INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

Historie

- Egypt (1820 př. Kr.)
  - výpočet určitých ploch a objemů
- Babylon
  - Lichoběžníkové pravidlo při pozorování Jupiteru
- Eudoxus (Řecko 408 - 355 př. Kr) a Archimedes (Řecko 287 - 212 př. Kr.)
  - vyplnění plochy n-úhelníkem.
- Alhazen (Irák, 965 - 1040)
  - výpočet objemu paraboloidu
- Newton (Principia 1687), Leibniz (Nova Methodus pro Maximis et Minimis 1684)

- Určení plochy S vymezené grafem funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$.
- Určení funkce, pokud je známa její derivace

Derivace a diferenciál

- Derivace
  - Funkce f definovaná na okolí bodu x_0 má v bodě x_0 derivaci (je derivovatelná), existuje-li konečná limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(c)$$

  - Této limitě říkáme derivace funkce f v bodě x_0

- Diferenciál
  - Funkce f má v bodě x_0 diferenciál (je diferencovatelná), existuje-li číslo A a funkce $\omega(h)$ taková, že platí

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \omega(h) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0$$

  - Číslo A je (první) derivace funkce f v bodě x_0 a lineární funkci Ah proměnné h říkáme (první) diferenciál funkce f v bodě x_0 a píšeme

$$df(x_0, h) = Ah = f'(x_0)h$$

Neurčitý integrál – primitivní funkce

- Určení funkce, pokud je známa její derivace
- Funkce $F(x)$ je ***primitivní funkcí*** k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, pokud pro všechna x platí

$$F'(x) = f(x)$$

- Ke každé funkci $f(x)$, spojité na $\langle a, b \rangle$, existuje primitivní funkce (nekonečně mnoho) ve tvaru:

$$F(x) + C$$

- kde C je libovolná konstanta. Poté lze zapsat

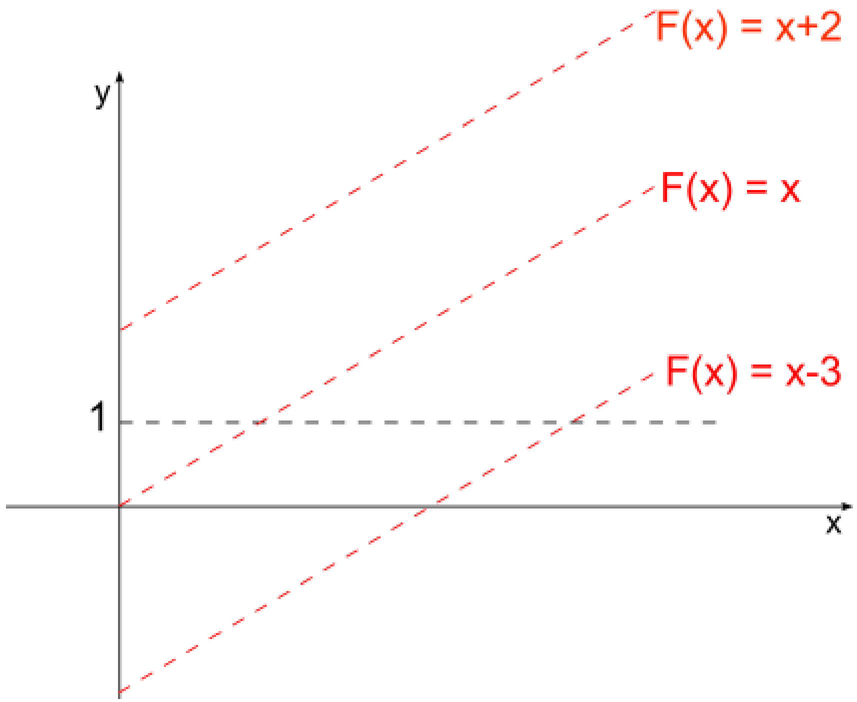
$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

- Znak $\int$ má význam množiny všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ a nazývá se **neurčitým integrálem funkce** $f(x)$
- Funkce $f(x)$ se nazývá integrand
- Symbol dx (diferenciál x) slouží k označení proměnné, podle které integrujeme

Příklad

- Vezměme jednoduchou funkci $f(x) = 1$.
- Hledejme k ní primitivní funkci $F(x)$ takovou, že $F'(x) = f(x)$
- Podle obr. může vyjít funkcí několik, neboli

$$F(x) = x + C$$



Metody integrace

- Tabulky základních integrálů

$$f(x) = x^n \qquad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad n \in R, \qquad n \neq -1$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{cotg} x + C$$

Substituce

- Funkce $f(x)$ má v intervalu (a, b) tvar $f(x) = g\big(h(x)\big)h'(x)$.
- Poté lze použít substituci ve tvaru $h(x) = t$ a získáme rovnost

$$\int f(x)\,dx = \int g\big(h(x)\big)h'(x)\,dx = \int g(t)\,dt$$

$$\int \sin^2 x \cos x \; dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \; dx \end{matrix} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Substituce

- Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu (a, b).
- Funkce $x = \varphi(t)$ je spojitá na odp. intervalu a existuje k ní inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$.
- Poté lze použít substituci $x = \varphi(t)$ a získáme rovnost

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \int g(t)\,dt$$

- Zpětně musíme dosadit inverzní funkci $t = \varphi^{-1}(x)$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\ dt \end{matrix}\right| = \int \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\ \ 2\cos t\,dt =$$

$$= 4\int \sqrt{\cos^2 t}\ \ \cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\ \,dt = 2\int (\cos 2t + 1)\,dt = 2\left(\frac{\sin 2t}{2} + t\right) =$$

$$= 2(t + \sin t\cos t) = |t = \varphi^{-1}(x)| = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\arcsin\frac{x}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 \qquad \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$t = \arcsin\frac{x}{2}$$

Per partes

- Funkce $u(x)$ a $v(x)$ jsou spojitě diferencovatelné na určeném intervalu J.
- Potom

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'dx$$

  - plyne z derivace součinu

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int (uv)'dx = \int u'v\,dx + \int uv'dx$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \left| \begin{matrix} u' = e^x \\ v = \sin x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx =$$

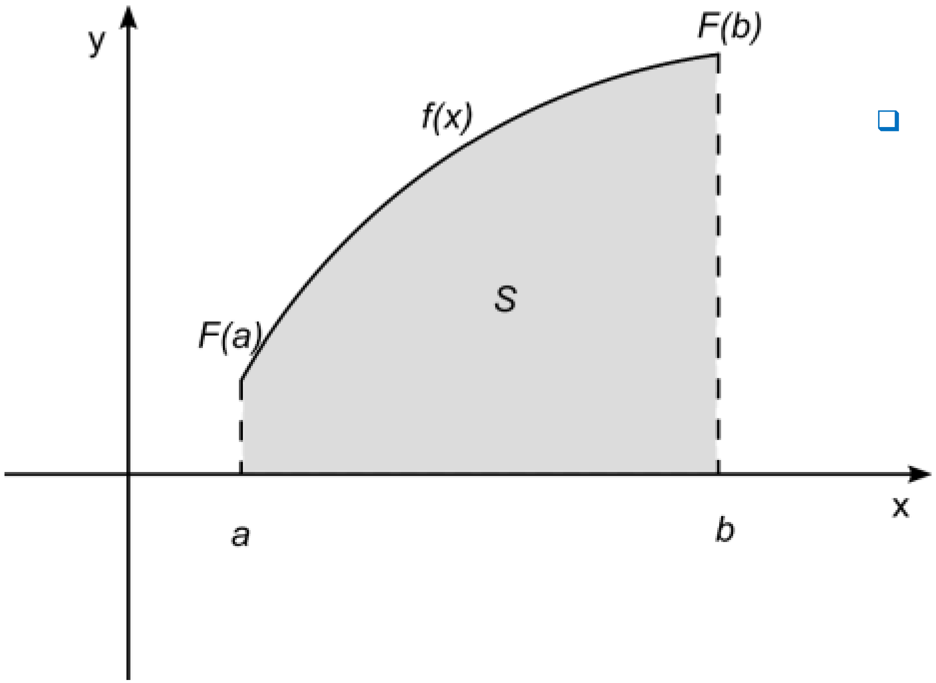
$$= \left| \begin{matrix} u' = e^x \\ v = \cos x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx \right) =$$

$$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\,dx$$

Určitý integrál

- Určení plochy S vymezené grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.
  - Newtonův integrál

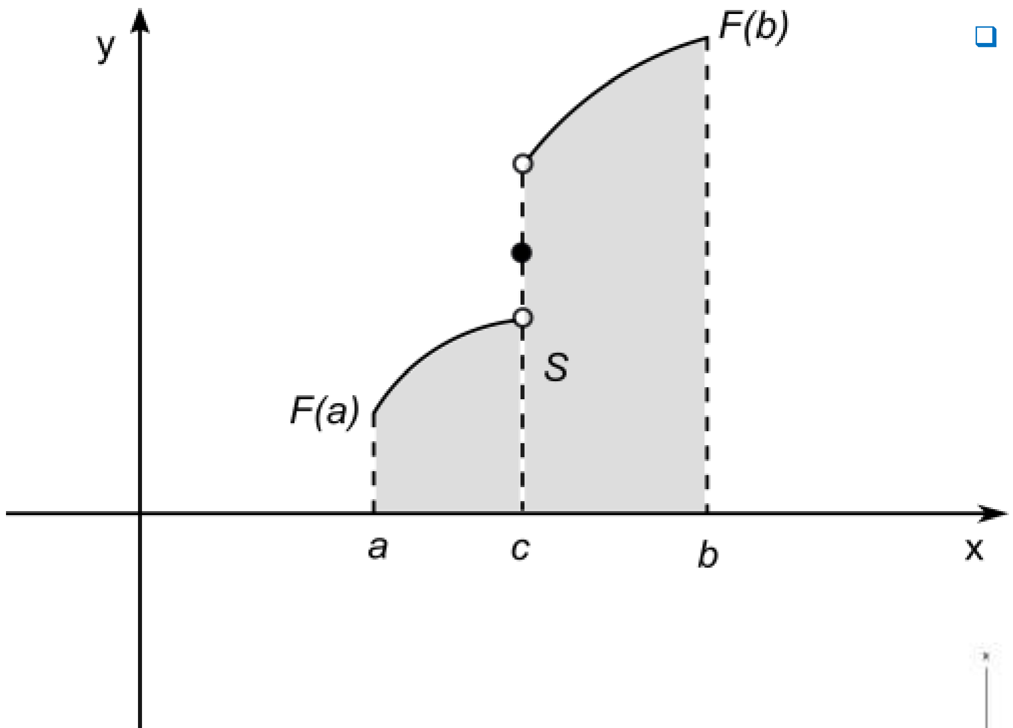
$$S = \int_a^b f(x)dx = [F]_a^b = F(b) - F(a)$$



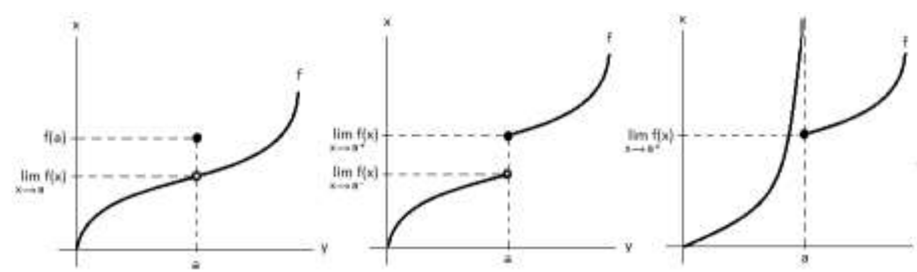
- Analytický výpočet
  - lze počítat délky křivek, objemy, povrchy …
  - nutná znalost primitivních funkcí
  - funkce musí být spojitá
    - nelze počítat funkce, které mají nespojitosti 1. druhu na intervalu (a, b)

Určitý integrál

- Bod c je bodem nespojitosti 1. druhu.
  - Fourierova analýza
  - Teorie pravděpodobnosti
- I když $F(c)$ neexistuje, tak obsah lze vypočítat.



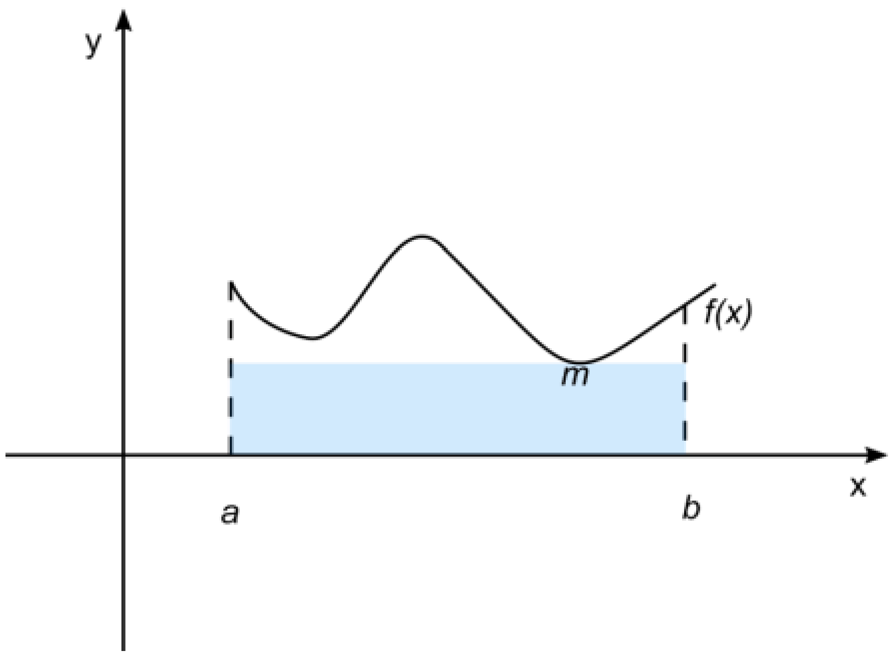
odstranitelná nespojitost
bod nespojitosti 1. druhu
bod nespojitosti 2. druhu

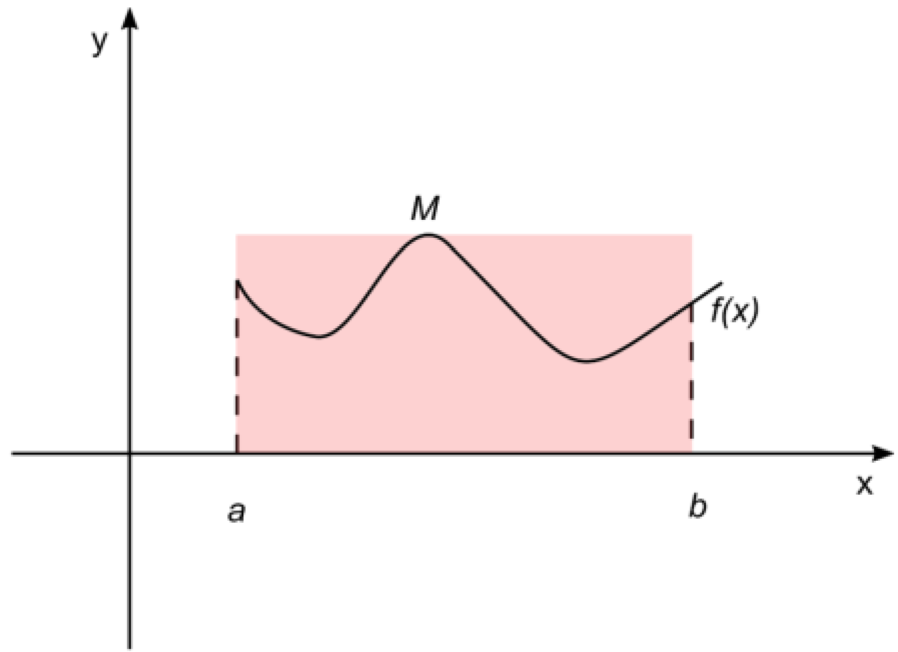


Dolní a horní odhad

- Na uzavřeném interval $\langle a, b\rangle$ mějme funkci $f(x)$
- Číslo m je infimum funkce a M supremum funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$
- Číslo $L(f(x)) = m(b - a)$ nazveme dolním odhadem a číslo $U(f(x)) = M(b - a)$ horním odhadem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$

supremum je nejmenší prvek množiny
všech horních závor dané množiny

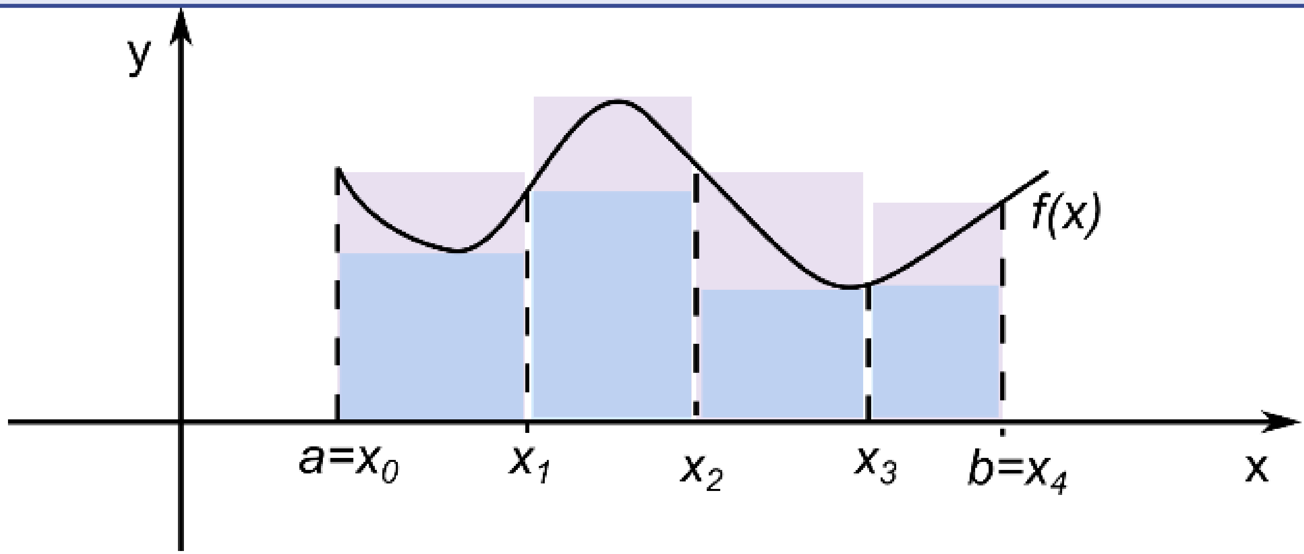




Cílem je získat obsah plochy vymezenou funkcí $f(x)$ a osou x

Dolní a horní součet

- Zavedeme dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ $\quad D(n) = (x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b)$
- Potom m_i a M_i jsou infima a suprema na příslušných podintervalech $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$



- Čísla $L(f(x), D(n))$ a $U(f(x), D(n))$ nazveme dolním a horním součtem funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ při dělení $D(n)$.

$$L(f(x), D(n)) = \sum_i m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad U(f(x), D(n)) = \sum_i M_i(x_i - x_{i-1})$$

Riemannův integrál

- Pro libovolné dělení platí

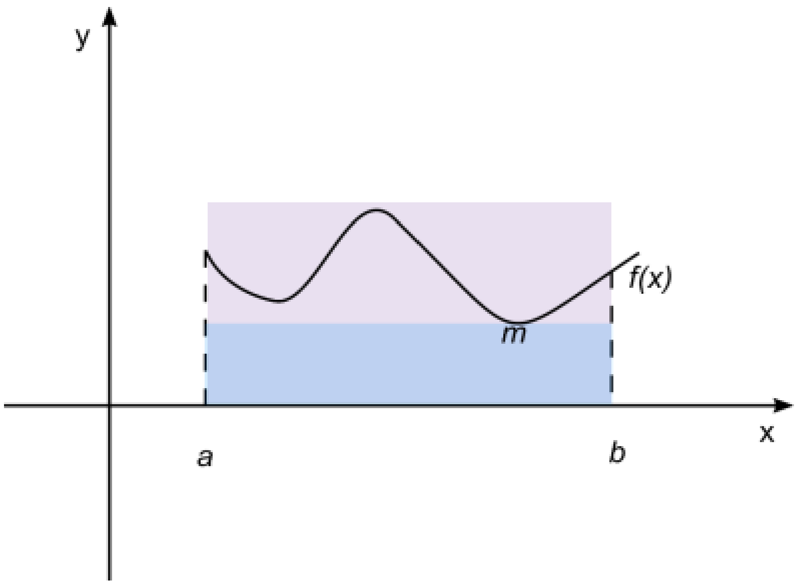
$$m(b-a) \leq L\big(f(x), D(n)\big) \leq U\big(f(x), D(n)\big) \leq M(b-a)$$

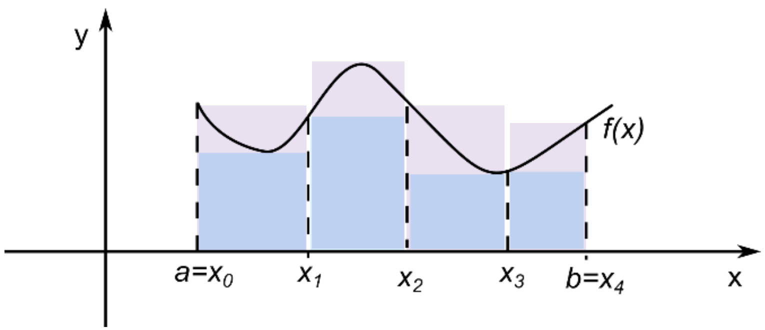
dolní odhad dolní součet horní součet horní odhad

- Jestliže platí

$$\sup L\big(f(x), D(n)\big) = \inf U\big(f(x), D(n)\big)$$

- řekneme o funkci $f(x)$, že je tzv. Riemannovsky integrovatelná



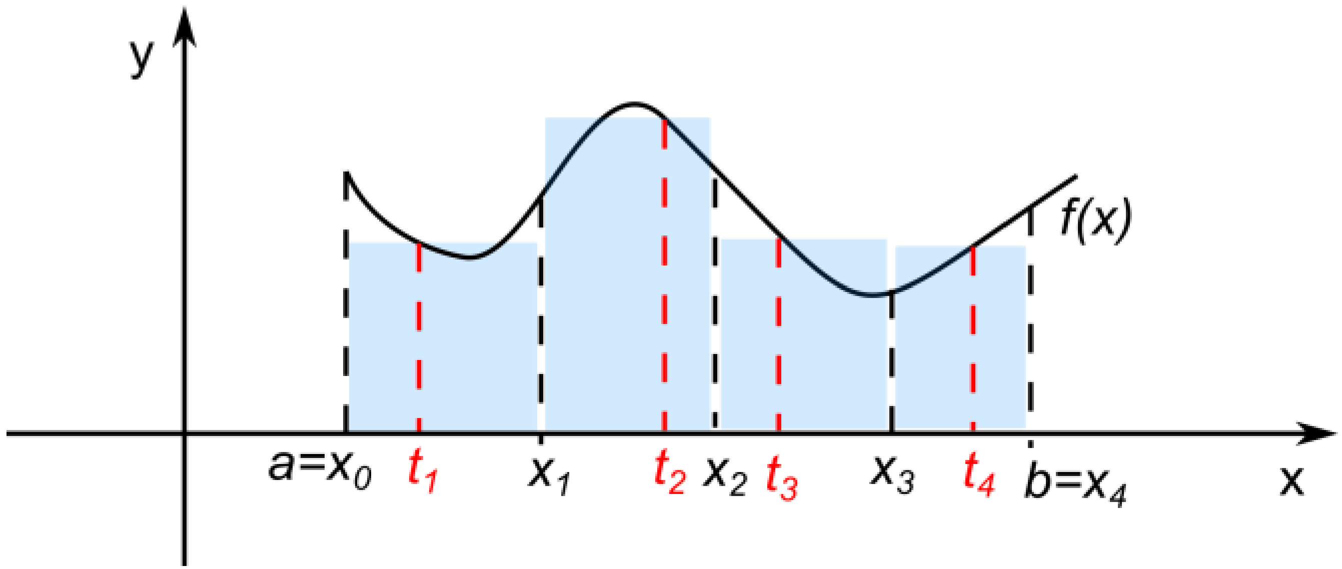


Integrální součet

- Nyní zvolíme mezi každou dvojicí x_i, x_{i+1} bod t_i, ve kterém spočteme $f(x_i)$
- Uvažujeme posloupnost $T\big(D(n)\big) = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ reálných čísel takových, že platí $t_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Potom číslo

$$S\Big(f(x), D(n), T\big(D(n)\big)\Big) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

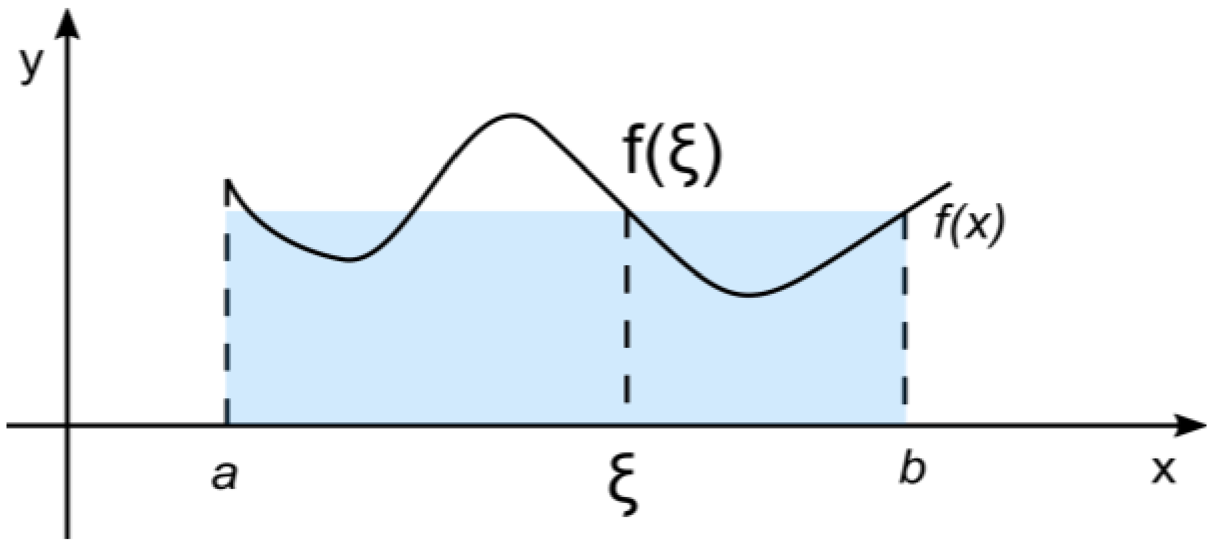
- nazveme **integrálním součtem** funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.



Integrální součet

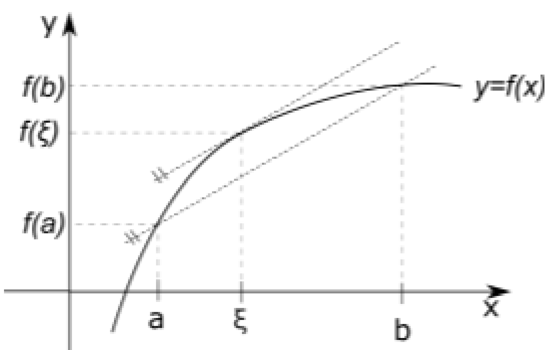
- Věta o střední hodnotě (pro integrální součet)
- Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje číslo ξ takové, že platí

$$S = \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$



- Lagrangeova věta o střední hodnotě

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad f'(\xi)(b-a) = f(b) - f(a)$$



Integrální součet

$$S\left(f(x), D(n), T\big(D(n)\big)\right) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

- Zvolme posloupnost dělení $D_1, D_2, \dots, D_k$ a každé posloupnosti přiřadíme posloupnost bodů $T_1, T_2, \dots, T_k$. Získáme tak posloupnosti $S_1, S_2, \dots, S_k$ (integrální součty).
- Jestliže je funkce $f(x)$ Riemannovsky integrovatelná, potom každá posloupnost S_i konverguje a platí

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \int_a^b f(x)dx$$

- Čím se liší jednotlivé členy posloupnosti $D_1, D_2, \dots, D_k$?
  - různá dělení mohou vést k různým aproximacím integrálu
  - mohou poskytnout různé úrovně přesnosti
- Proč nelze jednoduše použít pouze Větu o střední hodnotě?

$$S = \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Numerická integrace

- Riemannova integrace pracuje s nekonečně malými intervaly

$$S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_i)\right]$$

- Věta o střední hodnotě vyžaduje znalost primitivní funkce k funkci $f(x)$

$$S = \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad \rightarrow \qquad f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

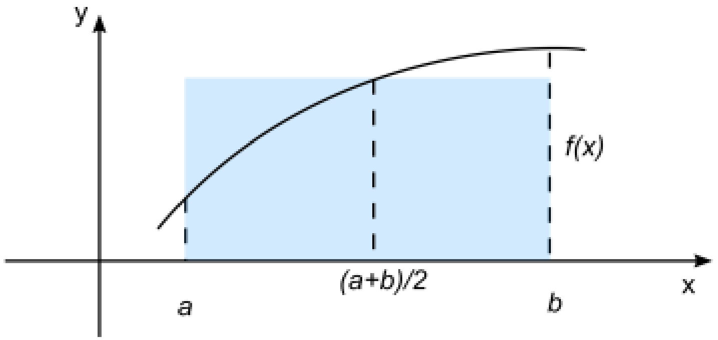
- V numerické matematice pracujeme s konečně malými intervaly a snažíme se funkci $f(x)$ **aproximovat** na intervalu $\langle a, b\rangle$ funkcí jednodušší
- Získáme tak odhad integrálu S

$$S \approx \int_a^b f(x)dx$$

Newtonovy-Cotesovy vzorce

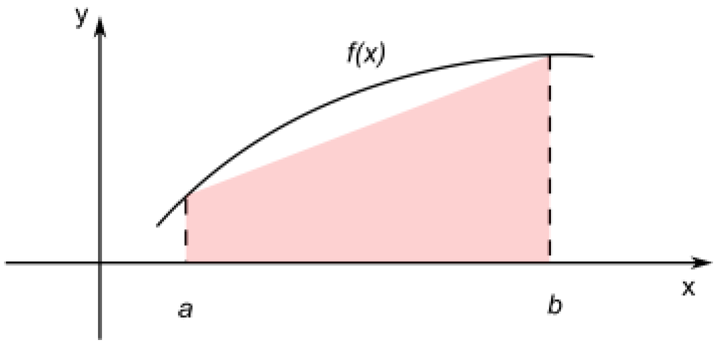
- Obdélníkové pravidlo

$$S = (b-a)\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



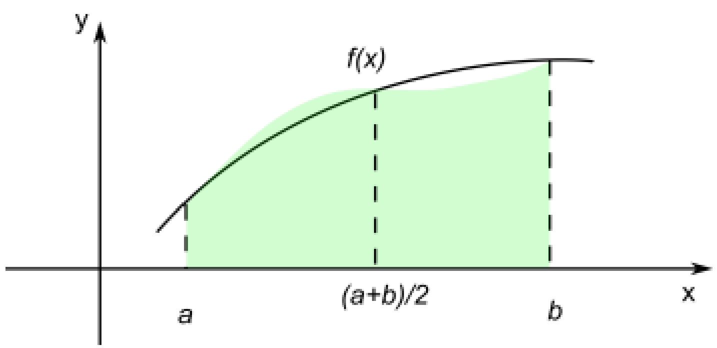
- Lichoběžníkové pravidlo

$$S = \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$



- Simpsonovo pravidlo

$$S = \frac{(b-a)}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$



- Odvození
  - interpolace
  - aproximace metodou nejmenších čtverců

Newtonovy-Cotesovy vzorce

- Označíme

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n} = a + ih \qquad n \text{ stupeň polynomu,} \quad 0 \le i \le n$$

$$f_i = f(x_i)$$

- Uzavřené Newtonovy-Cotesovy vzorce
  - používáme hodnoty v krajních bodech (hodnot i je $n+1$)

Stupeň n	Velikost kroku h	Obvyklé jméno	Vzorec	Chyba
1	$b-a$	Lichoběžníková metoda	$\frac{h}{2}(f_0 + f_1)$	$-\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi)$
2	$\frac{b-a}{2}$	Simpsonova metoda	$\frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$	$-\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{b-a}{3}$	Simpsonova 3/8 metoda	$\frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$	$-\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi)$
4	$\frac{b-a}{4}$	Booleovo pravidlo	$\frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$	$-\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\xi)$

Newtonovy-Cotesovy vzorce

- Označíme

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n} = a + ih \qquad n \text{ stupeň polynomu,} \quad 0 < i < n$$

$$f_i = f(x_i)$$

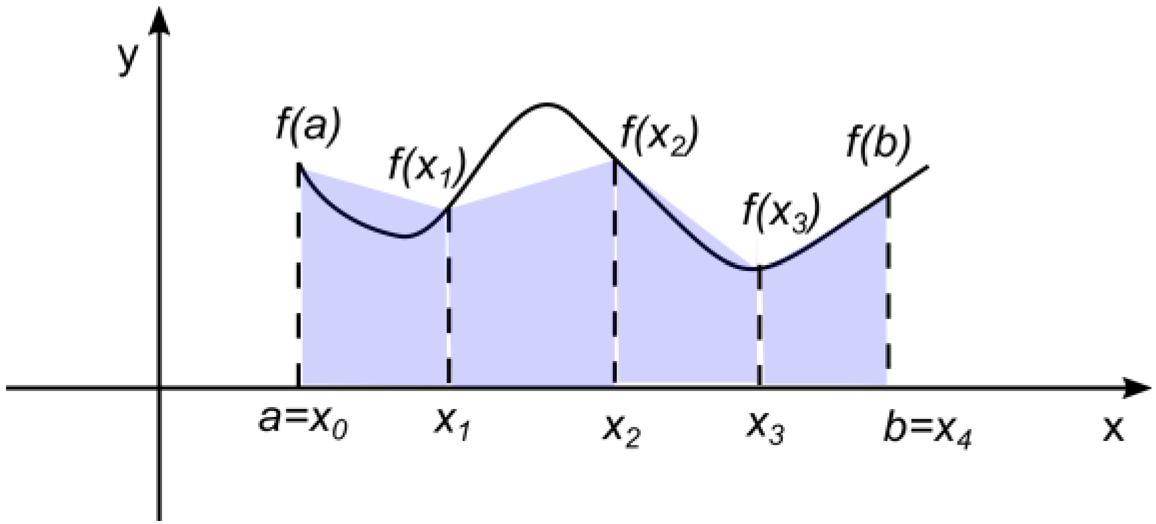
- Otevřené Newtonovy-Cotesovy vzorce
  - nepoužíváme hodnoty v krajních bodech (hodnot i je $n-1$)

Stupeň n	Velikost kroku h	Obvyklé jméno	Vzorec	Chyba
2	$\frac{b-a}{2}$	Obdélníková metoda	$2h\, f_1$	$\frac{1}{3} h^3 f^{(2)}(\xi)$
3	$\frac{b-a}{3}$	Lichoběžníková metoda	$\frac{3h}{2}(f_1 + f_2)$	$\frac{1}{4} h^3 f^{(2)}(\xi)$
4	$\frac{b-a}{4}$	Milneho pravidlo	$\frac{4h}{3}(2f_1 - f_2 + 2f_3)$	$\frac{28}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$
5	$\frac{b-a}{5}$		$\frac{5h}{24}(11f_1 + f_2 + f_3 + 11f_4)$	$\frac{95}{144} h^5 f^{(4)}(\xi)$

Numerická integrace

- Zvýšení přesnosti odhadu S v Newtonových-Cotesových vzorcích lze dosáhnout dělením intervalu $\langle a, b\rangle$ na n podintervalů.
  - vyjdeme z lichoběžníkového pravidla

- Lichoběžníkové pravidlo
  - Dělení intervalu $h = \frac{b-a}{n}$
    - označíme $x_0 = a$, $x_n = b$



  - Obsah je roven součtu lichoběžníků o šířce $\frac{b-a}{n}$ a výškami $f(x_\mathrm{i})$

$$S = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2} + \frac{f(x_3)+f(b)}{2}\right]$$

$$= h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] + h\sum_{i=1}^{n-1} f\,(x_i)$$

Rombergova metoda

$$S = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

- Pokusme se zpřesnit lichoběžníkovou metodu

$$S = h\left[\frac{f(a) + f(b)}{2}\right] + h\sum_{i=1}^{n-1} f\,(x_i) \qquad h_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$n = 0$

$$h_0 = b - a$$

$$S(0,0) = h_1\big(f(a) + f(b)\big) = \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$

$n = 1$

$$h_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$S(1,0) = \frac{b-a}{2}\left(f(a+h) + \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big)\right)$$

$$S(1,0) = \frac{1}{2}S(0,0) + h\,f(a+h)$$

$n = 2$

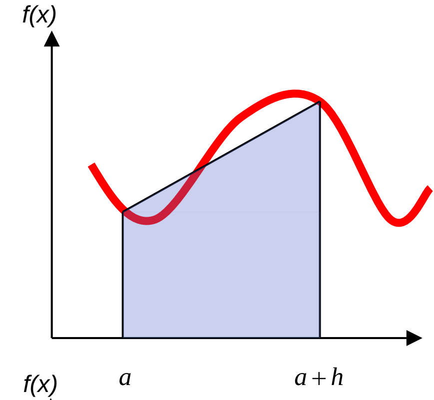
$$h_2 = \frac{b-a}{4}$$

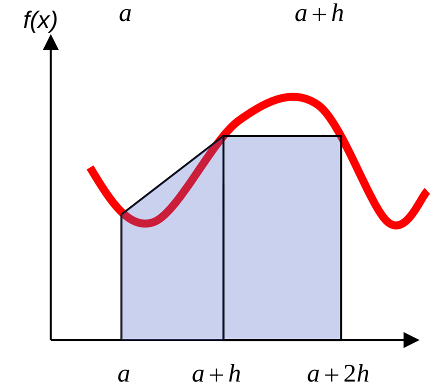
$$S(2,0) = \frac{b-a}{4}\left(f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big)\right)$$

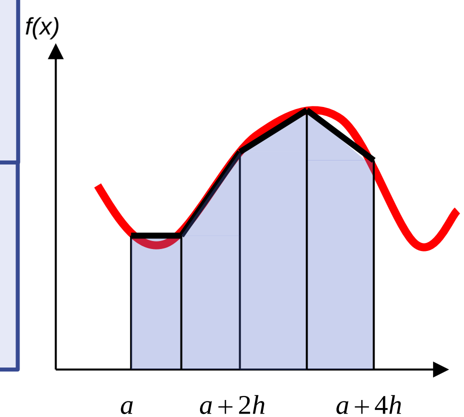
$$S(2,0) = \frac{1}{2}S(1,0) + h\,\big(f(a+h) + f(a+3h)\big)$$

…

$$S(n,0) = \frac{1}{2}S(n-1,0) + h\sum_{i=1}^{2^{n-1}} f\,(a + (2k-1)\,h) \qquad h = \frac{b-a}{2^n}$$







Rombergova metoda

S(0,0)			
S(1,0)	S(1,1)		
S(2,0)	S(2,1)	S(2,2)	
S(3,0)	S(3,1)	S(3,2)	S(3,3)
$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$

- Lichoběžníkové pravidlo

$$S(0,0) = \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$

$$h = \frac{b-a}{2^n}$$

$$S(n,0) = \frac{1}{2}S(n-1,0) + h\sum_{i=1}^{2^{n-1}} f\,(a + (2k-1)\,h)$$

- Zobecnění pomocí rekurentního vztahu

$$S(n,m) = S(n,m-1) + \frac{S(n,m-1) - S(n-1,m-1)}{4^{m-1}}$$

$$n \geq 1, m \geq 1$$

  - aproximace integrálu S po n-tém kroku s m-tou úrovní Richardsonovy extrapolace

× hodnoty $S(n,n)$ s rostoucím n rychle konvergují k přesné hodnotě integrálu

Integrace – cvičení

- Pomocí symbolické matematiky vypočítejte následující integrály

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx$$

$$F(x) = \int x^a\, dx$$

$$F(x) = \int \arccos(\sin x)\, dx$$

$$F(x) = \int \ln(\sin x)\, dx$$

- Zkuste předem odhadnout podmínky integrace a existence primitivní funkce

Numerická integrace – cvičení

- Pomocí built-in funkcí nebo metod numerické matematiky vypočítejte následující určité integrály
- Metody porovnejte mezi sebou z hlediska přesnosti výpočtu

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$$

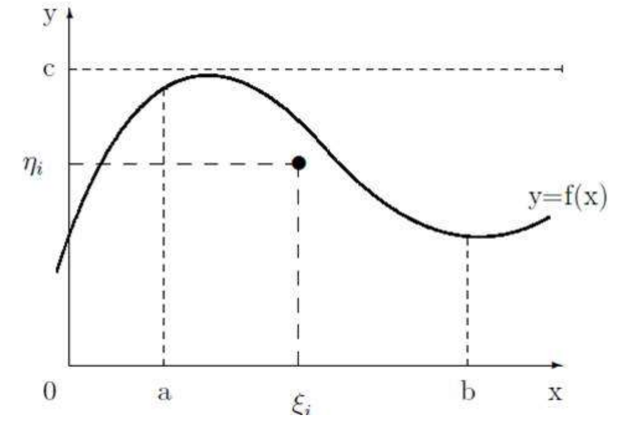
$$\int_0^{1} (x^2 - 2x + 6) dx$$

$$\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin(2x) \, dx$$

Výpočet určitého integrálu metodou MC

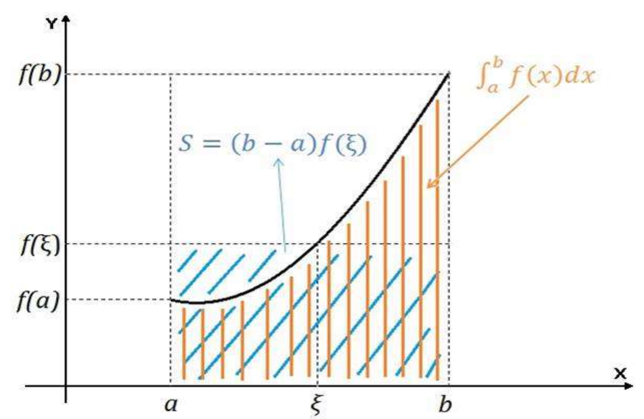
- Metoda Monte Carlo – lze spočítat obsah nebo objem oblasti – tedy i určitý integrál

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



- 2 možnosti:

- geometrická metoda
  - místo pevně stanovených útvarů náhodně generované body
  - generujeme NV x a y

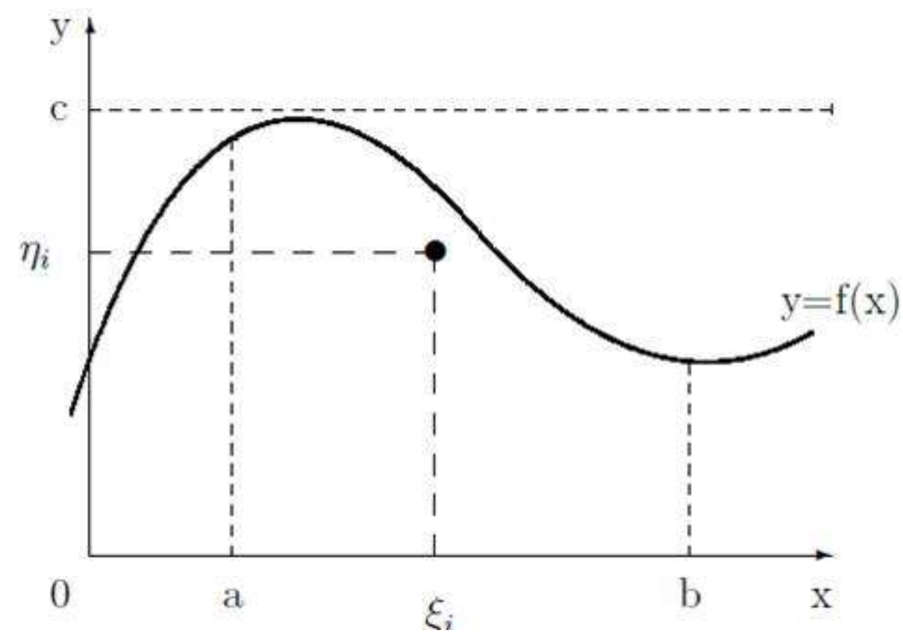


- pomocí střední hodnoty
  - *Monte Carlo pracuje se střední hodnotou sledované veličiny*

Výpočet určitého integrálu – geom. metoda

- **Výpočet určitého integrálu – geometrická metoda**
  - integrál – obsah plochy pod křivkou funkce $f(x)$ na intervalu (a, b)
  - funkce $f(x)$ je na (a, b):
    - omezená
    - spojitá
  - označme f_{sup} supremum funkce
    (ξ, φ) – náhodná čísla z intervalu (a, b) a $(0, f_{sup})$
- Postup výpočtu
  - generujeme celkem n dvojic (ξ_i, φ_i)
  - počítáme pokusy pod křivkou:
    jestliže platí $\varphi_i < f(\xi_i)$, potom $n' = n' + 1$
- Výsledná hodnota integrálu:

$$I \approx f_{sup}(b-a)\frac{n'}{n}$$

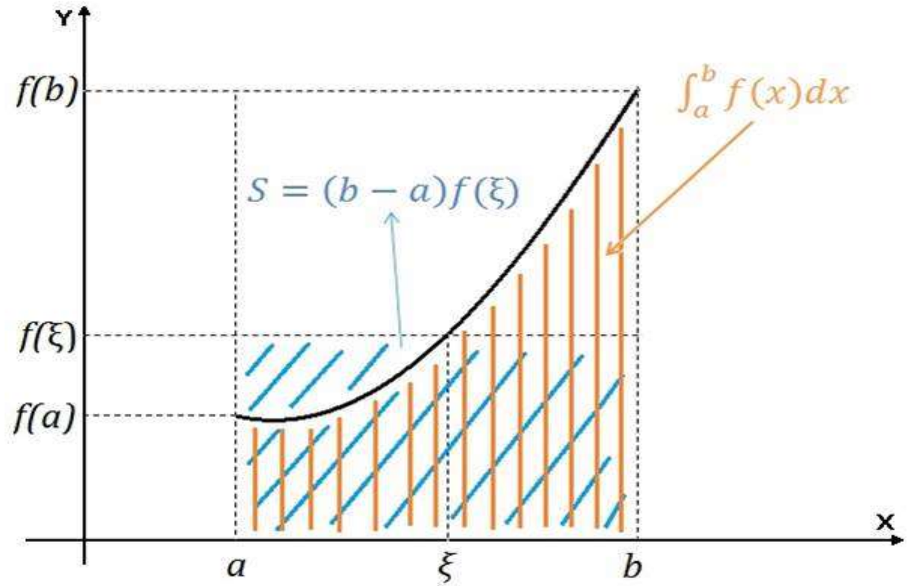


Určitý integrál – věta o střední hodnotě

- Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$
  Pak existuje číslo $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že platí:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

- Funkce $f(x)$ je nezáporná na $\langle a, b\rangle$



- Existuje bod ξ, kde se obsah plochy pod křivkou rovná obsahu obdélníku daného $(b-a)\,f(\xi)$
- Hodnota

$$f(\xi) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

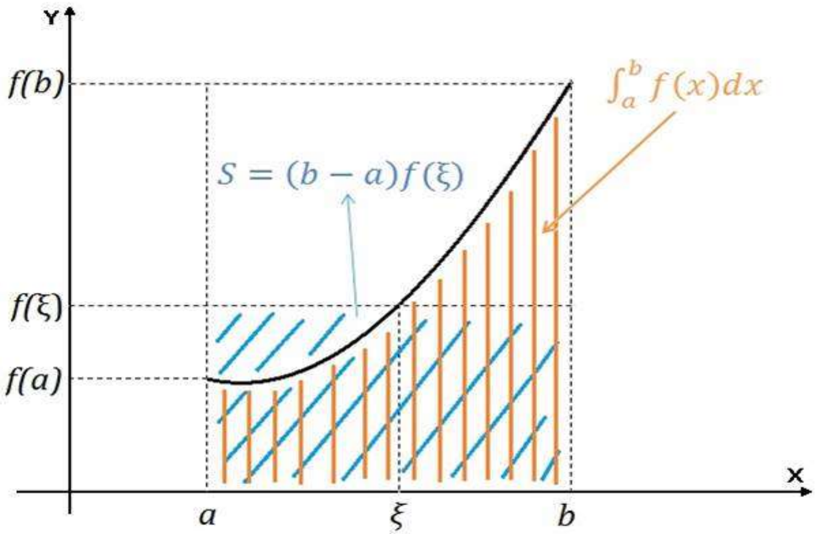
vyjadřuje střední hodnotu funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$

Výpočet určitého integrálu – stř. hodnota

- **Výpočet určitého integrálu – střední hodnota**

$$f(\xi) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\langle f \rangle$$



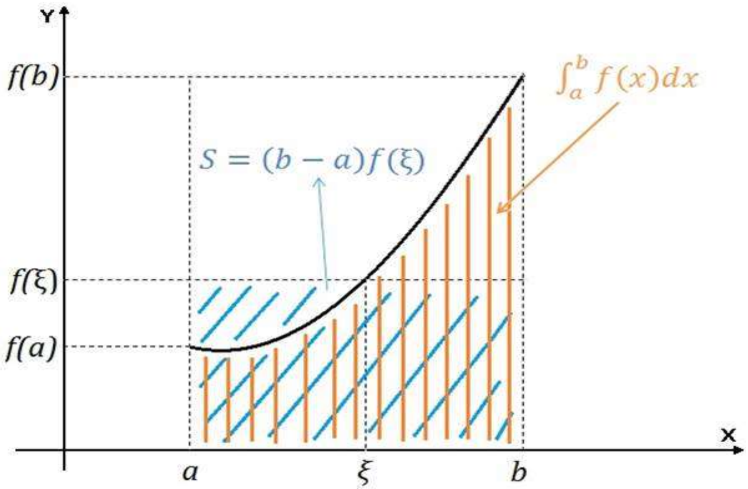
- $\langle f \rangle$: střední hodnota funkce na intervalu (a, b)

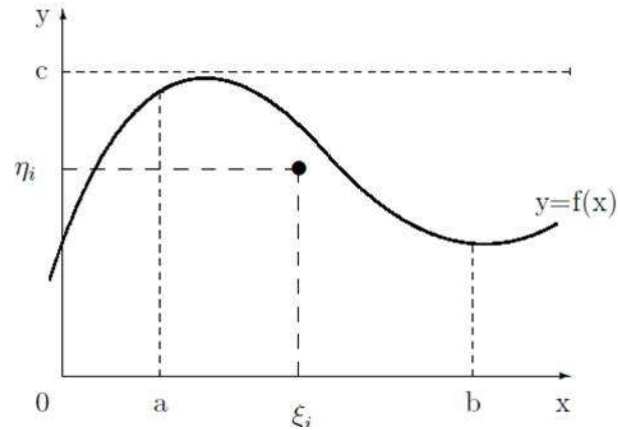
$$\langle f \rangle = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)$$

$$I \approx (b-a)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)$$

- ξ – náhodné číslo z intervalu (a, b)

Výpočet určitého integrálu





- Střední hodnota

$$I \approx (b-a)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(\xi_i\right)$$

Geometrická metoda

$$I \approx f_{sup}(b-a)\frac{n'}{n}$$

Použití
pokud běžné metody neefektivní nebo nemožné,
např. složité mnohorozměrné integrály

- Geometrická metoda MC má větší rozptyl
  - je (zpravidla) méně přesná
  - nemusí být méně efektivní (celkový počet pokusů)