O tożsamości z której wynika ostatnie twierdzenie Fermata

Paweł Jan Piskorz

Streszczenie

Proponujemy procedurę, która pozwala w bezpośrednim obliczeniu wyznaczyć dozwolone liczby naturalne będące wykładnikami potęgowymi w równaniu z ostatniego twierdzenia Fermata.

1 Wprowadzenie

Zapisujemy równanie z ostatniego twierdzenia Fermata

$$X^N + Y^N = Z^N \tag{1}$$

w którym $X, Y, Z \in \mathbb{Z}_+$ są liczbami całkowitymi większymi od zera a $N \in \mathbb{N}$ jest liczbą naturalną. Ostatnie twierdzenie Fermata mówi, że równanie (1) nie ma rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych dodatnich $X, Y, Z \in \mathbb{Z}_+$ dla naturalnego wykładnika potęgowego $N > 2$.

Bez utraty ogólności przepisujemy równanie (1) jako

$$(x + Mpx)^N + Y^N p = Z^N p \tag{2}$$

gdzie $X = x + Mpx$. Wprowadziliśmy parametr $p \in \mathbb{R}$, który jest liczbą rzeczywistą i którego wartość później przyjmiemy za równą 1. Liczba $M \in \mathbb{N}$ jest liczbą naturalną przyjmującą wartości $1, 2, 3, \ldots$.

Z takimi założeniami musimy mieć $x \in \{\frac{1}{M+1}, \frac{2}{M+1}, \frac{3}{M+1}, \ldots\}$ aby zmienna X przyjmowała wartości całkowite. Na przykład jeżeli $M = 1$, $p = 1$ i $x \in \{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots\}$ to wtedy $X \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. W kolejnym przykładzie jeżeli $M = 2$, $p = 1$ i $x \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \ldots\}$ to wówczas ponownie $X \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ W obu przykładach korzystaliśmy z wzoru $X = x + Mpx$. Jak widać, znaleźliśmy skuteczny sposób zapewnienia, że X jest zawsze całkowitą liczbą większą od zera. Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić dla liczb całkowitych dodatnich Y oraz Z.

2 Obliczenia

Obliczamy pochodną cząstkową po p obu stron równania (2)

$$\frac{\partial(x+Mpx)^N}{\partial p}+\frac{\partial Y^N p}{\partial p}=\frac{\partial Z^N p}{\partial p} \tag{3}$$

otrzymując nowe równanie

$$NM(x+Mpx)^{N-1}x+Y^N=Z^N \tag{4}$$

co można przepisać jako

$$NM[(1+Mp)x]^{N-1}x+Y^N=Z^N \tag{5}$$

Kładziemy $p=1$ w równaniu (5) otrzymując

$$NM(M+1)^{N-1}x^N+Y^N=Z^N \tag{6}$$

Jeżeli położymy $p=1$ w równaniu (2) to z kolei otrzymamy

$$(M+1)^N x^N+Y^N=Z^N \tag{7}$$

Porównujemy współczynniki przy wyrazie x^N w równaniach (6) oraz (7) otrzymując równanie więzów na N

$$NM(M+1)^N/(M+1)=(M+1)^N \tag{8}$$

i stąd otrzymujemy wartości wykładnika potęgowego N jako funkcję M

$$N(M)=\frac{M+1}{M} \tag{9}$$

Znajdujemy wartości $N(M)$ jako

$$\begin{aligned} N(M=1) &= \frac{2}{1}=2 \\ N(M=2) &= \frac{3}{2} \\ N(M=3) &= \frac{4}{3} \\ N(M=4) &= \frac{5}{4} \\ &\vdots \\ N(M=\infty) &= 1 \end{aligned} \tag{10}$$

Możemy teraz stwierdzić, że przy naszych założeniach o $N \in \mathbb{N}$ musimy odrzucić wszystkie rozwiązania $N(M)$, które nie są liczbami naturalnymi.

3 Wniosek

Rozpoczęliśmy od równania (1) z założeniem, że X, Y, Z są dodatnimi liczbami całkowitymi natomiast N jest liczbą naturalną. Z naszych obliczeń wynika, że równanie to obowiązuje dla potęgowych wykładników naturalnych jedynie wtedy, kiedy są one wszystkie równe 1 lub 2, co jest zgodne z treścią ostatniego twierdzenia Fermata.

4 Podziękowanie

Artykuł powyższy został napisany ku czci amerykańskiego matematyka Kennetha S. Millera. Dzięki jego technice obliczania wartości oczekiwanej oraz odchylenia standardowego liczby sukcesów w próbach Bernoulliego mogliśmy otrzymać nasze wyniki. Autor pragnie także podziękować anonimowemu studentowi, który zasugerował umieścić liczbę p przy symbolach Y^N oraz Z^N podczas gdy autor pracował nad wyrażeniem do uniwersalnego przedstawienia liczb całkowitych większych od zera za pomocą liczb wymiernych oraz liczby naturalnej i parametru rzeczywistego p.

Paweł Jan Piskorz
ul. Krakowska 55
31-066 Kraków