Laboratorium 10 cz. 1 - Teoria śladów

Piotr Karamon

07.01.2025.

Treści zadań

Zadanie 1

Rozważmy zbiór zmiennych ("bazę danych") x, y, z i następujący zbiór akcji ("transakcji") modyfikujących wartości tych zmiennych:

- (a) $x := x + y$
- (b) $y := y + 2z$
- (c) $x := 3x + z$
- (d) $z := y - z$

Akcje możemy wykonywać współbieżnie z następującym zastrzeżeniem: akcja zmieniająca wartość zmiennej nie może być wykonana współbieżnie z akcją odczytującą lub modyfikującą stan tej samej zmiennej. W języku teorii śladów: dwie akcje są zależne jeśli obie operują na tej samej zmiennej, a przynajmniej jedna z nich modyfikuje wartość tej zmiennej.

Zadanie 1a

W alfabecie $A = \{a, b, c, d\}$ określ relacje zależności i niezależności.

Zadanie 1b

Wyznacz ślad wyznaczony przez słowo $w = baadcb$ względem powyższej relacji niezależności.

Zadanie 1c

Wyznacz postać normalną Foaty śladu $[w]$, można skorzystać z algorytmu z pracy *Volker Diekert, Yves Metivier: Partial Commutation and Traces, str. 11.*

Zadanie 1d

Narysuj graf zależności Diekerta (w postaci zminimalizowanej - bez krawędzi "przechodnich") dla słowa w.

Zadanie 2

Dany jest zbiór akcji:

- (a) $x \leftarrow y + z$
- (b) $y \leftarrow x + w + y$
- (c) $x \leftarrow x + y + v$

- (d) $w \leftarrow v + z$
- (e) $v \leftarrow x + v + w$
- (f) $z \leftarrow y + z + v$

Zadanie 2a

W alfabecie $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ określ relacje zależności i niezależności.

Zadanie 2b

Wyznacz postać normalną Foaty śladu $[u]$, gdzie $u = acdcfbbe$.

Zadanie 2c

Narysuj graf zależności Diekerta (w postaci zminimalizowanej - bez krawedzi "przechodnich") dla słowa u.

Zadanie 1

Mamy następujące akcje

- (a) $x := x + y$
- (b) $y := y + 2z$
- (c) $x := 3x + z$
- (d) $z := y - z$

Relacja zależność D, jest relacją symetryczną i refleksywną, zatem:

$$D = \mathrm{sym}\{(a,b),(a,c),(b,d),(c,d)\} \cup I_A =$$
$$= \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,d),(d,b),(c,d),(d,c)\}$$

Relacja niezależności to $I = A^2 - D$, zatem:

$$I = \{(a,d),(b,c),(c,b),(d,a)\}$$

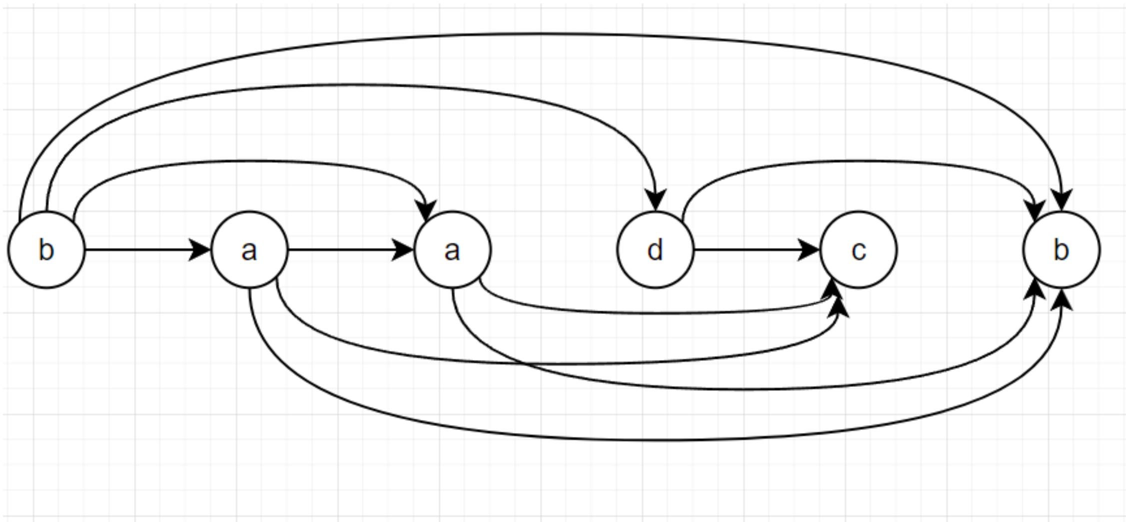
Aby wyznaczyć ślad dla słowa $w = baadcb$ korzystamy ze zbioru I i zamieniamy kolejność sąsiednich operacji, jeżeli są one niezależne.

$$[baadcb]_I = \{baadcb, badacb, baadbc, bdaacb, badabc, baadbc\}$$

Aby wyznaczyć postać normalną Foaty dla śladu $[w]$ wykorzystujemy podany algorytm.

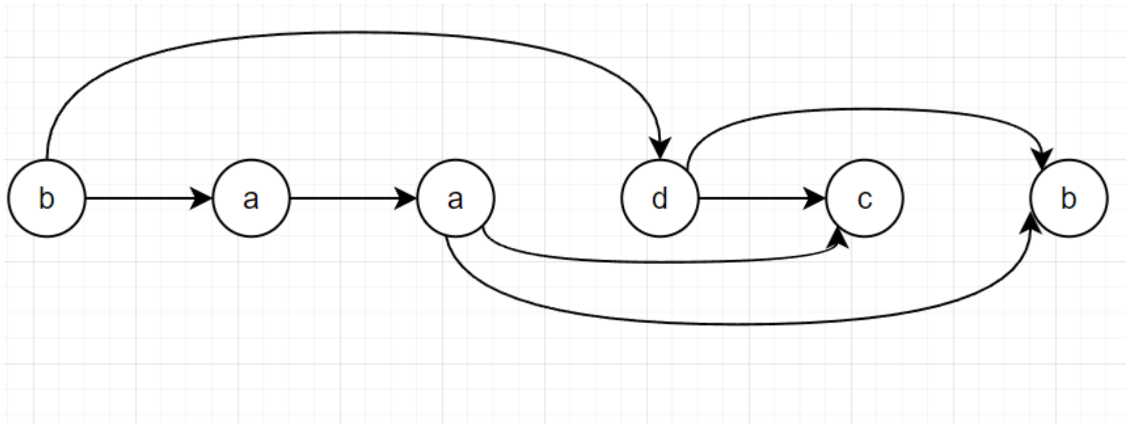
$$[w] = (b)(ad)(a)(bc)$$

Aby stworzyć graf Diekerta dla słowa $baadcb$ najpierw tworzymy graf, w którym krawędź występuje jeżeli dwie akcje są zależne, ale jest to krawędź skierowana.



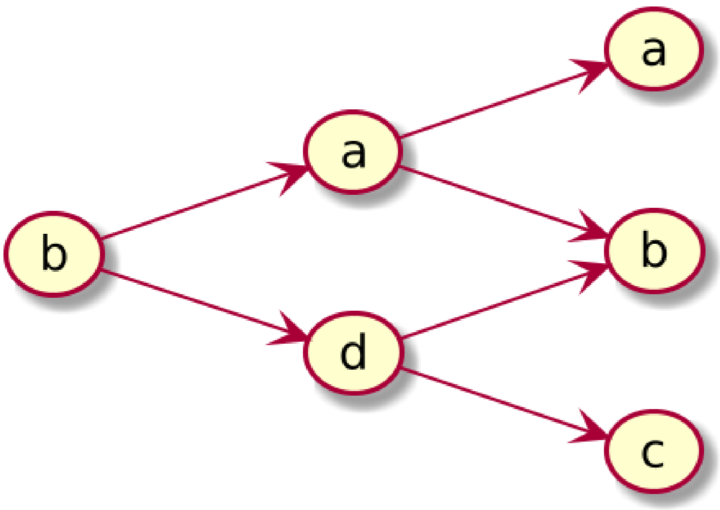
Rysunek 1: Graf Diekerta wraz z krawędziami przechodnimi dla słowa w.

Następnie usuwamy krawędzie przechodnie, w rezultacie dostajemy graf:



Rysunek 2: Graf Diekerta w postaci zminimalizowanej dla słowa w.

Dla lepszej czytelności możemy trochę poprzemieszczać elementy grafu. Do wygenerowania grafu użyjemy PlantUML.



Rysunek 3: Graf Diekerta w postaci zminimalizowanej dla słowa w.

Zadanie 2

Dany jest zbior akcji:

- (a) $x \leftarrow y + z$
- (b) $y \leftarrow x + w + y$
- (c) $x \leftarrow x + y + v$
- (d) $w \leftarrow v + z$
- (e) $v \leftarrow x + v + w$
- (f) $z \leftarrow y + z + v$

Relacja zależności:

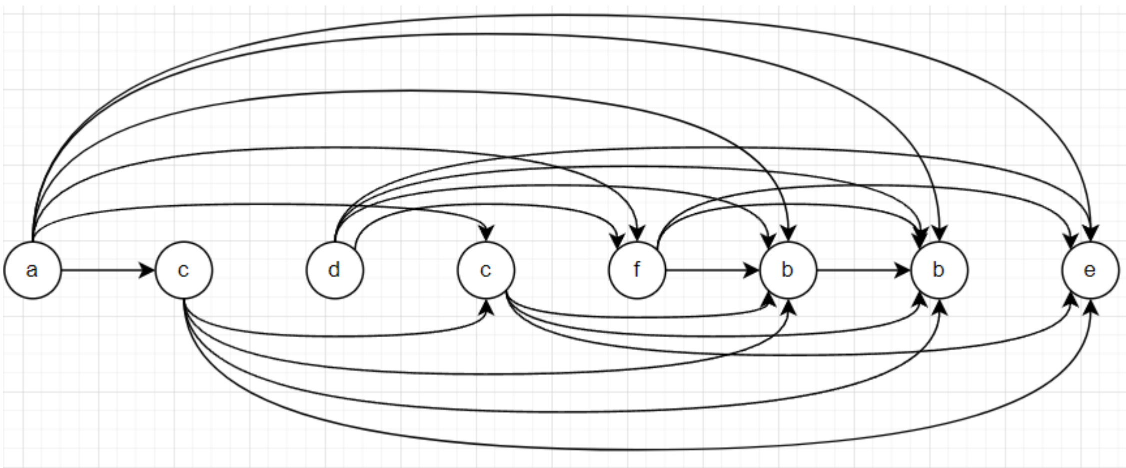
$$D = I_A \cup \text{sym}\{(a, b), (a, c), (a, e), (a, f), (b, c), (b, d), (b, f), (c, e), (d, e), (d, f), (e, f)\}$$

Relacja niezależności:

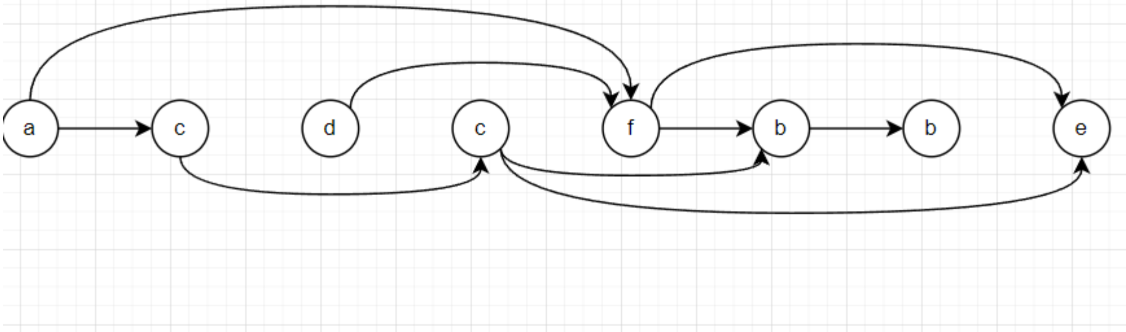
$$I = \text{sym}\{(a, d), (b, e), (c, d), (c, f)\}$$

Postać normalna Foata śladu $[u]$, gdzie $u = acdcfbbe$. Wykorzystujemy podany algorytm i otrzymujemy:

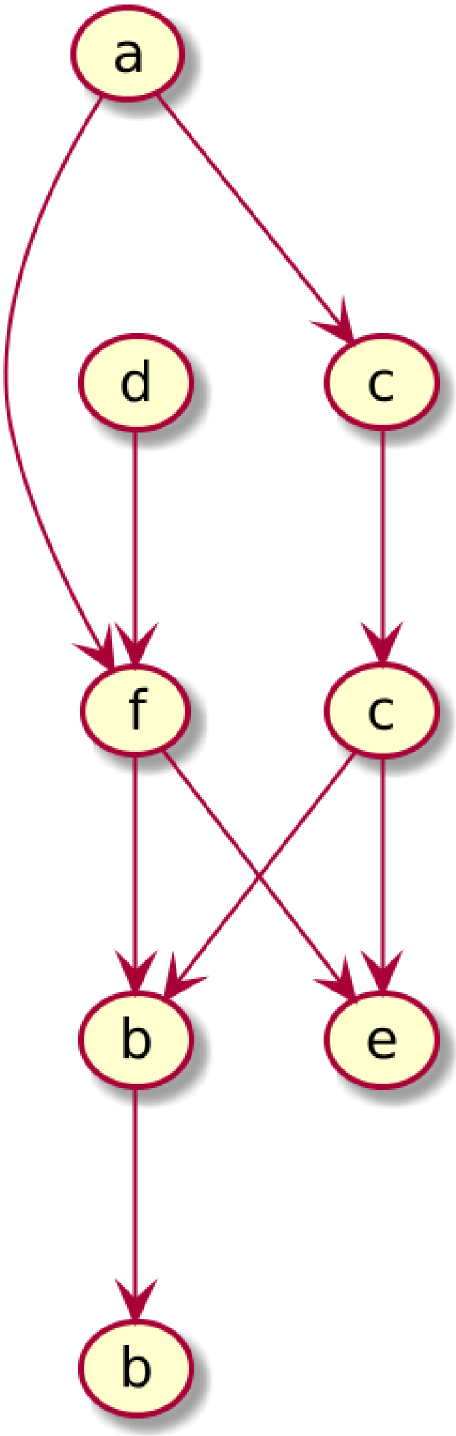
$$[u] = (ad)(cf)(c)(be)(b)$$



Rysunek 4: Graf Diekerta wraz z krawędziami przechodnimi dla słowa u.



Rysunek 5: Graf Diekerta w postaci zminimalizowanej dla słowa u.



Rysunek 6: Graf Diekerta w postaci zminimalizowanej dla słowa u.

Bibliografia

- Volker Diekert, Yves Metivier : Partial Commutation and Traces
- PlantUML Language Reference