Tutorial de Ejercicios Resueltos: Trabajo de Bomba en la Ecuación de Bernoulli

Introducción

La ecuación de Bernoulli es un principio fundamental en la mecánica de fluidos que relaciona la presión, la velocidad y la altura en un fluido. Cuando se incorpora una bomba a un sistema hidráulico, esta ecuación debe modificarse para tener en cuenta el trabajo realizado por la bomba. Este tutorial presenta ejercicios resueltos paso a paso para ayudar a los estudiantes a comprender la aplicación de la ecuación de Bernoulli con trabajo de bomba.

Fundamentos Teóricos

Ecuación de Bernoulli Estándar

La ecuación de Bernoulli para un fluido incompresible sin considerar pérdidas por fricción es:

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

Donde:

- p = presión (Pa)
- ρ = densidad del fluido (kg/m^3)
- g = aceleración gravitacional (9.81 m/s^2)
- z = altura sobre un plano de referencia (m)
- v = velocidad del fluido (m/s)
- Los subíndices 1 y 2 representan dos puntos diferentes en el flujo

Ecuación de Bernoulli con Trabajo de Bomba

Cuando se incorpora una bomba al sistema, la ecuación se modifica para incluir el trabajo de la bomba por unidad de masa de fluido y las pérdidas por fricción:

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \alpha_1\frac{v_1^2}{2} + \eta W_p = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \alpha_2\frac{v_2^2}{2} + h_f$$

Donde:

- η = eficiencia de la bomba (adimensional, entre 0 y 1)
- W_p = trabajo de la bomba por unidad de masa de fluido (J/kg)
- h_f = pérdidas por fricción por unidad de masa (J/kg)
- α_1, α_2 = factores de corrección de energía cinética (generalmente cerca de 1 para flujos turbulentos)

Potencia de la Bomba

La potencia utilizada por la bomba está relacionada con el trabajo por unidad de masa mediante:

$$P = \dot{m} \times W_p$$

Donde:

- P = potencia (W)
- $\dot{m}$ = flujo másico (kg/s)

La potencia distribuida al fluido, considerando la eficiencia de la bomba, es:

$$P_{fluido} = \eta \times P$$

Ejercicio Resuelto 1: Sistema de Bombeo Básico

Problema:

En la instalación que se muestra en la figura 4.11 (Ejemplo 4.6), se bombea una disolución de gravedad específica igual a 1.84 desde un tanque de almacenamiento a través de una tubería de acero de 3 in. (75 mm) Norma

40. La eficiencia de la bomba es del 60 %. La velocidad en la línea de succión es de 3 ft/s (0.914 m/s). La bomba descarga a través de una tubería de 2 in. (50 mm) Norma 40, hasta un tanque elevado. El extremo de la tubería de descarga está a 50 ft (15.2 m) por encima del nivel de la disolución en el tanque de alimentación. Las pérdidas por fricción en todo el sistema de tuberías son 10 ft·lb/lb (29.9 J/kg). ¿Qué presión debe desarrollar la bomba? ¿Cuál es la potencia de la bomba que se distribuye al fluido?

Solución:

1. **Identificar los datos:**

   - Disolución: SG = 1.84 → ρ = 1.84 × 1000 = 1840 kg/m³
   - Tubería de succión: 3 in (75 mm) → Área = π(0.075 m)²/4 = 0.00442 m²
   - Tubería de descarga: 2 in (50 mm) → Área = π(0.050 m)²/4 = 0.00196 m²
   - Eficiencia: η = 60 % = 0.60
   - Velocidad en succión: V = 0.914 m/s
   - Altura de descarga: Z - Z = 15.2 m
   - Pérdidas por fricción: h = 29.9 J/kg

2. **Calcular la velocidad en la tubería de descarga:**
   Por continuidad: Q = AV = AV
   V = (A/A)V = (0.00442/0.00196)0.914 = 2.06 m/s

3. **Aplicar la ecuación de Bernoulli con bomba:**

   - Punto 1: superficie del tanque de alimentación (p = patm, V ≈ 0, Z = 0)
   - Punto 2: extremo de la tubería de descarga (p = patm, Z = 15.2 m)

   La ecuación se reduce a:
   $0 + 0 + 0 + \eta W_p = 0 + 9{,}81 \times 15{,}2 + \frac{2{,}06^2}{2} + 29{,}9$
   Despejando ηWp:
   $\eta W_p = 9{,}81 \times 15{,}2 + \frac{2{,}06^2}{2} + 29{,}9 = 149{,}1 + 2{,}1 + 29{,}9 = 181{,}1$ J/kg
   El trabajo real de la bomba es:
   $W_p = \frac{\eta W_p}{\eta} = \frac{181{,}1}{0{,}60} = 301{,}8$ J/kg

4. **Calcular la presión desarrollada por la bomba:**
   $\Delta p = \rho \times W_p = 1840 \times 301{,}8 = 555,312$ Pa $= 555.3$ kPa

5. **Calcular el flujo másico:**
   $\dot{m} = \rho \times Q = \rho \times A_1 \times V_1 = 1840 \times 0{,}00442 \times 0{,}914 = 7{,}43$ kg/s

6. **Calcular la potencia de la bomba:**
   $P = \dot{m} \times W_p = 7{,}43 \times 301{,}8 = 2242{,}4$ W $= 2.24$ kW

   La potencia distribuida al fluido es:
   $P_{fluido} = \eta \times P = 0{,}60 \times 2{,}24 = 1{,}34$ kW

Resultado:
La bomba debe desarrollar una presión de 555.3 kPa. La potencia total de la bomba es 2.24 kW, de los cuales 1.34 kW son distribuidos efectivamente al fluido.

Ejercicio Resuelto 2: Sistema con Diferencias de Presión

Problema:
Se bombea agua a 20°C con una velocidad constante de 9 m^3/h desde un gran depósito situado en el suelo hasta la parte superior abierta de una torre experimental de absorción. El punto de descarga está a 5 m por encima del piso, y las pérdidas por fricción en la tubería de 50 mm desde el depósito hasta la torre son de 2.5 J/kg. ¿A qué altura ha de mantenerse el nivel de agua en el depósito si la potencia que puede desarrollar la bomba es tan sólo de 0.1 kW?
Solución:

1. **Identificar los datos:**

   - Fluido: Agua a 20°C $\rightarrow \rho = 998$ kg/m^3
   - Caudal: Q = 9 m^3/h = 0.0025 m^3/s
   - Diámetro de tubería: 50 mm $\rightarrow$ Área = $\pi(0.050)^2/4$ = 0.00196 m^2
   - Altura de descarga: Z = 5 m
   - Pérdidas por fricción: h = 2.5 J/kg
   - Potencia de la bomba: P = 0.1 kW = 100 W

2. **Calcular la velocidad del fluido:**
   $V = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}0025}{0{,}00196} = 1{,}27$ m/s

   La velocidad es la misma tanto en la succión como en la descarga.

3. **Calcular el flujo másico:**
   $\dot{m} = \rho \times Q = 998 \times 0{,}0025 = 2{,}495$ kg/s

4. **Calcular el trabajo de la bomba por unidad de masa:**
   $W_p = \frac{P}{\dot{m}} = \frac{100}{2{,}495} = 40{,}1$ J/kg

5. **Aplicar la ecuación de Bernoulli:**

   - Punto 1: superficie del depósito (p = patm, V ≈ 0, Z = ?)
   - Punto 2: punto de descarga (p = patm, V = 1.27 m/s, Z = 5 m)

   $\frac{p_1}{\rho} + gZ_1 + \frac{V_1^2}{2} + W_p = \frac{p_2}{\rho} + gZ_2 + \frac{V_2^2}{2} + h_f$

   $0 + 9{,}81Z_1 + 0 + 40{,}1 = 0 + 9{,}81 \times 5 + \frac{1{,}27^2}{2} + 2{,}5$

   $9{,}81Z_1 + 40{,}1 = 49{,}05 + 0{,}81 + 2{,}5 = 52{,}36$

   $9{,}81Z_1 = 52{,}36 - 40{,}1 = 12{,}26$

   $Z_1 = \frac{12{,}26}{9{,}81} = 1{,}25$ m

6. **Verificar el resultado:**
   Con Z = 1.25 m, la bomba debe suministrar la energía necesaria para elevar el agua 5 - 1.25 = 3.75 m, más las pérdidas por fricción y energía cinética.

Resultado:
El nivel de agua en el depósito debe mantenerse a una altura de 1.25 m sobre el suelo para que la bomba con una potencia de 0.1 kW pueda elevar el agua hasta el punto de descarga.

Ejercicio Resuelto 3: Diseño de Sistema de Bombeo

Problema:
Un dispositivo de almacenaje por bombeo extrae agua de un río por la noche, cuando la demanda es baja, y la bombea hasta un recipiente en la cima de una colina que se encuentra a 500 ft (152.4 m) por encima del nivel del río. El agua se distribuye de regreso pasando por turbinas durante el día para cumplir con la demanda pico. Para dos tuberías de 30 in, cada una de

2500 ft de longitud que acarrean 20,000 gal/min, ¿qué potencia de bombeo se necesita, si la eficiencia de las bombas es de 85 %? La pérdida por fricción se estima en 15 ft de agua.

Solución:

1. **Identificar los datos:**
   - Fluido: Agua → ρ = 1000 kg/m³
   - Altura: Z - Z = 500 ft = 152.4 m
   - Caudal total: 20,000 gal/min ≈ 1.26 m³/s
   - Diámetro de las tuberías: 30 in = 0.762 m → Área = π(0.762)²/4 = 0.456 m²
   - Número de tuberías: 2
   - Caudal por tubería: 1.26/2 = 0.63 m³/s
   - Eficiencia: η = 85 % = 0.85
   - Pérdidas por fricción: h = 15 ft de agua ≈ 45.7 J/kg

2. **Calcular la velocidad del fluido en cada tubería:**
   $V = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}63}{0{,}456} = 1{,}38$ m/s

3. **Aplicar la ecuación de Bernoulli con bomba:**
   - Punto 1: nivel del río (p = patm, V ≈ 0, Z = 0)
   - Punto 2: recipiente en la colina (p = patm, V ≈ 0, Z = 152.4 m)

   $\frac{p_1}{\rho} + gZ_1 + \frac{V_1^2}{2} + \eta W_p = \frac{p_2}{\rho} + gZ_2 + \frac{V_2^2}{2} + h_f$

   $0 + 0 + 0 + 0{,}85W_p = 0 + 9{,}81 \times 152{,}4 + 0 + 45{,}7$

   $0{,}85W_p = 9{,}81 \times 152{,}4 + 45{,}7 = 1495{,}0 + 45{,}7 = 1540{,}7$ J/kg

   $W_p = \frac{1540{,}7}{0{,}85} = 1812{,}6$ J/kg

4. **Calcular el flujo másico total:**
   $\dot{m} = \rho \times Q_{total} = 1000 \times 1{,}26 = 1260$ kg/s

5. **Calcular la potencia de bombeo requerida:**
   $P = \dot{m} \times W_p = 1260 \times 1812{,}6 = 2,283,876$ W = 2,284 kW ≈ 3,062 HP

Resultado:

La potencia de bombeo requerida es de aproximadamente 2,284 kW (3,062 HP).

Ejercicio Propuesto 1: Cálculo de Presión y Potencia

En un sistema de bombeo, el agua es elevada desde un depósito grande a nivel del suelo hasta un tanque situado a 25 m de altura. La tubería de succión tiene un diámetro de 100 mm y la de descarga 75 mm. Si el caudal es de 15 L/s, la eficiencia de la bomba es del 70 % y las pérdidas por fricción se estiman en 12 J/kg, calcule:

a) La presión que debe desarrollar la bomba
b) La potencia requerida por la bomba
c) La potencia efectivamente transmitida al fluido

Ejercicio Propuesto 2: Diseño de Sistema

Un sistema hidráulico requiere bombear petróleo (densidad 850 kg/m^3) desde un tanque de almacenamiento hasta un proceso que se encuentra a 30 m de altura. El caudal necesario es de 20 m^3/h. Si la tubería de succión tiene 80 mm de diámetro y la de descarga 60 mm, y las pérdidas por fricción se estiman en 18 J/kg, determine:

a) El trabajo que debe realizar la bomba si su eficiencia es del 75 %
b) La potencia eléctrica necesaria para alimentar la bomba
c) Si la presión en el tanque de almacenamiento es 110 kPa y en el punto de descarga debe ser 150 kPa, ¿cómo se modificaría el cálculo?

Conclusiones

La incorporación del trabajo de bomba en la ecuación de Bernoulli nos permite analizar sistemas hidráulicos complejos donde se necesita añadir energía al fluido. Los conceptos clave a recordar son:

1. El trabajo de la bomba por unidad de masa (Wp) representa la energía añadida al fluido.
2. La eficiencia de la bomba (η) indica qué fracción de la energía suministrada se transfiere efectivamente al fluido.
3. Siempre es importante considerar las pérdidas por fricción (hf) en tuberías y accesorios.
4. La potencia de la bomba se calcula como el producto del flujo másico por el trabajo por unidad de masa.

Para resolver estos problemas eficazmente, es recomendable:

- Identificar claramente los puntos de análisis (succión y descarga)
- Establecer un plano de referencia para las alturas
- Considerar que en depósitos grandes, la velocidad es aproximadamente cero
- Definir las presiones en los puntos de análisis (generalmente atmosféricas en superficies libres)
- Aplicar la ecuación de continuidad para relacionar velocidades y áreas

La simulación interactiva desarrollada para este tutorial permite visualizar estos conceptos y experimentar con diferentes parámetros para comprender mejor su influencia en el sistema.