LINEÁRNÍ ALGEBRA

Vektor – intuitivní chápání

- Vektor
  - uspořádaná n-tice objektů
    - $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
    - zpravidla čísla nebo skalární funkce
  - je definována operace sčítání a násobení číslem
  - musí tvořit vhodnou strukturu
    - např. existence neutrálního a opačného prvku

- Dimenze vektoru
  - počet komponent v n-tici

Vektor a vektorový prostor

- Vektorový prostor
  - množina $\boldsymbol{V}_n$ uspořádaných n-tic $(a_1, a_2, \dots, a_n)$
  - s operacemi sčítání a násobení reálným (obecně komplexním) číslem definovanými takto:
  - $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1\ a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$
  - $c \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, \dots, c \cdot a_n)$
- Vektor
  - prvek vektorového prostoru $\boldsymbol{V}_n$
- Dimenze prostoru $\boldsymbol{V}_n$
  - dimenze vektoru n

Soustava vektorů

- Lineární závislost vektorů
  - Vektory
    $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \boldsymbol{V}_n$
    jsou lineárně závislé, existují-li taková komplexní čísla
    $c_1, \dots, c_k$ (z nichž alespoň jedno je různé od nuly),
    pro která platí:
  - $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + c_k\boldsymbol{a}_k = 0$

lineární kombinace

- Hodnost
  - soustava vektorů $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$ z $\boldsymbol{V}_n$ má hodnost h
    - jestliže mezi vektory existuje h lineárně nezávislých vektorů
    - ale každých $h + 1$ vektorů je již lineárně závislých
  - každá soustava vektorů má $h \leq n$
  - hodnost soustavy se nemění, pokud:
    - zaměníme pořadí vektorů v soustavě
    - provedeme jakoukoli operaci s vektory
      - která vede k lineárně závislému vektoru

Vektory ve fyzice

- Klasická mechanika:
  - polohový vektor $\boldsymbol{r}(t)$
  - $\boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$
- Kvantová teorie:
  - Schrödingerova rovnice ($E = \frac{p^2}{2m} + V$)
  - $i\hbar\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\boldsymbol{\Psi}}{\partial x^2} + V\boldsymbol{\Psi}$
- Speciální teorie relativity:
  - relativistická kinematika
  - $v' = \frac{v-u}{1+\frac{uv}{c^2}}$ (v soustavě spojené s prvním se druhé bude pohybovat)
- Elektromagnetismus:
  - $div\ \mathrm{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (intenzita pole, hustota volného náboje, permitivita)

Vektory v informatice

- Informační (Shannonova) entropie
  - $S(\mathrm{X}) = -\sum_{x \in \mathrm{M}} p\,(x) \log p(x)$
  - střední hodnota množství informace připadající na jeden symbol generovaný stochastickým zdrojem dat
  - míra informační entropie přiřazená ke každé možné datové hodnotě je záporným logaritmem pravděpodobnostní funkce dané hodnoty

Aplikovaná informatika pracuje většinou s vektory definovanými v jiných oblastech vědy a techniky

- Vektorová grafika:
  - polygon, ray-tracing
- Analýza dat:
  - časové řady, korelace, distribuce, transformace
- Kyberbezpečnost:
  - šifrování, reprezentace dat, komprese atd.

Vektorová algebra

- Algebraické (nediferenciální) operace
  - definovány pro vektorový prostor
  - aplikovány na vektorové pole
- Základní algebraické operace
  - sčítání vektorů
  - násobení skalárem
  - skalární součin
  - vektorový součin
  - tenzorový součin

- Mějme soustavu lineárně nezávislých vektorů $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in \mathbb{R}^3$ takových, že $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Skalární součin

- Skalární součin
  - zobrazení, které dvojici vektorů přiřadí skalár
  - který má vztah k velikosti těchto vektorů
    - k tzv. ortogonalitě a případně k úhlu, který svírají
  - a platí určité podmínky

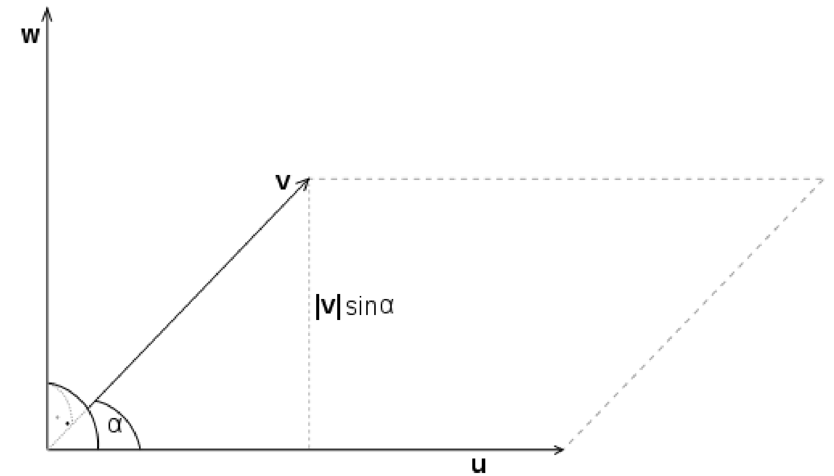
- Podmínky pro skalární součin
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}$
  - $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$
  - $(\alpha \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} = 0$

Skalární součin

- Skalární součin v trojrozměrném eukleidovském prostoru
- $\mathrm{S} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{cases} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\varphi) \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$
- Pro skalární součin v reálném prostoru platí:
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$
  - $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$
  - $(\alpha\, \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$

Vektorový součin

- Vektorový součin
  - binární operace vektorů v trojrozměrném vektorovém prostoru
  - výsledkem je vektor
    - kolmý k oběma původním vektorům
- Vektorový součin
  - definován jako vektor kolmý k vektorům $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$
  - s velikostí rovnou obsahu rovnoběžníka
    - který oba vektory určují
  - $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{n}\,|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\alpha$
    - $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor k oběma kolmý



  - vektorový součin dvou lineárně závislých vektorů je nulový
    - $(\sin\alpha = 0)$

Vektorový součin

- Definice bez pomoci úhlů

- Vektor $\boldsymbol{c}$ nazýváme *vektorovým součinem* vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$
  - $\boldsymbol{c} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

- neboli
  - $c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$
  - $c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$
  - $c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$

Tenzorový součin

- Tenzorový (dyadický) součin
  - $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$
  - má-li prostor $\boldsymbol{V}$ dimenzi m a $\boldsymbol{W}$ dimenzi n, pak $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ má dimenzi mn
  - obecně není komutativní
  - je distributivní a asociativní