TD n° 4 : Induction Structurelle

Exercice 1

$$D \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

(B) : $(n, 0) \in D$

(I) : si $(n, n') \in D \Rightarrow (n, n+n') \in D$

1) $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$

2) Mtr que $(n, n') \in D \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tq $n' = kn$

① récurrence

$n' = kn \Rightarrow (n, n') \in D$

I : si $k = 0$ alors $n' = 0$, et $(n, 0) \in D$ (B)

H : considérons $n' = (k+1)n = nk + n$

par (HI) $(n, kn) \in D$

alors par (I) $(n, n + kn) \in D$

Donc $(n, n(k+1)) = (n, n') \in D$

② Mtr $(n, n') \in D \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$, tq $n' = kn$

base

pour $(n, 0)$ $k = 0$

induction

pour $(n, n+n')$ par Hyp Induction

$\exists k \in \mathbb{N}$ tq $n' = kn$

donc $n + n' = n + kn = n(k+1)$

prenons $k' = k+1$ et $(n, n+n') = (n, n(k+1))$

$= (n, nk')$ ✓

Exercice 2

AB (arbres binaires) sur alphabet A

1)

Base : pour $t = \emptyset$

$h(\emptyset) = 0$, $n(\emptyset) = 0$, $ar(\emptyset) = 0$, $f(\emptyset) = 0$

Induction

avec $t = (a, g, d)$

- $h(a,g,d) = \max\big(h(g), h(d)\big) + 1$

- $n(a,g,d) = n(g) + n(d) + 1$

- $ar(a,g,d) = \begin{cases} 0 & \text{si } g = d = \emptyset \\ ar(g) & \text{si } g \neq \emptyset \text{ et } d = \emptyset \\ ar(d) & \text{si } g = \emptyset \text{ et } d \neq \emptyset \\ 2 + ar(g) + ar(d) & \text{si } g \neq 0 \text{ et } d \neq 0 \end{cases}$

- $f(a,g,d) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = d = \emptyset \\ f(g) + f(d) & \text{si } g \neq 0 \text{ ou } d \neq 0 \end{cases}$

~~Exercice 2~~

2) Mtr que $\forall t$ de AB, $n(t) \leqslant 2^{h(t)} - 1$ (a)

(a) $f(t) \leq 2^{h(t)-1}$

induction structurelle sur AB

(B) $t = \emptyset$: $2^{h(\emptyset)} - 1 = 0 \geqslant n(\emptyset) = 0$

(I) soit $t = (a,g,d)$ et supposont $P(g)$ et $P(d)$

on a $n(t) = 1 + n(g) + n(d) \overset{(h)}{\leqslant} 1 + (2^{h(g)} - 1) + (2^{h(d)} - 1)$

$= 2^{h(g)} + 2^{h(d)} - 1$

$= 2^{\max(h(g), h(d))} + 2^{\max(}$

$$n(t) \leqslant 2^{\max[h(g) + h(d)] + 1} - 1$$

$$\leqslant 2^{h(t)} - 1 \quad \checkmark$$

(b) $Q(t)$: $f(t) \leqslant 2^{h(t) - 1}$

(B) $t = \emptyset$ $\quad f(\emptyset) = 0 \leqslant 2^{h(\emptyset) - 1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$$f(a, \emptyset, \emptyset) = 1 = 2^{0} = 2^{1-1}$$

$$= 2^{h(a, \emptyset, \emptyset) - 1}$$

(I) Soit $t = (a, g, d) \in AB$ avec $g \neq 0$ ou $d \neq 0$

et supposons $Q(g)$, $Q(d)$

$$f(t) = f(g) + f(d) \leqslant 2^{h(g) - 1} + 2^{h(d) - 1}$$

$$\leqslant 2 \times 2^{\max(h(d), h(g)) - 1}$$

$$\leqslant 2^{\max \_\_\_ + 1 - 1}$$

$$\leqslant 2^{h(t) - 1}$$

$\checkmark$