

Wydział WI	Imię i nazwisko Piotr Karamon Hubert Kasprzycki	Rok 2	Grupa 12	Zespół 5
PRACOWNIA FIZYCZNA WFiS AGH	Temat: Kondensatory			Nr ćwiczenia 33
Data wykonania 24.10.2023	Data oddania 31.10.2023	Zwrot do popr.	Data oddania	Data zaliczenia
				OCENA

1 Cel ćwiczenia

Pomiar pojemności kondensatorów powietrznych i z warstwą dielektryka w celu wyznaczenia stałej elektrycznej ε_0 (przenikalności dielektrycznej próżni) i przenikalności względnych ε_r różnych materiałów.

2 Wstęp teoretyczny

2.1 Podstawy kondensatorów oraz wyznaczanie stałej elektrycznej

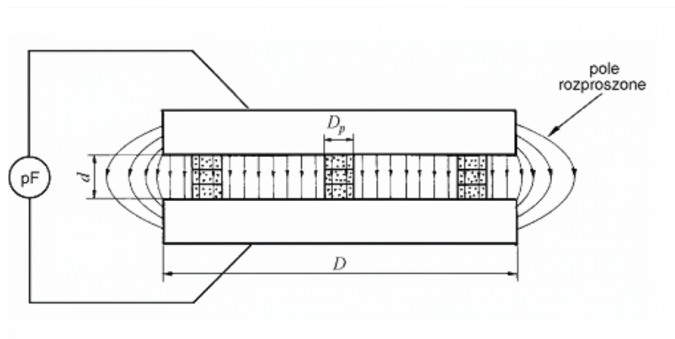
Kondensator jest układem przewodników oddzielonych warstwą izolatora. Przez pojemność kondensatora C rozumiemy stosunek ładunku Q do napięcia między okładkami U czyli $C = \frac{Q}{U}$

Popularny, acz uproszczony wzór na pojemność kondensatora płaskiego

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} \quad (1)$$

Wartości ε_0 nie możemy wyznaczać wprost z powyższego wzoru z dwóch powodów.

- Po pierwsze krążki określające odległość d między płytami wykonane są z materiału o przenikalności dielektrycznej ε_r znacznie większej od jedności, co powoduje powiększenie całkowitej pojemności kondensatora.
- Drugi powód to istnienie pola rozproszonego. Z praw elektrostatyki wynika, że poza brzegami kondensatora istnieje niejednorodne (o zakrzywionych liniach sił) pole elektryczne, nazywane polem rozproszonym. Pole rozproszone powoduje dodatkowy wzrost pojemności kondensatora.



Rysunek 1: Powietrzny kondensator płaski z trzema słupkami dielektryka

W naszym eksperymencie przybliżeniem kondensatora próżniowego jest kondensator powietrzny rysunek 1. Okładkami

kondensatora są kołowe płyty metalowe. Określoną odległość między płytami uzyskuje się przez umieszczenie w trzech miejscach stosu izolujących krążków. Do pomiaru pojemności kondensatora stosujemy cyfrowy miernik pojemności.

Kondensator nasz potraktować można jako równoległe połączenie kondensatora z dielektrykiem o przenikalności względnej ε_r i łącznej powierzchni okładek równej $3S_p$ (gdzie S_p jest powierzchnią jednego krążka) oraz kondensatora próżniowego, o powierzchni okładek równej $S - 3S_p$.

Pojemność całkowita wynosi:

$$C = \frac{\varepsilon_0(S - 3S_p)}{d} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r 3S_p}{d}$$

Z powyższego wzoru wartość ε_0 obliczamy jako

$$\varepsilon_0 = \frac{Cd}{S + 3(\varepsilon_r - 1)S_p} \quad (2)$$

Ten wzór jednak nadal nie uwzględnia pola rozproszonego. W naszym ćwiczeniu zastosujemy doświadczalny sposób eliminacji wpływu pola rozproszonego. Efektywna objętość pola rozproszonego jest rzędu $2\pi r d^2$, gdyż pole to zajmuje z grubsza pas o wysokości i szerokości rzędu d wokół obwodu kołowych płyt kondensatora. Natomiast objętość pola jednorodnego wewnątrz kondensatora wynosi $\pi r^2 d$. Względny udział pola rozproszonego, będący stosunkiem tych objętości, wynosi $2d/r$, czyli że maleje do zera w granicy $d \rightarrow 0$.

Wykonamy zatem serię pomiarów pojemności C dla różnych wartości d , a następnie wykres iloczynu Cd w funkcji odległości okładek d . Przez uzyskane punkty wykresu przeprowadzamy analitycznie gładką krzywą i ekstrapolujemy, czyli przedłużamy do wartości $d = 0$. Współrzędną punktu przecięcia krzywej $Cd = f(d)$ z osią pionową nazywamy ekstrapolowaną wartością iloczynu $(Cd)_{\text{extr}}$. Wartość $(Cd)_{\text{extr}}$ podstawiamy do licznika wzoru (2) by uzyskać poprawną wartość ε_0 . Ponadto powierzchnię okładki kondensatora S i przekładki S_p obliczamy na podstawie zmierzonych średnic D i D_p , czyli $S = \pi \frac{D^2}{4}$ oraz $S_p = \pi \frac{D_p^2}{4}$. W ten sposób otrzymujemy wzór końcowy na ε_0 .

$$\varepsilon_0 = \frac{4}{\pi} \frac{(Cd)_{\text{extr}}}{D^2 + 3(\varepsilon_r - 1)D_p^2} \quad (3)$$

2.2 Obliczanie prędkości światła

Aby obliczyć prędkość światła w próżni wykorzystamy wcześniej obliczoną stałą ε_0 oraz wzór

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (4)$$

Będziemy do tego potrzebować jeszcze jednej stałej μ_0 której wartość wynosi

$$\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

2.3 Pomiar przenikalności względnej dielektryków

Wartość ε_r dielektryków stałych wyznaczyć można przez pomiar pojemności kondensatora płaskiego z okładkami oddzielnymi cienką płytą z badanego materiału. Korzystamy ze wzoru (1), poprawki na pole rozproszone nie będziemy uwzględniać.

2.4 Kabel koncentryczny

Obok kondensatora płaskiego przykładem obiektu o określonej pojemności jest kabel koncentryczny. Można go traktować jako kondensator cylindryczny, którego jedną okładką jest środkowy drut, drugą – miedziany oplot. Pojemność kondensatora cylindrycznego wyraża wzór

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l}{\ln \frac{R}{r}} \quad (5)$$

gdzie: R – promień zewnętrzny
 r – promień wewnętrzny
 l – długość kabla

3 Aparatura pomiarowa

Układ pomiarowy składa się z kondensatora z rysunku 1 oraz z cyfrowego miernika pojemności. Kondensator składa się z dwóch kołowych płyt metalowych o płaskiej powierzchni oraz z przekładek wytoczonych z płyty pleksiglasowej. Do pomiarów geometrycznych używamy przymiaru milimetrowego (linijka) i śruby mikrometrycznej.

4 Przebieg doświadczenia

Na początku eksperymentu, konieczne było uruchomienie miernika LCR i ustawienie zakresu na 200 pF. W następnym etapie, dokonaliśmy pomiarów grubości przekładek z pleksiglasu. Umieściliśmy je na dolnej okładce kondensatora i położyliśmy na nich okładkę górną. Następnie przeprowadziliśmy pomiar pojemności kondensatora. Kolejno dokonaliśmy pomiaru pojemności kondensatora dla 2, 3, 4, 5 przekładek oraz ponownie dla jednej przekładki. Następnie umieściliśmy między okładkami kondensatora płyty wykonane z drewna, pleksiglasu i PCV, wcześniej mierząc ich grubości. Kolejnym obiektem poddanym badaniu był kabel koncentryczny. Dokonaliśmy pomiaru jego długości, średnicy wewnętrznej i zewnętrznej oraz pojemności.

5 Wyniki pomiarów

5.1 Kondensator płaski

Tabela 1: Pomiar pojemności kondensatora w funkcji odległości elektrod

przekładki	d_1 [mm]	d_2 [mm]	d_3 [mm]	$d = \frac{d_1+d_2+d_3}{3}$ [mm]	C [pF]	Cd [mm · pF]
1	4.35	4.32	4.36	4.34	118.4	514.25
2	7.04	6.81	6.8	6.88	71.2	490.09
3	10.93	10.65	10.66	10.75	48.3	519.06
5	14.75	14.5	14.54	14.6	37.7	550.29
4	16.6	16.65	16.36	16.54	31.3	517.6
1	3.63	3.85	3.63	3.7	121.2	448.84

Średnica kondensatora: 24 cm
Średnica przekładki: 20.05 mm

5.2 Kondensator płaski z dielektrykami

Tabela 2: Pomiar pojemności kondensatora w zależności od użytego materiału

materiał	d [mm]	C [pF]
drewno	9.71	201
PCV	3.11	374
pleksiglas	3.9	311

5.3 Kabel koncentryczny

Średnica zewnętrzna $2R = 5$ mm

Średnica wewnętrzna $2r = 1.19$ mm

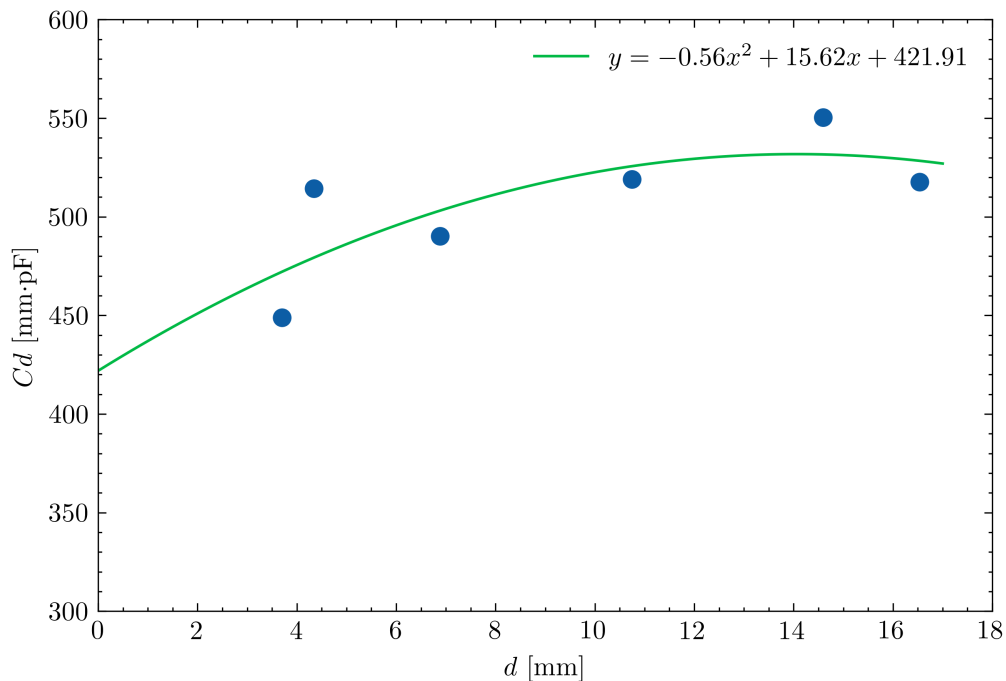
Długość $l = 65.5$ cm

Pojemność kabla $C = 32.5$ pF

6 Opracowanie wyników

6.1 Obliczanie stałej elektrycznej i prędkości światła w próżni

Aby obliczyć $(Cd)_{\text{extr}}$ rysujemy wykres rysujemy wykres $Cd = f(d)$ a następnie dopasowujemy do niego krzywą $y = ax^2 + bx + c$.



Rysunek 2: Wykres $Cd = f(d)$ z dopasowaną gładką krzywą.

Z wykresu oraz obliczeń programu który dopasował krzywą wynika

$$u((Cd)_{\text{extr}}) = 63\text{mm} \cdot \text{pF} \quad (6)$$

$$(Cd)_{\text{extr}} = 421.91\text{mm} \cdot \text{pF} = 422\text{mm} \cdot \text{pF} \quad (7)$$

Aby obliczyć ε_0 wykorzystamy wzór (3), natomiast by obliczyć niepewność naszego wyniku wykorzystamy wzór w którym pominiemy wyraz poprawkowy $3(\varepsilon_r - 1)D_p^2$, czyli wzór:

$$\varepsilon_0 = \frac{4}{\pi} \frac{(Cd)_{\text{extr}}}{D^2}$$

Zatem stosujemy prawo przenoszenia niepewności w wyniku czego otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_0) &= \sqrt{\left[\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial (Cd)_{\text{extr}}} \cdot u((Cd)_{\text{extr}}) \right]^2 + \left[\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial D} \cdot u(D) \right]^2} = \\ &= \sqrt{\left[\frac{4}{\pi D^2} \cdot u((Cd)_{\text{extr}}) \right]^2 + \left[\frac{8(Cd)_{\text{extr}}}{\pi D^3} \cdot u(D) \right]^2} = \\ &= \sqrt{\left[\frac{4}{\pi (240\text{mm})^2} \cdot 63\text{mm} \cdot \text{pF} \right]^2 + \left[\frac{8 \cdot 422\text{mm} \cdot \text{pF}}{\pi (240\text{mm})^3} \cdot 1\text{mm} \right]^2} = \\ &= 1.381 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} = 1.4 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \end{aligned} \quad (8)$$

Przekładki były wykonane z pleksiglasu zatem użyjemy $\varepsilon_r = 2,6$.

$$\varepsilon_0 = \frac{4}{\pi} \frac{(Cd)_{\text{extr}}}{D^2 + 3(\varepsilon_r - 1)D_p^2} = \frac{4}{\pi} \frac{422\text{mm} \cdot \text{pF}}{(240\text{mm})^2 + 3(2.6 - 1)(20.05\text{mm})^2} = 9.024 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \quad (9)$$

Niepewność rozszerzona $U(\varepsilon_0)$ jest równa $U(\varepsilon_0) = 2 \cdot u(\varepsilon_0) = 2,8 \frac{\text{F}}{\text{m}}$ Ostatecznie możemy zapisać:

$$\varepsilon_0 = 9.024 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \pm 2.8 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \quad (10)$$

Wyliczona przez nas wartość jest zgodna z wartością tabelaryczną wynoszącą $\varepsilon_0 = 8.542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$. Trzeba jednakże przyznać, że uzyskana przez nas niepewność jest bardzo duża. Może to być wynikiem błędów ludzkich takich jak niestaranność w mierzeniu grubości przekładek lub niedokładne ułożenie płyt kondensatora jedna nad drugą lub przekładek. Możliwe również, że część winy za dużą niepewności stoi po stronie sprzętu oraz otoczenia. Miernika nie byliśmy w stanie wyzerować, był zasilany bateriami, które mogły już nie być w najlepszej kondycji. Tutaj również należy wspomnieć o tym, iż mamy tutaj do czynienia z kondensatorem powietrznym, który jest tylko przybliżeniem kondensatora próżniowego.

Aby wyliczyć prędkość światła skorzystamy ze wzoru (4), wynika z niego, że c jest funkcją jednej zmiennej ε_0 aby obliczyć niepewność pomiaru skorzystamy z prawa przenoszenia niepewności.

$$\begin{aligned} u(c) &= \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial \varepsilon_0} \cdot u(\varepsilon_0) \right)^2} = \left| \frac{u(\varepsilon_0)}{\sqrt{\mu_0} \cdot 2\varepsilon_0^{\frac{3}{2}}} \right| = \left| \frac{1.381 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}} \cdot 2 \cdot (9.024 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}})^{\frac{3}{2}}} \right| = 22722709 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 23000000 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ c &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{9.042 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}} = 296662612 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Zatem niepewność rozszerzona $U(c)$ jest równa $U(c) = 2 \cdot u(c) = 46000000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Ostatecznie możemy zapisać

$$c = 296662612 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 4.6 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Wyliczona przez nas wartość prędkości światła jest zgodna z wartością tabelaryczną. Uzyskana niepewność, jest nie ma co się oszukiwać podobnie jak w przypadku $u(\varepsilon_0)$, bardzo duża. Zapewne z powodu tych samych powodów, o których pisaliśmy wyżej przy obliczaniu $u(\varepsilon_0)$.

6.2 Obliczanie przenikalności względnej materiałów

Aby obliczyć ε_r skorzystamy ze wzoru (1) odpowiednio go przekształcając w wyniku czego otrzymujemy.

$$\varepsilon_r = \frac{Cd}{\varepsilon_0 S} \quad (11)$$

Zatem dla drewna:

$$\varepsilon_r = \frac{Cd}{\varepsilon_0 S} = \frac{201\text{pF} \cdot 0.00971\text{mm}}{8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \pi \left(\frac{0.240\text{m}}{2}\right)^2} = 4.873$$

Dla drewna wartość ε_r powinna się mieścić w przedziale (2, 7) wyliczona przez nas wartość mieści się w tym przedziale.

Dla PCV:

$$\varepsilon_r = \frac{Cd}{\varepsilon_0 S} = \frac{374\text{pF} \cdot 0.00311\text{mm}}{8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \pi \left(\frac{0.240\text{m}}{2}\right)^2} = 2.904$$

Wartość tabelaryczna dla PCV jest równa 2.8, wyliczona przez nas wartość jest do niej zbliżona.

Dla pleksiglasu:

$$\varepsilon_r = \frac{Cd}{\varepsilon_0 S} = \frac{311\text{pF} \cdot 0.00390\text{mm}}{8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \pi \left(\frac{0.240\text{m}}{2}\right)^2} = 3.029$$

Wartość tabelaryczna dla pleksiglasu jest równa 2.6 wyliczona przez nas wartość jest porównywalna, lecz widocznie wyższa.

6.3 Przenikalność względna kabla koncentrycznego

Aby obliczyć ε_r dla kabla przekształcamy wzór (5) otrzymując

$$\varepsilon_r = \frac{C \ln \frac{R}{r}}{2\pi \varepsilon_0 l}$$

Następnie podstawiamy dane:

$$\varepsilon_r = \frac{32.5\text{pF} \ln \frac{2.5\text{mm}}{0.595\text{mm}}}{2\pi \cdot 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 0.655\text{m}} = 1.280$$

Wartość ta powinna być w okolicach 2.3 otrzymana przez nas wartość jest więc mocno zaniżona. Najprawdopodobniej wynika to z niedokładnego pomiaru średnicy zewnętrznej i wewnętrznej kabla.

7 Wnioski

Podczas przeprowadzania eksperymentu zmierzaliśmy pojemność kondensatora płaskiego w zależności od odległości między jego okładkami. Następnie, wykorzystując wyznaczoną pojemność oraz wartości średnic okładek, obliczyliśmy przenikalność elektryczną próżni. Uzyskana wartość wyniosła $\varepsilon_0 = 9.024 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \pm 2.8 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$, co jest zgodne z wartością tabelaryczną. Jednakże niepewność pomiaru była dość duża, co może wynikać z błędów pomiarowych, niedokładności w pomiarach grubości przekładek i ułożenia płyt kondensatora oraz uproszczeń w modelu kondensatora.

Ponadto, obliczyliśmy prędkość światła w próżni, wykorzystując wartość ε_0 oraz przenikalność magnetyczną próżni μ_0 . Otrzymana prędkość światła wyniosła $c = 296662612 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 46000000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, wartość jest zgodna z wartością tabelaryczną prędkości światła, co potwierdza poprawność wyznaczonej stałej ε_0 . Jednak niepewność pomiaru prędkości światła jest znacząca.

Obliczając przenikalność względną kabla koncentrycznego, otrzymaliśmy wartość $\varepsilon_r = 1.280$. Ta wartość jest niższa od oczekiwanej (która wynosi 2.3), co może wynikać z niedoskonałości pomiaru wymiarów kabla.

W trakcie eksperymentu zmierzono również pojemności kondensatora z różnymi dielektrykami (drewno, PCV, pleksiglas). Na podstawie tych pomiarów obliczono przenikalności względne tych materiałów. Wartości przenikalności względnych dla drewna, PCV i pleksiglasu były zgodne z wartościami tabelarycznymi.