Twierdzenie dwumianowe Newtona z wyprowadzeniem

Paweł Jan Piskorz

W wyniku mnożenia poniżej otrzymujemy wzory

$$(x+a_1)(x+a_2)=x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2 \qquad (1)$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)=x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x+a_1a_2a_3 \qquad (2)$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)=x^4+(a_1+a_2+a_3+a_4)x^3+ \qquad (3)$$

$$(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)x^2+(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)x+a_1a_2a_3a_4$$

i w ogólności

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)=x^n+(a_1+a_2+\ldots+a_n)x^{n-1}+(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)x^{n-2}+$$

$$+(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\ldots+a_{n-2}a_{n-1}a_n)x^{n-3}+\ldots+a_1a_2\ldots a_n \qquad (4)$$

W równaniu (4) przy x^n nie ma współczynnika mającego jakiekolwiek elementy ze zbioru $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, przy x^{n-1} znajduje się współczynnik mający sumę pojedynczych elementów ze zbioru $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, przy x^{n-2} znajduje się współczynnik mający sumę wszystkich iloczynów dwuelementowych podzbiorów ze zbioru $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, przy x^{n-3} znajduje się współczynnik mający sumę wszystkich iloczynów trójelementowych podzbiorów ze zbioru $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, i tak dalej aż przy $x^{n-n}=1$ znajduje się współczynnik mający pojedynczy iloczyn wszystkich elementów ze zbioru $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$.

Podstawiając w równaniach (1-4)

$$a_1=a_2=\ldots=a_n=a \qquad (5)$$

otrzymamy

$$\begin{gathered}(x+a)^2=x^2+2ax+a^2\\(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3\\(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(x+a)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}ax^{n-1}+\binom{n}{2}a^2x^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}a^n\end{gathered} \qquad (6)$$

Ostatni wzór w równaniach (6) jest znany w matematyce jako *twierdzenie dwumianowe Newtona*. Zawiera on symbole Newtona

$$\binom{n}{k}$$

oznaczające liczbę podzbiorów k −elementowych ze zbioru n −elementowego.