INTERPOLACE

Lagrangeův interpolační polynom

- Lagrangeův interpolační polynom

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \cdots \cdot (x_i - x_n)}$$

$$i = 0,1, \ldots, n$$

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

$$F(x) = L(x)$$

Lagrange – body [−1, 9], [1, 1] a [2, 6]

- Najděte $L(x)$ procházející body [−1, 9], [1, 1] a [2, 6]
- Funkční hodnoty zapíšeme do tabulky

i	0	1	2
x_i	−1	1	2
y_i	9	1	6

- Prokládáme třemi body, hledáme tedy polynom stupně 2

$$L_2(x) = 9l_0(x) + l_1(x) + 6l_2(x)$$

- Určíme pomocné polynomy $l_i(x)$

Lagrange – body [−1, 9], [1, 1] a [2, 6]

i	0	1	2
x_i	−1	1	2
y_i	9	1	6

- Nejprve hledáme pomocný polynom příslušný $x_0 = -1$
- V čitateli $l_0(x)$ jsou kořenové činitele příslušné všem x_i (kromě x_0)
- Do jmenovatele píšeme totéž, jen za x dosazujeme číslo $x_0 = -1$

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2)$$

- Totéž pro $l_1(x)$ a $l_2(x)$

$$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}(x^2 - 1)$$

Lagrange – body [−1, 9], [1, 1] a [2, 6]

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2)$$

$$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}(x^2 - 1)$$

- Dosazení do interpolačního vzorce

$$L_2(x) = 9l_0(x) + l_1(x) + 6l_2(x)$$

$$L_2(x) = 9\frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2) - \frac{1}{2}(x^2 - x - 2) + 6\frac{1}{3}(x^2 - 1)$$

$$L_2(x) = x^2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2\right) + x\left(-\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\right) + 3 + 1 - 2$$

$$L_2(x) = 3x^2 - 4x + 2$$

Newtonův interpolační polynom

- Newtonův interpolační polynom

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

- nebo pomocí diferencí

$$N(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \dots x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

- $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou koeficienty splňující soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
a_0 &= y_0 \\
a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) &= y_1 \\
a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) &= y_2 \\
&\dots \\
a_0 + a_1(x_n - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1}) &= y_n
\end{aligned}$$

Newton – příklad

- Příklad

i	0	1	2	3
x_i	−3	0	1	2
y_i	−13	2	3	12

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	…
−3	−13			
		$\frac{2-(-13)}{0-(-3)} = 5$		
0	2		$\frac{1-5}{1-(-3)} = -1$	
		$\frac{3-2}{1-0} = 1$		$\frac{4-(-1)}{2-(-3)} = 1$
1	3		$\frac{9-1}{2-(-3)} = 4$	
		$\frac{12-3}{2-1} = 9$		
2	12			

Newton – příklad

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
−3	−13			
		5		
0	2		-1	
		1		1
1	3		4	
		9		
2	12			

- Dosadíme

$$N(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

$$N(x) = -13 + 5\big(x - (-3)\big) + (-1)\big(x - (-3)\big)(x - 0) + 1\big(x - (-3)\big)(x - 0)(x - 1)$$

$$N(x) = x^3 + x^2 - x + 2$$