacía      región factible vacía línea de isocosto      solución no acotada	Ej. 1, p. 287 Ej. 1, p. 287 Ej. 1, p. 287 Ej. 1, p. 287 Ej. 1, p. 289 Ej. 3, p. 289 Ej. 2, p. 288 Ej. 3, p. 289
<b>Sección 7.3</b>	<b>Soluciones óptimas múltiples</b> soluciones óptimas múltiples	Ej. 1, p. 294
<b>Sección 7.4</b>	<b>Método simplex</b> problema de programación lineal estándar variable de holgura      variable de decisión      solución básica factible variable no básica      variable básica      tabla simplex      renglón objetivo variable entrante      indicador      variable saliente      entrada pivote	Ej. 1, p. 304 Ej. 1, p. 304 Ej. 2, p. 306 Ej. 2, p. 306
<b>Sección 7.5</b>	<b>Degeneración, soluciones no acotadas y soluciones óptimas múltiples</b> degeneración      solución no acotada      soluciones óptimas múltiples	Ej. 2, p. 312
<b>Sección 7.6</b>	<b>Variables artificiales</b> problema artificial      variable artificial      función objetivo artificial      variable de excedencia	Ej. 1, p. 318
<b>Sección 7.7</b>	<b>Minimización</b> $\min C = -\max(-C)$	Ej. 1, p. 325
<b>Sección 7.8</b>	<b>El dual</b> precio sombra      dual      primal	Ej. 1, p. 334

## Resumen

La solución para un sistema de desigualdades lineales consiste en todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen de manera simultánea todas las desigualdades. Desde un punto de vista geométrico, en el caso de dos variables, es la región común para todas las regiones determinadas por las desigualdades.

La programación lineal involucra la maximización o minimización de una función lineal (la función objetivo) sujeta a un sistema de restricciones, que son desigualdades lineales o ecuaciones linea-

les. Uno de los métodos para encontrar una solución óptima para una región factible no vacía es el método de los vértices. La función objetivo se evalúa en cada uno de los vértices de la región factible, y se selecciona un vértice en el que la función objetivo sea óptima.

Para un problema que involucre más de dos variables, el método de los vértices es poco práctico o imposible; en su lugar se utiliza un método matricial conocido como método simplex, que es eficiente y completamente mecánico.

## Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

Resuelva la desigualdad o el sistema de desigualdades de los problemas 1 a 10.

1.  $-3x + 2y > -6$

3.  $3x \leq -5$

5.  $\begin{cases} y - 3x < 6 \\ x - y > -3 \end{cases}$

7.  $\begin{cases} x - y < 4 \\ y - x < 4 \end{cases}$

9.  $\begin{cases} 4x + 2y > -6 \\ 3x - 2y > -7 \\ x \geq 0 \end{cases}$

2.  $2x - 3y + 8 \geq 0$

4.  $-x < 2$

6.  $\begin{cases} x - 2y > 4 \\ x + y > 1 \end{cases}$

8.  $\begin{cases} x > y \\ x + y < 0 \end{cases}$

10.  $\begin{cases} 2x - y > 5 \\ x < 3 \\ y < 7 \end{cases}$

En los problemas 11 a 18, no utilice el método simplex.

11. Maximizar

$$Z = x - 2y$$

sujeta a

$$y - x \leq 2$$

$$x + y \leq 4$$

$$x \leq 3$$

$$x, y \geq 0$$

12. Maximizar

$$Z = 4x + 2y$$

sujeta a

$$x + 2y \leq 10$$

$$x \leq 4$$

$$y \geq 1$$

$$x, y \geq 0$$

13. Minimizar

$$Z = 2x - y$$

sujeta a

$$x - y \geq -2$$

$$x + y \geq 1$$

$$x - 2y \leq 2$$

$$x, y \geq 0$$

14. Minimizar

$$Z = x + y$$

sujeta a

$$x + 2y \leq 12$$

$$4x + 3y \leq 15$$

$$x - 6y \leq 0$$

$$x, y \geq 0$$

15. Minimizar

$$Z = 2x + 3y$$

sujeta a

$$x + y \leq 5$$

$$2x + 5y \leq 10$$

$$5x + 8y \geq 20$$

$$x, y \geq 0$$

<sup>7</sup>16. Minimizar

$$Z = 2x + 2y$$

sujeta a

$$x + y \geq 4$$

$$-x + 3y \leq 18$$

$$x \leq 6$$

$$x, y \geq 0$$

<sup>7</sup>17. Maximizar

$$Z = 9x + 6y$$

sujeta a

$$x + 2y \leq 8$$

$$3x + 2y \leq 12$$

$$x, y \geq 0$$

18. Maximizar

$$Z = 4x + y$$

sujeta a

$$x + 2y \geq 16$$

$$3x + 2y \geq 24$$

$$x, y \geq 0$$

<sup>7</sup>Los problemas 16 y 17 se refieren a la sección 7.3.

Utilice el método simplex en los problemas 19 a 28.

**19.** Maximizar

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 6x_2 \leq 12$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**20.** Maximizar

$$Z = 18x_1 + 20x_2$$

sujeta a

$$2x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**21.** Minimizar

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**22.** Minimizar

$$Z = x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$3x_1 + 5x_2 \geq 20$$

$$x_1 \geq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**23.** Maximizar

$$Z = x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**24.** Minimizar

$$Z = 2x_1 + x_2$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**25.** Minimizar

$$Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq -1$$

$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**26.** Maximizar

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 5$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

<sup>8</sup>**27.** Maximizar

$$Z = x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

sujeta a

$$4x_1 - x_2 \leq 2$$

$$-8x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \leq 0$$

<sup>8</sup>**28.** Minimizar

$$Z = x_1 + x_2$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Resuelva los problemas 29 y 30, a través de duales y del método simplex.

**29.** Minimizar

$$Z = 2x_1 + 7x_2 + 8x_3$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 35$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 25$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**30.** Maximizar

$$Z = x_1 - 2x_2$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$4x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

<sup>8</sup>Los problemas 27 y 28 se refieren a la sección 7.5.

- 31. Plan de producción** Una compañía fabrica tres productos: X, Y y Z. Cada uno requiere del uso de tiempo de las máquinas A y B, como se indica en la tabla siguiente:

	Máquina A	Máquina B
Producto X	1 h	1 h
Producto Y	2 h	1 h
Producto Z	2 h	2 h

El número de horas por semana que A y B están disponibles para la producción son 40 y 34, respectivamente. La utilidad por unidad sobre X, Y y Z es de \$10, \$15 y \$22, respectivamente. ¿Cuál debe ser el plan de producción semanal para obtener la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

- 32.** Repita el problema 31, si la compañía debe producir al menos un total de 24 unidades por semana.
- 33. Transportación de petróleo** Una compañía petrolera tiene instalaciones de almacenamiento para combustible de calefacción en las ciudades A, B, C y D. Las ciudades C y D necesitan cada una exactamente 500 000 galones de combustible. La compañía determina que A y B pueden prescindir cada una de un máximo de 600 000 galones para satisfacer las necesidades de C y D. La tabla que se muestra a continuación proporciona los costos por galón para transportar el combustible entre las ciudades:

Desde	Hacia	
	C	D
A	\$0.01	\$0.02
B	0.02	0.04

¿Cómo debe distribuirse el combustible para minimizar el costo total del transporte? ¿Cuál es el costo mínimo de transporte?

- 34. Utilidad** Jason opera un negocio desde su casa: se dedica a vender dos juegos para computadoras, "Space Traders" y "Green Dwarf". Tres amigos, Nicole, Hillary y Katie los instalan para él; cada uno debe hacer parte del trabajo de instalación de cada juego. La tabla siguiente proporciona el tiempo que cada colaborador invierte en cada juego:

	Nicole	Hillary	Katie
Space Traders	30 min	20 min	10 min
Green Dwarf	10 min	10 min	50 min

Los colaboradores tienen otro trabajo que hacer, pero determinan que pueden invertir cada mes hasta 300, 200 y 500 minutos, respectivamente, para trabajar en los juegos de Jason. Él obtiene una utilidad de \$5 en cada venta de Space Traders, y \$9 en cada venta de Green Dwarf. ¿Cuántos juegos de cada tipo debe intentar vender cada mes para maximizar la utilidad, y cuál será esta utilidad máxima?

- 35. Formulación de una dieta** Un técnico en un zoológico debe formular una dieta para cierto grupo de animales, con base en dos productos comerciales, el alimento A y el alimento B. Cada 200 gramos del alimento A contienen 16 gramos de grasa, 32 de carbohidratos y 4 de proteína. Cada 200 gramos del alimento B contienen 8 gramos de grasa, 64 de carbohidratos y 10 de proteína. Los requerimientos mínimos diarios son 176 gramos de grasa, 1024 de carbohidratos y 200 de proteína. Si el alimento A cuesta 8 centavos por cada 100 gramos y el alimento B cuesta 22 centavos por cada 100 gramos, ¿cuántos gramos de cada alimento deben utilizarse para cumplir con los requerimientos diarios a un costo menor? (Suponga que existe un costo mínimo.)

*En los problemas 36 y 37, no utilice el método simplex. Redondee sus respuestas a dos decimales.*

**36. Minimizar**

$$Z = 4.2x - 2.1y$$

sujeta a

$$y \leq 3.4 + 1.2x$$

$$y \leq -7.6 + 3.5x$$

$$y \leq 18.7 - 0.6x$$

$$x, y \geq 0$$

**37. Maximizar**

$$Z = 12.4x + 8.3y$$

sujeta a

$$1.4x + 1.7y \leq 15.9$$

$$-3.6x + 2.6y \leq -10.7$$

$$-1.3x + 4.3y \leq -5.2$$

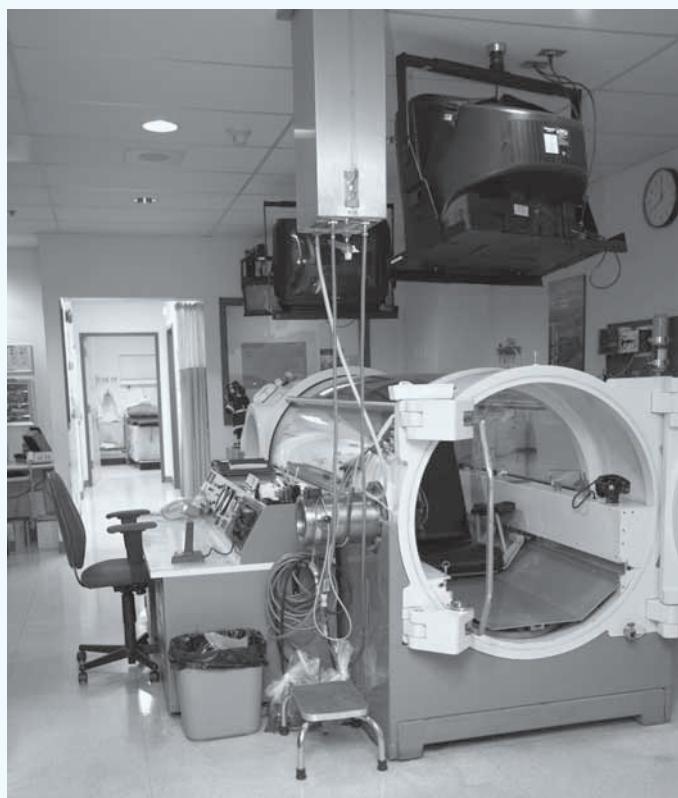
$$x, y \geq 0$$

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Terapias con medicamentos y radiación<sup>9</sup>

Con frecuencia existen formas alternativas de tratamiento para pacientes a los que se les diagnostica una enfermedad compleja en particular. Cada tratamiento conlleva no sólo efectos positivos en el paciente, sino también efectos negativos, como toxicidad o malestar. Un médico debe hacer la mejor elección entre estos tratamientos o la combinación de ellos. Esta decisión dependerá no sólo de los efectos curativos, sino también de los efectos tóxicos y de malestar.



Suponga que usted es un médico que tiene a un paciente de cáncer bajo su cuidado, y que existen disponibles dos posibles tratamientos: administración de medicamentos y terapia con radiación. Suponga que la eficacia de los tratamientos está expresada en unidades comunes, digamos, unidades curativas. Las medicinas contienen 1000 unidades curativas por onza y la radiación proporciona 1000 unidades curativas por minuto. Los análisis indican que el paciente debe recibir al menos 3000 unidades curativas.

<sup>9</sup>Adaptado de R. S. Ledley y L. B. Lusted, "Medical Diagnosis and Modern Decision Making", *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, vol. XIV; *Mathematical Problems in the Biological Sciences* (American Mathematical Society, 1962).

Sin embargo, existe un grado de toxicidad implícito en cada tratamiento. Suponga que se miden los efectos tóxicos de cada tratamiento en una unidad común de toxicidad, digamos, una unidad tóxica. Las medicinas contienen 400 unidades tóxicas por onza y la radiación produce 1000 unidades tóxicas por minuto. Con base en sus estudios, usted cree que el paciente no debe recibir más de 2000 unidades tóxicas.

Además, cada tratamiento implica un grado de malestar en el paciente. Las medicinas provocan el triple de malestar por onza que la radiación por minuto.

En la tabla 7.5 se resume la información. El problema que se le plantea es determinar las dosis de medicina y radiación que pueden satisfacer los requerimientos curativos y de toxicidad y, al mismo tiempo, minimizar el malestar del paciente.

TABLA 7.5

	Unidades curativas	Unidades tóxicas	Malestar relativo
Medicina (por onza)	1000	400	3
Radiación (por minuto)	1000	1000	1
Requerimiento	$\geq 3000$	$\leq 2000$	

Sea  $x_1$  el número de onzas de la medicina y  $x_2$  el número de minutos de radiación que serán administrados. Entonces usted quiere minimizar el malestar  $D$  dado por

$$D = 3x_1 + x_2$$

sujeta a la condición curativa

$$1000x_1 + 1000x_2 \geq 3000$$

y a la condición de toxicidad

$$400x_1 + 1000x_2 \leq 2000$$

donde  $x_1 \geq 0$  y  $x_2 \geq 0$ . Debe reconocer que éste es un problema de programación lineal. Al graficar se obtiene la región factible de la figura 7.28. Los vértices son  $(3, 0)$ ,  $(5, 0)$  y  $(\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$ .

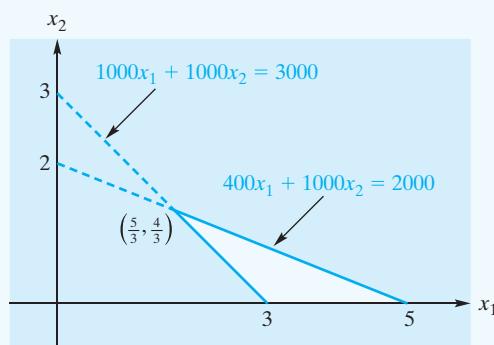


FIGURA 7.28 Región factible para el problema de las terapias con medicamentos y radiación.

Después de evaluar  $D$  en cada vértice se obtiene lo siguiente:

$$\text{en } (3, 0) \quad D = 3(3) + 0 = 9$$

$$\text{en } (5, 0) \quad D = 3(5) + 0 = 15$$

y

$$\text{en } \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad D = 3\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{4}{3} = \frac{19}{3} \approx 6.3$$

Como  $D$  es mínimo en  $(\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$ , usted debe prescribir un tratamiento de  $\frac{5}{3}$  de onza de la medicina y  $\frac{4}{3}$  minutos de radiación. Así, al resolver un problema de programación lineal, ha determinado el “mejor” tratamiento para el paciente.

El Instituto Nacional de Salud de Estados Unidos tiene un sitio en la Web, [www.nih.gov/health](http://www.nih.gov/health), que contiene información actualizada sobre diversas áreas relacionadas con la salud.

Quizá también desee buscar en la Web sitios que utilicen *applets* para demostrar el método simplex. Par ello, sólo introduzca “método simplex” y “applet” en cualquier buscador de Internet.

## Problemas

- Imagine un paciente para el que están disponibles tratamientos medicinales y por radiación. Cada onza de medicamento contiene 500 unidades curativas y 400 unidades tóxicas. Cada minuto de radiación proporciona 1000

unidades curativas y 600 unidades tóxicas. El paciente requiere al menos de 2000 unidades curativas, y puede tolerar no más de 1400 unidades tóxicas. Si cada onza de la medicina provoca el mismo malestar que cada minuto de radiación, determine las dosis de medicamento y radiación, de modo que se minimice el malestar en el paciente. Use el método geométrico en una calculadora graficadora, si tiene alguna disponible.

- Suponga que el medicamento A, el B y la terapia con radiación constituyen los tratamientos disponibles para un paciente. Cada onza de la medicina A contiene 600 unidades curativas y 500 tóxicas. Cada onza de la medicina B contiene 500 unidades curativas y 100 tóxicas. Cada minuto de radiación proporciona 1000 unidades curativas y 1000 tóxicas. El paciente requiere al menos de 3000 unidades curativas y puede tolerar no más de 2000 unidades tóxicas. Si cada onza de A y cada minuto de radiación provocan el mismo malestar, y cada onza de B provoca dos veces más malestar que cada onza de A, determine las dosis de medicamentos y radiación de modo de minimizar el malestar para el paciente. Utilice el método simplex.
- ¿Cuál método cree usted que es más fácil de efectuar en programación lineal, el método simplex o un método geométrico asistido por la tecnología? Dé razones para su respuesta.

# 8

## INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA

- 8.1 Principio básico de conteo y permutaciones
- 8.2 Combinaciones y otros principios de conteo
- 8.3 Espacios muestrales y eventos
- 8.4 Probabilidad
- 8.5 Probabilidad condicional y procesos estocásticos
- 8.6 Eventos independientes
- 8.7 Fórmula de Bayes
- 8.8 Repaso

**L**a teoría de la probabilidad moderna comenzó con un problema muy *práctico*. Si se interrumpe un juego entre dos apostadores, el jugador que lleva ventaja seguramente tiene derecho a más de la mitad de la suma de dinero apostada. ¡Pero no a todo el monto! ¿Cómo debería dividirse la ganancia? Éste era considerado un problema sin solución en el año 1654, época en la que un conde francés lo compartió con Blaise Pascal.

La solución implica probabilidad. Si un jugador tiene 30% de oportunidad de ganar \$150, el valor actual de la situación del jugador es de  $0.30(\$150) = \$45$ . ¿Por qué?, porque un jugador que en forma repetida se encuentra con 30% de oportunidad de ganar \$150, a largo plazo, ganará el mismo dinero si permanece en el juego como si se saliera de la apuesta por \$45 en cualquier momento. Entonces, cada jugador obtendría una parte proporcional a su probabilidad, justo antes de la interrupción, de ganar el juego si éste se hubiera prolongado hasta su finalización.

Pero, ¿cómo se calcula esa probabilidad? Trabajando juntos, Pascal y Pierre de Fermat establecieron el siguiente resultado. Suponga que un juego consiste en una serie de “rondas” que involucran posibilidades, como lanzamientos de monedas donde cada una tiene la misma posibilidad de ganar, y que el ganador final es aquél que primero gane cierto número de rondas. Si en la interrupción el ganador necesitaba  $r$  rondas más para ganar, mientras que el jugador 2 requería más rondas para ganar, entonces la probabilidad de ganar para el jugador 1 es

$$\sum_{k=0}^{s-1} \frac{nC_k}{2^n}$$

donde  $n = r + s - 1$  es el número máximo de rondas que le podrían faltar al juego. La probabilidad que tiene el jugador 2 de ganar es 1 menos la probabilidad de ganar del jugador 1. La notación  $nC_k$ , que se lee “combinaciones de  $n$  tomadas en  $k$ ”, puede resultarle poco familiar, pero en este capítulo aprenderá a usarla. (La notación  $\Sigma$  denota sumatoria, como se definió en la sección 1.5). Una vez que usted haya entendido la fórmula, será capaz de verificar que si el jugador 1 está a una ronda de ganar y el ganador 2 está a tres, entonces el jugador 1 debería obtener  $\frac{7}{8}$  de la apuesta mientras que el jugador 2 obtendría  $\frac{1}{8}$ . Posteriormente en este capítulo se mostrará cómo Pascal y Fermat llegaron a esta respuesta. Con la práctica, será capaz de responderse usted mismo preguntas similares.

El término *probabilidad* resulta familiar para la mayoría de las personas. Es común escuchar frases como “la probabilidad de lluvia”, “la probabilidad de inundación” y “la probabilidad de obtener 10 en un curso”. Desde un punto de vista poco exigente, la probabilidad se refiere al número que indica el grado de posibilidad de que ocurra algún evento a futuro en particular. Por ejemplo, antes de lanzar una moneda balanceada, no se sabe con certidumbre si el resultado será cara o cruz. Sin embargo, no existe duda de que se deben considerar ambos resultados como igualmente posibles. Esto significa que



Probabilidad y autómatas celulares

la mitad de los lanzamientos aparecerá cara. Por lo tanto, se dice que la probabilidad de que ocurra una cara en cualquier lanzamiento es  $\frac{1}{2}$ , o 50%.

El campo de la probabilidad forma la base del estudio de la estadística. En estadística se pretende realizar una inferencia; es decir, una predicción o decisión acerca de una población (el conjunto total de objetos que se está analizando) mediante el uso de una muestra de datos seleccionados de esa población. En otras palabras, en estadística se hace una inferencia acerca de una población con base en una muestra conocida. Por ejemplo, al seleccionar una muestra de unidades de una línea de ensamblado, se puede hacer una inferencia estadística de *todas* las unidades en una corrida de producción. Sin embargo, en el estudio de la probabilidad, se trabaja con una población conocida y se considera la posibilidad (o probabilidad) de seleccionar una muestra particular de ella. Por ejemplo, si se elige una carta de una baraja, quizás se esté interesado en saber en la probabilidad de que la carta sea un as de corazones.

## OBJETIVO

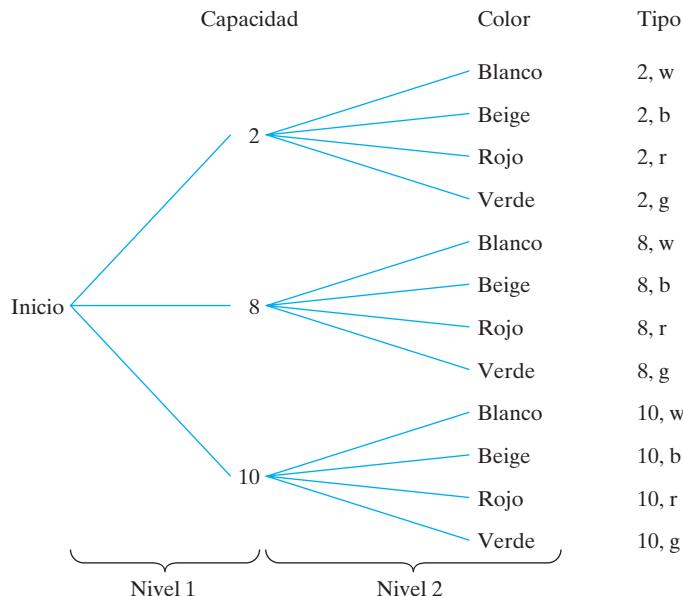
Desarrollar y aplicar un principio básico de conteo y generalizarlo a permutaciones.

## 8.1 Principio básico de conteo y permutaciones

### Principio básico de conteo

Más adelante, se observará que el cálculo de una probabilidad puede requerir de la estimación del número de elementos de un conjunto. Debido a que el conteo de los elementos en forma individual puede ser extremadamente tedioso (e incluso poco recomendable), se dedicará un espacio a desarrollar técnicas de conteo eficientes. Se iniciará enunciando, el *Principio básico del conteo*, que es útil en la resolución de una amplia variedad de problemas.

Suponga que un fabricante desea producir cafeteras con capacidades de 2, 8 y 10 tazas, y que cada una de estas variantes estará disponible en colores blanco, beige, rojo y verde. ¿Cuántos tipos de cafeteras debe producir? Para responder la pregunta, no es necesario contar los pares capacidad-color uno por uno [como 2-blanco (2 w) y 8-beige(8 b)]. Como existen tres capacidades y para cada capacidad hay cuatro colores, el número de tipos de cafetera será el producto de  $3 \cdot 4 = 12$ . Se pueden enumerar sistemáticamente los diferentes tipos con el **diagrama de árbol** de la figura 8.1. Desde el punto inicial, existen tres ramas que indican las capacidades posibles. A partir de cada una de estas ramas hay cuatro ramas más que indican los colores posibles. Este árbol determina 12 rutas, cada una de las cuales comienza en el punto inicial y finaliza en la punta de la rama. Cada ruta determina un tipo diferente de cafetera. Se dice que este diagrama es un árbol de *dos niveles*: existe un nivel para la capacidad y otro para el color.



**FIGURA 8.1** Diagrama de árbol de dos niveles para los tipos de cafetera.

Se puede considerar la enumeración de los tipos de cafetera como un procedimiento de dos etapas. En la primera se indica una capacidad y en la segunda un color. El número de tipos de cafetera es el número de formas en que puede ocurrir la primera etapa (3), multiplicado por el número de formas en que puede ocurrir la etapa 2 (4), lo cual resulta en  $3 \cdot 4 = 12$ . Ahora suponga que el fabricante decide poner a la disposición de todos los modelos una opción de cronómetro que permita al consumidor despertar con café recién preparado. Si se asume que es realmente opcional, de manera que la cafetera puede venir con cronómetro o sin él, el conteo de tipos de cafeteras ahora se convierte en un procedimiento de tres etapas. Ahora existen  $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$  tipos de cafetera.

Este procedimiento de multiplicación puede generalizarse como el Principio básico de conteo:

### Principio básico de conteo

Suponga que un procedimiento implica una secuencia de  $k$  etapas. Sea  $n_1$  el número de formas en que puede ocurrir la primera y  $n_2$  el número de formas en que puede ocurrir la segunda. Si se continúa de esta manera, sea  $n_k$  el número de formas en que puede ocurrir la  $k$ -ésima etapa. Entonces, el número total de formas diferentes en que puede ocurrir el procedimiento es

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$$

#### EJEMPLO 1 Rutas de viaje

*Dos caminos conectan las ciudades A y B, cuatro conectan a B y C, y cinco conectan a C y D. (Vea la figura 8.2). Para manejar de A a B, a C y luego a la ciudad D, ¿cuántas rutas diferentes son posibles?*

**Solución:** Aquí se tiene un procedimiento de tres etapas. La primera ( $A \rightarrow B$ ) tiene dos posibilidades, la segunda ( $B \rightarrow C$ ) tiene cuatro y la tercera ( $C \rightarrow D$ ) tiene cinco. Por el principio básico de conteo, el número total de rutas es  $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

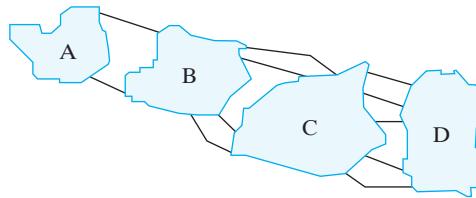


FIGURA 8.2 Caminos que conectan a las ciudades A, B, C, D.

#### EJEMPLO 2 Lanzamiento de monedas y un dado

*Cuando se lanza una moneda, puede resultar una cara (H) o una cruz (T). Si se lanza un dado, se puede obtener 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Suponga que se lanza una moneda dos veces y después se lanza un dado, y se anota el resultado (por ejemplo H en el primer lanzamiento, T en el segundo y 4 en el tercero). ¿Cuántos resultados diferentes pueden ocurrir?*

**Solución:** El lanzamiento de una moneda dos veces y de un dado una vez puede considerarse un procedimiento de tres etapas. Cada una de las primeras dos etapas (lanzamientos de la moneda) tiene dos resultados posibles. La tercera etapa (lanzamiento del dado) tiene seis resultados posibles. Por el principio básico de conteo, el número de resultados diferentes para el procedimiento es

$$2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3



### EJEMPLO 3 Contestando un breve examen

*¿De cuantas formas diferentes puede responderse un examen bajo cada una de las siguientes condiciones?*

- a. *El examen consiste en tres preguntas de opción múltiple con cuatro opciones para cada pregunta.*

**Solución:** La resolución sucesiva de las tres preguntas es un procedimiento de tres etapas. La primera pregunta puede responderse en cualquiera de las cuatro formas. Asimismo, cada una de las otras dos preguntas puede responderse de cuatro formas. Por el principio básico de conteo, el número de formas en que se puede responder el examen es

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$$

- b. *El examen consiste en tres preguntas de opción múltiple (con cuatro opciones para cada una) y cinco preguntas tipo falso-verdadero.*

**Solución:** La resolución del examen puede considerarse un procedimiento de dos etapas. Primero pueden responderse las preguntas de opción múltiple (la primera etapa) y después se pueden responder las preguntas tipo falso-verdadero (la segunda etapa). Del inciso (a), las preguntas de opción múltiple pueden responderse en  $4 \cdot 4 \cdot 4$  formas. Cada una de las preguntas falso-verdadero tienen dos opciones (“falso” o “verdadero”), de manera que el número total de formas para contestar las cinco preguntas de este tipo es  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ . Por el principio básico de conteo, el número de formas de responder todo el examen es

$$\underbrace{(4 \cdot 4 \cdot 4)}_{\substack{\text{opción} \\ \text{múltiple}}} \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\substack{\text{falso-verdadero}}} = 4^3 \cdot 2^5 = 2048$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5 

### EJEMPLO 4 Disposición de letras

*De las cinco letras A, B, C, D y E, ¿cuántas disposiciones horizontales de tres letras (llamadas “palabras”) son posibles si no se puede repetir ninguna letra? (No es necesario que las “palabras” tengan sentido). Por ejemplo, BDE y DEB son dos palabras aceptables, pero CAC no lo es.*

**Solución:** Para formar una palabra, deben llenarse sucesivamente las posiciones \_\_\_\_\_ con letras diferentes. Por lo tanto, se tiene un procedimiento de tres etapas. Para la primera posición, puede elegirse una de las cinco letras. Despues de llenar esa posición con alguna letra, puede llenarse la segunda posición con cualquiera de las cuatro letras restantes. Despues de llenar esa posición, se puede llenar la tercera posición con cualquiera de las tres letras que aún no se han usado. Por el principio básico de conteo, el número total de palabras de tres letras es

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7 

### Permutaciones

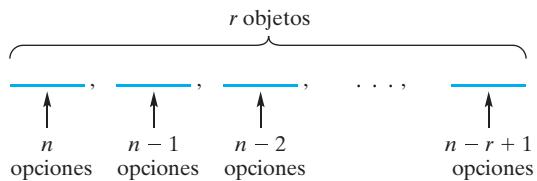
En el ejemplo 4 se seleccionaron tres letras diferentes de entre cinco letras y se dispusieron en un *orden*. Cada resultado se llama una *permutación de cinco letras tomadas tres a la vez*. De manera más general, se tiene la siguiente definición.

#### DEFINICIÓN

Una selección ordenada de  $r$  objetos, sin repetición, tomadas de  $n$  objetos distintos se llama una *permutación de  $n$  objetos tomados  $r$  a la vez*. El número de dichas permutaciones se denota  ${}_nP_r$ .

Así, en el ejemplo 4, se encuentra que

$${}_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$



**FIGURA 8.3** Una disposición ordenada de  $r$  objetos seleccionados de  $n$  objetos.

Mediante un análisis similar, ahora se encontrará una fórmula general para  ${}_nP_r$ . Al hacer una disposición ordenada de  $r$  objetos a partir de  $n$  objetos, para la primera posición se puede elegir cualquiera de los  $n$  objetos (vea la figura 8.3). Después de haber llenado la primera posición, restan  $n - 1$  objetos que pueden elegirse para la segunda posición. Después de haberla llenado, hay  $n - 2$  objetos que pueden elegirse para la tercera posición. Se continúa de esta forma y utilizando el principio básico de conteo, se llega a la siguiente fórmula:

El número de permutaciones de  $n$  objetos tomados  $r$  a la vez está dado por

$${}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r \text{ factores}} \quad (1)$$

La fórmula para  ${}_nP_r$  puede expresarse en términos de factoriales.<sup>1</sup> Al multiplicar el lado derecho de la ecuación (1) por

$$\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)\cdots(2)(1)}$$

se obtiene

$${}_nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \cdot (n-r)(n-r-1)\cdots(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)\cdots(2)(1)}$$

El numerador es simplemente  $n!$ , y el denominador es  $(n-r)!$ . Por lo tanto, se tiene el resultado siguiente:

El número de permutaciones de  $n$  objetos tomados  $r$  a la vez está dado por

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (2)$$

Por ejemplo, de la ecuación (2), se tiene

$${}_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Este cálculo puede obtenerse con facilidad con una calculadora, mediante la tecla de factorial. De manera alternativa, puede ser práctico escribir

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Observe que  $7!$  se escribió de manera que se pudiera cancelar  $4!$ .

### EJEMPLO 5 Puestos en un club

Un club tiene 20 miembros, deben ocuparse los puestos de presidente, vicepresidente, secretario y tesorero, y ningún miembro puede ocupar más de un puesto. ¿Cuántas planillas diferentes de candidatos son posibles?

<sup>1</sup>Los factoriales se estudiaron en la sección 2.2.

**ADVERTENCIA**

Los cálculos con factoriales tienden a producir números muy grandes. Para evitar el sobreflujo en una calculadora, es importante hacer con frecuencia alguna *cancelación* antes de introducir las cifras.

**Solución:** Se considerará una planilla en el orden de presidente, vicepresidente, secretario y tesorero. Cada ordenación de cuatro miembros constituye una planilla, por lo que el número de planillas es  ${}_{20}P_4$ . Por la ecuación (1),

$${}_{20}P_4 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116\,280$$

De manera alternativa, si se usa la ecuación (2), se obtiene

$$\begin{aligned} {}_{20}P_4 &= \frac{20!}{(20-4)!} = \frac{20!}{16!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{16!} \\ &= 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116\,280 \end{aligned}$$

¡Observe el gran número de planillas que son posibles!

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

**EJEMPLO 6 Cuestionario político**

Un político envía un cuestionario a sus votantes para determinar sus intereses acerca de seis asuntos de importancia nacional: desempleo, medio ambiente, impuestos, tasas de interés, defensa nacional y seguridad social. Los votantes deben seleccionar cuatro asuntos de interés personal y colocarlos en orden: o un número 1, 2, 3 o 4 después de cada asunto para indicar el grado de interés, donde 1 indica el mayor interés y 4 el menor. ¿En cuantas formas se puede responder al cuestionario?

**Solución:** Un votante debe clasificar cuatro de los seis asuntos. Así, se puede considerar la respuesta como un arreglo ordenado de seis elementos tomados cuatro a la vez, donde el primer elemento es el asunto con la clasificación 1, el segundo elemento es el asunto con la clasificación 2, y así sucesivamente. Por lo tanto, se tiene un problema de permutación, y el número de respuestas posibles es

$${}_6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

En caso de que desee encontrar el número de permutaciones de  $n$  objetos tomados todos a la vez, se establece  $r = n$  en la ecuación (2), y se obtiene

$${}_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Cada una de estas permutaciones se llama simplemente una **permutación de  $n$  objetos**.

El número de permutaciones de  $n$  objetos es  $n!$ 

Por ejemplo, el número de permutaciones de letras en la palabra SET es 3!, o 6. Estas permutaciones son

SET STE EST ETS TES TSE

**EJEMPLO 7 Nombre de un bufete jurídico**

Los abogados Smith, Jones, Jacobs y Bell quieren formar un bufete legal y lo nombrarán con sus cuatro apellidos. ¿Cuántos posibles nombres existen?

**Solución:** Como el orden es importante, debe encontrarse el número de permutaciones de los cuatro apellidos, que es

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Así que existen 24 nombres posibles para el bufete.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

## Problemas 8.1

- \*1. Proceso de producción** En un proceso de producción, un producto pasa por una de las líneas de ensamblado A, B o C y después continúa por una de las líneas de acabado D o E. Dibuje un diagrama de árbol que indique las posibles rutas de producción para una unidad del producto. ¿Cuántas rutas de producción son posibles?
- 2. Modelos de aire acondicionado** Un fabricante produce equipos de aire acondicionado con capacidades de 6000, 8000 y 10 000 BTU. Cada capacidad está disponible con ventiladores de una o dos velocidades. Dibuje un diagrama de árbol que represente todos los tipos de modelos. ¿Cuántos tipos existen?



- \*3. Lanzamiento de dados** Se lanza un dado rojo y después uno verde. Dibuje un diagrama de árbol para indicar los resultados posibles. ¿Cuántos resultados posibles existen?
- 4. Lanzamiento de moneda** Se lanza cuatro veces una moneda. Dibuje un diagrama de árbol para indicar los resultados posibles. ¿Cuántos resultados posibles existen?

Use el principio básico del conteo en los problemas 5 a 10.

- \*5. Selección de curso** Un estudiante debe tomar un curso de ciencias y uno de humanidades. Los cursos de ciencias disponibles son biología, química, física, ciencia de las computadoras y matemáticas. En humanidades, los cursos disponibles son inglés, historia, comunicación oral y clásicos. ¿Cuántas selecciones de dos cursos puede hacer el estudiante?
- 6. Rutas de automóvil** Una persona vive en la ciudad A y se traslada en automóvil a la ciudad B. Existen cinco caminos que conectan A con B. (a) ¿Cuántas rutas son posibles para un viaje redondo? (b) ¿Cuántas rutas de viaje redondo son posibles si se debe usar una ruta distinta para el viaje de regreso?
- \*7. Selecciones de comida** En un restaurante, una comida completa consiste en una entrada, un plato fuerte, un postre y una bebida. Las opciones para la entrada son sopa y ensalada; para el plato fuerte son pollo, pescado, bistec y cordero; para el postre son fiesta de cerezas, mosaico de durazno fresco, pastel de trufa de chocolate y rollo de moras azules; y para la bebida, se puede elegir entre café, té y leche. ¿Cuántos tipos de comida completa pueden pedirse?
- 8. Examen de opción múltiple** ¿En cuántas formas es posible responder un examen de opción múltiple con seis preguntas, si cada una tiene cuatro opciones (y se debe elegir una opción para cada pregunta)?
- 9. Examen tipo falso-verdadero** ¿En cuántas formas es posible responder un examen del tipo verdadero-falso que contiene 10 preguntas?
- 10. Códigos postales canadienses** Un código postal canadiense consiste en una serie de seis caracteres de los cuales tres son letras y tres son dígitos, comienza con una letra y cada letra está seguida por un solo dígito. (Para que sea más fácil de leer, la serie se rompe en secuencias de tres. Por ejemplo, B3H 3J5 es un código postal válido). ¿Cuántos códigos postales canadienses son posibles?

En los problemas 11 a 16, determine los valores.

- \*11.**  ${}_6P_3$       **12.**  ${}_{95}P_1$       **13.**  ${}_6P_6$   
**14.**  ${}_9P_4$       **15.**  ${}_4P_2 \cdot {}_5P_3$       **16.**  $\frac{99P_5}{99P_4}$

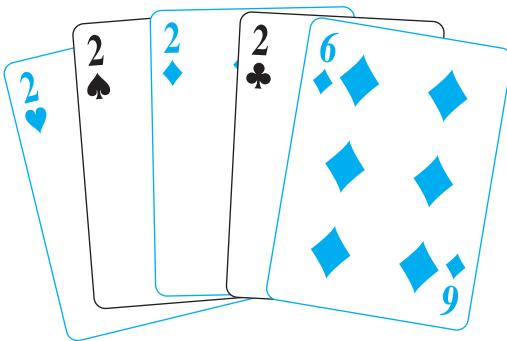
**17.** Calcule  $1000!/999!$  sin usar una calculadora. Ahora resuelva con su calculadora, mediante la función de factorial.

- 18.** Determine  $\frac{nPr}{n!}$ .

En los problemas 19 a 42, use cualquier método de conteo apropiado.

- \*19. Nombre de una compañía** Flynn, Peters y Walters fundan una compañía de publicidad y acuerdan nombrarla con sus tres apellidos. ¿Cuántos nombres son posibles para la compañía?
- 20. Softbol** Si una liga de softbol tiene seis equipos, ¿cuántas clasificaciones de final de temporada son posibles? Suponga que no hay empates.
- \*21. Concurso** ¿En cuántas formas puede un juez otorgar el primero, segundo, y tercer premio en un concurso que tiene ocho participantes?
- 22. Examen de relacionar** En un examen de historia, cada uno de los seis elementos de una columna debe relacionarse con exactamente uno de los ocho elementos que forman otra columna. Ningún elemento de la segunda columna puede seleccionarse más de una vez. ¿En cuántas formas pueden hacerse las relaciones?
- 23. Lanzamiento de dado** Se lanza cuatro veces un dado (de seis caras) y se anota el resultado de cada lanzamiento. ¿Cuántos resultados son posibles?
- 24. Lanzamiento de moneda** Se lanza ocho veces una moneda. ¿Cuántos resultados son posibles si se toma en cuenta el orden de los lanzamientos?
- 25. Asignación de problema** En una clase de matemáticas que tiene 12 estudiantes, el profesor quiere asignar los problemas para tarea 1, 3 y 5 que están en el pizarrón a tres estudiantes diferentes. ¿En cuántas formas puede distribuir los problemas?
- 26. Combinación de cerradura** Una cerradura de combinación tiene 26 letras diferentes, y para que se abra debe seleccionarse una sucesión de tres letras distintas. ¿Cuántas combinaciones son posibles?
- 27. Cuestionario para estudiantes** Una universidad entrega un cuestionario donde los estudiantes deben clasificar los cuatro aspectos con los que están más insatisfechos. Estos aspectos son
- |                           |                        |
|---------------------------|------------------------|
| colegiaturas              | profesores             |
| cuotas de estacionamiento | comida de la cafetería |
| cuartos de dormitorio     | tamaño de los grupos   |
- La clasificación debe indicarse mediante los números 1, 2, 3 y 4, donde el 1 indica el aspecto con mayor insatisfacción y el 4 indica el de menor insatisfacción. ¿En cuántas formas puede un estudiante responder el cuestionario?
- 28. Lanzamiento de dado** Se lanza tres veces un dado. ¿Cuántos resultados son posibles si se toma en cuenta el orden de los lanzamientos y el segundo lanzamiento produce un número menor que 3?
- 29. Disposición de letras** ¿Cuántas palabras de seis letras pueden formarse, a partir de la palabra MEADOW, si no puede repetirse ninguna letra?
- 30. Disposición de letras** Con las letras de la palabra DISC, ¿cuántas palabras de cuatro letras pueden formarse si no puede repetirse ninguna letra?

- 31. Disposición de libros** ¿En cuántas formas pueden disponerse cinco de siete libros en una repisa? ¿De cuántas maneras pueden disponerse los siete libros en la repisa?
- 32. Sala de lectura** Una sala de lectura tiene cinco puertas. ¿De cuántas formas puede un estudiante entrar a la sala por una puerta y
- salir por una puerta diferente?
  - salir por cualquier puerta?
- 33. Mano de póker** Una mano de póker consiste en cinco cartas extraídas de un baraja de 52 cartas en juego. Se dice que la mano es una “póker o cuatro de la misma clase” si cuatro de las cartas tienen el mismo valor. Por ejemplo las manos con cuatro diez o cuatro sotas o cuatro dos son póker (cuatro de la misma clase). ¿Cuántas manos de este tipo son posibles?



- 34. Opciones del catálogo** En un catálogo de ventas, un estante para CD está disponible en los colores negro, rojo, amarillo, gris y azul. Cuando un cliente desea ordenar un estante de CD, debe indicar su primera y segunda opciones de color. ¿De cuántas formas puede hacerse esto?
- 35. Orden de comida** Cinco estudiantes van a un restaurante y ordenan una hamburguesa, una hamburguesa con queso, un sándwich de pescado, un sándwich de carne y un sándwich de queso fundido (uno para cada uno). Cuando la mesera regresa con la comida, olvida qué estudiante ordenó cada comida y simplemente coloca un pedido enfrente de cada uno. ¿En cuántas formas puede la mesera hacer esto?

- 36. Fotografía de grupo** ¿En cuántas formas pueden tres hombres y dos mujeres alinearse para una fotografía de grupo? ¿En cuántas formas pueden alinearse si una mujer debe estar en cada extremo?
- 37. Puestos en un club** Un club tiene 12 miembros.
- ¿En cuántas formas pueden llenarse los puestos de presidente, vicepresidente, secretario y tesorero si ningún miembro puede ocupar más de un puesto?
  - ¿De cuántas maneras pueden llenarse los cuatro puestos si el presidente y el vicepresidente deben ser miembros diferentes?
- 38. Nombres de fraternidad** Suponga que una fraternidad se nombra con tres letras griegas. (Existen 24 letras en el alfabeto griego).
- ¿Cuántos nombres son posibles?
  - ¿Cuántos nombres son posibles si ninguna letra puede usarse más de una vez?
- 39. Básquetbol** ¿En cuántas formas puede un entrenador de básquetbol asignar posiciones a su equipo de básquetbol de cinco elementos, si dos de los integrantes están calificados para la posición de centro y los cinco están calificados para las otras posiciones?
- 40. Siglas de identificación** Suponga que las siglas de identificación de una estación de radio consisten en cuatro letras, de las cuales la primera debe ser una K o una W. ¿Cuántas identificaciones no terminadas en O son posibles?
- 41. Béisbol** Un manager de béisbol determina que, de sus nueve elementos del equipo, tres son bateadores fuertes y seis son débiles. Si quiere que los bateadores fuertes ocupen las tres primeras posiciones en el orden de bateo, ¿cuántos órdenes de bateo son posibles?
- 42. Banderas de señalización** Cuando al menos una de cuatro banderas de colores rojo, verde, amarillo y azul se ordenan verticalmente en un asta bandera, el resultado indica una señal (o mensaje). Las diferentes disposiciones dan señales diferentes.
- ¿Cuántas señales diferentes son posibles si se usan las cuatro banderas?
  - ¿Cuántas señales diferentes son posibles si se usa al menos una bandera?

## OBJETIVO

Analizar combinaciones y permutaciones con objetos repetidos y asignaciones a celdas.

## 8.2 Combinaciones y otros principios de conteo

### Combinaciones

El estudio de los métodos de conteo continúa con la consideración de lo siguiente. En un club con 20 miembros, deben ocuparse los puestos de presidente, vicepresidente, secretario y tesorero, y ningún afiliado puede ocupar más de un puesto. Si estos cargos, en el orden dado, se ocupan con los miembros A, B, C y D, respectivamente, entonces esta planilla puede representarse mediante

ABCD

Una planilla diferente es

BACD

Estas dos planillas representan diferentes permutaciones de 20 miembros tomados cuatro a la vez. Ahora, como una situación diferente, considere *comités* de cuatro personas que pueden formarse a partir de los 20 afiliados. En ese caso, las dos disposiciones

ABCD y BACD

representan el *mismo* comité. Aquí, *el orden en que se enumeraron los miembros no tiene importancia*. Se considera que estas dos disposiciones dan la misma *combinación* de A, B, C y D.

La frase fundamental aquí es “sin importar el orden”, puesto que el orden implica una permutación en lugar de una combinación.

### DEFINICIÓN

Una selección de  $r$  objetos, sin tomar en cuenta el orden y sin repetición, seleccionados de  $n$  objetos distintos se llama una *combinación de  $n$  objetos tomados  $r$  a la vez*. El número de combinaciones de este tipo se denota  ${}_nC_r$ , que puede leerse “combinaciones de  $n$  en  $r$ ”.

### EJEMPLO 1 Comparación de combinaciones con permutaciones

Elabore una lista con todas las combinaciones y todas las permutaciones de las cuatro letras

A, B, C y D

cuando se toman tres a la vez.

**Solución:** Las combinaciones son

ABC ABD ACD BCD

Existen cuatro combinaciones, entonces  ${}_4C_3 = 4$ . Las permutaciones son

ABC	ABD	ACD	BCD
ACB	ADB	ADC	BDC
BAC	BAD	CAD	CBD
BCA	BDA	CDA	CDB
CAB	DAB	DAC	DBC
CBA	DBA	DCA	DCB

Existen 24 permutaciones.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

En el ejemplo 1, observe que cada columna consiste en todas las permutaciones para la misma combinación de letras. Con esta observación, es posible determinar una fórmula para  ${}_nC_r$ —el número de combinaciones de  $n$  objetos tomados  $r$  a la vez—. Suponga que una de esas combinaciones es

$$x_1 x_2 \cdots x_r$$

El número de permutaciones de estos  $r$  objetos es  $r!$ . Si se enumeran todas las combinaciones de este tipo y después se enumeran todas las permutaciones de estas combinaciones, se obtendría una lista completa de permutaciones de  $n$  objetos tomados  $r$  a la vez. Así, por el principio básico de conteo,

$${}_nC_r \cdot r! = {}_nP_r$$

Al despegar  ${}_nC_r$ , se obtiene

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

El número de combinaciones de  $n$  objetos, tomados  $r$  a la vez, está dado por

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Muchas calculadoras pueden calcular directamente  ${}_nC_r$ .

### EJEMPLO 2 Selección de comité

Si un club tiene 20 miembros, ¿cuántos comités diferentes de cuatro miembros son posibles?

**Solución:** El orden no es importante porque, independientemente de cómo se dispongan los elementos del comité, se tiene el mismo comité. Así, simplemente se tiene que

calcular el número de combinaciones de 20 objetos tomados cuatro a la vez,  ${}_{20}C_4$ :

$$\begin{aligned} {}_{20}C_4 &= \frac{20!}{4!(20-4)!} = \frac{20!}{4!16!} \\ &= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 16!} = 4845 \end{aligned}$$

Observe que  $20!$  se escribe de manera que pueda cancelarse  $16!$

Existen 4845 posibles combinaciones.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9 

Es necesario recordar que si se hace una selección de objetos y *el orden importa*, entonces deben considerarse las *permutaciones*. Si el *orden no importa*, considere las *combinaciones*. Una forma de recordar esto es que  ${}_nP_r$  es el número de plantillas ejecutivas con  $r$  puestos que pueden elegirse para  $n$  personas, mientras que  ${}_nC_r$  es el número de comités con  $r$  miembros que pueden elegirse para  $n$  personas. Una planilla ejecutiva puede pensarse como un comité en el cual cada individuo se ha clasificado. Existen  $r!$  formas de clasificar los elementos de un comité de  $r$  elementos. Así que, si se piensa en la formación de una planilla ejecutiva como un procedimiento de dos etapas, mediante el principio básico de conteo de la sección 8.1, de nuevo se obtiene

$${}_nP_r = {}_nC_r \cdot r!$$

### EJEMPLO 3 Mano de póker

Una *mano de póker* consiste en cinco cartas repartidas de una baraja ordinaria de 52 cartas. ¿Cuántas manos de póker distintas existen?

**Solución:** Una mano posible es

2 de corazones, 3 de diamantes, 6 de bastos,  
4 de espadas, rey de corazones

que pueden abreviarse como

2C 3D 6B 4E RC

El orden en que se reparten las cartas no importa, por lo tanto esta mano es la misma que

RC 4E 6B 3D 2C

Así, el número de manos posibles es el número de formas en que 5 objetos pueden seleccionarse de entre 52, sin importar el orden. Es un problema de combinaciones. Se tiene

$$\begin{aligned} {}_{52}C_5 &= \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52!}{5!47!} \\ &= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 47!} \\ &= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 2\,598\,960 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11 

### EJEMPLO 4 Decisión por mayoría y suma de combinaciones

Un comité para la graduación en una escuela consta de cinco miembros. ¿En cuántas formas puede el comité lograr una decisión por mayoría a favor de un tipo de graduación?

**Estrategia** Una decisión por mayoría favorable se logra si, y sólo si, exactamente tres de los miembros votan favorablemente, o exactamente cuatro miembros votan favorablemente, o los cinco miembros votan favorablemente

Para determinar el número total de formas en que puede lograrse una decisión favorable por mayoría, se *suma* el número de maneras en que cada uno de los votos anteriores puede ocurrir.

**Solución:** Suponga que exactamente tres miembros votan en forma favorable. El orden de los miembros no tiene importancia, entonces puede pensarse que estos elementos forman una combinación. Por lo tanto, el número de formas en que tres de los cinco afiliados pueden votar de manera favorable es  ${}_5C_3$ . De manera similar, el número de maneras en que exactamente cuatro miembros pueden votar favorablemente es  ${}_5C_4$ , y el número de formas en que los cinco pueden votar de manera favorable es  ${}_5C_5$  (que, por supuesto, es 1). Así, el número de formas en que se puede lograr una decisión por mayoría a favor de un tipo de graduación es

$$\begin{aligned} {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 &= \frac{5!}{3!(5-3)!} + \frac{5!}{4!(5-4)!} + \frac{5!}{5!(5-5)!} \\ &= \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{5!0!} \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} + \frac{5 \cdot 4!}{4! \cdot 1} + 1 \\ &= 10 + 5 + 1 = 16 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



### Combinaciones y conjuntos

El ejemplo anterior conduce de manera muy natural a algunas propiedades de las combinaciones que son bastante útiles en el estudio de la probabilidad. Por ejemplo, se mostrará que

$${}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 2^5$$

y, para cualquier entero no negativo  $n$ ,

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = 2^n \quad (1)$$

Se puede construir sobre la última ecuación del ejemplo 4 para verificar la primera de estas ecuaciones:

$$\begin{aligned} {}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 &= {}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + 16 \\ &= \frac{5!}{0!(5-0)!} + \frac{5!}{1!(5-1)!} + \frac{5!}{2!(5-2)!} + 16 \\ &= \frac{5!}{0!5!} + \frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{2!3!} + 16 \\ &= 1 + \frac{5 \cdot 4!}{4!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} + 16 \\ &= 1 + 5 + 10 + 16 \\ &= 32 \\ &= 2^5 \end{aligned}$$

Sin embargo, este cálculo no es ilustrativo y podría ser impráctico si se tuviera que adaptar para valores de  $n$  mucho mayores que cinco.

Hasta ahora, se ha tratado primordialmente con *conjuntos* en el contexto de los números. En los ejemplos del estudio de la probabilidad, es común ver cosas como conjuntos de cartas de juego, conjuntos de lanzamientos de dados, conjuntos de pares ordenados de lanzamientos de dados y cosas por el estilo. En forma típica, estos conjuntos son finitos. Si un conjunto  $S$  tiene  $n$  elementos, se puede, en principio, enumerar sus elementos. Por ejemplo, se podría escribir

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

Un *subconjunto*  $E$  de  $S$  es un conjunto con la propiedad de que *todo elemento de  $E$  también es un elemento de  $S$* . Cuando éste es el caso, se escribe  $E \subseteq S$ . De manera formal,  $E \subseteq S$  si y sólo si, para toda  $x$ , si  $x$  es un elemento de  $E$  entonces  $x$  es un elemento de  $S$ .

Para cualquier conjunto  $S$ , siempre se tiene  $\emptyset \subseteq S$  y  $S \subseteq S$ . Si un conjunto  $S$  tiene  $n$  elementos, entonces cualquier subconjunto de  $S$  tiene  $r$  elementos, donde  $0 \leq r \leq n$ . El conjunto

vacío,  $\emptyset$ , es el único subconjunto de  $S$  que tiene 0 elementos. El conjunto completo,  $S$ , es el único subconjunto de  $S$  que tiene  $n$  elementos. ¿Qué es un subconjunto general de  $S$ , que contiene  $r$  elementos, donde  $0 \leq r \leq n$ ? De acuerdo con la definición previa de *combinación*, tal subconjunto es exactamente una combinación de  $n$  objetos tomadas  $r$  a la vez y el número de tales combinaciones se denota por  ${}_nC_r$ . Así, también se puede pensar en  ${}_nC_r$  como *el número de subconjuntos de  $r$  elementos tomados de un conjunto de  $n$  elementos*.

Para cualquier conjunto  $S$ , se puede formar el conjunto de *todos* los subconjuntos de  $S$ . Se llama el *conjunto potencia* de  $S$  y algunas veces se denota por  $2^S$ . Se afirma que si  $S$  tiene  $n$  elementos, entonces  $2^S$  tiene  $2^n$  elementos. Esto puede verse con facilidad. Si

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

entonces la especificación de un subconjunto  $E$  de  $S$  puede pensarse como un procedimiento que involucra  $n$  etapas. La primera etapa consiste en hacer la pregunta “¿es  $s_1$  un elemento de  $E$ ?”; la segunda etapa consiste en preguntar, “¿es  $s_2$  un elemento de  $E$ ?”; Se continúa la formulación de preguntas hasta llegar a la  $n$ -ésima etapa —la última etapa— “¿Es  $s_n$  un elemento de  $E$ ?” Observe que cada una de estas preguntas puede contestarse de exactamente dos formas, a saber, sí o no. De acuerdo con el principio básico de conteo de la sección 8.1, el número total de formas en que puede ocurrir la especificación de un subconjunto de  $S$  es

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ factores}} = 2^n$$

Entonces, existen  $2^n$  subconjuntos de un conjunto de  $n$  elementos. Resulta conveniente escribir  $\#(S)$  para el número de elementos del conjunto  $S$ . Así, se tiene

$$\#(2^S) = 2^{\#(S)} \quad (2)$$

Si  $\#(S) = n$ , entonces para cada  $E$  en  $2^S$ , se tiene  $\#(E) = r$ , para alguna  $r$  que satisface  $0 \leq r \leq n$ . Para cada una de estas  $r$ , se escribe  $S_r$  para el subconjunto de  $2^S$  que consiste en todos los elementos  $E$  con  $\#(E) = r$ . Por lo tanto,  $S_r$  es el conjunto de todos los subconjuntos de  $r$  elementos del conjunto  $S$  de  $n$  elementos. De las observaciones que se hicieron en el último párrafo se concluye que

$$\#(S_r) = {}_nC_r \quad (3)$$

Ahora, se afirma que

$$\#(S_0) + \#(S_1) + \dots + \#(S_{n-1}) + \#(S_n) = \#(2^S) \quad (4)$$

dado que cualquier elemento  $E$  de  $2^S$  está en *exactamente* uno de los conjuntos  $S_r$ . Si se sustituye la ecuación (3), para cada  $0 \leq r \leq n$ , y la ecuación (2) en la ecuación (4), se tiene la ecuación (1).

### EJEMPLO 5 Una identidad combinatoria básica

Establezca la identidad

$${}_nC_r + {}_nC_{r+1} = {}_{n+1}C_{r+1}$$

**Solución 1:** Se puede calcular mediante  ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ :

$$\begin{aligned} {}_nC_r + {}_nC_{r+1} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} \\ &= \frac{(r+1)n! + (n-r)n!}{(r+1)!(n-r)!} \\ &= \frac{((r+1)+(n-r))n!}{(r+1)!(n-r)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{(r+1)((n+1)-(r+1))!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(r+1)((n+1)-(r+1))!} \\ &= {}_{n+1}C_{r+1} \end{aligned}$$

**Solución 2:** Es posible razonar con base en la idea de que  ${}_nC_r$  es el número de subconjuntos con  $r$  elementos de un conjunto con  $n$  elementos. Sea  $S$  un conjunto con  $n$  elementos que no contiene a  $s_*$  como elemento. Entonces  $S \cup \{s_*\}$  es un conjunto de  $(n + 1)$  elementos. Ahora los subconjuntos de  $S \cup \{s_*\}$  son de dos tipos independientes:

1. aquellos que contienen a  $s_*$  como un elemento;
2. aquellos que no contienen  $s_*$  como un elemento.

Ahora se escribirá  $S_*$  para los subconjuntos con  $(r + 1)$  elementos de  $S \cup \{s_*\}$  que contienen a  $s_*$  y  $S$  para los subconjuntos con  $(r + 1)$  elementos de  $S \cup \{s_*\}$  que no contienen a  $s_*$ . Entonces

$${}_{n+1}C_{r+1} = \#(S_*) + \#(S)$$

dado que cada subconjunto con  $(r + 1)$  elementos de  $S \cup \{s_*\}$  está en exactamente uno de  $S_*$  o  $S$ . Ahora, los subconjuntos con  $(r + 1)$  elementos de  $S \cup \{s_*\}$  que contienen  $s_*$  están en una correspondencia uno a uno con los subconjunto de  $r$  elementos de  $S$ , entonces se tiene

$$\#(S_*) = {}_nC_r$$

Por otro lado, los subconjuntos con  $(r + 1)$  elementos de  $S \cup \{s_*\}$  que no contienen  $s_*$  están en correspondencia uno a uno con los subconjuntos de  $(r + 1)$  elementos de  $S$ , por lo que

$$\#(S) = {}_nC_{r+1}$$

Si se vinculan las últimas tres ecuaciones que se han presentado, se obtiene

$${}_{n+1}C_{r+1} = {}_nC_r + {}_nC_{r+1}$$

lo que se requería.



La primera solución es una buena práctica computacional, pero la segunda solución ilustra las ideas y argumentos que a menudo son útiles en el estudio de la probabilidad. La identidad que se acaba de establecer junto con

$${}_nC_0 = 1 = {}_nC_n$$

para toda  $n$ , permite generar el *Triángulo de Pascal*:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & & & & \vdots & & \\
 & & & & & & & \\
 \end{array}$$

Usted debe convencerse de que la  $(r + 1)$ -ésima entrada en el  $(n + 1)$ -ésimo renglón del triángulo de pascal es  ${}_nC_r$ .

### Permutaciones con objetos repetidos

En la sección 8.1 se discutieron permutaciones de objetos que eran diferentes entre sí. Ahora se estudiará el caso donde algunos de los objetos son iguales (o *repetidos*). Por ejemplo, considere la determinación del número de diferentes permutaciones de las siete letras en la palabra

S U C C E S S

Aquí las letras C y S están repetidas. Si las dos C se intercambiaron, la permutación resultante no podría distinguirse de SUCCESS. Así, el número de permutaciones distintas no es  $7!$ , como lo sería con 7 objetos diferentes. Para determinar el número de permutaciones distintas, se usa un enfoque que involucra combinaciones.



(a)

(b)

**FIGURA 8.4** Permutaciones con objetos repetidos.

En la figura 8.4(a) se muestran cuadros que representan las diferentes letras en la palabra SUCCESS. En estos cuadros se colocan los enteros del 1 al 7. Se colocan tres enteros en el cuadro de las S (porque hay tres S), uno en el cuadro de la U, dos en el cuadro de las C y uno en el cuadro de la E. En la figura 8.4(b) se indica una colocación típica. Esta colocación puede considerarse como indicativa de una permutación de las siete letras en SUCCESS, a saber, la permutación en la que (de izquierda a derecha) las S están en la segunda, tercera y sexta posición, la U está en la primera posición, y así sucesivamente. Por lo tanto, la figura 8.4(b) corresponde a la permutación

USSECSC

Para contar el número de permutaciones distintas es suficiente determinar el número de formas en que los enteros de 1 al 7 pueden colocarse en las cajas. Como el orden en que se colocan en el cuadro no es importante, el cuadro de las S puede llenarse de  ${}_7C_3$  maneras. Despues, el cuadro de la U puede llenarse con uno de los restantes cuatro enteros en  ${}_4C_1$  formas. Luego, el cuadro de las C puede llenarse con dos de los tres enteros restantes de  ${}_3C_2$  maneras. Finalmente, el cuadro de la E puede llenarse con el entero restante en  ${}_1C_1$  formas. Como se tiene un procedimiento de cuatro etapas, por el principio básico de conteo el número total de formas en que pueden llenarse los cuadros, o de manera equivalente, el número de permutaciones distinguibles de las letras en SUCCESS es

$$\begin{aligned} {}_7C_3 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 &= \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{4!}{1!3!} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{1!}{1!0!} \\ &= \frac{7!}{3!1!2!1!} \\ &= 420 \end{aligned}$$

En resumen, la palabra SUCCESS tiene cuatro tipos de letras: S, U, C y E. Existen tres S, una U, dos C y una E, y el número de permutaciones distinguibles de las siete letras es

$$\frac{7!}{3!1!2!1!}$$

Observando las formas del numerador y del denominador, se puede hacer la siguiente generalización:

**Permutaciones con objetos repetidos**

El número de permutaciones distinguibles de  $n$  objetos tales que  $n_1$  son de un tipo,  $n_2$  son de un segundo tipo, ..., y  $n_k$  son de un  $k$ -ésimo tipo, donde  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ , es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \quad (5)$$

En los problemas de este tipo, con frecuencia existen numerosas y muy diferentes soluciones. Una solución que cierta persona considera directa puede parecer complicada para otro individuo. Por ello se presenta otra solución al problema de contar el número,  $N$ , de permutaciones diferentes de las letras de

SUCCESS

Se comenzará por marcar las letras de manera que sean distinguibles, así se obtiene

S<sub>1</sub>U<sub>1</sub>C<sub>1</sub>C<sub>2</sub>E<sub>1</sub>S<sub>2</sub>S<sub>3</sub>

Dar una permutación de estas siete letras “diferentes” puede describirse como un procedimiento de múltiples etapas. Se puede comenzar por permutar como si no se pudieran ver los subíndices, y por definición existen  $N$  formas de completar esta tarea. Para cada una de estas formas, existen  $3!$  maneras de permutar las tres S, para cada una de éstas,  $1!$  formas de permutar la U, para cada una de éstas,  $2!$  maneras de permutar las dos C y para cada una de éstas,  $1!$  formas de permutar la E. De acuerdo con el principio básico de conteo de la sección 8.1, existen

$$N \cdot 3! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!$$

maneras de permutar las siete letras “diferentes” de  $S_1U_1C_1C_2E_1S_2S_3$ . Por otra parte, ya se sabe que existen

$$7!$$

permutaciones de siete letras diferentes, entonces se debe tener

$$N \cdot 3! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! = 7!$$

A partir de esto se encuentra que

$$N = \frac{7!}{3!1!2!1!}$$

en concordancia con el descubrimiento anterior.

### ● EJEMPLO 6 Disposición de letras con y sin repetición

*¿Cuántas permutaciones distinguibles de las letras son posibles para cada una de las siguientes palabras?*

a. *APOLLO*

**Solución:** La palabra APOLLO tiene seis letras con repetición. Se tiene una A, una P, dos O y dos L. Con el uso de la ecuación (5), se encuentra que el número de permutaciones es

$$\frac{6!}{1!1!2!2!} = 180$$

b. *GERM*

**Solución:** Ninguna de las cuatro letras en GERM está repetida, entonces el número de permutaciones es

$${}_4P_4 = 4! = 24$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17



### ● EJEMPLO 7 Nombre de un bufete jurídico

*Un grupo de cuatro abogados, Smith, Jones, Smith y Bell (los Smith son primos), quieren formar un bufete jurídico y lo nombrarán con sus apellidos. ¿Cuántos posibles nombres existen?*

**Solución:** Cada permutación diferente de los cuatro apellidos es un nombre para el bufete. Existen dos Smith, un Jones y un Bell. De la ecuación (5), el número de nombres distinguibles es

$$\frac{4!}{2!1!1!} = 12$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19



A	B
2, 3, 5	1, 4

**FIGURA 8.5** Distribución de las cinco personas en los cuartos.

### Celdas

En ocasiones, se desea encontrar el número de formas en las que los objetos pueden colocarse en “compartimentos” o *celdas*. Por ejemplo, suponga que de un grupo de cinco personas, deben distribuirse tres en un cuarto (piso) A y dos en un cuarto B. ¿De cuántas formas puede hacerse esto? En la figura 8.5 se muestra una asignación de este tipo, donde los números 1, 2, ..., 5 representan a las personas. Obviamente, el orden en que las personas se colocan en los cuartos no tiene importancia. Los cuadros (o celdas) se parecen a los de la figura 8.4(b), y, mediante un análisis similar al del estudio de las permutaciones con objetos repetidos, el número de formas en que se pueden asignar las personas es

$$\frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = 10$$

En general, se tiene el siguiente principio:

#### Asignación a celdas

Suponga que  $n$  objetos distintos deben asignarse a  $k$  celdas ordenadas con  $n_i$  objetos en la celda  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) y el orden en que se asignan los objetos a la celda  $i$  no es importante. El número de todas estas asignaciones es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \quad (6)$$

donde  $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ .

En otras palabras, existen  $n_1 + n_2 + \cdots + n_k C_{n_1}$  formas de elegir  $n_1$  objetos para colocar en la primera celda, y para cada una de estas formas existen  $n_2 + n_3 + \cdots + n_k C_{n_2}$  maneras de elegir  $n_2$  objetos para colocarlos en la segunda celda, y así sucesivamente, de donde resulta, por el principio básico de conteo de la sección 8.1,

$$\begin{aligned} & (n_1 + n_2 + \cdots + n_k C_{n_1})(n_2 + n_3 + \cdots + n_k C_{n_2}) \cdots (n_{k-1} + n_k C_{n_{k-1}})(n_k C_{n_k}) \\ &= \frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)!}{n_1!(n_2 + n_3 + \cdots + n_k)!} \cdot \frac{(n_2 + n_3 + \cdots + n_k)!}{n_2!(n_3 + n_4 + \cdots + n_k)!} \cdots \frac{(n_{k-1} + n_k)!}{n_{k-1}!n_k!} \cdot \frac{n_k!}{n_k!0!} \\ &= \frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \end{aligned}$$

que es el número en (6).

#### EJEMPLO 8 Asignación de dolientes a limusinas

Un director de funerales debe asignar 15 dolientes en tres limusinas: 6 en la primera limusina, 5 en la segunda y 4 en la tercera. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto?

**Solución:** Aquí, se colocan 15 personas en tres celdas (limusinas): 6 en la celda 1, 5 en la celda 2 y 4 en la celda 3. Por la ecuación (2) el número de formas que puede hacerse esto es

$$\frac{15!}{6!5!4!} = 630\,630$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23



En el ejemplo 9 se mostrarán tres enfoques diferentes para un problema de conteo. Como ya se dijo, muchos problemas de conteo tienen métodos alternativos de solución.

#### EJEMPLO 9 Exhibición de arte

Una artista ha creado 20 pinturas originales, y debe exhibir algunas de ellas en tres galerías. Se enviarán cuatro pinturas a la galería A, cuatro a la galería B y tres a la galería C. ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

**Solución:**

**Método 1** La artista debe enviar  $4 + 4 + 3 = 11$  pinturas a las galerías, y puede considerarse que las 8 que no se envían se quedan en el estudio. Entonces, se puede pensar

en esta situación como si se fueran a colocar 20 pinturas en cuatro celdas:

- 4 en la galería A
- 4 en la galería B
- 3 en la galería C
- 9 en el estudio de la artista

De acuerdo con la ecuación (6), el número de formas en que esto puede hacerse es

$$\frac{20!}{4!4!3!9!} = 1\,939\,938\,000$$

**Método 2** Es posible manejar el problema en términos de un procedimiento de dos etapas y usar el principio básico del conteo. Primero, se seleccionan 11 pinturas para exhibir. Despues, éstas se dividen en tres grupos (celdas) correspondientes a las tres galerías. Se procede de la manera siguiente.

La selección de 11 de las 20 pinturas para exhibir (el orden no importa) puede hacerse en  ${}_{20}C_{11}$  formas. Despues de haber hecho la selección, cuatro de las pinturas van a una celda (galería A), cuatro a la segunda celda (galería B) y tres van a la tercera celda (galería C). Por la ecuación (6), esto puede hacerse en  $\frac{11!}{4!4!3!}$  formas. Si se aplica el principio básico de conteo se obtiene el número de formas en que la artista puede enviar las pinturas a las galerías:

$${}_{20}C_{11} \cdot \frac{11!}{4!4!3!} = \frac{20!}{11!9!} \cdot \frac{11!}{4!4!3!} = 1\,939\,938\,000$$

**Método 3** Otro enfoque para este problema en términos de un procedimiento de tres etapas. Primero se seleccionan 4 de las 20 pinturas para enviarlas a la galería A. Esto puede hacerse en  ${}_{20}C_4$  formas. Despues, de las restantes 16, el número de formas en que 4 pueden seleccionarse para la galería B es  ${}_{16}C_4$ . Finalmente, el número de variantes en que 3 pinturas pueden enviarse a la galería C de las 12 que aún no se han seleccionado es  ${}_{12}C_3$ . Por el principio básico de conteo, el procedimiento completo puede hacerse en

$${}_{20}C_4 \cdot {}_{16}C_4 \cdot {}_{12}C_3 = \frac{20!}{4!16!} \cdot \frac{16!}{4!12!} \cdot \frac{12!}{3!9!} = \frac{20!}{4!4!3!9!}$$

formas, que da la respuesta anterior, ¡tal como se esperaba!

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27 

## Problemas 8.2

En los problemas 1 a 6, determine los valores

- \*1.  ${}_6C_4$
- 2.  ${}_6C_2$
- 3.  ${}_{100}C_{100}$
- 4.  ${}_{1001}C_1$
- 5.  ${}_5P_3 \cdot {}_4C_2$
- 6.  ${}_4P_2 \cdot {}_5C_3$
- 7. Verifique que  ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ .
- 8. Determine  ${}_nC_n$ .

\*9. **Comité** ¿De cuántas maneras puede formarse un comité de cuatro miembros a partir de un grupo de 17 personas?

10. **Carrera de caballos** En una carrera de caballos, se dice que uno de ellos *termina con dinero* si finaliza en primero, segundo o tercer lugar. Para una carrera de ocho caballos, ¿de cuántas formas pueden terminar con dinero los caballos? Suponga que no hay empates.

\*11. **Examen de matemáticas** En un examen de matemáticas con 13 preguntas, un estudiante debe responder cualesquiera 9 preguntas. ¿De cuántas maneras pueden elegirse las 9 preguntas (sin importar el orden)?

12. **Cartas** En un baraja de 52 cartas de juego, ¿cuántas manos de 4 cartas existen que estén compuestas sólo por cartas rojas?

13. **Control de calidad** Un técnico de control de calidad debe seleccionar una muestra de 10 vestidos de un lote de producción

de 74 prendas de alta costura. ¿Cuántas muestras diferentes son posibles? Exprese su respuesta en términos de factoriales.

14. **Empacado** Un productor de jalea prepara siete variedades. El productor empaca cajas de regalo que contienen cuatro tarros de jalea, y nunca incluye dos del mismo tipo. Para reflejar las tres cadenas nacionales a través de las cuales se distribuye su producto, usa tres tipos de cajas. ¿Cuántos tipos de cajas de regalo son posibles?

\*15. **Calificación en un examen** En un examen de 10 preguntas, cada pregunta vale 10 puntos, y se califica como correcta o incorrecta. Si se consideran las preguntas individuales, ¿en cuántas formas puede un estudiante obtener 80 puntos o más?

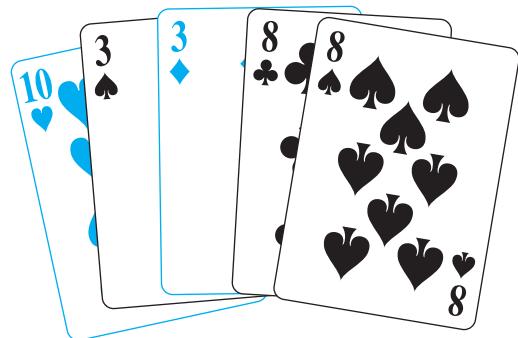
16. **Resultados de equipo** Un equipo deportivo juega 11 juegos. ¿En cuántas formas los resultados de los juegos pueden ser de cuatro victorias, cinco derrotas y dos empates?

\*17. **Disposición de letras** ¿Cuántas disposiciones distinguibles de todas las letras de la palabra MISSISSAUGA son posibles?

18. **Disposiciones de letras** ¿Cuántas disposiciones distinguibles de todas las letras de la palabra STREETSBORO son posibles?

\*19. **Lanzamiento de monedas** Si se lanza una moneda siete veces y se anota el resultado de cada lanzamiento, ¿en cuántas formas pueden ocurrir cuatro caras y tres cruces?

- 20. Lanzamiento de dado** Se lanza un dado seis veces, y se toma en cuenta el orden de los lanzamientos. ¿De cuántas maneras pueden ocurrir dos 2, tres 3 y un 4?
- 21. Programa de reparación** Un técnico en electrodomésticos debe salir a atender seis clientes que llamaron para solicitar un servicio. ¿De cuántas formas puede arreglar su agenda de reparaciones?
- 22. Béisbol** Un equipo de béisbol de ligas pequeñas tiene 12 elementos y debe jugar un partido como visitante. Se usarán tres automóviles para la transportación. ¿De cuántas maneras puede el entrenador distribuir a los jugadores en los automóviles, si cada uno puede llevar a cuatro personas?
- \*23. Asignación de proyecto** El director de investigación y desarrollo de una compañía tiene nueve científicos que están igualmente calificados para trabajar en los proyectos A, B y C. ¿De cuántas maneras puede asignar tres científicos a cada proyecto?
- 24. Plantar bayas** Un jardinero planta una cerca con nueve bayas jóvenes. El vivero garantiza que exactamente cinco de ellas son hembras (y tendrán las características moras rojas); sin embargo, no es claro para el jardinero cuáles de las plantas jóvenes son las hembras. ¿Cuántas disposiciones diferentes de machos y hembras pueden volverse evidentes cuando las hembras tengan moras?
- 25. Examen tipo falso-verdadero** Un profesor de biología incluye varias preguntas de tipo falso-verdadero en sus exámenes. Con base en su experiencia, un estudiante cree que la mitad de las preguntas son verdaderas y la mitad son falsas. Si hay 10 preguntas tipo falso-verdadero en el siguiente examen, ¿en cuántas formas puede el estudiante contestar la mitad de ellas “verdadero” y la otra mitad “falso”?
- 26. Orden de comida** Un mesero toma la siguiente orden en una mesa con siete personas: tres hamburguesas, dos hamburguesas con queso y dos sándwiches de carne. Al regresar con la comida, olvida quién ordenó cada cosa, y simplemente coloca un plato enfrente de cada persona. ¿En cuántas formas puede hacerlo?
- \*27. Asignación de trabajo social** Una oficina de servicios sociales tiene 15 nuevos clientes. El supervisor quiere asignar cinco clientes a cada uno de tres trabajadores sociales específicos. ¿En cuántas formas puede hacerse esto?
- 28. Hockey** Certo equipo de hockey tiene 11 elementos, y todos menos uno, el portero, están calificados para las otras cinco posiciones. ¿En cuántas formas puede el entrenador formar una alineación?
- 29. Señales con bandera** Las banderas de colores dispuestas en forma vertical en un asta bandera indican una señal (o mensaje). ¿Cuántas señales diferentes son posibles si  
 (a) se usan dos banderas rojas, tres verdes y dos amarillas?  
 (b) están disponibles dos banderas rojas, tres verdes y tres amarillas, y se usan las tres banderas verdes y las tres rojas y al menos dos amarillas?
- 30. Contratación** El director de personal de una compañía debe contratar a seis empleados: cuatro para el departamento de ensamblado y dos para el departamento de embarque. Existen 10 solicitantes que están igualmente calificados para trabajar en cada uno de los departamentos. ¿En cuántas formas puede el director de personal llenar las posiciones?
- 31. Portafolio financiero** Un consultor financiero desea crear un portafolio consistente en ocho acciones y cuatro bonos. Si existen doce acciones y siete bonos aceptables para el portafolio, ¿de cuántas maneras puede crearse el portafolio?
- 32. Serie mundial** Un equipo de béisbol gana la serie mundial si es el primer equipo en la serie que gana cuatro juegos. Por lo tanto, una serie puede tener de cuatro a siete juegos. Por ejemplo, un equipo que gana los primeros cuatro juegos sería campeón. Asimismo, un equipo que pierde los primeros tres juegos y después gana los siguientes cuatro sería el campeón. ¿En cuántas formas puede un equipo ganar la serie mundial?
- 33. Subcomité** Un comité tiene siete miembros, tres de los cuales son hombres y cuatro son mujeres. ¿En cuántas formas puede seleccionarse un subcomité si éste debe consistir exactamente en  
 (a) tres hombres?  
 (b) cuatro mujeres?  
 (c) dos hombres y dos mujeres?
- 34. Subcomité** Un comité tiene como miembros cuatro hombres y cuatro mujeres. ¿En cuántas formas puede seleccionarse un subcomité de cuatro elementos si al menos dos mujeres deben estar en él?
- 35. Mano de póker** Una mano de póker consiste en cinco cartas tomadas de un mazo de 52 cartas de juego. La mano es un “full” si tiene tres cartas de una denominación y 2 cartas de otra. Por ejemplo, tres 10 y dos sotas forman un full. ¿Cuántas manos de full son posibles?
- 36. Mano de póker** En el póker, 2 cartas de la misma denominación forman un “par”. Por ejemplo, dos 8 forman un par. Se dice que una mano de póker (5 cartas tomadas de una baraja de 52 cartas de juego) es una mano de “dos pares” si contiene dos pares y existen tres diferentes valores involucrados en las cinco cartas. Por ejemplo, un par de 3, un par de 8 y un 10 constituyen una mano de dos pares. ¿Cuántas manos de dos pares son posibles?



- 37. Carga de tranvía** En una atracción turística, dos tranvías llevan visitantes a la cima de una pintoresca montaña. Un tranvía puede llevar a siete personas y el otro a ocho. Llega un autobús con 18 turistas, y los dos tranvías están al pie de la montaña. Obviamente, sólo 15 personas pueden subir a la montaña de inmediato. ¿De cuántas maneras puede el guía subir a 15 visitantes en los dos tranvías?
- 38. Grupos de discusión** Un profesor de historia desea dividir una clase de 10 estudiantes en tres grupos de discusión. Un grupo consistirá en cuatro estudiantes y analizará el tema A. El segundo y tercer grupo analizarán los temas B y C, respectivamente, y constan de tres estudiantes cada uno.  
 (a) ¿En cuántas formas puede el profesor formar los grupos?  
 (b) Si el profesor designa un líder y un secretario (estudiantes distintos) para cada grupo, ¿en cuántas formas puede dividirse la clase?

**OBJETIVO**

Determinar un espacio muestral y considerar eventos asociados con éste. (Estas nociones involucran conjuntos y subconjuntos). Representar un espacio muestral y eventos por medio de un diagrama de Venn. Introducir las nociones de complemento, unión e intersección.

## 8.3 Espacios muestrales y eventos

### Espacios muestrales

A cualquier análisis de probabilidad le es inherente la realización de un experimento (un procedimiento) en el cual una salida particular, o *resultado*, involucra la probabilidad. Por ejemplo, considere el experimento de lanzar una moneda. Existen sólo dos formas en que puede caer la moneda, una cara (H) o una cruz (T), pero el resultado real se determina por medio de la probabilidad. (Se supone que la moneda no puede caer sobre su borde). El conjunto de resultados posibles,

$$\{H, T\}$$

se llama un *espacio muestral* para el experimento, y H y T se llaman *puntos muestrales*.

### DEFINICIÓN

Un *espacio muestral*  $S$  para un experimento es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento. Los elementos de  $S$  se llaman *puntos muestrales*. Si existe un número finito de puntos muestrales, ese número se denota  $\#(S)$ , y se dice que  $S$  es un *espacio muestral finito*.

Cuando se determinan los “resultados posibles” de un experimento, se debe estar seguro de que éstos reflejan la situación de interés. Por ejemplo, considere el experimento de lanzar un dado y observar la cara superior. Se podría decir que un espacio muestral es

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

donde los resultados posibles son el número de puntos en la cara superior. Sin embargo, otros resultados posibles son

aparece un número impar de puntos      (impar)  
y      aparece un número par de puntos      (par)

Por lo tanto, el conjunto

$$S_2 = \{\text{impar}, \text{par}\}$$

también es un espacio muestral para el experimento, aquí se observa que un experimento puede tener más de un espacio muestral.

Si ocurre un resultado en  $S_1$ , entonces se sabe cuál es el resultado que ocurre para  $S_2$ , pero lo inverso no es cierto. Para describir esta asimetría, se dice que  $S_1$  es un espacio muestral **más primitivo** que  $S_2$ . Por lo general, entre más primitivo sea el espacio muestral, permite contestar más preguntas pertinentes al experimento. Por ejemplo, con  $S_1$ , se pueden contestar preguntas como

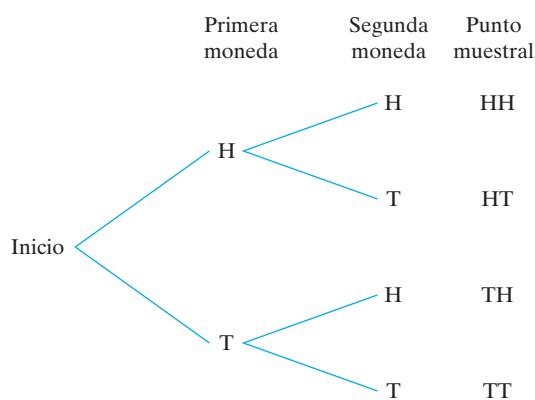
- “¿Ocurrió un 3?”
- “¿Ocurrió un número mayor que 2?”
- “¿Ocurrió un número menor que 4?”

Pero con  $S_2$ , no es posible responder estas preguntas. Por experiencia, entre más primitivo es un espacio muestral, más elementos tiene y más detalles revela. A menos que se indique otra cosa, cuando un experimento tenga más de un espacio muestral, este texto sólo considerará el espacio muestral que dé suficiente detalle para contestar todas las preguntas pertinentes relativas a un experimento. Por ejemplo, para el experimento de lanzar un dado y mirar la cara superior, se sobreentiende que se está observando el número de puntos. Así, se considerará que el espacio muestral es

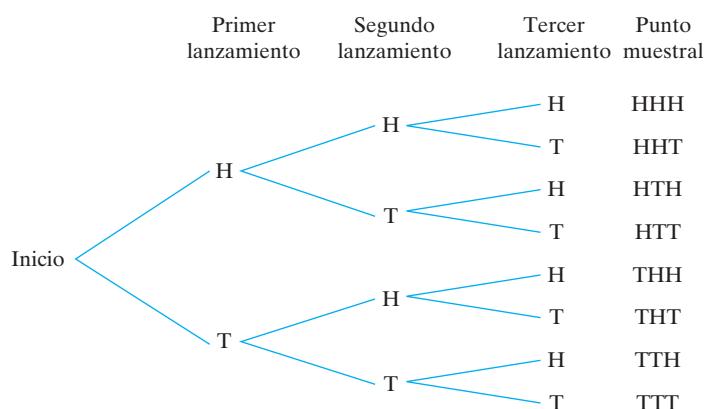
$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y se hará referencia a él, como el espacio muestral *usual* para el experimento.

**El orden en el que se enumeran los puntos muestrales en un espacio muestral no tiene importancia.**



**FIGURA 8.6** Diagrama de árbol para el lanzamiento de dos monedas.



**FIGURA 8.7** Diagrama de árbol para tres lanzamientos de una moneda.

### EJEMPLO 1 Espacio muestral: lanzamiento de dos monedas

*Se lanzan dos monedas diferentes y se observa el resultado (H o T) para cada moneda. Determine un espacio muestral.*

**Solución:** Un resultado posible es una cara en la primera moneda y una cara en la segunda, el cual puede indicarse mediante el par ordenado (H, H) o, de manera más simple, HH. De manera similar, se indica una cara en la primera moneda y una cruz en la segunda, mediante HT, y así sucesivamente. Un espacio muestral es

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

En la figura 8.6 se presenta un diagrama de árbol que, en cierto sentido, indica el espacio muestral. Se destaca que  $S$  también es un espacio muestral para el experimento de lanzar una sola moneda dos veces sucesivamente. De hecho, estos dos experimentos pueden considerarse iguales. Aunque pueden contemplarse otros espacios muestrales, se toma a  $S$  como el espacio muestral *usual* para estos experimentos.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

##### Opciones de video

Una tienda de videos tiene 400 diferentes películas para rentar. Un cliente desea 3 películas, si las elige de manera aleatoria, ¿cuántas selecciones de 3 películas (puntos muestrales) tiene?

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3



### EJEMPLO 2 Espacio muestral: tres lanzamientos de una moneda

*Una moneda se lanza tres veces, y se observa el resultado de cada lanzamiento. Describa un espacio muestral y determine el número de puntos muestrales.*

**Solución:** Como hay tres lanzamientos, un punto muestral será una tripleta ordenada, como HHT, donde cada componente es H o T. Por el principio básico de conteo, el número total de puntos muestrales es  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ . Un espacio muestral (el *usual*) es

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

y el diagrama de árbol se presenta en la figura 8.7. Observe que no es necesario enumerar todo el espacio muestral para determinar el número de puntos muestrales en él.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



### EJEMPLO 3 Espacio muestral: caramelos en una bolsa

*Una bolsa contiene cuatro caramelos: uno rojo, uno amarillo, uno negro y uno blanco.*

- Se retira un caramelo de manera aleatoria, se anota su color y se regresa a la bolsa. Luego, de nuevo se retira un caramelo y se anota su color. Describa un espacio muestral y determine el número de puntos muestrales.*



**FIGURA 8.8** Cuatro caramelos de colores en una bolsa.

**Solución:** Se dice que en este experimento los dos caramelos se retiran **con reemplazo**. Considere que R, A, N y B denotan el retiro de un caramelo, rojo, amarillo, negro y blanco, respectivamente. Entonces el espacio muestral consiste en los puntos muestrales RB, AN, RN, BB, etcétera, donde (por ejemplo) RB representa el resultado en el que el primer caramelo que haya sido retirado sea rojo y el segundo blanco. Existen cuatro posibilidades para el primer retiro y, como el caramelo se coloca de nuevo en la bolsa, también hay cuatro posibilidades para el segundo. Por el principio de conteo básico, el número de puntos muestrales es  $4 \cdot 4 = 16$ .

- b. Determine el número de puntos muestrales en el espacio muestral si se seleccionan dos caramelos de manera sucesiva **sin reemplazo** y se anotan los colores.

**Solución:** El primer caramelo que ha sido retirado puede tener cualquiera de los cuatro colores. Como éste *no* se regresa a la bolsa, el segundo caramelo retirado puede tener cualquiera de los *tres* colores restantes. Así, el número de puntos muestrales es  $4 \cdot 3 = 12$ . De manera alternativa, existen  ${}_4P_2 = 12$  puntos muestrales.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7



#### ● EJEMPLO 4 Espacio muestral: mano de póker

De una baraja de 52 cartas de juego, se reparte una mano de póker. Describa un espacio muestral y determine el número de puntos muestrales.

**Solución:** Un espacio muestral consiste en todas las combinaciones de 52 cartas tomadas cinco a la vez. Del ejemplo 3 de la sección 8.2, el número de puntos muestrales es  ${}_{52}C_5 = 2\,598\,960$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13



#### ● EJEMPLO 5 Espacio muestral: lanzamiento de dos dados

Se lanzan un par de dados una vez, y para cada dado, se observa el número que resulta. Describa un espacio muestral.

**Solución:** Piense en los dados como distinguibles, como si uno fuera rojo y el otro verde. Cada dado puede caer en seis formas, entonces se puede tomar un punto muestral como un par ordenado en el cual cada componente es un entero entre 1 y 6, inclusive. Por ejemplo, (4, 6), (3, 2) y (2, 3) son tres puntos muestrales diferentes. Por el principio de conteo básico, el número de puntos muestrales es  $6 \cdot 6$ , o 36.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11



### Eventos

En ocasiones, se tiene interés en los resultados de un experimento que satisface una condición particular. Por ejemplo, quizás se quiera saber si el resultado de lanzar un solo dado es un número par. Esta condición puede considerarse como el conjunto de resultados  $\{2, 4, 6\}$ , que es un subconjunto del espacio muestral

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

En general, cualquier subconjunto de un espacio muestral se llama un *evento* para el experimento. Así,

$$\{2, 4, 6\}$$

es el evento de que salga un número par, que también puede describirse por

$$\{x \text{ en } S \mid x \text{ es un número par}\}$$

Observe que aunque un evento es un conjunto, es posible describirlo de manera verbal como se acaba de hacer. A menudo se denota un evento por  $E$ . Cuando hay varios eventos involucrados en un análisis, pueden denotarse mediante  $E, F, G, H$ , etcétera, o con  $E_1, E_2, E_3$ , etcétera.

**DEFINICIÓN**

Un *evento*  $E$  para un experimento es un subconjunto del espacio muestral para el experimento. Si el resultado del experimento es un punto muestral en  $E$ , entonces se dice que *ocurre* el evento  $E$ .

En el lanzamiento del dado, se observó que  $\{2, 4, 6\}$  es un evento. Por lo tanto, si el resultado es un 2, entonces ocurre ese evento. Algunos otros eventos son

$$E = \{1, 3, 5\} = \{x \text{ en } S \mid x \text{ es un número impar}\}$$

$$F = \{3, 4, 5, 6\} = \{x \text{ en } S \mid x \geq 3\}$$

$$G = \{1\}$$

Un espacio muestral es un subconjunto de sí mismo, por lo que también es un evento, llamado **evento seguro**; debe ocurrir sin importar cuál sea el resultado. Un evento, como  $\{1\}$ , que consiste en sólo un punto muestral se llama **evento simple**. También puede considerarse un evento como  $\{x \text{ en } S \mid x = 7\}$ , que puede verbalizarse como “ocurre un 7”. Este evento no contiene puntos muestrales, por lo tanto es el conjunto vacío  $\emptyset$  (el conjunto que no contiene elementos). De hecho,  $\emptyset$  se llama el **evento imposible**, porque no puede ocurrir nunca.

### EJEMPLO 6 Eventos

Una moneda se lanza tres veces, y se anota el resultado de cada lanzamiento. El espacio muestral usual (de acuerdo con el ejemplo 2) es

$$\{\text{HHH}, \text{HHT}, \text{HTH}, \text{HTT}, \text{THH}, \text{THT}, \text{TTH}, \text{TTT}\}$$

Determine los siguientes eventos.

- a.  $E = \{\text{una cara y dos cruces}\}$ .

**Solución:**

$$E = \{\text{HTT}, \text{THT}, \text{TTH}\}$$

- b.  $F = \{\text{al menos dos caras}\}$ .

**Solución:**

$$F = \{\text{HHH}, \text{HHT}, \text{HTH}, \text{THH}\}$$

- c.  $G = \{\text{sólo caras}\}$ .

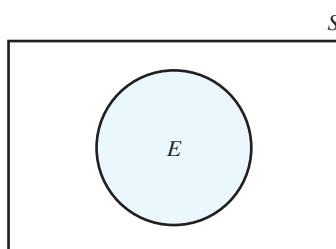
**Solución:**

$$G = \{\text{HHH}\}$$

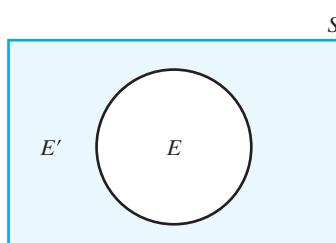
- d.  $I = \{\text{cara en el primer lanzamiento}\}$ .

**Solución:**

$$I = \{\text{HHH}, \text{HHT}, \text{HTH}, \text{HTT}\}$$



**FIGURA 8.9** Diagrama de Venn para el espacio muestral  $S$  y el evento  $E$ .



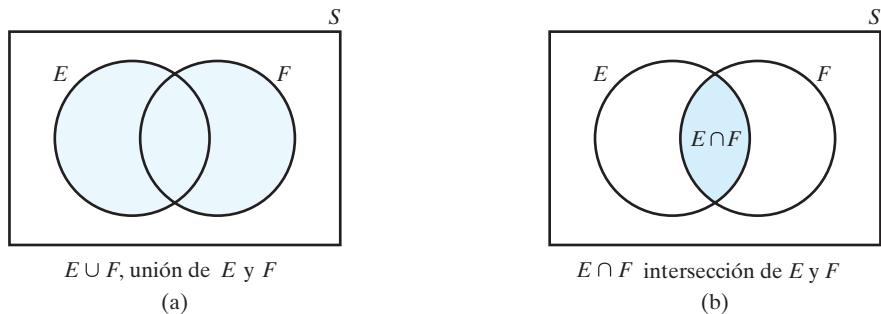
$E'$  es la región sombreada

**FIGURA 8.10** Diagrama de Venn para el complemento de  $E$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15 

Algunas veces es conveniente representar un espacio muestral  $S$  y un evento  $E$  mediante un *diagrama de Venn*, como en la figura 8.9. La región dentro del rectángulo representa los puntos muestrales en  $S$ . (Los puntos muestrales no se representan de manera específica). Los puntos muestrales en  $E$  se representan mediante los puntos dentro del círculo. Como  $E$  es un subconjunto de  $S$ , la región circular no puede extenderse fuera del rectángulo.

Con los diagramas de Venn es fácil ver cómo los eventos para un experimento pueden usarse para formar otros eventos. En la figura 8.10 se muestra el espacio muestral  $S$  y el evento  $E$ . La región sombreada dentro del rectángulo, pero fuera del círculo, representa el conjunto de todos los puntos en  $S$  que no están en  $E$ . Este conjunto es un evento llamado el *complemento* de  $E$  y se denota por  $E'$ .

FIGURA 8.11 Representación de  $E \cup F$  y  $E \cap F$ .

En la figura 8.11(a) se muestran dos eventos,  $E$  y  $F$ . La región sombreada representa el conjunto de todos los puntos muestrales, en  $E$ , en  $F$ , o tanto en  $E$  como en  $F$ . Este conjunto es un evento llamado la *unión* de  $E$  y  $F$  y se denota mediante  $E \cup F$ . La región sombreada en la figura 8.11(b) representa el evento que consiste en todos los puntos muestrales que son comunes tanto a  $E$  como a  $F$ . Este evento se llama la *intersección* de  $E$  y  $F$  y se denota por  $E \cap F$ . En resumen se tienen las siguientes definiciones.

### DEFINICIONES

Sea  $S$  un espacio muestral para un experimento con eventos  $E$  y  $F$ . El **complemento** de  $E$ , denotado por  $E'$ , es el evento que consiste de todos los puntos muestrales en  $S$  que no están en  $E$ . La **unión** de  $E$  y  $F$ , denotada por  $E \cup F$ , es el evento que consiste de todos los puntos muestrales que están en  $E$ , en  $F$ , o tanto en  $E$  como en  $F$ . La **intersección** de  $E$  y  $F$  denotada por  $E \cap F$ , es el evento que consiste de en todos los puntos muestrales que son comunes tanto a  $E$  como a  $F$ .

Observe que si un punto muestral está en el evento  $E \cup F$ , entonces el punto se encuentra en al menos uno de los conjuntos  $E$  y  $F$ . Así, para que ocurra el evento  $E \cup F$ , debe ocurrir *al menos uno* de los eventos  $E$  y  $F$ , y viceversa. Por otro lado, si ocurre el evento  $E \cap F$ , entonces deben ocurrir *tanto*  $E$  como  $F$ , y viceversa. Si ocurre el evento  $E'$ , entonces *no* ocurre el evento  $E$ , y viceversa.

### ● EJEMPLO 7 Complemento, unión, intersección

Dado el espacio muestral usual

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

para el lanzamiento de un dado, sean  $E$ ,  $F$  y  $G$  los eventos

$$E = \{1, 3, 5\} \quad F = \{3, 4, 5, 6\} \quad G = \{1\}$$

Determine cada uno de los siguientes eventos.

a.  $E'$

**Solución:** El evento  $E'$  consiste en los puntos muestrales en  $S$  que no están en  $E$ , por lo tanto

$$E' = \{2, 4, 6\}$$

Se observa que  $E'$  es el evento en el que aparece un número par.

b.  $E \cup F$

**Solución:** Se quieren los puntos muestrales en  $E$ , en  $F$ , o en ambos. Así,

$$E \cup F = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

c.  $E \cap F$

**Solución:** Los puntos muestrales comunes tanto a  $E$  como a  $F$  son 3 y 5, por lo que

$$E \cap F = \{3, 5\}$$

d.  $F \cap G$

**Solución:** Como  $F$  y  $G$  no tienen puntos muestrales en común,

$$F \cap G = \emptyset$$

e.  $E \cup E'$

**Solución:** Si se usa el resultado del inciso (a), se tiene

$$E \cup E' = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$$

f.  $E \cap E'$

**Solución:**

$$E \cap E' = \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17 

Los resultados de los ejemplos 7(e) y 7(f) puede generalizarse de la manera siguiente:

Si  $E$  es cualquier evento para un experimento con espacio muestral  $S$ , entonces

$$E \cup E' = S \quad \text{y} \quad E \cap E' = \emptyset$$

Por lo tanto, la unión de un evento y su complemento es el espacio muestral; la intersección de un evento y su complemento es el conjunto vacío. En la tabla 8.1, se enumeran éstas y otras propiedades de los eventos.

**TABLA 8.1** Propiedades de los eventos

Si  $E$  y  $F$  son cualesquiera eventos para un experimento con espacio muestral  $S$ , entonces

1.  $E \cup E = E$

2.  $E \cap E = E$

3.  $(E')' = E$  (el complemento del complemento de un evento es el evento)

4.  $E \cup E' = S$

5.  $E \cap E' = \emptyset$

6.  $E \cup S = S$

7.  $E \cap S = E$

8.  $E \cup \emptyset = E$

9.  $E \cap \emptyset = \emptyset$

10.  $E \cup F = F \cup E$  (propiedad comutativa de la unión)

11.  $E \cap F = F \cap E$  (propiedad comutativa de la intersección)

12.  $(E \cup F)' = E' \cap F'$  (el complemento de una unión es la intersección de los complementos)

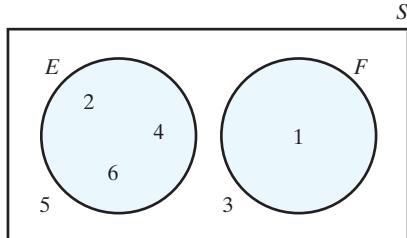
13.  $(E \cap F)' = E' \cup F'$  (el complemento de una intersección es la unión de los complementos)

14.  $E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$  (propiedad asociativa de la unión)

15.  $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$  (propiedad asociativa de la intersección)

16.  $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$  (propiedad distributiva de la intersección sobre la unión)

17.  $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$  (propiedad distributiva de la unión sobre la intersección)



**FIGURA 8.12** Eventos mutuamente excluyentes.

Cuando dos eventos  $E$  y  $F$  no tienen ningún punto muestral en común, esto es,

$$E \cap F = \emptyset$$

se llaman eventos *mutuamente excluyentes* o *separados*. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, los eventos

$$E = \{2, 4, 6\} \quad y \quad F = \{1\}$$

son mutuamente excluyentes (vea la figura 8.12).

### DEFINICIÓN

Se dice que los eventos  $E$  y  $F$  son mutuamente excluyentes si y sólo si  $E \cap F = \emptyset$ .

Cuando dos eventos son mutuamente excluyentes, la ocurrencia de uno de ellos significa que el otro evento no puede ocurrir; es decir, no pueden ocurrir los dos de manera simultánea. Un evento y su complemento son mutuamente excluyentes, puesto que  $E \cap E' = \emptyset$ .

### ● EJEMPLO 8 Eventos mutuamente excluyentes

Si  $E$ ,  $F$  y  $G$  son eventos para un experimento, y  $F$  y  $G$  son mutuamente excluyentes, muestre que los eventos  $E \cap F$  y  $E \cap G$  también son mutuamente excluyentes.

**Solución:** Dado que  $F \cap G = \emptyset$ , se debe mostrar que la intersección de  $E \cap F$  y  $E \cap G$  es el conjunto vacío. De acuerdo con las propiedades de la tabla 8.1, se tiene

$$\begin{aligned} (E \cap F) \cap (E \cap G) &= (E \cap F \cap E) \cap G && \text{(propiedad 15)} \\ &= (E \cap E \cap F) \cap G && \text{(propiedad 11)} \\ &= (E \cap F) \cap G && \text{(propiedad 2)} \\ &= E \cap (F \cap G) && \text{(propiedad 15)} \\ &= E \cap \emptyset && \text{(dado)} \\ &= \emptyset && \text{(propiedad 9)} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31



## Problemas 8.3

En los problemas 1 a 6, determine un espacio muestral para el experimento dado.

1. **Selección de carta** Se escoge una carta de entre las siguientes cuatro opciones: el 9 de diamantes, el 9 de corazones, el 9 de bastos y el 9 de espadas.
2. **Lanzamiento de moneda** Se lanza cuatro veces una moneda de manera sucesiva, y se observan las caras resultantes.
- \*3. **Lanzamientos de dado y de moneda** Se lanza un dado y después una moneda.
4. **Lanzamiento de dados** Se lanzan dos dados, y se observa la suma de los números resultantes.
5. **Selección de dígitos** Se seleccionan sucesivamente dos dígitos diferentes de entre los que forman el número “64901”.
6. **Géneros de hijos** Se observan los géneros del primero, segundo, tercero y cuarto hijos de una familia con cuatro niños. (Considere, por ejemplo, que HMMH denota que el primero, segundo, tercero y cuarto hijos son hombre, mujer, mujer y hombre, respectivamente).
- \*7. **Selección de caramelos** Una bolsa contiene tres caramelos de colores: uno rojo, uno blanco y uno azul. Determine un espacio muestral si (a) se seleccionan dos caramelos con reemplazo y (b) se seleccionan dos caramelos sin reemplazo.
8. **Proceso de manufactura** Una compañía fabrica un producto que pasa por tres procesos durante su manufactura. El primero es una línea de ensamblado, el segundo es una línea de acabado y el tercero es una línea de inspección. Existen tres líneas

de ensamblado (A, B y C), dos de acabado (D y E) y dos de inspección (F y G). Para cada proceso, la compañía elige una línea de manera aleatoria. Determine un espacio muestral.

En los problemas 9 a 14, describa la naturaleza de un espacio muestral para el experimento dado, y determine el número de puntos muestrales.

- \*9. **Lanzamiento de moneda** Se lanza una moneda seis veces de manera sucesiva, y se observan las caras resultantes.
10. **Lanzamiento de dados** Se lanzan cinco dados, y se observan los números resultantes.
- \*11. **Carta y dado** Se toma una carta de una baraja ordinaria de 52 cartas y después se lanza un dado.
12. **Selección de conejo** De un sombrero que contiene nueve conejos, se sacan sucesivamente cuatro conejos sin reemplazo.
- \*13. **Repartición de cartas** Se reparte una mano de 10 cartas escogidas de una baraja ordinaria de 52 cartas. No evalúe su respuesta.
14. **Selección de letras** Se forma una “palabra” de cuatro letras al escoger, en forma sucesiva, cualesquiera cuatro letras del alfabeto, con reemplazo.

Suponga que  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  es el espacio muestral para un experimento con eventos

$$E = \{1, 3, 5\} \quad F = \{3, 5, 7, 9\} \quad G = \{2, 4, 6, 8\}$$

Determine los eventos indicados en los problemas 15 a 22.

- \*15.  $E \cup F$
16.  $G'$
- \*17.  $E' \cap F$
18.  $F' \cap G'$

19.  $F'$   
 20.  $(E \cup F)'$   
 21.  $(F \cap G)'$   
 23. De los siguientes eventos, ¿cuáles pares son mutuamente excluyentes?

$$\begin{array}{ll} E_1 = \{1, 2, 3\} & E_2 = \{3, 4, 5\} \\ E_3 = \{1, 2\} & E_4 = \{5, 6, 7\} \end{array}$$

24. **Selección de cartas** De una baraja ordinaria de 52 cartas de juego, se escogen dos sin reemplazo. Suponga que  $E_J$  es el evento en que ambas cartas son sotas,  $E_B$  es el evento en que ambas son de bastos,  $E_3$  es el evento en que ambas son 3. ¿Cuáles pares de estos eventos son mutuamente excluyentes?  
 25. **Selección de cartas** De una baraja ordinaria de 52 cartas de juego, se selecciona 1 carta. ¿Cuáles de los siguientes pares son mutuamente excluyentes?

$$\begin{array}{l} E = \{\text{diamante}\} \\ F = \{\text{carta con cara}\} \\ G = \{\text{negra}\} \\ H = \{\text{roja}\} \\ I = \{\text{as de diamantes}\} \end{array}$$

26. **Dados** Se lanza un dado verde y un dado rojo, y se anotan los números resultantes en cada uno. ¿Cuáles de los siguientes eventos son mutuamente excluyentes?

$$\begin{array}{l} E = \{\text{ambos son pares}\} \\ F = \{\text{ambos son impares}\} \\ G = \{\text{la suma es 2}\} \\ H = \{\text{la suma es 4}\} \\ I = \{\text{la suma es mayor que 10}\} \end{array}$$

27. **Lanzamiento de moneda** Se lanza una moneda tres veces de manera sucesiva, y se observan los resultados. Determine lo siguiente:  
 (a) El espacio muestral usual  $S$ .  
 (b) El evento  $E_1$  en el que ocurre al menos una cara.  
 (c) El evento  $E_2$  en el que ocurre al menos una cruz.  
 (d)  $E_1 \cup E_2$ .

## OBJETIVO

Definir lo que significa la probabilidad de un evento. Desarrollar fórmulas que se usan en el cálculo de probabilidades. Destacar los espacios equiprobables.

## 8.4 Probabilidad

### Espacios equiprobables

Ahora se introducen los conceptos básicos que sustentan a la probabilidad. Considere el lanzamiento de un dado balanceado y la observación del número que resulta. El espacio muestral para el experimento es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Antes de realizar el experimento, no se puede predecir con certidumbre cuál de los seis resultados posibles (puntos muestrales) ocurrirá. Pero parece razonable que cada resultado tiene la misma posibilidad de ocurrir, es decir, los resultados son *igualmente probables*. Esto no significa que en seis lanzamientos, cada número deba resultar una vez. En lugar de esto, significa que si el experimento se realiza muchas veces, cada resultado debe ocurrir alrededor de  $\frac{1}{6}$  de las veces.

Para ser más específico, considere que el experimento se hace  $n$  veces. Cada realización de un experimento se llama un **ensayo**. Suponga que se tiene interés en el evento de obtener 1 (esto es, el evento simple consistente en el punto muestral 1). Si ocurre un

- (e)  $E_1 \cap E_2$   
 (f)  $(E_1 \cup E_2)'$   
 (g)  $(E_1 \cap E_2)'$
28. **Géneros de hijos** Un matrimonio tiene dos hijos. El hecho de que el primer descendiente es hombre y el segundo es mujer puede representarse por HM. Determine lo siguiente:  
 (a) El espacio muestral que describe todos los órdenes de los géneros posibles de los descendientes.  
 (b) El evento en el que al menos uno de los descendientes es mujer.  
 (c) El evento en el que al menos un descendiente es hombre.  
 (d) ¿El evento del inciso (c) es el complemento del evento en el inciso (b)?
29. **Llegadas** Las personas A, B y C entran a un edificio en momentos diferentes. El resultado en el que A llega primero, B segundo y C tercero puede indicarse mediante ABC. Determine lo siguiente:  
 (a) El espacio muestral implicado para las llegadas.  
 (b) El evento de que A llegue primero.  
 (c) El evento de que A no llegue primero.
30. **Selección de proveedor** Una tienda de alimentos puede ordenar frutas y verduras a los proveedores U, V y W; carne a los proveedores U, V, X y Y; y alimentos deshidratados a los proveedores V, W, X y Z. La tienda selecciona un proveedor para cada tipo de artículo. El resultado en el que U se selecciona para las frutas y vegetales, V para la carne y W para los deshidratados puede representarse por UVW.  
 (a) Determine un espacio muestral.  
 (b) Determine el evento  $E$  en el que un proveedor suministra todos los requerimientos de la tienda.  
 (c) Determine  $E'$  y proporcione una descripción verbal de este evento.
- \*31. Si  $E$  y  $F$  son eventos para un experimento, pruebe que los eventos  $E \cap F$  y  $E \cap F'$  son mutuamente excluyentes.
32. Si  $E$  y  $F$  son eventos para un experimento, muestre que

$$(E \cap F) \cup (E \cap F') = E$$

Observe que para el problema 31,  $E \cap F$  y  $E \cap F'$  son eventos mutuamente excluyentes. Así, la ecuación anterior expresa a  $E$  como una unión de eventos mutuamente excluyentes. (*Una pista:* Haga uso de una propiedad distributiva).

1 en  $k$  de estos  $n$  ensayos, entonces la proporción de veces que ocurre 1 es  $k/n$ . Esta relación se llama **frecuencia relativa** del evento. Debido a que obtener un 1 es sólo uno de seis posibles resultados igualmente probables, se espera que a largo plazo ocurrirá un 1 en  $\frac{1}{6}$  de las veces. Esto es, cuando  $n$  se vuelve muy grande, se espera que la frecuencia relativa  $k/n$  se aproxime a  $\frac{1}{6}$ . El número  $\frac{1}{6}$  se toma como la probabilidad de obtener un 1 en el lanzamiento de un dado bien balanceado, la cual se denota  $P(1)$ . Así,  $P(1) = \frac{1}{6}$ ,  $P(3) = \frac{1}{6}$ , y así sucesivamente.

En este experimento, se consideró que la ocurrencia de todos los eventos simples en el espacio muestral era igualmente posible. Para describir esta posibilidad idéntica, se dice que  $S$  es un *espacio equiprobable*.

### DEFINICIÓN

Un espacio muestral  $S$  se llama *espacio equiprobable* si y sólo si la ocurrencia de todos los eventos simples es igualmente posible.

Es necesario mencionar que además de la frase *igualmente posible*, existen otras palabras y frases que se usan en el contexto de un espacio equiprobable como *bien balanceado, justo, no sesgado y aleatorio*. Por ejemplo, se puede seleccionar *aleatoriamente* un caramelo de una bolsa.

A continuación se generaliza el análisis del experimento del dado a otros espacios equiprobables (finitos).

### DEFINICIÓN

Si  $S$  es un espacio muestral equiprobable con  $N$  puntos muestrales (o resultados)  $s_1, s_2, \dots, s_N$ , entonces la *probabilidad del evento simple*  $\{s_i\}$  está dada por

$$P(s_i) = \frac{1}{N}$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$ . Por supuesto,  $P(s_i)$  es una abreviación de  $P(\{s_i\})$ .

Se destaca que  $P(s_i)$  puede interpretarse como la frecuencia relativa de  $\{s_i\}$  que ocurre en el largo plazo.

También se pueden asignar probabilidades a eventos que no son simples. Por ejemplo, en el experimento del dado, considere el evento  $E$  en el que resulta un 1 o un 2:

$$E = \{1, 2\}$$

Debido a que el dado está bien balanceado, en  $n$  ensayos (donde  $n$  es grande) se espera que un 1 debiera resultar en aproximadamente  $\frac{1}{6}$  de las veces y que un 2 debiera salir en aproximadamente  $\frac{1}{6}$  de los ensayos. Así, un 1 o un 2 resultará en aproximadamente  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$  de los ensayos, o  $\frac{2}{6}$  de las veces. Por lo tanto, es razonable suponer que a largo plazo la frecuencia relativa de  $E$  es  $\frac{2}{6}$ . Por esta razón, se define  $\frac{2}{6}$  como la probabilidad de  $E$  y se denota por  $P(E)$ .

$$P(E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Observe que  $P(E)$  es simplemente la suma de las probabilidades de los eventos simples que forman  $E$ . De manera equivalente,  $P(E)$  es la relación del número de puntos muestrales en  $E$  (dos) sobre el número de puntos muestrales en el espacio muestral (seis).

### DEFINICIÓN

Si  $S$  es un espacio finito equiprobable para un experimento y  $E = \{s_1, s_2, \dots, s_j\}$  es un evento, entonces la *probabilidad de E* está dada por

$$P(E) = P(s_1) + P(s_2) + \cdots + P(s_j)$$

En forma equivalente,

$$P(E) = \frac{\#(E)}{\#(S)}$$

donde  $\#(E)$  es el número de resultados en  $E$  y  $\#(S)$  es el número de resultados en  $S$ .

Observe que se puede pensar en  $P$  como una función que asocia a cada evento  $E$  con la probabilidad de  $E$ , a saber,  $P(E)$ . La probabilidad de  $E$  puede interpretarse como la frecuencia relativa de  $E$  que ocurre a largo plazo. Así en  $n$  ensayos, se esperaría que  $E$  ocurriera aproximadamente  $n \cdot P(E)$  veces, siempre y cuando  $n$  sea grande.

### EJEMPLO 1 Lanzamiento de moneda

Se lanzan dos monedas balanceadas. Determine la probabilidad de que

- ocurran dos caras,
- ocurra al menos una cara.

**Solución:** El espacio muestral usual es

$$S = \{\text{HH}, \text{HT}, \text{TH}, \text{TT}\}$$

Como los cuatro resultados son igualmente posibles,  $S$  es equiprobable y  $\#(S) = 4$ .

- Si  $E = \{\text{HH}\}$ , entonces  $E$  es un evento simple, por lo tanto

$$P(E) = \frac{\#(E)}{\#(S)} = \frac{1}{4}$$

- Sea  $F = \{\text{al menos una cara}\}$ . Entonces

$$F = \{\text{HH}, \text{HT}, \text{TH}\}$$

que tiene tres resultados. Así que

$$P(F) = \frac{\#(F)}{\#(S)} = \frac{3}{4}$$

De manera alternativa,

$$\begin{aligned} P(F) &= P(\text{HH}) + P(\text{HT}) + P(\text{TH}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

En consecuencia, luego de 1000 ensayos de este experimento, se esperaría que  $F$  ocurriera aproximadamente  $1000 \cdot \frac{3}{4} = 750$  veces.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

### EJEMPLO 2 Cartas

De una baraja ordinaria de 52 cartas de juego, se seleccionan aleatoriamente 2 cartas sin reemplazo. Si  $E$  es el evento en el que una carta es un 2 y la otra es un 3, encuentre  $P(E)$ .

**Solución:** El orden en que se seleccionan las dos cartas puede no tomarse en cuenta. Se escoge como el espacio muestral  $S$ , al conjunto de todas las combinaciones de las 52 cartas tomadas 2 a la vez. Así,  $S$  es equiprobable y  $\#(S) = {}_{52}C_2$ . Para encontrar  $\#(E)$ , se observa que como hay cuatro palos en las cartas, un 2 puede escogerse de cuatro formas y un 3 también de cuatro maneras. Por lo tanto, un 2 y un 3 pueden seleccionarse en  $4 \cdot 4$  formas, entonces

$$P(E) = \frac{\#(E)}{\#(S)} = \frac{4 \cdot 4}{{}_{52}C_2} = \frac{16}{1326} = \frac{8}{663}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7 

### EJEMPLO 3 Mano de póker con full

Encuentre la probabilidad de que le repartan un full en un juego de póker. Un full consiste en tres cartas de un tipo y dos de otro, como tres reinas y dos 10. Exprese su respuesta en términos de  ${}_nC_p$ .

**Solución:** El conjunto de todas las combinaciones de 52 cartas tomadas 5 a la vez es un espacio muestral equiprobable. (El orden en que se reparten las cartas no es importante). Así,  $\#(S) = {}_{52}C_5$ . Ahora se debe encontrar  $\#(E)$ , donde  $E$  es el evento de recibir un

full. Cada uno de los cuatro signos tiene 13 cartas por lo que tres cartas de un tipo pueden repartirse en  $13 \cdot {}_4C_3$  formas. Para cada uno de éstos, existen  $12 \cdot {}_4C_2$  formas de repartir dos cartas de otro tipo. Por lo tanto, un full puede repartirse en  $13 \cdot {}_4C_3 \cdot 12 \cdot {}_4C_2$  formas y se tiene

$$P(\text{full}) = \frac{\#(E)}{\#(S)} = \frac{13 \cdot {}_4C_3 \cdot 12 \cdot {}_4C_2}{52C_5}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

#### EJEMPLO 4 Selección de un subcomité

*De un comité de tres hombres y cuatro mujeres, debe seleccionarse aleatoriamente un subcomité de cuatro integrantes. Encuentre la probabilidad de que éste consista en dos hombres y dos mujeres.*

**Solución:** Como el orden de selección no es importante, el número de subcomités de cuatro que puede seleccionarse de los siete miembros es  ${}_7C_4$ . Los dos hombres pueden seleccionarse en  ${}_3C_2$  formas y las dos mujeres de  ${}_4C_2$  maneras. Por el principio básico de conteo, el número de subcomités de dos hombres y dos mujeres es  ${}_3C_2 \cdot {}_4C_2$ . Así,

$$\begin{aligned} P(\text{dos hombres y dos mujeres}) &= \frac{{}_3C_2 \cdot {}_4C_2}{{}_7C_4} \\ &= \frac{\frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{4!}{2!2!}}{\frac{7!}{4!3!}} = \frac{18}{35} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

#### Propiedades de la probabilidad

Ahora se desarrollarán algunas propiedades de la probabilidad. Sea  $S$  un espacio muestral equiprobable con  $N$  resultados; esto es,  $\#(S) = N$ . (A lo largo de esta sección, se supone un espacio muestral finito). Si  $E$  es un evento, entonces  $0 \leq \#(E) \leq N$ . Al dividir cada miembro entre  $\#(S) = N$  se obtiene

$$0 \leq \frac{\#(E)}{\#(S)} \leq \frac{N}{N}$$

Pero  $\frac{\#(E)}{\#(S)} = P(E)$ , por lo que se tiene la siguiente propiedad:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Es decir, la probabilidad de un evento es un número entre 0 y 1, inclusive.

Además,  $P(\emptyset) = \frac{\#(\emptyset)}{\#(S)} = \frac{0}{N} = 0$ . Por lo tanto,

$$P(\emptyset) = 0$$

También,  $P(S) = \frac{\#(S)}{\#(S)} = \frac{N}{N} = 1$ , entonces

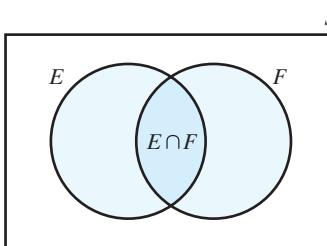
$$P(S) = 1$$

De acuerdo con esto, la probabilidad del evento imposible es 0 y la probabilidad del evento seguro es 1.

Como  $P(S)$  es la suma de las probabilidades de los resultados en el espacio muestral, se concluye que la suma de las probabilidades de todos los eventos simples para un espacio muestral es 1.

Ahora se estudiará la probabilidad de la unión de dos eventos  $E$  y  $F$ . El evento  $E \cup F$  ocurre si y sólo si al menos uno de los eventos ( $E$  o  $F$ ) ocurre. Así,  $P(E \cup F)$  es la probabilidad de que ocurra *al menos uno* de los eventos  $E$  y  $F$ . Se sabe que

$$P(E \cup F) = \frac{\#(E \cup F)}{\#(S)}$$



**FIGURA 8.13**  $E \cap F$  está contenida tanto en  $E$  como en  $F$ .

Observe que aunque se obtuvo la ecuación 2 para un espacio muestral equiprobable, de hecho el resultado es general.

Ahora

$$\#(E \cup F) = \#(E) + \#(F) - \#(E \cap F) \quad (1)$$

porque  $\#(E) + \#(F) = \#(E \cup F) + \#(E \cap F)$ . Para ver la veracidad de la última afirmación, observe la figura 8.13 y note que  $E \cap F$  está contenida tanto en  $E$  como en  $F$ .

Al dividir ambos lados de la ecuación 1 para  $\#(E \cup F)$  entre  $\#(S)$  se obtiene el siguiente resultado:

### Probabilidad de una unión de eventos

Si  $E$  y  $F$  son eventos, entonces

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \quad (2)$$

Por ejemplo, considere que se lanza un dado balanceado, que  $E = \{1, 3, 5\}$  y que  $F = \{1, 2, 3\}$ . Entonces  $E \cap F = \{1, 3\}$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

De manera alternativa,  $E \cup F = \{1, 2, 3, 5\}$ , entonces  $P(E \cup F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .

Si  $E$  y  $F$  son eventos mutuamente excluyentes, entonces  $E \cap F = \emptyset$ , es decir  $P(E \cap F) = P(\emptyset)$ . Por lo tanto, de la ecuación (2) se obtiene la siguiente ley:

### Ley de la suma para eventos mutuamente excluyentes

Si  $E$  y  $F$  son eventos *mutuamente excluyentes*, entonces

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

Por ejemplo, considere que se lanza un dado balanceado, que  $E = \{2, 3\}$  y que  $F = \{1, 5\}$ . Entonces  $E \cap F = \emptyset$ , por lo tanto

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

La ley de la suma puede extenderse a más de dos eventos mutuamente excluyentes.<sup>2</sup> Por ejemplo, si los eventos  $E$ ,  $F$  y  $G$  son mutuamente excluyentes, entonces

$$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G)$$

Un evento y su complemento son mutuamente excluyentes, por lo que, debido a la ley de la suma,

$$P(E \cup E') = P(E) + P(E')$$

Pero  $P(E \cup E') = P(S) = 1$ . Así que,

$$1 = P(E) + P(E')$$

de manera que

$$P(E') = 1 - P(E)$$

en forma equivalente,

$$P(E) = 1 - P(E')$$

De igual manera, si se conoce la probabilidad de un evento, entonces la probabilidad de su complemento puede encontrarse con facilidad, y viceversa. Por ejemplo, si  $P(E) = \frac{1}{4}$ , entonces  $P(E') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .  $P(E')$  es la probabilidad de que  $E$  no ocurra.

Con el fin de encontrar la probabilidad de un evento, algunas veces es más conveniente encontrar primero la probabilidad de su complemento y luego restar el resultado de 1. Vea en especial el ejemplo 6(c).

<sup>2</sup>Dos o más eventos son mutuamente excluyentes si y sólo si ninguno de ellos puede ocurrir al mismo tiempo. Es decir, dado alguno de ellos, su intersección debe estar vacía. Por ejemplo, decir que los eventos  $E$ ,  $F$  y  $G$  son mutuamente excluyentes significa que

$$E \cap F = E \cap G = F \cap G = \emptyset$$

### EJEMPLO 5 Control de calidad

De una corrida de producción de 5000 focos luminosos, 2% de los cuales están defectuosos, se selecciona uno de manera aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que sea el foco defectuoso? ¿Cuál es la probabilidad de que no lo sea?

**Solución:** En cierto sentido, ésta es una pregunta capciosa porque la afirmación de que “2% son defectuosos” significa que “ $\frac{2}{100}$  son defectuosos”, que a su vez significa que la posibilidad de obtener un foco defectuoso es “2 de 100”, de manera equivalente, que la probabilidad de obtener un foco defectuoso es 0.02. Sin embargo, para reforzar las ideas que se han considerado hasta ahora, se dirá que el espacio muestral  $S$  consiste en 5000 focos. Como un foco se selecciona de manera aleatoria, los resultados posibles tienen la misma posibilidad de ocurrir. Sea  $E$  el evento de seleccionar un foco defectuoso. El número de resultados en  $E$  es  $0.02 \cdot 5000 = 100$ . Así,

$$P(E) = \frac{\#(E)}{\#(S)} = \frac{100}{5000} = \frac{1}{50} = 0.02$$

De manera alternativa, como la probabilidad de seleccionar un foco particular es  $\frac{1}{5000}$  y  $E$  contiene 100 puntos muestrales, al sumar las probabilidades se tiene

$$P(E) = 100 \cdot \frac{1}{5000} = 0.02$$

El evento en el que el foco seleccionado *no* es defectuoso es  $E'$ . Por lo tanto,

$$P(E') = 1 - P(E) = 1 - 0.02 = 0.98$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

### EJEMPLO 6 Dados

Se lanza un par de dados balanceados y se anota el número que resultó de cada dado. Determine la probabilidad de que la suma de los números resultantes sea (a) 7, (b) 7 u 11, y (c) mayor que 3.

**Solución:** Como cada dado puede caer en una de seis formas diferentes, por el principio básico de conteo el número de resultados posibles es  $6 \cdot 6 = 36$ . El espacio muestral consiste en los siguientes pares ordenados:

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Los resultados son igualmente posibles, por lo que la probabilidad de cada resultado es  $\frac{1}{36}$ . Hay muchos caracteres presentes en la lista anterior, puesto que cada uno de los 36 pares ordenados involucra cinco (un par de paréntesis, una coma y 2 dígitos) para un total de  $36 \cdot 5 = 180$  caracteres. La misma información puede transmitirse mediante los siguientes cuadros coordenados, que requieren sólo 12 caracteres y 14 líneas.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

(Se recomienda usar abreviaciones como ésta en su trabajo escrito).

- a. Sea  $E_7$  el evento en el que la suma de los números que aparecen es 7. Entonces,

$$E_7 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

que tiene seis resultados (y puede verse como la diagonal ascendente en los cuadros coordenados). Así,

$$P(E_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- b.** Sea  $E_{7 \cup 11}$  el evento en que la suma es 7 u 11. Si  $E_{11}$  es el evento en que la suma es 11, entonces

$$E_{11} = [(5, 6), (6, 5)]$$

que tiene dos resultados. Como  $E_{7 \cup 11} = E_7 \cup E_{11}$  y  $E_7$  y  $E_{11}$  son mutuamente excluyentes, se tiene

$$P(E_{7 \cup 11}) = P(E_7) + P(E_{11}) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

De manera alternativa, puede determinarse  $P(E_{7 \cup 11})$  al contar el número de resultados en  $E_{7 \cup 11}$ . Se obtiene,

$$E_{7 \cup 11} = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5)\}$$

el cual tiene ocho resultados. Así

$$P(E_{7 \cup 11}) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

- c.** Sea  $E$  el evento en que la suma es mayor que 3. El número de resultados en  $E$  es relativamente grande. Así, para determinar  $P(E)$ , es más fácil encontrar  $E'$ , en lugar de  $E$ , y después usar la fórmula  $P(E) = 1 - P(E')$ . Aquí  $E'$  es el evento en el que la suma es 2 o 3. Se tiene

$$E' = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

que consta de tres resultados. Por lo tanto,

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{3}{36} = \frac{11}{12}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27 

### EJEMPLO 7 Juego interrumpido

Obtenga la solución de Pascal y Fermat para el problema de dividir las ganancias entre dos apostadores en un juego de azar interrumpido, como se describió en la introducción a este capítulo. Recuerde que cuando el juego fue interrumpido, el jugador 1 necesitaba  $r$  "rondas" más para llevarse las ganancias y que el jugador 2 requería  $s$  rondas más para ganar. Se acordó que la ganancia debía dividirse de manera que cada jugador obtuviera el valor de la ganancia multiplicado por la probabilidad de que él o ella hubieran ganado el juego en caso de que el juego no se hubiera interrumpido.

**Solución:** Sólo es necesario calcular la probabilidad de que el jugador 1 hubiera ganado, si ésta es  $p$ , entonces la probabilidad de que el jugador 2 hubiera ganado es  $1 - p$ . Ahora el juego puede tener cuando mucho  $r + s - 1$  rondas más. Para ver esto, observe que cada ronda produce exactamente un ganador y sea  $a$  el número de las  $r + s - 1$  rondas ganadas por el jugador 1 y sea  $b$  el número de las  $r + s - 1$  rondas ganadas por el jugador 2. Por lo tanto,  $r + s - 1 = a + b$ . Si no ha ganado el jugador 1 ni el 2, entonces  $a \leq r - 1$  y  $b \leq s - 1$ . Pero en este caso se tiene

$$r + s - 1 = a + b \leq (r - 1) + (s - 1) = r + s - 2$$

que es imposible. Resulta claro que, después de  $r + s - 2$  podrían haber todavía un ganador final, por lo que es necesario considerar  $r + s - 1$  rondas adicionales posibles a partir del momento de interrupción. Sea  $n = r + s - 1$ . Ahora el jugador 1 ganará si el jugador 2 gana  $k$  de las  $n$  rondas adicionales posibles, donde  $0 \leq k \leq s - 1$ . Sea  $E_k$  el evento en el que el jugador 2 gana *exactamente*  $k$  de las siguientes  $n$  rondas. Como los eventos  $E_k$ , para  $k = 0, 1, \dots, s - 1$ , son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que el jugador 1 gane está dada por

$$P(E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_{s-1}) = P(E_0) + P(E_1) + \dots + P(E_{s-1}) = \sum_{k=0}^{s-1} P(E_k) \quad (3)$$

Falta determinar  $P(E_k)$ . Debe suponerse también que una ronda consiste en el lanzamiento de una moneda con resultados H y T. Además se considera que el jugador 2 gana una ronda si el resultado de ésta es T. Así que el jugador ganará exactamente  $k$  de las siguientes rondas si exactamente  $k$  de las siguientes rondas son T. Por supuesto, el número de resultados posibles para las siguientes  $n$  rondas es  $2^n$ , por el principio de la multiplicación. El número de estos resultados que consta exactamente de  $k$  T es el número de formas en que puede escogerse  $k$  de entre  $n$ . Se deduce que  $P(E_k) = \frac{nC_k}{2^n}$ , y al sustituir este valor en la ecuación (3), se obtiene

$$\sum_{n=0}^{s-1} \frac{nC_k}{2^n}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29



### Funciones de probabilidad en general

Muchas de las propiedades de los espacios equiprobables se cumplen para espacios muestrales que no son equiprobables. Para ilustrar esto, considere el experimento de lanzar dos monedas balanceadas y observar cuántas veces resulta cara. Las monedas pueden caer en una de cuatro formas, a saber,

HH HT TH TT

que corresponden a dos caras, una cara, una cara y cero caras, respectivamente. Como se tiene interés en el número de caras, el espacio muestral puede escogerse como

$$S = \{0, 1, 2\}$$

Sin embargo, los eventos simples en  $S$  no son igualmente posibles de ocurrir debido a las cuatro posibles formas en que pueden caer las monedas: dos de estas formas corresponden al resultado de una cara, mientras que sólo una corresponde al resultado de dos caras, y sólo otra corresponde al resultado de cero caras. A largo plazo, es razonable esperar que los ensayos repetidos resulten en una cara alrededor de  $\frac{2}{4}$  del tiempo, cero caras aproximadamente  $\frac{1}{4}$  de las veces, y dos caras alrededor de  $\frac{1}{4}$  del tiempo. Si se asignan probabilidades a estos eventos simples, es natural tener

$$P(0) = \frac{1}{4} \quad P(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad P(2) = \frac{1}{4}$$

Aunque  $S$  no es equiprobable, estas probabilidades están entre 0 y 1, inclusive, y su suma es 1. Esto es consistente con lo que se estableció para un espacio equiprobable.

Con base en el análisis previo, puede considerarse una *función de probabilidad* que se relacione con los espacios muestrales en general.

#### DEFINICIÓN

Sea  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  un espacio muestral para un experimento. A la función  $P$  se le llama *función de probabilidad* si las dos afirmaciones siguientes son ciertas:

1.  $0 \leq P(s_i) \leq 1$  para  $i = 1$  a  $N$
2.  $P(s_1) + P(s_2) + \dots + P(s_N) = 1$

Si  $E$  es un evento, entonces  $P(E)$  es la suma de las probabilidades de los puntos muestrales en  $E$ . Se define  $P(\emptyset)$  como 0.

Desde un punto de vista matemático, cualquier función  $P$  que satisface las condiciones 1 y 2 es una función de probabilidad para un espacio muestral. Por ejemplo, considere el espacio muestral para el experimento anterior de lanzar dos monedas balanceadas y observar el número de caras:

$$S = \{0, 1, 2\}$$

Se pueden asignar las siguientes probabilidades:

$$P(0) = 0.1 \quad P(1) = 0.2 \quad P(2) = 0.7$$

Aquí,  $P$  satisface las dos condiciones 1 y 2 y, por lo tanto, es una función de probabilidad legítima. Sin embargo, esta asignación no refleja la interpretación a largo plazo de la probabilidad y, en consecuencia, no sería aceptable desde un punto de vista práctico.

En general, para cualquier función de probabilidad definida sobre un espacio muestral (finito o infinito), se cumplen las siguientes propiedades:

$$P(E') = 1 - P(E)$$

$$P(S) = 1$$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) \quad \text{si } E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

### Probabilidad empírica

Se ha visto lo fácil que es asignar probabilidades a eventos simples cuando se tiene un espacio muestral equiprobable. Por ejemplo, cuando se lanza una moneda balanceada, se tiene  $S = \{\text{H}, \text{T}\}$  y  $P(\text{H}) = P(\text{T}) = \frac{1}{2}$ . Estas probabilidades se determinan mediante la naturaleza intrínseca del experimento —a saber, existen dos resultados posibles que deben tener la misma probabilidad porque los resultados son igualmente posibles—. Las probabilidades de este tipo se llaman *probabilidades teóricas*. Sin embargo, suponga que la moneda no está balanceada. ¿Cómo pueden asignarse las probabilidades? Si se lanza la moneda cierto número de veces, se pueden determinar las frecuencias relativas de la ocurrencia de caras y cruces. Por ejemplo, suponga que en 1000 lanzamientos, ocurren 517 caras y 483 cruces. Entonces, las frecuencias relativas de la ocurrencia de caras y cruces es  $\frac{517}{1000}$  y  $\frac{483}{1000}$ , respectivamente. En esta situación, la asignación  $P(\text{H}) = 0.517$  y  $P(\text{T}) = 0.483$  sería bastante razonable. Las probabilidades asignadas de esta forma se llaman *probabilidades empíricas*. En general, las probabilidades basadas en datos muestrales o empíricos son empíricas. Ahora suponga que la moneda se lanza 2000 veces y que la frecuencia relativa para la ocurrencia de caras y cruces fue  $\frac{1023}{2000} = 0.5115$  y  $\frac{977}{2000} = 0.4885$ , respectivamente. Entonces, en este caso, sería aceptable la asignación  $P(\text{H}) = 0.5115$  y  $P(\text{T}) = 0.4885$ . En cierto sentido, las últimas probabilidades pueden ser más indicativas de la verdadera naturaleza de la moneda que las probabilidades asociadas con 1000 lanzamientos.

En el siguiente ejemplo, se asignan probabilidades (empíricas) con base en datos muestrales.

#### EJEMPLO 8 Sondeo de opinión

Se realizó un sondeo de opinión con una muestra de 150 residentes adultos de un pueblo. A cada persona se le preguntó su opinión acerca de la promulgación de un acuerdo para construir una piscina en la comunidad. Los resultados se resumen en la tabla 8.2.

Suponga que los residentes adultos del pueblo se seleccionan de manera aleatoria. Sea  $M$  el evento en el que “se selecciona un residente masculino” y  $F$  el evento en el que “la persona seleccionada favorece la promulgación del acuerdo”. Encuentre lo siguiente:

- a.  $P(M)$
- b.  $P(F)$
- c.  $P(M \cap F)$
- d.  $P(M \cup F)$

**TABLA 8.2** Sondeo de opinión

	A favor	En contra	Total
Masculino	60	20	80
Femenino	40	30	70
Total	100	50	150

**Estrategia** Se supondrá que las proporciones que se aplican a la muestra también son válidas para la población adulta del pueblo.

**Solución:**

- a. De las 150 personas en la muestra, 80 son del sexo masculino. Por lo tanto, para la población adulta del pueblo (el espacio muestral), se supone que  $\frac{80}{150}$  son del sexo masculino. Por lo tanto, la probabilidad (empírica) de seleccionar un hombre es

$$P(M) = \frac{80}{150} = \frac{8}{15}$$

- b. De las 150 personas en la muestra, 100 están a favor de la emisión del bono. Por lo tanto,

$$P(F) = \frac{100}{150} = \frac{2}{3}$$

- c. La tabla 8.2 indica que 60 hombres favorecen la emisión del bono. Entonces,

$$P(M \cap F) = \frac{60}{150} = \frac{2}{5}$$

- d. Para encontrar  $P(M \cup F)$ , se usa la ecuación (1):

$$\begin{aligned} P(M \cup F) &= P(M) + P(F) - P(M \cap F) \\ &= \frac{80}{150} + \frac{100}{150} - \frac{60}{150} = \frac{120}{150} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 33



## Posibilidades

La probabilidad de un evento se expresa en términos de *posibilidades*, especialmente en situaciones de juego.

### DEFINICIÓN

Las *posibilidades* a favor de la ocurrencia de un evento  $E$  están dadas por la relación

$$\frac{P(E)}{P(E')}$$

dado que  $P(E') \neq 0$ . Las posibilidades se expresan generalmente como la relación  $\frac{P}{Q}$  (o  $p : q$ ) de dos enteros positivos, que se lee “ $p$  a  $q$ ”.

### EJEMPLO 9 Apuestas para un 10 en un examen

Un estudiante cree que la probabilidad de obtener un 10 en el siguiente examen de matemáticas es 0.2. ¿Cuáles son las posibilidades (a favor) de que esto ocurra?

**Solución:** Si  $E$  = “obtener un 10”, entonces  $P(E) = 0.2$  y  $P(E') = 1 - 0.2 = 0.8$ . Por lo tanto, las posibilidades de obtener un 10 son

$$\frac{P(E)}{P(E')} = \frac{0.2}{0.8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 1 : 4$$

Esto es, las posibilidades son de 1 a 4. (Se destaca que las posibilidades *en contra* de obtener un 10 son de 4 a 1).



Si las posibilidades de que ocurra el evento  $E$  son  $a : b$ , entonces la probabilidad de  $E$  puede determinarse fácilmente. Se sabe que

$$\frac{P(E)}{1 - P(E)} = \frac{a}{b}$$

Se despeja  $P(E)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} bP(E) &= (1 - P(E))a \quad (\text{al eliminar fracciones}) \\ aP(E) + bP(E) &= a \\ (a + b)P(E) &= a \\ P(E) &= \frac{a}{a + b} \end{aligned}$$

### Determinación de la probabilidad a partir de las posibilidades

Si las posibilidades de que ocurra el evento  $E$  son  $a : b$ , entonces

$$P(E) = \frac{a}{a + b}$$

A largo plazo, si las posibilidades de que ocurra  $E$  son  $a : b$ , entonces, en promedio,  $E$  debe ocurrir  $a$  veces en cada  $a + b$  ensayos del experimento.

#### EJEMPLO 10 Probabilidad de ganar un premio

Uno de los premios que se mencionan en un folleto de concurso que se recibe por correo es un bono de ahorro de \$1000. Se establece que las posibilidades a favor de ganar el bono son  $1 : 10\,000$ . ¿Cuál es la probabilidad de ganar este premio?

**Solución:** Aquí  $a = 1$  y  $b = 10\,000$ . De la regla anterior,

$$\begin{aligned} P(\text{ganar premio}) &= \frac{a}{a + b} \\ &= \frac{1}{1 + 10\,000} = \frac{1}{10\,001} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35 

## Problemas 8.4

- \*1. En 3000 ensayos de un experimento, ¿Cuántas veces se esperaría que ocurra el evento  $E$  si  $P(E) = 0.25$ ?
- 2. En 3000 ensayos de un experimento, ¿Cuántas veces se esperaría que ocurra el evento  $E$  si  $P(E) = 0.45$ ?
- 3. Si  $P(E) = 0.2$ ,  $P(F) = 0.3$  y  $P(E \cap F) = 0.1$ , encuentre (a)  $P(E')$  y (b)  $P(E \cup F)$ .
- 4. Si  $P(E) = \frac{1}{4}$ ,  $P(F) = \frac{1}{2}$  y  $P(E \cap F) = \frac{1}{8}$ , encuentre (a)  $P(E')$  y (b)  $P(E \cup F)$ .
- 5. Si  $P(E \cap F) = 0.831$ , ¿son  $E$  y  $F$  mutuamente excluyentes?
- 6. Si  $P(E) = \frac{1}{2}$ ,  $P(E \cup F) = \frac{13}{20}$  y  $P(E \cap F) = \frac{1}{10}$ , encuentre  $P(F)$ .
- \*7. **Dados** Se lanzan dos dados bien balanceados. Encuentre la probabilidad de que la suma de los números sea (a) 8; (b) 2 o 3; (c) 3, 4 o 5; (d) 12 o 13; (e) un número par; (f) un número impar; (g) menor que 10.
- 8. **Dados** Se lanza un par de dados balanceados. Determine la probabilidad de que al menos un dado muestre un 2 o un 3.
- 9. **Selección de carta** Se selecciona una carta en forma aleatoria de una baraja ordinaria de 52 cartas de juego. Determine la probabilidad de que la carta sea (a) el rey de corazones, (b) un diamante, (c) una sota, (d) roja, (e) un corazón o un basto, (f) un basto y un 4, (g) un basto o un 4, (h) roja y un rey e (i) una espada y un corazón.
- 10. **Moneda y dado** Se lanzan una moneda y un dado balanceados. Encuentre la probabilidad de que (a) resulte una cara y un 5, (b) resulte una cara, (c) resulte un 3, (d) resulte una cara y un número par.
- 11. **Moneda, dado y carta** Se lanzan una moneda y un dado balanceados, y se selecciona una carta en forma aleatoria de una baraja ordinaria de 52 cartas de juego. Determine la probabilidad de que la moneda, el dado y la carta muestren, respectivamente (a) una cruz, un 3 y la reina de corazones; (b) una cruz, un 3 y una reina; (c) una cara, un 2 o un 3 y una reina y (d) una cara, un número par y un diamante.
- 12. **Monedas** Se lanzan tres monedas balanceadas. Encuentre la probabilidad de que (a) resulten tres caras, (b) resulte exactamente una cruz, (c) resulten no más de dos caras y (d) resulte no más de una cruz.
- \*13. **Selección de cartas** Se escogen de manera sucesiva y aleatoria tres cartas de una baraja ordinaria de 52 sin reemplazo. Encuentre la probabilidad de que (a) las tres cartas sean reyes y (b) las tres cartas sean corazones.
- 14. **Selección de cartas** Se escogen de manera sucesiva y aleatoria dos cartas de una baraja ordinaria de 52 con reemplazo. Encuentre la probabilidad de que (a) ambas cartas sean reyes y (b) una carta sea un rey y la otra sea un corazón.
- 15. **Géneros de niños** Suponga que el género de una persona se determina de manera aleatoria, determine la probabilidad de

que una familia con tres descendientes tenga (a) tres niñas, (b) exactamente un niño, (c) ninguna niña y (d) al menos una niña.

- 16. Selección de caramelos** Se toma un caramelo de manera aleatoria de una bolsa que contiene siete caramelos rojos, tres blancos y ocho azules. Encuentre la probabilidad de que el caramelo (a) sea azul, (b) no sea rojo, (c) sea rojo o blanco, (d) no sea rojo ni azul, (e) sea amarillo y (f) sea rojo o amarillo.
- \*17. Selección de acciones** Se selecciona de manera aleatoria una acción de entre 60 títulos distintos, 48 de las cuales tienen un dividendo anual de 6% o más. Encuentre la probabilidad de que la acción pague un dividendo anual de (a) 6% o más, (b) menos de 6%.
- 18. Inventario** Una tienda de ropa mantiene su inventario de corbatas, de manera que 40% de ellas son de seda 100% pura. Si se selecciona una corbata de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que (a) sea de seda 100% pura?, y (b) ¿no sea de seda 100% pura?
- 19. Calificaciones de examen** En un examen aplicado a 40 estudiantes, 10% obtuvieron un 10, 25% un 9, 35% un 8, 25% un 7 y 5% un 5. Si se selecciona a un estudiante de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que (a) haya obtenido un 10?, (b) ¿haya obtenido un 10 o un 9?, (c) ¿no haya obtenido 7 ni 5?, (d) ¿no haya obtenido un 5? (e) Responda las preguntas (a) a (d) si se desconoce el número de estudiantes a los que se aplicó el examen.
- 20. Selección de caramelos** Dos bolsas contienen caramelos de colores. La bolsa 1 contiene tres caramelos rojos y dos verdes, y la bolsa 2 contiene cuatro caramelos rojos y cinco verdes. Se selecciona un caramelo en forma aleatoria de cada una de las bolsas. Encuentre la probabilidad de que (a) ambos sean rojos y (b) uno sea rojo y el otro verde.
- \*21. Selección de comité** De un grupo de dos mujeres y tres hombres, se seleccionan dos personas de manera aleatoria para formar un comité. Encuentre la probabilidad de que el comité conste sólo de mujeres.
- 22. Selección de comité** Para la selección del comité del problema 21, encuentre la probabilidad de que el comité conste de un hombre y una mujer.
- 23. Calificación de examen** Un estudiante responde al azar un examen con 10 preguntas de tipo falso-verdadero. Si cada pregunta vale 10 puntos, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante obtenga (a) 100 puntos? y (b) ¿90 o más puntos?
- 24. Examen de opción múltiple** En un examen de opción múltiple hay ocho preguntas, cada una de ellas tiene cuatro opciones, sólo una de las cuales es correcta. Si un estudiante responde cada pregunta de manera aleatoria, encuentre la probabilidad de que el estudiante conteste (a) todas las preguntas correctamente y (b) exactamente cuatro preguntas correctamente.
- 25. Mano de póker** Encuentre la probabilidad de que le repartan cuatro cartas del mismo tipo en una mano de póker. Esto significa simplemente cuatro cartas de un tipo y una de otra clase, por ejemplo, cuatro reinas y un 10. Exprese su respuesta con el uso del símbolo  ${}_nC_r$ .
- 26.** Suponga que  $P(E) = \frac{1}{4}$ ,  $P(E \cup F) = \frac{5}{14}$  y  $P(E \cap F) = \frac{1}{7}$ .  
**(a)** Encuentre  $P(F)$     **(b)** Encuentre  $P(E' \cup F)$   
*[Una pista:  $F = (E \cap F) \cup (E' \cap F)$  donde  $E \cap F$  y  $E' \cap F$  son mutuamente excluyentes.]*
- \*27. Comité universitario** La clasificación del personal académico en una universidad es como se indica en la tabla 8.3. Si se selecciona al azar un comité de tres miembros, ¿cuál es

la probabilidad de que éste conste de (a) sólo mujeres?, (b) ¿un profesor y dos profesores asociados?

**TABLA 8.3** Clasificación de profesores

	Hombre	Mujer	Total
Profesor	12	3	15
Profesor asociado	15	9	24
Profesor asistente	18	8	26
Instructor	20	15	35
Total	65	35	100

- 28. Dado sesgado** Un dado está sesgado de manera que  $P(1) = \frac{3}{10}$ ,  $P(2) = P(5) = \frac{2}{10}$  y  $P(3) = P(4) = P(6) = \frac{1}{10}$ . Si el dado se lanza, encuentre  $P(\text{número par})$ .
- \*29. Juego interrumpido** Un par de apostadores lanzaban una moneda y trataban de predecir el resultado de manera que sólo uno de ellos podía ganar cada lanzamiento. Había un premio de \$25, que acordaron obtendría el primero que ganara 10 rondas. Sus madres llegaron a la escena y les ordenaron detener el juego. Para entonces, Shiloh había ganado 7 lanzamientos y Caitlin había ganado 5. Más tarde, Shiloh y Caitlin se dividirían el dinero de acuerdo con la fórmula de Pascal y Fermat. ¿Qué parte del dinero le tocó a Shiloh?
- 30. Juego interrumpido** Repita el problema 29 para la siguiente reunión de Shiloh y Caitlin, cuando la policía interrumpe su juego de 10 lanzamientos por \$50, en el momento en que Shiloh había ganado 5 rondas y Caitlin sólo 2.
- 31. Dado sesgado** Cuando se lanza un dado sesgado, las probabilidades de obtener 1, 3 y 5 son iguales. Las probabilidades de obtener 2, 4 y 6 también son iguales, pero son dos veces mayores que las de obtener 1, 3 y 5. Determine  $P(1)$ .
- 32.** Para el espacio muestral  $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ , suponga que las probabilidades de  $a, b, c, d$  y  $e$  son las mismas y que las probabilidades de  $f$  y  $g$  son iguales entre sí. ¿Es posible determinar  $P(f)$ ? Si también se sabe que  $P(\{a, f\}) = \frac{1}{3}$ , ¿qué más podría decirse?
- \*33. Incremento en los impuestos** El cuerpo legislativo está considerando un incremento en los impuestos para apoyar a la educación. Se realizó una encuesta a 100 votantes registrados, y los resultados se indican en la tabla 8.4. Suponga que la encuesta refleja las opiniones de la población votante. Si se selecciona una persona de esa población de manera aleatoria, determine cada una de las siguientes probabilidades (empíricas)  
**(a)**  $P(\text{esté a favor del aumento})$ .  
**(b)**  $P(\text{esté en contra del aumento})$ .  
**(c)**  $P(\text{sea un republicano sin opinión})$ .
- TABLA 8.4** Encuesta sobre aumento de impuestos
- |             | A favor | En contra | Sin opinión | Total |
|-------------|---------|-----------|-------------|-------|
| Demócrata   | 32      | 26        | 2           | 60    |
| Republicano | 15      | 17        | 3           | 35    |
| Otro        | 4       | 1         | 0           | 5     |
| Total       | 51      | 44        | 5           | 100   |
- 34. Ventas de cámara digital** Una cadena de tiendas de departamentos tiene almacenes en las ciudades de Exton y Whyton.

Cada tienda vende tres tipos de cámaras: A, B y C. El año pasado se determinó el promedio de las ventas unitarias mensuales, y los resultados son los que se indican en la tabla 8.5. Suponga que las ventas futuras siguen el patrón indicado en la tabla.

- (a) Determine la probabilidad de que una venta de una cámara el próximo mes sea del tipo B.
- (b) El próximo mes, si se hace una venta en la tienda de Exton, encuentre la probabilidad de que sea del tipo C.

**TABLA 8.5** Ventas unitarias por mes

	A	B	C
Exton	25	40	30
Whyton	20	25	30

En los problemas 35 a 38, para la probabilidad dada, encuentre las posibilidades de que ocurra E.

- \*35.  $P(E) = \frac{4}{5}$
- 36.  $P(E) = \frac{1}{6}$
- 37.  $P(E) = 0.7$
- 38.  $P(E) = 0.001$

En los problemas 37 a 40, se dan las posibilidades de que ocurra E. Encuentre  $P(E)$ .

- 39. 7 : 5
- 40. 100 : 1
- 41. 4 : 10
- 42.  $a : a$
- 43. **Pronóstico del clima** El locutor que anuncia el clima por televisión reportó un 75% de probabilidad de que llueva mañana. ¿Cuáles son las posibilidades de que llueva mañana?
- 44. Si las posibilidades de que el evento  $E$  no ocurra son 3 : 5, ¿cuáles son las posibilidades de que  $E$  ocurra? Responda de nuevo la pregunta y considere que las posibilidades de que el evento  $E$  no ocurra son  $a : b$ .

## OBJETIVO

Analizar la probabilidad condicional a través de un espacio muestral reducido así como el espacio original. Analizar un proceso estocástico con la ayuda de un árbol de probabilidad. Desarrollar la ley general de la multiplicación para  $P(E \cap F)$ .

## 8.5 Probabilidad condicional y procesos estocásticos

### Probabilidad condicional

La probabilidad de un evento podría verse afectada cuando se conoce información adicional relacionada con el experimento. Por ejemplo, si usted trata de adivinar la respuesta a una pregunta de opción múltiple que tiene cinco opciones, la probabilidad de obtener la respuesta correcta es  $\frac{1}{5}$ . Sin embargo, si usted sabe que las respuestas A y B son erróneas y por lo tanto pueden descartarse, la probabilidad de adivinar la respuesta correcta se incrementa a  $\frac{1}{3}$ . En esta sección, se consideran situaciones similares, en las cuales se busca la probabilidad de un evento  $E$  cuando se conoce que ha ocurrido otro evento  $F$ . Esto se llama una **probabilidad condicional** y se denota por  $P(E|F)$ , que se lee “la probabilidad condicional de  $E$ , dado  $F$ ”. Por ejemplo, en la situación que involucra a la pregunta de opción múltiple, se tiene

$$P(\text{adivinar la respuesta correcta} | \text{A y B están eliminadas}) = \frac{1}{3}$$

Para investigar la noción de probabilidad condicional, se considera la siguiente situación. Se lanza un dado balanceado, y se tiene interés en la probabilidad del evento

$$E = \{\text{resulta un número par}\}$$

El espacio muestral equiprobable usual para este experimento es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

entonces,

$$E = \{2, 4, 6\}$$

Por lo tanto,

$$P(E) = \frac{\#(E)}{\#(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ahora se cambiará un poco la situación. Suponga que el dado se lanza a escondidas, y después se informa que ocurrió un número mayor que 3. A la luz de esta información adicional, ¿cuál es la nueva probabilidad de un número par? Para responder esa pregunta, se razona de la manera siguiente. El evento  $F$  de un número más grande que 3 es

$$F = \{4, 5, 6\}$$

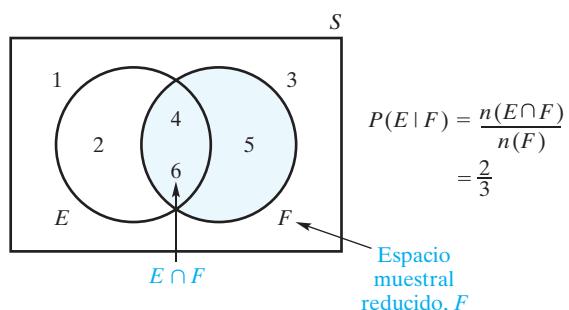
Con  $F$  ya ocurrió, el conjunto de resultados posibles ya no es  $S$ , sino  $F$ . Es decir,  $F$  se vuelve el nuevo espacio muestral, llamado **espacio muestral reducido** o un *subespacio* de  $S$ . Los resultados en  $F$  son igualmente posibles, y, de éstos, 4 y 6 son favorables a  $E$ ; esto es,

$$E \cap F = \{4, 6\}$$

Como dos de los tres resultados en el espacio muestral reducido son favorables a la ocurrencia de un número par, se dice que  $\frac{2}{3}$  es la *probabilidad condicional de un número par, dado que ocurrió un número mayor que 3*:

$$P(E|F) = \frac{\#(E \cap F)}{\#(F)} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

El diagrama de Venn de la figura 8.14 ilustra la situación.



**FIGURA 8.14** Diagrama de Venn para la probabilidad condicional.

Si se compara la probabilidad condicional  $P(E|F) = \frac{2}{3}$  con la probabilidad “no condicional”  $P(E) = \frac{1}{2}$ , se observa que  $P(E|F) > P(E)$ . Esto significa que si se sabe que ha ocurrido un número mayor que 3, *aumenta* la probabilidad de que ocurra un número par. Sin embargo, existen situaciones en las que las probabilidades condicional y no condicional son iguales. Esto se analiza en la siguiente sección.

En resumen, se tiene la siguiente generalización de la ecuación (1):

#### Fórmula para una probabilidad condicional

Si  $E$  y  $F$  son eventos asociados con un espacio muestral equiprobable y  $F \neq \emptyset$ , entonces

$$P(E|F) = \frac{\#(E \cap F)}{\#(F)} \quad (2)$$

Como  $E \cap F$  y  $E' \cap F$  son eventos separados cuya unión es  $F$ , es fácil ver que

$$P(E|F) + P(E'|F) = 1$$

de donde se obtiene

$$P(E'|F) = 1 - P(E|F)$$

#### EJEMPLO 1 Caramelos en una bolsa

Una bolsa contiene dos caramelos azules (digamos  $A_1$  y  $A_2$ ) y dos caramelos blancos ( $B_1$  y  $B_2$ ). Si se toman dos caramelos de manera aleatoria de la bolsa, sin reemplazo, encuentre la probabilidad de que el segundo caramelo escogido sea blanco, dado que el primero es azul. (Vea la figura 8.15).

**Solución:** Para el espacio muestral equiprobable, se toman todos los pares ordenados, como  $(A_1, B_2)$  y  $(B_2, A_1)$ , cuyos componentes indican los caramelos seleccionados en el primero y segundo turno. Sean  $A$  y  $B$  los eventos

$$A = \{\text{azul en el primer turno}\}$$

$$B = \{\text{blanco en el segundo turno}\}$$



Selección de dos caramelos sin reemplazo.

**FIGURA 8.15** Dos caramelos blancos y dos azules en una bolsa.

Se tiene interés en

$$P(B|A) = \frac{\#(B \cap A)}{\#(A)}$$

El espacio muestral reducido consiste en todos los resultados en los que se selecciona primero un caramelo azul:

$$A = \{(A_1, A_2), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_2, A_1), (A_2, B_1), (A_2, B_2)\}$$

El evento  $B \cap A$  consiste en los resultados en  $A$  para los cuales el segundo caramelo es blanco:

$$B \cap A = \{(A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_2, B_1), (A_2, B_2)\}$$

Como  $\#(A) = 6$  y  $\#(B \cap A) = 4$ , se tiene

$$P(B|A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

En el ejemplo 1 se mostró lo eficiente que puede ser es el uso de un espacio muestral reducido. Observe que no fue necesario enumerar todos los resultados en el espacio muestral original ni en el evento  $B$ . Aunque se enumeraron los resultados en  $A$ , se podría haber encontrado  $\#(A)$  con métodos de conteo:

Existen dos formas en las que el primer caramelo puede ser azul, y hay tres posibilidades para el segundo caramelo, que puede ser el caramelo azul restante o uno de los dos caramelos blancos. Así  $\#(A) = 2 \cdot 3 = 6$ .

El número  $\#(B \cap A)$  también podría encontrarse por medio de los métodos de conteo.

### EJEMPLO 2 Encuesta

Durante una encuesta de 150 personas, se preguntó acerca de su estado civil y la opinión acerca de la promulgación de un acuerdo para construir una piscina en la comunidad. Los resultados se resumen en la tabla 8.6. Si se selecciona una de estas personas de manera aleatoria, encuentre cada una de las siguientes probabilidades condicionales.

**TABLA 8.6** Encuesta

	A favor ( $F$ )	En contra ( $F'$ )	Total
Casado ( $M$ )	60	20	80
Soltero ( $M'$ )	40	30	70
Total	100	50	150

- a. La probabilidad de que la persona esté a favor del acuerdo, dado que la persona es casada.

**Solución:** Se tiene interés en  $P(F|M)$ . El espacio muestral reducido ( $M$ ) contiene 80 personas casadas, de las cuales 60 están a favor de la emisión del bono. Así,

$$P(F|M) = \frac{\#(F \cap M)}{\#(M)} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$$

b. *La probabilidad de que la persona esté casada, dado que está a favor del acuerdo.*

**Solución:** Se desea encontrar  $P(M|F)$ . El espacio muestral reducido ( $F$ ) contiene 100 personas que están a favor de la emisión del bono. De éstas, 60 son casadas. Por lo tanto,

$$P(M|F) = \frac{\#(M \cap F)}{\#(F)} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

Observe que aquí  $P(M|F) \neq P(F|M)$ . La igualdad es posible precisamente si  $P(M) = P(F)$ , suponga que  $P(M)$ ,  $P(F)$  y  $P(M \cap F)$  no son iguales a cero.



Otro método para calcular una probabilidad condicional es por medio de una fórmula que involucra *probabilidades* con respecto al espacio muestral *original*. Antes de establecer la fórmula, se le proporcionará al lector alguna motivación de manera que esto le parezca razonable. (El análisis que sigue está simplificado en el sentido de que se hacen algunos supuestos de manera tácita).

Para considerar  $P(E|F)$ , se supondrá que el evento  $F$  tiene una probabilidad  $P(F)$  y el evento  $E \cap F$  tiene una probabilidad  $P(E \cap F)$ . El experimento asociado con este problema se repite  $n$  veces, donde  $n$  es muy grande. Entonces, el número de ensayos en los que  $F$  ocurre es aproximadamente  $n \cdot P(F)$ . De éstos, el número de ensayos en los que *también* ocurre  $E$  es de aproximadamente  $n \cdot P(E \cap F)$ . Para una  $n$  grande, se estima  $P(E|F)$  mediante la frecuencia relativa del número de ocurrencias de  $E \cap F$  con respecto al número de ocurrencias de  $F$ , que es aproximadamente

$$\frac{n \cdot P(E \cap F)}{n \cdot P(F)} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Este resultado sugiere la fórmula que aparece en la siguiente definición formal de probabilidad condicional. (La definición se aplica para cualquier espacio muestral, equiprobable o no).

### DEFINICIÓN

La *probabilidad condicional* de un evento  $E$ , dado que ha ocurrido el evento  $F$ , se denota  $P(E|F)$  y se define mediante

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \quad \text{si } P(F) \neq 0 \tag{3}$$

De manera similar,

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} \quad \text{si } P(E) \neq 0 \tag{4}$$

Se enfatiza que **las probabilidades en las ecuaciones (3) y (4) son con respecto al espacio muestral original**. Aquí no se trata directamente con un espacio muestral reducido.

### EJEMPLO 3 Control de calidad

Después de la corrida de producción inicial de un nuevo estilo de escritorio de metal, un técnico en control de calidad encontró que 40% de los productos tienen un problema de alineación y 10% tienen tanto un defecto en la pintura, como un problema de alineación. Si se selecciona en forma aleatoria un escritorio de esta corrida, y éste tiene un problema de alineación, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un defecto en la pintura?

**Solución:** Sean  $A$  y  $D$  los eventos

$$\begin{aligned} A &= \{\text{problema de alineación}\} \\ D &= \{\text{defecto en la pintura}\} \end{aligned}$$

Se tiene interés en  $P(D|A)$ , la probabilidad de un defecto en la pintura dado un problema de alineación. De los datos dados, se tiene  $P(A) = 0.4$  y  $P(D \cap A) = 0.1$ . Si se sustituye en la ecuación (3) se tiene

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4}$$

Es conveniente usar la ecuación (3) para resolver este problema, porque se dan probabilidades en lugar de información acerca del espacio muestral.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7 

#### EJEMPLO 4 Géneros de descendencia

*Si una familia tiene dos hijos, encuentre la probabilidad de que ambos sean niños, dado que uno de los hijos es niño. Suponga que un hijo de cualquier género es igualmente posible y que, por ejemplo, tener primero una niña y después un niño es tan probable como tener primero un niño y después una niña.*

**Solución:** Sean  $E$  y  $F$  los eventos

$$\begin{aligned} E &= \{\text{ambos hijos son niños}\} \\ F &= \{\text{al menos uno de los hijos es un niño}\} \end{aligned}$$

Se tiene interés en  $P(E|F)$ . Considere que la letra B denota a “niño” y G denota una “niña” y utilice el espacio muestral equiprobable

$$S = \{\text{BB, BG, GG, GB}\}$$

donde, en cada resultado, el orden de las letras indica el orden en el que nacieron los hijos. Así,

$$E = \{\text{BB}\} \quad F = \{\text{BB, BG, GB}\} \quad \text{y} \quad E \cap F = \{\text{BB}\}$$

A partir de la ecuación (3)

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

De manera alternativa, este problema puede resolverse con el uso del espacio muestral reducido  $F$ :

$$P(E|F) = \frac{\#(E \cap F)}{\#(F)} = \frac{1}{3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9 

Las ecuaciones (3) y (4) pueden reescribirse en términos de productos al eliminar fracciones. Esto da,

$$P(E \cap F) = P(F)P(E|F)$$

y

$$P(F \cap E) = P(E)P(F|E)$$

Por la ley conmutativa,  $P(E \cap F) = P(F \cap E)$ , entonces se pueden combinar las ecuaciones para obtener una ley importante:

#### Ley general de la multiplicación

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= P(E)P(F|E) \\ &= P(F)P(E|F) \end{aligned} \tag{5}$$

La ley general de la multiplicación establece que si se tienen dos eventos, la probabilidad de que *ambos* ocurran es igual a la probabilidad de que uno de ellos ocurra, multiplicada por la probabilidad condicional de que el otro ocurra, dado que ha ocurrido el primero.

### EJEMPLO 5 Publicidad

*Una compañía de hardware de computadora coloca un anuncio de su nuevo módem en una popular revista de computación. La compañía cree que el anuncio será leído por 32% de los lectores de la revista, y que 2% de quienes lean el anuncio comprarán el módem. Suponga que esto es cierto y encuentre la probabilidad de que un lector de la revista lea el anuncio y compre el módem.*

**Solución:** Considere que  $L$  denota el evento “lee el anuncio” y  $C$  denota “compra el módem”, se tiene interés en  $P(L \cap C)$ . Se tiene que  $P(L) = 0.32$ . El hecho de que 2% de los lectores del anuncio comprarán el módem puede escribirse  $P(C|L) = 0.02$ . Por la ley general de la multiplicación, ecuación (5),

$$P(L \cap C) = P(L)P(C|L) = (0.32)(0.02) = 0.0064$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11 

### Procesos estocásticos

La ley general de la multiplicación también se llama **ley de la probabilidad compuesta**. La razón es que resulta extremadamente útil cuando se aplica a un experimento que puede expresarse como una *sucesión* (o una composición) de dos o más experimentos distintos, llamados **ensayos** o **etapas**. El experimento original se llama un **experimento compuesto**, y la sucesión de ensayos se llama un **proceso estocástico**. Las probabilidades de los eventos asociados con cada ensayo (después del primero) podrían depender de los eventos ocurridos en los ensayos previos, de manera que son probabilidades condicionales.

Cuando se analiza un experimento compuesto, es extremadamente útil un diagrama de árbol para mantener el rastro de los resultados posibles en cada etapa. Una ruta completa desde el inicio hasta la punta del árbol proporciona un resultado del experimento.

La noción de un experimento compuesto se discute en detalle en el siguiente ejemplo. Léalo con cuidado. Aunque el análisis es largo, porque se busca desarrollar una nueva idea, el cálculo real toma poco tiempo.

### EJEMPLO 6 Cartas y árbol de probabilidad

*Se escogen dos cartas sin reemplazo de una baraja ordinaria de cartas. Encuentre la probabilidad de que la segunda carta sea roja.*

**Solución:** El experimento de escoger dos cartas sin reemplazo puede pensarse como un experimento compuesto consistente en una sucesión de dos ensayos: el primero consiste en seleccionar una carta y el segundo consiste en escoger una segunda carta después de que se ha tomado la primera. El primer ensayo tiene dos resultados posibles:

$$R_1 = \{\text{carta roja}\} \text{ o } B_1 = \{\text{carta negra}\}$$

(Aquí el subíndice “1” se refiere al primer ensayo). En la figura 8.16, estos resultados se representan mediante dos ramas en el primer nivel del árbol. Tenga en mente que estos resultados son mutuamente excluyentes, y son *exhaustivos* en el sentido de que no hay otras posibilidades. Como hay 26 cartas de cada color, se tiene

$$P(R_1) = \frac{26}{52} \quad \text{y} \quad P(B_1) = \frac{26}{52}$$

Estas probabilidades *no condicionales* se escriben a lo largo de las ramas correspondientes. El nombre apropiado de la figura 8.16 es **árbol de probabilidad**.

Ahora, si se obtiene una carta roja en el primer ensayo, entonces, de las 51 cartas restantes 25 son rojas y 26 son negras. La carta escogida en el segundo ensayo puede

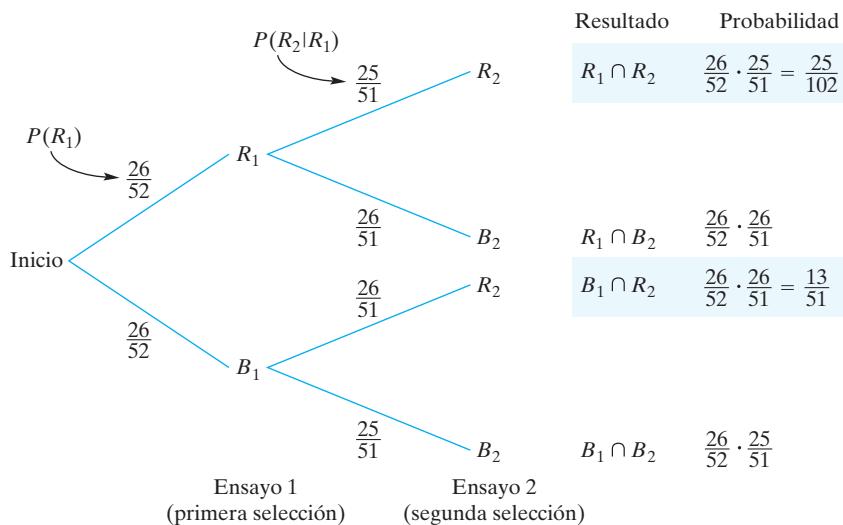


FIGURA 8.16 Árbol de probabilidad para el experimento compuesto.

ser roja ( $R_2$ ) o negra ( $B_2$ ). Así, en el árbol, la horquilla en  $R_1$  tiene dos ramas: roja y negra. Las probabilidades *condicionales*  $P(R_2|R_1) = \frac{25}{51}$  y  $P(B_2|R_1) = \frac{26}{51}$  se colocan a lo largo de estas ramas. De manera similar, si se obtiene una carta negra en el primer ensayo, entonces, de las 51 cartas restantes, 26 son rojas y 25 son negras. Por lo tanto,  $P(R_2|B_1) = \frac{26}{51}$  y  $P(B_2|B_1) = \frac{25}{51}$  como se indica a lo largo de las dos ramas que salen de  $B_1$ . El árbol completo tiene dos niveles (uno por cada ensayo) y cuatro rutas (una por cada uno de los eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos del experimento compuesto).

Observe que la suma de las probabilidades a lo largo de las ramas del vértice “Inicio” a  $R_1$  y  $B_1$  es 1.

$$\frac{26}{52} + \frac{26}{52} = 1$$

En general, la suma de las probabilidades a lo largo de todas las ramas que salen de un solo vértice hacia un resultado de ese ensayo debe ser igual a 1. Así, para el vértice en  $R_1$ ,

$$\frac{25}{51} + \frac{26}{51} = 1$$

y para el vértice en  $B_1$ ,

$$\frac{26}{51} + \frac{25}{51} = 1$$

Ahora, considere la ruta del extremo superior. Representa el evento “roja en la primera selección y roja en la segunda”. Por la ley general de la multiplicación,

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} = \frac{25}{102}$$

Esto es, *la probabilidad de un evento se obtiene al multiplicar las probabilidades en las ramas de la ruta para ese evento*. Las probabilidades para las otras tres rutas también se indican en el árbol.

De vuelta a la pregunta original, se observa que dos rutas dan una carta roja en la segunda selección, a saber, las rutas para  $R_1 \cap R_2$  y  $B_1 \cap R_2$ . Por lo tanto, el evento “segunda carta roja” es la unión de dos eventos mutuamente excluyentes. Por la ley de la suma, la probabilidad del evento es la suma de las probabilidades para las dos rutas:

$$P(R_2) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} + \frac{26}{52} \cdot \frac{26}{51} = \frac{25}{102} + \frac{13}{51} = \frac{1}{2}$$

Observe lo fácil que fue encontrar  $P(R_2)$  con un árbol de probabilidad.

A continuación se presenta un resumen de lo que se ha realizado:

$$\begin{aligned} R_2 &= (R_1 \cap R_2) \cup (B_1 \cap R_2) \\ P(R_2) &= P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2) \\ &= P(R_1)P(R_2|R_1) + P(B_1)P(R_2|B_1) \\ &= \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} + \frac{26}{52} \cdot \frac{26}{51} = \frac{25}{102} + \frac{13}{51} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29



### EJEMPLO 7 Cartas

Se escogen dos cartas sin reemplazo de una baraja ordinaria de cartas. Encuentre la probabilidad de que ambas sean rojas.

**Solución:** Considere de nuevo el árbol de probabilidad de la figura 8.16. Sólo una ruta da una carta roja en ambas selecciones, a saber, la de  $R_1 \cap R_2$ . Así, al multiplicar las probabilidades a lo largo de esta ruta se obtiene la probabilidad deseada:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} = \frac{25}{102}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 33



### EJEMPLO 8 Circuitos de computadora defectuosos

Una compañía usa un circuito de computadora en el ensamblado de cada unidad de un producto. Los circuitos se compran a los proveedores A, B y C y se toman de manera aleatoria para ensamblar una unidad. Veinte por ciento vienen de A, 30% de B y los restantes provienen de C. La compañía cree que la probabilidad de que un circuito de A resulte ser defectuoso en las primeras 24 horas de uso es 0.03, y las probabilidades correspondientes para B y C son 0.04 y 0.01, respectivamente. Si una unidad ensamblada se elige de manera aleatoria y se prueba durante 24 horas continuas, ¿cuál es la probabilidad de que el circuito sea defectuoso?

**Solución:** En este problema, hay una sucesión de dos ensayos: la selección de un circuito (A, B, C) y después probar el circuito seleccionado [defectuoso (D) o no defectuoso ( $D'$ )]. Se proporcionan las probabilidades no condicionales

$$P(A) = 0.2 \quad y \quad P(B) = 0.3$$

Como A, B y C son mutuamente excluyentes y exhaustivos,

$$P(C) = 1 - (0.2 + 0.3) = 0.5$$

Del planteamiento del problema, también se tienen las probabilidades condicionales

$$P(D|A) = 0.03 \quad P(D|B) = 0.04 \quad P(D|C) = 0.01$$

Se desea encontrar  $P(D)$ . Para comenzar, se construye el árbol de probabilidad de dos niveles que se muestra en la figura 8.17. Se observa que las rutas que dan un circuito defectuoso son aquéllas de los eventos

$$A \cap D \quad B \cap D \quad C \cap D$$

Como estos eventos son mutuamente excluyentes,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ &= P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) \\ &= (0.2)(0.03) + (0.3)(0.04) + (0.5)(0.01) = 0.023 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 47



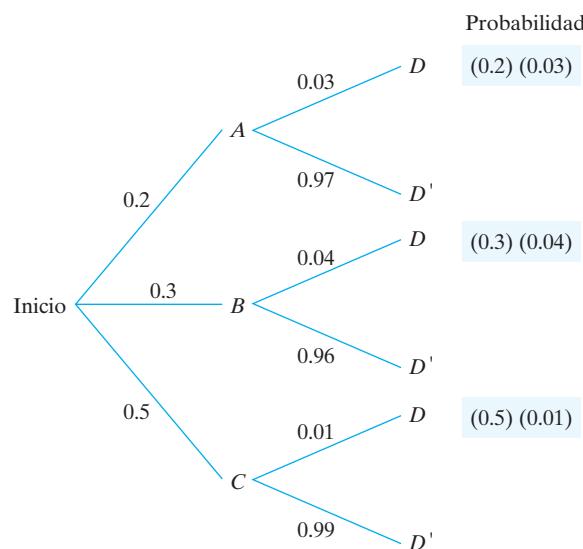


FIGURA 8.17 Árbol de probabilidad para el ejemplo 8.

La ley general de la multiplicación puede extenderse de manera que se aplique a más de dos eventos. Para  $n$  eventos, se tiene

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n)$$

$$= P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2) \cdots P(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1})$$

(Se supone que todas las probabilidades condicionales están definidas). En otras palabras, la probabilidad de que dos o más eventos ocurran todos, es igual a la probabilidad de que uno de ellos ocurra multiplicado por la probabilidad condicional de que ocurra un segundo evento dado que el primero ya ocurrió, multiplicado por la probabilidad condicional de que ocurra un tercer evento dado que ya ocurrieron los primeros dos, y así sucesivamente. Por ejemplo, en la forma del ejemplo 7, la probabilidad de escoger sin reemplazo tres cartas de un mazo es

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)P(R_2|R_1)P(R_3|R_1 \cap R_2) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50}$$

### EJEMPLO 9 Caramelos en una bolsa

*La bolsa I contiene un caramelo negro y dos rojos, y la bolsa II contiene un caramelo rosa. (Vea la figura 8.18). Una bolsa se selecciona al azar. Después se escoge de manera aleatoria un caramelo de la bolsa seleccionada y se coloca en la otra bolsa. Después se toma de manera aleatoria un caramelo de esta última bolsa. Encuentre la probabilidad de que el caramelo sea rosa.*

**Solución:** Éste es un experimento compuesto con tres ensayos:

- Se selecciona una bolsa
- Se escoge un caramelo de la bolsa
- Se pone el caramelo en la otra bolsa y, de ésta, se toma un caramelo

Se desea encontrar  $P(\text{caramelo rosa en la segunda selección})$ . Se analiza la situación construyendo un árbol de probabilidad de tres niveles. (Vea la figura 8.19). El primer ensayo tiene dos resultados posibles igualmente probables, “Bolsa I” y “Bolsa II”, de manera que cada uno tiene probabilidad de  $\frac{1}{2}$ .

Si se selecciona la bolsa I, el segundo ensayo tiene dos resultados posibles, “rojo” ( $R$ ) o “negro” ( $B$ ), con probabilidades condicionales  $P(R|I) = \frac{2}{3}$  y  $P(B|I) = \frac{1}{3}$ . Si se seleccionó la bolsa II, hay un resultado posible, “rosa” ( $P$ ), de manera que  $P(P|II) = 1$ . Así, el segundo nivel del árbol tiene tres ramas.

Ahora se pasa al tercer ensayo. Si se seleccionó la bolsa I y se tomó un caramelo rojo de ella y se colocó en la bolsa II, entonces la bolsa II contiene un caramelo rojo y

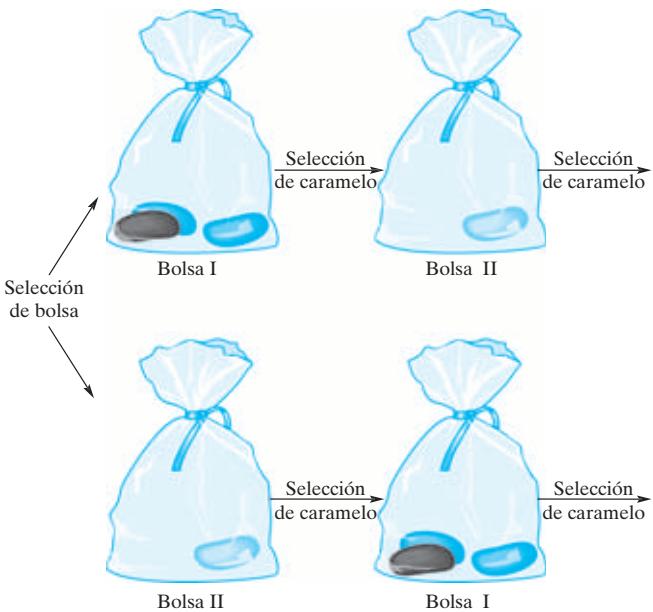


FIGURA 8.18 Selecciones de caramelo de bolsas.

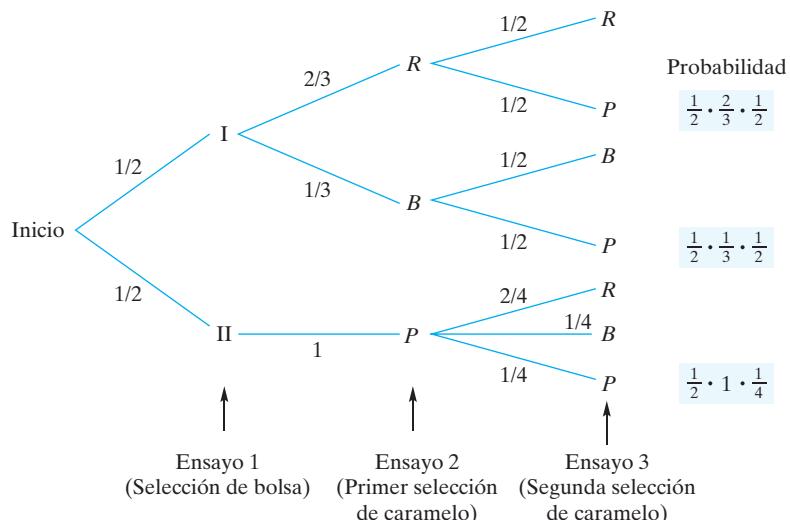


FIGURA 8.19 Árbol de probabilidad de tres niveles.

uno rosa. Por lo tanto, al final del segundo ensayo, la horquilla en el vértice tiene dos ramas,  $R$  y  $P$ , con probabilidades condicionales

$$P(R|I \cap R) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(P|I \cap R) = \frac{1}{2}$$

De manera similar, el árbol muestra las dos posibilidades si en un inicio se seleccionó la bolsa I y se colocó un caramelo negro en la bolsa II. Ahora, si se seleccionó la bolsa II en el primer ensayo, entonces se tomó el caramelo rosa y se colocó en la bolsa I, entonces la bolsa I contiene dos caramelos rojos, uno negro y uno rosa. Así, la horquilla en  $P$  tiene tres ramas, una con probabilidad de  $\frac{2}{4}$  y dos con probabilidad de  $\frac{1}{4}$ .

Se observa que hay tres rutas que dan un caramelo rosa en el tercer ensayo, entonces para cada una, se multiplican las probabilidades a lo largo de sus ramas. Por ejemplo, la segunda ruta de la rama superior representa  $I \rightarrow R \rightarrow P$ ; la probabilidad de este evento es

$$P(I \cap R \cap P) = P(I)P(R|I)P(P|I \cap R)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

Al sumar las probabilidades para las tres rutas se obtiene

$$\begin{aligned} P(\text{caramelo rosa en la segunda selección}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 43 

## Problemas 8.5

- \*1. Dado el espacio muestral equiprobable:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

y los eventos

$$E = \{1, 3\}$$

$$F = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

$$G = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

encuentre las siguientes probabilidades:

- |                     |               |
|---------------------|---------------|
| (a) $P(E F)$        | (b) $P(E' F)$ |
| (c) $P(E F')$       | (d) $P(F E)$  |
| (e) $P(E F \cap G)$ |               |

2. Dado el espacio muestral equiprobable:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

y los eventos

$$E = \{1, 2\}$$

$$F = \{3, 4\}$$

$$G = \{1, 2, 3\}$$

encuentre las siguientes probabilidades:

- |               |                |
|---------------|----------------|
| (a) $P(E)$    | (b) $P(E F)$   |
| (c) $P(E G)$  | (d) $P(G E)$   |
| (e) $P(G F')$ | (f) $P(E' F')$ |

3. Si  $P(E) > 0$ , encuentre  $P(E|E)$ .

4. Si  $P(E) > 0$ , encuentre  $P(\emptyset|E)$ .

5. Si  $P(E|F) = 0.57$ , encuentre  $P(E'|F)$ .

6. Si  $F$  y  $G$  son eventos mutuamente excluyentes con probabilidades positivas, encuentre  $P(F|G)$ .

- \*7. Si  $P(E) = \frac{1}{4}$ ,  $P(F) = \frac{1}{3}$  y  $P(E \cap F) = \frac{1}{6}$ , encuentre las siguientes probabilidades:

- |              |              |
|--------------|--------------|
| (a) $P(E F)$ | (b) $P(F E)$ |
|--------------|--------------|

8. Si  $P(E) = \frac{1}{4}$ ,  $P(F) = \frac{1}{3}$  y  $P(E|F) = \frac{3}{4}$ , encuentre  $P(E \cup F)$ . [Una pista: Use la ley de la suma para encontrar  $P(E \cup F)$ .]

- \*9. Si  $P(E) = \frac{1}{4}$ ,  $P(E \cup F) = \frac{7}{12}$  y  $P(E \cap F) = \frac{1}{6}$ , encuentre las siguientes probabilidades:

- |              |
|--------------|
| (a) $P(F E)$ |
|--------------|

- |            |
|------------|
| (b) $P(F)$ |
|------------|

- |              |
|--------------|
| (c) $P(E F)$ |
|--------------|

- |  |
|--|
| (d) $P(E F')$ [Una pista: Encuentre $P(E \cap F')$ con el uso de la identidad $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F')$ .] |
|--|

10. Si  $P(E) = \frac{3}{5}$ ,  $P(F) = \frac{3}{10}$  y  $P(E \cup F) = \frac{7}{10}$ , encuentre  $P(E|F)$ .

- \*11. **Polilla gitana** Debido a que tres grandes áreas sumamente arboladas se han infestado con polilla gitana, se está considerando el rociado aéreo para destruir las larvas. Se realizó un sondeo con 200 residentes de la región para determinar si

están a favor o no. Los datos resultantes se muestran en la tabla 8.7. Suponga que se selecciona al azar un residente. Sea  $I$  el evento en que “el residente es del área I”, y así sucesivamente. Encuentre las siguientes probabilidades:

- |                |                |
|----------------|----------------|
| (a) $P(F)$     | (b) $P(F II)$  |
| (c) $P(O I)$   | (d) $P(III)$   |
| (e) $P(III O)$ | (f) $P(II N')$ |

**TABLA 8.7**

	Área I	Área II	Área III	Total
A favor ( $F$ )	46	35	44	125
Opuesto ( $O$ )	22	15	10	47
No dio opinión ( $N$ )	10	8	10	28
Total	78	58	64	200

12. **Selección de universidad e ingreso familiar** Un sondeo de 175 estudiantes resultó en los datos que se muestran en la tabla 8.8, los cuales muestran el tipo de universidad al que asisten los estudiantes y el nivel de ingresos de su familia. Suponga que se selecciona al azar un estudiante del sondeo.

- |  |
|--|
| (a) Encuentre la probabilidad de que el estudiante asista a una universidad pública, dado que viene de una familia de ingresos medios. |
| (b) Encuentre la probabilidad de que el estudiante sea de una familia de altos ingresos, dado que asiste a una universidad privada.    |
| (c) Si el estudiante viene de una familia de altos ingresos, encuentre la probabilidad de que asista a una universidad privada.        |
| (d) Encuentre la probabilidad de que el estudiante asista a una universidad pública o venga de una familia de bajos ingresos.          |

**TABLA 8.8**

Ingresos	Universidad		Total
	Privada	Pública	
Altos	14	11	25
Medios	25	55	80
Bajos	10	60	70
Total	49	126	175

13. **Preferencia de refresco** Se realizó un sondeo entre bebedores de refresco de cola para ver cuál de las dos marcas más populares preferían. Se encontró que a 45% les gustaba la marca A, 40% preferían la marca B y a 20% les gustaban ambas.

Suponga que se selecciona una persona del sondeo de manera aleatoria.

- (a) Encuentre la probabilidad de que a la persona le guste la marca A, dado que le gusta la marca B.
- (b) Encuentre la probabilidad de que a la persona le guste la marca B, dado que le gusta la marca A.

- 14. Control de calidad** De los reproductores de MP3 producidos por una compañía famosa, 19% tienen auriculares defectuosos y 13% tienen auriculares defectuosos y pantallas rayadas. Si se selecciona al azar un reproductor de MP3 de un embarque y el aparato tiene auriculares defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la pantalla rayada?

*En los problemas 15 y 16 suponga que es igualmente posible un hijo de cualquier género y que, por ejemplo, tener a una niña primero y después a un niño es tan probable como tener a un niño primero y a una niña después.*

- 15. Género de los hijos** Si una familia tiene dos hijos, ¿cuál es la probabilidad de que uno de ellos sea niña, dado que al menos uno de ellos es niño?

- 16. Géneros de los hijos** Si una familia tiene tres hijos, encuentre lo siguiente.

- (a) La probabilidad de que tenga dos niñas, dado que al menos uno de los hijos es un niño.
- (b) La probabilidad de que tenga al menos dos niñas, dado que el hijo mayor es una niña.

- 17. Lanzamiento de moneda** Si se lanza una moneda balanceada tres veces de manera sucesiva, encuentre lo siguiente.

- (a) La probabilidad de obtener exactamente dos cruces, dado que el segundo lanzamiento es una cruz.
- (b) La probabilidad de obtener exactamente dos cruces dado que el segundo lanzamiento es una cara.

- 18. Lanzamiento de moneda** Si se lanza una moneda balanceada cuatro veces de manera sucesiva, encuentre las posibilidades de obtener cuatro cruces, dado que el primer lanzamiento es una cruz.

- 19. Lanzamiento de dado** Si se lanza un dado balanceado, encuentre la probabilidad de obtener un número menor que 4, dado que el número es impar.

- 20. Cartas** Si se escoge una carta al azar de una baraja ordinaria, encuentre la probabilidad de obtener una carta con figura, dado que la carta es roja.

- 21. Lanzamiento de dados** Si se lanzan dos dados, encuentre la probabilidad de que ocurran dos 1, dado que al menos uno de los dados muestra un 1.

- 22. Lanzamiento de dados** Si se lanzan dos dados balanceados, uno verde y otro rojo, encuentre la probabilidad de que la suma de resultados sea mayor que 9, dado que el dado rojo muestra un 5.

- 23. Lanzamiento de dados** Si se lanzan dos dados balanceados, uno verde y otro rojo, encuentre la probabilidad de obtener un total de 7, dado que el dado verde muestra un número par.

- 24. Lanzamiento de dados** Un dado balanceado se lanza dos veces de manera sucesiva.

- (a) Encuentre la probabilidad de que la suma sea 6, dado que el segundo lanzamiento no es 2 ni 4.
- (b) Encuentre la probabilidad de que la suma sea 6 y que el segundo lanzamiento no sea 2 ni 4.

- 25. Lanzamiento de dado** Si se lanza un dado balanceado dos veces de manera sucesiva, encuentre la probabilidad de obtener un total mayor que 7, dado que el primer lanzamiento es mayor que 3.

- 26. Moneda y dado** Si se lanzan una moneda y un dado balanceados, encuentre la probabilidad de que la moneda muestre una cruz, dado que el número en el dado es impar.

- 27. Cartas** Si se toma una carta de manera aleatoria de una baraja de 52 cartas, encuentre la probabilidad de que sea un rey, dado que es una carta de corazones.

- 28. Cartas** Si se toma una carta de manera aleatoria de una baraja de 52 cartas, encuentre la probabilidad de que sea de corazones, dado que es una carta con figura (sota, reina o rey).

- \*29. Cartas** Si se toman dos cartas de manera aleatoria y sin reemplazo de una baraja ordinaria, encuentre la probabilidad de la segunda carta no sea una carta con figura, dado que la primera carta es una carta con figura (sota, reina o rey).

*En los problemas 30 a 35, considere que el experimento es compuesto.*

- 30. Cartas** Si se toman dos cartas de manera aleatoria de una baraja ordinaria, encuentre la probabilidad de que ambas sean cartas con figura si

- (a) las cartas se seleccionan sin reemplazo.
- (b) las cartas se seleccionan con reemplazo.

- 31. Cartas** Si tres cartas se seleccionan de manera aleatoria y sin reemplazo de una baraja ordinaria, encuentre la probabilidad de obtener un rey, una reina y una sota en ese orden.

- 32. Cartas** Si se seleccionan tres cartas de manera aleatoria y sin reemplazo de una baraja ordinaria, encuentre la probabilidad de obtener el as de espadas, el as de corazones y el as de diamantes en ese orden.

- \*33. Cartas** Si se seleccionan tres cartas de manera aleatoria y sin reemplazo de una baraja ordinaria, encuentre la probabilidad de que las tres sean sotas.

- 34. Cartas** Si se seleccionan dos cartas de manera aleatoria y sin reemplazo de una baraja ordinaria, encuentre la probabilidad de que la segunda carta sea de corazones.

- 35. Cartas** Si se seleccionan dos cartas de manera aleatoria y sin reemplazo de una baraja ordinaria, encuentre la probabilidad de obtener dos cartas de diamantes dado que la primera de ellas es roja.

- 36. Llamada-despertador** Barbara Smith, una representante de ventas duerme en un hotel y tiene una cita para desayunar con un cliente importante a la mañana siguiente. Pide en la recepción del hotel que le hagan una llamada para despertar a las 7 A.M. con el propósito de estar lista para la reunión. La probabilidad de que le hagan la llamada es 0.9. Si recibe la llamada, la probabilidad de que esté a tiempo en la reunión es 0.9. Si no recibe la llamada, la probabilidad de que esté a tiempo en la reunión es 0.4. Encuentre la probabilidad de que llegue a tiempo a la reunión.

- 37. Sondeo a contribuyentes** En cierto distrito escolar, se envió un cuestionario a todos los contribuyentes propietarios para preguntarles acerca de la construcción de una escuela secundaria. De aquellos que respondieron, 60% estuvieron a favor de la construcción, 30% se oponían y 10% no dieron su opinión. Un análisis posterior de los datos en relación con el área donde viven los contribuyentes dio los resultados de la tabla 8.9.

**TABLA 8.9**

	Urbana	Suburbana
A favor	45%	55%
En contra	55%	45%
Sin opinión	35%	65%

- (a)** Si se selecciona uno de los contribuyentes del sondeo de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un área urbana?
- (b)** Si uno de los contribuyentes del sondeo se selecciona de manera aleatoria, use el resultado del inciso (a) para encontrar la probabilidad de que el contribuyente esté a favor de la construcción de la escuela, dado que esta persona vive en un área urbana.
- 38. Mercadotecnia** Una agencia de viajes tiene un teléfono computarizado que selecciona números telefónicos de manera aleatoria para anunciar viajes espaciales suborbitales. El teléfono marca automáticamente el número seleccionado y reproduce un mensaje pregrabado. La experiencia ha mostrado que 2% de quienes reciben la llamada muestran interés y contactan a la agencia. Sin embargo, de éstos, sólo 14% en realidad compran un viaje.
- (a)** Encuentre la probabilidad de que una persona que recibió la llamada contacte a la agencia y compre un viaje.
- (b)** Si 100 000 personas reciben la llamada, ¿cuántas se espera que contacten a la agencia y compren un viaje?
- 39. Conejos en un sombrero de copa** Un sombrero de copa contiene tres conejos amarillos y dos rojos.
- (a)** Si se sacan dos conejos de manera aleatoria y sin reemplazo del sombrero, encuentre la probabilidad de que el segundo conejo que se saque sea amarillo, dado que el primero es rojo.
- (b)** Repita el inciso (a), pero suponga que se reemplaza el primer conejo antes de sacar el segundo.
- 40. Caramelos en una bolsa** La bolsa 1 contiene cuatro caramelos verdes y tres rojos, y la bolsa 2 contiene tres caramelos verdes, uno blanco y dos rojos. Se toma un caramelo de manera aleatoria de la bolsa 1 y se coloca en la bolsa 2. Si después se toma al azar un caramelo de la bolsa 2, encuentre la probabilidad de que el caramelo sea verde.
- 41. Pelotas en una caja** La caja 1 contiene tres pelotas rojas y dos blancas. La caja 2 contiene dos pelotas rojas y dos blancas. Se escoge una caja de manera aleatoria y después se selecciona al azar una pelota de esa caja. ¿Cuál es la probabilidad de que la pelota sea blanca?
- 42. Pelotas en una caja** La caja 1 contiene dos pelotas rojas y tres blancas. La caja 2 contiene tres pelotas rojas y cuatro blancas. La caja 3 contiene dos pelotas rojas, dos blancas y dos verdes. Se escoge una caja de manera aleatoria y después se selecciona al azar una pelota de esa caja.
- (a)** Encuentre la probabilidad de que la pelota sea blanca.
- (b)** Encuentre la probabilidad de que la pelota sea roja.
- (c)** Encuentre la probabilidad de que la pelota sea verde.
- \*43. Caramelos en una bolsa** La bolsa 1 contiene un caramelo verde y otro rojo, y la bolsa 2 contiene un caramelo blanco y otro rojo. Se selecciona una bolsa de manera aleatoria. Luego se escoge al azar un caramelo de dicha bolsa y se coloca en la otra. Después se selecciona en forma aleatoria un caramelo de esta última bolsa. Encuentre la probabilidad de que este caramelo sea blanco.
- 44. Baterías descargadas** Durante el paso del huracán Juan por Halifax, se apagaron las luces de la señora Wood y, en la oscuridad de su cocina, ella tomó 4 baterías para su lámpara de un cajón. En el cajón había 10 baterías, pero 5 de ellas estaban descargadas (la señora Wood debió haberlas desechar). Encuentre la probabilidad de que las 4 baterías que tomó del cajón estén descargadas.
- 45. Control de calidad** Un productor de refrescos requiere el uso de un dispensador para llenar botellas en cada una de sus dos líneas de producto. La línea Mountain Spring produce 20 000 botellas al día y la línea Doctor Salt produce 40 000 botellas diarias. Durante un tiempo se ha encontrado que el dispensador de Mountain Spring no llena por completo el 1% de sus botellas, mientras que el dispensador de Doctor Salt no llena por completo 3% de sus botellas. Al final del día, se seleccionó una botella de manera aleatoria de la producción total. Encuentre la probabilidad de que la botella no esté completamente llena.
- 46. Programa de juegos** El conductor de un programa de juegos por TV presenta la siguiente situación a un concursante. Sobre una mesa hay tres cajas idénticas. Una de ellas contiene dos sobres idénticos. En uno hay un cheque de \$5000 y en el otro hay un cheque por \$1. Otra caja contiene dos sobres con un cheque de \$5000 en cada uno y seis sobres con un cheque de \$1 en cada uno. La caja restante contiene un sobre con un cheque de \$5000 adentro y cinco sobres con un cheque de \$1 en cada uno. Si el concursante debe seleccionar una caja de manera aleatoria y después escoger al azar un sobre de esa caja, encuentre la probabilidad de que adentro haya un cheque por \$5000.
- \*47. Control de calidad** Una compañía usa un circuito de computadora al ensamblar cada unidad de un producto. Los circuitos se compran a los proveedores A, B y C; y se toman de manera aleatoria para ensamblar una unidad. Veinte por ciento vienen de A, 20% de B y los restantes provienen de C. La probabilidad de que un circuito de A resulte ser defectuoso en las primeras 24 horas de uso es 0.06, y las probabilidades correspondientes para B y C son 0.04 y 0.05, respectivamente. Si una unidad ensamblada se elige de manera aleatoria y se prueba durante 24 horas continuas, ¿cuál es la probabilidad de que el circuito sea defectuoso?
- 48. Control de calidad** Un fabricante de artículos electrónicos tiene cuatro líneas de ensamble: A, B, C y D. Los porcentajes de salida producidos por las líneas son 30%, 20%, 35% y 15%, respectivamente, y los porcentajes de unidades defectuosas que producen son 6%, 3%, 2% y 5%. Si se elige del inventario uno de estos artículos de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?
- 49. Votación** En cierto pueblo, 40% de los votantes elegibles son demócratas registrados, 35% son republicanos y los restantes son independientes. En la última elección primaria, votaron 15% de los demócratas, 20% de los republicanos y 10% de los independientes.
- (a)** Si un votante elegible se selecciona de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que éste sea un demócrata que votó?
- (b)** Si un votante elegible se selecciona de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado?
- 50. Solicitantes de empleo** Un restaurante tiene cuatro puestos para meseros. Suponga que Allison, Lesley, Alan, Tom, Danica, Bronwyn, Steve y Richard son los únicos solicitantes, y todos están igualmente calificados. Si cuatro de ellos se contratan de manera aleatoria, encuentre la probabilidad de que Allison, Lesley, Tom y Bronwyn hayan sido contratados, dado que Richard no lo fue.
- 51. Selección de comité** Suponga que seis mujeres y cinco hombres desean ocupar tres puestos en el comité estudiantil de diversidad cultural en un campus. Si tres de los estudiantes se seleccionan al azar para el comité, encuentre la probabilidad de que las tres sean mujeres, dado que al menos una es mujer.

**OBJETIVO****8.6 Eventos independientes**

Desarrollar la noción de eventos independientes y aplicar la ley especial de la multiplicación.

En el análisis de la probabilidad condicional se vio que la probabilidad de un evento puede verse afectada por el conocimiento de que ha ocurrido otro evento. En esta sección, se considera la situación en la que la información adicional no tiene efecto. Esto es, la probabilidad condicional  $P(E|F)$  y la probabilidad no condicional  $P(E)$  son iguales.

Cuando  $P(E|F) = P(E)$ , se dice que  $E$  es independiente de  $F$ . Si  $E$  es independiente de  $F$ , se deduce que  $F$  es independiente de  $E$  (y viceversa). Para probar esto, suponga que  $P(E|F) = P(E)$  y  $P(F) \neq 0$ . Entonces

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{P(F)P(E|F)}{P(E)} = \frac{P(F)P(E)}{P(E)} = P(F)$$

que significa que  $F$  es independiente de  $E$ . Así, para probar la independencia es suficiente con mostrar que  $P(E|F) = P(E)$  o bien que  $P(F|E) = P(F)$ , y cuando una de estas igualdades son ciertas, simplemente se dice que  $E$  y  $F$  son *eventos independientes*.

**ADVERTENCIA**

La independencia de dos eventos se define mediante probabilidades, no por medio de relaciones causales.

**DEFINICIÓN**

Sean  $E$  y  $F$  eventos con probabilidades *positivas*. Entonces se dice que  $E$  y  $F$  son *eventos independientes* si

$$P(E|F) = P(E) \quad (1)$$

o bien

$$P(F|E) = P(F) \quad (2)$$

Si  $E$  y  $F$  no son independientes, se dice que son *eventos dependientes*.

Por lo tanto, con eventos dependientes, la ocurrencia de uno de los eventos *afecta* la probabilidad del otro. Si  $E$  y  $F$  son eventos independientes, puede mostrarse que los eventos en cada uno de los siguientes pares también son independientes:

$$E \text{ y } F' \quad E' \text{ y } F \quad E' \text{ y } F'$$

**EJEMPLO 1 Demostración de que dos eventos son independientes**

Se lanza una moneda balanceada dos veces. Sean  $E$  y  $F$  los eventos

$$\begin{aligned} E &= (\text{cara en el primer lanzamiento}) \\ F &= (\text{cara en el segundo lanzamiento}) \end{aligned}$$

Determine si  $E$  y  $F$  son eventos independientes o no.

**Solución:** Se sospecha que son independientes, porque el lanzamiento de una moneda no debería influenciar el resultado de otro lanzamiento. Para confirmar esta sospecha, se compara  $P(E)$  con  $P(E|F)$ . Para el espacio muestral equiprobable  $S = \{\text{HH}, \text{HT}, \text{TH}, \text{TT}\}$ , se tiene  $E = \{\text{HH}, \text{HT}\}$  y  $F = \{\text{HH}, \text{HT}\}$ . Así,

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{\#(E)}{\#(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ P(E|F) &= \frac{\#(E \cap F)}{\#(F)} = \frac{\#\{\text{HH}\}}{\#(F)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como  $P(E|F) = P(E)$ , los eventos  $E$  y  $F$  son independientes.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7



En el ejemplo 1 se sospechaba el resultado, y de hecho existen otras situaciones donde se tiene un sentimiento intuitivo acerca de si dos eventos son independientes o no. Por ejemplo, si se lanzan un dado rojo y otro verde, se espera (y en realidad es cierto) que los eventos “3 en el dado rojo” y “6 en el dado verde” son independientes, porque

el resultado de un dado no debe estar influenciado por el resultado del otro. De manera similar, si se seleccionan dos cartas *con reemplazo* de una baraja de cartas, se podría suponer que los eventos “la primera carta es una sota” y “la segunda carta es una sota” son independientes. Sin embargo, suponga que las cartas se seleccionan *sin reemplazo*. Como la carta que se selecciona primero no se regresa a la baraja, debería tener un efecto en el resultado de la segunda selección, así que se espera que los eventos sean dependientes. En muchos problemas, su noción intuitiva de independencia o el contexto del problema pueden hacer claro si se puede suponer independencia o no. Mas allá de la intuición personal (que puede resultar equivocada), el único modo de determinar si los eventos  $E$  y  $F$  son independientes (o dependientes) es demostrar que la ecuación (1) o la ecuación (2) es verdadera (o que no lo es).

### EJEMPLO 2 Tabaquismo y sinusitis

*En un estudio de tabaquismo y sinusitis, se analizaron 4000 personas y se obtuvieron los resultados que se dan en la tabla 8.10. Suponga que una persona del estudio se seleccionó de manera aleatoria. Con base en los datos, determine si los eventos “tiene sinusitis” ( $L$ ) y “fuma” ( $S$ ) son eventos independientes.*

**TABLA 8.10** Tabaquismo y sinusitis

	Fumador	No fumador	Total
Sinusitis	432	1018	1450
Sin sinusitis	528	2022	2550
Total	960	3040	4000

**Solución:** Se comparará  $P(L)$  con  $P(L|S)$ . El número  $P(L)$  es la proporción de las personas estudiadas que tienen sinusitis:

$$P(L) = \frac{1450}{4000} = \frac{29}{80} = 0.3625$$

Para  $P(L|S)$ , el espacio muestral se reduce a 960 fumadores, de los cuales 432 tienen sinusitis:

$$P(L|S) = \frac{432}{960} = \frac{9}{20} = 0.45$$

Como  $P(L|S) \neq P(L)$ , tener sinusitis y fumar son dependientes.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9 

La ley general de la multiplicación toma una forma extremadamente importante para los eventos independientes. Recuerde la ley:

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= P(E)P(F|E) \\ &= P(F)P(E|F) \end{aligned}$$

Si los eventos  $E$  y  $F$  son independientes, entonces  $P(F|E) = P(F)$ , por lo que la sustitución en la primera ecuación resulta en

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

El mismo resultado se obtiene de la segunda ecuación. Así, se tiene la siguiente ley:

#### Ley especial de la multiplicación

Si  $E$  y  $F$  son *eventos independientes*, entonces

$$P(E \cap F) = P(E)P(F) \quad (3)$$

La ecuación (3) establece que si  $E$  y  $F$  son eventos independientes, entonces la probabilidad de que ocurra tanto  $E$  como  $F$  es la probabilidad de que ocurra  $E$  multiplicada por la probabilidad de que ocurra  $F$ . Tenga en mente que la ecuación (3) no es válida cuando  $E$  y  $F$  son dependientes.

### EJEMPLO 3 Tasas de sobrevivencia

Suponga que la probabilidad del evento “Bob vive 20 años más” ( $B$ ) es 0.8 y la probabilidad del evento “Doris vive 20 años más” ( $D$ ) es 0.85. Suponga que  $B$  y  $D$  son eventos independientes.

- a. Encuentre la probabilidad de que tanto Bob como Doris vivan 20 años más.

**Solución:** Se tiene interés en  $P(B \cap D)$ . Como  $B$  y  $D$  son eventos independientes, se aplica la ley especial de la multiplicación:

$$P(B \cap D) = P(B)P(D) = (0.8)(0.85) = 0.68$$

- b. Encuentre la probabilidad de que al menos uno de ellos viva 20 años más.

**Solución:** Aquí se quiere  $P(B \cup D)$ . Por la ley de la suma,

$$P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D)$$

Del inciso (a),  $P(B \cap D) = 0.68$ , por lo tanto,

$$P(B \cup D) = 0.8 + 0.85 - 0.68 = 0.97$$

- c. Encuentre la probabilidad de que exactamente uno de ellos vive 20 años más.

**Solución:** Primero se expresa el evento

$$E = \{\text{exactamente uno de ellos vive 20 años más}\}$$

en términos de los eventos dados,  $B$  y  $D$ . Ahora, el evento  $E$  puede ocurrir en una o dos formas *mutuamente excluyentes*: Bob vive 20 años más pero Doris no ( $B \cap D'$ ), o Doris vive 20 años más pero Bob no ( $B' \cap D$ ). Así,

$$E = (B \cap D') \cup (B' \cap D)$$

Por la ley de la suma (para eventos mutuamente excluyentes),

$$P(E) = P(B \cap D') \cup P(B' \cap D) \tag{4}$$

Para calcular  $P(B \cap D')$ , se observa que, como  $B$  y  $D$  son independientes, también lo son  $B$  y  $D'$  (del enunciado anterior al ejemplo 1). De acuerdo con esto, se puede usar la ley de la multiplicación y la regla para los complementos:

$$\begin{aligned} P(B \cap D') &= P(B)P(D') \\ &= P(B)(1 - P(D)) = (0.8)(0.15) = 0.12 \end{aligned}$$

De manera similar,

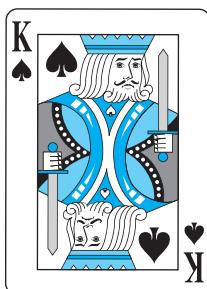
$$P(B' \cap D) = P(B')P(D) = (0.2)(0.85) = 0.17$$

Al sustituir en la ecuación (4), se obtiene

$$P(E) = 0.12 + 0.17 = 0.29$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25 

En el ejemplo 3, se supuso que los eventos  $B$  y  $D$  eran independientes. Sin embargo, si Bob y Doris están relacionados de alguna manera, es bastante posible que la sobrevida de uno de ellos tenga influencia en la sobrevida del otro. En ese caso, el supuesto de independencia no se justifica, y no podría emplearse la ley especial de la multiplicación, ecuación (3).



#### EJEMPLO 4 Cartas

En un examen de matemáticas un estudiante debe resolver el siguiente problema en dos partes. Una carta se selecciona de manera aleatoria de una baraja de 52. Sean  $H$ ,  $K$  y  $R$  los eventos

$$H = \{\text{selección de una carta de corazones}\}$$

$$K = \{\text{selección de un rey}\}$$

$$R = \{\text{selección de una carta roja}\}$$

Encuentre  $P(H \cap K)$  y  $P(H \cap R)$ .

Para la primera parte, el estudiante escribió

$$P(H \cap K) = P(H)P(K) = \frac{13}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{52}$$

y para la segunda parte, escribió

$$P(H \cap R) = P(H)P(R) = \frac{13}{52} \cdot \frac{26}{52} = \frac{1}{8}$$

La respuesta fue correcta para  $P(H \cap K)$  pero no para  $P(H \cap R)$ . ¿Por qué?

**Solución:** La razón es que el estudiante supuso independencia en *ambas* partes mediante la ley especial de la multiplicación para multiplicar probabilidades condicionales cuando, de hecho, el supuesto *no* debería haberse hecho. Ahora se examinará la primera parte del problema en lo relativo a la independencia. Se verá si  $P(H)$  y  $P(H|K)$  son iguales. Se tiene

$$P(H) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

y

$$P(H|K) = \frac{1}{4} \quad (\text{un corazón de los cuatro reyes})$$

Como  $P(H) = P(H|K)$ , los eventos  $H$  y  $K$  son independientes, por lo que el procedimiento del estudiante es válido (el estudiante tuvo suerte). Para la segunda parte, de nuevo se tiene  $P(H) = \frac{1}{4}$ , pero

$$P(H|R) = \frac{13}{26} = \frac{1}{2} \quad (13 corazones en 26 cartas rojas)$$

Como  $P(H|R) \neq P(H)$ , los eventos  $H$  y  $R$  son dependientes, de manera que el estudiante no debería haber multiplicado las probabilidades no condicionales (el estudiante no tuvo suerte). Sin embargo, el estudiante pudo asegurar una respuesta correcta gracias a la ley *general* de la multiplicación, esto es,

$$P(H \cap R) = P(H)P(R|H) = \frac{13}{52} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

o bien

$$P(H \cap R) = P(R)P(H|R) = \frac{26}{52} \cdot \frac{13}{26} = \frac{1}{4}$$

De manera más simple, observe que  $H \cap R = H$ , por lo tanto,

$$P(H \cap R) = P(H) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 33

A menudo, la ecuación (3) se usa como un medio alternativo para definir eventos independientes, y aquí se considerará como tal:

Los eventos  $E$  y  $F$  son independientes si y sólo si

$$P(E \cap F) = P(E)P(F) \quad (3)$$

Al unir las partes, puede decirse que para probar que los eventos  $E$  y  $F$ , con probabilidades distintas de cero, son independientes, sólo debe demostrarse una de las siguientes relaciones:

$$P(E|F) = P(E) \quad (1)$$

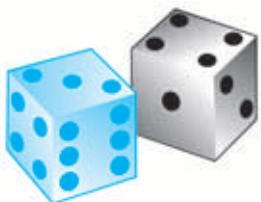
o

$$P(F|E) = P(F) \quad (2)$$

o

$$P(E \cap F) = P(E)P(F) \quad (3)$$

En otras palabras, si alguna de estas ecuaciones es verdadera, entonces todas son verdaderas; si alguna es falsa, entonces todas son falsas, y  $E$  y  $F$  son dependientes.



### ● EJEMPLO 5 Dados

*Se lanzan dos dados balanceados, uno rojo y otro verde, y se anotan los números que aparecen en las caras superiores. Sean  $E$  y  $F$  los eventos*

$$E = \{\text{el número en el dado rojo es par}\}$$

$$F = \{\text{la suma es 7}\}$$

*Pruebe si  $P(E \cap F) = P(E)P(F)$  para determinar si  $E$  y  $F$  son independientes.*

**Solución:** El espacio muestral usual para el lanzamiento de dos dados tiene  $6 \cdot 6 = 36$  resultados igualmente posibles. Para el evento  $E$ , el dado rojo puede caer en una de tres formas y el dado verde en una de seis formas. Entonces  $E$  consta de  $3 \cdot 6 = 18$  resultados. Así,  $P(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ . El evento  $F$  tiene seis resultados.

$$F = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} \quad (5)$$

donde, por ejemplo, se considera que  $(1, 6)$  significa “1” en el dado rojo y “6” en el dado verde. Por lo tanto,  $P(F) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ , y entonces

$$P(E)P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Ahora, el evento  $E \cap F$  consiste en todos los resultados en los que el dado rojo es par y la suma es 7. Si se usa la ecuación (5) como una ayuda, se ve que

$$E \cap F = \{(2, 5), (4, 3), (6, 1)\}$$

Así,

$$P(E \cap F) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Como  $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ , los eventos  $E$  y  $F$  son independientes. Este hecho puede no ser obvio antes de resolver el problema.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17



### ● EJEMPLO 6 Género de los hijos

*Para una familia con al menos dos hijos, sean  $E$  y  $F$  los eventos*

$$E = \{\text{cuando mucho un niño}\}$$

$$F = \{\text{al menos un hijo de cada género}\}$$

*Suponga que un hijo de cualquier género es igualmente posible y que, por ejemplo, tener una niña primero y después un niño es tan posible como tener un niño primero y después una niña. Determine si  $E$  y  $F$  son independientes en cada una de las siguientes situaciones;*

- a. *La familia tiene exactamente dos hijos.*

**Solución:** Se usará el espacio muestral equiprobable

$$S = \{\text{BB}, \text{BG}, \text{GG}, \text{GB}\}$$

y se probará si  $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ . Se tiene

$$E = \{\text{BG}, \text{GB}, \text{GG}\} \quad F = \{\text{BG}, \text{GB}\} \quad E \cap F = \{\text{BG}, \text{GB}\}$$

Así,  $P(E) = \frac{3}{4}$ ,  $P(F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  y  $P(E \cap F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ . Se desea saber si

$$P(E \cap F) \stackrel{?}{=} P(E)P(F)$$

y se observa que

$$\frac{1}{2} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

por lo tanto,  $E$  y  $F$  son eventos dependientes.

**b. La familia tiene exactamente tres hijos.**

**Solución:** Con base en el resultado del inciso (a), usted podría intuir que  $E$  y  $F$  son dependientes. No obstante, es necesario probar esta conjetura. Para tres hijos, se usa el espacio muestral equiprobable

$$S = \{\text{BBB}, \text{BBG}, \text{BGB}, \text{BGG}, \text{GBB}, \text{GBG}, \text{GGB}, \text{GGG}\}$$

De nuevo, se prueba si  $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ . Se tiene

$$E = \{\text{BGG}, \text{GBG}, \text{GGB}, \text{GGG}\}$$

$$F = \{\text{BBG}, \text{BGB}, \text{BGG}, \text{GBB}, \text{GBG}, \text{GGB}\}$$

$$E \cap F = \{\text{BGG}, \text{GBG}, \text{GGB}\}$$

Por lo tanto,  $P(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ,  $P(F) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$  y  $P(E \cap F) = \frac{3}{8}$ , entonces

$$P(E)P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} = P(E \cap F)$$

Así, se tiene el resultado *inesperado* de que los eventos  $E$  y  $F$  son independientes. (*Moraleja:* No siempre puede confiar en su intuición).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27 

A continuación se generaliza el análisis de independencia para el caso de más de dos eventos.

### DEFINICIÓN

Se dice que los eventos  $E_1, E_2, \dots, E_n$  son *independientes* si y sólo si para cada conjunto de dos o más de los eventos, la probabilidad de la intersección de los eventos en el conjunto es igual al producto de las probabilidades de los eventos en ese conjunto.

Por ejemplo, se aplicará la definición al caso de tres eventos ( $n = 3$ ). Se dice que  $E$ ,  $F$  y  $G$  son eventos independientes si la ley especial de la multiplicación es verdadera para esos eventos, tomados de dos en dos y de tres en tres. Esto es, cada una de las siguientes ecuaciones debe ser verdadera:

$$\left. \begin{aligned} P(E \cap F) &= P(E)P(F) \\ P(E \cap G) &= P(E)P(G) \\ P(F \cap G) &= P(F)P(G) \end{aligned} \right\} \text{De dos en dos}$$

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)P(F)P(G) \} \text{De tres en tres}$$

Como otro ejemplo, si los eventos  $E, F, G$  y  $H$  son independientes, entonces se puede afirmar lo siguiente

$$P(E \cap F \cap G \cap H) = P(E)P(F)P(G)P(H)$$

$$P(E \cap G \cap H) = P(E)P(G)P(H)$$

y

$$P(F \cap H) = P(F)P(H)$$

Pueden hacerse conclusiones similares si cualesquiera de los eventos se reemplazan con sus complementos.

### EJEMPLO 7 Cartas

Se toman cuatro cartas de manera aleatoria, con reemplazo de una baraja de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de que las cartas seleccionadas, en orden, sean un rey ( $K$ ), una reina ( $Q$ ), una sota ( $J$ ) y una carta de corazones ( $H$ ).

**Solución:** Como hay reemplazo, lo que pasa con una selección no afecta al resultado de cualquier otra selección, entonces se puede suponer independencia y multiplicar las probabilidades no condicionales. Se obtiene

$$\begin{aligned} P(K \cap Q \cap J \cap H) &= P(K)P(Q)P(J)P(H) \\ &= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{8788} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35 

### EJEMPLO 8 Prueba de aptitud

Personal Temporal, una agencia de empleos temporales, requiere que cada solicitante de empleo realice la prueba de aptitud de la compañía, que tiene una precisión de 80%.

- a. Encuentre la probabilidad de que la prueba sea precisa para los siguientes tres solicitantes que serán examinados.

**Solución:** Sean  $A, B$  y  $C$  los eventos en los que la prueba será precisa para los solicitantes  $A, B$  y  $C$ , respectivamente. Se tiene interés en

$$P(A \cap B \cap C)$$

Como la precisión de la prueba para un solicitante no debería afectar la exactitud para cualquiera de los otros, parece razonable suponer que  $A, B$  y  $C$  son independientes. Así, pueden multiplicarse las probabilidades:

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \\ &= (0.8)(0.8)(0.8) = (0.8)^3 = 0.512 \end{aligned}$$

- b. Encuentre la probabilidad de que la prueba sea exacta para al menos dos de los siguientes tres solicitantes que serán examinados.

**Solución:** Aquí, al menos dos significa “exactamente dos o tres”. En el primer caso, las formas posibles de escoger las dos pruebas que sean exactas son

$$A \text{ y } B \quad A \text{ y } C \quad B \text{ y } C$$

En cada una de estas tres posibilidades, la prueba para el solicitante restante no es exacta. Por ejemplo, al elegir  $A$  y  $B$  se obtiene el evento  $A \cap B \cap C'$ , cuya probabilidad es

$$P(A)P(B)P(C') = (0.8)(0.8)(0.2) = (0.8)^2(0.2)$$

Se debe verificar que la probabilidad para cada una de las otras dos posibilidades también es  $(0.8)^2(0.2)$ . Al sumar las tres probabilidades, se obtiene

$$P(\text{exactamente dos pruebas exactas}) = 3[(0.8)^2(0.2)] = 0.384$$

Si se usa este resultado y el del inciso (a), se tiene

$$\begin{aligned} P(\text{al menos dos pruebas exactas}) &= P(\text{exactamente dos pruebas exactas}) \\ &\quad + P(\text{tres pruebas exactas}) \\ &= 0.384 + 0.512 = 0.896 \end{aligned}$$

De manera alternativa, el problema podría resolverse al calcular

$$1 - [P(\text{ninguna prueba exacta}) + P(\text{exactamente una prueba exacta})]$$

¿Por qué?

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21 

Se concluye con una nota de advertencia: **No confunda eventos independientes con eventos mutuamente excluyentes.** El concepto de independencia se define en términos de probabilidad, y la mutua exclusividad no. Cuando dos eventos son independientes, la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad del otro. Y, por otro lado, cuando dos eventos son mutuamente excluyentes, éstos no pueden ocurrir de manera simultánea. Aunque estos dos conceptos no son iguales, se pueden obtener algunas conclusiones acerca de su relación. Si  $E$  y  $F$  son eventos mutuamente excluyentes con *probabilidades positivas*, entonces

$$P(E \cap F) = 0 \neq P(E)P(F) \quad \text{puesto que } P(E) > 0 \text{ y } P(F) > 0$$

lo que demuestra que  $E$  y  $F$  son dependientes. En pocas palabras, los *eventos mutuamente excluyentes con probabilidades positivas deben ser dependientes*. Otra forma de decir esto es que *los eventos independientes con probabilidades positivas no son mutuamente excluyentes*.

## Problemas 8.6

- Si los eventos  $E$  y  $F$  son independientes, y  $P(E) = \frac{1}{3}$  y  $P(F) = \frac{3}{4}$ , encuentre las siguientes probabilidades.
  - $P(E \cap F)$
  - $P(E \cup F)$
  - $P(E | F)$
  - $P(E' | F)$
  - $P(E \cap F')$
  - $P(E \cup F')$
  - $P(E | F')$
- Si los eventos  $E$ ,  $F$  y  $G$  son independientes con  $P(E) = 0.1$ ,  $P(F) = 0.3$  y  $P(G) = 0.6$ , encuentre las siguientes probabilidades.
  - $P(E \cap F)$
  - $P(F \cap G)$
  - $P(E \cap F \cap G)$
  - $P(E | (F \cap G))$
  - $P(E' \cap F \cap G')$
- Si los eventos  $E$  y  $F$  son independientes con  $P(E) = \frac{2}{7}$  y  $P(E \cap F) = \frac{1}{9}$ , encuentre  $P(F)$ .
- Si los eventos  $E$  y  $F$  son independientes con  $P(E | F) = \frac{1}{3}$ , encuentre  $P(E')$ .

En los problemas 5 y 6, los eventos  $E$  y  $F$  satisfacen las condiciones dadas. Determine si  $E$  y  $F$  son independientes o dependientes.

- $P(E) = \frac{3}{4}$ ,  $P(F) = \frac{8}{9}$ ,  $P(E \cap F) = \frac{2}{3}$

- $P(E) = 0.28$ ,  $P(F) = 0.15$ ,  $P(E \cap F) = 0.038$

- \*7. **Agentes de bolsa** Se encuestó a 600 inversionistas para determinar si una persona que usa un servicio completo de agente de bolsa tiene un mejor desempeño en su portafolio de inversión, que quien utiliza un corredor de descuento. Por lo general, los corredores de descuento no ofrecen consejos de inversión a sus clientes, mientras que el servicio completo de agentes de bolsa ofrece ayuda al seleccionar acciones pero cobra comisiones más caras. Los datos, que se basan en los últimos 12 meses, se proporcionan en la tabla 8.11. Determine si el evento de tener un servicio completo de agente

de bolsa y el evento de tener un incremento en el valor del portafolio son independientes o dependientes.

**TABLA 8.11** Valor de portafolio

	Incremento	Disminución	Total
Servicio completo	320	80	400
Descuento	160	40	200
Total	480	120	600

8. **Faltas de educación en el cine** Una inspección realizada sobre 175 asistentes a una sala de cine arrojó los datos que se muestran en la tabla 8.12, la cual presenta tres tipos de faltas de educación cometidas por asistentes hombres y mujeres. El grupo “masticadores” incluye a los que comen palomitas y otras golosinas de manera ruidosa, así como a los que hacen ruido al sorber las bebidas frías. Determine si el evento de ser un hombre y el evento de ser un masticador son independientes o dependientes. (Vea en la página 5D del número de *USA TODAY* del 21 de julio de 1991, el artículo “Pests Now Appearing at a Theater Near You”).

**TABLA 8.12** Asistentes al cine

	Hombre	Mujer	Total
Habladores	60	10	70
Masticadores	55	25	80
Pateadores de asientos	15	10	25
Total	130	45	175

- \*9. **Dados** Se lanzan dos dados balanceados, uno rojo y otro verde, y se anotan los números que se muestran en las caras

superiores de los dados. Sea el evento  $E$  “el número en el dado rojo no es 2 ni 3” y el evento  $F$  “la suma es 8”. Determine si  $E$  y  $F$  son independientes o dependientes.

10. **Cartas** Se selecciona una carta al azar de un baraja ordinaria de 52 cartas. Sean  $E$  y  $F$  los eventos “selección de una carta negra” y “selección de un 2, 3 o 4”, respectivamente. Determine si  $E$  y  $F$  son independientes o dependientes.
11. **Monedas** Si se lanzan dos monedas balanceadas, sea  $E$  el evento “cuando mucho una cara” y  $F$  el evento “exactamente una cara”. Determine si  $E$  y  $F$  son independientes o dependientes.
12. **Monedas** Si se lanzan tres monedas balanceadas, sea  $E$  el evento “cuando mucho una cara” y  $F$  el evento “al menos una cara y una cruz”. Determine si  $E$  y  $F$  son independientes o dependientes.
13. **Fichas en un recipiente** Un recipiente contiene siete fichas numeradas del 1 al 7. Se seleccionan de manera aleatoria y con reemplazo dos de ellas. Sean  $E$ ,  $F$  y  $G$  los eventos

$$E = \text{3 en la primera selección}$$

$$F = \text{3 en la segunda selección}$$

$$G = \text{la suma es impar}$$

- (a) Determine si  $E$  y  $F$  son independientes o dependientes.
- (b) Determine si  $E$  y  $G$  son independientes o dependientes.
- (c) Determine si  $F$  y  $G$  son independientes o dependientes.
- (d) ¿Son  $E$ ,  $F$  y  $G$  independientes?

14. **Fichas en un recipiente** Un recipiente contiene seis fichas numeradas del 1 al 6. Se toma una de manera aleatoria.

Sea  $E$  el evento de retirar un 3 y  $F$  el evento de sacar un 5.

- (a) ¿Son  $E$  y  $F$  mutuamente excluyentes?
- (b) ¿Son  $E$  y  $F$  independientes?

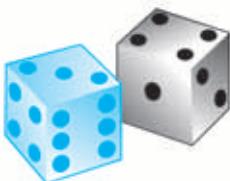
*En los problemas 15 y 16, los eventos  $E$  y  $F$  satisfacen las condiciones dadas. Determine si  $E$  y  $F$  son independientes o dependientes.*

$$15. P(E|F) = 0.5, P(E \cap F) = 0.3, P(F|E) = 0.4$$

$$16. P(E|F) = \frac{2}{3}, P(E \cup F) = \frac{17}{18}, P(E \cap F) = \frac{5}{9}$$

*En los problemas 17 a 37 use su intuición acerca de la independencia de los eventos, en caso de que no se especifique nada al respecto.*

- \*17. **Dados** Se seleccionan dos dados balanceados, uno rojo y otro verde. Encuentre la probabilidad de que el dado rojo sea un 4 y el dado verde es un número mayor que 4.



18. **Dado** Si se lanza un dado balanceado tres veces, encuentre la probabilidad de que cada vez resulte un 2 o un 3.
19. **Clases de acondicionamiento físico** En cierto centro de acondicionamiento físico, la probabilidad de que un miembro asista regularmente a una clase de aeróbicos es  $\frac{1}{5}$ . Si se seleccionan dos miembros de manera aleatoria, encuentre la probabilidad de que ambos asistan a la clase en forma regular. Suponga independencia.
20. **Monopolio** En el juego de Monopolio, un jugador lanza dos dados balanceados. Una situación especial que puede surgir

es que los números en las caras superiores sean iguales (por ejemplo, dos 3). Este resultado se llama un “doble”, y cuando sucede, el jugador continúa con su turno y lanza los dados de nuevo. El patrón continúa a menos que el jugador tenga tan mala suerte que obtenga tres dobles consecutivos. En ese caso, el jugador va a la cárcel. Encuentre la probabilidad de que un jugador vaya a la cárcel de esta manera.

- \*21. **Cartas** Se seleccionan tres cartas de manera aleatoria y con reemplazo de una baraja ordinaria de 52. Encuentre la probabilidad de que las cartas escogidas, en orden, sean un as, una carta con figura (una sota, una reina o un rey) y una carta de espadas.

22. **Dado** Si se lanza un dado balanceado siete veces, encuentre lo siguiente.

- (a) La probabilidad de obtener un número mayor que 4, cada una de las veces.
- (b) La probabilidad de obtener un número menor que 4, cada una de las veces.

23. **Calificaciones en un examen** En un curso de sociología, la probabilidad de que Bill obtenga un 10 en el examen final es  $\frac{3}{4}$ , y para Jim y Linda, las probabilidades son  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{4}{5}$ , respectivamente. Suponga independencia y encuentre lo siguiente.

- (a) La probabilidad de que los tres obtengan un 10 en el examen.
- (b) La probabilidad de que ninguno de ellos obtenga un 10 en el examen.
- (c) La probabilidad de que, de los tres, sólo Linda obtenga un 10.

24. **Dado** Si se lanza un dado balanceado tres veces, encuentre la probabilidad de obtener al menos un 6.

- \*25. **Tasas de sobrevivencia** La probabilidad de que la persona A sobreviva 15 años más es  $\frac{2}{3}$ , y la probabilidad de que la persona B sobreviva 15 años más es  $\frac{4}{5}$ . Suponga independencia para encontrar la probabilidad de cada una de las siguientes situaciones.

- (a) Tanto A como B sobreviven 15 años.
- (b) B sobrevive 15 años, pero A no.
- (c) Exactamente uno de A y B sobrevive 15 años.
- (d) Al menos uno de A y B sobrevive 15 años.
- (e) Ni A ni B sobreviven 15 años.

26. **Relacionar** En su escritorio, una secretaria tiene un cajón que contiene una mezcla de dos tamaños de papel (A y B) y otro cajón que contiene una mezcla de sobres de dos tamaños correspondientes. En la tabla 8.13 se dan los porcentajes de cada tamaño de papel y tamaño de sobre. Si una pieza de papel y un sobre se seleccionan de manera aleatoria, encuentre la probabilidad de que sean del mismo tamaño.

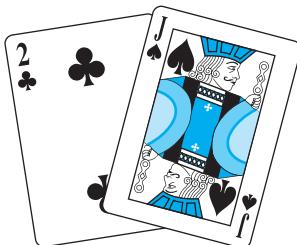
**TABLA 8.13** Papel y sobres

Tamaño	Cajones	
	Papel	Sobres
A	63%	57%
B	37%	43%

- \*27. **Caramelos en una bolsa** Una bolsa contiene cinco caramelos rojos, siete blancos y seis verdes. Si se toman de manera aleatoria y con reemplazo dos caramelos, encuentre lo siguiente.

- (a) La probabilidad de que el primer caramelo sea blanco y el segundo sea verde.

- (b)** La probabilidad de que un caramelo sea rojo y el otro sea blanco.
- 28. Dados** Suponga que se lanzan dos dados balanceados dos veces. Encuentre la probabilidad de obtener un total de 7 en el primer lanzamiento y un total de 12 en el otro.
- 29. Caramelos en una bolsa** Una bolsa contiene tres caramelos rojos, siete blancos y nueve verdes. Si se retiran dos caramelos de manera aleatoria y con reemplazo, encuentre la probabilidad de que sean del mismo color.
- 30. Dado** Encuentre la probabilidad de obtener el mismo número en tres lanzamientos de un dado balanceado.
- 31. Boletos en un sombrero** Veinte boletos numerados del 1 al 20 se colocan en un sombrero. Si se seleccionan dos de manera aleatoria y con reemplazo, encuentre la probabilidad de que la suma sea 35.
- 32. Monedas y dados** Suponga que se lanzan dos monedas balanceadas y después dos dados balanceados. Encuentre lo siguiente.
- La probabilidad de que ocurran dos cruces y dos 3.
  - La probabilidad de que ocurran dos caras, un 4 y un 6.
- \*33. Juego de carnaval** En un juego de carnaval, una rueda tipo ruleta balanceada tiene 12 ranuras igualmente espaciadas que están numeradas del 1 al 12. La rueda se gira, y una bola viaja a lo largo del aro de la rueda. Cuando la rueda se detiene, el número de la ranura donde finalmente se detiene la bola se considera el resultado del giro. Si la rueda se gira tres veces, encuentre lo siguiente.
- La probabilidad de que el primer número sea 4 y tanto el segundo como el tercer número sea 5.
  - La probabilidad de obtener un número par y dos números impares.
- 34. Cartas** Se seleccionan tres cartas de manera aleatoria y con reemplazo de una baraja ordinaria de 52 cartas. Encuentre lo siguiente.



- (a)** La probabilidad de escoger, en orden, un 10, una carta de espadas y una sota negra.
- (b)** La probabilidad de escoger exactamente tres reyes.
- (c)** La probabilidad de escoger una reina, una carta de espadas y un as negro.
- (d)** La probabilidad de escoger exactamente un as.
- \*35. Examen de opción múltiple** Un examen contiene cinco problemas de opción múltiple. Cada problema tiene cuatro opciones para la respuesta, pero sólo una de ellas es correcta. Suponga que un estudiante responde al azar todos los problemas. Suponga que las respuestas son independientes para encontrar las siguientes probabilidades.
- La probabilidad de que el estudiante obtenga exactamente cuatro respuestas correctas.
  - La probabilidad de que el estudiante obtenga al menos cuatro respuestas correctas.
  - La probabilidad de que el estudiante obtenga tres o más respuestas correctas.
- 36. Sala de tiro** En una sala de tiro, suponga que Bill, Jim y Linda hacen un tiro cada uno a un blanco móvil. La probabilidad de que Bill acierte al blanco es 0.5, y para Jim y Linda, las probabilidades son 0.4 y 0.7, respectivamente. Suponga independencia y encuentre lo siguiente.
- La probabilidad de que ninguno de ellos acierte al blanco.
  - La probabilidad de que Linda sea la única en acertarle al blanco.
  - La probabilidad de que exactamente uno de ellos acierte al blanco.
  - La probabilidad de que exactamente dos de ellos acierten al blanco.
  - La probabilidad de que todos ellos acierten al blanco.
- 37. Toma de decisiones**<sup>3</sup> El presidente de la compañía Construcciones Zeta debe decidir cuál de dos acciones realizar, a saber, rentar o comprar un costoso equipo de excavación. La probabilidad de que el vicepresidente haga un análisis erróneo y, por ende, recomiende una decisión incorrecta al presidente es 0.04. Previendo esto, el presidente contrata a dos consultores que estudian el problema de manera independiente y hacen sus recomendaciones. Después de haberlos observado mientras trabajaban, el presidente estima que el primer consultor tiene una probabilidad de 0.5 de recomendar la decisión errónea y mientras que el segundo tiene una probabilidad de 0.1. Decide realizar la acción recomendada por la mayoría de las tres opiniones que recibe. ¿Cuál es la probabilidad de que tome una decisión errónea.

## OBJETIVO

Resolver un problema de Bayes. Desarrollar la fórmula de Bayes.

## 8.7 Fórmula de Bayes

En esta sección se tratará un experimento de dos etapas en el cual se conoce el resultado de la segunda etapa y se tiene interés en la probabilidad de que haya ocurrido un resultado particular en la primera etapa.

Para ilustrar esto, suponga que se cree que de la población total (espacio muestral), 8% tiene una enfermedad particular. Imagine también que hay una nueva prueba de sangre para detectar la enfermedad y que los investigadores han evaluado su efectividad. Los datos resultantes de ensayos extensos muestran que la prueba no es perfecta: no sólo da positiva para 95% de quienes tienen la enfermedad, sino que también resulta positiva para 3% de quienes no la tienen. Suponga que se toma una persona de la población

<sup>3</sup>Samuel Goldberg, *Probability, an Introduction* (Prentice-Hall, Inc., 1960, Dover Publications, Inc., 1986), p. 113. Adaptado con autorización del autor.

de manera aleatoria y se le realiza la prueba de sangre. Si el resultado es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona tenga la enfermedad?

Para analizar este problema, se consideran los siguientes eventos:

$$D_1 = \{\text{tener la enfermedad}\}$$

$$D_2 = \{\text{no tener la enfermedad}\}$$

$$T_1 = \{\text{prueba positiva}\}$$

$$T_2 = \{\text{prueba negativa}\}$$

Del planteamiento del problema se tiene

$$P(D_1) = 0.08$$

entonces

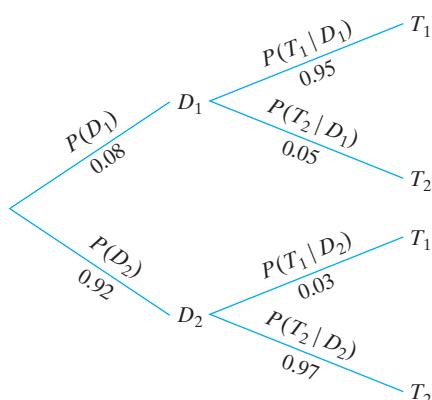
$$P(D_2) = 1 - 0.08 = 0.92$$

puesto que  $D_1$  y  $D_2$  son complementos. Resulta razonable suponer que  $T_1$  y  $T_2$  también son complementos; en ese caso, se tienen las probabilidades condicionales

$$P(T_1 | D_1) = 0.95 \quad P(T_2 | D_1) = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$P(T_1 | D_2) = 0.03 \quad P(T_2 | D_2) = 1 - 0.03 = 0.97$$

En la figura 8.20 se muestra un árbol de probabilidad de dos etapas que refleja esta información. La primera etapa toma en cuenta si la persona tiene o no tiene la enfermedad, y la segunda etapa muestra los posibles resultados de la prueba.



**FIGURA 8.20** Árbol de probabilidad de dos etapas.

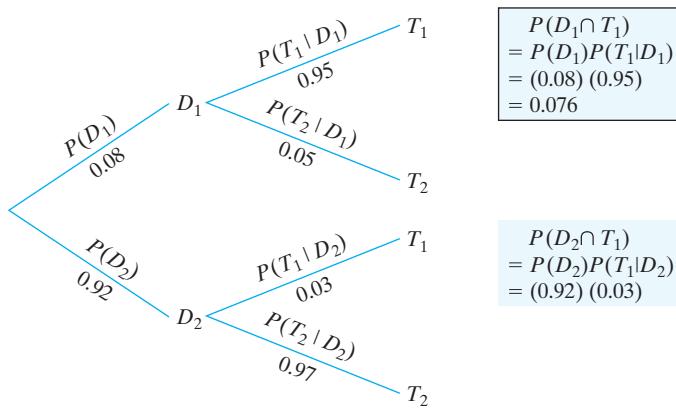
Se tiene interés en la probabilidad de que una persona, cuya prueba sea positiva, tenga la enfermedad. Esto es, se desea encontrar la probabilidad condicional de que haya ocurrido  $D_1$  en la primera etapa, dado que ocurrió  $T_1$  en la segunda etapa:

$$P(D_1 | T_1)$$

Es importante que entienda la diferencia entre las probabilidades condicionales  $P(D_1 | T_1)$  y  $P(T_1 | D_1)$ . La probabilidad  $P(T_1 | D_1)$ , que *se proporciona como dato*, es una probabilidad condicional “típica”, en la que se trata con la probabilidad de un resultado en la segunda etapa *después* de que ha ocurrido un resultado en la primera etapa. Sin embargo, con  $P(D_1 | T_1)$ , se tiene una situación “inversa”. Aquí se debe encontrar la probabilidad de un resultado en la *primera* etapa, dado que ha ocurrido un resultado en la *segunda* etapa. En cierto sentido, se tiene “la carreta antes del caballo” porque esta probabilidad no se ajusta al patrón usual (y más natural) de una probabilidad condicional típica. Por fortuna, se tienen todas las herramientas necesarias para encontrar  $P(D_1 | T_1)$ . Se procede de la manera siguiente.

De la definición de probabilidad condicional,

$$P(D_1 | T_1) = \frac{P(D_1 \cap T_1)}{P(T_1)} \quad (1)$$

**FIGURA 8.21** Árbol de probabilidad para determinar  $P(D_1 | T_1)$ .

Considere el numerador. Al aplicar la ley general de la multiplicación, se obtiene

$$\begin{aligned}P(D_1 \cap T_1) &= P(D_1)P(T_1 | D_1) \\&= (0.08)(0.95) = 0.076\end{aligned}$$

que se indica en la ruta que pasa por  $D_1$  y  $T_1$  en la figura 8.21. El denominador,  $P(T_1)$ , es la suma de las probabilidades para todas las rutas del árbol que terminan en  $T_1$ . Así,

$$\begin{aligned}P(T_1) &= P(D_1 \cap T_1) + P(D_2 \cap T_1) \\&= P(D_1)P(T_1 | D_1) + P(D_2)P(T_1 | D_2) \\&= (0.08)(0.95) + (0.92)(0.03) = 0.1036\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}P(D_1 | T_1) &= \frac{P(D_1 \cap T_1)}{P(T_1)} \\&= \frac{\text{probabilidad de la ruta que pasa por } D_1 \text{ y } T_1}{\text{suma de probabilidades de todas las rutas hacia } T_1} \\&= \frac{0.076}{0.1036} = \frac{760}{1036} = \frac{190}{259} \approx 0.734\end{aligned}$$

Entonces la probabilidad de que la persona tenga la enfermedad, dado que la prueba es positiva, es aproximadamente 0.734. En otras palabras, alrededor de 73.4% de las personas que resultan positivos en la prueba, en realidad tienen la enfermedad. Es posible que usted esté de acuerdo en que esta probabilidad fue relativamente fácil de encontrar con los principios básicos (ecuación (1)) y un árbol de probabilidad (figura 8.21).

En este punto, se debe introducir cierta terminología. Las probabilidades *no condicionales*  $P(D_1)$  y  $P(D_2)$  se llaman **probabilidades a priori**, porque se dan *antes* de que se tenga algún conocimiento acerca del resultado de la prueba de sangre. La probabilidad condicional  $P(D_1 | T_1)$  se llama **probabilidad a posteriori**, porque se encuentra de conocer el resultado de la prueba ( $T_1$ ).

A partir de la respuesta para  $P(D_1 | T_1)$ , es posible encontrar con facilidad la probabilidad *a posteriori* de no tener la enfermedad dado que se obtuvo un resultado positivo:

$$P(D_2 | T_1) = 1 - P(D_1 | T_1) = 1 - \frac{190}{259} = \frac{69}{259} \approx 0.266$$

Por supuesto, esto también puede encontrarse con el uso del árbol de probabilidad:

$$\begin{aligned}P(D_2 | T_1) &= \frac{\text{probabilidad de la ruta que pasa por } D_1 \text{ y } T_1}{\text{suma de probabilidades de todas las rutas hacia } T_1} \\&= \frac{(0.92)(0.03)}{0.1036} = \frac{0.0276}{0.1036} = \frac{276}{1036} = \frac{69}{259} \approx 0.266\end{aligned}$$

En realidad no es necesario usar un árbol de probabilidad para encontrar  $P(D_1 | T_1)$ . En lugar de eso, puede desarrollarse una fórmula. Se sabe que

$$P(D_1 | T_1) = \frac{P(D_1 \cap T_1)}{P(T_1)} = \frac{P(D_1)P(T_1 | D_1)}{P(T_1)} \quad (2)$$

Aunque se usó un árbol de probabilidad para expresar  $P(T_1)$  de manera conveniente como una suma de probabilidades, la suma puede encontrarse de otra forma. Tome nota de que los eventos  $D_1$  y  $D_2$  tienen dos propiedades: son mutuamente excluyentes y su unión es el espacio muestral  $S$ . Tales eventos se llaman de manera colectiva una **partición** de  $S$ . Usando esta partición, es posible dividir el evento  $T_1$  en “pedazos” mutuamente excluyentes:

$$T_1 = T_1 \cap S = T_1 \cap (D_1 \cup D_2)$$

Entonces, por las leyes distributivas y conmutativas,

$$T_1 = (D_1 \cap T_1) \cup (D_2 \cap T_1) \quad (3)$$

Como  $D_1$  y  $D_2$  son mutuamente excluyentes, entonces los eventos  $D_1 \cap T_1$  y  $D_2 \cap T_1$ <sup>4</sup>. Así,  $T_1$  se ha expresado como una unión de eventos mutuamente excluyentes. En esta forma, se puede encontrar  $P(T_1)$  al sumar probabilidades. Al aplicar la ley de la suma para eventos mutuamente excluyentes a la ecuación (3), se obtiene

$$\begin{aligned} P(T_1) &= P(D_1 \cap T_1) + P(D_2 \cap T_1) \\ &= P(D_1)P(T_1 | D_1) + P(D_2)P(T_1 | D_2) \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación (2), resulta

$$P(D_1 | T_1) = \frac{P(D_1)P(T_1 | D_1)}{P(D_1)P(T_1 | D_1) + P(D_2)P(T_1 | D_2)} \quad (4)$$

que es una fórmula para calcular  $P(D_1 | T_1)$ .

La ecuación (4) es un caso especial (a saber, para una partición de  $S$  en dos eventos) de la siguiente fórmula general, llamada la **fórmula de Bayes**,<sup>5</sup> la cual ha tenido una amplia aplicación en la toma de decisiones.

### Fórmula de Bayes

Suponga que  $F_1, F_2, \dots, F_n$  son  $n$  eventos que parten un espacio muestral  $S$ . Esto es, los  $F_i$  son mutuamente excluyentes y su unión es  $S$ . Además, suponga que  $E$  es cualquier evento en  $S$ , donde  $P(E) > 0$ . Entonces la probabilidad condicional de  $F_i$  dado que ha ocurrido el evento  $E$  se expresa por

$$P(F_i | E) = \frac{P(F_i)P(E | F_i)}{P(F_1)P(E | F_1) + P(F_2)P(E | F_2) + \dots + P(F_n)P(E | F_n)}$$

para cada valor de  $i$ , donde  $i = 1, 2, \dots, n$ .

En lugar de memorizar la fórmula, puede usarse un árbol de probabilidad para obtener  $P(F_i | E)$ . Si se usa el árbol de la figura 8.22, se tiene

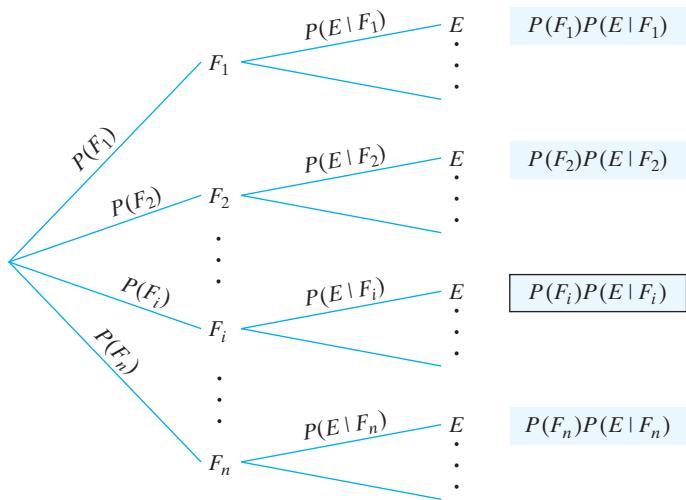
$$P(F_i | E) = \frac{\text{probabilidad para la ruta que pasa por } F_i \text{ y } E}{\text{suma de todas las probabilidades para las rutas hacia } E}$$

### EJEMPLO 1 Control de calidad

Una fabricante de cámaras digitales utiliza un microchip en el ensamble de cada cámara que produce. Los microchips se compran a los proveedores A, B y C y se seleccionan de manera aleatoria para ensamblar cada cámara. Veinte por ciento de los microchips vienen de A, 35% vienen de B, y el porcentaje restante proviene de C. Con base en la experiencia, el

<sup>4</sup>Vea el ejemplo 8 de la sección 8.3.

<sup>5</sup>Por Thomas Bayes (1702-1761), ministro inglés del siglo XVIII, que descubrió la fórmula.

FIGURA 8.22 Árbol de probabilidad para  $P(F_1|E)$ .

*fabricante cree que la probabilidad de que un microchip de A sea defectuoso es de 0.03, y las probabilidades para B y C son 0.02 y 0.01, respectivamente. Se selecciona una cámara de la producción de un día de manera aleatoria, y se encuentra que el microchip que contiene está defectuoso. Encuentre la probabilidad de que haya sido suministrado (a) de A, (b) de B y (c) de C. (d) ¿Cuál proveedor tiene mayor probabilidad de haber producido el microchip?*

**Solución:** Se definen los siguientes eventos:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\text{proveedor A}\} \\ S_2 &= \{\text{proveedor B}\} \\ S_3 &= \{\text{proveedor C}\} \\ D &= \{\text{microchip defectuoso}\} \end{aligned}$$

Se tiene

$$P(S_1) = 0.2 \quad P(S_2) = 0.35 \quad P(S_3) = 0.45$$

y las probabilidades condicionales

$$P(D|S_1) = 0.03 \quad P(D|S_2) = 0.02 \quad P(D|S_3) = 0.01$$

las cuales están reflejadas en el árbol de probabilidad de la figura 8.23. Observe que la figura muestra sólo la parte del árbol de probabilidad completo que se relaciona con el evento  $D$ . En realidad, esto es todo lo que se necesita mostrar, y esta forma abreviada se llama comúnmente un *árbol de probabilidad de Bayes*.

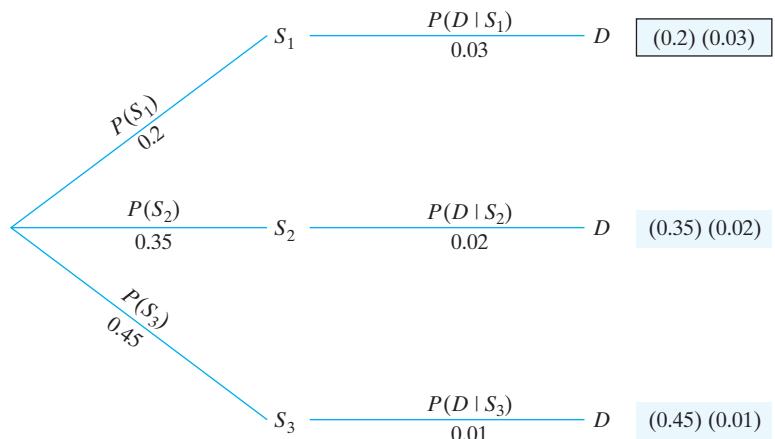


FIGURA 8.23 Árbol de probabilidad de Bayes para el ejemplo 1.

Para el inciso (a), se desea encontrar la probabilidad de  $S_1$  dado que ha ocurrido  $D$ . Esto es,

$$\begin{aligned} P(S_1 | D) &= \frac{\text{probabilidad de la ruta que pasa por } S_1 \text{ y } D}{\text{suma de las probabilidades de todas las rutas hacia } D} \\ &= \frac{(0.2)(0.03)}{(0.2)(0.03) + (0.35)(0.02) + (0.45)(0.01)} \\ &= \frac{0.006}{0.006 + 0.007 + 0.0045} \\ &= \frac{0.006}{0.0175} = \frac{60}{175} = \frac{12}{35} \end{aligned}$$

Esto significa que aproximadamente 34.3% de los microchips defectuosos vienen del proveedor A.

Para el inciso (b), se tiene

$$\begin{aligned} P(S_2 | D) &= \frac{\text{probabilidad de la ruta que pasa por } S_2 \text{ y } D}{\text{suma de las probabilidades de todas las rutas hacia } D} \\ &= \frac{(0.35)(0.02)}{0.0175} = \frac{0.007}{0.0175} = \frac{70}{175} = \frac{14}{35} \end{aligned}$$

Para el inciso (c)

$$\begin{aligned} P(S_3 | D) &= \frac{\text{probabilidad de la ruta que pasa por } S_3 \text{ y } D}{\text{suma de las probabilidades de todas las rutas hacia } D} \\ &= \frac{(0.45)(0.01)}{0.0175} = \frac{0.0045}{0.0175} = \frac{45}{175} = \frac{9}{35} \end{aligned}$$

Para el inciso (d), el mayor de  $P(S_1 | D)$ ,  $P(S_2 | D)$  y  $P(S_3 | D)$  es  $P(S_2 | D)$ . Así que el microchip defectuoso tiene más probabilidad de haber sido suministrado por B.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



**FIGURA 8.24** Diagrama para el ejemplo 2.

### EJEMPLO 2 Caramelos en una bolsa

Dos bolsas idénticas, la bolsa I y la bolsa II, están sobre una tabla, la bolsa I contiene un caramelo rojo y otro negro; la bolsa II contiene dos caramelos rojos. (Vea la figura 8.24.) Se selecciona una bolsa al azar, y de ésta se toma un caramelo de manera aleatoria. El caramelo es rojo. ¿Cuál es la probabilidad que el otro caramelo dentro de la bolsa seleccionada sea rojo?

**Solución:** Como el otro caramelo podría ser rojo o negro, se podría concluir de manera apresurada que la respuesta es  $\frac{1}{2}$ . En ese caso, su intuición fallaría. La pregunta puede replantearse de la manera siguiente: encuentre la probabilidad de que el caramelo provenga de la bolsa II, dado que el caramelo es rojo. Se definen los eventos

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\text{Selección de la bolsa I}\} \\ B_2 &= \{\text{Selección de la bolsa II}\} \\ R &= \{\text{Selección de caramelo rojo}\} \end{aligned}$$

Se desea encontrar  $P(B_2 | R)$ . Como se selecciona una bolsa de manera aleatoria,  $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$ . De la figura 8.24, se concluye que

$$P(R | B_1) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(R | B_2) = 1$$

Se presentarán dos métodos para resolver este problema, el primero con un árbol de probabilidad y el segundo con la fórmula de Bayes.

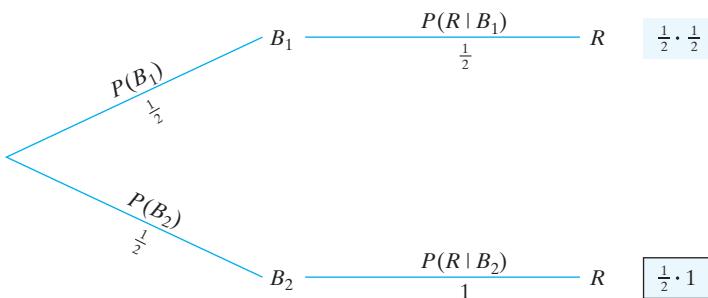


FIGURA 8.25 Árbol de probabilidad de Bayes para el ejemplo 2.

**Método 1: Árbol de probabilidad** En la figura 8.25 se muestra un árbol de probabilidad de Bayes para este problema. Como todas las rutas terminan en  $R$ ,

$$\begin{aligned} P(B_2 | R) &= \frac{\text{probabilidad para la ruta que pasa por } B_2 \text{ y } R}{\text{suma de probabilidades de todas las rutas}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(1)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)(1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Observe que la probabilidad no condicional de elegir la bolsa II, a saber  $P(B_2) = \frac{1}{2}$ , se incrementa a  $\frac{2}{3}$ , dado que se tomó un caramelo rojo. Un incremento es razonable puesto que sólo hay caramelos rojos en la bolsa II, y la selección de un caramelo rojo haría más probable que proviniera de la bolsa II.

**Método 2: Fórmula de Bayes** Como  $B_1$  y  $B_2$  pertenecen al espacio muestral, por la fórmula de Bayes, se tiene

$$\begin{aligned} P(B_2 | R) &= \frac{P(B_2)P(R | B_2)}{P(B_1)P(R | B_1) + P(B_2)P(R | B_2)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(1)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)(1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7



## Problemas 8.7

1. Suponga que los eventos  $E$  y  $F$  pertenecen a un espacio muestral  $S$ , donde  $E$  y  $F$  tienen probabilidades

$$P(E) = \frac{2}{5} \quad P(F) = \frac{3}{5}$$

Si  $D$  es un evento tal que

$$P(D | E) = \frac{1}{10} \quad P(D | F) = \frac{1}{5}$$

encuentre las probabilidades  $P(E | D)$  y  $P(F | D')$ .

2. Un espacio muestral es partido por los eventos  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$ , cuyas probabilidades son  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{3}{10}$  y  $\frac{1}{2}$ , respectivamente. Suponga que  $S$  es un evento para el que se cumplen las siguientes probabilidades condicionales:

$$P(S | E_1) = \frac{2}{5} \quad P(S | E_2) = \frac{7}{10} \quad P(S | E_3) = \frac{1}{2}$$

encuentre las probabilidades  $P(E_1 | S)$  y  $P(E_3 | S')$ .

3. **Votación** En cierto distrito electoral, 42% de los votantes elegibles son demócratas registrados, 33% son republicanos y el resto son independientes. Durante la última elección prima-

ria, votaron 25% de los demócratas, 27% de los republicanos y 15% de los independientes. Encuentre la probabilidad de que una persona que haya votado sea un demócrata.

4. **Llantas importadas contra nacionales** Se tienen 3000 llantas en el almacén de un distribuidor de llantas, 2000 de ellas son del país y 1000 son importadas. Entre las llantas domésticas, 40% son para todas las temporadas; de las llantas importadas, 10% son para todas las temporadas. Si una llanta se selecciona de manera aleatoria y ésta es para todas las temporadas, ¿cuál es la probabilidad de que sea importada?



- 5. Pruebas para detectar enfermedades** Se desarrolló una nueva prueba para detectar la enfermedad Gamma, que al parecer afecta a 3% de la población. Los resultados de pruebas extensivas indican que 86% de las personas que tienen la enfermedad tendrán una reacción positiva a la prueba, mientras que 7% de quienes no tienen la enfermedad también presentarán una reacción positiva.
- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada de manera aleatoria, y que tiene una reacción positiva a la prueba, en realidad tenga la enfermedad Gamma?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada de manera aleatoria, y que tiene una reacción negativa a la prueba, en realidad tenga la enfermedad Gamma?
- 6. Ganancias y dividendos** Se cree que un tercio de las compañías en un sector particular de la economía, tendrá un aumento en sus ganancias trimestrales. De aquellos que tienen el incremento, el porcentaje que declara un dividendo es 60%. De quienes no tienen un aumento, el porcentaje que declara un dividendo es 10%. ¿Qué porcentaje de las empresas que declaran un dividendo tendrán un incremento en las ganancias trimestrales?
- \***7. Caramelos en una bolsa** Una bolsa contiene cuatro caramelos rojos y dos verdes y una segunda bolsa contiene dos caramelos rojos y tres verdes. Se selecciona una bolsa al azar y de ésta se escoge un caramelo de manera aleatoria. El caramelo es rojo. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la primera bolsa?
- 8. Pelotas en un tazón** El tazón I contiene dos pelotas rojas y tres blancas. El tazón II contiene cuatro pelotas rojas y tres blancas. El tazón III contiene dos pelotas rojas, dos blancas y dos verdes. Se escoge un tazón de manera aleatoria y de éste se selecciona al azar una pelota. La pelota es blanca. Encuentre la probabilidad de que provenga del tazón I.
- \***9. Control de calidad** Un proceso de manufactura requiere del uso de una soldadora robótica en cada una de sus dos líneas de ensamble A y B, las cuales producen 300 y 500 unidades de producto al día, respectivamente. Con base en la experiencia, se cree que la soldadora en A produce 2% de unidades defectuosas, mientras que la soldadora en B produce 5% de unidades defectuosas. Al final de un día, se seleccionó una unidad de manera aleatoria de la producción total y se encontró que estaba defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que la unidad proviniera de la línea A?
- 10. Control de calidad** Un fabricante de automóviles tiene cuatro plantas: A, B, C y D. Los porcentajes de la producción total diaria que generan las cuatro plantas son 35%, 20%, 30% y 15%, respectivamente. Los porcentajes de unidades defectuosas que se producen en las cuatro plantas se estiman en 2%, 5%, 3% y 4%, respectivamente. Suponga que un automóvil, en el lote de un distribuidor, se selecciona de manera aleatoria y se encuentra que está defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la planta (a) A? (b) B? (c) C? (d) D?
- 11. Llamada-despertador** Barbara Smith, una representante de ventas duerme en un hotel y tiene una cita para desayunar con un cliente importante a la mañana siguiente. Pide en la recepción del hotel que le hagan una llamada para despertar a las 7 A.M., con el propósito de estar lista para la reunión. La probabilidad de que le hagan la llamada es 0.95. Si recibe la llamada, la probabilidad de que esté a tiempo en la reunión es 0.9. Si no recibe la llamada, la probabilidad de que esté a tiempo en la reunión es 0.75. Si llega a tiempo a la reunión, ¿cuál es la probabilidad de que le hayan hecho la llamada?
- 12. Dispensador de golosinas** En un anaquel hay dos frascos opacos idénticos que contienen 50 racimos de pasas cada uno. Los racimos de uno de los frascos están hechos con chocolate oscuro. En el otro frasco, 20 racimos están hechos con chocolate oscuro y 30 con chocolate blanco. (Los racimos están bien mezclados). Bob Jones, quien tiene un repentino antojo de chocolate, toma de manera aleatoria un racimo de pasas de uno de los frascos. Si el racimo está hecho con chocolate oscuro, ¿cuál es la probabilidad de que provenga del frasco que sólo contiene chocolate oscuro?
- 13. Actividad física** La semana del Día nacional de la salud y el ejercicio para el empleado, se pidió a los trabajadores de una gran compañía que hicieran ejercicio un mínimo de tres veces esa semana durante al menos 20 minutos por sesión. El propósito era generar "millas de ejercicio". Todos los participantes que completaron este requerimiento recibieron un certificado con el que se reconocía su contribución. Los ejercicios reportados fueron caminata, ciclismo y carrera. De todos los participantes,  $\frac{1}{2}$  reportó caminata,  $\frac{1}{4}$  reportó ciclismo y  $\frac{1}{4}$  reportó carrera. Suponga que la probabilidad de que un participante que hizo caminata complete el requerimiento es  $\frac{9}{10}$  y para el ciclismo y la carrera son  $\frac{4}{5}$  y  $\frac{2}{3}$ , respectivamente. ¿Qué porcentaje de las personas que completaron el requerimiento se espera que hayan reportado caminata? (Suponga que cada participante realiza ejercicio en una sola actividad).
- 14. Confiabilidad de batería** Cuando el clima es extremadamente frío, un conductor puede cargar su batería de automóvil durante la noche, para mejorar la probabilidad de que el carro encenderá temprano la mañana siguiente. Si no la carga, la probabilidad de que el automóvil no encienda es  $\frac{4}{5}$ . Si la carga, la probabilidad de que el automóvil no encienda es  $\frac{1}{8}$ . La experiencia muestra que la probabilidad de que recuerde cargar la batería es  $\frac{9}{10}$ . Una mañana, durante una helada, no pudo encender su automóvil. ¿Cuál es la probabilidad de que haya olvidado cargar la batería?



- 15. Encuesta sobre satisfacción de automóvil** En una encuesta de satisfacción del cliente,  $\frac{3}{5}$  de los encuestados tienen un automóvil hecho en Japón,  $\frac{1}{10}$  un auto fabricado en Europa y  $\frac{3}{10}$  un automóvil americano. Del primer grupo, 85% dijo que compraría un auto fabricado en el mismo lugar, y de los otros dos grupos los porcentajes correspondientes son 50% y 40%. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que dijo que compraría un automóvil hecho en el mismo lugar tenga un coche fabricado en Japón?
- 16. Perforaciones de prueba de mineral** Un geólogo cree que la probabilidad de que un raro mineral terrestre llamado dalosio esté presente en una región particular del país es 0.005. Si existe dalosio en esa zona, las perforaciones de prueba del geólogo tendrán un resultado positivo 80% de las veces. Sin embargo, si no hay dalosio presente, ocurrirá un resultado negativo 85% de las veces.
- (a) Si una prueba es positiva en un sitio de la región, encuentre la probabilidad de que haya dalosio.

- (b) Si una prueba es negativa en un sitio de este tipo, encuentre la probabilidad de que haya dulosio.
- 17. Examen de física** Despues de aplicar un examen de física, resultó que sólo 75% de la clase respondió todas las preguntas. De aquellos que lo hicieron, 80% aprobó, pero de aquellos que no respondieron todas las preguntas, sólo 50% aprobó. Si un estudiante aprobó el examen, ¿cuál es la probabilidad de que haya contestado todas las preguntas? (P.D.: Finalmente, el profesor se dio cuenta de que el examen era demasiado largo y ajustó la curva de calificaciones, para ser justo y piadoso).
- 18. Dejar de fumar** En un sondeo entre los fumadores en 1990, 75% predijeron que continuarían fumando cinco años después. Pasados cinco años, 70% de quienes predijeron que seguirían fumando ya no fumaban, y de aquellos que predijeron que dejarían el cigarro, 90% ya no fumaban. ¿Qué porcentaje de quienes ya no fuman predijeron que seguirían fumando?
- 19. Comunicación extraterrestre** B. G. Cosmos, un científico, cree que hay una probabilidad de  $\frac{2}{5}$  de que extraterrestres de una civilización avanzada del Planeta X estén tratando de comunicarse con nosotros mediante el envío de mensajes de alta frecuencia a la Tierra. Cosmos desea captar estas señales mediante un equipo sofisticado. El fabricante del equipo, Trekee, Inc., declara que si los extraterrestres realmente envían señales, la probabilidad de que el equipo las detecte es  $\frac{3}{5}$ . Sin embargo, si los extraterrestres no están enviando señales, la probabilidad de que el equipo parezca detectar dichas señales es  $\frac{1}{10}$ . Si el equipo detecta señales, ¿cuál es la probabilidad de que en realidad las estén enviando los extraterrestres?
- 20. Calificaciones en cálculos** En una clase de cálculo I, 60% de la clase tenía un promedio de 10 a mitad del semestre. De éstos, 70% terminaron con un promedio de 10 al final del curso, y de aquellos que no tenían 10 a mitad del semestre, 60% terminaron el curso con una calificación de 10. Si se selecciona al azar a uno de los estudiantes y resulta tener un 10 de calificación final, ¿cuál es la probabilidad de que no haya tenido 10 a mitad del semestre?
- 21. Crítica de cine** Un par de famosos e influyentes críticos de cine tienen un popular programa de televisión en el que revisan los nuevos lanzamientos de películas y los videos más recientes. En los pasados 10 años, han dado el “visto bueno” a 70% de las películas que resultaron ser un éxito y han “reprobado” a 80% de las películas que probaron no tener éxito. Una película nueva, *Math Wizard*, cuyo lanzamiento es inminente, se califica favorablemente por otras personas en la industria que ya la han visto; de hecho, le dan una probabilidad de éxito *a priori* de  $\frac{8}{10}$ . Encuentre la probabilidad de que sea un éxito, dado que la pareja de críticos de televisión le dieron el “visto bueno” después de haberla analizado. Suponga que todas las películas reciben ya sea el “visto bueno” o la “reprobación”.
- 22. Pelotas en un tazón** El tazón 1 contiene cinco pelotas verdes y cuatro rojas, y el tazón 2 contiene tres pelotas verdes, una blanca y tres rojas. Se selecciona una pelota de manera aleatoria del tazón 1 y se coloca en el tazón 2. Despues se selecciona al azar una pelota del tazón 2. Si la pelota es verde, encuentre la probabilidad de que se haya tomado una pelota verde del tazón 1.
- 23. Préstamo riesgoso** La experiencia indica que 20% de las solicitudes de préstamo del departamento de préstamos del Banco de Montreal son consideradas por los analistas del banco como de clase “subestándar” y no deben aprobarse. Sin embargo, el revisor de préstamos del banco, M. Blackwell, es un poco relajado en ocasiones y concluye que una solicitud no es de clase subestándar cuando sí lo es y viceversa. Suponga que 25% de las solicitudes que en realidad son subestándar no son consideradas como tales por Blackwell y que 15% de las solicitudes que no subestándar sí lo son y, por ende, no son aprobadas.
- (a) Encuentre la probabilidad de que Blackwell considere que una solicitud es subestándar.
- (b) Encuentre la probabilidad de que una solicitud sea subestándar, dado que Blackwell considera que es subestándar.
- (c) Encuentre la probabilidad de que Blackwell cometa un error al calificar una solicitud. (Un error ocurre cuando la solicitud no es subestándar pero se considera como tal, o cuando la solicitud es subestándar pero se considera como si no lo fuera).
- 24. Cofre de monedas** Cada uno de tres cofres idénticos tiene dos cajones. El primer cofre contiene una moneda de oro en cada cajón. El segundo contiene una moneda de plata en cada cajón, y el tercero contiene una moneda de plata en un cajón y una moneda de oro en el otro. Se selecciona un cofre al azar, y de éste se abre un cajón al azar. En el cajón hay una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda en el otro cajón de ese cofre sea de plata?
- 25. Identificación de producto después de una inundación<sup>6</sup>** Despues de una inundación severa, un almacén de distribución está lleno de cajas a prueba de agua que contienen fuegos artificiales, de las cuales se han deslavado las etiquetas de identificación. Hay tres tipos de fuegos artificiales: de calidad baja, de calidad media y de calidad alta, cada uno empacado en unidades de 100 en cajas idénticas. Ninguno de los fuegos artificiales individuales tiene marcas pero se cree que en todo el almacén, la proporción de cajas con fuegos artificiales de calidad baja, media y alta es 0.25, 0.35 y 0.5, respectivamente. Como la detonación de un fuego artificial lo destruye, las pruebas extensivas no son prácticas. En lugar de esto, el distribuidor decide que se probará un par de fuegos artificiales de cada caja. Entonces, la calidad de los fuegos artificiales se decidirá con base en cuántos de estos pares resultan defectuosos. El fabricante, con base en su experiencia, estima las probabilidades condicionales que se dan en la tabla 8.14. Suponga que se seleccionan dos fuegos artificiales de una caja y se prueban, y se encuentra que ambos detonan de manera satisfactoria. Sean *B*, *M* y *A* los eventos en que la caja contiene fuegos artificiales de calidad baja, media y alta, respectivamente. Además, Sea *E* el evento observado en el que ninguno de los fuegos artificiales probados fue defectuoso.

**TABLA 8.14** Probabilidades condicionales de encontrar *x* fuegos artificiales defectuosos, dado que se probaron dos de ellos pertenecientes a una caja de calidad conocida

Número de defectos <i>x</i>	Calidad de los fuegos artificiales		
	Baja	Media	Alta
0	0.49	0.64	0.81
1	0.44	0.32	0.18
2	0.07	0.04	0.01

<sup>6</sup>Samuel Goldberg, *Probability, An Introduction* (Prentice-Hall, Inc. 1960, Dover Publications, Inc., 1986), pp. 97-98. Adaptado con autorización del autor.

- (a) Encuentre la probabilidad  $P(B|E)$ , la probabilidad de que la caja contenga fuegos artificiales de baja calidad dado  $E$ .
- (b) Encuentre la probabilidad de que la caja contenga fuegos artificiales de calidad media dado  $E$ .
- (c) Encuentre la probabilidad de que la caja contenga fuegos artificiales de alta calidad dado  $E$ .
- (d) ¿Cuál es la calidad de fuegos artificiales contenidos en la caja que es más probable, dado  $E$ ?

#### 26. Identificación de producto después de inundación

- (a) Repita el problema 25 si  $E$  es el evento observado en el que exactamente uno de los fuegos artificiales probados resultó defectuoso.
- (b) Repita el problema 25 si  $E$  es el evento observado en el que los dos fuegos artificiales probados resultaron defectuosos.

**27. Pronóstico del clima**<sup>7</sup> J. B. Smith ha vivido en la misma ciudad muchos años y asigna una probabilidad *a priori* de 0.4 a que el clima de hoy será inclemente. (Él piensa que el clima será bueno con una probabilidad de 0.6). Smith escucha un

pronóstico del clima temprano por la mañana para obtener información del clima del día. El locutor que anuncia el clima hace uno de tres pronósticos: clima bueno, clima inclemente o clima incierto. Smith ha hecho estimaciones de probabilidades condicionales de los diferentes pronósticos, dado el clima del día, como lo muestra la tabla 8.15. Por ejemplo, Smith cree que, de los días buenos, 70% se pronostican correctamente, 20% se pronostican como inclementes y 10% se pronostican como inciertos. Suponga que Smith escucha que el locutor pronostica un buen clima. ¿Cuál es la probabilidad *a posteriori* de clima bueno?

**TABLA 8.15** Clima y pronóstico

Clima del día	Pronóstico		
	Bueno	Inclemente	Incierto
Bueno	0.7	0.2	0.1
Inclemente	0.3	0.6	0.1

## 8.8 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

<b>Sección 8.1</b>	<b>Principio básico de conteo y permutaciones</b> diagrama de árbol      Principio básico de conteo permutación, $_n P_r$	Ej. 1, p. 346 Ej. 5, p. 348
<b>Sección 8.2</b>	<b>Combinaciones y otros principios de conteo</b> combinación, $_n C_r$ permutación con objetos repetidos      celdas	Ej. 2, p. 352 Ej. 6, p. 358
<b>Sección 8.3</b>	<b>Espacios muestrales y eventos</b> espacio muestral      punto muestral      espacio muestral finito evento      evento seguro      evento imposible      evento simple diagrama de Venn      complemento, $E'$ unión, $\cup$ intersección, $\cap$ eventos mutuamente excluyentes	Ej. 1, p. 363 Ej. 6, p. 365 Ej. 7, p. 366 Ej. 8, p. 368
<b>Sección 8.4</b>	<b>Probabilidad</b> resultados igualmente posibles      ensayo      frecuencia relativa espacio equiprobable      probabilidad del evento, $P(E)$ ley de la suma para eventos mutuamente excluyentes      probabilidad empírica posibilidades	Ej. 1, p. 371 Ej. 2, p. 371 Ej. 5, p. 374 Ej. 9, p. 378
<b>Sección 8.5</b>	<b>Probabilidad condicional y procesos estocásticos</b> probabilidad condicional, $P(E F)$ espacio muestral reducido ley general de la multiplicación      ensayo      experimento compuesto árbol de probabilidad	Ej. 1, p. 382 Ej. 5, p. 386 Ej. 6, p. 386
<b>Sección 8.6</b>	<b>Eventos independientes</b> eventos independientes      eventos dependientes ley especial de la multiplicación	Ej. 1, p. 394 Ej. 3, p. 396
<b>Sección 8.7</b>	<b>Fórmula de Bayes</b> partición      probabilidad <i>a priori</i> probabilidad <i>a posteriori</i> fórmula de Bayes      árbol de probabilidad de Bayes	Ej. 1, p. 406 Ej. 2, p. 408

<sup>7</sup>Samuel Goldberg, *Probability, An Introduction* (Prentice-Hall, Inc., 1960, Dover Publications, Inc., 1986), pp. 99-100. Adaptado con permiso del autor.

## Resumen

Es importante conocer el número de formas en que puede ocurrir un procedimiento. Suponga que un procedimiento involucra una secuencia de  $k$  etapas. Sea  $n_1$  el número de formas en que puede ocurrir la primera etapa, y  $n_2$  el número de formas en que puede ocurrir la segunda etapa, y así sucesivamente, con  $n_k$  como el número de formas en que puede ocurrir la  $k$ -ésima etapa. Entonces, el número de formas en que puede ocurrir un procedimiento es

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$$

Este resultado se llama el principio básico de conteo.

Una selección ordenada de  $r$  objetos, sin repetición, tomados de  $n$  objetos distintos se llama una permutación de los  $n$  objetos tomados  $r$  a la vez. El número de estas permutaciones se denota  ${}_nP_r$  y está dado por

$${}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}_{r \text{ factores}} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Si la selección se hace sin importar el orden, entonces es simplemente un subconjunto de  $r$  elementos de un conjunto con  $n$  elementos y se llama una combinación de  $n$  objetos tomados  $r$  a la vez. El número de estas combinaciones se denota  ${}_nC_r$  y está dado por

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Cuando algunos de los objetos están repetidos, el número de permutaciones distinguibles de  $n$  objetos tales que  $n_1$  sean de un tipo,  $n_2$  sean de un segundo tipo, etcétera, y  $n_k$  sean del  $k$ -ésimo tipo, es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \quad (1)$$

donde  $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ .

También puede usarse la expresión de la ecuación (1) para determinar el número de asignaciones de objetos a celdas. Si  $n$  objetos distintos se colocan en  $k$  celdas ordenadas, con  $n_i$  objetos en la celda  $i$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$ , entonces el número de tales asignaciones es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

donde  $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ .

Un espacio muestral para un experimento es un conjunto  $S$  de todos los resultados posibles del experimento. Estos resultados se llaman puntos muestrales. Un subconjunto  $E$  de  $S$  se llama un evento. Existen dos eventos especiales que forman el espacio muestral, uno es el evento seguro y el otro es el conjunto vacío, que es un evento imposible. Un evento que consiste de un solo punto muestral se llama evento simple. Se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes cuando no tienen ningún punto muestral en común.

Un espacio muestral cuyos resultados son igualmente posibles se llama espacio equiprobable. Si  $E$  es un evento para un espacio equiprobable finito  $S$ , entonces la probabilidad de que  $E$  ocurra está dada por

$$P(E) = \frac{\#(E)}{\#(S)}$$

Si  $F$  también es un evento en  $S$ , se tiene

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$  Si  $E$  y  $F$  son mutuamente excluyentes

$$P(E') = 1 - P(E)$$

$$P(S) = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

Para un evento  $E$ , la relación

$$\frac{P(E)}{P(E')} \left( = \frac{P(E)}{1 - P(E)} \right)$$

proporciona las posibilidades de que  $E$  ocurra. De manera inversa, si las posibilidades de que  $E$  ocurra son  $a : b$ , entonces

$$P(E) = \frac{a}{a+b}$$

La probabilidad de que ocurra un evento  $E$ , dado que ocurrió el evento  $F$ , se llama una probabilidad condicional. Se denota por  $P(E|F)$  y puede calcularse al considerar un espacio muestral equiprobable reducido y al usar la fórmula

$$P(E|F) = \frac{\#(E \cap F)}{\#(F)}$$

o bien, a partir de la fórmula

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

que involucra probabilidades con respecto al espacio muestral original.

Para encontrar la probabilidad de que ocurran dos eventos, se puede usar la ley general de la multiplicación:

$$P(E \cap F) = P(E)P(F|E) = P(F)P(E|F)$$

Aquí se multiplica la probabilidad de que ocurra uno de los eventos por la probabilidad condicional de que ocurra el otro evento, dado que ha ocurrido el primero de ellos. Para más de dos eventos, la ley correspondiente es

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) \\ = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2) \cdots \\ P(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1}) \end{aligned}$$

La ley general de la multiplicación también se llama ley de la probabilidad compuesta, porque es útil cuando se aplica a un experimento compuesto —que puede expresarse como una sucesión de dos o más experimentos distintos—, llamados ensayos o etapas.

Cuando se analiza un experimento compuesto, es extremadamente útil contar con un árbol de probabilidad para mantener el rastro de los resultados posibles para cada ensayo del experimento. Una ruta es una sucesión completa de ramas desde el inicio hasta la punta del árbol. Cada ruta representa un resultado del experimento

compuesto, y la probabilidad de esa ruta es el producto de las probabilidades para las ramas de la ruta.

Los eventos  $E$  y  $F$  son independientes cuando la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad del otro; esto es,

$$P(E|F) = P(E) \quad \text{o bien} \quad P(F|E) = P(F)$$

Los eventos que no son independientes son dependientes.

Si  $E$  y  $F$  son independientes, la ley general de la multiplicación se simplifica como la ley especial de la multiplicación:

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

Aquí, la probabilidad de que ocurra tanto  $E$  como  $F$  es la probabilidad de  $E$  multiplicada por la probabilidad de  $F$ . La ecuación anterior representa la base de una definición alternativa de independencia: los eventos  $E$  y  $F$  son independientes si y sólo si

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

## Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

En los problemas 1 a 4, determine los valores

1.  $8P_3$
2.  $20P_1$
3.  $9C_7$
4.  $12C_5$

- 5. Placa de automóvil** Una placa de seis caracteres consiste en tres letras seguidas por tres números. ¿Cuántas placas diferentes son posibles?

- 6. Comida** En un restaurante, una comida completa consiste en una entrada, un plato fuerte y un postre. Las opciones para la entrada son sopa y ensalada; para el plato fuerte, las opciones son pollo, bistec, langosta y ternera; para el postre, las opciones son helado, pie y pudín. ¿Cuántos tipos de comida completa pueden pedirse?

- 7. Puerta del garaje** El transmisor de un sistema eléctrico para la apertura de la puerta de un garaje es una señal codificada para un receptor. El código está determinado por cinco interruptores, cada uno de los cuales está en la posición de “encendido” o “apagado”. Determine el número de códigos diferentes que pueden transmitirse.

- 8. Béisbol** Un entrenador de béisbol debe determinar el orden en que los nueve miembros del equipo batearán. ¿Cuántos órdenes de bateo son posibles?

- 9. Softbol** Una liga de softbol tiene siete equipos. En términos de primero, segundo y tercer lugar, ¿de cuántas formas puede terminar la temporada? Suponga que no hay empates.

- 10. Trofeos** En una vitrina, se colocarán nueve trofeos distintos, dos en la repisa superior, tres en la de en medio y cuatro en la repisa inferior. Si se considera el orden de disposición en cada repisa, ¿en cuántas formas pueden colocarse los trofeos en la vitrina?

- 11. Grupos** Once pasajeros colocados en la lista de espera de un avión necesitan pases de abordar. Pero sólo hay seis pases disponibles. ¿Cuántos grupos diferentes de pasajeros pueden abordar?

Tres o más eventos son independientes si y sólo si para cada conjunto de dos o más de los eventos, la probabilidad de la intersección de los eventos en ese conjunto es igual al producto de las probabilidades de los eventos.

Una partición divide un espacio muestral en eventos mutuamente excluyentes. Si  $E$  es un evento y  $F_1, F_2, \dots, F_n$  es una partición, entonces, para encontrar la probabilidad condicional del evento  $F$ , dado  $E$ , cuando se conocen las probabilidades *a priori* y condicional, puede usarse la fórmula de Bayes:

$$P(F_i | E) = \frac{P(F_i)P(E | F_i)}{P(F_1)P(E | F_1) + P(F_2)P(E | F_2) + \dots + P(F_n)P(E | F_n)}$$

Un problema del tipo Bayes también puede resolverse con la ayuda de un árbol de probabilidad de Bayes.



- 12. Cartas** De una baraja de 52 cartas de juego se reparte una mano de cinco cartas. ¿En cuántas formas pueden dos de las cartas tener el mismo valor, otras dos un valor diferente y la quinta carta otro valor distinto?

- 13. Focos** Una caja contiene 24 focos, uno de los cuales está defectuoso. (a) ¿En cuántas formas pueden seleccionarse tres focos? (b) ¿En cuántas formas pueden seleccionarse tres focos si uno está defectuoso?

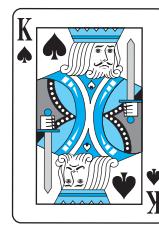
- 14. Examen de opción múltiple** Cada pregunta de un examen de opción múltiple con 10 preguntas tiene un valor de 10 puntos y tiene cuatro opciones, sólo uno de los cuales es correcta. Al azar, ¿en cuántas formas es posible obtener una calificación de 90 o mejor?

- 15. Disposición de letras** ¿Cuántas disposiciones horizontales distinguibles de las letras en MISSISSIPPI son posibles?

- 16. Señales de bandera** Ciertas banderas dispuestas verticalmente en un asta bandera indican una señal (o un mensaje). ¿Cuántas señales diferentes son posibles si se usan dos banderas rojas, tres verdes y cuatro blancas?

- 17. Agencia de personal** Una agencia de personal proporciona profesores de matemáticas de manera temporal a universidades que están cortas de personal. El gerente tiene disponible un grupo de nueve profesores y debe enviar cuatro a Dalhousie University y tres a St. Mary. ¿En cuántas formas puede hacer asignaciones?

- 18. Agencia de viajes** Una agencia de viajes tiene tres camionetas y cada una puede llevar a siete turistas. Suponga que llegan 14 personas para una visita panorámica de la ciudad y

- se usarán sólo dos camionetas. ¿En cuántas formas se pueden distribuir las personas a las camionetas?
- 19.** Suponga que  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  es el espacio muestral y  $E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y  $E_2 = \{4, 5, 6, 7\}$  son eventos para un experimento. Encuentra (a)  $E_1 \cup E_2$ , (b)  $E_1 \cap E_2$ , (c)  $E'_1 \cup E_2$ , (d)  $E_1 \cap E'_1$  y (e)  $(E_1 \cap E'_2)'$ . (f) ¿Son  $E_1$  y  $E_2$  mutuamente excluyentes?
- 20. Dado y moneda** Se lanza un dado y después una moneda. (a) Determine un espacio muestral para este experimento. Determine los eventos en los que (b) resulta un 2 y (c) resulta una cara y un número par.
- 21. Bolsas de caramelos** Tres bolsas etiquetadas 1, 2 y 3, contienen dos caramelos cada una, un caramelo rojo y el otro verde. Se selecciona un caramelo al azar de cada bolsa. (a) Determine un espacio muestral para este experimento. Determine los eventos en los que (b) exactamente dos de los caramelos son rojos y (c) los caramelos son del mismo color.
- 22.** Suponga que  $E_1$  y  $E_2$  son eventos para un experimento con un número finito de puntos muestrales. Si  $P(E_1) = 0.6$ ,  $P(E_1 \cup E_2) = 0.7$  y  $P(E_1 \cap E_2) = 0.2$ , encuentre  $P(E_2)$ .
- 23. Control de calidad** Un fabricante de chips de computadora empaca 10 chips en una caja. Para el control de calidad, se seleccionan al azar dos chips de cada caja y se prueban. Si cualquiera de los chips probados es defectuoso, se devuelve la caja entera de chips y no se pone a la venta. Para una caja que contiene exactamente un chip defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que la caja sea rechazada?
- 24. Medicamentos** Se inyectaron 100 ratas con uno de cuatro medicamentos A, B, C o D. El medicamento A se le dio a 35% de las ratas, B a 25% y C a 15%. Si se elige al azar una rata, determine la probabilidad de que haya sido inyectada con C o D. Si el experimento se repite en un grupo más grande de 300 ratas pero con los medicamentos dados en la misma proporción, ¿cuál es el efecto en la probabilidad anterior?
- 
- 25. Examen de opción múltiple** Un examen con cinco preguntas de opción múltiple tiene cuatro opciones en cada pregunta, sólo una de las cuales es correcta. Si un estudiante responde cada pregunta de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante responda exactamente dos preguntas correctamente?
- 26. Preferencia de refresco** Para determinar la preferencia nacional de los que acostumbran beber refresco de cola, una agencia de publicidad condujo una encuesta entre 200 consumidores. Se involucraron dos marcas de refresco, A y B. Los resultados de la encuesta se muestran en la tabla 8.16. Si se selecciona uno de los encuestados de manera aleatoria, determine la probabilidad (empírica) de que a la persona
- (a) le guste tanto A como B.  
(b) le guste A, pero no B.
- | Le gusta sólo A         | 70  |
|-------------------------|-----|
| Le gusta sólo B         | 80  |
| Le gusta tanto A como B | 35  |
| No le gusta A ni B      | 15  |
| Total                   | 200 |
- 27. Caramelos en una bolsa** Una bolsa contiene cuatro caramelos rojos y seis verdes.
- (a) Si se seleccionan dos caramelos de manera aleatoria y sucesiva con reemplazo, determine la probabilidad de que ambos sean rojos.
- (b) Si la selección se hace sin reemplazo, determine la probabilidad de que ambos sean rojos.
- 28. Dados** Se lanza un par de dados balanceados. Determine la probabilidad de que la suma de los números sea (a) 2 o 7, (b) un múltiplo de 3 y (c) no menor a 7.
- 29. Cartas** Se seleccionan tres cartas de manera aleatoria de una baraja ordinaria con 52 cartas de juego, la selección se hace de manera sucesiva y con reemplazo. Determine la probabilidad de que (a) las tres cartas sean negras (b) dos cartas sean negras y la otra sea una carta de diamantes.
- 30. Cartas** Se seleccionan dos cartas de manera aleatoria de una baraja ordinaria de 52, la selección se hace de manera sucesiva y sin reemplazo. Determine la probabilidad de que (a) ambas cartas sean de corazones y (b) una sea un as y la otra sea un rey rojo.
- En los problemas 31 y 32, para el valor dado de  $P(E)$ , encuentre las posibilidades de que ocurra E.*
- 31.**  $P(E) = \frac{3}{8}$
- 32.**  $P(E) = 0.92$
- En los problemas 33 y 34, se dan las posibilidades de que ocurra E. Encuentre  $P(E)$ .*
- 33.** 6 : 1
- 34.** 3 : 4
- 35. Cartas** Si se selecciona una carta de manera aleatoria de una baraja ordinaria de 52 cartas, encuentre la probabilidad de que ésta no sea una carta con figura (sota, reina o rey), dado que es una carta de corazones.
- 
- 36. Dados** Si se lanzan dos dados balanceados, encuentre la probabilidad de que la suma sea menor que 7, dado que aparece un 6 en al menos uno de los dados.
- 37. Novela y película para la televisión** La probabilidad de que una novela en particular sea exitosa es 0.6, y si es exitosa, la probabilidad de que los derechos sean comprados para hacer una película para la televisión es de 0.7. Encuentre la proba-

bilidad de que la novela sea exitosa y llevada a la pantalla de televisión.

- 38. Cartas** Se seleccionan tres cartas al azar de una baraja ordinaria. Encuentre la probabilidad de que las cartas sean, en orden, una reina, una carta de corazones y el as de bastos, si las cartas se escogen con reemplazo.
- 39. Dados** Si se lanzan dos dados balanceados, encuentre lo siguiente.
- La probabilidad de obtener un total de 7, dado que ocurrió un 4 en al menos un dado.
  - La probabilidad de obtener un total de 7, dado que ocurrió un 4 en al menos un dado.
- 40. Dado** Se lanza un dado balanceado dos veces en sucesión. Encuentre la probabilidad de que el primer lanzamiento sea menor que 4, dado que el total es mayor que 8.
- 41. Dado** Si se lanza un dado balanceado dos veces en sucesión, encuentre la probabilidad de que el primer lanzamiento sea menor o igual que el segundo número, dado que el segundo número es menor que 3.
- 42. Cartas** Se seleccionan tres cartas sin reemplazo de una baraja ordinaria. Encuentre la probabilidad de que la tercera carta sea de de corazones.
- 43. Sondeo sobre condimento** Se realizó un sondeo entre 600 adultos para determinar si les gustaba o no el sabor de un condimento nuevo. Los resultados se resumen en la tabla 8.17.

**TABLA 8.17** Sondeo sobre condimento

	Le gusta	No le gusta	Total
Masculino	80	40	120
Femenino	320	160	480
Total	400	200	600

(a) Si se selecciona una persona del sondeo de manera aleatoria, encuentre la probabilidad de que a la persona no le guste el condimento ( $L'$ ), dado que la persona es del sexo femenino ( $F$ ).

(b) Determine si los eventos

$L = \{\text{le gusta el condimento}\}$  y  $M = \{\text{es del sexo masculino}\}$  son independientes o dependientes.

- 44. Fichas** Un recipiente contiene seis fichas numeradas del 1 al 6. Se seleccionan de manera aleatoria y con reemplazo dos fichas. Sea  $E$  el evento en el que se obtiene un 4 la primera vez y sea  $F$  el evento de obtener un 4 la segunda vez.
- ¿Son  $E$  y  $F$  mutuamente excluyentes?
  - ¿Son  $E$  y  $F$  independientes?
- 45. Universidad e ingreso familiar** Un sondeo de 175 estudiantes resultó en los datos que se muestran en la tabla 8.18. La tabla muestra el tipo de universidad al que asisten los estudiantes y el nivel de ingreso familiar del estudiante. Si un estudiante del sondeo se selecciona al azar, determine si el evento de asistir a una universidad pública y el evento de provenir de una familia de clase media son independientes o dependientes.

**TABLA 8.18** Sondeo a estudiantes

Ingreso	Universidad		Total
	Privada	Pública	
Alto	15	10	25
Medio	25	55	80
Bajo	10	60	70
Total	50	125	175

46. Si  $P(E) = \frac{1}{4}$ ,  $P(F) = \frac{1}{3}$  y  $P(E|F) = \frac{1}{6}$ , encuentre  $P(E \cup F)$ .
- 47. Arbustos** Cuando se planta cierto tipo de arbusto, la probabilidad de que enraíce es 0.7. Si se plantan cuatro arbustos, encuentre lo siguiente. Suponga independencia.
- La probabilidad de que ninguno de ellos enraíce.
  - La probabilidad de que exactamente dos de ellos enraícen.
  - La probabilidad de que cuando mucho dos de ellos enraícen.
- 48. Antibiótico** Ciertos antibióticos son efectivos para 75% de las personas que los toman. Suponga que cuatro personas toman este medicamento. ¿Cuál es la probabilidad de que sea efectivo para al menos tres de ellos? Suponga independencia.
- 49. Bolsas de caramelos** La bolsa I contiene tres caramelos verdes y dos rojos, y la bolsa II contiene cuatro caramelos rojos, dos verdes y dos blancos. Un caramelo se selecciona de manera aleatoria de la bolsa I y se coloca en la bolsa II. Si después se selecciona al azar un caramelo de la bolsa II, encuentre la probabilidad de que el caramelo sea rojo.
- 50. Bolsas de caramelos** La bolsa I contiene cuatro caramelos rojos y dos blancos. La bolsa II contiene dos caramelos rojos y tres blancos. Una bolsa se selecciona de manera aleatoria y de ésta se escoge un caramelo al azar.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el caramelo sea blanco?
  - Si el caramelo es blanco, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido tomado de la bolsa II?
- 51. Distribución de calificaciones** El último semestre, se analizó la distribución de calificaciones para cierta clase que toma un curso de nivel superior. Se encontró que la proporción de estudiantes que obtuvieron un 10 fue 0.4 y la proporción de quienes obtuvieron 10 y se graduaron fue 0.1. Si un estudiante de esta clase se selecciona de manera aleatoria y se encuentra que obtuvo un 10, encuentre la probabilidad de que el estudiante se haya graduado.
- 52. Reunión de alumnos** El último día del alumno en Omega College, asistieron 507 personas. De éstas, 409 vivían dentro del estado y 40% de ellos asistían por primera vez. Entre los alumnos que vivían fuera del estado, 73% asistían por primera vez. Ese día se realizó un sorteo, y la persona que ganó también había ganado el año pasado. Encuentre la probabilidad de que el ganador sea de fuera del estado.
- 53. Control de calidad** Una compañía de música quema CD en dos turnos. El primer turno produce 3000 discos diarios y el segundo produce 5000. Por la experiencia pasada, se cree que en el primero y segundo turnos se producen 1% y 2% de discos rayados, respectivamente. Al final del día, se seleccionó al azar un disco de la producción total.

- (a) Encuentre la probabilidad de que el CD esté rayado.  
(b) Si el CD está rayado, encuentre la probabilidad de que provenga del primer turno.
54. **Prueba de aptitud** En el pasado, una compañía ha contratado sólo personal con experiencia para su departamento de procesamiento de palabras. Debido a una escasez en este campo, la compañía ha decidido contratar personas sin experiencia que serán entrenadas en el trabajo. La compañía proporcionó a una agencia de empleo una nueva prueba de aptitud que ha sido diseñada para los solicitantes que desean esta posición de

entrenamiento. De aquellos que han tomado la prueba recientemente, 35% pasaron. Con el propósito de medir la efectividad de la prueba, todos los que la realizaron se aceptaron en el programa de entrenamiento. De aquellos que pasaron la prueba, 80% se desempeñaron de manera satisfactoria, mientras que, de aquellos que no pasaron la prueba, sólo 30% trabajaron satisfactoriamente. Si uno de los solicitantes en entrenamiento se selecciona de manera aleatoria y se encuentra que tiene un desempeño satisfactorio, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado la prueba?

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Probabilidad y autómatas celulares<sup>8</sup>

Los sistemas de una, dos o tres ecuaciones son propicias para modelar procesos simples, como la trayectoria de un objeto que se ha lanzado o la acumulación de interés en la cuenta de un banco. Pero, ¿cómo se modela algo complicado e irregular, como el relámpago de un rayo o el esparcimiento de un rumor? Para esto, en lugar de tratar de escribir y resolver un sistema de ecuaciones, se puede usar una técnica de modelado diferente: autómatas celulares.

Los autómatas celulares representan fenómenos grandes y complejos que usan colecciones de numerosas entidades pequeñas en las que cada entidad sigue unas cuantas reglas simples. El sistema de autómatas celulares más conocido es el juego llamado LIFE desarrollado por John Conway a finales de la década de 1970. Puede jugarse a mano en un tablero, pero si se usa una computadora es más rápido y fácil. En Internet pueden encontrarse programas gratuitos descargables. (Vaya a cualquier dispositivo de rastreo y busque "LIFE" y "Conway".)

Si bien LIFE es interesante, no es particularmente útil para modelar procesos de la vida real. Para tal tarea son mejores los autómatas celulares, cuyas reglas contienen un elemento aleatorio. A continuación se presenta un ejemplo. Se modelará la filtración de un derrame de petróleo en el subsuelo. El modelo del suelo seguirá un patrón de celdas encimadas como ladrillos (figura 8.26).

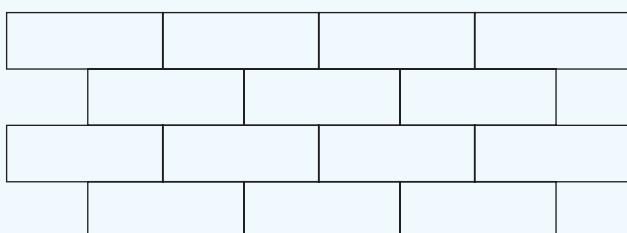


FIGURA 8.26 Celdas para el modelo de un derrame de petróleo.

Cada celda representa un poro en el suelo, un espacio entre las partículas de polvo. Todas las celdas inician en el estado "vacía". Para simular un derrame de petróleo, se cambia toda la capa superior de celdas (la superficie del suelo): de "vacías" a "llenas". Según la manera en la que los poros están ubicados y conforman una microestructura, el petróleo podría fluir de un poro a los dos poros de abajo, o sólo al izquierdo, o sólo al derecho, o a ninguno de los dos. Se mode-

lará esto suponiendo que en cualquier unión entre una celda llena y una vacía por debajo de ésta, se tiene una probabilidad  $P$  de que la celda vacía cambie a llena.

Para una calculadora graficadora TI-83 Plus, el siguiente programa modela el proceso:

```
PROGRAM:OIL
:Input "P?", P
:ClrDraw
:AxesOff
:0 → X : 0 → N
:For(Y,0,46)
:Pxl-On(X,2Y + N)
:Pxl-On(X,2Y + N + 1)
:End
:For(X,1,62)
:X-2iPart(X/2) → N
:For(Y,0,46)
:If ((pxl-Test(X-1,2Y + N) and rand < P) or
     (pxl-Test(X-1,2Y + N + 1) and rand < P))
:Then
:Pxl-On(X,2Y + N)
:Pxl-On(X,2Y + N + 1)
:End:End:End
```

Después de introducir este programa, establezca la ventana de visualización estándar y corra el programa. En la pregunta P?, introduzca algún valor entre 0 y 1. Después observe cómo se llena la pantalla con la simulación de un derrame de petróleo que se cuela hacia abajo a través del suelo. Se encontrará que para  $P < 0.55$ , tarde o temprano el petróleo detiene su descenso; que para  $P > 0.75$ , el petróleo no presenta signos de desaceleración, y que para  $0.55 < P < 0.75$  el derrame muestra un patrón muy irregular, como el de la figura 8.27.

El modelo de derrame de petróleo es unidimensional, en el sentido de que en cualquier instante, sólo un renglón de celdas está en transición. Otros sistemas de autómatas celulares corren en dos dimensiones. Es posible usar un esquema como el del juego LIFE para modelar la propagación de una moda —anillos de humor (1975-1977) o los patines plegables

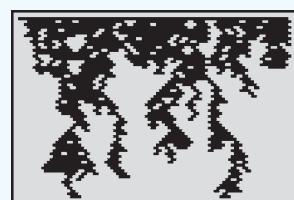


FIGURA 8.27 Derrame de petróleo con  $P = 0.6$ .

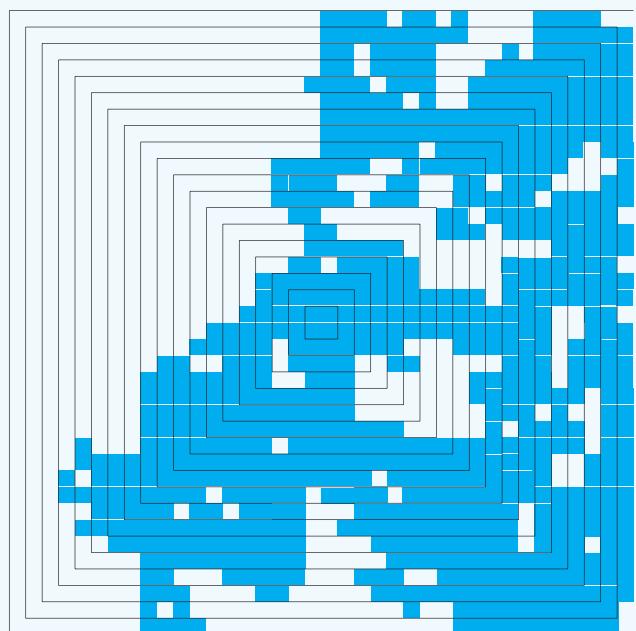
<sup>8</sup>Adaptado de L. Charles Biehl, "Forest Fires, Oil Spills, and Fractal Geometry, Part 1: Cellular Automata and Modeling Natural Phenomena," The Mathematics Teacher, 91 (Noviembre de 1998), 682-687: Reproducido con permiso de National Council of Teachers of Mathematics.

de metal (1999-2000)—. Una moda es, por naturaleza transitoria: Las personas que la adoptan se cansan pronto de ella o se vuelven “inmunes”. La propagación de una moda es algo parecido a la dispersión de un incendio forestal, donde los árboles se queman y comunican el fuego a otros antes de consumirse.

El proceso de propagación de una moda puede modelarse en una cuadrícula, donde cada cuadro representa una persona en uno de tres estados: premoda, en moda y posmoda. Un cuadro en premoda que comparte un lado con un cuadro en moda tiene una probabilidad  $P$  de ser “infectado” y convertirse en una celda en moda. El estado de en moda sólo dura un ciclo, seguido por un estado permanente de posmoda.

Este modelo sería difícil de implementar en una calculadora graficadora, pero se puede hacer con rapidez gracias a un sistema algebraico por computadora, como Maple o *Mathematica*. Los resultados son análogos a los del derrame de petróleo: para  $P < 0.4$  la moda se acaba; para  $P > 0.6$ , la moda se propaga casi uniformemente a través de la población, y para  $0.4 < P < 0.6$ , la moda se propaga en un patrón irregular e impredecible (figura 8.28).

Lo que resulta interesante aquí es que la diferencia entre una moda que se dispersa ampliamente y otra que parece con rapidez puede ser muy pequeña. Una moda que pasa de amigo a amigo con una probabilidad de 0.45 puede en realidad no funcionar nunca, mientras que una moda que se difunde con una probabilidad de 0.55 tiene una buena oportunidad de convertirse en una locura importante. Por supuesto, el modelo que se ha usado es bastante simple. Un modelo más sofisticado podría considerar el hecho de que algunas personas tienen más amigos que otras, que algunas amistades son más proclives a la transmisión de modas que otras, etcétera.



**FIGURA 8.28** Propagación de moda con  $P = 0.5$ .

### Problemas

1. Mediante corridas repetidas en una calculadora graficadora, estime el valor crítico de  $P$  al cual el derrame de petróleo en la simulación comienza a penetrar profundamente en el suelo; es decir, ¿cuál es el valor más pequeño de  $P$  para el cual el derrame no disminuye de manera significativa entre la parte media y baja de la pantalla?
2. ¿Qué otro fenómeno podría modelarse con el uso de autómatas celulares? ¿Cómo serían las reglas?

# 9

## TEMAS ADICIONALES EN PROBABILIDAD

- 9.1 Variables aleatorias discretas y valor esperado
- 9.2 La distribución binomial
- 9.3 Cadenas de Markov
- 9.4 Repaso

### Aplicación práctica

Cadenas de Markov en la Teoría de juegos

**C**omo se vio al inicio del capítulo 8, la probabilidad puede usarse para resolver el problema de cómo dividir el dinero entre dos apostadores cuando su juego es interrumpido. Ahora es necesario hacer la pregunta siguiente: ¿cuáles son las posibilidades de que un juego sea interrumpido?

Por supuesto, la respuesta depende de los detalles. Si los jugadores saben de antemano que jugarán un número fijo de rondas —en cuyo caso la “interrupción” estaría previamente programada— entonces podría calcularse con facilidad la probabilidad de que el tiempo se acabe antes de terminar el juego. O bien, si se desconoce el tiempo disponible, se podría calcular la *duración esperada* de un juego completo y el *tiempo esperado* antes de la siguiente interrupción. Entonces, si la duración esperada del juego resulta estar muy por debajo del tiempo esperado hasta la siguiente interrupción, podría decirse que la probabilidad de tener que interrumpir el juego es baja. Pero si se desea dar una respuesta numérica más exacta se tendrían que realizar cálculos más complicados.

Problemas de este tipo no se presentan sólo en los juegos. En la industria por ejemplo; los fabricantes necesitan saber qué tan probable es tener que interrumpir un ciclo de producción debido a fallas en el equipo. Una de las formas en las que se mantiene baja esta probabilidad consiste en registrar las horas de uso de cada máquina para reemplazarla cuando la acumulación de horas se aproxima al “tiempo medio de falla”—valor esperado del número de horas en uso que proporciona la máquina en su tiempo de vida—. Los investigadores médicos enfrentan un problema similar cuando consideran la posibilidad de tener que interrumpir un experimento debido a que demasiados sujetos de prueba se retiran. Para mantener esta probabilidad baja, con frecuencia los investigadores calculan por adelantado un número esperado de abandonos e incluyen esta cantidad, más un colchón, en el número de personas seleccionadas para un estudio.

La idea del valor esperado para un número —el tiempo que transcurre hasta que algo sucede, o el número de personas que abandonan un estudio— es uno de los conceptos clave en este capítulo.

**OBJETIVO**

Desarrollar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria y representar geométricamente esa distribución mediante una gráfica o un histograma. Calcular la media, la varianza y la desviación estándar de una variable aleatoria.

## 9.1 Variables aleatorias discretas y valor esperado

En algunos experimentos, se tiene interés en investigar los eventos asociados con números. Por ejemplo, si se lanzan dos monedas, deseará conocer el *número* de caras que ocurren. Así, se consideran los eventos

$$\{0\} \quad \{1\} \quad \{2\}$$

Si  $X$  es una variable que representa el número de caras que ocurren, entonces los únicos valores que puede asumir  $X$  son 0, 1 y 2. El valor de  $X$  está determinado por el resultado del experimento, y en consecuencia por la probabilidad. En general, una variable cuyos valores dependen del resultado de un proceso aleatorio se llama una **variable aleatoria**. Usualmente, las variables aleatorias se denotan mediante letras mayúsculas como  $X$ ,  $Y$  o  $Z$ , y los valores que asumen estas variables pueden denotarse por medio de las letras minúsculas correspondientes ( $x$ ,  $y$  o  $z$ ). Así, para el número de caras ( $X$ ) que ocurren al lanzar dos monedas, los valores posibles pueden indicarse al escribir

$$X = x \quad \text{donde } x = 0, 1, 2$$

o, de manera más simple

$$X = 0, 1, 2$$

### EJEMPLO 1 Variables aleatorias

- a. Suponga que se lanza un dado y  $X$  es el número que resulta. Entonces  $X$  es una variable aleatoria y  $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .
- b. Suponga que se lanza una moneda de manera sucesiva hasta que aparece una cara. Si  $Y$  es el número de lanzamientos, entonces  $Y$  es una variable aleatoria y

$$Y = y \quad \text{donde } y = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Observe que  $Y$  puede asumir un número infinito de valores.

- c. Un estudiante realiza un examen con un límite de tiempo de una hora. Si  $X$  es el número de minutos que le toma completar el examen, entonces  $X$  es una variable aleatoria. Los valores que puede asumir  $X$  forman el intervalo  $(0, 60]$ . Esto es,  $0 < X \leq 60$ .



Una variable aleatoria se llama **variable aleatoria discreta** si puede asumir sólo un número finito de valores o si sus valores pueden colocarse en una correspondencia uno a uno con los enteros positivos. En los ejemplos 1(a) y 1(b),  $X$  y  $Y$  son discretas. Una variable aleatoria se llama **variable aleatoria continua** si puede asumir cualquier valor en algún intervalo o intervalos, como  $X$  en el ejemplo 1(c). En este capítulo, se pondrá atención en las variables aleatorias discretas; en el capítulo 16 se abordarán las variables aleatorias continuas.

Si  $X$  es una variable aleatoria, la probabilidad del evento en el que  $X$  asume el valor de  $x$  se denota  $P(X = x)$ . De manera similar, se pueden considerar las probabilidades de eventos como  $X \leq x$  y  $X > x$ . Si  $X$  es discreta, entonces la función  $f$  que asigna el número  $P(X = x)$  a cada valor posible de  $X$  se llama la **función de probabilidad** o la **distribución** de la variable aleatoria  $X$ . Así,

$$f(x) = P(X = x)$$

Puede resultar útil verbalizar esta ecuación de la manera siguiente: “ $f(x)$  es la probabilidad de que  $X$  asuma el valor  $x$ ”.

### EJEMPLO 2 Distribución de una variable aleatoria

Suponga que  $X$  es el número de caras ( $H$ ,  $T$  para cruz) que aparecen en el lanzamiento de dos monedas balanceadas. Determine la distribución de  $X$ .

**Solución:** Se deben encontrar las probabilidades de los eventos  $X = 0$ ,  $X = 1$  y  $X = 2$ . El espacio muestral equiprobable es

$$S = \{\text{HH}, \text{HT}, \text{TH}, \text{TT}\}$$

Por lo tanto,

Tabla de probabilidad

$x$	$P(X = x)$
0	1/4
1	2/4
2	1/4

$P(X = x)$

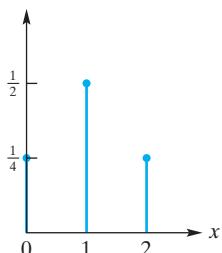


FIGURA 9.1 Gráfica de la distribución de  $X$ .

$P(X = x)$

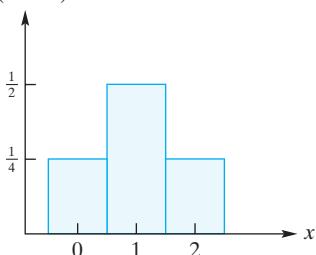


FIGURA 9.2 Histograma de probabilidad para  $X$ .

el evento  $X = 0$  es {TT}

el evento  $X = 1$  es {HT, TH}

el evento  $X = 2$  es {HH}

La probabilidad para cada uno de estos eventos está dada en la **tabla de probabilidad** al margen. Si  $f$  es la distribución para  $X$ , esto es,  $f(x) = P(X = x)$ , entonces

$$f(0) = \frac{1}{4} \quad f(1) = \frac{1}{2} \quad f(2) = \frac{1}{4}$$



En el ejemplo 2, se indicó la distribución  $f$  al listar

$$f(0) = \frac{1}{4} \quad f(1) = \frac{1}{2} \quad f(2) = \frac{1}{4}$$

Sin embargo, la tabla de probabilidad para  $X$  da la misma información y es una manera aceptable de expresar la distribución de  $X$ . Otra forma es mediante la gráfica de la distribución, como la que se muestra en la figura 9.1. Las líneas verticales desde el eje  $x$  hasta los puntos sobre la gráfica sólo enfatizan las alturas de los puntos. Otra representación de la distribución de  $X$  es el diagrama de rectángulos en la figura 9.2, llamado el **histograma de probabilidad** para  $X$ . Aquí se centra un rectángulo sobre cada valor de  $X$ . El rectángulo que está por encima de  $x$  tiene una anchura de 1 y una altura de  $P(X = x)$ . Así, su área es la probabilidad  $1 \cdot P(X = x) = P(X = x)$ . Esta interpretación de la probabilidad como un área es importante en el capítulo 16.

Observe en el ejemplo 2 que la suma de  $f(0)$ ,  $f(1)$  y  $f(2)$  es 1:

$$f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

Esto debe ser así, porque los eventos  $X = 0$ ,  $X = 1$  y  $X = 2$  son mutuamente excluyentes y la unión de los tres es el espacio muestral [y  $P(S) = 1$ ]. La suma  $f(0) + f(1) + f(2)$  puede indicarse en forma conveniente por medio de la notación de sumatoria<sup>1</sup>

$$\sum_x f(x)$$

Se trata de un uso un poco diferente al de la sección 1.5, porque las cotas superior e inferior de la sumatoria no se dan de manera explícita. Aquí  $\sum_x f(x)$  significa que se van a sumar todos los términos de la forma  $f(x)$ , para *todos* los valores de  $x$  bajo consideración (que en este caso son 0, 1 y 2). Así,

$$\sum_x f(x) = f(0) + f(1) + f(2)$$

En general, para cualquier distribución  $f$ , se tiene  $0 \leq f(x) \leq 1$  para toda  $x$ , y la suma de todos los valores de la función es igual a 1. Por lo tanto,

$$\sum_x f(x) = 1$$

Esto significa que en cualquier histograma de probabilidad, la suma de las áreas de los rectángulos es 1.

La distribución para una variable aleatoria  $X$  proporciona las frecuencias relativas de los valores de  $X$  a largo plazo. Sin embargo, a menudo resulta útil determinar el valor “promedio” de  $X$  a largo plazo. Por ejemplo, suponga que se lanzaron las dos monedas del ejemplo 2  $n$  veces, de donde resultó que  $X = 0$  ocurrió  $k_0$  veces,  $X = 1$  ocurrió  $k_1$  veces, y  $X = 2$  ocurrió  $k_2$  veces. Entonces el valor promedio para estos  $n$  lanzamientos es

$$\frac{0 \cdot k_0 + 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2}{n} = 0 \cdot \frac{k_0}{n} + 1 \cdot \frac{k_1}{n} + 2 \cdot \frac{k_2}{n}$$

<sup>1</sup>La notación de sumatoria se introdujo en la sección 1.5.

Pero las fracciones  $k_0/n, k_1/n$  y  $k_2/n$  son las frecuencias relativas de los eventos  $X = 0, X = 1$  y  $X = 2$ , respectivamente, que ocurren en  $n$  lanzamientos. Si  $n$  es muy grande, entonces estas frecuencias relativas se aproximan a las probabilidades de los eventos  $X = 0, X = 1, X = 2$ . Por ende, parece razonable que el valor promedio de  $X$  a largo plazo sea

$$0 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 \quad (1)$$

Esto significa que si las monedas se lanzan muchas veces, el número promedio de caras que aparecerán por lanzamiento será muy cercano a 1. Se define la suma en la ecuación (1) como la *media* de  $X$ . También se llama el *valor esperado* de  $X$  y la *esperanza* de  $X$ . Con frecuencia, la media de  $X$  se denota por  $\mu = \mu(X)$  ( $\mu$  es la letra griega “mu”) y también mediante  $E(X)$ . Observe que a partir de la ecuación (1),  $\mu$  tiene la forma  $\sum_x xf(x)$ . En general, se tiene la siguiente definición.

### DEFINICIÓN

Si  $X$  es una variable aleatoria discreta con distribución  $f$ , entonces la **media** de  $X$  está dada por

$$\mu = \mu(X) = E(X) = \sum_x xf(x)$$

La media de  $X$  puede interpretarse como el valor promedio de  $X$  a largo plazo. De hecho, si los valores que toma  $X$  son  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y éstos son equiprobables de forma que  $f(x_i) = \frac{1}{n}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$  entonces

$$\mu = \sum_x xf(x) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

que es el promedio *en el sentido usual de la palabra* de los números  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . En el caso general, resulta útil pensar en la media,  $\mu$ , como un *promedio ponderado* donde las ponderaciones están dadas por las probabilidades,  $f(x)$ . Se enfatiza que la media no debe ser necesariamente un resultado del experimento. En otras palabras,  $\mu$  puede ser diferente de todos los valores  $x$  que en realidad asume la variable aleatoria  $X$ . Esto se ilustrará en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 3 Ganancia esperada

Una compañía de seguros ofrece a los propietarios de cierto tipo de casa una póliza de seguro contra incendios por \$180 000. La póliza proporciona protección durante un año en el caso de que una casa de esta clase sea totalmente destruida por un incendio. La compañía ha determinado que la probabilidad de dicho evento es 0.002. Si la prima anual de la póliza es de \$379, encuentre la ganancia esperada por póliza para la compañía.

**Estrategia** Si la casa asegurada no sufre ningún incendio, la compañía gana \$379. Sin embargo, si ocurre un incendio, la compañía pierde \$180 000 – \$379 (valor asegurado de la casa menos la prima), o \$179 621. Si  $X$  es la ganancia (en dólares) para la compañía, entonces  $X$  es una variable aleatoria que puede asumir los valores 379 y –179 621. (Una pérdida se considera como una ganancia negativa). La ganancia que la compañía espera por póliza es el valor esperado de  $X$ .

**Solución:** Si  $f$  es la función de probabilidad para  $X$ , entonces

$$f(-179\,621) = P(X = -179\,621) = 0.002$$

y

$$f(379) = P(X = 379) = 1 - 0.002 = 0.998$$

El valor esperado de  $X$  está dado por

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x f(x) = -179\,621 f(-179\,621) + 379 f(379) \\ &= -179\,621(0.002) + 379(0.998) = 19 \end{aligned}$$

Así, si la compañía vende muchas pólizas, se podría esperar que gane aproximadamente \$19 por póliza, que podría aplicarse a gastos de publicidad, gastos fijos y utilidad.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

Como  $E(X)$  es el valor promedio de  $X$  a largo plazo, es una medida de lo que podría llamarse la *tendencia central* de  $X$ . Sin embargo,  $E(X)$  no indica la *dispersión* o espaciamiento a largo plazo de  $X$  con respecto a la media. Por ejemplo, en la figura 9.3 se muestran las gráficas de dos distribuciones,  $f$  y  $g$ , para las variables aleatorias  $X$  y  $Y$ . Puede demostrarse con facilidad que tanto  $X$  como  $Y$  tienen la misma media:  $E(X) = 2$  y  $E(Y) = 2$ . (Se recomienda que el lector verifique esta afirmación). Pero en la figura 9.3  $X$  tiene más posibilidades de asumir los valores 1 o 3 de los que tiene  $Y$ , porque  $f(1)$  y  $f(3)$  son iguales a  $\frac{2}{5}$ , mientras que  $g(1)$  y  $g(3)$  son iguales a  $\frac{1}{5}$ . Así,  $X$  tiene mayor probabilidad de asumir valores diferentes a la media de la que tiene  $Y$ , por lo que a largo plazo existe más dispersión para  $X$ .

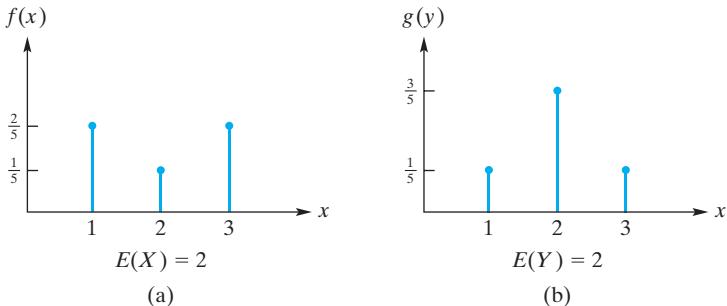


FIGURA 9.3 Distribuciones de probabilidad.

Existen varias formas de medir la dispersión para una variable aleatoria  $X$ . Una forma consiste en determinar el promedio a largo plazo de los valores absolutos de la desviación con respecto a la media  $\mu$ —esto es  $E(|X - \mu|)$ , que es la media de la variable aleatoria derivada  $|X - \mu|$ . De hecho si  $g$  es una función adecuada y  $X$  es una variable aleatoria, entonces  $Y = g(X)$  es otra variable aleatoria. Además, puede mostrarse que si  $Y = g(X)$ , entonces  $E(Y) = \sum_x g(x)f(x)$ , donde  $f$  es la función de probabilidad para  $X$ . Por ejemplo, si  $Y = |X - \mu|$ , entonces

$$E(|X - \mu|) = \sum_x |x - \mu| f(x)$$

Sin embargo, aunque  $E(|X - \mu|)$  podría parecer una medida de dispersión obvia, no se usa con mucha frecuencia.

Existen muchas otras medidas de dispersión que pueden considerarse, pero dos son las más ampliamente aceptadas. Una es la *varianza* y la otra es la *desviación estándar*. La varianza de  $X$ , que se denota por  $\text{Var}(X)$ , es el promedio a largo plazo de los *cua-drados* de las desviaciones de  $X$  con respecto a  $\mu$ . En otras palabras, para la varianza se considera la variable aleatoria  $Y = (X - \mu)^2$  y se tiene

### Varianza de $X$

$$\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_x (x - \mu)^2 f(x) \quad (2)$$

Como  $(X - \mu)^2$  está incluido en  $\text{Var}(X)$ , y tanto  $X$  como  $\mu$  tienen las mismas unidades de medición, las unidades para  $\text{Var}(X)$  son las de  $X^2$ . Así, en el ejemplo 3,  $X$  está en dólares y  $\text{Var}(X)$  tiene unidades de dólares al cuadrado. Resulta conveniente tener una

medida de dispersión en las mismas unidades que  $X$ . Tal medida es  $\sqrt{\text{Var}(X)}$  que se llama la *desviación estándar de  $X$*  y se denota por  $\sigma = \sigma(X)$  ( $\sigma$  es la letra griega minúscula “sigma”).

### Desviación estándar de $X$

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Note que  $\sigma$  tiene la propiedad de que

$$\sigma^2 = \text{Var}(X)$$

Tanto  $\text{Var}(X) = \sigma^2$  como  $\sigma$  son medidas de la dispersión de  $X$ . Entre más grande sea el valor de  $\text{Var}(X)$ , o de  $\sigma$ , más grande será la dispersión. Un resultado de un teorema famoso, la *desigualdad de Chebyshev*, es que la probabilidad de  $X$  que se encuentra entre dos desviaciones estándar de la media es de al menos  $\frac{3}{4}$ . Esto significa que la probabilidad de que  $X$  se encuentre en el intervalo  $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$  es mayor o igual que  $\frac{3}{4}$ . De manera más general, para  $k > 1$ , la desigualdad de Chebyshev dice que

$$P(X \in (\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)) \geq \frac{k^2 - 1}{k^2}$$

Para ilustrar aún más,  $k = 4$ , esto significa que, para cualquier experimento probabilístico, al menos  $\frac{4^2 - 1}{4^2} = \frac{15}{16} = 93.75\%$  de los valores de los datos pertenecen al intervalo  $(\mu - 4\sigma, \mu + 4\sigma)$ . Pertenercer al intervalo  $(\mu - 4\sigma, \mu + 4\sigma)$  significa estar “dentro de cuatro desviaciones estándar desde la media”.

La fórmula para la varianza de la ecuación (2) puede escribirse de una manera diferente. Lo que implica un buen ejercicio con la notación de sumatoria.

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sum_x (x - \mu)^2 f(x) \\ &= \sum_x (x^2 - 2x\mu + \mu^2) f(x) \\ &= \sum_x (x^2 f(x) - 2x\mu f(x) + \mu^2 f(x)) \\ &= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x f(x) + \mu^2 \sum_x f(x) \\ &= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu(\mu) + \mu^2(1) \quad (\text{puesto que } \sum_x x f(x) = \mu \text{ y } \sum_x f(x) = 1) \end{aligned}$$

Así, se tiene

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2 \quad (= E(X^2) - (E(X))^2) \quad (3)$$

Esta fórmula para la varianza es bastante útil, porque normalmente simplifica los cálculos.

#### EJEMPLO 4 Media, varianza y desviación estándar

Una canasta contiene 10 pelotas, cada una de las cuales muestra un número. Cinco de ellas tienen 1, dos muestran 2 y tres muestran 3. Se selecciona una pelota de manera aleatoria. Si  $X$  es el número que se muestra, determine  $\mu$ ,  $\text{Var}(X)$ , y  $\sigma$ .

**Solución:** El espacio muestral consiste en 10 resultados igualmente posibles (las pelotas). Los valores que puede asumir  $X$  son 1, 2 y 3. Los eventos  $X = 1$ ,  $X = 2$  y  $X = 3$  contienen 5, 2 y 3 puntos muestrales, respectivamente. Entonces, si  $f$  es la función de probabilidad para  $X$ ,

$$\begin{aligned} f(1) &= P(X = 1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ f(2) &= P(X = 2) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \\ f(3) &= P(X = 3) = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

El cálculo de la media da

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_x xf(x) = 1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) \\ &= 1 \cdot \frac{5}{10} + 2 \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{3}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}\end{aligned}$$

Para encontrar  $\text{Var}(X)$ , puede usarse la ecuación (2) o la ecuación (3). Aquí se usarán ambas de manera que se puedan comparar los cálculos aritméticos que se han realizado. Mediante la ecuación (2),

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sum_x (x - \mu)^2 f(x) \\ &= \left(1 - \frac{9}{5}\right)^2 f(1) + \left(2 - \frac{9}{5}\right)^2 f(2) + \left(3 - \frac{9}{5}\right)^2 f(3) \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{5}{10} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{10} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{10} \\ &= \frac{16}{25} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{25} \cdot \frac{2}{10} + \frac{36}{25} \cdot \frac{3}{10} \\ &= \frac{80 + 2 + 108}{250} = \frac{190}{250} = \frac{19}{25}\end{aligned}$$

Por la ecuación (3),

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sum_x x^2 f(x) - \mu^2 \\ &= 1^2 \cdot f(1) + 2^2 \cdot f(2) + 3^2 \cdot f(3) - \left(\frac{9}{5}\right)^2 \\ &= 1 \cdot \frac{5}{10} + 4 \cdot \frac{2}{10} + 9 \cdot \frac{3}{10} - \frac{81}{25} \\ &= \frac{5 + 8 + 27}{10} - \frac{81}{25} = \frac{40}{10} - \frac{81}{25} \\ &= 4 - \frac{81}{25} = \frac{19}{25}\end{aligned}$$

Observe que la ecuación (2) involucra a  $(x - \mu)^2$  y la ecuación incluye a  $x^2$ . Debido a esto, a menudo es más fácil calcular varianzas mediante la ecuación (3) que por medio de la ecuación (2).

Como  $\sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{19}{25}$ , la desviación estándar es

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{19}{25}} = \frac{\sqrt{19}}{5}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

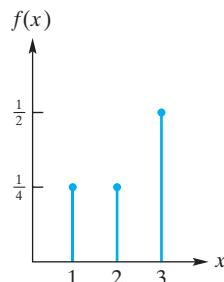
## Problemas 9.1

En los problemas 1 a 4, se da la distribución de la variable aleatoria  $X$ . Determine  $\mu$ ,  $\text{Var}(X)$ , y  $\sigma$ . En el problema 1, construya el histograma de probabilidad. En el problema 2, grafique la distribución.

\*1.  $f(0) = 0.1$ ,  $f(1) = 0.4$ ,  $f(2) = 0.2$ ,  $f(3) = 0.3$

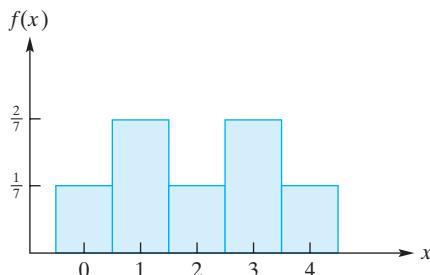
2.  $f(4) = 0.4$ ,  $f(5) = 0.6$

3. Vea la figura 9.4.



**FIGURA 9.4** Distribución para el problema 3.

4. Vea la figura 9.5.



**FIGURA 9.5** Distribución para el problema 4.

5. La variable aleatoria  $X$  tiene la siguiente distribución:

$x$	$P(X = x)$
3	
5	0.3
6	0.2
7	0.4

- (a) Encuentre  $P(X = 3)$ .  
(b) Encuentre  $\mu$ .  
(c) Encuentre  $\sigma^2$ .

6. La variable aleatoria  $X$  tiene la siguiente distribución:

$x$	$P(X = x)$
2	$6a$
4	$2a$
6	0.2

- (a) Encuentre  $P(X = 2)$  y  $P(X = 4)$ .  
(b) Encuentre  $\mu$ .

En los problemas 7 a 10, determine  $E(X)$ ,  $\sigma^2$ , y  $\sigma$  para la variable aleatoria  $X$ .

7. **Lanzamiento de moneda** Se lanzan tres monedas balanceadas. Sea  $X$  el número de caras que ocurren.
8. **Pelotas en una canasta** Una canasta contiene seis pelotas, cada una de las cuales muestra un número. Cuatro pelotas presentan un 1 y dos muestran un 2. Se selecciona una pelota de manera aleatoria y se observa el número,  $X$ , que presenta.
9. **Comité** A partir de un grupo de dos mujeres y tres hombres, se seleccionan dos personas de manera aleatoria para formar un comité. Sea  $X$  el número de hombres en el comité.
10. **Caramelos en un frasco** Un frasco contiene dos caramelos rojos y tres verdes. Se sacan dos de manera aleatoria, sucesivamente y con reemplazo, y se observa el número,  $X$ , de caramelos rojos.
11. **Canicas en una bolsa** Una bolsa contiene tres canicas rojas y dos blancas. Se retiran dos de manera aleatoria, sucesivamente y sin reemplazo. Sea  $X$  = el número de canicas rojas que se retiraron. Encuentre la distribución  $f$  para  $X$ .
12. **Subcomité** A partir de un comité del gobierno estatal que consiste en cuatro liberales y seis conservadores, debe seleccionarse en forma aleatoria un subcomité de tres integrantes. Sea  $X$  el número de liberales en el subcomité. Encuentre una

fórmula general, en términos de combinaciones, que proporcione  $P(X = x)$ , donde  $x = 0, 1, 2, 3$ .

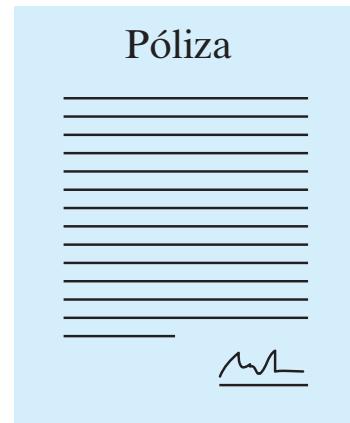
13. **Rifa** Una organización realiza una rifa con un solo premio de \$5000. Cada boleto cuesta \$2, y se han vendido 8000 boletos.  
(a) Encuentre la ganancia esperada para el comprador de un solo boletoto.  
(b) Encuentre la ganancia esperada para el comprador de dos boletos.

14. **Juego con monedas** Considere el siguiente juego. Deben lanzarse tres monedas balanceadas. Si resultan tres caras o tres cruces, su amigo le paga \$10. Si resultan una o dos caras, usted debe pagarle a su amigo \$6. ¿Cuáles son sus ganancias o pérdidas esperadas por juego?

15. **Ganancias** Un jardinero gana \$200 por día cuando trabaja y pierde \$30 al día cuando no encuentra a un empleador. Si la probabilidad de trabajar cualquier día es  $\frac{4}{7}$ , encuentre las ganancias diarias esperadas para el jardinero.

16. **Restaurante de comida rápida** Una cadena de restaurantes de comida rápida estima que si abre un restaurante en un centro comercial, la probabilidad de que tenga éxito es 0.65. Un establecimiento exitoso obtiene una utilidad anual de \$75 000; uno que no es exitoso pierde \$20 000 al año. ¿Cuál es la ganancia esperada para la cadena si abre un restaurante en un centro comercial?

17. **Seguros** Una compañía de seguros ofrece una póliza de hospitalización a los individuos de cierto grupo. En un periodo de un año, la compañía pagará \$100 al día, hasta un máximo de cinco días, por cada día que asegurado esté hospitalizado. La aseguradora estima que la probabilidad de que cualquier persona en este grupo que sea hospitalizada durante exactamente un día es 0.001; durante exactamente dos días, 0.002; durante exactamente tres días, 0.003; durante exactamente cuatro días, 0.004, y durante cinco o más días, 0.008. Encuentre la ganancia esperada por póliza para la compañía si la prima anual es \$10.



18. **Demanda** La siguiente tabla proporciona la probabilidad de que  $x$  automóviles se renten diariamente en una pequeña compañía de alquiler de autos:

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = x)$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.15	0.15	0.10	0.05	0.05

Determine la demanda diaria esperada para sus automóviles.

- \*19. **Prima de seguro** En el ejemplo 3, si la compañía desea una ganancia esperada de \$50 por póliza, determine la prima anual.

- 20. Ruleta** El juego de la ruleta consiste en una rueda con 37 ranuras numeradas con los enteros del 0 al 36, inclusive. Un jugador apuesta \$1 (por ejemplo) y elige un número. Se gira la rueda y una bola se desplaza sobre ella. Si la bola cae en la ranura que muestra el número seleccionado, el jugador recibe la apuesta de \$1 más \$35. De lo contrario, el jugador pierde la apuesta de \$1. Suponga que todos los números son igualmente probables, y determine la ganancia o pérdida esperada por juego.

- 21. Juego con monedas** Suponga que usted paga \$1.25 para participar en un juego donde se lanzan dos monedas balanceadas. Usted recibe el número de dólares igual al número de caras que ocurren. ¿Cuál es su ganancia (o pérdida) esperada en cada juego? Se dice que el juego es *justo* cuando su ganancia esperada es \$0. ¿Cuánto debería pagar por participar en el juego para que éste fuera justo?

**OBJETIVO**

Desarrollar la distribución binomial y relacionarla con el teorema binomial.

## 9.2 La distribución binomial

### Teorema binomial

Posteriormente en esta sección se verá que los términos en la expansión de una potencia de un binomio son útiles al describir las distribuciones de ciertas variables aleatorias. Por lo tanto, es lógico analizar primero el *teorema binomial*, que es una fórmula para expandir  $(a + b)^n$ , donde  $n$  es un entero positivo.

Sin importar  $n$ , existen patrones en la expansión de  $(a + b)^n$ . Para ilustrar esto, se considera el cubo del binomio  $a + b$ . Al aplicar sucesivamente la ley distributiva, se tiene

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= [(a + b)(a + b)](a + b) \\&= [a(a + b) + b(a + b)](a + b) \\&= [aa + ab + ba + bb](a + b) \\&= aa(a + b) + ab(a + b) + ba(a + b) + bb(a + b) \\&= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb\end{aligned}\tag{1}$$

de manera que

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\tag{2}$$

Se pueden hacer tres observaciones acerca del lado derecho de la ecuación (2). Primero observe que el número de términos es cuatro, que es uno más que la potencia a la que se elevó  $a + b$  (3). Segundo, los términos primero y último son los cubos de  $a$  y  $b$ ; las potencias de  $a$  disminuyen de izquierda a derecha (de 3 a 0), mientras que las potencias de  $b$  aumentan (de 0 a 3). Tercero, para cada término, la suma de los exponentes de  $a$  y  $b$  es 3, que es la potencia a la cual se elevó  $a + b$ .

Ahora se pondrá atención en los coeficientes de los términos en la ecuación (2). Considere el coeficiente del término  $ab^2$ . Es el número de términos en la ecuación (1) que involucra exactamente dos  $b$ , a saber, 3. Pero ahora se verá *por qué* existen tres términos que involucran dos  $b$ . Observe en la ecuación (1) que cada término es el producto de tres números, cada uno de los cuales es  $a$  o  $b$ . Por la ley distributiva, cada uno de los tres factores  $a + b$  en  $(a + b)^3$  contribuye con una  $a$  o una  $b$  al término. Así, el número de términos que involucran una  $a$  y dos  $b$  es igual al número de formas en que pueden escogerse dos de los tres factores para formar una  $b$ , a saber,  ${}_3C_2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$ .

De manera similar,

el coeficiente del término  $a^3$  es  ${}_3C_0$

el coeficiente del término  $a^2b$  es  ${}_3C_1$

y

el coeficiente del término  $b^3$  es  ${}_3C_3$

Al generalizar las observaciones anteriores, se obtiene una fórmula para expandir  $(a + b)^n$ , llamada *teorema binomial*.

**Teorema binomial**

Si  $n$  es un entero positivo, entonces

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + {}_nC_nb^n \\ &= \sum_{i=0}^n {}_nC_i a^{n-i} b^i\end{aligned}$$

Por esta razón, los números  ${}_nC_r$  también se llaman **coeficientes binomiales**.

### EJEMPLO 1 Teorema binomial

Use el teorema binomial para expandir  $(q+p)^4$ .

**Solución:** Aquí  $n = 4$ ,  $a = q$ , y  $b = p$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(q+p)^4 &= {}_4C_0q^4 + {}_4C_1q^3p + {}_4C_2q^2p^2 + {}_4C_3qp^3 + {}_4C_4p^4 \\ &= \frac{4!}{0!4!}q^4 + \frac{4!}{1!3!}q^3p + \frac{4!}{2!2!}q^2p^2 + \frac{4!}{3!1!}qp^3 + \frac{4!}{4!0!}p^4\end{aligned}$$

Recuerde que  $0! = 1$ , se tiene

$$(q+p)^4 = q^4 + 4q^3p + 6q^2p^2 + 4qp^3 + p^4$$



Ahora repase la representación del *triángulo de Pascal* de la sección 8.2, que proporciona una forma de memorizar la generación de coeficientes binomiales. Por ejemplo, los números en el renglón  $(4+1)$  del triángulo de Pascal, 1 4 6 4 1, son los coeficientes que se encontraron en el ejemplo 1.

**Distribución binomial**

Ahora se pondrá atención en los ensayos repetidos de un experimento en el cual el resultado de cualquier ensayo no afecta el resultado de otro. Se conocen como **ensayos independientes**. Por ejemplo, cuando un dado balanceado se lanza cinco veces, el resultado de un lanzamiento no afecta el resultado de ningún otro lanzamiento. Aquí se tienen cinco ensayos independientes del lanzamiento de un dado. Juntos, estos cinco ensayos pueden considerarse un experimento compuesto de cinco etapas que involucra eventos independientes, de manera que se puede usar la ley especial de la multiplicación de la sección 8.6 para determinar la probabilidad de obtener resultados específicos en los ensayos.

Para ilustrar esto, se encontrará la probabilidad de obtener dos 4 en los cinco lanzamientos del dado. Se considerará la obtención de un 4 como un *éxito* (E) y la obtención de cualquiera de los otros cinco números como un *fracaso* (F). Por ejemplo, la sucesión

EEFFF

denota la obtención de

4, 4, seguidos por otros tres números

Esta sucesión puede considerarse como la intersección de cinco eventos independientes: éxito en el primer ensayo, éxito en el segundo, fracaso en el tercero, y así sucesivamente. Como la probabilidad de éxito en cualquier ensayo es  $\frac{1}{6}$  y la probabilidad de fracaso es  $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ , por la ley especial de la multiplicación para la intersección de eventos independientes, la probabilidad de ocurrencia de la sucesión EEFFF es

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

De hecho, ésta es la probabilidad para *cualquier* orden particular de las dos E y tres F. Ahora se determinará de cuántas formas puede formarse una sucesión de dos E y tres

F. En cinco ensayos, el número de maneras en que se pueden elegir dos ensayos para el éxito es  ${}_5C_2$ . Otro enfoque de este problema es considerarlo como si se contaran las “permutaciones con objetos repetidos”, como en la sección 8.2 de la “palabra” EEEFF. Existen  $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = {}_5C_2$  de éstas. Entonces la probabilidad de obtener exactamente dos 4 en los cinco lanzamientos es

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \quad (3)$$

Si se denota la probabilidad de éxito mediante  $p$  y la probabilidad de fracaso mediante  $q (= 1 - p)$ , entonces (3) toma la forma

$${}_5C_2 p^2 q^3$$

que es el término que involucra a  $p^2$  en la expansión de  $(q + p)^5$ .

De manera más general, considere la probabilidad de obtener exactamente  $x$  4 en  $n$  lanzamientos del dado. Entonces  $n - x$  de los lanzamientos deben ser de algún otro número. Para un orden particular, la probabilidad es

$$p^x q^{n-x}$$

El número de órdenes posibles es  ${}_n C_x$ , que de nuevo puede considerarse como preguntar el número de permutaciones de  $n$  símbolos, donde  $x$  de ellos son E (éxito) y los restantes  $n - x$  son F (fracaso). De acuerdo con el resultado de la sección 8.2 sobre “Permutaciones con objetos repetidos”, existen

$$\frac{n!}{x! \cdot (n - x)!} = {}_n C_x$$

de éstas y, por lo tanto,

$$P(X = x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

que es una expresión general para los términos en  $(q + p)^n$ . En resumen, la distribución para  $X$  (el número de 4 que ocurren en  $n$  lanzamientos) está dada por los términos en  $(q + p)^n$ .

Siempre que se tengan  $n$  ensayos independientes de un experimento en el que cada ensayo sólo tiene dos posibles resultados (éxito y fracaso) y la probabilidad de éxito en cada ensayo permanece igual, se les llama **ensayos de Bernoulli**. Como la distribución del número de éxitos corresponde a la expansión de una potencia de un binomio, el experimento se llama **experimento binomial**, y la distribución del número de éxitos se llama una **distribución binomial**.

### Distribución binomial

Si  $X$  es el número de éxitos en  $n$  ensayos independientes de un experimento binomial con probabilidad  $p$  de éxito y  $q$  de fracaso en cualquier ensayo, entonces la distribución  $f$  para  $X$  está dada por

$$f(x) = P(X = x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

donde  $x$  es un entero tal que  $0 \leq x \leq n$  y  $q = 1 - p$ . Cualquier variable aleatoria con esta distribución se llama **variable aleatoria binomial** y se dice que tiene una **distribución binomial**. La media y la desviación estándar de  $X$  están dadas, respectivamente, por

$$\mu = np \quad \sigma = \sqrt{npq}$$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Sea  $X$  el número de personas de entre cuatro solicitantes de trabajo que son contratados. Si la probabilidad de ser contratado para cualquier solicitante es 0.3, encuentre la distribución de  $X$ .

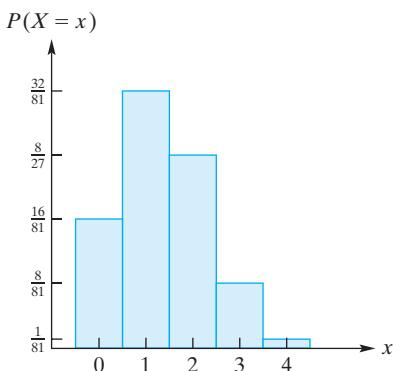
#### EJEMPLO 2 Distribución binomial

Suponga que  $X$  es una variable aleatoria binomial con  $n = 4$  y  $p = \frac{1}{3}$ . Encuentre la distribución para  $X$ .

**Solución:** Aquí  $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ . Entonces se tiene

$$P(X = x) = {}_n C_x p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

Por lo tanto,



**FIGURA 9.6** Distribución binomial,  $n = 4, p = \frac{1}{3}$ .

En la figura 9.6 se presenta el histograma de probabilidad para  $X$ . Observe que la media  $\mu$  para  $X$  es  $np = np = 4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$ , y la desviación estándar es

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

### EJEMPLO 3 Al menos dos caras en ocho lanzamientos de moneda

Una moneda balanceada se lanza ocho veces. Encuentre la probabilidad de obtener al menos dos caras.

**Solución:** Si  $X$  es el número de caras que ocurren, entonces  $X$  tiene una distribución binomial con  $n = 8, p = \frac{1}{2}$  y  $q = \frac{1}{2}$ . Para simplificar el trabajo, se usa el hecho de que

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

Ahora,

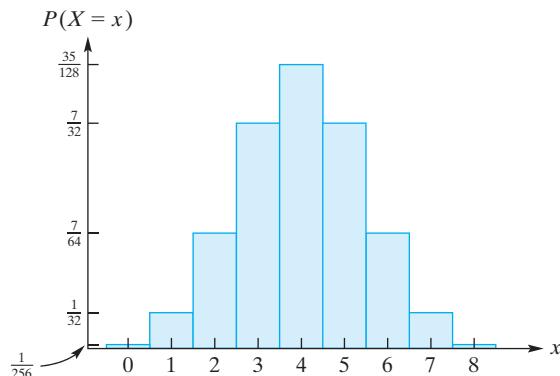
$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= 8C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 8C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{256} + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{128} = \frac{9}{256} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P(X \geq 2) = 1 - \frac{9}{256} = \frac{247}{256}$$

En la figura 9.7 se muestra un histograma de probabilidad para  $X$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17



**FIGURA 9.7** Distribución binomial,  $n = 8, p = \frac{1}{2}$ .

### EJEMPLO 4 Auditoría al impuesto sobre la renta

Para un grupo particular de individuos, se auditán 20% de sus declaraciones de impuesto sobre la renta cada año. De cinco personas elegidas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos sean auditados?

**Solución:** Se considerará esto como un experimento binomial con cinco ensayos (selección de un individuo). En realidad, el experimento no es realmente binomial, porque la selección de un individuo de este grupo afecta la probabilidad de que la declaración de otro individuo sea auditada. Por ejemplo, si existen 5000 personas, entonces 20%, o 1000, serán auditadas. La probabilidad de que el primer individuo seleccionado sea auditado es  $\frac{1000}{5000}$ . Si ese evento ocurre, la probabilidad de que la segunda persona seleccionada sea auditada es  $\frac{999}{4999}$ . Por lo tanto, los eventos no son independientes. Sin embargo, se supone que el número de individuos es grande, por lo que para propósitos prácticos, la probabilidad de auditar a un individuo permanece constante de ensayo a ensayo.

Para cada ensayo, los dos resultados son *ser auditado* y *no ser auditado*. Aquí, se define un éxito como ser auditado. Si  $X$  es el número de declaraciones auditadas,  $p = 0.2$  y  $q = 1 - 0.2 = 0.8$ , se tiene

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= {}_5C_2(0.2)^2(0.8)^3 = \frac{5!}{2!3!}(0.04)(0.512) \\ &= 10(0.04)(0.512) = 0.2048 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



## Problemas 9.2

En los problemas 1 a 4, determine la distribución  $f$  para la variable aleatoria binomial  $X$  si el número de ensayos es  $n$  y la probabilidad de éxito de cada ensayo es  $p$ . También, encuentre  $\mu$  y  $\sigma$ .

- |                              |                             |
|------------------------------|-----------------------------|
| *1. $n = 2, p = \frac{1}{5}$ | 2. $n = 3, p = \frac{1}{2}$ |
| 3. $n = 3, p = \frac{2}{3}$  | 4. $n = 4, p = 0.4$         |

En los problemas 5 a 10, determine la probabilidad si  $X$  es una variable aleatoria binomial,  $n$  es el número de ensayos y  $p$  es la probabilidad de éxito en cada ensayo.

- |   |
|---|
| 5. $P(X = 5); n = 6, p = 0.2$             |
| 6. $P(X = 2); n = 5, p = \frac{1}{3}$     |
| 7. $P(X = 2); n = 4, p = \frac{4}{5}$     |
| 8. $P(X = 4); n = 7, p = 0.2$             |
| 9. $P(X < 2); n = 5, p = \frac{1}{2}$     |
| 10. $P(X \geq 2); n = 6, p = \frac{2}{3}$ |

11. Una moneda balanceada se lanza 11 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran exactamente ocho caras?

12. **Examen de opción múltiple** Cada pregunta de un examen de opción múltiple con seis preguntas tiene cuatro opciones, sólo una de las cuales es correcta. Si un estudiante responde al azar las seis preguntas, encuentre la probabilidad de que exactamente tres sean correctas.

13. **Canicas** Un frasco contiene cinco canicas rojas y siete verdes. Se retiran cuatro canicas al azar, sucesivamente y con reemplazo. Determine la probabilidad de que exactamente dos sean verdes.

14. **Cartas** Se seleccionan tres cartas en forma aleatoria, sucesivamente y con reemplazo de un baraja ordinaria de 52 cartas. Determine la probabilidad de que exactamente dos cartas sean ases.

\*15. **Control de calidad** Un fabricante produce interruptores eléctricos, de los cuales 2% están defectuosos. De una corrida de producción de 50 000 interruptores, se seleccionan cuatro

de manera aleatoria y se prueba cada uno. Determine la probabilidad de que la muestra contenga exactamente dos interruptores defectuosos. Redondee su respuesta a tres decimales. Suponga que los cuatro ensayos son independientes y que el número de interruptores defectuosos en la muestra tiene una distribución binomial.

16. **Moneda** Una moneda está sesgada de manera que  $P(C) = 0.2$  y  $P(X) = 0.8$ . Si  $X$  es el número de caras en tres lanzamientos, determine una fórmula para  $P(X = x)$ .
- \*17. **Moneda** Una moneda sesgada se lanza tres veces de manera sucesiva. La probabilidad de cara en cualquier lanzamiento es  $\frac{1}{4}$ . Encuentre la probabilidad de que (a) ocurran exactamente dos caras y (b) ocurran dos o tres caras.
18. **Cartas** Se seleccionan siete cartas en forma aleatoria, sucesivamente y con reemplazo de una baraja ordinaria de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de haya (a) exactamente cuatro cartas de corazones y (b) al menos cuatro cartas de corazones.
19. **Control de calidad** Se cree que una quinta parte de un gran lote de producción de dispositivos electrónicos está defectuoso. Si se selecciona al azar una muestra de seis dispositivos, determine la probabilidad de que no más de uno esté defectuoso.
20. **Computadora** Para cierta población grande, la probabilidad de que una persona seleccionada de manera aleatoria tenga una computadora es 0.7. Si se seleccionan al azar cinco personas, encuentre la probabilidad de que al menos tres tengan una computadora.
21. **Béisbol** La probabilidad de que cierto jugador de béisbol conecte un imparable es de 0.300. Encuentre la probabilidad de que si va cuatro veces al bat, conecte al menos un imparable.
22. **Acciones** Un consultor financiero afirma que 60% de las acciones que él recomienda aumentan su valor. Un cliente selecciona cuatro de una lista de 200 acciones, de manera aleatoria. Determine la probabilidad, redondeada a dos decimales,

de que al menos dos de las acciones elegidas aumenten su valor. Suponga que cada selección es un ensayo independiente y que el número de acciones que incrementan su valor tiene una distribución binomial.

23. **Géneros de los hijos** Si una familia tiene cinco hijos, encuentre la probabilidad de que al menos dos sean niñas. (Suponga que la probabilidad de que uno de los hijos sea niña es  $\frac{1}{2}$ .)
24. Si  $X$  es una variable aleatoria binomialmente distribuida donde  $n = 50$  y  $p = \frac{2}{5}$  encuentre  $\sigma^2$ .

## OBJETIVO

Desarrollar las nociones básicas de cadena de Markov y la matriz de transición asociada.  
Encontrar vectores de estado y el vector de estado estable.

## 9.3 Cadenas de Markov

Este capítulo se concluye con el análisis de un tipo especial de proceso estocástico llamado *cadena de Markov*<sup>2</sup>.

### Cadena de Markov

Una **cadena de Markov** es una sucesión de pruebas de un experimento en el cual el resultado posible de cada prueba permanece igual de prueba a prueba, son finitas en número y tienen probabilidades que dependen sólo del resultado de la prueba anterior.

Para ilustrar una cadena de Markov, se considerará la siguiente situación. Imagine que un pueblo pequeño sólo tiene dos estaciones de servicio automotriz—digamos estaciones 1 y 2—que atienden las necesidades de los propietarios de automóviles del pueblo. (Estos clientes forman la población bajo consideración.) Cada vez que un cliente necesita servicio para su automóvil, debe *decidir* a cuál estación acudir.

Así, cada cliente puede clasificarse en una categoría de acuerdo con cuál de las dos estaciones eligió recientemente. El cliente y las estaciones pueden verse como un *sistema*. Si un cliente eligió recientemente la estación 1, dicha situación se refiere como *estado 1* del sistema. De manera similar, si la elección más reciente de un cliente fue la estación 2, se dice que en la actualidad el sistema está en el estado 2. Por lo tanto, en todo momento, el sistema está en uno de sus dos estados. Por supuesto, tras un periodo de tiempo, el sistema puede moverse de un estado al otro. Por ejemplo, la sucesión 1, 2, 2, 1 indica que en cuatro servicios sucesivos a un automóvil, el sistema cambió del estado 1 al estado 2, permaneció en el estado 2 y después cambió al estado 1.

Esta situación puede entenderse como una sucesión de pruebas de un experimento (elección de una estación de servicio) en la cual los resultados posibles para cada prueba son los dos estados (estación 1 y estación 2). Cada prueba involucra la observación del estado del sistema en ese momento.

Si se conoce el estado actual del sistema, se hace evidente que no es posible estar seguro de su estado en la siguiente observación. Sin embargo, se puede saber la *posibilidad* de que presente un estado particular. Por ejemplo, suponga que si un cliente usó más recientemente la estación 1, entonces la probabilidad de que el cliente use la estación 1 la próxima vez es 0.7. (Esto significa que, de los clientes que usaron la estación 1 recientemente, 70% continuarán con la estación 1 la vez siguiente y 30% cambiarán a la estación 2.) Suponga también que si un cliente usó la estación 2 recientemente, la probabilidad de que el cliente también use la estación 2 la vez siguiente es 0.8. Estas probabilidades deben reconocerse como probabilidades *condicionales*. Esto es

$$P(\text{permanezca en el estado 1} | \text{actualmente está en el estado 1}) = 0.7$$

$$P(\text{cambie al estado 2} | \text{actualmente está en el estado 1}) = 0.3$$

$$P(\text{permanezca en el estado 2} | \text{actualmente está en el estado 2}) = 0.8$$

$$P(\text{cambie al estado 1} | \text{actualmente está en el estado 2}) = 0.2$$

<sup>2</sup>En honor al matemático ruso Andrei Markov (1856-1922).

Estas cuatro probabilidades pueden organizarse en una matriz cuadrada  $\mathbf{T} = [t_{ij}]$  donde la entrada  $t_{ij}$  es la probabilidad de que el estado siguiente del sistema sea  $i$  dado que actualmente se encuentra en el estado  $j$ .

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Siguiente} & \text{Estado actual} \\ \text{estado} & \end{array} \\ \mathbf{T} = \begin{array}{cc} \text{Estado 1} & \begin{array}{cc} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{array} \\ \text{Estado 2} & \end{array} \end{array}$$

La matriz  $\mathbf{T}$  se llama *matriz de transición* porque indica las probabilidades de transición de un estado a otro en *un paso*—es decir, cuando se pasa de un periodo de observación al siguiente—. Las entradas se llaman *probabilidades de transición*. Es necesario destacar que la *matriz de transición permanece igual en cada etapa de la sucesión de observaciones*. Observe que todas las entradas de la matriz son no negativas porque son probabilidades. Aún más, la suma de las entradas en cada columna debe ser 1 porque, para cada estado actual, las probabilidades toman en cuenta todas las transiciones posibles.

A continuación se resumirá la situación actual de las estaciones de servicio. Se tiene una sucesión de pruebas en la cual los resultados posibles (o estados) son los mismos de prueba a prueba y son finitos en número (dos). La probabilidad de que el sistema esté en un estado particular para una prueba dada depende sólo del estado de la prueba anterior. Así, tenemos lo que se llama una *cadena de Markov de dos estados*. Una cadena de Markov determina una matriz cuadrada  $\mathbf{T}$  llamada matriz de transición.

### Matriz de transición

Una **matriz de transición** para una cadena de Markov de  $k$  estados es una matriz de  $k \times k$   $\mathbf{T} = [t_{ij}]$  en la que la entrada  $t_{ij}$  es la probabilidad, de una prueba a la siguiente, de moverse al estado  $i$  a partir del estado  $j$ . Todas las entradas son no negativas, y la suma de las entradas en cada columna es 1. Puede decirse que

$$t_{ij} = P(\text{próximo estado sea } i \mid \text{el estado actual es } j)$$

Suponga que cuando se hacen las observaciones iniciales, 60% de todos los clientes usaron la estación 1 recientemente y 40% usaron la estación 2. Esto significa que, antes de considerar alguna prueba adicional (servicio al automóvil), las probabilidades de que un cliente esté en el estado 1 o 2 son 0.6 y 0.4, respectivamente. Estas probabilidades se llaman *probabilidades de estado inicial*, y de manera colectiva se conocen como la *distribución inicial*. Pueden representarse mediante un vector columna, llamado **vector de estado inicial**, el cual se denota por  $\mathbf{X}_0$ . En este caso,

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Se desea encontrar el vector que da las probabilidades de estado para la *siguiente* visita de un cliente a una estación de servicio. Este vector de estado se denota mediante  $\mathbf{X}_1$ . De manera más general, un vector de estado se define de la siguiente manera:

### Vector de estado

El **vector de estado  $\mathbf{X}_n$**  para una cadena de Markov de  $k$  estados es un vector columna de  $k$  entradas en el que la entrada  $x_j$  es la probabilidad de estar en el estado  $j$  después de la  $n$ -ésima prueba.

Las entradas para  $\mathbf{X}_1$  pueden encontrarse a partir del árbol de probabilidad de la figura 9.8. Se observa que la probabilidad de estar en el estado 1 después de la siguiente visita es la suma

$$(0.7)(0.6) + (0.2)(0.4) = 0.5 \quad (1)$$

y la probabilidad de estar en el estado 2 es

$$(0.3)(0.6) + (0.8)(0.4) = 0.5 \quad (2)$$

Por ejemplo, la suma de las entradas en la primera columna de  $\mathbf{T}$  es  $0.7 + 0.3 = 1$ .

Se usa un subíndice 0 para indicar el vector de estado inicial.

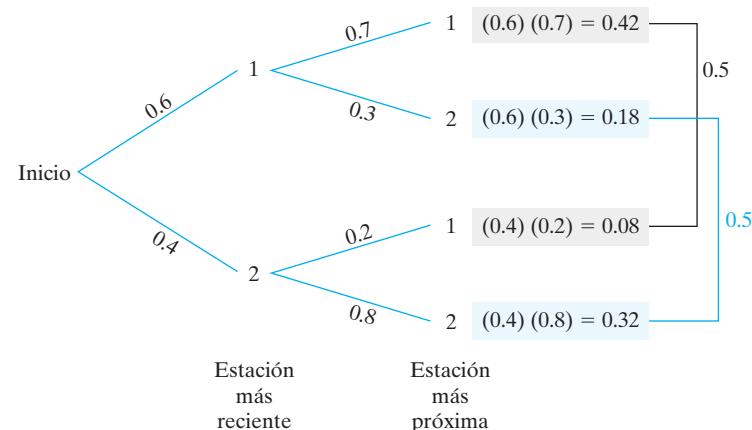


FIGURA 9.8 Árbol de probabilidad para una cadena de Markov de dos estados.

Entonces,

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Las sumas de los productos en el lado izquierdo de las ecuaciones (1) y (2) recuerdan la multiplicación de matrices. De hecho, hay entradas en la matriz  $\mathbf{T}\mathbf{X}_0$  que se han obtenido al multiplicar el vector de estado inicial de la izquierda por la matriz de transición:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{T}\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Este patrón consistente en tomar el producto de un vector de estado y la matriz de transición para obtener el siguiente vector de estado permite aún encontrar probabilidades de estado para observaciones futuras. Por ejemplo, para encontrar  $\mathbf{X}_2$ , el vector de estado que proporciona las probabilidades para cada estado después de dos pruebas (que siguen a la observación inicial), se tiene

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{T}\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.55 \end{bmatrix}$$

Así, la probabilidad de estar en el estado 1 después de dos servicios al automóvil es 0.45. Observe que, como  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{T}\mathbf{X}_0$ , se puede escribir

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{T}(\mathbf{T}\mathbf{X}_0)$$

de manera que

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{T}^2\mathbf{X}_0$$

En general, el  $n$ -ésimo vector de estado  $\mathbf{X}_n$  puede encontrarse al multiplicar el vector de estado previo de la izquierda  $\mathbf{X}_{n-1}$  por  $\mathbf{T}$ .

Si  $\mathbf{T}$  es la matriz de transición para una cadena de Markov, entonces el vector de estado  $\mathbf{X}_n$  para la  $n$ -ésima prueba está dado por

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{T}\mathbf{X}_{n-1}$$

De manera equivalente,  $\mathbf{X}_n$  puede encontrarse con sólo utilizar el vector columna de estado inicial  $\mathbf{X}_0$  y la matriz de transición  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{T}^n\mathbf{X}_0 \quad (3)$$

Ahora considere la situación en la cual se conoce el estado inicial del sistema. Por ejemplo, tome el caso en el que inicialmente se observa que un cliente ha elegido la

Aquí se encuentra  $\mathbf{X}_n$  con el uso de potencias de  $\mathbf{T}$ .

estación 1. Esto significa que la probabilidad de que el sistema esté en el estado 1 es 1, de manera que el vector de estado inicial debe ser

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suponga que ahora se determinará  $\mathbf{X}_2$ , el vector de estado que proporciona las probabilidades de estado después de las siguientes dos visitas. Esto está dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_2 &= \mathbf{T}^2 \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.55 & 0.30 \\ 0.45 & 0.70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.45 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por lo tanto, para este cliente, las probabilidades de usar la estación 1 o la estación 2 después de 2 pasos son 0.55 y 0.45, respectivamente. Observe que estas probabilidades forman la *primera columna de  $\mathbf{T}^2$* . Por otro lado, si el sistema estuviera inicialmente en el estado 2, entonces el vector de estado después de dos pasos sería

$$\mathbf{T}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.30 \\ 0.45 & 0.70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.70 \end{bmatrix}$$

Entonces, para este cliente, las probabilidades de usar la estación 1 o la estación 2 después de dos pasos son 0.30 y 0.70, respectivamente. Observe que estas probabilidades forman la *segunda columna de  $\mathbf{T}^2$* . Con base en nuestras observaciones, ahora tenemos una forma de interpretar  $\mathbf{T}^2$ . Las entradas en

$$\mathbf{T}^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.55 & 0.30 \\ 0.45 & 0.70 \end{bmatrix}$$

proporcionan las probabilidades de moverse de un estado a otro en *dos pasos*. En general, tenemos lo siguiente:

**Esto proporciona el significado de las entradas en  $\mathbf{T}^n$ .**

Si  $\mathbf{T}$  es una matriz de transición, entonces para  $\mathbf{T}^n$  la entrada en la línea  $i$  y la columna  $j$  proporciona la probabilidad de estar en el estado  $i$  después de  $n$  pasos, si se ha iniciado en el estado  $j$ .

### EJEMPLO 1 Demografía

Cierto condado está dividido en tres regiones demográficas. Las investigaciones indican que cada año 20% de los residentes de la región 1 se mueven a la región 2, y 10% se mueven a la región 3. (Los restantes permanecen en la región 1.) De los residentes en la región 2, 10% se trasladan a la región 1 y 10% se mudan a la región 3. De los residentes de la región 3, 20% se mueven a la región 1 y 10% se mueven a la región 2.

- a. Encuentre la matriz de transición  $\mathbf{T}$  para esta situación.

**Solución:** Se tiene

$$\mathbf{T} = \begin{array}{c|ccc} & \begin{array}{c} A la \\ \text{región} \end{array} & \begin{array}{c} De la \\ \text{región} \end{array} \\ \hline & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

Observe que para encontrar  $t_{11}$ , se resta de 1 la suma de las otras dos entradas en la primera columna. Las entradas  $t_{22}$  y  $t_{33}$  se encuentran de manera similar.

- b. Encuentre la probabilidad de que un residente de la región 1 este año sea residente de la región 1 al año siguiente; dentro de dos años.

**Solución:** A partir de la entrada  $t_{11}$  en la matriz de transición  $\mathbf{T}$ , la probabilidad de que un residente de la región 1 permanezca en la región 1 después de un año es 0.7.

Las probabilidades de mudarse de una región a otra en dos pasos están dadas por  $\mathbf{T}^2$ :

$$\mathbf{T}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0.53 & 0.17 & 0.29 \\ 2 & 0.31 & 0.67 & 0.19 \\ 3 & 0.16 & 0.16 & 0.52 \end{bmatrix}$$

Las potencias de  $\mathbf{T}$  pueden encontrarse en forma conveniente con una calculadora graficadora.

Así, la probabilidad de que un residente de la región 1 esté en la región 1 después de dos años es 0.53.

- c. *Este año, suponga que 40% de los residentes del condado viven en la región 1, 30% viven en la región 2, y 30% viven en la región 3. Encuentre la probabilidad de que un residente del condado viva en la región 2 después de tres años.*

**Solución:** El vector de estado inicial es

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.30 \\ 0.30 \end{bmatrix}$$

La distribución de la población después de tres años está dada por el vector de estado  $\mathbf{X}_3$ . A partir de la ecuación (3) donde  $n = 3$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_3 &= \mathbf{T}^3 \mathbf{X}_0 = \mathbf{T} \mathbf{T}^2 \mathbf{X}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.53 & 0.17 & 0.29 \\ 0.31 & 0.67 & 0.19 \\ 0.16 & 0.16 & 0.52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.30 \\ 0.30 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.3368 \\ 0.4024 \\ 0.2608 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Este resultado significa que en tres años, 33.68% de los residentes del condado viven en la región 1, 40.24% viven en la región 2 y 26.08% viven en la región 3. Por lo tanto, la probabilidad de que un residente viva en la región 2 dentro de tres años es 0.4024.



### Vectores de estado estable

Regresando al problema de las estaciones de servicio. Recuerde que si el vector de estado inicial es

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.55 \end{bmatrix}$$

Algunos vectores de estado después del segundo son

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{T} \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.425 \\ 0.575 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_4 = \mathbf{T} \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.425 \\ 0.575 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4125 \\ 0.5875 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_5 = \mathbf{T} \mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4125 \\ 0.5875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.40625 \\ 0.59375 \end{bmatrix}$$

.

.

.

$$\mathbf{X}_{10} = \mathbf{T} \mathbf{X}_9 \approx \begin{bmatrix} 0.40020 \\ 0.59980 \end{bmatrix}$$

Estos resultados indican claramente que, conforme aumenta el número de pruebas, las entradas en los vectores de estado tienden a estar más y más cerca de las entradas correspondientes en el vector, y efectivamente, así es en este caso.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.60 \end{bmatrix}$$

(De manera equivalente, puede mostrarse que las entradas en cada columna de  $\mathbf{T}^n$  se aproximan a las entradas correspondientes en  $\mathbf{Q}$  conforme  $n$  se incrementa.) El vector  $\mathbf{Q}$  tiene una propiedad especial. Observe el resultado de multiplicar  $\mathbf{Q}$  a la izquierda por la matriz de transición  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.60 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}$$

Entonces tenemos que

$$\mathbf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}$$

Lo cual muestra que  $\mathbf{Q}$  permanece sin cambio de prueba a prueba.

En resumen, conforme el número de pruebas se incrementa, los vectores de estado se acercan más y más a  $\mathbf{Q}$ , que permanece sin cambio de prueba a prueba. La distribución de la población entre las estaciones de servicio se estabiliza. Esto es, a largo plazo, aproximadamente 40% de la población llevará su automóvil a servicio a la estación 1 y 60% a la estación 2. Para describir esto, se dice que  $\mathbf{Q}$  es el **vector de estado estable** de este proceso. Puede demostrarse que el vector de estado estable es único. (Existe sólo un vector de este tipo.) Aún más,  $\mathbf{Q}$  no depende del vector de estado inicial  $\mathbf{X}_0$ , sino que depende sólo de la matriz de transición  $\mathbf{T}$ . Por esta razón, se dice que  $\mathbf{Q}$  es el *vector de estado estable para  $\mathbf{T}$* .

Lo que se necesita ahora es un procedimiento para encontrar el vector de estado estable  $\mathbf{Q}$  sin tener que calcular vectores de estado para valores grandes de  $n$ . Por fortuna, puede usarse la propiedad establecida con anterioridad:  $\mathbf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}$ , para encontrar

$\mathbf{Q}$ . Si  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ , se tiene que

$$\mathbf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{Q} = \mathbf{IQ}$$

$$\mathbf{T}\mathbf{Q} - \mathbf{IQ} = \mathbf{O}$$

$$(\mathbf{T} - \mathbf{I})\mathbf{Q} = \mathbf{O}$$

$$\left( \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.3 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lo que sugiere que se puede encontrar  $\mathbf{Q}$  al resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante, que en este caso surge en forma matricial. Gracias a las técnicas vistas a lo largo de este capítulo, se observa de inmediato que la matriz de coeficientes de la última ecuación se reduce a

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lo que sugiere que existe una cantidad infinita de posibilidades para el vector de estado estable  $\mathbf{Q}$ . Sin embargo, las entradas de un vector de estado deben sumar 1 de manera que la ecuación adicional  $q_1 + q_2 = 1$  debe agregarse al sistema. Se llega a que

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

puede verse fácilmente que este sistema tiene la solución única

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

lo cual confirma nuestra sospecha anterior.

Es necesario puntualizar que para las cadenas de Markov en general, los vectores de estado no siempre se aproximan a un vector de estado estable. Sin embargo, puede demostrarse que, cuando  $\mathbf{T}$  es *regular*, existe un vector de estado estable para  $\mathbf{T}$ :

Una matriz de transición  $\mathbf{T}$  es **regular** si existe una potencia entera de  $\mathbf{T}$  para la cual todas las entradas son estrictamente positivas.

En esta sección sólo se considerarán matrices de transición regulares. Una cadena de Markov cuya matriz de transición es regular se llama una **cadena de Markov regular**.

En resumen, se tiene lo siguiente:

Suponga que  $\mathbf{T}$  es la matriz de transición  $k \times k$  para una cadena de Markov regular. Entonces el vector columna de estado estable

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}$$

es la solución a las ecuaciones matriciales

$$[1 \ 1 \ \cdots \ 1]\mathbf{Q} = 1 \quad (4)$$

$$(\mathbf{T} - \mathbf{I}_k)\mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5)$$

donde en la ecuación (4) el coeficiente (matriz) de  $\mathbf{Q}$  es el vector renglón que consiste de  $k$  entradas, todas las cuales son 1.

Las ecuaciones (4) y (5) siempre pueden combinarse en una ecuación matricial sencilla:

$$\mathbf{T}^*\mathbf{Q} = \mathbf{0}^*$$

Donde  $\mathbf{T}^*$  es la matriz  $(k + 1) \times k$  obtenida al pasar el renglón  $[1 \ 1 \ \cdots \ 1]$  a la parte superior de la matriz  $k \times k \ \mathbf{T} - \mathbf{I}_k$  (donde  $\mathbf{I}_k$  es la matriz identidad  $k \times k$ ) y  $\mathbf{0}^*$  es el vector columna  $k + 1$  obtenido al pasar un 1 a la parte superior del vector columna cero de  $k$  elementos. Entonces, se puede encontrar  $\mathbf{Q}$  al reducir la matriz aumentada  $(\mathbf{T}^* | \mathbf{0}^*)$ . Estos conceptos se ilustrarán en el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 2 Vector de estado estable

Para el problema sobre demografía del ejemplo 1, a largo plazo ¿qué porcentaje de los residentes del condado vivirán en cada región?

**Solución:** La distribución de la población a largo plazo está dada por el vector de estado estable  $\mathbf{Q}$ , el cual se determinará a continuación. Se mostró que la matriz  $\mathbf{T}$  para este ejemplo es

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

de forma que  $\mathbf{T} - \mathbf{I}$  es

$$\begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & -0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

y  $[T^* | O^*]$  es

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.3 & 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & -0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & -0.3 & 0 \end{array} \right]$$

lo cual se reduce a

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/16 \\ 0 & 1 & 0 & 7/16 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

lo que muestra que el vector de estado estable  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 5/16 \\ 7/16 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3125 \\ 0.4375 \\ 0.2500 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Por lo tanto, a

largo plazo, los porcentajes de residentes del condado que vivirán en las regiones 1, 2 y 3 serán 31.25%, 43.75% y 25%, respectivamente.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37



## Problemas 9.3

En los problemas 1 a 6, ¿puede la matriz dada ser una matriz de transición para una cadena de Markov?

1.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

2.  $\begin{bmatrix} 0.1 & 1 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix}$

3.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

4.  $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0 \\ 0.7 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$

5.  $\begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.9 & 0.2 \end{bmatrix}$

6.  $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

En los problemas 7 a 10 se da una matriz de transición para una cadena de Markov. Determine los valores de las entradas representadas con letras.

7.  $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & b \\ a & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

8.  $\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{5}{12} & a \end{bmatrix}$

9.  $\begin{bmatrix} 0.4 & a & a \\ a & 0.1 & b \\ 0.3 & b & c \end{bmatrix}$

10.  $\begin{bmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & \frac{1}{4} & c \end{bmatrix}$

En los problemas 11 a 14, determine si el vector dado podría ser un vector de estado para una cadena de Markov.

11.  $\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$

12.  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

13.  $\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.7 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

14.  $\begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$

En los problemas 15 a 20 se da una matriz de transición  $T$  y un vector de estado inicial  $\mathbf{X}_0$ . Calcule los vectores de estado  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$  y  $\mathbf{X}_3$ .

15.  $T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

16.  $T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

17.  $T = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$

$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$

18.  $T = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$

19.  $T = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0.8 \end{bmatrix}$

20.  $T = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$

En los problemas 21 a 24 se da una matriz de transición  $T$ .

(a) Calcule  $T^2$  y  $T^3$ .

(b) ¿Cuál es la probabilidad de ir al estado 2 desde el estado 1 después de dos pasos?

- (c) ¿Cuál es la probabilidad de ir al estado 1 desde el estado 2 después de tres pasos?

21.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

22.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

23.  $\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.3 \\ 1 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$

24.  $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.7 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}$

En los problemas 25 a 30, encuentre el vector de estado estable para la matriz de transición dada.

25.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

26.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

27.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

28.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

29.  $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$

30.  $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.7 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$

- 31. Propagación de gripe** Una gripe ha atacado al dormitorio de un colegio que tiene 200 estudiantes. Suponga que la probabilidad de que un estudiante enfermo aún lo esté dentro de 4 días es 0.1. Por otro lado, para un estudiante que no tiene gripe, la probabilidad de tenerla dentro de 4 días es de 0.2.

- (a) Encuentre una matriz de transición para esta situación.  
(b) Si en este momento hay 120 estudiantes que tienen gripe, ¿cuántos estudiantes (el entero más cercano) puede esperarse que tengan gripe dentro de 8 días?, ¿dentro de 12 días?

- 32. Entrenamiento físico** Un centro de entrenamiento físico ha encontrado que, de los miembros que realizan ejercicio de alto impacto en una visita, 55% harán lo mismo en su próxima visita y 45% harán ejercicio de bajo impacto. De aquellos que realizan entrenamiento de bajo impacto en una visita, 75% harán lo mismo en la siguiente visita y 25% harán ejercicio de alto impacto. En la última visita, suponga que 65% de los miembros hicieron ejercicio de alto impacto y 35% hicieron ejercicio de bajo impacto. Después de dos visitas más, ¿qué porcentaje de los miembros preferirá el ejercicio de alto impacto?

- 33. Periódicos** En cierta área pueden comprarse dos periódicos distintos. Se ha encontrado que si un cliente compra el periódico A un día, la probabilidad de cambiar al otro periódico al siguiente día es de 0.3. Si un cliente compra el periódico B un día, la probabilidad de que compre el mismo periódico al siguiente día es de 0.6.

- (a) Encuentre la matriz de transición para esta situación.  
(b) Encuentre la probabilidad de que una persona que compró A el lunes compre A el miércoles.

- 34. Rentas de video** Una tienda de renta de videos tiene tres ubicaciones en una ciudad. Se puede rentar un video en cualquiera de las tres ubicaciones y regresarlo también en cualquiera de ellas. Los estudios muestran que los videos se rentan en una

ubicación y se regresan a un sitio de acuerdo con las probabilidades dadas en la siguiente matriz:

Regresado en	Rentado en		
	1	2	3
1	0.7	0.2	0.2
2	0.1	0.8	0.2
3	0.2	0	0.6

Suponga que 20% de los videos se rentan inicialmente en la ubicación 1, 50% en 2 y 30% en 3. Encuentre los porcentajes de videos que puede esperarse se regresen a cada ubicación.

- (a) Despues de esta renta.  
(b) Despues de la siguiente renta.

- 35. Votación** En cierta región, se analizó el registro de votantes de acuerdo con su afiliación partidista: demócrata, republicana u otra. Se encontró que anualmente, la probabilidad de que un votante cambie su registro de demócrata a republicano es de 0.1; de demócrata a otro 0.1; de republicano a demócrata 0.1; de republicano a otro 0.1; de otro a demócrata, 0.3, y de otro a demócrata, 0.2.

- (a) Encuentre una matriz de transición para esta situación.  
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un votante registrado como republicano en la actualidad, se registre como demócrata dentro de dos años?  
(c) Si 40% de los votantes actuales son demócratas y 40% son republicanos, ¿qué porcentaje puede esperarse que sean republicanos dentro de un año?

- 36. Demografía** Los residentes de cierta región se clasifican como urbanos (U), suburbanos (S) o rurales (R). Una compañía de mercadotecnia ha encontrado que a través de períodos sucesivos de cinco años, los residentes cambian de una clasificación a otra de acuerdo con las probabilidades dadas por la siguiente matriz:

	U	S	R
U	0.7	0.1	0.1
S	0.1	0.8	0.1
R	0.2	0.1	0.8

- (a) Encuentre la probabilidad de que un residente suburbano sea un residente rural dentro de 15 años.  
(b) Suponga que la población inicial en la región es 50% urbana, 25% suburbana y 25% rural. Determine la distribución de población esperada dentro de 15 años.

- \*37. Servicio telefónico de larga distancia** Una importante compañía telefónica de larga distancia (compañía A) ha estudiado la tendencia de los usuarios telefónicos a cambiarse de un proveedor del servicio a otro. La compañía cree que a través de períodos sucesivos de seis meses, la probabilidad de que un cliente que usa el servicio de A cambie a un servicio competidor es de 0.2 y la probabilidad de que un cliente de cualquier servicio competidor cambie a A es de 0.3.

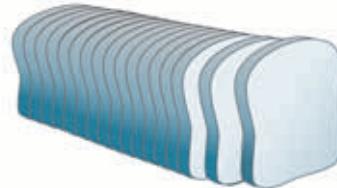


- (a) Encuentre una matriz de transición para esta situación.  
 (b) Si en la actualidad A controla 70% del mercado, ¿qué porcentaje puede esperarse que controle dentro de seis meses?  
 (c) ¿Qué porcentaje del mercado puede esperarse que controle A en el largo plazo?
- 38. Compradores de automóviles** En cierta región, se hizo un estudio de propietarios de automóviles. Se determinó que si una persona posee actualmente un Ford, la probabilidad de que el siguiente automóvil que compre dicha sea persona también sea un Ford es de 0.75. Si una persona en la actualidad no posee un Ford, la probabilidad de que adquiera un Ford en su próxima compra de automóvil es de 0.35.
- (a) Encuentre la matriz de transición para esta situación.  
 (b) A largo plazo, ¿qué proporción de compras de automóviles en la región puede esperarse que sean de Ford?
- 39. Ratones de laboratorio** Suponga que hay 100 ratones en una caja con dos compartimientos y tienen la libertad de moverse entre los compartimientos. A intervalos de tiempo regulares, se observa el número de ratones en cada compartimiento. Se ha encontrado que si un ratón está en el compartimiento 1 en una observación, la probabilidad de que el ratón esté en el compartimiento 1 en la siguiente observación es  $\frac{5}{7}$ . Si un ratón está en el compartimiento 2 en una observación, la probabilidad de que se le encuentre en el compartimiento 2 en la siguiente observación es  $\frac{4}{7}$ . Suponga que en un inicio se colocan 50 ratones en cada compartimiento.
- (a) Encuentre la matriz de transición para esta situación.  
 (b) Después de dos observaciones, ¿qué porcentaje de los ratones (redondeado a dos decimales) puede esperarse que esté en cada compartimiento?  
 (c) A largo plazo, ¿qué porcentaje de los ratones puede esperarse que esté en cada compartimiento?
- 40. Máquinas expendedadoras** Una queja típica de los estudiantes en las escuelas es: “¡no insertes dinero en esa máquina de refrescos; yo lo intenté y la máquina no funciona!” Suponga que si una máquina expendedora funciona adecuadamente en algún momento, la probabilidad de que funcione bien la próxima vez es de 0.8. Por otro lado, suponga que si la máquina no funciona apropiadamente una vez, la probabilidad de que no funcione bien la próxima vez es de 0.9.
- (a) Encuentre la matriz de transición para esta situación.  
 (b) Suponga que cuatro personas hacen fila en una máquina de refrescos. Si la primera persona recibe un refresco, ¿cuál es la probabilidad de que la cuarta persona también lo reciba? (Suponga que nadie hace más de un intento.)  
 (c) Si existen 42 máquinas expendedoras de este tipo en el campus de un colegio, ¿cuántas máquinas puede esperarse que funcionen adecuadamente a largo plazo?

- 41. Publicidad** Una cadena de supermercados vende pan de las panaderías A y B. En la actualidad, A cuenta con el 50% de las ventas diarias de pan en la cadena. Para incrementar las ventas, A lanza una campaña de publicidad. La panadería cree que el cambio en las ventas de pan se basará en la siguiente matriz de transición:

$$\begin{array}{cc} & \text{A} \quad \text{B} \\ \text{A} & \left[ \begin{array}{cc} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \\ \text{B} & \end{array}$$

- (a) Encuentre el vector de estado estable.  
 (b) A largo plazo, ¿en qué porcentaje puede esperar A aumentar sus ventas presentadas en la cadena? Suponga que las ventas diarias totales de pan en la cadena permanecen iguales



- 42. Sucursales bancarias** Un banco con tres sucursales A, B y C, encuentra que usualmente sus clientes regresan a la misma sucursal para satisfacer sus necesidades bancarias. Sin embargo, a veces un cliente puede ir a una sucursal diferente debido al cambio de alguna circunstancia. Por ejemplo, una persona que por lo general va a la sucursal A puede desviarse algunas veces e ir a la sucursal B porque tiene negocios que realizar en la vecindad de esta última sucursal. Para los clientes de la sucursal A, suponga que 80% regresan a A en su próxima visita, 10% van a B y 10% van a C. Para los clientes de la sucursal B, suponga que 70% regresan a B en su próxima visita, 20% van a A y 10% van a C. Para los clientes de la sucursal C, suponga que 70% regresan a C en su próxima visita, 20% van a A y 10% van a B.

- (a) Encuentre una matriz de transición para esta situación.  
 (b) Si un cliente fue más recientemente a la sucursal B, cuál es la probabilidad de que el cliente regrese a B dentro de dos visitas bancarias.  
 (c) Suponga que en un inicio 200 clientes van a A, 200 van a B y 100 van a C. En su próxima visita, ¿cuántos puede esperarse que vayan a A?, ¿a B?, ¿a C?  
 (d) De los 500 clientes iniciales, ¿cuántos puede esperarse que en el largo plazo vayan a A?, ¿a B?, ¿a C?

- 43.** Muestre que la matriz de transición  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$  es regular.  
*(Pista: examine las entradas en  $\mathbf{T}^2$ ).*

- 44.** Muestre que la matriz de transición  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  no es regular.

## 9.4 Repaso

### Términos y símbolos importantes

#### Sección 9.1

#### Variables aleatorias discretas y valor esperado

variable aleatoria discreta función de probabilidad histograma  
 media,  $\mu$  valor esperado,  $E(X)$   
 varianza,  $\text{Var}(X)$  desviación estándar,  $\sigma$

#### Ejemplos

Ej. 2, p. 421  
 Ej. 3, p. 423  
 Ej. 4, p. 425

**Sección 9.2****La distribución binomial**

teorema binomial coeficientes binomiales  
ensayos de Bernoulli experimento binomial distribución binomial

Ej. 1, p. 429  
Ej. 2, p. 430

**Sección 9.3****Cadenas de Markov**

cadena de Markov matriz de transición,  $\mathbf{T}$  vector de estado,  $\mathbf{X}_n$   
matriz de transición regular vector de estado estable,  $\mathbf{Q}$

Ej. 1, p. 436  
Ej. 2, p. 439

**Resumen**

Si  $X$  es una variable aleatoria discreta y  $f$  es la función tal que  $f(x) = P(X = x)$ , entonces  $f$  se llama la función, o distribución, de probabilidad de  $X$ . En general,

$$\sum_x f(x) = 1$$

La media, o valor esperado, de  $X$  es el promedio a largo plazo de  $X$  y se denota  $\mu$  o  $E(X)$ :

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x)$$

La media puede interpretarse como una medida de la tendencia central de  $X$  a largo plazo. Una medida de la dispersión de  $X$  es la varianza, denotada  $\text{Var}(X)$  y está dada por

$$\text{Var}(X) = \sum_x (x - \mu)^2 f(x)$$

de manera equivalente, por

$$\text{Var}(X) = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2$$

Otra medida de la dispersión de  $X$  es la desviación estándar  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Si un experimento se repite varias veces, entonces cada realización se llama un ensayo. Los ensayos son independientes cuando el resultado de cualquier ensayo individual no afecta el resultado de ningún otro. Si existen sólo dos resultados posibles (éxito y fracaso) para cada ensayo independiente, y las probabilidades de éxito y fracaso no cambian de ensayo a ensayo, entonces el experimento se llama binomial. Para un experimento de este tipo, si  $X$  es el número de éxitos en  $n$  ensayos, entonces la distribución  $f$  de  $X$  se llama una distribución binomial, y

$$f(x) = P(X = x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

donde  $p$  es la probabilidad de éxito en cualquier ensayo y  $q = 1 - p$  es la probabilidad de fracaso. La media  $\mu$  y la desviación estándar  $\sigma$  de  $X$  están dados por

$$\mu = np \quad \text{y} \quad \sigma = \sqrt{npq}$$

Una distribución binomial está íntimamente conectada con el teorema binomial, que es la fórmula para expandir la  $n$ -ésima potencia de un binomio, a saber,

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n {}_n C_i a^{n-i} b^i$$

donde  $n$  es un entero positivo.

Una cadena de Markov es una sucesión de ensayos de un experimento en el cual los resultados posibles de cada ensayo, que se llaman estados, permanecen iguales de ensayo a ensayo, son finitos en número, y tienen probabilidades que dependen sólo del resultado del ensayo previo. Para una cadena de Markov de  $k$ -estados, si la probabilidad de cambiar al estado  $i$  desde el estado  $j$  de un ensayo al siguiente se representa mediante  $t_{ij}$ , entonces la matriz de  $k \times k$   $\mathbf{T} = [t_{ij}]$  se llama la matriz de transición para la cadena. Las entradas en la  $n$ -ésima potencia de  $\mathbf{I}$  también representan probabilidades; la entrada en el  $i$ -ésimo renglón y  $j$ -ésima columna de  $\mathbf{T}^n$  brinda la probabilidad de cambiar al estado  $i$  desde el estado  $j$  en  $n$  pasos. Un vector columna de  $k$  entradas donde la entrada  $x_j$  es la probabilidad de estar en el estado  $j$  después del  $n$ -ésimo ensayo se llama un vector estado y se denota  $\mathbf{X}_n$ . Las probabilidades del estado inicial se representan por medio del vector de estado  $\mathbf{X}_0$ . El vector de estado  $\mathbf{X}_n$  puede encontrarse al multiplicar el vector de estado anterior  $\mathbf{X}_{n-1}$  a la izquierda por la matriz de transición  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{T}\mathbf{X}_{n-1}$$

De manera alternativa,  $\mathbf{X}_n$  puede encontrarse al multiplicar el vector de estado inicial  $\mathbf{X}_0$  por  $\mathbf{T}^n$ :

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{T}^n \mathbf{X}_0$$

Si la matriz de transición  $\mathbf{T}$  es regular (esto es, si es una potencia entera positiva de  $\mathbf{T}$  para la cual todas las entradas son positivas), entonces, conforme aumenta el número  $n$  de ensayos,  $\mathbf{X}_n$  se acerca más y más al vector  $\mathbf{Q}$ , llamado vector de estado estable de  $\mathbf{T}$ . Si

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}$$

entonces las entradas de  $\mathbf{Q}$  indican la distribución de probabilidad de los estados a largo plazo. El vector  $\mathbf{Q}$  puede encontrarse al resolver la ecuación matricial

$$\mathbf{T}^* \mathbf{Q} = \mathbf{O}^*$$

donde  $\mathbf{T}^*$  es la matriz de  $(k+1) \times k$  obtenida al pasar el renglón  $[1 \ 1 \ \dots \ 1]$  a la parte superior de la matriz de  $k \times k$   $\mathbf{T} - \mathbf{I}_k$  (donde  $\mathbf{I}_k$  es la matriz identidad de  $k \times k$ ) y  $\mathbf{O}^*$  es el vector de  $k+1$  columnas obtenido al pasar un 1 a la parte superior del vector cero de  $k$  columnas. Así se construye y reduce

$$\left[ \begin{array}{c|c} 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{T} - \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{array} \right]$$

de donde, si  $\mathbf{T}$  es regular, se obtiene

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{O} & 0 \end{array} \right]$$

## Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

En los problemas 1 y 2, se da la distribución para la variable aleatoria  $X$ . Construya el histograma de probabilidad y determine  $\mu$ ,  $\text{Var}(X)$  y  $\sigma$ .

1.  $f(1) = 0.7$ ,  $f(2) = 0.1$ ,  $f(3) = 0.2$

2.  $f(0) = \frac{1}{6}$ ,  $f(1) = \frac{1}{2}$ ,  $f(2) = \frac{1}{3}$

3. **Moneda y dado** Se lanzan una moneda y un dado balanceados. Sea  $X$  el número de puntos en el dado menos el número de caras resultantes. Determine (a) la distribución  $f$  para  $X$  y (b)  $E(X)$ .

4. **Cartas** Se seleccionan dos cartas de manera aleatoria, sucesivamente y sin reemplazo de un mazo estándar de 52, y se observa el número  $X$  de ases obtenidos. Determine (a) la distribución  $f$  para  $X$  y (b)  $E(X)$ .

5. **Juego de cartas** En un juego, un jugador paga \$0.25 por escoger al azar y con reemplazo, 2 cartas de un mazo estándar de 52. Por cada 10 que aparezca, el jugador recibe \$1. ¿Cuál es la ganancia o pérdida esperada del jugador? Dé su respuesta al centavo más cercano.

6. **Utilidades de una gasolinera** Una compañía petrolera determina que la probabilidad de que una gasolinera ubicada al margen de una carretera interestatal sea exitosa es 0.45. Una gasolinera que tiene éxito obtiene una utilidad anual de \$40 000; una gasolinera que fracasa pierde \$10 000 al año. ¿Cuál es la ganancia esperada para la compañía si abre una gasolinera al margen de una carretera interestatal?

7. **Computadoras ordenadas por correo** Una compañía que vende computadoras ordenadas por correo ofrece una garantía de 30 días de devolución del dinero, a cualquier cliente que no esté completamente satisfecho con su producto. La empresa obtiene una utilidad de \$200 por cada computadora vendida, pero incurre en una pérdida de \$100 por el embarque y manejo de cada unidad regresada. La probabilidad de que una unidad sea regresada es 0.08.

- (a) ¿Cuál es la ganancia esperada para cada unidad embarcada?  
 (b) Si el distribuidor embarca 400 unidades por año, ¿cuál es la utilidad anual esperada?

8. **Lotería** En un juego de lotería usted paga \$1.00 por elegir una combinación de números de entre 41 millones de combinaciones posibles. Si usted tiene la combinación ganadora, recibe \$15 millones. ¿Cuál es su ganancia (o pérdida) esperada cada vez que juega?

En los problemas 9 y 10, determine la distribución  $f$  para la variable aleatoria binomial  $X$  si el número de ensayos es  $n$  y la probabilidad de éxito en cualquier ensayo es  $p$ . También, encuentre  $\mu$  y  $\sigma$ .

9.  $n = 4$ ,  $p = 0.15$

10.  $n = 5$ ,  $p = \frac{1}{3}$

En los problemas 11 y 12, determine la probabilidad dada si  $X$  es una variable aleatoria binomial,  $n$  es el número de ensayos y  $p$  es la probabilidad de éxito en cualquier ensayo.

11.  $P(X \leq 1)$ ;  $n = 5$ ,  $p = \frac{3}{4}$

12.  $P(X > 2)$ ;  $n = 6$ ,  $p = \frac{2}{3}$

13. **Dado** Se lanza cuatro veces un dado balanceado. Encuentre la probabilidad de que exactamente tres de los lanzamientos resulten en un 2 o un 3.

14. **Éxito de siembra** La probabilidad de que cierto tipo de arbusto sobreviva después de sembrado es 0.9. Si se siembran cuatro arbustos, cuál es la probabilidad de que todos ellos mueran?

15. **Moneda** Se lanza una moneda sesgada cinco veces. La probabilidad de que ocurra una cara en cualquier lanzamiento es  $\frac{2}{5}$ . Encuentre la probabilidad de que al menos ocurrán dos caras.

16. **Caramelos** Una bolsa contiene dos caramelos rojos, tres verdes y cinco negros. Se seleccionan cinco caramelos de manera aleatoria, sucesivamente y con reemplazo. Encuentre la probabilidad de que al menos dos de los caramelos sean rojos.

En los problemas 17 y 18, se da una matriz de transición para una cadena de Markov. Determine los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

17. 
$$\begin{bmatrix} 0.1 & 2a & a \\ a & b & b \\ 0.6 & b & c \end{bmatrix} \quad 18. \begin{bmatrix} a & a & b \\ a & b & b \\ 0.2 & c & a \end{bmatrix}$$

En los problemas 19 y 20 se da una matriz de transición  $\mathbf{T}$  y un vector de estado inicial  $\mathbf{X}_0$  para una cadena de Markov. Calcule los vectores de estado  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$  y  $\mathbf{X}_3$ .

19.  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

20.  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

En los problemas 21 y 22 se da una matriz de transición  $\mathbf{T}$  para una cadena de Markov.

- (a) Calcule  $\mathbf{T}^2$  y  $\mathbf{T}^3$ .

- (b) ¿Cuál es la probabilidad de pasar al estado 1 a partir del estado 2 después de dos pasos?

- (c) ¿Cuál es la probabilidad de pasar al estado 2 a partir del estado 1 después de tres pasos?

21. 
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

22. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.5 \\ 1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

En los problemas 23 y 24, encuentre el vector de estado estable para la matriz de transición dada para una cadena de Markov.

23. 
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

24. 
$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

**25. Mercado automotriz** Para un segmento particular del mercado automotriz, los resultados de una encuesta indican que 80% de las personas que poseen un automóvil japonés comprarían uno de ese mismo país la próxima vez y 20% comprarían un automóvil que no fuera japonés. De los dueños de autos no japoneses, 40% comprarían un automóvil no japonés la siguiente vez y 60% comprarían un auto de dicho país.

- (a) De aquellos que en la actualidad poseen un automóvil japonés, ¿qué porcentaje comprará un automóvil japonés dentro de dos compras?
- (b) Si 60% de este segmento del mercado posee autos japoneses y 40% tiene automóviles no japoneses, ¿cuál será la distribución para este segmento del mercado dentro de dos compras de automóvil?

**26. Votación** Suponga que las probabilidades de votar por partidos particulares en una elección futura depende de los

patrones de votación en la elección previa. Para cierta región donde hay un sistema político con tres partidos, suponga que estas probabilidades están contenidas en la matriz

$$\mathbf{T} = [t_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

donde  $t_{ij}$  representa la probabilidad de que un elector vote por el partido  $i$  en la elección siguiente si votó por el partido  $j$  en la elección pasada.

- (a) En la elección pasada, 50% del electorado votó por el partido 1, 30% por el partido 2 y 20% por el partido 3. ¿Cuál es la distribución porcentual esperada de los votos para la siguiente elección?
- (b) A largo plazo, ¿cuál es la distribución porcentual de los votos? Dé sus respuestas al punto porcentual más cercano.

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Cadenas de Markov en la teoría de juegos

**L**a teoría de juegos es el estudio matemático de cómo se comportan las personas en situaciones competitivas y cooperativas. Cada situación se representa mediante una tabla que muestra las opciones para los jugadores y sus recompensas para diferentes resultados. En la figura 9.9 se muestra un famoso juego, llamado el Dilema del prisionero. Cada jugador elige entre “cooperar” y “desertar”. Las recompensas subsecuentes de los jugadores están en la celda a la derecha de la elección del jugador 1 y debajo de la elección del jugador 2. El jugador obtiene la recompensa que se encuentra en la esquina inferior izquierda de la celda, el jugador 2 obtiene el pago que está en la esquina superior derecha de la celda.

		Jugador 2	
		Cooperar	Desertar
Jugador 1	Cooperar	4	5
	Desertar	1	2

FIGURA 9.9 El Dilema del prisionero.

La mayoría de las personas que han estudiado el juego piensan que la opción racional para un jugador que trata de maximizar su recompensa es desertar —un movimiento que, si ambos jugadores lo hacen, conduce a una recompensa de 2 para cada uno. La paradoja es que ambos jugadores mejorarían (recompensa de 4) con la opción supuestamente irracional: cooperar. Se recomienda que el lector estudie el juego unos cuantos minutos y exprese lo que piensa al respecto.

El juego obtuvo su nombre de una fábula acerca de dos prisioneros, pero el mismo problema surge cuando dos per-

sonas acuerdan hacerse un favor una a la otra pero no tienen forma de vigilarse mutuamente. Las dos se benefician si ambas cooperan, pero cada una está tentada a engañar. A una escala más grande, las votaciones y el reciclaje voluntario de basura son comportamientos cooperativos en un Dilema del prisionero con muchos participantes, donde los jugadores son los miembros de una comunidad.

Los estudiosos de la teoría de juegos se han cuestionado por mucho tiempo sobre la aparente irracionalidad de cooperar. Para tratar de entender la forma en que esto podría tener sentido a pesar de todo, se han estudiado escenarios en los que el Dilema del prisionero no sólo se juega una vez, sino de manera repetida. En este Dilema del prisionero iterativo son posibles más de dos estrategias, porque el movimiento de un jugador en una ronda dada puede basarse en lo que pasó en la ronda previa.

Una estrategia muy discutida, llamada esto-por-eso, consiste en cooperar inicialmente y de ahí en adelante hacer cualquier cosa que haya hecho el otro jugador en la ronda anterior. Si el otro jugador desertó en la ronda  $n$ , la actitud esto-por-eso lo lleva al otro participante a desertar en la ronda  $n + 1$ ; si el otro jugador cooperó en la ronda  $n$ , la visión esto-por-eso lo hace cooperar en la ronda  $n + 1$ . Por supuesto, también existen las opciones de “siempre cooperar” y “siempre desertar”. Sin embargo, “esto-por-eso” ejemplifica una forma más sofisticada de pensar: el jugador está preparado para cooperar pero no está dispuesto a ser repetidamente explotado por las deserciones del otro participante.

La sucesión de rondas en el Dilema del prisionero iterativo es una cadena de Markov con cuatro estados, donde cada uno representa una combinación de las elecciones de los jugadores. Considere los siguientes estados: ambos jugadores cooperan = Estado 1; el jugador 1 coopera/el jugador 2 deserta = Estado 2; el jugador 1 deserta/el jugador 2 coopera = Estado 3; ambos jugadores desertan = Estado 4. Las transiciones entre estados están completamente determinadas por las estrategias de elección de los jugadores. Si ambos adoptan esto-por-eso, entonces el estado 1 conduce al estado 1, el estado 2 conduce al estado 3, el estado 3 conduce al estado 2, y el estado 4 conduce al estado 4. Tome un momento para convencerse de esto. La matriz de transición luce de la manera siguiente:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con esta matriz, el curso del juego depende de la elección con la que inicien los dos jugadores, que es crucial. Si en



un inicio el jugador 1 coopera y el jugador 2 deserta, entonces los vectores de estado sucesivos son los siguientes:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T}\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T}^2\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T}^3\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dots$$

Los jugadores oscilan de un lado a otro entre los estados 2 y 3. Por otra parte, los estados 1 y 4 son “trampas”: si dos jugadores de esto-por-eso cooperan al inicio, ambos cooperarán por siempre, pero si ambos comienzan por desertar, de ahí en adelante continuarán con ese patrón.

Es lamentable que dos jugadores de esto-por-eso, ambos dispuestos a cooperar, puedan quedarse encerrados en el ciclo de deserción. ¿Qué pasaría si se modifica un poco la estrategia esto-por-eso, de manera que ocasionalmente olvide la deserción y coopere en la siguiente ronda, como una especie de ofrecimiento de paz? Esto puede modelarse si se otorga a cada lado, digamos, un 10% de oportunidad de cooperar después de que el otro ha desertado. En ese caso, la matriz de transición sería la siguiente:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.01 \\ 2 & 0 & 0 & 0.9 & 0.09 \\ 3 & 0 & 0.9 & 0 & 0.09 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0.81 \end{bmatrix}$$

Si ambos desertan (estado 4), hay una probabilidad de  $0.9 \times 0.9 = 0.81$  de que los dos deserten en la siguiente ronda (estado 4 de nuevo), un  $0.9 \times 0.1 = 0.09$  de que el jugador coopere y el jugador 2 deserte (estado 2), y así sucesivamente. Asegúrese de entender cómo se obtienen las probabilidades en la matriz.

Ahora los jugadores de esto-por-eso pueden escapar del estado 4 y establecerse de manera permanente en el estado 1. ¿Cuánto tiempo pasará para que esto suceda? En principio, el juego podría estar en el estado 4 por un largo tiempo. Pero tarde o temprano, encontrará su camino hacia el estado 1. ¿Cuántas iteraciones son necesarias antes de que haya al menos 0.50 de probabilidad de que los jugadores se hayan con-

vertido a la cooperación mutua? Formalmente, si  $\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,

¿qué valor de  $n$  hace a la primera entrada del vector de estado  $\mathbf{X}_n = \mathbf{T}^n\mathbf{X}_0$  mayor o igual que 0.5? La respuesta es 12:

$$\mathbf{T}^{12}\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.5149 \\ 0.2027 \\ 0.2027 \\ 0.0798 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, si un juego entre jugadores de esto-por-eso modificado tiene 100 rondas, es muy probable que la mayoría de estas rondas tengan resultados cooperativos, incluso si el juego comenzó con una desconfianza mutua. En las simulaciones por computadora que involucran la interacción entre muchas estrategias diferentes, esto-por-eso surge generalmente como bastante rentable —más provechoso incluso que la estrategia de siempre desertar—. Resulta reconfortante descubrir que la cooperación, después de todo, no es tan irracional.

Para aprender más en Internet, visite un dispositivo de búsqueda e introduzca “Dilema del prisionero iterativo”.

## Problemas

1. Use una calculadora graficadora para modelar el juego entre dos jugadores de esto-por-eso modificado, donde uno inicie con cooperación y el otro con deserción. ¿Cuántas rondas se necesitan para lograr al menos un 0.50 de probabilidad de cooperación mutua?
2. Compruebe que  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  es el estado estable para un juego entre dos jugadores de esto-por-eso modificado.
3. Suponga que todos los estados son posibles en un inicio, pero al comenzar la segunda ronda, el jugador 2 adopta la estrategia de siempre desertar, siempre cooperar o la estrategia regular de esto-por-eso. ¿Cuál es la matriz de transición para cada uno de estos tres juegos, si el jugador 1 usa en todos los casos la estrategia esto-por-eso modificada?
4. Use los resultados del problema 3 para describir qué pasará a largo plazo con cada juego.

# 10

## LÍMITES Y CONTINUIDAD

10.1 Límites

10.2 Límites (continuación)

10.3 Continuidad

10.4 Continuidad aplicada  
a desigualdades

10.5 Repaso

### Aplicación práctica

Deuda nacional

**E**l filósofo Zenón de Elea era aficionado a las paradojas acerca del movimiento; la más famosa de ellas decía algo así: El guerrero Aquiles acepta competir en una carrera en contra de una tortuga. Aquiles puede correr 10 metros por segundo y la tortuga sólo 1 metro por segundo, por eso a la tortuga se le da una ventaja de 10 metros desde la línea de salida. Como Aquiles es mucho más rápido, aún así debería ganar. Pero para el momento en que él haya cubierto los primeros 10 metros y haya llegado al lugar en donde la tortuga inició, la tortuga ya habrá avanzado 1 metro y aún lleva la delantera. Y después de que Aquiles haya cubierto ese metro, la tortuga habrá avanzado 0.1 metro y aún llevaría la delantera. Y cuando Aquiles haya cubierto ese 0.1 metro, la tortuga habrá avanzado 0.01 metro y aún llevaría la delantera. Y así sucesivamente. Por lo tanto, Aquiles estaría cada vez más cerca de la tortuga pero nunca la alcanzaría.

Por supuesto que la audiencia de Zenón sabía que algo estaba mal en el argumento. La posición de Aquiles en el tiempo  $t$  después de haber iniciado la carrera es  $(10 \text{ m/s})t$ . La posición de la tortuga en el mismo tiempo  $t$  es  $(1 \text{ m/s})t + 10 \text{ m}$ . Cuando estas posiciones son iguales, Aquiles y la tortuga están lado a lado. Al despejar  $t$  de la ecuación resultante

$$(10 \text{ m/s})t = (1 \text{ m/s})t + 10 \text{ m}$$

se encuentra el tiempo en el cual Aquiles empareja a la tortuga.

La solución es  $t = 1\frac{1}{9}$  segundos, tiempo en el que Aquiles ha corrido  $(1\frac{1}{9}\text{s})(10 \text{ m/s}) = 11\frac{1}{9}$  metros.

Lo que desconcertaba a Zenón y a quienes lo escuchaban era cómo podría ser que

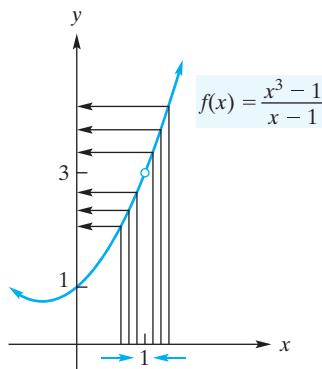
$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 11\frac{1}{9}$$

donde el lado izquierdo representa una *suma infinita* y el lado derecho es un resultado finito. La solución moderna a este problema consiste en el concepto de límite, que es el tema principal de este capítulo. El lado izquierdo de la ecuación es una serie geométrica infinita. Si se utiliza la notación de límite y la fórmula de la sección 5.4 para la suma de una serie geométrica, se escribe

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k 10^{1-n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{10 \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}\right)}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$$

**OBJETIVO**

Estudiar los límites y sus propiedades básicas.



**FIGURA 10.1**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$ .

## 10.1 Límites

Quizá usted ha estado en un estacionamiento en el que puede “aproximarse” al automóvil de enfrente, pero no quiere golpearlo, ni siquiera rozarlo. Esta noción de estar cada vez más cerca de algo, pero sin tocarlo, es muy importante en matemáticas, y está implícita en el concepto de *límite*, en el cual se sustentan los fundamentos del cálculo. Básicamente, se hará que una variable “se aproxime” a un valor particular y se examinará el efecto que tiene sobre los valores de la función.

Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Aunque esta función no está definida en  $x = 1$ , podría ser interesante observar el comportamiento de los valores de la función cuando  $x$  se acerca mucho a 1. En la tabla 10.1 se dan algunos valores de  $x$  que son un poco menores y otros un poco mayores que 1, y sus correspondientes valores funcionales. Observe que a medida que  $x$  toma valores más y más próximos a 1, sin importar si  $x$  se aproxima *por la izquierda* ( $x < 1$ ) o *por la derecha* ( $x > 1$ ), los valores correspondientes de  $f(x)$  se acercan cada vez más a un solo número, a saber, el 3. Esto también resulta claro en la gráfica de  $f$  en la figura 10.1. Observe que aunque la función no está definida en  $x = 1$  (como lo indica el pequeño círculo vacío), los valores de la función se acercan cada vez más a 3, conforme  $x$  se acerca más y más a 1. Para expresar esto, se dice que el **límite** de  $f(x)$  cuando  $x$  se approxima a 1 es 3 y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Se puede hacer  $f(x)$  tan cercana a 3 como se desee, y mantenerla así de cerca, al escoger un valor de  $x$  lo suficientemente cercano a 1, pero diferente de 1. El límite existe en 1, aunque 1 no se encuentre en el dominio de  $f$ .

**TABLA 10.1**

$x < 1$		$x > 1$	
$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
0.8	2.44	1.2	3.64
0.9	2.71	1.1	3.31
0.95	2.8525	1.05	3.1525
0.99	2.9701	1.01	3.0301
0.995	2.985025	1.005	3.015025
0.999	2.997001	1.001	3.003001

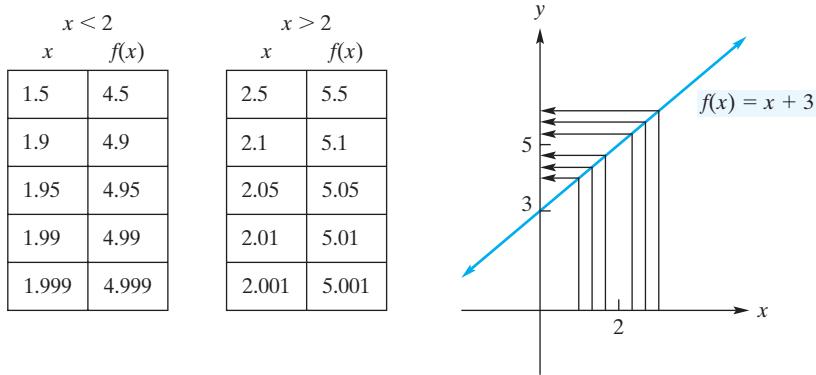
También puede considerarse el límite de una función cuando  $x$  se approxima a un número que está en el dominio. A continuación se examinará el límite de  $f(x) = x + 3$  cuando  $x$  se approxima a 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$$

Obviamente, si  $x$  está cerca a 2 (pero no es igual a 2), entonces  $x + 3$  es cercano a 5. Esto también resulta claro en la tabla y en la gráfica de la figura 10.2. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5$$

Dada una función  $f$  y un número  $a$ , *puede* haber dos formas de asociar un número con el par  $(f, a)$ . Una manera consiste en la *evaluación de  $f$  en  $a$* , a saber,  $f(a)$ . Ésta existe precisamente cuando  $a$  está en el dominio de  $f$ . Por ejemplo, si  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ , como en

FIGURA 10.2  $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5$ .

el primer ejemplo, entonces  $f(1)$  no existe. Otra forma de asociar un número con el par  $(f, a)$  es el *límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$* , el cual se denota por  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Se han dado dos ejemplos, a continuación se presenta el caso general.

### DEFINICIÓN

El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$ , es el número  $L$ , que se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

siempre que  $f(x)$  esté arbitrariamente cercana a  $L$  para toda  $x$  lo suficientemente cerca, pero diferente de  $a$ . Si no existe tal número, se dice que el límite *no existe*.

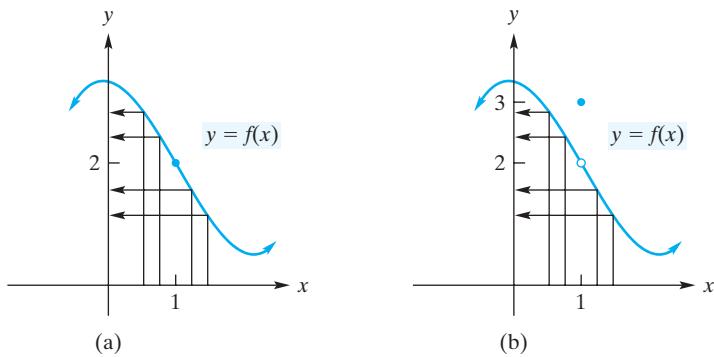
Debe enfatizarse que cuando es necesario encontrar un límite, no interesa lo que le pasa a  $f(x)$  cuando  $x$  es igual a  $a$ , sino sólo en lo que le sucede a  $f(x)$  cuando  $x$  es cercana a  $a$ . De hecho, aun cuando el valor  $f(a)$  existiera, la definición anterior lo elimina de manera explícita. En el segundo ejemplo,  $f(x) = x + 3$ , se tiene  $f(2) = 5$  y también  $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5$ , pero es muy posible tener una función  $f$  y un número  $a$  para los cuales existen tanto  $f(a)$  como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y son números diferentes. Además, un límite debe ser independiente de la manera en que  $x$  se aproxima a  $a$ . Esto es, el límite debe ser el mismo si  $x$  se acerca a  $a$  por la izquierda o por la derecha (para  $x < a$  o  $x > a$ , respectivamente).

### EJEMPLO 1 Estimación de un límite a partir de una gráfica

- a. Estime  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , donde la gráfica de  $f$  está dada en la figura 10.3(a).

**Solución:** Si se observan en la gráfica los valores de  $x$  cercanos a 1, se advierte que  $f(x)$  está cercana a 2. Además, cuando  $x$  se approxima cada vez más a 1, entonces  $f(x)$  parece estar cada vez más cercana a 2. Así, se estima que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ es } 2$$

FIGURA 10.3 Investigación de  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

- b. Estime  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , donde la gráfica de  $f$  está dada en la figura 10.3(b).

**Solución:** Aunque  $f(1) = 3$ , este hecho no tiene importancia sobre el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a 1. Se observa que cuando  $x$  se aproxima a 1, entonces  $f(x)$  parece aproximarse a 2. Por lo tanto, se estima que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ es } 2$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### LÍMITES QUE NO EXISTEN

Los cajeros utilizan a diario la función “mayor entero” que se denota como  $f(x) = \lfloor x \rfloor$  al dar cambio a los clientes. Esta función proporciona la cantidad de billetes para cada monto de cambio que se debe (por ejemplo, si a un cliente se le debe \$1.25 de cambio, recibiría \$1 en billete; por lo tanto  $\lfloor 1.25 \rfloor = 1$ ). Formalmente,  $\lfloor x \rfloor$  se define como el mayor entero que es menor o igual a  $x$ . Haga la gráfica de  $f$ , la cual algunas veces se denomina función escalonada, en su calculadora graficadora en el rectángulo de visualización estándar (esta función se encuentra en el menú de números y se denomina *integer part*). Explore esta gráfica con el uso del comando trace. Determine si existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

#### EJEMPLO 2 Límites que no existen

- a. Estime  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ , si existe, donde la gráfica de  $f$  está dada en la figura 10.4.

**Solución:** Cuando  $x$  tiende a  $-2$  por la izquierda ( $x < -2$ ), los valores de  $f(x)$  parecen más cercanos a 1. Pero cuando  $x$  tiende a  $-2$  por la derecha ( $x > -2$ ), entonces  $f(x)$  parece más cercana a 3. Por lo tanto, cuando  $x$  tiende a  $-2$ , los valores de la función no se acercan a un solo número. Se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ no existe}$$

Observe que el límite no existe aunque la función está definida en  $x = -2$ .

- b. Estime  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$  si existe.

**Solución:** Sea  $f(x) = 1/x^2$ . La tabla de la figura 10.5 proporciona los valores de  $f(x)$  para algunos valores de  $x$  cercanos a 0. Cuando  $x$  se acerca más y más a 0, los valores de  $f(x)$  se hacen cada vez más grandes sin cota alguna. Esto también es claro en la gráfica. Como los valores de  $f(x)$  no se acercan a un número cuando  $x$  se acerca a 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \text{ no existe}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

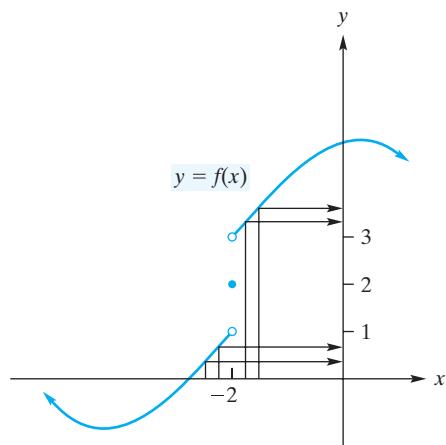
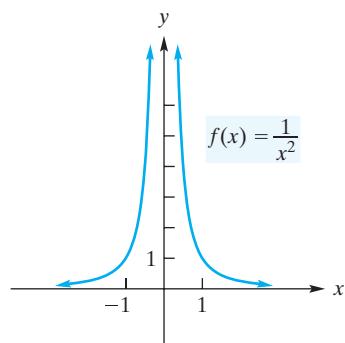


FIGURA 10.4  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  no existe.

$x$	$f(x)$
$\pm 1$	1
$\pm 0.5$	4
$\pm 0.1$	100
$\pm 0.01$	10 000
$\pm 0.001$	1 000 000

FIGURA 10.5  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$  no existe.



## TECNOLOGÍA

**Problema:** Estime  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  si

$$f(x) = \frac{x^3 + 2.1x^2 - 10.2x + 4}{x^2 + 2.5x - 9}$$

**Solución:** Un método para encontrar el límite consiste en construir una tabla de valores de la función  $f(x)$  cuando  $x$  es cercana a 2. De la figura 10.6, se estima que el límite es 1.57. De manera alternativa, puede estimarse el límite a partir de la gráfica de  $f$ . En la figura 10.7 se muestra la gráfica de  $f$  con la ventana estándar de  $[-10, 10] \times [-10, 10]$ . Primero se hacen varios acercamientos alrededor de  $x = 2$  y se obtiene lo que se muestra en la figura 10.8. Después de dar valores alrededor de  $x = 2$ , se estima que el límite es 1.57.

X	Y <sub>1</sub>
1.9	1.4688
1.99	1.5592
1.999	1.5682
1.9999	1.5681
2.01	1.5793
2.001	1.5702
2.0001	1.5693
X=2.0001	

FIGURA 10.6  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \approx 1.57$ .

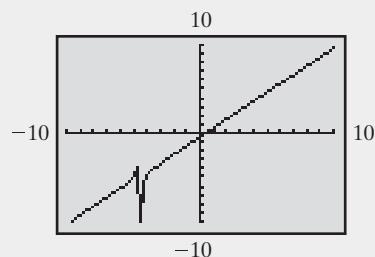


FIGURA 10.7 Gráfica de  $f(x)$  en la ventana estándar.

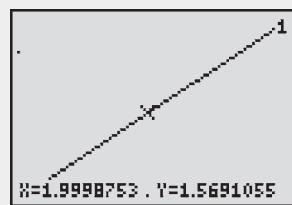


FIGURA 10.8 El acercamiento y trazado alrededor de  $x = 2$  proporciona  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \approx 1.57$ .

### Propiedades de los límites

Para determinar límites, no siempre hace falta calcular los valores de la función o hacer el bosquejo de una gráfica. Existen también varias propiedades que se pueden emplear. Las siguientes pueden parecerle razonables:

- Si  $f(x) = c$  es una función constante, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

- $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ , para cualquier entero positivo  $n$ .

### EJEMPLO 3 Aplicación de las propiedades 1 y 2 de los límites

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} 7 = 7$ ;  $\lim_{x \rightarrow -5} 7 = 7$

b.  $\lim_{x \rightarrow 6} x^2 = 6^2 = 36$

c.  $\lim_{t \rightarrow -2} t^4 = (-2)^4 = 16$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

Algunas otras propiedades de los límites son las siguientes:

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existen, entonces

3.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Esto es, el límite de una suma o diferencia es la suma o diferencia, respectivamente, de los límites.

4.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Esto es, el límite de un producto es el producto de los límites.

5.  $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , donde  $c$  es una constante

Esto es, el límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

#### APLICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

El volumen de helio en un globo esférico (en centímetros cúbicos), como una función del radio  $r$  en centímetros, está dado por  $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ .

Encuentre  $\lim_{r \rightarrow 1} V(r)$ .

#### EJEMPLO 4 Aplicación de las propiedades de los límites

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x \quad (\text{Propiedad 3})$   
 $= 2^2 + 2 = 6 \quad (\text{Propiedad 2})$

- b. La propiedad 3 puede aplicarse por extensión al límite de un número finito de sumas y diferencias. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow -1} (q^3 - q + 1) &= \lim_{q \rightarrow -1} q^3 - \lim_{q \rightarrow -1} q + \lim_{q \rightarrow -1} 1 \\ &= (-1)^3 - (-1) + 1 = 1 \end{aligned}$$

c.  $\lim_{x \rightarrow 2} [(x + 1)(x - 3)] = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) \quad (\text{Propiedad 4})$   
 $= [\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1] \cdot [\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 3]$   
 $= (2 + 1) \cdot (2 - 3) = 3(-1) = -3$

d.  $\lim_{x \rightarrow -2} 3x^3 = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow -2} x^3 \quad (\text{Propiedad 5})$   
 $= 3(-2)^3 = -24$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11



### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

#### LÍMITE DE UN POLINOMIO

La función de ingreso para cierto producto está dado por  $R(x) = 500x - 6x^2$ . Determine el  $\lim_{x \rightarrow 8} R(x)$ .

#### EJEMPLO 5 Límite de una función polinomial

Sea  $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$  una función polinomial. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0) \\ &= c_n \cdot \lim_{x \rightarrow a} x^n + c_{n-1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot \lim_{x \rightarrow a} x + \lim_{x \rightarrow a} c_0 \\ &= c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = f(a) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene la propiedad siguiente:

Si  $f$  es una función polinomial, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

En otras palabras, si  $f$  es un polinomio y  $a$  es cualquier número, entonces las dos formas de asociar un número con el par  $(f, a)$ , a saber, la evaluación y la formación del límite, existen y son iguales.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13



El resultado del ejemplo 5 permite encontrar muchos límites simplemente por evaluación. Por ejemplo, puede encontrarse

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x^3 + 4x^2 - 7)$$

al sustituir  $-3$  por  $x$ , porque  $x^3 + 4x^2 - 7$  es una función polinomial:

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x^3 + 4x^2 - 7) = (-3)^3 + 4(-3)^2 - 7 = 2$$

Del mismo modo,

$$\lim_{h \rightarrow 3} [2(h - 1)] = 2(3 - 1) = 4$$

Es necesario especificar que no se calculan los límites con sólo evaluar o “sustituir”, a menos que exista alguna regla que cubra la situación. Fue posible encontrar los dos límites anteriores por sustitución directa porque se tiene una regla que se aplica a límites de funciones polinomiales. Sin embargo, el uso indiscriminado de la sustitución puede conducir a resultados erróneos. Para ilustrarlo, en el ejemplo 1 (b) se tiene  $f(1) = 3$ , que no es el  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ; en el ejemplo 2(a),  $f(-2) = 2$ , que no es el  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ .

Las siguientes dos propiedades de límites tienen que ver con cocientes y raíces.

Si el  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y el  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existen, entonces

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

*Esto es, el límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre que el denominador no tenga un límite de 0.*

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad (\text{Vea la nota 1 al pie de página})$$



### ADVERTENCIA

Observe que en el ejemplo 6(a) el numerador y el denominador de la función son polinomios. En general, puede determinarse el límite de una función racional mediante evaluación, siempre que el denominador no sea 0 en  $a$ .

### EJEMPLO 6 Aplicación de las propiedades 6 y 7 de los límites

$$a. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^3 + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + x - 3)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 4)} = \frac{2 + 1 - 3}{1 + 4} = \frac{0}{5} = 0$$

$$b. \quad \lim_{t \rightarrow 4} \sqrt{t^2 + 1} = \sqrt{\lim_{t \rightarrow 4} (t^2 + 1)} = \sqrt{17}$$

$$c. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{x^2 + 7} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 7)} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



### Límites y manipulación algebraica

Ahora se considerarán límites para los cuales las propiedades de los límites no aplican, y que no pueden determinarse mediante evaluación. Un resultado fundamental es el siguiente:



### ADVERTENCIA

La condición para la igualdad de los límites no excluye la posibilidad de que  $f(a) = g(a)$ . La condición sólo concierne a  $x \neq a$ .

Si  $f$  y  $g$  son dos funciones para las cuales  $f(x) = g(x)$ , para toda  $x \neq a$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

(lo que significa que si alguno de los límites existe, entonces el otro también existe y son iguales).

El resultado surge directamente de la definición de límite, puesto que el valor de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  depende sólo de los valores de  $f(x)$  para  $x$  que están muy cerca de  $a$ . De nuevo: la evaluación de  $f$  en  $a$ ,  $f(a)$ , o su no existencia, es irrelevante en la determi-

<sup>1</sup>Si  $n$  es par, se requiere que el  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  sea positivo.

nación de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a menos que se tenga una regla específica que sea aplicable, como en el caso donde  $f$  es un polinomio.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

##### APLICACIÓN DE UNA PROPIEDAD DE LOS LÍMITES

La tasa de cambio de la productividad  $p$  (en número de unidades producidas por hora) aumenta con el tiempo de trabajo de acuerdo con la función

$$p(t) = \frac{50(t^2 + 4t)}{t^2 + 3t + 20}$$

Encuentre el  $\lim_{t \rightarrow 2} p(t)$ .

#### EJEMPLO 7 Determinación de un límite

Determine  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ .

**Solución:** Cuando  $x \rightarrow -1$ , tanto el numerador como el denominador se aproximan a cero. Debido a que el límite del denominador es 0, no es posible utilizar la propiedad 6. Sin embargo, lo que le sucede al cociente cuando  $x$  es igual a  $-1$  no tiene interés, puede suponerse que  $x \neq -1$  y simplificar la fracción:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1 \quad \text{para } x \neq -1$$

Esta manipulación algebraica (factorización y cancelación) de la función original  $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$  da lugar a una nueva función  $x - 1$ , que es igual a la función original para  $x \neq -1$ . Por lo tanto, es aplicable el resultado fundamental mostrado en la página anterior y se tiene

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -1 - 1 = -2$$

Observe que, aunque la función original no está definida en  $-1$ , tiene un límite cuando  $x \rightarrow -1$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

En tanto  $f(x)$  como  $g(x)$  se aproximen a 0 cuando  $x \rightarrow a$ , entonces se dice que el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene la forma 0/0. De manera similar, se habla de la forma  $k/0$ , para  $k \neq 0$  si  $f(x)$  se aproxima a  $k \neq 0$  a medida que  $x \rightarrow a$  pero  $g(x)$  se aproxima a 0 cuando  $x \rightarrow a$ .

En el ejemplo 7, el método para encontrar un límite mediante evaluación no funciona. Al reemplazar  $x$  por  $-1$  se obtiene 0/0, lo cual carece de significado. Cuando surge la forma indeterminada 0/0, la operación algebraica (como en el ejemplo 7) puede resultar en una función que concuerde con la función original, excepto en el valor limitante. En el ejemplo 7, la nueva función,  $x - 1$ , es un polinomio y su límite puede determinarse mediante sustitución.

Al inicio de esta sección, se encontró que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

por inspección de una tabla de valores de la función  $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$ , y también después de considerar la gráfica de  $f$ . Este límite tiene la forma 0/0. Ahora el límite se determinará mediante la técnica descrita en el ejemplo 7.



#### ADVERTENCIA

Con frecuencia existe confusión acerca de cuál es el principio que se usa en este ejemplo y en el ejemplo 7. Éste es:

Si  $f(x) = g(x)$  para  $x \neq a$ ,

entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

#### EJEMPLO 8 Forma 0/0

Encuentre  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ .

**Solución:** Cuando  $x \rightarrow 1$ , tanto el numerador como el denominador se aproximan a 0. De esta manera, se tratará de expresar el cociente en una forma diferente para  $x \neq 1$ . Al factorizar se tiene

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} = x^2 + x + 1 \quad \text{para } x \neq 1$$

(Alternativamente, la división larga daría el mismo resultado.) Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

como se mostró antes.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5

## FORMA 0/0

La longitud de un material aumenta cuando se calienta, de acuerdo con la ecuación  $l = 125 + 2x$ . La tasa a la cual se incrementa la longitud está dada por

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{125 + 2(x + h) - (125 + 2x)}{h}$$

Calcule este límite.

## EJEMPLO 9 Forma 0/0

Si  $f(x) = x^2 + 1$ , encuentre  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ .

## Solución:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x + h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h}$$

Aquí se trata a  $x$  como una constante porque  $h$ , no  $x$ , cambia. Cuando  $h \rightarrow 0$ , tanto el numerador como el denominador se aproximan a 0. Por lo tanto, se tratará de expresar el cociente en forma tal que  $h \neq 0$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x + h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x^2 + 2xh + h^2 + 1] - x^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

*Nota:* En la cuarta igualdad anterior,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h)$ , se usa el resultado fundamental. Cuando  $\frac{h(2x + h)}{h}$  y  $2x + h$  se consideran como *funciones* de  $h$ , se ven como iguales, para toda  $h \neq 0$ . Se sigue que sus límites son iguales cuando  $h$  se approxima a 0.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35



## Un límite especial

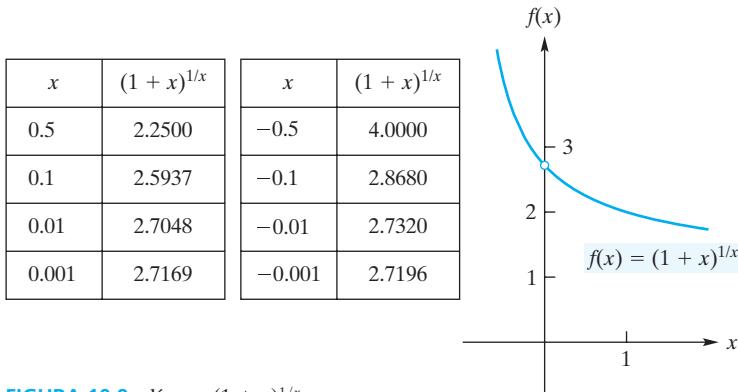
Se concluye esta sección con una nota concerniente a uno de los límites más importantes, a saber

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$$

En la figura 10.9 se muestra la gráfica de  $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ . Aunque  $f(0)$  no existe, cuando  $x \rightarrow 0$  resulta claro que el límite de  $(1 + x)^{1/x}$  sí existe. Es aproximadamente 2.71828, y se denota por la letra  $e$ . Ésta, como recordará, es la base del sistema de los logaritmos naturales. El límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

en realidad puede considerarse como la definición de  $e$ . Puede mostrarse que esto concuerda con la definición de  $e$  que se dio en la sección 4.1.

FIGURA 10.9  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$ .

## Problemas 10.1

En los problemas 1 a 4, utilice la gráfica de  $f$  para estimar cada límite, si existe.

- \*1. La gráfica de  $f$  aparece en la figura 10.10.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

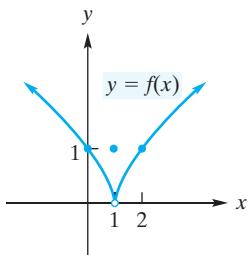


FIGURA 10.10 Diagrama para el problema 1.

2. La gráfica de  $f$  aparece en la figura 10.11.

(a)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

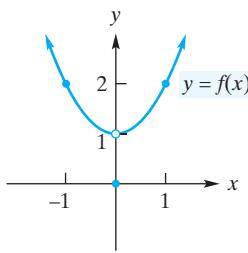


FIGURA 10.11 Diagrama para el problema 2.

- \*3. La gráfica de  $f$  aparece en la figura 10.12.

(a)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

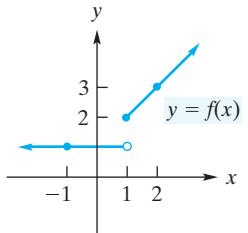


FIGURA 10.12 Diagrama para el problema 3.

4. La gráfica de  $f$  aparece en la figura 10.13.

(a)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  (c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

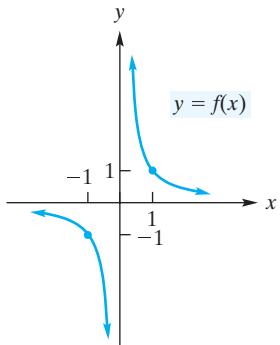


FIGURA 10.13 Diagrama para el problema 4.

En los problemas 5 a 8, utilice su calculadora para completar la tabla, y use los resultados para estimar el límite dado.

5.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 1}$

$x$	-0.9	-0.99	-0.999	-1.001	-1.01	-1.1
$f(x)$						

6.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

$x$	-3.1	-3.01	-3.001	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$						

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

$x$	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

8.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$

$h$	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

Encuentre los límites en los problemas 9 a 34.

\*9.  $\lim_{x \rightarrow 2} 16$

10.  $\lim_{x \rightarrow 3} 2x$

\*11.  $\lim_{t \rightarrow -5} (t^2 - 5)$

12.  $\lim_{t \rightarrow 1/3} (5t - 7)$

\*13.  $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^3 - 4x^2 + 2x - 3)$

14.  $\lim_{r \rightarrow 9} \frac{4r - 3}{11}$

\*15.  $\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t - 2}{t + 5}$

16.  $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 6}{x - 6}$

17.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h^2 - 7h + 1}$

18.  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - 5z - 4}{z^2 + 1}$

19.  $\lim_{p \rightarrow 4} \sqrt{p^2 + p + 5}$

20.  $\lim_{y \rightarrow 15} \sqrt{y + 3}$

\*21.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$

22.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x + 1}$

\*23.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

24.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + 3t^2}{t^3 - 4t^2}$

25.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

26.  $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 4}{t - 2}$

27.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

28.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$

29.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 3x - 4}$

30.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 81}{x^2 + 8x + 15}$

31.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 + 5x - 14}$

32.  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 5x + 4}$

33.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^2 - 2^2}{h}$

34.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 2)^2 - 4}{x}$

\*35. Encuentre  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$  trate a  $x$  como una constante.

36. Encuentre  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x + h) + 7(x + h) - 3x^2 - 7x}{h}$  trate a  $x$  como una constante.

En los problemas 37 a 42, encuentre  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ .

37.  $f(x) = 7 - 3x$

38.  $f(x) = 2x + 3$

39.  $f(x) = x^2 - 3$

40.  $f(x) = x^2 + x + 1$

41.  $f(x) = x^3 - 4x^2$

42.  $f(x) = 3 - x + 4x^2$

43. Encuentre  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$ . (Una pista: Primero racionalice el numerador al multiplicar el numerador y el denominador por  $\sqrt{x-2}+2$ ).

44. Encuentre la constante  $c$  tal que  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x+c}{x^2-5x+6}$  exista. Para ese valor de  $c$ , determine el límite. (Una pista: Encuentre el valor de  $c$  para el cual  $x-3$  es un factor del numerador).

45. **Planta de energía** La eficiencia teórica máxima de una planta de energía está dada por

$$E = \frac{T_h - T_c}{T_h}$$

donde  $T_h$  y  $T_c$  son las temperaturas absolutas respectivas del depósito más caliente y del más frío. Encuentre (a)  $\lim_{T_c \rightarrow 0} E$  y (b)  $\lim_{T_c \rightarrow T_h} E$ .

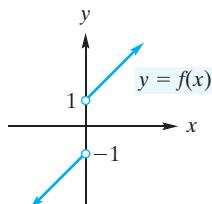
46. **Satélite** Cuando un satélite de 3200 libras gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio  $r$  pies, la energía total mecánica  $E$  del sistema Tierra-satélite está dada por

$$E = -\frac{7.0 \times 10^{17}}{r} \text{ pie-lb}$$

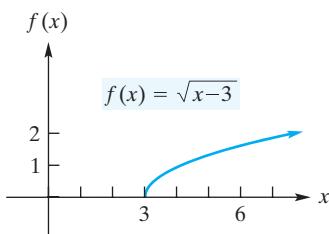
Encuentre el límite de  $E$  cuando  $r \rightarrow 7.5 \times 10^7$  pies.

## OBJETIVO

Estudiar los límites laterales, límites infinitos y límites al infinito.



**FIGURA 10.14** El  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe.



**FIGURA 10.15**  
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} = 0$ .

## 10.2 Límites (continuación)

### Límites laterales

En la figura 10.14 se muestra la gráfica de un función  $f$ . Observe que  $f(x)$  no está definida cuando  $x = 0$ . Cuando  $x$  tiende a 0 por la derecha,  $f(x)$  se aproxima a 1. Esto se escribe como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

Por otra parte, cuando  $x$  tiende a 0 por la izquierda,  $f(x)$  se aproxima a -1 y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

Los límites de este tipo se conocen como **límites unilaterales**. Como se mencionó en la sección anterior, el límite de una función como  $x \rightarrow a$  es independiente del modo en que  $x$  se approxima a  $a$ . Por lo tanto, el límite existirá si y sólo si ambos límites existen y son iguales. Entonces se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe}$$

Otro ejemplo de un límite unilateral, considere  $f(x) = \sqrt{x-3}$  cuando  $x$  tiende a 3. Como  $f$  está definida cuando  $x \geq 3$ , puede hablarse del límite cuando  $x$  tiende a 3 por la derecha. Si  $x$  es un poco mayor que 3, entonces  $x-3$  es un número positivo cercano a 0 y de este modo  $\sqrt{x-3}$  es cercano a 0. Se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} = 0$$

Este límite también es evidente si se observa la figura 10.15.

### Límites infinitos

En la sección anterior se consideraron límites de la forma  $0/0$ ; esto es, límites en los que el numerador y el denominador se aproximan a 0. Ahora se examinarán límites en los cuales el denominador se aproxima a 0, pero el numerador tiende a un número diferente de 0. Por ejemplo, considere

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

En los problemas 47 a 50, utilice una calculadora graficadora para graficar las funciones y luego estime los límites. Redondee sus respuestas a dos decimales.

47.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + x^3 - 24}{x^2 - 4}$

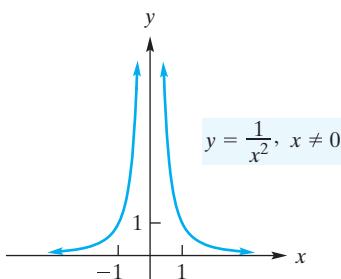
48.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

49.  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 10\sqrt{x} + 21}{3 - \sqrt{x}}$

50.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}$

51. **Purificación de agua** El costo de purificar agua está dado por  $C = \frac{50,000}{p} - 6500$  donde  $p$  es el porcentaje de impurezas que quedan después de la purificación. Grafique esta función en su calculadora graficadora, y determine  $\lim_{p \rightarrow 0} C$ . Analice el significado de dicho límite.

52. **Función de utilidad** La función de utilidad para un cierto negocio está dada por  $P(x) = 224x - 3.1x^2 - 800$ . Grafique esta función en su calculadora graficadora, y use la función de evaluación para determinar  $\lim_{x \rightarrow 53.2} P(x)$ , utilice la regla sobre el límite de una función polinomial.



$x$	$f(x)$
$\pm 1$	1
$\pm 0.5$	4
$\pm 0.1$	100
$\pm 0.01$	10 000
$\pm 0.001$	1 000 000

FIGURA 10.16  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ .

Aquí, cuando  $x$  tiende a 0, el denominador tiende a 0 y el numerador tiende a 1. A continuación se investigará el comportamiento de  $f(x) = 1/x^2$  cuando  $x$  es cercano a 0. El número  $x^2$  es positivo y también cercano a 0. Por lo tanto, al dividir 1 entre tal número da como resultado un número muy grande. De hecho, entre más cercana a 0 esté  $x$ , mayor es el valor de  $f(x)$ . Por ejemplo, vea la tabla de valores en la figura 10.16, la cual también muestra la gráfica de  $f$ . Es claro que cuando  $x \rightarrow 0$  tanto por la izquierda como por la derecha,  $f(x)$  aumenta indefinidamente. De aquí que no exista el límite en 0. Se dice que cuando  $x \rightarrow 0$ ,  $f(x)$  se vuelve infinito positivamente, y en forma simbólica se expresa este “límite infinito” al escribir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no existe, puede que la razón no sea que los valores de  $f(x)$  se vuelvan arbitrariamente grandes cuando  $x$  se acerca a  $a$ . Por ejemplo, vea de nuevo la situación del ejemplo 2 de la sección 10.1. Aquí se tiene

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ no existe, pero } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq \infty$$

Ahora considere la gráfica de  $y = f(x) = 1/x$  para  $x \neq 0$ . (Vea la figura 10.17). Cuando  $x$  se aproxima a 0 por la derecha,  $1/x$  se hace infinito positivo; cuando  $x$  se aproxima a 0 por la izquierda,  $1/x$  tiende a infinito negativo. En forma simbólica estos límites infinitos se escriben

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



### ADVERTENCIA

El uso del signo “igual” en esta situación no significa que el límite exista; por el contrario, el símbolo ( $\infty$ ) aquí es una manera de especificar que no hay límite, e indica por qué no existe.

$x$	$f(x)$
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10 000
-0.01	-100
-0.001	-1000
-0.0001	-10 000

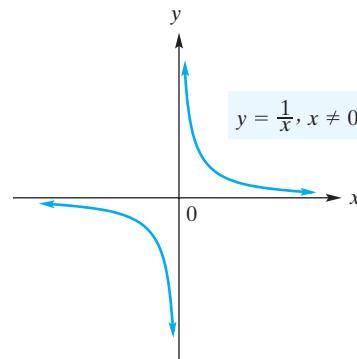


FIGURA 10.17  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  no existe.

Cualquiera de estos dos hechos implican que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ no existe}$$

### EJEMPLO 1 Límites infinitos

Encuentre el límite (si existe).

a.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x+1}$

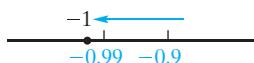


FIGURA 10.18  $x \rightarrow -1^+$ .

**Solución:** Cuando  $x$  tiende a  $-1$  por la derecha (piense en valores de  $x$  como  $-0.9$ ,  $-0.99$ , y así sucesivamente, como se muestra en la figura 10.18),  $x + 1$  tiende a 0 pero siempre es positivo. Como se divide 2 entre números positivos que se aproximan a 0, los resultados,  $2/(x + 1)$  son números positivos que se vuelven arbitrariamente grandes. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x+1} = \infty$$

y el límite no existe. Por un análisis similar, usted debe ser capaz de demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x+1} = -\infty$$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2 - 4}$

**Solución:** Cuando  $x \rightarrow 2$ , el numerador tiende a 4 y el denominador se aproxima a 0. Por lo tanto, se dividen números cercanos a 4 entre números cercanos a 0. Los resultados son números que se vuelven arbitrariamente grandes en magnitud. En esta fase puede escribirse

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2 - 4} \text{ no existe}$$

Sin embargo, se evaluará si es posible utilizar el símbolo  $\infty$  o  $-\infty$  para ser más específicos acerca del “no existe”. Observe que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2 - 4} \text{ no es } \infty \text{ ni } -\infty.$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31



En el ejemplo 1 se consideraron límites de la forma  $k/0$  donde  $k \neq 0$ . Es importante que distinga la forma  $k/0$  de la forma  $0/0$ , que se estudió en la sección 10.1. Las dos se manejan de una manera muy diferente.

### EJEMPLO 2 Determinación de un límite

Encuentre  $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t-2}{t^2 - 4}$ .

**Solución:** Cuando  $t \rightarrow 2$ , tanto el numerador como el denominador, tienden a 0 (forma  $0/0$ ). Así, primero se simplifica la fracción, como se hizo en la sección 10.1, y luego se toma el límite:

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t-2}{t^2 - 4} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t-2}{(t+2)(t-2)} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{1}{t+2} = \frac{1}{4}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37



### Límites al infinito

Ahora se examina la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Usted debe ser capaz de obtener

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$  sin la ayuda de una gráfica o de una tabla. Al dividir 1 entre un número positivo grande se obtiene como resultado un positivo pequeño, y cuando el divisor se hace arbitrariamente grande, los cocientes se vuelven arbitrariamente pequeños. Un argumento similar puede hacerse para el límite cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

cuando  $x$  se vuelve infinito, primero en sentido positivo y después en sentido negativo. En la tabla 10.2 puede verse que cuando  $x$  aumenta indefinidamente al tomar valores positivos, los valores de  $f(x)$  se aproximan a 0. De la misma manera, cuando  $x$  disminuye indefinidamente al tomar valores negativos, los valores de  $f(x)$  se aproximan a 0. Estas observaciones son claras al ver la gráfica de la figura 10.17. Allí, cuando usted se mueve a la derecha sobre la curva y toma valores positivos de  $x$ , los correspondientes valores de  $y$  se aproximan a 0. De manera similar, cuando se mueve hacia la izquierda a lo lar-

**TABLA 10.2** Comportamiento de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
1000	0.001	-1000	-0.001
10 000	0.0001	-10 000	-0.0001
100 000	0.00001	-100 000	-0.00001
1 000 000	0.000001	-1 000 000	-0.000001

go de la curva a través de valores negativos de  $x$ , los correspondientes valores de  $y$  se aproximan a 0. En forma simbólica, se escribe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Estos límites se conocen como *límites al infinito*.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### LÍMITES AL INFINITO

La función de demanda para cierto producto está dada por  $p(x) = \frac{10000}{(x+1)^2}$ , donde  $p$  es el precio en dólares y  $x$  es la cantidad vendida. Grafique esta función en su calculadora graficadora en la ventana  $[0, 10] \times [0, 10000]$ . Utilice la función Trace para encontrar  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)$ . Determine lo que le sucede a la gráfica y lo que esto significa con respecto a la función de demanda.

#### EJEMPLO 3 Límites al infinito

Encuentre el límite (si existe).

a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(x-5)^3}$

**Solución:** Cuando  $x$  se vuelve muy grande, también se incrementa  $x-5$ . Como el cubo de un número grande también es grande,  $(x-5)^3 \rightarrow \infty$ . Al dividir 4 entre números muy grandes se tiene como resultado números cercanos a 0. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(x-5)^3} = 0$$

b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4-x}$

**Solución:** Cuando  $x$  se hace cada vez más negativa,  $4-x$  tiende a infinito positivo. Debido a que la raíz cuadrada de números grandes son números grandes, se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4-x} = \infty$$



En el siguiente análisis se necesitará un cierto límite, a saber,  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^p$  donde  $p > 0$ . Conforme  $x$  se vuelve muy grande, también se incrementa  $x^p$ . Al dividir 1 entre números grandes se tiene como resultado números cercanos a 0. Así  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^p = 0$ . En general,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

donde  $p > 0$ .<sup>2</sup> Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/3}} = 0$$

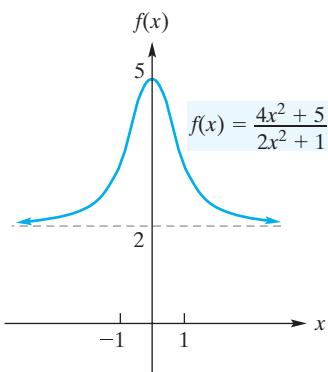
Ahora se encontrará el límite de la función racional

$$f(x) = \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1}$$

cuando  $x \rightarrow \infty$ . (Recuerde que se mencionó en la sección 2.2 que una función racional es un cociente de polinomios). A medida que  $x$  se vuelve cada vez más grande, *ambos*, numerador y denominador de  $f(x)$ , tienden a infinito. Sin embargo, la forma del cociente puede modificarse de modo que se pueda sacar una conclusión de si tiene o no límite. Para hacer esto, se divide el numerador y el denominador entre la mayor potencia de  $x$  que aparezca en el denominador. En este caso es  $x^2$ . Esto da

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2 + 5}{x^2}}{\frac{2x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 4 + 5 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Para  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^p$ , se supone que  $p$  es tal que  $1/x^p$  está definida para  $x < 0$ .



**FIGURA 10.19**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$   
y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^p = 0$  para  $p > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} = \frac{4 + 5(0)}{2 + 0} = \frac{4}{2} = 2$$

De manera similar, el límite cuando  $x \rightarrow -\infty$  es 2. Estos límites son claros si se observa la gráfica de  $f$  en la figura 10.19.

Para la función anterior, hay una manera más sencilla de encontrar el  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Para valores *grandes* de  $x$ , el término que incluye la potencia más grande de  $x$  en el numerador, a saber  $4x^2$ , domina la suma  $4x^2 + 5$ , y el término dominante en el denominador,  $2x^2 + 1$ , es  $2x^2$ . Por lo tanto, cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x)$  puede aproximarse como  $(4x^2)/(2x^2)$ . Como resultado, para determinar el límite de  $f(x)$ , basta determinar el límite de  $(4x^2)/(2x^2)$ . Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$$

como se vio antes. En general, se tiene la regla siguiente:

### Límites al infinito de funciones racionales

Si  $f(x)$  es una *función racional* y  $a_n x^n$  y  $b_m x^m$  son los términos en el numerador y denominador, respectivamente, con las mayores potencias de  $x$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Ahora se aplicará esta regla a la situación donde el grado del numerador es mayor que el del denominador. Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x}{5 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^3\right) = \infty$$

(Observe que en el último paso, cuando  $x$  se vuelve muy negativa, también lo hace  $x^3$ , además,  $-\frac{1}{2}$  por un número muy negativo resulta ser muy positivo.) De manera similar,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x}{5 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}x^3\right) = -\infty$$

De esta ilustración se llega a la conclusión siguiente:

Si el grado del numerador de una *función racional* es mayor que el del denominador, entonces la función no tiene límite cuando  $x \rightarrow \infty$  y no tiene límite cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

#### LÍMITES AL INFINITO PARA FUNCIONES RACIONALES

Los montos anuales de ventas  $y$  de cierta compañía (en miles de dólares) están relacionados con la cantidad de dinero que gasta en publicidad,  $x$  (en miles de dólares), de acuerdo con la ecuación  $y(x) = \frac{500x}{x + 20}$ . Grafique esta función en su calculadora graficadora en la ventana  $[0, 1000] \times [0, 550]$ . Utilice Trace para explorar  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ , y determine qué significa esto para la empresa.

### EJEMPLO 4 Límites al infinito de funciones racionales

Encuentra el límite (si existe).

a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{7 - 2x + 8x^2}$

**Solución:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{7 - 2x + 8x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{8x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(3x - 1)^2}$

**Solución:** 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(3x - 1)^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{9x^2 - 6x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{9x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{9}(0) = 0 \end{aligned}$$

c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x^4}{x^4 - x^3 + 2}$

**Solución:** Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, no existe el límite. Con mayor precisión,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x^4}{x^4 - x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21



### ADVERTENCIA

La técnica anterior sólo se aplica a límites al infinito de funciones racionales.

Para encontrar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{7 - 2x + 8x^2}$ , no se puede simplemente determinar el límite de  $\frac{x^2}{8x^2}$ . Esta simplificación se aplica sencillamente en el caso  $x \rightarrow \infty$  o  $x \rightarrow -\infty$ . En lugar de eso, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{7 - 2x + 8x^2} = \frac{0 - 1}{7 - 0 + 0} = -\frac{1}{7}$$

Ahora se considera el límite de la función polinomial  $f(x) = 8x^2 - 2x$  cuando  $x \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (8x^2 - 2x)$$

Debido a que un polinomio es una función racional con denominador 1, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (8x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 2x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} 8x^2$$

Es decir, el límite de  $8x^2 - 2x$  cuando  $x \rightarrow \infty$  es el mismo que el límite del término que incluye a la mayor potencia de  $x$ , a saber,  $8x^2$ . Cuando  $x$  se vuelve muy grande, también se incrementa  $8x^2$ . Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (8x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 8x^2 = \infty$$

En general, se tiene lo siguiente:

Cuando  $x \rightarrow \infty$  (o  $x \rightarrow -\infty$ ), el límite de una *función polinomial* es el mismo que el de su término que involucra la mayor potencia de  $x$ .

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

#### LÍMITES AL INFINITO PARA FUNCIONES POLINOMIALES

El costo  $C$  de producir  $x$  unidades de cierto producto está dado por  $C(x) = 50\,000 + 200x + 0.3x^2$ . Utilice su calculadora graficadora para explorar  $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x)$  y determine lo que esto significa.

No utilice los términos dominantes cuando una función no es racional.

#### EJEMPLO 5 Límites al infinito para funciones polinomiales

- a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$ . Si  $x$  se vuelve muy negativa, también  $x^3$ . Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

- b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 9x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = \infty$ , porque  $-2$  por un número muy negativo es un número positivo muy grande.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

La técnica de enfocarse en los términos dominantes para encontrar los límites cuando  $x \rightarrow \infty$  o  $x \rightarrow -\infty$  es válida para *funciones racionales*, pero no es necesariamente válida para otros tipos de funciones. Por ejemplo, considere

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \quad (1)$$

Observe que  $\sqrt{x^2 + x} - x$  no es una función racional. Es *incorrecto* inferir que como  $x^2$  domina en  $x^2 + x$ , el límite en (1) es el mismo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Puede demostrarse (vea el problema 62) que el límite en (1) no es 0, sino  $\frac{1}{2}$ .

Las ideas presentadas en esta sección se aplicarán ahora a una función definida por partes.

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

## LÍMITES PARA UNA FUNCIÓN DEFINIDA POR PARTES

Un plomero cobra \$100 por la primera hora de trabajo a domicilio y \$75 por cada hora (o fracción) posterior. La función de lo que le cuesta una visita de  $x$  horas es

$$f(x) = \begin{cases} \$100 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \$175 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \$250 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ \$325 & \text{si } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

Encuentre  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 2.5} f(x)$ .

## EJEMPLO 6 Límites para una función definida por partes

Si  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 3 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ , encuentre el límite (si existe).

a.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

**Solución:** Aquí  $x$  se acerca a 1 por la derecha. Para  $x > 1$ , se tiene  $f(x) = x^2 + 1$ . Por lo que,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1)$$

Si  $x$  es mayor que 1, pero cercano a 1, entonces  $x^2 + 1$  se acerca a 2. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 2$$

b.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

**Solución:** Aquí  $x$  se acerca a 1 por la izquierda. Para  $x < 1$ ,  $f(x) = 3$ . De aquí que,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 = 3$$

c.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

**Solución:** Se quiere encontrar el límite cuando  $x$  se aproxima a 1. Sin embargo, de la regla de la función dependerá si  $x \geq 1$  o  $x < 1$ . Así, deben considerarse los límites unilaterales. El límite cuando  $x$  se aproxima a 1 existirá si y sólo si ambos límites unilaterales existen y son iguales. De los incisos (a) y (b),

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{porque } 2 \neq 3$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{no existe}$$

d.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

**Solución:** Para valores muy grandes de  $x$ , se tiene  $x \geq 1$ , de modo que  $f(x) = x^2 + 1$ . Así,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$$

e.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Solución:** Para valores muy negativos de  $x$ , se tiene  $x < 1$ , de modo que  $f(x) = 3$ . Por lo que,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 3$$

Todos los límites de las partes de la (a) a la (c) deben quedar claros a partir de la gráfica de  $f$  en la figura 10.20.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 57

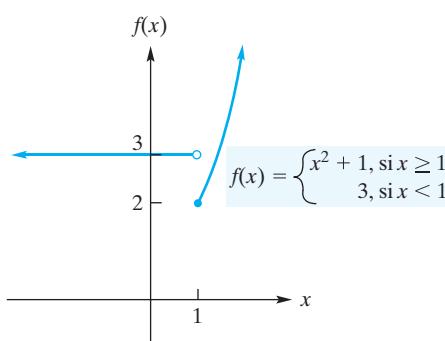


FIGURA 10.20 Gráfica de la función definida por partes.

## Problemas 10.2

1. Para la función  $f$  dada en la figura 10.21, encuentre los límites siguientes. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo  $\infty$  o  $-\infty$  donde sea apropiado.

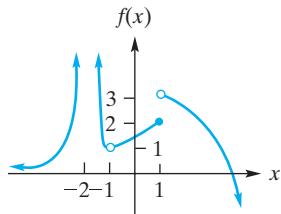


FIGURA 10.21 Diagrama para el problema 1.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$   
 (e)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$   
 (f)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$   
 (g)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$   
 (h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$   
 (i)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$   
 (j)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$   
 (k)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
2. Para la función  $f$  dada en la figura 10.22, encuentre los límites siguientes. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo  $\infty$  o  $-\infty$  donde sea apropiado.

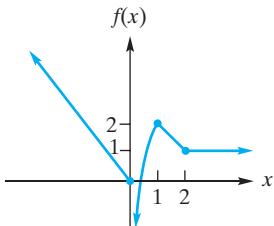


FIGURA 10.22 Diagrama para el problema 2.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$   
 (e)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$   
 (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$   
 (g)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

En los problemas 3 a 54, encuentre el límite. Si no existe, especifique o utilice el símbolo  $\infty$  o  $-\infty$  donde sea apropiado.

3.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2)$   
 4.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1 - x^2)$   
 5.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x$   
 6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 19$   
 7.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6x}{x^4}$   
 8.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7}{x - 1}$   
 \*9.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$   
 10.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (t - 1)^3$   
 11.  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{h}$   
 12.  $\lim_{h \rightarrow 5^-} \sqrt{5 - h}$   
 13.  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-3}{x + 2}$   
 14.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{1/2}$   
 15.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (4\sqrt{x - 1})$   
 16.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x\sqrt{x^2 - 4})$

17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + 10}$   
 18.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - 10x}$   
 19.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x}}$   
 \*21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 8}{x - 3}$   
 23.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 4x - 3}$   
 25.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t^3 + 2t^2 + 9t - 1}{5t^2 - 5}$   
 27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{2x + 1}$   
 29.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 4x - 2x^3}{5x^3 - 8x + 1}$   
 \*31.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 3}{x^2 - 9}$   
 33.  $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{2w^2 - 3w + 4}{5w^2 + 7w - 1}$   
 35.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - 4x^2 + x^3}{4 + 5x - 7x^2}$   
 \*37.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5x^2 + 14x - 3}{x^2 + 3x}$   
 39.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$   
 41.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{x - 1}\right)$   
 43.  $\lim_{x \rightarrow -7^-} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{16 - 49}}$   
 45.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{x + x^2}$   
 47.  $\lim_{x \rightarrow 1} x(x - 1)^{-1}$   
 49.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{-5}{1 - x}\right)$   
 51.  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$   
 53.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{x}$   
 55.  $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$   
 (a)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$   
 (e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$   
 56.  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2 \\ -2 + 4x - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$   
 (a)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$   
 (e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

En los problemas 55 a 58, encuentre los límites indicados. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo  $\infty$  o  $-\infty$  donde sea apropiado.

\*57.  $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$   
 (e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

58.  $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$   
 (e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

59. **Costo promedio** Si  $c$  es el costo total en dólares para producir  $q$  unidades de un producto, entonces el costo promedio por unidad para una producción de  $q$  unidades está dado por  $\bar{c} = c/q$ . Así, si la ecuación de costo total es  $c = 5000 + 6q$ , entonces

$$\bar{c} = \frac{5000}{q} + 6$$

Por ejemplo, el costo total para la producción de 5 unidades es \$5030, y el costo promedio por unidad en este nivel de producción es \$1006. Por medio de la determinación de  $\lim_{q \rightarrow \infty} \bar{c}$ , demuestre que el costo promedio se aproxima a un nivel de estabilidad si el productor aumenta de manera continua la producción. ¿Cuál es el valor límite del costo promedio? Haga un bosquejo de la gráfica de la función costo promedio.

60. **Costo promedio** Repita el problema 59, dado que el costo fijo es \$12 000 y el costo variable está dado por la función  $c_v = 7q$ .

61. **Población** Se pronostica que la población de cierta ciudad pequeña  $t$  años a partir de ahora será

$$N = 50\,000 - \frac{2000}{t+1}$$

Determine la población a largo plazo, esto es, determine  $\lim_{t \rightarrow \infty} N$ .

62. Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \frac{1}{2}$$

(Una pista: Racionalice el numerador al multiplicar la expresión  $\sqrt{x^2 + x} - x$  por

$$\frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

Después exprese el denominador en una forma tal que  $x$  sea un factor).

63. **Relación huésped-parásito** Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huésped (número de huéspedes por unidad de área) es  $x$ , el número de huéspedes parasitados en un periodo es

$$y = \frac{900x}{10 + 45x}$$

Si la densidad de huésped aumentara indefinidamente, ¿a qué valor se aproximaría?

64. Si  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x < 2 \\ x^3 + k(x+1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ , determine el valor de la constante  $k$  para la cual  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  existe.

En los problemas 65 y 66, utilice una calculadora para evaluar la función dada cuando  $x = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.01, 0.001$  y  $0.0001$ . Con base en sus resultados, obtenga una conclusión acerca de  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

65.  $f(x) = x^{2x}$       66.  $f(x) = e^{-1/x}$

67. Grafique  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$ . Utilice la gráfica para estimar  $\lim_{x \rightarrow 1/2^+} f(x)$ .

68. Grafique  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x+3}$ . Utilice la gráfica para estimar  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ , si existe. Utilice el símbolo  $\infty$  o  $-\infty$ , si es apropiado.

69. Grafique  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ . Utilice la gráfica para estimar cada uno de los límites siguientes, si existen:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  (b)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

## OBJETIVO

Estudiar la continuidad y encontrar los puntos de discontinuidad para una función.

## 10.3 Continuidad

Muchas funciones tienen la propiedad de que no presentan “pausa” alguna en sus gráficas. Por ejemplo compare las funciones

$$f(x) = x \quad y \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

cuyas gráficas aparecen en las figuras 10.23 y 10.24, respectivamente. La gráfica de  $f$  no tiene pausa, pero la gráfica de  $g$  tiene una pausa en  $x = 1$ . Dicho de otra forma, si usted fuera a trazar ambas gráficas con un lápiz, tendría que despegar el lápiz del papel en la gráfica de  $g$  cuando  $x = 1$ , pero no tendría que despegarlo en la gráfica de  $f$ . Estas situaciones pueden expresarse mediante límites. Compare el límite de cada función con el valor de la función en  $x = 1$  conforme  $x$  se approxima a 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$$

mientras que

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1 \neq 2 = g(1)$$

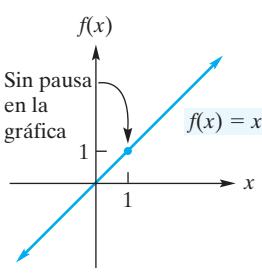
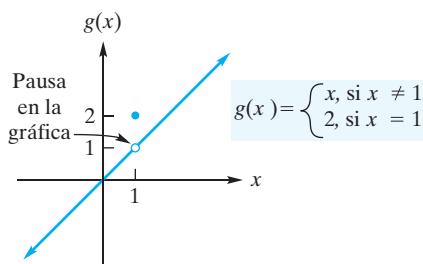


FIGURA 10.23 Continua en 1.



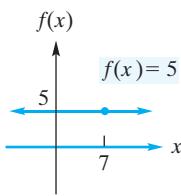
En la sección 10.1 se puntualizó que dada una función  $f$  y un número  $a$ , existen dos formas importantes de asociar un número al par  $(f, a)$ . Una es la simple evaluación,  $f(a)$ , que existe precisamente si  $a$  está en el dominio de  $f$ . La otra forma es  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , cuya existencia y determinación puede ser más desafiante. Para las funciones  $f$  y  $g$  anteriores, el límite de  $f$  a medida que  $x \rightarrow 1$  es igual a  $f(1)$ , pero el límite de  $g$  conforme  $x \rightarrow 1$  no es igual a  $g(1)$ . Por estas razones se dice que  $f$  es *continua* en 1 y  $g$  *discontinua* en 1.

### DEFINICIÓN

Una función  $f$  es **continua** en  $a$  si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1.  $f(a)$  existe
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Si  $f$  no es continua en  $a$ , entonces se dice que  $f$  es **discontinua** en  $a$ , y  $a$  se llama **punto de discontinuidad** de  $f$ .



### EJEMPLO 1 Aplicación de la definición de continuidad

- a. Muestre que  $f(x) = 5$  es continua en 7.

**Solución:** Debe verificarse que las tres condiciones se cumplan. Primera,  $f(7) = 5$ , de modo que  $f$  está definida en  $x = 7$ . Segunda,

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} 5 = 5$$

Por ende,  $f$  tiene límite cuando  $x \rightarrow 7$ . Tercera,

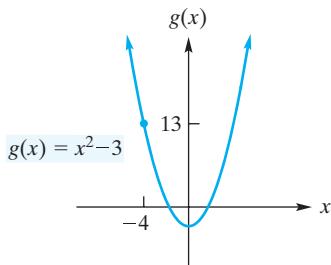
$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 5 = f(7)$$

Por lo tanto,  $f$  es continua en 7. (Vea la figura 10.25.)

- b. Demuestre que  $g(x) = x^2 - 3$  es continua en  $-4$ .

**Solución:** La función  $g$  está definida en  $x = -4$ ;  $g(-4) = 13$ . También,

$$\lim_{x \rightarrow -4} g(x) = \lim_{x \rightarrow -4} (x^2 - 3) = 13 = g(-4)$$



Por lo tanto,  $g$  es continua en  $-4$ . (Vea la figura 10.26).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

Se dice que una función es *continua en un intervalo* si es continua en cada punto de ese intervalo. En esta situación, la gráfica de la función es conectada sobre el intervalo. Por ejemplo,  $f(x) = x^2$  es continua en el intervalo  $[2, 5]$ . De hecho, en el ejemplo 5 de la sección 10.1, se mostró que para cualquier función polinomial  $f$ , para cualquier número  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Esto significa que

Una función polinomial es continua en todo punto.

Se concluye que tal función es continua en cualquier intervalo. Se dice que las funciones polinomiales son **continuas sobre su dominio** si son continuas en cada punto de su dominio. Si el dominio de tal función es el conjunto de todos los números reales, se puede decir simplemente que la función es continua.

### EJEMPLO 2 Continuidad de funciones polinomiales

Las funciones  $f(x) = 7$  y  $g(x) = x^2 - 9x + 3$  son polinomiales. Por lo tanto, son continuas en su dominio respectivo. Por ejemplo, son continuas en 3.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

¿Cuándo es discontinua una función? Se puede decir que una función  $f$  definida en un intervalo abierto que contenga a  $a$  es discontinua en  $a$ , si

1.  $f$  no tiene límite cuando  $x \rightarrow a$   
o
2. cuando  $x \rightarrow a$ ,  $f$  tiene un límite diferente de  $f(a)$

Si  $f$  no está definida en  $a$ , también se dirá en ese caso, que  $f$  es discontinua en  $a$ . En la figura 10.27 pueden encontrarse por inspección puntos de discontinuidad.

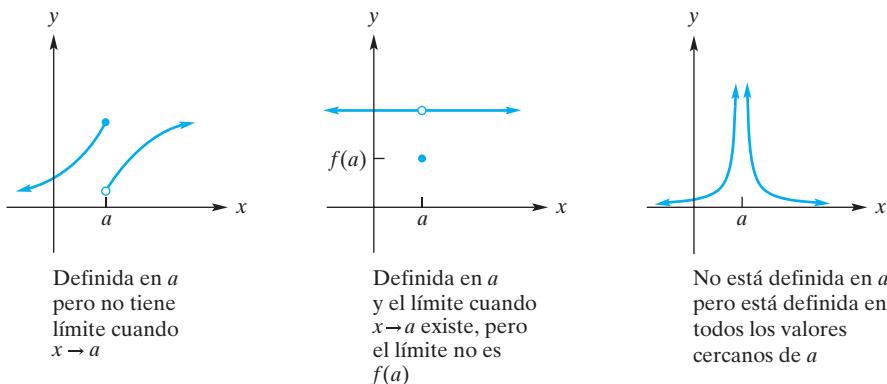


FIGURA 10.27 Discontinuidades en  $a$ .

### EJEMPLO 3 Discontinuidades

- a. Sea  $f(x) = 1/x$ . (Vea la figura 10.28). Observe que  $f$  no está definida en  $x = 0$ , pero está definida para cualquier otro valor de  $x$  cercano a 0. Así,  $f$  es discontinua en 0. Además,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ . Se dice que una función tiene **discontinuidad infinita** en  $a$ , cuando al menos uno de los límites laterales es  $\infty$  o  $-\infty$ , a medida que  $x \rightarrow a$ . De aquí que  $f$  tenga una *discontinuidad infinita* en  $x = 0$ .

- b. Sea  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(Vea la figura 10.29). Aunque  $f$  está definida en  $x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe. Por lo tanto,  $f$  es discontinua en 0.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29

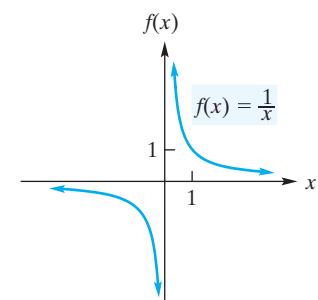


FIGURA 10.28 Discontinuidad infinita en 0.

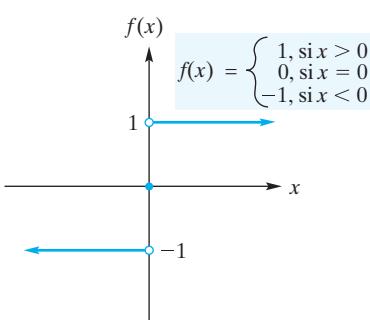


FIGURA 10.29 Función definida por partes discontinua.

### Discontinuidades de una función racional

Una función racional es discontinua en los puntos donde el denominador es 0, y es continua en cualquier otra parte. Así, una función racional es continua sobre su dominio.

La función racional  $f(x) = \frac{x+1}{x+1}$  es continua sobre su dominio, pero no está definida en  $-1$ . Es discontinua en  $-1$ . La gráfica de  $f$  es una línea recta horizontal con un "espacio" en  $-1$ .

#### EJEMPLO 4 Localización de discontinuidades para funciones racionales

Para cada una de las funciones siguientes, encuentre todos los puntos de discontinuidad.

a.  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 8}$

**Solución:** Esta función racional tiene denominador

$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$$

que es 0 cuando  $x = -4$  o  $x = 2$ . Así,  $f$  sólo es discontinua en  $-4$  y  $2$ .

b.  $h(x) = \frac{x+4}{x^2+4}$

**Solución:** Para esta función racional, el denominador nunca es 0. (Siempre es positivo). De este modo,  $h$  no tiene discontinuidad.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

#### EJEMPLO 5 Localización de discontinuidades en funciones definidas por partes

Para cada una de las funciones siguientes, encuentre todos los puntos de discontinuidad.

a.  $f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

**Solución:** Las partes que definen la función están dadas por polinomios que son continuos, entonces el único lugar en el que podría haber discontinuidad es en  $x = 3$ , donde ocurre la separación de las partes. Se sabe que  $f(3) = 3 + 6 = 9$ . Y puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 6) = 9$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 = 9$$

se puede concluir que el  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 9 = f(3)$  y la función no tiene puntos de discontinuidad. Se puede obtener la misma conclusión por inspección de la gráfica de  $f$  en la figura 10.30.

b.  $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x > 2 \\ x^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

**Solución:** Como  $f$  no está definida en  $x = 2$ , es discontinua en 2. Sin embargo, observe que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4 = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

demuestra que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  existe. (Vea la figura 10.31).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

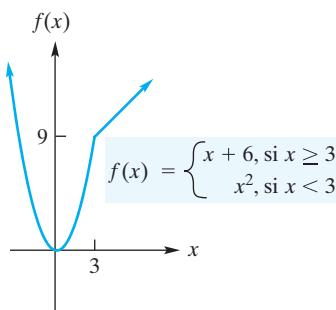


FIGURA 10.30 Función definida por partes continua.

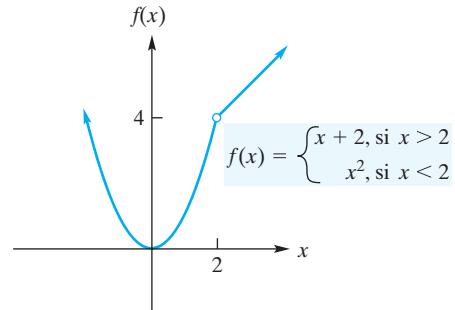


FIGURA 10.31 Discontinua en 2.

### EJEMPLO 6 Función del “servicio postal”

La función del “servicio postal”

$$c = f(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 63 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 87 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ 111 & \text{si } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

da el costo  $c$  (en centavos) de enviar por primera clase un paquete de peso  $x$  (onzas), para  $0 < x \leq 4$ , en julio de 2006. Es claro en su gráfica de la figura 10.32 que  $f$  tiene discontinuidades en 1, 2 y 3, y que es constante para valores de  $x$  que están entre discontinuidades sucesivas. Tal función se conoce como *función escalón* debido a la apariencia de su gráfica.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35

Hay otra manera de expresar la continuidad aparte de la dada en la definición. Si

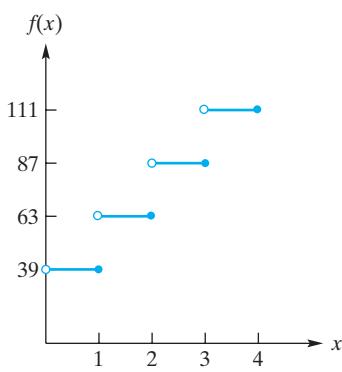


FIGURA 10.32 Función del servicio postal.

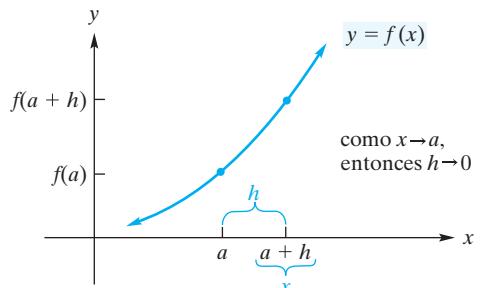


FIGURA 10.33 Diagrama para la continuidad en  $a$ .

se toma el enunciado

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

y se reemplaza  $x$  por  $a + h$ , entonces a medida que  $x \rightarrow a$ , se tiene que  $h \rightarrow 0$ ; y cuando  $h \rightarrow 0$  se tiene que  $x \rightarrow a$ . Se sigue que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$ , dado que los límites existen (figura 10.33). Por lo tanto, el enunciado

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$$

también define continuidad en  $a$  si se supone que ambos lados existen.

### TECNOLOGÍA

Con base en la gráfica de una función se tiene la capacidad de determinar dónde ocurre una discontinuidad. Sin embargo, existe la posibilidad de equivocación. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

es discontinua en  $\pm 1$ , pero la discontinuidad en 1 no resulta obvia al observar la gráfica de  $f$  en la figura 10.34. Por otra parte, la discontinuidad en  $-1$  es obvia. Observe que  $f$  no está definida en  $-1$  ni en 1.

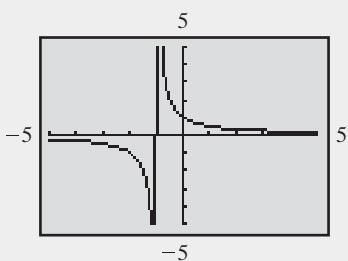
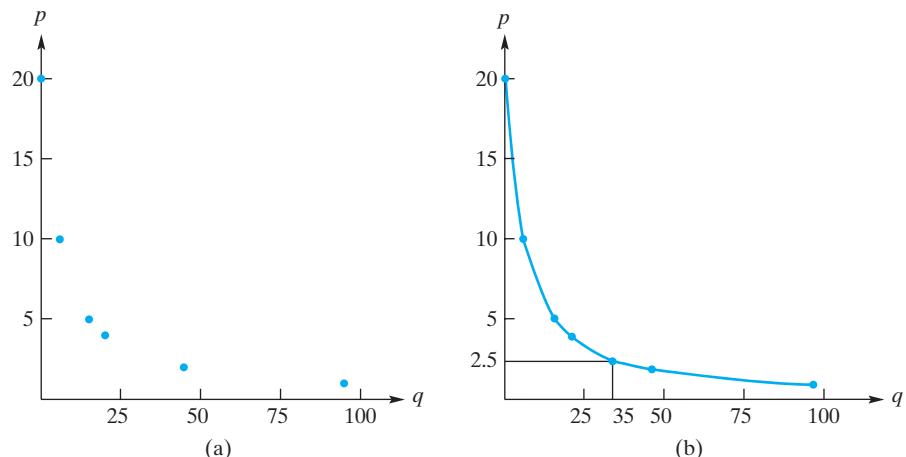


FIGURA 10.34 La discontinuidad en 1 no es evidente a partir de la gráfica de  $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ .

**TABLA 10.3** Programa de demanda

Precio/unidad, $p$	Cantidad/semana, $q$
\$20	0
10	5
5	15
4	20
2	45
1	95

**FIGURA 10.35** Visualización de datos por medio de una función continua.

A menudo es útil describir una situación por medio de una función continua. Por ejemplo, el programa de demanda de la tabla 10.3, indica el número de unidades de un producto que se demandará por semana a diversos precios. Esta información puede proporcionarse de manera gráfica, como en la figura 10.35(a), si se traza cada par cantidad-precio como un punto. Es claro que esta gráfica no representa una función continua. Además, no proporciona información del precio al cual, digamos, 35 unidades serán demandadas. Sin embargo, si se conectan los puntos de la figura 10.35(a) por medio de una curva suave [vea la figura 10.35(b)], se obtiene lo que se conoce como una curva de demanda. De ella podría estimarse que a un precio de \$2.50 aproximadamente por unidad, se demandarían 35 unidades.

Con frecuencia es posible y útil describir una gráfica por medio de una ecuación que define una función continua  $f$ , como en la figura 10.35(b). Tal función no sólo proporciona una ecuación de demanda,  $p = f(q)$ , para anticipar los precios correspondientes a las cantidades demandadas, también permite efectuar un análisis matemático conveniente de las propiedades básicas de la demanda. Por supuesto que se debe tener cuidado al trabajar con ecuaciones como  $p = f(q)$ . Matemáticamente,  $f$  puede estar definida cuando  $q = \sqrt{37}$ , pero desde un punto de vista práctico, una demanda de  $\sqrt{37}$  unidades, podría no tener significado para esta situación particular. Por ejemplo, si una unidad es un huevo, entonces una demanda de  $\sqrt{37}$  huevos, no tiene sentido.

Se destaca que las funciones exponenciales y logarítmicas son continuas sobre sus dominios. Así, las funciones exponenciales no tienen discontinuidades, mientras que una función logarítmica tiene sólo una discontinuidad en 0 (que es una discontinuidad infinita).

## Problemas 10.3

En los problemas 1 a 6, utilice la definición de continuidad para mostrar que la función dada es continua en el punto indicado.

\*1.  $f(x) = x^3 - 5x$ ;  $x = 2$

2.  $f(x) = \frac{x-3}{5x}$ ;  $x = -3$

3.  $g(x) = \sqrt{2-3x}$ ;  $x = 0$

4.  $f(x) = \frac{x}{8}$ ;  $x = 2$

5.  $h(x) = \frac{x-4}{x+4}$ ;  $x = 4$

6.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ;  $x = -1$

En los problemas 7 a 12 determine si la función es continua en los puntos dados.

7.  $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ ;  $-2, 0$

8.  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{6}$ ;  $2, -2$

9.  $g(x) = \frac{x-3}{x^2 - 9}$ ;  $3, -3$

10.  $h(x) = \frac{3}{x^2 + 4}$ ;  $2, -2$

11.  $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq 2 \\ x^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ ;  $2, 0$

12.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ ;  $0, -1$

En los problemas 13 a 16, dé una razón de por qué la función es continua sobre su dominio.

13.  $f(x) = 2x^2 - 3$

14.  $f(x) = \frac{2+3x-x^2}{5}$

15.  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4}$

16.  $f(x) = x(1-x)$

Encuentre todos los puntos de discontinuidad en los problemas 17 a 34.

17.  $f(x) = 3x^2 - 3$

18.  $h(x) = x - 2$

\*19.  $f(x) = \frac{3}{x+4}$

20.  $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2-4}$

21.  $g(x) = \frac{(2x^2-3)^3}{15}$

22.  $f(x) = -1$

23.  $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 2x - 15}$

24.  $g(x) = \frac{x-3}{x^2+x}$

25.  $h(x) = \frac{x-7}{x^3-x}$

26.  $f(x) = \frac{2x-3}{3-2x}$

27.  $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$

28.  $f(x) = \frac{x^4}{x^4-1}$

\*29.  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

30.  $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq -1 \\ 1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$

\*31.  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

32.  $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x > 2 \\ 3-2x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

33.  $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x > 2 \\ 8x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

34.  $f(x) = \begin{cases} \frac{16}{x^2} & \text{si } x \geq 2 \\ 3x-2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

- \*35. Tarifas telefónicas** Suponga que la tarifa telefónica de larga distancia para una llamada desde Hazleton, Pennsylvania, a Los Ángeles, California, es de \$0.10 por el primer minuto y de \$0.06 por cada minuto o fracción adicional. Si  $y = f(t)$  es una función que indica el cargo total y por una llamada de  $t$  minutos de duración, haga el bosquejo de la gráfica de  $f$  para  $0 < t \leq 4\frac{1}{2}$ . Utilice esta gráfica para determinar los valores de  $t$  en los cuales ocurren discontinuidades, donde  $0 < t \leq 4\frac{1}{2}$ .

### OBJETIVO

Desarrollar técnicas para resolver desigualdades no lineales.

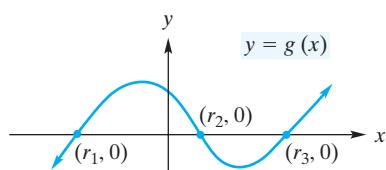


FIGURA 10.36  $r_1, r_2$  y  $r_3$  son raíces de  $g$ .

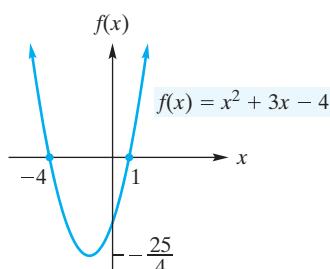


FIGURA 10.37 -4 y 1 son raíces de  $f$ .

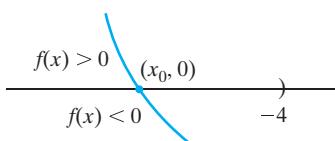


FIGURA 10.38 Cambio de signo para una función continua.

36. La función mayor entero,  $(x) = \lfloor x \rfloor$ , está definida como el entero más grande que es menor o igual a  $x$ , donde  $x$  es cualquier número real. Por ejemplo,  $\lfloor 3 \rfloor = 3$ ,  $\lfloor 1.999 \rfloor = 1$ ,  $\lfloor \frac{1}{4} \rfloor = 0$  y  $\lfloor -4.5 \rfloor = -5$ . Haga el bosquejo de la gráfica de esta función para  $-3.5 \leq x \leq 3.5$ . Utilice su bosquejo para determinar los valores de  $x$  en los cuales ocurren discontinuidades.

37. **Inventario** Haga el bosquejo de la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 600 & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ -100x + 1100 & \text{si } 5 \leq x < 10 \\ -100x + 1600 & \text{si } 10 \leq x < 15 \end{cases}$$

Una función como la anterior podría describir el inventario y de una compañía en el instante  $x$ ; ¿ $f$  es continua en 2?, ¿es continua en 5?, ¿es continua en 10?

38. Grafique  $g(x) = e^{-1/x^2}$ . Debido a que  $g$  no está definida en  $x = 0$ , pero sí para todos los valores cercanos a 0,  $g$  es discontinua en 0. Con base en la gráfica de  $g$ , ¿es

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

continua en 0?

## 10.4 Continuidad aplicada a desigualdades

En la sección 1.2 se resolvieron desigualdades lineales. Ahora se verá cómo puede aplicarse la noción de continuidad para resolver una desigualdad no lineal, como  $x^2 + 3x - 4 < 0$ . Esta habilidad será importante en el estudio del cálculo.

Recuerde (tal y como se mencionó en la sección 2.5) que las intersecciones  $x$  de la gráfica de una función  $g$  (esto es, los puntos donde la gráfica corta al eje  $x$ ) tienen coordenadas  $x$  que son las raíces de la ecuación  $g(x) = 0$ . De manera inversa, cualquier raíz de  $g$  da lugar a una intersección  $x$  de la gráfica de la función. Por lo tanto, a partir de la gráfica de  $y = g(x)$  en la figura 10.36, se concluye que  $r_1, r_2$  y  $r_3$  son raíces de  $g$  y cualquier otra raíz de  $g$  dará lugar a intersecciones en  $x$  (más allá de lo que realmente se muestra en la gráfica). Suponga que efectivamente se muestran todas las raíces de  $g$ , y por ende todas las intersecciones  $x$ . Note además en la figura 10.36 que las tres raíces determinan cuatro intervalos abiertos sobre el eje  $x$ :

$$(-\infty, r_1) \quad (r_1, r_2) \quad (r_2, r_3) \quad (r_3, \infty)$$

Para resolver  $x^2 + 3x - 4 > 0$ , se hace

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

Debido a que  $f$  es una función polinomial, es continua. Las raíces de  $f$  son  $-4$  y  $1$ ; de aquí que la gráfica de  $f$  tiene intersecciones con el eje  $x$ ,  $(-4, 0)$  y  $(1, 0)$ . (Vea la figura 10.37). Las raíces determinan tres intervalos sobre el eje  $x$ :

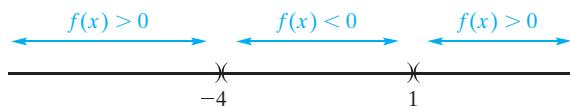
$$(-\infty, -4) \quad (-4, 1) \quad (1, \infty)$$

Considere el intervalo  $(-\infty, -4)$ . Como  $f$  es continua en este intervalo, se afirma que  $f(x) > 0$ , o bien,  $f(x) < 0$  en todo el intervalo. Si no fuera éste el caso, entonces  $f(x)$  realmente cambiaría de signo en el intervalo. Debido a la continuidad de  $f$ , habría un punto donde la gráfica intersecaría al eje  $x$ , por ejemplo, en  $(x_0, 0)$ . (Vea la figura 10.38). Pero, entonces  $x_0$  sería una raíz de  $f$ . Sin embargo, esto no puede ser porque no hay raíces de  $f$  menores que  $-4$ . De aquí que  $f(x)$  debe ser estrictamente positiva o estrictamente negativa en  $(-\infty, -4)$ . Se puede enunciar un argumento similar para cada uno de los otros intervalos.

Para determinar el signo de  $f(x)$  en cualquiera de los tres intervalos, es suficiente con determinarlo en cualquier punto del intervalo. Por ejemplo,  $-5$  está en  $(-\infty, -4)$  y

$$f(-5) = 6 > 0$$

Entonces  $f(x) > 0$  en  $(-\infty, -4)$

FIGURA 10.39 Diagrama de signos para  $x^2 + 3x - 4$ .

De manera similar, 0 está en  $(-4, 1)$  y

$$f(0) = -4 < 0 \quad \text{Entonces } f(x) < 0 \text{ en } (-4, 1)$$

Por último, 3 está en  $(1, \infty)$  y

$$f(3) = 14 > 0 \quad \text{Entonces } f(x) > 0 \text{ en } (1, \infty)$$

(Vea el “diagrama de signos” en la figura 10.39). Por lo tanto,

$$x^2 + 3x - 4 > 0 \text{ en } (-\infty, -4) \text{ y } (1, \infty)$$

de modo que se ha resuelto la desigualdad. Estos resultados son obvios a partir de la gráfica de la figura 10.37. La gráfica está por arriba del eje  $x$  (esto es,  $f(x) > 0$ ) en  $(-\infty, -4)$  y en  $(1, \infty)$ .

### EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad cuadrática

Resuelva  $x^2 - 3x - 10 > 0$ .

**Solución:** Si  $f(x) = x^2 - 3x - 10$ , entonces  $f$  es una función polinomial (cuadrática) y, por lo tanto, continua en todas partes. Para encontrar las raíces reales de  $f$ , se tiene

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 10 &= 0 \\ (x + 2)(x - 5) &= 0 \\ x &= -2, 5 \end{aligned}$$

Las raíces  $-2$  y  $5$  se muestran en la figura 10.40. Estas raíces determinan tres intervalos:

$$(-\infty, -2) \quad (-2, 5) \quad (5, \infty)$$

Para determinar el signo de  $f(x)$  en  $(-\infty, -2)$ , se selecciona un punto en ese intervalo, digamos  $-3$ . El signo de  $f(x)$  en todo  $(-\infty, -2)$  es el mismo que el de  $f(-3)$ . Debido a que

$$f(x) = (x + 2)(x - 5) \quad [\text{forma factorizada de } f(x)]$$

se tiene

$$f(-3) = (-3 + 2)(-3 - 5)$$

y, por lo tanto,

$$\text{signo}(f(-3)) = \text{signo}(-3 + 2)(-3 - 5) = \text{signo}(-3 + 2)\text{signo}(-3 - 5) = (-)(-) = +$$

Se encontró el signo de  $f(-3)$  al usar los signos de los factores de  $f(x)$  evaluados en  $-3$ . Así,  $f(x) > 0$  en  $(-\infty, -2)$ . Para probar los otros dos intervalos, se seleccionan los puntos  $0$  y  $6$ . Se encuentra que

$$\text{signo}(f(0)) = \text{signo}(0 + 2)\text{signo}(0 - 5) = (+)(-) = -$$

de modo que  $f(x) < 0$  en  $(-2, 5)$  y

$$\text{signo}(f(6)) = \text{signo}(6 + 2)(6 - 5) = (+)(+) = +$$

así que  $f(x) > 0$  en  $(5, \infty)$ . En el diagrama de signos de la figura 10.41 se encuentra un resumen de estos resultados. Por lo tanto,  $x^2 - 3x - 10 > 0$  en  $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

FIGURA 10.41 Diagrama de signos para  $(x + 2)(x - 5)$ .

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

## RESOLUCIÓN DE UNA DESIGUALDAD POLINOMIAL

Para formar una caja abierta se corta una pieza cuadrada de cada esquina de una pieza de metal de 8 por 10 pulgadas. Si cada lado de los cuadrados que se han cortado es de  $x$  pulgadas de largo, el volumen de la caja está dado por  $V(x) = x(8 - 2x)(10 - 2x)$ . Este problema sólo tiene sentido cuando el volumen es positivo. Determine los valores de  $x$  para los que el volumen es positivo.

## EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad polinomial

Resuelva  $x(x - 1)(x + 4) \leq 0$ .

**Solución:** Si  $f(x) = x(x - 1)(x + 4)$ , entonces  $f$  es una función polinomial y es continua en todas partes. Las raíces de  $f$  son 0, 1 y  $-4$ , que pueden verse en la figura 10.42. Estas raíces determinan cuatro intervalos:

$$(-\infty, -4) \quad (-4, 0) \quad (0, 1) \quad (1, \infty)$$

Ahora, en un punto de prueba en cada intervalo se determina el signo de  $f(x)$ :

$$\text{signo}(f(-5)) = (-)(-)(-) = - \quad \text{así que } f(x) < 0 \text{ en } (-\infty, -4)$$

$$\text{signo}(f(-2)) = (-)(-)(+) = + \quad \text{así que } f(x) > 0 \text{ en } (-4, 0)$$

$$\text{signo}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = (+)(-)(+) = - \quad \text{así que } f(x) < 0 \text{ en } (0, 1)$$

$$\text{signo}(f(2)) = (+)(+)(+) = + \quad \text{así que } f(x) > 0 \text{ en } (1, \infty)$$

En la figura 10.43 se muestra un diagrama de signos para  $f(x)$ . Por lo tanto,  $x(x - 1)(x + 4) \leq 0$  en  $(-\infty, -4]$  y en  $[0, 1]$ . Observe que  $-4, 0$  y  $1$  están incluidos en la solución porque satisfacen la igualdad ( $=$ ) que es parte de la desigualdad ( $\leq$ ).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11



FIGURA 10.42 Raíces de  $x(x - 1)(x + 4)$ .

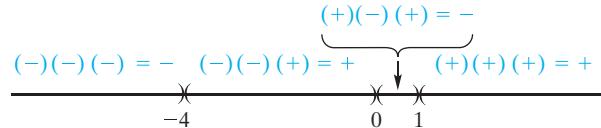


FIGURA 10.43 Diagrama de signos para  $x(x - 1)(x + 4)$ .

## EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad con función racional

Resuelva  $\frac{x^2 - 6x + 5}{x} \geq 0$ .

**Solución:** Sea  $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x} = \frac{(x - 1)(x - 5)}{x}$ . Para una función racional  $f$ , se resuelve la desigualdad al considerar los intervalos determinados por las raíces de  $f$  y los puntos donde  $f$  es discontinua, puntos alrededor de los cuales el signo de  $f(x)$  puede cambiar. Aquí las raíces son 1 y 5. La función es discontinua en 0 y continua en los demás puntos. En la figura 10.44 se ha colocado un círculo vacío en 0 para indicar que  $f$  no está definida allí. Entonces, considere los intervalos

$$(-\infty, 0) \quad (0, 1) \quad (1, 5) \quad (5, \infty)$$

Al determinar el signo de  $f(x)$  en un punto de prueba en cada intervalo, se encuentra que:

$$\text{signo}(f(-1)) = \frac{(-)(-)}{(-)} = - \quad \text{así que } f(x) < 0 \text{ en } (-\infty, 0)$$

$$\text{signo}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{(-)(-)}{(+)} = + \quad \text{así que } f(x) > 0 \text{ en } (0, 1)$$

$$\text{signo}(f(2)) = \frac{(+)(-)}{(+)} = - \quad \text{así que } f(x) < 0 \text{ en } (1, 5)$$

$$\text{signo}(f(6)) = \frac{(+)(+)}{(+)} = + \quad \text{así que } f(x) > 0 \text{ en } (5, \infty)$$

En la figura 10.45 se muestra el diagrama de signos. Por lo tanto,  $f(x) \geq 0$  en  $(0, 1]$  y en  $[5, \infty)$ . (¿Por qué se incluyen 1 y 5, pero 0 se excluye?) En la figura 10.46 se muestra la gráfica de  $f$ . Observe que la solución de  $f(x) \geq 0$  consiste en todos los valores de  $x$  para los cuales la gráfica está en o por encima del eje  $x$ .

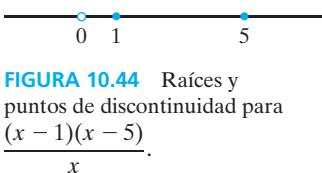
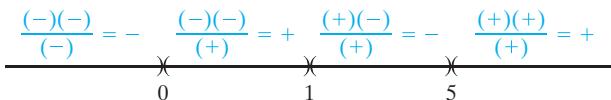
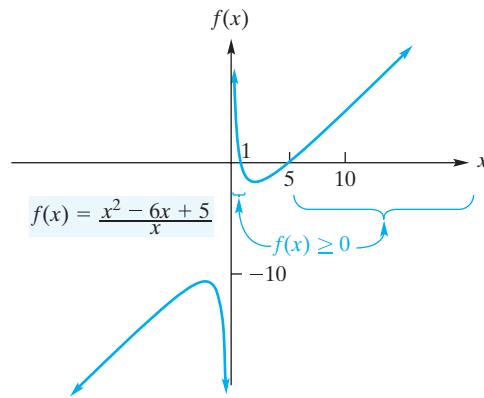


FIGURA 10.44 Raíces y puntos de discontinuidad para  $\frac{(x - 1)(x - 5)}{x}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

FIGURA 10.45 Diagrama de signos para  $\frac{(x-1)(x-5)}{x} \leq 0$ .FIGURA 10.46 Gráfica de  $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x}$ .**EJEMPLO 4 Solución de desigualdades no lineales**

- a. Resuelva
- $x^2 + 1 > 0$
- .

**Solución:** La ecuación  $x^2 + 1 = 0$  no tiene raíces reales. Por lo tanto,  $f(x) = x^2 + 1$  no tiene una raíz real. También,  $f$  es continua. Entonces,  $f(x)$  siempre es positiva o siempre es negativa. Pero  $x^2$  siempre es positiva o cero, de modo que  $x^2 + 1$  siempre es positiva. Por lo tanto, la solución de  $x^2 + 1 > 0$  es  $(-\infty, \infty)$ .

- b. Resuelva
- $x^2 + 1 < 0$
- .

**Solución:** Del inciso (a),  $x^2 + 1$  siempre es positiva, de modo que  $x^2 + 1 < 0$  no tiene solución.

**Problemas 10.4**

En los problemas 1 a 26 resuelva las desigualdades por medio de la técnica estudiada en esta sección.

- \*1.  $x^2 - 3x - 4 > 0$
2.  $x^2 - 8x + 15 > 0$
3.  $x^2 - 3x - 10 \leq 0$
4.  $14 - 5x - x^2 \leq 0$
5.  $2x^2 + 11x + 14 < 0$
6.  $x^2 - 4 < 0$
- \*7.  $x^2 + 4 < 0$
8.  $2x^2 - x - 2 \leq 0$
9.  $(x+2)(x-3)(x+6) \leq 0$
10.  $(x+5)(x+2)(x-7) \leq 0$
- \*11.  $-x(x-5)(x+4) > 0$
12.  $(x+2)^2 > 0$
13.  $x^3 + 4x \geq 0$
14.  $(x+2)^2(x^2 - 1) < 0$
15.  $x^3 + 8x^2 + 15x \leq 0$
16.  $x^3 + 6x^2 + 9x < 0$
- \*17.  $\frac{x}{x^2 - 9} < 0$
18.  $\frac{x^2 - 1}{x} < 0$
19.  $\frac{4}{x-1} \geq 0$
20.  $\frac{3}{x^2 - 5x + 6} > 0$
21.  $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 5} \geq 0$
22.  $\frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 3x + 2} \leq 0$
23.  $\frac{3}{x^2 + 6x + 5} \leq 0$
24.  $\frac{2x + 1}{x^2} \leq 0$
25.  $x^2 + 2x \geq 2$
26.  $x^4 - 16 \geq 0$

27. **Ingresos** Suponga que los consumidores compran  $q$  unidades de un producto cuando el precio de *cada uno* es de  $28 - 0.2q$  dólares. ¿Cuántas unidades deben venderse para que el ingreso sea al menos de \$750?
28. **Administración forestal** Una compañía maderera posee un bosque de forma rectangular, de  $1 \times 2$  millas. La compañía quiere cortar una franja uniforme con árboles a lo largo de los lados externos del bosque. ¿Qué tan ancha debe ser la franja si se quiere conservar al menos  $1\frac{5}{16}$  mi<sup>2</sup> de bosque?
29. **Diseño de contenedores** Un fabricante de contenedores desea hacer una caja sin tapa, para lo cual corta un cuadrado de

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

cuatro pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio y dobla después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 pulg<sup>3</sup>. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda utilizarse.

30. **Participación en talleres** Imperial Education Services (IES) ofrece un curso de procesamiento de datos al personal clave de la compañía Zeta. El precio por persona es de \$50 y la compañía Zeta garantiza que al menos habrá 50 asistentes. Suponga que el IES ofrece reducir el costo para *todos* en \$0.50 por cada persona que asista después de las primeras 50. ¿Cuál es el límite del tamaño del grupo que el IES aceptará, de modo que el ingreso total nunca sea menor que lo recibido por 50 personas?

31. Grafique  $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$ . Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$x^3 + 7x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

32. Grafique  $f(x) = \frac{3x^2 - 0.5x + 2}{6.2 - 4.1x}$ . Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$\frac{3x^2 - 0.5x + 2}{6.2 - 4.1x} > 0$$

Una manera novedosa de resolver una desigualdad no lineal como  $f(x) > 0$  es por inspección de la gráfica de  $g(x) = f(x)/|f(x)|$ , cuyo rango consiste sólo en 1 y -1:

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) > 0 \\ -1 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

La solución de  $f(x) > 0$  consiste en todos los intervalos para los cuales  $g(x) = 1$ . Resuelva las desigualdades de los problemas 33 y 34 con esta técnica.

33.  $6x^2 - x - 2 > 0$

34.  $\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} < 0$

## 10.5 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

<b>Sección 10.1</b>	<b>Límites</b> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	Ej. 8, p. 455
<b>Sección 10.2</b>	<b>Límites (continuación)</b> $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$	Ej. 1, p. 459 Ej. 3, p. 461
<b>Sección 10.3</b>	<b>Continuidad</b> continua en $a$ discontinua en $a$ continua sobre un intervalo   continua sobre su dominio	Ej. 3, p. 468 Ej. 4, p. 469
<b>Sección 10.4</b>	<b>Continuidad aplicada a desigualdades</b> diagrama de signos	Ej. 1, p. 473

### Resumen

La noción de límite es el fundamento del cálculo. Decir que el  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , significa que los valores de  $f(x)$  pueden acercarse mucho al número  $L$  cuando se selecciona  $x$  lo suficientemente cerca pero diferente de  $a$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existen, y  $c$  es una constante, entonces:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
4.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5.  $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
6.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ,
7.  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$
8. Si  $f$  es una función polinomial, entonces  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

La propiedad 8 significa que el límite de una función polinomial cuando  $x \rightarrow a$ , puede encontrarse con sólo evaluar el polinomio en  $a$ . Sin embargo, con otras funciones  $f$ , la evaluación en  $a$  puede conducir a la forma indeterminada  $0/0$ . En tales casos, operaciones algebraicas como factorización y cancelación pueden producir una función  $g$  que concuerde con  $f$ , para  $x \neq a$ , y para la cual el límite pueda determinarse.

Si  $f(x)$  se aproxima a  $L$  conforme  $x$  tiende a  $a$  por la derecha, entonces se escribe  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ . Si  $f(x)$  se aproxima a  $L$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por la izquierda, entonces se escribe  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ . Estos límites se llaman límites unilaterales.

El símbolo de infinito  $\infty$ , que no representa un número, se utiliza para describir límites. El enunciado

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

significa que cuando  $x$  crece indefinidamente, los valores de  $f(x)$  se aproximan al número  $L$ . Una proposición similar se aplica cuando  $x \rightarrow -\infty$ , lo cual significa que  $x$  disminuye indefinidamente. En general, si  $p > 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

Si  $f(x)$  aumenta indefinidamente cuando  $x \rightarrow a$ , entonces se escribe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ . De manera similar, si  $f(x)$  disminuye indefinida-

mente, se tiene  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ . Decir que el límite de una función es  $\infty$  ( $-\infty$ ) no significa que el límite exista; es una manera de decir que el límite no existe y decir *por qué* no hay límite.

Existe una regla para evaluar el límite de una función racional (cociente de dos polinomios) cuando  $x \rightarrow \infty$  o  $-\infty$ . Si  $f(x)$  es una función racional, y  $a_n x^n$  y  $b_m x^m$  son términos en el numerador y denominador respectivamente, con las potencias más grandes de  $x$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

En particular, cuando  $x \rightarrow \infty$  o  $-\infty$ , el límite de un polinomio es el mismo que el límite del término con la potencia más grande de  $x$ . Esto significa que para un polinomio no constante, el límite cuando  $x \rightarrow \infty$  o  $-\infty$ , es  $\infty$ , o bien,  $-\infty$ .

Una función  $f$  es continua en  $a$  si y sólo si

1.  $f(a)$  existe
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

De manera geométrica, esto significa que la gráfica de  $f$  no presenta pausa cuando  $x = a$ . Si una función no es continua en  $a$ , entonces se dice que la función es discontinua en  $a$ . Las funciones polinomiales y las funciones racionales son continuas sobre sus dominios. Por lo tanto, las funciones polinomiales no tienen discontinuidades y las funciones racionales son discontinuas sólo en los puntos donde su denominador es cero.

Para resolver la desigualdad  $f(x) > 0$  (o  $f(x) < 0$ ), primero se encuentran las raíces reales de  $f$  y los valores de  $x$  para los cuales  $f$  es discontinua. Estos valores determinan intervalos, y en cada intervalo  $f(x)$  siempre es positiva o siempre negativa. Para encontrar el signo en cualquiera de estos intervalos, basta con determinar el signo de  $f(x)$  en cualquier punto del intervalo. Después que los signos se determinan para todos los intervalos, es fácil dar la solución de  $f(x) > 0$  (o  $f(x) < 0$ ).

## Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

En los problemas 1 a 28, encuentre los límites, si existen. Si el límite no existe, establezcalo así o utilice el símbolo  $\infty$  o  $-\infty$  donde sea apropiado.

1.  $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + 6x - 1)$

3.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

5.  $\lim_{h \rightarrow 0} (x + h)$

7.  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 2x - 8}$

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x + 1}$

11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{7x - 4}$

13.  $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{2t - 3}{t - 3}$

15.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{1 - x}$

17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{(3x + 2)^2}$

19.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 3}{x^2 - 9}$

21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3x}$

23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100} + (1/x^3)}{\pi - x^{97}}$

25.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  si  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

26.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  si  $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

27.  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{4 - x}$  (Una pista: Para  $x > 4$ ,  $\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{x - 4}\sqrt{x + 4}$ .)

28.  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 3x - 10}{\sqrt{x - 5}}$  (Una pista: Para  $x > 5$ ,  $\frac{x - 5}{\sqrt{x - 5}} = \sqrt{x - 5}$ .)

29. Si  $f(x) = 8x - 2$ , encuentre  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ .

30. Si  $f(x) = 2x^2 - 3$ , encuentre  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ .

31. **Relación huésped-parásito** Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huésped (número de huéspedes por unidad de área) es  $x$ , entonces el número de parásitos a lo largo de un periodo es

$$y = 23 \left(1 - \frac{1}{1 + 2x}\right)$$

Si la densidad de huésped aumentara indefinidamente, ¿a qué valor se aproximaría  $y$ ?

32. **Relación presa-depredador** Para una relación particular de presa-depredador, se determinó que el número  $y$  de presas

consumidas por un depredador a lo largo de un periodo fue una función de la densidad de presas  $x$  (el número de presas por unidad de área). Suponga que

$$y = f(x) = \frac{10x}{1 + 0.1x}$$

Si la densidad de presas aumentara indefinidamente, ¿a qué valor se aproximaría  $y$ ?

33. Mediante la definición de continuidad, demuestre que la función  $f(x) = x^2 + 5$  es continua en  $x = 7$ .
34. Mediante la definición de continuidad, demuestre que la función  $f(x) = \frac{x - 5}{x^2 + 2}$  es continua en  $x = 5$ .
35. Establezca si  $f(x) = x^2/5$  es continua en cada número real. Dé una razón para su respuesta.
36. Establezca si  $f(x) = x^2 - 2$  es continua en todas partes. Dé una razón para su respuesta.

En los problemas 37 a 44, encuentre los puntos de discontinuidad (si los hay) para cada función.

37.  $f(x) = \frac{x^2}{x + 3}$

38.  $f(x) = \frac{0}{x^3}$

39.  $f(x) = \frac{x - 1}{2x^2 + 3}$

40.  $f(x) = (2 - 3x)^3$

41.  $f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 + 3x - 4}$

42.  $f(x) = \frac{2x + 6}{x^3 + x}$

43.  $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x > -2 \\ 3x + 6 & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$

44.  $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Resuelva las desigualdades dadas en los problemas 45 a 52.

45.  $x^2 + 4x - 12 > 0$

46.  $3x^2 - 3x - 6 \leq 0$

47.  $x^5 \leq 7x^4$

48.  $x^3 + 8x^2 + 15x \geq 0$

49.  $\frac{x + 5}{x^2 - 1} < 0$

50.  $\frac{x(x + 5)(x + 8)}{3} < 0$

51.  $\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 2x - 8} \geq 0$

52.  $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 16} \leq 0$

53. Grafique  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 19x + 18}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$ . Utilice la gráfica para estimar  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

54. Grafique  $f(x) = \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$ . De la gráfica, estime  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

55. Grafique  $f(x) = x \ln x$ . Con base en la gráfica, estime el límite unilateral  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

56. Grafique  $f(x) = \frac{e^x - 1}{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x)}$ . Utilice la gráfica para estimar  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

57. Grafique  $f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ . Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$x^3 - x^2 + x - 6 \geq 0$$

58. Grafique  $f(x) = \frac{x^5 - 4}{x^3 + 1}$ . Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$\frac{x^5 - 4}{x^3 + 1} \leq 0$$

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Deuda nacional

**E**l tamaño de la deuda nacional de Estados Unidos es de gran interés para muchas personas, y con frecuencia constituye un tema de qué hablar en las noticias. La magnitud de la deuda afecta la confianza en la economía de Estados Unidos tanto de inversionistas nacionales como de extranjeros, de corporativos oficiales y de líderes políticos. Hay quienes creen que para reducir su deuda el gobierno debería disminuir los gastos, lo cual afectaría los programas de gobierno, o bien aumentar sus ingresos, posiblemente a través de un aumento en los impuestos.

Suponga que es posible reducir la deuda continuamente a una tasa anual fija. Esto es similar al concepto de interés compuesto continuamente, como se estudió antes en el capítulo 5, salvo que en lugar de agregar interés a una cantidad a cada instante, le restaría a la deuda a cada instante. A continuación se estudiará cómo podría modelarse esta situación.

Suponga que la deuda  $D_0$  se reduce a una tasa anual  $r$  en el instante  $t = 0$ . Además, suponga que hay  $k$  períodos de igual longitud en un año. Al final del primer periodo, la deuda original se reduce en  $D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right)$ , de modo que la deuda nueva es

$$D_0 - D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right) = D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right)$$

Al final del segundo periodo, esta deuda se reduce en

$D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right)^2$ , de modo que la deuda nueva es

$$\begin{aligned} & D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right) - D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right)^2 \\ &= D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right) \left(1 - \frac{r}{k}\right) \\ &= D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right)^2 \end{aligned}$$

El patrón continúa. Al final del tercer periodo la deuda es  $D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right)^3$ , y así sucesivamente. Al término de  $t$  años, el número de períodos es  $kt$  y la deuda es  $D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right)^{kt}$ . Si la deuda se redujera a cada instante, entonces  $k \rightarrow \infty$ . Así, se desea encontrar

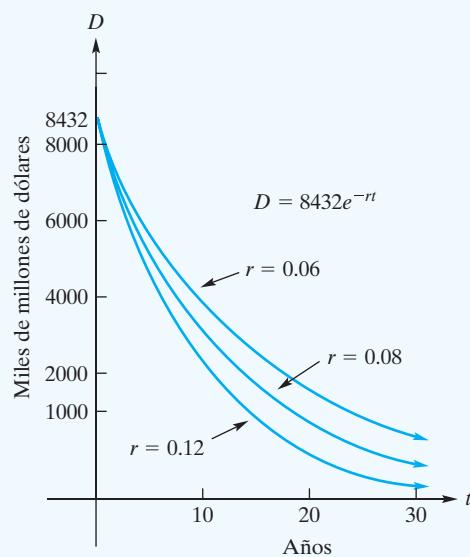
$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right)^{kt}$$



que puede reescribirse como

$$D_0 \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{r}{k}\right)^{-k/r} \right]^{-rt}$$

Si se establece que  $x = -r/k$ , entonces la condición  $k \rightarrow \infty$  implica que  $x \rightarrow 0$ . De aquí que el límite dentro de los corchetes tenga la forma  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$ , que es la  $e$  que se estudió en la sección 10.1. Por lo tanto, la deuda  $D_0$  en el instante



**FIGURA 10.47** La deuda del presupuesto se reduce de manera continua.



© DW

$t = 0$  se reduce continuamente a una tasa anual  $r$ , y  $t$  años después la deuda está dada por

$$D = D_0 e^{-rt}$$

Por ejemplo, suponga una deuda para Estados Unidos de \$8432 miles de millones (redondeado al millar de millones más cercano) en julio de 2006 y una tasa de reducción continua de 6% anual. Entonces la deuda dentro de  $t$  años contados a partir de ahora, está dada por

$$D = 8432e^{-0.06t}$$

donde  $D$  está en miles de millones de dólares. Esto significa que dentro de 10 años, la deuda será  $8432e^{-0.06} \approx \$4628$  mi-

les de millones. En la figura 10.47 se muestra la gráfica de  $D = 8432e^{-rt}$  para varias tasas  $r$ . Entre mayor sea el valor de  $r$ , más rápida es la reducción de la deuda. Observe que para  $r = 0.06$ , la deuda al final de 30 años aún es considerable (aproximadamente \$1394 miles de millones).

Es importante observar que los elementos radiactivos que decaen, también siguen el modelo de la reducción continua de la deuda  $D = D_0 e^{-rt}$ .

Para investigar sobre la situación actual de la deuda nacional de Estados Unidos, visite uno de los seguidores de la deuda nacional en Internet. Teclee “national debt clock” en un buscador.

## Problemas

*En los problemas siguientes, suponga una deuda nacional actual de \$8432 miles de millones.*

1. Si la deuda se redujera a \$8000 miles de millones dentro de un año, ¿qué tasa anual de reducción continua de la deuda estaría implicada? Dé su respuesta al porcentaje más cercano.
2. Para una reducción continua de deuda a una tasa anual de 6%, determine el número de años, contados a partir de ahora, para que la deuda se reduzca a la mitad. Dé su respuesta al año más cercano.
3. ¿Qué supuestos fundamentan un modelo de reducción de deuda que utiliza una función exponencial? ¿Cuáles son las limitaciones de este enfoque?

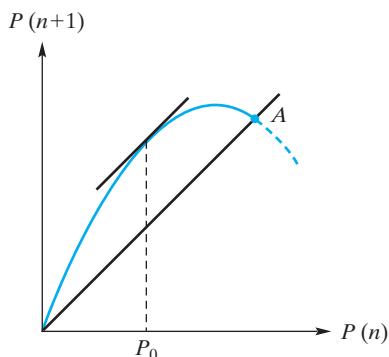
# 11

## DIFERENCIACIÓN

- 11.1 La derivada
- 11.2 Reglas para la diferenciación
- 11.3 La derivada como una razón de cambio
- 11.4 La regla del producto y la regla del cociente
- 11.5 La regla de la cadena y la regla de la potencia
- 11.6 Repaso

### Aplicación práctica

Propensión marginal al consumo



**L**as regulaciones del gobierno, por lo general, limitan el número de peces que pueden pescar los barcos pesqueros comerciales en una cierta zona durante una temporada. Esto evita la pesca excesiva, la cual agota la población de peces y deja, a la larga, pocos animales para capturar.

Desde una perspectiva estrictamente comercial, la regulación ideal permitiría obtener el máximo de peces disponibles para la pesca de cada año. La clave para determinar dichas regulaciones ideales es la función matemática llamada curva de reproducción. Para un hábitat de peces, esta función estima la población de peces de un año al siguiente,  $P(n + 1)$ , con base en la población actual,  $P(n)$ , y supone que no hay intervención externa (es decir, no hay pesca ni influencia de depredadores, etcétera).

La figura de la esquina inferior izquierda muestra una curva común de reproducción; en ella también está graficada la recta  $P(n + 1) = P(n)$ , a lo largo de la cual las poblaciones  $P(n + 1)$  y  $P(n)$  serían iguales. Observe la intersección de la curva con la recta en el punto A. Es aquí en donde la población alcanza su tamaño máximo sostenible a consecuencia de la gran aglomeración en el hábitat. Una población que tiene este tamaño en un año, tendrá el mismo tamaño el año siguiente.

Para cualquier punto en el eje horizontal, la distancia entre la curva de reproducción y la recta  $P(n + 1) = P(n)$  representa la pesca sostenible: el número de peces que pueden ser atrapados, después de que las crías han crecido hasta madurar, de modo que la población regrese finalmente al mismo tamaño que tenía un año antes.

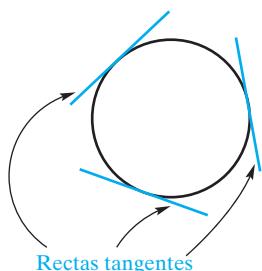
Desde el punto de vista comercial, el tamaño de población óptima es aquél donde la distancia entre la curva de reproducción y la recta  $P(n + 1) = P(n)$  es la mayor. Esta condición se cumple donde las pendientes de la curva de reproducción y la recta  $P(n + 1) = P(n)$  son iguales. (Por supuesto, la pendiente de  $P(n + 1) = P(n)$  es 1.) Así, para asegurar una cosecha de peces máxima año tras año, las regulaciones deben tener como objetivo mantener la población silvícola muy cerca de  $P_0$ .

Aquí, la idea medular es la de la pendiente de una curva en un punto dado. Este concepto constituye la piedra angular de este capítulo.

En este momento se iniciará el estudio del cálculo. Las ideas involucradas en cálculo son totalmente diferentes a las del álgebra y de la geometría. Más adelante en este libro se aclarará la fuerza e importancia de estas ideas y de sus aplicaciones. En este capítulo se introducirá la llamada *derivada* de una función, y el estudiante aprenderá reglas importantes para encontrar derivadas. También se estudiará el uso de la derivada para analizar la razón de cambio de una cantidad, como la razón a la cual cambia la posición de un cuerpo.

**OBJETIVO**

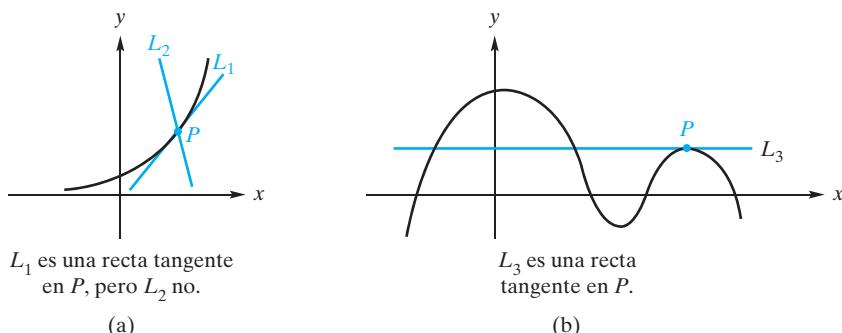
Desarrollar la idea de recta tangente a una curva, definir la pendiente de una curva, definir una derivada y darle una interpretación geométrica. Calcular derivadas por medio del uso de la definición de límite.



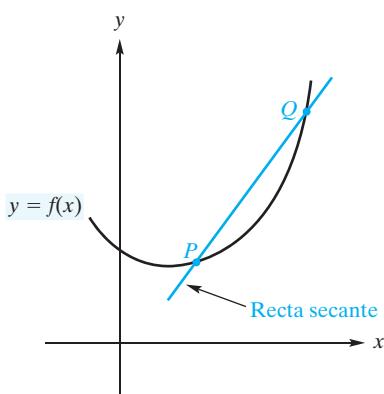
**FIGURA 11.1** Rectas tangentes a un círculo.

## 11.1 La derivada

Uno de los problemas principales de que se ocupa el cálculo es el de encontrar la pendiente de la *recta tangente* a un punto sobre una curva. Quizá en geometría usted vio que una recta tangente a un círculo, o *tangente*, es una recta que toca al círculo en un solo punto exacto (figura 11.1). Sin embargo, esta idea de una tangente no es muy útil en otra clase de curvas. Por ejemplo, en la figura 11.2(a), las rectas  $L_1$  y  $L_2$  intersecan la curva en un solo punto,  $P$ , exactamente. Aunque  $L_2$  no se consideraría como la tangente en este punto,  $L_1$  sí lo es. En la figura 11.2(b) se podría considerar de manera intuitiva que  $L_3$  es la tangente en el punto  $P$ , aunque  $L_3$  interseca la curva en otros puntos.



**FIGURA 11.2** Recta tangente en un punto.

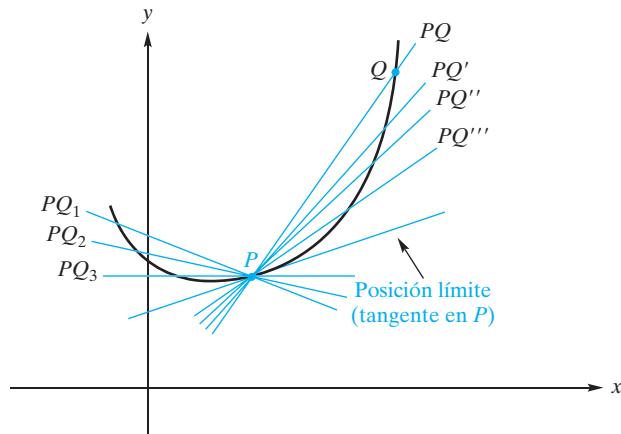


**FIGURA 11.3** Recta secante  $PQ$ .

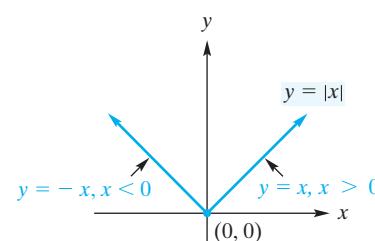
En los ejemplos anteriores puede verse que es necesario abandonar la idea de que una tangente es simplemente una línea que interseca una curva en solo un punto. Para obtener una definición conveniente de recta tangente, se utiliza el concepto de límite y la noción geométrica de *recta secante*. Una **recta secante** es una línea que interseca una curva en dos o más puntos.

Observe la gráfica de la función  $y = f(x)$  en la figura 11.3. Se desea definir la recta tangente en el punto  $P$ . Si  $Q$  es un punto diferente sobre la curva, la línea  $PQ$  es una línea secante. Si  $Q$  se mueve a lo largo de la curva y se acerca a  $P$  por la derecha (vea la figura 11.4),  $PQ'$ ,  $PQ''$ , etcétera, son líneas secantes características. Si  $Q$  se acerca a  $P$  por la izquierda,  $PQ_1$ ,  $PQ_2$ , etcétera, son las secantes. *En ambos casos, las líneas secantes se acercan a la misma posición límite*. Esta posición límite común de las líneas secantes se define como la **recta tangente** a la curva en  $P$ . Esta definición parece razonable, y se aplica a curvas en general y no sólo a círculos.

Una curva no tiene necesariamente una recta tangente en cada uno de sus puntos. Por ejemplo, la curva  $y = |x|$  no tiene una tangente en  $(0, 0)$ . Como se puede ver en la figura 11.5, una recta secante que pasa por  $(0, 0)$  y un punto cercano a su derecha en la curva, siempre será la recta  $y = x$ . Así, la posición límite de tales rectas secantes es



**FIGURA 11.4** La recta tangente es una posición límite de las rectas secantes.



**FIGURA 11.5** No hay recta tangente para la gráfica de  $y = |x|$  en  $(0, 0)$ .

también la recta  $y = x$ . Sin embargo, una recta secante que pase por  $(0, 0)$  y un punto cercano a su izquierda sobre la curva, siempre será la recta  $y = -x$ . Entonces, la posición límite de tales rectas secantes es también la recta  $y = -x$ . Como no existe una posición límite común, no hay una recta tangente en  $(0, 0)$ .

Ahora que se tiene una definición conveniente de la tangente a una curva en un punto, puede definirse la *pendiente de una curva* en un punto.

### DEFINICIÓN

La **pendiente de una curva** en un punto  $P$  es la pendiente, en caso de que exista, de la recta tangente en  $P$ .

Como la tangente en  $P$  es una posición límite de las líneas secantes  $PQ$ , ahora se considera la pendiente de la tangente como el valor límite de las pendientes de las rectas secantes conforme  $Q$  se acerca a  $P$ . Por ejemplo, considere la curva  $f(x) = x^2$  y las pendientes de algunas rectas secantes  $PQ$ , donde  $P = (1, 1)$ . Para el punto  $Q = (2.5, 6.25)$ , la pendiente de  $PQ$  (vea la figura 11.6) es

$$m_{PQ} = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{6.25 - 1}{2.5 - 1} = 3.5$$

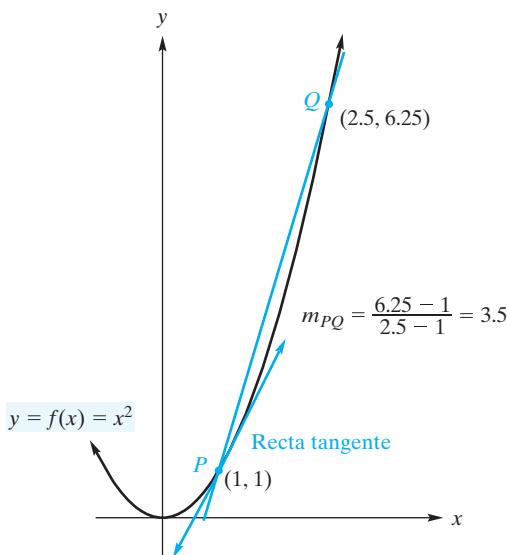
En la tabla 11.1 se incluyen otros puntos  $Q$  sobre la curva, así como las correspondientes pendientes de  $PQ$ . Observe que conforme  $Q$  se acerca a  $P$ , las pendientes de las rectas secantes parecen aproximarse al valor 2. Entonces, puede esperarse que la pendiente de la recta tangente indicada en  $(1, 1)$  sea 2. Esto se confirmará más adelante en el ejemplo 1. Pero primero se desea generalizar el procedimiento.

Para la curva  $y = f(x)$ , en la figura 11.7 se encontrará una expresión para la pendiente en el punto  $P = (a, f(a))$ . Si  $Q = (z, f(z))$ , la pendiente de la recta secante  $PQ$  es

$$m_{PQ} = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Si se llama  $h$  a la diferencia  $z - a$ , es posible escribir  $z$  como  $a + h$ . Aquí se debe tener  $h \neq 0$ , porque si  $h = 0$ , entonces  $z = a$  y no existirá recta secante. De acuerdo con esto,

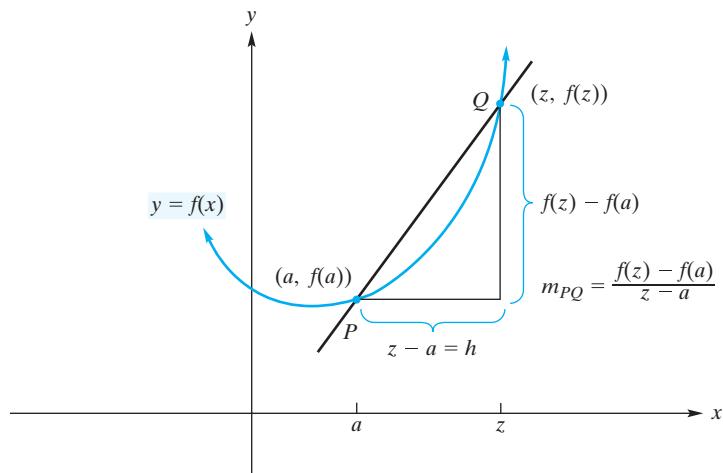
$$m_{PQ} = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$



**FIGURA 11.6** Recta secante a  $f(x) = x^2$  que pasa por  $(1, 1)$  y  $(2.5, 6.25)$ .

**TABLA 11.1** Pendientes de rectas secantes a la curva  $f(x) = x^2$  en  $P = (1, 1)$

$Q$	Pendiente de $PQ$
$(2.5, 6.25)$	$(6.25 - 1)/(2.5 - 1) = 3.5$
$(2, 4)$	$(4 - 1)/(2 - 1) = 3$
$(1.5, 2.25)$	$(2.25 - 1)/(1.5 - 1) = 2.5$
$(1.25, 1.5625)$	$(1.5625 - 1)/(1.25 - 1) = 2.25$
$(1.1, 1.21)$	$(1.21 - 1)/(1.1 - 1) = 2.1$
$(1.01, 1.0201)$	$(1.0201 - 1)/(1.01 - 1) = 2.01$

FIGURA 11.7 Recta secante que pasa por  $P$  y  $Q$ .

Cuál de estas dos formas para  $m_{PQ}$  es más conveniente depende de la naturaleza de la función  $f$ . Conforme  $Q$  se mueve a lo largo de la curva hacia  $P$ , entonces  $z$  se approxima a  $a$ . Esto significa que  $h$  se aproxima a cero. El valor límite de las pendientes de las rectas secantes —que es la pendiente de la recta tangente en  $(a, f(a))$ — es

$$m_{\tan} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

De nuevo, cuál de estas dos formas es la más conveniente —cuál de los límites es más fácil de determinar— depende de la naturaleza de la función  $f$ . En el ejemplo 1 se usará este límite para confirmar la conclusión anterior de que la pendiente de la recta tangente a la curva  $f(x) = x^2$  en  $(1, 1)$  es igual a 2.

### EJEMPLO 1 Determinación de la pendiente de una recta tangente

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = f(x) = x^2$  en el punto  $(1, 1)$ .

**Solución:** La pendiente es el límite en la ecuación (1) con  $f(x) = x^2$  y  $a = 1$ :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^2 - (1)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0}(2 + h) = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la recta tangente a  $y = x^2$  en  $(1, 1)$  tiene pendiente igual a 2. (Vea la figura 11.6).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

Es posible generalizar la ecuación (1) de manera que sea aplicable a cualquier punto  $(x, f(x))$  en una curva. Si se reemplaza  $a$  por  $x$  se obtiene una función, llamada *derivada* de  $f$ , cuya entrada es  $x$  y cuya salida es la pendiente de la recta tangente a la curva en  $(x, f(x))$ , siempre que la recta tangente *tenga* una pendiente. (Si la recta tangente existe pero es *vertical* entonces no tiene pendiente). Así se tiene la definición siguiente, que constituye la base del cálculo diferencial:

**DEFINICIÓN**

La **derivada** de una función  $f$  es la función, denotada por  $f'$  (se lee “ $f$  prima”) y definida por

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

siempre que este límite exista. Si  $f'(a)$  puede encontrarse (quizá no todas las  $f'(x)$  puedan encontrarse), se dice que  $f$  es **diferenciable** en  $a$ , y  $f'(a)$  se llama derivada de  $f$  en  $a$ , o derivada de  $f$  con respecto a  $x$  en  $a$ . El proceso de encontrar la derivada se llama **diferenciación**.

En la definición de la derivada, la expresión

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

donde  $z = x + h$ , se llama **cociente de diferencias**. Así,  $f'(x)$  es el límite de un cociente de diferencias.

### ● EJEMPLO 2 Uso de la definición para encontrar la derivada

*Si  $f(x) = x^2$ , encuentre la derivada de  $f$ .*

**Solución:** Al aplicar la definición de la derivada se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

Observe que al tomar el límite se trata a  $x$  como una constante, porque es  $h$  y no  $x$  la que cambia. Observe también que  $f'(x) = 2x$  define una función de  $x$ , que puede interpretarse como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $(x, f(x))$ . Por ejemplo, si  $x = 1$ , entonces la pendiente es  $f'(1) = 2(1) = 2$ , que confirma el resultado del ejemplo 1.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

**ADVERTENCIA**

La notación  $\frac{dy}{dx}$ , que se denomina *notación de Leibniz*, no debe considerarse como una fracción, aunque lo parezca. Es sólo un símbolo para una derivada. Aún no se le ha dado un significado a los símbolos individuales como  $dy$  y  $dx$ .

$\frac{dy}{dx}$	(derivada de $y$ respecto de $x$ )
$\frac{d}{dx}(f(x))$	(derivada de $f(x)$ respecto de $x$ )
$y'$	(y prima)
$D_x y$	( $D$ sub $x$ respecto de $y$ )
$D_x(f(x))$	( $D$ sub $x$ respecto de $f(x)$ )

Como la derivada proporciona la pendiente de la recta tangente,  $f'(a)$  es la pendiente de la recta tangente de la gráfica de  $y = f(x)$  en  $(a, f(a))$ .

Otras dos notaciones para derivada de  $f$  en  $a$  son

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} \quad y \quad y'(a)$$

### EJEMPLO 3 Determinación de una ecuación de una recta tangente

Si  $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$ , encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $(1, 7)$ .

**Solución:**

**Estrategia** Primero se determinará la pendiente de la recta tangente calculando la derivada y evaluándola en  $x = 1$ . Se usa este resultado y el punto  $(1, 7)$  en la forma punto-pendiente de la ecuación para una línea recta, y así se obtiene la ecuación de la recta tangente.

Se tiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(x+h)^2 + 2(x+h) + 3) - (2x^2 + 2x + 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 2x + 2h + 3 - 2x^2 - 2x - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h + 2) \end{aligned}$$

Por lo que

$$f'(x) = 4x + 2$$

y

$$f(1) = 4(1) + 2 = 6$$

Así, la recta tangente a la gráfica en  $(1, 7)$  tiene pendiente de 6. Una forma punto-pendiente de esta tangente es

$$y - 7 = 6(x - 1)$$

cuya forma pendiente-intersección es

$$y = 6x + 1$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25

### EJEMPLO 4 Determinación de la pendiente de una curva en un punto

Encuentre la pendiente de la curva  $y = 2x + 3$  en el punto donde  $x = 6$ .

**Solución:** La pendiente de la curva es la pendiente de la recta tangente. Si se hace  $y = f(x) = 2x + 3$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(x+h) + 3) - (2x + 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 = 2 \end{aligned}$$

Como  $dy/dx = 2$ , la pendiente cuando  $x = 6$ , o de hecho en cualquier punto, es 2. Observa que la curva es una línea recta que tiene la misma pendiente en cada punto.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

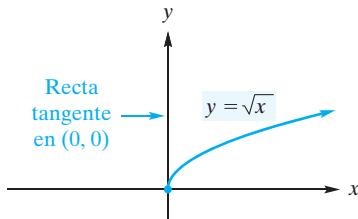
### EJEMPLO 5 Una función con una recta tangente vertical

Encuentre  $\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$ .

**Solución:** Si se establece que  $f(x) = \sqrt{x}$ , se tiene

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Debe familiarizarse con el proceso de racionalizar el *numerador*.



**FIGURA 11.8** Recta tangente vertical en  $(0, 0)$ .

Es conveniente que usted vea otras variables además de  $x$  y  $y$  involucradas en un problema. El ejemplo 6 ilustra el uso de otras variables.

Cuando  $h \rightarrow 0$ , tanto el numerador como el denominador tienden a cero. Esto puede evitarse si se racionaliza el *numerador*.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Observe que la función original,  $\sqrt{x}$ , está definida para  $x \geq 0$ , pero su derivada  $1/(2\sqrt{x})$ , está definida sólo cuando  $x > 0$ . La razón para esto es evidente si se considera la gráfica de  $y = \sqrt{x}$  en la figura 11.8. Cuando  $x = 0$ , la tangente es una línea vertical, por lo que su pendiente no está definida.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

En el ejemplo 5 se vio que la función  $y = \sqrt{x}$  no es diferenciable cuando  $x = 0$ , porque la recta tangente es vertical en ese punto. Vale la pena mencionar que  $y = |x|$  tampoco es diferenciable cuando  $x = 0$ , pero por una razón diferente: *no* existe recta tangente en ese punto (vea la figura 11.5). Ambos ejemplos muestran que el dominio de  $f'$  debe estar estrictamente contenido en el dominio de  $f$ .

Con frecuencia, la notación de Leibniz es útil porque hace énfasis en las variables independiente y dependiente implicadas. Por ejemplo, si la variable  $p$  es una función de la variable  $q$ , se habla de la derivada de  $p$  con respecto a  $q$ , que se escribe  $dp/dq$ .

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### DETERMINACIÓN DE LA DERIVADA DE $H$ CON RESPECTO A $t$

Si una pelota se lanza hacia arriba a una velocidad de 40 pies/s desde una altura de 6 pies, su altura  $H$  en pies, después de  $t$  segundos, está dada por  $H = 6 + 40t - 16t^2$ . Encuentre  $\frac{dH}{dt}$ .

#### EJEMPLO 6 Determinación de la derivada de $p$ con respecto a $q$

Si  $p = f(q) = \frac{1}{2q}$ , encuentre.

**Solución:** Este problema se resolverá primero mediante el límite  $h \rightarrow 0$  (el único que se ha utilizado hasta ahora) y después se empleará  $r \rightarrow q$  para ilustrar la otra variante del límite.

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dq} &= \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{2q} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(q+h) - f(q)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2(q+h)} - \frac{1}{2q}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{q-(q+h)}{2q(q+h)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q-(q+h)}{h(2q(q+h))} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(2q(q+h))} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2q(q+h)} = -\frac{1}{2q^2}\end{aligned}$$

También se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dq} &= \lim_{r \rightarrow q} \frac{f(r) - f(q)}{r - q} \\ &= \lim_{r \rightarrow q} \frac{\frac{1}{2r} - \frac{1}{2q}}{r - q} = \lim_{r \rightarrow q} \frac{\frac{q-r}{2rq}}{r-q} \\ &= \lim_{r \rightarrow q} \frac{-1}{2rq} = -\frac{1}{2q^2}\end{aligned}$$

Se deja a criterio del lector decidir cuál de las formas conduce al cálculo más simple del límite en este caso.

Observe que cuando  $q = 0$ , no existe la función ni la derivada.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

Recuerde que la derivada de  $y = f(x)$  en  $x$  no es otra cosa que un límite, a saber

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

de manera equivalente

$$\lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

cuyo uso se acaba de ilustrar. Aunque puede interpretarse la derivada como una función que da la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $(x, f(x))$ , esta interpretación sólo es una conveniencia geométrica que nos ayuda a entender su significado. El límite anterior puede existir independientemente de cualquier consideración geométrica. Como se verá después, existen otras interpretaciones útiles.

En la sección 11.4 se hará uso técnico de la siguiente relación entre diferenciabilidad y continuidad. Sin embargo, es de importancia fundamental y necesita entenderse desde el principio.

Si  $f$  es diferenciable en  $a$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .

Para establecer este resultado, se supondrá que  $f$  es diferenciable en  $a$ . Entonces  $f'(a)$  existe y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Considere el numerador  $f(a + h) - f(a)$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Se tiene

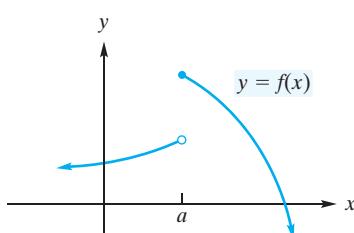
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (f(a + h) - f(a)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \cdot h \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(a + h) - f(a)) = 0$ . Esto significa que  $f(a + h) - f(a)$  tiende a 0 cuando  $h \rightarrow 0$ . En consecuencia,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$$

Como se estableció en la sección 10.3, esta condición significa que  $f$  es continua en  $a$ . Entonces, lo anterior prueba que  $f$  es continua en  $a$  cuando  $f$  es diferenciable ahí. De manera más simple, se dice que la **diferenciabilidad en un punto implica continuidad en dicho punto**.

Si una función no es continua en un punto, entonces no puede tener una derivada ahí. Por ejemplo, la función de la figura 11.9 es discontinua en  $a$ . La curva no tiene tangente en ese punto, por lo tanto, la función no es diferenciable ahí.

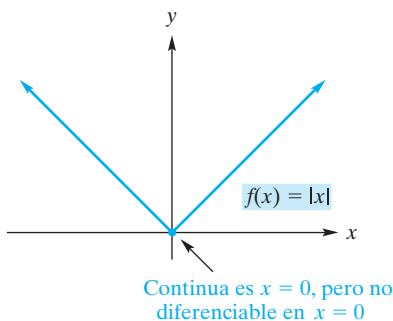


**FIGURA 11.9**  $f$  no es continua en  $a$ , entonces  $f$  no es diferenciable en  $a$ .

### EJEMPLO 7 Continuidad y diferenciabilidad

- Sea  $f(x) = x^2$ . La derivada,  $2x$ , está definida para todos los valores de  $x$ , de manera que  $f(x) = x^2$  debe ser continua para todos los valores de  $x$ .
- La función  $f(p) = \frac{1}{2p}$  no es continua en  $p = 0$  porque  $f$  no está definida ahí. Así que la derivada no existe en  $p = 0$ .





**FIGURA 11.10** La continuidad no implica diferenciabilidad.

Invertir el enunciado que afirma que la diferenciabilidad implica continuidad es *falso*. Es decir, es falso que la continuidad implique diferenciabilidad. En el ejemplo 8 se verá una función que es continua en un punto, pero no es diferenciable ahí.

### EJEMPLO 8 La continuidad no implica diferenciabilidad

La función  $y = f(x) = |x|$  es continua en  $x = 0$ . (Vea la figura 11.10.) Como se mencionó antes, no existe una recta tangente en  $x = 0$ . Por lo tanto, no existe derivada ahí. Esto muestra que la continuidad *no* implica diferenciabilidad.

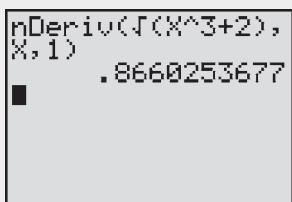


## TECNOLOGÍA

Muchas calculadoras graficadoras tienen una característica que permite estimar la derivada de una función en un punto. Con la calculadora TI-83 Plus se emplea el comando nDeriv; debe proporcionársele la función, la variable y el valor de la variable (separados por comas) con el siguiente formato

nDeriv(función, variable, valor de la variable)

Por ejemplo, en la figura 11.11 se calcula la derivada de  $f(x) = \sqrt{x^3 + 2}$  en  $x = 1$ . Así,  $f'(1) \approx 0.866$ .



**FIGURA 11.11** Derivada numérica.

Por otra parte, puede usarse el procedimiento del “límite del cociente de diferencias” para calcular esta derivada. Para usar el recurso tabular de una calculadora graficadora, puede indicarse  $f(x)$  como  $Y_1$ . Entonces, para  $Y_2$  se da la siguiente forma del cociente de diferencia:

$$(Y_1(1 + X) - Y_1(1))/X$$

(Aquí,  $x$  desempeña la función de  $h$ ). En la figura 11.12 se muestra una tabla para  $Y_2$  cuando  $x$  se aproxima a 0, tanto por la izquierda como por la derecha. Esta tabla sugiere que  $f'(1) \approx 0.866$ .

X	Y <sub>2</sub>
.01	.87252
.001	.86667
1E-4	.866667
1E-5	.8666667
.01	.86593
.001	.86538
1E-4	.86538
1E-5	.86538

X = -1 E -4

**FIGURA 11.12** Límite de un cociente de diferencia cuando  $x \rightarrow 0$ .

## Problemas 11.1

En los problemas 1 y 2 se da una función  $f$  y un punto  $P$  sobre su gráfica.

- (a) Encuentre la pendiente de la recta secante  $PQ$  para cada punto  $Q = (x, f(x))$ , cuyo valor  $x$  está dado en la tabla. Redondee sus respuestas a cuatro decimales.  
 (b) Use los resultados del inciso (a) para estimar la pendiente de la recta tangente en  $P$ .
- \*1.  $f(x) = x^3 + 3$ ,  $P = (-2, -5)$ .

valor x de Q	-3	-2.5	-2.2	-2.1	-2.01	-2.001
$m_{PQ}$						

2.  $f(x) = e^{2x}$ ,  $P = (0, 1)$

valor x de Q	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$m_{PQ}$						

En los problemas 3 a 18, emplee la definición de la derivada para encontrarla en cada caso.

3.  $f'(x)$  si  $f(x) = x$   
 4.  $f'(x)$  si  $f(x) = 4x - 1$   
 5.  $\frac{dy}{dx}$  si  $y = 3x + 5$   
 6.  $\frac{dy}{dx}$  si  $y = -5x$

7.  $\frac{d}{dx}(5 - 4x)$  8.  $\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$   
 9.  $f'(x)$  si  $f(x) = 3$  10.  $f'(x)$  si  $f(x) = 7.01$   
 11.  $\frac{d}{dx}(x^2 + 4x - 8)$  12.  $y'$  si  $y = x^2 + 5x + 1$   
 13.  $\frac{dp}{dq}$  si  $p = 3q^2 + 2q + 1$   
 14.  $\frac{d}{dx}(x^2 - x - 3)$  \*15.  $y'$  si  $y = \frac{6}{x}$   
 16.  $\frac{dC}{dq}$  si  $C = 7 + 2q - 3q^2$   
 17.  $f'(x)$  si  $f(x) = \sqrt{x + 2}$   
 18.  $H'(x)$  si  $H(x) = \frac{3}{x - 2}$   
 \*19. Encuentre la pendiente de la curva  $y = x^2 + 4$  en el punto  $(-2, 8)$ .  
 20. Encuentre la pendiente de la curva  $y = 1 - x^2$  en el punto  $(1, 0)$ .  
 21. Encuentre la pendiente de la curva  $y = 4x^2 - 5$  cuando  $x = 0$ .  
 22. Encuentre la pendiente de la curva  $y = \sqrt{x}$  cuando  $x = 1$ .

En los problemas del 23 a 28, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

23.  $y = x + 4; (3, 7)$

24.  $y = 3x^2 - 4; (1, -1)$

\*25.  $y = x^2 + 2x + 3; (1, 6)$

26.  $y = (x - 7)^2; (6, 1)$

27.  $y = \frac{3}{x - 1}; (2, 3)$

28.  $y = \frac{5}{1 - 3x}; (2, -1)$

29. **Bancos** Las ecuaciones pueden incluir derivadas de funciones. En un artículo sobre desregulación de la tasa de interés, Christofi y Agapos<sup>1</sup> resuelven la ecuación

$$r = \left( \frac{\eta}{1 + \eta} \right) \left( r_L - \frac{dC}{dD} \right)$$

para  $\eta$  (letra griega “eta”). Aquí  $r$  es la tasa de depósito pagada por los bancos comerciales,  $r_L$  es la tasa ganada por estos bancos,  $C$  es el costo administrativo de transformar los depósitos en activos que pagan rendimiento,  $D$  es el nivel de los depósitos de ahorro y  $\eta$  es la elasticidad de los depósitos con respecto a la tasa de depósito. Encuentre  $\eta$ .

En los problemas 30 y 31 utilice su calculadora graficadora para estimar las derivadas de las funciones en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres decimales.

30.  $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x}; x = 1, x = 2$

31.  $f(x) = e^x(4x - 7); x = 0, x = 1.5$

En los problemas 32 y 33, utilice el enfoque del “límite del cociente de diferencias” para estimar  $f'(x)$  en los valores indicados de  $x$ .

Redondee sus respuestas a tres decimales.

32.  $f(x) = \frac{e^x}{x + 1}; x = 1, x = 10$

33.  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x^3 - 3}; x = 2, x = -4$

34. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva  $f(x) = x^2 + x$  en el punto  $(-2, 2)$ . Grafique la curva y la recta tangente. Observe que la recta tangente es una buena aproximación a la curva cerca del punto de tangencia.

35. La derivada de  $f(x) = x^3 - x + 2$  es  $f'(x) = 3x^2 - 1$ . Grafique  $f$  y su derivada  $f'$ . Observe que hay dos puntos sobre la gráfica de  $f$  donde la recta tangente es horizontal. Para los valores  $x$  de esos puntos, ¿cuáles son los valores correspondientes de  $f'(x)$ ? ¿Por qué se esperan esos resultados? Observe los intervalos en los que  $f'(x)$  es positiva. Note que las rectas tangentes a la gráfica de  $f$  tienen pendientes positivas en esos intervalos. Observe los intervalos donde  $f'(x)$  es negativa. Note que las rectas tangentes a la gráfica de  $f$  tienen pendientes negativas en este intervalo.

En los problemas 36 y 37, verifique la identidad

$(z - x)(\sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i}) = z^n - x^n$  para los valores indicados de  $n$  y calcule la derivada con el uso de la forma  $z \rightarrow x$  de la definición de la derivada en la ecuación (2).

36.  $n = 4, n = 3, n = 2; f'(x)$  si  $f(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2$

37.  $n = 5, n = 3; f'(x)$  si  $f(x) = 4x^5 - 3x^3$

## OBJETIVO

Desarrollar reglas de diferenciación básicas, a saber, fórmulas para la derivada de una constante, de  $x^n$ , de una constante por una función y de la suma y diferencia de funciones.

## 11.2 Reglas para la diferenciación

Quizá usted esté de acuerdo en que la diferenciación directa de una función por medio de la definición de la derivada puede ser un proceso tedioso. Por fortuna, existen reglas que permiten efectuar la diferenciación en forma completamente mecánica y eficiente. Con ellas se evita el uso directo de límites. En esta sección, se verán algunas de esas reglas.

Primero se mostrará que la derivada de una función constante es cero. Recuerde que la gráfica de una función constante,  $f(x) = c$  es una línea horizontal (vea la figura 11.13) que tiene pendiente nula en todo punto. Esto significa que  $f'(x) = 0$ , independientemente del valor de  $x$ . Como prueba formal de este resultado, se aplica la definición de la derivada a  $f(x) = c$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

De esta manera, se tiene la primera regla:

### REGLA 1 Derivada de una constante

Si  $c$  es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Esto es, la derivada de una función constante es cero.

<sup>1</sup>A. Christofi y A. Agapos, “Interest Rate Deregulation: An Empirical Justification”, *Review of Business and Economic Research*, XX, núm. 1 (1984), 39-49.

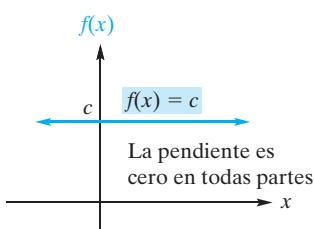


FIGURA 11.13 La pendiente de una función constante es 0.

● **EJEMPLO 1** Derivadas de funciones constantes

- $\frac{d}{dx}(3) = 0$  porque 3 es una función constante.
- Si  $g(x) = \sqrt{5}$  entonces  $g'(x) = 0$  porque  $g$  es una función constante. Por ejemplo, la derivada de  $g$  cuando  $x = 4$  es  $g'(4) = 0$ .
- Si  $s(t) = (1\,938\,623)^{807.4}$ , entonces  $ds/dt = 0$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 ● ● ●

La siguiente regla da una fórmula para la derivada de  $x$  elevada a una potencia constante, es decir, la derivada de  $f(x) = x^n$ , donde  $n$  es un número real arbitrario. Una función de esta forma se llama **función potencia**. Por ejemplo,  $f(x) = x^2$  es una función potencia. Aunque la regla enunciada es válida para todo número real  $n$ , se establecerá sólo en el caso en que  $n$  sea un entero positivo. La regla es tan importante para el cálculo diferencial que garantiza un desarrollo detallado, sólo en el caso en el que  $n$  es un entero positivo. Ya sea que se use la forma  $h \rightarrow 0$  o la forma  $z \rightarrow x$  de la definición de derivada, el cálculo de  $\frac{dx^n}{dx}$  es instructivo y proporciona una buena práctica con la notación de sumatoria, cuyo uso es esencial en capítulos posteriores. Se proporciona un cálculo para cada posibilidad. Como podrá ver, para usar la forma  $h \rightarrow 0$  de la ecuación 2 de la sección 11.1, es necesario expandir  $(x + h)^n$ , y para emplear la forma  $z \rightarrow x$ , debe factorizarse  $z^n - x^n$ .

Para la primera de estas opciones se recuerda el *teorema binomial* que se expuso en la sección 9.2:

$$(x + h)^n = \sum_{i=0}^n {}_n C_i x^{n-i} h^i$$

donde las  ${}_n C_i$  son los coeficientes binomiales, cuyas descripciones precisas, excepto para  ${}_n C_0 = 1$  y  ${}_n C_1 = n$ , no son necesarias aquí (pero se dan en la sección 8.2). Para la segunda se tiene

$$(z - x) \left( \sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i} \right) = z^n - x^n$$

que se verifica de manera sencilla al realizar la multiplicación y con el uso de las reglas para manipular sumatorias que se dieron en la sección 1.5. De hecho, se tiene

$$\begin{aligned} (z - x) \left( \sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i} \right) &= z \sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i} - x \sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} x^{i+1} z^{n-1-i} \\ &= \left( z^n + \sum_{i=1}^{n-1} x^i z^{n-i} \right) - \left( \sum_{i=0}^{n-2} x^{i+1} z^{n-1-i} + x^n \right) \\ &= z^n - x^n \end{aligned}$$

donde se deja al lector la verificación de que las sumatorias desde el segundo hasta el último renglón realmente se cancelan como se muestra.

**REGLA 2** Derivada de  $x^n$ 

Si  $n$  es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Esto es, la derivada de una potencia constante de  $x$  es igual al exponente multiplicado por  $x$  elevada a una potencia menor en una unidad que la de la potencia dada.

Para  $n$  que es un entero positivo, si  $f(x) = x^n$ , la definición de la derivada da

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

De acuerdo con el desarrollo anterior de  $(x+h)^n$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=0}^n {}_n C_i x^{n-i} h^i - x^n}{h} \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n {}_n C_i x^{n-i} h^i}{h} \\ &\stackrel{(2)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sum_{i=1}^n {}_n C_i x^{n-i} h^{i-1}}{h} \\ &\stackrel{(3)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n {}_n C_i x^{n-i} h^{i-1} \\ &\stackrel{(4)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \left( nx^{n-1} + \sum_{i=2}^n {}_n C_i x^{n-i} h^{i-1} \right) \\ &\stackrel{(5)}{=} nx^{n-1} \end{aligned}$$

donde los pasos faltantes se justifican de la manera siguiente:

- (1) El término  $i = 0$  en la sumatoria es  ${}_n C_0 x^n h^0 = x^n$  de manera que se cancela con el último término, separado:  $-x^n$ .
- (2) Es posible extraer un factor común de  $h$  de cada término en la suma.
- (3) Éste es el paso crucial. Las expresiones separadas por el signo de igual son límites cuando  $h \rightarrow 0$  de funciones de  $h$  que son iguales para  $h \neq 0$ .
- (4) El término  $i = 1$  en la sumatoria es  ${}_n C_1 x^{n-1} h^0 = nx^{n-1}$ . Es el único que no contiene un factor de  $h$  y se separa de los otros términos.
- (5) Por último, en la determinación del límite se hace uso del hecho de que el término aislado es independiente de  $h$ ; mientras que los otros contienen  $h$  como un factor y por lo tanto tienen límite igual a 0 cuando  $h \rightarrow 0$ .

Ahora, con el empleo del límite  $z \rightarrow x$  para la definición de la derivada y  $f(x) = x^n$ , se tiene

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{z^n - x^n}{z - x}$$

Por el estudio previo sobre la factorización de  $z^n - x^n$  se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{(z-x) \left( \sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i} \right)}{z-x} \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{z \rightarrow x} \sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i} \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} x^i x^{n-1-i} \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1} \\ &\stackrel{(4)}{=} nx^{n-1} \end{aligned}$$

donde, ahora, los pasos faltantes se justifican de la manera siguiente:

- (1) Aquí, el paso crucial se da primero. Las expresiones separadas por el signo de igual son límites cuando  $z \rightarrow x$  de funciones de  $z$  que son iguales para  $z \neq x$ .
- (2) El límite se da por evaluación porque la expresión es un polinomio en la variable  $z$ .
- (3) Se emplea una regla obvia de los exponentes.
- (4) Cada término en la suma es  $x^{n-1}$ , independiente de  $i$ , y hay  $n$  de esos términos.

### EJEMPLO 2 Derivadas de potencias de $x$

- Según la regla 2,  $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$ .
- Si  $F(x) = x = x^1$ , entonces  $F'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$ . Así, la derivada de  $x$  con respecto a  $x$  es 1.
- Si  $f(x) = x^{-10}$ , entonces  $f'(x) = -10x^{-10-1} = -10x^{-11}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

Cuando se aplica una regla de diferenciación a una función, algunas veces la función debe reescribirse primero, de manera que tenga la forma apropiada para esa regla.

Por ejemplo, para diferenciar  $f(x) = \frac{1}{x^{10}}$  primero debe reescribirse  $f$  como  $f(x) = x^{-10}$  y luego proceder como en el ejemplo 2(c).

### EJEMPLO 3 Reescribir funciones en la forma $x^n$

- Para diferenciar  $y = \sqrt{x}$ , se reescribe  $\sqrt{x}$  como  $x^{1/2}$  de modo que tenga la forma  $x^n$ . Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

que coincide con el cálculo del límite del ejemplo 5 de la sección 11.1.

- Sea  $h(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ . Para aplicar la regla 2, debe reescribirse  $h(x)$  como  $h(x) = x^{-3/2}$  de modo que tenga la forma  $x^n$ . Se tiene

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-3/2}) = -\frac{3}{2}x^{(-3/2)-1} = -\frac{3}{2}x^{-5/2}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 39



#### ADVERTENCIA

En el ejemplo 3(b), no reescriba  $\frac{1}{x\sqrt{x}}$  como  $\frac{1}{x^{3/2}}$  y después sólo derive el denominador.

Ahora que puede decirse inmediatamente que la derivada de  $x^3$  es  $3x^2$ , surge la pregunta de qué hacer con la derivada de un *múltiplo* de  $x^3$ , como  $5x^3$ . La siguiente regla trata sobre la diferenciación de una constante por una función.

### REGLA 3 Regla del factor constante

Si  $f$  es una función diferenciable y  $c$  una constante, entonces  $cf(x)$  es diferenciable, y

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

Esto es, la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

*Demostración.* Si  $g(x) = cf(x)$ , al aplicar la definición de la derivada de  $g$  se obtiene

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

Pero  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ , es  $f'(x)$ ; por lo que  $g'(x) = cf'(x)$ .

 **EJEMPLO 4** Diferenciación de una constante por una función

Diferencie las siguientes funciones.

a.  $g(x) = 5x^3$

**Solución:** Aquí  $g$  es una constante (5) por una función ( $x^3$ ). Así

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(5x^3) &= 5 \frac{d}{dx}(x^3) && \text{(Regla 3)} \\ &= 5(3x^{3-1}) = 15x^2 && \text{(Regla 2)}\end{aligned}$$

b.  $f(q) = \frac{13q}{5}$

**Solución:**



**ADVERTENCIA**

Para derivar  $f(x) = (4x)^3$ , se puede estar tentado a escribir  $f'(x) = 3(4x)^2$ .

**¡Esto es incorrecto!** ¿Por qué? La razón es que la regla 2 se aplica a una potencia de la variable  $x$ , **no** a una potencia de una expresión que incluya a  $x$ , como  $4x$ . Para aplicar estas reglas, es necesario obtener una forma adecuada para  $f(x)$ . Se puede reescribir  $(4x)^3$  como  $4^3x^3 = 64x^3$ . Así,

$$f'(x) = 64 \frac{d}{dx}(x^3) = 64(3x^2) = 192x^2$$

**Estrategia** Primero se reescribe  $f$  como una constante por una función y después se aplica la regla 2.

Como  $\frac{13q}{5} = \frac{13}{5}q$ ,  $f$  es la constante  $\frac{13}{5}$  por la función  $q$ . Así,

$$\begin{aligned}f'(q) &= \frac{13}{5} \frac{d}{dq}(q) && \text{(Regla 3)} \\ &= \frac{13}{5} \cdot 1 = \frac{13}{5} && \text{(Regla 2)}\end{aligned}$$

c.  $y = \frac{0.25}{\sqrt[5]{x^2}}$

**Solución:**  $y$  puede expresarse como una constante por una función:

$$y = 0.25 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = 0.25x^{-2/5}$$

De aquí que,

$$\begin{aligned}y' &= 0.25 \frac{d}{dx}(x^{-2/5}) && \text{(Regla 3)} \\ &= 0.25 \left( -\frac{2}{5}x^{-7/5} \right) = -0.1x^{-7/5} && \text{(Regla 2)}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

La regla siguiente se refiere a la derivada de sumas y diferencias de funciones.

**REGLA 4** Derivada de una suma o de una diferencia

Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables, entonces  $f + g$  y  $f - g$  son diferenciables y

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

y

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$$

Esto es, la derivada de la suma (o diferencia) de dos funciones es la suma (o diferencia) de sus derivadas.

*Demostración.* Para el caso de una suma, si  $F(x) = f(x) + g(x)$ , al aplicar la definición de la derivada de  $F$  se obtiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))}{h} \quad (\text{al reagrupar}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \end{aligned}$$

Como el límite de una suma es la suma de los límites,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Pero esos dos límites son  $f'(x)$  y  $g'(x)$ . Entonces,

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

La demostración para la derivada de una diferencia de dos funciones es similar.

La regla 4 puede extenderse a la derivada de cualquier número de sumas y diferencias de funciones. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x) + h(x) + k(x)] = f'(x) - g'(x) + h'(x) + k'(x)$$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### DIFERENCIACIÓN DE SUMAS Y DIFERENCIAS DE FUNCIONES

Si la función de ingreso para cierto producto es  $r(q) = 50q - 0.3q^2$ , determine la derivada de esta función, también conocida como el ingreso marginal.

### EJEMPLO 5 Diferenciación de sumas y diferencias de funciones

Diferencie las siguientes funciones.

a.  $F(x) = 3x^5 + \sqrt{x}$

**Solución:** Aquí  $F$  es la suma de las dos funciones,  $3x^5$  y  $\sqrt{x}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}(3x^5) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \quad (\text{Regla 4}) \\ &= 3\frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \quad (\text{Regla 3}) \\ &= 3(5x^4) + \frac{1}{2}x^{-1/2} = 15x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{Regla 2}) \end{aligned}$$

b.  $f(z) = \frac{z^4}{4} - \frac{5}{z^{1/3}}$

**Solución:** Para aplicar las reglas, se reescribe  $f(z)$  en la forma  $f(z) = \frac{1}{4}z^4 - 5z^{-1/3}$ .

Como  $f$  es la diferencia de dos funciones,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{4}z^4\right) - \frac{d}{dz}(5z^{-1/3}) \quad (\text{Regla 4}) \\ &= \frac{1}{4}\frac{d}{dz}(z^4) - 5\frac{d}{dz}(z^{-1/3}) \quad (\text{Regla 3}) \\ &= \frac{1}{4}(4z^3) - 5\left(-\frac{1}{3}z^{-4/3}\right) \quad (\text{Regla 2}) \\ &= z^3 + \frac{5}{3}z^{-4/3} \end{aligned}$$

c.  $y = 6x^3 - 2x^2 + 7x - 8$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(6x^3) - \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(7x) - \frac{d}{dx}(8) \\ &= 6\frac{d}{dx}(x^3) - 2\frac{d}{dx}(x^2) + 7\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 6(3x^2) - 2(2x) + 7(1) - 0 \\
 &= 18x^2 - 4x + 7
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 47



En los ejemplos 6 y 7 es necesario reescribir la función dada en una forma en la que se apliquen las reglas de diferenciación.

### EJEMPLO 6 Determinación de una derivada

Encuentre la derivada de  $f(x) = 2x(x^2 - 5x + 2)$  cuando  $x = 2$ .

**Solución:** Se multiplica y después se diferencia cada término:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x^3 - 10x^2 + 4x \\
 f'(x) &= 2(3x^2) - 10(2x) + 4(1) \\
 &= 6x^2 - 20x + 4 \\
 f'(2) &= 6(2)^2 - 20(2) + 4 = -12
 \end{aligned}$$

### EJEMPLO 7 Determinación de una ecuación de una recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \frac{3x^2 - 2}{x}$$

cuando  $x = 1$ .

**Solución:**

**Estrategia** Primero se encuentra  $\frac{dy}{dx}$ , que da la pendiente de la recta tangente en cualquier punto. Al evaluar  $\frac{dy}{dx}$  en  $x = 1$ , se obtiene la pendiente de la recta tangente requerida. Después se determina la coordenada  $y$  del punto sobre la curva cuando  $x = 1$ . Por último, se sustituye la pendiente y ambas coordenadas del punto en la forma punto-pendiente para obtener la ecuación de la recta tangente.

Si se reescribe  $y$  como una diferencia de dos funciones, se tiene

$$y = \frac{3x^2}{x} - \frac{2}{x} = 3x - 2x^{-1}$$

Por lo que,

$$\frac{dy}{dx} = 3(1) - 2((-1)x^{-2}) = 3 + \frac{2}{x^2}$$

La pendiente de la recta tangente a la curva cuando  $x = 1$  es

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 3 + \frac{2}{1^2} = 5$$

Para encontrar la coordenada  $y$  del punto sobre la curva en  $x = 1$ , se evalúa  $y = \frac{3x^2 - 2}{x}$  en  $x = 1$ . Esto da como resultado

$$y = \frac{3(1)^2 - 2}{1} = 1$$

De aquí que el punto  $(1, 1)$  está tanto sobre la curva como sobre la recta tangente. Entonces, una ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = 5(x - 1)$$

En la forma pendiente-intersección, se tiene

$$y = 5x - 4$$



#### ADVERTENCIA

Para obtener el valor de  $y$  del punto sobre la curva cuando  $x = 1$ , se evalúa la función original, no la función derivada.

## Problemas 11.2

En los problemas 1 a 74, diferencie las funciones.

\*1.  $f(x) = 5$

\*3.  $y = x^6$

5.  $y = x^{80}$

\*7.  $f(x) = 9x^2$

9.  $g(w) = 8w^7$

11.  $y = \frac{2}{3}x^4$

13.  $f(t) = \frac{t^7}{25}$

15.  $f(x) = x + 3$

17.  $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$

19.  $g(p) = p^4 - 3p^3 - 1$

21.  $y = x^3 - \sqrt{x}$

23.  $y = -13x^3 + 14x^2 - 2x + 3$

24.  $V(r) = r^8 - 7r^6 + 3r^2 + 1$

25.  $f(x) = 2(13 - x^4)$

27.  $g(x) = \frac{13 - x^4}{3}$

29.  $h(x) = 4x^4 + x^3 - \frac{9x^2}{2} + 8x$

30.  $k(x) = -2x^2 + \frac{5}{3}x + 11$

32.  $p(x) = \frac{x^7}{7} + \frac{2x}{3}$

34.  $f(x) = 2x^{-14/5}$

36.  $y = 5x^3 - x^{-2/5}$

38.  $y = \sqrt{x^7}$

40.  $y = 4\sqrt[8]{x^2}$

42.  $f(s) = 2s^{-3}$

44.  $f(x) = 100x^{-3} + 10x^{1/2}$

46.  $f(x) = \frac{2}{x^3}$

48.  $y = \frac{1}{4x^5}$

50.  $y = \frac{1}{x^2}$

52.  $g(x) = \frac{7}{9x}$

54.  $\Phi(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3}$

56.  $f(z) = 3z^{1/4} - 12^2 - 8z^{-3/4}$

57.  $q(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8x^2}}$

59.  $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$

61.  $y = x^2\sqrt{x}$

63.  $f(x) = x(3x^2 - 10x + 7)$

65.  $f(x) = x^3(3x)^2$

67.  $v(x) = x^{-2/3}(x + 5)$

69.  $f(q) = \frac{3q^2 + 4q - 2}{q}$

71.  $f(x) = (x + 1)(x + 3)$

2.  $f(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^{2/3}$

4.  $f(x) = x^{21}$

6.  $y = x^{5.3}$

8.  $y = 4x^3$

10.  $v(x) = x^e$

12.  $f(p) = \sqrt{3}p^4$

14.  $y = \frac{x^7}{7}$

16.  $f(x) = 3x - 2$

18.  $F(x) = 5x^2 - 9x$

20.  $f(t) = -13t^2 + 14t + 1$

22.  $y = -8x^4 + \ln 2$

24.  $F(x) = 5x^2 - 9x$

26.  $\phi(t) = 5(t^3 - 3^2)$

28.  $f(x) = \frac{5(x^4 - 6)}{2}$

30.

31.  $f(x) = \frac{3x^4}{10} + \frac{7}{3}x^3$

33.  $f(x) = x^{3/5}$

35.  $y = x^{3/4} + 2x^{5/3}$

37.  $y = 11\sqrt{x}$

\*39.  $f(r) = 6\sqrt[3]{r}$

41.  $f(x) = x^{-4}$

43.  $f(x) = x^{-3} + x^{-5} - 2x^{-6}$

45.  $y = \frac{1}{x}$

\*47.  $y = \frac{8}{x^5}$

49.  $g(x) = \frac{4}{3x^3}$

51.  $f(t) = \frac{1}{2t}$

53.  $f(x) = \frac{x}{7} + \frac{7}{x}$

55.  $f(x) = -9x^{1/3} + 5x^{-2/5}$

58.  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}$

60.  $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

62.  $f(x) = (2x^3)(4x^2)$

64.  $f(x) = x^3(3x^6 - 5x^2 + 4)$

66.  $s(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt[4]{x} - 6x + 3)$

68.  $f(x) = x^{3/5}(x^2 + 7x + 11)$

70.  $f(w) = \frac{w - 5}{w^5}$

72.  $f(x) = x^2(x - 2)(x + 4)$

73.  $w(x) = \frac{x^2 + x^3}{x^2}$

74.  $f(x) = \frac{7x^3 + x}{6\sqrt{x}}$

Para cada curva en los problemas 75 a 78, encuentre las pendientes en los puntos indicados.

\*75.  $y = 3x^2 + 4x - 8; (0, -8), (2, 12), (-3, 7)$

76.  $y = 5 - 6x - 2x^3; (0, 5), (\frac{3}{2}, -\frac{43}{4}), (-3, 77)$

77.  $y = 4; \text{ cuando } x = -4, x = 7, x = 22$

78.  $y = 3x - 4\sqrt{x}; \text{ cuando } x = 4, x = 9, x = 25$

En los problemas 79 a 82, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado.

79.  $y = 4x^2 + 5x + 6; (1, 15)$

80.  $y = \frac{1 - x^2}{5}; (4, -3)$

81.  $y = \frac{1}{x^3}; (2, \frac{1}{8})$

82.  $y = -\sqrt[3]{x}; (8, -2)$

83. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva

$y = 3 + x - 5x^2 + x^4$

cuando  $x = 0$ .

84. Repita el problema 83 para la curva

$y = \frac{\sqrt{x}(2 - x^2)}{x}$

cuando  $x = 4$ .

85. Encuentre todos los puntos sobre la curva

$y = \frac{5}{2}x^2 - x^3$

en los que la recta tangente es horizontal.

86. Repita el problema 85 para la curva

$y = \frac{x^5}{5} - x + 1$

87. Encuentre todos los puntos sobre la curva

$y = x^2 - 5x + 3$

en los que la pendiente es 1.

88. Repita el problema 87 para la curva

$y = x^4 - 31x + 11$

89. Si  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$  evalúe la expresión

$\frac{x - 1}{2x\sqrt{x}} - f'(x)$

90. **Economía** Eswaran y Kotwal<sup>2</sup> estudian economías agrarias en las que hay dos tipos de trabajadores, permanentes y eventuales. Los trabajadores permanentes son empleados que tienen contratos a largo plazo y pueden recibir prestaciones como vacaciones y atención médica. Los trabajadores eventuales se contratan por día y realizan trabajos menores y rutinarios como desherbado, recolección y trillado. La diferencia  $z$  en el costo del valor presente de contratar a un trabajador permanente y a uno eventual está dada por

$$z = (1 + b)w_p - bw_c$$

<sup>2</sup>M. Eswaran y A. Kotwal, "A Theory of Two-Tier Labor Markets in Agrarian Economies", *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), 162-177.

donde  $w_p$  y  $w_c$  son los salarios de trabajo permanente y eventual, respectivamente,  $b$  es una constante y  $w_p$  es una función de  $w_c$ . Eswaran y Kotwal afirman que

$$\frac{dz}{dw_c} = (1 + b) \left[ \frac{dw_p}{dw_c} - \frac{b}{1 + b} \right]$$

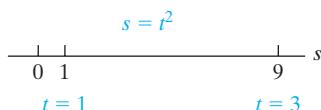
Verifique esta afirmación.

91. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $y = x^3 - 3x$  en el punto  $(2, 2)$ . Grafique la función y la recta tangente sobre la misma pantalla. Observe que la línea pasa por  $(2, 2)$  y parece ser tangente a la curva.

92. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $y = \sqrt[3]{x}$  en el punto  $(-8, -2)$ . Grafique la función y la recta tangente sobre la misma pantalla. Observe que la línea pasa por  $(-8, -2)$  y parece ser tangente a la curva.

## OBJETIVO

Explicar la tasa instantánea de cambio de una función por medio de la velocidad, e interpretar la derivada como una tasa instantánea de cambio. Desarrollar el concepto "marginal", que se utiliza con frecuencia en administración y economía.



**FIGURA 11.14** Movimiento a lo largo de una recta numérica.

## 11.3 La derivada como una razón de cambio

Se ha dado una interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Históricamente, una aplicación importante de la derivada implica el movimiento de un objeto que viaja en línea recta. Esto proporciona una manera conveniente de interpretar la derivada como una *razón de cambio*.

Para denotar el cambio en una variable como  $x$ , comúnmente se usa el símbolo  $\Delta x$  (se lee "delta  $x$ "). Por ejemplo, si  $x$  cambia de 1 a 3, entonces el cambio en  $x$  es  $\Delta x = 3 - 1 = 2$ . El nuevo valor de  $x$  ( $= 3$ ) es el valor viejo más el cambio, o  $1 + \Delta x$ . De manera similar, si  $t$  se incrementa en  $\Delta t$ , el nuevo valor es  $t + \Delta t$ . Se usará la notación  $\Delta$  en el análisis siguiente.

Suponga que un objeto se mueve a lo largo de la recta numérica de la figura 11.14 de acuerdo con la ecuación

$$s = f(t) = t^2$$

donde  $s$  es la posición del objeto en el tiempo  $t$ . Esta ecuación se llama *ecuación de movimiento* y  $f$  se denomina **función de posición**. Suponga que  $t$  está en segundos y  $s$  en metros. En  $t = 1$ , la posición es  $s = f(1) = 1^2 = 1$ , y en  $t = 3$  la posición es  $s = f(3) = 3^2 = 9$ . En este intervalo de dos segundos el objeto tuvo un cambio de posición, o *desplazamiento*, de  $9 - 1 = 8$  m y la *velocidad promedio* del objeto se define como

$$v_{\text{prom}} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{longitud del intervalo de tiempo}} \quad (1)$$

$$= \frac{8}{2} = 4 \text{ m/s}$$

Decir que la velocidad promedio es de 4 m/s de  $t = 1$  a  $t = 3$ , significa que *en promedio*, la posición del objeto cambia 4 m hacia la derecha cada segundo durante ese intervalo de tiempo. Sean  $\Delta s$  y  $\Delta t$  los cambios en los valores  $s$  y  $t$ , respectivamente. Entonces la velocidad promedio está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4 \text{ m/s} \quad (\text{para el intervalo de } t = 1 \text{ a } t = 3)$$

La razón  $\Delta s/\Delta t$  se llama también **razón de cambio promedio de  $s$  con respecto a  $t$**  en el intervalo de  $t = 1$  a  $t = 3$ .

Ahora, considere que el intervalo de tiempo es de sólo 1 segundo (esto es,  $\Delta t = 1$ ). Entonces, para el intervalo *más corto* de  $t = 1$  a  $t = 1 + \Delta t = 2$ , se tiene  $f(2) = 2^2 = 4$ , por lo que

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(1)}{\Delta t} = \frac{4 - 1}{1} = 3 \text{ m/s}$$

De manera más general, en el intervalo de  $t = 1$  a  $t = 1 + \Delta t$ , el objeto se mueve de la posición  $f(1)$  a la posición  $f(1 + \Delta t)$ . Entonces, su desplazamiento es

$$\Delta s = f(1 + \Delta t) - f(1)$$

Como el intervalo de tiempo tiene una duración  $\Delta t$ , la velocidad promedio del objeto está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}$$

TABLA 11.2

Duración del intervalo $\Delta t$	Intervalo de tiempo	Velocidad promedio
	$t = 1$ a $t = 1 + \Delta t$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}$
0.1	$t = 1$ a $t = 1.1$	2.1 m/s
0.07	$t = 1$ a $t = 1.07$	2.07 m/s
0.05	$t = 1$ a $t = 1.05$	2.05 m/s
0.03	$t = 1$ a $t = 1.03$	2.03 m/s
0.01	$t = 1$ a $t = 1.01$	2.01 m/s
0.001	$t = 1$ a $t = 1.001$	2.001 m/s

Si  $\Delta t$  se volviera cada vez más pequeño, la velocidad promedio en el intervalo de  $t = 1$  a  $t = 1 + \Delta t$  sería cercana a lo que podría llamarse la *velocidad instantánea* en el tiempo  $t = 1$ , es decir, la velocidad en un *punto* en el tiempo ( $t = 1$ ), en oposición a la velocidad en un *intervalo* de tiempo. Para algunos valores representativos de  $\Delta t$  entre 0.1 y 0.001, se obtienen las velocidades promedio de la tabla 11.2, que usted puede verificar.

La tabla sugiere que conforme la duración del intervalo de tiempo se aproxima a cero, la velocidad promedio tiende al valor de 2 m/s. En otras palabras, cuando  $\Delta t$  tiende a 0,  $\Delta s/\Delta t$  tiende a 2 m/s. Se define el límite de la velocidad promedio cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , como la **velocidad instantánea** (o simplemente la **velocidad**),  $v$ , en el tiempo  $t = 1$ . Se llama también la **razón de cambio instantánea** de  $s$  con respecto a  $t$ , en  $t = 1$ :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{prom}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}$$

Si se piensa en  $\Delta t$  como  $h$ , el límite a la derecha es simplemente la derivada de  $s$  con respecto a  $t$  en  $t = 1$ . Así, la velocidad instantánea del objeto en  $t = 1$  es  $ds/dt$  en  $t = 1$ . Porque  $s = t^2$  y

$$\frac{ds}{dt} = 2t$$

la velocidad en  $t = 1$  es

$$v = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=1} = 2(1) = 2 \text{ m/s}$$

lo que confirma la conclusión anterior.

En resumen, si  $s = f(t)$  es la función posición de un objeto que se mueve en línea recta, la velocidad promedio del objeto en el intervalo  $[t, t + \Delta t]$  está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

y la velocidad en el tiempo  $t$  está dada por

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

En forma selectiva, al combinar las ecuaciones para  $v$ , se tiene

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

que proporciona la motivación para la notación de Leibniz, que sin esta justificación podría parecer extraña. (Después de todo,  $\Delta$  es la letra griega [mayúscula] correspondiente a  $d$ .)

### EJEMPLO 1 Determinación de la velocidad promedio y la velocidad

Suponga que la función de posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta numérica está dada por  $s = f(t) = 3t^2 + 5$ , donde  $t$  está en segundos y  $s$  en metros.

- Encuentre la velocidad promedio en el intervalo  $[10, 10.1]$ .
- Encuentre la velocidad cuando  $t = 10$ .

**Solución:**

a. Aquí  $t = 10$  y  $\Delta t = 10.1 - 10 = 0.1$ . Se tiene

$$\begin{aligned} v_{\text{prom}} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(10 + 0.1) - f(10)}{0.1} \\ &= \frac{f(10.1) - f(10)}{0.1} \\ &= \frac{311.03 - 305}{0.1} = \frac{6.03}{0.1} = 60.3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

b. La velocidad en el tiempo  $t$  está dada por

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t$$

Cuando  $t = 10$ , la velocidad es

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=10} = 6(10) = 60 \text{ m/s}$$

Observe que la velocidad promedio en el intervalo  $[10, 10.1]$  es cercana a la velocidad en  $t = 10$ . Esto era de esperarse porque la duración del intervalo es pequeña.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

El análisis de la razón de cambio de  $s$  con respecto a  $t$  se aplica a *cualquier* función  $y = f(x)$ . Así, puede enunciarse lo siguiente:

Si  $y = f(x)$ , entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \begin{cases} \text{tasa promedio de cambio} \\ \text{de } y \text{ con respecto a } x \\ \text{en el intervalo de} \\ x \text{ a } x + \Delta x \end{cases}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \text{tasa instantánea de cambio} \\ \text{de } y \text{ con respecto a } x \end{cases} \quad (2)$$

Como la razón instantánea de cambio de  $y = f(x)$  en un punto es una derivada, es también la *pendiente de la recta tangente* a la gráfica de  $y = f(x)$  en ese punto. Por conveniencia, a la razón de cambio instantánea se le llama simplemente **razón de cambio**. La interpretación de una derivada como una razón de cambio es extremadamente importante.

Ahora se interpretará el significado de la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $x$ . De la ecuación (2), si  $\Delta x$  (un cambio en  $x$ ) está cercano a 0, entonces  $\Delta y / \Delta x$  está próximo a  $dy/dx$ . Esto es,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$

Por lo tanto,

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx} \Delta x \quad (3)$$

Es decir, si  $x$  cambia en  $\Delta x$ , entonces el cambio en  $y$ ,  $\Delta y$ , es aproximadamente  $dy/dx$  por el cambio en  $x$ . En particular,

si  $x$  cambia en 1, una estimación del cambio en  $y$  es  $\frac{dy}{dx}$

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1****ESTIMACIÓN DE  $\Delta P$  MEDIANTE EL USO DE  $dP/dp$** 

Suponga que la utilidad de  $P$ , obtenida por medio de la venta de cierto producto a un precio de  $p$  por unidad, está dada por  $P = f(p)$ , y la tasa de cambio de esa utilidad con respecto al cambio en el precio es  $\frac{dP}{dp} = 5$  en  $p = 25$ . Estime el cambio en la utilidad  $P$ , si el precio cambia de 25 a 25.5.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2****DETERMINACIÓN DE UNA RAZÓN DE CAMBIO**

La posición de un objeto que se lanza hacia arriba a una velocidad de 16 pies/s desde una altura de 0 pies está dada por  $y(t) = 16t - 16t^2$ . Determine la tasa de cambio de  $y$  con respecto a  $t$ , y evalúela cuando  $t = 0.5$ . Utilice su calculadora graficadora para graficar  $y(t)$ . Emplee la gráfica para interpretar el comportamiento del objeto cuando  $t = 0.5$ .

**EJEMPLO 2 Estimación de  $\Delta y$  mediante el uso de  $dy/dx$** 

Suponga que  $y = f(x)$  y  $\frac{dy}{dx} = 8$  cuando  $x = 3$ . Estime el cambio en  $y$  si  $x$  cambia de 3 a 3.5.

**Solución:** Se tiene  $dy/dx = 8$  y  $\Delta x = 3.5 - 3 = 0.5$ . El cambio en  $y$  está dado por  $\Delta y$ , y a partir de la ecuación (3),

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx} \Delta x = 8(0.5) = 4$$

Se destaca que como  $\Delta y = f(3.5) - f(3)$ , se tiene  $f(3.5) = f(3) + \Delta y$ . Por ejemplo, si  $f(3) = 5$ , entonces  $f(3.5)$  puede estimarse como  $5 + 4 = 9$ .

**EJEMPLO 3 Determinación de una razón de cambio**

Encuentre la razón de cambio de  $y = x^4$  con respecto a  $x$  y evalúela cuando  $x = 2$  y cuando  $x = -1$ . Interprete los resultados.

**Solución:** La razón de cambio es

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3$$

Cuando  $x = 2$ ,  $dy/dx = 4(2)^3 = 32$ . Esto significa que si  $x$  aumenta, a partir de 2, una pequeña cantidad,  $y$  crece aproximadamente 32 veces esa cantidad. O en forma más sencilla, se dice que cuando  $x = 2$ ,  $y$  crece 32 veces más rápido que  $x$ . Cuando  $x = -1$ ,  $dy/dx = 4(-1)^3 = -4$ . El significado del signo menos en  $-4$  es que  $y$  decrece a un ritmo 4 veces más rápido que el aumento de  $x$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

**EJEMPLO 4 Razón de cambio del precio con respecto a la cantidad**

Sea  $p = 100 - q^2$  la función de demanda del producto de un fabricante. Encuentre la razón de cambio del precio  $p$  por unidad con respecto a la cantidad  $q$ . ¿Qué tan rápido cambia el precio con respecto a  $q$  cuando  $q = 5$ ? Suponga que  $p$  está en dólares.

**Solución:** La razón de cambio de  $p$  con respecto a  $q$  es

$$\frac{dp}{dq} = \frac{d}{dq}(100 - q^2) = -2q$$

Así,

$$\left. \frac{dp}{dq} \right|_{q=5} = -2(5) = -10$$

Esto significa que cuando se demandan 5 unidades, un *incremento* de una unidad extra demandada corresponde a una disminución de aproximadamente \$10 en el precio por unidad, que los consumidores están dispuestos a pagar.

**EJEMPLO 5 Razón de cambio de volumen**

Se infla un globo esférico. Encuentre la razón de cambio de su volumen con respecto a su radio. Evalúe esta razón de cambio cuando el radio es de 2 pies.

**Solución:** La fórmula para el volumen  $V$  de una esfera de radio  $r$  es  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . La razón de cambio de  $V$  con respecto a  $r$  es

$$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi r^2$$

Cuando  $r = 2$  pies, la razón de cambio es

$$\frac{dV}{dr} \Big|_{r=2} = 4\pi(2)^2 = 16\pi \frac{\text{pies}^3}{\text{pies}}$$

Esto significa que cuando el radio es de 2 pies, al cambiar el radio en 1 pie, el volumen cambiará aproximadamente  $16\pi$  pies<sup>3</sup>.



### EJEMPLO 6 Razón de cambio de inscripciones

*Un sociólogo estudia varios programas que pueden ayudar en la educación de niños de edad preescolar en cierta ciudad. El sociólogo cree que  $x$  años después de iniciado un programa particular,  $f(x)$  miles de niños estarán inscritos, donde*

$$f(x) = \frac{10}{9}(12x - x^2) \quad 0 \leq x \leq 12$$

*¿Cuál es la razón a la que cambiaría la matrícula, (a) después de tres años de iniciado el programa y (b) después de nueve años?*

**Solución:** La razón de cambio de  $f(x)$  es

$$f'(x) = \frac{10}{9}(12 - 2x)$$

a. Despues de tres años la razón de cambio es

$$f'(3) = \frac{10}{9}(12 - 2(3)) = \frac{10}{9} \cdot 6 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Así, las inscripciones crecen a razón de  $6\frac{2}{3}$  miles de niños por año.

b. Despues de nueve años la razón de cambio es

$$f'(9) = \frac{10}{9}(12 - 2(9)) = \frac{10}{9}(-6) = -\frac{20}{3} = -6\frac{2}{3}$$

Así, las inscripciones *disminuirían* a razón de  $6\frac{2}{3}$  miles de niños por año.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



### Aplicaciones de la razón de cambio a la economía

La **función de costo total** de un fabricante,  $c = f(q)$ , proporciona el costo total  $c$  de producir y comercializar  $q$  unidades de un producto. La razón de cambio de  $c$  con respecto a  $q$  se llama **costo marginal**. Así,

$$\text{costo marginal} = \frac{dc}{dq}$$

Por ejemplo, suponga que  $c = f(q) = 0.1q^2 + 3$  es una función de costo, donde  $c$  está en dólares y  $q$  en libras. Entonces

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q$$

El costo marginal cuando se producen 4 libras es  $dc/dq$  evaluado cuando  $q = 4$ :

$$\frac{dc}{dq} \Big|_{q=4} = 0.2(4) = 0.80$$

Esto significa que si la producción se incrementa en 1 libra, desde 4 hasta 5 libras, entonces el cambio en el costo es aproximadamente de \$0.80. Es decir, la libra adicional cuesta casi \$0.80. En general, se interpreta el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional producida. Después de todo, la diferencia  $f(q+1) - f(q)$  puede verse como un cociente de diferencias

$$\frac{f(q+1) - f(q)}{1}$$

(el caso donde  $h = 1$ ). Cualquier cociente de diferencias puede verse como una aproximación de la derivada correspondiente y, de manera inversa, cualquier derivada puede considerarse como una aproximación de cualquiera de sus cocientes de diferencias correspondientes. Así, para cualquier función  $f$  de  $q$  siempre se puede ver a  $f'(q)$  y  $f(q + 1) - f(q)$  como aproximaciones una de la otra. En economía, esto último puede verse como el valor exacto del costo, o de la utilidad, dependiendo de la función, del  $(q + 1)$ -ésimo artículo cuando se produce  $q$ . Con frecuencia, la derivada es más fácil de calcular que el valor exacto. (En el caso que nos ocupa, el costo real de producir una libra después de 4 lb es  $f(5) - f(4) = 5.5 - 4.6 = \$0.90$ .)

Si  $c$  es el costo total de producir  $q$  unidades de un producto, entonces el **costo promedio por unidad**  $\bar{c}$  es

$$\bar{c} = \frac{c}{q} \quad (4)$$

Por ejemplo, si el costo total de 20 unidades es de \$100, entonces el costo promedio por unidad es  $\bar{c} = 100/20 = \$5$ . Si se multiplican ambos lados de la ecuación (4) por  $q$  se obtiene,

$$c = q\bar{c}$$

Es decir, el costo total es el producto del número de unidades producidas y el costo promedio unitario.

### EJEMPLO 7 Costo marginal

Si la ecuación del costo promedio de un fabricante es

$$\bar{c} = 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q}$$

encuentre la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal cuando se producen 50 unidades?

**Solución:**

**Estrategia** La función de costo marginal es la derivada de la función de costo total  $c$ . Por lo que primero se encuentra  $c$  al multiplicar  $\bar{c}$  por  $q$ . Se tiene

$$\begin{aligned} c &= q\bar{c} \\ &= q \left( 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q} \right) \\ c &= 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 5q + 5000 \end{aligned}$$

Al diferenciar  $c$ , se obtiene la función de costo marginal:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dq} &= 0.0001(3q^2) - 0.02(2q) + 5(1) + 0 \\ &= 0.0003q^2 - 0.04q + 5 \end{aligned}$$

El costo marginal cuando se producen 50 unidades es

$$\left. \frac{dc}{dq} \right|_{q=50} = 0.0003(50)^2 - 0.04(50) + 5 = 3.75$$

Si  $c$  está en dólares y la producción se incrementa en 1 unidad, de  $q = 50$  a  $q = 51$ , entonces el costo de la unidad adicional es aproximadamente de \$3.75. Si la producción se incrementa en  $\frac{1}{3}$  de unidad desde  $q = 50$ , el costo de la producción adicional es aproximadamente de  $\left(\frac{1}{3}\right)(3.75) = \$1.25$ .



Suponga que  $r = f(q)$  es la **función de ingreso total** para un fabricante. La ecuación  $r = f(q)$  establece que el valor total de un dólar recibido al vender  $q$  unidades de un producto, es  $r$ . El **ingreso marginal** se define como la razón de cambio del valor total recibido, con respecto al número total de unidades vendidas. Por consiguiente, el ingreso marginal es solamente la derivada de  $r$  con respecto a  $q$ :

$$\text{ingreso marginal} = \frac{dr}{dq}$$

El ingreso marginal indica la rapidez a la que el ingreso cambia con respecto a las unidades vendidas. Se interpreta como el *ingreso aproximado recibido al vender una unidad adicional de producción*.

### EJEMPLO 8 Ingreso marginal

Suponga que un fabricante vende un producto a \$2 por unidad. Si se venden  $q$  unidades, el ingreso total está dado por

$$r = 2q$$

La función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{d}{dq}(2q) = 2$$

que es una función constante. Entonces, el ingreso marginal es igual a 2 sin importar el número de unidades vendidas. Esto es lo que se esperaría, puesto que el fabricante recibe \$2 por cada unidad vendida.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23 

### Razones de cambio relativas y porcentuales

Para la función de ingreso total del ejemplo 8, a saber,  $r = f(q) = 2q$ , se tiene

$$\frac{dr}{dq} = 2$$

Esto significa que el ingreso cambia a razón de \$2 por unidad, sin importar el número de unidades vendidas. Aunque ésta es una información valiosa, puede ser más significativa cuando se compara con la  $r$  misma. Por ejemplo, si  $q = 50$ , entonces  $r = 2(50) = 100$ . Así, la razón de cambio del ingreso es  $2/100 = 0.02$  de  $r$ . Por otra parte, si  $q = 5000$ , entonces  $r = 2(5000) = \$10\,000$ , y la razón de cambio de  $r$  es  $2/10\,000 = 0.0002$  de  $r$ . Aunque  $r$  cambia a la misma razón en cada nivel, al compararla con la misma  $r$ , esta razón es relativamente menor cuando  $r = 10\,000$  que cuando  $r = 100$ . Si se considera el cociente

$$\frac{dr/dq}{r}$$

se tiene un medio de comparar la razón de cambio de  $r$  con la misma  $r$ . Esta razón se llama *razón de cambio relativa* de  $r$ . Ya se vio antes que la razón de cambio relativa cuando  $q = 50$  es

$$\frac{dr/dq}{r} = \frac{2}{100} = 0.02$$

y cuando  $q = 5000$ , es

$$\frac{dr/dq}{r} = \frac{2}{10\,000} = 0.0002$$



#### ADVERTENCIA

Los porcentajes pueden ser confusos. Recuerde que el *porcentaje* significa "por cien". Esto es  $100\% = \frac{100}{100} = 1$ ,  $2\% = \frac{2}{100} = 0.02$ , etcétera.

Si multiplican las razones relativas por 100% se obtienen las *razones de cambio porcentuales*. La razón de cambio porcentual cuando  $q = 50$  es  $(0.02)(100\%) = 2\%$ ; cuando  $q = 5000$ , es  $(0.0002)(100\%) = 0.02\%$ . Así, por ejemplo, si se vende una unidad adicional a 50, el ingreso aumenta aproximadamente en 2%.

En general, para cualquier función  $f$ , se tiene la siguiente definición:

### DEFINICIÓN

La **razón de cambio relativa** de  $f(x)$  es

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

La **razón de cambio porcentual** de  $f(x)$  es

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100\%$$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

#### RAZONES DE CAMBIO RELATIVA Y PORCENTUAL

El volumen  $V$  de un contenedor en forma de cápsula con altura cilíndrica de 4 pies y radio  $r$  está dado por

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2$$

Determine las tasas de cambio relativa y porcentual del volumen con respecto al radio, cuando el radio es de 2 pies.

### EJEMPLO 9 Razones de cambio relativa y porcentual

Determine las razones de cambio relativa y porcentual de

$$y = f(x) = 3x^2 - 5x + 25$$

cuando  $x = 5$ .

**Solución:** Aquí

$$f'(x) = 6x - 5$$

Como  $f'(5) = 6(5) - 5 = 25$  y  $f(5) = 3(5)^2 - 5(5) + 25 = 75$ , la razón de cambio relativa de  $y$  cuando  $x = 5$  es

$$\frac{f'(5)}{f(5)} = \frac{25}{75} \approx 0.333$$

Al multiplicar 0.333 por 100% se obtiene la razón de cambio porcentual:

$$(0.333)(100\%) = 33.3\%.$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35



## Problemas 11.3

- \*1. Suponga que la función de posición de un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta es  $s = f(t) = 2t^2 + 3t$ , donde  $t$  está en segundos y  $s$  en metros. Encuentre la velocidad promedio  $\Delta s/\Delta t$  para el intervalo  $[1, 1 + \Delta t]$ , donde  $\Delta t$  está dado en la tabla siguiente:

$\Delta t$	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\Delta s/\Delta t$						

Con base en sus resultados estime la velocidad cuando  $t = 1$ . Verifique sus cálculos mediante la diferenciación.

2. Si  $y = f(x) = \sqrt{2x + 5}$ , encuentre la razón de cambio promedio de  $y$  con respecto a  $x$  en el intervalo  $[3, 3 + \Delta x]$ , donde  $\Delta x$  está dado en la tabla siguiente:

$\Delta x$	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\Delta y/\Delta x$						

Con base en sus resultados estime la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $x$  cuando  $x = 3$ .

En los problemas 3 al 8 se da una función de posición, donde  $t$  está en segundos y  $s$  en metros.

- (a) Encuentre la posición en el valor dado de  $t$ .  
 (b) Encuentre la velocidad promedio para el intervalo dado.  
 (c) Encuentre la velocidad en el valor dado de  $t$ .
3.  $s = 2t^2 - 4t; [7, 7.5]; t = 7$

4.  $s = \frac{1}{2}t + 1; [2, 2.1]; t = 2$   
 5.  $s = 2t^3 + 6; [1, 1.02]; t = 1$   
 6.  $s = -3t^2 + 2t + 1; [1, 1.25]; t = 1$   
 7.  $s = t^4 - 2t^3 + t; [2, 2.1]; t = 2$   
 8.  $s = 3t^4 - t^{7/2}; [0, \frac{1}{4}]; t = 0$

- \*9. **Ingreso-educación** Los sociólogos han estudiado la relación entre el ingreso y el número de años de educación en miembros de un grupo urbano particular. De acuerdo con sus hallazgos, una persona con  $x$  años de educación, antes de buscar empleo regular puede esperar recibir un ingreso anual medio de  $y$  dólares anuales, donde

$$y = 5x^{5/2} + 5900 \quad 4 \leq x \leq 16$$

Encuentre la razón de cambio del ingreso con respecto al número de años de educación. Evalúela cuando  $x = 9$ .

10. Encuentre la razón de cambio del área  $A$  de un disco con respecto a su radio  $r$ , cuando  $r = 3$  m. El área  $A$  de un disco como una función de su radio  $r$  está dada por

$$A = A(r) = \pi r^2$$

- \*11. **Temperatura de la piel** La temperatura aproximada  $T$  de la piel en términos de la temperatura  $T_e$  del medio ambiente está dada por

$$T = 32.8 + 0.27(T_e - 20),$$

donde  $T$  y  $T_e$  están en grados Celsius.<sup>3</sup> Encuentre la razón de cambio de  $T$  con respecto a  $T_e$ .

- 12. Biología** El volumen  $V$  de una célula esférica está dado por  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  donde  $r$  es el radio. Encuentre la razón de cambio del volumen con respecto al radio cuando  $r = 6.3 \times 10^{-4}$  centímetros.

En los problemas 13 a 18 se dan funciones de costo, donde  $c$  es el costo de producir  $q$  unidades de un producto. Para cada caso encuentre la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal para el valor o valores dados de  $q$ ?

13.  $c = 500 + 10q; q = 100$

14.  $c = 5000 + 6q; q = 36$

15.  $c = 0.1q^2 + 3q + 450; q = 5$

16.  $c = 0.1q^2 + 3q + 2; q = 3$

17.  $c = q^2 + 50q + 1000; q = 15, q = 16, q = 17$

18.  $c = 0.04q^3 - 0.5q^2 + 4.4q + 7500; q = 5, q = 25, q = 1000$

En los problemas 19 a 22,  $\bar{c}$  representa el costo promedio por unidad, que es una función del número  $q$  de unidades producidas. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para los valores indicados de  $q$ .

19.  $\bar{c} = 0.01q + 5 + \frac{500}{q}; q = 50, q = 100$

20.  $\bar{c} = 2 + \frac{1000}{q}; q = 25, q = 235$

\*21.  $\bar{c} = 0.00002q^2 - 0.01q + 6 + \frac{20\,000}{q}; q = 100, q = 500$

22.  $\bar{c} = 0.002q^2 - 0.5q + 60 + \frac{7000}{q}; q = 15, q = 25$

En los problemas 23 a 26,  $r$  representa el ingreso total y es una función del número  $q$  de unidades vendidas. Encuentre la función de ingreso marginal y el ingreso marginal para los valores indicados de  $q$ .

\*23.  $r = 0.8q; q = 9, q = 300, q = 500$

24.  $r = q(15 - \frac{1}{30}q); q = 5, q = 15, q = 150$

25.  $r = 250q + 45q^2 - q^3; q = 5, q = 10, q = 25$

26.  $r = 2q(30 - 0.1q); q = 10, q = 20$

**27. Fábrica de calcetas** La función de costo total de una fábrica de calcetas es estimada por Dean<sup>4</sup> como

$$c = -10\,484.69 + 6.750q - 0.000328q^2$$

donde  $q$  es la producción en docenas de pares y  $c$  el costo total en dólares. Encuentre la función de costo marginal y la función de costo promedio, y evalúela cada una cuando  $q = 2000$ .

**28. Planta de luz y energía** La función de costo total para una planta de luz y energía eléctrica es estimada por Nordin<sup>5</sup> como

$$c = 32.07 - 0.79q + 0.02142q^2 - 0.0001q^3 \quad 20 \leq q \leq 90$$

donde  $q$  es la producción total en 8 horas (como porcentaje de la capacidad) y  $c$  el costo total en dólares del combustible. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando  $q = 70$ .

- 29. Concentración urbana** Suponga que se clasificaron las 100 ciudades más grandes de Estados Unidos en 1920 de acuerdo con su extensión (áreas de las ciudades). Según Lotka,<sup>6</sup> la siguiente relación se cumple de manera aproximada:

$$PR^{0.93} = 5\,000\,000$$

Aquí,  $P$  es la población de la ciudad con la clasificación  $R$  respectiva. Esta relación se llama *ley de la concentración urbana* para 1920. Despeje  $P$  en términos de  $R$  y luego encuentre qué tan rápido cambia la población con respecto a la clasificación.

- 30. Depreciación** Según el método de depreciación lineal, el valor  $v$  de cierta máquina después de  $t$  años está dado por

$$v = 85\,000 - 10\,500t$$

donde  $0 \leq t \leq 9$ . ¿Qué tan rápido cambia  $v$  con respecto a  $t$  cuando  $t = 2$ ? ¿y cuando  $t = 3$ ? ¿y en cualquier momento?

- 31. Polilla de invierno** En Nueva Escocia se realizó un estudio de la polilla de invierno (adaptado de Embree)<sup>7</sup>. Las larvas de la polilla caen al pie de los árboles huéspedes a una distancia de  $x$  pies de la base del árbol, la densidad de larvas (número de larvas por pie cuadrado de suelo) fue de  $y$ , donde

$$y = 59.3 - 1.5x - 0.5x^2 \quad 1 \leq x \leq 9$$

(a) ¿Con qué rapidez cambia la densidad de larvas con respecto a la distancia desde la base del árbol cuando  $x = 6$ ?

(b) ¿Para qué valor de  $x$  la densidad de larvas decrece a razón de 6 larvas por pie cuadrado por pie?

- 32. Función de costo** Para la función de costo

$$c = 0.4q^2 + 4q + 5$$

encuentre la razón de cambio de  $c$  con respecto a  $q$  cuando  $q = 2$ . Además, ¿qué valor tiene  $\Delta c / \Delta q$  en el intervalo  $[2, 3]$ ?

- En los problemas 33 a 38, encuentre (a) la razón de cambio y con respecto a  $x$ ,  $y$  (b) la razón de cambio relativa de  $y$ . En el valor dado de  $x$  encuentre (c) la razón de cambio de  $y$ , (d) la razón de cambio relativa de  $y$ , y (e) la razón de cambio porcentual de  $y$ .

33.  $y = f(x) = x + 4; x = 5$

34.  $y = f(x) = 7 - 3x; x = 6$

\*35.  $y = 3x^2 + 7; x = 2$

36.  $y = 5 - 3x^3; x = 1$

37.  $y = 8 - x^3; x = 1$

38.  $y = x^2 + 3x - 4; x = -1$

- 39. Función de costo** Para la función de costo

$$c = 0.3q^2 + 3.5q + 9$$

¿qué tan rápido cambia  $c$  con respecto a  $q$  cuando  $q = 10$ ? Determine la razón de cambio porcentual de  $c$  con respecto a  $q$  cuando  $q = 10$ .

<sup>3</sup>R. W. Stacy et al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

<sup>4</sup>J. Dean, "Statistical Cost Functions of a Hosiery Mill", *Studies in Business Administration*, XI, núm. 4 (Chicago: University of Chicago Press, 1941).

<sup>5</sup>J. A. Nordin, "Note on a Light Plant's Cost Curves". *Econometrica*, 15 (1947), 231-235.

<sup>6</sup>A. J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology* (Nueva York: Dover Publications, Inc., 1956).

<sup>7</sup>D. G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia. 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

- 40. Materia orgánica/diversidad de especies** En un estudio reciente Odum<sup>8</sup> afirma que en aguas de mares poco profundas la materia orgánica total  $y$  (en miligramos por litro) es una función de la diversidad  $x$  de las especies (en número de especies por mil individuos). Si  $y = 100/x$ , ¿con qué rapidez cambiará la materia orgánica total con respecto a la diversidad de especies cuando  $x = 10$ ? ¿Cuál es la razón de cambio cuando  $x = 10$ ?

- 41. Ingreso** Para cierto fabricante, el ingreso  $r$  obtenido al vender  $q$  unidades de un producto está dado por

$$r = 30q - 0.3q^2$$

- (a) ¿Qué tan rápido cambia  $r$  con respecto a  $q$ ? Cuando  $q = 10$ , (b) Encuentre la razón de cambio relativo de  $r$ . (c) Encuentre la razón de cambio porcentual de  $r$ , al punto porcentual más cercano.
- 42. Ingreso** Repita el problema 41 para la función de ingreso dada por  $r = 10q - 0.2q^2$  y  $q = 25$ .
- 43. Peso de una rama** El peso de una rama de árbol está dado por  $W = 2t^{0.432}$ , donde  $t$  es el tiempo. Encuentre la razón de cambio relativa de  $W$  con respecto a  $t$ .

- 44. Respuesta a un choque eléctrico** Se realizó un experimento<sup>9</sup> psicológico para analizar la respuesta de los humanos ante choques eléctricos (estímulos). Se sometieron a algunas personas a descargas eléctricas de varias intensidades. La respuesta  $R$  a una descarga de intensidad  $I$  (en microamperes) debía ser un número que indicase la magnitud percibida relativa a la de una descarga “estándar”. A la descarga estándar se le asignó una magnitud de 10. Dos grupos de personas fueron objeto del estudio bajo condiciones ligeramente diferentes. Las respuestas  $R_1$  y  $R_2$  de los grupos primero y segundo a una descarga de intensidad  $I$  estuvieron dadas por

$$R_1 = \frac{I^{1.3}}{1855.24} \quad 800 \leq I \leq 3500$$

y

$$R_2 = \frac{I^{1.3}}{1101.29} \quad 800 \leq I \leq 3500$$

- (a) Para cada grupo, determine la razón de cambio relativa de la respuesta con respecto a la intensidad.  
(b) ¿Cómo son esos cambios comparados entre sí?  
(c) En general, si  $f(x) = C_1x^n$  y  $g(x) = C_2x^n$ , donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes, ¿cómo son las razones de cambio relativas de  $f$  y  $g$  comparadas entre sí?

- 45. Costo** Un fabricante de bicicletas de montaña determinó que cuando se producen 20 bicicletas por día, el costo promedio es de \$150 y el costo marginal de \$125. Con base en esta información, determine el costo total de producir 21 bicicletas por día.

- 46. Costos marginal y promedio** Suponga que la función de costo para cierto producto es  $c = f(q)$ . Si la razón de cambio relativa de  $c$  (con respecto a  $q$ ) es  $\frac{1}{q}$  demuestre que la función de costo marginal y la función de costo promedio son iguales.

En los problemas 47 y 48, utilice la capacidad de su calculadora graficadora para derivar de manera numérica.

- 47.** Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2 + 3}} + 5000$$

donde  $c$  está en dólares, encuentre el costo marginal cuando se producen 10 unidades. Redondee su respuesta al centavo más cercano.

- 48.** La población de una ciudad dentro de  $t$  años está dada por

$$P = 250\,000e^{0.04t}$$

Encuentre la razón de cambio de la población con respecto al tiempo  $t$  dentro de cuatro años. Redondee su respuesta al entero más cercano.

## OBJETIVO

Encontrar derivadas por medio de la aplicación de las reglas del producto y del cociente, y desarrollar los conceptos de propensión marginal al consumo y propensión marginal al ahorro.

## 11.4 La regla del producto y la regla del cociente

La ecuación  $F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5)$ , expresa  $F(x)$  como un producto de dos funciones:  $x^2 + 3x$  y  $4x + 5$ . Para encontrar  $F'(x)$  sólo con las reglas previas, se multiplican primero las funciones. Después se diferencia el resultado, término por término:

$$\begin{aligned} F(x) &= (x^2 + 3x)(4x + 5) = 4x^3 + 17x^2 + 15x \\ F'(x) &= 12x^2 + 34x + 15 \end{aligned} \tag{1}$$

Sin embargo, en muchos problemas que implican diferenciar un producto de funciones, la multiplicación no es tan sencilla como en este caso. En ocasiones, ni siquiera es práctico intentarlo. Por fortuna, existe una regla para diferenciar un producto, y tal regla evita tener que efectuar las multiplicaciones. Como la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas, podría pensarse en una regla similar para los productos. Sin embargo la situación es bastante sutil.

<sup>8</sup>H. T. Odum, “Biological Circuits and the Marine System of Texas”, en *Pollution and Marine Biology*, ed. T. A. Olsen y F. J. Burgess (Nueva York: Interscience Publishers, 1967).

<sup>9</sup>H. Babkoff, “Magnitude Estimation of Short Eledrocutaneous Pulses”, *Psychological Research*, 39, núm. 1 (1976), 39-49.

**REGLA 1 La regla del producto**

Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables, entonces el producto  $fg$  es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Esto es, la derivada del producto de dos funciones es la derivada de la primera función por la segunda más la primera función por la derivada de la segunda.

$$\frac{d}{dx}(\text{producto}) = \left( \begin{array}{l} \text{derivada} \\ \text{de la primera} \end{array} \right) (\text{segunda}) + (\text{primera}) \left( \begin{array}{l} \text{derivada} \\ \text{de la segunda} \end{array} \right)$$

*Demostración.* Si  $F(x) = f(x)g(x)$ , entonces por la definición de la derivada de  $F$ ,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \end{aligned}$$

Ahora se emplea un “truco”. Después de sumar y restar  $f(x)g(x+h)$  en el numerador, se tiene

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h}$$

Al reagrupar se obtiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)) + (f(x)g(x+h) - f(x)g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

Como se ha supuesto que  $f$  y  $g$  son diferenciables,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

La diferenciabilidad de  $g$  implica que  $g$  es continua, y de acuerdo con la sección 10.3,

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$$

Entonces,

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

### EJEMPLO 1 Aplicación de la regla del producto

Si  $F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5)$ , encuentre  $F'(x)$ .

**Solución:** Se considerará a  $F$  como un producto de dos funciones:

$$F(x) = \underbrace{(x^2 + 3x)}_{f(x)} \underbrace{(4x + 5)}_{g(x)}$$

**ADVERTENCIA**

Vale la pena repetir que la derivada del producto de dos funciones es algo sutil. No se vea tentado a fabricar una regla más simple.

Por lo tanto, es posible aplicar la regla del producto:

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
 &= \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 + 3x)}_{\text{Derivada}} \underbrace{(4x + 5)}_{\text{Segunda}} + \underbrace{(x^2 + 3x)}_{\text{Primera}} \underbrace{\frac{d}{dx}(4x + 5)}_{\text{Derivada de la segunda}} \\
 &= (2x + 3)(4x + 5) + (x^2 + 3x)(4) \\
 &= 12x^2 + 34x + 15 \quad (\text{al simplificar})
 \end{aligned}$$

Esto concuerda con nuestro resultado previo. [Vea la ecuación (1)]. Aunque aquí la regla del producto no parece tener mucha utilidad práctica, se verá que hay ocasiones en que resulta impráctico evitarla.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1****APLICACIÓN DE LA REGLA DEL PRODUCTO**

Un puesto de tacos por lo general vende 225 tacos por día a \$2 cada uno. La investigación de un estudiante de administración revela que por cada \$0.15 de disminución en el precio, el puesto vendería 20 tacos más por día. La función de ingreso del puesto de tacos es  $R(x) = (2 - 0.15x)(225 + 20x)$ , donde  $x$  es el número de reducciones de \$0.15 en el precio. Encuentre  $\frac{dR}{dx}$ .

**EJEMPLO 2 Aplicación de la regla del producto**

Si  $y = (x^{2/3} + 3)(x^{-1/3} + 5x)$ , encuentre  $dy/dx$ .

**Solución:** Al aplicar la regla del producto se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^{2/3} + 3)(x^{-1/3} + 5x) + (x^{2/3} + 3)\frac{d}{dx}(x^{-1/3} + 5x) \\
 &= \left(\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)(x^{-1/3} + 5x) + (x^{2/3} + 3)\left(-\frac{1}{3}x^{-4/3} + 5\right) \\
 &= \frac{25}{3}x^{2/3} + \frac{1}{3}x^{-2/3} - x^{-4/3} + 15
 \end{aligned}$$

De manera alterna, se podría haber encontrado la derivada sin la regla del producto, al determinar primero el producto  $(x^{2/3} + 3)(x^{-1/3} + 5x)$ , y luego diferenciar el resultado término por término.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

**EJEMPLO 3 Diferenciación de un producto de tres factores**

Si  $y = (x + 2)(x + 3)(x + 4)$ , encuentre  $y'$ .

**Solución:**

**Estrategia** Sería deseable utilizar la regla del producto, pero ésta se aplica sólo cuando se tienen *dos* factores. Si se consideran los primeros dos factores como uno solo, puede tratarse a  $y$  como un producto de dos funciones:

$$y = [(x + 2)(x + 3)](x + 4)$$

La regla del producto da

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{d}{dx}[(x + 2)(x + 3)](x + 4) + [(x + 2)(x + 3)]\frac{d}{dx}(x + 4) \\
 &= \frac{d}{dx}[(x + 2)(x + 3)](x + 4) + [(x + 2)(x + 3)](1)
 \end{aligned}$$

Si se aplica de nuevo la regla del producto, se tiene

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(\frac{d}{dx}(x + 2)(x + 3) + (x + 2)\frac{d}{dx}(x + 3)\right)(x + 4) + (x + 2)(x + 3) \\
 &= [(1)(x + 3) + (x + 2)(1)](x + 4) + (x + 2)(x + 3)
 \end{aligned}$$

Después de simplificar, se obtiene

$$y' = 3x^2 + 18x + 26$$

Otras dos maneras de encontrar la derivada son:

1. Multiplicar los primeros dos factores de  $y$  para obtener

$$y = (x^2 + 5x + 6)(x + 4)$$

y luego aplicar la regla del producto.

2. Multiplicar los tres factores para obtener

$$y = x^3 + 9x^2 + 26x + 24$$

y luego diferenciar término por término.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19 

En ocasiones resulta útil recordar las reglas de diferenciación con una notación más eficiente. Por ejemplo,

$$(fg)' = f'g + fg'$$

es una igualdad de funciones correcta que expresa la regla del producto. Entonces, es posible calcular

$$\begin{aligned} (fgh)' &= ((fg)h)' \\ &= (fg)'h + (fg)h' \\ &= (f'g + fg')h + (fg)h' \\ &= f'gh + fg'h + fgh' \end{aligned}$$

Se recomienda que el estudiante no trate de memorizar reglas de la derivada, como

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

Ya que  $f'g + fg' = gf' + fg'$  se puede expresar la regla del producto con las derivadas como segundos factores mediante la commutatividad del producto de funciones:

$$(fg)' = gf' + fg'$$

y con el uso de la commutatividad de la suma

$$(fg)' = fg' + gf'$$

Algunas personas prefieren estas formas.

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

### DERIVADA DE UN PRODUCTO SIN LA REGLA DEL PRODUCTO

Una hora después de que se le administran a una persona  $x$  miligramos de cierto medicamento, el cambio en la temperatura de su cuerpo,  $T(x)$ , en grados Fahrenheit, está dado de manera aproximada por  $T(x) = x^2 \left(1 - \frac{x}{3}\right)$ . La razón a la cual cambia  $T$  con respecto al tamaño de la dosis  $x$ ,  $T'(x)$ , se denomina *sensibilidad* del cuerpo a la dosis. Determine la sensibilidad cuando la dosis es de 1 milígramo. No utilice la regla del producto.

### EJEMPLO 4 Uso de la regla del producto para encontrar la pendiente

Encuentre la pendiente de la gráfica de  $f(x) = (7x^3 - 5x + 2)(2x^4 + 7)$  cuando  $x = 1$ .

**Solución:**

**Estrategia** La pendiente se encuentra al evaluar la derivada en  $x = 1$ . Como  $f$  es un producto de dos funciones, es posible encontrar la derivada gracias a la regla del producto.

Se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= (7x^3 - 5x + 2)\frac{d}{dx}(2x^4 + 7) + (2x^4 + 7)\frac{d}{dx}(7x^3 - 5x + 2) \\ &= (7x^3 - 5x + 2)(8x^3) + (2x^4 + 7)(21x^2 - 5) \end{aligned}$$

Como se debe calcular  $f'(x)$  cuando  $x = 1$ , no hay necesidad de simplificar  $f'(x)$  antes de evaluarla. Al sustituir en  $f'(x)$ , se obtiene

$$f'(1) = 4(8) + 9(16) = 176$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 49 

**La regla del producto (y la regla del cociente que sigue) no deben aplicarse cuando esté disponible un método más directo y eficiente.**

Por lo general, no se usa la regla del producto cuando es obvio un procedimiento más sencillo. Por ejemplo, si  $f(x) = 2x(x + 3)$ , entonces es más rápido escribir  $f(x) = 2x^2 + 6x$ , donde  $f'(x) = 4x + 6$ . De manera similar, usualmente no se emplea la regla del producto para diferenciar  $y = 4(x^2 - 3)$ . Como el 4 es un factor constante, según la regla del factor constante se sabe que  $y' = 4(2x) = 8x$ .

La regla siguiente se usa para diferenciar un *cociente* de dos funciones.

### REGLA 2 La regla del cociente

Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables y  $g(x) \neq 0$ , entonces el cociente  $f/g$  es también diferenciable y

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

A condición de que el denominador no sea cero, es posible escribir

$$\left( \frac{f}{g} \right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Es decir, la derivada del cociente de dos funciones es el denominador por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo ello dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\text{cociente}) \\ = \frac{(\text{denominador}) \left( \begin{array}{c} \text{derivada} \\ \text{del numerador} \end{array} \right) - (\text{numerador}) \left( \begin{array}{c} \text{derivada} \\ \text{del denominador} \end{array} \right)}{(\text{denominador})^2} \end{aligned}$$

*Demostración.* Si  $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , entonces

$$F(x)g(x) = f(x)$$

Por la regla del producto,

$$F(x)g'(x) + g(x)F'(x) = f'(x)$$

Al despejar  $F'(x)$ , se obtiene

$$F'(x) = \frac{f'(x) - F(x)g'(x)}{g(x)}$$

Pero  $F(x) = f(x)/g(x)$ . Así,

$$F'(x) = \frac{f'(x) - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)}}{g(x)}$$

Al simplificar<sup>10</sup> se obtiene

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

### EJEMPLO 5 Aplicación de la regla del cociente

Si  $F(x) = \frac{4x^2 + 3}{2x - 1}$ , encuentre  $F'(x)$ .

**Solución:**

**Estrategia** Se considera  $F$  como un cociente y se aplica la regla del cociente.



### ADVERTENCIA

La derivada del cociente de dos funciones es aún más complicada que la regla del producto. ¡Es necesario recordar dónde va el signo de menos!

<sup>10</sup> Quizá haya notado que esta demostración supone la existencia de  $F'(x)$ . Sin embargo, esta regla puede demostrarse sin este supuesto.

Sea  $f(x) = 4x^2 + 3$  y  $g(x) = 2x - 1$ . Entonces

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\text{Derivada del denominador} \quad \text{Numerador}}{\text{Denominador} \quad \text{Cuadrado del denominador}} \\ &= \frac{(2x-1) \quad \frac{d}{dx}(4x^2+3) - (4x^2+3) \quad \frac{d}{dx}(2x-1)}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{(2x-1)(8x) - (4x^2+3)(2)}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{8x^2 - 8x - 6}{(2x-1)^2} = \frac{2(2x+1)(2x-3)}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21



### EJEMPLO 6 Reescribir antes de diferenciar

$$\text{Diferencie } y = \frac{1}{x + \frac{1}{x+1}}.$$

**Solución:**

**Estrategia** Para simplificar la diferenciación, se reescribirá la función de manera que ninguna fracción aparezca en el denominador.

Se tiene

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x + \frac{1}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x(x+1)+1}{x+1}} = \frac{x+1}{x^2+x+1} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2+x+1)(1) - (x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \quad (\text{regla del cociente}) \\ &= \frac{(x^2+x+1) - (2x^2+3x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2-2x}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 45



Aunque una función puede tener la forma de un cociente, esto no implica necesariamente que se deba usar la regla del cociente para encontrar su derivada. El ejemplo siguiente ilustra algunas situaciones típicas donde, aunque pueda emplearse la regla del cociente, se dispone de un procedimiento más sencillo y eficiente.

### EJEMPLO 7 Diferenciación de cocientes sin usar la regla del cociente

Diferencie las funciones siguientes.

a.  $f(x) = \frac{2x^3}{5}$

**Solución:** Se reescribe la función para tener  $f(x) = \frac{2}{5}x^3$ . Por la regla del factor constante,

$$f'(x) = \frac{2}{5}(3x^2) = \frac{6x^2}{5}$$

b.  $f(x) = \frac{4}{7x^3}$

**Solución:** Se reescribe la función para tener  $f(x) = \frac{4}{7}(x^{-3})$ . Entonces,

$$f'(x) = \frac{4}{7}(-3x^{-4}) = -\frac{12}{7x^4}$$

c.  $f(x) = \frac{5x^2 - 3x}{4x}$

**Solución:** Se reescribe la función para tener  $f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{5x^2 - 3x}{x}\right) = \frac{1}{4}(5x - 3)$  para  $x \neq 0$ . Por lo que,

$$f'(x) = \frac{1}{4}(5) = \frac{5}{4} \quad \text{para } x \neq 0$$

Como la función  $f$  no está definida para  $x = 0$ ,  $f'$  tampoco está definida ahí.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17



### ADVERTENCIA

Para diferenciar  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$  se podría intentar primero reescribir el cociente como  $(x^2 - 2)^{-1}$ . Sería un error hacer esto, ya que por el momento no se tiene una regla para diferenciar esa forma. En resumen, no hay otra opción más que utilizar la regla del cociente. Sin embargo, en la sección siguiente, se desarrollará una regla que permitirá diferenciar  $(x^2 - 2)^{-1}$  de una manera directa y eficiente.

### EJEMPLO 8 Ingreso marginal

*Si la ecuación de la demanda del producto de un fabricante es*

$$p = \frac{1000}{q + 5}$$

*donde  $p$  está en dólares, encuentre la función de ingreso marginal y evalúela cuando  $q = 45$ .*

**Solución:**

**Estrategia** Primero se debe encontrar la función de ingreso. El ingreso  $r$  recibido por vender  $q$  unidades cuando el precio por unidad es  $p$ , está dado por

$$\text{ingreso} = (\text{precio})(\text{cantidad}), \quad \text{esto es}, \quad r = pq$$

Con el empleo de la ecuación de demanda, se expresará  $r$  sólo en términos de  $q$ . Luego se diferencia para encontrar la función de ingreso marginal,  $dr/dq$ .

La función de ingreso es

$$r = \left( \frac{1000}{q + 5} \right) q = \frac{1000q}{q + 5}$$

Así, la función de ingreso marginal está dada por

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dq} &= \frac{(q + 5)\frac{d}{dq}(1000q) - (1000q)\frac{d}{dq}(q + 5)}{(q + 5)^2} \\ &= \frac{(q + 5)(1000) - (1000q)(1)}{(q + 5)^2} = \frac{5000}{(q + 5)^2} \end{aligned}$$

y

$$\frac{dr}{dq} \Big|_{q=45} = \frac{5000}{(45 + 5)^2} = \frac{5000}{2500} = 2$$

Esto significa que vender una unidad adicional por arriba de 45 resulta en aproximadamente \$2 más de ingreso.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 59

## Función de consumo

Una función que desempeña un papel importante en el análisis económico es la **función de consumo**. Dicha función,  $C = f(I)$ , expresa una relación entre el ingreso nacional total,  $I$ , y el consumo nacional total,  $C$ . Por lo general, tanto  $I$  como  $C$  se expresan en miles de millones de dólares e  $I$  se restringe a cierto intervalo. La *propensión marginal al consumo* se define como la razón de cambio del consumo con respecto al ingreso, y es la derivada de  $C$  con respecto a  $I$ :

$$\text{Propensión marginal al consumo} = \frac{dC}{dI}$$

Si se supone que la diferencia entre el ingreso  $I$  y el consumo  $C$  es el ahorro  $S$ , entonces

$$S = I - C$$

Al diferenciar ambos lados de la ecuación con respecto a  $I$  se obtiene

$$\frac{dS}{dI} = \frac{d}{dI}(I) - \frac{d}{dI}(C) = 1 - \frac{dC}{dI}$$

Se define  $dS/dI$  como la **propensión marginal al ahorro**. Así, la propensión marginal al ahorro indica qué tan rápido cambia el ahorro con respecto al ingreso, y

$$\text{Propensión marginal al ahorro} = 1 - \text{Propensión marginal al consumo}$$

### EJEMPLO 9 Determinación de las propensiones marginales al consumo y al ahorro

*Si la función de consumo está dada por*

$$C = \frac{5(2\sqrt{I^3} + 3)}{I + 10}$$

*determine la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando  $I = 100$ .*

**Solución:**

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dI} &= 5 \left( \frac{(I+10)\frac{d}{dI}(2I^{3/2} + 3) - (2\sqrt{I^3} + 3)\frac{d}{dI}(I+10)}{(I+10)^2} \right) \\ &= 5 \left( \frac{(I+10)(3I^{1/2}) - (2\sqrt{I^3} + 3)(1)}{(I+10)^2} \right)\end{aligned}$$

Cuando  $I = 100$ , la propensión marginal al consumo es

$$\left. \frac{dC}{dI} \right|_{I=100} = 5 \left( \frac{1297}{12100} \right) \approx 0.536$$

La propensión marginal al ahorro cuando  $I = 100$  es  $1 - 0.536 = 0.464$ . Esto significa que si un ingreso actual de \$100 000 millones aumenta en \$1000 millones, la nación consume aproximadamente el 53.6% ( $536/1000$ ) y ahorra 46.4% ( $464/1000$ ) de ese incremento.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 69 

## Problemas 11.4

Diferencie las funciones de los problemas 1 a 48.

- \*1.  $f(x) = (4x + 1)(6x + 3)$
- 2.  $f(x) = (3x - 1)(7x + 2)$
- 3.  $s(t) = (5 - 3t)(t^3 - 2t^2)$
- 4.  $Q(x) = (3 + x)(5x^2 - 2)$
- 5.  $f(r) = (3r^2 - 4)(r^2 - 5r + 1)$

- 6.  $C(I) = (2I^2 - 3)(3I^2 - 4I + 1)$
- 7.  $f(x) = x^2(2x^2 - 5)$
- 8.  $f(x) = 3x^3(x^2 - 2x + 2)$
- 9.  $y = (x^2 + 3x - 2)(2x^2 - x - 3)$
- 10.  $\phi(x) = (3 - 5x + 2x^2)(2 + x - 4x^2)$

11.  $f(w) = (w^2 + 3w - 7)(2w^3 - 4)$

12.  $f(x) = (3x - x^2)(3 - x - x^2)$

13.  $y = (x^2 - 1)(3x^3 - 6x + 5) - 4(4x^2 + 2x + 1)$

14.  $h(x) = 4(x^5 - 3) + 3(8x^2 - 5)(2x + 2)$

\*15.  $F(p) = \frac{3}{2}(5\sqrt{p} - 2)(3p - 1)$

16.  $g(x) = (\sqrt{x} + 5x - 2)(\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x})$

\*17.  $y = 7 \cdot \frac{2}{3}$

18.  $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

\*19.  $y = (2x - 1)(3x + 4)(x + 7)$

20.  $y = \frac{2x - 3}{4x + 1}$

\*21.  $f(x) = \frac{5x}{x - 1}$

22.  $H(x) = \frac{-5x}{5 - x}$

23.  $f(x) = \frac{-13}{3x^5}$

24.  $f(x) = \frac{5(x^2 - 2)}{7}$

25.  $y = \frac{x + 2}{x - 1}$

26.  $h(w) = \frac{3w^2 + 5w - 1}{w - 3}$

27.  $h(z) = \frac{6 - 2z}{z^2 - 4}$

28.  $z = \frac{2x^2 + 5x - 2}{3x^2 + 5x + 3}$

29.  $y = \frac{8x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x}$

30.  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$

31.  $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 3x + 2}$

32.  $F(z) = \frac{z^4 + 4}{3z}$

33.  $g(x) = \frac{1}{x^{100} + 7}$

34.  $y = \frac{-9}{2x^5}$

35.  $u(v) = \frac{v^3 - 8}{v}$

36.  $y = \frac{x - 5}{8\sqrt{x}}$

37.  $y = \frac{3x^2 - x - 1}{\sqrt[3]{x}}$

38.  $y = \frac{x^{0.3} - 2}{2x^{2.1} + 1}$

39.  $y = 7 - \frac{4}{x - 8} + \frac{2x}{3x + 1}$

40.  $q(x) = 2x^3 + \frac{5x + 1}{3x - 5} - \frac{2}{x^3}$

42.  $y = \frac{(9x - 1)(3x + 2)}{4 - 5x}$

41.  $y = \frac{x - 5}{(x + 2)(x - 4)}$

44.  $f(s) = \frac{17}{s(5s^2 - 10s + 4)}$

43.  $s(t) = \frac{t^2 + 3t}{(t^2 - 1)(t^3 + 7)}$

46.  $y = 3 - 12x^3 + \frac{1 - \frac{5}{x^2 + 2}}{x^2 + 5}$

\*45.  $y = 3x - \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x - 1}}{x - 2}$

47.  $f(x) = \frac{a + x}{a - x}$ , donde  $a$  es una constante.

48.  $f(x) = \frac{x^{-1} + a^{-1}}{x^{-1} - a^{-1}}$ , donde  $a$  es una constante.

\*49. Encuentre la pendiente de la curva  $y = (4x^2 + 2x - 5)(x^3 + 7x + 4)$  en  $(-1, 12)$ .

50. Encuentre la pendiente de la curva  $y = \frac{x^3}{x^4 + 1}$  en  $(-1, -\frac{1}{2})$ .

En los problemas 51 a 54, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

51.  $y = \frac{6}{x - 1}; (3, 3)$

52.  $y = \frac{x + 5}{x^2}; (1, 6)$

53.  $y = (2x + 3)[2(x^4 - 5x^2 + 4)]; (0, 24)$

54.  $y = \frac{x + 1}{x^2(x - 4)}; \left(2, -\frac{3}{8}\right)$

En los problemas 55 y 56 determine la razón de cambio relativa de  $y$  con respecto a  $x$ , para el valor dado de  $x$ .

55.  $y = \frac{x}{2x - 6}; x = 1$

56.  $y = \frac{1 - x}{1 + x}; x = 5$

57. **Movimiento** La función de posición de un objeto que se mueve en línea recta es

$$s = \frac{2}{t^3 + 1}$$

donde  $t$  está en segundos y  $s$  en metros. Encuentre la posición y la velocidad del objeto en  $t = 1$ .

58. **Movimiento** La función de posición de un objeto que se mueve en línea recta es

$$s = \frac{t + 3}{t^2 + 7}$$

donde  $t$  está en segundos y  $s$  en metros. Encuentre el o los valores positivos de  $t$  para los cuales la velocidad del objeto es 0.

En los problemas 59 a 62, cada ecuación representa una función de demanda para cierto producto, donde  $p$  denota el precio por unidad para  $q$  unidades. En cada caso, encuentre la función de ingreso marginal. Recuerde que  $\text{ingreso} = pq$ .

\*59.  $p = 50 - 0.01q$

60.  $p = 500/q$

61.  $p = \frac{108}{q + 2} - 3$

62.  $p = \frac{q + 750}{q + 50}$

63. **Función de consumo** La función de consumo se estimó por medio de la ecuación<sup>11</sup> para Estados Unidos (1922-1942):

$$C = 0.672I + 113.1$$

Encuentre la propensión marginal al consumo.

64. **Función de consumo** Repita el problema 63 si  $C = 0.712I + 95.05$  para Estados Unidos en el periodo 1929-1941.<sup>12</sup>

En los problemas 65 a 68, cada ecuación representa una función de consumo. Encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro para el valor dado de  $I$ .

65.  $C = 3 + \sqrt{I} + 2\sqrt[3]{I}; I = 1$

66.  $C = 6 + \frac{3I}{4} - \frac{\sqrt{I}}{3}; I = 25$

67.  $C = \frac{16\sqrt{I} + 0.8\sqrt{I^3} - 0.2I}{\sqrt{I} + 4}; I = 36$

68.  $C = \frac{20\sqrt{I} + 0.5\sqrt{I^3} - 0.4I}{\sqrt{I} + 5}; I = 100$

\*69. **Función de consumo** Suponga que la función de consumo de un país está dada por

$$C = \frac{10\sqrt{I} + 0.7\sqrt{I^3} - 0.2I}{\sqrt{I}}$$

donde  $C$  e  $I$  están en miles de millones de dólares.

(a) Encuentre la propensión marginal al ahorro cuando el ingreso es de 25 000 millones de dólares.

(b) Determine la razón de cambio relativa de  $C$  con respecto a  $I$ , cuando el ingreso es de 25 000 millones de dólares.

<sup>11</sup>T. Haavelmo, "Methods of Measuring the Marginal Propensity to Consume", *Journal of the American Statistical Association*, XLII (1947), 105-122.

<sup>12</sup>Ibid.

- 70. Propensiones marginales a consumir y a ahorrar** Suponga que la función de ahorro de un país es

$$S = \frac{I - 2\sqrt{I} - 8}{\sqrt{I} + 2}$$

donde el ingreso nacional ( $I$ ) y el ahorro nacional ( $S$ ) se miden en miles de millones de dólares. Encuentre la propensión marginal del país a consumir y su propensión marginal al ahorro, cuando el ingreso nacional es de 150 000 millones. (*Una pista:* Puede ser útil factorizar primero el numerador).

- 71. Costo marginal** Si la función de costo total de un fabricante está dada por

$$c = \frac{6q^2}{q + 2} + 6000$$

encuentre la función de costo marginal.

- 72. Costo marginal y costo promedio** Dada la función de costo  $c = f(q)$ , demuestre que si  $\frac{d}{dq}(\bar{c}) = 0$ , entonces la función de costo marginal y la de costo promedio son iguales.

- 73. Relación huésped-parásito** Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huéspedes (número de huéspedes por unidad de área) es  $x$ , el número de huéspedes que tienen parásitos es  $y$ , donde

$$y = \frac{900x}{10 + 45x}$$

¿A qué razón cambia el número de huéspedes que tienen parásitos con respecto a la densidad de huéspedes cuando  $x = 2$ ?

- 74. Acústica** La persistencia del sonido en un recinto después de que la fuente del sonido se ha apagado se llama *reverberación*. El *tiempo de reverberación* RT del recinto es el necesario para que el nivel de intensidad del sonido caiga a 60 decibeles. En el diseño acústico de un auditorio, puede utilizarse la fórmula siguiente para calcular el RT del recinto:<sup>13</sup>

$$RT = \frac{0.05V}{A + xV}$$

## OBJETIVO

Introducir y aplicar la regla de la cadena, derivar la regla de la potencia como un caso especial de la regla de la cadena, y desarrollar el concepto de producto del ingreso marginal como una aplicación de la regla de la cadena.

## 11.5 La regla de la cadena y la regla de la potencia ..

La *regla de la cadena* es la más importante para obtener derivadas. Implica una situación en la que  $y$  es una función de la variable  $u$ , pero  $u$  es una función de  $x$ , y se desea encontrar la derivada de  $y$  con respecto a  $x$ . Por ejemplo, las ecuaciones

$$y = u^2 \quad y \quad u = 2x + 1$$

definen a  $y$  como una función de  $u$  y a  $u$  como una función de  $x$ . Si se sustituye  $u$  por  $2x + 1$ , en la primera ecuación, se puede considerar a  $y$  como función de  $x$ :

$$y = (2x + 1)^2$$

Para encontrar  $dy/dx$  primero se desarrolla  $(2x + 1)^2$ :

$$y = 4x^2 + 4x + 1$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = 8x + 4$$

<sup>13</sup>L. L. Doelle, *Environmental Acoustics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1972).

<sup>14</sup>C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7 (1959), 385-398.

<sup>15</sup>M. Feldstein, "The Optimal Level of Social Security Benefits", *The Quarterly Journal of Economics*, C, núm. 2 (1985), 303-320.

Aquí,  $V$  es el volumen del recinto,  $A$  es su absorción total y  $x$  el coeficiente de absorción del aire. Suponga que  $A$  y  $x$  son constantes positivas, demuestre que la razón de cambio de RT con respecto al  $V$  siempre es positiva. Si el volumen total del recinto se incrementa en una unidad, ¿el tiempo de reverberación aumenta o disminuye?

- 75. Depredador-presa** En un experimento<sup>14</sup> que estudiaba la relación depredador-presa, se determinó de manera estadística que el número de presas que un depredador individual y consume es una función de la densidad  $x$  de presas (el número de presas por unidad de área), donde

$$y = \frac{0.7355x}{1 + 0.02744x}$$

Determine la razón de cambio de las presas consumidas con respecto a su densidad.

- 76. Beneficios de seguridad social** En un estudio de los beneficios de la seguridad social, Feldstein<sup>15</sup> diferenció una función de la forma

$$f(x) = \frac{a(1+x) - b(2+n)x}{a(2+n)(1+x) - b(2+n)x}$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $n$  son constantes. Él determina que

$$f'(x) = \frac{-1(1+n)ab}{(a(1+x) - bx)^2(2+n)}$$

Verifique esto. (*Una pista:* Por conveniencia, establezca  $2+n = c$ .) Después observe que la función de Feldstein  $f$  es de la forma

$$g(x) = \frac{A+Bx}{C+Dx} \quad \text{donde } A, B, C \text{ y } D \text{ son constantes}$$

Demuestre que  $g'(x)$  es una constante dividida entre una función no negativa de  $x$ . ¿Qué significa esto?

- 77. Negocios** El fabricante de un producto encontró que cuando se producen 20 unidades por día, el costo promedio es de \$150 y el costo marginal de \$125. ¿Cuál es la razón de cambio relativa del costo promedio con respecto a la cantidad, cuando  $q = 20$ ?

- 78. Utilice el resultado**  $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$  para encontrar  $dy/dx$  si

$$y = (3x + 1)(2x - 1)(x - 4)$$

En este ejemplo, puede verse que encontrar  $dy/dx$  efectuando primero una sustitución, puede ser bastante complicado. Por ejemplo, si en un principio se hubiera tenido  $y = u^{100}$  en vez de  $y = u^2$ , ni siquiera se intentaría efectuar la sustitución. Por fortuna, la regla de la cadena permite manejar tales situaciones con facilidad.

### REGLA 1 La regla de la cadena

Si  $y$  es una función diferenciable de  $u$  y  $u$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces  $y$  es una función diferenciable de  $x$ , y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Se puede mostrar por qué la regla de la cadena es razonable si se consideran las razones de cambio. Suponga

$$y = 8u + 5 \quad y \quad u = 2x - 3$$

Si se establece que  $x$  cambie en una unidad. ¿Cómo cambia  $u$ ? Para responder esta pregunta, se deriva  $y$  y se encuentra que  $du/dx = 2$ . Pero, para *cada* cambio de una unidad en  $u$  hay un cambio en  $y$  de  $dy/du = 8$ . Por lo tanto, ¿cuál es el cambio en  $y$  si  $x$  cambia en una unidad; es decir, ¿qué valor tiene  $dy/dx$ ? La respuesta es  $8 \cdot 2$ , lo cual es  $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ .

Así,  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ .

Ahora se utilizará la regla de la cadena para volver a resolver el problema planteado al principio de esta sección. Si

$$y = u^2 \quad y \quad u = 2x + 1$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^2) \cdot \frac{d}{dx}(2x + 1) \\ &= (2u)2 = 4u \end{aligned}$$

Al reemplazar  $u$  por  $2x + 1$ , se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x + 1) = 8x + 4$$

que concuerda con el resultado previo.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

##### USO DE LA REGLA DE LA CADENA

Si un objeto se mueve en forma horizontal de acuerdo con  $x = 6t$ , donde  $t$  está en segundos, y verticalmente de acuerdo con  $y = 4x^2$ , encuentre su velocidad vertical  $\frac{dy}{dt}$ .

### EJEMPLO 1 Uso de la regla de la cadena

- a. Si  $y = 2u^2 - 3u - 2$  y  $u = x^2 + 4$ , encuentre  $dy/dx$ .

**Solución:** Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(2u^2 - 3u - 2) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 4) \\ &= (4u - 3)(2x) \end{aligned}$$

Se puede escribir la respuesta sólo en términos de  $x$ , si se reemplaza  $u$  por  $x^2 + 4$ .

$$\frac{dy}{dx} = [4(x^2 + 4) - 3](2x) = [4x^2 + 13](2x) = 8x^3 + 26x$$

- b. Si  $y = \sqrt{w}$  y  $w = 7 - t^3$ , encuentre  $dy/dt$ .

**Solución:** Aquí,  $y$  es una función de  $w$  y  $w$  es una función de  $t$ , por lo que se puede considerar a  $y$  como una función de  $t$ . Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dw}(\sqrt{w}) \cdot \frac{d}{dt}(7 - t^3) \\ &= \left(\frac{1}{2}w^{-1/2}\right)(-3t^2) = \frac{1}{2\sqrt{w}}(-3t^2) \\ &= -\frac{3t^2}{2\sqrt{w}} = -\frac{3t^2}{2\sqrt{7 - t^3}} \end{aligned}$$



### EJEMPLO 2 Uso de la regla de la cadena

Si  $y = 4u^3 + 10u^2 - 3u - 7$  y  $u = 4/(3x - 5)$ , encuentre  $dy/dx$  cuando  $x = 1$ .

**Solución:** Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(4u^3 + 10u^2 - 3u - 7) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3x-5}\right) \\ &= (12u^2 + 20u - 3) \cdot \frac{(3x-5)\frac{d}{dx}(4) - 4\frac{d}{dx}(3x-5)}{(3x-5)^2} \\ &= (12u^2 + 20u - 3) \cdot \frac{-12}{(3x-5)^2}\end{aligned}$$

No reemplace simplemente  $x$  por 1 y deje su respuesta en términos de  $u$ .

Aun cuando  $dy/dx$  está en términos de  $x$  y  $u$ , se puede evaluar cuando  $x = 1$  si se determina el valor correspondiente de  $u$ . Cuando  $x = 1$ ,

$$u = \frac{4}{3(1)-5} = -2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} &= [12(-2)^2 + 20(-2) - 3] \cdot \frac{-12}{[3(1)-5]^2} \\ &= 5 \cdot (-3) = -15\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5 

La regla de la cadena establece que si  $y = f(u)$  y  $u = g(x)$ , entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

En realidad, la regla de la cadena se aplica a una composición de funciones porque

$$y - f(u) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

Así  $y$ , como función de  $x$ , es  $f \circ g$ . Esto significa que se puede utilizar la regla de la cadena para diferenciar una función cuando se identifica a la función como una composición. Sin embargo, primero es necesario descomponer la función.

Por ejemplo, para diferenciar

$$y = (x^3 - x^2 + 6)^{100}$$

se piensa en la función como una composición. Sea

$$y = f(u) = u^{100} \quad y \quad u = g(x) = x^3 - x^2 + 6$$

Entonces  $y = (x^3 - x^2 + 6)^{100} = (g(x))^{100} = f(g(x))$ . Ahora que se tiene una composición, se diferencia. Como  $y = u^{100}$  y  $u = x^3 - x^2 + 6$ , por la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= (100u^{99})(3x^2 - 2x) \\ &= 100(x^3 - x^2 + 6)^{99}(3x^2 - 2x)\end{aligned}$$

Se acaba de utilizar la regla de la cadena para diferenciar  $y = (x^3 - x^2 + 6)^{100}$ , que es una potencia de una función de  $x$ , no simplemente una potencia de  $x$ . La regla siguiente, llamada *regla de la potencia*, generaliza el resultado y es un caso especial de la regla de la cadena:

### REGLA 2 Regla de la potencia

Si  $u$  es una función diferenciable de  $x$  y  $n$  es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

*Demostración.* Sea  $y = u^n$ . Como  $y$  es una función diferenciable de  $u$  y  $u$  es una función diferenciable de  $x$ , la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Pero  $dy/du = nu^{n-1}$ . Por lo que,

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

que es la regla de la potencia.

Otra manera de escribir la fórmula de la regla de la potencia es

$$\frac{d}{dx}((u(x))^n) = n(u(x))^{n-1}u'(x)$$

### EJEMPLO 3 Uso de la regla de la potencia

Si  $y = (x^3 - 1)^7$ , encuentre  $y'$ .

**Solución:** Como  $y$  es una potencia de una función de  $x$ , es aplicable la regla de la potencia. Si se hace  $u(x) = x^3 - 1$  y  $n = 7$ , se tiene

$$\begin{aligned} y' &= n[u(x)]^{n-1}u'(x) \\ &= 7(x^3 - 1)^{7-1} \frac{d}{dx}(x^3 - 1) \\ &= 7(x^3 - 1)^6(3x^2) = 21x^2(x^3 - 1)^6 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

### EJEMPLO 4 Uso de la regla de la potencia

Si  $y = \sqrt[3]{(4x^2 + 3x - 2)^2}$ , encuentre  $dy/dx$  cuando  $x = -2$ .

**Solución:** Como  $y = (4x^2 + 3x - 2)^{2/3}$ , se utiliza la regla de la potencia con

$$u = 4x^2 + 3x - 2$$

y  $n = \frac{2}{3}$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2}{3}(4x^2 + 3x - 2)^{(2/3)-1} \frac{d}{dx}(4x^2 + 3x - 2) \\ &= \frac{2}{3}(4x^2 + 3x - 2)^{-1/3}(8x + 3) \\ &= \frac{2(8x + 3)}{3\sqrt[3]{4x^2 + 3x - 2}} \end{aligned}$$

Así,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-2} = \frac{2(-13)}{3\sqrt[3]{8}} = -\frac{13}{3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

### EJEMPLO 5 Uso de la regla de la potencia

Si  $y = \frac{1}{x^2 - 2}$ , encuentre  $\frac{dy}{dx}$ .

La técnica usada en el ejemplo 5 se utiliza con frecuencia cuando el numerador de un cociente es una constante y el denominador no lo es.

**Solución:** Aunque aquí puede emplearse la regla del cociente, un procedimiento más eficiente es tratar el lado derecho como la potencia  $(x^2 - 2)^{-1}$  y utilizar la regla de la potencia. Sea  $u = x^2 - 2$ .

Entonces  $y = u^{-1}$  y

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (-1)(x^2 - 2)^{-1-1} \frac{d}{dx}(x^2 - 2) \\ &= (-1)(x^2 - 2)^{-2}(2x) \\ &= -\frac{2x}{(x^2 - 2)^2}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27



### EJEMPLO 6 Diferenciación de una potencia de un cociente

Si  $z = \left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)$ , encuentre  $\frac{dz}{ds}$ .

**Solución:** Como  $z$  es una potencia de una función, se utiliza primero la regla de la potencia:

$$\frac{dz}{ds} = 4 \left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)^{4-1} \frac{d}{ds} \left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)$$

Ahora se emplea la regla del cociente:

$$\frac{dz}{ds} = 4 \left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)^3 \left( \frac{(s^2+1)(2) - (2s+5)(2s)}{(s^2+1)^2} \right)$$

Al simplificar, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dz}{ds} &= 4 \cdot \frac{(2s+5)^3}{(s^2+1)^3} \left( \frac{-2s^2 - 10s + 2}{(s^2+1)^2} \right) \\ &= -\frac{8(s^2 + 5s - 1)(2s + 5)^3}{(s^2 + 1)^5}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 41



### EJEMPLO 7 Diferenciación de un producto de potencias

Si  $y = (x^2 - 4)^5(3x + 5)^4$ , encuentre  $y'$ .

**Solución:** Como  $y$  es un producto, se aplica primero la regla del producto:

$$y' = (x^2 - 4)^5 \frac{d}{dx}((3x + 5)^4) + (3x + 5)^4 \frac{d}{dx}((x^2 - 4)^5)$$

Ahora se emplea la regla de la potencia:

$$\begin{aligned}y' &= (x^2 - 4)^5(4(3x + 5)^3(3)) + (3x + 5)^4(5(x^2 - 4)^4(2x)) \\ &= 12(x^2 - 4)^5(3x + 5)^3 + 10x(3x + 5)^4(x^2 - 4)^4\end{aligned}$$

Para simplificar, primero se eliminan los factores comunes:

$$\begin{aligned}y' &= 2(x^2 - 4)^4(3x + 5)^3[6(x^2 - 4) + 5x(3x + 5)] \\ &= 2(x^2 - 4)^4(3x + 5)^3(21x^2 + 25x - 24)\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 39



Normalmente, se usaría la regla de la potencia para diferenciar  $y = [u(x)]^n$ . Aunque una función como  $y = (x^2 + 2)^2$  puede escribirse como  $y = x^4 + 4x^2 + 4$ , y diferenciarse con facilidad, este procedimiento no es práctico para una función como  $y = (x^2 + 2)^{1000}$ . Como  $y = (x^2 + 2)^{1000}$  es de la forma  $y = [u(x)]^n$ , se tiene que

$$y' = 1000(x^2 + 2)^{999}(2x)$$

### Producto del ingreso marginal

Ahora se utilizará lo aprendido en el cálculo para desarrollar un concepto de importancia en el estudio de la economía. Suponga que un fabricante emplea  $m$  personas para produ-

cir un total de  $q$  unidades de un producto por día. Se puede pensar que  $q$  es una función de  $m$ . Si  $r$  es el ingreso total que el fabricante recibe al vender esas unidades, entonces  $r$  también puede considerarse una función de  $m$ . Así, se puede ver a  $dr/dm$  como la razón de cambio del ingreso con respecto al número de empleados. La derivada  $dr/dm$  se llama **producto del ingreso marginal**. Es aproximadamente igual al cambio en el ingreso que resulta cuando un fabricante emplea un trabajador adicional.

### EJEMPLO 8 Producto del ingreso marginal

Un fabricante determina que  $m$  empleados producirán un total de  $q$  unidades de un producto por día, donde

$$q = \frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 19}} \quad (1)$$

Si la ecuación de demanda para el producto es  $p = 900/(q + 9)$ , determine el producto del ingreso marginal cuando  $m = 9$ .

**Solución:** Es necesario encontrar  $dr/dm$ , donde  $r$  es el ingreso. Observe que por la regla de la cadena,

$$\frac{dr}{dm} = \frac{dr}{dq} \cdot \frac{dq}{dm}$$

Así, se debe encontrar  $dr/dq$  y  $dq/dm$  cuando  $m = 9$ . Se comienza con  $dr/dq$ . La función de ingreso está dada por

$$r = pq = \left( \frac{900}{q+9} \right) q = \frac{900q}{q+9} \quad (2)$$

por lo que, a partir de la regla del cociente,

$$\frac{dr}{dq} = \frac{(q+9)(900) - 900q(1)}{(q+9)^2} = \frac{8100}{(q+9)^2}$$

Para evaluar esta expresión cuando  $m = 9$ , se utiliza primero la ecuación  $g = 10 m^2 / \sqrt{m^2 + 19}$  para encontrar el valor correspondiente de  $q$ :

$$q = \frac{10(9)^2}{\sqrt{9^2 + 19}} = 81$$

De aquí que,

$$\frac{dr}{dq} \Big|_{m=9} = \frac{dr}{dq} \Big|_{q=81} = \frac{8100}{(81+9)^2} = 1$$

Ahora se calcula  $dq/dm$ . De las reglas del cociente y la potencia se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dm} &= \frac{d}{dm} \left( \frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 19}} \right) \\ &= \frac{(m^2 + 19)^{1/2} \frac{d}{dm}(10m^2) - (10m^2) \frac{d}{dm}[(m^2 + 19)^{1/2}]}{[(m^2 + 19)^{1/2}]^2} \\ &= \frac{(m^2 + 19)^{1/2}(20m) - (10m^2)[\frac{1}{2}(m^2 + 19)^{-1/2}(2m)]}{m^2 + 19} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dm} \Big|_{m=9} &= \frac{(81 + 19)^{1/2}(20 \cdot 9) - (10 \cdot 81)[\frac{1}{2}(81 + 19)^{-1/2}(2 \cdot 9)]}{81 + 19} \\ &= 10.71 \end{aligned}$$

Entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{dr}{dm} \Big|_{m=9} = (1)(10.71) = 10.71$$

Esto significa que si se emplea a un décimo trabajador, el ingreso aumentará en aproximadamente \$10.71 por día.

Una fórmula directa para obtener el producto del ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dm} = \frac{dq}{dm} \left( p + q \frac{dp}{dq} \right)$$



## T E C N O L O G I A

En el ejemplo 8 se encontró el producto del ingreso marginal,  $dr/dm$ , gracias a la regla de la cadena. Otro método, que se adapta muy bien a las calculadoras graficadoras, consiste en utilizar la sustitución para expresar  $r$  como una función de  $m$  y luego diferenciar de manera directa. Primero se toma la ecuación (1) y se sustituye  $q$  en la función de ingreso, ecuación (2); esto da  $r$  como una función de  $m$ . Los detalles: en el menú de funciones se introduce

$$Y_1 = 10X^2/\sqrt{X^2 + 19}$$

$$Y_2 = 900Y_1/(Y_1 + 9)$$

$Y_2$  expresa el ingreso en función del número de empleados. Por último, para encontrar el producto del ingreso marginal cuando  $m = 9$ , se calcula  $nDeriv(Y_2, X, 9)$ . Debe verificar que este método da (aproximadamente) el valor 10.71.

## Problemas 11.5

Utilice la regla de la cadena en los problemas 1 a 8.

- \*1. Si  $y = u^2 - 2u$  y  $u = x^2 - x$ , encuentre  $dy/dx$ .
- 2. Si  $y = 2u^3 - 8u$  y  $u = 7x - x^3$ , encuentre  $dy/dx$ .
- 3. Si  $y = \frac{1}{w^2}$  y  $w = 2 - x$ , encuentre  $dy/dx$ .
- 4. Si  $y = \sqrt[4]{z}$  y  $z = x^5 - x^4 + 3$ , encuentre  $dy/dx$ .
- \*5. Si  $w = u^3$  y  $u = \frac{t-1}{t+1}$ , encuentre  $dw/dt$  cuando  $t = 1$ .
- 6. Si  $z = u^2 + \sqrt{u} + 9$  y  $u = 2s^2 - 1$ , encuentre  $dz/ds$  cuando  $s = -1$ .
- 7. Si  $y = 3w^2 - 8w + 4$  y  $w = 2x^2 + 1$ , encuentre  $dy/dx$  cuando  $x = 0$ .
- 8. Si  $y = 3u^3 - u^2 + 7u - 2$  y  $u = 5x - 2$ , encuentre  $dy/dx$  cuando  $x = 1$ .

En los problemas 9 a 52, encuentre  $y'$ .

- \*9.  $y = (3x + 2)^6$
- 11.  $y = (3 + 2x^3)^5$
- 13.  $y = 2(x^3 - 8x^2 + x)^{100}$
- 15.  $y = (x^2 - 2)^{-3}$
- 17.  $y = 2(x^2 + 5x - 2)^{-5/7}$
- \*19.  $y = \sqrt{5x^2 - x}$
- 21.  $y = \sqrt[4]{2x - 1}$
- 23.  $y = 2\sqrt[5]{(x^3 + 1)^2}$
- 25.  $y = \frac{6}{2x^2 - x + 1}$
- \*27.  $y = \frac{1}{(x^2 - 3x)^2}$
- 29.  $y = \frac{4}{\sqrt{9x^2 + 1}}$
- 31.  $y = \sqrt[3]{7x} + \sqrt[3]{7x}$
- 33.  $y = x^2(x - 4)^5$
- 35.  $y = 4x^2\sqrt{5x + 1}$
- 37.  $y = (x^2 + 2x - 1)^3(5x)$
- \*39.  $y = (8x - 1)^3(2x + 1)^4$
- \*41.  $y = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{12}$
- 43.  $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$
- 10.  $y = (x^2 - 4)^4$
- 12.  $y = (x^2 + x)^4$
- 14.  $y = \frac{(2x^2 + 1)^4}{2}$
- 16.  $y = (2x^3 - 8x)^{-12}$
- 18.  $y = 4(7x - x^4)^{-3/2}$
- 20.  $y = \sqrt{3x^2 - 7}$
- 22.  $y = \sqrt[3]{8x^2 - 1}$
- 24.  $y = 7\sqrt[3]{(x^5 - 3)^5}$
- 26.  $y = \frac{3}{x^4 + 2}$
- 28.  $y = \frac{1}{(2 + x)^4}$
- 30.  $y = \frac{3}{(3x^2 - x)^{2/3}}$
- 32.  $y = \sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$
- 34.  $y = x(x + 4)^4$
- 36.  $y = 4x^3\sqrt{1 - x^2}$
- 38.  $y = x^2(x^3 - 1)^4$
- 40.  $y = (3x + 2)^5(4x - 5)^2$
- 42.  $y = \left(\frac{2x}{x+2}\right)^4$
- 44.  $y = \sqrt[3]{\frac{8x^2 - 3}{x^2 + 2}}$

$$45. \quad y = \frac{2x - 5}{(x^2 + 4)^3} \quad 46. \quad y = \frac{(4x - 2)^4}{3x^2 + 7}$$

$$47. \quad y = \frac{(8x - 1)^5}{(3x - 1)^3} \quad 48. \quad y = \sqrt[3]{(x - 2)^2(x + 2)}$$

$$49. \quad y = 6(5x^2 + 2)\sqrt{x^4 + 5} \quad 50. \quad y = 6 + 3x - 4x(7x + 1)^2$$

$$51. \quad y = 8t + \frac{t-1}{t+4} - \left(\frac{8t-7}{4}\right)^2$$

$$52. \quad y = \frac{(2x^3 + 6)(7x - 5)}{(2x + 4)^2}$$

En los problemas 53 y 54, utilice las reglas del cociente y de la potencia para encontrar  $y'$ . No simplifique su respuesta.

$$53. \quad y = \frac{(2x + 1)^3(x + 3)^2}{(x^3 - 5)^5} \quad 54. \quad y = \frac{\sqrt{x + 2}(4x^2 - 1)^2}{9x - 3}$$

$$55. \quad \text{Si } y = (5u + 6)^3 \text{ y } u = (x^2 + 1)^4, \text{ encuentre } dy/dx \text{ cuando } x = 0.$$

$$56. \quad \text{Si } z = 2y^2 - 4y + 5, y = 6x - 5 \text{ y } x = 2t, \text{ encuentre } dz/dt \text{ cuando } t = 1.$$

$$57. \quad \text{Encuentre la pendiente de la curva } y = (x^2 - 7x - 8)^3 \text{ en el punto } (8, 0).$$

$$58. \quad \text{Encuentre la pendiente de la curva } y = \sqrt{x + 1} \text{ en el punto } (8, 3).$$

En los problemas 59 a 62, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

$$59. \quad y = \sqrt[3]{(x^2 - 8)^2}; \quad (3, 1) \quad 60. \quad y = (x + 3)^3; \quad (-1, 8)$$

$$61. \quad y = \frac{\sqrt{7x + 2}}{x + 1}; \quad \left(1, \frac{3}{2}\right) \quad 62. \quad y = \frac{-3}{(3x^2 + 1)^3}; \quad (0, -3)$$

En los problemas 63 y 64, determine la razón de cambio porcentual de  $y$  con respecto a  $x$  para el valor dado de  $x$ .

$$63. \quad y = (x^2 + 9)^3; \quad x = 4 \quad 64. \quad y = \frac{1}{(x^2 - 1)^3}; \quad x = 2$$

En los problemas 65 a 68,  $q$  es el número total de unidades producidas por día por  $m$  empleados de un fabricante, y  $p$  es el precio de venta por unidad. En cada caso encuentre el producto del ingreso marginal para el valor dado de  $m$ .

$$65. \quad q = 5m, p = -0.4q + 50; \quad m = 6$$

$$66. \quad q = (200m - m^2)/20, p = -0.1q + 70; \quad m = 40$$

$$67. \quad q = 10m^2/\sqrt{m^2 + 9}, p = 525/(q + 3); \quad m = 4$$

$$68. \quad q = 100m/\sqrt{m^2 + 19}, p = 4500/(q + 10); \quad m = 9$$

- 69. Ecuación de demanda** Suponga que  $p = 100 - \sqrt{q^2 + 20}$  es una ecuación de demanda para el producto de un fabricante.
- Encuentre la razón de cambio de  $p$  con respecto a  $q$ .
  - Calcule la razón de cambio relativa de  $p$  con respecto a  $q$ .
  - Determine la función de ingreso marginal.

- 70. Producto de ingreso marginal** Si  $p = k/q$ , donde  $k$  es una constante, es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante, y  $q = f(m)$  define una función que indica el número total de unidades producidas al día por  $m$  empleados, demuestre que el producto del ingreso marginal es siempre igual a cero.

- 71. Función de costo** El costo de producir  $q$  unidades de un producto está dado por

$$c = 5500 + 12q + 0.2q^2$$

Si el precio de  $p$  unidades está dado por la ecuación

$$q = 900 - 1.5p$$

utilice la regla de la cadena para encontrar la razón de cambio del costo con respecto al precio unitario cuando  $p = 85$ .

- 72. Altas de hospital** Cierta organización gubernamental de salud examinó los expedientes de un grupo de individuos que estuvieron hospitalizados por una enfermedad específica. Se encontró que la cantidad total de personas que fueron dadas de alta al final de  $t$  días de hospitalización estaba dada por

$$f(t) = 1 - \left( \frac{250}{250 + t} \right)^3$$

Encuentre  $f'(100)$  e interprete su respuesta.

- 73. Costo marginal** Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2 + 3}} + 5000$$

encuentre la función de costo marginal.

- 74. Salario/educación** Para cierta población, si  $E$  es el número de años de escolaridad de una persona y  $S$  representa el salario anual promedio en dólares, entonces para  $E \geq 7$ ,

$$S = 340E^2 - 4360E + 42\,800$$

- ¿Qué tan rápido cambiará el salario con respecto a la educación cuando  $E = 16$ ?
- ¿A qué nivel educativo la tasa de cambio del salario es igual a \$5000 por año de educación?

- 75. Biología** El volumen de una célula esférica está dado por

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , donde  $r$  es el radio. En el tiempo  $t$  segundos, el radio  $r$  (en centímetros) está dado por

$$r = 10^{-8}t^2 + 10^{-7}t$$

Use la regla de la cadena para encontrar  $dV/dt$  cuando  $t = 10$ .

- 76. Presión en tejidos vivos** Bajo ciertas condiciones, la presión  $p$  desarrollada en los tejidos vivos por la radiación ultrasónica está dada como una función de la intensidad de la radiación mediante la ecuación<sup>16</sup>

$$p = (2\rho VI)^{1/2}$$

donde  $\rho$  (una letra griega que se lee “rho”) es la densidad del tejido afectado y  $V$  la velocidad de propagación de la radia-

ción. Aquí  $\rho$  y  $V$  son constantes. (a) Encuentre la razón de cambio de  $p$  con respecto a  $I$ . (b) Encuentre la razón de cambio relativa de  $p$  con respecto a  $I$ .

- 77. Demografía** Suponga que para cierto grupo de 20 000 nacimientos, el número de personas que alcanzan a vivir  $x$  años es

$$l_x = -0.000354x^4 + 0.00452x^3 + 0.848x^2 - 34.9x + 20\,000$$

$$0 \leq x \leq 95.2$$

- Encuentre la razón de cambio de  $l_x$  con respecto a  $x$  y evalúe su respuesta para  $x = 65$ .

- Encuentre la razón de cambio relativa de  $l_x$  cuando  $x = 65$ . Redondee sus respuestas a tres decimales.

- 78. Contracción muscular** Un músculo tiene la capacidad de contraerse al estar sometido a una carga, como una pesa. La ecuación

$$(P + a)(v + b) = k$$

se llama “ecuación fundamental de la contracción muscular”.<sup>17</sup> Aquí,  $P$  es la carga impuesta al músculo,  $v$  es la velocidad de contracción de las fibras musculares y  $a$ ,  $b$  y  $k$  son constantes positivas. Exprese  $v$  como una función de  $P$ . Utilice su resultado para encontrar  $dv/dP$ .

- 79. Economía** Suponga que  $pq = 100$  es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante. Se establece que  $c$  es el costo total; suponga que el costo marginal es 0.01 cuando  $q = 200$ . Utilice la regla de la cadena para encontrar  $dc/dp$  cuando  $q = 200$ .

- \*80. Producto del ingreso marginal** Un empresario que emplea  $m$  trabajadores encuentra que producen

$$q = 2m(2m + 1)^{3/2}$$

unidades de producto diariamente. El ingreso total  $r$  (en dólares) está dado por

$$r = \frac{50q}{\sqrt{1000 + 3q}}$$

- ¿Cuál es el precio por unidad (al centavo más cercano) cuando hay 12 trabajadores?

- Determine el ingreso marginal cuando hay 12 trabajadores.

- Determine el producto del ingreso marginal cuando  $m = 12$ .

- 81.** Suponga que  $y = f(x)$ , donde  $x = g(t)$ . Dado que  $g(2) = 3$ ,  $g'(2) = 4$ ,  $f(2) = 5$ ,  $f'(2) = 6$ ,  $g(3) = 7$ ,  $g'(3) = 8$ ,  $f(3) = 9$  y  $f'(3) = 10$ , determine el valor de  $\frac{dy}{dt}|_{t=2}$ .

- 82. Negocios** Un fabricante determinó que para su producto el costo promedio diario (en cientos de dólares) está dado por

$$\bar{c} = \frac{324}{\sqrt{q^2 + 35}} + \frac{5}{q} + \frac{19}{18}$$

- Conforme la producción diaria crece, el costo promedio se approxima a una cantidad constante. ¿Cuál es esta cantidad?

- Determine el costo marginal del fabricante cuando se producen 17 unidades por día.

- El fabricante determina que si la producción y las ventas se incrementaran a 18 unidades diarias, el ingreso crecería a \$275. ¿Deberá realizar este aumento? ¿Por qué?

<sup>16</sup>R. W. Stacy et al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

<sup>17</sup>Ibid.

83. si

$$y = (u + 1)\sqrt{u + 5}$$

y

$$u = x(x^2 + 5)^5$$

encuentre  $dy/dx$  cuando  $x = 0.1$ . Redondee su respuesta a dos decimales.

84. Si

$$y = \frac{2u + 3}{u^3 - 2}$$

y

$$u = \frac{x + 4}{(2x + 3)^3}$$

encuentre  $dy/dx$  cuando  $x = -1$ . Redondee su respuesta a dos decimales.

## 11.6 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

#### Sección 11.1 La derivada

recta secante	recta tangente	pendiente de una curva	Ej. 1, p. 483
derivada	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$\lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$	Ej. 2, p. 484
cociente de diferencias	$f'(x)$	$y'$	Ej. 4, p. 485

#### Sección 11.2 Reglas para la diferenciación

función potencia	regla del factor constante	regla de la suma o la diferencia
		Ej. 5, p. 494

#### Sección 11.3 La derivada como una razón de cambio

función de posición	$\Delta x$	velocidad	razón de cambio	Ej. 1, p. 498
función del costo total		costo marginal	costo promedio	Ej. 7, p. 502
función del ingreso total		ingreso marginal		Ej. 8, p. 503
razón de cambio relativa		razón de cambio porcentual		Ej. 9, p. 504

#### Sección 11.4 La regla del producto y la regla del cociente

regla del producto	regla del cociente	Ej. 5, p. 510
función de consumo	propensión marginal al consumo y al ahorro	Ej. 9, p. 513

#### Sección 11.5 La regla de la cadena y la regla de la potencia

regla de la cadena	regla de la potencia	producto del ingreso marginal	Ej. 8, p. 520
--------------------	----------------------	-------------------------------	---------------

### Resumen

La recta tangente (o tangente) a una curva en el punto  $P$  es la posición límite de las rectas secantes  $PQ$ , cuando  $Q$  se acerca a  $P$  a lo largo de la curva. La pendiente de la tangente en  $P$  se llama pendiente de la curva en  $P$ .

Si  $y = f(x)$ , la derivada de  $f$  en  $x$  es la función definida por el límite  $f'(x)$  de la ecuación

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En forma geométrica, la derivada da la pendiente de la curva  $y = f(x)$  en el punto  $(x, f(x))$ . Una ecuación de la tangente en un punto particular  $(a, f(a))$  se obtiene al evaluar  $f'(a)$ , que es la pendiente  $m$  de la tangente, y sustituir en la forma punto-pendiente de una recta:  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ . Cualquier función que es diferenciable en un punto, también debe ser continua ahí.

Las reglas básicas para encontrar derivadas son las siguientes, para las que se supone que todas las funciones son diferenciables.

$$\frac{d}{dx}(c) = 0, \text{ donde } c \text{ es cualquier constante}$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \text{ donde } n \text{ es cualquier número real}$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x), \text{ donde } c \text{ es una constante}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ , donde  $y$  es una función de  $u$  y  $u$  es una función de  $x$

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}, \text{ donde } u \text{ es una función de } x \text{ y } n \text{ es cualquier número real}$$

La derivada  $dy/dx$  también puede interpretarse como dar la razón de cambio (instantánea) de  $y$  con respecto a  $x$ :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$$

En particular, si  $s = f(t)$  es una función de posición, donde  $s$  es la posición en el tiempo  $t$ , entonces

$$\frac{ds}{dt} = \text{velocidad en el tiempo}$$

En economía, el término *marginal* se utiliza para describir derivadas de tipos específicos de funciones. Si  $c = f(q)$  es una función de costo total ( $c$  es el costo total de  $q$  unidades de un producto), entonces la razón de cambio

$$\frac{dc}{dq} \text{ se llama costo marginal}$$

Se interpreta el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional de producción (el costo promedio por unidad  $\bar{c}$ , está relacionado con el costo total  $c$  mediante  $\bar{c} = c/q$ , o  $c = \bar{c}q$ ).

Una función de ingreso total  $r = f(q)$  da el ingreso  $r$  de un fabricante al vender  $q$  unidades de un producto. (El ingreso  $r$  y el precio  $p$  se relacionan mediante  $r = pq$ ). La razón de cambio

$$\frac{dr}{dq} \text{ se llama ingreso marginal}$$

que se interpreta como el ingreso aproximado que se obtiene al vender una unidad adicional de producto.

Si  $r$  es el ingreso que un fabricante recibe cuando se vende la producción total de  $m$  empleados, entonces la derivada  $dr/dm$  se llama

## Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

En los problemas 1 a 4, utilice la definición de derivada para encontrar  $f'(x)$ .

1.  $f(x) = 2 - x^2$

2.  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

3.  $f(x) = \sqrt{3x}$

4.  $f(x) = \frac{2}{1+4x}$

En los problemas 5 a 38, diferencie.

5.  $y = 7^4$

6.  $y = ex$

7.  $y = 7x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 1$

8.  $y = 4(x^2 + 5) - 7x$

9.  $f(s) = s^2(s^2 + 2)$

10.  $y = \sqrt{x+3}$

11.  $y = \frac{x^2 + 1}{5}$

12.  $y = -\frac{2}{2x^2}$

13.  $y = (x^3 + 7x^2)(x^3 - x^2 + 5)$

14.  $y = (x^2 + 1)^{100}(x - 6)$

15.  $f(x) = (2x^2 + 4x)^{100}$

16.  $f(w) = w\sqrt{w} + w^2$

17.  $y = \frac{3}{2x+1}$

18.  $y = \frac{5x^2 - 8x}{2x}$

19.  $y = (8+2x)(x^2 + 1)^4$

20.  $g(z) = (2z)^{3/5} + 5$

21.  $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 4}$

22.  $y = \frac{x-5}{(x+2)^2}$

23.  $y = \sqrt[3]{4x-1}$

24.  $f(x) = (1+2^3)^{12}$

25.  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

26.  $y = \frac{x(x+1)}{2x^2+3}$

27.  $h(x) = (x-6)^4(x+5)^3$

28.  $y = \frac{(x+3)^5}{x}$

29.  $y = \frac{5x-4}{x+6}$

30.  $f(x) = 5x^3\sqrt{3+2x^4}$

31.  $y = 2x^{-3/8} + (2x)^{-3/8}$

32.  $y = \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{2}{x}}$

33.  $y = \frac{x^2+6}{\sqrt{x^2+5}}$

34.  $y = \sqrt[3]{(7-3x^2)^2}$

35.  $y = (x^3 + 6x^2 + 9)^{3/5}$

36.  $z = 0.4x^2(x+1)^{-3} + 0.5$

37.  $g(z) = \frac{-z}{(z-1)^{-2}}$

38.  $g(z) = \frac{-3}{4(z^5 + 2z - 5)^4}$

producto del ingreso marginal, el cual da el cambio aproximado que resulta en el ingreso cuando el fabricante contrata un empleado extra.

Si  $C = f(I)$  es una función de consumo, donde  $I$  es el ingreso nacional y  $C$  es el consumo nacional, entonces

$\frac{dC}{dI}$  es la propensión marginal al consumo

y

$1 - \frac{dC}{dI}$  es la propensión marginal del ahorro

Para cualquier función, la razón de cambio relativa de  $f(x)$  es

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

que compara la razón de cambio de  $f(x)$  con la función  $f(x)$  misma. La razón de cambio porcentual es

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100\%$$

En los problemas 39 a 42 encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado de  $x$ .

39.  $y = x^2 - 6x + 4, x = 1$       40.  $y = -2x^3 + 6x + 1, x = 2$

41.  $y = \sqrt[3]{x}, x = 8$       42.  $y = \frac{x^2}{x-12}, x = 13$

43. Si  $f(x) = 4x^2 + 2x + 8$  encuentre las razones de cambio relativa y porcentual de  $f(x)$  cuando  $x = 1$ .

44. Si  $f(x) = x/(x+4)$ , encuentre las razones de cambio relativa y porcentual de  $f(x)$  cuando  $x = 1$ .

45. **Ingreso marginal** Si  $r = q(20 - 0.1q)$  es una función de ingreso total, encuentre la función de ingreso marginal.

46. **Costo marginal** Si

$$c = 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 3q + 6000$$

es una función de costo total, encuentre el costo marginal cuando  $q = 100$ .

47. **Función de consumo** Si

$$C = 7 + 0.6I - 0.25\sqrt{I}$$

es una función de consumo, encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando  $I = 16$ .

48. **Ecuación de demanda** Si  $p = \frac{q+12}{q+5}$  es una ecuación de demanda, encuentre la razón de cambio del precio  $p$  con respecto a la cantidad  $q$ .

49. **Ecuación de demanda** Si  $p = -0.1q + 500$  es una ecuación de demanda, encuentre la función de ingreso marginal.

50. **Costo promedio** Si  $\bar{c} = 0.03q + 1.2 + \frac{3}{q}$  es una función de costo promedio, encuentre el costo marginal cuando  $q = 100$ .

51. **Función de costo en una planta de energía** La función de costo total de una planta de energía eléctrica se estimada mediante la ecuación<sup>18</sup>

$$c = 16.68 + 0.125q + 0.00439q^2 \quad 20 \leq q \leq 90$$

<sup>18</sup>J. A. Nordin, "Note on a Light Plant's Cost Curves", *Econometrica*, 15 (1947), 231-255.

donde  $q$  es la producción total en 8 horas (como porcentaje de la capacidad) y  $c$  es el costo total del combustible en dólares. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando  $q = 70$ .

- 52. Producto del ingreso marginal** Un fabricante determina que  $m$  empleados producirán un total de  $q$  unidades por día, donde  $q = m(50 - m)$

Si la función de demanda está dada por

$$p = -0.01q + 9$$

encuentre el producto del ingreso marginal cuando  $m = 10$ .

- 53. Polilla de invierno** En un estudio relativo a la polilla de invierno en Nueva Escocia,<sup>19</sup> se determinó que el número promedio,  $y$ , de huevos en una polilla hembra es una función de su ancho abdominal  $x$  (en milímetros), donde

$$y = f(x) = 14x^3 - 17x^2 - 16x + 34$$

y  $1.5 \leq x \leq 3.5$ . ¿A qué razón cambia el número de huevos con respecto al ancho abdominal cuando  $x = 2$ ?

- 54. Relación huésped-parásito** Para una relación particular huésped-parásito, se encontró que cuando la densidad de huéspedes (número de huéspedes por unidad de área) es  $x$ , el número de huéspedes con parásitos es

$$y = 12 \left( 1 - \frac{1}{1+3x} \right) \quad x \geq 0$$

¿Para qué valor de  $x$   $dy/dx$  es igual a  $\frac{1}{3}$ ?

- 55. Crecimiento de bacterias** En cierto cultivo se tienen bacterias en crecimiento. El tiempo  $t$  (en horas) para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación), es una función de la temperatura  $T$  (en grados Celsius) del cultivo, y está dado por

$$t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4} & \text{si } 30 \leq T \leq 36 \\ \frac{4}{3}T - \frac{175}{4} & \text{si } 36 < T \leq 39 \end{cases}$$

Encuentre  $dt/dT$  cuando (a)  $T = 38$  y (b)  $T = 35$ .

- 56. Movimiento** La función de posición de una partícula que se mueve en línea recta es

$$s = \frac{9}{2t^2 + 3}$$

donde ( $t$  está en segundos y  $s$  en metros). Encuentre la velocidad de la partícula en  $t = 1$ .

- 57. Razón de cambio** El volumen de una esfera está dado por  $V = \frac{1}{6}\pi d^3$ , donde  $d$  es el diámetro. Encuentre la razón de cambio de  $V$  con respecto a  $d$  cuando  $d = 4$  pies.

- 58. Movimiento** La función de posición para una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo es

$$s = 218t - 16t^2$$

donde  $s$  es la altura en pies desde el suelo después de  $t$  segundos. ¿Para qué valor o valores de  $t$  la velocidad es igual a 64 pies/s?

- 59. Encuentre la función de costo marginal** si la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 2q + \frac{10\,000}{q^2}$$

- 60. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva**

$$y = \frac{(x^3 + 2)\sqrt{x+1}}{x^4 + 2x}$$

en el punto sobre la curva donde  $x = 1$ .

- 61. Un fabricante encontró que si trabajan  $m$  empleados, el número de unidades producidas por día es**

$$q = 10\sqrt{m^2 + 4900} - 700$$

La ecuación de demanda para el producto es

$$8q + p^2 - 19\,300 = 0$$

donde  $p$  es el precio de venta cuando la demanda para el producto es  $q$  unidades por día.

- (a) Determine el producto de ingreso marginal del fabricante cuando  $m = 240$ .

- (b) Encuentre la razón de cambio relativa del ingreso con respecto al número de empleados cuando  $m = 240$ .

- (c) Suponga que le costaría al fabricante \$400 más por día contratar un empleado adicional. ¿Aconsejaría usted al fabricante contratar este empleado adicional? ¿Por qué?

- 62. Si  $f(x) = x^2 \ln x$ , utilice el “límite de un cociente de diferencias” para estimar  $f'(5)$ . Redondee su respuesta a tres decimales.**

- 63. Si  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 4}$ , utilice la función de derivación numérica de su calculadora graficadora para estimar la derivada cuando  $x = 10$ . Redondee su respuesta a tres decimales.**

- 64. La función de costo total para un fabricante está dada por**

$$c = \frac{5q^2 + 4}{\sqrt{q^2 + 6}} + 2500$$

donde  $c$  está en dólares. Utilice la función de derivación numérica de su calculadora graficadora para estimar el costo marginal cuando se producen 15 unidades. Redondee su respuesta al centavo más cercano

- 65. Si**

$$y = (u + 3)\sqrt{u + 6}$$

y

$$u = \frac{x + 4}{x + 3}$$

encuentre  $dy/dx$  cuando  $x = 0.3$ . Redondee su respuesta a dos decimales.

<sup>19</sup>D. G. Embree, “The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia, 1954-1962”, *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Propensión marginal al consumo

Se puede definir una función de consumo ya sea para una nación, como en la sección 11.4, o para una familia individual. En cualquier caso, la función relaciona el consumo total con el ingreso total. De manera análoga, una función de ahorro relaciona el ahorro total con el ingreso total, ya sea en una nación o a nivel familiar.

Pueden encontrarse los datos acerca del ingreso, consumo y ahorro para Estados Unidos como un todo en las tablas de Cuentas del Producto e Ingreso Nacional (NIPA, por sus siglas en inglés), compiladas por la oficina de Análisis Económicos, una división del Departamento de Comercio de Estados Unidos. Las tablas pueden descargarse de [www.bea.gov](http://www.bea.gov). Para los años de 1959-1999, la función de consumo nacional se indica por medio del diagrama de dispersión de la figura 11.15.

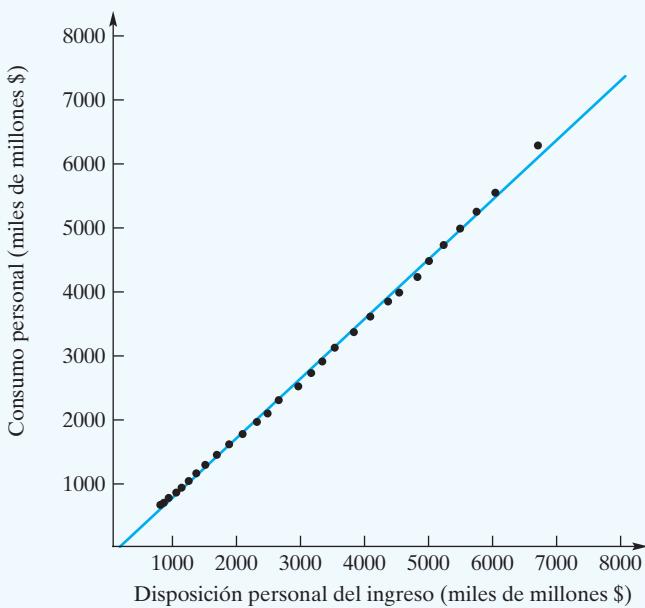


FIGURA 11.15 Función de consumo nacional para Estados Unidos.

Observe que los puntos están más o menos a lo largo de una línea recta. Una regresión lineal da la ecuación para ésta como  $y = 0.9314x - 99.1936$ .

La propensión marginal al consumo derivada de esta gráfica es simplemente la pendiente de la recta, es decir, aproximadamente 0.931 o 93.1%. A nivel nacional, entonces, un incremento de mil millones de dólares en el ingreso total disponible produce un incremento de \$931 millones en el consumo. Y si se supone que el resto se ahorra, existe un aumento de \$69 millones en ahorros totales.<sup>20</sup>

Quizá algo más sencillo para relacionar, debido a que implica números más pequeños, es la función de consumo para

<sup>20</sup>En realidad, también se deben de contar los pagos de intereses y otros gastos no contabilizados como consumos. Pero, por ahora no se tomará en cuenta esta complicación.

una familia. Esta función está documentada en Encuestas de gastos del consumidor, llevadas a cabo por la Oficina de estadísticas de trabajo, que es parte del Departamento de trabajo de Estados Unidos. Los resultados de las encuestas para cada año pueden bajarse de [www.bls.gov/cex/](http://www.bls.gov/cex/).

La encuesta de cada año proporciona información para cinco quintiles, donde un quintil representa un quinto de las familias de Estados Unidos. Los quintiles se ordenan de acuerdo con el ingreso, de modo que el inferior representa al 20% más pobre de las familias de Estados Unidos y el quintil superior representa al 20% más rico.

TABLA 11.3 Ingresos y gastos familiares de Estados Unidos, 1999

Ingreso después de impuestos	Gastos totales
\$7101	\$16 766
\$17 576	\$24 850
\$30 186	\$33 078
\$48 607	\$46 015
\$98 214	\$75 080

Para el año 1999, el ingreso y consumo son como se muestra en la tabla 11.3. Los números son valores promedio dentro de cada quintil. Si estos datos se grafican por medio de una calculadora graficadora, los puntos caen en un patrón que podría aproximarse de manera razonable a una línea recta, pero podría aproximarse mejor mediante la forma de una curva, cualitativamente parecida a una función raíz cuadrada (figura 11.16).

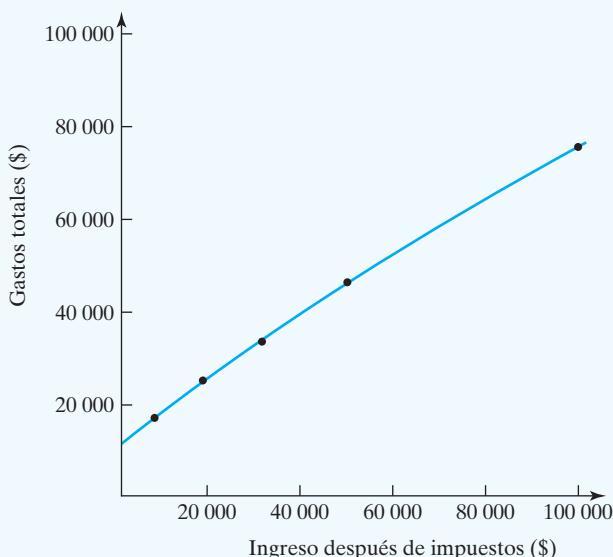


FIGURA 11.16 Función de consumo familiar (Estados Unidos).

La mayoría de las calculadoras graficadoras no tienen una función de regresión para una función de tipo raíz cuadrada. Sin embargo, si tienen una función de regresión cuadrática; y la inversa de una función cuadrática es una función de tipo raíz cuadrada. (Las funciones inversas se definieron en la sección 2.4). Así, que se procede de la manera siguiente. Primero, se utilizan las capacidades estadísticas de una calculadora, para introducir los números de la *segunda* columna de la tabla 11.3 como valores de  $x$ , y los de la *primera* columna como valores de  $y$ . Segundo, se realiza una regresión cuadrática. La función obtenida está dada por

$$y = (4.4627 \times 10^{-6})x^2 + 1.1517x - 13\,461$$

Tercero, se intercambian las listas de los valores de  $x$  y  $y$  con el fin de preparar la gráfica. Cuarto, se reemplaza  $y$  por  $x$ , y  $x$  por  $y$  en la ecuación de regresión cuadrática, y se despeja  $y$  (mediante la fórmula cuadrática) para obtener la ecuación

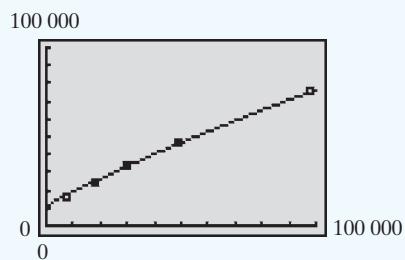
$$y = \frac{-1.1517 \pm \sqrt{1.1517^2 - 4(4.4627 \times 10^{-6})(-13\,461 - x)}}{2(4.4627 \times 10^{-6})}$$

o, de manera más simple,

$$y = -129\,036 \pm \sqrt{1.9667 \times 10^{10} + 224\,080x}$$

Por último, se introduce la mitad superior de la curva (que corresponde a la parte + del signo  $\pm$ ) como una función para graficar; luego se despliega junto con una gráfica de los datos. El resultado se parece al que se muestra en la figura 11.17.

Para encontrar el consumo marginal para un ingreso dado, ahora se usa la función  $dy/dx$ . Por ejemplo, para encontrar el consumo marginal en \$50 000, se selecciona  $dy/dx$ , y luego se introduce 50 000. La calculadora regresa el valor 0.637675, que representa un consumo marginal de alrededor del 63.8%. En otras palabras, una familia con ingresos



**FIGURA 11.17** Gráfica de la curva de regresión.

de \$50 000 anuales, si se tiene un ingreso adicional de \$1000, gastaría \$638 de ellos y el resto lo ahorraría.

### Problemas

1. Compare la función de consumo de la figura 11.15 con las funciones de consumo de los problemas 63 y 64 de la sección 11.5. Dé dos formas en las que estas funciones de consumo difieren de manera significativa e interprete las diferencias de manera cualitativa.
2. El primer renglón de la tabla 11.3, en la primera columna, tiene \$7101 y en la segunda columna, \$16 766. ¿Qué significa esto?
3. Suponga que una familia tiene ingresos anuales de \$25 000, y en 1999 recibió un bono adicional inesperado por \$1000. ¿Cuánto de ese cheque esperaría usted que la familia gastara? ¿Cuánto ahorraría?
4. Suponga que una familia con ingresos de \$90 000 anuales, recibió en 1999 un bono adicional inesperado por \$1000. ¿Cuánto de ese bono gastaría?
5. ¿Cuáles son las razones de la vida real para explicar la diferencia entre las respuestas de los problemas 3 y 4?

# 12

## TEMAS ADICIONALES DE DIFERENCIACIÓN

- 12.1 Derivadas de funciones logarítmicas
- 12.2 Derivadas de funciones exponenciales
- 12.3 Elasticidad de la demanda
- 12.4 Diferenciación implícita
- 12.5 Diferenciación logarítmica
- 12.6 Método de Newton
- 12.7 Derivadas de orden superior
- 12.8 Repaso

### Aplicación práctica

Cantidad económica de pedido

**D**espués de un incómodo viaje en un vehículo, en ocasiones los pasajeros dicen que la travesía (el recorrido) tuvo “jalones” o “sacudidas”, es decir “variados cambios en la velocidad”. Pero, de manera más precisa, ¿cuál es el significado de lo que llamamos “jaloneo”? ¿cómo interpretar esto para, digamos, un ingeniero que diseña un nuevo sistema de transporte?

Viajar en línea recta a una velocidad constante se denomina *movimiento rectilíneo uniforme*, y no existe en él jaloneo (sacudida), formalmente hablando no hay impulso alguno; pero si la trayectoria o la velocidad cambian, el viaje puede tener jalones. El cambio en la posición con respecto al tiempo es la derivada de la posición y se la llama velocidad. A su vez el cambio de la velocidad con respecto al tiempo, formalmente, es la derivada de la velocidad y se la llama aceleración. Esta última también puede entenderse como derivada de la derivada de la posición con respecto al tiempo, es decir, la *derivada segunda* de la posición con respecto al tiempo. Uno de los conceptos importantes que se tratan en este capítulo es el de derivadas de orden superior, de las cuales la aceleración es un ejemplo.

Pero, ¿es acaso la aceleración la responsable de los jalones? La sensación de impulso hacia adelante y hacia atrás en una montaña rusa ciertamente está relacionada con la aceleración. Por otra parte, las revistas de automóviles con frecuencia elogian a aquellos que tienen una aceleración *suave*, es decir *uniforme*. De modo que, en apariencia, la aceleración tiene algo que ver con el impulso, pero no es en sí la causa.

La derivada de la aceleración es la *tercera* derivada de la posición con respecto al tiempo. Cuando esta tercera derivada es grande, es porque la aceleración cambia con rapidez. En una montaña rusa, en una vuelta uniforme a la izquierda se experimenta una aceleración uniforme hacia la izquierda. Pero cuando la montaña rusa cambia de manera abrupta de una vuelta hacia la izquierda a una vuelta hacia la derecha, la aceleración cambia de dirección, y los pasajeros experimentan un impulso. La tercera derivada de la posición es, en efecto, muy adecuada para medirlo, y que es costumbre denominar *jalón* o *impulso*, del mismo modo que la segunda derivada se denomina aceleración.

El jalón tiene implicaciones no sólo para la comodidad de los pasajeros en un vehículo, sino también para la confiabilidad y calidad de los equipos. Por ejemplo, los ingenieros planean y diseñan equipo, con un alto nivel de confianza para naves espaciales bajo directrices o parámetros que indican el máximo jalón que el equipo debe ser capaz de soportar sin dañar sus componentes internos.

**OBJETIVO**

Desarrollar una fórmula de diferenciación para  $y = \ln u$ , aplicar la fórmula y utilizarla para diferenciar una función logarítmica para una base diferente de  $e$ , y aprender su significado.

## 12.1 Derivadas de funciones logarítmicas

En esta sección se desarrollarán fórmulas para diferenciar funciones logarítmicas. Se inicia con la derivada de  $f(x) = \ln x$ , donde  $x > 0$ . De acuerdo con la definición de derivada,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

Si se utiliza la propiedad de los logaritmos que afirma que  $\ln(m) - \ln(n) = \ln(m/n)$ , se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \right)\end{aligned}$$

Al escribir  $\frac{1}{h}$  como  $\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h}$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} \right) \quad (\text{puesto que } r \ln m = \ln m^r) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left( \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} \right)\end{aligned}$$

Recuerde, la gráfica de la función  $f(x) = \ln x$ . Que según se expuso y se demostró en la sección 4.2, no tiene interrupciones en su dominio, que consiste en el conjunto de todos los números reales positivos. Ahora bien, puede *demostrarse* que la función logaritmo es continua, como lo sugiere la gráfica sin interrupción, y de la continuidad se tiene que el límite de un logaritmo es el logaritmo del límite ( $\lim \ln u = \ln \lim u$ ). En consecuencia, se tiene

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \ln \left( \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h} \right) \quad (1)$$

Para evaluar  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h}$ , primero se observa que cuando  $h \rightarrow 0$ , entonces,  $x$  es constante y en consecuencia,  $\frac{h}{x} \rightarrow 0$  y viceversa, si  $\frac{h}{x} \rightarrow 0$ , entonces  $h \rightarrow 0$ . Así, si se reemplaza  $\frac{h}{x}$  por  $k$ , el límite se convierte en

$$\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{1/k} = e$$

como en la sección 10.1. Por lo tanto, la ecuación (1) se convierte en

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}(1) = \frac{1}{x} \quad \text{para } x > 0$$

Se requiere tener cierto cuidado con esta ecuación porque mientras el lado izquierdo está definido sólo para  $x > 0$ , el lado derecho está definido para toda  $x \neq 0$ . Para  $x < 0$ ,  $\ln(-x)$  está definido, y por la regla de la cadena se tiene

$$\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{-x} \frac{d}{dx}(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \quad \text{para } x < 0$$

Se pueden combinar las dos últimas ecuaciones mediante la función valor absoluto para obtener

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x} \quad \text{para } x \neq 0 \quad (2)$$

**EJEMPLO 1** Diferenciación de funciones que contienen  $\ln x$

- a. Diferencie  $f(x) = 5 \ln x$ .

**Solución:** El 5 representa una constante que está multiplicando; por la propiedad  $\frac{d}{dx}CV = C\frac{d}{dx}V$  permanece en la derivada de la función. Y por la ecuación (2) se tiene

$$f'(x) = 5 \frac{d}{dx}(\ln x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x} \quad \text{para } x > 0$$

- b. Diferencie  $y = \frac{\ln x}{x^2}$ .

**Solución:** Por la regla del cociente  $\frac{d}{dx} \frac{U}{V} = \frac{VU' - UV'}{V^2}$  y la ecuación (2),

$$\begin{aligned} U &= \ln x & U' &= \frac{1}{x} \\ V &= x^2 & V' &= 2x \end{aligned}$$

Acomodando según la regla del cociente queda

$$y' = \frac{(x^2)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{(\ln x)^2} = \frac{x - 2x \ln x}{(\ln x)^2} \quad \text{para } x > 0$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

Se utiliza la regla de la cadena para desarrollar la fórmula de diferenciación para  $\ln |u|$ .

A continuación se extenderá la ecuación (2) para considerar una clase más amplia de funciones. Sea  $y = \ln |u|$ , donde  $u$  es una función diferenciable de  $x$ . Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}(\ln |u|) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\ln |u|) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{para } u \neq 0$$

Por lo que,

$$\frac{d}{du}(\ln |u|) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{para } u \neq 0 \tag{3}$$

Por supuesto, la ecuación (3) indica que  $\frac{d}{du}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$  para  $u > 0$ .

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1**

**DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES**

**QUE INCLUYEN  $\ln u$**

La oferta de  $q$  unidades de un producto al precio de  $p$  dólares por unidad está dada por  $q(p) = 25 + 2 \ln(3p^2 + 4)$ . Encuentre la razón de cambio de la oferta con respecto al precio,  $\frac{dq}{dp}$ .

**EJEMPLO 2** Diferenciación de funciones que contienen  $\ln u$

- a. Diferencie  $y = \ln(x^2 + 1)$ .

**Solución:** Esta función tiene la forma  $\ln u$ , donde  $u = x^2 + 1$  y como  $x^2 + 1 > 0$ , para toda  $x$ , entonces  $y = \ln(x^2 + 1)$  está definida para toda  $x$ . Si se emplea la ecuación (3), se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2 + 1}(2x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

- b. Diferencie  $y = x^2 \ln(4x + 2)$ .

**Solución:** Mediante la regla del producto se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\ln(4x + 2)) + (\ln(4x + 2)) \frac{d}{dx}(x^2)$$

Con base en la ecuación (3) donde  $u = 4x + 2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^2 \left( \frac{1}{4x + 2} \right) (4) + (\ln(4x + 2))(2x) \\ &= \frac{2x^2}{2x + 1} + 2x \ln(4x + 2) \quad \text{para } 4x + 2 > 0 \end{aligned}$$

Como  $4x + 2 > 0$  exactamente cuando  $x > -1/2$ , se tiene

$$\frac{d}{dx}(x^2 \ln(4x + 2)) = \frac{2x^2}{2x + 1} + 2x \ln(4x + 2) \quad \text{para } x > -1/2$$

- c. Diferencie  $y = \ln|\ln|x||$ .

**Solución:** Esta función tiene la forma  $y = \ln|u|$ , donde  $u = \ln|x|$ . Gracias a la ecuación (3), se obtiene

$$y' = \frac{1}{\ln|x|} \frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{\ln|x|} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x \ln|x|} \quad \text{para } x, u \neq 0$$

Como  $\ln|x| = 0$  cuando  $x = -1, 1$ , se tiene

$$\frac{d}{dx}(\ln|\ln|x||) = \frac{1}{x \ln|x|} \quad \text{para } x \neq -1, 0, 1$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

Con frecuencia se puede reducir el trabajo que implica diferenciar el logaritmo de un producto, cociente o potencia, mediante las propiedades de los logaritmos y la reescritura del logaritmo *antes* de diferenciar. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 3 Reescritura de funciones logarítmicas antes de diferenciarlas

- a. Encuentre  $\frac{dy}{dx}$  si  $y = \ln(2x + 5)^3$ .

**Solución:** Aquí se expresa el logaritmo de una potencia. Primero se simplifica el lado derecho con el uso de la propiedad  $\ln V^U = U \ln V$ . Y después se deriva, entonces obtenemos:

$$y = \ln(2x + 5)^3 = 3 \ln(2x + 5) \quad \text{para } 2x + 5 > 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \left(\frac{1}{2x + 5}\right)(2) = \frac{6}{2x + 5} \quad \text{para } x > -5/2$$

En forma alternativa, si la simplificación no se realizara al inicio, se escribiría

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{(2x + 5)^3} \frac{d}{dx}((2x + 5)^3) \\ &= \frac{1}{(2x + 5)^3} (3)(2x + 5)^2(2) = \frac{6}{2x + 5} \end{aligned}$$

- b. Encuentre  $f'(p)$  si  $f(p) = \ln((p + 1)^2(p + 2)^3(p + 3)^4)$ .

**Solución:** En el lado derecho se utiliza la propiedad  $\ln UV = \ln U + \ln V$  y  $\ln V^U = U \ln V$ , entonces queda

$$\begin{aligned} f(p) &= \ln(p + 1)^2 + \ln(p + 2)^3 + \ln(p + 3)^4 \\ f(p) &= 2 \ln(p + 1) + 3 \ln(p + 2) + 4 \ln(p + 3) \end{aligned}$$

Luego se deriva utilizando la ecuación 3:

$$f'(p) = \frac{2}{p + 1} + \frac{3}{p + 2} + \frac{4}{p + 3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

### EJEMPLO 4 Diferenciación de funciones que contienen logaritmos

- a. Encuentre  $f'(w)$  si  $f(w) = \ln \sqrt{\frac{1+w^2}{w^2-1}}$ .

**Solución:** Las raíces son exponentes fraccionarios, por la propiedad  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$  y  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ , se obtiene  $f(w) = \ln\left(\frac{(1+w^2)^{\frac{1}{2}}}{(w^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right)$ .

Empleando las propiedades  $\ln \frac{U}{V} = \ln U - \ln V$  y  $\ln V^U = U \ln V$  se tiene

$$f(w) = \frac{1}{2} \ln(1 + w^2) - \frac{1}{2} \ln(w^2 - 1).$$

$$f'(w) = \frac{1}{2} \left( \frac{2w}{1+w^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{2w}{w^2-1} \right)$$

Por último derivamos

$$f'(w) = \frac{w}{1+w^2} - \frac{w}{w^2-1}$$

- b. Encuentre  $f'(x)$  si  $f(x) = \ln^3(2x + 5)$ .

**Solución:** El exponente 3 se refiere al cubo de  $\ln(2x + 5)$ . Esto es,

$$f(x) = \ln^3(2x + 5) = [\ln(2x + 5)]^3$$

Por la regla de la potencia,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(\ln(2x + 5))^2 \frac{d}{dx}(\ln(2x + 5)) \\ &= 3(\ln(2x + 5))^2 \left( \frac{1}{2x + 5}(2) \right) \\ &= \frac{6}{2x + 5} (\ln(2x + 5))^2 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 39



### ADVERTENCIA

No confunda  $\ln^3(2x + 5)$  con  $\ln(2x + 5)^3$ , que apareció en el ejemplo 3(a). Se recomienda escribir  $\ln^3(2x + 5)$  explícitamente como  $[\ln(2x + 5)]^3$  y evite  $\ln^3(2x + 5)$ .

## Derivadas de funciones logarítmicas con base $b$

Para diferenciar una función logarítmica con base diferente a  $e$ , se puede convertir primero el logaritmo a logaritmos naturales por medio de la fórmula del teorema de cambio de base  $\log_b u = \frac{\ln u}{\ln b}$ , y luego diferenciar la expresión resultante. Por ejemplo, considere  $y = \log_b u$ , donde  $u$  es una función diferenciable de  $x$ . Según la fórmula del cambio de base,

$$y = \log_b u = \frac{\ln u}{\ln b} \quad \text{para } u > 0$$

Al diferenciar, se tiene

$$\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\ln u}{\ln b} \right) = \frac{1}{\ln b} \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

En resumen,

$$\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{(\ln b)u} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{para } u > 0$$

En vez de memorizar esta regla, le sugerimos recuerde el procedimiento utilizado para obtenerla.

### Procedimiento para diferenciar $\log_b u$

Convierta  $\log_b u$  a logaritmos naturales para obtener  $\frac{\ln u}{\ln b}$  y luego diferencie.

## EJEMPLO 5 Diferenciación de una función logarítmica con base 2

Diferenciar  $y = \log_2 x$ .

**Solución:** De acuerdo con el procedimiento anterior, se tiene

$$\frac{d}{dx}(\log_2 x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\ln x}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2} \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{(\ln 2)x}$$

**PRINCIPIOS EN PRACTICA 2****DIFERENCIACIÓN DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA CON BASE 10**

La intensidad de un sismo se mide en la escala de Richter. La lectura está dada por la siguiente ecuación  $R = \log \frac{I}{I_0}$ , donde  $I$  es la intensidad e  $I_0$  es una intensidad mínima estándar. Si  $I_0 = 1$ , encuentre la razón de cambio de la lectura en la escala Richter con respecto a la intensidad  $\frac{dR}{dI}$ .

Vale la pena mencionar que la respuesta puede escribirse en términos de la base original. Porque

$$\frac{1}{\ln b} = \frac{1}{\frac{\log_b e}{\log_b b}} = \frac{\log_b e}{1} = \log_b e$$

se puede expresar  $\frac{1}{(\ln 2)x}$  como  $\frac{\log_2 e}{x}$ . En forma más general,  $\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{\log_b e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15 

**EJEMPLO 6 Diferenciación de una función logarítmica con base 10**

*Si  $y = \log(2x + 1)$ , encontrar la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $x$ .*

**Solución:** La razón de cambio es  $dy/dx$  y la base implicada es 10. Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\log(2x + 1)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(2x + 1)}{\ln 10}\right) \\ &= \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{2x + 1}(2) = \frac{2}{\ln 10(2x + 1)}\end{aligned}$$

**Problemas 12.1**

Diferencie las funciones en los problemas 1 a 44. Si considera adecuado, utilice primero las propiedades de los logaritmos para simplificar la función dada.

\*1.  $y = 4 \ln x$       2.  $y = \frac{5 \ln x}{9}$       3.  $y = \ln(3x - 7)$

4.  $y = \ln(5x - 6)$       \*5.  $y = \ln x^2$

6.  $y = \ln(3x^2 + 2x + 1)$       7.  $y = \ln(1 - x^2)$

8.  $y = \ln(-x^2 + 6x)$       \*9.  $f(X) = \ln(4X^6 + 2X^3)$

10.  $f(r) = \ln(2r^4 - 3r^2 + 2r + 1)$

11.  $f(t) = t \ln t$       12.  $y = x^2 \ln x$

13.  $y = x^3 \ln(2x + 5)$       14.  $y = (ax + b)^3 \ln(ax + b)$

\*15.  $y = \log_3(8x - 1)$       16.  $f(w) = \log(w^2 + w)$

17.  $y = x^2 + \log_2(x^2 + 4)$       18.  $y = x^2 \log_2 x$

19.  $f(z) = \frac{\ln z}{z}$       20.  $y = \frac{x^2}{\ln x}$

21.  $y = \frac{x^2 + 3}{(\ln x)^2}$       22.  $y = \ln x^{100}$

23.  $y = \ln(x^2 + 4x + 5)^3$       24.  $y = 6 \ln \sqrt[3]{x}$

25.  $y = 9 \ln \sqrt{1 + x^2}$       26.  $f(t) = \ln \left( \frac{t^5}{1 + 3t^2 + t^4} \right)$

27.  $f(l) = \ln \left( \frac{1 + l}{1 - l} \right)$       28.  $y = \ln \left( \frac{2x + 3}{3x - 4} \right)$

29.  $y = \ln \sqrt[4]{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$       30.  $y = \ln \sqrt[3]{\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}}$

31.  $y = \ln[(x^2 + 2)^2(x^3 + x - 1)]$

32.  $y = \ln[(5x + 2)^4(8x - 3)^6]$

33.  $y = 13 \ln(x^2 \sqrt[3]{5x + 2})$       34.  $y = 6 \ln \frac{x}{\sqrt{2x + 1}}$

35.  $y = (x^2 + 1) \ln(2x + 1)$       36.  $y = (ax + b) \ln(ax)$

37.  $y = \ln x^3 + \ln^3 x$       38.  $y = x^{\ln 2}$

\*39.  $y = \ln^4(ax)$

41.  $y = x \ln \sqrt{x - 1}$       40.  $y = \ln^2(2x + 11)$

43.  $y = \sqrt{4 + 3 \ln x}$       42.  $y = \ln(\sqrt[3]{2x + 1})$

45. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$y = \ln(x^2 - 3x - 3)$

en  $x = 4$ .

46. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$y = x[\ln(x) - 1]$

en  $x = e$ .

47. Encuentre la pendiente de la curva  $y = \frac{x}{\ln x}$ , en  $x = 3$ .

En la siguiente sección resuelva la pregunta que se plantea e interprete sus resultados.

48. **Ingreso marginal** Encuentre la función de ingreso marginal si la función de demanda es  $p = 25/\ln(q + 2)$ .

49. **Costo marginal** La función de costo total está dada por

$$c = 25 \ln(q + 1) + 12$$

Encuentre el costo marginal cuando  $q = 6$ .

50. **Costo marginal** La función en dólares del costo promedio de un fabricante, está dada por

$$\bar{c} = \frac{500}{\ln(q + 20)}$$

Encuentre el costo marginal (redondeado a dos decimales) cuando  $q = 50$ .

51. **Cambio en la oferta** La oferta de  $q$  unidades de un producto al precio de  $p$  dólares por unidad está dada por  $q(p) = 25 + 10 \ln(2p + 1)$ . Encuentre la tasa de cambio de la oferta con respecto al precio,  $\frac{dq}{dp}$ .

52. **Percepción de sonido** El nivel de un sonido ( $L$ , medido en decibeles) que puede percibir el oído humano depende de los niveles de intensidad ( $I$ ), de acuerdo con  $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ , donde  $I_0$  es el umbral de audibilidad estándar. Si  $I_0 = 17$ , encuentre  $\frac{dL}{dI}$ , la razón de cambio del nivel del sonido con respecto a la intensidad.

53. **Biología** En cierto experimento con bacterias, se observó que la actividad relativa de una colonia particular de bacterias está descrita por

$$A = 6 \ln \left( \frac{T}{a - T} - a \right)$$

donde  $a$  es una constante y  $T$  es la temperatura del medio ambiente. Encuentre la razón de cambio de  $A$  con respecto a  $T$ .

54. Demuestre que la razón de cambio relativa de  $y = f(x)$  con respecto a  $x$  es igual a la derivada de  $y = \ln f(x)$ .
55. Demuestre que  $\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{u}(\log_b e)\frac{du}{dx}$ .

*En los problemas 56 y 57, use las reglas de diferenciación para encontrar  $f'(x)$ . Luego utilice su calculadora graficadora para encontrar las raíces reales o ceros de  $f'(x)$ . Redondee sus respuestas a dos decimales.*

56.  $f(x) = x^3 \ln x$

57.  $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x^2}$

## OBJETIVO

Desarrollar una fórmula de diferenciación para  $y = e^u$ , aplicar la fórmula y utilizarla para diferenciar una función exponencial con base diferente de  $e$ .

## 12.2 Derivadas de funciones exponenciales

Ahora se obtendrá una fórmula para la derivada de la función exponencial

$$y = e^u$$

donde  $u$  es una función diferenciable de  $x$ . En forma logarítmica, se tiene

$$u = \ln y$$

Si se diferencian ambos lados con respecto a  $x$  resulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(u) &= \frac{d}{dx}(\ln y) \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

Al despejar  $dy/dx$  para luego reemplazar  $y$  por  $e^u$  se encuentra que

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{du}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

Por lo que,

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx} \quad (1)$$

Como un caso especial, sea  $u = x$ . Entonces  $du/dx = 1$  y

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad (2)$$

Observe que la función y su derivada son iguales.

### EJEMPLO 1 Diferenciación de funciones que contienen $e^x$

- a. Encuentre  $\frac{d}{dx}(3e^x)$ . Como 3 es un factor constante,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(3e^x) &= 3 \frac{d}{dx}(e^x) \\ &= 3e^x \quad (\text{según la ecuación (2)})\end{aligned}$$

- b. Si  $y = \frac{x}{e^x}$ , encuentre  $\frac{dy}{dx}$ .

**Solución:** Se podría utilizar primero la regla del cociente y luego la ecuación (2), pero es un más sencillo primero reescribir la función como  $y = xe^{-x}$  y usar la regla del producto y la ecuación (1):

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \frac{d}{dx}(x) + x \frac{d}{dx}(e^{-x}) = e^{-x}(1) + x(e^{-x})(-1) = e^{-x}(1 - x) = \frac{1 - x}{e^x}$$

- c. Si  $y = e^2 + e^x + \ln 3$ , encuentre  $y'$ .

**Solución:** Como  $e^2$  y  $\ln 3$  son constantes,  $y' = 0 + e^x + 0 = e^x$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

Si un cociente puede escribirse con facilidad como un producto, entonces es posible utilizar la regla del producto que, en cierta forma, es más sencilla que la regla del cociente.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES QUE CONTIENEN $e^u$

Cuando un objeto se mueve de un entorno a otro, el cambio de la temperatura del objeto está dado por  $T = Ce^{kt}$ , donde  $C$  es la diferencia de temperatura de los dos entornos,  $t$  es el tiempo en el entorno nuevo y  $k$  es una constante. Encuentre la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo.

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}. \text{ No olvide la } \frac{du}{dx}.$$

### EJEMPLO 2 Diferenciación de funciones que contienen $e^u$

- a. Encuentre  $\frac{d}{dx}(e^{x^3+3x})$ .

**Solución:** La función tiene la forma  $e^u$ , donde  $u = x^3 + 3x$ . De la ecuación (1),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{x^3+3x}) &= e^{x^3+3x} \frac{d}{dx}(x^3 + 3x) = e^{x^3+3x}(3x^2 + 3) \\ &= 3(x^2 + 1)e^{x^3+3x}\end{aligned}$$

**b.** Encuentre  $\frac{d}{dx}(e^{x+1} \ln(x^2 + 1))$ .

**Solución:** De acuerdo con la regla del producto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{x+1} \ln(x^2 + 1)) &= e^{x+1} \frac{d}{dx}(\ln(x^2 + 1)) + (\ln(x^2 + 1)) \frac{d}{dx}(e^{x+1}) \\ &= e^{x+1} \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right) (2x) + (\ln(x^2 + 1)) e^{x+1} (1) \\ &= e^{x+1} \left( \frac{2x}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1) \right)\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3



### EJEMPLO 3 Función de densidad de la distribución normal

Una función importante utilizada en las ciencias sociales es la **función de densidad de la distribución normal** (permite tener una descripción de los resultados probables que se obtienen mediante el muestreo)

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)((x-\mu)/\sigma)^2}$$

donde  $\sigma$  (letra griega que se lee "sigma") y  $\pi$  (letra griega que se lee "mu") son constantes. La gráfica de esta función, llamada curva normal, tiene forma de campana. (Vea la figura 12.1). Determine la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $x$  cuando  $x = \mu + \sigma$ .

**Solución:** La razón de cambio de  $y$  con respecto a  $x$  es  $dy/dx$ . Se observa que el factor  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  es una constante y que el segundo factor tiene la forma  $e^u$ , donde

$$u = -\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} (e^{-(1/2)((x-\mu)/\sigma)^2}) \left( -\frac{1}{2}(2) \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right) \left( \frac{1}{\sigma} \right) \right)$$

Al evaluar  $dy/dx$  cuando  $x = \mu + \sigma$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\mu+\sigma} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} (e^{-(1/2)((\mu+\sigma-\mu)/\sigma)^2}) \left( -\frac{1}{2}(2) \left( \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma} \right) \left( \frac{1}{\sigma} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} (e^{-(1/2)}) \left( -\frac{1}{\sigma} \right) \\ &= \frac{-e^{-(1/2)}}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} = \frac{-1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}e}\end{aligned}$$



### Diferenciación de funciones exponenciales con base $b$

Ahora que se tiene familiaridad con la derivada  $e^u$ , se considerará la derivada de la función exponencial más general  $b^u$ . Como  $b = e^{\ln b}$ , es posible expresar  $b^u$  como una función exponencial con base  $e$ , una forma que puede diferenciarse. Se tiene,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(b^u) &= \frac{d}{dx}((e^{\ln b})^u) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln b)u}) \\ &= e^{(\ln b)u} \frac{d}{dx}((\ln b)u) \\ &= e^{(\ln b)u} (\ln b) \left( \frac{du}{dx} \right) \\ &= b^u (\ln b) \frac{du}{dx} \quad (\text{puesto que } e^{(\ln b)u} = b^u)\end{aligned}$$

En resumen,

$$\frac{d}{dx}(b^u) = b^u(\ln b)\frac{du}{dx} \quad (3)$$

Observe que si  $b = e$ , el factor  $\ln b$  en la ecuación (3) es igual a 1. Por lo tanto, si se usan funciones exponenciales con base  $e$ , se tendrá una fórmula de diferenciación más sencilla con la cual trabajar. Ésta es una de las razones por las que las funciones exponenciales naturales se usan tan ampliamente en cálculo. En vez de memorizar la ecuación (3), le sugerimos, como práctica, recordar el procedimiento para obtenerla.

#### Procedimiento para diferenciar $b^u$

Convierta  $b^u$  en una función exponencial natural, aproveche la propiedad de que  $b = e^{\ln b}$  y luego diferecie.

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

#### EJEMPLO 4 Diferenciación de una función exponencial con base 4

Encuentre  $\frac{d}{dx}(4^x)$ .

**Solución:** Si se emplea el procedimiento anterior, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(4^x) &= \frac{d}{dx}((e^{\ln 4})^x) \\ &= \frac{d}{dx}(e^{(\ln 4)x}) \quad \left(\text{forma: } \frac{d}{dx}(e^u)\right) \\ &= e^{(\ln 4)x}(\ln 4) \quad (\text{según la ecuación (1)}) \\ &= 4^x(\ln 4)\end{aligned}$$

Verifique el resultado usando de manera directa la ecuación (3).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

#### EJEMPLO 5 Diferenciación de formas diferentes

Encuentre  $\frac{d}{dx}(e^2 + x^e + 2^{\sqrt{x}})$ .

**Solución:** Aquí deben diferenciarse tres formas distintas; ¡no las confunda! La primera ( $e^2$ ) es una base constante elevada a una potencia constante, por lo que es en sí misma una constante. Así, su derivada es igual a cero. La segunda ( $x^e$ ) es una base variable elevada a una potencia constante, por lo que se aplica la regla de la potencia. La tercera ( $2^{\sqrt{x}}$ ) es una base constante elevada a una potencia variable, por lo que se debe diferenciar una función exponencial. Si se reúne todo, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^2 + x^e + 2^{\sqrt{x}}) &= 0 + ex^{e-1} + \frac{d}{dx}[e^{(\ln 2)\sqrt{x}}] \\ &= ex^{e-1} + [e^{(\ln 2)\sqrt{x}}](\ln 2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= ex^{e-1} + \frac{2^{\sqrt{x}} \ln 2}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

#### EJEMPLO 6 Diferenciación de funciones inversas

Se puede aplicar la técnica de esta sección para diferenciar cualquier función inversa  $f^{-1}$  una vez que se conoce la derivada de  $f$ . Suponga que

$$y = f^{-1}(u)$$

donde, como es usual,  $u$  es una función diferenciable de  $x$  y se desea encontrar  $dy/dx$ . En términos de  $f$ , se tiene

$$f(y) = u$$

y al diferenciar ambos lados con respecto a  $x$ , se obtiene

$$f'(y) \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

mediante la regla de la cadena para el lado izquierdo. Si se despeja  $dy/dx$  y se reemplaza  $y$  con  $f^{-1}(u)$  resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(u))} \frac{du}{dx}$$

De forma que

$$\frac{d}{dx}(f^{-1}(u)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(u))} \frac{du}{dx} \quad \text{para } f'(f^{-1}(u)) \neq 0 \quad (4)$$

y, en particular,

$$\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{para } f'(f^{-1}(x)) \neq 0 \quad (5)$$

El lector debe haber notado, tanto aquí como en el estudio de la derivada de la función exponencial, que se supuso que  $f^{-1}$  es diferenciable. El supuesto puede evitarse puesto que se sigue de la diferenciabilidad de  $f$ . Se puede dar un argumento con justificación geométrica de la manera siguiente. En cada punto  $(x, f(x))$  sobre la gráfica de  $f$  existe una recta tangente no vertical cuya pendiente es  $f'(x)$ . Como la gráfica de  $f^{-1}$  se obtiene a partir de la gráfica de  $f$  por reflexión en la recta  $y = x$ , parece claro que en cada punto  $(x, f^{-1}(x))$  sobre la gráfica de  $f^{-1}$  también habrá una recta tangente, cuya pendiente es  $(f^{-1})'(x)$ . Por supuesto, si la tangente en  $(f^{-1}(x), f(f^{-1}(x))) = (f^{-1}(x), x)$  es horizontal, entonces la recta tangente en el punto reflejado  $(x, f^{-1}(x))$  es vertical de manera que la derivada de  $f^{-1}$  no existe. Observe que la derivación algebraica presentada aquí *toma en cuenta estas excepciones!*

Como con la regla de la cadena, la notación de Leibniz es apropiada para las funciones inversas. De hecho, si  $y = f^{-1}(x)$ , entonces  $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{dy}{dx}$ . Ahora como  $f(y) = x$ ,  $\frac{dx}{dy} = f'(y)$  y observamos que la ecuación (5) puede reescribirse como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad (6)$$

### EJEMPLO 7 De nuevo, diferenciación de funciones de potencia

A menudo se ha usado la regla  $d/dx(x^a) = ax^{a-1}$ , pero sólo se ha *probado* cuando  $a$  es un entero positivo y en algunos otros casos especiales. Al menos para  $x > 0$ , ahora puede mejorarse la comprensión de las funciones de potencia mediante la ecuación (1).

Para  $x > 0$ , se puede escribir  $x^a = e^{a \ln x}$ . Por lo tanto, se tiene

$$\frac{d}{dx}(x^a) = \frac{d}{dx}e^{a \ln x} = e^{a \ln x} \frac{d}{dx}(a \ln x) = x^a(ax^{-1}) = ax^{a-1}$$

## Problemas 12.2

Diferencie las funciones en los problemas 1 a 28.

\*1.  $y = 5e^x$

2.  $y = \frac{2e^x}{5}$

\*3.  $y = e^{2x^2+3}$

4.  $y = e^{2x^2+5}$

5.  $y = e^{9-5x}$

6.  $f(q) = e^{-q^3+6q-1}$

7.  $f(r) = e^{3r^2+4r+4}$

8.  $y = e^{x^2+6x^3+1}$

9.  $y = xe^x$

10.  $y = 3x^4e^{-x}$

11.  $y = x^2e^{-x^2}$

12.  $y = xe^{3x}$

13.  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{3}$

\*15.  $y = 5^{2x^3}$

\*17.  $f(w) = \frac{e^{2w}}{w^2}$

19.  $y = e^{1+\sqrt{x}}$

21.  $y = x^5 - 5^x$

23.  $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

14.  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

16.  $y = 2^x x^2$

18.  $y = e^{x-\sqrt{x}}$

20.  $y = (e^{2x} + 1)^3$

22.  $f(z) = e^{-1/z^2}$

24.  $y = e^{2x}(x + 6)$

25.  $y = \ln e^x$

26.  $y = e^{-x} \ln x$

27.  $y = e^{x^2 \ln x^2}$

28.  $y = \ln e^{4x+1}$

29. Si  $f(x) = ee^x e^{x^2}$ , encuentre  $f'(-1)$ .30. Si  $f(x) = 5^{x^2 \ln x}$ , encuentre  $f'(1)$ .31. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = e^x$  en  $x = -2$ .32. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = e^x$  en el punto  $(1, e)$ .

Para cada una de las ecuaciones de demanda en los problemas 33 y 34, encuentre la razón de cambio del precio  $p$  con respecto a la cantidad  $q$ . ¿Cuál es la razón de cambio para el valor indicado de  $q$ ? Interprete su respuesta.

33.  $p = 15e^{-0.001q}; q = 500$     34.  $p = 9e^{-5q/750}; q = 300$

En los problemas 35 y 36,  $\bar{c}$  es el costo promedio de producir  $q$  unidades de un producto. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para los valores dados de  $q$ . Interprete su respuesta.

35.  $\bar{c} = \frac{7000e^{q/700}}{q}; q = 350, q = 700$

36.  $\bar{c} = \frac{850}{q} + 4000 \frac{e^{(2q+6)/800}}{q}; q = 97, q = 197$

37. Si  $w = e^{x^3-4x} + x \ln(x-1)$  y  $x = \frac{t+1}{t-1}$ , encuentre  $\frac{dw}{dt}$  cuando  $t = 3$ .

38. Si  $f'(x) = x^3$  y  $u = e^x$ , demuestre que

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = e^{4x}$$

39. Determine el valor de la constante positiva  $c$  si

$$\left. \frac{d}{dx}(c^x - x^c) \right|_{x=1} = 0$$

40. Calcule la razón de cambio relativa de

$$f(x) = 10^{-x} + \ln(8+x) + 0.01e^{x-2}$$

cuando  $x = 2$ . Redondee su respuesta a cuatro decimales.

**41. Corrida de producción** Para una empresa, la producción diaria en el día  $t$  de una corrida de producción está dada por

$$q = 500(1 - e^{-0.2t})$$

Encuentre la razón de cambio de la producción  $q$  con respecto a  $t$  en el décimo día.

**42. Función de densidad normal** Para la función de densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

encuentre  $f'(1)$ .

**43. Población** La población, en millones, del área metropolitana de Seattle dentro de  $t$  años, contados a partir de 1970 se estima por medio de  $P = 1.92e^{0.0176t}$ . Demuestre que  $dP/dt = kP$ , donde  $k$  es una constante. Esto significa que la razón de cambio de la población es (directamente) proporcional a la población en cualquier tiempo.

**44. Penetración de mercado** En un análisis de la difusión de un nuevo proceso en un mercado, Hurter y Rubenstein<sup>1</sup> se refieren a una ecuación de la forma

$$Y = k\alpha^{\beta t}$$

<sup>1</sup>A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein et al., "Market Penetration By New Innovations: The Technological Literature". *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

donde  $Y$  es el nivel acumulado de difusión del nuevo proceso en el tiempo  $t$ , y  $k$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas. Verifique la afirmación de que

$$\frac{dY}{dt} = k\alpha^{\beta t}(\beta^t \ln \alpha) \ln \beta$$

**45. Finanzas** Despues de  $t$  años, el valor  $S$  de un capital de  $P$  dólares que se invierte a una tasa anual  $r$  compuesta continuamente, está dado por  $S = Pe^{rt}$ . Demuestre que la razón relativa de cambio de  $S$  con respecto a  $t$  es  $r$ .



**46. Relación depredador-presa** En un artículo sobre depredadores y presas, Holling<sup>2</sup> se refiere a una ecuación de la forma

$$y = K(1 - e^{-ax})$$

donde  $x$  es la densidad de presas,  $y$  el número de presas atacadas y  $K$  y  $a$  son constantes. Verifique la afirmación de que

$$\frac{dy}{dx} = a(K - y)$$

**47. Sismos** De acuerdo con la escala de Richter<sup>3</sup>, el número de temblores de magnitud  $M$  o superiores por cada unidad de tiempo, está dado por  $N = 10^A 10^{-bM}$ , donde  $A$  y  $b$  son constantes. Encuentre  $dN/dM$ .

**48. Psicología** La retención a corto plazo fue estudiada por Peterson y Peterson.<sup>4</sup> Los dos investigadores analizaron un procedimiento en el que un experimentador daba verbalmente a una persona una sílaba de tres letras consonantes, por ejemplo, CHJ, seguida de un número de tres dígitos, como 309. La persona repetía entonces el número, contaba hacia atrás y restaba cada vez tres unidades, es decir, 309, 306, 303... Después de cierto tiempo, se le indicaba a la persona por medio de una luz, que recitara la sílaba de tres constantes. El intervalo de tiempo comprendido entre la terminación de la enunciación de la última consonante por el experimentador, hasta la aparición de la luz, se denominó *intervalo de evocación*. El tiempo entre la aparición de la luz y la terminación del enunciado de la respuesta se denominó *latencia*. Después de muchos ensayos se determinó que para un intervalo de evocación de  $t$  segundos, la proporción aproximada de recuerdos correctos con latencia inferior a 2.83 segundos fue igual a

$$p = 0.89[0.01 + 0.99(0.85)^t]$$

(a) Encuentre  $dp/dt$  e interprete su resultado.(b) Evalúe  $dp/dt$  para  $t = 2$ . Redondee su respuesta a dos decimales.

**49. Medicina** Suponga que un indicador radiactivo, como un tinte colorante, se inyecta en un instante al corazón en el tiempo  $t = 0$ , y se mezcla en forma uniforme con la sangre dentro de este órgano. Sea  $C_0$  la concentración inicial del indicador en el corazón y suponga que el corazón tiene un volumen constante  $V$ . También suponga que conforme fluye sangre fresca hacia el corazón, la mezcla diluida de sangre e indicador salen a una razón constante positiva de  $r$ . Entonces la concentración del indicador en el corazón en el instante  $t$  está dada por

$$C(t) = C_0 e^{-(r/V)t}$$

Demuestre que  $dC/dt = (-r/V)C(t)$ .

<sup>2</sup>C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7 (1959), 385-398.

<sup>3</sup>C. F. Richter, *Elementary Seismology* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, Publishers, 1958).

<sup>4</sup>L. R. Peterson y M. J. Peterson, "Short-Term Retention of Individual Verbal Items", *Journal of Experimental Psychology*, 58 (1959), 193-198.

- 50. Medicina** En el problema 49, suponga que el indicador radiactivo se inyecta a una razón constante  $R$ . Entonces, la concentración en el instante  $t$  es

$$C(t) = \frac{R}{r} [1 - e^{-(r/V)t}]$$

(a) Encuentre  $C(0)$ .

(b) Demuestre que  $\frac{dC}{dt} = \frac{R}{V} - \frac{r}{V}C(t)$ .

- 51. Esquizofrenia** Se han usado varios modelos para analizar el tiempo de hospitalización. Para un grupo particular de esquizofrénicos, uno de estos modelos es<sup>5</sup>

$$f(t) = 1 - e^{-0.008t}$$

donde  $f(t)$  es la proporción del grupo dado de alta al final de  $t$  días de hospitalización. Encuentre la razón de altas (proporción de altas por día) al final de 100 días. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

- 52. Ahorro y consumo** El ahorro  $S$  de un país (en miles de millones de dólares) está relacionado con el ingreso nacional  $I$  (en miles de millones de dólares) mediante la ecuación

$$S = \ln \frac{5}{3 + e^{-I}}$$

(a) Encuentre la propensión marginal al consumo como una función del ingreso.

(b) Al millón más cercano, ¿cuál es el ingreso nacional cuando la propensión marginal al ahorro es de  $\frac{1}{8}$ ?

*En los problemas 53 y 54 utilice las reglas de diferenciación para encontrar  $f'(x)$ . Luego utilice su calculadora graficadora para encontrar todos las raíces reales de  $f'(x)$ . Redondee sus respuestas a dos decimales.*

53.  $f(x) = e^{2x^3+x^2-3x}$

54.  $f(x) = x + e^{-x}$

## OBJETIVO

Proporcionar un análisis matemático del concepto económico de elasticidad.

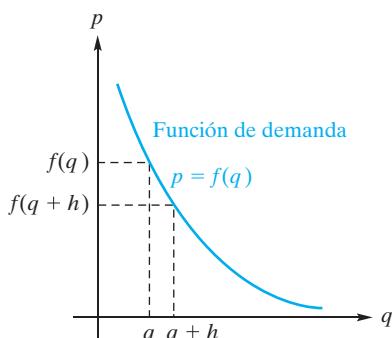


FIGURA 12.2 Cambio en la demanda.

## 12.3 Elasticidad de la demanda

La demanda del consumidor de un producto se relaciona con el precio. Por lo general, la demanda disminuye cuando el precio aumenta, pero la sensibilidad de la demanda al cambio en el precio varía de un producto a otro. Algunos productos, como el jabón, medicinas y servicios de la casa (agua, luz), los cambios porcentuales pequeños en el precio tienen muy poco efecto en la demanda. Para otros productos, como la carne de res, boletos de avión y créditos de vivienda, los cambios porcentuales pequeños en el precio pueden tener un efecto considerable en la demanda.

La *elasticidad de la demanda* permite a los economistas medir cómo un cambio en el precio de un producto afecta la cantidad demandada; es decir, la respuesta del consumidor frente al cambio de precio. En términos informales, la elasticidad de la demanda es la razón del cambio porcentual en la cantidad demandada que resulta en un cambio porcentual dado en el precio:

$$\frac{\text{cambio porcentual en la cantidad}}{\text{cambio porcentual en el precio}}$$

Por ejemplo, si para un incremento de 5% en el precio, la cantidad demandada decrece en 2%, se podría decir que la elasticidad de la demanda es  $-2/5$ .

En forma más general, suponga que  $p = f(q)$  es la función de demanda para un producto. Los consumidores demandarán  $q$  unidades a un precio de  $f(q)$  por unidad y demandarán  $q + h$  unidades a un precio de  $f(q + h)$  por unidad (figura 12.2). El cambio porcentual en la cantidad demandada de  $q$  a  $q + h$  es

$$\frac{(q + h) - q}{q} \cdot 100\% = \frac{h}{q} \cdot 100\%$$

El cambio porcentual correspondiente en precio por unidad es

$$\frac{f(q + h) - f(q)}{f(q)} \cdot 100\%$$

La razón de esos cambios porcentuales es

$$\begin{aligned} \frac{\frac{h}{q} \cdot 100\%}{\frac{f(q + h) - f(q)}{f(q)} \cdot 100\%} &= \frac{h}{q} \cdot \frac{f(q)}{f(q + h) - f(q)} \\ &= \frac{f(q)}{q} \cdot \frac{h}{f(q + h) - f(q)} = \frac{\frac{f(q)}{q}}{\frac{h}{f(q + h) - f(q)}} \end{aligned} \tag{1}$$

<sup>5</sup>W. W. Eaton y G. A. Whitmore, "Length of Stay as a Stochastic Process: A General Approach and Application to Hospitalization for Schizophrenia", *Journal of Mathematical Sociology*, 5 (1977), 273-292.

Si  $f$  es diferenciable, entonces cuando  $h \rightarrow 0$ , el límite de  $[f(q + h) - f(q)]/h$  es  $f'(q) = dp/dq$ . Así, el límite de (1) es

$$\frac{\frac{f(q)}{q}}{\frac{f'(q)}{dp}} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} \quad (\text{puesto que } p = f(q))$$

que se llama *elasticidad puntual de la demanda*.



### ADVERTENCIA

Como  $p$  es una función de  $q$ ,  $dp/dq$  es una función de  $q$  y entonces la razón que define  $\eta$  es una función de  $q$ . Ésta es la razón por la que se escribe  $\eta = \eta(q)$ .

### DEFINICIÓN

Si  $p = f(q)$  es una función de demanda diferenciable, la *elasticidad puntual de la demanda*, denotada por la letra griega  $\eta$  (eta), en  $(q, p)$  está dada por

$$\eta = \eta(q) = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}}$$

A manera de ilustración, se encontrará la elasticidad puntual de la demanda para la función de demanda  $p = 1200 - q^2$ . Se tiene

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{\frac{q}{1200 - q^2}}{\frac{-2q}{-2q}} = -\frac{1200 - q^2}{2q^2} = -\left(\frac{600}{q^2} - \frac{1}{2}\right) \quad (2)$$

Por ejemplo, si  $q = 10$ , entonces  $\eta = -((600/10^2) - \frac{1}{2}) = -5\frac{1}{2}$ . Como

$$\eta \approx \frac{\text{cambio porcentual en la demanda}}{\text{cambio porcentual en el precio}}$$

se tiene

$$(\% \text{ de cambio en el precio})(\eta) \approx \% \text{ de cambio en la demanda}$$

Por lo tanto, si el precio se incrementa en 1% cuando  $q = 10$ , la cantidad demandada cambiaría aproximadamente

$$(1\%) \left(-5\frac{1}{2}\right) = -5\frac{1}{2}\%$$

Esto es, la demanda disminuiría en  $5\frac{1}{2}\%$ . De manera similar, una disminución en el precio de  $\frac{1}{2}\%$  cuando  $q = 10$ , resulta en un cambio aproximado en la demanda de

$$\left(-\frac{1}{2}\%\right) \left(-5\frac{1}{2}\right) = 2\frac{3}{4}\%$$

De aquí que la demanda se incremente en  $2\frac{3}{4}\%$ .

Note que cuando se evalúa la elasticidad, no interviene unidad alguna, ya que es tan sólo un número real. De hecho los 100% provenientes de la palabra *porcentaje* se cancelan, por lo tanto, la elasticidad es realmente una aproximación de la razón

$$\frac{\text{cambio relativo en la cantidad}}{\text{cambio relativo en el precio}}$$

y cada uno de los cambios relativos no es más que un número real. Para un comportamiento común de la demanda, un incremento (disminución) en el precio corresponde a una disminución (incremento) en la cantidad. Esto significa que si el precio se grafica como una función de la cantidad entonces la gráfica tendrá una pendiente negativa en cada punto. Así,  $dp/dq$  será siempre negativa, y como  $p$  y  $q$  son positivas,  $\eta$  será negativa también. Algunos economistas ignoran el signo menos; en la situación anterior ellos considerarían la elasticidad igual a  $5\frac{1}{2}$ . Aquí no se adoptará esta práctica.

Hay tres categorías de elasticidad:

1. Cuando  $|\eta| > 1$ , la demanda es *elástica*.
2. Cuando  $|\eta| = 1$ , la demanda tiene *elasticidad unitaria*.
3. Cuando  $|\eta| < 1$ , la demanda es *inelástica*.

Por ejemplo, en la ecuación (2) como  $|\eta| = 5\frac{1}{2}$  cuando  $q = 10$ , la demanda es elástica. Si  $q = 20$ , entonces  $|\eta| = |-(600/20^2) - \frac{1}{2}| = 1$ , por lo que la demanda tiene elasticidad unitaria. Si  $q = 25$ , entonces  $|\eta| = |-\frac{23}{50}|$  y la demanda es inelástica.

En términos informales, para un cambio porcentual dado en el precio, hay un cambio porcentual mayor en la cantidad demandada si la demanda es elástica, un cambio porcentual menor si la demanda es inelástica y un cambio porcentual igual si la demanda tiene elasticidad unitaria. Para entender mejor la elasticidad, resulta útil pensar en ejemplos típicos. La demanda para un bien esencial como la electricidad tiende a ser inelástica para un amplio rango de precios. Si el precio de la electricidad se incrementa 10%, se puede esperar que los consumidores reduzcan su consumo de alguna forma, pero no es posible una reducción del 10% si la mayor parte de la electricidad que usan se destina a aspectos esenciales de la vida como calefacción y preparación de comida. Por otro lado, la demanda para bienes de lujo tiende a ser bastante elástica. Por ejemplo, un incremento de 10% en el precio de la joyería puede resultar en un 50% de disminución en la demanda.

### EJEMPLO 1 Determinación de la elasticidad puntual de la demanda

Determine la elasticidad puntual de la ecuación de demanda

$$p = \frac{k}{q} \quad \text{donde } k > 0 \text{ y } q > 0$$

**Solución:** De la definición se tiene

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{\frac{k}{q^2}}{\frac{-k}{q^2}} = -1$$

Por lo tanto, la demanda tiene elasticidad unitaria para toda  $q > 0$ . La gráfica de  $p = k/q$  se llama *hipérbola equilátera* y suele encontrarse en textos de economía en los análisis de elasticidad. (Vea en la figura 2.14 una gráfica de tal curva).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

Si se tiene que  $p = f(q)$  para la ecuación de demanda, como en el análisis realizado hasta ahora, entonces casi siempre resulta inmediato el cálculo de  $dp/dq = f'(q)$ . Sin embargo, si en lugar de esto se tiene  $q$  como una función de  $p$ , entonces se tendrá  $q = f^{-1}(p)$  y de acuerdo con el ejemplo 6 de la sección 12.2,

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{\frac{dq}{dp}}$$

Se deduce que

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} \quad (3)$$

lo que proporciona otra expresión útil para  $\eta$ . Observe también que si  $q = g(p)$ , entonces

$$\eta = \eta(p) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{g(p)} \cdot g'(p) = p \cdot \frac{g'(p)}{g(p)}$$

y, por lo tanto,

elasticidad = precio · tasa relativa de cambio de la cantidad como una función del precio (4)

### EJEMPLO 2 Determinación de la elasticidad puntual de la demanda

Determine la elasticidad puntual de la ecuación de demanda

$$q = p^2 - 40p + 400 \quad \text{donde } q > 0$$

**Solución:** Aquí se tiene  $q$  dada como una función de  $p$ , y es fácil ver que  $dq/dp = 2p - 40$ . Así,

$$\eta(p) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{q(p)}(2p - 40)$$

Por ejemplo, si  $p = 15$ ,  $q = q(15) = 25$ ; por lo tanto,  $\eta(15) = (15(-10))/25 = -6$ , por lo que la demanda es elástica para  $p = 15$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

Aquí, se analiza la elasticidad para una demanda lineal.

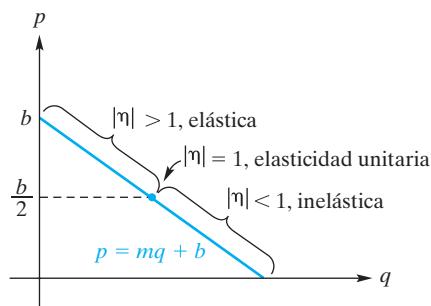


FIGURA 12.3 Elasticidad para la demanda lineal.

La elasticidad puntual para una ecuación de demanda lineal es muy interesante. Suponga que la ecuación tiene la forma

$$p = mq + b, \quad \text{donde } m < 0 \text{ y } b > 0.$$

(Vea la figura 12.3). Se supone que  $q > 0$ ; así,  $p < b$ . La elasticidad puntual de la demanda es

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{m}{b}} = \frac{p}{mq} = \frac{p}{p-b}$$

Si se consideran  $d\eta/dp$ , se demostrará que  $\eta$  es una función decreciente de  $p$ . Por la regla del cociente,

$$\frac{d\eta}{dp} = \frac{(p-b)-p}{(p-b)^2} = -\frac{b}{(p-b)^2}$$

Como  $b > 0$  y  $(p-b)^2 > 0$ , entonces  $d\eta/dp < 0$ , lo que significa que la gráfica de  $\eta = \eta(p)$  tiene una pendiente negativa. Por lo tanto, cuando el precio  $p$  crece, la elasticidad  $\eta$  disminuye. Sin embargo,  $p$  varía entre 0 y  $b$  y en el punto medio del intervalo,  $b/2$ ,

$$\eta = \eta(b) = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{b}{2}-b} = \frac{\frac{b}{2}}{-\frac{b}{2}} = -1$$

Por lo tanto, si  $p < b/2$ , entonces  $\eta > -1$ ; si  $p > b/2$ , entonces  $\eta < -1$ . Como  $\eta < 0$  siempre, estos factores pueden establecerse de una forma diferente: cuando  $p < b/2$ ,  $|\eta| < 1$ , y la demanda es inelástica; cuando  $p = b/2$ ,  $|\eta| = 1$  y la demanda tiene elasticidad unitaria; cuando  $p > b/2$ ,  $|\eta| > 1$  y la demanda es elástica. Esto muestra que la pendiente de una curva de demanda no es una medida de la elasticidad. La pendiente de la recta en la figura 12.3 es  $m$  en todas partes, pero la elasticidad varía en cada punto de la recta. Por supuesto, lo anterior está de acuerdo con la ecuación (4).

### Elasticidad e ingreso

Si se contempla ahora una situación diferente, se puede establecer cómo la elasticidad de la demanda afecta el cambio en el ingreso (ingreso marginal). Si  $p = f(q)$  es la función de demanda de un fabricante, el ingreso total está dado por

$$r = pq$$

Para encontrar el ingreso marginal,  $dr/dq$ , se diferencia  $r$  con el uso de la regla del producto:

$$\frac{dr}{dq} = p + q \frac{dp}{dq}. \tag{5}$$

Al factorizar el lado derecho de la ecuación (5), se tiene

$$\frac{dr}{dq} = p \left( 1 + \frac{q}{p} \frac{dp}{dq} \right)$$

Aquí se analiza la relación entre la elasticidad y la tasa de cambio del ingreso.

Pero,

$$\frac{q}{p} \frac{dp}{dq} = \frac{\frac{dp}{dq}}{\frac{p}{q}} = \frac{1}{\eta}$$

Por lo que,

$$\frac{dr}{dq} = p \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right) \quad (6)$$

Si la demanda es elástica, entonces  $\eta < -1$ , por lo que  $1 + \frac{1}{\eta} > 0$ . Si la demanda es inelástica, entonces  $\eta > -1$ , por lo que  $1 + \frac{1}{\eta} < 0$ . Suponga que  $p > 0$ . De la ecuación (6) se puede concluir que  $dr/dq > 0$  en los intervalos donde la demanda es elástica. Como se verá pronto, una función es creciente en intervalos para los cuales su derivada es positiva, y una función es decreciente en los intervalos donde su derivada es negativa. Por lo tanto, el ingreso total  $r$  es creciente en los intervalos donde la demanda es elástica, y el ingreso total es decreciente en los intervalos donde la demanda es inelástica.

Así, del análisis anterior se concluye que entre más unidades se vendan, el ingreso total de un fabricante crece si la demanda es elástica, pero disminuye si la demanda es inelástica. Esto es, si la demanda es elástica, un precio menor aumentará el ingreso, lo cual significa que un precio menor ocasionará un incremento suficientemente grande en la demanda como para hacer crecer el ingreso. Si la demanda es inelástica, un precio menor hará disminuir el ingreso. Para una elasticidad unitaria, un precio menor deja sin cambio al ingreso total.

## Problemas 12.3

En los problemas 1 a 14, encuentre la elasticidad puntual de las ecuaciones de demanda para los valores indicados de  $q$  o  $p$  y determine si la demanda es elástica, inelástica o si tiene elasticidad unitaria.

\*1.  $p = 40 - 2q$ ;  $q = 5$

3.  $p = \frac{3500}{q}$ ;  $q = 288$

5.  $p = \frac{500}{q+2}$ ;  $q = 104$

7.  $p = 150 - e^{q/100}$ ;  $q = 100$

9.  $q = 1200 - 150p$ ;  $p = 4$

11.  $q = \sqrt{500 - p}$ ;  $p = 400$

\*13.  $q = \frac{(p-100)^2}{2}$ ;  $p = 20$

2.  $p = 10 - 0.04q$ ;  $q = 100$

4.  $p = \frac{500}{q^2}$ ;  $q = 52$

6.  $p = \frac{800}{2q+1}$ ;  $q = 24$

8.  $p = 100e^{-q/200}$ ;  $q = 200$

10.  $q = 100 - p$ ;  $p = 50$

12.  $q = \sqrt{2500 - p^2}$ ;  $p = 20$

14.  $q = p^2 - 50p + 850$ ;  $p = 20$

15. Para la ecuación de demanda lineal  $p = 13 - 0.05q$ , verifique que la demanda es elástica cuando  $p = 10$ , inelástica cuando  $p = 3$ , y que tiene elasticidad unitaria cuando  $p = 6.50$ .

16. ¿Para qué valor (o valores) de  $q$  las siguientes ecuaciones de demanda tienen elasticidad unitaria?

(a)  $p = 36 - 0.25q$

(b)  $p = 300 - q^2$

17. La ecuación de demanda para un producto es

$$q = 500 - 40p + p^2$$

donde  $p$  es el precio por unidad (en dólares) y  $q$  es la cantidad de unidades demandadas (en miles). Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando  $p = 15$ . Si este precio de 15 se incrementa en  $\frac{1}{2}\%$ , ¿cuál es el cambio aproximado en la demanda?

18. La ecuación de la demanda para un cierto producto es

$$q = \sqrt{2500 - p^2}$$

donde  $p$  está en dólares. Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando  $p = 30$  y use este valor para calcular el cambio porcentual aproximado de la demanda, si el precio de \$30 baja a \$28.50.

19. Para la ecuación de demanda  $p = 500 - 2q$ , verifique que la demanda es elástica y el ingreso total es creciente para  $0 < q < 125$ . Verifique que la demanda es inelástica y el ingreso total es decreciente para  $125 < q < 250$ .

20. Verifique que  $\frac{dr}{dq} = p \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right)$  si  $p = 50 - 3q$ .

21. Repita el problema 20 para  $p = \frac{1000}{q^2}$ .

22. Suponga que  $p = mq + b$  es una ecuación de demanda lineal donde  $m \neq 0$  y  $b > 0$ .

(a) Demuestre que  $\lim_{p \rightarrow b^-} (\eta) = -\infty$ .

(b) Demuestre que  $\eta = 0$  cuando  $p = 0$ .

23. La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = \frac{a}{\sqrt{b + cq^2}}$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes, y donde  $c \neq 0$ .

(a) Demuestre que la elasticidad no depende de  $a$ .

(b) Demuestre que si  $b$  y  $c$  son positivas, entonces la demanda es elástica para toda  $q > 0$ .

(c) ¿Para cuál valor o valores de las constantes es posible la elasticidad unitaria?

24. Dada la ecuación de demanda  $q^2(1 + p)^2 = p$ , determine la elasticidad puntual de la demanda cuando  $p = 9$ .

25. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = \frac{60}{p} + \ln(65 - p^3)$$

- (a) Determine la elasticidad puntual de la demanda cuando  $p = 4$ , y clasifique la demanda como elástica, inelástica o de elasticidad unitaria a este nivel de precio.
- (b) Si el precio disminuye en 2% (de \$4.00 a \$3.92), use la respuesta del inciso (a) para estimar el cambio porcentual correspondiente en la cantidad vendida.
- (c) ¿Resultarán los cambios del inciso (b) en un incremento o en una disminución en el ingreso? Explique su respuesta.

26. La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = 50(151 - q)^{0.02\sqrt{q+19}}$$

- (a) Encuentre  $dp/dq$  cuando se demandan 150 unidades.
- (b) Con el resultado del inciso (a), determine la elasticidad puntual de la demanda cuando se demandan 150 unidades. A este nivel, ¿es la demanda elástica, inelástica o de elasticidad unitaria?
- (c) Use el resultado del inciso (b) para estimar el precio por unidad si la demanda disminuye de 150 a 140 unidades.
- (d) Si la demanda actual es de 150 unidades, ¿el fabricante debe aumentar o disminuir el precio para incrementar su ingreso? (Justifique su respuesta.)

## OBJETIVO

Estudiar la noción de una función definida de manera implícita y determinar derivadas por medio de la diferenciación implícita.

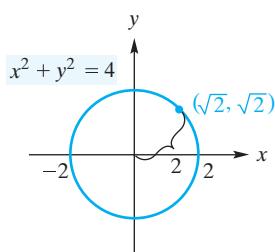


FIGURA 12.4 El círculo  $x^2 + y^2 = 4$ .

## 12.4 Diferenciación implícita

La diferenciación implícita es una técnica para diferenciar funciones que no están dadas en la forma usual  $y = f(x)$  (ni en la forma  $x = g(y)$ ). Para introducir esta técnica, se encontrará la pendiente de una recta tangente a un círculo. Considere el círculo de radio 2, cuyo centro está en el origen (figura 12.4). Su ecuación es

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 - 4 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

El punto  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  está en el círculo. Para hallar la pendiente en este punto se necesita encontrar ahí  $dy/dx$ . Hasta ahora, se ha tenido a  $y$  en forma explícita (directa) en términos de  $x$  antes de determinar  $y'$ ; es decir, en la forma  $y = f(x)$  (o en la forma  $x = g(y)$ ). En la ecuación (1), esto no es así. Se dice que la ecuación (1) tiene la forma  $F(x, y) = 0$ , donde  $F(x, y)$  denota una función de dos variables. Lo que parece obvio es despejar  $y$  en la ecuación (1) en términos de  $x$ :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4 &= 0 \\ y^2 &= 4 - x^2 \\ y &= \pm\sqrt{4 - x^2} \end{aligned} \tag{2}$$

Se presenta ahora un problema: la ecuación (2) puede dar dos valores de  $y$  para un solo valor de  $x$ . No define a  $y$  de manera explícita en función de  $x$ . Sin embargo, se puede suponer que la ecuación (1) define a  $y$  como una de dos funciones diferentes de  $x$ ,

$$y = +\sqrt{4 - x^2} \quad y \quad y = -\sqrt{4 - x^2}$$

cuyas gráficas se muestran en la figura 12.5. Como el punto  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  se encuentra en la gráfica de  $y = \sqrt{4 - x^2}$ , se debe diferenciar esa función:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4 - x^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \end{aligned}$$



27. Un fabricante de puertas de aluminio puede vender actualmente 500 puertas por semana a un precio de \$80 cada una. Si el precio se reduce a \$75 cada una, podrían venderse 50 puertas adicionales por semana. Estime la función elasticidad de la demanda para las puertas y también la función de ingreso marginal del fabricante.

28. Dada la ecuación de demanda

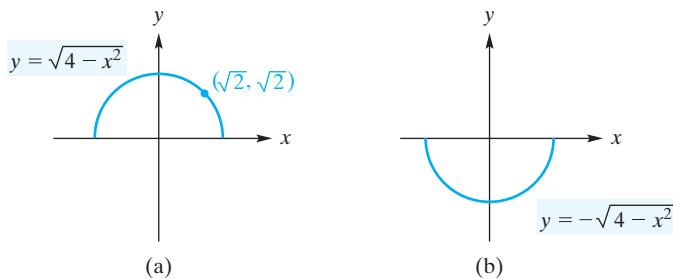
$$p = 2000 - q^2$$

donde  $5 \leq q \leq 40$ , ¿para qué valor de  $q$  es  $|\eta|$  un máximo? ¿Para qué valor es un mínimo?

29. Repita el problema 28 para

$$p = \frac{200}{q + 5}$$

tal que  $5 \leq q \leq 95$ .

FIGURA 12.5  $x^2 + y^2 = 4$  da lugar a dos funciones diferentes de la variable  $x$ .

Así,

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}} = -1$$

Por lo que la pendiente del círculo  $x^2 + y^2 - 4 = 0$  en el punto  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  es igual a  $-1$ .

A continuación se resumen las dificultades que se han presentado. Primero, no se dio  $y$  al principio de manera explícita en términos de  $x$ . Segundo, después de que se trató de encontrar alguna relación, se terminó con más de una función de  $x$ . De hecho, dependiendo de la ecuación dada, puede ser complicado o incluso imposible encontrar una expresión explícita para  $y$ . Por ejemplo, sería difícil despejar a  $y$  de la ecuación  $ye^x + \ln(x+y) = 0$ . Ahora se considerará un método que evita todas estas dificultades.

Una ecuación de la forma  $F(x, y) = 0$ , como la que se tenía originalmente, expresa a  $y$  como función de  $x$  en forma *implícita*. Se usa la palabra *implícita* puesto que  $y$  no está dada de manera explícita como función de  $x$ . Sin embargo, se supone o queda *implícito*, que la ecuación define a  $y$  por lo menos como una función diferenciable de  $x$ . Se supone entonces que la ecuación (1),  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ , define alguna función diferenciable de  $x$ , digamos,  $y = f(x)$ . A continuación, se trata a  $y$  como una función de  $x$  y se diferencian ambos lados de la ecuación (1) con respecto a  $x$ . Por último, se despeja  $dy/dx$  del resultado. Al aplicar este procedimiento, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 4) &= \frac{d}{dx}(0) \\ \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) &= \frac{d}{dx}(0) \end{aligned} \tag{3}$$

Se sabe que  $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$  y que tanto  $\frac{d}{dx}(4)$  como  $\frac{d}{dx}(0)$  son 0. Pero  $\frac{d}{dx}(y^2)$  **no** es  $2y$ , porque se diferencia con respecto a  $x$  y no con respecto a  $y$ . Es decir,  $y$  no es la variable independiente. Como se supone que  $y$  es una función de  $x$ ,  $y^2$  tiene la forma  $u^n$ , donde  $y$  desempeña el papel de  $u$ . Así como la regla de la potencia establece que  $\frac{d}{dx}(u^n) = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$ , se tiene que  $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y \frac{dy}{dx}$ . De aquí que la ecuación (3) se transforma en

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

Al despejar  $dy/dx$  resulta

$$\begin{aligned} 2y \frac{dy}{dx} &= -2x \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \quad \text{para } y \neq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Observe que la expresión para  $dy/dx$  contiene la variable  $y$ , así como la variable  $x$ . Esto significa que para encontrar  $dy/dx$  en un punto, ambas coordenadas del punto deben sustituirse en  $dy/dx$ . Así,

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(\sqrt{2}, \sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

como antes. Este método para encontrar  $dy/dx$  se llama **diferenciación implícita**. Se observa que la ecuación (4) no está definida cuando  $y = 0$ . De manera geométrica esto es claro, puesto que la recta tangente al círculo en  $(2, 0)$  o  $(-2, 0)$  es vertical y, por lo tanto, la pendiente no está definida.

A continuación se dan los pasos a seguir para diferenciar de manera implícita:

### Procedimiento de diferenciación implícita

Para una ecuación que supuestamente define a  $y$  de manera implícita como una función diferenciable de  $x$ , la derivada  $\frac{dy}{dx}$  puede encontrarse como sigue:

1. Diferencie cada término de la ecuación respecto de  $x$  y  $y$ . Cuando se hace respecto a  $y$  se le agrega  $\frac{dy}{dx}$ .
2. Agrupe todos los términos que contengan  $\frac{dy}{dx}$  en el lado izquierdo del igual y agrupe los demás términos en el lado derecho.
3. El lado izquierdo de la ecuación se factoriza por término común, el cual es  $\frac{dy}{dx}$ .
4. Despeje  $\frac{dy}{dx}$ , tome en cuenta las restricciones.

### EJEMPLO 1 Diferenciación implícita

Encuentre  $\frac{dy}{dx}$  por medio de diferenciación implícita si  $y + y^3 - x = 7$ .

**Solución:** Aquí  $y$  no está dada como función explícita de  $x$  [es decir, no está en la forma  $y = f(x)$ ]. Por lo que se supone que  $y$  es una función implícita (diferenciable) de  $x$  y se aplica el procedimiento anterior de cuatro pasos:

1. Diferencie cada término de la ecuación respecto a  $x$  y  $y$ . Cuando se hace respecto a  $y$  se le agrega  $\frac{dy}{dx}$ .

$$y + y^3 - x = 7$$

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

2. Agrupe todos los términos que contengan  $\frac{dy}{dx}$  en el lado izquierdo del igual y agrupe los demás términos en el lado derecho.

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 1$$

3. El lado izquierdo de la ecuación se factoriza por término común, el cual es  $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}(1 + 3y^2) = 1$$

4. Despeje  $\frac{dy}{dx}$  al dividir ambos lados entre  $1 + 3y^2$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + 3y^2}$$

Debido a que frecuentemente el paso 4 del proceso implica la división entre una expresión que contiene a las variables, la respuesta debe restringirse para excluir aquellos valores de las variables que harían cero al denominador. Aquí, el denominador siempre es mayor o igual que 1, de manera que no hay restricción.



#### ADVERTENCIA

La derivada de  $y^3$  con respecto a  $x$  es  $3y^2 \frac{dy}{dx}$ , no es  $3y^2$ .

En un problema de diferenciación implícita, es posible encontrar la derivada de una función sin conocer la función.



**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1****DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA**

Suponga que  $P$ , la proporción de gente afectada por cierta enfermedad, se describe por medio de  $\ln\left(\frac{P}{1-P}\right) = 0.5t$ , donde  $t$  es el tiempo en meses. Encuentre la razón a la cual crece  $P$  con respecto al tiempo  $\frac{dP}{dt}$ .

**EJEMPLO 2 Diferenciación implícita**

Encuentre  $\frac{dy}{dx}$  si  $x^3 + 4xy^2 - 27 = y^4$ .

**Solución:** Como  $y$  no está dada de manera explícita en términos de  $x$ , se utiliza el método de diferenciación implícita:

1. Diferencie cada término de la ecuación respecto a  $x$  y  $y$ . Cuando se hace respecto a  $y$  se le agrega  $\frac{dy}{dx}$ .

$$x^3 + 4xy^2 - 27 = y^4$$

$$3x^2 + 4y^2 + 8xy \frac{dy}{dx} = 4y^3 \frac{dy}{dx}$$

El término  $4xy^2$  al derivarlo respecto a  $x$  queda  $4(1)y^2$ , la variable  $y$  permanece constante. Ahora al derivarlo respecto a  $y$ , la  $x$  permanece constante, entonces  $4x(2y) = 8xy$ .

2. Agrupe todos los términos que contengan  $\frac{dy}{dx}$  en el lado izquierdo del igual y agrupe los demás términos en el lado derecho.

$$3x^2 + 4y^2 + 8xy \frac{dy}{dx} = 4y^3 \frac{dy}{dx}$$

$$8xy \frac{dy}{dx} - 4y^3 \frac{dy}{dx} = -3x^2 - 4y^2$$

3. El lado izquierdo de la ecuación se factoriza por término común, el cual es  $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}(8xy - 4y^3) = -3x^2 - 4y^2$$

4. Se despeja  $\frac{dy}{dx}$ , y se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - 4y^2}{8xy - 4y^3} = \frac{3x^2 + 4y^2}{4y^3 - 8xy}$$

que da el valor de  $dy/dx$  en los puntos  $(x, y)$  para el cual  $4y^3 - 8xy \neq 0$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11 

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2****DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA**

El volumen  $V$  de un globo esférico de radio  $r$  está dado por la ecuación  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Si el radio crece a la velocidad de 5 pulgadas/minuto (esto es,  $\frac{dr}{dt} = 5$ ), entonces determine la razón de aumento del volumen del globo,  $\frac{dV}{dt} \Big|_{r=12}$ , cuando el radio es de 12 pulgadas.

**EJEMPLO 3 Diferenciación implícita**

Encuentre la pendiente de la curva  $x^3 = (y - x^2)^2$  en el punto  $(1, 2)$ .

**Solución:** La pendiente en  $(1, 2)$  es el valor de  $dy/dx$  en ese punto. Se encontrará  $dy/dx$  por medio de diferenciación implícita, se tiene

$$\frac{d}{dx}(x^3) = \frac{d}{dx}[(y - x^2)^2]$$

$$3x^2 = 2(y - x^2) \left( \frac{dy}{dx} - 2x \right)$$

$$3x^2 = 2 \left( y \frac{dy}{dx} - 2xy - x^2 \frac{dy}{dx} + 2x^3 \right)$$

$$3x^2 = 2y \frac{dy}{dx} - 4xy - 2x^2 \frac{dy}{dx} + 4x^3$$

$$\begin{aligned}3x^2 + 4xy - 4x^3 &= 2y \frac{dy}{dx} - 2x^2 \frac{dy}{dx} \\3x^2 + 4xy - 4x^3 &= 2 \frac{dy}{dx}(y - x^2) \\\frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2 + 4xy - 4x^3}{2(y - x^2)} \quad \text{para } y - x^2 \neq 0\end{aligned}$$

Para el punto  $(1, 2)$ ,  $y - x^2 = 2 - 1^2 = 1 \neq 0$ . Así, la pendiente de la curva en  $(1, 2)$  es

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,2)} = \frac{3(1)^2 + 4(1)(2) - 4(1)^3}{2(2 - (1)^2)} = \frac{7}{2}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25



### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

#### DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

Una escalera de 10 pies de largo está recargada en una pared vertical. Suponga que la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a una velocidad constante de 3 pies/s. (Esto es,  $\frac{dx}{dt} = 3$ .) ¿Qué tan rápido desciende la parte superior de la escalera, cuando dicha porción se encuentra a 8 pies del suelo (esto es, cuando  $y = 8$ )? (Es decir, ¿cuánto es  $\frac{dy}{dt}$ ? (Utilice el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos,  $x^2 + y^2 = z^2$ , donde  $x$  y  $y$  son los catetos del triángulo y  $z$  es la hipotenusa.)

#### EJEMPLO 4 Diferenciación implícita

*Si  $q = p = \ln q + \ln p$ , encuentre  $dq/dp$ .*

**Solución:** Se supone que  $q$  es una función de  $p$  y se diferencian ambos lados de la ecuación con respecto a  $p$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp}(q) - \frac{d}{dp}(p) &= \frac{d}{dp}(\ln q) + \frac{d}{dp}(\ln p) \\\frac{dq}{dp} - 1 &= \frac{1}{q} \frac{dq}{dp} + \frac{1}{p} \\\frac{dq}{dp} - \frac{1}{q} \frac{dq}{dp} &= \frac{1}{p} + 1 \\\frac{dq}{dp} \left(1 - \frac{1}{q}\right) &= \frac{1}{p} + 1 \\\frac{dq}{dp} \left(\frac{q-1}{q}\right) &= \frac{1+p}{p} \\\frac{dq}{dp} &= \frac{(1+p)q}{p(q-1)} \quad \text{para } p(q-1) \neq 0\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19



## Problemas 12.4

En los problemas 1 a 24, encuentre  $dy/dx$  mediante diferenciación implícita.

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| 1. $x^2 + 4y^2 = 4$  | 2. $3x^2 + 6y^2 = 1$            |
| *3. $2y^3 - 7x^2 = 5$  | 4. $2x^2 - 3y^2 = 4$            |
| 5. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3$                                   | 6. $x^{1/5} + y^{1/5} = 4$      |
| 7. $x^{3/4} + y^{3/4} = 5$   | 8. $y^3 = 4x$                   |
| 9. $xy = 4$  | 10. $x^2 + xy - 2y^2 = 0$       |
| *11. $xy - y - 11x = 5$  | 12. $x^3 - y^3 = 3x^2y - 3xy^2$ |
| 13. $2x^3 + y^3 - 12xy = 0$  | 14. $2x^3 + 3xy + y^3 = 0$      |
| 15. $x = \sqrt{y} + \sqrt[4]{y}$                                     | 16. $x^3y^3 + x = 9$            |
| 17. $5x^3y^4 - x + y^2 = 25$   | 18. $y^2 + y = \ln x$           |
| *19. $y \ln x = xe^y$  | 20. $\ln(xy) + x = 4$           |
| 21. $xe^y + y = 13$  | 22. $4x^2 + 9y^2 = 16$          |
| 23. $(1 + e^{3x})^2 = 3 + \ln(x + y)$                                | 24. $e^{x+y} = \ln(x + y)$      |
| *25. Si $x + xy + y^2 = 7$ , encuentre $dy/dx$ en $(1, 2)$ .         |                                 |
| 26. Si $x\sqrt{y+1} = y\sqrt{x+1}$ , encuentre $dy/dx$ en $(3, 3)$ . |                                 |

27. Encuentre la pendiente de la curva  $4x^2 + 9y^2 = 1$  en el punto  $(0, \frac{1}{3})$ ; en el punto  $(x_0, y_0)$ .

28. Encuentre la pendiente de la curva  $(x^2 + y^2)^2 = 4y^2$  en el punto  $(0, 2)$ .

29. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva de

$$x^3 + xy + y^2 = -1$$

en el punto  $(-1, 1)$ .

30. Repita el problema 29 para la curva

$$y^2 + xy - x^2 = 5$$

en el punto  $(4, 3)$ .

Para las ecuaciones de demanda en los problemas 31 a 34, encuentre la razón de cambio de  $q$  con respecto a  $p$ .

- |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| 31. $p = 100 - q^2$          | 32. $p = 400 - \sqrt{q}$     |
| 33. $p = \frac{20}{(q+5)^2}$ | 34. $p = \frac{10}{q^2 + 3}$ |

- 35. Radiactividad** La actividad relativa  $I/I_0$  de un elemento radiactivo varía con el tiempo que transcurre de acuerdo con la ecuación

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\lambda t$$

donde  $\lambda$  (una letra griega que se lee “lambda”) es la constante de desintegración e  $I_0$  es la intensidad inicial (una constante). Encuentre la razón de cambio de la intensidad  $I$  con respecto al tiempo transcurrido  $t$ .

- 36. Sismos** La magnitud  $M$  de un sismo y su energía  $E$  están relacionadas por la ecuación<sup>6</sup>

$$1.5M = \log\left(\frac{E}{2.5 \times 10^{11}}\right)$$

Aquí  $M$  está dada en términos de la escala de Richter de 1958 y  $E$  está en ergios. Determine la razón de cambio de la energía con respecto a la magnitud, y la razón de cambio de la magnitud con respecto a la energía.

- 37. Escala física** La relación entre la velocidad ( $v$ ), la frecuencia ( $f$ ) y la longitud de onda ( $\lambda$ ) de cualquier onda está dada por

$$v = f\lambda$$

Encuentre  $df/d\lambda$  por diferenciación implícita. (Trate a  $v$  como una constante.) Luego demuestre que se obtiene el mismo resultado si primero se despeja  $f$  y enseguida se diferencia con respecto a  $\lambda$ .

- 38. Biología** La ecuación  $(P + a)(v + b) = k$  se llama “ecuación fundamental de la contracción muscular”.<sup>7</sup> Aquí  $P$  es la carga

impuesta al músculo,  $v$  la velocidad del acortamiento de las fibras del músculo, y  $a$ ,  $b$  y  $k$  son constantes positivas. Use diferenciación implícita para mostrar que, en términos de  $P$ ,

$$\frac{dv}{dP} = -\frac{k}{(P + a)^2}$$

- 39. Propensión marginal al consumo** Los ahorros  $S$  de un país se definen implícitamente en términos de su ingreso nacional  $I$  por medio de la ecuación

$$S^2 + \frac{1}{4}I^2 = SI + I$$

donde  $S$  e  $I$  están en miles de millones de dólares. Encuentre la propensión marginal al consumo cuando  $I = 16$  y  $S = 12$ .

- 40. Sustitución tecnológica** Con frecuencia, las tecnologías o productos nuevos tienden a reemplazar a los viejos. Por ejemplo, la mayoría de las aerolíneas comerciales usan actualmente motores a chorro en vez de motores de propulsión. En su análisis de pronósticos de la sustitución tecnológica, Hurter y Rubenstein<sup>8</sup> se refieren a la ecuación

$$\ln \frac{f(t)}{1 - f(t)} + \sigma \frac{1}{1 - f(t)} = C_1 + C_2 t$$

donde  $f(t)$  es la participación en el mercado del sustituto en un tiempo  $t$  y  $C_1$ ,  $C_2$  y  $\sigma$  (letra griega que se lee “sigma”) son constantes. Verifique la afirmación de que la razón de sustitución es

$$f'(t) = \frac{C_2 f(t)[1 - f(t)]^2}{\sigma f(t) + [1 - f(t)]}$$

## OBJETIVO

Describir el método de diferenciación logarítmica y mostrar cómo diferenciar una función de la forma  $u^v$ .

## 12.5 Diferenciación logarítmica

Existe una técnica llamada **diferenciación logarítmica**, que con frecuencia simplifica la diferenciación de  $y = f(x)$  cuando  $f(x)$  contiene productos, cocientes o potencias. El procedimiento es como sigue:

### Diferenciación logarítmica

Para diferenciar  $y = f(x)$ ,

- Obtenga el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación. Esto es

$$\ln y = \ln(f(x))$$

- Simplifique  $\ln(f(x))$  mediante las propiedades de los logaritmos.

Recordando que las propiedades son:

$$\ln(UV) = \ln U + \ln V$$

$$\ln \frac{U}{V} = \ln U - \ln V$$

$$\ln V^U = U \ln V$$

- Diferencie ambos lados con respecto a  $x$ .

$$4. \text{ Despeje } \frac{dy}{dx}.$$

- Exprese la respuesta sólo en términos de  $x$ . Esto requiere sustituir  $f(x)$  por  $y$ .

<sup>6</sup>K. E. Bullen, *An Introduction to the Theory of Seismology* (Cambridge, U.K.: Cambridge en la University Press, 1963).

<sup>7</sup>R. W. Stacy *et al.*, *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

<sup>8</sup>A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein *et al.*, “Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature”, *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

Existe un par de puntos útiles. Primero, independientemente de cualquier simplificación, el procedimiento produce

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(\ln(f(x)))$$

de manera que

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{d}{dx}(\ln(f(x)))$$

es una fórmula que puede memorizarse. Segundo, la cantidad  $\frac{f'(x)}{f(x)}$ , que resulta de diferenciar  $\ln(f(x))$ , es lo que se llama la *tasa relativa de cambio de  $f(x)$*  en la sección 11.3.

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

### EJEMPLO 1 Diferenciación logarítmica

Encuentre  $y'$  si  $y = \frac{(2x - 5)^3}{x^2 \sqrt[4]{x^2 + 1}}$ .

**Solución:** La diferenciación de esta función en la manera usual es engorrosa, porque implica las reglas del cociente, de la potencia y del producto. La diferenciación logarítmica simplifica el trabajo.

1. Se obtiene el logaritmo natural en ambos lados:

$$\ln y = \ln \frac{(2x - 5)^3}{x^2 \sqrt[4]{x^2 + 1}}$$

2. Al simplificar mediante las propiedades de los logaritmos se tiene

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln(2x - 5)^3 - \ln(x^2 \sqrt[4]{x^2 + 1}) \\ &= 3 \ln(2x - 5) - (\ln x^2 + \ln(x^2 + 1)^{1/4}) \\ &= 3 \ln(2x - 5) - 2 \ln x - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1)\end{aligned}$$

3. Al diferenciar con respecto a  $x$  se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= 3 \left( \frac{1}{2x - 5} \right) (2) - 2 \left( \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right) (2x) \\ &= \frac{6}{2x - 5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2 + 1)}\end{aligned}$$

4. Al despejar  $y'$  resulta

$$y' = y \left( \frac{6}{2x - 5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2 + 1)} \right)$$

5. Se sustituye la expresión inicial para  $y$ , obteniendo  $y'$  sólo en términos de  $x$ :

$$y' = \frac{(2x - 5)^3}{x^2 \sqrt[4]{x^2 + 1}} \left[ \frac{6}{2x - 5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2 + 1)} \right]$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



### ADVERTENCIA

Como  $y$  es una función de  $x$ , al diferenciar  $\ln y$  con respecto a  $x$  se obtiene  $\frac{y'}{y}$ .

La diferenciación logarítmica puede usarse también para diferenciar funciones de la forma  $y = u^v$ , donde  $u$  y  $v$  son funciones diferenciables de  $x$ . Como la base  $y$  el exponente no son necesariamente constantes, las técnicas de diferenciación para  $u^n$  y  $a^u$  no se aplican aquí.

### EJEMPLO 2 Diferenciación de la forma $u^v$

Diferencie  $y = x^x$  mediante la diferenciación logarítmica.

**Solución:** El ejemplo es un buen candidato para el método de la *fórmula* de la diferenciación logarítmica.

$$y' = y \frac{d}{dx}(\ln x^x) = x^x \frac{d}{dx}(x \ln x) = x^x \left( (1)(\ln x) + (x) \left( \frac{1}{x} \right) \right) = x^x (\ln x + 1)$$

Vale la pena mencionar que una técnica alternativa para diferenciar una función de la forma  $y = u^v$  es convertirla en una función exponencial con base  $e$ . Como ilustración, para la función de este ejemplo, se tiene

$$y = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

$$y' = e^{x \ln x} \left( 1 \ln x + x \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1)$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15 

### EJEMPLO 3 Tasa relativa de cambio de un producto

Demuestre que la tasa relativa de cambio de un producto es igual a la suma de las tasas relativas de cambio de sus factores. Utilice este resultado para expresar la tasa porcentual de cambio de los ingresos en términos de la tasa porcentual de cambio del precio.

**Solución:** Recuerde que la tasa relativa de cambio de una función  $r$  es  $\frac{r'}{r}$ . Se demostrará que si  $r = pq$ , entonces  $\frac{r'}{r} = \frac{p'}{p} + \frac{q'}{q}$ . De  $r = pq$  se tiene  $\ln r = \ln p + \ln q$ , y al diferenciar ambos lados resulta

$$\frac{r'}{r} = \frac{p'}{p} + \frac{q'}{q}$$

como se requería. Si se multiplican ambos lados por 100% se obtiene una expresión para la tasa porcentual de cambio de  $r$  en términos de las tasas porcentuales de  $p$  y  $q$ :

$$\frac{r'}{r} 100\% = \frac{p'}{p} 100\% + \frac{q'}{q} 100\%$$

Si  $p$  es el *precio* por artículo y  $q$  es la *cantidad vendida*, entonces  $r = pq$  es el *ingreso* total. En este caso se toma la diferenciación con respecto a  $p$  y observe que ahora  $\frac{q'}{q} = \eta \frac{p'}{p}$ , donde  $\eta$  es la elasticidad de la demanda como en la sección 12.3. Se deduce que en este caso se tiene

$$\frac{r'}{r} 100\% = (1 + \eta) \frac{p'}{p} 100\%$$

que expresa la tasa porcentual de cambio del ingreso en términos de la tasa porcentual de cambio en el precio. Por ejemplo, si a un precio dado y cantidad dados,  $\eta = -5$ , entonces un aumento de 1% en el precio resultará en un incremento de  $(1 - 5)\% = -4\%$  en el ingreso, que es igual a decir un 4% de *disminución* en el ingreso. Por otro lado, una disminución de 3% en el precio, es decir, un *aumento* de -3% en el precio, resultará en un aumento de  $(1 - 5)(-3)\% = 12\%$  en el ingreso. También resulta claro que en los puntos donde existe elasticidad unitaria ( $\eta = 1$ ), los cambios porcentuales en el precio no producen ningún cambio porcentual en el ingreso.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29 

### EJEMPLO 4 Diferenciación de la forma $u^v$

Encuentre la derivada de  $y = (1 + e^x)^{\ln x}$ .

**Solución:** Ésta tiene la forma  $y = u^v$ , donde  $u = 1 + e^x$  y  $v = \ln x$ . Por medio de la diferenciación logarítmica, se tiene

$$\ln y = \ln((1 + e^x)^{\ln x})$$

$$\ln y = (\ln x) \ln(1 + e^x)$$

$$\frac{y'}{y} = \left( \frac{1}{x} \right) (\ln(1 + e^x)) + (\ln x) \left( \frac{1}{1 + e^x} \cdot e^x \right)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln(1 + e^x)}{x} + \frac{e^x \ln x}{1 + e^x}$$

$$y' = y \left( \frac{\ln(1 + e^x)}{x} + \frac{e^x \ln x}{1 + e^x} \right)$$

$$y' = (1 + e^x)^{\ln x} \left( \frac{\ln(1 + e^x)}{x} + \frac{e^x \ln x}{1 + e^x} \right)$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17 

De manera alternativa, se puede diferenciar incluso una función general de la forma  $y = u(x)^{v(x)}$  donde  $u(x) > 0$  por medio de la ecuación

$$u^v = e^{v \ln u}$$

De hecho, si  $y = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$  para  $u(x) > 0$ , entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (e^{v(x) \ln u(x)}) = e^{v(x) \ln u(x)} \frac{d}{dx} (v(x) \ln u(x)) = u^v \left( v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$$

que puede resumirse como

$$(u^v)' = u^v \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$$

Como sucede con frecuencia, no se sugiere memorizar la fórmula anterior. El punto aquí es que se ha mostrado que *cualquier* función de la forma  $u^v$  puede diferenciarse con el uso de la ecuación  $u^v = e^{v \ln u}$ . Este mismo resultado se obtendría mediante diferenciación logarítmica:

$$\ln y = \ln(u^v)$$

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$

$$y' = y \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$$

$$(u^v)' = u^v \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$$

Después de terminar esta sección, a usted se le facilitará la manera de diferenciar las siguientes formas:

$$y = \begin{cases} (f(x))^a & \text{(a)} \\ b^{f(x)} & \text{(b)} \\ (f(x))^{g(x)} & \text{(c)} \end{cases}$$

Para el tipo (a) puede utilizar la regla de la potencia. Para el tipo (b) utilice la fórmula de diferenciación para funciones exponenciales [si  $b \neq e$ , convierta primero  $b^{f(x)}$  en una función  $e^u$ . Para el tipo (c) utilice diferenciación logarítmica o primero convierta la función en una función  $e^u$ . No emplee una regla en situaciones en que no sea aplicable. Por ejemplo, la regla de la potencia no puede aplicarse para  $x^x$ .

## Problema 12.5

En los problemas 1 a 12, encuentre  $y'$  por medio de la diferenciación logarítmica.

\*1.  $y = (x+1)^2(x-2)(x^2+3)$

2.  $y = (3x+4)(8x-1)^2(3x^2+1)^4$

3.  $y = (3x^3-1)^2(2x+5)^3$

4.  $y = (2x^2+1)\sqrt{8x^2-1}$

5.  $y = \sqrt{x+1}\sqrt{x^2-2}\sqrt{x+4}$

6.  $y = (2x+1)\sqrt{x^3+2}\sqrt[3]{2x+5}$

7.  $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2x}$

8.  $y = \sqrt{\frac{x^2+5}{x+9}}$

9.  $y = \frac{(2x^2+2)^2}{(x+1)^2(3x+2)}$

10.  $y = \frac{x(1+x^2)^2}{\sqrt{2+x^2}}$

11.  $y = \sqrt{\frac{(x+3)(x-2)}{2x-1}}$

12.  $y = \sqrt[3]{\frac{6(x^3+1)^2}{x^6 e^{-4x}}}$

En los problemas 13 a 20, determine  $y'$ .

13.  $y = x^{x^2+1}$

14.  $y = (2x)^{\sqrt{x}}$

\*15.  $y = x^{1/x}$

16.  $y = \left(\frac{3}{x^2}\right)^x$

\*17.  $y = (3x+1)^{2x}$

18.  $y = (x^2+1)^{x+1}$

19.  $y = 4e^x x^{3x}$

20.  $y = (\ln x)^{e^x}$

21. Si  $y = (4x-3)^{2x+1}$ , encuentre  $dy/dx$  cuando  $x = 1$ .

22. Si  $y = (\ln x)^{\ln x}$ , encuentre  $dy/dx$  cuando  $x = e$ .

23. Encuentre una ecuación de la recta tangente a

$$y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^2$$

en el punto donde  $x = 0$ .

24. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$y = x^x$$

en el punto en donde  $x = 1$ .

25. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$y = e^x(x^2 + 1)^x$$

en el punto en donde  $x = 1$ .

26. Si  $y = x^x$ , encuentre la razón de cambio relativa de  $y$  con respecto a  $x$ , cuando  $x = 1$ .

27. Si  $y = (3x)^{-2x}$ , determine el valor de  $x$  para el que la razón porcentual de cambio de  $y$  con respecto a  $x$  es 60.

28. Suponga que  $f(x)$  es una función positiva y diferenciable, y que  $y = (f(x))^{g(x)}$ . Utilice diferenciación logarítmica para demostrar que

trar que

$$\frac{dy}{dx} = (f(x))^{g(x)} \left( f'(x) \frac{g(x)}{f(x)} + g'(x) \ln(f(x)) \right)$$

- \*29. La ecuación de demanda para un disco compacto es

$$q = 500 - 40p + p^2$$

Si el precio de \$15 se incrementa en 1/2%, encuentre el cambio porcentual correspondiente en el ingreso.

30. Repita el problema 29, pero ahora considere un 10% de *disminución* en el precio.

## OBJETIVO

Aproximar las raíces reales de una ecuación por medio del cálculo. El método que se muestra es adecuado para usarlo en calculadoras graficadoras.

## 12.6 Método de Newton

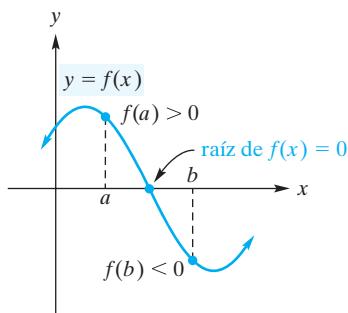
Es muy sencillo resolver ecuaciones de la forma  $f(x) = 0$ , cuando  $f$  es una función lineal o cuadrática. Por ejemplo, puede resolverse  $x^2 + 3x - 2 = 0$ , por medio de la fórmula cuadrática. Sin embargo, si  $f(x)$  tiene un grado mayor que 2 (o no es un polinomio), puede resultar difícil o incluso imposible encontrar soluciones (o raíces) de  $f(x) = 0$ , por los métodos usuales. Es por ello que se recurre a soluciones aproximadas que pueden obtenerse de varias maneras eficientes. Por ejemplo, puede utilizarse una calculadora graficadora para estimar las raíces reales de  $f(x) = 0$ . En esta sección se aprenderá cómo usar con tal fin la derivada (siempre que  $f$  sea diferenciable). El procedimiento que se desarrollará, llamado *método de Newton*, es muy apropiado para usarse con una calculadora o computadora.

El método de Newton requiere que se haga una estimación inicial para una raíz de  $f(x) = 0$ . Una manera de obtener este valor inicial aproximado consiste en hacer un bosquejo de la gráfica de  $y = f(x)$  y estimar la raíz en la gráfica. Un punto en la gráfica donde  $y = 0$ , es una intersección con el eje  $x$ , y el valor  $x$  de este punto es una raíz de  $f(x) = 0$ . Otra manera de localizar una raíz se basa en el hecho siguiente:

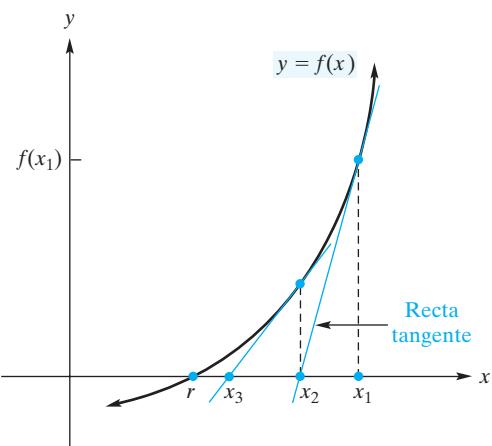
Si  $f$  es continua en el intervalo  $[a, b]$  y  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos opuestos, entonces la ecuación  $f(x) = 0$  tiene al menos una raíz entre  $a$  y  $b$ .

En la figura 12.6 se muestra esta situación. La intersección con el eje  $x$  entre  $a$  y  $b$  corresponde a una raíz de  $f(x) = 0$ , y pueden usarse tanto  $a$  como  $b$  para aproximar esta raíz.

Si ha de suponerse que se tiene un valor estimado (pero incorrecto) para una raíz, se verá cómo obtener una mejor aproximación de este valor. En la figura 12.7 se puede observar que  $f(r) = 0$ , por lo que  $r$  es una raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ . Suponga que  $x_1$  es una aproximación inicial a  $r$  (una que sea cercana a  $r$ ). Observe que la recta tangente a la curva en  $(x_1, f(x_1))$  intersecta al eje  $x$  en el punto  $(x_2, 0)$ , y que  $x_2$  es una mejor aproximación a  $r$  que  $x_1$ .



**FIGURA 12.6** Raíz de  $f(x) = 0$  entre  $a$  y  $b$ , donde  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos opuestos.



**FIGURA 12.7** Mejora en la aproximación de la raíz por medio de la recta tangente.

Se puede encontrar  $x_2$  a partir de la ecuación de la recta tangente. La pendiente de la recta tangente es  $f'(x_1)$ , entonces una forma punto-pendiente para esta recta es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \quad (1)$$

Como  $(x_2, 0)$  está sobre la recta tangente, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (1). Esto da

$$\begin{aligned} 0 - f(x_1) &= f'(x_1)(x_2 - x_1) \\ -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} &= x_2 - x_1 \quad [\text{si } f'(x) \neq 0] \end{aligned}$$

Por lo que,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (2)$$

Para obtener una mejor aproximación a  $r$ , se realiza de nuevo el procedimiento ya descrito, pero esta vez se usa  $x_2$  como punto de partida. Esto da la aproximación

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad (3)$$

Se repite (o *itera*) este proceso varias veces a fin de obtener mejores aproximaciones en el sentido de que la sucesión de valores

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

se aproxime a  $r$ . En la práctica, el proceso se termina al alcanzar el grado de exactitud deseado.

Si se analizan las ecuaciones (2) y (3), se puede ver cómo  $x_2$  se obtiene de  $x_1$  y cómo  $x_3$  proviene de  $x_2$ . En general,  $x_{n+1}$  se obtiene de  $x_n$  por medio de la siguiente fórmula general, llamada **método de Newton**:

### Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Una fórmula, como la ecuación (4), que indica la manera en que se obtiene un número en una sucesión a partir del precedente, se llama **fórmula recursiva** o *ecuación iterativa*.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

##### APROXIMACIÓN DE UNA RAÍZ MEDIANTE EL MÉTODO DE NEWTON

Si la utilidad total (en dólares) de la venta de  $x$  televisores es  $P(x) = 20x - 0.01x^2 - 850 + 3 \ln(x)$ , utilice el método de Newton para aproximar las cantidades de equilibrio. (Nota: existen dos cantidades de equilibrio; uno está entre 10 y 50, y el otro está entre 1900 y 2000). Dé el valor de  $x$  al entero más cercano. Utilice la calculadora graficadora para comprobar sus resultados.

**En el caso de que una raíz caiga entre  $a$  y  $b$ , y  $f(a)$  y  $f(b)$  estén igualmente cercanas a 0, se elige  $a$ , o bien,  $b$  como la primera aproximación.**

#### EJEMPLO 1 Aproximación de una raíz mediante el método de Newton

Aproxime la raíz de  $x^4 - 4x + 1 = 0$ , que se encuentra entre 0 y 1. Continúe el proceso de aproximación hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0.0001.

**Solución:** Si se establece que  $f(x) = x^4 - 4x + 1$ , se tiene

$$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$$

y

$$f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$$

(Note el cambio de signo). Como  $f(0)$  está más cercana a 0 que  $f(1)$ , se escoge a 0 como la primera aproximación,  $x_1$ . Ahora,

$$f'(x) = 4x^3 - 4$$

de modo que

$$f(x_n) = x_n^4 - 4x_n + 1 \quad \text{y} \quad f'(x_n) = 4x_n^3 - 4$$

Al sustituir en la ecuación (4) se obtiene la fórmula recursiva

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 4x_n + 1}{4x_n^3 - 4} \\&= \frac{4x_n^4 - 4x_n - x_n^4 + 4x_n - 1}{4x_n^3 - 4}\end{aligned}$$

así

$$x_{n+1} = \frac{3x_n^4 - 1}{4x_n^3 - 4} \quad (5)$$

Como  $x_1 = 0$ , al establecer  $n = 1$  en la ecuación (5) resulta

$$x_2 = \frac{3x_1^4 - 1}{4x_1^3 - 4} = \frac{3(0)^4 - 1}{4(0)^3 - 4} = 0.25$$

Si  $n = 2$ , en la ecuación (5) resulta

$$x_3 = \frac{3x_2^4 - 1}{4x_2^3 - 4} = \frac{3(0.25)^4 - 1}{4(0.25)^3 - 4} \approx 0.25099$$

Si  $n = 3$ , en la ecuación (5) resulta

$$x_4 = \frac{3x_3^4 - 1}{4x_3^3 - 4} = \frac{3(0.25099)^4 - 1}{4(0.25099)^3 - 4} \approx 0.25099$$

En la tabla 12.1 se muestran los datos obtenidos hasta ahora. Como los valores de  $x_3$  y  $x_4$  difieren en menos de 0.0001, se considera que la raíz es igual a 0.25099 (esto es,  $x_4$ ).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

**TABLA 12.1**

$n$	$x_n$	$x_{n+1}$
1	0.00000	0.25000
2	0.25000	0.25099
3	0.25099	0.25099

### EJEMPLO 2 Aproximación de una raíz por el método de Newton

Aproxime la raíz de  $x^3 = 3x - 1$ , que se encuentra entre  $-1$  y  $-2$ . Continúe el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0.0001.

**Solución:** Se establece que  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  (es necesario tener la forma  $f(x) = 0$ ), se encuentra que

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$$

y

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -1$$

(Note el cambio en el signo). Como  $f(-2)$  está más cercana a cero que  $f(-1)$ , se escoge a  $-2$  como la primera aproximación,  $x_1$ . Ahora,

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

de modo que

$$f(x_n) = x_n^3 - 3x_n + 1 \quad y \quad f'(x_n) = 3x_n^2 - 3$$

Al sustituir en la ecuación (4), se obtiene la fórmula recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{3x_n^2 - 3}$$

de modo que

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 - 3} \quad (6)$$

Como  $x_1 = -2$ , al determinar que  $n = 1$  en la ecuación (6) resulta

$$x_2 = \frac{2x_1^3 - 1}{3x_1^2 - 3} = \frac{2(-2)^3 - 1}{3(-2)^2 - 3} \approx -1.88889$$

Si se continúa de esta manera se obtiene la tabla 12.2. Como los valores de  $x_3$  y  $x_4$  difieren en 0.00006, que es menor a 0.0001, entonces se considera que la raíz es  $-1.87939$  (esto es,  $x_4$ ).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3 

**TABLA 12.2**

$n$	$x_n$	$x_n + 1$
1	-2.00000	-1.88889
2	-1.88889	-1.87945
3	-1.87945	-1.87939

La situación donde  $x_1$  conduce a una derivada de 0 ocurre en los problemas 2 y 8 de la serie de problemas 12.6. Si su elección para la aproximación inicial,  $x_1$ , da a la derivada un valor de cero, escoja un número diferente que sea cercano a la raíz deseada. En esta situación puede ser útil una gráfica de  $f$ . Por último, se debe destacar que hay casos en los que la sucesión de las aproximaciones no tienden hacia la raíz. Un análisis de tales casos está más allá del alcance de este libro.

## TECNOLOGÍA

En la figura 12.8 se presenta un programa corto del método de Newton para la calculadora TI-83 Plus (usted puede utilizar la TI VOYAGE 200 o cualquier otra). Antes de ejecutarlo, se almacena la primera aproximación a la raíz de  $f(x) = 0$  como  $X$  y  $f(x)$  y  $f'(x)$  se almacenan como  $Y_1$  y

```
PROGRAM:NEWTON
:Lbl A
:X-Y1(X)/Y2(X)
:Ans→X
:Disp X
:Pause
:Goto A
```

**FIGURA 12.8** Programa de calculadora para el método de Newton.

$Y_2$ , respectivamente. Al ser ejecutado, el programa calcula la primera iteración y se detiene.

Las iteraciones sucesivas se obtienen al oprimir la tecla ENTER. En la figura 12.9 se muestran las iteraciones para el problema del ejemplo 2.

**FIGURA 12.9** Iteraciones para el problema del ejemplo 2.

## Problemas 12.6

En los problemas 1 a 10, utilice el método de Newton para estimar la raíz que se indica de la ecuación dada. Continúe el procedimiento hasta que la diferencia de dos aproximaciones sucesivas sea menor que 0.0001. Utilice la calculadora graficadora para complementar su aprendizaje y comprobar sus respuestas.

- \*1.  $x^3 - 4x + 1 = 0$ ; raíz entre 0 y 1.
2.  $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ ; raíz entre 0 y 1.
- \*3.  $x^3 - x - 1 = 0$ ; raíz entre 1 y 2.
4.  $x^3 - 9x + 6 = 0$ ; raíz entre 2 y 3.
5.  $x^3 + x + 1 = 0$ ; raíz entre -1 y 0.
6.  $x^3 = 2x + 5$ ; raíz entre 2 y 3.
7.  $x^4 = 3x - 1$ ; raíz entre 0 y 1.
8.  $x^4 + 4x - 1 = 0$ ; raíz entre -2 y -1.
9.  $x^4 - 2x^3 + x^2 - 3 = 0$ ; raíz entre 1 y 2.
10.  $x^4 - x^3 + x - 2 = 0$ ; raíz entre 1 y 2.
11. Estime, con una precisión de tres decimales, la raíz cúbica de 71. (*Una pista:* Demuestre que el problema es equivalente a encontrar una raíz de  $f(x) = x^3 - 71 = 0$ ). Considere 4 como la aproximación inicial. (Como aproximación inicial puede utilizar valores cercanos a 4). Continúe el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas, redondeadas a tres decimales, sean iguales.
12. Estime  $\sqrt[4]{19}$  con una precisión de dos decimales. Use 2 como aproximación inicial.
13. Encuentre, con una precisión de dos decimales, todas las raíces reales de la ecuación  $e^x = x + 5$ . (*Una pista:* Con un bosquejo de las gráficas de  $y = e^x$  y  $y = x + 5$  debe ser claro cuántas soluciones existen. Use valores enteros cercanos para sus estimaciones iniciales).

14. Encuentre, con una precisión de tres decimales, todas las soluciones reales de la ecuación  $\ln x = 5 - x$ .

15. **Cantidad de equilibrio** El costo de fabricar  $q$  toneladas de un producto está dado por

$$c = 250 + 2q - 0.1q^3$$

y el ingreso obtenido al vender las  $q$  toneladas está dado por

$$r = 3q$$

Aproxime, con una precisión de dos decimales, la cantidad de equilibrio. (*Una pista:* Aproxime una raíz de  $r - c = 0$ , considere 13 como su aproximación inicial.)

16. **Cantidad del punto de equilibrio** El costo total de fabricar  $q$  cientos de lápices es  $c$  dólares, donde

$$c = 40 + 3q + \frac{q^2}{1000} + \frac{1}{q}$$

El ciento de lápices se vende a \$7.

- (a) Demuestre que la cantidad de equilibrio es una solución de la ecuación

$$f(q) = \frac{q^3}{1000} - 4q^2 + 40q + 1 = 0$$

- (b) Utilice el método de Newton para estimar la solución de  $f(q) = 0$ , donde  $f(q)$  está dada en el inciso (a). Use 10 como aproximación inicial y dé su respuesta con una precisión de dos decimales.

17. **Equilibrio** Dada la ecuación de oferta  $p = 2q + 5$  y la ecuación de demanda  $p = \frac{100}{q^2 + 1}$ , use el método de Newton para estimar la cantidad de equilibrio del mercado. Dé su respuesta con tres decimales de precisión.

- 18. Equilibrio** Dada la ecuación de oferta

$$p = 0.2q^3 + 0.5q + 2$$

y la ecuación de demanda  $p = 10 - q$ , use el método de Newton para estimar la cantidad de equilibrio del mercado y encuentre el precio de equilibrio correspondiente. Tome 5 como aproximación inicial para el valor requerido de  $q$  y dé su respuesta con dos decimales de precisión.

### OBJETIVO

Encontrar derivadas de orden superior tanto en forma explícita como implícita.

- 19.** Use el método de Newton para aproximar (con dos decimales de precisión) un valor crítico de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 5x + 1$$

en el intervalo  $[3, 4]$ .

## 12.7 Derivadas de orden superior



### ADVERTENCIA

El símbolo  $d^2y/dx^2$  representa la segunda derivada de  $y$ . No es lo mismo que  $(dy/dx)^2$ , que es el cuadrado de la primera derivada de  $y$ .

Se sabe que la derivada de una función  $y = f(x)$  es a su vez una función  $f'(x)$ . Si se diferencian  $f'(x)$ , la función resultante se llama **segunda derivada** de  $f$  con respecto a  $x$ . Se denota como  $f''(x)$ , que se lee “ $f$  doble prima de  $x$  o biprima”. De manera similar, la derivada de la segunda derivada se llama **tercera derivada** y se escribe  $f'''(x)$ . Si se continúa de esta manera, se obtienen *derivadas de orden superior*. En la tabla 12.3 se indican algunos de los símbolos utilizados para representarlas. Para evitar notaciones confusas, no se usan las primas para derivadas de orden superior al tercero.

**TABLA 12.3**

Primera derivada:	$y'$	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}(f(x))$	$D_x y$
Segunda derivada:	$y''$	$f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	$D_x^2 y$
Tercera derivada:	$y'''$	$f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^3}{dx^3}(f(x))$	$D_x^3 y$
Cuarta derivada:	$y^{(4)}$	$f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	$\frac{d^4}{dx^4}(f(x))$	$D_x^4 y$

### EJEMPLO 1 Determinación de derivadas de orden superior

- a. Si  $f(x) = 6x^3 - 12x^2 + 6x - 2$ , encuentre todas sus derivadas de orden superior.

**Solución:** Al diferenciar  $f(x)$  resulta

$$f'(x) = 18x^2 - 24x + 6$$

Al diferenciar  $f'(x)$  se obtiene

$$f''(x) = 36x - 24$$

De manera similar,

$$f'''(x) = 36$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Todas las derivadas sucesivas son también 0:  $f^{(5)}(x) = 0$ , y así sucesivamente.

- b. Si  $f(x) = 7$ , encuentre  $f''(x)$ .

**Solución:**

$$f'(x) = 0$$

$$f''(x) = 0$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### DETERMINACIÓN DE UNA DERIVADA DE SEGUNDO ORDEN

La altura  $h(t)$  de una piedra que se deja caer desde un edificio de 200 pies está dada por  $h(t) = 200 - 16t^2$ , donde  $t$  es el tiempo medido en segundos. Encuentre la aceleración  $\frac{d^2h}{dt^2}$  de la piedra en el tiempo  $t$ .

### EJEMPLO 2 Determinación de una derivada de segundo orden

Si  $y = e^{x^2}$ , encuentre  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

**Solución:**

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}(2x) = 2xe^{x^2}$$

Por la regla del producto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2[x(e^{x^2})(2x) + e^{x^2}(1)] = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5



### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

#### EVALUACIÓN DE UNA DERIVADA DE SEGUNDO ORDEN

Si el costo de producir  $q$  unidades de un producto es

$$c(q) = 7q^2 + 11q + 19$$

y la función de costo marginal es  $c'(q)$ , encuentre la razón de cambio de la función de costo marginal con respecto a  $q$  cuando  $q = 3$ .

#### EJEMPLO 3 Evaluación de una derivada de segundo orden

Si  $y = f(x) = \frac{16}{x+4}$ , encuentre  $\frac{d^2y}{dx^2}$  y evalúela cuando  $x = 4$ .

**Solución:** Como  $y = 16(x+4)^{-1}$ , la regla de la potencia da

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -16(x+4)^{-2} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 32(x+4)^{-3} = \frac{32}{(x+4)^3}\end{aligned}$$

Al evaluar cuando  $x = 4$ , se obtiene

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=4} = \frac{32}{8^3} = \frac{1}{16}$$

La segunda derivada evaluada en  $x = 4$ , se denota también como  $f''(4)$  o  $y''(4)$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21



#### EJEMPLO 4 Determinación de la razón de cambio de $f''(x)$

Si  $f(x) = x \ln x$ , encuentre la razón de cambio de  $f''(x)$ .

**Solución:** Para encontrar la razón de cambio de cualquier función, es necesario encontrar su derivada. Así, se quiere la derivada de  $f''(x)$ , que es  $f'''(x)$ . De acuerdo con esto,

$$\begin{aligned}f'(x) &= x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x \\ f''(x) &= 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \\ f'''(x) &= \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17



### Diferenciación implícita de orden superior

Ahora se encontrará una derivada de orden superior por medio de diferenciación implícita. Recuerde el supuesto de que  $y$  es una función de  $x$ .

#### EJEMPLO 5 Diferenciación implícita de orden superior

Encuentre  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , si  $x^2 + 4y^2 = 4$ .

**Solución:** Al diferenciar ambos lados con respecto a  $x$ , se obtiene

$$\begin{aligned}2x + 8y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-x}{4y} \quad (1) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{4y \frac{d}{dx}(-x) - (-x) \frac{d}{dx}(4y)}{(4y)^2} \\ &= \frac{4y(-1) - (-x)\left(4 \frac{dy}{dx}\right)}{16y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-4y + 4x \frac{dy}{dx}}{16y^2} \\
 \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-y + x \frac{dy}{dx}}{4y^2} \tag{2}
 \end{aligned}$$

Aunque se ha encontrado una expresión para  $d^2y/dx^2$ , la respuesta contiene la derivada  $dy/dx$ . Es costumbre expresar la respuesta sin la derivada, esto es, sólo en términos de  $x$  y de  $y$ . Lo cual se hace con facilidad. De la ecuación (1),  $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$ , por lo que al sustituir este valor en la ecuación (2), se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y + x \left( \frac{-x}{4y} \right)}{4y^2} = \frac{-4y^2 - x^2}{16y^3} = -\frac{4y^2 + x^2}{16y^3}$$

**En el ejemplo 5 no es rara la simplificación de  $d^2y/dx^2$  por medio del uso de la ecuación original.**

Esta respuesta puede simplificarse aún más. Como  $x^2 + 4y^2 = 4$  (ecuación original),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{16y^3} = -\frac{1}{4y^3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23 

### EJEMPLO 6 Diferenciación implícita de orden superior

Encuentre  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , si  $y^2 = e^{x+y}$ .

**Solución:** Al diferenciar ambos lados con respecto a  $x$  se obtiene

$$2y \frac{dy}{dx} = e^{x+y} \left( 1 + \frac{dy}{dx} \right)$$

Se despeja  $dy/dx$  y se obtiene

$$\begin{aligned}
 2y \frac{dy}{dx} &= e^{x+y} + e^{x+y} \frac{dy}{dx} \\
 2y \frac{dy}{dx} - e^{x+y} \frac{dy}{dx} &= e^{x+y} \\
 (2y - e^{x+y}) \frac{dy}{dx} &= e^{x+y} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{x+y}}{2y - e^{x+y}}
 \end{aligned}$$

Como  $y^2 = e^{x+y}$  (ecuación original),

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{y^2}{2y - y^2} = \frac{y}{2 - y} \\
 \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{(2-y)\frac{dy}{dx} - y \left( -\frac{dy}{dx} \right)}{(2-y)^2} = \frac{2\frac{dy}{dx}}{(2-y)^2}
 \end{aligned}$$

Ahora se expresará la respuesta sin  $dy/dx$ . Como  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2-y}$ ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \left( \frac{y}{2-y} \right)}{(2-y)^2} = \frac{2y}{(2-y)^3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31 

## Problemas 12.7

En los problemas 1 a 20, encuentre las derivadas indicadas.

\*1.  $y = 4x^3 - 12x^2 + 6x + 2, y'''$

2.  $y = x^5 - 2x^4 + 7x^2 - 2, y'''$

3.  $y = 8 - x, \frac{d^2y}{dx^2}$

\*5.  $y = x^3 + e^x, y^{(4)}$

7.  $f(x) = x^2 \ln x, f''(x)$

9.  $f(q) = \frac{1}{2q^4}, f'''(q)$

11.  $f(r) = \sqrt{9-r}, f''(r)$

13.  $y = \frac{1}{2x+3}, \frac{d^2y}{dx^2}$

15.  $y = \frac{x+1}{x-1}, y''$

\*17.  $y = \ln[x(x+6)], y''$

19.  $f(z) = z^2 e^z, f''(z)$

\*21. Si  $y = e^{2x} + e^{3x}$ , encuentre  $\frac{d^5y}{dx^5}\Big|_{x=0}$ .

22. Si  $y = e^{2\ln(x^3+1)}$ , encuentre  $y''$  cuando  $x = 1$ .

Encuentre  $y''$  en los problemas 23 a 32.

\*23.  $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$

24.  $x^2 - y^2 = 16$

25.  $y^2 = 4x$

26.  $9x^2 + 16y^2 = 25$

27.  $\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 4$

28.  $y^2 - 6xy = 4$

29.  $xy + y - x = 4$

\*31.  $y = e^{x+y}$

33. Si  $x^2 + 3x + y^2 = 4y$ , encuentre  $d^2y/dx^2$  cuando  $x = 0$  y  $y = 0$ .

34. Demuestre que la ecuación

$$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0$$

se satisface si  $f(x) = (3x - 5)e^{-2x}$ .

35. Encuentre la razón de cambio de  $f'(x)$  si  $f(x) = (5x - 3)^4$ .

36. Encuentre la razón de cambio de  $f''(x)$  si

$$f(x) = 6\sqrt{x} + \frac{1}{6\sqrt{x}}$$

37. **Costo marginal** Si  $c = 0.3q^2 + 2q + 850$  es una función de costo, ¿qué tan rápido cambia el costo marginal cuando  $q = 100$ ?

38. **Ingreso marginal** Si  $p = 400 - 40q - q^2$  es una ecuación de demanda, ¿qué tan rápido cambia el ingreso marginal cuando  $q = 4$ ?

39. Si  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x - 6$ , determine los valores de  $x$  para los que  $f''(x) = 0$ .

40. Suponga que  $e^y = y^2 e^x$ . (a) Determine  $dy/dx$  y exprese su respuesta sólo en términos de  $y$ . (b) Determine  $d^2y/dx^2$  y exprese su respuesta sólo en términos de  $y$ .

En los problemas 41 y 42 determine  $f''(x)$ . Luego use su calculadora graficadora para encontrar todos las raíces reales de  $f''(x)$ . Redondee sus respuestas a dos decimales.

41.  $f(x) = 6e^x - x^3 - 15x^2$

42.  $f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{12} + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$

## 12.8 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

<b>Sección 12.1</b>	<b>Derivadas de funciones logarítmicas</b>			
	derivada de $\ln x$ y de $\log_b u$			Ej. 5, p. 532
<b>Sección 12.2</b>	<b>Derivadas de funciones exponenciales</b>			
	derivada de $e^x$ y de $b^u$			Ej. 4, p. 536
<b>Sección 12.3</b>	<b>Elasticidad de la demanda</b>			
	elasticidad puntual de la demanda, $\eta$	elástica	elasticidad unitaria	inelástica
<b>Sección 12.4</b>	<b>Diferenciación implícita</b>			Ej. 2, p. 542
	función implícita			Ej. 1, p. 546
<b>Sección 12.5</b>	<b>Diferenciación logarítmica</b>			
	diferenciación logarítmica	razón relativa de cambio del ingreso		Ej. 3, p. 551
<b>Sección 12.6</b>	<b>Método de Newton</b>			
	fórmula recursiva, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$			Ej. 1, p. 554
<b>Sección 12.7</b>	<b>Derivadas de orden superior</b>			
	derivadas de orden superior, $f''(x), \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}[f(x)], \dots$			Ej. 1, p. 557

## Resumen

Las fórmulas para derivar logaritmos naturales y funciones exponenciales son

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

y

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

Para diferenciar funciones logarítmicas y exponenciales con base diferente a  $e$ , primero la función puede transformarse a base  $e$  y luego diferenciarse el resultado. De manera alternativa, pueden aplicarse las fórmulas de diferenciación:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\log_b u) &= \frac{1}{(\ln b)u} \cdot \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}(b^u) &= b^u(\ln b) \cdot \frac{du}{dx}\end{aligned}$$

La elasticidad puntual de la demanda es una función que mide cómo afecta un cambio en el precio a la demanda del consumidor. Está dada por

$$\eta = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp}$$

donde  $p$  es el precio por unidad en el que se demandan  $q$  unidades. Las tres categorías de elasticidad son las siguientes:

- $|\eta(p)| > 1$  la demanda es elástica
- $|\eta(p)| = 1$  elasticidad unitaria
- $|\eta(p)| < 1$  la demanda es inelástica

Para un cambio porcentual dado en el precio, si existe un cambio porcentual más grande (respectivamente más pequeño) en la cantidad demandada, entonces la demanda es elástica (respectivamente inelástica) y viceversa.

La relación entre la elasticidad y la razón de cambio del ingreso está dada por

$$\frac{dr}{dq} = p \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right)$$

## Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, para examen de práctica del capítulo.

En los problemas 1 a 30, diferencia las funciones dadas.

1.  $y = 3e^x + e^2 + e^{x^2} + x^{e^2}$
2.  $f(w) = we^w + w^2$
3.  $f(r) = \ln(3r^2 + 7r + 1)$
4.  $y = e^{\ln x}$
5.  $y = e^{x^2+4x+5}$
6.  $f(t) = \log_6 \sqrt{t^2 + 1}$
7.  $y = e^x(x^2 + 2)$
8.  $y = 3^{5x^3}$
9.  $y = \sqrt{(x - 6)(x + 5)(9 - x)}$
10.  $f(t) = e^{1/t}$
11.  $y = \frac{\ln x}{e^x}$
12.  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$
13.  $f(q) = \ln[(q + 1)^2(q + 2)^3]$
14.  $y = (x + 2)^3(x + 1)^4(x - 2)^2$
15.  $y = 2^{2x^2+2x-5}$

Si una ecuación define de manera implícita a  $y$  como función de  $x$  (en vez de definirla explícitamente, en la forma  $y = f(x)$ ), entonces  $dy/dx$  puede encontrarse por diferenciación implícita. Con este método, se trata a  $y$  como una función de  $x$ , y se diferencian ambos lados de la ecuación con respecto a  $x$ . Al hacer esto, recuerde que

$$\frac{d}{dx}(y^n) = ny^{n-1} \frac{dy}{dx}$$

y, de manera más general, que

$$\frac{d}{dx}(f(y)) = f'(y) \frac{dy}{dx}$$

Por último, se despeja  $dy/dx$  de la ecuación resultante.

Suponga que  $f(x)$  consiste en productos, cocientes o potencias. Para diferenciar  $y = \log_b(f(x))$ , puede ser conveniente usar las propiedades de los logaritmos para reescribir  $\log_b(f(x))$  en términos de logaritmos más sencillos y luego diferenciar esa forma. Para diferenciar  $y = f(x)$ , donde  $f(x)$  consiste en productos, cocientes o potencias, puede utilizarse el método de diferenciación logarítmica. En este método, se toma el logaritmo natural de ambos lados de  $y = f(x)$  para obtener  $\ln y = \ln(f(x))$ . Despues de simplificar  $\ln(f(x))$  por medio de las propiedades de los logaritmos, se diferencian ambos miembros de  $\ln y = \ln(f(x))$  con respecto a  $x$  y luego se despeja  $y'$ . Se utiliza también la diferenciación logarítmica para diferenciar  $y = u^v$ . Donde tanto  $u$  como  $v$  son funciones de  $x$ .

El método de Newton es el nombre dado a la fórmula siguiente, que se usa para aproximar las raíces de la ecuación  $f(x) = 0$ , siempre y cuando  $f$  sea diferenciable:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

En la mayoría de los casos se encontrará que la aproximación mejora conforme  $n$  se incrementa.

Como la derivada  $f'(x)$  de una función  $y = f(x)$  es a su vez una función, ésta puede diferenciarse de manera sucesiva para obtener la segunda derivada  $f''(x)$ , la tercera derivada  $f'''(x)$  y otras derivadas de orden superior.

16.  $y = (e + e^2)^0$

17.  $y = \frac{4e^{3x}}{xe^{x-1}}$

18.  $y = \frac{e^x}{\ln x}$

19.  $y = \log_2(8x + 5)^2$

20.  $y = \ln\left(\frac{5}{x^2}\right)$

21.  $f(l) = \ln(1 + l + l^2 + l^3)$

22.  $y = (x^2)^{x^2}$

23.  $y = (x + 1)^{x+1}$

24.  $y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$

25.  $\phi(t) = \ln(t\sqrt{4 - t^2})$

26.  $y = (x + 3)^{\ln x}$

27.  $y = \frac{(x^2 + 1)^{1/2}(x^2 + 2)^{1/3}}{(2x^3 + 6x)^{2/5}}$

28.  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

29.  $y = (x^x)^x$

30.  $y = x^{(x^x)}$

En los problemas 31 a 34, evalúe  $y'$  en el valor dado de  $x$ .

31.  $y = (x + 1) \ln x^2, x = 1$

32.  $y = \frac{e^{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}, x = 1$

33.  $y = e^{e+x \ln(1/x)}, x = e$

34.  $y = \left[ \frac{2^{5x}(x^2 - 3x + 5)^{1/3}}{(x^2 - 3x + 7)^3} \right]^{-1}, x = 0$

En los problemas 35 y 36, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado de  $x$ .

35.  $y = 3e^x, x = \ln 2$

36.  $y = x + x^2 \ln x, x = 1$

37. Encuentre la intersección con el eje  $y$  de la recta tangente a la gráfica de  $y = x(2^{2-x^2})$  en el punto en que  $x = 1$ .

38. Si  $w = 2^{x+1} + \ln(1 + x^2)$  y

$$x = \log_2(t^2 + 1) - e^{(t-1)^2}$$

encuentre  $w$  y  $dw/dt$  cuando  $t = 1$ .

En los problemas 39 a 42, encuentre la derivada indicada en el punto dado.

39.  $y = e^{x^2-2x+1}, y'', (1, 1)$

40.  $y = x^2 e^x, y''', (1, e)$

41.  $y = \ln(2x), y''', (1, \ln 2)$

42.  $y = x \ln x, y'', (1, 0)$

En los problemas 43 a 46, encuentre  $dy/dx$ .

43.  $2xy + y^2 = 10$

44.  $x^3 y^3 = 3$

45.  $\ln(xy^2) = xy$

46.  $y^2 e^{y \ln x} = e^2$

En los problemas 47 y 48 encuentre  $d^2y/dx^2$  en el punto dado.

47.  $x + xy + y = 5, (2, 1)$

48.  $xy + y^2 = 2, (-1, 2)$

49. Si  $y$  se define implícitamente por  $e^y = (y + 1)e^x$ , determine  $dy/dx$  y  $d^2y/dx^2$  sólo como funciones explícitas de  $y$ .

50. Si  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ , encuentre  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

51. **Esquizofrenia** Se han usado varios modelos para analizar el tiempo de hospitalización. Para un grupo particular de esquizofrénicos, un modelo es<sup>9</sup>

$$f(t) = 1 - (0.8e^{-0.01t} + 0.2e^{-0.0002t})$$

donde  $f(t)$  es la proporción del grupo que fue dado de alta al final de  $t$  días de hospitalización. Determine la razón de altas (proporción de altas por día) al término de  $t$  días.

52. **Sismos** De acuerdo con la escala de Richter,<sup>10</sup> el número de temblores de magnitud  $M$  o superiores por cada unidad de tiempo, está dado por  $\log N = A - bM$ , donde  $A$  y  $b$  son constantes. Él afirma que

$$\log\left(-\frac{dN}{dM}\right) = A + \log\left(\frac{b}{q}\right) - bM$$

donde  $q = \log e$ . Verifique esta afirmación.

53. Si  $f(x) = e^{3x^4+2x^3-25x}$ , encuentre todas las raíces reales de  $f'(x)$ . Redondee sus respuestas a dos decimales.

54. Si  $f(x) = \frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{6} + \frac{2x^3}{3} + x^2 + 1$ , encuentre todas las raíces reales de  $f''(x)$ . Redondee sus respuestas a dos decimales.

Para las ecuaciones de demanda en los problemas 55 a 57, determine si la demanda es elástica, inelástica o tiene elasticidad unitaria para el valor indicado de  $q$ .

55.  $p = \frac{500}{q}; q = 200$

56.  $p = 900 - q^2; q = 10$

57.  $p = 18 - 0.02q; q = 600$

58. La ecuación de demanda para un producto es

$$p = 20 - 2\sqrt{q}$$

(a) Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando  $p = 8$ .

(b) Encuentre todos los valores de  $p$  para los cuales la demanda es elástica.

<sup>9</sup>Adaptado de W. W. Eaton y G. A. Whitmore, "Length of Stay as a Stochastic Process: A General Approach and Application to Hospitalization for Schizophrenia", *Journal of Mathematical Sociology*, 5 (1977), 273-292.

<sup>10</sup>C. F. Richter, *Elementary Seismology* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, Publishers, 1958).

- 59.** La ecuación de la demanda de un producto es

$$q = \sqrt{2500 - p^2}$$

Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando  $p = 30$ . Si el precio de 30 disminuye  $\frac{2}{3}\%$ . ¿Cuál es el cambio aproximado en la demanda?

- 60.** La ecuación de la demanda de un producto es

$$q = \sqrt{100 - p}, \text{ donde } 0 < p < 100$$

- (a) Encuentre todos los precios que corresponden a la demanda elástica.  
 (b) Calcule la elasticidad puntual de la demanda cuando  $p = 40$ . Use su respuesta para estimar el aumento o la

disminución porcentual de la demanda cuando el precio aumenta 5% hasta  $p = 42$ .

- 61.** La ecuación  $x^3 - 2x - 2 = 0$  tiene una raíz entre 1 y 2. Use el método de Newton para estimar la raíz. Continúe con el procedimiento de aproximación hasta que la diferencia de dos aproximaciones sucesivas sea menor a 0.0001. Redondee su respuesta a cuatro decimales.
- 62.** Encuentre, con una precisión de tres decimales, todas las soluciones reales a la ecuación  $e^x = 3x$ .

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Cantidad económica de pedido

**E**n administración de inventarios, la cantidad económica de pedido es el tamaño más eficiente, en términos de costo, para abastecer nuevamente los pedidos. A fin de determinar este tamaño óptimo, es necesario tener una idea de cómo evolucionan las disminuciones y el reabastecimiento, y cuál es el costo resultante.



A continuación se enlistan los supuestos más representativos:

1. El inventario disminuye debido a las compras, a una tasa constante  $D$ , que se mide en unidades por año.
2. Todos los pedidos de reabastecimiento son del mismo tamaño, y cada uno llega en un envío, justo en la misma medida en que salen las existencias.
3. Además de los costos por artículo, cada pedido también incluye un costo fijo por orden,  $F$ .
4. Cada unidad en existencias tiene un valor constante,  $V$ , medido en dólares.
5. El costo de almacenar el inventario es una fracción fija,  $R$ , del valor total actual del inventario. Este factor de costo de inventario se mide en dólares por dólar por año.

Los supuestos 1 y 2 dan origen a una gráfica del inventario con respecto al tiempo como la que se observa en la figura 12.10.

Ahora, se desea minimizar el costo, en dólares por año, de administrar el inventario que se muestra en la figura 12.10. Si el reabastecimiento se pide en lotes de  $q$  unidades cada uno, entonces existen  $\frac{D}{q}$  pedidos por año, para un costo por pedidos anual de  $\frac{FD}{q}$ . (El gasto anual debido al costo por artículo, no puede ajustarse por el cambio del tamaño del pedido, de modo que este costo no se toma en cuenta en los cálculos que se presentan aquí.) Con un nivel de inventario promedio

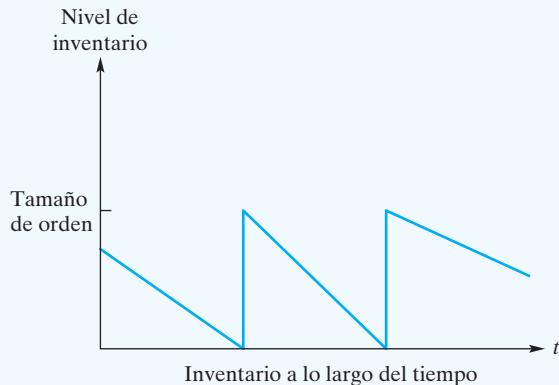


FIGURA 12.10 Inventario a lo largo del tiempo.

de  $\frac{q}{2}$ , el costo de inventario anual es  $\frac{RVq}{2}$ . Entonces, el costo anual relacionado con el inventario,  $C$ , es la suma del costo de los pedidos y el costo de acarreo:

$$C = C(q) = \frac{FD}{q} + \frac{RVq}{2}$$

Resulta claro que esta función  $C$  crece, tanto cuando  $q$  aumenta como cuando  $q$  se aproxima a cero. A partir de argumentos que se estudiarán a detalle en el capítulo siguiente, se deduce que existe un único valor de  $q$  donde  $\frac{dC}{dq}$  es igual a cero, éste valor de  $q$  proporcionará un valor mínimo de  $C$ . A continuación de encontrarás esta  $q$ .

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dq} &= \frac{-FD}{q^2} + \frac{RV}{2} = 0 \\ q^2 &= \frac{2FD}{RV} \\ q &= \sqrt{\frac{2FD}{RV}}\end{aligned}$$

Esta ecuación se llama la fórmula del tamaño de lote de Wilson, en honor de un consultor industrial que popularizó su uso. Si se sustituye  $F = \$10$  por orden,  $D = 1500$  unidades por año,  $R = \$0.10$  dólares por dólar por año y  $V = \$10$ , entonces  $q$  resulta ser

$$q = \sqrt{\frac{2(10)(1500)}{(0.10)(10)}} \approx 173.2$$

El tamaño de pedido más eficiente en costo es de 173 unidades.

Las variaciones de la fórmula de Wilson hacen más flexibles uno o más de los cinco supuestos en los que se basa. Un supuesto que puede minimizarse es el número 5. Suponga que el costo de inventario como un porcentaje de su valor se eleva cuando el inventario es bajo. (Piense en un gran almacén que se queda casi vacío). Para dar un ejemplo de esto se reemplazará  $R$  con  $R(1 + ke^{-sq})$ .  $R$  es el costo de inventario anual por dólar para niveles de inventario grandes, y el término  $ke^{-sq}$  ( $k, s > 0$ ) eleva el costo para niveles bajos. El costo anual total del costo del inventario ahora se convierte en

$$C = \frac{FD}{q} + \frac{RVq(1 + ke^{-sq})}{2}$$

De nuevo, se desea minimizar esta cantidad, y otra vez  $C$  aumenta cuando  $q$  crece y cuando  $q$  se approxima a cero. El mínimo es donde

$$\frac{dC}{dq} = \frac{-FD}{q^2} + \frac{RV(1 + ke^{-sq} - ksqe^{-sq})}{2} = 0$$

Suponga que  $k = 1, s = \frac{\ln 2}{1000} \approx 0.000693$ . Entonces el costo de inventario por dólar es el doble para un inventario pequeño que para uno grande, y se encuentra en medio de los dos costos en un nivel de inventario de 1000. Si se conserva  $F, D, R$  y  $V$ , igual que antes, y se utiliza una calculadora gra-

ficadora u otra técnica de solución numérica, se encuentra que  $\frac{dC}{dq} = 0$  cuando  $q \approx 127.9$ . El tamaño óptimo de pedido es de 128 unidades. Observe que aunque los supuestos ahora incluyen economías de escala, el costo de inventario es mayor en todos los niveles de inventario y ha conducido a una cantidad económica de pedido más pequeña.

### Problemas

1. Utilice la fórmula de Wilson de tamaño de lote para calcular la cantidad económica de pedido para un artículo que tiene un valor de \$36.50, cuesta 5% de su valor almacenarlo por año, se vende a razón de 3400 unidades por año y se le compra a un proveedor que cobra \$25 por procesar cada pedido.
2. Suponga que los supuestos 1, 3, 4 y 5 se mantienen, pero el 2 se modifica: un administrador nunca permite que un inventario caiga al nivel cero, en lugar de eso mantiene un margen de seguridad de cierto número de unidades. ¿Qué diferencia produce esto en los cálculos de la cantidad económica de pedido?
3. ¿Qué otros supuestos, además del 2 y 5, podrían minimizarse de manera realista? Explique su respuesta.

# 13

## TRAZADO DE CURVAS

- 13.1 Extremos relativos
- 13.2 Extremos absolutos en un intervalo cerrado
- 13.3 Concavidad
- 13.4 Prueba de la segunda derivada
- 13.5 Asintotas
- 13.6 Aplicación de máximos y mínimos
- 13.7 Repaso

### Aplicación práctica

Cambio de la población a lo largo del tiempo

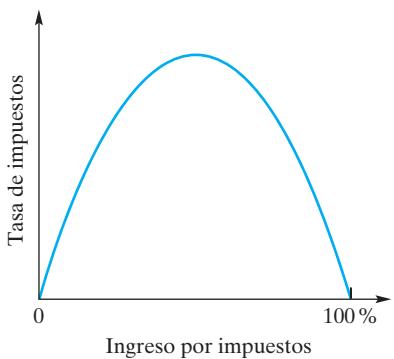
**A**mediados de la década de 1970, el economista Arthur Laffer explicaba su visión de los impuestos a un político que, según la versión que se escoja, era Ronald Reagan, futuro aspirante a la presidencia, o bien Richard Cheney miembro del equipo de Ford (luego vicepresidente bajo el régimen de George W. Bush). Para ilustrar su argumento, Laffer tomó una servilleta e hizo un bosquejo de la gráfica que ahora lleva su nombre: curva de Laffer.<sup>1</sup>

La curva de Laffer describe el ingreso total del gobierno debido a los impuestos como una función de la tasa de impuestos. Es obvio que si la tasa de impuestos es cero, el gobierno no obtiene ingresos; pero si la tasa de impuestos es 100%, el ingreso sería también igual a cero, ya que no hay incentivo para generar dinero si todo se esfuma. Puesto que una tasa entre 0 y 100% debe generar ingresos, según el razonamiento de Laffer, la curva que relaciona los ingresos con los impuestos debe verse, en forma cualitativa, más o menos como la que se muestra en la figura al final de esta página.

El argumento de Laffer no pretendía mostrar que la tasa óptima de impuestos fuese 50%. Lo que quería mostrar era que bajo ciertas circunstancias, a saber, cuando la tasa de impuestos está a la derecha del máximo de la curva, es posible *aumentar el ingreso del gobierno bajando los impuestos*. Éste fue un argumento clave para la reducción de impuestos aprobada por el Congreso durante el primer periodo de la presidencia de Reagan.

A consecuencia de que la curva de Laffer sólo es un dibujo cualitativo, en realidad no proporciona una tasa de impuestos óptima. Los argumentos que se basan en los ingresos para reducir los impuestos incluyen la hipótesis de que el punto del máximo de ingresos está a la izquierda, en el eje horizontal, del esquema de impuestos actual. De la misma manera, quienes abogan por una elevación en los impuestos para aumentar los ingresos del gobierno suponen que, o bien existe una relación diferente entre impuestos e ingresos, o bien una localización diferente en el máximo de la curva.

Entonces, la curva de Laffer es por sí misma demasiado abstracta para ayudar en la determinación de la tasa óptima de impuestos. Sin embargo, incluso un bosquejo muy simple de curvas, como las curvas de oferta y demanda y la curva de Laffer, pueden ayudar a los economistas a describir los factores causales que dirigen una economía. En este capítulo, se estudiarán técnicas para el trazado e interpretación de curvas.



<sup>1</sup>Para una de las versiones de esta historia, vea Jude Wanniski, *The Way the World Works*, 3a. ed. (Morristown, NJ: Polyconomics, 1989), p. 299.

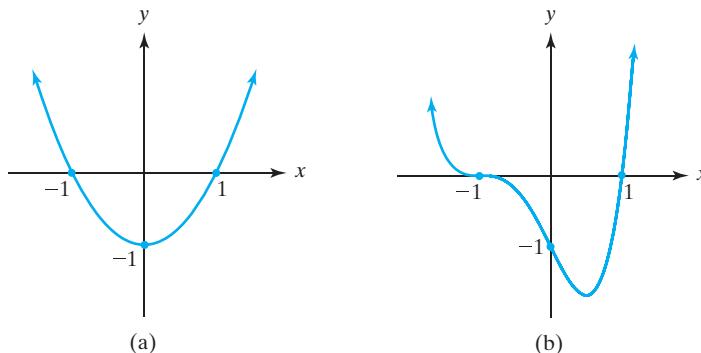
**OBJETIVO**

Encontrar cuándo una función es creciente o decreciente, determinar los valores críticos, localizar máximos y mínimos relativos y establecer la prueba de la primera derivada. También, hacer el bosquejo de la gráfica de una función por medio del uso de la información obtenida de la primera derivada.

## 13.1 Extremos relativos

### Naturaleza creciente o decreciente de una función

El análisis del comportamiento gráfico de las ecuaciones es una parte básica de las matemáticas y tiene aplicaciones en muchas áreas de estudio. Cuando se hace el bosquejo de una curva, si sólo se colocan puntos quizás no se obtenga información suficiente acerca de su forma. Por ejemplo, los puntos  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$  y  $(1, 0)$  satisfacen la función dada por  $y = (x + 1)^3(x - 1)$ . Con base en estos puntos, podría concluirse a la ligera que la gráfica debe tener la forma que se muestra en la figura 13.1(a), pero de hecho, la forma verdadera es la que se ilustra en la figura 13.1(b). En este capítulo se explorará la gran utilidad de la diferenciación en el análisis de una función, de manera que se pueda determinar su forma verdadera y el comportamiento de su gráfica.



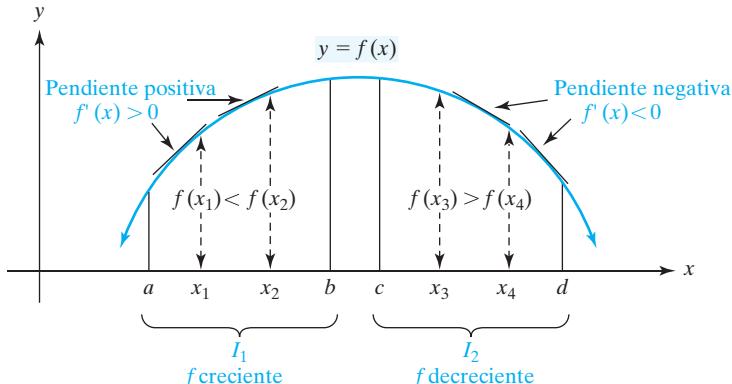
**FIGURA 13.1** Curvas que pasan por los puntos  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$  y  $(1, 0)$ .

Se comenzará por analizar la gráfica de la función  $y = f(x)$  de la figura 13.2. Observe que conforme  $x$  aumenta (de izquierda a derecha) en el intervalo  $I_1$ , entre  $a$  y  $b$ , los valores de  $f(x)$  también aumentan y la curva asciende. En forma matemática, esta observación significa que si  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos cualesquiera en  $I_1$ , tales que  $x_1 < x_2$ , entonces  $f(x_1) < f(x_2)$ . Se dice que  $f$  es una *función creciente* en  $I_1$ . Por otra parte, conforme  $x$  aumenta en el intervalo  $I_2$ , entre  $c$  y  $d$ , la curva desciende. En este intervalo,  $x_3 < x_4$  implica que  $f(x_3) > f(x_4)$  y se dice que  $f$  es una *función decreciente* en  $I_2$ . Estas observaciones se resumen en la definición siguiente.

### DEFINICIÓN

Se dice que una función  $f$  es **creciente** en el intervalo  $I$  cuando, para cualesquier dos números  $x_1, x_2$ , en  $I$ , si  $x_1 < x_2$ , entonces  $f(x_1) < f(x_2)$ . Una función  $f$  es **decreciente** en el intervalo  $I$  cuando, para cualesquier dos números  $x_1, x_2$  en  $I$ , si  $x_1 < x_2$ , entonces  $f(x_1) > f(x_2)$ .

En términos de la gráfica de la función,  $f$  es creciente en  $I$  si la curva se eleva hacia la derecha y  $f$  es decreciente en  $I$  si la curva cae hacia la derecha. Recuerde que una



**FIGURA 13.2** Formas creciente y decreciente de una función.

línea recta con pendiente positiva se eleva hacia la derecha y una recta con pendiente negativa cae hacia la derecha.

De vuelta a la figura 13.2, se nota que en el intervalo  $I_1$ , las rectas tangentes a la curva tienen pendientes positivas, por lo que  $f'(x)$  debe ser positiva para toda  $x$  en  $I_1$ . Una derivada positiva implica que la curva se eleva. En el intervalo  $I_2$ , las rectas tangentes tienen pendientes negativas, por lo que  $f'(x) < 0$ , para toda  $x$  en  $I_2$ . La curva desciende donde la derivada es negativa. Así, se tiene la siguiente regla que permite usar la derivada para determinar cuándo una función es creciente o decreciente:

### REGLA 1 Criterios para funciones crecientes o decrecientes

Sea  $f$  diferenciable en el intervalo  $(a, b)$ . Si  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es creciente en  $(a, b)$ . Si  $f'(x) < 0$ , para toda  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es decreciente en  $(a, b)$ .

Para ilustrar estas ideas, se usará la regla 1 para determinar los intervalos en que  $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$  es creciente o decreciente. Sea  $y = f(x)$ , debe determinarse cuándo  $f'(x)$  es positiva y cuándo es negativa. Se tiene

$$f'(x) = 18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 + x)(3 - x)$$

Si se emplea la técnica de la sección 10.4, es posible encontrar el signo de  $f'(x)$  probando los intervalos determinados por las raíces de  $2(3 + x)(3 - x) = 0$ , esto es, 3 y  $-3$ . Estos valores deben disponerse en orden creciente en la parte superior de un diagrama de signos para  $f'$  de manera que se divida el dominio en 3 intervalos. (Vea la figura 13.3.) En cada intervalo, el signo de  $f'(x)$  está determinado por los signos de sus factores:

		−3		3	
$3 + x$	−	0	+		+
$3 - x$	+		+	0	−
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$					

FIGURA 13.3 Diagrama de signos para  $f'(x) = 18 - 9x^2$  y su interpretación para  $f(x)$ .

Si  $x < -3$ , entonces el signo  $(f'(x)) = 2(-)(+) = -$ , por lo que  $f$  es *decreciente*.

Si  $-3 < x < 3$ , entonces el signo  $(f'(x)) = 2(+)(+) = +$ , por lo que  $f$  es *creciente*.

Si  $x > 3$ , entonces el signo  $(f'(x)) = 2(+)(-) = -$ , por lo que  $f$  es *decreciente*.

Se indican estos resultados en el diagrama de signos que se da en la figura 13.3, donde la línea inferior es una versión esquemática de lo que dicen los signos de  $f'$  acerca de  $f$ . Observe que los segmentos de recta horizontal en el renglón inferior indican tangentes horizontales para  $f$  en  $-3$  y en  $3$ . Así,  $f$  es decreciente en  $(-\infty, -3)$  y  $(3, \infty)$  y es creciente en  $(-3, 3)$ . Esto corresponde a la naturaleza creciente y decreciente de la gráfica de  $f$  mostrada en la figura 13.4. De hecho, la utilidad de un diagrama de signos bien construido consiste en proporcionar un esquema para la construcción subsiguiente de la gráfica de una función.

### Extremos

Ahora vea la gráfica de  $y = f(x)$  en la figura 13.5. Pueden hacerse algunas observaciones. Primero, hay algo especial con respecto a los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . Observe que  $P$  está *más alto* que cualquier otro punto “cercano” sobre la curva, lo mismo puede decirse para  $R$ . El punto  $Q$  está *más bajo* que cualquier otro punto “cercano” sobre la curva. Como  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , pueden no ser necesariamente los puntos más altos o más bajos en *toda* la curva, se dice que la gráfica de  $f$  tiene un *máximo relativo en  $a$*  y en  $c$ ; y tiene un *mínimo relativo en  $b$* .

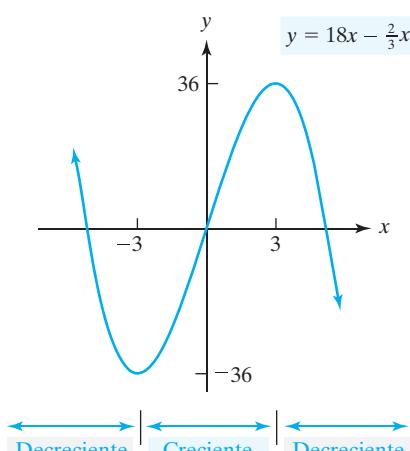


FIGURA 13.4 Creciente/decreciente para  $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$ .

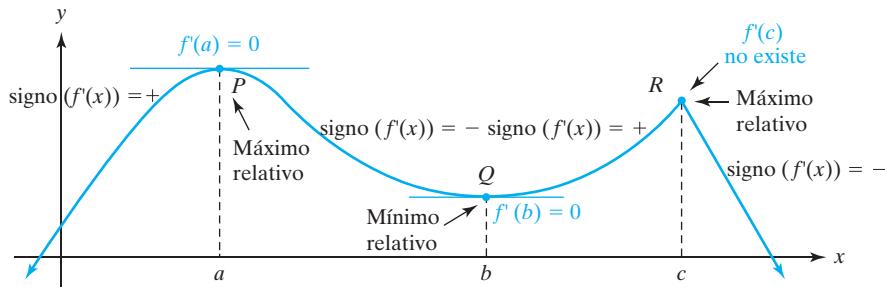


FIGURA 13.5 Máximos y mínimos relativos.

**ADVERTENCIA**

Asegúrese de observar la diferencia entre los valores extremos relativos y el lugar donde ocurren.

mo relativo en  $b$ . La función  $f$  tiene valores máximos relativos de  $f(a)$  en  $a$  y  $f(c)$  en  $c$ ; y tiene un valor mínimo relativo de  $f(b)$  en  $b$ . También se dice que  $(a, f(a))$  y  $(c, f(c))$  son puntos máximos relativos y  $(b, f(b))$  es un punto mínimo relativo en la gráfica de  $f$ .

De regreso a la gráfica, se observa que hay un *máximo absoluto* (el punto más alto en toda la curva) en  $a$ , pero no hay un *mínimo absoluto* (el punto más bajo en toda la curva) porque se supone que la curva se prolonga de indefinidamente hacia abajo. De manera más precisa, estos nuevos términos se definen así:

**DEFINICIÓN**

Una función  $f$  tiene un **máximo relativo** en  $a$  si existe un intervalo abierto que contenga a  $a$  sobre el cual  $f(a) \geq f(x)$  para toda  $x$  en el intervalo. El valor máximo relativo es  $f(a)$ . Una función  $f$  tiene un **mínimo relativo** en  $a$  si existe un intervalo abierto que contenga a  $a$  sobre el cual  $f(a) \leq f(x)$ , para toda  $x$  en el intervalo. El valor mínimo relativo es  $f(a)$ .

**DEFINICIÓN**

Una función  $f$  tiene un **máximo absoluto** en  $a$  si  $f(a) \geq f(x)$  para toda  $x$  en el dominio de  $f$ . El máximo absoluto es  $f(a)$ . Una función  $f$  tiene un **mínimo absoluto** en  $a$ , si  $f(a) \leq f(x)$ , para toda  $x$  en el dominio de  $f$ . El mínimo absoluto es  $f(a)$ .

Si existe un **máximo absoluto**, éste es único; sin embargo, puede ocurrir para más de un valor de  $x$ . Una proposición similar es cierta para un **mínimo absoluto**.

Cuando se haga referencia a un máximo o un mínimo relativo se le llamará **extremo relativo**. De manera análoga, se hace alusión a los **extremos absolutos**.

Al tratar con extremos relativos, se compara el valor de la función en un punto, con el valor en puntos cercanos; sin embargo, al tratar con extremos absolutos, se compara el valor de la función en un punto con todos los otros valores determinados por el dominio. Así, los extremos relativos son *locales* por naturaleza, mientras que los extremos absolutos son *globales*.

Con referencia a la figura 13.5, se nota que en un extremo relativo la derivada puede no estar definida (por ejemplo, cuando  $x = c$ ). Pero siempre que esté definida en un extremo relativo, es igual a 0 (por ejemplo, en  $x = a$  y en  $x = b$ ), por lo que la recta tangente es horizontal. Se puede establecer lo siguiente:

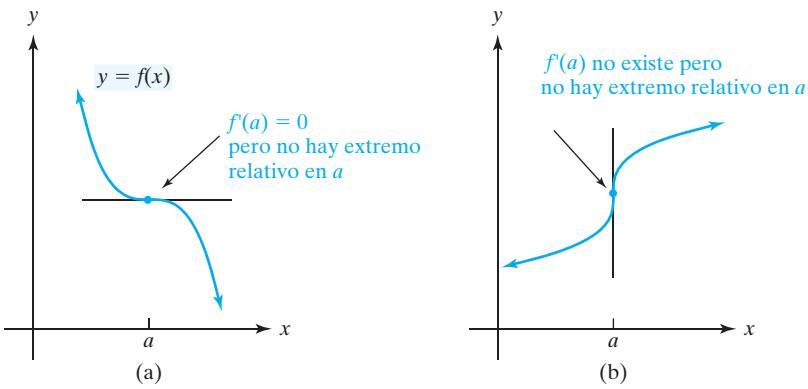
**REGLA 2 Una condición necesaria para extremos relativos**

Si  $f$  tiene un extremo relativo en  $a$ , entonces  $f'(a) = 0$  o bien  $f'(a)$  no existe.

La implicación de la regla 2 sólo es en una dirección:

$$\left. \begin{array}{l} \text{extremo relativo} \\ \text{en } a \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} f'(a) = 0 \\ \text{o} \\ f'(a) \text{ no existe} \end{array} \right.$$

La regla 2 *no* dice que si  $f'(a) = 0$  o  $f'(a)$  no existe, entonces debe existir un extremo relativo en  $a$ . De hecho, puede que no exista ninguno. Por ejemplo, en la figura 13.6(a),  $f'(a) = 0$  porque la recta tangente es horizontal en  $a$ , pero no se tiene un extremo re-

FIGURA 13.6 No hay extremo relativo en  $a$ .

lativo ahí. En la figura 13.6(b),  $f'(a)$  no existe porque la recta tangente es vertical en  $a$ , pero de nuevo no se tiene un extremo relativo ahí.

Pero si se desea encontrar todos los extremos relativos de una función —y ésta es una tarea importante— lo que la regla 2 sí dice es que la búsqueda puede limitarse a aquellos valores de  $x$  en el dominio de  $f$  para los cuales  $f'(x) = 0$  o bien  $f'(x)$  no existe. En forma típica, lo anterior reduce la búsqueda de extremos relativos desde el número infinito de  $x$  para las cuales  $f$  está definida hasta un pequeño número finito de *posibilidades*. Como estos valores de  $x$  son tan importantes para la localización de los extremos relativos de  $f$ , se llaman *valores críticos* para  $f$ , y si  $a$  es un valor crítico para  $f$  también puede decirse que  $(a, f(a))$  es un *punto crítico* sobre la gráfica de  $f$ . Así, en la figura 13.5, los números  $a$ ,  $b$  y  $c$  son valores críticos y  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , son puntos críticos.

### DEFINICIÓN

Para una  $a$  en el dominio de  $f$ , si  $f'(a) = 0$  o bien  $f'(a)$  no existe, entonces  $a$  se denomina un **valor crítico** para  $f$ . Si  $a$  es un valor crítico, entonces el punto  $(a, f(a))$  se denomina un **punto crítico** para  $f$ .

En un punto crítico, puede haber un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de éstos. Además, de la figura 13.5 se observa que cada extremo relativo ocurre en un punto alrededor del cual el signo de  $f'(x)$  cambia. Para el máximo relativo en  $a$ ,  $f'(x)$  va de  $+$  para  $x < a$  a  $-$  para  $x > a$ , en tanto  $x$  esté cerca de  $a$ . Para el mínimo relativo en  $b$ , va de  $-$  a  $+$ , y para el máximo relativo en  $c$  va nuevamente de  $+$  a  $-$ . Entonces, *alrededor de máximos relativos, f es creciente y luego decreciente y, para los mínimos relativos, es cierta la proposición inversa*. Para precisar, se tiene la regla siguiente:

### REGLA 3 Criterios para extremos relativos

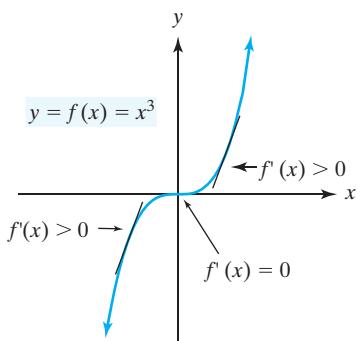
Suponga que  $f$  es continua en un intervalo abierto  $I$  que contiene el valor crítico  $a$  y  $f$  es diferenciable en  $I$  excepto posiblemente en  $a$ .

- Si  $f'(x)$  cambia de positiva a negativa cuando  $x$  crece al pasar por  $a$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $a$ .
- Si  $f'(x)$  cambia de negativa a positiva cuando  $x$  crece al pasar por  $a$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $a$ .

Para ilustrar la regla 3 con un ejemplo concreto, vea de nuevo la figura 13.3, el diagrama de signos para  $f'(x) = 18 - 2x^2$ . El renglón marcado por  $f'(x)$  muestra claramente que  $f(x) = 18x - \frac{2}{3}x^3$  tiene un mínimo relativo en  $-3$  y un máximo relativo en  $3$ . El renglón que proporciona la interpretación de la gráfica para  $f$ , marcado  $f(x)$ , se deduce inmediatamente a partir del renglón que está arriba de él. La importancia del renglón de  $f(x)$  es que proporciona un paso intermedio en el trazado real de la gráfica

**ADVERTENCIA**

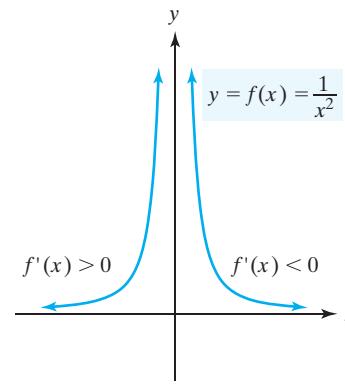
Se hace énfasis de nuevo en que no a todo valor crítico le corresponde un extremo relativo. Por ejemplo, si  $y = f(x) = x^3$ , entonces  $f'(x) = 3x^2$ . Como  $f'(0) = 0$ , 0 es un valor crítico. Pero si  $x < 0$ , entonces  $3x^2 > 0$  y si  $x > 0$ , entonces  $3x^2 > 0$ . Como  $f'(x)$  no cambia de signo en 0, no existe un máximo relativo ni un mínimo relativo. De hecho, como  $0 \geq 0$  para toda  $x$ , la gráfica de  $f$  no desciende nunca y se dice que  $f$  es *no decreciente* (vea la figura 13.8).



**FIGURA 13.8** Cero es un valor crítico, pero no proporciona un extremo relativo.

$\frac{1}{x^3}$	-	+
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

(a)



(b)

**FIGURA 13.7**  $f'(0)$  no está definida, pero 0 no es un valor crítico porque 0 no está en el dominio de  $f$ .

de  $f$ . En este renglón se establece, de manera visual, que  $f$  tiene un mínimo relativo en  $-3$  y un máximo relativo en  $3$ .

Cuando se buscan los extremos de una función  $f$ , debe tenerse cuidado con las  $a$  que no están en el dominio de  $f$ , pero que tienen valores cercanos en el dominio de  $f$ . Consideré el siguiente ejemplo. Si

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{entonces} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

Aunque  $f'(x)$  no existe en  $0, 0$  no es un valor crítico porque no está en el dominio de  $f$ . Así, no puede ocurrir un extremo relativo en 0. Sin embargo, la derivada puede cambiar de signo alrededor de cualquier valor de  $x$ , en que  $f'(x)$  no esté definida, por lo que tales valores son importantes en la determinación de los intervalos sobre los que  $f$  es creciente o decreciente. En particular, dichos valores deben incluirse en un diagrama de signos para  $f'$ . Vea la figura 13.7(a) y la gráfica anexa 13.7(b).

Observe que la gruesa barra vertical en el 0 del diagrama sirve para indicar que 0 no está en el dominio de  $f$ . Aquí no existen extremos de ningún tipo.

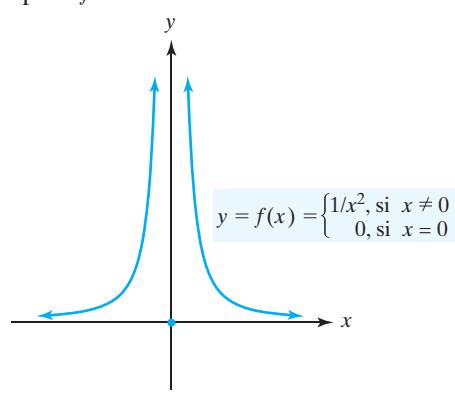
En la regla 3, debe satisfacerse la hipótesis o la conclusión no es necesariamente válida. Por ejemplo, considere el caso de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Aquí, 0 está explícitamente en el dominio de  $f$  pero  $f$  no es continua en 0. En la sección 11.1 se vio que si una función  $f$  no es continua en  $a$ , entonces  $f$  no es diferenciable en  $a$ , lo que significa que  $f'(a)$  no existe. Así,  $f'(0)$  no existe y 0 es un valor crítico que debe incluirse en el diagrama de signos para  $f'$  que se muestra en la figura 13.9(a). Se extienden las convenciones del diagrama de signos al indicar con un símbolo  $\times$  aquellos valores para los cuales  $f'$  no existe. Se ve en este ejemplo que  $f'(x)$  cambia de positiva a negativa cuando  $x$  aumenta al pasar por 0 pero  $f$  no tiene un máximo relativo en 0.

$\frac{1}{x^3}$	-	$\times$	+
$f'(x)$	+	$\times$	-
$f(x)$	↗	•	↘

(a)



(b)

**FIGURA 13.9** El 0 es un valor crítico pero la regla 3 no es aplicable.

Aquí la regla 3 no es aplicable porque su hipótesis de continuidad no está satisfecha. En la figura 13.9(b), 0 se representa en el dominio de  $f$ . Resulta claro que  $f$  es un *mínimo* absoluto en 0 porque  $f(0) = 0$  y, para toda  $x \neq 0$ ,  $f(x) > 0$ .

Para resumir los resultados de esta sección: se tiene la prueba de la primera derivada para los extremos relativos de  $y = f(x)$ :

### Prueba de la primera derivada para los extremos relativos

**Paso 1.** Encontrar  $f'(x)$ .

**Paso 2.** Determinar todos los valores críticos de  $f$  (aquellas  $a$  donde  $f'(a) = 0$  o  $f'(a)$  no existe) y cualquier  $a$  que no esté en el dominio de  $f$  pero que tenga valores cercanos en el dominio de  $f$ , y construir un diagrama de signos que muestre para cada uno de los intervalos determinados por estos valores, si  $f$  es creciente ( $f'(x) > 0$ ) o decreciente ( $f'(x) < 0$ ).

**Paso 3.** Para cada valor crítico  $a$  en que  $f$  es continua, determinar si  $f'(x)$  cambia de signo cuando  $x$  crece al pasar por  $a$ . Habrá un máximo relativo en  $a$  si  $f'(x)$  cambia de  $+ \rightarrow -$ , al ir de izquierda a derecha, y habrá un mínimo relativo si  $f'(x)$  cambia de  $- \rightarrow +$  al ir de izquierda a derecha. Si  $f'(x)$  no cambia de signo, no habrá un extremo relativo en  $a$ .

**Paso 4.** Para los valores críticos  $a$  en los cuales  $f$  no es continua, analizar la situación y usar directamente las definiciones de los extremos.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA

La ecuación de costo para un puesto de hot dogs está dado por  $c(q) = 2q^3 - 21q^2 + 60q + 500$ , donde  $q$  es el número de hot dogs vendidos, y  $c(q)$  es el costo en dólares. Utilice la prueba de la primera derivada para determinar dónde ocurren los extremos relativos.

#### EJEMPLO 1 Prueba de la primera derivada

Si  $y = f(x) = x + \frac{4}{x+1}$ , utilice la prueba de la primera derivada para encontrar dónde se presentan los extremos relativos.

**Solución:**

**Paso 1.**  $f(x) = x + 4(x+1)^{-1}$ , por lo que

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 + 4(-1)(x+1)^{-2} = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} \\&= \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} \\&= \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2} \quad \text{para } x \neq -1\end{aligned}$$

Note que se expresó  $f'(x)$  como un cociente en el que el numerador y el denominador se han factorizado. Esto permite determinar con facilidad en el paso 2 dónde  $f'(x)$  es 0 o no existe, así como los signos de  $f'$ .

**Paso 2.** Se establece  $f'(x) = 0$ , resulta  $x = -3, 1$ . El denominador de  $f'(x)$  es 0 cuando  $x$  es  $-1$ . Se observa que  $-1$  no está en el dominio de  $f$ , pero todos los valores cercanos a  $-1$  están en el dominio de  $f$ . Se elabora un diagrama de signos, encabezado por los valores  $-3, -1$  y  $1$  (que se han colocado en orden creciente). Vea la figura 13.10.

Los tres valores conducen a probar cuatro intervalos como se muestra en el diagrama de signos. En cada uno de esos intervalos,  $f$  es diferenciable y no es cero. Se determina el signo de  $f'$  en cada intervalo al determinar primero el signo de cada uno de sus factores en cada intervalo. Por ejemplo, al considerar primero el intervalo  $(-\infty, -3)$ , no es fácil ver inmediatamente que  $f'(x) > 0$  ahí; pero es fácil ver que  $x+3 < 0$  para  $x < -3$ , mientras que  $(x+1)^{-2} > 0$  para toda  $x \neq -1$ , y  $x-1 < 0$  para  $x < 1$ . Estas observaciones son útiles para los signos de los factores en la columna  $(-\infty, -3)$  del diagrama. El signo de  $f'(x)$  en esa columna se obtiene al “multiplicar signos” (hacia abajo):  $(-)(+)(-) = +$ . Se repiten estas consideraciones para los otros tres intervalos. Observe que la gruesa barra vertical en el  $-1$  del diagrama indica que  $-1$  no está en el dominio de  $f$  y por ende no puede dar lugar a ningún extremo.

	-3	-1	1
$x + 3$	-	0	+
$(x + 1)^{-2}$	+	+	+
$x - 1$	-	-	0
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

FIGURA 13.10 Diagrama de signos para  $f'(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$ .

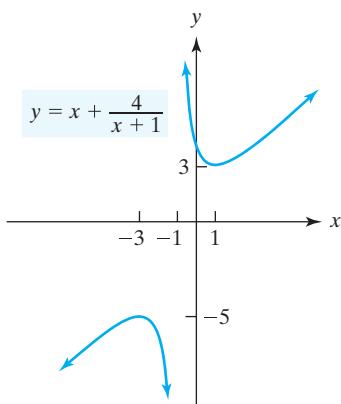


FIGURA 13.11 Gráfica de  $y = x + \frac{4}{x+1}$ .

	0
$(x)^{-1/3}$	-
$f'(x)$	-
$f(x)$	

FIGURA 13.12 Diagrama de signos para  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ .

En el renglón inferior del diagrama de signos se registra, de manera gráfica, la naturaleza de las líneas tangentes a  $f(x)$  en cada intervalo y en los valores donde  $f'$  es 0.

**Paso 3.** Tan sólo por el diagrama de signos, se concluye que en  $-3$ , se tiene un máximo relativo (puesto que  $f'(x)$  cambia de  $+$  a  $-$  en  $-3$ ). Además del diagrama, se calcula  $f(-3) = -3 + (4/-2) = -5$  y esto da el valor máximo relativo de  $-5$  en  $-3$ . También se concluye del diagrama que se tiene un mínimo relativo en  $1$  (porque  $f'(x)$  cambia de  $-$  a  $+$  en  $1$ ). De  $f(1) = 1 + 4/2 = 3$  se ve que en  $1$  el valor mínimo relativo es  $3$ .

**Paso 4.** No existen valores críticos en los puntos donde  $f$  no es continua, por lo que las consideraciones anteriores proporcionan la visión completa de los extremos relativos de  $f(x)$ , cuya gráfica se da en la figura 13.11. Observe que la forma general de la gráfica, de hecho, fue pronosticada por el renglón inferior del diagrama de signos (figura 13.10).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37



### EJEMPLO 2 Un extremo relativo donde $f'(x)$ no existe

Probar  $y = f(x) = x^{2/3}$  para los extremos relativos.

**Solución:** Se tiene

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2}{3}x^{-1/3} \\&= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\end{aligned}$$

y el diagrama de signos requiere muy pocos comentarios, excepto hacer notar que de nuevo se usa el símbolo  $\times$  en la línea vertical de  $0$  para indicar que  $f'(0)$  no existe. Como  $f$  es continua en  $0$ , se concluye a partir de la regla 3 que  $f$  tiene un mínimo relativo en  $0$  de  $f(0) = 0$ , y no existen otros extremos relativos. Además, se observa que  $f$  tiene un mínimo *absoluto* en  $0$ . La gráfica de  $f$  se comporta como se muestra en la figura 13.13. Note que se pudo haber pronosticado su forma a partir de la línea inferior del diagrama de signos de la figura 13.12, donde se muestra que no puede haber una tangente con pendiente en  $0$ . (Por supuesto, la tangente existe en  $0$ , pero es una recta vertical.)

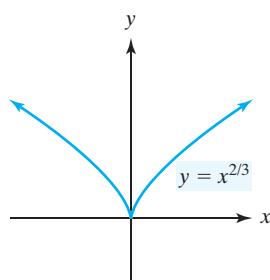


FIGURA 13.13 La derivada no existe en  $0$  y existe un mínimo en  $0$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 41



## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

## DETERMINACIÓN DE EXTREMOS RELATIVOS

Se inyecta cierta sustancia al torrente sanguíneo de un paciente. La concentración en el torrente  $t$  horas después de haberse inyectado se calcula de manera aproximada por medio de  $C(t) = \frac{0.14t}{t^2 + 4t + 4}$ . Encuentre los extremos relativos para  $t > 0$ , y utilícelos para determinar cuándo la sustancia alcanza la máxima concentración.

## EJEMPLO 3 Determinación de extremos relativos

Pruebe  $y = f(x) = x^2e^x$  para los extremos relativos.

**Solución:** Por la regla del producto,

$$f'(x) = x^2e^x + e^x(2x) = xe^x(x + 2)$$

Observe que  $e^x$  siempre es positiva, se obtienen los valores críticos 0 y  $-2$ . Del diagrama de signos de  $f'(x)$  dados en la figura 13.14, se concluye que se tiene un máximo relativo cuando  $x = -2$ , y un mínimo relativo cuando  $x = 0$ .

	-2	0	
$x + 2$	-	0	+
$x$	-	-	0
$e^x$	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

FIGURA 13.14 Diagrama de signos para  $f'(x) = x(x + 2)e^x$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 49



## Trazado de una curva

En el ejemplo siguiente se muestra la forma en que puede usarse la prueba de la primera derivada junto con los conceptos de intersección y simetría, como una ayuda para trazar la gráfica de una función.

## EJEMPLO 4 Trazado de una curva

Trace la gráfica de  $y = f(x) = 2x^2 - x^4$  con la ayuda de las intersecciones, la simetría y la prueba de la primera derivada.

**Solución:**

**Intersecciones** Si  $x = 0$ , entonces  $f(x) = 0$ , de forma que la intersección  $y$  es  $(0, 0)$ . Enseguida note que

$$f(x) = 2x^2 - x^4 = x^2(2 - x^2) = x^2(\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x)$$

De aquí que si  $y = 0$ , entonces  $x = 0, \pm\sqrt{2}$  y las intersecciones  $x$  son  $(-\sqrt{2}, 0), (0, 0)$  y  $(\sqrt{2}, 0)$ . Se tiene el diagrama de signos para la propia  $f$  (figura 13.15), la cual muestra los intervalos sobre los cuales la gráfica de  $y = f(x)$  está por debajo del eje  $x$  (-).

	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	
$\sqrt{2} + x$	-	0	+	+
$x^2$	+	+	0	+
$\sqrt{2} - x$	+	+	+	0
$f(x)$	-	0	+	0

FIGURA 13.15 Diagrama de signos para  $f(x) = (\sqrt{2} + x)x^2(\sqrt{2} - x)$ .

**Simetría** Al investigar la simetría con respecto al eje  $y$ , se tiene

$$f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4 = f(x)$$

Por lo que se tiene simetría con respecto al eje  $y$ . Como  $y$  es una función (y no es la función cero), no hay simetría con respecto al eje  $x$ , y en consecuencia no hay simetría con respecto al origen.

## Prueba de la primera derivada

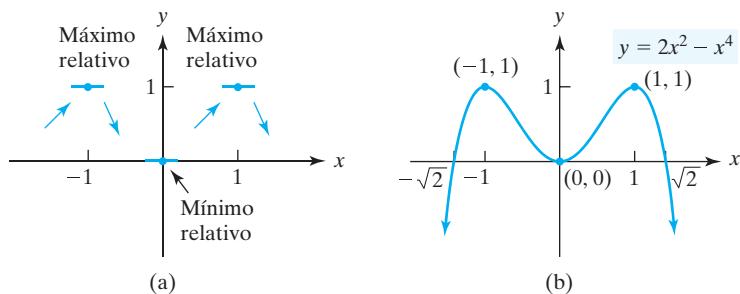
**Paso 1.**  $y' = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 4x(1 + x)(1 - x)$ .

	-1	0	1	
$1+x$	-	0	+	+
$4x$	-	-	0	+
$1-x$	+	+	+	0
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$				

FIGURA 13.16 Diagrama de signos de  $y' = (1+x)4x(1-x)$ .

**Paso 2.** Se determina que  $y' = 0$ , se obtienen los valores críticos  $x = 0, \pm 1$ . Como  $f$  es un polinomio, está definido y es diferenciable para toda  $x$ . Así que los únicos valores que encabezan el diagrama de signos para  $f'$  son  $-1, 0, 1$  (en orden creciente) y el diagrama de signos se da en la figura 13.16. Como se tiene interés en una gráfica, los puntos críticos tienen mucha importancia. Al sustituir los valores críticos en la ecuación original  $y = 2x^2 - x^4$ , se obtienen las coordenadas  $y$  de esos puntos. Se encuentra que los puntos críticos son  $(-1, 1), (0, 0)$  y  $(1, 1)$ .

**Paso 3.** Del diagrama de signos y las evaluaciones en el paso 2, es claro que  $f$  tiene máximos relativos en  $(-1, 1)$  y  $(1, 1)$  y un mínimo relativo en  $(0, 0)$ . (El paso 4 no es aplicable aquí.)

FIGURA 13.17 Reunión de la información para la gráfica de  $y = 2x^2 - x^4$ .

**Análisis** En la figura 13.17(a) se han indicado las tangentes horizontales en los puntos máximo y mínimo relativos. Se sabe que la curva asciende desde la izquierda, tiene un máximo relativo, luego desciende, tiene un mínimo relativo, se eleva hacia un máximo relativo y de ahí en adelante desciende. Gracias a la simetría, es suficiente con trazar la gráfica en un lado del eje  $y$  y construir una imagen en espejo en el otro lado. También se sabe, a partir del diagrama de signos para  $f$ , los puntos donde la gráfica cruza y toca al eje  $x$ , lo cual agrega aún más precisión al bosquejo que se muestra en la figura 13.17(b).

Como comentario puede hacerse notar que ocurren máximos *absolutos* en  $x = \pm 1$ . Vea la figura 13.17(b). No existe mínimo absoluto.

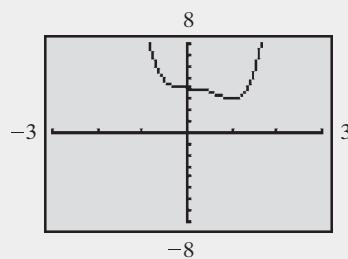
AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 59

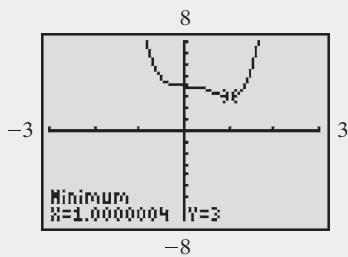
### TECNOLOGÍA

Una calculadora graficadora es una poderosa herramienta para investigar los extremos relativos. Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 4$$

cuya gráfica se muestra en la figura 13.18. Parece que hay un mínimo relativo cerca de  $x = 1$ . Es posible localizar este mínimo mediante los comandos trace y zoom o (en la TI-83 Plus) la característica de minimum. En la figura 13.19 se muestra este último procedimiento. Se estima que el punto mínimo relativo es  $(1.00, 3)$ .

FIGURA 13.18 Gráfica de  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 4$ .

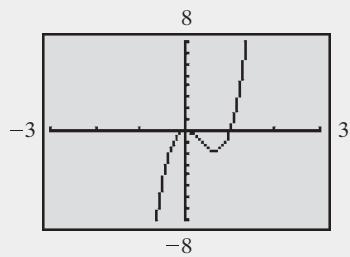


**FIGURA 13.19** Mínimo relativo en  $(1.00, 3)$ .

Ahora se verá que la gráfica de  $f'$  indica cuándo ocurren los extremos. Se tiene

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

cuya gráfica se muestra en la figura 13.20. Parece que  $f'(x)$  es 0 en dos puntos. Mediante trace y zoom o el comando para encontrar las raíces, se estima que los ceros de  $f'$  (valores críticos de  $f$ ) son 1 y 0. Alrededor de  $x = 1$ , se observa que  $f'(x)$  pasa de valores negativos a valores positivos (esto es, la gráfica de  $f'$  pasa de abajo hacia arriba del eje  $x$ ). Así, se concluye que  $f$  tiene un mínimo relativo en  $x = 1$ , lo que confirma el resultado anterior.



**FIGURA 13.20** Gráfica de  $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$ .

Alrededor del valor crítico  $x = 0$ , los valores de  $f'(x)$  son negativos. Como  $f'(x)$  no cambia de signo, se concluye que no existe un extremo relativo en  $x = 0$ . Esto también es evidente en la gráfica de la figura 13.18.

Vale la pena mencionar que la gráfica de  $f'$  se puede aproximar sin determinar  $f'(x)$ . Se hace uso de la característica nDeriv. Primero se introduce la función  $f$  como  $Y_1$ . Luego se establece

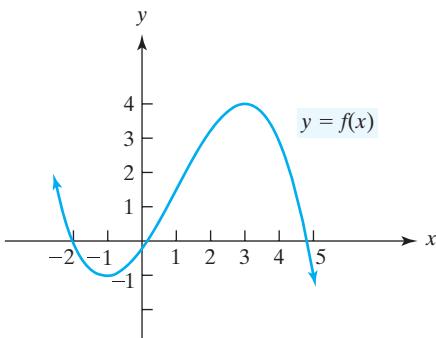
$$Y_2 = \text{nDeriv}(Y_1, X, X)$$

La gráfica de  $Y_2$  aproxima la gráfica de  $f'(x)$ .

## Problemas 13.1

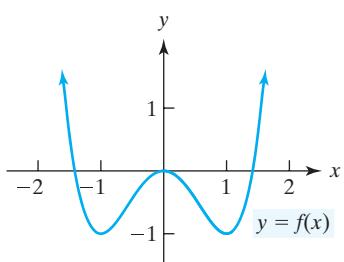
En los problemas 1 a 4 se da la gráfica de una función. Encuentre los intervalos abiertos en los que la función crece o decrece, así como las coordenadas de todos los extremos relativos.

1.



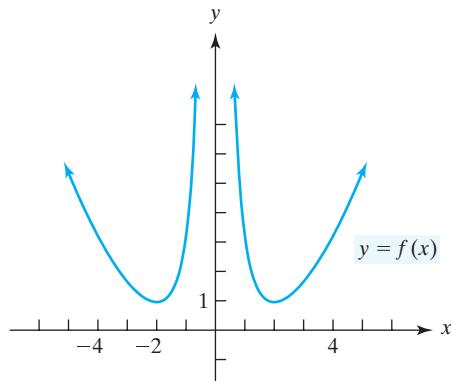
**FIGURA 13.21** Gráfica para el problema 1.

2.



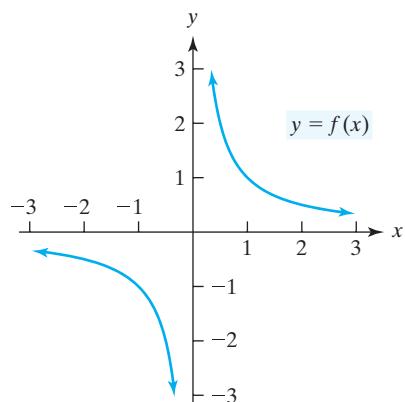
**FIGURA 13.22** Gráfica para el problema 2.

3.



**FIGURA 13.23** Gráfica para el problema 3.

4.



**FIGURA 13.24** Gráfica para el problema 4.

En los problemas 5 a 8 se da la derivada de la función continua  $f$ . Encuentre los intervalos abiertos en los que  $f$  es creciente o decreciente, así como los valores de  $x$  de todos los extremos relativos.

5.  $f'(x) = (x+3)(x-1)(x-2)$

6.  $f'(x) = 2x(x-1)^3$

7.  $f'(x) = (x+1)(x-3)^2$       8.  $f'(x) = \frac{x(x+2)}{x^2+1}$

En los problemas 9 a 52, determine cuándo la función es creciente o decreciente, y determine la posición de los máximos y mínimos relativos. No trace la gráfica.

9.  $y = 2x^3 + 1$

11.  $y = x - x^2 + 2$

13.  $y = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x - 2$

15.  $y = x^4 - 2x^2$

17.  $y = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x - 5$

19.  $y = 2x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 10x + 2$     20.  $y = -5x^3 + x^2 + x - 7$

21.  $y = \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 22x + 1$

23.  $y = 3x^5 - 5x^3$

25.  $y = -x^5 - 5x^4 + 200$

27.  $y = 8x^4 - x^8$

29.  $y = (x^2 - 1)^4$

31.  $y = \frac{5}{x-1}$

33.  $y = \frac{10}{\sqrt{x}}$

35.  $y = \frac{x^2}{2-x}$

\*37.  $y = \frac{x^2 - 3}{x+2}$

39.  $y = \frac{5x+2}{x^2+1}$

\*41.  $y = (x-1)^{2/3}$

43.  $y = x^3(x-6)^4$

45.  $y = e^{-\pi x} + \pi$

47.  $y = x^2 - 9 \ln x$

\*49.  $y = e^x + e^{-x}$

51.  $y = x \ln x - x$

10.  $y = x^2 + 4x + 3$

12.  $y = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + 6$

14.  $y = \frac{x^4}{4} + x^3$

16.  $y = -3 + 12x - x^3$

18.  $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$

20.  $y = -5x^3 + x^2 + x - 7$

22.  $y = \frac{9}{5}x^5 - \frac{47}{3}x^3 + 10x$

24.  $y = 3x - \frac{x^6}{2}$

26.  $y = \frac{3x^4}{2} - 4x^3 + 17$

28.  $y = \frac{4}{5}x^5 - \frac{13}{3}x^3 + 3x + 4$

30.  $y = \sqrt[3]{x}(x-2)$

32.  $y = \frac{3}{x}$

34.  $y = \frac{3x}{2x+5}$

36.  $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$

38.  $y = \frac{2x^2}{4x^2 - 25}$

40.  $y = \sqrt[3]{x^3 - 9x}$

42.  $y = x^2(x+3)^4$

44.  $y = x(1-x)^{2/5}$

46.  $y = x \ln x$

48.  $y = x^{-1}e^x$

50.  $y = e^{-x^2/2}$

52.  $y = (x^2 + 1)e^{-x}$

En los problemas 53 a 64, determine los intervalos en los que la función es creciente o decreciente, los máximos y mínimos relativos, la simetría y aquellas intersecciones que se pueden obtener de manera conveniente. Despues bosqueje la gráfica.

53.  $y = x^2 - 3x - 10$

55.  $y = 3x - x^3$

57.  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

\*59.  $y = x^4 + 4x^3 + 4x^2$

61.  $y = (x-1)^2(x+2)^2$

63.  $y = 2\sqrt{x} - x$

54.  $y = 2x^2 - 5x - 12$

56.  $y = x^4 - 16$

58.  $y = 2x^3 - x^2 - 4x + 4$

60.  $y = x^6 - \frac{6}{5}x^5$

62.  $y = \sqrt{x}(x^2 - x - 2)$

64.  $y = x^{5/3} + 5x^{2/3}$

65. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua  $f$ , tal que  $f(2) = 2, f(4) = 6, f'(2) = f'(4) = 0, f'(x) < 0$  para  $x < 2, f'(x) > 0$  para  $2 < x < 4, f$  tenga un mínimo relativo en 4, y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

66. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua  $f$ , tal que  $f(1) = 2, f(4) = 5, f'(1) = 0, f'(x) \geq 0$  para  $x < 4, f$  tenga un máximo relativo cuando  $x = 4$  y tenga una recta tangente vertical en  $x = 4$ .

67. **Costo promedio** Si  $c_f = 25\,000$  es una función de costo fijo, demuestre que la función de costo fijo promedio  $\bar{c} = c_f/q$  es decreciente para  $q > 0$ . Por lo que, cuando la producción  $q$  crece una unidad, se reduce la porción unitaria de costo fijo.

68. **Costo marginal** Si  $c = 3q - 3q^2 + q^3$  es una función de costo, ¿cuándo es creciente el costo marginal?

69. **Ingreso marginal** Dada la función de demanda

$$p = 400 - 2q$$

encuentre cuándo es creciente el costo marginal.

70. **Función costo** Para la función de costo  $c = \sqrt{q}$ , demuestre que los costos marginal y promedio son siempre decrecientes para  $q > 0$ .

71. **Ingreso** Para el producto de un fabricante, la función de ingreso está dada por  $r = 240q + 57q^2 - q^3$ . Determine la producción para obtener un ingreso máximo.

72. **Mercados de trabajo** Eswaran y Kotwal<sup>2</sup> estudian economías agrarias en las que hay dos tipos de trabajadores, permanentes y eventuales. Los permanentes son empleados bajo contrato a largo plazo y pueden recibir prestaciones como vacaciones y atención médica. Los eventuales se contratan por día y efectúan tareas rutinarias como recolección y trillado. La diferencia  $z$  en el costo a valor actual de emplear a un trabajador permanente y a un eventual está dada por

$$z = (1+b)w_p - bw_c$$

donde  $w_p$  y  $w_c$  son los salarios de trabajo permanente y eventual, respectivamente,  $b$  es una constante positiva y  $w_p$  es una función de  $w_c$ .

(a) Demuestre que

$$\frac{dz}{dw_c} = (1+b) \left[ \frac{dw_p}{dw_c} - \frac{b}{1+b} \right]$$

- (b) Si  $dw_p/dw_c < b/(1+b)$ , demuestre que  $z$  es una función decreciente de  $w_c$ .

73. **Contaminación térmica** En el análisis de Shonle acerca de la contaminación térmica,<sup>3</sup> la eficiencia de una planta de energía se mide por:

$$E = 0.71 \left( 1 - \frac{T_c}{T_h} \right)$$

donde  $T_h$  y  $T_c$  son las temperaturas absolutas correspondientes a las reservas de agua con temperaturas más elevadas y con temperaturas más frías, respectivamente. Suponga que  $T_c$  es una constante positiva y que  $T_h$  es positiva. Por medio del cálculo, demuestre que la eficiencia aumenta conforme se incrementa  $T_h$ .

<sup>2</sup>M. Eswaran y A. Kotwal, "A Theory of Two-Tier Labor Markets in Agrarian Economics", *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), 162-177.

<sup>3</sup>J. I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

- 74. Servicio telefónico** En un análisis del precio del servicio telefónico local, Renshaw<sup>4</sup> determina que el ingreso total  $r$  está dado por

$$r = 2F + \left(1 - \frac{a}{b}\right)p - p^2 + \frac{a^2}{b}$$

donde  $p$  es un precio indexado por llamada, y  $a, b$  y  $F$  son constantes. Determine el valor de  $p$  que maximiza el ingreso.

- 75. Costos de almacenamiento y envío** En su modelo para los costos de almacenamiento y envío de materiales para un proceso de manufactura, Lancaster<sup>5</sup> obtiene la siguiente función de costo

$$C(k) = 100 \left(100 + 9k + \frac{144}{k}\right) \quad 1 \leq k \leq 100$$

donde  $C(k)$  es el costo total (en dólares) de almacenamiento y transporte para 100 días de operación, si una carga de  $k$  toneladas de material se mueve cada  $k$  días.

- (a) Encuentre  $C(1)$ .  
 (b) ¿Para qué valor de  $k$  tiene  $C(k)$  un mínimo?  
 (c) ¿Cuál es el valor mínimo?

- 76. Fisiología-aeroembolismo** Cuando un buzo sufre descompresión o un piloto vuela a gran altura, el nitrógeno empieza a burbujejar en la sangre, lo que ocasiona lo que se denomina *aeroembolismo*. Suponga que el porcentaje  $P$  de gente que sufre este efecto a una altura de  $h$  miles de pies está dado por<sup>6</sup>

$$P = \frac{100}{1 + 100\,000e^{-0.36h}}$$

¿Es  $P$  una función creciente de  $h$ ?

En los problemas 77 a 80, con base en la gráfica de la función, encuentre las coordenadas de todos los extremos relativos. Redondee sus respuestas a dos decimales.

77.  $y = 0.3x^2 + 2.3x + 5.1$

78.  $y = 3x^4 - 4x^3 - 5x + 1$

79.  $y = \frac{8.2x}{0.4x^2 + 3}$

80.  $y = \frac{e^x(3-x)}{7x^2 + 1}$

81. Grafique la función

$$f(x) = [x(x - 2)(2x - 3)]^2$$

en la ventana  $-1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 3$ . A primera vista podría parecer que esta función tiene dos puntos mínimos relativos y un máximo relativo. Sin embargo, en realidad tiene tres puntos mínimos relativos y dos máximos relativos. Determine los valores  $x$  de esos puntos. Redondee sus respuestas a dos decimales.

82. Si  $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x + 2$ , exhiba las gráficas de  $f$  y  $f'$  en la misma pantalla. Note que es en  $f'(x) = 0$  donde ocurren los extremos relativos de  $f$ .

83. Sea  $f(x) = 6 + 4x - 3x^2 - x^3$ . (a) Encuentre  $f'(x)$ . (b) Grafique  $f'(x)$ . (c) Observe dónde  $f'(x)$  es positiva y dónde es negativa. Proporcione los intervalos (redondeados a dos decimales) en que  $f$  es creciente y decreciente. (d) Grafique  $f$  y  $f'$  sobre la misma pantalla y verifique sus resultados del inciso (c).

84. Si  $f(x) = x^4 - x^2 - (x + 2)^2$ , encuentre  $f'(x)$ . Determine los valores críticos de  $f$ . Redondee sus respuestas a dos decimales.

## OBJETIVO

Encontrar los valores extremos en un intervalo cerrado.

## 13.2 Extremos absolutos en un intervalo cerrado

Si una función  $f$  es *continua* en un intervalo *cerrado*  $[a, b]$ , puede demostrarse que entre *todos* los valores de  $f(x)$  de la función de  $x$  en  $[a, b]$ , debe haber un valor máximo (absoluto) y un valor mínimo (absoluto). Esos dos valores se llaman **valores extremos** de  $f$  en ese intervalo. Esta importante propiedad de las funciones continuas se llama *teorema del valor extremo*.

### Teorema del valor extremo

Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces la función tiene *tanto* un valor máximo *como* un valor mínimo en ese intervalo.

Por ejemplo, cada función en la figura 13.25 es continua en el intervalo cerrado  $[1, 3]$ . En forma geométrica, el teorema del valor extremo asegura que sobre este intervalo, cada gráfica tiene un punto de altura máxima y otro de altura mínima.

Para la aplicación del teorema del valor extremo, debe darse una situación en la que haya

1. un intervalo cerrado y
2. una función continua en ese intervalo.

<sup>4</sup>E. Renshaw, "A Note of Equity and Efficiency in the Pricing of Local Telephone Services", *The American Economic Review*, 75, núm. 3 (1985), 515-518.

<sup>5</sup>P. Lancaster, *Mathematics: Models of the Real World* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1976).

<sup>6</sup>Adaptado de G. E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physiology*, 2a. ed. (Filadelfia: Lea & Febiger, 1974).

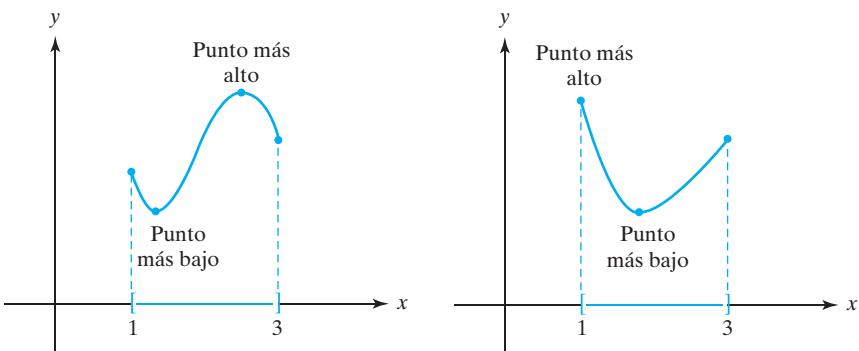


FIGURA 13.25 Ilustración del teorema de los valores extremos.

Si alguna de las dos condiciones anteriores (1 o 2) no se cumple, entonces los valores extremos no están garantizados. Por ejemplo, en la figura 13.26(a) se muestra la gráfica de la función continua  $f(x) = x^2$  en el intervalo abierto  $(-1, 1)$ . Puede ver que  $f$  no tiene un valor máximo en el intervalo (aunque tenga ahí un valor mínimo). Ahora considere la función  $f(x) = 1/x^2$  en el intervalo cerrado  $[-1, 1]$ . Aquí,  $f$  no es continua en 0. En la gráfica de  $f$  de la figura 13.26(b), puede ver que  $f$  no tiene un valor máximo (aunque sí tiene un valor mínimo).

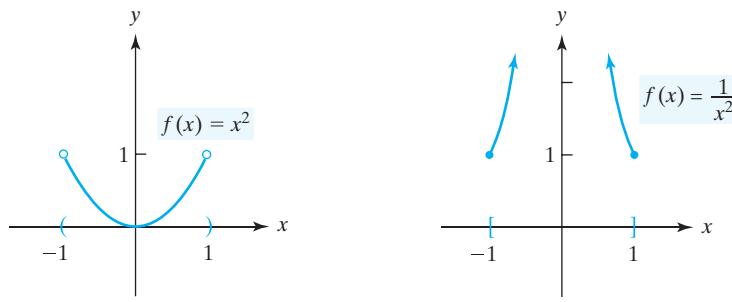


FIGURA 13.26 El teorema de los valores extremos no es aplicable.

En la sección anterior, el énfasis se puso en los extremos relativos. Ahora la atención estará centrada en los extremos absolutos y se hará uso del teorema del valor extremo, donde sea posible. Si el dominio de una función es un intervalo cerrado, para determinar extremos *absolutos* se debe examinar la función no sólo en los valores críticos, sino también en los puntos extremos. Por ejemplo, en la figura 13.27 se muestra la gráfica de la función continua  $y = f(x)$  en  $[a, b]$ . El teorema del valor extremo garantiza extremos absolutos en el intervalo. Es claro que los puntos importantes sobre la gráfica se presentan en  $x = a, b, c$  y  $d$ , que corresponden a puntos extremos o a valores críticos.

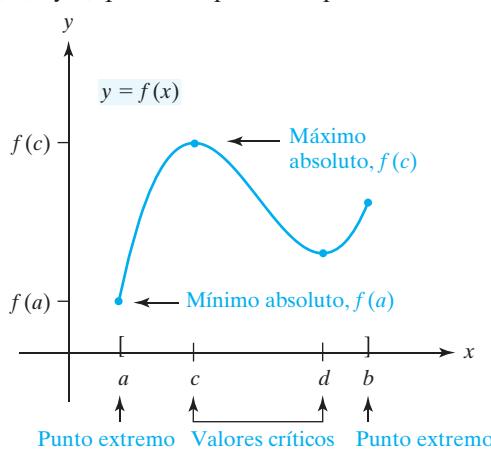


FIGURA 13.27 Extremos absolutos.

Note que el máximo absoluto ocurre en el valor crítico  $c$ , y que el mínimo absoluto ocurre en el punto extremo  $a$ . Estos resultados sugieren el procedimiento siguiente:

**Procedimiento para encontrar los extremos absolutos de una función  $f$  que es continua en  $[a, b]$**

**Paso 1.** Encontrar los valores críticos de  $f$ .

**Paso 2.** Evaluar  $f(x)$  en los puntos extremos  $a$  y  $b$ , y en los valores críticos sobre  $(a, b)$ .

**Paso 3.** El valor máximo de  $f$  es el mayor de los valores encontrados en el paso 2. El valor mínimo de  $f$  es el menor de los valores encontrados en el paso 2.

**EJEMPLO 1 Localización de los valores extremos en un intervalo cerrado**

Encontrar los extremos absolutos para  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  en el intervalo cerrado  $[1, 4]$ .

**Solución:** Como  $f$  es continua sobre  $[1, 4]$ , el procedimiento anterior es aplicable aquí.

**Paso 1.** Para encontrar los valores críticos de  $f$ , primero se encuentra  $f'$ :

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

Esto da el valor crítico  $x = 2$ .

**Paso 2.** Al evaluar  $f(x)$  en los puntos extremos 1 y 4 así como en el valor crítico 2, se tiene

$$\begin{array}{ll} f(1) = 2 & \text{valores de } f \text{ en los extremos} \\ f(4) = 5 & \end{array}$$

$$y \quad f(2) = 1 \quad \text{valor de } f \text{ en el valor crítico en } (1, 4)$$

**Paso 3.** De los valores de la función en el paso 2, se concluye que el máximo es  $f(4) = 5$  y el mínimo es  $f(2) = 1$ . (Vea la figura 13.28).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

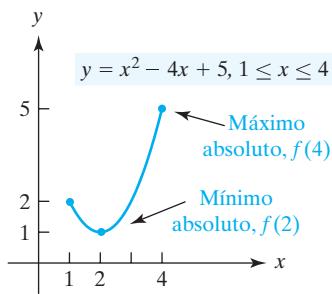


FIGURA 13.28 Valores extremos para el ejemplo 1.

## Problemas 13.2

En los problemas 1 a 14, encuentre los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado.

- 1.  $f(x) = x^2 - 2x + 3, [0, 3]$
- 2.  $f(x) = -2x^2 - 6x + 5, [-3, 2]$
- 3.  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1, [-1, 0]$
- 4.  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2, [0, 1]$
- 5.  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 18x + 3, [\frac{1}{2}, 3]$
- 6.  $f(x) = x^{2/3}, [-8, 8]$
- 7.  $f(x) = -3x^5 + 5x^3, [-2, 0]$
- 8.  $f(x) = \frac{7}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1, [0, 3]$
- 9.  $f(x) = 3x^4 - x^6, [-1, 2]$
- 10.  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 3, [-2, 3]$
- 11.  $f(x) = x^4 - 9x^2 + 2, [-1, 3]$

### OBJETIVO

Probar una función por concavidad y puntos de inflexión. También hacer el bosquejo de curvas con ayuda de la información obtenida de la primera y segunda derivadas.

12.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, [0, 2]$

13.  $f(x) = (x - 1)^{2/3}, [-26, 28]$

14.  $f(x) = 0.2x^3 - 3.6x^2 + 2x + 1, [-1, 2]$

15. Considere la función

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 20x + 9$$

en el intervalo  $[-4, 9]$ .

(a) Determine el o los valores (redondeados a dos decimales) de  $x$  en que  $f$  alcanza un valor mínimo.

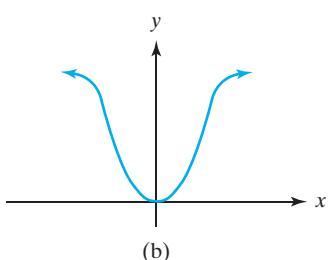
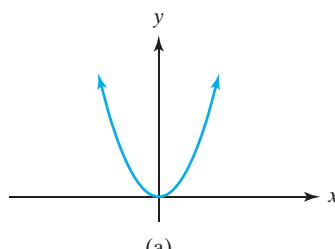
(b) ¿Cuál es el valor mínimo (redondeado a dos decimales) de  $f$ ?

(c) Determine el o los valores de  $x$  en que  $f$  alcanza un valor máximo.

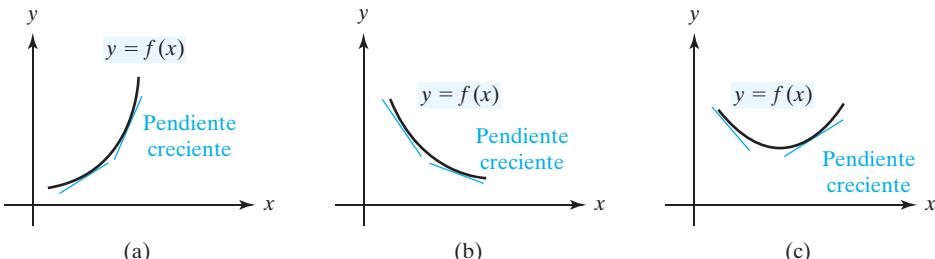
(d) ¿Cuál es el valor máximo de  $f$ ?

## 13.3 Concavidad

Se ha visto que la primera derivada proporciona mucha información útil para el trazado de gráficas. Se usa para determinar cuándo una función es creciente o decreciente, y para la localización de máximos y mínimos relativos. Sin embargo, para asegurarse de conocer la verdadera forma de una curva quizás se necesite más información. Por ejemplo, considere la curva  $y = f(x) = x^2$ . Como  $f'(x) = 2x$ ,  $x = 0$  es un valor crítico. Si  $x < 0$ , entonces  $f'(x) < 0$  y  $f$  es decreciente; si  $x > 0$ , entonces  $f'(x) > 0$  y  $f$  es creciente. Así que se tiene un mínimo relativo cuando  $x = 0$ . En la figura 13.29 ambas curvas satisfacen las



**FIGURA 13.29** Dos funciones con  $f'(x) < 0$  para  $x < 0$  y  $f'(x) > 0$  para  $x > 0$ .

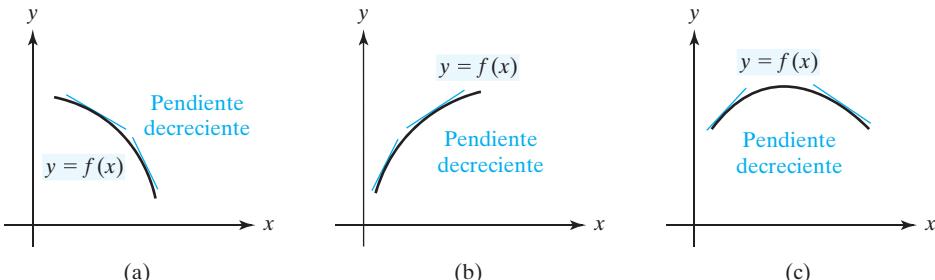


**FIGURA 13.30** Cada curva es cóncava hacia arriba.

condiciones anteriores. Pero, ¿cuál gráfica describe verdaderamente la curva  $y = x^2$ ? Esta pregunta se contesta con facilidad con la segunda derivada y la noción de *concavidad*.

Observe que en la figura 13.30 cada curva  $y = f(x)$  se “flexiona” (o abre) hacia arriba. Esto significa que si se trazan rectas tangentes a cada curva, las curvas quedarán por arriba de ellas. Además, las pendientes de las rectas tangentes *crecen* en valor a medida que *crece*  $x$ : en la parte (a), las pendientes van de valores positivos pequeños a valores mayores; en la parte (b) son negativas y se acercan a cero (por ende son crecientes); en la parte (c) pasan de valores negativos a positivos. Como  $f'(x)$  proporciona la pendiente en un punto, una pendiente creciente significa que  $f'$  debe ser una función creciente. Para describir esta propiedad, se dice que cada curva (o función  $f$ ) en la figura 13.30 es *cóncava hacia arriba*.

En la figura 13.31 puede observarse que cada curva se encuentra *por debajo* de las rectas tangentes y las curvas se flexionan hacia abajo. A medida que  $x$  crece, las pendientes de las rectas tangentes son *decrecientes*. Entonces, aquí  $f'$  debe ser una función decreciente y se dice que es *cóncava hacia abajo*.



**FIGURA 13.31** Cada curva es cóncava hacia abajo.



### ADVERTENCIA

La concavidad se refiere a si  $f'$ , no  $f$ , es creciente o decreciente. En la figura 13.30(b), note que  $f$  es cóncava hacia arriba y decreciente; sin embargo, en la figura 13.31(a)  $f$  es cóncava hacia abajo y decreciente.

### DEFINICIÓN

Sea  $f$  diferenciable en el intervalo  $(a, b)$ . Entonces, se dice que  $f$  es **cóncava hacia arriba [cóncava hacia abajo]** en  $(a, b)$  si  $f'$  es creciente [decreciente] sobre  $(a, b)$ .

*Recuerde:* Si  $f$  es cóncava hacia arriba en un intervalo, entonces desde el punto de vista geométrico, su gráfica se flexiona ahí hacia arriba. Si  $f$  es cóncava hacia abajo, su gráfica se flexiona hacia abajo.

Como  $f'$  es creciente, cuando su derivada  $f''(x)$  es positiva, y  $f'$  es decreciente cuando  $f''(x)$  es negativa, es posible establecer la regla siguiente:

### REGLA 1 Criterios de concavidad

Sea  $f'$  diferenciable en el intervalo  $(a, b)$ . Si  $f''(x) > 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es cóncava hacia arriba en  $(a, b)$ . Si  $f''(x) < 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es cóncava hacia abajo en  $(a, b)$ .

Se dice que una función  $f$  es cóncava hacia arriba en un punto  $c$  si existe un intervalo abierto alrededor de  $c$  en el cual  $f$  es cóncava hacia arriba. De hecho, para las funciones que se considerarán, si  $f''(c) > 0$ , entonces  $f$  es cóncava hacia arriba en  $c$ . En forma similar,  $f$  es cóncava hacia abajo en  $c$ , si  $f''(c) < 0$ .

### EJEMPLO 1 Prueba de la concavidad

Determine dónde la función dada es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.

a.  $y = f(x) = (x - 1)^3 + 1$ .

**Solución:** Para aplicar la regla 1, se deben examinar los signos de  $y''$ . Ahora,  $y' = 3(x - 1)^2$ , por lo que

$$y'' = 6(x - 1)$$

Así,  $f$  es cóncava hacia arriba cuando  $6(x - 1) > 0$ , es decir, cuando  $x > 1$ . Y  $f$  es cóncava hacia abajo cuando  $6(x - 1) < 0$ , esto es, cuando  $x < 1$ . A continuación se usa un diagrama de signos para  $f''$  (junto con un renglón de interpretación de  $f$ ) para organizar las conclusiones encontradas. (Vea la figura 13.32).

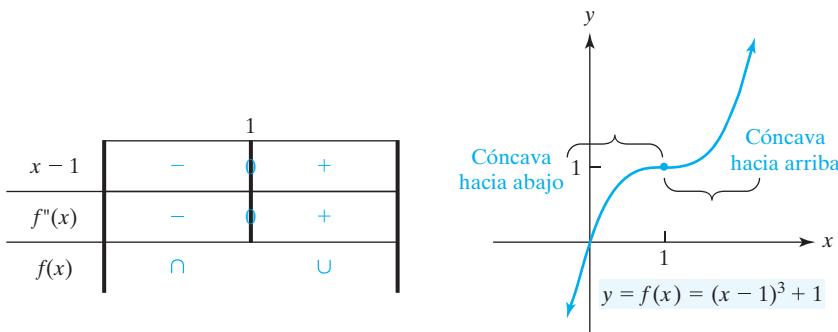


FIGURA 13.32 Diagrama de signos para  $f''$  y concavidad para  $f(x) = (x - 1)^3 + 1$ .

b.  $y = x^2$ .

**Solución:** Se tiene  $y' = 2x$  y  $y'' = 2$ . Como  $y''$  siempre es positiva, la gráfica de  $y = x^2$  debe ser siempre cóncava hacia arriba, como se ve en la figura 13.29(a). La gráfica no puede ser como en la figura 13.29(b), porque esa curva a veces es cóncava hacia abajo.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



Un punto sobre una gráfica cuya concavidad cambia de ser hacia abajo a hacia arriba, o viceversa, como el punto  $(1, 1)$  en la figura 13.32, se llama *punto de inflexión*. Alrededor de tal punto el signo de  $f''(x)$  debe pasar de  $-$  a  $+$  o de  $+$  a  $-$ . De manera más precisa, se tiene la siguiente definición:

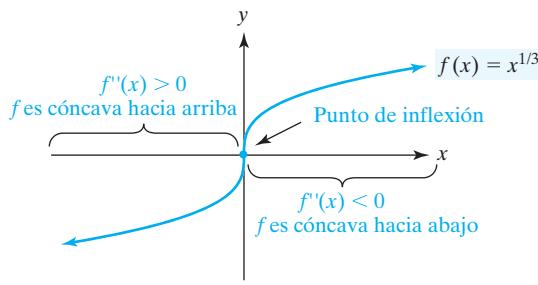
#### DEFINICIÓN

Una función  $f$  tiene un **punto de inflexión** en  $a$  si y sólo si  $f$  es continua en  $a$  y  $f$  cambia de concavidad en  $a$ .

Para determinar la concavidad de una función y sus puntos de inflexión, encuentre primero los valores de  $x$  donde  $f''(x)$  es 0 o no está definida. Esos valores de  $x$  determinan intervalos. En cada intervalo calcule si  $f''(x) > 0$  ( $f$  es cóncava hacia arriba) o  $f''(x) < 0$  ( $f$  es cóncava hacia abajo). Si la concavidad cambia alrededor de uno de esos valores de  $x$  y  $f$  es continua ahí, entonces  $f$  tiene un punto de inflexión en ese valor de  $x$ . El requisito de continuidad implica que el valor  $x$  debe estar en el dominio de la función. En pocas palabras, un *candidato* para punto de inflexión debe satisfacer dos condiciones:

1.  $f''$  debe ser 0 o no existir en ese punto.
2.  $f$  debe ser continua en ese punto.

La definición de un punto de inflexión implica que  $a$  está en el dominio de  $f$ .



El candidato será un punto de inflexión si la concavidad cambia alrededor de él. Por ejemplo, si  $f(x) = x^{1/3}$ , entonces  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$  y

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$$

Como  $f''$  no existe en 0, pero es continua en 0, se tiene un candidato para un punto de inflexión en 0. Si  $x > 0$ , entonces  $f''(x) < 0$ , por lo que  $f$  es cóncava hacia abajo para  $x > 0$ ; si  $x < 0$ , entonces  $f''(x) > 0$ , por lo que  $f$  es cóncava hacia arriba para  $x < 0$ . Como la concavidad cambia en 0, se tiene un punto de inflexión ahí. (Vea la figura 13.33).

### EJEMPLO 2 Concavidad y puntos de inflexión

Pruebe la concavidad y los puntos de inflexión de  $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$ .

**Solución:** Se tiene

$$y' = 24x^3 - 24x^2$$

$$y'' = 72x^2 - 48x = 24x(3x - 2)$$

		0		2/3	
$x$	-	0	+	+	
$3x - 2$	-		-	0	+
$y''$	+	0	-	0	+
$y$	U	O		U	

FIGURA 13.34 Diagrama de signos de  $y'' = 24x(3x - 2)$  para  $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$ .

Para encontrar cuándo  $y'' = 0$ , se establece que cada factor en  $y''$  igual a 0. Esto da  $x = 0, \frac{2}{3}$ . También se observa que  $y''$  nunca deja de estar definida. Así, hay tres intervalos por considerar, como se registra en la parte superior del diagrama de signos de la figura 13.34. Como  $y$  es continua en 0 y en  $\frac{2}{3}$ , esos puntos son candidatos para puntos de inflexión. Despues de completar el diagrama de signos, se observan los cambios de concavidad en 0 y  $\frac{2}{3}$ . Así que, de hecho, estos candidatos son puntos de inflexión (vea la figura 13.35). En resumen, la curva es cóncava hacia arriba en  $(-\infty, 0)$  y  $(\frac{2}{3}, \infty)$ , y es cóncava hacia abajo en  $(0, \frac{2}{3})$ . Los puntos de inflexión ocurren en 0 y en  $\frac{2}{3}$ . Estos puntos son  $(0, y(0)) = (0, 1)$  y  $(\frac{2}{3}, y(\frac{2}{3})) = (\frac{2}{3}, -\frac{5}{27})$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

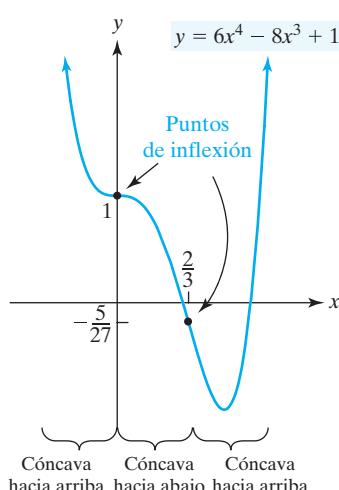


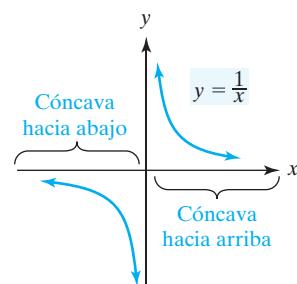
FIGURA 13.35 Gráfica de  $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$ .

Como se hizo en el análisis de las gráficas crecientes y decrecientes, en la concavidad debe considerarse el estudio de aquellos puntos  $a$  que no están en el dominio de  $f$  pero que tienen puntos cercanos en el dominio de  $f$ . Esto se ilustrará en el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 3 Cambio en la concavidad sin punto de inflexión

Analice la concavidad y encuentre todos los puntos de inflexión de  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

	0	
$\frac{1}{x^3}$	-	+
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	□	U

FIGURA 13.36 Diagrama de signos para  $f''(x)$ .FIGURA 13.37 Gráfica de  $y = \frac{1}{x}$ .

**Solución:** Como  $f(x) = x^{-1}$  para  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = -x^{-2} \quad \text{para } x \neq 0$$

$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \quad \text{para } x \neq 0$$

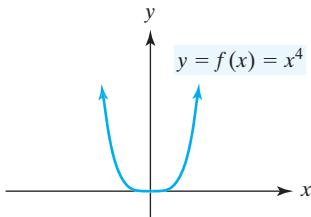
Se ve que  $f''(x)$  nunca es 0, pero no está definida en  $x = 0$ . Como  $f$  no es continua en 0, se concluye que 0 no es un candidato para un punto de inflexión. Así, la función dada no tiene puntos de inflexión. Sin embargo, 0 debe considerarse en el análisis de la concavidad. Vea el diagrama de signos en la figura 13.36; observe que se ha trazado una gruesa línea vertical en 0, para indicar que no está en el dominio de  $f$  y no puede corresponder a un punto de inflexión. Si  $x > 0$ , entonces  $f''(x) > 0$ ; si  $x < 0$ , entonces  $f''(x) < 0$ . Por lo tanto,  $f$  es cóncava hacia arriba en  $(0, \infty)$  y cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 0)$ . (Vea la figura 13.37.) No obstante que la concavidad cambia alrededor de  $x = 0$ , no existe ahí punto de inflexión, porque  $f$  no es continua en 0 (ni está definida ahí).



### ADVERTENCIA

Un candidato a punto de inflexión no tiene que ser necesariamente un punto de inflexión. Por ejemplo, si  $f(x) = x^4$ , entonces  $f''(x) = 12x^2$  y  $f''(0) = 0$ . Pero,  $f''(x) > 0$  tanto cuando  $x < 0$  como cuando  $x > 0$ . Así, la concavidad no cambia y no se tienen puntos de inflexión (vea la figura 13.38).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23

FIGURA 13.38 Gráfica de  $f(x) = x^4$ .

### Trazado de una curva

#### EJEMPLO 4 Trazado de una curva

Trace la gráfica de  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ .

**Solución:**

**Intersecciones** Si  $x = 0$ , entonces  $y = 0$ . Se establece que  $y = 0$  resulta que  $0 = x(2x^2 - 9x + 12)$ . Es claro que  $x = 0$  es una solución, y al utilizar la fórmula cuadrática en  $2x^2 - 9x + 12 = 0$ , se encuentra que no tiene raíces reales. Por lo tanto, la única intersección es  $(0, 0)$ . De hecho, como  $2x^2 - 9x + 12$  es una función continua cuyo valor en 0 es  $2 \cdot 0^2 - 9 \cdot 0 + 12 = 12 > 0$ , se concluye que  $2x^2 - 9x + 12 > 0$  para toda  $x$ , lo cual arroja el diagrama de signos de la figura 13.39 para  $y$ .

Observe que este diagrama indica la gráfica de  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$  sólo ocupa al tercio y cuarto cuadrante del plano  $xy$ .

**Simetría** Ninguna.

**Máximos y mínimos** Se tiene

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2)$$

Los valores críticos son  $x = 1, 2$  de manera que éstos y los factores  $x - 1$  y  $x - 2$  determinan el diagrama de signos de  $y'$  (figura 13.40).

	0	
$x$	-	+
$2x^2 - 9x + 12$	+	+

FIGURA 13.39 Diagrama de signos para  $y$ .

$x - 1$	-	0	+	
$x - 2$	-		-	0
$y'$	+	0	-	0
$y$				+

FIGURA 13.40 Diagrama de signos de  $y' = 6(x - 1)(x - 2)$ .

		3/2	
2x - 3	-	0	+
y''	-	0	+
y	□		□

FIGURA 13.41 Diagrama de signos de  $y''$ .

Del diagrama de signos para  $y'$  se ve que existe un máximo relativo en 1 y un mínimo relativo en 2. Note también que la línea inferior de la figura 13.40, junto con la de la figura 13.39, ayudan a determinar una gráfica precisa de  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ . Por supuesto, ayudará a conocer el máximo relativo  $y(1) = 5$ , lo cual ocurre en 1, y el mínimo relativo  $y(2) = 4$ , que ocurren en 2, de manera que además de la intersección  $(0, 0)$  también se graficará  $(1, 5)$  y  $(2, 4)$ .

### Concavidad

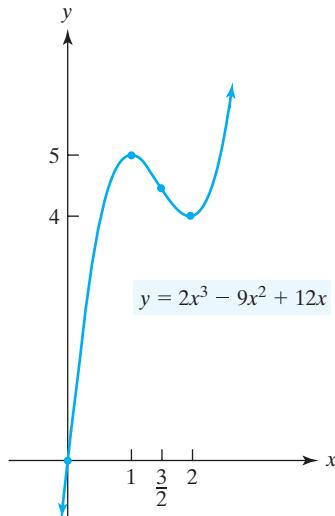
$$y'' = 12x - 18 = 6(2x - 3)$$

Se determina que  $y'' = 0$  resulta un punto de inflexión posible en  $x = \frac{3}{2}$  de donde se construye el diagrama de signos para  $y''$  en la figura 13.41.

Como la concavidad cambia en  $x = \frac{3}{2}$  en cuyo punto  $f$  es ciertamente continua, se tiene un punto de inflexión en  $\frac{3}{2}$ .

**Análisis** Se conocen las coordenadas de tres de los puntos importantes en la gráfica. El único punto importante adicional es el punto de inflexión, y como  $y(\frac{3}{2}) = 2(\frac{3}{2})^3 - 9(\frac{3}{2})^2 + 12(\frac{3}{2}) = \frac{9}{2}$  el punto de inflexión es  $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ .

Se grafican los cuatro puntos anotados anteriormente y se observa, con base en los tres diagramas de signos en conjunto, que la curva crece a través del tercer cuadrante y pasa por  $(0, 0)$ , que es cóncava hacia abajo hasta que se alcanza un máximo relativo en  $(1, 5)$ . Despues la curva cae hasta llegar a un mínimo relativo en  $(2, 4)$ . Sin embargo, en ese transcurso la concavidad cambia en  $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$  de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba y permanece así por el resto de la curva. Despues de  $(2, 4)$  la curva es creciente a través del primer cuadrante. La gráfica se presenta en la figura 13.42.

FIGURA 13.42 Gráfica de  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 39

### TECNOLOGÍA

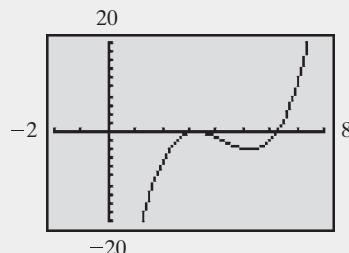
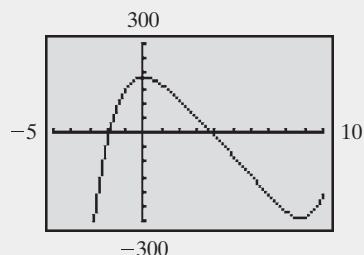
Suponga que se requiere encontrar los puntos de inflexión para

$$f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{17}{16}x^4 + \frac{273}{32}x^3 - \frac{4225}{128}x^2 + \frac{750}{4}$$

La segunda derivada de  $f$  está dada por

$$f''(x) = x^3 - \frac{51}{4}x^2 + \frac{819}{16}x - \frac{4225}{64}$$

Aquí las raíces de  $f''$  no son obvios. Por ello, se graficará  $f''$  con una calculadora graficadora (vea la figura 13.43). Se encuentra que las raíces de  $f''$  son aproximadamente 3.25 y 6.25. Alrededor de  $x = 6.25$ ,  $f''(x)$  pasa de valores negativos a positivos. Así, en  $x = 6.25$  se tiene un punto de inflexión. Alrededor de  $x = 3.25$ ,  $f''(x)$  no cambia de signo, por lo que no existe punto de inflexión en  $x = 3.25$ . Al comparar estos resultados con la gráfica de  $f$  en la figura 13.44, se ve que todo concuerda.

FIGURA 13.43 Gráfica de  $f''$ ; las raíces de  $f''$  son 3.25 y 6.25.FIGURA 13.44 Gráfica de  $f$ ; punto de inflexión en  $x = 6.25$ , pero no en  $x = 3.25$ .

## Problemas 13.3

En los problemas 1 a 16 se da una función y su segunda derivada. Determine la concavidad de  $f$  y los valores de  $x$  en los que se presentan los puntos de inflexión.

\*1.  $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2x - 3; f''(x) = 6x(4x + 3)$

2.  $f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{4} - 2x^2; f''(x) = (x - 1)(x + 2)^2$

3.  $f(x) = \frac{2+x-x^2}{x^2-2x+1}; f''(x) = \frac{2(7-x)}{(x-1)^4}$

4.  $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}; f''(x) = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$

5.  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}; f''(x) = \frac{6(3x^2+2)}{(x^2-2)^3}$

6.  $f(x) = x\sqrt{4-x^2}; f''(x) = \frac{2x(x^2-6)}{(4-x^2)^{3/2}}$

En los problemas 7 a 34, determine la concavidad y los valores de  $x$  en los que se presentan los puntos de inflexión. No trace las gráficas.

7.  $y = -2x^2 + 4x$

8.  $y = -74x^2 + 19x - 37$

9.  $y = 4x^3 + 12x^2 - 12x$

10.  $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

11.  $y = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 2$

12.  $y = x^4 - 8x^2 - 6$

\*13.  $y = 2x^4 - 48x^2 + 7x + 3$

14.  $y = -\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} + 2x$

15.  $y = 2x^{1/5}$

16.  $y = \frac{7}{x^3}$

17.  $y = \frac{x^4}{2} + \frac{19x^3}{6} - \frac{7x^2}{2} + x + 5$

18.  $y = -\frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}$

19.  $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$

20.  $y = \frac{1}{10}x^5 - 3x^3 + 17x + 43$

21.  $y = \frac{1}{30}x^6 - \frac{7}{12}x^4 + 5x^2 + 2x - 1$

22.  $y = x^6 - 3x^4$

\*23.  $y = \frac{x+1}{x-1}$

24.  $y = 1 - \frac{1}{x^2}$

25.  $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

26.  $y = \frac{4x^2}{x+3}$

27.  $y = \frac{21x+40}{6(x+3)^2}$

28.  $y = 3(x^2 - 2)^2$

29.  $y = 5e^x$

30.  $y = e^x - e^{-x}$

31.  $y = 3xe^x$

32.  $y = xe^{x^2}$

33.  $y = \frac{\ln x}{2x}$

34.  $y = \frac{x^2+1}{3e^x}$

En los problemas 35 a 62, determine los intervalos en los que la función crece, decrece, es cóncava hacia arriba, es cóncava hacia abajo; máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión; simetría y aquellas intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente. Despues bosqueje la gráfica.

35.  $y = x^2 - x - 6$

36.  $y = x^2 + 2$

37.  $y = 5x - 2x^2$

38.  $y = x - x^2 + 2$

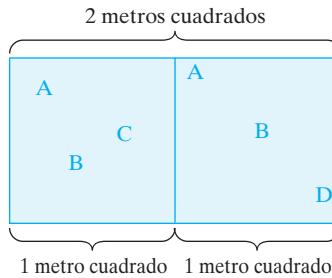
\*39.  $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$

40.  $y = x^3 - 25x^2$

41.  $y = \frac{x^3}{3} - 4x$

42.  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

43.  $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$
44.  $y = 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x$
45.  $y = 4x^3 - 3x^4$
46.  $y = -x^3 + 2x^2 - x + 4$
47.  $y = -2 + 12x - x^3$
48.  $y = (3 + 2x)^3$
49.  $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$
50.  $y = \frac{x^5}{100} - \frac{x^4}{20}$
51.  $y = 5x - x^5$
52.  $y = x^2(x - 1)^2$
53.  $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$
54.  $y = 3x^5 - 5x^3$
55.  $y = 4x^2 - x^4$
56.  $y = x^4 - x^2$
57.  $y = x^{1/3}(x - 8)$
58.  $y = (x - 1)^2(x + 2)^2$
59.  $y = 4x^{1/3} + x^{4/3}$
60.  $y = (x + 1)\sqrt{x + 4}$
61.  $y = 6x^{2/3} - \frac{x}{2}$
62.  $y = 5x^{2/3} - x^{5/3}$
63. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua  $f$  tal que  $f(2) = 4, f'(2) = 0, f'(x) < 0$  si  $x < 2$  y  $f''(x) > 0$  si  $x > 2$ .
64. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua  $f$  tal que  $f(4) = 4, f'(4) = 0, f''(x) < 0$  para  $x < 4$  y  $f''(x) > 0$  para  $x > 4$ .
65. Bosqueje la gráfica de un función continua  $f$  tal que  $f(1) = 1, f'(1) = 0$  y  $f''(x) < 0$  para toda  $x$ .
66. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua  $f$  tal que  $f(3) = 4$ , tanto  $f'(x) > 0$  como  $f''(x) > 0$  para  $x < 3$ , y tanto  $f'(x) < 0$  como  $f''(x) > 0$  para  $x > 3$ .
67. **Ecuación de demanda** Demuestre que la gráfica de la ecuación de demanda  $p = \frac{100}{q+2}$  es decreciente y cóncava hacia arriba para  $q > 0$ .
68. **Costo promedio** Para la función de costo  $c = q^2 + 2q + 1$  demuestre que la gráfica de la función de costo promedio  $\bar{c}$  siempre es cóncava hacia arriba para  $q > 0$ .
69. **Especies de plantas** El número de especies de plantas en un terreno puede depender del tamaño del lote. Por ejemplo, en la figura 13.45, se ve que para dimensiones de  $1 \text{ m}^2$  hay tres especies (A, B y C en el lote izquierdo; A, B y D en el lote derecho), y que en un terreno de  $2 \text{ m}^2$  hay cuatro especies (A, B, C y D).



**FIGURA 13.45** Especies de plantas.

En un estudio acerca de las plantas de cierta región geográfica,<sup>7</sup> se determinó que el número promedio de especies,  $S$ , que se presentan en lotes de tamaño  $A$  (en metros cuadrados) está dado por

$$S = f(A) = 12\sqrt[4]{A} \quad 0 \leq A \leq 625$$

<sup>7</sup>Adaptado de R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

Haga el bosquejo de la gráfica de  $f$ . (Nota: su gráfica debe ser creciente y cóncava hacia abajo. Por ello el número de especies es creciente con respecto al área, pero a una razón decreciente).

- 70. Bien inferior** En un análisis sobre un bien inferior, Persky<sup>8</sup> considera una función de la forma

$$g(x) = e^{(U_0/A)} e^{-x^2/(2A)}$$

donde  $x$  es una cantidad del bien,  $U_0$  es una constante que representa la utilidad y  $A$  es una constante positiva. Persky afirma que la gráfica de  $g$  es cóncava hacia abajo para  $x < \sqrt{A}$ , y cóncava hacia arriba para  $x > \sqrt{A}$ . Verifique esto.

- 71. Psicología** En un experimento psicológico que implicaba respuestas condicionadas,<sup>9</sup> varias personas escuchaban cuatro tonos, denotados como 0, 1, 2 y 3. Inicialmente, se les había condicionado al tono 0: recibían un choque eléctrico cada vez que lo oían. Luego, cuando escucharon cada uno de los cuatro tonos (estímulos) sin choques eléctricos, se registró la respuesta del sujeto por medio de un dispositivo rastreador que medía la reacción galvánica de la piel. Se determinó la respuesta media para cada estímulo (sin choque eléctrico), y los resultados se graficaron en un plano coordenado, donde los ejes  $x$  y  $y$  representaban el estímulo (0, 1, 2 y 3) y la respuesta galvánica promedio, respectivamente. También se determinó que los puntos se ajustan a una curva dada aproximadamente por la gráfica de

$$y = 12.5 + 5.8(0.42)^x$$

Demuestre que esta función es decreciente y cóncava hacia arriba.

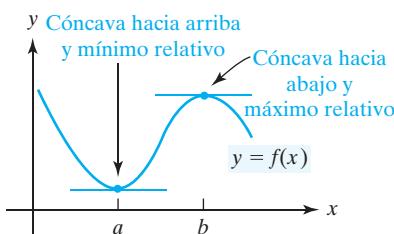
- 72. Entomología** En un estudio sobre los efectos que la privación de alimento causa en el hambre,<sup>10</sup> se alimentó a un insecto hasta que su apetito estuvo completamente satisfecho. Despues fue privado de alimento durante  $t$  horas (periodo de privación). Al final de este periodo, de nuevo se alimentó al insecto hasta que estuvo completamente satisfecho. Se encontró que el peso  $H$  (en gramos) del alimento que se consumió en este tiempo, era una función estadística de  $t$  donde

$$H = 1.00[1 - e^{-(0.0464t+0.0670)}]$$

Aquí  $H$  es una medida del hambre. Demuestre que  $H$  es creciente con respecto a  $t$  y cóncava hacia abajo.

## OBJETIVO

Localizar extremos relativos por medio de la aplicación de la prueba de la segunda derivada.



**FIGURA 13.46** Relación de la concavidad con los extremos relativos.

## 13.4 Prueba de la segunda derivada

- 73. Dispersión de insectos** En un experimento sobre la dispersión de un insecto específico,<sup>11</sup> se colocó a un gran número de estos animales en un punto de liberación en un campo abierto. Alrededor de este punto hay trampas dispuestas según un arreglo circular concéntrico a distancias de 1 m, 2 m, 3 m, etcétera del punto de liberación. Veinticuatro horas después de que se liberan, se cuenta el número de insectos en cada trampa. Se determinó que a una distancia de  $r$  metros del punto en que se ponen en libertad, el número promedio de insectos contenidos en una trampa es

$$n = f(r) = 0.1 \ln(r) + \frac{7}{r} - 0.8 \quad 1 \leq r \leq 10$$

(a) Demuestre que la gráfica de  $f$  es siempre decreciente y cóncava hacia arriba. (b) Haga el bosquejo de la gráfica de  $f$ . (c) Cuando  $r = 5$ , ¿a qué razón decrece el número promedio de insectos en una trampa con respecto a la distancia?

- 74.** Grafique  $y = -0.35x^3 - 4.1x^2 + 8.3x - 7.4$ , y de la gráfica determine el número de (a) puntos máximos relativos, (b) puntos mínimos relativos y (c) puntos de inflexión.
- 75.** Grafique  $y = x^5(x - 2.3)$  y de la gráfica determine el número de puntos de inflexión. Ahora, pruebe que para cualquier  $a \neq 0$ , la curva  $y = x^5(x - a)$  tiene dos puntos de inflexión.
- 76.** Grafique  $y = 1 - 2^{-x^2}$  y a partir de la gráfica determine el número de puntos de inflexión.
- 77.** Grafique la curva  $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ , y también la recta tangente a la curva en  $x = 2$ . Alrededor de  $x = 2$ , ¿está la curva arriba o debajo de la recta tangente? Con base en su apreciación, determine la concavidad en  $x = 2$ .
- 78.** Si  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ , encuentre  $f'(x)$  y  $f''(x)$ . Observe que donde  $f'$  tiene un mínimo relativo,  $f$  cambia la dirección de su flexión. ¿Por qué?
- 79.** Si  $f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 1$ , encuentre los valores  $x$  (redondeados a dos decimales) de los puntos de inflexión de  $f$ .
- 80.** Si  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ , determine los valores de  $x$  (redondeados a dos decimales) de los puntos de inflexión de  $f$ .

La segunda derivada puede usarse para probar si ciertos valores críticos corresponden a valores extremos relativos. Observe que en la figura 13.46 en  $a$  se tiene una tangente horizontal; esto es,  $f'(a) = 0$ . Además, alrededor de  $a$  la función es cóncava hacia arriba (esto es,  $f''(a) > 0$ ). Lo anterior lleva a concluir que habrá un mínimo relativo en  $a$ . Por otra parte, alrededor de  $b$  la función es cóncava hacia abajo (esto es,  $f''(b) < 0$ ). Como la recta tangente es horizontal en  $b$ , se concluye que ahí existe un máximo relativo. Esta técnica en la que se examina la segunda derivada en puntos donde la primera derivada es 0, se llama *prueba de la segunda derivada* para extremos relativos.

<sup>8</sup>A. L. Persky, "An Inferior Good and a Novel Indifference Map", *The American Economist* XXIX, núm. 1 (1985), 67-69.

<sup>9</sup>Adaptado de C. I. Hovland, "The Generalization of Conditioned Responses: I. The Sensory Generalization of Conditioned Responses with Varying Frequencies of Tone", *Journal of General Psychology*, 17 (1937), 125-148.

<sup>10</sup>C. S. Holling, "The Functional Response of Invertebrate Predators to Prey Density", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 48 (1966).

<sup>11</sup>Adaptado de Poole, *op. cit.*

### Prueba de la segunda derivada para extremos relativos

Suponga que  $f'(a) = 0$ .

Si  $f''(a) < 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $a$ .

Si  $f''(a) > 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $a$ .

Se debe enfatizar que la *prueba de la segunda derivada no es aplicable* cuando  $f''(a) = 0$ . Si tanto  $f'(a) = 0$  y  $f''(a) = 0$ , puede existir un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de éstos, en  $a$ . En esos casos debe usarse la prueba de la primera derivada para analizar qué sucede en  $a$ . (Además, la prueba de la segunda derivada no es aplicable cuando  $f'(a)$  no existe.)

#### EJEMPLO 1 Prueba de la segunda derivada

Pruebe las siguientes funciones en relación con sus máximos y mínimos relativos. De ser posible, utilice la prueba de la segunda derivada.

a.  $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$

**Solución:**

$$y' = 18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 + x)(3 - x)$$

$$y'' = -4x$$

(al tomar  $\frac{d}{dx}$  de  $18 - 2x^2$ )

Al resolver  $y' = 0$  se obtienen los valores críticos  $x = \pm 3$ .

Si  $x = 3$ , entonces  $y'' = -4(3) = -12 < 0$ .

Existe un máximo relativo en  $x = 3$ .

Si  $x = -3$ , entonces  $y'' = -4(-3) = 12 > 0$ .

Existe un mínimo relativo en  $x = -3$ . (Vea de nuevo la figura 13.4.)

b.  $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$

**Solución:**

$$y' = 24x^3 - 24x^2 = 24x^2(x - 1)$$

$$y'' = 72x^2 - 48x$$

Al resolver  $y' = 0$ , se obtienen los valores críticos  $x = 0, 1$ . Se observa que

si  $x = 0$ , entonces  $y'' = 0$

y

si  $x = 1$ , entonces  $y'' > 0$

De acuerdo con la prueba de la segunda derivada, se tiene un mínimo relativo en  $x = 1$ . No se puede aplicar la prueba cuando  $x = 0$ , porque ahí  $y'' = 0$ . Para ver qué pasa en 0, es necesario realizar la prueba de la primera derivada:

Si  $x < 0$ , entonces  $y' < 0$ .

Si  $0 < x < 1$ , entonces  $y' < 0$ .

Por lo tanto, no existe ni máximo ni mínimo en  $x = 0$ . (Vea de nuevo la figura 13.35.)

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5



#### ADVERTENCIA

Aunque la prueba de la segunda derivada puede ser muy útil, se recomienda no depender por completo de ella. La prueba puede no ser aplicable, y además en ocasiones podría ser muy complicado determinar la segunda derivada.

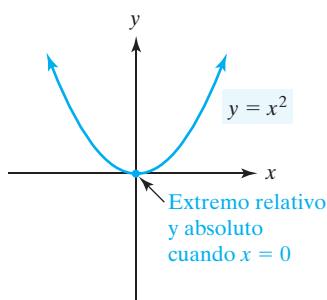


FIGURA 13.47 Exactamente un extremo relativo implica un extremo absoluto.

Si una función continua tiene *exactamente un* extremo relativo en un intervalo, puede demostrarse que el extremo relativo debe también ser un extremo *absoluto* en el intervalo. Para ilustrar esto, en la figura 13.47, la función  $y = x^2$  tiene un mínimo relativo

cuando  $x = 0$ , y no hay otros extremos relativos. Como  $y = x^2$  es continua, este mínimo relativo es también un mínimo absoluto para la función.

### EJEMPLO 2 Extremos absolutos

Si  $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ , determine dónde ocurren los extremos absolutos en el intervalo  $(0, \infty)$ .

**Solución:** Se tiene

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) \\&= 3(x + 1)(x - 3)\end{aligned}$$

El único valor crítico en el intervalo  $(0, \infty)$  es 3. Al aplicar la prueba de la segunda derivada en este punto se obtiene

$$\begin{aligned}f''(x) &= 6x - 6 \\f''(3) &= 6(3) - 6 = 12 > 0\end{aligned}$$

Así, existe un mínimo relativo en 3. Como éste es el único extremo relativo en  $(0, \infty)$  y  $f$  es continua ahí, se concluye del análisis previo que en realidad hay un valor mínimo *absoluto* en 3; este valor es  $f(3) = -22$ . (Vea la figura 13.48).

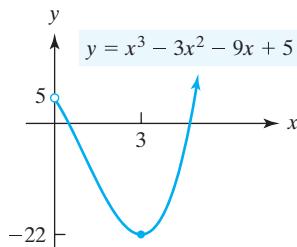


FIGURA 13.48 En  $(0, \infty)$ , existe un mínimo absoluto en 3.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

## Problemas 13.4

Realice la prueba para máximos y mínimos en los problemas 1 a 14. En caso de ser posible, use la prueba de la segunda derivada. En los problemas 1 a 4, establezca si los extremos relativos son también extremos absolutos.

- |  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. $y = x^2 - 5x + 6$                    | 2. $y = 5x^2 + 20x + 2$ |
| *3. $y = -4x^2 + 2x - 8$                 | 4. $y = 3x^2 - 5x + 6$  |
| *5. $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ | 6. $y = x^3 - 12x + 1$  |

- |                             |   |
|-----------------------------|---|
| 7. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$    | 8. $y = x^4 - 2x^2 + 4$                   |
| 9. $y = 7 - 2x^4$           | 10. $y = -2x^7$                           |
| 11. $y = 81x^5 - 5x$        | 12. $y = \frac{55}{3}x^3 - x^2 - 21x - 3$ |
| 13. $y = (x^2 + 7x + 10)^2$ | 14. $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$            |

## OBJETIVO

Determinar asíntotas horizontales y verticales para una curva y hacer el bosquejo de las gráficas de funciones que tienen asíntotas.

## 13.5 Asíntotas

### Asíntotas verticales

En esta sección se concluye el análisis sobre los procedimientos para el trazado de curvas; se investigan funciones que tengan *asíntotas*. Una asíntota es una recta a la que una curva se acerca cada vez más. Por ejemplo, en cada inciso de la figura 13.49, la línea punteada  $x = a$  es una asíntota. Para ser más precisos, es necesario hacer uso de los límites infinitos. En la figura 13.49(a), observe que cuando  $x \rightarrow a^+$ ,  $f(x)$  se vuelve positivamente infinita:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

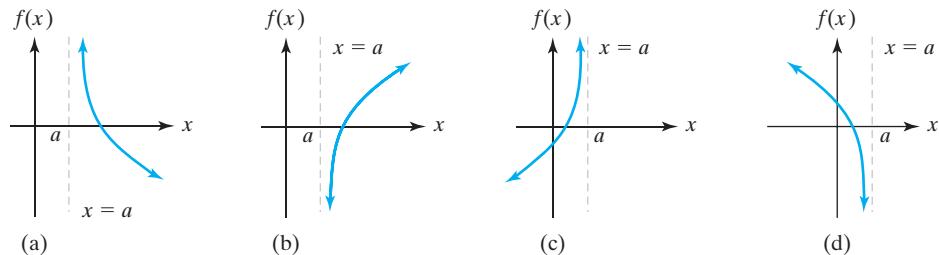


FIGURA 13.49 Asíntotas verticales  $x = a$ .

En la figura 13.49(b), cuando  $x \rightarrow a^+$ ,  $f(x)$  se vuelve negativamente infinita:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

En la figura 13.49(c) y (d) se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

respectivamente.

De manera informal se puede decir que cada gráfica de la figura 13.49 tiene una “explosión” alrededor de la línea vertical punteada  $x = a$ , en el sentido de que el límite de  $f(x)$  desde alguno de sus lados en  $a$ , es  $\infty$  o bien  $-\infty$ . La recta  $x = a$  se llama **asíntota vertical** de la gráfica. Una asíntota vertical no es parte de la gráfica, pero es útil en su trazado porque parte de la gráfica se acerca a la asíntota. Debido a la explosión alrededor de  $x = a$ , la función *no* es continua en  $a$ .

### DEFINICIÓN

La recta  $x = a$  es una **asíntota vertical** para la gráfica de la función si y sólo si se cumple al menos uno de los enunciados siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

o

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

Para determinar asíntotas verticales, se deben encontrar valores de  $x$  alrededor de los cuales  $f(x)$  crezca o disminuya indefinidamente. Para una función racional (cociente de dos polinomios), *expresada en los términos mínimos* esos valores de  $x$  son precisamente aquéllos para los que el denominador se hace cero, pero el numerador no. Por ejemplo, considere la función racional

$$f(x) = \frac{3x - 5}{x - 2}$$

Cuando  $x$  es 2, el denominador es 0, pero el numerador no. Si  $x$  es ligeramente mayor que 2, entonces el valor de  $x - 2$  resulta cercano a 0 y positivo, y el valor de  $3x - 5$  es cercano a 1. Así  $(3x - 5)/(x - 2)$  es muy grande, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 5}{x - 2} = \infty$$

Este límite es suficiente para concluir que la recta  $x = 2$  es una asíntota vertical. Como se tiene interés en el comportamiento de una función alrededor de una asíntota vertical, vale la pena examinar qué le pasa a esta función cuando  $x$  se acerca a 2 por la izquierda. Si  $x$  es ligeramente menor que 2, entonces el valor de  $x - 2$  resulta muy cercano a 0 pero negativo, y el valor de  $3x - 5$  es cercano a 1. Así,  $(3x - 5)/(x - 2)$  es “muy negativo”, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x - 5}{x - 2} = -\infty$$

Se concluye que la función crece de manera indefinida cuando  $x \rightarrow 2^+$  y decrece indefinidamente cuando  $x \rightarrow 2^-$ . La gráfica se muestra en la figura 13.50.

En resumen, se tiene una regla para las asíntotas verticales.

### Regla de las asíntotas verticales para funciones racionales

Suponga que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde  $P$  y  $Q$  son funciones polinomiales y el cociente está en los términos mínimos. La recta  $x = a$  es una asíntota vertical para la gráfica de  $f$  si y sólo si  $Q(a) = 0$  y  $P(a) \neq 0$ .



### ADVERTENCIA

Para ver que la previsión acerca de los *términos mínimos* es necesaria, observe que  $f(x) = \frac{3x - 5}{x - 2} = \frac{(3x - 5)(x - 2)}{(x - 2)^2}$ , de manera que  $x = 2$  es una asíntota vertical de  $\frac{(3x - 5)(x - 2)}{(x - 2)^2}$ , y aquí 2 hace tanto al denominador como al numerador igual a 0.

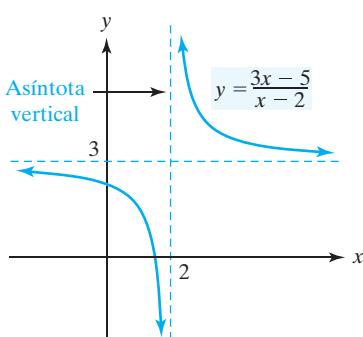


FIGURA 13.50 Gráfica de  $y = \frac{3x - 5}{x - 2}$

(Aquí podría pensarse que la regla de los “términos mínimos” elimina la posibilidad de un valor que haga tanto al denominador como al numerador iguales a 0, pero considere la función racional  $\frac{(3x-5)(x-2)}{(x-2)}$ . En este caso, no es posible dividir el numerador y el denominador entre  $x-2$ , para obtener el polinomio  $3x-5$ , porque el dominio de dicho polinomio no es igual al dominio de la ecuación original.)

### EJEMPLO 1 Determinación de asíntotas verticales

Determinar las asíntotas verticales para la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$$

**Solución:** Como  $f$  es una función racional, aquí es aplicable la regla de las asíntotas verticales. Si se escribe

$$f(x) = \frac{x(x-4)}{(x-3)(x-1)} \quad (\text{al factorizar})$$

es claro que el denominador es 0 cuando  $x$  es 3 o 1. Ninguno de esos valores hace 0 al numerador. Así que las rectas  $x = 3$  y  $x = 1$  son asíntotas verticales (vea la figura 13.51).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

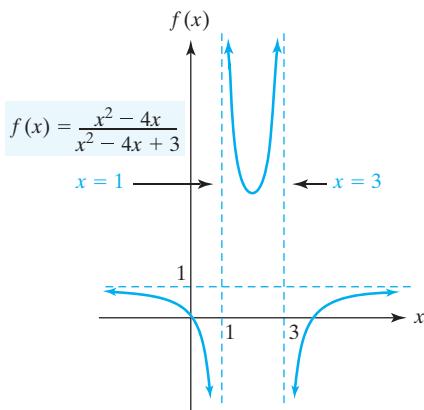


FIGURA 13.51 Gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}.$$

Aunque la regla de la asíntota vertical garantiza que las rectas  $x = 3$  y  $x = 1$  son asíntotas verticales, no indica la naturaleza precisa de la “explosión” alrededor de estas rectas. Un análisis preciso requiere del uso de los límites laterales.

### Asíntotas horizontales y oblicuas

Una curva  $y = f(x)$  puede tener otro tipo de asíntota. En la figura 13.52(a), conforme  $x$  crece indefinidamente ( $x \rightarrow \infty$ ), la gráfica se acerca a la recta horizontal  $y = b$ . Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

En la figura 13.52(b), cuando  $x$  tiende a infinito negativamente, la gráfica se acerca a la recta horizontal  $y = b$ . Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

En cada caso, la línea punteada  $y = b$  se llama *asíntota horizontal* de la gráfica, la que es una recta horizontal hacia la cual “tiende” la gráfica cuando  $x \rightarrow \infty$  o cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

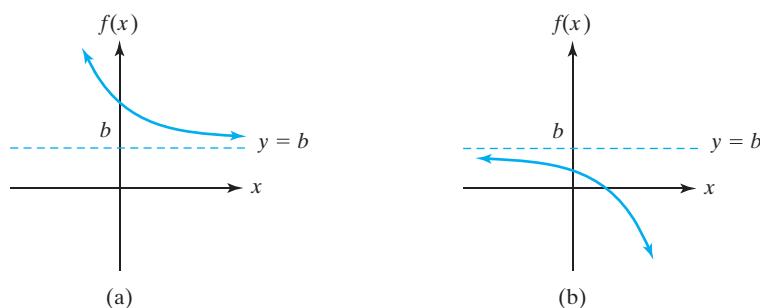


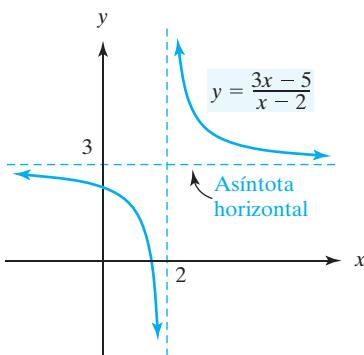
FIGURA 13.52 Asíntotas horizontales  $y = b$ .

En resumen, se tiene la definición siguiente:

#### DEFINICIÓN

Sea  $f$  una función no lineal. La recta  $y = b$  es una **asíntota horizontal** de la gráfica de  $f$  si y sólo si, por lo menos uno de los siguientes enunciados es cierto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$



**FIGURA 13.53** Gráfica de  $f(x) = \frac{3x - 5}{x - 2}$ .

Para determinar las asíntotas horizontales, primero se deben encontrar los límites de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Para ilustrar, de nuevo se considera

$$f(x) = \frac{3x - 5}{x - 2}$$

Como ésta es una función racional, pueden usarse los procedimientos de la sección 10.2 para encontrar los límites. Como el término dominante del numerador es  $3x$  y el término dominante en el denominador es  $x$ , se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3 = 3$$

Así, la recta  $y = 3$  es una asíntota horizontal. (Vea la figura 13.53). Además,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 3$$

Por lo tanto, la gráfica tiende a la recta horizontal  $y = 3$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y también cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

### EJEMPLO 2 Determinación de asíntotas horizontales

Encuentre las asíntotas horizontales para la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$$

**Solución:** Se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Por lo tanto, la recta  $y = 1$  es una asíntota horizontal. El mismo resultado se obtiene cuando  $x \rightarrow -\infty$ . (Vea nuevamente la figura 13.51).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

Las asíntotas horizontales que surgen de límites como  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = b$ , donde  $t$  significa *tiempo*, pueden ser importantes en aplicaciones de negocios como expresiones de comportamiento a largo plazo. Por ejemplo, en la sección 9.3 se analizó la participación en el mercado a largo plazo.

Si se reescribe  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - b) = 0$  como  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$ , entonces se sugiere otra posibilidad. Podría ser que el comportamiento a largo plazo de  $f$ , aunque no fuera constante, sea lineal. Esto conduce a lo siguiente:

#### DEFINICIÓN

Sea  $f$  una función. La recta  $y = mx + b$  es una **asíntota no vertical** para la gráfica de  $f$  si y sólo si al menos una de las siguientes proposiciones es verdadera:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + b)) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

Por supuesto, si  $m = 0$ , entonces sólo se ha repetido la definición de asíntota horizontal. Pero si  $m \neq 0$  entonces  $y = mx + b$  es la ecuación de una recta no horizontal (y no vertical) con pendiente  $m$  que en ocasiones se describe como *oblicua*. Por lo tanto, decir que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$  es igual a decir que para valores más grandes que  $x$ , la gráfica se asienta cerca de la línea  $y = mx + b$ , llamada con frecuencia una *asíntota oblicua* para la gráfica.

Si  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , donde el grado de  $P$  es uno más que el grado de  $Q$ , entonces la

división larga permite escribir  $\frac{P(x)}{Q(x)} = (mx + b) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ , donde  $m \neq 0$  y donde ya sea  $R(x)$  es el polinomio cero o el grado de  $R$  es estrictamente menor que el grado de  $Q$ . En este caso,  $y = mx + b$  será una asíntota oblicua para la gráfica de  $f$ . El siguiente ejemplo lo ilustrará.

● **EJEMPLO 3** Localización de una asíntota oblicua

Encuentre la asíntota oblicua para la gráfica de la función racional

$$y = f(x) = \frac{10x^2 + 9x + 5}{5x + 2}$$

**Solución:** Como el grado del numerador es 2, uno más grande que el grado del denominador, se usa la división larga para expresar

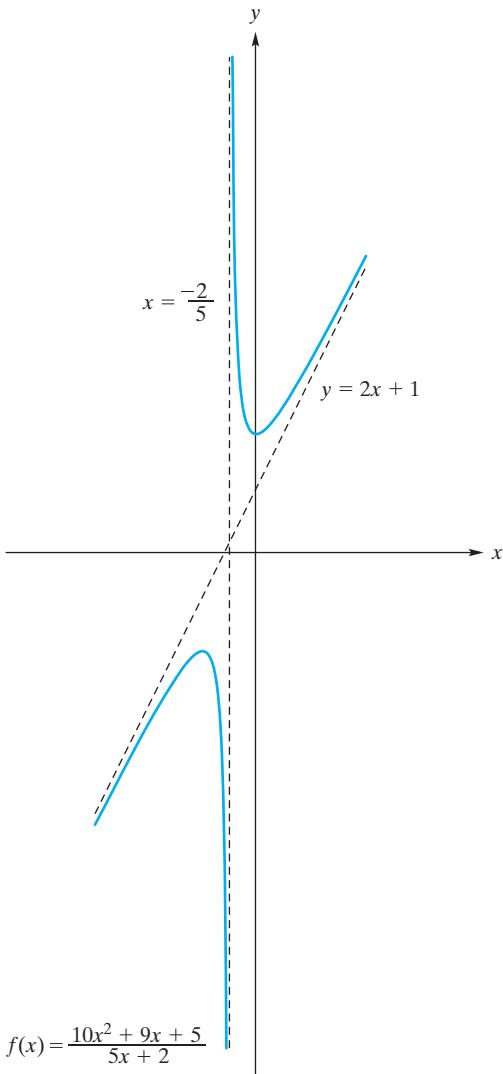
$$f(x) = \frac{10x^2 + 9x + 5}{5x + 2} = 2x + 1 + \frac{3}{5x + 2}$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (2x + 1)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{5x + 2} = 0$$

lo cual muestra que  $y = 2x + 1$  es una asíntota oblicua, de hecho es la única asíntota no vertical, como se explica después. Por otra parte, resulta claro que  $x = -\frac{2}{5}$  es una asíntota vertical, y la única. (Vea la figura 13.54).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35



**FIGURA 13.54** La gráfica de  $f(x) = \frac{10x^2 + 9x + 5}{5x + 2}$  tiene una asíntota oblicua.

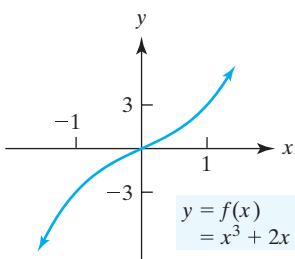
Ahora resulta oportuno hacer algunos comentarios sobre las asíntotas. Con las asíntotas verticales se examina el comportamiento de una gráfica alrededor de valores específicos de  $x$ . Sin embargo, con las asíntotas no verticales se analiza la gráfica cuando  $x$  crece indefinidamente. Aunque una gráfica puede tener numerosas asíntotas verticales, puede tener cuando más dos asíntotas no verticales diferentes, posiblemente una para  $x \rightarrow \infty$  y una para  $x \rightarrow -\infty$ . Si, por ejemplo, la gráfica tiene dos asíntotas horizontales, entonces no puede tener asíntotas oblicuas.

En la sección 10.2 se vio que cuando el numerador de una función racional tiene un grado mayor que el denominador, no existe un límite cuando  $x \rightarrow \infty$  o cuando  $x \rightarrow -\infty$ . De esta observación se concluye que *siempre que el grado del numerador de una función racional sea mayor que el del denominador, la gráfica de la función no puede tener una asíntota horizontal*. De manera similar, puede mostrarse que si el grado del numerador de una función racional es mayor que el grado del denominador, la función no puede tener una asíntota oblicua.

#### EJEMPLO 4 Determinación de asíntotas verticales y horizontales

*Encuentre las asíntotas verticales y horizontales para la gráfica de la función polinomial*

$$y = f(x) = x^3 + 2x$$



**FIGURA 13.55** Gráfica de  $y = x^3 + 2x$  no tiene asíntota horizontal ni asíntota vertical.

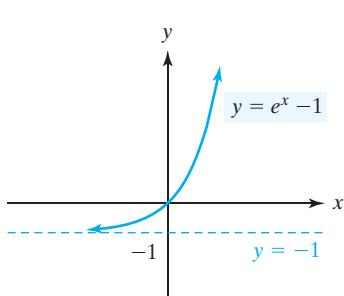
**Solución:** Se comienza con las asíntotas verticales. Ésta es una función racional con denominador igual a 1, el que nunca es cero. Por la regla de las asíntotas verticales, no se tienen asíntotas verticales. Como el grado del numerador (3) es mayor que el del denominador (0), no se tienen asíntotas horizontales. Sin embargo, se examinará el comportamiento de la gráfica cuando  $x \rightarrow \infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$$

$$y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Entonces, cuando  $x \rightarrow \infty$  la gráfica se extiende indefinidamente hacia arriba, y cuando  $x \rightarrow -\infty$  se extiende indefinidamente hacia abajo. (Vea la figura 13.55).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



**FIGURA 13.56** La gráfica de  $y = e^x - 1$  tiene una asíntota horizontal.

Los resultados del ejemplo 3 pueden generalizarse a cualquier función polinomial:

Una función polinomial de grado mayor que 1 no tiene asíntotas.

#### EJEMPLO 5 Determinación de asíntotas horizontales y verticales

*Encuentre las asíntotas horizontales y verticales para la gráfica de  $y = e^x - 1$ .*

**Solución:** Para investigar las asíntotas horizontales, se hace que  $x \rightarrow \infty$ . Entonces  $e^x$  crece indefinidamente, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - 1) = \infty$$

Así, la gráfica no tiende a valor alguno cuando  $x \rightarrow \infty$ . Sin embargo, cuando  $x \rightarrow -\infty$ , se tiene que  $e^x \rightarrow 0$ , por lo que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 0 - 1 = -1$$

Por lo tanto, la recta  $y = -1$  es una asíntota horizontal. La gráfica no tiene asíntotas verticales porque  $e^x - 1$  no crece ni disminuye indefinidamente alrededor de algún punto fijo de  $x$ . (Vea la figura 13.56).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23

### Trazado de curvas

En esta sección se muestra cómo graficar una función con todas las herramientas que se han desarrollado para el trazado de curvas.

 **EJEMPLO 6** Trazado de una curva

Haga el bosquejo de la gráfica de  $y = \frac{1}{4 - x^2}$ .

**Solución:**

**Intersecciones** Cuando  $x = 0$ ,  $y = \frac{1}{4}$ . Si  $y = 0$ , entonces  $0 = 1/(4 - x^2)$ , que no tiene solución. Así  $(0, \frac{1}{4})$  es la única intersección. Sin embargo, la factorización

$$y = \frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{(2 + x)(2 - x)}$$

permite construir el siguiente diagrama de signos para  $y$ , y mostrar dónde la gráfica está por debajo del eje  $x$  (-) y dónde está por arriba del eje  $x$  (+).

	-2	2	
$\frac{1}{2+x}$	-	+	+
$\frac{1}{2-x}$	+	+	-
$y$	-	+	-

**FIGURA 13.57** Diagrama de signos para  $y = \frac{1}{4 - x^2}$ .

**Simetría** Existe simetría con respecto al eje  $y$ :

$$y(-x) = \frac{1}{4 - (-x)^2} = \frac{1}{4 - x^2} = y(x)$$

Como  $y$  es una función de  $x$  ( $y$  no es la función constante 0), no puede haber simetría alrededor del eje  $x$  y por ende no hay simetría con respecto al origen. Como  $x$  no es una función de  $y$  ( $y$  es una función de  $x$ ), no puede existir simetría con respecto a  $y = x$  tampoco.

**Asíntotas** De la factorización de  $y$  anterior, se observa que  $x = -2$  y  $x = 2$  son asíntotas verticales. Al probar por asíntotas horizontales, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{-x^2} = - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

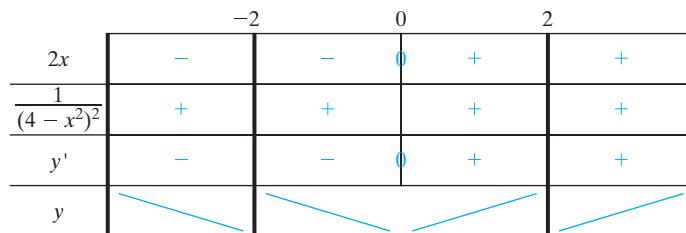
Así,  $y = 0$  (el eje  $x$ ) es la única asíntota no vertical.

**Máximos y mínimos** Como  $y = (4 - x^2)^{-1}$ ,

$$y' = -1(4 - x^2)^{-2}(-2x) = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}$$

Se observa que  $y'$  es 0 cuando  $x = 0$  y que  $y'$  no está definida cuando  $x = \pm 2$ . Sin embargo, sólo 0 es un valor crítico, porque  $y$  no está definida en  $\pm 2$ . A continuación se presenta el diagrama de signos para  $y'$ . (Vea la figura 13.58.)

El diagrama de signos muestra claramente que la función es decreciente en  $(-\infty, -2)$  y  $(-2, 0)$  y creciente en  $(0, 2)$  y  $(2, \infty)$ , y existe un mínimo relativo en  $x = 0$ .



**FIGURA 13.58** Diagrama de signos para  $y' = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}$ .

**Concavidad**

$$\begin{aligned}y'' &= \frac{(4-x^2)^2(2) - (2x)2(4-x^2)(-2x)}{(4-x^2)^4} \\&= \frac{2(4-x^2)[(4-x^2) - (2x)(-2x)]}{(4-x^2)^4} = \frac{2(4+3x^2)}{(4-x^2)^3}\end{aligned}$$

Se establece  $y'' = 0$ , no se obtienen raíces reales. Sin embargo,  $y''$  no está definida cuando  $x = \pm 2$ . Aunque la concavidad puede cambiar alrededor de esos valores de  $x$ , éstos no corresponden a puntos de inflexión porque no están en el dominio de la función. Hay tres intervalos donde se debe investigar la concavidad. (Vea la figura 13.59).

El diagrama de signos muestra que la gráfica es cóncava hacia arriba en  $(-2, 2)$  y cóncava hacia abajo en  $(-\infty, -2)$  y  $(2, \infty)$ .

	-2	2	
$4 + 3x^2$	+	+	+
$\frac{1}{(4-x^2)^3}$	-	+	-
$y''$	-	+	-
$y$	□	U	□

FIGURA 13.59 Análisis de concavidad.

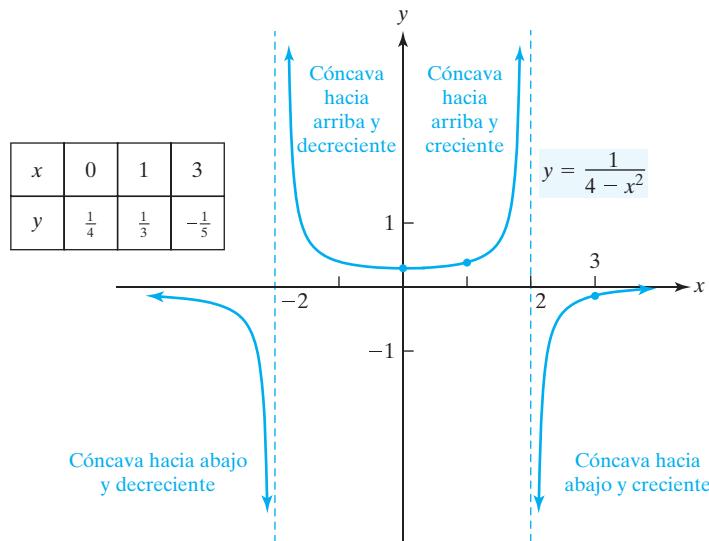


FIGURA 13.60 Gráfica de  $y = \frac{1}{4-x^2}$ .

**Análisis** Sólo un punto sobre la curva,  $(0, 1/4)$ , ha surgido como un punto especial que debe graficarse (porque es una intersección y al mismo tiempo un mínimo local). Quizá desee graficar unos cuantos puntos más en la tabla de la figura 13.60, pero note que ninguno de esos puntos adicionales es valioso a menos que esté en el mismo lado del eje  $y$  (debido a la simetría). Si se toma en cuenta toda la información recopilada, se obtiene la gráfica de la figura 13.60.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31



### EJEMPLO 7 Trazado de una curva

Trace la gráfica de  $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ .

**Solución:**

**Intersecciones** Cuando  $x = 0$ ,  $y = 0$ ; cuando  $y = 0$ ,  $x = 0$ . Así,  $(0, 0)$  es la única intersección. Como el denominador de  $y$  es siempre positivo, se observa que el signo de  $y$  es el de  $x$ . Aquí se evita la construcción de un diagrama de signos para  $y$ . De las observaciones realizadas hasta ahora se deduce que la gráfica va del tercer cuadrante ( $x$  negativa y  $y$  negativa), hacia  $(0, 0)$  y hasta el cuadrante positivo ( $x$  positiva y  $y$  positiva).

**Simetría** Hay simetría con respecto al origen:

$$y(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-4x}{x^2 + 1} = -y(x)$$

No existe ninguna otra simetría.

**Asíntotas** El denominador de esta función racional nunca es 0, de manera que no hay asíntotas verticales. Al investigar las asíntotas horizontales, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x} = 0$$

Así,  $y = 0$  (el eje  $x$ ) es una asíntota horizontal y la única asíntota no vertical.

**Máximos y mínimos** Se tiene

$$y' = \frac{(x^2 + 1)(4) - 4x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4(1 + x)(1 - x)}{(x^2 + 1)^2}$$

Los valores críticos son  $x = \pm 1$ , por lo que hay tres intervalos a considerar en el diagrama de signos. (Vea la figura 13.61).

Se observa que  $y$  es decreciente en  $(-\infty, -1)$  y en  $(1, \infty)$ , creciente en  $(-1, 1)$ , con un mínimo relativo en  $-1$  y un máximo relativo en  $1$ . El mínimo relativo es  $(-1, y(-1)) = (-1, -2)$ ; el máximo relativo es  $(1, y(1)) = (1, 2)$ .

		-1		1		
$1 + x$		-	0	+	+	
$1 - x$		+		+	0	-
$\frac{1}{(x^2 + 1)^2}$		+		+		+
$y'$		-	0	+	0	-
$y$						

FIGURA 13.61 Diagrama de signos para  $y'$ .

**Concavidad** Como  $y' = \frac{4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(x^2 + 1)^2(-8x) - (4 - 4x^2)(2)(x^2 + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{8x(x^2 + 1)(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{8x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

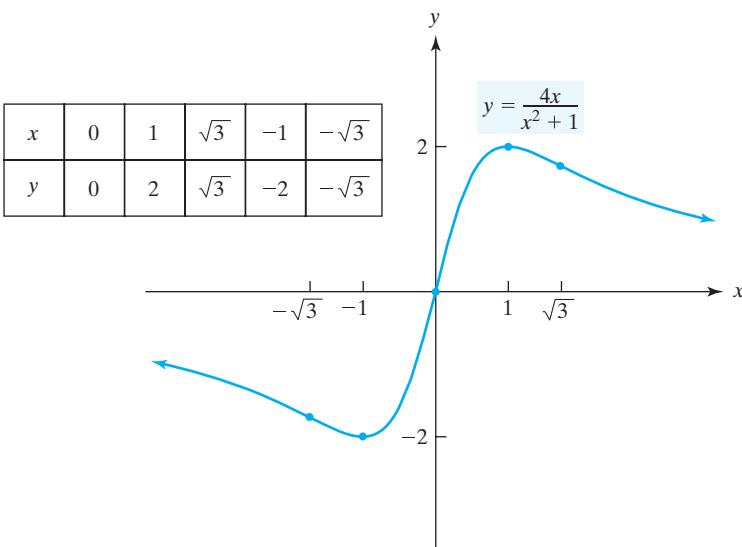
Se determina que  $y'' = 0$ , se concluye que los puntos de inflexión posibles se presentan cuando  $x = \pm\sqrt{3}, 0$ . Hay cuatro intervalos a considerar en el diagrama de signos. (Vea la figura 13.62).

		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		
$x + \sqrt{3}$		-	0	+		+	+	
$x$		-		-	0	+	+	
$x - \sqrt{3}$		-		-		-	0	+
$\frac{1}{(x^2 + 1)^3}$		+		+		+		+
$y''$		-	0	+	0	-	0	+
$y$		□		U		□		U

FIGURA 13.62 Análisis de concavidad para  $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ .

Los puntos de inflexión ocurren en  $x = 0$  y  $\pm\sqrt{3}$ . Los puntos de inflexión son

$$(-\sqrt{3}, y(\sqrt{3})) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \quad (0, y(0)) = (0, 0) \quad (\sqrt{3}, y(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

FIGURA 13.63 Gráfica de  $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ .

**Análisis** Despues de considerar toda la información obtenida, se llega a la gráfica de  $y = 4x/(x^2 + 1)$  que se muestra en la figura 13.63, junto con una tabla de puntos importantes.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 39

## Problemas 13.5

En los problemas 1 a 24, encuentre las asíntotas horizontales y verticales para las gráficas de las funciones. No trace las gráficas.

\*1.  $y = \frac{x}{x-1}$

2.  $y = \frac{x+1}{x}$

27.  $y = \frac{x}{x-1}$

28.  $y = \frac{10}{\sqrt{x}}$

29.  $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

30.  $y = \frac{3x^2 - 5x - 1}{x - 2}$

\*31.  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

32.  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

33.  $y = \frac{1+x}{1-x}$

34.  $y = \frac{1+x}{x^2}$

\*35.  $y = \frac{x^2}{7x+4}$

36.  $y = \frac{x^3 + 1}{x}$

37.  $y = \frac{9}{9x^2 - 6x - 8}$

38.  $y = \frac{8x^2 + 3x + 1}{2x^2}$

\*39.  $y = \frac{3x+1}{(3x-2)^2}$

40.  $y = \frac{3x+1}{(6x+5)^2}$

41.  $y = \frac{x^2 - 1}{x^3}$

42.  $y = \frac{3x}{(x-2)^2}$

43.  $y = x + \frac{1}{x+1}$

44.  $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$

45.  $y = \frac{-3x^2 + 2x - 5}{3x^2 - 2x - 1}$

46.  $y = 3x + 2 + \frac{1}{3x+2}$

47. Trace la gráfica de una función  $f$  tal que  $f(0) = 0$ , tenga una asíntota horizontal  $y = 1$  para  $x \rightarrow \pm\infty$ , tenga una asíntota vertical  $x = 2$ , para  $x < 2$  tenga tanto  $f'(x) < 0$  como  $f''(x) < 0$ , y para  $x > 2$  tenga tanto  $f'(x) < 0$  como  $f''(x) > 0$ .

48. Trace la gráfica de una función  $f$  tal que  $f(0) = 0$ , tenga una asíntota horizontal  $y = 2$  para  $x \rightarrow \pm\infty$ , tenga una asíntota vertical  $x = -1$ , para  $x < -1$  tenga tanto  $f'(x) > 0$  como  $f''(x) > 0$ , y para  $x > -1$  tenga tanto  $f'(x) > 0$  como  $f''(x) < 0$ .

49. Trace la gráfica de una función  $f$  tal que  $f(0) = 0$ , tenga una asíntota horizontal  $y = 0$  para  $x \rightarrow \pm\infty$ , tenga asíntotas verticales  $x = -1$  y  $x = 2$ ,  $f'(x) < 0$  para  $x < -1$  y para  $-1 < x < 2$ , y además  $f''(x) < 0$  para  $x > 2$ .

En los problemas 25 a 46, determine los intervalos en los que la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo; máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión; simetría; asíntotas horizontales y verticales; y aquellas intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente. Despues trace la gráfica de la curva.

25.  $y = \frac{3}{x}$

26.  $y = \frac{2}{2x-3}$

50. Trace la gráfica de una función  $f$  tal que  $f(-2) = 2, f(0) = 0, f(2) = 0$ , tenga una asíntota horizontal  $y = 1$  para  $x \rightarrow \pm\infty$ , tenga asíntotas verticales  $x = -1$  y  $x = 1, f''(x) > 0$  para  $x < -1$  y  $f'(x) < 0$  para  $-1 < x < 1$  y  $f''(x) < 0$  para  $1 < x$ .
51. **Poder de compra** Al analizar el patrón temporal de compras, Mantell y Sing<sup>12</sup> utilizan la curva

$$y = \frac{x}{a + bx}$$

como un modelo matemático. Encuentre las asíntotas para su modelo.

52. Trace las gráficas de  $y = 6 - 3e^{-x}$  y  $y = 6 + 3e^{-x}$ . Demuestre que son asintóticas a la misma línea. ¿Cuál es la ecuación de esta línea?
53. **Mercado para un producto** Se estima que para un producto nuevo, el número anual de miles de paquetes vendidos  $y$ , después de  $t$  años, contados a partir de su introducción al mercado estará dado por

$$y = f(t) = 150 - 76e^{-t}$$

Demuestre que  $y = 150$  es una asíntota horizontal para la gráfica de esta ecuación. Esto revela que una vez que el producto se ha establecido entre los consumidores, el mercado tiende a ser constante.

## OBJETIVO

Modelar situaciones que involucran la maximización o la minimización de cantidades.

**El objetivo de este ejemplo es establecer una función de costo a partir de la cual éste se pueda minimizar.**



FIGURA 13.64 Problema de la cerca del ejemplo 1.

54. Grafique  $y = \frac{x^2 - 2}{x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 12x + 1}$ . Con base en la gráfica, localice las asíntotas horizontales y verticales.

55. Grafique  $y = \frac{6x^3 - 2x^2 + 6x - 1}{3x^3 - 2x^2 - 18x + 12}$ . A partir de la gráfica, localice las asíntotas horizontales y verticales.

56. Grafique  $y = \frac{\ln(x+4)}{x^2 - 8x + 5}$  en la pantalla estándar. La gráfica sugiere que hay dos asíntotas verticales de la forma  $x = k$ , donde  $k > 0$ . También, parece que la gráfica "comienza" cerca de  $x = -4$ . Cuando  $x \rightarrow -4^+$ ,  $\ln(x+4) \rightarrow -\infty$  y  $x^2 - 8x + 5 \rightarrow 53$ . Así,  $\lim_{x \rightarrow -4^+} y = -\infty$ . Esto proporciona la asíntota vertical  $x = -4$ . De modo que, en realidad, existen tres asíntotas verticales. Utilice el comando zoom para hacer clara la asíntota  $x = -4$  en la pantalla.

57. Grafique  $y = \frac{0.34e^{0.7x}}{4.2 + 0.71e^{0.7x}}$  donde  $x > 0$ . A partir de la gráfica, determine una ecuación de la asíntota horizontal al examinar los valores de  $y$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Para confirmar esta ecuación de manera algebraica, encuentre el  $\lim_{x \rightarrow \infty} y$  al dividir primero tanto el numerador como el denominador entre  $e^{0.7x}$ .

## 13.6 Aplicación de máximos y mínimos

Por medio de los procedimientos vistos en el capítulo anterior, es posible resolver problemas que impliquen maximizar o minimizar una cantidad. Por ejemplo, quizás se busque la maximización de una ganancia o la minimización de un costo. La parte crucial consiste en expresar la cantidad que se debe maximizar o minimizar como función de alguna variable contenida en el problema. Luego se diferencia y se prueban los valores críticos resultantes. Para esto, pueden usarse las pruebas de la primera o de la segunda derivadas, aunque puede ser obvio debido a la naturaleza del problema, si un valor crítico representa o no una respuesta apropiada. Como el interés estriba en los máximos y mínimos *absolutos*, a veces será necesario examinar los puntos extremos del dominio de la función. (Con mucha frecuencia, la función que se usa para modelar la situación de un problema será la restricción a un intervalo cerrado de una función que tiene un dominio natural más grande. Tales limitaciones del *mundo real* tienden a generar puntos extremos).

### EJEMPLO 1 Minimización del costo de una cerca

Con el propósito de tener mayor seguridad, un fabricante planea cercar un área de almacenamiento rectangular de 10 800 pies<sup>2</sup>, que es adyacente a un edificio, el cual se utilizará como uno de los lados del área cercada. La cerca paralela al edificio colinda con una carretera y costará \$3 por pie instalado, mientras que de los otros dos lados la cerca costará \$2 por pie instalado. Encuentre la cantidad de cada tipo de cerca, de manera que el costo total sea mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo?

**Solución:** Como primer paso en un problema como éste, es una buena idea dibujar un diagrama que refleje la situación. En la figura 13.64 se llama  $x$  a la longitud del lado paralelo al edificio y  $y$  a las longitudes de los otros dos lados, donde  $x$  y  $y$  están en pies.

Como se desea minimizar el costo, el siguiente paso es determinar una función que proporcione el costo. Es obvio que depende de cuánta cerca se ponga a lo largo de la carretera y cuánta a lo largo de los otros dos lados. A lo largo de la carretera, el costo por pie es de \$3, por lo que el costo total de esa cerca es  $3x$ . De manera similar, a lo largo de *cada uno* de los otros lados, el costo es  $2y$ . Así, el costo total  $C$  de la cerca está dado por la función de costo

$$C = 3x + 2y + 2y$$

<sup>12</sup>L. H. Mantell y F. P. Sing, *Economics for Business Decisions* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1972), p. 107.

es decir

$$C = 3x + 4y \quad (1)$$

Es necesario encontrar el valor mínimo absoluto de  $C$ . Para hacer esto se usan las técnicas que se han analizado en este capítulo; es decir, se examina a  $C$  en sus valores críticos (y cualquier punto extremo) en el dominio. Pero para diferenciar, se necesita primero expresar  $C$  en función de sólo una variable [la ecuación (1) da a  $C$  como función de *dos* variables,  $x$  y  $y$ ]. Esto se puede lograr si se encuentra primero una relación entre  $x$  y  $y$ . Del enunciado del problema se observa que el área de almacenamiento, que es  $xy$ , debe ser igual a 10 800:

$$xy = 10\,800 \quad (2)$$

Con esta ecuación, se puede expresar una variable (por ejemplo,  $y$ ) en términos de la otra ( $x$ ). Entonces, al sustituir en la ecuación (1) se tendrá a  $C$  como función de sólo una variable. Al despejar  $y$  de la ecuación (2) resulta

$$y = \frac{10\,800}{x} \quad (3)$$

Al sustituir en la ecuación (1), se tiene

$$\begin{aligned} C &= C(x) = 3x + 4\left(\frac{10\,800}{x}\right) \\ C(x) &= 3x + \frac{43\,200}{x} \end{aligned} \quad (4)$$

Dada la naturaleza física del problema, el dominio de  $C$  es  $x > 0$ .

Ahora se encuentra  $dC/dx$ , se iguala a 0 y se despeja  $x$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dx} &= 3 - \frac{43\,200}{x^2} \quad \left( \frac{d}{dx}(43\,200x^{-1}) = -43\,200x^{-2} \right) \\ 3 - \frac{43\,200}{x^2} &= 0 \\ 3 &= \frac{43\,200}{x^2} \end{aligned}$$

de lo cual se sigue que

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{43\,200}{3} = 14\,400 \quad (\text{puesto que } x > 0) \\ x &= 120 \end{aligned}$$

Así, 120 es el *único* valor crítico y no hay puntos extremos que considerar. Para probar este valor, se usará la prueba de la segunda derivada.

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{86\,400}{x^3}$$

Cuando  $x = 120$ ,  $d^2C/dx^2 > 0$ , entonces se puede concluir que  $x = 120$  da un mínimo relativo. Sin embargo, como 120 es el único valor crítico en el intervalo abierto  $(0, \infty)$  y  $C$  es continua en ese intervalo, dicho mínimo relativo debe también ser un mínimo absoluto.

Pero el ejercicio aún no está terminado. Todas las preguntas del problema deben contestarse. Para tener un costo mínimo el número de pies de cerca a lo largo de la carretera es de 120. Cuando  $x = 120$ , de la ecuación (3) se tiene  $y = 10\,800/120 = 90$ . Por lo tanto, el número de pies de cerca para los otros dos lados es  $2y = 180$ . Entonces, se requieren 120 pies de cerca de \$3 y 180 pies de la cerca de \$2. El costo mínimo puede obtenerse a partir de la función de costo dada por la ecuación (4), el cual es

$$C(120) = 3x + \frac{43\,200}{x} \Big|_{x=120} = 3(120) + \frac{43\,200}{120} = 720$$



Con base en el ejemplo 1, la siguiente guía puede ser útil en la resolución de problemas prácticos sobre máximos y mínimos:

### Guía para la resolución de problemas de aplicación de máximos y mínimos

- Paso 1.** Cuando sea apropiado, dibuje un diagrama que muestre la información dada en el problema.
- Paso 2.** Formule una función para la cantidad que se quiera maximizar o minimizar.
- Paso 3.** Exprese la función del paso 2 como función de una sola variable y señale el dominio de esta función. El dominio puede determinarse por la naturaleza del problema.
- Paso 4.** Encuentre los valores críticos de la función. Después de probar cada valor crítico, determine cuál proporciona el valor extremo absoluto que se busca. Si el dominio de la función incluye puntos extremos, examine también los valores de la función en esos puntos.
- Paso 5.** Con base en los resultados del paso 4, responda las preguntas que se formularon en el enunciado del problema.

### EJEMPLO 2 Maximización del ingreso

Este ejemplo implica la maximización del ingreso cuando se conoce una ecuación de demanda.

La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = \frac{80 - q}{4} \quad 0 \leq q \leq 80$$

donde  $q$  es el número de unidades y  $p$  el precio por unidad. ¿Para qué valor de  $q$  se tendrá un ingreso máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

**Solución:** Sea  $r$  el ingreso total, el cual es la cantidad por maximizar. Como

$$\text{ingreso} = (\text{precio})(\text{cantidad})$$

se tiene

$$r = pq = \frac{80 - q}{4} \cdot q = \frac{80q - q^2}{4} = r(q)$$

donde  $0 \leq q \leq 80$ . Se establece  $dr/dq = 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dq} &= \frac{80 - 2q}{4} = 0 \\ 80 - 2q &= 0 \\ q &= 40 \end{aligned}$$

Así, 40 es el único valor crítico. Ahora se verá si este valor da un máximo. Tras examinar la primera derivada para  $0 \leq q < 40$ , se tiene  $dr/dq > 0$ , por lo que  $r$  es creciente. Si  $q > 40$ , entonces  $dr/dq < 0$ , por lo que  $r$  es decreciente. Debido a que a la izquierda de 40 se tiene que  $r$  es creciente y a la derecha de 40 es decreciente, se concluye que  $q = 40$  da el ingreso máximo *absoluto*, a saber

$$r(40) = (80)(40) - (40)^2/4 = 400$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7



### EJEMPLO 3 Minimización del costo promedio

La función de costo total de un fabricante está dada por

$$c = c(q) = \frac{q^2}{4} + 3q + 400$$

donde  $c$  es el costo total de producir  $q$  unidades. ¿Para qué nivel de producción será el costo promedio por unidad un mínimo? ¿Cuál es este mínimo?

Este ejemplo implica la minimización del costo promedio cuando se conoce la función de costo.

**Solución:** La cantidad a minimizar es el costo promedio  $\bar{c}$ . La función de costo promedio es

$$\bar{c} = \bar{c}(q) = \frac{c}{q} = \frac{\frac{q^2}{4} + 3q + 400}{q} = \frac{q}{4} + 3 + \frac{400}{q} \quad (5)$$

Aquí  $q$  debe ser positiva. Para minimizar  $\bar{c}$ , se diferencia:

$$\frac{d\bar{c}}{dq} = \frac{1}{4} - \frac{400}{q^2} = \frac{q^2 - 1600}{4q^2}$$

Para obtener los valores críticos, se resuelve  $d\bar{c}/dq = 0$ :

$$\begin{aligned} q^2 - 1600 &= 0 \\ (q - 40)(q + 40) &= 0 \\ q &= 40 \quad (\text{puesto que } q > 0) \end{aligned}$$

Para determinar si este nivel de producción da un mínimo relativo, se usará la prueba de la segunda derivada. Se tiene

$$\frac{d^2\bar{c}}{dq^2} = \frac{800}{q^3}$$

que es positiva para  $q = 40$ . Así,  $\bar{c}$  tiene un mínimo relativo cuando  $q = 40$ . Se observa que  $\bar{c}$  es continua para  $q > 0$ . Como  $q = 40$  es el único extremo relativo, se concluye que este mínimo relativo también es un mínimo absoluto. Se sustituye  $q = 40$  en la ecuación (5) se obtiene el costo promedio mínimo  $\bar{c}(40) = \frac{40}{4} + 3 + \frac{400}{40} = 23$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5



#### ● EJEMPLO 4 Maximización aplicada a enzimas

Una enzima es una proteína que actúa como catalizador para incrementar la velocidad de las reacciones químicas que ocurren en las células. En cierta reacción, una enzima se convierte en otra enzima llamada el producto. Éste actúa como catalizador para su propia formación. La velocidad  $R$  a la que el producto se forma (con respecto al tiempo) está dada por

$$R = kp(l - p)$$

donde  $l$  es la cantidad inicial total de ambas enzimas,  $p$  la cantidad de la enzima producto y  $k$  una constante positiva. ¿Para qué valor de  $p$  será  $R$  un máximo?

**Solución:** Se puede escribir  $R = k(pl - p^2)$ . Si se establece que  $dR/dp = 0$  y se despeja  $p$  se obtiene

$$\frac{dR}{dp} = k(l - 2p) = 0$$

$$p = \frac{l}{2}$$

Ahora,  $d^2R/dp^2 = -2k$ . Como  $k > 0$ , la segunda derivada es siempre negativa. De aquí que  $p = l/2$  da un máximo relativo. Además, como  $R$  es una función continua de  $p$ , se concluye que hay un máximo absoluto en  $p = l/2$ .



El cálculo puede aplicarse a decisiones relacionadas con inventarios, como se verá en el ejemplo siguiente.

#### ● EJEMPLO 5 Tamaño de un lote económico

Una empresa produce y vende anualmente 10 000 unidades de un artículo. Las ventas están distribuidas uniformemente a lo largo del año. La compañía desea determinar el número de unidades que deben fabricarse en cada periodo de producción para minimizar los costos totales anuales de operación y los costos de inventario. Se producen el mismo número de unidades en cada periodo. Este número se denomina **tamaño económico del lote o cantidad económica de pedido**. El costo de producir cada unidad es de \$20 y los

Este ejemplo implica la determinación del número de unidades en un periodo de producción para minimizar ciertos costos.

costos de inventario (seguro, interés, almacenamiento, etcétera) se estiman iguales al 10% del valor promedio del inventario. Los costos de operación por periodo de producción son \$40. Encuentre el tamaño económico del lote.

**Solución:** Sea  $q$  el número de unidades en un periodo de producción. Como las ventas están distribuidas a razón uniforme, se supondrá que el inventario varía uniformemente de  $q$  a 0 entre períodos de producción. Así, se toma el inventario promedio igual a  $q/2$  unidades. Los costos de producción son de \$20 por unidad, por lo que el valor promedio del inventario es de  $20(q/2)$ . Los costos del inventario son el 10% de este valor:

$$0.10(20)\left(\frac{q}{2}\right)$$

El número de períodos de producción por año es de  $10\ 000/q$ . Entonces, los costos totales de operación son

$$40\left(\frac{10\ 000}{q}\right)$$

Por lo tanto, el total de los costos de inventario y operación está dado por

$$\begin{aligned} C &= 0.10(20)\left(\frac{q}{2}\right) + 40\left(\frac{10\ 000}{q}\right) \\ &= q + \frac{400\ 000}{q} \quad (q > 0) \\ \frac{dC}{dq} &= 1 - \frac{400\ 000}{q^2} = \frac{q^2 - 400\ 000}{q^2} \end{aligned}$$

Se determina  $dC/dq = 0$ , se obtiene

$$q^2 = 400\ 000.$$

Como  $q > 0$ ,

$$q = \sqrt{400\ 000} = 200\sqrt{10} \approx 632.5$$

Para determinar si este valor de  $q$  minimiza a  $C$ , se examinará la primera derivada. Si  $0 < q < \sqrt{400\ 000}$ , entonces  $dC/dq < 0$ . Si  $q > \sqrt{400\ 000}$ , entonces  $dC/dq > 0$ . Se concluye que hay un mínimo absoluto en  $q = 632.5$ . El número de períodos de producción es de  $10\ 000/632.5 \approx 15.8$ . Para propósitos prácticos, serían 16 lotes, cada uno con tamaño económico de lote igual a 625 unidades.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29 

### EJEMPLO 6 Maximización del ingreso de una empresa de televisión por cable

La intención de este ejemplo es establecer una función de ingreso a partir de la cual se maximice el ingreso sobre un intervalo cerrado

*La empresa Vista TV Cable tiene actualmente 100 000 suscriptores que pagan una cuota mensual de \$40. Una encuesta reveló que se tendrían 1000 suscriptores más por cada \$0.25 de disminución en la cuota. ¿Para qué cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendrían con dicha cuota?*

**Solución:** Sea  $x$  el número de disminuciones de \$0.25. La cuota mensual es entonces de  $40 - 0.25x$ , donde  $0 \leq x \leq 160$  (la cuota no puede ser negativa) y el número de suscriptores nuevos es  $1000x$ . Por lo tanto, el número total de suscriptores es  $100\ 000 + 1000x$ . Se desea maximizar el ingreso, que está dado por

$$\begin{aligned} r &= (\text{número de suscriptores})(\text{cuota por suscriptor}) \\ &= (100\ 000 + 1000x)(40 - 0.25x) \\ &= 1000(100 + x)(40 - 0.25x) \\ &= 1000(4000 + 15x - 0.25x^2) \end{aligned}$$

Si se establece  $r' = 0$  y se despeja  $x$ , se tiene

$$r' = 1000(15 - 0.5x) = 0$$

$$x = 30$$

Como el dominio de  $r$  es el intervalo cerrado  $[0, 160]$ , el valor máximo absoluto de  $r$  debe ocurrir en  $x = 30$  o en uno de los puntos extremos del intervalo. Ahora se calculará  $r$  en esos tres puntos:

$$r(0) = 1000(4000 + 15(0) - 0.25(0)^2) = 4\,000\,000$$

$$r(30) = 1000(4000 + 15(30) - 0.25(30)^2) = 4\,225\,000$$

$$r(160) = 1000(4000 + 15(160) - 0.25(160)^2) = 0$$

De acuerdo con esto, el ingreso máximo ocurre cuando  $x = 30$ . Esto corresponde a 30 disminuciones de \$0.25, para una disminución total de \$7.50; esto es, la cuota mensual es \$32.50. El número de suscriptores con esa cuota es  $100\,000 + 30(1000) = 130\,000$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19



### EJEMPLO 7 Maximización del número de beneficiarios de servicios de salud

*Un artículo en una revista de sociología afirma que si ahora se iniciase un programa específico de servicios de salud, entonces al cabo de  $t$  años,  $n$  miles de personas ancianas recibirían beneficios directos, donde*

$$n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t \quad 0 \leq t \leq 12$$

¿Para qué valor de  $t$  el número de beneficiarios es máximo?

**Solución:** Se establece  $dn/dt = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= t^2 - 12t + 32 = 0 \\ (t - 4)(t - 8) &= 0 \\ t &= 4 \quad \text{o} \quad t = 8 \end{aligned}$$

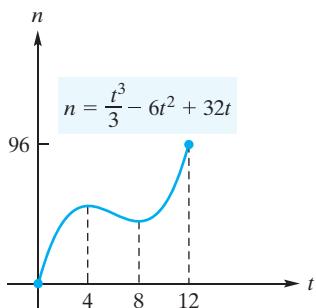


FIGURA 13.65 Gráfica de  $n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t$  en  $[0, 12]$ .

Como el dominio de  $n$  es el intervalo cerrado  $[0, 12]$ , el valor máximo absoluto de  $n$  debe ocurrir en  $t = 0, 4, 8$  o  $12$ :

$$\begin{aligned} n(0) &= \frac{0^3}{3} - 6(0^2)0 + 32(0) = 0 \\ n(4) &= \frac{4^3}{3} - 6(4^2) + 32(4) = \frac{160}{3} \\ n(8) &= \frac{8^3}{3} - 6(8^2) + 32(8) = \frac{128}{3} \\ n(12) &= \frac{12^3}{3} - 6(12)^2 + 32(12) = \frac{288}{3} = 96 \end{aligned}$$

Así, se tiene un máximo absoluto en  $t = 12$ . En la figura 13.65 se da una gráfica de la función.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



#### ADVERTENCIA

El ejemplo anterior ilustra que no deben ignorarse los puntos extremos cuando se determinan extremos absolutos en un intervalo cerrado.

**Este ejemplo implica la maximización de la utilidad cuando se conocen las funciones de demanda y de costo promedio. En la última parte, se impone un impuesto al monopolio, y se analiza una nueva función de utilidad.**

En el ejemplo siguiente se usa la palabra *monopolista*. En una situación de monopolio, sólo hay un vendedor de un producto para el cual no existen sustitutos similares, y el vendedor—es decir, el monopolista—controla el mercado. Si se considera la ecuación de demanda para el producto, el monopolista puede fijar el precio (o volumen de producción) de manera que se obtenga una utilidad máxima.

### EJEMPLO 8 Maximización de una utilidad

*Suponga que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es  $p = 400 - 2q$  y que la función de costo promedio es  $\bar{c} = 0.2q + 4 + (400/q)$ , donde  $q$  es el número de unidades, y  $p$  y  $\bar{c}$  se expresan en dólares por unidad.*

- Determine el nivel de producción en el que se maximiza la utilidad.
- Determine el precio en que ocurre la utilidad máxima.
- Determine la utilidad máxima.
- Si el gobierno impone un impuesto de \$22 por unidad al monopolista como medida reguladora, ¿cuál es el nuevo precio que maximiza la utilidad?

**Solución:** Se sabe que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

Como el ingreso total  $r$  y el costo total  $c$  están dados por

$$r = pq = 400q - 2q^2$$

y

$$c = q\bar{c} = 0.2q^2 + 4q + 400$$

la utilidad es

$$P = r - c = 400q - 2q^2 - (0.2q^2 + 4q + 400)$$

de manera que

$$P(q) = 396q - 2.2q^2 - 400 \quad \text{para } q > 0 \quad (6)$$

- Para maximizar la utilidad, se hace  $dP/dq = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dq} &= 396 - 4.4q = 0 \\ q &= 90 \end{aligned}$$

Ahora,  $d^2P/dq^2 = -4.4$  siempre es negativa, por lo que es negativa en el valor crítico  $q = 90$ . De acuerdo con la prueba de la segunda derivada, se tiene ahí un máximo relativo. Como  $q = 90$  es el único valor crítico en  $(0, \infty)$ , se debe tener ahí un máximo absoluto.

- El precio en que ocurre la utilidad máxima se obtiene al establecer  $q = 90$  en la ecuación de demanda:

$$p = 400 - 2(90) = 220$$

- La utilidad máxima se obtiene al evaluar  $P(90)$ . Se tiene

$$P(90) = 396(90) - 2.2(90)^2 - 400 = 17\,420.$$

- El impuesto de \$22 por unidad implica que para  $q$  unidades el costo total crece en  $22q$ . La nueva función de costo es  $c_1 = 0.2q^2 + 4q + 400 + 22q$  y la nueva utilidad está dada por

$$\begin{aligned} P_1 &= 400q - 2q^2 - (0.2q^2 + 4q + 400 + 22q) \\ &= 374q - 2.2q^2 - 400 \end{aligned}$$

Se determina que  $dP_1/dq = 0$ , resulta

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dq} &= 374 - 4.4q = 0 \\ q &= 85 \end{aligned}$$

Como  $d^2P_1/dq^2 = -4.4 < 0$ , se concluye que para maximizar la utilidad, el monopolista debe restringir la producción a 85 unidades a un precio mayor de  $p_1 = 400 - 2(85) = \$230$ . Como este precio es sólo \$10 mayor que antes, parte del impuesto se ha cargado al consumidor y el monopolista debe pagar la diferencia. La utilidad es ahora de \$15 495, que es menor que la ganancia anterior.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13 

Este análisis conduce al principio económico de que cuando la ganancia es máxima, el ingreso marginal es igual al costo marginal.

Esta sección concluye con el uso del cálculo para desarrollar un principio muy importante en economía. Suponga que  $p = f(q)$  es la función de demanda para el producto de una empresa, donde  $p$  es el precio por unidad y  $q$  el número de unidades producidas

y vendidas. Entonces, el ingreso total está dado por  $r = qp = qf(q)$ , que es una función de  $q$ . Sea  $c = g(q)$  la función de costo total para producir  $q$  unidades. Así, la utilidad total, que es igual a ingreso total – costo total, es también una función de  $q$ , a saber,

$$P(q) = r - c = qf(q) - g(q)$$

Considere la producción más favorable para la empresa. Ignore casos especiales, se sabe que la utilidad es máxima cuando  $dP/dq = 0$  y  $d^2P/dq^2 < 0$ . Se tiene,

$$\frac{dP}{dq} = \frac{d}{dq}(r - c) = \frac{dr}{dq} - \frac{dc}{dq}$$

En consecuencia,  $dP/dq = 0$  cuando

$$\frac{dr}{dq} = \frac{dc}{dq}$$

Esto es, al nivel de la utilidad máxima, la pendiente de la tangente a la curva de ingreso total debe ser igual a la pendiente de la tangente a la curva de costo total (figura 13.66). Pero  $dr/dq$  es el ingreso marginal IM y  $dc/dq$  es el costo marginal CM. Así, bajo condiciones comunes, para maximizar la utilidad es necesario que

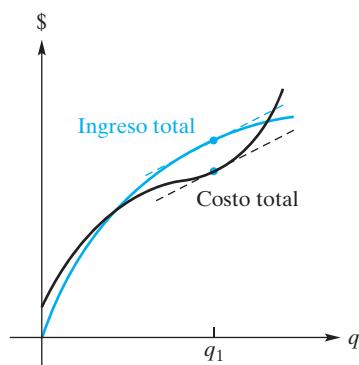
$$IM = CM$$

Para que esto corresponda a un máximo, es necesario que  $d^2P/dq^2 < 0$ :

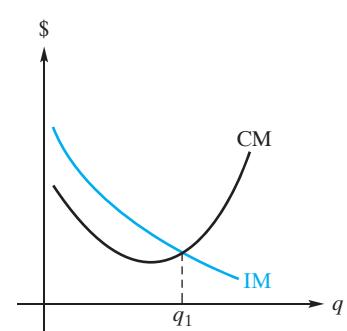
$$\frac{d^2P}{dq^2} = \frac{d^2}{dq^2}(r - c) = \frac{d^2r}{dq^2} - \frac{d^2c}{dq^2} < 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad \frac{d^2r}{dq^2} < \frac{d^2c}{dq^2}$$

Esto es, cuando  $IM = CM$ , para tener una utilidad máxima, la pendiente de la curva del ingreso marginal deber ser menor que la pendiente de la curva del costo marginal.

La condición de que  $d^2P/dq^2 < 0$  cuando  $dP/dq = 0$  puede verse de otra manera. En forma equivalente, para que  $IM = CM$  corresponda a un máximo,  $dP/dq$  debe pasar de + a –; esto es, debe ir de  $dr/dq - dc/dq > 0$  a  $dr/dq - dc/dq < 0$ . Por lo tanto, cuando la producción crece, se debe tener  $IM > CM$  y luego  $IM < CM$ . Esto significa que en el punto  $q_1$  de utilidad máxima, *la curva de costo marginal debe cortar a la curva de ingreso marginal desde abajo* (figura 13.67). Para una producción hasta  $q_1$ , el ingreso de una producción sería mayor que el costo de tal producción, y la utilidad total aumentaría. Para una producción mayor a  $q_1$ ,  $CM > IM$  y cada unidad de producción agregaría más a los costos totales que al ingreso total. Por lo tanto, las utilidades totales se reducirían.



**FIGURA 13.66** En la utilidad máxima, el ingreso marginal es igual al costo marginal.

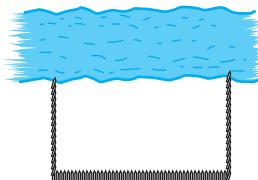


**FIGURA 13.67** En la utilidad máxima, la curva de costo marginal corta a la curva de ingreso marginal desde abajo.

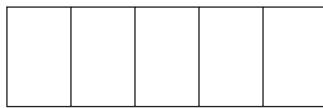
## Problemas 13.6

En esta serie de problemas, a menos que se especifique otra cosa,  $p$  es el precio por unidad y  $q$  la producción por unidad de tiempo. Los costos fijos se refieren a costos que permanecen constantes bajo todo nivel de producción en un periodo dado (un ejemplo es la renta).

1. Encuentre dos números cuya suma sea 82 y cuyo producto sea máximo.
2. Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 20 y cuyo producto de 2 veces uno de los números por el cuadrado del otro sea un máximo.
- \*3. **Cercado** Una empresa dispone de \$9000 para cercar una porción rectangular del terreno adyacente a un río, el cual se usa como uno de los lados del área cercada. El costo de la cerca paralela al río es de \$15 por pie instalado y el de la cerca para los dos lados restantes es de \$9 por pie instalado. Encuentre las dimensiones del área máxima cercada.



4. **Cercado** El propietario del Vivero Laurel quiere cercar un terreno de forma rectangular de 1200 pies cuadrados de área, para usarlo para diferentes tipos de arbustos. El terreno será dividido en cuatro lotes iguales, con tres cercas paralelas a uno de los lados, como se muestra en la figura 13.68. ¿Cuál es el número mínimo de pies de cerca necesarios?



**FIGURA 13.68** Diagrama para el problema 4.

- \*5. **Costo promedio** Un fabricante determina que el costo total,  $c$ , de producir un artículo está dado por la función de costo

$$c = 0.05q^2 + 5q + 500$$

¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por unidad?

6. **Gastos de un automóvil** El costo por hora (en dólares) de operar un automóvil está dado por

$$C = 0.12s - 0.0012s^2 + 0.08 \quad 0 \leq s \leq 60$$

donde  $s$  es la velocidad en millas por hora. ¿A qué velocidad es el costo por hora mínimo?



- \*7. **Ingreso** La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = -5q + 30$$

¿A qué precio se maximizará el ingreso?

8. **Ingreso** Suponga que la función de demanda para el producto de un monopolista, es

$$q = Ae^{-Bp}$$

para constantes positivas  $A$  y  $B$ . En términos de  $A$  y  $B$ , encuentre el valor de  $p$  para el cual se obtiene el ingreso máximo. ¿Puede explicar por qué su respuesta no depende de  $A$ ?

9. **Ganancia de peso** Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales en ratas a las que se les administró una dieta que contenía un 10% de proteína.<sup>13</sup> La proteína consistió en levadura y harina de semilla de algodón. Al variar el porcentaje  $p$  de levadura en la mezcla con proteína, se encontró que el aumento de peso (promedio en gramos) de una rata en un periodo fue de

$$f(p) = 160 - p - \frac{900}{p+10} \quad 0 \leq p \leq 100$$

Encuentre (a) el aumento de peso máximo y (b) el aumento de peso mínimo.



10. **Dosis de un medicamento** La severidad de la reacción del cuerpo humano a una dosis inicial  $D$  de un medicamento está dada por<sup>14</sup>

$$R = f(D) = D^2 \left( \frac{C}{2} - \frac{D}{3} \right)$$

donde la constante  $C$  denota la cantidad máxima de medicamento que puede administrarse. Demuestre que  $R$  tiene una razón de cambio máxima cuando  $D = C/2$ .

11. **Utilidad** Para el producto de un monopolista, la función de demanda es

$$p = 85 - 0.05q$$

y la función de costo es

$$c = 600 + 35q$$

¿A qué nivel de producción se maximiza la utilidad? ¿A qué precio ocurre esto y cuál es la utilidad?

12. **Utilidad** Para un monopolista, el costo por unidad de producir un artículo es de \$3 y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{10}{\sqrt{q}}$$

¿Cuál precio dará la utilidad máxima?

<sup>13</sup>Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single-Cell Protein*, ed. R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

<sup>14</sup>R. M. Thrall, J. A. Mortimer, K. R. Rebman y R.F. Baum, eds., *Some Mathematical Models in Biology*, edición revisada, Reporte núm. 40241-R-7. Preparado en la Universidad de Michigan, 1967.

- \*13. Utilidad** Para el producto de un monopolista la ecuación de demanda es

$$p = 42 - 4q$$

y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 2 + \frac{80}{q}$$

Encuentre el precio que maximiza la utilidad.

- 14. Utilidad** Para el producto de un monopolista, la función de demanda es

$$p = \frac{40}{\sqrt{q}}$$

y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = \frac{1}{3} + \frac{2000}{q}$$

Encuentre el precio y la producción que maximizan la utilidad. A este nivel, demuestre que el ingreso marginal es igual al costo marginal.

- \*15. Utilidad** Un fabricante puede producir cuando mucho 120 unidades de cierto artículo cada año. La ecuación de demanda para ese producto es

$$p = q^2 - 100q + 3200$$

y la función de costo promedio del fabricante es

$$\bar{c} = \frac{2}{3}q^2 - 40q + \frac{10\,000}{q}$$

Determine la producción  $q$  que maximiza la utilidad y la utilidad máxima correspondiente.

- 16. Costo** Un fabricante ha determinado que para cierto producto, el costo promedio (en dólares por unidad) está dado por

$$\bar{c} = 2q^2 - 42q + 228 + \frac{210}{q}$$

donde  $3 \leq q \leq 12$ .

- (a) ¿A qué nivel dentro del intervalo  $[3, 12]$  debe fijarse la producción para minimizar el costo total? ¿Cuál es el costo total mínimo?
- (b) Si la producción tuviese que encontrarse dentro del intervalo  $[7, 12]$ , ¿qué valor de  $q$  minimizaría el costo total?

- 17. Utilidad** Los costos totales fijos de la empresa XYZ son de \$1200, los costos combinados de material y mano de obra son de \$2 por unidad y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{100}{\sqrt{q}}$$

¿Qué nivel de producción maximizará la utilidad? Demuestre que esto ocurrirá cuando el ingreso marginal sea igual al costo marginal. ¿Cuál es el precio cuando la utilidad es máxima?

- 18. Ingreso** Una empresa de bienes raíces posee 100 departamentos. Cada uno puede rentarse a \$400 por mes. Sin embargo, por cada \$10 mensuales de incremento, habrá dos departamentos vacíos, sin posibilidad de rentarlos. ¿Qué renta por departamento maximizará el ingreso mensual?

- \*19. Ingreso** Una empresa de televisión por cable tiene 4800 suscriptores que pagan \$18 mensuales cada uno, y puede conseguir 150 suscriptores más por cada reducción de \$.50 en la renta mensual. ¿Cuál será la renta que maximice el ingreso y cuál será este ingreso?

- 20. Utilidad** Un fabricante de un producto encuentra que para las primeras 600 unidades que produce y vende, la utilidad es de \$40 por unidad. La utilidad por cada unidad producida más allá de 600 disminuye en \$.05 por cada unidad adicional producida. Por ejemplo, la utilidad total cuando produce y vende 602 unidades es  $600(40) + 2(39.90)$ . ¿Qué nivel de producción maximizará la utilidad?

- 21. Diseño de un recipiente** Un fabricante de recipientes diseña una caja rectangular sin tapa y con base cuadrada, que debe tener un volumen de 32 pies<sup>3</sup>. ¿Qué dimensiones debe tener la caja, si se requiere que se utilice la menor cantidad de material? (Vea la figura 13.69).

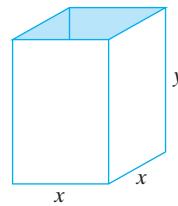


FIGURA 13.69 Caja sin tapa para los problemas 21 y 22.

- 22. Diseño de un recipiente** Una caja sin tapa de base cuadrada va a construirse con 192 pies<sup>2</sup> de material. ¿Qué dimensiones debe tener para que su volumen sea máximo? ¿Cuál es el volumen máximo? (Vea la figura 13.69.)

- 23. Diseño de un recipiente** Se va a fabricar una caja sin tapa al cortar cuadrados iguales de cada esquina de una lámina cuadrada de  $L$  pulgadas de lado, doblar luego hacia arriba los lados. Encuentre la longitud del lado del cuadrado que debe recortarse para que el volumen de la caja sea máximo. ¿Cuál es el volumen máximo? (Vea la figura 13.70.)

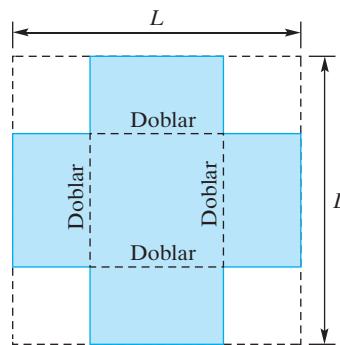
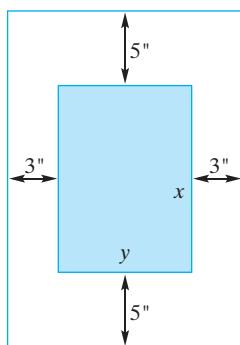


FIGURA 13.70 Caja para el problema 23.

- 24. Diseño de un cartel** Un cartel rectangular de cartón debe tener 150 pulg<sup>2</sup> para material impreso, márgenes de 3 pulg arriba y abajo y de 2 pulg a cada lado. Encuentre las dimensiones del cartel de manera que la cantidad de cartón que se use sea mínima. (Vea la figura 13.71.)

(Una pista: Encuentre primero los valores de  $x$  y  $y$  en la figura 13.71 que minimizan la cantidad de cartón.)

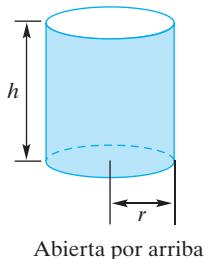


**FIGURA 13.71** Cartel para el problema 24.

- 25. Diseño de un recipiente** Una lata cilíndrica sin tapa debe tener un volumen  $K$ . Demuestre que si se usa la cantidad mínima de material, entonces el radio y la altura serán iguales a  $\sqrt[3]{K/\pi}$ . (Vea la figura 13.72).

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$

$$\text{Área superficial} = 2\pi r h + \pi r^2$$



**FIGURA 13.72** Lata para los problemas 25 y 26.

- 26. Diseño de un recipiente** Una lata cilíndrica sin tapa va a fabricarse con una cantidad fija de material,  $K$ . Para que el volumen sea máximo, demuestre que el radio y la altura deben ser iguales a  $\sqrt[3]{K/(3\pi)}$ . (Vea la figura 13.72).
- 27. Utilidad** La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = 600 - 2q$$

y la función de costo total es

$$c = 0.2q^2 + 28q + 200$$

Encuentre la producción y el precio que maximizan la utilidad y determine la utilidad correspondiente. Si el gobierno impone un impuesto de \$22 por unidad al fabricante, ¿cuáles serían entonces la producción y el precio que maximizan la utilidad? ¿Cuál sería la utilidad ahora?

- 28. Utilidad** Utilice los datos *originales* del problema 27 y suponga que el gobierno impone una cuota por licencia de \$1000 al fabricante. Es una cantidad global independiente de la producción. Demuestre que el precio y la producción que maximizan la utilidad permanecen iguales. Sin embargo, demuestre que se tendrá una utilidad menor.
- \*29. Tamaño económico del lote** Un fabricante debe producir anualmente 1000 unidades de un producto que se vende a una razón uniforme durante el año. El costo de producción de cada unidad es de \$10 y los costos de acarreo (seguro, interés, almacenamiento, etcétera) se estiman iguales al 12.8% del valor promedio del inventario. Los gastos de operación por periodo de producción son de \$40. Encuentre el tamaño económico del lote.

- 30. Utilidad** Para el producto de un monopolista, la función de costo es

$$c = 0.004q^3 + 20q + 5000$$

y la función de demanda es

$$p = 450 - 4q$$

Encuentre la producción que maximiza la utilidad.

- 31. Asistencia a un taller** La empresa Imperial Educational Services (IES) está considerando ofrecer un taller sobre asignación de recursos a directivos de la Compañía Acme. Para hacer el ofrecimiento económicamente factible, IES calcula que por lo menos 30 personas deben inscribirse y cubrir un costo de \$50 cada una. Además IES acepta reducir la cuota en \$1.25 por cada persona adicional a las primeras 30. ¿Cuántas personas deben inscribirse para que el ingreso de IES sea máximo? Suponga que el número máximo de asistentes se limita a 40 personas.

- 32. Costo de alquilar un moto** La compañía Kiddie Toy planea alquilar un motor eléctrico para utilizarlo 80 000 caballos-hora por año, en su proceso de manufactura. Un caballo-hora es el trabajo hecho en 1 hora por un motor de un caballo de fuerza. El costo anual de alquilar el motor es de \$200 más \$0.40 por caballo de fuerza. El costo por caballo-hora de operar el motor es de \$0.008/N, donde  $N$  es el número de caballos de fuerza. ¿Qué tamaño de motor, en caballos de fuerza, debe alquilarse para minimizar el costo?

- 33. Costo de transporte** El costo de operar un camión sobre una autopista (si se excluye el salario del chofer) es

$$0.165 + \frac{s}{200}$$

dólares por milla, donde  $s$  es la velocidad (uniforme) del camión en millas por hora. El salario del chofer es de \$18 por hora. ¿A qué velocidad debe manejar para que un viaje de 700 millas resulte lo más económico posible?



- 34. Costo** Para un productor, el costo de fabricar un artículo es de \$30 por mano de obra y de \$10 por material; los gastos indirectos son de \$20 000 por semana. Si se fabrican más de 5000 artículos por semana, la mano de obra se eleva a \$45 por artículo, para aquellas unidades que excedan de 5000. ¿Para qué nivel de producción el costo promedio por artículo será mínimo?

- 35. Utilidad** La señora Jones tiene una pequeña agencia de seguros que vende pólizas para una gran compañía de seguros. Por cada póliza vendida, la señora Jones, que no vende por sí misma las pólizas, recibe una comisión de \$50 de la compañía de seguros. De experiencias pasadas, ella ha determinado que cuando emplea  $m$  vendedores puede vender,

$$q = m^3 - 15m^2 + 92m$$

pólizas por semana. Paga a cada uno de los vendedores un salario semanal de \$1000 y sus gastos fijos por semana son de \$3000. Su oficina actual sólo puede tener cabida para ocho

vendedores. Determine el número de vendedores que debe contratar para maximizar su utilidad semanal. ¿Cuál es la utilidad máxima correspondiente?



- 36. Utilidad** Un fabricante vende sacos de alta calidad a una cadena de tiendas. La ecuación de la demanda para esos sacos es

$$p = 400 - 50q$$

donde  $p$  es el precio de venta (en dólares por saco) y  $q$  la demanda (en miles de sacos). Si la función de costo marginal del fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = \frac{800}{q+5}$$

demuestre que existe una utilidad máxima y determine el número de sacos que deben venderse para obtener esta utilidad máxima.

- 37. Producción química** Una empresa fabrica diariamente  $x$  toneladas del producto químico A ( $x \leq 4$ ) y

$$y = \frac{24 - 6x}{5 - x}$$

toneladas del producto químico B. La utilidad con A es de \$2000 por tonelada y con B es de \$1000 por tonelada. ¿Cuántas toneladas de A deben producirse por día para maximizar la utilidad? Responda la misma pregunta si la utilidad con A es de  $P$  por tonelada y con B es de  $P/2$  por tonelada.



- 38. Tasa de rendimiento** Para construir un edificio de oficinas, los costos fijos son de \$1.44 millones e incluyen el precio del terreno, los honorarios del arquitecto, la cimentación, la estructura, etcétera. Si se construyen  $x$  pisos, el costo (si se excluyen los costos fijos) es

$$c = 10x[120\,000 + 3000(x - 1)]$$

El ingreso por mes es de \$60 000 por piso. ¿Cuántos pisos darán una tasa máxima de rendimiento sobre la inversión? (Tasa de rendimiento = ingreso total/costo total.)

- 39. Marcha y potencia desarrollada por un animal** En un modelo planteado por Smith<sup>15</sup>, la potencia desarrollada por un animal

a una velocidad dada en función de su movimiento o *marcha*  $j$ , resulta ser

$$P(j) = Aj \frac{L^4}{V} + B \frac{V^3 L^2}{1+j}$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes,  $f'$  es una medida de “inconsistencia” de la marcha,  $L$  es una constante que representa una dimensión lineal y  $V$  una velocidad constante hacia delante.



Suponga que  $P$  es mínima cuando  $dP/dj = 0$ . Demuestre que cuando esto ocurre,

$$(1+j)^2 = \frac{BV^4}{AL^2}$$

Como comentario al margen, Smith señala que “a velocidad máxima,  $j$  es cero para un elefante, 0.3 para un caballo y 1 para un galgo de carreras, aproximadamente”.

- 40. Flujo de vehículos** En un modelo de flujo de vehículos sobre un carril de una autopista, el número de automóviles que pueden circular por el carril por unidad de tiempo está dado por<sup>16</sup>

$$N = \frac{-2a}{-2at_r + v - \frac{2al}{v}}$$

donde  $a$  es la aceleración de un automóvil al detenerse ( $a < 0$ ),  $t_r$  el tiempo de reacción para comenzar a frenar,  $v$  la velocidad promedio de los automóviles y  $l$  la longitud de un automóvil. Suponga que  $a$ ,  $t_r$  y  $l$  son constantes. Para encontrar el mayor número de automóviles que pueden circular por un carril, es necesario calcular la velocidad  $v$  que maximiza a  $N$ . Para maximizar  $N$ , es suficiente minimizar el denominador de

$$-2at_r + v - \frac{2al}{v}$$

- (a) Encuentre el valor de  $v$  que minimiza al denominador.  
 (b) Evalúe su respuesta en (a) cuando  $a = -19.6$  (pies/s<sup>2</sup>),  $l = 20$  (pies) y  $t_r = 0.5$  (s). Dé su respuesta en pies por segundo.  
 (c) Encuentre el valor correspondiente de  $N$  con un decimal. Su respuesta estará en automóviles por segundo. Convírtala a automóviles por hora.  
 (d) Encuentre el cambio relativo  $N$  que resulta cuando  $l$  se reduce de 20 pies a 15 pies, para el valor de  $v$  que maximiza.

- 41. Costo promedio** Durante la temporada navideña, una empresa promocional compra calcetas baratos de fieltro rojo, les pega imitación de piel blanca y lentejuelas, y los empaca para su distribución. El costo total de producir  $q$  cajas está dado por

$$c = 3q^2 + 50q - 18q \ln q + 120$$

Encuentre el número de cajas que deben prepararse para minimizar el costo promedio por caja. Determine (con dos decimales) este costo promedio mínimo.

<sup>15</sup>J. M. Smith, *Mathematical Ideas in Biology* (Londres: Cambridge University Press, 1968).

<sup>16</sup>J. I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Co., 1975).

-  **42. Utilidad** La ecuación de demanda de un monopolista está dada por

$$p = q^2 - 20q + 160$$

donde  $p$  es el precio de venta (en miles de dólares) por tonelada cuando se venden  $q$  toneladas del producto. Suponga que

el costo fijo es de \$50 000 y que cada tonelada cuesta \$30 000 producirla. Si la maquinaria actual tiene una capacidad máxima para producir 12 toneladas, use la gráfica de la función de utilidad para determinar a qué nivel de producción se tiene la utilidad máxima. Encuentre la utilidad máxima correspondiente y el precio de venta por tonelada.

## 13.7 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

<b>Sección 13.1</b>	<b>Extremos relativos</b>	
	función creciente      función decreciente	Ej. 1, p. 572
	máximo relativo      mínimo relativo	Ej. 2, p. 573
	extremos relativos      extremos absolutos	Ej. 3, p. 574
	valor crítico      punto crítico      prueba de la primera derivada	Ej. 4, p. 574
<b>Sección 13.2</b>	<b>Extremos absolutos en un intervalo cerrado</b>	
	teorema del valor extremo	Ej. 1, p. 580
<b>Sección 13.3</b>	<b>Concavidad</b>	
	cóncava hacia arriba      cóncava hacia abajo      punto de inflexión	Ej. 1, p. 582
<b>Sección 13.4</b>	<b>Prueba de la segunda derivada</b>	
	prueba de la segunda derivada	Ej. 1, p. 588
<b>Sección 13.5</b>	<b>Asíntotas</b>	
	asíntota vertical      asíntota horizontal	Ej. 1, p. 591
	asíntota oblicua	Ej. 3, p. 593
<b>Sección 13.6</b>	<b>Aplicación de máximos y mínimos</b>	
	tamaño económico del lote	Ej. 5, p. 602

### Resumen

El cálculo es de gran ayuda para hacer el bosquejo de la gráfica de una función. La primera derivada se usa para determinar cuándo una función es creciente o decreciente, y para localizar los máximos y mínimos relativos. Si  $f'(x)$  es positiva en todo un intervalo, entonces en ese intervalo  $f$  es creciente y su gráfica asciende (de izquierda a derecha). Si  $f'(x)$  es negativa en todo un intervalo, entonces  $f$  es decreciente y su gráfica desciende.

Un punto  $(a, f(a))$  sobre la gráfica en el que  $f'(x)$  es 0 o no está definida, es un candidato a extremo relativo, y  $a$  se llama valor crítico. Para que se presente en  $a$  un extremo relativo, la primera derivada debe cambiar de signo alrededor de  $a$ . El procedimiento siguiente es la prueba de la primera derivada para los extremos relativos de  $y = f(x)$ :

#### Prueba de la primera derivada para extremos relativos

- Paso 1.** Encuentre  $f'(x)$ .
- Paso 2.** Determine todos los valores de  $a$  en que  $f'(a) = 0$  o  $f'(a)$  no está definida.
- Paso 3.** En los intervalos definidos por los valores del paso 2, determine si  $f$  es creciente ( $f'(x) > 0$ ) o decreciente ( $f'(x) < 0$ ).
- Paso 4.** Para cada valor crítico  $a$  en que  $f$  es continua, determine si  $f'(x)$  cambia de signo al aumentar  $x$  y pasar por  $a$ . Se tiene un máximo relativo en  $a$  si  $f'(x)$  cambia de  $+ \rightarrow -$ , y un mínimo relativo si  $f'(x)$  cambia de  $- \rightarrow +$ . Si  $f'(x)$  no cambia de signo, entonces no se tiene un extremo relativo en  $a$ .

Bajo ciertas condiciones, se puede asegurar que una función tiene extremos absolutos. El teorema del valor extremo establece que si  $f$  es continua en un intervalo cerrado, entonces  $f$  tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo. Para localizar los extremos absolutos, puede emplearse el siguiente procedimiento:

#### Procedimiento para encontrar los extremos absolutos de una función $f$ continua en $[a, b]$

- Paso 1.** Encuentre los valores críticos de  $f$ .
- Paso 2.** Evalúe  $f(x)$  en los puntos extremos  $a$  y  $b$  y en los valores críticos que se encuentran en  $(a, b)$ .
- Paso 3.** El valor máximo de  $f$  es el más grande de los valores encontrados en el paso 2. El valor mínimo de  $f$  es el menor de los valores encontrados en el paso 2.

La segunda derivada se usa para determinar la concavidad y los puntos de inflexión. Si  $f''(x) > 0$  en todo un intervalo, entonces  $f$  es cóncava hacia arriba en ese intervalo y su gráfica se dobla hacia arriba. Si  $f''(x) < 0$  en un intervalo, entonces  $f$  es cóncava hacia abajo en ese intervalo y su gráfica se dobla hacia abajo. Un punto en la gráfica donde  $f$  es continua y su concavidad cambia, es un punto de inflexión. El punto  $(a, f(a))$  en la gráfica, es un posible punto de inflexión si  $f''(a)$  es 0 o no está definida, y  $f$  es continua en  $a$ .

La segunda derivada proporciona también un medio para probar si ciertos valores críticos son extremos relativos:

### Prueba de la segunda derivada para extremos relativos

Suponga que  $f(a) = 0$ . Entonces

Si  $f''(a) < 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $a$ .

Si  $f''(a) > 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $a$ .

Las asíntotas también son útiles para el trazado de curvas. Las gráficas “explotan” cerca de las asíntotas verticales y “tienden” hacia las asíntotas horizontales. La línea  $x = a$  es una asíntota vertical para la gráfica de una función  $f$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , o  $-\infty$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por la derecha ( $x \rightarrow a^+$ ) o por la izquierda ( $x \rightarrow a^-$ ). En el caso de una función racional,  $f(x) = P(x)/Q(x)$  en los términos mínimos, es posible encontrar las asíntotas verticales sin evaluar límites. Si  $Q(a) = 0$  pero  $P(a) \neq 0$ , entonces la recta  $x = a$  es una asíntota vertical.

La recta  $y = b$  es una asíntota horizontal para la gráfica de una función no lineal  $f$ , si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

### Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

En los problemas 1 a 4, encuentre las asíntotas horizontales y verticales.

1.  $y = \frac{3x^2}{x^2 - 16}$

2.  $y = \frac{x + 3}{9x - 3x^2}$

3.  $y = \frac{5x^2 - 3}{(3x + 2)^2}$

4.  $y = \frac{4x + 1}{3x - 5} - \frac{3x + 1}{2x - 11}$

En los problemas 5 a 8, encuentre los valores críticos.

5.  $f(x) = \frac{5x^2}{3 - x^2}$

6.  $f(x) = 8(x - 1)^2(x + 6)^4$

7.  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x + 1}}{3 - 4x}$

8.  $f(x) = \frac{13xe^{-5x/6}}{6x + 5}$

En los problemas 9 a 12, encuentre los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.

9.  $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + 15x^2 + 35x + 10$

10.  $f(x) = \frac{2x^2}{(x + 1)^2}$

11.  $f(x) = \frac{6x^4}{x^2 - 3}$

12.  $f(x) = 4\sqrt[3]{5x^3 - 7x}$

En los problemas 13 a 18, encuentre los intervalos en los que la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

13.  $f(x) = x^4 - x^3 - 14$

14.  $f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$

La línea  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua para la gráfica de una función  $f$  si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + b)) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

En particular, una función polinomial de grado mayor que 1 no tiene asíntotas. Además, una función racional cuyo numerador tiene grado mayor que el del denominador no tiene una asíntota horizontal y una función racional cuyo numerador tenga un grado mayor por más de uno que el del denominador no tiene una asíntota oblicua.

### Aplicaciones de máximos y mínimos

Desde un punto de vista práctico, la fuerza del cálculo reside en que permite maximizar o minimizar cantidades. Por ejemplo, en el área de la economía se puede maximizar la utilidad o minimizar el costo. Algunas relaciones importantes que se usan en problemas económicos son las siguientes:

$$\bar{c} = \frac{c}{q} \quad \text{costo promedio por unidad} = \frac{\text{costo total}}{\text{cantidad}}$$

$$r = pq \quad \text{ingreso} = (\text{precio}) (\text{cantidad})$$

$$P = r - c \quad \text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

15.  $f(x) = \frac{1}{2x - 1}$

16.  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

17.  $f(x) = (2x + 1)^3(3x + 2)$

18.  $f(x) = (x^2 - x - 1)^2$

En los problemas 19 a 24, pruebe por extremos relativos.

19.  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$

20.  $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2}$

21.  $f(x) = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^5}{5}$

22.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

23.  $f(x) = x^{2/3}(x + 1)$

24.  $f(x) = x^3(x - 2)^4$

En los problemas 25 a 30, encuentre los valores de  $x$  en que se presentan los puntos de inflexión.

25.  $y = x^5 - 5x^4 + 3x$

26.  $y = \frac{x^2 + 2}{5x}$

27.  $y = 4(3x - 5)(x^4 + 2)$

28.  $y = x^2 + 2 \ln(-x)$

29.  $y = \frac{x^3}{e^x}$

30.  $y = 6(x^2 - 4)^3$

En los problemas 31 a 34, efectúe la prueba sobre extremos absolutos en el intervalo indicado.

31.  $f(x) = 3x^4 - 4x^3, [0, 2]$

32.  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x, [0, 3]$

33.  $f(x) = \frac{x}{(5x - 6)^2}, [-2, 0]$

34.  $f(x) = (x+1)^2(x-1)^{2/3}, [2, 3]$

35. Sea  $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ .

(a) Determine los valores de  $x$  en que se presentan los máximos y mínimos relativos, en caso de que existan.

(b) Determine el o los intervalos en que la gráfica de  $f$  es cóncava hacia abajo y encuentre las coordenadas de todos los puntos de inflexión.

36. Sea  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

(a) Determine si la gráfica de  $f$  es simétrica con respecto al eje  $x$ , al eje  $y$  o al origen.

(b) Encuentre el o los intervalos en que  $f$  es creciente.

(c) Encuentre las coordenadas de todos los extremos relativos de  $f$ .

(d) Determine  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

(e) Haga el bosquejo de la gráfica de  $f$ .

(f) Establezca los valores máximo y mínimo absolutos de  $f(x)$  (en caso de que existan).

*En los problemas 37 a 48, indique los intervalos en que la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo; indique los puntos máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión, las asíntotas horizontales, las asíntotas verticales, la simetría y aquellas intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente.*

Después bosqueje la gráfica de la función.

37.  $y = x^2 - 2x - 24$

38.  $y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 9$

39.  $y = x^3 - 12x + 20$

40.  $y = x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 150$

41.  $y = x^3 - x$

42.  $y = \frac{x+2}{x-3}$

43.  $f(x) = \frac{100(x+5)}{x^2}$

44.  $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

45.  $y = \frac{2x}{(3x-1)^3}$

46.  $y = 6x^{1/3}(2x-1)$

47.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

48.  $f(x) = 1 - \ln(x^3)$

49. ¿Son ciertos o falsos los siguientes enunciados?

(a) Si  $f'(x_0) = 0$ , entonces  $f$  debe tener un extremo relativo en  $x_0$ .

(b) Como la función  $f(x) = 1/x$  es decreciente en los intervalos  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$ , es imposible encontrar  $x_1$  y  $x_2$  en el dominio de  $f$  de manera que  $x_1 < x_2$  y  $f(x_1) < f(x_2)$ .

(c) En el intervalo  $(-1, 1]$ , la función  $f(x) = x^4$  tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

(d) Si  $f''(x_0) = 0$ , entonces  $(x_0, f(x_0))$  debe ser un punto de inflexión.

(e) Una función  $f$  definida en el intervalo  $(-2, 2)$  con exactamente un máximo relativo, debe tener un máximo absoluto.

50. Una función importante en la teoría de la probabilidad es la función de densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

(a) Determine si la gráfica de  $f$  es simétrica con respecto al eje  $x$ , al eje  $y$  o al origen.

(b) Encuentre los intervalos en que  $f$  es creciente y en los que es decreciente.

(c) Encuentre las coordenadas de todos los extremos relativos de  $f$ .

(d) Encuentre  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

(e) Encuentre los intervalos en que la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba y en donde es cóncava hacia abajo.

(f) Encuentre las coordenadas de todos los puntos de inflexión.

(g) Haga el bosquejo de la gráfica de  $f$ .

(h) Encuentre todos los extremos absolutos.

51. **Costo marginal** Si  $c = q^3 - 6q^2 + 12q + 18$  es una función de costo total, ¿para qué valores de  $q$  es creciente el costo marginal?

52. **Ingreso marginal** Si  $r = 320q^{3/2} - 2q^2$  es la función de ingreso para el producto de un fabricante, determine los intervalos en que la función de ingreso marginal es creciente.

53. **Función de ingreso** La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = 200 - \frac{\sqrt{q}}{5} \quad \text{donde } q > 0$$

Demuestre que la gráfica de la función de ingreso es cóncava hacia abajo, dondequiera que esté definida.

54. **Anticoncepción** En un modelo sobre el efecto de los anticonceptivos en la tasa de nacimientos,<sup>17</sup> la ecuación

$$R = f(x) = \frac{x}{4.4 - 3.4x} \quad 0 \leq x \leq 1$$

da la reducción proporcional  $R$  en la tasa de nacimientos como función de la eficiencia  $x$  de un método anticonceptivo. Una eficiencia de 0.2 (o 20%) significa que la probabilidad de resultar embarazada es 80% de la probabilidad de resultar embarazada sin el anticonceptivo. Encuentre la reducción (en porcentaje) cuando la eficiencia es (a) 0, (b) 0.5 y (c) 1. Encuentre  $dR/dx$  y  $d^2R/dx^2$ , y dibuje la gráfica de la ecuación.

55. **Aprendizaje y memoria** Si usted fuese a citar los miembros de una categoría, por ejemplo la de los animales cuadrúpedos, las palabras que citaría se presentarían probablemente en “grupos” con distintas pausas entre tales grupos. Por ejemplo, usted podría citar las siguientes palabras para la categoría de los cuadrúpedos:

perro, gato, ratón, rata,

(pausa)

caballo, burro, mula,

(pausa)

vaca, cerdo, cabra, cordero,

etcétera.

Las pausas pueden presentarse porque las personas tienen que buscar mentalmente las subcategorías (animales domésticos, bestias de carga, animales de granja, etcétera).

El tiempo transcurrido entre conjuntos de palabras sucesivas se llama tiempo entre respuestas. Se ha usado una función para analizar la duración del tiempo para pausas y el

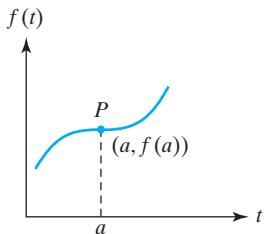
<sup>17</sup>R. K. Leik y B. F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1975).

tamaño de los grupos (número de palabras en un grupo)<sup>18</sup>. Esta función  $f$  es tal que

$$f(t) = \begin{cases} \text{número promedio de palabras que} \\ \text{se presentan en sucesión con tiempo} \\ \text{entre respuestas menor que } t \end{cases}$$

La gráfica de  $f$  tiene una forma similar a la mostrada en la figura 13.73 y se ajusta bastante bien por medio de un polinomio de tercer grado, como

$$f(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$$



**FIGURA 13.73** Diagrama para el problema 55.

El punto  $P$  tiene un significado especial. Es tal que el valor  $a$  separa los tiempos entre respuestas *dentro* de los grupos, de aquellos tiempos que se registran *entre* dos grupos. Matemáticamente,  $P$  es un punto crítico que también es un punto de inflexión. Suponga estas dos condiciones y demuestre que (a)  $a = -B/(3A)$  y (b)  $B^2 = 3AC$ .

- 56. Penetración en el mercado** En un modelo para introducir un producto nuevo a un mercado, las ventas  $S$  del producto en el tiempo  $t$  están dadas por<sup>19</sup>

$$S = g(t) = \frac{m(p+q)^2}{p} \left[ \frac{e^{-(p+q)t}}{\left( \frac{q}{p} e^{-(p+q)t} + 1 \right)^2} \right]$$

donde  $p$ ,  $q$  y  $m$  son constantes diferentes de cero.

(a) Demuestre que

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\frac{m}{p}(p+q)^3 e^{-(p+q)t} \left[ \frac{q}{p} e^{-(p+q)t} - 1 \right]}{\left( \frac{q}{p} e^{-(p+q)t} + 1 \right)^3}$$

(b) Determine el valor de  $t$  para el cual se tiene la venta máxima. Puede suponer que  $S$  alcanza un máximo cuando  $dS/dt = 0$ .

En los problemas 57 a 60, cuando sea apropiado, redondee sus respuestas a dos decimales.

- 57.** En la gráfica de  $y = 4x^3 + 5.3x^2 - 7x + 3$ , encuentre las coordenadas de todos los extremos relativos.
- 58.** En la gráfica de  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 1$ , determine los extremos absolutos de  $f$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .

<sup>18</sup>A. Graesser y G. Mandler, "Limited Processing Capacity Constrains the Storage of Unrelated Sets of Words and Retrieval from Natural Categories", *Human Learning and Memory*, 4, núm. 1 (1978), 86-100.

<sup>19</sup>A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein et al., "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 11 (1978), 197-221.

- 59.** La gráfica de una función  $f$  tiene exactamente un punto de inflexión. Si

$$f''(x) = \frac{x^3 + 3x + 2}{5x^2 - 2x + 4}$$

use la gráfica de  $f''$  para determinar el valor  $x$  del punto de inflexión de  $f$ .

- 60.** Grafique  $y = \frac{3x - 6x^2}{x^3 + 4x + 1}$ . Con base en la gráfica, localice las asíntotas horizontales y verticales.

- 61. Maximización de la producción** Un fabricante determina que  $m$  empleados en cierta línea de producción producen  $q$  unidades por mes, donde

$$q = 80m^2 - 0.1m^4$$

Para obtener una producción mensual máxima, ¿cuántos empleados deben asignarse a la línea de producción?

- 62. Ingreso** La función de demanda para el producto de un fabricante está dada por  $p = 100e^{-0.1q}$ . ¿Para qué valor de  $q$  maximiza el fabricante su ingreso total?

- 63. Ingreso** La función de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = \sqrt{500 - q}$$

Si el monopolista quiere producir por lo menos 100 unidades pero no más de 200, ¿cuántas unidades debe producir para maximizar el ingreso total?

- 64. Costo promedio** Si  $c = 0.01q^2 + 5q + 100$  es una función de costo, encuentre la función de costo promedio. ¿A qué nivel de producción  $q$  presenta un costo promedio mínimo?

- 65. Utilidad** La función de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = 500 - 3q$$

y el costo promedio por unidad para producir  $q$  unidades es

$$\bar{c} = q + 200 + \frac{1000}{q}$$

donde  $p$  y  $\bar{c}$  están en dólares por unidad. Encuentre la utilidad máxima que el monopolista puede lograr.

- 66. Diseño de un recipiente** Se va a fabricar una caja rectangular recortando cuadrados iguales de cada esquina de una lámina de cartón de 10 por 16 pulgadas y doblando luego los lados. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo?

- 67. Cercado** Un terreno rectangular va a cercarse y dividirse en tres partes iguales por dos cercas paralelas a uno de los lados. Si se va a usar un total de 800 pies de cerca, encuentre las dimensiones del terreno para que su área sea máxima.

- 68. Diseño de un cartel** Un cartel rectangular con un área de 500 pulg<sup>2</sup> debe tener un margen de 4 pulg a cada lado y en la parte inferior, y un margen de 6 pulg en la parte superior. El resto del cartel es para material impreso. Encuentre las dimensiones del cartel de modo que el área de la zona impresa sea máxima.

- 69. Costo** Una empresa fabrica estantes para computadoras personales. Para cierto modelo, el costo total (en miles de dólares) cuando se producen  $q$  cientos de estantes, está dado por

$$c = 2q^3 - 9q^2 + 12q + 20$$

- (a) La empresa tiene actualmente capacidad para producir entre 75 y 600 (inclusive) estantes por semana. Determine el número de estantes semanales que debe producir para minimizar el costo total y encuentre el correspondiente costo promedio por estante.
- (b) Suponga que deben producirse entre 300 y 600 estantes. ¿Cuántos deberían producirse ahora para minimizar el costo total?

- 70. Bacterias** En un laboratorio se aplica un agente antibacterial experimental a una población de 100 bacterias. Los datos indican que el número de bacterias  $t$  horas después de introducir el agente, está dado por

$$N = \frac{12100 + 110t + 100t^2}{121 + t^2}$$

¿Para qué valor de  $t$  se presenta el número máximo de bacterias en la población? ¿Cuál es este número máximo?

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Cambio de la población a lo largo del tiempo

**A**hora que se sabe cómo encontrar la derivada de una función, se podría preguntar si existe una forma de realizar el proceso en forma inversa: encontrar una función, dada su derivada. Finalmente, de eso se trata la integración (capítulos 14 y 15). Sin embargo, por lo pronto puede usarse la derivada de una función para encontrar la función de manera *aproximada* aún si saber cómo realizar la integración.

A manera de ejemplo, suponga que se desea describir la población a través del tiempo, de un pequeño pueblo en un área fronteriza. Imagine que los que se sabe del pueblo son todos los hechos acerca de cómo su población,  $P$ , cambia a través del tiempo,  $t$ , donde la población se mide en número de personas y el tiempo en años.

1. Los nacimientos superan a las muertes, de manera que en el curso de un año existe un incremento del 25% antes de que se tomen en cuenta otros factores. Así, el cambio anual debido a la diferencia nacimientos/muertes es 0.25P.
2. Cada año, de los viajeros que pasan por ahí, diez deciden detenerse y establecerse. Esto contribuye con una constante de 10 al cambio anual.
3. La soledad ocasiona que algunas personas se vayan cuando el pueblo es demasiado pequeño para ellas. En el extremo, 99% de las personas se irían en el curso de un año si estuviera solas (población = 1). Cuando la población es 100, 10% de los residentes se van cada año debido a la soledad.

Si se supone una relación exponencial, se escribe la probabilidad de que una persona dada se vaya en un año debido a la soledad como  $Ae^{-kP}$ , donde  $A$  y  $k$  son constantes positivas. Los números indican que  $Ae^{-k \cdot 1} = 0.99$  y  $Ae^{-k \cdot 100} = 0.10$ . Al despejar  $A$  y  $k$  de este par de ecuaciones se obtiene

$$k = \frac{\ln 9.9}{99} \approx 0.02316$$



y

$$A = 0.99e^{(\ln 9.9)/99} \approx 1.01319$$

Y si  $Ae^{-kP}$  es la probabilidad de que una sola persona se vaya, el cambio de población por año debido a la soledad es  $-P$  veces esa ecuación, a saber  $-1.01319Pe^{-0.02316P}$ . (El signo negativo se debe al hecho de que el cambio es hacia abajo).

4. La aglomeración ocasiona que algunas personas se vayan cuando el pueblo es demasiado grande para ellas. Nadie tiene un problema de aglomeración cuando están solos (población = 1), pero cuando la población es 100, 10% de los residentes se van cada año debido a la aglomeración.

De nuevo, tras suponer una relación exponencial, se escribe la probabilidad de que una persona dada se vaya en el transcurso de un año debido a la aglomeración como  $1 - Ae^{-kP}$ . Esta vez, los números indican que  $1 - Ae^{-k \cdot 1} = 0$  y  $1 - Ae^{-k \cdot 100} = 0.10$ . Al despegar  $A$  y  $k$  de este par de ecuaciones se tiene

$$k = -\frac{\ln 0.9}{99} \approx 0.001064$$

y

$$A = e^{-(\ln 0.9)/99} \approx 1.001065$$

Si  $1 - Ae^{-kP}$  es la probabilidad de que una sola persona se vaya, la población cambia cada año debido a la aglomeración es  $-P$  veces esa ecuación, a saber  $-P(1 - 1.001065e^{-0.001064P})$ .

Ahora, la razón global de cambio en la población es el efecto neto de todos esos factores en conjunto. En forma de ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= 0.25P + 10 - 1.01319Pe^{-0.02316P} \\ &\quad - P(1 - 1.001065e^{-0.001064P}) \end{aligned}$$

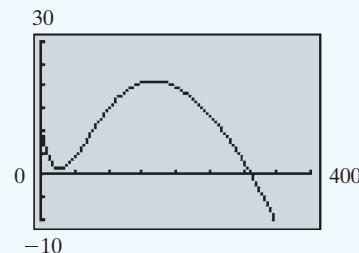


FIGURA 13.74  $\frac{dP}{dt}$  como una función de  $P$ .

Antes de tratar de reconstruir la función  $P(t)$ , se graficará la derivada. En una calculadora graficadora, luciría tal y como se muestra en la figura 13.74. Observe que  $\frac{dP}{dt}$  se presenta como una función de  $P$ . Ésta es una gráfica diferente de la que se obtendría si se conociera a  $P$  como una función de  $t$ , se obtuviera su derivada y se graficara en la forma estándar, a saber, como una función de  $t$ . Sin embargo, esta gráfica revela algunos hechos significativos. Primero, la derivada es positiva de  $P = 0$  a  $P = 311$ ; esto significa que la población tendrá un crecimiento positivo en todo ese intervalo y se puede esperar que ésta crezca de la nada, a una comunidad importante.

El crecimiento cae a cerca de cero hacia  $P = 30$ . Aparentemente, las partidas debido a la soledad casi llevan a detener el crecimiento cuando la población aún es pequeña. Pero una vez que el pueblo supera esa fase, su tamaño aumenta de manera estable, en un punto (alrededor de  $P = 170$ ) suman 21 personas por año.

En algún momento, las salidas debidas a la aglomeración comienzan a influir. Arriba de 312 la derivada es negativa. Lo que significa que si la población siempre fluctúa encima de 312, las pérdidas de población la reducirían de nuevo a ese nivel. En resumen, la población de este pueblo se estabiliza en 311 o 312; no es exactamente una ciudad, pero después de todo, éste es un entorno fronterizo.

Si ahora se desea graficar la población del pueblo como una función del tiempo, a continuación se presenta la forma de hacerlo: se aproxima la gráfica con una serie de segmentos de recta, cada uno de los cuales tiene una pendiente dada por la expresión que se obtuvo para  $dP/dt$ . Se comienza con un tiempo y una población conocida y se calcula la pendiente inicial. Se considerará que el pueblo comienza a crecer de la nada, si  $t = 0$  y  $P = 0$ . Entonces  $\frac{dP}{dt} = 10$ . Ahora se avanza en el tiempo durante un intervalo conveniente —por ejemplo, un año— y como la pendiente en  $(0, 0)$  es igual a 10, se incrementa la población de 0 a 10. Los nuevos valores para  $t$  y  $P$  son 1 y 10 respectivamente, entonces se dibuja un segmento de recta de  $(0, 0)$  a  $(1, 10)$ . Ahora, con  $t = 1$  y  $P = 10$ , se recalcula la pendiente y de nuevo se realizan los mismos pasos, y se repite este proceso hasta haber dibujado la porción de la curva que se desea ver.

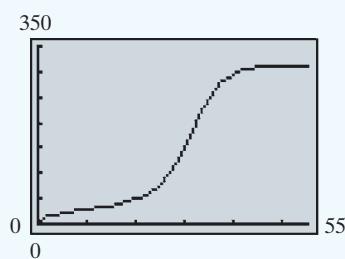
Obviamente, esto sería extremadamente tedioso si se hiciera a mano. Sin embargo, en una calculadora graficadora se

pueden usar las funciones de programming y line drawing. Para una TI-83 Plus, el siguiente programa hace el trabajo muy bien, después de introducir la expresión para  $\frac{dP}{dt}$  como  $Y_1$  (se mantiene a  $P$  como la variable):

PROGRAM:POPLTN

```
:Input "P?",P
:Input "T?", T
:ClrDraw
:T → S
:For(I, S + 1, S + 55)
:Line(T,P,I,P + Y1)
:I → T
:(P + Y1) → P
:End
```

Deseleccione la función  $Y_1$ . Configure la ventana gráfica para representar el plano coordenado desde 0 hasta 55 de manera horizontal y de 0 a 350 en forma vertical. Después ejecute el programa y, en el apuntador, dé valores iniciales para  $P$  y  $t$ . El programa dibujará 55 segmentos de línea, suficientes para llevar a la población a su tamaño final, a partir de  $P = 0, t = 0$ . El resultado se muestra en la figura 13.75.



**FIGURA 13.75**  $P$  como una función de  $t$ .

## Problemas

1. ¿Qué información da la figura 13.75 que no es evidente en la figura 13.74?
2. ¿Qué pasa cuando se selecciona un valor inicial de 450 para  $P$ ? (La pantalla debe ajustarse para ir desde 0 hasta 500 de manera vertical). ¿Es esto correcto?
3. ¿Por qué este procedimiento para obtener una gráfica de  $P(t)$  sólo es aproximado? ¿Cómo se puede mejorar la aproximación?

# 14

## INTEGRACIÓN

- 14.1 Diferenciales
- 14.2 La integral indefinida
- 14.3 Integración con condiciones iniciales
- 14.4 Más fórmulas de integración
- 14.5 Técnicas de integración
- 14.6 La integral definida
- 14.7 Teorema fundamental del cálculo integral
- 14.8 Integración aproximada
- 14.9 Área
- 14.10 Áreas entre curvas
- 14.11 Excedentes de los consumidores y de los productores
- 14.12 Repaso

### Aplicación práctica

Cargos de envío

Cualquier persona que haya tenido un negocio, conoce la necesidad de estimar costos con precisión. Cuando los trabajos se contratan de manera individual, la determinación de cuánto cuesta el trabajo, por lo general es el primer paso para decidir cuánto pedir.

Por ejemplo, un pintor debe determinar cuánta pintura utilizará en un trabajo. Como un galón de pintura cubrirá cierto número de pies cuadrados, la clave es determinar el área de la superficie que será pintada. Por lo general, esto sólo requiere de aritmética simple,—las paredes y los techos son rectangulares, por lo que el área total es una suma de productos de base por altura.

Pero no todas las áreas son tan sencillas de calcular. Por ejemplo, suponga que el puente que se muestra a continuación debe pulirse con un chorro de arena para retirar el hollín acumulado. ¿Cómo calcularía el contratista el número de pies cuadrados del área de la pared vertical de cada lado del puente?



Quizá el área podría estimarse como tres cuartos del área del trapezoide formado por los puntos  $A, B, C$  y  $D$ . Pero un cálculo más preciso —que podría ser más adecuado si la cotización fuese para una docena de puentes del mismo tamaño (por ejemplo, a lo largo de una vía de tren)— requeriría de un enfoque más refinado.

Si la forma del arco del puente pudiera describirse en forma matemática por medio de una función, el contratista podría utilizar el método que se presenta en este capítulo: integración. La integración tiene muchas aplicaciones, la más simple es la determinación de áreas de regiones acotadas por curvas. Otras incluyen el cálculo de la deflexión total de una viga debido a una fuerza de flexión, el cálculo de la distancia que recorre un submarino bajo el mar, y el cálculo del pago de electricidad de una compañía que consume energía a diferentes tasas en el transcurso de un mes. Los capítulos 11 a 13 trataron el cálculo diferencial. Se diferenció una función y se obtuvo otra función que es su derivada. El *cálculo integral* se ocupa del proceso inverso: dada la derivada de una función se debe encontrar la función original. La necesidad de hacerlo surge de manera natural. Por ejemplo, se puede tener una función de ingreso marginal y querer encontrar la función de ingreso a partir de ella. El cálculo integral también involucra un concepto de límite, que permite determinar el límite de un tipo especial de suma cuando el número de términos en ella tiende a infinito. ¡Ésta es la verdadera fuerza del cálculo integral! Con esta noción, es posible calcular el área de una región que no pueda encontrarse mediante ningún otro método conveniente.

**OBJETIVO**

Definir la diferencial, interpretarla de manera geométrica y usarla en aproximaciones. Asimismo, establecer nuevamente las relaciones de reciprocidad entre  $dx/dy$  y  $dy/dx$ .

## 14.1 Diferenciales

Pronto se dará una razón para usar el símbolo  $dy/dx$  para denotar la derivada de  $y$  con respecto a  $x$ . Para ello, se introducirá la noción de la *diferencial* de una función.

### DEFINICIÓN

Sea  $y = f(x)$  una función diferenciable de  $x$ , y sea  $\Delta x$  un cambio en  $x$ , donde  $\Delta x$  puede ser cualquier número real. Entonces, la **diferencial** de  $y$ , que se denota por  $dy$  o  $d(f(x))$ , está dada por

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Note que  $dy$  depende de dos variables, a saber,  $x$  y  $\Delta x$ . De hecho,  $dy$  es una función de dos variables.

### EJEMPLO 1 Cálculo de una diferencial

Encuentre la diferencial de  $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$  y evalúela cuando  $x = 1$  y  $\Delta x = 0.04$ .

**Solución:** La diferencial es

$$\begin{aligned} dy &= \frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 3x - 4) \Delta x \\ &= (3x^2 - 4x + 3) \Delta x \end{aligned}$$

Cuando  $x = 1$  y  $\Delta x = 0.04$ ,

$$dy = [3(1)^2 - 4(1) + 3](0.04) = 0.08$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



Si  $y = x$ , entonces  $dy = d(x) = 1\Delta x = \Delta x$ . Por lo tanto, la diferencial de  $x$  es  $\Delta x$ . Se abrevia  $d(x)$  con  $dx$ . Así,  $dx = \Delta x$ . De ahora en adelante en este texto siempre se escribirá  $dx$  en vez de  $\Delta x$  cuando se busque una diferencial. Por ejemplo,

$$d(x^2 + 5) = \frac{d}{dx}(x^2 + 5) dx = 2x dx$$

En resumen, se dice que si  $y = f(x)$  define una función diferenciable de  $x$ , entonces

$$dy = f'(x)dx$$

donde  $dx$  es cualquier número real. Siempre y cuando  $dx \neq 0$ , es posible dividir ambos lados de la ecuación entre  $dx$ :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Esto es,  $dy/dx$  puede interpretarse como el cociente de dos diferenciales, a saber,  $dy$  dividido entre  $dx$ , o como un símbolo para la derivada de  $f$  en  $x$ . Es por esto que se introdujo el símbolo  $dy/dx$  para denotar la derivada.

### EJEMPLO 2 Determinación de una diferencial en términos de $dx$

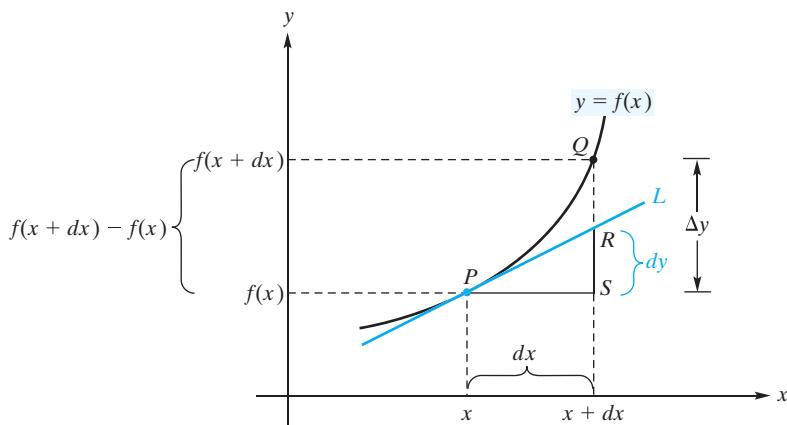
- a. Si  $f(x) = \sqrt{x}$ , entonces

$$d(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) dx = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

- b. Si  $u = (x^2 + 3)^5$ , entonces  $du = 5(x^2 + 3)^4(2x)dx = 10x(x^2 + 3)^4dx$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3



FIGURA 14.1 Interpretación geométrica de  $dy$  y  $\Delta x$ .

La diferencial puede interpretarse de manera geométrica. En la figura 14.1, el punto  $P(x, f(x))$  está sobre la curva  $y = f(x)$ . Suponga que  $x$  cambia en  $dx$ , un número real, al nuevo valor  $x + dx$ . Entonces, el valor de la nueva función es  $f(x + dx)$ , y el punto correspondiente sobre la curva es  $Q(x + dx, f(x + dx))$ . Por  $P$  y  $Q$  pasan líneas horizontales y verticales, respectivamente, que se intersecan en  $S$ . Una línea  $L$  tangente a la curva de  $P$  interseca el segmento  $QS$  en  $R$ , y forma el triángulo rectángulo  $PRS$ . Observe que la gráfica de  $f$  cerca de  $P$  es aproximada por la línea tangente en  $P$ . La pendiente de  $L$  es  $f'(x)$  pero también está dada por  $\overline{SR}/\overline{PS}$ , de manera que

$$f'(x) = \frac{\overline{SR}}{\overline{PS}}$$

Como  $dy = f'(x)dx$  y  $dx = \overline{PS}$ .

$$dy = f'(x)dx = \frac{\overline{SR}}{\overline{PS}} \cdot \overline{PS} = \overline{SR}$$

Así, si  $dx$  es un cambio de  $x$  en  $P$ , entonces  $dy$  es el cambio vertical correspondiente a lo largo de la **línea tangente** en  $P$ . Observe que para la misma  $dx$ , el cambio vertical a lo largo de la curva es  $\Delta y = \overline{SQ} = f(x + dx) - f(x)$ . No confunda  $\Delta y$  con  $dy$ . Sin embargo, en la figura 14.1 es claro que:

Cuando  $dx$  es cercana a 0,  $dy$  es una aproximación a  $\Delta y$ . Por lo tanto,

$$\Delta y \approx dy$$

Esta relación es útil al estimar  $\Delta y$ , un cambio en  $y$ , como se verá en el ejemplo 3.

### EJEMPLO 3 Uso de la diferencial para estimar un cambio en una cantidad

Un centro de salud del gobierno examinó las historias clínicas de un grupo de individuos que fueron hospitalizados por una enfermedad particular. Se encontró que la proporción total  $P$  que fue dada de alta al final de  $t$  días está dada por

$$P = P(t) = 1 - \left( \frac{300}{300 + t} \right)^3$$

Use diferenciales para estimar el cambio en la proporción dada de alta si  $t$  cambia de 300 a 305.

**Solución:** El cambio en  $t$  de 300 a 305 es  $\Delta t = dt = 305 - 300 = 5$ . El cambio en  $P$  es  $\Delta P = P(305) - P(300)$ . Se aproxima  $\Delta P$  mediante  $dP$ :

$$\Delta P \approx dP = P'(t)dt = -3 \left( \frac{300}{300 + t} \right)^2 \left( -\frac{300}{(300 + t)^2} \right) dt = 3 \frac{300^3}{(300 + t)^4} dt$$

Cuando  $t = 300$  y  $dt = 5$ ,

$$dP = 3 \frac{300^3}{600^4} 5 = \frac{15}{2^3 600} = \frac{1}{2^3 40} = \frac{1}{320} \approx 0.0031$$

Como comparación, el valor verdadero de  $\Delta P$  es

$$P(305) - P(300) = 0.87807 - 0.87500 = 0.00307$$

(con cinco decimales).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11 

Se dijo que si  $y = f(x)$ , entonces  $\Delta y \approx dy$  si  $dx$  es cercana a cero. Así,

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) \approx dy$$

de manera que

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy \quad (1)$$

Esta fórmula proporciona una forma de estimar el valor de una función  $f(x + dx)$ . Por ejemplo, suponga que se quiere estimar  $\ln(1.06)$ . Si se establece que  $y = f(x) = \ln x$ , se necesita estimar  $f(1.06)$ . Como  $d(\ln x) = (1/x)dx$ , de la fórmula (1) se tiene,

$$\begin{aligned} f(x + dx) &\approx f(x) + dy \\ \ln(x + dx) &\approx \ln x + \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

Se conoce el valor exacto de  $\ln 1$ , por lo que se establece que  $x = 1$  y  $dx = 0.06$ . Entonces,  $x + dx = 1.06$  y  $dx$  es cercana a cero. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \ln(1 + 0.06) &\approx \ln(1) + \frac{1}{1}(0.06) \\ \ln(1.06) &\approx 0 + 0.06 = 0.06 \end{aligned}$$

El valor verdadero de  $\ln(1.06)$  con cinco decimales es 0.05827.

#### EJEMPLO 4 Uso de la diferencial para estimar el valor de una función

*La función de demanda para un producto está dada por*

$$p = f(q) = 20 - \sqrt{q}$$

*donde  $p$  es el precio por unidad en dólares para  $q$  unidades. Por medio de diferenciales, estime el precio cuando se demandan 99 unidades.*

**Solución:** Se desea estimar  $f(99)$ . Por medio de la fórmula (1),

$$f(q + dq) \approx f(q) + dp$$

donde

$$dp = -\frac{1}{2\sqrt{q}} dq \quad \left( \frac{dp}{dq} = -\frac{1}{2}q^{-1/2} \right)$$

Se escoge  $q = 100$  y  $dq = -1$  porque  $q + dq = 99$ ,  $dq$  es pequeña y es fácil calcular  $f(100) = 20 - \sqrt{100} = 10$ . Así se tiene

$$\begin{aligned} f(99) &= f[100 + (-1)] \approx f(100) - \frac{1}{2\sqrt{100}}(-1) \\ f(99) &\approx 10 + 0.05 = 10.05 \end{aligned}$$

De aquí que el precio por unidad cuando se demandan 99 unidades sea de aproximadamente \$10.05.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17 

La ecuación  $y = x^3 + 4x + 5$  define a  $y$  como una función de  $x$ . Es posible escribir  $f(x) = x^3 + 4x + 5$ . Sin embargo, también define a  $x$  implícitamente como una función de  $y$ . De hecho, si se restringe el dominio de  $f$  a algún conjunto de números reales  $x$  de

manera que  $y = f(x)$  sea una función de uno a uno, entonces en principio es posible despejar  $x$  en términos de  $y$  y obtener  $x = f^{-1}(y)$ . (En realidad, aquí no es necesario hacer ninguna restricción al dominio. Como  $f'(x) = 3x^2 + 4 > 0$ , para toda  $x$ , se observa que  $f$  es estrictamente creciente sobre  $(-\infty, \infty)$  y por lo tanto es uno a uno sobre  $(-\infty, \infty)$ .) Como se hizo en el ejemplo 6 de la sección 12.2 se puede considerar la derivada de  $x$  con respecto a  $y$ ,  $dx/dy$ , y se observa que está dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{siempre que } dy/dx \neq 0$$

Como  $dx/dy$  puede considerarse un cociente de diferenciales, ahora se ve que es el recíproco del cociente de diferenciales  $dy/dx$ . Así

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 4}$$

Es importante entender que no es necesario poder despejar  $x$  de  $y = x^3 + 4x + 5$  en términos de  $y$  y la ecuación  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 4}$  es válida para toda  $x$ .

### EJEMPLO 5 Determinación de $dp/dq$ a partir de $dq/dp$

Encuentre  $\frac{dp}{dq}$  si  $q = \sqrt{2500 - p^2}$ .

**Solución:**

**Estrategia** Hay varias maneras de encontrar  $dp/dq$ . Una es despejar  $p$  de la ecuación dada en términos de  $q$  y luego diferenciar en forma directa. Otro método consiste en usar la diferenciación implícita. Sin embargo, como  $q$  está dada explícitamente como función de  $p$ , se puede encontrar fácilmente  $dq/dp$  y luego usar la relación recíproca anterior para encontrar  $dp/dq$ . Se usará este último procedimiento.

Se tiene

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{2}(2500 - p^2)^{-1/2}(-2p) = -\frac{p}{\sqrt{2500 - p^2}}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{\frac{dq}{dp}} = -\frac{\sqrt{2500 - p^2}}{p}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27



## Problemas 14.1

En los problemas 1 a 10, encuentre la diferencial de la función en términos de  $x$  y  $dx$ .

\*1.  $y = 5x - 7$

3.  $f(x) = \sqrt{x^4 - 9}$

5.  $u = \frac{1}{x^2}$

7.  $p = \ln(x^2 + 7)$

9.  $y = (9x + 3)e^{2x^2+3}$

2.  $y = 2$

4.  $f(x) = (4x^2 - 5x + 2)^3$

6.  $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$

8.  $p = e^{x^3+2x-5}$

10.  $y = \ln\sqrt{x^2 + 12}$

En los problemas 11 a 16, encuentre  $\Delta y$  y  $dy$  para los valores dados de  $x$  y  $dx$ .

\*11.  $y = 4 - 7x$ ;  $x = 3$ ,  $dx = 0.02$

12.  $y = 5x^2$ ;  $x = -1$ ,  $dx = -0.02$

13.  $y = 2x^2 + 5x - 7$ ;  $x = -2$ ,  $dx = 0.1$

14.  $y = (3x + 2)^2$ ;  $x = -1$ ,  $dx = -0.03$

15.  $y = \sqrt{32 - x^2}$ ;  $x = 4$ ,  $dx = -0.05$ . Redondee su respuesta a tres decimales.

16.  $y = \ln(-x)$ ;  $x = -5$ ,  $dx = 0.1$ .

\*17. Sea  $f(x) = \frac{x+5}{x+1}$

(a) Evalúe  $f'(1)$ .

(b) Use diferenciales para estimar el valor de  $f(1.1)$ .

18. Sea  $f(x) = x^{3x}$

(a) Evalúe  $f'(1)$ .

(b) Use diferenciales para estimar el valor de  $f(0.98)$ .

En los problemas 19 a 26, aproxime cada expresión por medio de diferenciales.

19.  $\sqrt{288}$  (Una pista:  $17^2 = 289$ ) 20.  $\sqrt{122}$

21.  $\sqrt[3]{65.5}$

23.  $\ln 0.97$

25.  $e^{0.001}$

22.  $\sqrt[4]{16.3}$

24.  $\ln 1.01$

26.  $e^{-0.01}$

En los problemas del 27 al 32, encuentre  $dx/dy$  o  $dp/dq$ .

\*27.  $y = 2x - 1$

28.  $y = 5x^2 + 3x + 2$

29.  $q = (p^2 + 5)^3$

30.  $q = \sqrt{p + 5}$

31.  $q = \frac{1}{p}$

32.  $q = e^{4-2p}$

33. Si  $y = 7x^2 - 6x + 3$ , encuentre el valor de  $dx/dy$  cuando  $x = 3$ .

34. Si  $y = \ln x^2$ , encuentre el valor de  $dx/dy$  cuando  $x = 3$ .

En los problemas 35 a 36, encuentre la razón de cambio de  $q$  con respecto a  $p$  para el valor indicado de  $q$ .

35.  $p = \frac{500}{q+2}$ ;  $q = 18$

36.  $p = 50 - \sqrt{q}$ ;  $q = 100$

37. **Utilidad** Suponga que la utilidad (en dólares) al producir  $q$  unidades de un producto es

$$P = 397q - 2.3q^2 - 400$$

Por medio de diferenciales, encuentre el cambio aproximado en la utilidad, si el nivel de producción cambia de  $q = 90$  a  $q = 91$ . Encuentre el cambio verdadero.

38. **Ingreso** Dada la función de ingreso

$$r = 250q + 45q^2 - q^3$$

use diferenciales para encontrar el cambio aproximado en el ingreso, si el número de unidades se incrementa de  $q = 40$  a  $q = 41$ . Encuentre el cambio verdadero.

39. **Demanda** La ecuación de demanda para un producto es

$$p = \frac{10}{\sqrt{q}}$$

Por medio de diferenciales estime el precio cuando se demandan 24 unidades.

40. **Demanda** Dada la función de demanda

$$p = \frac{200}{\sqrt{q+8}}$$

use diferenciales para estimar el precio por unidad cuando se demandan 40 unidades.

41. Si  $y = f(x)$ , entonces el *cambio proporcional* en  $y$  se define como  $\Delta y/y$ , que puede aproximarse con diferenciales por

medio de  $dy/y$ . Use esta última forma para estimar el cambio proporcional en la función de costo

$$c = f(q) = \frac{q^4}{2} + 3q + 400$$

donde  $q = 10$  y  $dq = 2$ . Redondee su respuesta a un decimal.

42. **Estatus/ingreso** Suponga que  $S$  es un valor numérico de la condición social basado en el ingreso anual,  $I$  (en miles de dólares), de una persona. Para cierta población, suponga que  $S = 20\sqrt{I}$ . Use diferenciales para estimar el cambio en  $S$ , si el ingreso anual decrece de \$45 000 a \$44 500.

43. **Biología** El volumen de una célula esférica está dado por  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , donde  $r$  es el radio. Estime el cambio en el volumen cuando el radio cambia de  $6.5 \times 10^{-4}$  cm a  $6.6 \times 10^{-4}$  cm.

44. **Contracción muscular** La ecuación

$$(P + a)(v + b) = k$$

se llama “ecuación fundamental de la contracción muscular”.<sup>1</sup> Aquí,  $P$  es la carga impuesta al músculo,  $v$  la velocidad de contracción de las fibras del músculo y  $a, b$  y  $k$  son constantes positivas. Encuentre  $P$  en términos de  $v$  y luego use diferenciales para estimar el cambio en  $P$  debido a un pequeño cambio en  $v$ .

45. **Demanda** La demanda,  $q$ , para el producto de un monopolista está relacionada con el precio por unidad,  $p$ , según la ecuación

$$2 + \frac{q^2}{200} = \frac{4000}{p^2}$$

(a) Verifique que se demandarán 40 unidades cuando el precio por unidad sea de \$20.

(b) Demuestre que  $\frac{dq}{dp} = -2.5$  cuando el precio por unidad es de \$20.

(c) Use diferenciales y los resultados de los incisos (a) y (b) para estimar el número de unidades que se demandarán si el precio por unidad se reduce a \$19.20.

46. **Utilidad** La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = \frac{1}{2}q^2 - 66q + 7000$$

y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 500 - q + \frac{80\,000}{2q}$$

(a) Encuentre la utilidad cuando se demandan 100 unidades.

(b) Use diferenciales y el resultado del inciso (a) para estimar la utilidad cuando se demandan 98 unidades.

## OBJETIVO

Definir la antiderivada y la integral indefinida, y aplicar fórmulas básicas de integración.

## 14.2 La integral indefinida

Dada una función  $f$ , si  $F$  es una función tal que

$$F'(x) = f(x)$$

(1)

entonces  $F$  se llama *antiderivada* de  $f$ . Así,

Una antiderivada de  $f$  es simplemente una función cuya derivada es  $f$ .

<sup>1</sup>R. W. Stacy et al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (1) por la diferencial  $dx$  resulta  $F'(x)dx = f(x)dx$ . Sin embargo, como  $F'(x)dx$  es la diferencial de  $F$ , se tiene que  $dF = f(x)dx$ . De aquí que se pueda considerar una antiderivada de  $f$  como una función cuya diferencial es  $f(x)dx$ .

### DEFINICIÓN

Una **antiderivada** de una función  $f$  es una función  $F$  tal que

$$F'(x) = f(x)$$

De manera equivalente, en notación diferencial

$$dF = f(x)dx$$

Por ejemplo, como la derivada de  $x^2$  es  $2x$ ,  $x^2$  es una antiderivada de  $2x$ . Sin embargo, no es la única antiderivada de  $2x$ : ya que

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(x^2 - 5) = 2x$$

tanto  $x^2 + 1$  como  $x^2 - 5$  también son antiderivadas de  $2x$ . De hecho, es claro que como la derivada de una constante es cero,  $x^2 + C$  es también una antiderivada de  $2x$  para *cualquier* constante  $C$ . Así,  $2x$  tiene un número infinito de antiderivadas. Lo más importante, es que *todas* las antiderivadas de  $2x$  deben ser funciones de la forma  $x^2 + C$ , debido al siguiente hecho:

Dos antiderivadas cualesquiera de una función difieren sólo en una constante.

Como  $x^2 + C$  describe todas las antiderivadas de  $2x$ , se puede hacer referencia a ella como la **antiderivada más general** de  $2x$ , denotada por  $\int 2x dx$ , que se lee “*integral indefinida* de  $2x$  con respecto a  $x$ ”. Así, se escribe

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

El símbolo  $\int$  se llama **símbolo de integración**,  $2x$  es el **integrando** y  $C$  la **constante de integración**. La  $dx$  es parte de la notación integral e indica la variable implicada. Aquí,  $x$  es la **variable de integración**.

En forma más general, la **integral indefinida** de cualquier función  $f$  con respecto a  $x$  se escribe  $\int f(x) dx$  y denota la antiderivada más general de  $f$ . Como todas las antiderivadas de  $f$  difieren sólo en una constante, si  $F$  es cualquier antiderivada de  $f$ , entonces

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{donde } C \text{ es una constante}$$

*Integrar f* significa encontrar  $\int f(x) dx$ . En resumen,

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{si y sólo si} \quad F'(x) = f(x)$$

Así, se tiene

$$\frac{d}{dx} \left( \int f(x) dx \right) = f(x) \quad \text{y} \quad \int \frac{d}{dx}(F(x)) dx = F(x) + C$$

con lo que se muestra la extensión a la cual la diferenciación y la integración indefinida son procedimientos inversos.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1****DETERMINACIÓN DE UNA INTEGRAL INDEFINIDA**

Si el costo marginal para una compañía es  $f(q) = 28.3$ , encuentre  $\int 28.3 dq$ , que proporciona la forma de la función de costo.

**ADVERTENCIA**

Un error común consiste en omitir  $C$ , la constante de integración.

**EJEMPLO 1 Determinación de una integral indefinida**

Encuentre  $\int 5 dx$ .

**Solución:**

**Estrategia** Primero se debe encontrar (tal vez una palabra más apropiada sería “inferir”) una función cuya derivada sea 5. Luego se añadirá la constante de integración.

Como se sabe que la derivada de  $5x$  es 5,  $5x$  es una antiderivada de 5. Por lo tanto,

$$\int 5 dx = 5x + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



**TABLA 14.1** Fórmulas básicas de integración

1.	$\int k dx = kx + C$	$k$ es una constante
2.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq -1$
3.	$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	para $x > 0$
4.	$\int e^x dx = e^x + C$	
5.	$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$	$k$ es una constante
6.	$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$	

Mediante las fórmulas de diferenciación de los capítulos 11 y 12, se ha elaborado una lista de fórmulas básicas de integración en la tabla 14.1. Todas son fáciles de verificar. Por ejemplo, la fórmula 2 es cierta porque la derivada de  $x^{n+1}/(n+1)$  es  $x^n$  para  $n \neq -1$ . (Se debe tener  $n \neq -1$  porque el denominador es 0 cuando  $n = -1$ ). La fórmula 2 establece que la integral indefinida de una potencia de  $x$  (excepto  $x^{-1}$ ) se obtiene al incrementar el exponente de  $x$  en 1, al dividir esto entre el nuevo exponente y al sumarle la constante de integración. En la sección 14.4 se analizará la integral indefinida de  $x^{-1}$ .

Para verificar la fórmula 5, se debe comprobar que la derivada de  $k \int f(x) dx$  es  $kf(x)$ . Como la derivada de  $k \int f(x) dx$  es simplemente  $k$  veces la derivada de  $\int f(x) dx$ , que es  $f(x)$ , la fórmula 5 queda comprobada. El lector debe verificar las otras fórmulas. La fórmula 6 puede extenderse a cualquier número de sumas o diferencias.

**EJEMPLO 2 Integrales indefinidas de una constante y de una potencia de  $x$** 

a. Encuentre  $\int 1 dx$ .

**Solución:** Por la fórmula 1 con  $k = 1$

$$\int 1 dx = 1x + C = x + C$$

Usualmente se escribe  $\int 1 dx$  como  $\int dx$ . Por lo que,  $\int dx = x + C$ .

b. Encuentre  $\int x^5 dx$ .

**Solución:** Por la fórmula 2 con  $n = 5$ ,

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3



### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

#### INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN

Si la razón de cambio de los ingresos de una compañía puede modelarse mediante  $\frac{dR}{dt} = 0.12t^2$ , entonces encuentre  $\int 0.12t^2 dt$ , que proporciona la función de ingresos de la compañía.



#### ADVERTENCIA

Sólo un factor constante del integrando puede "salir" del signo de integral. Como  $x$  no es una constante, no es posible encontrar  $\int 7x dx$  como  $7x$  por  $\int dx$ .

### EJEMPLO 3 Integral indefinida de una constante por una función

Encuentre  $\int 7x dx$ .

**Solución:** Por la fórmula 5 con  $k = 7$  y  $f(x) = x$ ,

$$\int 7x dx = 7 \int x dx$$

Como  $x$  es  $x^1$ , por la fórmula 2 se tiene

$$\int x^1 dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1$$

donde  $C_1$  es la constante de integración. Por lo tanto,

$$\int 7x dx = 7 \int x dx = 7 \left( \frac{x^2}{2} + C_1 \right) = \frac{7}{2}x^2 + 7C_1$$

Como  $7C_1$  sólo es una constante arbitraria, para hacerlo más simple se reemplazará por  $C$ . Así,

$$\int 7x dx = \frac{7}{2}x^2 + C$$

No es necesario escribir todos los pasos intermedios al integrar. De manera más sencilla, se escribe

$$\int 7x dx = (7) \frac{x^2}{2} + C = \frac{7}{2}x^2 + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5



### EJEMPLO 4 Integral indefinida de una constante por una función

Encuentre  $\int -\frac{3}{5}e^x dx$ .

**Solución:**

$$\int -\frac{3}{5}e^x dx = -\frac{3}{5} \int e^x dx \quad (\text{Fórmula 5})$$

$$= -\frac{3}{5}e^x + C \quad (\text{Fórmula 4})$$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

#### DETERMINACIÓN DE INTEGRALES INDEFINIDAS

Debido a un nuevo competidor, el número de suscriptores a cierta revista disminuye a una tasa de  $\frac{dS}{dt} = -\frac{480}{t^3}$  suscripciones por mes, donde  $t$  es el número de meses desde que la competencia entró al mercado. Encuentre la forma de la ecuación para el número de suscriptores a la revista.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21



### EJEMPLO 5 Determinación de integrales indefinidas

a. Encuentre  $\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ .

**Solución:** Aquí,  $t$  es la variable de integración. Se escribe de nuevo el integrando de manera que se pueda usar una fórmula básica. Como  $1/\sqrt{t} = t^{-1/2}$ , al aplicar la fórmula 2 se obtiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-1/2} dt = \frac{t^{(-1/2)+1}}{-\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C$$

b. Encuentre  $\int \frac{1}{6x^3} dx$

**Solución:**

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{6x^3} dx &= \frac{1}{6} \int x^{-3} dx = \left(\frac{1}{6}\right) \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C \\ &= -\frac{x^{-2}}{12} + C = -\frac{1}{12x^2} + C\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

##### INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA SUMA

La tasa de crecimiento de la población de una nueva ciudad se estima mediante  $\frac{dN}{dt} = 500 + 300\sqrt{t}$ , donde  $t$  está en años. Encuentre

$$\int (500 + 300\sqrt{t}) dt$$

Cuando la integración de una expresión incluye más de un término, sólo se necesita una constante de integración.

#### EJEMPLO 6 Integral indefinida de una suma

Encuentre  $\int (x^2 + 2x) dx$ .

**Solución:** Por la fórmula 6,

$$\int (x^2 + 2x) dx = \int x^2 dx + \int 2x dx$$

Ahora,

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_1$$

y

$$\int 2x dx = 2 \int x dx = (2) \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_2 = x^2 + C_2$$

Por lo que,

$$\int (x^2 + 2x) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C_1 + C_2$$

Por conveniencia, se reemplazará la constante  $C_1 + C_2$  por  $C$ . Entonces se tiene

$$\int (x^2 + 2x) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$$

Si se omiten los pasos intermedios, se integra simplemente término por término y se escribe

$$\int (x^2 + 2x) dx = \frac{x^3}{3} + (2) \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11



#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5

##### INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA SUMA Y UNA DIFERENCIA

Suponga que la tasa de ahorro en Estados Unidos está dada por  $\frac{dS}{dt} = 2.1t^2 - 65.4t + 491.6$ , donde  $t$  es el tiempo en años y  $S$  es la cantidad de dinero ahorrado en miles de millones de dólares. Encuentre la forma de la ecuación para la cantidad de dinero ahorrado.

#### EJEMPLO 7 Integral indefinida de una suma y una diferencia

Encuentre  $\int (2\sqrt[5]{x^4} - 7x^3 + 10e^x - 1) dx$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}&\int (2\sqrt[5]{x^4} - 7x^3 + 10e^x - 1) dx \\ &= 2 \int x^{4/5} dx - 7 \int x^3 dx + 10 \int e^x dx - \int 1 dx && (\text{Fórmulas 5 y 6}) \\ &= (2) \frac{x^{9/5}}{\frac{9}{5}} - (7) \frac{x^4}{4} + 10e^x - x + C && (\text{Fórmulas 1, 2 y 4}) \\ &= \frac{10}{9}x^{9/5} - \frac{7}{4}x^4 + 10e^x - x + C\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



A veces, para aplicar las fórmulas básicas de integración, es necesario realizar primero operaciones algebraicas en el integrando, como se muestra en el ejemplo 8.

 **EJEMPLO 8** Uso de manipulaciones algebraicas para encontrar una integral indefinida

$$\text{Encuentre } \int y^2 \left( y + \frac{2}{3} \right) dy.$$



**ADVERTENCIA**

En el ejemplo 8, primero se multiplican los factores en el integrando. La respuesta no hubiera podido encontrarse simplemente en términos de  $\int y^2 dy$  y  $\int (y + \frac{2}{3}) dy$ . No existe una fórmula para la integral de un producto general de funciones.

**Solución:** El integrando no concuerda con ninguna forma familiar de integración. Sin embargo, después de multiplicar los factores del integrando se obtiene

$$\begin{aligned} \int y^2 \left( y + \frac{2}{3} \right) dy &= \int \left( y^3 + \frac{2}{3} y^2 \right) dy \\ &= \frac{y^4}{4} + \left( \frac{2}{3} \right) \frac{y^3}{3} + C = \frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{9} + C \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 41



 **EJEMPLO 9** Uso de manipulaciones algebraicas para encontrar una integral indefinida

a. Encuentre  $\int \frac{(2x - 1)(x + 3)}{6} dx$ .

**Solución:** Al factorizar la constante  $\frac{1}{6}$  y multiplicar los binomios, se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x - 1)(x + 3)}{6} dx &= \frac{1}{6} \int (2x^2 + 5x - 3) dx \\ &= \frac{1}{6} \left( (2) \frac{x^3}{3} + (5) \frac{x^2}{2} - 3x \right) + C \\ &= \frac{x^3}{9} + \frac{5x^2}{12} - \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

b. Encuentre  $\int \frac{x^3 - 1}{x^2} dx$ .

**Solución:** Es posible descomponer el integrando en fracciones, al dividir cada término del numerador entre el denominador:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 1}{x^2} dx &= \int \left( \frac{x^3}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int (x - x^{-2}) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 49



Otro enfoque algebraico para el inciso (b) es

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 1}{x^2} dx &= \int (x^3 - 1)x^{-2} dx \\ &= \int (x - x^{-2}) dx \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

## Problemas 14.2

En los problemas 1 a 52, encuentre las integrales indefinidas.

\*1.  $\int 7 dx$

2.  $\int \frac{1}{2x} dx$

\*3.  $\int x^8 dx$

4.  $\int 5x^{24} dx$

\*5.  $\int 5x^{-7} dx$

6.  $\int \frac{z^{-3}}{3} dz$

7.  $\int \frac{2}{x^{10}} dx$

8.  $\int \frac{7}{x^4} dx$

\*9.  $\int \frac{1}{t^{7/4}} dt$

10.  $\int \frac{7}{2x^{9/4}} dx$

\*11.  $\int (4 + t) dt$

12.  $\int (r^3 + 2r) dr$

13.  $\int (y^5 - 5y) dy$

14.  $\int (5 - 2w - 6w^2) dw$

\*15.  $\int (3t^2 - 4t + 5) dt$

16.  $\int (1 + t^2 + t^4 + t^6) dt$

17.  $\int (7 + e) dx$
18.  $\int (5 - 2^{-1}) dx$
39.  $\int \left( -\frac{\sqrt[3]{x^2}}{5} - \frac{7}{2\sqrt{x}} + 6x \right) dx$
19.  $\int \left( \frac{x}{7} - \frac{3}{4}x^4 \right) dx$
20.  $\int \left( \frac{2x^2}{7} - \frac{8}{3}x^4 \right) dx$
40.  $\int \left( \sqrt[3]{u} + \frac{1}{\sqrt{u}} \right) du$
- \*21.  $\int \pi e^x dx$
22.  $\int \left( \frac{e^x}{3} + 2x \right) dx$
42.  $\int x^4(x^3 + 8x^2 + 7) dx$
43.  $\int \sqrt{x}(x + 3) dx$
23.  $\int (x^{8.3} - 9x^6 + 3x^{-4} + x^{-3}) dx$
24.  $\int (0.7y^3 + 10 + 2y^{-3}) dy$
25.  $\int \frac{-2\sqrt{x}}{3} dx$
26.  $\int dz$
44.  $\int (z + 2)^2 dz$
27.  $\int \frac{1}{4\sqrt[8]{x^2}} dx$
28.  $\int \frac{-4}{(3x)^3} dx$
46.  $\int \left( \frac{2}{\sqrt[5]{x}} - 1 \right)^2 dx$
29.  $\int \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3} \right) dx$
30.  $\int \left( \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{x^4} \right) dx$
48.  $\int (6e^u - u^3(\sqrt{u} + 1)) du$
- \*49.  $\int \frac{z^4 + 10z^3}{2z^2} dz$
50.  $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 2x}{5x^2} dx$
51.  $\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x} dx$
52.  $\int \frac{(x^3 + 1)^2}{x^2} dx$
53. Si  $F(x)$  y  $G(x)$  son tales que  $F'(x) = G'(x)$ , ¿es cierto que  $F(x) - G(x)$  debe ser cero?
54. (a) Encuentre una función  $F$  tal que  $\int F(x) dx = xe^x + C$ .  
(b) ¿Hay sólo una función  $F$  que satisface la ecuación dada en el inciso (a), o existen muchas funciones con esta característica?
55. Encuentre  $\int \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx$ .

**OBJETIVO**

Encuentrar una antiderivada particular de una función que satisface ciertas condiciones. Esto implica la evaluación de una constante de integración.

**14.3 Integración con condiciones iniciales**

Si se conoce la razón de cambio,  $f'$ , de la función  $f$ , entonces la función  $f$  misma es una antiderivada de  $f'$  (puesto que la derivada de  $f$  es  $f'$ ). Por supuesto, hay muchas antiderivadas de  $f'$ , y la más general se denota mediante la integral indefinida. Por ejemplo, si

$$f'(x) = 2x$$

entonces

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 2x dx = x^2 + C \quad (1)$$

Es decir, *cualquier* función de la forma  $f(x) = x^2 + C$  tiene su derivada igual a  $2x$ . Note que debido a la constante de integración, no se conoce  $f(x)$  específicamente. Sin embargo, si  $f$  debe tener cierto valor para un valor particular de  $x$ , es posible determinar el valor de  $C$  y así determinar específicamente  $f(x)$ . Por ejemplo, si  $f(1) = 4$ , con base en la ecuación (1),

$$f(1) = 1^2 + C$$

$$4 = 1 + C$$

$$C = 3$$

Así,

$$f(x) = x^2 + 3$$

Es decir, ahora ya se conoce la función particular  $f(x)$  para la cual  $f'(x) = 2x$  y  $f(1) = 4$ . La condición  $f(1) = 4$ , que da un valor de  $f$  para un valor específico de  $x$ , se llama una *condición inicial*.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1****PROBLEMA CON CONDICIÓN INICIAL**

La tasa de crecimiento de una especie de bacterias se estima por medio de  $\frac{dN}{dt} = 800 + 200e^t$ , donde  $N$  es el número de bacterias (en miles) después de  $t$  horas. Si  $N(5) = 40\,000$ , encuentre  $N(t)$ .

**EJEMPLO 1 Problema con condición inicial**

*Si  $y$  es una función de  $x$  tal que  $y' = 8x - 4$  y  $y(2) = 5$ , encuentre  $y$ . [Nota:  $y(2) = 5$  significa que  $y = 5$  cuando  $x = 2$ .] Encuentre también  $y(4)$ .*

**Solución:** Aquí,  $y(2) = 5$  es la condición inicial. Como  $y' = 8x - 4$ ,  $y$  es una antiderivada de  $8x - 4$ :

$$y = \int (8x - 4) dx = 8 \cdot \frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^2 - 4x + C \quad (2)$$

Es posible determinar el valor de  $C$  por medio de la condición inicial. Debido a que  $y = 5$  cuando  $x = 2$ , de la ecuación (2), se tiene

$$5 = 4(2)^2 - 4(2) + C$$

$$5 = 16 - 8 + C$$

$$C = -3$$

Al reemplazar  $C$  por  $-3$  en la ecuación (2) se obtiene la función deseada:

$$y = 4x^2 - 4x - 3 \quad (3)$$

Para encontrar  $y(4)$ , se establece que  $x = 4$  en la ecuación (3):

$$y(4) = 4(4)^2 - 4(4) - 3 = 64 - 16 - 3 = 45$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2****PROBLEMA CON CONDICIÓN INICIAL QUE IMPLICA A  $y''$** 

La aceleración de un objeto después de  $t$  segundos está dada por  $y'' = 84t + 24$ , la velocidad a los 8 segundos está dada por  $y'(8) = 2891$  pies/s, y la posición a los dos segundos es  $y(2) = 184$  pies. Encuentre  $y(t)$ .

**EJEMPLO 2 Problema con condición inicial que implica a  $y''$** 

*Dado que  $y'' = x^2 - 6$ ,  $y'(0) = 2$  y  $y(1) = -1$ , encuentre  $y$ .*

**Solución:**

**Estrategia** Para pasar de  $y''$  a  $y$ , son necesarias dos integraciones: la primera lleva de  $y''$  a  $y'$ , y la otra de  $y'$  a  $y$ . Por lo tanto, se tendrán dos constantes de integración, que se denominarán como  $C_1$  y  $C_2$ .

Como  $y'' = \frac{d}{dx}(y') = x^2 - 6$ ,  $y'$  es una antiderivada de  $x^2 - 6$ . Así que,

$$y' = \int (x^2 - 6) dx = \frac{x^3}{3} - 6x + C_1 \quad (4)$$

Ahora,  $y'(0) = 2$  significa que  $y' = 2$  cuando  $x = 0$ ; por lo tanto, de la ecuación (4), se tiene

$$2 = \frac{0^3}{3} - 6(0) + C_1$$

De aquí,  $C_1 = 2$ , de modo que

$$y' = \frac{x^3}{3} - 6x + 2$$

Por integración, es posible encontrar  $y$ :

$$\begin{aligned} y &= \int \left( \frac{x^3}{3} - 6x + 2 \right) dx \\ &= \left( \frac{1}{3} \right) \frac{x^4}{4} - (6) \frac{x^2}{2} + 2x + C_2 \end{aligned}$$

así

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x + C_2 \quad (5)$$

Ahora, como  $y = -1$  cuando  $x = 1$ , de la ecuación (5) se tiene

$$-1 = \frac{1^4}{12} - 3(1)^2 + 2(1) + C_2$$

Así,  $C_2 = -\frac{1}{12}$ , por lo que

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x - \frac{1}{12}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5 

La integración con condiciones iniciales es útil en muchos casos prácticos como lo ilustran los ejemplos siguientes.

### EJEMPLO 3 Ingreso y educación

Algunos sociólogos estudiaron el ingreso anual promedio actual y (en dólares) que una persona de un grupo urbano particular con  $x$  años de educación puede esperar recibir al buscar un empleo ordinario. Estimaron que la razón a la que el ingreso cambia con respecto a la educación está dada por

$$\frac{dy}{dx} = 100x^{3/2} \quad 4 \leq x \leq 16$$

donde  $y = 28\,720$  cuando  $x = 9$ . Encuentre  $y$ .

**Solución:** Aquí  $y$  es una antiderivada de  $100x^{3/2}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} y &= \int 100x^{3/2} dx = 100 \int x^{3/2} dx \\ &= (100) \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C \\ &= 40x^{5/2} + C \end{aligned} \tag{6}$$

La condición inicial es que  $y = 28\,720$  cuando  $x = 9$ . Tras sustituir estos valores en la ecuación (6), es posible determinar el valor de  $C$ :

$$\begin{aligned} 28\,720 &= 40(9)^{5/2} + C \\ &= 40(243) + C \\ 28\,720 &= 9720 + C \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $C = 19\,000$  y

$$y = 40x^{5/2} + 19\,000.$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17 

### EJEMPLO 4 Determinación de la función de demanda a partir del ingreso marginal

Si la función de ingreso marginal para el producto de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = 2000 - 20q - 3q^2$$

encuentre la función de demanda.

**Solución:**

**Estrategia** Al integrar  $dr/dq$  y usar una condición inicial, se puede encontrar la función de ingreso  $r$ . Pero el ingreso está dado también por la relación general  $r = pq$ , donde  $p$  es el precio por unidad. Así,  $p = r/q$ . Si se reemplazar  $r$  en esta ecuación por la función de ingreso, se obtiene la función de demanda.

Como  $dr/dq$  es la derivada del ingreso total  $r$ ,

$$\begin{aligned} r &= \int (2000 - 20q - 3q^2) dq \\ &= 2000q - (20)\frac{q^2}{2} - (3)\frac{q^3}{3} + C \end{aligned}$$

de manera que

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3 + C \quad (7)$$

**El ingreso es 0 cuando  $q$  es 0.**

Se supone que **cuando no se ha vendido ninguna unidad, no hay ingreso**; esto es,  $r = 0$  cuando  $q = 0$ . Ésta es la condición inicial. Si se sustituyen estos valores en la ecuación (7) resulta

$$0 = 2000(0) - 10(0)^2 - 0^3 + C$$

Por lo tanto,  $C = 0$  y

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3$$

Para encontrar la función de demanda, se usa el hecho de que  $p = r/q$  y se sustituye el valor de  $r$ :

$$\begin{aligned} p &= \frac{r}{q} = \frac{2000q - 10q^2 - q^3}{q} \\ p &= 2000 - 10q - q^2 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11



**Aunque  $q = 0$  da  $C = 0$ , por lo general esto no es cierto. Ocurre en esta sección porque las funciones de ingreso son polinomiales. En secciones posteriores, la evaluación en  $q = 0$  puede producir para  $C$  un valor distinto de cero.**

### EJEMPLO 5 Determinación del costo a partir del costo marginal

En la manufactura de un producto, los costos fijos por semana son de \$4000. (Los costos fijos son costos como la renta y el seguro, que permanecen constantes a todos los niveles de producción en un periodo dado). Si la función de costo marginal es

$$\frac{dc}{dq} = 0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2$$

donde  $c$  es el costo total (en dólares) de producir  $q$  libras de producto por semana, encuentre el costo de producir 10 000 lb en 1 semana.

**Solución:** Como  $dc/dq$  es la derivada del costo total  $c$ ,

$$\begin{aligned} c(q) &= \int [0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2] dq \\ &= 0.000001 \int (0.002q^2 - 25q) dq + \int 0.2 dq \\ c(q) &= 0.000001 \left( \frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2} \right) + 0.2q + C \end{aligned}$$

**Cuando  $q$  es 0, el costo total es igual al costo fijo.**

Los costos fijos son constantes sin importar el nivel de producción. Por lo tanto, cuando  $q = 0$ ,  $c = 4000$ , lo cual representa la condición inicial. Se establece que  $c(0) = 4000$  en la última ecuación, se encuentra que  $C = 4000$ , por lo que

$$c(q) = 0.000001 \left( \frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2} \right) + 0.2q + 4000 \quad (8)$$

A partir de la ecuación (8), se tiene  $c(10\ 000) = 5416\frac{2}{3}$ . Así, el costo total de producir 10 000 libras de producto en una semana es de \$5416.67.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



**Aunque  $q = 0$  le da a  $C$  un valor igual al costo fijo, esto no es cierto en general. Ocurre en esta sección porque las funciones de costo son polinomiales. En secciones posteriores, la evaluación en  $q = 0$  puede producir un valor para  $C$  que es diferente al costo fijo.**

## Problemas 14.3

En los problemas 1 y 2, encuentre y sujeta a las condiciones dadas.

\*1.  $dy/dx = 3x - 4$ ;  $y(-1) = \frac{13}{2}$

2.  $dy/dx = x^2 - x$ ;  $y(3) = \frac{19}{2}$

En los problemas 3 y 4, si y satisface las condiciones dadas, encuentre y(x) para el valor dado de x.

3.  $y' = 5/\sqrt{x}$ ,  $y(9) = 50$ ;  $x = 16$

4.  $y' = -x^2 + 2x$ ,  $y(2) = 1$ ;  $x = 1$

En los problemas 5 a 8, encuentre y sujeta a las condiciones dadas.

\*5.  $y'' = -3x^2 + 4x$ ;  $y'(1) = 2$ ,  $y(1) = 3$

6.  $y'' = x + 1$ ;  $y'(0) = 0$ ,  $y(0) = 5$

7.  $y''' = 2x$ ;  $y''(-1) = 3$ ,  $y'(3) = 10$ ,  $y(0) = 13$

8.  $y''' = e^x + 1$ ;  $y''(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y(0) = 3$

En los problemas 9 a 12,  $dr/dq$  es una función de ingreso marginal. Encuentre la función de demanda.

9.  $dr/dq = 0.7$

10.  $dr/dq = 10 - \frac{1}{16}q$

\*11.  $dr/dq = 275 - q - 0.3q^2$     12.  $dr/dq = 5000 - 3(2q + 2q^3)$

En los problemas 13 a 16  $dc/dq$  es una función de costo marginal y los costos fijos están indicados entre llaves. Para los problemas 13 y 14, encuentre la función de costo total. En los problemas 15 y 16 encuentre el costo total para el valor indicado de q.

13.  $dc/dq = 1.35$ ; {200}

14.  $dc/dq = 2q + 75$ ; {2000}

\*15.  $dc/dq = 0.08q^2 - 1.6q + 6.5$ ; {8000};  $q = 25$

16.  $dc/dq = 0.000204q^2 - 0.046q + 6$ ; {15 000};  $q = 200$

\*17. **Dieta para ratas** Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales en ratas a las que se alimentó con una dieta en la que 10% era proteína.<sup>2</sup> La proteína consistió en levadura y harina de maíz.



En un periodo de tiempo, el grupo encontró que la razón de cambio (aproximada) del aumento promedio de peso G (en gramos) de una rata, con respecto al porcentaje P de levadura en la mezcla proteínica fue

$$\frac{dG}{dP} = -\frac{P}{25} + 2 \quad 0 \leq P \leq 100$$

Si  $G = 38$  cuando  $P = 10$ , encuentre G.

### OBJETIVO

Aprender y aplicar las fórmulas para

$$\int u^n du, \int e^u du \text{ y } \int \frac{1}{u} du.$$

## 14.4 Más fórmulas de integración

### Regla de la potencia para la integración

La fórmula

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{si } n \neq -1$$

<sup>2</sup>Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single-Cell Protein*; ed. R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

<sup>3</sup>Adaptado de D. G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia, 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

<sup>4</sup>R. W. Stacy et al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill, 1955).

18. **Polilla de invierno** Se llevó a cabo un estudio acerca de la polilla de invierno en Nueva Escocia.<sup>3</sup> Las larvas de la polilla caen al suelo de los árboles huéspedes. Se encontró que la razón (aproximada) con que la densidad y (el número de larvas por pie cuadrado de suelo) cambia con respecto a la distancia x (en pies), desde la base de un árbol huésped es

$$\frac{dy}{dx} = -1.5 - x \quad 1 \leq x \leq 9$$

Si  $y = 57.3$  cuando  $x = 1$ , encuentre y.

19. **Flujo de un fluido** En el estudio del flujo de un fluido en un tubo de radio constante  $R$ , como el torrente sanguíneo en ciertas partes del cuerpo, puede considerarse que el tubo consiste en tubos concéntricos de radio  $r$ , donde  $0 \leq r \leq R$ . La velocidad  $v$  del fluido es una función de  $r$  y está dada por<sup>4</sup>

$$v = \int -\frac{(P_1 - P_2)r}{2l\eta} dr$$

donde  $P_1$  y  $P_2$  son las presiones en los extremos del tubo,  $\eta$  (una letra griega que se lee "eta") es la viscosidad del fluido y  $l$  es la longitud del tubo. Si  $v = 0$  cuando  $r = R$ , demuestre que

$$v = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4l\eta}$$

20. **Elasticidad de la demanda** El único productor de un artículo ha determinado que la función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = 100 - 3q^2$$

Determine la elasticidad puntual de la demanda para el producto cuando  $q = 5$ . (*Una pista:* Encuentre primero la función de demanda.)

21. **Costo promedio** Un fabricante ha determinado que la función de costo marginal es

$$\frac{dc}{dq} = 0.003q^2 - 0.4q + 40$$

donde  $q$  es el número de unidades producidas. Si el costo marginal es de \$27.50 cuando  $q = 50$  y los costos fijos son de \$5000, ¿cuál es el costo *promedio* de producir 100 unidades?

22. Si  $f''(x) = 30x^4 + 12x$  y  $f'(1) = 10$ , evalúe

$$f(965.335245) - f(-965.335245)$$

que se aplica a una potencia de  $x$ , puede generalizarse para manejar una potencia de una función de  $x$ . Sea  $u$  una función diferenciable de  $x$ . Por medio de la regla de la potencia para la diferenciación, si  $n \neq -1$ , entonces

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{(n+1)(u(x))^n \cdot u'(x)}{n+1} = (u(x))^n \cdot u'(x)$$

Así,

$$\int (u(x))^n \cdot u'(x) dx = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

A ésta se le llama la *regla de la potencia para la integración*. Observe que  $u'(x) dx$  es la diferencial de  $u$ , es decir  $du$ . Por medio de un atajo matemático, es posible reemplazar  $u(x)$  por  $u$  y  $u'(x) dx$  por  $du$ :

### Regla de la potencia para la integración

*Si  $u$  es diferenciable, entonces*

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{si } n \neq -1 \quad (1)$$

Es esencial que usted se dé cuenta de la diferencia entre la regla de la potencia para la integración y la fórmula para  $\int x^n dx$ . En la regla de potencia,  $u$  representa una función, mientras que en  $\int x^n dx$ ,  $x$  es una variable.

### EJEMPLO 1 Aplicación de la regla de la potencia para la integración

a. Encuentre  $\int (x+1)^{20} dx$ .

**Solución:** Como el integrando es una potencia de la función  $x+1$ , se hará  $u = x+1$ . Entonces  $du = dx$ , y  $\int (x+1)^{20} dx$  tiene la forma  $\int u^{20} du$ . Por medio de la regla de la potencia para la integración,

$$\int (x+1)^{20} dx = \int u^{20} du = \frac{u^{21}}{21} + C = \frac{(x+1)^{21}}{21} + C$$

Observe que no se da la respuesta en términos de  $u$ , sino explícitamente en términos de  $x$ .

b. Determine  $\int 3x^2(x^3+7)^3 dx$ .

**Solución:** Se observa que el integrando contiene una potencia de la función  $x^3+7$ . Sea  $u = x^3+7$ . Entonces  $du = 3x^2 dx$ . Por fortuna,  $3x^2$  aparece como un factor en el integrando y se tiene

$$\begin{aligned} \int 3x^2(x^3+7)^3 dx &= \int (x^3+7)^3 [3x^2 dx] = \int u^3 du \\ &= \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^3+7)^4}{4} + C \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3 

Para aplicar la regla de la potencia para integración, algunas veces es necesario hacer un ajuste para obtener  $du$  en el integrando, como lo ilustra el ejemplo 2.

### EJEMPLO 2 Ajuste para $du$

Encuentre  $\int x\sqrt{x^2+5} dx$ .

**Solución:** Esto se puede escribir como  $\int x(x^2+5)^{1/2} dx$ . Observe que el integrando contiene una potencia de la función  $x^2+5$ . Si  $u = x^2+5$ , entonces  $du = 2x dx$ . Como el factor constante 2 en  $du$  no aparece en el integrando, esta integral no tiene la forma

Después de la integración, usted quizás quiera saber lo que sucedió con  $3x^2$ . Observe de nuevo que  $du = 3x^2 dx$ .

$\int u^n du$ . Sin embargo, con  $du = 2x dx$  es posible escribir  $x dx = \frac{du}{2}$  de manera que la integral se convierte en

$$\int x(x^2 + 5)^{1/2} dx = \int (x^2 + 5)^{1/2} [x dx] = \int u^{1/2} \frac{du}{2}$$

Al mover el factor constante  $\frac{1}{2}$  al frente del signo de integral, se tiene

$$\int x(x^2 + 5)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \frac{1}{2} \left( \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right) + C = \frac{1}{3} u^{3/2} + C$$

que en términos de  $x$  (como se requiere) da

$$\int x\sqrt{x^2 + 5} dx = \frac{(x^2 + 5)^{3/2}}{3} + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15 



### ADVERTENCIA

La respuesta a un problema de integración debe expresarse en términos de la variable original.



### ADVERTENCIA

Es posible ajustar los factores constantes, pero no los factores variables.

En el ejemplo 2, se necesitaba el factor constante de  $2(u(x))^{1/2}u'(x)$  en el integrando  $x\sqrt{x^2 + 5}$ . En general, si se tiene  $\int (u(x))^n \frac{u'(x)}{k} dx$ , donde  $k$  es una constante diferente de cero, se puede escribir

$$\int (u(x))^n \frac{u'(x)}{k} dx = \int u^n \frac{du}{k} = \frac{1}{k} \int u^n du$$

para simplificar la integral, pero tales *ajustes* de la integral *no son posibles para factores variables*.

Cuando se use la forma  $\int u^n du$ , no se debe descuidar a  $du$ . Por ejemplo,

$$\int (4x + 1)^2 dx \neq \frac{(4x + 1)^3}{3} + C$$

La forma correcta de resolver este problema es la siguiente. Sea  $u = 4x + 1$ , se tiene  $du = 4dx$ . Así,  $dx = \frac{du}{4}$  y

$$\int (4x + 1)^2 dx = \int u^2 \left[ \frac{du}{4} \right] = \frac{1}{4} \int u^2 du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^3}{3} + C = \frac{(4x + 1)^3}{12} + C$$

### EJEMPLO 3 Aplicación de la regla de la potencia para la integración

- a. Encuentre  $\int \sqrt[3]{6y} dy$ .

**Solución:** El integrando es  $(6y)^{1/3}$ , una potencia de una función. Sin embargo, en este caso la sustitución obvia  $u = 6y$  se puede evitar. De manera más simple, se tiene

$$\int \sqrt[3]{6y} dy = \int 6^{1/3} y^{1/3} dy = \sqrt[3]{6} \int y^{1/3} dy = \sqrt[3]{6} \frac{y^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{6}}{4} y^{4/3} + C$$

- b. Encuentre  $\int \frac{2x^3 + 3x}{(x^4 + 3x^2 + 7)^4} dx$ .

**Solución:** Esto se puede escribir como  $\int (x^4 + 3x^2 + 7)^{-4} (2x^3 + 3x) dx$ . Se tratará de utilizar la regla de la potencia para integración. Si  $u = x^4 + 3x^2 + 7$ , entonces  $du = (4x^3 + 6x) dx$ , que es dos veces la cantidad  $(2x^3 + 3x) dx$  de la integral. Así,  $(2x^3 + 3x) dx = \frac{du}{2}$  y de nuevo se ilustra la técnica de *ajuste*:

$$\begin{aligned} \int (x^4 + 3x^2 + 7)^{-4} [(2x^3 + 3x) dx] &= \int u^{-4} \left[ \frac{du}{2} \right] = \frac{1}{2} \int u^{-4} du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{6u^3} + C = -\frac{1}{6(x^4 + 3x^2 + 7)^3} + C \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5 

Al utilizar la regla de la potencia para integración, tenga cuidado cuando haga su elección de  $u$ . En el ejemplo 3(b), *no* va a llegar muy lejos si, por ejemplo, elige  $u = 2x^3 + 3x$ . En ocasiones puede ser necesario intentar muchas opciones diferentes. No basta con sólo ver la integral. Intente algo, aun si se equivoca, ya que puede evocarle otras sugerencias que sí pueden funcionar. **El dominio de la integración sólo se alcanza después de muchas horas de práctica y estudio consciente.**

#### EJEMPLO 4 Una integral a la que no se le aplica la regla de la potencia

Encuentre  $\int 4x^2(x^4 + 1)^2 dx$ .

**Solución:** Si se establece  $u = x^4 + 1$ , entonces  $du = 4x^3 dx$ . Para obtener  $du$  en la integral, se necesita un factor adicional de la variable  $x$ . Sin embargo, sólo se pueden ajustar factores **constantes**. Así, no es posible utilizar la regla de la potencia. En lugar de eso, para encontrar la integral, primero se debe desarrollar  $(x^4 + 1)^2$ :

$$\begin{aligned}\int 4x^2(x^4 + 1)^2 dx &= 4 \int x^2(x^8 + 2x^4 + 1) dx \\ &= 4 \int (x^{10} + 2x^6 + x^2) dx \\ &= 4 \left( \frac{x^{11}}{11} + \frac{2x^7}{7} + \frac{x^3}{3} \right) + C\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 67



#### Integración de funciones con la exponencial natural

Ahora se prestará atención a la integración de funciones exponenciales. Si  $u$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

La fórmula de integración correspondiente a esta fórmula de diferenciación, es

$$\int e^u \frac{du}{dx} dx = e^u + C$$

Pero,  $\frac{du}{dx}$  es la diferencial de  $u$ , es decir,  $du$ . Así,

$$\int e^u du = e^u + C \quad (2)$$



#### ADVERTENCIA

No aplique la fórmula de la regla de la potencia para  $\int u^n du$  a  $\int e^u du$ .

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

##### INTEGRALES QUE INCLUYEN FUNCIONES EXPONENCIALES

Cuando un objeto se mueve de un entorno a otro, su temperatura  $T$  cambia a una razón dada por  $\frac{dT}{dt} = kCe^{kt}$ , donde  $T$  es el tiempo (en horas) después de haberse reubicado,  $C$  es la diferencia de temperaturas (la original menos la nueva) entre los entornos, y  $k$  es una constante. Si el entorno original tiene una temperatura de  $70^\circ$  y el nuevo una de  $60^\circ$ , y  $k = -0.5$ , encuentre la forma general de  $T(t)$ .

#### EJEMPLO 5 Integrales que incluyen funciones exponenciales

a. Encuentre  $\int 2xe^{x^2} dx$ .

**Solución:** Sea  $u = x^2$ . Entonces  $du = 2x dx$ , y por la ecuación (2),

$$\begin{aligned}\int 2xe^{x^2} dx &= \int e^{x^2}[2x dx] = \int e^u du \\ &= e^u + C = e^{x^2} + C\end{aligned}$$

b. Encuentre  $\int (x^2 + 1)e^{x^3+3x} dx$ .

**Solución:** Si  $u = x^3 + 3x$ , entonces  $du = (3x^2 + 3)dx = 3(x^2 + 1)dx$ . Si el integrando tuviese un factor de 3, la integral tendría la forma  $\int e^u du$ . Así, se puede escribir

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 1)e^{x^3+3x} dx &= \int e^{x^3+3x}[(x^2 + 1)dx] \\ &= \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C \\ &= \frac{1}{3}e^{x^3+3x} + C\end{aligned}$$

donde en el segundo paso se reemplazó  $(x^2 + 1)dx$  por  $\frac{1}{3}du$  pero se escribió  $\frac{1}{3}$  fuera de la integral.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 41 

### Integrales que incluyen funciones logarítmicas

Como usted sabe, la fórmula de la potencia  $\int u^n du = u^{n+1}/(n+1) + C$  no se aplica cuando  $n = -1$ . Para manejar esa situación, a saber,  $\int u^{-1} du = \int \frac{1}{u} du$  primero se debe recordar que se expuso en la sección 12.1 que

$$\frac{d}{dx}(\ln|u|) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad \text{para } u \neq 0$$

que proporciona la fórmula de integración

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C \quad \text{para } u \neq 0 \tag{3}$$

En particular, si  $u = x$ , entonces  $du = dx$ , y

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \text{para } x \neq 0 \tag{4}$$

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

##### INTEGRALES QUE INCLUYEN A $\frac{1}{u} du$

Si la tasa de memorización de un vocabulario de una lengua extranjera de un estudiante promedio está dada por  $\frac{dv}{dt} = \frac{35}{t+1}$ , donde  $v$  es el número de palabras del vocabulario memorizadas en  $t$  horas de estudio, determine la forma general de  $v(t)$ .

#### EJEMPLO 6 Integrales que incluyen a $\frac{1}{u} du$

a. Encuentre  $\int \frac{7}{x} dx$ .

**Solución:** De la ecuación (4),

$$\int \frac{7}{x} dx = 7 \int \frac{1}{x} dx = 7 \ln|x| + C$$

Mediante las propiedades de los logaritmos se puede escribir esta respuesta en otra forma:

$$\int \frac{7}{x} dx = \ln|x^7| + C$$

b. Encuentre  $\int \frac{2x}{x^2 + 5} dx$ .

**Solución:** Sea  $u = x^2 + 5$ . Entonces  $du = 2x dx$ . De la ecuación (3),

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{x^2 + 5} dx &= \int \frac{1}{x^2 + 5}[2x dx] = \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln|u| + C = \ln|x^2 + 5| + C\end{aligned}$$

Como  $x^2 + 5$  siempre es positiva, es posible omitir las barras de valor absoluto:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 5} dx = \ln(x^2 + 5) + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31 

**EJEMPLO 7** Una integral que incluye  $\frac{1}{u} du$

Encuentre  $\int \frac{(2x^3 + 3x) dx}{x^4 + 3x^2 + 7}$ .

**Solución:** Si  $u = x^4 + 3x^2 + 7$ , entonces  $du = (4x^3 + 6x) dx$ , que es dos veces el numerador, de aquí que  $(2x^3 + 3x) dx = \frac{du}{2}$ . Para aplicar la ecuación (3), se escribe

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 + 3x}{x^4 + 3x^2 + 7} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^4 + 3x^2 + 7| + C \quad (\text{Reescriba } u \text{ en términos de } x) \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^4 + 3x^2 + 7) + C \quad (x^4 + 3x^2 + 7 > 0 \text{ para toda } x)\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 51

**EJEMPLO 8** Una integral que incluye dos formas

Encuentre  $\int \left( \frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1} \right) dw$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\int \left( \frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1} \right) dw &= \int (1-w)^{-2} dw + \int \frac{1}{w-1} dw \\ &= -1 \int (1-w)^{-2} [-dw] + \int \frac{1}{w-1} dw\end{aligned}$$

La primera integral tiene la forma  $\int u^{-2} du$  y la segunda tiene la forma  $\int \frac{1}{v} dv$ . Así,

$$\begin{aligned}\int \left( \frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1} \right) dw &= -\frac{(1-w)^{-1}}{-1} + \ln |w-1| + C \\ &= \frac{1}{1-w} + \ln |w-1| + C\end{aligned}$$



Para su conveniencia, en la tabla 14.2 se enumeran las fórmulas básicas de integración analizadas hasta el momento. Se supone que  $u$  es una función de  $x$ .

**TABLA 14.2** Fórmulas básicas de integración

1.	$\int k du = ku + C$	$k$ es una constante
2.	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq -1$
3.	$\int \frac{1}{u} du = \ln  u  + C$	$u \neq 0$
4.	$\int e^u du = e^u + C$	
5.	$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$	$k$ es una constante
6.	$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$	

## Problemas 14.4

En los problemas 1 a 80, encuentre las integrales indefinidas.

1.  $\int (x+5)^7 dx$
2.  $\int 15(x+2)^4 dx$
- \*3.  $\int 2x(x^2+3)^5 dx$
4.  $\int (3x^2+10x)(x^3+5x^2+6) dx$
- \*5.  $\int (3y^2+6y)(y^3+3y^2+1)^{2/3} dy$
6.  $\int (15t^2-6t+1)(5t^3-3t^2+t)^{17} dt$
7.  $\int \frac{5}{(3x-1)^3} dx$
8.  $\int \frac{4x}{(2x^2-7)^{10}} dx$
9.  $\int \sqrt{2x-1} dx$
10.  $\int \frac{1}{\sqrt{x-5}} dx$
11.  $\int (7x-6)^4 dx$
12.  $\int x^2(3x^3+7)^3 dx$
13.  $\int u(5u^2-9)^{14} du$
14.  $\int 9x\sqrt{1+2x^2} dx$
- \*15.  $\int 4x^4(27+x^5)^{1/3} dx$
16.  $\int (4-5x)^9 dx$
17.  $\int 3e^{3x} dx$
18.  $\int 5e^{3t+7} dt$
19.  $\int (2t+1)e^{t^2+t} dt$
20.  $\int -3w^2e^{-w^3} dw$
21.  $\int xe^{7x^2} dx$
22.  $\int x^3e^{4x^4} dx$
23.  $\int 4e^{-3x} dx$
24.  $\int x^4e^{-6x^5} dx$
25.  $\int \frac{1}{x+5} dx$
26.  $\int \frac{12x^2+4x+2}{x+x^2+2x^3} dx$
27.  $\int \frac{3x^2+4x^3}{x^3+x^4} dx$
28.  $\int \frac{6x^2-6x}{1-3x^2+2x^3} dx$
29.  $\int \frac{6z}{(z^2-6)^5} dz$
30.  $\int \frac{3}{(5v-1)^4} dv$
- \*31.  $\int \frac{4}{x} dx$
32.  $\int \frac{3}{1+2y} dy$
33.  $\int \frac{s^2}{s^3+5} ds$
34.  $\int \frac{2x^2}{3-4x^3} dx$
35.  $\int \frac{5}{4-2x} dx$
36.  $\int \frac{7t}{5t^2-6} dt$
37.  $\int \sqrt{5x} dx$
38.  $\int \frac{1}{(3x)^6} dx$
39.  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx$
40.  $\int \frac{9}{1-3x} dx$
- \*41.  $\int 2y^3e^{y^4+1} dy$
42.  $\int 2\sqrt{2x-1} dx$
43.  $\int v^2e^{-2v^3+1} dv$
44.  $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x^3+9}} dx$
45.  $\int (e^{-5x} + 2e^x) dx$
46.  $\int 4\sqrt[3]{y+1} dy$
47.  $\int (8x+10)(7-2x^2-5x)^3 dx$
48.  $\int 2ye^{3y^2} dy$
49.  $\int \frac{x^2+2}{x^3+6x} dx$
50.  $\int (e^x + 2e^{-3x} - e^{5x}) dx$
- \*51.  $\int \frac{16s-4}{3-2s+4s^2} ds$
52.  $\int (6t^2+4t)(t^3+t^2+1)^6 dt$
53.  $\int x(2x^2+1)^{-1} dx$
54.  $\int (8w^5+w^2-2)(6w-w^3-4w^6)^{-4} dw$
55.  $\int -(x^2-2x^5)(x^3-x^6)^{-10} dx$
56.  $\int \frac{3}{5}(v-2)e^{2-4v+v^2} dv$
57.  $\int (2x^3+x)(x^4+x^2) dx$
58.  $\int (e^{3.1})^2 dx$
59.  $\int \frac{7+14x}{(4-x-x^2)^5} dx$
60.  $\int (e^x - e^{-x})^2 dx$
61.  $\int x(2x+1)e^{4x^3+3x^2-4} dx$
62.  $\int (u^3 - ue^{6-3u^2}) du$
63.  $\int x\sqrt{(8-5x^2)^3} dx$
64.  $\int e^{-x/7} dx$
65.  $\int \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right) dx$
66.  $\int 3\frac{x^4}{e^{x^5}} dx$
- \*67.  $\int (x^2+1)^2 dx$
68.  $\int \left[x(x^2-16)^2 - \frac{1}{2x+5}\right] dx$
69.  $\int \left[\frac{x}{x^2+1} + \frac{x^5}{(x^6+1)^2}\right] dx$
70.  $\int \left[\frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right] dx$
71.  $\int \left[\frac{2}{4x+1} - (4x^2-8x^5)(x^3-x^6)^{-8}\right] dx$
72.  $\int (r^3+5)^2 dr$
73.  $\int \left[\sqrt{3x+1} - \frac{x}{x^2+3}\right] dx$
74.  $\int \left[\frac{x}{3x^2+5} - \frac{x^2}{(x^3+1)^3}\right] dx$
75.  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
76.  $\int (e^5 - 3^e) dx$
77.  $\int \frac{1+e^{2x}}{4e^x} dx$
78.  $\int \frac{2}{t^2} \sqrt{\frac{1}{t} + 9} dt$
79.  $\int \frac{x+1}{x^2+2x} \ln(x^2+2x) dx$
80.  $\int \sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{8x^4}} dx$

En los problemas 81 a 84, encuentre y sujeta a las condiciones dadas.

81.  $y' = (3-2x)^2; \quad y(0) = 1$
82.  $y' = \frac{x}{x^2+6}; \quad y(1) = 0$

83.  $y'' = \frac{1}{x^2}$ ;  $y'(-2) = 3$ ,  $y(1) = 2$

84.  $y'' = (x+1)^{3/2}$ ;  $y'(3) = 0$ ,  $y(3) = 0$

85. **Bienes raíces** La tasa de cambio del valor de una casa cuya construcción costó \$350 000 puede modelarse por medio de  $\frac{dV}{dt} = 8e^{0.05t}$ , donde  $t$  es el tiempo en años desde que la casa fue construida y  $V$  es el valor (en miles de dólares) de la casa. Encuentre  $V(t)$ .

86. **Esperanza de vida** Si la tasa de cambio de la esperanza de vida  $l$  al nacer, de las personas que nacen en Estados Unidos puede modelarse mediante  $\frac{dl}{dt} = \frac{12}{2t+50}$ , donde  $t$  es el número de años a partir de 1940 y la esperanza de vida era de 63 años en 1940, encuentre la esperanza de vida para personas que nacieron en 1998.

87. **Oxígeno en los vasos capilares** En un análisis de la difusión del oxígeno en los vasos capilares<sup>5</sup> se usan cilindros concéntricos de radio  $r$  como modelos de un vaso capilar. La concentración  $C$  de oxígeno en el capilar está dada por

$$C = \int \left( \frac{Rr}{2K} + \frac{B_1}{r} \right) dr$$

donde  $R$  es la razón constante con que el oxígeno se difunde en el capilar, y  $K$  y  $B_1$  son constantes. Encuentre  $C$ . (Escriba la constante de integración como  $B_2$ .)

88. Encuentre  $f(2)$  si  $f\left(\frac{1}{3}\right) = 2$  y  $f'(x) = e^{3x+2} - 3x$ .

## OBJETIVO

## 14.5 Técnicas de integración

Analizar técnicas de manejo de problemas de integración más complejos, a saber, mediante la manipulación algebraica y por medio del ajuste del integrando a una forma conocida. Integrar una función exponencial con una base diferente a  $e$  y determinar la función de consumo, dada la propensión marginal al consumo.

Ahora se considerará la resolución de problemas de integración más difíciles.

Cuando se deben integrar fracciones, a veces es necesario realizar una división preliminar para obtener formas de integración familiares, como lo muestra el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 1 División preliminar antes de la integración

a. Encuentre  $\int \frac{x^3 + x}{x^2} dx$ .

**Solución:** En este caso, no es evidente una forma familiar de integración. Sin embargo, es posible descomponer el integrando en dos fracciones, al dividir cada término del numerador entre el denominador. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x}{x^2} dx &= \int \left( \frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2} \right) dx = \int \left( x + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C \end{aligned}$$

b. Encuentre  $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1} dx$ .

**Solución:** Aquí el integrando es un cociente de polinomios donde el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador. En tal caso, primero se usa la división larga. Recuerde que si  $f$  y  $g$  son polinomios, con el grado de  $f$  mayor o igual al grado de  $g$ , la división larga permite encontrar (solamente) los polinomios  $q$  y  $r$ , donde  $r$  es el polinomio cero, o bien el grado de  $r$  es estrictamente menor que el grado de  $g$ , lo que satisface

$$\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g}$$

Si se usa una notación abreviada obvia, se ve que

$$\int \frac{f}{g} = \int \left( q + \frac{r}{g} \right) = \int q + \int \frac{r}{g}$$

Como la integración de un polinomio es fácil, se observa que la integración de funciones racionales se reduce a la tarea integrar *funciones racionales propias*, aquellas para las que el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador. En este caso se obtiene

<sup>5</sup>W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1} dx &= \int \left( x^2 + x + \frac{1}{2x + 1} \right) dx \\&= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{2x + 1} dx \\&= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x + 1} d(2x + 1) \\&= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln |2x + 1| + C\end{aligned}$$

Aquí se usó la división larga para reescribir el integrando.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

### EJEMPLO 2 Integrales indefinidas

a. Encuentre  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^3} dx$ .

**Solución:** Esta integral puede escribirse como  $\int \frac{(\sqrt{x}-2)^{-3}}{\sqrt{x}} dx$ . Considere la regla de la potencia para la integración con  $u = \sqrt{x} - 2$ . Entonces  $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ , de manera que  $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$  y

$$\begin{aligned}\int \frac{(\sqrt{x}-2)^{-3}}{\sqrt{x}} dx &= \int (\sqrt{x}-2)^{-3} \left[ \frac{dx}{\sqrt{x}} \right] \\&= 2 \int u^{-3} du = 2 \left( \frac{u^{-2}}{-2} \right) + C \\&= -\frac{1}{u^2} + C = -\frac{1}{(\sqrt{x}-2)^2} + C\end{aligned}$$

b. Encuentre  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ .

**Solución:** Si  $u = \ln x$ , entonces  $du = \frac{1}{x} dx$ , y

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x \ln x} dx &= \int \frac{1}{\ln x} \left( \frac{1}{x} dx \right) = \int \frac{1}{u} du \\&= \ln |u| + C = \ln |\ln x| + C\end{aligned}$$

c. Encuentre  $\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}} dw$ .

**Solución:** Si  $u = \ln w$ , entonces  $du = \frac{1}{w} dw$ . Si se aplica la regla de la potencia para la integración, se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}} dw &= 5 \int (\ln w)^{-3/2} \left[ \frac{1}{w} dw \right] \\&= 5 \int u^{-3/2} du = 5 \cdot \frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} + C \\&= \frac{-10}{u^{1/2}} + C = -\frac{10}{(\ln w)^{1/2}} + C\end{aligned}$$

Aquí la integral se ajusta a una forma en la que pueda aplicarse la regla de la potencia para la integración.

Aquí la integral se ajusta a la forma conocida  $\int \frac{1}{u} du$ .

Aquí la integral se ajusta a una forma en la que se pueda aplicar la regla de la potencia para la integración.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23 

### Integración de $b^u$

En la sección 14.4 se integró una función exponencial con base  $e$ :

$$\int e^u du = e^u + C$$

Ahora se considerará la integral de una función exponencial con una base diferente a  $b$ :

$$\int b^u du$$

Para encontrar esta integral, primero se convierte a la base  $e$  con

$$b^u = e^{(\ln b)u} \quad (1)$$

(como ya se hizo en muchos ejemplos de diferenciación). El ejemplo 3 ilustrará este procedimiento.

### EJEMPLO 3 Una integral que incluye $b^u$

Encuentre  $\int 2^{3-x} dx$ .

**Solución:**

**Estrategia** Se desea integrar una función exponencial con base 2. Para hacerlo, primero se convierte de base 2 a base  $e$  mediante la ecuación (1).

$$\int 2^{3-x} dx = \int e^{(\ln 2)(3-x)} dx$$

El integrando de la segunda integral tiene la forma  $e^u$ , donde  $u = (\ln 2)(3 - x)$ . Como  $du = -\ln 2 dx$ , se puede despejar  $dx$  y escribir

$$\begin{aligned} \int e^{(\ln 2)(3-x)} dx &= -\frac{1}{\ln 2} \int e^u du \\ &= -\frac{1}{\ln 2} e^u + C = -\frac{1}{\ln 2} e^{(\ln 2)(3-x)} + C = -\frac{1}{\ln 2} 2^{3-x} + C \end{aligned}$$

Así,

$$\int 2^{3-x} dx = -\frac{1}{\ln 2} 2^{3-x} + C$$

Note que la respuesta se expresó en términos de una función exponencial con base 2, que es la base del integrando original.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27



Si se generaliza el procedimiento descrito en el ejemplo 3, es posible obtener una fórmula para integrar  $b^u$ :

$$\begin{aligned} \int b^u du &= \int e^{(\ln b)u} du \\ &= \frac{1}{\ln b} \int e^{(\ln b)u} d((\ln b)u) && (\ln b \text{ es una constante}) \\ &= \frac{1}{\ln b} e^{(\ln b)u} + C \\ &= \frac{1}{\ln b} b^u + C \end{aligned}$$

De aquí, se tiene

$$\int b^u du = \frac{1}{\ln b} b^u + C$$

Al aplicar esta fórmula a la integral del ejemplo 3 resulta

$$\begin{aligned} \int 2^{3-x} dx & & (b = 2, u = 3 - x) \\ &= - \int 2^{3-x} d(3 - x) & (-d(3 - x) = dx) \\ &= -\frac{1}{\ln 2} 2^{3-x} + C \end{aligned}$$

que es el mismo resultado obtenido antes.

## Aplicación de la integración

Ahora se considerará una aplicación de la integración que relaciona una función de consumo con la propensión marginal al consumo.

### EJEMPLO 4 Determinación de una función de consumo a partir de la propensión marginal al consumo

Para cierto país, la propensión marginal al consumo está dada por

$$\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}$$

donde el consumo  $C$  es una función del ingreso nacional  $I$ . Aquí,  $I$  se expresa en grandes denominaciones de dinero. Determine la función de consumo para el país, si se sabe que el consumo es de 10 ( $C = 10$ ) cuando  $I = 12$ .

**Solución:** Como la propensión marginal al consumo es la derivada de  $C$ , se tiene

$$\begin{aligned} C = C(I) &= \int \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}} \right) dI = \int \frac{3}{4} dI - \frac{1}{2} \int (3I)^{-1/2} dI \\ &= \frac{3}{4} I - \frac{1}{2} \int (3I)^{-1/2} dI \end{aligned}$$

Si se establece que  $u = 3I$ , entonces  $du = 3dI = d(3I)$  y

$$\begin{aligned} C &= \frac{3}{4} I - \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} \int (3I)^{-1/2} d(3I) \\ &= \frac{3}{4} I - \frac{1}{6} \frac{(3I)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + K \\ C &= \frac{3}{4} I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + K \end{aligned}$$

Éste es un ejemplo de un problema con valor inicial.

Cuando  $I = 12$ ,  $C = 10$ , por lo que

$$\begin{aligned} 10 &= \frac{3}{4}(12) - \frac{\sqrt{3(12)}}{3} + K \\ 10 &= 9 - 2 + K \end{aligned}$$

Así,  $K = 3$  y la función de consumo es

$$C = \frac{3}{4} I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + 3$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 61



## Problemas 14.5

En los problemas 1 a 56, determine las integrales indefinidas.

\*1.  $\int \frac{2x^6 + 8x^4 - 4x}{2x^2} dx$

2.  $\int \frac{9x^2 + 5}{3x} dx$

3.  $\int (3x^2 + 2)\sqrt{2x^3 + 4x + 1} dx$

4.  $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^2 + 1}} dx$

6.  $\int \frac{2xe^{x^2} dx}{e^{x^2} - 2}$

8.  $\int 5^t dt$

5.  $\int \frac{9}{\sqrt{2 - 3x}} dx$

7.  $\int 4^{7x} dx$

9.  $\int 2x(7 - e^{x^2/4}) dx$

10.  $\int \left( e^x + x^e + ex + \frac{e}{x} \right) dx$

11.  $\int \frac{6x^2 - 11x + 5}{3x - 1} dx$

12.  $\int \frac{(3x + 2)(x - 4)}{x - 3} dx$

13.  $\int \frac{5e^{2x}}{7e^{2x} + 4} dx$

14.  $\int 6(e^{4-3x})^2 dx$

15.  $\int \frac{e^{7/x}}{x^2} dx$

16.  $\int \frac{2x^4 - 6x^3 + x - 2}{x - 2} dx$

17.  $\int \frac{5x^3}{x^2 + 9} dx$

18.  $\int \frac{5 - 4x^2}{3 + 2x} dx$

19.  $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{3\sqrt{x}} dx$

20.  $\int \frac{5e^s}{1+3e^s} ds$
21.  $\int \frac{5(x^{1/3} + 2)^4}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
22.  $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
- \*23.  $\int \frac{\ln x}{x} dx$
24.  $\int \sqrt{t}(3-t\sqrt{t})^{0.6} dt$
25.  $\int \frac{\ln^2(r+1)}{r+1} dr$
26.  $\int \frac{9x^5 - 6x^4 - ex^3}{7x^2} dx$
- \*27.  $\int \frac{3^{\ln x}}{x} dx$
28.  $\int \frac{4}{x \ln(2x^2)} dx$
29.  $\int x^2 \sqrt{e^{x^3+1}} dx$
30.  $\int \frac{x+3}{x+6} dx$
31.  $\int \frac{8}{(x+3)\ln(x+3)} dx$
32.  $\int (e^{e^2} + x^e - 2x) dx$
33.  $\int \frac{x^3+x^2-x-3}{x^2-3} dx$
34.  $\int \frac{4x \ln \sqrt{1+x^2}}{1+x^2} dx$
35.  $\int \frac{6x^2 \sqrt{\ln(x^3+1)^2}}{x^3+1} dx$
36.  $\int 3(x^2+2)^{-1/2} xe^{\sqrt{x^2+2}} dx$
37.  $\int \left( \frac{x^3-1}{\sqrt{x^4-4x}} - \ln 7 \right) dx$
38.  $\int \frac{x-x^{-2}}{x^2+2x^{-1}} dx$
39.  $\int \frac{2x^4-8x^3-6x^2+4}{x^3} dx$
40.  $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} dx$
41.  $\int \frac{x}{x+1} dx$
42.  $\int \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)} dx$
43.  $\int \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+2}} dx$
44.  $\int \frac{5}{(3x+1)[1+\ln(3x+1)]^2} dx$
45.  $\int \frac{(e^{-x}+6)^2}{e^x} dx$
46.  $\int \left[ \frac{1}{8x+1} - \frac{1}{e^x(8+e^{-x})^2} \right] dx$
47.  $\int (x^3+ex)\sqrt{x^2+e} dx$
48.  $\int 3^x \ln x (1+\ln x) dx$  (Una pista:  $\frac{d}{dx}(x \ln x) = 1 + \ln x$ )
49.  $\int \sqrt{x}\sqrt{(8x)^{3/2}+3} dx$
50.  $\int \frac{2}{x(\ln x)^{2/3}} dx$
51.  $\int \frac{\sqrt{s}}{e^{\sqrt{s^3}}} ds$
52.  $\int \frac{\ln^3 x}{3x} dx$
53.  $\int e^{\ln(x^2+1)} dx$
54.  $\int dx$
55.  $\int \frac{\ln(xe^x)}{x} dx$
56.  $\int e^{f(x)+\ln(f'(x))} dx$  se supone que  $f' > 0$

En los problemas 57 y 58,  $dr/dq$  es una función de ingreso marginal. Encuentre la función de demanda.

57.  $\frac{dr}{dq} = \frac{200}{(q+2)^2}$

58.  $\frac{dr}{dq} = \frac{900}{(2q+3)^3}$

En los problemas 59 y 60,  $dc/dq$  es una función de costo marginal. Encuentre la función de costo total, si los costos fijos en cada caso son de 2000.

59.  $\frac{dc}{dq} = \frac{20}{q+5}$

60.  $\frac{dc}{dq} = 3e^{0.002q}$

En los problemas 61 a 63,  $dC/dI$  representa la propensión marginal al consumo. Encuentre la función de consumo sujeta a la condición dada.

\*61.  $\frac{dC}{dI} = \frac{1}{\sqrt{I}}$ ;  $C(9) = 8$

62.  $\frac{dC}{dI} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2I}}$ ;  $C(2) = \frac{3}{4}$

63.  $\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{6\sqrt{I}}$ ;  $C(25) = 23$

64. **Función de costo** La función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = 10 - \frac{100}{q+10}$$

donde  $c$  es el costo total en dólares cuando se producen  $q$  unidades. Cuando se producen 100 unidades, el costo promedio es de \$50 por unidad. Al dólar más cercano, determine el costo fijo del fabricante.

65. **Función de costo** Suponga que la función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = \frac{100q^2 - 3998q + 60}{q^2 - 40q + 1}$$

donde  $c$  es el costo total en dólares cuando se producen  $q$  unidades.

(a) Determine el costo marginal cuando se producen 40 unidades.

(b) Si los costos fijos son de \$10 000, encuentre el costo total de producir 40 unidades.

(c) Use el resultado de los incisos (a) y (b) y diferenciales para aproximar el costo total de producir 42 unidades.

66. **Función de costo** La función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = \frac{9}{10}\sqrt{q}\sqrt{0.04q^{3/4} + 4}$$

donde  $c$  es el costo total en dólares cuando se producen  $q$  unidades. Los costos fijos son de \$360.

(a) Determine el costo marginal cuando se producen 25 unidades.

(b) Encuentre el costo total de producir 25 unidades.

(c) Use los resultados de los incisos (a) y (b) y diferenciales para estimar el costo total de producir 23 unidades.

67. **Valor de la tierra** Se estima que en  $t$  años, contados a partir de ahora, el valor  $V$  (en dólares) de un acre de tierra cerca del pueblo fantasma de Cherokee, California, se incrementa a una tasa de  $\frac{8t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}$  dólares por año. Si el valor actual de la tierra es de \$500 por acre, ¿cuánto costará dentro de 10 años? Exprese su resultado al dólar más cercano.

68. **Función de ingreso** La función de ingreso marginal para el producto de un fabricante tiene la forma

$$\frac{dr}{dq} = \frac{a}{e^q + b}$$

para las constantes  $a$  y  $b$ , donde  $r$  es el ingreso total recibido (en dólares) cuando se producen  $q$  unidades. Encuentre la función de demanda y exprésela en la forma  $p = f(q)$ . (Una pista: Reescriba  $dr/dq$  al multiplicar tanto el numerador como el denominador por  $e^{-q}$ .)

- 69. Ahorro** La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por

$$\frac{dS}{dI} = \frac{5}{(I+2)^2}$$

donde  $S$  e  $I$  representan el ahorro y el ingreso total nacional, respectivamente, y se miden en miles de millones de dólares. Si el consumo total nacional es de \$7.5 miles de millones cuando el ingreso total nacional es de \$8 mil millones, ¿para qué valor o valores de  $I$  el ahorro total nacional es igual a cero?

- 70. Función de consumo** La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por

$$\frac{dS}{dI} = \frac{1}{2} - \frac{1.8}{\sqrt[3]{3I^2}}$$

donde  $S$  e  $I$  representan el ahorro y el ingreso total nacional, respectivamente, y se miden en miles de millones de dólares.

- (a) Determine la propensión marginal al consumo cuando el ingreso total nacional es de \$81 mil millones.
- (b) Determine la función de consumo si el ahorro es de \$3 mil millones cuando el ingreso total nacional es de \$24 mil millones.
- (c) Use el resultado del inciso (b) para mostrar que el consumo es de \$54.9 miles de millones cuando el ingreso total nacional es de \$81 mil millones.
- (d) Use diferenciales y los resultados de los incisos (a) y (c) para aproximar el consumo cuando el ingreso total nacional es de \$78 mil millones.

## OBJETIVO

Explicar, por medio del concepto de área, la integral definida como un límite de una suma especial; evaluar integrales definidas sencillas por medio del proceso de límite.

## 14.6 La integral definida

En la figura 14.2 se muestra la región  $R$  limitada por las líneas  $y = f(x) = 2x$ ,  $y = 0$  (el eje  $x$ ) y  $x = 1$ . La región es simplemente un triángulo rectángulo. Si  $b$  y  $h$  son las longitudes de la base y de la altura, respectivamente, entonces, a partir de la geometría, el área del triángulo es  $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(1)(2) = 1$  unidad cuadrada. (De aquí en adelante, se tratarán las áreas como números puros y se escribirá *unidades cuadradas* sólo cuando sea necesario hacer énfasis en ello.) Ahora se encontrará esta área mediante otro método, el cual como se verá más adelante, se aplica a regiones más complejas. Este método implica la suma de áreas de rectángulos.

Se dividirá el intervalo  $[0, 1]$  sobre el eje  $x$ , en cuatro subintervalos de igual longitud por medio de puntos igualmente separados,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{4}$ ,  $x_2 = \frac{2}{4}$ ,  $x_3 = \frac{3}{4}$  y  $x_4 = \frac{4}{4} = 1$ . (Vea la figura 14.3.) Cada subintervalo tiene longitud de  $\Delta x = \frac{1}{4}$ . Estos subintervalos determinan cuatro subregiones de  $R$ :  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$ , como se indica.

Con cada subregión se puede asociar un rectángulo *circunscrito* (vea la figura 14.4), es decir, un rectángulo cuya base es el correspondiente subintervalo y cuya altura es el valor *máximo* de  $f(x)$  en cada subintervalo. Como  $f$  es una función creciente, el valor máximo de  $f(x)$  en cada subintervalo ocurre cuando  $x$  es el extremo derecho de éste. Así, las áreas de los rectángulos circunscritos asociados con las regiones  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$  son  $\frac{1}{4}f(\frac{1}{4})$ ,  $\frac{1}{4}f(\frac{2}{4})$ ,  $\frac{1}{4}f(\frac{3}{4})$  y  $\frac{1}{4}f(\frac{4}{4})$ , respectivamente. El área de cada rectángulo es una aproximación al área de su correspondiente subregión. Así, la suma de las áreas de estos rectángulos, denotada por  $\bar{S}_4$ , approxima el área  $A$  del triángulo. Se tiene

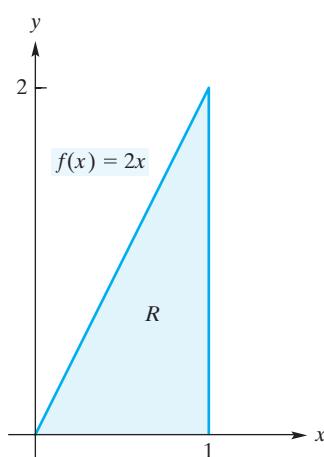


FIGURA 14.2 Región acotada por  $f(x) = 2x$ ,  $y = 0$  y  $x = 1$ .

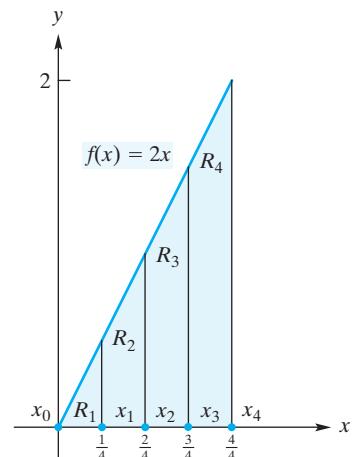
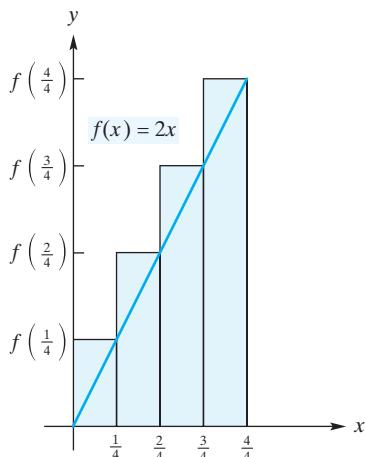
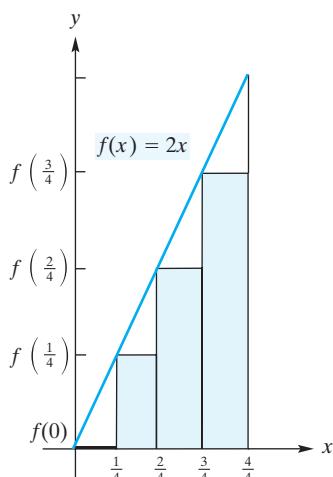


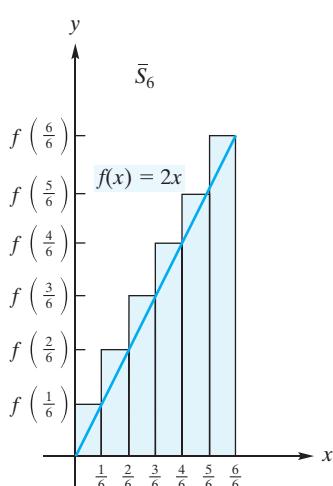
FIGURA 14.3 Cuatro subregiones de  $R$ .



**FIGURA 14.4** Cuatro rectángulos circunscritos.



**FIGURA 14.5** Cuatro rectángulos inscritos.



**FIGURA 14.6** Seis rectángulos circunscritos.

$$\begin{aligned}\bar{S}_4 &= \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{4}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}(2(\frac{1}{4}) + 2(\frac{2}{4}) + 2(\frac{3}{4}) + 2(\frac{4}{4})) = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Usted puede verificar que  $\bar{S}_4 = \sum_{i=1}^4 f(x_i)\Delta x$ . El hecho de que  $\bar{S}_4$  sea mayor que el área real del triángulo era de esperarse, puesto que  $\bar{S}_4$  incluye áreas de regiones sombreadas que no pertenecen al triángulo. (Vea la figura 14.4).

Por otra parte, con cada subregión también se puede asociar un rectángulo *inscrito* (vea la figura 14.5), es decir, un rectángulo cuya base es el subintervalo correspondiente pero cuya altura es el valor *mínimo* de  $f(x)$  en ese subintervalo. Como  $f$  es una función creciente, el valor mínimo de  $f(x)$  en cada subintervalo ocurrirá cuando  $x$  sea el extremo izquierdo de éste. Así, las áreas de los cuatro rectángulos inscritos asociados con  $R_1, R_2, R_3$  y  $R_4$  son  $\frac{1}{4}f(0), \frac{1}{4}f(\frac{1}{4}), \frac{1}{4}f(\frac{2}{4})$  y  $\frac{1}{4}f(\frac{3}{4})$ , respectivamente. Su suma, denotada, también es una aproximación al área  $A$  del triángulo. Se tiene

$$\begin{aligned}\underline{S}_4 &= \frac{1}{4}f(0) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}(2(0) + 2(\frac{1}{4}) + 2(\frac{2}{4}) + 2(\frac{3}{4})) = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Con la notación de sumatoria se puede escribir  $\underline{S}_4 = \sum_{i=0}^3 f(x_i)\Delta x$ . Observe que  $\underline{S}_4$  es menor que el área del triángulo porque los rectángulos no toman en cuenta aquella porción del triángulo que no está sombreada en la figura 14.5.

Como

$$\frac{3}{4} = \underline{S}_4 \leq A \leq \bar{S}_4 = \frac{5}{4}$$

se dice que  $\underline{S}_4$  es una aproximación a  $A$  desde *abajo* y  $\bar{S}_4$  es una aproximación a  $A$  desde *arriba*.

Si  $[0, 1]$  se divide en más subintervalos, se espera que ocurran mejores aproximaciones a  $A$ . Para probar esto, se usarán seis subintervalos de igual longitud  $\Delta x = \frac{1}{6}$ . Entonces  $\bar{S}_6$ , el área total de seis rectángulos circunscritos (vea la figura 14.6), y  $\underline{S}_6$ , el área total de seis rectángulos inscritos (vea la figura 14.7), son

$$\begin{aligned}\bar{S}_6 &= \frac{1}{6}f\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6}f\left(\frac{2}{6}\right) + \frac{1}{6}f\left(\frac{3}{6}\right) + \frac{1}{6}f\left(\frac{4}{6}\right) + \frac{1}{6}f\left(\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{6}f\left(\frac{6}{6}\right) \\ &= \frac{1}{6}(2(\frac{1}{6}) + 2(\frac{2}{6}) + 2(\frac{3}{6}) + 2(\frac{4}{6}) + 2(\frac{5}{6}) + 2(\frac{6}{6})) = \frac{7}{6}\end{aligned}$$

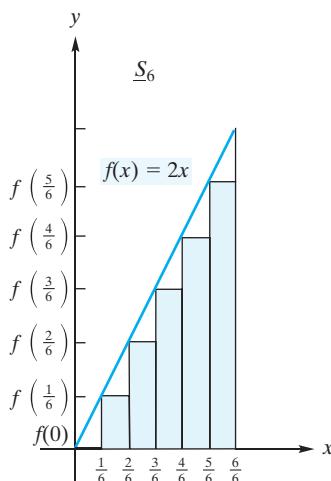
y

$$\begin{aligned}\underline{S}_6 &= \frac{1}{6}f(0) + \frac{1}{6}f\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6}f\left(\frac{2}{6}\right) + \frac{1}{6}f\left(\frac{3}{6}\right) + \frac{1}{6}f\left(\frac{4}{6}\right) + \frac{1}{6}f\left(\frac{5}{6}\right) \\ &= \frac{1}{6}(2(0) + 2(\frac{1}{6}) + 2(\frac{2}{6}) + 2(\frac{3}{6}) + 2(\frac{4}{6}) + 2(\frac{5}{6})) = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

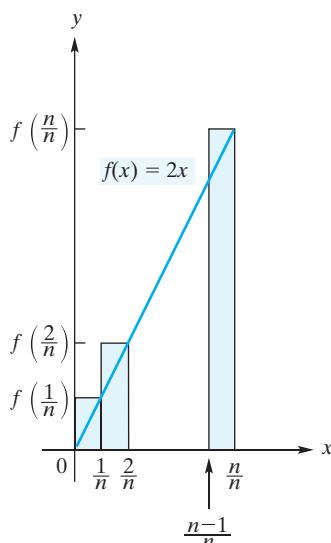
Observe que  $\underline{S}_6 \leq A \leq \bar{S}_6$ , y, con la notación apropiada, tanto  $\bar{S}_6$  como  $\underline{S}_6$  serán de la forma  $\sum f(x)\Delta x$ . Es claro que al usar seis subintervalos se obtuvo una mejor aproximación al área que con cuatro subintervalos, como era de esperarse.

De manera más general, si se divide  $[0, 1]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud  $\Delta x$ , entonces  $\Delta x = 1/n$  y los puntos extremos de los subintervalos son  $x = 0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n$  y  $n/n = 1$ . (Vea la figura 14.8). Los extremos del  $k$ -ésimo subintervalo para  $k = 1, \dots, n$  son  $(k-1)/n$  y  $k/n$  y el valor máximo de  $f$  ocurre en el extremo derecho  $k/n$ . De aquí se deduce que el área de  $k$ -ésimo rectángulo circunscrito es  $1/n \cdot f(k/n) = 1/n \cdot 2(k/n) = 2k/n^2$ , para  $k = 1, \dots, n$ . El área total de  $n$  rectángulos circunscritos es

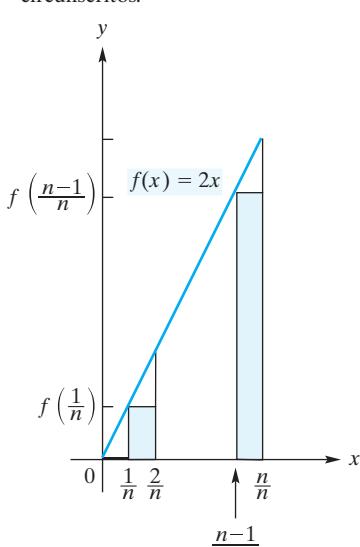
$$\begin{aligned}\bar{S}_n &= \sum_{k=1}^n f(k/n)\Delta x = \sum_{k=1}^n \frac{2k}{n^2} \\ &= \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n k \quad \text{(al factorizar } \frac{2}{n^2} \text{ en cada término)} \\ &= \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(de la sección 1.5)} \\ &= \frac{n+1}{n}\end{aligned}\tag{1}$$



**FIGURA 14.7** Seis rectángulos inscritos.



**FIGURA 14.8**  $n$  rectángulos circunscritos.



**FIGURA 14.9**  $n$  rectángulos inscritos.

(Se debe recordar que  $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n$  es la suma de los  $n$  primeros enteros positivos y la fórmula que se acaba de usar se obtuvo en la sección 1.5, como un adelanto de su aplicación aquí.)

Para rectángulos *inscritos*, se observa que el valor mínimo de  $f$  ocurre en el extremo izquierdo,  $(k-1)/n$ , de  $[(k-1)/n, k/n]$  de manera que el área del  $k$ -ésimo rectángulo inscrito es  $1/n \cdot f(k-1/n) = 1/n \cdot 2((k-1)/n) = 2(k-1)/n^2$ , para  $k = 1, \dots, n$ . El área total determinada por *todos los  $n$  rectángulos inscritos* (vea la figura 14.9) es

$$\begin{aligned}\underline{S}_n &= \sum_{k=1}^n f((k-1)/n) \Delta x = \sum_{k=1}^n \frac{2(k-1)}{n^2} \\ &= \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n k - 1 \quad \left( \text{al factorizar } \frac{2}{n^2} \text{ en cada término} \right) \\ &= \frac{2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \quad \left( \text{al ajustar la sumatoria} \right) \\ &= \frac{2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \quad \left( \text{al adaptar de la sección 1.5} \right) \\ &= \frac{n-1}{n}\end{aligned}\tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2) se observa nuevamente que  $\bar{S}_n$  y  $\underline{S}_n$  son sumas de la forma  $\sum f(x)\Delta x$ , a saber,  $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \Delta x$  y  $\underline{S}_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) \Delta x$ .

Por la naturaleza de  $\underline{S}_n$  y  $\bar{S}_n$  parece razonable —y de hecho es cierto— que

$$\underline{S}_n \leq A \leq \bar{S}_n$$

Conforme  $n$  crece,  $\underline{S}_n$  y  $\bar{S}_n$  resultan ser mejores aproximaciones para  $A$ . De hecho, se tomarán los límites de  $\underline{S}_n$  y  $\bar{S}_n$ , cuando  $n$  tienda a  $\infty$  a través de valores enteros positivos:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1\end{aligned}$$

Como  $\bar{S}_n$  y  $\underline{S}_n$  tienen el mismo límite común, a saber,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n = 1 \tag{3}$$

y como

$$\underline{S}_n \leq A \leq \bar{S}_n$$

se debe considerar este límite como el área del triángulo. Así,  $A = 1$ , lo cual concuerda con el valor obtenido anteriormente. Es importante entender que aquí se desarrolló una *definición de la noción de área* que es aplicable a muchas regiones diferentes.

Se llama al límite común de  $\bar{S}_n$  y  $\underline{S}_n$ , es decir 1, la *integral definida* de  $f(x) = 2x$  sobre el intervalo de  $x = 0$  a  $x = 1$ , y se denota esta cantidad al escribir

$$\int_0^1 2x \, dx = 1 \tag{4}$$

La razón para usar el término *integral definida* y el simbolismo de la ecuación (4) será evidente en la siguiente sección. Los números 0 y 1 que aparecen con el signo  $\int$  en la ecuación (4) se llaman *límites de integración*; 0 es el *límite inferior* y 1 es el *límite superior*.

En general, para una función  $f$  definida en el intervalo desde  $x = a$  hasta  $x = b$ , donde  $a < b$ , se pueden formar las sumas  $\bar{S}_n$  y  $\underline{S}_n$ , que se obtienen al considerar los valores

máximo y mínimo, respectivamente, en cada uno de  $n$  subintervalos de igual longitud  $\Delta x$ .<sup>6</sup> Ahora se puede establecer lo siguiente:

El límite común de  $\bar{S}_n$  y  $\underline{S}_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , si éste existe, se llama la **integral definida** de  $f$  sobre  $[a, b]$  y se escribe

$$\int_a^b f(x) dx$$

Los números  $a$  y  $b$  se llaman **límites de integración**;  $a$  es el **límite inferior** y  $b$  es el **límite superior**. El símbolo  $x$  se llama **variable de integración** y  $f(x)$  es el **integrandó**.

En términos de un proceso de límites, se tiene

$$\sum f(x) \Delta x \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Es necesario aclarar dos puntos acerca de la integral definida. Primero, la integral definida es el límite de una suma de la forma  $\sum f(x) \Delta x$ . De hecho, se puede pensar en el signo de integral como una “S” alargada, que es la primera letra de “sumatoria”. Segundo, para una función  $f$  arbitraria definida en un intervalo, se pueden calcular las sumas  $\bar{S}_n$  y  $\underline{S}_n$  y determinar su límite común en caso de que exista. Sin embargo, algunos términos de las sumas pueden ser negativos, si  $f(x)$  es negativa en puntos del intervalo. Estos términos no son áreas de rectángulos (un área nunca es negativa), por lo que el límite común puede no representar un área. Así, la **integral definida no es otra cosa que un número real y puede o no representar un área**.

Como se vio en la ecuación (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n$  es igual a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n$ . Para una función arbitraria esto no siempre es cierto. Sin embargo, para las funciones que se considerarán, esos límites serán iguales y la integral definida siempre existirá. Para ahorrar tiempo, se usará sólo el **extremo derecho** de cada subintervalo al calcular una suma. Para las funciones en esta sección, esta suma se denominará como  $S_n$ .

### EJEMPLO 1 Cálculo de un área con el uso de extremos derechos

Encuentre el área de la región en el primer cuadrante limitada por  $f(x) = 4 - x^2$  y las rectas  $y = 0$ ,  $x = 0$  y  $x = 10$ .

**La integral definida es el límite de las sumas de la forma  $\sum f(x) \Delta x$ . Esta interpretación será útil en secciones posteriores.**

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

##### CÁLCULO DE UN ÁREA CON EL USO DE EXTREMOS DERECHOS

Una compañía ha determinado que su función de ingreso marginal está dada por  $R'(x) = 600 - 0.5x$ , donde  $R$  es el ingreso (en dólares) recibido cuando se venden  $x$  unidades. Encuentre el ingreso total recibido por la venta de 10 unidades, determine el área en el primer cuadrante acotada por  $y = R'(x) = 600 - 0.5x$  y las rectas  $y = 0$ ,  $x = 0$  y  $x = 10$ .

En general, en  $[a, b]$ , se tiene

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

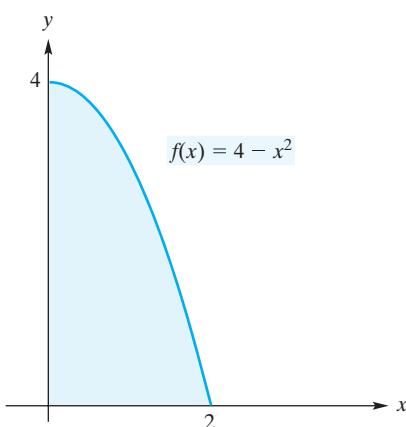
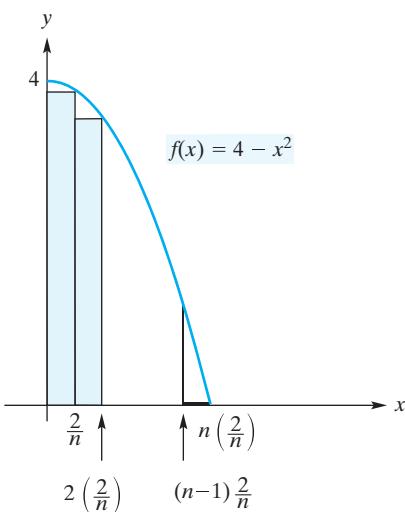


FIGURA 14.10 Región del ejemplo 1.

**Solución:** En la figura 14.10 se presenta el bosquejo de la región. Se ve que el intervalo en el cual varía  $x$  es  $[0, 2]$ , que se subdividió en  $n$  subintervalos de igual longitud  $\Delta x$ . Como la longitud de  $[0, 2]$  es 2, se toma  $\Delta x = 2/n$ . Los extremos de los subintervalos son  $x = 0, 2/n, 2(2/n), \dots, (n-1)(2/n)$  y  $n(2/n) = 2$ , que se muestran en la figura 14.11. El diagrama también muestra los correspondientes rectángulos obtenidos con el extremo derecho de cada subintervalo. El área del  $k$ -ésimo rectángulo para  $k = 1, \dots, n$ , es el producto de su ancho,  $2/n$ , y su altura,  $f(k(2/n)) = 4 - (2k/n)^2$ , que es el valor en el extremo derecho de su base. Al sumar estas áreas, se obtiene

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n f\left(k \cdot \left(\frac{2}{n}\right)\right) \Delta x = \sum_{k=1}^n \left(4 - \left(\frac{2k}{n}\right)^2\right) \frac{2}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{8}{n} - \frac{8k^2}{n^3}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{8}{n} - \sum_{k=1}^n \frac{8k^2}{n^3} = \frac{8}{n} \sum_{k=1}^n 1 - \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{8}{n} - \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 8 - \frac{4}{3} \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right) \end{aligned}$$

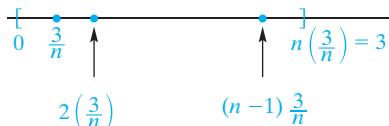
<sup>6</sup>Aquí se supone que los valores máximo y mínimo existen.



**FIGURA 14.11**  $n$  subintervalos y los rectángulos correspondientes para el ejemplo 1.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

No se anexan unidades a la respuesta porque una integral definida es simplemente un número.



**FIGURA 14.12** División de  $[0, 3]$  en  $n$  subintervalos.

En la segunda línea de los cálculos anteriores se usan manipulaciones básicas de la sumatoria, según se analizaron en la sección 1.5. En la tercera línea se utilizan fórmulas específicas de sumatoria, también provenientes de la sección 1.5: la suma de  $n$  copias de 1 es  $n$  y la suma de los primeros  $n$  cuadrados es  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

Por último, se considera el límite de  $S_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 8 - \frac{4}{3} \left( \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \right) \right) \\ &= 8 - \frac{4}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \right) \\ &= 8 - \frac{4}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de la región es  $\frac{16}{3}$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

### EJEMPLO 2 Evaluación de una integral definida

Evalúe  $\int_0^2 (4 - x^2) dx$ .

**Solución:** Se desea encontrar la integral definida de  $f(x) = 4 - x^2$  sobre el intervalo  $[0, 2]$ . Así, se debe calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Pero este límite es precisamente el límite  $\frac{16}{3}$  que se encontró en el ejemplo 1, por lo tanto, se concluye que

$$\int_0^2 (4 - x^2) dx = \frac{16}{3}$$

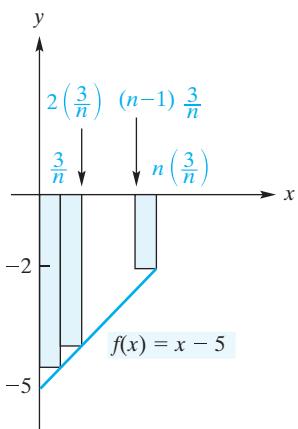
AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

### EJEMPLO 3 Integración de una función sobre un intervalo

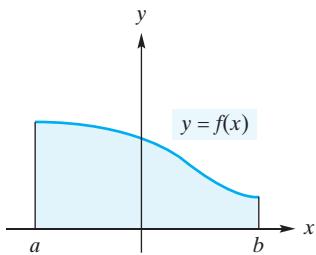
Integre  $f(x) = x - 5$  de  $x = 0$  a  $x = 3$ ; esto es, evalúe  $\int_0^3 (x - 5) dx$ .

**Solución:** Primero se divide  $[0, 3]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud  $\Delta x = 3/n$ . Los puntos extremos son  $0, 3/n, 2(3/n), \dots, (n-1)(3/n), n(3/n) = 3$ . (Vea la figura 14.12). Mediante los extremos derechos se forma la suma y se simplifica

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n f\left(k \frac{3}{n}\right) \frac{3}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \left( k \frac{3}{n} - 5 \right) \frac{3}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{9}{n^2} k - \frac{15}{n} \right) = \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{15}{n} \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{9}{n^2} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) - \frac{15}{n}(n) \\ &= \frac{9}{2} \frac{n+1}{n} - 15 = \frac{9}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 15\end{aligned}$$



**FIGURA 14.13**  $f(x)$  es negativa en cada extremo derecho.



**FIGURA 14.14** Si  $f$  es continua y  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ , entonces  $\int_a^b f(x) dx$  representa el área bajo la curva.

Al calcular el límite, se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{9}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 15 \right) = \frac{9}{2} - 15 = -\frac{21}{2}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^3 (x - 5) dx = -\frac{21}{2}$$

Observe que la integral definida en este caso es un número *negativo*. La razón es clara en la gráfica de  $f(x) = x - 5$  en el intervalo  $[0, 3]$ . (Vea la figura 14.13). Como el valor  $f(x)$  es negativo en cada extremo derecho, cada término en  $S_n$  también debe ser negativo. Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , que es la integral definida, tiene valor negativo.

Desde un punto de vista geométrico, cada término en  $S_n$  es el valor negativo del área de un rectángulo. (Vea de nuevo la figura 14.13). Aunque la integral definida es sólo un número, aquí se puede interpretar como la representación del valor negativo del área de la región limitada por  $f(x) = x - 5$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$  y el eje  $x$  ( $y = 0$ ).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

## TECNOLOGÍA

Aquí se presenta un programa para la calculadora grafadora TI-83 Plus que estimará el límite de  $S_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para una función  $f$  definida en  $[a, b]$ .

### PROGRAM:RIGHTSUM

```
Lbl 1
Input "SUBINTV",N
(B-A)/N → H
0 → S
A + H → X
1 → I
Lbl 2
Y1 + S → S
X + H → X
I + 1 → I
If I ≤ N
Goto 2
H * S → S
Disp S
Pause
Goto 1
```

RIGHTSUM calculará  $S_n$  para un número dado  $n$  de subintervalos. Antes de ejecutar el programa, almacene  $f(x)$ ,  $a$  y  $b$  como  $Y_1$ ,  $A$  y  $B$ , respectivamente. Durante la ejecución del programa se le pedirá indicar el número de subintervalos. Después, el programa procederá a mostrar

```
PrgmRIGHTSUM
SUBINTV100
-10.455
SUBINTV1000
-10.4955
SUBINTV2000
-10.49775
```

**FIGURA 14.15** Valores de  $S_n$  para  $f(x) = x - 5$  en  $[0, 3]$ .

el valor de  $S_n$ . Cada vez que oprima ENTER, el programa se repetirá. De esta manera, pueden obtenerse los valores de  $S_n$  para diferentes números de subintervalos. En la figura 14.15 se muestran valores de  $S_n$  ( $n = 100, 1000$  y  $2000$ ) para la función  $f(x) = x - 5$  en el intervalo  $[0, 3]$ . Cuando  $n \rightarrow \infty$ , se observa que  $S_n \rightarrow -10.5$ . Así, se estima que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \approx -10.5$$

De manera equivalente,

$$\int_0^3 (x - 5) dx \approx -10.5$$

lo cual concuerda con el resultado obtenido en el ejemplo 3.

Es interesante notar que el tiempo requerido por una calculadora más antigua para calcular  $S_{200}$  en la figura 14.15 fue mayor de 1.5 minutos. El tiempo necesario para la TI-84 Plus es de menos de 1 minuto.

## Problemas 14.6

En los problemas 1 a 4, bosqueje la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Aproxime el área de la región por medio de la suma indicada. Use el extremo derecho de cada subintervalo.

1.  $f(x) = x, y = 0, x = 1; S_3$
2.  $f(x) = 3x, y = 0, x = 1; S_5$
3.  $f(x) = x^2, y = 0, x = 1; S_4$
4.  $f(x) = x^2 + 1, y = 0, x = 0, x = 1; S_2$

En los problemas 5 y 6, divida el intervalo indicado en  $n$  subintervalos de igual longitud y encuentre  $S_n$  para la función dada. Use el extremo derecho de cada subintervalo. No encuentre el  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

5.  $f(x) = 4x; [0, 1]$       6.  $f(x) = 3x + 2; [0, 3]$

En los problemas 7 y 8, (a) simplifique  $S_n$  y (b) encuentre  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

\*7.  $S_n = \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{1}{n} + 1 \right) + \left( \frac{2}{n} + 1 \right) + \cdots + \left( \frac{n}{n} + 1 \right) \right]$

8.  $S_n = \frac{2}{n} \left[ \left( \frac{2}{n} \right)^2 + \left( 2 \cdot \frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \left( n \cdot \frac{2}{n} \right)^2 \right]$

En los problemas 9 a 14, bosqueje la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Determine el área exacta de la región considerando el límite de  $S_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Use el extremo derecho de cada subintervalo.

9. Región descrita en el problema 1.
10. Región descrita en el problema 2.
11. Región descrita en el problema 3.
12.  $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2$
13.  $f(x) = 3x^2, y = 0, x = 1$
14.  $f(x) = 9 - x^2, y = 0, x = 0$

En los problemas 15 a 20, evalúe la integral definida dada, tome el límite de  $S_n$ . Use el extremo derecho de cada subintervalo. Bosqueje la gráfica, en el intervalo dado, de la función que debe integrarse.

15.  $\int_1^3 5x \, dx$
16.  $\int_0^4 9 \, dx$
- \*17.  $\int_0^3 -4x \, dx$
18.  $\int_1^4 (2x + 1) \, dx$
- \*19.  $\int_0^1 (x^2 + x) \, dx$
20.  $\int_1^2 (x + 2) \, dx$

21. Encuentre  $D_x \left[ \int_2^3 \sqrt{x^2 + 1} \, dx \right]$  sin usar límites.

22. Encuentre  $\int_0^3 f(x) \, dx$  sin usar límites, donde

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 4 - 2x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 5x - 10 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

23. Encuentre  $\int_{-1}^3 f(x) \, dx$  sin usar límites, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -1 + \frac{x}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En los problemas 24 a 26, use un programa como el **RIGHTSUM**, para estimar el área de la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Redondee sus respuestas a un decimal.

24.  $f(x) = x^3 + 1, y = 0, x = 2, x = 3.7$

25.  $f(x) = 4 - \sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 9$

26.  $f(x) = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$

En los problemas 27 a 30, use un programa como el **RIGHTSUM**, para estimar el valor de la integral definida. Redondee sus respuestas a un decimal.

27.  $\int_2^5 \frac{x+1}{x+2} \, dx$

28.  $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2} \, dx$

29.  $\int_{-1}^2 (4x^2 + x - 13) \, dx$

30.  $\int_1^2 \ln x \, dx$

### OBJETIVO

Desarrollar de manera informal el Teorema fundamental del cálculo integral y utilizarlo para obtener integrales definidas.

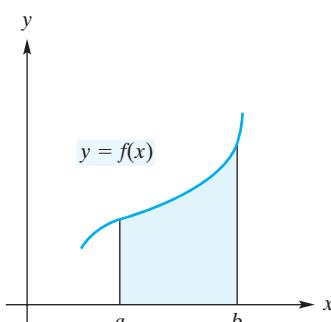


FIGURA 14.16 En  $[a, b]$ ,  $f$  es continua y  $f(x) \geq 0$ .

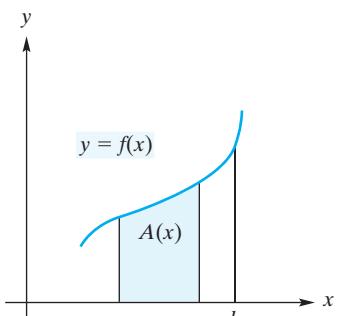
## 14.7 Teorema fundamental del cálculo integral

### Teorema fundamental

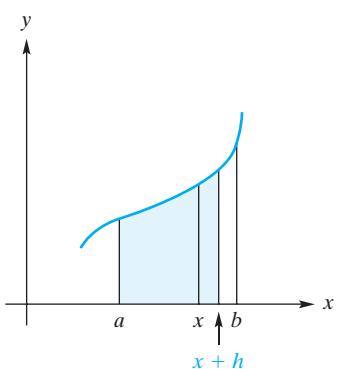
Hasta ahora, se han considerado por separado los procesos de límite de la derivada y de la integral definida. Ahora se unirán esas ideas fundamentales y se desarrollará la importante relación que existe entre ellas. Como resultado, se podrán evaluar las integrales definidas en forma más eficiente.

En la figura 14.16 se da la gráfica de una función  $f$ . Suponga que  $f$  es continua en el intervalo  $[a, b]$  y que su gráfica no cae debajo del eje  $x$ . Esto es,  $f(x) \geq 0$ . De la sección anterior, el área de la región debajo de la gráfica y arriba del eje  $x$  desde  $x = a$  hasta  $x = b$ , está dada por  $\int_a^b f(x) \, dx$ . A continuación se considerará otra manera de determinar esta área.

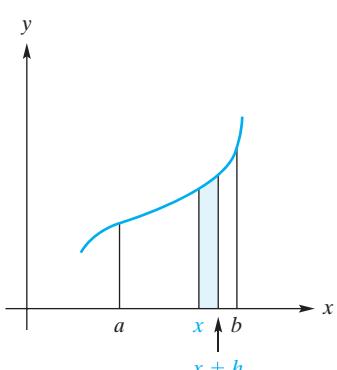
Suponga que existe una función  $A = A(x)$ , a la cual se hará referencia como una función de área, que proporciona el área de la región debajo de la gráfica de  $f$  y arriba del eje  $x$ , desde  $a$  hasta  $x$ , donde  $a \leq x \leq b$ . Esta región aparece sombreada en la figura 14.17. No confunda  $A(x)$ , que es un área, con  $f(x)$ , que es la altura de la gráfica en  $x$ .



**FIGURA 14.17**  $A(x)$  es una función de área.



**FIGURA 14.18**  $A(x+h)$  proporciona el área de la región sombreada.



**FIGURA 14.19** El área de la región sombreada es  $A(x+h) - A(x)$ .

Con base en su definición, se pueden establecer inmediatamente dos propiedades de  $A$ :

1.  $A(a) = 0$ , puesto que no hay “área” desde  $a$  hasta  $a$
2.  $A(b)$  es el área desde  $a$  hasta  $b$ ; esto es,

$$A(b) = \int_a^b f(x) dx$$

Si  $x$  se incrementa en  $h$  unidades, entonces  $A(x+h)$  es el área de la región sombreada en la figura 14.18. Por lo tanto,  $A(x+h) - A(x)$  es la diferencia de las áreas en las figuras 14.18 y 14.17, a saber, el área de la región sombreada en la figura 14.19. Para una  $h$  suficientemente cercana a cero, el área de la región es la misma que la de un rectángulo (figura 14.20) cuya base sea  $h$  y su altura algún valor  $\bar{y}$  entre  $f(x)$  y  $f(x+h)$ . Aquí  $\bar{y}$  es una función de  $h$ . Así, por una parte el área del rectángulo es  $A(x+h) - A(x)$  y, por otra, es  $h\bar{y}$ , por lo que

$$A(x+h) - A(x) = h\bar{y}$$

De manera equivalente,

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \bar{y} \quad (\text{al dividir entre } h)$$

Como  $\bar{y}$  está entre  $f(x)$  y  $f(x+h)$ , se sigue que como  $h \rightarrow 0$ ,  $\bar{y}$  se aproxima al número  $f(x)$ , por lo que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x) \quad (1)$$

Pero el lado izquierdo es simplemente la derivada de  $A$ . Así, la ecuación se convierte en

$$A'(x) = f(x)$$

Se concluye que la función de área  $A$  tiene la propiedad adicional de que su derivada  $A'$  es  $f$ . Esto es,  $A$  es una antiderivada de  $f$ . Ahora, suponga que  $F$  es *cualquier* antiderivada de  $f$ . Entonces, como  $A$  y  $F$  son antiderivadas de la misma función, difieren cuando mucho en una constante  $C$ :

$$A(x) = F(x) + C \quad (2)$$

Recuerde que  $A(a) = 0$ . Por lo que, al evaluar ambos lados de la ecuación (2) para  $x = a$ , resulta

$$0 = F(a) + C$$

de manera que

$$C = -F(a)$$

Así, la ecuación (2) se convierte en

$$A(x) = F(x) - F(a) \quad (3)$$

Entonces, si  $x = b$ , de la ecuación (3)

$$A(b) = F(b) - F(a) \quad (4)$$

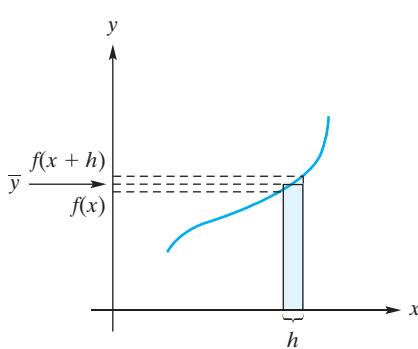
Pero recuerde que

$$A(b) = \int_a^b f(x) dx \quad (5)$$

De las ecuaciones (4) y (5), se obtiene

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

La relación entre una integral definida y la antiderivación ahora está clara. Para encontrar  $\int_a^b f(x) dx$  basta encontrar una antiderivada de  $f$ , digamos  $F$ , y restar el valor de  $F$  en el límite inferior  $a$ , de su valor en el límite superior  $b$ . Aquí se supuso que  $f$  era continua y  $f(x) \geq 0$  para poder usar el concepto de un área. Sin embargo, el resultado



**FIGURA 14.20** El área del rectángulo es la misma que el área de la región sombreada en la figura 14.19.

es cierto para cualquier función continua<sup>7</sup>, y se conoce como el *teorema fundamental del cálculo integral*.

### Teorema fundamental del cálculo integral

Si  $f$  es continua en el intervalo  $[a, b]$  y  $F$  es cualquier antiderivada de  $f$  en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**La integral definida es un número, y una integral indefinida es una función.**

Es importante que entienda la diferencia entre una integral definida y una integral indefinida. La **integral definida**  $\int_a^b f(x) dx$  es un **número** definido como el límite de una suma. El teorema fundamental establece que la **integral indefinida**  $\int f(x) dx$  (la antiderivada más general de  $f$ ), la cual es una **función** de  $x$  y está relacionada con el proceso de diferenciación, puede usarse para determinar este límite.

Suponga que se aplica el teorema fundamental para evaluar  $\int_0^2 (4 - x^2) dx$ . Aquí,  $f(x) = 4 - x^2$ ,  $a = 0$  y  $b = 2$ . Como una antiderivada de  $4 - x^2$  es  $F(x) = 4x - (x^3/3)$ , se sigue que

$$\int_0^2 (4 - x^2) dx = F(2) - F(0) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - (0) = \frac{16}{3}$$

Esto confirma el resultado del ejemplo 2 de la sección 14.6. Si se hubiera escogido  $F(x)$  como  $4x - (x^3/3) + C$ , entonces se tendría

$$F(2) - F(0) = \left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) + C\right] - [0 + C] = \frac{16}{3}$$

igual que antes. Como el valor escogido para  $C$  es irrelevante, por conveniencia se escogerá siempre igual a 0, como se hizo originalmente. Por lo general,  $F(b) - F(a)$  se abrevia escribiendo

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Como  $F$  en el teorema fundamental del cálculo es *cualquier* antiderivada de  $f$  y  $\int f(x) dx$  es la antiderivada más general de  $f$ , surge la notación para escribir

$$\int_a^b f(x) dx = \left(\int f(x) dx\right)|_a^b$$

Con el uso de la notación  $|_a^b$ , se tiene

$$\int_0^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)|_0^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3}$$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### APLICACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL

El ingreso (en dólares) de una cadena de comida rápida aumenta a una tasa de  $f(t) = 10000e^{0.02t}$ , donde  $t$  está en años. Encuentre  $\int_3^6 10000e^{0.02t} dt$  que proporciona el ingreso total para la cadena entre el tercero y sexto años.

#### EJEMPLO 1 Aplicación del teorema fundamental

Encuentre  $\int_{-1}^3 (3x^2 - x + 6) dx$ .

**Solución:** Una antiderivada de  $3x^2 - x + 6$  es

$$x^3 - \frac{x^2}{2} + 6x$$

<sup>7</sup>Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , puede demostrarse que  $\int_a^b f(x) dx$  existe.

Así,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^3 (3x^2 - x + 6) dx \\
 &= \left( x^3 - \frac{x^2}{2} + 6x \right) \Big|_{-1}^3 \\
 &= \left[ 3^3 - \frac{3^2}{2} + 6(3) \right] - \left[ (-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 6(-1) \right] \\
 &= \left( \frac{81}{2} \right) - \left( -\frac{15}{2} \right) = 48
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 **Propiedades de la integral definida**

Para  $\int_a^b f(x) dx$  se ha supuesto que  $a < b$ . Ahora se definen los casos en que  $a > b$  o  $a = b$ . Primero,

$$\text{si } a > b, \text{ entonces } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Esto es, al intercambiar los límites de integración se cambia el signo de la integral. Por ejemplo,

$$\int_2^0 (4 - x^2) dx = - \int_0^2 (4 - x^2) dx$$

Si los límites de integración son iguales, se tiene

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Algunas propiedades de la integral definida merecen mencionarse. La primera propiedad replantea más formalmente el comentario realizado en la sección anterior en relación con el área.

**Propiedades de la integral definida**

1. Si  $f$  es continua y  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ , entonces  $\int_a^b f(x) dx$  puede interpretarse como el área de la región limitada por la curva  $y = f(x)$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$ .
2.  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$  donde  $k$  es una constante.
3.  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$ .

Las propiedades 2 y 3 son similares a las reglas para las integrales indefinidas porque una integral definida puede evaluarse mediante el teorema fundamental en términos de una antiderivada. A continuación se dan dos propiedades más de las integrales definidas.

$$4. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

La variable de integración es una “variable ficticia” en el sentido de que cualquier otra variable produce el mismo resultado, es decir, el mismo número.

Para ilustrar la propiedad 4, usted puede verificar, por ejemplo, que

$$\int_0^2 x^2 dx = \int_0^2 t^2 dt$$

**5.** Si  $f$  es continua sobre un intervalo  $I$  y  $a, b$  y  $c$  están en  $I$ , entonces

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

La propiedad 5 significa que la integral definida en un intervalo puede expresarse en términos de integrales definidas en subintervalos. Así

$$\int_0^2 (4 - x^2) dx = \int_0^1 (4 - x^2) dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx$$

Ahora se verán ejemplos de integración definida y en la sección 14.9 se calcularán algunas áreas.

### EJEMPLO 2 Uso del teorema fundamental

Encuentre  $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx$ .

**Solución:** Para encontrar una antiderivada del integrando, se aplicará la regla de la potencia para integración:



#### ADVERTENCIA

En el ejemplo 2, el valor de la antiderivada  $\frac{1}{2}(1+x^4)^{1/2}$  en el límite inferior 0 es  $\frac{1}{2}(1)^{1/2}$ . **No** suponga que una evaluación en el límite cero dará como resultado 0.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx &= \int_0^1 x^3(1+x^4)^{-1/2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (1+x^4)^{-1/2} d(1+x^4) = \left(\frac{1}{4}\right) \frac{(1+x^4)^{1/2}}{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(1+x^4)^{1/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}((2)^{1/2} - (1)^{1/2}) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13



### EJEMPLO 3 Evaluación de integrales definidas

a. Encuentre  $\int_1^2 [4t^{1/3} + t(t^2 + 1)^3] dt$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \int_1^2 [4t^{1/3} + t(t^2 + 1)^3] dt &= 4 \int_1^2 t^{1/3} dt + \frac{1}{2} \int_1^2 (t^2 + 1)^3 d(t^2 + 1) \\ &= (4) \frac{t^{4/3}}{\frac{4}{3}} \Big|_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{(t^2 + 1)^4}{4} \Big|_1^2 \\ &= 3(2^{4/3} - 1) + \frac{1}{8}(5^4 - 2^4) \\ &= 3 \cdot 2^{4/3} - 3 + \frac{609}{8} \\ &= 6\sqrt[3]{2} + \frac{585}{8} \end{aligned}$$

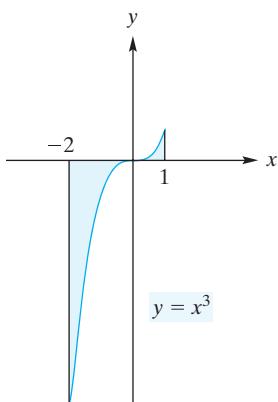
b. Encuentre  $\int_0^1 e^{3t} dt$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{3t} dt &= \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3t} d(3t) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right) e^{3t} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^3 - e^0) = \frac{1}{3}(e^3 - 1) \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15





**FIGURA 14.21** Gráfica de  $y = x^3$  en el intervalo  $[-2, 1]$ .



### ADVERTENCIA

Recuerde que  $\int_a^b f(x) dx$  es un límite de un suma. En algunos casos este límite representa un área. En otros no. Cuando  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ , la integral representa el área entre la gráfica de  $f$  y el eje  $x$  desde  $x = a$  hasta  $x = b$ .

### EJEMPLO 4 Determinación e interpretación de una integral definida

Evalúe  $\int_{-2}^1 x^3 dx$ .

**Solución:**

$$\int_{-2}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}$$

La razón por la que el resultado es negativo es clara en la gráfica de  $y = x^3$  en el intervalo  $[-2, 1]$ . (Vea la figura 14.21.) Para  $-2 \leq x < 0$ ,  $f(x)$  es negativa. Como una integral definida es el límite de una suma de la forma  $\sum f(x_i) \Delta x$ , se deduce que  $\int_{-2}^0 x^3 dx$  no es sólo un número negativo, sino también el negativo del área de la región sombreada en el tercer cuadrante. Por otra parte,  $\int_0^1 x^3 dx$  es el área de la región sombreada en el primer cuadrante, como  $f(x) \geq 0$  en  $[0, 1]$ . La integral definida en el intervalo entero  $[-2, 1]$  es la suma *algebraica* de estos números, debido a que, por la propiedad 5,

$$\int_{-2}^1 x^3 dx = \int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx$$

Así,  $\int_{-2}^1 x^3 dx$  no representa el área entre la curva y el eje  $x$ . Sin embargo, si se desea el área, ésta puede darse como

$$\left| \int_{-2}^0 x^3 dx \right| + \int_0^1 x^3 dx$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25



### La integral definida de una derivada

Como una función  $f$  es una antiderivada de  $f'$ , por el teorema fundamental se tiene

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \quad (6)$$

Pero  $f'(x)$  es la razón de cambio de  $f$  con respecto a  $x$ . De aquí que si se conoce la razón de cambio de  $f$  y es necesario encontrar la diferencia entre los valores funcionales  $f(b) - f(a)$ , es suficiente con evaluar  $\int_a^b f'(x) dx$ .

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

#### CAMBIO EN LOS VALORES FUNCIONALES

Un servicio administrativo determina que la tasa de incremento del costo de mantenimiento (en dólares por año) para un complejo privado de departamentos está dada por  $M'(x) = 90x^2 + 5000$ , donde  $x$  es la edad del complejo de departamentos en años y  $M(x)$  es el costo total (acumulado) de mantenimiento en  $x$  años. Encuentre el costo para los primeros cinco años.

### EJEMPLO 5 Determinación de un cambio en los valores funcionales por medio de la integración definida

*La función de costo marginal de un fabricante es*

$$\frac{dc}{dq} = 0.6q + 2$$

*Si la producción actual es  $q = 80$  unidades por semana, ¿cuánto más costará incrementar la producción a 100 unidades por semana?*

**Solución:** La función de costo total es  $c = c(q)$  y se desea encontrar la diferencia  $c(100) - c(80)$ . La razón de cambio de  $c$  es  $dc/dq$ , entonces por la ecuación (6),

$$\begin{aligned} c(100) - c(80) &= \int_{80}^{100} \frac{dc}{dq} dq = \int_{80}^{100} (0.6q + 2) dq \\ &= \left[ \frac{0.6q^2}{2} + 2q \right]_{80}^{100} = [0.3q^2 + 2q]_{80}^{100} \\ &= [0.3(100)^2 + 2(100)] - [0.3(80)^2 + 2(80)] \\ &= 3200 - 2080 = 1120 \end{aligned}$$

Si  $c$  está en dólares, entonces el costo de incrementar la producción de 80 a 100 unidades es \$1120.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 59



## TECNOLOGÍA

Varias calculadoras graficadoras tienen la capacidad de estimar el valor de una integral definida. En una TI-83 Plus, para estimar

$$\int_{80}^{100} (0.6q + 2) dq$$

se usa el comando fnInt( como se indica en la figura 14.22. Los cuatro parámetros que deben introducirse con este comando son:

función que será integrada	variable de integración	límite inferior	límite superior
-------------------------------	----------------------------	--------------------	--------------------

Se observa que el valor de esta integral definida es aproximadamente de 1120, lo que concuerda con el resultado del ejemplo 5.

De manera similar, para estimar

$$\int_{-2}^1 x^3 dx$$

fnInt(.60+2,0,80,  
100)

1120

**FIGURA 14.22** Estimación de  $\int_{80}^{100} (0.6q + 2) dq$ .

se introduce

$$fnInt(X^3, X, -2, 1)$$

o en forma alterna, si primero se almacena  $x^3$  como  $Y_1$ , se puede introducir

$$fnInt(Y_1, X, -2, 1)$$

En cada caso se obtiene  $-3.75$ , lo cual concuerda con el resultado del ejemplo 4.

## Problemas 14.7

En los problemas 1 a 43, evalúe la integral definida.

\*1.  $\int_0^3 5 dx$

2.  $\int_2^4 (1 - e) dx$

3.  $\int_1^2 5x dx$

4.  $\int_2^8 -5x dx$

5.  $\int_{-3}^1 (2x - 3) dx$

6.  $\int_{-1}^1 (4 - 9y) dy$

7.  $\int_2^3 (y^2 - 2y + 1) dy$

8.  $\int_4^1 (2t - 3t^2) dt$

9.  $\int_{-2}^{-1} (3w^2 - w - 1) dw$

10.  $\int_8^9 dt$

11.  $\int_1^3 3t^{-3} dt$

12.  $\int_1^2 \frac{x^{-2}}{2} dx$

\*13.  $\int_{-8}^8 \sqrt[3]{x^4} dx$

14.  $\int_{1/2}^{3/2} (x^2 + x + 1) dx$

\*15.  $\int_{1/2}^3 \frac{1}{x^2} dx$

16.  $\int_9^{36} (\sqrt{x} - 2) dx$

17.  $\int_{-1}^1 (z + 1)^5 dz$

18.  $\int_1^8 (x^{1/3} - x^{-1/3}) dx$

19.  $\int_0^1 2x^2(x^3 - 1)^3 dx$

20.  $\int_2^3 (x + 2)^3 dx$

21.  $\int_1^8 \frac{4}{y} dy$

22.  $\int_{-(e^e)}^{-1} \frac{6}{x} dx$

23.  $\int_0^1 e^5 dx$

24.  $\int_2^{e+1} \frac{1}{x-1} dx$

\*25.  $\int_0^1 5x^2 e^{x^3} dx$

26.  $\int_0^1 (3x^2 + 4x)(x^3 + 2x^2)^4 dx$

27.  $\int_4^5 \frac{2}{(x-3)^3} dx$

28.  $\int_{-1/3}^{20/3} \sqrt{3x+5} dx$

29.  $\int_{1/3}^2 \sqrt{10 - 3p} dp$

30.  $\int_{-1}^1 q \sqrt{q^2 + 3} dq$

31.  $\int_0^1 x^2 \sqrt[3]{7x^3 + 1} dx$

32.  $\int_0^{\sqrt[3]{7}} \left( 3x - \frac{x}{(x^2 + 2)^{4/3}} \right) dx$

33.  $\int_0^1 \frac{2x^3 + x}{x^2 + x^4 + 1} dx$

34.  $\int_a^b (m + ny) dy$

35.  $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx$

36.  $\int_{-2}^1 8|x| dx$

37.  $\int_{\pi}^e 3(x^{-2} + x^{-3} - x^{-4}) dx$

38.  $\int_1^2 \left( 6\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) dx$

39.  $\int_1^3 (x + 1)e^{x^2+2x} dx$

40.  $\int_1^{95} \frac{x}{\ln e^x} dx$

41.  $\int_0^2 \frac{x^6 + 6x^4 + x^3 + 8x^2 + x + 5}{x^3 + 5x + 1} dx$

42.  $\int_{-1}^1 \frac{2}{1 + e^x} dx$  (Una pista: Multiplique el integrando por  $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$ .)

43.  $\int_0^2 f(x) dx$  donde  $f(x) = \begin{cases} 4x^2 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$

44. Evalúe  $\left( \int_1^3 x dx \right)^3 - \int_1^3 x^3 dx$ .

45. Suponga que  $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$ . Evalúe  $\int_e^1 f(x) dx$ .

- 46.** Evalúe  $\int_7^7 e^{x^2} dx + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{3\sqrt{2}} dx$ .
- 47.** Si  $\int_1^3 f(x) dx = 4$  y  $\int_3^2 f(x) dx = 3$ , encuentre  $\int_1^2 f(x) dx$ .
- 48.** Si  $\int_1^4 f(x) dx = 6$ ,  $\int_2^4 f(x) dx = 5$  y  $\int_1^3 f(x) dx = 2$ , encuentre  $\int_2^3 f(x) dx$ .
- 49.** Evalúe  $\int_2^3 \left( \frac{d}{dx} \int_2^3 e^{x^3} dx \right) dx$ . (*Una pista:* No es necesario determinar  $\int_2^3 e^{x^3} dx$ .)
- 50.** Suponga que  $f(x) = \int_e^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} dt$ , donde  $x > e$ . Encuentre  $f'(x)$ .
- 51. Índice de severidad** En un análisis de la seguridad en el tráfico, Shonle<sup>8</sup> considera cuánta aceleración puede tolerar una persona en un choque sin que sufra lesiones serias. El *índice de severidad* se define como
- $$\text{S.I.} = \int_0^T \alpha^{5/2} dt$$
- donde  $\alpha$  (la letra griega “alfa”) se considera una constante implicada con la aceleración media ponderada y  $T$  es la duración del choque. Encuentre el índice de severidad.
- 
- 52. Estadística** En estadística, la media  $\mu$  (letra griega “my”) de la función  $f$  de densidad de probabilidad continua, definida en el intervalo  $[a, b]$  está dada por
- $$\mu = \int_a^b [x \cdot f(x)] dx$$
- y la varianza  $\sigma^2$  (letra griega “sigma”) está dada por
- $$\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx$$
- Calcule  $\mu$  y después  $\sigma^2$  si  $a = 0$ ,  $b = 1$  y  $f(x) = 1$ .
- 53. Distribución de ingresos** El economista Pareto<sup>9</sup> ha establecido una ley empírica de distribución de ingresos superiores, que proporciona el número  $N$  de personas que reciben  $x$  o más dólares. Si
- $$\frac{dN}{dx} = -Ax^{-B}$$
- donde  $A$  y  $B$  son constantes, obtenga una integral definida que dé el número total de personas con ingresos entre  $a$  y  $b$ , donde  $a < b$ .
- 54. Biología** En un estudio sobre mutación genética,<sup>10</sup> aparece la integral siguiente:
- $$\int_0^{10^{-4}} x^{-1/2} dx$$
- Evalúe esta integral.
- 55. Flujo continuo de ingreso** El valor presente (en dólares) de un flujo continuo de ingreso de \$2000 al año durante cinco años al 6% compuesto continuamente está dado por
- $$\int_0^5 2000e^{-0.06t} dt$$
- Evalúe el valor presente, al dólar más cercano.
- 56. Biología** En biología, con frecuencia surgen problemas que implican la transferencia de una sustancia entre compartimentos. Un ejemplo sería la transferencia del flujo sanguíneo a los tejidos. Evalúe la siguiente integral que se presenta en un problema de difusión entre dos compartimentos:<sup>11</sup>
- $$\int_0^t (e^{-a\tau} - e^{-b\tau}) d\tau$$
- aquí,  $\tau$  (se lee “tau”) es una letra griega;  $a$  y  $b$  son constantes.
- 57. Demografía** Para cierta población, suponga que  $l$  es una función tal que  $l(x)$  es el número de personas que alcanzan la edad  $x$  en cualquier año. Esta función se llama *función de la tabla de vida*. Bajo condiciones apropiadas, la integral
- $$\int_x^{x+n} l(t) dt$$
- proporciona el número esperado de personas en la población que tiene entre  $x$  y  $x + n$  años, inclusive. Si
- $$l(x) = 10\,000\sqrt{100 - x}$$
- determine el número de personas que tienen exactamente entre 36 y 64 años, inclusive. Dé su respuesta al entero más cercano, puesto que las respuestas fraccionarias no tienen sentido.
- 58. Consumo de mineral** Si  $C$  es el consumo anual de un mineral en el tiempo  $t = 0$ , entonces bajo consumo continuo, la cantidad total de mineral usado en el intervalo  $[0, t]$  es
- $$\int_0^t Ce^{kt} d\tau$$
- donde  $k$  es la razón de consumo. Para un mineral de tierras raras se ha determinado que  $C = 3000$  unidades y  $k = 0.05$ . Evalúe la integral para estos datos.
- \*59. Costo marginal** La función de costo marginal de un fabricante es
- $$\frac{dc}{dq} = 0.2q + 8$$
- Si  $c$  está en dólares, determine el costo de incrementar la producción de 65 a 75 unidades.
- 60. Costo marginal** Repita el problema 59 si
- $$\frac{dc}{dq} = 0.004q^2 - 0.5q + 50$$
- y la producción aumenta de 90 a 180 unidades.

<sup>8</sup>J. I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

<sup>9</sup>G. Tintner, *Methodology of Mathematical Economics and Econometrics* (Chicago: University of Chicago Press, 1967), p. 16.

<sup>10</sup>W. J. Ewens, *Population Genetics* (Londres: Methuen & Company Ltd., 1969).

<sup>11</sup>W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

- 61. Ingreso marginal** La función de ingreso marginal de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{2000}{\sqrt{300q}}$$

Si  $r$  está en dólares, encuentre el cambio en el ingreso total del fabricante si la producción aumenta de 500 a 800 unidades.

- 62. Ingreso marginal** Repita el problema 61 si

$$\frac{dr}{dq} = 250 + 90q - 3q^2$$

y la producción crece de 10 a 20 unidades.

- 63. Tasa de criminalidad** Una socióloga estudia la tasa de crímenes en cierta ciudad. Estima que  $t$  meses después del principio del próximo año, el número total de crímenes cometidos se incrementará a razón de  $8t + 10$  crímenes por mes. Determine el número total de crímenes que se esperan el próximo año. ¿Cuántos crímenes puede esperarse que se cometan durante los últimos 6 meses de ese año?

- 64. Altas de hospital** Para un grupo de individuos hospitalizados, suponga que la razón de altas está dada por

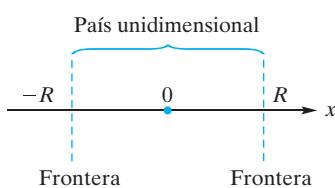
$$f(t) = \frac{81 \times 10^6}{(300 + t)^4}$$

donde  $f(t)$  es la proporción del grupo dado de alta por día al final de  $t$  días. ¿Qué proporción ha sido dada de alta al final de 700 días?

- 65. Producción** Imagine un país unidimensional de longitud  $2R$ . (Vea la figura 14.23.<sup>12</sup>) Suponga que la producción de bienes en este país está distribuida en forma continua de frontera a frontera. Si la cantidad producida cada año por unidad de distancia es  $f(x)$ , entonces la producción total del país está dada por

$$G = \int_{-R}^R f(x) dx$$

Evalue  $G$  si  $f(x) = i$ , donde  $i$  es una constante.



**FIGURA 14.23** Diagrama para el problema 65.

## OBJETIVO

Estimar el valor de una integral definida con la regla del trapecio o la regla de Simpson.

## 14.8 Integración aproximada

### Regla del trapecio

Cualquier función  $f$  construida con polinomios, exponentiales y logaritmos puede diferenciarse mediante el uso de operaciones y composiciones algebraicas y la función resultante  $f'$  será también del mismo tipo, una función que puede construirse a partir de polinomios, exponentiales y logaritmos con el uso de operaciones y composiciones algebraicas. Tales funciones pueden llamarse *elementales* (aunque el término tiene usual-

- 66. Exportaciones** Para el país unidimensional del problema 65, bajo ciertas condiciones, la cantidad de exportaciones está dada por

$$E = \int_{-R}^R \frac{i}{2} [e^{-k(R-x)} + e^{-k(R+x)}] dx$$

donde  $i$  y  $k$  son constantes ( $k \neq 0$ ). Evalúe  $E$ .

- 67. Precio promedio de entrega** En un análisis del precio de entrega de un artículo desde la fábrica hasta el cliente, DeCanio<sup>13</sup> afirma que el precio promedio de entrega pagado por los consumidores está dado por

$$A = \frac{\int_0^R (m+x)[1-(m+x)] dx}{\int_0^R [1-(m+x)] dx}$$

donde  $m$  es el precio en la fábrica y  $x$  la distancia máxima al punto de venta. DeCanio determina que

$$A = \frac{m + \frac{R}{2} - m^2 - mR - \frac{R^2}{3}}{1 - m - \frac{R}{2}}$$

Verifíquelo.

En los problemas 68 a 70, use el teorema fundamental del cálculo integral para determinar el valor de la integral definida. Verifique los resultados con su calculadora.

**68.**  $\int_{2.5}^{3.5} (1 + 2x + 3x^2) dx$

**69.**  $\int_0^4 \frac{1}{(4x+4)^2} dx$

**70.**  $\int_0^1 e^{3t} dt$ . Redondee su respuesta a dos decimales.

En los problemas 71 a 74, estime el valor de la integral definida. Redondee sus respuestas a dos decimales.

**71.**  $\int_{-1}^5 \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} dx$

**72.**  $\int_3^4 \frac{1}{x \ln x} dx$

**73.**  $\int_0^3 2\sqrt{t^2 + 3} dt$

**74.**  $\int_{-1}^1 \frac{6\sqrt{q+1}}{q+3} dq$

<sup>12</sup>R. Taagepera, "Why the Trade/GNP Ratio Decrease with Country Size", *Social Science Research*, 5 (1976), 385-404.

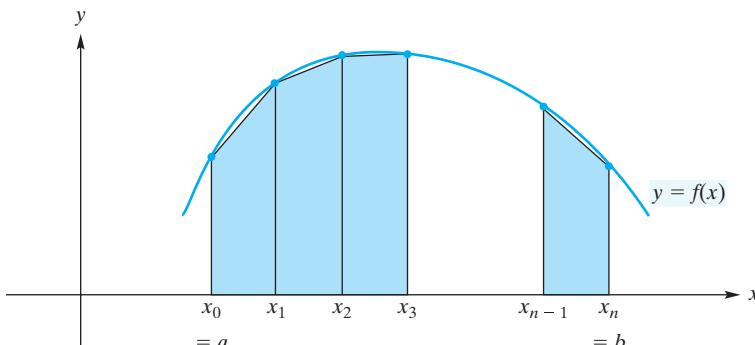
<sup>13</sup>S. J. DeCanio, "Delivered Pricing and Multiple Basing Point Equilibrium: A Reevaluation". *The Quarterly Journal of Economics*, XCIX, núm. 2 (1984), 329-349.

mente un significado un poco diferente). En esta terminología, la derivada de una función elemental también es elemental. La integración es más complicada. Si una función elemental  $f$  tiene  $F$  como una antiderivada,  $F$  puede no ser elemental. Dicho de otra manera, incluso para una función que luce muy simple, como  $f$ , algunas veces resulta imposible encontrar  $\int f(x) dx$  en términos de las funciones consideradas en este libro. Por ejemplo, no existe una función elemental cuya derivada sea  $e^{x^2}$  de manera que no se puede “hacer” la integral  $\int e^{x^2} dx$ .

Por otra parte, considere una función  $f$  que es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  donde  $f(x) \geq 0$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ . Entonces  $\int_a^b f(x) dx$  es simplemente el *número* que proporciona el área de la región limitada por las curvas  $y = f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = a$  y  $x = b$ . Resulta insatisfactorio y quizás impráctico, no decir nada acerca del número  $\int_a^b f(x) dx$  por la incapacidad de “hacer” la integral  $\int f(x) dx$ . Esto también se aplica cuando la integral  $\int f(x) dx$  es demasiado difícil para la persona que desea encontrar el número  $\int_a^b f(x) dx$ .

Debido a que  $\int_a^b f(x) dx$  se define como un límite de sumas de la forma  $\sum f(x) \Delta x$ , cualquier suma particular bien formada de la forma  $\sum f(x) \Delta x$  puede verse como una aproximación de  $\int_a^b f(x) dx$ . Al menos para una  $f$  no negativa tal suma puede verse como la suma de áreas de rectángulos delgados. Por ejemplo, considere la figura 14.11 de la sección 14.6, en la que se muestran dos rectángulos de manera explícita. Resulta claro que el error que surge de dichos rectángulos se asocia con el pequeño lado superior. El error podría reducirse si se reemplazaran los rectángulos con formas que tuvieran una lado superior más parecido a la forma de la curva. Se considerarán dos posibilidades: el uso de trapecios delgados en lugar de rectángulos, la *regla del trapecio*, y el uso de regiones con lado superior en forma de arcos parabólicos, la *regla de Simpson*. En cada caso, sólo debe conocerse una cantidad finita de valores numéricos de  $f(x)$  y los cálculos involucrados son especialmente adecuados para computadoras o calculadoras. En ambos casos se supondrá que  $f$  es continua sobre  $[a, b]$ .

Al desarrollar la regla del trapecio, por conveniencia se supondrá también que  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ , para poder pensar en términos de áreas. Básicamente, esta regla implica aproximar la gráfica de  $f$  por medio de segmentos de recta.



**FIGURA 14.24** Aproximación de un área por medio de trapecios.

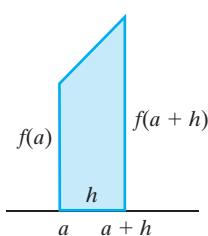
En la figura 14.24, el intervalo  $[a, b]$  está dividido en  $n$  subintervalos de igual longitud por los puntos  $a = x_0, x_1, x_2, \dots$  y  $x_n = b$ . Como la longitud de  $[a, b]$  es  $b - a$ , la longitud de cada subintervalo es  $(b - a)/n$ , a la cual se llamará  $h$ .

Es claro que,

$$x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_n = a + nh = b$$

Es posible asociar un trapecio (figura de cuatro lados, dos de ellos paralelos) con cada subintervalo. El área  $A$  de la región limitada por la curva, el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$  es  $\int_a^b f(x) dx$ , la cual puede aproximarse mediante la suma de las áreas de los trapecios determinados por los subintervalos.

Consideremos el primer trapecio, que se dibujó de nuevo en la figura 14.25. Como el área de un trapecio es igual a la mitad de su base multiplicada por la suma de los lados paralelos, este trapecio tiene un área de



**FIGURA 14.25** Primer trapecio.

$$\frac{1}{2}h[f(a) + f(a + h)]$$

En forma similar, el segundo trapecio tiene área

$$\frac{1}{2}h[f(a+h) + f(a+2h)]$$

El área  $A$  bajo la curva se aproxima mediante la suma de las áreas de  $n$  trapecios:

$$\begin{aligned} A \approx & \frac{1}{2}h[f(a) + f(a+h)] + \frac{1}{2}h[f(a+h) + f(a+2h)] \\ & + \frac{1}{2}h[f(a+2h) + f(a+3h)] + \cdots + \frac{1}{2}h[f(a+(n-1)h) + f(b)] \end{aligned}$$

Como  $A = \int_a^b f(x) dx$ , al simplificar la expresión anterior se obtiene la regla del trapecio:

### Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f(a+(n-1)h) + f(b)]$$

donde  $h = (b-a)/n$ .

El patrón de los coeficientes dentro de las llaves es 1, 2, 2, ..., 2, 1. Por lo general, entre más subintervalos se consideren, mejor será la aproximación. En este desarrollo se supuso por conveniencia que  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ . Sin embargo, la regla del trapecio es válida sin esta restricción.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### REGLA DEL TRAPECIO

De un tanque se derrama aceite a una velocidad de  $R'(t) = \frac{60}{\sqrt{t^2 + 9}}$ , donde  $t$  es el tiempo en minutos y  $R(t)$  es el radio de la mancha de aceite, en pies. Use la regla del trapecio, donde  $n = 5$  para aproximar  $\int_0^5 \frac{60}{\sqrt{t^2 + 9}} dt$ , el tamaño del radio después de cinco segundos.

#### EJEMPLO 1 Regla del trapecio

Use la regla del trapecio para estimar el valor de

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

para  $n = 5$ . Calcule cada término con cuatro decimales y redondee su respuesta a tres decimales.

**Solución:** Aquí,  $f(x) = 1/(1+x^2)$ ,  $n = 5$ ,  $a = 0$  y  $b = 1$ . Entonces,

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Los términos a sumar son

$$\begin{aligned} f(a) &= f(0) = 1.0000 \\ 2f(a+h) &= 2f(0.2) = 1.9231 \\ 2f(a+2h) &= 2f(0.4) = 1.7241 \\ 2f(a+3h) &= 2f(0.6) = 1.4706 \\ 2f(a+4h) &= 2f(0.8) = 1.2195 \\ f(b) &= f(1) = \underline{0.5000} \quad (a+nh = b) \\ &\qquad\qquad\qquad 7.8373 = \text{suma} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la estimación de la integral es

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \approx \frac{0.2}{2}(7.8373) \approx 0.784$$

El valor real de la integral es aproximadamente 0.785.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



### Regla de Simpson

Otro método para estimar  $\int_a^b f(x) dx$  está dado por la regla de Simpson, que implica aproximar la gráfica de  $f$  por medio de segmentos parabólicos. Se omitirá su deducción.

### Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 4f(a+(n-1)h) + f(b)]$$

donde  $h = (b-a)/n$  y  $n$  es un número par.

El patrón de coeficientes dentro de las llaves es 1, 4, 2, 4, 2, ..., 2, 4, 1, lo cual requiere que  $n$  sea par. Se usará esta regla para evaluar la integral del ejemplo 1.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

##### REGLA DE SIMPSON

Un cultivo de levadura crece a la velocidad de  $A'(t) = 0.3e^{0.2t^2}$ , donde  $t$  es el tiempo en horas y  $A(t)$  es la cantidad en gramos. Use la regla de Simpson con  $n = 8$  para aproximar  $\int_0^4 0.3e^{0.2t^2} dt$ , la cantidad que creció el cultivo durante las primeras cuatro horas.

### EJEMPLO 2 Regla de Simpson

Use la regla de Simpson para estimar el valor de  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  para  $n = 4$ . Calcule cada término con cuatro decimales y redondee la respuesta a tres decimales.

**Solución:** Aquí  $f(x) = 1/(1+x^2)$ ,  $n = 4$ ,  $a = 0$  y  $b = 1$ . Así,  $h = (b-a)/n = 1/4 = 0.25$ . Los términos por sumar son:

$$\begin{aligned} f(a) &= f(0) &= 1.0000 \\ 4f(a+h) &= 4f(0.25) &= 3.7647 \\ 2f(a+2h) &= 2f(0.5) &= 1.6000 \\ 4f(a+3h) &= 4f(0.75) &= 2.5600 \\ f(b) &= f(1) &= 0.5000 \\ && \hline && 9.4247 = \text{suma} \end{aligned}$$

Por lo tanto, mediante la regla de Simpson,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \approx \frac{0.25}{3}(9.4247) \approx 0.785$$

Ésta es una mejor aproximación que la que se obtuvo en el ejemplo 1 con la regla del trapecio.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5



Tanto la regla de Simpson como la regla del trapecio pueden usarse si sólo se conoce  $f(a)$ ,  $f(a+h)$ , etcétera; no es necesario conocer  $f(x)$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ . En el ejemplo 3 se ilustrará lo anterior.

En el ejemplo 3 se estima una integral definida a partir de puntos de datos; no se conoce la función.

### EJEMPLO 3 Demografía

Una función que se usa a menudo en demografía (el estudio de nacimientos, matrimonios, mortalidad, etcétera, en una comunidad) es la **función de la tabla de vida**, denotada por  $l$ . En una población con 100 000 nacimientos en cualquier año,  $l(x)$  representa el número de personas que alcanzan la edad  $x$  en cualquier año. Por ejemplo, si  $l(20) = 98\,857$ , entonces el número de personas que llegan a los 20 años en cualquier año es 98 857. Suponga que la función  $l$  se aplica a todas las personas nacidas en un intervalo largo de tiempo. Puede demostrarse que en cualquier momento, el número esperado de personas en la población que tienen exactamente entre  $x$  y  $x+m$  años inclusive, está dado por

$$\int_x^{x+m} l(t) dt$$

La siguiente tabla proporciona valores de  $l(x)$  para hombres y mujeres de Estados Unidos.<sup>14</sup> Aproxime el número de mujeres en el grupo de 20 a 35 años de edad con la regla del trapecio con  $n = 3$ .

<sup>14</sup>National Vital Statistics Report, vol. 48, núm. 18, febrero 7, 2001.

Tabla de vida

Edad = $x$	$I(x)$		Edad = $x$	$I(x)$	
	Hombres	Mujeres		Hombres	Mujeres
0	100 000	100 000	45	93 717	96 582
5	99 066	99 220	50	91 616	95 392
10	98 967	99 144	55	88 646	93 562
15	98 834	99 059	60	84 188	90 700
20	98 346	98 857	65	77 547	86 288
25	97 648	98 627	70	68 375	79 926
30	96 970	98 350	75	56 288	70 761
35	96 184	97 964	80	42 127	58 573
40	95 163	97 398			

**Solución:** Se desea estimar

$$\int_{20}^{35} l(t) dt$$

Se tiene  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{35-20}{5} = 5$ . Los términos que deben sumarse de acuerdo con la regla del trapecio son

$$l(20) = 98 857$$

$$2l(25) = 2(98 627) = 197 254$$

$$2l(30) = 2(98 350) = 196 700$$

$$l(35) = \frac{97 964}{590 775} = \text{suma}$$

Por la regla del trapecio,

$$\int_{20}^{35} l(t) dt \approx \frac{5}{2}(590 775) = 1 476 937.5$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17 

Existen fórmulas que se usan para determinar la exactitud de las respuestas obtenidas al usar la regla del trapecio o la regla de Simpson, las cuales pueden encontrarse en textos comunes sobre análisis numérico.

## Problemas 14.8

En los ejercicios 1 y 2, use la regla del trapecio o la regla de Simpson (según se indique) y el valor dado de  $n$  para estimar la integral.

\*1.  $\int_{-2}^4 \frac{170}{1+x^2} dx$ ; regla del trapecio,  $n = 6$

2.  $\int_{-2}^4 \frac{170}{1+x^2} dx$ ; regla de Simpson,  $n = 6$

En los problemas 3 a 8, use la regla del trapecio o la regla de Simpson (según se indique) y el valor dado de  $n$ , para estimar la integral. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee su respuesta a tres decimales. En los problemas 3 a 6, evalúe también la integral por antiderivación (teorema fundamental del cálculo integral).

3.  $\int_0^1 x^2 dx$ ; regla del trapecio,  $n = 5$

4.  $\int_0^1 x^2 dx$ ; regla de Simpson,  $n = 4$

\*5.  $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$ ; regla de Simpson,  $n = 4$

6.  $\int_1^4 \frac{dx}{x}$ ; regla del trapecio,  $n = 6$

7.  $\int_0^2 \frac{x dx}{x+1}$ ; regla del trapecio,  $n = 4$

8.  $\int_2^4 \frac{dx}{x+x^2}$ ; regla de Simpson,  $n = 4$

En los problemas 9 y 10, use la tabla de vida del ejemplo 3 para estimar las integrales dadas, por medio de la regla del trapecio.

9.  $\int_{45}^{70} l(t) dt$ , hombres,  $n = 5$

10.  $\int_{35}^{55} l(t) dt$ , mujeres,  $n = 4$

En los problemas 11 y 12, suponga que la gráfica de una función continua  $f(x) \geq 0$ , contiene los puntos dados. Use la regla de Simpson y todos los puntos dados para aproximar el área entre la gráfica y el eje  $x$  en el intervalo dado. Redondee su respuesta a un decimal.

11.  $(1, 0.4), (2, 0.6), (3, 1.2), (4, 0.8), (5, 0.5)$ ; [1,5]

12.  $(2, 0), (2.5, 6), (3, 10), (3.5, 11), (4, 14), (4.5, 15), (5, 16)$ ; [2,5]

13. Con la ayuda de toda la información dada en la figura 14.26, estime  $\int_1^3 f(x) dx$  por medio de la regla de Simpson. Dé su respuesta en forma fraccionaria.

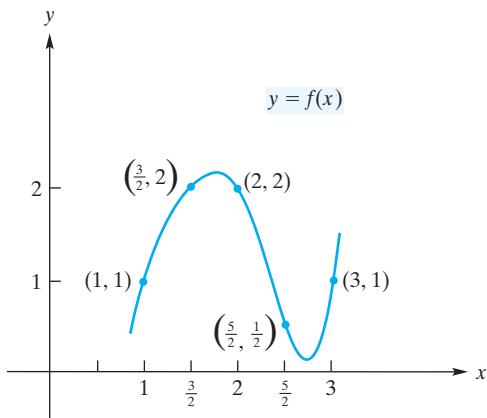


FIGURA 14.26 Gráfica de  $f$  para el problema 13.

En los problemas 14 y 15, use la regla de Simpson y el valor dado de  $n$  para estimar la integral. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee sus respuestas a tres decimales.

14.  $\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{1+x}} dx$ ;  $n = 4$  Evalúe también la integral por medio del teorema fundamental del cálculo integral.

## OBJETIVO

Utilizar bandas verticales y la integral definida para encontrar el área de la región entre una curva y el eje  $x$ .

## 14.9 Área

En la sección 14.7 se vio que el área de una región puede encontrarse al evaluar el límite de una suma de la forma  $\sum f(x) \Delta x$ , donde  $f(x) \Delta x$  representa el área de un rectángulo. Este límite es un caso especial de una integral definida, por lo que puede encontrarse fácilmente si se usa el teorema fundamental.

Al usar la integral definida para determinar áreas, conviene hacer un bosquejo de la región implicada. Se considerará el área de la región limitada por  $y = f(x)$  y el eje  $x$  desde  $x = a$  hasta  $x = b$ , donde  $f(x) \geq 0$  sobre  $[a, b]$ . (Vea la figura 14.27). Para plantear la integral, debe incluirse un rectángulo muestra en el bosquejo, porque el área de la región es un límite de sumas de áreas de rectángulos. Esto no sólo ayuda a entender el proceso de integración, sino que también contribuye a encontrar áreas de regiones más complicadas. Dicho rectángulo (vea la figura 14.27) se llama **elemento vertical de área** (o **franja vertical**). En el diagrama, el ancho del elemento vertical es  $\Delta x$ . La altura es el

15.  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ ;  $n = 4$

16. **Ingreso** Use la regla de Simpson para aproximar el ingreso total recibido por la producción y venta de 80 unidades de un producto, si los valores de la función de ingreso marginal  $dr/dq$  son los siguientes:

<b><math>q</math> (unidades)</b>	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\frac{dr}{dq}$ (\$ por unidad)	10	9	8.5	8	8.5	7.5	7	6.5	7

- \*17. **Área de un lago** Un tramo recto de autopista corre a lo largo de un lago. Un topógrafo que desea conocer el área aproximada del lago, mide la distancia desde varios puntos de la carretera a las orillas cercana y lejana del lago y obtiene los valores que se presentan en la siguiente tabla:

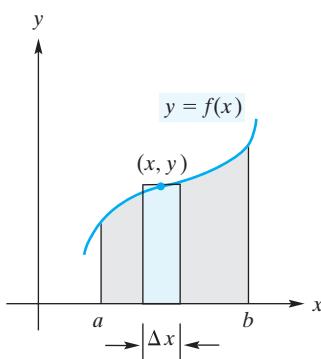
<b>Distancia a lo largo de la autopista (km)</b>	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
<b>Distancia a la orilla cercana (km)</b>	0.5	0.3	0.7	1.0	0.5	0.2	0.5	0.8	1.0
<b>Distancia a la orilla lejana (km)</b>	0.5	2.3	2.2	3.0	2.5	2.2	1.5	1.3	1.0

Trace un bosquejo de la situación geográfica. Luego use la regla de Simpson para estimar la mejor aproximación del área del lago. Dé su respuesta en forma de fracción.

18. **Manufactura** Un fabricante estimó su costo marginal (CM) y su ingreso marginal (IM) para varios niveles de producción ( $q$ ). Dichas estimaciones se muestran en la siguiente tabla:

<b><math>q</math> (unidades)</b>	0	20	40	60	80	100
<b>CM (\$ por unidad)</b>	260	250	240	200	240	250
<b>IM (\$ por unidad)</b>	410	350	300	250	270	250

- (a) Con la regla del trapecio, estime los costos totales variables de producción para 100 unidades.  
(b) Mediante la regla de Simpson, estime el ingreso total en la venta de 100 unidades.  
(c) Si se supone que la utilidad máxima ocurre cuando  $IM = CM$  (esto es, cuando  $q = 100$ ), estime la utilidad máxima si los costos fijos son de \$2000.



**FIGURA 14.27** Región con elemento vertical.

valor  $y$  de la curva. Por lo tanto, el rectángulo tiene un área de  $y \Delta x$  o  $f(x) \Delta x$ . El área de la región entera se encuentra al sumar las áreas de todos los elementos entre  $x = a$  y  $x = b$ , y determinar el límite de esta suma, que es la integral definida. En forma simbólica, se tiene

$$\sum f(x) \Delta x \rightarrow \int_a^b f(x) dx = \text{área}$$

En el ejemplo 1 se ilustrará esto.

### EJEMPLO 1 Uso de la integral definida para encontrar un área

Encuentre el área de la región limitada por la curva

$$y = 6 - x - x^2$$

y el eje  $x$ .

**Solución:** Primero se debe bosquejar la curva para poder visualizar la región. Como

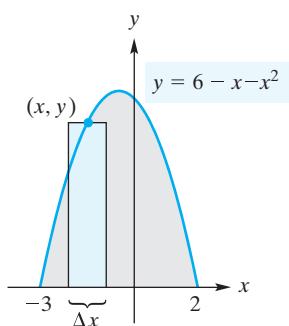
$$y = -(x^2 + x - 6) = -(x - 2)(x + 3)$$

las intersecciones con el eje  $x$  son  $(2, 0)$  y  $(-3, 0)$ . Con la ayuda de las técnicas de graficación que se vieron antes, se obtiene la gráfica y la región que se muestra en la figura 14.28. *Con esta región es crucial encontrar las intersecciones de la curva con el eje  $x$ , porque ellas determinan el intervalo en el cual las áreas de los elementos deben sumarse.* Esto es, *esos valores  $x$  son los límites de integración*. El elemento vertical mostrado tiene un ancho  $\Delta x$  y altura  $y$ . Por lo tanto, el área del elemento es  $y \Delta x$ . Al sumar las áreas de todos estos elementos de  $x = -3$  a  $x = 2$  y tomar el límite mediante la integral definida se obtiene el área:

$$\sum y \Delta x \rightarrow \int_{-3}^2 y dx = \text{área}$$

Para evaluar la integral se debe expresar el integrando en términos de la variable de integración  $x$ . Como  $y = 6 - x - x^2$ ,

$$\begin{aligned} \text{área} &= \int_{-3}^2 (6 - x - x^2) dx = \left( 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^2 \\ &= \left( 12 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} \right) - \left( -18 - \frac{9}{2} - \frac{-27}{3} \right) = \frac{125}{6} \end{aligned}$$



**FIGURA 14.28** Región del ejemplo 1 con elemento vertical.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

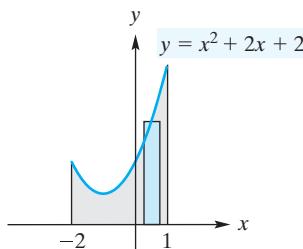


### EJEMPLO 2 Determinación del área de una región

Encuentre el área de la región limitada por la curva  $y = x^2 + 2x + 2$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = -2$  y  $x = 1$ .

**Solución:** En la figura 14.29 se muestra un bosquejo de la región. Se tiene

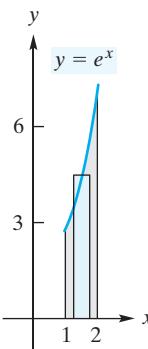
$$\begin{aligned} \text{área} &= \int_{-2}^1 y dx = \int_{-2}^1 (x^2 + 2x + 2) dx \\ &= \left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \left( \frac{1}{3} + 1 + 2 \right) - \left( -\frac{8}{3} + 4 - 4 \right) \\ &= 6 \end{aligned}$$



**FIGURA 14.29** Diagrama para el ejemplo 2.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7





**FIGURA 14.30** Diagrama para el ejemplo 3.

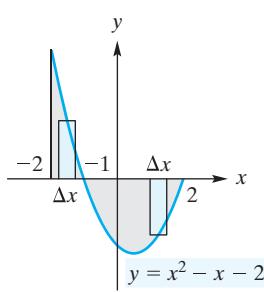
### EJEMPLO 3 Determinación del área de una región

Encuentre el área de la región entre la curva  $y = e^x$  y el eje  $x$  entre  $x = 1$  y  $x = 2$ .

**Solución:** En la figura 14.30 se muestra un bosquejo de la región. Se escribe

$$\begin{aligned}\text{área} &= \int_1^2 y \, dx = \int_1^2 e^x \, dx = e^x \Big|_1^2 \\ &= e^2 - e = e(e - 1)\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27



**FIGURA 14.31** Diagrama para el ejemplo 4.

### EJEMPLO 4 Un área que requiere dos integrales definidas

Encuentre el área de la región limitada por la curva

$$y = x^2 - x - 2$$

y la recta  $y = 0$  (el eje  $x$ ) entre  $x = -2$  y  $x = 2$ .

**Solución:** En la figura 14.31 se muestra un bosquejo de la región. Note que las intersecciones con el eje  $x$  son  $(-1, 0)$  y  $(2, 0)$ .

En el intervalo  $[-2, -1]$ , el área del elemento es

$$y \Delta x = (x^2 - x - 2) \Delta x$$

En  $[-1, 2]$  el área es

$$-y \Delta x = -(x^2 - x - 2) \Delta x$$

Así,

$$\begin{aligned}\text{área} &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2) \, dx + \int_{-1}^2 -(x^2 - x - 2) \, dx \\ &= \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-2}^{-1} - \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= \left[ \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left( -\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 4 \right) \right] \\ &\quad - \left[ \left( \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right) - \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \right] \\ &= \frac{19}{3}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31



#### ADVERTENCIA

Es erróneo apresurarse y escribir que el área es  $\int_{-2}^2 y \, dx$ , por la siguiente razón. Para el rectángulo izquierdo la altura es  $y$ . Sin embargo, para el rectángulo a la derecha, la  $y$  es negativa, por lo que su altura es el número positivo  $-y$ . Esto señala la importancia de bosquejar la región.

En el ejemplo siguiente se muestra el uso del área como una probabilidad en estadística.

### EJEMPLO 5 Aplicación a la estadística

En estadística, una **función de densidad** (de probabilidad)  $f$  de una variable  $x$ , donde  $x$  toma todos los valores en el intervalo  $[a, b]$ , tiene las siguientes propiedades:

(i)  $f(x) \geq 0$

(ii)  $\int_a^b f(x) \, dx = 1$

La probabilidad de que  $x$  tome un valor entre  $c$  y  $d$ , que se escribe  $P(c \leq x \leq d)$ , donde  $a \leq c \leq d \leq b$ , se representa mediante el área de la región limitada por la gráfica de  $f$  y el eje  $x$  entre  $x = c$  y  $x = d$ . Por lo tanto (vea la figura 14.32),

$$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f(x) \, dx$$

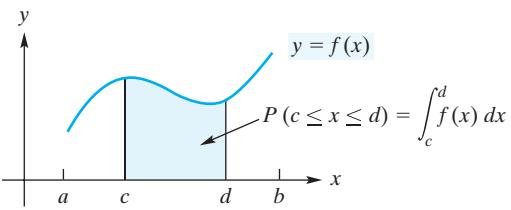


FIGURA 14.32 Probabilidad como un área.

Para la función de densidad  $f(x) = 6(x - x^2)$ , donde  $0 \leq x \leq 1$ , encuentre cada una de las siguientes probabilidades.

a.  $P(0 \leq x \leq \frac{1}{4})$

**Solución:** Aquí  $[a, b]$  es  $[0, 1]$ ,  $c$  es 0 y  $d$  es  $\frac{1}{4}$ . Se tiene

$$\begin{aligned} P(0 \leq x \leq \frac{1}{4}) &= \int_0^{1/4} 6(x - x^2) dx = 6 \int_0^{1/4} (x - x^2) dx \\ &= 6 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{1/4} = (3x^2 - 2x^3) \Big|_0^{1/4} \\ &= \left( 3 \left( \frac{1}{4} \right)^2 - 2 \left( \frac{1}{4} \right)^3 \right) - 0 = \frac{5}{32} \end{aligned}$$

b.  $P(x \geq \frac{1}{2})$ .

**Solución:** Como el dominio de  $f$  es  $0 \leq x \leq 1$ , decir que  $x \geq \frac{1}{2}$  significa que  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ . Así,

$$\begin{aligned} P\left(x \geq \frac{1}{2}\right) &= \int_{1/2}^1 6(x - x^2) dx = 6 \int_{1/2}^1 (x - x^2) dx \\ &= 6 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{1/2}^1 = (3x^2 - 2x^3) \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37

## Problemas 14.9

En los problemas 1 a 34, use una integral definida para encontrar el área de la región limitada por la curva, el eje  $x$  y las líneas dadas. En cada caso, primero haga el bosquejo de la región. Tenga cuidado con las áreas de las regiones que están debajo del eje  $x$ .

\*1.  $y = 4x$ ,  $x = 2$

2.  $y = \frac{3}{4}x + 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 16$

3.  $y = 5x + 2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$

4.  $y = x + 5$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$

5.  $y = x - 1$ ,  $x = 5$

6.  $y = 3x^2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$

\*7.  $y = x^2$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$

8.  $y = 2x^2 - x$ ,  $x = -2$ ,  $x = -1$

9.  $y = x^2 + 2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$

10.  $y = x + x^2 + x^3$ ,  $x = 1$

11.  $y = x^2 - 2x$ ,  $x = -3$ ,  $x = -1$

12.  $y = 3x^2 - 4x$ ,  $x = -2$ ,  $x = -1$

13.  $y = 2 - x - x^2$

14.  $y = \frac{4}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$

15.  $y = 2 - x - x^3$ ,  $x = -3$ ,  $x = 0$

16.  $y = e^x$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$

17.  $y = 3 + 2x - x^2$

18.  $y = \frac{1}{(x - 1)^2}$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$

19.  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = e$

20.  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = e^2$

21.  $y = \sqrt{x + 9}$ ,  $x = -9$ ,  $x = 0$

22.  $y = x^2 - 4x$ ,  $x = 2$ ,  $x = 6$

23.  $y = \sqrt{2x - 1}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 5$

24.  $y = x^3 + 3x^2$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$

25.  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = 2$

26.  $y = x^2 + 4x - 5$ ,  $x = -5$ ,  $x = 1$

\*27.  $y = e^x + 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$

28.  $y = |x|$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$

29.  $y = x + \frac{2}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$

30.  $y = 4 + 3x - x^2$

- \*31.  $y = x^3$ ,  $x = -2$ ,  $x = 4$
32.  $y = \sqrt{x-2}$ ,  $x = 2$ ,  $x = 6$
33.  $y = 2x - x^2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$
34.  $y = x^2 + 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 4$
35. Dado que
- $$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 16 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$
- determine el área de la región limitada por la gráfica de  $y = f(x)$ , el eje  $x$  y la línea  $x = 3$ . Incluya un bosquejo de la región.
36. Bajo condiciones de una distribución uniforme continua, (un concepto estadístico) de la proporción de personas con ingresos entre  $a$  y  $t$ , donde  $a \leq t \leq b$ , es el área de la región entre la curva  $y = 1/(b-a)$  y el eje  $x$ , desde  $x = a$  hasta  $x = t$ . Bosqueje la gráfica de la curva y determine el área de la región dada.
- \*37. Suponga que  $f(x) = x/8$ , donde  $0 \leq x \leq 4$ . Si  $f$  es una función de densidad (vea el ejemplo 5), encuentre lo siguiente:
- (a)  $P(0 \leq x \leq 1)$
  - (b)  $P(2 \leq x \leq 4)$
  - (c)  $P(x \geq 3)$
38. Suponga que  $f(x) = \frac{1}{3}(1-x)^2$ , donde  $0 \leq x \leq 3$ . Si  $f$  es una función de densidad (vea el ejemplo 5), encuentre lo siguiente:
- (a)  $P(1 \leq x \leq 2)$
  - (b)  $P(1 \leq x \leq \frac{5}{2})$
- (c)  $P(x \leq 1)$ , use el resultado del inciso (c)
39. Suponga que  $f(x) = 1/x$ , donde  $e \leq x \leq e^2$ . Si  $f$  es una función de densidad (vea el ejemplo 5), encuentre lo siguiente:
- (a)  $P(3 \leq x \leq 7)$
  - (b)  $P(x \leq 5)$
  - (c)  $P(x \geq 4)$
  - (d) Verifique que  $P(e \leq x \leq e^2) = 1$
40. (a) Sea  $r$  un número real, donde  $r > 1$ . Evalúe
- $$\int_1^r \frac{1}{x^2} dx$$
- (b) Su respuesta al inciso (a) puede interpretarse como el área de cierta región del plano. Bosqueje esta región.
- (c) Evalúe  $\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \int_1^r \frac{1}{x^2} dx \right)$ .
- (d) Su respuesta al inciso (c) puede interpretarse como el área de cierta región del plano. Bosqueje esta región.
- En los problemas 41 a 44, use la integración definida para estimar el área de la región limitada por la curva, el eje  $x$  y las líneas dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.
41.  $y = \frac{1}{x^2+1}$ ,  $x = -2$ ,  $x = 1$
42.  $y = \frac{x}{\sqrt{x+5}}$ ,  $x = 2$ ,  $x = 7$
43.  $y = x^4 - 2x^3 - 2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$
44.  $y = 1 + 3x - x^4$

**OBJETIVO**

Determinar el área de una región acotada por dos o más curvas mediante el uso de franjas verticales u horizontales.

## 14.10 Área entre curvas

### Elementos verticales

Ahora se encontrará el área de una región encerrada por varias curvas. Como antes, el procedimiento consistirá en dibujar un elemento muestra de área y usar la integral definida para “sumar” las áreas de todos los elementos.

Por ejemplo, considere el área de la región en la figura 14.33 que está limitada arriba y abajo por las curvas  $y = f(x)$  y  $y = g(x)$ , y lateralmente por las rectas  $x = a$  y  $x = b$ . El ancho del elemento vertical indicado es  $\Delta x$  y la altura es el valor  $y$  de la curva superior menos el valor  $y$  de la curva inferior, lo que se escribirá como  $y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}}$ . Entonces, el área del elemento es

$$[y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}}] \Delta x$$

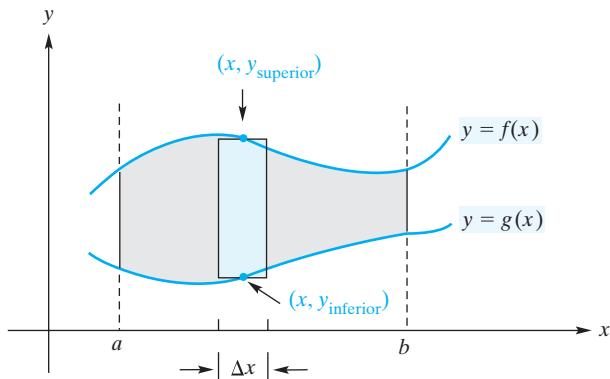


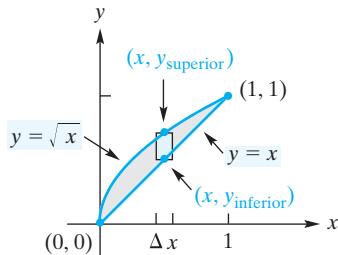
FIGURA 14.33 Región entre curvas.

que es

$$[f(x) - g(x)] \Delta x$$

Al sumar las áreas de todos los elementos entre  $x = a$  y  $x = b$  por medio de la integral definida, se obtiene el área de la región:

$$\sum [f(x) - g(x)] \Delta x \rightarrow \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \text{área.}$$



**FIGURA 14.34** Diagrama para el ejemplo 1.

Debería ser evidente que conocer los puntos de intersección es importante para determinar los límites de la integración.

### EJEMPLO 1 Determinación de un área entre dos curvas

Encuentre el área de la región limitada por las curvas  $y = \sqrt{x}$  y  $y = x$ .

**Solución:** En la figura 14.34 aparece un bosquejo de la región. Para determinar dónde se intersecan las curvas, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones  $y = \sqrt{x}$  y  $y = x$ . Se elimina  $y$  por sustitución, se obtiene

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x \\ x &= x^2 && \text{(al elevar al cuadrado ambos lados)} \\ 0 &= x^2 - x = x(x - 1) \\ x &= 0 \quad \text{o} \quad x = 1 \end{aligned}$$

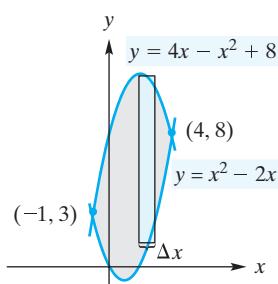
Como se elevaron ambos lados al cuadrado, se deben verificar las soluciones encontradas con respecto a la ecuación original. Se puede determinar con facilidad que tanto  $x = 0$  como  $x = 1$  son soluciones de  $\sqrt{x} = x$ . Si  $x = 0$ , entonces  $y = 0$ ; si  $x = 1$ , entonces  $y = 1$ . Así, las curvas se intersecan en  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$ . El ancho del elemento del área indicado es  $\Delta x$ . La altura es el valor  $y$  de la curva superior menos el valor  $y$  de la curva inferior:

$$y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}} = \sqrt{x} - x$$

El área del elemento es entonces  $(\sqrt{x} - x) \Delta x$ . Se suman las áreas de todos estos elementos entre  $x = 0$  y  $x = 1$  por medio de la integral definida, se obtiene el área de toda la región:

$$\begin{aligned} \text{área} &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx \\ &= \int_0^1 (x^{1/2} - x) dx = \left( \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) - (0 - 0) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



**FIGURA 14.35** Diagrama para el ejemplo 2.

### EJEMPLO 2 Determinación de un área entre dos curvas

Encuentre el área de la región limitada por las curvas  $y = 4x - x^2 + 8$  y  $y = x^2 - 2x$ .

**Solución:** En la figura 14.35 aparece un bosquejo de la región. Para encontrar dónde se intersecan las curvas, se resuelve el sistema de ecuaciones  $y = 4x - x^2 + 8$  y  $y = x^2 - 2x$ :

$$\begin{aligned} 4x - x^2 + 8 &= x^2 - 2x, \\ -2x^2 + 6x + 8 &= 0, \\ x^2 - 3x - 4 &= 0, \\ (x + 1)(x - 4) &= 0 && \text{(al factorizar)} \\ x = -1 \quad \text{o} \quad x &= 4 \end{aligned}$$

Cuando  $x = -1$ ,  $y = 3$ ; cuando  $x = 4$ , entonces  $y = 8$ . Así, las curvas se intersecan en  $(-1, 3)$  y  $(4, 8)$ . El ancho del elemento indicado es  $\Delta x$ . La altura es el valor  $y$  de la curva

superior menos el valor  $y$  de la curva inferior:

$$y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}} = (4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)$$

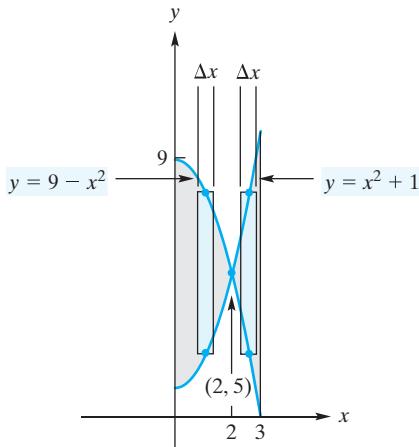
Por lo tanto, el área del elemento es

$$[(4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)] \Delta x = (-2x^2 + 6x + 8) \Delta x$$

Al sumar todas estas áreas desde  $x = -1$  hasta  $x = 4$ , se tiene

$$\text{área} = \int_{-1}^4 (-2x^2 + 6x + 8) dx = 41\frac{2}{3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25



**FIGURA 14.36**  $y_{\text{superior}}$  es  $9 - x^2$  en  $[0, 2]$  y es  $x^2 + 1$  en  $[2, 3]$ .

### EJEMPLO 3 Área de una región que tiene dos curvas superiores diferentes

Encuentre el área de la región entre las curvas  $y = 9 - x^2$  y  $y = x^2 + 1$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 3$ .

**Solución:** En la figura 14.36 se muestra un bosquejo de la región. Las curvas se intersecan cuando

$$\begin{aligned} 9 - x^2 &= x^2 + 1 \\ 8 &= 2x^2 \\ 4 &= x^2 \\ x &= \pm 2 \end{aligned} \quad (\text{dos soluciones})$$

Cuando  $x = \pm 2$ , entonces  $y = 5$ , por lo que los puntos de intersección son  $(\pm 2, 5)$ . Como se tiene interés en la región desde  $x = 0$  hasta  $x = 3$ , el punto de intersección que importa es  $(2, 5)$ . Note en la figura 14.36 que en la región a la izquierda del punto de intersección  $(2, 5)$ , un elemento tiene

$$y_{\text{superior}} = 9 - x^2 \quad y \quad y_{\text{inferior}} = x^2 + 1$$

pero para un elemento a la derecha de  $(2, 5)$  ocurre lo contrario, a saber

$$y_{\text{superior}} = x^2 + 1 \quad y \quad y_{\text{inferior}} = 9 - x^2$$

Entonces, desde  $x = 0$  hasta  $x = 2$ , el área de un elemento es

$$\begin{aligned} (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}}) \Delta x &= [(9 - x^2) - (x^2 + 1)] \Delta x \\ &= (8 - 2x^2) \Delta x \end{aligned}$$

pero entre  $x = 2$  y  $x = 3$ , es

$$\begin{aligned} (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}}) \Delta x &= [(x^2 + 1) - (9 - x^2)] \Delta x \\ &= (2x^2 - 8) \Delta x \end{aligned}$$

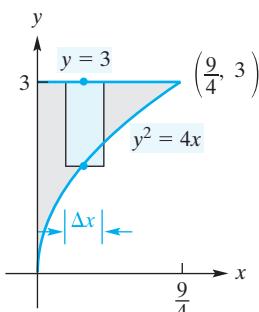
Por lo tanto, para encontrar el área de la región entera se necesitan *dos* integrales:

$$\begin{aligned} \text{área} &= \int_0^2 (8 - 2x^2) dx + \int_2^3 (2x^2 - 8) dx \\ &= \left( 8x - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^2 + \left( \frac{2x^3}{3} - 8x \right) \Big|_2^3 \\ &= \left[ \left( 16 - \frac{16}{3} \right) - 0 \right] + \left[ (18 - 24) - \left( \frac{16}{3} - 16 \right) \right] \\ &= \frac{46}{3} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 33

## Elementos horizontales

Algunas veces el área puede ser más fácil de determinar si se suman áreas de elementos horizontales en lugar de elementos verticales. En el ejemplo siguiente se determinará el área por ambos métodos. En cada caso, el elemento de área determina la forma de la integral.



**FIGURA 14.37** Elemento vertical de área.



### ADVERTENCIA

Con elementos horizontales el ancho es  $\Delta y$ , no  $\Delta x$ .

### EJEMPLO 4 Los métodos de elementos verticales y elementos horizontales

Encuentre el área de la región limitada para la curva  $y^2 = 4x$  y las rectas  $y = 3$  y  $x = 0$  (el eje  $y$ ).

**Solución:** En la figura 14.37 se presenta el bosquejo de la región. Cuando las curvas  $y = 3$  y  $y^2 = 4x$  se intersecan,  $9 = 4x$  por lo que  $x = \frac{9}{4}$ . Entonces el punto de intersección es  $(\frac{9}{4}, 3)$ . Como el ancho de la franja vertical es  $\Delta x$ , se integra con respecto a la variable  $x$ . De acuerdo con esto,  $y_{\text{superior}}$  y  $y_{\text{inferior}}$  deben expresarse como funciones de  $x$ . Para la curva inferior  $y^2 = 4x$  se tiene  $y = \pm 2\sqrt{x}$ . Pero  $y \geq 0$  para la porción de esta curva que limita la región, por lo que se usa  $y = 2\sqrt{x}$ . La curva superior es  $y = 3$ . Por consiguiente, la altura de la franja es

$$y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}} = 3 - 2\sqrt{x}$$

Por consiguiente, la franja tiene un área de  $(3 - 2\sqrt{x}) \Delta x$  y se desea sumar todas estas áreas desde  $x = 0$  hasta  $x = \frac{9}{4}$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \text{área} &= \int_0^{9/4} (3 - 2\sqrt{x}) dx = \left( 3x - \frac{4x^{3/2}}{3} \right) \Big|_0^{9/4} \\ &= \left[ 3\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2} \right] - (0) \\ &= \frac{27}{4} - \frac{4}{3}\left[\left(\frac{9}{4}\right)^{1/2}\right]^3 = \frac{27}{4} - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Considere ahora este problema desde el punto de vista de un **elemento horizontal de área** (o **franja horizontal**), como se muestra en la figura 14.38. El ancho del elemento es  $\Delta y$ . La longitud del elemento es *el valor x de la curva más a la derecha menos el valor x de la curva más a la izquierda*. Así, el área del elemento es

$$(x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}}) \Delta y$$

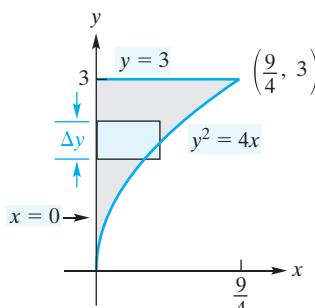
Se desea sumar todas estas áreas desde  $y = 0$  hasta  $y = 3$ :

$$\sum (x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}}) \Delta y \rightarrow \int_0^3 (x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}}) dy$$

Como la variable de integración es  $y$ , se debe expresar  $x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}}$  como funciones de  $y$ . La curva más a la derecha es  $y^2 = 4x$  de manera que  $x = y^2/4$ . La curva izquierda es  $x = 0$ . Así,

$$\begin{aligned} \text{área} &= \int_0^3 (x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}}) dy \\ &= \int_0^3 \left( \frac{y^2}{4} - 0 \right) dy = \frac{y^3}{12} \Big|_0^3 = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Note que para esta región, las franjas horizontales hacen más fácil la evaluación (y el planteamiento) de la integral definida que una integral con franjas verticales. En todo caso, recuerde que **los límites de integración son los límites para la variable de integración**.



**FIGURA 14.38** Elemento horizontal de área.



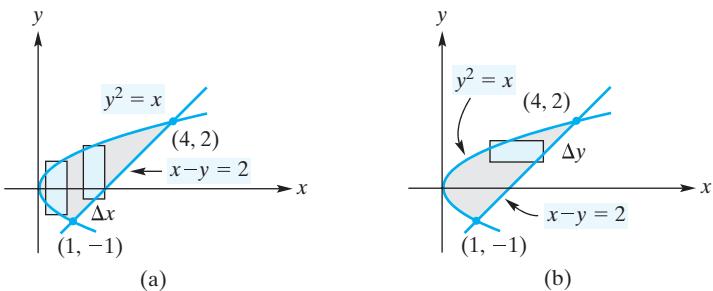


FIGURA 14.39 Región del ejemplo 5 con elementos verticales y horizontales.

### EJEMPLO 5 Ventajas de los elementos horizontales

Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de  $y^2 = x$  y  $x - y = 2$ .

**Solución:** En la figura 14.39 se muestra el bosquejo de la región. Las curvas se intersecan cuando  $y^2 - y = 2$ . Así,  $y^2 - y - 2 = 0$ ; en forma equivalente,  $(y + 1)(y - 2) = 0$ , de donde se deduce que  $y = -1$  o  $y = 2$ . Esto da los puntos de intersección  $(1, -1)$  y  $(4, 2)$ . Considere elementos verticales de área. (Vea la figura 14.39(a)). Se despeja  $y$  de  $y^2 = x$  se obtiene  $y = \pm\sqrt{x}$ . Como se ve en la figura 14.39(a), a la izquierda de  $x = 1$ , el extremo superior del elemento se encuentra sobre  $y = \sqrt{x}$  y el extremo inferior sobre  $y = -\sqrt{x}$ . A la derecha de  $x = 1$ , la curva superior es  $y = \sqrt{x}$  y la curva inferior es  $x - y = 2$  ( $o y = x - 2$ ). Entonces, con franjas verticales son necesarias dos integrales para evaluar el área:

$$\text{área} = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x})) dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - (x - 2)) dx$$

Quizá el uso de franjas horizontales pueda simplificar el trabajo. En la figura 14.39(b), el ancho de la franja es  $\Delta y$ . La curva más a la derecha siempre es  $x - y = 2$  ( $o x = y + 2$ ) y la curva más a la izquierda siempre es  $y^2 = x$  ( $o x = y^2$ ). Por lo tanto, el área de la franja horizontal es  $[(y + 2) - y^2]\Delta y$ , por lo que el área total es

$$\text{área} = \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2) dy = \frac{9}{2}$$

Resulta claro que usar franjas horizontales es la manera más conveniente de atacar este problema. Así sólo se requiere una integral que es además mucho más sencilla de calcular.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

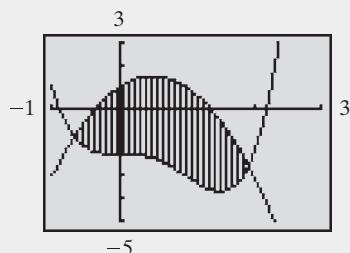
### TECNOLOGÍA

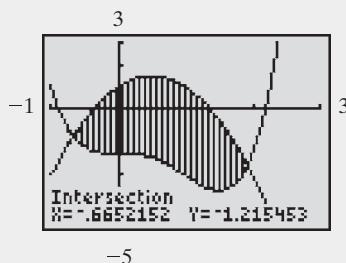
**Problema:** Estime el área de la región limitada por las gráficas de

$$y = x^4 - 2x^3 - 2 \quad y \quad y = 1 + 2x - 2x^2$$

**Solución:** Con una calculadora TI-83 Plus, se introduce  $x^4 - 2x^3 - 2$  como  $Y_1$  y  $1 + 2x - 2x^2$  como  $Y_2$  y se despliegan sus gráficas. La región que importa se muestra sombreada en la figura 14.40;  $y_{\text{superior}}$  corresponde a  $Y_2$  y  $y_{\text{inferior}}$  a  $Y_1$ . Con las franjas verticales se tiene

$$\text{área} = \int_A^B (Y_2 - Y_1) dx$$

FIGURA 14.40 Gráficas de  $Y_1(y_{\text{inferior}})$  y  $Y_2(y_{\text{superior}})$



**FIGURA 14.41** Punto de intersección en el cuadrante III.

donde A y B son los valores  $x$  de los puntos de intersección en los cuadrantes III y IV, respectivamente. Con la función de intersección se encuentra A, como se indica en la figura 14.41. Este valor de  $x$  se almacena en la pantalla como A. (Vea la figura 14.42). De manera similar, se en-

cuentra el valor  $x$  del punto de intersección en el cuadrante IV, que se almacena como B. Con el comando fnInt( (figura 14.42), se estima que el área de la región es de 7.54 unidades cuadradas.

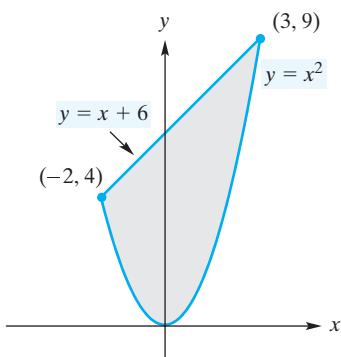
```
X→A -.6652152497
X→B 1.922807311
fnInt(Y2-Y1,X,A,B)
■ 7.537172953
```

**FIGURA 14.42** Almacenamiento de los valores  $x$  de los puntos de intersección y estimación del área.

## Problemas 14.10

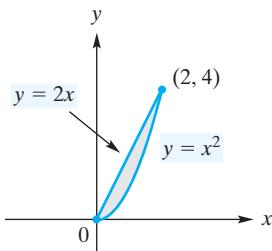
En los problemas 1 a 6, exprese el área de la región sombreada en términos de una integral (o integrales). No evalúe su expresión.

1. Vea la figura 14.43.



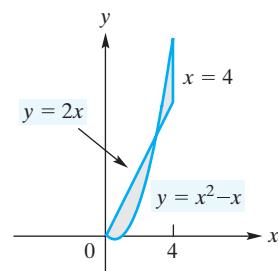
**FIGURA 14.43** Región para el problema 1.

2. Vea la figura 14.44.



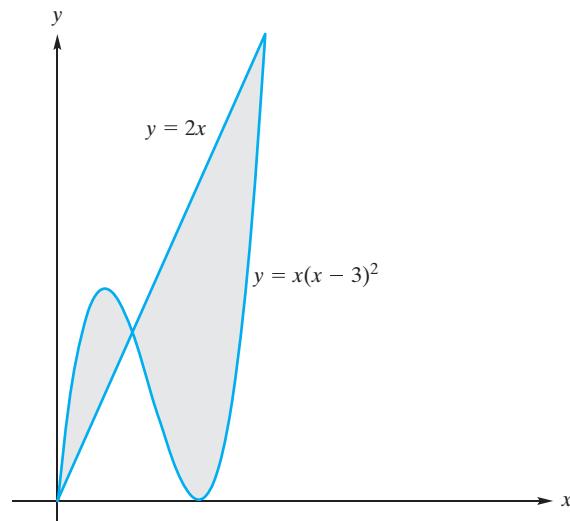
**FIGURA 14.44** Región para el problema 2.

3. Vea la figura 14.45.



**FIGURA 14.45** Región para el problema 3.

4. Vea la figura 14.46.



**FIGURA 14.46** Región para el problema 4.

5. Vea la figura 14.47.

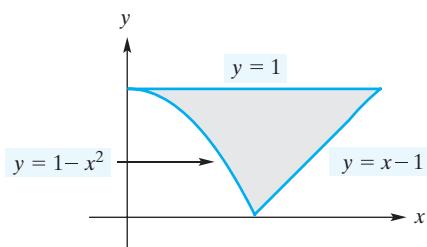


FIGURA 14.47 Región para el problema 5.

6. Vea la figura 14.48.

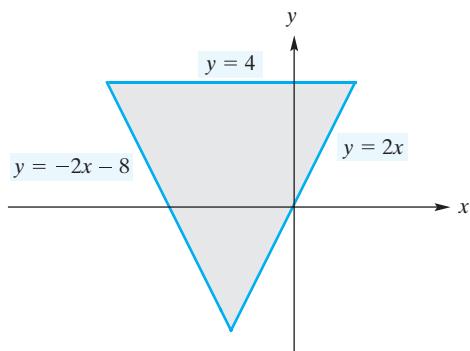


FIGURA 14.48 Región para el problema 6.

7. Exprese, en términos de una sola integral, el área total de la región a la izquierda de la recta  $x = 1$ , que se encuentra entre las curvas  $y = x^2 - 5$  y  $y = 7 - 2x^2$ . No evalúe la integral.  
 8. Exprese, en términos de una sola integral, el área total de la región en el primer cuadrante, limitada por el eje  $x$  y las gráficas de  $y^2 = x$  y  $2y = 3 - x$ . No evalúe la integral.

En los problemas 9 a 32, encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Asegúrese de encontrar los puntos de intersección requeridos. Considere si el uso de franjas horizontales hace más sencilla la integral que el uso de franjas verticales.

- \*9.  $y = x^2$ ,  $y = 2x$   
 10.  $y = x$ ,  $y = -x + 3$ ,  $y = 0$   
 11.  $y = x^2 + 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 3$   
 12.  $y = x^2 + 1$ ,  $y = x + 3$   
 13.  $y = 10 - x^2$ ,  $y = 4$   
 14.  $y^2 = x + 1$ ,  $x = 1$   
 15.  $x = 8 + 2y$ ,  $x = 0$ ,  $y = -1$ ,  $y = 3$   
 16.  $y = x - 6$ ,  $y^2 = x$   
 17.  $y = 4 - x^2$ ,  $y = -3x$   
 18.  $x = y^2 + 2$ ,  $x = 6$   
 \*19.  $y^2 = 4x$ ,  $y = 2x - 4$   
 20.  $y = x^3$ ,  $y = x + 6$ ,  $x = 0$ .  
 (Una pista: La única raíz real de  $x^3 - x - 6 = 0$  es 2.)  
 21.  $2y = 4x - x^2$ ,  $2y = x - 4$   
 22.  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^2$   
 \*23.  $y^2 = 3x$ ,  $3x - 2y = 15$

24.  $y = 2 - x^2$ ,  $y = x$   
 \*25.  $y = 8 - x^2$ ,  $y = x^2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$

26.  $y^2 = 6 - x$ ,  $3y = x + 12$   
 27.  $y = x^2$ ,  $y = 2$ ,  $y = 5$   
 28.  $y = x^3 + x$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$   
 29.  $y = x^3 - 1$ ,  $y = x - 1$   
 30.  $y = x^3$ ,  $y = \sqrt{x}$

31.  $4x + 4y + 17 = 0$ ,  $y = \frac{1}{x}$   
 32.  $y^2 = -x - 2$ ,  $x - y = 5$ ,  $y = -1$ ,  $y = 1$

- \*33. Encuentre el área de la región entre las curvas

$$y = x - 1 \quad y = 5 - 2x$$

desde  $x = 0$  hasta  $x = 4$ .

34. Encuentre el área de la región entre las curvas

$$y = x^2 - 4x + 4 \quad y = 10 - x^2$$

desde  $x = 2$  hasta  $x = 4$ .

35. **Curva de Lorenz** La *curva de Lorenz* se utiliza para estudiar las distribuciones de ingresos. Si  $x$  es el porcentaje acumulado de receptores de ingresos, ordenados de más pobres a más ricos, y  $y$  es el porcentaje acumulado de ingresos, entonces la igualdad de la distribución de ingresos está dada por la recta  $y = x$  en la figura 14.49, donde  $x$  y  $y$  se expresan como decimales. Por ejemplo, 10% de la gente recibe 10% de los ingresos totales, 20% de la gente recibe 20% de los ingresos, etcétera. Suponga que la distribución real está dada por la curva de Lorenz definida por

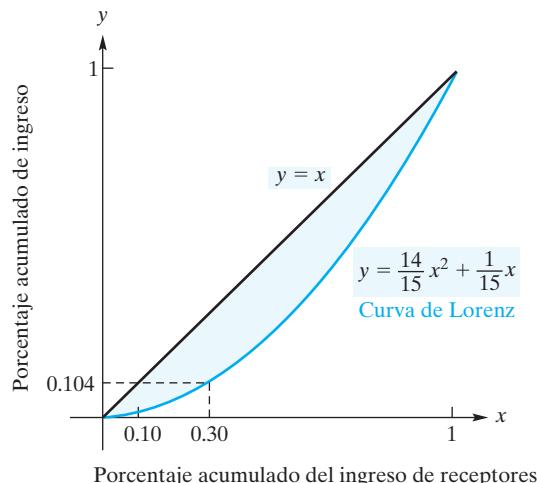


FIGURA 14.49 Diagrama para el problema 35.

$$y = \frac{14}{15}x^2 + \frac{1}{15}x$$

Observe, por ejemplo, que 30% de la gente sólo recibe 10.4% de los ingresos totales. El grado de desviación de la igualdad se mide por el *coeficiente de desigualdad*<sup>15</sup> para una curva de Lorenz. Este coeficiente se define como el área entre la curva y la diagonal, dividida entre el área bajo la diagonal:

<sup>15</sup>G. Stigler, *The Theory of Price*, 3a. ed. (Nueva York: The Macmillan Company, 1966), pp. 293-294.

área entre la curva y la diagonal  
área bajo la diagonal

Por ejemplo, cuando todos los ingresos son iguales, el coeficiente de desigualdad es cero. Encuentre el coeficiente de desigualdad para la curva de Lorenz que se acaba de definir.

36. **Curva de Lorenz** Encuentre el coeficiente de desigualdad en el problema 35, para la curva de Lorenz definida por  $y = \frac{11}{12}x^2 + \frac{1}{12}x$ .
37. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones  $y^2 = 4x$  y  $y = mx$ , donde  $m$  es una constante positiva.
38. (a) Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de  $y = x^2 - 1$  y  $y = 2x + 2$ .

(b) ¿Qué porcentaje del área en la parte (a) se encuentra arriba del eje  $x$ ?

39. La región limitada por la curva  $y = x^2$  y la recta  $y = 4$  está dividida en dos partes de igual área por la recta  $y = k$ , donde  $k$  es una constante. Encuentre el valor de  $k$ .

En los problemas 40 a 44, estime el área de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

40.  $y = x^2 - 4x + 1$ ,  $y = -\frac{6}{x}$
41.  $y = \sqrt{25 - x^2}$ ,  $y = 7 - 2x - x^4$
42.  $y = x^3 - 8x + 1$ ,  $y = x^2 - 5$
43.  $y = x^5 - 3x^3 + 2x$ ,  $y = 3x^2 - 4$
44.  $y = x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30$ ,  $y = x^3 + x^2 - 20x$

## 14.11 Excedentes de los consumidores y de los productores

### OBJETIVO

Desarrollar los conceptos económicos de excedente de los consumidores y excedente de los productores, los cuales se representan mediante áreas.

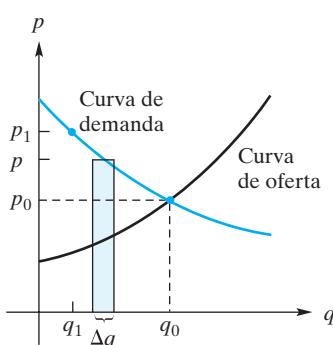


FIGURA 14.50 Curvas de oferta y demanda.

La determinación del área de una región tiene aplicaciones en economía. La figura 14.50 muestra una curva de oferta para un producto. La curva indica el precio  $p$  por unidad al que un fabricante venderá (o suministrará)  $q$  unidades. El diagrama también muestra la curva de demanda para el producto. Esta curva indica el precio por unidad al que los consumidores comprarán (o demandarán)  $q$  unidades. El punto  $(q_0, p_0)$  en el que las curvas se intersecan se llama *punto de equilibrio*. Aquí,  $p_0$  es el precio por unidad al que los consumidores compran la misma cantidad  $q_0$  de un producto que los productores desean vender a ese precio. De manera breve,  $p_0$  es el precio en el que se presenta estabilidad en la relación productor-consumidor.

Suponga que el mercado está en equilibrio y el precio por unidad del producto es  $p_0$ . De acuerdo con la curva de demanda, hay consumidores que estarían dispuestos a pagar más que  $p_0$ . Por ejemplo, al precio  $p_1$  por unidad, los consumidores comprarían  $q_1$  unidades. Estos consumidores están beneficiándose del menor precio, inferior al de equilibrio  $p_0$ .

La franja vertical en la figura 14.50 tiene un área de  $p\Delta q$ . Esta expresión puede también considerarse como la cantidad total de dinero que los consumidores gastarían al comprar  $\Delta q$  unidades de producto, si el precio por unidad fuese  $p$ . Como el precio es en realidad  $p_0$ , esos consumidores sólo gastan  $p_0\Delta q$  en esas  $\Delta q$  unidades y se benefician así en la cantidad  $p\Delta q - p_0\Delta q$ . Esta expresión puede escribirse como  $(p - p_0)\Delta q$ , que es el área de un rectángulo de ancho  $\Delta q$  y altura  $p - p_0$ . (Vea la figura 14.51). Después de sumar las áreas de todos los rectángulos desde  $q = 0$  hasta  $q = q_0$  mediante la integración definida, se tiene

$$\int_0^{q_0} (p - p_0) dq$$

Esta integral, bajo ciertas condiciones, representa la ganancia total de los consumidores que están dispuestos a pagar más que el precio de equilibrio. Esta ganancia total se llama **excedente de los consumidores** y se abrevia EC. Si la función de demanda está dada por  $p = f(q)$ , entonces

$$EC = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0] dq$$

De manera geométrica (vea la figura 14.52), el excedente de los consumidores se representa mediante el área entre la recta  $p = p_0$  y la curva de demanda  $p = f(q)$  entre  $q = 0$  hasta  $q = q_0$ .

Algunos de los productores también se benefician del precio de equilibrio, puesto que están dispuestos a suministrar el producto a precios menores que  $p_0$ . Bajo ciertas condiciones, la ganancia total de los productores se representa en forma geométrica en

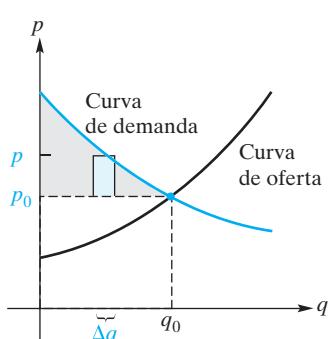
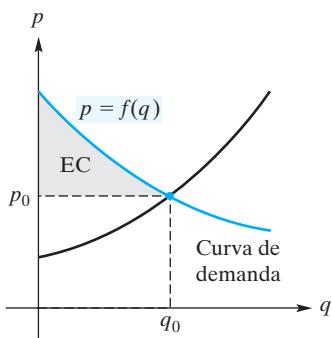


FIGURA 14.51 Beneficio a los consumidores para  $\Delta q$  unidades.



**FIGURA 14.52** Excedente de los consumidores.

la figura 14.53, mediante el área entre la recta  $p = p_0$  y la curva de oferta  $p = g(q)$  desde  $q = 0$  hasta  $q = q_0$ . Esta ganancia, llamada **excedente de los productores**, y abreviada EP, está dada por

$$EP = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)] dq$$

### EJEMPLO 1 Determinación del excedente de los consumidores y de los productores

*La función de demanda para un producto es*

$$p = f(q) = 100 - 0.05q$$

*donde  $p$  es el precio por unidad (en dólares) para  $q$  unidades. La función de oferta es*

$$p = g(q) = 10 + 0.1q$$

*Determine el excedente de los consumidores y de los productores, bajo equilibrio del mercado.*

**Solución:** Primero se debe encontrar el punto de equilibrio ( $p_0, q_0$ ) al resolver el sistema formado por las funciones  $p = 100 - 0.05q$  y  $p = 10 + 0.1q$ . Se igualan las dos expresiones para  $p$  y se resuelve:

$$10 + 0.1q = 100 - 0.05q$$

$$0.15q = 90$$

$$q = 600$$

Cuando  $q = 600$ , entonces  $p = 10 + 0.1(600) = 70$ . Así,  $q_0 = 600$  y  $p_0 = 70$ . El excedente de los consumidores es

$$\begin{aligned} EC &= \int_0^{q_0} [f(q) - p_0] dq = \int_0^{600} (100 - 0.05q - 70) dq \\ &= \left( 30q - 0.05 \frac{q^2}{2} \right) \Big|_0^{600} = 9000 \end{aligned}$$

El excedente de los productores es

$$\begin{aligned} EP &= \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)] dq = \int_0^{600} [70 - (10 + 0.1q)] dq \\ &= \left( 60q - 0.1 \frac{q^2}{2} \right) \Big|_0^{600} = 18\,000 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el excedente de los consumidores es de \$9000 y el de los productores es de \$18 000.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



### EJEMPLO 2 Uso de franjas horizontales para encontrar el excedente de los consumidores y de los productores

*La ecuación de demanda para un producto es*

$$q = f(p) = \frac{90}{p} - 2$$

*y la ecuación de oferta es  $q = g(p) = p - 1$ . Determine el excedente de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.*

**Solución:** Para determinar el punto de equilibrio, se tiene

$$p - 1 = \frac{90}{p} - 2$$

$$p^2 + p - 90 = 0$$

$$(p + 10)(p - 9) = 0$$

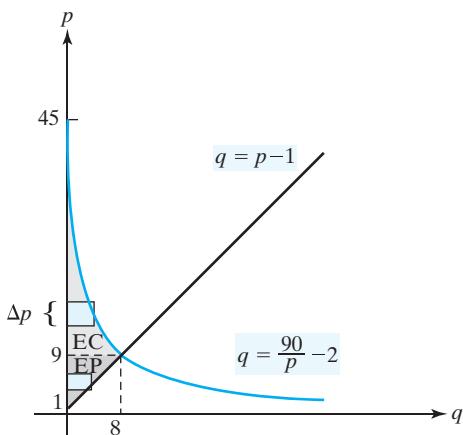


FIGURA 14.54 Diagrama para el ejemplo 2.

Así,  $p_0 = 9$ , por lo que  $q_0 = 9 - 1 = 8$ . (Vea la figura 14.54). Observe que la ecuación de demanda expresa a  $q$  como una función de  $p$ . Como el excedente de los consumidores puede considerarse como un área, esta área puede determinarse por medio de franjas horizontales de ancho  $\Delta p$  y la longitud  $q = f(p)$ . Las áreas de estas franjas se suman desde  $p = 9$  hasta  $p = 45$ , mediante la integración con respecto a  $p$ :

$$\begin{aligned} EC &= \int_9^{45} \left( \frac{90}{p} - 2 \right) dp = (90 \ln |p| - 2p) \Big|_9^{45} \\ &= 90 \ln 5 - 72 \approx 72.85 \end{aligned}$$

Con franjas horizontales para el excedente de los productores, se tiene

$$EP = \int_1^9 (p - 1) dp = \frac{(p - 1)^2}{2} \Big|_1^9 = 32$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

## Problemas 14.11

En los problemas 1 a 6, la primera ecuación es una ecuación de demanda y la segunda es una ecuación de oferta de un producto. En cada caso, determine el excedente de los consumidores y de los productores, bajo equilibrio del mercado.

\*1.  $p = 22 - 0.8q$   
 $p = 6 + 1.2q$

2.  $p = 2200 - q^2$   
 $p = 400 + q^2$

3.  $p = \frac{50}{q+5}$   
 $p = \frac{q}{10} + 4.5$

4.  $p = 400 - q^2$   
 $p = 20q + 100$

\*5.  $q = 100(10 - 2p)$   
 $q = 50(2p - 1)$

6.  $q = \sqrt{100 - p}$   
 $q = \frac{p}{2} - 10$

7. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = 10\sqrt{100 - p}$$

Calcule el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado, que ocurre a un precio de \$84.

8. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = 400 - p^2$$

y la ecuación de oferta es

$$p = \frac{q}{60} + 5$$

Encuentre el excedente de los productores y de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

9. La ecuación de demanda para un producto es  $p = 2^{11-q}$ , y la ecuación de oferta es  $p = 2^{q+1}$ , donde  $p$  es el precio por unidad (en cientos de dólares) cuando se demandan o se ofrecen  $q$  unidades. Determine el excedente de los consumidores, al millar de unidades más cercano, bajo equilibrio del mercado.
10. La ecuación de demanda para un producto es

$$(p + 10)(q + 20) = 1000$$

y la ecuación de oferta es

$$q - 4p + 10 = 0$$

- (a) Verifique, por sustitución, que el equilibrio del mercado ocurre cuando  $p = 10$  y  $q = 30$ .
- (b) Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

11. La ecuación de demanda para un producto es

$$p = 60 - \frac{50q}{\sqrt{q^2 + 3600}}$$

y la ecuación de oferta es

$$p = 10 \ln(q + 20) - 26$$

Determine el excedente de los consumidores y de los productores bajo equilibrio del mercado. Redondee sus respuestas al entero más cercano.

12. **Excedente de los productores** La función de oferta para un producto está dada por la siguiente tabla, donde  $p$  es el precio por unidad (en dólares) en el cual se suministran  $q$  unidades al mercado:

$q$	0	10	20	30	40	50
$p$	25	49	59	71	80	94

Use la regla del trapecio para estimar el excedente de los productores si el precio de venta es \$80.

## 14.12 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

<b>Sección 14.1</b>	<b>Diferenciales</b> diferencial, $dy, dx$	Ej. 1, p. 619
<b>Sección 14.2</b>	<b>La integral indefinida</b> antiderivada integral indefinida $\int f(x) dx$ signo de integral integrando variable de integración constante de integración	Ej. 1, p. 625 Ej. 2, p. 625
<b>Sección 14.3</b>	<b>Integración con condiciones iniciales</b> condición inicial	Ej. 1, p. 630
<b>Sección 14.4</b>	<b>Más fórmulas de integración</b> regla de la potencia para la integración	Ej. 1, p. 634
<b>Sección 14.5</b>	<b>Técnicas de integración</b> división preliminar	Ej. 1, p. 640
<b>Sección 14.6</b>	<b>La integral definida</b> integral definida $\int_a^b f(x) dx$ límites de integración	Ej. 2, p. 649
<b>Sección 14.7</b>	<b>Teorema fundamental del cálculo integral</b> Teorema fundamental del cálculo integral $F(x) _a^b$	Ej. 1, p. 653
<b>Sección 14.8</b>	<b>Integración aproximada</b> regla del trapecio regla de Simpson	Ej. 2, p. 662
<b>Sección 14.9</b>	<b>Área</b> elemento vertical de área (franja vertical)	Ej. 1, p. 665
<b>Sección 14.10</b>	<b>Áreas entre curvas</b> elemento horizontal de área (franja horizontal)	Ej. 5, p. 672
<b>Sección 14.11</b>	<b>Excedentes de los consumidores y de los productores</b> excedente de los consumidores excedente de los productores	Ej. 1, p. 676

### Resumen

Si  $y = f(x)$  es una función diferenciable de  $x$ , se define la diferencial  $dy$  mediante

$$dy = f'(x) dx$$

donde  $dx = \Delta x$  es un cambio en  $x$  y puede ser cualquier número real. (Así,  $dy$  es una función de dos variables, a saber,  $x$  y  $dx$ .) Si  $dx$  está cerca de cero, entonces  $dy$  es una aproximación a  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .

$$\Delta y \approx dy$$

Además,  $dy$  puede usarse para aproximar el valor de una función mediante

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$$

Una antiderivada de una función  $f$  es una función  $F$  tal que  $F'(x) = f(x)$ . Dos antiderivadas cualesquiera de  $f$  difieren cuando mucho en una constante. La antiderivada más general de  $f$  se llama integral indefinida de  $f$  y se denota  $\int f(x) dx$ . Así,

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

donde  $C$  se llama constante de integración, si y sólo si  $F' = f$ .

Algunas fórmulas básicas de integración son:

$$\begin{aligned}\int k \, dx &= kx + C \quad k \text{ es una constante} \\ \int x^n \, dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} \, dx &= \ln x + C \quad \text{para } x > 0 \\ \int e^x \, dx &= e^x + C \\ \int kf(x) \, dx &= k \int f(x) \, dx \quad k \text{ es una constante} \\ \text{y } \int [f(x) \pm g(x)] \, dx &= \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx\end{aligned}$$

Otra fórmula es la regla de la potencia para integración:

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{si } n \neq -1$$

Aquí,  $u$  representa una función diferenciable de  $x$  y  $du$  es su diferencial. Al aplicar la regla de la potencia a una integral dada, es importante que la integral se escriba de manera que coincida en forma precisa con la de la regla. Otras fórmulas de integración son

$$\begin{aligned}\int e^u \, du &= e^u + C \\ \text{y } \int \frac{1}{u} \, du &= \ln|u| + C \quad u \neq 0\end{aligned}$$

Si se conoce la razón de cambio de una función  $f$ , es decir, si  $f'$  se conoce, entonces  $f$  es una antiderivada de  $f'$ . Además, si se sabe que  $f$  satisface una condición inicial, entonces es posible encontrar la antiderivada particular. Por ejemplo, se da una función de costo marginal  $dc/dq$ , por integración se puede encontrar la forma general de  $c$ . Esta forma implica una constante de integración. Sin embargo, si también se dan los costos fijos (esto es, los costos implicados cuando  $q = 0$ ), se podrá determinar el valor de la constante de integración y así encontrar la función de costo particular  $c$ . De manera similar, si se da una función de ingreso marginal  $dr/dq$ , entonces por integración y con base en el hecho de que  $r = 0$  cuando  $q = 0$ , es posible determinar la función de ingreso particular  $r$ . Una vez conocida  $r$ , puede encontrarse la correspondiente ecuación de demanda con la ecuación  $p = r/q$ .

En este punto resulta útil revisar la notación de sumatoria de la sección 1.5. Esta notación es particularmente útil en la determinación de áreas. Para encontrar el área de la región limitada por  $y = f(x)$  [donde  $f(x) \geq 0$  y  $f$  es continua] y el eje  $x$ , desde  $x = a$  hasta  $x = b$ , se divide el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud  $\Delta x$ . Si  $x_i$  es el extremo derecho de un subintervalo arbitrario, entonces el producto  $f(x_i) \Delta x$  es el área de un rectángulo. Si se denota la suma de todas estas áreas de rectángulos para los  $n$  subintervalos por  $S_n$ , entonces el límite de  $S_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$  es el área de toda la región:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \text{área}$$

Si se omite la restricción de que  $f(x) \geq 0$ , el límite anterior se define como la integral definida de  $f$  en  $[a, b]$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) \, dx$$

En vez de evaluar integrales definidas mediante límites, puede usarse el teorema fundamental del cálculo integral. En forma matemática,

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

donde  $F$  es cualquier antiderivada de  $f$ .

Algunas propiedades de la integral definida son

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x) \, dx &= k \int_a^b f(x) \, dx \quad k \text{ es una constante,} \\ \int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx \\ \text{y} \\ \int_a^c f(x) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx\end{aligned}$$

Si  $f(x) \geq 0$  y es continua en  $[a, b]$ , entonces la integral definida puede usarse para encontrar el área de la región limitada por  $y = f(x)$ , el eje  $x$ ,  $x = a$  y  $x = b$ . La integral definida puede usarse también para encontrar áreas de regiones más complicadas. En esos casos conviene dibujar un elemento de área de la región para plantear correctamente la integral definida. En ocasiones conviene considerar elementos verticales y en otras es preferible usar elementos horizontales.

Una aplicación de la determinación de áreas implica el excedente de los consumidores y de los productores. Suponga que el mercado para un producto que está en equilibrio y que  $(q_0, p_0)$  es el punto de equilibrio (el punto de intersección de las curvas de demanda y oferta para el producto). El excedente de los consumidores, EC, corresponde al área entre  $q = 0$  y  $q = q_0$ , limitada por arriba por la curva de demanda y abajo por la recta  $p = p_0$ . Así,

$$EC = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0] \, dq$$

donde  $f$  es la función de demanda. El excedente de los productores, EP, corresponde al área, desde  $q = 0$  hasta  $q = q_0$ , limitada por arriba por la recta  $p = p_0$  y abajo por la curva de oferta. Por lo tanto,

$$EP = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)] \, dq$$

donde  $g$  es la función de oferta.

## Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

Determine las integrales en los problemas 1 a 40.

1.  $\int (x^3 + 2x - 7) dx$

2.  $\int dx$

3.  $\int_0^8 (\sqrt{2x} + 2x) dx$

4.  $\int \frac{4}{5-3x} dx$

5.  $\int \frac{6}{(x+5)^3} dx$

6.  $\int_3^9 (y-6)^{301} dy$

7.  $\int \frac{6x^2 - 12}{x^3 - 6x + 1} dx$

8.  $\int_0^2 xe^{4-x^2} dx$

9.  $\int_0^1 \sqrt[3]{3t+8} dt$

10.  $\int \frac{4-2x}{7} dx$

11.  $\int y(y+1)^2 dy$

12.  $\int_0^1 10^{-8} dx$

13.  $\int \frac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}} dt$

14.  $\int \frac{(0.5x-0.1)^4}{0.4} dx$

15.  $\int_1^3 \frac{2t^2}{3+2t^3} dt$

16.  $\int \frac{4x^2-x}{x} dx$

17.  $\int x^2 \sqrt{3x^3+2} dx$

18.  $\int (8x^3+4x)(x^4+x^2)^{5/2} dx$

19.  $\int (e^{2y} - e^{-2y}) dy$

20.  $\int \frac{8x}{3\sqrt[3]{7-2x^2}} dx$

21.  $\int \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx$

22.  $\int_0^2 \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}} dx$

23.  $\int_{-2}^1 10(y^4 - y + 1) dy$

24.  $\int_7^{70} dx$

25.  $\int_1^2 5x\sqrt{5-x^2} dx$

26.  $\int_0^1 (2x+1)(x^2+x)^4 dx$

27.  $\int_0^1 \left[ 2x - \frac{1}{(x+1)^{2/3}} \right] dx$

28.  $\int_3^{27} 3(\sqrt{3x}-2x+1) dx$

29.  $\int \frac{\sqrt{t}-3}{t^2} dt$

30.  $\int \frac{3z^3}{z-1} dz$

31.  $\int_{-1}^0 \frac{x^2+4x-1}{x+2} dx$

32.  $\int \frac{(x^2+4)^2}{x^2} dx$

33.  $\int 9\sqrt{x}\sqrt{x^{3/2}+1} dx$

34.  $\int \frac{e^{\sqrt{5x}}}{\sqrt{3x}} dx$

35.  $\int_1^e \frac{e^{\ln x}}{x^2} dx$

36.  $\int \frac{6x^2+4}{e^{x^3+2x}} dx$

37.  $\int \frac{(1+e^{2x})^3}{e^{-2x}} dx$

38.  $\int \frac{3}{e^{3x}(6+e^{-3x})^2} dx$

39.  $\int 3\sqrt{10^{3x}} dx$

40.  $\int \frac{5x^3+15x^2+37x+3}{x^2+3x+7} dx$

En los problemas 41 y 42, encuentre y, sujeta a las condiciones dadas.

41.  $y' = e^{2x} + 3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$

42.  $y' = \frac{x+5}{x}, \quad y(1) = 3$

En los problemas del 43 a 50, determine el área de la región limitada por la curva, el eje x y las rectas dadas.

43.  $y = x^2 - 1, \quad x = 2$

44.  $y = 4e^x, \quad x = 0, x = 3$

45.  $y = \sqrt{x+4}, \quad x = 0$

46.  $y = x^2 - x - 6, \quad x = -4, \quad x = 3$

47.  $y = 5x - x^2$

48.  $y = \sqrt[4]{x}, \quad x = 1, \quad x = 16$

49.  $y = \frac{1}{x} + 2, \quad x = 1, \quad x = 4$

50.  $y = x^3 - 1, \quad x = -1$

En los problemas 51 a 58 encuentre el área de la región limitada por las curvas dadas.

51.  $y^2 = 4x, \quad x = 0, \quad y = 2$

52.  $y = 3x^2 - 5, \quad x = 0, \quad y = 4$

53.  $y = x^2 + 4x - 5, \quad y = 0$

54.  $y = 2x^2, \quad y = x^2 + 9$

55.  $y = x^2 - x, \quad y = 10 - x^2$

56.  $y = \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad y = 3$

57.  $y = \ln x, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1$

58.  $y = 2 - x, \quad y = x - 3, \quad y = 0, \quad y = 2$

**59. Ingreso marginal** Si el ingreso marginal está dado por

$$\frac{dr}{dq} = 100 - \frac{3}{2}\sqrt{2q}$$

determine la ecuación de demanda correspondiente.

**60. Costo marginal** Si el costo marginal está dado por

$$\frac{dc}{dq} = q^2 + 7q + 6$$

y los costos fijos son de 2500, determine el costo total para producir seis unidades. Suponga que los costos están en dólares.

**61. Ingreso marginal** La función de ingreso marginal de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = 250 - q - 0.2q^2$$

Si r está en dólares, encuentre el incremento en el ingreso total del fabricante si la producción se incrementa de 15 a 25 unidades.

**62. Costo marginal** La función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = \frac{1000}{\sqrt{3q+70}}$$

Si c está en dólares, determine el costo implicado en incrementar la producción de 10 a 33 unidades.

**63. Altas hospitalarias** Para un grupo de personas hospitalizadas, suponga que la razón de altas está dada por

$$f(t) = 0.008e^{-0.008t}$$

donde f(t) es la proporción de altas por día al final de t días de hospitalización. ¿Qué proporción del grupo es dada de alta al término de 100 días?

- 64. Gastos de un negocio** Los gastos totales (en dólares) de un negocio para los próximos cinco años están dados por

$$\int_0^5 4000e^{0.05t} dt$$

Evalué los gastos.

- 65.** Encuentre el área de la región entre las curvas  $y = 9 - 2x$  y  $y = x$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 4$ .
- 66.** Encuentre el área de la región entre las curvas  $y = 2x^2$  y  $y = 2 - 5x$  desde  $x = -1$  hasta  $x = \frac{1}{3}$ .
- 67. Excedentes de los consumidores y de los productores** Para un producto, la ecuación de demanda es

$$p = 0.01q^2 - 1.1q + 30$$

y su ecuación de oferta es

$$p = 0.01q^2 + 8$$

Determine los excedentes de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.

- 68. Excedente de los consumidores** Para un producto, la ecuación de demanda es

$$p = (q - 5)^2$$

y la ecuación de oferta es

$$p = q^2 + q + 3$$

donde  $p$  (en miles de dólares) es el precio de 100 unidades cuando  $q$  cientos de unidades son demandadas u ofrecidas. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

- 69. Biología** En un estudio sobre mutación de genes,<sup>16</sup> se tiene la ecuación

$$\int_{q_0}^{q_n} \frac{dq}{q - \hat{q}} = -(u + v) \int_0^n dt$$

donde  $u$  y  $v$  son razones de mutación de genes, las  $q$  son frecuencias de genes y  $n$  es el número de generaciones. Suponga que todas las letras representan constantes, excepto  $q$  y  $t$ . Integre ambos lados de la ecuación y luego utilice su resultado para demostrar que

$$n = \frac{1}{u + v} \ln \left| \frac{q_0 - \hat{q}}{q_n - \hat{q}} \right|$$

- 70. Flujo de un fluido** En el estudio del flujo de un fluido dentro de un tubo de radio constante,  $R$ , tal como el flujo de la sangre en ciertas partes del cuerpo, se puede pensar que el tubo consiste en tubos concéntricos de radio  $r$ , donde  $0 \leq r \leq R$ . La velocidad  $v$  del fluido es una función de  $r$  y está dada por<sup>17</sup>

$$v = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\eta l}$$

donde  $P_1$  y  $P_2$  son las presiones en los extremos del tubo,  $\eta$  (letra griega “eta”) es la viscosidad del fluido y  $l$  la longitud del tubo. La razón de volumen  $Q$  del fluido por el tubo está dado por

$$Q = \int_0^R 2\pi rv dr$$

Demuestre que  $Q = \frac{\pi R^4(P_1 - P_2)}{8\eta l}$ . Observe que  $R$  aparece

como un factor elevado a la cuarta potencia. Así, duplicar el radio del tubo tiene por efecto incrementar el flujo por un factor de 16. La fórmula para la razón de volumen se llama *ley de Poiseuille*, en honor del fisiólogo francés Jean Poiseuille.

- 71. Inventario** En un análisis de inventarios, Barbosa y Friedman<sup>18</sup> se refieren a la función

$$g(x) = \frac{1}{k} \int_1^{1/x} ku^r du$$

donde  $k$  y  $r$  son constantes,  $k > 0$  y  $r > -2$  y  $x > 0$ . Verifique la afirmación de que

$$g'(x) = -\frac{1}{x^{r+2}}$$

(Una pista: Considere dos casos: cuando  $r \neq -1$  y cuando  $r = -1$ .)

En los problemas 72 a 74, estime el área de la región limitada por las curvas dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

**72.**  $y = x^3 + 9x^2 + 14x - 24$ ,  $y = 0$

**73.**  $y = x^3 - 3x - 2$ ,  $y = 3 + x - 2x^2$

**74.**  $y = x^3 + x^2 - 5x - 3$ ,  $y = x^2 + 2x + 3$

- 75.** La ecuación de demanda para un producto es

$$p = \frac{200}{\sqrt{q + 20}}$$

y la ecuación de oferta es

$$p = 2 \ln(q + 10) + 5$$

Determine los excedentes de los consumidores y de los productores bajo equilibrio del mercado. Redondee sus respuestas al entero más cercano.

<sup>16</sup>W. B. Mather, *Principles of Quantitative Genetics* (Minneapolis: Burgess Publishing Company, 1964).

<sup>17</sup>R. W. Stacy et al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

<sup>18</sup>L. C. Barbosa y M. Friedman, “Deterministic Inventory Lot Size Models—a General Root Law”, *Management Science*, 24, núm. 8 (1978), 819-826.

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Cargos de envío

**S**uponga que usted es el fabricante de un producto cuyas ventas tienen lugar dentro de un radio de  $R$  millas a partir de su fábrica. Suponga que cobra a sus clientes a razón de  $s$ , en dólares por milla, por cada unidad de producto vendido. Si  $m$  es el precio unitario (en dólares) en la fábrica, entonces el precio unitario  $p$  de entrega a un cliente situado a  $x$  millas de la fábrica será el precio de la fábrica más el cargo por envío  $sx$ :

$$p = m + sx \quad 0 \leq x \leq R \quad (1)$$

El problema es determinar el precio promedio de entrega de las unidades vendidas.



Suponga que existe una función  $f$  tal que  $f(t) \geq 0$  en el intervalo  $[0, R]$  y que el área bajo la gráfica de  $f$  y arriba del eje  $t$ , desde  $t = 0$  y  $t = x$ , representa el número total de unidades  $Q$  vendidas a clientes dentro de un radio de  $x$  millas de la fábrica. [Vea la figura 14.55(a)]. Se puede hacer referencia a  $f$  como la distribución de la demanda. Debido a que  $Q$  es una función de  $x$  y se representa mediante un área,

$$Q(x) = \int_0^x f(t) dt$$

En particular, el número total de unidades vendidas dentro del área del mercado es

$$Q(R) = \int_0^R f(t) dt$$

[vea la figura 14.55(b)]. Por ejemplo, si  $f(t) = 10$  y  $R = 100$ , entonces el número total de unidades vendidas dentro del área del mercado es

$$Q(100) = \int_0^{100} 10 dt = 10t \Big|_0^{100} = 1000 - 0 = 1000$$

El cargo por la entrega promedio  $A$  está dado por

$$A = \frac{\text{ingreso total}}{\text{número total de unidades vendidas}}$$

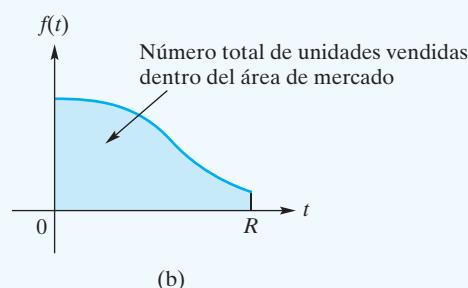
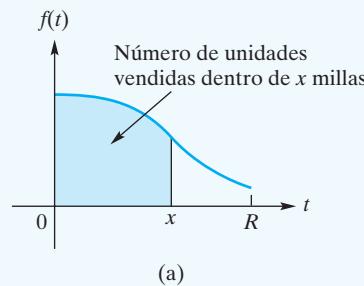


FIGURA 14.55 Número de unidades vendidas como un área.

Como el denominador es  $Q(R)$ ,  $A$  puede determinarse una vez que se conoce el ingreso total.

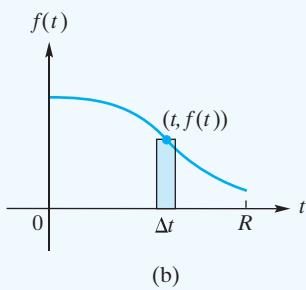
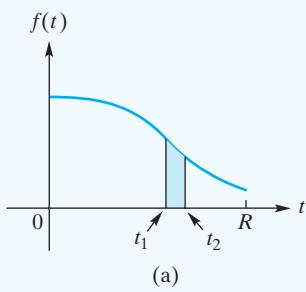
Para encontrar el ingreso total, considere primero el número de unidades vendidas en un intervalo. Si  $t_1 < t_2$  [vea la figura 14.56(a)], entonces el área bajo la gráfica de  $f$  y arriba del eje  $t$ , desde  $t = 0$  hasta  $t = t_1$ , representa el número de unidades vendidas dentro de un radio de  $t_1$  millas de la fábrica. De manera similar, el área bajo la gráfica de  $f$  y arriba del eje  $t$ , desde  $t = 0$  hasta  $t = t_2$ , representa el número de unidades vendidas dentro de  $t_2$  millas de la fábrica. La diferencia entre esas áreas, desde el punto de vista geométrico, es el área de la región sombreada en la figura 14.56(a), y representa el número de unidades vendidas entre  $t_1$  y  $t_2$  millas de la fábrica, lo cual es  $Q(t_2) - Q(t_1)$ . Así,

$$Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

Por ejemplo, si  $f(t) = 10$ , entonces el número de unidades vendidas a clientes situados entre 4 y 6 millas de la fábrica es

$$Q(6) - Q(4) = \int_4^6 10 dt = 10t \Big|_4^6 = 60 - 40 = 20$$

El área de la región sombreada en la figura 14.56(a) puede aproximarse por el área de un rectángulo [vea la figura 14.56(b)], cuya altura es  $f(t)$  y cuyo ancho es  $\Delta t$ , donde  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Así, el número de unidades vendidas en el intervalo de longitud  $\Delta t$  es casi igual a  $f(t)\Delta t$ . Como el precio aproximado



**FIGURA 14.56** Número de unidades vendidas en un intervalo.

de cada una de esas unidades es [de la ecuación (1)]  $m + st$ , el ingreso recibido es aproximadamente

$$(m + st)f(t)\Delta t$$

La suma de todos estos productos desde  $t = 0$  hasta  $t = R$ , aproxima el ingreso total. La integración definida da

$$\sum(m + st)f(t)\Delta t \rightarrow \int_0^R (m + st)f(t) dt$$

Así,

$$\text{ingreso total} = \int_0^R (m + st)f(t) dt$$

En consecuencia, el precio promedio de envío  $A$  está dado por

$$A = \frac{\int_0^R (m + st)f(t) dt}{Q(R)}$$

En forma equivalente

$$A = \frac{\int_0^R (m + st)f(t) dt}{\int_0^R f(t) dt}$$

Por ejemplo, si  $f(t) = 10$ ,  $m = 200$ ,  $s = 0.25$  y  $R = 100$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_0^R (m + st)f(t) dt &= \int_0^{100} (200 + 0.25t) \cdot 10 dt \\ &= 10 \int_0^{100} (200 + 0.25t) dt \\ &= 10 \left( 200t + \frac{t^2}{8} \right) \Big|_0^{100} \\ &= 10 \left[ \left( 20000 + \frac{10000}{8} \right) - 0 \right] \\ &= 212500 \end{aligned}$$

Como ya se calculó antes,

$$\int_0^R f(t) dt = \int_0^{100} 10 dt = 1000$$

Así, el precio promedio de envío es de  $212500/1000 = \$212.50$ .

### Problemas

- Si  $f(t) = 50 - 2t$ , determine el número de unidades vendidas a clientes localizados (a) dentro de un radio de 5 millas de la fábrica, y (b) entre 20 y 25 millas.
- Si  $f(t) = 40 - 0.5t$ ,  $m = 50$ ,  $s = 0.20$  y  $R = 80$ , determine (a) el ingreso total, (b) el número total de unidades vendidas y (c) el cargo promedio por envío.
- Si  $f(t) = 900 - t^2$ ,  $m = 100$ ,  $s = 1$  y  $R = 30$ , determine (a) el ingreso total, (b) el número total de unidades vendidas y (c) el cargo promedio por envío. Si desea, utilice una calculadora graficadora.
- En el mundo real, ¿cómo hacen los vendedores de artículos como libros o ropa, para determinar los cobros por envío de un pedido? (Visite a un comerciante en línea para averiguarlo.) ¿Cómo podría usted calcular el costo promedio de envío de sus productos? El procedimiento es fundamentalmente diferente al que se vio en esta aplicación práctica?

# 15

## MÉTODOS Y APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN

- 15.1 Integración por partes
- 15.2 Integración mediante fracciones parciales
- 15.3 Integración por medio de tablas
- 15.4 Valor promedio de una función
- 15.5 Ecuaciones diferenciales
- 15.6 Más aplicaciones de las ecuaciones diferenciales
- 15.7 Integrales impropias
- 15.8 Repaso

Aplicación práctica

Dietas

**A**hora se sabe cómo determinar la derivada de una función, y en algunos casos se conoce cómo encontrar una función a partir de su derivada, a través de la integración. Sin embargo, el proceso de integración no siempre es directo.

Suponga que se modela la desaparición gradual de una sustancia química con las ecuaciones  $M' = -0.004$  y  $M(0) = 3000$ , donde la cantidad  $M$ , en gramos, es una función del tiempo  $t$  en días. Este problema de condición inicial se resuelve con facilidad por medio de integración con respecto a  $t$ :  $M = -0.002t^2 + 3000$ . Pero, ¿qué pasa si, en lugar de esto, la desaparición de la sustancia se modelara por medio de las ecuaciones  $M' = -0.004M$  y  $M(0) = 3000$ ? El simple reemplazo de  $t$  por  $M$  en la primera ecuación cambia el carácter del problema. Aún no se ha estudiado cómo encontrar una función cuando su derivada está descrita en términos de la misma función.

Si trabajó la aplicación práctica del capítulo 13, recordará una situación similar, que involucra una ecuación con  $P$  de un lado y la derivada de  $P$  en el otro. Allí se usó una aproximación para resolver el problema. En este capítulo se aprenderá un método que produce una solución exacta para situaciones de este tipo.

Las ecuaciones de la forma  $y' = ky$ , donde  $k$  es constante, son especialmente comunes. Cuando  $y$  representa la cantidad de sustancia radiactiva,  $y' = ky$  puede representar la tasa de su desaparición, por decaimiento radiactivo. Y si  $y$  fuera la temperatura de un pollo recién sacado del horno o que se acaba de meter al congelador, entonces puede utilizarse una fórmula, conocida como ley de enfriamiento de Newton, para describir el cambio en la temperatura interna del pollo a lo largo del tiempo. La ley de Newton, que se analizará en este capítulo, podría usarse para recomendar procedimientos en la cocina de un restaurante, de modo que los alimentos propensos a contaminación a través de crecimiento bacterial no permanezcan mucho tiempo en una zona de temperatura riesgosa ( $40^\circ\text{F}$  a  $140^\circ\text{F}$ ). (A este respecto, el crecimiento bacterial también sigue una ley del tipo  $y' = ky$ .)

**OBJETIVO**

Desarrollar y aplicar la fórmula para la integración por partes.

## 15.1 Integración por partes<sup>1</sup>

Muchas integrales no se pueden encontrar con los métodos que se han estudiado hasta ahora. Sin embargo, hay modos de cambiar ciertas integrales a formas más fáciles de integrar. Se analizarán dos de estos métodos: la *integración por partes* y (en la sección 15.2), la *integración mediante fracciones parciales*.

Si  $u$  y  $v$  son funciones diferenciables de  $x$ , por la regla del producto, se tiene

$$(uv)' = uv' + vu'$$

Al reordenar los términos resulta

$$uv' = (uv)' - vu'$$

Al integrar ambos lados con respecto a  $x$ , se obtiene

$$\int uv' dx = \int (uv)' dx - \int vu' dx \quad (1)$$

Para  $\int (uv)' dx$  debe encontrarse una función cuya derivada con respecto a  $x$  sea  $(uv)'$ . Es claro que  $uv$  es esa función. Por lo tanto,  $\int (uv)' dx = uv + C_1$ , y la ecuación (1) se convierte en

$$\int uv' dx = uv + C_1 - \int vu' dx$$

Al absorber a  $C_1$  en la constante de integración para  $\int vu' dx$  y reemplazar  $v' dx$  por  $dv$  y  $u' dx$  por  $du$ , se obtiene la *fórmula de integración por partes*:

### Fórmula de integración por partes

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (2)$$

Esta fórmula expresa una integral,  $\int u dv$  en términos de otra integral,  $\int v du$ , que puede ser más fácil de integrar.

Para aplicar la fórmula a una integral dada  $\int f(x) dx$  se debe escribir  $f(x) dx$  como el producto de dos factores (*o partes*) y escoger una función  $u$  y una diferencial  $dv$  tales que  $f(x) dx = u dv$ . Sin embargo, para que la fórmula sea útil, se debe ser capaz de integrar la parte seleccionada como  $dv$ . Para ilustrar esto considere

$$\int xe^x dx$$

Esta integral no puede determinarse mediante las fórmulas de integración previas. Una manera de escribir  $xe^x dx$  en la forma  $u dv$  es al establecer

$$u = x \quad y \quad dv = e^x dx$$

Para aplicar la fórmula de integración por partes, se debe encontrar  $du$  y  $v$ :

$$du = dx \quad y \quad v = \int e^x dx = e^x + C_1$$

Así,

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= x(e^x + C_1) - \int (e^x + C_1) dx \\ &= xe^x + C_1x - e^x - C_1x + C \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= e^x(x - 1) + C \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

La primera constante,  $C_1$ , no aparece en la respuesta final. Es fácil probar que la constante involucrada al encontrar  $v$  a partir de  $dv$  siempre se separará, por ello, a partir de ahora esta constante no se escribirá al determinar  $v$ .

Cuando se usa la fórmula de integración por partes, algunas veces la “mejor selección” de  $u$  y  $dv$  puede no ser obvia. En algunos casos una selección puede ser tan buena como la otra; en otros, sólo una selección puede ser la adecuada. El discernimiento para hacer una buena selección (si ésta existe) se adquiere con la práctica y, desde luego, mediante prueba y error.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### INTEGRACIÓN POR PARTES

Se estima que las ventas mensuales de un teclado para computadora disminuyen a una tasa de  $S'(t) = -4te^{0.1t}$  teclados por mes, donde  $t$  es el tiempo en meses y  $S(t)$  es el número de teclados vendidos cada mes. Si ahora se venden 5000 teclados ( $S(0) = 5000$ ), encuentre  $S(t)$ .

#### EJEMPLO 1 Integración por partes

Encuentre  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$  mediante integración por partes.

**Solución:** Se prueba

$$u = \ln x \quad y \quad dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Entonces,

$$du = \frac{1}{x} dx \quad y \quad v = \int x^{-1/2} dx = 2x^{1/2}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int \ln x \left( \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right) &= \int u dv = uv - \int v du \\ &= (\ln x)(2\sqrt{x}) - \int (2x^{1/2}) \left( \frac{1}{x} dx \right) \\ &= 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int x^{-1/2} dx \\ &= 2\sqrt{x} \ln x - 2(2\sqrt{x}) + C \quad (x^{1/2} = \sqrt{x}) \\ &= 2\sqrt{x}[\ln(x) - 2] + C \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3



En el ejemplo 2 se muestra cómo puede hacerse una mala elección de  $u$  y  $dv$ . Si usted hace una elección que no funcione, no se frustre. En lugar de eso, haga otras elecciones hasta que encuentre una que sea útil (si es que existe).

#### EJEMPLO 2 Integración por partes

Evalúe  $\int_1^2 x \ln x dx$ .

**Solución:** Como la integral no se ajusta a una forma familiar, se intentará la integración por partes. Sea  $u = x$  y  $dv = \ln x dx$ . Entonces  $du = dx$ , pero  $v = \int \ln x dx$  no es evidente por inspección. Por lo que se hará una selección diferente para  $u$  y  $dv$ . Sea

$$u = \ln x \quad y \quad dv = x dx$$

Entonces,

$$du = \frac{1}{x} dx \quad y \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \ln x dx &= (\ln x) \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 \left( \frac{x^2}{2} \right) \frac{1}{x} dx \\ &= (\ln x) \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 \\ &= (2 \ln 2 - 0) - \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5



 **EJEMPLO 3** Integración por partes donde  $u$  es el integrando completo

Determine  $\int \ln y \, dy$ .

**Solución:** No es posible integrar  $\ln y$  con los métodos previos, por lo que se tratará de integrar por partes. Sea  $u = \ln y$   $dv = dy$ . Entonces  $du = (1/y)dy$  y  $v = y$ . Así, se tiene

$$\begin{aligned}\int \ln y \, dy &= (\ln y)(y) - \int y \left( \frac{1}{y} \, dy \right) \\ &= y \ln y - \int dy = y \ln y - y + C \\ &= y[\ln(y) - 1] + C\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37 

Antes de intentar la integración por partes, debe verse si este procedimiento es realmente necesario. En ocasiones la integral puede resolverse mediante una técnica básica, como se ilustra en el ejemplo 4.

 **EJEMPLO 4** Forma de integración básica

Determine  $\int xe^{x^2} \, dx$ .

**Solución:** Esta integral puede ajustarse a la forma  $\int e^u \, du$ .

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \int e^{x^2} (2x \, dx) \\ &= \frac{1}{2} \int e^u \, du \quad (\text{donde } u = x^2) \\ &= \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17 



**ADVERTENCIA**

No olvide las formas de integración básicas. Aquí no es necesaria la integración por partes.

A veces la integración por partes debe usarse más de una vez, como se muestra en el ejemplo siguiente.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2**

**APLICACIÓN DE LA INTEGRACIÓN POR PARTES**

Suponga que una población de bacterias crece a una tasa de

$$P'(t) = 0.1t(\ln t)^2$$

Encuentre la forma general de  $P(t)$ .

 **EJEMPLO 5** Aplicación de la integración por partes

Determine  $\int x^2 e^{2x+1} \, dx$ .

**Solución:** Sea  $u = x^2$  y  $dv = e^{2x+1} \, dx$ . Entonces,  $du = 2x \, dx$  y  $v = e^{2x+1}/2$ .

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{2x+1} \, dx &= \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2} (2x \, dx) \\ &= \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \int x e^{2x+1} \, dx\end{aligned}$$

Para encontrar  $\int x e^{2x+1} \, dx$  se usará de nuevo la integración por partes. Aquí, sea  $u = x$ ,  $y dv = e^{2x+1} \, dx$ . Entonces  $du = dx$  y  $v = e^{2x+1}/2$ , y se tiene

$$\begin{aligned}\int x e^{2x+1} \, dx &= \frac{x e^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2} \, dx \\ &= \frac{x e^{2x+1}}{2} - \frac{e^{2x+1}}{4} + C_1\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{2x+1} dx &= \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \frac{x e^{2x+1}}{2} + \frac{e^{2x+1}}{4} + C \quad (\text{donde } C = -C_1) \\ &= \frac{e^{2x+1}}{2} \left( x^2 - x + \frac{1}{2} \right) + C\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23 **Problemas 15.1**

1. Al aplicar la integración por partes a

$$\int f(x) dx$$

un estudiante encontró que  $u = x$ ,  $du = dx$ ,  $dv = (x + 5)^{1/2}$  y  $v = \frac{2}{3}(x + 5)^{3/2}$ . Use esta información para encontrar  $\int f(x) dx$ .

2. Use integración por partes para encontrar

$$\int x e^{3x+1} dx$$

al seleccionar  $u = x$  y  $dv = e^{3x+1} dx$ .

Encuentre las integrales en los problemas 3 a 29.

\*3.  $\int xe^{-x} dx$

4.  $\int xe^{-5x} dx$

\*5.  $\int y^3 \ln y dy$

6.  $\int x^2 \ln x dx$

7.  $\int \ln(4x) dx$

8.  $\int \frac{t}{e^t} dt$

9.  $\int 3x \sqrt{2x+3} dx$

10.  $\int \frac{12x}{\sqrt{1+4x}} dx$

11.  $\int \frac{x}{(5x+2)^3} dx$

12.  $\int \frac{\ln(x+1)}{2(x+1)} dx$

13.  $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

14.  $\int \frac{3x+5}{e^{2x}} dx$

15.  $\int_1^2 4xe^{2x} dx$

16.  $\int_1^2 2xe^{-3x} dx$

\*17.  $\int_0^1 xe^{-x^2} dx$

18.  $\int \frac{3x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$

19.  $\int_1^2 \frac{3x}{\sqrt{4-x}} dx$

20.  $\int (\ln x)^2 dx$

21.  $\int 3(2x-2) \ln(x-2) dx$

22.  $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

\*23.  $\int x^2 e^x dx$

24.  $\int_e^3 \sqrt[3]{x} \ln(x^5) dx$

25.  $\int (x - e^{-x})^2 dx$

26.  $\int x^2 e^{3x} dx$

27.  $\int x^3 e^{x^2} dx$

28.  $\int x^5 e^{x^2} dx$

29.  $\int (2^x + x)^2 dx$

30. Encuentre
- $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$
- . Una pista: Demuestre que

$$\frac{d}{dx} [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

31. Encuentre el área de la región limitada por el eje
- $x$
- , la curva
- $y = \ln x$
- y la recta
- $x = e^3$
- .

32. Encuentre el área de la región limitada por el eje
- $x$
- y la curva
- $y = x^2 e^x$
- entre
- $x = 0$
- y
- $x = 1$
- .

33. Encuentre el área de la región limitada por el eje
- $x$
- y la curva
- $y = x^2 \ln x$
- entre
- $x = 1$
- y
- $x = 2$
- .

- 34.
- Excedente de los consumidores**
- Suponga que la ecuación de demanda para el producto de un fabricante está dada por

$$p = 10(q + 10)e^{-(0.1q+1)}$$

donde  $p$  es el precio por unidad (en dólares) cuando se demandan  $q$  unidades. Suponga que el equilibrio del mercado ocurre cuando  $q = 20$ . Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

- 35.
- Ingreso**
- Suponga que el ingreso total
- $r$
- y el precio por unidad
- $p$
- son funciones diferenciables de la función de producción
- $q$
- .

- (a) Use integración por partes para demostrar que

$$\int p dq = r - \int q \frac{dp}{dq} dq$$

- (b) Con base en el inciso (a), demuestre que

$$r = \int \left( p + q \frac{dp}{dq} \right) dq$$

- (c) Con base en el inciso (b), demuestre que

$$r(q_0) = \int_0^{q_0} \left( p + q \frac{dp}{dq} \right) dq$$

(Una pista: Revise la sección 14.7.)

36. Suponga que
- $f$
- es una función diferenciable. Aplique la integración por partes a
- $\int f(x)e^x dx$
- para demostrar que

$$\int f(x)e^x dx + \int f'(x)e^x dx = f(x)e^x + C$$

(Por consiguiente,  $\int [f(x) + f'(x)]e^x dx = f(x)e^x + C$ )

- \*37. Suponga que
- $f$
- tiene una inversa y que
- $F' = f$
- . Use la integración por partes para desarrollar una fórmula útil para
- $\int f^{-1}(x)dx$
- en términos de
- $F$
- y
- $f^{-1}$
- . (Una pista: Revise el ejemplo 3, ahí se utilizó la idea que se requiere ahora, para el caso especial de
- $f(x) = e^x$
- .)

**OBJETIVO**

Mostrar cómo integrar una función racional propia, expresándola primero como una suma de sus fracciones parciales.

## 15.2 Integración mediante fracciones parciales<sup>2</sup>

Recuerde que una *función racional* es un cociente de polinomios  $N(x)/D(x)$  y que es *propia* si  $N$  y  $D$  no tienen factor polinomial común y el grado del numerador  $N$  es menor que el grado del denominador  $D$ . Si  $N/D$  no es propia, entonces se puede usar la división larga para dividir  $N(x)$  entre  $D(x)$ :

$$\begin{array}{c} \frac{Q(x)}{D(x) \overline{|N(x)}} \text{ entonces } \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \\ \vdots \\ \overline{R(x)} \end{array}$$

Aquí el cociente  $Q(x)$  y el residuo  $R(x)$  también son polinomios y  $R(x)$  es una constante (un polinomio de grado cero) o bien el grado de  $R(x)$  es menor que el de  $D(x)$ . Por lo tanto,  $R/D$  es una función racional propia. Como

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \left( Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \right) dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$$

y ya se sabe cómo integrar un polinomio, se deduce que la tarea de integrar funciones racionales se limita a integrar funciones racionales *propias*. Es necesario hacer énfasis en que la técnica que se describirá requiere que una función racional sea propia de manera que el paso de la división larga no es opcional. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 17x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx &= \int \left( 2x + 1 + \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x} \right) dx \\ &= x^2 + x + \int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx \end{aligned}$$

### Factores lineales distintos

Por lo tanto, se considerará

$$\int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx$$

Es esencial que el denominador se exprese como un producto de factores:

$$\int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x+1)(x-3)} dx$$

Observe que en este ejemplo el denominador consiste sólo en **factores lineales** y que cada factor se presenta exactamente una vez. Puede demostrarse que a cada factor  $x - a$ , le corresponde una *fracción parcial* de la forma

$$\frac{A}{x-a} \quad (A \text{ es una constante})$$

tal que el integrando es la suma de las fracciones parciales. Si se tienen  $n$  factores lineales *distintos*, se tendrán  $n$  fracciones parciales, cada una de ellas fácilmente integrable. Al aplicar estos hechos, se puede escribir

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3} \quad (1)$$

Para determinar las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ , se combinan primero los términos en el lado derecho:

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-3)}$$

<sup>2</sup>Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

Como los denominadores de ambos lados son iguales, sus numeradores se pueden igualar:

$$4x^2 - 14x - 6 = A(x + 1)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x + 1) \quad (2)$$

Aunque la ecuación (1) no está definida para  $x = 0, x = -1$  y  $x = 3$ , se desea encontrar valores para  $A, B$  y  $C$  que hagan la ecuación (2) verdadera para todos los valores de  $x$ , de manera que los dos lados de la ecuación proporcionan ecuaciones iguales. Al hacer sucesivamente a  $x$  igual a tres números cualesquiera diferentes en la ecuación (2), se obtiene un sistema de ecuaciones del que se puede despejar  $A, B$  y  $C$ . En particular, el trabajo puede simplificarse si se le asigna a  $x$  los valores de las raíces de  $D(x) = 0$ ; en este caso,  $x = 0, x = -1$  y  $x = 3$ . Con el uso de la ecuación (2), se tiene, para  $x = 0$ ,

$$-6 = A(1)(-3) + B(0) + C(0) = -3A, \text{ por lo que } A = 2$$

Si  $x = -1$ ,

$$12 = A(0) + B(-1)(-4) + C(0) = 4B, \text{ por lo que } B = 3$$

Si  $x = 3$ ,

$$-12 = A(0) + B(0) + C(3)(4) = 12C, \text{ por lo que } C = -1$$

Entonces, la ecuación (1) se convierte en

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x + 1)(x - 3)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} - \frac{1}{x - 3}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} & \int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x + 1)(x - 3)} dx \\ &= \int \left( \frac{2}{x} + \frac{3}{x + 1} - \frac{1}{x - 3} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{dx}{x} + 3 \int \frac{dx}{x + 1} - \int \frac{dx}{x - 3} \\ &= 2 \ln|x| + 3 \ln|x + 1| - \ln|x - 3| + C \end{aligned}$$

Para la integral *original*, ahora se puede establecer que

$$\int \frac{2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 17x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx = x^2 + x + 2 \ln|x| + 3 \ln|x + 1| - \ln|x - 3| + C$$

Un método alternativo para determinar  $A, B$  y  $C$  implica desarrollar el lado derecho de la ecuación (2) y agrupar términos semejantes:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 14x - 6 &= A(x^2 - 2x - 3) + B(x^2 - 3x) + C(x^2 + x) \\ &= Ax^2 - 2Ax - 3A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 + Cx \\ 4x^2 - 14x - 6 &= (A + B + C)x^2 + (-2A - 3B + C)x + (-3A) \end{aligned}$$

Para que esta última ecuación exprese una igualdad de funciones, los coeficientes de las potencias correspondientes de  $x$  en ambos lados de la ecuación deben ser iguales:

$$\begin{cases} 4 = A + B + C \\ -14 = -2A - 3B + C \\ -6 = -3A \end{cases}$$

Después de resolver el sistema, se tiene que  $A = 2, B = 3$  y  $C = -1$ , igual que antes.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1****FACTORES LINEALES DISTINTOS**

El ingreso marginal para una compañía que fabrica  $q$  radios por semana está dado por  $r'(q) = \frac{5(q+4)}{q^2+4q+3}$

donde  $r(q)$  es el ingreso en miles de dólares. Encuentre la ecuación para  $r(q)$ .

**EJEMPLO 1 Factores lineales distintos**

Determine  $\int \frac{2x+1}{3x^2-27} dx$  con fracciones parciales.

**Solución:** Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, no es necesario dividir primero. La integral puede escribirse como

$$\frac{1}{3} \int \frac{2x+1}{x^2-9} dx$$

Al expresar  $(2x+1)/(x^2-9)$  como una suma de fracciones parciales, se tiene

$$\frac{2x+1}{x^2-9} = \frac{2x+1}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$$

Si se combinan términos y se igualan los numeradores resulta

$$2x+1 = A(x-3) + B(x+3)$$

Si  $x = 3$ , entonces

$$7 = 6B, \text{ por lo que } B = \frac{7}{6}$$

Si  $x = -3$ , entonces

$$-5 = -6A, \text{ por lo que } A = \frac{5}{6}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{3x^2-27} dx &= \frac{1}{3} \left( \int \frac{\frac{5}{6} dx}{x+3} + \int \frac{\frac{7}{6} dx}{x-3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{5}{6} \ln|x+3| + \frac{7}{6} \ln|x-3| \right) + C \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

**Factores lineales repetidos**

Si el denominador de  $N(x)/D(x)$  sólo contiene factores lineales, algunos de los cuales están repetidos, entonces a cada factor  $(x-a)^k$ , donde  $k$  es el número máximo de veces que se presenta  $x-a$  como factor, le corresponderá la suma de  $k$  fracciones parciales:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{K}{(x-a)^k}$$

**EJEMPLO 2 Factores lineales repetidos**

Determine  $\int \frac{6x^2+13x+6}{(x+2)(x+1)^2} dx$  mediante fracciones parciales.

**Solución:** Como el grado del numerador, a saber, 2, es menor que el denominador, 3, no es necesario dividir primero. En el denominador el factor lineal  $x+2$  aparece una vez y el factor lineal  $x+1$  aparece dos veces. Así, se deberán determinar tres fracciones parciales y tres constantes, y se tiene

$$\frac{6x^2+13x+6}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$6x^2+13x+6 = A(x+1)^2 + B(x+2)(x+1) + C(x+2)$$

Se escoge  $x = -2$ ,  $x = -1$  y, por conveniencia,  $x = 0$ . Para  $x = -2$ , se tiene

$$4 = A$$

Si  $x = -1$ , entonces

$$-1 = C$$

Si  $x = 0$ , entonces

$$6 = A + 2B + 2C = 4 + 2B - 2 = 2 + 2B$$

$$4 = 2B$$

$$2 = B$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 + 13x + 6}{(x+2)(x+1)^2} dx &= 4 \int \frac{dx}{x+2} + 2 \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= 4 \ln|x+2| + 2 \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C \\ &= \ln[(x+2)^4(x+1)^2] + \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$

La última línea es de alguna forma opcional (dependiendo de para qué quiera la integral). Solamente ilustra que en problemas de este tipo, con frecuencia los logaritmos pueden combinarse.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5



### Factores cuadráticos irreducibles distintos

Suponga que un factor cuadrático  $x^2 + bx + c$  ocurre en  $D(x)$  y que no puede expresarse como un producto de dos factores lineales con coeficientes reales. Se dice que tal factor es un factor *cuadrático irreducible en los números reales*. A cada factor cuadrático irreducible distinto que ocurre sólo una vez en  $D(x)$ , le corresponderá una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}$$

Observe que incluso después de que haya expresado una función racional en términos de fracciones parciales, todavía puede encontrar imposible integrar solamente con el cálculo que ha aprendido hasta aquí. Por ejemplo, un factor cuadrático irreducible muy simple es  $x^2 + 1$  y aún así

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \tan^{-1} x + C$$

donde  $\tan^{-1}$  es la inversa de la función trigonométrica tan cuando tan se restringe a  $(-\pi/2, \pi/2)$ . En este libro no se analizan las funciones trigonométricas, pero como puede comprobar cualquier calculadora buena tiene una tecla para  $\tan^{-1}$ .

#### EJEMPLO 3 Integral con un factor cuadrático irreducible distinto

Determine  $\int \frac{-2x - 4}{x^3 + x^2 + x} dx$  con fracciones parciales.

**Solución:** Como  $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$ , se tiene el factor lineal  $x$  y el factor cuadrático  $x^2 + x + 1$ , que no parece factorizable a simple vista. Si fuera factorizable en  $(x - r_1)(x - r_2)$ , con  $r_1$  y  $r_2$  reales, entonces  $r_1$  y  $r_2$  serían las raíces de la ecuación  $x^2 + x + 1 = 0$ . Por medio de la fórmula cuadrática, las raíces son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

Como no se tienen raíces reales, se concluye que  $x^2 + x + 1$  es irreducible. Así, se tendrán dos fracciones parciales y tres constantes que determinar. Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{-2x - 4}{x(x^2 + x + 1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \\ -2x - 4 &= A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)x \\ &= Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx \\ 0x^2 - 2x - 4 &= (A + B)x^2 + (A + C)x + A \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de potencias iguales de  $x$ , se obtiene

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ -2 = A + C \\ -4 = A \end{cases}$$

Tras resolver el sistema se obtiene  $A = -4$ ,  $B = 4$  y  $C = 2$ . Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int \frac{-2x - 4}{x(x^2 + x + 1)} dx &= \int \left( \frac{-4}{x} + \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} \right) dx \\ &= -4 \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx \end{aligned}$$

Ambas integrales tienen la forma  $\int \frac{du}{u}$ , por lo que

$$\begin{aligned} \int \frac{-2x - 4}{x(x^2 + x + 1)} dx &= -4 \ln|x| + 2 \ln|x^2 + x + 1| + C \\ &= \ln \left[ \frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^4} \right] + C \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7 

### Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Suponga que  $D(x)$  contiene factores de la forma  $(x^2 + bx + c)^k$ , donde  $k$  es el número máximo de veces que ocurre el factor irreducible  $x^2 + bx + c$ . Entonces, a cada uno de tales factores le corresponde una suma de  $k$  fracciones parciales de la forma

$$\frac{A + Bx}{x^2 + bx + c} + \frac{C + Dx}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{M + Nx}{(x^2 + bx + c)^k}$$

#### EJEMPLO 4 Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Determine  $\int \frac{x^5}{(x^2 + 4)^2} dx$  con fracciones parciales.

**Solución:** Como el numerador tiene grado 5 y el denominador grado 4, primero se divide, lo que resulta en

$$\frac{x^5}{x^4 + 8x^2 + 16} = x - \frac{8x^3 + 16x}{(x^2 + 4)^2}$$

El factor cuadrático  $x^2 + 4$  en el denominador de  $(8x^3 + 16x)/(x^2 + 4)^2$  es irreducible y ocurre dos veces como factor. Así, a  $(x^2 + 4)^2$  le corresponden dos fracciones parciales y se deben determinar cuatro coeficientes. De acuerdo con esto, se establece

$$\frac{8x^3 + 16x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)^2}$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} 8x^3 + 16x &= (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D \\ 8x^3 + 0x^2 + 16x + 0 &= Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + 4B + D \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de potencias iguales de  $x$ , se obtiene

$$\begin{cases} 8 = A \\ 0 = B \\ 16 = 4A + C \\ 0 = 4B + D \end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtiene  $A = 8$ ,  $B = 0$ ,  $C = -16$  y  $D = 0$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{(x^2 - 4)^2} dx &= \int \left( x - \left( \frac{8x}{x^2 + 4} - \frac{16x}{(x^2 + 4)^2} \right) \right) dx \\ &= \int x dx - 4 \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx + 8 \int \frac{2x}{(x^2 + 4)^2} dx\end{aligned}$$

La segunda integral en la línea precedente tiene la forma  $\int \frac{du}{u}$  y la tercera integral tiene la forma  $\int \frac{du}{u^2}$ . De modo que

$$\int \frac{x^5}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x^2}{2} - 4 \ln(x^2 + 4) - \frac{8}{x^2 + 4} + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27



### ADVERTENCIA

No se olvide de las formas de integración básicas.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

#### INTEGRAL QUE NO REQUIERE DE FRACCIONES PARCIALES

La tasa de cambio con respecto al tiempo (en años) de la población que vota en una ciudad se estima como  $V'(t) = \frac{300t^3}{t^2 + 6}$ . Encuentre la forma general de  $V(t)$ .

#### EJEMPLO 5 Integral que no requiere fracciones parciales

Encuentre  $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} dx$ .

**Solución:** Esta integral tiene la forma  $\int \frac{1}{u} du$ . Así,

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} dx = \ln|x^2+3x+1| + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17



## Problemas 15.2

En los problemas 1 a 8, exprese la función racional dada en términos de fracciones parciales. Tome en cuenta cualquier división preliminar que sea necesaria.

\*1.  $f(x) = \frac{10x}{x^2 + 7x + 6}$

2.  $f(x) = \frac{x+5}{x^2-1}$

3.  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+5x+6}$

4.  $f(x) = \frac{2x^2-15}{x^2+5x}$

\*5.  $f(x) = \frac{x+4}{x^2+4x+4}$

6.  $f(x) = \frac{2x+3}{x^2(x-1)}$

\*7.  $f(x) = \frac{x^2+3}{x^3+x}$

8.  $f(x) = \frac{3x^2+5}{(x^2+4)^2}$

En los problemas 9 a 30, determine las integrales.

9.  $\int \frac{5x-2}{x^2-x} dx$

10.  $\int \frac{7x+6}{x^2+3x} dx$

11.  $\int \frac{x+10}{x^2-x-2} dx$

12.  $\int \frac{2x-1}{x^2-x-12} dx$

13.  $\int \frac{3x^3-3x+4}{4x^2-4} dx$

14.  $\int \frac{7(4-x^2)}{(x-4)(x-2)(x+3)} dx$

15.  $\int \frac{3x-4}{x^3-x^2-2x} dx$

16.  $\int \frac{4-x}{x^4-x^2} dx$

\*17.  $\int \frac{2(3x^5+4x^3-x)}{x^6+2x^4-x^2-2} dx$

18.  $\int \frac{x^4-2x^3+6x^2-11x+2}{x^3-3x^2+2x} dx$

19.  $\int \frac{2x^2-5x-2}{(x-2)^2(x-1)} dx$

20.  $\int \frac{-3x^3+2x-3}{x^2(x^2-1)} dx$

21.  $\int \frac{2(x^2+8)}{x^3+4x} dx$

22.  $\int \frac{4x^3-3x^2+2x-3}{(x^2+3)(x+1)(x-2)} dx$

23.  $\int \frac{-x^3+8x^2-9x+2}{(x^2+1)(x-3)^2} dx$

24.  $\int \frac{5x^4+9x^2+3}{x(x^2+1)^2} dx$

25.  $\int \frac{14x^3+24x}{(x^2+1)(x^2+2)} dx$

26.  $\int \frac{12x^3+20x^2+28x+4}{3(x^2+2x+3)(x^2+1)} dx$

\*27.  $\int \frac{3x^3+8x}{(x^2+2)^2} dx$

28.  $\int \frac{3x^2-8x+4}{x^3-4x^2+4x-6} dx$

29.  $\int_0^1 \frac{2-2x}{x^2+7x+12} dx$

30.  $\int_1^2 \frac{3x^2+15x+13}{x^2+4x+3} dx$

31. Encuentre el área de la región limitada por la gráfica de

$$y = \frac{6(x^2+1)}{(x+2)^2}$$

y el eje  $x$ , desde  $x=0$  hasta  $x=1$ .

32. **Excedente de los consumidores** La ecuación de demanda para el producto de un fabricante está dada por

$$p = \frac{200(q+3)}{q^2+7q+6}$$

donde  $p$  es el precio por unidad (en dólares) cuando se demandan  $q$  unidades. Suponga que el equilibrio de mercado ocurre en el punto  $(q,p)=(10\,325/22)$ . Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio de mercado.

## OBJETIVO

Ilustrar el uso de la tabla de integrales del apéndice B.

## 15.3 Integración por medio de tablas

Ciertas formas de integrales que se presentan con frecuencia pueden encontrarse en tablas estándar de fórmulas de integración.<sup>3</sup> En el apéndice B aparece una tabla cuyo uso se ilustrará en esta sección.

Una integral dada puede tener que transformarse a una forma equivalente para que se ajuste o corresponda a una fórmula de la tabla. La forma equivalente debe concordar *exactamente* con la fórmula. En consecuencia, los pasos que se realicen *no* deben hacerse mentalmente, en lugar de eso, ¡habrá que escribirlos! De lo contrario es fácil llegar a resultados incorrectos. Antes de proseguir con los ejercicios, asegúrese de que entiende *totalmente* los ejemplos.

En los ejemplos siguientes, los números de las fórmulas se refieren a los de la tabla de integrales seleccionadas dada en el apéndice B.

### EJEMPLO 1 Integración por medio de tablas

Encuentre  $\int \frac{x dx}{(2+3x)^2}$ .

**Solución:** Al revisar la tabla, se identifica el integrando con la fórmula 7:

$$\int \frac{u du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left( \ln|a+bu| + \frac{a}{a+bu} \right) + C$$

Ahora se ve si es posible hacer coincidir de manera exacta el integrando dado con el de la fórmula. Si se reemplaza  $x$  por  $u$ , 2 por  $a$  y 3 por  $b$ , entonces  $du = dx$  y por sustitución se tiene

$$\int \frac{x dx}{(2+3x)^2} = \int \frac{u du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left( \ln|a+bu| + \frac{a}{a+bu} \right) + C$$

Una vez más a la variable  $x$  y tras reemplazar  $a$  por 2 y  $b$  por 3, se obtiene

$$\int \frac{x dx}{(2+3x)^2} = \frac{1}{9} \left( \ln|2+3x| + \frac{2}{2+3x} \right) + C$$

Note que la respuesta debe darse en términos de  $x$ , la variable *original* de integración.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

### EJEMPLO 2 Integración por medio de tablas

Encuentre  $\int x^2 \sqrt{x^2-1} dx$ .

**Solución:** Esta integral se identifica con la fórmula 24:

$$\int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

En la fórmula anterior, si se usa el signo inferior del símbolo dual “ $\pm$ ” en el lado izquierdo, entonces deberá usarse también el signo inferior de los símbolos duales en el lado

<sup>3</sup>Vea, por ejemplo, W. H. Beyer (ed.), *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 30a. ed. (Boca Ratón, Florida: CRC Press, 1996.)

derecho. En la integral original, se hace  $u = x$  y  $a = 1$ . Entonces,  $du = dx$  y por sustitución, la integral se convierte en

$$\begin{aligned}\int x^2 \sqrt{x^2 - 1} dx &= \int u^2 \sqrt{u^2 - a^2} du \\ &= \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C\end{aligned}$$

Como  $u = x$  y  $a = 1$ ,

$$\int x^2 \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{x}{8}(2x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{8} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17



Este ejemplo, así como los ejemplos 4, 5 y 7, muestran cómo ajustar una integral de modo que se acomode a una de la tabla.

### EJEMPLO 3 Integración por medio de tablas

Encuentre  $\int \frac{dx}{x\sqrt{16x^2 + 3}}$ .

**Solución:** El integrando puede identificarse con la fórmula 28:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u} \right| + C$$

Si se establece  $u = 4x$  y  $a = \sqrt{3}$ , entonces  $du = 4 dx$ . Observe con cuidado cómo al insertar 4 en el numerador y en el denominador, se transforma la integral dada a una forma equivalente que coincide con la fórmula 28:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{16x^2 + 3}} &= \int \frac{(4 dx)}{(4x)\sqrt{(4x)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} \\ &= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{16x^2 + 3} - \sqrt{3}}{4x} \right| + C\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7



### EJEMPLO 4 Integración con tablas

Encuentre  $\int \frac{dx}{x^2(2 - 3x^2)^{1/2}}$ .

**Solución:** El integrando se identifica con la fórmula 21:

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$$

Se establece  $u = \sqrt{3}x$  y  $a^2 = 2$ , se tiene  $du = \sqrt{3} dx$ . De aquí que al insertar dos factores de  $\sqrt{3}$  en el numerador y en el denominador de la integral original, se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2(2 - 3x^2)^{1/2}} &= \sqrt{3} \int \frac{(\sqrt{3} dx)}{(\sqrt{3}x)^2[2 - (\sqrt{3}x)^2]^{1/2}} = \sqrt{3} \int \frac{du}{u^2(a^2 - u^2)^{1/2}} \\ &= \sqrt{3} \left[ -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} \right] + C = \sqrt{3} \left[ -\frac{\sqrt{2 - 3x^2}}{2(\sqrt{3}x)} \right] + C \\ &= -\frac{\sqrt{2 - 3x^2}}{2x} + C\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35



**EJEMPLO 5** **Integración por medio de tablas**

Encuentre  $\int 7x^2 \ln(4x) dx$ .

**Solución:** Esto es similar a la de la fórmula 42 con  $n = 2$ :

$$\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1} \ln u}{n+1} - \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

Si se establece que  $u = 4x$ , entonces  $du = 4 dx$ . Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\int 7x^2 \ln(4x) dx &= \frac{7}{4^3} \int (4x)^2 \ln(4x)(4 dx) \\&= \frac{7}{64} \int u^2 \ln u du = \frac{7}{64} \left( \frac{u^3 \ln u}{3} - \frac{u^3}{9} \right) + C \\&= \frac{7}{64} \left( \frac{(4x)^3 \ln(4x)}{3} - \frac{(4x)^3}{9} \right) + C \\&= 7x^3 \left( \frac{\ln(4x)}{3} - \frac{1}{9} \right) + C \\&= \frac{7x^3}{9} (3 \ln(4x) - 1) + C\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 45

**EJEMPLO 6** **Integral en la que no se necesita tabla**

Encuentre  $\int \frac{e^{2x} dx}{7 + e^{2x}}$ .

**Solución:** A primera vista, el integrando no se identifica con ninguna forma de la tabla. Tal vez sea de ayuda escribir de nuevo la integral. Sea  $u = 7 + e^{2x}$ , entonces  $du = 2e^{2x} dx$ . De modo que

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x} dx}{7 + e^{2x}} &= \frac{1}{2} \int \frac{(2e^{2x} dx)}{7 + e^{2x}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C \\&= \frac{1}{2} \ln|7 + e^{2x}| + C = \frac{1}{2} \ln(7 + e^{2x}) + C\end{aligned}$$

Así, sólo se tuvo que usar el conocimiento de las formas básicas de integración. En realidad, esta forma aparece como la fórmula 2 en la tabla.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 39

**EJEMPLO 7** **Determinación de una integral definida mediante el uso de tablas**

Evalúe  $\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2 + 2)^{3/2}}$ .

**Solución:** Se usará la fórmula 32 para obtener primero la integral indefinida:

$$\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

Se establece que  $u = 2x$  y  $a^2 = 2$ , se tiene  $du = 2 dx$ . Entonces,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(4x^2 + 2)^{3/2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{(2 dx)}{((2x)^2 + 2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u^2 + 2)^{3/2}} \\&= \frac{1}{2} \left( \frac{u}{2\sqrt{u^2 + 2}} \right) + C\end{aligned}$$

En vez de sustituir los valores de  $x$  y evaluar la integral desde  $x = 1$  hasta  $x = 4$ , es posible determinar los límites de integración correspondientes con respecto a  $u$ , y luego

**ADVERTENCIA**

Al cambiar la variable de integración  $x$  a la variable de integración  $u$ , asegúrese de cambiar los límites de integración de manera que concuerden con  $u$ .

evaluar la última expresión entre esos límites. Como  $u = 2x$ , cuando  $x = 1$ , se tiene  $u = 2$ ; cuando  $x = 4$ , se tiene  $u = 8$ . Así,

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2 + 2)^{3/2}} &= \frac{1}{2} \int_2^8 \frac{du}{(u^2 + 2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{u}{2\sqrt{u^2 + 2}} \right) \Big|_2^8 = \frac{2}{\sqrt{66}} - \frac{1}{2\sqrt{6}}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

**Integración aplicada a anualidades**

Las tablas de integrales son útiles al manejar integrales asociadas con anualidades. Suponga que debe pagar \$100 al final de cada año, durante los siguientes dos años. De acuerdo con el capítulo 5, recuerde que una serie de pagos sobre un periodo, como en este caso, se denomina *anualidad*. Si usted debiera liquidar la deuda ahora, y no en anualidades, pagaría el valor presente de los \$100 que vencen al final del primer año, más el valor presente de los \$100 que vencen al final del segundo año. La suma de esos valores presentes es el valor presente de la anualidad (el valor presente de una anualidad se vio en la sección 5.4). Ahora se considerará el valor presente de pagos hechos de manera continua en el intervalo de tiempo que va de  $t = 0$  a  $t = T$ , con  $t$  en años, cuando el interés se compone de manera continua a una tasa anual de  $r$ .

Suponga que se hace un pago en el tiempo  $t$ , de manera que según una base anual, este pago es  $f(t)$ . Si se divide el intervalo  $[0, T]$  en subintervalos  $[t_{i-1}, t_i]$  de longitud  $\Delta t$  (donde  $\Delta t$  es pequeño), entonces la cantidad total de todos los pagos en tal intervalo es aproximadamente igual a  $f(t_i) \Delta t$ . (Por ejemplo, si  $f(t) = 2000$  y  $\Delta t$  fuese de un día, la cantidad total de los pagos sería  $2000(\frac{1}{365})$ ). El valor presente de esos pagos es de aproximadamente  $e^{-rt_i} f(t_i) \Delta t$ . (Vea la sección 5.3.) En el intervalo  $[0, T]$ , el total de todos los valores presentes es

$$\sum e^{-rt_i} f(t_i) \Delta t$$

Esta suma aproxima el valor actual  $A$  de la anualidad. Entre menor es  $\Delta t$ , mejor será la aproximación. Esto es, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , el límite de la suma es el valor presente. Sin embargo, este límite es también una integral definida. Esto es,

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt} dt \quad (1)$$

donde  $A$  es el **valor presente de una anualidad continua** a la tasa anual  $r$  (compuesta de manera continua) durante  $T$  años, si un pago en el tiempo  $t$  es a la tasa de  $f(t)$  por año.

Se dice que la ecuación (1) da el **valor presente de un flujo continuo de ingreso**. La ecuación (1) puede usarse también para encontrar el valor presente de la utilidad futura de un negocio. En esta situación,  $f(t)$  es la tasa anual de utilidad en el tiempo  $t$ .

También se puede considerar el **valor futuro** de una anualidad en vez de su valor presente. Si se hace un pago en el tiempo  $t$ , entonces el mismo tiene un cierto valor al *final* del periodo de la anualidad, es decir  $T - t$  años después. Este valor es

$$\left( \begin{array}{l} \text{monto} \\ \text{del pago} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{interés sobre este} \\ \text{pago durante } T - t \text{ años} \end{array} \right)$$

Si  $S$  es el total de esos valores para todos los pagos, entonces  $S$  se llama *monto acumulado de una anualidad continua* y está dado por la fórmula:

$$S = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)} dt$$

donde  $S$  es el **monto acumulado de una anualidad continua** al final de  $T$  años a la tasa anual  $r$  (compuesta de manera continua), cuando un pago en el tiempo  $t$  es a la tasa  $f(t)$  por año.

 **EJEMPLO 8** **Valor presente de una anualidad continua**

Encuentre el valor presente (al dólar más cercano) de una anualidad continua a un interés de 8% durante 10 años, si el pago en el tiempo  $t$  es a razón de  $t^2$  dólares por año.

**Solución:** El valor presente está dado por

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt} dt = \int_0^{10} t^2 e^{-0.08t} dt$$

Se usará la fórmula 39,

$$\int u^n e^{au} du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du$$

Esta expresión se llama *fórmula de reducción*, puesto que reduce una integral a una expresión que contiene una integral más fácil de determinar. Si  $u = t, n = 2$  y  $a = -0.08$ , entonces  $du = dt$ , y se tiene

$$A = \left. \frac{t^2 e^{-0.08t}}{-0.08} \right|_0^{10} - \frac{2}{-0.08} \int_0^{10} t e^{-0.08t} dt$$

En la nueva integral, el exponente de  $t$  se ha reducido a 1. Es posible identificar esta integral con la de la fórmula 38,

$$\int ue^{au} du = \frac{e^{au}}{a^2} (au - 1) + C$$

se determina que  $u = t$  y  $a = -0.08$ . Entonces  $du = dt$  y

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{10} t^2 e^{-0.08t} dt = \left. \frac{t^2 e^{-0.08t}}{-0.08} \right|_0^{10} - \frac{2}{-0.08} \left( \frac{e^{-0.08t}}{(-0.08)^2} (-0.08t - 1) \right) \Big|_0^{10} \\ &= \frac{100e^{-0.8}}{-0.08} - \frac{2}{-0.08} \left( \frac{e^{-0.8}}{(-0.08)^2} (-0.8 - 1) - \frac{1}{(-0.08)^2} (-1) \right) \\ &\approx 185 \end{aligned}$$

El valor presente es de \$185.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 59 

## Problemas 15.3

En los problemas 1 y 2 use la fórmula 19 del apéndice B para determinar las integrales.

1.  $\int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}}$

2.  $\int \frac{dx}{(25-4x^2)^{3/2}}$

En los problemas 3 y 4, use la fórmula 30 del apéndice B para determinar las integrales.

3.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{16x^2 + 3}}$

4.  $\int \frac{3 dx}{x^3 \sqrt{x^4 - 9}}$

En los problemas 5 a 38, encuentre las integrales con la ayuda de la tabla del apéndice B.

\*5.  $\int \frac{dx}{x(6+7x)}$

6.  $\int \frac{3x^2 dx}{(2+5x)^2}$

\*7.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}}$

8.  $\int \frac{dx}{(x^2 + 7)^{3/2}}$

9.  $\int \frac{x dx}{(2+3x)(4+5x)}$

10.  $\int 2^{5x} dx$

11.  $\int \frac{dx}{5+2e^{3x}}$

12.  $\int x^2 \sqrt{1+x} dx$

13.  $\int \frac{7 dx}{x(5+2x)^2}$

14.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{5-11x^2}}$

\*15.  $\int_0^1 \frac{x dx}{2+x}$

16.  $\int \frac{2x^2 dx}{3+7x}$

\*17.  $\int \sqrt{x^2 - 3} dx$

18.  $\int \frac{dx}{(1+5x)(2x+3)}$

19.  $\int_0^{1/12} x e^{12x} dx$

20.  $\int \sqrt{\frac{2+3x}{5+3x}} dx$

21.  $\int x^2 e^x dx$

22.  $\int_1^2 \frac{4 dx}{x^2(1+x)}$

23.  $\int \frac{\sqrt{5x^2 + 1}}{2x^2} dx$

24.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{2-x}}$

25.  $\int \frac{x dx}{(1+3x)^2}$

26.  $\int \frac{3 dx}{\sqrt{(5+3x)(6+3x)}}$

27.  $\int \frac{dx}{7-5x^2}$

28.  $\int 7x^2 \sqrt{3x^2 - 6} dx$

29.  $\int 36x^5 \ln(3x) dx$

30.  $\int \frac{5 dx}{x^2(3+2x)^2}$

31.  $\int 270x\sqrt{1+3x}dx$

33.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-13}}$

\*35.  $\int \frac{2dx}{x^2\sqrt{16-9x^2}}$

37.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\pi+7e^{4\sqrt{x}})}$

32.  $\int 9x^2\ln x dx$

34.  $\int \frac{dx}{x\ln(2x)}$

36.  $\int \frac{\sqrt{2-3x^2}}{x}dx$

38.  $\int_0^1 \frac{3x^2}{1+2x^3}dx$

En los problemas 39 a 56, encuentre las integrales por cualquier método.

\*39.  $\int \frac{x dx}{x^2+1}$

41.  $\int 6x\sqrt{2x^2+1}dx$

43.  $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

\*45.  $\int x^3\ln x dx$

47.  $\int 4x^3e^{3x^2}dx$

49.  $\int \ln^2 x dx$

51.  $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x}}$

53.  $\int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{8-x^2}}$

55.  $\int_1^2 x\ln(2x)dx$

40.  $\int 3x\sqrt{x}e^{x^{5/2}}dx$

42.  $\int \frac{5x^3-\sqrt{x}}{2x}dx$

44.  $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}}dx$

46.  $\int_0^3 xe^{-x}dx$

48.  $\int_1^2 35x^2\sqrt{3+2x}dx$

50.  $\int_1^e 3x\ln x^2 dx$

52.  $\int_2^3 x\sqrt{2+3x}dx$

54.  $\int_0^{\ln 2} x^2e^{3x}dx$

56.  $\int_1^2 dx$

57. **Biología** En un análisis sobre frecuencia genética<sup>4</sup> aparece la integral

$$\int_{q_0}^{q_n} \frac{dq}{q(1-q)}$$

donde las  $q$  representan frecuencias genéticas. Evalúe esta integral.

58. **Biología** Bajo ciertas condiciones, el número  $n$  de generaciones requeridas para cambiar la frecuencia de un gen de 0.3 a 0.1 está dado por<sup>5</sup>

$$n = -\frac{1}{0.4} \int_{0.3}^{0.1} \frac{dq}{q^2(1-q)}$$

Encuentre  $n$  (al entero más cercano).

- \*59. **Anualidad continua** Encuentre el valor presente, al dólar más cercano, de una anualidad continua con una tasa de interés anual de  $r$  durante  $T$  años, si el pago en el tiempo  $t$  es a la tasa anual de  $f(t)$  dólares, dado que

(a)  $r = 0.04 \quad T = 9 \quad f(t) = 1000$

(b)  $r = 0.06 \quad T = 10 \quad f(t) = 500t$

60. Si  $f(t) = k$ , donde  $k$  es una constante positiva, demuestre que el valor de la integral en la ecuación (1) de esta sección es

$$k \left( \frac{1 - e^{-rT}}{r} \right)$$

61. **Anualidad continua** Encuentre el monto acumulado, al dólar más cercano, de una anualidad continua a una tasa anual de  $r$  durante  $T$  años si el pago en el tiempo  $t$  es a una tasa anual de  $f(t)$  dólares, dado que

(a)  $r = 0.06 \quad T = 10 \quad f(t) = 400$

(b)  $r = 0.04 \quad T = 5 \quad f(t) = 40t$

62. **Valor de un negocio** Durante los próximos 5 años, las utilidades de un negocio en el tiempo  $t$  se estiman igual a 50 000\$ dólares por año. El negocio se va a vender a un precio igual al valor presente de esas futuras utilidades. A la decena de dólares más cercana, ¿a qué precio, debe venderse el negocio, si el interés se compone continuamente a una tasa anual del 7%?

## OBJETIVO

Desarrollar el concepto de valor promedio de una función

## 15.4 Valor promedio de una función

Si se dan los tres números 1, 2 y 9, su valor promedio o *media* es su suma dividida entre 3. Si se denota esta media por  $\bar{y}$ , se tiene

$$\bar{y} = \frac{1+2+9}{3} = 4$$

En forma similar, suponga que se da una función  $f$  definida en el intervalo  $[a, b]$  y que los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  están en el intervalo. Entonces, el valor promedio de los  $n$  valores correspondientes de la función  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$  es

$$\bar{y} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n} \quad (1)$$

Se puede ir un paso más adelante. Se dividirá el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud. Se escoge  $x_i$  como el extremo derecho del  $i$ -ésimo subintervalo. Como

<sup>4</sup>W. B. Mather, *Principles of Quantitative Genetics* (Minneapolis: Burgess Publishing Company, 1964).

<sup>5</sup>E. O. Wilson y W. H. Bossert, *A Primer of Population Biology* (Stamford, CT: Sinauer Associates, Inc., 1971).

$[a, b]$  tiene longitud  $b - a$ , cada subintervalo tiene longitud  $\frac{b - a}{n}$ , que se llamará  $\Delta x$ . Por lo que, la ecuación (1) puede escribirse

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i) \left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)}{n} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \frac{1}{n \Delta x} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad (2)$$

Como  $\Delta x = \frac{b - a}{n}$ , se deduce que  $n \Delta x = b - a$ . De modo que la expresión  $\frac{1}{n \Delta x}$  en la ecuación (2) puede reemplazarse con  $\frac{1}{b - a}$ . Además, cuando  $n \rightarrow \infty$ , el número de valores de la función usados para calcular  $\bar{y}$  crece, y se obtiene el *valor promedio de la función f*, denotado por  $\bar{f}$ :

$$\bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{b - a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \right] = \frac{1}{b - a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Pero el límite de la derecha es justo la integral definida  $\int_a^b f(x) dx$ . Lo anterior motiva la siguiente definición:

### DEFINICIÓN

El *valor promedio de una función f(x)* en el intervalo  $[a, b]$  se denota con  $\bar{f}$  está dado por

$$\bar{f} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

### EJEMPLO 1 Valor promedio de una función

Encuentre el valor promedio de la función  $f(x) = x^2$  sobre el intervalo  $[1, 2]$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{1}{2 - 1} \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

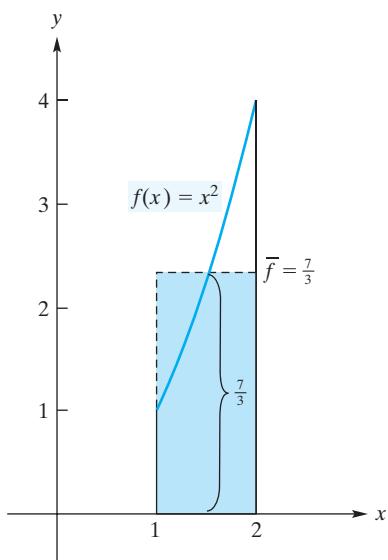


FIGURA 15.1 Interpretación geométrica del valor promedio de una función.

En el ejemplo 1 se encontrará que el valor promedio de  $y = f(x) = x^2$  en el intervalo  $[1, 2]$  es  $\frac{7}{3}$ . Este valor puede interpretarse de manera geométrica. Como

$$\frac{1}{2 - 1} \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$$

al despejar la integral se tiene

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}(2 - 1)$$

Sin embargo, esta integral da el área de la región limitada por  $f(x) = x^2$  y el eje x, desde  $x = 1$  hasta  $x = 2$  (vea la figura 15.1). De la ecuación anterior, esta área es  $(\frac{7}{3})(2 - 1)$ , que corresponde al área de un rectángulo cuya altura es el valor promedio  $\bar{f} = \frac{7}{3}$  y cuyo ancho es  $b - a = 2 - 1 = 1$ .

### EJEMPLO 2 Flujo de sangre promedio

Suponga que el flujo de sangre en el tiempo  $t$  está dado por

$$F(t) = \frac{F_1}{(1 + \alpha t)^2} \quad 0 \leq t \leq T$$

donde  $F_1$  y  $\alpha$  (una letra griega que se lee “alfa”) son constantes.<sup>6</sup> Encuentre el flujo promedio  $\bar{F}$  en el intervalo  $[0, T]$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \frac{1}{T-0} \int_0^T F(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{F_1}{(1+\alpha t)^2} dt = \frac{F_1}{\alpha T} \int_0^T (1+\alpha t)^{-2} (\alpha dt) \\ &= \frac{F_1}{\alpha T} \left( \frac{(1+\alpha t)^{-1}}{-1} \right) \Big|_0^T = \frac{F_1}{\alpha T} \left( -\frac{1}{1+\alpha T} + 1 \right) \\ &= \frac{F_1}{\alpha T} \left( \frac{-1+1+\alpha T}{1+\alpha T} \right) = \frac{F_1}{\alpha T} \left( \frac{\alpha T}{1+\alpha T} \right) = \frac{F_1}{1+\alpha T}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11 

## Problemas 15.4

En los problemas 1 a 8, encuentre el valor promedio de la función en el intervalo dado.

- |                                  |  |
|----------------------------------|--|
| *1. $f(x) = x^2$ ; $[-1, 3]$     | 2. $f(x) = 3x - 1$ ; $[1, 2]$          |
| 3. $f(x) = 2 - 3x^2$ ; $[-1, 2]$ | 4. $f(x) = x^2 + x + 1$ ; $[1, 3]$     |
| 5. $f(t) = 2t^5$ ; $[-3, 3]$     | 6. $f(t) = t\sqrt{t^2 + 9}$ ; $[0, 4]$ |
| 7. $f(x) = 6\sqrt{x}$ ; $[1, 9]$ | 8. $f(x) = 5/x^2$ ; $[1, 3]$           |

9. **Utilidad** La utilidad (en dólares) de un negocio está dada por

$$P = P(q) = 369q - 2.1q^2 - 400$$

donde  $q$  es el número de unidades del producto vendido. Encuentre la utilidad promedio sobre el intervalo de  $q = 0$  a  $q = 100$ .

10. **Costo** Suponga que el costo (en dólares) de producir  $q$  unidades de un producto está dado por

$$c = 4000 + 10q + 0.1q^2$$

Encuentre el costo promedio sobre el intervalo de  $q = 100$  a  $q = 500$ .

- \*11. **Inversión** Una inversión de \$3000 gana interés a una tasa anual de 5% compuesto continuamente. Después de  $t$  años, su

valor  $S$  (en dólares) está dado por  $S = 3000e^{0.05t}$ . Encuentre el valor promedio de una inversión a dos años.

12. **Medicina** Suponga que se inyecta una tinta de color en la corriente sanguínea a una razón constante  $R$ . En el tiempo  $t$ , sea

$$C(t) = \frac{R}{F(t)}$$

la concentración de tinta en un punto a cierta distancia (distal) desde el punto de inyección, donde  $F(t)$  está dada en el ejemplo 2. Demuestre que la concentración promedio en  $[0, T]$  es

$$\bar{C} = \frac{R(1 + \alpha T + \frac{1}{3}\alpha^2 T^2)}{F_1}$$

13. **Ingreso** Suponga que un fabricante recibe un ingreso  $r$  por la venta de  $q$  unidades de un producto. Demuestre que el valor promedio de la función de ingreso marginal sobre el intervalo  $[0, q_0]$  es el precio por unidad cuando se han vendido  $q_0$  unidades.

14. Encuentre el valor promedio de  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$  en el intervalo  $[0, 1]$ , para ello use una técnica de integración aproximada. Redondee su respuesta a dos decimales.

### OBJETIVO

Resolver una ecuación diferencial por medio del método de separación de variables. Analizar soluciones particulares y soluciones generales. Desarrollar el concepto de interés compuesto de manera continua en términos de una ecuación diferencial. Estudiar el crecimiento y el decaimiento exponencial.

## 15.5 Ecuaciones diferenciales

En algunas ocasiones, usted tendrá que resolver una ecuación que contenga la derivada de una función desconocida. Tal ecuación se llama **ecuación diferencial**. Un ejemplo es

$$y' = xy^2 \quad (1)$$

Con mayor precisión, la ecuación (1) se llama **ecuación diferencial de primer orden**, puesto que incluye una derivada de primer orden y ninguna de orden superior. Una solución de la ecuación (1), es cualquier función  $y = f(x)$  que esté definida en un intervalo y satisfaga la ecuación para toda  $x$  en el intervalo.

<sup>6</sup>W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

Para resolver  $y' = xy^2$ , o de manera equivalente,

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 \quad (2)$$

se piensa en  $dy/dx$  como un cociente de diferenciales, y “se separan variables” de manera algebraica al escribir de nuevo la ecuación de manera que cada miembro contenga sólo una variable, y no aparezcan diferenciales en ningún denominador:

$$\frac{dy}{y^2} = x dx$$

Al integrar ambos lados y combinar las constantes de integración, se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2} dy &= \int x dx \\ -\frac{1}{y} &= \frac{x^2}{2} + C_1 \\ -\frac{1}{y} &= \frac{x^2 + 2C_1}{2} \end{aligned}$$

Como  $2C_1$  es una constante arbitraria, se reemplaza por  $C$ .

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2 + C}{2} \quad (3)$$

Se despeja  $y$  de la ecuación (3), se tiene

$$y = -\frac{2}{x^2 + C} \quad (4)$$

Es posible verificar por sustitución que  $y$  es una solución de la ecuación diferencial (2): Si  $y$  está dada por la ecuación (4), entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(x^2 + C)^2}$$

también,

$$xy^2 = x \left[ -\frac{2}{x^2 + C} \right]^2 = \frac{4x}{(x^2 + C)^2}$$

con lo que se muestra que  $y$  satisface a (2). Observe en la ecuación (4), que para *cada* valor de  $C$  se obtuvo una solución diferente. Se llama a la ecuación (4) la **solución general** de la ecuación diferencial. El método que se usa para encontrarla se llama **separación de variables**.

En el ejemplo anterior, suponga que se tiene la condición de que  $y = -\frac{2}{3}$  cuando  $x = 1$ ; esto es  $y(1) = -\frac{2}{3}$ . Entonces, la función *particular* que satisface a la ecuación (2) y a esta condición, puede encontrarse al sustituir los valores  $x = 1$  y  $y = -\frac{2}{3}$  en la ecuación (4) y despejar  $C$ :

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} &= -\frac{2}{1^2 + C} \\ C &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución para  $dy/dx = xy^2$ , tal que  $y(1) = -\frac{2}{3}$  es

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2} \quad (5)$$

A la ecuación (5) se le llama una **solución particular** de la ecuación diferencial.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1****SEPARACIÓN DE VARIABLES**

Para un líquido claro, la intensidad de la luz disminuye a una razón de  $\frac{dI}{dx} = -kI$ , donde  $I$  es la intensidad de la luz y  $x$  es el número de pies por debajo de la superficie del líquido. Si  $k = 0.0085$  e  $I = I_0$  cuando  $x = 0$ , encuentre  $I$  como una función de  $x$ .

**EJEMPLO 1 Separación de variables**

Resuelva  $y' = -\frac{y}{x}$  si  $x, y > 0$ .

**Solución:** Al escribir  $y'$  como  $dy/dx$ , separar variables e integrar, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln |y| = C_1 - \ln |x|$$

Como  $x, y > 0$ , se pueden omitir las barras de valor absoluto:

$$\ln y = C_1 - \ln x \quad (6)$$

Para despejar  $y$ , se convierte la ecuación (6) a su forma exponencial:

$$y = e^{C_1 - \ln x}$$

Por lo que,

$$y = e^{C_1} e^{-\ln x} = \frac{e^{C_1}}{e^{\ln x}}$$

Si se reemplaza  $e^{C_1}$  por  $C$ , donde  $C > 0$ , y se escribe  $e^{\ln x}$  como  $x$ , se obtiene

$$y = \frac{C}{x}, \quad C, x > 0$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



En el ejemplo 1, observe que la ecuación (6) expresa la solución de manera implícita, mientras que la ecuación final ( $y = C/x$ ) proporciona la solución para  $y$  en forma explícita, en términos de  $x$ . Usted encontrará que las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales suelen expresarse en forma implícita por conveniencia (o necesidad, debido a la dificultad de obtener una forma explícita).

**Crecimiento y decaimiento exponencial**

En la sección 5.3 se desarrolló el concepto del interés compuesto en forma continua. Ahora se abordará este tema desde un punto de vista diferente, que involucra una ecuación diferencial. Suponga una inversión de  $P$  dólares a una tasa anual  $r$  compuesta  $n$  veces por año. Sea la función  $S = S(t)$  la cantidad compuesta  $S$  (o la cantidad total presente) después de  $t$  años, contados desde la fecha de inversión inicial. Entonces, el capital inicial es  $S(0) = P$ . Además, como se tienen  $n$  períodos de interés por año, cada periodo tiene una duración de  $1/n$  años, lo que se denotará por  $\Delta t$ . Al final del primer periodo, el interés acumulado se suma al capital y la suma actúa como el capital para el segundo periodo, y así sucesivamente. Por lo tanto, si el principio de un periodo de interés ocurre en el tiempo  $t$ , entonces el incremento en la cantidad presente al final de un periodo  $\Delta t$  es  $S(t + \Delta t) - S(t)$ , que se escribe como  $\Delta S$ . Este incremento,  $\Delta S$ , es también el interés ganado en el periodo. De manera equivalente, el interés ganado es el capital por la tasa y por el tiempo:

$$\Delta S = S \cdot r \cdot \Delta t$$

Al dividir ambos lados entre  $\Delta t$ , se obtiene

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = rS \quad (7)$$

Cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , entonces  $n = \frac{1}{\Delta t} \rightarrow \infty$ , y en consecuencia, el interés es *compuesto continuamente*; esto es, el capital está sometido a un crecimiento continuo en cada instante. Sin embargo, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , entonces  $\Delta S/\Delta t \rightarrow dS/dt$ , y la ecuación (7) toma la forma

$$\frac{dS}{dt} = rS \quad (8)$$

Esta ecuación diferencial significa que *cuando el interés es compuesto en forma continua, la razón de cambio de la cantidad de dinero presente en el tiempo  $t$  es proporcional a la cantidad presente en el tiempo  $t$* . La constante de proporcionalidad es  $r$ .

Para determinar la función  $S$ , se resuelve la ecuación diferencial (8) por el método de separación de variables:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= rS \\ \frac{dS}{S} &= r dt \\ \int \frac{1}{S} dS &= \int r dt \\ \ln |S| &= rt + C_1\end{aligned}$$

Se supone que  $S > 0$ , por lo que  $\ln |S| = \ln S$ . Entonces,

$$\ln S = rt + C_1$$

Para obtener una forma explícita, se puede despejar  $S$  y convertir la ecuación a su forma exponencial.

$$S = e^{rt+C_1} = e^{C_1}e^{rt}$$

Por simplicidad  $e^{C_1}$  puede reemplazarse por  $C$  para obtener la solución general

$$S = Ce^{rt}$$

La condición  $S(0) = P$  nos permite encontrar el valor de  $C$ :

$$P = Ce^{r(0)} = C \cdot 1$$

Por tanto,  $C = P$ , entonces

$$S = Pe^{rt} \quad (9)$$

La ecuación (9) da el valor total después de  $t$  años de una inversión inicial de  $P$  dólares compuesta continuamente a una tasa anual  $r$ . (Vea la figura 15.2).

En el análisis del interés compuesto, se vio en la ecuación (8) que la razón de cambio en la cantidad presente era proporcional a la cantidad presente. Hay muchas cantidades naturales, como la población, cuya tasa de crecimiento o decrecimiento en cualquier tiempo se considera proporcional a la magnitud de la cantidad presente. Si  $N$  denota la magnitud de tal cantidad en el tiempo  $t$ , entonces esta razón de crecimiento significa que

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

donde  $k$  es una constante. Si se separan variables y se despeja  $N$ , como se hizo para la ecuación (8), se obtiene

$$N = N_0 e^{kt} \quad (10)$$

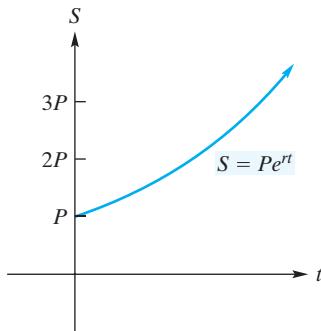
donde  $N_0$  es una constante. En particular, si  $t = 0$ , entonces  $N = N_0 e^0 = N_0 \cdot 1 = N_0$ . Así, la constante  $N_0$  es simplemente  $N(0)$ . Debido a la forma de la ecuación (10), se dice que la cantidad sigue una **ley de crecimiento exponencial** si  $k$  es positiva y una **ley de decrecimiento exponencial** si  $k$  es negativa.

### EJEMPLO 2 Crecimiento de la población

*En cierta ciudad, la razón a la que la población crece en cualquier tiempo es proporcional al tamaño de la población. Si la el tamaño era de 125 000 en 1970 y de 140 000 en 1990, ¿cuál es la población esperada en el año 2010?*

**Solución:** Sea  $N$  el tamaño de la población en el tiempo  $t$ . Como la ley de crecimiento exponencial es aplicable,

$$N = N_0 e^{kt}$$



**FIGURA 15.2** Capitalización en forma continua.

Para encontrar la población en el año 2010, primero debe encontrarse la ley de crecimiento particular implicada y determinar los valores de  $N_0$  y  $k$ . Sea el año 1970 el correspondiente a  $t = 0$ . Entonces  $t = 20$  en 1990 y  $t = 40$  en 2010. Se tiene,

$$N_0 = N(0) = 125\,000$$

Así,

$$N = 125\,000e^{kt}$$

Para encontrar  $k$ , se usa la condición de que  $N = 140\,000$  cuando  $t = 20$ :

$$140\,000 = 125\,000e^{20k}$$

Por consiguiente,

$$e^{20k} = \frac{140\,000}{125\,000} = 1.12$$

Por lo tanto, la ley de crecimiento es

$$\begin{aligned} N &= 125\,000e^{kt} \\ &= 125\,000(e^{20k})^{t/20} \\ &= 125\,000(1.12)^{t/20} \end{aligned} \tag{11}$$

Se establece  $t = 40$ , se obtiene la población esperada para 2010:

$$N = N(40) = 125\,000(1.12)^2 = 156\,800$$

Se observa que a partir de  $e^{20k} = 1.12$  se tiene  $20k = \ln(1.12)$  y por consiguiente  $k = \frac{\ln(1.12)}{20} \approx 0.0057$ , lo cual puede colocarse en  $N = 125\,000e^{kt}$  para obtener

$$N \approx 125\,000e^{0.0057t} \tag{12}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23



En el capítulo 4, se analizó el decaimiento radiactivo. Aquí se considerará este tema desde el punto de vista de una ecuación diferencial. Se sabe que la razón a la que un elemento radiactivo decae en un tiempo cualquiera es proporcional a la cantidad presente de ese elemento. Si  $N$  es la cantidad de sustancia radiactiva en el tiempo  $t$ , entonces la tasa de decaimiento está dado por

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{13}$$

La cantidad positiva  $\lambda$  (una letra griega que se lee “lambda”) se llama **constante de decaimiento**, y el signo menos indica que  $N$  decrece cuando  $t$  crece. Por lo tanto se tiene un decaimiento exponencial. A partir de la ecuación (10), la solución de esta ecuación diferencial es

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{14}$$

Si  $t = 0$ , entonces  $N = N_0 \cdot 1 = N_0$ , por lo que,  $N_0$  representa la cantidad de sustancia radiactiva presente cuando  $t = 0$ .

El tiempo que se requiere para que una sustancia radiactiva se reduzca a la mitad se llama **vida media** de la sustancia. En la sección 4.2 se demostró que la vida media está dada por

$$\text{vida media} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.69315}{\lambda} \tag{15}$$

Observe que la vida media depende de  $\lambda$ . En el capítulo 4, la figura 4.13 muestra la gráfica del decaimiento radiactivo.

### EJEMPLO 3 Determinación de la constante de decaimiento y de la vida media

*Si después de 50 días queda el 60% de una sustancia radiactiva, encuentre la constante de decaimiento y la vida media del elemento.*

**Solución:** De la ecuación (14),

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

donde  $N_0$  es la cantidad del elemento presente en  $t = 0$ . Cuando  $t = 50$ , entonces  $N = 0.67N_0$ , y se tiene

$$0.6N_0 = N_0 e^{-50\lambda}$$

$$0.6 = e^{-50\lambda}$$

$$-50\lambda = \ln(0.6) \quad (\text{forma logarítmica})$$

$$\lambda = -\frac{\ln(0.6)}{50} \approx 0.01022$$

Así,  $N \approx N_0 e^{-0.01022t}$ . La vida media, a partir de la ecuación (15), es

$$\frac{\ln 2}{\lambda} \approx 67.82 \text{ días}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27 

La radiactividad es útil en el fechado de restos de plantas fósiles y restos arqueológicos de origen orgánico. Las plantas y otros organismos vivos contienen una pequeña cantidad de carbono 14 radiactivo ( $^{14}\text{C}$ ), además del carbono ordinario ( $^{12}\text{C}$ ). Los átomos de  $^{12}\text{C}$  son estables, pero los de  $^{14}\text{C}$  decaen exponencialmente. Sin embargo, el  $^{14}\text{C}$  se forma en la atmósfera debido al efecto de los rayos cósmicos. Este  $^{14}\text{C}$  es absorbido por las plantas durante el proceso de fotosíntesis y reemplaza al que ha decaído. En consecuencia, la razón de átomos de  $^{14}\text{C}$  a  $^{12}\text{C}$  se considera constante durante un periodo largo. Cuando una planta muere, deja de absorber  $^{14}\text{C}$  y los átomos restantes de  $^{14}\text{C}$  decaen. Si se compara la proporción de  $^{14}\text{C}$  a  $^{12}\text{C}$  en una planta fósil con la de las plantas de la actualidad, se puede estimar la edad del fósil. La vida media del  $^{14}\text{C}$  es aproximadamente de 5730 años. Así, por ejemplo, si se encuentra que un fósil tiene una relación  $^{14}\text{C}$  a  $^{12}\text{C}$  que es la mitad de la de una sustancia similar que existe en la actualidad, se estimaría que el fósil tiene 5730 años de antigüedad.

#### **EJEMPLO 4 Determinación de la edad de una herramienta antigua**

Se encontró que una herramienta de madera hallada en una excavación en el Medio Oriente tiene una relación de  $^{14}\text{C}$  a  $^{12}\text{C}$  igual a 0.6 de la relación correspondiente a la de un árbol actual. Estime la edad de la herramienta al ciento de años más cercano.

**Solución:** Sea  $N$  la cantidad de  $^{14}\text{C}$  presente en la madera  $t$  años después de que se fabricó la herramienta. Entonces  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ , donde  $N_0$  es la cantidad de  $^{14}\text{C}$  cuando  $t = 0$ . Como la relación de  $^{14}\text{C}$  a  $^{12}\text{C}$  es igual a 0.6 de la relación correspondiente a la de un árbol actual, esto significa que debe encontrarse el valor de  $t$  para el cual  $N = 0.6N_0$ . Así, se tiene

$$0.6N_0 = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$0.6 = e^{-\lambda t}$$

$$-\lambda t = \ln(0.6) \quad (\text{forma logarítmica})$$

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln(0.6)$$

De la ecuación (15), la vida media es  $(\ln 2)/\lambda$ , que es igual a 5730, por lo que  $\lambda = (\ln 2)/5730$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{(\ln 2)/5730} \ln(0.6) \\ &= -\frac{5730 \ln(0.6)}{\ln 2} \\ &\approx 4223 \text{ años} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29 

## Problemas 15.5

En los problemas 1 a 8, resuelva las ecuaciones diferenciales.

- \*1.  $y' = 2xy^2$
2.  $y' = x^2y^2$
3.  $\frac{dy}{dx} - 3x\sqrt{x^2 + 1} = 0$
4.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$
5.  $\frac{dy}{dx} = y, y > 0$
6.  $y' = e^x y^3$
7.  $y' = \frac{y}{x}, x, y > 0$
8.  $\frac{dy}{dx} + xe^x = 0$

En los problemas 9 a 18 resuelva cada una de las ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones dadas.

9.  $y' = \frac{1}{y^2}; y(1) = 1$
10.  $y' = e^{x-y}; y(0) = 0$  (*Una pista:*  $e^{x-y} = e^x/e^y$ .)
11.  $e^y y' - x^2 = 0; y = 0$  cuando  $x = 0$
12.  $x^2 y' + \frac{1}{y^2} = 0; y(1) = 2$
13.  $(3x^2 + 2)^3 y' - xy^2 = 0; y(0) = \frac{3}{2}$
14.  $y' + x^3 y = 0; y = e$  cuando  $x = 0$
15.  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x\sqrt{1+y^2}}{y}; y > 0, y(1) = \sqrt{8}$
16.  $2y(x^3 + 2x + 1)\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2}{\sqrt{y^2 + 9}}; y(0) = 0$
17.  $2\frac{dy}{dx} = \frac{xe^{-y}}{\sqrt{x^2 + 3}}; y(1) = 0$
18.  $x(y^2 + 1)^{3/2} dx = e^{x^2} y dy; y(0) = 0$

19. **Costo** Encuentre la función de costo  $c = f(q)$  de un fabricante, dado que

$$(q + 1)^2 \frac{dc}{dq} = cq$$

y el costo fijo es  $e$ .

20. Encuentre  $f(2)$ , dado que  $f(1) = 0$  y que  $y = f(x)$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xe^{x-y}$$

21. **Circulación de dinero** Un país tiene 1000 millones de dólares de papel moneda en circulación. Cada semana, 25 millones se llevan a depositar a los bancos y la misma cantidad se paga. El gobierno decide reimprimir papel moneda nuevo; siempre que el papel moneda viejo llega a los bancos, se destruye y se reemplaza por nuevo. Sea  $y$  la cantidad de papel viejo (en millones de dólares) en circulación en el tiempo  $t$  (en semanas). Entonces  $y$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -0.025y$$

¿Cuánto tiempo será necesario para que el 95% del papel moneda en circulación quede reemplazado por papel nuevo? Redondee su respuesta a la semana más cercana. (*Una pista:* Si el 95% del papel es nuevo, entonces  $y$  es 5% de 1000.)

22. **Ingreso marginal y demanda** Suponga que la función de ingreso marginal de un monopolista está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{dq} = (50 - 4q)e^{-r/5}$$

Encuentre la ecuación de demanda para el producto del monopolista.

- \*23. **Crecimiento de la población** En cierta ciudad, la población en cualquier tiempo cambia a una razón proporcional a la población existente. Si en 1985 era de 40 000 habitantes y en 1995 de 48 000, encuentre una ecuación para la población en el tiempo  $t$ , donde  $t$  es el número de años después de 1985. Escriba su respuesta en dos formas, una de ellas debe contener a  $e$ . Se puede suponer que  $\ln 1.2 = 0.18$ . ¿Cuál es la población esperada en el año 2005?
24. **Crecimiento de la población** La población de un pueblo se incrementa por crecimiento natural a una razón proporcional al número  $N$  de personas presentes. Si la población en el tiempo  $t = 0$  es de 50 000, encuentre dos expresiones para la población  $N$ ,  $t$  años después, si el número de habitantes se duplica en 50 años. Suponga que  $\ln 2 = 0.69$ . Asimismo, encuentre  $N$  para  $t = 100$ .
25. **Crecimiento de la población** Suponga que la población del mundo en 1930 era de 2000 millones y que en 1960 era de 3000 millones. Si se supone una ley de crecimiento exponencial, ¿cuál es la población esperada en el año 2015? Dé su respuesta en términos de  $e$ .
26. **Crecimiento de la población** Si se supone crecimiento exponencial, ¿en cuántos años aproximadamente se duplicará una población, si ésta se triplica en 100 años? (*Una pista:* Sea  $N_0$  la población en  $t = 0$ .)
- \*27. **Radiactividad** Si después de 100 segundos queda el 30% de la cantidad inicial de una muestra radiactiva, encuentre la constante de decaimiento y la vida media del elemento.
28. **Radiactividad** Si después de 100 segundos ha *decaído* el 30% de la cantidad inicial de una muestra radiactiva, encuentre la constante de decaimiento y la vida media del elemento.
- \*29. **Fechado con carbono** Se encontró que un rollo de papiro egipcio tiene una relación  $^{14}\text{C}$  a  $^{12}\text{C}$  igual a 0.7 de la relación correspondiente a la de un material similar de la actualidad. Estime la edad del rollo al ciento de años más cercano.
30. **Fechado con carbono** Un espécimen arqueológico recientemente descubierto tiene una relación  $^{14}\text{C}$  a  $^{12}\text{C}$  igual a 0.1 de la relación correspondiente a la de un material orgánico similar en la actualidad. Estime la edad del espécimen al ciento de años más cercano.
31. **Crecimiento de la población** Suponga que una población tiene un crecimiento exponencial dado por  $dN/dt = kN$  para  $t \geq t_0$ . Suponga también que  $N = N_0$  cuando  $t = t_0$ . Encuentre  $\bar{N}$ , el tamaño de la población en el tiempo  $t$ .
32. **Radiactividad** El polonio 210 tiene una vida media aproximada de 140 días. (a) Encuentre la constante de decaimiento en términos de  $\ln 2$ . (b) ¿Qué fracción de la cantidad original de una muestra de polonio 210 queda después de un año?
33. **Radiactividad** Los isótopos radiactivos se usan en los diagnósticos médicos como indicadores para determinar las anomalías que puedan existir en un órgano. Por ejemplo, si se ingiere yodo radiactivo, éste es absorbido después de cierto tiempo por la glándula tiroides. Con el uso de un detector, puede medirse la razón a la que el yodo se absorbe y determinarse si es normal. Suponga que el tecnecio 99m radiactivo, que tiene una vida media de 6 horas, se va a usar en un estudio de cerebro dentro de 2 horas. ¿Cuál debe ser su actividad ahora, si su actividad cuando se use debe ser de 10 unidades? Dé su respuesta con un decimal. (*Una pista:* En la ecuación (14), sea  $N$  = actividad dentro de  $t$  horas y  $N_0$  = actividad ahora.)

- 34. Radiactividad** Una sustancia radiactiva que tiene una vida media de ocho días se va a implantar de manera temporal en un paciente de un hospital hasta que queden tres quintas partes de la cantidad originalmente presente. ¿Cuánto tiempo permanecerá la sustancia implantada en el paciente?
- 35. Ecología** En un bosque ocurre el depósito natural de basura, tal como hojas y ramas caídas, animales muertos, etcétera.<sup>7</sup> Sea  $A = A(t)$  la cantidad de basura presente en el tiempo  $t$ , donde  $A(t)$  se expresa en gramos por metro cuadrado y  $t$  está en años. Suponga que no hay basura en  $t = 0$ . Así,  $A(0) = 0$ . Suponga que:
- La basura cae al suelo continuamente a razón constante de 200 gramos por metro cuadrado cada año.
  - La basura acumulada se descompone continuamente a razón del 50% de la cantidad presente por año (que es  $0.50A$ ).

La diferencia de las dos tasas es la razón de cambio de la cantidad presente de basura con respecto al tiempo:

$$\left(\begin{array}{l} \text{tasa de cambio de} \\ \text{la basura presente} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{l} \text{tasa de caída} \\ \text{al suelo} \end{array}\right) - \left(\begin{array}{l} \text{tasa de} \\ \text{descomposición} \end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{dA}{dt} = 200 - 0.50A$$

### OBJETIVO

Desarrollar la función logística como una solución de una ecuación diferencial. Modelar el esparcimiento de un rumor. Analizar y aplicar la ley de enfriamiento de Newton.

Despeje  $A$ . Al gramo más cercano, determine la cantidad de basura por metro cuadrado después de un año.

- 36. Utilidad y publicidad** Cierta compañía determina que la razón de cambio de la utilidad neta mensual  $P$ , como una función del gasto publicitario mensual  $x$ , es proporcional a la diferencia entre una cantidad fija, \$150 000 y  $2P$ ; esto es,  $dP/dx$  es proporcional a  $\$150\,000 - 2P$ . Además, si no se gasta dinero en publicidad mensual, la utilidad neta mensual es de \$15 000; si se gastan \$1000 en publicidad mensual, la utilidad neta mensual es de \$70 000. ¿Cuál sería la utilidad neta mensual si se gastaran \$2000 en publicidad cada mes?
- 37. Valor de una máquina** El valor de cierta máquina se depreció un 25% en el primer año después de su compra. La razón de la depreciación posterior es proporcional a su valor. Suponga que dicha máquina se compró nueva el 1 de julio de 1995 en \$80 000 y se valuó en \$38 900 el 1 de enero de 2006.
- Determine una fórmula que exprese el valor  $V$  de la máquina en términos de  $t$ , el número de años después del 1 de julio de 1996.
  - Use la fórmula del inciso (a) para determinar el año y el mes en que la máquina tiene un valor de exactamente \$14 000.

## 15.6 Más aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

### Crecimiento logístico

En la sección anterior se encontró que si el número  $N$  de individuos en una población en el tiempo  $t$  sigue una ley de crecimiento exponencial, entonces  $N = N_0 e^{kt}$ , donde  $k > 0$  y  $N_0$  es la población cuando  $t = 0$ . Esta ley supone que en el tiempo  $t$  la razón de crecimiento,  $dN/dt$ , de la población es proporcional al número de individuos en la población. Esto es,  $dN/dt = kN$ .

Bajo crecimiento exponencial, una población llegaría a ser infinitamente grande con el paso del tiempo. Sin embargo, en realidad, cuando una población llega a ser suficientemente grande existen factores ambientales que hacen más lenta la razón de crecimiento. Ejemplos son la disponibilidad de alimentos, los depredadores, la falta de espacio suficiente, etcétera. Estos factores ocasionan que en algún momento  $dN/dt$  comience a decrecer. Es razonable suponer que el tamaño de la población está limitado a cierto número máximo  $M$ , donde  $0 < N < M$  y que cuando  $N \rightarrow M$ ,  $dN/dt \rightarrow 0$ , y el tamaño de la población tiende a ser estable.

En resumen, se busca un modelo de población que tenga un crecimiento inicial exponencial, pero que también incluya los efectos de la resistencia ambiental a grandes crecimientos de la población. Tal modelo se obtiene al multiplicar el lado derecho de  $dN/dt = kN$  por el factor  $(M - N)/M$ :

$$\frac{dN}{dt} = kN \left( \frac{M - N}{M} \right)$$

Observe que si  $N$  es pequeña, entonces  $(M - N)/M$  es cercano a 1 y se tiene un crecimiento que es aproximadamente exponencial. Cuando  $N \rightarrow M$ , entonces  $M - N \rightarrow 0$  y  $dN/dt \rightarrow 0$ , como en el modelo que se busca. Debido a que  $k/M$  es una constante, ésta puede reemplazarse por  $K$ . Así,

$$\frac{dN}{dt} = KN(M - N) \tag{1}$$

Lo anterior establece que la razón de crecimiento es proporcional al producto del tamaño de la población y la diferencia entre el tamaño máximo y el tamaño de la población

<sup>7</sup>R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

actual. Ahora es posible determinar  $N$  en la ecuación diferencial (1) mediante el método de separación de variables:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{N(M-N)} &= K dt \\ \int \frac{1}{N(M-N)} dN &= \int K dt\end{aligned}\tag{2}$$

La integral en el lado izquierdo puede encontrarse con la fórmula 5 de la tabla de integrales del apéndice B. Así, la ecuación (2) se convierte en

entonces,

$$\frac{1}{M} \ln \left| \frac{N}{M-N} \right| = Kt + C$$

$$\ln \left| \frac{N}{M-N} \right| = MKt + MC$$

Como  $N > 0$  y  $M - N > 0$ , es posible escribir

$$\ln \frac{N}{M-N} = MKt + MC$$

En forma exponencial, se tiene

$$\frac{N}{M-N} = e^{MKt+MC} = e^{MKt} e^{MC}$$

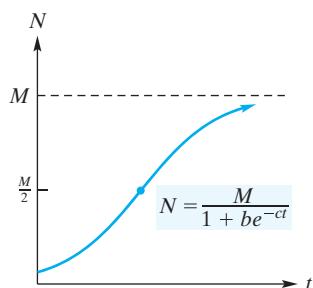
Al reemplazar la constante positiva  $e^{MC}$  por  $A$  y despejar  $N$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{N}{M-N} &= Ae^{MKt} \\ N &= (M-N)Ae^{MKt} \\ N &= MAe^{MKt} - NAe^{MKt} \\ NAe^{MKt} + N &= MAe^{MKt} \\ N(Ae^{MKt} + 1) &= MAe^{MKt}, \\ N &= \frac{MAe^{MKt}}{Ae^{MKt} + 1}\end{aligned}$$

Al dividir el numerador y el denominador entre  $Ae^{MKt}$ , resulta

$$N = \frac{M}{1 + \frac{1}{Ae^{MKt}}} = \frac{M}{1 + \frac{1}{A}e^{-MKt}}$$

Al reemplazar  $1/A$  por  $b$  y  $MK$  por  $c$  se obtiene la llamada *función logística*:



### Función logística

La función definida por

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}\tag{3}$$

se llama **función logística** o **función logística de Verhulst-Pearl**.

La gráfica de la ecuación (3), llamada *curva logística*, tiene forma de S, como se muestra en la figura 15.3. Observe que la recta  $N = M$  es una asintota horizontal; esto es,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M}{1 + be^{-ct}} = \frac{M}{1 + b(0)} = M$$

Además, de la ecuación (1), la tasa de crecimiento es

$$KN(M-N)$$

que puede considerarse como una función de  $N$ . Para encontrar cuándo ocurre la máxima razón de crecimiento, se despeja  $N$  de  $\frac{d}{dN}[KN(M - N)] = 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dN}[KN(M - N)] &= \frac{d}{dN}[K(MN - N^2)] \\ &= K[M - 2N] = 0\end{aligned}$$

Así,  $N = M/2$ . En otras palabras, la razón de crecimiento aumenta hasta que el tamaño de la población es  $M/2$  y después decrece. La razón máxima de crecimiento ocurre cuando  $N = M/2$  y corresponde a un punto de inflexión en la gráfica de  $N$ . Para encontrar el valor de  $t$  para el cual ocurre esto, se sustituye  $M/2$  por  $N$  en la ecuación (3) y se despeja  $t$ :

$$\begin{aligned}\frac{M}{2} &= \frac{M}{1 + be^{-ct}} \\ 1 + be^{-ct} &= 2 \\ e^{-ct} &= \frac{1}{b} \\ e^{ct} &= b \\ ct &= \ln b \quad (\text{forma logarítmica}) \\ t &= \frac{\ln b}{c}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la razón máxima de crecimiento ocurre en el punto  $((\ln b)/c, M/2)$ .

Se observa que en la ecuación (3) es posible reemplazar  $e^{-c}$  por  $C$  y entonces la función logística tiene la siguiente forma:

### Forma alternativa de la función logística

$$N = \frac{M}{1 + bC^t}$$

#### EJEMPLO 1 Crecimiento logístico de la membresía de un club

Suponga que el número máximo de socios en un club nuevo será de 800 personas debido a las limitaciones de espacio. Hace un año, el número inicial de socios era de 50 personas, pero ahora es de 200. Si el número de socios crece como una función logística, ¿cuántos socios habrá dentro de tres años?

**Solución:** Sea  $N$  el número de socios inscritos  $t$  años después de la formación del club. Entonces, de la ecuación (3),

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}$$

Aquí,  $M = 800$  y cuando  $t = 0$ , se tiene  $N = 50$ . De manera que

$$\begin{aligned}50 &= \frac{800}{1 + b} \\ 1 + b &= \frac{800}{50} = 16 \\ b &= 15\end{aligned}$$

Así,

$$N = \frac{800}{1 + 15e^{-ct}} \quad (4)$$

Cuando  $t = 1$ , entonces  $N = 200$ , así se tiene

$$200 = \frac{800}{1 + 15e^{-c}}$$

$$1 + 15e^{-c} = \frac{800}{200} = 4$$

$$e^{-c} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Por consiguiente,  $c = -\ln \frac{1}{5} = \ln 5$ . En vez de sustituir este valor de  $c$  en la ecuación (4), es más conveniente sustituir el valor de  $e^{-c}$  ahí:

$$N = \frac{800}{1 + 15 \left(\frac{1}{5}\right)^t}$$

Dentro de tres años  $t$  será 4. Por lo tanto,

$$N = \frac{800}{1 + 15 \left(\frac{1}{5}\right)^4} \approx 781$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5 

### Modelado de la difusión de un rumor

Ahora se considerará un modelo simplificado<sup>8</sup> de cómo se difunde un rumor en una población del tamaño  $M$ . Una situación similar sería la propagación de una epidemia o de una nueva moda.

Sea  $N = N(t)$  el número de personas que conocen el rumor en el tiempo  $t$ . Se supondrá que aquellos que conocen el rumor lo propagan en forma aleatoria entre la población, y que quienes lo oyen se convierten en difusores del mismo. Además, se supondrá que cada conocedor del rumor lo comunica a  $k$  individuos por unidad de tiempo. (Algunos de estos  $k$  individuos pueden conocer el rumor previamente). Se busca una expresión para la razón de crecimiento de conocedores del rumor. En una unidad de tiempo, casi cada una de  $N$  personas comunicarán el rumor a  $k$  personas. Así, el número total de personas que oyen el rumor en un tiempo unitario es (aproximadamente)  $Nk$ . Sin embargo, se tiene interés sólo en los *nuevos* conocedores. La proporción de la población que no conoce el rumor es  $(M - N)/M$ . De aquí que el número total de nuevos conocedores del rumor sea

$$Nk \left( \frac{M - N}{M} \right)$$

que puede escribirse  $(k/M)N(M - N)$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{k}{M} N(M - N) \\ &= KN(M - N), \quad \text{donde } K = \frac{k}{M} \end{aligned}$$

Esta ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (1), por lo que su solución, a partir de la ecuación (3), es una *función logística*:

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}$$

### EJEMPLO 2 Rumor en un campus

*En una gran universidad de 45 000 estudiantes, una estudiante de sociología investiga la propagación de un rumor en el campus. Cuando comienza su investigación, ella determina que 300 estudiantes conocen el rumor. Después de una semana, determina que 900 lo conocen. Estime el número de estudiantes que lo conocen después de cuatro semanas de comenzada la investigación, se supone un crecimiento logístico. Dé la respuesta al millar más cercano.*

**Solución:** Sea  $N$  el número de estudiantes que conocen el rumor  $t$  semanas después de que comienza la investigación. Entonces,

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}$$

<sup>8</sup>Es decir, más simplificado que el modelo descrito en la aplicación práctica del capítulo 8.

Aquí  $M$ , el tamaño de la población, es de 45 000 y cuando  $t = 0$ ,  $N = 300$ . Así, se tiene

$$\begin{aligned}300 &= \frac{45\,000}{1+b} \\1+b &= \frac{45\,000}{300} = 150 \\b &= 149\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$N = \frac{45\,000}{1+149e^{-ct}}$$

Cuando  $t = 1$ , entonces  $N = 900$ . Por consiguiente,

$$\begin{aligned}900 &= \frac{45\,000}{1+149e^{-c}} \\1+149e^{-c} &= \frac{45\,000}{900} = 50\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $e^{-c} = \frac{49}{149}$ , entonces

$$N = \frac{45\,000}{1+149\left(\frac{49}{149}\right)^t}$$

Cuando  $t = 4$ ,

$$N = \frac{45\,000}{1+149\left(\frac{49}{149}\right)^4} \approx 16\,000$$

Después de cuatro semanas, aproximadamente 16 000 estudiantes conocerán el rumor.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3 

### Ley del enfriamiento de Newton

Se concluye esta sección con una interesante aplicación de una ecuación diferencial. Si se comete un homicidio, la temperatura del cuerpo de la víctima disminuirá gradualmente de  $37^\circ\text{C}$  (temperatura normal del cuerpo) a la temperatura del entorno (temperatura ambiente). En general, la temperatura del cuerpo en proceso de enfriamiento cambia a una razón proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente. Este enunciado se conoce como **ley de enfriamiento de Newton**. Así, si  $T(t)$  es la temperatura del cuerpo en el tiempo  $t$  y la del medio ambiente es  $a$ , entonces

$$\frac{dT}{dt} = k(T - a)$$

donde  $k$  es una constante de proporcionalidad. Por lo tanto, la ley de enfriamiento de Newton es una ecuación diferencial. Puede aplicarse para determinar el tiempo en que se cometió un homicidio, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

#### EJEMPLO 3 Tiempo del asesinato

*Un rico industrial fue encontrado asesinado en su casa. La policía llegó a la escena a las 11:00 P.M. La temperatura del cadáver en ese momento era de  $31^\circ\text{C}$  y una hora después era de  $30^\circ\text{C}$ . La temperatura de la habitación en que se encontró el cadáver era de  $22^\circ\text{C}$ . Estime la hora en que ocurrió el asesinato.*

**Solución:** Sean  $t$  el número de horas después de que fue descubierto el cadáver y  $T(t)$  su temperatura (en grados Celsius) en el tiempo  $t$ . Se desea encontrar el valor de  $t$  para el cual  $T = 37$  (temperatura normal del cuerpo humano). Este valor de  $t$  será, por supuesto, negativo. Por la ley de enfriamiento de Newton,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - a)$$

donde  $k$  es una constante y  $a$  (la temperatura ambiente) es  $22$ . Así,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 22)$$

Al separar variables, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dT}{T-22} &= k dt \\ \int \frac{dT}{T-22} &= \int k dt \\ \ln|T-22| &= kt + C\end{aligned}$$

Debido a que  $T - 22 > 0$ ,

$$\ln(T-22) = kt + C$$

Cuando  $t = 0$ , entonces  $T = 31$ . Por lo tanto,

$$\ln(31-22) = k \cdot 0 + C$$

$$C = \ln 9$$

Por consiguiente,

$$\ln(T-22) = kt + \ln 9$$

$$\ln(T-22) - \ln 9 = kt$$

$$\ln \frac{T-22}{9} = kt \quad \left( \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \right)$$

Cuando  $t = 1$ , entonces  $T = 30$ , por lo que

$$\ln \frac{30-22}{9} = k \cdot 1$$

$$k = \ln \frac{8}{9}$$

Por lo tanto,

$$\ln \frac{T-22}{9} = t \ln \frac{8}{9}$$

Ahora encuentre  $t$  cuando  $T = 37$ :

$$\begin{aligned}\ln \frac{37-22}{9} &= t \ln \frac{8}{9} \\ t &= \frac{\ln(15/9)}{\ln(8/9)} \approx -4.34\end{aligned}$$

De acuerdo con esto, el crimen ocurrió aproximadamente 4.34 horas *antes* del tiempo en que fue descubierto el cadáver (11:00 P.M.). Como 4.34 horas son (aproximadamente) 4 horas 20 minutos, el industrial fue asesinado alrededor de las 6:40 P.M.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9 

## Problemas 15.6

- Población** La población de una ciudad sigue un crecimiento logístico y está limitada a 100 000. Si la población en 1995 era de 50 000 y en 2000 de 60 000, ¿cuál será la población en el año 2005? Dé su respuesta a la centena más cercana.
- Producción** Una compañía cree que la producción de cierto artículo en sus instalaciones actuales tendrá un crecimiento logístico. En la actualidad se producen 200 unidades diarias y esta cantidad crecerá a 300 por día en un año. Si la producción está limitada a 500 unidades por día, ¿cuál es la producción diaria prevista para dentro de dos años? Dé su respuesta a la unidad más cercana.
- Difusión de un rumor** En una universidad de 40 000 estudiantes, la administración sostiene reuniones para analizar la idea de traer una importante banda de rock para el fin de semana de regreso a clases. Antes de anunciar oficialmente los planes, el concejo administrativo difunde la información acerca del evento como un rumor. Al final de una semana, 100 personas conocen el rumor. Suponga un crecimiento logístico, ¿cuánta gente conocerá el rumor después de dos semanas? Dé su respuesta a la centena más cercana.
- Difusión de una moda** Una moda nueva ha llegado a un campus universitario de 30 000 estudiantes. El periódico de la universidad piensa que sus lectores estarán interesados en un artículo sobre esta moda. A un reportero se le encarga el artículo cuando el número de estudiantes que la han adoptado es de 400. Una semana después, ya la practican 1200 estudiantes. Suponga un crecimiento logístico, encuentre una fórmula para el número  $N$  que seguirán la moda  $t$  semanas después del encargo al reportero.
- Brote de gripe** En una ciudad de 100 000 habitantes ocurre un brote de gripe. Cuando el departamento de salud comienza a registrar casos, hay sólo 500 personas infectadas. Una semana

después hay 1000 infectados. Suponga un crecimiento logístico, estime el número de personas infectadas dos semanas después de que comenzó el registro.

- 6. Función sigmoidal** Un caso muy especial de la función logística definida por la ecuación (3) es la *función sigmoidal*, que se obtiene al tomar  $M = b = c = 1$  de manera que se tiene

$$N(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

- (a) Muestre de manera directa que la función sigmoidal es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = N(1 - N)$$

y la condición inicial  $N(0) = 1/2$ .

- (b) Muestre que  $(0, \frac{1}{2})$  es un punto de inflexión de la gráfica de la función sigmoidal.

- (c) Muestre que la función

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} - \frac{1}{2}$$

es simétrica con respecto al origen.

- (d) Explique cómo el inciso (c) anterior demuestra que la función sigmoidal es *simétrica con respecto al punto  $(0, \frac{1}{2})$* , y al mismo tiempo explique lo que esto significa.

- (e) Bosqueje la gráfica de la función sigmoidal.

- 7. Biología** En un experimento,<sup>9</sup> se colocaron cinco *Paramecia* en un tubo de ensayo que contenía un medio nutritivo. El número  $N$  de *Paramecia* en el tubo al final de  $t$  días está dado aproximadamente por

$$N = \frac{375}{1 + e^{5.2 - 2.3t}}$$

- (a) Demuestre que esta ecuación se puede escribir como

$$N = \frac{375}{1 + 181.27e^{-2.3t}}$$

por lo que es una función logística.

- (b) Encuentre  $\lim_{t \rightarrow \infty} N$ .

- 8. Biología** En un estudio del crecimiento de una colonia de organismos unicelulares,<sup>10</sup> se obtuvo la siguiente ecuación

$$N = \frac{0.2524}{e^{-2.128x} + 0.005125} \quad 0 \leq x \leq 5$$

donde  $N$  es el área estimada del crecimiento en centímetros cuadrados y  $x$  es la edad de la colonia en días después de la primera observación.

- (a) Ponga esta ecuación en forma de una ecuación logística.

- (b) Encuentre el área cuando la edad de la colonia es 0.

- 9. Tiempo de un asesinato** Se cometió un homicidio y la policía descubrió el cuerpo de la víctima a las 4:15 A.M. En ese momento la temperatura del cadáver era de  $28^{\circ}\text{C}$ . Una hora después su temperatura era de  $20^{\circ}\text{C}$ . Después de consultar con la oficina meteorológica, se determinó que la temperatura

en el lugar del crimen era de  $-10^{\circ}\text{C}$  desde las 11:00 P.M. hasta las 6:00 A.M. ¿A qué hora ocurrió el asesinato?

- 10. Formación de enzimas** Una enzima es una proteína que actúa como catalizador para incrementar la velocidad de una reacción que ocurre en las células. En cierta reacción, una enzima A se convierte en otra enzima B. La enzima B actúa como catalizador en su propia formación. Sean  $p$  la cantidad de enzima B en el tiempo  $t$ , e  $I$  la cantidad total de ambas enzimas cuando  $t = 0$ . Suponga que la razón de formación de B es proporcional a  $p(I - p)$ . Sin usar el cálculo en forma directa, encuentre el valor de  $p$  para el cual la razón de formación será un máximo.

- 11. Recolección de fondos** Un pequeño pueblo decide realizar una colecta para comprar un camión de bomberos que cuesta \$200 000. La cantidad inicial es de \$50 000. Con base en colectas anteriores, se determinó que  $t$  meses después del inicio la razón  $dx/dt$  con la que se recibe dinero es proporcional a la diferencia entre la cantidad deseada de \$200 000 y la cantidad total  $x$  en el fondo en ese momento. Después de un mes se tienen \$100 000 en el fondo. ¿Cuánto se tendrá después de tres meses?



- 12. Tasa de nacimientos** En un análisis de las propiedades inesperadas de modelos matemáticos de población, Bailey<sup>11</sup> considera el caso en que la tasa de nacimientos por individuo es proporcional al tamaño  $N$  de la población en el tiempo  $t$ .

Como la tasa de crecimiento por individuo es  $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ , esto significa que

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = kN$$

de manera que

$$\frac{dN}{dt} = kN^2 \quad (\text{sujeta a } N = N_0 \text{ en } t = 0)$$

donde  $k > 0$ . Demuestre que

$$N = \frac{N_0}{1 - kN_0 t}$$

Use este resultado para demostrar que

$$\lim N = \infty \quad \text{cuando } t \rightarrow \left(\frac{1}{kN_0}\right)^{-}$$

Esto significa que en un intervalo finito de tiempo hay una cantidad infinita de crecimiento. Tal modelo podría ser útil sólo para un crecimiento rápido en un intervalo corto de tiempo.

- 13. Población** Suponga que la razón de crecimiento de una población es proporcional a la diferencia entre algún tamaño máximo  $M$  y el número  $N$  de individuos en la población en el tiempo  $t$ . Suponga también que cuando  $t = 0$ , el tamaño de la población es  $N_0$ . Encuentre una fórmula para  $N$ .

<sup>9</sup>G. F. Gause, *The Struggle for Existence* (Nueva York: Hafner Publishing Co., 1964).

<sup>10</sup>A. J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology* (Nueva York: Dover Publications, Inc., 1956).

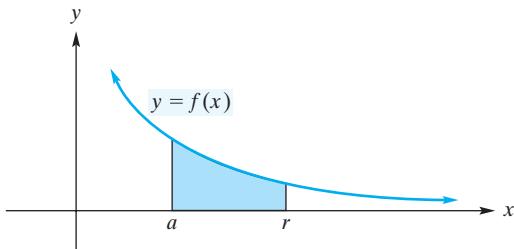
<sup>11</sup>N. T. J. Bailey, *The Mathematical Approach to Biology and Medicine*, (Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1967).

**OBJETIVO****15.7 Integrales impropias<sup>12</sup>**

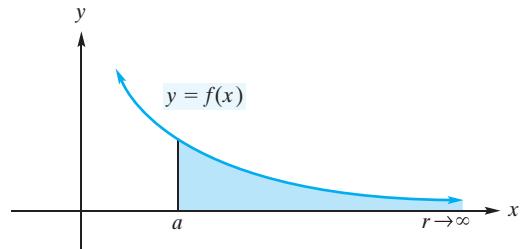
Definir y evaluar integrales impropias.

Suponga que  $f(x)$  es continua y no negativa para  $a \leq x < \infty$ . (Vea la figura 15.4.) Se sabe que la integral  $\int_a^r f(x) dx$  es el área de la región entre la curva  $y = f(x)$  y el eje  $x$ , desde  $x = a$  hasta  $x = r$ . Cuando  $r \rightarrow \infty$ , se puede pensar en

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(x) dx$$



**FIGURA 15.4** Área desde  $a$  hasta  $r$ .



**FIGURA 15.5** Área desde  $a$  hasta  $r$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

como en el área de la región no acotada y que aparece sombreada en la figura 15.5. Este límite que se abrevia por

$$\int_a^\infty f(x) dx \quad (1)$$

se llama **integral impropia**. Si este límite existe, se dice que  $\int_a^\infty f(x) dx$  es **convergente** y que la integral impropia *converge* a ese límite. En este caso, se considera que la región no acotada tiene un área finita, y esta área se representada mediante  $\int_a^\infty f(x) dx$ . Si el límite no existe, se dice que la integral impropia es **divergente** y la región no tiene un área finita.

Es posible remover la restricción de que  $f(x) \geq 0$ . En general, la integral impropia  $\int_a^\infty f(x) dx$  está definida por

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(x) dx$$

Otros tipos de integrales impropias son

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx \quad (3)$$

En cada uno de los tres tipos de integrales impropias [(1), (2) y (3)], el intervalo sobre el que se evalúa la integral tiene longitud infinita. La integral impropia en (2) se define como

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^b f(x) dx$$

Si este límite existe, se dice que  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  es convergente. En caso contrario, es divergente. La integral impropia en (3) se definirá después del ejemplo siguiente.

**EJEMPLO 1** **Integrales impropias de la forma**  $\int_a^\infty f(x) dx$  **y**  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$

Determine si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes. Para las integrales que sean convergentes, calcule su valor.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1**

**INTEGRALES IMPROPIAS DE LA FORMA**  $\int_a^\infty f(x) dx$  Y  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$

La razón a la que el cuerpo humano elimina cierta droga de su sistema, se puede aproximar por medio de  $R(t) = 3e^{-0.1t} - 3e^{-0.3t}$ , donde  $R(t)$  está en milímetros por minuto y  $t$  es el tiempo en minutos desde que se toma la droga. Determine  $\int_0^\infty (3e^{-0.1t} - 3e^{-0.3t}) dt$ , la cantidad total de droga que se elimina.

<sup>12</sup>En caso de que no vaya a cubrirse el capítulo 16, esta sección se puede omitir.

a.  $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$

**Solución:**

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r x^{-3} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{x^{-2}}{2} \Big|_1^r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2r^2} + \frac{1}{2} \right] = -0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$  converge a  $\frac{1}{2}$ .

b.  $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

**Solución:**

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 e^x dx &= \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 e^x dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} e^x \Big|_r^0 \\ &= \lim_{r \rightarrow -\infty} (1 - e^r) = 1 - 0 = 1 \quad (e^0 = 1)\end{aligned}$$

(Aquí se usa el hecho de que cuando  $r \rightarrow -\infty$ , la gráfica de  $y = e^r$  se aproxima al eje  $r$ , por lo que  $e^r \rightarrow 0$ .) Por lo tanto,  $\int_{-\infty}^0 e^x dx$  converge a 1.

c.  $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

**Solución:**

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r x^{-1/2} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} 2x^{1/2} \Big|_1^r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} 2(\sqrt{r} - 1) = \infty\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral impropia diverge.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

La integral impropia  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$  se define en términos de integrales impropias de las formas (1) y (2):

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx \quad (4)$$

Si ambas integrales en el lado derecho de la ecuación (4) son convergentes, entonces se dice que  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$  es convergente; en caso contrario, es divergente.

### EJEMPLO 2 Integral impropia de la forma $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$

Determine si  $\int_{-\infty}^\infty e^x dx$  es convergente o divergente.

**Solución:**

$$\int_{-\infty}^\infty e^x dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^\infty e^x dx$$

Por el ejemplo 1(b),  $\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$ . Por otra parte,

$$\int_0^\infty e^x dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^x dx = \lim_{r \rightarrow \infty} e^x \Big|_0^r = \lim_{r \rightarrow \infty} (e^r - 1) = \infty$$

Como  $\int_0^\infty e^x dx$  es divergente,  $\int_{-\infty}^\infty e^x dx$  también es divergente.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

● **EJEMPLO 3 Función de densidad**

En estadística, una función  $f$  se llama función de densidad si  $f(x) \geq 0$  y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Suponga que

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una función de densidad. Encuentre  $k$ .

**Solución:** Se escribe la ecuación  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  como

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx = 1$$

Debido a que  $f(x) = 0$  para  $x < 0$ ,  $\int_{-\infty}^0 f(x) dx = 0$ . Así,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} ke^{-x} dx &= 1 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r ke^{-x} dx &= 1 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} -ke^{-x} \Big|_0^r &= 1 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} (-ke^{-r} + k) &= 1 \\ 0 + k &= 1 \quad (\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-r} = 0) \\ k &= 1 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13 ● ● ●

## Problemas 15.7

En los problemas 1 a 12, determine las integrales en caso de que existan. Indique cuáles son divergentes.

1.  $\int_3^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$

\*3.  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

5.  $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$

7.  $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

9.  $\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{(x+1)^2} dx$

\*11.  $\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2} dx$

2.  $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x-1)^2} dx$

4.  $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} dx$

6.  $\int_0^{\infty} (5 + e^{-x}) dx$

8.  $\int_4^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$

10.  $\int_{-\infty}^3 \frac{1}{\sqrt{7-x}} dx$

12.  $\int_{-\infty}^{\infty} (5 - 3x) dx$

\*13. **Función de densidad** La función de densidad para la vida en horas  $x$ , de un componente electrónico en un medidor de radiación, está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2} & \text{para } x \geq 800 \\ 0 & \text{para } x < 800 \end{cases}$$

(a) Si  $k$  satisface la condición de que  $\int_{800}^{\infty} f(x) dx = 1$ , encuentre  $k$ .

(b) La probabilidad de que el componente dure por lo menos 1200 horas está dada por  $\int_{1200}^{\infty} f(x) dx$ . Evalúe esta integral.

14. **Función de densidad** Dada la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-2x} & \text{para } x \geq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

encuentre  $k$ . (Una pista: Vea el ejemplo 3.)

15. **Utilidades futuras** Para un negocio, el valor presente de todas las utilidades futuras a un interés anual  $r$  compuesto continuamente, está dada por

$$\int_0^{\infty} p(t)e^{-rt} dt$$

donde  $p(t)$  es la utilidad anual en dólares en el tiempo  $t$ . Con  $p(t) = 240\,000$  y  $r = 0.06$ , evalúe esta integral.

16. **Psicología** En un modelo psicológico para la detección de señales,<sup>13</sup> la probabilidad  $\alpha$  (una letra griega que se lee “alfa”) de reportar una señal cuando no hay presencia de ninguna señal está dada por

$$\alpha = \int_{x_c}^{\infty} e^{-x} dx \quad x \geq 0$$

<sup>13</sup>D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1973).

La probabilidad  $\beta$  (una letra griega que se lee “beta”) de detectar una señal cuando hay presencia de una es

$$\beta = \int_{x_c}^{\infty} ke^{-kx} dx \quad x \geq 0$$

En ambas integrales,  $x_c$  es una constante (llamada valor de criterio en este modelo). Encuentre  $\beta$  y  $\beta$  si  $k = \frac{1}{8}$ .

17. Encuentre el área de la región en el tercer cuadrante limitada por la curva  $y = e^{3x}$  y el eje  $x$ .  
 18. **Economía** En el análisis de la entrada de una empresa a una industria, Stigler<sup>14</sup> utiliza la ecuación

$$V = \pi_0 \int_0^{\infty} e^{\theta t} e^{-\rho t} dt$$

donde  $\pi_0$ ,  $\theta$  (letra griega que se lee “teta”), y  $\eta$  (letra griega que se lee “ro”) son constantes. Demuestre que  $V = \pi_0 / (\rho - \theta)$  si  $\theta < \rho$ .

19. **Población** La razón de crecimiento predicha por año de la población de cierta ciudad pequeña, está dada por

$$\frac{40\,000}{(t+2)^2}$$

donde  $t$  es el número de años, contados a partir de ahora. A largo plazo (es decir, cuando  $t \rightarrow \infty$ ), ¿cuál es el cambio esperado en la población a partir del nivel actual?

## 15.8 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

<b>Sección 15.1</b>	<b>Integración por partes</b> integración por partes	Ej. 1, p. 686
<b>Sección 15.2</b>	<b>Integración mediante fracciones parciales</b> función racional propia factores lineales distintos factores lineales repetidos factores cuadráticos irreducibles distintos factores cuadráticos irreducibles repetidos	Ej. 4, p. 693 Ej. 1, p. 691 Ej. 2, p. 691 Ej. 3, p. 692 Ej. 4, p. 693
<b>Sección 15.3</b>	<b>Integración por medio de tablas</b> valor presente y monto acumulado de una anualidad continua	Ej. 8, p. 699
<b>Sección 15.4</b>	<b>Valor promedio de una función</b> valor promedio de una función	Ej. 1, p. 701
<b>Sección 15.5</b>	<b>Ecuaciones diferenciales</b> ecuación diferencial de primer orden separación de variables crecimiento y decaimiento exponencial constante de decaimiento vida media	Ej. 1, p. 704 Ej. 3, p. 706
<b>Sección 15.6</b>	<b>Más aplicaciones de ecuaciones diferenciales</b> función logística ley de enfriamiento de Newton	Ej. 1, p. 711 Ej. 3, p. 713
<b>Sección 15.7</b>	<b>Integrales impropias</b> integral impropia convergente divergente $\int_a^{\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^b f(x) dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	Ej. 1, p. 716 Ej. 2, p. 717

### Resumen

En ocasiones, es posible determinar con facilidad una integral cuya forma es  $\int u dv$ , donde  $u$  y  $v$  son funciones de la misma variable al aplicar la fórmula de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Una función racional propia puede integrarse al aplicar la técnica de las fracciones parciales (aunque *algunas* de las fracciones parciales que pueden resultar tienen integrales que están fuera del alcance de este libro). Aquí la función racional se expresa como una suma de fracciones, cada una de las cuales es más fácil de integrar que la función original.

Para determinar una integral que no tiene una forma familiar, a veces es posible hacerla coincidir con una fórmula de una tabla de integrales. Sin embargo, puede ser necesario transformarla en una forma equivalente antes de que pueda existir coincidencia.

Una anualidad es una serie de pagos en un periodo de tiempo. Suponga que los pagos se hacen continuamente durante  $T$  años, de manera que un pago en el tiempo  $t$  es a la tasa de  $f(t)$  por año. Si la tasa anual de interés es  $r$  compuesta de manera continua, entonces el valor presente de la anualidad continua está dado por

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt} dt$$

y el monto acumulado está dado por

$$S = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)} dt$$

<sup>14</sup>G. Stigler, *The Theory of Price*, 3a. ed. (Nueva York: Macmillan Publishing Company, 1966), p. 344.

El valor promedio  $\bar{f}$  de una función  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  está dado por

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Una ecuación que involucra la derivada de una función desconocida se llama ecuación diferencial. Si la derivada de mayor orden que se tiene es la primera, la ecuación se llama ecuación diferencial de primer orden. Algunas ecuaciones diferenciales de primer orden pueden resolverse por el método de separación de variables. En ese método, se considera la derivada como un cociente de diferenciales y se escribe la ecuación de manera que cada lado contenga sólo una variable y una sola diferencial en el numerador. Integrando ambos lados de la ecuación resultante se obtiene la solución. Esta solución incluye una constante de integración y se llama solución general de la ecuación diferencial. Si la función desconocida debe satisfacer la condición de que tenga un valor específico para un valor dado de la variable independiente, entonces puede encontrarse una solución particular.

Las ecuaciones diferenciales surgen cuando se conoce una relación que implica la razón de cambio de una función. Por ejemplo, si una cantidad  $N$  en el tiempo  $t$  es tal que cambia a una razón proporcional a la cantidad presente, entonces

$$\frac{dN}{dt} = kN \quad \text{donde } k \text{ es una constante}$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$N = N_0 e^{kt}$$

donde  $N_0$  es la cantidad presente en  $t = 0$ . El valor de  $k$  puede determinarse cuando se conoce el valor de  $N$  para un valor dado de  $t$  diferente de  $t = 0$ . Si  $k$  es positiva, entonces  $N$  sigue una ley exponencial de crecimiento; si  $k$  es negativa,  $N$  sigue una ley exponencial de decaimiento. Si  $N$  representa una cantidad de un elemento radiactivo, entonces

$$\frac{dN}{dt} = -N \quad \text{donde } \lambda \text{ es una constante positiva}$$

Así,  $N$  sigue una ley exponencial de decaimiento, y por consiguiente

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

La constante  $\lambda$  se llama constante de decaimiento. El tiempo para que la mitad del elemento decaiga es la vida media del elemento:

$$\text{vida media} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.69315}{\lambda}$$

## Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

En los problemas 1 a 22, determine las integrales

1.  $\int x \ln x dx$
2.  $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} dx$
3.  $\int_0^2 \sqrt{9x^2 + 16} dx$
4.  $\int \frac{16x}{3-4x} dx$
5.  $\int \frac{15x-2}{(3x+1)(x-2)} dx$
6.  $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$
7.  $\int \frac{dx}{x(x+2)^2}$
8.  $\int \frac{dx}{x^2-1}$
9.  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-16x^2}}$
10.  $\int x^3 \ln x^2 dx$

Una cantidad  $N$  puede seguir una razón de crecimiento dada por

$$\frac{dN}{dt} = KN(M-N) \quad \text{donde } K \text{ y } M \text{ son constantes}$$

Al resolver esta ecuación diferencial se obtiene una función de la forma

$$N = \frac{M}{1+be^{-ct}} \quad \text{donde } b \text{ y } c \text{ son constantes}$$

que se llama una función logística. Muchos tamaños de poblaciones pueden describirse por medio de una función logística. En este caso,  $M$  representa el límite del tamaño de la población. Una función logística se usa también en el análisis de la difusión de un rumor.

La ley de enfriamiento de Newton establece que la temperatura  $T$  de un cuerpo que se enfriá en el tiempo  $t$ , cambia a una razón proporcional a la diferencia  $T - a$ , donde  $a$  es la temperatura del medio ambiente. Así,

$$\frac{dT}{dt} = k(T-a) \quad \text{donde } k \text{ es una constante}$$

La solución de esta ecuación diferencial puede usarse para determinar, por ejemplo, la hora a la que se cometió un homicidio.

Una integral de la forma

$$\int_a^\infty f(x) dx \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \text{o bien} \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

se llama integral impropia. Las primeras dos integrales se definen de la manera siguiente:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(x) dx$$

y

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^b f(x) dx$$

Si  $\int_a^\infty f(x) dx$  (o  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ ) es un número finito, se dice que la integral es convergente, de otra manera, que es divergente. La integral impropia  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$  está definida por

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx$$

Si ambas integrales en el lado derecho son convergentes, se dice que  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$  es convergente, de otra manera, es divergente.

11.  $\int \frac{9 dx}{x^2-9}$
12.  $\int \frac{x}{\sqrt{2+5x}} dx$
13.  $\int 49xe^{7x} dx$
14.  $\int \frac{dx}{2+3e^{4x}}$
15.  $\int \frac{dx}{2x \ln x^2}$
16.  $\int \frac{dx}{x(2+x)}$
17.  $\int \frac{2x}{3+2x} dx$
18.  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-9}}$
19.  $\int \frac{5x^2+2}{x^3+x} dx$
20.  $\int \frac{3x^3+5x^2+4x+3}{x^4+x^3+x^2} dx$
21.  $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx$
22.  $\int x^2 e^x dx$

<sup>15</sup>Los problemas 19 y 20 se refieren a la sección 15.2.

<sup>16</sup>Los problemas 21 y 22 se refieren a la sección 15.1.

23. Encuentre el valor promedio de  $f(x) = 3x^2 + 2x$  en el intervalo  $[2, 4]$ .

24. Encuentre el valor promedio de  $f(t) = t^2 e^t$  en el intervalo  $[0, 1]$ . En los problemas 25 y 26, resuelva las ecuaciones diferenciales.

25.  $y' = 3x^2y + 2xy, \quad y > 0$   
 26.  $y' + 2xe^{x^2-y+3} = 0 \quad y(0) = 3$

En los problemas 27 a 30, determine las integrales impropias, en caso de que existan.<sup>17</sup> Indique cuáles son divergentes.

27.  $\int_1^\infty \frac{1}{x^{2.5}} dx$

28.  $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$

29.  $\int_1^\infty \frac{1}{2x} dx$

30.  $\int_{-\infty}^\infty xe^{1-x^2} dx$

31. **Población** La población de una ciudad en 1985 era de 100 000 habitantes y en 2000 de 120 000. Suponga un crecimiento exponencial, estime la población para el año 2015.

32. **Población** La población de una ciudad se duplica cada 10 años debido a un crecimiento exponencial. En cierto tiempo, es de 40 000 habitantes. Encuentre una expresión para el número  $N$  de personas  $t$  años después. Dé su respuesta en términos de  $\ln 2$ .

33. **Radiactividad** Si después de 100 años queda el 95% de una sustancia radiactiva, encuentre la constante de decaimiento  $y$ , al punto porcentual más cercano, dé el porcentaje de la cantidad original presente después de 200 años.

34. **Medicina** Suponga que  $q$  es la cantidad de penicilina en el cuerpo en el tiempo  $t$ , y sea  $q_0$  la cantidad en  $t = 0$ . Suponga que la razón de cambio de  $q$  con respecto a  $t$  es proporcional a  $q$  y que  $q$  decrece cuando  $t$  crece. Entonces se tiene  $dq/dt = -kq$ , donde  $k > 0$ . Despeje  $q$ . ¿Qué porcentaje de la cantidad original se tiene cuando  $t = 7/k$ ?

35. **Biología** Dos organismos se colocan inicialmente en un medio y empiezan a multiplicarse. El número  $N$  de organismos presentes después de  $t$  días se registra en una gráfica cuyo eje horizontal es el eje  $t$  y el eje vertical es el eje  $N$ . Se observa que los puntos caen sobre una curva logística. El número de organismos presentes después de 6 días es de 300 y después de 10 días el número tiende a un límite de 450. Encuentre la ecuación logística.

36. **Inscripciones a la universidad** Una universidad cree que la matrícula sigue un crecimiento logístico. El año pasado, la matrícula fue de 1000 y este año de 1100. Si la universidad puede recibir un máximo de 2000 estudiantes, ¿cuál es la matrícula esperada para el año próximo? Dé su respuesta a la centena más cercana.

37. **Hora de un asesinato** Un médico forense es llamado a un caso de homicidio. Él llega a las 6:00 P.M. y encuentra que la temperatura de la víctima es de 35 °C. Una hora después, la temperatura del cadáver es de 34 °C. La temperatura en la habitación es de 25 °C. Aproximadamente, ¿a qué hora se cometió el crimen? (Suponga que la temperatura normal del cuerpo humano es de 37 °C.)

38. **Anualidad** Encuentre el valor presente, al dólar más cercano, de una anualidad continua con tasa anual de 6% durante 12 años, si el pago en el tiempo  $t$  es a una razón anual de  $f(t) = 10t$  dólares.

- 18<sup>39.</sup> **Altas de hospital** Para un grupo de individuos hospitalizados, suponga que la proporción que ha sido dada de alta al término de  $t$  días está dada por

<sup>17</sup>Los problemas 27 a 30 se refieren a la sección 15.7.

<sup>18</sup>Los problemas 39 y 40 se refieren a la sección 15.7.

$$\int_0^t f(x) dx$$

donde  $f(x) = 0.007e^{-0.01x} + 0.00005e^{-0.0002x}$ . Evalúe

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

- <sup>18</sup>40. **Consumo de un producto** Suponga que  $A(t)$  es la cantidad de un producto que se consume en el tiempo  $t$  y que  $A$  sigue una ley de crecimiento exponencial. Si  $t_1 < t_2$ , y en el tiempo  $t_2$  la cantidad consumida  $A(t_2)$  es el doble de la cantidad consumida en el tiempo  $t_1$ ,  $A(t_1)$ , entonces  $t_2 - t_1$ , se llama periodo de duplicación. En un análisis de crecimiento exponencial, Shonle<sup>19</sup> establece que en condiciones de crecimiento exponencial, “la cantidad de un producto consumido durante un periodo de duplicación, es igual al total utilizado en todo el tiempo hasta el principio del periodo de duplicación en cuestión”. Para justificar esta afirmación, reproduzca la argumentación de Shonle de la manera siguiente. La cantidad del producto consumido hasta el tiempo  $t$ , está dada por

$$\int_{-\infty}^{t_1} A_0 e^{kt} dt \quad k > 0$$

donde  $A_0$  es la cantidad cuando  $t = 0$ . Demuestre que esto es igual a  $(A_0/k)e^{kt_1}$ . Enseguida, la cantidad consumida durante el intervalo de  $t_1$  a  $t_2$  es

$$\int_{t_1}^{t_2} A_0 e^{kt} dt$$

Demuestre que esto es igual a

$$\frac{A_0}{k} e^{kt_1} [e^{k(t_2-t_1)} - 1] \quad (1)$$

Si el intervalo  $[t_1, t_2]$  es un periodo de duplicación, entonces

$$A_0 e^{kt_2} = 2A_0 e^{kt_1}$$

Demuestre que esta relación implica que  $e^{k(t_2-t_1)} = 2$ .

Sustituya lo anterior en la ecuación (1); su resultado debe ser el mismo que el total consumido durante todo el tiempo hasta  $t_1$ , a saber,  $(A_0/k)e^{kt_1}$ .

41. **Ingreso, costo y utilidad** La tabla siguiente da los valores de las funciones de ingreso marginal (IM) y de costo marginal (CM) de una empresa:

$q$	0	3	6	9	12	15	18
IM	25	22	18	13	7	3	0
CM	15	14	12	10	7	4	2

El costo fijo de la compañía es 25. Suponga que la utilidad es máxima cuando  $IM = CM$  y que esto ocurre cuando  $q = 12$ . Además, suponga que la producción de la empresa se escoge de tal forma que maximice la utilidad. Utilice la regla del trapecio y la regla de Simpson para cada uno de los siguientes incisos.

- (a) Estime el ingreso total, use tantos datos como sea posible.  
 (b) Estime el costo total con la menor cantidad posible de datos.  
 (c) Determine cómo está relacionada la utilidad máxima con el área encerrada por la línea  $q = 0$  y las curvas IM y CM, use esta relación para estimar la utilidad máxima tan exactamente como sea posible.

<sup>19</sup>J. I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Dietas

**E**n la actualidad existe un gran interés en las dietas y la pérdida de peso. Algunas personas quieren adelgazar para “verse bien”. Otras por razones de salud o condición física. En realidad, muchos lo hacen por presión de las amistades. Con frecuencia aparecen anuncios publicitarios en televisión, periódicos y revistas sobre programas para control de peso. En muchas librerías, secciones enteras se dedican a las dietas y al control de peso.



Suponga que quiere determinar un modelo matemático para saber el peso de una persona sometida a una dieta baja en calorías<sup>20</sup>. El peso de un individuo depende tanto de la tasa diaria de energía ingerida, digamos  $C$  calorías diarias, como de la tasa diaria de energía consumida, que típicamente tiene

un valor de entre 15 y 20 calorías por día por cada libra de peso del cuerpo. El consumo depende de la edad, sexo, razón metabólica, etcétera. Para un valor promedio de 17.5 calorías por libra y por día, una persona que pese  $w$  libras consume  $17.5w$  calorías por día. Si  $C = 17.5w$ , entonces su peso permanece constante; de otra manera, se tiene una ganancia o pérdida de peso según si  $C$  es mayor o menor que  $17.5w$ .

¿Qué tan rápido ocurrirá la ganancia o pérdida de peso? La hipótesis fisiológica más plausible es que  $dw/dt$  es proporcional al exceso neto (o déficit)  $C - 17.5w$  en el número de calorías por día. Esto es,

$$\frac{dw}{dt} = K(C - 17.5w) \quad (1)$$

donde  $K$  es una constante. El miembro izquierdo de la ecuación tiene unidades de libras por día y  $C - 17.5w$  tiene unidades de calorías por día. De aquí que las unidades de  $K$  son libras por caloría. Por lo tanto, se requiere conocer cuántas libras, por cada exceso o déficit de calorías, se agregan o quitan al peso. El factor de conversión dietético que generalmente se usa es que 3500 calorías son equivalentes a una libra. Así,  $K = 1/3500$  libras por caloría.

Ahora, la ecuación diferencial que modela la ganancia o pérdida de peso es

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{3500}(C - 17.5w) \quad (2)$$

Si  $C$  es constante, la ecuación es separable y su solución es

$$w(t) = \frac{C}{17.5} + \left( w_0 - \frac{C}{17.5} \right) e^{-0.005t} \quad (3)$$

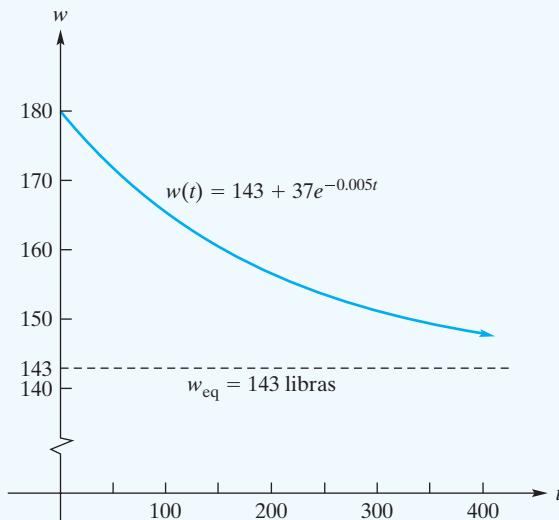
donde  $w_0$  es el peso inicial y  $t$  está en días. A largo plazo, note que el peso de equilibrio (esto es, el peso cuando  $t \rightarrow \infty$ ) es  $w_{\text{eq}} = C/17.5$ .

Por ejemplo, si alguien que pese inicialmente 180 lb adopta una dieta de 2500 calorías por día, entonces se tiene  $w_{\text{eq}} = 2500/17.5 \approx 143$  libras y la función del peso es

$$\begin{aligned} w(t) &\approx 143 + (180 - 143)e^{-0.005t} \\ &= 143 + 37e^{-0.005t} \end{aligned}$$

En la figura 15.6 se muestra la gráfica de  $w(t)$ . Observe cuánto tiempo toma estar cerca del peso de equilibrio de 143 libras. La vida media para el proceso es  $(\ln 2)/0.005 \approx 138.6$  días, alrededor de 20 semanas (tomaría casi 584 días, u 83 semanas, para llegar a las 145 libras). Esto pudiera ser la causa por la que muchas personas abandonan la dieta por frustración.

<sup>20</sup>Adaptado de A. C. Segal, “A Linear Diet Model”, *The College Mathematics Journal*, 18, núm. 1 (1987), 44-45. Con permiso de la Mathematical Association of America.



**FIGURA 15.6** El peso como una función del tiempo.

### Problemas

- Si una persona que pesa 200 lb adopta una dieta de 2000 calorías por día, determine a la libra más cercana el peso de equilibrio  $w_{eq}$ . Al día más cercano, ¿después de cuántos días, esta persona tendrá un peso de 175 libras? Obtenga la respuesta de manera algebraica o con una calculadora graficadora.
- Demuestre que la solución de la ecuación (1) está dada por la ecuación (3).

- El peso de una persona sometida a una dieta restringida en calorías está dado, en el tiempo  $t$ , por  $w(t)$ . [Vea la ecuación (3).] La diferencia entre este peso y el peso de equilibrio  $w_{eq}$  es  $w(t) - w_{eq}$ . Suponga que se requieren  $d$  días para que la persona pierda la mitad de esta diferencia de peso. Entonces

$$w(t+d) = w(t) - \frac{1}{2}[w(t) - w_{eq}]$$

Despeje  $d$  de esta ecuación y demuestre que  $d = \frac{\ln 2}{0.005}$ .

- En forma ideal, la meta de la pérdida de peso debe establecerse en una consulta con un médico. Sin embargo, en general, un peso ideal está relacionado con la altura de la persona por el índice de masa del cuerpo (IMC), que es igual al peso en kilogramos dividido entre la altura, en metros, al cuadrado. El rango óptimo de IMC es de 18.5 a 24.9.

¿Cuántas libras necesitaría perder una mujer de 5'8" de altura y de 190 libras de peso, para estar en el rango ideal de IMC? (Sea cuidadoso con las unidades cuando calcule la respuesta.) Al día más cercano, ¿cuánto tardaría ella en perder este exceso de peso con una dieta de 2200 calorías por día?

Se puede encontrar más información sobre peso y dietas en

[www.consumer.gov/weightloss/setgoals.htm](http://www.consumer.gov/weightloss/setgoals.htm).

- ¿Cuáles son los pros y los contras de "romper" una dieta que tiene como base cambios drásticos en los hábitos alimenticios para lograr una pérdida de peso rápida?

# 16

## VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

- 16.1 [Variables aleatorias continuas](#)
- 16.2 [La distribución normal](#)
- 16.3 [Aproximación normal a la distribución binomial](#)
- 16.4 [Repaso](#)

### Aplicación práctica

Distribución acumulada de datos

**S**uponga que usted va a diseñar una red telefónica celular para una gran área urbana. En forma ideal, el sistema siempre tendría capacidad suficiente para satisfacer la demanda. Sin embargo, usted sabe que la demanda fluctúa. Algunos períodos de alta demanda pueden pronosticarse, como los días festivos, en que muchas personas llaman a sus familias, pero otras veces no son predecibles, como después de la ocurrencia de un terremoto u otro desastre natural, cuando mucha gente llama a los servicios de emergencia o trata de comunicarse con amigos y parientes. La construcción y operación de un sistema telefónico con capacidad suficiente para manejar cualquier elevación repentina de la demanda, sin importar qué tan grande sea, podría resultar muy cara. ¿Cómo se puede lograr un equilibrio entre la meta de servir a los clientes y la necesidad de limitar los costos?

Un método sensato sería diseñar un sistema capaz de manejar la carga de tráfico telefónico bajo condiciones de ocupación normales, y aceptar el hecho de que en raras ocasiones, el tráfico pesado conducirá a sobrecargas. No siempre puede predecirse cuándo ocurrirán las sobrecargas, puesto que los desastres como los terremotos ocurren sin aviso alguno. Sin embargo, bastaría con algunos buenos pronósticos *probabilísticos* del volumen de tráfico futuro. Por ejemplo, se podría construir un sistema que satisfaga la demanda 99.4% del tiempo. El restante 0.6% del tiempo, los clientes tendrían que sufrir retrasos intermitentes en el servicio.

Una descripción del tráfico en una red telefónica es un ejemplo de una función de densidad de probabilidad. En este capítulo se estudiarán tales funciones. Tienen una gran variedad de aplicaciones, no sólo el cálculo de la frecuencia con la que un sistema estará sobrecargado, por ejemplo, sino también para estimar su carga promedio. Lo anterior permite el pronóstico de cosas como el consumo de energía y el volumen promedio de la actividad de mantenimiento en un sistema.

**OBJETIVO**

Introducir las variables aleatorias continuas; analizar funciones de densidad, incluyendo distribuciones uniformes y exponenciales; analizar funciones de distribución acumulada; y calcular la media, la varianza y la desviación estándar para una variable aleatoria continua.

## 16.1 Variables aleatorias continuas

### Funciones de densidad

En el capítulo 9, las variables aleatorias que se consideraron fueron primordialmente discretas. Ahora se estudiarán las **variables aleatorias continuas**. Una variable aleatoria es continua si puede tomar cualquier valor en algún intervalo o intervalos. Por lo general, una variable aleatoria continua representa datos que se *miden*, como alturas, pesos, distancias y períodos de tiempo. En contraste, las variables aleatorias discretas del capítulo 9 casi siempre representan datos que se *cuentan*.

Por ejemplo, el número de horas de vida media de una batería de calculadora es una variable aleatoria continua  $X$ . Si la vida máxima posible es 1000 horas, entonces  $X$  puede tomar cualquier valor en el intervalo  $[0, 1000]$ . En un sentido práctico, la posibilidad de que  $X$  tome un solo valor específico, como 764.1238, es extremadamente remota. Resulta más significativo considerar la probabilidad de que  $X$  pertenezca a un *intervalo*, como el que va desde 764 hasta 765, es decir,  $764 < X < 765$ . (A este respecto, la naturaleza de la medición de cantidades físicas, como el tiempo, indica que un enunciado como  $X = 764.1238$  en realidad tiene la forma  $764.123750 < X < 764.123849$ .) En general, *con una variable aleatoria continua, el interés está en la posibilidad de que pertenezca a un intervalo y no en la de que asuma un valor particular*.

Como otro ejemplo, considere un experimento en el que un número  $X$  se selecciona de manera aleatoria del intervalo  $[0, 2]$ . Entonces  $X$  es una variable aleatoria continua. ¿Cuál es la probabilidad de que  $X$  pertenezca al intervalo  $[0, 1]$ ? Debido a que se puede pensar en  $[0, 1]$  como en la “mitad” del intervalo  $[0, 2]$ , una respuesta razonable (y correcta) es  $\frac{1}{2}$ . De manera similar, si se piensa en el intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$  como en “un cuarto” de  $[0, 2]$ , entonces  $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ . En realidad, cada una de estas probabilidades es simplemente la longitud del intervalo dado dividido entre la longitud de  $[0, 2]$ . Por ejemplo,

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{\text{longitud de } [0, \frac{1}{2}]}{\text{longitud de } [0, 2]} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

Ahora considere un experimento similar en el que  $X$  denota un número que se elige de manera aleatoria del intervalo  $[0, 1]$ . Como podría esperarse, la probabilidad de que  $X$  tome cualquier valor en algún intervalo dado dentro de  $[0, 1]$  es igual a la longitud del intervalo dado dividido entre la longitud de  $[0, 1]$ . Como  $[0, 1]$  tiene longitud 1, se puede decir simplemente que la probabilidad de que  $X$  pertenezca a un intervalo es la longitud del intervalo. Por ejemplo,

$$P(0.2 \leq X \leq 0.5) = 0.5 - 0.2 = 0.3$$

y  $P(0.2 \leq X \leq 0.2001) = 0.0001$ . Es claro que, cuando la longitud de un intervalo tiende a 0, la probabilidad de que  $X$  tome un valor en ese intervalo también tiende a 0. Con esto en mente, se puede considerar un solo valor, por ejemplo 0.2, como el caso límite de un intervalo cuando la longitud del intervalo tiende a 0. (Piense en  $[0.2, 0.2 + x]$  cuando  $x \rightarrow 0$ .) Así,  $P(X = 0.2) = 0$ . En general, *la probabilidad de que una variable aleatoria continua  $X$  tome un valor particular es 0*. Como un resultado, **la probabilidad de que  $X$  pertenezca a algún intervalo no se ve afectada si uno o los dos extremos del intervalo se incluyen o se excluyen**. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P(X \leq 0.4) &= P(X < 0.4) + P(X = 0.4) \\ &= P(X < 0.4) + 0 \\ &= P(X < 0.4) \end{aligned}$$

De manera similar,  $P(0.2 \leq X \leq 0.5) = P(0.2 < X < 0.5)$ .

Las probabilidades asociadas con una variable aleatoria continua  $X$  pueden representarse de manera geométrica. Lo anterior se hace mediante la gráfica de una función  $y = f(x)$  tal que el área bajo esta gráfica (y por arriba del eje  $x$ ) entre las rectas  $x = a$  y

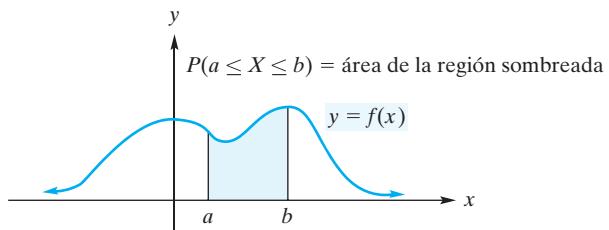


FIGURA 16.1 Función de densidad de probabilidad.

$x = b$  representa la probabilidad de que  $X$  asuma un valor entre  $a$  y  $b$ . (Vea la figura 16.1.) Como esta área está dada por la integral definida  $\int_a^b f(x) dx$ , se tiene

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

A la función  $f$  se le llama la *función de densidad de probabilidad* para  $X$  (o simplemente la *función de densidad* para  $X$ ) y se dice que define la *distribución de  $X$* . Como las probabilidades siempre son no negativas, siempre es cierto que  $f(x) \geq 0$ . Asimismo, como debe ocurrir el evento  $-\infty < X < \infty$ , el área total bajo la curva de la función de densidad debe ser 1. Es decir  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ . En resumen, se tiene la siguiente definición.

### DEFINICIÓN

Si  $X$  es una variable aleatoria continua, entonces una función  $y = f(x)$  se llama **función de densidad (de probabilidad)** para  $X$  si y sólo si tiene las siguientes propiedades:

1.  $f(x) \geq 0$
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Entonces se define

$$3. P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Para ilustrar una función de densidad, considere de nuevo el experimento previo en el que se selecciona de manera aleatoria un número  $X$  del intervalo  $[0, 1]$ . Recuerde que

$$P(a \leq X \leq b) = \text{longitud de } [a, b] = b - a \quad (1)$$

donde  $a$  y  $b$  están en  $[0, 1]$ . Se mostrará que la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

cuya gráfica aparece en la figura 16.2(a), es una función de densidad para  $X$ . Para hacer esto, debe verificarse que  $f(x)$  satisface las tres condiciones establecidas en la definición

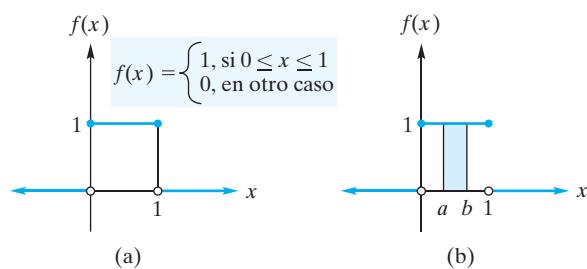


FIGURA 16.2 Función de densidad de probabilidad.

de una función de densidad. Primero,  $f(x)$  es 0 o 1, por lo que  $f(x) \geq 0$ . Enseguida, como  $f(x) = 0$  para  $x$  fuera de  $[0, 1]$ ,

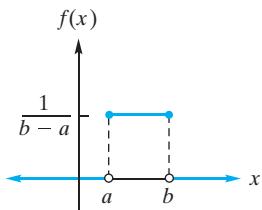
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 1 dx = x \Big|_0^1 = 1$$

Por último, para verificar que  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$ , se calcula el área bajo la gráfica desde  $x = a$  hasta  $x = b$  [figura 16.2(b)]. Se tiene

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b 1 dx = x \Big|_a^b = b - a$$

que, como se estableció en la ecuación (1), es  $P(a \leq X \leq b)$ .

A la función en la ecuación (2) se le llama **función de densidad uniforme** sobre  $[0, 1]$ , y se dice que  $X$  tiene una **distribución uniforme**. La palabra *uniforme* es significativa en el sentido de que la gráfica de densidad es horizontal, o “plana” sobre  $[0, 1]$ . Como resultado,  $X$  tiene la misma probabilidad de asumir un valor en un intervalo dentro de  $[0, 1]$  que en cualquier otro intervalo de igual longitud. En el ejemplo 1 se da una distribución uniforme más general.



**FIGURA 16.3** Función de densidad uniforme sobre  $[a, b]$ .

### EJEMPLO 1 Función de densidad uniforme

La función de densidad uniforme sobre  $[a, b]$  para la variable aleatoria  $X$  está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(Vea la figura 16.3.) Observe que sobre  $[a, b]$ , la región bajo la gráfica es un rectángulo con altura  $1/(b-a)$  y ancho  $b-a$ . Así, su área está dada por  $(1/(b-a))(b-a) = 1$  de manera que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  como debe ser para una función de densidad. Si  $[c, d]$  es cualquier intervalo dentro de  $[a, b]$  entonces

$$\begin{aligned} P(c \leq X \leq d) &= \int_c^d f(x) dx = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{x}{b-a} \Big|_c^d = \frac{d-c}{b-a} \end{aligned}$$

Por ejemplo, suponga que  $X$  se distribuye uniformemente sobre el intervalo  $[1, 4]$  y es necesario encontrar  $P(2 < X < 3)$ . Entonces  $a = 1$ ,  $b = 4$ ,  $c = 2$  y  $d = 3$ . Por lo tanto,

$$P(2 < X < 3) = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3(a)-(g)

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### FUNCIÓN DE DENSIDAD

Suponga que el tiempo (en minutos) que los pasajeros deben esperar por un avión se distribuye de manera uniforme con una función de densidad  $f(x) = \frac{1}{60}$  donde  $0 \leq x \leq 60$ , y que  $f(x) = 0$  en otro caso.

¿Cuál es la probabilidad de que un pasajero deba esperar entre 25 y 45 minutos?

### EJEMPLO 2 Función de densidad

La función de densidad para una variable aleatoria  $X$  está dada por

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $k$  es una constante.

- a. Encuentre  $k$ .

**Solución:** Como  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  debe ser 1 y  $f(x) = 0$  fuera de  $[0, 2]$ , se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^2 kx dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_0^2 = 2k = 1$$

Así,  $k = \frac{1}{2}$ , de manera que  $f(x) = \frac{1}{2}x$  en  $[0, 2]$ .

b. Encuentre  $P(\frac{1}{2} < X < 1)$ .

**Solución:**

$$P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = \int_{1/2}^1 \frac{1}{2}x \, dx = \frac{x^2}{4} \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

c. Encuentre  $P(X < 1)$ .

**Solución:** Como  $f(x) = 0$  para  $x < 0$ , sólo es necesario calcular el área bajo la función de densidad entre 0 y 1. Por lo tanto,

$$P(X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}x \, dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9(a)-(d), (g), (h) 

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

### FUNCIÓN DE DENSIDAD EXPONENCIAL

La esperanza de vida (en años) de unos frenos de automóvil se distribuye de manera exponencial con  $k = \frac{1}{10}$ , si la garantía de los frenos dura 5 años, ¿cuál es la probabilidad de que éstos se rompan después del periodo de garantía?

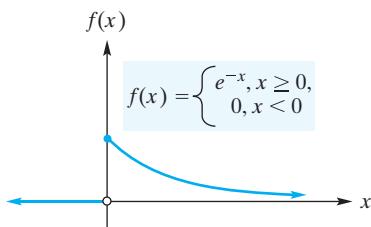


FIGURA 16.4 Función de densidad exponencial.

### EJEMPLO 3 Función de densidad exponencial

La función de densidad exponencial se define mediante

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde  $k$  es una constante positiva, llamada un **parámetro**, cuyo valor depende del experimento en consideración. Si  $X$  es una variable aleatoria con esta función de densidad, entonces se dice que  $X$  tiene una **distribución exponencial**. Sea  $k = 1$ . Así,  $f(x) = e^{-x}$  para  $x \geq 0$ , y  $f(x) = 0$  para  $x < 0$  (figura 16.4).

a. Encuentre  $P(2 < X < 3)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} P(2 < X < 3) &= \int_2^3 e^{-x} \, dx = -e^{-x} \Big|_2^3 \\ &= -e^{-3} - (-e^{-2}) = e^{-2} - e^{-3} \approx 0.086 \end{aligned}$$

b. Encuentre  $P(X > 4)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= \int_4^\infty e^{-x} \, dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_4^r e^{-x} \, dx \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_4^r = \lim_{r \rightarrow \infty} (-e^{-r} + e^{-4}) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{e^r} + e^{-4} \right) = 0 + e^{-4} \\ &\approx 0.018 \end{aligned}$$

De manera alternativa, se puede evitar una integral impropia porque

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \int_0^4 e^{-x} \, dx$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7(a)-(c), (e) 

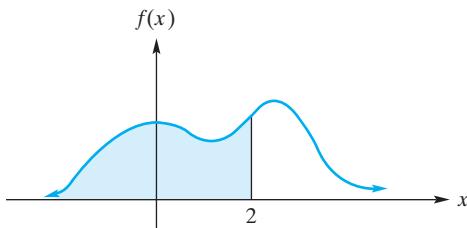
La **función de distribución acumulada**  $F$  para la variable aleatoria continua  $X$  con función de densidad  $f$  está definida por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt$$

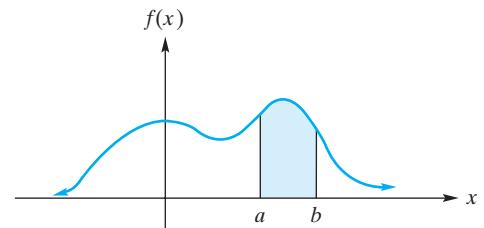
Por ejemplo,  $F(2)$  representa toda el área bajo la curva de densidad que está a la izquierda de la recta  $x = 2$  (figura 16.5). Cuando  $f(x)$  es continua, se puede demostrar que

$$F'(x) = f(x)$$

Es decir, la derivada de la función de distribución acumulada es la función de densidad. Así,  $F$  es una antiderivada de  $f$  y, por el Teorema fundamental del cálculo integral,



**FIGURA 16.5**  $F(2) = P(X \leq 2)$  = área de la región sombreada.

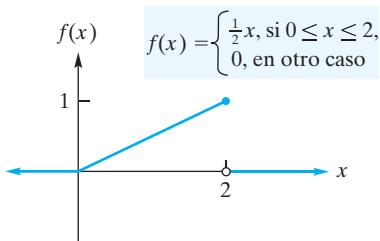


**FIGURA 16.6**  $P(a < X < b)$ .

Se calcula,

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (3)$$

Esto significa que el área bajo la curva de densidad entre  $a$  y  $b$  (figura 16.6) es simplemente el área a la izquierda de  $b$  menos el área a la izquierda de  $a$ .



**FIGURA 16.7** Densidad de función para el ejemplo 4.

#### EJEMPLO 4 Determinación y aplicación de la función de distribución acumulada

Suponga que  $X$  es una variable aleatoria con una función densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

como se muestra en la figura 16.7.

- a. Determine y bosqueje la función de distribución acumulada.

**Solución:** Como  $f(x) = 0$  si  $x < 0$ , el área bajo la curva de densidad a la izquierda de  $x = 0$  es 0. Por consiguiente,  $F(x) = 0$  si  $x < 0$ . Si  $0 \leq x \leq 2$ , entonces

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2}t dt = \frac{t^2}{4} \Big|_0^x = \frac{x^2}{4}$$

Como  $f$  es una función de densidad y  $f(x) = 0$  para  $x < 0$  y también para  $x > 2$ , el área bajo la curva de densidad desde  $x = 0$  hasta  $x = 2$  es 1. Así, si  $x > 2$ , el área a la izquierda de  $x$  es 1, es decir  $F(x) = 1$ . Por lo tanto, la función de distribución acumulada es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

la cual se muestra en la figura 16.8.

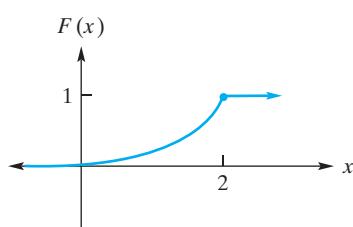
- b. Encuentre  $P(X < 1)$  y  $P(1 < X < 1.1)$ .

**Solución:** Con base en los resultados del inciso (a), se tiene

$$P(X < 1) = F(1) = \frac{1^2}{4} = \frac{1}{4}$$

A partir de la ecuación (3),

$$P(1 < X < 1.1) = F(1.1) - F(1) = \frac{1.1^2}{4} - \frac{1}{4} = 0.0525$$



**FIGURA 16.8** Función de distribución acumulada para el ejemplo 4.

### Media, varianza y desviación estándar

Para una variable aleatoria  $X$  con función de densidad  $f$ , la **media**  $\mu$  (también llamada **valor esperado** de  $X$ ,  $E(X)$ ) está dada por

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

si la integral es convergente y puede pensarse en ella como en el valor promedio de  $X$  a largo plazo. La **varianza**  $\sigma^2$  (que también se escribe  $\text{Var}(X)$ ) está dada por

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

si la integral es convergente. Usted debe haberse dado cuenta que estas fórmulas son similares a las correspondientes del capítulo 9 para una variable aleatoria discreta. Es fácil mostrar que una fórmula alternativa para la varianza es

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$$

La **desviación estándar** es

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Por ejemplo, puede demostrarse que si  $X$  se distribuye de manera exponencial (vea el ejemplo 3), entonces  $\mu = 1/k$  y  $\sigma = 1/k$ . Como con una variable aleatoria discreta, la desviación estándar de una variable aleatoria continua  $X$  es pequeña si es probable que  $X$  adopte valores cercanos a la media pero poco posible que tome valores lejanos a la media. La desviación estándar es grande si lo opuesto es verdadero.

#### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

##### DETERMINACIÓN DE LA MEDIA Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR

La esperanza de vida (en años) de ciertos pacientes después de haber contraído cierta enfermedad se distribuye de manera exponencial con  $k = 0.2$ . Use la información del párrafo que precede al ejemplo 5 para encontrar la esperanza de vida media y su desviación estándar.

#### EJEMPLO 5 Determinación de la media y la desviación estándar

*Si  $X$  es una variable aleatoria con una función de densidad dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

*encuentre su media y su desviación estándar.*

**Solución:** La media está dada simplemente por

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2}x dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Por medio de la fórmula alternativa para la varianza, se tiene

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2}x dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ &= \frac{x^4}{8} \Big|_0^2 - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Así, la desviación estándar es

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5 

Para concluir esta sección debemos enfatizar que una función de densidad para una variable aleatoria continua no debe confundirse con una función de distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta. La evaluación de esta última función de distribución de probabilidad en un *punto* proporciona una probabilidad. Pero la evaluación de una función de densidad en un punto no hace lo mismo. En lugar de ello, se interpreta como una probabilidad el *área* bajo la curva de la función de densidad a lo largo de un *intervalo*. Es decir, las probabilidades asociadas con una variable aleatoria continua están dadas por integrales.

## Problemas 16.1

- \*1. Suponga que  $X$  es una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x+1) & \text{si } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- (a) Encuentre  $P(1 < X < 2)$ . (b) Encuentre  $P(X < 2.5)$ .  
 (c) Encuentre  $P(X \geq \frac{3}{2})$ .  
 (d) Encuentre  $c$  tal que  $P(X < c) = \frac{1}{2}$ . Dé su respuesta en forma radical.

2. Suponga que  $X$  es una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2} & \text{si } x > 1000 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- (a) Encuentre  $P(3000 < X < 4000)$ .  
 (b) Encuentre  $P(X > 2000)$ .

- \*3. Suponga que  $X$  es una variable aleatoria continua que se distribuye de manera uniforme en  $[1, 4]$ .

- (a) ¿Cuál es la fórmula de la función de densidad para  $X$ ? Bosqueje su gráfica.  
 (b) Encuentre  $P(\frac{3}{2} < X < \frac{7}{2})$ .  
 (c) Encuentre  $P(0 < X < 1)$ .  
 (d) Encuentre  $P(X \leq 3.5)$ .  
 (e) Encuentre  $P(X > 3)$ .  
 (f) Encuentre  $P(X = 2)$ .  
 (g) Encuentre  $P(X < 5)$ .  
 (h) Encuentre  $\mu$ .  
 (i) Encuentre  $\sigma$ .  
 (j) Encuentre la función de distribución acumulada  $F$  y bosqueje su gráfica. Use  $F$  para encontrar  $P(X < 2)$  y  $P(1 < X < 3)$ .

4. Suponga que  $X$  es una variable aleatoria continua que se distribuye de manera uniforme en  $[0, 5]$ .

- (a) ¿Cuál es la fórmula de la función de densidad para  $X$ ? Bosqueje su gráfica.  
 (b) Encuentre  $P(1 < X < 3)$ .  
 (c) Encuentre  $P(4.5 \leq X < 5)$ .  
 (d) Encuentre  $P(X = 4)$ .  
 (e) Encuentre  $P(X > 2)$ .  
 (f) Encuentre  $P(X < 5)$ .  
 (g) Encuentre  $P(X > 5)$ .  
 (h) Encuentre  $\mu$ .  
 (i) Encuentre  $\sigma$ .  
 (j) Encuentre la función de distribución acumulada  $F$  y bosqueje su gráfica. Use  $F$  para encontrar  $P(1 < X < 3.5)$ .

- \*5. Suponga que  $X$  se distribuye de manera uniforme en  $[a, b]$ .

- (a) ¿Cuál es la función de densidad para  $X$ ?  
 (b) Encuentre  $\mu$ .  
 (c) Encuentre  $\sigma^2$  y  $\sigma$ .

6. Suponga que  $X$  es una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- (a) Demuestre que  $k = \frac{1}{b-a}$  y por lo tanto  $X$  se distribuye de manera uniforme.  
 (b) Encuentre la función de distribución acumulada  $F$ .

- \*7. Suponga que la variable aleatoria  $X$  se distribuye de manera uniforme con  $k = 3$ .

- (a) Encuentre  $P(1 < X < 4)$ .  
 (b) Encuentre  $P(X < 4)$ .  
 (c) Encuentre  $P(X > 6)$ .  
 (d) Encuentre  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$ .  
 (e) Verifique que la función de densidad en cuestión satisface el requisito de que el área bajo la curva sea 1.  
 (f) Encuentre la función de distribución acumulada  $F$ .

8. Suponga que la variable aleatoria  $X$  se distribuye de manera exponencial con  $k = 0.5$ .

- (a) Encuentre  $P(X > 4)$ .  
 (b) Encuentre  $P(0.5 < X < 2.6)$ .  
 (c) Encuentre  $P(X < 5)$ .  
 (d) Encuentre  $P(X = 4)$ .  
 (e) Encuentre  $c$  tal que  $P(0 < X < c) = \frac{1}{2}$ .

- \*9. La función de densidad para una variable aleatoria  $X$  está dada por

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- (a) Encuentre  $k$ .  
 (b) Encuentre  $P(2 < X < 3)$ .  
 (c) Encuentre  $P(X > 2.5)$ .  
 (d) Encuentre  $P(X > 0)$ .  
 (e) Encuentre  $\mu$ .  
 (f) Encuentre  $\sigma$ .  
 (g) Encuentre  $c$  tal que  $P(X < c) = \frac{1}{2}$ .  
 (h) Encuentre  $P(3 < X < 5)$ .

10. La función de densidad para una variable aleatoria  $X$  está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + k & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- (a) Encuentre  $k$ . (b) Encuentre  $P(X \geq 2.5)$ .  
 (c) Encuentre  $\mu$ . (d) Encuentre  $P(2 < X < \mu)$ .

11. **Tiempo de espera** En una parada de autobús, el tiempo  $X$  (en minutos) que una persona que llega de manera aleatoria debe esperar por el autobús se distribuye de manera uniforme con una función de densidad  $f(x) = \frac{1}{10}$ , donde  $0 \leq x \leq 10$   
 $f(x) = 0$  en otro caso. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona deba esperar cuando mucho siete minutos? ¿Cuál es el tiempo promedio que debe esperar una persona?

12. **Dispensador de refrescos** Un dispensador automático de refrescos en un restaurante de comida rápida sirve  $X$  onzas de refresco de cola en un recipiente de 12 onzas. Si  $X$  se distribuye uniformemente en el intervalo  $[11.93, 12.07]$ , ¿cuál es la probabilidad de que se sirvan menos de 12 onzas?  
 ¿Cuál es la probabilidad de que se sirvan exactamente 12 onzas? ¿Cuál es la cantidad promedio servida?

13. **Llegada a la sala de emergencias** En un hospital particular, la longitud de tiempo  $X$  (en horas) entre llegadas sucesivas a la sala de emergencias se distribuye de manera exponencial con  $k = 3$ . ¿Cuál es la probabilidad de que pase más de una hora sin ninguna llegada?

14. **Vida media de un componente electrónico** La longitud de la vida media  $X$  (en años) de un componente de computadora tiene una distribución exponencial con  $k = \frac{2}{5}$ . ¿Cuál es la probabilidad de que dicho componente falle en el transcurso de tres años de uso? ¿Cuál es la probabilidad de que dure más de cinco años?

**OBJETIVO**

Analizar la distribución normal, las unidades estándar y la tabla de áreas bajo la curva normal estándar (apéndice C).

## 16.2 La distribución normal

Con mucha frecuencia, los datos medidos en la naturaleza —como la altura de los individuos de una población— se representan por medio de una variable aleatoria cuya función de densidad puede aproximarse mediante la curva en forma de campana de la figura 16.9. La curva se extiende de manera indefinida a la derecha y la izquierda y nunca toca al eje  $x$ . Esta curva llamada la **curva normal**, es la gráfica más importante de todas las funciones de densidad, la *función de densidad normal*.

### DEFINICIÓN

Una variable aleatoria continua  $X$  es una **variable aleatoria normal**, de manera equivalente tiene una **distribución normal** (también llamada gaussiana<sup>1</sup>), si la función de densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2} \quad -\infty < x < \infty$$

llamada la **función de densidad normal**. Los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  son, respectivamente, la media y la desviación estándar de  $X$ .

Observe en la figura 16.9 que  $f(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Esto es, la curva normal tiene al eje  $x$  como una asíntota horizontal. También observe que la curva normal es simétrica con respecto a la recta vertical  $x = \mu$ . Esto es, la altura de un punto sobre la curva  $d$  unidades a la derecha de  $x = \mu$  es la misma que la altura del punto sobre la curva que está  $d$  unidades a la izquierda de  $x = \mu$ . Debido a esta simetría y al hecho de que el área bajo la curva normal es 1, el área a la derecha (o izquierda) de la media debe ser  $\frac{1}{2}$ .

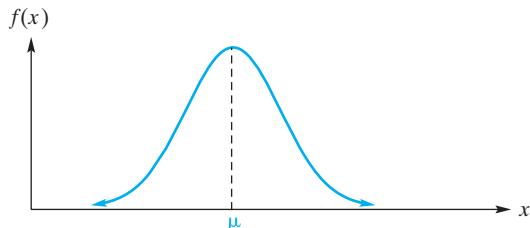


FIGURA 16.9 Curva normal.

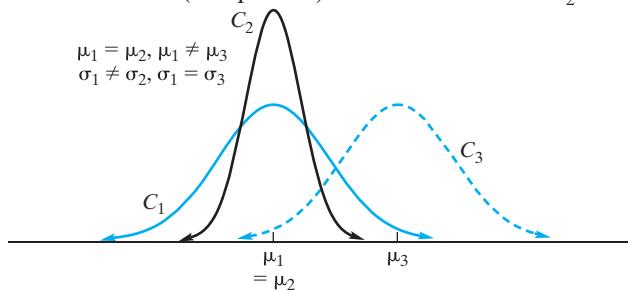


FIGURA 16.10 Curvas normales.

Cada elección de valores para  $\mu$  y  $\sigma$  determina una curva normal diferente. El valor de  $\mu$  determina donde está “centrada” la curva y  $\sigma$  determina cómo se “dispersa”. Entre más pequeño sea el valor de  $\sigma$ , menos dispersa está el área cercana a  $\mu$ . Por ejemplo, en la figura 16.10 se muestran las curvas normales  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , donde  $C_1$  tiene la media  $\mu_1$  y la desviación estándar  $\sigma_1$ ,  $C_2$  tiene la media  $\mu_2$ , y así sucesivamente. Aquí,  $C_1$  y  $C_2$  tienen la misma media pero desviaciones estándar diferentes:  $\sigma_1 > \sigma_2$ ,  $C_1$  y  $C_3$  tienen la misma desviación estándar pero medias diferentes:  $\mu_1 < \mu_3$ . Las curvas  $C_2$  y  $C_3$  tienen medias diferentes y desviaciones estándar distintas.

La desviación estándar tiene un papel significativo en la descripción de probabilidades asociadas con una variable aleatoria normal  $X$ . De manera más precisa, la probabilidad de que  $X$  caiga dentro de una desviación estándar desde la media es aproximadamente 0.68:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$$

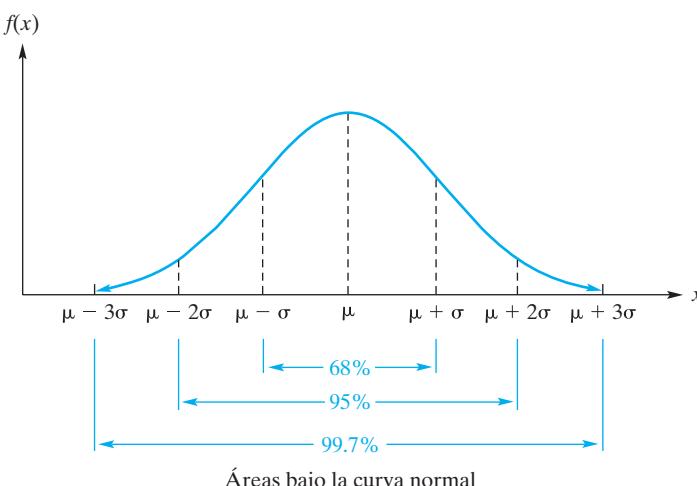
En otras palabras, aproximadamente 68% del área bajo una curva normal está dentro de una desviación estándar desde la media (figura 16.11). Entre  $\mu \pm 2\sigma$  está alrededor del 95% del área y entre  $\mu \pm 3\sigma$  está alrededor del 99.7%:

$$\begin{aligned} P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) &= 0.95 \\ P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) &= 0.997 \end{aligned}$$

Así, es muy probable que  $X$  se encuentre dentro de tres desviaciones estándar des- de la media.

Se recomienda al lector familiarizarse con los porcentajes de la figura 16.11.

<sup>1</sup>En honor al matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855).



**FIGURA 16.11** Probabilidad y número de desviaciones estándar desde  $\mu$ .

### EJEMPLO 1 Análisis de calificaciones en exámenes

Sea  $X$  una variable aleatoria cuyos valores son las calificaciones que obtuvieron alumnos de último año de la escuela secundaria en un examen aplicado a nivel nacional. Para propósitos de modelado, suponga que  $X$  se distribuye en forma normal con media de 600 y desviación estándar de 90. Entonces la probabilidad de que  $X$  esté dentro de  $2\sigma = 2(90) = 180$  puntos desde 600 es 0.95. En otras palabras, 95% de las calificaciones están entre 420 y 780. De manera similar, 99.7% de las calificaciones están dentro de  $3\sigma = 3(90) = 270$  puntos desde 600; es decir, entre 330 y 870.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

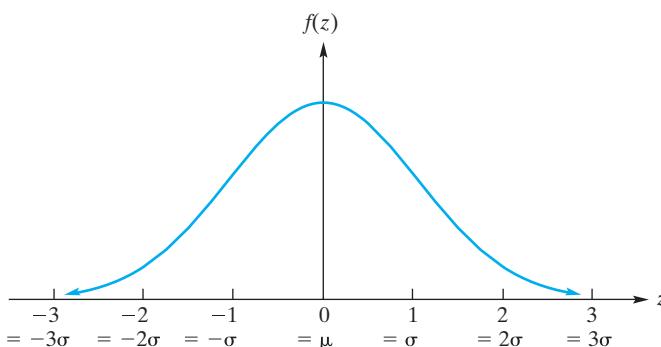
Si  $Z$  es una variable aleatoria que se distribuye de manera normal, donde  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$ , se obtiene la curva normal de la figura 16.12, llamada la **curva normal estándar**.

#### DEFINICIÓN

Una variable aleatoria continua  $Z$  es una **variable aleatoria normal estándar** (o tiene una **distribución normal estándar**) si su función de densidad está dada por

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Llamada la **función de densidad normal estándar**. La variable  $Z$  tiene media 0 y desviación estándar 1.



**FIGURA 16.12** Curva normal estándar;  $\mu = 0, \sigma = 1$ .

Como una variable aleatoria normal estándar  $Z$  tiene media 0 y desviación estándar 1, sus valores están en unidades de desviaciones estándar desde la media, que se llaman **unidades estándar**. Por ejemplo, si  $0 < Z < 2.54$ , entonces  $Z$  está dentro de 2.54

desviaciones estándar a la derecha de 0, que es la media. Esto es,  $0 < Z < 2.54\sigma$ . Para encontrar la probabilidad  $P(0 < Z < 2.54)$ , se tiene

$$P(0 < Z < 2.54) = \int_0^{2.54} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

La integral a la derecha no puede evaluarse mediante funciones elementales. Sin embargo, los valores para las integrales de este tipo se han aproximado y colocado en forma tabular.

En el apéndice C se proporciona una de estas tablas. La tabla da el área bajo una curva normal estándar entre  $z = 0$  y  $z = z_0$ , donde  $z_0 \geq 0$ . Esta área se presenta sombreada en la figura 16.13 y se denota por medio de  $A(z_0)$ . En la tabla, en las columnas de la izquierda, están los valores de  $z$  a la décima más cercana. Los números en la parte superior son los valores de las centésimas. Por ejemplo, la entrada en el renglón para 2.5 y la columna bajo 0.04 corresponde a  $z = 2.54$  y es 0.4945. Así, el área bajo una curva normal estándar entre  $z = 0$  y  $z = 2.52$  es (aproximadamente) 0.4945:

$$P(0 < Z < 2.54) = A(2.54) \approx 0.4945$$

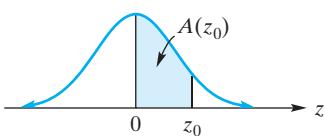
Los números en la tabla son necesariamente aproximados, pero para el balance de este capítulo se escribirá  $A(2.54) = 0.4945$  con la intención de mejorar de la legibilidad. De manera similar, usted debe verificar que  $A(2) = 0.4772$  y  $A(0.33) = 0.1293$ .

Con el empleo de la simetría, se calcula un área a la izquierda de  $z = 0$  al calcular el área correspondiente a la derecha de  $z = 0$ . Por ejemplo,

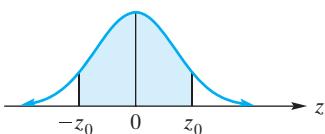
$$P(-z_0 < Z < 0) = P(0 < Z < z_0) = A(z_0)$$

como se muestra en la figura 16.14. Por lo tanto,  $P(-2.54 < Z < 0) = A(2.54) = 0.4945$ .

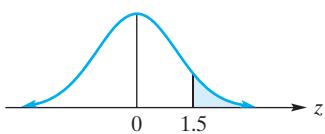
Cuando se calculan probabilidades para una variable normal estándar, usted puede tener la necesidad de sumar y restar áreas. Una ayuda útil para hacer esto de manera apropiada es un bosquejo de una curva normal estándar en la que usted sombreé toda el área que desea encontrar, como lo muestra el ejemplo 2.



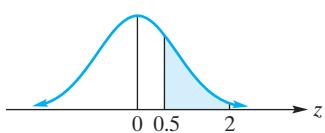
**FIGURA 16.13**  
 $A(z_0) = P(0 < Z < z_0)$ .



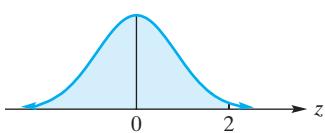
**FIGURA 16.14**  
 $P(-z_0 < Z < 0) = P(0 < Z < z_0)$ .



**FIGURA 16.15**  $P(Z > 1.5)$ .



**FIGURA 16.16**  $P(0.5 < Z < 2)$ .



**FIGURA 16.17**  $P(Z \leq 2)$ .

### EJEMPLO 2 Probabilidades para la variable normal estándar $Z$

- a. Encuentre  $P(Z > 1.5)$ .

**Solución:** Esta probabilidad es el área a la derecha de  $z = 1.5$  (figura 16.15). Esa área es igual a la diferencia entre el área total a la derecha de  $z = 0$ , que es 0.5, y el área entre  $z = 0$  y  $z = 1.5$ , que es  $A(1.5)$ . Así,

$$\begin{aligned} P(Z > 1.5) &= 0.5 - A(1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668 \quad (\text{del apéndice C}) \end{aligned}$$

- b. Encuentre  $P(0.5 < Z < 2)$ .

**Solución:** Esta probabilidad es el área entre  $z = 0.5$  y  $z = 2$  (figura 16.16). Dicha área es la diferencia de dos regiones: el área entre  $z = 0$  y  $z = 2$ , que es  $A(2)$ , menos el área entre  $z = 0$  y  $z = 0.5$ , que es  $A(0.5)$ . Así,

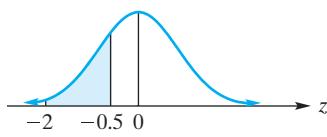
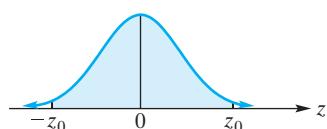
$$\begin{aligned} P(0.5 < Z < 2) &= A(2) - A(0.5) \\ &= 0.4772 - 0.1915 = 0.2857 \end{aligned}$$

- c. Encuentre  $P(Z \leq 2)$ .

**Solución:** Esta probabilidad es el área a la izquierda de  $z = 2$  (figura 16.17). Dicha área es igual a la suma del área a la izquierda de  $z = 0$ , que es 0.5, y el área entre  $z = 0$  y  $z = 2$ , que es  $A(2)$ . Así,

$$\begin{aligned} P(Z \leq 2) &= 0.5 + A(2) \\ &= 0.5 + 0.4772 = 0.9772 \end{aligned}$$



FIGURA 16.18  $P(-2 < Z < -0.5)$ FIGURA 16.19  $P(-z_0 < Z < z_0) = 0.9642$ .

**EJEMPLO 3 Probabilidades para la variable normal estándar  $Z$**

- a. Encuentre  $P(-2 < Z < -0.5)$ .

**Solución:** Esta probabilidad es el área entre  $z = -2$  y  $z = -0.5$  (figura 16.18). Por simetría, esa área es igual al área entre  $z = 0.5$  y  $z = 2$ , que se calculó en el ejemplo 2(b). Se tiene

$$\begin{aligned} P(-2 < Z < -0.5) &= P(0.5 < Z < 2) \\ &= A(2) - A(0.5) = 0.2857 \end{aligned}$$

- b. Encuentre  $z_0$  tal que  $P(-z_0 < Z < z_0) = 0.9642$ .

**Solución:** En la figura 16.19 se muestra el área correspondiente. Como el área total es 0.9642, por simetría el área entre  $z = 0$  y  $z = z_0$  es  $\frac{1}{2}(0.9642) = 0.4821$ , que es  $A(z_0)$ . Si se busca en el cuerpo de la tabla del apéndice C, se observa que 0.4821 corresponde a un valor de  $Z$  de 2.1. Así,  $z_0 = 2.1$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3



### Transformación a una variable normal estándar $Z$

Si  $X$  se distribuye de manera normal con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ , podría pensarse que es necesaria una tabla para cada par de valores de  $\mu$  y  $\sigma$ . Por fortuna, esto no es cierto. Aún aquí se puede continuar con el apéndice C, pero primero debe expresarse el área de una región dada como un área igual bajo una curva normal estándar. Lo anterior implica la transformación de  $X$  en una variable estándar  $Z$  (con media 0 y desviación estándar 1) mediante la siguiente fórmula para el cambio de variable:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (1)$$

En el lado derecho, al restar  $\mu$  de  $X$  se obtiene la distancia desde  $\mu$  hasta  $X$ . Al dividir entre  $\sigma$  se expresa esta distancia en términos de unidades de desviación estándar. Así,  $Z$  es el número de desviaciones estándar a las que  $X$  está de  $\mu$ . Es decir, la fórmula (1) convierte unidades de  $X$  en unidades estándar (valores de  $Z$ ). Por ejemplo, si  $X = \mu$ , entonces al usar la fórmula (1) se obtiene  $Z = 0$ . Por consiguiente,  $\mu$  está a cero desviaciones estándar de  $\mu$ .

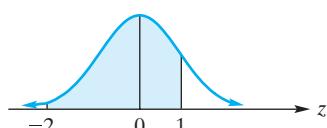
Suponga que  $X$  se distribuye de manera normal con  $\mu = 4$  y  $\sigma = 2$ . Entonces para encontrar —por ejemplo—  $P(0 < X < 6)$ , primero se usa la fórmula (1) para convertir los valores 0 y 6 de  $X$ , en valores de  $Z$  (unidades estándar):

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{0 - 4}{2} = -2 \\ z_2 &= \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{6 - 4}{2} = 1 \end{aligned}$$

Puede demostrarse que

$$P(0 < X < 6) = P(-2 < Z < 1)$$

Esto significa que el área bajo una curva normal con  $\mu = 4$  y  $\sigma = 2$  entre  $x = 0$  y  $x = 6$  es igual al área bajo una curva normal entre  $z = -2$  y  $z = 1$  (figura 16.20). Esta área es la suma del área  $A_1$  entre  $z = -2$  y  $z = 0$  y el área  $A_2$  entre  $z = 0$  y  $z = 1$ . Con el empleo de la simetría para  $A_1$ , se tiene

FIGURA 16.20  $P(-2 < Z < 1)$ .

$$\begin{aligned} P(-2 < Z < 1) &= A_1 + A_2 = A(2) + A(1) \\ &= 0.4772 + 0.3413 = 0.8185 \end{aligned}$$

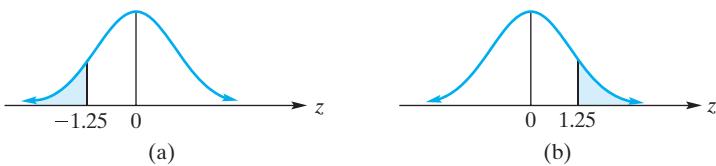


FIGURA 16.21 Diagrama para el ejemplo 4.

### EJEMPLO 4 Salarios de empleados

Se supone que los salarios semanales de 5000 empleados de una gran compañía se distribuyen de manera normal con media de \$640 y desviación estándar de \$56. ¿Cuántos empleados ganan menos de \$570 por semana?

**Solución:** Al convertir a unidades estándar se tiene

$$P(X < 570) = P\left(Z < \frac{570 - 640}{56}\right) = P(Z < -1.25)$$

Esta probabilidad es el área que se muestra en la figura 16.21(a). Por simetría, esa área es igual al área de la figura 16.21(b) que corresponde a  $P(Z > 1.25)$ . Esta área es la diferencia entre el área total a la derecha de  $z = 0$ , que es 0.5, y el área entre  $z = 0$  y  $z = 1.25$ , que es  $A(1.25)$ . Así,

$$\begin{aligned} P(X < 570) &= P(Z < -1.25) = P(Z > 1.25) \\ &= 0.5 - A(1.25) = 0.5 - 0.3944 = 0.1056 \end{aligned}$$

Esto es, 10.56% de los empleados tienen salarios menores a \$570. Lo anterior corresponde a  $0.1056(5000) = 528$  empleados.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21



## Problemas 16.2

\*1. Si  $Z$  es una variable aleatoria normal estándar, encuentre cada una de las siguientes probabilidades.

- |                             |                          |
|-----------------------------|--------------------------|
| (a) $P(0 < Z < 1.7)$        | (b) $P(0.43 < Z < 2.89)$ |
| (c) $P(Z > -1.23)$          | (d) $P(Z \leq 2.91)$     |
| (e) $P(-2.51 < Z \leq 1.3)$ | (f) $P(Z > 0.03)$        |

2. Si  $Z$  es una variable aleatoria normal estándar, encuentre lo siguiente.

- |                           |                            |
|---------------------------|----------------------------|
| (a) $P(-1.96 < Z < 1.96)$ | (b) $P(-2.11 < Z < -1.35)$ |
| (c) $P(Z < -1.05)$        | (d) $P(Z > 3\sigma)$       |
| (e) $P( Z  > 2)$          | (f) $P( Z  < \frac{1}{2})$ |

En los problemas 3 a 8, encuentre  $z_0$  tal que la afirmación dada sea cierta. Suponga que  $Z$  es una variable aleatoria normal estándar.

- |   |                            |
|---|----------------------------|
| *3. $P(Z < z_0) = 0.5517$   | 4. $P(Z < z_0) = 0.0668$   |
| 5. $P(Z > z_0) = 0.8599$  | 6. $P(Z > z_0) = 0.4129$   |
| 7. $P(-z_0 < Z < z_0) = 0.2662$   | 8. $P( Z  > z_0) = 0.3174$ |
| 9. Si $X$ se distribuye de manera normal con $\mu = 16$ y $\sigma = 4$ , encuentre cada una de las siguientes probabilidades. |                            |
| (a) $P(X < 27)$   | (b) $P(X < 10)$            |
| (c) $P(10.8 < X < 12.4)$  |                            |

10. Si  $X$  se distribuye de manera normal con  $\mu = 200$  y  $\sigma = 40$ , encuentre cada una de las siguientes probabilidades.

- |                  |                        |
|------------------|------------------------|
| (a) $P(X > 150)$ | (b) $P(210 < X < 250)$ |
|------------------|------------------------|

11. Si  $X$  se distribuye de manera normal con  $\mu = -3$  y  $\sigma = 2$ , encuentre  $P(X > -2)$ .

12. Si  $X$  se distribuye de manera normal con  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1.5$ , encuentre  $P(X < 3)$ .

- |  |
|--|
| 13. Si $X$ se distribuye de manera normal con $\mu = 65$ y $\sigma^2 = 100$ , encuentre $P(35 < X \leq 95)$ .  |
| 14. Si $X$ se distribuye de manera normal con $\mu = 8$ y $\sigma = 1$ , encuentre $P(X > \mu - \sigma)$ .   |
| 15. Si $X$ se distribuye de manera normal de tal forma que $\mu = 40$ y $P(X > 54) = 0.0401$ , encuentre $\sigma$ .  |
| 16. Si $X$ se distribuye de manera normal con $\mu = 16$ y $\sigma = 2.25$ , encuentre $x_0$ tal que la probabilidad de que $X$ esté entre $x_0$ y 16 sea 0.4641.  |
| 17. <b>Calificaciones en examen</b> Las calificaciones de un examen nacional de aprovechamiento se distribuyen de manera normal con media 500 y desviación estándar 100. ¿Qué porcentaje de aquéllos que realizaron el examen tienen una calificación entre 300 y 700?   |
| 18. <b>Calificaciones en examen</b> En un examen realizado a un grupo grande de personas, las calificaciones se distribuyeron de manera normal con media 65 y desviación estándar 10. ¿Cuál es la menor calificación entera que una persona pudo obtener para situarse entre el 20% de las calificaciones más altas? |
| 19. <b>Altura de adultos</b> La altura (en pulgadas) de adultos de una población grande se distribuyen de manera normal con $\mu = 68$ y $\sigma = 3$ . ¿Qué porcentaje del grupo está por debajo de 6 pies de alto?   |
| 20. <b>Ingreso</b> El ingreso anual para un grupo de 10,000 personas profesionistas se distribuye de manera normal con $\mu = \$60,000$ y $\sigma = \$5000$ .  |
| (a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de este grupo tenga un ingreso anual menor que \$46,000?   |
| (b) ¿Cuántas de estas personas tienen ingresos anuales por encima de \$75,000?   |

- \*21. Coeficiente intelectual (CI)** Los CI de una población grande de niños se distribuyen de manera normal con media de 100.4 y desviación estándar de 11.6.
- (a) ¿Qué porcentaje de los niños tienen CI mayores que 125.

(b) Aproximadamente 90% de los niños tienen CI más altos que. ¿cuál valor?

22. Suponga que  $X$  es una variable aleatoria con  $\mu = 10$  y  $\sigma = 2$ . Si  $P(4 < X < 16) = 0.25$ , puede  $X$  distribuirse de manera normal.

## OBJETIVO

Mostrar la técnica para estimar la distribución binomial con el uso de la distribución normal.

## 16.3 Aproximación normal a la distribución binomial

Este capítulo se concluye con la conjunción de las nociones de una variable aleatoria discreta y una variable aleatoria continua. Recuerde que en el capítulo 9 se expuso que si  $X$  es una variable aleatoria binomial (que es discreta), y si la probabilidad de éxito de cualquier ensayo es  $p$ , entonces para  $n$  ensayos independientes, la probabilidad de  $x$  éxitos esta dada por

$$P(X = x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

donde  $q = 1 - p$ . Usted debe estar de acuerdo en que el cálculo de probabilidades para una variable aleatoria binomial puede ser muy tedioso cuando el número de ensayos es grande. Por ejemplo, sólo imagine tratar de calcular  ${}_{100} C_{40} (0.3)^{40} (0.7)^{60}$ . Para manejar expresiones como ésta, es posible aproximar una distribución binomial mediante una distribución normal y después usar una tabla de áreas.

Para mostrar cómo se hace esto, se resolverá un ejemplo pequeño. En la figura 16.22 se muestra un histograma de probabilidad para un experimento binomial donde  $n = 10$  y  $p = 0.5$ . Los rectángulos centrados en  $x = 0$  y  $x = 10$  no se muestran porque sus alturas son muy cercanas a 0. Sobre el histograma puede verse una curva normal superpuesta, que se aproxima a este. La aproximación sería aún mejor si  $n$  fuera más grande. Es decir, a medida que  $n$  se hace más grande el ancho de cada intervalo unitario aparenta ser más pequeño y el contorno del histograma tiende a tomar la apariencia de una curva suave. De hecho, *no es inusual pensar en una curva de densidad como el caso limitante de un histograma de probabilidad*. A pesar del hecho de que en este caso  $n$  sólo es 10, la aproximación que se muestra no parece muy mala. La pregunta que ahora surge es “¿cuál distribución normal se aproxima a la distribución binomial?” Como la media y la desviación estándar son medidas de tendencia central y dispersión de una variable aleatoria, se elige una distribución normal de aproximación que tenga la misma media y desviación estándar que la distribución binomial. Para esta elección, pueden estimarse las áreas de los rectángulos en el histograma (es decir, las probabilidades binomiales) al determinar el área correspondiente bajo la curva normal. En resumen, se tiene lo siguiente:

Si  $X$  es una variable aleatoria binomial y  $n$  es suficientemente grande, entonces la distribución de  $X$  puede aproximarse mediante una variable aleatoria normal cuya media y desviación estándar sean las mismas que para  $X$ , las cuales son  $np$  y  $\sqrt{npq}$ , respectivamente.

Quizá la frase “ $n$  es suficientemente grande” requiera una explicación apropiada. En general, una aproximación normal a una distribución binomial no es buena si  $n$  es pequeña y  $p$  es cercana a 0 o 1, debido a que mucha del área en el histograma binomial estaría concentrada en un extremo de la distribución (es decir, en 0 o  $n$ ). Así, la distribución no sería muy simétrica, no se “ajustaría” bien a una curva normal. Una regla general que puede seguirse es que la aproximación normal a la distribución binomial es razonable si  $np$  y  $nq$  son al menos iguales a 5. Éste es el caso en el presente ejemplo:  $np = 10(0.5) = 5$  y  $nq = 10(0.5) = 5$ .

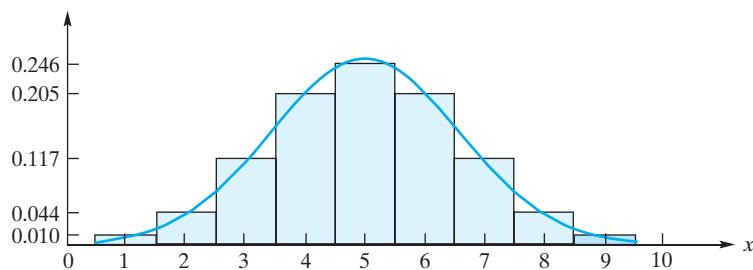
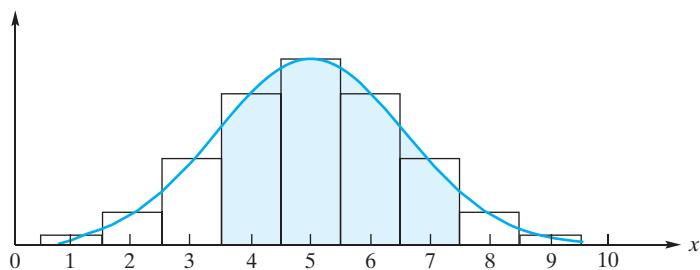


FIGURA 16.22 Aproximación normal a una distribución binomial.

FIGURA 16.23 Aproximación normal a  $P(4 \leq X \leq 7)$ .

Ahora se usará la aproximación normal para estimar una probabilidad binomial para  $n = 10$  y  $p = 0.5$ . Si  $X$  denota el número de éxitos, entonces su media es

$$np = 10(0.5) = 5$$

y su desviación estándar es

$$\sqrt{npq} = \sqrt{10(0.5)(0.5)} = \sqrt{2.5} \approx 1.58$$

La función de probabilidad para  $X$  está dada por

$$f(x) = {}_{10}C_x (0.5)^x (0.5)^{10-x}$$

Esta distribución se aproxima mediante la distribución normal con  $\mu = 5$  y  $\sigma = \sqrt{2.5}$ .

Suponga que se estima la probabilidad de que haya entre 4 y 7 éxitos, inclusive, lo cual está dado por

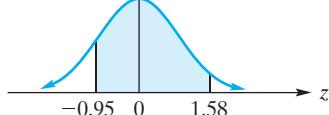
$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 7) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) \\ &= \sum_{x=4}^7 {}_{10}C_x (0.5)^x (0.5)^{10-x} \end{aligned}$$

Esta probabilidad es la suma de las áreas de los *rectángulos* para  $X = 4, 5, 6$  y  $7$  en la figura 16.23. Bajo la curva normal, se ha sombreado el área correspondiente que se calculará como una aproximación a esta probabilidad. Observe que el sombreado no se extiende desde 4 hasta 7 sino desde  $4 - \frac{1}{2}$  hasta  $7 + \frac{1}{2}$ , es decir, de 3.5 a 7.5. Esta “corrección de continuidad” de 0.5 en cada extremo del intervalo permite incluir en la aproximación la mayor parte del área de los rectángulos apropiados, y *tal corrección debe hacerse siempre*. La frase *corrección de continuidad* se usa porque  $X$  se trata como si fuera una variable aleatoria continua. Ahora se convertirán los valores 3.5 y 7.5 de  $X$  en valores de  $Z$ :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3.5 - 5}{\sqrt{2.5}} \approx -0.95 \\ z_2 &= \frac{7.5 - 5}{\sqrt{2.5}} \approx 1.58 \end{aligned}$$

Así,

$$P(4 \leq X \leq 7) \approx P(-0.95 \leq Z \leq 1.58)$$

FIGURA 16.24  $P(-0.95 \leq Z \leq 1.58)$ .

que corresponde al área bajo una curva normal estandarizada entre  $z = -0.95$  y  $z = 1.58$  (figura 16.24). Esta área es la suma del área entre  $z = -0.95$  y  $z = 0$ , la cual, por simetría, es  $A(0.95)$  y el área entre  $z = 0$  y  $z = 1.58$ , que es  $A(1.58)$ . Por consiguiente,

$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 7) &\approx P(-0.95 \leq Z \leq 1.58) \\ &= A(0.95) + A(1.58) \\ &= 0.3289 + 0.4429 = 0.7718 \end{aligned}$$

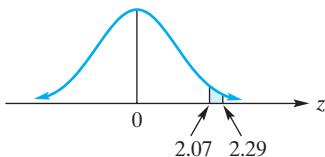
Este resultado es cercano al valor verdadero, 0.7734 (con cuatro decimales).

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1****APROXIMACIÓN NORMAL A UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL**

En un programa de televisión de juegos, el gran premio se encuentra oculto detrás de una de cuatro puertas. Suponga que la probabilidad de seleccionar el gran premio es  $p = \frac{1}{4}$ . Hubo 20 ganadores entre los 60 concursantes. Suponga que  $X$  es el número de concursantes que ganan el gran premio, y  $X$  es binomial con  $n = 60$ . Aproxime  $P(X = 20)$  mediante la aproximación normal.

**ADVERTENCIA**

No deje de tomar en cuenta la corrección de continuidad.



**FIGURA 16.25**  $P(2.07 \leq Z \leq 2.29)$ .

**EJEMPLO 1 Aproximación normal a una distribución binomial**

Suponga que  $X$  es una variable aleatoria binomial con  $n = 100$  y  $p = 0.3$ . Estime  $P(X = 40)$  mediante la aproximación normal.

**Solución:** Se tiene

$$P(X = 40) = {}_{100}C_{40}(0.3)^{40}(0.7)^{60}$$

gracias a la fórmula que se mencionó al comienzo de esta sección. Se usa una distribución normal con

$$\mu = np = 100(0.3) = 30$$

y

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100(0.3)(0.7)} = \sqrt{21} \approx 4.58$$

Al convertir los valores corregidos 39.5 y 40.5 de  $X$  en valores de  $Z$  se obtiene

$$z_1 = \frac{39.5 - 30}{\sqrt{21}} \approx 2.07$$

$$z_2 = \frac{40.5 - 30}{\sqrt{21}} \approx 2.29$$

Por lo tanto,

$$P(X = 40) \approx P(2.07 \leq Z \leq 2.29)$$

Esta probabilidad es el área bajo una curva normal estándar entre  $z = 2.07$  y  $z = 2.29$  (figura 16.25). Esa área es la diferencia del área entre  $z = 0$  y  $z = 2.29$ , que es  $A(2.29)$ , y el área entre  $z = 0$  y  $z = 2.07$ , que es  $A(2.07)$ . Así,

$$\begin{aligned} P(X = 40) &\approx P(2.07 \leq Z \leq 2.29) \\ &= A(2.29) - A(2.07) \\ &= 0.4890 - 0.4808 = 0.0082 \quad (\text{del apéndice C}) \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

**EJEMPLO 2 Control de calidad**

En un experimento de control de calidad, se toma una muestra de 500 artículos de una línea de ensamblado. Por lo general, 8% de los artículos producidos están defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan más de 50 artículos defectuosos en la muestra?

**Solución:** Si  $X$  es el número de artículos defectuosos en la muestra, entonces se considerará que  $X$  es binomial, donde  $n = 500$  y  $p = 0.08$ . Para encontrar  $P(X \geq 51)$ , se usa la aproximación normal a la distribución binomial con

$$\mu = np = 500(0.08) = 40$$

y

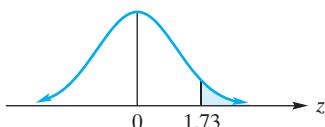
$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500(0.08)(0.92)} = \sqrt{36.8} \approx 6.07$$

Al convertir el valor corregido 50.5 en un valor de  $Z$  se obtiene

$$z = \frac{50.5 - 40}{\sqrt{36.8}} \approx 1.73$$

Así,

$$P(X \geq 51) \approx P(Z \geq 1.73)$$



**FIGURA 16.26**  $P(Z \geq 1.73)$ .

Esta probabilidad es el área bajo una curva normal estándar a la derecha de  $z = 1.73$  (figura 16.26). Esa área es la diferencia del área a la derecha de  $z = 0$ , que es 0.5, y el área entre  $z = 0$  y  $z = 1.73$ , que es  $A(1.73)$ . Por consiguiente,

$$\begin{aligned} P(X \geq 51) &\approx P(Z \geq 1.73) \\ &= 0.5 - A(1.73) = 0.5 - 0.4582 = 0.0418 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7



## Problemas 16.3

En los problemas 1 a 4,  $X$  es una variable aleatoria binomial con los valores dados de  $n$  y  $p$ . Calcule las probabilidades indicadas mediante la aproximación normal.

1.  $n = 150, p = 0.4; P(X \geq 52), P(X \geq 74)$
2.  $n = 50, p = 0.3; P(X = 19), P(X \leq 18)$
- \*3.  $n = 200, p = 0.6; P(X = 125), P(110 \leq X \leq 135)$
4.  $n = 25, p = 0.25; P(X \geq 7)$
5. **Lanzamiento de un dado** Suponga que un dado legal se lanza 300 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 5 entre 45 y 60 veces, inclusive?
6. **Lanzamiento de moneda** Para una moneda sesgada,  $P(C) = 0.4$  y  $P(X) = 0.6$ . Si la moneda se lanza 200 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener entre 90 y 100 caras, inclusive?
- \*7. **Descompostura de camión** Un servicio de entrega tiene una flotilla de 60 camiones. En cualquier momento, la probabilidad de que un camión esté fuera de servicio debido a factores como descomposturas y mantenimiento es 0.1. ¿Cuál es la probabilidad de que 7 o más camiones estén fuera de servicio en cualquier momento?
8. **Control de calidad** En una planta manufacturera, se toma una muestra de 200 artículos de la línea de ensamblado. Para cada artículo en la muestra, la probabilidad de que sea defectuoso es 0.05. ¿Cuál es la probabilidad de que haya 7 o más artículos defectuosos en la muestra?

9. **Examen de verdadero o falso** En un examen con 25 preguntas de verdadero o falso, si se trata de adivinar las respuestas correctas a cada una de las preguntas, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos 13 respuestas correctas? Si hay 100 preguntas en lugar de 25, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos 60 respuestas correctas?
10. **Examen de opción múltiple** En un examen de opción múltiple con 50 preguntas, cada pregunta tiene cuatro respuestas y sólo una de ellas es correcta. Si un estudiante trata de adivinar la respuesta correcta de las últimas 20 preguntas, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos la mitad de ellas correctas?
11. **Póquer** En un juego de póquer, la probabilidad de recibir una mano consistente en tres cartas de un tipo y dos cartas de otro tipo (en cualquier orden) es de aproximadamente 0.1. Si se reparten 100 manos, cuál es la probabilidad de que 16 o más de ellas sean justo como se acaba de describir?
12. **Prueba de sabor** Una importante compañía de refrescos de cola patrocina una prueba nacional de sabor, en la cual las personas prueban el refresco de la compañía así como otra marca competidora. Ninguno de los refrescos se puede identificar por su marca. Después se pide a las personas que elijan el refresco que supo mejor. Si cada una de las 35 personas encuestadas en un supermercado no tienen preferencia y eligen arbitrariamente uno de los refrescos, ¿cuál es la probabilidad de que 25 o más de ellas elijan el refresco de la compañía patrocinadora?

## 16.4 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

#### Sección 16.1 Variables aleatorias continuas

variable aleatoria continua	función de densidad uniforme
función de densidad exponencial	distribución exponencial
función de distribución acumulada	
media, $\mu$	varianza, $\sigma^2$

Ej. 1, p. 727  
Ej. 3, p. 728  
Ej. 4, p. 729  
Ej. 5, p. 730

#### Sección 16.2 La distribución normal

distribución normal	función de densidad normal
curva normal estándar	variable aleatoria normal estándar
distribución normal estándar	función de densidad normal estándar

Ej. 1, p. 733  
Ej. 2, p. 734  
Ej. 4, p. 736

#### Sección 16.3 Aproximación normal a la distribución binomial

Corrección de continuidad
---------------------------

Ej. 1, p. 739

### Resumen

Una variable aleatoria continua  $X$  puede tomar cualquier valor en un intervalo o intervalos. Una función de densidad para  $X$  es una función que tiene las siguientes propiedades:

$$1. f(x) \geq 0 \quad 2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$3. P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

La propiedad 3 significa que el área bajo la gráfica de  $f$  y por encima del eje  $x$  desde  $x = a$  hasta  $x = b$  es  $P(a \leq X \leq b)$ . La probabilidad de que  $X$  tome un valor particular es 0.

La variable aleatoria continua  $X$  tiene una distribución uniforme sobre  $[a, b]$  si su función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$X$  tiene una función de densidad exponencial  $f$  si

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde  $k$  es una constante positiva.

La función de distribución acumulada  $F$  para la variable aleatoria continua  $X$  con función de densidad  $f$  está dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

En forma geométrica,  $F(x)$  representa el área bajo la curva de densidad a la izquierda de  $x$ . Al usar  $F$ , se tiene la capacidad de encontrar  $P(a \leq x \leq b)$ :

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

La media  $\mu$  de  $X$  (también llamada valor esperado de  $X$ ,  $E(X)$ ) está dada por

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

siempre y cuando la integral sea convergente. La varianza está dada por

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2\end{aligned}$$

siempre que la integral sea convergente. La desviación estándar está dada por

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

La gráfica de la función de densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)((x-\mu)/\sigma)^2}$$

se llama curva normal y tiene forma de campana. Si  $X$  tiene una distribución normal, entonces la probabilidad de que  $X$  se encuentre dentro de una desviación estándar desde la media  $\mu$  es (aproximadamente) 0.68; dentro de dos desviaciones estándar, la probabilidad es 0.95; y dentro de tres desviaciones estándar es 0.997. Si  $Z$  es una variable aleatoria normal con  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$ , entonces  $Z$  se llama una variable aleatoria normal estándar. La probabilidad  $P(0 < Z < z_0)$  es el área bajo la gráfica de la curva normal estándar desde  $z = 0$  hasta  $z = z_0$  y se denota por  $A(z_0)$ . Los valores de  $A(z_0)$  se presentan en el apéndice C.

Si  $X$  se distribuye de manera normal con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ , entonces  $X$  puede transformarse en una variable aleatoria normal estándar mediante la fórmula del cambio de variable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Con esta fórmula, pueden encontrarse probabilidades para  $X$  mediante el uso de áreas bajo la curva normal estándar.

Si  $X$  es una variable aleatoria binomial y el número  $n$  de ensayos independientes es grande, entonces la distribución de  $X$  puede aproximarse mediante el uso de una variable aleatoria normal con media  $np$  y desviación estándar  $\sqrt{npq}$  donde  $p$  es la probabilidad de éxito en cualquier ensayo y  $q = 1 - p$ . Cuando se estimen probabilidades binomiales por medio de una variable aleatoria normal es importante considerar correcciones de continuidad.

## Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

1. Suponga que  $X$  es una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} + kx^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- (a) Encuentre  $k$ .  
 (b) Encuentre  $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4})$ .  
 (c) Encuentre  $P(X \geq \frac{1}{2})$ .  
 (d) Encuentre la función de distribución acumulada.

2. Suponga que  $X$  se distribuye de manera normal considere  $k = \frac{1}{3}$ . Encuentre  $P(X > 2)$ .  
 3. Suponga que  $X$  es una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- (a) Encuentre  $\mu$ .  
 (b) Encuentre  $\sigma$

4. Considere que  $X$  se distribuye de manera uniforme en el intervalo  $[2, 6]$ . Encuentre  $P(X < 5)$ .

Considere que  $X$  se distribuye de manera uniforme, con media 20 y desviación estándar 4. En los problemas 5 a 10, determine las probabilidades dadas

5.  $P(X > 22)$   
 6.  $P(X < 21)$   
 7.  $P(14 < X < 18)$   
 8.  $P(X > 10)$   
 9.  $P(X < 23)$   
 10.  $P(23 < X < 33)$

En los problemas 11 y 12,  $X$  es una variable aleatoria binomial con  $n = 100$  y  $p = 0.35$ . Encuentre las probabilidades dadas mediante la aproximación normal.

11.  $P(25 \leq X \leq 47)$   
 12.  $P(X = 48)$

13. **Altura de individuos** La altura (en pulgadas) de los individuos de cierto grupo se distribuyen de manera normal con media 68 y desviación estándar 2. Encuentre la probabilidad de que un individuo de este grupo sea más alto que 6 pies.  
 14. **Lanzamiento de moneda** Si una moneda legal se lanza 500 veces, use la aproximación normal a la distribución binomial para estimar la probabilidad de que aparezca una cara al menos 215 veces.

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Distribución acumulada de datos

Lo que se dice en la sección 16.3 acerca de los histogramas de variables aleatorias discretas está aún más directamente relacionado para las variables aleatorias continuas: puede pensarse en la curva de densidad de probabilidad como en el caso limitante de un histograma de probabilidad. En efecto, este hecho se usa con frecuencia para explicar la idea de una función de densidad de probabilidad.



Con las variables aleatorias continuas, un histograma divide el rango de valores posibles en una serie de intervalos, llamados cajas. Encima de cada caja se encuentra una barra cuya altura indica qué parte del conjunto de datos caen en esa caja. Esto se ilustra en la figura 16.27. La caja que se encuentra más a la derecha es el intervalo desde 8 hasta 10. Como un quinto de los datos caen en esa caja, la barra cubre un quinto del área de todas las barras en su conjunto.

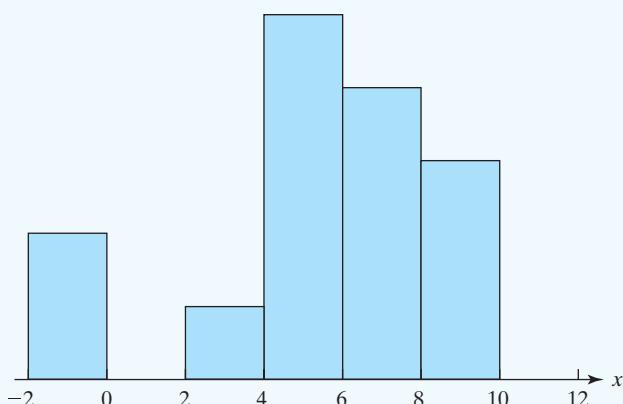


FIGURA 16.27

Una curva de densidad de probabilidad es el límite del contorno de un histograma cuando el conjunto de datos es muy grande y el tamaño de la caja se hace muy pequeño. En la figura 16.28 se ilustra un conjunto de datos más grande y un tamaño de caja más pequeño.

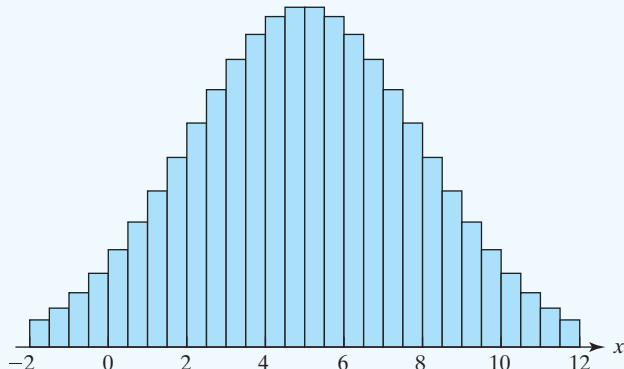


FIGURA 16.28

Por desgracia, normalmente se necesitan docenas de datos para que el contorno de un histograma comience a suavizarse. En la práctica, quizás se podría desecharse “hacer trampa” y obtener una idea de la función de densidad de probabilidad con el uso de menos valores de datos, y sin tener que dibujar un histograma.

Una forma de hacerlo es: primero use los valores de datos para graficar puntos que revelen la curva de *distribución acumulada*, y después se usa esta curva para inferir la forma de la curva de densidad de probabilidad. Los pasos son los siguientes:

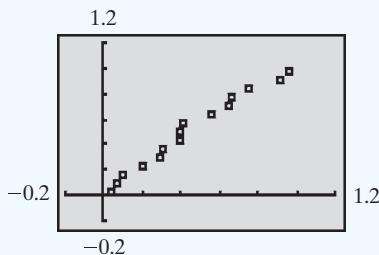
- Paso 1:** Determine  $n$ , el tamaño de la muestra.
- Paso 2:** Dispóngalos en orden ascendente. El menor valor de los datos es  $v(1)$ , el siguiente más pequeño es  $v(2)$ , y así sucesivamente.
- Paso 3:** En un conjunto de ejes coordinados, grafique  $n$  puntos con coordenadas  $\left(v(i), \frac{i - \frac{1}{2}}{n}\right)$  para una  $i$  que va de 1 a  $n$ .
- Paso 4:** Determine cuál es la función de distribución acumulada que sugiere la gráfica.
- Paso 5:** Encuentre la función de densidad de probabilidad como la derivada de la función de distribución acumulada.

En el paso 3, se grafica cada valor de datos  $v(i)$  contra la probabilidad experimental, con base en los datos, de que un nuevo valor sería menor que  $v(i)$ . Esta probabilidad se calcula al tomar el número de valores por debajo de  $v(i)$ , a saber  $i - 1$ ; sumar un término de  $\frac{1}{2}$  para dividir el  $i$ -ésimo punto de datos en dos y contar la mitad de éste como “debajo de  $v(i)$ ”; y dividir el resultado entre  $n$ , el número total de valores.

Ahora se verá cómo funciona esto con valores generados con la ayuda de una función de densidad de probabilidad conocida. En una calculadora graficadora, se usa el comando *rand* o su equivalente para generar 15 valores (paso 1) con la función de densidad uniforme que sea igual a 1 en el intervalo desde 0 hasta 1 e igual a 0 en cualquier otra parte. Una corri-

da de este tipo produce los siguientes valores (ordenados del menor al mayor y redondeados a tres decimales): 0.043, 0.074, 0.093, 0.198, 0.293, 0.311, 0.399, 0.400, 0.409, 0.566, 0.654, 0.665, 0.760, 0.919, 0.967 (paso 2).

Cuando se grafican las probabilidades correspondientes (paso 3), el resultado es como se muestra en la figura 16.29.



**FIGURA 16.29**

Aun si no se supiera cómo fueron generados los puntos, podría observarse que todos los valores de datos están entre 0 y 1, y que los puntos graficados caen muy cerca de la línea  $y = x$ . Esto sugiere (paso 4) la función de distribución acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

La derivada de esta función con respecto a  $x$  (paso 5) es

$$P(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

que es exactamente la función que se usó para generar los valores de datos.<sup>2</sup> El método funciona.

Sin embargo, debe tomarse la siguiente precaución. Por naturaleza, las funciones de distribución acumuladas son crecientes de izquierda a derecha y por lo tanto todas tienen una forma general parecida. Por ejemplo, la gráfica de la figura 16.29 podría interpretarse como el reflejo de la función de distribución acumulada

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-2x} & 0 \leq x \end{cases}$$

El ajuste no sería tan bueno como para  $F(x)$ , pero tampoco estaría completamente fuera de lugar. Por consiguiente, el método descrito aquí para identificar una posible función de distribución acumulada y su derivada, la función de densidad de probabilidad, es mejor si se complementa con otra información, como el conocimiento del proceso utilizado para producir los datos.

## Problemas

- Genere su propia corrida de 15 valores mediante una función de densidad uniforme, y grafique los resultados para obtener una visión de la función de distribución acumulada. ¿Qué tan bien se ajustan sus resultados a la función de distribución conocida?
- Repita el problema 1 para una función de densidad normal. (En la TI-83 Plus, use el comando *randNorm*). En el paso 4, realice una regresión logística. Aunque la función de distribución acumulada para una función de densidad normal *no* es realmente una función logística, tiene una forma muy similar, de manera que puede usarse una función logística como una aproximación. Después, si su calculadora tiene la capacidad, grafique la derivada de la función logística. En caso contrario, observe dónde la pendiente de la función logística es máxima y qué le pasa a la pendiente en los extremos de la curva. ¿Cómo es el comportamiento de la derivada en comparación con el comportamiento de la función de densidad normal usada para generar los valores de datos?
- Visite un sitio en la red con una tabla de valores de datos y vea si puede determinar la naturaleza de la función de densidad de probabilidad. Puede intentarlo con la lista de terremotos cercana al tiempo real del U.S. Geological Survey ([wwwneic.cr.usgs.gov](http://wwwneic.cr.usgs.gov)) o uno de los múltiples conjuntos de datos publicados por la oficina de censos de Estados Unidos ([www.census.org](http://www.census.org)). ¿Por qué piensa usted que los datos se distribuyen de la forma en que lo hacen?

<sup>2</sup>Observe que  $P(i)$  no está definida para  $x = 0$  y  $x = 1$ . Lo anterior no tiene importancia.

# 17

## CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

- 17.1 [Funciones de varias variables](#)
- 17.2 [Derivadas parciales](#)
- 17.3 [Aplicaciones de las derivadas parciales](#)
- 17.4 [Diferenciación parcial implícita](#)
- 17.5 [Derivadas parciales de orden superior](#)
- 17.6 [Regla de la cadena](#)
- 17.7 [Máximos y mínimos para funciones de dos variables](#)
- 17.8 [Multiplicadores de Lagrange](#)
- 17.9 [Rectas de regresión](#)
- 17.10 [Integrales múltiples](#)
- 17.11 [Repaso](#)

**S**e sabe cómo maximizar la utilidad de una compañía (como se vio en el capítulo 13) cuando tanto los ingresos como los costos están escritos como funciones de una sola cantidad, a saber, el número de unidades producidas. Pero, por supuesto, el nivel de producción en sí, está determinado por otros factores y, en general, ninguna variable sola puede representarlo.

Por ejemplo, la cantidad de petróleo que se bombea cada semana desde un campo petrolero depende del número de bombas y del número de horas que están funcionan. Su número dependerá de la cantidad de capital disponible originalmente para construir las bombas, así como del tamaño y forma del campo. El número de horas que las bombas pueden ser operadas depende de la mano de obra disponible para hacerlas funcionar y darles mantenimiento. Además, la cantidad de petróleo que se deseará bombear desde el campo petrolero dependerá de la demanda de petróleo en un momento dado, que está relacionada con el precio del petróleo.

La maximización de la utilidad semanal de un campo petrolero requerirá de un equilibrio entre el número de bombas y la cantidad de tiempo que cada bomba pueda ser operada. La utilidad máxima no se alcanzará mediante la construcción de más bombas de las que puedan ser operadas ni con pocas bombas a tiempo completo.

Éste es un ejemplo del problema general de maximización de utilidades cuando la producción depende de varios factores. La solución implica un análisis de la función de producción, que relaciona la producción con la asignación de recursos para la misma. Como por lo general son necesarias varias variables para describir la asignación de recursos, la asignación que proporciona mayor utilidad no puede encontrarse por medio de la diferenciación con respecto a una sola variable, como en los capítulos anteriores. En este capítulo se estudiarán las técnicas avanzadas necesarias para realizar dicha tarea.

### Aplicación práctica

Análisis de datos para un modelo de enfriamiento

**OBJETIVO**

Analizar funciones de varias variables y calcular valores funcionales. Analizar coordenadas en tres dimensiones y hacer bosquejos de superficies simples.

## 17.1 Funciones de varias variables

Suponga que un fabricante produce dos artículos, X y Y. Entonces, el costo total depende de los niveles de producción tanto de X como de Y. En la tabla 17.1 se presenta un programa que indica el costo total para diferentes niveles. Por ejemplo, cuando se producen 5 unidades de X y 6 de Y, el costo total  $c$  es 17. En esta situación parece natural asociar el número 17 con el par ordenado  $(5, 6)$ :

$$(5, 6) \mapsto 17$$

El primer elemento del par ordenado, 5, representa el número de unidades de X producidas, mientras que el segundo elemento, 6, representa el número de unidades producidas de Y. Para las otras situaciones de producción se tiene

$$(5, 7) \mapsto 19$$

$$(6, 6) \mapsto 18$$

y

$$(6, 7) \mapsto 20$$

**TABLA 17.1**

Número de unidades de X producidas, $x$	Número de unidades de Y producidas, $y$	Costo total de producción, $c$
5	6	17
5	7	19
6	6	18
6	7	20

Esta correspondencia puede considerarse como una relación entrada-salida donde las entradas son los pares ordenados. Con cada entrada se asocia exactamente una salida. Así, la correspondencia define una función  $f$  cuyo dominio consiste en  $(5, 6), (5, 7), (6, 6), (6, 7)$  y el rango consiste en 17, 19, 18 y 20. En notación funcional,

$$f(5, 6) = 17 \quad f(5, 7) = 19$$

$$f(6, 6) = 18 \quad f(6, 7) = 20$$

Se dice que el programa de costo total puede describirse mediante  $c = f(x, y)$ , que es una función de las dos variables independientes  $x$  y  $y$ . La letra  $c$  es la variable dependiente.

Ahora se considerará otra función de dos variables, se observa que la ecuación

$$z = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

define a  $z$  como una función de  $x$  y  $y$ :

$$z = f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

El dominio de  $f$  es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales  $(x, y)$  para los cuales la ecuación tiene sentido, cuando el primero y segundo elementos de  $(x, y)$  se sustituyen por  $x$  y  $y$ , respectivamente, en la ecuación. Así, el dominio de  $f$  es el conjunto de todos los pares ordenados excepto  $(0, 0)$ . Por ejemplo, para encontrar  $f(2, 3)$ , se sustituye  $x = 2$  y  $y = 3$  en la expresión  $2/(x^2 + y^2)$ . Se obtiene,  $f(2, 3) = 2/(2^2 + 3^2) = 2/13$ .

Para las funciones de varias variables, no es necesario profundizar tanto como con la anterior  $f$ . La suma ordinaria de números reales define la función

$$Z = f(x, y) = x + y$$

que generaliza a las funciones lineales que se estudiaron en el capítulo 7. Así de fácil, es posible considerar funciones donde las entradas son triplets ordenadas de números

reales. En el ejemplo 2 de la sección 7.4 se tenía

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + \frac{3}{2}x_3$$

y se podría ciertamente escribir  $Z = f(x_1, x_2, x_3)$ . No existe razón por la que una función de dos variables deba estar definida para pares de números *reales* arbitrarios. En la sección 5.4 se estudió  $a_{\bar{n}r}$ , el valor presente de  $n$  pagos de un dólar a una tasa de interés de  $r$  por periodo. La notación es extraña, pero si se escribe

$$A = a(n, r) = a_{\bar{n}r}$$

se observa que para pares de entradas  $(n, r)$ , donde  $n$  es un entero positivo y  $r$  es un número (racional) en el intervalo  $(0, 1]$ , la función  $a$  definida así proporciona números reales según se dan, aproximadamente, en el listado parcial del apéndice A. Para ver otro ejemplo, ahora de la sección 8.2, considere

$$C(n, r) = {}_nC_r$$

el número de combinaciones de  $n$  objetos tomados  $r$  a la vez.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

#### FUNCIONES DE DOS VARIABLES

El costo por día para la fabricación de tazas para café de 12 y 20 onzas está dado por  $c = 160 + 2x + 3y$ , donde  $x$  es el número de tazas de 12 onzas y  $y$  es el número de tazas de 20 onzas. ¿Cuál es el costo por día de la fabricación de

1. 500 tazas de 12 onzas y 700 tazas de 20 onzas?
2. 1000 tazas de 12 onzas y 750 tazas de 20 onzas?

#### EJEMPLO 1 Funciones de dos variables

- a.  $f(x, y) = \frac{x+3}{y-2}$  es una función de dos variables. Como el denominador es cero cuando  $y = 2$ , el dominio de  $f$  son todos los  $(x, y)$  tales que  $y \neq 2$ . Algunos valores de la función son

$$f(0, 3) = \frac{0+3}{3-2} = 3$$

$$f(3, 0) = \frac{3+3}{0-2} = -3$$

Observe que  $f(0, 3) \neq f(3, 0)$ .

- b.  $h(x, y) = 4x$  define a  $h$  como función de  $x$  y  $y$ . Todos los pares ordenados de números reales constituyen el dominio. Algunos valores de la función son

$$h(2, 5) = 4(2) = 8$$

$$h(2, 6) = 4(2) = 8$$

Observe que los valores de la función son independientes del valor de  $y$ .

- c. Si  $z^2 = x^2 + y^2$  y  $x = 3$  y  $y = 4$ , entonces  $z^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ . En consecuencia,  $z = \pm 5$ . Entonces, con el par ordenado  $(3, 4)$  no es posible asociar exactamente un solo número de salida. Por lo tanto,  $z^2 = x^2 + y^2$  no define a  $z$  como una función de  $x$  y  $y$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



#### EJEMPLO 2 Índice temperatura-humedad

En días húmedos y calurosos, mucha gente tiende a sentirse incómoda. El grado de incomodidad está dado numéricamente por el índice temperatura-humedad, ITH, que es una función de dos variables,  $t_d$  y  $t_w$ :

$$\text{ITH} = f(t_d, t_w) = 15 + 0.4(t_d + t_w)$$

donde  $t_d$  es la temperatura de bulbo seco (en grados Fahrenheit) y  $t_w$  es la temperatura de bulbo húmedo (en grados Fahrenheit) del aire. Evalúe el ITH cuando  $t_d = 90$  y  $t_w = 80$ .

**Solución:** Se desea encontrar  $f(90, 80)$ :

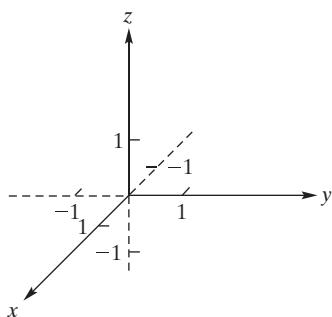
$$f(90, 80) = 15 + 0.4(90 + 80) = 15 + 68 = 83$$

Cuando el ITH es mayor que 75, la mayoría de la gente se siente incómoda. De hecho, el ITH solía llamarse antes “índice de incomodidad”. Muchos dispositivos eléctricos responden a este índice y pueden anticipar la demanda de aire acondicionado en sus sistemas.

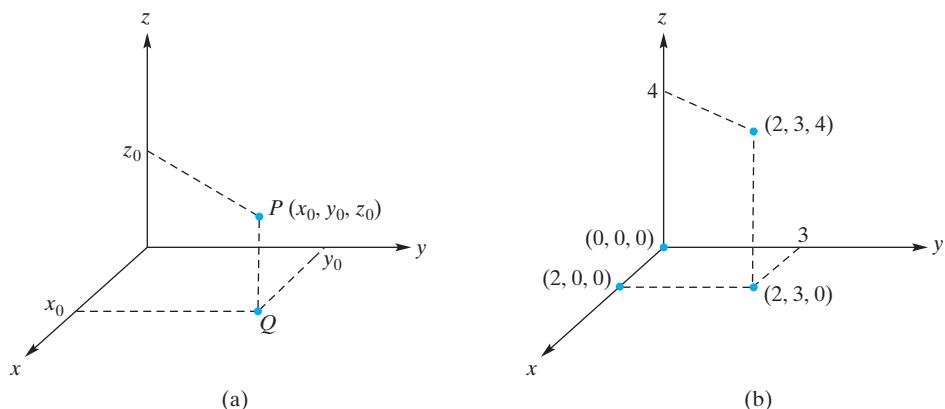
AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3



Si  $y = f(x)$  es una función de una variable, el dominio de  $f$  puede representarse de manera geométrica mediante puntos en la recta numérica de números reales. La función misma puede representarse por medio de su gráfica en un plano de coordenadas, algunas veces llamado un sistema de coordenadas de dos dimensiones. Sin embargo, para una función de dos variables,  $z = f(x, y)$ , el dominio (que consiste en pares ordenados de números reales) puede representarse de manera geométrica por medio de una *región* en el plano. La función misma puede representarse geométricamente en un **sistema coordenado rectangular en tres dimensiones**. Tal sistema se forma cuando tres ejes de números reales mutuamente perpendiculares en el espacio, se intersecan en el origen de cada eje como en la figura 17.1. Las tres rectas numéricas se llaman eje  $x$ , eje  $y$ , eje  $z$ ; su punto de intersección recibe el nombre de origen del sistema. Las flechas indican las direcciones positivas de los ejes y las porciones negativas de los ejes se muestran con líneas punteadas.



**FIGURA 17.1**  
Sistema de coordenadas rectangulares de tres dimensiones.



**FIGURA 17.2** Puntos en el espacio.

A cada punto  $P$  en el espacio se le puede asignar una terna ordenada única de números, llamada coordenadas de  $P$ . Para hacerlo [vea la figura 17.2(a)], desde  $P$  se construye una recta perpendicular al plano  $xy$ , es decir, al plano determinado por los ejes  $x$  y  $y$ . Sea  $Q$  el punto donde la línea interseca a este plano. Desde  $Q$  se trazan rectas perpendiculares a los ejes  $x$  y  $y$ , las cuales intersecan a los ejes  $x$  y  $y$  en  $x_0$  y  $y_0$ , respectivamente. Desde  $P$  se traza una perpendicular al eje  $z$ , que lo interseca en  $z_0$ . Así, se ha asignado a  $P$  la terna ordenada  $(x_0, y_0, z_0)$ . Debe ser también evidente que a cada terna ordenada se le puede asignar un punto único en el espacio. Debido a esta correspondencia uno a uno entre puntos en el espacio y ternas ordenadas, una terna ordenada puede denominarse como punto. En la figura 17.2(b) se muestran los puntos  $(2, 0, 0)$ ,  $(2, 3, 0)$  y  $(2, 3, 4)$ . Observe que el origen corresponde a  $(0, 0, 0)$ . Por lo general, las porciones negativas de los ejes no se muestran a menos que sea necesario.

Es posible representar geométricamente una función de dos variables,  $z = f(x, y)$ . A cada par ordenado  $(x, y)$  en el dominio de  $f$ , se le asigna el punto  $(x, y, f(x, y))$ . El conjunto de todos estos puntos se llama *gráfica* de  $f$ . Tal gráfica se muestra en la figura 17.3. Se puede considerar que  $z = f(x, y)$  representa una superficie en el espacio.<sup>1</sup>

En el capítulo 10 se analizó la continuidad de funciones de una variable. Si  $y = f(x)$ , entonces decir que  $f$  es continua en  $x = a$ , es decir que se pueden hacer los valores de  $f(x)$  tan cercanos como se desee en  $f(a)$  al tomar una  $x$  suficientemente cercana, pero diferente, de  $a$ . Este concepto se extiende a una función de dos variables. Se dice que la función  $z = f(x, y)$  es continua en  $(a, b)$  si los valores de  $f(x, y)$  pueden hacerse tan cercanos como se desee a  $f(a, b)$  al tomar  $(x, y)$  suficientemente cercanos, pero diferentes de  $(a, b)$ . Desde un punto de vista general, y sin profundizar demasiado en este concepto, se puede decir que una función de dos variables es continua en su dominio (esto es, continua en cada punto de su dominio) si su gráfica es una superficie sin interrupciones.

En general, una **función de  $n$  variables** es aquella cuyo dominio consiste en  $n$ -adas ordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Por ejemplo,  $f(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$  es una función de tres variables con un dominio que consiste en todas las ternas ordenadas. La función

<sup>1</sup>Nos hemos tomado la libertad de usar el término *superficie* en un sentido intuitivo.

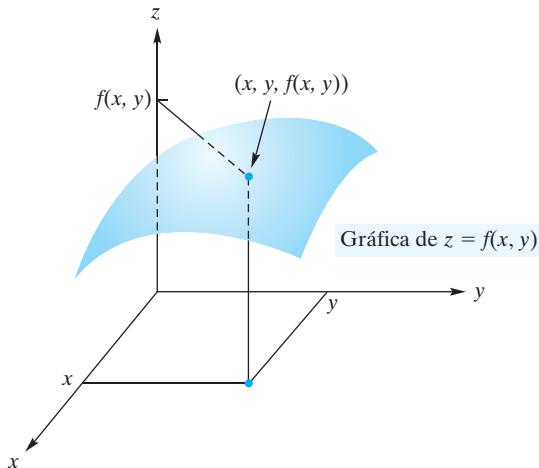


FIGURA 17.3 Gráfica de una función de dos variables.

$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4$  es una función de cuatro variables con un dominio que consiste en todas las tétradas ordenadas. Aunque las funciones de varias variables son sumamente importantes y útiles, no es posible visualizar las gráficas de funciones de más de dos variables.

Ahora se realizará un breve estudio del bosquejo de superficies en el espacio. Se comenzará con planos que son paralelos a un plano coordenado. Por “plano coordenado” se entiende un plano que contiene dos ejes coordinados. Por ejemplo, el plano determinado por los ejes  $x$  y  $y$  es el **plano  $xy$** . De manera similar, se habla del **plano  $xz$**  y del **plano  $yz$** . Los planos coordinados dividen el espacio en ocho partes llamadas *octantes*. En particular, la parte que contiene todos los puntos  $(x, y, z)$  donde  $x, y$  y  $z$  son positivos se llama **primer octante**.

Suponga que  $S$  es un plano paralelo al plano  $xy$  y pasa por el punto  $(0, 0, 5)$ . [Vea la figura 17.4(a)]. Entonces, el punto  $(x, y, z)$  estará en  $S$  si y sólo si,  $z = 5$ ; esto es,  $x$  y  $y$  pueden ser cualesquiera números reales, pero  $z$  debe ser igual a 5. Por esta razón se dice que  $z = 5$  es una ecuación de  $S$ . En forma similar, una ecuación del plano paralelo al plano  $xz$  y que pasa por el punto  $(0, 2, 0)$  es  $y = 2$  [figura 17.4(b)]. La ecuación  $x = 3$  es una ecuación del plano que pasa por  $(3, 0, 0)$  y es paralelo al plano  $yz$  [figura 17.4(c)]. Ahora se verán los planos en general.

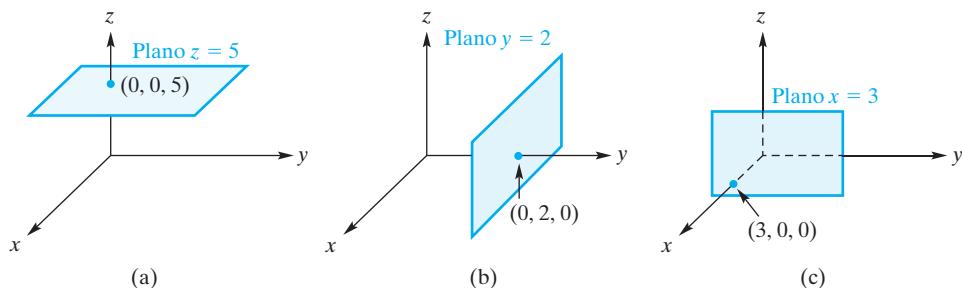


FIGURA 17.4 Planos paralelos a los planos coordinados.

En el espacio, la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

donde  $D$  es una constante y  $A, B$  y  $C$  son constantes y no todas son iguales a cero, es un plano. Como tres puntos distintos (no todos en la misma recta) determinan un plano, una manera conveniente de esbozar un plano es encontrar primero los puntos, en caso de que existan, en que el plano interseca los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Esos puntos se llaman *intersecciones*.

### EJEMPLO 3 Grafación de un plano

Bosqueje el plano  $2x + 3y + z = 6$ .

**Solución:** El plano interseca el eje  $x$  cuando  $y = 0$  y  $z = 0$ . Así,  $2x = 6$ , lo cual da  $x = 3$ . De manera similar, si  $x = z = 0$ , entonces  $y = 2$ ; si  $x = y = 0$ , entonces  $z = 6$ . Por lo tanto, las intersecciones son  $(3, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  y  $(0, 0, 6)$ . Despues de graficar estos puntos se pasa un plano por ellos. En la figura 17.5(a) se muestra la porción del plano en el primer octante; sin embargo, usted debe darse cuenta que el plano se extiende indefinidamente en el espacio.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

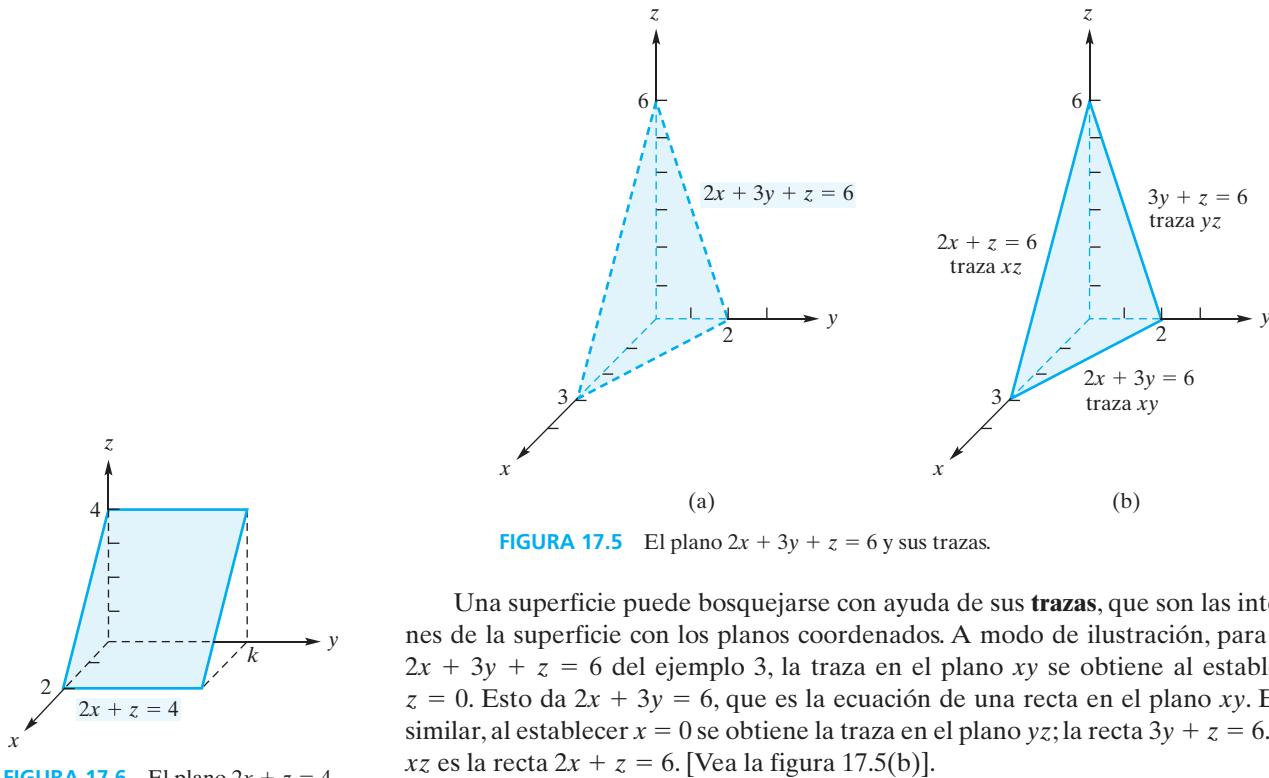


FIGURA 17.5 El plano  $2x + 3y + z = 6$  y sus trazas.

Una superficie puede bosquejarse con ayuda de sus **trazas**, que son las intersecciones de la superficie con los planos coordenados. A modo de ilustración, para el plano  $2x + 3y + z = 6$  del ejemplo 3, la traza en el plano  $xy$  se obtiene al establecer que  $z = 0$ . Esto da  $2x + 3y = 6$ , que es la ecuación de una recta en el plano  $xy$ . En forma similar, al establecer  $x = 0$  se obtiene la traza en el plano  $yz$ ; la recta  $3y + z = 6$ . La traza  $xz$  es la recta  $2x + z = 6$ . [Vea la figura 17.5(b)].

### EJEMPLO 4 Bosquejo de una superficie

Bosqueje la superficie  $2x + z = 4$ .

**Solución:** Esta ecuación tiene la forma de un plano. Las intersecciones  $x$  y  $z$  son  $(2, 0, 0)$  y  $(0, 0, 4)$  y no hay intersección  $y$ , porque  $x$  y  $z$  no pueden ser cero al mismo tiempo. Al establecer que  $y = 0$  se obtiene la traza  $xz$ ,  $2x + z = 4$ , que es una recta en el plano  $x, z$ . De hecho, la intersección de la superficie con cualquier plano  $y = k$  es tambien  $2x + z = 4$ . Por consiguiente, el plano es como en la figura 17.6.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

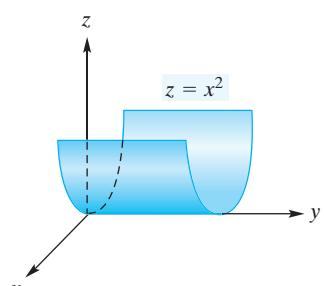


FIGURA 17.7 La superficie  $z = x^2$ .

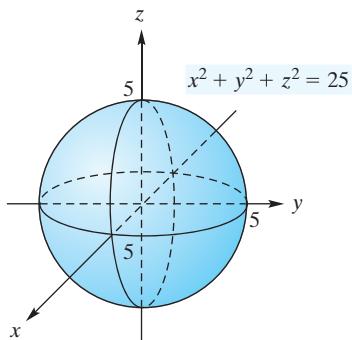
Observe que esta ecuación no pone restricción sobre  $y$ .

### EJEMPLO 5 Bosquejo de una superficie

Bosqueje la superficie  $z = x^2$ .

**Solución:** La traza  $xz$  es la curva  $z = x^2$ , que es una parábola. De hecho, para cualquier valor fijo de  $y$  se obtiene  $z = x^2$ . Así, la gráfica es como en la figura 17.7.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25



**FIGURA 17.8** La superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ .

### EJEMPLO 6 Bosquejo de una superficie

Bosqueje la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ .

**Solución:** Se establece  $z = 0$  se obtiene la traza  $xy$ ,  $x^2 + y^2 = 25$ , lo cual es un círculo de radio 5. De manera similar, las trazas  $yz$  y  $xz$ , son los círculos  $y^2 + z^2 = 25$  y  $x^2 + z^2 = 25$ , respectivamente. Note también que como  $x^2 + y^2 = 25 - z^2$ , la intersección de la superficie con el plano  $z = k$ , donde  $-5 \leq k \leq 5$ , es un círculo. Por ejemplo, si  $z = 3$ , la intersección es el círculo  $x^2 + y^2 = 16$ . Si  $z = 4$ , la intersección es  $x^2 + y^2 = 9$ . Esto es, las secciones transversales de la superficie que son paralelas al plano  $xy$  son círculos. La superficie se muestra en la figura 17.8; es una esfera.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

## Problemas 17.1

En los problemas 1 a 12, determine los valores funcionales indicados para las funciones dadas.

- \*1.  $f(x, y) = 4x - y^2 + 3$ ;  $f(1, 2)$
2.  $f(x, y) = 3x^2y - 4y$ ;  $f(2, -1)$
- \*3.  $g(x, y, z) = e^{2x}(3y + z)$ ;  $g(0, 3, -1)$
4.  $g(x, y, z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$ ;  $g(3, 1, -2)$
5.  $h(r, s, t, u) = \frac{rs}{t^2 - u^2}$ ;  $h(-3, 3, 5, 4)$
6.  $h(r, s, t, u) = \ln(rs)$ ;  $h(1, 5, 3, 1)$
7.  $g(p_A, p_B) = 2p_A(p_A^2 - 5)$ ;  $g(4, 8)$
8.  $g(p_A, p_B) = p_A\sqrt{p_B} + 10$ ;  $g(8, 4)$
9.  $F(x, y, z) = 3$ ;  $F(2, 0, -1)$
10.  $F(x, y, z) = \frac{2x}{(y+1)z}$ ;  $F(1, 0, 3)$
11.  $f(x, y) = e^{x+y}$ ;  $f(x_0 + h, y_0)$
12.  $f(x, y) = x^2y - 3y^3$ ;  $f(r + t, r)$

13. **Ecología** Un método de muestreo ecológico para determinar las poblaciones de animales en un área dada, consiste en marcar primero todos los animales obtenidos en una muestra de  $R$  especímenes del área, y luego soltarlos de manera que puedan mezclarse con otros no marcados. En fecha posterior se toma una segunda muestra de  $M$  animales y se anota el número de aquéllos que ya están marcados,  $S$ . Con base en  $R, M$  y  $S$ , una estimación de la población total  $N$  de animales en el área muestreada está dada por

$$N = f(R, M, S) = \frac{RM}{S}$$

Encuentre  $f(400, 400, 80)$ . Este método se llama *procedimiento de marcaje y recaptura*.<sup>2</sup>

14. **Genética** Bajo ciertas condiciones, si dos padres de ojos cafés tienen exactamente  $k$  descendientes, la probabilidad de que haya exactamente entre ellos  $r$  de ojos azules está dada por

$$P(r, k) = \frac{k! \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{k-r}}{r!(k-r)!} \quad r = 0, 1, 2, \dots, k$$

Encuentre la probabilidad de que de un total de cuatro hijos, exactamente tres tengan ojos azules.

En los problemas 15 a 18, encuentre las ecuaciones de los planos que satisfacen las condiciones dadas.

15. Paralelo al plano  $xz$  que pasa por el punto  $(0, 2, 0)$ .
16. Paralelo al plano  $yz$  que pasa por el punto  $(-2, 0, 0)$ .
17. Paralelo al plano  $xy$  que pasa por el punto  $(2, 7, 6)$ .
18. Paralelo al plano  $yz$  que pasa por el punto  $(-4, -2, 7)$ .

En los problemas 19 a 28, bosqueje las superficies dadas.

- \*19.  $x + y + z = 1$
20.  $2x + y + 2z = 6$
- \*21.  $3x + 6y + 2z = 12$
22.  $2x + 3y + 5z = 1$
23.  $x + 2y = 2$
24.  $y = 3z + 2$
- \*25.  $z = 4 - x^2$
26.  $y = z^2$
- \*27.  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
28.  $3x^2 + 2y^2 = 1$

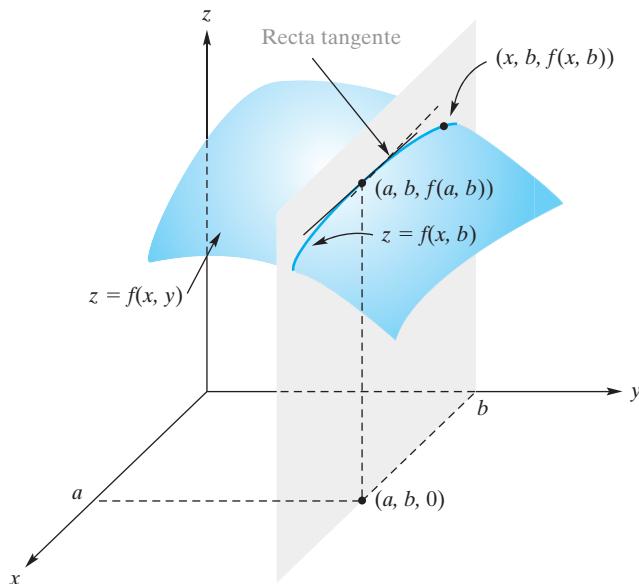
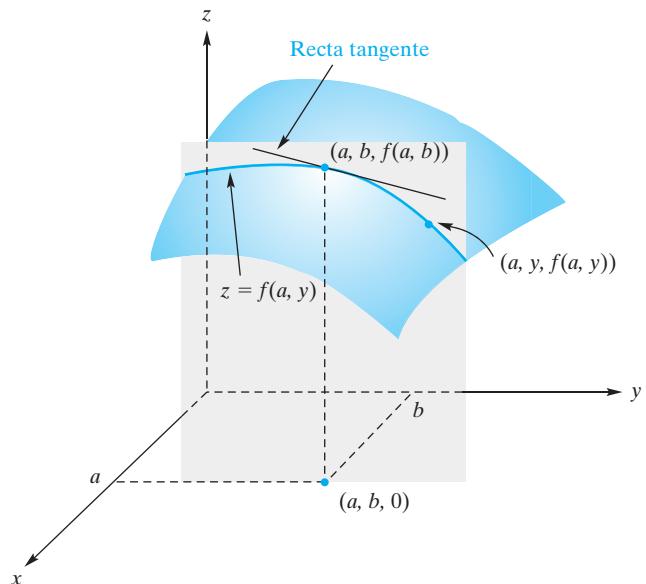
### OBJETIVO

Calcular derivadas parciales.

## 17.2 Derivadas parciales

En la figura 17.9 se muestra la superficie  $z = f(x, y)$  y un plano paralelo al plano  $xz$  que pasa por el punto  $(a, b, f(a, b))$  sobre la superficie. La ecuación de este plano es  $y = b$ . Por lo tanto, cualquier punto en la curva que sea la intersección de la superficie  $z = f(x, y)$  con el plano  $y = b$ , debe tener la forma  $(x, b, f(x, b))$ . Así, la curva puede describirse por medio de  $z = f(x, b)$ . Como  $b$  es constante,  $z = f(x, b)$  puede considerarse como una función de una variable,  $x$ . Cuando se evalúa la derivada de esta función en  $a$ , se obtiene la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto  $(a, b, f(a, b))$ . (Vea la figura

<sup>2</sup>E. P. Odum, *Ecology* (Nueva York: Holt, Rinehart y Winston, 1966).

FIGURA 17.9 Interpretación geométrica de  $f_x(a, b)$ .FIGURA 17.10 Interpretación geométrica de  $f_y(a, b)$ .

17.9). Esta pendiente se llama *derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$  en  $(a, b)$*  y se denota con  $f_x(a, b)$ . En términos de límites

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \quad (1)$$

Por otra parte, en la figura 17.10 el plano  $x = a$  es paralelo al plano  $yz$  corta la superficie  $z = f(x, y)$  en una curva dada por  $z = f(a, y)$ , que es una función de  $y$ . Cuando se evalúa la derivada de esta función en  $b$ , se obtiene la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto  $(a, b, f(a, b))$ . Esta pendiente se llama *derivada parcial de  $f$  con respecto a  $y$  en  $(a, b)$*  y se denota con  $f_y(a, b)$ . En términos de límites,

$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} \quad (2)$$

**Esto proporciona una interpretación geométrica de una derivada parcial.**

Se dice que  $f_x(a, b)$  es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $(a, b, f(a, b))$  en la dirección  $x$ ; de manera similar,  $f_y(a, b)$  es la pendiente de la recta tangente en la dirección  $y$ .

Por lo general, al reemplazar  $a$  y  $b$  en las ecuaciones (1) y (2) por  $x$  y  $y$ , respectivamente, se obtiene la siguiente definición.

### DEFINICIÓN

Si  $z = f(x, y)$  la **derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$** , denotada por  $f_x$ , es la función dada por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

siempre que el límite exista.

La **derivada parcial de  $f$  con respecto a  $y$** , denotada por  $f_y$ , es la función dada por

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

siempre que el límite exista.

Al analizar la definición anterior, es posible establecer el siguiente procedimiento para determinar  $f_x$  y  $f_y$ :

Esto proporciona un método mecánico para encontrar derivadas parciales.

### Procedimiento para encontrar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$

Para encontrar  $f_x$ , trate a  $y$  como constante y diferencie  $f$  con respecto a  $x$  de la manera usual.

Para encontrar  $f_y$ , trate a  $x$  como constante y diferencie  $f$  con respecto a  $y$  de la manera usual.

### EJEMPLO 1 Obtención de derivadas parciales

Si  $f(x, y) = xy^2 + x^2y$ , encuentre  $f_x(x, y)$  y  $f_y(x, y)$ . Encuentre también,  $f_x(3, 4)$  y  $f_y(3, 4)$ .

**Solución:** Para encontrar  $f_x(x, y)$ , se trata a  $y$  como una constante y se diferencia a  $f$  con respecto a  $x$ :

$$f_x(x, y) = (1)y^2 + (2x)y = y^2 + 2xy$$

Para encontrar  $f_y(x, y)$ , se trata a  $x$  como una constante y se diferencia con respecto a  $y$ :

$$f_y(x, y) = x(2y) + x^2(1) = 2xy + x^2$$

Observe que  $f_x(x, y)$  y  $f_y(x, y)$  son cada una funciones de las dos variables  $x$  y  $y$ . Para encontrar  $f_x(3, 4)$ , se evalúa  $f_x(x, y)$  cuando  $x = 3$  y  $y = 4$ :

$$f_x(3, 4) = 4^2 + 2(3)(4) = 40$$

De manera similar,

$$f_y(3, 4) = 2(3)(4) + 3^2 = 33$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



En la tabla 17.2 se proporcionan las notaciones para las derivadas parciales de  $z = f(x, y)$ . En la tabla 17.3 se dan las notaciones para las derivadas parciales evaluadas en  $(a, b)$ . Observe que el símbolo  $\partial$  (no  $d$ ) se usa para denotar una derivada parcial. El símbolo  $\partial z / \partial x$  se lee “derivada parcial de  $z$  con respecto a  $x$ ”.

TABLA 17.2

Derivada parcial de $f$ (o $z$ ) con respecto a $x$	Derivada parcial de $f$ (o $z$ ) con respecto a $y$
$f_x(x, y)$	$f_y(x, y)$
$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y))$	$\frac{\partial}{\partial y}(f(x, y))$
$\frac{\partial z}{\partial x}$	$\frac{\partial z}{\partial y}$

TABLA 17.3

Derivada parcial de $f$ (o $z$ ) con respecto a $x$ . Evaluada en $(a, b)$	Derivada parcial de $f$ (o $z$ ) con respecto a $y$ . Evaluada en $(a, b)$
$f_x(a, b)$	$f_y(a, b)$
$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right _{(a,b)}$	$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right _{(a,b)}$
$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right _{\substack{x=a \\ y=b}}$	$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right _{\substack{x=a \\ y=b}}$

### EJEMPLO 2 Obtención de derivadas parciales

- a. Si  $z = 3x^3y^3 - 9x^2y + xy^2 + 4y$ , encuentre  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0)}, y \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,0)}$ .

**Solución:** Para encontrar  $\partial z / \partial x$ , se diferencia  $z$  con respecto a  $x$ . Se trata a  $y$  como una constante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3(3x^2)y^3 - 9(2x)y + (1)y^2 + 0 \\ &= 9x^2y^3 - 18xy + y^2 \end{aligned}$$

Al evaluar la última ecuación en  $(1, 0)$  se obtiene

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = 9(1)^2(0)^3 - 18(1)(0) + 0^2 = 0$$

Para encontrar  $\partial z / \partial y$ , se diferencia  $z$  con respecto a  $y$ . Se trata a  $x$  como una constante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= 3x^3(3y^2) - 9x^2(1) + x(2y) + 4(1) \\ &= 9x^3y^2 - 9x^2 + 2xy + 4 \end{aligned}$$

Así,

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,0)} = 9(1)^3(0)^2 - 9(1)^2 + 2(1)(0) + 4 = -5$$

**b.** Si  $w = x^2e^{2x+3y}$ , encuentre  $\partial w / \partial x$  y  $\partial w / \partial y$ .

**Solución:** Para encontrar  $\partial w / \partial x$ , se trata a  $y$  como constante y se diferencia con respecto a  $x$ . Como  $x^2e^{2x+3y}$  es un producto de dos funciones que cada una incluye a  $x$ , se usa la regla del producto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= x^2 \frac{\partial}{\partial x}(e^{2x+3y}) + e^{2x+3y} \frac{\partial}{\partial x}(x^2) \\ &= x^2(2e^{2x+3y}) + e^{2x+3y}(2x) \\ &= 2x(x+1)e^{2x+3y} \end{aligned}$$

Para encontrar  $\partial w / \partial y$ , se trata a  $x$  como constante y se diferencia con respecto a  $y$ :

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^2 \frac{\partial}{\partial y}(e^{2x+3y}) = 3x^2e^{2x+3y}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27 

Se ha visto que para una función de dos variables pueden considerarse dos derivadas parciales. En realidad, el concepto de derivadas parciales puede extenderse a funciones de más de dos variables. Por ejemplo, si  $w = f(x, y, z)$  se tienen tres derivadas parciales:

- la parcial con respecto a  $x$ , denotada como  $f_x(x, y, z)$ ,  $\partial w / \partial x$ , etcétera;
- la parcial con respecto a  $y$ , denotada como  $f_y(x, y, z)$ ,  $\partial w / \partial y$ , etcétera;
- y
- la parcial con respecto a  $z$ , denotada como  $f_z(x, y, z)$ ,  $\partial w / \partial z$ , etcétera.

Para determinar  $\partial w / \partial x$ , se trata a  $y$  y  $z$  como constantes y se diferencia  $w$  con respecto a  $x$ . Para  $\partial w / \partial y$ , se trata a  $x$  y  $z$  como constantes y se diferencia con respecto a  $y$ . Para  $\partial w / \partial z$ , se trata a  $x$  y  $y$  como constantes y se diferencia con respecto a  $z$ . Para una función de  $n$  variables, se tienen  $n$  derivadas parciales que se determinan de manera análoga.

### EJEMPLO 3 Derivadas parciales de una función de tres variables

Si  $f(x, y, z) = x^2 + y^2z + z^3$ , encuentre  $f_x(x, y, z)$ ,  $f_y(x, y, z)$  y  $f_z(x, y, z)$ .

**Solución:** Para encontrar  $f_x(x, y, z)$  se trata a  $y$  y  $z$  como constantes y se diferencia  $f$  con respecto a  $x$ :

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

Trate a  $x$  y  $z$  como constantes y haga la diferencia con respecto a  $y$ , se tiene

$$f_y(x, y, z) = 2yz$$

Trate a  $x$  y  $y$  como constantes y haga la diferencia con respecto a  $z$ , se tiene

$$f_z(x, y, z) = y^2 + 3z^2$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23 

**EJEMPLO 4** Derivadas parciales de una función de cuatro variables

Si  $p = g(r, s, t, u) = \frac{rsu}{rt^2 + s^2t}$ , encuentre  $\frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial p}{\partial t}$ , y  $\frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{(0,1,1,1)}$ .

**Solución:** Para encontrar  $\partial p / \partial s$ , primero observe que  $p$  es un cociente de dos funciones y que cada una incluye a la variable  $s$ . Así, se usa la regla del cociente y se trata a  $r, t$  y  $u$  como constantes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial s} &= \frac{(rt^2 + s^2t)\frac{\partial}{\partial s}(rsu) - rsu\frac{\partial}{\partial s}(rt^2 + s^2t)}{(rt^2 + s^2t)^2} \\ &= \frac{(rt^2 + s^2t)(ru) - (rsu)(2st)}{(rt^2 + s^2t)^2}\end{aligned}$$

Al simplificar se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{ru(rt - s^2)}{t(rt + s^2)^2} \quad (\text{un factor de } t \text{ se cancela})$$

Para encontrar  $\partial p / \partial t$ , se puede escribir primero a  $p$  como

$$p = rsu(rt^2 + s^2t)^{-1}$$

A continuación, se usa la regla de la potencia y se trata a  $r, s$  y  $u$  como constantes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= rsu(-1)(rt^2 + s^2t)^{-2} \frac{\partial}{\partial t}(rt^2 + s^2t) \\ &= -rsu(rt^2 + s^2t)^{-2}(2rt + s^2)\end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{rsu(2rt + s^2)}{(rt^2 + s^2t)^2}$$

Al hacer  $r = 0, s = 1, t = 1$  y  $u = 1$  resulta

$$\frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{(0,1,1,1)} = -\frac{0(1)(1)(2(0)(1) + (1)^2)}{(0(1)^2 + (1)^2(1))^2} = 0$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

## Problemas 17.2

En los problemas 1 a 26, se da una función de dos o más variables. Encuentre la derivada parcial de la función con respecto a cada una de las variables.

\*1.  $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 7$

2.  $f(x, y) = 2x^2 + 3xy$

3.  $f(x, y) = 2y + 1$

4.  $f(x, y) = \ln 2$

5.  $g(x, y) = 3x^4y + 2xy^2 - 5xy + 8x - 9y$

6.  $g(x, y) = (x+1)^2 + (y-3)^3 + 5xy^3 - 2$

7.  $g(p, q) = \sqrt{pq}$

8.  $g(w, z) = \sqrt[3]{w^2 + z^2}$

9.  $h(s, t) = \frac{s^2 + 4}{t - 3}$

10.  $h(u, v) = \frac{8uv^2}{u^2 + v^2}$

11.  $u(q_1, q_2) = \frac{1}{2} \ln(q_1 + 2) + \frac{1}{3} \ln(q_2 + 5)$

12.  $Q(l, k) = 2l^{0.38}k^{1.79} - 3l^{1.03} + 2k^{0.13}$

13.  $h(x, y) = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

14.  $h(x, y) = \frac{\sqrt{x + 9}}{x^2y + y^2x}$

15.  $z = e^{5xy}$

16.  $z = (x^2 + y^2)e^{2x+3y+1}$

17.  $z = 5x \ln(x^2 + y)$

18.  $z = \ln(5x^3y^2 + 2y^4)^4$

19.  $f(r, s) = \sqrt{r + 2s}(r^3 - 2rs + s^2)$

20.  $f(r, s) = \sqrt{rs} e^{2+r}$

21.  $f(r, s) = e^{3-r} \ln(7-s)$

22.  $f(r, s) = (5r^2 + 3s^3)(2r - 5s)$

\*23.  $g(x, y, z) = 2x^3y^2 + 2xy^3z + 4z^2$

24.  $g(x, y, z) = 2xy^2z^6 - 4x^2y^3z^2 + 3xyz$

25.  $g(r, s, t) = e^{s+t}(r^2 + 7s^3)$

26.  $g(r, s, t, u) = rs \ln(2t + 5u)$

En los problemas 27 a 34, evalúe las derivadas parciales dadas.

\*27.  $f(x, y) = x^3y + 7x^2y^2$ ;  $f_x(1, -2)$

28.  $z = \sqrt{2x^3 + 5xy + 2y^2}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=0, y=1}$

29.  $g(x, y, z) = e^x \sqrt{y + 2z}$ ;  $g_z(0, 6, 4)$

30.  $g(x, y, z) = \frac{3x^2y^2 + 2xy + x - y}{xy - yz + xz}$ ;  $g_y(1, 1, 5)$

\*31.  $h(r, s, t, u) = (s^2 + tu) \ln(2r + 7st)$ ;  $h_s(1, 0, 0, 1)$

32.  $h(r, s, t, u) = \frac{7r + 3s^2u^2}{s}; \quad h_t(4, 3, 2, 1)$

33.  $f(r, s, t) = rst(r^2 + s^3 + t^4); \quad f_s(1, -1, 2)$

34.  $z = \frac{x^2 + y^2}{e^{x^2+y^2}}; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{y=1}$

35. Si  $z = xe^{x-y} - ye^{y-x}$ , demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x-y} + e^{y-x}$$

36. **Precio de acciones de un ciclo de dividendos** En un análisis de los precios de un ciclo de dividendos, Palmon y Yaari<sup>3</sup> consideran la función  $f$  dada por

$$u = f(t, r, z) = \frac{(1+r)^{1-z} \ln(1+r)}{(1+r)^{1-z} - t}$$

donde  $u$  es la tasa instantánea de la apreciación del precio solicitado,  $r$  es una tasa de rendimiento anual de oportunidad,  $z$  la fracción de un ciclo de dividendos sobre el cual una porción de las acciones es controlada por un vendedor de medio ciclo y  $t$  es la tasa efectiva del impuesto por ganancias de capital. Ellos afirman que

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{t(1+r)^{1-z} \ln^2(1+r)}{[(1+r)^{1-z} - t]^2}$$

Verifique esto.

37. **Demanda de dinero** En un análisis de teoría de inventarios sobre la demanda de dinero, Swanson<sup>4</sup> considera la función

$$F(b, C, T, i) = \frac{bT}{C} + \frac{iC}{2}$$

y determina que  $\frac{\partial F}{\partial C} = -\frac{bT}{C^2} + \frac{i}{2}$ . Verifique esta derivada parcial.

38. **Desregulación de la tasa de interés** En un artículo sobre desregulación de la tasa de interés, Christofi y Agapos<sup>5</sup> obtienen la ecuación

$$r_L = r + D \frac{\partial r}{\partial D} + \frac{dC}{dD} \quad (3)$$

donde  $r$  es la tasa de interés por depósitos pagados por los bancos comerciales,  $r_L$  es la tasa de interés ganado por esos bancos,  $C$  es el costo administrativo por transformar los depósitos en activos productivos y  $D$  el nivel de los depósitos por ahorros. Christofi y Agapos establecen que

$$r_L = r \left[ \frac{1+\eta}{\eta} \right] + \frac{dC}{dD} \quad (4)$$

donde  $\eta = \frac{r/D}{\partial r/\partial D}$  es la elasticidad del depósito con respecto al interés del depósito. Exprese la ecuación (3) en términos de  $\eta$  para verificar la ecuación (4).

39. **Publicidad y rentabilidad** En un análisis sobre publicidad y rentabilidad, Swales<sup>6</sup> considera una función  $f$  dada por

$$R = f(r, a, n) = \frac{r}{1 + a \left( \frac{n-1}{2} \right)}$$

donde  $R$  es la tasa ajustada de utilidad,  $r$  la tasa contable de utilidad,  $a$  es una medida de los gastos publicitarios y  $n$  el número de años en que la publicidad se deprecia por completo. En el análisis, Swales determina  $\partial R/\partial n$ . Encuentre esta derivada parcial.

## OBJETIVO

Desarrollar las nociones de costo marginal parcial, productividad marginal y productos competitivos y complementarios.

Aquí se tienen las interpretaciones de las derivadas parciales como "tasa de cambio".

## 17.3 Aplicaciones de las derivadas parciales

Desde la sección 17.2 se sabe que si  $z = f(x, y)$ , entonces  $\partial z/\partial x$  y  $\partial z/\partial y$  pueden interpretarse geométricamente como las pendientes de las rectas tangentes a la superficie  $z = f(x, y)$  en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. Existen otras interpretaciones: como  $\partial z/\partial x$  es la derivada de  $z$  con respecto a  $x$  cuando  $y$  se mantiene fija, y como una derivada es una razón de cambio, se tiene

$\frac{\partial z}{\partial x}$  es la razón de cambio de  $z$  con respecto a  $x$  cuando  $y$  se mantiene fija.

De modo similar,

$\frac{\partial z}{\partial y}$  es la razón de cambio de  $z$  con respecto a  $y$  cuando  $x$  se mantiene fija.

Ahora se verán algunas aplicaciones en las que la noción "razón de cambio" de una derivada parcial resulta muy útil.

<sup>3</sup>D. Palmon y U. Yaari, "Taxation of Capital Gains and the Behavior of Stock Prices over the Dividend Cycle", *The American Economist*, XXVII, núm. 1 (1983), 13-22.

<sup>4</sup>P. E. Swanson, "Integer Constraints on the Inventory Theory of Money Demand", *Quarterly Journal of Business and Economics*, 23, núm. 1 (1984), 32-37.

<sup>5</sup>A. Christofi y A. Agapos, "Interest Rate Deregulation: An Empirical Justification," *Review of Business and Economic Research*, XX (1984), 39-49.

<sup>6</sup>J. K. Swales, "Advertising as an Intangible Asset: Profitability and Entry Barriers: A Comment on Reekie and Bhoyrub," *Applied Economics*, 17, núm. 4 (1985), 603-617.

Suponga que un fabricante produce  $x$  unidades del producto X y  $y$  unidades del producto Y. Entonces, el costo total  $c$  de esas unidades es una función de  $x$  y  $y$ , que es llamada una **función de costos conjuntos**. Si una función de este tipo es  $c = f(x, y)$ , entonces  $\partial c / \partial x$  se llama **costo marginal (parcial) con respecto a  $x$** , y es la razón de cambio de  $c$  con respecto a  $x$  cuando  $y$  se mantiene fija. De manera similar,  $\partial c / \partial y$  es el **costo marginal (parcial) con respecto a  $y$** , y es la razón de cambio de  $c$  con respecto a  $y$  cuando  $x$  se mantiene fija.

Por ejemplo, si  $c$  se expresa en dólares y  $\partial c / \partial y = 2$ , entonces el costo de producir una unidad adicional de Y cuando el nivel de producción de X es fijo, es aproximadamente de dos dólares.

Si un fabricante produce  $n$  artículos, la función de costos conjuntos es una función de  $n$  variables y habrá  $n$  funciones de costo marginal (parcial).

### EJEMPLO 1 Costos marginales

Una compañía fabrica dos tipos de esquíes, los modelos Ligero y Alpino. Suponga que la función de costos conjuntos de producir  $x$  pares del modelo Ligero y  $y$  pares del modelo Alpino por semana es

$$c = f(x, y) = 0.07x^2 + 75x + 85y + 6000$$

donde  $c$  se expresa en dólares. Determine los costos marginales de  $\partial c / \partial x$  y  $\partial c / \partial y$  cuando  $x = 100$  y  $y = 50$ , e interprete los resultados.

**Solución:** Los costos marginales son

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0.14x + 75 \quad y \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 85$$

Así,

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{(100,50)} = 0.14(100) + 75 = 89 \quad (1)$$

y

$$\left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{(100,50)} = 85 \quad (2)$$

La ecuación (1) implica que al aumentar la producción del modelo Ligero de 100 a 101, mientras se mantiene en 50 la producción del modelo Alpino, aumentan los costos aproximadamente en \$89. La ecuación (2) implica que al aumentar la producción del modelo Alpino de 50 a 51, mientras se mantiene en 100 la producción del modelo Ligero, aumentan los costos aproximadamente en \$85. De hecho, como  $\partial c / \partial y$  es una función constante, el costo marginal con respecto a  $y$  es de \$85 en todos los niveles de producción.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

### EJEMPLO 2 Pérdida de calor de un cuerpo

En un día frío, una persona puede sentir aún más frío cuando hay viento que cuando no lo hay, porque la razón a la cual se pierde calor es una función de la temperatura y de la velocidad del viento. La ecuación

$$H = (10.45 + 10\sqrt{w} - w)(33 - t)$$

indica la razón de pérdida de calor  $H$  (en kilocalorías por metro cuadrado por hora) cuando la temperatura del aire es  $t$  (en grados Celsius) y la velocidad del viento  $w$  (en metros por segundo). Para  $H = 2000$ , la piel expuesta se congelará en un minuto.<sup>7</sup>

- a. Evalúe  $H$  cuando  $t = 0$  y  $w = 4$ .

**Solución:** Cuando  $t = 0$  y  $w = 4$ ,

$$H = (10.45 + 10\sqrt{4} - 4)(33 - 0) = 872.85$$

<sup>7</sup>G. E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physiology*, 2a. ed. (Filadelfia: Lea & Febiger, 1974).

- b.** Evalúe  $\partial H/\partial t$  y  $\partial H/\partial w$  cuando  $t = 0$  y  $w = 4$  e interprete los resultados.

**Solución:**

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \left( \frac{5}{\sqrt{w}} - 1 \right) (33 - t), \quad \left. \frac{\partial H}{\partial w} \right|_{\substack{t=0 \\ w=4}} = 49.5$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = (10.45 + 10\sqrt{w} - w)(-1), \quad \left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{\substack{t=0 \\ w=4}} = -26.45$$

Estas ecuaciones significan que cuando  $t = 0$  y  $w = 4$ , al incrementar  $w$  por una pequeña cantidad mientras se mantiene fijo  $t$ ,  $H$  aumentará alrededor de 49.5 veces lo que aumente  $w$ . Al incrementar  $t$  por una pequeña cantidad mientras se mantiene fijo  $w$ ,  $H$  disminuirá alrededor de 26.45 veces lo que aumente  $t$ .

- c.** Cuando  $t = 0$  y  $w = 4$ , ¿qué tiene más influencia en  $H$ : un cambio en la velocidad del viento de 1 m/s o un cambio en la temperatura de 1°C?

**Solución:** Como la derivada parcial de  $H$  con respecto a  $w$  es mayor en magnitud que la parcial con respecto a  $t$  cuando  $t = 0$  y  $w = 4$ , un cambio en la velocidad del viento de 1 m/s tendrá un mayor efecto sobre  $H$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13 

La fabricación de un producto depende de muchos factores de producción. Entre éstos se encuentran la mano de obra, el capital, el terreno, la maquinaria, etcétera. Por simplicidad, se supondrá que la producción sólo depende del trabajo y del capital. Si la función  $P = f(l, k)$  proporciona la producción  $P$  cuando el productor emplea  $l$  unidades de trabajo y  $k$  unidades de capital, entonces esta función se llama **función de producción**. Se define la **productividad marginal con respecto a  $l$**  como  $\partial P/\partial l$ . Ésta es la razón de cambio de  $P$  con respecto a  $l$  cuando  $k$  se mantiene fija. Asimismo, la **productividad marginal con respecto a  $k$**  es  $\partial P/\partial k$  y es la razón de cambio de  $P$  con respecto a  $k$  cuando  $l$  se mantiene fija.

### EJEMPLO 3 Productividad marginal

Un fabricante de un juguete popular ha determinado que su función de producción es  $P = \sqrt{lk}$ , donde  $l$  es el número de horas de trabajo por semana y  $k$  es el capital (expresado en cientos de dólares por semana) requerido para la producción semanal de  $P$  gruesas del juguete [una gruesa son 144 unidades]. Determine las funciones de productividad marginal y evalúelas cuando  $l = 400$  y  $k = 16$ . Interprete los resultados.

**Solución:** Como  $P = (lk)^{1/2}$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \frac{1}{2}(lk)^{-1/2}k = \frac{k}{2\sqrt{lk}}$$

y

$$\frac{\partial P}{\partial k} = \frac{1}{2}(lk)^{-1/2}l = \frac{l}{2\sqrt{lk}}$$

Si se evalúan estas ecuaciones cuando  $l = 400$  y  $k = 16$ , se obtiene

$$\left. \frac{\partial P}{\partial l} \right|_{\substack{l=400 \\ k=16}} = \frac{16}{2\sqrt{400(16)}} = \frac{1}{10}$$

y

$$\left. \frac{\partial P}{\partial k} \right|_{\substack{l=400 \\ k=16}} = \frac{400}{2\sqrt{400(16)}} = \frac{5}{2}$$

Así, si  $l = 400$  y  $k = 16$ , al incrementar  $l$  a 401 y mantener  $k$  en 16, aumentará la producción en aproximadamente  $\frac{1}{10}$  de gruesas. Pero si  $k$  se incrementa a 17 y  $l$  se mantiene en 400, la producción aumenta en alrededor de  $\frac{5}{2}$  gruesas.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5 

### Productos competitivos y complementarios

Algunas veces dos productos pueden estar relacionados de modo que los cambios en el precio de uno afecten la demanda del otro. Un ejemplo representativo es el caso de la mantequilla y la margarina. Si tal relación existe entre los productos A y B, la demanda de cada producto depende del precio de ambos. Suponga que  $q_A$  y  $q_B$  son las cantidades demandadas de A y B, respectivamente, y que  $p_A$  y  $p_B$  son sus respectivos precios. Entonces  $q_A$  y  $q_B$  son funciones de  $p_A$  y  $p_B$ :

$$\begin{aligned} q_A &= f(p_A, p_B) && \text{función de demanda para A} \\ q_B &= g(p_A, p_B) && \text{función de demanda para B} \end{aligned}$$

Se pueden encontrar cuatro derivadas parciales:

$\frac{\partial q_A}{\partial p_A}$  la demanda marginal para A con respecto a  $p_A$

$\frac{\partial q_A}{\partial p_B}$  la demanda marginal para A con respecto a  $p_B$

$\frac{\partial q_B}{\partial p_A}$  la demanda marginal para B con respecto a  $p_A$

$\frac{\partial q_B}{\partial p_B}$  la demanda marginal para B con respecto a  $p_B$

Bajo condiciones típicas, si el precio de B está fijo y el de A aumenta, la cantidad demandada de A disminuirá. Así,  $\partial q_A / \partial p_A < 0$ . De manera similar,  $\partial q_B / \partial p_B < 0$ . Sin embargo,  $\partial q_A / \partial p_B$  y  $\partial q_B / \partial p_A$  pueden ser positivas o negativas. Si

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} > 0$$

entonces se dice que A y B son **productos competitivos o sustitutos**. En esta situación, un incremento en el precio de B ocasiona un incremento en la demanda de A, si se supone que el precio de A no cambia. En forma similar, un incremento en el precio de A ocasiona un incremento en la demanda de B cuando el precio de B se mantiene fijo. La mantequilla y la margarina son ejemplos de sustitutos.

Ahora se considerará una situación diferente, se dice que si

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} < 0$$

entonces A y B son **productos complementarios**. En este caso, un incremento en el precio de B ocasiona una disminución en la demanda de A, si el precio de A no cambia. De manera similar, un incremento en el precio de A causa una disminución en la demanda de B, cuando el precio de B se mantiene fijo. Por ejemplo, los automóviles y la gasolina son productos complementarios. Un incremento en el precio de la gasolina hará más caro el conducir un automóvil. Por consiguiente, la demanda de automóviles disminuirá. Y un incremento en el precio de los automóviles reducirá la demanda de gasolina.

#### EJEMPLO 4 Determinación de los productos que son competitivos y los que son complementarios

Las funciones de demanda para los productos A y B son cada una función de los precios de A y B y están dadas por

$$q_A = \frac{50\sqrt[3]{p_B}}{\sqrt{p_A}} \quad \text{y} \quad q_B = \frac{75p_A}{\sqrt[3]{p_B^2}}$$

respectivamente. Encuentre las cuatro funciones de demanda marginal y determine si A y B son productos competitivos, productos complementarios o ninguno de los dos.

**Solución:** Si se escribe  $q_A = 50p_A^{-1/2}p_B^{1/3}$  y  $q_B = 75p_A p_B^{-2/3}$ , se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_A}{\partial p_A} &= 50 \left( -\frac{1}{2} \right) p_A^{-3/2} p_B^{1/3} = -25p_A^{-3/2} p_B^{1/3} \\ \frac{\partial q_A}{\partial p_B} &= 50p_A^{-1/2} \left( \frac{1}{3} \right) p_B^{-2/3} = \frac{50}{3} p_A^{-1/2} p_B^{-2/3} \\ \frac{\partial q_B}{\partial p_A} &= 75(1)p_B^{-2/3} = 75p_B^{-2/3} \\ \frac{\partial q_B}{\partial p_B} &= 75p_A \left( -\frac{2}{3} \right) p_B^{-5/3} = -50p_A p_B^{-5/3}\end{aligned}$$

Como  $p_A$  y  $p_B$  representan precios, ambas son positivas. Por lo tanto,  $\partial q_A / \partial p_B > 0$  y  $\partial q_B / \partial p_A > 0$ . Se concluye que A y B son productos competitivos.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19 

## Problemas 17.3

Para las funciones de costos conjuntos de los problemas 1 a 3, encuentre el costo marginal indicado al nivel de producción dado.

\*1.  $c = 7x + 0.3y^2 + 2y + 900$ ;  $\frac{\partial c}{\partial y}, x = 20, y = 30$

2.  $c = x\sqrt{x+y} + 5000$ ;  $\frac{\partial c}{\partial x}, x = 40, y = 60$

3.  $c = 0.03(x+y)^3 - 0.6(x+y)^2 + 9.5(x+y) + 7700$ ;  $\frac{\partial c}{\partial x}, x = 50, y = 80$

Para las funciones de producción de los problemas 4 y 5, encuentre las funciones de producción marginal  $\partial P / \partial l$  y  $\partial P / \partial k$ .

4.  $P = 15lk - 3l^2 + 5k^2 + 500$

\*5.  $P = 2.314l^{0.357}k^{0.643}$

6. **Función de producción de Cobb-Douglas** En economía, una función de producción de Cobb-Douglas tiene la forma  $P = Al^\alpha k^\beta$ , donde  $A$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes y  $\alpha + \beta = 1$ . Para tal función, demuestre que

(a)  $\partial P / \partial l = \alpha P / l$

(b)  $\partial P / \partial k = \beta P / k$

- (c)  $l \frac{\partial P}{\partial l} + k \frac{\partial P}{\partial k} = P$ . Esto significa que al sumar los productos de la productividad marginal por cada factor y la cantidad de ese factor, se obtiene la producción total  $P$ .

En los problemas 7 a 9,  $q_A$  y  $q_B$  son funciones de demanda para los productos A y B, respectivamente. En cada caso encuentre  $\partial q_A / \partial p_A$ ,  $\partial q_A / \partial p_B$ ,  $\partial q_B / \partial p_A$ ,  $\partial q_B / \partial p_B$  y determine si A y B son competitivos, complementarios o ni uno ni otro.

7.  $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B$ ;  $q_B = 500 + 4p_A - 20p_B$

8.  $q_A = 20 - p_A - 2p_B$ ;  $q_B = 50 - 2p_A - 3p_B$

9.  $q_A = \frac{100}{p_A \sqrt{p_B}}$ ;  $q_B = \frac{500}{p_B \sqrt[3]{p_A}}$

10. **Manufactura canadiense** La función de producción para las industrias manufactureras canadienses en 1927 se estimó como<sup>8</sup>  $P = 33.0l^{0.46}k^{0.52}$ , donde  $P$  es la producción,  $l$  es el trabajo y  $k$  el capital. Determine las productividades marginales para la mano de obra y el capital, y evalúela cuando  $l = 1$  y  $k = 1$ .

11. **Granja lechera** Una estimación de la función de producción para las granjas lecheras en Iowa (1939) está dado por<sup>9</sup>

$$P = A^{0.27} B^{0.01} C^{0.01} D^{0.23} E^{0.09} F^{0.27}$$

donde  $P$  es la producción,  $A$  el terreno,  $B$  el trabajo,  $C$  son mejoras,  $D$  activos líquidos,  $E$  activos de trabajo y  $F$  gastos de operación en efectivo. Encuentre las productividades marginales para el trabajo y las mejoras.

12. **Función de producción** Suponga que una función de producción está dada por  $P = \frac{kl}{2k + 3l}$ .

- (a) Determine las funciones de productividad marginal.

- (b) Demuestre que cuando  $k = l$ , la suma de las productividades marginales es 1/5.

- \*13. **Compensación a MAE** En un estudio sobre el éxito alcanzado por jóvenes graduados con maestría en administración de empresas (MAE), se estimó que para gerentes (contadores, analistas, etcétera) la compensación anual actual (en dólares) estaba dada por

$$z = 43,960 + 4480x + 3492y$$

donde  $x$  y  $y$  son el número de años de experiencia en el trabajo antes y después de recibir su título de MAE, respectivamente.<sup>10</sup> Encuentre  $\partial z / \partial x$  e interprete su resultado.

<sup>8</sup>G. Tintner y O. H. Brownlee, "Production Functions Derived from Farm Records," *American Journal of Agricultural Economics*, 26 (1944), 566-571.

<sup>10</sup>Adaptado de A. G. Weinstein y V. Srinivasen, "Predicting Managerial Success of Master of Business Administration (M.B.A.) Graduates", *Journal of Applied Psychology*, 59, núm. 2 (1974), 207-212.

<sup>9</sup>P. Daly y P. Douglas, "The Production Function for Canadian Manufacturers", *Journal of the American Statistical Association*, 38 (1943), 178-186.

- 14. Estatus** Se cree que el estatus general  $S_g$  de una persona es una función atribuible a la educación  $S_e$  y al ingreso  $S_i$ , donde  $S_g$ ,  $S_e$  y  $S_i$  se representan en forma numérica. Si

$$S_g = 7\sqrt[3]{S_e}\sqrt{S_i}$$

determine  $\partial S_g / \partial S_e$  y  $\partial S_g / \partial S_i$  cuando  $S_e = 125$  y  $S_i = 100$ , e interprete sus resultados.<sup>11</sup>

- 15. Facilidad de lectura** En ocasiones se desea evaluar el grado de legibilidad de un documento escrito. Rudolf Flesch<sup>12</sup> desarrolló una función de dos variables que hace esto, a saber,

$$R = f(w, s) = 206.835 - (1.015w + 0.846s)$$

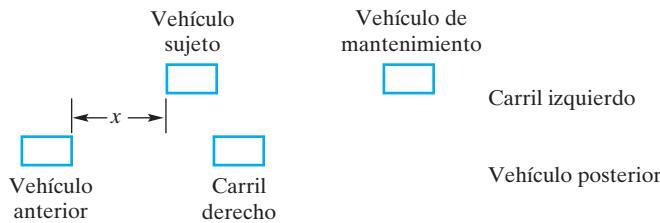
donde a  $R$  se le llama *calificación de facilidad de lectura*,  $w$  es el número promedio de palabras por oración en muestras de 100 palabras, y  $s$  es el número promedio de sílabas en tales muestras. Flesch afirma que un artículo para el cual  $R = 0$ , es “prácticamente ilegible”, pero que uno con  $R = 100$  es “fácil para cualquier persona que sepa leer”. (a) Encuentre  $\partial R / \partial w$  y  $\partial R / \partial s$ . (b) ¿Qué es “más fácil” de leer: un artículo para el cual  $w = w_0$  y  $s = s_0$ , u otro para el cual  $w = w_0 + 1$  y  $s = s_0$ ?

- 16. Modelo para voz** El estudio de las frecuencias de las vibraciones de un alambre tenso es útil al considerar la voz de un individuo. Suponga

$$\omega = \frac{1}{bL} \sqrt{\frac{\tau}{\pi\rho}}$$

donde  $\omega$  (letra griega “omega”) es la frecuencia,  $b$  el diámetro,  $L$  la longitud,  $\rho$  (letra griega “ro”) la densidad y  $\tau$  (letra griega “tau”) es la tensión.<sup>13</sup> Encuentre  $\partial \omega / \partial b$ ,  $\partial \omega / \partial L$ ,  $\partial \omega / \partial \rho$  y  $\partial \omega / \partial \tau$ .

- 17. Flujo de tráfico** Considere la siguiente situación de tráfico. En una autopista con dos carriles en cada dirección, un vehículo de mantenimiento bloquea el carril izquierdo (vea la figura 17.11). En el carril derecho hay dos vehículos (*anterior* y *posterior*), están con cierta distancia entre ellos. El vehículo *sujeto* puede escoger llenar o no el espacio entre los vehículos anterior y posterior. Esas decisiones pueden basarse no sólo en la distancia  $x$  mostrada en el diagrama, sino en otros factores (como la velocidad del vehículo *anterior*). En el análisis de tal decisión, se ha usado un *índice de espacio*,  $g$ .<sup>14,15</sup> Entre mayor



**FIGURA 17.11** Diagrama para el problema 17.

es el valor de  $g$ , mayor es la propensión del vehículo sujeto a ocupar el espacio. Suponga que

$$g = \frac{x}{V_F} - \left( 0.75 + \frac{V_F - V_S}{19.2} \right)$$

donde  $x$  (en pies) es el espacio,  $V_F$  la velocidad del vehículo *anterior* (en pies por segundo) y  $V_S$  la velocidad del vehículo sujeto (en pies por segundo). Del diagrama parece razonable suponer que si  $V_F$  y  $V_S$  están fijas y  $x$  crece, entonces  $g$  también debería crecer. Demuestre que esto es cierto: aplique cálculo a la función  $g$ . Suponga que  $x$ ,  $V_F$  y  $V_S$  son positivas.

- 18. Demanda** Suponga que las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B son

$$q_A = e^{-(p_A + p_B)} \quad y \quad q_B = \frac{16}{p_A^2 p_B^2}$$

donde  $q_A$  y  $q_B$  son los números de unidades demandadas de A y B cuando los precios unitarios (en miles de dólares) son  $p_A$  y  $p_B$ , respectivamente.

- (a) Clasifique A y B como competitivos, complementarios o ninguno de los dos.  
 (b) Si los precios unitarios de A y B son \$1000 y \$2000, respectivamente, estime el cambio en la demanda de A cuando el precio de B disminuye \$20 y el precio de A se mantiene constante.

- \*19. Demanda** Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dadas por

$$q_A = 10\sqrt{\frac{p_B}{p_A}} \quad y \quad q_B = 3\sqrt[3]{\frac{p_A}{p_B}}$$

donde  $q_A$  y  $q_B$  son las cantidades demandadas de A y de B, y  $p_A$  y  $p_B$  son los precios correspondientes (en dólares) por unidad.

- (a) Encuentre los valores de las dos demandas marginales para el producto A cuando  $p_A = 9$  y  $p_B = 16$ .  
 (b) Si  $p_B$  se reduce de 14 a 16, con  $p_A$  fijo en 9, use el inciso (a) para estimar el cambio correspondiente en la demanda para el producto A.

- 20. Función de costos conjuntos** La función de costos conjuntos para producir  $q_A$  unidades del producto A y  $q_B$  unidades del producto B está dada por

$$c = \frac{q_A^2(q_B^3 + q_A)^{1/2}}{17} + q_A q_B^{1/3} + 600$$

donde  $c$  está en dólares.

- (a) Encuentre las funciones de costo marginal con respecto a  $q_A$  y  $q_B$ .  
 (b) Evalúe la función de costo marginal con respecto a  $q_A$  cuando  $q_A = 17$  y  $q_B = 8$ . Redondee su respuesta a dos decimales.

<sup>11</sup> Adaptado de R. K. Leik y B. F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1975).

<sup>12</sup> R. Flesch, *The Art of Readable Writing* (Nueva York: Harper & Row Publishers, Inc., 1949).

<sup>13</sup> R. M. Thrall, J. A. Mortimer, K. R. Rebman y R. F. Baum, editores, *Some Mathematical Models in Biology*, edición revisada, Reporte núm. 40241-R-7. Preparado en la Universidad de Michigan, 1967.

<sup>14</sup> P. M. Hurst, K. Perchonok y E. L. Seguin. “Vehicle Kinematics and Gap Acceptance” *Journal of Applied Psycholoy*, 52, núm. 4 (1968), 321-324.

<sup>15</sup> K. Perchonok y P. M. Hurst, “Effect of Lane-Closure Signals upon Driver Decision Making and Traffic Flow,” *Journal of Applied Psychology*, 52, núm. 5 (1968), 410-413.

- (c) Use su respuesta al inciso (a) para estimar el cambio en el costo si la producción del producto A disminuye de 17 a 16 unidades, mientras que la producción del producto B se mantiene en 8 unidades.
- 21. Elecciones** Para las elecciones al congreso de 1974, el porcentaje republicano  $R$  del voto republicano-democrático en un distrito está dado (aproximadamente) por<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} R &= f(E_r, E_d, I_r, I_d, N) \\ &= 15.4725 + 2.5945E_r - 0.0804E_r^2 - 2.3648E_d \\ &\quad + 0.0687E_d^2 + 2.1914I_r - 0.0912I_r^2 \\ &\quad - 0.8096I_d + 0.0081I_d^2 - 0.0277E_r I_r \\ &\quad + 0.0493E_d I_d + 0.8579N - 0.0061N^2 \end{aligned}$$

Aquí,  $E_r$  y  $E_d$  son los gastos de campaña (en unidades de \$10 000) de los republicanos y demócratas, respectivamente;  $I_r$  e  $I_d$  el número de períodos en los que han estado en el Congreso, más uno, para los candidatos republicano y demócrata, respectivamente, y  $N$  es el porcentaje del voto presidencial de los dos partidos que Richard Nixon obtuvo en el distrito en 1968. La variable  $N$  proporciona una medida de la fuerza de los republicanos en ese distrito.

- (a) En la ley de 1974 de la Campaña Federal de Elecciones, el Congreso estableció un límite de \$188 000 para los gastos de campaña. Tras analizar  $\partial R / \partial E_r$ , ¿habría aconsejado usted a un candidato republicano con nueve períodos en el Congreso, gastar \$188 000 en su campaña?
- (b) Encuentre el porcentaje por encima del cual el voto de Nixon tuvo un efecto negativo sobre  $R$ ; esto es, encuentre  $N$  cuando  $\partial R / \partial N < 0$ . Dé su respuesta al porcentaje entero más cercano.
- 22. Ventas** Después de que un nuevo producto se ha lanzado al mercado, su volumen de ventas (en miles de unidades) está

dado por

$$S = \frac{AT + 450}{\sqrt{A + T^2}}$$

donde  $T$  es el tiempo (en meses) desde que el producto se introdujo por primera vez y  $A$  es la cantidad (en cientos de dólares) gastada cada mes en publicidad.

- (a) Verifique que la derivada parcial del volumen de ventas con respecto al tiempo está dada por

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{A^2 - 450T}{(A + T^2)^{3/2}}$$

- (b) Use el resultado del inciso (a) para pronosticar el número de meses que transcurrirán, antes de que el volumen de ventas empiece a descender, si la cantidad destinada a publicidad se mantiene fija en \$9000 por mes.

Sea  $f$  una función de demanda para el producto A y  $q_A = f(p_A, p_B)$ , donde  $q_A$  es la cantidad demandada de A cuando su precio por unidad es  $p_A$  y el precio por unidad del producto B es  $p_B$ . La elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a  $p_A$ , denotada  $\eta_{p_A}$  se define como  $\eta_{p_A} = (p_A/q_A)(\partial q_A / \partial p_A)$ . La elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a  $p_B$ , denotada  $\eta_{p_B}$  se define como  $\eta_{p_B} = (p_B/q_A)(\partial q_A / \partial p_B)$ . Desde un punto de vista informal  $\eta_{p_A}$  es la razón de un cambio porcentual en la cantidad demandada de A con respecto a un cambio porcentual en el precio de A cuando el precio de B está fijo. De manera similar,  $\eta_{p_B}$  puede interpretarse como la razón de un cambio porcentual en la cantidad demandada de A, a un cambio porcentual en el precio de B cuando el precio de A se mantiene fijo. En los problemas 23 a 25, encuentre  $\eta_{p_A}$  y  $\eta_{p_B}$ , para los valores dados de  $p_A$  y  $p_B$ .

23.  $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B$ ;  $p_A = 2$ ,  $p_B = 10$   
 24.  $q_A = 60 - 3p_A - 2p_B$ ;  $p_A = 5$ ,  $p_B = 3$   
 25.  $q_A = 100/(p_A\sqrt{p_B})$ ;  $p_A = 1$ ,  $p_B = 4$

## OBJETIVO

Determinar derivadas parciales de una función definida de manera implícita.

## 17.4 Diferenciación parcial implícita<sup>17</sup>

Una ecuación en  $x$ ,  $y$  y  $z$  no necesariamente define a  $z$  como función de  $x$  y  $y$ . Por ejemplo, en la ecuación

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0 \tag{1}$$

si  $x = 1$  y  $y = 1$ , entonces  $z^2 - 1 - 1 = 0$ , por lo que  $z = \pm\sqrt{2}$ . Así, la ecuación (1) no define a  $z$  como función de  $x$  y  $y$ . Sin embargo, tras despejar  $z$  de la ecuación (1) se obtiene

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{o} \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

cada una de las cuales define a  $z$  como función de  $x$  y  $y$ . Aunque la ecuación (1) no expresa de manera explícita a  $z$  como función de  $x$  y  $y$ , puede considerarse que expresa a  $z$  *implícitamente* como una de dos funciones diferentes de  $x$  y  $y$ . Observe que la ecuación  $z^2 - x^2 - y^2 = 0$  tiene la forma  $F(x, y, z) = 0$ , donde  $F$  es una función de tres variables. Cualquier ecuación de la forma  $F(x, y, z) = 0$  puede considerarse que expresa a  $z$  de manera implícita como un conjunto de posibles funciones de  $x$  y  $y$ . Además, es posible encontrar  $\partial z / \partial x$  y  $\partial z / \partial y$  directamente de la forma  $F(x, y, z) = 0$ .

Para encontrar  $\partial z / \partial x$  de

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0 \tag{2}$$

<sup>16</sup>J. Silberman y G. Yochum, "The Role of Money in Determining Election Outcomes," *Social Science Quarterly*, 58, núm. 4 (1978), 671-682.

<sup>17</sup>Esta sección puede omitirse sin que se pierda la continuidad

primero se diferencian ambos lados de la ecuación (2) con respecto a  $x$  y se trata a  $z$  como función de  $x$  y  $y$ , y a  $y$  como constante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(z^2 - x^2 - y^2) &= \frac{\partial}{\partial x}(0) \\ \frac{\partial}{\partial x}(z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(y^2) &= 0 \\ 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 2x - 0 &= 0\end{aligned}$$

Debido a que  $y$  se trata como una constante,  $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ .

Al despejar  $\partial z / \partial x$ , se obtiene

$$\begin{aligned}2z\frac{\partial z}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{x}{z}\end{aligned}$$

Para encontrar  $\partial z / \partial y$  se diferencian ambos lados de la ecuación (2) con respecto a  $y$ , se trata a  $z$  como función de  $x$  y  $y$ , y se mantiene a  $x$  como una constante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(z^2 - x^2 - y^2) &= \frac{\partial}{\partial y}(0) \\ 2z\frac{\partial z}{\partial y} - 0 - 2y &= 0 \quad \left( \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \right) \\ 2z\frac{\partial z}{\partial y} &= 2y\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}$$

El método que se usa para encontrar  $\partial z / \partial x$  y  $\partial z / \partial y$  se llama *diferenciación parcial implícita*.

### EJEMPLO 1 Diferenciación parcial implícita

Si  $\frac{xz^2}{x+y} + y^2 = 0$ , evalúe  $\frac{\partial z}{\partial x}$  cuando  $x = -1$ ,  $y = 2$  y  $z = 2$ .

**Solución:** Se tratará a  $z$  como función de  $x$  y  $y$ , y se diferenciarán ambos lados de la ecuación con respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{xz^2}{x+y} \right) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(0)$$

Si se usa la regla del cociente para el primer término a la izquierda, se tiene

$$\frac{(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(xz^2) - xz^2\frac{\partial}{\partial x}(x+y)}{(x+y)^2} + 0 = 0$$

Mediante la regla del producto para  $\frac{\partial}{\partial x}(xz^2)$  resulta

$$\frac{(x+y) \left[ x \left( 2z\frac{\partial z}{\partial x} \right) + z^2(1) \right] - xz^2(1)}{(x+y)^2} = 0$$

Se despeja  $\partial z / \partial x$ , y se obtiene

$$\begin{aligned}2xz(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} + z^2(x+y) - xz^2 &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{xz^2 - z^2(x+y)}{2xz(x+y)} = -\frac{yz}{2x(x+y)} \quad z \neq 0\end{aligned}$$

Así,

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(-1,2,2)} = 2$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

### EJEMPLO 2 Diferenciación parcial implícita

*Si se  $r^2+u^2 = u \ln(t^2 + 1)$ , determine  $\partial t / \partial u$ .*

**Solución:** Se considera a  $t$  como función de  $r$ ,  $s$  y  $u$ . Al diferenciar ambos lados con respecto a  $u$ , mientras se mantienen constantes a  $r$  y a  $s$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}(se^{r^2+u^2}) &= \frac{\partial}{\partial u}(u \ln(t^2 + 1)) \\ 2sue^{r^2+u^2} &= u \frac{\partial}{\partial u}(\ln(t^2 + 1)) + \ln(t^2 + 1) \frac{\partial}{\partial u}(u) \quad (\text{regla del producto}) \\ 2sue^{r^2+u^2} &= u \frac{2t}{t^2 + 1} \frac{\partial t}{\partial u} + \ln(t^2 + 1)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{(t^2 + 1)(2sue^{r^2+u^2} - \ln(t^2 + 1))}{2ut}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

## Problemas 17.4

En los problemas 1 a 11, encuentre las derivadas parciales indicadas por el método de diferenciación parcial implícita.

- \*1.  $2x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 900$ ;  $\partial z / \partial x$
- 2.  $z^2 - 5x^2 + y^2 = 0$ ;  $\partial z / \partial x$
- 3.  $2z^3 - x^2 - 4y^2 = 0$ ;  $\partial z / \partial y$
- 4.  $3x^2 + y^2 + 2z^3 = 9$ ;  $\partial z / \partial y$
- 5.  $x^2 - 2y - z^2 + x^2yz^2 = 20$ ;  $\partial z / \partial x$
- 6.  $z^3 + 2x^2z^2 - xy = 0$ ;  $\partial z / \partial x$
- 7.  $e^x + e^y + e^z = 10$ ;  $\partial z / \partial y$
- 8.  $xyz + 3y^3x^2 - \ln z^3 = 0$ ;  $\partial z / \partial y$
- 9.  $\ln(z) + 9z - xy = 1$ ;  $\partial z / \partial x$
- 10.  $\ln x + \ln y - \ln z = e^y$ ;  $\partial z / \partial x$
- 11.  $(z^2 + 6xy)\sqrt{x^3 + 5} = 2$ ;  $\partial z / \partial y$

En los problemas 12 a 20, evalúe las derivadas parciales indicadas para los valores dados de las variables.

- 12.  $xz + xyz - 5 = 0$ ;  $\partial z / \partial x$ ,  $x = 1$ ,  $y = 4$ ,  $z = 1$
- \*13.  $3xz^2 + 2yz^2 - 7x^4y = 3$ ;  $\partial z / \partial x$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $z = 1$

- 14.  $e^{zx} = xyz$ ;  $\partial z / \partial y$ ,  $x = 1$ ,  $y = -e^{-1}$ ,  $z = -1$
- 15.  $e^{yz} = -xyz$ ;  $\partial z / \partial x$ ,  $x = -e^2/2$ ,  $y = 1$ ,  $z = 2$
- 16.  $\sqrt{xz + y^2} - xy = 0$ ;  $\partial z / \partial y$ ,  $x = 2$ ,  $y = 2$ ,  $z = 6$
- 17.  $\ln z = 4x + y$ ;  $\partial z / \partial x$ ,  $x = 5$ ,  $y = -20$ ,  $z = 1$
- 18.  $\frac{2r^2s^2}{s^2 + t^2} = t$ ;  $\partial r / \partial t$ ,  $r = 1$ ,  $s = 1$ ,  $t = 1$
- 19.  $\frac{s^2 + t^2}{rs} = 10$ ;  $\partial t / \partial r$ ,  $r = 1$ ,  $s = 2$ ,  $t = 4$
- 20.  $\ln(x + y + z) + xyz = ze^{x+y+z}$ ;  $\partial z / \partial x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $z = 0$
- 21. **Función de costos conjuntos** Una función de costos conjuntos se define en forma implícita mediante la ecuación

$$c + \sqrt{c} = 12 + q_A \sqrt{9 + q_B^2}$$

donde  $c$  denota el costo total (en dólares) de producir  $q_A$  unidades del producto A y  $q_B$  unidades del producto B.

- (a) Si  $q_A = 6$  y  $q_B = 4$ , encuentre el correspondiente al valor de  $c$ .
- (b) Determine los costos marginales con respecto a  $q_A$  y  $q_B$  cuando  $q_A = 6$  y  $q_B = 4$ .

### OBJETIVO

Calcular derivadas parciales de orden superior.

## 17.5 Derivadas parciales de orden superior

Si  $z = f(x, y)$ , entonces no sólo  $z$  es una función de  $x$  y  $y$ , también lo son  $f_x$  y  $f_y$ . Por lo que es posible diferenciar  $f_x$  y  $f_y$ , para obtener **derivadas parciales de segundo orden** de  $f$ . En forma simbólica,

$$\begin{array}{ll} f_{xx} \text{ significa } (f_x)_x & f_{xy} \text{ significa } (f_x)_y \\ f_{yx} \text{ significa } (f_y)_x & f_{yy} \text{ significa } (f_y)_y \end{array}$$

En términos de la notación  $\partial$ ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$



### ADVERTENCIA

Para  $z = f(x, y)$ ,  $f_{xy} = \partial^2 z / \partial y \partial x$ .

Observe que para encontrar  $f_{xy}$ , primero se diferencia  $f$  con respecto a  $x$ . Para  $\partial^2 z / \partial x \partial y$ , primero se diferencia con respecto a  $y$ .

Es posible extender la notación más allá de las derivadas parciales de segundo orden. Por ejemplo,  $f_{xxy} (= \partial^3 z / \partial x \partial y \partial x^2)$  es una derivada parcial de tercer orden de  $f$ , esto es, la derivada parcial de  $f_{xx} (= \partial^2 z / \partial x^2)$  con respecto a  $y$ . Una generalización a derivadas parciales de orden superior con funciones de más de dos variables debería ser obvia.

### EJEMPLO 1 Derivadas parciales de segundo orden

Encuentre las cuatro derivadas parciales de segundo orden de  $f(x, y) = x^2y + x^2y^2$ .

**Solución:** Como

$$f_x(x, y) = 2xy + 2xy^2$$

se tiene

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 2xy^2) = 2y + 2y^2$$

y

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + 2xy^2) = 2x + 4xy$$

También, como

$$f_y(x, y) = x^2 + 2x^2y$$

se tiene

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2x^2y) = 2x^2$$

y

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2x^2y) = 2x + 4xy$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



Las derivadas  $f_{xy}$  y  $f_{yz}$  se llaman **derivadas parciales mixtas**. Observe en el ejemplo 1 que  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ . Bajo las condiciones apropiadas, las derivadas parciales mixtas de una función son iguales; es decir, el orden de diferenciación no tiene importancia. Puede suponerse que éste es el caso para todas las funciones que se consideren.

### EJEMPLO 2 Derivada parcial mixta

Encuentre el valor de  $\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x} \Big|_{(1,2,3)}$  si  $w = (2x + 3y + 4z)^3$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 3(2x + 3y + 4z)^2 \frac{\partial}{\partial x}(2x + 3y + 4z) \\ &= 6(2x + 3y + 4z)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} &= 6 \cdot 2(2x + 3y + 4z) \frac{\partial}{\partial y}(2x + 3y + 4z) \\ &= 36(2x + 3y + 4z) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x} = 36 \cdot 4 = 144$$

Así,

$$\left. \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x} \right|_{(1,2,3)} = 144$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

### EJEMPLO 3 Derivada parcial de segundo orden de una función implícita<sup>18</sup>

Determine  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  si  $z^2 = xy$ .

**Solución:** Por medio de la diferenciación implícita se determina primero  $\partial z / \partial x$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(z^2) &= \frac{\partial}{\partial x}(xy) \\ 2z \frac{\partial z}{\partial x} &= y \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{y}{2z} \quad z \neq 0\end{aligned}$$

Al diferenciar ambos lados con respecto a  $x$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}yz^{-1} \right) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2}yz^{-2} \frac{\partial z}{\partial x}\end{aligned}$$

Al sustituir  $y/(2z)$  por  $\partial z / \partial x$ , se tiene

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}yz^{-2} \left( \frac{y}{2z} \right) = -\frac{y^2}{4z^3} \quad z \neq 0$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23

## Problemas 17.5

En los problemas 1 a 10, encuentre las derivadas parciales indicadas.

- \*1.  $f(x, y) = 6xy^2$ ;  $f_x(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y)$
- 2.  $f(x, y) = 2x^3y^2 + 6x^2y^3 - 3xy$ ;  $f_x(x, y), f_{xx}(x, y)$
- \*3.  $f(x, y) = 7x^2 + 3y$ ;  $f_y(x, y), f_{yy}(x, y), f_{yyx}(x, y)$
- 4.  $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)(x^2 + xy + 1)$ ;  $f_x(x, y), f_{xy}(x, y)$
- 5.  $f(x, y) = 9e^{2xy}$ ;  $f_y(x, y), f_{yx}(x, y), f_{yxy}(x, y)$
- 6.  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + 2$ ;  $f_x(x, y), f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y)$
- 7.  $f(x, y) = (x + y)^2(xy)$ ;  $f_x(x, y), f_y(x, y), f_{xx}(x, y), f_{yy}(x, y)$
- 8.  $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$ ;  $f_x(x, y, z), f_{xz}(x, y, z), f_{zx}(x, y, z)$
- 9.  $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
- 10.  $z = \frac{\ln(x^2 + 5)}{y}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

En los problemas 11 a 16, encuentre el valor indicado.

- 11. Si  $f(x, y, z) = 7$ , encuentre  $f_{yxx}(4, 3, -2)$ .
- 12. Si  $f(x, y, z) = z^2(3x^2 - 4xy^3)$ , encuentre  $f_{xyz}(1, 2, 3)$ .
- 13. Si  $f(l, k) = 3l^6k^6 - 2l^2k^7$ , encuentre  $f_{klk}(2, 1)$ .
- 14. Si  $f(x, y) = 3x^3y^2 + xy - x^2y^2$ , encuentre  $f_{xxy}(5, 1)$  y  $f_{xyx}(5, 1)$ .

15. Si  $f(x, y) = y^2e^x + \ln(xy)$ , encuentre  $f_{xyy}(1, 1)$ .

16. Si  $f(x, y) = x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^3$ , encuentre  $f_{xy}(1, -1)$ .

17. **Función de costo** Suponga que el costo  $c$  de producir  $q_A$  unidades del producto A y  $q_B$  unidades del producto B está dado por

$$c = (3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{1/3}$$

y que las funciones de demanda para los productos están dadas por

$$q_A = 10 - p_A + p_B^2$$

y

$$q_B = 20 + p_A - 11p_B$$

Encuentre el valor de

$$\frac{\partial^2 c}{\partial q_A \partial q_B}$$

cuando  $p_A = 25$  y  $p_B = 4$ .

18. Para  $f(x, y) = x^4y^4 + 3x^3y^2 - 7x + 4$ , demuestre que

$$f_{xyx}(x, y) = f_{xxy}(x, y)$$

19. Para  $f(x, y) = 8x^3 + 2x^2y^2 + 5y^4$ , demuestre que

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

<sup>18</sup>Omítase si no se estudió la sección 17.4.

20. Para  $f(x, y) = e^{xy}$ , demuestre que

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) + f_{xy}(x, y) + f_{yx}(x, y) + f_{yy}(x, y) \\ = f(x, y)((x + y)^2 + 2) \end{aligned}$$

21. Para  $z = \ln(x^2 + y^2)$ , demuestre que  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .

<sup>19</sup>22. Si  $3z^2 - 2x^3 - 4y^4 = 0$ , encuentre  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

\*<sup>19</sup>23. Si  $z^2 - 3x^2 + y^2 = 0$ , encuentre  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

<sup>19</sup>24. Si  $2z^2 = x^2 + 2xy + xz$ , encuentre  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

## OBJETIVO

## 17.6 Regla de la cadena<sup>20</sup>



Demostrar cómo encontrar derivadas parciales de una función de funciones mediante el uso de la regla de la cadena.

Suponga que un fabricante de dos productos relacionados A y B tiene una función de costos conjuntos dada por

$$c = f(q_A, q_B)$$

donde  $c$  es el costo total de producir las cantidades  $q_A$  y  $q_B$  de A y B, respectivamente. Además, suponga que las funciones de demanda para los productos son

$$q_A = g(p_A, p_B) \quad y \quad q_B = h(p_A, p_B)$$

donde  $p_A$  y  $p_B$  son los precios por unidad de A y B, respectivamente. Como  $c$  es una función de  $q_A$  y  $q_B$ , y puesto que éstos son a su vez funciones de  $p_A$  y  $p_B$ , entonces  $c$  puede verse como una función de  $p_A$  y  $p_B$  (resulta apropiado llamar a las variables  $q_A$  y  $q_B$  variables intermedias de  $c$ ). En consecuencia, se debería tener la capacidad de determinar  $\partial c / \partial p_A$ , la razón de cambio del costo total con respecto al precio de A. Una manera de hacer esto es sustituir las expresiones  $g(p_A, p_B)$  y  $h(p_A, p_B)$  por  $q_A$  y  $q_B$ , respectivamente, en  $c = f(q_A, q_B)$ . Entonces  $c$  es una función de  $p_A$  y  $p_B$  y se puede diferenciar  $c$  con respecto a  $p_A$  directamente. Este procedimiento tiene algunas desventajas, especialmente cuando  $f$ ,  $g$  o  $h$  están dadas por una expresión complicada. Otra manera de atacar el problema sería por medio de la regla de la cadena (en realidad, *una* regla de la cadena), que ahora se establece sin demostrarla.

### Regla de la cadena

Sea  $z = f(x, y)$  donde  $x$  y  $y$  son funciones de  $r$  y  $s$  dadas por  $x = x(r, s)$  y  $y = y(r, s)$ . Si  $f$ ,  $x$  y  $y$  tienen derivadas parciales continuas, entonces  $z$  es una función de  $r$  y  $s$ , y

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Observe que en la regla de la cadena, el número de variables intermedias de  $z$  (dos), es el mismo que el número de términos que componen a  $\partial z / \partial r$  y  $\partial z / \partial s$ .

Si se regresa a la situación original en lo que concierne al productor, se ve que si  $f$ ,  $q_A$  y  $q_B$  tienen derivadas parciales continuas, entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial c}{\partial p_A} = \frac{\partial c}{\partial q_A} \frac{\partial q_A}{\partial p_A} + \frac{\partial c}{\partial q_B} \frac{\partial q_B}{\partial p_A}$$

### EJEMPLO 1 Tasa de cambio del costo

Para un fabricante de cámaras y películas, el costo total  $c$  de producir  $q_C$  cámaras y  $q_F$  rollos de película está dado por

$$c = 30q_C + 0.015q_Cq_F + q_F + 900$$

<sup>19</sup>Omítase si no se estudió la sección 17.4.

<sup>20</sup>Esta sección puede omitirse sin riesgo de perder continuidad.

Las funciones de demanda para las cámaras y los rollos fotográficos están dadas por

$$q_C = \frac{9000}{p_C \sqrt{p_F}} \quad \text{y} \quad q_F = 2000 - p_C - 400p_F$$

donde  $p_C$  es el precio por cámara y  $p_F$  el precio por rollo de película. Encuentre la tasa de cambio del costo total con respecto al precio de la cámara cuando  $p_C = 50$  y  $p_F = 2$ .

**Solución:** Primero se debe determinar  $\partial c / \partial p_C$ . Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial p_C} &= \frac{\partial c}{\partial q_C} \frac{\partial q_C}{\partial p_C} + \frac{\partial c}{\partial q_F} \frac{\partial q_F}{\partial p_C} \\ &= (30 + 0.015q_F) \left[ \frac{-9000}{p_C^2 \sqrt{p_F}} \right] + (0.015q_C + 1)(-1) \end{aligned}$$

Cuando  $p_C = 50$  y  $p_F = 2$ , entonces  $q_C = 90\sqrt{2}$  y  $q_F = 1150$ . Después de sustituir esos valores en  $\partial c / \partial p_C$  y simplificar, se tiene

$$\left. \frac{\partial c}{\partial p_C} \right|_{\substack{p_C=50 \\ p_F=2}} \approx -123.2$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 

La regla de la cadena puede extenderse. Por ejemplo, suponga que  $z = f(v, w, x, y)$  y que  $v, w, x$  y  $y$  son todas funciones de  $r, s$  y  $t$ . Entonces, si se suponen ciertas condiciones de continuidad, puede considerarse a  $z$  como una función de  $r, s$  y  $t$ , por lo que se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}$$

Observe que el número de variables intermedias de  $z$  (cuatro) es el mismo que el número de términos que forman a  $\partial z / \partial r$ ,  $\partial z / \partial s$  y  $\partial z / \partial t$ .

Ahora considere la situación en la que  $z = f(x, y)$  tal que  $x = x(t)$  y  $y = y(t)$ . Entonces

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Aquí se usa el símbolo  $dz/dt$  en vez de  $\partial z / \partial t$ , puesto que  $z$  puede considerarse como una función de *una sola variable*  $t$ . Asimismo, los símbolos  $dx/dt$  y  $dy/dt$  se usan en vez de  $\partial x / \partial t$  y  $\partial y / \partial t$ . Como es común, el número de términos que componen  $dz/dt$  es igual al número de variables intermedias de  $z$ . Existen otras situaciones que se tratarán de manera similar.

### EJEMPLO 2 Regla de la cadena

a. Si  $w = f(x, y, z) = 3x^2y + xyz - 4y^2z^3$ , donde

$$x = 2r - 3s \quad y = 6r + s \quad z = r - s$$

determine  $\partial w / \partial r$  y  $\partial w / \partial s$ .

**Solución:** Como  $x, y$  y  $z$ , son funciones de  $r$  y  $s$ , entonces por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \\ &= (6xy + yz)(2) + (3x^2 + xz - 8yz^3)(6) + (xy - 12y^2z^2)(1) \\ &= x(18x + 13y + 6z) + 2yz(1 - 24z^2 - 6yz) \end{aligned}$$

Use los símbolos de las derivadas parciales y los símbolos de la derivada ordinaria en forma apropiada.

También,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (6xy + yz)(-3) + (3x^2 + xz - 8yz^3)(1) + (xy - 12y^2z^2)(-1) \\ &= x(3x - 19y + z) - yz(3 + 8z^2 - 12yz)\end{aligned}$$

- b.** Si  $z = \frac{x + e^y}{y}$ , donde  $x = rs + se^{rt}$  y  $y = 9 + rt$ , evalúe  $\partial z / \partial s$  cuando  $r = -2, s = 5$  y  $t = 4$ .

**Solución:** Como  $x$  y  $y$  son funciones de  $r, s$  y  $t$  (note que es posible escribir  $y = 9 + rt + 0 \cdot s$ ), por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= \left(\frac{1}{y}\right)(r + e^{rt}) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot (0) = \frac{r + e^{rt}}{y}\end{aligned}$$

Si  $r = -2, s = 5$  y  $t = 4$ , entonces  $y = 1$ . Así,

$$\frac{\partial z}{\partial s} \Big|_{\substack{r=-2 \\ s=5 \\ t=4}} = \frac{-2 + e^{-8}}{1} = -2 + e^{-8}$$

### EJEMPLO 3 Regla de la cadena

- a.** Determine  $\partial y / \partial r$  si  $y = x^2 \ln(x^4 + 6)$  y  $x = (r + 3s)^6$ .

**Solución:** Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{dy}{dx} \frac{\partial x}{\partial r} \\ &= \left[x^2 \cdot \frac{4x^3}{x^4 + 6} + 2x \cdot \ln(x^4 + 6)\right] [6(r + 3s)^5] \\ &= 12x(r + 3s)^5 \left[\frac{2x^4}{x^4 + 6} + \ln(x^4 + 6)\right]\end{aligned}$$

- b.** Dado que  $z = e^{xy}, x = r - 4s$  y  $y = r - s$ , encuentre  $\partial z / \partial r$  en términos de  $r$  y  $s$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= (ye^{xy})(1) + (xe^{xy})(1) \\ &= (x + y)e^{xy}\end{aligned}$$

Como  $x = r - 4s$  y  $y = r - s$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= [(r - 4s) + (r - s)]e^{(r-4s)(r-s)} \\ &= (2r - 5s)e^{r^2 - 5rs + 4s^2}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15



## Problemas 17.6

En los problemas 1 a 12, encuentre las derivadas indicadas mediante la regla de la cadena.

- \*1.**  $z = 5x + 3y, x = 2r + 3s, y = r - 2s; \quad \partial z / \partial r, \partial z / \partial s$
- 2.**  $z = 2x^2 + 3xy + 2y^2, x = r^2 - s^2, y = r^2 + s^2; \quad \partial z / \partial r, \partial z / \partial s$

**3.**  $z = e^{x+y}, x = t^2 + 3, y = \sqrt{t^3}; \quad dz / dt$

**4.**  $z = \sqrt{8x + y}, x = t^2 + 3t + 4, \quad y = t^3 + 4; \quad dz / dt$

5.  $w = x^2z^2 + xyz + yz^2$ ,  $x = 5t$ ,  
 $y = 2t + 3$ ,  $z = 6 - t$ ;  $dw/dt$
6.  $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  
 $x = 2 - 3t$ ,  $y = t^2 + 3$ ,  $z = 4 - t$ ;  $dw/dt$
7.  $z = (x^2 + xy^2)^3$ ,  $x = r + s + t$ ,  
 $y = 2r - 3s + 8t$ ;  $\partial z/\partial t$
8.  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x = r^2 + s - t$ ,  
 $y = r - s + t$ ;  $\partial z/\partial r$
9.  $w = x^2 + xyz + z^2$ ,  $x = r^2 - s^2$ ,  
 $y = rs$ ,  $z = r^2 + s^2$ ;  $\partial w/\partial s$
10.  $w = e^{xyz}$ ,  $x = r^2s^3$ ,  $y = \ln(r - s)$ ,  $z = \sqrt{rs^2}$ ;  $\partial w/\partial r$
11.  $y = x^2 - 7x + 5$ ,  $x = 19rs + 2s^2t^2$ ;  $\partial y/\partial r$
12.  $y = 4 - x^2$ ,  $x = 2r + 3s - 4t$ ;  $\partial y/\partial t$
- \*13. Si  $z = (4x + 3y)^3$ , donde  $x = r^2s$  y  $y = r - 2s$ , evalúe  $\partial z/\partial r$  cuando  $r = 0$  y  $s = 1$ .
14. Si  $z = \sqrt{2x + 3y}$ , donde  $x = 3t + 5$  y  $y = t^2 - 2t + 1$ , evalúe  $dz/dt$  cuando  $t = 1$ .
- \*15. Si  $w = e^{2x+3y}(x^2 + 4z^2)$ , donde  $x = rs$ ,  $y = 2s - 3r$  y  $z = r + s$ , evalúe  $\partial w/\partial s$  cuando  $r = 1$  y  $s = 0$ .
16. Si  $y = x/(x - 5)$ , donde  $x = 2t^2 - 3rs - r^2t$ , evalúe  $\partial y/\partial t$  cuando  $r = 0$ ,  $s = 2$  y  $t = -1$ .

17. **Función de costo** Suponga que el costo  $c$  de producir  $q_A$  unidades del producto A, y  $q_B$  unidades del producto B está dado por

$$c = (3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{1/3}$$

y que las funciones de demanda para los productos están dadas

por

$$q_A = 10 - p_A + p_B^2$$

y

$$q_B = 20 + p_A - 11p_B$$

Use la regla de la cadena para evaluar  $\frac{\partial c}{\partial p_A}$  y  $\frac{\partial c}{\partial p_B}$  cuando  $p_A = 25$  y  $p_B = 4$ .

18. Suponga que  $w = f(x, y)$ , donde  $x = g(t)$  y  $y = h(t)$ .

- (a) Establezca una regla de la cadena que proporcione  $dw/dt$ .  
(b) Suponga que  $h(t) = t$ , de modo que  $w = f(x, t)$ , donde  $x = g(t)$ . Use el inciso (a) para encontrar  $dw/dt$  y simplifique su respuesta.

19. (a) Suponga que  $w$  es una función de  $x$  y  $y$  y que a su vez  $x$  y  $y$  son funciones de  $s$  y  $t$ . Establezca una regla de la cadena que exprese  $\partial w/\partial t$  en términos de las derivadas de estas funciones.

- (b) Sea  $w = 2x^2 \ln|3x - 5y|$ , donde  $x = s\sqrt{t^2 + 2}$  y  $y = t - 3e^{2-s}$ . Use el inciso (a) para evaluar  $\partial w/\partial t$  cuando  $s = 1$  y  $t = 0$ .

20. **Función de producción** Al considerar una función de producción  $P = f(l, k)$ , donde  $l$  es el trabajo y  $k$  el capital inicial, Fon, Boulier y Goldfarb<sup>21</sup> suponen que  $l = Lg(h)$ , donde  $L$  es el número de trabajadores,  $h$  es el número de horas por día por trabajador y  $g(h)$  una función de la eficiencia del trabajo. Al maximizar la ganancia  $p$  dada por

$$p = aP - whL$$

donde  $a$  es el precio por unidad de producción y  $w$  es el salario por hora por trabajador, Fon, Boulier y Goldfarb determinan  $\partial p/\partial L$  y  $\partial p/\partial h$ . Suponga que  $k$  es independiente de  $L$  y  $h$ , y determine estas derivadas parciales.

## OBJETIVO

Analizar máximos y mínimos relativos para determinar puntos críticos, y aplicar la prueba de la segunda derivada para una función de dos variables.

## 17.7 Máximos y mínimos para funciones de dos variables

### DEFINICIÓN

Se dice que una función  $z = f(x, y)$  tiene un **máximo relativo** en el punto  $(a, b)$  (es decir, cuando  $x = a$  y  $y = b$ ) si, para todos los puntos  $(x, y)$  en el plano que están suficientemente cerca de  $(a, b)$ , se tiene

$$f(a, b) \geq f(x, y) \quad (1)$$

Para un **mínimo relativo**, se reemplaza  $\geq$  por  $\leq$  en la ecuación (1).

Decir que  $z = f(x, y)$  tiene un máximo relativo en  $(a, b)$  significa, en forma geométrica, que el punto  $(a, b, f(a, b))$  sobre la gráfica de  $f$  es mayor que (o tan grande como) todos los otros puntos sobre la superficie “cerca” a  $(a, b, f(a, b))$ . En la figura 17.12(a),  $f$  tiene un máximo relativo en  $(a, b)$ . En forma similar, la función  $f$  en la figura 17.12(b) tiene un mínimo relativo cuando  $x = y = 0$ , el cual corresponde a un punto bajo en la superficie.

Recuerde que para localizar los extremos de una función  $y = f(x)$  de una variable, se examinan aquellos valores de  $x$  en el dominio de  $f$  para los cuales  $f'(x) = 0$  o  $f'(x)$  no existe. Para funciones de dos (o más) variables, se sigue un procedimiento similar. Sin

<sup>21</sup>V. Fon, B. L. Boulier y R. S. Goldfarb. “The Firm’s Demand for Daily Hours of Work: Some Implications,” *Atlantic Economic Journal*, XIII, núm. 1 (1985), 36-42.

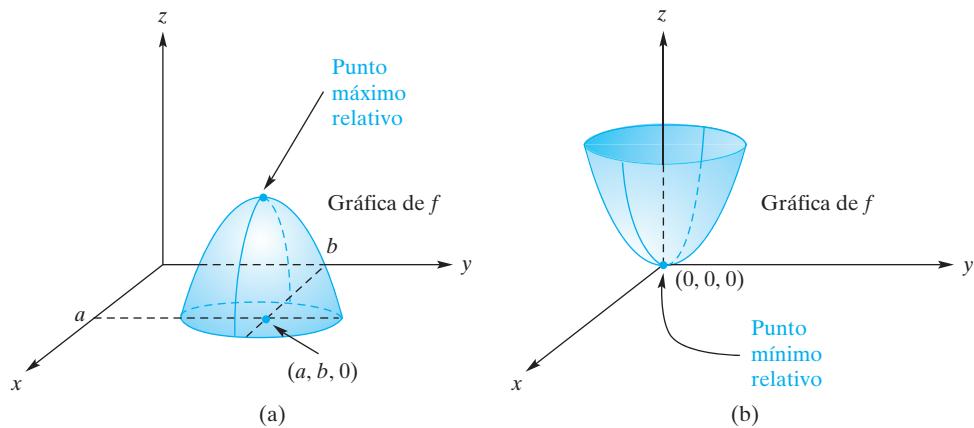
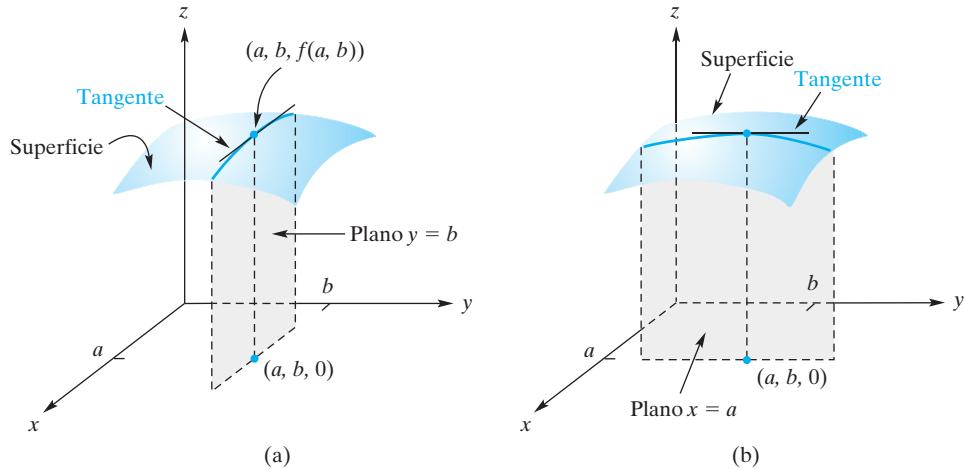


FIGURA 17.12 Extremos relativos.

embargo, para las funciones que interesan, los extremos no se presentarán donde una derivada no exista, y tales situaciones no se tomarán en consideración.

FIGURA 17.13 En el extremo relativo,  $f_x(x, y) = 0$  y  $f_y(x, y) = 0$ .

Suponga que  $z = f(x, y)$  tiene un máximo relativo en  $(a, b)$ , como se indica en la figura 17.13(a). Entonces, la curva donde el plano  $y = b$  interseca la superficie debe tener un máximo relativo cuando  $x = a$ . Por consiguiente, la pendiente de la recta tangente a la superficie en la dirección  $x$  debe ser 0 en  $(a, b)$ . De manera equivalente,  $f_x(x, y) = 0$  en  $(a, b)$ . De manera similar, sobre la curva en la que el plano  $x = a$  interseca la superficie [figura 17.13(b)], debe haber un máximo relativo cuando  $y = b$ . Así, en la dirección  $y$ , la pendiente de la tangente a la superficie debe ser 0 en  $(a, b)$ . De manera equivalente,  $f_y(x, y) = 0$  en  $(a, b)$ . Como puede hacerse un análisis similar para un mínimo relativo, es posible combinar estos resultados de la manera siguiente:



### ADVERTENCIA

La regla 1 no implica que un extremo deba ser punto crítico. Al igual que en el caso de funciones de una variable, un punto crítico puede resultar ser un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de los anteriores. Un punto crítico sólo es un candidato para ser un extremo relativo.

### REGLA 1

Si  $z = f(x, y)$  tiene un máximo o un mínimo relativo en  $(a, b)$ , y si  $f_x$  y  $f_y$  están definidas para todo punto cercano a  $(a, b)$ , es necesario que  $(a, b)$  sea una solución del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Un punto  $(a, b)$  para el cual  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  se llama **punto crítico** de  $f$ . Así, de la regla 1 se infiere que, para localizar extremos relativos de una función se deben examinar sus puntos críticos.

Se deben realizar dos comentarios adicionales: primero, la regla 1, así como el concepto de punto crítico, pueden extenderse a funciones de más de dos variables. Por ejemplo, para localizar posibles extremos de  $w = f(x, y, z)$ , se deben examinar aquellos puntos para los cuales  $w_x = w_y = w_z = 0$ . Segundo, para una función cuyo dominio está restringido, un examen completo de los extremos absolutos debe incluir la consideración de los puntos en la frontera.

### EJEMPLO 1 Determinación de puntos críticos

Encuentre los puntos críticos de las funciones siguientes.

a.  $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 3y + 1$ .

**Solución:** Como  $f_x(x, y) = 4x - 2y + 5$  y  $f_y(x, y) = 2y - 2x - 3$ , se resuelve el sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y + 5 = 0 \\ -2x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Esto proporciona  $x = -1$  y  $y = \frac{1}{2}$ . Así,  $(-1, \frac{1}{2})$  es el único punto crítico.

b.  $f(l, k) = l^3 + k^3 - lk$ .

**Solución:**

$$\begin{cases} f_l(l, k) = 3l^2 - k = 0 \\ f_k(l, k) = 3k^2 - l = 0 \end{cases} \quad (2) \quad (3)$$

De la ecuación (2),  $k = 3l^2$ . Tras sustituir el valor de  $k$  en la ecuación (3) se obtiene

$$0 = 27l^4 - l = l(27l^3 - 1)$$

Por consiguiente,  $l = 0$  o  $l = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$ . Si  $l = 0$ , entonces  $k = 0$ ; si  $l = \frac{1}{3}$ , entonces  $k = \frac{1}{3}$ . Por lo tanto, los puntos críticos son  $(0, 0)$  y  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

c.  $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + 100 - z(x + y - 100)$ .

**Solución:** Al resolver el sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = 4x + y - z = 0 \\ f_y(x, y, z) = x + 2y - z = 0 \\ f_z(x, y, z) = -x - y + 100 = 0 \end{cases}$$

se obtiene el punto crítico  $(25, 75, 175)$  como usted lo puede verificar.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

### EJEMPLO 2 Determinación de puntos críticos

Encuentre los puntos críticos de

$$f(x, y) = x^2 - 4x + 2y^2 + 4y + 7$$

**Solución:** Se tiene  $f_x(x, y) = 2x - 4$  y  $f_y(x, y) = 4y + 4$ . El sistema

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

proporciona el punto crítico  $(2, -1)$ . Observe que es posible escribir la función dada como

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - 4x + 4 + 2(y^2 + 2y + 1) + 1 \\ &= (x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

y  $f(2, -1) = 1$ . Es claro que si  $(x, y) \neq (2, -1)$ , entonces  $f(x, y) > 1$ . Por consiguiente, se tiene un mínimo relativo en  $(2, -1)$ . Además, se tiene un *mínimo absoluto* en  $(2, -1)$ , puesto que  $f(x, y) > f(2, -1)$  para *toda*  $(x, y) \neq (2, -1)$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

Aunque en el ejemplo 2 se pudo mostrar que el punto crítico da lugar a un extremo relativo, en muchos casos no es fácil hacer esto. Sin embargo, existe una prueba con la segunda derivada que proporciona las condiciones para las cuales un punto crítico será un máximo o un mínimo relativo. A continuación se enuncia esta regla sin demostrarla.

### REGLA 2 Prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables

Suponga que  $z = f(x, y)$  tiene derivadas parciales continuas  $f_{xx}, f_{yy}$  y  $f_{xy}$  en todo punto  $(x, y)$  cercano al punto crítico  $(a, b)$ . Sea  $D$  la función definida por

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$$

Entonces

1. si  $D(a, b) > 0$  y  $f_{xx}(a, b) < 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $(a, b)$ ;
2. si  $D(a, b) > 0$  y  $f_{xx}(a, b) > 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $(a, b)$ ;
3. si  $D(a, b) < 0$ , entonces  $f$  tiene un *punto silla* en  $(a, b)$  (vea el ejemplo 4);
4. si  $D(a, b) = 0$ , no puede obtenerse ninguna conclusión con respecto a extremos en  $(a, b)$  y es necesario hacer un análisis adicional.

### EJEMPLO 3 Aplicación de la prueba de la segunda derivada

Examine  $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$  con respecto a máximos y mínimos relativos, con el uso de la prueba de la segunda derivada.

**Solución:** Primero se encontrarán los puntos críticos:

$$f_x(x, y) = 3x^2 - y \quad f_y(x, y) = 3y^2 - x$$

De la misma manera que en el ejemplo 1(b), al resolver  $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ , se obtienen los puntos críticos  $(0, 0)$  y  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

Ahora,

$$f_{xx}(x, y) = 6x \quad f_{yy}(x, y) = 6y \quad f_{xy}(x, y) = -1$$

Por lo tanto,

$$D(x, y) = (6x)(6y) - (-1)^2 = 36xy - 1$$

Como  $D(0, 0) = 36(0)(0) - 1 = -1 < 0$ , no hay ningún extremo relativo en  $(0, 0)$ . Además, como  $D(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 36(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}) - 1 = 3 > 0$  y  $f_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 6(\frac{1}{3}) = 2 > 0$ , existe un mínimo relativo en  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . En este punto el valor de la función es

$$f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^3 - (\frac{1}{3})(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7



### EJEMPLO 4 Un punto silla

Examine  $f(x, y) = y^2 - x^2$  en relación con sus extremos relativos.

**Solución:** Al resolver

$$f_x(x, y) = -2x = 0 \quad y \quad f_y(x, y) = 2y = 0$$

se obtiene el punto crítico  $(0, 0)$ . Ahora se aplica la prueba de la segunda derivada. En  $(0, 0)$  y, de hecho, en cualquier punto,

$$f_{xx}(x, y) = -2 \quad f_{yy}(x, y) = 2 \quad f_{xy}(x, y) = 0$$

Como  $D(0, 0) = (-2)(2) - (0)^2 = -4 < 0$ , no existe un extremo relativo en  $(0, 0)$ . En la figura 17.14 se presenta un bosquejo de  $z = f(x, y) = y^2 - x^2$ . Observe que para la curva que resulta de cortar la superficie con el plano  $y = 0$ , existe un *máximo* en  $(0, 0)$ ; pero

La superficie de la figura 17.14 se llama un parabolóide hiperbólico.

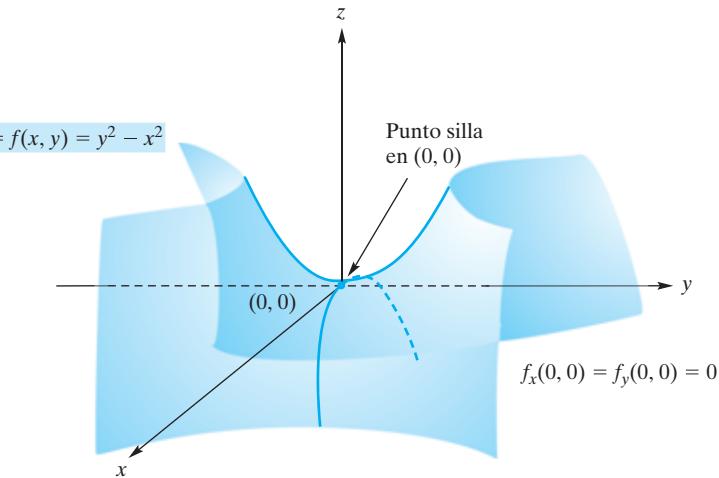


FIGURA 17.14 Punto silla.

para la curva que resulta de cortar la superficie con el plano  $x = 0$ , existe un *mínimo* en  $(0, 0)$ . Así, sobre la *superficie* no puede existir ningún extremo relativo en el origen, aunque  $(0, 0)$  es un punto crítico. Alrededor del origen la superficie tiene la forma de una silla de montar y  $(0, 0)$  se llama *punto silla* de  $f$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

### EJEMPLO 5 Determinación de extremos relativos

Examine  $f(x, y) = x^4 + (x - y)^4$  en relación con sus extremos relativos.

**Solución:** Si se establece

$$f_x(x, y) = 4x^3 + 4(x - y)^3 = 0 \quad (4)$$

y

$$f_y(x, y) = -4(x - y)^3 = 0 \quad (5)$$

entonces, a partir de la ecuación (5) se tiene  $x - y = 0$  o  $x = y$ . Al sustituir en la ecuación (4) se obtiene  $4x^3 = 0$  o  $x = 0$ . Así,  $x = y = 0$ , y  $(0, 0)$  es el único punto crítico. En  $(0, 0)$ ,

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 12(x - y)^2 = 0$$

$$f_{yy}(x, y) = 12(x - y)^2 = 0$$

y

$$f_{xy}(x, y) = -12(x - y)^2 = 0$$

Por tanto,  $D(0, 0) = 0$  y la prueba de la segunda derivada no proporciona información. Sin embargo, para toda  $(x, y) \neq (0, 0)$ , se tiene  $f(x, y) > 0$ , mientras que  $f(0, 0) = 0$ . Por lo tanto, en  $(0, 0)$  la gráfica de  $f$  tiene un punto inferior y se concluye que  $f$  tiene un mínimo relativo (y absoluto) en  $(0, 0)$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

### Aplicaciones

En muchas situaciones que involucran funciones de dos variables, y en especial en sus aplicaciones, la naturaleza del problema dado es un indicador de si un punto crítico es realmente un máximo relativo (o absoluto) o un mínimo relativo (o absoluto). En tales casos, la prueba de la segunda derivada no es necesaria. A menudo, en estudios matemáticos de problemas de aplicación se supone que se satisfacen las condiciones apropiadas de segundo orden.

### EJEMPLO 6 Maximización de la producción

Sea  $P$  una función de producción dada por

$$P = f(l, k) = 0.54l^2 - 0.02l^3 + 1.89k^2 - 0.09k^3$$

donde  $l$  y  $k$  son las cantidades de trabajo y capital, respectivamente, y  $P$  es la cantidad producida. Encuentre los valores de  $l$  y  $k$  que maximizan  $P$ .

**Solución:** Para encontrar los puntos críticos se resuelve el sistema  $P_l = 0$  y  $P_k = 0$ :

$$\begin{aligned} P_l &= 1.08l - 0.06l^2 & P_k &= 3.78k - 0.27k^2 \\ &= 0.06l(18 - l) = 0 & &= 0.27k(14 - k) = 0 \\ l &= 0, l = 18 & k &= 0, k = 14 \end{aligned}$$

Hay cuatro puntos críticos:  $(0, 0)$ ,  $(0, 14)$ ,  $(18, 0)$  y  $(18, 14)$ .

Ahora se aplica la prueba de la segunda derivada a cada punto crítico. Se tiene

$$P_{ll} = 1.08 - 0.12l \quad P_{kk} = 3.78 - 0.54k \quad P_{lk} = 0$$

Así,

$$\begin{aligned} D(l, k) &= P_{ll}P_{kk} - [P_{lk}]^2 \\ &= (1.08 - 0.12l)(3.78 - 0.54k) \end{aligned}$$

En  $(0, 0)$ ,

$$D(0, 0) = 1.08(3.78) > 0$$

Como  $D(0, 0) > 0$  y  $P_{ll} = 1.08 > 0$ , se tiene un mínimo relativo en  $(0, 0)$ . En  $(0, 14)$ ,

$$D(0, 14) = 1.08(-3.78) < 0$$

Como  $D(0, 14) < 0$ , no existe ningún extremo relativo en  $(0, 14)$ . En  $(18, 0)$ ,

$$D(18, 0) = (-1.08)(3.78) < 0$$

Como  $D(18, 0) < 0$ , no existe ningún extremo relativo en  $(18, 0)$ . En  $(18, 14)$ ,

$$D(18, 14) = (-1.08)(-3.78) > 0$$

Como  $D(18, 14) > 0$  y  $P_{ll} = -1.08 < 0$ , se tiene un máximo relativo en  $(18, 14)$ . Por lo tanto, la producción máxima se obtiene cuando  $l = 18$  y  $k = 14$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21



### EJEMPLO 7 Maximización de la utilidad

Una empresa produce dos tipos de dulces, A y B, para los cuales los costos promedio de producción son constantes de \$2 y \$3 por libra, respectivamente. Las cantidades  $q_A$  y  $q_B$  (en libras) de A y B que pueden venderse cada semana, están dadas por las funciones de demanda conjunta

$$q_A = 400(p_B - p_A)$$

y

$$q_B = 400(9 + p_A - 2p_B)$$

donde  $p_A$  y  $p_B$  son los precios de venta (en dólares por libra) de A y B, respectivamente. Determine los precios de venta que maximizan las utilidades  $P$  de la compañía.

**Solución:** La utilidad total está dada por

$$P = \begin{pmatrix} \text{utilidad} \\ \text{por libra} \\ \text{de A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{libras} \\ \text{de A} \\ \text{vendidas} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{utilidad} \\ \text{por libra} \\ \text{de B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{libras} \\ \text{de B} \\ \text{vendidas} \end{pmatrix}$$

Para  $A$  y  $B$ , la utilidad por libra es  $p_A - 2$  y  $p_B - 3$ , respectivamente. Así,

$$\begin{aligned} P &= (p_A - 2)q_A + (p_B - 3)q_B \\ &= (p_A - 2)[400(p_B - p_A)] + (p_B - 3)[400(9 + p_A - 2p_B)] \end{aligned}$$

Observe que  $P$  se expresa como una función de dos variables,  $p_A$  y  $p_B$ . Para maximizar  $P$ , sus derivadas parciales se igualan a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial p_A} &= (p_A - 2)[400(-1)] + [400(p_B - p_A)](1) + (p_B - 3)[400(1)] \\ &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial p_B} &= (p_A - 2)[400(1)] + (p_B - 3)[400(-2)] + 400(9 + p_A - 2p_B)(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Al simplificar las dos ecuaciones anteriores resulta

$$\begin{cases} -2p_A + 2p_B - 1 = 0 \\ 2p_A - 4p_B + 13 = 0 \end{cases}$$

cuya solución es  $p_A = 5.5$  y  $p_B = 6$ . Además, se encuentra que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_A^2} = -800 \quad \frac{\partial^2 P}{\partial p_B^2} = -1600 \quad \frac{\partial^2 P}{\partial p_B \partial p_A} = 800$$

Por lo tanto,

$$D(5.5, 6) = (-800)(-1600) - (800)^2 > 0$$

Como  $\frac{\partial^2 P}{\partial p_A^2} < 0$ , se tiene un máximo, y la empresa debería vender el dulce A a \$5.50 por libra y el B a \$6.00 por libra.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23 

### EJEMPLO 8 Maximización de la utilidad de un monopolista<sup>22</sup>

Suponga que un monopolista practica discriminación del precio al vender el mismo producto en dos mercados separados, a diferentes precios. Sea  $q_A$  el número de unidades vendidas en el mercado A, donde la función de demanda es  $p_A = f(q_A)$ , y sea  $q_B$  el número de unidades vendidas en el mercado B, donde la función de demanda es  $p_B = g(q_B)$ . Entonces las funciones de ingreso para los dos mercados son

$$r_A = q_A f(q_A) \quad y \quad r_B = q_B g(q_B)$$

Suponga que todas las unidades se producen en una planta, y que la función de costo por producir  $q = q_A + q_B$  unidades es  $c = c(q)$ . Mantenga en mente que  $r_A$  es una función de  $q_A$  y  $r_B$  es una función de  $q_B$ . La utilidad  $P$  del monopolista es

$$P = r_A + r_B - c$$

Para maximizar  $P$  con respecto a las producciones  $q_A$  y  $q_B$ , sus derivadas parciales se igualan a 0. Se iniciará con,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial q_A} &= \frac{dr_A}{dq_A} + 0 - \frac{\partial c}{\partial q_A} \\ &= \frac{dr_A}{dq_A} - \frac{dc}{dq} \frac{\partial q}{\partial q_A} = 0 \quad (\text{regla de la cadena}) \end{aligned}$$

<sup>22</sup>Omitase si no se estudió la sección 17.6.

Como

$$\frac{\partial q}{\partial q_A} = \frac{\partial}{\partial q_A}(q_A + q_B) = 1$$

se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial q_A} = \frac{dr_A}{dq_A} - \frac{dc}{dq} = 0 \quad (6)$$

De manera similar,

$$\frac{\partial P}{\partial q_B} = \frac{dr_B}{dq_B} - \frac{dc}{dq} = 0 \quad (7)$$

De las ecuaciones (6) y (7) se obtiene

$$\frac{dr_A}{dq_A} = \frac{dc}{dq} = \frac{dr_B}{dq_B}$$

Pero  $dr_A/dq_A$  y  $dr_B/dq_B$  son ingresos marginales y  $dc/dq$  es el costo marginal. Por lo tanto, para maximizar la utilidad, es necesario establecer los precios (y distribuir la producción) de manera que los ingresos marginales en ambos mercados sean los mismos y, en términos simples, también sean iguales al costo de la última unidad producida en la planta.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25



## Problemas 17.7

En los problemas 1 a 6, encuentre los puntos críticos de las funciones.

- \*1.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5x + 4y + xy$
- 2.  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 16y$
- \*3.  $f(x, y) = \frac{5}{3}x^3 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{15}{2}x^2 + y^2 - 4y + 7$
- 4.  $f(x, y) = xy - x + y$
- 5.  $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + 100 - z(x + y - 200)$
- 6.  $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 - w(x - y + 2z - 6)$

En los problemas 7 a 20, encuentre los puntos críticos de las funciones. Para cada punto crítico, determine, por medio de la prueba de la segunda derivada, si corresponde a un máximo relativo, a un mínimo relativo, a ninguno de los dos, o si la prueba no da información.

- \*7.  $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4x - 9y + 3$
- 8.  $f(x, y) = -2x^2 + 8x - 3y^2 + 24y + 7$
- 9.  $f(x, y) = y - y^2 - 3x - 6x^2$
- 10.  $f(x, y) = 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 3xy - 10x - 9y + 2$
- \*11.  $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + x + 3$
- 12.  $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^2 - 2x + 2y - 2xy$
- \*13.  $f(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + 8y^3) - 2(x^2 + y^2) + 1$
- 14.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x^3$
- 15.  $f(l, k) = \frac{l^2}{2} + 2lk + 3k^2 - 69l - 164k + 17$
- 16.  $f(l, k) = l^2 + k^2 - 2lk$
- 17.  $f(p, q) = pq - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$
- 18.  $f(x, y) = (x - 3)(y - 3)(x + y - 3)$ .
- 19.  $f(x, y) = (y^2 - 4)(e^x - 1)$
- 20.  $f(x, y) = \ln(xy) + 2x^2 - xy - 6x$

- \*21. **Maximización de la producción** Suponga que

$$P = f(l, k) = 1.08l^2 - 0.03l^3 + 1.68k^2 - 0.08k^3$$

es una función de producción para una compañía. Encuentre las cantidades de entrada  $l$  y  $k$  que maximizan la producción  $P$ .

22. **Maximización de la producción** En cierta oficina, las computadoras C y D se utilizan  $c$  y  $d$  horas, respectivamente. Si la producción diaria  $Q$  es una función de  $c$  y  $d$ , a saber

$$Q = 18c + 20d - 2c^2 - 4d^2 - cd$$

encuentre los valores de  $c$  y  $d$  que maximizan a  $Q$ .

En los problemas 23 a 35, a menos que se indique otra cosa, las variables  $p_A$  y  $p_B$  denotan los precios de venta de los productos A y B, respectivamente. En forma similar,  $q_A$  y  $q_B$  denotan cantidades de A y B producidas y vendidas durante algún periodo. En todos los casos se supondrá que las variables usadas son unidades de producción, insumo, dinero, etcétera.

- \*23. **Utilidad** Una compañía produce dos variedades de dulces, A y B, para los cuales los costos promedio de producción son constantes de 60 y 70 (centavos por libra), respectivamente. Las funciones de demanda para A y B están dadas por

$$q_A = 5(p_B - p_A) \quad y \quad q_B = 500 + 5(p_A - 2p_B)$$

Encuentre los precios de venta  $p_A$  y  $p_B$  que maximicen la utilidad de la compañía.

24. **Utilidad** Repita el problema 23, si los costos constantes de producción de A y B son  $a$  y  $b$  (centavos por libra), respectivamente.

- \*25. **Discriminación del precio** Suponga que un monopolista practica la discriminación del precio en la venta de un producto, y cobra diferentes precios en dos mercados separados. En el mercado A la función de demanda es

$$p_A = 100 - q_A$$

y en B es

$$p_B = 84 - q_B$$

donde  $q_A$  y  $q_B$  son las cantidades vendidas por semana de A y de B, y  $p_A$  y  $p_B$  son los precios respectivos por unidad. Si la función de costo del monopolista es

$$c = 600 + 4(q_A + q_B)$$

¿cuánto debe venderse en cada mercado para maximizar la utilidad? ¿Qué precios de venta dan la utilidad máxima? Encuentre la utilidad máxima.

- 26. Utilidad** Un monopolista vende dos productos competitivos A y B, para los cuales las funciones de demanda son

$$q_A = 3 - p_A + 2p_B \quad y \quad q_B = 5 + 5p_A - 2p_B$$

Si el costo promedio constante de producir una unidad de A es 3 y para una unidad de B es 2, ¿cuántas unidades de A y de B deben venderse para maximizar la utilidad del monopolista?

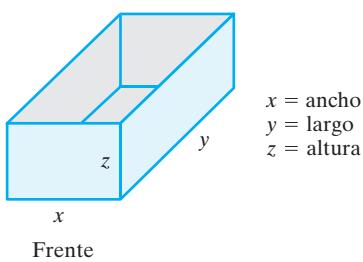
- 27. Utilidad** Para los productos A y B, la función de costos conjuntos es

$$c = \frac{3}{2}q_A^2 + 3q_B^2$$

y las funciones de demanda son  $p_A = 60 - q_A^2$  y  $p_B = 72 - 2q_B^2$ . Encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad.

- 28. Utilidad** Para los productos A y B de un monopolista, la función de costos conjuntos es  $c = 2(q_A + q_B + q_A q_B)$ , y las funciones de demanda son  $q_A = 20 - 2p_A$  y  $q_B = 10 - p_B$ . Encuentre los valores de  $p_A$  y  $p_B$  que maximizan la utilidad. ¿Cuáles son las cantidades de A y B que corresponden a esos precios? ¿Cuál es la utilidad total?

- 29. Costo** Una caja rectangular sin tapa debe tener un volumen de 6 pies<sup>3</sup>. El costo por pie cuadrado de material es de \$3 para el fondo, \$1 para el frente y la parte de atrás, y \$0.50 para los otros dos lados. Encuentre las dimensiones de la caja de manera que el costo de los materiales sea mínimo. (Vea la figura 17.15).



**FIGURA 17.15** Diagrama para el problema 29.

- 30. Colusión** Suponga que A y B son las únicas dos empresas en el mercado que venden el mismo producto. (Se dice que son *duopolistas*). La función de demanda industrial para el producto está dada por

$$p = 92 - q_A - q_B$$

donde  $q_A$  y  $q_B$  denotan la producción y venta de A y B, respectivamente. Para A, la función de costo es  $c_A = 10q_A$ ; para B, es  $c_B = 0.5q_B^2$ . Suponga que las compañías deciden entrar en un acuerdo sobre el control de precios y producción para actuar en conjunto como un monopolio. En este caso, se dice que entran en una *colusión*. Demuestre que la función de utilidad

para el monopolio está dada por

$$P = pq_A - c_A + pq_B - c_B$$

Expresa  $P$  en función de  $q_A$  y  $q_B$ , y determine cómo debe distribuirse la producción para maximizar la utilidad del monopolio.

- 31.** Suponga que  $f(x, y) = -2x^2 + 5y^2 + 7$ , donde  $x$  y  $y$  deben satisfacer la ecuación  $3x - 2y = 7$ . Encuentre los extremos relativos de  $f$  sujetos a la condición dada de  $x$  y  $y$ , despeje primero  $a$  y de la segunda ecuación. Sustituya el resultado para  $y$  en la ecuación dada. Así,  $f$  se expresa como función de una variable para la cual sus extremos pueden encontrarse de la manera usual.

- 32.** Repita el problema 31 si  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 6$  sujeta a la condición de que  $2x - 8y = 20$ .

- 33.** Suponga que la función de costos conjuntos

$$c = q_A^2 + 3q_B^2 + 2q_A q_B + aq_A + bq_B + d$$

tiene un valor mínimo relativo de 15 cuando  $q_A = 3$  y  $q_B = 1$ . Determine los valores de las constantes  $a$ ,  $b$  y  $d$ .

- 34.** Suponga que la función  $f(x, y)$  tiene derivadas parciales continuas  $f_{xx}$ ,  $f_{yy}$  y  $f_{xy}$  en todos los puntos  $(x, y)$  cercanos a un punto crítico  $(a, b)$ . Sea  $D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$  y suponga que  $D(a, b) > 0$ .

**(a)** Muestre que  $f_{xx}(a, b) < 0$  si y sólo si  $f_{yy}(a, b) < 0$ .

**(b)** Muestre que  $f_{xx}(a, b) > 0$  si y sólo si  $f_{yy}(a, b) > 0$ .

- 35. Utilidad de productos competitivos** Un monopolista vende dos productos competitivos, A y B, cuyas ecuaciones de demanda son

$$p_A = 35 - 2q_A^2 + q_B$$

y

$$p_B = 20 - q_B + q_A$$

La función de costos conjuntos es

$$c = -8 - 2q_A^3 + 3q_A q_B + 30q_A + 12q_B + \frac{1}{2}q_A^2$$

- (a)** ¿Cuántas unidades de A y B deben venderse para que el monopolista obtenga una utilidad máxima relativa? Use la prueba de la segunda derivada para justificar su respuesta.

- (b)** Determine los precios de venta necesarios para obtener la utilidad máxima relativa. Encuentre también esta utilidad máxima relativa.

- 36. Utilidad y publicidad** Un detallista ha determinado que el número de aparatos de televisión que puede vender por semana es

$$\frac{5x}{2+x} + \frac{2y}{5+y}$$

donde  $x$  y  $y$  representan sus gastos semanales (en dólares) por publicidad en periódicos y radio, respectivamente. La utilidad es de \$250 por venta menos el costo de la publicidad, de modo que su utilidad semanal está dada por la fórmula

$$P = 250 \left[ \frac{5x}{2+x} + \frac{2y}{5+y} \right] - x - y$$

Encuentre los valores de  $x$  y  $y$  para los cuales la utilidad es un máximo relativo. Use la prueba de la segunda derivada para verificar que su respuesta corresponde a una utilidad máxima relativa.

- 37. Utilidad de una cosecha de tomates** El rendimiento (en dólares por metro cuadrado de terreno) obtenido en la venta de una cosecha de tomates cultivados artificialmente en un invernadero está dado por

$$r = 5T(1 - e^{-x})$$

donde  $T$  es la temperatura (en °C) mantenida en el invernadero y  $x$  es la cantidad de fertilizante aplicado por metro cuadrado. El costo del fertilizante es  $20x$  dólares por metro cuadrado y el costo del calentamiento está dado por  $0.1T^2$  dólares por metro cuadrado.

- (a) Encuentre una expresión, en términos de  $T$  y  $x$ , para la utilidad por metro cuadrado que se obtiene por la venta de la cosecha de tomates.

- (b) Verifique que las parejas

$(T, x) = (20, \ln 5)$  y  $(T, x) = (5, \ln \frac{5}{4})$  son puntos críticos de la función de utilidad en el inciso (a). (Nota: no es necesario obtener los pares.)

- (c) Los puntos en el inciso (b) son los únicos puntos críticos de la función de utilidad del inciso (a). Use la prueba de la segunda derivada para determinar si cualquiera de esos puntos corresponde a una utilidad máxima relativa por metro cuadrado.

## OBJETIVO

Determinar puntos críticos para una función sujeta a restricciones, aplicar el método de multiplicadores de Lagrange.

## 17.8 Multiplicadores de Lagrange



En esta sección se encontrarán los máximos y mínimos relativos de una función a la cual se imponen ciertas restricciones. Tal situación podría surgir si un fabricante desea minimizar una función de costos conjuntos y obtener un nivel particular de producción.

Suponga que se desea encontrar los extremos relativos de

$$w = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1)$$

sujeta a la restricción de que  $x, y$  y  $z$  deben satisfacer

$$x - y + 2z = 6 \quad (2)$$

Es posible transformar  $w$ , que es una función de tres variables, en una función de dos variables tal que la nueva función refleje la restricción (2). Despeje  $x$  de la ecuación (2), se obtiene

$$x = y - 2z + 6 \quad (3)$$

que al sustituirla por  $x$  en la ecuación (1), resulta

$$w = (y - 2z + 6)^2 + y^2 + z^2 \quad (4)$$

Como  $w$  ahora se expresa en función de dos variables, para encontrar los extremos relativos, se sigue el procedimiento usual de igualar a 0 sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2(y - 2z + 6) + 2y = 4y - 4z + 12 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -4(y - 2z + 6) + 2z = -4y + 10z - 24 = 0 \quad (6)$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (5) y (6) se obtiene  $y = -1$  y  $z = 2$ . Al sustituir en la ecuación (3), se obtiene  $x = 1$ . Por lo tanto, el único punto crítico de la ecuación (1) sujeta a la restricción representada por la ecuación (2) es  $(1, -1, 2)$ . Si se usa la prueba de la segunda derivada en (4) cuando  $y = -1$  y  $z = 2$ , se tiene

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 4 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 10 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = -4$$

$$D(-1, 2) = 4(10) - (-4)^2 = 24 > 0$$

Así,  $w$  sujeta a la restricción, tiene un mínimo relativo en  $(1, -1, 2)$ .

Esta solución se encontró con la restricción para expresar una de las variables en la función original en términos de las otras variables. Con frecuencia, esto no es práctico, pero existe otro procedimiento llamado método de los **multiplicadores de Lagrange**,<sup>23</sup> que evita este paso y permite, no obstante, encontrar los puntos críticos.

El método es como sigue. Suponga que se tiene una función  $f(x, y, z)$  sujeta a la restricción  $g(x, y, z) = 0$ . Se construye una función nueva  $F$  de cuatro variables definidas

<sup>23</sup>En honor del matemático francés, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

por la siguiente expresión (donde  $\lambda$  es la letra griega “lambda”):

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$

Puede demostrarse que si  $(a, b, c)$  es un punto crítico de  $f$  sujeto a la restricción  $g(x, y, z) = 0$ , existirá un valor de  $\lambda$ , por ejemplo  $\lambda_0$ , tal que  $(a, b, c, \lambda_0)$  es un punto crítico de  $F$ . El número  $\lambda_0$  se llama **multiplicador de Lagrange**. Además, si  $(a, b, c, \lambda_0)$  es un punto crítico de  $F$ , entonces  $(a, b, c)$  es un punto crítico de  $f$ , sujeto a la restricción. Así, para encontrar los puntos críticos de  $f$ , sujetos a  $g(x, y, z) = 0$ , se buscan los puntos críticos de  $F$ . Éstos se obtienen al resolver las ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} F_x(x, y, z, \lambda) = 0 \\ F_y(x, y, z, \lambda) = 0 \\ F_z(x, y, z, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases}$$

A veces debe usarse el ingenio para hacer esto. Una vez que se obtiene un punto crítico  $(a, b, c, \lambda_0)$  de  $F$ , se puede concluir que  $(a, b, c)$  es un punto crítico de  $f$ , sujeto a la restricción  $g(x, y, z) = 0$ . Aunque  $f$  y  $g$  son funciones de tres variables, el método de los multiplicadores de Lagrange puede extenderse a  $n$  variables.

Ahora se ilustrará el método de los multiplicadores de Lagrange para el caso original, a saber,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{sujeta a } x - y + 2z = 6$$

Primero, se escribe la restricción como  $g(x, y, z) = x - y + 2z - 6 = 0$ . Segundo, se forma la función

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x - y + 2z - 6) \end{aligned}$$

A continuación, cada derivada parcial de  $F$  se iguala a 0. Por conveniencia se escribirá  $F_x(x, y, z, \lambda)$  como  $F_x$  y así sucesivamente:

$$\begin{cases} F_x = 2x - \lambda = 0 \\ F_y = 2y + \lambda = 0 \\ F_z = 2z - 2\lambda = 0 \\ F_\lambda = -x + y - 2z + 6 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$(8)$$

$$(9)$$

$$(10)$$

De las ecuaciones (7) a (9), de inmediato se ve que

$$x = \frac{\lambda}{2} \quad y = -\frac{\lambda}{2} \quad z = \lambda \quad (11)$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (10), se obtiene

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} - 2\lambda + 6 &= 0 \\ -3\lambda + 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = 2$$

Así, de la ecuación (11),

$$x = 1 \quad y = -1 \quad z = 2$$

Por lo tanto, el único punto crítico de  $f$ , sujeto a la restricción, es  $(1, -1, 2)$ , donde puede existir un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de éstos. El método de los multiplicadores de Lagrange no indica directamente cuál de estas posibilidades se presentará, aunque a partir del trabajo previo se sabe que de hecho es un mínimo relativo. En los problemas de aplicación, la naturaleza del problema puede dar una idea de cómo considerar un punto crítico. Con frecuencia, se supone la existencia ya sea de un mínimo relativo o de un máximo relativo y un punto crítico, se trata de acuerdo con ello. En realidad se dispone de condiciones de segundo orden suficientes para los extremos relativos, pero no se considerarán en este libro.

### EJEMPLO 1 Método de los multiplicadores de Lagrange

Encuentre los puntos críticos para  $z = f(x, y) = 3x - y + 6$  sujeta a la restricción  $x^2 + y^2 = 4$ .

**Solución:** Se escribe la restricción como  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$  y se construye la función

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 3x - y + 6 - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

Se establece que  $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ , se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 - 2x\lambda = 0 \\ -1 - 2y\lambda = 0 \\ -x^2 - y^2 = 4 = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

(13)

(14)

A partir de las ecuaciones (12) y (13) es posible expresar  $x$  y  $y$  en términos de  $\lambda$ . Despues se sustituyen los valores de  $x$  y  $y$  en la ecuación (14) y se despeja  $\lambda$ . Al conocer  $\lambda$ , se pueden encontrar  $x$  y  $y$ . Para comenzar, de las ecuaciones (12) y (13), se tiene

$$x = \frac{3}{2\lambda} \quad y = -\frac{1}{2\lambda}$$

Al sustituir en la ecuación (14), se obtiene

$$\begin{aligned} -\frac{9}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} &= 4 = 0 \\ -\frac{10}{4\lambda^2} &= 4 = 0 \\ \lambda &= \pm \frac{\sqrt{10}}{4} \end{aligned}$$

Con estos valores de  $\lambda$ , es posible encontrar  $x$  y  $y$ . Si  $\lambda = \sqrt{10}/4$ , entonces

$$x = \frac{3}{2\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)} = \frac{3\sqrt{10}}{5} \quad y = -\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

De modo similar, si  $\lambda = -\sqrt{10}/4$ ,

$$x = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \quad y = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Así, los puntos críticos de  $f$  sujetos a la restricción son  $(3\sqrt{10}/5, -\sqrt{10}/5)$  y  $(-3\sqrt{10}/5, \sqrt{10}/5)$ . Observe que los valores de  $\lambda$  no aparecen en la respuesta; son sólo un medio para obtener la solución.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1



### EJEMPLO 2 Método de los multiplicadores de Lagrange

Encuentre los puntos críticos para  $f(x, y, z) = xyz$ , donde  $xyz \neq 0$ , sujeta a la restricción  $x + 2y + 3z = 36$ .

**Solución:** Se tiene

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x + 2y + 3z - 36)$$

Tras establecer  $F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0$  resulta, respectivamente,

$$\begin{cases} yz - \lambda = 0 \\ xz - 2\lambda = 0 \\ xy - 3\lambda = 0 \\ -x - 2y - 3z + 36 = 0 \end{cases}$$

Como no es posible expresar directamente a  $x$ ,  $y$  y  $z$  sólo en términos de  $\lambda$ , no se puede seguir el procedimiento usado en el ejemplo 1. Sin embargo, observe que los productos  $yz$ ,  $xz$  y  $xy$  pueden expresarse como múltiplos de  $\lambda$ . Esto sugiere que si se observan en los cocientes de las ecuaciones, es posible obtener una relación entre dos variables que no contengan a  $\lambda$ . (Las  $\lambda$ 's se cancelarán). Para hacer esto, se escribe el sistema anterior como:

$$\left\{ \begin{array}{l} yz = \lambda \\ xz = 2\lambda \\ xy = 3\lambda \\ x + 2y + 3z - 36 = 0 \end{array} \right. \quad (15)$$

$$(16)$$

$$(17)$$

$$(18)$$

Al dividir cada lado de la ecuación (15) entre el lado correspondiente de la ecuación (16), resulta

$$\frac{yz}{xz} = \frac{\lambda}{2\lambda} \quad \text{por lo que} \quad y = \frac{x}{2}$$

Esta división es válida puesto que  $xyz \neq 0$ . De manera similar, de las ecuaciones (15) y (17), se obtiene

$$\frac{yz}{xy} = \frac{\lambda}{3\lambda} \quad \text{por lo que} \quad z = \frac{x}{3}$$

Ahora que se ha expresado a  $y$  y  $z$  sólo en términos de  $x$ , se puede sustituir en la ecuación (18) y despejar  $x$ :

$$\begin{aligned} x + 2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\left(\frac{x}{3}\right) - 36 &= 0 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Así,  $y = 6$  y  $z = 4$ . Por consiguiente  $(12, 6, 4)$  es el único punto crítico que satisface las condiciones dadas. Note que en este caso se encuentra el punto crítico sin tener que calcular el valor de  $\lambda$ .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7 

### EJEMPLO 3 Minimización de costos

Suponga que una empresa ha recibido un pedido por 200 unidades de su producto y desea distribuir su fabricación entre dos de sus plantas, planta 1 y planta 2. Sea  $q_1$  y  $q_2$  las producciones de las plantas 1 y 2, respectivamente, y suponga que la función de costo total está dada por  $c = f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 200$ . ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos?

**Solución:** Se minimiza  $c = f(q_1, q_2)$  dada la restricción  $q_1 + q_2 = 200$ . Se tiene

$$F(q_1, q_2, \lambda) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 200 - \lambda(q_1 + q_2 - 200)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial q_1} = 4q_1 + q_2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial q_2} = q_1 + 2q_2 - \lambda = 0 \end{array} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -q_1 - q_2 + 200 = 0 \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -q_1 - q_2 + 200 = 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

Es posible eliminar  $\lambda$  de las ecuaciones (19) y (20) y obtener una relación entre  $q_1$  y  $q_2$ . Después, al despejar  $q_2$  en términos de  $q_1$  y sustituir en la ecuación (21), se puede encontrar  $q_1$ . Se inicia al restar la ecuación (20) de la (19), lo que resulta en

$$3q_1 - q_2 = 0, \quad \text{por lo que } q_2 = 3q_1$$

Al sustituir en la ecuación (21), se tiene

$$\begin{aligned} -q_1 - 3q_1 + 200 &= 0 \\ -4q_1 &= -200 \\ q_1 &= 50 \end{aligned}$$

Así,  $q_2 = 150$ . En concordancia, la planta 1 debe producir 50 unidades y la planta 2 debe producir 150, para minimizar los costos.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13



Puede hacerse una observación interesante con respecto al ejemplo 3. De la ecuación (19),  $\lambda = 4q_1 + q_2 = \partial c / \partial q_1$ , que es el costo marginal de la planta 1. De la ecuación (20),  $\lambda = q_1 + 2q_2 = \partial c / \partial q_2$  que es el costo marginal de la planta 2. Por consiguiente,  $\partial c / \partial q_1 = \partial c / \partial q_2$ , y se concluye que para minimizar el costo es necesario que los costos marginales de cada planta sean iguales entre sí.

#### EJEMPLO 4 Combinación de entradas para el costo mínimo

Suponga que una empresa debe producir una cantidad dada  $P_0$  de un producto de la manera más barata posible. Si se tienen dos factores de entrada  $l$  y  $k$ , y sus precios por unidad se fijan en  $p_l$  y  $p_k$  respectivamente, analice el significado económico de combinar las entradas para lograr el menor costo. Esto es, describa la combinación de entradas para el costo mínimo.

**Solución:** Sea  $P = f(l, k)$  la función de producción. Entonces, se debe minimizar la función costo

$$c = lp_l + kp_k$$

sujeta a

$$P_0 = f(l, k)$$

Se construye

$$F(l, k, \lambda) = lp_l + kp_k - \lambda[f(l, k) - P_0]$$

Se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial l} = p_l - \lambda \frac{\partial}{\partial l}[f(l, k)] = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial k} = p_k - \lambda \frac{\partial}{\partial k}[f(l, k)] = 0 \end{array} \right. \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -f(l, k) + P_0 = 0 \end{array} \right. \quad (23)$$

De las ecuaciones (22) y (23),

$$\lambda = \frac{p_l}{\frac{\partial}{\partial l}[f(l, k)]} = \frac{p_k}{\frac{\partial}{\partial k}[f(l, k)]} \quad (24)$$

Por consiguiente,

$$\frac{p_l}{p_k} = \frac{\frac{\partial}{\partial l}[f(l, k)]}{\frac{\partial}{\partial k}[f(l, k)]}$$

Se concluye que cuando se usa la combinación de factores para costo mínimo, la razón de las productividades marginales de los factores de entrada debe ser igual a la de sus precios unitarios correspondientes.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15 

### Restricciones múltiples

El método de los multiplicadores de Lagrange no está limitado a problemas que involucran una sola restricción. Por ejemplo, suponga que  $f(x, y, z, w)$  está sujeta a las restricciones  $g_1(x, y, z, w) = 0$  y  $g_2(x, y, z, w) = 0$ . Entonces, se tienen dos lambdas,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  (una para cada restricción) y se construye la función  $F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$ . Entonces se resolverá el sistema

$$F_x = F_y = F_z = F_w = F_{\lambda_1} = F_{\lambda_2} = 0$$

#### EJEMPLO 5 Método de los multiplicadores de Lagrange con dos restricciones

Encuentre los puntos críticos para  $f(x, y, z) = xy + yz$ , sujeta a las restricciones  $x^2 + y^2 = 8$  y  $yz = 8$ .

**Solución:** Sea

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + yz - \lambda_1(x^2 + y^2 - 8) - \lambda_2(yz - 8)$$

Entonces

$$\begin{cases} F_x = y - 2x\lambda_1 = 0 \\ F_y = x + z - 2y\lambda_1 - z\lambda_2 = 0 \\ F_z = y - y\lambda_2 = 0 \\ F_{\lambda_1} = -x^2 - y^2 + 8 = 0 \\ F_{\lambda_2} = -yz + 8 = 0 \end{cases}$$

Probablemente, usted estaría de acuerdo con que este sistema parece ser difícil de resolver. Sin embargo, con un poco de ingenio puede lograrse. A continuación puede mostrarse una secuencia de operaciones que permitirá encontrar los puntos críticos. Es posible escribir el sistema como

$$\begin{cases} \frac{y}{2x} = \lambda_1 & (25) \\ x + z - 2y\lambda_1 - z\lambda_2 = 0 & (26) \\ \lambda_2 = 1 & (27) \\ x^2 + y^2 = 8 & (28) \\ z = \frac{8}{y} & (29) \end{cases}$$

Al sustituir  $\lambda_2 = 1$  de la ecuación (27) en la ecuación (26) y simplificar, se obtiene la ecuación  $x - 2y\lambda_1 = 0$ , por lo que

$$\lambda_1 = \frac{x}{2y}$$

De nuevo se sustituye en la ecuación (25) y resulta

$$\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y} \quad (30)$$

Al sustituir en la ecuación (28) se obtiene  $x^2 + y^2 = 8$ , de donde  $x = \pm 2$ . Si  $x = 2$ , entonces, de la ecuación (30) tiene  $y = \pm 2$ . De manera similar, si  $x = -2$ , entonces  $y = \pm 2$ . Así, si  $x = 2$  y  $y = 2$ , entonces de la ecuación (29) se obtiene  $z = 4$ . Si se procede de la misma manera, se obtienen cuatro puntos críticos:

$$(2, 2, 4), (2, -2, -4), (-2, 2, 4) \text{ y } (-2, -2, -4)$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9 

## Problemas 17.8

En los problemas 1 a 12, encuentre por el método de los multiplicadores de Lagrange, los puntos críticos de las funciones sujetas a las restricciones indicadas.

- \*1.  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 6; \quad 2x - 8y = 20$
- 2.  $f(x, y) = -2x^2 + 5y^2 + 7; \quad 3x - 2y = 7$
- 3.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad 2x + y - z = 9$
- 4.  $f(x, y, z) = x + y + z; \quad xyz = 8$
- 5.  $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + z; \quad x + 2y + 4z = 3$
- 6.  $f(x, y, z) = xyz^2; \quad x - y + z = 20 (xyz^2 \neq 0)$
- \*7.  $f(x, y, z) = xyz; \quad x + 2y + 3z = 18 (xyz \neq 0)$
- 8.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x + y + z = 3$
- \*9.  $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2; \quad 2x - y = 0, \quad y + z = 0$
- 10.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x + y + z = 4, \quad x - y + z = 4$
- 11.  $f(x, y, z) = xy^2z; \quad x + y + z = 1, \quad x - y + z = 0 (xyz \neq 0)$
- 12.  $f(x, y, z, w) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 5w^2; \quad x + 6y + 3z + 2w = 4$

- \*13. **Asignación de producción** Para surtir una orden de 100 unidades de su producto, una empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas, planta 1 y planta 2. La función de costo total está dada por

$$c = f(q_1, q_2) = 0.1q_1^2 + 7q_1 + 15q_2 + 1000$$

donde  $q_1$  y  $q_2$  son los números de unidades producidas en las plantas 1 y 2, respectivamente. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos? (Puede suponerse que el punto crítico obtenido corresponde al costo mínimo.)

14. **Asignación de producción** Repita el problema 13, si la función de costo es

$$c = 3q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2$$

y deben producirse un total de 200 unidades.

- \*15. **Maximización de la producción** La función de producción de una compañía es

$$f(l, k) = 12l + 20k - l^2 - 2k^2$$

El costo de  $l$  y  $k$  para la compañía es de 4 y 8 por unidad, respectivamente. Si la compañía quiere que el costo total de entrada sea 88, encuentre la producción máxima posible sujeta a esta restricción de presupuesto. (Puede suponerse que el punto crítico obtenido corresponde a una producción máxima).

16. **Maximización de la producción** Repita el problema 15, dado que

$$f(l, k) = 20l + 25k - l^2 - 3k^2$$

y que la restricción de presupuesto es  $2l + 4k = 50$ .

17. **Presupuesto para publicidad** Una compañía de computadoras tiene un presupuesto mensual para publicidad de \$60 000. Su departamento de mercadotecnia estima que si se gastan  $x$  dólares cada mes en publicidad en periódicos, y  $y$  dólares cada mes en publicidad por televisión, entonces las ventas mensuales estarán dadas por  $S = 90x^{1/4}y^{3/4}$  dólares. Si la utilidad es el 10% de las ventas, menos el costo de la publicidad, determine cómo asignar el presupuesto publicitario para maximizar la utilidad mensual (Puede suponerse que el punto crítico obtenido corresponde a una utilidad máxima).

18. **Maximización de la producción** Cuando se invierten  $l$  unidades de mano de obra y  $k$  unidades de capital, la producción total  $q$  de un fabricante está dada por la función Cobb-Douglas

de producción  $q = 6l^{2/5}k^{3/5}$ . Cada unidad de mano de obra cuesta \$25 y cada unidad de capital \$69. Si se van a gastar exactamente \$23 875 en la producción, determine las unidades de mano de obra y de capital que deben invertirse para maximizar la producción (suponga que el máximo se presenta en el punto crítico obtenido.)

19. **Publicidad política** La publicidad de los partidos políticos en los periódicos siempre tiene algunos efectos negativos. El partido que fue electo recientemente, supuso que los tres temas más importantes,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , para la elección, debían mencionarse cada uno en un anuncio publicitario con espacios de  $x$ ,  $y$  y  $z$  unidades, respectivamente. El efecto adverso combinado de esta publicidad fue estimado por el equipo de campaña como

$$B(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$$

Las consideraciones estéticas determinaron que el espacio total para  $X$  y  $y$  juntos debía ser 20, y las consideraciones de realismo sugirieron que el espacio total asignado a  $Y$  y  $Z$  juntos debía ser también de 20 unidades. ¿Qué valores de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , en cada anuncio produciría el menor efecto negativo? (Suponga que cualquier punto crítico obtenido representa un efecto mínimo.)

20. **Maximización de la utilidad** Suponga que la función de producción de un fabricante está dada por

$$16q = 65 - 4(l - 4)^2 - 2(k - 5)^2$$

y que el costo para el fabricante es de \$8 por unidad de trabajo y de \$16 por unidad de capital, de manera que el costo total (en dólares) es  $8l + 16k$ . El precio de venta del producto es de \$64 por unidad.

- (a) Exprese la utilidad en función del  $l$  y  $k$ . Dé su respuesta en forma desarrollada.

- (b) Encuentre todos los puntos críticos de la función de utilidad obtenida en el inciso (a). Aplique la prueba de la segunda derivada en cada punto crítico. Si la utilidad es un máximo relativo en un punto crítico, calcule la utilidad máxima relativa correspondiente.

- (c) La utilidad puede considerarse como una función de  $l$ ,  $k$  y  $q$  (esto es,  $P = 64q - 8l - 16k$ ) sujeta a la restricción

$$16q = 65 - 4(l - 4)^2 - 2(k - 5)^2$$

Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar todos los puntos críticos de  $P = 64q - 8l - 16k$ , sujeta a la restricción.

En los problemas 21 a 24, refiérase a la definición siguiente. Una función de satisfacción es una función que asocia una medida a la satisfacción que un cliente obtiene del consumo de productos por unidad de tiempo. Suponga que  $U = f(x, y)$  es una función de este tipo, donde  $x$  y  $y$  son las cantidades de los dos productos,  $X$  y  $Y$ . La utilidad marginal de  $X$  es  $\partial U/\partial x$  y representa, en forma aproximada, el cambio en la utilidad total que resulta al cambiar en una unidad el consumo del producto  $X$  por unidad de tiempo. Se define la utilidad marginal de  $Y$  de manera similar. Si los precios de  $X$  y  $Y$  son  $p_x$  y  $p_y$ , respectivamente, y el consumidor tiene un ingreso o presupuesto de  $I$  para gastar, entonces la restricción por el presupuesto es

$$xp_x + yp_y = I$$

En los problemas 21 a 23, encuentre las cantidades de cada producto que el consumidor deberá comprar, sujeto al presupuesto, que le dará una satisfacción máxima. Esto es, en los problemas 21 y 22, encuentre valores de  $x$  y  $y$  que maximicen  $U = f(x, y)$ , sujeta a la restricción

$xp_x + yp_y = I$ . En el problema 23 lleve a cabo un procedimiento similar. Suponga que tal máximo existe.

21.  $U = x^3y^3$ ;  $p_x = 2$ ,  $p_y = 3$ ,  $I = 48$  ( $x^3y^3 \neq 0$ )
22.  $U = 40x - 5x^2 + 4y - 2y^2$ ;  $p_x = 2$ ,  $p_y = 3$ ,  $I = 10$
23.  $U = f(x, y, z) = xyz$ ;  $p_x = p_y = p_z = 1$ ,  $I = 100$  ( $xyz \neq 0$ )
24. Sea  $U = f(x, y)$  una función de satisfacción sujeta a la restricción presupuestaria  $xp_x + yp_y = I$ , donde  $p_x$ ,  $p_y$  e  $I$  son constantes. Demuestre que para maximizar la satisfacción es necesario que

### OBJETIVO

Desarrollar el método de mínimos cuadrados e introducir los números índices.

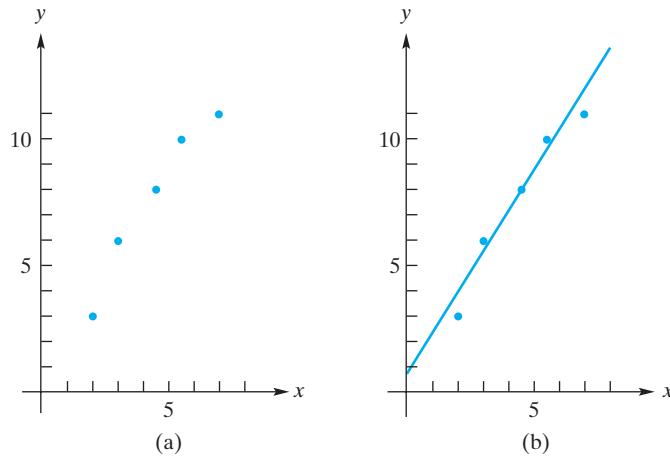
**TABLA 17.4**

Gastos, $x$	2	3	4.5	5.5	7
Ingresos, $y$	3	6	8	10	11

## 17.9 Rectas de regresión<sup>24</sup>

Para estudiar la influencia de la publicidad en las ventas, una empresa recopiló los datos que se muestran en la tabla 17.4. La variable  $x$  denota los gastos de publicidad en cientos de dólares y la variable  $y$  denota el ingreso por ventas en miles de dólares. Si se gráfica en un plano cada pareja  $(x, y)$  de datos, el resultado se llama **diagrama de dispersión** [vea la figura 17.16(a)].

A partir de la observación de la distribución de los puntos, es razonable suponer que existe una relación aproximadamente lineal entre  $x$  y  $y$ . Con base en esto, es posible ajustar “a simple vista” una recta que aproxime los datos dados [figura 17.16(b)] y con ella predecir un valor de  $y$  para un valor dado de  $x$ . Esta recta parece ser consistente con la tendencia de los datos, aunque igualmente podrían dibujarse otras rectas. Por desgracia, la determinación de una recta “a simple vista” no es un procedimiento muy objetivo. Se desea utilizar criterios que especifiquen lo que se llamará la recta de “mejor ajuste”. Una técnica usada con frecuencia es el **método de mínimos cuadrados**.



**FIGURA 17.16** Diagrama de dispersión y la línea recta que aproxima los puntos de datos.

Para aplicar el método de los mínimos cuadrados a los datos de la tabla 17.4, primero se suponen que  $x$  y  $y$  están relacionados en una forma casi lineal y puede ajustarse a una línea recta

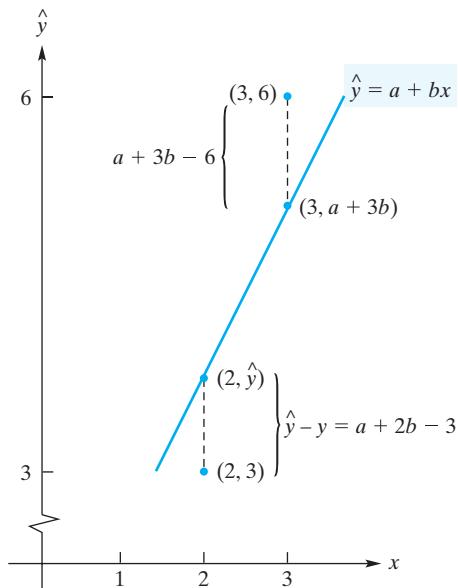
$$\hat{y} = a + bx \quad (1)$$

que aproxima los puntos dados si se escogen adecuadamente las constantes  $a$  y  $b$ . Para un valor dado de  $x$  en la ecuación (1),  $\hat{y}$  es el valor correspondiente predicho para  $y$ , y  $(x, \hat{y})$  estará sobre la línea. El objetivo es que  $\hat{y}$  esté cerca de  $y$ .

Cuando  $x = 2$ , el valor observado de  $y$  es 3. El valor predicho para  $y$  se obtiene al sustituir  $x = 2$  en la ecuación (1), lo que resulta en  $\hat{y} = a + 2b$ . El error de estimación, o desviación vertical del punto,  $(2, 3)$  respecto a la recta, es  $\hat{y} - y$ , o bien

$$a + 2b - 3$$

<sup>24</sup>Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.



**FIGURA 17.17** Desviación vertical de los puntos de datos de la recta de aproximación.

Esta desviación vertical se indica (aunque exagerada para mayor claridad) en la figura 17.17. De manera similar, la desviación vertical de  $(3, 6)$  con respecto a la línea es  $a + 3b - 6$ , como también se ilustra. Para evitar posibles dificultades asociadas con las desviaciones positivas y negativas, se considerarán los cuadrados de las desviaciones y se formará la suma  $S$  de todos esos cuadrados para los datos dados:

$$\begin{aligned} S = & (a + 2b - 3)^2 + (a + 3b - 6)^2 + (a + 4.5b - 8)^2 \\ & + (a + 5.5b - 10)^2 + (a + 7b - 11)^2 \end{aligned}$$

El método de mínimos cuadrados requiere que se escoga como línea de “mejor ajuste” la obtenida al seleccionar  $a$  y  $b$  de manera que minimice  $S$ . Es posible minimizar  $S$  con respecto a  $a$  y  $b$  si se resuelve el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} = & 2(a + 2b - 3) + 2(a + 3b - 6) + 2(a + 4.5b - 8) \\ & + 2(a + 5.5b - 10) + 2(a + 7b - 11) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = & 4(a + 2b - 3) + 6(a + 3b - 6) + 9(a + 4.5b - 8) \\ & + 11(a + 5.5b - 10) + 14(a + 7b - 11) = 0 \end{aligned}$$

que, cuando se simplifica, resulta

$$\begin{cases} 10a + 44b = 76 \\ 44a + 225b = 384 \end{cases}$$

Al despejar  $a$  y  $b$  se obtiene

$$a = \frac{102}{157} \approx 0.65 \quad b = \frac{248}{157} \approx 1.58$$

A partir de los cálculos realizados para  $\partial S / \partial a$  y  $\partial S / \partial b$ , se observa que  $S_{aa} = 10 > 0$ ,  $S_{bb} = 225$ , y  $S_{ab} = 44$ . Así,  $D = S_{aa}S_{bb} - (S_{ab})^2 = 10 \cdot 225 - 44^2 = 314 > 0$ . Se deduce a partir de la prueba de la segunda derivada de la sección 17.7 que  $S$  tiene un valor mínimo en el punto crítico. Por lo tanto, desde el punto de vista de mínimos cuadrados, la línea de

mejor ajuste  $\hat{y} = a + bx$  es

$$\hat{y} = 0.65 + 1.58x \quad (2)$$

Ésta es, de hecho, la recta que se muestra en la figura 17.16(b). Se llama **recta de mínimos cuadrados de  $y$  sobre  $x$**  o **recta de regresión lineal de  $y$  sobre  $x$** . Las constantes  $a$  y  $b$  se llaman **coeficientes de regresión lineal**. Con la ecuación (2) es posible predecir que cuando  $x = 5$ , el valor correspondiente de  $y$  es  $\hat{y} = 0.65 + 1.58(5) = 8.55$ .

De manera más general, suponga que se dan los siguientes  $n$  pares de observaciones:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

Si se supone que  $x$  y  $y$  están aproximadamente relacionadas en forma lineal y que es posible ajustarías a una recta

$$\hat{y} = a + bx$$

que se aproxime a los datos, la suma de los cuadrados de los errores  $\hat{y} - y$  es

$$S = (a + bx_1 - y_1)^2 + (a + bx_2 - y_2)^2 + \dots + (a + bx_n - y_n)^2$$

Como  $S$  debe minimizarse con respecto a  $a$  y  $b$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2(a + bx_1 - y_1) + 2(a + bx_2 - y_2) + \dots + 2(a + bx_n - y_n) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2x_1(a + bx_1 - y_1) + 2x_2(a + bx_2 - y_2) + \dots + 2x_n(a + bx_n - y_n) = 0 \end{cases}$$

Al dividir ambas ecuaciones entre 2 y mediante la notación sigma, se tiene

$$\begin{cases} na + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) b - \sum_{i=1}^n y_i = 0 \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) a + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) b - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \end{cases}$$

el cual es un sistema de dos ecuaciones lineales en  $a$  y  $b$ , que se llaman *ecuaciones normales*:

$$\begin{cases} na + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n y_i \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) a + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

Por supuesto, los coeficientes no son más que simples sumas de valores obtenidos a partir de los datos observados. La solución se obtiene con facilidad con las técnicas de la sección 3.4.

$$a = \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (3)$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (4)$$

Ahora se tiene  $S_{aa} = 2n > 0$  y  $D = S_{aa}S_{bb} - (S_{ab})^2 = (2n)(2 \sum x_i^2) - (2 \sum x_i)^2$ , independientes de  $(a, b)$ . Puede demostrarse que para  $x_i$  distintas y  $n \geq 2$ ,  $D > 0$  de manera que  $a$  y  $b$ , dadas por las ecuaciones (3) y (4), realmente minimizan  $S$ . [Por ejemplo, cuando  $n = 2$ ,  $D > 0$  es equivalente a  $(x_1 - x_2)^2 > 0$ , lo cual es cierto para  $x_1$  y  $x_2$  distintas.]

Si se calculan los coeficientes de regresión lineal  $a$  y  $b$  mediante las fórmulas de las ecuaciones (3) y (4), se obtiene la recta de regresión lineal de  $y$  sobre  $x$ , a saber,  $\hat{y} = a + bx$ , que puede usarse para estimar  $y$  para un valor dado de  $x$ .

En el siguiente ejemplo, así como en los ejercicios, usted encontrará **números índice**. Éstos se usan para relacionar una variable en un periodo con la misma variable en otro periodo, llamado *periodo base*. Un número índice es un número *relativo* para describir datos que cambian con el tiempo. Tales datos se denominan *série de tiempo*.

Por ejemplo, considere los datos de la serie de tiempo de la producción total de dispositivos mecánicos en Estados Unidos de 2002 a 2006, que se muestran en la tabla 17.5. Si se escoge 2003 como el año base y se le asigna el número índice 100, entonces los otros números se obtienen al dividir cada producción anual entre la producción de 2003, que fue 900, y multiplicar el resultado por 100. Por ejemplo, puede interpretarse el índice 106 para 2006 como el significado de que la producción en ese año fue del 106% en relación con la de 2003.

**TABLA 17.5**

Año	Producción (en miles)	Índice (con base en 2003)
2002	828	92
2003	900	100
2004	936	104
2005	891	99
2006	954	106

En los análisis de series de tiempo, los números índice son obviamente de gran utilidad cuando los datos implican números muy grandes. Pero sin importar la magnitud de los datos, los números índices simplifican la tarea de comparar cambios en los datos a lo largo de períodos de tiempo.

### EJEMPLO 1 Determinación de una recta de regresión

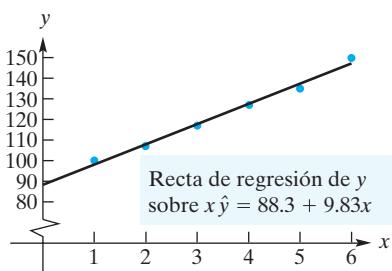
Por medio de la recta de regresión lineal, use los datos de la tabla siguiente para representar la tendencia del índice de compras de bienes y servicios del gobierno de Estados Unidos desde 1995 hasta 2000 (1995 = 100).

Año	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Índice	100	107	117	127	135	150

Fuente: Reporte Económico del Presidente, 2001, Oficina de Prensa del Gobierno de Estados Unidos, Washington, DC, 2001.

**Solución:** Se denotará con  $x$  el tiempo y con  $y$  el índice, y se tratará a  $y$  como una función lineal de  $x$ . Además se designará 1995 con  $x = 1$ , 1996 con  $x = 2$ , y así sucesivamente. Hay  $n = 6$  pares de mediciones. Para determinar los coeficientes de regresión lineal mediante las ecuaciones (3) y (4), se realizan primero las siguientes operaciones aritméticas:

Año	$x_i$	$y_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$
1995	1	100	100	1
1996	2	107	214	4
1997	3	117	351	9
1998	4	127	508	16
1999	5	135	675	25
2000	6	150	900	36
Total	21	736	2748	91
	$= \sum_{i=1}^6 x_i$	$= \sum_{i=1}^6 y_i$	$= \sum_{i=1}^6 x_i y_i$	$= \sum_{i=1}^6 x_i^2$



**FIGURA 17.18** Recta de regresión lineal para el ingreso del gobierno.

Por consiguiente, por la ecuación (3),

$$a = \frac{91(736) - 21(2748)}{6(91) - (21)^2} \approx 88.3$$

y por la ecuación (4),

$$b = \frac{6(2748) - 21(736)}{6(91) - (21)^2} \approx 9.83$$

Así, la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$  es

$$\hat{y} = 88.3 + 9.83x$$

cuya gráfica, así como un diagrama de dispersión, se muestran en la figura 17.18.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

## TECNOLOGÍA

La calculadora TI-83 tiene una función que calcula la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para un conjunto de datos. Se ilustrará mediante el procedimiento para los seis puntos dados  $(x_i, y_i)$  del ejemplo 1. Después de oprimir STAT y ENTER, se introducen todos los valores  $x$  y  $y$  (vea la figura 17.19). A continuación se oprime STAT y se

hace el movimiento hacia CALC. Por último, se presiona 8 y ENTER, con lo cual se obtienen los resultados que se muestran en la figura 17.20. (El número  $r \approx 0.99448$  se llama *coeficiente de correlación* y es una medida del grado en que están relacionados linealmente los datos dados.)

L1	L2	L3	1
1	100	-----	
2	107		
3	117		
4	127		
5	135		
6	150		
L1(7)=			

**FIGURA 17.19** Datos del ejemplo 1

```
LinReg
y=a+bx
a=88.266666667
b=9.828571429
r^2=.9889904168
r=.9944799973
```

**FIGURA 17.20** Ecuación de la recta de mínimos cuadrados

## Problemas 17.9

En esta serie de ejercicios, utilice una calculadora graficadora si se lo permite su profesor.

En los problemas 1 a 4, encuentre una ecuación de la recta de regresión lineal por mínimos cuadrados de  $y$  sobre  $x$  para los datos dados, y bosqueje la recta y los datos. Prediga el valor de  $y$  correspondiente a  $x = 3.5$ .

\*1.  $x | 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6$   
y | 1.5 2.3 2.6 3.7 4.0 4.5

2.  $x | 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7$   
y | 1 1.8 2 4 4.5 7 9

3.  $x | 2 \ 3 \ 4.5 \ 5.5 \ 7$   
y | 3 5 8 10 11

4.  $x | 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7$   
y | 2.4 2.9 3.3 3.8 4.3 4.9

5. **Demanda** Una compañía encuentra que cuando el precio de su producto es  $p$  dólares por unidad, el número de unidades vendidas es  $q$ , como se indica en la tabla siguiente:

Precio, $p$	10	20	40	50	60	70
Demanda, $q$	75	65	56	50	42	34

Encuentre una ecuación de la recta de regresión de  $q$  sobre  $p$ .

6. **Agua y rendimiento de una cosecha** En una granja, un ingeniero agrónomo determina que la cantidad de agua aplicada (en pulgadas) y el rendimiento correspondiente de cierta cosecha (en toneladas por acre) son como se indica en la tabla siguiente:

Agua, $x$	8	16	24	32
Rendimiento, $y$	5.2	5.7	6.3	6.7

Encuentre una ecuación de la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$ . Prediga  $y$  cuando  $x = 20$ .

7. **Virus** Un conejo fue inoculado con un virus y  $x$  horas después de que fue aplicada la inyección, se midió su temperatura  $y$  (en grados Farenheit).<sup>25</sup> Los datos están en la tabla siguiente:

Tiempo transcurrido, $x$	24	32	48	56
Temperatura, $y$	102.8	104.5	106.5	107.0

Encuentre una ecuación de la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$ , y estime la temperatura del conejo 40 horas después de la inyección.

<sup>25</sup>R. R. Sokal y F. J. Rohlf, *Introduction to Biostatistics* (San Francisco: W. H. Freeman & Company, Publishers, 1973).

- 8. Psicología** En un experimento psicológico, cuatro personas se sometieron a un estímulo. Antes y después del estímulo, se midió su presión sanguínea sistólica (en milímetros de mercurio). Los datos se proporcionan en la tabla siguiente:

Presión sanguínea				
Antes del estímulo, $x$	131	132	135	141
Después del estímulo, $y$	139	139	142	149

Encuentre una ecuación de la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$ , donde  $x$  y  $y$  se definen en la tabla.

Para las series de tiempo de los problemas 9 y 10 ajuste una recta de regresión lineal por medio de mínimos cuadrados; esto es, encuentre una ecuación de la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$ . En cada caso, haga corresponder el primer año de la tabla con  $x = 1$ .

- 9.** Producción del producto A, 2002–2006 (en miles de unidades)

Año	Producción
2002	10
2003	15
2004	16
2005	18
2006	21

- 10. Producción industrial** En la tabla siguiente, considere que  $x = 1$  corresponde al año 1975,  $x = 3$  a 1977 y así sucesivamente:

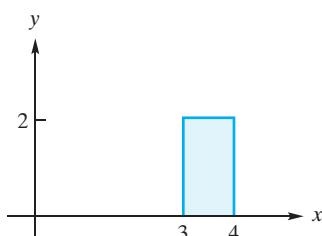
Índice de producción industrial – maquinaria eléctrica (basado en 1997)

Año	Índice
1975	77
1977	100
1979	126
1981	134

Fuente: Reporte Económico del Presidente, 1988, Oficina de Prensa del Gobierno de los Estados Unidos, Washington, DC, 1988.

## OBJETIVO

Calcular integrales dobles y triples.



**FIGURA 17.21** Región sobre la cual se evalúa  $\int_0^2 \int_3^4 xy \, dx \, dy$ .

## 11. Embarque de computadoras

- (a) Encuentre una ecuación de la recta de mínimos cuadrados de  $y$  sobre  $x$  para los siguientes datos (considere el año 2002 como  $x = 1$ , y así sucesivamente):

Envíos al extranjero de computadoras de la compañía de computadoras ACME (en miles)

Año	Cantidad
2002	35
2003	31
2004	26
2005	24
2006	26

- (b) Para los datos en el inciso (a), considere 2002 como el año  $x = -2$ , 2003 como el año  $x = -1$ , 2004 como el año  $x = 0$  y así sucesivamente. Entonces  $\sum_{i=1}^5 x_i = 0$ . Ajuste una recta de mínimos cuadrados y observe cómo se simplifica el cálculo.

- 12. Atención médica** Para la siguiente serie de tiempo, encuentre una ecuación de la recta de regresión que ajuste mejor los datos (considere a 1983 como el año  $x = -2$ , 1984 como el año  $x = -1$  y así sucesivamente):

Índice de Precios al Consumidor atención médica, 1983–1987 (basado en 1967)

Año	Índice
1983	357
1984	380
1985	403
1986	434
1987	462

Fuente: Reporte Económico del Presidente, 1988, Oficina de Prensa del Gobierno de los Estados Unidos, Washington, DC, 1988.

## 17.10 Integrales múltiples

Recuerde que la integral definida de una función de una variable tiene que ver con integración sobre un *intervalo*. Existen también integrales definidas de funciones de dos variables, llamadas **integrales dobles** (definidas). Éstas involucran la integración sobre una *región* en el plano.

Por ejemplo, el símbolo

$$\int_0^2 \int_3^4 xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left( \int_3^4 xy \, dx \right) dy$$

es la integral doble de  $f(x, y) = xy$  sobre una región determinada por los límites de integración. La región consiste en todos los puntos  $(x, y)$  en el plano  $xy$  tales que  $3 \leq x \leq 4$  y  $0 \leq y \leq 2$ . (Vea la figura 17.21.)

Una integral doble es el límite de una suma de la forma  $\sum f(x, y) \Delta x \Delta y$ , donde en este caso los puntos  $(x, y)$  están en la región sombreada. Posteriormente se dará una interpretación geométrica de una integral doble.

Para evaluar

$$\int_0^2 \int_3^4 xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left( \int_3^4 xy \, dx \right) dy$$

se usan integraciones sucesivas a partir de la integral interna. Primero se evalúa

$$\int_3^4 xy \, dx$$

se trata a  $y$  como constante y se integra con respecto a  $x$  entre los límites 3 y 4:

$$\int_3^4 xy \, dx = \frac{x^2 y}{2} \Big|_3^4$$

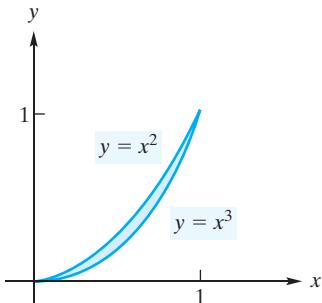
Al sustituir los límites para la variable  $x$ , se tiene

$$\frac{4^2 \cdot y}{2} - \frac{3^2 \cdot y}{2} = \frac{16y}{2} - \frac{9y}{2} = \frac{7y}{2}$$

Ahora se integra este resultado con respecto a  $y$  entre los límites 0 y 2:

$$\int_0^2 \frac{7}{2} y \, dy = \frac{7y^2}{4} \Big|_0^2 = \frac{7 \cdot 2^2}{4} - 0 = 7$$

Así,



**FIGURA 17.22** Región sobre la cual se evalúa  $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy) \, dy \, dx$ .

Ahora se considera la integral doble

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy) \, dy \, dx = \int_0^1 \left( \int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy) \, dy \right) dx$$

Aquí se integra primero con respecto a  $y$  y luego con respecto a  $x$ . La región sobre la que tiene lugar la integración está constituida por todos los puntos  $(x, y)$  para los cuales  $x^3 \leq y \leq x^2$  y  $0 \leq x \leq 1$ . (Vea la figura 17.22). Esta integral doble se evalúa y se trata primero a  $x$  como constante y se integra  $x^3 - xy$  con respecto a  $y$  entre  $x^3$  y  $x^2$ , y luego se integra el resultado con respecto a  $x$  entre 0 y 1:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left( x^3 y - \frac{xy^2}{2} \right) \Big|_{x^3}^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left[ \left( x^3(x^2) - \frac{x(x^2)^2}{2} \right) - \left( x^3(x^3) - \frac{x(x^3)^2}{2} \right) \right] dx \\ &= \int_0^1 \left( x^5 - \frac{x^5}{2} - x^6 + \frac{x^7}{2} \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{x^5}{2} - x^6 + \frac{x^7}{2} \right) dx \\ &= \left( \frac{x^6}{12} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{16} \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{7} + \frac{1}{16} \right) - 0 = \frac{1}{336} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 1 Evaluación de una integral doble**

$$\text{Encuentre } \int_{-1}^1 \int_0^{1-x} (2x+1) dy dx.$$

**Solución:** Aquí se integra primero con respecto a  $y$ , y luego se integra el resultado con respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \int_0^{1-x} (2x+1) dy dx &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^{1-x} (2x+1) dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 (2xy + y) \Big|_0^{1-x} dx = \int_{-1}^1 ((2x(1-x)) + (1-x)) dx \\ &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + x + 1) dx = \left( -\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \left( -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) - \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

**EJEMPLO 2 Evaluación de una integral doble**

$$\text{Encuentre } \int_1^{\ln 2} \int_{e^y}^2 dx dy.$$

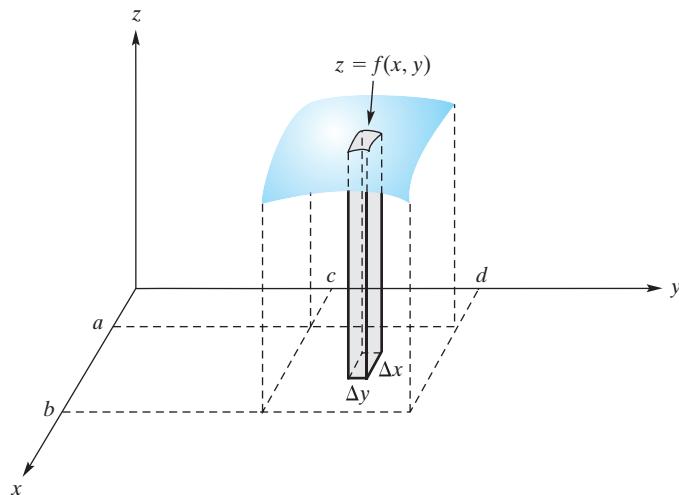
**Solución:** Aquí se integra primero con respecto a  $x$ , y luego se integra el resultado con respecto a  $y$ :

$$\begin{aligned}\int_1^{\ln 2} \int_{e^y}^2 dx dy &= \int_1^{\ln 2} \left( \int_{e^y}^2 dx \right) dy = \int_1^{\ln 2} x \Big|_{e^y}^2 dy \\ &= \int_1^{\ln 2} (2 - e^y) dy = (2y - e^y) \Big|_1^{\ln 2} \\ &= (2 \ln 2 - 2) - (2 - e) = 2 \ln 2 - 4 + e \\ &= \ln 4 - 4 + e\end{aligned}$$

AHORA RESUELA EL PROBLEMA 13



Una integral doble puede interpretarse en términos del volumen de una región entre el plano  $xy$  y una superficie  $z = f(x, y)$ , si  $z \leq 0$ . En la figura 17.23 se muestra una región cuyo volumen será considerado. El elemento de volumen para esta región es una columna vertical con una altura aproximada de  $z = f(x, y)$ , y el área de su base es  $\Delta y \Delta x$ .



**FIGURA 17.23** Interpretación de  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$  en términos del volumen, donde  $f(x, y) \geq 0$ .

Así, su volumen es aproximadamente  $f(x, y)\Delta y \Delta x$ . El volumen de la región entera puede encontrarse al sumar los volúmenes de todos los elementos de este tipo para  $a \leq x \leq b$  y  $c \leq y \leq d$  por medio de una integral doble:

$$\text{volumen} = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Las **integrales triples** se resuelven al evaluar, de manera sucesiva, tres integrales, como se muestra en el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 3 Evaluación de una integral triple

Encuentre  $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x dz dy dx$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x dz dy dx &= \int_0^1 \int_0^x \left( \int_0^{x-y} x dz \right) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x (xz) \Big|_0^{x-y} dy dx = \int_0^1 \int_0^x (x(x-y) - 0) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x (x^2 - xy) dy dx = \int_0^1 \left( \int_0^x (x^2 - xy) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( x^2 y - \frac{xy^2}{2} \right) \Big|_0^x dx = \int_0^1 \left[ \left( x^3 - \frac{x^3}{2} \right) - 0 \right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{x^4}{8} \Big|_0^1 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21 

## Problemas 17.10

En los problemas 1 a 22, evalúe las integrales múltiples.

1.  $\int_0^3 \int_0^4 x dy dx$

2.  $\int_1^4 \int_0^3 y dy dx$

3.  $\int_0^1 \int_0^1 xy dx dy$

4.  $\int_0^2 \int_0^3 x^2 dy dx$

5.  $\int_1^3 \int_1^2 (x^2 - y) dx dy$

6.  $\int_{-2}^3 \int_0^2 (y^2 - 2xy) dy dx$

7.  $\int_0^1 \int_0^2 (x + y) dy dx$

8.  $\int_0^3 \int_0^x (x^2 + y^2) dy dx$

\*9.  $\int_1^4 \int_0^{5x} y dy dx$

10.  $\int_1^2 \int_0^{x-1} 2y dy dx$

11.  $\int_0^1 \int_{3x}^{x^2} 14x^2 y dy dx$

12.  $\int_0^2 \int_0^{x^2} xy dy dx$

\*13.  $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} y dy dx$

14.  $\int_0^1 \int_{y^2}^y y dx dy$

15.  $\int_{-1}^1 \int_x^{1-x} 3(x+y) dy dx$

16.  $\int_0^3 \int_{y^2}^{3y} 5x dx dy$

17.  $\int_0^1 \int_0^y e^{x+y} dx dy$

18.  $\int_0^1 \int_0^1 e^{y-x} dx dy$

19.  $\int_{-1}^0 \int_{-1}^2 \int_1^2 6xy^2 z^3 dx dy dz$

20.  $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} x^2 dz dy dx$

\*21.  $\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^{xy} dz dy dx$

22.  $\int_1^e \int_{\ln x}^x \int_0^y dz dy dx$

23. **Estadística** En el estudio de la estadística, una función de densidad conjunta  $z = f(x, y)$  definida sobre una región del plano  $x, y$ , se representa mediante una superficie en el espacio. La probabilidad de que

$$a \leq x \leq b \quad y \quad c \leq y \leq d$$

está dada por

$$P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

y se representa mediante el volumen entre la gráfica de  $f$  y la región rectangular dada por

$$a \leq x \leq b \quad y \quad c \leq y \leq d$$

Si  $f(x, y) = e^{-(x+y)}$  es una función de densidad conjunta, donde  $x \leq 0$  y  $y \leq 0$ , encuentre

$$P(0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2)$$

y dé su respuesta en términos de  $e$ .

- 24. Estadística** En el problema 23, sea  $f(x, y) = 12e^{-4x-3y}$  para  $x, y \leq 0$ . Encuentre

$$P(3 \leq x \leq 4, 2 \leq y \leq 6)$$

y dé su respuesta en términos de  $e$ .

- 25. Estadística** En el problema 23, sea  $f(x, y) = 1$ , donde  $0 \leq x \leq 1$  y  $0 \leq y \leq 1$ . Encuentre  $P(x \geq 1/2, y \geq 1/3)$ .

- 26. Estadística** En el problema 23, sea  $f$  la función de densidad uniforme  $f(x, y) = 1/8$ , definida en el rectángulo,  $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$ . Determine la probabilidad de que  $0 \leq x \leq 1$  y  $0 \leq y \leq 1$ .

## 17.11 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

<b>Sección 17.1</b>	<b>Funciones de varias variables</b> $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ función de $n$ variables coordenadas tridimensionales plano $xy$ plano $xz$ plano $yz$ octante trazas	Ejemplo 1, p. 746 Ejemplo 3, p. 749 Ejemplo 5, p. 749
<b>Sección 17.2</b>	<b>Derivadas parciales</b> derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y)$ $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right _{(a,b)} = f_x(a, b)$	Ejemplo 2, p. 752
<b>Sección 17.3</b>	<b>Aplicaciones de las derivadas parciales</b> función de costos conjuntos función de producción productividad marginal productos competitivos productos complementarios	Ejemplo 3, p. 757 Ejemplo 4, p. 758
<b>Sección 17.4</b>	<b>Diferenciación parcial implícita</b> diferenciación parcial implícita	Ejemplo 1, p. 762
<b>Sección 17.5</b>	<b>Derivadas parciales de orden superior</b> $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}$	Ejemplo 1, p. 764
<b>Sección 17.6</b>	<b>Regla de la cadena</b> regla de la cadena variable intermedia	Ejemplo 1, p. 766
<b>Sección 17.7</b>	<b>Máximos y mínimos para funciones de dos variables</b> máximos y mínimos relativos punto crítico prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables	Ejemplo 1, p. 771 Ejemplo 3, p. 772
<b>Sección 17.8</b>	<b>Multiplicadores de Lagrange</b> multiplicadores de Lagrange	Ejemplo 1, p. 780
<b>Sección 17.9</b>	<b>Rectas de regresión</b> método de mínimos cuadrados regresión lineal de $y$ sobre $x$ números índices	Ejemplo 1, p. 788
<b>Sección 17.10</b>	<b>Integrales múltiples</b> integral doble integral triple	Ejemplo 3, p. 793

### Resumen

El concepto de función de una variable puede extenderse a funciones de varias variables. Las entradas para las funciones de  $n$  variables son  $n$ -adas. Por lo general, la gráfica de una función de dos variables es una superficie en un sistema coordenado tridimensional.

Para una función de  $n$  variables, es posible considerar  $n$  derivadas parciales. Por ejemplo, si  $w = f(x, y, z)$ , se tienen las derivadas parciales de  $f$  con respecto a  $x$ , de  $f$  con respecto a  $y$  y la derivada de  $f$  con respecto a  $z$ , denotadas como  $f_x, f_y$  y  $f_z$  o  $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z$ , respectivamente. Para encontrar  $f_x(x, y, z)$ , se trata a  $y$  y  $z$  como constantes y se deriva a  $f$  con respecto a  $x$  de la manera usual. Las otras derivadas parciales se encuentran de manera similar. Se puede interpretar  $f_x(x, y, z)$  como el cambio aproximado en  $w$  que resulta al cambiar  $x$  en una unidad mientras  $y$  y  $z$  se mantienen fijas. Las otras derivadas parciales se pueden interpretar de modo similar. Una función de varias variables puede estar definida implícitamente. En este caso, sus derivadas parciales se encuentran por diferenciación parcial implícita.

Las funciones de varias variables aparecen con frecuencia en análisis económicos y de negocios, así como en otras áreas de estudio. Si un fabricante produce  $x$  unidades del producto X y  $y$  unidades del producto Y, entonces el costo total  $c$  de estas unidades es una función de  $x$  y de  $y$  denominada función de costos conjuntos. Las derivadas parciales  $\partial c / \partial x$  y  $\partial c / \partial y$  se llaman costos marginales con respecto a  $x$  y a  $y$ , respectivamente. Por ejemplo, puede interpretarse  $\partial c / \partial x$  como el costo aproximado de producir una unidad adicional de X mientras se mantiene fijo el nivel de producción de Y.

Si se usan  $l$  unidades de trabajo y  $k$  unidades de capital para producir  $P$  unidades de un producto, la función  $P = f(l, k)$  se llama función de producción. Las derivadas parciales de  $P$  se llaman funciones de productividad marginal.

Suponga que dos productos, A y B, son tales que la cantidad demandada de cada uno es dependiente de los precios de ambos. Si  $q_A$  y  $q_B$  son cantidades de A y B demandadas cuando los precios de A y B son  $p_A$  y  $p_B$ , respectivamente, entonces  $q_A$  y  $q_B$  cada una son

funciones de  $p_A$  y  $p_B$ . Cuando  $\partial q_A/\partial p_B > 0$  y  $\partial q_B/\partial p_A > 0$ , entonces A y B se llaman productos competitivos (o sustitutos). Cuando  $\partial q_A/\partial p_B < 0$  y  $\partial q_B/\partial p_A < 0$ , entonces A y B se llaman productos complementarios.

Si  $z = f(x, y)$ , donde  $x = x(r, s)$  y  $y = y(r, s)$ , entonces  $z$  puede considerarse como una función de  $r$  y  $s$ . Por ejemplo, para encontrar  $\partial z/\partial r$ , puede usarse una regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

Una derivada parcial de una función de  $n$  variables es en sí misma una función de  $n$  variables. Al tomar derivadas parciales sucesivas de derivadas parciales, se obtienen derivadas parciales de orden superior. Por ejemplo, si  $f$  es una función de  $x$  y  $y$ , entonces  $f_{xy}$  denota la derivada parcial de  $f_x$  con respecto a  $y$ ;  $f_{xy}$  se llama segunda derivada parcial de  $f$ , primero con respecto a  $x$ , y luego con respecto a  $y$ .

Si la función  $f(x, y)$  tiene un extremo relativo en  $(a, b)$ , entonces  $(a, b)$  debe ser una solución del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Cualquier solución de este sistema se llama punto crítico de  $f$ . Así, los puntos críticos son los candidatos en los cuales un extremo relativo puede presentarse. La prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables proporciona las condiciones bajo las cuales un punto crítico corresponde a un máximo relativo o a un mínimo relativo. La prueba establece que si  $(a, b)$  es un punto crítico de  $f$  y

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

entonces

1. si  $D(a, b) > 0$  y  $f_{xx}(a, b) < 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $(a, b)$ ;
2. si  $D(a, b) > 0$  y  $f_{xx}(a, b) > 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $(a, b)$ ;
3. si  $D(a, b) < 0$ , entonces  $f$  tiene un punto silla en  $(a, b)$ ;
4. si  $D(a, b) = 0$ , no puede obtenerse ninguna conclusión sobre los extremos en  $(a, b)$  y entonces se requiere de un análisis adicional.

Para encontrar los puntos críticos de una función de varias variables sujetas a una restricción, es posible usar el método de los multiplicadores de Lagrange. Por ejemplo, para encontrar los puntos críticos de  $f(x, y, z)$  sujeta a la restricción  $g(x, y, z) = 0$ , primero se forma la función

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$

Al resolver el sistema

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases}$$

se obtienen los puntos críticos de  $F$ . Si  $(a, b, c, \lambda_0)$  es uno de esos puntos críticos, entonces  $(a, b, c)$  es un punto crítico de  $f$  sujeta a la restricción. Es importante escribir la restricción en la forma  $g(x, y, z) = 0$ . Por ejemplo, si la restricción es  $2x + 3y - z = 4$ , entonces  $g(x, y, z) = 2x + 3y - z - 4$ . Si  $f(x, y, z)$  está sujeta a dos restricciones,  $g_1(x, y, z) = 0$  y  $g_2(x, y, z) = 0$ , entonces se forma la función  $F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$  y se resuelve el sistema

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ F_{\lambda_1} = 0 \\ F_{\lambda_2} = 0 \end{cases}$$

Algunas veces los datos muestrales para dos variables, digamos  $x$  y  $y$ , pueden estar relacionadas de manera que la relación sea aproximadamente lineal. Cuando se dan los puntos  $(x_i, y_i)$ , donde  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , éstos pueden ajustarse a una línea recta que los aproxime. Tal línea es la recta de regresión lineal de  $y$  sobre  $x$ , que está dada por

$$\hat{y} = a + bx$$

donde

$$a = \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

Los valores  $\hat{y}$  pueden usarse para predecir los valores de  $y$  para valores dados de  $x$ .

Al trabajar con funciones de varias variables es posible considerar sus integrales múltiples. Estas se determinan por integración sucesiva. Por ejemplo, la integral doble

$$\int_1^2 \int_0^y (x + y) dx dy$$

se determina al tratar primero a  $y$  como constante e integrando  $x + y$  con respecto a  $x$ . Después de evaluarla entre los límites 0 y  $y$ , se integra ese resultado con respecto a  $y$  entre  $y = 1$  y  $y = 2$ . Así,

$$\int_1^2 \int_0^y (x + y) dx dy = \int_1^2 \left( \int_0^y (x + y) dx \right) dy$$

Las integrales triples implican funciones de tres variables y también se evalúan por integración sucesiva.

## Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

En los problemas 1 a 4, bosqueje las superficies dadas.

1.  $x + y + z = 1$

2.  $z = x$

3.  $z = y^2$

4.  $x^2 + z^2 = 1$

En los problemas 5 a 16, encuentre las derivadas parciales indicadas.

5.  $f(x, y) = 4x^2 + 6xy + y^2 - 1$ ;  $f_x(x, y), f_y(x, y)$

6.  $P = l^3 + k^3 - lk$ ;  $\partial P / \partial l, \partial P / \partial k$

7.  $z = \frac{x}{x+y}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

8.  $f(p_A, p_B) = 4(p_A - 10) + 5(p_B - 15)$ ;  $f_{p_B}(p_A, p_B)$

9.  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $\frac{\partial}{\partial y}[f(x, y)]$

10.  $w = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ;  $\frac{\partial w}{\partial y}$

11.  $w = e^{x^2yz}$ ;  $w_{xy}(x, y, z)$

12.  $f(x, y) = xy \ln(xy)$ ;  $f_{xy}(x, y)$

13.  $f(x, y, z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2)$ ;  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}(f(x, y, z))$

14.  $z = (x^2 - y)(y^2 - 2xy)$ ;  $\partial^2 z / \partial y^2$

15.  $w = e^{x+y+z} \ln xyz$ ;  $\partial w / \partial y, \partial^2 w / \partial z \partial x$

16.  $P = 100l^{0.11}k^{0.89}$ ;  $\partial^2 P / \partial k \partial l$

17. Si  $f(x, y, z) = \frac{x+y}{xz}$ , encuentre  $f_{xyz}(2, 7, 4)$ .

18. Si  $f(x, y, z) = (6x+1)e^{y^2 \ln(z+1)}$ , encuentre  $f_{xyz}(0, 1, 0)$

19. Si  $w = x^2 + 2xy + 3y^2$ ,  $x = e^r$  y  $y = \ln(r+s)$ , encuentre  $\partial w / \partial r$  y  $\partial w / \partial s$ .

20. Si  $z = \ln(x/y) + e^{xy} - xy$ ,  $x = r^2 + s^2$  y  $y = (r+s)^2$ , encuentre  $\partial z / \partial s$ .

21. Si  $x^2 + 2xy - 2z^2 + xz + 2 = 0$ , encuentre  $\partial z / \partial x$ .

22. Si  $z^2 + \ln(yz) + \ln z + x + z = 0$ , encuentre  $\partial z / \partial y$ .

**23. Función de producción** Si la función de producción de un fabricante está definida por  $P = 20l^{0.7}k^{0.3}$ , determine las funciones de productividad marginal.

**24. Función de costos conjuntos** El costo de un fabricante por producir  $x$  unidades del producto X y  $y$  unidades del producto Y está dado por

$$c = 3x + 0.05xy + 9y + 500$$

Determine el costo marginal (parcial) con respecto a  $x$  cuando  $x = 50$  y  $y = 100$ .

**25. Productos competitivos/complementarios** Si  $q_A = 100 - p_A + 2p_B$  y  $q_B = 150 + 3p_A - 2p_B$ , donde  $q_A$  y  $q_B$  son las unidades demandadas de los productos A y B, respectivamente, y  $p_A$  y  $p_B$  son sus precios por unidad respectivos, determine si A y B son productos competitivos, productos complementarios, o ninguno de los dos.

<sup>26</sup>Los problemas 19 a 22 se refieren a las secciones 17.4 o 17.6.

**26. Innovación** Para la industria, el modelo siguiente describe la tasa  $\alpha$  (letra griega “alfa”) a la que una innovación sustituye un proceso establecido:<sup>27</sup>

$$\alpha = Z + 0.530P - 0.027S$$

Aquí,  $Z$  es una constante que depende de la industria particular considerada,  $P$  un índice de rentabilidad de la innovación y  $S$  un índice de la magnitud de la inversión necesaria para hacer uso de la innovación. Encuentre  $\partial \alpha / \partial P$  y  $\partial \alpha / \partial S$ .

**27.** Analice  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 3$  en relación con sus extremos relativos.

**28.** Analice  $f(w, z) = 2w^3 + 2z^3 - 6wz + 7$  en relación con sus extremos relativos.

**29. Minimización de material** Una caja rectangular de cartón sin tapa debe tener un volumen de 32 pies cúbicos. Encuentre las dimensiones de la caja de manera que la cantidad de cartón usada sea mínima.

**30.** La función

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy - 10x - 20y$$

tiene un punto crítico en  $(x, y) = (1, 2)$ , y la prueba de la segunda derivada no es concluyente en este punto. Determine los valores de las constantes  $a, b$  y  $c$ .

**31. Maximización de la utilidad** Una granja produce dos tipos de queso, A y B. A un costo promedio constante de 50 y 60 centavos por libra, respectivamente. Cuando el precio de venta por libra de A es  $p_A$  centavos y el de B es  $p_B$  centavos, las demandas respectivas (en libras) para A y B son

$$q_A = 250(p_B - p_A)$$

y

$$q_B = 32,000 + 250(p_A - 2p_B)$$

Encuentre los precios de venta que dan una utilidad máxima relativa. Verifique que la utilidad tiene un máximo relativo con esos precios.

**32.** Encuentre todos los puntos críticos de  $f(x, y, z) = xy^2z$ , sujeta a la condición de que

$$x + y + z - 1 = 0 \quad (xyz \neq 0)$$

**33.** Encuentre todos los puntos críticos de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , con la restricción de que  $3x + 2y + z = 14$ .

**34. Sobrevivencia a una infección** En un experimento,<sup>28</sup> un grupo de peces fueron inoculados con bacterias vivas. De aquellos peces que se mantuvieron a  $28^\circ\text{C}$ , el porcentaje  $p$  de los peces que sobrevivieron la infección  $t$  horas después de inyectados, se da en la tabla siguiente:

$t$	8	10	18	20	48
$p$	82	79	78	78	64

Encuentre la recta de regresión lineal de  $p$  sobre  $t$ .

<sup>27</sup>A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein, et al., “Market Penetration by New Innovations: The Technological Literatura”, *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

<sup>28</sup>J. B. Covert y W. W. Reynolds, “Survival Value of Fever in Fish,” *Nature*, 267, núm. 5606 (1977), 43-45.

- 35. Gastos en equipo** Encuentre la recta de regresión lineal por mínimos cuadrados de  $y$  sobre  $x$  para los datos dados en la tabla siguiente (considere al año 1993 como el año  $x = 1$ , etcétera):

Gastos en equipo de una compañía de computadoras, 1993–1998  
(en millones de dólares)

Año	Gastos
1993	15
1994	22
1995	21
1996	26
1997	27
1998	34

*En los problemas 36 a 39, evalúe las integrales dobles.*

**36.**  $\int_1^2 \int_0^y x^2 y^2 dx dy$

**37.**  $\int_0^1 \int_0^{y^2} xy dx dy$

**38.**  $\int_1^4 \int_{x^2}^{2x} y dy dx$

**39.**  $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} 7(x^2 + 2xy - 3y^2) dy dx$

# Aplicación práctica

Aplicación práctica

## Análisis de datos para un modelo de enfriamiento<sup>29</sup>

**E**n el capítulo 15 se trabajó con la ley del enfriamiento de Newton, la cual puede usarse para describir la temperatura de un cuerpo que se enfría en función del tiempo. Aquí se determinará esa relación de manera empírica por medio del análisis de datos. Esto ilustrará cómo se diseñan los modelos matemáticos en muchas situaciones reales.

Suponga que usted quiere crear un modelo matemático del enfriamiento de té caliente después de ponerlo en un refrigerador. Para ello coloca en un refrigerador una jarra de té caliente y un termómetro y, en forma periódica, lee y registra la temperatura del té. La tabla 17.6 proporciona los datos obtenidos, donde  $T$  es la temperatura en grados Fahrenheit  $t$  minutos después de que se colocó la jarra en el refrigerador. En un inicio, esto es, en  $t = 0$ , la temperatura es de 124°F; cuando  $t = 391$ ,  $T = 47°F$ . Después de haber estado en el refrigerador toda la noche, la temperatura es de 45°F. En la figura 17.24 se presenta una gráfica de los puntos de datos  $(t, T)$  desde  $t = 0$  hasta  $t = 391$ .

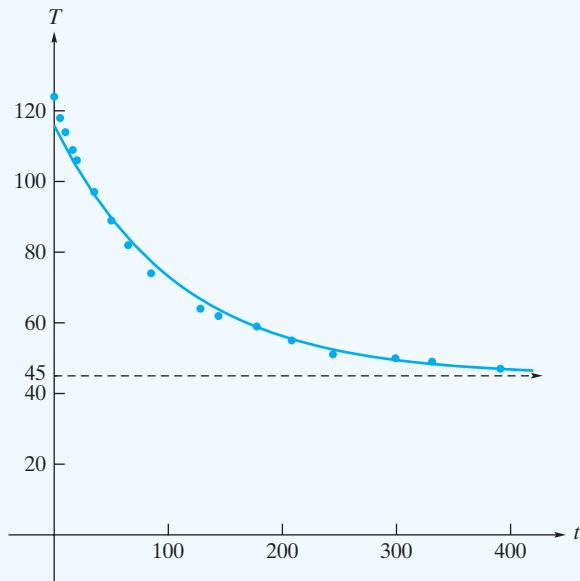
**TABLA 17.6**

Tiempo $t$	Temperatura $T$	Tiempo $t$	Temperatura $T$
0 min	124°F	128 min	64°F
5	118	144	62
10	114	178	59
16	109	208	55
20	106	244	51
35	97	299	50
50	89	331	49
65	82	391	47
85	74	Toda la noche	45

El patrón de estos puntos sugiere fuertemente que se encuentran muy cerca de la gráfica de una función exponencial decreciente, como la que se muestra en la figura 17.24. En particular, porque la temperatura después de una noche es de 45°F, esta función exponencial debería tener  $T = 45$  como asíntota horizontal. Tal función tiene la forma

$$\hat{T} = Ce^{at} + 45 \quad (1)$$

donde  $\hat{T}$  da la temperatura estimada en el tiempo  $t$ , y  $C$  y  $a$  son constantes, y  $a < 0$ . (Observe que como  $a < 0$ , entonces cuando  $t \rightarrow \infty$ , se tiene  $Ce^{at} \rightarrow 0$ , por lo que  $Ce^{at} + 45 \rightarrow 45$ .)



**FIGURA 17.24** Puntos de datos y aproximación exponencial.

Ahora el problema es encontrar los valores de  $C$  y  $a$  tales que la curva dada por la ecuación (1) se ajuste a los datos de la mejor manera. Al escribir la ecuación (1) como

$$\hat{T} - 45 = Ce^{at}$$

y obtener después los logaritmos naturales en ambos lados, se logra una forma lineal:

$$\begin{aligned}\ln(\hat{T} - 45) &= \ln(Ce^{at}) \\ \ln(\hat{T} - 45) &= \ln C + \ln e^{at} \\ \ln(\hat{T} - 45) &= \ln C + at\end{aligned}\quad (2)$$

Se establece  $\hat{T}_l = \ln(\hat{T} - 45)$ , la ecuación (2) se convierte en

$$\hat{T}_l = at + \ln C \quad (3)$$

Como  $a$  y  $\ln C$  son constantes, la ecuación (3) es una ecuación lineal en  $\hat{T}_l$  y  $t$ . Para los datos originales, esto significa que si se grafican los puntos  $(t, \ln(T - 45))$ , deberán estar cerca de una línea recta. Esos puntos se muestran en la figura 17.25, donde  $T_l$  representa  $\ln(T - 45)$ . Así, por la recta dada por la ecuación (3), que pronostica  $T_l = ln$ , puede suponerse que es la recta de regresión lineal de  $T_l$  sobre  $t$ . Esto es,  $a$  y  $\ln C$  son los coeficientes de regresión lineal. Mediante las fórmulas para esos coeficientes y una calculadora, se determina que

<sup>29</sup>Adaptado de Gloria Barrett, Dot Doyle y Dan Teague, "Using Data Analysis in Precalculus to Model Cooling", *The Mathematics Teacher*, 81, núm. 8 (noviembre de 1988), 680-684. Con autorización del National Council of Teachers of Mathematics.

Como  $\ln C \approx 4.260074$ , entonces  $C \approx e^{4.260074} \approx 70.82$ . Así, de la ecuación (1),

$$\hat{T} = 70.82e^{-0.00921t} + 45$$

el cual es un modelo que pronostica la temperatura del té al enfriarse. La gráfica de esta función es la curva que se muestra en la figura 17.24.

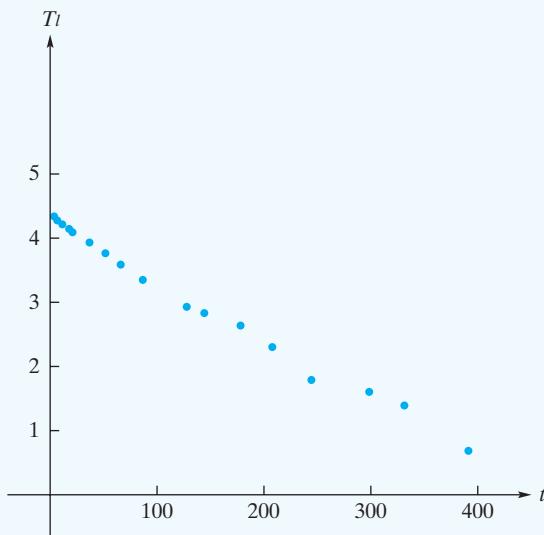
### Problemas

1. Grafique los siguientes puntos de datos sobre un plano coordenado  $xy$ :

$x$	0	1	4	7	10
$y$	15	12	9	7	6

Suponga que esos puntos se encuentran aproximadamente sobre la gráfica de una función exponencial decreciente con asíntota horizontal  $y = 5$ . Use el procedimiento analizado en esta aplicación práctica para determinar la función.

2. Suponga que ciertos datos observados siguen una relación dada por  $y = C/x^r$ , donde  $x, y, C > 0$ . Con el uso de los logaritmos naturales en ambos lados de la ecuación, demuestre que  $\ln x$  y  $\ln y$  están relacionados de manera lineal. Así, los puntos  $(\ln x, \ln y)$  se encuentran sobre una línea recta.
3. Use la ley del enfriamiento de Newton (vea la sección 15.6) y los puntos  $(0, 124)$  y  $(128, 64)$  para determinar la temperatura  $T$  del té estudiada en la aplicación práctica, en el tiempo  $t$ . Suponga que la temperatura del medio ambiente es de  $45^\circ\text{F}$ .
4. Trate de obtener la ecuación final de regresión obtenida en la aplicación práctica, mediante la función de regresión de una calculadora graficadora. Primero utilice regresión lineal. ¿Cómo es su resultado comparado con el de la aplicación práctica? Después trate de omitir la transformación a la forma lineal y realice una regresión exponencial. ¿Qué dificultades encuentra, en caso de tenerlas? ¿Cómo las vencería?



**FIGURA 17.25** Los puntos  $(t, T_l)$ , donde  $T_l = \ln(T - 45)$ , está cerca de una recta.

$$a = \frac{17 \left( \sum_{i=1}^{17} t_i T_{l_i} \right) - \left( \sum_{i=1}^{17} t_i \right) \left( \sum_{i=1}^{17} T_{l_i} \right)}{17 \left( \sum_{i=1}^{17} t_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^{17} t_i \right)^2} \approx -0.00921$$

$$\begin{aligned} \ln C &= \frac{\left( \sum_{i=1}^{17} t_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^{17} T_{l_i} \right) - \left( \sum_{i=1}^{17} t_i \right) \left( \sum_{i=1}^{17} t_i T_{l_i} \right)}{17 \left( \sum_{i=1}^{17} t_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^{17} t_i \right)^2} \\ &\approx 4.260074 \end{aligned}$$



# APÉNDICE A

## Conjuntos

- A.1 [Idea intuitiva de conjunto](#)
- A.2 [Conceptos básicos](#)
- A.3 [Operaciones con conjuntos](#)
- A.4 [Cardinalidad de conjuntos](#)
- A.5 [Repasso](#)

### **Agrupaciones y lo que se puede hacer con ellas**

En la vida diaria y en la profesional, nos encontramos ante situaciones en las cuales de manera natural agrupamos objetos, personas, proyectos, etcétera, que tienen alguna cualidad en común. Por ejemplo: los compañeros del grupo de la escuela, las enfermedades del corazón, los contribuyentes menores, los proyectos de inversión de un portafolio financiero, entre otros. Además, nos hacemos preguntas con respecto a esas agrupaciones y sus componentes. Tales agrupaciones y lo que se puede realizar con ellas y sus componentes es materia de estudio de una parte de las matemáticas conocida como teoría de conjuntos.

**OBJETIVO**

Proporcionar la idea intuitiva de conjunto y utilizar métodos para describir conjuntos.

## A.1 Idea intuitiva de conjunto

De manera intuitiva diremos que un conjunto es una colección bien definida de objetos. A cada uno de estos objetos les denominaremos elementos del conjunto.

Básicamente existen dos formas de definir a un conjunto:

La primera, denominada definición por extensión, es aquella en la que listamos todos los elementos del conjunto. Esta lista de elementos la escribimos entre llaves.

### **EJEMPLO 1 Los conjuntos siguientes están escritos por medio del método de extensión**

$$A = \{\text{Mercurio, Venus, Tierra, Marte}\}$$

$$B = \{\text{Bonos, Acciones, Certificados de Tesorería}\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

La segunda, conocida como definición por comprensión o construcción, es en la que escribimos una propiedad que deben cumplir los elementos que pertenecen al conjunto.

### **EJEMPLO 2 Los conjuntos siguientes se escriben por medio del método de construcción**

$$C = \{x | x \text{ es un número natural par menor que } 20\}$$

$$D = \{x | x \text{ es capital de un país de Norteamérica}\}$$

$$E = \{x | x \text{ es un planeta del sistema solar comprendido entre el Sol y los Asteroides}\}$$

$$F = \{x | x \text{ es uno de los primeros diez números pares naturales}\}$$

$$G = \{x | x \text{ es el resultado del tiro de un dado}\}$$

Además de los dos métodos anteriores, podemos mencionar una tercera forma de describir o definir conjuntos, la cual es una combinación de las dos anteriores. Se dan los primeros y/o los últimos elementos, a partir de los cuales se infiere cuáles elementos pertenecen al conjunto.

### **EJEMPLO 3 Para definir los conjuntos siguientes, hicimos uso de una combinación de los métodos de comprensión y extensión**

$$H = \{2, 4, 6, \dots, 18, 20\}$$

$$I = \{\text{Argentina, Antigua y Barbuda, Bahamas, \dots, Uruguay, Venezuela}\}$$

$$J = \{\text{Mercurio, Venus, Tierra, \dots, Neptuno, Plutón}\}$$

Al emplear este método se debe ser cuidadoso al escribir los elementos y del contexto del problema que se trate, ya que puede sugerir más de una respuesta correcta.

Revise la sección 0.2 para un repaso sobre conjuntos de números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.

## Problemas A.1

En los problemas 1 a 6 escriba cada conjunto utilizando el método de extensión.

1. El conjunto de los números enteros positivos que son divisores de 24.
2. R es el conjunto de los huesos del cráneo.
3. El conjunto de los países de Europa cuyo nombre de su capital inicia con P.

4. S es el conjunto de nombres de ganadores de premio Nobel de Economía.
5. El conjunto de países que han ganado la copa mundial de fútbol.
6. T es el conjunto de números primos menores que 20.

En los problemas del 7 al 12 escriba cada conjunto y utilice el método de construcción o comprensión.

7.  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ .
  8.  $\{\text{España, Portugal}\}$ .
  9.  $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$ .
  10.  $\{r, o, m, a\}$ .
  11.  $\{7, 14, 21, 28, \dots, 693, 700\}$ .
  12. El conjunto de los enteros entre  $-6$  y  $6$ .
- En los problemas 13 a 20 se da un conjunto si utiliza un método, escriba el mismo conjunto utilizando otro método.*
13.  $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

14.  $\{x | x \text{ es una persona viva que ha sido presidente de Argentina}\}$
15.  $\{\text{Panamá, Costa Rica, \dots, Belice, Guatemala, México}\}$
16.  $\{x | x \text{ es un número primo menor a } 20\}$
17.  $R$  es el conjunto cuyos elementos son los números enteros mayores a  $60$ .
18.  $S$  es el conjunto que consiste en los recíprocos de todos los números naturales menores a  $10$ .
19.  $T$  es el conjunto formado por las letras del abecedario español.
20.  $\{k | k \text{ es un entero y } k^2 < 10\}$

## OBJETIVO

Introducir la notación usual de conjuntos.  
Definir conjuntos vacío y universal. Introducir el concepto de subconjunto, la igualdad de conjuntos. Emplear los diagramas de Venn para representar conjuntos.

## A.2 Conceptos básicos

En la sección anterior introdujimos la noción de conjunto y sus elementos. El primer conjunto que escribimos fue  $A = \{\text{Mercurio, Venus, Tierra, Marte}\}$ , cuyos elementos son los planetas del sistema solar: Mercurio, Venus, Tierra y Marte. Así, podemos decir que “Venus es elemento del conjunto  $A$ ” y “Júpiter no es elemento del conjunto  $A$ ”. Reemplazamos “es elemento del conjunto” con el símbolo  $\in$  y con  $\notin$  a la frase “no es elemento del conjunto”. Con lo anterior, podemos escribir:

$$\text{Venus} \in A \quad \text{y} \quad \text{Júpiter} \notin A$$

### EJEMPLO 1

*Considere el conjunto  $C = \{x | x \text{ es un número natural par menor que } 20\}$  decida si cada uno de los números siguientes es o no elemento del conjunto  $C$  y represente esto por medio de la notación de pertenencia  $\in, \notin$ .*

- |       |       |      |
|-------|-------|------|
| a. 4  | b. 20 | c. 0 |
| d. -4 | e. 3  |      |

#### Solución:

- a. Puesto que  $4$  es un número natural par y es menor que  $20$ , entonces pertenece al conjunto  $C$ . Escribimos  $4 \in C$ .
- b. Aunque  $20$  es un número par, no es menor que  $20$ , por lo tanto  $20 \notin C$ .
- c. El  $0$  es par, y aunque es menor que  $20$  no es un número natural por tanto no pertenece a  $C$ , lo cual escribimos así,  $0 \notin C$ .
- d. Si bien  $3$  es un número natural menor que  $20$ , no pertenece al conjunto  $C$  ya que  $3$  no es par, por lo tanto escribimos  $3 \notin C$ .

### Conjunto universal y conjunto vacío

Al trabajar con conjuntos es necesario indicar el universo del discurso que está formado por un conjunto al cual pertenecen todos los elementos con los cuales estemos trabajando en un problema en particular. A este conjunto se le conoce como **conjunto universal**. Este conjunto se denota típicamente por medio de la letra  $U$  o la letra griega omega mayúscula,  $\Omega$ .

En un problema, el conjunto universal podría ser el conjunto de todos los planetas del sistema solar, mientras que en otro podría ser el conjunto de todas las mujeres menores de  $24$  años que estudian medicina.

Es muy importante dejar claro cual es el conjunto universal, ya que eso determinará nuestro marco de referencia. Así como es necesario tener un conjunto al cual pertenecen todos los elementos con los que se está trabajando, también lo es definir un conjunto el cual carece de elementos, dicho conjunto se conoce como **conjunto vacío**. A este conjunto lo denotamos con  $\emptyset$  o  $\{\}$ .

**EJEMPLO 2** Determine cuál(es) de las proposiciones siguientes define a un conjunto vacío.

- $\{m \mid m \text{ es un número primo par}\}$
- $\{x \mid x \text{ es un número real tal que } x^2 < 0\}$
- $\{y \mid y \text{ es un número entero entre } 4 \text{ y } 5\}$
- $\{\emptyset\}$

**Solución:**

- 2 es un número par y es primo, por lo tanto este conjunto no es vacío.
- Sabemos que no existe número real que al elevarlo al cuadrado nos dé un número negativo, por lo tanto, el conjunto es  $\emptyset$ .
- No existe número entero entre 4 y 5, así este conjunto es vacío  $\emptyset$ .
- $\{\emptyset\}$  no es el conjunto vacío, es un conjunto que tiene un elemento (el elemento es el conjunto vacío).

**Subconjunto**

Suponga que en un problema particular estamos interesados en calificaciones determinadas con números enteros del 5 al 10, eso nos sugiere que el conjunto universal es

$$U = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Ahora bien, si  $A = \{5, 6, 9\}$  es un conjunto bajo estudio. Podemos observar que todo elemento de  $A$  también es un elemento de  $U$ . Decimos que  $A$  es un subconjunto del conjunto  $U$ . Esto nos lleva a la siguiente:

**Definición**

Un conjunto  $A$  es **subconjunto** de un conjunto  $B$ , si y sólo si cada elemento de  $A$  también es elemento de  $B$ . Esto lo escribimos  $A \subseteq B$ . Por otro lado, si  $A$  no es subconjunto de  $B$ , lo denotamos con  $A \not\subseteq B$ .

Cuando  $A \subseteq B$ , también decimos que “ $A$  está contenido en  $B$ ”.

Observe que para demostrar que un conjunto,  $A$ , *no* es subconjunto de un conjunto  $B$ , con base en la definición debemos demostrar que no todo elemento de  $A$  pertenece a  $B$ , es decir, debemos encontrar **un** elemento en  $A$  tal que ese elemento **no** pertenezca a  $B$ . Por ejemplo, el conjunto  $\{1, 2, 3\} \not\subseteq \{2, 3, 4, 5\}$ , ya que  $1 \in A$ , pero  $1 \notin B$ .

El conjunto vacío,  $\emptyset$ , es subconjunto de todo conjunto  $A$ . (Vea el problema 15).

**EJEMPLO 3** Haga una lista con todos los subconjuntos del conjunto

$$M = \{1, 2, 3, 4\}.$$

**Solución:** Para hacer la lista procedemos de manera ordenada, primero escribimos los conjuntos con cero elementos, es decir, sin elementos. Sólo existe uno, el vacío.  $\emptyset \subseteq M$ .

La lista de conjuntos con un elemento es:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\} \text{ y } \{4\}$$

Los subconjuntos de  $M$  con 2 elementos son:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\} \text{ y } \{3, 4\}.$$

Hay cuatro subconjuntos de  $M$  con 3 elementos:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\} \text{ y } \{2, 3, 4\}.$$

Y sólo existe un subconjunto de  $M$  con cuatro elementos, éste es el mismo  $M$ . Observe que en el ejemplo anterior tenemos 16 subconjuntos de  $H$ . En la lista están incluidos dos ( $\emptyset$  y  $M$ ), que se denominan subconjuntos impropios o triviales de  $M$ , los restantes 14 se les conoce como **subconjuntos propios** de  $M$ .

### Igualdad de conjuntos

Decimos que dos conjuntos son iguales si **tienen los mismos elementos**. Cuando dos conjuntos, A y B, son iguales escribimos  $A = B$ . Para demostrar que A y B son iguales, tenemos que demostrar que todos los elementos de A pertenecen a B y también que todos los elementos de B pertenece a A. Es decir, se debe cumplir que  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$ . Si alguna de las conclusiones anteriores no se cumple escribimos  $A \neq B$ , que se lee “A es diferente de B”.

#### EJEMPLO 4

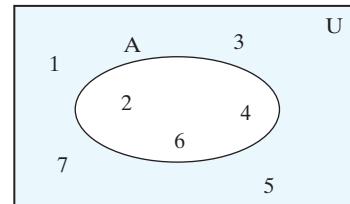
- El conjunto  $\{1, 2, 3\}$  es igual al conjunto  $\{3, 1, 2\}$ , ya que tienen los mismos elementos. Observe que esto nos indica que el orden en que escribimos los elementos de un conjunto no importa.
- El conjunto  $T = \{2, 4, 6\}$  es igual al conjunto  $P = \{2, 4, 2, 6, 2, 4\}$ . Note que todos los elementos de T pertenecen a P, y recíprocamente, todos los elementos de P pertenecen a T. Esto nos dice que en un conjunto basta con escribir una sola vez cada elemento.

### Diagrama de Venn-Euler

Un dibujo dice más que mil palabras, reza un refrán, y las matemáticas no son la excepción. Muchas veces un dibujo o una gráfica nos ayudan a clarificar algunas ideas, en el caso de la teoría de conjuntos se emplean los diagramas de Venn-Euler, o simplemente diagramas de Venn. Por lo regular, en estos diagramas el conjunto universal se representa por medio de un rectángulo y los demás conjuntos de interés por medio de óvalos, círculos u otras formas. En esta sección y la siguiente haremos uso de los diagramas de Venn para ilustrar muchos de los conceptos.

#### EJEMPLO 5 Represente por medio de un diagrama de Venn al conjunto $A = \{2, 4, 6\}$ , y considere el conjunto universal $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

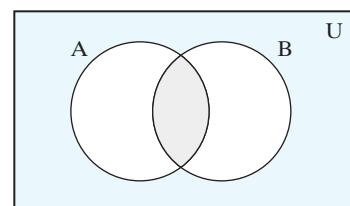
**Solución:**



#### EJEMPLO 6 Por medio de un diagrama de Venn represente a los conjuntos

$$\begin{aligned} U &= \{x \mid x \text{ es una persona que se encuentra en América}\} \\ A &= \{x \mid x \text{ es una persona que padece de miopía}\} \\ B &= \{x \mid x \text{ es una persona que padece de astigmatismo}\} \end{aligned}$$

**Solución:** Representamos por medio de un rectángulo al conjunto universal y por medio de círculos a los conjuntos A y B.



En el diagrama anterior, traslapamos los círculos que representan a los conjuntos A y B, ¿Por qué?

## Problemas A.2

En los ejercicios 1 a 6 escriba  $\in$  o  $\notin$  para que la expresión dada sea verdadera.

1. 4 \_\_\_\_  $\{1, 2, 3, 4\}$
2. Júpiter \_\_\_\_  $\{x | x \text{ es un planeta}\}$
3. 5 \_\_\_\_  $\emptyset$
4. Luna \_\_\_\_  $\{x | x \text{ es un planeta}\}$
5. 7 \_\_\_\_  $\{1, 2, 3, 4\}$
6. 5 \_\_\_\_  $\Omega$

En los ejercicios 7 a 14 decida si es verdadera o falsa cada una de las proposiciones siguientes.

7.  $\{3, 4\} = \{4, 3\}$
8.  $a \in \{h, o, l, a\}$
9.  $\{\text{Marte}\} \subseteq \{k | k \text{ es un planeta del sistema solar}\}$
10.  $\{a, m, a, b, a\} = \{a, b, m\}$
11.  $3 \notin \{2, 4, 6\}$
12.  $\{2, 3\} \not\subseteq \{2, 4, 6, 8\}$
13.  $\{m | m \text{ es un número natural menor a } 2\} = \{1\}$
14.  $\{\text{Belice, Honduras, Cuba}\} \subseteq \{e | e \text{ es un país del Continente Americano}\}$ .

15. Demuestre que el conjunto vacío,  $\emptyset$ , es subconjunto de cualquier conjunto, A. Sugerencia: Suponga que  $\emptyset \not\subseteq A$  y muestre que esto no es posible.

Para los problemas 16 a 24, decida si la proposición dada es verdadera o falsa. Considere los conjuntos siguientes:

$$\begin{aligned} U &= \{a, b, c, d, f, g, h, i\} \\ A &= \{a, c, d\} \\ B &= \{f, g\} \\ C &= \{a, b, f, g\} \end{aligned}$$

### OBJETIVO

Definir las operaciones básicas con conjuntos, unión, intersección, complemento y diferencia; ilustrar el uso de las operaciones de conjuntos en diversas situaciones, y representar las operaciones entre conjuntos por medio de diagramas de Venn.

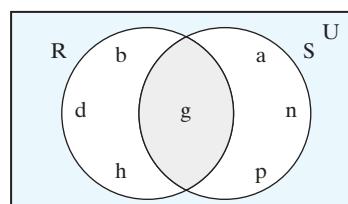
## A.3 Operaciones con conjuntos

En un estudio sobre enfermedades en dos regiones del país, se encontró la información que aparece en la tabla siguiente, con respecto a las principales enfermedades en la población de cada región.

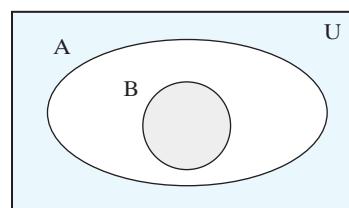
Región Norte	Región Sur
Bocio, b	Anemia, a
Diabetes, d	Gripe, g
Gripe, g	Neumonía, n
Hepatitis, h	Paludismo, p

La única enfermedad de mayor incidencia en común a las dos regiones es la g, gripe. Ahora, si representamos las enfermedades de cada región como un conjunto, entonces el conjunto de enfermedades con mayor incidencia en la región Norte del país forman el conjunto  $R = \{b, d, g, h\}$ . Mientras que para la región Sur tenemos  $S = \{a, g, n, p\}$ .

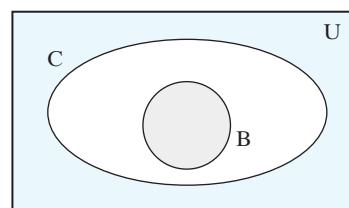
Estos conjuntos los podemos representar por medio de un diagrama de Venn, como se muestra a continuación, en donde el único elemento común a los dos conjuntos es g. Este elemento pertenece a la *intersección* de los conjuntos.



16.  $\{g, f, b\} \subseteq B$
17.  $\emptyset \subseteq B$
18.  $A \subseteq U$
19.  $C \not\subseteq A$
20.  $A \not\subset C$
21. El conjunto B tiene exactamente 2 subconjuntos propios.
22. El conjunto C tiene exactamente 32 subconjuntos.
23. El diagrama siguiente ilustra de manera correcta la relación entre U, A y B.



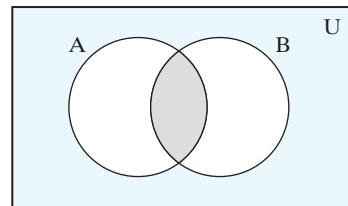
24. El diagrama siguiente ilustra de manera correcta la relación entre U, B y C.



La **intersección** de los conjuntos A y B, denotada por  $A \cap B$ , es el conjunto que se forma con los elementos que son comunes a ambos conjuntos, es decir,

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

En el siguiente diagrama de Venn la parte sombreada, que es común a ambos conjuntos, representa la intersección de ellos.



**FIGURA A.1** Intersección de los conjuntos A y B,  $A \cap B$ .

Para el caso de las enfermedades tenemos

$$R \cap S = \{g\}$$

**EJEMPLO 1 Determine la intersección de los conjuntos siguientes:**

- a.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y  $B = \{2, 4, 8, 16\}$
- b.  $C = \{x | x \text{ es un planeta del sistema solar}\}$  y  $D = \{x | x \text{ es un planeta que está más próximo al Sol que la Tierra}\}$
- c.  $E = \{h, o, l, a\}$  y  $\emptyset$
- d.  $F = \{3, 6, 9, 12\}$  y  $G = \{5, 10, 15\}$

**Solución:**

- a. Puesto que los elementos comunes a los dos conjuntos son 2 y 4, tenemos

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 8, 16\} = \{2, 4\}.$$

- b. En este caso tenemos que  $C \cap D = \{\text{Mercurio, Venus}\}$ , ya que éstos son los únicos planetas del sistema solar que están más próximos al Sol que a la Tierra.

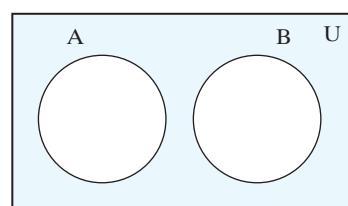
- c. Puesto que  $\emptyset$  no tiene elementos, no puede haber elementos que pertenezcan a ambos conjuntos, por lo tanto,

$$\{h, o, l, a\} \cap \emptyset = \emptyset.$$

- d. Como se puede observar, los conjuntos F y G no tienen elementos en común, por lo que

$$F \cap G = \emptyset.$$

Los dos últimos nos muestran, en cada caso, dos conjuntos que no tienen elementos en común, a éstos conjuntos reciben el nombre de **conjuntos disjuntos**. Con mayor formalidad decimos que los conjuntos A y B son disjuntos si  $A \cap B = \emptyset$ .



**FIGURA A.2** Conjuntos disjuntos,  $A \cap B = \emptyset$ .

**EJEMPLO 2** En un estudio realizado en una universidad se clasificó a los estudiantes en los conjuntos siguientes:

$$S = \{x | x \text{ tiene automóvil}\}$$

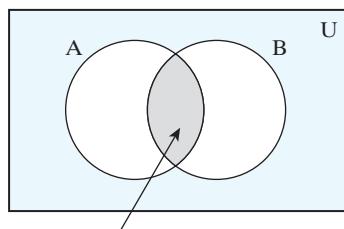
$$T = \{x | x \text{ juega baloncesto}\}$$

Describa la intersección de los conjuntos  $S$  y  $T$  e ilústrela en un diagrama de Venn

**Solución:** La intersección está formada por los elementos que cumplen las dos condiciones así que

$$S \cap T = \{x | x \text{ tiene automóvil y juega baloncesto}\}$$

El siguiente diagrama de Venn ilustra lo anterior.



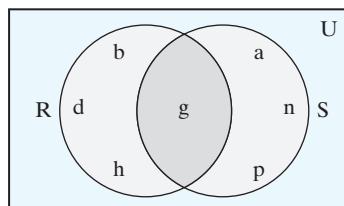
Tiene automóvil y juega baloncesto

**FIGURA A.3**

Al inicio de la sección se presentó una tabla con las cuatro enfermedades principales en cada una de las regiones del país (Norte y Sur). Si un estudiante desea realizar un reporte de las principales enfermedades de las dos regiones, entonces necesita analizar cada una de las enfermedades que tienen una alta incidencia en la región Norte o en la región Sur, es decir el conjunto

$$\{a, b, d, g, h, n, p\}$$

que es la **unión** de los conjuntos de enfermedades, este conjunto se representa mediante el siguiente diagrama de Venn.



**FIGURA A.4** Unión de los conjuntos  $R$  y  $S$ ,  $R \cup S$ .

Formalizando lo anterior, decimos que la **unión** de los conjuntos  $A$  y  $B$ , denotado por  $A \cup B$ , es el conjunto cuyos elementos pertenecen a cualquiera de los dos conjuntos. Es decir,

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$$

**EJEMPLO 3** Determine la unión de los conjuntos siguientes:

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y  $B = \{2, 4, 8, 16\}$
- $C = \{x | x \text{ es un planeta del sistema solar}\}$  y  $D = \{x | x \text{ es un planeta que está más próximo al Sol que la Tierra}\}$
- $E = \{h, o, l, a\}$  y  $\emptyset$

**Solución:**

- a. Para obtener la unión comenzamos por enumerar a todos los elementos del primer conjunto y a continuación escribimos los elementos del segundo conjunto que no hayamos escrito, es decir,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 16\}.$$

- b. Note que en este caso, al listar todos los elementos del conjunto C, nos damos cuenta que ya incluimos a todos los del conjunto D, por lo que

$$C \cup D = \{x | x \text{ es un planeta del sistema solar}\}.$$

Observe que es el mismo conjunto C, ¿por qué? ¿bajo qué circunstancia se cumple lo anterior?, es decir, ¿cuáles son las condiciones para que al unir dos conjuntos el resultado sea uno de ellos? Vea el problema 27.

- c.  $E \cup \emptyset = \{h, o, l, a\}$ . Note que el resultado fue el conjunto E. Vea el problema 30.

Regresando con el ejemplo dado al inicio de la sección el total de enfermedades que se encontraron en las dos regiones fue de diez, lo cual forma el conjunto universal para este caso. A continuación, mostramos la tabla con las diez enfermedades bajo estudio.

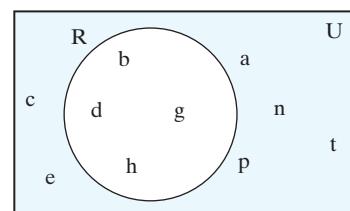
**TABLA A.1** Padecimientos en el estudio de las dos regiones del país

Anemia, a	Gripe, g
Bocio, b	Hepatitis, h
Cirrosis hepática, c	Neumonía, n
Diabetes, d	Paludismo, p
Epilepsia, e	Tuberculosis, t

Con la notación dada en la tabla para las enfermedades, tenemos que

$$U = \{a, b, c, d, e, g, h, n, p, t\}.$$

En el siguiente diagrama de Venn mostramos a los conjuntos U y R definido con anterioridad.



**FIGURA A.5**

Observe la región sombreada, también forma un conjunto, llamado el **complemento** de R, y se representa por  $R^c$ ,  $R'$  o con  $\bar{R}$ . Aquí emplearemos la primera de las notaciones. Formalizando lo anterior, tenemos:

El conjunto complemento de A, denotado  $A^c$ , es el conjunto que contiene a todos los elementos del universo, U, que no pertenecen al conjunto A. Es decir,

$$A^c = \{x | x \in U \text{ y } x \notin A\}.$$

**EJEMPLO 4** Considerando el caso de las principales enfermedades en las dos regiones del país, determine:

- $R^c$ ,
- $S^c$ .

**Solución:**

- Para escribir el complemento del conjunto  $R$ , basta con listar a todos los elementos del universo y quitar aquellos que pertenezcan a  $R$ . Es decir,

$$R^c = \{a, c, e, n, p, t\}.$$

Vea la figura A.5.

- De manera análoga obtenemos  $S^c = \{b, d, e, h, t\}$ .

Una operación más entre conjuntos es la *diferencia* entre dos conjuntos, ésta la utilizamos cuando nos interesa conocer los elementos de un conjunto que no se encuentran en el otro. En el caso de las enfermedades, la diferencia entre los conjuntos  $R$  y  $S$ , denotada por  $R - S$  es el conjunto

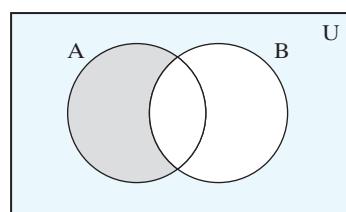
$$R - S = \{b, d, h\}.$$

El conjunto anterior representa a las principales enfermedades en la región norte que no son enfermedades principales en la región sur. Formalizamos lo anterior en la definición siguiente.

La **diferencia** de los conjuntos  $A$  y  $B$ , denotada por  $A - B$ , es el conjunto cuyos elementos pertenecen al conjunto  $A$  pero no pertenecen al conjunto  $B$ , es decir,

$$A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

En un diagrama de Venn la diferencia anterior se representa en la figura siguiente



**FIGURA A.6** Diferencia de conjuntos,  $A - B$ .

**EJEMPLO 5** Determine la diferencia de los conjuntos siguientes.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 4, 8, 10\}$$

**Solución:** Para obtener la diferencia,  $A - B$ , listamos todos los elementos de  $A$  y eliminamos de esa lista a los elementos que tenga en común con  $B$ . Al hacer lo anterior, tenemos

$$A - B = \{1, 3, 5, 6\}.$$

**EJEMPLO 6** Se clasificó a estudiantes de la universidad estatal en:

$$F = \{x | x \text{ fuma}\}$$

$$T = \{x | x \text{ tiene automóvil}\}$$

$$M = \{x | x \text{ es mujer}\}$$

En este caso, el conjunto universal, U, es el de todos los estudiantes (hombres y mujeres) de esa universidad.

Describa con palabras a cada uno de los conjuntos siguientes:

a.  $F - T$

b.  $M - T$

c.  $T - F$

**Solución:**

a.  $F - T$ , representa al conjunto de estudiantes que fuma y no tiene automóvil.

b.  $M - T$ , es el conjunto de estudiantes mujeres que no fuman.

c.  $T - F$ , son los estudiantes de la universidad que tienen automóvil pero no fuman. Compare esto con la parte (a).

Las operaciones entre conjuntos tienen propiedades algebraicas interesantes, y éstas se pueden demostrar a partir de sus definiciones, sin embargo, sólo ilustraremos algunas por medio de diagramas de Venn.

La unión y la intersección son conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A.$$

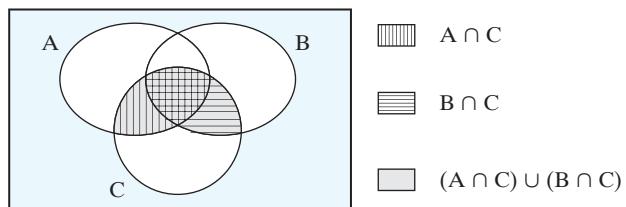
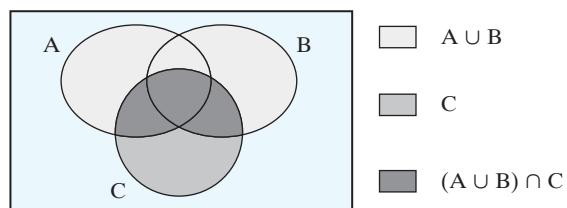
La unión y la intersección son asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

También satisfacen propiedades distributivas:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Para ilustrar  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ , mostramos los diagramas de Venn siguientes:



Como puede observar, el resultado final es el mismo por lo que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

De forma análoga se pueden ilustrar las otras propiedades.

## Problemas A.3

En los problemas 1 a 12, realice las operaciones que se indican.  
Considera los conjuntos siguientes.

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$C = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$D = \{3, 6, 9\}$$

1.  $A \cup B$

3.  $A \cup (B \cap C)$

5.  $D \cap A^c$

7.  $D^c \cup C^c$

9.  $C - (A \cup B)$

11.  $A^c - B^c$

2.  $C \cap B$

4.  $A^c \cap B$

6.  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

8.  $D - C$

10.  $(A - C) - (B - D)$

12.  $D - A^c$

En los problemas 13 a 20, ilustre por medio de diagramas de Venn las igualdades que se dan.

13.  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ .

14.  $A - B = A \cap B^c$ .

15.  $A \cap B = B \cap A$

16.  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

17.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

18.  $(A - B) \cap C = A \cap (C - B)$ .

19.  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

20.  $A^c - B = (A \cup B)^c$ .

Se clasificó a estudiantes de la universidad estatal en:

$$F = \{x | x \text{ fuma}\}$$

$$T = \{x | x \text{ tiene automóvil}\}$$

$$M = \{x | x \text{ es mujer}\}$$

$$H = \{x | x \text{ es hombre}\}$$

Describa con palabras cada uno de los conjuntos dados en los problemas del 21 al 26.

21.  $T^c$

22.  $M \cap (T \cap H)$

23.  $H \cap F^c$

24.  $(M \cap T^c) \cup (H \cap F^c)$

25.  $H - F$

26.  $M - (T \cup F)$

27. ¿Qué condiciones se deben cumplir para que  $A \cup B = B$  sea cierta?

28. ¿Qué condiciones se deben cumplir para que  $A \cap B = B$  sea cierta?

29. ¿Qué condiciones se deben cumplir para que  $A - B = A$  sea cierta?

30. Justifique por medio de diagramas de Venn las igualdades siguientes, que se cumplen para cualquier conjunto A.

a.  $A \cup \emptyset = A$

b.  $A \cap U = A$

c.  $A \cup U = U$

d.  $A \cap \emptyset = \emptyset$

### OBJETIVO

Estudiar la cardinalidad de conjuntos. Obtener expresiones para la cardinalidad de la unión de conjuntos.

## A.4 Cardinalidad de conjuntos

En diversas situaciones, es importante conocer el número de elementos de un conjunto. Por ejemplo, cuando se hacen encuestas o se estudia probabilidad con el enfoque frecuencial. Al número de elementos de un conjunto se le llama **número cardinal** o **cardinalidad** del conjunto, la cardinalidad del conjunto A se denota por medio del símbolo  $n(A)$ .

Si el número cardinal de un conjunto es un número entero no negativo particular, decimos que el conjunto es **finito**, en caso contrario le llamamos conjunto infinito.

**EJEMPLO 1** Determine el número cardinal de cada uno de los conjuntos siguientes.

a.  $\{1, 3, 5, 7\}$

b.  $\{x | x \text{ es un país de Norteamérica}\}$

c.  $\{x | x \text{ es un planeta del sistema solar ubicado entre el Sol y los asteroides}\}$

d.  $\emptyset$

e.  $\{\emptyset\}$

**Solución:**

a.  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  tiene 4 elementos, por lo que  $n(A) = 4$ .

b.  $B = \{x | x \text{ es un país de Norteamérica}\} = \{\text{Canadá, Estados Unidos, México}\}$ , así  $n(B) = 3$ .

c.  $C = \{x | x \text{ es un planeta del sistema solar ubicado entre el sol y los asteroides}\} = \{\text{Mercurio, Venus, Tierra}\}$ , por lo tanto  $n(C) = 3$ .

d.  $\emptyset$ , el vacío no tiene elementos y así  $n(\emptyset) = 0$ .

e.  $E = \{\emptyset\}$ , este conjunto tiene un elemento, por lo tanto  $n(E) = 1$ .

En muchos problemas en los que de manera natural aparecen conjuntos, se requiere de un análisis de la información conocida acerca de determinados subconjuntos y con esta información determinar la cardinalidad de otros subconjuntos, o bien el total de elementos bajo estudio.

Existen diferentes técnicas para resolver este tipo de problemas, una de las cuales hace uso de los diagramas de Venn, otra de ellas emplea tablas, en donde se representa la información pertinente y una tercer técnica es por medio de fórmulas para obtener el número de elementos. En esta sección analizaremos cada una de ellas.

**EJEMPLO 2** En una encuesta realizada a jóvenes acerca de sus preferencias con respecto a los deportes, se obtuvo la información siguiente:

- 69 prefieren el fútbol.
- 46 prefieren el béisbol.
- 32 prefieren el rugby.
- 18 prefieren el fútbol y el rugby.
- 9 prefieren el béisbol y el fútbol.
- 12 prefieren el béisbol y el rugby.
- 3 prefieren los tres deportes.
- 19 no les gusta esos tres deportes.

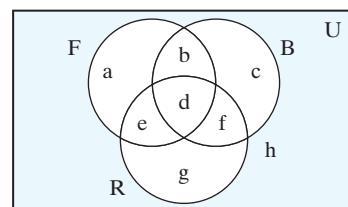
Con base en la información anterior, responda cada una de las preguntas siguientes:

- a. ¿Cuántos jóvenes se encuestaron?
- b. ¿Cuántos jóvenes sólo prefieren el rugby y ninguno de los otros dos?
- c. ¿A cuántos prefieren béisbol y rugby pero no fútbol?
- d. ¿Cuántos jóvenes prefieren exactamente uno de los tres deportes?

**Solución:**

Debe tener precaución, pues no basta con sumar los 8 números dados ya que existen conjuntos traslapados, como se muestra en el diagrama siguiente, en el que:

$$\begin{aligned} U &= \{\text{jóvenes que participaron en la encuesta}\} \\ F &= \{\text{prefieren fútbol}\} \\ B &= \{\text{prefieren béisbol}\} \\ R &= \{\text{prefieren rugby}\} \end{aligned}$$



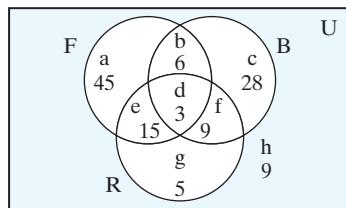
**FIGURA A.7** Regiones en que se dividen tres conjuntos traslapados.

Observe que en el diagrama aparecen 8 sectores, cada uno de los cuales lo podemos expresar con palabras. Por ejemplo, el sector f representa a aquellos jóvenes que prefieren el béisbol y el rugby pero no el fútbol; el sector d representa a los que prefieren los tres deportes, mientras que el sector h a los que no les gusta estos tres deportes.

Observe que F está compuesto de cuatro sectores (a, b, d y f), y por tanto debemos distribuir a los 69 que prefieren el fútbol en estos sectores, pero, ¿cómo? Notando que el sector d es de aquellos que prefieren los tres deportes (3), nos permite encontrar los valores de b, f y e, ya que las regiones b y d componen a los que prefieren fútbol y béisbol

(9); por tanto en b debe haber 6 ( $=9 - 3$ ). De forma análoga, en las regiones d y e debe haber 18, por tanto en e habrá 15 ( $=18 - 3$ ). Y en la región f debe haber 9.

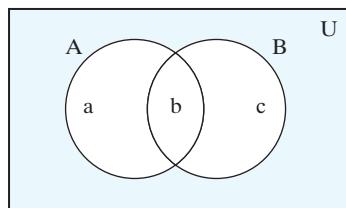
Ahora bien, el conjunto F lo conforman las regiones a, b, d y e. Y de estas sólo falta por saber cuántos debe haber en la región a. Como en F hay 69, tenemos que en a debe haber 45 ( $=69 - 6 - 15 - 3$ ). De forma similar, calculamos el número que debe ir en la región c, que es 28 ( $=46 - 6 - 9 - 3$ ) y en la región g, el cual es 5 ( $=29 - 15 - 3 - 9$ ). El diagrama con el número de jóvenes en cada región se da a continuación.



Con ayuda del diagrama anterior, las respuestas a las preguntas planteadas son fáciles de obtener.

- El total de encuestados es  $45 + 6 + 3 + 15 + 28 + 9 + 5 + 9 = 120$ .
- Los que sólo prefieren el rugby y ninguno de los otros dos, se encuentran en la región g, por tanto hay 5.
- Los que prefieren béisbol y rugby pero no fútbol, están en la región f, así que hay 9.
- Los jóvenes que prefieren exactamente uno de los tres deportes, son los que están en la región b, en la e o en la f, que en total son  $6 + 15 + 9 = 30$ .

Con base en el ejemplo anterior y en la figura siguiente, podemos deducir una fórmula para  $n(A \cup B)$ .



**Figura A.8** Regiones en que se dividen dos conjuntos que se traslanan.

En general,  $n(A \cup B)$  no es igual a  $n(A) + n(B)$ . Primero vea que

$$n(A \cup B) = a + b + c$$

Ahora bien,  $n(A) = a + b$  y  $n(B) = b + c$ , si sumamos lo anterior, habremos sumado dos veces b, así que para obtener  $a + b + c$ , es necesario restar una vez b, que es  $n(A \cap B)$ , así obtenemos

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Con ayuda del diagrama de la figura A.7, podemos deducir una fórmula análoga para  $n(A \cup B \cup C)$ , vea el ejercicio 15.

### EJEMPLO 3 Si $n(A) = 40$ , $n(A \cap B) = 25$ y $n(A \cup B) = 70$ , determine $n(B)$ .

#### Solución:

De la fórmula obtenida antes de este ejemplo, al despejar  $n(B)$ , tenemos

$$n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) - n(A)$$

Sustituyendo

$$n(B) = 70 + 25 - 40 = 55$$

En ocasiones, se muestra la información en forma de tabla como en el ejemplo siguiente, y a partir de esa tabla podemos obtener información valiosa aplicando las ideas básicas de unión e intersección.

- EJEMPLO 4** La tabla siguiente muestra el número de defunciones por grupo de edad y sexo en una muestra de 500 fallecimientos de cierta región del planeta.

Grupo de edad (años)					
	0-10 (D)	11-30 (T)	30-50 (C)	Mayor a 50 (V)	Totales
<b>Hombres (H)</b>	200	20	25	60	305
<b>Mujeres (M)</b>	120	15	20	40	195
<b>Totales</b>	320	35	45	100	500

Con base en la tabla anterior, determine el número de elementos en cada uno de los conjuntos siguientes y describa con palabras cada conjunto.

- a.  $H \cap T$
- b.  $H^c$
- c.  $M \cap (T \cup V)$
- d.  $T^c \cup H^c$

**Solución:**

- a.  $H \cap T$ , representa a los hombres en el grupo de 11 a 30 años.  $n(H \cap T)$  se obtiene en la intersección de la fila H con la columna T, es decir,  $n(H \cap T) = 20$ .
- b.  $H^c$ , representa a los individuos que no son hombres, es decir, a las mujeres.  $H^c$  excluye a la fila H, por lo tanto  $n(H^c) = 195$ , que se lee al final de la fila M.
- c.  $M \cap (T \cup V)$  son las mujeres que están en el rango de 11 a 30 o bien mayores de 50 años. El conjunto  $T \cup V$  incluye las columnas T y V, al intersecciarlas con la fila de M tenemos los números 15 y 40, por tanto,

$$n[M \cap (T \cup V)] = 55$$

- d.  $T^c \cup H^c$ , representa a los individuos que no están en el rango de 11 a 30 o bien aquellos que no son hombres.  $T^c$  excluye la columna de T, es decir se consideran las columnas D, C y V, así,  $n(T^c) = 320 + 45 + 100 = 465$ . Por otro lado, tenemos que  $H^c$  es la fila M, ya que excluye la fila H. Se debe tener cuidado de no contar dos veces las regiones que ya se contabilizaron. La única región que falta por agregar de la fila M es el de las mujeres del rango 11 a 30, que son 15. Por lo tanto,  $n(T^c \cup H^c) = 465 + 15 = 480$ . Observe que del problema 16 de la sección anterior, sabemos que

$$T^c \cup H^c = (T \cap H)^c$$

Y si del total, 500, restamos  $n(T \cap H) = 20$ , obtenemos  $n(T^c \cup H^c) = 500 - 20 = 480$ , como antes.

Para concluir, diremos que si dividimos el número cardinal de cada conjunto entre el número cardinal del universo, obtenemos la fracción que representa el conjunto del total, que siempre será un número entre 0 y 1, incluyendo a ambos. Esta fracción se puede considerar como la probabilidad de que al tomar un elemento al azar del universo, éste elemento pertenezca al conjunto dado. Éste enfoque de la probabilidad se le conoce como enfoque frecuencial.

## Problemas A.4

En los problemas 1 a 6 clasifique cada conjunto como finito o infinito:

1.  $\{3, 6, 9, 12, \dots, 30\}$
2.  $\{x|x \text{ es un número entero menor a } 42\}$
3.  $\{x|x \text{ es un número entero mayor a } 42\}$
4.  $\{x|x \text{ es una persona viva al final del año } 2002\}$
5.  $\{x|x \text{ es un múltiplo entero de } 1000\}$
6.  $\{x|x \text{ es el nombre de un departamento de Colombia}\}$

En los problemas 7 a 12 determine  $n(D)$  para cada conjunto:

7.  $D = \{x|x \text{ es una vocal del abecedario español}\}$
8.  $D = \{x|x \text{ es departamento del Perú}\}$
9.  $D = \{x|x \text{ es un estado de México}\}$
10.  $D = \{x|x \text{ es un entero tal que } x^2 = 3\}$
11.  $D = \{x|x \text{ es un número real tal que } x^2 = 3\}$
12.  $D = \{x|x \text{ es una letra de la palabra "Venezuela"}\}$
13. En una clínica comunitaria se entrevistó a 100 pacientes y se recabó la información siguiente:  
60 iban por problemas respiratorios.  
50 asistían por problemas gastrointestinales.  
20 iban por ambos problemas.  
Emplee un diagrama de Venn para responder las preguntas siguientes:
  - a. ¿Cuántos iban a consulta por problemas que no fuesen respiratorios ni gastrointestinales?
  - b. ¿Cuántos asistieron sólo por problemas respiratorios?

14. En una encuesta realizada a adultos de la región norte del país, con respecto al género de cine que preferían, se obtuvo la información siguiente:

120 prefieren la comedia.  
100 prefieren el género erótico.  
50 les gusta el suspenso.  
10 prefieren los géneros erótico y comedia.  
16 prefieren comedia y suspenso.  
16 prefieren suspenso y erotismo.  
6 les agradan los tres géneros.

Se entrevistó a un total de 290 personas adultas.

Responda las preguntas siguientes:

- a. ¿Cuántos optan por un género que no es de los tres mencionados?
- b. ¿Cuántos prefieren comedia y suspenso pero no cine de erotismo?
- c. ¿Cuántos optan por uno sólo de estos géneros?
- d. ¿Cuántos sólo prefieren la comedia?

15. Con base en la figura A.7 demuestre que

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

16. En la tabla siguiente se presenta la información que se recopiló en una población de jóvenes con respecto a sus preferencias musicales.

Determine el número de elementos de cada uno de los conjuntos siguientes:

- a.  $R \cap (D \cup V)$ .
- b.  $(R \cup B) \cap S$ .
- c.  $T^c \cap S$
- d.  $V^c \cup B^c$ .

Grupo de edad (años)					
	11-14 (C)	15-17 (S)	18-20 (D)	20 a 30 (V)	Totales
<b>Rock (R)</b>	22	25	20	15	82
<b>Tropical (T)</b>	8	4	5	9	26
<b>Balada (B)</b>	4	10	8	20	42
<b>Totales</b>	34	39	33	44	150

## A.5 Repaso

### Términos y símbolos importantes

### Ejemplos

**Sección A.1** Conjunto Elemento Método por extensión y Método por comprensión

**Sección A.2** Conjunto Vacío,  $\emptyset$  Conjunto Universal,  $U, \Omega$  Diagrama de Venn-Euler Subconjunto,  $\subset$  y  $\subseteq$

**Sección A.3** Unión,  $\cup$  Intersección,  $\cap$  Complemento,  $A^c$  Diferencia

**Sección A.4** Número cardinal  $n(A)$ , conjunto finito conjunto infinito.

## Resumen

Un conjunto es una colección bien definida de objetos, llamados los elementos del conjunto. Si un conjunto no tiene elementos se denomina conjunto vacío. El conjunto al cual, se considera que, pertenecen todos los elementos con los que se trabaja, se denomina conjunto universal, o en ocasiones universo del discurso. Un apoyo esquemático para representar conjuntos es el diagrama de Venn-Euler.

Un conjunto A está contenido en otro, B, si todos los elementos de A también pertenece al conjunto B. Escribimos  $A \subseteq B$ , y decimos que A es subconjunto de B.

Dos conjuntos, A y B son iguales, si se cumple  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$ .

Existen varias operaciones básicas entre conjuntos que dan lugar a un nuevo conjunto, éstas son la unión, intersección, complemento y diferencia de conjuntos. La unión de dos conjuntos está formada por

los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos dados. Mientras que la intersección de dos conjuntos está constituida por aquellos elementos que pertenecen a ambos conjuntos. El conjunto complemento de otro está formado por los elementos del conjunto universal pero que no pertenecen al conjunto dado. Y la diferencia de dos conjuntos la constituyen los elementos que pertenecen al primer conjunto pero no al segundo.

El número de elementos que tiene un conjunto, A, se llama cardinalidad del conjunto, se denota con  $n(A)$ .

La cardinalidad de la unión de dos conjuntos,  $n(A \cup B)$ , está dada por

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

El conteo del número de elementos en un conjunto es una parte importante en la comprensión de la probabilidad clásica de eventos.

## Problemas de repaso

*En los problemas 1 y 2 escriba cada conjunto utilizando el método de extensión.*

1. El conjunto de los números enteros positivos que son divisores de 12.
  2. El conjunto de los países de América cuyo nombre de su capital inicia con B.
- En los problemas 3 a 6 decida si está o no bien definido el conjunto. Discuta las respuestas con sus compañeros.*
3. El conjunto de cantantes de éxito.
  4. El conjunto de personas con más de 120 años de edad nacidas el siglo pasado en América.
  5. El conjunto de materias difíciles en la escuela.
  6.  $\{x|x \text{ es un número racional}\}$
  7. Construya un diagrama de Venn que ilustre conjuntos A, B y C que cumplen

$$A \subseteq B \text{ y } A \subseteq C.$$

Hay más de una respuesta correcta.

*Para los problemas 8 a 21 considere*

$$U = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{b, e, d, a\}$$

$$C = \{a, f\}$$

$$D = \{d, e, f\}$$

*Determine cada uno de los conjuntos siguientes.*

- |                               |               |
|-------------------------------|---------------|
| 8. $A \cup D$                 | 9. $B \cap C$ |
| 10. $B \cup (A \cap D)$       | 11. $C^c$     |
| 12. $D \cap (B \cup A^c)$     | 13. $C - A$   |
| 14. $(A \cap C) - (D \cap B)$ | 15. $U - B$   |

*Determine si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera o falsa.*

- |                           |                              |
|---------------------------|------------------------------|
| 16. $\{b\} \in B$         | 17. $A \cap D = \emptyset$   |
| 18. $n(A \cap B) = 1$     | 19. $c \in C$                |
| 20. $n(A^c \cup B^c) = 5$ | 21. $A \cap C^c \subseteq B$ |

*Por medio de un práctico diagrama de Venn, sombre la región que corresponde a cada uno de los conjuntos siguientes:*

- |                           |                                 |
|---------------------------|---------------------------------|
| 22. $D \cup E^c$          | 23. $D^c \cap E$                |
| 24. $E \cap (D^c \cup F)$ | 25. $(E \cup D) - (E \cap F^c)$ |

*El año pasado se recibieron quejas de parte de los usuarios de servicio de televisión de pago. La información de las cuatro principales causas de reporte se resume en la tabla siguiente.*

Compañía	Cambio de programación (P)	Pérdida de señal (S)	Menos canales de los prometidos (M)	Cobro indebido (I)	Totales
<b>TVO (V)</b>	10	15	18	22	65
<b>CAT (C)</b>	20	14	20	18	72
<b>MVCT (T)</b>	15	20	30	15	80
<b>Totales</b>	45	49	68	55	217

**26.** Cuántos de los reportes:

- a. ¿Son de TVO debido a fallas en la señal?
- b. ¿Son de MVCT o TVO debido a cobros indebidos?

Determine el número de elementos de cada uno de los conjuntos siguientes:

**27.**  $(V \cup T) \cap I^c$

**28.**  $V^c \cap P^c$

**29.**  $C^c$

**30.**  $(M \cup V) \cap (S \cup M)$

**31.** En una encuesta realizada a personas que se encontraban de vacaciones en un centro turístico, se obtuvo la información siguiente:

30 prefieren destino de playa.

28 prefieren destino de montaña.

39 prefieren esquiar en nieve.

15 prefieren destino de playa o esquiar en nieve.

13 prefieren destino de playa o de montaña.

11 prefieren destino de montaña o esquiar en nieve.

20 prefieren un destino distinto a los tres anteriores.

Se entrevistó a un total de 86 personas.

Responda las preguntas siguientes:

- a. ¿Cuántos prefieren los tres destinos?
- b. ¿Cuántos prefieren sólo un tipo de destino, de los tres mencionados?
- c. ¿Cuántos optan por exactamente dos de los tres destinos mencionados?
- d. ¿Cuántos sólo prefieren la destino de playa?
- e. ¿Cuántos se deciden por alguno de los tres destinos mencionados?

## Soluciones

### Problemas A.1

1.  $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ .
3.  $\{\text{Praga, París}\}$
5.  $\{\text{Alemania, Argentina, Brasil, Francia, Inglaterra, Italia, Uruguay}\}$
7.  $\{x|x \text{ es un número natural impar menor a } 10\}$
9.  $\{x|x \text{ es un número natural par}\}$

11.  $\{x|x \text{ es un múltiplo positivo de } 7, \text{ menor o igual a } 700\}$
13.  $\{x|x \text{ es un divisor positivo de } 12\}$
15.  $\{x|x \text{ es país de Centroamérica}\}$
17.  $R = \{61, 62, 63, 64, 65, \dots\}$
19.  $T = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$

### Problemas A.2

1.  $\in$
3.  $\notin$
5.  $\notin$
7. Verdadera
9. Verdadera
11. Verdadera

13. Verdadera
17. Verdadera
19. Verdadera
21. Verdadera
23. Falsa

### Problemas A.3

1.  $U$
3.  $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$
5.  $\{6\}$
7.  $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
9.  $\emptyset$
11.  $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

21.  $T^c$ , es el conjunto de estudiantes que no tiene automóvil.
23.  $H \cap F^c$ , es el conjunto de estudiantes hombres que no fuman.
25.  $H - F$ , es el conjunto de estudiantes hombres que no fuman. Igual que el problema 23.
27. Se debe cumplir que  $A \subseteq B$
29. Se debe cumplir que  $A \cap B = \emptyset$

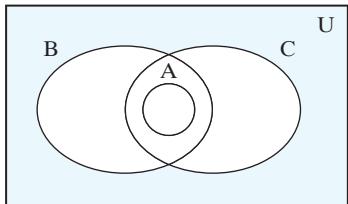
### Problemas A.4

1. Finito
3. Infinito
5. Infinito
7.  $n(D) = 5$

9.  $n(D) = 31$
11.  $n(D) = 2$
13. a. 10, b. 40

## Respuestas a los problemas de repaso

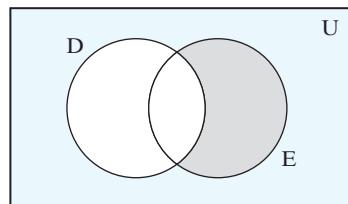
1.  $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
3. No está bien definido
5. No está bien definido
- 7.



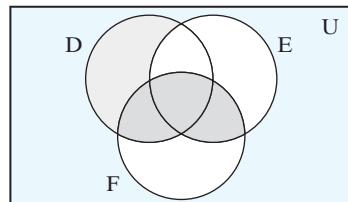
Hay más respuestas correctas posibles.

9. {a}
11. {b, c, d, e}
13. {f}
15. {c, f}
17. Verdadera
19. Falsa
21. Falsa

23.



25.



27. 108

29. 72

31. a. 8, b. 43, c. 15, d. 10, e. 66.



## APÉNDICE B

### Tablas de interés compuesto

$r = 0.005$				
$n$	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\bar{n}r}$	$s_{\bar{n}r}$
1	1.005000	0.995025	0.995025	1.000000
2	1.010025	0.990075	1.985099	2.005000
3	1.015075	0.985149	2.970248	3.015025
4	1.020151	0.980248	3.950496	4.030100
5	1.025251	0.975371	4.925866	5.050251
6	1.030378	0.970518	5.896384	6.075502
7	1.035529	0.965690	6.862074	7.105879
8	1.040707	0.960885	7.822959	8.141409
9	1.045911	0.956105	8.779064	9.182116
10	1.051140	0.951348	9.730412	10.228026
11	1.056396	0.946615	10.677027	11.279167
12	1.061678	0.941905	11.618932	12.335562
13	1.066986	0.937219	12.556151	13.397240
14	1.072321	0.932556	13.488708	14.464226
15	1.077683	0.927917	14.416625	15.536548
16	1.083071	0.923300	15.339925	16.614230
17	1.088487	0.918707	16.258632	17.697301
18	1.093929	0.914136	17.172768	18.785788
19	1.099399	0.909588	18.082356	19.879717
20	1.104896	0.905063	18.987419	20.979115
21	1.110420	0.900560	19.887979	22.084011
22	1.115972	0.896080	20.784059	23.194431
23	1.121552	0.891622	21.675681	24.310403
24	1.127160	0.887186	22.562866	25.431955
25	1.132796	0.882772	23.445638	26.559115
26	1.138460	0.878380	24.324018	27.691911
27	1.144152	0.874010	25.198028	28.830370
28	1.149873	0.869662	26.067689	29.974522
29	1.155622	0.865335	26.933024	31.124395
30	1.161400	0.861030	27.794054	32.280017
31	1.167207	0.856746	28.650800	33.441417
32	1.173043	0.852484	29.503284	34.608624
33	1.178908	0.848242	30.351526	35.781667
34	1.184803	0.844022	31.195548	36.960575
35	1.190727	0.839823	32.035371	38.145378
36	1.196681	0.835645	32.871016	39.336105
37	1.202664	0.831487	33.702504	40.532785
38	1.208677	0.827351	34.529854	41.735449
39	1.214721	0.823235	35.353089	42.944127
40	1.220794	0.819139	36.172228	44.158847
41	1.226898	0.815064	36.987291	45.379642
42	1.233033	0.811009	37.798300	46.606540
43	1.239198	0.806974	38.605274	47.839572
44	1.245394	0.802959	39.408232	49.078770
45	1.251621	0.798964	40.207196	50.324164
46	1.257879	0.794989	41.002185	51.575785
47	1.264168	0.791034	41.793219	52.833664
48	1.270489	0.787098	42.580318	54.097832
49	1.276842	0.783182	43.363500	55.368321
50	1.283226	0.779286	44.142786	56.645163

$r = 0.0075$				
$n$	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\bar{n}r}$	$s_{\bar{n}r}$
1	1.007500	0.992556	0.992556	1.000000
2	1.015056	0.985167	1.977723	2.007500
3	1.022669	0.977833	2.955556	3.022556
4	1.030339	0.970554	3.926110	4.045225
5	1.038067	0.963329	4.889440	5.075565
6	1.045852	0.956158	5.845598	6.113631
7	1.053696	0.949040	6.794638	7.159484
8	1.061599	0.941975	7.736613	8.213180
9	1.069561	0.934963	8.671576	9.274779
10	1.077583	0.928003	9.599580	10.344339
11	1.085664	0.921095	10.520675	11.421922
12	1.093807	0.914238	11.434913	12.507586
13	1.102010	0.907432	12.342345	13.601393
14	1.110276	0.900677	13.243022	14.703404
15	1.118603	0.893973	14.136995	15.813679
16	1.126992	0.887318	15.024313	16.932282
17	1.135445	0.880712	15.905025	18.059274
18	1.143960	0.874156	16.779181	19.194718
19	1.152540	0.867649	17.646830	20.338679
20	1.161184	0.861190	18.508020	21.491219
21	1.169893	0.854779	19.362799	22.652403
22	1.178667	0.848416	20.211215	23.822296
23	1.187507	0.842100	21.053315	25.000963
24	1.196414	0.835831	21.889146	26.188471
25	1.205387	0.829609	22.718755	27.384884
26	1.214427	0.823434	23.542189	28.590271
27	1.223535	0.817304	24.359493	29.804698
28	1.232712	0.811220	25.170713	31.028233
29	1.241957	0.805181	25.975893	32.260945
30	1.251272	0.799187	26.775080	33.502902
31	1.260656	0.793238	27.568318	34.754174
32	1.270111	0.787333	28.355650	36.014830
33	1.279637	0.781472	29.137122	37.284941
34	1.289234	0.775654	29.912776	38.564578
35	1.298904	0.769880	30.682656	39.853813
36	1.308645	0.764149	31.446805	41.152716
37	1.318460	0.758461	32.205266	42.461361
38	1.328349	0.752814	32.958080	43.779822
39	1.338311	0.747210	33.705290	45.108170
40	1.348349	0.741648	34.446938	46.446482
41	1.358461	0.736127	35.183065	47.794830
42	1.368650	0.730647	35.913713	49.153291
43	1.378915	0.725208	36.638921	50.521941
44	1.389256	0.719810	37.358730	51.900856
45	1.399676	0.714451	38.073181	53.290112
46	1.410173	0.709133	38.782314	54.689788
47	1.420750	0.703854	39.486168	56.099961
48	1.431405	0.698614	40.184782	57.520711
49	1.442141	0.693414	40.878195	58.952116
50	1.452957	0.688252	41.566447	60.394257

$r = 0.01$				
$n$	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\bar{m}r}$	$s_{\bar{m}r}$
1	1.010000	0.990099	0.990099	1.000000
2	1.020100	0.980296	1.970395	2.010000
3	1.030301	0.970590	2.940985	3.030100
4	1.040604	0.960980	3.901966	4.060401
5	1.051010	0.951466	4.853431	5.101005
6	1.061520	0.942045	5.795476	6.152015
7	1.072135	0.932718	6.728195	7.213535
8	1.082857	0.923483	7.651678	8.285671
9	1.093685	0.914340	8.566018	9.368527
10	1.104622	0.905287	9.471305	10.462213
11	1.115668	0.896324	10.367628	11.566835
12	1.126825	0.887449	11.255077	12.682503
13	1.138093	0.878663	12.133740	13.809328
14	1.149474	0.869963	13.003703	14.947421
15	1.160969	0.861349	13.865053	16.096896
16	1.172579	0.852821	14.717874	17.257864
17	1.184304	0.844377	15.562251	18.430443
18	1.196147	0.836017	16.398269	19.614748
19	1.208109	0.827740	17.226008	20.810895
20	1.220190	0.819544	18.045553	22.019004
21	1.232392	0.811430	18.856983	23.239194
22	1.244716	0.803396	19.660379	24.471586
23	1.257163	0.795442	20.455821	25.716302
24	1.269735	0.787566	21.243387	26.973465
25	1.282432	0.779768	22.023156	28.243200
26	1.295256	0.772048	22.795204	29.525631
27	1.308209	0.764404	23.559608	30.820888
28	1.321291	0.756836	24.316443	32.129097
29	1.334504	0.749342	25.065785	33.450388
30	1.347849	0.741923	25.807708	34.784892
31	1.361327	0.734577	26.542285	36.132740
32	1.374941	0.727304	27.269589	37.494068
33	1.388690	0.720103	27.989693	38.869009
34	1.402577	0.712973	28.702666	40.257699
35	1.416603	0.705914	29.408580	41.660276
36	1.430769	0.698925	30.107505	43.076878
37	1.445076	0.692005	30.799510	44.507647
38	1.459527	0.685153	31.484663	45.952724
39	1.474123	0.678370	32.163033	47.412251
40	1.488864	0.671653	32.834686	48.886373
41	1.503752	0.665003	33.499689	50.375237
42	1.518790	0.658419	34.158108	51.878989
43	1.533978	0.651900	34.810008	53.397779
44	1.549318	0.645445	35.455454	54.931757
45	1.564811	0.639055	36.094508	56.481075
46	1.580459	0.632728	36.727236	58.045885
47	1.596263	0.626463	37.353699	59.626344
48	1.612226	0.620260	37.973959	61.222608
49	1.628348	0.614119	38.588079	62.834834
50	1.644632	0.608039	39.196118	64.463182

$r = 0.0125$				
$n$	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\bar{n}r}$	$s_{\bar{n}r}$
1	1.012500	0.987654	0.987654	1.000000
2	1.025156	0.975461	1.963115	2.012500
3	1.037971	0.963418	2.926534	3.037656
4	1.050945	0.951524	3.878058	4.075627
5	1.064082	0.939777	4.817835	5.126572
6	1.077383	0.928175	5.746010	6.190654
7	1.090850	0.916716	6.662726	7.268038
8	1.104486	0.905398	7.568124	8.358888
9	1.118292	0.894221	8.462345	9.463374
10	1.132271	0.883181	9.345526	10.581666
11	1.146424	0.872277	10.217803	11.713937
12	1.160755	0.861509	11.079312	12.860361
13	1.175264	0.850873	11.930185	14.021116
14	1.189955	0.840368	12.770553	15.196380
15	1.204829	0.829993	13.600546	16.386335
16	1.219890	0.819746	14.420292	17.591164
17	1.235138	0.809626	15.229918	18.811053
18	1.250577	0.799631	16.029549	20.046192
19	1.266210	0.789759	16.819308	21.296769
20	1.282037	0.780009	17.599316	22.562979
21	1.298063	0.770379	18.369695	23.845016
22	1.314288	0.760868	19.130563	25.143078
23	1.330717	0.751475	19.882037	26.457367
24	1.347351	0.742197	20.624235	27.788084
25	1.364193	0.733034	21.357269	29.135435
26	1.381245	0.723984	22.081253	30.499628
27	1.398511	0.715046	22.796299	31.880873
28	1.415992	0.706219	23.502518	33.279384
29	1.433692	0.697500	24.200018	34.695377
30	1.451613	0.688889	24.888906	36.129069
31	1.469759	0.680384	25.569290	37.580682
32	1.488131	0.671984	26.241274	39.050441
33	1.506732	0.663688	26.904962	40.538571
34	1.525566	0.655494	27.560456	42.045303
35	1.544636	0.647402	28.207858	43.570870
36	1.563944	0.639409	28.847267	45.115505
37	1.583493	0.631515	29.478783	46.679449
38	1.603287	0.623719	30.102501	48.262942
39	1.623328	0.616019	30.718520	49.866229
40	1.643619	0.608413	31.326933	51.489557
41	1.664165	0.600902	31.927835	53.133177
42	1.684967	0.593484	32.521319	54.797341
43	1.706029	0.586157	33.107475	56.482308
44	1.727354	0.578920	33.686395	58.188337
45	1.748946	0.571773	34.258168	59.915691
46	1.770808	0.564714	34.822882	61.664637
47	1.792943	0.557742	35.380624	63.435445
48	1.815355	0.550856	35.931481	65.228388
49	1.838047	0.544056	36.475537	67.043743
50	1.861022	0.537339	37.012876	68.881790

$r = 0.015$				
$n$	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\bar{m}r}$	$s_{\bar{m}r}$
1	1.015000	0.985222	0.985222	1.000000
2	1.030225	0.970662	1.955883	2.015000
3	1.045678	0.956317	2.912200	3.045225
4	1.061364	0.942184	3.854385	4.090903
5	1.077284	0.928260	4.782645	5.152267
6	1.093443	0.914542	5.697187	6.229551
7	1.109845	0.901027	6.598214	7.322994
8	1.126493	0.887711	7.485925	8.432839
9	1.143390	0.874592	8.360517	9.559332
10	1.160541	0.861667	9.222185	10.702722
11	1.177949	0.848933	10.071118	11.863262
12	1.195618	0.836387	10.907505	13.041211
13	1.213552	0.824027	11.731532	14.236830
14	1.231756	0.811849	12.543382	15.450382
15	1.250232	0.799852	13.343233	16.682138
16	1.268986	0.788031	14.131264	17.932370
17	1.288020	0.776385	14.907649	19.201355
18	1.307341	0.764912	15.672561	20.489376
19	1.326951	0.753607	16.426168	21.796716
20	1.346855	0.742470	17.168639	23.123667
21	1.367058	0.731498	17.900137	24.470522
22	1.387564	0.720688	18.620824	25.837580
23	1.408377	0.710037	19.330861	27.225144
24	1.429503	0.699544	20.030405	28.633521
25	1.450945	0.689206	20.719611	30.063024
26	1.472710	0.679021	21.398632	31.513969
27	1.494800	0.668986	22.067617	32.986678
28	1.517222	0.659099	22.726717	34.481479
29	1.539981	0.649359	23.376076	35.998701
30	1.563080	0.639762	24.015838	37.538681
31	1.586526	0.630308	24.646146	39.101762
32	1.610324	0.620993	25.267139	40.688288
33	1.634479	0.611816	25.878954	42.298612
34	1.658996	0.602774	26.481728	43.933092
35	1.683881	0.593866	27.075595	45.592088
36	1.709140	0.585090	27.660684	47.275969
37	1.734777	0.576443	28.237127	48.985109
38	1.760798	0.567924	28.805052	50.719885
39	1.787210	0.559531	29.364583	52.480684
40	1.814018	0.551262	29.915845	54.267894
41	1.841229	0.543116	30.458961	56.081912
42	1.868847	0.535089	30.994050	57.923141
43	1.896880	0.527182	31.521232	59.791988
44	1.925333	0.519391	32.040622	61.688868
45	1.954213	0.511715	32.552337	63.614201
46	1.983526	0.504153	33.056490	65.568414
47	2.013279	0.496702	33.553192	67.551940
48	2.043478	0.489362	34.042554	69.565219
49	2.074130	0.482130	34.524683	71.608698
50	2.105242	0.475005	34.999688	73.682828

$r = 0.02$				
$n$	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\bar{n}r}$	$s_{\bar{n}r}$
1	1.020000	0.980392	0.980392	1.000000
2	1.040400	0.961169	1.941561	2.020000
3	1.061208	0.942322	2.883883	3.060400
4	1.082432	0.923845	3.807729	4.121608
5	1.104081	0.905731	4.713460	5.204040
6	1.126162	0.887971	5.601431	6.308121
7	1.148686	0.870560	6.471991	7.434283
8	1.171659	0.853490	7.325481	8.582969
9	1.195093	0.836755	8.162237	9.754628
10	1.218994	0.820348	8.982585	10.949721
11	1.243374	0.804263	9.786848	12.168715
12	1.268242	0.788493	10.575341	13.412090
13	1.293607	0.773033	11.348374	14.680332
14	1.319479	0.757875	12.106249	15.973938
15	1.345868	0.743015	12.849264	17.293417
16	1.372786	0.728446	13.577709	18.639285
17	1.400241	0.714163	14.291872	20.012071
18	1.428246	0.700159	14.992031	21.412312
19	1.456811	0.686431	15.678462	22.840559
20	1.485947	0.672971	16.351433	24.297370
21	1.515666	0.659776	17.011209	25.783317
22	1.545980	0.646839	17.658048	27.298984
23	1.576899	0.634156	18.292204	28.844963
24	1.608437	0.621721	18.913926	30.421862
25	1.640606	0.609531	19.523456	32.030300
26	1.673418	0.597579	20.121036	33.670906
27	1.706886	0.585862	20.706898	35.344324
28	1.741024	0.574375	21.281272	37.051210
29	1.775845	0.563112	21.844385	38.792235
30	1.811362	0.552071	22.396456	40.568079
31	1.847589	0.541246	22.937702	42.379441
32	1.884541	0.530633	23.468335	44.227030
33	1.922231	0.520229	23.988564	46.111570
34	1.960676	0.510028	24.498592	48.033802
35	1.999890	0.500028	24.998619	49.994478
36	2.039887	0.490223	25.488842	51.994367
37	2.080685	0.480611	25.969453	54.034255
38	2.122299	0.471187	26.440641	56.114940
39	2.164745	0.461948	26.902589	58.237238
40	2.208040	0.452890	27.355479	60.401983
41	2.252200	0.444010	27.799489	62.610023
42	2.297244	0.435304	28.234794	64.862223
43	2.343189	0.426769	28.661562	67.159468
44	2.390053	0.418401	29.079963	69.502657
45	2.437854	0.410197	29.490160	71.892710
46	2.486611	0.402154	29.892314	74.330564
47	2.536344	0.394268	30.286582	76.817176
48	2.587070	0.386538	30.673120	79.353519
49	2.638812	0.378958	31.052078	81.940590
50	2.691588	0.371528	31.423606	84.579401

$r = 0.025$				
$n$	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\bar{m}r}$	$s_{\bar{m}r}$
1	1.025000	0.975610	0.975610	1.000000
2	1.050625	0.951814	1.927424	2.025000
3	1.076891	0.928599	2.856024	3.075625
4	1.103813	0.905951	3.761974	4.152516
5	1.131408	0.883854	4.645828	5.256329
6	1.159693	0.862297	5.508125	6.387737
7	1.188686	0.841265	6.349391	7.547430
8	1.218403	0.820747	7.170137	8.736116
9	1.248863	0.800728	7.970866	9.954519
10	1.280085	0.781198	8.752064	11.203382
11	1.312087	0.762145	9.514209	12.483466
12	1.344889	0.743556	10.257765	13.795553
13	1.378511	0.725420	10.983185	15.140442
14	1.412974	0.707727	11.690912	16.518953
15	1.448298	0.690466	12.381378	17.931927
16	1.484506	0.673625	13.055003	19.380225
17	1.521618	0.657195	13.712198	20.864730
18	1.559659	0.641166	14.353364	22.386349
19	1.598650	0.625528	14.978891	23.946007
20	1.638616	0.610271	15.589162	25.544658
21	1.679582	0.595386	16.184549	27.183274
22	1.721571	0.580865	16.765413	28.862856
23	1.764611	0.566697	17.332110	30.584427
24	1.808726	0.552875	17.884986	32.349038
25	1.853944	0.539391	18.424376	34.157764
26	1.900293	0.526235	18.950611	36.011708
27	1.947800	0.513400	19.464011	37.912001
28	1.996495	0.500878	19.964889	39.859801
29	2.046407	0.488661	20.453550	41.856296
30	2.097568	0.476743	20.930293	43.902703
31	2.150007	0.465115	21.395407	46.000271
32	2.203757	0.453771	21.849178	48.150278
33	2.258851	0.442703	22.291881	50.354034
34	2.315322	0.431905	22.723786	52.612885
35	2.373205	0.421371	23.145157	54.928207
36	2.432535	0.411094	23.556251	57.301413
37	2.493349	0.401067	23.957318	59.733948
38	2.555682	0.391285	24.348603	62.227297
39	2.619574	0.381741	24.730344	64.782979
40	2.685064	0.372431	25.102775	67.402554
41	2.752190	0.363347	25.466122	70.087617
42	2.820995	0.354485	25.820607	72.839808
43	2.891520	0.345839	26.166446	75.660803
44	2.963808	0.337404	26.503849	78.552323
45	3.037903	0.329174	26.833024	81.516131
46	3.113851	0.321146	27.154170	84.554034
47	3.191697	0.313313	27.467483	87.667885
48	3.271490	0.305671	27.773154	90.859582
49	3.353277	0.298216	28.071369	94.131072
50	3.437109	0.290942	28.362312	97.484349

$r = 0.03$				
$n$	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\bar{n}r}$	$s_{\bar{n}r}$
1	1.030000	0.970874	0.970874	1.000000
2	1.060900	0.942596	1.913470	2.030000
3	1.092727	0.915142	2.828611	3.090900
4	1.125509	0.888487	3.717098	4.183627
5	1.159274	0.862609	4.579707	5.309136
6	1.194052	0.837484	5.417191	6.468410
7	1.229874	0.813092	6.230283	7.662462
8	1.266770	0.789409	7.019692	8.892336
9	1.304773	0.766417	7.786109	10.159106
10	1.343916	0.744094	8.530203	11.463879
11	1.384234	0.722421	9.252624	12.807796
12	1.425761	0.701380	9.954004	14.192030
13	1.468534	0.680951	10.634955	15.617790
14	1.512590	0.661118	11.296073	17.086324
15	1.557967	0.641862	11.937935	18.598914
16	1.604706	0.623167	12.561102	20.156881
17	1.652848	0.605016	13.166118	21.761588
18	1.702433	0.587395	13.753513	23.414435
19	1.753506	0.570286	14.323799	25.116868
20	1.806111	0.553676	14.877475	26.870374
21	1.860295	0.537549	15.415024	28.676486
22	1.916103	0.521893	15.936917	30.536780
23	1.973587	0.506692	16.443608	32.452884
24	2.032794	0.491934	16.935542	34.426470
25	2.093778	0.477606	17.413148	36.459264
26	2.156591	0.463695	17.876842	38.553042
27	2.221289	0.450189	18.327031	40.709634
28	2.287928	0.437077	18.764108	42.930923
29	2.356566	0.424346	19.188455	45.218850
30	2.427262	0.411987	19.600441	47.575416
31	2.500080	0.399987	20.000428	50.002678
32	2.575083	0.388337	20.388766	52.502759
33	2.652335	0.377026	20.765792	55.077841
34	2.731905	0.366045	21.131837	57.730177
35	2.813862	0.355383	21.487220	60.462082
36	2.898278	0.345032	21.832252	63.275944
37	2.985227	0.334983	22.167235	66.174223
38	3.074783	0.325226	22.492462	69.159449
39	3.167027	0.315754	22.808215	72.234233
40	3.262038	0.306557	23.114772	75.401260
41	3.359899	0.297628	23.412400	78.663298
42	3.460696	0.288959	23.701359	82.023196
43	3.564517	0.280543	23.981902	85.483892
44	3.671452	0.272372	24.254274	89.048409
45	3.781596	0.264439	24.518713	92.719861
46	3.895044	0.256737	24.775449	96.501457
47	4.011895	0.249259	25.024708	100.396501
48	4.132252	0.241999	25.266707	104.408396
49	4.256219	0.234950	25.501657	108.540648
50	4.383906	0.228107	25.729764	112.796867

$r = 0.035$				
$n$	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\bar{n}r}$	$s_{\bar{n}r}$
1	1.035000	0.966184	0.966184	1.000000
2	1.071225	0.933511	1.899694	2.035000
3	1.108718	0.901943	2.801637	3.106225
4	1.147523	0.871442	3.673079	4.214943
5	1.187686	0.841973	4.515052	5.362466
6	1.229255	0.813501	5.328553	6.550152
7	1.272279	0.785991	6.114544	7.779408
8	1.316809	0.759412	6.873956	9.051687
9	1.362897	0.733731	7.607687	10.368496
10	1.410599	0.708919	8.316605	11.731393
11	1.459970	0.684946	9.001551	13.141992
12	1.511069	0.661783	9.663334	14.601962
13	1.563956	0.639404	10.302738	16.113030
14	1.618695	0.617782	10.920520	17.676986
15	1.675349	0.596891	11.517411	19.295681
16	1.733986	0.576706	12.094117	20.971030
17	1.794676	0.557204	12.651321	22.705016
18	1.857489	0.538361	13.189682	24.499691
19	1.922501	0.520156	13.709837	26.357180
20	1.989789	0.502566	14.212403	28.279682
21	2.059431	0.485571	14.697974	30.269471
22	2.131512	0.469151	15.167125	32.328902
23	2.206114	0.453286	15.620410	34.460414
24	2.283328	0.437957	16.058368	36.666528
25	2.363245	0.423147	16.481515	38.949857
26	2.445959	0.408838	16.890352	41.313102
27	2.531567	0.395012	17.285365	43.759060
28	2.620172	0.381654	17.667019	46.290627
29	2.711878	0.368748	18.035767	48.910799
30	2.806794	0.356278	18.392045	51.622677
31	2.905031	0.344230	18.736276	54.429471
32	3.006708	0.332590	19.068865	57.334502
33	3.111942	0.321343	19.390208	60.341210
34	3.220860	0.310476	19.700684	63.453152
35	3.333590	0.299977	20.000661	66.674013
36	3.450266	0.289833	20.290494	70.007603
37	3.571025	0.280032	20.570525	73.457869
38	3.696011	0.270562	20.841087	77.028895
39	3.825372	0.261413	21.102500	80.724906
40	3.959260	0.252572	21.355072	84.550278
41	4.097834	0.244031	21.599104	88.509537
42	4.241258	0.235779	21.834883	92.607371
43	4.389702	0.227806	22.062689	96.848629
44	4.543342	0.220102	22.282791	101.238331
45	4.702359	0.212659	22.495450	105.781673
46	4.866941	0.205468	22.700918	110.484031
47	5.037284	0.198520	22.899438	115.350973
48	5.213589	0.191806	23.091244	120.388257
49	5.396065	0.185320	23.276564	125.601846
50	5.584927	0.179053	23.455618	130.997910

$r = 0.04$				
$n$	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\bar{n}r}$	$s_{\bar{n}r}$
1	1.040000	0.961538	0.961538	1.000000
2	1.081600	0.924556	1.886095	2.040000
3	1.124864	0.888996	2.775091	3.121600
4	1.169859	0.854804	3.629895	4.246464
5	1.216653	0.821927	4.451822	5.416323
6	1.265319	0.790315	5.242137	6.632975
7	1.315932	0.759918	6.002055	7.898294
8	1.368569	0.730690	6.732745	9.214226
9	1.423312	0.702587	7.435332	10.582795
10	1.480244	0.675564	8.110896	12.006107
11	1.539454	0.649581	8.760477	13.486351
12	1.601032	0.624597	9.385074	15.025805
13	1.665074	0.600574	9.985648	16.626838
14	1.731676	0.577475	10.563123	18.291911
15	1.800944	0.555265	11.118387	20.023588
16	1.872981	0.533908	11.652296	21.824531
17	1.947900	0.513373	12.165669	23.697512
18	2.025817	0.493628	12.659297	25.645413
19	2.106849	0.474642	13.133939	27.671229
20	2.191123	0.456387	13.590326	29.778079
21	2.278768	0.438834	14.029160	31.969202
22	2.369919	0.421955	14.451115	34.247970
23	2.464716	0.405726	14.856842	36.617889
24	2.563304	0.390121	15.246963	39.082604
25	2.665836	0.375117	15.622080	41.645908
26	2.772470	0.360689	15.982769	44.311745
27	2.883369	0.346817	16.329586	47.084214
28	2.998703	0.333477	16.663063	49.967583
29	3.118651	0.320651	16.983715	52.966286
30	3.243398	0.308319	17.292033	56.084938
31	3.373133	0.296460	17.588494	59.328335
32	3.508059	0.285058	17.873551	62.701469
33	3.648381	0.274094	18.147646	66.209527
34	3.794316	0.263552	18.411198	69.857909
35	3.946089	0.253415	18.664613	73.652225
36	4.103933	0.243669	18.908282	77.598314
37	4.268090	0.234297	19.142579	81.702246
38	4.438813	0.225285	19.367864	85.970336
39	4.616366	0.216621	19.584485	90.409150
40	4.801021	0.208289	19.792774	95.025516
41	4.993061	0.200278	19.993052	99.826536
42	5.192784	0.192575	20.185627	104.819598
43	5.400495	0.185168	20.370795	110.012382
44	5.616515	0.178046	20.548841	115.412877
45	5.841176	0.171198	20.720040	121.029392
46	6.074823	0.164614	20.884654	126.870568
47	6.317816	0.158283	21.042936	132.945390
48	6.570528	0.152195	21.195131	139.263206
49	6.833349	0.146341	21.341472	145.833734
50	7.106683	0.140713	21.482185	152.667084

$r = 0.05$				
$n$	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\bar{m}r}$	$s_{\bar{m}r}$
1	1.050000	0.952381	0.952381	1.000000
2	1.102500	0.907029	1.859410	2.050000
3	1.157625	0.863838	2.723248	3.152500
4	1.215506	0.822702	3.545951	4.310125
5	1.276282	0.783526	4.329477	5.525631
6	1.340096	0.746215	5.075692	6.801913
7	1.407100	0.710681	5.786373	8.142008
8	1.477455	0.676839	6.463213	9.549109
9	1.551328	0.644609	7.107822	11.026564
10	1.628895	0.613913	7.721735	12.577893
11	1.710339	0.584679	8.306414	14.206787
12	1.795856	0.556837	8.863252	15.917127
13	1.885649	0.530321	9.393573	17.712983
14	1.979932	0.505068	9.898641	19.598632
15	2.078928	0.481017	10.379658	21.578564
16	2.182875	0.458112	10.837770	23.657492
17	2.292018	0.436297	11.274066	25.840366
18	2.406619	0.415521	11.689587	28.132385
19	2.526950	0.395734	12.085321	30.539004
20	2.653298	0.376889	12.462210	33.065954
21	2.785963	0.358942	12.821153	35.719252
22	2.925261	0.341850	13.163003	38.505214
23	3.071524	0.325571	13.488574	41.430475
24	3.225100	0.310068	13.798642	44.501999
25	3.386355	0.295303	14.093945	47.727099
26	3.555673	0.281241	14.375185	51.113454
27	3.733456	0.267848	14.643034	54.669126
28	3.920129	0.255094	14.898127	58.402583
29	4.116136	0.242946	15.141074	62.322712
30	4.321942	0.231377	15.372451	66.438848
31	4.538039	0.220359	15.592811	70.760790
32	4.764941	0.209866	15.802677	75.298829
33	5.003189	0.199873	16.002549	80.063771
34	5.253348	0.190355	16.192904	85.066959
35	5.516015	0.181290	16.374194	90.320307
36	5.791816	0.172657	16.546852	95.836323
37	6.081407	0.164436	16.711287	101.628139
38	6.385477	0.156605	16.867893	107.709546
39	6.704751	0.149148	17.017041	114.095023
40	7.039989	0.142046	17.159086	120.799774
41	7.391988	0.135282	17.294368	127.839763
42	7.761588	0.128840	17.423208	135.231751
43	8.149667	0.122704	17.545912	142.993339
44	8.557150	0.116861	17.662773	151.143006
45	8.985008	0.111297	17.774070	159.700156
46	9.434258	0.105997	17.880066	168.685164
47	9.905971	0.100949	17.981016	178.119422
48	10.401270	0.096142	18.077158	188.025393
49	10.921333	0.091564	18.168722	198.426663
50	11.467400	0.087204	18.255925	209.347996

$r = 0.06$				
$n$	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\bar{n}r}$	$s_{\bar{n}r}$
1	1.060000	0.943396	0.943396	1.000000
2	1.123600	0.889996	1.833393	2.060000
3	1.191016	0.839619	2.673012	3.183600
4	1.262477	0.792094	3.465106	4.374616
5	1.338226	0.747258	4.212364	5.637093
6	1.418519	0.704961	4.917324	6.975319
7	1.503630	0.665057	5.582381	8.393838
8	1.593848	0.627412	6.209794	9.897468
9	1.689479	0.591898	6.801692	11.491316
10	1.790848	0.558395	7.360087	13.180795
11	1.898299	0.526788	7.886875	14.971643
12	2.012196	0.496969	8.383844	16.869941
13	2.132928	0.468839	8.852683	18.882138
14	2.260904	0.442301	9.294984	21.015066
15	2.396558	0.417265	9.712249	23.275970
16	2.540352	0.393646	10.105895	25.672528
17	2.692773	0.371364	10.477260	28.212880
18	2.854339	0.350344	10.827603	30.905653
19	3.025600	0.330513	11.158116	33.759992
20	3.207135	0.311805	11.469921	36.785591
21	3.399564	0.294155	11.764077	39.992727
22	3.603537	0.277505	12.041582	43.392290
23	3.819750	0.261797	12.303379	46.995828
24	4.048935	0.246979	12.550358	50.815577
25	4.291871	0.232999	12.783356	54.864512
26	4.549383	0.219810	13.003166	59.156383
27	4.822346	0.207368	13.210534	63.705766
28	5.111687	0.195630	13.406164	68.528112
29	5.418388	0.184557	13.590721	73.639798
30	5.743491	0.174110	13.764831	79.058186
31	6.088101	0.164255	13.929086	84.801677
32	6.453387	0.154957	14.084043	90.889778
33	6.840590	0.146186	14.230230	97.343165
34	7.251025	0.137912	14.368141	104.183755
35	7.686087	0.130105	14.498246	111.434780
36	8.147252	0.122741	14.620987	119.120867
37	8.636087	0.115793	14.736780	127.268119
38	9.154252	0.109239	14.846019	135.904206
39	9.703507	0.103056	14.949075	145.058458
40	10.285718	0.097222	15.046297	154.761966
41	10.902861	0.091719	15.138016	165.047684
42	11.557033	0.086527	15.224543	175.950545
43	12.250455	0.081630	15.306173	187.507577
44	12.985482	0.077009	15.383182	199.758032
45	13.764611	0.072650	15.455832	212.743514
46	14.590487	0.068538	15.524370	226.508125
47	15.465917	0.064658	15.589028	241.098612
48	16.393872	0.060998	15.650027	256.564529
49	17.377504	0.057546	15.707572	272.958401
50	18.420154	0.054288	15.761861	290.335905

$r = 0.07$				
$n$	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\bar{m}r}$	$s_{\bar{m}r}$
1	1.070000	0.934579	0.934579	1.000000
2	1.144900	0.873439	1.808018	2.070000
3	1.225043	0.816298	2.624316	3.214900
4	1.310796	0.762895	3.387211	4.439943
5	1.402552	0.712986	4.100197	5.750739
6	1.500730	0.666342	4.766540	7.153291
7	1.605781	0.622750	5.389289	8.654021
8	1.718186	0.582009	5.971299	10.259803
9	1.838459	0.543934	6.515232	11.977989
10	1.967151	0.508349	7.023582	13.816448
11	2.104852	0.475093	7.498674	15.783599
12	2.252192	0.444012	7.942686	17.888451
13	2.409845	0.414964	8.357651	20.140643
14	2.578534	0.387817	8.745468	22.550488
15	2.759032	0.362446	9.107914	25.129022
16	2.952164	0.338735	9.446649	27.888054
17	3.158815	0.316574	9.763223	30.840217
18	3.379932	0.295864	10.059087	33.999033
19	3.616528	0.276508	10.335595	37.378965
20	3.869684	0.258419	10.594014	40.995492
21	4.140562	0.241513	10.835527	44.865177
22	4.430402	0.225713	11.061240	49.005739
23	4.740530	0.210947	11.272187	53.436141
24	5.072367	0.197147	11.469334	58.176671
25	5.427433	0.184249	11.653583	63.249038
26	5.807353	0.172195	11.825779	68.676470
27	6.213868	0.160930	11.986709	74.483823
28	6.648838	0.150402	12.137111	80.697691
29	7.114257	0.140563	12.277674	87.346529
30	7.612255	0.131367	12.409041	94.460786
31	8.145113	0.122773	12.531814	102.073041
32	8.715271	0.114741	12.646555	110.218154
33	9.325340	0.107235	12.753790	118.933425
34	9.978114	0.100219	12.854009	128.258765
35	10.676581	0.093663	12.947672	138.236878
36	11.423942	0.087535	13.035208	148.913460
37	12.223618	0.081809	13.117017	160.337402
38	13.079271	0.076457	13.193473	172.561020
39	13.994820	0.071455	13.264928	185.640292
40	14.974458	0.066780	13.331709	199.635112
41	16.022670	0.062412	13.394120	214.609570
42	17.144257	0.058329	13.452449	230.632240
43	18.344355	0.054513	13.506962	247.776496
44	19.628460	0.050946	13.557908	266.120851
45	21.002452	0.047613	13.605522	285.749311
46	22.472623	0.044499	13.650020	306.751763
47	24.045707	0.041587	13.691608	329.224386
48	25.728907	0.038867	13.730474	353.270093
49	27.529930	0.036324	13.766799	378.999000
50	29.457025	0.033948	13.800746	406.528929

$r = 0.08$				
$n$	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\bar{n}r}$	$s_{\bar{n}r}$
1	1.080000	0.925926	0.925926	1.000000
2	1.166400	0.857339	1.783265	2.080000
3	1.259712	0.793832	2.577097	3.246400
4	1.360489	0.735030	3.312127	4.506112
5	1.469328	0.680583	3.992710	5.866601
6	1.586874	0.630170	4.622880	7.335929
7	1.713824	0.583490	5.206370	8.922803
8	1.850930	0.540269	5.746639	10.636628
9	1.999005	0.500249	6.246888	12.487558
10	2.158925	0.463193	6.710081	14.486562
11	2.331639	0.428883	7.138964	16.645487
12	2.518170	0.397114	7.536078	18.977126
13	2.719624	0.367698	7.903776	21.495297
14	2.937194	0.340461	8.244237	24.214920
15	3.172169	0.315242	8.559479	27.152114
16	3.425943	0.291890	8.851369	30.324283
17	3.700018	0.270269	9.121638	33.750226
18	3.996019	0.250249	9.371887	37.450244
19	4.315701	0.231712	9.603599	41.446263
20	4.660957	0.214548	9.818147	45.761964
21	5.033834	0.198656	10.016803	50.422921
22	5.436540	0.183941	10.200744	55.456755
23	5.871464	0.170315	10.371059	60.893296
24	6.341181	0.157699	10.528758	66.764759
25	6.848475	0.146018	10.674776	73.105940
26	7.396353	0.135202	10.809978	79.954415
27	7.988061	0.125187	10.935165	87.350768
28	8.627106	0.115914	11.051078	95.338830
29	9.317275	0.107328	11.158406	103.965936
30	10.062657	0.099377	11.257783	113.283211
31	10.867669	0.092016	11.349799	123.345868
32	11.737083	0.085200	11.434999	134.213537
33	12.676050	0.078889	11.513888	145.950620
34	13.690134	0.073045	11.586934	158.626670
35	14.785344	0.067635	11.654568	172.316804
36	15.968172	0.062625	11.717193	187.102148
37	17.245626	0.057986	11.775179	203.070320
38	18.625276	0.053690	11.828869	220.315945
39	20.115298	0.049713	11.878582	238.941221
40	21.724521	0.046031	11.924613	259.056519
41	23.462483	0.042621	11.967235	280.781040
42	25.339482	0.039464	12.006699	304.243523
43	27.366640	0.036541	12.043240	329.583005
44	29.555972	0.033834	12.077074	356.949646
45	31.920449	0.031328	12.108402	386.505617
46	34.474085	0.029007	12.137409	418.426067
47	37.232012	0.026859	12.164267	452.900152
48	40.210573	0.024869	12.189136	490.132164
49	43.427419	0.023027	12.212163	530.342737
50	46.901613	0.021321	12.233485	573.770156



# APÉNDICE C

## Tabla de integrales seleccionadas

### Formas racionales que contienen $(a + bu)$

1.  $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
2.  $\int \frac{du}{a + bu} = \frac{1}{b} \ln |a + bu| + C$
3.  $\int \frac{u du}{a + bu} = \frac{u}{b} - \frac{a}{b^2} \ln |a + bu| + C$
4.  $\int \frac{u^2 du}{a + bu} = \frac{u^2}{2b} - \frac{au}{b^2} + \frac{a^2}{b^3} \ln |a + bu| + C$
5.  $\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$
6.  $\int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a + bu}{u} \right| + C$
7.  $\int \frac{u du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left( \ln |a + bu| + \frac{a}{a + bu} \right) + C$
8.  $\int \frac{u^2 du}{(a + bu)^2} = \frac{u}{b^2} - \frac{a^2}{b^3(a + bu)} - \frac{2a}{b^3} \ln |a + bu| + C$
9.  $\int \frac{du}{u(a + bu)^2} = \frac{1}{a(a + bu)} + \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$
10.  $\int \frac{du}{u^2(a + bu)^2} = -\frac{a + 2bu}{a^2u(a + bu)} + \frac{2b}{a^3} \ln \left| \frac{a + bu}{u} \right| + C$
11.  $\int \frac{du}{(a + bu)(c + ku)} = \frac{1}{bc - ak} \ln \left| \frac{a + bu}{c + ku} \right| + C$
12.  $\int \frac{u du}{(a + bu)(c + ku)} = \frac{1}{bc - ak} \left[ \frac{c}{k} \ln |c + ku| - \frac{a}{b} \ln |a + bu| \right] + C$

### Formas que contienen $\sqrt{a + bu}$

13.  $\int u \sqrt{a + bu} du = \frac{2(3bu - 2a)(a + bu)^{3/2}}{15b^2} + C$
14.  $\int u^2 \sqrt{a + bu} du = \frac{2(8a^2 - 12abu + 15b^2u^2)(a + bu)^{3/2}}{105b^3} + C$
15.  $\int \frac{u du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2(bu - 2a)\sqrt{a + bu}}{3b^2} + C$
16.  $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2(3b^2u^2 - 4abu + 8a^2)\sqrt{a + bu}}{15b^3} + C$

$$17. \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}} \right| + C, \quad a > 0$$

$$18. \int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

**Formas que contienen  $\sqrt{a^2 - u^2}$**

$$19. \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

$$20. \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$21. \int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2u} + C$$

$$22. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2} du}{u} = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C, \quad a > 0$$

**Formas que contienen  $\sqrt{u^2 \pm a^2}$**

$$23. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{2} \left( u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| \right) + C$$

$$24. \int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$25. \int \frac{\sqrt{u^2 + a^2} du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + C$$

$$26. \int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2} du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$27. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$28. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u} \right| + C$$

$$29. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{1}{2} \left( u\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp a^2 \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| \right) + C$$

$$30. \int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{\pm\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2u} + C$$

$$31. \int (u^2 \pm a^2)^{3/2} du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm 5a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$32. \int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

$$33. \int \frac{u^2 du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{-u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} + \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

**Formas racionales que contienen  $a^2 - u^2$  y  $u^2 - a^2$**

$$34. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$$

$$35. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

**Formas exponenciales y logarítmicas**

- 36.**  $\int e^u du = e^u + C$
- 37.**  $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
- 38.**  $\int ue^{au} du = \frac{e^{au}}{a^2}(au - 1) + C$
- 39.**  $\int u^n e^{au} du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du$
- 40.**  $\int \frac{e^{au} du}{u^n} = -\frac{e^{au}}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{au} du}{u^{n-1}}, n \neq 1$
- 41.**  $\int \ln u du = u \ln u - u + C$
- 42.**  $\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1} \ln u}{n+1} - \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} + C, n \neq -1$
- 43.**  $\int u^n \ln^m u du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \ln^m u - \frac{m}{n+1} \int u^n \ln^{m-1} u du, m, n \neq -1$
- 44.**  $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln \left| \ln u \right| + C$
- 45.**  $\int \frac{du}{a + be^{cu}} = \frac{1}{ac} \left( cu - \ln \left| a + be^{cu} \right| \right) + C$

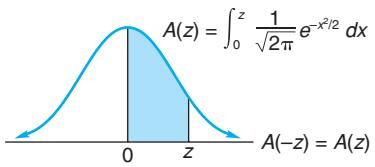
**Formas varias**

- 46.**  $\int \sqrt{\frac{a+u}{b+u}} du = \sqrt{(a+u)(b+u)} + (a-b) \ln(\sqrt{a+u} + \sqrt{b+u}) + C$
- 47.**  $\int \frac{du}{\sqrt{(a+u)(b+u)}} = \ln \left| \frac{a+b}{2} + u + \sqrt{(a+u)(b+u)} \right| + C$
- 48.**  $\int \sqrt{a+bu+cu^2} du = \frac{2cu+b}{4c} \sqrt{a+bu+cu^2}$   
 $\quad \quad \quad - \frac{b^2-4ac}{8c^{3/2}} \ln \left| 2cu+b+2\sqrt{c} \sqrt{a+bu+cu^2} \right| + C, c > 0$



## APÉNDICE D

### Áreas bajo la curva normal estándar



# Respuestas a los problemas con número impar

...

## PROBLEMAS 0.1 (página 3)

1. Verdadero  
 3. Falso; los números naturales son 1, 2, 3, etcétera.  
 5. Verdadero  
 7. Falso;  $\sqrt{25} = 5$ , un entero positivo  
 9. Falso; no es posible dividir entre cero. **11.** Verdadero

## PROBLEMAS 0.2 (página 8)

- |                               |                     |                     |                     |                       |
|-------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|
| 1. Falso                      | 3. Falso            | 5. Falso            | 7. Verdadero        | 9. Falso              |
| 11. Distributiva              |                     | 13. Asociativa      |                     |                       |
| 15. Comutativa y distributiva |                     |                     |                     |                       |
| 17. Definición de resta       |                     | 19. Distributiva    |                     |                       |
| 29. -4                        | 31. 5               | 33. 8               | 35. -18             | 37. 24                |
| 39. 9                         | 41. $-7x$           | 43. $6 + y$         | 45. $\frac{1}{3}$   | 47. -8                |
| 49. -8                        | 51. $X$             | 53. $20 + 4x$       | 55. 0               | 57. 5                 |
| 59. $-\frac{3}{2x}$           | 61. $\frac{3ab}{c}$ | 63. $\frac{by}{x}$  | 65. $\frac{10}{xy}$ |                       |
| 67. $\frac{7}{6}$             | 69. 2               | 71. $\frac{17}{12}$ | 73. $\frac{6y}{x}$  | 75. $-\frac{x^2}{yz}$ |
| 77. 0                         | 79. 0               |                     |                     |                       |

## PROBLEMAS 0.3 (página 14)

- |  |   |   |                            |
|--|---|---|----------------------------|
| 1. $2^5 (= 32)$                            | 3. $w^{12}$                                 | 5. $\frac{x^8}{y^{14}}$                                   | 7. $\frac{a^{21}}{b^{20}}$ |
| 9. $8x^6y^9$                               | 11. $x^4$                                   | 13. $x^{14}$  | 15. 5                      |
| 17. -2                                     | 19. $\frac{1}{2}$                           | 21. 7   | 23. 27                     |
| 25. $\frac{1}{4}$                          | 27. $\frac{1}{16}$                          | 29. $5\sqrt{2}$   | 31. $x\sqrt[3]{2}$         |
| 33. $4x^2$                                 | 35. $4\sqrt{2} - 15\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{2}$ | 37. $3z^2$  |                            |
| 39. $\frac{9t^2}{4}$                       | 41. $\frac{a^5}{b^3c^2}$                    | 43. $\frac{5}{m^9}$                                       | 45. $\frac{1}{9t^2}$       |
| 47. $5^{1/5}x^{2/5}$                       | 49. $x^{1/2} - y^{1/2}$                     | 51. $\frac{x^{9/4}z^{3/4}}{y^{1/2}}$                      |                            |
| 53. $\sqrt[3]{(2a - b + c)^2}$             | 55. $\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$               | 57. $\frac{3}{\sqrt[5]{w^3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{27w^3}}$ |                            |
| 59. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$                  | 61. $\frac{2\sqrt{2x}}{x}$                  | 63. $\frac{\sqrt[3]{9x^2}}{3x}$                           | 65. 2                      |
| 67. $\frac{\sqrt[20]{16a^{10}b^{15}}}{ab}$ | 69. $\frac{2x^6}{y^3}$                      | 71. 9   |                            |
| 73. $\frac{64y^6x^{1/2}}{x^2}$             | 75. $xyz$                                   | 77. $\frac{9}{4}$   |                            |
| 79. $\frac{4y^4}{x^2}$                     | 81. $x^2y^{5/2}$                            | 83. $\frac{a^5c^{14}}{b^{24}}$                            |                            |
| 85. $x^8$                                  | 87. $-\frac{4}{s^5}$                        | 89. $\frac{81x^{12}z^{12}}{16}$                           |                            |

## PROBLEMAS 0.4 (página 18)

- |                                       |                                     |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $11x - 2y - 3$                     | 3. $6t^2 - 2s^2 + 6$                |
| 5. $\sqrt{a} + 5\sqrt{3b} - \sqrt{c}$ | 7. $6x^2 - 9xy - 2z + \sqrt{2} - 4$ |
| 9. $\sqrt{2y} - \sqrt{3z}$            | 11. $-15x + 15y - 27$               |

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| 13. $2x^2 - 33y^2 - 7xy$           | 15. $6x^2 + 96$                        |
| 17. $-40x^3 - 30x^2 + 20x - 50$    | 19. $x^2 + 9x + 20$                    |
| 21. $w^2 - 3w - 10$                | 23. $10x^2 + 19x + 6$                  |
| 25. $X^2 + 4XY + 4Y^2$             | 27. $x^2 - 10x + 25$                   |
| 29. $3x + 10\sqrt{3x} + 25$        | 31. $4s^2 - 1$                         |
| 33. $x^3 + 4x^2 - 3x - 12$         | 35. $3x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 8x + 4$     |
| 37. $10x^3 - 52x^2 - 70x$          | 39. $3x^2 + 2y^2 + 5xy + 2x - 8$       |
| 41. $8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$      | 43. $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$          |
| 45. $z - 18$                       | 47. $3x^3 + 2x - \frac{1}{2x^2}$       |
| 49. $x + \frac{-3}{x+5}$           | 51. $3x^2 - 8x + 17 + \frac{-37}{x+2}$ |
| 53. $x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}$ | 55. $x - 2 + \frac{7}{3x+2}$           |

## PROBLEMAS 0.5 (página 21)

- |  |  |
|--|--|
| 1. $2(ax + b)$                                 | 3. $5x(2y + z)$                        |
| 5. $4bc(2a^3 - 3ab^2d + b^3cd^2)$              | 7. $(z + 7)(z - 7)$                    |
| 9. $(p + 3)(p + 1)$                            | 11. $(4x + 3)(4x - 3)$                 |
| 13. $(a + 7)(a + 5)$                           | 15. $(x + 3)^2$                        |
| 17. $5(x + 3)(x + 2)$                          | 19. $3(x + 1)(x - 1)$                  |
| 21. $(6y + 1)(y + 2)$                          | 23. $2s(3s + 4)(2s - 1)$               |
| 25. $u^{3/5}v(u + 2v)(u - 2v)$                 | 27. $2x(x + 3)(x - 2)$                 |
| 29. $4(2x + 1)^2$                              | 31. $x(xy - 7)^2$                      |
| 33. $(x + 2)(x - 2)^2$                         | 35. $(y + 4)^2(y + 1)(y - 1)$          |
| 37. $(b + 4)(b^2 - 4b + 16)$                   |  |
| 39. $(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$ |  |
| 41. $2(x + 3)^2(x + 1)(x - 1)$                 | 43. $P(1 + r)^2$                       |
| 45. $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$                  | 47. $(y^4 + 1)(y^2 + 1)(y + 1)(y - 1)$ |
| 49. $(X^2 + 5)(X + 1)(X - 1)$                  | 51. $y(x + 1)^2(x - 1)^2$              |

## PROBLEMAS 0.6 (página 26)

- |  |                                      |                                 |                                |       |
|--|--------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|-------|
| 1. $\frac{a+3}{a}$                       | 3. $\frac{x-5}{x+5}$                 | 5. $\frac{3x+2}{x+2}$           |                                |       |
| 7. $-\frac{y^2}{(y-3)(y+2)}$             | 9. $\frac{b-ax}{ax+b}$               | 11. $\frac{2(x+4)}{(x-4)(x+2)}$ |                                |       |
| 13. $\frac{X}{2}$                        | 15. $\frac{n}{3}$                    | 17. $\frac{2}{3}$               | 19. $-27x^2$                   | 21. 1 |
| 23. $\frac{2x^2}{x-1}$                   | 25. 1                                |                                 | 27. $-\frac{(2x+3)(1+x)}{x+4}$ |       |
| 29. $x + 2$                              | 31. $\frac{7}{3t}$                   | 33. $\frac{1}{1-x^3}$           |                                |       |
| 35. $\frac{2x^2 + 3x + 12}{(2x-1)(x+3)}$ | 37. $\frac{2(x+2)}{(x-3)(x+1)(x+3)}$ |                                 |                                |       |
| 39. $\frac{35-8x}{(x-1)(x+5)}$           | 41. $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2}$       |                                 |                                |       |
| 43. $\frac{x}{1-xy}$                     | 45. $\frac{7x+1}{5x}$                |                                 |                                |       |

## R-2 Respuestas a los problemas con número impar

**47.**  $\frac{(x+2)(6x-1)}{2x^2(x+3)}$

**49.**  $\frac{3(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+h})}{\sqrt[3]{x+h} \sqrt[3]{x}}$

**51.**  $2 - \sqrt{3}$

**53.**  $-\frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{3}$

**55.**  $-4 - 2\sqrt{6}$

**57.**  $\frac{3t - 3\sqrt{7}}{t^2 - 7}$

**59.**  $4\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 14$

### PROBLEMAS 0.7 (página 34)

**1.** 0

**3.**  $\frac{17}{4}$

**5.** -2

**7.** Se suma 5 a ambos lados; se garantiza la equivalencia

**9.** Se elevan ambos lados a la tercera potencia; la equivalencia *no* se garantiza

**11.** Se dividen ambos lados entre  $x$ ; la equivalencia *no* se garantiza

**13.** Se multiplican ambos lados por  $x-1$ ; la equivalencia *no* se garantiza

**15.** Se multiplican ambos lados por  $(2x-3)/2x$ ; la equivalencia *no* se garantiza

**17.**  $\frac{5}{2}$

**19.** 0

**21.** 1

**23.**  $\frac{12}{5}$

**25.** -1

**27.**  $-\frac{27}{4}$

**29.**  $\frac{10}{3}$

**31.** 126

**33.** 15

**35.**  $-\frac{26}{9}$

**37.**  $-\frac{37}{18}$

**39.** 192

**41.**  $\frac{14}{3}$

**43.** 3

**45.**  $\frac{25}{52}$

**47.**  $\frac{1}{5}$

**49.** 0

**51.**  $\frac{29}{14}$

**53.** 2

**55.** 0

**57.**  $\frac{7}{2}$

**59.**  $\frac{1}{8}$

**61.** 3

**63.**  $\frac{43}{16}$

**65.** 0

**67.** 11

**69.**  $\frac{68}{3}$

**71.**  $-\frac{10}{9}$

**73.** 2

**75.** 86

**77.**  $\frac{49}{36}$

**79.**  $-\frac{9}{4}$

**81.**  $r = \frac{I}{Pt}$

**83.**  $q = \frac{p+1}{8}$

**85.**  $r = \frac{S-P}{Pt}$

**87.**  $R = \frac{Ai}{1 - (1+i)^{-n}}$

**89.**  $t = \frac{r-d}{rd}$

**91.**  $n = \frac{2mI}{rB} - 1$

**93.** 170 m

**95.**  $c = x + 0.0825x = 1.0825x$

**97.** 3 años

**99.** 44 horas

**101.** 20

**103.**  $t = \frac{d}{r-c}; c = r - \frac{d}{t}$

**105.**  $\approx 84$  pies

**107.** 13%

**109.**  $-\frac{1}{2}$

**111.** 0

### PROBLEMAS 0.8 (página 42)

**1.** 2

**3.** 3, 5

**5.** 3, -1

**7.** 4, 9

**9.**  $\pm 2$

**11.** 0, 5

**13.**  $\frac{1}{2}$

**15.**  $1, \frac{2}{3}$

**17.** 5, -2

**19.** 0,  $\frac{3}{2}$

**21.** 0, 1, -4

**23.** 0,  $\pm 7$

**25.** 0,  $\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}$

**27.** 3,  $\pm 2$

**29.** 3, 4

**31.** 4, -6

**33.**  $\frac{3}{2}$

**35.**  $1 \pm 2\sqrt{2}$

**37.** Sin raíces reales

**39.**  $\frac{-5 \pm \sqrt{57}}{8}$

**41.** 40, -25

**43.**  $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$

**45.**  $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}$

**47.**  $3, \frac{1}{2}$

**49.**  $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}, \pm\frac{1}{2}$

**51.** 3, 0

**53.**  $\frac{15}{7}, \frac{11}{5}$

**55.**  $\frac{3}{2}, -1$

**57.** 6, -2

**59.**  $-\frac{1}{2}, 1$

**61.** 5, -2

**63.**  $\frac{-9 \pm \sqrt{41}}{4}$

**65.** -2

**67.** 6

**69.** 4, 8

**71.**  $\frac{5 - \sqrt{21}}{2}$

**73.** 0, 4

**75.** 1

**77.**  $\approx 64.15, 3.35$

**79.** 6 pulgadas por 8 pulgadas

**83.** 1 año y 10 años; edad 23; nunca

**85.** (a) 8 s; (b) 5.4 s o 2.6 s

**87.** 1.5, 0.75

**89.** No hay raíces reales

**91.** 1.999, 0963

### APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 0 (página 44)

1. Los resultados coinciden. 3. Los resultados coinciden.

### PROBLEMAS 1.1 (página 51)

**1.** 120 pies

**3.**  $64\frac{4}{9}$  oz de A,  $80\frac{5}{9}$  oz de B

**5.**  $5\frac{1}{3}$  oz

**7.** 1 m

**9.**  $\approx 13,077$  tons

**11.** \$4000 en 6%, \$16,000 en  $7\frac{1}{2}\%$

**13.** \$4.25

**15.** 4%

**17.** 80

**19.** \$8000

**21.** Deben venderse 1209 cartuchos para lograr aproximadamente el equilibrio.

**23.** \$116.25

**25.** 40

**27.** 46,000

**29.** Ya sea \$440 o \$460

**31.** \$100

**33.** 42

**35.** 80 pies por 140 pies

**37.** 9 cm de largo, 4 cm de ancho

**39.** \$232,000;  $\frac{100E}{100-p}$

**41.** 60 acres

**43.** Ya sea 125 unidades de A y 100 unidades de B, o 150 unidades de A y 125 unidades de B.

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1.2

**1.** 5375

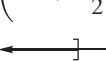
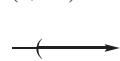
**2.**  $150 - x_4 \geq 0; 3x_4 - 210 \geq 0; x_4 + 60 \geq 0; x_4 \geq 0$

### PROBLEMAS 1.2 (página 58)

**1.**  $(4, \infty)$

**3.**  $(-\infty, 4]$

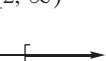
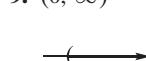
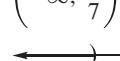
**5.**  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$



**7.**  $(-\infty, \frac{2}{7})$

**9.**  $(0, \infty)$

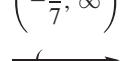
**11.**  $[2, \infty)$

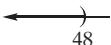


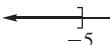
**13.**  $(-\frac{2}{7}, \infty)$

**15.** 0

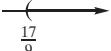
**17.**  $(-\infty, \frac{\sqrt{3}-2}{2})$

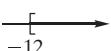


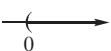
19.  $(-\infty, 48)$   


21.  $(-\infty, -5]$   


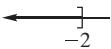
23.  $(-\infty, \infty)$   


25.  $\left(\frac{17}{9}, \infty\right)$   


27.  $[-12, \infty)$   


29.  $(0, \infty)$   


31.  $(-\infty, 0)$   


33.  $(-\infty, -2]$   


35.  $600 < S < 1800$

37.  $x < 70$  grados

### PROBLEMAS 1.3 (página 61)

1. 120,001    3. 17,000    5. 37,500    7. \$25,714.29  
 9. 1000    11.  $t > 36.7$     13. Al menos \$67,400

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1.4

1.  $|w - 22 \text{ oz}| \leq 0.3 \text{ oz}$

### PROBLEMAS 1.4 (página 65)

1. 13    3. 6    5. 7    7.  $-4 < x < 4$   
 9.  $\sqrt{5} - 2$   
 11. (a)  $|x - 7| < 3$ ; (b)  $|x - 2| < 3$ ; (c)  $|x - 7| \leq 5$ ;  
 (d)  $|x - 7| = 4$ ; (e)  $|x + 4| < 2$ ; (f)  $|x| < 3$ ; (g)  $|x| > 6$ ;  
 (h)  $|x - 105| < 3$ ; (i)  $|x - 850| < 100$   
 13.  $|p_1 - p_2| \leq 9$   
 15.  $\pm 7$     17.  $\pm 35$     19. 13, -3  
 21.  $\frac{2}{5}$     23.  $\frac{1}{2}, 3$     25.  $(-M, M)$   
 27.  $(-\infty, -8) \cup (8, \infty)$     29.  $(-14, -4)$   
 31.  $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$     33.  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$   
 35.  $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{16}{3}, \infty\right)$     37.  $|d - 35.2| \leq 0.2 \text{ m}$   
 39.  $(-\infty, \mu - h\sigma) \cup (\mu + h\sigma, \infty)$

### PROBLEMAS 1.5 (página 69)

1. 12, 17,  $t$     3. 168    5. 532    7.  $\sum_{i=36}^{60} i$   
 9.  $\sum_{j=3}^8 5^j$     11.  $\sum_{i=1}^8 2^i$     13. 4300    15. 5  
 17. 37,750    19. 14,980    21. 295,425    23.  $4\frac{23}{25}$   
 25.  $15 - \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}$

### PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 1 (página 71)

1.  $[-4, \infty)$     3.  $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$     5.  $\emptyset$   
 7.  $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$     9.  $(-\infty, \infty)$     11.  $-2, 5$

13.  $(-1, 4)$   
 15.  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, \infty\right)$   
 17. 775    19. 542    21. 6000    23.  $c < \$212,814$

### APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 1 (página 72)

1. 1 hr    3.  $2M - 240 \text{ min}$   
 5. 600; 310    7.  $t = \frac{R(nr - M)}{r - R}$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2.1

1. (a)  $a(r) = \pi r^2$ ; (b) todos los números reales; (c)  $r \geq 0$   
 2. (a)  $t(r) = \frac{300}{r}$ ; (b) todos los números reales excepto 0; (c)  $r > 0$ ;  
 (d)  $t(x) = \frac{300}{x}; t\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{600}{x}; t\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1200}{x}$ ; (e) El tiempo  
 está escalado por un factor de  $c$ ;  $t\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{300c}{x}$   
 3. (a) 300 pizzas; (b) \$21.00 por pizza; (c) \$16.00 por pizza

### PROBLEMAS 2.1 (página 81)

1.  $f \neq g$     3.  $h \neq k$   
 5. Todos los números reales excepto 0  
 7. Todos los números reales  $\geq 3$   
 9. Todos los números reales  
 11. Todos los números reales excepto  $-\frac{7}{2}$   
 13. Todos los números reales excepto 2  
 15. Todos los números reales excepto  $4$  y  $-\frac{1}{2}$   
 17. 1, 7, -7    19.  $-62, 2 - u^2, 2 - u^4$   
 21.  $10, 8v^2 - 2v, 2x^2 + 4ax + 2a^2 - x - a$   
 23. 4, 0,  $x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h + 1$   
 25.  $-\frac{2}{27}, \frac{3x-7}{9x^2+2}, \frac{x+h-7}{x^2+2xh+h^2+2}$   
 27. 0, 256,  $\frac{1}{16}$     29. (a)  $4x + 4h - 5$ ; (b) 4  
 31. (a)  $x^2 + 2hx + h^2 + 2x + 2h$ ; (b)  $2x + h + 2$   
 33. (a)  $3 - 2x - 2h + 4x^2 + 8xh + 4h^2$ ; (b)  $-2 + 8x + 4h$   
 35. (a)  $\frac{1}{x+h}$ ; (b)  $-\frac{1}{x(x+h)}$     37. 5  
 39.  $y$  es una función de  $x$ ;  $x$  es una función de  $y$ .  
 41.  $y$  es una función de  $x$ ;  $x$  no es una función de  $y$ .  
 43. Sí    45.  $V = f(t) = 25,000 + 1700t$     47. Sí;  $P$ ;  $q$   
 49. 402.72 libras por semana; 935.52 libras por semana; la cantidad  
 suministrada aumenta cuando el precio aumenta  
 51. (a) 4; (b)  $8\sqrt[3]{2}$ ; (c)  $f(2I_0) = 2\sqrt[3]{2}f(I_0)$ ; al duplicar la inten-  
 sidad la respuesta se incrementa por un factor de  $2\sqrt[3]{2}$   
 53. (a) 3000, 2900, 2300, 2000; 12, 10; (b) 10, 12, 17, 20; 3000, 2300  
 55. (a) -5.13; (b) 2.64; (c) -17.43  
 57. (a) 7.89; (b) 63.85; (c) 1.21

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2.2

1. (a)  $p(n) = \$125$ ; (b) Las primas no cambian;  
 (c) función constante  
 2. (a) función cuadrática; (b) 2; (c) 3

## R-4 Respuestas a los problemas con número impar

3.  $c(n) = \begin{cases} 3.50n & \text{si } n \leq 5 \\ 3.00n & \text{si } 5 < n \leq 10 \\ 2.75n & \text{si } n > 10 \end{cases}$  4.  $7! = 5040$

### PROBLEMAS 2.2 (página 85)

1. Sí      3. No      5. Sí      7. No  
 9. Todos los números reales      11. Todos los números reales  
 13. (a) 3; (b) 7      15. (a) 7; (b) 1  
 17. 8, 8, 8      19. 1, -1, 0, -1      21. 7, 2, 2, 2  
 23. 720      25. 2      27.  $n$

29.  $c(i) = \$4.50$ ; función constante

31. (a)  $C = 850 + 3q$ ; (b) 250

33.  $c(n) = \begin{cases} 9.50n & \text{si } n < 12, \\ 8.75n & \text{si } n \geq 12 \end{cases}$  35.  $\frac{9}{64}$

37. (a) Toda  $T$  tal que  $30 \leq T \leq 39$ ; (b)  $4, \frac{17}{4}, \frac{33}{4}$

39. (a) 1182.74; (b) 4985.27; (c) 252.15

41. (a) 2.21; (b) 9.98; (c) -14.52

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2.3

1.  $c(s(x)) = c(x + 3) = 2(x + 3) = 2x + 6$   
 2. Considere que la longitud de un lado se representa mediante la función  $l(x) = x + 3$  y que el área de un cuadrado con lados de longitud  $x$  está representada por  $a(x) = x^2$ . Entonces  $g(x) = (x + 3)^2 = [l(x)]^2 = a(l(x))$ .

### PROBLEMAS 2.3 (página 90)

1. (a)  $2x + 8$ ; (b) 8; (c) -2; (d)  $x^2 + 8x + 15$ ; (e) 3;  
 (f)  $\frac{x+3}{x+5}$ ; (g)  $x + 8$ ; (h) 11; (i)  $x + 8$ ; (j) 11  
 3. (a)  $2x^2 - x + 1$ ; (b)  $x + 1$ ; (c)  $\frac{1}{2}$ ; (d)  $x^4 - x^3 + x^2 - x$ ;  
 (e)  $\frac{x^2 + 1}{x^2 - x}$ ; (f)  $\frac{5}{3}$ ; (g)  $x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$ ; (h)  $x^4 + x^2$ ;  
 (i) 90  
 5. 6; -32  
 7.  $\frac{4}{(t-1)^2} + \frac{14}{t-1} + 1; \frac{2}{t^2 + 7t}$       9.  $\frac{1}{v+3}; \sqrt{\frac{2v^2 + 3}{v^2 + 1}}$   
 11.  $f(x) = x - 7, g(x) = 11x$       13.  $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^2 - 2$   
 15.  $f(x) = \sqrt[4]{x}, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$   
 17. (a)  $r(x) = 9.75x$ ; (b)  $e(x) = 4.25x + 4500$ ;  
 (c)  $(r - e)(x) = 5.5x - 4500$   
 19.  $400m - 10m^2$ ; el ingreso total recibido cuando se vende la producción total de  $m$  empleados  
 21. (a) 14.05; (b) 1169.64      23. (a) 194.47; (b) 0.29

### PROBLEMAS 2.4 (página 93)

1.  $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - \frac{7}{3}$       3.  $F^{-1}(x) = 2x + 14$   
 5.  $r(A) = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

7.  $f(x) = 5x + 12$  es uno a uno

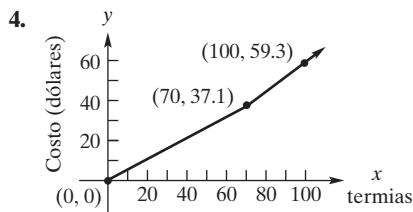
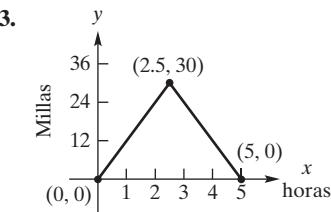
9.  $h(x) = (5x + 12)^2$ , para  $x \geq -\frac{5}{12}$ , es uno a uno

11.  $x = \frac{\sqrt{23}}{4} + \frac{5}{4}$       13.  $q = \frac{1,200,000}{p}, p > 0$

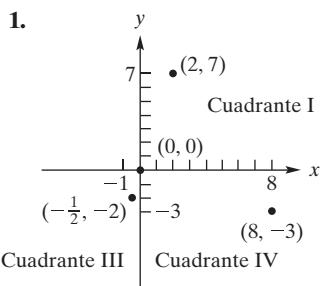
### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2.5

1.  $y = -600x + 7250$ ; intersección  $x \left(12\frac{1}{12}, 0\right)$ ; intersección  $y (0, 7250)$

2.  $y = 24.95$ ; recta horizontal; no hay intersección con el eje  $x$ ; intersección con el eje  $y (0, 24.95)$



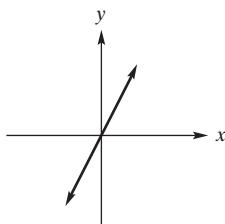
### PROBLEMAS 2.5 (página 101)



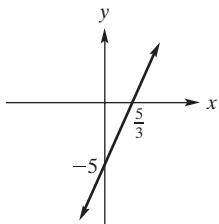
3. (a) 1, 2, 3, 0; (b) todos los números reales;  
 (c) todos los números reales; (d) -2

5. (a) 0, 1, 1; (b) todos los números reales; (c) todos los números reales no negativos; (d) 0

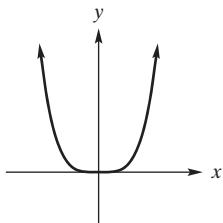
7. (0, 0); función; uno a uno; todos los números reales; todos los números reales



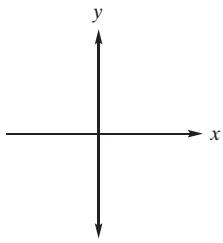
9.  $(0, -5), \left(\frac{5}{3}, 0\right)$ ; función; uno a uno; todos los números reales; todos los números reales



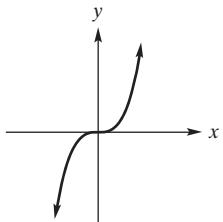
11.  $(0, 0)$ ; función; uno a uno; todos los números reales; todos los números reales no negativos



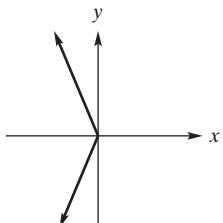
13. Todo punto en el eje  $y$ , no es función de  $x$



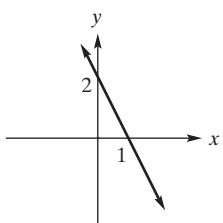
15.  $(0, 0)$ ; función; uno a uno; todos los números reales; todos los números reales



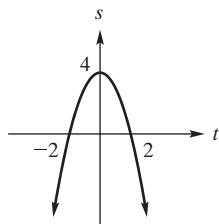
17.  $(0, 0)$ ; no es una función de  $x$



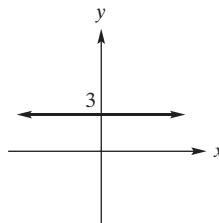
19.  $(0, 2), (1, 0)$ ; función; uno a uno; todos los números reales; todos los números reales



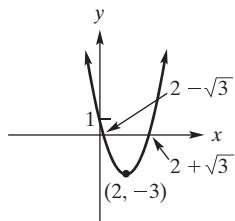
21. Todos los números reales; todos los números reales  $\leq 4$ ;  $(0, 4), (2, 0), (-2, 0)$



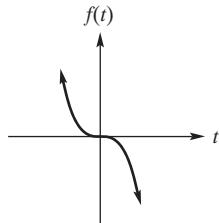
23. Todos los números reales;  $3; (0, 3)$



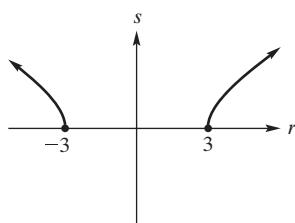
25. Todos los números reales; todos los números reales;  $\geq -3; (0, 1), (2 \pm \sqrt{3}, 0)$



27. Todos los números reales; todos los números reales;  $(0, 0)$

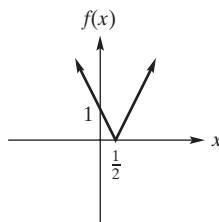


29. Todos los números reales  $\leq -3$  y todos los números reales  $\geq 3$ ; todos los números reales no negativos;  $(-3, 0), (3, 0)$



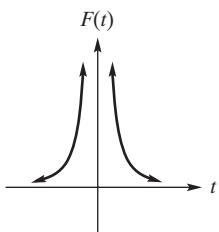
31. Todos los números reales; todos los números reales no negativos;

$$(0, 1), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

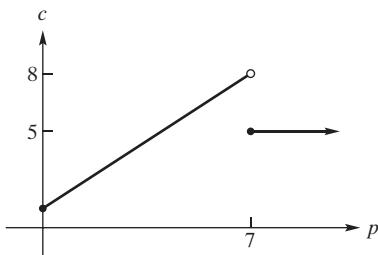


## R-6 Respuestas a los problemas con número impar

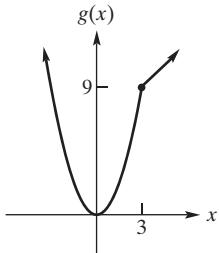
33. Todos los números reales distintos de cero; todos los números reales positivos; no hay intersecciones



35. Todos los números reales no negativos; todos los números reales  $1 \leq c < 8$



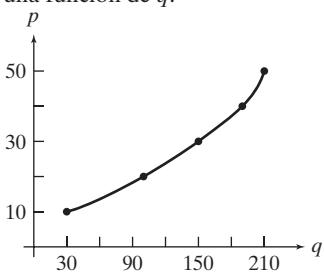
37. Todos los números reales; todos los números reales no negativos



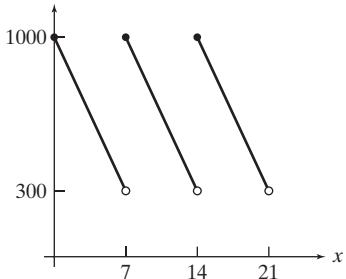
39. (a), (b), (d)

41.  $y = 2400 - 275x$ ,  $\left(8\frac{8}{11}, 0\right)$ ,  $(0, 2400)$

43. A medida que el precio aumenta, la cantidad aumenta;  $p$  es una función de  $q$ .



45.



47. 0.39

49.  $-0.61, -0.04$

53.  $-1.70, 0$

55. (a) 19.60; (b) -10.86

57. (a) 5; (b) 4

59. (a) 28; (b)  $(-\infty, 28]$ ; (c)  $-4.02, 0.60$

61. (a) 34.21; (b) 18.68; (c)  $[18.68, 34.21]$ ; (d) sin intersecciones

### PROBLEMAS 2.6 (página 108)

1.  $(0, 0)$ ; simétrica con respecto al origen

3.  $(\pm 2, 0), (0, 8)$ ; simétrica con respecto al eje  $y$

5.  $\left(\pm\frac{5}{4}, 0\right)$ ; simétrica con respecto al eje  $x$ , al eje  $y$  y al origen

7.  $(-2, 0)$ ; simétrica con respecto al eje  $x$

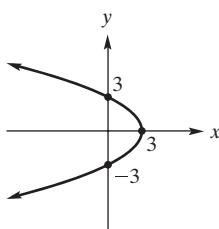
9. Simétrica con respecto al eje  $x$

11.  $(-21, 0), (0, -7), (0, 3)$

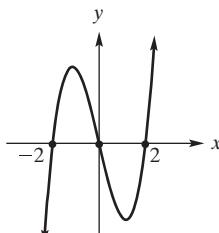
13.  $(1, 0), (0, 0)$

15.  $\left(0, \frac{3}{8}\right)$

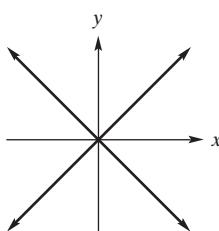
17.  $(3, 0), (0, \pm 3)$ ; simétrica con respecto al eje  $x$



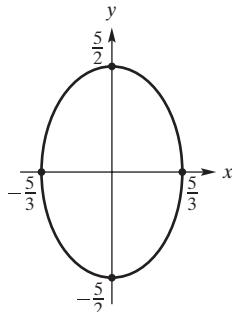
19.  $(\pm 2, 0), (0, 0)$ ; simétrica con respecto al origen



21.  $(0, 0)$ ; simétrica con respecto al eje  $x$ , al eje  $y$  y al origen,  $y = x$

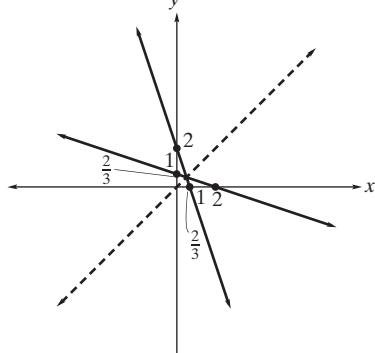


23.  $\left(\pm\frac{5}{3}, 0\right), \left(0, \pm\frac{5}{2}\right)$ ; simétrica con respecto al eje  $x$ , al eje  $y$  y al origen

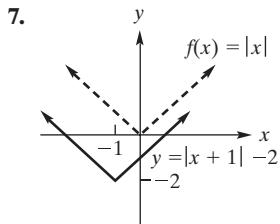
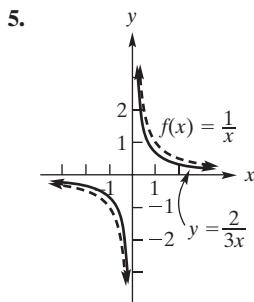
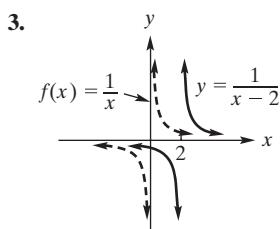
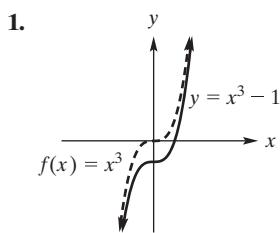


25. (a)  $(\pm 0.99, 0), (0, 5)$ ; (b) 5; (c)  $(-\infty, 5]$

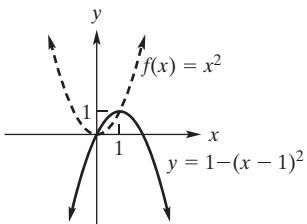
27.



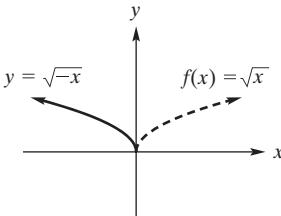
### PROBLEMAS 2.7 (página 110)



9.



11.



13. Trasladar 3 unidades hacia la izquierda, estirar verticalmente alejándose del eje  $x$  por un factor de 2, reflejar con respecto al eje  $x$  y mover 2 unidades hacia arriba

15. Reflejar con respecto al eje  $y$  y trasladar 5 unidades hacia abajo

### PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 2 (página 112)

1. Todos los números reales excepto 1 y 5

3. Todos los números reales

5. Todos los números reales no negativos excepto 1

7.  $7, 46, 62, 3t^2 - 4t + 7$       9.  $0, 2, \sqrt[4]{t-2}, \sqrt[4]{x^3-3}$

11.  $\frac{3}{5}, 0, \frac{\sqrt{x+4}}{x}, \frac{\sqrt{u}}{u-4}$

13.  $20, -3, -3$ , indefinido

15. (a)  $3 - 7x - 7h$ ; (b)  $-7$

17. (a)  $4x^2 + 8hx + 4h^2 + 2x + 2h - 5$ ; (b)  $8x + 4h + 2$

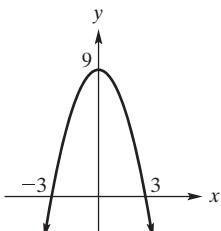
19. (a)  $5x + 2$ ; (b) 22; (c)  $x - 4$ ; (d)  $6x^2 + 7x - 3$ ; (e) 10; (f)  $\frac{3x-1}{2x+3}$ ; (g)  $6x + 8$ ; (h) 38; (i)  $6x + 1$

21.  $\frac{1}{(x+1)^2}, \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{1+x^2}{x^2}$

23.  $\sqrt{x^3+2}, (x+2)^{3/2}$

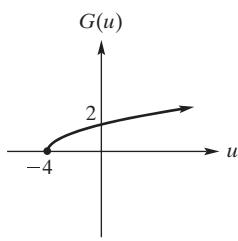
25.  $(0, 0), (\pm\sqrt{3}, 0)$ ; simétrica con respecto al origen

27.  $(0, 9), (\pm 3, 0)$ ; simétrica con respecto al eje  $y$

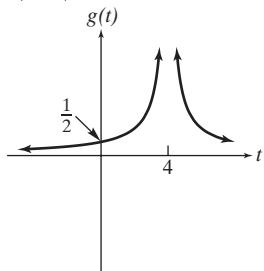


## R-8 Respuestas a los problemas con número impar

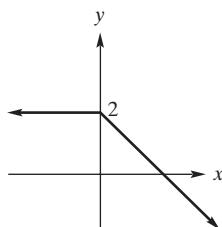
29.  $(0, 2), (-4, 0)$ ; toda  $u \geq -4$ ; todos los números reales  $\geq 0$



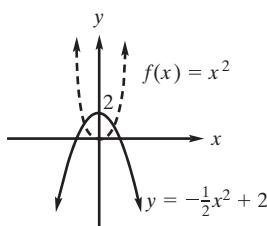
31.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ; toda  $t \neq 4$ ; todos los números reales positivos



33. Todos los números reales; todos los números reales  $\leq 2$



35.



37. (a), (c)

39.  $-0.67, 0.34, 1.73$

41.  $-1.50, -0.88, -0.11, 1.09, 1.40$

43. (a)  $(-\infty, \infty)$ ; (b)  $(1.92, 0), (0, 7)$

45. (a) 0, 2, 4; (b) ninguna

## APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 2 (página 114)

1. \$2695      3. \$75,681.50      5. Las respuestas pueden variar

$$7. g(x) = \begin{cases} 0.90x & \text{si } 0 \leq x \leq 15,100 \\ 0.85x + 755 & \text{si } 15,100 < x \leq 61,300 \\ 0.75x + 6885 & \text{si } 61,300 < x \leq 123,700 \\ 0.72x + 10,596 & \text{si } 123,700 < x \leq 188,450 \\ 0.67x + 20,018.50 & \text{si } 188,450 < x \leq 336,550 \\ 0.65x + 26,749.50 & \text{si } x > 336,550 \end{cases}$$

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.1

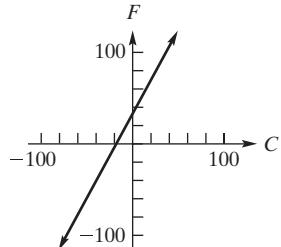
1.  $-2000$ ; el automóvil se deprecia \$2000 por año

2.  $S = 14T + 8$       3.  $F = \frac{9}{5}C + 32$

4. Pendiente  $= \frac{125}{3}$ ; intersección  $y = \frac{125}{3}$

5.  $9C - 5F + 160 = 0$

6.



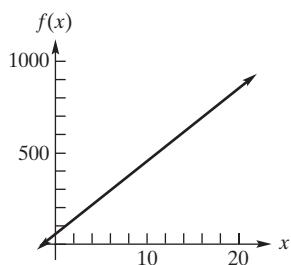
7. La pendiente de  $\overline{AB}$  es 0; la pendiente de  $\overline{BC}$  es 7; la pendiente de  $\overline{CA}$  es 1. Ninguna de las pendientes es el recíproco negativo de alguna otra, por lo tanto el triángulo no tiene un ángulo recto. Los puntos no definen un triángulo rectángulo.

## PROBLEMAS 3.1 (página 123)

- |   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| 1. 3  | 3. $-\frac{1}{2}$   | 5. Indefinida  | 7. 0  |
| 9. $5x + y - 2 = 0$   | 11. $x + 4y - 18 = 0$   | 13. $3x - 7y + 25 = 0$                                     | 15. $4x + y + 16 = 0$                             |
| 17. $2x - y + 4 = 0$  | 19. $x + 2y + 6 = 0$  | 21. $y + 3 = 0$  | 23. $x - 2 = 0$                                   |
| 27. $-\frac{3}{5}, \frac{9}{5}$                                       | 29. La pendiente no está definida; no hay intersección con el eje y | 31. 3; 0   | 33. 0; 3  |
| 35. $2x + 3y - 5 = 0$ ; $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$             | 37. $4x + 9y - 5 = 0$ ; $y = -\frac{4}{9}x + \frac{5}{9}$           | 39. $6x - 8y - 57 = 0$ ; $y = \frac{3}{4}x - \frac{57}{8}$ | 41. Paralelas      43. Paralelas      45. Ninguna |
| 47. Perpendiculares   | 49. Perpendiculares   | 51. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$                      | 53. $y = 1$                                       |
| 55. $y = -\frac{1}{3}x + 5$   | 57. $x = 5$   | 59. $y = -\frac{2}{3}x - \frac{29}{3}$                     | 61. $(5, -4)$                                     |
| 63. $-2.9$ ; el precio de la acción cae un promedio de \$2.90 por año | 65. $y = 28,000x - 100,000$   | 67. $-t + d - 184 = 0$                                     | 69. $C = 59.82T + 769.58$                         |
| 71. La pendiente es 7.1.  | 75. La pendiente es 7.1.  |  |   |

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.2

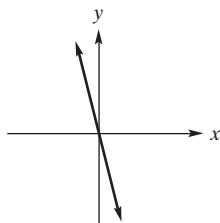
- $x$  = número de esquís producidos;  $y$  = número de botas producidas;  $8x + 14y = 1000$
- $p = -\frac{3}{8}q + 1025$
- Las respuestas pueden variar, pero dos posibles puntos son  $(0, 60)$  y  $(2, 140)$



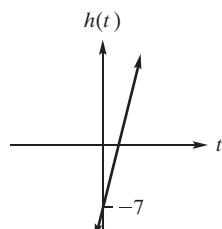
4.  $f(t) = 2.3t + 32.2$   
 5.  $f(x) = 70x + 150$

**PROBLEMAS 3.2 (página 129)**

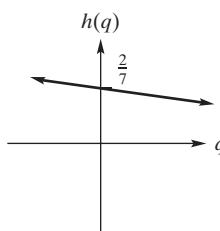
1.  $-4; 0$



3.  $5; -7$



5.  $-\frac{1}{7}; \frac{2}{7}$



7.  $f(x) = 4x$

9.  $f(x) = -2x + 4$

11.  $f(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{10}{9}$

13.  $f(x) = x + 1$

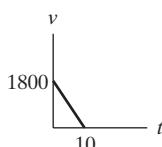
15.  $p = -\frac{2}{5}q + 28.75$ ; \$13.95

17.  $p = \frac{1}{4}q + 190$

19.  $c = 3q + 10$ ; \$115

21.  $f(x) = 0.125x + 4.15$

23.  $v = -180t + 1800$ ; pendiente =  $-180$



25.  $f(x) = 45,000x + 735,000$

27.  $f(x) = 64x + 95$

29.  $x + 10y = 100$

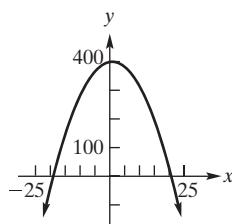
31. (a)  $y = \frac{35}{44}x + \frac{225}{11}$  (b) 52.2

33. (a)  $p = 0.059t + 0.025$ ; (b) 0.556

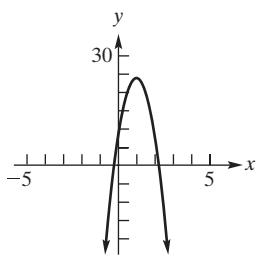
35. (a)  $t = \frac{1}{4}c + 37$ ; (b) Sume 37 al número de chirridos en 15 segundos

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.3**

1. Vértice: (1,400); intersección y: (0, 399); intersecciones x: (-19, 0), (21, 0)



2. Vértice: (1, 24); intersección y: (0, 8); intersecciones x:  $\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right), \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$



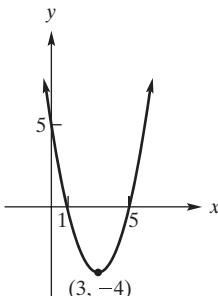
3. 1000 unidades; \$3000 de ingreso máximo

**PROBLEMAS 3.3 (página 136)**

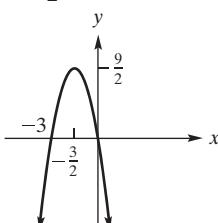
1. Cuadrática    3. No es cuadrática    5. Cuadrática  
 7. Cuadrática    9. (a) (1, 11); (b) el más alto

11. (a) -6; (b) -3, 2; (c)  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

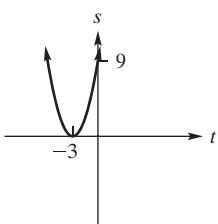
13. Vértice: (3, -4); intersecciones: (1, 0), (5, 0), (0, 5); rango: toda  $y \geq -4$



15. Vértice:  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$ ; intersecciones: (0, 0), (-3, 0); rango: toda  $y \leq \frac{9}{2}$

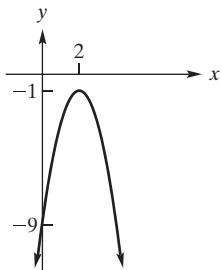


17. Vértice: (-3, 0); intersecciones: (-3, 0), (0, 9); rango: toda  $s \geq 0$

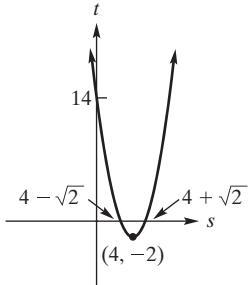


**R-10** Respuestas a los problemas con número impar

19. Vértice:  $(2, -1)$ ; intersecciones:  $(0, -9)$ ; rango: toda  $y \leq -1$



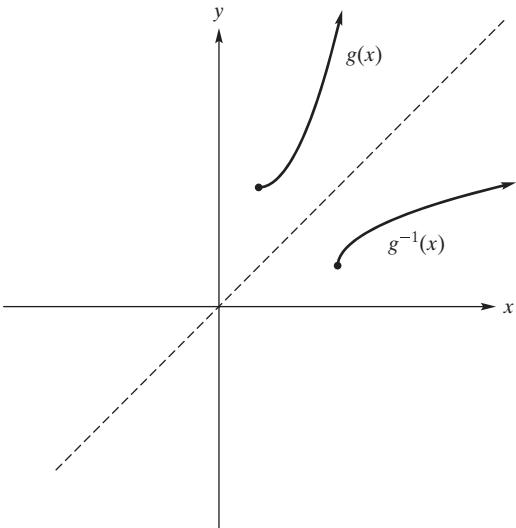
21. Vértice:  $(4, -2)$ ; intersecciones:  $(4 + \sqrt{2}, 0), (4 - \sqrt{2}, 0), (0, 14)$ ; rango: toda  $t \geq -2$



23. Mínimo;  $\frac{808}{49}$

25. Máximo; -10

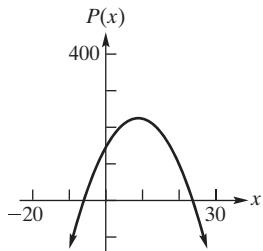
27.  $g^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 3}$ ,  $x \geq 3$



29. 20 unidades; ingreso máximo \$2000

31. 2200 unidades; ingreso máximo \$240,00

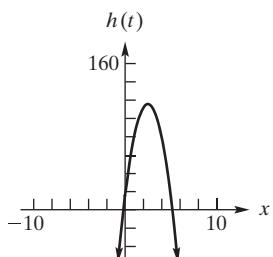
33. Vértice:  $(9, 225)$ ; intersección y:  $(0, 144)$ ; intersecciones x:  $(-6, 0), (24, 0)$



35. 70 gramos

37.  $\approx 134.86$  pies;  $\approx 2.7$  segundos

39. Vértice:  $\left(\frac{5}{2}, 116\right)$ ; intersección y:  $(0, 16)$ , intersecciones x:  $\left(\frac{5 + \sqrt{29}}{2}, 0\right), \left(\frac{5 - \sqrt{29}}{2}, 0\right)$



41. 125 pies  $\times$  250 pies

45. (a) 0; (b) 1; (c) 2

43. (1.11, 2.88)

47. 4.89

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.4**

1. \$120,000 al 9% y \$80,000 al 8%

2. 500 especies A y 1000 especies B

3. Un número infinito de soluciones de la forma  $A = \frac{20,000}{3} - \frac{4}{3}r$ ,  $B = r$  donde  $0 \leq r \leq 5000$

4.  $\frac{1}{6}$  lb de A;  $\frac{1}{3}$  lb de B;  $\frac{1}{2}$  lb de C

**EJERCICIO 3.4 (página 146)**

1.  $x = -1, y = 1$

3.  $x = 3, y = -1$

5.  $u = 6, v = -1$

7.  $x = -3, y = 2$

9. No hay solución

11.  $x = 12, y = -12$

13. No hay solución

15.  $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{4}$

17.  $x = 2, y = -1, z = 4$

19.  $x = 1 + 2r, y = 3 - r, z = r$ ;  $r$  es cualquier número real

21.  $x = -\frac{1}{3}r, y = \frac{5}{3}r, z = r$ ;  $r$  es cualquier número real

23.  $x = \frac{3}{2} - r + \frac{1}{2}s, y = r, z = s$ ;  $r$  y  $s$  son cualesquiera números reales

25.  $533\frac{1}{3}$  galones de solución al 20%,  $266\frac{2}{3}$  galones de solución al 35%

27. 0.5 lb de algodón; 0.25 lb de poliéster; 0.25 lb de nylon

29.  $\approx 285$  mi/h (velocidad del avión sin viento),  
 $\approx 23.2$  mi/h (velocidad del viento)

31. 240 unidades (americano antiguo), 200 unidades (contemporáneo)

33. 800 calculadoras de la planta Exton, 700 de la planta Whyton

35. 4% sobre los primeros \$100,000, 6% sobre el resto

37. 190 cajas, 760 contenedores

39. 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sillones reclinables

41. 40 trabajadores semicalificados, 20 trabajadores calificados y 10 empleados de envíos

45.  $x = 3, y = 2$

47.  $x = 8.3, y = 14.0$

**PROBLEMAS 3.5 (página 149)**

1.  $x = -1 + \sqrt{13}, y = 5 - 2\sqrt{13}; x = -1 - \sqrt{13}, y = 5 + 2\sqrt{13}$

3.  $p = -3, q = -4; p = 2, q = 1$

5.  $x = 0, y = 0; x = 1, y = 1$

7.  $x = 4, y = 8; x = -1, y = 3$

9.  $p = 0, q = 0; p = 1, q = 1$

11.  $x = \sqrt{17}, y = 2; x = -\sqrt{17}, y = 2; x = \sqrt{14}, y = -1;$   
 $x = -\sqrt{14}, y = -1$

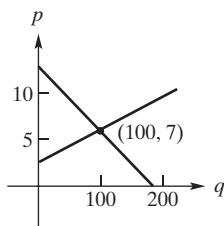
13.  $x = 7, y = 6$

15. En  $(10, 8.1)$  y  $(-10, 7.9)$     17. Tres

19.  $x = -1.3, y = 5.1$     21.  $x = 1.76$     23.  $x = -1.46$

### PROBLEMAS 3.6 (página 156)

1. El punto de equilibrio es  $(100, 7)$

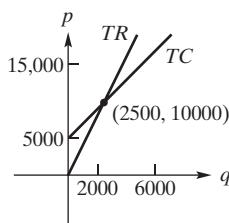


3.  $(5, 212.50)$

5.  $(9, 38)$

7.  $(15, 5)$

9. El punto de equilibrio está en 2500 unidades



11. No puede tener punto de equilibrio para ningún nivel de producción

13. No puede tener punto de equilibrio para ningún nivel de producción

15. (a) \$12; (b) \$12.18

17. 5840 unidades; 840 unidades; 1840 unidades

19. \$4

21. El costo total siempre excede al ingreso total; no hay punto de equilibrio.

23. Disminuye en \$0.70    25.  $P_A = 8; P_B = 10$

27. 2.4 y 11.3

### PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 3 (página 158)

1. 9

3.  $y = -2x - 1; 2x + y + 1 = 0$

5.  $y = \frac{1}{2}x - 1; x - 2y - 2 = 0$     7.  $y = 4; y - 4 = 0$

9.  $y = \frac{2}{5}x - 3; 2x - 5y - 15 = 0$

11. Perpendiculares

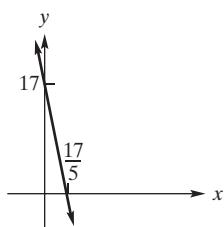
13. Ninguna

15. Paralelas

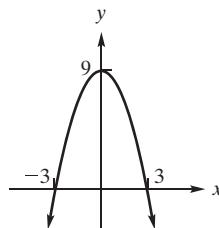
17.  $y = \frac{3}{2}x - 2; \frac{2}{3}$

19.  $y = \frac{4}{3}; 0$

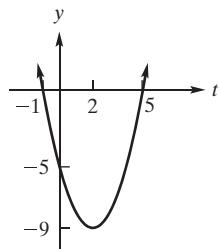
21.  $-5; (0, 17)$



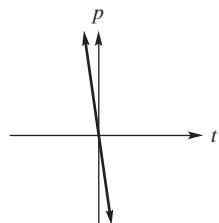
23.  $(3, 0), (-3, 0), (0, 9); (0, 9)$



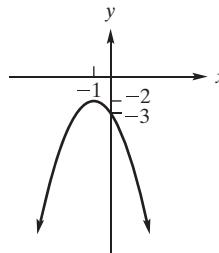
25.  $(5, 0), (-1, 0), (0, -5); (2, -9)$



27.  $-7; (0, 0)$



29.  $(0, -3); (-1, -2)$



31.  $x = \frac{17}{7}, y = -\frac{8}{7}$

33.  $x = 2, y = -\frac{9}{5}$

35.  $x = 8, y = 4$

37.  $x = 0, y = 1, z = 0$

39.  $x = \frac{-5 + \sqrt{65}}{4}, y = \frac{-21 + 5\sqrt{65}}{8};$

$x = \frac{-5 - \sqrt{65}}{4}, y = \frac{-21 - 5\sqrt{65}}{8}$

41.  $x = -2 - 2r, y = 7 + r, z = r; r$  es cualquier número real

43.  $x = r, y = r, z = 0; r$  es cualquier número real

45.  $a - 4b = -7; 13$     47.  $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$

49. 50 unidades; \$5000

51.  $\approx 6.55$

53. 1250 unidades; \$20,000

55. 2.36 toneladas por km cuadrado

57.  $x = 7.29, y = -0.78$

59.  $x = 0.75, y = 1.43$

### APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 3 (página 161)

1. \$2337.50

3. Uso entre 950 y 1407.14 minutos

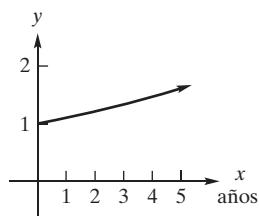
5. Uso entre 2200 y 4200 minutos

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.1**

1. La forma de las gráficas es la misma. El valor de  $A$  escala la ordenada de cualquier punto en  $A$ .

Año	Aumento multiplicativo	Expresión
0	1	$1.1^0$
1	1.1	$1.1^1$
2	1.21	$1.1^2$
3	1.33	$1.1^3$
4	1.46	$1.1^4$

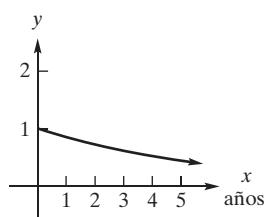
1.1; La inversión aumenta en 10% cada año.  $(1 + 1(0.1)) = 1 + 0.1 = 1.1$



Entre 7 y 8 años.

Año	Disminución multiplicativa	Expresión
0	1	$0.85^0$
1	0.85	$0.85^1$
2	0.72	$0.85^2$
3	0.61	$0.85^3$

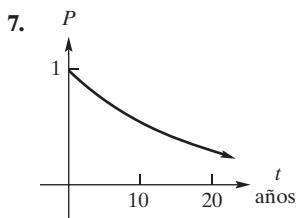
0.85; el automóvil se deprecia en 15% cada año.  $(1 - 1(0.15)) = 1 - 0.15 = 0.85$



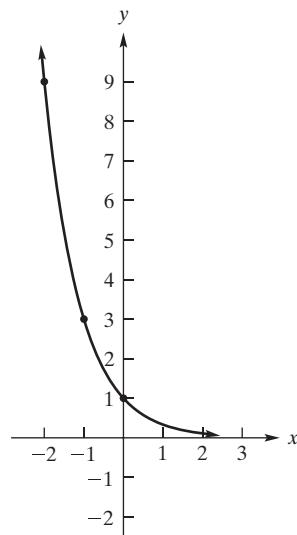
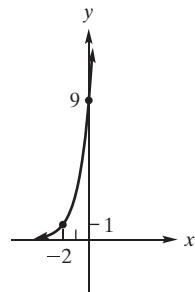
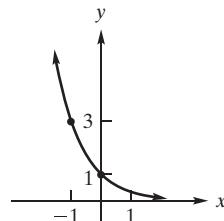
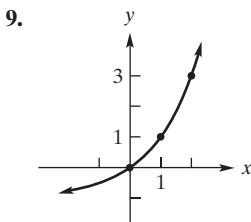
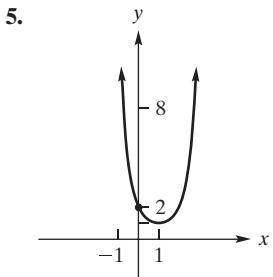
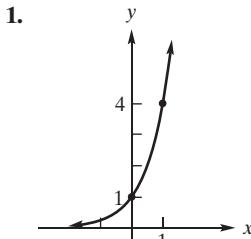
Entre 4 y 5 años.

4.  $y = 1.08^{x-3}$ ; recorra la gráfica 3 unidades hacia la derecha.

5. \$3684.87; \$1684.87      6. 117 empleados



**PROBLEMAS 4.1 (página 173)**



13. B

15. 138,750

17.  $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$

19. (a) \$6014.52; (b) \$2014.52

21. (a) \$1964.76; (b) \$1264.76

23. (a) \$11,983.37; (b) \$8983.37

25. (a) \$6256.36; (b) \$1256.36

27. (a) \$9649.69; (b) \$1649.69

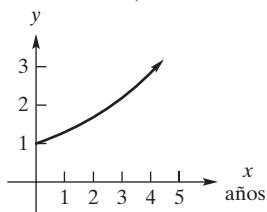
29. \$8253.28

31. (a)  $N = 400(1.05)^t$ ; (b) 420; (c) 486

- 33.

Año	Aumento multiplicativo	Expresión
0	1	$1.3^0$
1	1.3	$1.3^1$
2	1.69	$1.3^2$
3	2.20	$1.3^3$

1.3; el reciclado aumenta en 30% cada año.  $(1 + 1(0.3) = 1 + 0.3 = 1.3)$



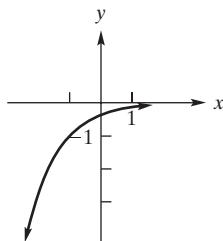
Entre 4 y 5 años.

35. 334,485

37. 4.4817

39. 0.4966

41.



43. 0.2240

45.  $(e^k)^t$ , donde  $b = e^k$

47. (a) 12; (b) 8.8; (c) 3.1; (d) 22 horas

49. 32 años

51. 0.1465

53. 3.17

57. 4.2 min

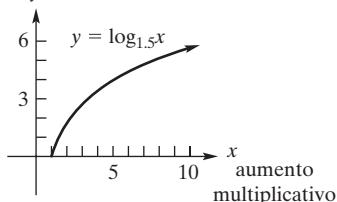
59. 17

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.2

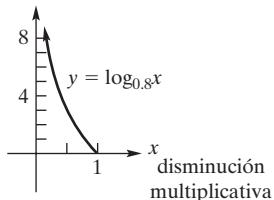
1.  $t = \log_2 16$ ;  $t$  = número de veces que la cantidad de bacterias se ha duplicado.

2.  $\frac{I}{I_0} = 10^{8.3}$

3.



4.



5. Aproximadamente 13.9%

6. Aproximadamente 9.2%

### PROBLEMAS 4.2 (página 180)

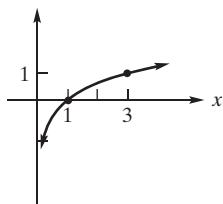
1.  $\log 10,000 = 4$

3.  $2^6 = 64$

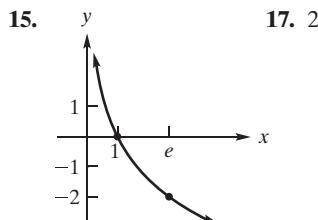
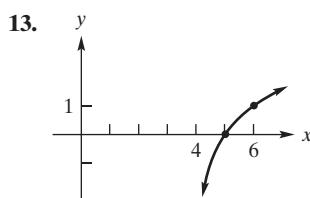
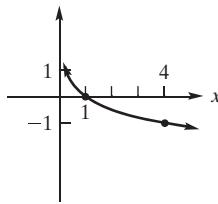
5.  $\ln 20.0855 = 3$

7.  $e^{1.09861} = 3$

9.



11.



17. 2

19. 3

21. 1

23. -2

25. 0

27. -3

29. 81

31. 125

33.  $\frac{1}{10}$

35.  $e^{-3}$

37. 2

39. 6

41.  $\frac{1}{27}$

43. 2

45.  $\frac{5}{3}$

47. 4

49.  $\frac{\ln 2}{3}$

51.  $\frac{5 + \ln 3}{2}$

53. 1.60944

55. 2.00013

57.  $y = \log_{1.10} x$

59. 3

61. (a)  $2N_0$ ; (b)  $k$  es el tiempo necesario para que la población se duplique.

63. 36.1 minutos

65.  $z = y^{3/2}$

67. (a)  $(0, 1)$ ; (b)  $[-0.37, \infty)$

69. 1.10

71. 1.41, 3.06

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.3

$$\begin{aligned} 1. \log(900,000) - \log(9000) &= \log\left(\frac{900,000}{9000}\right) \\ &= \log(100) = 2 \end{aligned}$$

2.  $\log(10,000) = \log(10^4) = 4$

### PROBLEMAS 4.3 (página 185)

1.  $a + b + c$

3.  $a - b$

5.  $3a - b$

7.  $2(a + b)$

9.  $\frac{b}{a}$

11. 48

13. -7

15. 5.01

17. -2

19. 2

21.  $\ln x + 2 \ln(x + 1)$

23.  $2 \ln x - 3 \ln(x + 1)$

25.  $4[\ln(x + 1) + \ln(x + 2)]$

27.  $\ln x - \ln(x + 1) - \ln(x + 2)$

29.  $\frac{1}{2} \ln x - 2 \ln(x + 1) - 3 \ln(x + 2)$

31.  $\frac{2}{5} \ln x - \frac{1}{5} \ln(x + 1) - \ln(x + 2)$

33.  $\log 24$

35.  $\log_2 \frac{2x}{x+1}$

37.  $\log_2(10^5 \cdot 13^2)$

39.  $\log[100(1.05)^{10}]$

41.  $\frac{81}{64}$

43. 1

45.  $\frac{5}{2}$

47.  $\pm 2$

49.  $\frac{\ln(2x + 1)}{\ln 2}$

51.  $\frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln 3}$

53.  $y = \ln \frac{z}{7}$

59.  $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

61.  $\ln 3$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.4

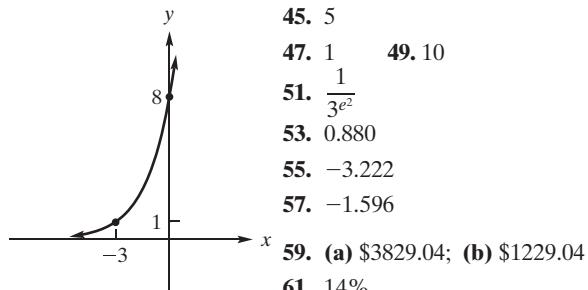
- 1.** 18                   **2.** Día 20  
**3.** El otro sismo es 67.5 veces más intenso que un sismo de nivel cero.

### PROBLEMAS 4.4 (página 190)

- |  |                  |                               |                  |
|--|------------------|-------------------------------|------------------|
| <b>1.</b> 3                                      | <b>3.</b> 2.75   | <b>5.</b> -3                  | <b>7.</b> 2      |
| <b>9.</b> 0.125                                  | <b>11.</b> 1.099 | <b>13.</b> 0.028              | <b>15.</b> 5.140 |
| <b>17.</b> -0.073                                | <b>19.</b> 2.322 | <b>21.</b> 0.942              | <b>23.</b> 0.483 |
| <b>25.</b> 2.496                                 | <b>27.</b> 1003  | <b>29.</b> 2.222              | <b>31.</b> 3.082 |
| <b>33.</b> 1.353                                 | <b>35.</b> 0.5   | <b>37.</b> $S = 12.4A^{0.26}$ |                  |
| <b>39.</b> (a) 100; (b) 46                       |                  | <b>41.</b> 20.5               |                  |
| <b>43.</b> $p = \frac{\log(80-q)}{\log 2}; 4.32$ |                  | <b>49.</b> 3.33               |                  |

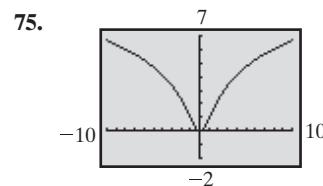
### PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 4 (página 192)

- |  |   |   |                                   |
|--|---|---|-----------------------------------|
| <b>1.</b> $\log_3 243 = 5$                         | <b>3.</b> $81^{1/4} = 3$                        | <b>5.</b> $\ln 54.598 = 4$              | <b>7.</b> 3                       |
| <b>9.</b> -4                                       | <b>11.</b> -2                                   | <b>13.</b> 4                            | <b>15.</b> $\frac{1}{32}$         |
| <b>17.</b> -1                                      | <b>19.</b> $3(a+1)$                             | <b>21.</b> $\log \frac{7^3}{5^2}$       | <b>23.</b> $\ln \frac{x^2y}{z^3}$ |
| <b>25.</b> $\log_2 \frac{x^{9/2}}{(x+1)^3(x+2)^4}$ | <b>27.</b> $3 \ln x + 2 \ln y + 5 \ln z$        |   |                                   |
| <b>29.</b> $\frac{1}{3}(\ln x + \ln y + \ln z)$    | <b>31.</b> $\frac{1}{2}(\ln y - \ln z) - \ln x$ |   |                                   |
| <b>33.</b> $\frac{\ln(x+5)}{\ln 3}$                | <b>35.</b> 1.8295                               | <b>37.</b> $2y + \frac{1}{2}x$          |                                   |
| <b>39.</b> $2x+1$                                  | <b>41.</b> $y = e^{x^2+2}$                      |   |                                   |
| <b>43.</b>   | <b>45.</b> 5                                    | <b>47.</b> 1                            | <b>49.</b> 10                     |
|  |   | <b>51.</b> $\frac{1}{3e^2}$             |                                   |
|  |   | <b>53.</b> 0.880                        |                                   |
|  |   | <b>55.</b> -3.222                       |                                   |
|  |   | <b>57.</b> -1.596                       |                                   |
|  |   | <b>59.</b> (a) \$3829.04; (b) \$1229.04 |                                   |
|  |   | <b>61.</b> 14%                          |                                   |



- 63.** (a)  $P = 6000(0.995)^t$ ; (b) 5707  
**65.** (a) 10 mg; (b) 4.4; (c) 0.2; (d) 1.7; (e) 5.6  
**67.** (a) 6; (b) 28                   **71.**  $(-\infty, 0.37]$

**73.** 2.53



### APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 4 (página 194)

- 1.** (a)  $P = \frac{T(e^{kl} - 1)}{1 - e^{-dkl}}$ ; (b)  $d = \frac{1}{kI} \ln \left[ \frac{P}{P - T(e^{kl} - 1)} \right]$   
**3.** (a) 156; (b) 65

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5.1

- 1.** 4.9%                   **2.** 7 años, 16 días                   **3.** 7.7208%  
**4.** 11.25% compuesto trimestralmente tiene la mejor tasa de interés efectivo. La inversión de \$10,000 es ligeramente mejor si se hace a 20 años.

### PROBLEMAS 5.1 (página 200)

- |  |                                  |  |
|--|----------------------------------|--|
| <b>1.</b> (a) \$11,105.58; (b) \$5105.58                             | <b>3.</b> 3.023%                 | <b>5.</b> 4.081%                           |
| <b>7.</b> (a) 10%; (b) 10.25%; (c) 10.381%; (d) 10.471%; (e) 10.516% | <b>9.</b> 8.08%                  | <b>11.</b> 8.0 años <b>13.</b> \$10,282.95 |
| <b>15.</b> \$38,503.23   | <b>17.</b> (a) 18%; (b) \$19.56% | <b>19.</b> \$3198.54                       |
| <b>21.</b> 8% compuesto anualmente                                   |                                  | <b>23.</b> (a) 4.93%; (b) 4.86%            |
| <b>25.</b> 11.61%  |                                  | <b>27.</b> 6.29%                           |

### PROBLEMAS 5.2 (página 204)

- |                                       |                      |                              |
|---------------------------------------|----------------------|------------------------------|
| <b>1.</b> \$2261.34                   | <b>3.</b> \$1751.83  | <b>5.</b> \$5821.55          |
| <b>7.</b> \$4862.31                   | <b>9.</b> \$6838.95  | <b>11.</b> \$11,381.89       |
| <b>13.</b> \$14,091.10                | <b>15.</b> \$1238.58 | <b>17.</b> \$3244.63         |
| <b>19.</b> (a) \$515.62; (b) rentable |                      | <b>21.</b> Cuenta de ahorros |
| <b>23.</b> \$226.25                   |                      | <b>25.</b> 9.55%             |

### PROBLEMAS 5.3 (página 207)

- |   |                         |
|---|-------------------------|
| <b>1.</b> \$5819.97; \$1819.97                                      | <b>3.</b> \$1456.87     |
| <b>5.</b> 4.08%   | <b>7.</b> 3.05%         |
| <b>9.</b> \$109.42  | <b>11.</b> \$778,800.78 |
| <b>13.</b> (a) \$59,081; (b) \$19,181                               | <b>15.</b> 4.88%        |
| <b>17.</b> 16 años  |                         |
| <b>19.</b> (a) \$1072.51; (b) \$1093.30; (c) \$1072.18              |                         |
| <b>21.</b> (a) \$9458.51; (b) Esta estrategia es mejor por \$26.90. |                         |

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5.4

- |   |                                |                        |
|---|--------------------------------|------------------------|
| <b>1.</b> 48 pies, 36 pies, 27 pies, $20\frac{1}{4}$ pies, $\frac{3}{16}$ pies  | <b>4.</b> \$176,994.65         | <b>5.</b> 6.20%        |
| <b>2.</b> $500(1.5), 500(1.5)^2, 500(1.5)^3, 500(1.5)^4, 500(1.5)^5, 500(1.5)^6$ or 750, 1125, 1688, 2531, 3797, 5695 | <b>6.</b> \$101,925; \$121,925 | <b>7.</b> \$723.03     |
| <b>3.</b> 35.72 m   | <b>8.</b> \$13,962.01          | <b>9.</b> \$45,502.06  |
|   |                                | <b>10.</b> \$48,095.67 |

### PROBLEMAS 5.4 (página 216)

- |  |                            |                                   |
|--|----------------------------|-----------------------------------|
| <b>1.</b> 64, 32, 16, 8, 4             | <b>3.</b> 100, 102, 104.04 | <b>5.</b> $\frac{21,044}{16,807}$ |
| <b>7.</b> 1.11111                      | <b>9.</b> 18.664613        | <b>11.</b> 8.213180               |
| <b>13.</b> \$2950.39                   | <b>15.</b> \$29,984.06     | <b>17.</b> \$8001.24              |
| <b>19.</b> \$90,231.01                 | <b>21.</b> \$204,977.46    | <b>23.</b> \$24,594.36            |
| <b>25.</b> \$5106.27                   | <b>27.</b> \$458.40        |                                   |
| <b>29.</b> (a) \$3048.85; (b) \$648.85 |                            | <b>31.</b> \$3474.12              |
| <b>33.</b> \$1725                      |                            | <b>35.</b> 102.91305              |
| <b>39.</b> \$131.34                    |                            | <b>41.</b> \$1,872,984.02         |
| <b>43.</b> \$205,073; \$142,146        |                            | <b>45.</b> \$181,269.25           |

**PROBLEMAS 5.5 (página 221)**

1. \$273.42      3. \$502.84

5. (a) \$221.43; (b) \$25; (c) \$196.43

7.

Periodo	Saldo inso-luto al inicio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Capital saldado al final del periodo
1	5000.00	350.00	1476.14	1126.14
2	3873.86	271.17	1476.14	1204.97
3	2668.89	186.82	1476.14	1289.32
4	1379.57	96.57	1476.14	1379.57
Total		904.56	5904.56	5000.00

9.

Periodo	Saldo inso-luto al inicio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Capital saldado al final del periodo
1	900.00	22.50	193.72	171.22
2	728.78	18.22	193.72	175.50
3	553.28	13.83	193.72	179.89
4	373.39	9.33	193.72	184.39
5	189.00	4.73	193.73	189.00
Total		68.61	968.61	900.00

11. 11

13. \$1606

15. (a) \$2089.69; (b) \$1878.33; (c) \$211.36; (d) \$381,907

17. 23

19. \$113,302

21. \$38.64

**PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 5 (página 223)**

1.  $\frac{665}{81}$

3. 8.5% compuesto anualmente

5. \$586.60

7. (a) \$1997.13; (b) \$3325.37

9. \$2506.59

11. \$886.98

13. \$314.00

15.

Periodo	Saldo inso-luto al inicio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Capital saldado al final del periodo
1	15,000.00	112.50	3067.84	2955.34
2	12,044.66	90.33	3067.84	2977.51
3	9067.15	68.00	3067.84	2999.84
4	6067.31	45.50	3067.84	3022.34
5	3044.97	22.84	3067.81	3044.97
Total		339.17	15,339.17	15,000.00

17. \$1279.36

**APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 5 (página 224)**

1. \$26,102.13

3. Cuando los inversionistas esperan una caída en las tasas de interés, las inversiones a largo plazo son más atractivas que las de corto plazo.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.1**

1.  $3 \times 2$  o  $2 \times 3$

2.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$

**PROBLEMAS 6.1 (página 231)**

1. (a)
- $2 \times 3$
- ,
- $3 \times 3$
- ,
- $3 \times 2$
- ,
- $2 \times 2$
- ,
- $4 \times 4$
- ,
- $1 \times 2$
- ,
- $3 \times 1$
- ,
- $3 \times 3$
- ,
- $1 \times 1$
- ; (b) B, D, E, H, J; (c) H, J triangulares superiores; D, J triangulares inferiores; (d) F, J; (e) G, J

3. 6      5. 4

7. 0      9. 7, 2, 1, 0

11.  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ -1 & 2 & 5 & 8 & 11 \\ -3 & 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

13. 120 entradas, 1, 0, 1, 0

15. (a)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17.  $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

19.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

21. (a) A y C; (b) todas

- 25.
- $x = 6$
- ,
- $y = \frac{2}{3}$
- ,
- $z = \frac{7}{2}$
- 27.
- $x = 0$
- ,
- $y = 0$

29. (a) 7; (b) 3; (c) Febrero      (d) Azul de lujo; (e) Febrero      (f) Febrero      (g) 38

31. -2001      33.  $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.2**

1.  $\begin{bmatrix} 230 & 220 \\ 190 & 255 \end{bmatrix}$

2.  $x_1 = 670$ ,  $x_2 = 835$ ,  $x_3 = 1405$

**PROBLEMAS 6.2 (página 237)**

1.  $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 3 \end{bmatrix}$       3.  $\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -9 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

5.  $\begin{bmatrix} -4 & -2 & 10 \end{bmatrix}$

7. No definida

9.  $\begin{bmatrix} -12 & 36 & -42 & -6 \\ -42 & -6 & -36 & 12 \end{bmatrix}$

11.  $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 \\ -2 & 8 & 0 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$       13.  $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

15. O

17.  $\begin{bmatrix} 66 & 51 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$       19. No definida

21.  $\begin{bmatrix} -22 & -15 \\ -11 & 9 \end{bmatrix}$

23.  $\begin{bmatrix} 21 & \frac{29}{2} \\ \frac{19}{2} & -\frac{15}{2} \end{bmatrix}$       29.  $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & -3 \\ 20 & 2 \end{bmatrix}$

31.  $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

33. Imposible

35.  $x = \frac{90}{29}$ ,  $y = -\frac{24}{29}$

37.  $x = 6$ ,  $y = \frac{4}{3}$

39.  $x = -6$ ,  $y = -14$ ,  $z = 1$

41.  $\begin{bmatrix} 45 & 75 \\ 1760 & 1520 \\ 35 & 35 \end{bmatrix}$

43. 1.1

45.  $\begin{bmatrix} 15 & -4 & 26 \\ 4 & 7 & 30 \end{bmatrix}$

47.  $\begin{bmatrix} -10 & 22 & 12 \\ 24 & 36 & -44 \end{bmatrix}$

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.3**

1. \$5780

2. \$22,843.75

3.  $\begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{5} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

**PROBLEMAS 6.3 (página 248)**

1. -12

3. 19

5. 1

7.  $2 \times 2$ ; 4

9.  $3 \times 5$ ; 15

11.  $2 \times 1$ ; 2

13.  $3 \times 1$ ; 3

15.  $3 \times 1$ ; 3

17.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19.  $\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$

21.  $\begin{bmatrix} 23 \\ 50 \end{bmatrix}$

23.  $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

25.  $\begin{bmatrix} -4 & 5 & -1 & -18 \end{bmatrix}$

27.  $\begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 & 6 \\ 6 & 9 & -6 & 9 \\ -8 & -12 & 8 & -12 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

29.  $\begin{bmatrix} 78 & 84 \\ -21 & -12 \end{bmatrix}$

31.  $\begin{bmatrix} -5 & -8 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$

33.  $\begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix}$

35.  $\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 \end{bmatrix}$

37.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

39.  $\begin{bmatrix} -1 & -20 \\ -2 & 23 \end{bmatrix}$

41.  $\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

43.  $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 17 \\ 1 & 31 \end{bmatrix}$

45. Imposible

47.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

49.  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

51.  $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

53.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

55.  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

57.  $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$

59.  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

61.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$

63. \$2075

65. \$828,950

67. (a) \$180,000, \$520,000, \$400,000, \$270,000, \$380,000, \$640,000; (b) \$390,000, \$100,000, \$800,000;

(c) \$2,390,000; (d)  $\frac{110}{239}, \frac{129}{239}$

71.  $\begin{bmatrix} 72.82 & -9.8 \\ 51.32 & -36.32 \end{bmatrix}$

73.  $\begin{bmatrix} 15.606 & 64.08 \\ -739.428 & 373.056 \end{bmatrix}$

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.4**

1. 5 bloques de A, 2 bloques de B y 1 bloque de C

2. 3 de X; 4 de Y; 2 de Z

3.  $A = 3D$ ;  $B = 1000 - 2D$ ;  $C = 500 - D$ ;  $D$  = cualquier cantidad entre 0 y 500

**PROBLEMAS 6.4 (página 257)**

1. No reducida

3. Reducida

5. No reducida

7.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

9.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13.  $x = \frac{220}{13}$ ,  $y = -\frac{30}{13}$

15. No hay solución

17.  $x = -\frac{2}{3}r + \frac{5}{3}$ ,  $y = -\frac{1}{6}r + \frac{7}{6}$ ,  $z = r$ , donde  $r$  es cualquier número real

19. No hay solución

21.  $x = -3$ ,  $y = 2$ ,  $z = 0$

23.  $x = 2$ ,  $y = -5$ ,  $z = -1$

25.  $x_1 = r$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = r$ , donde  $r$  es cualquier número real

27. Federal, \$72,000; estatal, \$24,000

29. A, 2000; B, 4000; C, 5000

31. (a) 3 de X, 4 de Z; 2 de X, 1 de Y, 5 de Z; 1 de X; 2 de Y, 6 de Z; 3 de Y, 7 de Z; (b) 3 de X, 4 de Z; (c) 3 de X, 4 de Z; 3 de Y, 7 de Z

33. (a) Sean  $s$ ,  $d$ ,  $g$  el número de unidades de S, D y G, respectivamente. Las seis combinaciones están dadas por:

$s$	5	4	3	2	1	0
$d$	8	7	6	5	4	3
$g$	0	1	2	3	4	5

(b) La combinación

$s = 0$ ,  $d = 3$ ,  $g = 5$

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.5**

1. Un número infinito de soluciones:  $x + \frac{1}{2}z = 0$ ,  $y + \frac{1}{2}z = 0$ ; en forma paramétrica:  $x = -\frac{1}{2}r$ ,  $y = -\frac{1}{2}r$ ,  $z = r$ , donde  $r$  es cualquier número real

**PROBLEMAS 6.5 (página 263)**

1.  $w = -1 + 7r$ ,  $x = 2 - 5r$ ,  $y = 4 - 7r$ ,  $z = r$ , (donde  $r$  es cualquier número real)

3.  $w = -s$ ,  $x = -3r - 4s + 2$ ,  $y = r$ ,  $z = s$  (donde  $r$  y  $s$  son cualesquiera números reales)

5.  $w = -2r + s - 2$ ,  $x = -r + 4$ ,  $y = r$ ,  $z = s$  (donde  $r$  y  $s$  son cualesquiera números reales)

7.  $x_1 = -2r + s - 2t + 1$ ,  $x_2 = -r - 2s + t + 4$ ,  $x_3 = r$ ,  $x_4 = s$ ,  $x_5 = t$  (donde  $r$ ,  $s$  y  $t$  son cualesquiera números reales)

9. Un número infinito de soluciones 11. Solución trivial

13. Un número infinito de soluciones 15.  $x = 0$ ,  $y = 0$

17.  $x = -\frac{6}{5}r$ ,  $y = \frac{8}{15}r$ ,  $z = r$

19.  $x = 0$ ,  $y = 0$  21.  $x = r$ ,  $y = -2r$ ,  $z = r$

23.  $w = -2r$ ,  $x = -3r$ ,  $y = r$ ,  $z = r$

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.6**

1. Sí

2. Reunión al mediodía, viernes

3.  $E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ; F no es invertible.

4. A: 5000 acciones; B: 2500 acciones; C: 2500 acciones

**PROBLEMAS 6.6 (página 269)**

1.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$

3. No es invertible

7. No es invertible

9. No es invertible (no es una matriz cuadrada)

11.  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15.  $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

19.  $x_1 = 10, x_2 = 20$

23.  $x = 2, y = 1$

27.  $x = 0, y = 1, z = 2$

31. No hay solución

35.  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

37. (a) 40 del modelo A, 60 del modelo B;  
(b) 45 del modelo A, 50 del modelo B

39. (b)  $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$

5.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

13.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

17.  $\begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -3 & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

21.  $x = 17, y = -20$

25.  $x = -3r + 1, y = r$

29.  $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$

33.  $w = 1, x = 3, y = -2, z = 7$

45. (a)  $\begin{bmatrix} 2.05 & 1.28 \\ 0.73 & 1.71 \end{bmatrix}$ ; (b)  $\begin{bmatrix} \frac{84}{41} & \frac{105}{82} \\ \frac{30}{41} & \frac{70}{41} \end{bmatrix}$

47.  $\begin{bmatrix} 2.75 & -1.59 & -1.11 \\ -0.48 & 1.43 & 0.00 \\ -1.22 & 0.32 & 2.22 \end{bmatrix}$

49.  $w = 14.44, x = 0.03, y = -0.80, z = 10.33$

**PROBLEMAS 6.7 (página 271)**

1.  $\begin{bmatrix} 1290 \\ 1425 \end{bmatrix}; 1405$

3. (a)  $\begin{bmatrix} 134.29 \\ 162.25 \\ 234.35 \end{bmatrix}$ ; (b)  $\begin{bmatrix} 68.59 \\ 84.50 \\ 108.69 \end{bmatrix}$

5.  $\begin{bmatrix} 1301 \\ 1215 \\ 1188 \end{bmatrix}$

7.  $\begin{bmatrix} 1382 \\ 1344 \\ 1301 \end{bmatrix}$

9. 736.39 unidades de carbón, 536.29 unidades de acero,  
699.96 unidades de servicios ferroviarios**PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 6 (página 276)**

1.  $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -16 & -10 \end{bmatrix}$

3.  $\begin{bmatrix} 1 & 42 & 5 \\ 2 & -18 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

5.  $\begin{bmatrix} 11 & -4 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$

7.  $\begin{bmatrix} 6 \\ 32 \end{bmatrix}$

9.  $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

11.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

13.  $x = 3, y = 21$

15.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

17.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19.  $x = 0, y = 0$ 

21. No hay solución

23.  $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

25. No existe la inversa

27.  $x = 0, y = 1, z = 0$

29.  $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^3 = \mathbf{O}, \mathbf{A}^{1000} = \mathbf{O}$ , no tiene inversa

31. (a) Sean  $x, y, z$  las dosis de cápsulas semanales de las marcas I, II, III, respectivamente. Las combinaciones están dadas por:

	$x$	$y$	$z$
combinación 1	4	9	0
combinación 2	3	6	1
combinación 3	2	3	2
combinación 4	1	0	3

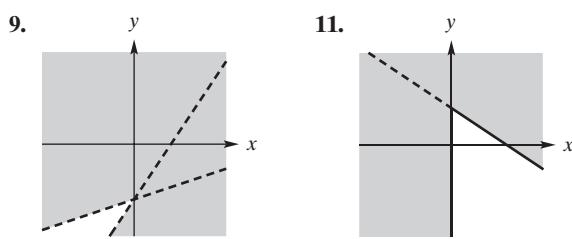
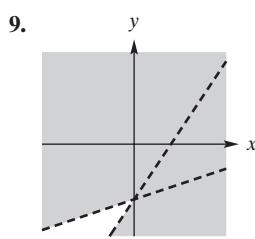
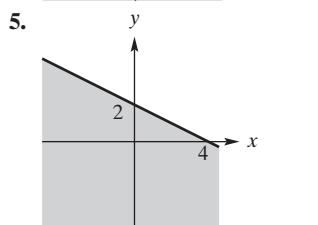
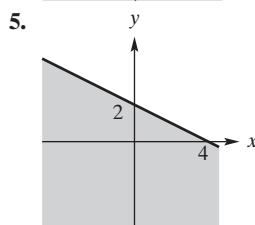
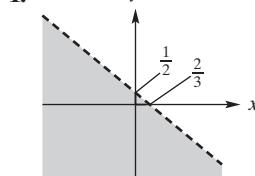
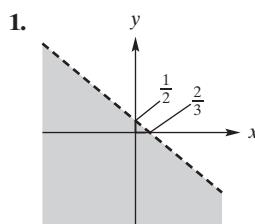
33.  $\begin{bmatrix} 215 & 87 \\ 89 & 141 \end{bmatrix}$

35.  $\begin{bmatrix} 39.7 \\ 35.1 \end{bmatrix}$

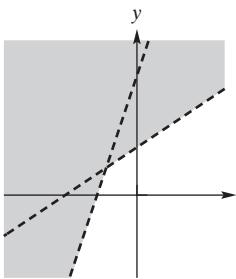
**APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 6 (página 278)**

1. \$151.40

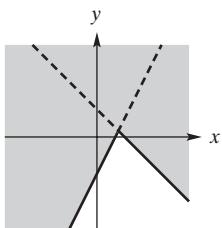
3. No es posible; diferentes combinaciones de estancias pueden costar lo mismo.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.1**1.  $2x + 1.5y > 0.9x + 0.7y + 50, y > -1.375x + 62.5$ ; haga el bosquejo de la recta punteada  $y = -1.375x + 62.5$  y sombree el semiplano por arriba de la recta. Para producir una utilidad, el número de imanes producidos y vendidos de tipos A y B, debe ser un par ordenado en la región sombreada.2.  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 50, x \geq 2y$ . La región consiste en los puntos en o por arriba del eje  $x$ , y en o a la derecha del eje  $y$ . Además, los puntos deben estar en o por arriba de la recta  $x + y = 50$ , y en o por debajo de la recta  $x = 2y$ .**PROBLEMAS 7.1 (página 284)**

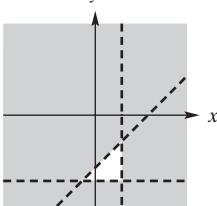
13.



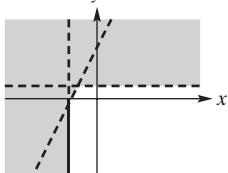
15.



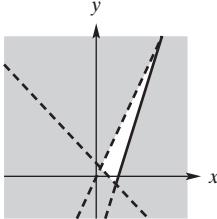
17.



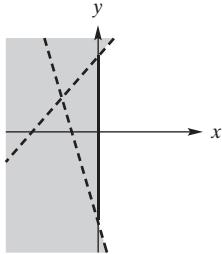
19.



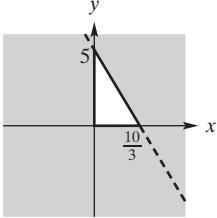
21.



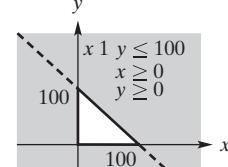
23.



25.



27.



x: número de libras de A  
y: número de libras de B

29.  $x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y \leq 240, 0.5x + y \leq 80$

### PROBLEMAS 7.2 (página 291)

1.  $P = 112\frac{1}{2}$  cuando  $x = \frac{45}{2}, y = 0$

3.  $Z = -10$  cuando  $x = 2, y = 3$

5. No tiene solución óptima (la región factible está vacía)

7.  $Z = 3$  cuando  $x = 0, y = 1$

9.  $C = \frac{23}{3}$  cuando  $x = \frac{7}{3}, y = \frac{1}{3}$

11. No tiene solución óptima (no acotado)

13. 10 camiones, 20 perinolas; \$110

15. 4 unidades de alimento A, 4 unidades de alimento B; \$8

17. 10 toneladas de la mina I, 10 toneladas de la mina II; \$1100

19. 6 cámaras de tipo A y 10 cámaras de tipo B

21. (c)  $x = 0, y = 200$

23.  $Z = 15.54$  cuando  $x = 2.56, y = 6.74$

25.  $Z = -75.98$  cuando  $x = 9.48, y = 16.67$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.3

- Enviar  $10t + 15$  televisores de C a A,  $-10t + 30$  televisores de C a B,  $+10t + 10$  televisores de D a A y  $10t$  televisores de D a B, para  $0 \leq t \leq 1$ ; costo mínimo \$780.

### PROBLEMAS 7.3 (página 296)

1.  $Z = 33$  cuando  $x = (1+t)(2) + 5t = 2 + 3t$ ,  
 $y = (1-t)(3) + 2t = 3 - t$  y  $0 \leq t \leq 1$

3.  $Z = 84$  cuando  $x = (1-t)\left(\frac{36}{7}\right) + 6t = \frac{6}{7}t + \frac{36}{7}$ ,  
 $y = (1-t)\left(\frac{4}{7}\right) + 0t = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}t$ , y  $0 \leq t \leq 1$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.4

- 0 aparatos de tipo 1, 72 aparatos de tipo 2, 12 aparatos de tipo 3; utilidad máxima de \$20,400

### PROBLEMAS 7.4 (página 307)

1.  $Z = 8$  cuando  $x_1 = 0, x_2 = 4$

3.  $Z = 2$  cuando  $x_1 = 0, x_2 = 1$

5.  $Z = 28$  cuando  $x_1 = 3, x_2 = 2$

7.  $Z = 20$  cuando  $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 0$

9.  $Z = 2$  cuando  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$

11.  $Z = \frac{72}{13}$  cuando  $x_1 = \frac{22}{13}, x_2 = \frac{50}{13}$

13.  $W = 13$  cuando  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 3$

15.  $Z = 600$  cuando  $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 0$

17. 0 de A, 2400 de B; \$1200

19. 0 sillas, 300 mecedoras, 100 sillones; \$10,800

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.5

- $35 - 7t$  dispositivos 1,  $6t$  dispositivos 2, 0 dispositivos 3, para  $0 \leq t \leq 1$

### PROBLEMAS 7.5 (página 313)

1. Sí; para la tabla,  $x_2$  es la variable que entra y los cocientes  $\frac{3}{2}$  y  $\frac{1}{1}$  empatan como los más pequeños.

3. No existe solución óptima (no acotado)

5.  $Z = 16$  cuando  $x_1 = \frac{8}{7}t, x_2 = 2 + \frac{4}{7}t$ , y  $0 \leq t \leq 1$

7. No tiene solución óptima (no acotado)

9.  $Z = 13$  cuando  $x_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t, x_2 = 6t, x_3 = 4 - 3t$ , y  $0 \leq t \leq 1$

11. \$15,200. Si  $x_1, x_2, x_3$  denotan a los números de sillones, mecedoras y sillones producidos, respectivamente, entonces

$$x_1 = 100 - 100t,$$

$$x_2 = 100 + 150t,$$

$$x_3 = 200 - 50t,$$

$$0 \leq t \leq 1$$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.6

- Planta I: 500 estándar, 700 de lujo; planta II: 500 estándar, 100 de lujo; utilidad máxima \$89,500

### PROBLEMAS 7.6 (página 323)

1.  $Z = 7$  cuando  $x_1 = 1, x_2 = 5$

3.  $Z = 4$  cuando  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0$

5.  $Z = 28$  cuando  $x_1 = 8, x_2 = 2, x_3 = 0$

7.  $Z = -17$  cuando  $x_1 = 3, x_2 = 2$

9. No tiene solución óptima (región factible vacía)

11.  $Z = 2$  cuando  $x_1 = 6, x_2 = 10$   
 13. 166 libreros estándar, 0 libreros ejecutivos  
 15. 30% en A, 0% en AA, 70% en AAA; 6.6%

### PROBLEMAS 7.7 (página 329)

1.  $Z = 14$  cuando  $x_1 = 7, x_2 = 0$
3.  $Z = 216$  cuando  $x_1 = 18, x_2 = 0, x_3 = 0$
5.  $Z = 4$  cuando  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4$
7.  $Z = 0$  cuando  $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 1$
9.  $Z = 28$  cuando  $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 5$
11. Instalar el dispositivo A en los hornos produce 700,000 barriles anualmente y el dispositivo B en los hornos produce 2,600,000 barriles al año
13. A Columbus, 150 de Akron y 0 de Springfield; a Dayton, 0 de Akron y 150 de Springfield; \$1050
15. (a) Columna 3: 1, 3, 3; columna 4: 0, 4, 8; (b)  $x_1 = 10, x_2 = 0, x_3 = 20, x_4 = 0$ ; (c) 90 pulgadas.

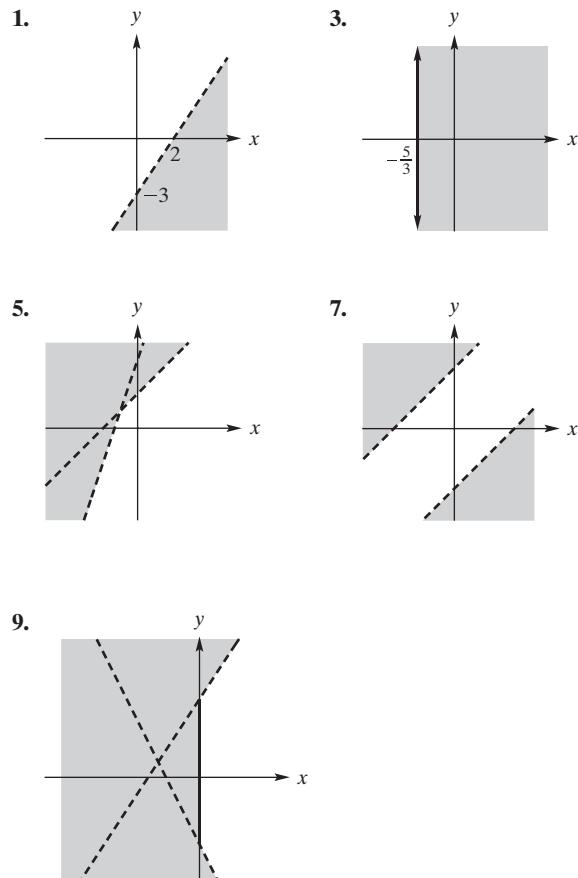
### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.8

1. Minimizar  $W = 60,000y_1 + 2000y_2 + 120y_3$  sujeta a  
 $300y_1 + 20y_2 + 3y_3 \geq 300$   
 $220y_1 + 40y_2 + y_3 \geq 200$   
 $180y_1 + 20y_2 + 2y_3 \geq 200$   
 $y_1, y_2, y_3 \geq 0$
2. Maximizar  $W = 98y_1 + 80y_2$  sujeta a  
 $20y_1 + 8y_2 \leq 6$   
 $6y_1 + 16y_2 \leq 2$   
 $y_1, y_2 \geq 0$
3. 5 dispositivos 1, 0 dispositivos 2, 15 dispositivos 3

### PROBLEMAS 7.8 (página 337)

1. Minimizar  $W = 5y_1 + 3y_2$  sujeta a  
 $y_1 - y_2 \geq 1$   
 $y_1 + y_2 \geq 2$   
 $y_1, y_2 \geq 0$
3. Maximizar  $W = 8y_1 + 2y_2$  sujeta a  
 $y_1 - y_2 \leq 1$   
 $y_1 + 2y_2 \leq 8$   
 $y_1 + y_2 \leq 5$   
 $y_1, y_2 \geq 0$
5. Minimizar  $W = 13y_1 - 3y_2 - 11y_3$  sujeta a  
 $-y_1 + y_2 - y_3 \geq 1$   
 $2y_1 - y_2 - y_3 \geq -1$   
 $y_1, y_2, y_3 \geq 0$
7. Maximizar  $W = -3y_1 + 3y_2$  sujeta a  
 $-y_1 + y_2 \leq 4$   
 $y_1 - y_2 \leq 4$   
 $y_1 + y_2 \leq 6$   
 $y_1, y_2 \geq 0$
9.  $Z = \frac{43}{5}$  cuando  $x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{5}, x_3 = \frac{7}{5}$
11.  $Z = 26$  cuando  $x_1 = 6, x_2 = 1$
13.  $Z = 14$  cuando  $x_1 = 1, x_2 = 2$
15. \$250 en publicidad en periódico, \$1400 en publicidad en radio; \$1650.
17. 20 aprendices de embarque, 40 trabajadores de embarque, 90 trabajadores semicalificados, 0 trabajadores calificados; \$1200

### PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 7 (página 339)

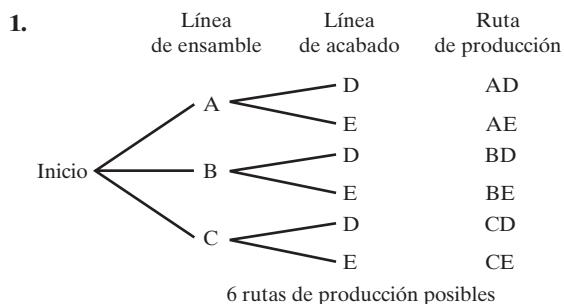


11.  $Z = 3$  cuando  $x = 3, y = 0$
13.  $Z = -2$  cuando  $x = 0, y = 2$
15.  $Z = \frac{70}{9}$  cuando  $x = \frac{20}{9}, y = \frac{10}{9}$
17.  $Z = 36$  cuando  $x = 2 + 2t, y = 3 - 3t, y \geq 0 \leq t \leq 1$
19.  $Z = 32$  cuando  $x_1 = 8, x_2 = 0$
21.  $Z = \frac{5}{3}$  cuando  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{5}{3}$
23.  $Z = 24$  cuando  $x_1 = 0, x_2 = 12$
25.  $Z = \frac{7}{2}$  cuando  $x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = 0, x_3 = \frac{9}{4}$
27. No tiene solución óptima (no acotado)
29.  $Z = 70$  cuando  $x_1 = 35, x_2 = 0, x_3 = 0$
31. 0 unidades de X, 6 unidades de Y, 14 unidades de Z; \$398
33. 500,000 galones de A a D, 100,000 galones de A a C, 400,000 galones de B a C; \$19,000
35. Sólo 10 kg del alimento A
37.  $Z = 129.83$  cuando  $x = 9.38, y = 1.63$

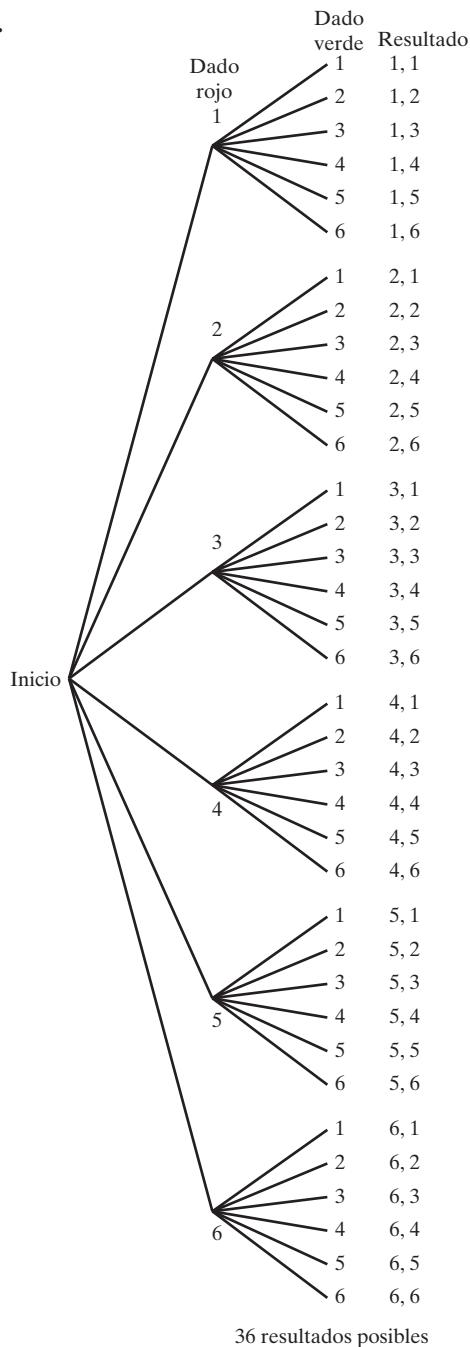
### APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 7 (página 342)

1. 2 minutos de radiación
3. Las respuestas pueden variar.

**PROBLEMAS 8.1 (página 350)**



3.



5. 20      7. 96      9. 1024      11. 120      13. 720

15. 720      17. 1000; se despliega mensaje de error

19. 6      21. 336      23. 1296      25. 1320

27. 360      29. 720      31. 2520; 5040      33. 624

35. 120      37. (a) 11,880; (b) 19,008      39. 48

41. 4320

**PROBLEMAS 8.2 (página 360)**

1. 15      3. 1      5. 360      9. 2380

11. 715      13.  $\frac{74!}{10! \cdot 64!}$       15. 56      17. 415,800

19. 35      21. 720      23. 1680      25. 252

27. 756,756      29. (a) 210; (b) 770      31. 17,325

33. (a) 1; (b) 1; (c) 18      35. 3744      37. 5,250,960

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 8.3**

1. 10,586,800

**PROBLEMAS 8.3 (página 368)**

1. {9D, 9C, 9E}

3. {1C, 1X, 2C, 2X, 3C, 3X, 4C, 4X, 5C, 5X, 6C, 6X}

5. {64, 69, 60, 61, 46, 49, 40, 41, 96, 94, 90, 91, 06, 04, 09, 01, 16, 14, 19, 10}

7. (a) {RR, RB, RA, BR, BB, BA, AR, AB, AA};  
(b) {RB, RA, BR, BA, AR, AB}

9. El espacio muestral consiste en los conjuntos ordenados de seis elementos y cada elemento es C o X; 64.

11. El espacio muestral consiste de pares ordenados donde el primer elemento indica la carta seleccionada y el segundo elemento indica el número en el dado; 312.

13. El espacio muestral consiste en las combinaciones de 52 cartas tomadas 10 a la vez;  ${}^{52}C_{10}$ .

15. {1, 3, 5, 7, 9}      17. {7, 9}      19. {1, 2, 4, 6, 8, 10}

21. S      23.  $E_1$  y  $E_4$ ,  $E_2$  y  $E_3$ ,  $E_3$  y  $E_4$

25.  $E$  y  $G$ ,  $F$  e  $I$ ,  $G$  y  $H$ ,  $G$  e  $I$

27. (a) {CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCT, XXX, XXX};

(b) {CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXX};

(c) {CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXX}; (d) S;

(e) {CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC}; (f)  $\emptyset$ ;

(g) {CCC, XXX}

29. (a) {ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA};

(b) {ABC, ACB}; (c) {BAC, BCA, CAB, CBA}

**PROBLEMAS 8.4 (página 379)**

1. 750      3. (a) 0.8; (b) 0.4      5. No

7. (a)  $\frac{5}{36}$ ; (b)  $\frac{1}{12}$ ; (c)  $\frac{1}{4}$ ; (d)  $\frac{1}{36}$ ; (e)  $\frac{1}{2}$ ; (f)  $\frac{1}{2}$ ; (g)  $\frac{5}{6}$

9. (a)  $\frac{1}{52}$ ; (b)  $\frac{1}{4}$ ; (c)  $\frac{1}{13}$ ; (d)  $\frac{1}{2}$ ; (e)  $\frac{1}{2}$ ; (f)  $\frac{1}{52}$ ; (g)  $\frac{4}{13}$ ;

(h)  $\frac{1}{26}$ ; (i) 0

11. (a)  $\frac{1}{624}$ ; (b)  $\frac{4}{624} = \frac{1}{156}$ ; (c)  $\frac{8}{624} = \frac{1}{78}$ ;

(d)  $\frac{39}{624} = \frac{1}{16}$

13. (a)  $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{132,600} = \frac{1}{5525}$ ; (b)  $\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{132,600} = \frac{11}{850}$

15. (a)  $\frac{1}{8}$ ; (b)  $\frac{3}{8}$ ; (c)  $\frac{1}{8}$ ; (d)  $\frac{7}{8}$

17. (a)  $\frac{4}{5}$ ; (b)  $\frac{1}{5}$

19. (a) 0.1; (b) 0.35; (c) 0.7; (d) 0.95; (e) 0.1, 0.35, 0.7, 0.95

21.  $\frac{1}{10}$       23. (a)  $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$ ; (b)  $\frac{11}{1024}$

25.  $\frac{13 \cdot {}_4C_4 \cdot 12 \cdot {}_4C_1}{52C_5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 4}{52C_5}$

27. (a)  $\frac{6545}{161,700} \approx 0.040$ ; (b)  $\frac{4140}{161,700} \approx 0.026$

29. \$19.34      31.  $\frac{1}{9}$

33. (a) 0.51; (b) 0.44; (c) 0.03      35. 4:1

39.  $\frac{7}{12}$       41.  $\frac{2}{7}$       43. 3:1

### PROBLEMAS 8.5 (página 391)

1. (a)  $\frac{1}{5}$ ; (b)  $\frac{4}{5}$ ; (c)  $\frac{1}{4}$ ; (d)  $\frac{1}{2}$ ; (e) 0      3. 1

5. 0.43      7. (a)  $\frac{1}{2}$ ; (b)  $\frac{2}{3}$

9. (a)  $\frac{2}{3}$ ; (b)  $\frac{1}{2}$ ; (c)  $\frac{1}{3}$ ; (d)  $\frac{1}{6}$

11. (a)  $\frac{5}{8}$ ; (b)  $\frac{35}{58}$ ; (c)  $\frac{11}{39}$ ; (d)  $\frac{8}{25}$ ; (e)  $\frac{10}{47}$ ; (f)  $\frac{25}{86}$

13. (a)  $\frac{1}{2}$ ; (b)  $\frac{4}{9}$       15.  $\frac{2}{3}$

17. (a)  $\frac{1}{2}$ ; (b)  $\frac{1}{4}$       19.  $\frac{2}{3}$       21.  $\frac{1}{11}$

23.  $\frac{1}{6}$       25.  $\frac{2}{3}$       27.  $\frac{1}{13}$       29.  $\frac{40}{51}$

31.  $\frac{8}{16,575}$       33.  $\frac{1}{5525}$       35.  $\frac{2}{17}$

37. (a)  $\frac{47}{100}$ ; (b)  $\frac{27}{47}$       39. (a)  $\frac{3}{4}$ ; (b)  $\frac{3}{5}$

41.  $\frac{9}{20}$       43.  $\frac{1}{4}$       45.  $\frac{7}{300}$       47. 0.049

49. (a) 0.06; (b) 0.155      51.  $\frac{4}{31}$

### PROBLEMAS 8.6 (página 401)

1. (a)  $\frac{1}{4}$ ; (b)  $\frac{5}{6}$ ; (c)  $\frac{1}{3}$ ; (d)  $\frac{2}{3}$ ; (e)  $\frac{1}{12}$ ; (f)  $\frac{1}{2}$ ; (g)  $\frac{1}{3}$

3.  $\frac{7}{18}$       5. Independientes      7. Independientes

9. Dependientes      11. Dependientes

13. (a) Independientes; (b) dependientes; (c) dependientes; (d) no

15. Dependientes      17.  $\frac{1}{18}$       19.  $\frac{1}{25}$       21.  $\frac{3}{676}$

23. (a)  $\frac{3}{10}$ ; (b)  $\frac{1}{40}$ ; (c)  $\frac{1}{10}$

25. (a)  $\frac{2}{5}$ ; (b)  $\frac{1}{5}$ ; (c)  $\frac{7}{15}$ ; (d)  $\frac{13}{15}$ ; (e)  $\frac{2}{15}$

27. (a)  $\frac{7}{54}$ ; (b)  $\frac{35}{162}$       29.  $\frac{139}{361}$       31.  $\frac{3}{200}$

33. (a)  $\frac{1}{1728}$ ; (b)  $\frac{3}{8}$

35. (a)  $\frac{15}{1024}$ ; (b)  $\frac{1}{64}$ ; (c)  $\frac{53}{512}$       37. 0.0106

### PROBLEMAS 8.7 (página 409)

1.  $P(E|D) = \frac{1}{4}$ ,  $P(F|D') = \frac{4}{7}$       3.  $\frac{175}{386} \approx 0.453$ .

5. (a)  $\frac{258}{937} \approx 0.275$ ; (b)  $\frac{14}{3021} \approx 0.005$

7.  $\frac{5}{8}$       9.  $\frac{6}{31}$       11.  $\frac{114}{119} \approx 0.958$

13.  $\frac{27}{49} \approx 55.1\%$       15.  $\frac{3}{4}$       17.  $\frac{24}{29} \approx 0.828$

19.  $\frac{4}{5}$       21.  $\frac{14}{15} \approx 0.933$

23. (a)  $\frac{27}{100} = 0.27$ ; (b)  $\frac{15}{27} \approx 0.556$ ; (c)  $\frac{17}{100} = 0.17$

25. (a) 0.18; (b) 0.23; (c) 0.59; (d) alta calidad

27.  $\frac{7}{9} \approx 0.78$

### PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 8 (página 414)

1. 336      3. 36      5. 17,576,000      7. 32

9. 210      11. 462      13. (a) 2024; (b) 253

15. 34,650      17. 1260

19. (a) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}; (b) {4, 5, 6}; (c) {4, 5, 6, 7, 8}; (d)  $\emptyset$ ; (e) {4, 5, 6, 7, 8}; (f) no

21. (a) {R<sub>1</sub>R<sub>2</sub>R<sub>3</sub>, R<sub>1</sub>R<sub>2</sub>G<sub>3</sub>, R<sub>1</sub>G<sub>2</sub>R<sub>3</sub>, R<sub>1</sub>G<sub>2</sub>G<sub>3</sub>, G<sub>1</sub>R<sub>2</sub>R<sub>3</sub>, G<sub>1</sub>R<sub>2</sub>G<sub>3</sub>, G<sub>1</sub>G<sub>2</sub>R<sub>3</sub>, G<sub>1</sub>G<sub>2</sub>G<sub>3</sub>}; (b) {R<sub>1</sub>R<sub>2</sub>G<sub>3</sub>, R<sub>1</sub>G<sub>2</sub>R<sub>3</sub>, G<sub>1</sub>R<sub>2</sub>R<sub>3</sub>}; (c) {R<sub>1</sub>R<sub>2</sub>R<sub>3</sub>, G<sub>1</sub>G<sub>2</sub>G<sub>3</sub>}

23. 0.2      25.  $\frac{45}{512}$       27. (a)  $\frac{4}{25}$ ; (b)  $\frac{2}{15}$

29. (a)  $\frac{1}{8}$ ; (b)  $\frac{3}{16}$       31. 3:5      33.  $\frac{6}{7}$

35.  $\frac{10}{13}$       37. 0.42      39. (a)  $\frac{2}{11}$ ; (b)  $\frac{1}{18}$

41.  $\frac{1}{4}$       43. (a)  $\frac{1}{3}$ ; (b) independientes      45. Dependientes

47. (a) 0.0081; (b) 0.2646; (c) 0.3483

49.  $\frac{22}{45}$       51.  $\frac{1}{4}$

53. (a) 0.01625; (b)  $\frac{3}{13} \approx 0.23$

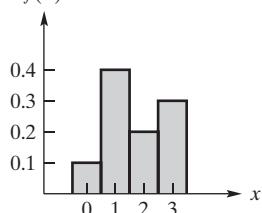
### APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 8 (página 418)

1.  $\approx 0.645$

### PROBLEMAS 9.1 (página 426)

1.  $\mu = 1.7$ ;  $\text{Var}(X) = 1.01$ ;  $\sigma \approx 1.00$

$f(x)$



3.  $\mu = \frac{9}{4} = 2.25$ ;  $\text{Var}(X) = \frac{11}{16} = 0.6875$ ;  $\sigma \approx 0.83$

5. (a) 0.1; (b) 5.8; (c) 1.56

7.  $E(X) = \frac{3}{2} = 1.5$ ;  $\sigma^2 = \frac{3}{4} = 0.75$ ;  $\sigma \approx 0.87$

9.  $E(X) = \frac{6}{5} = 1.2$ ;  $\sigma^2 = \frac{9}{25} = 0.36$ ;  $\sigma = \frac{3}{5} = 0.6$

11.  $f(0) = \frac{1}{10}$ ,  $f(1) = \frac{3}{5}$ ,  $f(2) = \frac{3}{10}$

13. (a)  $-\$1.38$  (una pérdida); (b)  $-\$2.75$  (una pérdida)

15.  $\$101.43$

17.  $\$3.00$

19.  $\$410$

21. Pérdida de  $\$0.25$ ;  $\$1$

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 9.2

1.

$x$	$P(x)$
0	$\frac{2401}{10\,000}$
1	$\frac{4116}{10\,000}$
2	$\frac{2646}{10\,000}$
3	$\frac{756}{10\,000}$
4	$\frac{81}{10\,000}$

## PROBLEMAS 9.2 (página 432)

1.  $f(0) = \frac{16}{25}$ ;  $f(1) = \frac{8}{25}$ ;  $f(2) = \frac{1}{25}$ ;  $\mu = \frac{2}{5}$ ;  $\sigma = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

3.  $f(0) = \frac{1}{27}$ ,  $f(1) = \frac{2}{9}$ ,  $f(2) = \frac{4}{9}$ ,  $f(3) = \frac{8}{27}$ ;  $\mu = 2$ ;  $\sigma = \frac{\sqrt{6}}{3}$

5. 0.001536      7.  $\frac{96}{625} = 0.1536$       9.  $\frac{3}{16}$

11.  $\frac{165}{2048} \approx 0.081$       13.  $\frac{1225}{3456} \approx 0.3545$       15. 0.002

17. (a)  $\frac{9}{64}$ ; (b)  $\frac{5}{32}$       19.  $\frac{2048}{3125} \approx 0.655$       21. 0.7599

23.  $\frac{13}{16}$       25.  $\frac{512}{2187} \approx 0.234$

## PROBLEMAS 9.3 (página 440)

1. No      3. No      5. Sí      7.  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{3}{4}$

9.  $a = 0.3$ ,  $b = 0.6$ ,  $c = 0.1$       11. Sí      13. No

15.  $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \frac{11}{12} \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \frac{25}{36} \\ \frac{11}{36} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} \frac{83}{108} \\ \frac{25}{108} \end{bmatrix}$

17.  $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0.42 \\ 0.58 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0.416 \\ 0.584 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 0.4168 \\ 0.5832 \end{bmatrix}$

19.  $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.28 \\ 0.46 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0.164 \\ 0.302 \\ 0.534 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 0.1766 \\ 0.3138 \\ 0.5096 \end{bmatrix}$

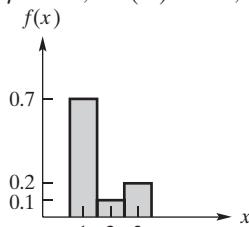
21. (a)  $\mathbf{T}^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{T}^3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{9}{16} & \frac{7}{16} \end{bmatrix}$ ; (b)  $\frac{3}{8}$ ; (c)  $\frac{9}{16}$

23. (a)  $\mathbf{T}^2 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.23 & 0.27 \\ 0.40 & 0.69 & 0.54 \\ 0.10 & 0.08 & 0.19 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{T}^3 = \begin{bmatrix} 0.230 & 0.369 & 0.327 \\ 0.690 & 0.530 & 0.543 \\ 0.080 & 0.101 & 0.130 \end{bmatrix}$ ; (b) 0.40; (c) 0.369

25.  $\begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$       27.  $\begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$       29.  $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$
- Gripe      Sin gripe  
 31. (a) Gripe  $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.9 & 0.8 \end{bmatrix}$ ; (b) 37, 36  
 Sin gripe
33. (a) A  $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$ ; (b) 0.61
- D      R      O  
 35. (a) D  $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$ ; (b) 0.19; (c) 40%
- A      Compet.  
 37. (a) A  $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$ ; (b) 65%; (c) 60%
- 1       $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$ ; (b) 59.18% en el compartimiento 1, 40.82% en el compartimiento 2; (c) 60% en el compartimiento 1, 40% en el compartimiento 2
41. (a)  $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ; (b)  $33\frac{1}{3}\%$

## PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 9 (página 444)

1.  $\mu = 1.5$ ,  $\text{Var}(X) = 0.65$ ,  $\sigma \approx 0.81$



3. (a)  $f(0) = \frac{1}{12}$ ,  $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = \frac{1}{6}$ ,  $f(6) = \frac{1}{12}$ ; (b) 3

5.  $-\$0.10$  (una pérdida)      7. (a)  $\$176$ ; (b)  $\$704,000$

9.  $f(0) = 0.522$ ,  $f(1) = 0.368$ ,  $f(2) = 0.098$ ,  $f(3) = 0.011$ ,  $f(4) = 0.0005$ ;  $\mu = 0.6$ ;  $\sigma \approx 0.71$

11.  $\frac{1}{64}$       13.  $\frac{8}{81}$       15.  $\frac{2072}{3125}$

17.  $a = 0.3$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 0.5$

19.  $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.15 \\ 0.75 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0.130 \\ 0.155 \\ 0.715 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 0.1310 \\ 0.1595 \\ 0.7095 \end{bmatrix}$

21. (a)  $\mathbf{T}^2 = \begin{bmatrix} \frac{19}{49} & \frac{15}{49} \\ \frac{30}{49} & \frac{34}{49} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{T}^3 = \begin{bmatrix} \frac{109}{343} & \frac{117}{343} \\ \frac{234}{343} & \frac{226}{343} \end{bmatrix}$ ; (b)  $\frac{15}{49}$ ; (c)  $\frac{234}{343}$

23.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

25. (a) 76%, (b) 74.4% japonés, 25.6% no japonés;  
 (c) 75% japonés, 25% no japonés

### APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 9 (página 446)

1. 7

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0.9 \end{bmatrix};$$

Contra siempre desertar:  $\begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Contra siempre cooperar:  $\begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}$

Contra esto-por-eso regular:  $\begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.1

1. El límite cuando  $x \rightarrow a$  no existe, si  $a$  es un entero, pero existe si  $a$  es cualquier otro valor.

2.  $\frac{4}{3}\pi cc$       3. 3616      4. 20      5. 2

### PROBLEMAS 10.1 (página 457)

1. (a) 1; (b) 0; (c) 1

3. (a) 1; (b) no existe; (c) 3

5.  $f(-0.9) = -3.7$ ,  $f(-0.99) = -3.97$ ,  $f(-0.999) = -3.997$ ,  
 $f(-1.001) = -4.003$ ,  $f(-1.01) = -4.03$ ,  $f(-1.1) = -4.3$ ;  
 $-4$

7.  $f(-0.1) \approx 0.9516$ ,  $f(-0.01) \approx 0.9950$ ,  $f(-0.001) \approx 0.9995$ ,  
 $f(0.001) \approx 1.0005$ ,  $f(0.01) \approx 1.0050$ ,  $f(0.1) \approx 1.0517$ ; 1

9. 16      11. 20      13. -47      15.  $-\frac{5}{2}$       17. 0

19. 5      21. -2      23. 3      25. 5      27.  $\frac{1}{6}$

29.  $-\frac{1}{5}$       31.  $\frac{11}{9}$       33. 4      35.  $2x$       37. -3

39.  $2x$       41.  $3x^2 - 8x$       43.  $\frac{1}{4}$

45. (a) 1; (b) 0      47. 11.00      49. 4.00

51. No existe

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.2

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = 0$ . La gráfica inicia arriba y rápidamente descende hacia cero. De acuerdo con esto, los consumidores están dispuestos a comprar cantidades grandes del producto a precios cercanos a 0.  
 2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 500$ . Las mayores ventas anuales que se pueden esperar con publicidad ilimitada son de \$500,000.  
 3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = \infty$ . Esto significa que el costo continúa aumentando indefinidamente conforme se fabrican más unidades.  
 4. El límite no existe; \$250.

### PROBLEMAS 10.2 (página 465)

1. (a) 2; (b) 3; (c) no existe; (d)  $-\infty$ ; (e)  $\infty$ ; (f)  $\infty$ ;  
 (g)  $\infty$ ; (h) 0; (i) 1; (j) 1; (k) 1

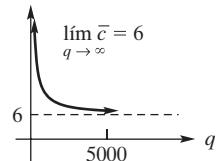
3. 1      5.  $-\infty$       7.  $-\infty$       9.  $\infty$       11. 0  
 13.  $\infty$       15. 0      17.  $\infty$       19. 0      21. 1

23. 0      25.  $\infty$       27. 0      29.  $-\frac{2}{5}$       31.  $-\infty$

33.  $\frac{2}{5}$       35.  $-\infty$       37.  $\frac{16}{3}$       39.  $-\frac{1}{2}$       41.  $\infty$

43.  $\infty$       45.  $\infty$       47. No existe49.  $\infty$       51. 0      53. 1

55. (a) 1; (b) 2; (c) no existe; (d) 1; (e) 2

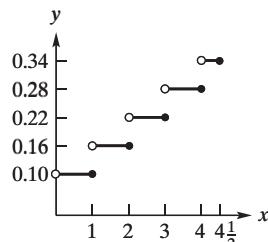
57. (a) 0; (b) 0; (c) 0; (d)  $-\infty$ ; (e)  $-\infty$ 59.  $\bar{c}$ 

61. 50,000      63. 20

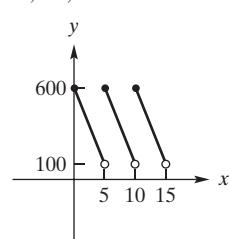
65. 1, 0.5, 0.525, 0.631, 0.912, 0.986, 0.998; se concluye que el límite es 1

67. 0      69. (a) 11; (b) 9; (c) no existe

### PROBLEMAS 10.3 (página 471)

7. Continua en  $-2$  y  $0$       9. Discontinua en  $\pm 3$ 11. Continua en  $2$  y  $0$       13.  $f$  es una función polinomial15.  $f$  es una función racional y el denominador nunca es cero17. Ninguna      19.  $x = -4$       21. Ninguna      23.  $x = -5, 3$ 25.  $x = 0, \pm 1$       27. Ninguna      29.  $x = 0$       31. Ninguna33.  $x = 2$ 35. Discontinuidades en  $t = 1, 2, 3, 4$ 

37. Sí, no, no



### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.4

1.  $0 < x < 4$

### PROBLEMAS 10.4 (página 475)

1.  $(-\infty, -1), (4, \infty)$       3.  $[-2, 5]$   
 5.  $\left(-\frac{7}{2}, -2\right)$       7. No hay solución  
 9.  $(-\infty, -6], [-2, 3]$       11.  $(-\infty, -4), (0, 5)$

## R-24 Respuestas a los problemas con número impar

13.  $[0, \infty)$       15.  $(-\infty, -5], [-3, 0]$   
 17.  $(-\infty, -3), (0, 3)$       19.  $(1, \infty)$   
 21.  $(-\infty, -5), [-2, 1), [3, \infty)$       23.  $(-5, -1)$   
 25.  $(-\infty, -1 - \sqrt{3}], [-1 + \sqrt{3}, \infty)$   
 27. Entre 37 y 103, inclusive  
 29. 17 pulgadas por 17 pulgadas      31.  $(-\infty, -7.72]$   
 33.  $(-\infty, -0.5), (0.667, \infty)$

## PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 10 (página 477)

1.  $-5$       3.  $2$       5.  $x$       7.  $-\frac{8}{3}$       9.  $0$   
 11.  $\frac{2}{7}$       13. No existe      15.  $-1$   
 17.  $\frac{1}{9}$       19.  $-\infty$       21.  $\infty$   
 23.  $-\infty$       25.  $1$       27.  $-\infty$       29.  $8$       31.  $23$   
 35. Continua en todas partes;  $f$  es una función polinomial.  
 37.  $x = -3$       39. Ninguna      41.  $x = -4, 1$       43.  $x = -2$   
 45.  $(-\infty, -6), (2, \infty)$       47.  $(-\infty, 7]$   
 49.  $(-\infty, -5), (-1, 1)$       51.  $(-\infty, -4), [-3, 0], (2, \infty)$   
 53.  $1.00$       55.  $0$       57.  $[2.00, \infty)$

## APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 10 (página 478)

1. 5.3%  
 3. Un modelo exponencial supone una tasa de pago fija.

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 11.1

1.  $\frac{dH}{dt} = 40 - 32t$

## PROBLEMAS 11.1 (página 488)

1. (a)

Valor $x$ de $Q$	-3	-2.5	-2.2	-2.1	-2.01	-2.001
$m_{PQ}$	19	15.25	13.24	12.61	12.0601	12.0060

- (b) Se estima que  $m_{\tan} = 12$ .
3. 1      5. 3      7.  $-4$       9. 0      11.  $2x + 4$   
 13.  $6q + 2$       15.  $-\frac{6}{x^2}$       17.  $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$       19.  $-4$   
 21. 0      23.  $y = x + 4$       25.  $y = 4x + 2$   
 27.  $y = -3x + 9$       29.  $\frac{r}{r_L - r - \frac{dC}{dD}}$       31.  $-3.000, 13.445$   
 33.  $-5.120, 0.038$   
 35. Para los valores  $x$  de los puntos donde la tangente a la gráfica de  $f$  es horizontal, los valores correspondientes de  $f'(x)$  son 0. Esto es de esperarse porque la pendiente de una recta horizontal es cero y la derivada proporciona la pendiente de la recta tangente.  
 37.  $20x^4 - 9x^2$

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 11.2

1.  $50 - 0.6q$

## PROBLEMAS 11.2 (página 496)

1. 0      3.  $6x^5$       5.  $80x^{79}$       7.  $18x$       9.  $56w^6$   
 11.  $\frac{8}{3}x^3$       13.  $\frac{7}{25}t^6$       15. 1      17.  $8x - 2$

19.  $4p^3 - 9p^2$       21.  $3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$   
 23.  $-39x^2 + 28x - 2$       25.  $-8x^3$       27.  $-\frac{4}{3}x^3$   
 29.  $16x^3 + 3x^2 - 9x + 8$       31.  $\frac{6}{5}x^3 + 7x^2$       33.  $\frac{3}{5}x^{-2/5}$   
 35.  $\frac{3}{4}x^{-1/4} + \frac{10}{3}x^{2/3}$       37.  $\frac{11}{2}x^{-1/2}$  o  $\frac{11}{2\sqrt{x}}$       39.  $2r^{-2/3}$   
 41.  $-4x^{-5}$       43.  $-3x^{-4} - 5x^{-6} + 12x^{-7}$   
 45.  $-x^{-2}$  o  $-\frac{1}{x^2}$       47.  $-40x^{-6}$       49.  $-4x^{-4}$   
 51.  $-\frac{1}{2}t^{-2}$       53.  $\frac{1}{7} - 7x^{-2}$   
 55.  $-3x^{-2/3} - 2x^{-7/5}$       57.  $-\frac{1}{3}x^{-5/3}$   
 59.  $-x^{-3/2}$       61.  $\frac{5}{2}x^{3/2}$   
 63.  $9x^2 - 20x + 7$       65.  $45x^4$   
 67.  $\frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{10}{3}x^{-5/3} = \frac{1}{3}x^{-5/3}(x - 10)$   
 69.  $3 + \frac{2}{q^2}$       71.  $2x + 4$       73. 1  
 75. 4, 16,  $-14$       77. 0, 0, 0      79.  $y = 13x + 2$   
 81.  $y = -\frac{3}{16}x + \frac{1}{2}$       83.  $y = x + 3$   
 85.  $(0, 0), \left(\frac{5}{3}, \frac{125}{54}\right)$       87.  $(3, -3)$   
 89. 0      91. La recta tangente es  $y = 9x - 16$ .

## PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 11.3

1. 2.5 unidades  
 2.  $\frac{dy}{dt} = 16 - 32t$ ;  $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0.5} = 0$  pies/s  
 Cuando  $t = 0.5$  el objeto alcanza su altura máxima.  
 3. 1.2 y 120%

## PROBLEMAS 11.3 (página 504)

1.	$\Delta t$	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
	$\Delta s/\Delta t$	9	8	7.4	7.2	7.02	7.002

Se estima la velocidad en  $t = 1$ , como 7.0000 m/s. Si se usa diferenciación la velocidad es 7 m/s.

3. (a) 70 m; (b) 25 m/s; (c) 24 m/s  
 5. (a) 8 m; (b) 6.1208 m/s; (c) 6 m/s  
 7. (a) 2 m; (b) 10.261 m/s; (c) 9 m/s  
 9.  $\frac{dy}{dx} = \frac{25}{2}x^{3/2}$ ; 337.50      11. 0.27  
 13.  $dc/dq = 10; 10$   
 15.  $dc/dq = 0.2q + 3; 4$   
 17.  $dc/dq = 2q + 50; 80, 82, 84$   
 19.  $dc/dq = 0.02q + 5; 6, 7$   
 21.  $dc/dq = 0.00006q^2 - 0.02q + 6; 4.6, 11$   
 23.  $dr/dq = 0.8; 0.8, 0.8, 0.8$   
 25.  $dr/dq = 250 + 90q - 3q^2; 625, 850, 625$

27.  $dc/dq = 6.750 - 0.000656q$ ; 5.438;  
 $\bar{c} = \frac{-10,484.69}{q} + 6.750 - 0.000328q$ ; 0.851655
29.  $P = 5,000,000R^{-0.93}$ ;  $dP/dR = -4,650,000R^{-1.93}$
31. (a) -7.5; (b) 4.5
33. (a) 1; (b)  $\frac{1}{x+4}$ ; (c) 1; (d)  $\frac{1}{9} \approx 0.111$ ; (e) 11.1%
35. (a)  $6x$ ; (b)  $\frac{6x}{3x^2+7}$ ; (c) 12; (d)  $\frac{12}{19} \approx 0.632$ ; (e) 63.2%
37. (a)  $-3x^2$ ; (b)  $-\frac{3x^2}{8-x^3}$ ; (c) -3; (d)  $-\frac{3}{7} \approx -0.429$ ; (e) -42.9%
39. 9.5; 12.8%
41. (a)  $dr/dq = 30 - 0.6q$ ; (b)  $\frac{4}{45} \approx 0.089$ ; (c) 9%
43.  $\frac{0.432}{t}$       45. \$3125      47. \$5.07/unidad

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 11.4

1.  $\frac{dR}{dx} = 6.25 - 6x$   
2.  $T'(x) = 2x - x^2$ ;  $T'(1) = 1$

### PROBLEMAS 11.4 (página 513)

1.  $(4x + 1)(6) + (6x + 3)(4) = 48x + 18 = 6(8x + 3)$
3.  $(5 - 3t)(3t^2 - 4t) + (t^3 - 2t^2)(-3) = -12t^3 + 33t^2 - 20t$
5.  $(3r^2 - 4)(2r - 5) + (r^2 - 5r + 1)(6r) = 12r^3 - 45r^2 - 2r + 20$
7.  $8x^3 - 10x$
9.  $(x^2 + 3x - 2)(4x - 1) + (2x^2 - x - 3)(2x + 3)$   
 $= 8x^3 + 15x^2 - 20x - 7$
11.  $(w^2 + 3w - 7)(6w^2) + (2w^3 - 4)(2w + 3)$   
 $= 10w^4 + 24w^3 - 42w^2 - 8w - 12$
13.  $(x^2 - 1)(9x^2 - 6) + (3x^3 - 6x + 5)(2x) - 4(8x + 2)$   
 $= 15x^4 - 27x^2 - 22x - 2$
15.  $\frac{3}{2} \left[ (5p^{\frac{1}{2}} - 2)(3) + (3p - 1) \left( 5 \cdot \frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}} \right) \right]$   
 $= \frac{3}{4} \left( 45p^{\frac{1}{2}} - 12 - 5p^{-\frac{1}{2}} \right)$
17. 0      19.  $18x^2 + 94x + 31$
21.  $\frac{(x-1)(5)-(5x)(1)}{(x-1)^2} = -\frac{5}{(x-1)^2}$
23.  $\frac{65}{3x^6}$       25.  $\frac{(x-1)(1)-(x+2)(1)}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)^2}$
27.  $\frac{(z^2-4)(-2)-(6-2z)(2z)}{(z^2-4)^2} = \frac{2(z^2-6z+4)}{(z^2-4)^2}$
29.  $\frac{(x^2-5x)(16x-2)-(8x^2-2x+1)(2x-5)}{(x^2-5x)^2}$   
 $= \frac{-38x^2-2x+5}{(x^2-5x)^2}$
31.  $\frac{(2x^2-3x+2)(2x-4)-(x^2-4x+3)(4x-3)}{(2x^2-3x+2)^2}$   
 $= \frac{5x^2-8x+1}{(2x^2-3x+2)^2}$
33.  $-\frac{100x^{99}}{(x^{100}+7)^2}$       35.  $2v + \frac{8}{v^2}$
37.  $\frac{15x^2-2x+1}{3x^{4/3}}$       39.  $\frac{4}{(x-8)^2} + \frac{2}{(3x+1)^2}$

41.  $\frac{[(x+2)(x-4)](1)-(x-5)(2x-2)}{[(x+2)(x-4)]^2} = \frac{-(x^2-10x+18)}{[(x+2)(x-4)]^2}$
43.  $\frac{[(t^2-1)(t^3+7)](2t+3)-(t^2+3t)(5t^4-3t^2+14t)}{[(t^2-1)(t^3+7)]^2}$   
 $= \frac{-3t^6-12t^5+t^4+6t^3-21t^2-14t-21}{[(t^2-1)(t^3+7)]^2}$
45.  $3 - \frac{2x^3+3x^2-12x+4}{[x(x-1)(x-2)]^2}$       47.  $\frac{2a}{(a-x)^2}$
49. -6      51.  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$
53.  $y = 16x + 24$       55. 1.5
57. 1 m, -1.5 m/s      59.  $\frac{dr}{dq} = 50 - 0.02q$
61.  $\frac{dr}{dq} = \frac{216}{(q+2)^2} - 3$       63.  $\frac{dC}{dI} = 0.672$
65.  $\frac{7}{6}; -\frac{1}{6}$       67. 0.615; 0.385
69. (a) 0.32; (b) 0.026      71.  $\frac{dc}{dq} = \frac{6q(q+4)}{(q+2)^2}$
73.  $\frac{9}{10}$       75.  $\frac{0.7355}{(1+0.02744x)^2}$       77.  $-\frac{1}{120}$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 11.5

1. 288t

### PROBLEMAS 11.5 (página 521)

1.  $(2u-2)(2x-1) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 2$
3.  $\left(-\frac{2}{w^3}\right)(-1) = \frac{2}{(2-x)^3}$
5. 0      7. 0      9.  $18(3x+2)^5$
11.  $30x^2(3+2x^3)^4$
13.  $200(3x^2-16x+1)(x^3-8x^2+x)^{99}$
15.  $-6x(x^2-2)^{-4}$
17.  $-\frac{10}{7}(2x+5)(x^2+5x-2)^{-12/7}$
19.  $\frac{1}{2}(10x-1)(5x^2-x)^{-1/2}$
21.  $\frac{1}{2}(2x-1)^{-3/4}$       23.  $\frac{12}{5}x^2(x^3+1)^{-3/5}$
25.  $-6(4x-1)(2x^2-x+1)^{-2}$       27.  $-2(2x-3)(x^2-3x)^{-3}$
29.  $-36x(9x^2+1)^{-3/2}$       31.  $\frac{7}{3}(7x)^{-2/3} + \sqrt[3]{7}$
33.  $(x^2)[5(x-4)^4(1)] + (x-4)^5(2x) = x(x-4)^4(7x-8)$
35.  $4x^2 \left[ \frac{1}{2}(5x+1)^{-\frac{1}{2}}(5) \right] + (\sqrt{5x+1})(8x)$   
 $= 10x^2(5x+1)^{-\frac{1}{2}} + 8x\sqrt{5x+1}$
37.  $(x^2+2x-1)^3(5) + (5x)[3(x^2+2x-1)^2(2x+2)]$   
 $= 5(x^2+2x-1)^2(7x^2+8x-1)$
39.  $(8x-1)^3[4(2x+1)^3(2)] + (2x+1)^4[3(8x-1)^2(8)]$   
 $= 16(8x-1)^2(2x+1)^3(7x+1)$
41.  $12 \left( \frac{x-3}{x+2} \right)^{11} \left[ \frac{(x+2)(1)-(x-3)(1)}{(x+2)^2} \right] = \frac{60(x-3)^{11}}{(x+2)^{13}}$
43.  $\frac{1}{2} \left( \frac{x-2}{x+3} \right)^{-1/2} \left[ \frac{(x+3)(1)-(x-2)(1)}{(x+3)^2} \right]$   
 $= \frac{5}{2(x+3)^2} \left( \frac{x-2}{x+3} \right)^{-1/2}$

45. 
$$\frac{(x^2 + 4)^3(2) - (2x - 5)[3(x^2 + 4)^2(2x)]}{(x^2 + 4)^6}$$
$$= \frac{-2(5x^2 - 15x - 4)}{(x^2 + 4)^4}$$

47. 
$$\frac{(3x - 1)^3[40(8x - 1)^4] - (8x - 1)^5[9(3x - 1)^2]}{(3x - 1)^6}$$
$$= \frac{(8x - 1)^4(48x - 31)}{(3x - 1)^4}$$

49. 
$$6\{(5x^2 + 2)[2x^3(x^4 + 5)^{-1/2}] + (x^4 + 5)^{1/2}(10x)\}$$
$$= 12x(x^4 + 5)^{-1/2}(10x^4 + 2x^2 + 25)$$

51. 
$$8 + \frac{5}{(t + 4)^2} - (8t - 7) = 15 - 8t + \frac{5}{(t + 4)^2}$$

53. 
$$(x^3 - 5)^5[(2x + 1)^3(2)(x + 3)(1) + (x + 3)^2(3)(2x + 1)^2(2)]$$
$$- (2x + 1)^3(x + 3)^2[5(x^3 - 5)^4(3x^2)]$$
$$\frac{(x^3 - 5)^{10}}{(x^3 - 5)^{10}}$$

55. 0                    57. 0                    59.  $y = 4x - 11$

61.  $y = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{3}$             63. 96%                    65. 130

67.  $\approx 13.99$

69. (a)  $-\frac{q}{\sqrt{q^2 + 20}}$ ; (b)  $-\frac{q}{100\sqrt{q^2 + 20} - q^2 - 20}$ ;  
(c)  $100 - \frac{q^2}{\sqrt{q^2 + 20}} - \sqrt{q^2 + 20}$

71. -481.5            73.  $\frac{dc}{dq} = \frac{5q(q^2 + 6)}{(q^2 + 3)^{3/2}}$             75.  $48\pi(10)^{-19}$

77. (a)  $-0.001416x^3 + 0.01356x^2 + 1.696x - 34.9$ ,  $-256.238$   
(b) -0.016; -1.578%

79. -4                    81. 40                    83. 86,111.37

**PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 11 (página 524)**

1.  $-2x$                     3.  $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$                     5. 0

7.  $28x^3 - 18x^2 + 10x = 2x(14x^2 - 9x + 5)$

9.  $4s^3 + 4s = 4s(s^2 + 1)$                     11.  $\frac{2x}{5}$

13.  $(x^3 + 7x^2)(3x^2 - 2x) + (x^3 - x^2 + 5)(3x^2 + 14x)$ 
$$= 6x^5 + 30x^4 - 28x^3 + 15x^2 + 70x$$

15.  $100(2x^2 + 4x)^{99}(4x + 4) = 400(x + 1)(2x^2 + 4x)^{99}$

17.  $-\frac{6}{(2x + 1)^2}$

19.  $(8 + 2x)(4)(x^2 + 1)^3(2x) + (x^2 + 1)^4(2)$ 
$$= 2(x^2 + 1)^3(9x^2 + 32x + 1)$$

21.  $\frac{(z^2 + 4)(2z) - (z^2 - 1)(2z)}{(z^2 + 4)^2} = \frac{10z}{(z^2 + 4)^2}$

23.  $\frac{4}{3}(4x - 1)^{-2/3}$

25.  $-\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-3/2}(-2x) = x(1 - x^2)^{-3/2}$

27.  $(x - 6)^4[3(x + 5)^2] + (x + 5)^3[4(x - 6)^3] =$ 
$$(x - 6)^3(x + 5)^2(7x + 2)$$

29.  $\frac{(x + 6)(5) - (5x - 4)(1)}{(x + 6)^2} = \frac{34}{(x + 6)^2}$

31.  $2\left(-\frac{3}{8}\right)x^{-11/8} + \left(-\frac{3}{8}\right)(2x)^{-11/8}(2)$ 
$$= -\frac{3}{4}(1 + 2^{-11/8})x^{-11/8}$$

33.  $\frac{\sqrt{x^2 + 5}(2x) - (x^2 + 6)(1/2)(x^2 + 5)^{-1/2}(2x)}{x^2 + 5} = \frac{x(x^2 + 4)}{(x^2 + 5)^{3/2}}$

35.  $\left(\frac{3}{5}\right)(x^3 + 6x^2 + 9)^{-2/5}(3x^2 + 12x)$ 
$$= \frac{9}{5}x(x + 4)(x^3 + 6x^2 + 9)^{-2/5}$$

37.  $-3z^2 + 4z - 1$                     39.  $y = -4x + 3$   
41.  $y = \frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$                     43.  $\frac{5}{7} \approx 0.714$ ; 71.4%

45.  $dr/dq = 20 - 0.2q$                     47. 0.569, 0.431

49.  $dr/dq = 500 - 0.2q$

51.  $dc/dq = 0.125 + 0.00878q$ ; 0.7396

53. 84 huevos/mm                    55. (a)  $\frac{4}{3}$ ; (b)  $\frac{1}{24}$

57.  $8\pi \text{pies}^3/\text{pie}$                     59.  $4q - \frac{10,000}{q^2}$

61. (a) -315.456; (b) -0.00025; (c) no, puesto que  $dr/dm < 0$  cuando  $m = 240$

63. 0.305                    65. -0.32

**APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 11 (página 526)**

- La pendiente es mayor, por arriba de 0.9. Más de eso se gasta, menos se ahorra.
- Gasto \$705, ahorro \$295
- Las respuestas pueden variar.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 12.1**

1.  $\frac{dq}{dp} = \frac{12p}{3p^2 + 4}$                     2.  $\frac{dR}{dI} = \frac{1}{I \ln 10}$

**PROBLEMAS 12.1 (página 533)**

1.  $\frac{4}{x}$                     3.  $\frac{3}{3x - 7}$                     5.  $\frac{2}{x}$                     7.  $-\frac{2x}{1 - x^2}$

9.  $\frac{24X^5 + 6X^2}{4X^6 + 2X^3} = \frac{3(4X^3 + 1)}{X(2X^3 + 1)}$

11.  $t\left(\frac{1}{t}\right) + (\ln t)(1) = 1 + \ln t$

13.  $\frac{2x^3}{2x + 5} + 3x^2 \ln(2x + 5)$                     15.  $\frac{8}{(\ln 3)(8x - 1)}$

17.  $2x\left[1 + \frac{1}{(\ln 2)(x^2 + 4)}\right]$

19.  $\frac{z\left(\frac{1}{z}\right) - (\ln z)(1)}{z^2} = \frac{1 - \ln z}{z^2}$

21.  $\frac{(\ln x)^2(2x) - (x^2 + 3)2(\ln x)\frac{1}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{2x^2 \ln x - 2(x^2 + 3)}{x(\ln x)^3}$

23.  $\frac{3(2x + 4)}{x^2 + 4x + 5} = \frac{6(x + 2)}{x^2 + 4x + 5}$

25.  $\frac{9x}{1 + x^2}$                     27.  $\frac{2}{1 - l^2}$                     29.  $\frac{x}{1 - x^4}$

31.  $\frac{4x}{x^2 + 2} + \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x - 1}$

33.  $\frac{26}{x} + \frac{65}{3(5x + 2)}$                     35.  $\frac{2(x^2 + 1)}{2x + 1} + 2x \ln(2x + 1)$

37.  $\frac{3(1 + \ln^2 x)}{x}$                     39.  $\frac{4 \ln^3(ax)}{x}$

41.  $\frac{x}{2(x - 1)} + \ln \sqrt{x - 1}$                     43.  $\frac{3}{2x\sqrt{4 + 3 \ln x}}$

45.  $y = 5x - 20$                     47.  $\frac{\ln(3) - 1}{\ln^2 3}$                     49.  $\frac{25}{7}$

51.  $\frac{dq}{dp} = \frac{20}{2p+1}$

57.  $-1.65, 1.65$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 12.2

1.  $\frac{dT}{dt} = Ck e^{kt}$

### PROBLEMAS 12.2 (página 537)

1.  $5e^x$

3.  $4xe^{2x^2+3}$

5.  $-5e^{9-5x}$

7.  $(6r+4)e^{3r^2+4r+4} = 2(3r+2)e^{3r^2+4r+4}$

9.  $x(e^x) + e^x(1) = e^x(x+1)$

11.  $2xe^{-x^2}(1-x^2)$

13.  $\frac{e^x - e^{-x}}{3}$

15.  $(6x^2)5^{2x^3} \ln 5$

17.  $\frac{2e^{2w}(w-1)}{w^3}$

19.  $\frac{e^{1+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

21.  $5x^4 - 5^x \ln 5$

23.  $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

25. 1

27.  $2xe^{x^2 \ln x^2}(1+\ln x^2)$

29.  $-e$

31.  $y - e^{-2} = e^{-2}(x+2)$  o  $y = e^{-2}x + 3e^{-2}$

33.  $dp/dq = -0.015e^{-0.001q}, -0.015e^{-0.5}$

35.  $dc/dq = 10e^{q/700}; 10e^{0.5}; 10e$

39.  $e$

41.  $100e^{-2}$

47.  $-b(10^{A-bM}) \ln 10$

51. 0.0036

53.  $-0.89, 0.56$

### PROBLEMAS 12.3 (página 543)

1.  $-3$ , elástica

3.  $-1$ , elasticidad unitaria

5.  $-\frac{53}{52}$ , elástica

7.  $-\left(\frac{150}{e} - 1\right)$ , elástica

9.  $-1$ , elasticidad unitaria

11.  $-2$ , elástica

13.  $-\frac{1}{2}$ , inelástica

15.  $|\eta| = \frac{10}{3}$  cuando  $p = 10$ ,  $|\eta| = \frac{3}{10}$  cuando  $p = 3$ ,  $|\eta| = 1$  cuando  $p = 6.50$

17.  $-1.2$ , disminución de  $0.6\%$

23. (c)  $b = 0$

25. (a)  $\eta = -\frac{207}{15} = -13.8$ , elástica; (b)  $27.6\%$ ; (c) aumento, puesto que la demanda es elástica

27.  $\eta = -1.6$ ;  $\frac{dr}{dq} = 30$

29. Máximo en  $q = 5$ ; mínimo en  $q = 95$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 12.4

1.  $\frac{dP}{dt} = 0.5(P - P^2)$

2.  $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$  y  $\frac{dV}{dt} \Big|_{r=12} = 2880\pi$  pulgadas<sup>3</sup>/minuto

3. La parte superior de la escalera está resbalando a una velocidad de  $\frac{9}{4}$  pies/segundo.

### PROBLEMAS 12.4 (página 548)

1.  $-\frac{x}{4y}$

3.  $\frac{7}{3y^2}$

5.  $-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$

7.  $-\frac{y^{1/4}}{x^{1/4}}$

9.  $-\frac{y}{x}$

11.  $\frac{11-y}{x-1}$

13.  $\frac{4y-2x^2}{y^2-4x}$

15.  $\frac{4y^{3/4}}{2y^{1/4}+1}$

17.  $\frac{1-15x^2y^4}{20x^5y^3+2y}$

19.  $\frac{xe^y-y}{x(\ln x - xe^y)}$

21.  $-\frac{e^y}{xe^y+1}$

23.  $6e^{3x}(1+e^{3x})(x+y)-1$

25.  $-\frac{3}{5}$

31.  $\frac{dq}{dp} = -\frac{1}{2q}$

35.  $-\lambda I$

27. 0;  $-\frac{4x_0}{9y_0}$

33.  $\frac{dq}{dp} = -\frac{(q+5)^3}{40}$

37.  $-\frac{f}{\lambda}$

29.  $y = -4x - 3$

39.  $\frac{3}{8}$

### PROBLEMAS 12.5 (página 552)

1.  $(x+1)^2(x-2)(x^2+3) \left[ \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{2x}{x^2+3} \right]$

3.  $(3x^3-1)^2(2x+5)^3 \left[ \frac{18x^2}{3x^3-1} + \frac{6}{2x+5} \right]$

5.  $\frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x^2-2}\sqrt{x+4}}{2} \left[ \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-2} + \frac{1}{x+4} \right]$

7.  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2x} \left[ \frac{x}{x^2-1} + \frac{2}{1-2x} \right]$

9.  $\frac{(2x^2+2)^2}{(x+1)^2(3x+2)} \left[ \frac{4x}{x^2+1} - \frac{2}{x+1} - \frac{3}{3x+2} \right]$

11.  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x+3)(x-2)}{2x-1}} \left[ \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{2x-1} \right]$

13.  $x^{x^2+1} \left( \frac{x^2+1}{x} + 2x \ln x \right)$

15.  $\frac{x^{1/x}(1-\ln x)}{x^2}$

17.  $2(3x+1)^{2x} \left[ \frac{3x}{3x+1} + \ln(3x+1) \right]$

19.  $4e^x x^{3x} (4+3 \ln x)$

21. 12

23.  $y = 96x + 36$

25.  $y = (4e+2e \ln 2)x - 2e - 2e \ln 2$

27.  $\frac{1}{3e^{1.3}}$

29. Disminución de  $0.1\%$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 12.6

1. 43 y 1958

### PROBLEMAS 12.6 (página 556)

1. 0.25410    3. 1.32472    5.  $-0.68233$     7.  $0.33767$

9. 1.90785    11. 4.141    13.  $-4.99$  y  $1.94$

15. 13.33    17. 2.880    19. 3.45

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 12.7

1.  $\frac{d^2h}{dt^2} = -32$  pies/seg<sup>2</sup> (Nota: Los valores negativos indican la dirección hacia abajo.)

2.  $c''(3) =$  dólares/unidad<sup>2</sup>

### PROBLEMAS 12.7 (página 560)

1. 24    3. 0    5.  $e^x$     7.  $3 + 2 \ln x$

9.  $-\frac{60}{q^7}$     11.  $-\frac{1}{4(9-r)^{3/2}}$     13.  $\frac{8}{(2x+3)^3}$

15.  $\frac{4}{(x-1)^3}$     17.  $-\left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+6)^2} \right]$

19.  $e^z(z^2 + 4z + 2)$     21. 275    23.  $-\frac{1}{y^3}$

25.  $-\frac{4}{y^3}$     27.  $\frac{1}{8x^{3/2}}$     29.  $\frac{2(y-1)}{(1+x)^2}$

31.  $\frac{y}{(1-y)^3}$     33.  $\frac{25}{32}$     35.  $300(5x-3)^2$

37. 0.6    39.  $\pm 1$     41.  $-4.99$  y  $1.94$

**PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 12 (página 561)**

1.  $3e^x + 0 + e^{x^2}(2x) + (e^2)x^{e^2-1} = 3e^x + 2xe^{x^2} + e^2x^{e^2-1}$
3.  $\frac{1}{3r^2 + 7r + 1}(6r + 7) = \frac{6r + 7}{3r^2 + 7r + 1}$
5.  $e^{x^2+4x+5}(2x + 4) = 2(x + 2)e^{x^2+4x+5}$
7.  $e^x(2x) + (x^2 + 2)e^x = e^x(x^2 + 2x + 2)$
9.  $\frac{\sqrt{(x-6)(x+5)(9-x)}}{2} \left[ \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-9} \right]$
11.  $\frac{e^x \left( \frac{1}{x} \right) - (\ln x)(e^x)}{e^{2x}} = \frac{1 - x \ln x}{xe^x}$
13.  $\frac{2}{q+1} + \frac{3}{q+2}$
15.  $(4x+2)(\ln 2)2^{2x^2+2x-5}$
17.  $\frac{4e^{2x+1}(2x-1)}{x^2}$
19.  $\frac{16}{(8x+5)\ln 2}$
21.  $\frac{1+2l+3l^2}{1+l+l^2+l^3}$
23.  $(x+1)^{x+1}[1+\ln(x+1)]$
25.  $\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4-t^2} \cdot (-2t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{4-t^2}$
27.  $y \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^2+1} \right) (2x) + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x^2+2} \right) (2x) - \frac{2}{5} \left( \frac{1}{2x^3+6x} \right) (6x^2+6) \right] = y \left[ \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{3(x^2+2)} - \frac{6(x^2+1)}{5(x^3+3x)} \right],$   
donde  $y$  es como se dio en el problema.
29.  $(x^x)^x(x+2x \ln x)$
31. 4
33. -2
35.  $y = 6x + 6(1 - \ln 2)$  o  $y = 6x + 6 - \ln 64$
37.  $(0, 4 \ln 2)$
39. 2
41. 2
43.  $-\frac{y}{x+y}$
45.  $\frac{xy^2-y}{2x-x^2y}$
47.  $\frac{4}{9}$
49.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{y}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y+1}{y^3}$
51.  $f'(t) = 0.008e^{-0.01t} + 0.00004e^{-0.0002t}$
53. 1.13
55.  $\eta = -1$ , elasticidad unitaria
57.  $\eta = -0.5$ , la demanda no es elástica
59.  $-\frac{9}{16}, \approx \frac{3}{8}\%$  de aumento
61. 1.7693

**APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 12 (página 566)**

1. 305 unidades
3. Las respuestas pueden variar.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 13.1**

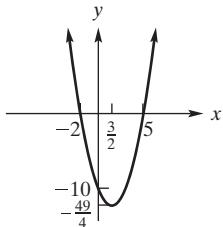
1. Existe un máximo relativo cuando  $q = 2$  y un mínimo relativo cuando  $q = 5$ .
2. La sustancia está en su concentración máxima 2 horas después de la inyección.

**PROBLEMAS 13.1 (página 576)**

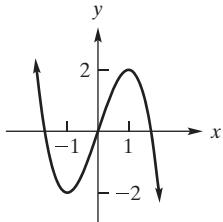
1. Decreciente en  $(-\infty, -1)$  y  $(3, \infty)$ ; creciente en  $(-1, 3)$ ; mínimo relativo  $(-1, -1)$ ; máximo relativo  $(3, 4)$
3. Decreciente en  $(-\infty, -2)$  y  $(0, 2)$ ; creciente en  $(-2, 0)$  y  $(2, \infty)$ ; mínimo relativo  $(-2, 1)$  y  $(2, 1)$ ; no hay máximo relativo.

5. Creciente en  $(-3, 1)$  y  $(2, ?)$ ; decreciente en  $(-\infty, -3)$  y  $(1, 2)$ ; máximo relativo cuando  $x = 1$ ; mínimo relativo cuando  $x = -3, 2$
7. Decreciente en  $(-\infty, -1)$ ; creciente en  $(-1, 3)$  y  $(3, \infty)$ ; mínimo relativo cuando  $x = -1$
9. Creciente en  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$ ; no hay mínimo relativo ni máximo relativo.
11. Creciente en  $(-\infty, \frac{1}{2})$ ; decreciente en  $(\frac{1}{2}, \infty)$ ; máximo relativo cuando  $x = \frac{1}{2}$
13. Decreciente en  $(-\infty, -5)$  y  $(1, \infty)$ ; creciente en  $(-5, 1)$ ; mínimo relativo cuando  $x = -5$ ; máximo relativo cuando  $x = 1$
15. Decreciente en  $(-\infty, -1)$  y  $(0, 1)$ ; creciente en  $(-1, 0)$  y  $(1, \infty)$ ; máximo relativo cuando  $x = 0$ ; mínimo relativo cuando  $x = \pm 1$
17. Creciente en  $(-\infty, \frac{1}{3})$  y  $(2, \infty)$ ; decreciente en  $(\frac{1}{3}, 2)$ ; máximo relativo cuando  $x = \frac{1}{3}$ ; mínimo relativo cuando  $x = 2$
19. Creciente en  $(-\infty, -\frac{2}{3})$  y  $(\frac{5}{2}, \infty)$ ; decreciente en  $(-\frac{2}{3}, \frac{5}{2})$ ; máximo relativo cuando  $x = -\frac{2}{3}$ ; mínimo relativo cuando  $x = \frac{5}{2}$
21. Creciente en  $(-\infty, 5 - \sqrt{3})$  y  $(5 + \sqrt{3}, \infty)$ ; decreciente en  $(5 - \sqrt{3}, 5 + \sqrt{3})$ ; máximo relativo cuando  $x = 5 - \sqrt{3}$ ; mínimo relativo cuando  $x = 5 + \sqrt{3}$
23. Creciente en  $(-\infty, -1)$  y  $(1, \infty)$ ; decreciente en  $(-1, 0)$  y  $(0, 1)$ ; máximo relativo cuando  $x = -1$ ; mínimo relativo cuando  $x = 1$
25. Decreciente en  $(-\infty, -4)$  y  $(0, \infty)$ ; creciente en  $(-4, 0)$ ; mínimo relativo cuando  $x = -4$ ; máximo relativo cuando  $x = 0$
27. Creciente en  $(-\infty, -\sqrt{2})$  y  $(0, \sqrt{2})$ ; decreciente en  $(-\sqrt{2}, 0)$  y  $(\sqrt{2}, \infty)$ ; máximo relativo cuando  $x = \pm\sqrt{2}$ ; mínimo relativo cuando  $x = 0$
29. Creciente en  $(-1, 0)$  y  $(1, \infty)$ ; decreciente en  $(-\infty, -1)$  y  $(0, 1)$ ; máximo relativo cuando  $x = 0$ ; mínimo relativo cuando  $x = \pm 1$
31. Decreciente en  $(-\infty, 1)$  y  $(1, \infty)$ ; no tiene extremos relativos
33. Decreciente en  $(0, \infty)$ ; no tiene extremos relativos
35. Decreciente en  $(-\infty, 0)$  y  $(4, \infty)$ ; creciente en  $(0, 2)$  y  $(2, 4)$ ; mínimo relativo cuando  $x = 0$ ; máximo relativo cuando  $x = 4$
37. Creciente en  $(-\infty, -3)$  y  $(-1, \infty)$ ; decreciente en  $(-3, -2)$  y  $(-2, -1)$ ; máximo relativo cuando  $x = -3$ ; mínimo relativo cuando  $x = -1$
39. Decreciente en  $(-\infty, \frac{-2 - \sqrt{29}}{5})$  y  $(\frac{-2 + \sqrt{29}}{5}, \infty)$ ; creciente en  $(\frac{-2 - \sqrt{29}}{5}, \frac{-2 + \sqrt{29}}{5})$ ; mínimo relativo cuando  $x = \frac{-2 - \sqrt{29}}{5}$ ; máximo relativo cuando  $x = \frac{-2 + \sqrt{29}}{5}$
41. Creciente en  $(1, \infty)$ ; decreciente en  $(-\infty, 1)$ ; mínimo relativo cuando  $x = 1$
43. Creciente en  $(-\infty, 0), \left(0, \frac{18}{7}\right)$ , y  $(6, \infty)$ ; decreciente en  $\left(\frac{18}{7}, 6\right)$ ; máximo relativo cuando  $x = \frac{18}{7}$ ; mínimo relativo cuando  $x = 6$
45. Decreciente en  $(-\infty; \infty)$ ; no tiene extremos relativos
47. Decreciente en  $\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ ; creciente en  $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ ; mínimo relativo cuando  $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
49. Decreciente en  $(-\infty, 0)$ ; creciente en  $(0, \infty)$ ; mínimo relativo cuando  $x = 0$
51. Decreciente en  $(0, 1)$ ; creciente en  $(1, \infty)$ ; mínimo relativo cuando  $x = 1$

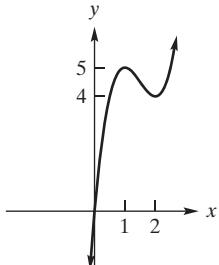
53. Decreciente en  $(-\infty, \frac{3}{2})$ ; creciente en  $(\frac{3}{2}, \infty)$ ; mínimo relativo cuando  $x = \frac{3}{2}$ ; intersecciones:  $(-2, 0), (5, 0), (0, -10)$



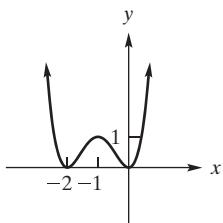
55. Decreciente en  $(-\infty, -1)$  y  $(1, \infty)$ ; creciente en  $(-1, 1)$ ; mínimo relativo cuando  $x = -1$ ; máximo relativo cuando  $x = 1$ ; simétrica con respecto al origen; intersecciones:  $(\pm\sqrt{3}, 0), (0, 0)$



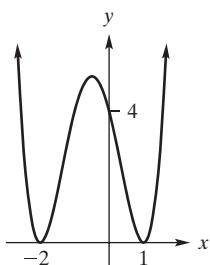
57. Creciente en  $(-\infty, 1)$  y  $(2, \infty)$ ; decreciente en  $(1, 2)$ ; máximo relativo cuando  $x = 1$ ; mínimo relativo cuando  $x = 2$ ; intersección:  $(0, 0)$



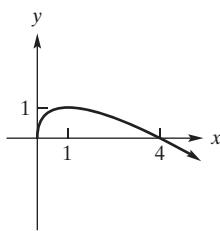
59. Creciente en  $(-2, -1)$  y  $(0, \infty)$ ; decreciente en  $(-\infty, -2)$  y  $(-1, 0)$ ; máximo relativo cuando  $x = -1$ ; mínimo relativo cuando  $x = -2, 0$ ; intersecciones  $(0, 0), (-2, 0)$



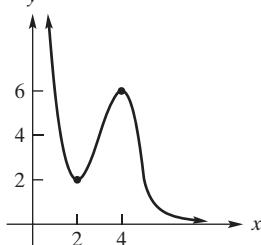
61. Decreciente en  $(-\infty, -2)$  y  $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ ; creciente en  $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$  y  $(1, \infty)$ ; mínimo relativo cuando  $x = -2, 1$ ; máximo relativo cuando  $x = -\frac{1}{2}$ ; intersecciones:  $(1, 0), (-2, 0), (0, 4)$



63. Decreciente en  $(1, \infty)$ ; creciente en  $(0, 1)$ ; máximo relativo cuando  $x = 1$ ; intersecciones:  $(0, 0), (4, 0)$



65. **69.** Nunca



71. 40

75. **(a)** 25,300; **(b)** 4; **(c)** 17,200

77. Mínimo relativo:  $(-3.83, 0.69)$

79. Máximo relativo:  $(2.74, 3.74)$ ; mínimo relativo:  $(-2.74, -3.74)$

81. Mínimo relativo: 0, 1.50, 2.00; máximo relativo: 0.57, 1.77

83. **(a)**  $f'(x) = 4 - 6x - 3x^2$ ; **(c)** Decreciente:  $(-\infty, -2.53), (0.53, \infty)$ ; creciente:  $(-2.53, 0.53)$

### PROBLEMAS 13.2 (página 580)

1. Máximo:  $f(3) = 6$ ; mínimo:  $f(1) = 2$

3. Máximo:  $f(-1) = \frac{19}{6}$ ; mínimo:  $f(0) = 1$

5. Máximo:  $f(3) = 84$ ; mínimo:  $f(1) = -8$

7. Máximo:  $f(-2) = 56$ ; mínimo:  $f(-1) = -2$

9. Máximo:  $f(\sqrt{2}) = 4$ ; mínimo:  $f(2) = -16$

11. Máximo:  $f(0) = f(3) = 2$ ; mínimo:  $f\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{73}{4}$

13. Máximo:  $f(-26) = f(28) = 9$ ; mínimo:  $f(1) = 0$

15. **(a)** -3.22, -0.78; **(b)** 2.75; **(c)** 9; **(d)** 14,283

### PROBLEMAS 13.3 (página 586)

1. Cónvava hacia arriba  $(-\infty, -\frac{3}{4}), (0, \infty)$ ; cónvava hacia abajo  $(-\frac{3}{4}, 0)$ ; puntos de inflexión cuando  $x = -\frac{3}{4}, 0$

3. Cónvava hacia arriba  $(-\infty, 1), (1, 7)$ ; cónvava hacia abajo  $(7, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = 7$

5. Cónvava hacia arriba  $(-\infty, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, \infty)$ ; cónvava hacia abajo  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ; no tiene puntos de inflexión

7. Cónvava hacia abajo  $(-\infty, \infty)$

9. Cónvava hacia abajo  $(-\infty, -1)$ ; cónvava hacia arriba  $(-1, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = -1$

11. Cóncava hacia abajo  $(-\infty, \frac{5}{6})$ ; cóncava hacia arriba  $(\frac{5}{6}, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = \frac{5}{6}$

13. Cóncava hacia arriba  $(-\infty, -2), (2, \infty)$ ; cóncava hacia abajo  $(-2, 2)$ ; puntos de inflexión cuando  $x = \pm 2$

15. Cóncava hacia arriba  $(-\infty, 0)$ ; cóncava hacia abajo  $(0, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = 0$

17. Cóncava hacia arriba  $(-\infty, -\frac{7}{2}), (\frac{1}{3}, \infty)$ ; cóncava hacia abajo  $(-\frac{7}{2}, \frac{1}{3})$ ; puntos de inflexión cuando  $x = -\frac{7}{2}, \frac{1}{3}$

19. Cóncava hacia abajo  $(-\infty, 0), (\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ ; cóncava hacia arriba  $(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}), (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ ; puntos de inflexión cuando  $x = 0, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

21. Cóncava hacia arriba  $(-\infty, -\sqrt{5}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{5}, \infty)$ ; cóncava hacia abajo  $(-\sqrt{5}, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{5})$ ; puntos de inflexión cuando  $x = \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{2}$

23. Cóncava hacia abajo  $(-\infty, 1)$ ; cóncava hacia arriba  $(1, \infty)$

25. Cóncava hacia abajo  $(-\infty, -1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{3}, \infty)$ ; cóncava hacia arriba  $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ; puntos de inflexión cuando  $x = \pm 1/\sqrt{3}$

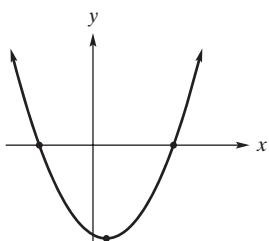
27. Cóncava hacia abajo  $(-\infty, -3), (-3, \frac{2}{7})$ ; cóncava hacia arriba  $(\frac{2}{7}, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = \frac{2}{7}$

29. Cóncava hacia arriba  $(-\infty, \infty)$

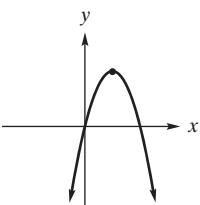
31. Cóncava hacia abajo  $(-\infty, -2)$ ; cóncava hacia arriba  $(-2, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = -2$

33. Cóncava hacia abajo  $(0, e^{3/2})$ ; cóncava hacia arriba  $(e^{3/2}, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = e^{3/2}$

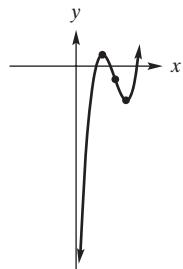
35. Intersecciones  $(-2, 0), (3, 0), (0, -6)$ ; decreciente en  $(-\infty, \frac{1}{2})$ ; creciente en  $(\frac{1}{2}, \infty)$ ; mínimo relativo cuando  $x = \frac{1}{2}$ ; cóncava hacia arriba  $(-\infty, \infty)$



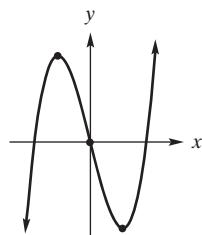
37. Intersecciones  $(0, 0), (\frac{5}{2}, 0)$ ; creciente en  $(-\infty, \frac{5}{4})$ ; decreciente en  $(\frac{5}{4}, \infty)$ ; máximo relativo cuando  $x = \frac{5}{4}$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, \infty)$



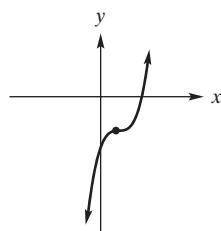
39. Intersección  $(0, -19)$ ; creciente en  $(-\infty, 2), (4, \infty)$ ; decreciente en  $(2, 4)$ ; máximo relativo cuando  $x = 2$ ; mínimo relativo cuando  $x = 4$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, 3)$ ; cóncava hacia arriba  $(3, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = 3$



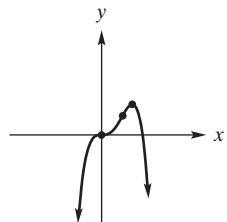
41. Intersecciones  $(0, 0), (\pm 2\sqrt{3}, 0)$ ; creciente en  $(-\infty, -2), (2, \infty)$ ; decreciente en  $(-2, 2)$ ; máximo relativo cuando  $x = -2$ ; mínimo relativo cuando  $x = 2$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, 0)$ ; cóncava hacia arriba  $(0, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = 0$ ; simétrica con respecto al origen



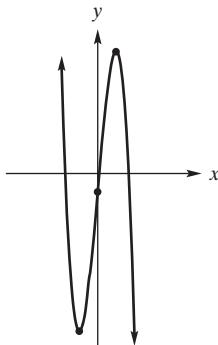
43. Intersección  $(0, -3)$ ; creciente en  $(-\infty, 1), (1, \infty)$ ; no tiene máximos ni mínimos relativos; cóncava hacia abajo  $(-\infty, 1)$ ; cóncava hacia arriba  $(1, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = 1$



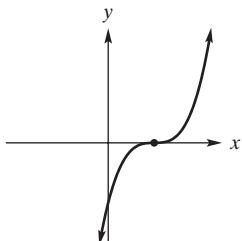
45. Intersecciones  $(0, 0), (4/3, 0)$ ; creciente en  $(-\infty, 0), (0, 1)$ ; decreciente en  $(1, \infty)$ ; máximo relativo cuando  $x = 1$ ; cóncava hacia arriba  $(0, 2/3)$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, 0), (2/3, \infty)$ ; puntos de inflexión cuando  $x = 0, x = 2/3$



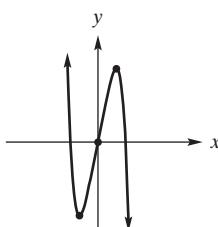
47. Intersección  $(0, -2)$ ; decreciente en  $(-\infty, -2), (2, \infty)$ ; creciente en  $(-2, 2)$ ; mínimo relativo cuando  $x = -2$ ; máximo relativo cuando  $x = 2$ ; cóncava hacia arriba  $(-\infty, 0)$ ; cóncava hacia abajo  $(0, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = 0$



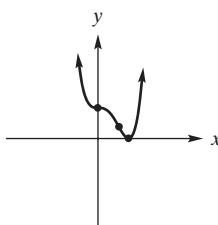
49. Intersección  $(0, -2)$ ; creciente en  $(-\infty, 1), (1, \infty)$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, 1)$ ; cóncava hacia arriba  $(1, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = 1$



51. Intersecciones  $(0, 0), (\pm\sqrt[3]{5}, 0)$ ; decreciente en  $(-\infty, -1), (1, \infty)$ ; creciente en  $(-1, 1)$ ; mínimo relativo cuando  $x = -1$ ; máximo relativo cuando  $x = 1$ ; cóncava hacia arriba  $(-\infty, 0)$ ; cóncava hacia abajo  $(0, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = 0$ ; simétrica con respecto al origen.

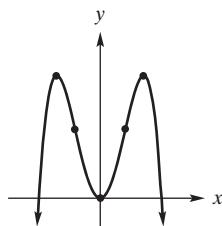


53. Intersecciones  $(0, 1), (1, 0)$ ; decreciente en  $(-\infty, 0), (0, 1)$ ; creciente en  $(1, \infty)$ ; mínimo relativo cuando  $x = 1$ ; cóncava hacia arriba  $(-\infty, 0), (2/3, \infty)$ ; cóncava hacia abajo  $(0, 2/3)$ ; puntos de inflexión cuando  $x = 0, x = 2/3$

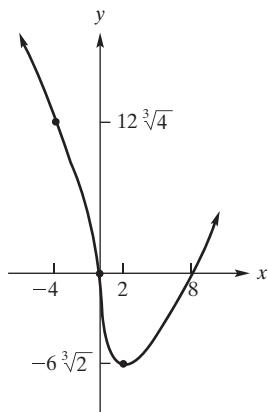


55. Intersecciones  $(0, 0), (\pm\sqrt{2}, 0)$ ; creciente en  $(-\infty, -\sqrt{2}), (0, \sqrt{2})$ ; decreciente en  $(-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, \infty)$ ; máximo relativo cuando  $x = \pm\sqrt{2}$ ; mínimo relativo cuando  $x = 0$ ; cóncava hacia abajo

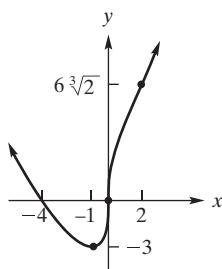
$(-\infty, -\sqrt{2/3}), (\sqrt{2/3}, \infty)$ ; cóncava hacia arriba  $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$ ; puntos de inflexión cuando  $x = \pm\sqrt{2/3}$ ; simétrica con respecto al eje y



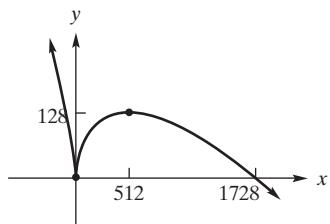
57. Intersecciones  $(0, 0), (8, 0)$ ; decreciente en  $(-\infty, 0), (0, 2)$ ; creciente en  $(2, \infty)$ ; mínimo relativo cuando  $x=2$ ; cóncava hacia arriba  $(-\infty, -4), (0, \infty)$ ; cóncava hacia abajo  $(-4, 0)$ ; puntos de inflexión cuando  $x = -4, x = 0$



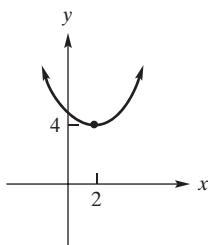
59. Intersecciones  $(0, 0), (-4, 0)$ ; decreciente en  $(-\infty, -1)$ ; creciente en  $(-1, 0), (0, \infty)$ ; mínimo relativo cuando  $x = -1$ ; cóncava hacia arriba  $(-\infty, 0), (2, \infty)$ ; cóncava hacia abajo  $(0, 2)$ ; puntos de inflexión cuando  $x = 0, x = 2$



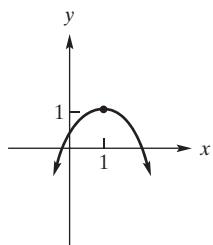
61. Intersecciones  $(0, 0), (1728, 0)$ ; creciente en  $(0, 512)$ ; decreciente en  $(-\infty, 0), (512, \infty)$ ; mínimo relativo cuando  $x = 0$ ; máximo relativo cuando  $x = 512$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, 0), (0, \infty)$



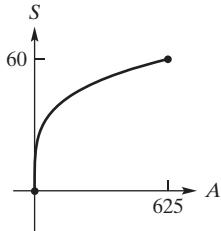
63.



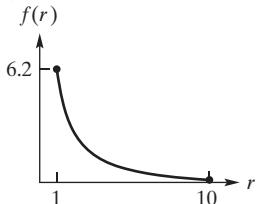
65.



69.



73. (b)



(c) 0.26

75. Dos

77. Arriba de la recta tangente: cóncava hacia arriba

79.  $-2.61, -0.26$

### PROBLEMAS 13.4 (página 589)

1. Mínimo relativo cuando  $x = \frac{5}{2}$ ; mínimo absoluto.

3. Máximo relativo cuando  $x = \frac{1}{4}$ ; máximo absoluto.

5. Máximo relativo cuando  $x = -5$ ; mínimo relativo cuando  $x = 1$ .

7. Mínimo relativo cuando  $x = 0$ ; máximo relativo cuando  $x = 2$ .

9. La prueba falla, cuando  $x = 0$  existe un mínimo relativo por la prueba de la primera derivada.

11. Máximo relativo cuando  $x = -\frac{1}{3}$ ; mínimo relativo cuando  $x = \frac{1}{3}$ .

13. Mínimos relativos cuando  $x = -5, -2$ ; máximo relativo cuando  $x = -\frac{7}{2}$ .

### PROBLEMAS 13.5 (página 598)

1.  $y = 1, x = 1$

3.  $y = \frac{1}{3}, x = \frac{5}{3}$

5.  $y = 0, x = 0$

7.  $y = 0, x = 1, x = -1$

9. Ninguna

11.  $y = 2, x = 2, x = -3$

13.  $y = 2, x = -\sqrt{5}, x = \sqrt{5}$

15.  $y = 5, x = 3$

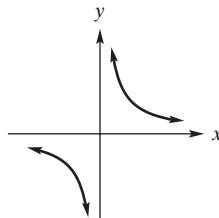
17.  $y = -x + 1, x = 0, x = -1$

19.  $y = \frac{1}{4}, x = -\frac{1}{2}$

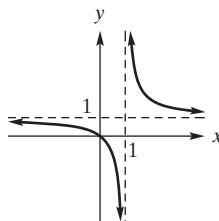
21.  $y = \frac{1}{2}, x = -\frac{4}{3}$

23.  $y = 4$

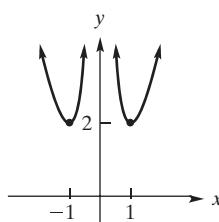
25. Decreciente  $(-\infty, 0), (0, \infty)$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, 0)$ ; cóncava hacia arriba  $(0, \infty)$ ; simétrica con respecto al origen; asíntotas  $x = 0, y = 0$



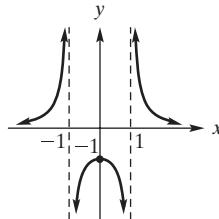
27. Intersección  $(0, 0)$ ; decreciente en  $(-\infty, 1), (1, \infty)$ ; cóncava hacia arriba  $(1, \infty)$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, 1)$ ; asíntotas  $x = 1, y = 1$



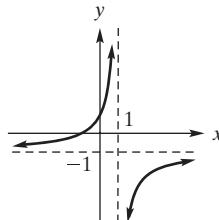
29. Decreciente en  $(-\infty, -1), (0, 1)$ ; creciente en  $(-1, 0), (1, \infty)$ ; mínimos relativos cuando  $x = \pm 1$ ; cóncava hacia arriba  $(-\infty, 0), (0, \infty)$ ; simétrica con respecto al eje y; asíntota  $x = 0$



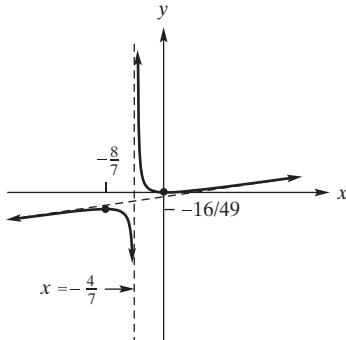
31. Intersección  $(0, -1)$ ; creciente en  $(-\infty, -1), (-1, 0)$ ; decreciente en  $(0, 1), (1, \infty)$ ; máximo relativo cuando  $x = 0$ ; cóncava hacia arriba  $(-\infty, -1), (1, \infty)$ ; cóncava hacia abajo  $(-1, 1)$ ; asíntotas  $x = 1, x = -1, y = 0$ ; simétrica con respecto al eje y



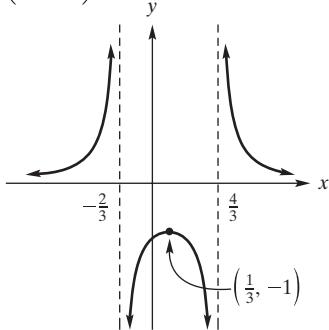
33. Intersecciones  $(-1, 0), (0, 1)$ ; creciente en  $(-\infty, 1), (1, \infty)$ ; cóncava hacia arriba  $(-\infty, 1)$ ; cóncava hacia abajo  $(1, \infty)$ ; asíntotas  $x = 1, y = -1$



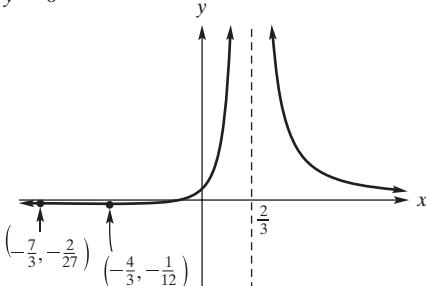
35. Intersección  $(0, 0)$ ; creciente en  $(-\infty, -\frac{8}{7})$ ,  $(0, \infty)$ ; decreciente en  $(-\frac{8}{7}, -\frac{4}{7})$ ,  $(-\frac{4}{7}, 0)$ ; máximo relativo cuando  $x = -\frac{8}{7}$ ; mínimo relativo cuando  $x = 0$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, -\frac{4}{7})$ ; cóncava hacia arriba  $(-\frac{4}{7}, \infty)$ ; asíntotas  $x = -\frac{4}{7}$ ;  $y = \frac{1}{7}x - \frac{4}{49}$



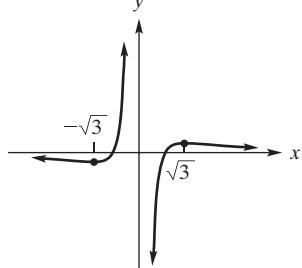
37. Intersección  $\left(0, -\frac{9}{8}\right)$ ; creciente en  $(-\infty, -\frac{2}{3})$ ,  $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ; decreciente en  $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ ,  $(\frac{4}{3}, \infty)$ ; máximo relativo cuando  $x = \frac{1}{3}$ ; cóncava hacia arriba  $(-\infty, -\frac{2}{3})$ ,  $(\frac{4}{3}, \infty)$ ; cóncava hacia abajo  $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ ; asíntotas  $y = 0$ ,  $x = -\frac{2}{3}$ ,  $x = \frac{4}{3}$



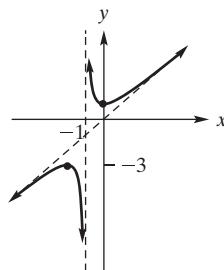
39. Intersección  $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ ,  $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ; decreciente en  $(-\infty, -\frac{4}{3})$ ,  $(\frac{2}{3}, \infty)$ ; creciente en  $(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ ; mínimo relativo cuando  $x = -\frac{4}{3}$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, -\frac{7}{3})$ ; cóncava hacia arriba  $(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $(\frac{2}{3}, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = -\frac{7}{3}$  asíntotas  $x = \frac{2}{3}$ ,  $y = 0$



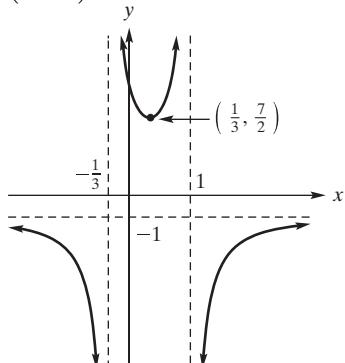
41. Intersección  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ ; creciente en  $(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $(0, \sqrt{3})$ ; decreciente en  $(-\infty, -\sqrt{3})$ ,  $(\sqrt{3}, \infty)$ ; máximo relativo cuando  $x = \sqrt{3}$ ; mínimo relativo cuando  $x = -\sqrt{3}$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, -\sqrt{6})$ ,  $(0, \sqrt{6})$ ; cóncava hacia arriba  $(-\sqrt{6}, 0)$ ,  $(\sqrt{6}, \infty)$ ; puntos de inflexión cuando  $x = \pm\sqrt{6}$ ; asíntotas  $x = 0$ ,  $y = 0$ ; simétrica con respecto al origen



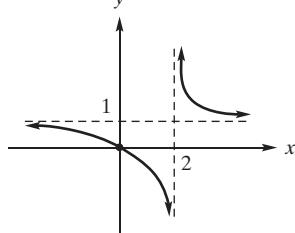
43. Intersección  $(0, 1)$ ; creciente en  $(-\infty, -2)$ ,  $(0, \infty)$ ; decreciente en  $(-2, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ; máximo relativo cuando  $x = -2$ ; mínimo relativo cuando  $x = 0$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, -1)$ ; cóncava hacia arriba  $(-1, \infty)$ ; asíntotas  $x = -1$ ,  $y = x$



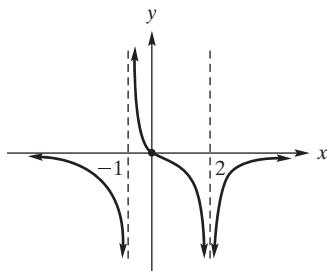
45. Intersección  $(0, 5)$ ; decreciente en  $(-\infty, -\frac{1}{3})$ ,  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ; creciente en  $(\frac{1}{3}, 1)$ ,  $(1, \infty)$ ; mínimo relativo cuando  $x = \frac{1}{3}$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, -\frac{1}{3})$ ,  $(1, \infty)$ ; cóncava hacia arriba  $(-\frac{1}{3}, 1)$ ; asíntotas  $x = -\frac{1}{3}$ ,  $x = 1$ ,  $y = -1$



47.



49.



51.  $x = -\frac{a}{b}$ ;  $y = \frac{1}{b}$

55.  $x \approx \pm 2.45$ ,  $x \approx 0.67$ ,  $y = 2$       57.  $y \approx 0.48$

### PROBLEMAS 13.6 (página 607)

1. 41 y 41    3. 300 pies por 250 pies    5. 100 unidades

7. \$15    9. (a) 110 gramos; (b)  $51\frac{9}{11}$  gramos

11. 500 unidades; precio = \$60; utilidad = \$11,900

13. \$22    15. 120 unidades; \$86,000    17. 625 unidades; \$4  
19. \$17; \$86,700    21. 4 pies por 4 pies por 2 pies

23.  $\frac{L}{6}$  pulg;  $\frac{2L^3}{27}$  pulg.<sup>3</sup>

27. 130 unidades,  $p = \$340$ ,  $P = \$36,980$ ; 125 unidades,  $p = \$350$ ,  $P = \$34,175$

29. 250 por lote (4 lotes)    31. 35

33. 60 mi/h    35. 8; \$3400

37.  $5 - \sqrt{3}$  tons;  $5 + \sqrt{3}$  tons    41. 110 cajas; \$50.55

### PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 13 (página 612)

1.  $y = 3$ ,  $x = 4$ ,  $x = -4$

3.  $y = \frac{5}{9}$ ,  $x = -\frac{2}{3}$

5.  $x = 0$

7.  $x = -\frac{15}{8}, -1$

9. Creciente en  $(-1, 7)$ ; decreciente en  $(-\infty, -1)$  y  $(7, \infty)$

11. Decreciente en  $(-\infty, -\sqrt{6})$ ,  $(0, \sqrt{3})$ ,  $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$ ; creciente en  $(-\sqrt{6}, -\sqrt{3})$ ,  $(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $(\sqrt{6}, \infty)$

13. Cóncava hacia arriba en  $(-\infty, 0)$  y  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ; cóncava hacia abajo en  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

15. Cóncava hacia abajo en  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ; cóncava hacia arriba en  $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

17. Cóncava hacia arriba en  $\left(-\infty, -\frac{7}{12}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ ; cóncava hacia abajo  $\left(-\frac{7}{12}, -\frac{1}{2}\right)$

19. Máximo relativo en  $x = 1$ ; mínimo relativo en  $x = 2$

21. Mínimo relativo en  $x = -1$

23. Máximo relativo cuando  $x = -\frac{2}{5}$ ; mínimo relativo en  $x = 0$

25. En  $x = 3$

27. En  $x = 1$

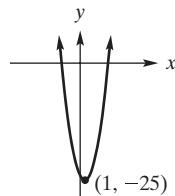
29. En  $x = 0$ ,  $3 \pm \sqrt{3}$

31. Máximo:  $f(2) = 16$ ; mínimo:  $f(1) = -1$

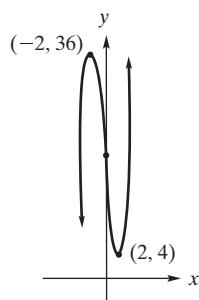
33. Máximo:  $f(0) = 0$ ; mínimo:  $f\left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{1}{120}$

35. (a)  $f$  no tiene extremos relativos; (b)  $f$  es cóncava hacia abajo en  $(1, 3)$ ; puntos de inflexión:  $(1, 2e^{-1})$ ,  $(3, 10e^{-3})$

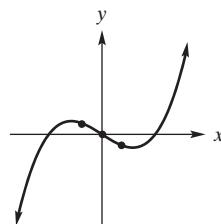
37. Intersecciones  $(-4, 0)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(0, -24)$ ; creciente en  $(1, \infty)$ ; decreciente en  $(-\infty, 1)$ ; mínimo relativo cuando  $x = 1$ ; cóncava hacia arriba  $(-\infty, \infty)$



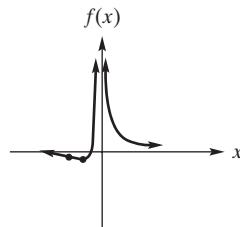
39. Intersección  $(0, 20)$ ; creciente en  $(-\infty, -2)$ ,  $(2, \infty)$ ; decreciente en  $(-2, 2)$ ; máximo relativo cuando  $x = -2$ ; mínimo relativo cuando  $x = 2$ ; cóncava hacia arriba  $(0, \infty)$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, 0)$ ; punto de inflexión cuando  $x = 0$



41. Intersecciones  $(0, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ ; creciente en  $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ,  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ ; decreciente en  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, 0)$ ; cóncava hacia arriba  $(0, \infty)$ ; punto de inflexión cuando  $x = 0$ ; simétrica con respecto al origen

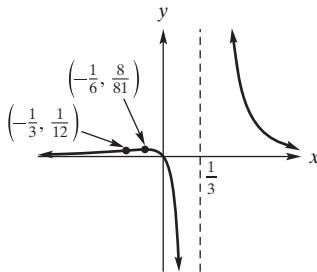


43. Intersección  $(-5, 0)$ ; creciente en  $(-10, 0)$ ; decreciente en  $(-\infty, -10)$ ,  $(0, \infty)$ ; mínimo relativo cuando  $x = -10$ ; cóncava hacia arriba  $(-15, 0)$ ,  $(0, \infty)$ ; cóncava hacia abajo  $(-\infty, -15)$ ; punto de inflexión cuando  $x = -15$ ; asíntota horizontal  $y = 0$ ; asíntota vertical  $x = 0$ .

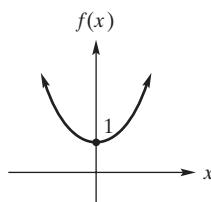


45. Intersección  $(0, 0)$ ; creciente en  $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$ ; dec.  $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ ; máximo relativo cuando  $x = -\frac{1}{6}$ ; cóncava hacia arriba  $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ ;

cóncava hacia abajo  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ; punto de inflexión cuando  $x = -\frac{1}{3}$ ; asíntota horizontal  $y = 0$ ; asíntota vertical  $x = \frac{1}{3}$



47. Intersecciones  $(0, 1)$ ; creciente en  $(0, \infty)$ ; decreciente en  $(-\infty, 0)$ ; mínimo relativo cuando  $x = 0$ ; cóncava hacia arriba  $(-\infty, \infty)$ ; simétrica con respecto al eje y



49. (a) Falso; (b) falso; (c) verdadero; (d) falso; (e) falso

51.  $q > 2$

57. Máximo relativo  $(-1.32, 12.28)$ ; mínimo relativo  $(0.44, 1.29)$

59.  $x \approx -0.60$

61. 20

63. 200

65. \$4624

67. 100 pies por 200 pies

69. (a) 200 estantes a \$120 por estante; (b) 300 estantes

### APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 13 (página 616)

- La figura 13.75 muestra que la población alcanza su tamaño final en 45 días aproximadamente.
- La recta tangente no coincidirá de manera exacta con la curva. El error podría reducirse usando intervalos de tiempo más pequeños.

### PROBLEMAS 14.1 (página 622)

- $5 dx$
- $\frac{2x^3}{\sqrt{x^4 - 9}} dx$
- $-\frac{2}{x^3} dx$
- $\frac{2x}{x^2 + 7} dx$
- $3e^{2x^2+3}(12x^2 + 4x + 3) dx$
- $\Delta y = -0.14, dy = -0.14$
- $\Delta y = -0.28, dy = -0.3$
- $\Delta y \approx 0.049, dy = 0.050$
- $-1; 2.9$
- $\frac{577}{34} \approx 16.97$
- $4\frac{1}{32}$
- $-0.03$
- $1.001$
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{6p(p^2 + 5)^2}$
- $-p^2$
- $\frac{1}{36}$
- $-\frac{4}{5}$
- $-17; -19.3$
- $2.04$
- $0.7$
- $(1.69 \times 10^{-11})\pi \text{ cm}^3$
- $42 \text{ unidades}$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.2

- $\int 28.3 dq = 28.3q + C$
- $\int 0.12t^2 dt = 0.04t^3 + C$
- $\int -\frac{480}{t^3} dt = \frac{240}{t^2} + C$
- $\int (500 + 300\sqrt{t}) dt = 500t + 200t^{3/2} + C$
- $S(t) = 0.7t^3 - 32.7t^2 + 491.6t + C$

### PROBLEMAS 14.2 (página 628)

- $7x + C$
  - $\frac{x^9}{9} + C$
  - $-\frac{5}{6x^6} + C$
  - $-\frac{4}{3t^{3/4}} + C$
  - $4t + \frac{t^2}{2} + C$
  - $\frac{y^6}{6} - \frac{5y^2}{2} + C$
  - $(7 + e)x + C$
  - $\pi e^x + C$
  - $-\frac{4x^{3/2}}{9} + C$
  - $\frac{x^4}{12} + \frac{3}{2x^2} + C$
  - $\frac{3}{10}u^2 - \frac{4}{5}u + C$
  - $\frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{12x^{5/4}}{5} + C$
  - $-\frac{3x^{5/3}}{25} - 7x^{1/2} + 3x^2 + C$
  - $\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{5x^2}{2} - 15x + C$
  - $\frac{2x^{5/2}}{5} + 2x^{3/2} + C$
  - $\frac{27}{4}u^4 + 18u^3 + 18u^2 + 8u + C$
  - $\frac{2v^3}{3} + 3v + \frac{1}{2v^4} + C$
  - $\frac{z^3}{6} + \frac{5z^2}{2} + C$
  - $x + e^x + C$
  - No,  $F(x) - G(x)$  podría ser una constante distinta de cero
  - $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + C$
- ### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.3
- $N(t) = 800t + 200e^t + 6317.37$
  - $y(t) = 14t^3 + 12t^2 + 11t + 3$
- ### PROBLEMAS 14.3 (página 633)
- $y = \frac{3x^2}{2} - 4x + 1$
  - $60$
  - $-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + x + \frac{19}{12}$
  - $\frac{x^4}{12} + x^2 - 5x + 13$
  - $p = 0.7$
  - $p = 275 - 0.5q - 0.1q^2$
  - $c = 1.35q + 200$

15. \$8079.17      17.  $G = -\frac{P^2}{50} + 2P + 20$   
 21. \$80 ( $dc/dq = 27.50$  cuando  $q = 50$  no es relevante para el problema)

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.4**

1.  $T(t) = 10e^{-0.5t} + C$       2.  $35 \ln|t+1| + C$

**PROBLEMAS 14.4 (página 639)**

1.  $\frac{(x+5)^8}{8} + C$
5.  $\frac{3}{5}(y^3 + 3y^2 + 1)^{5/3} + C$
9.  $\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C$
13.  $\frac{(5u^2-9)^{15}}{150} + C$
17.  $e^{3x} + C$
23.  $-\frac{4}{3}e^{-3x} + C$
27.  $\ln|x^3+x^4| + C$
31.  $4 \ln|x| + C$
35.  $-\frac{5}{2} \ln|4-2x| + C$
37.  $\frac{2}{15}(5x)^{3/2} + C = \frac{2\sqrt{5}}{3}x^{3/2} + C$
39.  $\sqrt{x^2-4} + C$
43.  $-\frac{1}{6}e^{-2v^3+1} + C$
47.  $-\frac{1}{2}(7-2x^2-5x)^4 + C$
51.  $2 \ln|3-2s+4s^2| + C$
55.  $\frac{1}{27}(x^3-x^6)^{-9} + C$
59.  $\frac{7}{4}(4-x-x^2)^{-4} + C$
63.  $-\frac{1}{25}(8-5x^2)^{5/2} + C$
65.  $\frac{(2x)^{3/2}}{3} - \sqrt{2x} + C = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \sqrt{2}x^{1/2} + C$
67.  $\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$
69.  $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \frac{1}{6(x^6+1)} + C$
71.  $\frac{1}{2} \ln|4x+1| + \frac{4}{21}(x^3-x^6)^{-7} + C$
73.  $\frac{2}{9}(3x+1)^{3/2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+3) + C$
77.  $-\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}e^x + C$
81.  $y = -\frac{1}{6}(3-2x)^3 + \frac{11}{2}$
83.  $y = -\ln|x| + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} = \ln|1/x| + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$
85.  $160e^{0.05t} + 190$
17.  $G = -\frac{P^2}{50} + 2P + 20$
21.  $35 \ln|t+1| + C$
25.  $\ln|3x-1| + C$
29.  $\frac{35}{5}(27+x^5)^{4/3} + C$
33.  $\frac{1}{3} \ln|s^3+5| + C$
37.  $\frac{1}{2} \ln(7e^{2x}+4) + C$
41.  $\frac{1}{2}e^{y^4+1} + C$
45.  $-\frac{1}{5}e^{-5x} + 2e^x + C$
49.  $\frac{1}{3} \ln|x^3+6x| + C$
53.  $\frac{1}{4} \ln(2x^2+1) + C$
57.  $\frac{1}{4}(x^4+x^2)^2 + C$
61.  $\frac{1}{6}e^{4x^3+3x^2-4} + C$
65.  $2e^{\sqrt{x}} + C$
69.  $\frac{1}{4} \ln^2(x^2+2x) + C$
73.  $-\frac{6}{7}\sqrt{2-3x} + C$
77.  $\frac{47x}{7 \ln 4} + C$
81.  $7x^2 - 4e^{(1/4)x^2} + C$
85.  $x^2 - 3x + \frac{2}{3} \ln|3x-1| + C$
89.  $\frac{5}{14} \ln(7e^{2x}+4) + C$
93.  $\frac{5}{2}x^2 - \frac{45}{2} \ln|x^2+9| + C$
97.  $3(x^{1/3}+2)^5 + C$
101.  $\frac{1}{3} \ln^3(r+1) + C$
105.  $\frac{2}{3}e^{(x^3+1)/2} + C$
109.  $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x^2-3| + C$
113.  $\frac{2}{3} \ln^{3/2}[(x^3+1)^2] + C$
117.  $\frac{47x}{7 \ln 4} + C$
121.  $8 \ln|\ln(x+3)| + C$
125.  $\frac{1}{2}(\ln^2 x) + C$
129.  $\frac{3^{\ln x}}{\ln 3} + C$
133.  $\frac{\sqrt{x^4-4x}}{2} - (\ln 7)x + C$
137.  $x^2 - 8x - 6 \ln|x| - \frac{2}{x^2} + C$
141.  $x - \ln|x+1| + C$
145.  $-\frac{(e^{-x}+6)^3}{3} + C$
149.  $\frac{1}{36\sqrt{2}}[(8x)^{3/2}+3]^{3/2} + C$
153.  $-\frac{2}{3}e^{-\sqrt{s^3}} + C$
157.  $\frac{x^3}{3} + x + C$
161.  $\frac{\ln^2 x}{2} + x + C$
165.  $p = -\frac{200}{q(q+2)}$
169.  $c = 20 \ln|(q+5)/5| + 2000$
173.  $C = 2(\sqrt{I}+1)$
177.  $A = 140$  por unidad; (b) \$14,000; (c) \$14,280
181.  $2500 - 800\sqrt{5} \approx \$711$  por acre
185.  $I = 3$

**PROBLEMAS 14.5 (página 643)**

1.  $\frac{x^5}{5} + \frac{4}{3}x^3 - 2 \ln|x| + C$
  3.  $\frac{1}{3}(2x^3 + 4x + 1)^{3/2} + C$
  5.  $-6\sqrt{2-3x} + C$
  7.  $\frac{4^{7x}}{7 \ln 4} + C$
  9.  $7x^2 - 4e^{(1/4)x^2} + C$
  11.  $x^2 - 3x + \frac{2}{3} \ln|3x-1| + C$
  13.  $\frac{5}{14} \ln(7e^{2x}+4) + C$
  15.  $-\frac{1}{7}e^{7/x} + C$
  17.  $\frac{5}{2}x^2 - \frac{45}{2} \ln|x^2+9| + C$
  19.  $\frac{2}{9}(\sqrt{x}+2)^3 + C$
  21.  $3(x^{1/3}+2)^5 + C$
  23.  $\frac{1}{2}(\ln^2 x) + C$
  25.  $\frac{1}{3} \ln^3(r+1) + C$
  27.  $\frac{3^{\ln x}}{\ln 3} + C$
  29.  $\frac{2}{3}e^{(x^3+1)/2} + C$
  31.  $8 \ln|\ln(x+3)| + C$
  33.  $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x^2-3| + C$
  35.  $\frac{2}{3} \ln^{3/2}[(x^3+1)^2] + C$
  37.  $\frac{\sqrt{x^4-4x}}{2} - (\ln 7)x + C$
  39.  $x^2 - 8x - 6 \ln|x| - \frac{2}{x^2} + C$
  43.  $\sqrt{e^{x^2}+2} + C$
  45.  $-\frac{(e^{-x}+6)^3}{3} + C$
  47.  $\frac{1}{5}(x^2+e)^{5/2} + C$
  49.  $\frac{1}{36\sqrt{2}}[(8x)^{3/2}+3]^{3/2} + C$
  53.  $\frac{x^3}{3} + x + C$
  55.  $\frac{\ln^2 x}{2} + x + C$
  57.  $p = -\frac{200}{q(q+2)}$
  59.  $c = 20 \ln|(q+5)/5| + 2000$
  63.  $C = \frac{3}{4}I - \frac{1}{3}\sqrt{I} + \frac{71}{12}$
  65. (a) 140 por unidad; (b) \$14,000; (c) \$14,280
  67.  $2500 - 800\sqrt{5} \approx \$711$  por acre
  71.  $I = 3$
- PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.6**
1. \$5975
- PROBLEMAS 14.6 (página 651)**
1.  $\frac{2}{3}$  de unidad cuadrada
  3.  $\frac{15}{32}$  de unidad cuadrada
  5.  $S_n = \frac{1}{n} \left[ 4 \left( \frac{1}{n} \right) + 4 \left( \frac{2}{n} \right) + \dots + 4 \left( \frac{n}{n} \right) \right] = \frac{2(n+1)}{n}$
  7. (a)  $S_n = \frac{n+1}{2n} + 1$ ; (b)  $\frac{3}{2}$
  9.  $\frac{1}{2}$  de unidad cuadrada
  11.  $\frac{1}{3}$  de unidad cuadrada
  13. 1 unidad cuadrada
  15. 20
  17. -18
  19.  $\frac{5}{6}$
  21. 0
  23.  $\frac{11}{4}$
  25. 14.7 unidades cuadradas
  27. 2.4
  29. -25.5

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.7**

1. \$32,830      2. \$28,750

**PROBLEMAS 14.7 (página 657)**

1. 15      3.  $\frac{15}{2}$       5. -20      7.  $\frac{7}{3}$   
 9.  $\frac{15}{2}$       11.  $\frac{4}{3}$       13.  $\frac{768}{7}$       15.  $\frac{5}{3}$   
 17.  $\frac{32}{3}$       19.  $-\frac{1}{6}$       21.  $4 \ln 8$       23.  $e^5$   
 25.  $\frac{5}{3}(e-1)$       27.  $\frac{3}{4}$       29.  $\frac{38}{9}$       31.  $\frac{15}{28}$   
 33.  $\frac{1}{2} \ln 3$       35.  $\frac{1}{2} \left( e + \frac{1}{e} - 2 \right)$   
 37.  $\frac{1}{e^3} - \frac{3}{e} - \frac{3}{2e^2} + \frac{3}{\pi} + \frac{3}{2\pi^2} - \frac{1}{\pi^3}$       39.  $\frac{e^3}{2}(e^{12}-1)$   
 41.  $6 + \ln 19$       43.  $\frac{47}{12}$       45.  $6 - 3e$       47. 7  
 49. 0      51.  $\alpha^{5/2} T$       53.  $\int_a^b (-Ax^{-B}) dx$   
 55. \$8639      57. 1,973,333      59. \$220      61. \$1367.99  
 63. 696,492      65. 2Ri      69. 0.05      71. 3.52      73. 14.34

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.8**

1. 76.90 pies      2. 5.77 gramos

**PROBLEMAS 14.8 (página 663)**

1. 413      3.  $0.340; \frac{1}{3} \approx 0.333$       5.  $\approx 0.767; 0.750$   
 7.  $0.883; 2 - \ln 3 \approx 0.901$       9. 2,115,215      11. 3.0 unidades cuadradas  
 13.  $\frac{8}{3}$       15. 0.771      17.  $\frac{35}{6} \text{ km}^2$

**PROBLEMAS 14.9 (página 667)**

Se supone que las respuestas a los problemas 1 a 33 se expresan en unidades cuadradas.

1. 8      3.  $\frac{87}{2}$       5. 8      7.  $\frac{19}{3}$       9. 9  
 11.  $\frac{50}{3}$       13.  $\frac{9}{2}$       15.  $\frac{123}{4}$       17.  $\frac{32}{3}$       19. 1  
 21. 18      23.  $\frac{26}{3}$       25.  $\frac{3}{2} \sqrt[3]{2}$       27.  $e$   
 29.  $\frac{3}{2} + 2 \ln 2 = \frac{3}{2} + \ln 4$       31. 68  
 33. 2      35. 19 unidades cuadradas  
 37. (a)  $\frac{1}{16}$ ; (b)  $\frac{3}{4}$ ; (c)  $\frac{7}{16}$   
 39. (a)  $\ln \frac{7}{3}$  (b)  $\ln 5 - 1$ ; (c)  $2 - \ln 4$   
 41. 1.89 unidades cuadradas      43. 11.41 unidades cuadradas

**PROBLEMAS 14.10 (página 675)**

1. Área =  $\int_{-2}^3 [(x+6) - x^2] dx$   
 3. Área =  $\int_0^3 [2x - (x^2 - x)] dx + \int_3^4 [(x^2 - x) - 2x] dx$   
 5. Área =  $\int_0^1 [(y+1) - \sqrt{1-y}] dy$   
 7. Área =  $\int_1^2 [(7 - 2x^2) - (x^2 - 5)] dx$

En los problemas 9-33, se asume que las respuestas bienen expresadas en unidades cuadradas.

9.  $\frac{4}{3}$       11.  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$       13.  $8\sqrt{6}$       15. 40      17.  $\frac{125}{6}$   
 19. 9      21.  $\frac{125}{12}$       23.  $\frac{256}{9}$       25.  $\frac{44}{3}$   
 27.  $\frac{4}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$       29.  $\frac{1}{2}$       31.  $\frac{255}{32} - 4 \ln 2$   
 33. 12      35.  $\frac{14}{45}$       37.  $\frac{3}{2m^3}$  unidades cuadradas  
 39.  $2^{4/3}$       41. 4.76 unidades cuadradas      43. 6.17 unidades cuadradas

**PROBLEMAS 14.11 (página 677)**

1. EC = 25.6, PS = 38.4  
 3. EC =  $50 \ln 2 - 25$ , PS = 1.25  
 5. EC = 225, PS = 450      7. \$426.67  
 9. \$254,000      11. EC  $\approx 1197$ , EP  $\approx 477$

**PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 14 (página 680)**

1.  $\frac{x^4}{4} + x^2 - 7x + C$       3.  $\frac{256}{3}$   
 5.  $-3(x+5)^{-2} + C$       7.  $2 \ln |x^3 - 6x + 1| + C$   
 9.  $\frac{11\sqrt[3]{11}}{4} - 4$       11.  $\frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + C$   
 13.  $\frac{10}{7}t^{7/10} - \frac{6}{5}t^{5/6} + C$       15.  $\frac{1}{3} \ln \frac{57}{5}$   
 17.  $\frac{2}{27}(3x^3 + 2)^{3/2} + C$       19.  $\frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y}) + C$   
 21.  $\ln|x| - \frac{2}{x} + C$       23. 111      25.  $\frac{35}{3}$   
 27.  $4 - 3\sqrt[3]{2}$       29.  $\frac{3}{t} - \frac{2}{\sqrt[3]{t}} + C$       31.  $\frac{3}{2} - 5 \ln 2$   
 33.  $4(x^{3/2} + 1)^{3/2} + C$       35. 1      37.  $\frac{(1 + e^{2x})^4}{8} + C$   
 39.  $\frac{2\sqrt{10^{3x}}}{\ln 10} + C$       41.  $y = \frac{1}{2}e^{2x} + 3x - 1$

Se supone que las respuestas a los problemas 43 a 57 se expresan en unidades cuadradas.

43.  $\frac{4}{3}$       45.  $\frac{16}{3}$       47.  $\frac{125}{6}$       49.  $6 + \ln 4$   
 51.  $\frac{2}{3}$       53. 36      55.  $\frac{243}{8}$       57.  $e - 1$   
 59.  $p = 100 - \sqrt{2q}$       61. \$1483.33      63. 0.5507  
 65. 15 unidades cuadradas      67. EC =  $166\frac{2}{3}$ , EP =  $53\frac{1}{3}$   
 73. 15.08 unidades cuadradas      75. EC  $\approx 1148$ , EP  $\approx 251$

**APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 14 (página 682)**

1. (a) 475; (b) 275  
 3. (a) \$2,002,500; (b) 18,000; (c) \$111.25

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.1**

1.  $S(t) = -40te^{0.1t} + 400e^{0.1t} + 4600$   
 2.  $P(t) = 0.025t^2 - 0.05t^2 \ln t + 0.05t^2(\ln t)^2 + C$

**PROBLEMAS 15.1 (página 688)**

1.  $\frac{2}{3}x(x+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} + C$   
 3.  $-e^{-x}(x+1) + C$       5.  $\frac{y^4}{4} \left[ \ln(y) - \frac{1}{4} \right] + C$

7.  $x[\ln(4x) - 1] + C$
9.  $x(2x+3)^{3/2} - \frac{1}{5}(2x+3)^{5/2} + C = \frac{3}{5}(2x+3)^{3/2}(x-1) + C$
11.  $-\frac{x}{10(5x+2)^2} - \frac{1}{50(5x+2)} + C$
13.  $-\frac{1}{x}(1 + \ln x) + C$
15.  $e^2(3e^2 - 1)$
17.  $\frac{1}{2}(1 - e^{-1})$ , no se necesita integración por partes
19.  $2(9\sqrt{3} - 10\sqrt{2})$
21.  $3x(x-2) \ln(x-2) - \frac{3}{2}x^2 + C$
23.  $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$
25.  $\frac{x^3}{3} + 2e^{-x}(x+1) - \frac{e^{-2x}}{2} + C$
27.  $\frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1) + C$
29.  $\frac{2^{2x-1}}{\ln 2} + \frac{2^{x+1}x}{\ln 2} - \frac{2^{x+1}}{\ln^2 2} + \frac{x^3}{3} + C$
31.  $2e^3 + 1$  unidades cuadradas
33.  $\left[ \frac{8}{3} \ln(2) - \frac{7}{9} \right]$  unidades cuadradas
37.  $\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.2

1.  $r(q) = \frac{5}{2} \ln \left| \frac{3(q+1)^3}{q+3} \right|$
2.  $V(t) = 150t^2 - 900 \ln(t^2 + 6) + C$

### PROBLEMAS 15.2 (página 694)

1.  $\frac{12}{x+6} - \frac{2}{x+1}$
3.  $2 + \frac{8}{x+2} - \frac{18}{x+3}$
5.  $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}$
7.  $\frac{3}{x} - \frac{2x}{x^2+1}$
9.  $2 \ln|x| + 3 \ln|x-1| + C = \ln|x^2(x-1)^3| + C$
11.  $-3 \ln|x+1| + 4 \ln|x-2| + C = \ln \left| \frac{(x-2)^4}{(x+1)^3} \right| + C$
13.  $\frac{1}{4} \left[ \frac{3x^2}{2} + 2 \ln|x-1| - 2 \ln|x+1| \right] + C$   
 $= \frac{1}{4} \left( \frac{3x^2}{2} + \ln \left[ \frac{x-1}{x+1} \right]^2 \right) + C$
15.  $2 \ln|x| - \frac{7}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x-2| + C = \ln \left| \frac{x^2 \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x+1)^7}} \right| + C$
17.  $\ln|x^6 + 2x^4 - x^2 - 2| + C$ , no se necesitan fracciones parciales.
19.  $\frac{4}{x-2} - 5 \ln|x-1| + 7 \ln|x-2| + C = \frac{4}{x-2} + \ln \left| \frac{(x-2)^7}{(x-1)^5} \right| + C$
21.  $4 \ln|x| - \ln(x^2 + 4) + C = \ln \left[ \frac{x^4}{x^2 + 4} \right] + C$
23.  $-\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{x-3} + C$
25.  $5 \ln(x^2 + 1) + 2 \ln(x^2 + 2) + C = \ln[(x^2 + 1)^5(x^2 + 2)^2] + C$
27.  $\frac{3}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{1}{x^2 + 2} + C$
29.  $18 \ln(4) - 10 \ln(5) - 8 \ln(3)$
31.  $11 + 24 \ln \frac{2}{3}$  unidades cuadradas

### PROBLEMAS 15.3 (página 699)

1.  $\frac{x}{9\sqrt{9-x^2}} + C$
3.  $-\frac{\sqrt{16x^2+3}}{3x} + C$
5.  $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x}{6+7x} \right| + C$
7.  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x} \right| + C$
9.  $\frac{1}{2} \left[ \frac{4}{5} \ln|4+5x| - \frac{2}{3} \ln|2+3x| \right] + C$
11.  $\frac{1}{15}(3x - \ln[5 + 2e^{3x}]) + C$
13.  $7 \left[ \frac{1}{5(5+2x)} + \frac{1}{25} \ln \left| \frac{x}{5+2x} \right| \right] + C$
15.  $1 + \ln \frac{4}{9}$
17.  $\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-3} - 3 \ln|x + \sqrt{x^2-3}|) + C$
19.  $\frac{1}{144}$
21.  $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$
23.  $\frac{\sqrt{5}}{2} \left( -\frac{\sqrt{5x^2+1}}{\sqrt{5}x} + \ln|\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2+1}| \right) + C$
25.  $\frac{1}{9} \left( \ln|1+3x| + \frac{1}{1+3x} \right) + C$
27.  $\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}x}{\sqrt{7}-\sqrt{5}x} \right| \right) + C$
29.  $\frac{4}{81} \left[ \frac{(3x)^6 \ln(3x)}{6} - \frac{(3x)^6}{36} \right] + C = x^6[6 \ln(3x) - 1] + C$
31.  $4(9x-2)(1+3x)^{3/2} + C$
33.  $\frac{1}{2} \ln|2x + \sqrt{4x^2-13}| + C$
35.  $-\frac{\sqrt{16-9x^2}}{8x} + C$
37.  $\frac{1}{2\pi} (4\sqrt{x} - \ln|\pi + 7e^{4\sqrt{x}}|) + C$
39.  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$
41.  $(2x^2 + 1)^{3/2} + C$
43.  $\ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C$
45.  $\frac{x^4}{4} \left[ \ln(x) - \frac{1}{4} \right] + C$
47.  $\frac{2}{9} e^{3x^2} (3x^2 - 1) + C$
49.  $x(\ln x)^2 - 2x \ln(x) + 2x + C$
51.  $\frac{2}{3}(9\sqrt{3} - 10\sqrt{2})$
53.  $2(2\sqrt{2} - \sqrt{7})$
55.  $\frac{7}{2} \ln(2) - \frac{3}{4}$
57.  $\ln \left| \frac{q_n(1-q_0)}{q_0(1-q_n)} \right|$
59. (a) \$7558.09; (b) \$16,930.75
61. (a) \$5481; (b) \$535

### PROBLEMAS 15.4 (página 702)

1.  $\frac{7}{3}$
3.  $-1$
5.  $0$
7.  $13$
9. \$11,050
11. \$3155.13

### PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.5

1.  $I = I_o e^{-0.0085x}$

### PROBLEMAS 15.5 (página 708)

1.  $y = -\frac{1}{x^2+C}$
3.  $y = (x^2 + 1)^{3/2} + C$
5.  $y = Ce^x, C > 0$
7.  $y = Cx, C > 0$

9.  $y = \sqrt[3]{3x - 2}$

13.  $y = \frac{48(3x^2 + 2)^2}{4 + 31(3x^2 + 2)^2}$

17.  $y = \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3}\right)$

21. 120 semanas

23.  $N = 40,000e^{0.018t}; N = 40,000(1.2)^{t/10}; 57,600$

25.  $2e^{1.14882}$  billones

29. 2900 años

33. 12.6 unidades

37. (a)  $V = 60,000e^{\frac{t}{9.5}} \ln(389/600)$  (b) Junio de 2028

11.  $y = \ln \frac{x^3 + 3}{3}$

15.  $y = \sqrt{\left(\frac{3x^2}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 - 1}$

19.  $c = (q+1)e^{1/(q+1)}$

27. 0.01204; 57.57 seg

31.  $N = N_0 e^{k(t-t_0)}, t \geq t_0$

35.  $A = 400(1 - e^{-t/2}), 157 \text{ g/m}^2$

**PROBLEMAS 15.6 (página 714)**

1. 69,200

3. 500

5. 1990

7. (b) 375

9. 3:21 A.M.

11. \$155,555.56

13.  $N = M - (M - N_0)e^{-kt}$

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.7**

1. 20 ml

**PROBLEMAS 15.7 (página 718)**

1.  $\frac{1}{18}$

3. Div

5.  $\frac{1}{e}$

7. Div

9.  $\frac{1}{2}$

11. 0

13. (a) 800; (b)  $\frac{2}{3}$  15. 4,000,000

17.  $\frac{1}{3}$  de unidad cuadrada

19. Aumento de 20,000

**PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 15 (página 720)**

1.  $\frac{x^2}{4}[2 \ln(x) - 1] + C$

3.  $2\sqrt{13} + \frac{8}{3} \ln\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)$

5.  $\ln|3x + 1| + 4 \ln|x - 2| + C$

7.

$\frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C$

9.  $-\frac{\sqrt{9 - 16x^2}}{9x} + C$

11.  $\frac{3}{2} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$

13.  $e^{7x}(7x - 1) + C$

15.  $\frac{1}{4} \ln|\ln x^2| + C$

17.  $x - \frac{3}{2} \ln|3 + 2x| + C$

19.  $2 \ln|x| + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) + C$

21.  $2\sqrt{x+1}[\ln(x+1) - 2] + C$

23. 34

25.  $y = Ce^{x^3+x^2}, C > 0$  27.  $\frac{2}{3}$  29. Div

31. 144,000

33. 0.0005; 90%

35.  $N = \frac{450}{1 + 224e^{-1.02t}}$

37. 4:16 P.M.

39. 0.95

41. (a) 207, 208; (b) 157, 165; (c) 41, 41

**APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 15 (página 722)**

1. 114; 69

5. Las respuestas pueden variar

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 16.1**

1.  $\frac{1}{3}$

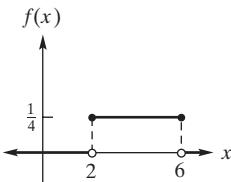
2. 0.607

3. Media 5 años, desviación estándar 5 años

**PROBLEMAS 16.1 (página 731)**

1. (a)  $\frac{5}{12}$ ; (b)  $\frac{11}{16} = 0.6875$ ; (c)  $\frac{13}{16} = 0.8125$ ; (d)  $-1 + \sqrt{10}$

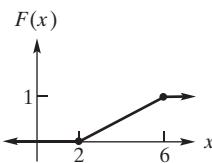
3. (a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$



(b)  $\frac{2}{3}$ ; (c) 0; (d)  $\frac{5}{6}$ ; (e)  $\frac{1}{3}$ ; (f) 0; (g) 1; (h)  $\frac{5}{2}$

(i)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; (j)  $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{3}, & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{si } x > 4 \end{cases}$

$P(X < 2) = \frac{1}{3}, P(1 < X < 3) = \frac{2}{3}$



5. (a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

(b)  $\frac{a+b}{2}$ ; (c)  $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}, \sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

7. (a)  $-e^{-12} + e^{-3} \approx 0.04978$ ; (b)  $-e^{-12} + 1 \approx 0.99999$ ; (c)  $e^{-18} \approx 0.00000$ ; (d)  $-e^{-3} + 1 \approx 0.95021$

(f)  $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-3x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

9. (a)  $\frac{1}{8}$ ; (b)  $\frac{5}{16}$ ; (c)  $\frac{39}{64} \approx 0.609$ ; (d) 1; (e)  $\frac{8}{3}$

(f)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ; (g)  $2\sqrt{2}$ ; (h)  $\frac{7}{16}$

11.  $\frac{7}{10}; 5 \text{ min}$  13.  $e^{-3} \approx 0.050$

**PROBLEMAS 16.2 (página 736)**

1. (a) 0.4554; (b) 0.3317; (c) 0.8907; (d) 0.9982; (e) 0.8972; (f) 0.4880

3. 0.13 5. -1.08 7. 0.34

9. (a) 0.9970; (b) 0.0668; (c) 0.0873

11. 0.3085 13. 0.997 15. 8 17. 95% 19. 90.82%

21. (a) 1.7%; (b) 85.6

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 16.3**

1. 0.0396

**PROBLEMAS 16.3 (página 740)**

1. 0.9207; 0.0122    3. 0.0430; 0.9232    5. 0.7507  
 7. 0.4129    9. 0.5; 0.0287    11. 0.0336

**PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 16 (página 741)**

1. (a) 2; (b)  $\frac{9}{32}$ ; (c)  $\frac{3}{4}$ ,  
 (d)  $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{3} + \frac{2x^3}{3}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$   
 3. (a)  $\frac{10}{3}$ ; (b)  $\sqrt{\frac{25}{18}} \approx 1.18$     5. 0.3085  
 7. 0.2417    9. 0.7734    11. 0.9817    13. 0.0228

**APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 16 (página 742)**

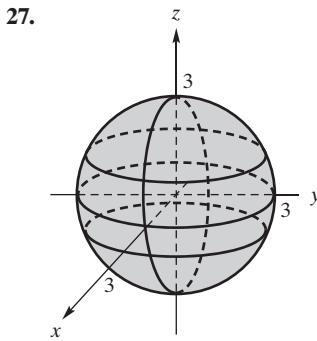
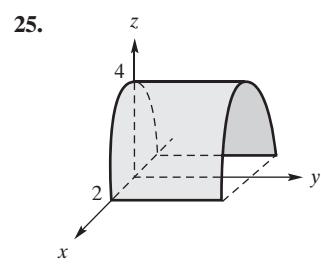
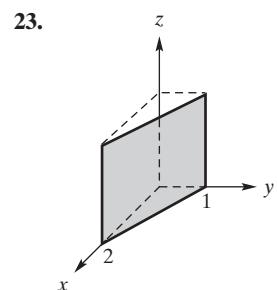
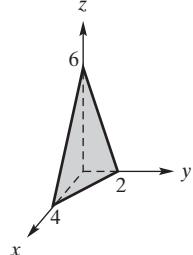
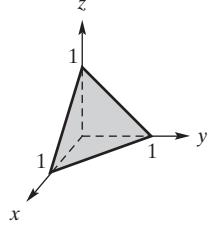
1. El resultado debe corresponder con la función de distribución conocida.  
 3. Las respuestas pueden variar.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 17.1**

1. (a) \$3260; (b) \$4410

**PROBLEMAS 17.1 (página 750)**

1. 3    3. 8    5. -1    7. 88    9. 3  
 11.  $e^{x_0+h+y_0}$     13. 2000    15.  $y = 2$     17.  $z = 6$   
 19.



**PROBLEMAS 17.2 (página 754)**

1.  $f_x(x, y) = 8x$ ;  $f_y(x, y) = 6y$   
 3.  $f_x(x, y) = 0$ ;  $f_y(x, y) = 2$   
 5.  $g_x(x, y) = 12x^3y + 2y^2 - 5y + 8$ ;  
 $g_y(x, y) = 3x^4 + 4xy - 5x - 9$   
 7.  $g_p(p, q) = \frac{q}{2\sqrt{pq}}$ ;  $g_q(p, q) = \frac{p}{2\sqrt{pq}}$   
 9.  $h_s(s, t) = \frac{2s}{t-3}$ ;  $h_t(s, t) = -\frac{s^2+4}{(t-3)^2}$   
 11.  $u_{q_1}(q_1, q_2) = \frac{1}{2(q_1+2)}$ ;  $u_{q_2}(q_1, q_2) = \frac{1}{3(q_2+5)}$   
 13.  $h_x(x, y) = (x^3 + xy^2 + 3y^3)(x^2 + y^2)^{-3/2}$ ;  
 $h_y(x, y) = (3x^3 + x^2y + y^3)(x^2 + y^2)^{-3/2}$   
 15.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 5ye^{5xy}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = 5xe^{5xy}$   
 17.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 5 \left[ \frac{2x^2}{x^2+y} + \ln(x^2+y) \right]$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{5x}{x^2+y}$   
 19.  $f_r(r, s) = \sqrt{r+2s}(3r^2-2s) + \frac{r^3-2rs+s^2}{2\sqrt{r+2s}}$ ;  
 $f_s(r, s) = 2(s-r)\sqrt{r+2s} + \frac{r^3-2rs+s^2}{\sqrt{r+2s}}$   
 21.  $f_r(r, s) = -e^{3-r} \ln(7-s)$ ;  $f_s(r, s) = \frac{e^{3-r}}{s-7}$   
 23.  $g_x(x, y, z) = 6x^2y^2 + 2y^3z$ ;  
 $g_y(x, y, z) = 4x^3y + 6xy^2z$ ;  
 $g_z(x, y, z) = 2xy^3 + 8z$   
 25.  $g_r(r, s, t) = 2re^{s+t}$ ;  
 $g_s(r, s, t) = (7s^3 + 21s^2 + r^2)e^{s+t}$ ;  
 $g_t(r, s, t) = e^{s+t}(r^2 + 7s^3)$   
 27. 50    29.  $\frac{1}{\sqrt{14}}$     31. 0    33. 26  
 39.  $-\frac{ra}{2 \left[ 1 + a \frac{n-1}{2} \right]^2}$

**PROBLEMAS 17.3 (página 759)**

1. 20    3. 1374.5  
 5.  $\frac{\partial P}{\partial k} = 1.487902 \left( \frac{l}{k} \right)^{0.357}$ ;  $\frac{\partial P}{\partial l} = 0.826098 \left( \frac{k}{l} \right)^{0.643}$

7.  $\frac{\partial q_A}{\partial p_A} = -50$ ;  $\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 2$ ;  $\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = 4$ ;  $\frac{\partial q_B}{\partial p_B} = -20$ ; competitivos

9.  $\frac{\partial q_A}{\partial p_A} = -\frac{100}{p_A^2 p_B^{1/2}}$ ;  $\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = -\frac{50}{p_A p_B^{3/2}}$ ;  $\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = -\frac{500}{3 p_B p_A^{4/3}}$ ;  $\frac{\partial q_B}{\partial p_B} = -\frac{500}{p_B^2 p_A^{1/3}}$ ; complementarios

11.  $\frac{\partial P}{\partial B} = 0.01 A^{0.27} B^{-0.99} C^{0.01} D^{0.23} E^{0.09} F^{0.27}$ ;  
 $\frac{\partial P}{\partial C} = 0.01 A^{0.27} B^{0.01} C^{-0.99} D^{0.23} E^{0.09} F^{0.27}$

13. 4480; si un gerente con grado de MAE tiene un año adicional de experiencia en el trabajo antes del grado, el gerente recibirá \$4480 por año adicionales de compensación.

15. (a)  $-1.015$ ;  $-0.846$ ; (b) Uno para el cual  $w = w_0$  y  $s = s_0$ .

17.  $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{V_F} > 0$  para  $V_F > 0$ . Así, si  $x$  aumenta y  $V_F$  y  $V_s$  están fijas, entonces  $g$  aumenta.

19. (a) Cuando  $p_A = 9$  y  $p_B = 16$ ,  $\frac{\partial q_A}{\partial p_A} = -\frac{20}{27}$  y  $\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = \frac{5}{12}$

(b) La demanda de A disminuye en aproximadamente  $\frac{5}{6}$  unidades.

21. (a) No; (b) 70%

23.  $\eta_{p_A} = -\frac{5}{46}$ ,  $\eta_{p_B} = \frac{1}{46}$       25.  $\eta_{p_A} = -1$ ,  $\eta_{p_B} = -\frac{1}{2}$

#### PROBLEMAS 17.4 (página 763)

1.  $-\frac{2x}{5z}$

3.  $\frac{4y}{3z^2}$

5.  $\frac{x(yz^2 + 1)}{z(1 - x^2y)}$

7.  $-e^{y-z}$

9.  $\frac{yz}{1 + 9z}$

11.  $-\frac{3x}{z}$

13.  $-\frac{1}{2}$

15.  $-\frac{4}{e^2}$

17. 4

19.  $\frac{5}{2}$

21. (a) 36; (b) Con respecto a  $q_A$ ,  $\frac{60}{13}$ ; con respecto a  $q_B$ ,  $\frac{288}{65}$

#### PROBLEMAS 17.5 (página 765)

1.  $6y^2; 12y; 12y$

3. 3; 0; 0

5.  $18xe^{2xy}; 18e^{2xy}(2xy + 1); 72x(1 + xy)e^{2xy}$

7.  $3x^2y + 4xy^2 + y^3; 3xy^2 + 4x^2y + x^3; 6xy + 4y^2; 6xy + 4x^2$

9.  $\frac{zy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{z}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ x^2 + y^2 \sqrt{x^2 + y^2} \right]$

11. 0

13. 744

15.  $2e$

17.  $-\frac{1}{8}$

23.  $-\frac{y^2 + z^2}{z^3} = -\frac{3x^2}{z^3}$

#### PROBLEMAS 17.6 (página 768)

1.  $\frac{\partial z}{\partial r} = 13$ ;  $\frac{\partial z}{\partial s} = 9$

3.  $\left[ 2t + \frac{3\sqrt{t}}{2} \right] e^{x+y}$

5.  $5(2xz^2 + yz) + 2(xz + z^2) - (2x^2z + xy + 2yz)$

7.  $3(x^2 + xy^2)^2(2x + y^2 + 16xy)$

9.  $-2s(2x + yz) + r(xz) + 2s(xy + 2z)$

11.  $19s(2x - 7)$

13. 324

15.  $\frac{40}{e^9}$

17. Cuando  $p_A = 25$  y  $p_B = 4$ ,  $\frac{\partial c}{\partial p_A} = -\frac{1}{4}$  y  $\frac{\partial c}{\partial p_B} = \frac{5}{4}$

19. (a)  $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$ ; (b)  $-\frac{20}{3\sqrt{2} + 15e}$

#### PROBLEMAS 17.7 (página 776)

1.  $\left( \frac{14}{3}, -\frac{13}{3} \right)$

3.  $(0, -2), (0, 1), (3, -2), (3, 1)$

5.  $(50, 150, 350)$

7.  $\left( -2, \frac{3}{2} \right)$ , mínimo relativo 9.  $\left( -\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$ , máximo relativo

11.  $\left( \frac{2}{5}, -\frac{3}{5} \right)$ ;  $D = -5 < 0$  sin extremos relativos

13.  $(0, 0)$ , máximo relativo;  $\left( 4, \frac{1}{2} \right)$ , mínimo relativo;  $\left( 0, \frac{1}{2} \right)$ ,  $(4, 0)$ , ninguno

15.  $(43, 13)$ , mínimo relativo

19.  $(0, -2), (0, 2)$ , ninguno

21.  $l = 24, k = 14$

23.  $p_A = 80, p_B = 85$

25.  $q_A = 48, q_B = 40, p_A = 52, p_B = 44$ , utilidad = 3304

27.  $q_A = 4, q_B = 3$

29. 1 pie por 2 pies por 3 pies

31.  $\left( \frac{105}{37}, \frac{28}{37} \right)$ , mínimo relativo 33.  $a = -8, b = -12, d = 33$

35. (a) 2 unidades de A y 3 unidades de B.

(b) El precio de venta para A es 30 y el precio de venta para B es 19. La utilidad máxima relativa es 25.

37. (a)  $P = 5T(1 - e^{-x}) - 20x - 0.1T^2$ ;

(c) Máximo relativo en  $(20, \ln 5)$ ; no hay extremo relativo en  $\left( 5, \ln \frac{5}{4} \right)$

#### PROBLEMAS 17.8 (página 784)

1.  $(2, -2)$

3.  $\left( 3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right)$

5.  $\left( 0, \frac{1}{4}, \frac{5}{8} \right)$

7.  $(6, 3, 2)$

9.  $\left( \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right)$

11.  $\left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$

13. Planta 1, 40 unidades; planta 2, 60 unidades

15. 74 unidades (cuando  $l = 8, k = 7$ )

17. \$15,000 en publicidad en periódicos y \$45,000 en publicidad en televisión

19.  $x = 5, y = 15, z = 5$

21.  $x = 12, y = 8$

23.  $x = \frac{100}{3}, y = \frac{100}{3}, z = \frac{100}{3}$

#### PROBLEMAS 17.9 (página 789)

1.  $\hat{y} = 0.98 + 0.61x$ ; 3.12

3.  $\hat{y} = 0.057 + 1.67x$ ; 5.90

5.  $\hat{q} = 80.5 - 0.643p$

7.  $\hat{y} = 100 + 0.13x$ ; 105.2

9.  $\hat{y} = 8.5 + 2.5x$

11. (a)  $\hat{y} = 35.9 - 2.5x$ ; (b)  $\hat{y} = 28.4 - 2.5x$

#### PROBLEMAS 17.10 (página 793)

1. 18

3.  $\frac{1}{4}$

5.  $\frac{2}{3}$

7. 3

9.  $\frac{525}{2}$

11.  $-\frac{58}{5}$

13. 9

15. -1

**17.**  $\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$

**23.**  $e^{-4} - e^{-2} - e^{-3} + e^{-1}$

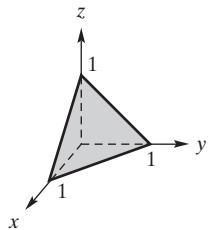
**19.**  $-\frac{27}{4}$

**25.**  $\frac{1}{3}$

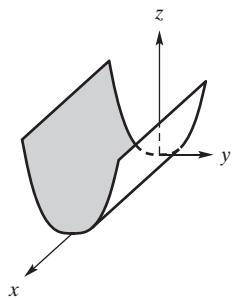
**21.**  $\frac{1}{24}$

**PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 17 (página 796)**

**1.**



**3.**



**5.**  $8x + 6y; 6x + 2y$

**9.**  $\frac{y}{x^2 + y^2}$

**13.**  $2x + 2y + 6z$

**15.**  $e^{x+y+z} \left[ \ln xyz + \frac{1}{y} \right]; e^{x+y+z} \left[ \ln xyz + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right]$

**17.**  $\frac{1}{64}$

**19.**  $2(x+y)e^r + 2 \left( \frac{x+3y}{r+s} \right); 2 \left( \frac{x+3y}{r+s} \right)$

**21.**  $\frac{2x+2y+z}{4z-x}$

**23.**  $\frac{\partial P}{\partial l} = 14l^{-0.3}k^{0.3}; \frac{\partial P}{\partial k} = 6l^{0.7}k^{-0.7}$

**25.** Competitivos

**27.**  $(2, 2)$ , mínimo relativo

**29.** 4 pies por 4 pies por 2 pies

**31.** A, 89 centavos por libra; B, 94 centavos por libra

**33.**  $(3, 2, 1)$

**35.**  $\hat{y} = 12.67 + 3.29x$

**37.**  $\frac{1}{12}$

**39.**  $\frac{1}{30}$

**APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 17 (página 798)**

**1.**  $y = 9.50e^{-0.22399x} + 5$

**3.**  $T = 79e^{-0.01113t} + 45$

# Índice

• •

## A

- Activos circulantes, 59
- Aeroembolismo, 578
- Álgebra:
  - de matrices, 226-279
  - números reales, conjuntos de, 2-3
  - repaso de, 1-45
- Amortización:
  - de préstamos, 218-222
  - ejemplo, 219
  - tecnología, 220
  - definición de, 218
  - fórmulas, 219
  - periodos de un préstamo, 220-221
  - programa de, 218
  - uso del término, 196
- Análisis de entrada-salida, 271-274
  - coeficientes de entrada-salida, 272
  - de Leontief. *Vea* Análisis de entrada-salida
    - ejemplos, 273-274
    - matriz de coeficientes, 272
    - matriz de demanda final, 272
    - matriz de Leontief, 272
    - matriz de salida, 272
- Ángulo de aproximación en un avión, 124
- Antiderivadas, 623-624
  - definición de, 624
- Anualidad continua, 217-218
  - monto acumulado de una, 698
  - valor presente de una, 698-699
- Anualidades, 208-218
  - anualidad anticipada, 213-215
  - monto de, 215
  - uso del término, 213
  - valor futuro de, 215
  - definición, 211
  - fondo de amortización, 215-216
    - definición de, 215
    - ejemplos, 215-216
  - integración aplicada a las, 698-699
  - monto acumulado de una anualidad continua, 698
  - monto de (valor futuro de), 214-215
    - fórmula, 214
  - ordinarias, 211
  - periodo de pago, 211, 213
  - secuencia geométrica, 209-210
  - succesiones, 208-209
    - orden y repeticiones en las, 208-209
  - suma de series geométricas, 211
  - término, 211
  - valor futuro de una anualidad anticipada, 215

## B

- valor presente, 211-214
  - de un flujo de ingresos continuo, 698
  - de una anualidad anticipada, 213
  - de una anualidad continua, 698-699
  - ejemplos, 212-213
- Aplicaciones:
  - de la razón de cambio a la economía, 501-503
  - de las ecuaciones, 47-53, *Vea también* Ecuaciones
    - de los máximos y mínimos, *Vea Máximos y mínimos*
  - Apreciación, 129, 180
  - Aprendizaje por asociación de pares, 173
- Árbol:
  - de dos niveles, 345
  - de probabilidad, 386
    - para un experimento compuesto, 387
    - y cartas, 386-388
- Árboles de probabilidad, para una cadena de Markov de dos estados, 435
- Área, 730
  - aplicación a la estadística, 666-667
  - de una región cuando se tienen dos curvas superiores diferentes, 670
  - de una región, determinación de, 665-666
  - elemento vertical del, 665-670
  - elementos horizontales, 671-673
    - métodos de los, 671
    - ventaja de los, 672
  - entre curvas, 668-675
    - ejemplo, 669-670
    - elementos verticales, 668-669
  - franja horizontal, 671
  - que necesitan dos integrales definidas, 666
  - uso de la integral definida para encontrar el, 665
  - y la calculadora graficadora, 672-673
- Arreglos, 102, 226, 227
- Asintotas, 164pp, 589-599
  - definición, 589
  - en el bosquejo de curvas, 589-599
  - horizontales, 592, 594
    - determinación de, 594
  - oblicuas, 593, 594
  - verticales, 589-592, 594
    - determinación de, 594

- Bayes, Thomas, 406pp
- Binomios, 15
- Bioestática, *Vea Función de distribución de Poisson*
- Bonos del tesoro, 224-225
  - fecha de maduración, 224
- C
- Cadenas de Markov, 433-442
  - de dos estados, 434
  - árboles de probabilidad para, 435
  - definición de, 433
  - demografía, 436-437
  - en teoría de juegos, 446-447
  - k-ésimo estado, 443
  - matriz de transición, 434, 443
    - regular, 439
    - regulares, 439
  - vector de estado, 434, 443
    - inicial, 434
    - estable, 437-440
    - ejemplo, 439-440
- Calculadoras graficadoras, y límites, 452
- Cálculo de varias variables, 744-799
  - derivadas parciales, 750-755, 794
    - aplicaciones de, 755-761
    - de orden superior, 763-766
  - diferenciación parcial implícita, 761-763
  - funciones de varias variables, 745-750
  - integrales múltiples, 790-794
  - máximos y mínimos para funciones de dos variables, 769-778
  - multiplicadores de Lagrange, 778-785
  - rectas de regresión, 785-790
  - regla de la cadena, 766-769
- Cálculo integral, 618
  - teorema fundamental del, 651-659
- Cálculo y trazado, 611
- Calificación de la facilidad de lectura, 760
- Cambio:
  - poblacional a lo largo del tiempo, 616-617
  - proporcional, 623
- Cantidad de equilibrio, 150, 154
  - ejemplo, 155-156
- Cantidad económica de pedido, 564-565
- Capital, 167, 197
  - contenido en  $k$  pagos, fórmula del, 219
- Celda de carga, definición de, 44
- Celdas, 359-360, 413
  - asignación a, 359
  - exhibición de arte, 359-360
- Ciclo, 309-310
- Cociente de diferencia, 484

## I-2 Índice

- Coefficiente:  
de correlación, 789  
de desigualdad, 674-675  
de entrada-salida, 272  
numérico, 15
- Columna pivote, 301
- Combinaciones, 351-361  
comparación de permutaciones con, 352  
de  $n$  objetos tomados  $r$  a la vez, 352  
decisión por mayoría y suma de combinaciones, 353-354  
identidad combinatoria básica, 355-356  
mano de póquer, 353  
selección de comité, 352-353  
y conjuntos, 354-356
- Comportamiento de la celda de carga, modelado, 44-45
- Composición asociativa, 89
- Compuesto continuo, *Vea también* Interés compuesto continuamente  
ejemplo, 206  
tasa efectiva bajo interés continuo, 207  
uso del término, 205
- Concavidad, 580-587, 596-598  
bosquejo de curvas, 580-587  
cónica  
hacia abajo, 581  
hacia arriba, 581  
 criterio para la, 581  
ejemplo, 596-597  
pruebas de, 582  
punto de inflexión, definición de, 582
- Concentración de alcohol en la sangre (CAS), 74-75
- Condiciones de no negatividad, 286, 302, 315, 333
- Conjunto vacío, 33
- Conjuntos:  
definición de, 2  
y combinaciones, 354-356
- Constante, 15  
de decaimiento, 720  
determinación, 706-707  
derivada de una, 489-490  
distinta de cero, 15
- Continuidad, 466-475, *Vea también* Discontinuidades  
aplicación de la definición de, 467  
aplicada a las desigualdades, 472-475  
continua sobre su dominio, uso del término, 467  
de funciones polinomiales, 468  
discontinuidades, 468-469  
definición de, 467  
discontinuidad infinita, 468  
función de discontinuidad, 467  
punto de discontinuidad, 467  
y diferenciabilidad, 487-488
- Coordenada  $x$ , 94  
Coordenada  $y$ , 94  
Coordenadas, 747  
definición de, 3  
rectangulares, 94
- Corrección de continuidad, uso del término, 738, 741
- Correspondencia uno a uno, 94
- Costo:  
marginal, 501-502, 524, 756  
costo promedio por unidad, 502  
ejemplo, 502  
total, 48-154  
unitario promedio, 502
- Costos:  
fijos, 48, 154  
variables, 48, 154
- Crecimiento:  
de la población, 168-169  
ejemplo, 171  
exponencial, 704-705  
logístico, 709-712  
de los miembros de un club, 711-712  
de un rumor en el campus, 712-713
- Cuadrantes, 94-95
- Cuentas del ingreso y el producto nacional (NIPA, por sus siglas en inglés), 526-527
- Curva:  
de demanda, 102, 125  
de demanda lineal, 125-126  
de Laffer, 566  
de Lorenz, 674-675  
de oferta, 125  
de Yield, 225  
logística, 710  
normal:  
definición de, 732  
estándar, 733
- Curvas de oferta lineales, 125-126
- D**
- Dantzig, George B., 285
- Decaimiento radiactivo, 172-173  
cantidad inicial, 171  
decaimiento constante, 171  
ejemplo, 171-172  
ley de decaimiento exponencial, 171  
y vida media, 179
- Decimales sin fin no repetitivos, 2
- Degeneración, 309-310
- Demandas:  
externa, 272  
interna, 272
- Depreciación:  
con saldo decreciente sencilla, 193  
en línea recta, 129  
por saldo decreciente, 193
- Derivada de segundo orden:  
definición de, 557
- determinación de, 557-558  
evaluación de, 558
- Derivada de tercer orden, 557
- Derivada parcial mixta, 764-765  
ejemplo, 764-765
- Derivada(s), 480-489, *Vea también* Diferenciación; Razón de cambio como una razón de cambio, 497-506  
de funciones constantes, 490-491  
de funciones exponenciales, 534-539  
diferenciación de formas distintas, 536  
diferenciación de funciones con base 4, 536  
diferenciación de funciones con base  $b$ , 535-537  
diferenciación de funciones de potencias, 537  
diferenciación de funciones inversas, 536-537  
diferenciación de funciones que contienen  $e^x$ , 534-535  
diferenciación de funciones que contienen  $e^x$ , 534
- de funciones logarítmicas, 529-533  
con base 10, 533  
con base  $b$ , 532  
diferenciación de funciones que contienen  $\ln u$ , 530-531  
diferenciación de funciones que contienen  $\ln x$ , 530  
diferenciación de funciones que contienen logaritmos, 531-532  
reescritura de funciones antes de diferenciar, 531
- de una constante, 489-490  
definición de, 484  
determinación de, 484, 495  
determinación de la derivada de  $p$  con respecto a  $q$ , 486-487  
diferenciación, definición de, 484  
función de potencias, 490-492  
línea secante, 481-483  
pendiente de una curva, 482, 523  
recta tangente, 481-483  
determinación de la pendiente de una, 483  
determinación de una ecuación de, 485, 495  
pendiente de una, 499  
regla del factor constante, 492  
segunda, 557  
tangente, 481  
tercera, 557  
y la calculadora graficadora, 488
- Derivadas de orden superior, 557-560  
derivada de segundo orden:  
determinación, 557-558  
evaluación, 558  
determinación de, 557

- Derivadas parciales de orden superior, 763-765  
derivada parcial mixta, 764-765  
derivadas parciales de segundo orden, 763-764
- Derivadas parciales de segundo orden, 763-764  
de una función implícita, 765  
ejemplo, 764
- Derivadas parciales, 750-755  
aplicaciones de, 755-761  
costo marginal, 756  
de orden superior, 763-766  
de una función de cuatro variables, 754  
de una función de tres variables, 753  
definición de, 751  
determinación de, 752-753  
función de costos conjuntos, 756  
función de producción, 757  
pérdida de calor del cuerpo, 756-757  
productividad marginal, 757  
productos competitivos y complementarios, 758-759
- Desigualdad:  
cuadrática, resolución de, 473  
de Chebyshev, 425  
de función racional, resolución de, 475  
de triángulo, 64  
definición de, 54  
polinomial, resolución de una, 474
- Desigualdades:  
aplicaciones de, 58-61  
continuidad aplicada a las, 472-475  
desigualdad cuadrática, resolución de, 473  
desigualdad de función racional, resolución de, 473  
desigualdad polinomial, resolución de, 474  
equivalentes, 55  
matriciales, 297  
no lineales, resolución de, 475  
valor absoluto, 62-63
- Desigualdades lineales, 54-58  
con dos variables, 281-284  
definición de, 281  
resolución de, 56-57, 282-283  
sistemas de, 283-284  
resolución de, 283-284
- Desplazamiento, 497
- Desviación estándar, 424-425, 443, 730, 741  
ejemplo, 425-426
- Diagonal principal, matriz cuadrada, 230-231
- Diagrama  
de árbol, 345  
de equilibrio, 154
- Diagramas de Venn, 365
- Dietas, 722-723
- Diferenciación implícita, 544-549, 561, 761-765  
definición de, 544-546  
de orden superior, 558-591  
ejemplos, 546-548, 762-763
- Diferenciación logarítmica, 549-553, 561  
definición de, 549  
ejemplos, 549-552  
razón de cambio relativa de un producto, 551
- Diferenciación, 480, *Vea también Derivada(s)*  
cociente de diferencia, 484  
de sumas o restas de funciones, 494  
de una constante por una función, 493  
definición de, 484  
derivada, 480-489  
como una razón de cambio, 497-506  
derivadas de orden superior, 557-560  
determinación de la pendiente de una curva en un punto, 485  
elasticidad de la demanda, 539-544  
función con una recta tangente vertical, 485-486  
función de consumo, 513  
implícita, 544-549, 561  
logarítmica, 549-553, 561  
método de Newton, 553-557, 561  
parcial implícita, 761-763  
producto del ingreso marginal, 519-521  
regla de la cadena, 515-517  
regla de la potencia, 517-519  
regla de la suma o la resta, 493  
regla del cociente, 510-512  
regla del producto, 506-510  
reglas para, 489-497  
tasa de cambio instantánea, 498
- Diferenciales, 619-623  
cálculo de, 619  
determinación de  $dp/dq$  a partir de  $dq/dp$ , 622  
en términos de  $dx$ , determinación de, 619  
para estimar el valor de una función, uso de, 621-622  
para estimar un cambio de cantidad, uso de, 620-621
- Dilema del prisionero, 446  
iterativo, 446-447
- Discontinuidad infinita, 468
- Discontinuidades, 468-469, *Vea también Continuidad*  
de una función racional, 468-469  
función de la oficina de correos, 470  
localización de:  
en funciones definidas por partes, 469  
en funciones racionales, 469  
y la calculadora graficadora, 470
- Dispersión, 424, 443
- Distancia, 61-62  
unitaria, 2
- Distribución binomial, 428-433, 443  
aproximación normal a la, 737-740  
ejemplo de control de calidad, 739  
auditoría de impuestos, 432  
coeficientes binomiales, 429  
definición de, 430  
ejemplo, 430-431  
ensayos independientes, 429  
fallas, 429  
ocho lanzamientos de moneda, al menos dos caras en, 431  
teorema binomial, 428-429  
ejemplo, 429
- Distribución gaussiana, *Vea Distribución normal*
- Distribución inicial, 434
- Distribución normal, 732-737  
a partir de los datos, 742-743  
análisis de calificaciones en un examen, 733  
curva normal, 732, 741  
estándar, 733
- Distribuciones de probabilidad, 424
- Dividendo, 18
- División, 3, 17-18  
de fracciones, 22-23  
de un multinomio entre un monomio, 17  
larga, 18
- Divisor, 18
- Dominios, 76, 99, 111  
determinación, 78-79
- Dosis de medicamentos, 194-195
- Dual, 332-334  
aplicación del método simplex al, 332-336  
de un problema de maximización, 334  
de un problema de minimización, 334-335  
definición de, 332  
precio sombra, 331  
relación entre el primal y el, 333  
y el método simplex, 336
- Dualidad, 330-338  
definición de, 330
- Duplicación del dinero, 198, 200

**E**

- Ecuación:  
de aprendizaje, 191  
de demanda, 125, 150  
ambiental, 159  
determinación de la, 126  
de Gompertz, 191  
de grado dos, *Vea Ecuaciones cuadráticas*  
de movimiento, 497

## I-4 Índice

- de oferta, 125, 150  
de oferta ambiental, 159  
de presupuesto, 281  
de primer grado, 120  
de segundo grado. *Vea Ecuaciones cuadráticas*  
lineal general, 120  
graficación de la, 121  
**Ecuaciones**, 27-43  
aplicaciones de, 47-53  
cuadráticas, 37-42  
de rectas, 118-121  
de tendencia, 112-113  
ejemplos de, 27  
equivalentes, 28  
fraccionales, 32-33  
lados de, 27  
lineales, 29-30  
literales, 30-32  
matriciales, 237, 247-248  
radicales, 34  
resolución de, 27  
signo de igualdad (=), 27  
terminología para las, 27  
valor absoluto, 61-62  
variables, 27  
**Ecuaciones cuadráticas**, 37-42  
con dos raíces reales, 40  
definición de, 37  
fórmula cuadrática, 39-41  
raíces de, y las calculadoras grafadoras, 41  
sin solución real, 40-41  
solución por factorización, 37-39  
**Ecuaciones de valor**, 202-204  
comparación de inversiones, 204  
definición de, 202-203  
ejemplo, 203-204  
**Ecuaciones diferenciales**, 702-709  
constante de decaimiento, determinación de, 706-707  
crecimiento de la población, 705-706  
crecimiento exponencial, 704-705  
crecimiento logístico, 709-712  
de los miembros de un club, 711-712  
de un rumor en el campus, 712-713  
curva logística, 710  
de primer orden, 702  
definición de, 702  
función logística de Verhulst-Pearl, 710  
función logística, 710  
forma alternativa de la, 711  
herramienta antigua, estimación de la edad de una, 707  
ley de enfriamiento de Newton, 713-714  
tiempo desde el homicidio (ejemplo), 713-714  
ley del decaimiento exponencial, 705  
modelado de la dispersión de un rumor, 712-713  
separación de variables, 703-704  
solución general, 703  
solución particular, 703  
vida media, determinación, 706-707  
**Ecuaciones exponenciales**, 186-191  
composición del oxígeno, 187  
definición de, 186  
resolución de, 187  
uso de logaritmos para resolver, 187-188  
**Ecuaciones fraccionales**, 32-33  
conjunto vacío, 33  
definición de, 32  
resolución de, 32-33  
**Ecuaciones lineales**, 29-30  
definición de, 29  
resolución de, 29-30  
sistemas de, 138-146  
sistemas de dos variables, 138-144  
sistemas de tres variables, 144-146  
**Ecuaciones literales**, 30-33  
constantes literales, 30  
definición, 30  
impuesto en un problema de facturas, resolución, 31-32  
resolución de, 31  
**Ecuaciones logarítmicas**, 186-191  
composición del oxígeno, 187  
definición, 186  
ecuación de demanda, 188-189  
relación depredador-presa, 189  
resolución de, 189-190  
**Eje**:  
de simetría, 131  
de valores funcionales, 97  
**Eje x**, 747  
simetría con respecto al, 104, 111  
**Eje y**, 747  
simetría con respecto al, 104, 111  
**Eje z**, 747  
**Elasticidad de la demanda**, 539-544, 561  
definición de, 539  
elasticidad e ingreso, 542-543  
puntual, 540, 561  
determinación de, 541-542  
**Elemento vertical del área**, 665  
**Elementos**:  
definición de, 2  
horizontales, 671-673  
métodos de los, 671  
ventaja de los, 672  
**Ensayos**:  
de Bernoulli, 430  
etapas, 369, 386, 413  
**Enteros**, 2  
negativos, 2  
positivos, 2  
**Entrada**:  
pivot, 301  
principal, matrices, 252  
**Equilibrio**, 150-153  
con demanda no lineal, 153  
efecto de los impuestos sobre el, 151-153  
punto de, 150  
**Escalares**, definición de, 235  
**Espacio muestral reducido**, 386  
**Espacios equiprobables**, 369-372, 413  
cartas, 371  
dado bien balanceado, 370  
dado no sesgado, 370  
definición de, 370  
ensayo, 377  
frecuencia relativa, 370  
lanzamiento de una moneda, 371  
mano de póquer con cuatro cartas de un mismo tipo, 371-372  
moneda legal, 370  
selección de un subcomité, 372  
**Espacios muestrales**, 362-364  
caramelos en una bolsa, 363-364  
definición de, 362  
finitos, 362  
lanzamiento de dos dados, 364  
lanzamiento de dos monedas, 363  
mano de póquer, 364  
más primitivos, 362  
resultado, 362  
tres lanzamientos de una moneda, 363  
usuales, 362  
**Esperanza de vida**, 730, 741  
**Estadística y probabilidad**, 345  
**Esto-por-eso**, 446-447  
**Etapas**, 386, 413  
**Eventos**, 364-368, 413  
complemento, 366-367  
definición de, 365  
ejemplos, 365  
imposibles, 365  
independientes, 394-403  
intersección, 366-367  
mutuamente excluyentes, 368  
eventos independientes en comparación con, 401  
ley de la suma para, 373  
propiedades de, 367  
representados mediante un diagrama de Venn, 365  
seguros, 365  
simples, 365, 413  
unión, 366-367  
**Eventos independientes**, 394-403  
cartas, 397-398, 400  
dados, 398  
definición de, 394  
en comparación con eventos mutuamente excluyentes, 401  
géneros de descendencia, 398-399

- prueba de aptitud, 400-401  
tabaquismo y sinusitis, 395-396  
tasas de sobrevivencia, 396
- Excedente de los productores:**  
definición del, 676  
determinación del, 676
- Excedente del consumidor, 675-676**  
definición de, 675  
determinación de, 676
- Experimento binomial, 430, 432, 443
- Exponentes, 9-12**  
definición de, 9  
leyes básicas de los, 10-11  
reglas para los, 163
- Expresiones algebraicas, 1  
agrupación de símbolos, eliminación, 16  
definición de, 14  
división de, 17-18  
división de un multinomio entre un monomio, 17  
división larga, 18  
multiplicación de, 16-17  
multiplicación de multinomios, 17  
símbolos especiales, 16  
operaciones con, 14-19  
resta de, 15-16  
suma de, 15  
términos semejantes, 15
- Expresiones logarítmicas, reescritura de, 182
- Extremos absolutos en un intervalo cerrado, 578-580**  
teorema del valor extremo, 578-579  
valores extremos, 578  
en un intervalo cerrado, determinación, 580
- Extremos derechos, 648  
cálculo de un área con el uso de, 648-649
- Extremos relativos (continuación)**  
bosquejo de curvas, 574-575  
condición necesaria para, 569  
determinación de, 574  
máximo relativo, 569, 769  
mínimo relativo, 569, 769  
naturaleza creciente de una función, 567-568  
criterios para, 568  
naturaleza decreciente de una función, 567-568  
criterios para, 568  
prueba de la primera derivada para, 572-573, 611  
prueba de la segunda derivada para, 587-589, 612  
y la calculadora graficadora, 575-576
- Extremos relativos, 567-578**  
criterios para, 570  
máximos absolutos, 569  
mínimos absolutos, 569
- punto crítico, 570  
valor crítico, 570-571
- Extremos, del intervalo, 56**
- F**
- $f(x) = b^x$ , propiedades de, 165
- Factores, 15, 19**  
cuadráticos irreducibles, 692-693  
repetidos, 693-694  
lineales, 689-691  
repetidos, 691-692
- Factorización, 19-21**  
de trinomios, 20  
definición de, 19  
expresiones factorizadas, 20-21  
factores comunes, 19-20  
reglas para la, 19
- Fermat, Pierre de, 344**
- Flujo de una anualidad continuo, valor presente del, 698**
- Flujos de efectivo, 204**
- Fondo de inversión, 215-216**  
definición de, 215  
ejemplos, 215-216
- Forma de dos puntos, 120**
- Forma exponencial:**  
conversión a la forma logarítmica a partir de la, 176  
conversión de la forma logarítmica a la, 176
- Forma logarítmica:**  
conversión a la forma exponencial a partir de la, 176  
conversión de la forma exponencial a la, 176
- Forma pendiente-intersección, 119-120**  
determinación de la, 120
- Forma punto-pendiente, 118-120**
- Fórmula:**  
de reducción, 699  
del cambio de base, 185  
para la determinación de la renta de un departamento, 50
- Fórmula de Bayes, 403-412**  
árbol de probabilidad de Bayes, 407  
caramelos en una bolsa, 408-409  
control de calidad, 406-407  
definición de, 406
- Fracciones parciales, integración mediante:**  
factores cuadráticos irreducibles, 692-693  
factores cuadráticos irreducibles repetidos, 693-694  
factores lineales, 689-691  
factores lineales repetidos, 691-692
- Fracciones, 21-26**  
división, 22-23  
mínimo común denominador (MCD), 8, 24  
multiplicación de, 22
- operaciones combinadas con, 25  
resta de, 23-25  
simplificación de, 21-22  
suma de, 23-25
- Franja vertical, 665**
- Franjas horizontales, 671**  
para determinar los excedentes del consumidor y el productor, uso de, 676-677
- Función:**  
de consumo, 513  
de costo total, 501  
de costos conjuntos, 756  
de cuatro variables, derivadas parciales de una, 754  
de demanda, 81, 93, 126  
de densidad, 718, 725-729  
acumulada, 728-729  
de la distribución normal, 174  
de probabilidad, *Vea Función de densidad*  
definición de, 726  
exponencial, 728  
normal, definición de, 732  
normal estándar, 733  
uniforme, 727  
de distribución acumulada, 725, 728, 741, 743  
determinación/aplicación, 729  
de distribución de Poisson, 171  
hemocitómetro y células, 171-172  
de ingreso total, 503, 524  
de la tabla de vida, 658, 662  
de posición, 497  
de potencia, 490-492  
de probabilidad, 443  
variables aleatorias, 421  
de producción, 757  
de tres variables, derivadas parciales de una, 753  
de utilidad, 285  
discontinua, 467  
escalonada, 470  
exponencial natural, 170  
identidad, 88  
logística, 710  
de Verhulst-Pearl, 710  
forma alternativa de la, 711  
objetivo, 285
- Funciones, 75-82, *Vea también Funciones especiales***  
cociente de, 86  
cociente de diferencia:  
definición de, 79  
determinación del, 79  
combinaciones de, 86-91, 111  
usando una calculadora graficadora, 90, 111  
composición de, 87-89  
definición de, 88  
con raíz cuadrada, gráfica de, 97

## I-6 Índice

- cuadráticas, 130-138  
definición de, 75, 76  
de oferta, 80  
diferencia, 86  
dominios, 76, 99, 111  
determinación de, 78-79  
especiales, 82-86  
exponencial, 163-174  
función de demanda, 80  
funciones de oferta, 80  
inversas, 91-93  
definición de, 91  
determinación de la inversa de una función, 93  
función uno a uno, 91  
identidades para inversas, 92-93  
inversas de funciones lineales, 92  
inversas usadas para resolver ecuaciones, 93  
restricción del dominio de una función, 93  
logarítmicas, 175-180  
notación de funciones, 77  
producto de, 86  
producto escalar, 87  
programa de suministros, 80  
racionales, 83  
propias, integración de, 640  
raíz de, 97-98  
definición de, 97  
rango de, 76, 99  
suma de, 86  
uno a uno, 91, 111  
valor promedio de, 700-702  
valores del dominio, determinación de, 79  
valores funcionales, 77, 79  
determinación, 79  
determinación con una calculadora graficadora, 81  
valores funcionales y de reemplazo, 77  
variables dependientes, 76  
variables independientes, 76  
Funciones compuestas, 87-89  
asociativas, 89  
definición de, 89  
ejemplos, 88-89  
expresión de una función como un compuesto, 89  
Funciones constantes, 82-83  
derivadas de, 490-491  
Funciones cuadráticas, 130-138  
definición de, 130  
determinación y graficación de una inversa, 134-135  
eje de simetría, 131  
gráfica de, 132  
graficación de, 132-134  
ingreso máximo, 135-136  
parábola, 131-132  
vértice, 131  
Funciones de dos variables, 794  
aplicaciones de, 773, 776  
maximización de la producción, 774  
maximización de la utilidad, 774-775  
maximización de la utilidad de un monopolista, 775-776  
ejemplo, 746-748  
extremos relativos, determinación de, 773  
máximos y mínimos para, 769-778  
prueba de la segunda derivada para, 772  
aplicación de la, 772  
punto silla, 772-773  
puntos críticos, 770-771  
determinación de, 771  
Funciones de probabilidad, 376-377  
de una unión de eventos, 373  
definición de, 376  
Funciones de valor absoluto, 84  
gráfica de, 97  
Funciones de varias variables, 745-750, 794  
índice de temperatura y humedad, 746  
sistema coordenado rectangular de tres dimensiones, 747  
Funciones definidas por partes, 83-84  
gráfica de, 99-100  
Funciones especiales, 82-86, 111  
factoriales, 84  
funciones constantes, 82-83  
funciones de valor absoluto, 84  
funciones definidas por partes, 83-84  
gráfica de, 99-100  
funciones polinomiales, 83  
funciones racionales, 83  
Funciones exponenciales, 163-174  
con  $0 < b < 1$ , graficación de, 165  
con  $b > 1$ , graficación, 164-165  
con base  $e$ , 170  
crecimiento de bacterias, 163-164  
crecimiento de la población, 168-169  
ejemplo, 171  
decaimiento radiactivo, 172-173  
cantidad inicial, 171  
constante de decaimiento, 171  
ejemplo, 171-172  
ley del decaimiento exponencial, 171  
definición de, 163  
derivadas de, 534-539  
 $f(x) = b^x$ , propiedades de las, 165  
gráfica de una función con una base constante, 166  
interés compuesto, 167-168  
natural, 170  
número  $e$ , 169-170  
gráficas de funciones que incluyen el, 170  
resolución de, 178-179  
transformaciones de, 166  
Funciones inversas, 91-93, 111  
definición de, 91  
determinación de la inversa de una función uno a uno, 91  
identidades para inversas, 92-93  
inversas de funciones lineales, 92  
inversas usadas para resolver ecuaciones, 93  
restricción del dominio de una función, 93  
y simetría, 107  
Funciones lineales:  
curva de demanda, 102, 125  
curva de demanda lineal, 125-126  
curva de oferta, 125  
curvas de oferta lineal, 125-126  
definición de, 126  
determinación de, 127-128  
dieta para gallinas, 128-129  
ecuación de demanda, 125  
determinación de la, 126  
ecuación de oferta, 125  
función de demanda, 126  
graficación de, 127  
gráficas de, 127  
niveles de producción, 124-125  
y aplicaciones, 124-130  
Funciones logarítmicas, 175-178  
con  $0 < b < 1$ , gráfica de, 176  
con  $b < 1$ , gráfica de, 176  
derivadas de, 529-533  
logaritmos comunes, 178  
logaritmos naturales, 178  
logaritmos, determinación de, 178  
resolución de, 178-179  
Funciones polinomiales, 83  
continuidad de, 468  
discontinuidades, 468-469

## G

- Gauss, Carl Friedrich, 732  
Grabación de calidad variable, 72-73  
Grado de un polinomio, 17  
Gráficas, 747  
de la función de valor absoluto, 97  
de la función raíz cuadrada, 97  
e intersecciones, 96-97  
en coordenadas rectangulares, 93-103  
prueba de la recta horizontal, 100, 109-111  
prueba de la recta vertical, 97, 100, 111  
reflexiones, 108-110  
simetría, 103-108  
translaciones, 108-110

**H**

Herramienta antigua, estimación de la edad de una, 707  
Histograma de probabilidad, 422

**I**

Igualdad de matrices, 229  
Impuesto federal al ingreso de Estados Unidos, tabuladores del impuesto, 114-115  
Indicadores, 300  
Índice:  
    de espacio, 760  
    de sumatoria, 66  
    radicales, 10  
Infinito:  
    límites al, 460-464  
        ejemplo, 461-462  
    para funciones racionales, 462-463  
    para una función polinomial, 463  
Ingreso:  
    de equilibrio, 154  
    marginal, 503, 524  
        ejemplo, 512  
    total, 48  
Integración, 580, 618-683  
    aplicación de la, 643  
    aproximada, 659-664  
    área, 664-668  
        entre curvas, 668-675  
    cálculo integral, teorema fundamental del, 651-659  
    con condiciones iniciales, 629-633  
        definición de, 629  
        ingreso y educación, 631  
        problema, 630  
        problema que incluye  $y^n$ , 630-631  
    costo marginal, determinación del  
        costo a partir del, 632  
    crecimiento logístico, 709-714  
    de funciones exponenciales naturales, 636-637  
    de funciones logarítmicas, 637  
    de una función sobre un intervalo, 649  
    diferenciales, 619-623  
    división previa antes de la, 640-642  
    ecuaciones diferenciales, 702-709  
    excedentes de los consumidores y los productores, 675-678  
    fórmulas, 633-640  
    fórmulas básicas, 625, 638  
    función de demanda, determinación a partir del ingreso marginal, 631-632  
    función logística, 710  
        forma alternativa de la, 711  
    integral definida, 645-651  
    integral indefinida, 623-629  
    integrales impropias, 716-719  
    mediante fracciones parciales, 689-695

factores cuadráticos irreducibles, 692-693  
factores cuadráticos irreducibles repetidos, 693-694  
factores lineales, 689-691  
factores lineales repetidos, 691-692  
integral que no necesita fracciones parciales, 694  
mediante tablas, 695-700  
    determinación de una integral definida  $b$ , 697-698  
    ejemplos, 695-697  
    integración aplicada a anualidades, 698-699  
métodos y aplicaciones, 684-723  
por partes, 685-688  
    aplicación doble, 687-688  
    donde  $u$  es el integrando completo, 687  
    ejemplos, 686-687  
    forma de integración básica, 687  
regla de la potencia para, 633-634  
técnicas de, 640-645  
variable de, 624, 648  
y la calculadora graficadora, 650  
Integración aproximada, 659-664  
    demografía, 662-663  
    regla de Simpson, 661-663  
    regla del trapecio, 659-661  
Integral definida, 645-651, 653  
    definición, 648  
    evaluación, 649  
    integrando, 648  
    límite inferior, 648  
    límite superior, 648  
    límites de integración, 648  
    variable de integración, 648  
    y calculadora graficadora, 657  
Integral(es) indefinida(s), 623-629, 653  
    constante de integración, 624  
    de una constante por una función, 626  
    de una constante y una potencia de  $x$ , 625-626  
    de una suma y una diferencia, 627  
    de una suma, 627  
    definición de, 624  
    determinación de, 625-627  
    integrando, 624  
    signo de integral, 624  
    uso de la manipulación algebraica para encontrar, 628  
    variable de integración, 624  
Integrales dobles, 790-793  
    Evaluación, 792-793  
Integrales impropias, 716-719  
    convergentes, 716  
    definición de, 716  
    divergentes, 716  
    ejemplos, 716-718  
    función de densidad, 718

Integrales múltiples, 790-794  
    integrales dobles, 790-793  
    integrales triples, 793  
Integrales triples, 793  
Integrando, 648  
Interés:  
    en el  $k$ -ésimo pago, fórmula, 219  
    total pagado, fórmula, 219  
Interés compuesto, 167-168, 197-201  
    capital, 167, 197  
    comparación de tasas de interés, 200  
    continuamente, 205-208  
    definición de, 167, 197  
    duplicación de dinero, 198, 200  
    ejemplo, 167-168  
    ejemplos, 197-198  
    fórmula, 197  
    monto acumulado, 167  
    monto compuesto, 167  
    periodos de interés, 168  
    tasa anual, 197  
    tasa efectiva, 199-200  
    tasa nominal, 168, 197  
    tasa periódica, 168, 197-198  
    tasa por periodo, 197-198  
    tasa porcentual anual (TPA), 168, 197  
Intersección, 366  
Intersecciones, 595-596, 748  
Intervalo:  
    abierto, 56  
    cerrado, 56  
    de evocación, 538  
    definición, 56  
Inversas, 263-270  
    definición de, 264  
    determinación de:  
        ejemplo, 266-267  
        método para la, 266  
    determinación de la invertibilidad de una matriz, 266  
    ejemplo, 264-265  
    matriz de coeficientes no invertible, 268-269  
    para resolver un sistema, uso de, 265-266, 268-269  
        y la calculadora graficadora, 269  
    y la calculadora graficadora, 267

**L**

Laffer, Arthur, 566  
Lagrange, Joseph-Louis, 778pp  
Latencia, 538  
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 75  
Leontief, W. W., 232, 271-274  
Ley:  
    de enfriamiento de Newton, 713-714  
    de la probabilidad compuesta, Vea  
        Ley general de la multiplicación  
        (ley de la probabilidad compuesta)  
    de la suma, para eventos mutuamente excluyentes, 373

## I-8 Índice

- de Poiseuille, 681  
del decaimiento exponencial, 194, 705  
Ley general del producto (ley de la probabilidad compuesta), 385-386, 413  
LIFE (juego), 418  
Límite:  
inferior, 648  
superior, 648  
Límites, 449-466  
al infinito, 460-464  
ejemplo, 461-462  
para funciones racionales, 462-463  
para una función polinomial, 463  
definición de, 450  
de la sumatoria, 66  
determinación de, 455, 460  
estimación a partir de una gráfica, 450-451  
forma 0/0, 455-456  
infinitos, 458-460  
límite especial, 456  
no existente, 451  
para una función definida por partes, 464  
por un lado, 458  
propiedades de los, 452-455  
aplicación de las, 452-454  
límite de una función polinomial, 453  
y la calculadora graficadora, 452  
y manipulación algebraica, 454-456  
Líneas rectas, formas de ecuaciones de, 120  
Logaritmos:  
combinación de, 183  
comunes, 178, 192  
determinación de, 181-182  
escritura en términos de logaritmos más simples, 182-183  
expresiones logarítmicas, simplificación, 183-184  
fórmula para el cambio de base, 185  
logaritmo con base 5, evaluación, 184-185  
naturales, 178  
propiedades de los, 181-186
- M**
- Magnitud de respuesta, 193  
Manipulación:  
algebraica, 109, 131, 476, 628  
y límites, 454-456  
geométrica, 109  
Margen de utilidad, 53  
Markov, Andrei, 433pp  
Matrices:  
distintas de cero, 252  
equivalentes, 251  
especiales, 230-231  
identidad, 245-246, 275  
definición de, 245  
reducidas, 252-253, 275  
Matriz (matrices):  
cero, 230, 252, 275  
de  $m \times n$ , 230  
construcción de, 229  
de coeficientes, 247, 250-251, 272  
aumentada, 250-251, 254-255, 259-260, 275, 299, 316, 318, 321, 323, 326-327  
de demanda final, 272  
de entrada-salida, 232  
de Leontief, 272  
de salida, 272  
definición de, 226-227, 275  
diagonal, 231  
ecuación de matrices, 237  
entrada principal, 252  
entradas, 227  
equivalentes, 251  
especial, 230-231  
igualdad de matrices, 229  
inversa, 264  
matriz  $m \times n$  (matriz de tamaño  $m \times n$ ), definición de, 228  
multiplicación de, 238-249  
multiplicación escalar, 234-236, 275  
operaciones elementales con renglones, 251-252  
operaciones, y calculadoras graficadoras, 237  
potencias de, 247  
reducción de, 253-254  
reducidas, 252-253, 275  
renglón cero, 252  
renglón distinto de cero, 252  
resolución de sistemas al reducir, 249-257, 259-263  
resta de matrices, 236-237  
suma de matrices, 232, 234, 275  
tamaño de, 228  
transpuesta de una, 229  
triangular, 231  
inferior, 231  
superior, 232  
vector columna, 228  
vector renglón, 228  
y las calculadoras graficadoras, 230, 247  
Matriz cuadrada, 230-231, 275  
diagonal principal, 230-231  
matriz triangular, 231  
matriz diagonal, 231, 275  
matriz triangular inferior, 231  
matriz triangular superior, 231  
Matriz de transición, 434, 443  
definición de, 434  
regular, 439  
Maximización de la utilidad, 604-605  
Máximo relativo, 569, 769  
Máximos y mínimos, 595, 597, 599-611  
guía para resolver problemas de aplicación de máximos y mínimos, 601  
maximización aplicada a las enzimas, 602  
maximización de la utilidad, 604-605  
maximización del ingreso, 601  
de una compañía de cable, 603-604  
maximización del número de beneficiarios de servicios de salud, 604  
minimización del costo:  
de una cerca, 599-600  
promedio, 601-602  
para funciones de dos variables, 769-778  
punto crítico, 770-771  
tamaño económico de lote, 602-603  
Media, 171, 443, 730, 741  
ejemplo, 425-426  
Medio plano abierto, 281  
Método de Newton, 553-557, 561  
aproximación de una raíz mediante el, 554-555  
definición del, 553  
fórmula del, 554  
y la calculadora graficadora, 556  
Método de reducción, 249  
familia de soluciones con dos parámetros, 259-260  
forma paramétrica de una solución, 256-257  
generalización para sistemas que consisten en  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas, 254  
resolución de un sistema mediante el, 254-256  
Método simplex, 296-309  
columna pivote, 301  
definición de, 296  
ejemplos, 304-307  
entrada pivote, 301  
indicadores, 300  
para un problema de programación lineal estándar, esquema, 302-303  
renglón objetivo, 299  
renglón pivote, 301  
solución básica factible (SBF), 298-299, 302, 314  
tabla simplex inicial, 299  
variable de holgura, 298  
variable entrante, 299  
variable saliente, 300-301  
variables básicas, 298  
variables de decisión (o estructurales), 298  
variables no básicas, 298  
Minimización, 325-328  
definición de, 325

ejemplo, 325-326  
reducción de emisiones de polvo, 326-328  
Mínimo común denominador (MCD), 8, 24  
Mínimo relativo, 569, 769  
Modelado, 47  
    matemático, 70  
Modelo de enfriamiento, análisis de datos para un, 798-799  
Monomios, 15  
    división de un multinomio entre, 17  
Monto:  
    acumulado (monto compuesto), 167, 197  
    compuesto, 197  
    de una anualidad, 214  
Multinomios, 15  
    división entre un monomio, 17  
    multiplicación de, 17  
Multiplicación:  
    de expresiones algebraicas, 16-17  
        multiplicación de multinomios, 17  
        símbolos especiales, 16  
    de fracciones, 22  
    de matrices, 238-249  
    escalar, 234-236, 275  
    propiedades asociativas de la, 3  
    propiedades commutativas de la, 3  
    propiedades de cerradura de la, 3  
Multiplicación de matrices, 238-249  
    definición de, 239  
materias primas y costo, 243-245  
matrices identidad, 245-246, 275  
operaciones con matrices que incluyen 1 y 0, 246  
producto de matrices, 240-241  
propiedad asociativa, 242-243  
propiedad distributiva, 243  
propiedades de, 242  
tamaños de matrices y de su producto, 240  
transpuesta de un producto, 245-246  
utilidad para una economía, 242  
vector de costos, 242  
    y la calculadora graficadora, 241  
Multiplicación escalar, 234-236, 275  
    definición de, 235  
    ejemplo, 235  
    múltiplo escalar, definición de, 235  
    propiedades de la, 236  
Multiplicadores de Lagrange, 778-785  
    combinación de entradas de costo mínimo, 782-783  
    definición de, 778-779  
    método de los, 780-781  
        con dos restricciones, 783  
    minimización de costos, 781-782  
    varias restricciones, 783

**N**

Negativo, 4  
 $n$ -ésima raíz principal, 9  
Nota promisoria, 205  
Notación:  
    de función, 77  
    de intervalo, 56  
    de Leibniz, 484, 486  
    de sumatoria, 65-69  
    funcional, 77  
Notación de sumatoria, 65-69  
    aplicación de propiedades, 68-69  
    definición de, 66  
    escritura de una suma usando la, 67-68  
    evaluación de sumas, 66  
    índice de sumatoria, 66  
    límites de la sumatoria, 66  
Numerador, 486  
Números:  
    decimales sin fin repetitivos, 2  
    irracionales, 2  
    racionales, 2  
Números reales:  
    conjuntos de, 2-3  
    definición de los, 2  
    origen de los, 2  
    propiedades de los, 3-8  
        aplicación de las, 5-6  
        con ejemplos, 6-7

**O**

Operaciones:  
    con renglones elementales, 251-252  
        y la calculadora graficadora, 254  
    elementales, 250  
Origen, 2, 747  
    simetría con respecto al, 104, 111

**P**

Pago periódico:  
    de una anualidad, 213  
    fórmula del, 219  
Par ordenado, 94-95, 745  
Parábola, 131-132  
Partes, integración por, 685-688  
    aplicación doble, 687-688  
    donde  $u$  es el integrando completo, 687  
    ejemplos, 686-687  
    forma de integración básica, 687  
Partición, 406  
Pascal, Blaise, 344  
Pasivos circulantes, 59  
Pendiente, 116-117  
    de una curva, 482, 523  
    relación precio-cantidad, 118  
Período  
    de duplicación, 721  
    de pago, anualidades, 211

Periodos de interés, 168  
Permutaciones, 347-349  
    con objetos repetidos, 356-358  
        disposición de letras con y sin repetición, 358  
    nombre de un bufete jurídico, 358  
cuestionario político, 349  
nombre de un bufete jurídico, 349  
permutación de cinco letras tomadas tres a la vez, 347-348  
permutación de  $n$  objetos tomados  $r$  a la vez, 347  
puestos en un club, 348-349  
 $p$ -ésima potencia de A, 246  
Planes de pago del teléfono celular, 160, 161  
Plano:  
    coordenada rectangular, 94  
    graficación de un, 749  
    medio, 281  
    medio cerrado, 281  
Plano  $x,y$ , 94, 748  
Plano  $x,z$ , 748  
Plano  $y,z$ , 748  
Plazo, anualidades, 208, 211  
Poiseuille, Jean, 681  
Polinomios, 15  
Posibilidades, 378-379  
    de obtener 10 en un examen, 378-379  
    probabilidad de ganar un premio, 379  
Precio:  
    de entrega, 682-683  
    de equilibrio, 150  
    sombra, 331  
Préstamos, amortización de, 218-222  
Primal, 332-333  
    definición de, 332  
    relación entre el dual y el, 333  
Primer octante, 748  
Principio básico de conteo, 345-346, 413  
Principio fundamental de las fracciones, 8  
Probabilidad, 345-347  
    árbol de dos niveles, 345  
    cálculo de, 344  
    condicional, 381-387, 413, 433  
    definición de, 344-345  
    diagrama de árbol, 345  
    disposición de letras, 347  
    empírica, 377-378  
    espacios equiprobables, 369-372, 413  
    funciones de probabilidad, 376-377  
    lanzamientos de dados y lanzamiento de un dado, 346  
    no condicional, 386  
    posibilidades, 378-379  
        de obtener 10 en un examen, 378-379  
        probabilidad de ganar un premio, 379  
    posterior, 405

## I-10 Índice

- principio básico de conteo, 345-346  
propiedades de, 372-376  
    control de calidad, 374  
    juego interrumpido, 375-376  
    los dados, 374-376  
respuesta a un examen, 347  
rutas de viaje, 346  
variables aleatorias, 421-428  
y autómatas celulares, 418-419  
y estadísticas, 345  
Probabilidad condicional, 381-387, 413, 433  
    caramelos en una bolsa, 382-383  
    control de calidad, 384-385  
    definición de, 384, 386  
    diagrama de Venn para, 382  
    espacio muestral reducido (subespacio), 381-382  
fórmula de la, 382  
géneros de descendencia, 385-386  
ley general de la multiplicación (ley de la probabilidad compuesta), 385-386, 413  
publicidad, 386  
sondeo, 383-384  
Probabilidad empírica, 377-378  
sondeo de opinión, 377-378  
Probabilidades:  
    a priori, 402  
    no condicionales, 386  
    teóricas, 377  
Problema artificial, 315  
Problemas de programación lineal estándar, 302-303, 314  
    forma de, 296  
    formulación del problema en notación matricial, 297  
Procesos estocásticos, 386-391  
    árbol de probabilidad, 386  
    caramelos en una bolsa, 389-391  
    cartas, 388  
    cartas y árbol de probabilidad, 386  
    chips de computadora defectuosos, 388  
    definición de, 386  
    ensayos (etapas), 386, 413  
    experimento compuesto, 386  
Producción de autos, matrices inversas, 270  
Productividad marginal, 757  
Producto del ingreso marginal, 519-521, 524  
    ejemplo, 520  
    y la calculadora graficadora, 521  
Producto escalar, 87  
Productos:  
    competitivos, 758-759  
    complementarios, 758-759  
Programa:  
    de demanda, 82, 102  
    de suministros, 102  
Programación lineal, 280-343  
    columna pivote, 301  
    condiciones de no negatividad, 286, 302, 315, 333  
    definición de, 280, 296  
    degeneración, 309-310  
    desigualdades lineales de dos variables, 281-284  
    dual, 332-334  
        definición de, 332  
        relación entre el primal y el, 333  
    dualidad, 330-338  
        definición de, 330  
    ejemplos, 304-307  
    entrada pivote, 301  
    forma de, 296  
    formulación del problema en notación matricial, 297  
    función:  
        lineal en  $x$  y  $y$ , forma de, 284  
        objetivo, 285  
    indicadores, 300  
    método simplex, 296-309  
        solución factible básica (SBF), 298-299, 302, 314  
    minimización, 325-328  
    para un problema de programación lineal estándar, esquema para, 302-303  
    primal, 332-333  
        definición de, 332  
    problema de programación lineal:  
        definición de, 285  
        resolución de, 287-288  
    problemas de programación lineal estándar, 314  
    recta de isocosto, 130  
    recta de isoutilidad, 286-287  
        punto en esquina, 287  
    región factible, 286  
        acotada, 287  
    renglón objetivo, 299  
    restricciones, 280, 284-285  
    solución óptima, 285  
    soluciones factibles (puntos factibles), 285-286  
    soluciones no acotadas (indefinidas), 310-311  
    soluciones óptimas múltiples, 294-295, 311-313  
        ejemplo, 312-313  
    tabla simplex inicial, 299  
    variable:  
        de holgura, 298  
        entrante, 299  
        saliente, 300-301  
variables artificiales, 314-324  
    definición de, 315  
    ejemplos, 318-319  
    función objetivo artificial, 315  
    regiones factibles vacías, 322-323  
restrictiones de igualdad, 319-322  
variables básicas, 298  
variables de decisión (o estructurales), 298  
variables no básicas, 298  
y calculadoras graficadoras, 291  
Propensión marginal:  
    al ahorro, 513, 524  
    al consumo, 513, 524, 526-527  
    determinación de una función de consumo, 643  
Propiedad:  
    distributiva, 3, 16, 243  
    transitiva de la igualdad, 3  
Propiedades:  
    asociativas de la suma y la multiplicación, 3  
    comunitativas de la suma y la multiplicación, 3  
    de cerradura de la suma y la multiplicación, 3  
    de identidad, 3  
    de la inversa, 3  
Prueba:  
    de la primera derivada para extremos relativos, 572-573, 611  
    de la recta horizontal, 111  
    de la recta vertical, 97, 100, 111  
    de la segunda derivada, para extremos relativos, 587-589, 612  
Punto:  
    crítico, 770, 795  
    de discontinuidad, 467  
    de equilibrio, 150, 675  
    de inflexión, 582-583, 597  
        cambio en la concavidad sin punto de inflexión, 583-584  
        candidato para, 582  
        definición de, 582  
        y concavidad, 583  
        y la calculadora graficadora, 585  
    de una inflexión, *Vea Punto de inflexión*  
    que no está lleno, 99  
silla, 772-773  
Puntos, 730  
    coordenadas de, 94  
    definición de, 747  
    en el espacio, 747  
    muestrales, 362, 413  
Puntos de equilibrio, 153-156  
    definición, 154  
    ejemplo, 154-155

## R

- Racionalización:  
    de denominadores, 11, 23  
    del denominador, 23  
    uso del término, 11

- R**
- Radicales, 10, 12-13
    - definición de, 10
    - leyes básicas de los, 10-11
  - Radicando, 10
  - Raíces:
    - cuadradas, 9
    - cúbicas, 9
  - Rango, funciones, 76, 99
  - Razón:
    - común, 209-210, 214
    - de circulante, 59-60
    - de la prueba ácida (razón rápida), 61
    - de operación, 71
    - rápida, 61
  - Razón de cambio:
    - aplicaciones de la, a la economía, 501-503
    - de las inscripciones, 501
    - del precio con respecto a la cantidad, 500
    - del volumen, 500-501
    - determinación de la, 500
    - instantánea, 498
    - porcentual, 503-504
    - promedio, 497
    - relativa, 503-504
      - ejemplo de, 504
    - uso del término, 499
  - Recíproco, 3, 4
  - Recta:
    - de isoutilidad, 286-287
    - puntos en esquina, 287
    - y la región factible, 286
    - de los números reales, 2-3
    - de mínimos cuadrados, y la calculadora graficadora, 789
    - de presupuesto, 281
    - secante, 481-483
    - tangente, 481-483
      - determinación de la pendiente de una, 483
      - determinación de una ecuación de, 485, 495
      - pendiente de una, 499
  - Rectas, 116-161
    - ecuaciones de, 118-121
      - conversión de formas de, 121
    - horizontales, ecuaciones de, 120
    - paralelas, 122-123
    - pendiente, 116-117
      - relación precio-cantidad, 118
    - perpendiculares, 122-123
    - verticales, ecuaciones de, 120
  - Rectas de regresión, 785-790
    - coeficientes de regresión lineal, 787
    - diagrama de dispersión, 785-786
    - ecuaciones normales, 787
    - método de mínimos cuadrados, 785-786
    - números índice, 788
  - periodo base, 788
  - recta de mínimos cuadrados, 787
  - recta de regresión lineal, 787
    - determinación de, 788-789
    - series de tiempo, 788
  - Reemplazo, y valores funcionales, 77
  - Reflexión, y reducción, 110
  - Región factible, 286
    - acotada, 287
    - no acotada (indefinida), 287
      - ejemplo, 288-289
    - no vacía, 287
    - vacía, 288
  - Regiones factibles vacías, 322-323
  - Regla de la cadena, 515-517, 766-769
    - definición de, 766
    - ejemplos, 767-768
    - razón de cambio del costo, 766-767
  - Regla:
    - de la suma o la resta, 493
    - de Simpson, 661-663
    - del factor constante, 492
    - del trapecio, 659-661
  - Regla de la potencia para integración, 633-635
    - ajuste para  $du$ , 634-635
    - aplicación de la, 634, 635
  - Regla de la potencia, 517-519
    - diferenciación de un producto de potencias, 519
    - diferenciación de una potencia de un cociente, 519
    - uso de la, 518-519
  - Regla del cociente, 510-512
    - aplicación de la, 510-511
    - diferenciación de cocientes sin usar la, 511-512
    - reescritura antes de la diferenciación, 511
  - Regla del producto, 506-510
    - aplicación de la, 507-508
    - diferenciación de un producto de tres factores, 508-509
    - para encontrar la pendiente, uso de la, 509
  - Renglón:
    - cero, matrices, 252
    - objetivo, 299
    - pivote, 301
  - Requerimientos de insulina, como un proceso lineal, 278-279
  - Residuo, 18
  - Residuos, definición de, 45
  - Resta, 3, 15-16
    - de fracciones, 23-25
    - de matrices, 236-237
  - Restricciones, 280, 284-285
    - de igualdad, 319-322
      - ejemplo, 321-322

**S**

- Saldo:
- de capital al comienzo del  $k$ -ésimo periodo, fórmula para el, 219
  - decreciente doble, 193
- Sigma ( $\Sigma$ ), 66
- Signo de radical, 10
- Símbolo:
  - de infinito ( $\infty$ ), 475
  - de unión, 63
  - $r!$
- Símbolos de desigualdad ( $<$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $>$ ), 54, 70
- Simetría, 596
  - definición de, 103
  - eje de, 131
  - eje x, simetría con respecto al, 104, 111
  - eje y, simetría con respecto al, 103-104, 111
  - graficación con intersecciones y, 104-106
  - origen, simetría con respecto al, 104, 111
  - pruebas de, 104
  - y funciones inversas, 107
- Sistema, 433
  - coordenado en dos dimensiones, 747
  - de coordenadas rectangulares:
    - correspondencia uno a uno, 94
    - cuadrantes, 94-95
    - definición de, 94
    - en tres dimensiones, 747
    - gráficas en el, 94-103
    - intersecciones x, definición de, 95
    - intersecciones y, definición de, 95
    - origen del, 94
    - puntos, coordenadas de, 94
  - de ecuaciones lineales, 283-284
  - homogéneo:
    - definición de, 260
    - ejemplo, 260-261
    - número de soluciones de un, 262
    - resolución de un, 262
    - solución trivial, 261
    - teorema/corolario, 261
  - no homogéneo:
    - definición de, 260
    - ejemplo de, 260-261
- Sistemas de ecuaciones:
  - aplicaciones de, 150-157
  - equilibrio, 150-153
  - puntos de equilibrio, 153-156
- Sistemas de ecuaciones lineales, 138-146
  - sistemas de dos variables, 138-144
  - eliminación por suma, 140-141
  - eliminación por sustitución, 141
  - mezcla, 143
  - sistema lineal con un número infinito de soluciones, 142

## I-12 Índice

- sistemas de tres variables,  
144-146  
ecuación lineal general en las tres  
variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ , 144  
familia de soluciones con dos pará-  
metros, 145-146  
familia de soluciones con un pará-  
metro, 145-146  
resolución de, 144
- Sistemas de ecuaciones lineales con dos  
variables, 138-144  
eliminación por suma, 140-141  
eliminación por sustitución, 141  
mezcla, 143  
sistema lineal con un número infinito  
de soluciones, 142
- Sistemas de tres variables de ecuaciones  
lineales, 144-146  
ecuación lineal general en tres varia-  
bles,  $x$ ,  $y$  y  $z$ , 144  
familia de soluciones con dos paráme-  
tros, 146  
familia de soluciones con un paráme-  
tro, 145-146  
resolución de, 144
- Sistemas no lineales, 148-150  
definición de, 148  
resolución de, 148-149
- Solución:  
básica factible (SBF), 298-299, 302,  
314  
ciclo, 309-310  
general, 703  
óptima, 285  
trivial, sistema homogéneo,  
261
- Soluciones:  
factibles (puntos factibles),  
285-286  
no acotadas, 310-311  
óptimas múltiples, 294-295, 311-313  
definición de, 294  
ejemplo, 312-313
- Subconjuntos, 354-355
- Substitutos, Vea Productos competitivos
- Suma:  
de expresiones algebraicas, 15  
de fracciones, 23-25  
de series geométricas, 211  
de matrices, 232-234, 275  
definición, 233  
ejemplos, 233  
propiedades de, 233-234  
vectores de demanda para una  
economía, 234  
eliminación por, sistemas de dos  
variables, 140-141  
propiedades asociativas de la, 3  
propiedades de cerradura de la, 3
- Superficie, bosquejo de, 749-750
- Sustitución, eliminación por, 141
- T**
- Tabla de probabilidad, 422  
Tabla simplex inicial, 299  
Tangente, 481  
Tasa:  
anual, 197  
de cambio porcentual, 503-504  
ejemplo, 504  
de descuento, 205  
efectiva, 199-200  
bajo interés continuo, 207  
nominal, 168, 197, 224pp  
periódica, 168, 197-198  
por período, 197-198  
porcentual anual (TPA), 168, 197
- Tendencia central, 424
- Teorema:  
binomial, 428-429  
del valor extremo, 578-579
- Teorema fundamental del cálculo inte-  
gral, 651-659  
aplicación del, 653-654  
integración definida, determinación  
de un cambio en los valores fun-  
cionales mediante la, 656
- integral definida:  
de una derivada, 656  
determinación e interpretación de  
la, 656  
evaluación de una, 655  
propiedades de la, 654-655  
uso del, 655
- Teoría de juegos, cadenas de Markov en  
la, 446-447
- Terapias de medicamentos y radiación,  
342-343
- Terminación de un cuadrado, 131
- Términos semejantes, 15
- Translación horizontal, 109-110
- Trazado de curvas, 566-617  
asíntotas, 589-599  
concavidad, 580-587, 596-598  
ejemplo, 596-597  
extremos absolutos en un intervalo  
cerrado, 578-580  
extremos relativos, 567-578  
guía para resolver problemas de  
aplicación de máximos y míni-  
mos, 601
- intersecciones, 595, 596
- maximización:  
aplicada a enzimas, 602  
de ingresos, 601  
de la utilidad, 604-605  
de los ingresos de una compañía de  
cable, 603-604  
del número de beneficiarios de  
servicios de salud, 604  
máximos y mínimos, 595, 597, 599-611  
tamaño económico de lote, 602-603
- minimización:  
del costo de una cerca, 599-600  
del costo promedio, 601-602  
prueba de la segunda derivada, 587-  
589, 612  
simetría, 596
- Trinomios, 15  
factorización, 20
- U**
- Unidad imaginaria, 41
- Unidades estándar, 733-734
- Unión, 63, 366  
de eventos, probabilidad de, 373
- Utilidad, 48  
marginal del ingreso, 785
- V**
- Valor absoluto, 61-65, 84  
definición algebraica del, 25  
definición de, 61, 62  
desigualdades, 62-63  
resolución, 63
- ecuaciones, 61-62  
resolución de, 62  
propiedades del, 64
- Valor futuro, 201  
de una anualidad, 214  
de una anualidad anticipada, 215
- Valor presente, 201-205  
anualidades, 211-214  
bajo interés continuo, 207  
definición de, 202  
de una anualidad:  
anticipada, 213  
definición de, 211  
fórmula para el, 212
- ecuaciones de valor, 202-204  
comparación de inversiones, 204  
definición de, 202-203  
ejemplo, 203-204
- ejemplo, 202  
neto, 204  
pago único a un fondo de inversión, 202
- Valor promedio de una función, 700-702  
definición de, 701  
ejemplos, 701-702
- Valores:  
extremos, 578  
en un intervalo cerrado, determi-  
nación de, 580  
funcionales, 77
- Variable:  
de holgura, 298  
entrante, 299  
saliente, 300-301
- Variable aleatoria  
binomial, 741  
definición de, 430  
normal, definición de, 732  
estándar, 733, 741

- Variable normal estándar  $Z$ :  
 ejemplo de los salarios de empleados, 736  
 probabilidades para, 734-735  
 transformación a la, 735-736
- Variables, 27  
 básicas, en programación lineal, 298  
 de decisión, 298  
 dependientes, 76  
 independientes, 76  
 intermedias, 766  
 no básicas, 298  
 relacionadas en forma lineal, 120
- Variables aleatorias, 421-428  
 definición de, 725  
 discretas, 421  
 distribución de, 421  
 ejemplo, 421-422  
 ejemplo, 421  
 función de probabilidad, 421
- y valor esperado, 423  
 ganancia esperada, 423-425
- Variables aleatorias continuas, 421, 724-743  
 distribuciones normales, 732-737  
 funciones de densidad, 725-729  
 acumuladas, 728-729  
 definición de, 726, 740  
 exponenciales, 728  
 uniformes, 727  
 variable aleatoria normal estándar, 733, 741
- Variables artificiales, 314-324  
 definición de, 315  
 ejemplos, 318-319  
 función objetivo artificial, 315  
 regiones factibles vacías, 322-323  
 restricciones de igualdad, 319-322  
 ejemplo, 321-322
- Varianza, 424, 730, 741  
 ejemplo, 425-426
- Vector  
 columna, 228  
 de estado, 434, 443  
 renglón, 228
- Vectores de estado estable, 437-440  
 definición de, 438  
 ejemplo, 439-440
- Velocidad, 498  
 determinación de la, 498-499  
 instantánea, 498  
 promedio, 497  
 determinación de la, 498-499
- Vértice, 131
- Vida media, 192  
 determinación de la, 179, 706-707  
 y decaimiento radiactivo, 179
- Virus Melissa, 162
- Z**
- Zenón de Elea, 448

## Relaciones de negocios

$$\text{Interés} = (\text{capital})(\text{tasa})(\text{tiempo})$$

$$\text{Costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}$$

$$\text{Costo promedio por unidad} = \frac{\text{costo total}}{\text{cantidad}}$$

$$\text{Ingreso total} = (\text{precio unitario})(\text{número de unidades vendidas})$$

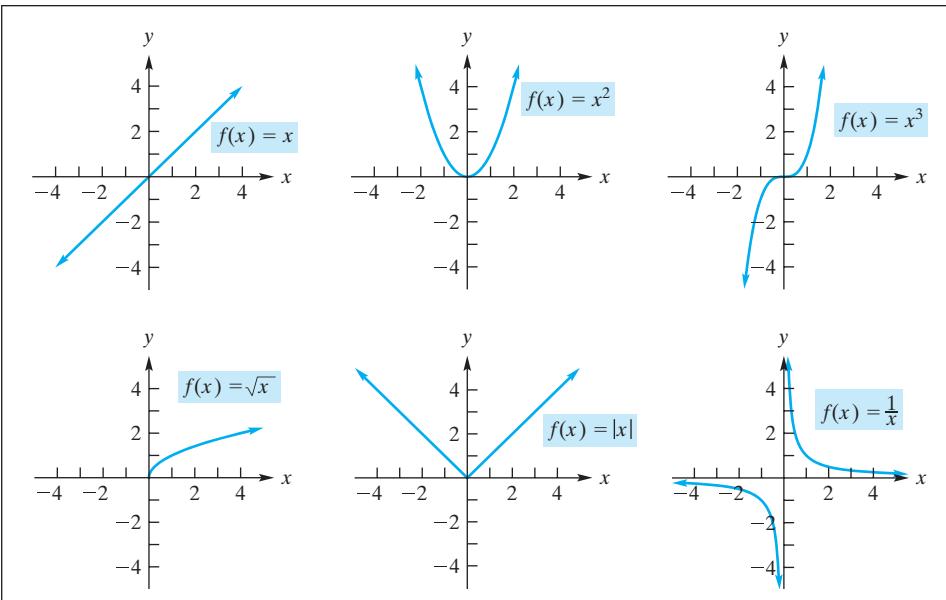
$$\text{Utilidad} = \text{Ingreso total} - \text{costo total}$$

## Fórmulas para anualidades ordinarias

$$A = R \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} = Ra_{\bar{n}|r} \quad (\text{valor presente})$$

$$S = R \frac{(1 + r)^n - 1}{r} = Rs_{\bar{n}|r} \quad (\text{valor futuro})$$

## Gráficas de funciones elementales



### Fórmulas de diferenciación

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$	$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$	$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$	$\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{(\ln b)u} \cdot \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$	$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u (\ln a) \frac{du}{dx}$

### Fórmulas de integración

Se supone que  $u$  es una función diferenciable de  $x$ .

$\int k dx = kx + C$	$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq 1$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u  + C, \quad u \neq 0$



Este reconocido libro de Haeussler proporciona los fundamentos matemáticos para aquellos estudiantes que cursen carreras relacionadas con negocios, economía y ciencias sociales.

El texto inicia con temas de ecuaciones, funciones, álgebra de matrices, programación lineal, matemáticas financieras y probabilidad; después avanza a través del cálculo, tanto de una como de varias variables, incluyendo variables aleatorias continuas.

Los autores incorporan demostraciones que ilustran cómo se realizaron los cálculos correspondientes a los problemas aplicados. Las condiciones y comparaciones se describen de manera detallada. Por otra parte, se ha conservado la sección “Ahora resuelva el problema ...”, sumamente apreciada por profesores y alumnos.

El libro contiene más de 850 ejemplos, casi 500 diagramas, más de 5000 ejercicios, y una gran cantidad de problemas del mundo cotidiano con datos reales, así como material opcional para trabajar por medio de una calculadora graficadora.

La página Web de este libro  
**[www.pearsoneducacion.net/haeussler](http://www.pearsoneducacion.net/haeussler)**  
contiene material adicional para el instructor.