Лабораторная работа №5

Модель хищник-жертва

Алади Принц Чисом

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Исследовать математическую модель хищник-жертва.

2 Задание

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.45x(t) + 0.046x(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.47y(t) - 0.048x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 7, y_0 = 12$. Найдите стационарное состояние системы.

3 Теоретическое введение

Модель “Хищник-жертва” основывается на следующих предположениях [**Volterra:bash?**]:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)

2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса (экспоненциальный рост с постоянным темпом), при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает

3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается

5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников. Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Найдём стационарное состояние системы. Для этого приравняем её правые части к нулю.

$$\begin{cases} ax(t) - bx(t)y(t) = 0 \\ -cy(t) + dx(t)y(t) = 0 \end{cases}$$

Из полученной системы получаем, что стационарное состояние системы будет в точке $x_0 = c/d, y_0 = a/b$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки.

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Поиск стационарного состояния системы

Найдём стационарное состояние системы. Для этого приравняем её правые части к нулю.

$$\begin{cases} -0.45x(t) + 0.046x(t)y(t) = 0 \\ 0.47y(t) - 0.048x(t)y(t) = 0 \end{cases}$$

Из полученной системы получаем, что стационарное состояние системы будет в точке $x_0 = 0.47/0.048 = 9.79167, y_0 = 0.45/0.046 = 9.78261$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки.

4.2 Программная реализация модели хищник-жертва

Зададим функцию для решения модели хищник-жертва. Возьмем интервал $t \in [0; 16]$ (шаг 0.01) с начальными условиями $x_0 = 7,\ y_0 = 12$.

```
function lotka_volterra(u, p, t)
    # Model parameters.
```

```
        a, b, c, d = p
        # Current state.
        x, y = u

        # Evaluate differential equations.
        dx = (a - b * y) * x
        dy = (c * x - d) * y

        return [dx, dy]
    end

    # initial-value problem.
  u0 = [7.0, 12.0]
    p = [0.45, 0.046, 0.47,0.048]
    tspan = (0.0, 16.0)
```

Для отрисовки стационарного состояния задаём:

```
u0 = [0.47/0.048, 0.45/0.046]
```

Для задания проблемы используется функция `ODEProblem`, а для решения – численный метод `Tsit5()`:

```
prob = ODEProblem(lotka_volterra, u0, tspan, p)
dt = 0.01
solution = solve(prob, Tsit5(); saveat = dt)
```

Также зададим эту модель в OpenModelica. Модель для колебания без затухания и без действия внешних сил:

```
model lab5
```

```
parameter Real a=0.45;
parameter Real b=0.046;
parameter Real c=0.47;
parameter Real d=0.048;

parameter Real x0=7;
parameter Real y0=12;

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

equation

der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y-d*x*y;

end lab5;
```

Для отрисовки стационарного состояния меняем значения параметров:

```
parameter Real x0=0.47/0.048;
parameter Real y0=0.45/0.046;
```

4.3 Графики

Графики решений, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны для данных начальных условий(рис. fig. 4.1, fig. 4.2):

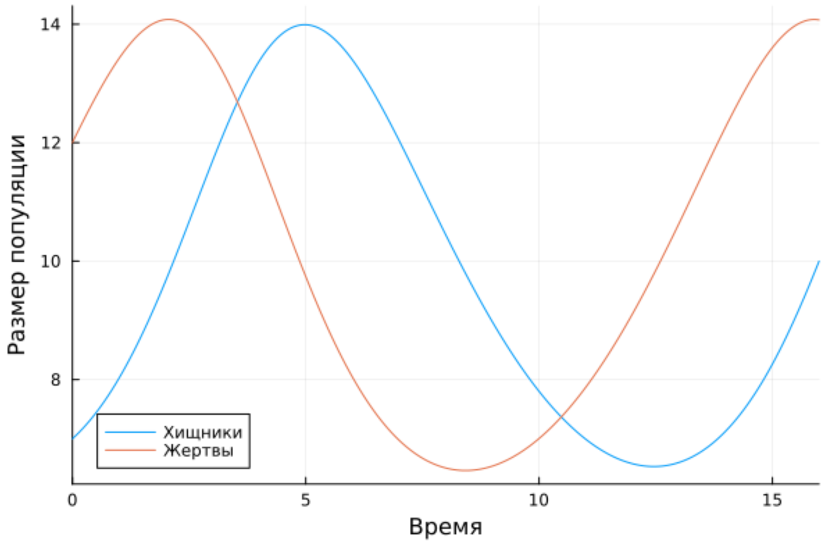

Рис. 4.1: Решение модели при $x_0 = 7,\ y_0 = 12$. Julia

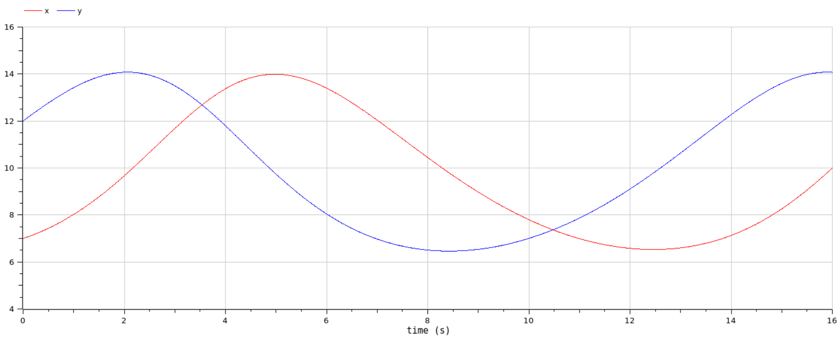

Рис. 4.2: Решение модели при $x_0 = 7,\ y_0 = 12$. OpenModelica

Графики фазового портрета, полученные с помощью OpenModelica и Julia для данных начальных условий также идентичны(рис. fig. 4.3, fig. 4.4):

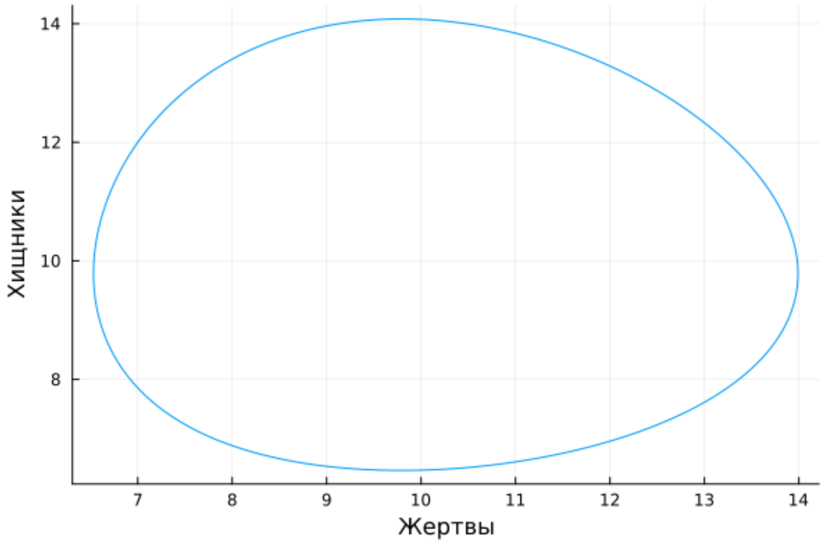

Рис. 4.3: Фозовый портрет модели при $x_0 = 7,\ y_0 = 12$. Julia

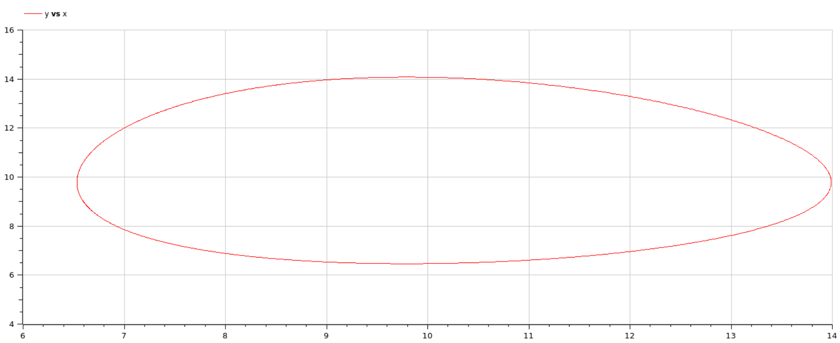

Рис. 4.4: Фозовый портрет модели при $x_0 = 7,\ y_0 = 12$. OpenModelica

Графики фазового портрета, полученные с помощью OpenModelica и Julia в стационарной точке также идентичны(рис. fig. 4.5, fig. 4.6):

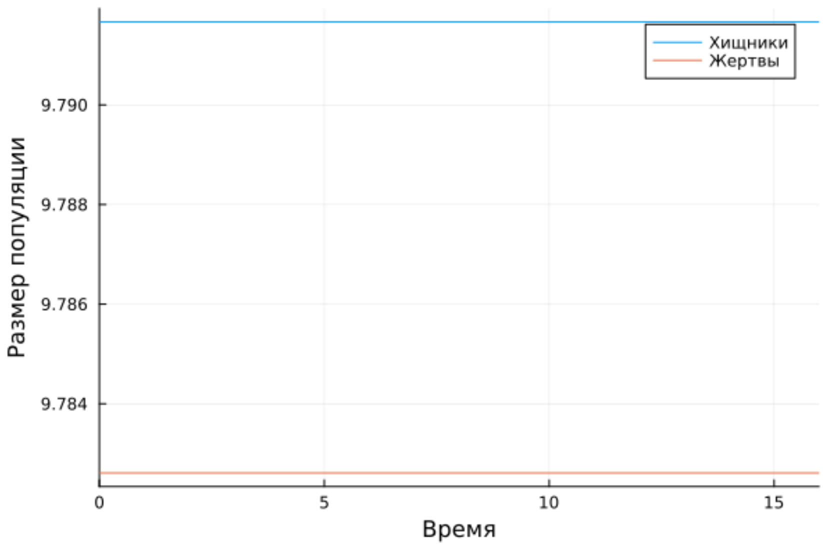

Рис. 4.5: Решение модели при $x_0 = 9.79167,\ y_0 = 9.78261$. Julia

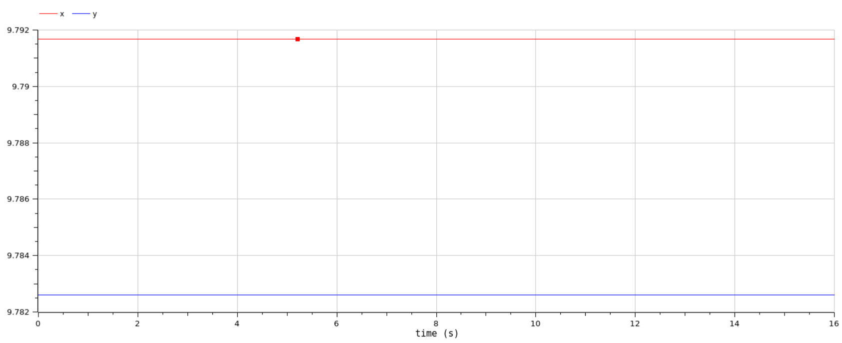

Рис. 4.6: Решение модели при $x_0 = 9.79167,\ y_0 = 9.78261$. OpenModelica

Графики фазового портрета, полученные с помощью OpenModelica и Julia в стационарной точке также идентичны(рис. fig. 4.7, fig. 4.8):

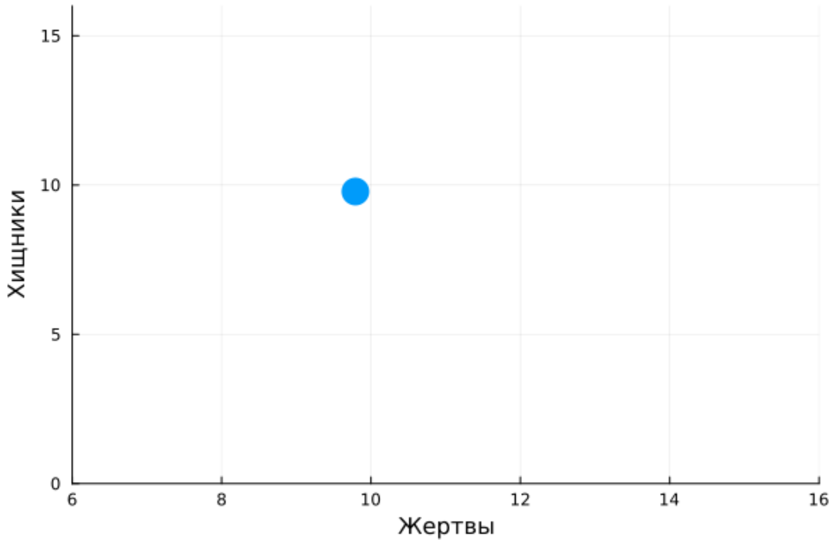

Рис. 4.7: Фозовый портрет модели при $x_0 = 9.79167,\ y_0 = 9.78261$. Julia

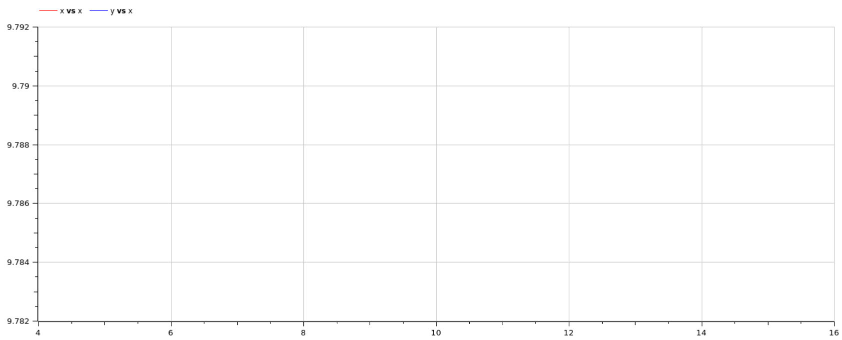

Рис. 4.8: Фозовый портрет модели при $x_0 = 9.79167, y_0 = 9.78261$. OpenModelica

Действительно, если начальное условие соответствует стационарной точке, то система находится в стационарном состоянии, то есть число хищников и жертв не изменяется.

5 Выводы

Построили математическую модель хищник жертва и провели анализ.

Список литературы