Matematický software

Interpolace a aproximace funkce jedné proměnné

RNDr. Zbyšek Posel, Ph.D.

Katedra informatiky

Interpolace a aproximace

1. Jedna ze základních partií numerické matematiky.
2. Vznikla jako pomocný nástroj pro získání netabelovaných hodnot funkcí při výpočtech.
3. Je východiskem pro mnoho dalších partií; integrace, derivace aj.
4. S rozvíjející se technikoou nutnost interpolovat klesá, funkce jsou zadány přímo.
5. 17. století - prv ní použití interpolace (pomocí polynomu) při tabelování logaritmu.

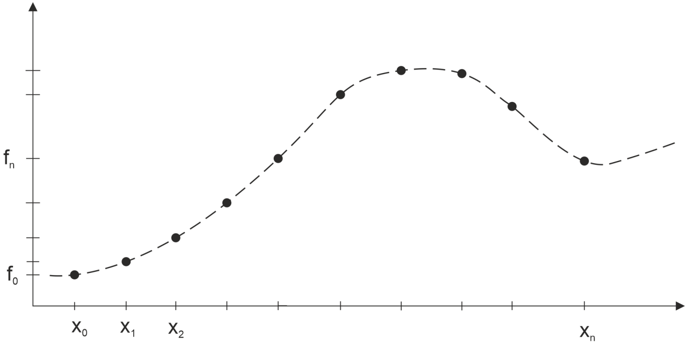
Interpolace a aproximace

Cílem metod interpolace a proximace je nahradit stávající předpis funkce (složitý vzorec, tabulkové hodnoty z měření, ..) funkcí jednodušší, tak aby bylo možné s funkcí dále pracovat, např. ve smyslu její analýzy pomocí derivace, integrace, či funkci efektivně zobrazit, např. pomocí polygonů.

Interpolace a aproximace

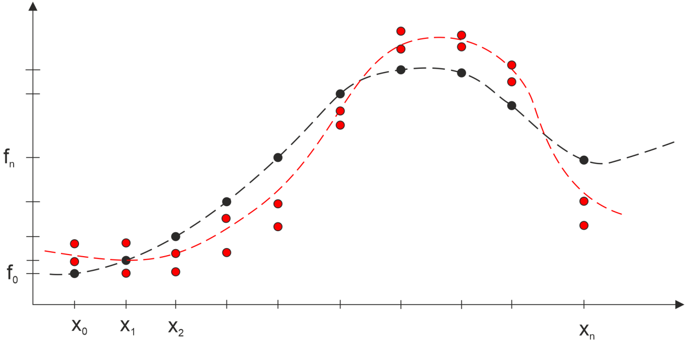
Interpolace

Mějme $n+1$ navzájem různých bodů $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, které budeme nazývat uzlové body, a funkční hodnoty v těchto uzlových bodech, $\{f_0, f_1, ..., f_n\}$. Potom je úlohou interpolace nalézt funkci, nejčastěji polynom, $P_n(x)$, takovou, aby platilo, že $P(x_i) = f_i$ pro $i = 0, 1, ..., n$. Kromě rovnosti funkčních hodnot požadujeme někdy také rovnost prvních derivací. Tedy $P'(x_i) = f_i'$



Aproximace

Mějme sadu měření, kdy každému uzlovému bodu $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ může odpovídat sada funkčních hodnot $\{f_{01}, f_{02}, .., f_{11}, f_{12}, ..., f_{n1}, f_{n2}, ...\}$. Potom je úlohou aproximace nalézt *vhodnou* funkci, která prochází k zadaným bodům v určitém smyslu nejblíže. Vhodnost uvažované funkce lze posuzovat například pomocí minimalizace kvadratické odchylky nebo minimalizace největší chyby.



Interpolace - přehled metod

Mezi používané metody interpolace patří

- **Lineární interpolace**
- **Interpolace algebraickými polynomy**
  - Vandermontova matice
  - Lagrangeova interpolace
  - Newtonova interpolace
  - Hermitova interpolace
- **Interpolace trigonometrickými polynomy**
- Splajny
  - Kubické splajny
- Beziérovy křivky
- Extrapolace

Interpolační vzorec

Interpolace

Mějme $n+1$ navzájem různých bodů $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, které budeme nazývat uzlové body, a funkční hodnoty v těchto uzlových bodech, $\{f_0, f_1, ..., f_n\}$. Potom je úlohou interpolace nalézt funkci, nejčastěji polynom, $P_n(x)$, takovou, aby platilo, že $P(x_i) = f_i$ pro $i = 0, 1, ..., n$. Kromě rovnosti funkčních hodnot požadujeme někdy také rovnost prvních derivací. Tedy $P'(x_i) = f_i'$

Kromě samotné funkce $P_n(x)$ musíme dále odhadnout nepřesnost $E_n(x)$, které se dopouštíme tím, že místo „pravé“ funkce využíváme pro odhad funkčních hodnot v bodech mimo uzlové hodnoty aproximaci $P_n(x)$. Poté rovnici

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

nazveme interpolačním vzorcem a v případě, že nejsou uzlové body rozděleny ekvidistantně, obecným interpolačním vzorcem.

Interpolační vzorec

Weierstrassova věta

Mějme funkci $f(x)$ definovanou a spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pro tuto funkci existuje na daném intervalu posloupnost polynomiálních funkcí $P_n(x)$ nejvýše stupně n, která aproximuje funkci $f(x)$ tak, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{a\leq x\leq b}|f(x)-P_n(x)|\right)=0$$

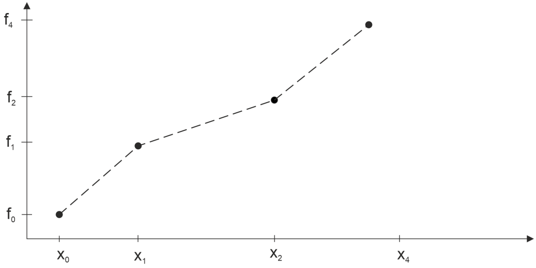
- Na základě věty lze očekávat, že přidáním uzlových bodů n dojde ke zpřesnění interpolace a rekonstrukce funkce bdue přesnější.
- Runge - řada funkcí $P_n(x)$ vytvoředná dle věty výše, může pro rostoucí n divergovat, a to například ve formě oscilací mimo uzlové body.

Lineární interpolace

Jde o nejjednodušší formu interpolace, někdy nazývanou také *po částech lineární interpolace*.

Mějme sadu uzlových bodů $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ a k nim příslušné hodnoty funkce $f(x)$, $\{f_0, f_1, ..., f_n\}$ Poté mezi sousedícími uzlovými body x_i a x_{i+1} aproximujeme funkci $f(x)$ úsečkou $g(x)$ tak, že platí

$$g(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x_{i+1} - x_i)$$



Interpolace pomocí algebraických polynomů

Cílem je zkonstruovat interpolační polynom $P_n(x)$, který bude vyhovovat definicím uvedeným na předchozích snímcích.

Vandermontova matice

Interpolační polynom hledáme ve tvaru

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

a požadujeme, aby procházel $n+1$ uzlovými body.

Úloha se tedy redukuje na hledání řešení soustavy rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned}
a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+...+a_nx_0^n &= f(x_0)\\
a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+...+a_nx_1^n &= f(x_1)\\
....&\\
a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+...+a_nx_n^n &= f(x_n)
\end{aligned}$$

Přepsáním dostaneme rovnici v maticovém tvaru, kde

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{01} & a_{11} & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{0n} & a_{n1} & . & a_{nn} \end{pmatrix}}^{\mathbf{A}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}}^{\mathbf{X}} = \overbrace{\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ . \\ f(x_n) \end{pmatrix}}^{\mathbf{F}}$$

kde matice $\mathbf{A_{ij}}$ této soustavy se nazývá Vandermontova matice. Nevýhodou této metody jsou časté zákmity polynomu mimo uzlové body způsobené zaokrouhlováním koeficientů a_i

Lagrangeova metoda

- Matematik Lagrange použil tuto metodu již v roce 1794.
- Není nutné počítat koeffiicenty a_{ij} Vandermontovy matice, není tedy zatížena zaoktrouhlvací chybou tohoto typu.
- Konstruuje interpolační polynom na základě tzv. *poměrné diference* .

Poměrná diference

Mějme funkci $f(x)$ definovanou a spojitou na intervalu $\langle a, b, \rangle$, kde $x_i \in \langle a, b, \rangle$.

Potom poměrnou diferencí $f[x_i]$

- 0. řádu rozumíme vztah $f[x] = f(x)$, 4ilil funkční hodnotu
- 1. řádu rozumíme vztah

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

- 2. řádu rozumíme vztah

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

- 3. řádu ...

Lagrangeova metoda

Mějme funkci $f(x)$ definovanou a spojitou na intervalu $\langle a, b, \rangle$ ve 4 bodech, kde $x_i = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ a $f_i = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ a platí, že $f(x_i) = f_i$. Potom odvodíme Lagranegův interpolační vzorec pomocí poměrné diference $(n+1)$-ho řádu.

$$
\begin{aligned}
f[x, x_0, x_1, x_2, x_3] = &\frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} + \\
&+ \frac{f(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \\
&+ \frac{f(x_1)}{(x_1-x)(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\
&+ \frac{f(x_2)}{(x_2-x)(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \\
&+ \frac{f(x_3)}{(x_3-x)(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}
\end{aligned}
$$

Z rovnice vyjádříme $f(x)$ a dostaneme

$$\begin{aligned} f(x) = & -f(x_0)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x)(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} - \\ & -f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x)(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - \\ & -f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_2-x)(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} - \\ & -f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_3-x)(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} - \\ & +f[x, x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \end{aligned}$$

Rovnice se nazývá Lagranegův interpolační vzorec. Poslední člen v rovnici se nazývá doplňující člen, neboli zbytek a označuje se $E_n(x)$.

Lagrangeova metoda

Označíme-li

- čitatele: $\ell_i(x) = (x - x_0)..(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})...(x - x_n)$
- jmenovatele: $\ell_i(x_i) = (x_i - x_0)..(x_i - x_{i-1})(x_i - x_i)(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)$, přičemž stejné čeny vynecháváme
- zbytek: $E_n = f[x, x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)..(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})...(x - x_n)$

Dostaneme obecný Lagrangeův interpolační vzorec ve tvaru

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{\ell_i(x)}{\ell_i(x_i)} + E_n$$

- V případě přidání dalšího uzlového bodu se musí celý polynom přepočítat znova
- Je vhodný pro teoretické zkoumání více než pro praktické účely.

Lagrangeova metoda

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{\ell_i(x)}{\ell_i(x_i)} + E_n$$

Najděte Lagrangeův interpolační polynom zadaný body $x_i = \{-1, 0, 2, 3\}$ a funkčmními hodnotami $f_i = \{5, 10, 2, 1\}$. Vykreslete polynom spolu s uzlovými body.
Řešení: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 10$

Najděte Lagrangeův interpolační polynom zadaný body $x_i = \{-1, 0, 1, 3\}$ a funkčmními hodnotami $f_i = \{2, 1, 2, 0\}$. Vykreslete polynom spolu s uzlovými body.
Řešení: $f(x) = \frac{1}{15}\left(-5x^3 + 12x^2 + 5x + 12\right)$

Newtonova metoda

Pro flexibilní přidání dalšího interpolačního bodu se ukazuje jako vhodný polynomu ve tvaru:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

V případě interpolace požadujeme, aby pro všechny uzlové body x_i platilo $P_n(x_i) = f(x_i) = f_i$ a dostáváme tak vyjádření pro jednotlivé koeficienty

$$\begin{aligned}
P(x_0) &= a_0 = f_0 \\
P(x_1) &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1 \rightarrow a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \\
P(x_2) &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2 \\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

Pomocí poměnrých diferencí lze vyjádřit koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ (viz vyjádření pro a_1) a zapsat tvar polynomu následovně.

Newtonova metoda

$$P_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + .. + \\ ... + f[x_0, .., x_n](x - x - 0)..(x - x_{n-1})$$

- Přidání dalšího členu vyžaduje již „pouze“ výpočet diference vyššího řádu
- Náročnost výpočtu je $O(n^2)$, kde n j epočet uzlových bodů.
- Náročnost výpočtu se dá změnšit zohledněním tzv. Hornerova schématu.
- Podobnou konstrukci využívá také tzv. Nevillův algoritmus.

Newtonova metoda-cvičení

Praktický výpočet interpolace pomocí Newtonova polynomu provedeme na následujícím příkladu.

Pomocí Newtontova polynomu proveďte interpolaci funkce zadané 4 body, kde $x_i = \{-1, 0, 1, 2\}$ a $f_i = \{2, 1, 2, 0\}$. Pro realizaci budeme tedy uvažovat poměrné diference $(n+1)$-ho řádu

Newtonův polynom zapsaný pomocí diferencí bude vypadat následovně.

$$\begin{aligned} P_4(x) = & f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\ & + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ & + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \end{aligned}$$

Newtonova metoda-cvičení

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0,x_1,x_2] - f[x_1,x_2,x_3]}{x_0 - x_3}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0,x_1] - f[x_1,x_2]}{x_0 - x_2} \qquad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_2,x_3]}{x_1 - x_3}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \qquad f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \qquad f[x_1, x_2] \qquad f[x_2, x_3] = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$$

Pomocí poměrných diferencí nižšího řádu získám diference vyššího řádu.
Dále označme

$$D_0^0 = f_0 \quad D_1^0 = f_1 \quad D_2^0 = f_2 \quad D_3^0 = f_3$$

Newtonova metoda-cvičení

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_3}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} \qquad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{D_0^0 - D_1^0}{x_0 - x_1} \qquad f[x_1, x_2] = \frac{D_1^0 - D_2^0}{x_1 - x_2} \qquad f[x_1, x_2] \qquad f[x_2, x_3] = \frac{D_2^0 - D_3^0}{x_2 - x_3}$$

Pomocí poměrných diferencí nižšího řádu získám diference vyššího řádu.
Dále označme

$$D_0^0 = f_0 \quad D_1^0 = f_1 \quad D_2^0 = f_2 \quad D_3^0 = f_3$$

Newtonova metoda-cvičení

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_0-x_3}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2} \qquad f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_2,x_3]}{x_1-x_3}$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{D_0^0-D_1^0}{x_0-x_1} \qquad f[x_1,x_2] = \frac{D_1^0-D_2^0}{x_1-x_2} \qquad f[x_1,x_2] \qquad f[x_2,x_3] = \frac{D_2^0-D_3^0}{x_2-x_3}$$

Pomocí poměrných diferencí nižšího řádu získám diference vyššího řádu.
Dále označme

$$f[x_0,x_1] = D_1^1 = \frac{D_0^0-D_1^0}{x_0-x_1} \qquad f[x_1,x_2] = D_2^1 = \frac{D_1^0-D_2^0}{x_1-x_2} \qquad f[x_2,x_3] = D_3^1 = \frac{D_2^0-D_3^0}{x_2-x_3}$$

Newtonova metoda-cvičení

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_0-x_3}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{D_1^1-D_2^1}{x_0-x_2} \qquad f[x_1,x_2,x_3] = \frac{D_2^1-D_3^1}{x_1-x_3}$$

$$D_1^1 = \frac{D_0^0-D_1^0}{x_0-x_1} \qquad D_2^1 = \frac{D_1^0-D_2^0}{x_1-x_2} \qquad D_2^1 \qquad D_3^1 = \frac{D_2^0-D_3^0}{x_2-x_3}$$

Pomocí poměrných diferencí nižšího řádu získám diference vyššího řádu.
Dále označme

$$f[x_0,x_1] = D_1^1 = \frac{D_0^0-D_1^0}{x_0-x_1} \quad f[x_1,x_2] = D_2^1 = \frac{D_1^0-D_2^0}{x_1-x_2} \quad f[x_2,x_3] = D_3^1 = \frac{D_2^0-D_3^0}{x_2-x_3}$$

Newtonova metoda-cvičení

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_0-x_3}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{D_1^1-D_2^1}{x_0-x_2} \qquad f[x_1,x_2,x_3] = \frac{D_2^1-D_3^1}{x_1-x_3}$$

$$D_1^1 = \frac{D_0^0-D_1^0}{x_0-x_1} \qquad D_2^1 = \frac{D_1^0-D_2^0}{x_1-x_2} \qquad D_2^1 \qquad D_3^1 = \frac{D_2^0-D_3^0}{x_2-x_3}$$

Pomocí poměrných diferencí nižšího řádu získám diference vyššího řádu. Dále označme

$$f[x_0,x_1,x_2] = D_2^2 = \frac{D_1^1-D_2^1}{x_0-x_2} \qquad D_3^2 = f[x_1,x_2,x_3] = \frac{D_2^1-D_3^1}{x_1-x_3}$$

Newtonova metoda-cvičení

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{D_2^2 - D_3^2}{x_0 - x_3}$$

$$D_2^2 = \frac{D_1^1 - D_2^1}{x_0 - x_2} \qquad D_3^2 = \frac{D_2^1 - D_3^1}{x_1 - x_3}$$

$$D_1^1 = \frac{D_0^0 - D_1^0}{x_0 - x_1} \qquad D_2^1 = \frac{D_1^0 - D_2^0}{x_1 - x_2} \qquad D_2^1 \qquad D_3^1 = \frac{D_2^0 - D_3^0}{x_2 - x_3}$$

Pomocí poměrných diferencí nižšího řádu získám diference vyššího řádu.
Dále označme

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = D_3^3 = \frac{D_2^2 - D_3^2}{x_0 - x_3}$$

Newtonova metoda-cvičení

$$D_3^3 = \frac{D_2^2 - D_3^2}{x_0 - x_3}$$

$$D_2^2 = \frac{D_1^1 - D_2^1}{x_0 - x_2} \qquad D_3^2 = \frac{D_2^1 - D_3^1}{x_1 - x_3}$$

$$D_1^1 = \frac{D_0^0 - D_1^0}{x_0 - x_1} \qquad D_2^1 = \frac{D_1^0 - D_2^0}{x_1 - x_2} \qquad D_2^1 \qquad D_3^1 = \frac{D_2^0 - D_3^0}{x_2 - x_3}$$

Dostavame iterační tvar pro výpočet interpolace pomocí Newtonovy metody, který lze zobeznic do následujícího vzorce

$$D_i^j = \frac{D_{i-1}^{j-1} - D_i^{j-1}}{x_{i-j} - x_i}$$

a numericky řešit příklad pomocí následující tabulky.

Newtonova metoda-cvičení

$$D_i^j = \frac{D_{i-1}^{j-1} - D_i^{j-1}}{x_{i-j} - x_i}$$

x_i	f_i				
x_0	f_0	D_0^0			
x_1	f_1	D_1^0	D_1^1		
x_2	f_2	D_2^0	D_2^1	D_2^2	
x_3	f_3	D_3^0	D_3^1	D_3^2	D_3^3

Pomocí Newtontova polynomu proveďte interpolaci funkce zadané 4 body, kde $x_i = \{-1, 0, 1, 3\}$ a $f_i = \{2, 1, 2, 0\}$. Pro realizaci budeme tedy uvažovat poměrné diference $(n+1)$-ho řádu

$$D_i^j = \frac{D_{i-1}^{j-1} - D_i^{j-1}}{x_{i-j} - x_i}$$

x_i	f_i				
-1	2	D_0^0 (2)			
0	1	D_1^0 (1)	D_1^1		
1	2	D_2^0 (2)	D_2^1	D_2^2	
3	0	D_3^0 (0)	D_3^1	D_3^2	D_3^3

x_i	f_i				
-1	2	2			
0	1	1	-1		
1	2	2	1	1	
3	0	0	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{12}$

Dosazením hodnot z tabulky

x_i	f_i				
-1	2	2			
0	1	1	-1		
1	2	2	1	1	
3	0	0	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{12}$

do vzorce

$$\begin{aligned}P_4(x) =& f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)+\\ &+f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\end{aligned}$$

dostaneme vyjádření pro polynom

$$\begin{aligned}P_4(x) =& 2 + D_1^1(x - x_0) + D_2^2(x - x_0)(x - x_1) + D_3^3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) =\\ =& 2 - (x + 1) + x(x + 1) - \frac{5}{12}(x(x + 1)(x - 1)) =\\ =& -\frac{5}{12}x^3 + x^2 + \frac{5}{12}x + 1\end{aligned}$$

Newtonova metoda-cvičení

Aproximujte funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ Newtonovým interpolačním polynomem v uzlových bodech $x_i = \{1, 2, 2.5, 3.2, 4\}$. Poté pomocí polynomu vypočtěte hodnoty v bodech $x_j = \{3, 10\}$.

Najděte Newtonův a Lagrangeův interpolační polynom zadaný body $x_i = \{-1, 0, 2, 3\}$ a funkčními hodnotami $f_i = \{5, 10, 2, 1\}$. Vykreslete polynom spolu s uzlovými body. Porovnejte jejich výsledné tvary.

Interpolace trigonometrickými polynomy

- Interpolace algebraickými polynomy nejsou vhodné pro aproximaci periodických funkcí.
- Místo polynomů využijeme trigonometzrické polynomy.
- 1759 - poprvé využity trigonometrické polynomy k aproximaci funkce.

Interpolace trigonometrickými polynomy

Mějme periodickou funkci definovanou a spojitou na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ s uzlovými body rozdělenými ekvidistantně, $x_i = \{x_0, ..., x_{2n}\}$ a hodnotami funkce $f_i = \{f_0, ..., f_{2n}\}$. Pak existuje právě jeden trigonometrický interpolační polynom $g(x)$ ve tvaru

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

s koeficienty a_k a b_k určenými vztahy

$$a_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f_j \cos \frac{2\pi j}{2n+1} k, \quad k = 0, 1, .., n$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f_j \sin \frac{2\pi j}{2n+1} k, \quad k = 1, .., n$$

Interpolace trigonometrickými polynomy

Mějme periodickou funkci definovanou a spojitou na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ s $2n$ uzlovými body rozdělenými ekvidistantně, $x_i = \{x_0, ..., x_{2n}\}$ a hodnotami funkce $f_i = \{f_0, ..., f_{2n}\}$. Pak existuje právě jeden trigonometrický interpolační polynom $g(x)$ ve tvaru

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] + \frac{a_n}{2} \cos nx$$

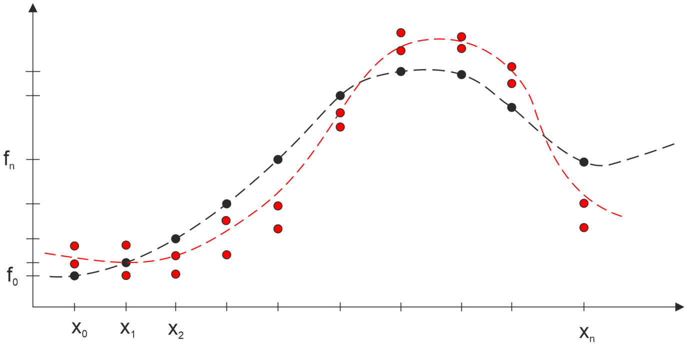
s koeficienty a_k a b_k určenými vztahy

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f_j \cos \frac{\pi j}{n} k, \quad k = 0, 1, .., n$$

$$b_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f_j \sin \frac{\pi j}{n} k, \quad k = 1, .., n-1$$

Aproximace funkce

1. Aproximujeme většinou funkce u kterých je interpolace nevýhodná (zákmit interpolačního polynomu, více funkčních hodnot pro jeden uzlový bod aj.).
2. Nepožadujeme rovnost podmínky $P(x_i) = f_i$.
3. Aproximační funkce se *co nejvíce* blíží k funkční hodnotě f_i.
4. Minimalizujeme odchylku $|P(x_i) - f_i|$ ve smyslu
   - Metody nejmenších čtverců - minimalizace čtverce chyby $|P(x_i) - f_i|^2$.
   - Čebyšeovoa aproximace - minimalizace největšího rozdílu mezi $P(x_i)$ a f_i



Při aproximaci volíme (hledáme) funkci $P(x)$ ve tvaru

$$P(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j P_j(x)$$

a snažíme se najít koeficienty $c_j = c_1, \dots, c_m$ tak,abychom číslo

$$E(c_1, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^{n} [f_i - P(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{n} \left[f_i - \sum_{j=0}^{m} c_j P_j(x) \right]^2$$

bylo minimální.
Za funkci $P_j(x)$ můžeme dosadit jakoukoli funkci (např. x^j) o které si myslíme, že bude dobře aproximovat námi zkoumanou sadu bodů.

Aproximace funkce - Nástin metody nejmenších čtverců

Po úpravách (nebudeme zde rozepisovat) odvodíme vzorec pro tvorbu sady rovnic po jejímž řešení získáme koeficienty c_j.

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \sum_{i=0}^{n} P_j(x_i) P_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) P_k(x_i)$$

kde

- $j = 0, .., m$ iteruje přes všechny koeficienty c_j funkce $P(x) = \sum_j c_j P_j(x)$
- $i = 0, .., n$ iteruje přes všechny uzlové body x_i
- $k = 0, .., m$ iteruje přes všechny rovnice, kde platí $k \geq m$

Aproximace funkce - Nástin metody nejmenších čtverců

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \sum_{i=0}^{n} P_j(x_i) P_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) P_k(x_i)$$

Sadu vzniklých rovnic lze zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m0} & \dots & \dots & P_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \dots \\ F_m \end{pmatrix}$$

kde

$$P_{jk} = \sum_{i=0}^{n} P_j(x_i) P_k(x_i) \quad F_k = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) P_k(x_i)$$

Řešení pak dostaneme ve tvaru

$$P(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + .. + c_m P_m(x)$$

Aproximace funkce - cvičení

Mějme funkci zadanou sadou uzlových bodů $x_i = \{1, 2, 3, 5\}$ a k nim příslušných funkčních hodnot $f_i = \{3, 3, 1, 2\}$. Aproximujme ve smyslu metody nejmenších čtverců tuto funkci pomocí funkce $P_j(x) = x^j$.
Obecná rovnice pro generování soustavy rovnic přejde dosazením za $P_j(x)$ na tvar

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \sum_{i=0}^{n} x_i^j x_i^k = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) x_i^k$$

pokud označíme

$$P_{jk} = \textstyle\sum_{i=0}^{n} x_i^j x_i^k \quad F_k = \textstyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i) x_i^k$$

dostaneme výsledný tvar rovnice

$$\sum_{j=0}^{m} c_j P_{jk} = F_k, \quad k = 0, .., m$$

$$\sum_{j=0}^{m} c_j P_{jk} = F_k, \quad k = 0, .., m$$

Protože máme celkem 4 body ($n = 0, .., 3$) a budeme aproximovat funkcí $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ ($m = k = 0, .., 2$) bude naše soustava rovnic vypadat následovně

$$\begin{aligned} c_0 P_{00} + c_1 P_{01} + c_2 P_{02} &= F_0 \quad , k = 0 \\ c_0 P_{10} + c_1 P_{11} + c_2 P_{12} &= F_1 \quad , k = 1 \\ c_0 P_{20} + c_1 P_{21} + c_2 P_{22} &= F_2 \quad , k = 2 \end{aligned}$$

Po dosazení vztahu

$$P_{jk} = \sum_{i=0}^{n} x_i^j x_i^k \quad F_k = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) x_i^k$$

a zohlednění bodů $x_i = \{1, 2, 3, 5\}$ a funkčních hodnot $f_i = \{3, 3, 1, 2\}$ dostaneme

Aproximace funkce - cvičení

- $P_{00} = \sum_{i=0}^{3} x_i^0 x_i^0 = \sum_{i=0}^{3} 1 = 4$
- $P_{10} = \sum_{i=0}^{3} x_i^1 x_i^0 = \sum_{i=0}^{3} x_i = 1$
- $P_{20} = P_{02} = P_{11} = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = 39$
- $P_{21} = 161, \ P_{22} = 723$

- $F_0 = \sum_{i=0}^{3} f_i x_i^0 = \sum_{i=0}^{3} f_i = 9$
- $F_1 = \sum_{i=0}^{3} f_i x_i^1 = \sum_{i=0}^{3} f_i x = 22$
- $F_2 = \sum_{i=0}^{3} f_i x_i^2 = 74$

a řešíme následující soustavu rovnic (pomocí vybrané iterační, přímé aj. metody)

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 & 39 \\ 11 & 39 & 161 \\ 39 & 161 & 723 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 22 \\ 74 \end{pmatrix}$$

s řešením ve tvaru $c_0 = \frac{49}{10}$, $c_1 = -\frac{37}{20}$, $c_0 = \frac{1}{4}$ a s výslednou aproximační funkcí

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = \frac{49}{10} - \frac{37}{20} x + \frac{1}{4} x^2$$

Aproximace funkce - cvičení

Vyberte si jednu z funkcí, které byly výše řešeny pomocí Lagrangeova nebo Newtonova polynomu a zkuste aproximovat tuto funkci také metodou nejmenších čtverů. Jako aproximační funkci volte jak lineární funnkci, tak polynom vyššího řádu a porovnejte napříkald i přesnost polynomu při aproximaci a interpolaci.

Literatura I