

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Obyčejné diferenciální rovnice

- Obyčejná diferenciální rovnice

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots) = 0$$

- Řešení

- ✗ každá funkce $g(x)$ vyhovující výše uvedené rovnici

- Počáteční podmínky $[x_0, f_0 = f(x_0)]$

- ✗ určují hodnoty řešení nebo jeho derivací v určitém počátečním bodě

- ✗ vybíráme z množiny funkcí $g(x)$ jednu konkrétní

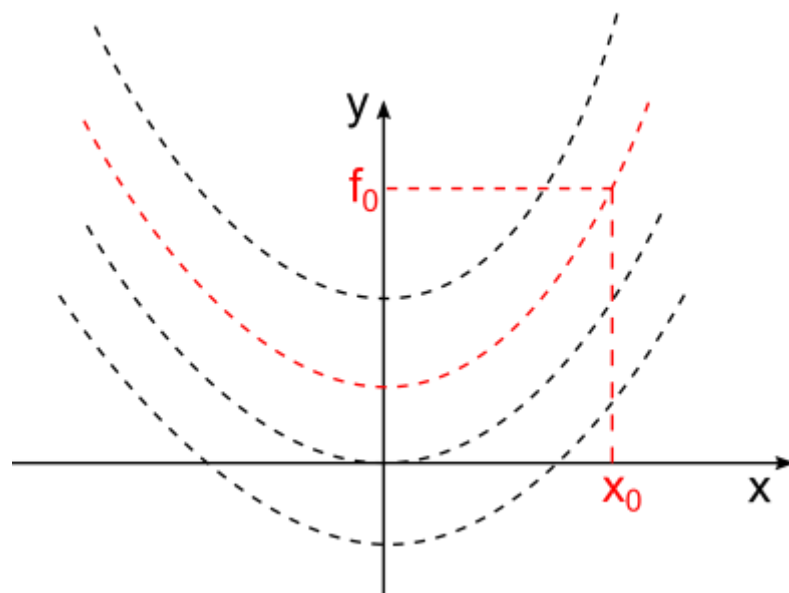
- Okrajové podmínky

- ✗ hodnoty na okrajích intervalu, na kterém je rovnice definována

- často u parciálních diferenciálních rovnic

- ODE 1. řádu

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0$$



Typy řešení ODE

□ Obecné

- × zahrnuje všechna možná řešení rovnice
- × obsahuje libovolnou integrační konstantu

□ Partikulární (částečné)

- × jedno konkrétní řešení, které vyhovuje dané rovnici a určitým doplňujícím podmínkám
 - počátečním nebo okrajovým
- × získáme přiřazením číselné hodnoty každé integrační konstantě obecného řešení

□ Homogenní

- × odpovídá homogenní části dané ODE
 - všechny členy na jedné straně rovnice rovny nule
- × může být nalezeno pomocí charakteristické rovnice
- × základ pro nalezení obecného řešení

Obecné = homogenní + partikulární

□ Singulární (výjimečné)

- × není zahrnuto v obecném řešení
- × pokud má ODR singularitu nebo singularitní bod
 - funkce nejsou hladké nebo jsou nedefinované
- × nemusí být fyzikálně relevantní

Analytické metody řešení

- Analytické metody řešení ODE prvního řádu

- × záleží na typu rovnice

- Separace proměnných

$$y' = x$$

$$\frac{dy}{dx} = x$$

$$dy = x \, dx$$

$$\int dy = \int x \, dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

Analytické metody řešení

□ Exaktní diferenciální rovnice

× je možné ji vyjádřit jako derivaci určité funkce $F(x, y)$

▪ např.

$$y' = x^2$$

× řešení často separací proměnných

□ Homogenní rovnice

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

× řešení substitucí

$$u = y/x$$

$$y = ux$$

$$y' = u'x + u$$

$$y' = u'x + u = f(u)$$

Analytické metody řešení

- (Homogenní) lineární rovnice

$$y' + a(x)y = 0$$

- ✗ řešíme vynásobením integračním faktorem $e^{-\int a(x) dx}$

$$y = C e^{-\int a(x) dx}$$

- Lineární rovnice s pravou stranou

$$y' + a(x)y = b(x)$$

$$y = C(x) e^{-\int a(x) dx}$$

$$y = e^{-\int a(x) dx} \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx$$

- ✗ často lineární rovnice s konstantními koeficienty, tj. $a(x) = a$

- Bernoulliho rovnice $y' + a(x)y = b(x)y^n$

substituce $u = y^{1-n}$ převede libovolnou Bernoulliho rovnici na lineární diferenciální rovnici

Použití diferenciálních rovnic

□ Děje, které se mění v čase

- × pomocí obyčejné diferenciální rovnice nebo soustavy rovnic

$$\frac{dF(t)}{dt} \neq 0$$

□ Příklady použití

- × matematický software
 - řešení problémů z oblasti matematiky a numerické matematiky
 - funkce softwaru nezávislé na verzi
- × počítačové zpracování signálu
 - využití transformací pro analýzu jednoduchých signálů, jejich korelací ap.
- × úvod do strojového učení
 - praktická analýza dat pomocí existujících frameworků
 - např. tensorflow, Scikit-learn, Kerasd ap.

Použití diferenciálních rovnic

- Fyzikální soustavy (pohybová rovnice)

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \frac{dv}{dt} = a$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin(\Omega t)$$

- Biologické modely

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma R(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma R(t)$$

- Finanční modely

$$dr(t) = \alpha r(t) dt + \beta r(t) dW(t)$$

Numerické metody řešení

□ Numerické metody pro řešení ODE

$$y^{i+1} = F(x^i, y^i, y^{i-1}, \dots, y^{i-k})$$

× Jednokrokové metody

- řešení na základě hodnoty funkce a její derivace v jednom kroku
- založeno na Taylorově rozvoji (získáme aproximaci v x_0)
- Euler, Runge-Kutta, Verlet, Leap-Frog

$$y^{i+1} = y^i + hf(x^i, y^i)$$

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h y'(x_0)$$

× Vícekrokové metody

- na základě hodnoty funkce a derivace v několika předchozích krocích
- nejdříve počáteční hodnoty řešení pomocí jednokrokových metod
- Prediktor-korektor, Prediktor-modifikátor-korektor, Adams-Bashforth

$$y^{i+1} = y^i + \frac{3}{2}hf(x^i, y^i) - \frac{1}{2}hf(x^{i-1}, y^{i-1})$$

Eulerova metoda

- ❑ Místo derivace budeme využívat diferenci

$$\frac{d}{dt} \sim \frac{\Delta}{\Delta t}$$

- ❑ Uvažujme rovnici

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y(x))$$

$$\Delta y = \Delta x f(x, y(x))$$

- ❑ Z definice difference

$$y' = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

$$y(x + \Delta x) - y(x) = y' \Delta x$$

dosadíme

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta x f(x, y(x))$$

- ❑ Rovnice ve tvaru jednokrokové iterační metody

odpovídá obecnému schématu

$$y^{i+1} = y^i + \Delta x f(x^i, y^i)$$

$$y^{i+1} = y^i + h f(x^i, y^i)$$

Eulerova metoda

- ❑ Řešíme rovnici

$$y' = x \qquad y(x_0) = 2 \qquad x_0 = 0$$

- ❑ Analytické řešení rovnice je

$$y(t) = \frac{x^2}{2} + C, \qquad y(0) = \frac{0}{2} + C \rightarrow C = 2$$

- ❑ Rovnice má tvar

$$y' = f(x, y(x)) = x$$

- ❑ Dosadíme do definice difference

$$y' = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

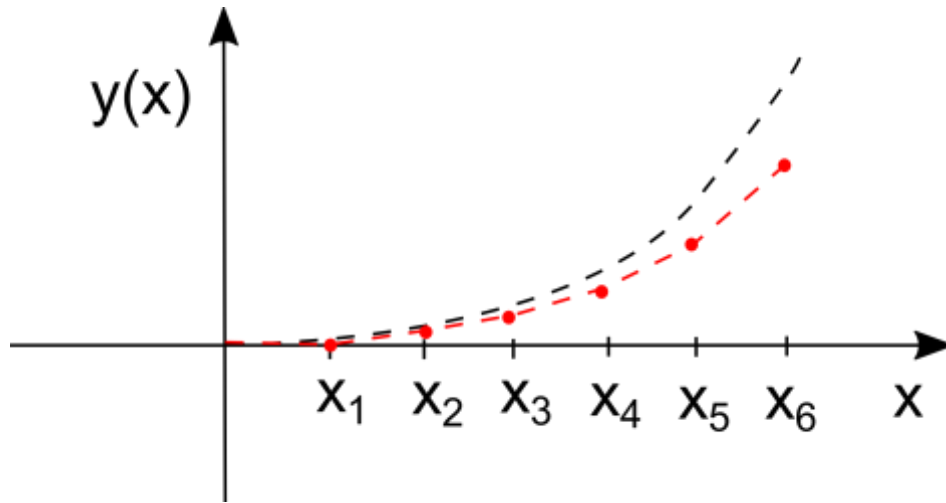
$$y(x + \Delta x) - y(x) = y' \Delta x$$

$$y(x + \Delta x) = y(x) + x \Delta x$$

- ❑ Rovnice ve tvaru jednokrokové iterační metody

$$y^{i+1} = y^i + h x^i; \qquad y^0 = 2$$

Přesnost odhadu numerické metody



- ❑ **Odhad (----)** nesouhlasí s přesným řešením (-----)
- ❑ Chyba metody
 - ✗ krok h je příliš velký
 - ✗ jednokroková metoda odhaduje pouze $y^{i+1} = F(y^i)$
- ❑ Zaokrouhlovací chyba $h \rightarrow 0$

Implicitní Eulerova metoda

- Mějme funkci $f(x, y)$, kde $y = y(x)$, definovanou na intervalu $\langle a, b \rangle$, který ekvidistantně rozdělíme na subintervaly s délkou h

- Explicitní a implicitní Eulerova metoda

- Taylorův rozvoj funkce $f(x + h, y(x + h))$

$$f(x + h, y(x + h)) = f(x, y(x)) + f'(x, y(x))h + \dots + O(h^2)$$

- Explicitní Eulerova metoda

- ✗ při výpočtu řešení v čase $t + \Delta t$ používá výpočet hodnoty derivace v bodě t

$$f'(x, y(x)) = \frac{f(x + h, y(x + h)) - f(x, y(x))}{h} + O(h^2)$$

- Implicitní Eulerova metoda:

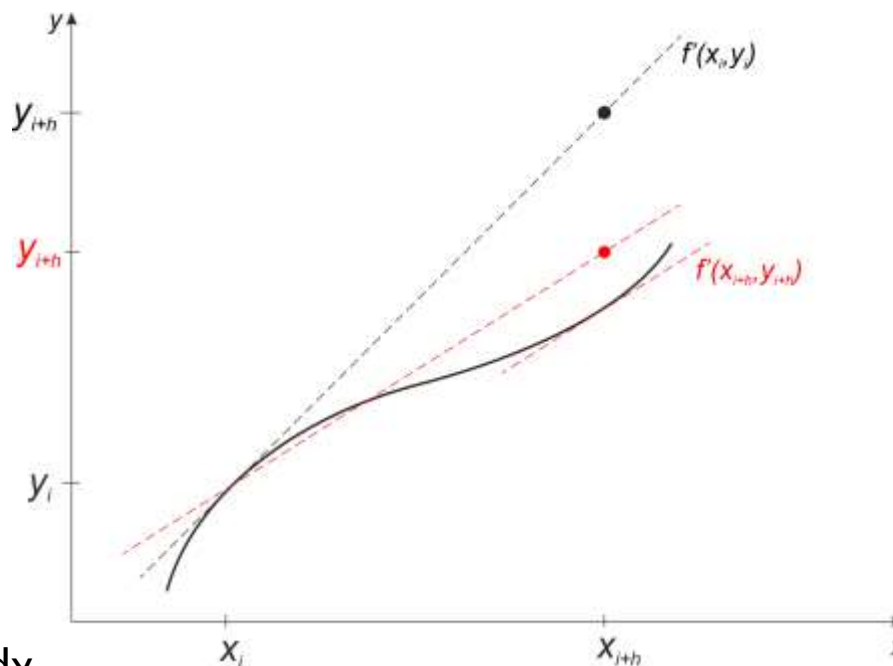
- ✗ při výpočtu řešení v čase $t + \Delta t$ používá výpočet hodnoty derivace v bodě $t + \Delta t$

$$f'(x + h, y(x + h)) = \frac{f(x + h, y(x + h)) - f(x, y(x))}{h} + O(h^2)$$

Implicitní Eulerova metoda

$$f'(x, y(x)) = \frac{f(x+h, y(x+h)) - f(x, y(x))}{h} + O(h^2)$$

$$f'(x+h, y(x+h)) = \frac{f(x+h, y(x+h)) - f(x, y(x))}{h} + O(h^2)$$



□ Výhody implicitní metody

- × numericky stabilnější, širší použití
- × výpočetně náročnější, vyžaduje řešení nelineárních rovnic v každém kroku

Runge-Kutta RK4

- Aproximace derivace v bodě pomocí váženého průměru více bodů

- × řešíme rovnici

$$y' = f(x, y)$$

- × Eulerova metoda:

$$y^{i+1} = y^i + h f(x^i, y^i)$$

- × zpřesníme odhad

- jako vážený průměr 4 odhadů k_1 až k_4

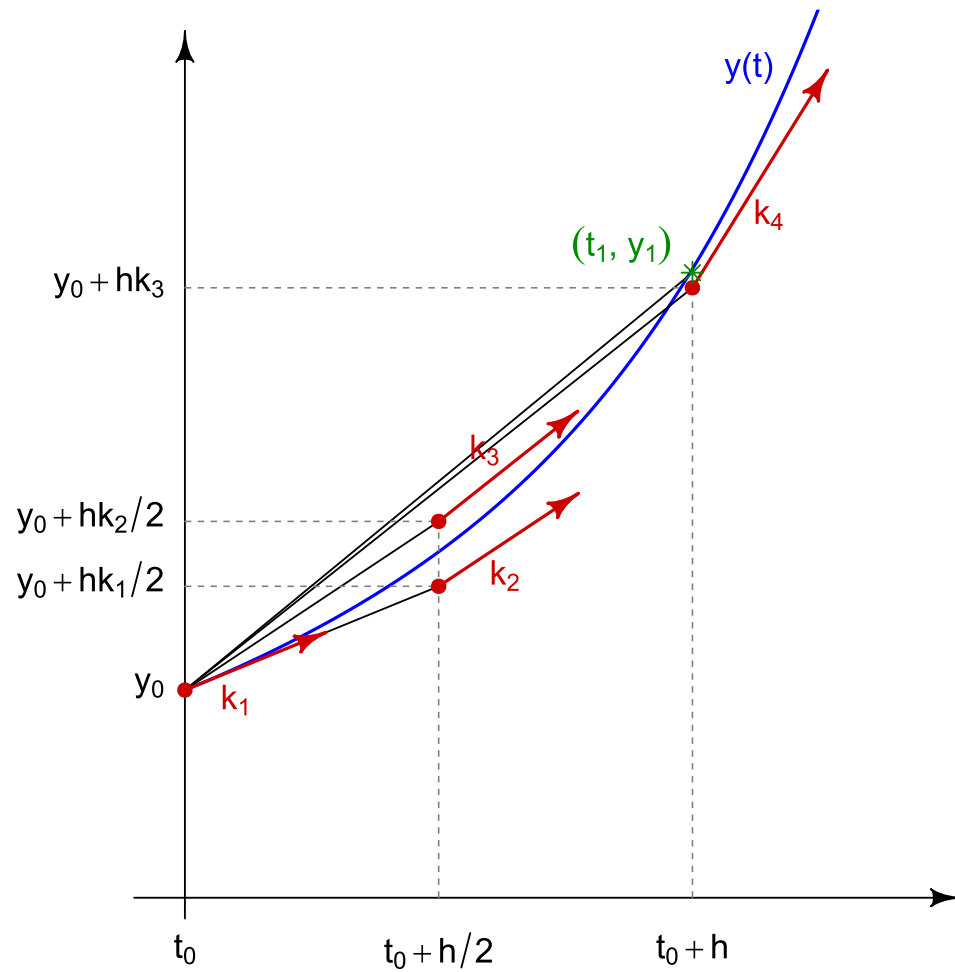
$$y^{i+1} = y^i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h f(x^i, y^i)$$

$$k_2 = h f\left(x^i + \frac{h}{2}, y^i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h f\left(x^i + \frac{h}{2}, y^i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h f(x^i + h, y^i + k_3)$$



Leap-frog

- ❑ Řešíme pohybovou rovnici

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$$

- ❑ Leap-frog

- ✗ diskrétní aproximace polohy pomocí skoků v čase
- ✗ metoda 2. řádu, vyžaduje 2 kroky, které se střídají
 - krok polohy
 - krok rychlosti

- ❑ Krok polohy ($i + \frac{1}{2}$)

- ✗ poloha částice v čase $t + \frac{\Delta t}{2}$

- ❑ Krok rychlosti ($i + 1$) $x^{i+\frac{1}{2}} = x^i + \frac{1}{2} v^i \Delta t$

- ✗ rychlost částice v čase $t + \Delta t$

$$v^{i+1} = v^i + f(x^{i+\frac{1}{2}}) \Delta t$$

- ❑ Krok polohy ($i + 1$)

$$x^{i+1} = x^i + v^{i+1} \Delta t$$

Verlet

$$f(c + h) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} h + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} h^n$$

- Řešíme pohybovou rovnici

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$$

- Standardní Verletův algoritmus – odvození

- × Taylor:
$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{1}{1!} \dot{x}(t) \Delta t + \frac{1}{2!} \ddot{x}(t) \Delta t^2$$

- × úpravy
$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t v(t) + \frac{\Delta t^2}{2} a(t) \quad (1)$$

$$x(t - \Delta t) = x(t) - \Delta t v(t) + \frac{\Delta t^2}{2} a(t) \quad (2)$$

- × součet (1)+(2)
$$x(t + \Delta t) = 2x(t) - x(t - \Delta t) + a(t) \Delta t^2$$

$$x^{i+1} = 2x^i - x^{i-1} + a^i \Delta t^2$$

- × rychlost z rozdílu
$$v(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t}$$

- Rychlostní Verletův algoritmus

- × použijeme (1)

- × rychlost jako
$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta t \frac{a(t) + a(t + \Delta t)}{2}$$

Řešení rovnic – cvičení

- Vyřešte rovnici

$$y' = x; \quad y(x_0) = 2, \quad x_0 = 0$$

- pomocí

- × symbolické matematiky
- × vybrané numerické metody (jednokrokové)
- × vybrané vestavěné funkce softwaru (např. integrate)

- Porovnejte jednotlivá řešení z hlediska implementace, rychlosti a přesnosti řešení

APLIKACE ODE 1. ŘÁDU

Aplikace ODE 1. řádu – přehled

- ❑ Uplatnění
 - × celá škála aplikací od technických, přes biologické, až po ekonomické a sociální
- ❑ Cílem vytvoření modelu
 - × bude věrně popisovat studovaný děj
 - × bude predikovat jeho vývoj v čase za různých podmínek
- ❑ Výhody
 - × výsledky rychleji a s menším úsilím
 - oproti reálnému experimentu
 - často nelze ani smysluplně provést
- ❑ Příklady
 - × Fyzikální
 - ochlazování tělesa
 - × Chemické
 - chemická kinetika
 - × Biologické
 - šíření nemocí
 - × Ekonomické
 - spotřeba domácností

Exponenciální pokles nebo růst

❑ Radioaktivní rozpad

× $N(t)$ počet radioaktivních atomů v daném vzorku

× λ konstanta rozpadu

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

❑ Jednoduchý elektrický obvod

× Q náboj na kondenzátoru

× I proud protékající obvodem

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC} I$$

❑ Výtok kapaliny otvorem

× V množství vody v nádobě

× k konstanta úměrnosti

• (jak rychle voda vytéká z otvoru)

$$\frac{dV}{dt} = -k V$$

❑ Popis růstu populace

× N počet jedinců populace

× r koeficient růstu

$$\frac{dN}{dt} = r N$$

Exponenciální pokles nebo růst

□ Řešme rovnici $\frac{dN}{dt} = -k N$

× separujeme proměnné

$$\frac{dN}{N} = -k dt$$

× integrujeme

$$\int \frac{dN}{N} = - \int k dt$$

$$\ln|N| = -kt + C$$

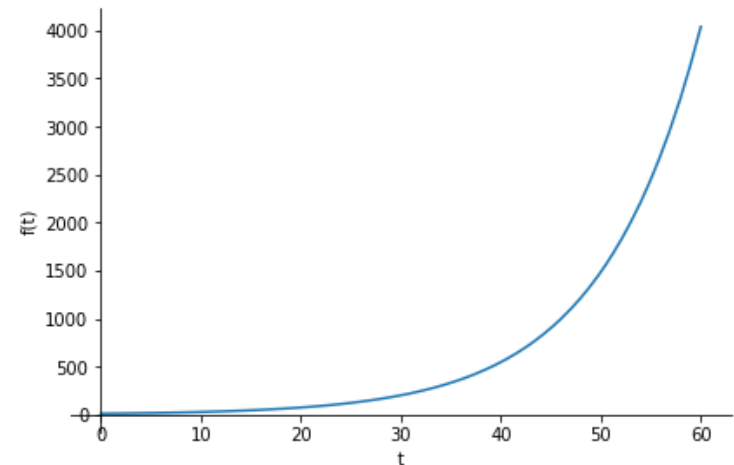
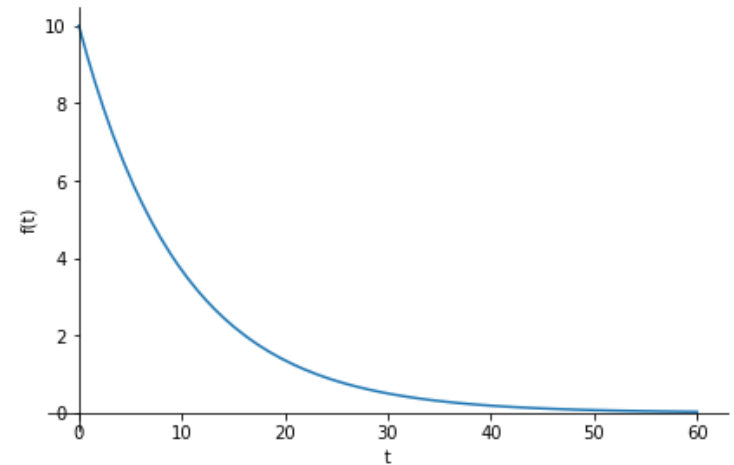
× počáteční podmínka: v čase $t = 0$ bylo $N = N_0$

$$\ln|N| = C = \ln|N_0|$$

× odtud

$$\ln|N| = -kt + \ln|N_0|$$

$$N = N_0 e^{-kt}$$



Ochlazování tělesa

- ❑ Těleso o teplotě T_t je umístěno do prostředí s teplotou $T_p < T_t$
 - ✗ dochází k výměně tepla mezi tělesem a místností
 - ✗ do doby, až $T_t = T_p = T_{eq}$, kde T_{eq} je rovnovážná teplota soustavy
- ❑ Newtonův zákon pro ochlazování tělesa:

$$\frac{dT_t}{dt} = -B (T_t - T_p)$$

$$\ln|T_t - T_p| = -Bt + C$$

$$\frac{dT_t}{T_t - T_p} = -B dt$$

$$T_t - T_p = C e^{-Bt}$$

- ✗ pro $t = 0$ vychází $T_t^0 - T_p = C$

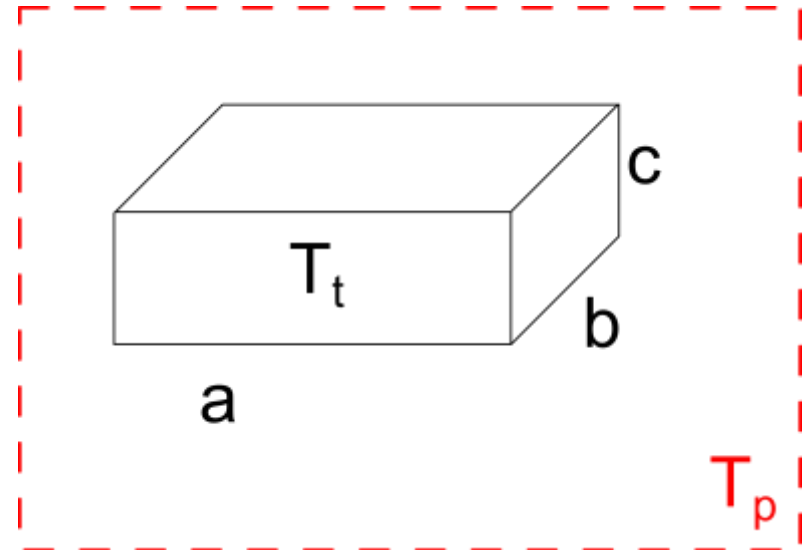
$$T_t(t) = T_p + (T_t^0 - T_p) e^{-Bt}$$

- ✗ T_t^0 je počáteční teplota tělesa před chladnutím
- ✗ $B = \frac{h A}{C}$ obsahuje
 - h - koeficient přenosu tepla
 - A - plocha tělesa
 - C - celková tepelná kapacita

- ❑ Cílem je zjistit, jaká bude teplota tělesa po čase t

Ochlazování tělesa

- Za jak dlouho se ochladí kovové těleso z počáteční teploty $T_t^0 = 120^\circ\text{C}$ na konečnou teplotu $T_f = 30^\circ\text{C}$, jestliže je těleso obklopeno vzduchem s $T_p = 20^\circ\text{C}$?
- Ohřev okolního vzduchu neuvažujeme
- Rozměry tělesa:
 - × $a = 0.1\text{ m}$, $b = 0.05\text{ m}$, $c = 0.01\text{ m}$
 - × $A = 0.013\text{ m}^2$
 - × $V = 5 \cdot 10^{-5}\text{ m}^3$
- Koeficient přestupu tepla $h = 0.85\text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$
- Tepelná kapacita $C = 0.175\text{ J/K}$
- Určíme konstantu $B = \frac{hA}{c} = 0.06\text{ s}^{-1}$



Chemická kinetika

- Chemická kinetika popisuje
 - × rychlost chemické reakce komponent
 - × závislost rychlosti reakce na parametrech a podmínkách, při kterých probíhá
- Možné podmínky
 - × n počet molekul, které se reakce účastní
 - × V objem, ve kterém se reakce odehrává
 - × t čas, po který reakce probíhá
- Rychlost reakce v se dá vyjádřit jako
 - × změna počtu molů látky Δn v objemu V za čas t
 - × změna koncentrace c za čas t

$$v = \frac{|\Delta n|}{V \Delta t} \quad \rightarrow \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta n|}{V \Delta t} = \left| \frac{dn}{V dt} \right|$$

- Pokud je $V = konst$ lze rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{dn}{V dt} = \frac{dc}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dn}{V} = dc$$

Monomolekulární reakce

- Reakce se účastní pouze jeden typ molekuly (typ A)

× rychlost chemické reakce a vývoj koncentrace látky c_A lze popsat:

$$v = -\frac{dc_A}{dt} = k c_A$$

× c_A koncentrace látky

$$-\frac{dc_A}{dt} = k c_A$$

× k konstanta určující míru reakce

$$-\frac{dc_A}{c_A} = k dt$$

× c_{A0} výchozí koncentrace před započítáním reakce

$$-\ln c_A + C = kt$$

$$C = \ln c_{A0}$$

$$\ln \frac{c_{A0}}{c_A} = kt$$

$$c_A = c_{A0} e^{-kt}$$

Bimolekulární reakce

- V případě, že se reakce účastní dva typy molekuly (typ A), lze rychlost chemické reakce a vývoj koncentrace látky c_A popsat následujícím způsobem

$$v = -\frac{dc_A}{dt} = k c_A^2$$

$$-\frac{dc_A}{c_A^2} = k dt$$

$$-\int_{c_{A0}}^{c_A} \frac{dc_A}{c_A^2} = \int_0^t k dt$$

$$\left[\frac{1}{c_A} \right]_{c_{A0}}^{c_A} = kt$$

$$c_A = \frac{c_{A0}}{1 + c_{A0} kt}$$

× c_A koncentrace látky

× k konstanta určující míru reakce

× c_{A0} výchozí koncentrace před započítáním reakce

Šíření nemoci

- ❑ Modely vývoje nemoci v závislosti na vlivu různých parametrů
 - × např. HIV, AIDS, SARS, Ebola aj.
- ❑ Nejčastěji uvažované parametry
 - × infekčnost nemoci
 - × míra kontaktů
 - × dynamika populace (narození, úmrtnost)
 - × vliv vakcinace
 - × vliv karantény
 - × vliv migrace
 - × ...
- ❑ Komplexnější modely obsahují sadu více než deseti rovnic
 - × každá s jedním nebo více parametry

Šíření nemoci s konstantní infekčností

- Počet nemocných jedinců D roste s konstantní mírou infekce a ,
- každá infikovaná osoba má konstantní pravděpodobnost b , že se vyléčí.
- Změnu počtu nakažených osob lze popsat rovnicí

$$\frac{dD}{dt} = a - bD$$

- která má analytické řešení

$$D(t) = \frac{1}{b} (a - e^{-b(C+t)})$$

- kde $C = -\ln(a - bD(0))/b$ je integrační konstanta. Model má dále rovnovážné řešení ve tvaru

$$\frac{dD}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad D_0 = \frac{a}{b}$$

Modely šíření nemocí

□ S (Susceptible)

- × náchylní jedinci

□ I (Infected)

- × nakažení jedinci

□ R (Recovered)

- × uzdravení (imunní) jedinci

□ D (Deceased)

- × zemřelí jedinci

□ E (Exposed)

- × nakažení, ale ještě ne infekční

□ SIR

- × vzniká imunita (např. spalničky, chřipka)

□ SIS

- × bez dlouhodobé imunity (např. rýma)

□ SIRD

- × nemoci s úmrtností (např. COVID-19)

□ SEIR

- × nemoci s inkubační dobou (např. COVID-19, Ebola)

□ SEIRD

- × SEIR s úmrtností

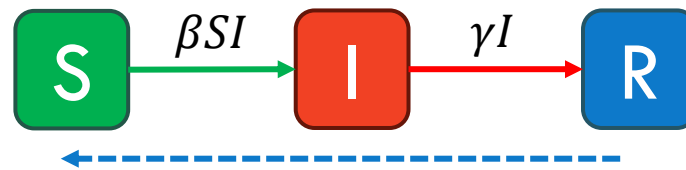
□ SIRS

- × po čase imunita slábne, uzdravení jedinci se mohou znovu nakazit

□ SIRV

- × očkovaná populace

SIR



□ Susceptible - Infected - Recovered

× populace uzavřená

$$S + I + R = konst$$

× šíření kontaktem S-I (náchylný a nakažený)

□ Změna počtu náchylných jedinců (S)

× pravděpodobnost, že náchylný jedinec onemocní, závisí na:

- frekvenci kontaktů mezi S a I
- přenosové pravděpodobnosti β (jak snadno se nemoc šíří)

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad \text{čím více nakažených, tím rychleji klesá } S$$

□ Změna počtu nakažených jedinců (I)

× roste přenosem infekce (přírůstek nakažených βSI)

× zároveň klesá zotavováním

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \quad \gamma = \frac{1}{T_{inf}} \text{ míra zotavení} \quad T_{inf} \text{ průměrná doba infekce}$$

□ Změna počtu uzdravených jedinců (R)

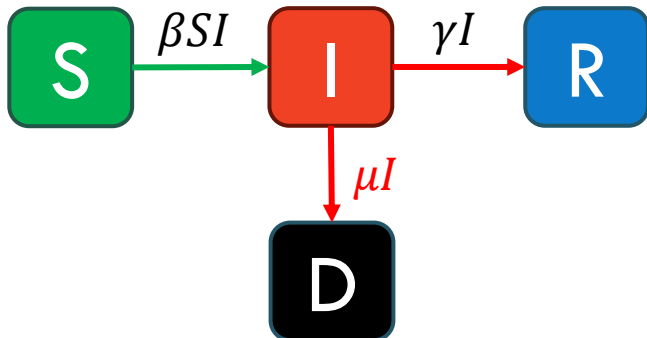
× přecházejí z I do R, závisí na počtu nakažených

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

SIS, SIRD

□ SIR

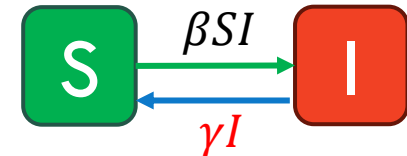
$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}$$



□ SIS (Susceptible - Infected - Susceptible)

- × neexistuje imunitní skupina R, uzdravení se mohou znovu nakazit
- × uzdravení se dostanou rovnou do S

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI + \gamma I \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I\end{aligned}$$



□ SIRD (Susceptible - Infected - Recovered - Deceased)

- × úmrtí snižuje počet nakažených

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \\ \frac{dD}{dt} &= \mu I\end{aligned}$$

$$\frac{dD}{dt} = \mu I$$

SEIR, SEIRD

□ SIR

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}$$

□ SEIR (Susceptible - Exposed - Infected - Recovered)

× E: jedinci, kteří jsou nakaženi, ale ještě nejsou infekční

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \sigma E$$

exponovaní vznikají kontaktem,
klesají projevem se nemoci

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I$$

nakažení vznikají z exponovaných

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

σ – rychlost přechodu z exponované fáze do infekční

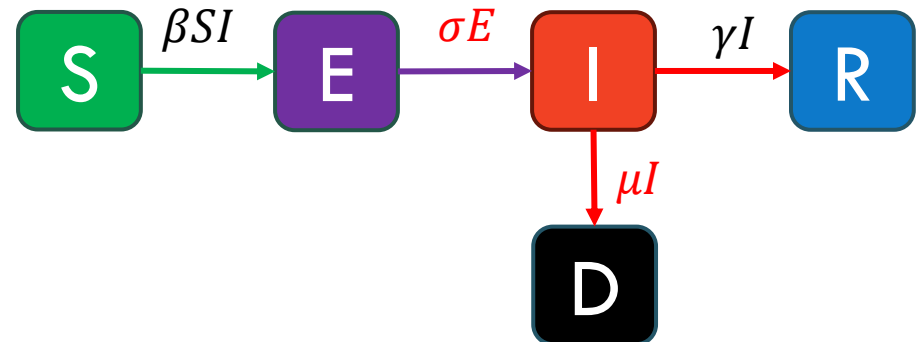
□ SEIRD (SEIR - Deceased)

× úmrtí snižuje počet nakažených

× jinak vše stejné

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I - \mu I$$

$$\frac{dD}{dt} = \mu I$$



SIRV

□ SIR

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}$$

□ SIRV (Susceptible - Infected – Recovered - Vaccinated)

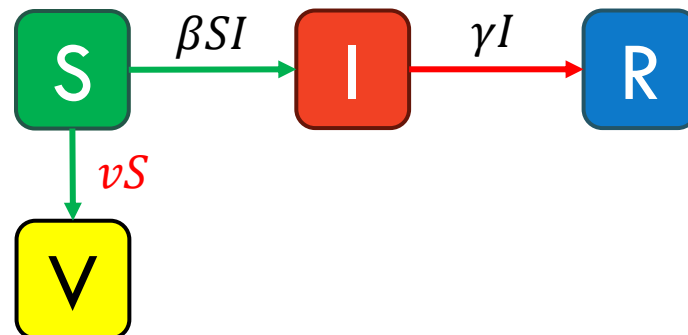
$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI - vS$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

$$\frac{dV}{dt} = vS$$

v – míra očkování



Spotřeba domácností

- Model má za cíl popsat vývoj spotřeby domácností v závislosti na míře růstu k a času, po který k růstu dochází
- Růst je ovlivněn zejména výdaji na
 - × dlouhodobou spotřebu (spotřebiče, nábytek atd.)
 - × krátkodobou spotřebu (potraviny, oblečení atd.)
 - × služby (nájem atd.)
- Mějme celkovou spotřebu domácností C , která roste v konstantní míře 3 %, tj. $k = 0.03$, poté následující rovnice popisuje vývoj spotřeby v čase C' .

$$\frac{C'}{C} = k$$

$$\frac{dC}{C} = k dt$$

$$\ln|C| = kt$$

$$C = c e^{-kt}$$

- kde konstanta c udává míru růstu

Řešení Verhulstova populačního modelu

- Verhulstův model růstu populace (1838)
- Vyřešte následující diferenciální rovnici pomocí symbolické a numerické matematiky

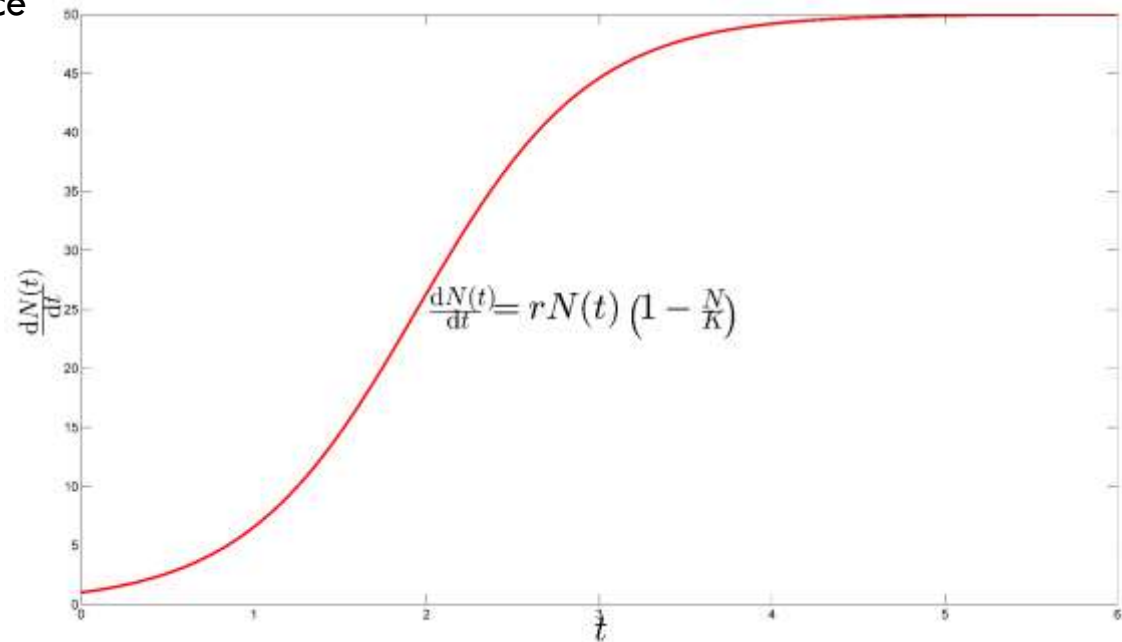
$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

- kde $r = 2$ a $K = 50$ jsou konstanty

- × r – specifická míra růstu populace
- × K – kapacita prostředí (horní hranice populace)

- Uvažujte počáteční podmínku

$$N(0) = 1$$



Vizualizace řešení – vektorové pole

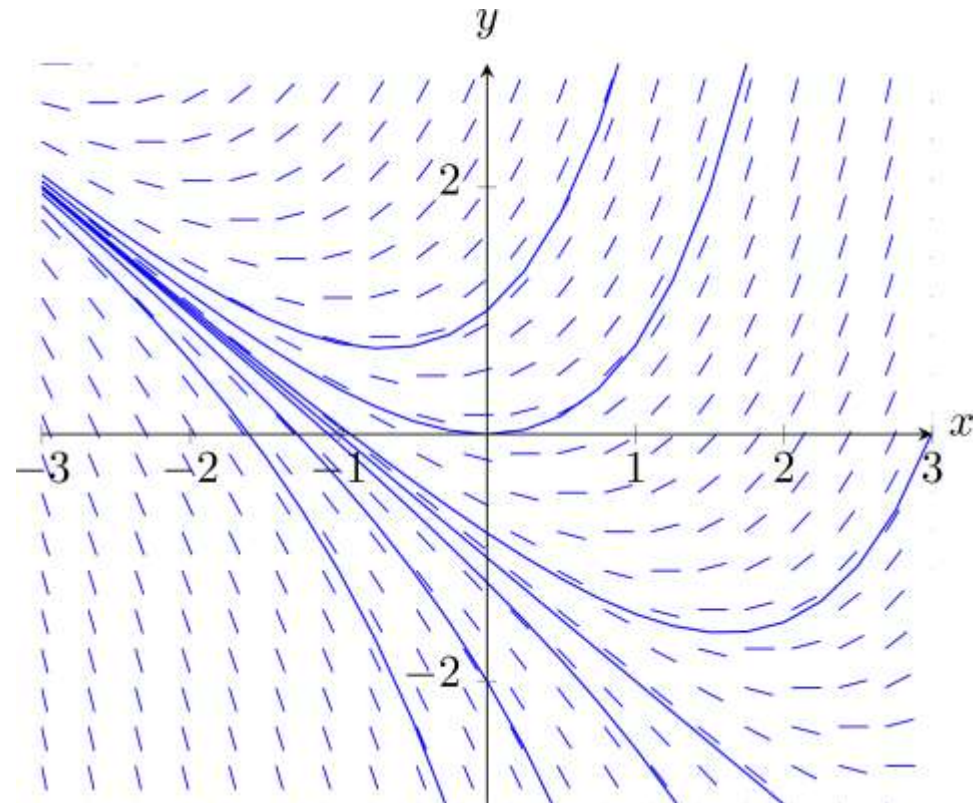
- Zobrazte jednotlivá řešení následujících rovnic pomocí vektorového pole.

$$y' = x + y$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$y' = \frac{y^2}{x}$$

- Zvolte řešení (x, y) v rozsahu $(-5, 5)$
- Použijte numerickou nebo symbolickou matematiku
- Vyznačte řešení, které vyhovuje vámi vybraným počátečním podmínkám



STIFF SOUSTAVY

Stiff rovnice a jejich soustavy

- ❑ Rovnice se silným tlumením
- ❑ 1952 – klasické numerické metody selhávají při popisu určitých chemických reakcí
 - × rychle reagující komponenta dosáhla rovnováhy daleko dříve než zbytek systému
 - × ten se mění velice pomalu
- ❑ 1963 – důvodem selhání řešení je špatná stabilita klasických metod pro tyto typy úloh
- ❑ Definice stiff systému
 - × žádná ucelená definice neexistuje
 - × obecně systém, kde se řešení mění velice pomalu
 - × ale v okolí, kde nás řešení zajímá, dochází k velice rychlému ustavení rovnováhy
- ❑ Detekce „tuhosti“ systému pomocí vlastních čísel Jacobiho matice

Stiff rovnice a jejich soustavy

- Definice tuhosti soustavy
- Soustava obyčejných diferenciálních rovnic je tuhá, jestliže všechna vlastní čísla λ_j matice J mají zápornou reálnou část a koeficient tuhosti S je velký

× matice J je Jacobiho matice soustavy ODR

- Seřadíme vlastní čísla tak, aby platilo

$$|Re(\lambda_1)| \leq |Re(\lambda_2)| \leq \dots \leq |Re(\lambda_n)|$$

× dostaneme $\lambda_{min} = \lambda_1$ a $\lambda_{max} = \lambda_n$

- Koeficient tuhosti je poté dán vztahem

$$S = \frac{|Re(\lambda_{max})|}{|Re(\lambda_{min})|}$$

Stiff rovnice a jejich soustavy

- ❑ Jacobiho matice a jakobián soustavy ODR
- ❑ Mějme soustavu n ODR definovaných jako

$$y'_j = f_j(y_1, y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_n); \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad y = y(x)$$

- ❑ Jacobiho matice soustavy rovnic je definována jako matice parciálních derivací

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- ❑ Determinant této matice nazýváme jakobiánem

Stiff rovnice a jejich soustavy

- Mějme soustavu ODR prvního řádu

$$\begin{aligned} 3y' &= -10y + z \\ z' &= y - 10z \end{aligned}$$

- Jacobiho matice J této soustavy vypadá následovně

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(-10y + z) & \frac{\partial}{\partial z}(-10y + z) \\ \frac{\partial}{\partial y}(y - 10z) & \frac{\partial}{\partial z}(y - 10z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$$

- Vyřešením rovnice $J \cdot x = \lambda x$ dostaneme vlastní čísla Jacobiho matice J

Stiff rovnice a jejich soustavy

- ❑ Vlastní čísla matice J najdeme pomocí výpočtu determinantu rovnice

$$\begin{aligned}\det(J - \lambda E) &= \det \left[\begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} -10 - \lambda & 1 \\ 1 & -10 - \lambda \end{pmatrix} \right] = \\ &= \lambda^2 + 20\lambda + 99\end{aligned}$$

- ❑ Vyřešením této kvadratické rovnice dostaneme $\lambda_1 = \lambda_{min} = -9$, $\lambda_2 = \lambda_{max} = -11$.
- ❑ Koeficient tuhosti nabývá hodnoty

$$S = \frac{|Re(\lambda_{max})|}{|Re(\lambda_{min})|} = \frac{11}{9} \approx 1.2$$

- ❑ Ačkoli nabývají obě vlastní čísla záporných hodnot, je koeficient tuhosti malý a tato soustava není klasifikována jako tuhá

Stiff rovnice a jejich soustavy

- Soustavu

$$\begin{aligned} 3y' &= -10y + z \\ z' &= y - 10z \end{aligned}$$

- modifikuje následovně

$$\begin{aligned} 3y' &= -100y - 0.01z \\ z' &= y - 0.0001z \end{aligned}$$

- a spočítáme koeficient tuhosti stejným způsobem

$$S = \frac{99.999}{0.0011} \approx 9 \cdot 10^4$$

- Velká tuhost

- × potřeba zvolit adekvátní metodu
- × nebo adekvátně malý integrační krok
 - v některých případech dostačuje

Stiff rovnice a jejich soustavy

- ❑ Stiff soustavy vyžadují modifikace stávajících numerických metod
 - × většinou do tvaru implicitních schémat
- ❑ Používané metody
 - × **Implicitní a semiimplicitní Eulerova metoda**
 - × Rosenbrockovy metody
 - semiimplicitní tvar metod Rungeho-Kutty
 - × Bulirsch-Stoerovy metody
 - × GBS metody,
 - × víceukrokové Gearovy metody

Stiff rovnice a jejich soustavy – cvičení

- U následující rovnice nejdříve odvodte a poté aplikujte implicitní i explicitní Eulerovu metodu. Postupně změňte krok h a sledujte přesnost a stabilitu obou metod, např. pomocí globální chyby. Počáteční podmínka je $y(0) = y_0 = 0$.

$$y' = -100y + 100$$

- U následující soustavy rovnic nejdříve vypočítejte její koeficient tuhosti a poté pomocí implicitní a explicitní Eulerovy metody soustavu vyřešte. Počáteční podmínky jsou $y(0) = y_0 = 0$ a $z(0) = z_0 = 0$.

$$\begin{aligned}y' &= 998y + 1998z \\z' &= -999y - 1999z\end{aligned}$$

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů

- Obyčejná diferenciální rovnice udává vztah mezi funkcí a jejími derivacemi ve tvaru:

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots) = 0$$

- Řešením je každá funkce $g(x)$ vyhovující výše uvedené rovnici
- Volbou počátečních podmínek $[x_0, f_0 = f(x_0)]$ vybíráme z množiny funkcí $g(x)$ jednu konkrétní
- Pro nalezení řešení u rovnic vyšších řádů se využívají například přístupy založené na
 - × nalezení substituce derivace (metoda parametru)
 - × snížení řádu diferenciální rovnice
 - × nalezení charakteristické rovnice
 - × variaci konstant

Obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů

- Lineární rovnice řádu n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_0(x) y = f(x, y)$$

- × Wronského determinant

- Homogenní lineární rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_0(x) y = 0$$

- × variace konstant

- Lineární rovnice s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = f(x, y)$$

- × charakteristická rovnice

Speciální rovnice

□ Besselova rovnice

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

- × kde $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ jsou spojité funkce
- × řešení pomocí lineární transformace

□ Gaussova rovnice

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

- × řešení ve tvaru hyperbolické řady

□ Legendreova rovnice

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

- × kde n je celé nezáporné číslo
- × řešení ve tvaru Legendreova polynomu stupně n

Metody řešení ODE 2. řádu – linearizace

- Mějme obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu ve tvaru

$$y'' = f(x)$$

- × kde $y = y(x)$
- × u $f(x)$ předpokládáme spojitost
 - včetně derivací funkce až do řádu 2

- Můžeme obě strany rovnice dvakrát integrovat:

$$\iint y'' dy dy = \iint f(x) dx dx$$

- × dostáváme řešení ve tvaru

$$y = \iint f(x) dx dx$$

- × provedeme substituci

$$z(x) = \int f(x) dx$$

Metody řešení ODE 2. řádu – linearizace

- Pomocí substituce získáme sadu dvou rovnic, která obsahuje derivace funkcí $y(x)$ a $z(x)$ o řád nižší, než v původní rovnici, tedy provedeme linearizaci

$$y = \int z(x) dx \quad \rightarrow \quad y' = z(x)$$

$$z = \int f(x) dx \quad \rightarrow \quad z' = f(x)$$

- Výsledkem jsou dvě rovnice prvního řádu, které lze již řešit "známými" metodami.
- Linearizace
 - × cílem je snížit řád derivace tím, že provedeme substituci
 - × aby bylo možno řešit vzniklou soustavu rovnic pomocí známých metod
 - × nevýhodou je zvyšování počtu rovnic

Metody řešení ODE 2. řádu – linearizace

- Proved'te linearizaci u následující rovnice a zjistěte analytické řešení $y(x)$

$$y'' = \ln x$$

$$y = \iint \ln x \, dx \, dx$$

- pomocí následující substituce $z(x) = \int \ln x \, dx$ získáme sadu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu, kterou již umíme vyřešit

$$z(x) = \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C_1$$

$$y = \int (x \ln x - x) \, dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) + C_2$$

- Počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$
- x_0 můžeme volit tak, abychom obě integrační konstanty vynulovali

Metody řešení ODE 2. řádu – cvičení

- Porovnejte přesná řešení předchozího příkladu s numerickým odhadem, například pomocí explicitní a implicitní Eulerovy metody.
- Soustava rovnic má tvar

$$\begin{aligned}y' &= z(x) \\ z' &= \ln x\end{aligned}$$

- a přesná řešení mají pro jednotlivé rovnice tvar

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) \\ z(x) &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$

Lineární harmonický oscilátor

□ Pohybová rovnice

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

× řešíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_1 = i\omega, \quad \lambda_2 = -i\omega$$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Tlumený kmitavý pohyb

□ Pohybová rovnice

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

× řešíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

× a) $\delta^2 - \omega^2 > 0$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})t} + c_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})t}$$

× b) $\delta^2 - \omega^2 < 0$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{(-\delta + i\sqrt{\omega^2 - \delta^2})t} + c_2 e^{(-\delta - i\sqrt{\omega^2 - \delta^2})t} =$$

$$x(t) = e^{-\delta t} (c_1 e^{i\omega_b t} + c_2 e^{-i\omega_b t}) = x_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_b t + \varphi) \qquad \omega_b = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

Nucené kmitání

- Vyřešte následující diferenciální rovnici 2. řádu

- × příp. soustavu diferenciálních rovnic pomocí symbolické a numerické matematiky

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\delta \frac{dx}{dt} - \omega^2 x + f_0 \sin(\Omega t)$$

- × kde $\omega = 1$, $2\delta = 0.05$, $f_0 = 2$, $\Omega = 0.63$

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_0 \sin(\Omega t)$$

- Uvažujte počáteční podmínky

- × $x = 3$

- × $v = 0$

- Postupně zkuste měnit parametry ω , β , F_0 a Ω a porovnejte jejich vliv na řešení

