Chapter 6 Malliavin 分析在金融中的应用

本章中, 第 1 节主要参考材料是 Shreve 的 *Stochastic calculus for finance II* (2008) 及 Fries 的 *Mathematical finance, theory, modeling and implemention* (2006). 第 2 节的主要参考材料是方诗赞的 *Introduction to Malliavin Calculus* (2004). 第 3 节相关内容参考的材料主要有 Eric Fournié 等人的 *Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance* (1999), *Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance II* (2001) 及 David Nualart 的 *The Malliavin Calculus and Related Topics* (第二版, 2005). 我们下面罗列的结果都可以推广到高维, 但为了方便, 我们只讨论一维的情形. 高维的情形请参考上述文献.

计划在 Malliavin 分析及其应用课报告第 1, 3 节, 在本门讨论班报告第 2, 3 节.

§ 6.1 金融数学基础

我们首先建立一个市场模型. 假设有个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 及其上的布朗运动 $(W_t)_{0\le t\le T}$ 及相应的布朗流 $(\mathscr{F}_t)_{0\le t\le T}$. 假设在市场中有个标的资产 (例如股票, 指数, 为了方便, 我们假设标的资产是股票) 价格过程 $(S_t)_{0\le t\le T}$ 适合随机微分方程 (SDE)

$$\mathrm{d}S_t = b(S_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(S_t)\,\mathrm{d}W_t.$$

在著名的 Black-Scholes 模型中,

$$\mathrm{d}S_t = S_t(\mu(t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}W_t),$$

其中 $\mu(t)$ 是股票的瞬时平均收益率, $\sigma(t)$ 是瞬时波动率. 我们的 Black-Scholes SDE 有显式解

$$S_t = S_0\exp\left(\int_0^t\left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s)\,\mathrm{d}W_s\right).$$

这使得价格过程可以精确模拟. 市场的另一个重要参数是瞬时无风险利率 $r(t)$. 命 $D_t = \exp\left(-\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s\right)$, 则折现股价 $(D_tS_t)_{0\le t\le T}$ 适合 SDE

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(D_tS_t) &= D_tS_t((\mu(t) - r(t))\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}W_t)\\ &= D_tS_t\sigma(t)\left(\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t\right).\end{aligned}$$

命 $\theta(t) = \frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)}$, 作

$$Z_T = \exp\left(-\int_0^T \theta(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^T \theta(t)^2\,\mathrm{d}t\right),$$

章俊鑫 junxinzhang20@fudan.edu.cn

及 $\widetilde{\mathbb{P}}(A)=\mathbb{E}(Z_T;A)$ $(A\in\mathscr{F})$. 当 Novikov 条件 $\mathbb{E}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\theta(t)^2\,\mathrm{d}t\right)<+\infty$ 成立时, 由 Girsanov 定理,

$$\widetilde{W}=\left(\widetilde{W}_t=W_t+\int_0^t\theta(s)\,\mathrm{d}s\right)_{0\le t\le T}$$

是个 $\widetilde{\mathbb{P}}$-布朗运动. 于是,

$$\mathrm{d}(D_tS_t)=D_tS_t\sigma(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t,\quad \mathrm{d}S_t=S_t(r(t)\,\mathrm{d}t+\sigma(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t).$$

这时折现股价过程 $(D_tS_t)_{0\le t\le T}$ 是个 $\widetilde{\mathbb{P}}-$ 鞅, 且在测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下, 股价的平均收益率与市场的无风险利率 $r(t)$ 相同. 我们将 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 称为一个风险中性测度.

假设 $X=(X_t)_{0\le t\le T}$ 是一个自融资投资策略 $(\Delta(t))_{0\le t\le T}$ $(\Delta(t)\in\mathscr{F}_t)$ 的价格过程. 所谓自融资策略就是说投资者在 t 时刻持有 $\Delta(t)$ 份额的股票, 将余下的资产数额 $(X_t-\Delta(t)S_t)$ 投入无风险市场 (利率为 $r(t)$). 这样, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t&=\Delta(t)\,\mathrm{d}S_t+r(t)(X_t-\Delta(t)S_t)\,\mathrm{d}t\\&=\Delta(t)S_t\left(r(t)\,\mathrm{d}t+\sigma(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t\right)+r(t)(X_t-\Delta(t)S_t)\,\mathrm{d}t\\&=r(t)X_t\,\mathrm{d}t+\Delta(t)\sigma(t)S_t\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t,\\ \mathrm{d}(D_tX_t)&=\Delta(t)D_tS_t\sigma(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.\end{aligned}$$

从而自融资投资策的折现价值过程 $(D_tX_t)_{0\le t\le T}$ 是风险中性测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下的鞅. 假设有个标的资产为股票的金融产品在 T 时间支付为 $\phi(S)$ (例如: 欧式看涨期权 $\phi(S)=(S_T-K)^+$, 连续监测的亚式看跌期权 $\left(K-\frac{1}{T}\int_0^TS_t\,\mathrm{d}t\right)^+$). 作 $\widetilde{\mathbb{P}}$-右闭鞅

$$D_tM_t=\widetilde{\mathbb{E}}\left(D_T\phi(S)|\mathscr{F}_t\right).$$

由鞅表示定理, 存在适应过程 $\Gamma=(\Gamma(t))_{0\le t\le T}$, 使

$$\mathrm{d}(D_tM_t)=\Gamma(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

命 $\Delta(t)=\frac{\Gamma_t}{D_tS_t\sigma(t)}$, 于是 $(D_tM_t)_{0\le t\le T}$ 相当于是自融资策略 $(\Delta(t))_{0\le t\le T}$ 的折现价格过程. 如果市场是无套利的, 那么 T 时刻支付为 $\phi(S)$ 的金融产品在 0 时刻的定价就应当为 M_0. 我们假设有投资者猫猫和投资者狗狗, 猫猫在初始时刻以一定价格购得上述金融产品, 狗狗建立自融资投资策略 $(\Delta(t))_{0\le t\le T}$. 那么猫猫和狗狗在 T 时刻的收益相同, 如果市场无套利, 在初始时刻的付出也一定相同. 这样, 上述金融产品的定价应当为

$$M_0=\widetilde{\mathbb{E}}(D_T\phi(S)|\mathscr{F}_0)=\widetilde{\mathbb{E}}(D_T\phi(S)).$$

这实际上体现了所谓“对冲”的思想, 假设券商初始时刻卖出一个在 T 时刻支付为 $\phi(S)$ 的金融产品, 再够买相应的自融资投资组合 $(\Delta(t))_{0\le t\le T}$. 券商在 T 时刻的综合收益为 0, 就不会亏钱了. 这时候有小问号可能会问了, 券商这样对冲虽然不亏也赚不到钱啊, 这不是吃饱了撑着吗? 实际上, 他只要在卖产品的时候在计算价格的基础上抬高一些就可以赚钱了. 这种随时间调整自融资投资组合 $(\Delta(t))_{0\le t\le T}$ 的对冲策略称为动态对冲. 这种做法实际应用中有很大的限制. 因为仓位的调整不可能随着时间连续变动的. 为了达到逼近连续时间的目的, 希望仓位调整的时间间隔尽可能小, 这会带来高昂的手续费.

假设某个金融产品的支付仅与到期时间 T 时刻的股价有关, 即 $\phi(S)=\phi(S_T)$. 根据随机微分方程解的 Markov 性,

$$\begin{aligned}M_t &= \exp\left(-\int_t^T r(s)\,\mathrm{d}s\right)\widetilde{\mathbb{E}}(\phi(S_T)|\mathscr{F}_t)\\ &= \exp\left(-\int_t^T r(s)\,\mathrm{d}s\right)\widetilde{\mathbb{E}}(\phi(S_T)|S_t) = c(t,S_t).\end{aligned}$$

假设 $c(t,x)$ 充分光滑, 计算

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(D_tM_t)=\mathrm{d}(D_tc(t,S_t))\\ =&D_t\left(-r(t)c(t,S_t)+\frac{\partial c}{\partial t}(t,S_t)\right)\mathrm{d}t+D_t\frac{\partial c}{\partial x}(t,S_t)\,\mathrm{d}S_t+\frac{1}{2}D_t\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,S_t)\,\mathrm{d}\langle S\rangle_t\\ =&D_t\left(-r(t)c(t,S_t)+\frac{\partial c}{\partial t}(t,S_t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,S_t)\sigma(t)^2S_t^2\right)\mathrm{d}t+D_t\frac{\partial c}{\partial x}(t,S_t)\sigma(t)S_t\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.\end{aligned}$$

于是, $\Delta(t)=\frac{\partial c}{\partial x}(t,S_t)$. 我们将期权价值 $c(t,x)$ 关于资产价格 x 的导数 $\frac{\partial c}{\partial x}$ 称为该期权的 Delta 值, 上面建立的动态对冲方式称为 Delta 对冲. 类似的希腊字母有

$$\mathrm{Gamma}=\frac{\partial^2 c}{\partial x^2},\quad \mathrm{Theta}=\frac{\partial c}{\partial t},\quad \mathrm{Rho}=\frac{\partial c}{\partial r},\quad \mathrm{Vega}=\frac{\partial c}{\partial \sigma},$$

它们在金融实践相当重要. 某种意义上, 计算希腊字母远比给期权定价更要紧.

在无风险利率 r 和波动率 σ 为常数的经典 B-S 模型下, 考虑支付为 $\phi(S)=(S_T-K)^+$

的欧式看涨期权. 计算

$$
\begin{aligned}
c(0,x) &= e^{-rT}\widetilde{\mathbb{E}}^x\left((S_T-K)^+\right)\\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left(x\exp\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma W_T\right)-K\right)^+\\
&= e^{-rT}\int_{\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{K}{x}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T\right)}^{+\infty}(xe^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma\sqrt{T}z}-K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z\\
&= x\Phi\left(\frac{\ln\frac{x}{K}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)+Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{x}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}
$$

写 $\tau=T-t$, $d_\pm(\tau,x)=\frac{\ln\frac{x}{K}+\left(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, 于是

$$
c(t,x)=x\Phi\left(d_+(\tau,x)\right)+Ke^{-r\tau}\Phi\left(d_-(\tau,x)\right).
$$

这就是著名的 B-S 期权定价公式. 我们有希腊字母

$$
\begin{aligned}
\text{Delta} &= \frac{\partial c}{\partial x}(t,x)=\Phi(d_+(\tau,x)>0),\\
\text{Gamma} &= \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,x)=\frac{1}{\sigma x\sqrt{\tau}}\Phi'(d_+(\tau,x))>0,\\
\text{Theta} &= \frac{\partial c}{\partial t}(t,x)=-rKe^{-r\tau}\Phi(d_-(\tau,x))-\frac{\sigma x}{2\sqrt{\tau}}\Phi'(d_+(\tau,x)).
\end{aligned}
$$

可以看到, $c(t,x)$ 是一个关于 x 单调增加的凸函数.

对较一般的模型和更复杂的支付函数 ϕ, 计算希腊字母不是一件容易的事情. 假设 θ 是某个模型参数, $\frac{\partial c}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}\phi(S;\theta)$. 最直接的想法是差分, 也就是利用

$$
\frac{c(\theta+h)-c(\theta-h)}{2h}\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(\frac{\phi(S(\omega_i);\theta+h)-\phi(S(\omega_i);\theta-h)}{2h}\right).
$$

近似 $\frac{\partial c}{\partial\theta}$ (这里用了中心差分, 也可以用前向和后向差分). 考虑个支付为 $\phi(S)=\mathbb{1}_{[K,+\infty)}(S_T)$ 的二元期权. 为了方便, 假定 $Y_\theta=S_T(\theta)$ 关于 θ 线性, 也就是说 $Y_{\theta+h}=Y_\theta+\alpha h$. 于是

$$
\begin{aligned}
\frac{\phi(Y_{\theta+h})-\phi(Y_{\theta-h})}{2h} &= \frac{1}{2h}\left(\mathbb{1}_{(Y_{\theta-h}<K<Y_{\theta+h})}-\mathbb{1}_{(Y_{\theta+h}<K<Y_{\theta-h})}\right)\\
&= \frac{1}{2h}\operatorname{sgn}\alpha\,\mathbb{1}_{(K-\alpha h,K+\alpha h)}(Y_\theta).
\end{aligned}
$$

写 $p=\mathbb{P}(Y_\theta\in(K-\alpha h,K+\alpha h))$, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{\phi(Y_{\theta+h})-\phi(Y_{\theta-h})}{2h}\right)&=\frac{p}{2h}\operatorname{sgn}\alpha,\\ \operatorname{Var}\left(\frac{\phi(Y_{\theta+h})-\phi(Y_{\theta-h}}{2h})\right)&=\frac{p(1-p)}{4h^2}=O\left(\frac{1}{h}\right).\end{aligned}$$

为了让差分充分接近导数, 我们要求 h 充分小, 这就导致 $\operatorname{Var}\left(\frac{Y_{\theta+h}-Y_{\theta-h}}{2h}\right)$ 相当大, 需要模拟大量的 Monte Carlo 轨道.

另一种计算希腊字母的方法称为逐轨道法, 假设求导与期望可以交换且 ϕ 具有充分好的正则性. 那么

$$\begin{aligned}&\frac{\partial c}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}\phi(Y_\theta)=\mathbb{E}\frac{\partial}{\partial\theta}\phi(Y_\theta)\\ =&\mathbb{E}\left(\phi'(Y_\theta)\frac{\partial Y_\theta}{\partial\theta}\right)\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(\phi'(Y_\theta(\omega_i))\frac{\partial Y_\theta}{\partial\theta}(\omega_i)\right).\end{aligned}$$

注意逐路径法对 ϕ 的正则性要求较高, 且需要 $\frac{\partial Y_\theta}{\partial\theta}$ 能够直接模拟.

我们重点要介绍的是利用 Malliavin 分析计算希腊字母的方法, 后续将论证对很大一类支付函数 $\phi(X;\theta)$, 希腊字母

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}(\phi(X;\theta))=\mathbb{E}(\phi(X;\theta)\cdot\text{Malliavin Weight}).$$

我们首先简要介绍证明的大致思想. 首先, 对正则性较好的支付函数 ϕ, 通过 Malliavin 分部积分公式, 可以得到希腊字母形如 $\mathbb{E}(\phi(X;\theta)\cdot\text{Malliavin Weight})$, 其中 Malliavin 权重一项形式上与 ϕ 的正则性无关. 这样一来, 结果形式上成立并不需要 ϕ 的正则性, 我们自然地猜想通过逼近可以论证对一般的 ϕ 同样成立.

这种从结果看条件的想法在数学里头到处都是, 一个简单的例子是 Taylor 公式. 我们有带 Peano 余项的 Taylor 公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0),\quad x\to x_0,$$

及带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,\quad x\to x_0.$$

从结果上看, 带 Peano 余项的 Taylor 公式仅需要 $f'(x_0)$ 存在, 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式需要在 x_0 的一个邻域内两阶可导.

§ 6.2 Malliavin 分析基础

假设 $(W, \mathscr{F}, \mu)$ 是 Wiener 轨道空间 ($W = \{w \in C[0,T] : w(0) = 0\}$), 装备最大模范数, 取它的子集

$$H = \left\{ h \in AC[0,T] : h(0) = 0, \|h\|_H^2 = \left\|\dot{h}\right\|_{L^2[0,T]}^2 < +\infty \right\}.$$

易见 H 可以连续稠密地嵌入 W 中.

为了建立 Wiener 空间上的分部积分公式, 我们引入 Wiener 空间的拟不变性. 先来看 $\mathbb{R}^m$ 上的 Gauss 测度 γ_m. 对任何 $a \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} F(x+a)\gamma_m(\mathrm{d}x) &= \int_{\mathbb{R}^m} F(x+a)\frac{e^{-\frac{|x|^2}{2}}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^m}\,\mathrm{d}x \\
= \int_{\mathbb{R}^m} F(x)\frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2}}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^m}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^m} F(x)\exp\left((x,a)_{\mathbb{R}^m} - \frac{1}{2}|a|^2\right)\gamma_m(\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

因此,

$$(\tau_a)_*\gamma_m = \exp\left((x,a)_{\mathbb{R}^m} - \frac{1}{2}|a|^2\right)\gamma_m \ll \gamma_m.$$

对 Wiener 空间 (W, μ), 任取 $h \in H$, 由 Girsanov 定理, $(w_t - h(t))_{t\in[0,T]}$ 是测度

$$\mu_h(\mathrm{d}w) = \exp\left(\int_0^T \dot{h}(s)\,\mathrm{d}w(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \left|\dot{h}(s)\right|^2\mathrm{d}s\right)\mu(\mathrm{d}w)$$

下的布朗运动. 这样, 对 W 上非负可测函数 F, 有

$$\begin{aligned}
\int_W F(w)\mu_h(\mathrm{d}w) &= \int_W F(w-h+h)\mu_h(\mathrm{d}w) \\
&= \int_W F(w+h)\mu(\mathrm{d}w).
\end{aligned}$$

形式地记 $D_hF(w)$ 为 $F(w)$ 在 h 方向上的方向导数. 再作形式计算

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}D_hF(w) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}(F(\tau_{\varepsilon h}w)-F(w))\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_W F(w)\mu_h(\mathrm{d}w)-\int_W F(w)\mu(\mathrm{d}w)\right)\\
&=\int_W F(w)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\exp\left(\varepsilon\int_0^T \dot h(s)\,\mathrm{d}w(s)-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T\left|\dot h(s)\right|^2\mathrm{d}s\right)\mu(\mathrm{d}w)\\
&=\int_W F(w)\int_0^T \dot h(s)\,\mathrm{d}w(s)\mu(\mathrm{d}w)=\mathbb{E}\left(F(w)\int_0^T\dot h(s)\,\mathrm{d}w(s)\right).
\end{aligned}
$$

进一步, 取 F 为 FG,

$$
\mathbb{E}\left(FG\int_0^T \dot h(s)\,\mathrm{d}w(s)\right)=\mathbb{E}D_h(FG)=\mathbb{E}\left((D_hF)G+FD_hG\right).
$$

写 $D_h^*G(w)=-D_hG(w)+G(w)\int_0^T\dot h(s)\,\mathrm{d}w(s)$. 则有分部积分公式

$$
\mathbb{E}((D_hF)G)=\mathbb{E}(FD_h^*G).
$$

下面我们将上面的说法相对严格化.

定义 6.2.1. 假设 $F\in L^p(W,\mu)$ $(p>1)$. 对 $h\in H$, 如果在 $L^{p-}:=\bigcap\limits_{p'<p}L^{p'}(W,\mu)$ 中存在极限

$$
D_hF=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tau_{\varepsilon h}F-F}{\varepsilon},
$$

我们称 D_hF 是 F 沿着 h 方向的导数. 如果存在 $\nabla F\in L^p(W;H)$ 使得 μ-几乎处处地成立

$$
(\nabla F(w),h)_H=D_hF(w),\quad \forall\, h\in H,
$$

称 $\nabla F\in L^p(W;H)$ 为 F 的 *Malliavin* 梯度. 记 $D_tF(w)=(\nabla F(w))'(t)$, 于是

$$
D_hF(w)=\int_0^T D_tF(w)\dot h(t)\,\mathrm{d}t.
$$

定义 6.2.2. 在 $D_1^p(W)$ 上作范数

$$
\|F\|_{1,p}^p=\int_W |F|^p\,\mathrm{d}\mu+\int_W\|\nabla F\|_H^p\,\mathrm{d}\mu.
$$

将 $D_1^p(W)$ 称为 W 上的 *Sobolev* 空间.

定义 6.2.3. 假设存在 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 及 $h_1, \cdots, h_n \in H$ 使得

$$F = f(Y_{h_1}, \cdots, Y_{h_n}),$$

其中 $Y_h(w) = \int_0^T \dot{h}(s)\,\mathrm{d}w(s)$. 我们称 F 是 W 上的柱函数, 记作 $F \in \mathrm{Cylin}(W)$.

我们不加证明地引入以下结论.

命题 6.2.4. 空间 $\mathrm{Cylin}(W)$ 在 $L^p(W)$ 中是稠密的.

命题 6.2.5. 空间 $(D_1^p(W), \|\cdot\|_{1,p})$ 是完备的.

定理 6.2.6. 空间 $\mathrm{Cylin}(W)$ 在 $D_1^p(W)$ 是稠密的.

注意 $\mathrm{Cylin}(W)$ 在 $D_1^p(W)$ 中稠密意味着 $D_1^p(W)$ 中元素蛮多的. 在以上理论框架下, 我们可以证明之前形式上导出的分部积分公式成立.

定理 6.2.7 (分部积分公式)**.** 假设 $F \in D_1^p(W)$ $(p > 1)$, $G \in D_1^\infty(W) = \bigcap\limits_{p>1} D_1^p(W)$. 那么

$$\int_W D_h F \cdot G \,\mathrm{d}\mu = \int_W F \cdot D_h^* G \,\mathrm{d}\mu,$$

其中 $D_h^* G = -D_h G + Y_h G$.

我们举一个计算 Malliavin 导数的例子.

例子 6.2.8. 假设 $F = f(Y_{h_1}, \cdots, Y_{h_n}) \in \mathrm{Cylin}(W)$, 则

$$D_t F(w) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(Y_{h_1}, \cdots, Y_{h_n}) \dot{h}_j(t),$$
$$(\nabla F(w))(t) = \int_0^t D_s F(w)\,\mathrm{d}s = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(Y_{h_1}, \cdots, Y_{h_n}) h_j(t).$$

证明. 我们只在形式上证明结论, 严格的推导请读者自己尝试. 计算

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(w+\varepsilon h) - F(w)}{\varepsilon} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\left(Y_{h_1}, \cdots, Y_{h_n}\right) \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{Y_{h_j}(w+\varepsilon h) - Y_{h_j}(w)}{\varepsilon} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\left(Y_{h_1}, \cdots, Y_{h_n}\right) \int_0^T \dot{h}_j(s)\dot{h}(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因此,

$$D_tF(w) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(Y_{h_1}, \cdots, Y_{h_n})\dot{h}_j(t),$$

$$(\nabla F(w))(t) = \int_0^t D_sF(w)\,\mathrm{d}s = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(Y_{h_1}, \cdots, Y_{h_n})h_j(t).$$

□

定理 6.2.9 (链式法则)**.** *假设* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *连续可微, 且导数有界,* $F = (F_1, \cdots, F_n)$, $F_i \in D_1^2(W)$ $(1 \le i \le n)$*. 那么* $\varphi(F) \in D_1^2(W)$*, 并且*

$$D_t\varphi(F) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}(F)D_tF_j.$$

我们下面建立更广意义的分部积分公式, 即定义散度算子 δ. 假设 $Z \in \mathrm{Cylin}(F; H)$ 形如

$$Z(w) = \sum_{i=1}^n F_i(w)h_i, \quad F_i \in \mathrm{Cylin}(W),\ h_i \in H.$$

利用分部积分公式, 对任何 $F \in D_1^p(W)$,

$$\int_W (\nabla F(w), Z(w))_H \mu(\mathrm{d}w) = \sum_{i=1}^n \int_W F_i(w)D_{h_i}F(w)\mu(\mathrm{d}w)$$
$$= \int_W F(w)\sum_{i=1}^n D_{h_i}^* F_i(w)\mu(\mathrm{d}w) = \int_W F(w)\delta(Z)(w)\mu(\mathrm{d}w),$$

其中 $\delta(Z) = \sum\limits_{i=1}^n D_{h_i}^* F_i = \sum\limits_{i=1}^n (-D_{h_i}F_i + Y_{h_i}F_i)$. 我们称 $\delta(Z)$ 为 $Z \in \mathrm{Cylin}(W; H)$ 的散度, 也称为 Skorohod 积分. 可以证明: $\|\delta(Z)\|_{L^2} \le \|Z\|_{D_1^2}$. 由 $\mathrm{Cylin}(W; H)$ 在 $D_1^2(W; H)$ 中稠密, 可以将 δ 延拓到 $D_1^2(W)$ 上.

命题 6.2.10. *假设* $Z \in D_1^2(W; H)$*, 则* $\delta(Z) \in L^2(W)$ *存在并且*

$$\|\delta(Z)\|_{L^2(W)} \le \|Z\|_{D_1^2(W)}.$$

以下定理说明对于适应过程, Skorohod 积分与 Itô 积分一致.

定理 6.2.11. *假设* $z \in L_a^2(\mathbb{R})$ *是个关于* (t, w) *联合可测并且适应的* L^2*-过程. 作* $Z(w, t) = \int_0^t z(w, s)\,\mathrm{d}s$*, 那么*

$$\mathbb{E}(\nabla F, Z)_H = \mathbb{E}\left(F\int_0^T z(w, s)\,\mathrm{d}w(s)\right), \quad F \in D_1^2(W).$$

也就是说 $\delta(Z) = \int_0^T z(w, s)\,\mathrm{d}w(s)$.

证明. 首先考虑 $z(t,w)=a(w)\mathbb{1}_{[u,s)}(t)$ $(u<s, a\in\mathscr{F}_u)$. 记 $g(t)=\int_0^t \mathbb{1}_{[u,s)(v)}\,\mathrm{d}v$, 则

$$\mathbb{E}(\nabla F,Z)_H=\int_W aD_gF(w)\,\mathrm{d}\mu=\int_W FD_g^*a\,\mathrm{d}\mu.$$

由于 $a\in\mathscr{F}_u$, $g|_{[0,u]}=0$, $D_ga=0$. 于是

$$D_g^*a=-D_ga+Y_ga=Y_ga.$$

即有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\nabla F,Z)_H&=\int_W FY_ga\,\mathrm{d}\mu=\int_W F(w)a(w)(w(s)-w(u))\mu(\mathrm{d}w)\\&=\int_W F(w)\int_0^T z(w,s)\,\mathrm{d}w(s)\mu(\mathrm{d}w)=\mathbb{E}\left(F\int_0^T z(w,s)\,\mathrm{d}w(s)\right).\end{aligned}$$

进而 $\mathbb{E}(\nabla F,h)_H=\mathbb{E}\left(F\int_0^T z(w,s)\,\mathrm{d}w(s)\right)$ 对简单过程成立. 对一般的 $z\in L_a^2(\mathbb{R})$, 用简单过程逼近即可. $\square$

§ 6.3 利用 Malliavin 分析计算希腊字母

假设概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 上有布朗运动 $(W_t)_{0\le t\le T}$ 及相应布朗流 $(\mathscr{F}_t)_{0\le t\le T}$. 假设股票的价格过程 X_t 适合 SDE

$$\mathrm{d}X_t=b(X_t)\,\mathrm{d}t+\sigma(X_t)\,\mathrm{d}W_t,\quad X_t=x.$$

其中 b 和 σ 连续可微且导数有界, 易见上述 SDE 的强解存在唯一. 由随机流理论, 可以选取 $(X_t)_{0\le t\le T}$ 的一个修正使得对任何固定的 $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$ 使 $X(t,\omega)$ 关于初值 x 连续可微. 在 $X_t^x=x+\int_0^t b(X_s^x)\,\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma(X_s^x)\,\mathrm{d}W_s$ 中关于 x 求导,

$$\frac{\partial X_t^x}{\partial x}=1+\int_0^t b'(X_s^x)\frac{\partial X_s^x}{\partial x}\,\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma'(X_s^x)\frac{\partial X_s^x}{\partial x}\,\mathrm{d}W_s.$$

因此 $Y=\left(Y_t=\frac{\partial X_t^x}{\partial x}\right)_{0\le t\le T}$ 满足 SDE

$$\mathrm{d}Y_t=Y_t(b'(X_t^x)\,\mathrm{d}t+\sigma'(X_t^x)\,\mathrm{d}W_t),\quad Y_0=1.$$

可以证明对任何 $t \in [0,T]$, $X_t \in D_1^2(W)$. 我们下面计算 X_t 的 Malliavin 导数. 对 $h \in H$, 命 $Z_t = D_h X_t$. 写 $X_t^\varepsilon(w) = X_t(w+\varepsilon h)$, 则

$$\begin{aligned}
Z_t &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{X_t^\varepsilon - X_t}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^t (b(X_s^\varepsilon) - b(X_s)) \,\mathrm{d}s + \int_0^t (\sigma(X_s^\varepsilon) - \sigma(X_s)) \,\mathrm{d}W_s + \varepsilon \int_0^t X_s^\varepsilon \dot{h}(s) \,\mathrm{d}s \right) \\
&= \int_0^t (b'(X_s) Z_s + \sigma(X_s) \dot{h}(s)) \,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(Z_s) \,\mathrm{d}W_s,
\end{aligned}$$

即有

$$\mathrm{d}Z_t = (b'(X_t) Z_t + \sigma(X_t) \dot{h}(t)) \,\mathrm{d}t + \sigma(X_t) Z_t \,\mathrm{d}W_t, \quad Z_0 = 0.$$

注意到 Y 适合的 SDE 齐次部分与 Z 相同. 我们计算 $(Y_t^{-1} Z_t)_{0 \le T}$ 适合的 SDE,

$$\mathrm{d}(Y_t^{-1} Z_t) = Y_t^{-1} \sigma(X_t) \dot{h}(t) \,\mathrm{d}t, \quad Y_0^{-1} Z_0 = 0.$$

从而

$$D_h X_t = Z_t = Y_t \int_0^t Y_s^{-1} \sigma(X_s) \dot{h}(s) \,\mathrm{d}s.$$

因此, $D_s X_t = Y_t Y_s^{-1} \sigma(X_s) \mathbb{1}_{(s \le t)}$.

在下文中, 我们需要以下关于 σ 的椭圆性假设.

假设 6.3.1. *存在 $\varepsilon > 0$ 使 $\sigma(x) \ge \varepsilon > 0$ 对任何 $x \in \mathbb{R}$ 成立.*

6.3.1 希腊字母 Rho

本小节中, 我们来计算关于漂移项的希腊字母 Rho. 假设支付函数 $\phi(X)$ ($\phi : C[0,T] \to \mathbb{R}$) 适合

$$\mathbb{E}|\phi(X)|^2 < +\infty.$$

我们假设扰动过程 $(X_t^\varepsilon)_{0 \le t \le T}$ 适合

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t^\varepsilon &= (b(X_t^\varepsilon) + \varepsilon \gamma(X_t^\varepsilon)) \,\mathrm{d}t + \sigma(X_t^\varepsilon) \,\mathrm{d}W_t \\
&= b(X_t^\varepsilon) \,\mathrm{d}t + \sigma(X_t^\varepsilon) \left(\mathrm{d}W_t + \varepsilon \sigma^{-1}(X_t^\varepsilon) \gamma(X_t^\varepsilon) \,\mathrm{d}t \right),
\end{aligned}$$

其中 $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, γ 是个有界函数. 作

$$Z_T^\varepsilon = \exp \left(-\varepsilon \int_0^T \sigma^{-1}(X_t^\varepsilon) \gamma(X_t^\varepsilon) \,\mathrm{d}W_t - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^T \left| \sigma^{-1}(X_t^\varepsilon) \gamma(X_t^\varepsilon) \right|^2 \mathrm{d}t \right),$$

及测度 $\mathrm{d}\mathbb{P}^\varepsilon = Z_T^\varepsilon \,\mathrm{d}\mathbb{P}$. 由 Girsanov 定理,

$$W^\varepsilon = \left(W_t^\varepsilon = W_t + \varepsilon\sigma^{-1}(X_t^\varepsilon)\gamma(X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t\right)_{0\le t\le T}$$

是一个 $\mathbb{P}^\varepsilon$-布朗运动. 注意到 (X, W) 在 $\mathbb{P}$ 下的分布与 $(X^\varepsilon, W^\varepsilon)$ 在 $\mathbb{P}^\varepsilon$ 下的分布相同. 于是,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\phi(X^\varepsilon) = \mathbb{E}^\varepsilon\left(\phi(X^\varepsilon)\,(Z_T^\varepsilon)^{-1}\right)\\
=&\mathbb{E}^\varepsilon\left(\phi(X^\varepsilon)\exp\left(\varepsilon\int_0^T \sigma^{-1}(X_t^\varepsilon)\gamma(X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}W_t + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T \left|\sigma^{-1}(X_t^\varepsilon)\gamma(X_t^\varepsilon)\right|^2\mathrm{d}t\right)\right)\\
=&\mathbb{E}^\varepsilon\left(\phi(X^\varepsilon)\exp\left(\varepsilon\int_0^T \sigma^{-1}(X_t^\varepsilon)\gamma(X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}W_t^\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T \left|\sigma^{-1}(X_t^\varepsilon)\gamma(X_t^\varepsilon)\right|^2\mathrm{d}t\right)\right)\\
=&\mathbb{E}\left(\phi(X)\exp\left(\varepsilon\int_0^T \sigma^{-1}(X_t)\gamma(X_t)\,\mathrm{d}W_t - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T \left|\sigma^{-1}(X_t)\gamma(X_t)\right|^2\mathrm{d}t\right)\right)
\end{aligned}$$

因此,

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\mathbb{E}\phi(X^\varepsilon) = \mathbb{E}\left(\phi(X)\int_0^T \sigma^{-1}(X_t)\gamma(X_t)\,\mathrm{d}W_t\right).$$

在 B-S 模型中, $b(X_t) = rX_t$, $\sigma(X_t) = \sigma X_t$. 取 $\gamma(X_t) = rX_t$, 可得

$$\mathrm{Rho} = \frac{\partial}{\partial r}\mathbb{E}\left(e^{-rT}\phi(X)\right) = -Te^{-rT}\mathbb{E}(\phi(X)) + \frac{re^{-rT}}{\sigma}\mathbb{E}\left(\phi(X)W_T\right).$$