

ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

Nelineární rovnice

- ❑ Obecný tvar rovnice o jedné neznámé
 - × $f(x) = 0$
- ❑ Lineární rovnice
 - × rovnice, kterou lze ekvivalentními úpravami upravit na tvar $ax + b = 0$
 - × všechny ostatní nelineární
- ❑ Řešitelnost nelineárních rovnic
 - × některé lze řešit přímo
 - × ostatní numericky
- ❑ Rovnice řešitelné přímo
 - × např. algebraické rovnice (polynomy) $P_n(x) = 0$ nebudeme se zabývat
 - P_n je polynom stupně n
 - × rovnice umožňující separaci proměnných...
- ❑ Ostatní nutno řešit numericky

Numerické řešení

- ❑ Omezíme se na hledání kořenů rovnice $f(x) = 0$
 - × kde $x \in \mathbb{R}$ a $f(x)$ je funkce spojitá

- ❑ Většinou budeme řešit jednu rovnici
 - × některé metody (Newtonova) lze využít i pro řešení soustav

- ❑ Princip numerického řešení
 - × separace kořenů
 - zjistit, kolik kořenů rovnice má
 - určit intervaly, ve kterých leží právě jeden kořen
 - × zpřesňování aproximací
 - pomocí iteračních metod (výhradně)

- ❑ Požadavky
 - × konvergence k přesnému řešení
 - × rychlost konvergence k přesnému řešení

Možnosti separace kořenů

- ❑ Pro iterační metody potřebujeme „správný“ odhad první iterace x^0
 - × úloha není algoritmizovatelná

- ❑ Cíl
 - × zjistit, kolik kořenů rovnice má
 - × určit intervaly, ve kterých leží právě jeden kořen

- ❑ Možnosti
 - × Sledování znaménkových změn funkce $f(x)$
 - × Grafické řešení hrubou silou
 - × Pomocí znalosti grafů elementárních funkcí
 - × Odhad pomocí pomocných přístupů
 - např. půlení intervalu ap.

Možnosti separace kořenů

□ Sledování znaménkových změn funkce $f(x)$

- × ve vybraných bodech $D(f)$ zjistíme znaménko
- × kde se mění znaménko, je kořen

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-	-	+	+	-	-

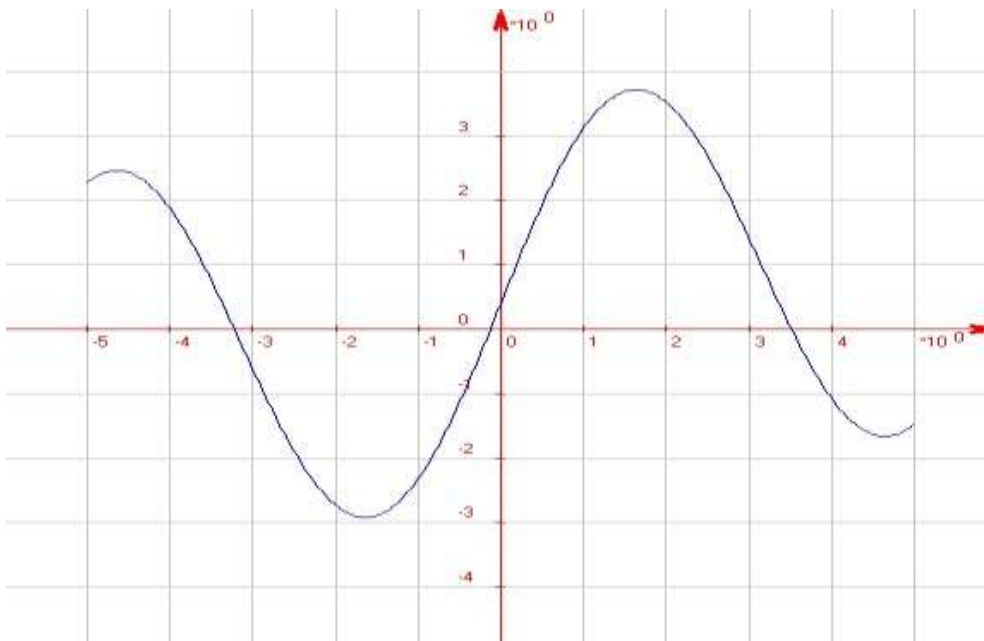
- × 2 kořeny, $x_1 \in (-1, 0)$ a $x_2 \in (1, 2)$

jen hrubé přiblížení
nemusíme objevit všechny kořeny

Možnosti separace kořenů

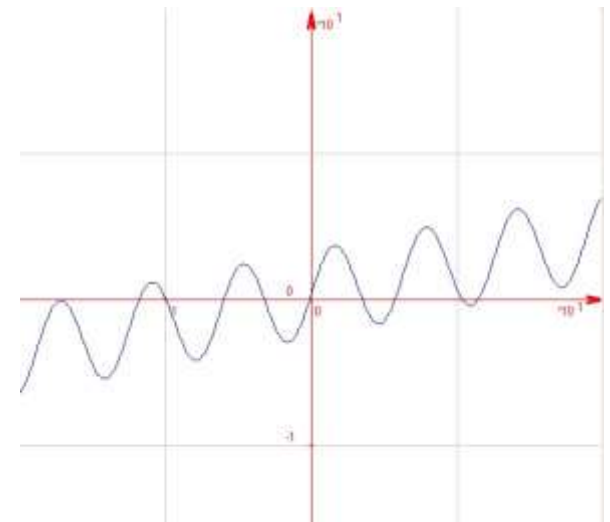
□ Grafické řešení hrubou silou

- ✗ necháme sestrojit graf a hledáme průsečíky s osou x



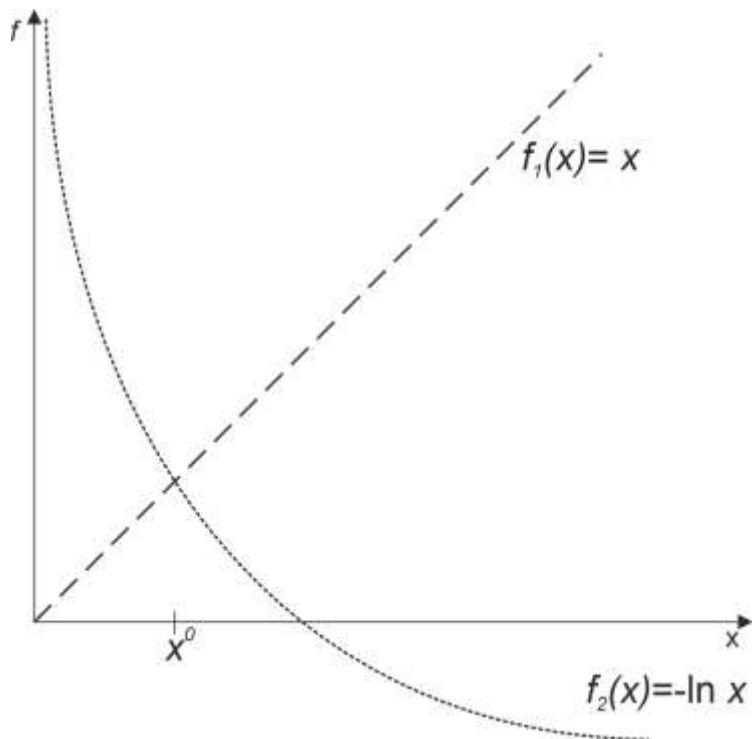
nemusíme objevit všechny kořeny:

- nevhodná volba intervalu
- nedostatečné rozlišení



Možnosti separace kořenů

- Pomocí znalosti grafů elementárních funkcí
 - ✗ uvažuje možnost rozepsat funkci $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ a najít průsečík jednotlivých funkcí
- Příklad: Odhadněte hodnotu první iterace x^0 funkce $0 = x + \ln x$
 - ✗ $f(x)$ hledáme ve tvaru $f_1(x) = x$ a $f_2(x) = -\ln x$
 - ✗ hledáme průsečík rovnice ve tvaru
$$x = -\ln x$$

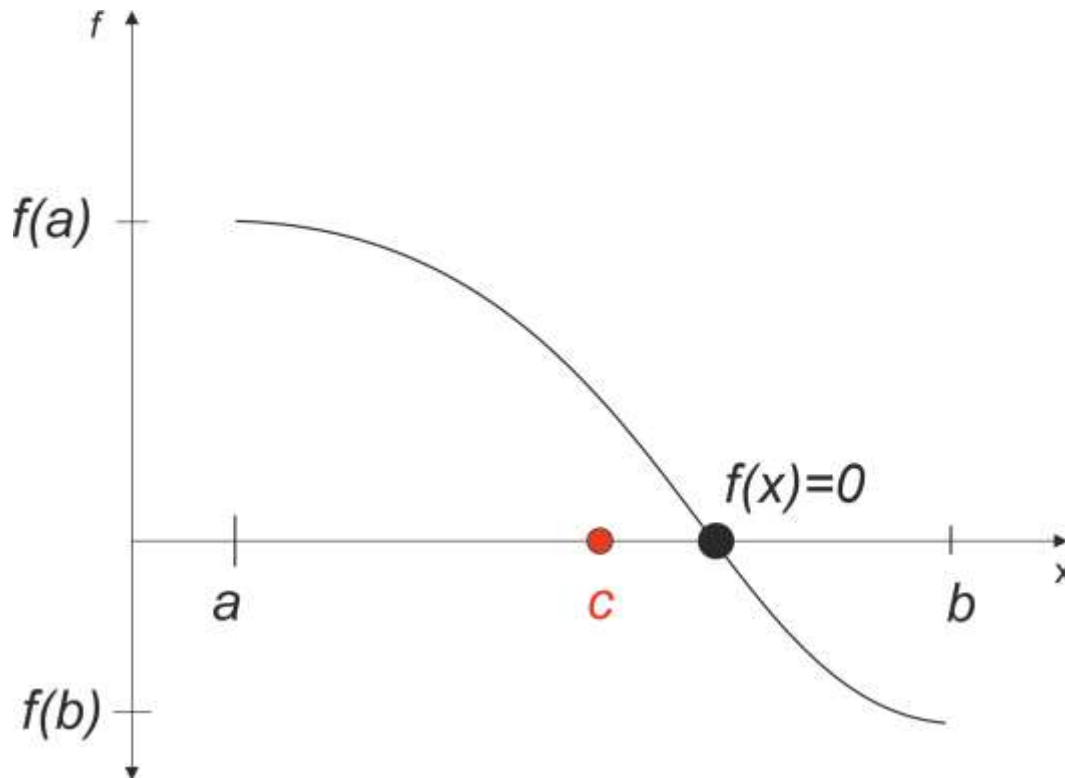


- první iterace x^0 :
 - ✗ průsečík
- interval s jedním kořenem:
 - ✗ $f_1(x) = 0$ a $f_2(x) = 0$
- zpřesnění řešení
 - ✗ jedna z iteračních metod

Možnosti separace kořenů

- Odhad pomocí pomocných přístupů
 - × např. půlení intervalu ap.

$$c = \frac{a + b}{2}$$



Možnosti separace kořenů – cvičení

- Odhad první iterace
- Odhadněte hodnotu první iterace x_0 pomocí grafické metody u následujících funkcí.

$$0 = x + \ln x$$

$$0 = \sin x - \frac{1}{2}x$$

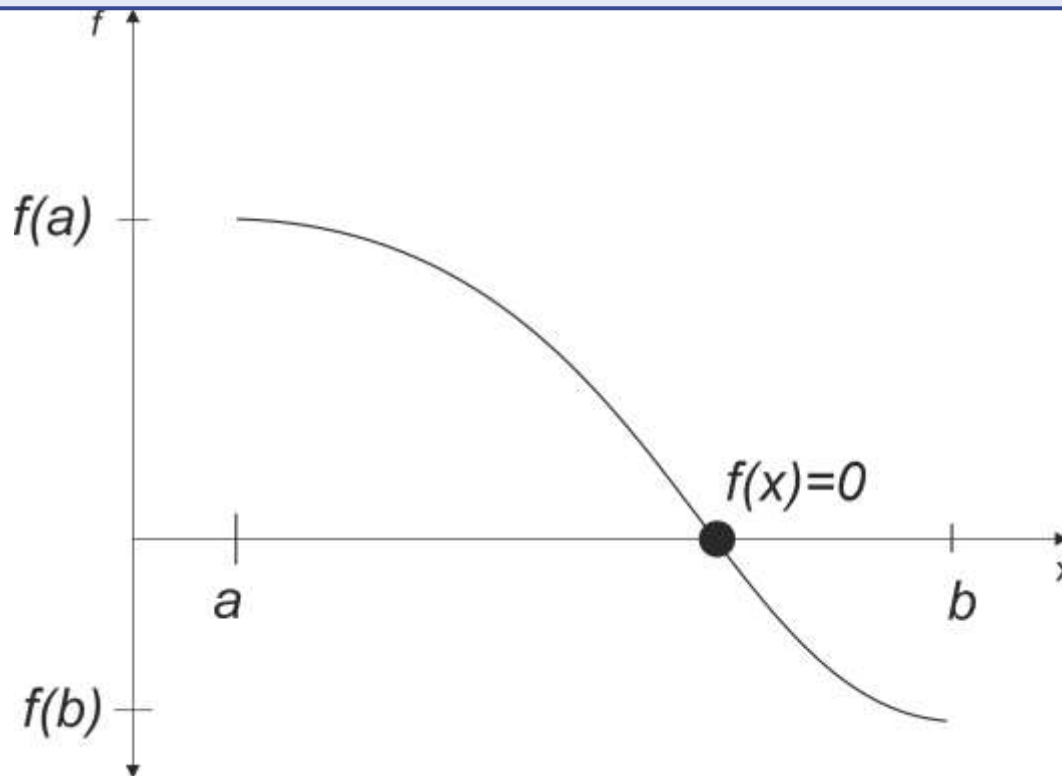
$$0 = e^x + x^2 - 3$$

Numerické řešení

- Máme intervaly, které obsahují vždy po jednom kořenu
- Zpřesňování aproximací
 - × pomocí iteračních metod (výhradně)
- Standardní metody pro řešení nelineárních rovnic:
 - × bisekce
 - × prostá iterace
 - × regula falsi
 - × metoda sečen
 - × Newtonova metoda

Numerické řešení

- Hledáme řešení, tj. kořeny, $x \in \mathbb{R}$ rovnice $f(x) = 0$
 - × definované a spojitě na intervalu $\langle a, b \rangle$, kde platí
 - × $f(a) \cdot f(b) < 0$
- Poté existuje alespoň jeden bod x , náležející do intervalu $\langle a, b \rangle$, který splňuje rovnici $f(x) = 0$



Metoda bisekce

- ❑ Postupné půlení intervalu $\langle a, b \rangle$
- ❑ Konstrukce posloupnosti nových intervalů
 - × vyhovujících podmínce
 - × $f(a^i) \cdot f(x^i)$ nebo $f(x^i) \cdot f(b^i)$,
 - × kdy posloupnost intervalů konverguje k hledanému kořenu rovnice x
- ❑ První aproximace kořene rovnice je dána vztahem $x^0 = \frac{a+b}{2}$

- ❑ Metoda konverguje vždy
- ❑ Konvergence pomalá
 - × každým krokem se výchozí interval zkrátí na polovinu
 - × řád konvergence $p = 1$

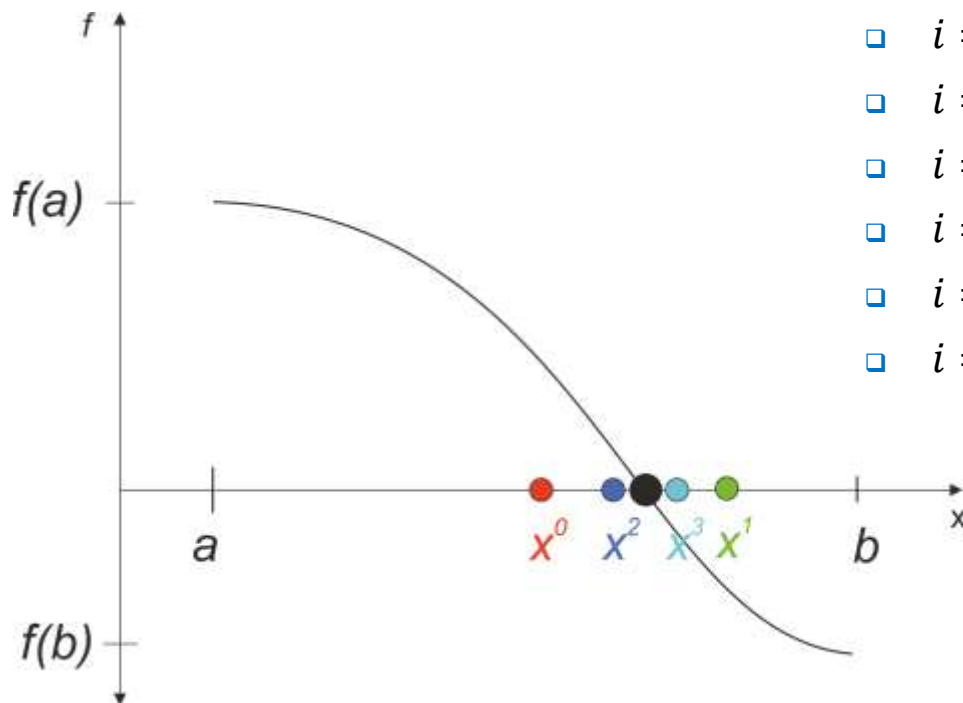
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{n+1}}{E_n^p} = konst > 0$$

- ❑ Rychlost konvergence je závislá na vhodné volbě první aproximace x^0
- ❑ Využívá se zejména pro zúžení intervalu, kde hledáme kořen rovnice
 - × poté se pokračuje s rychlejší metodou

Metoda bisekce

□ Postup metody bisekce (krok i)

- × Rozpůlíme interval $\langle a^i, b^i \rangle$ tak, že $x^i = \frac{a^i + b^i}{2}$.
- × Dostaneme subintervaly $\langle a^i, x^i \rangle$ $\langle x^i, b^i \rangle$.
- × Posoudíme podmínku $f(a^i) \cdot f(x^i) < 0$ a $f(x^i) \cdot f(b^i) < 0$
- × Vybereme interval vyhovující podmínce a dostaneme nový interval $\langle a^{i+1}, b^{i+1} \rangle$
- × Celý postup opakujeme.



- $i = 0$: $\langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, x^0 \rangle, \langle x^0, b \rangle$
- $i = 1$: $\langle x^0, b \rangle \rightarrow \langle x^0, x^1 \rangle, \langle x^1, b \rangle$
- $i = 2$: $\langle x^0, x^1 \rangle \rightarrow \langle x^0, x^2 \rangle, \langle x^2, x^1 \rangle$
- $i = 3$: $\langle x^2, x^1 \rangle \rightarrow \langle x^2, x^3 \rangle, \langle x^3, x^1 \rangle$
- $i = 4$: ...
- $i = n$: STOP

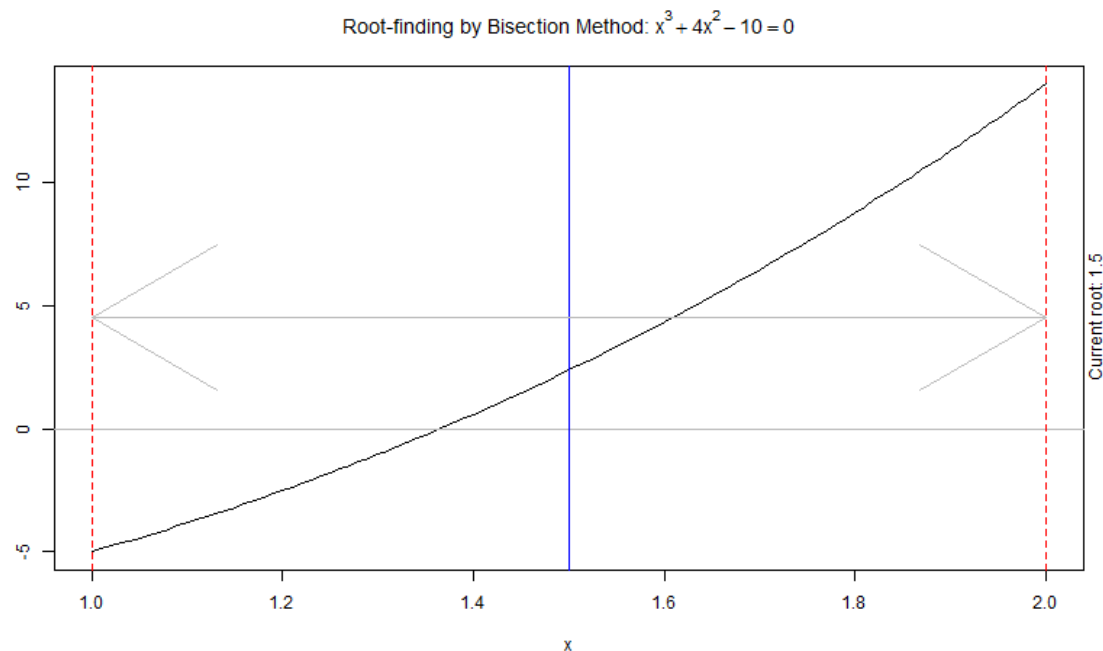
Metoda bisekce

- Iterační proces končí (STOP podmínka), když

- × nalezneme kořen rovnice
- × je splněna konvergenční podmínka
 - $b^k - a^k < 2\epsilon$
 - ϵ je požadovaná přesnost

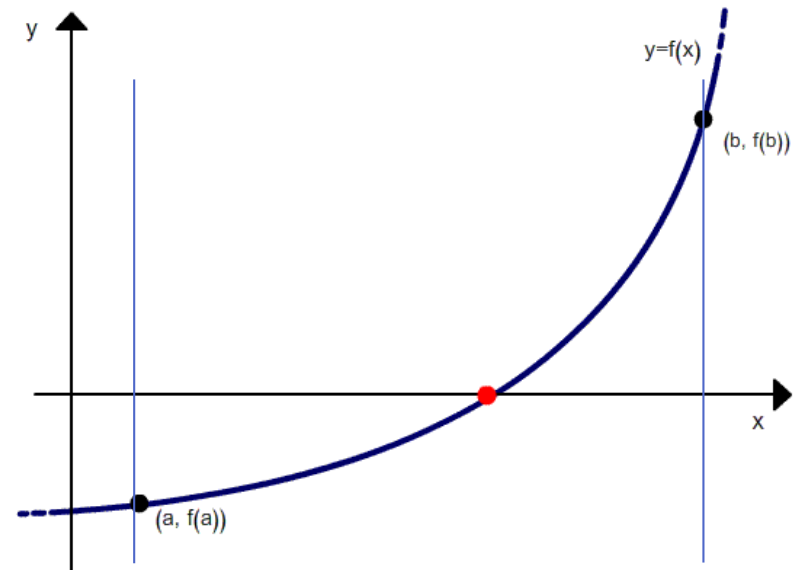
- Kořen rovnice je poté určen jako

$$x = \frac{a^k + b^k}{2}$$



Metoda regula falsi

- ❑ Jedna z prvotních metod pro hledání kořenů rovnice
 - ✗ někdy se nazývá metoda tětiv nebo false position method (metoda falešné polohy)
- ❑ Předpoklad
 - ✗ máme definovanou a spojitou funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$
- ❑ Volba dělicího bodu x^i intervalu
 - ✗ průsečík sečny funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a^i, b^i \rangle$ a osy x
 - tedy ne polovina intervalu
 - ✗ stále platí podmínka $f(a^i)f(b^i) < 0$.

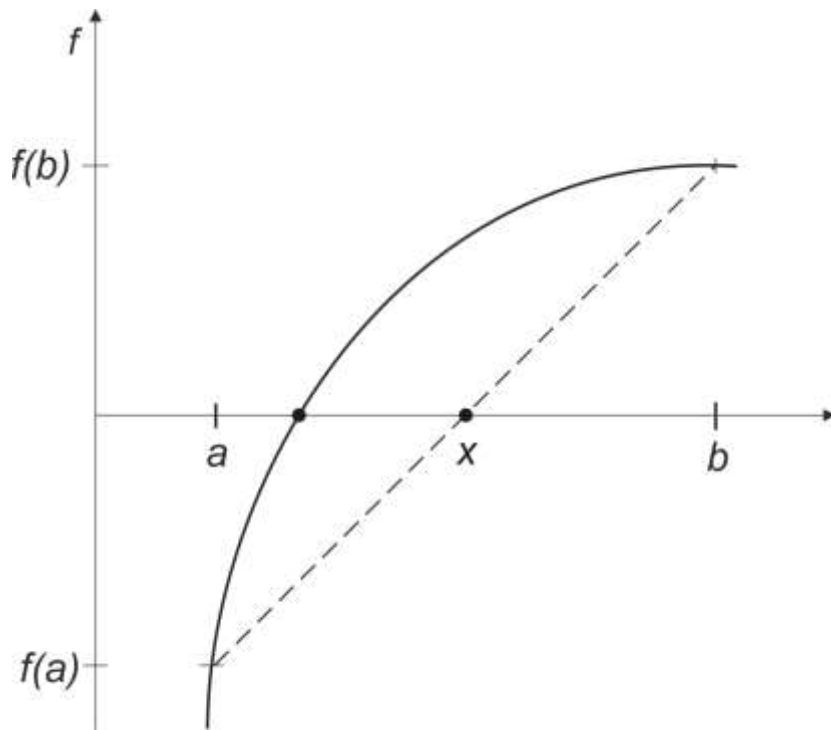


Metoda regula falsi

- Sečnu funkce $f(x)$ vyjádřit pomocí rovnice přímky $y = kx + q$

× kde $q = f(a)$ a $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$



- Průsečík s osou x :

× položíme $y = 0$

× vyjádříme x

$$x = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

Metoda regula falsi

- Určíme průsečík

- ✗ na intervalu $\langle a^i, b^i \rangle$ jako

$$x^i = a^i - f(a^i) \frac{b^i - a^i}{f(b^i) - f(a^i)}$$

- Určíme, který z intervalů $\langle a^i, x^i \rangle$ nebo $\langle x^i, b^i \rangle$ budeme dále používat

- ✗ dle podmínky $f(a) \cdot f(b) < 0$

$$f(a^i) \cdot f(x^i) < 0 \rightarrow b^i = x^i$$

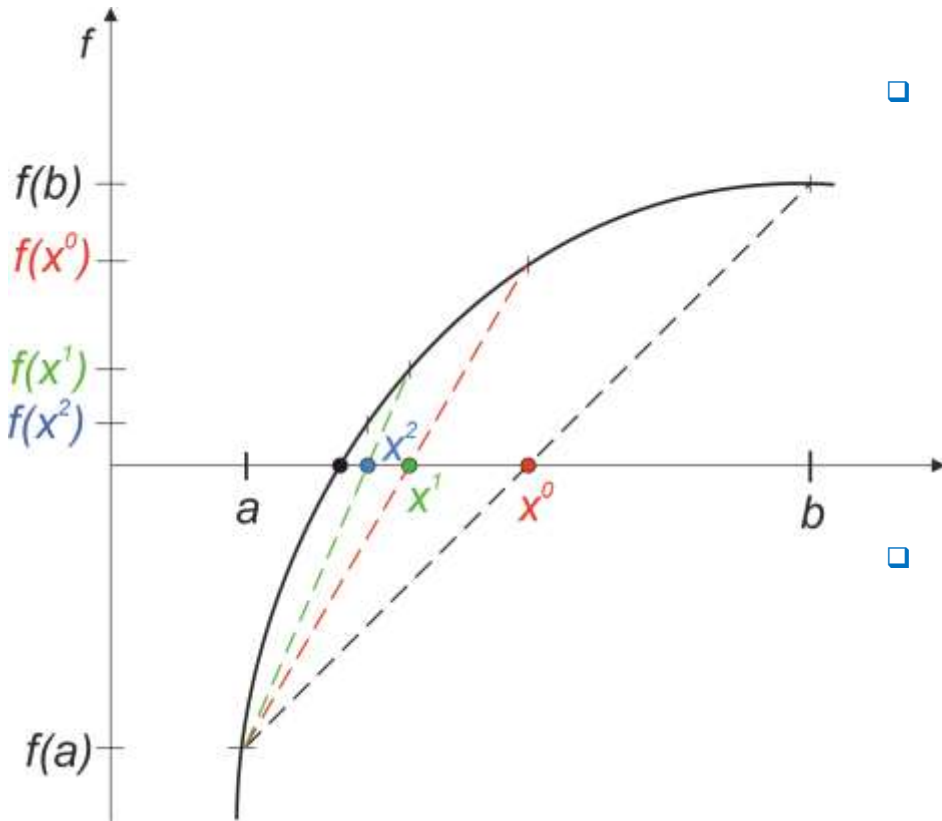
$$f(x^i) \cdot f(b^i) < 0 \rightarrow a^i = x^i$$

- Celý postup opakujeme

- ✗ až do splnění STOP podmínky

$$f(a^i) \cdot f(b^i) \leq \delta$$

$$|x^{i+1} - x^i| \leq \delta$$



Metoda regula falsi a metoda sečen

❑ Metoda konverguje vždy

- × obvykle rychleji než bisekce
 - pokud blízko lineární funkci
- × v okolí kořene rovnice konverguje pomalu
- × lze použít pro prvotní zúžení intervalu $\langle a, b \rangle$ a kořen najít rychleji konvergující metodou
 - pod. jako bisekce

❑ Metoda sečen

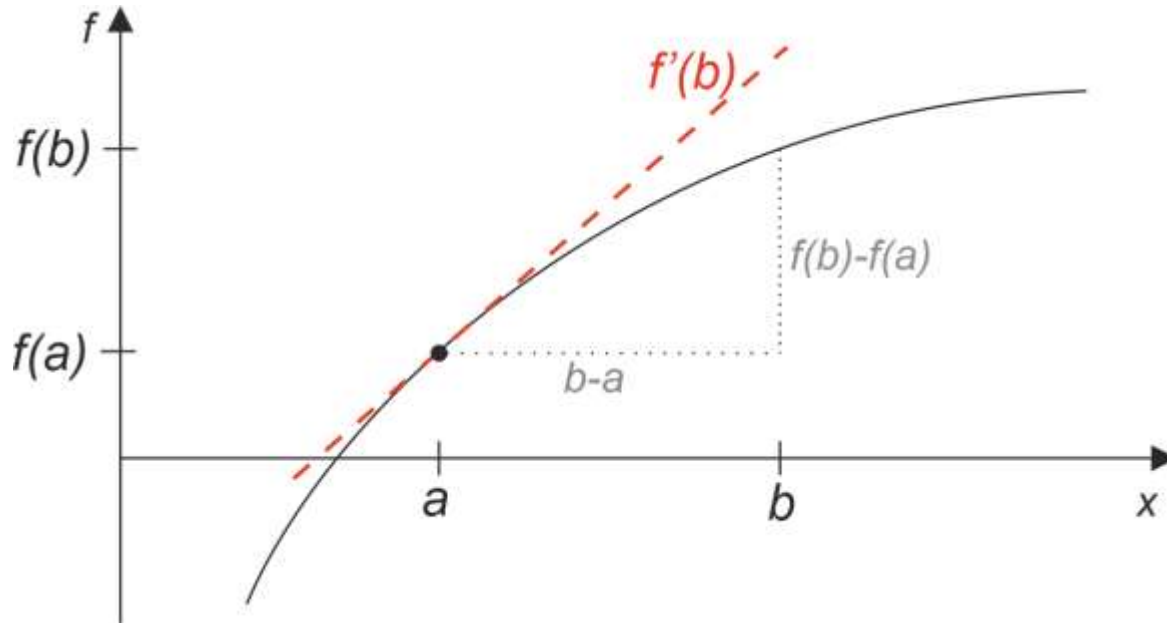
- × modifikace regula falsi
- × další iterace se počítá ze dvou posledních bodů
- × nedochází k úpravě intervalu dle průsečíku x^i , ale ihned k výpočtu nového odhadu kořene

❑ Konvergence metody sečen

- × nemusí konvergovat vždy
- × pokud konverguje, tak rychleji než regula falsi

Newtonova metoda

- 1669 – formulována a použita pro řešení kubické rovnice
- Použita pro aproximaci řešení Keplerových rovnic (transcendentní) pro pohyb planet
- Pro stanovení odhadu kořene používá derivaci funkce $f(x)$ – metoda tečen



$$f'(x) = \lim_{(b-a) \rightarrow \infty} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Newtonova metoda

- Z Taylorova rozvoje funkce $f(x)$ kolem bodu x_0 , kde $x = x_0 + a$, dostaneme řadu ve tvaru

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + o(\overset{\sim}{(x-x_0)^2})$$

- Nahradíme $x^{i+1} = x$, $x^i = x_0$

$$f(x^{i+1}) = f(x^i) + f'(x^i)(x^{i+1} - x^i) \qquad x^{i+1} = x^i - \frac{f(x^i)}{f'(x^i)} - \frac{f(x^{i+1})}{f'(x^i)}$$

- Hledáme řešení rovnice $f(x) = 0$, předpokládáme tedy $f(x^{i+1}) = 0$

$$x^{i+1} = x^i - \frac{f(x^i)}{f'(x^i)}$$

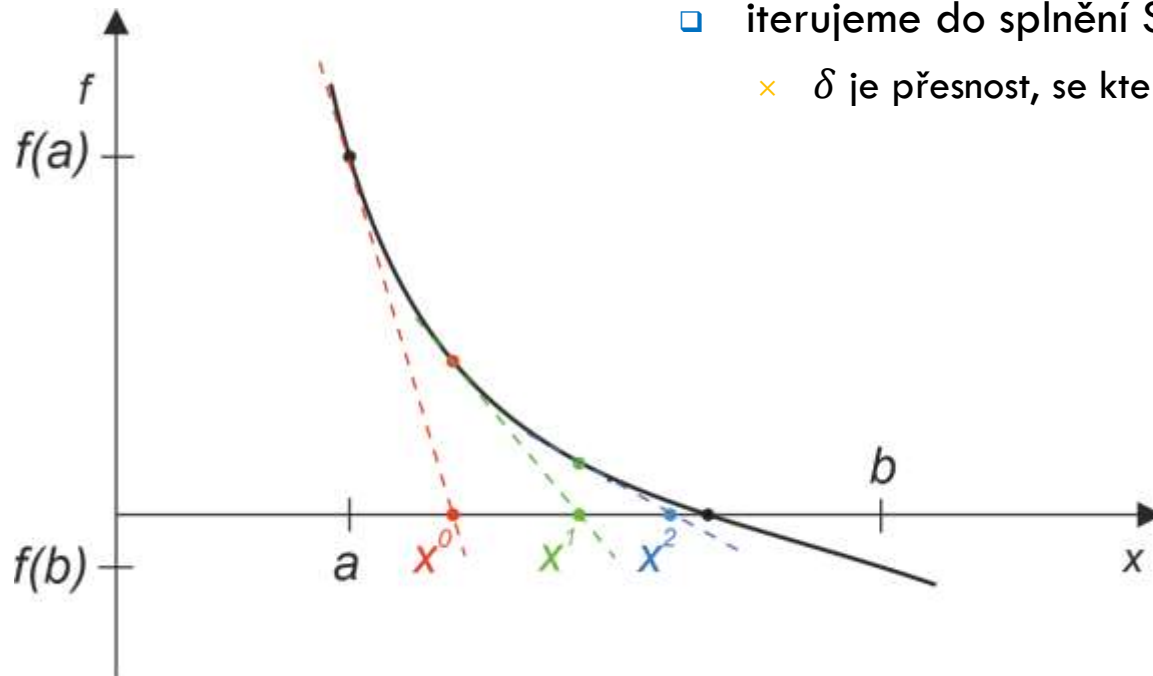
- kde x^{i+1} je odhad kořene rovnice $f(x)$ pomocí Newtonovy metody

Newtonova metoda

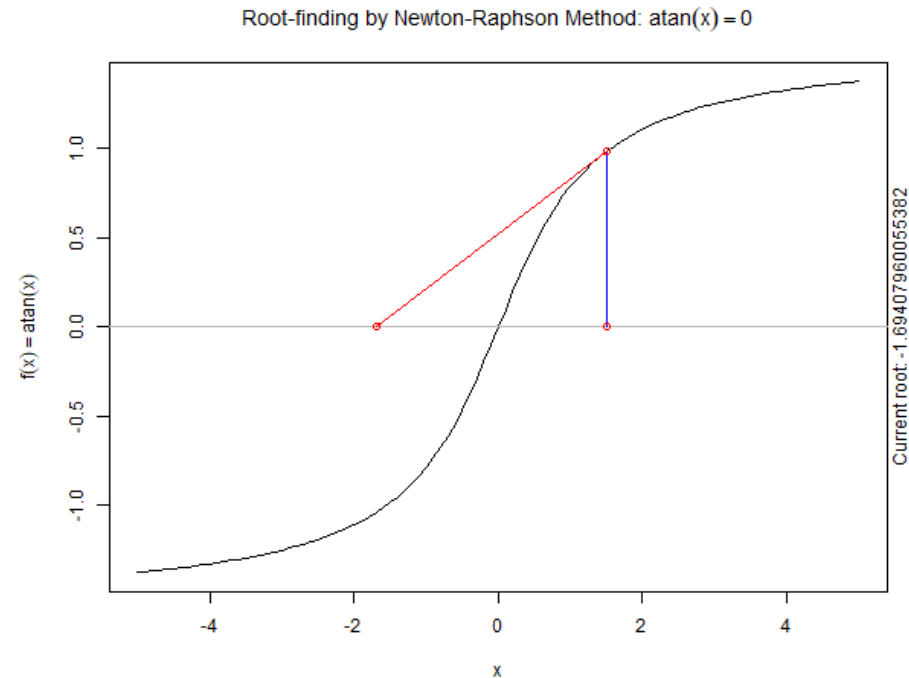
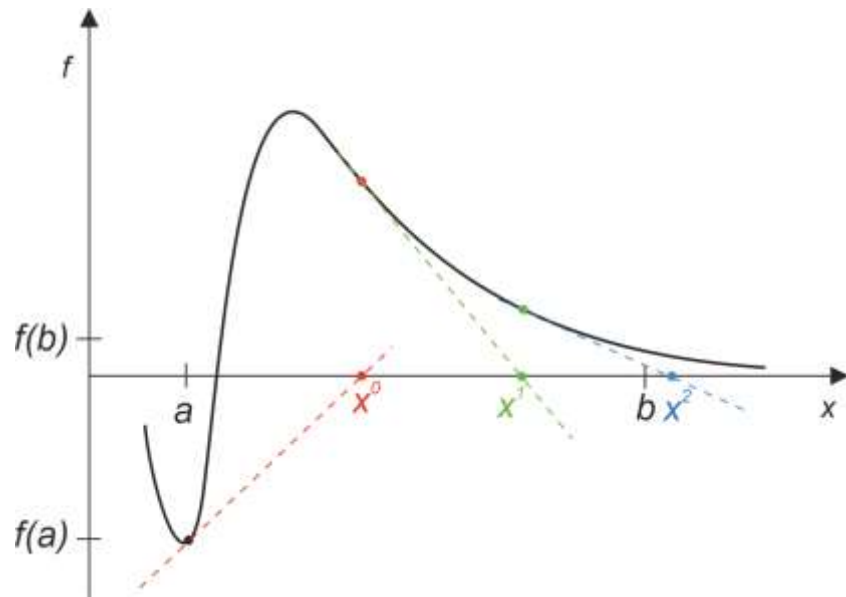
- Odhad kořene

$$x^{i+1} = x^i - \frac{f(x^i)}{f'(x^i)}$$

- odhad kořene x^{i+1} pomocí derivace $f'(x)$
- iterujeme do splnění STOP podmínky $|x^{i+1} - x^i| < \delta$
 - δ je přesnost, se kterou chceme kořen najít



Newtonova metoda



- ❑ Metoda nekonverguje vždy
 - ✗ ale pokud konverguje, jde o jednu z nejrychleji konvergujících metod
 - ✗ záleží i na volbě x^0
- ❑ Konvergence je zaručena při splnění Fourierovy podmínky

Newtonova metoda

- Fourierova podmínka

- Mějme funkci $f(x)$ definovanou a spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$ tak, že existují derivace f' a f'' , které nemění znaménko
- Zvolíme počáteční aproximaci $x^0 \in \langle a, b \rangle$ tak, aby byla splněna podmínka

$$f(x^0) \cdot f''(x^0) > 0$$

- Potom bude Newtonova metoda konvergovat.

- Pokud $f'(x)$ nemění znaménko, tak funkce na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ klesá nebo roste
- Pokud $f''(x)$ nemění znaménko, tak je funkce na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ konvexní nebo konkávní
- Metoda nemusí fungovat, pokud kolem počátečního odhadu nebo kořene existují inflexní body, lokální maxima nebo minima

Cvičení

- Pomocí výše uvedených metod najděte kořeny následujících rovnic

$$0 = x + \ln x$$

$$0 = \sin x - \frac{1}{2}x$$

$$0 = e^x + x^2 - 3$$

$$0 = x - e^{-x}$$

$$0 = x \arctan x - 1$$