DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

Pojem funkce

- Reálná funkce
- V oboru M, kde $M \in \mathbb{R}$, je definována reálná funkce, jestliže je dán předpis, podle kterého každému $x \in M$ je přiřazeno právě jedno číslo y. Oboru M potom říkáme definiční obor funkce.
  - x je argument funkce (nezávislá proměnná).
  - y je funkční hodnota (závislá proměnná).
  - Definičním oborem funkce je většinou interval $\langle a, b \rangle$.
  - Funkce je většinou dána předpisem (analyticky) nebo grafem.

Druhy funkcí

- Elementární funkce

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad y = kx + q$$

- Algebraické funkce

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0}$$

- Transcendentní funkce
  - Goniometrické, hyperbolické, mocninné, exponenciální, logaritmické
  - Cyklometrické funkce

$$y = \arcsin(x)$$

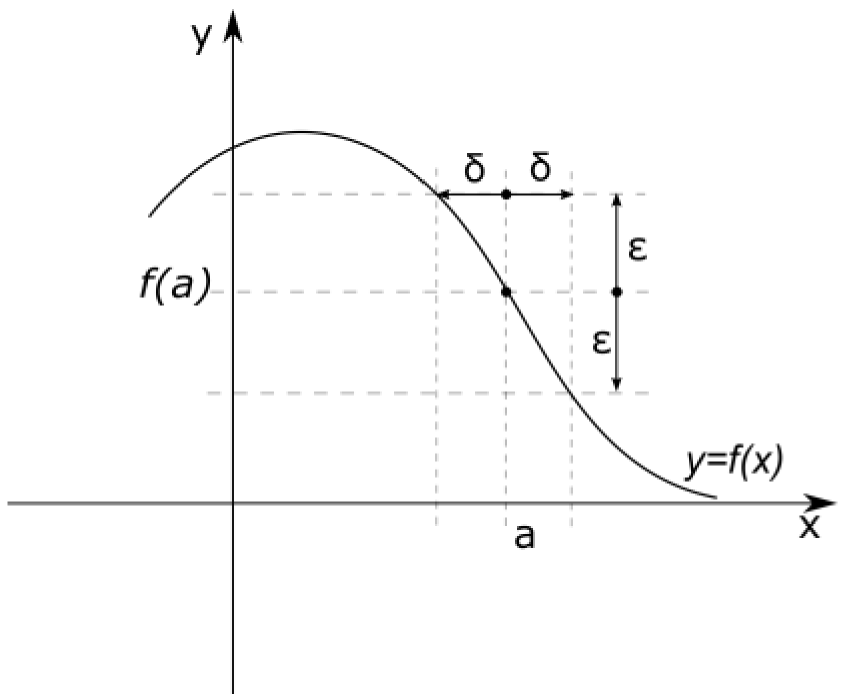
  - Integrální rovnice

$$g(x) = \int_a b\, f(x)\, dx$$

Spojitost funkce

- Cauchyova definice
- $f(x)$ je spojitá v bodě a, pokud k libovolnému číslu $\epsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna x z okolí bodu δ platí definice

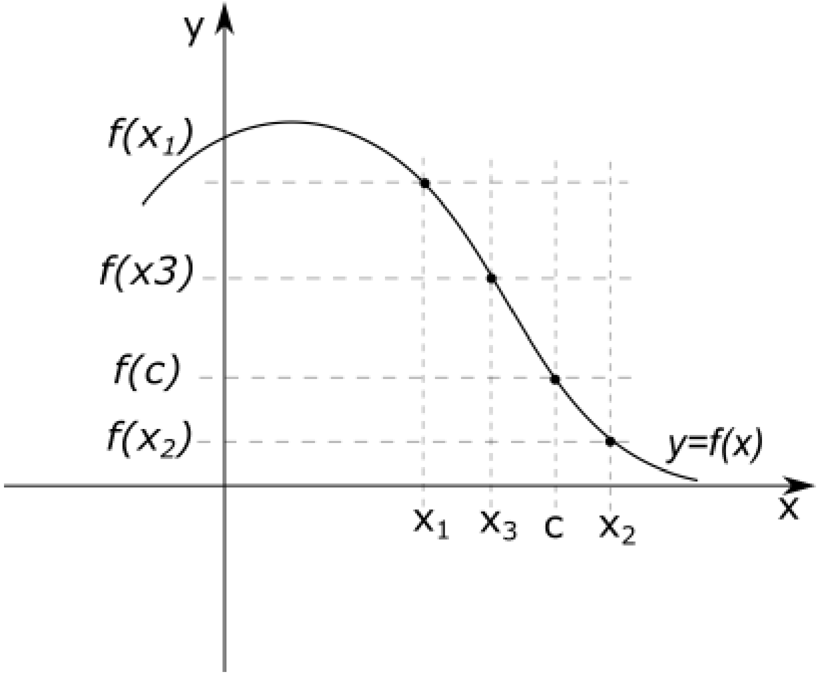
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad |x - a| < \delta$$



Spojitost funkce

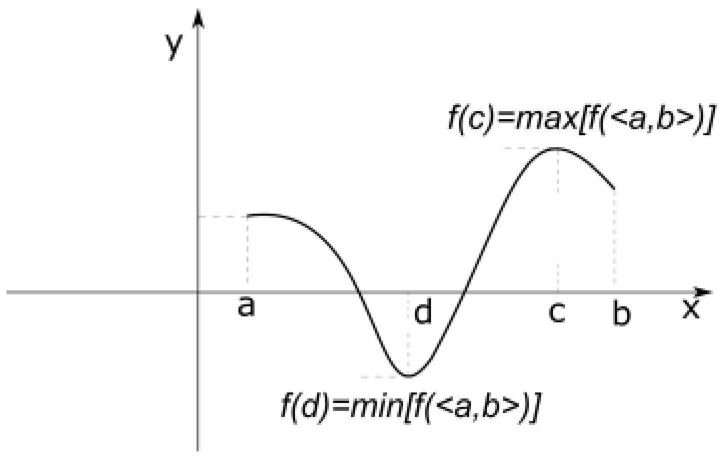
- Heineova definice
- O funkci $f(x)$ řekneme že je v $\langle a, b\rangle$ spojitá, jestliže pro každou posloupnost (x_n) v $\langle a, b\rangle$ platí implikace:

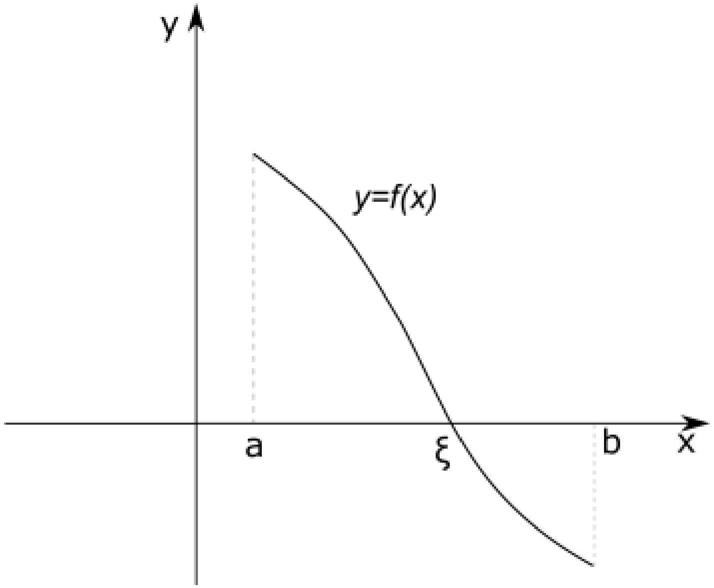
$$x_n \to c \Rightarrow f(x_n) \to f(c)$$



Spojitost funkce

- **Weierstrassova věta**: Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, potom existuje na intervalu minimum, $f = \min\big(f(\langle a, b\rangle)\big)$ a maximum funkce $f = \max f(\langle a, b\rangle))$.
- **Bolzanova věta**: Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, a $f(a) > 0, f(b) < 0$ nebo obráceně $f(a) < 0,\ f(b) > 0$, potom existuje alespoň jeden bod $\xi \in (a, b)$, pro který platí $f(\xi) = 0$.





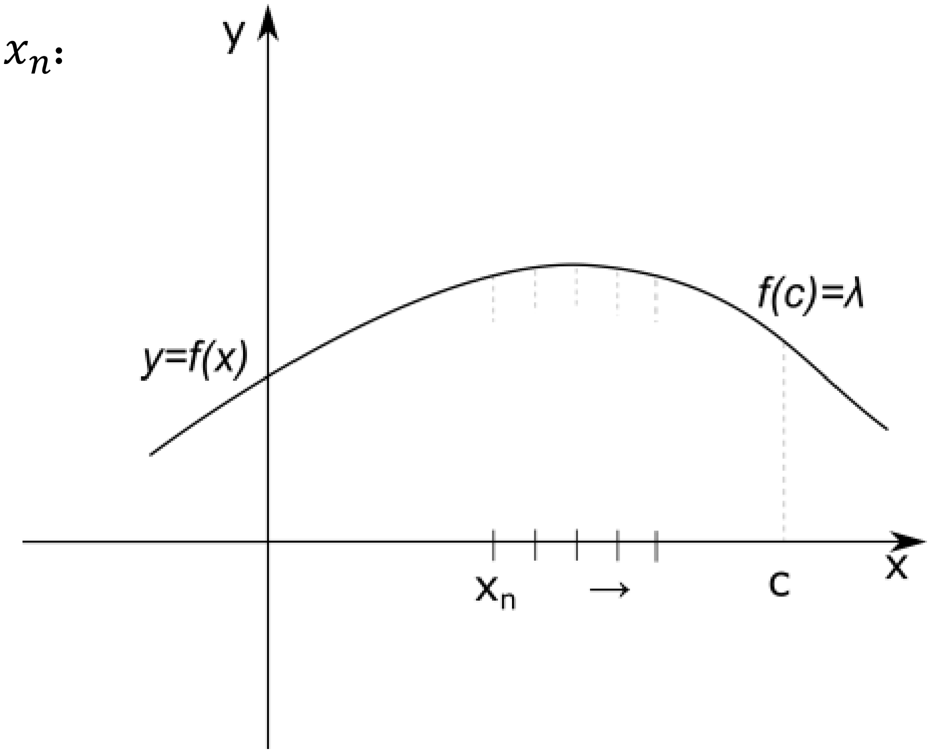
Limita funkce v bodě

- Heineova definice
- Bod $c \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Potom číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ bude limitou funkce f v bodě c

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lambda$$

- pokud platí pro každou posloupnost x_n:

$$x_n \to c \Rightarrow f(x_n) \to \lambda$$



$$\lambda = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{vlastní limita} \\ \pm\infty & \text{nevlastní limita} \end{cases}$$

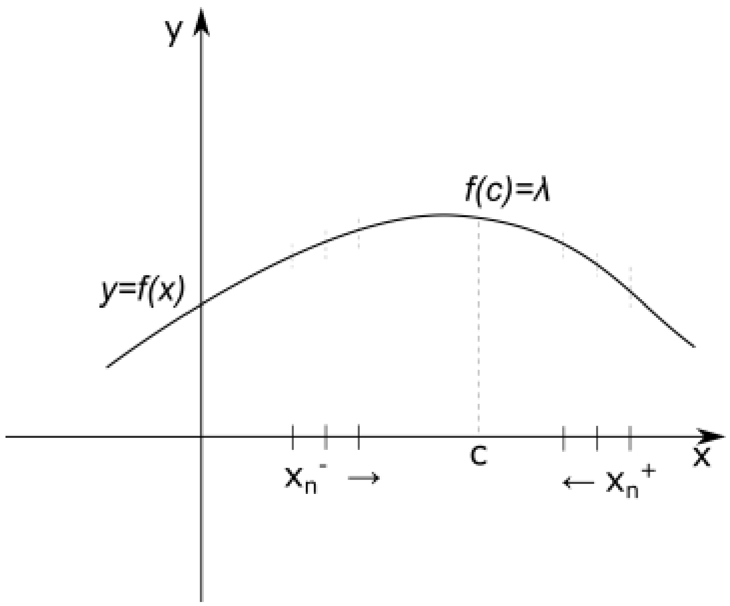
Limita funkce v bodě

- Funkce má v hromadném bodě svého definičního oboru c nejvýše jednu limitu.
- Funkce f je v bodě c spojitá, právě tehdy, když
  - $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$
  - $\lim_{x \to c} |f(x)| = \left| \lim_{x \to c} f(x) \right|$

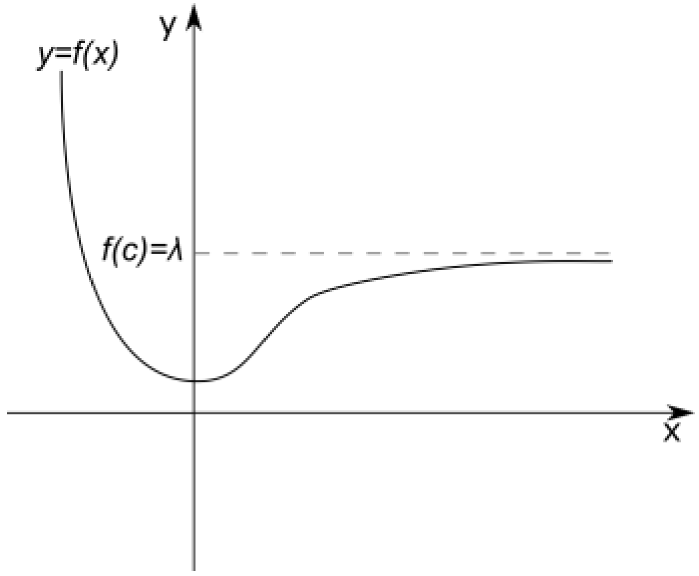
Limita funkce v bodě

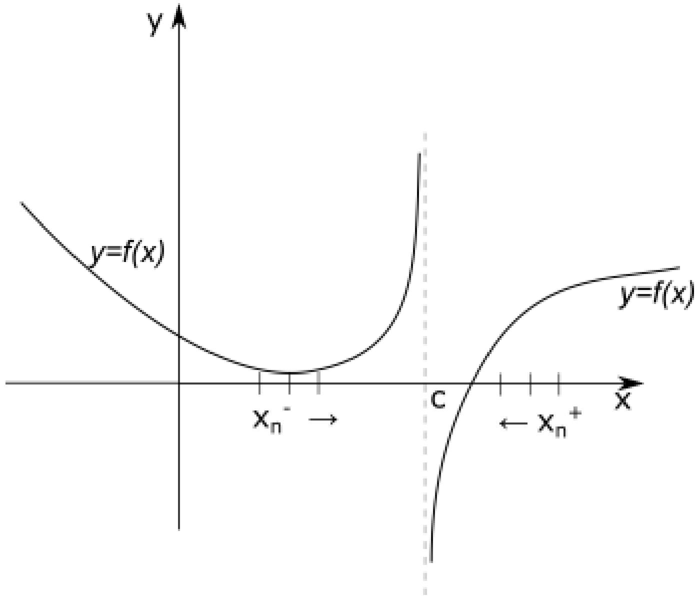
- Bod $c \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f.
  Funkce má v bodě c limitu zprava i zleva rovnu číslu λ.

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lambda, \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = \lambda$$



Limita funkce v bodě





$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$$

Derivace – historie

- Euklidés (300 př.n.l, Řecko)
- Archimédes (287 - 212 př.n.l, Řecko) – počítání s nekonečně malými proměnnými pro zjištění objemu a plochy (Ostomachion)
- Aryabhata (500 n.l., Indie) - nekonečně malé veličiny pro studium pohybu Měsíce.
- Bhaskar II (1114 - 1185 n.l., Indie) – Rolleova věta
- Newton, Leibniz (Anglie, Německo) – moderní pojetí diferenciálního počtu, vztah mezi derivací a integrací
- Cauchy, Riemann, Weierstrass – teoretické základy diferenciálního počtu

Derivace v příkladech

- Vědecké a technické aplikace
  - Klasická mechanika tělesa:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

  - Ohřev vody ve slunečním kolektoru:

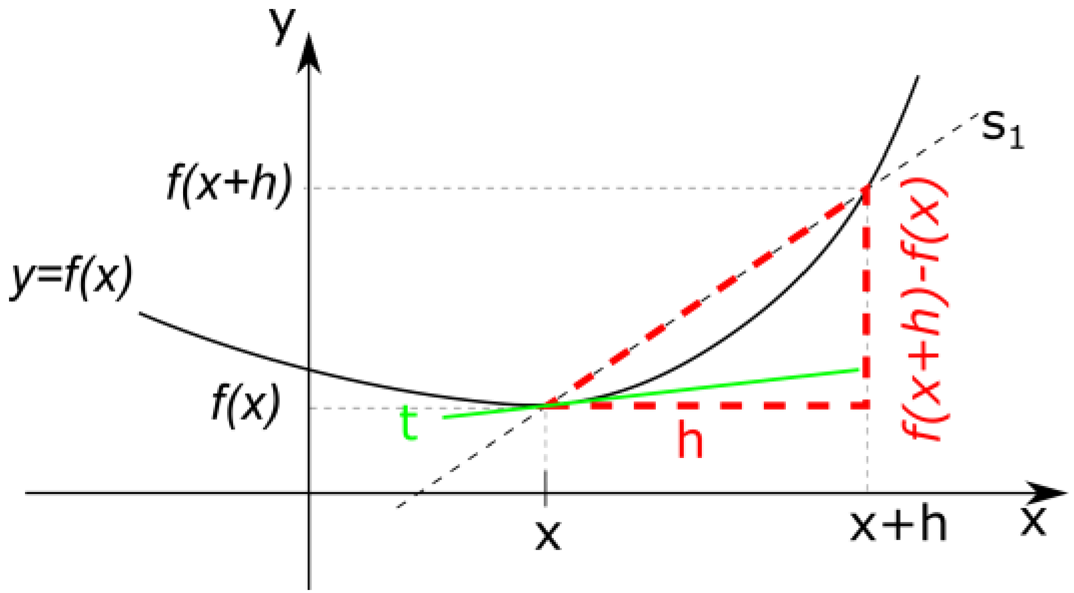
$$\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t} = a - (b + c)T_i + bT_{i-1}$$

- Bezpečnostní aplikace
- Šíření požáru:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

- Sociální aplikace
- Ekonomické aplikace
- Ostatní aplikace

Geometrický význam derivace

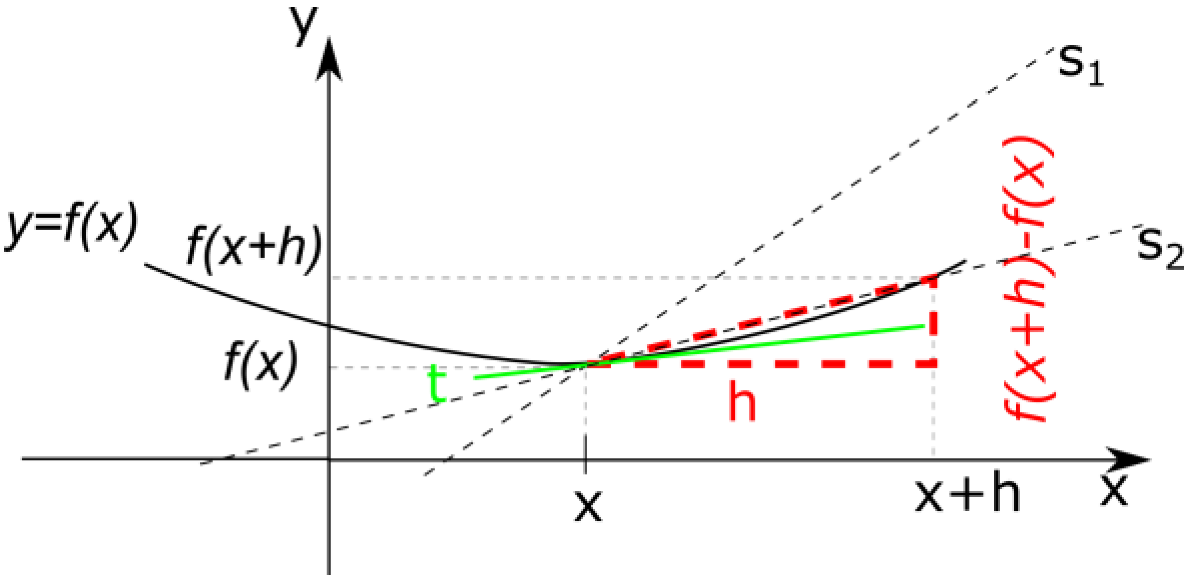


- Chceme zjistit **změnu** funkce $f(x)$ v bodě x, pokud se posuneme o krok h na ose x.
- Změnu vyjádříme pomocí směrnice přímky
  - $s_1: y = kx \rightarrow k = \frac{y}{x}$

$$k_{s1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Cílem je získat směrnici odpovídající tečně t v bodě $[x, f(x)]$

Geometrický význam derivace



- Bod $x + h$ přiblížím k bodu x a získám směrnici sečny s_2.

$$k_{s2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Limitním přibližováním bodu $x + h$ k bodu x získám směrnici tečny t

$$k_t = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Definice derivace

- Derivace funkce v bodě
- Funkce f je definována na okolí bodu c. Pokud má funkce vlastní limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

- pak je funkce v bodě c diferencovatelná a hodnotu limity označujeme jako f' a nazýváme ji jako derivaci funkce f v bodě c.

- Existují pravidla pro derivování elementárních funkcí a složených funkcí.
- Je-li funkce f na intervalu J diferencovatelná, pak je i na tomto intervalu spojitá.
- Funkce f je třídy C^k na intervalu J, pokud existují na intervalu J všechny derivace funkce až do řádu k

Metody výpočtů derivací funkcí

- Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v nějakém bodě x_0 společného definičního oboru D. Potom v tomto bodě jsou diferencovatelné i funkce

$$cf, \qquad f \pm g, \qquad f.g, \qquad \frac{f}{g} \quad (g \neq 0)$$

- a platí

$$(cf)' = cf \qquad\qquad c\ konst.$$

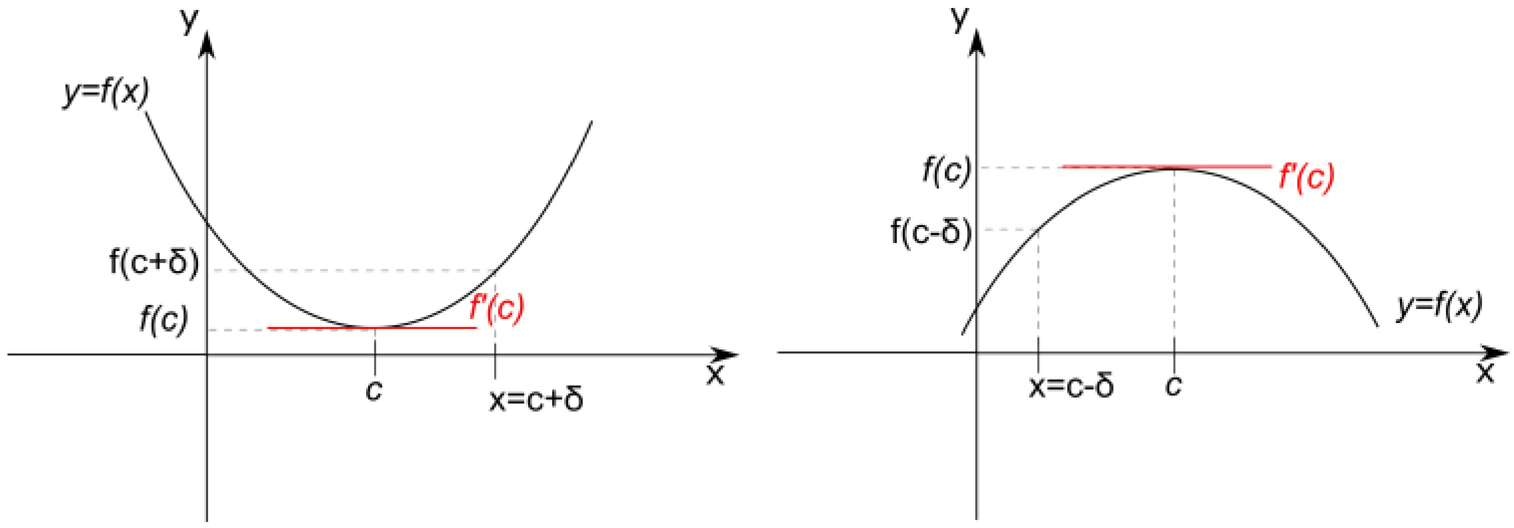
$$(f \pm g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad\qquad g \neq 0$$

Diferenciální počet

- Funkce f definovaná v okolí bodu c má v bodě *lokální maximum*, resp. *minimum*, pokud platí pro každý bod x z okolí bodu c, že $f(x) \leq f(c)$, resp. $f(x) \geq f(c)$.



- Je-li funkce f v bodě c diferencovatelná a má v bodě lokální maximum, resp. minimum, potom platí, že $f'(c) = 0$.

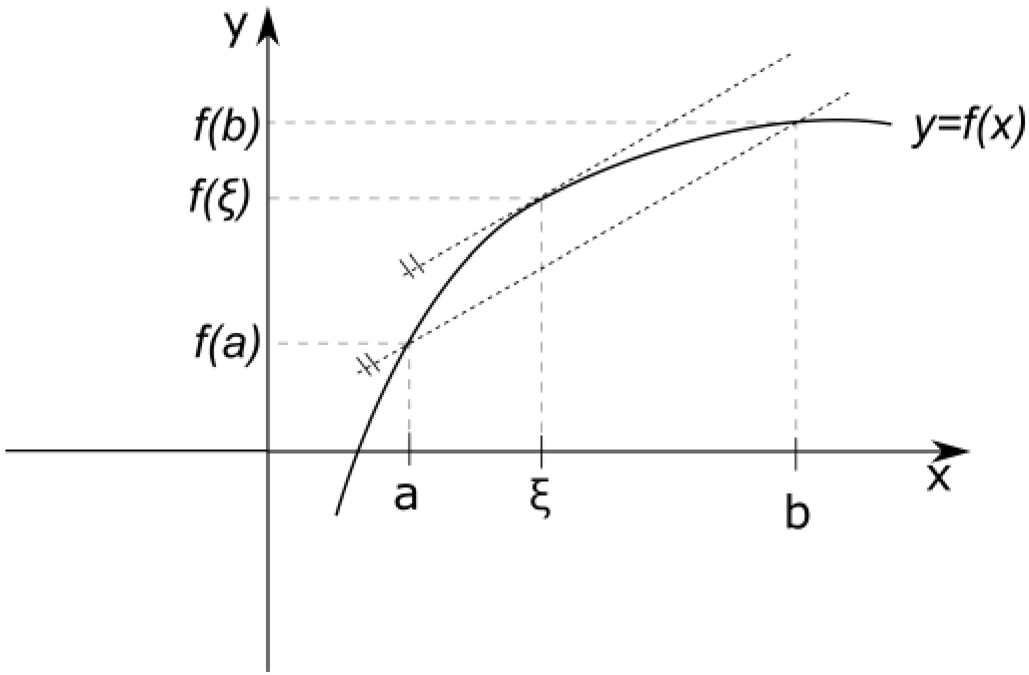
Nástroje diferenciálního počtu

- Rolleova věta (Bhaskar II Indie)
- Lagrangeova věta o střední hodnotě
- L'Hostpitalovo pravidlo
- Taylorova věta

Lagrangeova věta o střední hodnotě

- Funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, diferencovatelná na otevřeném intervalu (a, b). Potom existuje alespoň jeden bod $\xi \in (a, b)$, pro který platí:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Taylorova věta

- Aproximace složitých funkcí pomocí jednodušších (polynom).
- Funkční hodnota polynomu je výsledkem elementárních operací.

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

- Derivace polynomu je opět polynom.
- Odhad chyby aproximace.

- Motivace
- Hledáme funkci g, která nejlépe aproximuje funkci f, tak aby platilo:
- $f(c) = g(c),\ f'(c) = g'(c), \ldots\ldots, f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$

Taylorova věta

- Mějme polynom
- $g(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n$
- a podmínku
- $f(c) = g(c),\ f'(c) = g'(c), \ldots, f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$

Stupeň	Polynom	Podmínka	koeficienty
0	$g(x) = a_0$	$g(c) = f(c)$	$a_0 = f(c)$
1	$g(x) = a_0 + a_1 x$	$g(c) = f(c), g'(c) = f'(c)$	$a_0 = f(c), a_1 = f'(c)$
.	.	.	.
.	.	.	.

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c) + O_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c) + O_{n+1}(x)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x) + O_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x) + O_{n+1}(x)$$

Průběh funkce

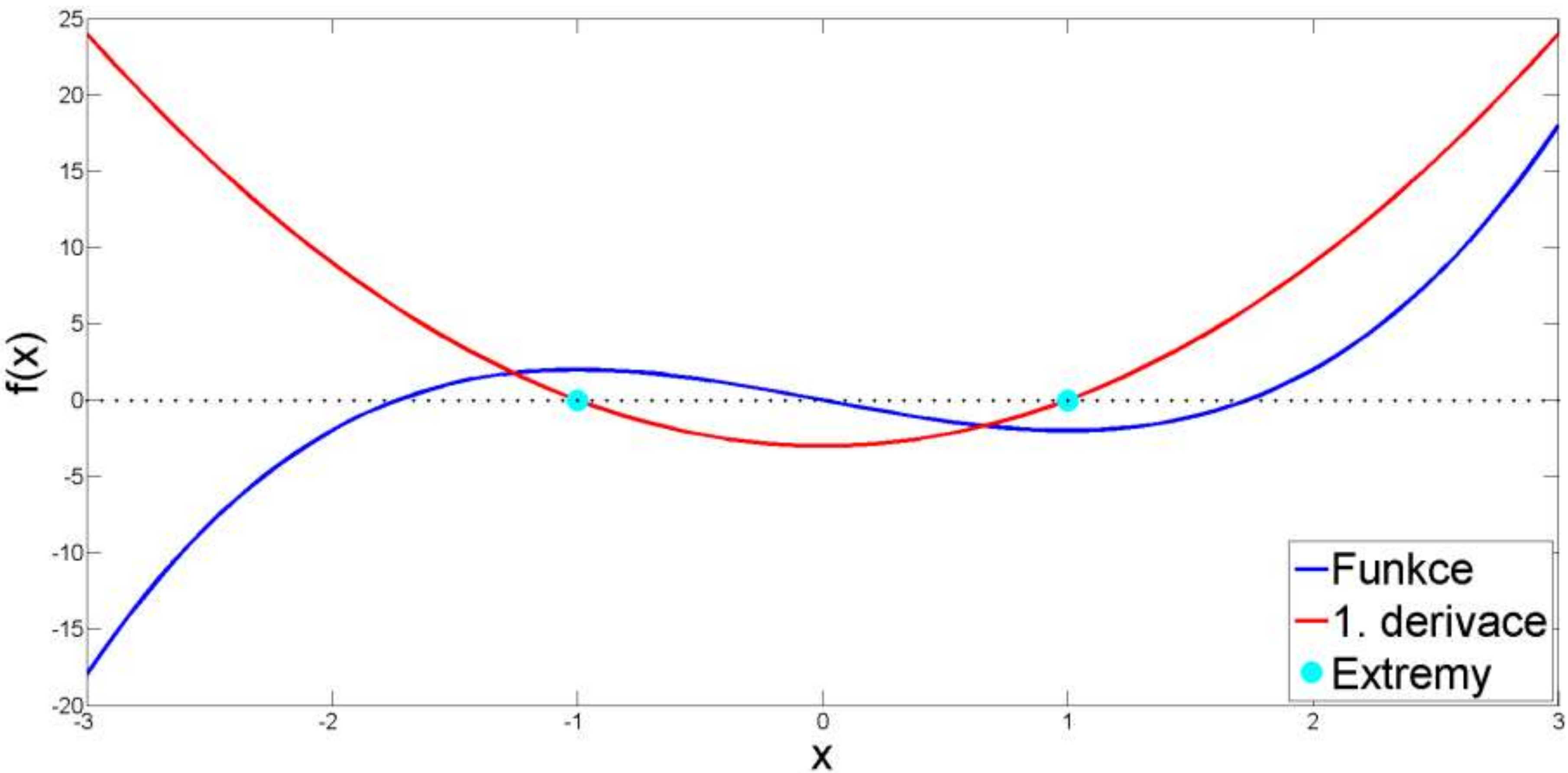
$$f(x) = x^3 - 3x$$

- Definiční obor a intervaly monotonie
  - Definiční obor: $Df = \mathbb{R}$
  - Intervaly monotonie: rostoucí na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, \infty)$, klesající na $\langle -1,1\rangle$
- Lokální extrémy
- Jestliže funkce $f'(c) = 0$ a funkce $f(c)$ je v bodě c rostoucí, resp. klesající, potom má funkce $f(c)$ v bodě c ostré lokální maximum, resp. minimum.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1, \quad x \in \{-1,1\}$$

- Jestliže funkce $f'(c) = 0$ a $f''(c) \neq 0$ pak má funkce $f(c)$ v bodě c lokální extrém, a to pro $f''(c) > 0$, resp. $f''(c) < 0$ ostré lokální minimum, resp. maximum.

Průběh funkce



Průběh funkce

- Zjistíme hodnoty druhé derivace $f''(x)$ ve stacionárních bodech.

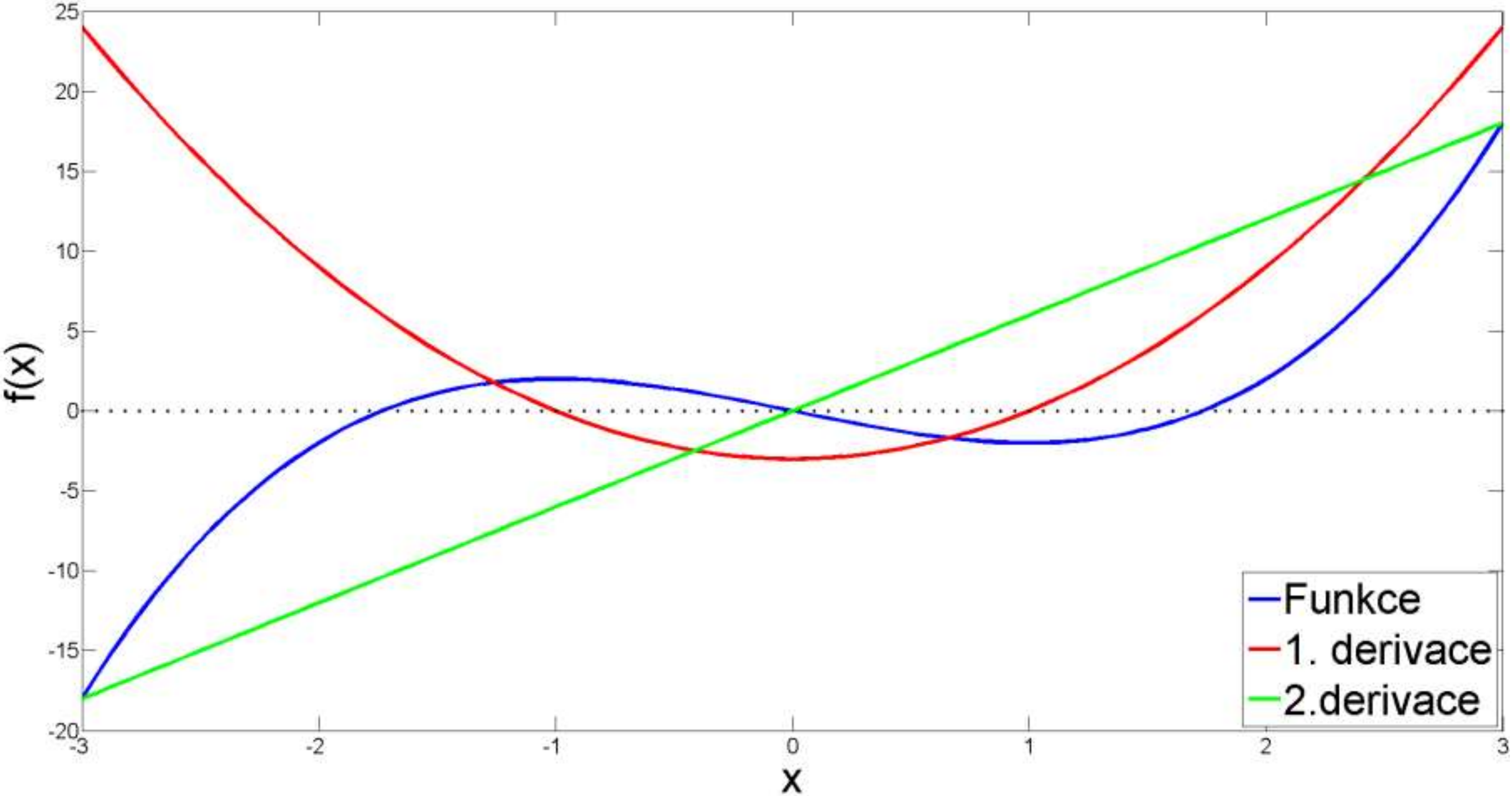
$$f''(x) = 6x \rightarrow f''(-1) = -6 < 0, \quad f''(1) = 6 > 0$$

- Funkce $f(x)$ má v bodech $x \in \{-1,1\}$ ostré lokální maximum, resp. minimum.

- Pokud $f'(c) = f''(c) = 0$ může a nemusí mít funkce v bodě c lokální extrém. Jestliže n je sudé číslo, má funkce $f(c)$ v bodě c ostrý lokální extrém pokud platí, že $f^{(n)}(c) > 0$, resp. $f^{(n)}(c) < 0$.

- Intervaly ryzí konvexity (konkavity), body inflexe
- Pokud je funkce f spojitá na intervalu J a pokud pro každý bod z tohoto intervalu platí, že $f''(c) > 0$, resp. $f''(c) < 0$. Potom je funkce na intervalu ryze konvexní, resp. konkávní.
Jestliže $f''(c) = 0$ a $f''' \neq 0$ potom má funkce v bodě c inflexi

Průběh funkce

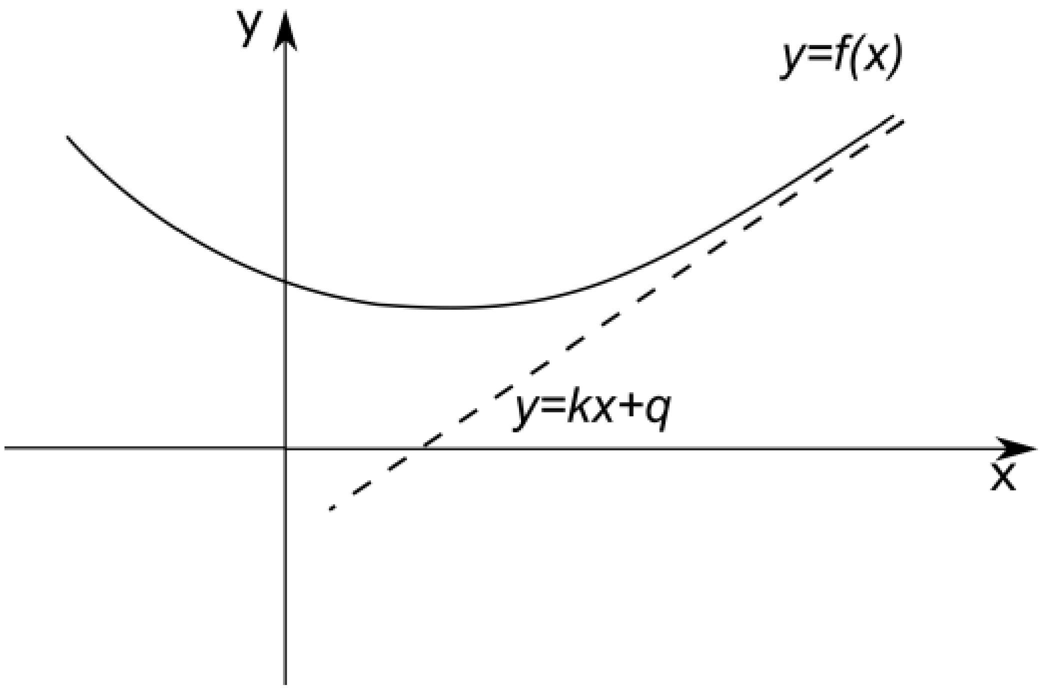


Asymptota grafu funkce

- Přímka $y = kx + q$ se nazývá ***šikmá asymptota*** *grafu funkce*, pokud platí:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx - q] = 0 \text{ resp. } \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx - q] = 0$$

- a ***svislá asymptota***, pokud má funkce $f(x)$ v bodě x alespoň jednu jednostrannou nevlastní limitu



Příklady k procvičení

- Úprava výrazů pomocí symbolické matematiky
- Řešení rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ pomocí symbolické matematiky
- Řešení soustavy rovnic pomocí symbolické matematiky. Porovnání s metodami numerické matematiky a vestavěnými funkcemi.
- Výpočet limit pomocí symbolické matematiky.
- Výpočet derivace pomocí symbolické a numerické matematiky

Úprava výrazů - cvičení

- Pomocí symbolických manipulací upravte následující výraz

$$\frac{1-\frac{x}{y}}{\frac{x-y^2}{x}}$$

- DOPLNIT VÝRAZY

Řešení rovnice - cvičení

- Pomocí symbolických manipulací vyřešte kvadratickou rovnic

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Uvažujte takové sady koeficientů (a, b, c), aby byly zohledněny všechny možnosti řešení rovnice.

Řešení soustavy rovnic – cvičení

- Nagenerujte náhodně soustavu N rovnic a vyřešte ji pomocí:
- Iterační metody
- Cramerova pravidla
- Symbolické matematiky.
- Jednotlivá řešení porovnejte z hlediska rychlosti a stability
- $x_i = \frac{d_{Ai}}{d_A}$
- $x^{i+1} = D^{-1}\left[b - (L + U)x^i\right]$

Limita funkce jedné proměnné – cvičení

- Pomocí symbolické matematiky vypočítejte následující limity.

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 1}{x^2 - 2x + 10}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\lim_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

Derivace funkce jedné proměnné

- Analytický výpočet derivace
- $f' = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$
- Přibližný výpočet derivace - numerická derivace
- $f' = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} + O(h^2)$

Numerická derivace

- Odhad derivace funkce provádíme když
  - nemáme k dispozici analytický tvar funkce,
  - funkce je zadána tabulkou nebo polem hodnot
  - funkce je zadána body v grafu.
- Vzorce pro numerický odhad derivace lze získat pomocí
  - Taylorova rozvoje,
  - derivací interpolačního polynomu.
- Každý vzorec pro numerickou derivaci obsahuje chybový člen vyjádřený ve tvaru mocniny kroku h
  - Čím bude mocnina vyšší, tím bude odhad přesnější a naopak. (chyba metody)
  - Čím bude h vyšší, tím bude odhad méně přesný. (chyba zaokrouhlovací)
  - Zahrnutím více bodů z okolí x lze odhad zpřesnit.

Dvoubodová numerická derivace

- Z Maclaurinova tvaru Taylorova rozvoje plyne, že

$$f(h) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{n!} h^i = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2} h^2! + \ldots$$

- Mějme body x_0 a $x_1 = x_0 + h$. Poté bude rozvoj pro $f(x_0 + h)$ a $f(x_0 - h)$ vypadat následovně.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h$$

- a dvoubodová derivace funkce f v bodě x_0, bude mít tvar

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Dvoubodová numerická derivace

- Pro zpřesnění odhadu derivace v bodě x_0 lze využít hodnoty funkcí v obou krajních bodech, a to odečtením rovnic $f(x_0+h)$ a $f(x_0-h)$.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h$$

- Po úpravě dostaneme

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

Vícebodová numerická derivace

- Zpřesnění odhadu derivace můžeme také dosáhnout zahrnutím více bodů do odhadu derivace funkce f v bodě x. Pro odvození vzorce pro numerickou derivaci využijeme v tomto případě interpolační polynom $P_n(x)$ řádu n

- Mějme funkci $f(x)$ definovanou ve třech ekvidistantně rozdělených uzlových bodech $\{x_0, x_1, x_2\}$ s krokem h.
- Poté platí, že hodnotu derivace funkce lze nahradit hodnotou derivace interpolačního polynomu řádu n $P_n(x)$ tak, že

$$f'(x) \doteq P_n'(x)$$

- V uzlových bodech se hodnoty derivace funkce a interpolačního polynomu můžou lišit. Tato situace bude výraznější tím více, čím vyšší řád polynomu budeme pro interpolaci používat

Vícebodová numerická derivace

- Nastíníme odvození odhadu numerické derivace funkce zadané třemi body $x_0 = x_1 - h$,x_1 a $x_2 = x_1 + h$ s využitím interpolačního polynomu třetího řádu.
- Interpolačním polynomem rozumíme funkci

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

- Pro polynom třetího řádu dostaneme soustavu rovnic ve tvaru:

$$f(x_1 - h) = a_0 + a_1(x_1 - h) + a_2(x_1 - h)^2$$
$$f(x_1) = a_0 + a_1(x_1) + a_2(x_1)^2$$
$$f(x_1 + h) = a_0 + a_1(x_1 + h) + a_2(x_1 + h)^2$$

- odvodíme vyjádření pro koeficienty a_1 a a_2 a výsledné vyjádření polynomu zderivujeme

Vícebodová numerická derivace

$$a_2 = \frac{f(x_1 + h) - 2f(x_1 + h) + f(x_1 - h)}{2h^2}$$

$$a_1 = a_2 h - 2a_2 x_1 + \frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h}$$

- Nyní si můžeme vybrat, v jakém bodě chceme derivaci odhadnout, dosadíme koeficienty a_1,a_2 a rovnic zderivujeme.
- Výsledkem jsou následující rovnice.

$$f'(x_1 - h) = \frac{-3f(x_1 - h) + 4f(x_1) - f(x_1 + h)}{2h}$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1 - h)}{2h}$$

$$f'(x_1 + h) = \frac{f(x_1 - h) - 4f(x_1) + 3f(x_1 + h)}{2h}$$

Numerický odhad derivace – cvičení

- Porovnejte dva numerické odhady derivace funkce $f(x) = \sin(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Interval rozdělte na $n = \{4, 8, 12, 16, 20, 30\}$ subintervalů s přesným řešením získaným například pomocí symbolické matematiky.
- Spočítejte celkovou chybu derivace jako

$$\text{globErr} = \sum_{i=1}^{n} |f' - f'(x_i)|$$

		$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$
$n = 4$	$h = 0.785$	$E1 = 0.845$	$E2 = 0.299$
$n = 8$	$h = 0.393$	$E1 = 0.900$	$E2 = 0.140$
$n = 12$	$h = 0.262$	$E1 = 0.928$	$E2 = 0.091$
….	….	….	….
$n = 30$	$h = 0.105$	$E1 = 0.968$	$E2 = 0.036$
$n = 80$	$h = 0.039$	$E1 = 0.998$	$E2 = 0.013$

Numerický odhad derivace – cvičení

- Pro výše uvedený příklad proveďte také odhad derivace ve třech bodech, například

$$f'(x_1 + h) = \frac{f(x_1 - h) - 4f(x_1) + 3f(x_1 + h)}{2h}$$

- a porovnejte přesnost s dvoubodovým odhadem