Pochodna iloczynu i ilorazu funkcji jednej zmiennej

Niech $f = f(x)$ oraz $g = g(x)$ będą funkcjami jedenj zmiennej x. Zakładamy, że czytelnik zna wzory na pochodną funkcji x^2, $af(x)$ gdzie a oznacza stałą, $f(x) = a$ oraz pochodną funkcji złożonej $f(g(x))$, które można zapisać jako

$$(x^2)' = 2x \tag{1}$$

$$(af(x))' = af'(x) \tag{2}$$

$$(a)' = 0 \tag{3}$$

$$(f(g(x)))' = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} = f'(g(x))g'(x) \tag{4}$$

oraz pochodną sumy funkcji f i g

$$(f + g)' = f' + g' \tag{5}$$

Obliczymy pochodną wyrażenia

$$\frac{d}{dx}(f + g)^2 \tag{6}$$

$$D_1 = \frac{d}{dx}(f + g)^2 = 2(f + g)(f' + g') = 2(ff' + fg' + f'g + gg') \tag{7}$$

Z drugiej strony możemy również napisać, że

$$\begin{aligned} D_2 = \frac{d}{dx}(f + g)^2 = \frac{d}{dx}(f^2 + 2fg + g^2) &= 2ff' + 2(fg)' + 2gg' \\ &= 2(ff' + (fg)' + gg') \end{aligned} \tag{8}$$

Korzystając z tego, że $D_1 = D_2$ porównujemy wyrażenia na D_1 i D_2 otrzymując wzór na pochodną iloczynu funkcji fg

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{9}$$

Niech $f = f(x)$ oraz $g = g(x) \neq 0$. Obliczymy pochodną ilorazu f/g. Rozpocznijmy od obliczenia wyrażenia na pochodną jedynki $(g/g)' = (1)' = 0$

$$\left(\frac{g}{g}\right)' = \left(g\frac{1}{g}\right)' = g'\frac{1}{g} + g\left(\frac{1}{g}\right)' = 0 \tag{10}$$

Z powyższego równania otrzymujemy

$$g' + g^2\left(\frac{1}{g}\right)' = 0 \tag{11}$$

i zatem

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \tag{12}$$

Do obliczenia pochodnej ilorazu $(f/g)'$ możemy wykorzystać tożsamość na pochodną iloczynu funkcji f oraz $1/g$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{g}{g^2} - fg'\frac{1}{g^2} \tag{13}$$

co po uporządkowaniu daje poszukiwany wzór na pochodną ilorazu dwóch funkcji jednej zmiennej

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{14}$$

`Paweł Jan Piskorz`