

Laboratório de Mecânica Oscilações e Ondas (LMOO)

Guia dos Trabalhos Experimentais

(Versão 1.01 - 2017)



Adaptação de textos originais de
António C. Ribeiro, Pedro José Sebastião, João L. Figueirinhas, Isabel Cabaço

Edição de Pedro José Sebastião
Departamento de Física, IST

26 de Outubro de 2017

Agradeço ao Tiago Sebastião todo o trabalho de transcrição para \LaTeX dos textos originais dos trabalhos de LOO, sem o qual a edição actualizada deste Guia seria, certamente, muito mais árdua. Quaisquer imprecisões ou gralhas são da minha responsabilidade.

Índice

1. Programa	5
1.1 Objectivos	5
1.2 Descrição	5
1.3 Avaliação de Conhecimentos	6
1.4 Bibliografia	6
1.4.1 Principal	6
1.4.2 Secundária	6
1.5 Organização no Laboratório	6
2. Introdução	7
2.1 Procedimentos Experimentais	7
2.2 Relatórios	7
2.3 Avaliação dos relatórios	7
3. Sistema Massa-Mola (T1)	9
3.1 Introdução	9
3.2 Descrição da Montagem	10
3.3 Procedimento Experimental Indicativo	12
4. Determinação da Constante de Gravitação Universal (T2)	13
4.1 Introdução	13
4.2 Descrição da Balança de Torção	13
4.3 Princípio de Funcionamento	14
4.3.1 Equação de Movimento	14
4.3.2 Solução da Equação de Movimento	15
4.4 Procedimento Experimental Indicativo	15
5. Estudo das Oscilações de um Galvanómetro (T3)	17
5.1 Fundamentos Teóricos	17
5.1.1 Estudo das Oscilações do Quadro Móvel	18
5.1.2 Atrito Electromagnético	18
5.1.3 Referência ao Método de Poggendorf	20
5.2 Procedimento Experimental Indicativo	21
6. Oscilações em circuitos RLC série (T4)	23
6.1 Introdução	23
6.1.1 Objectivo do Trabalho	23
6.1.2 Estudo do Circuito RLC série em Regime Forçado Alternado Sinusoidal	23
6.1.3 Regimes Livres Num Circuito RLC Série	24
6.2 Procedimento Experimental Indicativo	27
7. Elementos Sobre a Série Trigonométrica de Fourier. Transformação de Fourier e Física das Cordas Vibrantes (T5)	29
7.1 Série Trigonométrica de Fourier	29
7.1.1 Exemplo 1 - "Onda" Rectangular	29
7.1.2 Exemplo 2 - "Onda" Triangular	30
7.2 Transformada de Fourier ou Espectro de Uma Função	32
7.2.1 Exemplos Elementares	32
7.3 Perturbações com o Carácter de Onda	33
7.4 Cordas Vibrantes	34
7.5 Procedimento Experimental Indicativo	37

8. Acústica Básica. Ondas estacionárias num Tubo Acústico (T6)	39
8.1 Introdução	39
8.2 Propagação do Som Num Tubo. Ondas Estacionárias	39
8.2.1 Tubo Aberto Somente Numa Extremidade	40
8.2.2 Tubo Aberto Nas Duas Extremidades	40
8.3 Procedimento Experimental Indicativo	41
9. Difracção de Ondas Electromagnéticas e de Electrões (T7)	43
9.1 Difracção de Fraunhofer	43
9.2 Difracção de Micro-ondas	43
9.3 Difracção de Electrões	43
10. Mecânica Relativista. Colisões de Partículas Elementares (T8)	47
10.1 Introdução	47
10.2 Transformações de Referenciais. Energia de Uma Partícula	47
10.3 Considerações sobre as colisões a analisar	49
10.3.1 Generalidades	49
10.3.2 Correcções a Efectuar	51
10.3.3 Cálculo das Variações Δp_i dos Momentos Lineares Devido às Perdas de Energia no Hidrogénio	52
10.4 Procedimento Experimental	52
10.4.1 Conservação do Momento Linear	53
10.4.2 Conservação da Energia	53
10.4.3 Perdas de Energia no Hidrogénio. Correcção	54
10.4.4 Energia Não Relativista	54
A. Equação Diferencial Homogénea de 2º Grau	55
A.1 Equação Homogénea	55
A.2 Regime Aperiódico	55
A.3 Regime Oscilatório	55
B. Momentos de Inércia. Experiência de Cavendish	59
B.1 Balança de Cavendish	59
B.2 Momento de Inércia de Uma Esfera: R, m, ρ	59
B.3 Momentos de Inércia da Barra (varão) R_v, m_v, ρ_v	59
C. Nota Sobre a Análise de Resultados Experimentais	61
C.1 Introdução	61
C.1.1 Incertezas - Grandezas Directas	61
C.1.2 Apresentação de Resultados	63
C.1.3 Precisão e Exactidão	63
C.2 Erros relativos	63
C.3 Incertezas - Grandezas Indirectas	64
C.3.1 Majoração e Minoração	64
C.3.2 Desvio Padrão	64
C.3.3 Propagação Linear	64
C.3.4 Erros Relativos	65
C.4 Análise Gráfica de Resultados	65
C.4.1 Erros em x e y	67
C.5 Consulta de bibliografia dedicada	67
Bibliografia	69
Plano de Aulas	70

1. Programa

1.1 Objectivos

Aprofundar a capacidade de compreensão e utilização dos métodos experimentais no campo dos fenómenos oscilatórios e ondulatórios de natureza física distinta. Adquirir noções claras sobre fenómenos de diferente natureza física mas intrinsecamente semelhantes. Pretende-se estimular e desenvolver as capacidades experimentais, incentivar a análise crítica e o rigor no tratamento de dados experimentais, com particular relevância para o ajuste de modelos físicos aos resultados experimentais, e aumentar a qualidade da apresentação de resultados e de gráficos.

1.2 Descrição

Aprofundamento dos conceitos e das boas práticas de preparação dos trabalhos experimentais e da elaboração dos relatórios. Referência à necessidade da justificação dos procedimentos experimentais seguidos, ao cuidado na análise dos resultados obtidos e à utilização crítica dos modelos físicos disponíveis no tratamento dos resultados. Utilização do ajuste de funções não lineares a uma ou mais dimensões, pelo método dos mínimos quadrados, no tratamento de resultados tendo em conta as incertezas experimentais na variável dependente. Introdução aos casos em é necessário a propagação de incertezas das variáveis independentes para as variáveis dependentes nos processos de ajuste. Realização de experiências que na sua maioria envolvem fenómenos oscilatórios e fenómenos ondulatórios, contribuindo para a exigência de rigor na utilização dos métodos experimentais e nas medidas, com referência à eliminação de erros sistemáticos e à necessidade verificação da calibração dos equipamentos de medida. Utilização de equipamentos de medida diversos: termómetros, amperímetro, voltímetro, frequencímetro, ohmímetro, medidores de capacidade eléctrica, osciloscópios (análogicos, digitais, simulados por software), analisadores espectrais. Utilização de fontes de alimentação: contínua, alternada, geradores de funções.

1. Fenómenos oscilatórios:

- (a) Oscilações mecânicas num sistema linear. Estudo dos movimentos oscilatórios livres e forçados. Ressonância e diferença de fase. (e.g. sistema massa mola). Medidas de força, distância, tempo, frequência ângulo. Ajuste de funções 1, 2 e 3 dimensões.
- (b) Oscilações mecânicas numa balança de torção com atrito puramente mecânico. Movimento de um corpo rígido. Momento de inércia. Medidas de distância, ângulo e tempo. Utilização de um sistema óptico para medição de ângulos. Ajuste de funções a uma e/ou duas dimensões. Determinação da constante de gravitação universal G. (e.g. Experiência de Cavendish).
- (c) Estudo das oscilações do quadro móvel de um galvanómetro. Controlo eléctrico do atrito magnético do sistema. Regimes oscilante amortecido, aperiódico limite e aperiódico. Medidas de tempo, distância, ângulo, tensão na gama dos microvolts. Montagem e calibração do sistema.
- (d) Ressonância e factor de qualidade de um circuito ressonante. Oscilações eléctricas num circuito RLC. Regimes livres e forçado. Medias de tensão, corrente, capacidade eléctrica e tempo, com utilização de um voltímetro e um osciloscópio digital. Ajuste de funções a 1 e/ou duas dimensões.

2. Fenómenos ondulatórios:

- (a) Estudo da propagação de ondas sonoras num tubo. Ondas estacionárias. Determinação da velocidade do som. Variação da velocidade do som com a temperatura. Medidas de distância, tempo, temperatura. Determinação de velocidades.
- (b) Cordas vibrantes. Amplitude, frequência e modos de vibração. Estudo das leis das cordas vibrantes. Análise de sons emitidos por instrumentos de cordas utilizando a transformada rápida de Fourier. Análise do som produzido por diferentes instrumentos musicais. Timbre. Séries de Fourier. Análise e síntese de diferentes tipos de sinais. Calibração do sistema de análise espectral.
- (c) Interferência e Difracção. Ondas electromagnéticas no domínio do visível e microondas. Difracção de electrões. Medidas de distância e de tensão/corrente. Ajuste das funções para os padrões de interferência e difracção aos resultados obtidos. Determinação de comprimentos de onda e dimensões características de acordo com o comprimento de onda utilizado.

- (d) Mecânica Relativista. Análise de fotografias de colisões entre protões obtidas em câmaras de bolhas. Partículas resultantes do choque. Verificação experimental da conservação de momento e de energia.

1.3 Avaliação de Conhecimentos

A classificação final é a média pesada de duas parcelas nas seguintes percentagens;

- a) Classificação média obtida após 8 trabalhos (80%). A classificação de cada um trabalhos terá em conta:

i) No Laboratório, a avaliação pelo docente da autonomia e destreza experimental dos alunos ("Lab Skills"), incluindo alguns "checkpoints" (e.g. elaboração das montagens, verificação das calibração dos equipamentos de medida, validação dos cálculos e nos ajustes dos modelos teóricos aos resultados experimentais obtidos, etc.) e a entrega das tabelas e dos relatórios dos ajustes dos modelos aos resultados experimentais: 20%. Esta componente da avaliação aplica-se a todas as actividades de laboratório.

ii) Avaliação dos Relatórios 60%.

Pelo menos um dos trabalhos tem de ser realizado duas vezes ou, em alternativa, será sugerida a realização de um trabalho inteiramente novo no final do semestre. No final do semestre, os alunos que realizarem um trabalho pela segunda vez, devem introduzir, nos objectivos e na execução uma **contribuição original** tendo em conta os procedimentos indicativos propostos nos guias e a experiência, a maturidade e o espírito crítico adquiridos ao longo do semestre.

- b) Teste final individual sobre todas as experiências efectuadas: 20%, com nota mínima de 7.5/20

- c) Prova oral para os alunos com nota do teste inferior a 7.5.

1.4 Bibliografia

1.4.1 Principal

1. "Laboratório de Oscilações e Ondas- Guias dos trabalhos" – Ed. Pedro José Sebastião, Departamento de Física do IST, 2014 (revisto anualmente).
2. "The Art of Model Fitting to Experimental Results", Pedro J. Sebastião, Eur. J. Phys. **35**, 15017(2014), URL: <http://iopscience.iop.org/0143-0807/35/1/015017>
3. "Measurements and Their Uncertainties. A Practical Guide to Modern Error Analysis", Ifan G. Hughes, Thomas P.A. Hase, Oxford University Press, 2010

1.4.2 Secundária

1. "Contribuição para o Desenvolvimento do ensino da Física Experimental no IST", António C. N. Ribeiro, Pedro Sebastião e Francisco Tomé, Departamento de Física do IST (1996).
2. "An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements", John Taylor, University Science Books, 1996
3. "The Art of Experimental Physics", D. Preston e E. Dietz. Wiley, 1991
4. "An Introduction to Mechanics", Daniel Kleppner, Robert Kolenkow, Cambridge University Press; 2 edition (November 18, 2013) ISBN: 978-0521198110
5. "Fundamentals of Statistical and Thermal Physics", Federik Reif, McGraw-Hill, New York, 1981.
6. "Electromagnetismo", A. B. Henriques e J. C. Romão, 2006, ISTPress
7. "The Feynman Lectures on Physics", R. Feynman, Addison Wesley, 1970, ISBN: 0-80-539065-0
8. Guides to the expression of uncertainty in measurement (GUM series). URL: <http://www.iso.org/sites/JCGM/GUM-introduction.htm>

1.5 Organização no Laboratório

Alunos agrupados em grupos de 3-4, num máximo de 5 grupos por turno. No caso dos grupos de 4 alunos estes formarão duas equipas de 2 alunos que devem alternar na execução das medições experimentais, de forma a validarem mutuamente os resultados obtidos.

2. Introdução

Os trabalhos do Laboratório de Mecânica Oscilações e Ondas encontram-se divididos em três grupos: (i) Oscilações; (ii) Ondas; (iii) Mecânica Relativista. Os trabalhos de Oscilações (i) incluem experiências relacionadas com movimentos lineares e movimentos angulares. Os trabalhos sobre Ondas (ii) incluem experiências sobre ondas acústicas, cordas vibrantes, física da música, difracção de electrões e difração de microondas. Finalmente sobre mecânica relativista (iii) realiza-se um trabalho em que analisam fotografias de choques de protões com velocidades próximas da velocidade da luz no vácuo¹.

Neste segundo laboratório de Física Experimental que os alunos efectuam pretende-se que consolidem as noções básicas sobre a realização de experiências de física adquiridas anteriormente ao mesmo tempo que aumentam os seus conhecimentos sobre tratamento de dados e ajuste de modelos físicos a resultados experimentais. Em particular, pretende-se que os alunos adquiram competências no tratamento de dados nos casos em que é necessário considerar a influência das incertezas experimentais nas variáveis dependente e independente, no processo de ajuste de funções.

Do ponto de vista das actividades experimentais pretende-se que os alunos aumentem a sua autonomia e espírito crítico concretizada numa discussão de resultados mais elaborada e na proposta de procedimentos experimentais alternativos aos propostos nos guias dos trabalhos.

Do ponto de vista dos equipamentos de laboratório pretende-se que os alunos utilizem de forma autónoma osciloscópios analógicos e digitais, e sistemas de aquisição automática de dados.

2.1 Procedimentos Experimentais

Os procedimentos experimentais são indicativos e destinam-se a orientar os alunos na execução dos trabalhos no sentido de poderem atingir os objectivos mínimos para os trabalhos. Pretende-se que os alunos expressem a sua criatividade propondo procedimentos alternativos e aumentem o número de objectivos a atingir.

2.2 Relatórios

Pretende-se que os relatórios tenham o formato de um artigo escrito com um cabeçalho, a uma coluna, que inclua o título seguido dos **nomes e números de aluno dos autores, grupo, turno e ano**, bem como um breve resumo do trabalho (Abstract) includindo os aspectos principais relacionados com os objectivos do trabalho.

Pretende-se que o corpo do relatório seja escrito a duas colunas com os gráficos incluídos no texto. Este deve incluir uma breve introdução com a descrição do trabalho, os objectivos e os aspectos teóricos, uma secção experimental onde se apresentam o método experimental a(s) montagem(ns) e os resultados experimentais **apresentados em tabelas**. O relatório deve incluir também uma secção de análise e discussão dos resultados experimentais e uma secção com as conclusões. Para terminar deve-se incluir uma secção com a bibliografia, e os apêndices necessários que podem conter as tabelas com resultados intermédios, os cálculos e demonstrações consideradas relevantes para efeitos do relatório, mas não para serem incluídas no texto principal.

Obviamente que este formato pode e deve ser adaptado a cada trabalho.

2.3 Avaliação dos relatórios

Os relatórios são avaliados tendo em conta os seguintes aspectos gerais, adaptados a cada trabalho quando necessário: (i) o cabeçalho estar completo; (ii) os aspectos de forma e a qualidade da apresentação; (iii) a qualidade da Introdução e a capacidade de síntese revelada; (iv) o cuidado na apresentação dos resultados em tabelas, a inclusão das incertezas experimentais, o cuidado na identificação de possíveis erros sistemáticos; (v) o detalhe e a qualidade da análise de resultados, includindo os ajuste numéricos, os gráficos, a propagação de erros; (vi) muito importante são os aspectos relacionados com a discussão dos resultados e o espírito crítico revelados; (vii) na secção das conclusões releva-se um pouco os aspectos criativos quando são apontadas outras alternativas para o procedimento experimental que melhorem o trabalho.

¹protões relativistas

Estes aspectos não contam todos da mesma maneira para a nota do relatório. De facto os pontos (i) e (ii) poderão corresponder a 20% da nota do relatório; os pontos (iii), (iv) e (v) poderão corresponder a 25%; aos pontos (vi) e (vii) corresponderão aos restantes 55%

3. Sistema Massa-Mola (T1)

(Texto adaptado e baseado no trabalho original de A.C. Ribeiro, P.J. Sebastião e F. Tomé, IST 1996) [1]

3.1 Introdução

Neste trabalho pretende-se estudar o sistema físico constituído por uma mola suspensa pela sua extremidade superior num ponto de apoio $\vec{P}_0 = 0\vec{e}_z$ e que na sua extremidade inferior segura uma massa m . Na figura 3.1 apresenta-se um esquema da montagem onde se indicam algumas posições e distâncias relevantes e a direcção do eixo zz .

Por acção da massa suspensa na mola esta apresenta um alongamento ℓ que resulta do equilíbrio entre o peso $\vec{P} = mge_z$ e a força da restituição da mola dada por $\vec{F} = -K(\ell - \ell_0)\vec{e}_z$ (*Lei de Hook*), em que ℓ_0 é o comprimento natural da mola e k é a constante elástica. Considera-se que a mola tem uma massa desprezável face à massa m .

De acordo com a *Lei de Newton* verifica-se para um caso geral que

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (3.1)$$

Considerando que devido às baixas velocidades da massa quando em oscilação a força de atrito do sistema depende linearmente da velocidade

$$\vec{F}_{at} = -b\frac{d\vec{z}}{dt}\vec{e}_z \quad (3.2)$$

(3.1) pode ser escrita da forma

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - b\frac{dz}{dt} - K(\ell - \ell_0) + \vec{F}_{ext}(t) \quad (3.3)$$

Atendendo a que $\ell = z - d$ e no caso de $d^2z/dt^2 = dz/dt = 0$ (3.3) se simplifica e se obtém

$$z_{eq} = \frac{m}{K}g + d + \ell_0 \quad (3.4)$$

então (3.1) pode escrever-se em função de $Z = z - z_{eq}$ da forma

$$\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dZ(t)}{dt} + \frac{K}{m}Z(t) = \frac{\vec{F}_{ext}(t)}{m} \quad (3.5)$$

Quando comparada com a equação diferencial de 2º na sua forma canónica

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 2\lambda\frac{df(t)}{dt} + \omega_0^2 f(t) = \mathcal{F}(t) \quad (3.6)$$

facilmente se verifica que o coeficiente de amortecimento e a frequência própria de oscilação do sistema são dados, respectivamente, por:

$$\lambda = \frac{b}{2m} \quad (3.7)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (3.8)$$

As soluções desta equação diferencial que interessa considerar neste trabalho são as que correspondem ao regime livre oscilante amortecido e ao regime forçado (ver o Apêndice A). No caso do regime livre oscilante amortecido que se verifica quando $F(t) = 0$ e $\lambda < \omega_0$, $Z(t)$ é dado por

$$Z(t) = Z_M e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.9)$$

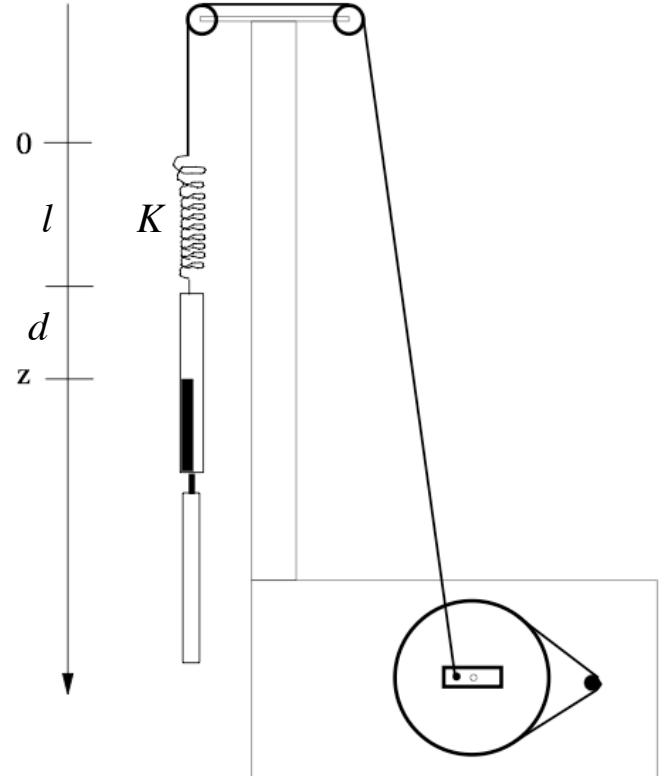


Figura 3.1: Esquema da montagem no regime estático

com $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Z_M e φ são duas variáveis que dependem das condições iniciais do movimento.

No caso da força exterior ser oscilante com uma frequência ω_a e amplitude F_0

$$F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\omega_a t) \quad (3.10)$$

então equação de movimento tem duas componentes: a componente de oscilação livre e a componente correspondente à solução particular da equação diferencial para $F(t)$ (ver o Apêndice A)

$$Z(t) = Z_M e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) + Z_0 \cos(\omega_a t - \alpha) \quad (3.11)$$

em que

$$Z_0 = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_a^2}} \quad (3.12)$$

$$\tan \alpha = \frac{2\lambda \omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2} \quad (3.13)$$

Verifica-se que após uns instantes iniciais $Z_M e^{-\lambda t} \ll Z_0$ e portanto no regime forçado

$$Z(t) \approx Z_0 \cos(\omega_a t - \alpha) \quad (3.14)$$

É conveniente notar que quando $\omega_a < \omega_0$ e $\omega_a \rightarrow \omega_0$ $\alpha \rightarrow \pi/2$ e quando $\omega_a > \omega_0$ e $\omega_a \rightarrow \omega_0$ $\alpha \rightarrow -\pi/2$.

Questão: A partir das equações 3.12 e 3.13 elabore gráficos de $Z_0 m / (F_0 \omega_0^2)$ e α em função de ω_a / ω_0 para diferentes valores de λ / ω_0 .

3.2 Descrição da Montagem

Na figura 3.2 apresentam-se algumas imagens da montagem utilizada no trabalho, incluindo uma imagem completa e alguns detalhes dos painéis frontal e oposto. Note-se a barra vertical graduada em milímetros suspensa na mola. A barra deve oscilar sem tocar nas paredes do suporte da fotocélula utilizada para medir o período e a amplitude das oscilações. Para tal o sistema **tem de ser nivelado** utilizando os dois apoios ajustáveis na base da unidade.

No painel frontal note-se o selector da grandeza medida e o mostrador que apresenta os valores de amplitude, do período de oscilação medidas, ou da frequência de rotação do motor utilizado para forçar a oscilação do sistema. No painel traseiro da unidade pode observar-se a correia de transmissão da rotação do motor para a rotação da polia (roldana) ligada ao fio que segura a mola. A força aplicada depende da distância a que o fio se encontra do centro da polia.

Note-se também um mostrador circular onde pode ler-se o ângulo de fase entre a oscilação da barra graduada e a força gerada pela rotação do motor.

Questão: Tente deduzir a expressão da força em função do ajuste de excentricidade.

Na figura 3.3 apresenta-se uma descrição mais detalhada da montagem, com indicação das condições de ajuste e nivelamento correctas para a execução do trabalho.

Para uma boa execução da experiência sugere-se a utilização de uma excentricidade inferior a 2 mm para evitar que na ressonância a amplitude de oscilação ultrapasse a escalar e provoque o contacto da barra de alumínio com o guia da barra.

Para uma correcta medida de amplitudes e tempos é necessário ajustar o comprimento do fio de forma a que a fronteira entre a zona clara e escura da barra graduada esteja exactamente no alinhamento do LED e da fotocélula montados no guia da barra "C".

As condições de atrito do sistema podem ser controladas através do posicionamento das magnetos permanentes a diferentes distâncias da barra de alumínio utilizando o suporte "G".



Figura 3.2: Imagens da montagem PASCO ME-9210A utilizada no trabalho.

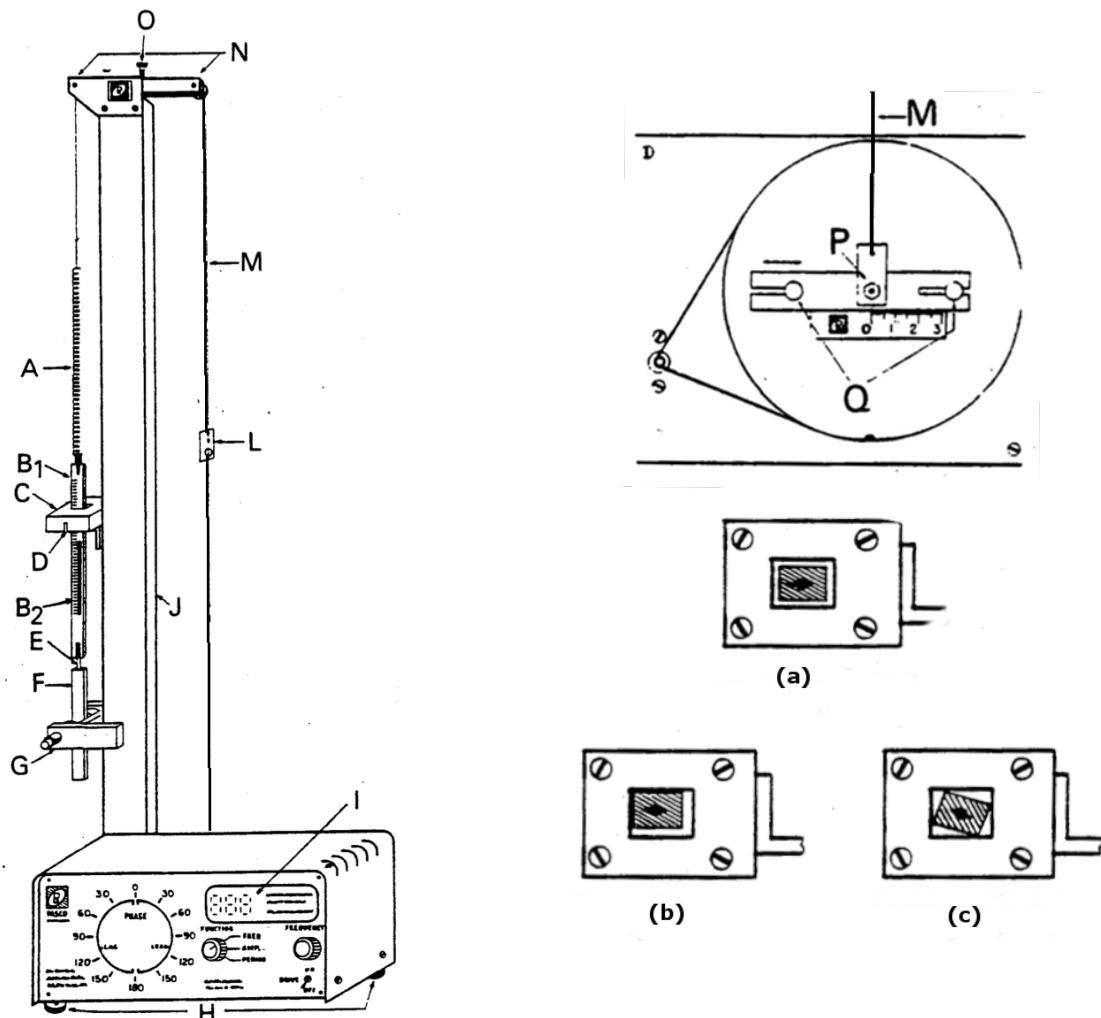


Figura 3.3: A-Mola; B₁-Parte clara da escala graduada; B₂-Parte escura da escala graduada; C-Guia da barra; D- LED; E-Suportes adicionais; F-Barra da alumínio para amortecimento electromagnético; G-Unidade de amortecimento electromagnético; H-Parafusos de nivelamento; I-Mostrador para leitura de (amplitude, período ou frequência de rotação do motor); J-Coluna de suporte; L- Ajuste do comprimento do fio; M-Fio; N-Roldanas de apoio do fio; O-Ajuste do comprimento do fio; P-Excêntrico; Q-Variador de excentricidade. (a) Alinhamento correcto da Barra. (b) Alinhamento incorrecto da barra (utilizar os parafusos H para corrigir). (c) Torção da barra (rodar a patilha para corrigir)

3.3 Procedimento Experimental Indicativo

Este procedimento experimental é meramente indicativo e corresponde ao mínimo necessário para execução do trabalho, tendo como objectivo a determinação da constante elástica e coeficiente de atrito do sistema do sistema.

1. Determinação da constante elástica de uma mola
 - (a) Registe os valores da variação do comprimento da mola, $\Delta\ell$, em função dos valores da variação da massa, Δm , suspensa na mola
 - (b) Represente os pares de valores (Δm , $\Delta\ell$) num gráfico.
 - (c) Obtenha o valor da constante elástica utilizando o modelo físico que descreve o comportamento do sistema nas condições experimentais utilizadas, utilizando o método dos mínimos quadrados para ajustar o modelo aos dados experimentais.
2. Determine a constante de atrito do sistema para duas condições distintas, utilizando o ajuste de posição dos magnetos com relação à barra de alumínio e uma massa de 50g suspensa na barra.
 - (a) Ajuste o sistema, com a zona de transição zona clara/zona escura da barra alinhada com o LED e a fotocélula. Ajuste também a posição dos magnetos.
 - (b) Desloque o conjunto mola-barra-massa da posição de equilíbrio puxando pela patilha que segura o fio na roldana ligada ao motor.
 - (c) Observe que o LED acende com o mesmo período de oscilação. Utilize a contagem do número de vezes que o LED pisca para medir o tempo. Registe a amplitude de oscilação, $A(t)$, em função do tempo.
 - (d) Represente os valores de amplitude e tempo num gráfico e utilize o modelo que descreve o sistema para obter o valor do coeficiente de amortecimentos da amplitude de oscilação.
3. Para as duas condições de atrito que considerou estude o movimento forçado do sistema registando os valores da amplitude de oscilação, $A(f_a)$, em função da frequência de rotação do motor. Na situação de atrito mais elevado registe também a diferença de fase, $\alpha(f_a)$, em função da frequência de rotação do motor.
 - (a) Tomando em consideração o estudo que fez da resposta do sistema quando sujeito a uma força exterior oscilante com uma frequência ω_a . Elabore um procedimento experimental que lhe permita obter um conjunto de valores $A(f_a)$, e $\alpha(f_a)$ que caracterizem o melhor possível a ressonância do sistema.
 - (b) Represente os valores de $A(f_a)$, e $\alpha(f_a)$ em dois gráficos e utilize as equações apropriadas para analisar os dados e obter os valores das constante elástica e do coeficiente de atrito.
4. Discuta criticamente os valores obtidos e as fontes de erro.

4. Determinação da Constante de Gravitação Universal (T2)

Trabalho inspirado na Experiência de Cavendish

(Texto adaptado e baseado no trabalho original de J. L. Figueirinhas e A.C. Ribeiro, IST 1995)

4.1 Introdução

A primeira determinação experimental rigorosa da constante de atracção universal G prevista na teoria da gravitação de Newton foi realizada por Lord Cavendish em 1798. Nesta experiência será utilizada uma balança de torção de funcionamento semelhante à utilizada inicialmente por Lord Cavendish.

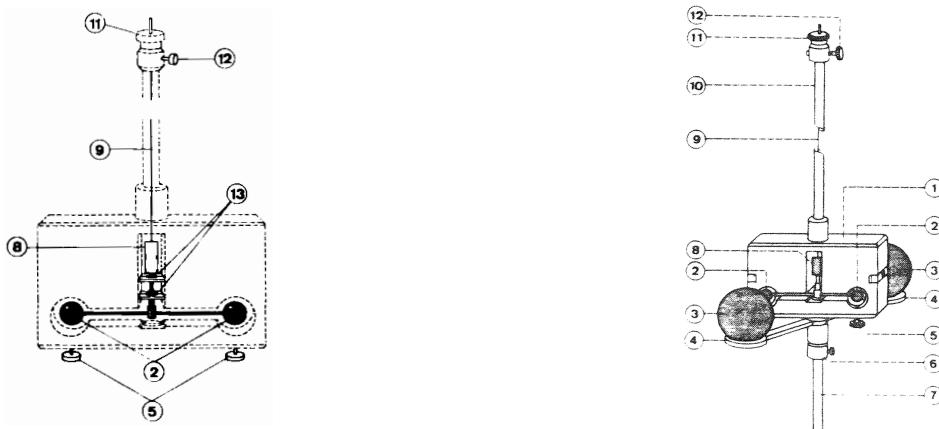


Figura 4.4: Esquemas da balança de Cavendish utilizada no trabalho.

- 1- Caixa de metal com faces anterior e posterior em vidro acrílico
- 2- Pequena esfera de chumbo
- 3- Grande esfera de chumbo
- 4- Suporte para as grandes esferas de chumbo
- 5- Parafuso para bloqueio da balança
- 6- Anilha de ajuste da altura do suporte giratório
- 7- Barra de suporte permanente
- 8- Espelho côncavo
- 9- Fio de torção, em bronze (banda)
- 10- Tubo de suporte da barra de torção
- 11- Cabeça torção para ajustamento do zero
- 12- Parafuso que fixa a cabeça de torção

4.2 Descrição da Balança de Torção

A balança de torção que utilizaremos (ver Figura 4.4) é fundamentalmente composta por uma barra horizontal de alumínio, que sustenta nos extremos duas pequenas esferas de chumbo na proximidade das quais podem ser colocadas, em posição fixa, duas grandes esferas também de chumbo. Esta barra está suspensa por um fio metálico ligado no topo a um suporte fixo. Um pequeno espelho solidário com a barra permite determinar a orientação da mesma. O sistema que sustenta as pequenas esferas encontra-se isolado de perturbações, nomeadamente de correntes de ar, no interior de uma caixa. O fio metálico que sustenta a barra determina para esta, uma posição de equilíbrio. Qualquer afastamento desta posição faz surgir no fio um binário de restituição que tende a levar a barra à sua posição inicial.

4.3 Princípio de Funcionamento

4.3.1 Equação de Movimento

A determinação da constante de gravitação universal é obtida medindo a intensidade da força de atracção F entre massas conhecidas m e m' colocadas a uma distância l . Esta força tem a direcção da linha que une os centros de massa m e m' e a sua intensidade é dada por:

$$F = G \frac{m \cdot m'}{l^2} \quad (4.15)$$

Na balança de torção, cada uma das duas grandes esferas de chumbo é colocada na proximidade, respectivamente, de cada uma das esferas existentes no topo da barra suspensa (ver Figura 4.5). As forças de atracção gravitacional entre as grandes esferas colocadas em posições fixas e as pequenas esferas colocadas nos extremos da barra horizontal criam um binário de momento N_G que tende a afastar a barra da sua posição de equilíbrio. Este binário é contrariado pelo binário de torção do fio de momento N_T e também por um binário de atrito de momento N_A associado ao movimento do sistema no ar.

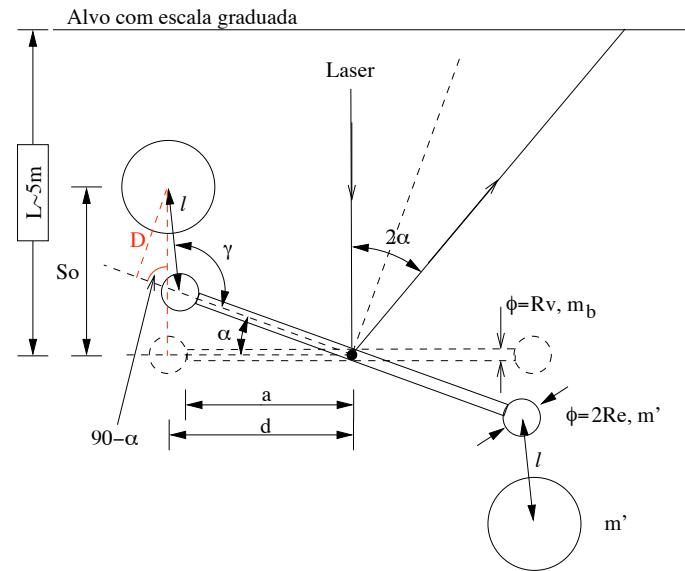


Figura 4.5: Diagrama esquemático da balança de torção utilizada no trabalho.

$$l^2 = (d - d \cos \alpha)^2 + (S_0 - d \sin \alpha)^2$$

$$\sin \gamma = \frac{(S_0 - d \tan \alpha) \cos \alpha}{l}$$

A equação do movimento do sistema móvel em torno do eixo de rotação escreve-se (ver apêndice):

$$\overrightarrow{N_{T0}} = I_{ZZ} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \vec{e}_Z \quad (4.16)$$

sendo:

\vec{e}_Z o versor associado ao eixo de rotação,

$\overrightarrow{N_{T0}}$ o somatório dos momentos dos binários aplicados ao sistema,

$I_{ZZ} = \sum_K m_K r_K^2$ o momento de inércia do corpo rígido em relação ao eixo de rotação.

Explicitamente, no caso em estudo, a equação do movimento (4.16) escreve-se então:

$$I_{ZZ} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \vec{e}_Z = \overrightarrow{N_G} + \overrightarrow{N_T} + \overrightarrow{N_A} \quad (4.17)$$

com

$$\overrightarrow{N_T} = -C \alpha \vec{e}_Z \quad (4.18)$$

$$\overrightarrow{N_G} = \sum_{i=1}^2 \vec{r}_i \times \overrightarrow{F_{Gi}} = 2dG \frac{mm'}{l^2} \sin \gamma \vec{e}_Z \quad (4.19)$$

$$\overrightarrow{N_A} = -K \frac{d\alpha}{dt} \vec{e}_Z \quad (4.20)$$

C - a constante de torção do fio

α - ângulo de desvio

m e m' - massas conhecidas

$2d$ - comprimento da barra

l - distância entre o centro da esfera fixa e o centro da esfera móvel que lhe está mais próxima

γ - ângulo entre a direcção da linha l que une o centro de massa das esferas e a direcção da barra que sustenta as pequenas esferas

L - distância do eixo da balança ao alvo

r_i - vector de posições das pequenas esferas em relação ao eixo de rotação

K - constante de atrito

Combinando as equações (4.17) a (4.20) obtém-se finalmente a equação de movimento para a rotação da barra em torno do eixo atrás definido.

$$I_{ZZ} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + K \frac{d\alpha}{dt} + C\alpha = \frac{2dGmm' \sin \gamma}{l^2} \quad (4.21)$$

Esta equação descreve o movimento da barra em torno da posição de equilíbrio. Quando o sistema atinge o equilíbrio, os dois primeiros termos do primeiro membro da equação (4.21) são nulos obtendo-se assim o equilíbrio entre os binários N_G e N_T traduzido por:

$$C\alpha = \frac{2dGmm'}{l^2} \sin \gamma \quad (4.22)$$

A constante de gravitação G pode ser calculada, se for conhecida a constante de torção do fio C a partir da expressão seguinte:

$$G = \alpha C \frac{l^2}{2dmm' \sin \gamma} \quad (4.23)$$

4.3.2 Solução da Equação de Movimento

A constante de torção do fio C pode ser determinada analisando o movimento de oscilação livre da barra horizontal, na ausência das grandes esferas. Nesta configuração, o sistema pode ser perturbado, oscilando livremente em torno da sua posição de equilíbrio. Nessas condições a equação (4.21) transforma-se em:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = 0 \quad (4.24)$$

com $2\lambda = K/I_{ZZ}$ e $\omega_0^2 = C/I_{ZZ}$.

A equação (4.24) tem três tipos de solução. No caso em estudo, temos um fraco amortecimento, ou seja, $\omega_0^2 > \lambda^2$. Neste caso, a solução de (4.24) é do tipo:

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi) \quad (4.25)$$

com

$$\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \lambda^2)}$$

Os valores de α_0 e ϕ são determinados pelas condições iniciais do problema. Analisando o movimento de oscilação livre da barra dado por $\alpha(t)$, podemos determinar $\omega = 2\pi/T$ e λ . Com estes dois valores podemos calcular ω_0 e conhecendo o momento de inércia I_{ZZ} , determinar a constante de torção do fio C como desejamos.

4.4 Procedimento Experimental Indicativo

Este procedimento experimental é meramente indicativo e corresponde ao mínimo necessário para execução do trabalho, tendo como objectivo a determinação da constante de gravitação universal.

1. Preparação do trabalho

Calcule o momento de inércia do braço (varão que sustenta as pequenas esferas, em unidades do S.I.). Note que (ver Apêndice B.1):

$$I_{zz} = 2md^2 + 2 \times \frac{2}{5}mR_e^2 + \frac{2}{3}\rho_v\pi R_v^2 a^3 \quad (4.26)$$

para

$$m = 20 \pm 1 \text{ g}$$

$m' = 1.430 \pm 0.004 \text{ Kg}$ (confirme utilizando a balança disponível no laboratório)

$$S_0 = 4.65 \text{ cm}$$

$$R_e = \left(\frac{3m}{4\pi\rho_e} \right)^{1/3}$$

$$\rho_e = \rho_{Pb} = 12340 \text{ Kg/m}^3$$

$$\rho_v = 2700 \text{ Kg/m}^3$$

$$d = 5 \text{ cm}$$

$$R_v = 1.25 \text{ mm}$$

$$a = d - R_e$$

2. Assumindo que o sistema está em repouso após o último trabalho, registe a posição do laser no alvo, y_{01} .
3. Mantendo as duas esferas no suporte, rode o braço que as suporta até uma posição simétrica à inicial, e espere que as oscilações verticais do laser evanesçam. Proceda como no ponto anterior e registe as posições do laser no alvo em função do tempo para um intervalo de 5 períodos.
4. Retire com muito cuidado as esferas grandes do suporte. Verifique que o braço com as esferas pequenas suspenso no fio iniciou o seu movimento de oscilação. Espere que o feixe laser se desloque para a posição extrema oposta à inicial. Inicie a contagem do tempo com o cronómetro e inicie o registo das posições do feixe de laser no alvo para intervalos de tempo 2-3 min. Continue as medidas até que tenha decorrido um tempo de 5 períodos.
5. Se necessário volte a colocar as esferas no suporte e repita o processo de medida de forma a obter um segundo valor para y_{01} .
6. Tratamento dos resultados para a determinação de C

Com o conjunto dos resultados obtidos sem as esferas grandes exteriores. Determine $\omega = 2\pi/T$, λ e $C = \omega_0^2 I_{ZZ}$.

Na posição de equilíbrio da barra horizontal da balança, com as grandes massas retiradas, o espelho da balança deverá estar paralelo à escala graduada e o feixe luminoso reflectido é perpendicular à mesma. Para qualquer desvio da posição de equilíbrio, a relação entre α e o deslocamento y do feixe luminoso na escala graduada é dada por:

$$y = y_0 + L \tan(2\alpha) \quad (4.27)$$

Em que y_0 é a posição de equilíbrio do feixe na escala e L a distância da balança à escala. Para pequenos valores do ângulo α , a situação que quase sempre se verifica nesta experiência, é válida a relação $\tan(2\alpha) \approx 2\alpha$. Nestas condições obtém-se para $y(t)$:

$$y(t) = y_0 + 2L\alpha_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi) = y_0 + y_1 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi) \quad (4.28)$$

$$\text{com } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Efectue o ajuste da equação (4.28) ao conjunto de todos os resultados experimentais e estime os valores de T , K e C .

7. Tratamento dos resultados para a determinação de G

O tratamento rigoroso da equação do movimento da barra após a colocação das grandes massas na proximidade das pequenas massas, implica o conhecimento da solução do regime forçado associado à equação do movimento (4.21). A solução exacta desta equação é complexa. No entanto, para pequenas elongações (para desvios máximos de α inferiores a 1° em torno da nova posição de equilíbrio, o segundo membro desta equação é aproximadamente constante) as medidas obtidas experimentalmente conduzem a valores admissíveis para os pontos de paragem que se podem obter utilizando uma equação do tipo (4.28) para descrever o movimento da barra em torno da nova posição de equilíbrio. Ajuste uma função do tipo (4.28) e determine T , λ e y_{02} . O ângulo de desvio será dado por:

$$\alpha = \left| \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{y_{02} - \frac{y_{01}+y_{02}}{2}}{L} \right) \right| \quad (4.29)$$

8. Discuta criticamente os valores obtidos e as fontes de erro.

5. Estudo das Oscilações de um Galvanómetro (T3)

(Texto adaptado e baseado no trabalho proposto por Prof. A.C. Ribeiro, IST 1995) [1]

5.1 Fundamentos Teóricos

O funcionamento de um galvanómetro de quadro móvel baseia-se na interacção entre uma corrente eléctrica e um campo magnético. De acordo com a lei de Laplace, um elemento de comprimento \vec{ds} de um fio condutor percorrido por uma corrente eléctrica de intensidade i , imerso num campo de indução magnética \vec{B} , fica sujeito a uma força tal que:

$$\vec{df} = i\vec{ds} \times \vec{B} \quad (5.30)$$

O galvanómetro é constituído por um quadro móvel, por um íman permanente em ferradura e por um cilindro de ferro macio² como se indica na figura 1.

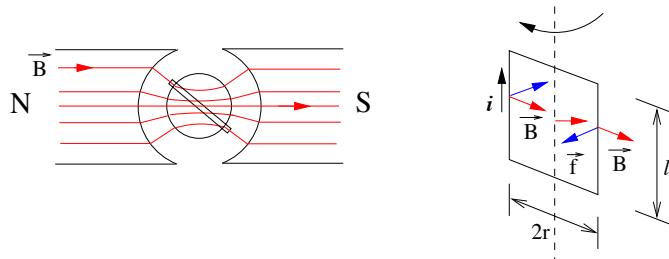


Figura 5.6: Esquema de corrente

O quadro móvel está suspenso por um fio ou por uma mola e é constituído por um conjunto de n espiras que vão ser percorridas pela corrente eléctrica. O quadro móvel pode oscilar em torno de um eixo que coincide com o eixo do cilindro de ferro macio, utilizando o espaço existente entre o núcleo de ferro e o íman, ou seja, no entre-ferro.

Como se pode ver na figura 5.6, o campo magnético é radial no entreferro pelo que será normal aos lados verticais do quadro móvel. Quando se aplica ao galvanómetro uma corrente de intensidade i , a lei de Laplace permite-nos calcular a força que se exerce sobre um qualquer dos lados verticais do quadro que terá por módulo:

$$f = inlB \quad (5.31)$$

e um sentido tal que \vec{ds} , \vec{B} e \vec{f} formem um triedro directo. Portanto, a força resultante será perpendicular ao quadro. Em relação aos lados horizontais do quadro, eles não serão actuados por nenhuma força considerável visto que aí o campo magnético já é reduzido. O quadro móvel é assim actuado por duas forças iguais em módulo mas de sentidos opostos o que constitui um binário que tende a fazer rodar o quadro do galvanómetro como se pode ver na figura 2.

O momento do binário é dado por:

$$N_l = n2RliB = n2RliB = A_qniB \quad (5.32)$$

sendo A_q a área do quadro em que o campo magnético se manifesta.

Se pensarmos agora que o quadro móvel do galvanómetro está suspenso por meio de um fio e que esse fio, quando o quadro roda, se vai torcer, chegaremos à conclusão que iremos ter outro binário, que tende a levar o quadro à posição inicial.

Esse binário terá um momento proporcional ao ângulo α .

$$N_2 = -C\alpha \quad (5.33)$$

sendo C o coeficiente de torção do fio. O quadro móvel para quando estes dois binários N_1 e N_2 se equilibram, ou seja,

$$nA_qBi = C\alpha. \quad (5.34)$$

²ferro macio: com baixa histerese por oposição ao ferro utilizado nos ferromagnéticos

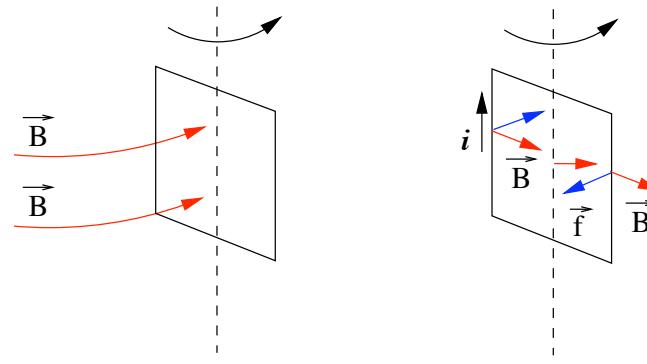


Figura 5.7: Figura 2

Assim,

$$\alpha = \frac{nA_qB}{C}i = S_i i \quad (5.35)$$

onde S_i representa a sensibilidade do galvanómetro.

Ao inverso de S_i chamamos factor de redução do galvanómetro em regime permanente. S_i é uma constante do aparelho de quadro móvel.

5.1.1 Estudo das Oscilações do Quadro Móvel

Vamos agora estudar o movimento do quadro móvel quando se abre o circuito de alimentação que impõe uma corrente de intensidade i .

Se no instante $t = 0$ o quadro móvel do galvanómetro ocupar uma dada posição e nesse instante, $t = 0^+$, abrimos o circuito eléctrico que alimenta o circuito, verifica-se que, nestas condições, o galvanómetro tende a voltar à posição de equilíbrio quando $i = 0$, por exemplo $\alpha = 0$.³

O quadro móvel é um corpo rígido e como oscila em torno de um eixo é um sistema com um só grau de liberdade, ou seja, o ângulo α . Torna-se pois pertinente fazer todo o estudo do movimento do quadro do galvanómetro utilizando α como variável.

Para um sistema rodando em torno de um eixo, a equação do movimento é:

$$I_{zz} \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \sum N_i = N_1 + N_2 + N_3 \quad (5.36)$$

sendo I_{zz} o momento de inércia do quadro móvel em relação ao eixo do quadro e $\sum N_i$ o sumatório das componentes dos momentos aplicados ao sistema:

N_1 - Binário motor

$$N_1 = nA_qiB \quad (5.37)$$

N_2 - Binário de torção

$$N_2 = -C\alpha \quad (5.38)$$

N_3 - Binário de amortecimento devido ao atrito provocado pelo ar

$$N_3 = -A_1 \frac{d\alpha}{dt} \quad (5.39)$$

Assim, (5.36) pode escrever-se da forma

$$I_{zz} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + A_1 \frac{da}{dt} + C\alpha = nA_qiB \quad (5.40)$$

Os sinais + e - resultam de uns binários favorecerem o movimento do quadro e outros não.

5.1.2 Atrito Electromagnético

O quadro do galvanómetro funciona habitualmente ligado em paralelo⁴ com uma resistência R_s como se evidencia na figura 5.8. Se $R_s \neq 0$ então ao abrirmos o interruptor que alimenta o galvanómetro verifica-se que a corrente que o percorre não se anula instantaneamente, porque temos um circuito fechado devido à presença de R_s .

Assim:

³Dependendo dos valores tomados pelos parâmetros do sistema, são possíveis diferentes regimes de evolução do quadro móvel do galvanómetro até ele ficar em repouso.

⁴"shuntado"

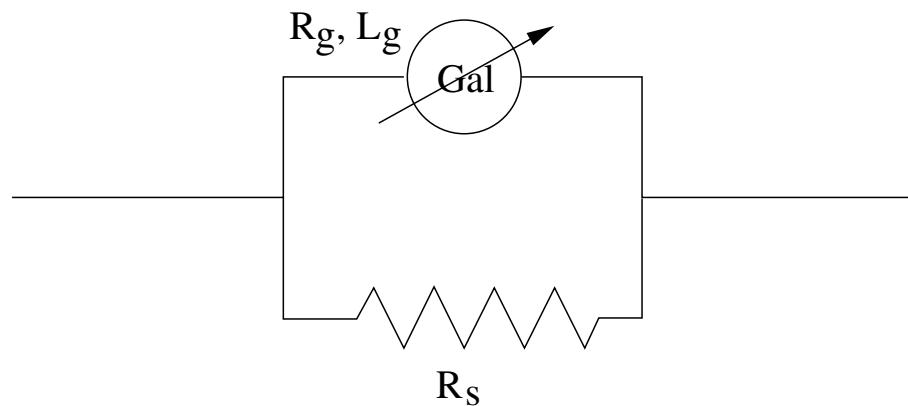


Figura 5.8: Detalhe do circuito eléctrico ligado ao Galvanómetro.

1. De acordo com a lei de indução de Faraday, quando através da superfície de um circuito se verifica uma variação temporal do fluxo \vec{B} sobre este é actua uma força electromotriz induzida que se opõe à variação do fluxo tal que:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \quad (5.41)$$

O fluxo de \vec{B} , ϕ , criado pelo íman que atravessa a superfície do quadro quando este ocupa uma dada posição α pode ser calculado tendo em conta que todas as linhas de força \vec{B} que atravessam o quadro, atravessam igualmente a calote cilíndrica representada na figura 5.9 a ponteado. Ora os dois fluxos são idênticos pois as linhas de \vec{B} são fechadas ($\text{div } \vec{B} = 0$). Portanto:

$$\phi = \alpha A_q n B \quad (5.42)$$

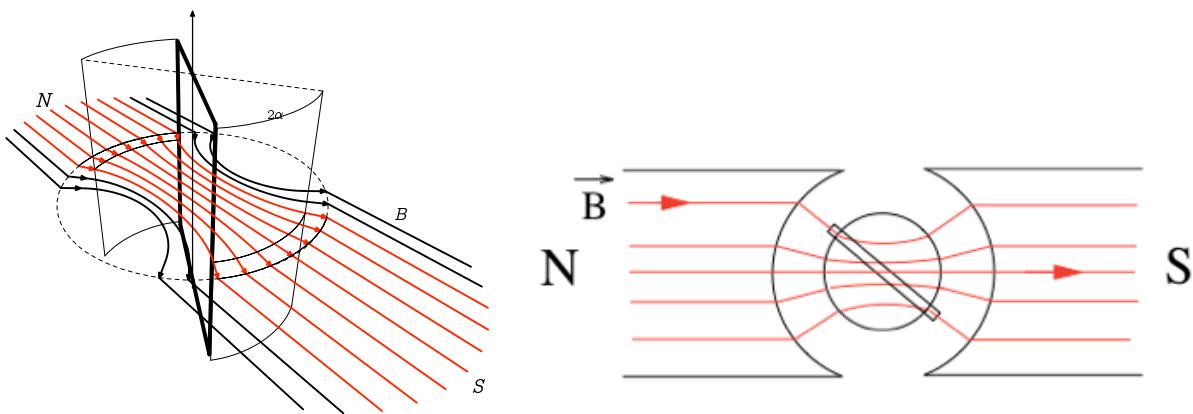


Figura 5.9: Linhas de fluxo que atravessam o quadro do Galvanómetro.(Figura desenhada com FEATPOST [?])

Ao retirarmos a corrente exterior, o quadro que ocupava uma posição fixa, tende a voltar ao equilíbrio. Consequentemente, α vai variar no tempo e a força electromotriz detectada (devida ao movimento do quadro no campo) pode escrever-se da forma:

$$\varepsilon^\phi = -\frac{d\phi}{dt} = -A_q n B \frac{d\alpha}{dt} \quad (5.43)$$

2. O quadro do galvanómetro tem um coeficiente de auto-indução L_g pelo que se o mesmo é percorrido por uma corrente i que varia no tempo o sistema á sede de uma força electromotriz adicional

$$\varepsilon^i = -L_g \frac{di}{dt} \quad (5.44)$$

Deste modo, a força electromotriz total virá:

$$\varepsilon^\phi + \varepsilon^i = -A_q n B \frac{d\alpha}{dt} - L_g \frac{di}{dt} = (R_s + R_g)i \quad (5.45)$$

onde R_g é a resistência interna do Galvanómetro. Na maioria das situações a força electromotriz induzida $\varepsilon^i = -L_g di/dt$ é desprezável porque L_g é muito baixo e habitualmente a corrente varia muito lentamente no tempo. Assim, a partir de (5.45) pode-se escrever a expressão da corrente induzida:

$$i \simeq -\frac{A_q n B}{R_s + R_g} \frac{d\alpha}{dt} \quad (5.46)$$

Tomando então a expressão (5.40) que nos permite estudar o movimento do quadro podemos aí substituir i pela expressão (5.47).

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + A_1 \frac{d\alpha}{dt} + C\alpha = -\frac{(nA_qB)^2}{R_s + R_g} \frac{d\alpha}{dt} \quad (5.47)$$

O 2º membro da equação (5.47) tem o significado físico de um binário de atrito electromagnético.⁵ Definindo

$$A_2 = \frac{(nA_qB)^2}{R} \quad (5.48)$$

vem

$$I_{zz} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + A_1 \frac{d\alpha}{dt} + C\alpha = -A_2 \frac{d\alpha}{dt} \quad (5.49)$$

ou seja

$$I_{zz} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + (A_1 + A_2) \frac{d\alpha}{dt} + C\alpha = 0 \quad (5.50)$$

dividindo por I_{zz}

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = 0 \quad (5.51)$$

com

$$2\lambda = \frac{A_1 + A_2}{I_{zz}} = 2(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (5.52)$$

$$\omega_0^2 = \frac{C}{I_{zz}} \quad (5.53)$$

λ_1 - coef. de amortecimento mecânico λ_2 - coef. de amortecimento electromagnético

Podemos pois concluir que o quadro móvel do galvanómetro é um sistema cujo estudo é inteiramente análogo ao estudo feito a propósito das oscilações mecânicas livres do sistema massa-mola ou do pêndulo de torção.

Como sabemos (ver Apêndice A), as soluções dependem do valores relativos de ω_0 e λ :

- Caso $\omega_0 > \lambda$,

$$\alpha = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \delta) \quad (5.54)$$

- Caso $\omega_0 = \lambda$,

$$\alpha = (a_1 + a_2 t) \exp(-\lambda t) \quad (5.55)$$

- Caso $\omega_0 < \lambda$,

$$\alpha = e^{-\lambda t} \left(a_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + a_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} \right) \quad (5.56)$$

em que as constantes que figuram nas equações acima são determinadas a partir das condições iniciais ao sistema em estudo. É de notar que para valores elevados de $R = R_s + R_g$ o coeficiente de atrito λ_2 é muito pequeno e poderá ser desprezável pelo que só nos teremos de preocupar com o atrito mecânico devido ao ar. Evidentemente que para valores de R muito pequenos, o coeficiente λ_2 virá muito grande pelo que estaremos nitidamente num sistema amortecido ou seja no 3º caso. Existirá pois um valor de $R = R_s + R_g$ para o qual o regime é aperiódico limite. Ao valor de R_s que conduz a esse regime chamamos resistência crítica de shunt. Na prática a resistência crítica de shunt determina-se descendo R_s até observar experimentalmente o regime aperiódico limite.

5.1.3 Referência ao Método de Poggendorff

O nosso galvanómetro de quadro móvel é um galvanómetro de espelho que está colocado no mesmo plano do quadro móvel. Iluminando esse espelho por meio de um projector podemos receber a imagem reflectida numa escala graduada colocada a uma certa distância do galvanómetro.

Essa escala deve ser colocada paralelamente ao espelho quando o quadro móvel está em repouso. Temos pois que pela leitura de a na escala podemos determinar o ângulo α ou seja a nossa variável em estudo. Será:

$$\tan(2\alpha) = \frac{a}{d} \quad (5.57)$$

para valores muito pequenos de 2α podemos confundir a tangente com o arco expresso em radianos pelo que será:

$2\alpha \simeq a/d$, $\alpha \simeq a/(2d)$ Para valores de α que não permitem esta aproximação será sempre $\tan(2\alpha) = a/d$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{a}{d}\right) \quad (5.58)$$

⁵De facto se tivermos em conta o "sentido" da corrente induzida pelo movimento do quadro ao voltar ao equilíbrio e a sua interacção com o campo \vec{B} estático verificamos que o quadro ao tentar voltar ao equilíbrio é actuado por um binário que se opõe ao movimento

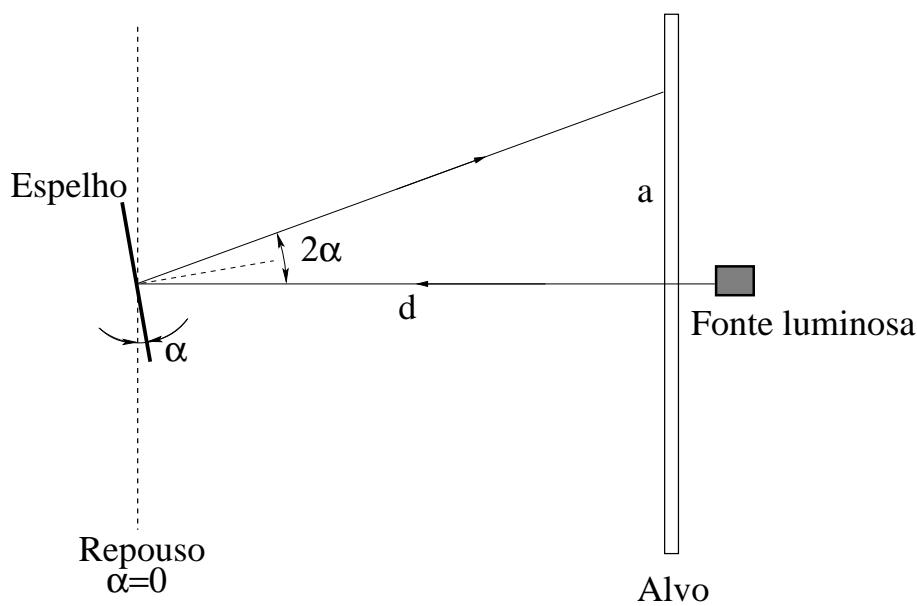


Figura 5.10: Figura 5.

5.2 Procedimento Experimental Indicativo

Este procedimento experimental é meramente indicativo e corresponde ao mínimo necessário para execução do trabalho, tendo como objectivo a determinação da sensibilidade do galvanómetro, do valor do momento de inércia I_{zz} , do valor da constante nA_qB , do valor da constante de torção, C , e do valor da constante de atrito do sistema no ar, A_1 .

1. Preparação do trabalho

Deduza as expressões que permitem calcular I_{zz} , nA_qB , C , e A_1 e das suas incertezas, resultado da propagação de erros.

Deduza a expressão da tensão aos terminais do voltímetro.

2. Utilize o multímetro para verificar os valores dos parâmetros físicos do sistema.

3. Verifique a disponibilidade na bancada da lista de material:

B - Bateria ou gerador DC de **0.3-0.5 V**

R_1 - Resistência de $\sim 10000\Omega$

R_2 - Reóstato de $\sim 110\Omega$ e 2.5 A

V - Voltímetro ajustado para medir milivoltos

R_3 - Resistência de 70000Ω

I_1 , I_3 - Interruptores.

I_2 - Inversor de cavilhas

R_S - Caixa de resistências de 4 botões:

(a) 1000Ω de 100Ω em 100Ω

(b) 100Ω de 10Ω em 10Ω

(c) 10Ω de 1Ω em 1Ω

(d) 1Ω de 0.1Ω em 0.1Ω

G - Galvanómetro com $R_i = 140\Omega$ e sensibilidade $\approx 4600\text{ mm}/\mu\text{A}$ (desvio medido a 1 metro de distância).

4. Efectue/verifique a montagem do circuito apresentado na figura 5.11

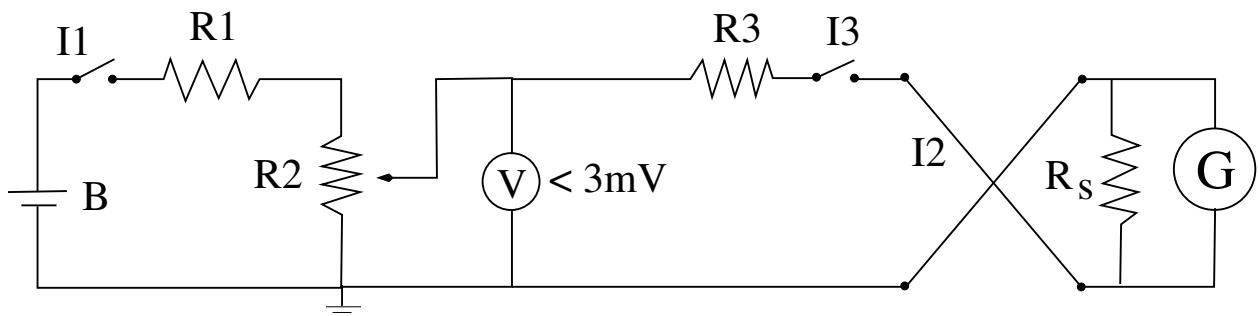


Figura 5.11: Esquema do circuito eléctrico ligado ao Galvanómetro.

Deduza a expressão que relaciona a tensão medida no voltímetro, U_V , com a tensão do gerador, U_B , e a expressão que relaciona a tensão aos terminais do galvanómetro, U_G , com U_V .

5. Desconecte o Galvanómetro do circuito utilizando o inversor de cavilhas para interromper o circuito.
6. CERTIFIQUE-SE que a tensão da fonte de alimentação B está ajustada para 0.3-0.5V
7. Determine a sensibilidade do galvanómetro através do ajuste linear pelo *método dos mínimos quadrados* dos pares de valores registados para o ângulo de desvio do feixe de luz reflectida em função da corrente que circula pelo Galvanómetro. Certifique-se que os valores de tensão aplicada ao conjunto: R_3 , R_s e Galvanómetro (tensão lida no milivoltímetro), é inferior a 3 mV
8. Estudo das oscilações do galvanómetro só com atrito do ar ($R_s = \infty$).

Aplique ao conjunto galvanómetro-resistência R_3 , uma tensão de 3 mV. Observe o desvio sofrido. Utilizando o inversor de cavilhas faça cair a tensão aplicada para zero. O galvanómetro vai em seguida oscilar livremente no ar.

 - (a) Determine o período T das oscilações medindo com o cronómetro, por exemplo o tempo associado a três períodos de oscilação. Repita a experiência anterior fazendo o quadro ser percorrido por uma corrente em "sentido contrário" tirando partido do inversor de cavilhas.
 - (b) Volte a aplicar ao sistema uma tensão de 3 mV. Retire a tensão aplicada e deixe o sistema oscilar. Registe os valores de amplitude extremos de oscilação em função do tempo. Determine λ_1 , ω_0 a partir do ajuste dos resultados experimentais.
9. Para dois valores de R_s : 50000 e 100000 estude o movimento oscilante amortecido e determine os valores de λ para os dois casos.
10. Partindo do valor $R_s = 50000$ varie R_s de forma a determinar o valores correspondente crítico, R_{sc} correspondente ao regime aperiódico limite. O que acontece para valores $R_s < R_{sc}$?
11. Calcule I_{zz} , nA_qB , C , e A_1 e discuta criticamente não só os valores obtidos, como os erros e as fontes de erro.

6. Oscilações em circuitos RLC série (T4)

Determinação do coeficiente de auto-indução de bobinas através de estudos com circuitos RLC
(Texto adaptado e baseado no trabalho original de A.C. Ribeiro, P.J. Sebastião e F. Tomé, IST 1996) [1]

6.1 Introdução

6.1.1 Objectivo do Trabalho

Neste trabalho iremos determinar o coeficiente de auto-indução L de diferentes bobinas utilizando determinações experimentais efectuadas com um circuito RLC série.⁶ Utilizaremos três métodos distintos para a referida determinação. Estes métodos conduzirão a resultados experimentais com precisões diferentes, sendo útil comparar os valores obtidos, estimar os erros associados às determinações experimentais e concluir sobre o método mais preciso.

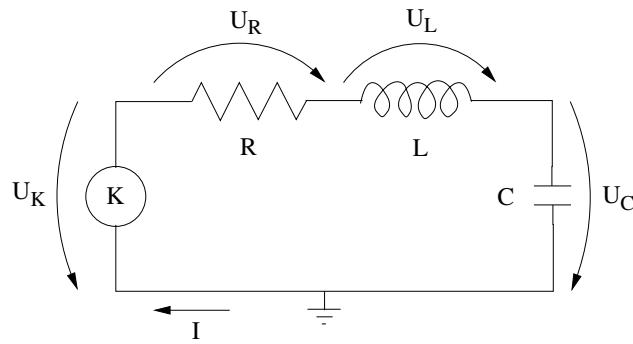


Figura 6.12: Esquema do circuito RLC.

Os métodos utilizados para determinação de L são os seguintes:

- Identificação da condição de ressonância no circuito RLC, quando a este se aplica uma tensão alternada sinusoidal de frequência variável.
- Estudo da curva de resposta do circuito quando a este se aplica uma tensão alternada sinusoidal de frequência variável.
- Identificação do regime aperiódico limite observado no circuito RLC, quando a este se aplica uma tensão tipo impulso rectangular.
- Medida experimental do coeficiente de amortecimento (λ), quando o circuito RLC sujeito a uma tensão tipo impulso rectangular apresenta regimes livres oscilantes.

6.1.2 Estudo do Circuito RLC série em Regime Forçado⁷ alternado sinusoidal

Considere-se o circuito RLC representado na figura 6.12 ao qual se aplica uma tensão u_K . A equação que rege o funcionamento do circuito é:

$$u_K = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt \quad (6.59)$$

No caso da tensão u_K ser alternada sinusoidal, a corrente i também o é, uma vez que admitimos ser o circuito de parâmetros lineares. Assim, se u_K for dado por:

$$u_K = U_{KM} \cos(\omega t + \alpha_u) \quad (6.60)$$

deveremos ter

$$i = I_M \cos(\omega t + \alpha_i) \quad (6.61)$$

⁶Este trabalho pressupõe o conhecimento do funcionamento genérico de um osciloscópio.

⁷Consideramos que o regime livre já se anulou estando só presente no circuito o regime forçado. Ver ponto 2.2 deste trabalho

Para a determinação de I_M e α_i vamos recorrer à representação complexa sendo as expressões (6.60) e (6.61) dadas por [2]:

$$u_K = \text{Real}\{U_K M e^{j\omega t} e^{j\alpha_u}\} = \text{Real}\{\bar{U}_K e^{j\omega t}\} \quad (6.62)$$

$$i = \text{Real}\{I_M e^{j\omega t} e^{j\alpha_i}\} = \text{Real}\{\bar{I} e^{j\omega t}\} \quad (6.63)$$

Deste modo a equação (6.59) pode escrever-se na forma:

$$\begin{aligned} \bar{U}_K &= R\bar{I} + j\omega L\bar{I} + \frac{1}{j\omega C}\bar{I} \\ \bar{U}_K &= \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \bar{I} \\ \bar{I} &= \frac{\bar{U}_K}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\bar{U}_K}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j\phi}} \end{aligned} \quad (6.64)$$

com

$$\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (6.65)$$

e $\phi = \alpha_u - \alpha_i$, I_M tem a forma⁸:

$$I_M = |\bar{I}| = \frac{|\bar{U}_K|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\omega C}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} |\bar{U}_K| \quad (6.66)$$

Se a amplitude U_{KM} da tensão se mantiver constante mas fizermos variar a frequência ω , de 0 a ∞ , mantendo R , L e C constantes verificamos que a amplitude da corrente que percorre o circuito é máxima quando o denominador da fração indicada em (6.66) for mínimo ou seja, quando:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

A equação (6.66) diz-nos que o circuito RLC está em ressonância quando a amplitude da corrente que o percorre é máxima. A frequência de ressonância é então dada por:

$$\omega = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6.67)$$

Quando o circuito RLC está em ressonância, a soma das tensões $u_L + u_C$ é nula, pelo que u_K identifica-se com u_R pelo menos teoricamente⁹.

6.1.3 Regimes Livres Num Circuito RLC Série

Considere-se o circuito RLC representado na figura 6.12. Admitindo que se aplica ao circuito uma tensão u_K cuja representação temporal se pode visualizar na figura 6.13, vamos determinar o andamento da tensão u_C considerando que R pode tomar valores de 0 a ∞ .

A equação que rege o funcionamento do circuito é como vimos a equação (6.59) em que u_K toma alternadamente os valores $\pm E$. Expressando a equação em termos da tensão u_C obtém-se:

$$u_K = RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = \pm E \quad (6.68)$$

A solução desta equação diferencial de 2^a ordem é a soma de duas soluções, uma dita solução do regime livre cuja expressão matemática só depende da natureza do circuito, e uma outra dita solução do regime forçado que depende da tensão imposta do exterior.

Na forma canónica esta equação escreve-se da forma usual

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \pm \frac{E}{LC} \quad (6.69)$$

⁸ I_M e α_i podem também ser determinadas substituindo as expressões (6.60) e (6.61) na equação (6.59) que deverá ser desenvolvida tendo em conta o seu carácter de identidade

⁹ Se a bobina tiver uma resistência eléctrica R_B na ressonância $u_L + u_C = u_{RB} \neq 0$ e u_R não se identifica com u_K mas ambas as tensões estão em fase

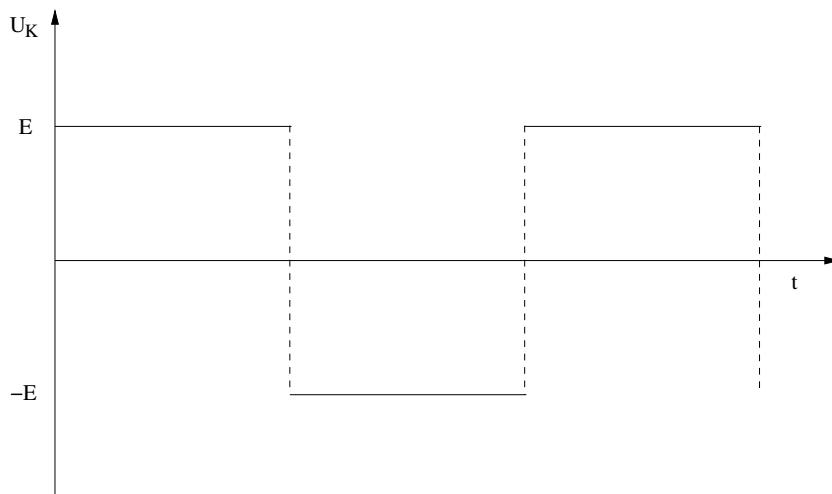


Figura 6.13: Tensão aplicada ao circuito para estudo dos regimes livres oscilante amortecido e aperiódico.

com

$$\lambda = \frac{R}{2L} \quad (6.70)$$

e

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (6.71)$$

A solução do regime livre resulta da resolução da equação diferencial e as soluções dependem dos valores de λ e ω_0 (ver Apêndice A).

Consideremos para exemplificar o caso em que u_C livre é oscilante amortecido. A solução geral é:

$$u_C = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \delta) \pm E \quad (6.72)$$

com $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. A e δ , são obtidos a partir das condições iniciais.

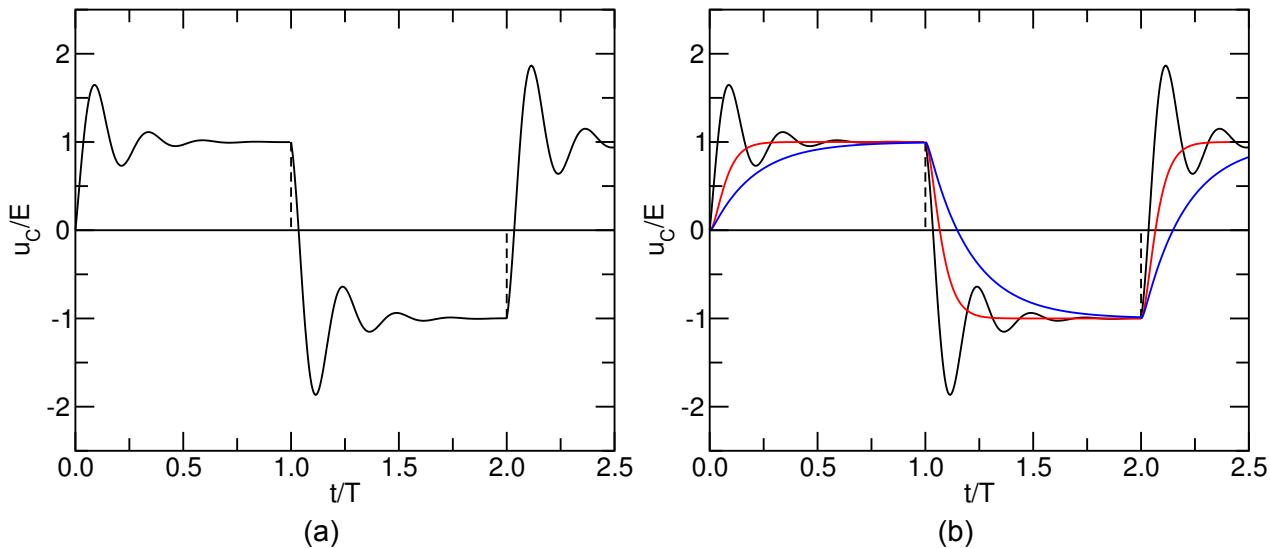


Figura 6.14: (a) Regime oscilante amortecido observado em resposta a uma onda quadrada aplicada ao circuito RLC. (b) Ilustração dos regimes: oscilante amortecido (preto), aperiódico limite (vermelho) e aperiódico (azul).

Se instante inicial $t = 0$ temos [3]:

a) $(u_C)_0 = (u_C)_{0+\epsilon} = 0$ (o condensador estava inicialmente descarregado)¹⁰

b) $(i)_0 = (i)_{0+\epsilon} = 0$ (a corrente não é descontínua)¹¹

e como $i = C \frac{du_C}{dt}$ virá que:

$$\left(\frac{du_C}{dt} \right)_0 = \left(\frac{du_C}{dt} \right)_{0+\epsilon}$$

com estas duas condições iniciais determina-se o valor de A e δ impondo-se à equação (6.72) e à sua derivada. Podemos verificar pela expressão de u_{Cl} que este regime tende exponencialmente para zero pelo

¹⁰A energia eléctrica é uma função contínua

¹¹A energia magnética é uma função contínua

que u_C tende para u_{Cf} , ou seja, para E .

Na figura 6.14(a) está representado um andamento possível da tensão u_C quando se aplica ao circuito RLC a tensão u_K representada na figura 6.13 sendo o regime livre oscilante. Se o período T do sinal diminuir, a tensão u_C nunca estabilizará em $+E$ ou $-E$, ou seja, o regime livre não se anulará antes de $T/2$. Se pelo contrário o período T aumentar poderemos ter anulamento do regime livre antes de $T/2$. No caso representado na figura 6.14 os regimes livres anulam-se antes de $T/2$.

Na figura 6.14(b) está evidenciada a evolução de u_C entre $t = 0$ e $t = T/2$ quando o regime livre é:

- a) aperiódico mas próximo da condição de aperiódico limite
- b) aperiódico limite
- c) oscilante mas próximo da condição de aperiódico limite

6.2 Procedimento Experimental Indicativo

Este procedimento experimental é meramente indicativo e corresponde ao mínimo necessário para execução do trabalho, tendo como objectivo a determinação dos valores das resistências internas das bobinas e dos seus coeficientes de auto-indução através do estudos dos diferentes regimes de funcionamento de um circuito RLC quando sujeito a tensões aplicadas alternada sinusoidal e onda quadrada.

1. Preparação do trabalho

Como é sabido, o osciloscópio mede tensões mas ao mediarem-se duas tensões simultaneamente, utilizando dois dos canais de medida, é obrigatório que os dois pontos de medida correspondentes aos potenciais de referência dos dois canais estejam ligados ambos ao mesmo potencial por corresponderem ambos à massa do osciloscópio. Por esta razão, não é possível ligar o osciloscópio a dois quaisquer pontos de um circuito sob pena de o danificar tornando-se necessário colocar previamente um desses pontos à massa. Como o gerador G tem também um terminal de massa este pode estar convenientemente ligado à massa comum do circuito e aos dois canais do osciloscópio desta forma ambas as tensões são medidas em relação à mesma referência.

Atendendo a este facto desenhe um esquema para dois circuitos RLC de forma a que num circuitos possa medir simultaneamente as tensões aos terminais do gerador e da resistência R e no outro possa medir as tensões aos terminais do gerador e do condensador C .

Deduza as expressões que permitem calcular as grandezas pedidas e as suas incertezas, resultado da propagação de erros.

2. Utilize o multímetro para verificar o bom estado dos cabos coaxiais, para medir os valores da resistência interna das bobinas e verificar a existências de desvios sistemáticos nos valores das resistências e condensadores disponíveis na bancada.

3. Estudo das oscilações forçadas num circuito RLC

Ligue o circuito RLC ao gerador de sinais funcionando em modo alternado sinusoidal. Monte a resistência no circuito de forma a permitir a medida simultânea das tensões U_R e U_K (ver a figura 6.15).

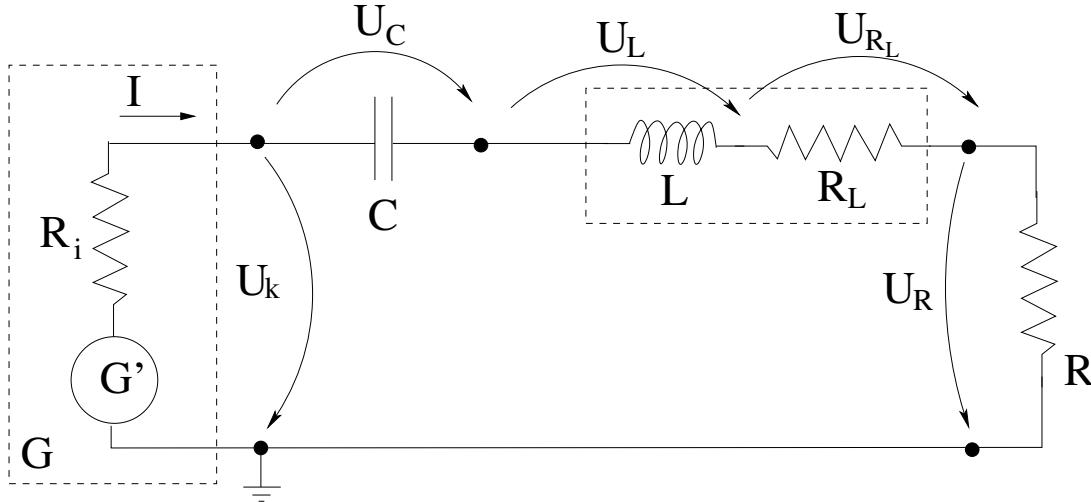


Figura 6.15: Esquema do circuito RLC série com representação das resistências internas da bobina e do gerador.

- (a) Utilizando uma capacidade em torno de $7 \mu\text{F}$, uma das bobinas de coeficiente L , a determinar, e uma resistência R com um valor da mesma ordem de grandeza do valor da resistência eléctrica da bobina considerada, varie a frequência do gerador até que no osciloscópio, em modo XY, se a transformação da elipse numa recta. Nessas condições está encontrada a ressonância. A partir do valor da frequência de ressonância determine o valor de L .

Mudando o modo de observação dos sinais de XY para o modo tempo, $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$, registe os valores das amplitudes de oscilação de u_K e u_R e determine a resistência da bobina $R_B \equiv R_L$. Note que para o circuito real da figura 6.15 a (6.66) se escreve da forma

$$|\bar{I}_M| = \frac{|\bar{U}_R|}{R} = \frac{1}{\sqrt{(R + R_B)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} |\bar{U}_K|. \quad (6.73)$$

Obtenha o valor R_B a partir de (6.73) para o caso em que o circuito está em ressonância $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Repita o procedimento descrito e determine os valores de L e R_B para outras duas bobinas.

- (b) Para uma das bobinas estudadas anteriormente, seleccione uma capacidade que C que permita obter uma frequência de ressonância superior a 500 Hz. Monte em paralelo com a resistência um voltímetro de forma a medir o valor eficaz de U_R . Escolha um valor para a resistência R com a ordem de grandeza do valor da resistência eléctrica da bobina considerada.

Note que quando varia a frequência do gerador o valor da amplitude de oscilação muda. Ajuste a amplitude do sinal gerado de forma a manter U_{KM} sempre constante e registe esse valor. Tente explicar essa observação tendo em conta o facto de a tensão aos terminais do gerador depender da resistência interna do gerador da forma $U_K = U_{G'} - IR_i$ como ilustrado no esquema da figura 6.15. Registe os valores da tensão eficaz lida no multímetro para diferentes valores de frequência escolhendo não só valores significativamente inferiores e superiores à frequência de ressonância, mas também valores próximos dessa frequência.

Construa uma tabela com os pares de valores f , $I = U_{R_{ef}}/R$, onde $U_{R_{ef}}$ é o valor eficaz da tensão U_R ¹².

Ajuste pelo métodos dos mínimos quadrados a função que relaciona a corrente do circuito com a frequência do sinal do gerador. Tenha em atenção que no circuito real a resistência eléctrica do circuito é $R + R_B$. Deixe L como parâmetro livre e imponha no ajuste o valor da capacidade que mediu. Comente os resultados obtidos, nomeadamente o valor de L .

4. Oscilações Livres Monte o circuito RLC agora com a capacidade C variável (caixa de capacidade) colocada em posição que nos permita observar no osciloscópio $u_C(t)$ (ver a figura 6.16). Utilize unicamente a bobina de 3600 espiras.

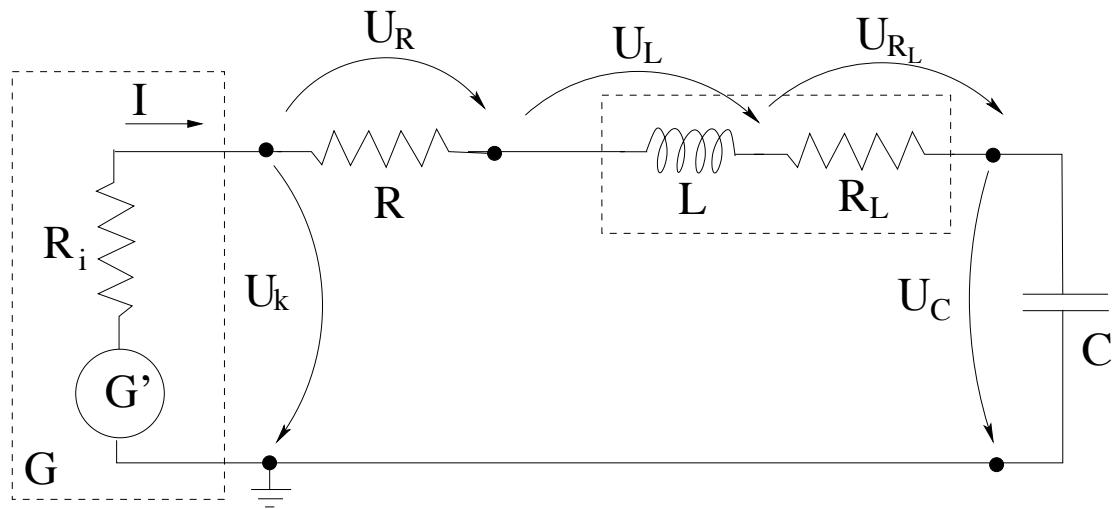


Figura 6.16: Esquema do circuito RLC série com representação das resistências internas da bobina e do gerador numa configuração que permite a medida no osciloscópio dos valores de U_k e U_C .

Aplique ao circuito uma forma de "onda" rectangular de baixa frequência. Limite-se a observar no osciloscópio $u_C(t)$. Por variação de R e C tente observar um regime livre claramente oscilante. Efectue a medida da tensão aos terminais do condensador em função do tempo. Note que o regime livre no circuito real representado na figura 6.16 se obtém da resolução da equação

$$U_K = (R + R_L)i + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = U_{G'} - IR_i \quad (6.74)$$

quando $U_{G'} = 0$, ou seja da resolução da seguinte equação

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{R + R_L + R_i}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} U_C = 0. \quad (6.75)$$

Determine L a partir do valor de λ obtido por ajuste pelo método dos mínimos quadrados, da solução de (6.75) aos resultados obtidos¹³. (Neste cálculo tem que incluir na resistência do circuito o valor da resistência interna do gerador ($R_g = R_i = 50$)

Mantendo a montagem descrita procure os valores de R e C que lhe permitam identificar o regime aperiódico limite. Determine o valor de L .

5. No relatório comente criticamente os métodos usados para determinar L e R_B . Qual o método que se lhe afigura mais preciso. Justifique.

Inclua no relatório a estimativas das incertezas que apresenta, bem como o método utilizado para as determinar.

¹²Para um tensão alternada sinusoidal $U(t) = U_M \cos(\omega t + \varphi)$ a tensão eficaz é dada por $U_{ef} = U_M / \sqrt{2}$

¹³Verifique que $\lambda = (R + R_L + R_i)/(2L)$.

7. Elementos Sobre a Série Trigonométrica de Fourier. Transformação de Fourier e Física das Cordas Vibrantes (T5)

(Texto adaptado e baseado no trabalho original de A.C. Ribeiro, IST 2004)

7.1 Série Trigonométrica de Fourier

Consideremos o caso de uma função $f(t)$ definida no intervalo de tempo T (entre $-T/2$ e $T/2$). Pretende-se representar a função por um polinómio $P(t)$, em que $\omega = 2\pi/T$:

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k [\cos(k\omega t) \cos \varphi_k - \sin(k\omega t) \sin \varphi_k] \quad (7.76)$$

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad (7.77)$$

Como o valor médio das funções \cos e \sin é nulo, é óbvio que $a_0/2$ representa o valor médio da função $f(t)$.

$$\begin{cases} A_k \cos \varphi_k = a_k \\ -A_k \sin \varphi_k = b_k \end{cases} \equiv \begin{cases} \varphi_k = -\arctan(\frac{-b_k}{a_k}) \\ A_k^2 = a_k^2 + b_k^2 \end{cases} \quad (7.78)$$

A representação da função $f(t)$ pelo polinómio $P(t)$ implica a minimização do erro quadrático médio ϵ .

$$\epsilon = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) - P(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right]^2 dt \quad (7.79)$$

Estamos perante a determinação de $2k + 1$ variáveis (a_0 , a_k e b_k). A minimização de ϵ implica $2k + 1$ igualdades:

$$\begin{cases} \frac{\partial \epsilon}{\partial a_0} = -\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) - P(t)] dt = 0 \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial a_k} = -\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) - P(t)] \cos(k\omega t) dt = 0 \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial b_k} = -\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) - P(t)] \sin(k\omega t) dt = 0 \end{cases} \quad (7.80)$$

A resolução das equações anteriores conduz a:

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt \\ b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt \end{cases} \quad (7.81)$$

$\frac{a_0}{2}$ representa como é evidente o valor médio de $f(t)$.

7.1.1 Exemplo 1 - "Onda" Rectangular

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-E) dt + \int_0^{T/2} E dt \right] \\ a_k = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-E) \cos(k\omega t) dt + \int_0^{T/2} E \cos(k\omega t) dt \right] \\ b_k = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-E) \sin(k\omega t) dt + \int_0^{T/2} E \sin(k\omega t) dt \right] \end{cases} \equiv \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_k = 0 \\ b_k = 2 \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (+E) \sin(k\omega t) dt \end{cases}$$

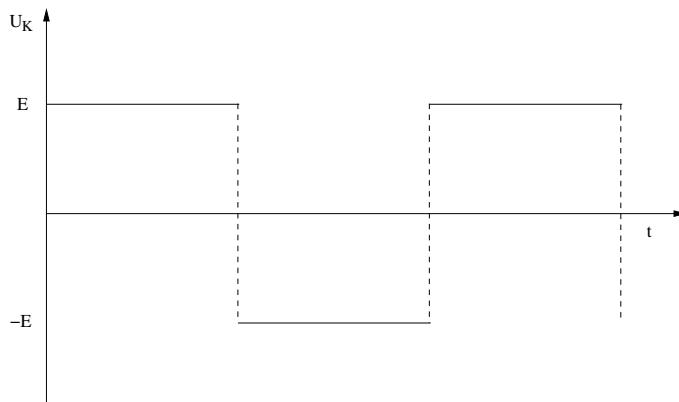


Figura 7.17:

$$b_k = 2 \frac{2}{T} \frac{1}{k\omega} E [-\cos(k\omega t)]_0^{T/2} = b_k = \frac{2E}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)] = \begin{cases} b_k = 0, & k = 2p, k \text{ par} \\ b_k = \frac{4E}{k\pi}, & k = 2p + 1, k \text{ ímpar} \end{cases}$$

o que conduz a:

$$P(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{k=1,3,5,\dots}^n \frac{1}{k} \sin(k\omega t)$$

O resultado obtido é interessante pois a série trigonométrica de Fourier que descreve a onda rectangular só apresenta harmónicas ímpares ($k = 1, 3, 5, 7, \dots$), decaindo a amplitude das mesmas com $1/k$. Este resultado (existência de apenas harmónicas ímpares) é extensível a qualquer função periódica de período T em que se verifique que a sobreposição da evolução temporal observada entre 0 e $T/2$ com a figura entre $-T/2$ e 0 avançada de $T/2$ dá o equivalente à imagem de um objecto no espelho. Assim na figura seguinte apresenta-se o caso da "onda" rectangular e da triangular que obedecem ao princípio enunciado.

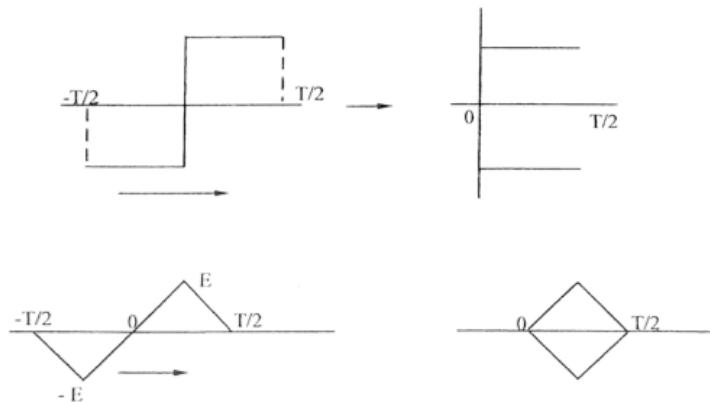


Figura 7.18:

Na figura 7.19 estão representadas as evoluções temporais da 1^a, 3^a, 5^a, 7^a, 9^a e 11^a harmónicas (decaindo com $1/k$) associadas à série trigonométrica de Fourier da "onda" quadrada, e a soma sucessiva das várias harmónicas. Pode constatar-se que a adição de mais harmónicas aproxima cada vez mais o sinal da forma de "onda" rectangular sendo evidente que 11 harmónicas são manifestamente insuficientes.

7.1.2 Exemplo 2 - "Onda" Triangular

Se considerarmos a forma de onda triangular representada na figura 7.18 e se calcularmos os coeficientes $a_0/2$, a_k e b_k dados pelas equações 7.81 chegaremos ao resultado que a seguir se apresenta para o polinómio $P(t)$.

$$P(t) = \frac{8E}{2\pi^2} \sum_{k=1}^n [1 - \cos k\pi] \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k^2} \sin(k\omega t)$$

$$[1 - \cos k\pi] = 0 \text{ para } k \text{ par}$$

$$[1 - \cos k\pi] = 2 \text{ para } k \text{ ímpar}$$

$$P(t) = \frac{8E}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^n \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k^2} \sin(k\omega t)$$

No caso da série trigonométrica de Fourier associada à forma de "onda" triangular:

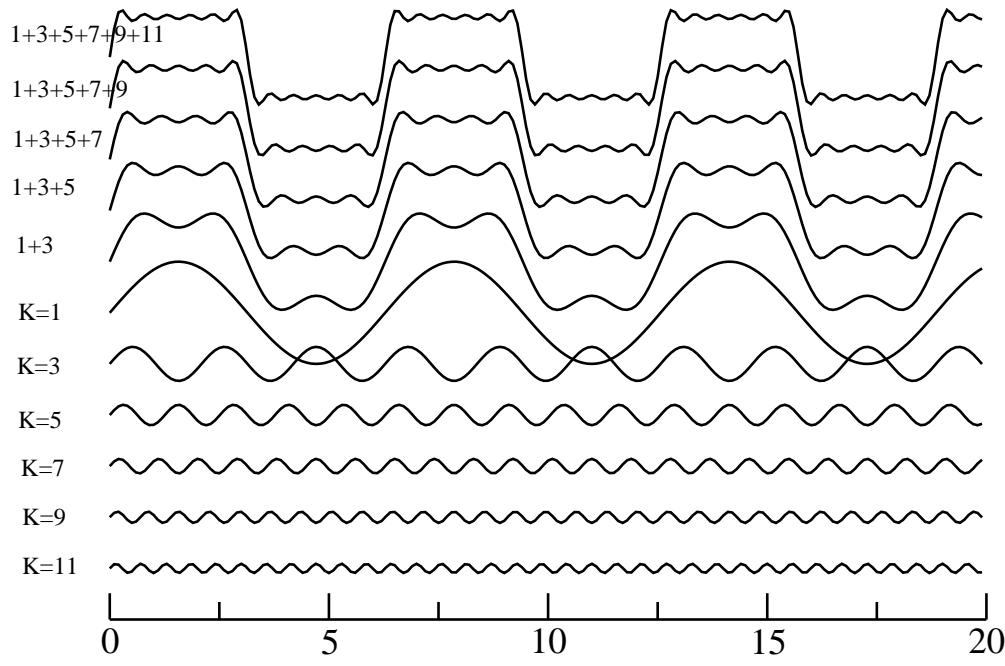


Figura 7.19:

(A). só existem harmónicas impares como já era esperado.

(B). a amplitude das harmónicas cai com $1/k^2$ em que k é a ordem da harmónica.

(C). o termo $(-1)^{(k-1)/2}$ é positivo para $k = 1, 5, 9, 13, 17, \dots$ e negativo para $k = 3, 7, 11, 15, 19, \dots$

Na figura 7.20 estão representadas as evoluções temporais da 1^a, 3^a, 5^a e 7^a harmónicas (decaindo com $1/k^2$) associada à forma de onda triangular como foi explicado em (A), (B) e (C) e também a soma sucessiva das várias harmónicas.

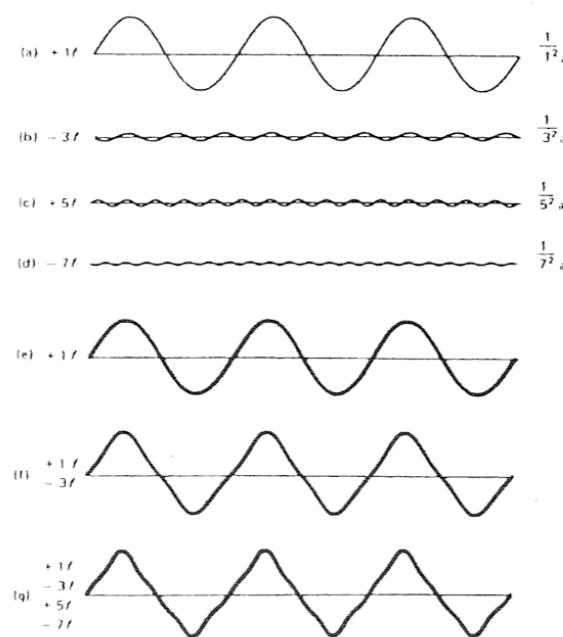


Figura 7.20:

Dado que o decaimento da amplitude das harmónicas ocorre com $1/k^2$ pode constatar-se que 4 harmónicas já descrevem razoavelmente a forma de "onda" triangular.

7.2 Transformada de Fourier ou Espectro de Uma Função

Dada uma função $f(t)$, define-se a sua transformada de Fourier ou espectro como sendo:

$$F(\omega) = TF[f(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (7.82)$$

Se a variável t for o tempo, a transformação $f(t) \rightarrow F(\omega)$ permite-nos obter o domínio de existência na frequência ω de $f(t)$.

A transformada inversa de Fourier permite-nos, conhecendo $F(\omega)$, determinar $f(t)$.

$$F(\omega) \rightarrow f(t)$$

A transformada inversa de Fourier é dada inequivocamente por:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (7.83)$$

7.2.1 Exemplos Elementares

Exemplo 1: $f(t) = \cos(\omega_0 t)$

Consideremos a função $\cos(\omega_0 t)$ e vamos admitir que a mesma tem existência temporal de $-\infty$ a $+\infty$. Como

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad (7.84)$$

virá para transformada de fourier do $\cos(\omega_0 t)$:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j(\omega-\omega_0)t} + e^{-j(\omega-\omega_0)t}}{2} dt \quad (7.85)$$

Tendo em conta de definição da função δ de Dirac, $\delta(x - x_0)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

E ainda a equação 7.83 associada à transformada inversa de Fourier aplicada a $f(t) = e^{j\omega_0 t}$, teremos que $F(\omega)$ de $e^{j\omega_0 t}$ deverá obedecer a:

$$e^{j\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (7.86)$$

Por comparação das equações 7.85 e 7.86 pode concluir-se que a transformação de Fourier de $e^{j\omega_0 t}$ é inequivocamente dada por:

$$F(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) \quad (7.87)$$

Logo, por mera analogia, a transformada de fourier de $e^{-j\omega_0 t}$ será dada por $\delta(\omega + \omega_0)$ e deste modo a transformada de Fourier de $\cos(\omega_0 t)$ é dada por:

$$TF[\cos(\omega_0 t)] = \frac{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)}{2} \quad (7.88)$$

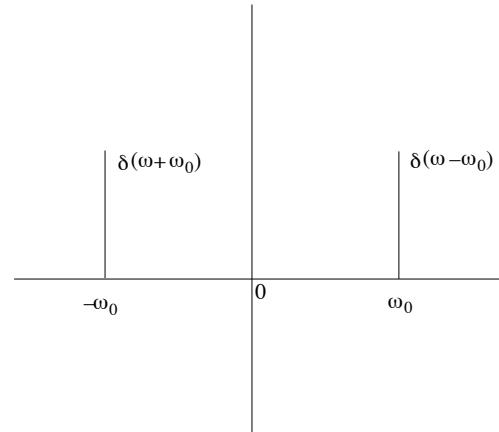


Figura 7.21:

Como se admitiu que $\cos(\omega_0 t)$ tinha a duração de $-\infty$ a $+\infty$, verificamos que o espectro se resume a duas funções δ de Dirac centradas em ω_0 e $-\omega_0$. Este resultado é óbvio pois a função $\cos(\omega_0 t)$ só está associada à frequência ω_0 . O facto de aparecer uma componente do espectro para a frequência $-\omega_0$ resulta de que matematicamente:

$$\cos(\omega_0 t) = \cos(-\omega_0 t)$$

Este resultado seria diferente se se admitisse que o $\cos(\omega_0 t)$ só existia por exemplo entre $-T/2$ e $T/2$ com T finito. O espectro conteria muito mais frequências. Quanto menos fosse T maior seria o domínio espectral na frequência de $F(\omega)$.

Exemplo 2: $f(t) = \sin(\omega_0 t)$

Consideremos agora a função $\sin(\omega_0 t)$ admitindo igualmente que a mesma tem duração de $-\infty$ a $+\infty$. Recorrendo novamente à representação complexa, temos que:

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

O j no denominador evidencia que o $\sin(\omega_0 t)$ está desfasado de $-\pi/2$ em relação ao $\cos(\omega_0 t)$.

Assim, por analogia com a transformação de Fourier do $\cos(\omega_0 t)$ teremos:

$$TF[\cos(\omega_0 t)] = \frac{\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)}{2j}$$

O j no denominador indica que a transformada de Fourier de um $\sin(\omega_0 t)$ é um imaginário puro. Novamente temos duas funções de δ de Dirac centradas em ω_0 e $-\omega_0$

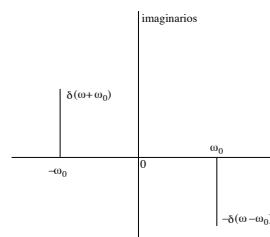


Figura 7.22:

De um modo geral, o espectro ou Transformada de Fourier de $\cos(\omega_0 t)$ tem sempre uma parte real e uma parte imaginária em ω_0 e $-\omega_0$ pois:

$$\cos(\omega_0 t - \varphi) = A \cos \omega_0 t \cos \varphi + A \sin \omega_0 t \sin \varphi$$

Nas aplicações com que iremos lidar, em geral, utilizaremos o módulo da Transformação de Fourier. Da representação sucinta feita anteriormente sobre a série trigonométrica de Fourier e a Transformação de Fourier podemos concluir que são duas entidades intrinsecamente ligadas.

Na figura 7.23 evidencia-se a evolução temporal de uma função periódica e a sua decomposição em harmónicas obtidas a partir da série trigonométrica de Fourier.

Aplicando à função anterior a transformação de Fourier obtemos um espectro também representado na parte inferior da figura 7.23 (por simplificação só se evidencia o módulo do espectro, omitindo-se a informação sobre a fase e apresenta-se unicamente o espectro para as frequências positivas).

7.3 Perturbações com o Carácter de Onda

Consideremos uma perturbação descrita pel grandeza y que se propaga ao longo do eixo dos xx sem se deformar com uma velocidade v de acordo com a representação esquemática evidenciada na figura 7.24

Facilmente se comprehende que a perturbação y pode ser descrita por uma equação do tipo:

$$y = f(x - vt) \tag{7.89}$$

Sendo fácil de verificar que a função 7.89 obedece à identidade:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{7.90}$$

que é conhecida com a designação de equação de onda da perturbação.

Qualquer grandeza f que obedeça a uma equação do tipo 7.90 tem associado um carácter ondulatório. É o caso das ondas mecânicas e electromagnéticas.

No caso geral esta equação escreve-se:

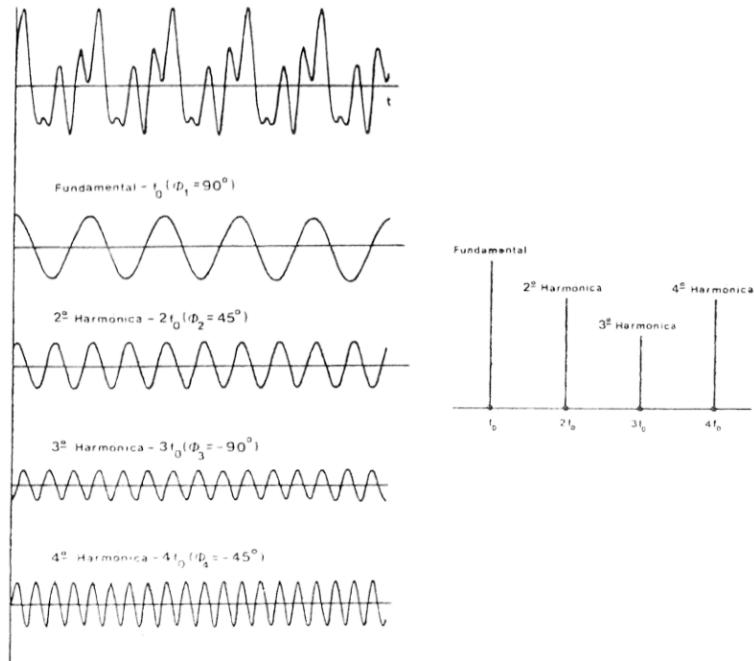


Figura 7.23:

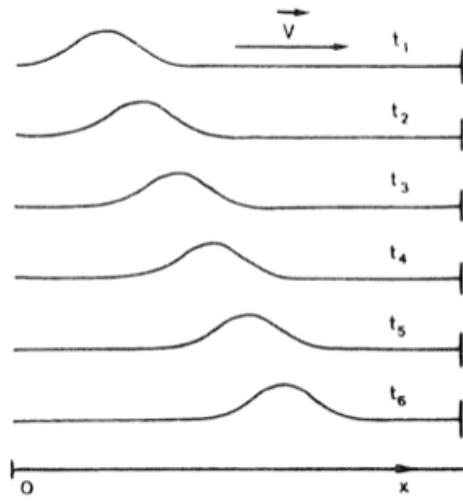


Figura 7.24:

$$\text{lap } f = \nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (7.91)$$

7.4 Cordas Vibrantes

Consideremos uma corda presa nas duas extremidades com uma tensão mecânica T que se pode controlar. A corda é colocada em vibração verificando-se que a amplitude das vibrações é muito pequena. A representação esquemática da figura 7.26 está exagerada em termos da amplitude da vibração do modo fundamental unicamente por razões de mais fácil compreensão.

Se considerarmos 2 pontos muitos próximos na corda cujas coordenadas de posição são respectivamente x_1 e x_2 :

Admitindo só haver oscilações segundo y , as equações que descrevem o movimento da corda serão:

$$\text{Segundo } x: -T(x_1, y_1, t) \cos \theta_1 + T(x_2, y_2, t) \cos \theta_2 = 0 \quad (7.92)$$

$$\text{Segundo } y: -T(x_1, y_1, t) \sin \theta_1 + T(x_2, y_2, t) \sin \theta_2 = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \pi R^2 \rho (x_2 - x_1) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.93)$$

em que m é a massa do troço $(x_1 - x_2)$, ρ é a massa por unidade de volume da corda e R o raio da mesma.

$$\text{A 1ª equação implica que } T(x_1, y_1, t) \cos \theta_1 = T(x_2, y_2, t) \cos \theta_2 = T \quad (7.94)$$

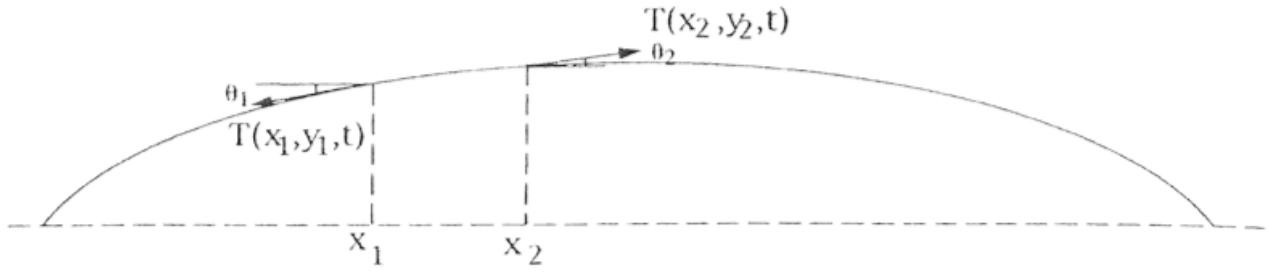


Figura 7.25:

Sendo T a tensão aplicada à corda.

De 7.94 obtemos:

$$T(x_1, y_1, t) = \frac{T}{\cos \theta_1}$$

$$T(x_2, y_2, t) = \frac{T}{\cos \theta_2} \quad (7.95)$$

Introduzindo as relações 7.95 em 7.93

$$-T \tan \theta_1 + T \tan \theta_2 = \pi R^2 \rho (x_2 - x_1) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.96a)$$

$$\frac{T}{x_2 - x_1} [\tan \theta_2 - \tan \theta_1] = \pi R^2 \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.96b)$$

$$\frac{T}{x_2 - x_1} [(\frac{\partial y}{\partial x})_2 - (\frac{\partial y}{\partial x})_1] = \pi R^2 \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.96c)$$

No limite, quando $x_2 \rightarrow x_1$

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} T \left[\frac{(\frac{\partial y}{\partial x})_2 - (\frac{\partial y}{\partial x})_1}{x_2 - x_1} \right] = T \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.97)$$

ou seja,

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \pi R^2 \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.98a)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\pi R^2}{T} \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.98b)$$

Que é a equação de propagação de ondas com velocidade $v = \sqrt{\frac{T}{\pi R^2 \rho}}$.

As ondas observadas numa corda em vibração são ondas estacionárias, ou seja, os máximos e nulos de vibração estão localizados em pontos fixos da corda. No modo fundamental de vibração o comprimentos de onda do mesmo é por razões óbvias $\lambda = 2L$ e a velocidade

$$v = \frac{\lambda}{T_p} = \lambda f = 2L f$$

com

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\pi R^2 \rho}} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (7.99)$$

sendo $\mu = \pi R^2 \rho$ a massa por unidade de comprimento da corda vibrante.

A equação 7.99 é conhecida como Lei de Mersenne, nome do padre franciscano que no séc.XVII sistematizou naquela forma os estudos de Pitágoras do séc.VI a.c..

De um modo geral uma corda em vibração exibe vários modos de frequências múltiplas da frequência da fundamental. A existência desses modos traduz-se pelas harmónicas conhecidas que podem ser detectadas pela transformação de Fourier.

Em geral, a existência de certas harmónicas múltiplas da fundamental depende do modo como se excita a corda. Pode evidentemente também evitar-se a existência de um dado modo. se por exemplo desejarmos

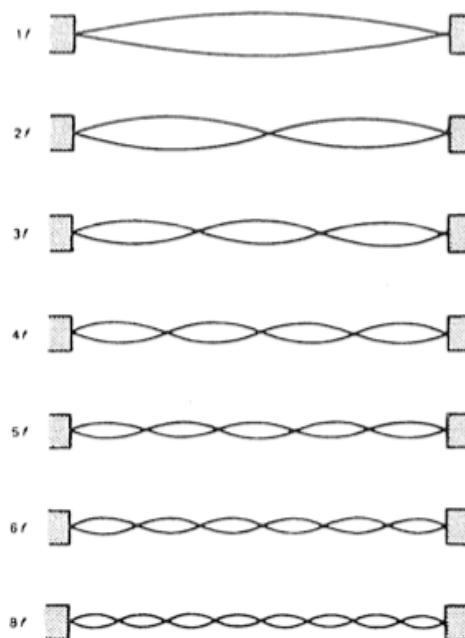


Figura 7.26:

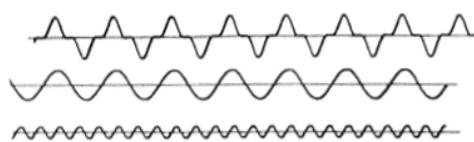


Figura 7.27:

excitar uma corda de comprimento L sem fundamental, basta fazer com que o ponto central da mesma não vibre por aplicação de um dedo.

Na figura 7.26 evidenciam-se os modos de vibração de uma corda do 1º ao 8º quando a mesma vibra em separado, só com cada um desses modos.

Na figura 7.28 mostra-se uma corda em vibração em que se pode detectar visualmente a existência do 1º e 3º modo (1ª e 3ª harmónica). A onda detectada na corda em vibração é na realidade uma onda estaci-



Figura 7.28:

onária em que a frequência do modo fundamental é f . Para qualquer modo de propagação, a velocidade de propagação é sempre dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\pi R^2 \rho}}$$

As cordas em vibração emitem ondas acústicas que se propagam no ar com uma velocidade v_s (velocidade do som) que depende da temperatura. É evidente que v é diferente de v_s . Contudo, as frequências associadas aos modos de vibração da corda são exactamente as mesmas que estão associadas ao sinal acústico correspondente.

Na figura 7.27 está representada a evolução temporal do sinal acústico emitido pela corda em vibração associada à figura 7.28. Igualmente se representa a evolução temporal da 1ª e 3ª harmónicas que lhe estão associadas.

7.5 Procedimento Experimental Indicativo

Este procedimento experimental é meramente indicativo e corresponde ao mínimo necessário para execução do trabalho, tendo como objectivo a utilização da análise de Fourier no estudo de sinais eléctricos gerados a partir de ondas sonoras.

1. Preparação do trabalho

Para uma boa execução do trabalho é conveniente começar por se familiarizar com o sistema de digitalização e com o programa que lhe permite obter a Transformada Rápida de Fourier. Pode como sugestão ligar o gerador de sinais do sistema ao canal 1 do digitalizador e escolhendo um sinal alternado sinusoidal de frequência $f = 400$ Hz observe-o no digitalizador. Faça a Transformada Rápida de Fourier desse sinal e calcule a frequência do espectro obtido. Procure as funções de medida de amplitudes dos sinais e das suas transformadas de Fourier.

2. Como em todos os trabalhos comece por verificar a inexistência de erros ou desvios sistemáticos associados aos a parelhos de medida. Para um sinal com uma frequência na gama de frequências utilizadas no trabalho registe e compare os valores lidos no gerador e os valores registados através da análise de Fourier.

Faça vibrar um dos diapasões presentes no Laboratório e 2 ou 3 segundos após a pancada faça uma aquisição de dados tendo o cuidado de procurar escolher escalas adequadas no menu Time base e volt/div para aquisição. Proceda à execução da Transformada Rápida de Fourier e registe o espectro. Calcule a frequência de vibração do diapasão bem como o erro associado. Compare o valor obtido com o fornecido pelo fabricante.

Faça vibrar simultaneamente dois dos diapasões presentes na Laboratório e obtenha o espectro do sinal obtido. Apresente-o assim como o diagrama temporal do som emitido. Tire conclusões.

3. De acordo com a teoria exposta nas aulas teóricas sobre as leis das cordas vibrantes verifica-se que a frequência da nota fundamental emitida por uma corda vibrante presa nas duas extremidades depende da tensão mecânica aplicada à corda, do comprimento da corda, L , da massa por unidade de comprimento e do diâmetro da corda. Escolha uma das cordas da guitarra em "configuração normal" e fazendo variar o comprimento da corda verifique experimentalmente faça vibrar a corda e obtenha sucessivos espectros para diferentes valores de L . Estude a relação entre a frequência de vibração e L . Utilize o método dos mínimos quadrados sempre que necessário para analisar os resultados e estime sempre os valores incertezas das grandezas experimentais e a sua propagação às grandezas calculadas.

4. Utilizando a guitarra à qual está ligado o prato da balança ($m = 367.83$ g), comece por lhe colocar uma massa de 5 kg e aumentando progressivamente a massa até 13.5 kg (de 2 em 2 kg) verifique se a relação entre os valores de f e T são compatíveis com a expressão teórica deduzida para esta situação. Determine o valor da massa por unidade de comprimento da corda.

5. Utilize um sinal triangular proveniente do gerador e obtenha o espectro desse sinal. Verifique quais as harmónicas n presentes e como varia a sua amplitude (reportada à amplitude da fundamental) com n . Repita o procedimento 5 mas agora com uma onda rectangular.

6. Utilizando o sintetizador de sinais harmónicos disponível na Laboratório, produza uma onda triangular e uma onda quadrada utilizando a informação respeitante à lei de variação das intensidades e das fases das harmónicas que formam os espectros associados aos referidos sinais.

Nota: na representação gráfica dos espectros que se obtêm no PC, a informação de fase não é registrada.

7. Execute outras experiências por si imaginadas ou sugeridas pelo docente presente na aula. Pode mesmo utilizar outros instrumentos musicais.

8. Acústica Básica. Ondas estacionárias num Tubo Acústico (T6)

8.1 Introdução

A propagação do som é um fenómeno físico cuja descrição considera o modo como as variações de densidade, e de pressão variam no tempo e se propagam no espaço. A propagação do som num gás apresenta três características fundamentais:

1. O gás move-se e varia de densidade
2. Uma variação de densidade implica uma variação de pressão
3. Uma diferença de pressão gera movimento do gás

A estas características liga-se o facto de as variações de pressão (compressões e expansões) ocorrerem de forma adiabática, ou seja, assumindo o gás como um gás perfeito,

$$PV^\gamma = \text{constante}. \quad (8.100)$$

onde γ é a constante adiabática dos gases perfeitos.

Assim, pode deduzir-se a seguinte equação de propagação do som no ar numa direcção x , expressa na função deslocamento do ar $\chi(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}. \quad (8.101)$$

v é a velocidade de propagação do som que, atendendo ao carácter adiabático do fenômeno da propagação, se pode escrever das seguintes formas:

$$v^2 = \frac{\gamma k_B T}{m} = \frac{\gamma R T}{\mu} \quad (8.102)$$

onde k_B é a constante de Boltzman, m é a massa molecular, R é a constante dos gases e μ a massa molar do gás.

8.2 Propagação do Som Num Tubo. Ondas Estacionárias

A resolução da equação de propagação do som no interior de um tubo tem de ter em consideração as condições fronteiras impostas pelas barreiras físicas que constituem as paredes do tubo e as suas extremidades (fechadas ou abertas). Se considerarmos uma onda sonora periódica a propagar-se no interior do tubo esta vai sofrer reflexões nas extremidades do tubo. Como resultado, ocorre a interferência entre diferentes ondas que se propagam em sentidos opostos no tubo. Em determinadas condições pode formar-se uma onda estacionária no interior do tubo de tal forma que em determinados pontos ocorre interferência construtiva e surgem *anti-nodos* e outros pontos ocorre interferência destrutiva e surgem *nodos*.

Considere-se a função

$$F(x - vt) = e^{ik(x-vt)} = e^{i\omega(t-x/v)} \quad (8.103)$$

em que $\omega = kv$ e $k = 2\pi/\lambda$. A deslocação do ar num certo instante de tempo t , num certo ponto x é dada por:

$$\chi(x,t) = F(x - vt) - F(-x - vt) = e^{i\omega(t-x/v)} - e^{i\omega(t+x/v)} \quad (8.104)$$

ou seja

$$\chi(x,t) = e^{i\omega t} (e^{-i\omega x/v} - e^{i\omega x/v}) = -2ie^{i\omega t} \sin\left(\frac{\omega x}{v}\right) \quad (8.105)$$

Como se pode verificar da equação (8.105) os nodos de deslocamento do ar ocorrem para posições x que satisfaçam a condição $\sin(\omega x/v) = 0$, ou seja para valores $\omega x/v = n\pi$. Como $\lambda = Tv$ obém-se $x_{\text{nodo}} = n\lambda/2$.

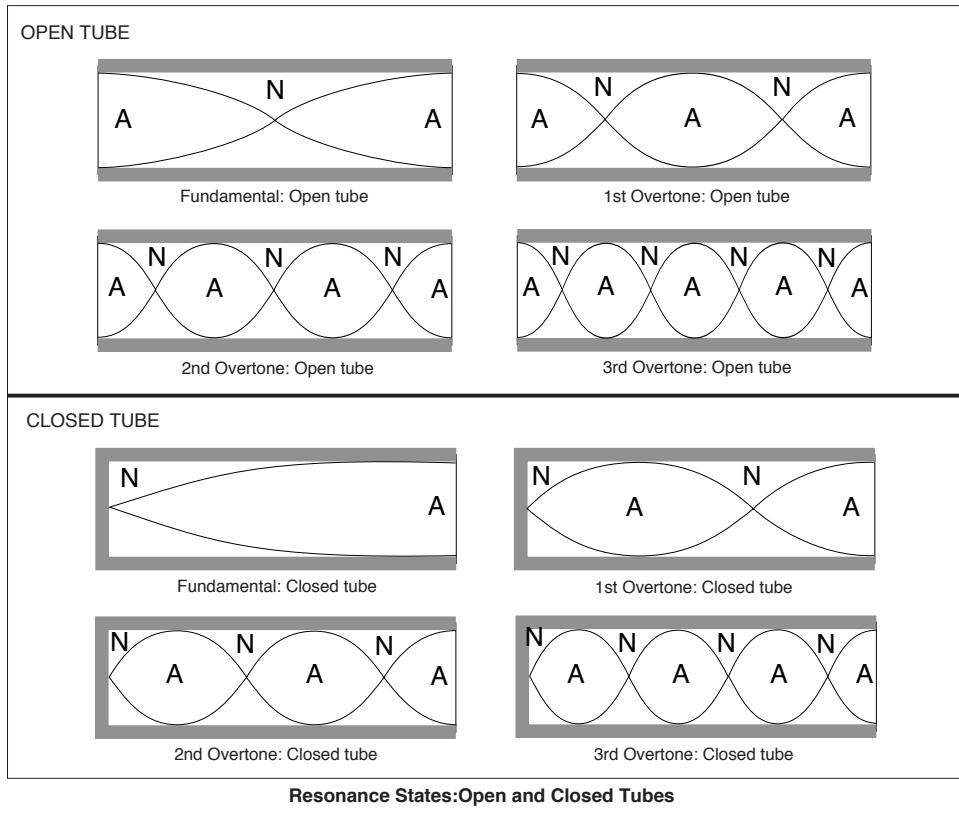


Figura 8.29: Ondas estacionárias correspondentes ao deslocamento do ar em tubos. (figura obtida do guia PASCO WA-9612)

8.2.1 Tubo Aberto Somente Numa Extremidade

No caso do tubo aberto na extremidade aberta do tubo o deslocamento do ar deve ser máximo anti-nodo e para além disso tem-se de (8.105) que $2\pi x/\lambda = \pi/2$. Na outra extremidade pelo contrário χ apresenta um nodo, pelo que $2\pi(x + L)/\lambda = n\pi$. Assim, $2\pi(x + L)/\lambda - 2\pi x/\lambda = 2\pi L/\lambda = (2n - 1)\pi/2$ e tem-se:

$$L = \frac{(2n - 1)\lambda}{4} \Rightarrow L = \frac{p\lambda}{4}, p = 1, 3, 5, 7, 9, \dots \text{ímpar.} \quad (8.106)$$

8.2.2 Tubo Aberto Nas Duas Extremidades

Nesta situação para ambas as extremidades tem-se $\chi(x,t) = \chi(x + L,t) \rightarrow$ máximo pelo que $2\pi(x + L)/\lambda - 2\pi x/\lambda = 2\pi L/\lambda = n\pi$, donde

$$L = \frac{n\lambda}{2}, n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (8.107)$$

8.3 Procedimento Experimental Indicativo

Este procedimento experimental é meramente indicativo e corresponde ao mínimo necessário para execução do trabalho, tendo como objectivo a determinação da constante adiabática para o ar e da determinação da velocidade do som utilizando o estudo de ondas estacionárias num tubo acústico.

1. Preparação do trabalho

Prepare todas as expreções teóricas necessárias para a execução do trabalho.

2. Determinação da velocidade do som a partir da determinação dos máximos e mínimos de uma onda estacionária Gerada num Tubo Cilíndrico.

- (a) Comece por ligar o gerador de sinais em modo alternado sinusoidal ao altifalante do tubo colocando o microfone no orifício existente por baixo do altifalante. O tubo encontra-se aberto à entrada e fechado na extremidade oposta ao altifalante ($l = 80$ cm).
- (b) Seleccione uma frequência de aproximadamente 2 000 Hz. Detecte, por aumento da frequência, pelo menos 3 frequências de ressonância do tubo e verifique se estão igualmente espaçadas.
- (c) Para uma das frequências determinadas em b) procure detectar com o microfone colocado na extremidade da sonda as posições dos máximos (e mínimos) da onda estacionária gerada no interior do tubo (a distância entre 2 máximos sucessivos é igual à distância entre 2 mínimos sucessivos e igual a $\lambda/2$). Tome nota do erro de posição associado a cada medida. A partir de todas as observações efectuadas, efectue uma representação gráfica linear que lhe permita calcular λ para a frequência seleccionada. Coloque as barras de erro associadas às posições dos máximos e mínimos da onda estacionária. Calcule em seguida a velocidade do som para a referida frequência. Comente o resultado obtido em função da temperatura da sala. Caso o valor obtido se afaste do esperado imponha ao ajuste o λ respectável e comente.
- (d) Repita os procedimentos a) a c) agora com o tubo aberto nas 2 extremidades.

3. Determinação da velocidade do som utilizando tubos acústicos:

- Determinação da velocidade do som à temperatura ambiente utilizando um tubo acústico¹⁴. Por observação do eco do sinal rectangular aplicado ao altifalante ($f < 30$ Hz) e colocando a sonda com o microfone no interior do tubo acústico numa posição variável ao longo do tubo (a sonda deverá estar ligada ao osciloscópio) observe o eco do sinal emitido. Registe os valores espaço e tempo correspondentes ao percurso do som e calcule a velocidade do som ajustando o modelo físico apropriado aos resultados experimental obtidos obtidos, pelo método dos mínimos quadrados.
- Determinação da velocidade do som em função da temperatura utilizando a montagem disponível no laboratório. Seleccione uma temperatura de trabalho perto da temperatura ambiente (ou abaixo da temperatura ambiente utilizando gelo para arrefecer o banho térmico). Por observação do eco do sinal rectangular aplicado ao altifalante ($f < 30$ Hz) e colocando a sonda com o microfone no interior do tubo acústico numa posição fixa (a sonda estará ligada ao osciloscópio) observe o eco do sinal emitido. Registe os valores espaço e tempo correspondentes ao percurso do som no tubo para diferentes temperaturas até perto da temperatura de ebuição da água. Tenha em atenção o tempo de estabilização da temperatura e as incertezas experimentais.

Obtenha γ a partir do ajuste dos dados experimentais que obteve.

4. Elabore o relatório do trabalho tendo especial atenção com os comentários críticos na discussão dos resultados e nas conclusões deste trabalho.

¹⁴Modelo PASCO WA-9612.

9. Difracção de Ondas Electromagnéticas e de Electrões (T7)

Difracção de ondas electromagnéticas no domínio do visível e das micro-ondas. Difracção de electrões
(Texto adaptado do original de A.C. Ribeiro)

9.1 Difracção de Fraunhofer

Pretende-se estudar a difracção de Fraunhofer através de uma rede e determinar o comprimento de onda de um laser HeNe emitindo no verde.

Faça incidir perpendicularmente a luz proveniente de um laser de Hélio/Neon sobre rede de 300 ℓ/mm . A intensidade da figura de difracção detectada num alvo colocado perpendicularmente ao feixe é dada por:

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \left(\frac{\sin(Nv)}{N \sin v} \right)^2 \quad (9.108)$$

com

$$u = \frac{\pi S}{\lambda} \sin \theta \quad (9.109)$$

e

$$v = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta, \quad (9.110)$$

onde I_0 é a intensidade máxima.

Tendo em conta a teoria apresentada no Guia de Laboratório [1] (páginas 101 a 110) verifica-se que os zeros do factor de difracção se obtêm quando a eq. 9.108 se anula quando $\sin(u)/u = 0$. Para fendas de abertura S estes nulos ocorrem para com ($n \neq 0$), verificando-se:

$$S = \frac{n\lambda}{\sin \theta} \quad (9.111)$$

Assim, se for possível identificar um zero (por exemplo o de 1^a ordem) no perfil da figura de difracção que se possa claramente atribuir ao factor de difracção é possível conhecer S . Por outro lado, o factor de interferência para uma rede de N fendas ($N > 1$), espaçadas de uma distância a é dado por

$$\left(\frac{\sin(Nv)}{N \sin v} \right)^2 \quad (9.112)$$

Os máximos principais do factor de interferência ocorrem para $v = k\pi$ donde,

$$a = \frac{k\lambda}{\sin \theta}, \quad (9.113)$$

sendo claramente possível detectar a posição dos máximos principais principais. A partir da posição dos máximos principais determine o comprimento de onda do laser.

9.2 Difracção de Micro-ondas

Monte uma fenda dupla utilizando o suporte e as chapas metálicas disponíveis no Laboratório. Tendo em conta a teoria apresentada para a difracção da luz através de uma fenda dupla (resumida na 1^a parte), procure a posição angular dos máximos principais da figura de difracção e daí determine o comprimento de onda λ do emissor de micro-ondas.

9.3 Difracção de Electrões

Segundo a hipótese de de Broglie a uma partícula de momento linear p está associado um comprimento de onda:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (9.114)$$

Aplicando esta hipótese a um feixe de electrões que acelerados por uma tensão U_a verifica-se:

$$qU_a = \frac{1}{2}mv^2 \quad (9.115)$$

$$p = \sqrt{2qmU_a} \quad (9.116)$$

Assim, para electrões o valor de λ teórico de de Broglie será dado por:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2qmU_a}}$$

Figura 9.30: Estrutura da grafite. (9.117)

Tendo em conta o valor da constante de Planck h da carga e da massa do electrão, obtém-se

$$\lambda \simeq \frac{1.23 \times 10^{-9}}{\sqrt{U_a}} \text{ m} \quad (9.118)$$

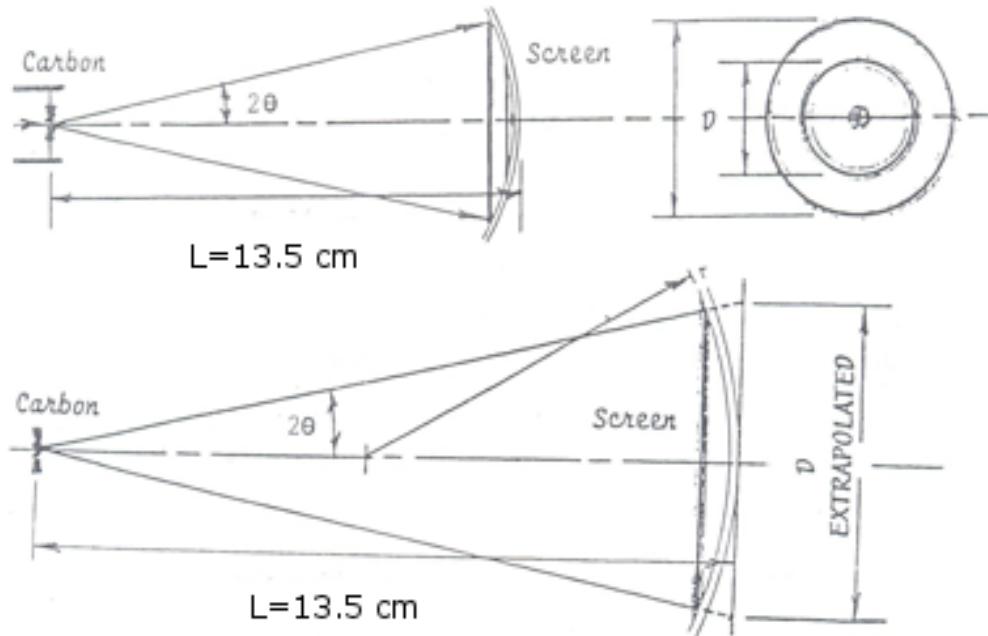


Figura 9.31: Esquema com as figuras de difracção

Assim, acelerando os electrões com diferentes tensões U_a teremos diferentes valores de λ . Utilizando a montagem que lhe é descrita na fig. 9.32 varie a tensão de aceleração dos electrões entre $U_a = 2.5\text{kV}$ e 5kV . Mantenha a tensão da fonte auxiliar num valor abaixo dos 50V e de forma a que a corrente de cátodo seja sempre **inferior a 0.2 mA** . Meça para cada valor da tensão escolhido o diâmetro extrapolando dos dois círculos observados correspondentes à difracção de 1ª ordem (lei de Bragg) associadas às duas distâncias de repetição inerentes à estrutura da grafite (fig. 9.30), em que $d_{10} = 0.213 \times 10^{-9}\text{m}$ e $d_{11} = 0.123 \times 10^{-9}\text{m}$. Tendo em conta a lei de Bragg [4]

$$2d \sin \theta = n\lambda_{exp} \quad (9.119)$$

Substitua na expressão anterior o valor de d da estrutura da grafite (inerente a cada um dos círculos). Tendo em conta as distâncias características associadas ao tubo de electrões utilizado, representadas na fig. 9.31, verifica-se que

$$\tan(2\theta) = \frac{D}{2L}. \quad (9.120)$$

Determine o λ experimental associado e faça uma estimativa do erro.

Faça uma tabela dos valores de $\lambda_{exp} \pm \sigma_{\lambda_{exp}}$ obtidos pela eq. 9.119 em função do λ calculado através da eq. 9.118 para os resultados inerentes aos dois anéis observados (interior e exterior) e efectue o ajuste de uma recta pelo método dos mínimos quadrados.

Verifique se o coeficiente angular das duas rectas obtidas se afasta do valor ideal.

Comente os resultados obtidos.

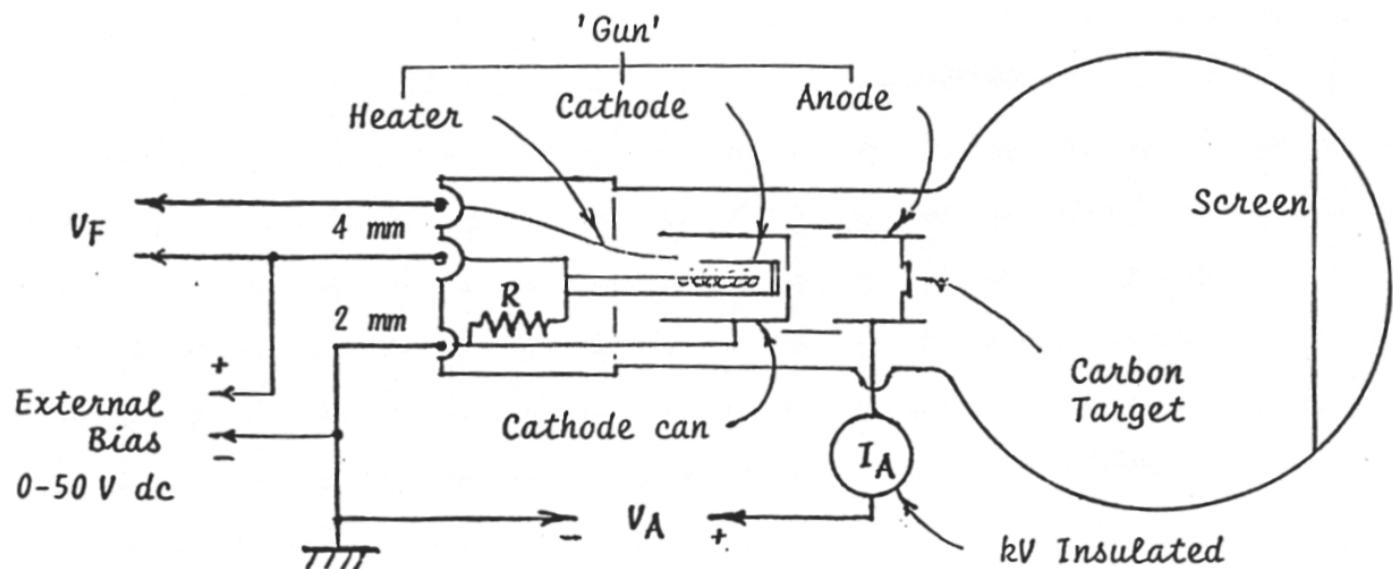


Figura 9.32: Esquema da Montagem.

10. Mecânica Relativista. Colisões de Partículas Elementares (T8)

(Texto adaptado e baseado no trabalho original de A.C. Ribeiro, P.J. Sebastião e F. Tomé, IST 1996) [1]

10.1 Introdução

Este trabalho sobre colisões de partículas elementares numa câmara de bolhas vai permitir evidenciar que as leis da mecânica clássica não são válidas quando as partículas se deslocam com velocidades próximas da velocidade da luz e portanto entramos num domínio em que os acontecimentos têm que ser interpretados à luz da mecânica relativista [5].

O estudo vai ser feito a partir da análise de fotografias obtidas numa câmara de bolhas contendo hidrogénio líquido na qual foram injectados feixes de protões. Um campo magnético intenso é aplicado na perpendicular ao plano de observação sendo assim os protões deflectidos pela sua acção verificando-se que a sua trajectória é aproximadamente circular. As partículas constituintes destes feixes¹⁵ ionizam o hidrogénio favorecendo o aparecimento de bolhas, podendo assim observar-se o "rasto" das partículas carregadas¹⁶, antes e depois da ocorrência de colisões com os protões do hidrogénio. Podemos assim estudar algumas colisões entre partículas elementares como sejam colisões elásticas e inelásticas, estas com a criação de novas partículas. Com efeito, o estudo da colisão protão-protão elástica, permite verificar que só as expressões relativistas da energia conduzem à conservação da energia total. A análise da conservação da energia no caso do choque inelástico permite-nos identificar as partículas resultantes da reacção.

Assim, a partir da conservação da colisão protão-protão, ir-se-ão identificar as reacções expressas nas fotografias com as informações adicionais relativas ao momento linear do feixe incidente¹⁷, e aos raios das trajectórias das partículas carregadas.

10.2 Transformações de Referenciais. Energia de Uma Partícula

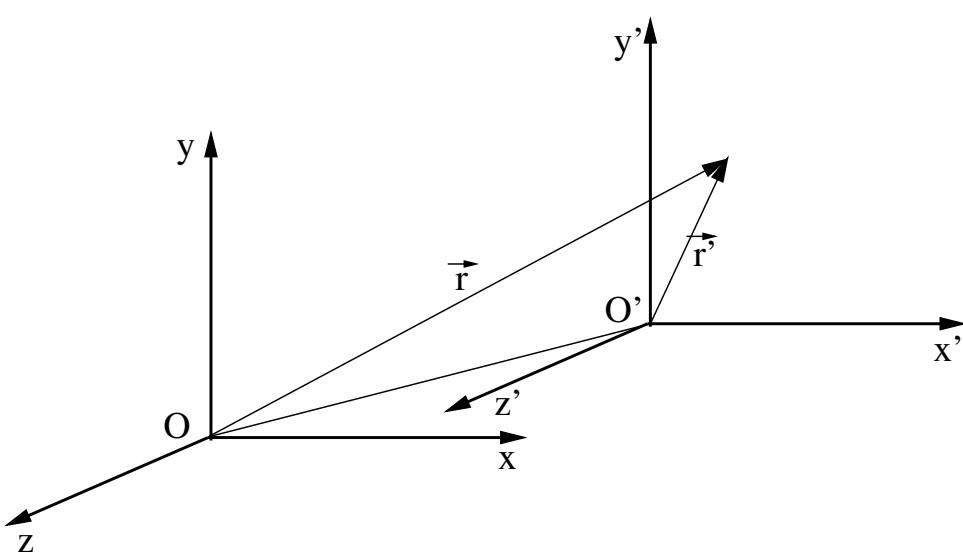


Figura 10.33: Movimento relativo de dois referenciais de inércia.

Consideremos dois referenciais de inércia em que o referencial (x', y', z') se desloca com movimento (uniforme) de velocidade \vec{v} em relação a (x, y, z) sendo t e t' os tempos medidos nos referenciais (x, y, z) e (x', y', z') . No domínio da Mecânica Clássica é possível estabelecer as relações¹⁸ (10.121) que são conhecidas como fórmulas de transformação de Galileu.

¹⁵Ou partículas carregadas geradas na reacção

¹⁶As partículas neutras não deixam rasto

¹⁷Para cada fotografia é conhecido o momento linear p_1 dos protões do feixe incidente à entrada da câmara de bolhas

¹⁸

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad (10.121)$$

$$t = t'$$

Nestas condições as velocidades de uma partícula material \vec{u} e \vec{u}' medidas nos dois referenciais estão relacionados por:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v}$$

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \quad (10.122)$$

Verificando-se para as acelerações que:

$$\vec{a}' = \vec{a} \quad (10.123)$$

Sem perda de generalidade e por uma questão de simplificação vamos admitir que o referencial de inércia (x', y', z') se desloca ao longo do eixo dos xx' com um movimento (uniforme) de velocidade \vec{v} tal como se observa na figura 10.34.

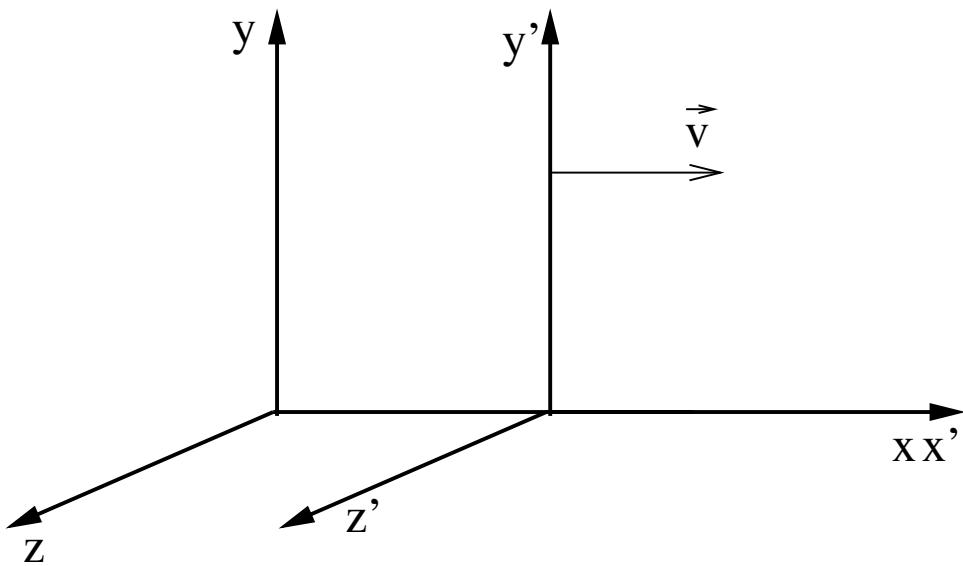


Figura 10.34: Referênciais de inércia S e S' , com S' movendo-se ao longo do eixo dos xx' com velocidade \vec{v} .

$$\vec{v} = v_x \vec{I} = v \vec{I}$$

Nestas condições, as transformações de Galileu, Eq. (10.121), tomam a forma particular:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y, z' = z, t' = t \end{cases} \quad (10.124)$$

As transformações de Galileu só podem ser consideradas como válidas quando as velocidades em jogo são muito menores que a velocidade da luz. Se estas condições não se verificam torna-se necessário recorrer às chamadas transformações relativistas de Lorentz¹⁹ dadas por:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, y' = y, z' = z \quad (10.125)$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5a)$$

¹⁹Como consequência importante da transformação de Lorentz [6] verifica-se que uma partícula material "solidária" com o referencial (x', y', z', t') tem como velocidade limite c a velocidade da luz e ainda que para velocidades comparáveis às da luz os tempos t e t' medidos nos dois referenciais fluem de modo diverso

sendo c a velocidade da luz no vazio.

Note-se que a transformação de Galileu é um caso limite da transformação de Lorentz, já que quando $v \ll c$ se verifica que $v^2/c^2 \rightarrow 0$. Na realidade, em muitas das situações do dia-a-dia, verifica-se ser $v \ll c$ pelo que nessas condições podemos dizer que:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 \quad (10.126)$$

e portanto os valores calculados pelas fórmulas de Lorentz coincidem praticamente com os calculados pelas fórmulas de Galileu.

Vejamos o que se passa para a energia.²⁰ A energia cinética não relativista E_{nr} está ligada à quantidade de movimento $\vec{p} = m\vec{v}$ podendo escrever-se:

$$E_{nr} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (10.127)$$

$$E_{nr} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{ou ainda} \quad E_{nr} = \frac{p^2c^2}{2mc^2} \quad (10.128)$$

Esta expressão não é válida à luz da mecânica relativista, vindo neste caso, o momento linear da partícula \vec{p} expresso por:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{em que} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.129)$$

onde m_0 se designa correntemente como a massa em repouso da partícula. Do ponto de vista energético pode mostrar-se que a energia da partícula, $E = mc^2$, pode ser expressa por:

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}c^2 \quad (10.130)$$

Atendendo a que $p = mv$ e $E = mc^2$ podemos ainda escrever:

$$\frac{p}{v} = \frac{E}{c^2} \quad (10.131)$$

atendendo às expressões (10.130) e (10.131) facilmente se chega a:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \quad (10.132)$$

A expressão (10.132) será sistematicamente utilizada em estudos de conservação de energia efectuados ao longo do trabalho.

10.3 Considerações sobre as colisões a analisar

10.3.1 Generalidades

Já referimos que as fotografias a analisar (Fig. 10.35) representam as trajectórias de feixes de partículas carregadas, evidenciando colisões de um protão do feixe com um protão dos átomos do hidrogénio que enche a câmara de bolhas. Da análise da conservação do momento linear e da energia iremos detectar se estamos na presença de colisões elásticas ou inelásticas.

Como se referiu anteriormente, as trajectórias das partículas carregadas são aproximadamente circulares²¹ devido à existência do campo de indução magnética B perpendicular ao plano de observação²². Nestas condições, o raio de curvatura da trajectória e o módulo do momento linear da partícula estão relacionados. De facto as forças de Lorentz a centrípeta igualam-se e portanto $qvB = mv^2/R$ donde:

$$p = qBR \quad (10.133)$$

²⁰Consultar, por exemplo, a primeira referência citada na bibliografia

²¹Na realidade são troços de espiral.

²²De entre um elevado número de acontecimentos registados com três câmaras fotográficas colocadas em posição perpendicular foi possível seleccionar as fotografias em relação às quais com suficiente rigor se pode admitir que o protão incidente e as partículas resultantes da colisão se deslocam num plano paralelo ao filme cujo positivo é fornecido aos alunos. São estes os choques estudados.

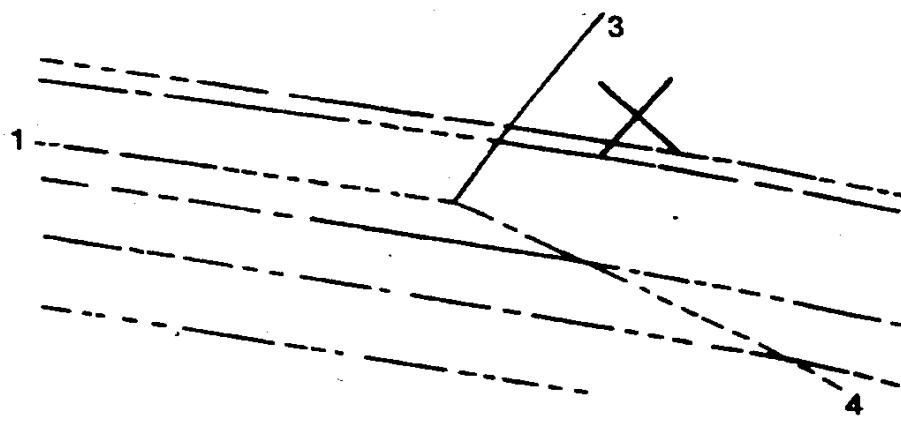


Figura 10.35: Ilustração da fotografia com as trajectórias das partículas carregadas na câmara de hidrogénio líquido e a indicação das partículas envolvidas no choque em análise.

sendo q a carga da partícula, B o módulo do vector de indução magnética e R o raio de curvatura da trajectória.

Assim, conhecendo-se o módulo do vector momento linear p_1 ²³ da partícula incidente e sendo possível determinar graficamente os raios das trajectórias das diferentes partículas carregadas (antes e depois da colisão) torna-se imediato o cálculo dos módulos dos momentos lineares das partículas (com rastro visível) resultantes da reacção, tendo em atenção que essas partículas têm carga q idêntica à do protão incidente e deslocam-se no mesmo campo de indução magnética B . Assim:

$$\frac{p_1}{R_1} = \frac{p_i}{R_i} = \text{constante} \quad (10.134)$$

As tangentes às trajectórias no ponto da colisão fornecem as direcções dos vectores \vec{p}_i .

Conhecendo-se os vectores \vec{p}_i é fácil constatar se se verifica a conservação do momento linear total antes e depois da colisão. Desta análise, e para as fotografias de que dispomos, são vulgarmente encontradas as duas situações seguintes:

1. A verificação pode considerar-se aceitável, sendo pouco significativa a diferença entre \vec{p}_1 e $\vec{p}_3 + \vec{p}_4$. Este facto leva-nos a admitir em primeira análise (ainda nos resta a correcção da energia) que estamos perante uma colisão para a qual é visível a trajectória de todas as partículas existentes, ou seja, estamos na situação de

$$\text{protão} + \text{protão} \rightarrow \text{protão} + \text{protão}$$

A conservação da energia total vai-nos permitir confirmar a hipótese de estarmos perante a situação de choque elástico, devendo verificar-se:

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4^{24} \quad (10.135)$$

sendo E_1 a energia do protão incidente, E_2 a energia do protão em repouso²⁵ e E_3 e E_4 as energias dos protões resultantes da reacção. Assim, a equação (10.135) deve escrever-se:

$$\sqrt{p_1^2 c^2 + m_{01}^2 c^4} + m_{02} c^2 = \sqrt{p_3^2 c^2 + m_{03}^2 c^4} + \sqrt{p_4^2 c^2 + m_{04}^2 c^4} \quad (10.136)$$

sendo

$$m_{01} = m_{02} = m_{03} = m_{04} = m_p \quad (\text{massa do protão em repouso})$$

2. A verificação é nitidamente impossível de satisfazer sem termos em consideração a existência de pelo menos uma outra partícula neutra, cuja trajectória não é visível, mas cujo momento linear pode ser calculado de forma gráfica. Para as fotografias de que dispomos estamos limitados a reacções com a criação de uma única partícula neutra [7]²⁶. Concretamente, só vamos encontrar uma das seguintes situações:

²³Conhece-se p_a à entrada da câmara de bolhas. O valor de p_1 no ponto de impacto pode ser calculado recorrendo às correcções referidas nos pontos 3.2 e 3.3. No entanto, para as energias em jogo, a correcção para o protão incidente é pouco significativa.

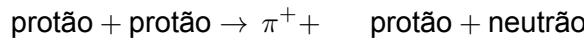
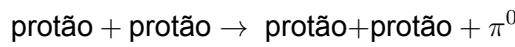
²⁴A relação (10.135) não se vai verificar exactamente devido aos erros associados às determinações. Na prática, devemos ter $E_1 + E_2 \approx E_3 + E_4$ mas deverá verificar-se intersecção dos valores $(E_1 + E_2) \pm (\delta E_1 + \delta E_2)$ e $(E_3 + E_4) \pm (\delta E_3 + \delta E_4)$ sendo δE_i o majorante do erro absoluto associado ao cálculo de E_i ($\delta E_2 = 0$).

²⁵Na realidade, os protões do hidrogénio não estão em repouso, só que o seu momento linear é extremamente baixo e a energia pode com suficiente rigor ser tomada como sendo $m_0 c^2$.

²⁶E assim, $\vec{p}_5 = \vec{p}_1 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4$, sendo \vec{p}_5 o momento linear da partícula neutra.

	p	n	π^0	π^+
Massa (Mev/c ²)	938	939	135	140
Carga relativa ao protão	1	0	0	1

Tabela 10.1: Massa das partículas



Note-se que as duas últimas hipóteses correspondem ao facto de não sabermos qual das duas trajetórias após a colisão diz respeito ao protão ou ao mesão π^+ .

A conservação da energia total vai-nos permitir confirmar qual das reacções possíveis temos na fotografia A partir da expressão (10.132) podemos facilmente estabelecer o balanço energético posto em jogo nas três hipotéticas reacções, utilizando as massas das partículas da tabela 10.1, através do cálculo do valor de ΔE_r para cada uma:

$$\Delta E_r = (E_3 + E_4 + E_5) - (E_1 + E_2) \quad (10.137)$$

, ou seja,

$$\Delta E_r = \left(\sqrt{p_3^2 c^2 + m_{03}^2 c^4} + \sqrt{p_4^2 c^2 + m_{04}^2 c^4} + \sqrt{p_5^2 c^2 + m_{05}^2 c^4} \right) - \left(\sqrt{p_1^2 c^2 + m_{01}^2 c^4} + m_{02} c^2 \right) \quad (10.138)$$

em que E_1 e E_2 são as energias relativistas das partículas que vão colidir e E_3 , E_4 e E_5 são as das partículas produto da reacção.

Admitindo como válida a conservação da energia relativista, a hipótese correctamente formulada para a reacção que estamos a estudar deverá ser aquela que conduz ao resultado que mais se aproxima da condição $\Delta E_r = 0$ tendo em atenção os erros associados às determinações.

Na prática, se um dos valores de ΔE_r é muito menor que os restantes, e se para além disso, os erros justificarem esse valor, seremos então conduzidos a admitir como aceitável esta hipótese. Se por outro lado os valores de ΔE_r levam a uma situação de incerteza quanto ao valor a considerar como mais próximo de traduzir a situação de conservação da energia, devemo tomar uma decisão provisória e em seguida fazer algumas correcções que iremos referir adiante, esperando que após essas correcções se verifique uma situação que torne evidente a reacção em estudo.

10.3.2 Correcções a Efectuar

A correcção mais importante a efectuar diz respeito ao efeito de travagem que as partículas carregadas sofrem ao atravessar o hidrogénio da câmara de bolhas. Como consequência, as trajectórias observáveis nas fotografias não são exactamente arcos de circunferência as sim troços de espiral. Por outro lado, o ajuste do ábaco à trajectória faz-se utilizando um certo troço dessa trajectória (cerca de 40 a 60 cm), pelo que na prática o raio de curvatura que vamos encontrar corresponde ao ponto médio daquele troço, ou seja, para a partícula incidente 20 a 30 cm antes do ponto de colisão (ponto A da fig. 10.36) e para as restantes 20 a 30 cm depois (pontos B e C da Fig. 10.36) desse ponto. Assim:

- Conhecendo-se com razoável exactidão o valor do módulo de p_1 do momento linear da partícula incidente no "ponto de impacto" e tendo o raio de curvatura R_1 sido aproximadamente calculado no ponto médio do troço ²⁷ em observação (ponto A da Fig. 10.36) deveríamos, para utilizar correctamente a expressão (10.134), referir o valor do momento linear da partícula incidente ao ponto A. Na expressão (10.134) onde está p_1 deverá passar a escrever-se

$$(p_1)_A = p_1 + |\Delta p_1|$$

sendo $(p_1)_A$ o valor do momento linear no ponto A e $|\Delta p_1|$ o módulo da variação do momento linear desde o ponto A ao ponto de impacto. O cálculo de Δp_1 será explicitado mais adiante.

²⁷Da trajectória do protão incidente do qual o ponto de impacto é um extremo

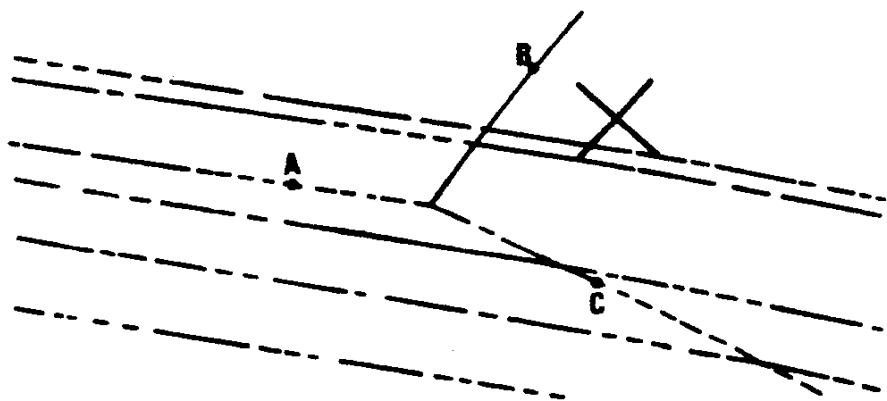


Figura 10.36: Ilustração da fotografia com as trajectórias das partículas carregadas na câmara de hidrogénio líquido e a indicação dos pontos médios das trajecórias das partículas envolvidas no choque em análise.

- O cálculo do R_i ($i = 3,4$) associados às partículas carregadas resultantes do choque foi também efectuado reportando-se aos pontos médios dos troços em observação (pontos B e C). Assim, os p_i ($i = 3,4$) anteriormente utilizados não correspondem ao ponto de impacto, mas sim aos pontos B e C assinalados na figura 10.36. Se chamarmos a $(p_i)_c = (i = 3,4)$ o valor corrigido do módulo do momento linear no ponto de impacto, devermos, para utilizar correctamente a expressão (10.134) passar a escrever onde está p_i ($i = 3,4$):

$$p_i = p_{ic} - |\Delta p_i|$$

sendo $|\Delta p_i|$ o módulo da variação do momento linear da partícula i ($i = 3,4$) desde o ponto de impacto aos pontos B ou C ($i = 3,4$).

De acordo com as correções descritas, a equação (10.134) passa a escrever-se:

$$p_{ic} - |\Delta p_i| = \frac{R_i}{R_1} (p_1 + |\Delta p_1|) \quad (14a)$$

$$p_{ic} = \frac{R_i}{R_1} p_1 + \frac{R_i}{R_1} |\Delta p_1| + |\Delta p_i| \quad (14b)$$

$$p_{ic} = p_i + \frac{R_i}{R_1} |\Delta p_1| + |\Delta p_i| \quad (14c)$$

A expressão (14c) será então utilizada para corrigir os valores de $(p_i)_c = (i = 3,4)$. O cálculo dos Δp_i ($i = 3,4$) será descrito a seguir.

10.3.3 Cálculo das Variações Δp_i dos Momentos Lineares Devido às Perdas de Energia no Hidrogénio

Quadrando a expressão (10.132) e diferenciando-a, podemos obter para uma dada partícula de momento linear p_i e energia E_i a relação entre a variação elementar dp_i do momento linear quando a energia varia de dE_i . Assim:

$$E_i^2 = p_i^2 c^2 + (m_{0i})^2 c^4 \quad (12a)$$

$$2E_i dE_i = 2c^2 p_i dp_i \quad \rightarrow \quad dp_i = \frac{E_i}{p_i c^2} dE_i^{28} \quad (10.139)$$

Verifica-se que consoante o tipo de partícula que atravessa o hidrogénio líquido, assim se tem uma determinada relação de correspondência entre os dE_i e os dp_i . Na figura 10.37 estão representadas, para o protão p e para o mesão π , em função do movimento linear p_i .

10.4 Procedimento Experimental

Lista do material necessário à realização do trabalho:

$$^{28}dE_i = \frac{dE_i}{dt} dt \quad \text{e} \quad (\Delta p_i)_{6.0\text{ptAD}} = \int_{6.0\text{ptAD}} \widehat{dp_i}$$

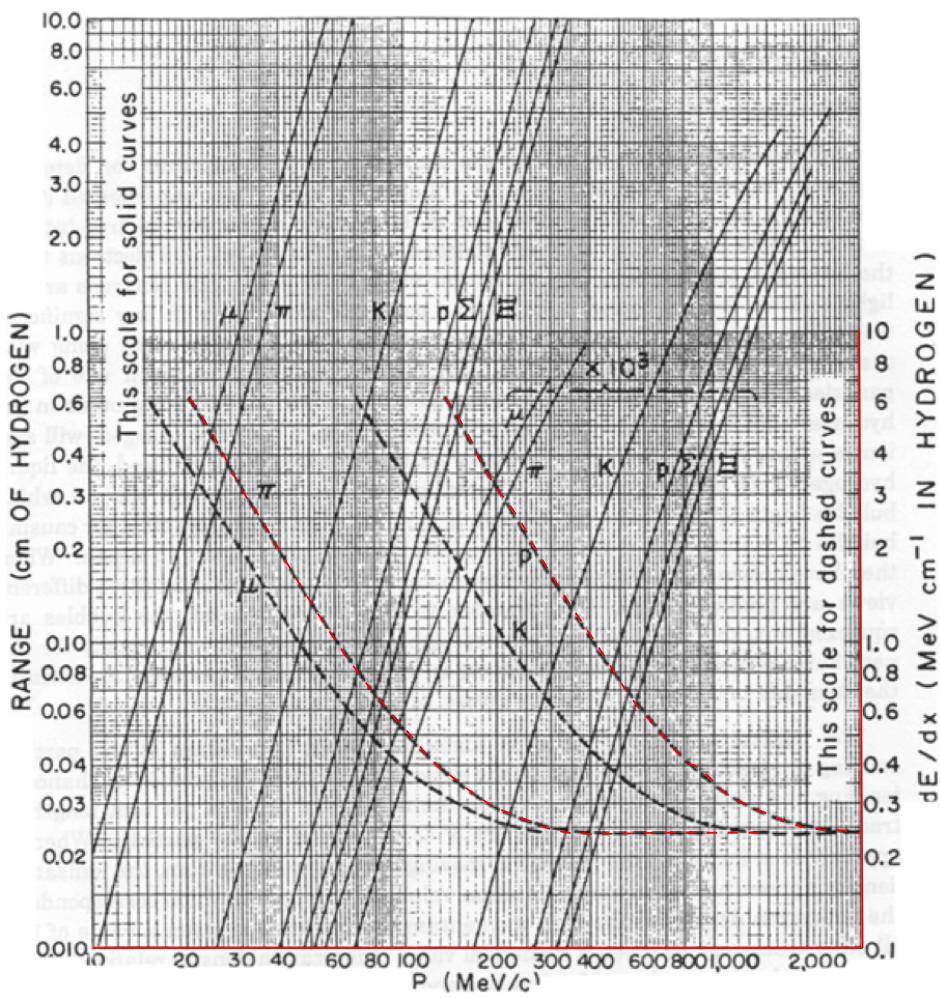


Figura 10.37: Gráficos com a perda de energia por unidade de comprimento do percurso na câmara de hidrogénio líquido. Avermelho indicam-se as curvas e as escalas a utilizar para o caso do *protão p* e do *mesão π*.

- 2 folhas de papel vegetal (trazer para o laboratório)
- régua graduada e esquadro (trazer para o laboratório)
- 2 fotografias de duas colisões registadas na câmara de bolhas
- 1 ábaco transparente para medição dos raios das trajectórias

Para cada uma das fotografias de que dispões, execute sucessivamente os pontos 4.1 a 4.4.

10.4.1 Conservação do Momento Linear

- Para a fotografia seleccionada, determine os raios de curvatura das partículas carregadas associadas ao choque em análise. Para tal e com a ajuda do ábaco, tente encontrar a curva que melhor se ajusta a cada raio num troço de 40 a 60 cm (um dos extremos deve ser o do ponto de impacto). Estime o erro associado à determinação de cada raio.
- Tendo em conta que em cada fotografia está indicado o módulo do momento linear dos protões do feixe incidente, determine o momento linear das partículas com trajectória visível resultantes da colisão assim como as estimativas dos respectivos erros.
- Para verificar a conservação do momento linear, e atendendo a que esta grandeza tem carácter vectorial, trace em papel vegetal as tangentes às trajectórias das partículas no ponto onde se deu a colisão. Escolha uma escala conveniente, e marque sobre as tangentes os vectores representativos dos momentos lineares das partículas antes e depois do choque. Verifique se a conservação do momento linear é ou não válida. No caso de julgar estar perante uma colisão inelástica, com criação de uma partícula neutra, determine graficamente o vector momento linear desta última partícula de modo a verificar-se a conservação do momento linear.

10.4.2 Conservação da Energia

- Para as diferentes hipóteses que com o mínimo de verossimilhança lhe são postas relativamente à colisão que está expressa na fotografia, calcule a energia total inicial e final utilizando a expressão relativista da energia, assim como os erros associados a essas determinações.

- b) No caso de ter admitido estar perante um choque elástico, confirme que a diferença entre as energias antes e depois da colisão é coberta pelos erros associados às determinações. No caso do choque inelástico, determine as partículas resultantes da reacção utilizando as considerações energéticas anteriormente referidas (equação (10.138)). Para a reacção escolhida, verifique se a diferença entre as energias antes e depois do choque é coberta pelos erros associados às determinações. Caso contrário, só com as correcções referidas em 3.2 e 3.3 poderá chegar a uma conclusão.

10.4.3 Perdas de Energia no Hidrogénio. Correcção

- a) Tal como referimos na parte final da introdução deste trabalho, deverá corrigir os cálculos efectuados em 4.1 e 4.2 devido à perda de energia das partículas quando estas se deslocam no hidrogénio. Faça essas correcções recorrendo aos gráficos representados na figura 10.37 que constam também na segunda referência da lista bibliográfica [8] deste trabalho, na qual muito se baseou este guia, e repita de novo os pontos 4.1 e 4.2.
- b) Se ainda não tinha identificado a reacção, verifique se esta correcção lhe permitiu fazer essa identificação sem ambiguidade. Mostre como estas correcções alteraram a situação anterior.
- c) Determine a velocidade de cada partícula recorrendo à reacção (10.131).

10.4.4 Energia Não Relativista

Para a reacção escolhida como representativa da interacção a que a fotografia diz respeito, calcule as energias das partículas a partir da expressão não relativista (10.128) e verifique o que se passa relativamente à conservação da energia. Comente o resultado a que chegou.

A. Equação Diferencial Homogénea de 2º Grau

A.1 Equação Homogénea

$$\ddot{Z}(t) + 2\lambda\dot{Z}(t) + \omega_0^2 Z(t) = 0$$

$$Z(t)?$$

Hipótese: $Z(t) = Z_0 e^{st}$

$$\begin{aligned}\dot{Z}(t) &= sZ(t), \quad \ddot{Z}(t) = s^2 Z(t) \\ s^2 Z(t) + 2\lambda s Z(t) + \omega_0^2 Z(t) &= 0 \\ Z(t) \neq 0 \Rightarrow s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2 &= 0 \\ s = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} &\end{aligned}$$

A.2 Regime Aperiódico

1º caso

$$\begin{aligned}s &= -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ \lambda^2 &> \omega_0^2\end{aligned}$$

Duas raízes reais s_1 e s_2

$$Z(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

A_1 e A_2 são determinados em função das condições limites (ou condições fronteira do sistema), por exemplo quais os valores de $Z(0)$ e $\dot{Z}(0)$.

2º caso: Regime Aperiódico limite

$$\begin{aligned}s &= -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ \lambda^2 &= \omega_0^2\end{aligned}$$

Duas raízes reais iguais $s_1 = s_2 = -\lambda$

$$Z(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\lambda t}$$

A_1 e A_2 são determinados em função das condições limites (ou condições fronteira do sistema), por exemplo quais os valores de $Z(0)$ e $\dot{Z}(0)$.

A.3 Regime Oscilatório

Movimento oscilatório amortecido

$$\begin{aligned}s &= -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ \lambda^2 &< \omega_0^2\end{aligned}$$

Duas raízes complexas s_1 e s_2

$$\begin{aligned}s_{1,2} &= -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\ s_{1,2} &= -\lambda \pm j\omega \\ \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\end{aligned}$$

$$Z(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$Z(t) = (A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}) e^{-\lambda t}$$

Se $A_1 = A_0 e^{j\varphi}$ e $A_2 = A_0 e^{-j\varphi}$

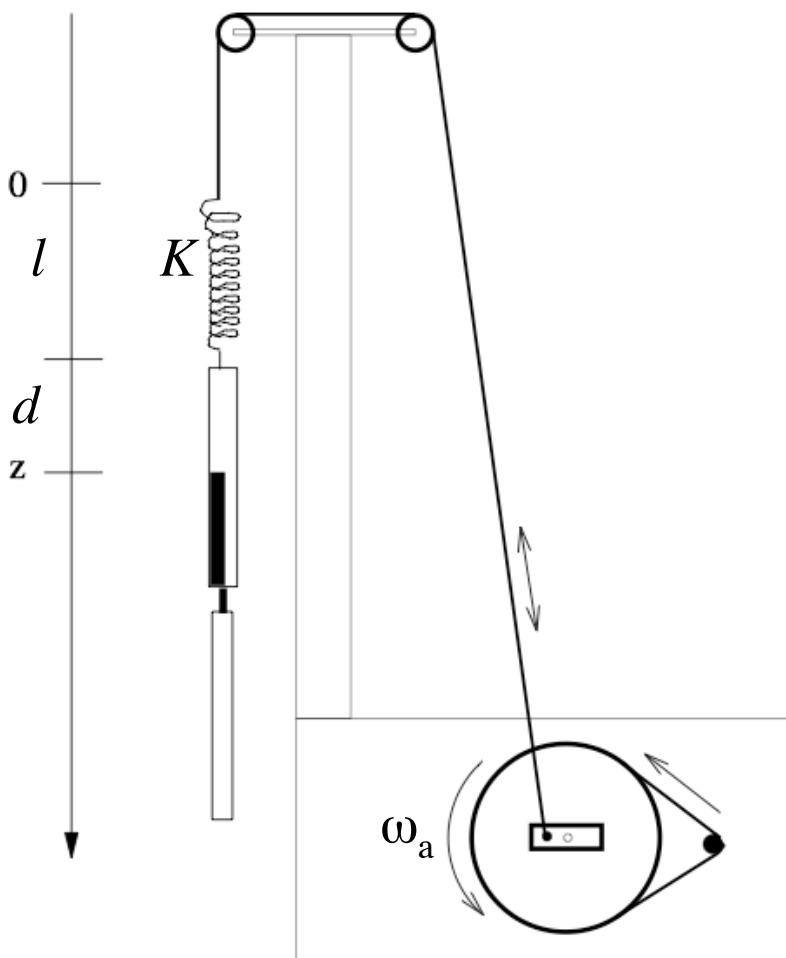
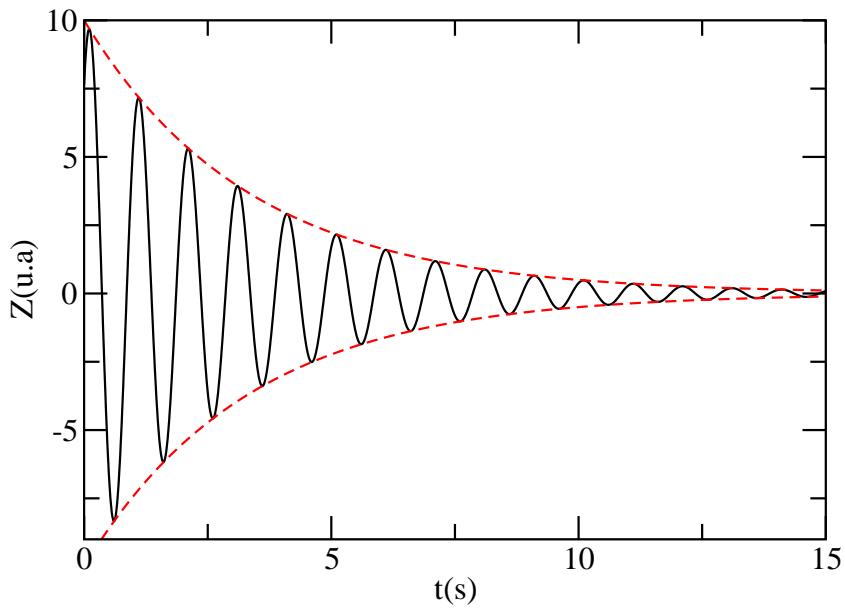
$$Z(t) = A_0 e^{-\lambda t} \left(e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)} \right)$$

Como $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$

$$Z(t) = 2A_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Gráfico da equação do movimento oscilatório amortecido

$$Z(t) = Z_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$



$$\vec{F}_{total} = \vec{P} + \vec{F}_{el} + \vec{A}_t + \vec{F}_{ext} = m \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_{ext} = F_0 \cos \omega_a t \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 z}{dt^2} &= mg - K \Delta z - b \frac{dz}{dt} - F_0 \cos \omega_a t \\ \Delta z(t) &= z(t) - z_{eq} + \frac{m}{K} g \\ \ddot{Z}(t) + \frac{b}{m} \dot{Z}(t) + \frac{K}{m} Z(t) &= \frac{F_0}{m} \cos \omega_a t \end{aligned}$$

Solução da equação do movimento em regime forçado

$$\begin{aligned} \ddot{Z}(t) + 2\lambda \dot{Z}(t) + \omega_0^2 Z(t) &= \frac{F_0}{m} \cos \omega_a t \\ Z(t) &= Z_{homogénea}(t) + Z_{particular}(t) \\ Z_{homogénea} : \quad Z_{livre}(t) &= Z_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi) \\ Z_{livre}(t) &\rightarrow 0 \\ Z_{particular} : \quad Z_{forçado} &= A_M \cos(\omega_a t - \alpha) \end{aligned}$$

Passagem para o espaço dos complexos

$$\begin{aligned} F_{ext} &= \frac{F_0}{m} \operatorname{Re}\{e^{j\omega_a t}\} \\ Z_{forçado} &= A_M \operatorname{Re}\{e^{j(\omega_a t - \alpha)}\} \\ Z_{forçado} &= \operatorname{Re}\{\bar{Z}_M e^{j\omega_a t}\} \\ \bar{Z}_M &= A_M e^{-j\alpha} \\ \text{Cálculo de } \bar{Z}_M \\ F_{ext} &= \frac{F_0}{m} e^{j\omega_a t} \\ \bar{Z}_M &= A_M e^{-j\alpha} \\ \ddot{Z}(t) + 2\lambda \dot{Z}(t) + \omega_0^2 Z(t) &= \frac{F_0}{m} \cos \omega_a t \\ -\omega_a^2 \bar{Z}_M e^{j\omega_a t} + 2j\omega_a \lambda \bar{Z}_M e^{j\omega_a t} + \omega_0^2 \bar{Z}_M e^{j\omega_a t} &= \frac{F_0}{m} e^{j\omega_a t} \\ -\omega_a^2 \bar{Z}_M + 2j\omega_a \lambda \bar{Z}_M + \omega_0^2 \bar{Z}_M &= \frac{F_0}{m} \\ \bar{Z}_M &= \frac{F_0}{m (\omega_0^2 - \omega_a^2 + 2j\lambda\omega_a)} \end{aligned}$$

Cálculo de A_M e α

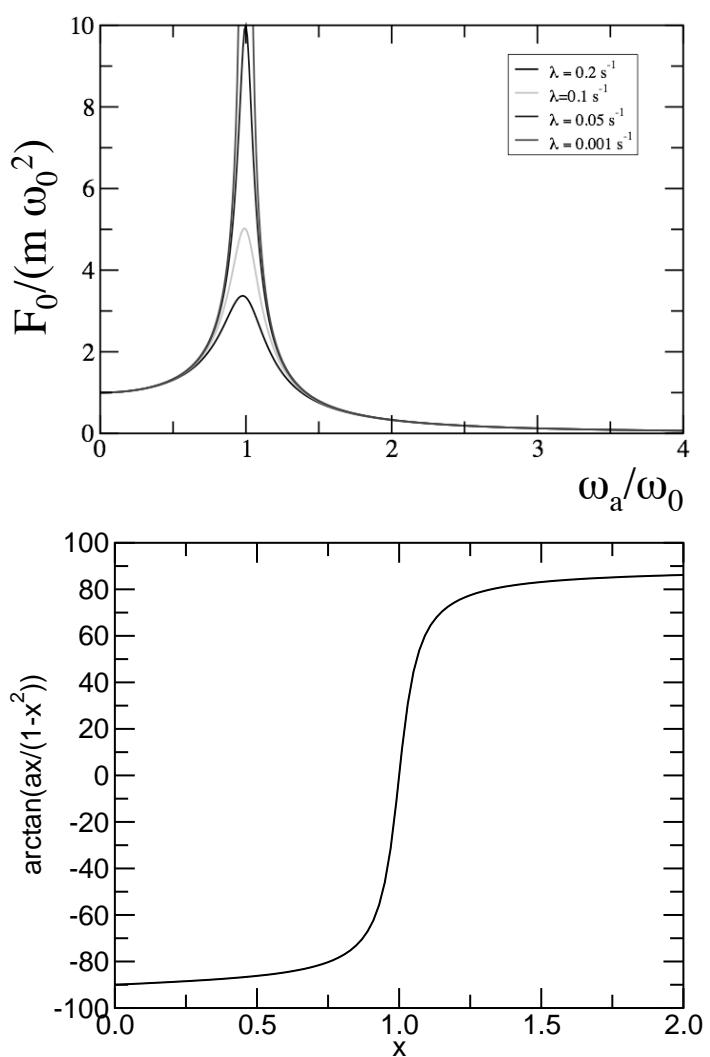
$$\begin{aligned} \bar{Z}_M &= \frac{F_0}{m (\omega_0^2 - \omega_a^2 + 2j\lambda\omega_a)} \\ \omega_0^2 - \omega_a^2 + 2j\lambda\omega_a &= \left[\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + 4\lambda^2\omega_a^2} \right] e^{j\alpha} \\ \tan \alpha &= \frac{2\lambda\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2} \\ \bar{Z}_M &= \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + 4\lambda^2\omega_a^2}} e^{-j\alpha} \\ A_M &= \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + 4\lambda^2\omega_a^2}} \end{aligned}$$

Curva de ressonância

$$A_M = \frac{F_0}{m \omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_a^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\lambda^2 \frac{\omega_a^2}{\omega_0^4}}}$$

máximo:

$$\begin{aligned} \frac{dA_M}{d\omega_a} &= 0 \\ \Rightarrow \omega_a &= \omega_{aR} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \\ \alpha &= \arctan \left(\frac{2\lambda}{\omega_0} \frac{\omega_a/\omega_0}{1 - \omega_a^2/\omega_0^2} \right) \end{aligned}$$



B. Momentos de Inércia. Experiência de Cavendish

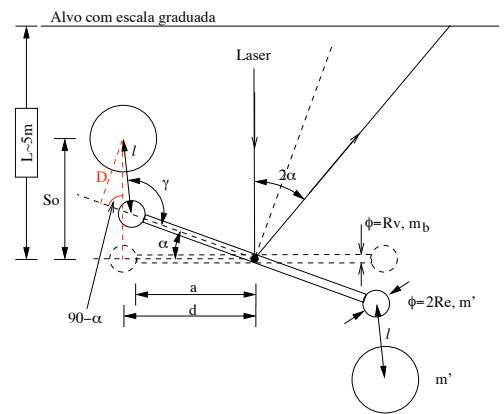
B.1 Balança de Cavendish

$$I_{zz} = \sum_i m_i r_i^2$$

$$I_{zz} = I_{esferas} + I_{barra}$$

Teorema de Steiner

$$I_{esferas} = 2I_{ecm} + 2md^2$$



B.2 Momento de Inércia de Uma Esfera: R , m , ρ

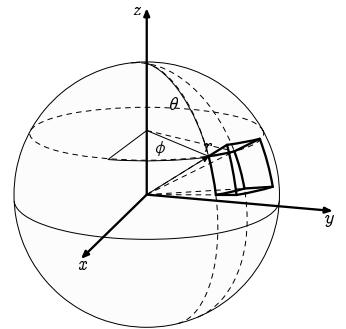
$$I_{zz} = \int_V \rho r^2 dV$$

$$I_{zz_{ecm}} = \int_V \rho(r \sin \theta)^2 dV =$$

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho r^2 \sin^2 \theta \overbrace{r^2 \sin \theta}^{dV} d\phi d\theta dr$$

$$I_{zz_{ecm}} = 2\pi \frac{1}{5} R^5 \rho \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} m R^2$$

Figura B.38: Esquema da montagem da balança de Cavendish.



B.3 Momentos de Inércia da Barra (varão)

R_v, m_v, ρ_v

$$I_{zz_v} = \int_V \rho_v z^2 dV = \int_0^R \int_{-a}^a \int_0^{2\pi} \rho_v z^2 \overbrace{r d\phi dz dr}^{dV}$$

$$I_{zz_v} = 2\pi \rho \frac{R^2}{2} \frac{2}{3} a^3 = \frac{1}{3} m_v a^2$$

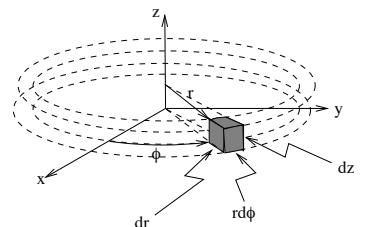


Figura B.39: Sistema de coordenadas esféricas e cilíndricas. (Figuras desenhadas com FEATPOST [?])

C. Nota Sobre a Análise de Resultados Experimentais

C.1 Introdução

A obtenção de qualquer resultado experimental pressupõe a realização de pelo menos uma medição de uma ou várias grandezas. Essas grandezas podem ser **directas**, se medidas directamente, ou **indirectas**, quando obtidas a partir das medidas directas.

O **valor mais representativo** (ou mais provável) de um conjunto de medições para a mesma grandeza está relacionado com a **exactidão** com que é possível medir essa grandeza, ou seja, com o desvio do valor obtido para o valor real da grandeza. As **incertezas** (ou **erros**) cometidas nas leituras das grandezas directas, relacionadas com a precisão dos instrumentos de medida e com o próprio método experimental, propagam-se através das equações que traduzem as leis físicas que se supõem descrever os fenómenos em análise e vão afectar a **precisão** com que as grandezas indirectas são calculadas.

As incertezas experimentais estão presentes em todas as medições e a necessidade de se contabilizarem parece evidente quando se consideram as consequências expressas por exemplo na situação da Figura (C.40) [?, ?].

Uma análise do valor mais representativo e das incertezas numa experiência permite, no final, concluir sobre a precisão e a exactidão dos resultados obtidos. Esses resultados devem ser apresentados na forma **valor mais representativo \pm incerteza**.

Os conceitos de precisão e exactidão estão ilustrados na Figura (C.41) através de pontos de impacto de objectos num alvo.

Os erros podem classificar-se quanto à sua origem como **sistemáticos**, se influenciarem os resultados sempre num mesmo sentido, ou **aleatórios**. No primeiro caso, podem ser eliminados ou, pelo menos, quantificados, por calibração dos aparelhos de medida. No último caso, é possível estimar o seu valor a partir de medições sucessivas da mesma grandeza.

C.1.1 Incertezas - Grandezas Directas

Escalas Graduadas

Uma parte significativa das medições efectuadas no laboratório implica a leitura de valores em escalas graduadas. Na medição de um comprimento recorrendo a uma régua, como ilustrado na figura (C.42), se se

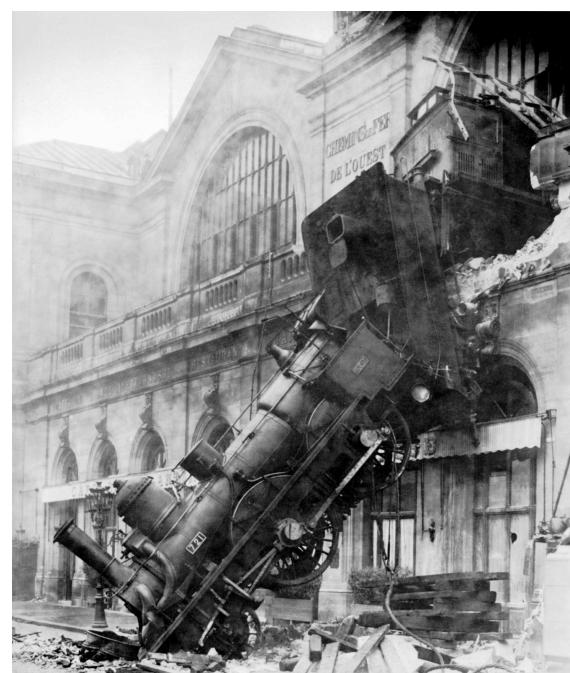
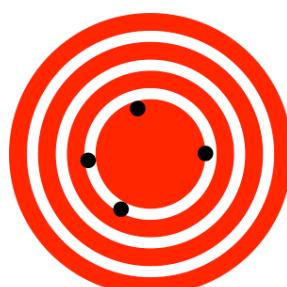


Figura C.40: Gare de Montparnasse, Outubro de 1895 (Imagen da capa do livro "An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements" [?]).



Pouca precisão mas boa exactidão



Pouca exactidão mas boa precisão

Figura C.41: Ilustração da noção de "precisão" e "exactidão".

fizer coincidir o zero da escala com uma das extremidades, raramente a outra coincidirá com um traço da escala, ficando sim entre dois traços consecutivos.

A incerteza na medição deste comprimento está, assim, relacionada com a menor divisão desta escala (1 mm, neste caso). Normalmente, é possível perceber se a segunda extremidade está mais próxima de um ou outro traço, pelo que se poderá dizer que o erro cometido será pelo menos igual a metade da menor divisão da escala utilizada. Neste exemplo, o comprimento será então $2,5 \pm 0,05$ cm.

No entanto no que respeita à estimativa das incertezas associadas a uma medida directa numa determinada escala graduada convém manter presente que poderá haver casos em que se possa fazer a estimativa de 1/4 ou mesmo 1/10 da menor divisão da escala. Essas situações dependem, por exemplo, do estado de manutenção em que se encontra a escala, da definição dos bordos dos objectos, de se poder ampliar a escala utilizando um instrumento óptico, entre outros aspectos.

Escalas Digitais



Figura C.42: Escala Graduada. Multímetro.

A maior parte das medições no laboratório são realizadas com instrumentos de mostradores digitais. Considerando que estes aparelhos estão calibrados, o erro é igual a metade da unidade do dígito menos significativo. No exemplo da Figura (C.42), o valor obtido seria apresentado como $19,16 \pm 0,005$ V.

Desvio Padrão

Em certas condições, o erro cometido na medição duma grandeza directa é (bastante) maior do que a incerteza do aparelho de medida utilizado. O exemplo habitualmente citado é o da medição do período de oscilação de um pêndulo: quer se utilize um cronómetro analógico quer se utilize um digital, o maior erro cometido prende-se com a decisão e reacção do operador. A solução para se conseguir um valor mais próximo da realidade é repetir várias vezes a medição. A repetição de uma medida da variável x nas mesmas condições experimentais conduz a uma distribuição aleatória de resultados em torno de um valor médio \bar{x} (média aritmética) que pode ser considerado como o melhor valor obtido nesta medida. Num grande número de situações, esta repetição realizada N vezes nas mesmas condições experimentais conduz a um valor médio que se aproxima do "verdadeiro" valor da grandeza à medida que N aumenta. Pode calcular-se também o **desvio padrão**

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (\text{C.140})$$

que exprime a dispersão dos resultados e o valor médio calculado tem uma incerteza, **desvio padrão da média**, $s_m = s/\sqrt{N}$, ou seja

$$s_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (\text{C.141})$$

O resultado final neste caso (número elevado de determinações nas mesmas condições experimentais) pode apresentar-se como $\bar{x} \pm s_m$.

O carácter aleatório das determinações resulta principalmente das flutuações que ocorrem nos instrumentos de leitura devido a flutuações de tensão ou de corrente eléctrica ou de vibrações mecânicas e também quando o operador "humano" tem um papel relevante na medição.

A **lei de distribuição normal de Gauss**, ilustrada na figura C.43, é um modelo teórico frequentemente utilizado para a análise estatística dos erros aleatórios cometidos em medições experimentais. O número de valores obtidos com o mesmo valor x , se N é um número elevado pode ser descrito pela função de distribuição

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

sendo σ o desvio padrão da distribuição. Esta função tem um máximo para o valor médio \bar{x} (e é simétrica em relação a ele), apresenta dois pontos de inflexão $x = \pm\sigma$ e tende rapidamente para zero à medida que $|x - \bar{x}|$ se torna muito maior que σ . Pode provar-se que o valor mais provável numa medição é o valor

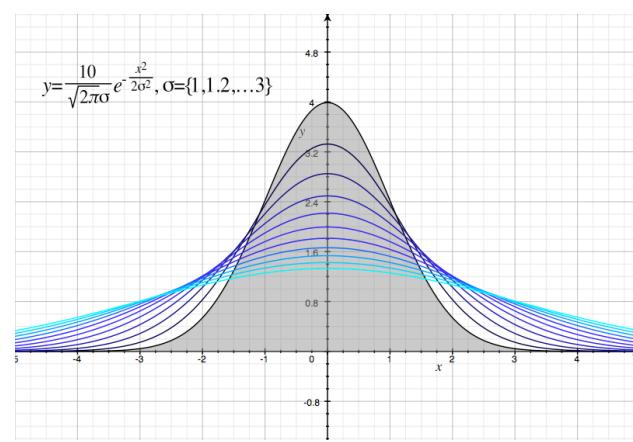


Figura C.43: Distribuição de Gauss para diferentes valores do desvio padrão σ .

médio e que 68% e 95% das determinações caiem respectivamente nos intervalos $\{x-\sigma, x+\sigma\}$ e $\{x-2\sigma, x+2\sigma\}$. Pode provar-se também que a estimativa do desvio padrão tem também uma incerteza relativa que pode ser estimada por $1/\sqrt{2(N-1)}$.

Se o número de determinações nas mesmas condições experimentais é relativamente pequeno (tipicamente ~ 3) a análise estatística perde significado e o erro da variável pode ser estimado usando um majorante Δx .

C.1.2 Apresentação de Resultados

Algarismos Significativos

Os resultados experimentais obtidos devem reflectir a limitação dos instrumentos de medida e do método utilizado. Isto é conseguido se se apresentar o resultado com o número de **algarismos significativos** correcto. O que permite definir este número é a estimativa das incertezas experimentais.

Em rigor, num resultado final, o erro deveria ser arredondado (majorado) para um algarismo significativo e o valor experimental só deveria ser apresentado com algarismos significativos. Por uma questão de simplificação, muitas vezes é apresentado o mesmo número de algarismos do valor e do erro (devendo este ser sempre majorado):

Exemplos:

$$\begin{array}{ll} R = 0,185 \pm 0,003 \text{ m} & T = 297,0 \pm 0,5 \text{ K} \\ v = 344,3 \pm 0,4 \text{ ms}^{-1} & B = (5,92 \pm 0,08)10^{-4}, \text{T} \\ q/m = (1,77 \pm 0,07)10^{11} \text{ C kg}^{-1} & e = 0,050 \pm 0,001 \text{ mm} \\ e = 50 \pm 1 \mu\text{m} & \end{array}$$

Na prática, verifica-se ser preferível manter dois (ou mais) algarismos para os erros que são utilizados em cálculos intermédios.

C.1.3 Precisão e Exactidão

A dispersão dos resultados permite calcular sempre a precisão das medidas efectuadas. Se ϵ_x for o erro de x então a

$$\text{precisão} = 100 \times \left(1 - \frac{\epsilon_x}{x}\right) \% \quad (\text{C.142})$$

A comparação do valor médio obtido com o valor da mesma grandeza tabelado, nas mesmas condições físicas (ou proveniente de outras experiências), permite estimar a exactidão do valor obtido. Se X for o valor conhecido da grandeza e x for o valor medido com um erro ϵ_x então o

$$\text{"desvio-à-exactidão"} = 100 \times \left|1 - \frac{x}{X}\right| \% \quad (\text{C.143})$$

O desvio à exactidão é muito sensível a erros sistemáticos que não foram evitados ou corrigidos.

C.2 Erros relativos

Por vezes, é necessário comparar erros de grandezas diferentes (com unidades diferentes) para se poder saber qual o factor que influencia mais (tem maior peso) a incerteza final. Nestas situações, torna-se mais simples utilizar o conceito de erro relativo, definido do seguinte modo: se o valor medido x tiver um erro ϵ_x então o erro relativo de x (η_x) é dado por

$$\eta = \frac{\epsilon_x}{x} \quad (\text{C.144})$$

C.3 Incertezas - Grandezas Indirectas

As grandezas indirectas são obtidas a partir das directas. Portanto, o erro do valor final (grandeza indirecta) é, assim, determinado pelas incertezas das grandezas directas. A este processo chama-se **propagação de erros**. Mencionamos de seguida algumas das maneiras possíveis de determinar estas incertezas.

C.3.1 Majoração e Minoração

Como exemplo, pense-se na medição da frequência de uma onda sinusoidal: normalmente, mede-se (directamente) o tempo correspondente a um ou vários períodos T e calcula-se a frequência a partir da expressão $f = 1/T$. Neste exemplo, o período será $T \pm \epsilon_T$ e a questão que se coloca é como determinar o erro ϵ_f .

Um dos métodos possíveis consiste em:

- determinar o maior valor (**majorante**) de f , que, neste caso, é $f_{\max} = \frac{1}{T-\epsilon_T}$;
- determinar o menor valor (**minorante**) de f , que, neste caso, é $f_{\min} = \frac{1}{T+\epsilon_T}$;
- considerar o erro como metade da diferença entre esses limites: $\epsilon_f = \frac{f_{\max}-f_{\min}}{2}$.

C.3.2 Desvio Padrão

Para uma grandeza indirecta $F(x,y,z)$, em que x , y e z são grandezas medidas directamente, com desvios padrões σ_x , σ_y e σ_z , pode calcular-se o desvio padrão σ_F da grandeza F a partir de

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\sigma_z\right)^2}. \quad (\text{C.145})$$

C.3.3 Propagação Linear

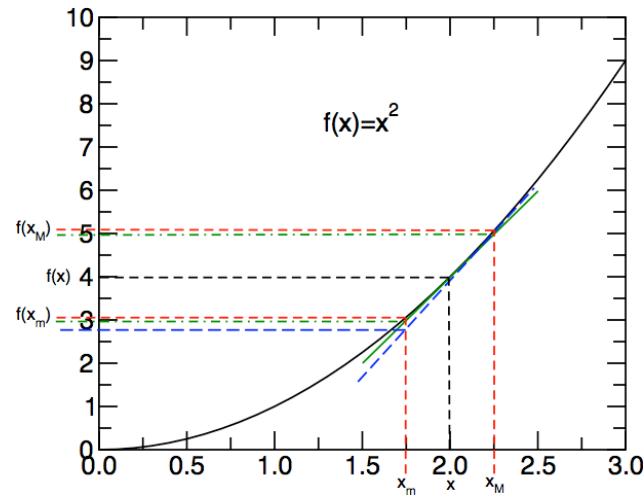


Figura C.44: Exemplo de aplicação dos métodos de propagação de erros C.3.1, C.3.2 e C.3.3.

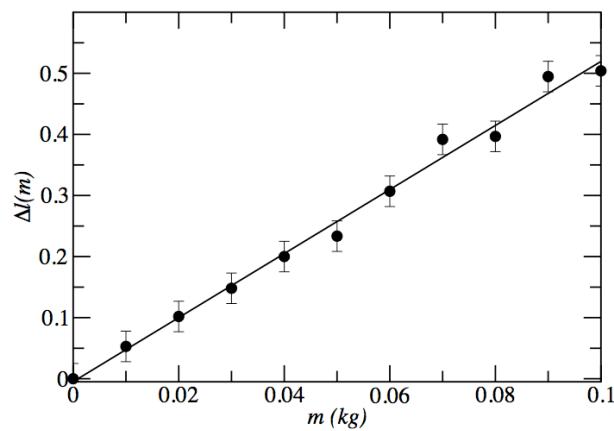
Quando não é possível fazer uma análise estatística e, portanto, não se dispõe de resultados nas mesmas condições experimentais para um grande número de determinações, pode estimar-se um majorante do erro da grandeza indirecta ϵ_F a partir de

$$\sigma_F = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \sigma_x \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \sigma_y \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial z} \sigma_z \right|. \quad (\text{C.146})$$

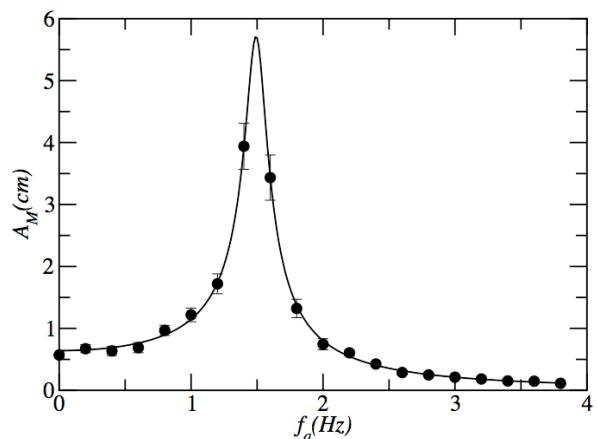
O máximo da expressão (C.146) pode ser obtido majorando cada uma das parcelas da expressão tendo em atenção o intervalo de erro associado a cada uma das grandezas. Dessa forma obtém-se a expressão (C.147)

$$\sigma_F = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \sigma_x \right|_{\text{maj}} + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \sigma_y \right|_{\text{maj}} + \left| \frac{\partial F}{\partial z} \sigma_z \right|_{\text{maj}}. \quad (\text{C.147})$$

Na Figura C.44 apresenta-se uma ilustração da estimativa dos erros propagados aplicada à expressão $f(x) = x^2$.



(a)



(b)

Figura C.45: Ajuste da função (C.150) a um conjunto de dados experimentais; b) ajuste da função (C.151) a um conjunto de dados experimentais..

C.3.4 Erros Relativos

A utilização dos erros relativos apresenta algumas vantagens quando o cálculo do resultado final envolve produtos, quocientes e/ou potências das variáveis de medida.

Por exemplo, considere-se a grandeza F , obtida a partir de

$$F(x, y) = ax^p y^q, \quad (\text{C.148})$$

onde x e y são duas variáveis com erros ϵ_x e ϵ_y , respectivamente. A partir das equações (C.144) e (C.146) obtém-se

$$\epsilon_F = |apx^{p-1}y^q| \epsilon_x + |aqx^p y^{q-1}| \epsilon_y = \left| p \frac{F}{x} \right| \epsilon_x + \left| q \frac{F}{y} \right| \epsilon_y, \quad (\text{C.149})$$

ou seja

$$\epsilon_F = |p\eta_x| + |q\eta_y|. \quad (\text{C.150})$$

Este exemplo pode ser facilmente generalizado para o caso da função F depender de mais variáveis. Note-se que os expoentes p ou q podem ser positivos ou negativos e que se torna muito fácil identificar a partir da equação (C.150) qual ou quais as variáveis que contribuem mais para o erro do resultado final.

C.4 Análise Gráfica de Resultados

Em muitas situações em física experimental é conveniente efectuar-se a representação gráfica da dependência dos valores experimentais em função de uma determinada variável (ou variáveis) que define as condições experimentais. Frequentemente, essa dependência tem um modelo teórico, existindo uma função que deverá ser possível ajustar a esses pontos experimentais. No caso dumha função linear, esse ajuste pode ser feito visualmente, traçando a recta que se aproxima o melhor possível do conjunto de pontos experimentais. Noutros casos, esse ajuste tem de ser feito utilizando métodos numéricos.

O **Método dos Mínimos-Quadrados** é um método estatístico de tratamento de dados que permite obter os parâmetros de uma função que a aproximam o mais possível dos pontos experimentais. Nas figuras C.44a e C.44b mostram-se duas situações em que as funções teóricas

$$\Delta l = \frac{g}{K} m \quad (\text{C.151})$$

$$A_M = \frac{A_0}{\sqrt{16\pi^4 (f_0^2 - f_a^2)^2 + 16\pi^2 \lambda^2 f_a^2}} \quad (\text{C.152})$$

se aproximam claramente dos pontos experimentais. A equação (C.151) traduz o alongamento de uma mola quando nela se suspende uma massa m . A equação (C.152) traduz a amplitude de oscilação de uma massa suspensa numa mola quando sujeita a oscilações forçadas de frequência variável f_a . A frequência própria do sistema é f_0 , o coeficiente de amortecimento do sistema é λ . A_0 é uma constante.

Observando os gráficos, é fácil verificar que as curvas teóricas não passam por todos os pontos experimentais. Existem pontos com ordenadas superiores às curvas teóricas e pontos com ordenadas inferiores. No caso do gráfico da figura 6a, poderíamos ter obtido um ajuste idêntico se tivéssemos colocado os pontos

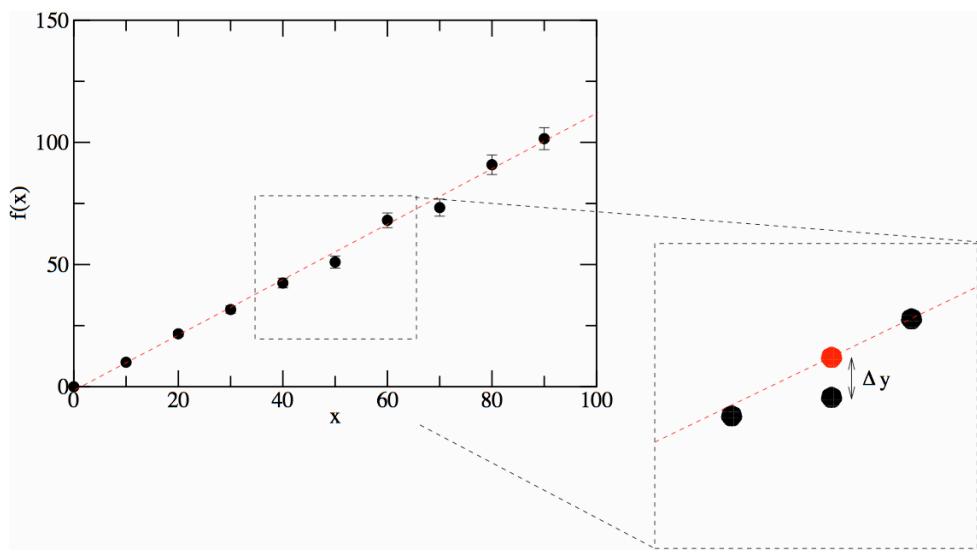


Figura C.46: Detalhe da qualidade do ajuste de uma recta a um conjunto de pontos experimentais.

num gráfico em papel milimétrico e de seguida desenhado uma recta que se aproximasse o mais possível de todos os pontos simultaneamente. No caso do gráfico da figura 6b, já seria mais difícil desenhar a curva teórica porque é uma curva que não depende linearmente da variável independente.

Numericamente, o problema resume-se a encontrar o valor do declive da recta, no caso da figura C.44a, e dos valores de A_0 , λ e f_0 , que permitem traçar a melhor curva (C.152), no caso da figura C.44b.

O caso da recta é mais fácil porque existe uma solução analítica. O caso da figura C.44b só tem uma solução numérica, obtida iterativamente.

O ajuste de uma recta pelo *método dos mínimos quadrados* é muitas vezes designado por **regressão linear** e numericamente pode ser expresso da seguinte forma:

1. Para cada ponto experimental calcula-se a diferença entre a ordenada experimental e o valor da função calculado para a abcissa correspondente $\Delta y = y_{\text{exp}_i} - f(x_i)$. Se a função for uma recta então $f(x) = a + bx$ e $\Delta y = y_{\text{exp}_i} - f(x_i)$
2. Calcula-se a soma dos quadrados dessas diferenças para todos os pontos experimentais tendo em conta o erro experimental de cada ponto,

$$Q^2(a,b) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_{\text{exp}} - f(x_i)}{\epsilon_{y_i \text{ exp}}} \right)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_{\text{exp}} - a - bx_i}{\epsilon_{y_i \text{ exp}}} \right)^2 \quad (\text{C.153})$$

Note-se que quanto maior for o erro experimental de um ponto menor será a contribuição desse ponto para o resultado final.

3. O resultado dessa soma, $Q^2(a,b)$, é uma função de duas variáveis a e b , a *ordenada na origem* e o *declive*, respectivamente. Os valores de a e b que interessam são aqueles para os quais a função $Q^2(a,b)$ tem o valor mínimo. Essa situação corresponde à ideia intuitiva de que a curva passa próximo de todos os pontos simultaneamente. Os valores de a e b que correspondem a esse mínimo obtêm-se calculando

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.154})$$

(o facto de termos uma função de duas variáveis não constitui problema, uma vez que basta calcular a derivada em ordem a uma das variáveis de cada vez e assumindo que a outra é constante). Para termos a certeza de que os valores de a e b que satisfazem (C.154) correspondem a um mínimo da equação (C.153), as segundas derivadas têm de ser positivas, condição que se verifica porque é uma função quadrática.

O sistema (C.154) pode resolver-se analiticamente e os valores a e b são fáceis de obter resolvendo o sistema de equações. Usualmente, as máquinas de calcular com funções estatísticas permitem efectuar estes cálculos de forma simples e automática. No caso de uma função não linear nos parâmetros de ajuste, por exemplo a equação (C.152), o sistema de equações (C.154) pode não ter solução analítica e os valores dos parâmetros de ajuste têm de ser obtidos numericamente utilizando um método iterativo.

Exercício: Deduza as expressões que resultam da minimização $Q^2(a,b)$ no caso da função de ajuste ser uma equação linear da forma $f(x) = a + bx$.

C.4.1 Erros em x e y

Nos casos em que seja necessário considerar simultaneamente as incertezas de x e y no processo de ajuste de uma função pelo método dos mínimos quadrados, a incerteza $\epsilon_{y \text{ exp}}$ passará a ter de incluir a contribuição que resulta da propagação de erros de x para y , por exemplo:

$$\epsilon_{y \text{ exp}} \rightarrow \epsilon_{y \text{ exp}} + \left| \frac{dy}{dx} \right| \epsilon_{x \text{ exp}} \quad (\text{C.155})$$

No sentido de evitar reflectir na incerteza experimental o desconhecimento dos parâmetros do modelo é conveniente efectuar a derivada numérica a partir dos dados experimentais.

C.5 Consulta de bibliografia dedicada

Obviamente a leitura desta pequena nota não substitui a consulta de bibliografia aprofundada dos diferentes aspectos da análise e apresentação de resultados experimentais [?, ?], nem a norma internacional ISO Guides to the expression of uncertainty in measurement (URL: <http://www.iso.org/sites/JCGM/GUM-introduction.htm>) [?].

Bibliografia

- [1] A. C. Ribeiro, P. Sebastião, and F. Tomé. Contribuição para o desenvolvimento do ensino da Física Experimental no IST. Departamento de Física do IST, 1996.
- [2] L. A. Bessonov. *Cours d'Electrotechnique Theorique*. Moscow, 1968.
- [3] A. C. Ribeiro. *Regimes Transitórios*. 1975-76.
- [4] C. Kittel. *Introdução à Física do Estado Sólido*. Guanabara Dois, 5 edition, 1978.
- [5] J. Resina Rodrigues. *História e Filosofia das Ciências*. 1976.
- [6] A. Lorentz, A. Einstein, and H. Minkowski. *O Princípio da Relatividade, Textos Fundamentais de Física*. Lisboa, 1972.
- [7] Max Born. *Física Atómica*. Lisboa, 1976.
- [8] J. Duboc. *Bulletin de l'Union des Physiciens n.577*.

