

DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

Pojem funkce

- ❑ Reálná funkce
- ❑ V oboru M , kde $M \subset \mathbb{R}$, je definována reálná funkce, jestliže je dán předpis, podle kterého každému $x \in M$ je přiřazeno právě jedno číslo y
- ❑ Oboru M potom říkáme definiční obor funkce.
 - × x je argument funkce (nezávislá proměnná)
 - × y je funkční hodnota (závislá proměnná)
 - × definičním oborem funkce je většinou interval $\langle a, b \rangle$
 - × funkce je většinou dána předpisem (analyticky) nebo grafem

Druhy funkcí

- Elementární funkce

$$y = f(x) \rightarrow y = kx + q$$

- Algebraické funkce

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}$$

- Transcendentní funkce

- × goniometrické, hyperbolické, mocninné, exponenciální, logaritmické

- × cyklometrické funkce

$$y = \arcsin(x)$$

- × integrální rovnice

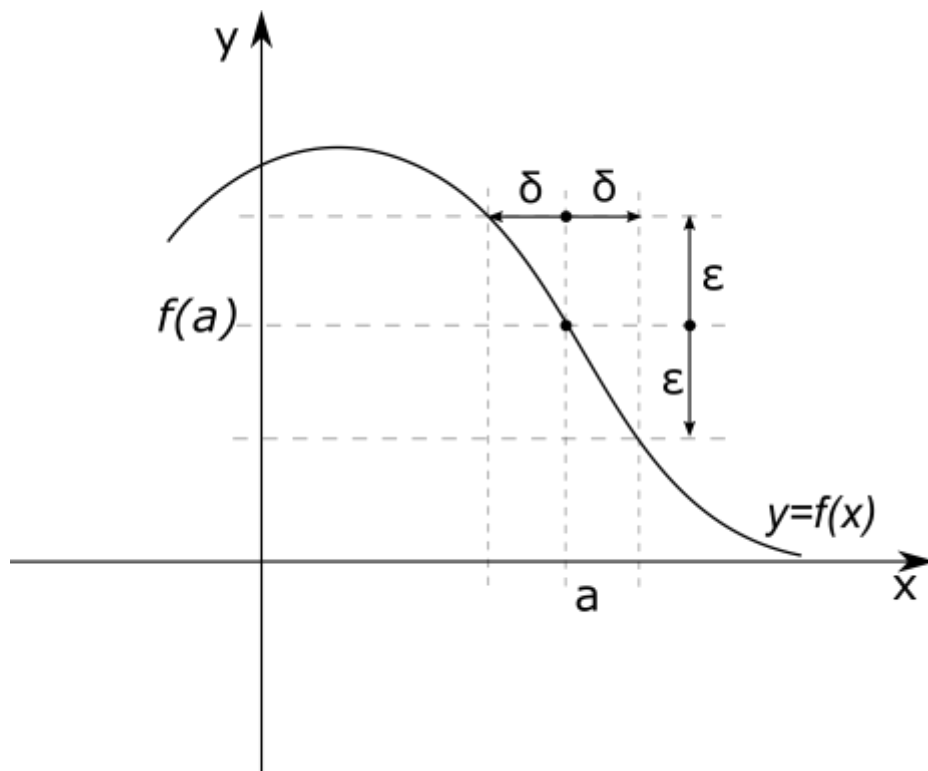
$$g(x) = \int_a^b f(x) dx$$

Spojitosť funkce

- Cauchyho definice
- $f(x)$ je spojitá v bodě a , pokud k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna x z δ -okolí bodu a (tj. $|x - a| < \delta$) platí

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

tj. $f(x)$ z ε -okolí $f(a)$



ať je ε jakkoliv malé, vždy
můžeme zvolit δ tak malé,
aby to bylo ještě blíže $f(a)$

Spojitosť funkce

- Heineho věta
- Funkce f definovaná na okolí bodu a je v bodě a spojitá, právě když pro každou posloupnost čísel $\{x_n\}$ z uvedeného okolí bodu a , pro kterou

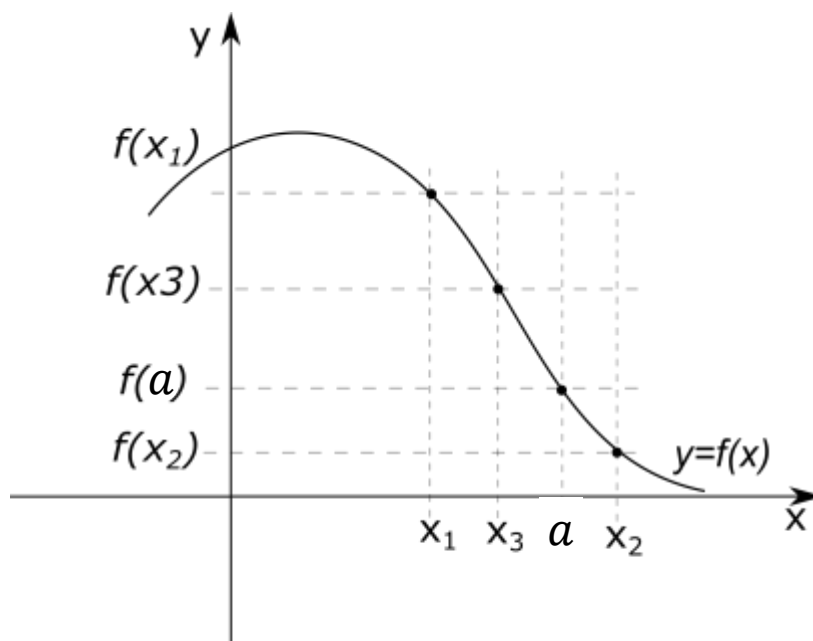
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$\text{tj. } x_n \rightarrow a$$

- (a $x_n \neq a$) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

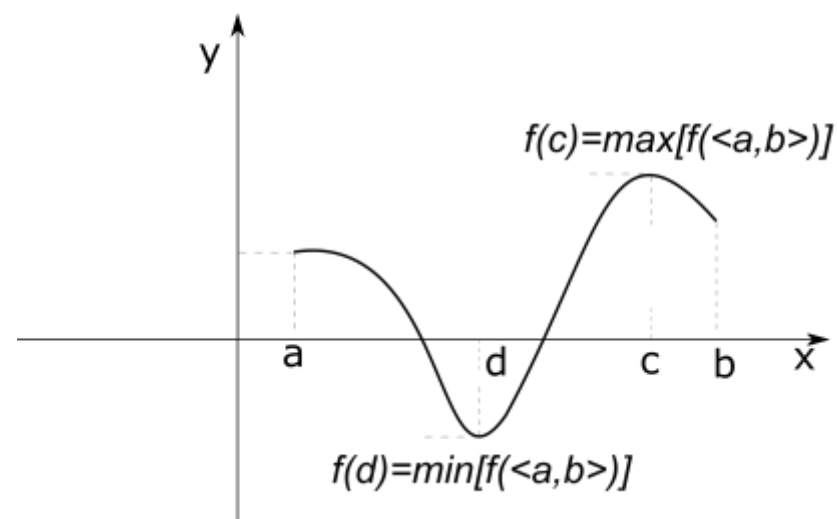
$$\text{tj. } f(x_n) \rightarrow f(a)$$



Spojitosť funkce

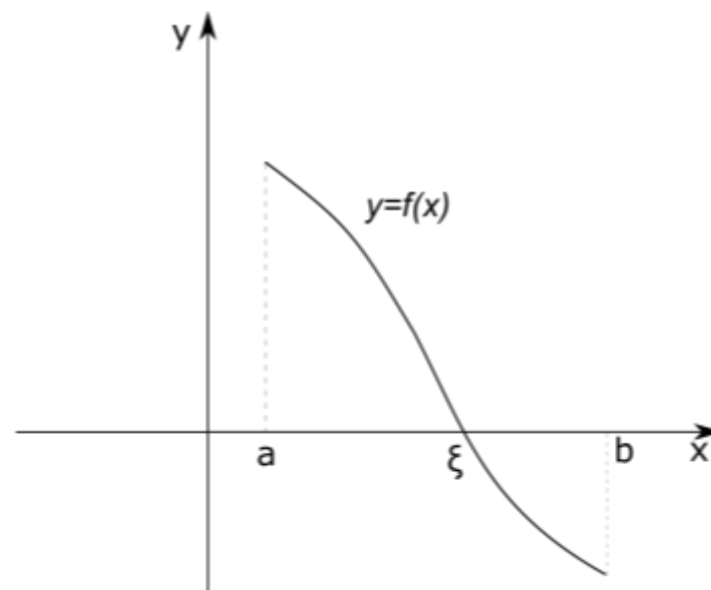
□ Weierstrassova věta:

- Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, potom existuje na intervalu
- minimum funkce $f = \min(f(\langle a, b \rangle))$ a
- maximum funkce $f = \max(f(\langle a, b \rangle))$



□ Bolzanova věta:

- Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, a $f(a) > 0, f(b) < 0$ nebo obráceně $f(a) < 0, f(b) > 0$, potom existuje
- aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$, pro který platí $f(\xi) = 0$



Limita funkce v bodě

Cauchyho definice

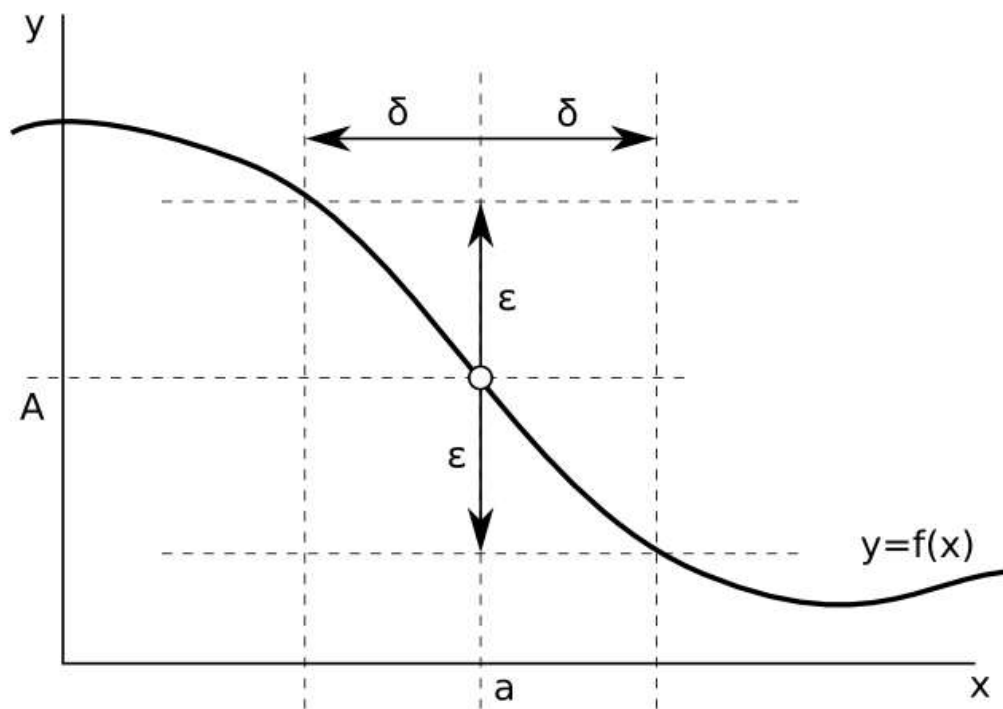
- Číslo $A \in \mathbb{R}$ je limitou funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in D(f)$ taková, že $|x - a| < \delta$ (x leží v prstencovém okolí bodu a) platí

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Spojitosť funkce

$f(x)$ je spojitá v bodě a , pokud k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna x z δ -okolí bodu a (tj. $|x - a| < \delta$) platí

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$



Limita funkce v bodě

□ Heineho věta o limitě

- Bod $c \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f

× tj. v jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů z $D(f)$

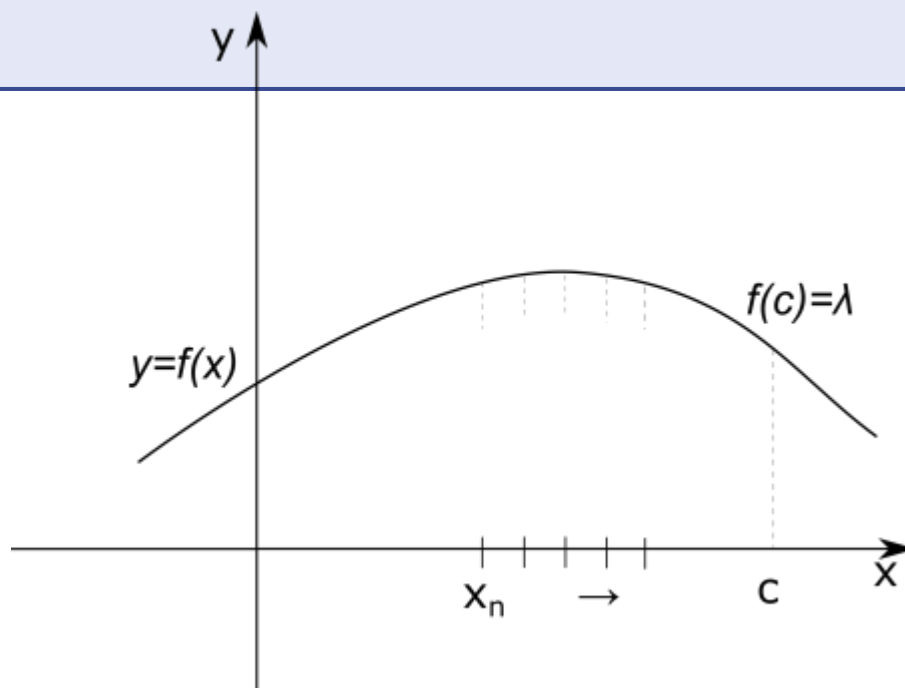
- Potom číslo $A \in \mathbb{R}$ bude limitou funkce f v bodě c

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$$

- pokud pro každou posloupnost x_n (a $x_n \neq c$), která konverguje k c , platí:

$$f(x_n) \rightarrow A$$

$$A = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{vlastní limita} \\ \pm\infty & \text{nevlastní limita} \end{cases}$$



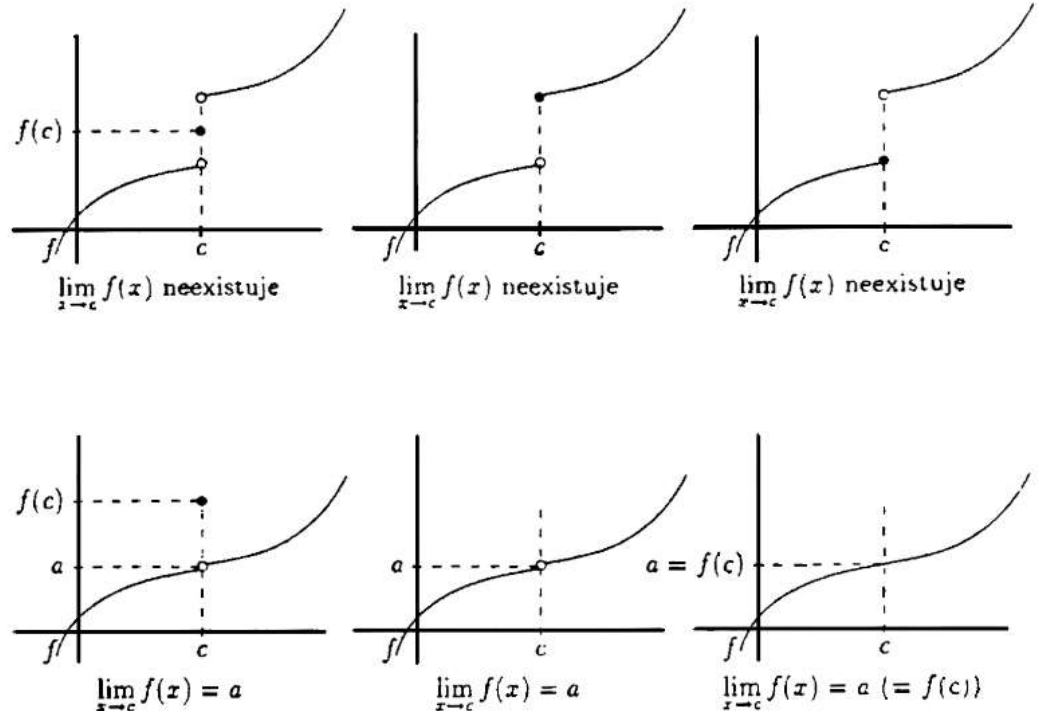
Limita funkce v bodě

- ❑ Funkce má v hromadném bodě svého definičního oboru c nejvýše jednu limitu

- ❑ Funkce f je v bodě c spojitá právě tehdy, když

$$f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

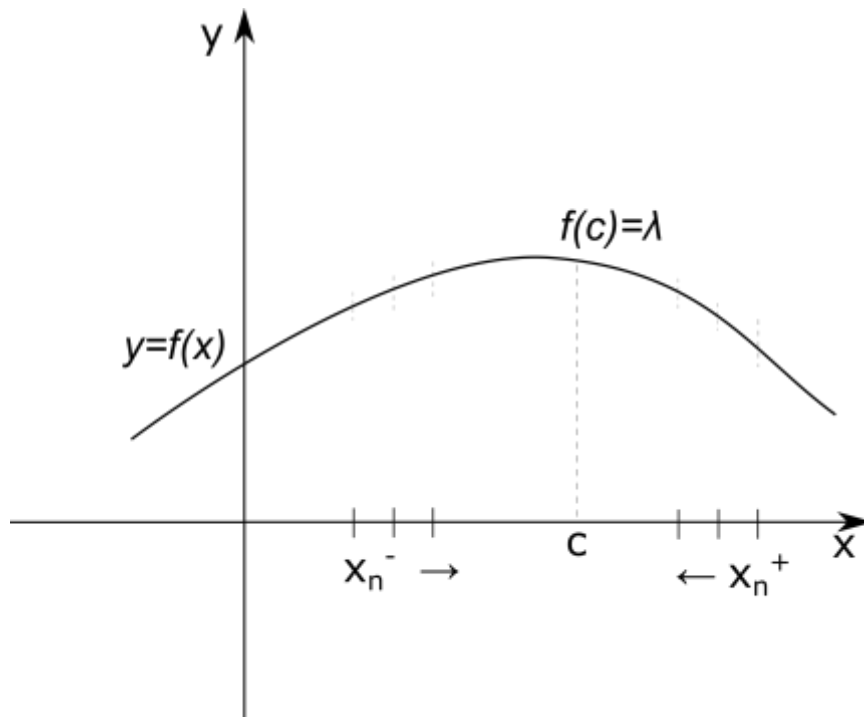
$$\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right|$$



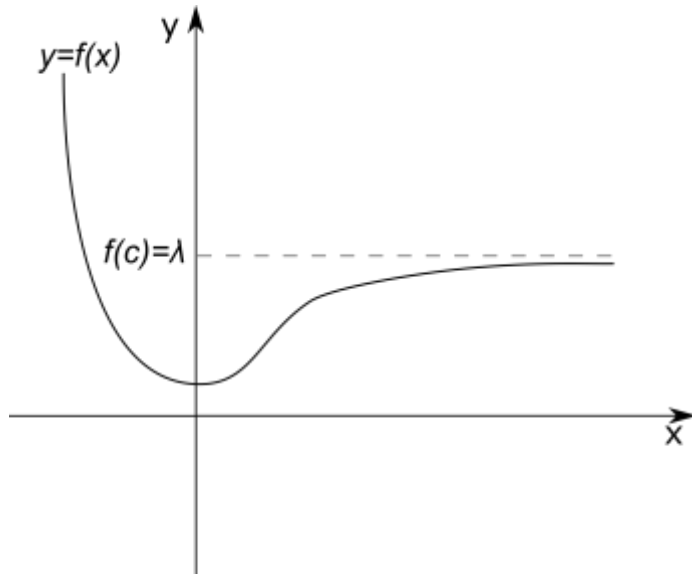
Limita funkce v bodě

- Bod $c \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f
- Funkce má v bodě c limitu zprava i zleva rovnou číslu λ

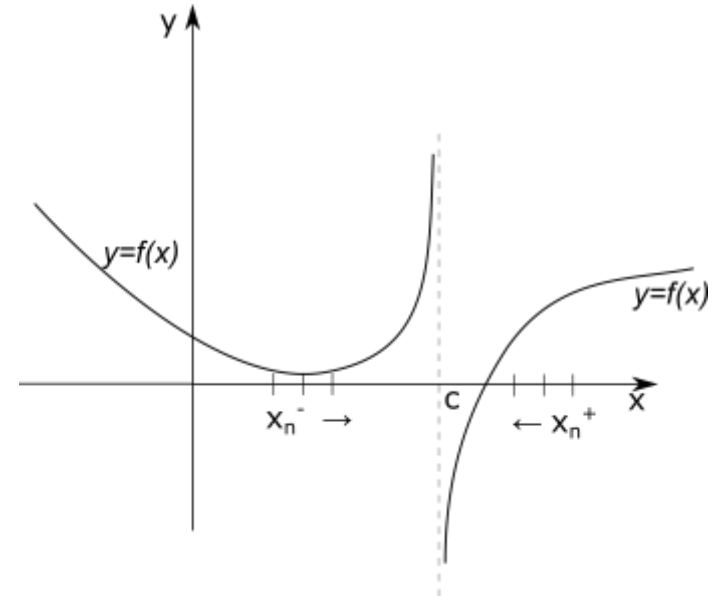
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lambda, \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lambda$$



Limita funkce v bodě



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lambda \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

Derivace – historie

- ❑ Euklidés (300 př.n.l., Řecko)
- ❑ Archimédes (287 - 212 př.n.l., Řecko)
 - × pravidla pro počítání s nekonečně malými proměnnými pro zjištění objemu a plochy (Ostomachion)
- ❑ Aryabhata (500 n.l., Indie)
 - × nekonečně malé veličiny pro studium pohybu Měsíce
- ❑ Bhaskar II (1114 - 1185 n.l., Indie)
 - × dnešní Rolleova věta
- ❑ Isaac Newton (1642-1727, Anglie)
 - × spolu s Leibnizem moderní pojetí diferenciálního počtu
 - × vztah mezi derivací a integrací
 - × fyzikální interpretace
- ❑ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716, Německo)
 - × moderní pojetí diferenciálního počtu
 - × současné značení (dy/dx)
- ❑ Cauchy, Riemann, Weierstrass
 - × teoretické základy diferenciálního počtu

Derivace v příkladech

- ❑ Vědecké a technické aplikace

- × Klasická mechanika tělesa:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

- × Ohřev vody ve slunečním kolektoru:

$$\frac{dT_i}{dt} = a - (b + c)T_i + bT_{i-1}$$

- ❑ Bezpečnostní aplikace

- ❑ Šíření požáru:

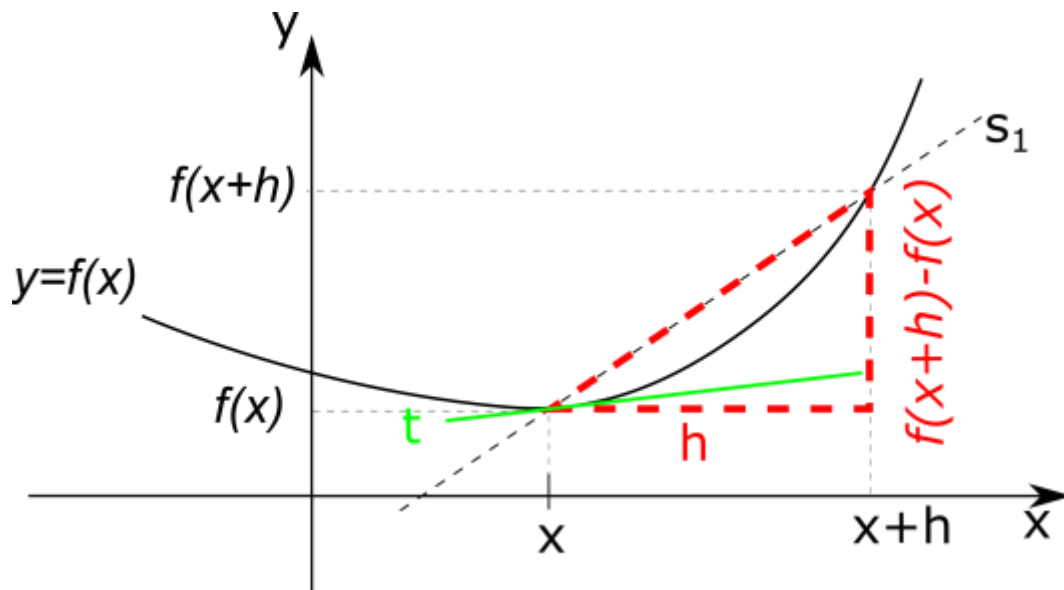
$$\frac{dS}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

- ❑ Sociální aplikace

- ❑ Ekonomické aplikace

- ❑ Ostatní aplikace

Geometrický význam derivace



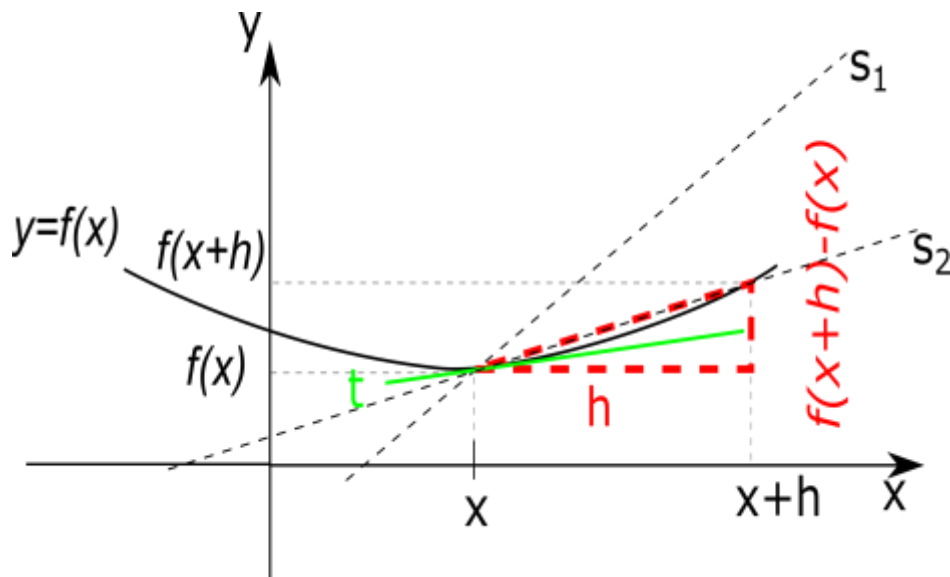
- Chceme zjistit **změnu** funkce $f(x)$ v bodě x , pokud se posuneme o krok h na ose x .
- Změnu vyjádříme pomocí směrnice přímky

× $s_1: y = kx \rightarrow k = \frac{y}{x}$

$$k_{s1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Cílem je získat směrnici odpovídající tečně t v bodě $[x, f(x)]$

Geometrický význam derivace



- Bod $x + h$ přiblížíme k bodu x a získám směrnici sečny s_2

$$k_{s2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Limitním přibližováním bodu $x + h$ k bodu x získám směrnici tečny t

$$k_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Definice derivace

- ❑ Derivace funkce v bodě
- ❑ Funkce f je definována na okolí bodu c . Pokud má funkce vlastní limitu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

- ❑ pak je funkce v bodě c diferencovatelná, hodnotu limity označujeme jako f' a nazýváme ji derivací funkce f v bodě c

- ❑ Je-li funkce f na intervalu J diferencovatelná, pak je i na tomto intervalu spojitá

- ❑ Funkce f je třídy C^k na intervalu J , pokud existují na intervalu J všechny derivace funkce až do řádu k

Metody výpočtů derivací funkcí

- Necht' funkce f a g jsou diferencovatelné v nějakém bodě x_0 společného definičního oboru D . Potom v tomto bodě jsou diferencovatelné i funkce

$$cf, \quad f \pm g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \quad (g \neq 0)$$

- a platí

$$(cf)' = cf' \quad c \text{ konst.}$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad g \neq 0$$

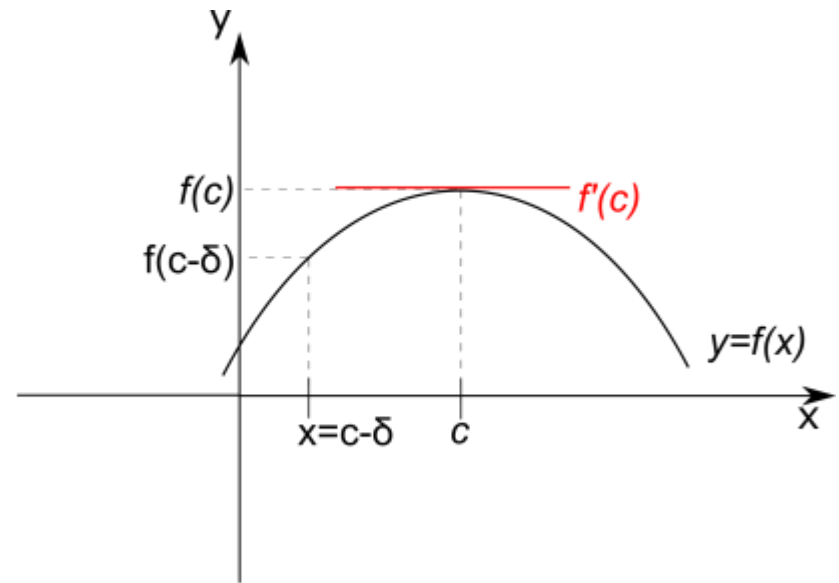
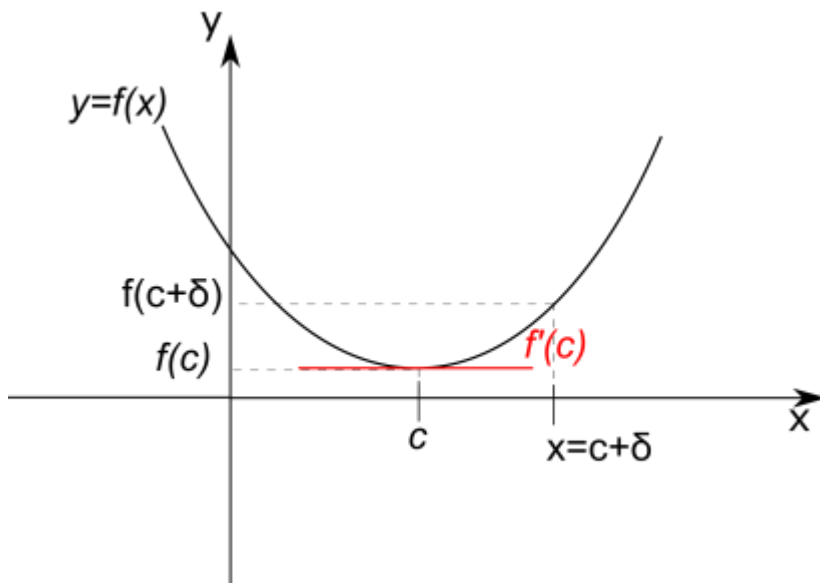
- Pro derivaci složené funkce platí

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Diferenciální počet

□ Lokální extrém

- × funkce f definovaná v okolí bodu c má v bodě *lokální maximum*, resp. *minimum*, pokud platí pro každý bod x z okolí bodu c , že $f(x) \leq f(c)$, resp. $f(x) \geq f(c)$



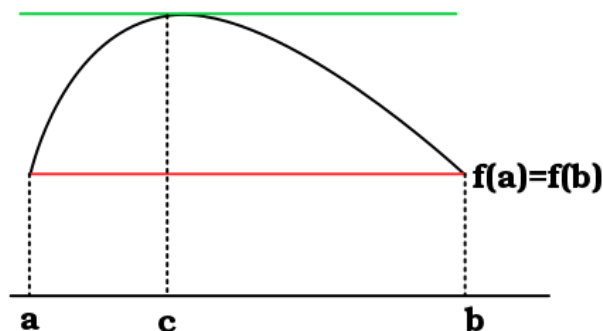
- Je-li funkce f v bodě c diferencovatelná a má v bodě lokální maximum, resp. minimum, potom platí, že $f'(c) = 0$

Nástroje diferenciálního počtu

□ Rolleova věta (Bhaskar II Indie)

- × Necht' f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a necht' pro každý bod x otevřeného intervalu (a, b) existuje derivace $f'(x)$ a necht' $f(a) = f(b)$. Pak existuje bod c v otevřeném intervalu (a, b) , pro nějž platí

$$f'(c) = 0$$

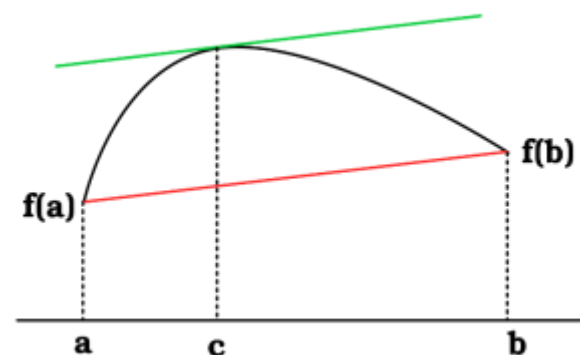
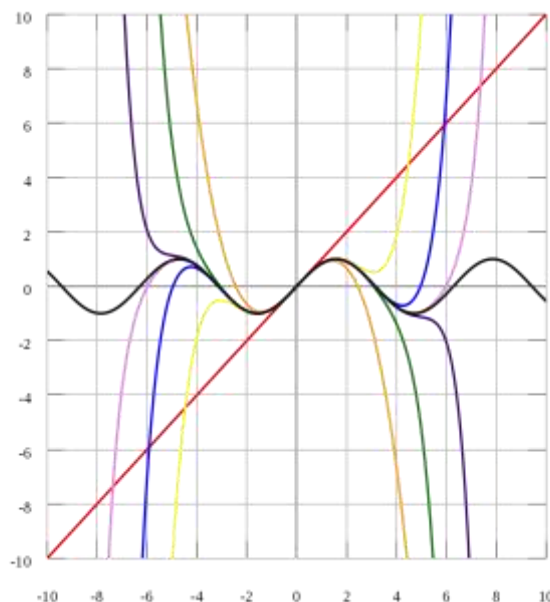


□ Lagrangeova věta o střední hodnotě

□ Taylorova věta

□ L'Hospitalovo pravidlo

- × limita podílu dvou funkcí je rovna limitě podílu derivací těchto funkcí
 - za určitých podmínek

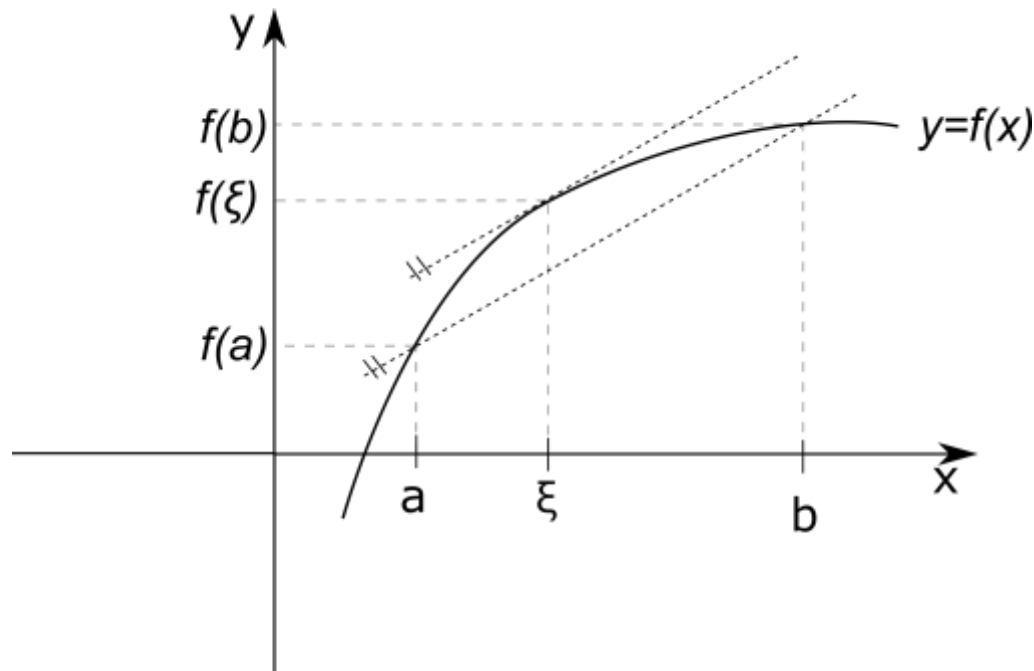


Lagrangeova věta o střední hodnotě

- Funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, diferencovatelná na otevřeném intervalu (a, b) . Potom existuje alespoň jeden bod $\xi \in (a, b)$, pro který platí:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- ✗ existuje aspoň jeden bod v intervalu, kde je tečna rovna sklonu úsečky mezi koncovými body



Taylorův polynom

- Aproximace složitých funkcí pomocí jednodušších (polynom)
- Funkční hodnota polynomu je výsledkem elementárních operací

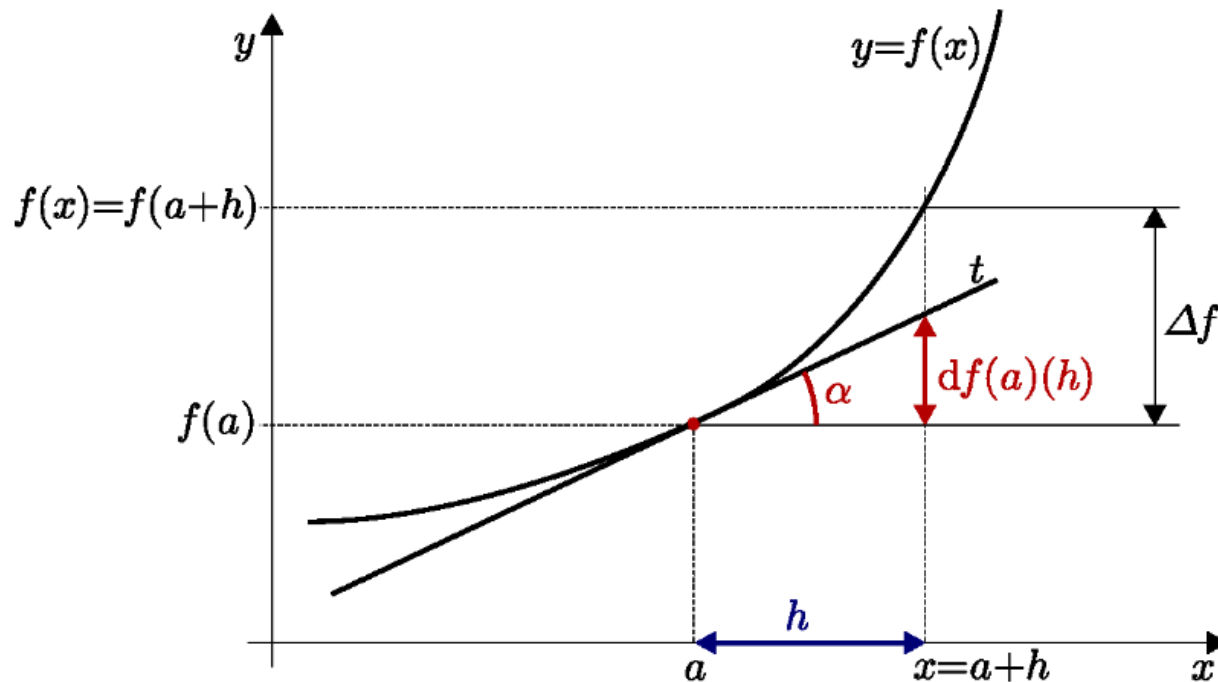
$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

- Derivace polynomu je opět polynom
- Odhad chyby aproximace

- Motivace
- Hledáme funkci g , která nejlépe aproximuje funkci f , tak aby platilo:
- $f(c) = g(c), \quad f'(c) = g'(c), \quad \dots, \quad f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$

Taylorův polynom

- Přírůstek funkce (aproximace funkce tečnou)



$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h$$

po zderivování:

$$f'(x) = (f(a))' + f'(a)(x - a)'$$

$$f'(x) = 0 + f'(a)$$

Taylorův polynom

□ Aproximace přímkou (tečnou)

- × tečna a funkce v bodě a stejná hodnota i derivace
- × chyba rychle roste
- × funkce se kroutí, přímka ne

- požadujeme $f(c) = g(c), \quad f'(c) = g'(c)$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

□ Aproximace parabolou

- × + požadavek stejného kroucení (2. derivace)

$$f''(c) = g''(c)$$

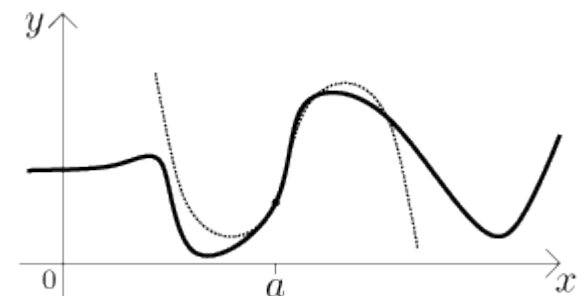
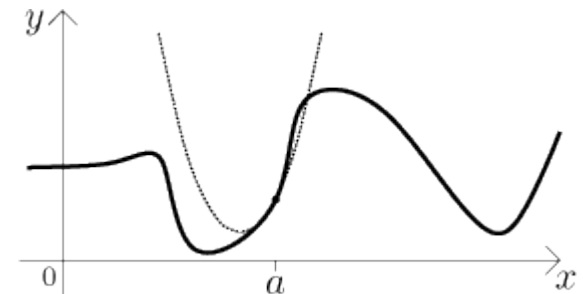
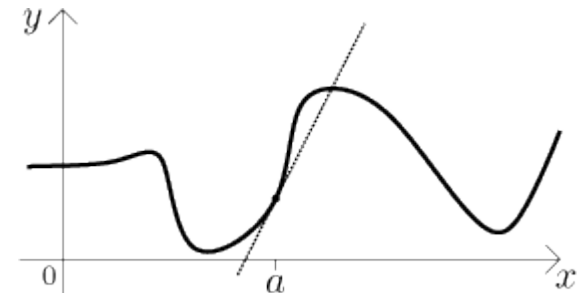
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

□ Aproximace kubikou

- × + 3. derivace

$$f^{(3)}(c) = g^{(3)}(c)$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3$$



Taylorův polynom

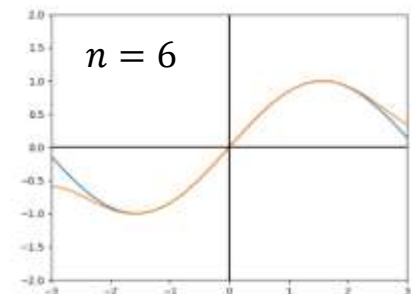
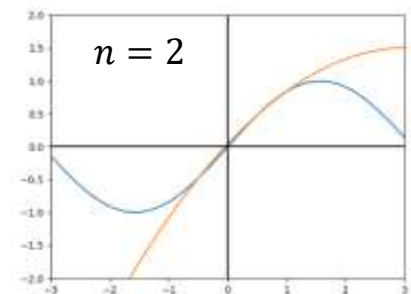
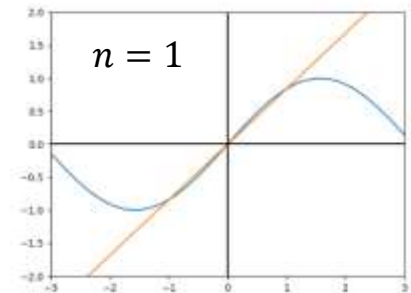
- Funkci $f(x)$ chceme nahradit polynomem $g(x)$

$$g(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_n(x - c)^n$$

- a podmínky

$$f(c) = g(c), \quad f'(c) = g'(c), \quad \dots, \quad f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$$

stupeň n	polynom	podmínka (+ všechny předchozí)	koefficienty (+ všechny předchozí)
0	$g(x) = a_0$	$g(c) = f(c)$	$a_0 = f(c)$
1	$g(x) = a_0 + a_1(x - c)$	$g'(c) = f'(c)$	$a_1 = f'(c)$
2	$g(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2$	$g''(c) = f''(c)$	$a_2 = \frac{f''(c)}{2}$
...
n	$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$	$g^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$	$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$



Taylorova věta

- Pokud má funkce $f(x)$ v okolí bodu c konečné derivace do $(n + 1)$. řádu, můžeme ji vyjádřit (rozvinout) jako mocninnou řadu (Taylorovu)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + O_{n+1}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k + O_{n+1}(x) \end{aligned}$$

- Maclaurinova řada

✗ pokud se jedná o rozvoj v okolí bodu 0

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + O_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + O_{n+1}(x)$$

- Taylorův polynom

✗ přibližné vyjádření hodnot funkce

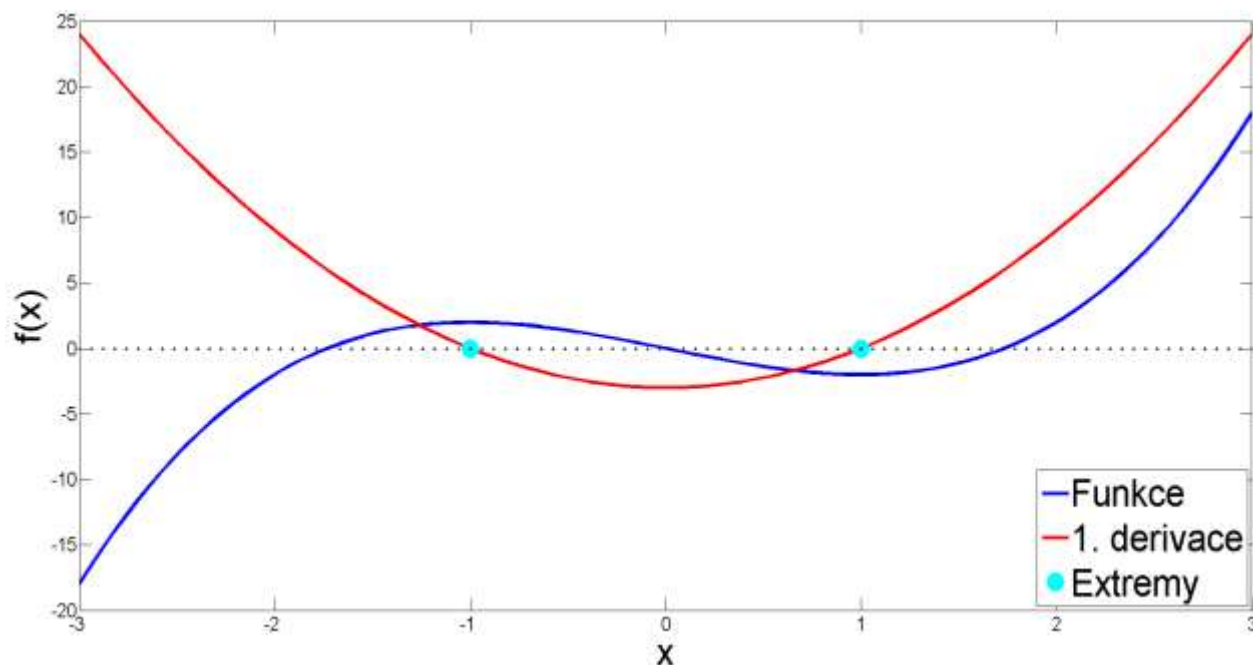
- můžeme zanedbat členy s vyššími derivacemi

Průběh funkce

- ❑ Definiční obor
- ❑ Intervaly monotónnosti
- ❑ Má-li f derivaci $f'(x) \neq 0$ v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) , pak je funkce f na tomto intervalu monotónní
 - × pro $f'(c) > 0$ rostoucí
 - × pro $f'(c) < 0$ klesající
 - × (c libovolný bod intervalu)
- ❑ Lokální extrémy
- ❑ Jestliže funkce $f'(c) = 0$ a $f''(c) \neq 0$, pak má funkce $f(c)$ v bodě c lokální extrém
 - × pro $f''(c) > 0$ ostré lokální minimum
 - × pro $f''(c) < 0$ maximum
- ❑ Intervaly ryzí konvexity (konkavity), body inflexe
- ❑ Funkce f je spojitá na intervalu J a pro každý bod z tohoto intervalu platí, že $f''(c) > 0$, resp. $f''(c) < 0$
- ❑ Potom je funkce na intervalu ryze konvexní, resp. konkávní
- ❑ Jestliže $f''(c) = 0$ a $f''' \neq 0$, potom má funkce v bodě c inflexi

Průběh funkce

- Funkce $f(x) = x^3 - 3x$
- Definiční obor $Df = \mathbb{R}$
- První derivace $f'(x) = 3x^2 - 3$
 - × řešíme $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1, \quad x \in \{-1, 1\}$
- Intervaly monotónnosti $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0$, resp. < 0
 - × rostoucí na $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, klesající na $(-1, 1)$
- Lokální extrémy
 - × kandidáti $x \in \{-1, 1\}$
 - × přesvědčíme se pomocí 2. derivace



Průběh funkce

- Spočteme 2. derivaci

$$f''(x) = 6x$$

× řešíme

$$f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

- Intervaly ryzí konvexity (konkavity)

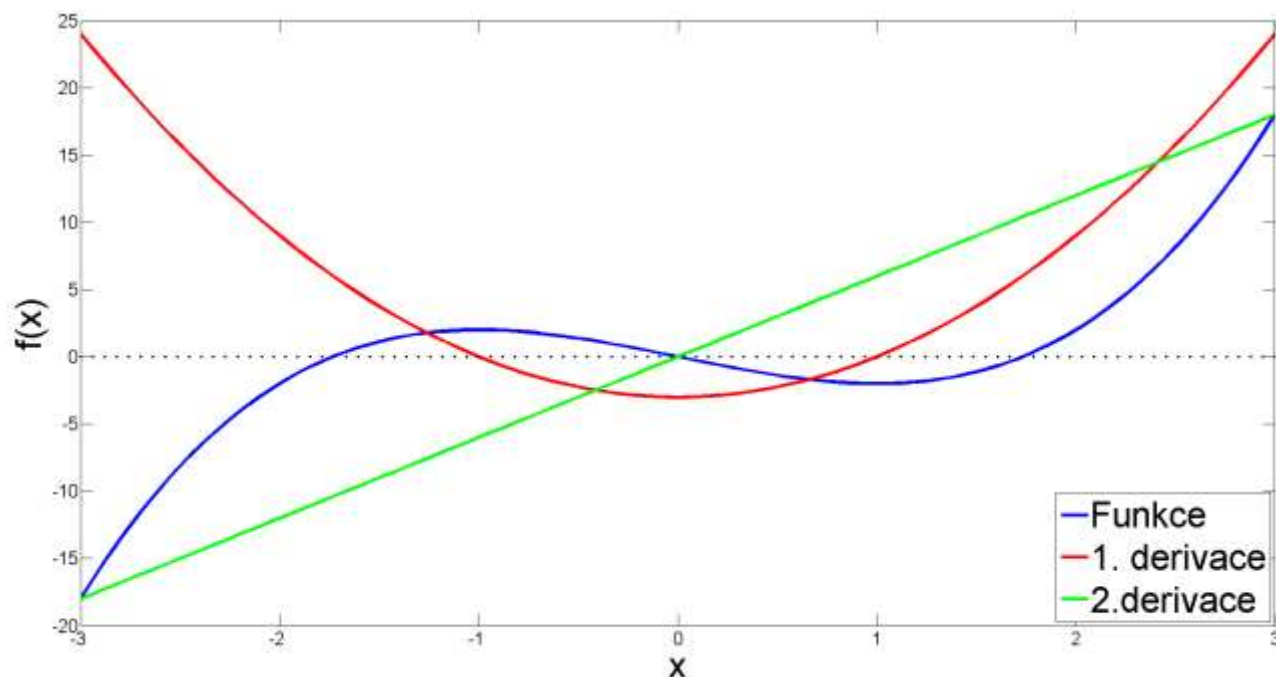
$$f''(x) = 6x > 0, \text{ resp. } < 0$$

× konvexní na $\langle 0, \infty \rangle$, konkávní na $(-\infty, 0)$

- Hodnoty druhé derivace $f''(x)$ ve stacionárních bodech

$$f''(x) = 6x \rightarrow f''(-1) = -6 < 0, \quad f''(1) = 6 > 0$$

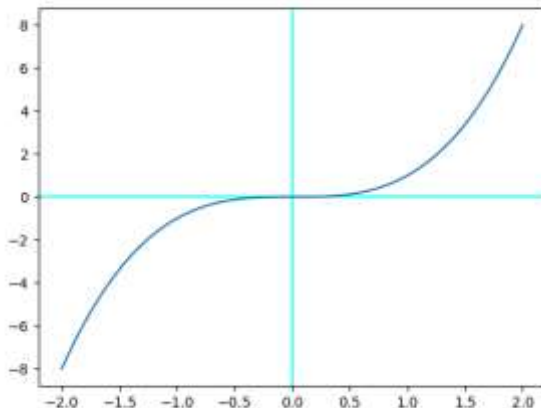
× $f(x)$ má v bodech $x \in \{-1, 1\}$ ostré lokální maximum, resp. minimum



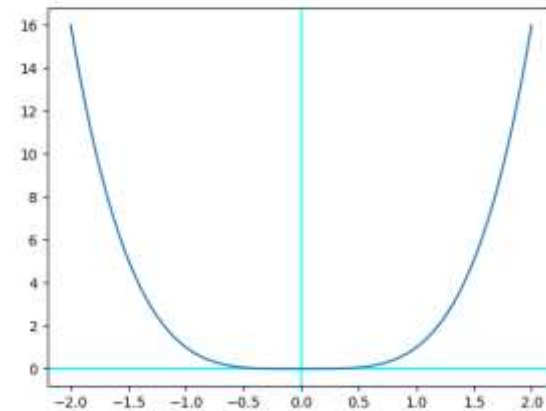
Průběh funkce

- Pokud $f'(c) = 0$ a $f''(c) = 0$, může a nemusí mít funkce v bodě c lokální extrém. Počítáme další derivace $f^{(n)}(c)$, dokud $f^{(n)}(c) > 0$, resp. $f^{(n)}(c) < 0$
- Pokud první nenulová derivace bude
 - × lichá: jedná se o inflexní bod
 - × sudá: ostrý lokální extrém

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 & f(0) &= 0 \\f'(x) &= 3x^2 & f'(0) &= 0 \\f''(x) &= 6x & f''(0) &= 0 \\f^{(3)}(x) &= 6 & f^{(3)}(0) &= 6\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}f(x) &= x^4 & f(0) &= 0 \\f'(x) &= 4x^3 & f'(0) &= 0 \\f''(x) &= 12x^2 & f''(0) &= 0 \\f^{(3)}(x) &= 24x & f^{(3)}(0) &= 0 \\f^{(4)}(x) &= 24 & f^{(4)}(0) &= 24\end{aligned}$$

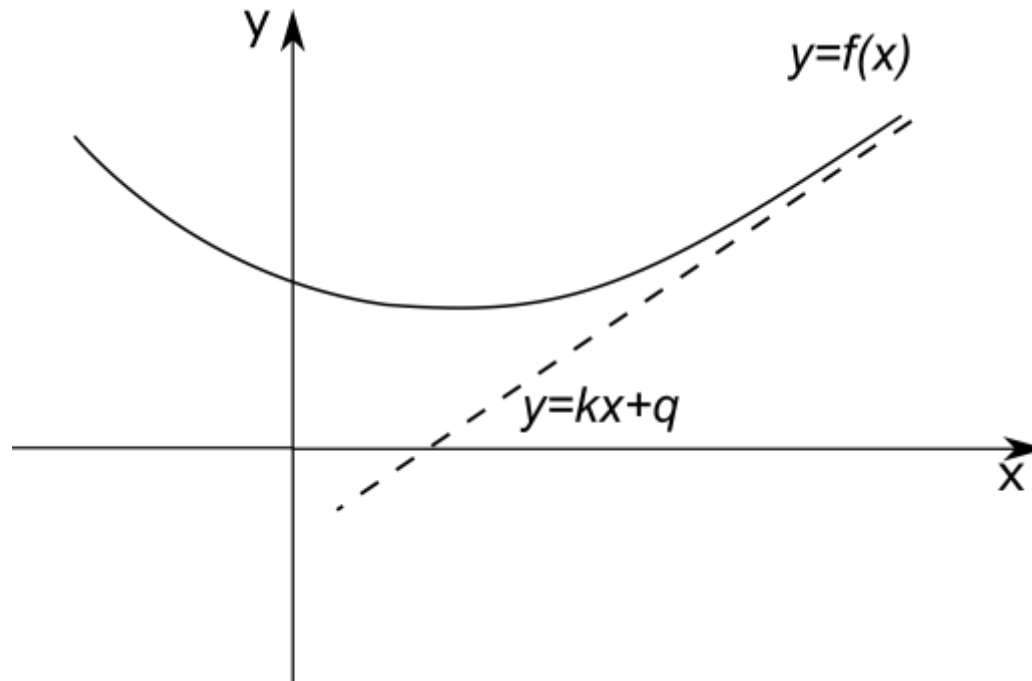


Asymptoty grafu funkce

- Přímka $y = kx + q$ se nazývá **šikmá asymptota** grafu funkce, pokud platí:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - q] = 0 \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx - q] = 0$$

- a **svislá asymptota**, pokud má funkce $f(x)$ v bodě x alespoň jednu jednostrannou nevlastní limitu



Příklady k procvičení

- ❑ Úprava výrazů pomocí symbolické matematiky
- ❑ Řešení rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ pomocí symbolické matematiky
- ❑ Řešení soustavy rovnic pomocí symbolické matematiky. Porovnání s metodami numerické matematiky a vestavěnými funkcemi
- ❑ Výpočet limit pomocí symbolické matematiky
- ❑ Výpočet derivace pomocí symbolické a numerické matematiky

Řešení rovnice - cvičení

- Pomocí symbolických manipulací vyřešte kvadratickou rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Uvažujte takové sady koeficientů (a, b, c) , aby byly zohledněny všechny možnosti řešení rovnice

Řešení soustavy rovnic – cvičení

- Nageenerujte náhodně soustavu N rovnic a vyřešte ji pomocí:
 - × Iterační metody
 - × Cramerova pravidla
 - × Symbolické matematiky
- Jednotlivá řešení porovnejte z hlediska rychlosti a stability

$$x_i = \frac{d_{Ai}}{d_A}$$

$$x^{i+1} = D^{-1}[b - (L + U)x^i]$$

Derivace funkce jedné proměnné

- Analytický výpočet derivace

$$f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

- Přibližný výpočet derivace - numerická derivace

$$f' = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} + O(h^2)$$

Numerická derivace

- ❑ Odhad derivace funkce provádíme, když
 - × nemáme k dispozici analytický tvar funkce
 - × funkce je zadána tabulkou nebo polem hodnot
 - × funkce je zadána body v grafu
- ❑ Vzorce pro numerický odhad derivace lze získat pomocí
 - × Taylorova rozvoje
 - × derivací interpolačního polynomu
- ❑ Každý vzorec pro numerickou derivaci obsahuje chybový člen vyjádřený ve tvaru mocniny kroku h
 - × Čím bude mocnina vyšší, tím bude odhad přesnější a naopak
 - (chyba metody)
 - × Čím bude h vyšší, tím bude odhad méně přesný
 - (chyba zaokrouhlovací)
 - × Zahrnutím více bodů z okolí x lze odhad zpřesnit

Dvoubodová numerická derivace

- Z Maclaurinova tvaru Taylorova rozvoje plyne, že

$$f(h) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} h^i = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2} h^2 + \dots$$

- Mějme body x_0 a $x_1 = x_0 + h$. Poté bude rozvoj pro $f(x_0 + h)$ a $f(x_0 - h)$ vypadat následovně.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h$$

- a dvoubodová derivace funkce f v bodě x_0 , bude mít tvar

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Dvoubodová numerická derivace

- Pro zpřesnění odhadu derivace v bodě x_0 lze využít hodnoty funkcí v obou krajních bodech, a to odečtením rovnic $f(x_0 + h)$ a $f(x_0 - h)$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h$$

- Po úpravě dostaneme

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Vícebodová numerická derivace

- ❑ Zpřesnění odhadu derivace můžeme také dosáhnout zahrnutím více bodů do odhadu derivace funkce f v bodě x
- ❑ Pro odvození vzorce pro numerickou derivaci využijeme v tomto případě interpolační polynom $P_n(x)$ řádu n

- ❑ Mějme funkci $f(x)$ definovanou ve třech ekvidistantně rozdělených uzlových bodech $\{x_0, x_1, x_2\}$ s krokem h .
- ❑ Poté platí, že hodnotu derivace funkce lze nahradit hodnotou derivace interpolačního polynomu řádu n $P_n(x)$ tak, že

$$f'(x) \doteq P'_n(x)$$

- ❑ V uzlových bodech se hodnoty derivace funkce a interpolačního polynomu můžou lišit. Tato situace bude výraznější tím více, čím vyšší řád polynomu budeme pro interpolaci používat

Vícebodová numerická derivace

- Nastíníme odvození odhadu numerické derivace funkce zadané třemi body $x_0 = x_1 - h$, x_1 a $x_2 = x_1 + h$ s využitím interpolačního polynomu třetího řádu

- Interpolačním polynomem rozumíme funkci

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

- Pro polynom třetího řádu dostaneme soustavu rovnic ve tvaru:

$$f(x_1 - h) = a_0 + a_1(x_1 - h) + a_2(x_1 - h)^2$$

$$f(x_1) = a_0 + a_1(x_1) + a_2(x_1)^2$$

$$f(x_1 + h) = a_0 + a_1(x_1 + h) + a_2(x_1 + h)^2$$

- odvodíme vyjádření pro koeficienty a_1 a a_2 a výsledné vyjádření polynomu zderivujeme

Vícebodová numerická derivace

$$a_2 = \frac{f(x_1 + h) - 2f(x_1) + f(x_1 - h))}{2h^2}$$

$$a_1 = a_2 h - 2a_2 x_1 + \frac{f(x_1) - f(x_1 - h))}{h}$$

- Nyní si můžeme vybrat, v jakém bodě chceme derivaci odhadnout, dosadíme koeficienty a_1 , a_2 a rovnice zderivujeme
- Výsledkem jsou následující rovnice

$$f'(x_1 - h) = \frac{-3f(x_1 - h) + 4f(x_1) - f(x_1 + h))}{2h}$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1 - h))}{2h}$$

$$f'(x_1 + h) = \frac{f(x_1 - h) - 4f(x_1) + 3f(x_1 + h))}{2h}$$

Numerický odhad derivace – cvičení

- Porovnejte dva numerické odhady derivace funkce $f(x) = \sin(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ s přesným řešením získaným například pomocí symbolické matematiky
- Interval rozdělte na $n = \{4, 8, 12, 16, 20, 30\}$ subintervalů
- Spočítejte celkovou chybu derivace jako

$$\text{globErr} = \sum_{i=1}^n |f' - f'(x_i)|$$

		$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$
$n = 4$	$h = 0.785$	$E1 = 0.845$	$E2 = 0.299$
$n = 8$	$h = 0.393$	$E1 = 0.900$	$E2 = 0.140$
$n = 12$	$h = 0.262$	$E1 = 0.928$	$E2 = 0.091$
...
$n = 30$	$h = 0.105$	$E1 = 0.968$	$E2 = 0.036$
$n = 80$	$h = 0.039$	$E1 = 0.998$	$E2 = 0.013$

Numerický odhad derivace – cvičení

- Pro výše uvedený příklad proveďte také odhad derivace ve třech bodech, například

$$f'(x_1 + h) = \frac{f(x_1 - h) - 4f(x_1) + 3f(x_1 + h)}{2h}$$

- a porovnejte přesnost s dvoubodovým odhadem