

Fracciones Algebraicas Racionales

Ejercicios y Aplicaciones

1. Introducción

Una **fracción algebraica racional** es la razón de dos polinomios

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0.$$

Para simplificar, comparar o operar con estas fracciones se siguen, en general, los pasos:

1. **Dominio.** Establecer en qué valores la fracción deja de tener sentido (raíces de $Q(x) = 0$).
2. **Factorizar.** Descomponer completamente $P(x)$ y $Q(x)$.
3. **Cancelar factores comunes.** Solo factores idénticos pueden eliminarse, nunca cambiar el dominio excluido.
4. **Operaciones básicas.**
Suma y resta: Llevar a común denominador y sumar numeradores.
Producto: Multiplicar numeradores y denominadores.
División: Multiplicar por la fracción inversa.
5. **Descomposición en fracciones parciales** (opcional). Útil para integración o para algunas aplicaciones financieras donde la linealidad facilita el análisis.

A continuación se presentan tres problemas resueltos ilustrativos y luego 30 ejercicios propuestos de dificultad creciente, incluidos algunos con contexto de finanzas y economía.

2. Problemas resueltos

Problema 1 (Nivel Básico)

Simplifique

$$\frac{x^2 - 9}{x + 3}, \quad x \neq -3.$$

Solución. Se factoriza el numerador: $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

$$\frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3} = x - 3, \quad x \neq -3.$$

Problema 2 (Nivel Medio)

Operar y simplificar

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x+1}.$$

Solución.

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{2x(x+1) - 3(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x^2 + 2x - 3x + 3}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 1}.$$

No hay factores comunes; dominan $x \neq \pm 1$.

Problema 3 (Aplicación Financiera, Nivel Avanzado)

El *margen de beneficio* de una empresa se modela por

$$M(x) = \frac{R(x) - C(x)}{R(x)},$$

donde $R(x) = 4x^2 + 12x$ es el ingreso y $C(x) = 2x^2 + 3x$ el costo (variable en función de la producción x). Simplifique $M(x)$.

Solución.

$$M(x) = \frac{(4x^2 + 12x) - (2x^2 + 3x)}{4x^2 + 12x} = \frac{2x^2 + 9x}{4x^2 + 12x} = \frac{x(2x + 9)}{4x(x + 3)} = \frac{2x + 9}{4(x + 3)}, \quad x \neq 0, -3.$$

3. Ejercicios propuestos

A. Nivel Básico (10 ejercicios)

1. Simplifique $\frac{x^2 - 16}{x - 4}$.
2. Reduzca a una sola fracción $\frac{3}{x} + \frac{2}{x - 2}$.
3. Simplifique $\frac{y^2 - y}{y}$.
4. Calcule $\frac{5}{t + 1} \cdot \frac{t + 1}{2t}$.
5. Evalúe $\frac{z^2 - 25}{z^2 - 5z}$ en $z = 10$.
6. Encuentre el dominio de $\frac{7x}{x^2 - 9}$.
7. Simplifique $\frac{a^2 - 4a + 4}{a - 2}$.
8. Realice $\frac{1}{u - 3} - \frac{1}{u + 3}$.
9. Expresa $\frac{4s}{s^2 - 16}$ en fracciones parciales.
10. Determine si $\frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$ es un polinomio.

B. Nivel Medio (8 ejercicios)

1. Simplifique $\frac{3x^2 - 12}{9x - 36}$.
2. Suma: $\frac{2}{y+2} + \frac{y}{y-2}$.
3. Producto: $\frac{5m-5}{m^2-1} \cdot \frac{m+1}{m-1}$.
4. División: $\left(\frac{4k}{k-4}\right) \div \left(\frac{8k}{k^2-16}\right)$.
5. Expresa $\frac{2t^2+7t+3}{t^2+3t+2}$ como $1 + \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$.
6. Determine el dominio y simplifique $\frac{x^3-x}{x^2-1}$.
7. Evalúe $\frac{r^2-4}{r^2+4r+4}$ para $r = -3$.
8. Simplifique la expresión combinada

$$\frac{x}{x-2} + \frac{2}{x} + \frac{4-x}{2(x-2)}.$$

C. Nivel Avanzado (6 ejercicios)

1. Hallar A, B, C tales que

$$\frac{5x^2+9x-2}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

2. Simplifique

$$\left(\frac{3x^2-12}{x^2-4}\right) \div \left(\frac{6x}{x-2}\right).$$

3. Demuestre que

$$\frac{x^3-8}{x^2-4x+4} = x+2.$$

4. Resuelva para x :

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x+2} = 1.$$

5. Determine el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2+5}{2x^2-x+1}$.

6. Pruebe que la ecuación

$$\frac{p}{p-1} + \frac{p}{p+1} = 3$$

no tiene soluciones reales.

D. Aplicaciones a Finanzas y Economía (6 ejercicios)

1. El *payout ratio* se modela como

$$P(d) = \frac{D_0(1+g)}{E_0(1+r)},$$

con $D_0 = 3,5$, $E_0 = 7,2$. Exprese $P(d)$ como función racional de g y r ; simplifique y determine P para $g = 0,04$, $r = 0,08$.

2. La *elasticidad-precio de la demanda* es

$$E(p) = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} \approx \frac{dQ}{dP} \frac{P}{Q}.$$

Si $Q(P) = \frac{1000}{P+5}$, calcule $E(p)$ y simplifique.

3. La ganancia marginal es

$$G(x) = \frac{I(x) - C(x)}{x},$$

con $I(x) = 15x - 0,5x^2$ e $C(x) = 7x + 2$. Simplifique $G(x)$ y determine el dominio.

4. La relación *deuda / patrimonio* viene dada por

$$D/E = \frac{D_0(1+i)^t}{E_0(1+r)^t},$$

con $i = 0,06$, $r = 0,03$. Simplifique.

5. El valor presente de una perpetuidad creciente usa

$$PV = \frac{C_0}{r-g}.$$

Para $C_0 = 5$ y $g = 0,02$, exprese $PV(r)$ como fracción algebraica y evalúe en $r = 0,06$.

6. Una empresa con *rotación de inventarios* $RI = \frac{C}{I}$ pasa de $C_1 = 40$ a $C_2 = 48$, mientras el inventario aumenta de $I_1 = 5$ a $I_2 = 6$. Exprese la variación relativa de RI como fracción racional en términos de C e I .

Sugerencia de estudio. Resuelva primero los problemas resueltos sin mirar la solución y luego aborde los propuestos por bloques de dificultad, verificando cada paso (factorización, dominio y operaciones).