LU2IN005

Feuille TD5 : Langages et automates

Exercice 1

1. A un alphabet. Mq $(\mathcal{P}(A^*), \cdot, \{\varepsilon\})$ est monoïde.

Sol° : • le produit de langage est associatif :

$\boxed{(L \cdot L') \cdot L'' = L \cdot (L' \cdot L'')}$ → ce qu'il faut montrer

$(L \cdot L') \cdot L'' = \{ v v' v'' / v \in L, v' \in L', v'' \in L'' \}$

$L \cdot (L' \cdot L'') = \{ v v' v'' / v \in L, v' \in L', v'' \in L'' \}$

• le langage $\{\varepsilon\}$ est l'élément neutre :

$\boxed{L \cdot \{\varepsilon\} = L}$ → ce qu'on doit prouver

$L \cdot \{\varepsilon\} = \{ uv / u \in L, v \in \{\varepsilon\} \} =$

$= \{ u\varepsilon / u \in L \}$ $\boxed{\varepsilon\varepsilon\varepsilon = \varepsilon}$ → $\varepsilon^n = \varepsilon$

$= \{ u / u \in L \}$

$= L$

$\{\varepsilon\} \cdot L = \{ \varepsilon u / u \in L \}$ $\{\varepsilon\}$ est l'élément neutre

$= \{ u / u \in L \}$

$= L$

2) Mq si $(L_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque alors

$$\left(\bigcup_{i \in I} L_i\right) \cdot L = \bigcup_{i \in I} (L_i \cdot L)$$

Sol° : $u \in (\bigcup_{i \in I} L_i) \cdot L$ ssi $v \in \bigcup_{i \in I}$ et $w \in L$ tq $u = vw$. Ceci est équivalent à $\exists i \in I$ tq $v \in L_i$ et $\exists\, w$ tq $w \in L$, tq $u = vw$.

phrase importante

Donc $u \in (\bigcup_{i \in I} L_i) \cdot L$ ssi $\exists\, i \in I$ tq $u \in L_i \cdot L$

$$\Rightarrow \left(\bigcup_{i \in I} L_i\right) \cdot L = \bigcup_{i \in I} (L_i \cdot L)$$

3) $L^* = (L + \{\varepsilon\})^*$ et $L^* = \{\varepsilon\} + L.L^*$

Rappel de cours

$$\boxed{L^0 = \{\varepsilon\},\ L^{n+1} = L.L^n,\ L^* = \cup_{n \geq 0} L^n,\ L^+ = \cup_{n \geq 1} L^n}$$

On montre la 1ère égalité par induction :

$(L + \{\varepsilon\})^n = \cup_{i=0}^{n} L^i$

<u>Cas de base</u> $n = 0$ $(L + \{\varepsilon\})^0 = L^0$

$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$

<u>Induction</u> : On suppose $(L + \{\varepsilon\})^n = \cup_{i=0}^{n} L^i$ et on montre $(L + \{\varepsilon\})^{n+1} = \cup_{i=0}^{n+1} L^i$

On sait que
$$\begin{aligned}(L + \{\varepsilon\})^{n+1} &= (\cup_{i=0}^{n} L^i).(L \cup \{\varepsilon\}) \\ &= \cup_{i=0}^{n} [L^i.(L \cup \{\varepsilon\})] \\ &= \cup_{i=0}^{n} [(L^i.L) \cup (L^i.\{\varepsilon\})] \\ &= \cup_{i=0}^{n} [L^{i+1} \cup L^i] \\ &= \cup_{i=0}^{n+1} L^i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cup_{i=0}^{n} [L^i \cup L^{i+1}] &= L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots \cup L^n \cup L^{n+1} \\ &= \cup_{i=0}^{n+1} L^i\end{aligned}$$

4) Montrer $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$

<u>Sol</u> : $\emptyset^* = \{\varepsilon\} + \underbrace{\emptyset . L^*}_{\emptyset} = \{\varepsilon\}$

Exercice 2 :

A alphabet contenant b. Soit $X = \{b\}$ et $Y = (A \setminus \{b\}).\{b\}^*$

1) Décrire X^*, Y, Y^*

<u>Sol</u>. X^* : l'ensemble des mots (y compris le mot vide $\{\varepsilon\}$ car on a $*$) formés uniquement par la lettre "b"

Y : l'ensemble des mots non vide dont la 1ère lettre n'est pas un "b" et dont toutes les autres lettres sont des "b"

Y^* : $u \in Y$ ssi $u = v w$ avec $v \in A \setminus \{b\}$ et $w \in \{b\}^*$

Y^* est l'ensemble de mots formés du mot vide, tous les mots non vides qui ne commencent pas par "b"

Expl :

$$y \in Y^* \quad y = v_1 w_1 \cdot v_2 w_2 \cdot v_3 w_3 \ldots$$

pour aabbc :

$$v \, \varepsilon \, v' w \, v'' \, \varepsilon \rightarrow v = a$$

$$v' = a$$

$$w = bb$$

$$v'' = c.$$

2) Mq tout mot de A^* qui ne commence pas par "b" $\in Y^*$.

Sol° : Soit $u \in A^*$ dont la 1ère lettre est $\neq$ de "b", il s'écrit $u = v_1 b^{p_1} v_2 b^{p_2} \ldots v_n b^{p_n} v_{n+1} b^{p_{n+1}}$

$v_i \in A - \{b\}$. Chacun des mots $v_i b^{p_i}$ est un élément de Y, donc le mot $u \in Y^*$.