Wydział	Imię i nazwisko		Rok	Grupa	Zespół
WI	**Piotr Karamon** **Hubert Kasprzycki**		**2**	**12**	**5**
PRACOWNIA FIZYCZNA WFiIS AGH	Temat: **Wahadło proste**				Nr ćwiczenia
Data wykonania **03.10.2023**	Data oddania **10.10.2023**	Zwrot do popr.	Data oddania	Data zaliczenia	OCENA

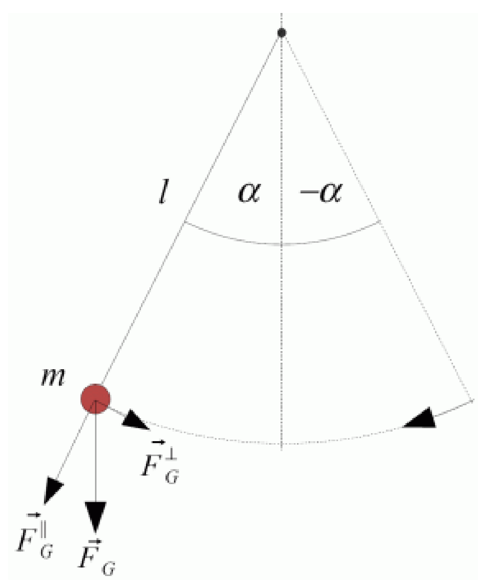
1 Cel ćwiczenia

- Zaznajomienie się z typowymi metodami opracowania danych pomiarowych w laboratoriach fizycznych
- Zapoznanie się z ruchem drgającym na przykładzie drgań wahadła prostego
- Wyznaczenia przyśpieszenia ziemskiego

2 Aparatura pomiarowa

- Stoper w telefonie o dokładności 0.01s
- Przymiar milimetrowy o dokładności 1mm

3 Wstęp teoretyczny



Rysunek 1: [1] Wahadło proste jest obiektem który składa się z ciała o masie punktowej równej m, które jest zawieszone na nieważkiej, nierozciągliwej nici o długości l. Nić ma stały punkt przyłożenia. Na ciało działa siła grawitacji. Składowa $\vec{F}_G^{\perp}$ powoduje ruch wahadłowy.

W pracowni cienką nierozciągliwą nić nawinięto na wysoko położony walec. Następnie na dole nici zawieszono jednorodny walec. Uzyskany w ten sposób obiekt fizyczny ma zbliżone właściwości do teoretycznego wahadła prostego.

Okres drgań wahadła prostego dla wychyleń o małych kątach wyraża się wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

Z tego równania można wyznaczyć przyśpieszenie grawitacyjne g.

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{2}$$

4 Przebieg doświadczenia

4.1 Sposób pierwszy

Mierzymy długość wahadła, a następnie mierzymy czas dziesięciu pełnych drgań wahadła.

l [mm]	Czas t dla 10 okresów [s]	Okres $T = t/10$ [s]
357	12.03	1.203

Przyjmujemy, że w związku z błędami ludzkimi niepewności pomiaru długości wahadła l wynosi:

$$u(l) = 2\text{mm} \tag{3}$$

Natomiast niepewność pomiaru czasu odczytanego ze stopera, wynosi:

$$u(t) = 0.3\text{s} \tag{4}$$

Skoro $t = 10T \implies u(T) = u(10T)/10 = 0.03\text{s}$.

Aby wyliczyć niepewność pomiaru g stosujemy prawo przenoszenia niepewności, ponieważ zmierzony okres oraz długość nie są skorelowane a ich niepewności są dużo mniejsze od wartości.

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}u(l)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}u(T)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}u(l)\right)^2 + \left(\frac{-8\pi^2 l}{T^3}u(T)\right)^2} \tag{5}$$

Podstawiając wartości do równań (2) oraz (5) otrzymujemy:

$$u(g) = 0.49\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
$$g = 9.74\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

4.2 Sposób drugi

Mierzymy długość wahadła l, a następnie dziesięć razy mierzymy czas dziesięciu pełnych drgań wahadła. Długość wahadła nie uległa zmianie i jak w sposobie pierwszym $l = 357$mm tak samo jak $u(l) = 2mm$.

Lp.	Czas t dla 10 okresów [s]	Okres $T = t/10$ [s]
1	12.03	1.203
2	11.95	1.195
3	11.99	1.199
4	11.92	1.192
5	11.98	1.198
6	11.81	1.181
7	11.81	1.181
8	11.98	1.198
9	11.48	1.148
10	11.87	1.187

Najpierw liczymy średni okres.

$$\overline{T} = \frac{\sum_{i=1}^{10} T_i}{10} = 1.1882\text{s} \tag{6}$$

Aby obliczyć niepewność pomiaru okresu używamy estymatora odchylenia standardowego średniej

$$u(\overline{T}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} \left(T_i - \overline{T}\right)^2}{n(n-1)}} \tag{7}$$

Wyliczamy niepewność $\overline{T}$ a następnie podstawiamy do równań (2) oraz (5) pamiętając, że $u(\overline{T})$ wstawiamy w miejsce $u(T)$ a $\overline{T}$ w miejsce T.

$$\begin{aligned} u(\overline{T}) &= 0.0051\text{s} \\ u(g) &= \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{\overline{T}^2}u(l)\right)^2 + \left(\frac{-8\pi^2 l}{\overline{T}^3}u(\overline{T})\right)^2} = 0.11\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ g &= \frac{4\pi^2 l}{\overline{T}^2} = 9.98\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć niepewność rozszerzoną, przyjmując $k = 2$

$$U(g) = ku(g) = 2 \cdot 0.11\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.22\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Z tego wynika, że

$$g = 9.98\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \pm 0.22\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Wartość tabelaryczna przyspieszenia ziemskiego dla Krakowa wynosi $g = 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a więc otrzymana przez nas wartość jest z nią zgodna.

4.3 Sposób trzeci

Dokonujemy sześciu pomiarów dla różnych długości wahadła l. Za każdym razem mierzymy czas dziesięciu pełnych drgań wahadła.

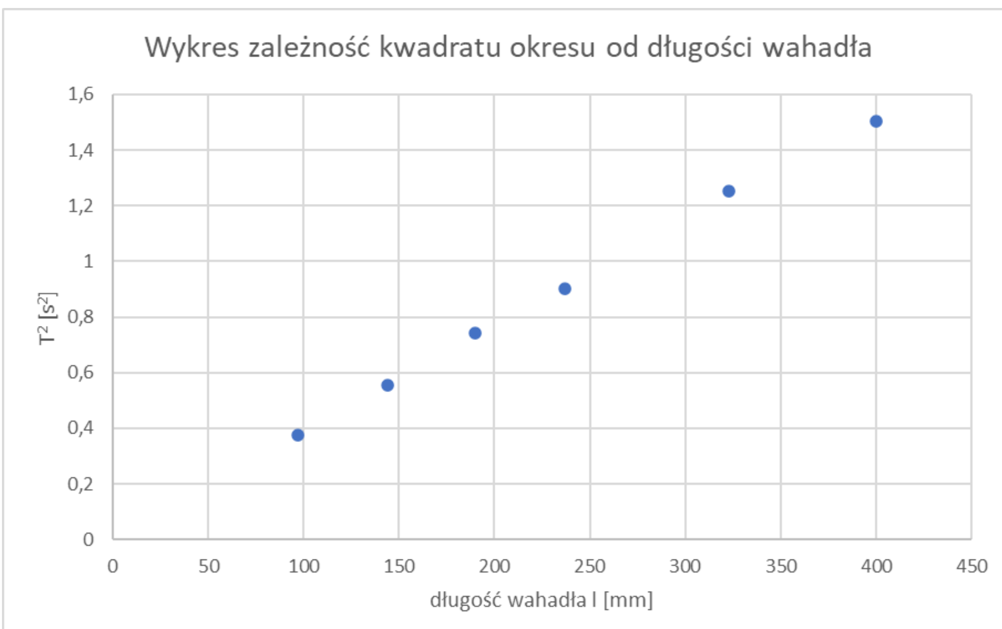
l [mm]	Czas t dla 10 okresów [s]	Okres $T = t/10$ [s]	T^2 [s^2]
97	6.14	0.614	0.376996
144	7.45	0.745	0.555025
190	8.62	0.862	0.743044
237	9.50	0.950	0.902500
323	11.20	1.120	1.254400
400	12.27	1.227	1.505529

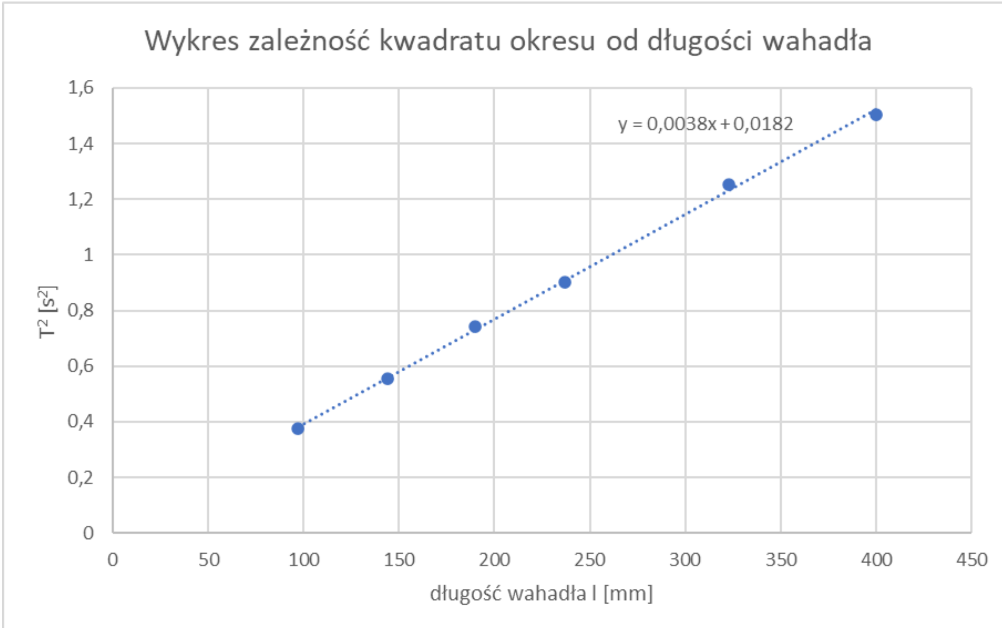
Z równania (1)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g}$$

$$T^2 = al \qquad \text{gdzie } a = \frac{4\pi^2}{g} = \text{const}$$

Z tego wynika, że zależność kwadratu okresu jest liniowa względem długości wahadła.





Otrzymujemy prostą o równaniu:

$$y = 0.0038x + 0.0182$$

Zatem

$$a = 3.8\frac{s^2}{m}$$

Aby obliczyć niepewność $u(g)$ stosujemy prawo przenoszenia niepewności. Tym razem g jest funkcją tylko jednej zmiennej a. Program liczący liniową regresję również obliczył niepewność a która wynosi $u(a) = 0.061\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}}$

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial a}u(a)\right)^2} = \left|\frac{-4\pi^2}{a^2}u(a)\right| = 0.17\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Wartość g obliczamy korzystając ze wzoru $a = \frac{4\pi^2}{g}$ odpowiednio go przekształcając:

$$g = \frac{4\pi^2}{a} = 10,39\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

5 Wnioski

W wyniku przeprowadzenia trzech różnych podejść otrzymaliśmy wartości g które w różnym stopniu różnią się od wartości tabelarycznej. Sposoby różniły się znacząco stopniem skomplikowania. Od pierwszego, który można wykonać używając kartki papieru i kalkulatora prostego, do trzeciego w którym korzystaliśmy już z arkusza kalkulacyjnego i liniowej regresji.

Wraz ze stopniem zaawansowania metody udawało nam się uzyskiwać coraz mniejszą niepewność $u(g)$. Zdziwił nas natomiast fakt, iż wartość g w sposobie ostatnim najbardziej odbiega od wartości tabelarycznej. Możliwym jest, że wynik ten tak diametralnie odbiega od wartości tabelarycznej ponieważ wymagał wielokrotnego mierzenia długości wahadła. Pomiar długości był wykonywany przez wiele osób, pewnie z różniącą się dbałością. Był on jednocześnie o wiele trudniejszy od pomiaru okresu w którym wystarczyła odrobina refleksu. Mierząc długość należało być bardzo ostrożnym jeżeli chodzi o wyznaczenie punktu przyłożenia oraz środka masy cylindra.

Wyniki wyznaczone w trzech sposobach różnią się między sobą oraz są inne od wartości tabelarycznej, istnieje ku temu kilka powodów:

- Błędy ze strony ludzkiej - złe przyłożenie przymiaru milimetrowego do środka cylindra i punktu przyłożenia nici. Zbyt wolna reakcja przy mierzeniu czasu.
- Niedokładność przyrządów pomiarowych.
- Możliwe, że wychylanie masy o za duży kąt przy którym wzór na okres drgań wahadła staje się już wyraźnie nieprecyzyjny.
- Założenie, że mamy do czynienia z wahadłem prostym a nie fizycznym.
- Ciężarek był walcem, możliwe że przy użyciu kulki otrzymalibyśmy lepsze wyniki.

Bibliografia

[1] M101. przemiany energii w ruchu wahadła. https://ppef.amu.edu.pl/images/materialy-dydaktyczne/filami/pl/M102-Wahadlo.pdf.