

KIT Computergrafik, WS 15/16

Paul Jungeblut

18. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Bilder, Farbe und Perzeption	3
1.1	Transferfunktion	3
1.1.1	Quantisierung	3
1.1.2	γ -Korrektur	4
1.2	α -Kanal	4
1.3	Licht	5
1.3.1	Wahrnehmung von Licht	5
1.4	Farbräume	5
1.4.1	Graßmannsche Gesetze	5
1.4.2	RGB-Farbraum	6
1.4.3	CMY(K)-Farbraum	6
1.4.4	HSV-Farbraum	6
1.4.5	CIE Color Matching Funktionen	7
1.4.6	Der XYZ-Farbraum	7
1.4.7	Der xyY-Farbraum	7
1.5	Chromazitätsdiagramme	8
2	Analytische Geometrie	9
3	Ray Tracing	10
3.1	Abtastung	10
3.2	Lochkamera	10
3.3	Ray Tracing	11

Dieses Skript ist inoffiziell zur Vorlesung Computergrafik am KIT im Wintersemester 2015/2016 entstanden. Dieses Skript erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.

Die Vorlesung wurde von Prof. Dr. Carsten Dachsbacher gehalten und dieses Skript orientiert sich an seinen Folien.

1 Bilder, Farbe und Perzeption

In der Computergrafik geht es um die Erzeugung und Manipulation von Bildern. Diese Bilder sind meiste 2D Arrays aus farbigen Pixeln. Der Speicher, in dem die Farbe mit drei Werten für rot, grün und blau gespeichert wird, heißt [Framebuffer](#). Heutzutage sind 8 Bit pro Farbe in einem Framebuffer üblich. Steht weniger zur Verfügung, müssen fehlende Farben durch Anordnung verfügbarer Farben nachgebildet werden. Sind die Pixel ausreichend klein, werden so Mischfarben wahrgenommen.

1.1 Transferfunktion

Höhere RGB-Werte bedeuten eine hellere Farbe. Wie hell genau eine Farbe erscheint, wird durch eine [Transferfunktion](#) f beschrieben. Man kann die Transferfunktion für ein Graustufenbild oder per Farbkanal betrachten.

$$f : [0, N] \rightarrow [I_{min}, I_{max}]$$

Dabei bildet f vom Wert des Pixels auf eine Helligkeit zwischen der minimalen und maximalen Displayhelligkeit I_{min} und I_{max} ab. Sie hängt von den physikalischen Eigenschaften des Displays ab.

Die maximale Helligkeit I_{max} gibt an, wie hell ein Pixel sein kann. Bei LCDs beträgt sie meist weniger als 10% der Hintergrundbeleuchtung des Displays. Die minimale Helligkeit I_{min} ist die Menge Licht, die für ein schwarzes Pixel emittiert wird.

Neben dem vom Display emittierten Licht, reflektiert auch noch Umgebungslicht mit Intensität k an der Oberfläche. Dieses hat einen großen Einfluss auf den Kontrast, der am Bildschirm wahrgenommen werden kann. Der [Dynamikumfang](#)

$$R_d := \frac{I_{max} + k}{I_{min} + k}$$

beschreibt den maximalen Kontrast des Displays.

Die Transferfunktion sollte so ausfallen, dass aufeinander folgende Pixelwerte keinen sichtbaren Helligkeitsunterschied haben. Ist diese Forderung nicht erfüllt, können Bänder auf glatten Bildbereichen erscheinen. Menschen können einen Helligkeitsunterschied von etwa 2% wahrnehmen. In dunklen Bereichen werden also kleinere Schritte der Transferfunktion benötigt.

1.1.1 Quantisierung

Die Transferfunktion kann verschieden quantisiert sein. Die verschiedenen Möglichkeiten unterscheiden sich dabei in der Größe der Helligkeitsschritte zwischen aufeinander folgenden Farbwerten.

Bei einer **linearen Quantisierung** (gleich große Helligkeitsschritte), muss jeder Schritt kleiner als 2% von I_{min} betragen. Um Helligkeiten bis I_{max} darzustellen werden

$$\frac{I_{max} - I_{min}}{0.02 \cdot I_{min}}$$

Schritte benötigt. Bei LCDs mit Dynamikumfang 100:1 sind dies etwa 5000 Schritte. Dies würde 12-13 Bit pro Farbkanal erfordern. Vorteil der linearen Quantisierung ist jedoch die einfache Arithmetik mit Pixelwerten.

Alternativ könnte die Transferfunktion exponentiell quantisiert sein, mit genau 2% zwischen zwei Pixelwerten. Bei einer **exponentiellen Quantisierung** ist $0 \mapsto I_{min}$, $1 \mapsto 1.02 \cdot I_{min}$, $2 \mapsto 1.02^2 \cdot I_{min}$, usw. Da $\log_{10} 1.02 \approx \frac{1}{120}$, werden ca. 120 Schritte für eine Verzehnfachung der Helligkeit benötigt. In diesem Fall reichen also 8 Bit gerade aus, um die 240 Schritte zu ermöglichen, die ein LCD mit Dynamikumfang 100:1 bräuchte.

Als Approximation der exponentiellen Quantisierung wird in der Praxis häufig eine **potenzfunktion basierte Quantisierung** eingesetzt.

$$I(n) = \left(\frac{n}{N}\right)^\gamma \cdot I_{max}$$

Der Exponent γ muss in diesem Fall immer mit angegeben werden. Ist $\gamma = 1$ hat man eine lineare Quantisierung.

1.1.2 γ -Korrektur

In diesem Abschnitt gelten vereinfachend die Idealwerte $I_{min} = k = 0$ und $I_{max} = 1$. Mit insgesamt N Schritten ($N = 256$ bei 8 Bit) wird ein Pixelwert n auf die Intensität $I(n)$ abgebildet.

$$I(n) \propto \left(\frac{n}{N}\right)^\gamma$$

Der γ -Wert charakterisiert das Display. In der Computergrafik wird ein Pixelwert α aber üblicherweise in einem linearen Raum berechnet. Bei der Darstellung will man, dass ein doppelter Wert doppelte Helligkeit bedeutet. Pixelwerte werden daher *direkt vor der Darstellung* einer **γ -Korrektur** unterzogen. Damit $I(n) \propto \alpha$ ist, wird $\alpha \propto \alpha^{\frac{1}{\gamma}}$ verwendet. Diese Korrektur wird unabhängig für jede Primärfarbe durchgeführt

1.2 α -Kanal

Oft werden Bilder 32 Bit pro Pixel kodiert. Ein Beispiel ist das RGBA-Format, wo neben den Primärfarben rot, grün und blau zusätzlich 8 Bit für einen **α -Kanal** zur Verfügung stehen. Der α -Wert gibt die Opazität (Gegenteil von Transparenz) an. Die Verwendung eines Alphakanals erlaubt es, Details von der Geometrie in die Textur zu verlagern und so das Rendern der Szene zu beschleunigen.

1.3 Licht

Licht ist elektromagnetische Strahlung. Eine elektromagnetische Welle hat eine Wellenlänge λ und eine Frequenz $\nu = \frac{c}{\lambda}$. Jede solche Wellenlänge repräsentiert eine [Spektralfarbe](#). Sichtbares Licht hat Wellenlängen zwischen 380 nm-700 nm. Licht ist in der Regel zusammengesetzt aus vielen verschiedenen Wellenlängen, jede mit einer bestimmten Intensität. $P(\lambda)$ ist die [Strahlungsleistung](#) der Wellenlänge λ .

Das menschliche Auge kann die spektrale Zusammensetzung von Licht nicht erfassen. Es passt sich zudem den äußeren (physikalischen) Umständen an. Als Rezeptoren dienen [Stäbchen](#) und [Zapfen](#). Die ca. 120 Millionen Stäbchen sind sehr lichtempfindlich und eignen sich für monochromatisches Nachtsehen. Mit ca. 6-7 Millionen Zapfen ist trichromatisches Tagsehen möglich. Es gibt drei Arten von Zapfen, die sich in ihrer Empfindlichkeit bezüglich verschiedener Lichtspektren unterscheiden: S-Zapfen (7%) entsprechen dem blauen Licht, M-Zapfen (37%) dem (gelb-)grünen und L-Zapfen (56%) dem (orange-)roten Licht.

1.3.1 Wahrnehmung von Licht

Die Wahrnehmung von Licht erfolgt anhand des Tripels (s, m, l) mit

$$s = \int S(\lambda)P(\lambda) \, d\lambda, \quad m = \int M(\lambda)P(\lambda) \, d\lambda, \quad l = \int L(\lambda)P(\lambda) \, d\lambda.$$

Daraus folgt, dass es unterschiedliche Spektren mit unterschiedlichen Wellenlängen und Intensitäten gibt, die zur gleichen Wahrnehmung führen. Diesen Effekt bezeichnet man als [Metamerismus](#). Der Metamerismus ist von elementarer Bedeutung in der Computergrafik, denn so kann ein Monitor mit drei Primärfarben den gleichen Eindruck vermitteln wie ein komplexes Spektrum.

1.4 Farbräume

Grundsätzlich kann zwischen [additiver](#) und [subtraktiver Farbmischung](#) unterschieden werden.

Bei additiver Farbmischung sind Rot, Grün und Blau die drei Primärfarben. Die Farbkombination entsteht durch *Addition* der Spektren.

Bei der subtraktiven Farbmischung sind die Primärfarben Cyan, Gelb und Magenta. Die Farbkombination entsteht durch *Multiplikation* der Spektren.

Ein [Farbmodell](#) ist ein mathematisches Modell, in dem Farben durch Wertetupel beschrieben werden (z. B. 3-Tupel bei RGB oder 4-Tupel bei CMYK). Ein [Farbraum](#) ist die Menge aller Farben, die mit einem bestimmten Modell beschrieben werden können. Die Tristimuluswerte beschreiben eine Farbe in einem bestimmten Farbraum eines Farbmodells. Ohne Angabe des Farbmodells sind diese Werte nichtssagend.

1.4.1 Graßmannsche Gesetze

- Farbe ist eine dreidimensionale Größe (z. B. rot/grün/blau oder Farbton/Sättigung/Helligkeit).

- **Superpositionsprinzip:** Die Intensität einer additiv gemischten Farbe entspricht der Summe der Intensitäten der Ausgangsfarben.
- Der Farbton einer additiven Mischfarbe hängt nur vom Farbeindruck der Ausgangsfarben ab und nicht von deren Spektren. Auf die spektrale Zusammensetzung kann nicht rückgeschlossen werden. Beim Addieren von Spektren können einzelne Spektren also durch Metamere ersetzt werden, ohne dass sich der Farbeindruck ändert.

1.4.2 RGB-Farbraum

Im **RGB-Farbraum** dienen Rot, Grün und Blau als Primärfarben. Die genaue Definition der Primärfarben hängt vom jeweiligen RGB-Raum ab. Es handelt sich um einen dreidimensionalen Farbraum mit

$$C = rR + gG + bB \in [0, 1]^3.$$

Die Koeffizienten r, g, b werden **Tristimuluswerte** genannt. Zur Bestimmung Helligkeit kann die Luminanzapproximation

$$Y = 0.3r + 0.59g + 0.11b$$

1.4.3 CMY(K)-Farbraum

Der **CMK-Farbraum** ist ein subtraktiver Farbraum mit den Primärfarben Cyan, Magenta und Gelb. Er ist dual zum RGB-Farbraum:

$$\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

verwendet werden. Beim Drucken wird oft noch Schwarz als vierte Primärfarbe verwendet. Man spricht dann vom **CMYK-Farbraum**.

$$K = \min\{C, M, Y\}, \quad \begin{pmatrix} C' \\ M' \\ Y' \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C - K \\ M - K \\ Y - K \\ K \end{pmatrix}$$

1.4.4 HSV-Farbraum

Der **HSV-Farbraum** besteht aus Farbton (engl. hue), Sättigung (engl. saturation) und Helligkeit (engl. value). Er ist weder additiv noch subtraktiv aber recht intuitiv und findet deshalb oft Anwendung in Benutzerschnittstellen.

1.4.5 CIE Color Matching Funktionen

Eine **Color Matching Funktion** gibt an, wie die Primärfarben addiert werden müssen, um eine Spektralfarbe zu reproduzieren. Nicht jede wahrnehmbare Farbe lässt sich durch Addition dreier Primärfarben darstellen. In diesem Fall muss eine der Primärfarben zur Referenzfarbe addiert werden. Mit den restlichen Primärfarben kann die Farbe dann nachgebildet werden.

Zur Berechnung einer metameren Farbe im selben RGB-Farbraum, müssen die Trstimuluswerte r, g, b der folgenden **Color Matching Funktionen** berechnet werden.

$$r = \int \bar{r}(\lambda)P(\lambda) d\lambda, \quad g = \int \bar{g}(\lambda)P(\lambda) d\lambda, \quad b = \int \bar{b}(\lambda)P(\lambda) d\lambda$$

Dabei stellen $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ die Spektren der Primärfarben dar. Dabei können wegen oben genanntem Effekt jedoch negative Vergleichswerte entstehen. Die Konsequenz: Einige Spektralfarben sind nicht realisierbar. RGB ist also kein perfekter Farbraum, dafür jedoch realisierbar.

1.4.6 Der XYZ-Farbraum

Ziel des **XYZ-Farbraums** ist es, alle wahrnehmbaren Farben beschreiben zu können. Es ist demnach ein Farbraum mit rein positive Color Matching Funktionen. Die Y-Komponente des XYZ-Farbraums entspricht der Luminanz. Die Konvertierung zum RGB-Farbraum ist eine lineare Abbildung.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0.49 & 0.31 & 0.20 \\ 0.18 & 0.81 & 0.01 \\ 0.00 & 0.01 & 0.99 \end{pmatrix}$$

1.4.7 Der xyY-Farbraum

Für alle $k > 0$ repräsentiert $k(X, Y, Z)$ die gleiche Farbe, nur mit unterschiedlicher Intensität. Von daher können die Werte auf die $X + Y + Z = 1$ Ebene normalisiert werden. Eine anschließende Projektion auf die XY-Ebene ($z = 0$ setzen) enthält nach wie vor alle Farbtöne und Sättigungen. Es gilt

$$x = \frac{X}{X + Y + Z}, \quad y = \frac{Y}{X + Y + Z}, \quad z = \frac{Z}{X + Y + Z} = 1 - x - y.$$

Im **xyY-Farbraum** wird so die Information in Helligkeit und Chromazität (Farbe) aufgeteilt. Es müssen die Werte x und y sowie die Helligkeit Y angegeben werden. Der Wert z kann wie oben gezeigt, durch x und y berechnet werden und muss nicht mit gespeichert werden. X und Z können dann wie folgt aus x, y und Y berechnet werden:

$$X = \frac{Y}{y}x, \quad Z = \frac{Y}{y}(1 - x - y)$$

1.5 Chromazitätsdiagramme

Ein **Chromazitätsdiagramm** enthält alle sichtbaren Farben, dem **Gamut** der menschlichen Wahrnehmung. Der **Weißpunkt** ($x = y = z = \frac{1}{3}$) entspricht dabei in etwa dem Sonnenlicht. Die Spektralfarben befinden sich entlang der Randkurve und entsprechen dem monochromatischen Licht. Die **Purpurlinie** ist die Menge von gesättigten Farben, die ein Mensch wahrnehmen kann. Es handelt sich dabei aber nicht um Spektralfarben.

Farben auf der Strecke zwischen zwei Punkten können durch Addition der Farben an den Endpunkten der Strecke gebildet werden. Die **reine Farbe** C_p zu einer Farbe C findet man auf dem Rand durch Verlängern der Strecke vom Weißpunkt durch C . Die **Komplementärfarbe** C_c liegt auf der Linie durch den Weißpunkt auf dem gegenüberliegenden Rand.

Alle Farben innerhalb eines Dreiecks lassen sich durch Addition der Farben an den Eckpunkten des Dreiecks bilden. Die darstellbaren Farben eines Ausgabegeräts werden durch dessen **Gamut** beschrieben. Es sind alle Farben innerhalb des von den Primärfarben aufgespannten Dreiecks (bzw. Polygons).

Gamut-Mapping ist eine Abbildung zwischen zwei Gamuts mit dem Ziel Farbverschiebungen gering zu halten.

2 Analytische Geometrie

3 Ray Tracing

Die Idee beim [Ray Tracing](#) ist es, für jeden Pixel, alle Objekte zu finden, die diesen Pixel beeinflussen. Anhand all dieser Objekte wird die Pixelfarbe bestimmt. Dazu wird vom Rückwärtslichttransport ausgegangen. Man startet an der Kamera und sucht alle Pfade, auf denen das Licht dort hin gelangt. Dabei wird angenommen, dass der Lichttransport den Gesetzen der geometrischen Optik folgt.

3.1 Abtastung

Ein [Rasterbild](#) ist eine äquidistante Abtastung eines Bildsignals. Das Bildsignal wird also vereinfachend als stückweise konstante Funktion aufgefasst. Die bringt Probleme wie [Aliasing](#) oder den [Moiré-Effekt](#) mit sich.

Theorem 1 (NYQUIST-SHANNON-Abtasttheorem) *Ein kontinuierliches, bandbegrenztes Signal mit einer maximalen Frequenz f_{max} muss mit einer Frequenz echt größer als $2f_{max}$ abgetastet werden, damit aus dem diskreten Signal das Ursprungssignal exakt rekonstruiert werden kann.*

Ist die Abtastfrequenz zu gering, kommt es zu Aliasing. Ein möglicher Lösungsansatz ist eine Vorfilterung des Signals, bei der hohe Frequenzen entfernt werden. Dies ist jedoch im allgemeinen Fall nicht möglich. Eine andere Möglichkeit ist eine [Überabtastung](#) mit anschließender Filterung.

3.2 Lochkamera

Am einfachsten zur Bildsynthese ist das Modell der Lochkamera. Sie ist definiert durch die Position ihrer Öffnung und der Bildebene. Da keine Linse verwendet wird, hat sie unbeschränkte Schärfentiefe.

Eine [virtuelle Kamera](#) ist definiert durch ihre Position und Blickrichtung, sowie die Orientierung der Vertikalen Achse. Dazu die Breite und Höhe der Bildebene und ihr Abstand *vor* der Kamera.

Bei der Bildsynthese kann [objektbasiert](#) oder [bildbasiert](#) vorgegangen werden.

Beim objektbasierten Rendern werden für jedes Objekt alle Pixel bestimmt, die es überdeckt. Dann wird die Farbe dieser Pixel ermittelt.

Beim bildbasierten Rendern werden für jeden Pixel alle an dieser Stelle sichtbaren Objekte bestimmt. Daraus wird die Pixelfarbe ermittelt.

3.3 Ray Tracing

Ray Tracing besteht aus drei Schritten, die in dieser Reihenfolge ausgeführt werden.

1. **Ray Generation** Für jeden Pixel wird ein Strahl von der Kamera durch diesen Pixel erzeugt.
2. **Ray Intersection** Für jeden Strahl wird das Objekt gefunden, das die Kamera an diesem Pixel sieht. Es ist das Objekt, das diesen Strahl schneidet und dessen Schnittpunkt am nächsten an der Kamera liegt.
3. **Shading** Farbe und Schattierung dieses Objekts an dieser Stelle wird berechnet.