LU1IN005 - Mathématiques Discrètes - TD #2

Exercice 5:

$F = \mathbb{N} - \{0\}$ et la relation « x divise y »

1) Existe-t-il une borne inférieure et une borne supérieure pour tout sous-ensemble de deux éléments

Sol: Soit $A = \{a, b\}$,

→ la borne inférieure c'est leur pgcd et la borne supérieure c'est ppcm de a et b.

$A = \{6, 15, 21\}$ et $B = \{1, 6, 14, 21\}$

A: majorants : tous les multiples de ppcm(A) = ppcm(6, 15, 21)

= 210

Donc 210 et ses multiples (dans $\mathbb{N}$)

$6 = 2 \cdot 3$

$15 = 3 \cdot 5$

$21 = 7 \cdot 3$

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

minorants : tous les diviseurs du pgcd(6, 15, 21) = 3

$6 = 2 \cdot 3$

$15 = 3 \cdot 5$

$21 = 7 \cdot 3$

Donc les minorants sont 3 et 1

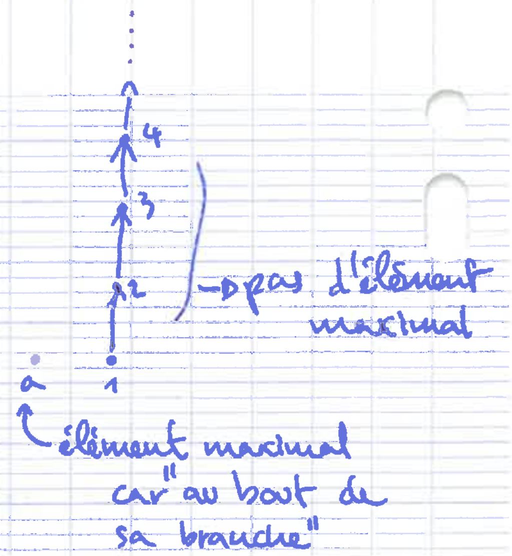
Il n'y a pas de plus petit ou plus grand élément

B : à faire

Exercice 6 :

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\quad i < i+1$

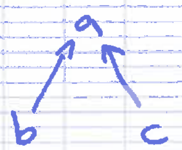
$\{a\} \cup \mathbb{N} = \{a, 1, 2, 3, \dots\}$



$\{$puissances de $2\} \cup \{3\}$
Relation « divise »

Exercice 7 :

$A = \{a, b, c\}$



Relation d'inclusion
$\mathcal{A}$ = tous les sous-ensembles non-vides totalement ordonnés de A.

Ensembles : $\{ \{a,b\}, \{a,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$

$\{b\} \longrightarrow \{a,b\} \longleftarrow \{a\} \longrightarrow \{a,c\} \longleftarrow \{c\}$

Exercice 8 :

① A^*, relation "préfixe" ; ordre total ou partiel ?

C'est un ordre partiel :

$u_1 u_2 \dots u_n \preceq v_1 v_2 \dots v_m$ si
$n \leq m$ et $\forall i \leq n, u_i = v_i$

plutôt trivial mais à démontrer

→ réflexive par cette définition : un mot est préfixe de lui même
→ anti-sym
→ transitive

partiel car non total car pour $A = (a, b, c)$
on ne peut comparer
a et b

② (A, ordre total $\preceq_A$)
définir l'ordre lexicographique sur A^*, ordre total ou partiel ?

Sol : l'ordre lexicographique $\preceq_{lex}$ sur A^* est un ordre total ;
défini comme :
Soit $(u = u_1 u_2 \dots u_n) \preceq_{lex} (v_1 v_2 \dots v_n = v)$ si
- soit u est préfixe de v : $u \preceq_{préf} v$
- soit u et v coïncident jusqu'à la position k et $u_{k+1} \neq v_{k+1}$ et $u_{k+1} \preceq_A v_{k+1}$.

③ $A = \{a, b\}$ tq $a \preceq_A b$

Mq $(A^*, \preceq_{lex})$ n'est pas bien fondé

Sol :
$(a^n b)_{n \in \mathbb{N}} = b \succeq ab \succeq aab \succeq aaab \succeq \dots$

$aab \preceq_{lex} ab$
$aaab \preceq_{lex} aab$

sur E^*, $a^3 = aaa$

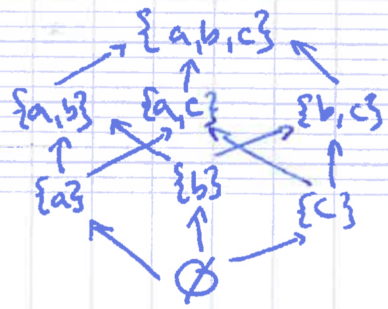
<u>Exercice 9 :</u> à faire

<u>Exercice 10 :</u>

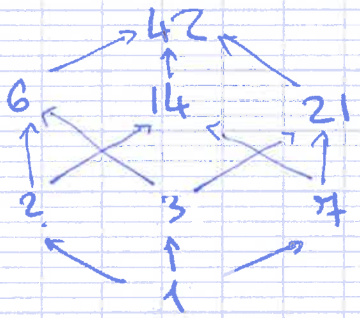
Mq $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$ et $(\{1,2,3,6,7,14,21,42\}, \text{« divise »})$ sont isomorphes.

<u>Sol :</u>

Ensemble $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$
Éléments : $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$
Paires Ordonnées :
$\emptyset \subseteq \{a\}$, $\emptyset \subseteq \{b\}$, ...



De même pour le second ensemble



On observe que les deux ensembles sont superposables.

Bijection:

$$\begin{aligned}
\emptyset &\longrightarrow 1\\
\{a\} &\longrightarrow 2\\
\{b\} &\longrightarrow 3\\
\{c\} &\longrightarrow 7\\
\{a,b\} &\longrightarrow 6\\
\{b,c\} &\longrightarrow 21\\
\{a,c\} &\longrightarrow 14\\
\{a,b,c\} &\longrightarrow 42
\end{aligned}$$

Monotonie: si $a \preceq b \Rightarrow f(a) \preceq f(b)$

Donc, les deux ensembles sont isomorphes car il existe une bijection monotone passant du premier vers le second.

Exercice 11: $(E, \preceq)$, A partie de E

① Si A admet un plus grand élément $\Rightarrow$ l'unique élément maximal.

Sol: • Supposons que A admet un plus grand élément $m \in A$ alors $\forall a \in A$, $a \preceq m$

Donc, $\forall a \in A$, si $m \preceq a$, alors $a = m$ (par anti-symétrie), alors m est maximal

- Montrons alors que m est unique :
  Soit m' un autre élément maximal.
  Alors $m' \preceq m$ car m est le plus grand élément.
  Mais comme m' est maximal on a aussi $m \preceq m'$
  Donc, par anti-symétrie, $m = m'$
  Donc, m est l'unique élément maximal.

→ La réciproque n'est pas vraie.
Soit $E = \mathbb{N} \cup \{a\}$ et $\preceq$ comme l'ordre usuel des naturels
Soit $A = E$, a n'est pas en relation avec les autres éléments, donc a est l'unique élément maximal.
Mais a n'est pas le plus grand élément, car (ex) $2 \npreceq a$.

② On suppose que $\preceq$ est $\boxed{\text{totale}}$
Mq si A admet un élément maximal, cet élément est unique, montrer que dans ce cas, cet élément est le plus grand élément

<u>Sol</u> : Pareil que la partie ① pour l'unicité
sinon, comme l'ordre est total, m est un majorant de A,
donc soit $a \in A$ si $m \preceq a$, alors $a = m$
Comme l'ordre est total, on peut comparer tous les élément de a avec m, donc pour tout $a \in A$ tq $m \npreceq A$, on a $m = a$
Donc, m est le plus grand élément.

TD 3 : Induction sur $\mathbb{N}$

Exercice 1 : Mq, pour $n \geq 2$,

$$(1)\quad \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$$

$$(2)\quad \overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}$$

Sol : • Cas de base : $n=2$

$$\left.\begin{aligned} \overline{A_1 \cup A_2} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \\ \overline{A_1 \cap A_2} &= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \end{aligned}\right\}$$ Lois de Morgan (par définition)

• Induction :

(1) Supposons : $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_{n-1}}$

Montrons : $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n}$
$= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$

→ Démonstration sur site web.

ⓘ pgcd et ppcm, explications sur site

Soit $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}$, on a

$$\overline{A \cup A_n} = \overline{A} \cap \overline{A_n} \quad \text{(cas de base)}$$
$$= (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}}) \cap \overline{A_n} \quad (\text{H.I.})$$

(2) Même résonnement.

Exercice 2 : $a \in \mathbb{Z}$, $P_a(n)$ la propriété « $9 \mid (10^n + a)$ »

Mq pour tout entier a et tout $n \in \mathbb{N}$, que $P_a(n)$ implique $P_a(n+1)$. ← Partie inductive

A-t-on $P_a(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ← Nécessite de trouver cas de base

Sol : • Supposons $P_a(n)$ vraie, donc $9 \mid (10^n + a)$

$9 \mid (a-b)$
et $9 \mid b \Rightarrow 9 \mid a$

$$(10^{n+1}+a) - \underbrace{(10^n+a)}_{9 \mid \text{ par déf.}} = 10 \cdot 10^n - 10^n$$
$$= 10^n(10-1)$$
$$= \underbrace{10^n(9)}_{9\mid}$$

$\Rightarrow 9 \mid (10^{n+1}+a)$

Donc, $P_a(n) \Rightarrow P_a(n+1)$ ✓

• Est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Pour que $P_a(n)$ soit vraie $\forall n \in \mathbb{N}$, il faut que $P_a(n)$ soit vraie pour le cas de base $n=0$:
soit $9 \mid (10^0 + a) \Rightarrow 9 \mid (1+a)$.
Si $a = -1$ on a $P_{-1}(n)$, en fait si $a = -1 \bmod 9$ $= 8 \bmod 9$
$P_a(n)$ est vraie, mais, si $a \neq 8 \bmod 9$,
alors $P_a(n)$ n'est pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : à faire

Exercice 4 : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

Polynome caractéristique :
$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_d a_{n-d}$$
$$p(r) = r^d - c_1 r^{d-1} - c_2 r^{d-2} - \ldots - c_d$$

Ici, $p(r) = r^2 - r - 1$.

Si on fait $r^2 - r - 1 = 0$ et on trouve les racines :
$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$F_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

α et β se trouvent avec $F_0 = \alpha + \beta$

$F_1 = \alpha r_1 + \beta r_2$

---

① Mq $\forall n > 0$, $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$

Sol: • Cas de base : $n = 1$

On a $F_1 = F_2$, c-à-d $1 = 1$ ✓

• Induction :

Notez que $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n}$

et on suppose que $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$

On deduit :

$$(F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1}) + F_{2n+1} = F_{2n+2} = F_{2(n+1)}$$

Donc, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ✓

$\rightarrow$ Pour la fin du TD2 et quelques exercices d'induction, consultez le site en fin de semaine.