Badania jednostajnej i absolutnej zbieżności szeregów Fouriera

Paweł Jan Piskorz

Streszczenie

W bezpośrednim obliczeniu wyznaczamy granicę sumy częściowej dowolnego szeregu Fouriera dla funkcji periodycznej i ciągłej w jej przedziale okresowości. Pokazujemy również, że ta suma częściowa jest jednostajnie i absolutnie zbieżna odpowiednio do wartości oraz wartości bezwzględnej funkcji, której szereg Fouriera otrzymujemy.

1 Wprowadzenie

Definiujemy sumę częściową $s_N(x)$ szeregu Fouriera jako

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

gdzie

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx \tag{2}$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ oraz

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx \tag{3}$$

dla $k = 1, 2, \ldots$

2 Obliczenia

Korzystając z równań (2) i (3) możemy zapisać sumę $s_N(x)$ jako

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \tag{4}$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\cdot\cos kx + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\cdot\sin kx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}(\cos kt\cdot\cos kx + \sin kt\cdot\sin kx)\right]dt$$

Korzystamy z wzoru na cosinus różnicy kątów α i β

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{5}$$

Podstawiamy $\alpha = kt$ oraz $\beta = kx$ otrzymując

$$\cos(kt-kx) = \cos kt\cdot\cos kx + \sin kt\cdot\sin kx = \cos k(t-x) \tag{6}$$

Otrzymujemy z powyższych obliczeń wzór na sumę częściową $s_N(x)$ szeregu Fouriera funkcji okresowej $f(x)$ o okresie 2π

$$s_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos k(t-x)\right]dt \tag{7}$$

W dalszych obliczeniach podstawiamy

$$u = t - x \tag{8}$$

co daje

$$s_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos ku\right]du \tag{9}$$

a ze względu na okresowość funkcji pod całką powyższe równanie równoważne jest równaniu

$$s_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos ku\right]du \tag{10}$$

Możemy obliczyć następującą granicę sumy częściowej $s_N(x)$

$$\lim_{u\to 0} s_N(x) = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\cos ku\right] du = \tag{11}$$
$$= \lim_{u\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\cos ku\right] du =$$
$$= \lim_{u\to 0}\frac{1}{\pi} f(x)\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\cos ku\right] du$$

Ponieważ zawsze dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos ku\, du = 0 \tag{12}$$

to z równania (11) pozostaje jedynie dla dowolnego N a w szczególności dla $N \to \infty$

$$\lim_{N\to\infty} s_N(x) = s(x) = \frac{1}{\pi} f(x)\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} du = \frac{1}{\pi} f(x)\frac{1}{2}\, 2\pi = f(x) \tag{13}$$

3 Wniosek

Pokazaliśmy, że suma częściowa $s_N(x)$ dowolnego szeregu Fouriera dla $N \to \infty$ jest zbieżna jednostajnie do funkcji $f(x)$ dla wszystkich wartości x, w których funkcja ta jest ciągła. Szereg $s(x)$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale (a, b) jeżeli dla dowolnego $\epsilon > 0$ można wybrać taki indeks M niezależny od wartości x, że dla dowolnego $N \geq M$ zachodzi w przypadku szeregu Fouriera w przedziale $(-\pi, \pi)$

$$|s_N(x) - s(x)| < \epsilon \tag{14}$$

co jest równoważne z

$$|s_N(x) - f(x)| < \epsilon \tag{15}$$

Dowodzimy również zbieżności absolutnej dowolnego szeregu Fouriera. Zachodzi bowiem

$$|s(x)| = \lim_{N\to\infty} |s_N(x)| = |f(x)| \tag{16}$$

i dla dowolnego $\epsilon > 0$ można wybrać taki indeks M niezależny od wartości x, że dla dowolnego $N > M$

$$||s_N(x)| - |s(x)|| < \epsilon \tag{17}$$

co jest równoważne z

$$||s_N(x)| - |f(x)|| < \epsilon \tag{18}$$

Z naszych obliczeń wynika, że jeżeli szereg jest szeregiem Fouriera funkcji ciągłej i okresowej to szereg ten jest zbieżny jednostajnie i absolutnie w przedziale okresowości tej funkcji do wartości odpowiednio $f(x)$ oraz $|f(x)|$.