Malliavin 分析笔记

pj

junxinzhang20@fudan.edu.cn

Contents

Chapter 1 Wiener 空间

§ 1.1 Haar 函数系

作函数空间

$$H(\mathbb{R}) = \left\{ h \in AC[0,1] : h(0) = 0, \|h\|_{H(\mathbb{R})} = \int_0^1 \left| \dot{h}(t) \right|^2 \mathrm{d}t < +\infty \right\}.$$

如下构造 Haar 函数系 $\{h_0, h_{k,n} : n \in \mathbb{Z}_+, k < 2^n, k \text{ is odd}\} \subseteq H(\mathbb{R})$. 对 $t \in [0,1]$, 命 $\dot{h}_0(t) = 1$

$$\dot{h}_{k,n}(t) = \begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}, & (k-1)2^{-n} \le t < k2^{-n}, \\ \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}, & k2^{-n} \le t < (k+1)2^{-n}, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

Haar 函数系有以下重要性质.

命题 1.1.1. (*1*) 序列 $\{\dot{h}_0, \dot{h}_{k,n} : n \in \mathbb{Z}_+, k < 2^n, k \textit{ is odd}\}$ 是 $L^2[0,1]$ 的一个标准正交基, $\{h_0, h_{k,n} : n \in \mathbb{Z}_+, k < 2^n, k \textit{ is odd}\}$ 是 $H(\mathbb{R})$ 的一个标准正交基.

(2) 固定 $n \in \mathbb{Z}_+$, $\{h_{k,n} : k < 2^n, k \textit{ is odd}\}$ 的支集内部两两不交.

(3) 尽管 $\|h_{k,n}\|_{H(\mathbb{R})} = 1$, 但是它的最大模范数 $\|\cdot\|_{L^\infty}$ 关于 n 衰减,

$$\|h_{k,n}\|_{L^\infty} = 2^{-\frac{n+1}{2}}.$$

利用 Haar 函数系, 我们可以构造一个布朗运动, 进而导出经典的 Wiener 测度. 假设 $\{X_0, X_{k,n} : n \in \mathbb{Z}_+, k < n, k \text{ is odd}\}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上一个独立服从于标准 Gauss 分布的随机变量序列. 对 $t \in [0,1]$, 作

$$b_t = X_0 h_0(t) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(\sum_{k < 2^n \text{ odd}} X_{k,n} h_{k,n}(t) \right).$$

容易验证, 上述级数在 $[0,1]$ 上一致收敛, 且满足以下性质, 进而是个布朗运动.

命题 1.1.2. (*1*) 固定 $\omega \in \Omega$, $t \mapsto b_t(\omega)$ 是连续的.

(2) 对 $s < t$, $\omega \mapsto b_t(\omega) - b_s(\omega)$ 是个服从方差为 $t-s$ 的 *Gauss* 分布的随机变量.

(3) 对任何 $[0,1]$ 的划分 $0 = t_0 < t_1 < \cdot < t_k \le 1$, $b_{t_1} - b_{t_0}, \cdots, b_{t_k} - b_{t_{k-1}}$ 是个独立的随机序列.

命 $W(\mathbb{R})=\{w\in C[0,1]:w(0)=0\}$. 由 $(b_t)_{t\in[0,1]}$ 的定义,

$$b:\Omega\to W(\mathbb{R}),\quad \omega\mapsto b(\omega)$$

是可测的. 利用 b 可将 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 上的测度结构推前到 $W(\mathbb{R})$ 上, 即作 $\mu=\mathbb{P}\circ b^{-1}$. 如此, $(W(\mathbb{R}),\mu)$ 便成为一个概率空间, μ 成为 $W(\mathbb{R})$ 上的 Wiener 测度.

§ 1.2 抽象 Wiener 空间

考虑个可分 Hilbert 空间 $(H,|\cdot|_H)$, 命

$$\mathscr{F}_H=\{V\le H:\dim V<+\infty\}$$

为 H 的有限维子空间全体. 对任何 $V\in\mathscr{F}_H$ $(\dim V=d)$, 按以下方式可构造个 V 上的 Gauss 测度. 取个 V 的标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_d\}$, 由映射

$$\varphi_V:(\mathbb{R}^d,\gamma_d)\to V,\quad (x_1,\cdots,x_d)\mapsto x_1e_1+\cdots+x_de_d$$

可将 $\mathbb{R}^d$ 上的标准 Gauss 测度 γ_d $(\gamma_d(\mathrm{d}x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{|x|^2}{2}}\,\mathrm{d}x)$ 推前到 V 上, 即有

$$\gamma_V=\gamma_d\circ\varphi_V^{-1}.$$

由 Gauss 测度的正交不变性, γ_V 的构造与 V 正交基的选取无关.

假设 $V_1\subseteq V_2\in\mathscr{F}_H$, 且 $V_1\subseteq V_2$, 可取个 V_1 的标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_d\}$, 并扩张为 V_2 的标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_d,\cdots,e_n\}$. 作 V_2 到 V_1 的正交投影 $P_{V_1,V_2}:V_2\to V_1$. 对 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
&\gamma_{V_2}\circ P^{-1}_{V_1,V_2}(\varphi_{V_1}(B))\\
=&\gamma_{V_2}(x_1e_1+\cdots+x_de_d+y_{d+1}e_{d+1}+\cdots+y_ne_n:(x_1,\cdots,x_d)\in B,y_j\in\mathbb{R})\\
=&\gamma_n((x_1,\cdots,x_d,y_{d+1},\cdots,y_n):(x_1,\cdots,x_d)\in B,y_j\in\mathbb{R})\\
=&\gamma_d((x_1,\cdots,x_d):(x_1,\cdots,x_d)\in B)=\gamma_{V_1}(\varphi_{V_1}(B)).
\end{aligned}$$

由此, $\gamma_{V_2}\circ P^{-1}_{V_1,V_2}=\gamma_{V_1}$. 一个自然的问题是, 是否存在 H 上的概率测度 μ, 使得对 H 的任何有限维子空间 $V\in\mathscr{F}_H$, 都有

$$\gamma_V=\mu\circ P_V^{-1},$$

其中 $P:H\to V$ 是 H 到 V 的正交投影. 遗憾的是当 $\dim H=+\infty$ 时, 这样的概率测度

μ 不存在. 不然, 如果 μ 满足以上性质, 那么

$$\begin{aligned}&\int_H e^{-|h|_H^2}\mu(\mathrm{d}h)\le\int_H e^{-|P_V h|_H^2}\mu(\mathrm{d}h)\\=&\int_V e^{-|v|_H^2}\gamma_V(\mathrm{d}v)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|x|^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{|x|^2}{2}}\,\mathrm{d}x\to 0,\quad d=\dim V\to+\infty.\end{aligned}$$

这样, $\mu(H)=0$, 这不是个概率测度.

我们的目标是在 H 的某扩张空间 W 上构造 Wiener 测度. 为此, 我们首先构造 W.

定义 1.2.1. *假设 $\|\cdot\|$ 是 $(H,|\cdot|_H)$ 上的一个范数, 满足 $\|\cdot\|\le c|\cdot|_H$. 并且对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $V_0\in\mathscr{F}_H$, 使得任何与 V_0 正交的 $V\in\mathscr{F}_H$ 都满足*

$$\gamma_V\left(x\in V:\|x\|\ge\varepsilon\right)\le\varepsilon.$$

我们称 $\|\cdot\|$ 是 V 上的一个 Radon 范数. 命 W 是 H 在 $\|\cdot\|$ 下的完备化, 则有嵌入映射 $i:H\to W$ 及对偶嵌入映射 $i^*:W^*\to H^*$ 满足

$$l(i(h))=(i^*(l),h)_H,\quad l\in W^*,h\in H.$$

如此, $W^*\subseteq H^*=H\subseteq W$.

接下来我们来构造 W 上的 Wiener 测度 μ.

定理 1.2.2. *在 W 上存在一个唯一的 Borel 概率测度 μ, 使得 $\{l(\cdot):l\in W^*\}$ 是个 Gauss 族, 且*

$$\int_W l_1(w)l_2(w)\mu(\mathrm{d}w)=(l_1,l_2)_H,\quad l_1,l_2\in W^*.$$

证明. 取个 H 的标准正交基 $\{e_n:n\in\mathbb{Z}_+\}$ 及 $(\Omega,\mathbb{P})$ 上一列相互独立的标准 Gauss 随机变量 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. 对 $h\in H$, 命

$$Y_h:=\sum_{n=1}^{+\infty}(h,e_n)_H X_n.$$

由于 $\lim\limits_{p,q\to+\infty}\mathbb{E}\left(\sum\limits_{n=p}^{q}(h,e_n)_H X_n\right)^2=\lim\limits_{p,q\to+\infty}\sum\limits_{n=p}^{q}|(h,e_n)_H|^2=0$, 上式在 $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ 中收敛, 即 Y_h 是列 Gauss 随机变量的 L^2 极限, 亦是 Gauss 的, 且

$$\mathbb{E}(Y_hY_g)=\sum_{n=1}^{+\infty}(h,e_n)(g,e_n)=(h,g)_H.$$

易见 $(Y_h)_{h\in H}$ 是个 Gauss 族 (它的任何有限线性组合都是 Gauss 的). 当 $(h,g)_H=0$, 即 $h\perp_H g$ 时, Y_h 与 Y_g 独立.

对 $V \in \mathscr{F}_H$ ($\dim V = d$), 取个 V 的标准正交基 B_V, 命

$$\pi_V = \sum_{e \in B_V} Y_e e.$$

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{e \in B_V} Y_e e &= \sum_{e \in B_V} e \sum_{n=1}^{+\infty} (e, e_n)_H X_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \sum_{e \in B_V} (e, e_n)_H e = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n P_V(e),\end{aligned}$$

随机变量 π_V 的构造与 V 标准正交基 B_V 的选取无关. 对 $A \in \mathbb{R}^d$, 由 $(Y_e)_{e \in B}$ 是 d 个独立的标准 Gauss 分布 (这是因为 $\mathbb{E}(Y_h Y_g) = (h, g)_H$),

$$\mathbb{P}(\pi_V \in A) = \mathbb{P}\left(\sum_{e \in B_V} Y_e e \in A\right) = \gamma_d\left(\varphi_V^{-1}(A)\right) = \gamma_V(A), \quad A \in \mathscr{B}(V).$$

由 Radon 范数的定义, 存在 $V_n \in \mathscr{F}_H$, 对任何与 V_n 正交的 $V \in \mathscr{F}_H$,

$$\mathbb{P}(\|\pi_V\| \geq 2^{-n}) = \gamma_V(x : \|x\| \geq 2^{-n}) \leq 2^{-n}.$$

通过命 $\widetilde{V}_{n+1} = \widetilde{V}_n + V_{n+1} + \operatorname{span}\{e_{n+1}\}$, 可设 $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 是个单增集列, 且

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} V_n = H.$$

命 $Q_1 = V_1$, Q_{n+1} 为 V_n 在 V_{n+1} 中的正交补, 则

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} Q_n, \quad V_n \perp_H Q_{n+1},$$

且 $B = \cup_n B_{Q_n}$ 是 H 的一个标准正交基. 进而,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\|\pi_{Q_n}\| \geq 2^{-n}\right) < +\infty.$$

据 Borel-Cantelli 引理,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|\pi_{Q_n}\| < +\infty\right) = 1.$$

命 $G=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\pi_{Q_n}:\Omega\to W$ 是个 W-值的随机变量. 命 $\mu=\mathbb{P}\circ G^{-1}$, 它是 G 在 W 上的分布.

对任何 $l\in W^*$,

$$l(G)=\sum_{n=1}^{+\infty}l(\pi_{Q_n})=\sum_{n=1}^{+\infty}l\left(\sum_{e\in B_{Q_n}}Y_e e\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{e\in B_{Q_n}}(i^*l,e)_H Y_e.$$

由于上式在 $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ 中也收敛, $l(G)$ 亦服从 Gauss 分布, 且

$$\mathbb{E}(l\circ G)^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{e\in B_{Q_n}}|(i^*l,e)|_H^2=|i^*l|_H^2.$$

这样,

$$\mu\circ l^{-1}=\mathbb{P}\circ G^{-1}\circ l^{-1}=\mathbb{P}\circ(l(G))^{-1}.$$

也就是说, 任何 $l\in W^*$ 都是 (W,μ) 上的一个 Gauss 随机变量, W^* 是 (W,μ) 上的一个 Gauss 族. 计算

$$\int_W l^2(w)\mu(\mathrm{d}w)=\int_W l^2(w)\mathbb{P}\circ G^{-1}(\mathrm{d}w)=\mathbb{E}(l\circ G)^2=|i^*l|_H^2.$$

进而对 $l_1,l_2\in W^*$,

$$\int_W l_1(w)l_2(w)\mu(\mathrm{d}w)=(i^*l_1,i^*l_2)_H.$$

由于 W 上的 Borel σ-代数由全体 $l\in W^*$ 生成, 因此 W 上的 Borel 概率测度由有限维分布族

$$\{(l_1,\cdots,l_k):l_1,\cdots,l_k\in W^*,k\in\mathbb{Z}_+\}$$

决定. 而 W^* 是个 Gauss 族及 $\int_W l_1(w)l_2(w)\mu(\mathrm{d}w)=(l_1,l_2)_H$ 决定了 W 上的任何一个有限维分布. 这样, 满足条件的 Borel 测度 μ 是唯一的. □

定义 1.2.3. *设 W 是个可分 Banach 空间, H 是个可分 Hilbert 空间, μ 是 W 上的一个 Borel 概率测度. 如果 H 可以连续稠密地嵌入 W, 且有*

$$\int_W e^{\sqrt{-1}l(w)}\mu(\mathrm{d}w)=e^{-\frac{|l|_H^2}{2}},\quad l\in W^*,$$

我们称 (W,H,μ) 是个抽象 Wiener 空间.

需要指出的是, 对任何 $l\in W^*$, $t\in\mathbb{R}$,

$$\int_W e^{\sqrt{-1}tl(w)}\mu(\mathrm{d}w)=e^{-\frac{|tl|_H^2}{2}}=e^{-\frac{|l|_H^2t^2}{2}}.$$

因此, l 是 (W,μ) 上服从 Gauss 分布的随机变量. 特别地, 如果 $\{e_n\}_{e\in\mathbb{Z}_+}\subseteq H\subseteq W^*$ 是 H 的一个标准正交基, 它是 (W,μ) 上一个相互独立的标准 Gauss 随机变量列.

在定理 1.2.2 中,

$$\int_W e^{\sqrt{-1}l(w)\mu(\mathrm{d}w)}=\int_W e^{\sqrt{-1}l(w)}\mathbb{P}\circ G^{-1}(\mathrm{d}w)=\mathbb{E}e^{\sqrt{-1}l\circ G}=e^{-\frac{|l|_H^2}{2}}.$$

这满足抽象 Wiener 空间的定义.

假设 (W,H,μ) 是一个抽象 Wiener 空间, 作 $W\times W$ 上的范数

$$\|(w_1,w_2)\|_{W\times W}=\sqrt{\|w_1\|^2+\|w_2\|^2},$$

及 $H\times H$ 上的内积

$$((h_1,h_2),(g_1,g_2))_{H\times H}=(h_1,g_1)_H+(h_2,g_2)_H.$$

易见 $(W\times W)^*=W^*\times W^*$. 事实上, 对每个 $L\in(W\times W)^*$, 存在 $l_1,l_2\in W^*$, 使

$$L(w_1,w_2)=l_1(w_1)+l_2(w_2),\quad w_1,w_2\in W.$$

类似 $W^*\subseteq H^*=H\subseteq W$, 我们有

$$(W\times W)^*\subseteq(H\times H)^*=H\times H\subseteq W\times W.$$

这样,

$$\begin{aligned}&\int_{W\times W}e^{\sqrt{-1}L(w_1,w_2)}\mu(\mathrm{d}w_1)\mu(\mathrm{d}w_2)=\int_W e^{l_1(w_1)}\mu(\mathrm{d}w_1)\int_W e^{l_2(w_2)}\mu(\mathrm{d}w_2)\\&=\exp\left(-\frac{|l_1|_H^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{|l_2|_H^2}{2}\right)=\exp\left(-\frac{|l_1|_H^2+|l_2|_H^2}{2}\right)=\exp\left(-\frac{|L|_{H\times H}^2}{2}\right).\end{aligned}$$

因此, $(W\times W,H\times H,\mu\otimes\mu)$ 仍是一个抽象 Wiener 空间. 由此, 我们导出抽象 Wiener 测度的旋转不变性.

定理 1.2.4. 假设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in O(2)$, 作

$$\widetilde{A}:W\times W\to W\times W,\quad(w_1,w_2)\mapsto(a_{11}w_1+a_{12}w_2,a_{21}w_1+a_{22}w_2).$$

对 $W\times W$ 上的任何有界 *Borel* 函数 F

$$\int_W F\left(\widetilde{A}(w_1,w_2)\right)\mu(\mathrm{d}w_1)\mu(\mathrm{d}w_2)=\int_{W\times W}F(w_1,w_2)\mu(\mathrm{d}w_1)\mu(\mathrm{d}w_2).$$

证明. 命 $(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2)=(a_{11}w_1+a_{12}w_2,a_{21}w_1+a_{22}w_2)$. 则对 $L=(l_1,l_2)\in W\times W$,

$$L(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2)=(a_{11}l_1+a_{21}l_2)(w_1)+(a_{12}l_1+a_{22}l_2)(w_2).$$

进而

$$\begin{aligned}&\int_{W\times W}e^{\sqrt{-1}L(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2)}\mu(\mathrm{d}w_1)\mu(\mathrm{d}w_2)\\&=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(|a_{11}l_1+a_{21}l_2|_H^2+|a_{12}l_1+a_{22}l_2|_H^2\right)\right)=\exp\left(-\frac{|L|_H^2}{2}\right).\end{aligned}$$

因此 $(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2)$ 在 $W\times W$ 上的分布也是 $\mu\otimes\mu$. □

下面的定理蕴含着抽象 Wiener 测度的集中性.

定理 1.2.5. *假设 (W,H,μ) 是个抽象 Wiener 空间, 那么存在 $\delta>0$ 使得*

$$\int_W e^{\delta\|w\|^2}\mu(\mathrm{d}w)<+\infty.$$

证明. 由抽象 Wiener 测度的旋转不变性, 对 $0<s<t$,

$$\begin{aligned}\mu\otimes\mu(\|w_1\|\le s,\|w_2\|\ge t)&=\mu\otimes\mu(\|w_1-w_2\|\le\sqrt{2}s,\|w_1+w_2\|\ge\sqrt{2}t)\\&\le\mu\otimes\mu\left(\|w_1\|\wedge\|w_2\|\ge\frac{t-s}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

上式最后一个小于等于号是由于当 $\|w_1-w_2\|\le\sqrt{2}s$, $\|w_1+w_2\|\ge\sqrt{2}t$ 时,

$$\sqrt{2}(t-s)\le\|w_1+w_2\|-\|w_1-w_2\|\le 2(\|w_1\|\wedge\|w_2\|).$$

进一步

$$\mu(\|w\|\le s)\mu(\|w\|\ge t)\le\left(\mu\left(\|w\|\ge\frac{t-s}{\sqrt{2}}\right)\right)^2.$$

命 $t_0=s$, $t_{n+1}=s+\sqrt{2}t_n$. 在上式中取 $t=t_{n+1}$, 即有

$$\frac{\mu(\|w\|\ge t_{n+1})}{\mu(\|w\|\le s)}\le\left(\frac{\mu(\|w\|\ge t_n)}{\mu(\|w\|\le s)}\right)^2.$$

归纳地,

$$\frac{\mu(\|w\| \geq t_n)}{\mu(\|w\| \leq s)} \leq \left(\frac{\mu(\|w\| \geq s)}{\mu(\|w\| \leq s)}\right)^{2^n}.$$

取充分大的 s, 使得 $\rho := \frac{\mu(\|w\|\geq s)}{\mu(\|w\|\leq s)} < 1$. 这样,

$$\mu(\|w\| \geq t_n) \leq \rho^{2^n}.$$

容易求得

$$t_n = \frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{\sqrt{2}-1} \leq C\left(\sqrt{2}\right)^n.$$

取 $t_{-1} = 0$, 计算

$$\int_W e^{\delta\|w\|^2}\mu(\mathrm{d}w) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{t_{n-1}\leq\|w\|t_n} e^{\delta\|w\|^2}\mu(\mathrm{d}w)$$
$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty}\mu(\|w\| \geq t_{n-1})e^{\delta t_n^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\rho^{2^n-1}e^{\delta C^2 2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{2^n(C^2\delta+\frac{1}{2}\ln\rho)}.$$

取充分小的 δ, 使得 $C^2\delta + \frac{1}{2}\ln\rho < 0$, 即有

$$\int_W e^{\delta\|w\|^2}\mu(\mathrm{d}w) < +\infty.$$

□

§ 1.3 经典 Wiener 空间

本节中, 我们验证经典的 Wiener 测度符合抽象 Wiener 测度的框架. 命

$$H(\mathbb{R}) = \left\{h \in AC[0,1] : h(0) = 0, \|h\|_{H(\mathbb{R})} = \int_0^1 \left|\dot{h}(t)\right|^2 \mathrm{d}t < +\infty\right\},$$
$$W(\mathbb{R}) = \{w \in C[0,1] : w(0) = 0\}, \quad \|w\|_{W(\mathbb{R})} = \|w\|_{L^\infty}.$$

易见, $H(\mathbb{R})$ 可以连续稠密地嵌入 $W(\mathbb{R})$. 取 μ 为 $W(\mathbb{R})$ 上的 Wiener 测度. 考虑

$$M[0,1] = (C[0,1])^* \subseteq (W(\mathbb{R}))^* \hookrightarrow (H(\mathbb{R}))^* = H(\mathbb{R}) \hookrightarrow W(\mathbb{R}),$$

其中 $M[0,1]$ 是有限正则的 Borel 符号测度全体. 对任何 $\varphi \in (W(\mathbb{R}))^*$, $f \in C[0,1]$, 易见 $\varphi \circ (\mathrm{id} - \delta_0)(f) \in (C[0,1])^*$. 因此, 存在 $\nu \in M[0,1]$, 使得

$$\varphi \circ (\mathrm{id} - \delta_0)(f) = \int_0^1 (f(x) - f(0))\nu(\mathrm{d}x), \quad f \in C[0,1].$$

特别地,

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\nu(\mathrm{d}x), \quad f \in W(\mathbb{R}).$$

由此,

$$(W(\mathbb{R}))^* = M[0,1]/\sim,$$

其中对 $\nu_1, \nu_2 \in M[0,1]$, $\nu_1 \sim \nu_2$ 指对任何 $A \in (0,1]$, $\nu_1(A) = \nu_2(A)$. 为方便, 我们后续不区分 $(W(\mathbb{R}))^*$ 与 $M[0,1]$.

对 $\nu \in M[0,1]$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(i^*\nu)(x)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = (i^*\nu, h)_{H(\mathbb{R})} = \int_0^1 h(x)\nu(\mathrm{d}x),$$

可解得

$$(i^*\nu)(x) = \int_0^x \nu([y,1])\,\mathrm{d}y.$$

因此,

$$|i^*\nu|^2_{H(\mathbb{R})} = \int_0^1 \nu([y,1])^2\,\mathrm{d}y.$$

为验证 $\int_{W(\mathbb{R})} e^{\sqrt{-1}\nu(w)}\mu(\mathrm{d}w) = \exp\left(-\frac{1}{2}|i^*\nu|^2_H\right)$, 我们计算

$$\int_{W(\mathbb{R})} e^{\sqrt{-1}\int_0^1 w(x)\nu(\mathrm{d}x)}\,\mathrm{d}w = \mathbb{E}\left[\exp\left(\sqrt{-1}\int_0^1 B_t\nu(\mathrm{d}t)\right)\right].$$

咿呀, 做到这里就做不下去了. 如果能证明

$$\int_0^1 B_t\nu(\mathrm{d}t) \sim N\left(0, \int_0^1 \nu([y,1])^2\,\mathrm{d}y\right)$$

就好啦! 这在直观上是正确的.

事实上, 经典 Wiener 空间满足定理 1.2.2 的条件, 即 $\|\cdot\|_{L^\infty}$ 是 $H(\mathbb{R})$ 上的一个 Radon 范数. 一方面, 对 $h \in H(\mathbb{R})$, $t \in [0,1]$,

$$|h(t)| = \left|\int_0^t \dot{h}(s)\,\mathrm{d}s\right| \le \| \int_0^1 \left|\dot{h}(s)\right|\mathrm{d}s \le \left\|\dot{h}\right\|_{L^2} = \|h\|_{H(\mathbb{R})}.$$

因此, $\|h\|_{L^\infty} \le \|h\|_{H(\mathbb{R})}$. 另一方面, $\{h_0, h_{k,n} : n \in \mathbb{Z}_+, k < 2^n, k \text{ is odd}\}$ 是 $H(\mathbb{R})$ 的一个标准正交基. 对任何 $N \in \mathbb{Z}_+$, 命

$$V_N = \mathrm{span}\{h_0, h_{k,n} : 1 \le n \le K, k < 2^n, k \text{ is odd}\}.$$

对任何 $V \in \mathscr{F}_H$, 如果 $V \perp_H V_N$, $w \in V$ 可表示为

$$w = \sum_{n \geq N} \left(\sum_{k < 2^n \text{ odd}} (h_{k,n}, w)_H h_{k,n} \right).$$

命 $\Gamma_n(w) = \sum\limits_{k<2^n \text{ odd}} (h_{k,n}, w)_H h_{k,n}$, 这样, $w = \sum\limits_{n>n_0} \Gamma_n(w)$. 注意到

$$\bigcap_{n>n_0} \left\{ w \in V : \|\Gamma_n(w)\|_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon}{n^2} \right\} \subseteq \left\{ w \in V : \|w\|_{L^\infty} \leq \frac{\pi^2}{6}\varepsilon \right\},$$

及

$$\|\Gamma_n\|_{L^\infty} \leq \left(\sup_{k<2^n \text{ odd}} |(h_{k,n}, w)|_H \right) 2^{-\frac{n+1}{2}},$$

并利用 Gauss 测度的旋转不变性,

$$\begin{aligned}
\gamma_V \left(w \in V : \|\Gamma_n\|_{L^\infty} \geq \frac{6\varepsilon}{\pi^2 n^2} \right) &\leq \sum_{k<2^n \text{ odd}} \gamma_V \left(|(h_{k,n}, w)_H| \geq \frac{\varepsilon}{n^2} \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \right) \\
&= \sum_{k<2^n \text{ odd}} \gamma_V \left(\left| \sum_{e \in B_V} (h_{k,n}, e) e \right| \geq \frac{\varepsilon}{n^2} \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \right) \\
&= \sum_{k<2^n \text{ odd}} \gamma_d \left(x \in \mathbb{R}^d : \left| \sum_{e \in B_V} x_j (h_{k,n}, e) \right| \geq \frac{\varepsilon}{n^2} \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \right) \\
&= \sum_{k<2^n \text{ odd}} \gamma_d \left(x \in \mathbb{R}^d : x_1 \geq \frac{\varepsilon \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}{n^2 \|h_{k,n}\|_H^2} \right) \\
&= 2^{n-1} \int_{\frac{\varepsilon}{n^2}\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}t \leq e^{-\beta\left(\sqrt{2}\right)^n}.
\end{aligned}$$

因此, 对充分大的 N,

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \gamma_V \left(\|\Gamma_n\|_{L^\infty} \geq \frac{6\varepsilon}{\pi^2 n^2} \right) < \varepsilon.$$

进而 $\gamma_V(w \in V : \|w\|_{L^\infty} > \varepsilon) < \varepsilon$, $\|\cdot\|_{L^\infty}$ 是个 Radon 范数.