Exercice 9 :

① $f : \{1, 2\} \longrightarrow \{1, 2\}$

$f(1) = 1$

$f(2) = 1$

② ⓐ $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

- $f_1(x) = 3x + 1$

Soit x_1 et x_2 : $3x_1 + 1 = 3x_2 + 1$

$3x_1 = 3x_2$

$3(x_1 - x_2) = 0$

$x_1 = x_2$

Donc, la fonction est injective

soit x tq $3x + 1 = 5$

$3x = 4$

$x = \frac{4}{3}$ mais $\frac{3}{4} \notin \mathbb{N}$

donc, f_1 n'est pas surjective

- $f_2 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$

$f_2(x) = 3x + 1$

Elle est injective $\longrightarrow$ (voir démo injectivité f_1)

Mq $y \in \mathbb{Q}$, $\exists x \in \mathbb{Q}$, tq $x = \frac{y-1}{3}$:

Comme y est un rationnel alors $\left(\frac{y-1}{3}\right) \in \mathbb{Q}$

Donc, f_2 est surjective

② (b) $f : \mathbb{N} \to \{0,1,2\}$
$f(x) = x \bmod 3$

- $f(3) = 3 \bmod 3 = 0$
  $f(6) = 6 \bmod 3 = 0$ $\Rightarrow$ f n'est pas injective.

- $f(0) = 0 \bmod 3 = 0$
  $f(1) = 1 \bmod 3 = 1$
  $f(2) = 2 \bmod 3 = 2$
  chaque élément de l'ensemble d'arrivée a une pré-image $\Rightarrow$ f est surjectif.

(c) à faire

(d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$f(n) = n+1$ si n est pair
$n-1$ si n est impair

$$\Leftrightarrow f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, si n impair, $n-1$ est pair

$$f(n-1) = (n-1)+1 = n$$

Si n pair, $n+1$ impair

$$f(n+1) = (n+1)-1 = n$$

Donc, f est surjective.

- Supposons $f(p) = f(n)$
  si p et n sont pair (resp. impairs)
  on obtient $p+1 = n+1$ (resp. $p-1 = n-1$)
  $p = n$.

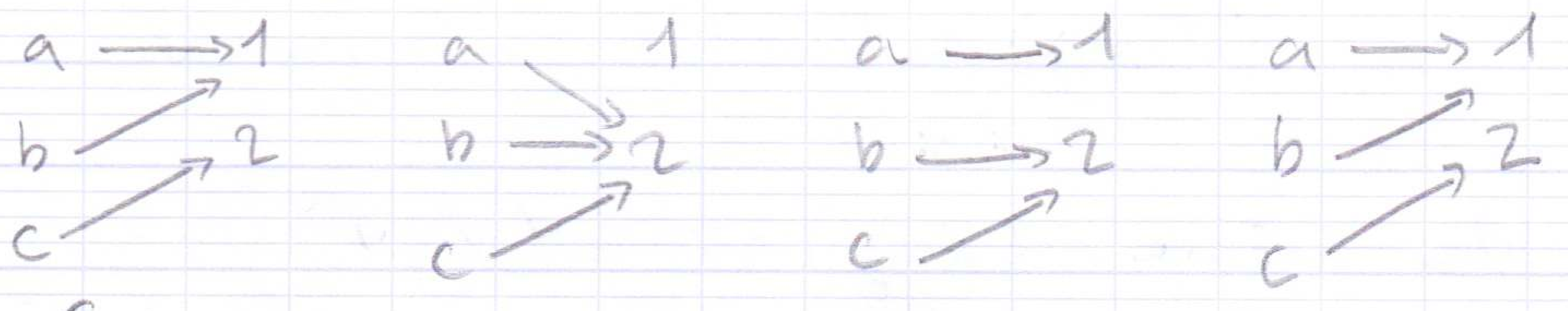
Supposons $f(p) = f(n)$, si l'un des deux est pair et l'autre est impair, (p pair et n impair),
$p+1 = n-1$
$n = p+2$ donc $p \neq n$

Or n impair et p pair mais $p+2$ est pair
et $n = p+2$, donc n est pair
Contradiction ! Alors f est injective
et donc bijective
(e) à faire

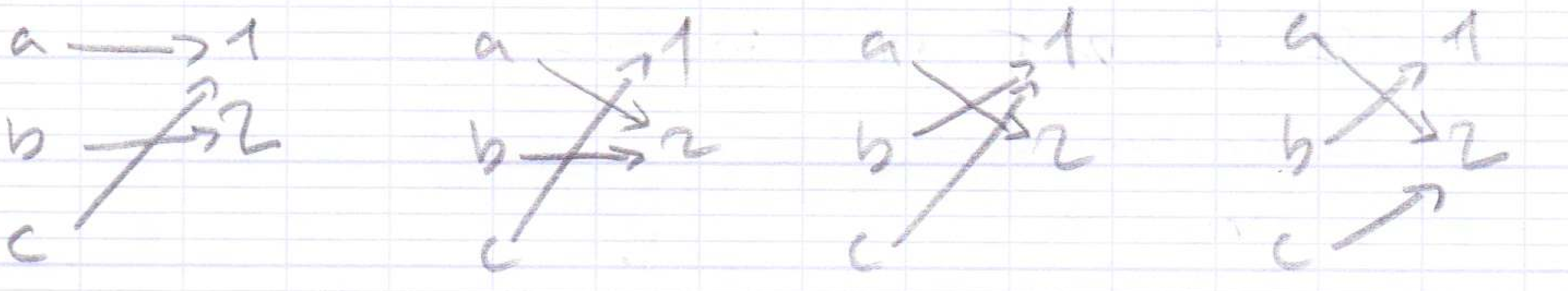
(3) Combien d'applications de $\{a,b,c\}$ dans $\{1,2\}$
Combien sont injectives ? surjectives ? bijectives ?

$(E \quad f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad |E| = 2^{|\mathbb{N}|} \neq |\mathbb{N}|$

Il y a $2^3 = 8$ de $\{a,b,c\}$ dans $\{1,2\}$



f_1 f_2 f_3 f_4



f_5 f_6 f_7 f_8

Il n'y a pas de fonctions injectives
— surjectives
Aucune fonction est bijective

Exercice 16 : A et B parties disjointes de E
Réaliser bijection entre $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(A \cup B)$

• Soit $f : \underbrace{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)}_{\text{binôme de sous-ensembles}} \longrightarrow \mathcal{P}(A \cup B)$

$f(X, Y) \longrightarrow X \cup Y$

$X \subseteq A$ et $Y \subseteq B$

f surjective : $Z \subseteq A \cup B$ — comme A et B disjoints

$$Z = (Z \cap A) \cup (Z \cap B)$$

En posant $X = Z \cap A$ et $Y = Z \cap B$,
on a $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ et
$f(X, Y) = X \cup Y = (Z \cap A) \cup (Z \cap B) = Z$
Donc, f est surjective.

- f injective : Supposons $f(X, Y) = f(X', Y')$
alors par définition on a $X \cup Y = X' \cup Y'$

$$(X \cup Y) \cap A = (X' \cup Y') \cap A$$
$$(X \cap A) \cup \underbrace{\cancel{(Y \cap A)}}_{\to \emptyset} = (X' \cap A) \cup \underbrace{\cancel{(Y' \cap A)}}_{\to \emptyset}$$

On sait que $X, X' \subseteq A$; $Y, Y' \subseteq B$ et $A \cap B = \emptyset$

$$(X \cap A) = (X' \cap A)$$
$$X = X'$$

De même $(X \cup Y) \cap B = (X' \cup Y') \cap B$

$$\underbrace{\cancel{(X \cap B)}}_{\to \emptyset} \cup (Y \cap B) = \underbrace{\cancel{(X' \cap B)}}_{\to \emptyset} \cup (Y' \cap B)$$
$$(Y \cap B) = (Y' \cap B)$$

On sait que $Y, Y' \subseteq B$

$$Y = Y'$$

Donc f est injective.

- f injective, f subjective $\Big| \Rightarrow$ f bijective

Exercice 11 : ② à faire

① F un ensemble, $E \subseteq \mathcal{P}(F)$.
On définit $\sim$ sur E par : $A \sim B$ s'il existe
$f : A \longrightarrow B$ bijection.
Mq $\sim$ est une relation d'équivalence.
$\mathcal{P}_f(F)$, l'ensemble de parties finies de F,
la relation $|A| = |B|$ est une relation d'équivalence

$\sim$ est une relation d'équivalence $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{réflexive} \\ \text{transitive} \\ \text{symétrique} \end{cases}$

- La fonction $1_A : A \to A$ est bijective donc $A \sim A$, alors $\sim$ est réflexive.

- Si $A \sim B$, il existe $f : A \to B$ surjective et injective.

Alors il existe $f^{-1} : B \to A$ injective et surjective.
Donc $B \sim A$ et $\sim$ est symétrique.

- On suppose que $A \sim B$ et $B \sim C$.
Donc il existe $f : A \to B$ bijective et $g : B \to C$ bijective.
Alors, $g \circ f : A \to C$ et bijective
$A \sim B$ donc $\sim$ est transitive
et $\sim$ est une relation d'équivalence.

Pour les parties finies, bijection $f : A \to B$ implique $|A| = |B|$.
Donc, $|A| = |B|$ est une relation d'équivalence.

<u>Exercice 13:</u>

Soit $f : A \to B$. Montrer que f est injective ssi $\forall x, y \subseteq A$, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

Remarquons que $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

$$\cancel{x \in X \cap Y}$$
$$\cancel{f(x) \in f(X) \cap f(Y)}$$
$$X \cap Y \subseteq X$$
$$X \cap Y \subseteq Y$$

Donc, $f(X \cap Y) \subseteq f(X)$ et $f(X \cap Y) \subseteq f(Y)$

Ainsi, $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

$\rightarrow$ On a <u>toujours</u> $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

$(\Rightarrow)$ Si f est injective. Soient x et y sous-ensembles de A et soit $z \in f(X) \cap f(Y)$.

Il existe $x \in X$ tel que $f(x) = z$

et il existe $y \in Y$ tel que $f(y) = z$

Donc, on a $f(x) = z = f(y)$,

mais f est injective, alors $x = y$,

i.e. $x, y \in X \cap Y$

$f(x) = f(y) = z \in f(X \cap Y)$, donc $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$

Donc, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

$(\Leftarrow)$ Supposons $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Soient $x, y \in A$ tq $f(x) = f(y)$.

Posons, $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$.

On a $f(x) = f(y)$, $f(x), f(y) \in f(X) \cap f(Y) \overset{\text{par hypothèse}}{=} f(X \cap Y) \cancel{\neq \emptyset}$

Si $x \neq y$ alors $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow f(X \cap Y) = \emptyset$

Mais, $f(x) = f(y) \in f(X \cap Y)$, donc on a une contradiction, et ~~f(x)~~ $x = y$!

Ainsi, f est injective.

<u>Exercice 15 :</u> Soient $f : A \rightarrow B$ et $f : B \rightarrow C$

(1) Montrer que $g \circ f$ est injective $\Rightarrow f$ est injective

Soient $x_1, x_2 \in A$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.

$g(\underline{f(x_1)}) = g(\underline{f(x_2)})$ comme $g \circ f$ injective

$x_1 = x_2$ donc f est injective.

② Si $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective :

On a $f : A \to B$ et $g : B \to C$

Soit $z \in C$, comme $g \circ f$ surjective, alors il existe $x \in A$ tel que $z = g(\underline{f(x)})$.

Donc, il existe $y = f(x) \in B$ tel que $g(y) = z$,

Alors, g est surjective.

Exercice 16 : Pour une application $f : E \to F$, une partie A de E et une partie B de F, on définit :

$f(A) = \{ y \in F \mid \text{il existe } x \in A, y = f(x) \}$.

et $f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}$

① Montrer que $\forall A$ de E, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$:

Soit $x \in A$ alors $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$. (par définition)

② Montrer que si f injective, alors pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$:

Supposons f injective. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, par définition, $f(x) \in f(A)$.

Par définition de $f(A)$, $x' \in A$ tel que $f(x') = f(x)$.

Mais f est injective, donc $x = x'$ et $x \in A$.

Et $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$

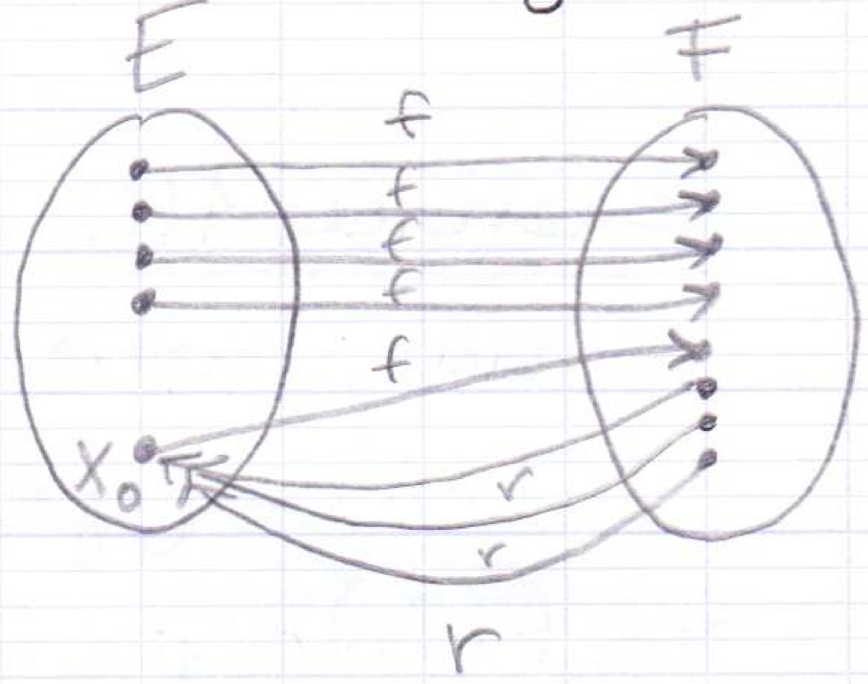
③ à faire.

Exercice 17 : Soit $f : E \to F$ une application

① Montrer que si $E \neq \emptyset$ alors f est injective ssi f a une inverse à gauche i.e. il existe $r : F \to E$ tel que $r \circ f = id_E$.

L'application r est surjective et s'appelle une rétraction de f :

($\Rightarrow$) Supposons f injective. On choisit un élément arbitraire $x_0 \in E$ (car $E \neq \emptyset$).
Soit $y \in F$, si y a un antécédant x par f, x est unique car f est injective.
On construit $r : F \to E$, on pose $r(y) = x$
S'il a un antécédant, sinon on pose $r(y) = x_0$.



Pour tout $x \in E$, x est l'unique antécédent de $f(x)$,
on a donc:
$\forall x \in E,\ r \circ f(x) = r(f(x)) = x$
la fonction id_E.

($\Leftarrow$) On suppose que $r \circ f = id_E$, montrons que f est injective :
Soient $f(x_1) = f(x_2)$. Alors en applicant r surjective,
on obtient $r \circ f(x_1) = r \circ f(x_2)$.
Mais on sait que $r \circ f = id_E$, donc $x_1 = x_2$.

2 & 3 à faire. Exercice 18 : site web

Exercice 19:

On sait que : E est dénombrable si
$\exists f : E \to \mathbb{N}$ bijective.
D'après l'exercice 18, $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
$\to$ Montrer que l'ensemble des rationnels est dénombrable.
$\mathbb{Q}$

Soit $\mathbb{Q}^+$ l'ensemble des rationnels positifs et
$\mathbb{Q}^-$ l'ensemble des rationnels négatifs.
$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$

Soit $f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ défini par

$$f(p/q) = (p, q)$$

Où $\frac{p}{q}$ est un nombre rationnel exprimé comme rapport de deux naturels.

Notons que f est injective : $(p, q) = (p', q')$

$\Rightarrow p = p'$ et $q = q'$

Donc, $p/q = p'/q'$

Donc $\mathbb{Q}^+$ est équivalent à un sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Mais comme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable $\Rightarrow \mathbb{Q}^+$ dénombrable

(On fait la même chose pour $\mathbb{Q}^-$)

et comme l'union d'ensemble dénombrables et dénombrable alors $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ est dénombrable.