ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

Nelineární rovnice

- Obecný tvar rovnice o jedné neznámé
  - $f(x) = 0$

Typy rovnic

- Lineární rovnice
  - rovnice, kterou lze ekvivalentními úpravami upravit na tvar $ax + b = 0$
  - všechny ostatní nelineární
- Řešitelnost nelineárních rovnic
  - některé lze řešit přímo
  - ostatní numericky

nebudeme se zabývat

- Rovnice řešitelné přímo
  - např. algebraické rovnice (polynomy) $P_n(x) = 0$
    - P_n je polynom stupně n
  - rovnice umožňující separaci proměnných…

- Ostatní nutno řešit numericky

Numerické řešení

- Omezíme se na hledání kořenů rovnice $f(x) = 0$
  - kde $x \in \mathbb{R}$ a $f(x)$ je **funkce spojitá**

- Většinou budeme řešit **jednu rovnici**
  - některé metody (Newtonova) lze využít i pro řešení soustav

- Princip numerického řešení
  - separace kořenů
    - zjistit, kolik kořenů rovnice má
    - určit intervaly, ve kterých leží právě jeden kořen
  - zpřesňování aproximací
    - pomocí iteračních metod (výhradně)

- Požadavky
  - konvergence k přesnému řešení
  - rychlost konvergence k přesnému řešení

Možnosti separace kořenů

- Pro iterační metody potřebujeme „správný“ odhad první iterace x^0
  - úloha není algoritmizovatelná

- Cíl
  - zjistit, kolik kořenů rovnice má
  - určit intervaly, ve kterých leží právě jeden kořen

- Možnosti
  - Sledování znaménkových změn funkce $f(x)$
  - Grafické řešení hrubou silou
  - Pomocí znalosti grafů elementárních funkcí
  - Odhad pomocí pomocných přístupů
    - např. půlení intervalu ap.

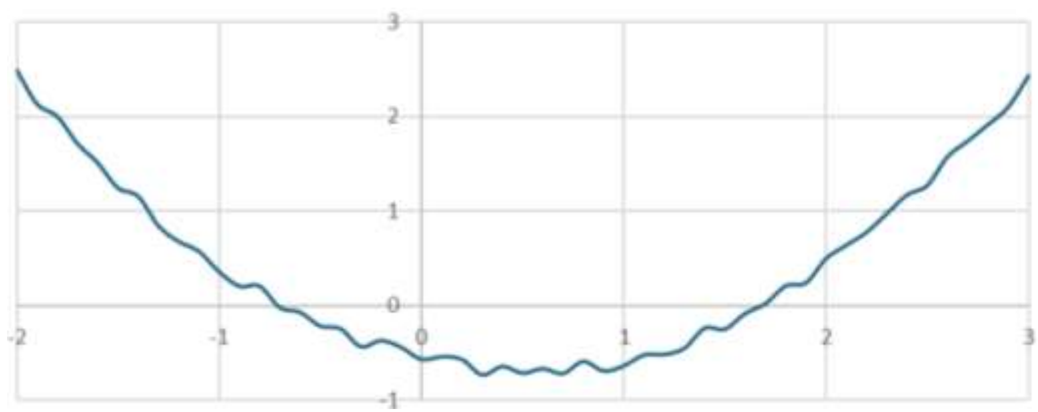
Možnosti separace kořenů

- Sledování znaménkových změn funkce $f(x)$
  - ve vybraných bodech D(f) zjistíme znaménko
  - kde se mění znaménko, je kořen

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

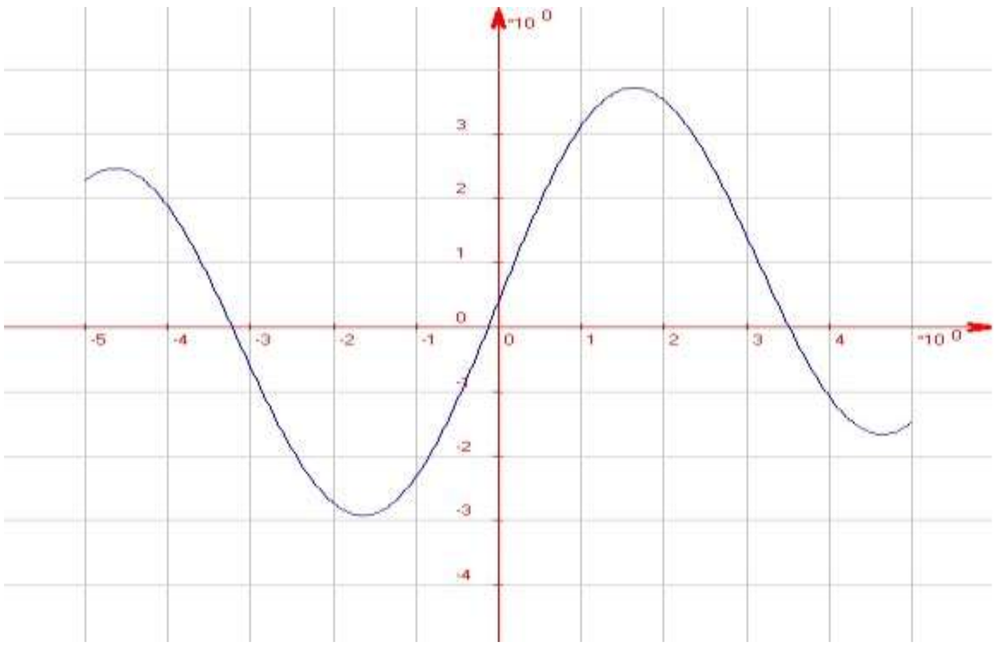
  - 2 kořeny, $x_1 \in (-1, 0)$ a $x_2 \in (1, 2)$

jen hrubé přiblížení
nemusíme objevit všechny kořeny



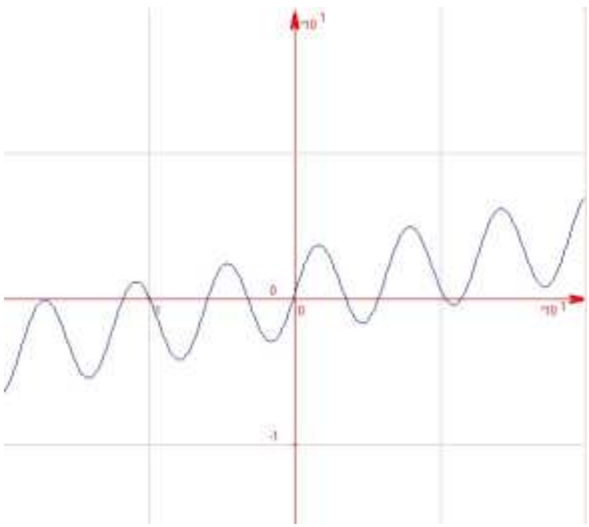
Možnosti separace kořenů

- Grafické řešení hrubou silou
  - necháme sestrojit graf a hledáme průsečíky s osou x



nemusíme objevit všechny kořeny:

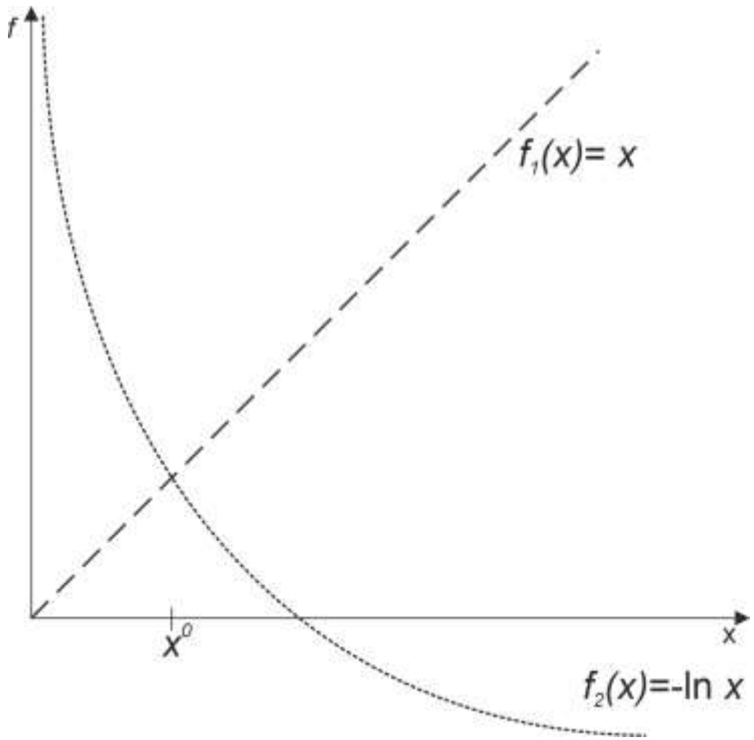
- nevhodná volba intervalu
- nedostatečné rozlišení



Možnosti separace kořenů

- Pomocí znalosti grafů elementárních funkcí
  - uvažuje možnost rozepsat funkci $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ a najít průsečík jednotlivých funkcí
- Příklad: Odhadněte hodnotu první iterace x^0 funkce $0 = x + \ln x$
  - $f(x)$ hledáme ve tvaru $f_1(x) = x$ a $f_2(x) = -\ln x$
  - hledáme průsečík rovnice ve tvaru

$$x = -\ln x$$

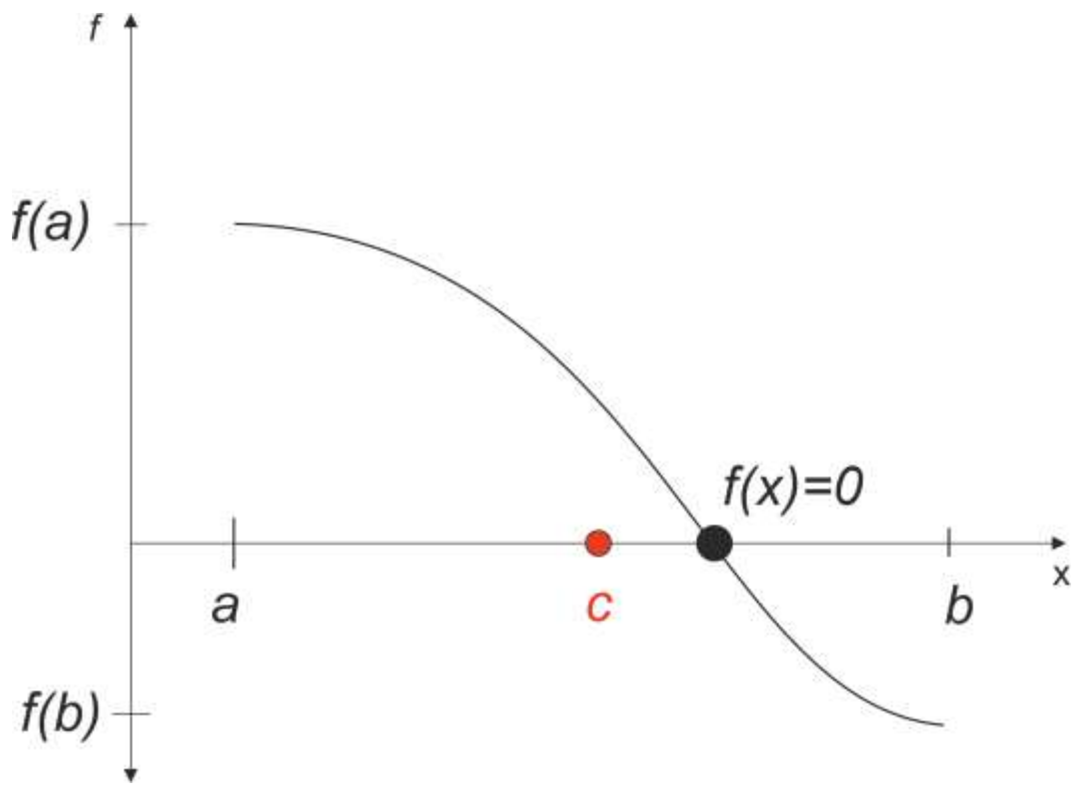


- první iterace x^0:
  - průsečík
- interval s jedním kořenem:
  - $f_1(x) = 0$ a $f_2(x) = 0$
- zpřesnění řešení
  - jedna z iteračních metod

Možnosti separace kořenů

- Odhad pomocí pomocných přístupů
  - např. půlení intervalu ap.

$$c = \frac{a+b}{2}$$



Možnosti separace kořenů – cvičení

- Odhad první iterace
- Odhadněte hodnotu první iterace x_0 pomocí grafické metody u následujících funkcí.

$$
\begin{aligned}
0 &= x + \ln x \\
0 &= \sin x - \frac{1}{2}x \\
0 &= e^x + x^2 - 3
\end{aligned}
$$

Numerické řešení

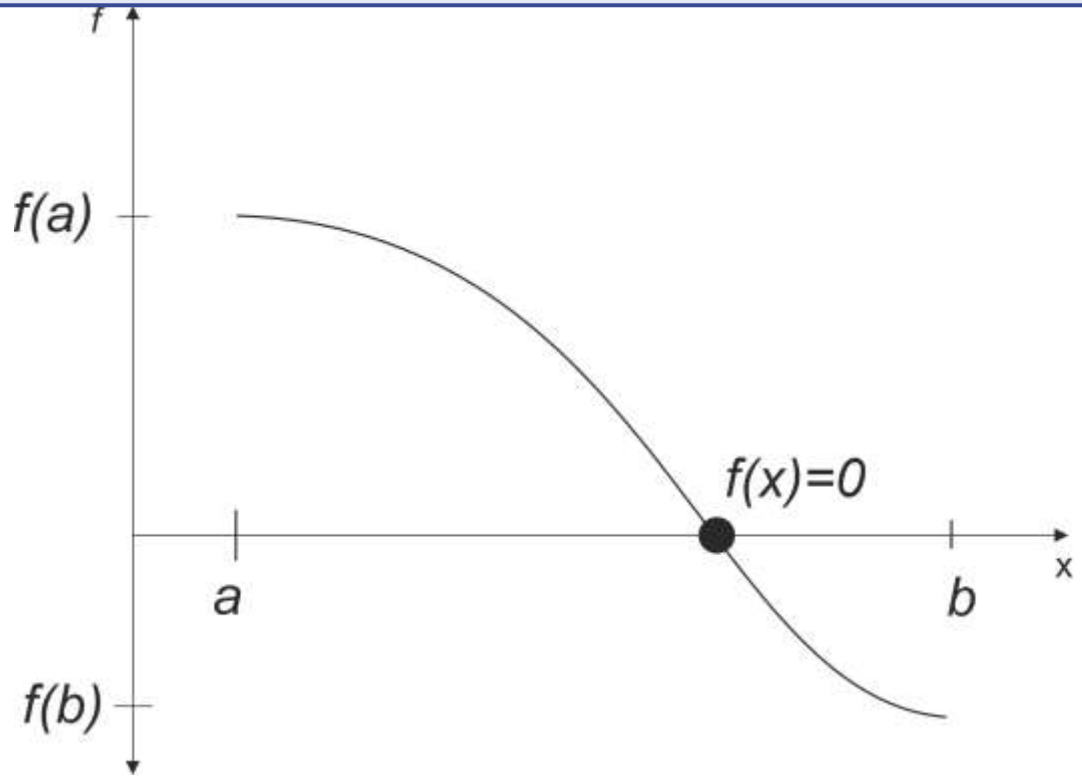
- Máme intervaly, které obsahují vždy po jednom kořenu

- Zpřesňování aproximací
  - pomocí iteračních metod (výhradně)

- Standardní metody pro řešení nelineárních rovnic:
  - bisekce
  - prostá iterace
  - regula falsi
  - metoda sečen
  - Newtonova metoda

Numerické řešení

- Hledáme řešení, tj. kořeny, $x \in \mathbb{R}$ rovnice $f(x) = 0$
  - definované a spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$, kde platí
  - $f(a) \cdot f(b) < 0$
- Poté existuje alespoň jeden bod x, náležející do intervalu $\langle a, b \rangle$, který splňuje rovnici $f(x) = 0$



Metoda bisekce

- Postupné půlení intervalu $\langle a, b \rangle$
- Konstrukce posloupnosti nových intervalů
  - vyhovujících podmínce
  - $f(a^i) \cdot f(x^i)$ nebo $f(x^i) \cdot f(b^i)$,
  - kdy posloupnost intervalů konverguje k hledanému kořenu rovnice x
- První aproximace kořene rovnice je dána vztahem $x^0 = \frac{a+b}{2}$

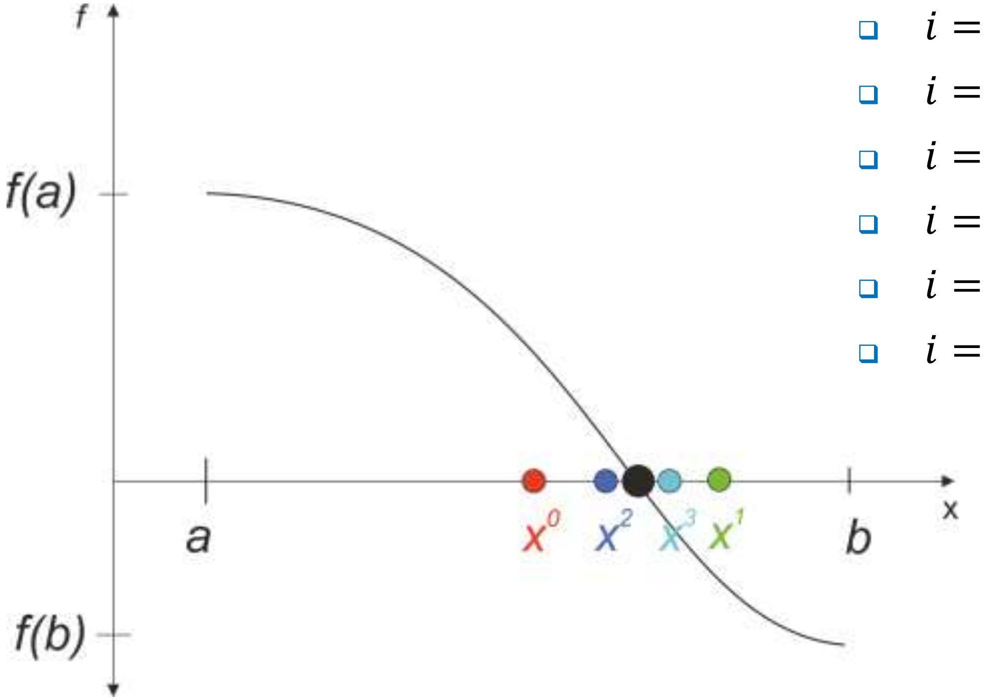
- Metoda konverguje vždy
- Konvergence pomalá
  - každým krokem se výchozí interval zkrátí na polovinu
  - řád konvergence $p = 1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E_{n+1}}{E_n^p} = konst > 0$$

- Rychlost konvergence je závislá na vhodné volbě první aproximace x^0
- Využívá se zejména pro zúžení intervalu, kde hledáme kořen rovnice
  - poté se pokračuje s rychlejší metodou

Metoda bisekce

- Postup metody bisekce (krok i)
  - Rozpůlíme interval $\langle a^i, b^i \rangle$ tak, že $x^i = \frac{a^i + b^i}{2}$.
  - Dostaneme subintervaly $\langle a^i, x^i \rangle$ $\langle x^i, b^i \rangle$.
  - Posoudíme podmínku $f(a^i) \cdot f(x^i) < 0$ a $f(x^i) \cdot f(b^i) < 0$
  - Vybereme interval vyhovující podmínce a dostaneme nový interval $\langle a^{i+1}, b^{i+1} \rangle$
  - Celý postup opakujeme.



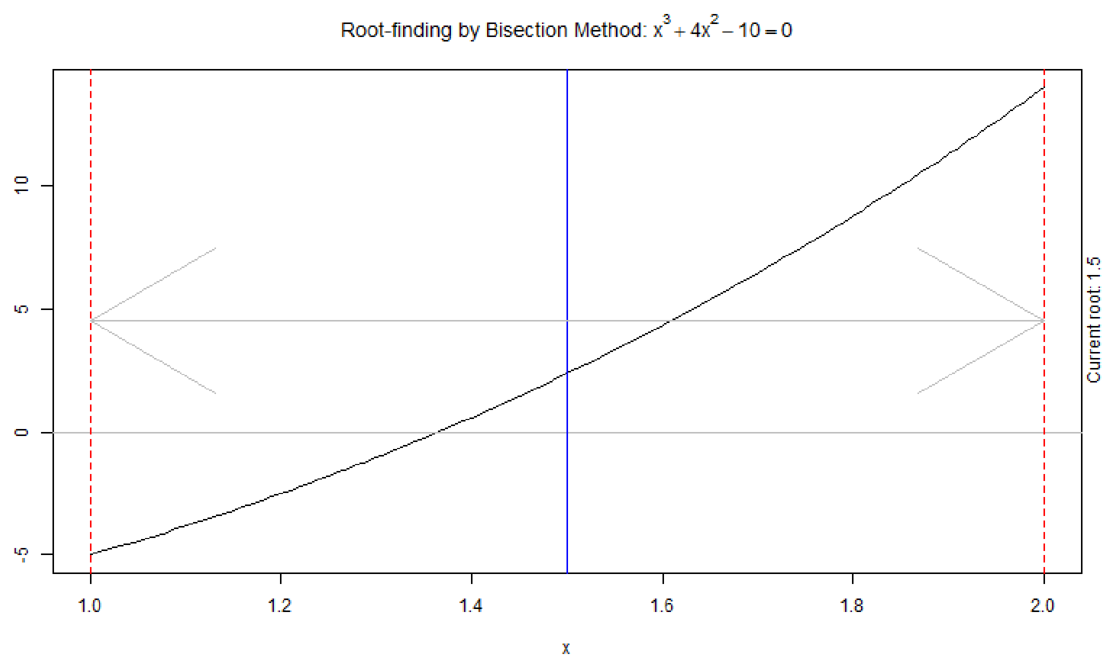
- $i = 0$: $\langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, x^0 \rangle, \langle x^0, b \rangle$
- $i = 1$: $\langle x^0, b \rangle \rightarrow \langle x^0, x^1 \rangle, \langle x^1, b \rangle$
- $i = 2$: $\langle x^0, x^1 \rangle \rightarrow \langle x^0, x^2 \rangle, \langle x^2, x^1 \rangle$
- $i = 3$: $\langle x^2, x^1 \rangle \rightarrow \langle x^2, x^3 \rangle, \langle x^3, x^1 \rangle$
- $i = 4$: $\dots$
- $i = n$: STOP

Metoda bisekce

- Iterační proces končí (STOP podmínka), když
  - nalezneme kořen rovnice
  - je splněna konvergenční podmínka
    - $b^k - a^k < 2\epsilon$
    - ϵ je požadovaná přesnost

- Kořen rovnice je poté určen jako

$$x = \frac{a^k + b^k}{2}$$

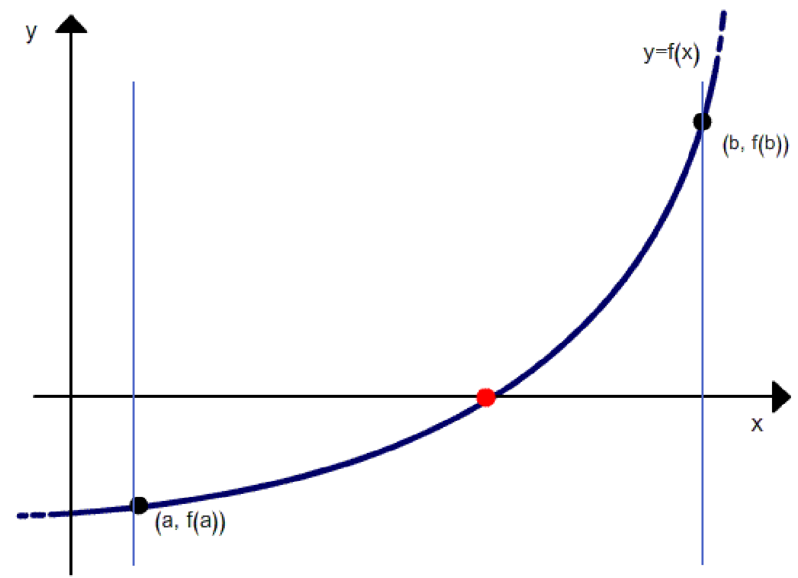


Metoda regula falsi

- Jedna z prvotních metod pro hledání kořenů rovnice
  - někdy se nazývá metoda tětiv nebo false position method (metoda falešné polohy)

- Předpoklad
  - máme definovanou a spojitou funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$

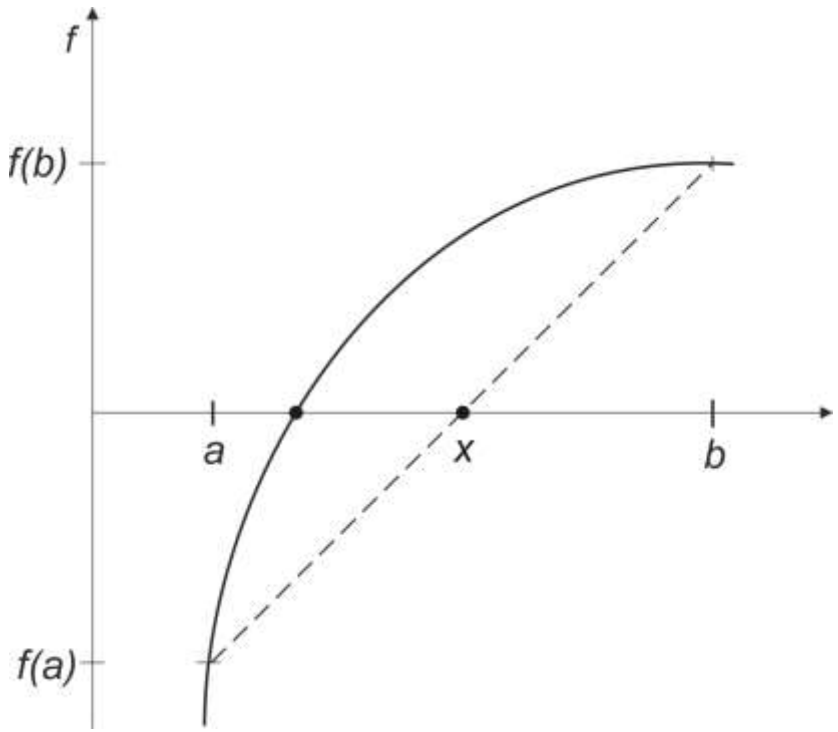
- Volba dělícího bodu x^i intervalu
  - průsečík sečny funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a^i, b^i\rangle$ a osy x
    - tedy ne polovina intervalu
  - stále platí podmínka $f(a^i)f(b^i) < 0.$



Metoda regula falsi

- Sečnu funkce $f(x)$ vyjádřit pomocí rovnice přímky $y = kx + q$
  - kde $q = f(a)$ a $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

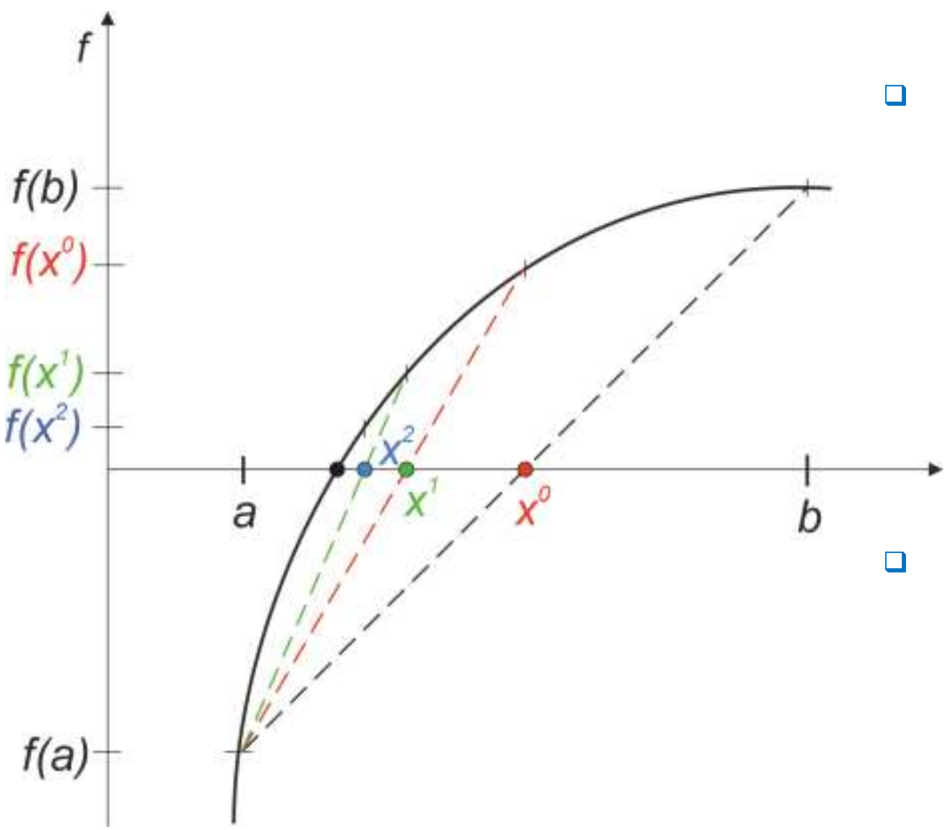
$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$



- Průsečík s osou x:
  - položíme $y = 0$
  - vyjádříme x

$$x = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

Metoda regula falsi



- Určíme průsečík
  - na intervalu $\langle a^i, b^i \rangle$ jako

$$x^i = a^i - f(a^i)\frac{b^i - a^i}{f(b^i) - f(a^i)}$$

- Určíme, který z intervalů $\langle a^i, x^i \rangle$ nebo $\langle x^i, b^i \rangle$ budeme dále používat
  - dle podmínky $f(a) \cdot f(b) < 0$

$$f(a^i) \cdot f(x^i) < 0 \quad \rightarrow \quad b^i = x^i$$

$$f(x^i) \cdot f(b^i) < 0 \quad \rightarrow \quad a^i = x^i$$

- Celý postup opakujeme
  - až do splnění STOP podmínky

$$f(a^i) \cdot f(b^i) \leq \delta$$

$$|x^{i+1} - x^i| \leq \delta$$

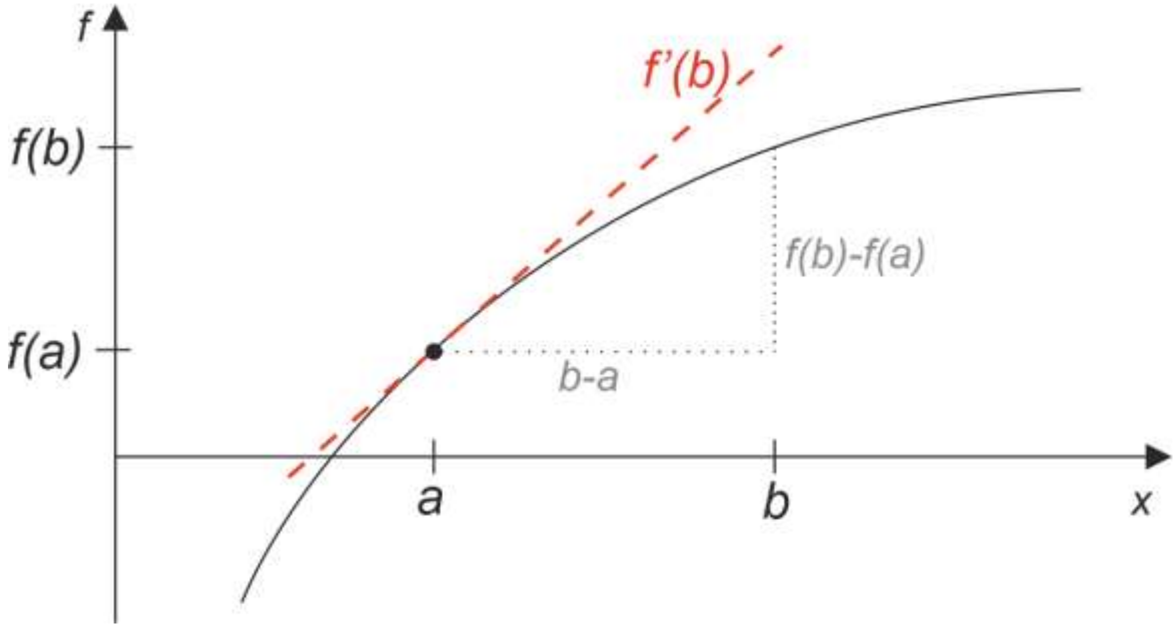
Metoda regula falsi a metoda sečen

- Metoda konverguje vždy
  - obvykle rychleji než bisekce
    - pokud blízko lineární funkci
  - v okolí kořene rovnice konverguje pomalu
  - lze použít pro prvotní zúžení intervalu $\langle a, b \rangle$ a kořen najít rychleji konvergující metodou
    - pod. jako bisekce

- Metoda sečen
  - modifikace regula falsi
  - další iterace se počítá ze dvou posledních bodů
  - nedochází k úpravě intervalu dle průsečíku x^i, ale ihned k výpočtu nového odhadu kořene
- Konvergence metody sečen
  - nemusí konvergovat vždy
  - pokud konverguje, tak rychleji než regula falsi

Newtonova metoda

- 1669 – formulovována a použita pro řešení kubické rovnice
- Použita pro aproximaci řešení Keplerových rovnic (transcendentní) pro pohyb planet
- Pro stanovení odhadu kořene používá derivaci funkce $f(x)$ – metoda tečen



$$f'(x) = \lim_{(b-a)\to\infty} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Newtonova metoda

- Z Taylorova rozvoje funkce $f(x)$ kolem bodu x_0, kde $x = x_0 + a$, dostaneme řadu ve tvaru

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \underbrace{+\ldots\ldots}_{O((x-x_0)^2)}$$

- Nahradíme formálně $\quad x \to x^{i+1}, \qquad x_0 \to x^i$

$$f\left(x^{i+1}\right) = f\left(x^i\right) + f'\left(x^i\right)\left(x^{i+1} - x^i\right) \qquad \Longrightarrow \qquad x^{i+1} = x^i - \frac{f\left(x^i\right)}{f'\left(x^i\right)} - \frac{f\left(x^{i+1}\right)}{f'\left(x^i\right)}$$

- Hledáme řešení rovnice $f(x) = 0$, další iterace by měla být blíže ke skutečnému řešení; předpokládáme tedy $f\left(x^{i+1}\right) \to 0$

$$x^{i+1} = x^i - \frac{f\left(x^i\right)}{f'\left(x^i\right)}$$

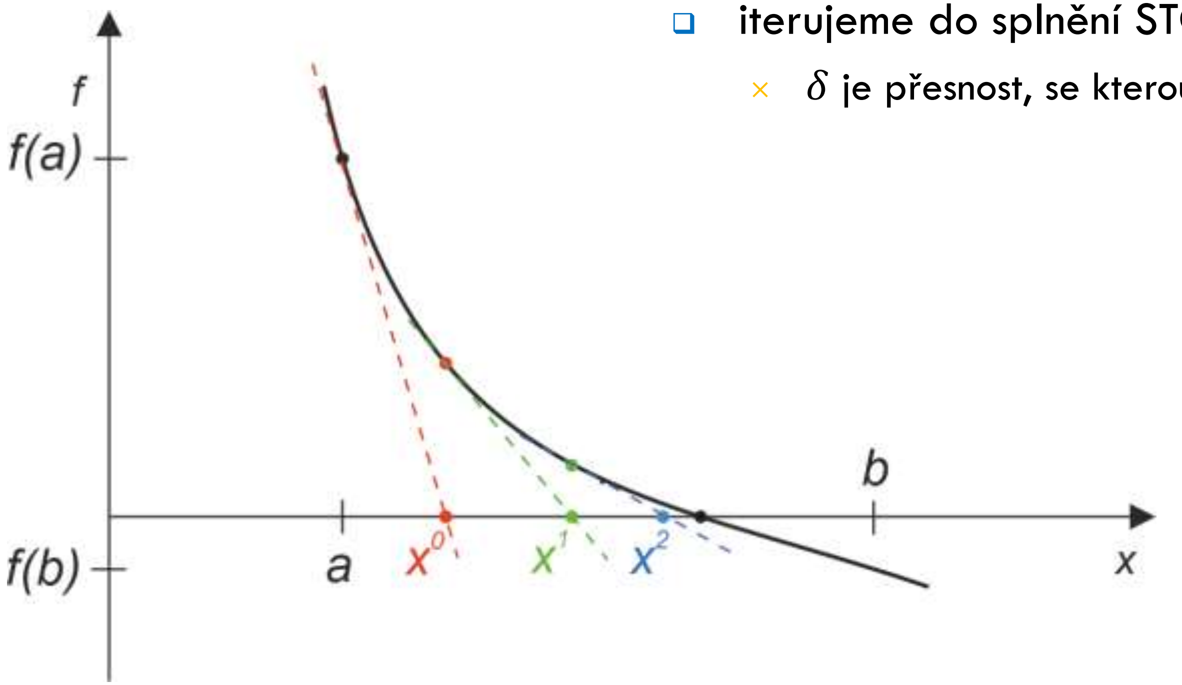
- kde x^{i+1} je $(i+1)$. odhad kořene rovnice $f(x)$ pomocí Newtonovy metody

Newtonova metoda

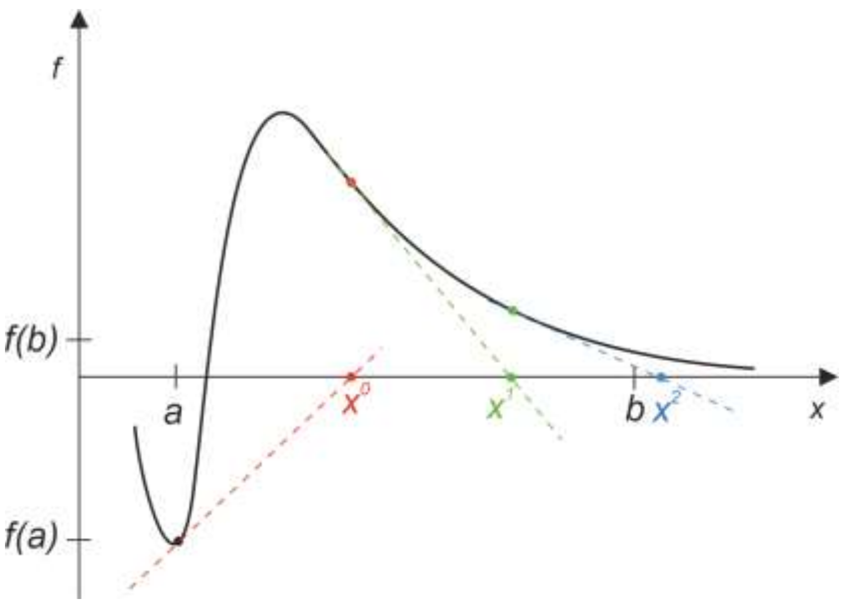
- Odhad kořene

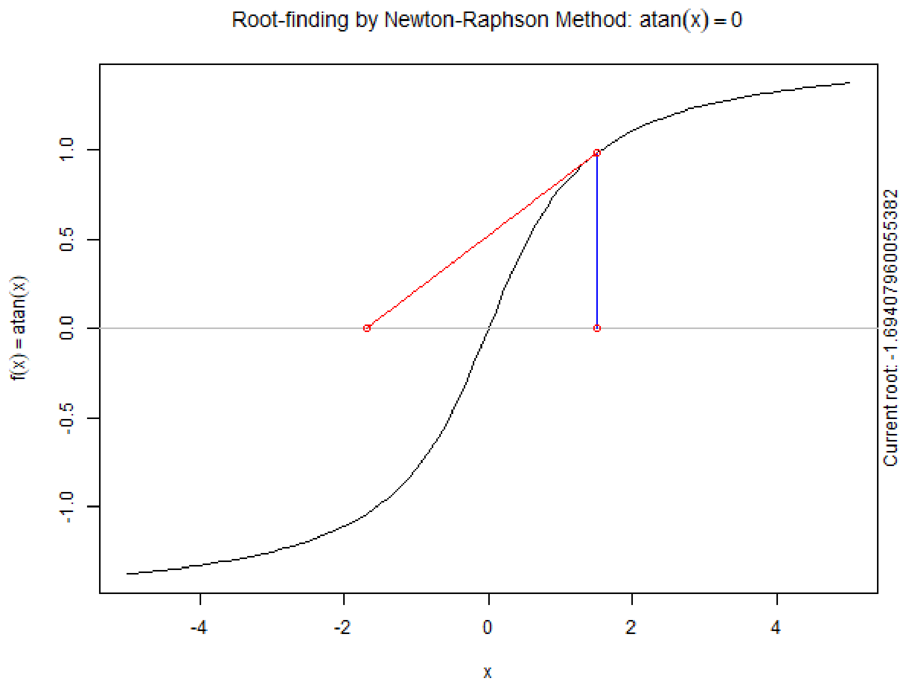
$$x^{i+1} = x^i - \frac{f(x^i)}{f'(x^i)}$$

- odhad kořene x^{i+1} pomocí derivace $f'(x)$
- iterujeme do splnění STOP podmínky $|x^{i+1} - x^i| < \delta$
  - δ je přesnost, se kterou chceme kořen najít



Newtonova metoda





- Metoda nekonverguje vždy
  - ale pokud konverguje, jde o jednu z nejrychleji konvergujících metod
  - záleží i na volbě x^0
- Konvergence je zaručena při splnění Fourierovy podmínky

Newtonova metoda

- Fourierova podmínka

- Mějme funkci $f(x)$ definovanou a spojitou na intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, že existují derivace f' a f'', které nemění znaménko
- Zvolíme počáteční aproximaci $x^0 \in \langle a, b\rangle$ tak, aby byla splněna podmínka

$$f(x^0) \cdot f''(x^0) > 0$$

- Potom bude Newtonova metoda konvergovat.

- Pokud $f'(x)$ nemění znaménko, tak funkce na celém intervalu $\langle a, b\rangle$ klesá nebo roste
- Pokud $f''(x)$ nemění znaménko, tak je funkce na celém intervalu $\langle a, b\rangle$ konvexní nebo konkávní

- Metoda nemusí fungovat, pokud kolem počátečního odhadu nebo kořene existují inflexní body, lokální maxima nebo minima

Cvičení

- Pomocí výše uvedených metod najděte kořeny následujících rovnic

$$0 = x + \ln x$$

$$0 = \sin x - \frac{1}{2} x$$

$$0 = e^{x} + x^{2} - 3$$

$$0 = x - e^{-x}$$

$$0 = x \arctan x - 1$$