LINEÁRNÍ ALGEBRA

Vektory ve fyzice

- Klasická mechanika
  - polohový vektor $\boldsymbol{r}(t)$
  - $\boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$
- Kvantová teorie
  - Schrödingerova rovnice ($E = \frac{p^2}{2m} + V$)
  - $i\hbar\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\boldsymbol{\Psi}}{\partial x^2} + V\boldsymbol{\Psi}$
- Speciální teorie relativity
  - relativistická kinematika
  - $v' = \frac{v-u}{1+\frac{uv}{c^2}}$ (v soustavě spojené s prvním se druhé bude pohybovat)
- Elektromagnetismus
  - $div\ \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (intenzita pole, hustota volného náboje, permitivita)
- Mechanika kontinua

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u} + \vec{f}$$

Vektory

- Matematika
  - Analytická geometrie (reprezentace bodů, směrů, …)
  - Lineární algebra (součet, násobení nebo transformace v prostoru)
  - Optimalizační problémy (směry gradientů, hledání extrémů funkcí)
- Biologie a chemie
  - Molekulární biologie (struktury molekul jako vektory v 3D prostoru)
  - Genetika (sekvence DNA jako číselné vektory)
  - Chemické inženýrství (složky směsi jako vektor koncentrací, …)
- Ekonomie a finance
  - Portfoliová analýza (např. procenta investovaná do různých aktiv)
  - Statistická analýza (data jako vektory pro regresi nebo predikce)
  - Modelování trhu (směr a velikost změn na finančních trzích)
- V každodenním životě
  - GPS navigace (směr a vzdálenost k cíli)
  - Hraní her (pohyb objektů ve 3D herním prostředí)
  - Simulace a virtuální realita (pohyby a pozice uživatele nebo objektů)
  - …

Vektory v informatice

Aplikovaná informatika pracuje většinou s vektory definovanými v jiných oblastech vědy a techniky

- Vektorová grafika
  - polygon, transformace, ray-tracing
- Zpracování signálu a zvuku
  - pixely obrazu jako vícekanálové vektory (RGB)
- Analýza dat
  - časové řady, korelace, distribuce, transformace, Fourier
  - vektory jako datové řádky nebo sloupce v tabulkách
- Kyberbezpečnost
  - šifrování, reprezentace dat, komprese, …
- Strojové učení a AI
  - reprezentace charakteristik (např. rysy obrázků nebo textu)
- …

Vektory v informatice

- Informační (Shannonova) entropie
  - míra neurčitosti ("nepořádku") v systému
  - kolik informací je potřeba k tomu, abychom popsali data
  - kvantitativní měřítko pro množství informace obsažené v rozdělení náhodné veličiny

$$S(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i) \log_b P(x_i)$$

  - X diskrétní náhodná veličina s možnými hodnotami $x_1, x_2, \dots, x_n$
  - $P(x_i)$ pravděpodobnost, že X nabývá x_i, $i = 1, \dots, n$
  - pokud $b = 2$, je udána v bitech
  - míra informační entropie přiřazená ke každé možné datové hodnotě je záporným logaritmem pravděpodobnostní funkce dané hodnoty
- Vlastnosti
  - maximální entropie
    - pokud všechny možné hodnoty X mají stejnou pravděpodobnost, tj. $P(x_i) = 1/n$
  - minimální entropie
    - nulová, pokud je X deterministická (tj. jedna hodnota má pravděpodobnost 1, ostatní 0)
  - nezávislost dvou náhodných veličin X a Y
    - společná entropie nezávislých veličin je součtem jednotlivých entropií: $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$

Vektor – intuitivní chápání

- Lineární algebra
  - obor matematiky
  - studium vektorů, vektorových prostorů, lineárních transformací a matic

- Vektor
  - uspořádaná n-tice objektů
    - $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
    - zpravidla čísla nebo skalární funkce
  - je definována operace sčítání a násobení číslem
  - musí tvořit vhodnou strukturu – uzavřenou
    - např. existence neutrálního a opačného prvku

- Dimenze vektoru
  - počet komponent v n-tici
    - počet souřadnic (nezávislých proměnných) potřebných k jeho určení

Vektor a vektorový prostor

- Vektorový prostor
  - množina $\boldsymbol{V}_n$ uspořádaných n-tic $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ s těmito vlastnostmi:
  - operacemi **sčítání**
    - vyžadována asociativita a komutativita
    - $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1\ a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$
  - operace **násobení skalárem**
    - reálným (obecně komplexním) číslem
    - vyžadována distributivita
    - $c \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, \dots, c \cdot a_n)$
  - a dalšími vlastnostmi
    - existence nulového a opačného prvku pro sčítání
- Vektor
  - prvek vektorového prostoru $\boldsymbol{V}_n$
- Dimenze prostoru $\boldsymbol{V}_n$
  - dimenze vektoru n

Báze vektorového prostoru

- Báze vektorového prostoru V dimenze n
  - uspořádaná n-tice lineárně nezávislých vektorů
  - které generují vektorový prostor V
    - každý vektor z V lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto vektorů

- Ortogonální báze
  - báze, kdy různé bázové vektory jsou na sebe kolmé

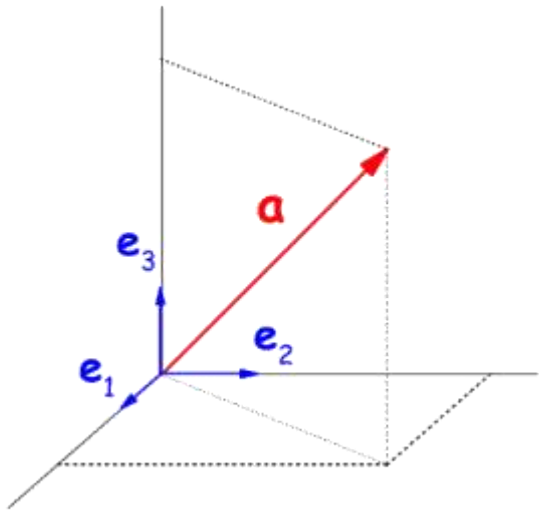
- Ortonormální báze
  - ortogonální báze, kdy všechny bázové vektory mají jednotkovou velikost
  - značíme

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$$

  - příp.

$$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$$

  - co je to velikost?



Vlastnosti vektorů

- Norma vektoru
  - funkce, která přiřazuje vektoru nezáporné reálné číslo
  - může být definována různými způsoby
- Euklidovská (kvadratická, L2) norma
  - určuje délku vektoru v euklidovském prostoru
  - definována jako odmocnina ze součtu druhých mocnin složek vektoru

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

- Jiné normy
  - Maximální (Čebyševova, L∞) norma

$$\|\boldsymbol{a}\|_\infty = \max(|a_1|, |a_2|, \dots |a_n|)$$

  - Manhattanova (L1) norma

$$\|\boldsymbol{a}\|_1 = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

  - …

Lineární závislost vektorů

- Lineární závislost vektorů
  - Vektory

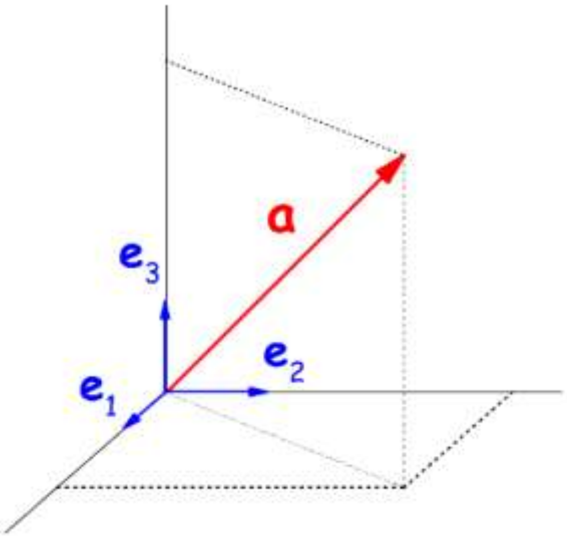
    $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \boldsymbol{V}_n$

    jsou lineárně závislé, existují-li taková komplexní čísla

    $c_1, \dots, c_k$ (z nichž aspoň jedno $\neq 0$),

    pro která platí:
  - $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$
    - tj. jakýkoliv vektor se dá vyjádřit jako LK ostatních

lineární kombinace



Hodnost soustavy vektorů

- Hodnost
  - soustava vektorů $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$ z $\boldsymbol{V}_n$ má hodnost h
    - jestliže mezi vektory existuje h lineárně nezávislých vektorů
    - ale každých $h+1$ vektorů je již lineárně závislých
  - každá soustava vektorů má $h \leq n$
  - hodnost soustavy se nemění, pokud:
    - zaměníme pořadí vektorů v soustavě
    - provedeme jakoukoli operaci s vektory
      - která vede k lineárně závislému vektoru

Vektorová algebra

- Algebraické (nediferenciální) operace
  - operace pro manipulaci s algebraickými výrazy
  - definovány pro vektorový prostor
    - výsledek obvykle zase vektor
  - aplikovány na vektorové pole
    - pole, které každému bodu v určité oblasti přiřazuje vektor
- Základní algebraické operace
  - sčítání vektorů
  - násobení skalárem
  - skalární součin
  - vektorový součin
  - tenzorový součin

- Mějme soustavu lineárně nezávislých vektorů $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in \mathbb{R}^3$ takových, že $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Skalární součin

- Skalární součin
  - zobrazení, které dvojici vektorů přiřadí skalár
  - který má vztah k velikosti těchto vektorů
    - a k ortogonalitě, případně k úhlu, který svírají
  - a platí určité podmínky

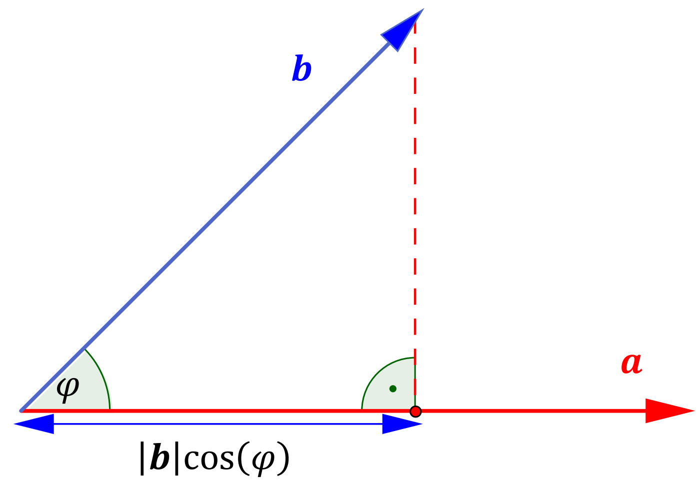
- Podmínky pro skalární součin
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}$
  - $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$
  - $(\alpha \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$
- Obecná definice

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}\ b_i$$

Skalární součin

- Skalární součin v trojrozměrném eukleidovském prostoru

- $S = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{cases} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\varphi) \qquad 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$

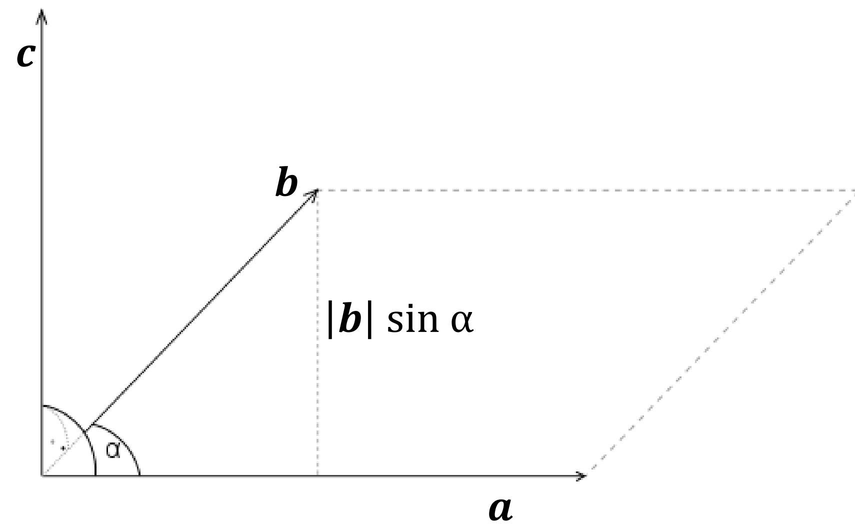


- Pro skalární součin v reálném prostoru platí:
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$
  - $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$
  - $(\alpha\, \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$

- Význam
  - zjišťování ortogonality
  - výpočet normy
  - projekce vektorů na jiné vektory

Vektorový součin

- Vektorový součin
  - binární operace vektorů v trojrozměrném vektorovém prostoru
  - výsledkem je vektor
    - kolmý k oběma původním vektorům
- Vektorový součin
  - definován jako vektor kolmý k vektorům $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$
  - s velikostí rovnou obsahu rovnoběžníka
    - který oba vektory určují



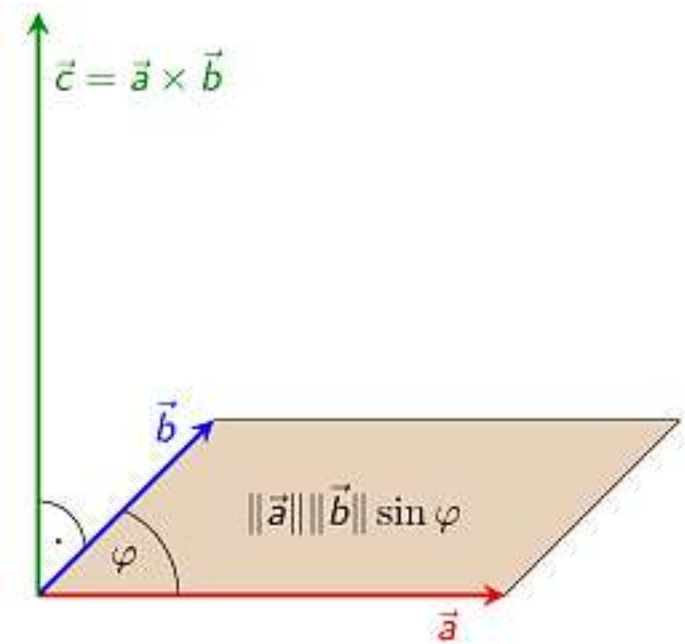
  - $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{n}\, |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \alpha$
    - $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor k oběma kolmý
  - vektorový součin dvou lineárně závislých vektorů je nulový
    - $(\sin \alpha = 0)$

Vektorový součin

- Definice bez pomoci úhlů

- Vektor $\boldsymbol{c}$ nazýváme *vektorovým součinem* vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$
  - $\boldsymbol{c} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

- neboli
  - $c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$
  - $c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$
  - $c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$

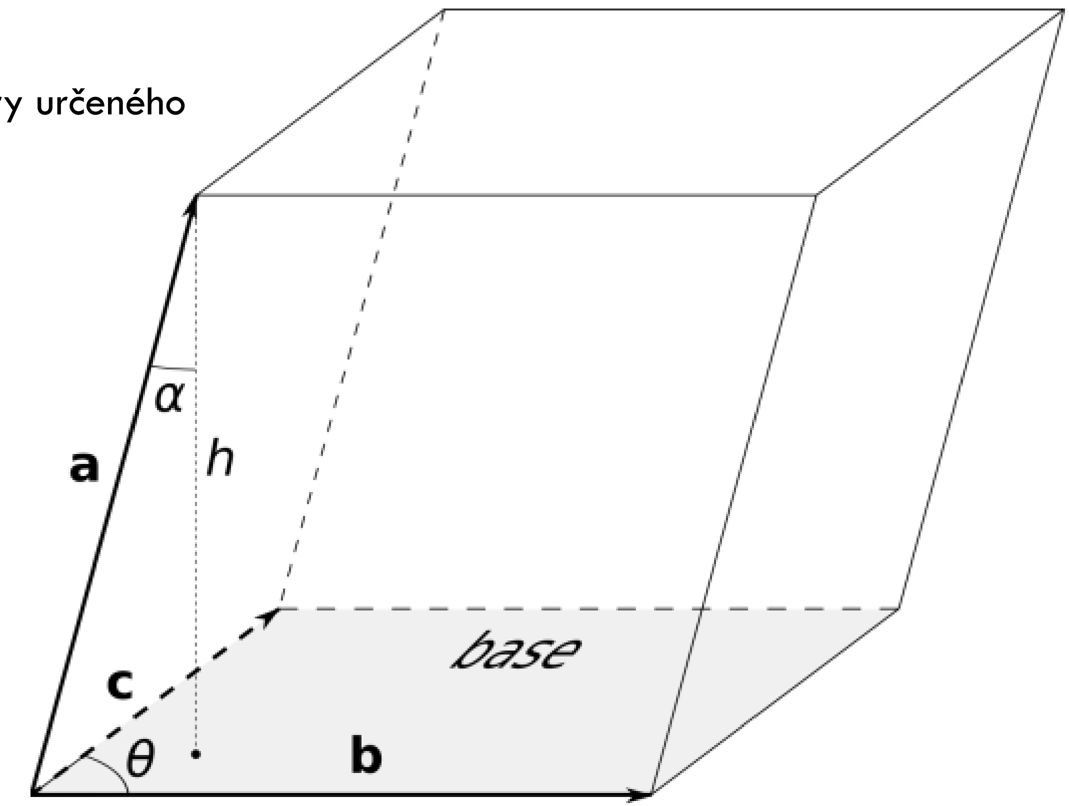


Smíšený součin

- Smíšený součin (mixed product, box product, triple scalar product)

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) =$$
$$= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$$

  - geometrický význam
  - objem rovnoběžnostěnu vektory určeného



Tenzorový součin

- Tenzorový (dyadický) součin
  - $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$
  - má-li prostor $\boldsymbol{V}$ dimenzi m a $\boldsymbol{W}$ dimenzi n, pak $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ má dimenzi mn
  - obecně není komutativní
  - je distributivní a asociativní
- Použití
  - mechanika kontinua, deformace, pevnost, pružnost
  - kvantová mechanika – stavy systémů více částic
  - relativistická fyzika – popis geometrie časoprostoru
  - geometrické objekty vyšších dimenzí
    - např. tenzory 2. řádu popisující plochy a křivky ve 3D

	α_1	α_2	...	α_n
β_1	$\alpha_1 \beta_1$	$\alpha_2 \beta_1$	$\cdots$	$\alpha_n \beta_1$
β_2	$\alpha_1 \beta_2$	$\alpha_2 \beta_2$	$\cdots$	$\alpha_n \beta_2$
$\cdots$				
β_m	$\alpha_1 \beta_m$	$\alpha_2 \beta_m$	$\cdots$	$\alpha_n \beta_m$

Tenzor

- Tenzor
  - zobecnění pojmu vektor
  - složky vektoru 1 index, složky tenzoru více indexů
    - např. T_{ij} , obecně $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$

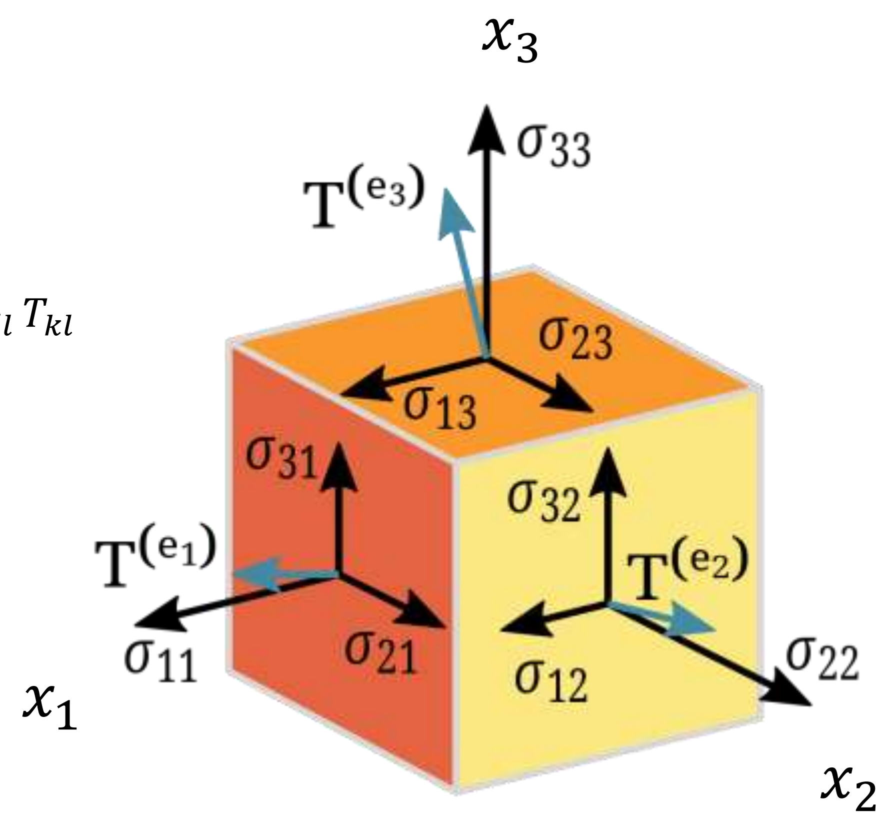
- Transformace tenzoru
  - při transformaci souřadnic

$$x'_i = \sum_j a_{ij}\, x_j$$

  - se transformuje podle vztahu
    - (pro tenzor 2. řádu)

$$T'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik}\, a_{jl}\, T_{kl}$$

- Příklad
  - např. tenzor napětí



Tenzory

- Obecný tvar tenzoru

$$\boldsymbol{T} = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{m1} & T_{m2} & \dots & T_{mn} \end{pmatrix} = T_{ij}\ \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$$

tenzorový součin bázových vektorů

- Tenzory 2. řádu lze rozložit na součet symetrického a antisymetrického tenzoru

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = S_{ij} + Q_{ij}$$

- Přístup k prvku tenzoru

$$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_j$$

násobení zleva i zprava bázovými vektory

Croneckerovo delta

- Croneckerovo delta
  - Matematická funkce určená předpisem

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud} \quad i = j \\ 0, & \text{pokud} \quad i \neq j \end{cases}$$

  - δ_{ij} zaměňuje indexy složek vektorů nebo prvků tenzorů, např.

$$\sum_i v_i \delta_{ij} = v_j$$

- Einsteinova sumační konvence
  - pokud v zápisu dva stejné indexy, sčítáme přes ně (sumu nezapisujeme)

$$v_i \delta_{ij} = v_j$$

- Úžení tenzorů

$$\delta_{ij} T_{ij} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

- Aplikace na tenzorový součin

$$\delta_{ij} a_i b_j = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

skalární součin

Levi-Civittův symbol

- Levi-Civittův antisymetrický tenzor
  - 3. řádu

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & (i,j,k) \in \{(3,2,1),(1,3,2),(2,1,3)\} \\ 0 & i=j, \quad j=k, \quad i=k \end{cases}$$

  - řádu n

$$\varepsilon_{ijkl\dots} = \begin{cases} +1 & (i,j,k,\mathrm{l},\dots)\ \text{sudá permutace}\ (1,2,3,4,\dots) \\ -1 & (i,j,k,\mathrm{l},\dots)\ \text{lichá permutace}\ (1,2,3,4,\dots) \\ 0 & \text{pokud 2 indexy rovny} \end{cases}$$

- Aplikace na tenzorový součin

$$\varepsilon_{ijk} a_i b_j$$

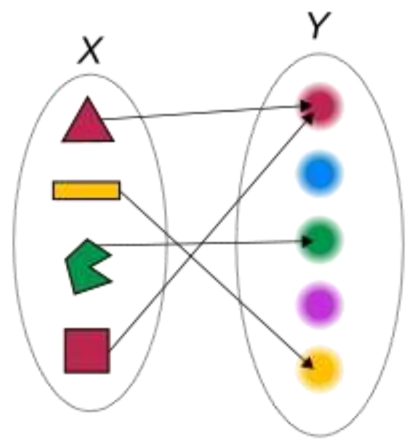
  - přes i a j sčítáme, zůstane 1 index – je to vektor
  - spočteme po složkách

vektorový součin

$$\varepsilon_{ij1} a_i b_j = a_2 b_3 - a_3 b_2 \qquad \varepsilon_{ij2} a_i b_j = a_3 b_1 - a_1 b_3 \qquad \varepsilon_{ij3} a_i b_j = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Zobrazení

- Zobrazení (map)
  - binární relace, u které má každý vzor nejvýše jeden obraz
    - obecné mapování mezi dvěma množinami



- Operátor
  - speciální typ zobrazení
  - mapuje jeden vektorový prostor do téhož prostoru
  - obv. má na vstupu i na výstupu funkci
    - funkce samy jsou zobrazeními
  - každému prvku f z prostoru X (např. funkci) přiřazuje prvek g
  - např. $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{v}) = c\,\boldsymbol{v}$ $\qquad F_2(y) = \frac{dy}{dx}$

- Transformace
  - zobrazení, které přetváří nebo mění objekt
    - často v geometrickém nebo jiném specifickém smyslu
  - nemusí být mezi vektorovými prostory
  - může být lineární nebo nelineární

Lineární zobrazení

- Lineární zobrazení (transformace)
  - zachovává lineární vlastnosti
    - tj. sčítání a násobení skalárem
  - aditivita
    - $T(u + v) = T(u) + T(v)$
  - homogenita
    - $T(cu) = cT(u)$
  - obraz každého vektoru $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$ lze tedy vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů

$$\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x}) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A(\boldsymbol{x}_i)$$

  - může být reprezentováno maticí
    - definuje, jak transformace působí na vstupní vektory

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{x}$$

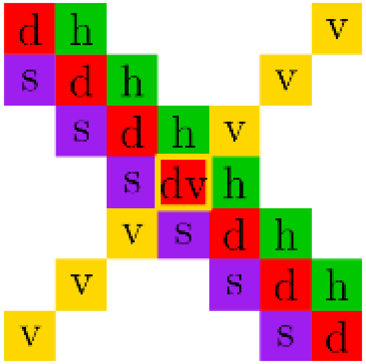
Matice

- **Matice**
  - koncept k uspořádání a organizaci čísel nebo symbolů do obdélníkové struktury

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  - Je-li $m = n$, je A čtvercová matice m-tého stupně

- **Diagonála matice**
  - hlavní
    - a_{ij} pro $i = j$
  - vedlejší
    - a_{ij} pro $j = (n - i) + 1$
  - sekundární
    - horní a dolní



Hodnost matice

- Hodnost matice (rank)
  - hodnost matice h je počet lineárně nezávislých řádků
- Metody určení hodnosti
  - ověření lineární závislosti
  - Gaussova eliminace
    - převod na horní trojúhelníkovou matici
    - počet nenulových řádků v tomto tvaru
  - determinant matice A
    - hledání největšího nenulového minoru (subdeterminantu)
    - hodnost je rovna řádu největšího minoru této matice, který má hodnotu různou od nuly

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} & 4 & 2 & 7 \\ 0 & \mathbf{-3} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- Vlastnosti
  - čtvercová matice řádu n je regulární, právě když má hodnost n
    - (tj. plnou hodnost)
  - regulární matice má inverzi
  - singulární matice je čtvercová matice, jejíž determinant je roven nule
    - řádky i sloupce jsou lineárně závislé
    - hodnost je menší než řád matice

Základní operace s maticemi

- A a B jsou matice typu (m, n) a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

  - je součet matic A a B

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

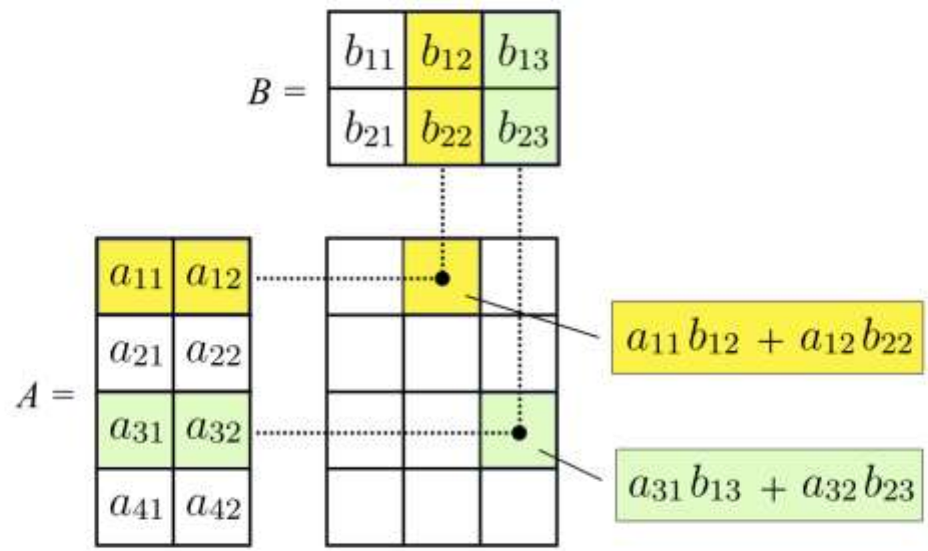
  - je součin matice A a čísla α

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Násobení matic

- Matice A je typu (m, n), matice B je typu (n, p)
- Potom matice C vzniklá jejich součinem bude typu (m, p) a pro její prvky platí

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

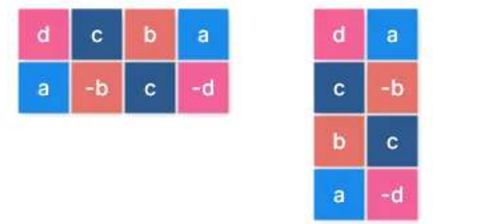


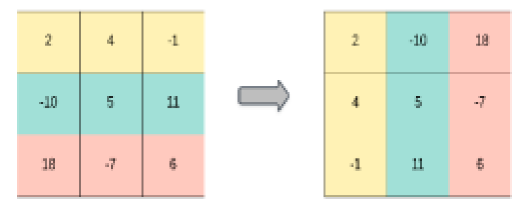
$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A(m,n)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}}_{B(n,p)} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}}_{C(m,p)}$$

Transpozice, stopa

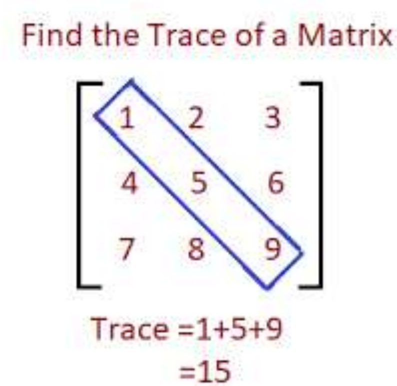
- Transpozice matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$





- Stopa (Trace) čtvercové matice $A(n, n)$
  - $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$
  - stopa je lineární zobrazení
- Vlastnosti stopy
  - pro libovolné čtvercové matice A a B stejného řádu nad tělesem T a libovolné $r \in T$
  - $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$
  - $\operatorname{tr}(rA) = r \operatorname{tr} A$
  - dále platí $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$



Vlastní čísla a vlastní vektory

- Mějme lineární operátor A
  - jeho reprezentací je čtvercová matice A
  - při transformaci některé vektory nezmění svůj směr
    - pouze se změní jejich velikost
  - ⇒ vlastní vektory této transformace

- Vektor $\boldsymbol{u}$ je vlastní vektor lineárního operátoru (matice) A s odpovídajícím vlastním číslem λ, pokud platí:

$$A \cdot \boldsymbol{u} = \lambda\, \boldsymbol{u}$$

  - lineární transformace A vektoru $\boldsymbol{u}$ je λ násobek tohoto vlastního vektoru
    - stavit jako "osy", kolem kterých se provádí transformace
  - vlastní číslo λ určuje, jak moc se změní vlastní vektor $\boldsymbol{u}$ v rámci transformace
    - míra změny v rámci těchto "os"

- Možné hodnoty vlastního čísla
  - kladné (zvětšuje vektor)
  - záporné (mění směr a velikost)
  - nulové (zvláštní případy)
  - komplexní (rotace v komplexní rovině)

Nalezení vlastních čísel a vektorů

- Řešení charakteristická rovnice

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

  - získáme vlastní čísla
  - vlastní vektory řešením rovnic

$$(A - \lambda I)\,\boldsymbol{u} = 0$$

- Příklad $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
  - vlastní čísla

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \qquad \lambda_1 = 5, \qquad \lambda_2 = 2$$

  - vlastní vektory

$$(A - 5I)\,\boldsymbol{u} = 0 \qquad\qquad (A - 2I)\,\boldsymbol{u} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{u} = 0 \qquad\qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{u} = 0$$

$$\boldsymbol{u}_1 = (1;\ 1) \qquad\qquad \boldsymbol{u}_2 = (-1;\ 2)$$

Inverzní matice

- Matice A, X a E jsou čtvercové matice typu (n, n) a E je jednotková matice.
- Pokud platí rovnice

$$A \cdot X = E$$

- potom X nazýváme **inverzní maticí** k matici A a zapisujeme jako $X = A^{-1}$
  - invertibilní matice jsou regulární matice

- Např.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0.3 - 1 \cdot 0.2 & -4 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.4 \\ 2 \cdot 0.3 - 3 \cdot 0.2 & -2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot A$$

Inverzní matice

- Rozšířená matice
  - matice získaná zápisem dvou matic za sebou
    - obv. za účelem současného provádění stejných řádkových operací na obě matice zároveň
  - speciální případ blokové matice se dvěma bloky vedle sebe
  - např.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Výpočet inverze např. pomocí Gaussovy eliminace
  - z původní matice a jednotkové matice je nejprve sestavena bloková matice typu $n \times 2n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  - postupnými úpravami převádíme levou část matice na jednotkovou matici
  - pravá část bude odpovídat inverzní matici

Determinant matice 3×3

- Determinantem čtvercové matice $A = [a_{ij}]$ řádu 3 nazýváme číslo

$$d_A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

- kde σ jsou permutace indexů $1,2,3$
  - $\sigma(i)$ říká, který sloupec vybíráme pro daný řádek

  např. $\sigma = \{2,3,1\}$

  $a_{1\sigma(1)} = a_{1,2}, \quad a_{2\sigma(2)} = a_{2,3}, \quad a_{3\sigma(3)} = a_{3,1}$

- S_3 je množina všech těchto permutací σ
  - možné permutace {1,2,3}, {2,3,1}, {3,1,2}, {3,2,1}, {2,1,3}, {1,3,2}
- $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^r$ je znaménko permutace σ
  - udává počet inverzí v permutaci (sudý nebo lichý)

- např. matice 3×3:

$$d_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

$$d_A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Determinant matice řádu n

- Determinantem čtvercové matice $A = [a_{ij}]$ řádu n nazýváme číslo

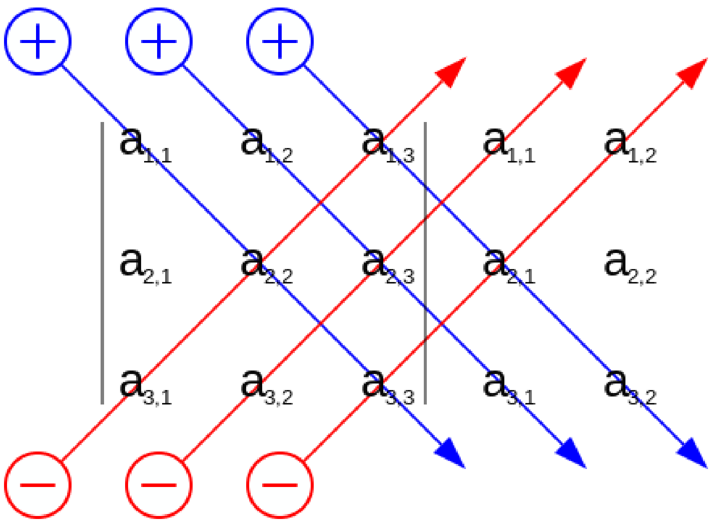
$$d_A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

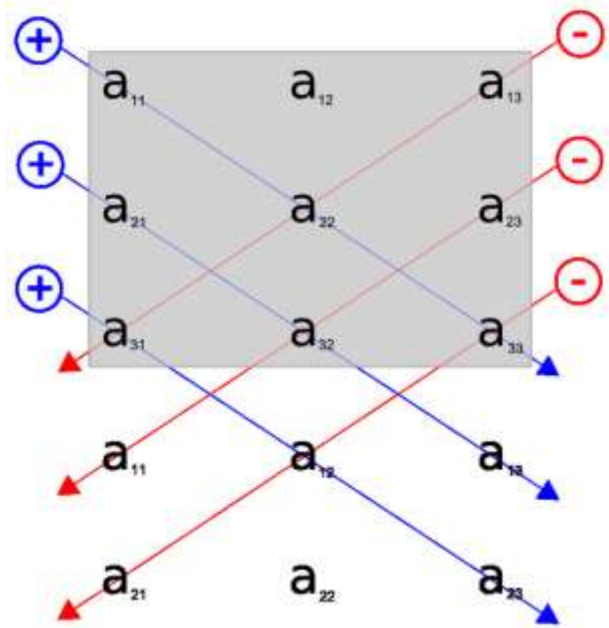
  - kde σ jsou permutace indexů $1, 2, \dots, n$
    - $\sigma(i)$ říká, který sloupec vybíráme pro daný řádek
  - S_n je množina všech těchto permutací σ
  - $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^r$ je znaménko permutace σ
    - udává počet inverzí v permutaci (sudý nebo lichý)
  - obsahuje $n!$ (faktoriál) sčítanců
    - s růstem n nepoužitelné pro výpočet

Výpočet determinantu

- Sarrusovo pravidlo

$$d_A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$





Výpočet determinantu

- Rekurentní předpis (Laplaceův rozvoj)
  - Determinant matice řádu 1 je roven jejímu jedinému prvku, neboli $d_A = a_{11}$
  - Determinant matice řádu $n > 1$ se dá spočítat pomocí rozvoje podle jakéhokoliv řádku nebo sloupce

$$d_A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} \qquad d_A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

  - kde A_{ij} je minor, determinant matice řádu $n - 1$, která vznikne z A vynecháním
    - i-tého řádku a j-tého sloupce (často prvního)

Determinant matice

- Zápis determinantu pomocí Levi-Civittova symbolu
  - ve 3D

$$d_A = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\, a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (i,j,k) \ \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & (i,j,k) \ \in \{(3,2,1),(1,3,2),(2,1,3)\} \\ 0 & \quad i=j, j=k, i=k \end{cases}$$

  - obecně

$$d_A = \sum_{i,j,k,l,\dots} \varepsilon_{ijk\mathrm{l}\dots}\, a_{1i} a_{2j} \dots . a_{nm}$$

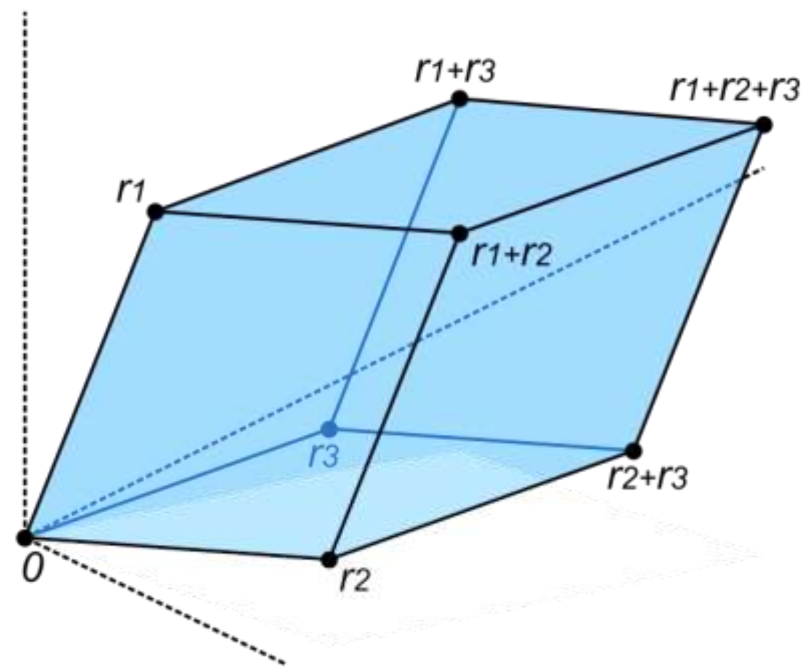
$$\varepsilon_{ijk\mathrm{l}\dots} = \begin{cases} +1 & (i,j,k,\mathrm{l},\dots) \text{ sudá permutace } (1,2,3,4,\dots) \\ -1 & (i,j,k,\mathrm{l},\dots) \text{ lichá permutace } (1,2,3,4,\dots) \\ 0 & \quad \text{pokud 2 indexy rovny} \end{cases}$$

Determinant matice

- Vlastnosti
  - Determinant je nenulový, právě když je matice regulární (existuje inverze)
    - pokud je jeden z řádků nebo sloupců nulový, je celý determinant roven nule
  - Determinant se rovná nule, pokud je alespoň jeden z jeho řádků lineární kombinací ostatních
  - Determinant mění znaménko, prohodí-li se dva řádky mezi sebou
  - Determinant součinu matic je součinem jejich determinantů
  - Determinant inverzní matice splňuje

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

- Geometrický význam
  - absolutní hodnota determinantu = objem rovnoběžnostěnu daného vektory rovnými řádkům (nebo sloupcům) matice



- Poznámka
  - sčítanců $n!$ – nepoužitelné pro větší n

Soustava lineárních rovnic

- Soustava m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots x_n$

$$\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

  - kde $a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{mn}$ a $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$ jsou daná reálná, resp. komplexní čísla

- Soustavu lze zapsat v maticovém tvaru jako

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Rozšířená matice soustavy

- Rozšířená matice soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

- Frobeniova věta
  - Soustava lineárních rovnic je řešitelná tehdy a jen tehdy, je-li **hodnost matice soustavy** rovna **hodnosti rozšířené matice**
    - pokud je hodnost rovna počtu neznámých, má soustava jedno řešení
    - pokud je hodnost menší než počet neznámých, je řešení více

- Soustava homogenních rovnic má vždy triviální řešení $\mathbf{0} = (0,0, \dots, 0)$

Metody řešení soustav lineárních rovnic

- Metody řešení
  - Eliminační metody (Gaussova eliminace)
    - elementární ekvivalentní úpravy mění soustavu, ale zachovávají množinu řešení

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{2} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Cramerovo pravidlo
    - pomocí determinantů

$$x_i = \frac{\det \boldsymbol{A}_i}{\det \boldsymbol{A}}$$

  - metody numerické matematiky (přímé a iterační metody)
    - přímé
    - iterační
    - Monte Carlo
    - …

$$x^{i+1} = F_i\left(x^i\right)$$

Cramerovo pravidlo

- Cramerovo pravidlo
  - Soustavu rovnic o n neznámých s nenulovým determinantem soustavy $d_A \neq 0$ má právě jedno řešení $x_1, \ldots, x_n$, kde

$$x_i = \frac{d_{A_i}}{d_A}$$

  - kde d_{A_i} je determinant soustavy, který vznikne z d_A tak, že nahradíme i-tý sloupec vektorem pravých stran

- Spočítejte pomocí Cramerova pravidla řešení x_1, x_2, x_3 následující soustavy

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}$$

Cramerovo pravidlo

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}$$

$$d_A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

$$d_{A1} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24 \qquad x_1 = \frac{d_{A1}}{d_A} = \frac{24}{12} = 2$$

$$d_{A2} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -24 \qquad x_2 = \frac{d_{A2}}{d_A} = \frac{-24}{12} = -2$$

$$d_A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 36 \qquad x_3 = \frac{d_{A3}}{d_A} = \frac{36}{12} = 3$$

Numerické metody

- Existuje celá řada metod pro řešení soustav lineárních rovnic $Ax = b$

- Přímé metody
  - Gaussova, Gaussova-Jordanova,…
- Iterační metody
  - postupné zlepšování odhadu řešení pomocí opakovaných iterací
  - Jacobiova, Gaussova-Seidelova, Superrelaxační
- Metody Monte Carlo
  - Sekvenční metoda, Metoda náhodné procházky, …
- Speciální metody
  - Metoda největšího spádu, Metoda sdružených gradientů, …

ITERAČNÍ METODY

Numerické metody – iterační

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

- Inicializace (počáteční odhad)
  - např. nulový vektor, vektor s náhodnými hodnotami, příp. jiný vhodný odhad
  - použijeme předchozí hodnoty k výpočtu nové aproximace
- Získáme posloupnost přibližných řešení
  - ve tvaru $x^{i+1} = F_i(x^i)$, příp.
  - ve tvaru $x^{i+1} = F_i(x^i, x^{i-1}, \ldots, x^{i-k})$
- Ukončíme iterace po dosažení požadované přesnosti

- Řešení konverguje k přesnému řešení x, pokud

$$\lim_{i \to \infty} x^i = x$$

- Uvedeme si „pouze“ metody, kde rovnice má speciální tvar:

$$x^{i+1} = Bx^i + Cb$$

- Ukončovací podmínka iteračního procesu:

$$\left\| x^{i+1} - x^i \right\| \leq \epsilon, \text{ kde } \epsilon \in \mathbb{R} \text{ je dostatečně malé}$$

Numerické metody – iterační

- Podmínky konvergence iteračních metod:
  1. Pokud se iterace dá zapsat jako $x^{i+1} = Bx^i + c$
     - (B iterační matice)
  - spektrální poloměr $\rho(B) < 1$
     - maximální vlastní číslo

  2. Matice A je symetrická a pozitivně definitní
     - všechna vlastní čísla matice A jsou kladná
     - nebo pokud všechny její hlavní minory jsou kladné

$$d_{A_k} > 0 \qquad k = 1, \ldots, n$$

  3. Matice A je diagonálně dominantní
     - součet prvků v libovolném řádku matice musí být menší než prvek na diagonále:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \qquad i = 1, \ldots, n$$

Jacobiova iterační metoda

- Matici soustavy A rozložíme na součet tří matic
  - U – horní trojúhelníková matice bez diagonály
  - L – dolní trojúhelníková matice bez diagonály
  - D – diagonální matice

$$\begin{array}{cc} & D \quad U \\ L & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Soustavu poté upravíme následujícím způsobem

$$A \cdot x = b$$
$$(D + L + U) \cdot x = b$$
$$Dx + (L + U) \cdot x = b$$
$$D \cdot x = b - (L + U) \cdot x$$
$$x = D^{-1} \cdot [b - (L + U) \cdot x]$$

$$x^{i+1} = D^{-1}\left[b - (L + U) \cdot x^{i}\right]$$

Jacobiova iterační metoda

$$x^{i+1} = D^{-1} \cdot \left[b - (L + U) \cdot x^{i}\right]$$

- Jak spočítám inverzní matici?
  - D je diagonální

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} \end{pmatrix}$$

  - stačí vydělit odpovídajícími prvky

- Vlastnosti
  - jednoduchá, dobrá konvergence, ale pomalá

Gaussova-Seidelova iterační metoda

- Použijeme stejný rozklad jako v případě Jacobiovy metody
  - ale vyjádříme x^{i+1} v jiném tvaru

$$
\begin{aligned}
A \cdot x &= b \\
(D + L + U) \cdot x &= b \\
(D + L) \cdot x + U \cdot x &= b \\
(D + L) \cdot x &= b - U \cdot x \\
x &= (D + L)^{-1} \cdot [b - U \cdot x]
\end{aligned}
$$

$$x^{i+1} = (D + L)^{-1} \cdot \left[b - U \cdot x^{i}\right]$$

Superrelaxační metoda

- Využívá se pro urychlení procesů, resp. konvergence iteračních metod
  - $x^{i+1} = F(x^i)$ např. Gauss-Seidelova metoda
  - $x^{i+1} = x^i + F(x^i) - x^i$ úprava
  - $x^{i+1} = x^i + \Delta x_i$ $\Delta x_i = F(x^i) - x^i$
  - místo opravy Δx^i přičteme opravu zvětšenou: $\omega \Delta x^i$
  - $x^{i+1} = x^i + \omega \Delta x^i$
  - $x^{i+1} = x^i + \omega [F(x^i) - x^i]$

$$x^{i+1} = (1-\omega)x^i + \omega F(x^i)$$

  - Vhodnou volbou parametru ω lze dosáhnout rychlejší konvergence metody
    - $\omega < 1$ zpomalí konvergenci, ale zvýší stabilitu metody

VEKTORY A MATICE V PYTHONU

Úkoly a cvičení

Práce s vektory a maticemi v Pythonu

- Reprezentace vektorů a matic v Pythonu
  - NumPy, SciPy, …
- Demonstrace
  - vytváření vektorů, dotazovací příklady, vestavěné funkce
- Příklady (rychlé) pro násobení vektorů
  - různé součiny
- Demonstrace
  - vytváření matic, dotazovací příklady, vestavěné funkce, speciální matice a jejich generování
- Vestavěné funkce/balíky pro práci s maticemi
  - násobení, hodnost, Gauss. eliminace, …
- Využití symbolické matematiky
  - pro práci s vektory, maticemi

Úkoly

- Vektory
  - Vektorový součin pomocí Levi-Civitova symbolu
- Determinant
  - Laplaceův rozvoj
- Soustava rovnic
  - Cramerovo pravidlo
- Soustava rovnic
  - Numerická úloha (dle výběru) a porovnání, generování náhodné matice atd.

Vektorový součin – cvičení

- Napište program pro vektorový součin dvou vektorů
  - $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$
  - pomocí Levi-Civitova symbolu

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \mathbf{e_i} a_j b_k$$

  - kde

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & (i,j,k) \in \{(3,2,1),(1,3,2),(2,1,3)\} \\ 0 & i = j, j = k, i = k \end{cases}$$

  - Výsledek srovnejte s vestavěnou funkcí pro výpočet vektorového součinu dvou vektorů

Laplaceův rozvoj

- Laplaceův rozvoj pro výpočet determinantu matice
- Dle Laplaceova rozvoje lze determinant čtvercové matice A o rozměrech (N, N) získat následovně:

$$
\begin{aligned}
|A| &= \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \\
M_{ij} &= \left| S_{ij}^{A} \right|
\end{aligned}
$$

  - kde S_{ij}^{A} je submatice, která vznikne vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce matice A
  - M_{ij} se nazývá minor matice A a spočítá se jako determinant submatice S_{ij}^{A}
  - a_{ij} je prvek matice A

  - Rozvoj lze provádět přes sloupec nebo řádek

Laplaceův rozvoj – cvičení

- Pomocí Laplaceova rozvoje spočítejte determinant matice A

- Nagenerujte čtvercovou matici A o rozměrech (N, N) a pomocí Laplaceova rozvoje spočítejte determinant této matice
  - Nagenerujte náhodnou matici celých čísel o rozměru (N, N)
  - Zkontrolujte, zda je matice čtvercová
  - Spočítejte determinant pomocí Laplaceova rozvoje
  - Zkuste změnit velikost matice A v rozmezí $N \in (5,200)$ a vykreslete časovou náročnost výpočtů
    - dejte pozor na reprezentaci čísel

Cramerovo pravidlo – cvičení

- Pomocí Cramerova pravidla vyřešte následující soustavu rovnic.

$$\begin{array}{ccccccc} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

- Cramerovo pravidlo:

$$x_i = \frac{d_{A_i}}{d_A}$$

Jacobiova metoda – cvičení

- Pomocí Jacobiovy iterační metody spočítejte následující soustavu rovnic.

$$\begin{array}{ccccccc} 6x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 10 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & = & -4 \end{array}$$

- Jacobiova metoda:

$$x^{i+1} = D^{-1} \cdot \left[b - (L + U) \cdot x^i \right]$$

Lineární oscilátor

- Pohybová rovnice

$$m\,\ddot{x} + k\,x = 0$$

$$m\,\dot{v} + k\,x = 0 \qquad \dot{v} = -\frac{k}{m}x$$

$$\dot{x} = v \qquad \dot{x} = v$$

- Stav systému

$$U(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{k}{m}x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

- Počáteční stav

$$U(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$$