12 月 1 日, 12 月 3 日作业说明

1. 假设 $\varphi(x)$ 由 $\varphi(x)=\mathbb{E}(\xi|\eta=x)$ 定义, 其中 ξ 与 η 是离散型随机变量. 求证: 当 $\mathbb{E}|\xi|<+\infty$ 时, $\mathbb{E}\xi=\mathbb{E}\varphi(\eta)$.

   说明. 对一般 (不一定非负) 函数积分 (求和也是关于计数测度的积分) 的换序需验证 Fubini 定理的条件, 问题中的条件 $\mathbb{E}|\xi|<+\infty$ 要用上.

2. (Cramer-Wold Device) 假设 $\left\{W^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是个 k 维随机向量序列. 任取 $\beta\in\mathbb{R}^d$, 有

$$\beta^T W^{(n)}=\sum_{j=1}^{k}\beta_j W_j^{(n)}\xrightarrow{d}F_\beta,$$

其中 $(F_\beta)_{\beta\in\mathbb{R}^k}$ 是一族分布函数. 证明: $W^{(n)}\xrightarrow{d}F$, 其中 F 由 $(F_\beta)_{\beta\in\mathbb{R}^k}$ 唯一决定.

说明. 命 $f(\beta)=\widehat{F}_\beta(1)=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}\exp\left(i\beta^T W^{(n)}\right)$. 由连续性定理, 如果 $f(\beta)$ 在 $\beta=0$ 处连续, 就可以推出有分布函数 F 使得 $\widehat{F}=f$, 且 $W^{(n)}\xrightarrow{d}F$. 在作业反馈中, 明确引入额外条件并利用连续性定理证明被认为是对的. 但事实上, 没有必要用到更多的条件.

证明. 注意到 $W_j^{(n)}=e_j^T W^{(n)}\xrightarrow{d}F_{e_j}$ $(1\le j\le k)$, 我们有 $W_j^{(n)}=O_{\mathbb{P}}(1)$ (参考讲义习题 10.3 (iv)), 即任给 $\varepsilon>0$, 总有 $M_j>0$ 使

$$\sup_n\mathbb{P}\left(\left|W_j^{(n)}\right|\ge M_j\right)\le\varepsilon.$$

命 $M=\max\limits_{1\le j\le n}M_j$, 就有

$$\sup_n\mathbb{P}\left(\left\|W^{(n)}\right\|_\infty\ge M\right)\le\varepsilon.$$

如此,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\exp\left(i\beta^T W^{(n)}\right)-1\right| &= \mathbb{E}\left(\left|\exp\left(i\beta^T W^{(n)}\right)-1\right|;\left\|W^{(n)}\right\|_\infty<M\right)\\
&\quad+\mathbb{E}\left(\left|\exp\left(i\beta^T W^{(n)}\right)-1\right|;\left\|W^{(n)}\right\|_\infty\ge M\right)\\
&\le\mathbb{E}\left(\left|\beta^T W^{(n)}\right|;\left\|W^{(n)}\right\|_\infty<M\right)+2\mathbb{P}\left(\left\|W^{(n)}\right\|_\infty\ge M\right)\\
&\le M\left\|\beta\right\|_1+2\varepsilon.
\end{aligned}$$

这样,

$$\left|\widehat{F}_\beta(1)-1\right|\le\liminf_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left|\exp\left(i\beta^T W^{(n)}\right)-1\right|\le M\left\|\beta\right\|_1+2\varepsilon.$$

命 $\beta\to0$,

$$\limsup_{\beta\to0}\left|\widehat{F}_\beta(1)-1\right|\le2\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性便有 $f(\beta)=\widehat{F}_\beta(1)$ 在 $\beta=0$ 处连续. $\square$