Mémoire de M2

Surfaces Canoniquement Plongées de Grands Degrés

Auteur :
Pedro Javier Ortiz Suárez

Directeur :
M. Xavier Roulleau

Université d'Aix-Marseille
Marseille, France
11 avril 2017

Introduction

Dans un article récent [Cat16], Catanese construit des surfaces de type général, dont le morphisme canonique est un plongement dans $\mathbb{P}^5$ et avec un premier nombre de Chern élevé : $K_S^2 = 24$. C'est actuellement la surface ayant le K_S^2 le plus élevé connue à ce jour possédant cette propriété.

Le but de ce mémoire est de d'étudier la construction de Catanese. Pour cela, on pourra il faudra étudier certains chapitres des livres de Barth, Peters, Van de Ven [BHPVdV04] et Beauville [Bea96], qui forment les prérequis indispensables. Tout ou partie du mémoire peut d'ailleurs être axée sur ces deux livres.

Enfin, si le temps le permet, il faudrait regarder la problématique de Catanese pour une surface construite par Krämer [Kra13], qui a pour invariant $K^2 = 48$ et qui par sa construction pourrait être une bonne candidate à être plongée canoniquement dans $\mathbb{P}^6$.

Table des matières

Chapitre 1

Concepts de base et définitions

1.1 Préliminaires

Notre objectif principal dans ce texte sera d'étudier certaines surfaces de type général et ses propriétés. Alors, on va commencer par définir l'objet le plus élémentaire avec lequel on va à travailler, une surface.

Définition 1.1.1. Nous appellerons *surface* à toute variété algébrique projective lisse de dimension 2 sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.2. Soit X une variété lisse complexe, nous noterons par $\mathcal{O}_X$ le *faisceau structural* sur X et par $\mathcal{T}_X$ le *fibré tangent* (holomorphe) sur X. Nous noterons aussi par Ω^i_X le *faisceau des germes de i-formes différentielles holomorphes*, i.e., le faisceau des sections du fibré $\bigwedge^i \mathcal{T}_X^\vee$ avec $i \geq 1$.

Définition 1.1.3. Soit X une variété lisse complexe, et Y une sous-variété de X, on note par $\mathcal{N}_{Y/X}$ le *fibré normal* défini par la suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_Y \longrightarrow \mathcal{T}_X|_Y \longrightarrow \mathcal{N}_{Y/X} \longrightarrow 0.$$

Remarque 1.1.4. Soit X une variété complexe et $\mathcal{V}$ un faisceau cohérent, nous savons que $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{V})$ est un espace vectoriel de dimension finie, alors nous noterons par $h^i(X, \mathcal{V}) = h^i(\mathcal{V})$ la dimension de $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{V})$. Alors, nous noterons $q(X) = h^1(\mathcal{O}_X)$ et $p_g(X) = h^0(\mathcal{K}_X)$ (le *genre géométrique*). Nous noterons aussi

$$\chi(X, \mathcal{V}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i h^i(\mathcal{V})$$

la *caractéristique de Euler*, où $\chi(X, \mathcal{O}_X) = \chi(X)$.

Maintenant, nous pouvons définir deux des concepts les plus importants qu'on va étudier tout au long de ce texte.

Définition 1.1.5. Soit X une variété lisse complexe, on définit le fibré canonique associé à X, c'est-à-dire, le fibré holomorphe en droites, comme $\mathcal{K}_X = \bigwedge^n \mathcal{T}_X^\vee$. On va noter les diviseurs canoniques par K_X, donc $\mathcal{K}_X = \mathcal{O}_X(K_X)$.

Avant de définir qu'est-ce qu'une surface de type général, nous devons définir d'abord la *Dimension de Kodaira*. Pour faire ça, considérons la définition suivante.

Définition 1.1.6. Soit X une variété complexe et compacte. Étant donné l'application

$$\Gamma\left(X, \mathcal{K}_X^{\otimes n_1}\right) \otimes \Gamma\left(X, \mathcal{K}_X^{\otimes n_2}\right) \longrightarrow \Gamma\left(X, \mathcal{K}_X^{\otimes (n_1+n_2)}\right).$$

Nous définissons *l'anneau canonique* de X comme

$$R(X) = \mathbb{C} \oplus \sum_{n \geq 1} \Gamma\left(X, \mathcal{K}_X^{\otimes n}\right).$$

$R(X)$ est un anneau commutative avec unité. Il peut être prouvé que $R(X)$ a un degré de transcendance, $\operatorname{tr}(R(X))$, finie sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.7. Soit X une variété complexe et compacte, nous définissons la *Dimension de Kodaira* de X, $\operatorname{kod}(X)$, comme

$$\operatorname{kod}(X) = \begin{cases} -\infty & \text{si } R(X) \cong \mathbb{C}, \\ \operatorname{tr}(R(X)) - 1 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On peut montrer qu'on a toujours $\operatorname{kod}(X) \leq \dim(X)$.

Un autre concept important est celui du « *Plurigenre* ».

Définition 1.1.8. Soit X une variété complexe, on définit $P_m(X) = h^0\left(\mathcal{K}_X^{\otimes m}\right)$ le m-ième plurigenre de X. En particulier on a $P_1(X) = p_g(X)$.

La dimension de Kodaira et les plurigenres sont étroitement liés. Nous énoncerons les résultats suivantes sur la dimension de Kodaira et les plurigenres sans démonstration (vous pouvez trouver leurs preuves dans [Uen75]).

Théorème 1.1.9. *Soit X une variété complexe, compacte et connexe*

1.) $\operatorname{kod}(X) = -\infty$ *si et seulement si* $P_m(X) = 0$ *pour tout* $m \geq 1$.

2.) $\operatorname{kod}(X) = 0$ *si et seulement si* $P_m(X) = 0$ *ou* $P_m(X) = 1$ *pour tout* $m \geq 1$*, mais pas égal à zero pour tout* m.

3.) $\operatorname{kod}(X) = k$ *où* $1 \leq k \leq \dim(X)$*, si et seulement si il y a* $\alpha, \beta > 0$ *réels tels que pour* m *assez grand,* $\alpha m^k < P_m(X) < \beta m^k$.

Théorème 1.1.10. *Si X_1 et X_2 sont deux variétés complexes, compactes et connexes, alors* $\operatorname{kod}(X_1 \times X_2) = \operatorname{kod}(X_1) + \operatorname{kod}(X_2)$.

Ayant tout cela, nous pouvons procéder à définir notre objet principal d'étude.

Définition 1.1.11. Soit S une surface complexe, projective et lisse. On appelle S une *surface de type général* si $\operatorname{kod}(X) = 2$. Plus généralement, soit X une variété complexe de dimension n, on dit que X est de type général si $\operatorname{kod}(X) = n$.

Il y a une autre maniéré de définir la dimension de Kodaira, afin de l'énoncer, rappelons la définition suivante

Définition 1.1.12. Soient X une variété irréductible et Y une variété quelconque. Une application rationnelle $\varphi : X \to Y$ est un morphisme d'un ouvert U de X dans Y qui n'est pas la restriction d'un autre morphisme $\varphi' : U' \to Y$ avec $U' \supsetneq U$. Nous disons que φ est définie en x si $x \in U$.

Et ainsi, nous définissons la dimension de Kodaira en termes des applications rationnelles

Définition 1.1.13. Soit V une variété projective lisse, soit K un diviseur canonique de V, et ϕ_{nK} l'application rationnelle de V dans un espace projectif associée au système $|nK|$. La dimension de Kodaira, $\mathrm{kod}(V)$, est

$$\mathrm{kod}(V) = \max_{n \geq 1} \dim \varphi_{nK}(V),$$

la dimension maximum des images de $\varphi_{nK}(V)$, avec $n \geq 1$.

Vous pouvez trouver l'equivalence entre les deux définitions de la dimension de Kodaira que nous avons donné dans [Uen75].

Nous étudierons la dimension de Kodaira plus en détail plus tard lorsque nous étudierons la classification de Enriques-Kodaira des surfaces.

Chapitre 2

Théorie d'Intersection

2.1 Groupe de Chow

Maintenant, l'un des résultats les plus importants que nous connaissons pour les courbes est le théorème de Riemann-Roch

Théorème 2.1.1 (Riemann-Roch)**.** *Soit D un diviseur sur une courbe C de genre g, alors*

$$\dim \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(D)\right) - \dim \mathrm{H}^1\left(C, \mathcal{O}_C(D)\right) = \deg D + 1 - g.$$

Ou en termes de la caractéristique d'Euler,

$$\chi\left(C, \mathcal{O}_C(D)\right) = \deg D + 1 - g.$$

Ce théorème a de nombreuses implications en géométrie algébrique, comme la classification de courbes algébriques ; ainsi qu'en l'analyse complexe et le étude de surfaces de Riemann.

Notre but dans cette section et dans les deux suivantes, sera de généraliser ce résultat à les surfaces et plus généralement à toute variété de dimension n. En fait nous allons généraliser le théorème pour $\chi(X, \mathcal{E})$, où $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent localement libre. Afin de généraliser l'expression à droite dans le théorème de Riemann-Roch nous avons besoin d'une *théorie d'intersection* sur une variété X ; par exemple, l'intersection de deux diviseurs n'est pas un nombre entier dans ce cas, donc nous devons définir cet intersection là pour des variétés. Nous devons aussi introduire quelques invariants plus générales que le genre géométrique. Alors, Nous commençons par définir le concept des *cycles*.

Définition 2.1.2. Soit X une variété algébrique sur un corps k algébriquement clos. Un *cycle de codimension* r sur X est un élément du groupe abélienne libre engendré par les sous-variétés fermés irréductibles de X de codimension r. Nous écrivons un cycle comme

$$Y = \sum n_i Y_i$$

où les Y_i sont des sous-variétés et $n_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i.

Maintenant, on définit des applications entre ces cycles associes à une application $f : X \to X'$ des variétés.

Définition 2.1.3 (Poussé en avant)**.** Soit $f : X \to X'$ un morphisme de variétés, et soit Y une sous-variété de X, on définit

$$f_*(Y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim f(Y) < \dim Y, \\ [K(Y) : K(f(Y))] \cdot \overline{f(Y)} & \text{si } \dim f(Y) = \dim Y, \end{cases}$$

f_* se prolonge linéairement pour obtenir un homomorphisme du groupe de cycles de X à le groupe de cycles de X'.

Avant de poursuivre notre discussion sur la théorie d'intersection, nous rappelons la définition suivante

Définition 2.1.4. Soit X une variété, on dit que X est normal au point p, si $\mathcal{O}_p$ est un anneau intégralement clos. On dit que X est normal si elle est normal à chaque point. Pour toute variété X il existe une variété affine et normal $\widetilde{X}$, et un morphisme $\pi : \widetilde{X} \to X$ tel que, pour toute variété normal Y et $\varphi : Y \to X$ un morphisme dominant, alors il y a un unique morphisme $\theta : Y \to \widetilde{X}$ tel que

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\theta"] \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

commute. On appelle $\widetilde{X}$ la normalisation de X.

On retourne maintenant sur la théorie d'intersection. Soit X une variété et V une sous-variété de X. Considérons $f : \widetilde{V} \to V$ la normalisation de V afin que on peut parler de diviseurs de Weil sur $\widetilde{V}$. Alors, soient D et D' deux diviseurs de Weil linéairement équivalentes, on dit que f_*D et f_*D' sont des cycles *rationnellement équivalentes* sur X et on écrit $f_*D \sim f_*D'$.

Définition 2.1.5. Soit X une variété, nous définissons *équivalence rationnelle* des cycles sur X comme la relation d'équivalence engendré par tous les cycles tels que $f_*D \sim f_*D'$ pour toutes les sous-variétés V de X, et tous les diviseurs de Weil D, D' sur $\widetilde{V}$ linéairement équivalentes. En particulier si X est normal, alors la équivalence rationnelle pour les cycles de codimension 1, coïncide avec l'équivalence linéaire des diviseurs de Weil.

Définition 2.1.6. Soit X une variété, nous définissons *Groupe de Chow* $A^r(X)$ comme le groupe des cycles de codimension r modulo équivalence rationnelle. Nous notons par

$$A(X) = \bigoplus_{r=0}^{n} A^r(X)$$

le groupe gradué, où $n = \dim X$.

Remarque 2.1.7. Remarquez que $A^0(X) = \mathbb{Z}$ et $A^r(X) = 0$ pour tour $r > \dim X$. Remarquez aussi que si X est complet, alors il y a un morphisme naturel

$$\begin{aligned} \deg : A^n(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sum n_i p_i &\longmapsto \deg\left(\sum n_i p_i\right) = \sum p_i, \end{aligned}$$

où les p_i sont des points.

Définition 2.1.8. Soit X une variété et $Y, Z \subseteq X$ deux sous-variétés, nous disons que Y et Z s'intersectent proprement si toute composante irréductible de $Y \cap Z$ a de codimension égal à $\operatorname{codim} Y + \operatorname{codim} Z$.

Définition 2.1.9. Soit X une variété et considérons l'application $A^r(X) \times A^s(X) \to A^{r+s}(X)$. Soient $Y \in A^r(X)$ et $Z \in A^s(X)$ deux cycles, nous notons par $Y.Z$ leur *classe du cycle de intersection.*

Pour une classe de variétés $\mathfrak{B}$, une théorie d'intersection sera précisément de considérer une liste d'axiomes sur l'application $A^r(X) \times A^s(X) \to A^{r+s}(X)$ qu'on énoncera après la définition suivante.

Définition 2.1.10. Soient X et X' deux variétés, $Y' \subseteq X'$ une sous-variété, et $f : X \to X'$ un morphisme ; soient aussi $p_1 : X \times X' \to X$ et $p_2 : X \times X' \to X'$ les projections, et notons par Γ_f le graphe de f. On définit le homomorphisme $f^* : A(X') \to A(X)$ par

$$f^*(Y) = p_{1*}\left(\Gamma_f . p_2^{-1}(Y')\right),$$

où on considère Γ_f comme un cycle sur $X \times X'$.

Maintenant, nous énoncions les axiomes comme une théorème.

Théorème 2.1.11. *Soit $\mathfrak{B}$ une classe de variétés lisses quasi-projectives sur un corps algébriquement clos k. Il existe une théorie d'intersection unique pour les cycles modulo équivalence rationnelle sur les variétés $X \in \mathfrak{B}$ satisfaisant les axiomes A1-A7 suivantes.*

(A1) L'application $A^r(X) \times A^s(X) \to A^{r+s}(X)$ munit $A(X)$ d'une structure d'anneau gradué commutatif avec d'unité pour toute variété $X \in \mathfrak{B}$. On appelle $A(X)$ *l'Anneau de Chow.*

(A2) Pour tout morphisme $f : X \to X'$ de variétés dans $\mathfrak{B}$, $f^* : A(X') \to A(X)$ est une homomorphisme d'anneaux ; de plus, si $g : X' \to X''$ est autre morphisme de variétés, alors

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

(A3) Soit $f : X \to X'$ un morphisme propre de variétés dans $\mathfrak{B}$, alors $f_* : A(X) \to A(X')$ est un morphisme de groupes gradués, et si $g : X' \to X''$ est un autre morphisme, alors

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

(A4) *Formule de projection.* Soit $f : X \to X'$ un morphisme propre de variétés dans $\mathfrak{B}$, si $x \in A(X)$ et $y \in A(X')$, alors

$$f_*(x.f^*y) = f_*(x).y.$$

(A5) *Réduction à la diagonal.* Soient Y et Z des cycles sur une variété X, et soit $\Delta : X \to X \times X$ le morphisme diagonal, alors

$$Y.Z = \Delta^*(Y \times Z).$$

(A6) *Nature local.* Soit X une variété et $Y, Z \subseteq X$ deux sous-variétés que s'intersectent proprement, alors on peut écrire

$$Y.Z = \sum i(Y, Z; W_j) W_j,$$

où la somme couvre toutes les composantes irréductibles W_j de $Y \cap Z$, et où l'entière $i(Y, Z; W_j)$ dépend seulement du voisinage du point générique de W_j sur X. On appelle $i(Y, Z; W_j)$ la *multiplicité local d'intersection* de Y et Z sur W_j.

(A7) *Normalisation.* Soit X une variété, Y une sous-variété et Z un diviseur de Cartier effective qui intersecte Y proprement, alors $Y.Z$ est le cycle associé au diviseur de Cartier $Y \cap Z$ sur Y, qui est définie en restreignant l'équation local de Z à Y.

Vous pouvez trouver une démonstration du théorème ci-dessous dans les chapitres 1 et 2 de [Ful98]. Soit X une variété lisse quasi-projective, on va ajouter quelques propriétés sur l'anneau de Chow $A(X)$ à les axiomes précédentes.

(A8) Remarquons que les cycles de codimension 1 sont des diviseurs de Weil, et que l'équivalence rationnelle est exactement l'équivalence linaire des diviseurs, alors $A^1(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$.

(A9) Soit $\mathbb{A}^m$ un espace affin, alors la projection $p : X \times \mathbb{A}^m \to X$ induit un isomorphisme $p^*A(X) \to A(X \times \mathbb{A}^m)$

(A10) *Exactitude.* Soit X une variété, Y une sous-variété fermé lisse de X et $U = X - Y$, alors il y a une suite exacte

$$A(Y) \xrightarrow{i_*} A(X) \xrightarrow{j^*} A(U) \longrightarrow 0$$

où $i : Y \to X$ est une inclusion et $j : U \to X$ est l'autre.

(A11) Soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre du rang r sur X, soit $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ le fibré du espace projectif associé, et soit $\xi \in A^1(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ la classe du diviseur correspondant à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$. soit $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ la projection, alors π^* munit $A(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ d'une structure de $A(X)$-module libre engendré par $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{r-1}$.

Il faut ajouter la définition du fibré du espace projectif associé

2.2 Classes de Chern

Ayant défini les groupes et l'anneau de Chow, et ayant énoncé ses propriétés, nous avons tous les outils pour définir les classes de Chern.

Définition 2.2.1. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre du rang r sur une variété quasi-projective X. Pour chaque $i = 0, 1, \dots, r$ nous définissons la i-éme *Classe de Chern* comme une classe $c_i(\mathcal{E}) \in A^i(X)$ tel que $c_0(\mathcal{E}) = 1$ et

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \pi^* c_i(\mathcal{E}).\xi^{r-1} = 0$$

dans $A^r(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$, en utilisant la notation de (A11). Nous définissons aussi la *classe de Chern total* comme

$$c(\mathcal{E}) = c_0(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E}) + \cdots + c_r(\mathcal{E})$$

et le *polynôme de Chern* comme

$$c_t(\mathcal{E}) = c_0(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E})t + \cdots + c_r(\mathcal{E})t^r.$$

Les classes de Chern satisfont les axiomes suivantes

(C1) Soit X une variété et D une diviseur sur X. Supposons $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X(D)$, alors

$$c_t(\mathcal{E}) = 1 + Dt.$$

En effet, dans ce cas là $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = X$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) = \mathcal{O}_X(D)$, ainsi $\xi = D$, donc par définition $1.\xi - c_1(\mathcal{E}).1 = 0$, et par conséquence $c_1(\mathcal{E}) = D$.

(C2) *Tiré en arrière.* Soit $f : X' \to X$ un morphisme, et $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre sur X, alors pour chaque i on a
$$c_i(f^*\mathcal{E}) = f^*c_i(\mathcal{E}).$$

(C3) *Somme de Whitney.* Soit $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ une suite exacte courte de faisceaux localement libres sur X, alors
$$c_t(\mathcal{E}) = c_t(\mathcal{E}') \cdot c_t(\mathcal{E}''),$$
i.e.,
$$c_k(\mathcal{E}) = \sum_{i+j=k} c_i(\mathcal{E}') \cdot c_j(\mathcal{E}'').$$

En fait, si nous supposons $c_0(\mathcal{E}) = 1$, il est possible de montrer qu'il y a une seule théorie des classes de Chern en satisfaisant (C1)-(C3) ; cela nous permet de redéfinir les classes de Chern $c_i(\mathcal{E})$ que en utilisant les axiomes ci-dessous. Nous n'allons pas montrer ce résultat (vous le pouvez trouver dans [Ful98], remarque 3.2.1), mais nous parlerons de l'un des principaux ingrédients de sa preuve.

Lemme 2.2.2 (Principe de scission)**.** *Étant donné un faisceau localement libre du rang r $\mathcal{E}$, sur X une variété lisse quasi-projective. Il existe une variété X' et un morphisme $f : X' \to X$ tels que*

(C1) $f^* : A(X') \to A(X)$ est injectif, et

(C2) $f^*\mathcal{E}$ se scinde, c'est-à-dire, $f^*\mathcal{E}$ a une filtration
$$f^*\mathcal{E} = \mathcal{E}_r \supseteq \mathcal{E}_{r-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{E}_1 \supseteq \mathcal{E}_0 = 0,$$
tel que les quotients successifs $\mathcal{L}_i = \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ sont des faisceaux inversibles (fibrés en droites).

(C3) En utilisant la notation de b), le polynôme de Chern peut être écrit comme
$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r} c_t(\mathcal{L}_i)$$

Comme avant, vous pouvez trouver la démonstration du lemme ci dessous dans [Ful98] lemme 3.2.

Remarque 2.2.3. Si nous utilisons le même raisonnement que en (C1), et la partie c) du lemme ci dessous, nous pouvons récrire le polynôme de Chern comme
$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r}(1 + a_i t)$$
où les $a_i, \ldots, a_r$ sont des symboles purement formels, ces symboles sont appelles les *racines de Chern* de $\mathcal{E}$. En d'autres termes, les classes de Chern de $\mathcal{E}$ sont des fonctions symétriques élémentaires de $a_i, \ldots, a_r$. Une manière plus simple de comprendre ces racines, est d'utiliser le principe de scission, si $f^*\mathcal{E}$ est filtré avec des quotients de faisceaux inversibles (fibrés en droites), alors
$$c_t(f^*\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r}(1 + a_i t),$$
où $a_i = c_1(\mathcal{L}_i)$.

Étant donné les axiomes (C1)-(C3) et le remarque 2.2.3, nous pouvons calculer maintenant les classes de Chern pour les duales des faisceaux localement libres. Nous le ajoutons comme un quatrième axiome :

(C4) Soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre de rang r. Alors

$$c_i\left(\mathcal{E}^\vee\right) = (-1)^i c_i(\mathcal{E}).$$

Nous pouvons aussi calculer les polynômes de Chern pour les produits tensoriels et les produits extérieurs. Nous ajoutons ces calcules comme un autre axiome.

(C5) Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux faisceaux localement libres de rang r et s respectivement. Écrivons

$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r}(1+a_i t) \qquad \text{et} \qquad c_t(\mathcal{F}) = \prod_{i=1}^{s}(1+b_i t)$$

où $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ sont de symboles formels. Alors

$$\begin{aligned} c_t(\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}) &= \prod_{i,j}(1+(a_i+b_j)t) \\ c_t\left(\bigwedge^p \mathcal{E}\right) &= \prod_{1\leq i_1\leq\cdots\leq i_p\leq r}(1+(a_{i_1}+\cdots+a_{i_p})t) \end{aligned}$$

Pour plus de détails sur (C4) et (C5), vous pouvez regarder [Ful98] remarque 3.2.3.

Maintenant, on ajoute un dernier fait sur les classes de Chern comme un axiome qui sera très utile plus tard dans la deuxième partie du texte.

(C6) Soit X une variété lisse et Y une sous-variété lisse de X de codimension r. Soit $\mathcal{N}_{Y/X}$ le fibré normal et $i : Y \to X$ l'inclusion. Alors

$$i^* i_*(1_Y) = c_r\left(\mathcal{N}_{Y/X}\right)$$

Ce résultat grâce à Mumford [? ? ?]. On peut utiliser ce formule à fin d'obtenir une expression explicite pour $i_*\left(c_r\left(\mathcal{N}_{Y/X}\right)\right)$

$$\begin{aligned} i_*\left(c_r\left(\mathcal{N}_{Y/X}\right)\right) &= i_*\left(1_Y.c_r\left(\mathcal{N}_{Y/X}\right)\right) \\ &= i_*\left(1_Y.i^*i_*(1_Y)\right) \end{aligned}$$

En utilisant la *formule de projection* (A4), on obtient

$$\begin{aligned} i_*\left(c_r\left(\mathcal{N}_{Y/X}\right)\right) &= i_*\left(1_Y.i^*i_*(1_Y)\right) \\ &= i_*\left(1_Y\right).i_*(1_Y) \\ &= Y.Y. \end{aligned}$$

Pour conclure cette section, nous introduisons un dernier élément de $A(X)\otimes\mathbb{Q}$ lié à les classes de Chern.

Définition 2.2.4. Soit X une variété lisse et $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre du rang r sur X, on définit le *caractère de Chern*, $\mathrm{ch}(\mathcal{E})$ comme

$$\mathrm{ch}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{r} e^{a_i},$$

où $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ et $a_1, \ldots, a_r$ son les racines de Chern de $\mathcal{E}$. On peut calculer les premiers termes

$$\mathrm{ch}(\mathcal{E}) = r + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) + \frac{1}{24}(c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4) + \cdots .$$

où $c_i = c_i(\mathcal{E})$ et $c_i = 0$ si $i > r$.

2.3 Théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch

Nous avons maintenant presque tous les outils pour comprendre les généralisations du théorème de Riemann-Roch. Cependant nous devons introduire une dernier invariant avant d'énoncer ces généralisations.

Définition 2.3.1. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre de rang r, nous définissons la *classe de Todd* de $\mathcal{E}$, $\mathrm{td}(\mathcal{E})$ comme

$$\mathrm{td}(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r} Q(a_i)$$

où $a_1, \ldots, a_r$ sont les racines de Chern de $\mathcal{E}$ et

$$Q(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} x^{2k},$$

où B_k sont les nombres de Bernoulli [???]. Nous pouvons calculer les premier termes.

$$\mathrm{td}(\mathcal{E}) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}(c_1c_2) + -\frac{1}{720}(c_1^4 - 4c_1^2c_2 - 3c_c^2 - c_1c_3 + c_4) + \cdots$$

où $c_i = c_i(\mathcal{E})$ et $c_i = 0$ si $i > r$.

Théorème 2.3.2 (Hirzebruch-Riemann-Roch)**.** *Soit X une variété algébrique projective et lisse de dimension n et soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre de rang r. Alors*

$$\chi(X, \mathcal{E}) = \deg\left(\mathrm{ch}(\mathcal{E}).\,\mathrm{td}(\mathcal{T}_X)\right)_n$$

où $(\ )_n$ est la composante de degré n dans $A(X) \otimes \mathbb{Q}$.

Ce théorème a d'abord été prouvé par Friedrich Hirzebruch pour le cas où X est une variété sur $\mathbb{C}$, après il a été généralise par Alexander Grothendieck pour les corps algébriquement clos. Malheureusement, la preuve de ce théorème est bien au-delà de la portée de ce texte. Toutefois, vous pouves trouver la preuve du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch dans [Ful98] théorème 15.2 et comme corollaire, la preuve du théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch dans le corollaire 15.2.2.

Maintenant, nous pouvons retourner sur notre discussion sur les surfaces en appliquant le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch pour obtenir quelques résultats importantes sur les surfaces.

Remarque 2.3.3. Soit S une surface, nous noterons par c_1 et c_2 ou par $c_1(S)$ et $c_2(S)$ les classes de Chern associés au fibré tangent $\mathcal{T}_S$. Notons que le fibré tangent ne dépend que de S, donc les classes $c_1(\mathcal{T}_S)$ et $c_2(\mathcal{T}_S)$ dépend seulement de X.

Théorème 2.3.4 (Formule de Noether)**.** *Soit S une surface, alors*

$$\chi(S) = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2).$$

Ou autrement dit,

$$1 - q(S) + p_g(S) = \frac{1}{12}(K_S^2 + c_2). \tag{2.1}$$

où K_S est le diviseur canonique de S.

Démonstration. Premièrement, notons que par (C5),

$$c_1\left(\mathcal{T}_S^\vee\right) = c_1\left(\bigwedge^2 \mathcal{T}_S^\vee\right) = c_1(\mathcal{K}_S) = c_1(\mathcal{O}_S(K_S)) = K_S.$$

Alors, par (C4) nous avons $c_1(\mathcal{T}_S) = -K_S$. En utilisant $c_1 = -K_S$ et c_2 nous écrivons la classe de Todd du fibré tangent

$$\mathrm{td}(\mathcal{T}_S) = 1 - \frac{1}{2}K_S + \frac{1}{12}(K_S^2 + c_2),$$

et le caractère de Chern de $\mathcal{O}_S(D)$

$$\mathrm{ch}(\mathcal{O}_S(D)) = 1 + D + \frac{1}{2}D^2$$

Maintenant, soit D un diviseur quelconque sur S, nous notons par D^2 tant sa classe dans $A^2(X)$ que son degré, et nous écrivons l'équation du théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch 2.3.2 pour ce cas

$$\chi\left(\mathcal{O}_S(D)\right) = \frac{1}{2}D.(D - K_S) + \frac{1}{12}(K_S^2 + c_2).$$

En particulier, si $D = 0$ nous avons

$$\chi\left(\mathcal{O}_S\right) = \chi(S) = \frac{1}{12}(K_S^2 + c_2),$$

et par définition de $\chi(X)$

$$1 - q(S) + p_g(S) = \frac{1}{12}(K_S^2 + c_2).$$

□

Remarque 2.3.5. Soit X une variété complexe compacte de dimension n, alors la caractéristique d'Euler topologique est égal à la dernier classe de Chern associé au fibré tangent

$$\chi(X) = \chi(X, \mathcal{O}_X) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i h^i(\mathcal{O}_X) = c_n(\mathcal{T}_X).$$

Vous pouvez une démonstration dans le livre de Fulton [Ful98] Exemple 18.3.7.

Ce fait nous permet de récrire la Formule de Noether du théorème 2.3.4 comme

$$1 - q(S) + p_g(S) = \frac{1}{12}\left(K_S^2 + \chi(S)\right),$$

par certaine surface S.

Chapitre 3

Variété Abélienne

3.1 Définition

On va commencer par définir quelques concepts importantes

Définition 3.1.1. Soit V une variété algébrique, on dira que V est une *variété complète* si pour toute variété Y la projection

$$p_2 : V \times Y \longrightarrow Y$$

est une application fermée.

Définition 3.1.2. Un *groupe algébrique* sur un corps k est une variété algébrique V sur k avec des applications régulières

$$\begin{aligned} m : V \times V &\longrightarrow V && \text{(multiplication)} \\ \mathrm{inv} : V &\longrightarrow V && \text{(inverse)} \end{aligned}$$

et un élément $e \in V(k)$ tel que l'structure sur $V(\overline{k})$ défini par m et inv est un groupe avec élément neutre e.

Une quadruple (V, m, inv, e) est un groupe dans la catégorie de variétés sur k. On peut regarder les propriétés du groupe (V, m, inv, e) dans le diagramme suivante :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(\mathrm{id},e)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "(e,\mathrm{id})"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ & G \end{tikzcd}$$

C'est-à-dire e est l'élément neutre et l'inverse est équivalente à la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d] & & G \times G \arrow[r, shift left, "\mathrm{id} \times \mathrm{inv}"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{inv} \times \mathrm{id}"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ \mathrm{Specm}(k) \arrow[rrr, "e"] & & & G \end{tikzcd}$$

où Δ est l'application diagonal, donc inv envoie un élément à son inverse. Finalement la associativité est équivalent à la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "1\times m"] \arrow[d, "m\times 1"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd}$$

Par suite, on a que pour toute k-algèbre R, $V(R)$ a une structure du groupe qui dépend fonctoriellement de R

Définition 3.1.3. Soit V un groupe algébrique sur k. Pour tout point a de V avec des coordonnes dans k, nous définissons la *translation à droite par* a, $t_a : V \to V$ comme le composite

$$\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & V \times V & \xrightarrow{m} & V. \\ x & \longmapsto & (x, a) & \longmapsto & xa \end{array}$$

Donc, sur les points, t_a est seulement l'application $x \mapsto xa$. La *translation à droite par* a is an isomorphisme $V \to V$ avec de l'inverse $t_{\mathrm{inv}(a)}$.

Définition 3.1.4. Soit A un groupe algébrique, nous disons que A est une *variété abélienne* si A est complète et connexe.

Chapitre 4

Revêtements

4.1 Ramification

Avant d'étudier la notion de « *Ramification* » nous rappelons quelques concepts importantes.

Définition 4.1.1. Soient X et Y deux espaces topologiques, et soit $\pi : X \to Y$ une application continue et surjective entre eux. Nous disons que le triple (X, Y, π) est un *revêtement topologique* si pour tout $y \in Y$ existe un ouvert connexe V_y tel que son image réciproque par π est une union disjointe d'ouverts de X, chacun homéomorphe à V_y.

Définition 4.1.2. Soit X une variété affine irréductible, nous disons que X est normal si $k[X]$ l'anneau de coordonnes de X est intégralement clos. Une variété quasi-projective irréductible X est normal si tout point $x \in X$ a un ouvert affine normal.

Définition 4.1.3. Soit (X, Y, π) un *revêtement topologique*, on appelle (X, Y, π) un *revêtement analytique* si X et Y sont variétés complexes et $\pi : X \to Y$ est une application holomorphe et surjective.

Définition 4.1.4. On appellera simplement par *revêtement*, tout triple (X, Y, π) tel que X et Y soient variétés complexes normales et tel que π soit un morphisme propre, finie et surjective.

Nous rappelons qu'est-ce que c'est le *degré* d'un morphisme

Définition 4.1.5. Soient X et Y deux variétés complexes de la même dimension, et soit $f : X \to Y$ une application régulière telle que $f(X)$ est dense dans Y. Le *degré* de l'application f est défini comme

$$\deg f \overset{\text{déf}}{=} [K(X) : f^*(K(Y))].$$

Nous pouvons parler maintenant de *ramification.*

Définition 4.1.6. Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini entre variétés complexes normales, nous disons que f est *non branché* à y si le nombre d'images réciproques de y est égal au degré de f. Autrement, nous disons que f est branché à y ou que y est un *point de branchement* ou *point de ramification* de f. L'ensemble de points de branchement de f s'appelle le *lieu de ramification* de f.

Définition 4.1.7. Soit $\pi : X \to Y$ une revêtement, nous disons que π est un *revêtement étale* si le lieu de ramification de π est vide. Nous disons que π est un *revêtement ramifié* si le lieu de ramification de π est non-vide.

Lemme 4.1.8. *Soient X et Y deux variétés complexes de dimension n et $\pi : X \to Y$ un morphisme surjectif entre eux, alors*

$$A(Y) \xrightarrow{\pi^*} A(X) \xrightarrow{\pi_*} A(Y),$$

est la multiplication par $N = \deg(\pi)$.

Démonstration. Prenons un point $P \in Y$, nous avons $N = \sum_{\pi(Q)=P}[\mathbb{C}(Q) : \mathbb{C}(P)]$ car tous les indices de ramification sont égales à 1. Alors

$$\begin{aligned} N &= N \cdot [\mathbb{C}(P) : \mathbb{C}] = N \cdot \deg([P]) \\ &= \sum_{\pi(Q)=P} [\mathbb{C}(Q) : \mathbb{C}(P)][\mathbb{C}(P) : \mathbb{C}] \\ &= \sum_{\pi(Q)=P} [\mathbb{C}(Q) : \mathbb{C}] = \deg(\pi^*[P]). \end{aligned}$$

Nous obtenons le résultat en prolongeant à la somme formel sur tous les points. □

Proposition 4.1.9. *Soient X et Y deux variétés complexes et soit $\pi : X \to Y$ un revêtement étale fini. Alors*

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \deg(\pi)\chi(Y, \mathcal{O}_Y).$$

Démonstration. Comme π est étale, nous avons $\pi^*(\mathcal{T}_Y) = \mathcal{T}_X$ et $\pi^*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$. En utilisons le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch nous obtenons

$$\begin{aligned} \deg(\pi) \cdot \chi(Y, \mathcal{O}_Y) &= \deg(\pi) \cdot \deg\left(\mathrm{ch}(\mathcal{O}_Y) \cdot \mathrm{td}(\mathcal{T}_Y)\right)_n \\ &= \deg\left(\pi^*\left(\mathrm{ch}(\mathcal{O}_Y) \cdot \mathrm{td}(\mathcal{T}_Y)\right)\right)_n \\ &= \deg\left(\mathrm{ch}(\mathcal{O}_X) \cdot \mathrm{td}(\mathcal{T}_X)\right)_n = \chi(Y, \mathcal{O}_Y). \end{aligned}$$

□

Maintenant, supposons $f : X \to Y$ une application fini de degré d de variétés projectives complexes. Soit $B \subset Y$ le lieu de ramification, et prenons $Z = f^{-1}(Y)$. La restriction $f|_{X-Z} : X - Z \to Y - B$ est un revêtement étale de degré d, alors nous trouvons $\chi(X - Z) = d \cdot \chi(Y - B)$. Mais $\chi(X - Z) = \chi(X) - \chi(Z)$, donc nous obtenons

$$\chi(X) = d \cdot \chi(Y) + (\chi(Z) - d \cdot \chi(B)).$$

Définition 4.1.10. Soient X et Y variétés complexes, le lieu de ramification d'un revêtement $\pi : X \to Y$ est le diviseur zero R de la section canonique dans $\mathrm{Hom}(\pi^*(\mathcal{K}_Y), \mathcal{K}_X)$, c'est-à-dire

$$\mathcal{K}_X = \pi^*(\mathcal{K}_Y) \otimes \mathcal{O}_X(R).$$

Nous appelons R le *diviseur de branchement* de π.

Proposition 4.1.11. *Soient X et Y variétés complexes et soit $\pi : X \to Y$ un revêtement ramifié. Si $R = \sum r_j R_j$ où R est le diviseur de branchement de π et R_j sont ses composantes irréductibles. Alors $r_j = e_j - 1$ où e_j est l'ordre de branchement au point $x \in R_j$*

Démonstration. **À ajouter**... □

Corollaire 4.1.12. *Soient X et Y variétés complexes, soit $\pi : X \to Y$ un revêtement ramifié et $R = \sum r_j R_j$, alors*

$$\mathcal{K}_X = \pi^*(\mathcal{K}_Y) \otimes \mathcal{O}_X\left(\sum_j (e_j - 1) R_j\right).$$

Bibliographie

[Bea96] Arnaud Beauville, *Complex algebraic surfaces*, second ed., London Mathematical Society Student Texts, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid. MR 1406314

[BHPVdV04] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius Van de Ven, *Compact complex surfaces*, second ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR 2030225

[Cat16] F. Catanese, *Canonical surfaces of higher degree*, ArXiv e-prints (2016).

[CS86] Gary Cornell and Joseph H. Silverman (eds.), *Arithmetic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1986, Papers from the conference held at the University of Connecticut, Storrs, Connecticut, July 30–August 10, 1984. MR 861969

[Ful98] William Fulton, *Intersection theory*, second ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998. MR 1644323

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. MR 0463157

[HS00] Marc Hindry and Joseph H. Silverman, *Diophantine geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 201, Springer-Verlag, New York, 2000, An introduction. MR 1745599

[Kra13] T. Kramer, *On a family of surfaces of general type attached to abelian fourfolds and the Weyl group W(E_ 6)*, ArXiv e-prints (2013).

[Rou12] Xavier Roulleau, *Quotients of Fano surfaces*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. **23** (2012), no. 3, 325–349. MR 2960841

[Uen75] Kenji Ueno, *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975, Notes written in collaboration with P. Cherenack. MR 0506253