Notatka o pochodnych funkcji $sin(x)$ oraz $cos(x)$

Paweł Jan Piskorz

Do obliczania pochodnych funkcji trygonometrycznych $sin(x)$ oraz $cos(x)$ wykorzystujemy poniżej cytowane tożsamości trygonometryczne dla funkcji $sin(x)$ oraz $cos(x)$ dla sumy i różnicy kątów α i β. Z tożsamości tych wyprowadzamy wzory na różnicę funkcji $\sin(A)-\sin(B)$ oraz $\cos(A)-\cos(B)$. Z naszych obliczeń okaże się, że musimy także znać wartość granicy funkcji

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}=1$$

Granicę tą można obliczyć z twierdzenia o trzech ciągach. Nie należy jej obliczać z twierdzenia l'Hopitala ponieważ w metodzie l'Hopitala wykorzystuje się już znajomość pochodnej funkcji $sin(x)$.

Tożsamości trygonometryczne dla funkcji $sin(x)$ oraz $cos(x)$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Niech

$$A=\alpha+\beta$$

$$B=\alpha-\beta$$

Wtedy

$$\alpha=\frac{A+B}{2}$$

$$\beta=\frac{A-B}{2}$$

i stąd

$$\sin(A)-\sin(B)=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(A)-\sin(B)=2\cos(\frac{A+B}{2})\sin(\frac{A-B}{2})$$

$$\cos(A)-\cos(B)=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(A)-\cos(B)=-2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Pochodne funkcji $\sin(x)$ oraz $\cos(x)$

$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$(\cos x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$$

$$A=x+h$$

$$B=x$$

$$\frac{A+B}{2}=x+\frac{h}{2}$$

$$\frac{A-B}{2}=\frac{h}{2}$$

$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{h}$$

$$(\cos x)'=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{h}$$

$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin(h/2)}{\frac{h}{2}}$$

$$(\cos x)'=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin(h/2)}{\frac{h}{2}}$$

Ponieważ $$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}=1$$

otrzymujemy wzory na poszukiwane pochodne

$$(\sin x)'=\cos x$$

$$(\cos x)'=-\sin x$$