Trójkąt Pascala a wzór dwumianowy Newtona

Paweł Jan Piskorz

Patrząc na trójkąty Pascala zapisane poniżej

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{3}
\end{array}
$$

można zauważyć, że

$$\binom{N}{k}+\binom{N}{k+1}=\binom{N+1}{k+1} \qquad (1)$$

Podamy dowód powyższej własności. Rozpocznijmy od dwumianowego wzoru Newtona

$$(a+b)^N=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k b^{N-k} \qquad (2)$$

Dla $a=1$ oraz $b=1$

$$\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k b^{N-k}=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}1^k 1^{N-k}=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}=(1+1)^N=2^N \qquad (3)$$

otrzymujemy ważny w kombinatoryce wzór na liczbę wszystkich podzbiorów zbioru N-elementowego

$$\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}=2^N \qquad (4)$$

Zapiszmy sumę symboli Newtona jako

$$\binom{N}{0}+\binom{N}{1}+\binom{N}{2}+\cdots+\binom{N}{N}=2^N \qquad (5)$$

Dwie powyższe sumy [5] możemy zapisać jako

$$\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N}{k}+\binom{N}{N}=2^N \qquad (6)$$

oraz jako

$$\binom{N}{0}+\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N}{k+1}=2^N \qquad (7)$$

Dodajemy stronami równania [6] i [7]

$$\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N}{k}+\binom{N}{N}+\binom{N}{0}+\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N}{k+1}=2^N+2^N=2\cdot 2^N \qquad (8)$$

Z drugiej strony natomiast możemy napisać, że

$$2\cdot 2^N=2^{N+1}=\sum_{k=0}^{N+1}\binom{N+1}{k}=\binom{N+1}{0}+\binom{N+1}{1}+\binom{N+1}{2}+\ldots+\binom{N+1}{N}+\binom{N+1}{N+1}= \qquad (9)$$

$$=\binom{N+1}{0}+\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N+1}{k+1}+\binom{N+1}{N+1}$$

Porównując równania [8] i [9] piszemy, że

$$\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N}{k}+\binom{N}{N}+\binom{N}{0}+\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N}{k+1}=\binom{N+1}{0}+\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N+1}{k+1}+\binom{N+1}{N+1} \qquad (10)$$

Ponieważ zawsze dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej N zachodzą równości

$$\binom{N}{0}=\binom{N}{N}=1 \qquad (11)$$

oraz

$$\binom{N+1}{0}=\binom{N+1}{N+1}=1 \qquad (12)$$

zwracając uwagę na symbole Newtona powyżej zawsze równe jeden możemy je odjąć odpowiednio stronami od naszych sum w tożsamości w równaniu [10] otrzymując

$$\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N}{k}+\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N}{k+1}=\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N+1}{k+1} \qquad (13)$$

a porównując składniki sum wyraz po wyrazie możemy opuścić symbole sum i napisać poszukiwany wzór

$$\binom{N}{k}+\binom{N}{k+1}=\binom{N+1}{k+1} \qquad (14)$$

jaki zauważyliśmy w trójkącie Pascala.