12 月 1 日, 12 月 3 日作业说明

1. 假设 $\varphi(x)$ 由 $\varphi(x) = \mathbb{E}(\xi|\eta = x)$ 定义, 其中 ξ 与 η 是离散型随机变量. 求证: 当 $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$ 时, $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\varphi(\eta)$.

   说明. 对一般 (不一定非负) 函数积分 (求和也是关于计数测度的积分) 的换序需验证 Fubini 定理的条件, 问题中的条件 $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$ 要用上.

2. (Cramer-Wold Device) 假设 $\left\{W^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是个 k 维随机向量序列. 任取 $\beta \in \mathbb{R}^k$, 有

$$\beta^T W^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} \beta_j W_j^{(n)} \xrightarrow{d} F_\beta,$$

   其中 $(F_\beta)_{\beta\in\mathbb{R}^k}$ 是一族分布函数. 证明: $W^{(n)} \xrightarrow{d} F$, 其中 F 由 $(F_\beta)_{\beta\in\mathbb{R}^k}$ 唯一决定.

   说明. 命 $f(\beta) = \widehat{F}_\beta(1) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\exp\left(i\beta^T W^{(n)}\right)$. 由连续性定理, 如果 $f(\beta)$ 在 $\beta = 0$ 处连续, 就可以推出有分布函数 F 使得 $\widehat{F} = f$, 且 $W^{(n)} \xrightarrow{d} F$. 在作业反馈中, 明确引入额外条件并利用连续性定理证明被认为是对的. 但事实上, 没有必要用到更多的条件.

   证明. 注意到 $W_j^{(n)} = e_j^T W^{(n)} \xrightarrow{d} F_{e_j}$ $(1 \le j \le k)$, 我们有 $W_j^{(n)} = O_{\mathbb{P}}(1)$ (参考讲义习题 10.3 (iv)), 即任给 $\varepsilon > 0$, 总有 $M_j > 0$ 使

$$\sup_n \mathbb{P}\left(\left|W_j^{(n)}\right| \ge M_j\right) \le \varepsilon.$$

   命 $M = \max_{1\le j\le n} M_j$, 就有

$$\sup_n \mathbb{P}\left(\left\|W^{(n)}\right\|_\infty \ge M\right) \le \varepsilon.$$

   如此,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\exp\left(i\beta^T W^{(n)}\right) - 1\right| &= \mathbb{E}\left(\left|\exp\left(i\beta^T W^{(n)}\right) - 1\right|; \left\|W^{(n)}\right\|_\infty < M\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left(\left|\exp\left(i\beta^T W^{(n)}\right) - 1\right|; \left\|W^{(n)}\right\|_\infty \ge M\right) \\
&\le \mathbb{E}\left(\left|\beta^T W^{(n)}\right|; \left\|W^{(n)}\right\|_\infty < M\right) + 2\mathbb{P}\left(\left\|W^{(n)}\right\|_\infty \ge M\right) \\
&\le M\left\|\beta\right\|_1 + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

   这样,

$$\left|\widehat{F}_\beta(1) - 1\right| \le \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left|\exp\left(i\beta^T W^{(n)}\right) - 1\right| \le M\left\|\beta\right\|_1 + 2\varepsilon.$$

   命 $\beta \to 0$,

$$\limsup_{\beta\to 0}\left|\widehat{F}_\beta(1) - 1\right| \le 2\varepsilon.$$

   由 $\varepsilon > 0$ 的任意性便有 $f(\beta) = \widehat{F}_\beta(1)$ 在 $\beta = 0$ 处连续. □