Chapter 6 Malliavin 分析在金融中的应用

本章中, 第 1 节主要参考材料是 Shreve 的 *Stochastic calculus for finance II* (2008) 及 Fries 的 *Mathematical finance, theory, modeling and implemention* (2006). 第 2 节的主要参考材料是方诗赞的 *Introduction to Malliavin Calculus* (2004). 第 3 节相关内容参考的材料主要有 Eric Fournié 等人的 *Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance* (1999), *Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance II* (2001) 及 David Nualart 的 *The Malliavin Calculus and Related Topics* (第二版, 2005). 我们下面罗列的结果都可以推广到高维, 但为了方便, 我们只讨论一维的情形. 高维的情形请参考上述文献.

计划在 Malliavin 分析及其应用课报告第 1, 3 节, 在本门讨论班报告第 2, 3 节.

§ 6.1 金融数学基础

我们首先建立一个市场模型. 假设有个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 及其上的布朗运动 $(W_t)_{0\le t\le T}$ 及相应的布朗流 $(\mathscr{F}_t)_{0\le t\le T}$. 假设在市场中有个标的资产 (例如股票, 指数, 为了方便, 我们假设标的资产是股票) 价格过程 $(S_t)_{0\le t\le T}$ 适合随机微分方程 (SDE)

$$\mathrm{d}S_t = b(S_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(S_t)\,\mathrm{d}W_t.$$

在著名的 Black-Scholes 模型中,

$$\mathrm{d}S_t = S_t(\mu(t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}W_t),$$

其中 $\mu(t)$ 是股票的瞬时平均收益率, $\sigma(t)$ 是瞬时波动率. 我们的 Black-Scholes SDE 有显式解

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s)\,\mathrm{d}W_s\right).$$

这使得价格过程可以精确模拟. 市场的另一个重要参数是瞬时无风险利率 $r(t)$. 命 $D_t = \exp\left(-\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s\right)$, 则折现股价 $(D_tS_t)_{0\le t\le T}$ 适合 SDE

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(D_tS_t) &= D_tS_t((\mu(t)-r(t))\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}W_t)\\ &= D_tS_t\sigma(t)\left(\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t\right).\end{aligned}$$

命 $\theta(t) = \frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)}$, 作

$$Z_T = \exp\left(-\int_0^T \theta(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^T \theta(t)^2\,\mathrm{d}t\right),$$

及 $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}(Z_T; A)$ $(A \in \mathscr{F})$. 当 Novikov 条件 $\mathbb{E}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta(t)^2\,\mathrm{d}t\right) < +\infty$ 成立时, 由 Girsanov 定理,

$$\widetilde{W} = \left(\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta(s)\,\mathrm{d}s\right)_{0\le t\le T}$$

是个 $\widetilde{\mathbb{P}}$-布朗运动. 于是,

$$\mathrm{d}(D_t S_t) = D_t S_t \sigma(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t, \quad \mathrm{d}S_t = S_t(r(t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t).$$

这时折现股价过程 $(D_t S_t)_{0\le t\le T}$ 是个 $\widetilde{\mathbb{P}}-$ 鞅, 且在测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下, 股价的平均收益率与市场的无风险利率 $r(t)$ 相同. 我们将 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 称为一个风险中性测度.

假设 $X = (X_t)_{0\le t\le T}$ 是一个自融资投资策略 $(\Delta(t))_{0\le t\le T}$ $(\Delta(t) \in \mathscr{F}_t)$ 的价格过程. 所谓自融资策略就是说投资者在 t 时刻持有 $\Delta(t)$ 份额的股票, 将余下的资产数额 $(X_t - \Delta(t)S_t)$ 投入无风险市场 (利率为 $r(t)$). 这样, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t &= \Delta(t)\,\mathrm{d}S_t + r(t)(X_t - \Delta(t)S_t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Delta(t)S_t\left(r(t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t\right) + r(t)(X_t - \Delta(t)S_t)\,\mathrm{d}t \\
&= r(t)X_t\,\mathrm{d}t + \Delta(t)\sigma(t)S_t\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t, \\
\mathrm{d}(D_t X_t) &= \Delta(t)D_t S_t \sigma(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.
\end{aligned}$$

从而自融资投资策的折现价值过程 $(D_t X_t)_{0\le t\le T}$ 是风险中性测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下的鞅. 假设有个标的资产为股票的金融产品在 T 时间支付为 $\phi(S)$ (例如: 欧式看涨期权 $\phi(S) = (S_T - K)^+$, 连续监测的亚式看跌期权 $\left(K - \frac{1}{T}\int_0^T S_t\,\mathrm{d}t\right)^+$). 作 $\widetilde{\mathbb{P}}$-右闭鞅

$$D_t M_t = \widetilde{\mathbb{E}}\left(D_T \phi(S) | \mathscr{F}_t\right).$$

由鞅表示定理, 存在适应过程 $\Gamma = (\Gamma(t))_{0\le t\le T}$, 使

$$\mathrm{d}(D_t M_t) = \Gamma(t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

命 $\Delta(t) = \frac{\Gamma_t}{D_t S_t \sigma(t)}$, 于是 $(D_t M_t)_{0\le t\le T}$ 相当于是自融资策略 $(\Delta(t))_{0\le t\le T}$ 的折现价格过程. 如果市场是无套利的, 那么 T 时刻支付为 $\phi(S)$ 的金融产品在 0 时刻的定价就应当为 M_0. 我们假设有投资者猫猫和投资者狗狗, 猫猫在初始时刻以一定价格购得上述金融产品, 狗狗建立自融资投资策略 $(\Delta(t))_{0\le t\le T}$. 那么猫猫和狗狗在 T 时刻的收益相同, 如果市场无套利, 在初始时刻的付出也一定相同. 这样, 上述金融产品的定价应当为

$$M_0 = \widetilde{\mathbb{E}}(D_T\phi(S)|\mathscr{F}_0) = \widetilde{\mathbb{E}}(D_T\phi(S)).$$

这实际上体现了所谓"对冲"的思想, 假设券商初始时刻卖出一个在 T 时刻支付为 $\phi(S)$ 的金融产品, 再够买相应的自融资投资组合 $(\Delta(t))_{0\le t\le T}$. 券商在 T 时刻的综合收益为 0, 就不会亏钱了. 这时候有小问号可能会问了, 券商这样对冲虽然不亏也赚不到钱啊, 这不是吃饱了撑着吗? 实际上, 他只要在卖产品的时候在计算价格的基础上抬高一些就可以赚钱了. 这种随时间调整自融资投资组合 $(\Delta(t))_{0\le t\le T}$ 的对冲策略称为动态对冲. 这种做法实际应用中有很大的限制. 因为仓位的调整不可能随着时间连续变动的. 为了达到逼近连续时间的目的, 希望仓位调整的时间间隔尽可能小, 这会带来高昂的手续费.

假设某个金融产品的支付仅与到期时间 T 时刻的股价有关, 即 $\phi(S)=\phi(S_T)$. 根据随机微分方程解的 Markov 性,

$$\begin{aligned} M_t &= \exp\left(-\int_t^T r(s)\,\mathrm{d}s\right)\widetilde{\mathbb{E}}(\phi(S_T)|\mathscr{F}_t) \\ &= \exp\left(-\int_t^T r(s)\,\mathrm{d}s\right)\widetilde{\mathbb{E}}(\phi(S_T)|S_t) = c(t,S_t). \end{aligned}$$

假设 $c(t,x)$ 充分光滑, 计算

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(D_tM_t) = \mathrm{d}(D_tc(t,S_t)) \\ =&D_t\left(-r(t)c(t,S_t)+\frac{\partial c}{\partial t}(t,S_t)\right)\mathrm{d}t + D_t\frac{\partial c}{\partial x}(t,S_t)\,\mathrm{d}S_t + \frac{1}{2}D_t\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,S_t)\,\mathrm{d}\langle S\rangle_t \\ =&D_t\left(-r(t)c(t,S_t)+\frac{\partial c}{\partial t}(t,S_t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,S_t)\sigma(t)^2S_t^2\right)\mathrm{d}t + D_t\frac{\partial c}{\partial x}(t,S_t)\sigma(t)S_t\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t. \end{aligned}$$

于是, $\Delta(t)=\frac{\partial c}{\partial x}(t,S_t)$. 我们将期权价值 $c(t,x)$ 关于资产价格 x 的导数 $\frac{\partial c}{\partial x}$ 称为该期权的 Delta 值, 上面建立的动态对冲方式称为 Delta 对冲. 类似的希腊字母有

$$\mathrm{Gamma}=\frac{\partial^2 c}{\partial x^2},\quad \mathrm{Theta}=\frac{\partial c}{\partial t},\quad \mathrm{Rho}=\frac{\partial c}{\partial r},\quad \mathrm{Vega}=\frac{\partial c}{\partial \sigma},$$

它们在金融实践相当重要. 某种意义上, 计算希腊字母远比给期权定价更要紧.

在无风险利率 r 和波动率 σ 为常数的经典 B-S 模型下, 考虑支付为 $\phi(S)=(S_T-K)^+$

的欧式看涨期权. 计算

$$\begin{aligned}
c(0,x) &= e^{-rT}\widetilde{\mathbb{E}}^x\left((S_T-K)^+\right)\\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left(x\exp\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma W_T\right)-K\right)^+\\
&= e^{-rT}\int_{\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{K}{x}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T\right)}^{+\infty}(xe^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma\sqrt{T}z}-K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z\\
&= x\Phi\left(\frac{\ln\frac{x}{K}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)+Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{x}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}$$

写 $\tau=T-t$, $d_\pm(\tau,x)=\frac{\ln\frac{x}{K}+\left(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, 于是

$$c(t,x)=x\Phi\left(d_+(\tau,x)\right)+Ke^{-r\tau}\Phi\left(d_-(\tau,x)\right).$$

这就是著名的 B-S 期权定价公式. 我们有希腊字母

$$\begin{aligned}
\text{Delta} &= \frac{\partial c}{\partial x}(t,x)=\Phi(d_+(\tau,x)>0),\\
\text{Gamma} &= \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,x)=\frac{1}{\sigma x\sqrt{\tau}}\Phi'(d_+(\tau,x))>0,\\
\text{Theta} &= \frac{\partial c}{\partial t}(t,x)=-rKe^{-r\tau}\Phi(d_-(\tau,x))-\frac{\sigma x}{2\sqrt{\tau}}\Phi'(d_+(\tau,x)).
\end{aligned}$$

可以看到, $c(t,x)$ 是一个关于 x 单调增加的凸函数.

对较一般的模型和更复杂的支付函数 ϕ, 计算希腊字母不是一件容易的事情. 假设 θ 是某个模型参数, $\frac{\partial c}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}\phi(S;\theta)$. 最直接的想法是差分, 也就是利用

$$\frac{c(\theta+h)-c(\theta-h)}{2h}\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\phi(S(\omega_i);\theta+h)-\phi(S(\omega_i);\theta-h)}{2h}\right).$$

近似 $\frac{\partial c}{\partial\theta}$ (这里用了中心差分, 也可以用前向和后向差分). 考虑个支付为 $\phi(S)=\mathbb{1}_{[K,+\infty)}(S_T)$ 的二元期权. 为了方便, 假定 $Y_\theta=S_T(\theta)$ 关于 θ 线性, 也就是说 $Y_{\theta+h}=Y_\theta+\alpha h$. 于是

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(Y_{\theta+h})-\phi(Y_{\theta-h})}{2h} &= \frac{1}{2h}\left(\mathbb{1}_{(Y_{\theta-h}<K<Y_{\theta+h})}-\mathbb{1}_{(Y_{\theta+h}<K<Y_{\theta-h})}\right)\\
&= \frac{1}{2h}\operatorname{sgn}\alpha\,\mathbb{1}_{(K-\alpha h,K+\alpha h)}(Y_\theta).
\end{aligned}$$

写 $p=\mathbb{P}(Y_\theta\in(K-\alpha h,K+\alpha h))$, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{\phi(Y_{\theta+h})-\phi(Y_{\theta-h})}{2h}\right)&=\frac{p}{2h}\operatorname{sgn}\alpha,\\ \operatorname{Var}\left(\frac{\phi(Y_{\theta+h})-\phi(Y_{\theta-h}}{2h})\right)&=\frac{p(1-p)}{4h^2}=O\left(\frac{1}{h}\right).\end{aligned}$$

为了让差分充分接近导数, 我们要求 h 充分小, 这就导致 $\operatorname{Var}\left(\frac{Y_{\theta+h}-Y_{\theta-h}}{2h}\right)$ 相当大, 需要模拟大量的 Monte Carlo 轨道.

另一种计算希腊字母的方法称为逐轨道法, 假设求导与期望可以交换且 ϕ 具有充分好的正则性. 那么

$$\begin{aligned}&\frac{\partial c}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}\phi(Y_\theta)=\mathbb{E}\frac{\partial}{\partial\theta}\phi(Y_\theta)\\ =&\mathbb{E}\left(\phi'(Y_\theta)\frac{\partial Y_\theta}{\partial\theta}\right)\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\phi'(Y_\theta(\omega_i))\frac{\partial Y_\theta}{\partial\theta}(\omega_i)\right).\end{aligned}$$

注意逐路径法对 ϕ 的正则性要求较高, 且需要 $\frac{\partial Y_\theta}{\partial\theta}$ 能够直接模拟.

我们重点要介绍的是利用 Malliavin 分析计算希腊字母的方法, 后续将论证对很大一类支付函数 $\phi(X;\theta)$, 希腊字母

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}(\phi(X;\theta))=\mathbb{E}(\phi(X;\theta)\cdot\text{Malliavin Weight}).$$

我们首先简要介绍证明的大致思想. 首先, 对正则性较好的支付函数 ϕ, 通过 Malliavin 分部积分公式, 可以得到希腊字母形如 $\mathbb{E}(\phi(X;\theta)\cdot\text{Malliavin Weight})$, 其中 Malliavin 权重一项形式上与 ϕ 的正则性无关. 这样一来, 结果形式上成立并不需要 ϕ 的正则性, 我们自然地猜想通过逼近可以论证对一般的 ϕ 同样成立.

这种从结果看条件的想法在数学里头到处都是, 一个简单的例子是 Taylor 公式. 我们有带 Peano 余项的 Taylor 公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0),\quad x\to x_0,$$

及带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,\quad x\to x_0.$$

从结果上看, 带 Peano 余项的 Taylor 公式仅需要 $f'(x_0)$ 存在, 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式需要在 x_0 的一个邻域内两阶可导.

§ 6.2 Malliavin 分析基础

假设 $(W,\mathscr{F},\mu)$ 是 Wiener 轨道空间 ($W=\{w\in C[0,T]:w(0)=0\}$), 装备最大模范数, 取它的子集

$$H=\left\{h\in AC[0,T]:h(0)=0,\|h\|_H^2=\left\|\dot h\right\|_{L^2[0,T]}^2<+\infty\right\}.$$

易见 H 可以连续稠密地嵌入 W 中.

为了建立 Wiener 空间上的分部积分公式, 我们引入 Wiener 空间的拟不变性. 先来看 $\mathbb{R}^m$ 上的 Gauss 测度 γ_m. 对任何 $a\in\mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m}F(x+a)\gamma_m(\mathrm{d}x)&=\int_{\mathbb{R}^m}F(x+a)\frac{e^{-\frac{|x|^2}{2}}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^m}\,\mathrm{d}x\\=\int_{\mathbb{R}^m}F(x)\frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2}}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^m}\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^m}F(x)\exp\left((x,a)_{\mathbb{R}^m}-\frac{1}{2}|a|^2\right)\gamma_m(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

因此,

$$(\tau_a)_*\gamma_m=\exp\left((x,a)_{\mathbb{R}^m}-\frac{1}{2}|a|^2\right)\gamma_m\ll\gamma_m.$$

对 Wiener 空间 (W,μ), 任取 $h\in H$, 由 Girsanov 定理, $(w_t-h(t))_{t\in[0,T]}$ 是测度

$$\mu_h(\mathrm{d}w)=\exp\left(\int_0^T\dot h(s)\,\mathrm{d}w(s)-\frac{1}{2}\int_0^T\left|\dot h(s)\right|^2\mathrm{d}s\right)\mu(\mathrm{d}w)$$

下的布朗运动. 这样, 对 W 上非负可测函数 F, 有

$$\begin{aligned}\int_W F(w)\mu_h(\mathrm{d}w)&=\int_W F(w-h+h)\mu_h(\mathrm{d}w)\\&=\int_W F(w+h)\mu(\mathrm{d}w).\end{aligned}$$

形式地记 $D_hF(w)$ 为 $F(w)$ 在 h 方向上的方向导数. 再作形式计算

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}D_hF(w)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}(F(\tau_{\varepsilon h}w)-F(w))\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_W F(w)\mu_h(\mathrm{d}w)-\int_W F(w)\mu(\mathrm{d}w)\right)\\
=&\int_W F(w)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\exp\left(\varepsilon\int_0^T \dot h(s)\,\mathrm{d}w(s)-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T\left|\dot h(s)\right|^2\mathrm{d}s\right)\mu(\mathrm{d}w)\\
=&\int_W F(w)\int_0^T \dot h(s)\,\mathrm{d}w(s)\mu(\mathrm{d}w)=\mathbb{E}\left(F(w)\int_0^T \dot h(s)\,\mathrm{d}w(s)\right).
\end{aligned}
$$

进一步, 取 F 为 FG,

$$
\mathbb{E}\left(FG\int_0^T \dot h(s)\,\mathrm{d}w(s)\right)=\mathbb{E}D_h(FG)=\mathbb{E}\left((D_hF)G+FD_hG\right).
$$

写 $D_h^*G(w)=-D_hG(w)+G(w)\int_0^T\dot h(s)\,\mathrm{d}w(s)$. 则有分部积分公式

$$
\mathbb{E}((D_hF)G)=\mathbb{E}(FD_h^*G).
$$

下面我们将上面的说法相对严格化.

定义 6.2.1. 假设 $F\in L^p(W,\mu)$ $(p>1)$. 对 $h\in H$, 如果在 $L^{p-}:=\bigcap_{p'<p}L^{p'}(W,\mu)$ 中存在极限

$$
D_hF=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tau_{\varepsilon h}F-F}{\varepsilon},
$$

我们称 D_hF 是 F 沿着 h 方向的导数. 如果存在 $\nabla F\in L^p(W;H)$ 使得 μ-几乎处处地成立

$$
(\nabla F(w),h)_H=D_hF(w),\quad \forall\, h\in H,
$$

称 $\nabla F\in L^p(W;H)$ 为 F 的 *Malliavin* 梯度. 记 $D_tF(w)=(\nabla F(w))'(t)$, 于是

$$
D_hF(w)=\int_0^T D_tF(w)\dot h(t)\,\mathrm{d}t.
$$

定义 6.2.2. 在 $D_1^p(W)$ 上作范数

$$
\|F\|_{1,p}^p=\int_W |F|^p\,\mathrm{d}\mu+\int_W\|\nabla F\|_H^p\,\mathrm{d}\mu.
$$

将 $D_1^p(W)$ 称为 W 上的 *Sobolev* 空间.

定义 6.2.3. 假设存在 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 及 $h_1, \cdots, h_n \in H$ 使得

$$F = f(Y_{h_1}, \cdots, Y_{h_n}),$$

其中 $Y_h(w) = \int_0^T \dot{h}(s)\,\mathrm{d}w(s)$. 我们称 F 是 W 上的柱函数, 记作 $F \in \mathrm{Cylin}(W)$.

我们不加证明地引入以下结论.

命题 6.2.4. 空间 $\mathrm{Cylin}(W)$ 在 $L^p(W)$ 中是稠密的.

命题 6.2.5. 空间 $(D_1^p(W), \|\cdot\|_{1,p})$ 是完备的.

定理 6.2.6. 空间 $\mathrm{Cylin}(W)$ 在 $D_1^p(W)$ 是稠密的.

注意 $\mathrm{Cylin}(W)$ 在 $D_1^p(W)$ 中稠密意味着 $D_1^p(W)$ 中元素蛮多的. 在以上理论框架下, 我们可以证明之前形式上导出的分部积分公式成立.

定理 6.2.7 (分部积分公式)**.** 假设 $F \in D_1^p(W)$ $(p > 1)$, $G \in D_1^\infty(W) = \bigcap_{p>1} D_1^p(W)$. 那么

$$\int_W D_h F \cdot G\,\mathrm{d}\mu = \int_W F \cdot D_h^* G\,\mathrm{d}\mu,$$

其中 $D_h^* G = -D_h G + Y_h G$.

我们举一个计算 Malliavin 导数的例子.

例子 6.2.8. 假设 $F = f(Y_{h_1}, \cdots, Y_{h_n}) \in \mathrm{Cylin}(W)$, 则

$$D_t F(w) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(Y_{h_1}, \cdots, Y_{h_n}) \dot{h}_j(t),$$
$$(\nabla F(w))(t) = \int_0^t D_s F(w)\,\mathrm{d}s = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(Y_{h_1}, \cdots, Y_{h_n}) h_j(t).$$

证明. 我们只在形式上证明结论, 严格的推导请读者自己尝试. 计算

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(w+\varepsilon h)-F(w)}{\varepsilon} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(Y_{h_1}, \cdots, Y_{h_n}) \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{Y_{h_j}(w+\varepsilon h)-Y_{h_j}(w)}{\varepsilon} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(Y_{h_1}, \cdots, Y_{h_n}) \int_0^T \dot{h}_j(s)\dot{h}(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因此,

$$D_tF(w)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(Y_{h_1},\cdots,Y_{h_n})\dot{h}_j(t),$$

$$(\nabla F(w))(t)=\int_0^t D_sF(w)\,\mathrm{d}s=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(Y_{h_1},\cdots,Y_{h_n})h_j(t).$$

□

定理 6.2.9 (链式法则). 假设 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续可微, 且导数有界, $F=(F_1,\cdots,F_n)$, $F_i\in D_1^2(W)$ $(1\le i\le n)$. 那么 $\varphi(F)\in D_1^2(W)$, 并且

$$D_t\varphi(F)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}(F)D_tF_j.$$

我们下面建立更广意义的分部积分公式, 即定义散度算子 δ. 假设 $Z\in\mathrm{Cylin}(F;H)$ 形如

$$Z(w)=\sum_{i=1}^{n}F_i(w)h_i,\quad F_i\in\mathrm{Cylin}(W),\ h_i\in H.$$

利用分部积分公式, 对任何 $F\in D_1^p(W)$,

$$\int_W(\nabla F(w),Z(w))_H\mu(\mathrm{d}w)=\sum_{i=1}^{n}\int_W F_i(w)D_{h_i}F(w)\mu(\mathrm{d}w)$$

$$=\int_W F(w)\sum_{i=1}^{n}D_{h_i}^*F_i(w)\mu(\mathrm{d}w)=\int_W F(w)\delta(Z)(w)\mu(\mathrm{d}w),$$

其中 $\delta(Z)=\sum\limits_{i=1}^{n}D_{h_i}^*F_i=\sum\limits_{i=1}^{n}(-D_{h_i}F_i+Y_{h_i}F_i)$. 我们称 $\delta(Z)$ 为 $Z\in\mathrm{Cylin}(W;H)$ 的散度, 也称为 Skorohod 积分. 可以证明: $\|\delta(Z)\|_{L^2}\le\|Z\|_{D_1^2}$. 由 $\mathrm{Cylin}(W;H)$ 在 $D_1^2(W;H)$ 中稠密, 可以将 δ 延拓到 $D_1^2(W)$ 上.

命题 6.2.10. 假设 $Z\in D_1^2(W;H)$, 则 $\delta(Z)\in L^2(W)$ 存在并且

$$\|\delta(Z)\|_{L^2(W)}\le\|Z\|_{D_1^2(W)}.$$

以下定理说明对于适应过程, Skorohod 积分与 Itô 积分一致.

定理 6.2.11. 假设 $z\in L_a^2(\mathbb{R})$ 是个关于 (t,w) 联合可测并且适应的 L^2-过程. 作 $Z(w,t)=\int_0^t z(w,s)\,\mathrm{d}s$, 那么

$$\mathbb{E}(\nabla F,Z)_H=\mathbb{E}\left(F\int_0^T z(w,s)\,\mathrm{d}w(s)\right),\quad F\in D_1^2(W).$$

也就是说 $\delta(Z)=\int_0^T z(w,s)\,\mathrm{d}w(s)$.

证明. 首先考虑 $z(t,w)=a(w)\mathbb{1}_{[u,s)}(t)$ $(u<s, a\in\mathscr{F}_u)$. 记 $g(t)=\int_0^t \mathbb{1}_{[u,s)(v)}\,\mathrm{d}v$, 则

$$\mathbb{E}(\nabla F, Z)_H=\int_W aD_gF(w)\,\mathrm{d}\mu=\int_W FD_g^*a\,\mathrm{d}\mu.$$

由于 $a\in\mathscr{F}_u$, $g|_{[0,u]}=0$, $D_ga=0$. 于是

$$D_g^*a=-D_ga+Y_ga=Y_ga.$$

即有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\nabla F, Z)_H&=\int_W FY_ga\,\mathrm{d}\mu=\int_W F(w)a(w)(w(s)-w(u))\mu(\mathrm{d}w)\\&=\int_W F(w)\int_0^T z(w,s)\,\mathrm{d}w(s)\mu(\mathrm{d}w)=\mathbb{E}\left(F\int_0^T z(w,s)\,\mathrm{d}w(s)\right).\end{aligned}$$

进而 $\mathbb{E}(\nabla F,h)_H=\mathbb{E}\left(F\int_0^T z(w,s)\,\mathrm{d}w(s)\right)$ 对简单过程成立. 对一般的 $z\in L_a^2(\mathbb{R})$, 用简单过程逼近即可. □

§ 6.3 利用 Malliavin 分析计算希腊字母

假设概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 上有布朗运动 $(W_t)_{0\le t\le T}$ 及相应布朗流 $(\mathscr{F}_t)_{0\le t\le T}$. 假设股票的价格过程 X_t 适合 SDE

$$\mathrm{d}X_t=b(X_t)\,\mathrm{d}t+\sigma(X_t)\,\mathrm{d}W_t,\quad X_t=x.$$

其中 b 和 σ 连续可微且导数有界, 易见上述 SDE 的强解存在唯一. 由随机流理论, 可以选取 $(X_t)_{0\le t\le T}$ 的一个修正使得对任何固定的 $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$ 使 $X(t,\omega)$ 关于初值 x 连续可微. 在 $X_t^x=x+\int_0^t b(X_s^x)\,\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma(X_s^x)\,\mathrm{d}W_s$ 中关于 x 求导,

$$\frac{\partial X_t^x}{\partial x}=1+\int_0^t b'(X_s^x)\frac{\partial X_s^x}{\partial x}\,\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma'(X_s^x)\frac{\partial X_s^x}{\partial x}\,\mathrm{d}W_s.$$

因此 $Y=\left(Y_t=\frac{\partial X_t^x}{\partial x}\right)_{0\le t\le T}$ 满足 SDE

$$\mathrm{d}Y_t=Y_t(b'(X_t^x)\,\mathrm{d}t+\sigma'(X_t^x)\,\mathrm{d}W_t),\quad Y_0=1.$$

可以证明对任何 $t \in [0,T]$, $X_t \in D_1^2(W)$. 我们下面计算 X_t 的 Malliavin 导数. 对 $h \in H$, 命 $Z_t = D_h X_t$. 写 $X_t^\varepsilon(w) = X_t(w+\varepsilon h)$, 则

$$\begin{aligned}
Z_t &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{X_t^\varepsilon - X_t}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^t (b(X_s^\varepsilon) - b(X_s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t (\sigma(X_s^\varepsilon) - \sigma(X_s))\,\mathrm{d}W_s + \varepsilon\int_0^t X_s^\varepsilon \dot{h}(s)\,\mathrm{d}s\right) \\
&= \int_0^t (b'(X_s)Z_s + \sigma(X_s)\dot{h}(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(Z_s)\,\mathrm{d}W_s,
\end{aligned}$$

即有

$$\mathrm{d}Z_t = (b'(X_t)Z_t + \sigma(X_t)\dot{h}(t))\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)Z_t\,\mathrm{d}W_t, \quad Z_0 = 0.$$

注意到 Y 适合的 SDE 齐次部分与 Z 相同. 我们计算 $(Y_t^{-1}Z_t)_{0\le T}$ 适合的 SDE,

$$\mathrm{d}(Y_t^{-1}Z_t) = Y_t^{-1}\sigma(X_t)\dot{h}(t)\,\mathrm{d}t, \quad Y_0^{-1}Z_0 = 0.$$

从而

$$D_h X_t = Z_t = Y_t \int_0^t Y_s^{-1}\sigma(X_s)\dot{h}(s)\,\mathrm{d}s.$$

因此, $D_s X_t = Y_t Y_s^{-1}\sigma(X_s)\mathbb{1}_{(s\le t)}$.

在下文中, 我们需要以下关于 σ 的椭圆性假设.

假设 6.3.1. *存在 $\varepsilon > 0$ 使 $\sigma(x) \ge \varepsilon > 0$ 对任何 $x \in \mathbb{R}$ 成立.*

6.3.1　希腊字母 Rho

本小节中, 我们来计算关于漂移项的希腊字母 Rho. 假设支付函数 $\phi(X)$ ($\phi: C[0,T] \to \mathbb{R}$) 适合

$$\mathbb{E}|\phi(X)|^2 < +\infty.$$

我们假设扰动过程 $(X_t^\varepsilon)_{0\le t\le T}$ 适合

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t^\varepsilon &= (b(X_t^\varepsilon) + \varepsilon\gamma(X_t^\varepsilon))\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}W_t \\
&= b(X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t^\varepsilon)\left(\mathrm{d}W_t + \varepsilon\sigma^{-1}(X_t^\varepsilon)\gamma(X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t\right),
\end{aligned}$$

其中 $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, γ 是个有界函数. 作

$$Z_T^\varepsilon = \exp\left(-\varepsilon\int_0^T \sigma^{-1}(X_t^\varepsilon)\gamma(X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}W_t - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T \left|\sigma^{-1}(X_t^\varepsilon)\gamma(X_t^\varepsilon)\right|^2\mathrm{d}t\right),$$

及测度 $\mathrm{d}\mathbb{P}^\varepsilon = Z_T^\varepsilon\,\mathrm{d}\mathbb{P}$. 由 Girsanov 定理,

$$W^\varepsilon = \left(W_t^\varepsilon = W_t + \varepsilon\sigma^{-1}(X_t^\varepsilon)\gamma(X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t\right)_{0\le t\le T}$$

是一个 $\mathbb{P}^\varepsilon$-布朗运动. 注意到 (X,W) 在 $\mathbb{P}$ 下的分布与 $(X^\varepsilon,W^\varepsilon)$ 在 $\mathbb{P}^\varepsilon$ 下的分布相同. 于是,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\phi(X^\varepsilon) = \mathbb{E}^\varepsilon\left(\phi(X^\varepsilon)\,(Z_T^\varepsilon)^{-1}\right)\\
=&\mathbb{E}^\varepsilon\left(\phi(X^\varepsilon)\exp\left(\varepsilon\int_0^T\sigma^{-1}(X_t^\varepsilon)\gamma(X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}W_t + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T\left|\sigma^{-1}(X_t^\varepsilon)\gamma(X_t^\varepsilon)\right|^2\mathrm{d}t\right)\right)\\
=&\mathbb{E}^\varepsilon\left(\phi(X^\varepsilon)\exp\left(\varepsilon\int_0^T\sigma^{-1}(X_t^\varepsilon)\gamma(X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}W_t^\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T\left|\sigma^{-1}(X_t^\varepsilon)\gamma(X_t^\varepsilon)\right|^2\mathrm{d}t\right)\right)\\
=&\mathbb{E}\left(\phi(X)\exp\left(\varepsilon\int_0^T\sigma^{-1}(X_t)\gamma(X_t)\,\mathrm{d}W_t - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T\left|\sigma^{-1}(X_t)\gamma(X_t)\right|^2\mathrm{d}t\right)\right)
\end{aligned}$$

因此,

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\mathbb{E}\phi(X^\varepsilon) = \mathbb{E}\left(\phi(X)\int_0^T\sigma^{-1}(X_t)\gamma(X_t)\,\mathrm{d}W_t\right).$$

在 B-S 模型中, $b(X_t)=rX_t$, $\sigma(X_t)=\sigma X_t$. 取 $\gamma(X_t)=rX_t$, 可得

$$\mathrm{Rho} = \frac{\partial}{\partial r}\mathbb{E}\left(e^{-rT}\phi(X)\right) = -Te^{-rT}\mathbb{E}(\phi(X)) + \frac{re^{-rT}}{\sigma}\mathbb{E}\left(\phi(X)W_T\right).$$

6.3.2 希腊字母 Delta 和 Gamma

本小节中, 我们来计算关于标的资产当前价格的导数 Delta 和两阶导数 Gamma. 假设支付函数 $\phi(X)$ 形如 $\phi(X_{t_1},\cdots,X_{t_m})$, 其中

$$0 < t_1 < \cdots < t_n \le T.$$

引入函数类 $\Gamma_m = \left\{a\in L^2[0,T] : \int_0^{t_i} a(t)\,\mathrm{d}t,\ i=1,2,\cdots,m\right\}$.

首先, 假设 ϕ 是连续可微的, 且导数有界. 命 $u(x)=\mathbb{E}\phi(X_{t_1}^x,\cdots,X_{t_m}^x)$.

$$u'(x) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^m\frac{\partial\phi}{\partial\xi_j}(X_{t_1}^x,\cdots,X_{t_m}^x)\frac{\partial X_{t_j}^x}{\partial x}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^m\frac{\partial\phi}{\partial\xi_j}Y_{t_j}\right).$$

任取 $a\in\Gamma_m$,

$$\int_0^T D_tX_{t_j}a(t)\sigma^{-1}(X_t)Y_t\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_j}Y_{t_j}a(t)\,\mathrm{d}t = Y_{t_j}.$$

因此

$$\begin{aligned}u'(x)&=\mathbb{E}\left(\int_0^T\sum_{j=1}^m\frac{\partial\phi}{\partial\xi_j}(X_{t_1}^x,\cdots,X_{t_m}^x)D_tX_{t_j}a(t)\sigma^{-1}(X_t)Y_t\,\mathrm{d}t\right)\\&=\mathbb{E}\left(\int_0^T D_t\phi(X_{t_1}^x,\cdots,X_{t_m}^x)a(t)\sigma^{-1}(X_t)Y_t\,\mathrm{d}t\right)\\&=\mathbb{E}\left(\phi(X_{t_1}^x,\cdots,X_{t_m}^x)\int_0^T a(t)\sigma^{-1}(X_t)Y_t\,\mathrm{d}W_t\right).\end{aligned}$$

最后一个等号是因为 $(a(t)\sigma^{-1}(X_t)Y_t)_{0\le t\le T}$ 是 $(\mathscr{F}_t)_{0\le t\le T}$-适应的. 注意到上式不依赖于 ϕ 的可微性, 对一般的 $\phi\in L^2$, 作逼近即可.

在 B-S 模型中, $b(X_t)=rX_t$, $\sigma(X_t)=\sigma X_t$. 如果 ϕ 仅与最终时刻的股价 X_T 有关, 可取 $a(t)=\frac{1}{T}$ $(0\le t\le T)$. 从而

$$\mathrm{Delta}=\frac{e^{-rT}}{T}\mathbb{E}\left(\phi(X_T^x)\int_0^T\frac{Y_t}{\sigma X_t}\,\mathrm{d}W_t\right).$$

注意到 $\mathrm{d}Y_t=Y_t(r\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}W_t)$ $(Y_0=1)$, $\mathrm{d}X_t=X_t(r\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}W_t)$ $(X_0=x)$, 由 SDE 解的存在唯一性, $Y_t=xX_t$. 进而

$$\mathrm{Delta}=\frac{e^{-rT}}{\sigma xT}\mathbb{E}\left(\phi(X_T^x)W_T\right).$$

进一步计算可得

$$\mathrm{Gamma}=\frac{\partial\,\mathrm{Delta}}{\partial x}=\frac{e^{-rT}}{\sigma x^2T}\mathbb{E}\left[\phi(X_T^x)\left(\frac{W_T^2}{\sigma T}-W_T-\frac{1}{\sigma}\right)\right].$$

6.3.3 希腊字母 Vega

本小节中, 我们考虑金融产品价格对扩散项系数 $\sigma(X_t)$ 的导数. 仍假设支付函数 $\phi(X)$ 形如 $\phi(X_{t_1},\cdots,X_{t_m})$, 其中

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n\le T.$$

引入函数类 $\widetilde{\Gamma}_m=\left\{a\in L^2[0,T]:\int_{t_{i-1}}^{t_i}a(t)\,\mathrm{d}t=1,\,i=2,\cdots,m\right\}$. 假设扰动后的价格过程 $X^\varepsilon=(X_t^\varepsilon)_{0\le t\le T}$ 适合 SDE

$$\mathrm{d}X_t^\varepsilon=b(X_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t+(\sigma(X^\varepsilon)+\varepsilon\widetilde{\sigma}(X_t^\varepsilon))\,\mathrm{d}W_t.$$

其中 $\widetilde{\sigma}$ 满足以下椭圆性假设.

假设 6.3.2. *存在 $\varepsilon_0>0$ 及 $\eta>0$ 使 $\sigma(x)+\varepsilon\widetilde{\sigma}(x)\ge\eta>0$ 对任何 $x\in\mathbb{R}$ 及 $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ 成*

立.

关于 ε 在 0 处求导可得 $Z = \left(Z_t = \frac{\mathrm{d}X_t^\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\right)_{0\le t\le T}$ 适合 SDE

$$\mathrm{d}Z_t = b'(X_t)Z_t\,\mathrm{d}t + (\sigma'(X_t)Z_t + \widetilde{\sigma}(X_t))\,\mathrm{d}W_t, \quad Z_0 = 0.$$

命 $\beta_t = Y_t^{-1}Z_t$, 则 $\beta = (\beta_t)_{0\le t\le T}$ 适合

$$\mathrm{d}\beta_t = Y_t^{-1}\widetilde{\sigma}(X_t)(\sigma'(X_t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t), \quad \beta_0 = 0.$$

任取 $a \in \widetilde{\Gamma}_m$, 命 $\widetilde{\beta}_a(t) = \sum_{i=1}^m a(t)(\beta(t_i) - \beta(t_{i-1}))\mathbb{1}_{[t_{i-1},t_i]}(t)$, $u^\varepsilon(x) = \mathbb{E}\phi(X_{t_1}^\varepsilon, \cdots, X_{t_m}^\varepsilon)$. 仍不妨先设 ϕ 连续可微且导数有界. 计算

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}u^\varepsilon(x)\Big|_{\varepsilon=0} = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi}{\partial\xi_i}(X_{t_1}, \cdots, X_{t_m})Z_{t_i}\right).$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\int_0^T D_tX(t_i)\sigma^{-1}(t)Y_t\widetilde{\beta}_a(t)\,\mathrm{d}t \\
=&\int_0^{t_i} Y(t_i)\widetilde{\beta}_a(t)\,\mathrm{d}t \\
=&Y(t_i)\sum_{j=1}^i(\beta(t_j) - \beta(t_{j-1}))\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(t)\,\mathrm{d}t \\
=&Y(t_i)(\beta(t_i) - \beta(0)) = Z(t_i),
\end{aligned}$$

那么,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varepsilon}u^\varepsilon(x)\Big|_{\varepsilon=0} &= \mathbb{E}\left(\int_0^T \sum_{i=1}^m \frac{\partial\phi}{\partial\xi_i}(X_{t_1}, \cdots, X_{t_m})D_tX(t_i)\sigma^{-1}(X_t)Y_t\widetilde{\beta}_a(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^T D_t\phi(X_{t_1}, \cdots, X_{t_m})\sigma^{-1}(X_t)Y_t\widetilde{\beta}_a(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\phi(X_{t_1}, \cdots, X_{t_m})\delta(\cdot)\right).
\end{aligned}$$

在 B-S 模型中, $b(X_t) = rX_t$, $\sigma(X_t) = \sigma X_t$. 取 $\widetilde{\sigma}(X_t) = \sigma X_t$. 如果 ϕ 仅与最终时刻的股价 X_T 有关, 可取 $a(t) = \frac{1}{T}$ $(0 \le t \le T)$. 这时,

$$X_t^\varepsilon = x\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right).$$

进而

$$Z_t = \left.\frac{\mathrm{d}X_t^\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = (-\sigma t + W_t)X_t,$$
$$\widetilde{\beta}_a(t) = \frac{1}{T}(\beta(T) - \beta(0)) = \frac{1}{T}Y^{-1}(T)Z(T) = \frac{x}{T}(W_T - \sigma T).$$

这样,

$$\mathrm{Vega} = \frac{e^{-rT}}{\sigma T}\mathbb{E}\left(\phi(X_T)\delta((W_T - \sigma T)h)\right),$$

其中 $\dot{h} = 1$. 由 $\delta(Fh) = -D_hF + Y_hF$,

$$\begin{aligned}\delta\left((W_T - \sigma T)h\right) &= -D_h(W_T - \sigma T) + Y_h(W_T - \sigma T)\\ &= -T + W_T^2 - \sigma T W_T.\end{aligned}$$

这样,

$$\mathrm{Vega} = e^{-rT}\mathbb{E}\left(\phi(S_T)\left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}\right)\right).$$

6.3.4 亚式期权的 Delta

我们计算 T 时刻支付为 $\phi(X) = \phi\left(\int_0^T X_s\,\mathrm{d}s\right)$ 的亚式期权的 Delta 作为结尾 (这一小节写得比较草).

方老师的书中, 散度算子作用在 $Z \in D_1^2(W; H)$ 上, 有

$$\mathbb{E}\int_0^T D_tF\dot{Z}(t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}(\nabla F, Z)_H = \mathbb{E}(F\delta(Z)).$$

另外一些材料中, 散度算子作用在 $\dot{Z} = u$ 上, 即有

$$\mathbb{E}\int_0^T D_tFu(t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}(F\delta(u)).$$

这二者仅仅是形式上有差别. 这里我们为了方便, 取后一种记号.

命 $A(t) = \frac{2Y_t^2}{\sigma(X_t)} / \int_0^T Y_s\,\mathrm{d}s$. 这样,

$$\begin{aligned}&\int_0^T D_t\phi\left(\int_0^T X_t\,\mathrm{d}t\right)A(t)\,\mathrm{d}t\\ =&\phi'\left(\int_0^T X_t\,\mathrm{d}t\right)\int_0^T Y_t^{-1}\sigma(X_t)\left(\int_t^T Y_s\,\mathrm{d}s\right)A(t)\,\mathrm{d}t\\ =&\phi'\left(\int_0^T X_t\,\mathrm{d}t\right)\int_0^T Y_t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

从而,

$$u'(x) = \mathbb{E}\left(\int_0^T D_t\phi\left(\int_0^T X_s\,\mathrm{d}s\right)A(t)\,\mathrm{d}t\right) = \mathbb{E}\left(\phi\delta(A)\right).$$

在 B-S 模型下,

$$A(t) = \frac{2Y_t^2}{\sigma(X_t)\int_0^T Y_s\,\mathrm{d}s} = \frac{2}{\sigma x}\frac{X_t}{\int_0^T X_s\,\mathrm{d}s}.$$

引理 6.3.1. 假设 $F \in \mathscr{F}_T$, $F \in D_1^2(W)$, 则

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \int_0^T D_tFu(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明. 利用 $D_t(FG) = (D_tF)G - FD_tG$ 即可. □

利用引理, 计算

$$\begin{aligned}
\delta\left(\frac{X}{\int_0^T X_s\,\mathrm{d}s}\right) &= \frac{\delta(X)}{\int_0^T X_s\,\mathrm{d}s} - \int_0^T D_t\left(\frac{1}{\int_0^T X_s\,\mathrm{d}s}\right)X_t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\int_0^T X_s\,\mathrm{d}W_s}{\int_0^T X_s\,\mathrm{d}s} + \int_0^T \frac{\int_0^T D_tX_s\,\mathrm{d}s}{\left(\int_0^T X_s\,\mathrm{d}s\right)^2}X_t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\int_0^T X_s\,\mathrm{d}W_s}{\int_0^T X_s\,\mathrm{d}s} + \int_0^T \frac{\int_0^T Y_sY_t^{-1}\sigma(X_t)\mathbb{1}_{(t\le s)}\,\mathrm{d}s}{\left(\int_0^T X_s\,\mathrm{d}s\right)^2}X_t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\int_0^T X_s\,\mathrm{d}W_s}{\int_0^T X_s\,\mathrm{d}s} + \frac{\sigma}{2}.
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{d}X_t = rX_t\,\mathrm{d}t + \sigma X_t\,\mathrm{d}W_t$, 我们有 $\int_0^T X_s\,\mathrm{d}W_s = \frac{1}{\sigma}\left(X_T - x - r\int_0^T X_s\,\mathrm{d}s\right)$. 代入计算可得

$$\mathrm{Delta} = \frac{2e^{-rT}}{\sigma^2 x}\mathbb{E}\left(\phi\left(\int_0^T X_t\,\mathrm{d}t\right)\left(\frac{X_T - x}{\int_0^T X_s\,\mathrm{d}s} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\right).$$