



MÉMOIRE DE M2

# Surfaces Canoniquement Plongées de Grands Degrés

*Auteur :*

Pedro Javier ORTIZ SUÁREZ

*Directeur :*

M. Xavier ROULLEAU

Université d'Aix-Marseille

Marseille, France

7 mars 2017



# Introduction

Dans un article récent [Cat16], Catanese construit des surfaces de type général, dont le morphisme canonique est un plongement dans  $\mathbb{P}^5$  et avec un premier nombre de Chern élevé :  $K_S^2 = 24$ . C'est actuellement la surface ayant le  $K_S^2$  le plus élevé connue à ce jour possédant cette propriété.

Le but de ce mémoire est de d'étudier la construction de Catanese. Pour cela, on pourra il faudra étudier certains chapitres des livres de Barth, Peters, Van de Ven [BHPVdV04] et Beauville [Bea96], qui forment les prérequis indispensables. Tout ou partie du mémoire peut d'ailleurs être axée sur ces deux livres.

Enfin, si le temps le permet, il faudrait regarder la problématique de Catanese pour une surface construite par Krämer [Kra13], qui a pour invariant  $K^2 = 48$  et qui par sa construction pourrait être une bonne candidate à être plongée canoniquement dans  $\mathbb{P}^6$ .



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>iii</b>
<b>I    Prérequis</b>	<b>1</b>
<b>1    Concepts de base et définitions</b>	<b>3</b>
1.1    Préliminaires . . . . .	3
1.2    Théorie d'Intersection . . . . .	5
1.3    Classes de Chern . . . . .	8
1.4    Théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch . . . . .	11
<b>II   Plongements de Surfaces Canoniques</b>	<b>13</b>



# Première partie

## Prérequis





# Chapitre 1

## Concepts de base et définitions

### 1.1 Préliminaires

Notre objectif principal dans ce texte sera d'étudier certaines surfaces de type général et ses propriétés. Alors, on va commencer par définir l'objet le plus élémentaire avec lequel on va à travailler, une surface.

**Définition 1.1.1.** Nous appellerons *surface* à toute variété algébrique projective lisse de dimension 2 sur  $\mathbb{C}$ .

**Définition 1.1.2.** Soit  $X$  une variété lisse complexe, nous noterons par  $\mathcal{O}_X$  le *faisceau structural* sur  $X$  et par  $\mathcal{T}_X$  le *fibré tangent* (holomorphe) sur  $X$ . Nous noterons aussi par  $\Omega_X^i$  le *faisceau des germes de  $i$ -formes différentielles holomorphes*, i.e., le faisceau des sections du fibré  $\bigwedge^i \mathcal{T}_X^\vee$  avec  $i \geq 1$ .

**Définition 1.1.3.** Soit  $X$  une variété lisse complexe, et  $Y$  une sous-variété de  $X$ , on note par  $\mathcal{N}_{Y/X}$  le *fibré normal* défini par la suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_Y \longrightarrow \mathcal{T}_X|_Y \longrightarrow \mathcal{N}_{Y/X} \longrightarrow 0.$$

**Remarque 1.1.4.** Soit  $X$  une variété complexe et  $\mathcal{V}$  un faisceau cohérent, nous savons que  $H^i(X, \mathcal{V})$  est un espace vectoriel de dimension finie, alors nous noterons par  $h^i(X, \mathcal{V}) = h^i(\mathcal{V})$  la dimension de  $H^i(X, \mathcal{V})$ . Alors, nous noterons  $q(X) = h^1(\mathcal{O}_X)$  et  $p_g(X) = h^0(\mathcal{K}_X)$  (le *genre géométrique*). Nous noterons aussi

$$\chi(X, \mathcal{V}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i h^i(\mathcal{V})$$

la *caractéristique de Euler*, où  $\chi(X, \mathcal{O}_X) = \chi(X)$ .

Maintenant, nous pouvons définir deux des concepts les plus importants qu'on va étudier tout au long de ce texte.

**Définition 1.1.5.** Soit  $X$  une variété lisse complexe, on définit le fibré canonique associé à  $X$ , c'est-à-dire, le fibré holomorphe en droites, comme  $\mathcal{K}_X = \bigwedge^n \mathcal{T}_X^\vee$ . On va noter les diviseurs canoniques par  $K_X$ , donc  $\mathcal{K}_X = \mathcal{O}_X(K_X)$ .

Avant de définir qu'est-ce qu'une surface de type général, nous devons définir d'abord la *Dimension de Kodaira*. Pour faire ça, considérons la définition suivante.

**Définition 1.1.6.** Soit  $X$  une variété complexe et compacte. Étant donné l'application

$$\Gamma(X, \mathcal{K}_X^{\otimes n_1}) \otimes \Gamma(X, \mathcal{K}_X^{\otimes n_2}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}_X^{\otimes (n_1+n_2)}).$$

Nous définissons *l'anneau canonique* de  $X$  comme

$$R(X) = \mathbb{C} \oplus \sum_{n \geq 1} \Gamma(X, \mathcal{K}_X^{\otimes n}).$$

$R(X)$  est un anneau commutative avec unité. Il peut être prouvé que  $R(X)$  a un degré de transcendance,  $\text{tr}(R(X))$ , finie sur  $\mathbb{C}$ .

**Définition 1.1.7.** Soit  $X$  une variété complexe et compacte, nous définissons la *Dimension de Kodaira* de  $X$ ,  $\text{kod}(X)$ , comme

$$\text{kod}(X) = \begin{cases} -\infty & \text{si } R(X) \cong \mathbb{C}, \\ \text{tr}(R(X)) - 1 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On peut montrer qu'on a toujours  $\text{kod}(X) \leq \dim(X)$ .

Un autre concept important est celui du « *Plurigenre* ».

**Définition 1.1.8.** Soit  $X$  une variété complexe, on définit  $P_m(X) = h^0(\mathcal{K}_X^{\otimes m})$  le  $m$ -ième plurigenre de  $X$ . En particulier on a  $P_1(X) = p_g(X)$ .

La dimension de Kodaira et les plurigenres sont étroitement liés. Nous énoncerons les résultats suivantes sur la dimension de Kodaira et les plurigenres sans démonstration (vous pouvez trouver leurs preuves dans [Uen75]).

**Théorème 1.1.9.** Soit  $X$  une variété complexe, compacte et connexe

- 1.)  $\text{kod}(X) = -\infty$  si et seulement si  $P_m(X) = 0$  pour tout  $m \geq 1$ .
- 2.)  $\text{kod}(X) = 0$  si et seulement si  $P_m(X) = 0$  ou  $P_m(X) = 1$  pour tout  $m \geq 1$ , mais pas égal à zéro pour tout  $m$ .
- 3.)  $\text{kod}(X) = k$  où  $1 \leq k \leq \dim(X)$ , si et seulement si il y a  $\alpha, \beta > 0$  réels tels que pour  $m$  assez grand,  $\alpha m^k < P_m(X) < \beta m^k$ .

**Théorème 1.1.10.** Si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux variétés complexes, compactes et connexes, alors  $\text{kod}(X_1 \times X_2) = \text{kod}(X_1) + \text{kod}(X_2)$ .

Ayant tout cela, nous pouvons procéder à définir notre objet principal d'étude.

**Définition 1.1.11.** Soit  $S$  une surface complexe, projective et lisse. On appelle  $S$  une *surface de type général* si  $\text{kod}(S) = 2$ . Plus généralement, soit  $X$  une variété complexe de dimension  $n$ , on dit que  $X$  est de type général si  $\text{kod}(X) = n$ .

Il y a une autre manière de définir la dimension de Kodaira, afin de l'énoncer, rappelons la définition suivante

**Définition 1.1.12.** Soient  $X$  une variété irréductible et  $Y$  une variété quelconque. Une application rationnelle  $\varphi : X \rightarrow Y$  est un morphisme d'un ouvert  $U$  de  $X$  dans  $Y$  qui n'est pas la restriction d'un autre morphisme  $\varphi' : U' \rightarrow Y$  avec  $U' \supsetneq U$ . Nous disons que  $\varphi$  est définie en  $x$  si  $x \in U$ .

Et ainsi, nous définissons la dimension de Kodaira en termes des applications rationnelles

**Définition 1.1.13.** Soit  $V$  une variété projective lisse, soit  $K$  un diviseur canonique de  $V$ , et  $\phi_{nK}$  l'application rationnelle de  $V$  dans un espace projectif associée au système  $|nK|$ . La dimension de Kodaira,  $\text{kod}(V)$ , est

$$\text{kod}(V) = \max_{n \geq 1} \dim \phi_{nK}(V),$$

la dimension maximum des images de  $\phi_{nK}(V)$ , avec  $n \geq 1$ .

Vous pouvez trouver l'équivalence entre les deux définitions de la dimension de Kodaira que nous avons donné dans [Uen75].

Nous étudierons la dimension de Kodaira plus en détail plus tard lorsque nous étudierons la classification de Enriques-Kodaira des surfaces.

## 1.2 Théorie d'Intersection

Maintenant, l'un des résultats les plus importants que nous connaissons pour les courbes est le théorème de Riemann-Roch

**Théorème 1.2.1** (Riemann-Roch). *Soit  $D$  un diviseur sur une courbe  $C$  de genre  $g$ , alors*

$$\dim H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) - \dim H^1(C, \mathcal{O}_C(D)) = \deg D + 1 - g.$$

*Ou en termes de la caractéristique d'Euler,*

$$\chi(C, \mathcal{O}_C(D)) = \deg D + 1 - g.$$

Ce théorème a de nombreuses implications en géométrie algébrique, comme la classification de courbes algébriques ; ainsi qu'en l'analyse complexe et le étude de surfaces de Riemann.

Notre but dans cette section et dans les deux suivantes, sera de généraliser ce résultat à les surfaces et plus généralement à toute variété de dimension  $n$ . En fait nous allons généraliser le théorème pour  $\chi(X, \mathcal{E})$ , où  $\mathcal{E}$  est un faisceau cohérent localement libre. Afin de généraliser l'expression à droite dans le théorème de Riemann-Roch nous avons besoin d'une *théorie d'intersection* sur une variété  $X$  ; par exemple, l'intersection de deux diviseurs n'est pas un nombre entier dans ce cas, donc nous devons définir cet intersection là pour des variétés. Nous devons aussi introduire quelques invariants plus générales que le genre géométrique. Alors, Nous commençons par définir le concept des *cycles*.

**Définition 1.2.2.** Soit  $X$  une variété algébrique sur un corps  $k$  algébriquement clos. Un *cycle de codimension  $r$*  sur  $X$  est un élément du groupe abélien libre engendré par les sous-variétés fermés irréductibles de  $X$  de codimension  $r$ . Nous écrivons un cycle comme

$$Y = \sum n_i Y_i$$

où les  $Y_i$  sont des sous-variétés et  $n_i \in \mathbb{Z}$  pour tout  $i$ .

Maintenant, on définit des applications entre ces cycles associées à une application  $f : X \rightarrow X'$  des variétés.

**Définition 1.2.3** (Poussé en avant). Soit  $f : X \rightarrow X'$  un morphisme de variétés, et soit  $Y$  une sous-variété de  $X$ , on définit

$$f_*(Y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim f(Y) < \dim Y, \\ [K(Y) : K(f(Y))] \cdot \overline{f(Y)} & \text{si } \dim f(Y) = \dim Y, \end{cases}$$

$f_*$  se prolonge linéairement pour obtenir un homomorphisme du groupe de cycles de  $X$  à le groupe de cycles de  $X'$ .

Avant de poursuivre notre discussion sur la théorie d'intersection, nous rappelons la définition suivante

**Définition 1.2.4.** Soit  $X$  une variété, on dit que  $X$  est normal au point  $p$ , si  $\mathcal{O}_p$  est un anneau intégralement clos. On dit que  $X$  est normal si elle est normal à chaque point. Pour toute variété  $X$  il existe une variété affine et normal  $\tilde{X}$ , et un morphisme  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  tel que, pour toute variété normal  $Y$  et  $\varphi : Y \rightarrow X$  un morphisme dominant, alors il y a un unique morphisme  $\theta : Y \rightarrow \tilde{X}$  tel que

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \theta & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

commute. On appelle  $\tilde{X}$  la normalisation de  $X$ .

On retourne maintenant sur la théorie d'intersection. Soit  $X$  une variété et  $V$  une sous-variété de  $X$ . Considérons  $f : \tilde{V} \rightarrow V$  la normalisation de  $V$  afin que on peut parler de diviseurs de Weil sur  $\tilde{V}$ . Alors, soient  $D$  et  $D'$  deux diviseurs de Weil linéairement équivalentes, on dit que  $f_*D$  et  $f_*D'$  sont des cycles *rationnellement équivalentes* sur  $X$  et on écrit  $f_*D \sim f_*D'$ .

**Définition 1.2.5.** Soit  $X$  une variété, nous définissons *équivalence rationnelle* des cycles sur  $X$  comme la relation d'équivalence engendré par tous les cycles tels que  $f_*D \sim f_*D'$  pour toutes les sous-variétés  $V$  de  $X$ , et tous les diviseurs de Weil  $D, D'$  sur  $\tilde{V}$  linéairement équivalentes. En particulier si  $X$  est normal, alors la équivalence rationnelle pour les cycles de codimension 1, coïncide avec l'équivalence linéaire des diviseurs de Weil.

**Définition 1.2.6.** Soit  $X$  une variété, nous définissons *Groupe de Chow*  $A^r(X)$  comme le groupe des cycles de codimension  $r$  modulo équivalence rationnelle. Nous notons par

$$A(X) = \bigoplus_{r=0}^n A^r(X)$$

le groupe gradué, où  $n = \dim X$ .

**Remarque 1.2.7.** Remarquez que  $A^0(X) = \mathbb{Z}$  et  $A^r(X) = 0$  pour tout  $r > \dim X$ . Remarquez aussi que si  $X$  est complet, alors il y a un morphisme naturel

$$\begin{aligned} \deg : A^n(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sum n_i p_i &\longmapsto \deg \left( \sum n_i p_i \right) = \sum p_i, \end{aligned}$$

où les  $p_i$  sont des points.

**Définition 1.2.8.** Soit  $X$  une variété et  $Y, Z \subseteq X$  deux sous-variétés, nous disons que  $Y$  et  $Z$  s'intersectent proprement si toute composante irréductible de  $Y \cap Z$  a de codimension égal à  $\text{codim } Y + \text{codim } Z$ .

**Définition 1.2.9.** Soit  $X$  une variété et considérons l'application  $A^r(X) \times A^s(X) \rightarrow A^{r+s}(X)$ . Soient  $Y \in A^r(X)$  et  $Z \in A^s(X)$  deux cycles, nous notons par  $Y.Z$  leur *classe du cycle de intersection*.

Pour une classe de variétés  $\mathfrak{B}$ , une théorie d'intersection sera précisément de considérer une liste d'axiomes sur l'application  $A^r(X) \times A^s(X) \rightarrow A^{r+s}(X)$  qu'on énoncera après la définition suivante.

**Définition 1.2.10.** Soient  $X$  et  $X'$  deux variétés,  $Y' \subseteq X'$  une sous-variété, et  $f : X \rightarrow X'$  un morphisme ; soient aussi  $p_1 : X \times X' \rightarrow X$  et  $p_2 : X \times X' \rightarrow X'$  les projections, et notons par  $\Gamma_f$  le graphe de  $f$ . On définit le homomorphisme  $f^* : A(X') \rightarrow A(X)$  par

$$f^*(Y) = p_{1*}(\Gamma_f \cdot p_2^{-1}(Y')),$$

où on considère  $\Gamma_f$  comme un cycle sur  $X \times X'$ .

Maintenant, nous énonçons les axiomes comme un théorème.

**Théorème 1.2.11.** *Soit  $\mathfrak{B}$  une classe de variétés lisses quasi-projectives sur un corps algébriquement clos  $k$ . Il existe une théorie d'intersection unique pour les cycles modulo équivalence rationnelle sur les variétés  $X \in \mathfrak{B}$  satisfaisant les axiomes A1-A7 suivantes.*

- (A1) L'application  $A^r(X) \times A^s(X) \rightarrow A^{r+s}(X)$  munit  $A(X)$  d'une structure d'anneau gradué commutatif avec d'unité pour toute variété  $X \in \mathfrak{B}$ . On appelle  $A(X)$  l'*Anneau de Chow*.
- (A2) Pour tout morphisme  $f : X \rightarrow X'$  de variétés dans  $\mathfrak{B}$ ,  $f^* : A(X') \rightarrow A(X)$  est un homomorphisme d'anneaux ; de plus, si  $g : X' \rightarrow X''$  est autre morphisme de variétés, alors

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

- (A3) Soit  $f : X \rightarrow X'$  un morphisme propre de variétés dans  $\mathfrak{B}$ , alors  $f_* : A(X) \rightarrow A(X')$  est un morphisme de groupes gradués, et si  $g : X' \rightarrow X''$  est un autre morphisme, alors

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

- (A4) *Formule de projection.* Soit  $f : X \rightarrow X'$  un morphisme propre de variétés dans  $\mathfrak{B}$ , si  $x \in A(X)$  et  $y \in A(X')$ , alors

$$f_*(x \cdot f^*y) = f_*(x) \cdot y.$$

- (A5) *Réduction à la diagonal.* Soient  $Y$  et  $Z$  des cycles sur une variété  $X$ , et soit  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  le morphisme diagonal, alors

$$Y.Z = \Delta^*(Y \times Z).$$

- (A6) *Nature local.* Soit  $X$  une variété et  $Y, Z \subseteq X$  deux sous-variétés que s'intersectent proprement, alors on peut écrire

$$Y.Z = \sum i(Y, Z; W_j)W_j,$$

où la somme couvre toutes les composantes irréductibles  $W_j$  de  $Y \cap Z$ , et où l'entière  $i(Y, Z; W_j)$  dépend seulement du voisinage du point générique de  $W_j$  sur  $X$ . On appelle  $i(Y, Z; W_j)$  la *multiplicité local d'intersection* de  $Y$  et  $Z$  sur  $W_j$ .

- (A7) *Normalisation.* Soit  $X$  une variété,  $Y$  une sous-variété et  $Z$  un diviseur de Cartier effective qui intersecte  $Y$  proprement, alors  $Y.Z$  est le cycle associé au diviseur de Cartier  $Y \cap Z$  sur  $Y$ , qui est définie en restreignant l'équation local de  $Z$  à  $Y$ .

Vous pouvez trouver une démonstration du théorème ci-dessous dans les chapitres 1 et 2 de [Ful98]. Soit  $X$  une variété lisse quasi-projective, on va ajouter quelques propriétés sur l'anneau de Chow  $A(X)$  à les axiomes précédentes.

- (A8) Remarquons que les cycles de codimension 1 sont des diviseurs de Weil, et que l'équivalence rationnelle est exactement l'équivalence linéaire des diviseurs, alors  $A^1(X) \cong \text{Pic}(X)$ .
- (A9) Soit  $\mathbb{A}^m$  un espace affine, alors la projection  $p : X \times \mathbb{A}^m \rightarrow X$  induit un isomorphisme  $p^*A(X) \rightarrow A(X \times \mathbb{A}^m)$
- (A10) *Exactitude.* Soit  $X$  une variété,  $Y$  une sous-variété fermée lisse de  $X$  et  $U = X - Y$ , alors il y a une suite exacte

$$A(Y) \xrightarrow{i_*} A(X) \xrightarrow{j^*} A(U) \longrightarrow 0$$

où  $i : Y \rightarrow X$  est une inclusion et  $j : U \rightarrow X$  est l'autre.

- (A11) Soit  $\mathcal{E}$  un faisceau localement libre du rang  $r$  sur  $X$ , soit  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  le fibré du espace projectif associé, et soit  $\xi \in A^1(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$  la classe du diviseur correspondant à  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ . soit  $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$  la projection, alors  $\pi^*$  munit  $A(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$  d'une structure de  $A(X)$ -module libre engendré par  $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{r-1}$ .

**Il faut ajouter la définition du fibré du espace projectif associé**

## 1.3 Classes de Chern

Ayant défini les groupes et l'anneau de Chow, et ayant énoncé ses propriétés, nous avons tous les outils pour définir les classes de Chern.

**Définition 1.3.1.** Soit  $\mathcal{E}$  un faisceau localement libre du rang  $r$  sur une variété quasi-projective  $X$ . Pour chaque  $i = 0, 1, \dots, r$  nous définissons la  $i$ -ème *Classe de Chern* comme une classe  $c_i(\mathcal{E}) \in A^i(X)$  tel que  $c_0(\mathcal{E}) = 1$  et

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i \pi^* c_i(\mathcal{E}) \cdot \xi^{r-1} = 0$$

dans  $A^r(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ , en utilisant la notation de (A11). Nous définissons aussi la *classe de Chern total* comme

$$c(\mathcal{E}) = c_0(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E}) + \dots + c_r(\mathcal{E})$$

et le *polynôme de Chern* comme

$$c_t(\mathcal{E}) = c_0(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E})t + \dots + c_r(\mathcal{E})t^r.$$

Les classes de Chern satisfont les axiomes suivantes

- (C1) Soit  $X$  une variété et  $D$  un diviseur sur  $X$ . Supposons  $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X(D)$ , alors

$$c_t(\mathcal{E}) = 1 + Dt.$$

En effet, dans ce cas là  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = X$  et  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) = \mathcal{O}_X(D)$ , ainsi  $\xi = D$ , donc par définition  $1 \cdot \xi - c_1(\mathcal{E}) \cdot 1 = 0$ , et par conséquence  $c_1(\mathcal{E}) = D$ .

(C2) *Tiré en arrière.* Soit  $f : X' \rightarrow X$  un morphisme, et  $\mathcal{E}$  un faisceau localement libre sur  $X$ , alors pour chaque  $i$  on a

$$c_i(f^*\mathcal{E}) = f^*c_i(\mathcal{E}).$$

(C3) *Somme de Whitney.* Soit  $0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0$  une suite exacte courte de faisceaux localement libres sur  $X$ , alors

$$c_t(\mathcal{E}) = c_t(\mathcal{E}') \cdot c_t(\mathcal{E}''),$$

i.e.,

$$c_k(\mathcal{E}) = \sum_{i+j=k} c_i(\mathcal{E}') \cdot c_j(\mathcal{E}'').$$

En fait, si nous supposons  $c_0(\mathcal{E}) = 1$ , il est possible de montrer qu'il y a une seule théorie des classes de Chern en satisfaisant (C1)-(C3) ; cela nous permet de redéfinir les classes de Chern  $c_i(\mathcal{E})$  que en utilisant les axiomes ci-dessous. Nous n'allons pas montrer ce résultat ( vous le pouvez trouver dans [Ful98], remarque 3.2.1 ), mais nous parlerons de l'un des principaux ingrédients de sa preuve.

**Lemme 1.3.2** (Principe de scission). *Étant donné un faisceau localement libre du rang  $r$   $\mathcal{E}$ , sur  $X$  une variété lisse quasi-projective. Il existe une variété  $X'$  et un morphisme  $f : X' \rightarrow X$  tels que*

(C1)  *$f^* : A(X') \rightarrow A(X)$  est injectif, et*

(C2)  *$f^*\mathcal{E}$  se scinde, c'est-à-dire,  $f^*\mathcal{E}$  a une filtration*

$$f^*\mathcal{E} = \mathcal{E}_r \supseteq \mathcal{E}_{r-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{E}_1 \supseteq \mathcal{E}_0 = 0,$$

*tel que les quotients successifs  $\mathcal{L}_i = \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$  sont des faisceaux inversibles ( fibrés en droites ).*

(C3) *En utilisant la notation de b), le polynôme de Chern peut être écrit comme*

$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^r c_t(\mathcal{L}_i)$$

Comme avant, vous pouvez trouver la démonstration du lemme ci dessous dans [Ful98] lemme 3.2.

**Remarque 1.3.3.** Si nous utilisons le même raisonnement que en (C1), et la partie c) du lemme ci dessous, nous pouvons récrire le polynôme de Chern comme

$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^r (1 + a_i t)$$

où les  $a_i, \dots, a_r$  sont des symboles purement formels, ces symboles sont appelés les *racines de Chern* de  $\mathcal{E}$ . En d'autres termes, les classes de Chern de  $\mathcal{E}$  sont des fonctions symétriques élémentaires de  $a_i, \dots, a_r$ . Une manière plus simple de comprendre ces racines, est d'utiliser le principe de scission, si  $f^*\mathcal{E}$  est filtré avec des quotients de faisceaux inversibles ( fibrés en droites ), alors

$$c_t(f^*\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^r (1 + a_i t),$$

où  $a_i = c_1(\mathcal{L}_i)$ .

Étant donné les axiomes (C1)-(C3) et le remarque 1.3.3, nous pouvons calculer maintenant les classes de Chern pour les duales des faisceaux localement libres. Nous le ajoutons comme un quatrième axiome :

(C4) Soit  $\mathcal{E}$  un faisceau localement libre de rang  $r$ . Alors

$$c_i(\mathcal{E}^\vee) = (-1)^i c_i(\mathcal{E}).$$

Nous pouvons aussi calculer les polynômes de Chern pour les produits tensoriels et les produits extérieurs. Nous ajoutons ces calculs comme un autre axiome.

(C5) Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux faisceaux localement libres de rang  $r$  et  $s$  respectivement. Écrivons

$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^r (1 + a_i t) \quad \text{et} \quad c_t(\mathcal{F}) = \prod_{i=1}^s (1 + b_i t)$$

où  $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$  sont des symboles formels. Alors

$$c_t(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = \prod_{i,j} (1 + (a_i + b_j)t)$$

$$c_t\left(\bigwedge^p \mathcal{E}\right) = \prod_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq r} (1 + (a_{i_1} + \dots + a_{i_p})t)$$

Pour plus de détails sur (C4) et (C5), vous pouvez regarder [Ful98] remarque 3.2.3.

Maintenant, on ajoute un dernier fait sur les classes de Chern comme un axiome qui sera très utile plus tard dans la deuxième partie du texte.

(C6) Soit  $X$  une variété lisse et  $Y$  une sous-variété lisse de  $X$  de codimension  $r$ . Soit  $\mathcal{N}_{Y/X}$  le fibré normal et  $i : Y \rightarrow X$  l'inclusion. Alors

$$i^* i_*(1_Y) = c_r(\mathcal{N}_{Y/X})$$

Ce résultat grâce à Mumford [??]. On peut utiliser ce formule à fin d'obtenir une expression explicite pour  $i_*(c_r(\mathcal{N}_{Y/X}))$

$$\begin{aligned} i_*(c_r(\mathcal{N}_{Y/X})) &= i_*(1_Y \cdot c_r(\mathcal{N}_{Y/X})) \\ &= i_*(1_Y \cdot i^* i_*(1_Y)) \end{aligned}$$

En utilisant la *formule de projection* (A4), on obtient

$$\begin{aligned} i_*(c_r(\mathcal{N}_{Y/X})) &= i_*(1_Y \cdot i^* i_*(1_Y)) \\ &= i_*(1_Y) \cdot i_*(1_Y) \\ &= Y \cdot Y. \end{aligned}$$

Pour conclure cette section, nous introduisons un dernier élément de  $A(X) \otimes \mathbb{Q}$  lié à les classes de Chern.



**Définition 1.3.4.** Soit  $X$  une variété lisse et  $\mathcal{E}$  un faisceau localement libre du rang  $r$  sur  $X$ , on définit le *caractère de Chern*,  $\text{ch}(\mathcal{E})$  comme

$$\text{ch}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^r e^{a_i},$$

où  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$  et  $a_1, \dots, a_r$  sont les racines de Chern de  $\mathcal{E}$ . On peut calculer les premiers termes

$$\text{ch}(\mathcal{E}) = r + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) + \frac{1}{24}(c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4) + \dots$$

où  $c_i = c_i(\mathcal{E})$  et  $c_i = 0$  si  $i > r$ .

## 1.4 Théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch

Nous avons maintenant presque tous les outils pour comprendre les généralisations du théorème de Riemann-Roch. Cependant nous devons introduire un dernier invariant avant d'énoncer ces généralisations.

**Définition 1.4.1.** Soit  $\mathcal{E}$  un faisceau localement libre de rang  $r$ , nous définissons la *classe de Todd* de  $\mathcal{E}$ ,  $\text{td}(\mathcal{E})$  comme

$$\text{td}(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^r Q(a_i)$$

où  $a_1, \dots, a_r$  sont les racines de Chern de  $\mathcal{E}$  et

$$Q(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} x^{2k},$$

où  $B_k$  sont les nombres de Bernoulli [??]. Nous pouvons calculer les premiers termes.

$$\text{td}(\mathcal{E}) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}(c_1c_2) + -\frac{1}{720}(c_1^4 - 4c_1^2c_2 - 3c_2^2 - c_1c_3 + c_4) + \dots$$

où  $c_i = c_i(\mathcal{E})$  et  $c_i = 0$  si  $i > r$ .

**Théorème 1.4.2** (Hirzebruch-Riemann-Roch). *Soit  $X$  une variété algébrique projective et lisse de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{E}$  un faisceau localement libre de rang  $r$ . Alors*

$$\chi(X, \mathcal{E}) = \deg(\text{ch}(\mathcal{E}) \cdot \text{td}(\mathcal{T}_X))_n$$

où  $(\ )_n$  est la composante de degré  $n$  dans  $A(X) \otimes \mathbb{Q}$ .

Ce théorème a d'abord été prouvé par Friedrich Hirzebruch pour le cas où  $X$  est une variété sur  $\mathbb{C}$ , après il a été généralisé par Alexander Grothendieck pour les corps algébriquement clos. Malheureusement, la preuve de ce théorème est bien au-delà de la portée de ce texte. Toutefois, vous pouvez trouver la preuve du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch dans [Ful98] théorème 15.2 et comme corollaire, la preuve du théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch dans le corollaire 15.2.2.

Maintenant, nous pouvons retourner sur notre discussion sur les surfaces en appliquant le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch pour obtenir quelques résultats importants sur les surfaces.

**Remarque 1.4.3.** Soit  $S$  une surface, nous noterons par  $c_1$  et  $c_2$  ou par  $c_1(S)$  et  $c_2(S)$  les classes de Chern associés au fibré tangent  $\mathcal{T}_S$ . Notons que le fibré tangent ne dépend que de  $S$ , donc les classes  $c_1(\mathcal{T}_S)$  et  $c_2(\mathcal{T}_S)$  dépend seulement de  $X$ .

**Théorème 1.4.4** (Noether's Formula). *Soit  $S$  une surface, alors*

$$\chi(S) = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2).$$

*Ou autrement dit,*

$$1 - q(S) + p_g(S) = \frac{1}{12}(K_S^2 + c_2).$$

*où  $K_S$  est le diviseur canonique de  $S$ .*

*Démonstration.* Premièrement, notons que par (C5),

$$c_1(\mathcal{T}_S^\vee) = c_1\left(\bigwedge^2 \mathcal{T}_S\right) = c_1(\mathcal{K}_S) = c_1(\mathcal{O}_S(K_S)) = K_S.$$

Alors, par (C4) nous avons  $c_1(\mathcal{T}_S) = -K_S$ . En utilisant  $c_1 = -K_S$  et  $c_2$  nous écrivons la classe de Todd du fibré tangent

$$\text{td}(\mathcal{T}_S) = 1 - \frac{1}{2}K_S + \frac{1}{12}(K_S^2 + c_2),$$

et le caractère de Chern de  $\mathcal{O}_S(D)$

$$\text{ch}(\mathcal{O}_S(D)) = 1 + D + \frac{1}{2}D^2$$

Maintenant, soit  $D$  un diviseur quelconque sur  $S$ , nous notons par  $D^2$  tant sa classe dans  $A^2(X)$  que son degré, et nous écrivons l'équation du théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch 1.4.2 pour ce cas

$$\chi(\mathcal{O}_S(D)) = \frac{1}{2}D \cdot (D - K_S) + \frac{1}{12}(K_S^2 + c_2).$$

En particulier, si  $D = 0$  nous avons

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \chi(S) = \frac{1}{12}(K_S^2 + c_2),$$

et par définition de  $\chi(X)$

$$1 - q(S) + p_g(S) = \frac{1}{12}(K_S^2 + c_2).$$

□

## Deuxième partie

# Plongements de Surfaces Canoniques



# Bibliographie

- [Bea96] Arnaud Beauville, *Complex algebraic surfaces*, second ed., London Mathematical Society Student Texts, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid. MR 1406314
- [BHPVdV04] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius Van de Ven, *Compact complex surfaces*, second ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR 2030225
- [Cat16] F. Catanese, *Canonical surfaces of higher degree*, ArXiv e-prints (2016).
- [Ful98] William Fulton, *Intersection theory*, second ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998. MR 1644323
- [Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. MR 0463157
- [Kra13] T. Kramer, *On a family of surfaces of general type attached to abelian fourfolds and the Weyl group  $W(E_6)$* , ArXiv e-prints (2013).
- [Rou12] Xavier Roulleau, *Quotients of Fano surfaces*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. **23** (2012), no. 3, 325–349. MR 2960841
- [Uen75] Kenji Ueno, *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975, Notes written in collaboration with P. Cherenack. MR 0506253