# Pochodna iloczynu i ilorazu funkcji jednej zmiennej

Niech $f = f(x)$ oraz $g = g(x)$ będą funkcjami jedenj zmiennej $x$. Zakadamy, że czytelnik zna wzory na pochodną funkcji $x^2$, $af(x)$ gdzie $a$ oznacza stałą, oraz pochodną funkcji złożonej $f(g(x))$, które można zapisać jako

$$(x^2)' = 2x \tag{1}$$

$$(af(x))' = af'(x) \tag{2}$$

$$(f(g(x)))' = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} = f'(g(x))g'(x) \tag{3}$$

Obliczymy pochodną wyrażenia

$$\frac{d}{dx}(f+g)^2 \tag{4}$$

$$D_1 = \frac{d}{dx}(f+g)^2 = 2(f+g)(f'+g') = 2(ff' + fg' + f'g + gg') \tag{5}$$

Z drugiej strony możemy również napisać, że

$$\begin{aligned} D_2 = \frac{d}{dx}(f+g)^2 = \frac{d}{dx}(f^2 + 2fg + g^2) &= 2ff' + 2(fg)' + 2gg' \\ &= 2(ff' + (fg)' + gg') \end{aligned} \tag{6}$$

Korzystając z tego, że $D_1 = D_2$ porównujemy wyrażenia na $D_1$ i $D_2$ otrzymując wzór na pochodną iloczynu funkcji $fg$

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{7}$$

Niech $f = f(x)$ oraz $g = g(x) \neq 0$. Obliczymy pochodną ilorazu $f/g$. Rozpocznijmy od obliczenia wyrażenia

$$\left(\frac{g}{g}\right)' = \left(g\frac{1}{g}\right)' = g'\frac{1}{g} + g\left(\frac{1}{g}\right)' = 0 \tag{8}$$

Z powyższego równania otrzymujemy

$$g' + g^2\left(\frac{1}{g}\right)' = 0 \tag{9}$$

i zatem

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \tag{10}$$

Do obliczenia pochodnej ilorazu $(f/g)'$ możemy wykorzystać tożsamość na pochodną iloczynu funkcji $f$ oraz $1/g$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{g}{g^2} - fg'\frac{1}{g^2} \tag{11}$$

co po uporządkowaniu daje poszukiwany wzór na pochodną ilorazu dwóch funkcji jednej zmiennej

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{12}$$

`Paweł Jan Piskorz`