DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

Pojem funkce

- Reálná funkce

- V oboru M, kde $M \subset \mathbb{R}$, je definována reálná funkce,
  jestliže je dán předpis, podle kterého
  každému $x \in M$ je přiřazeno právě jedno číslo y

- Oboru M potom říkáme definiční obor funkce.
  - x je argument funkce (nezávislá proměnná)
  - y je funkční hodnota (závislá proměnná)
  - definičním oborem funkce je většinou interval $\langle a, b \rangle$
  - funkce je většinou dána předpisem (analyticky) nebo grafem

Druhy funkcí

- Elementární funkce

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad y = kx + q$$

- Algebraické funkce

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0}$$

- Transcendentní funkce
  - goniometrické, hyperbolické, mocninné, exponenciální, logaritmické
  - cyklometrické funkce

$$y = \arcsin(x)$$

  - integrální rovnice

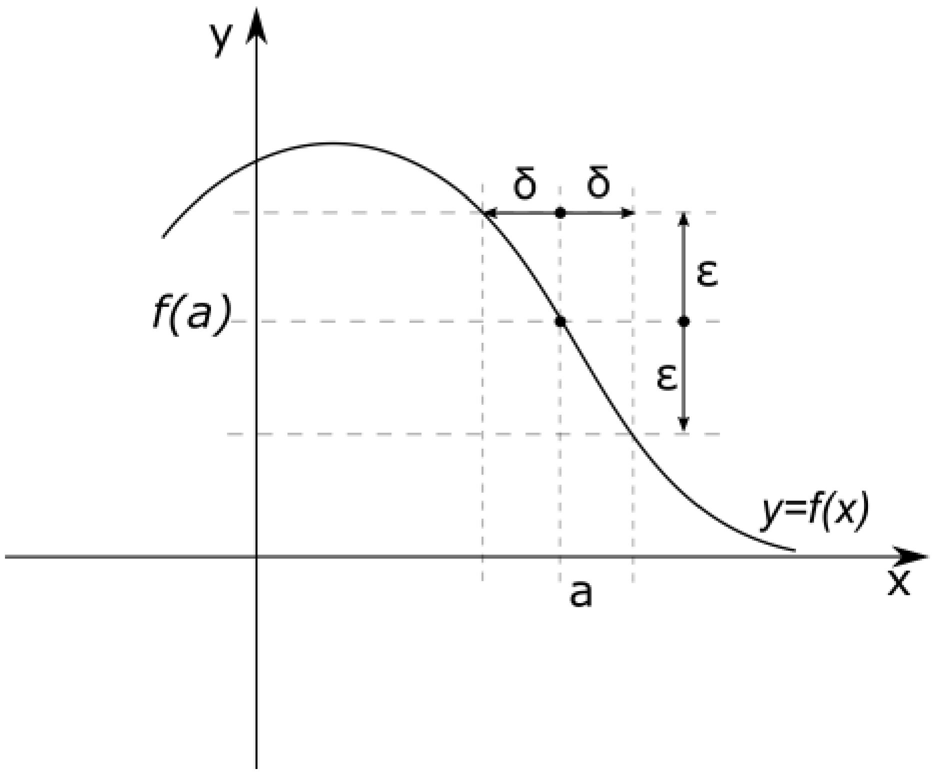
$$g(x) = \int_a b\, f(x)\, dx$$

Spojitost funkce

- Cauchyho definice
- $f(x)$ je spojitá v bodě a, pokud k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna x z δ-okolí bodu a (tj. $|x - a| < \delta$) platí

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

tj. $f(x)$ z ε-okolí $f(a)$



ať je ϵ jakkoliv malé, vždy můžeme zvolit δ tak malé, aby to bylo ještě blíže $f(a)$

Spojitost funkce

- Heineho věta
- Funkce f definovaná na okolí bodu a je v bodě a spojitá, právě když pro každou posloupnost čísel $\{x_n\}$ z uvedeného okolí bodu a, pro kterou

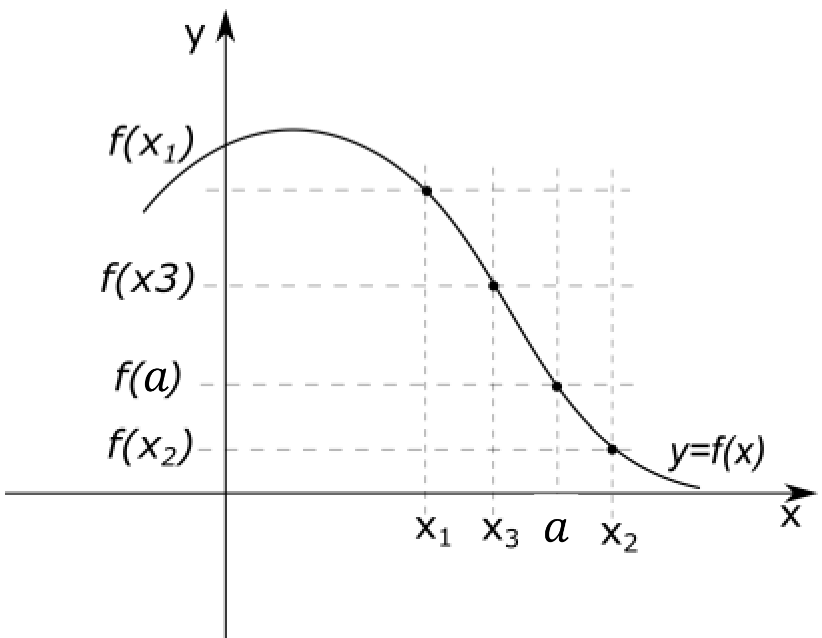
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

tj. $x_n \to a$

- (a $x_n \neq a$) platí

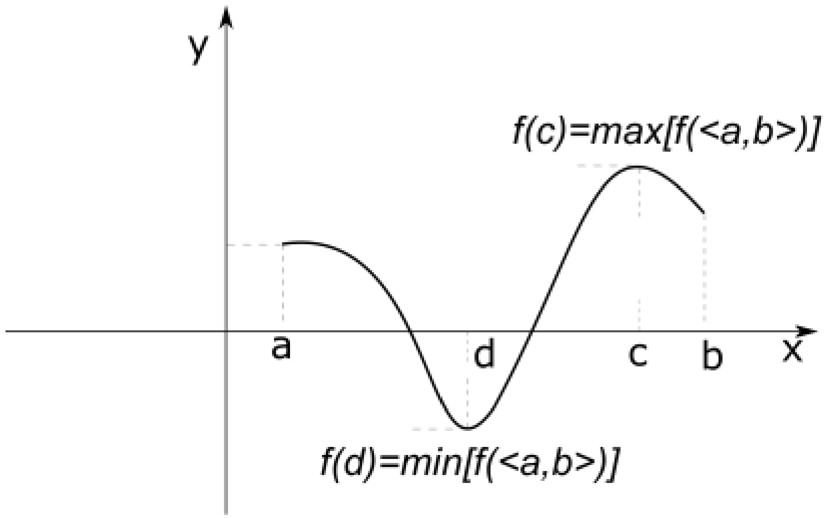
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

tj. $f(x_n) \to f(a)$

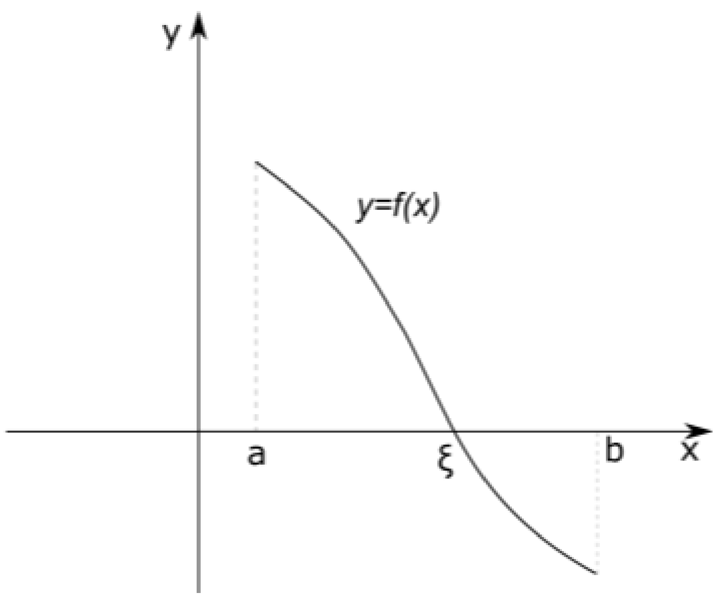


Spojitost funkce

- **Weierstrassova věta:**
- Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, potom existuje na intervalu
- minimum funkce $f = \min\big(f(\langle a, b \rangle)\big)$ a
- maximum funkce $f = \max\big(f(\langle a, b \rangle)\big)$



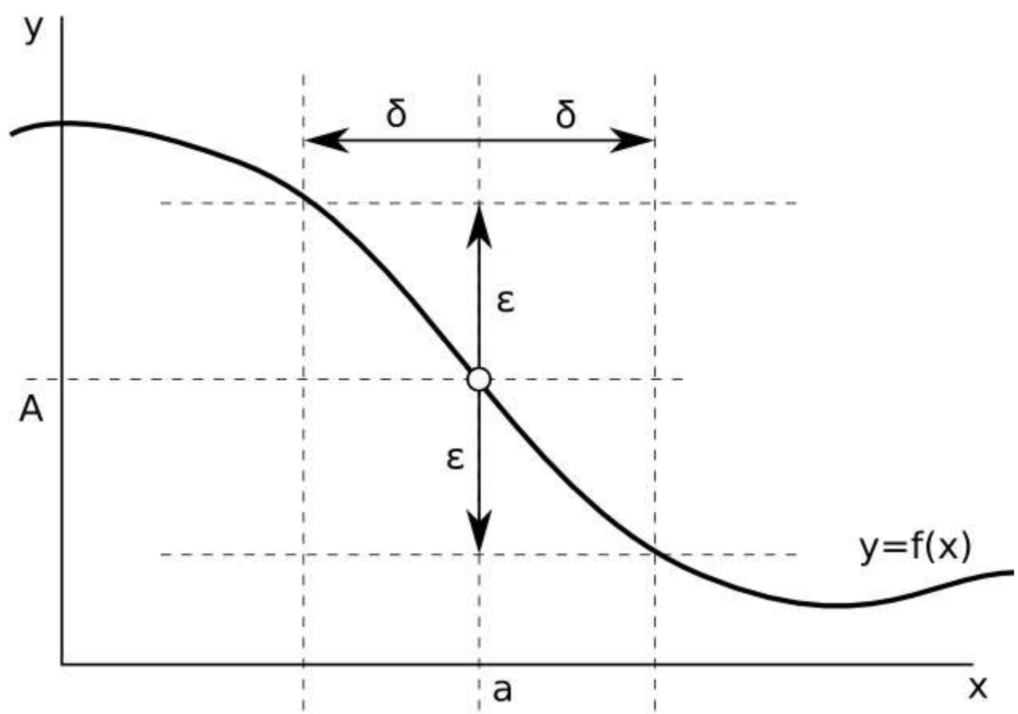
- **Bolzanova věta:**
- Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, a $f(a) > 0, f(b) < 0$ nebo obráceně $f(a) < 0,\ f(b) > 0$, potom existuje
- aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$, pro který platí $f(\xi) = 0$



Limita funkce v bodě

- **Cauchyho definice**
- Číslo $A \in \mathbb{R}$ je limitou funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in R$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in D(f)$ taková, že $|x - a| < \delta$ (x leží v prstencovém okolí bodu a) platí

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$



Limita funkce v bodě

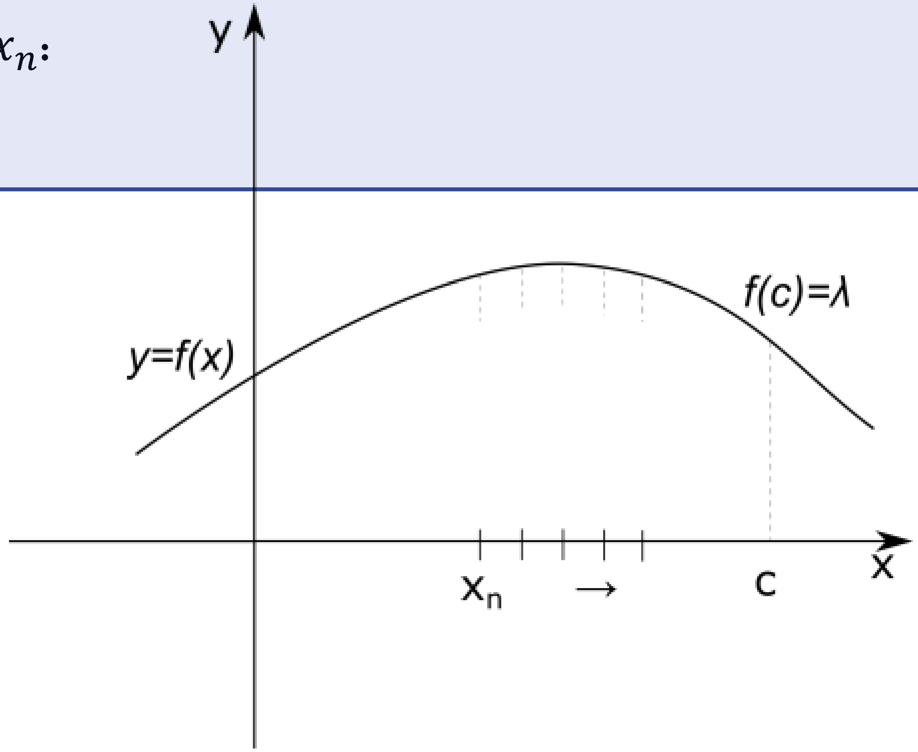
- **Heineho definice**
- Bod $c \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f
  - tj. v jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů z Df
- Potom číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ bude limitou funkce f v bodě c

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lambda$$

- pokud platí pro každou posloupnost x_n:

$$x_n \to c \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to \lambda$$

$$\lambda = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{vlastní limita} \\ \pm\infty & \text{nevlastní limita} \end{cases}$$



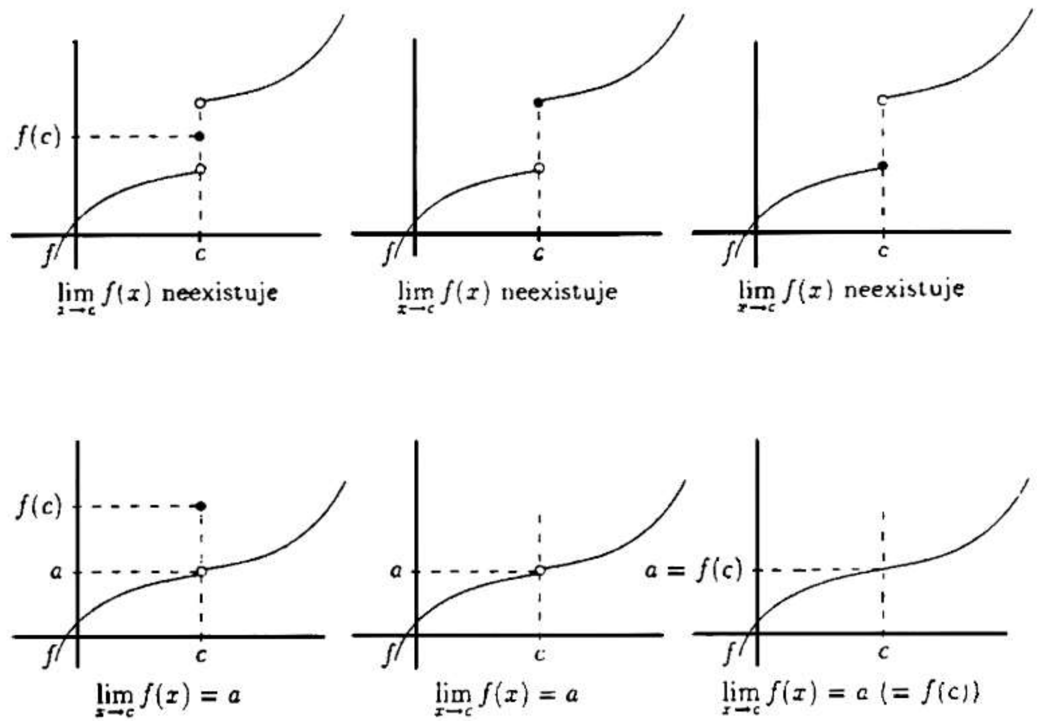
Limita funkce v bodě

- Funkce má v hromadném bodě svého definičního oboru c nejvýše jednu limitu

- Funkce f je v bodě c spojitá právě tehdy, když

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$$

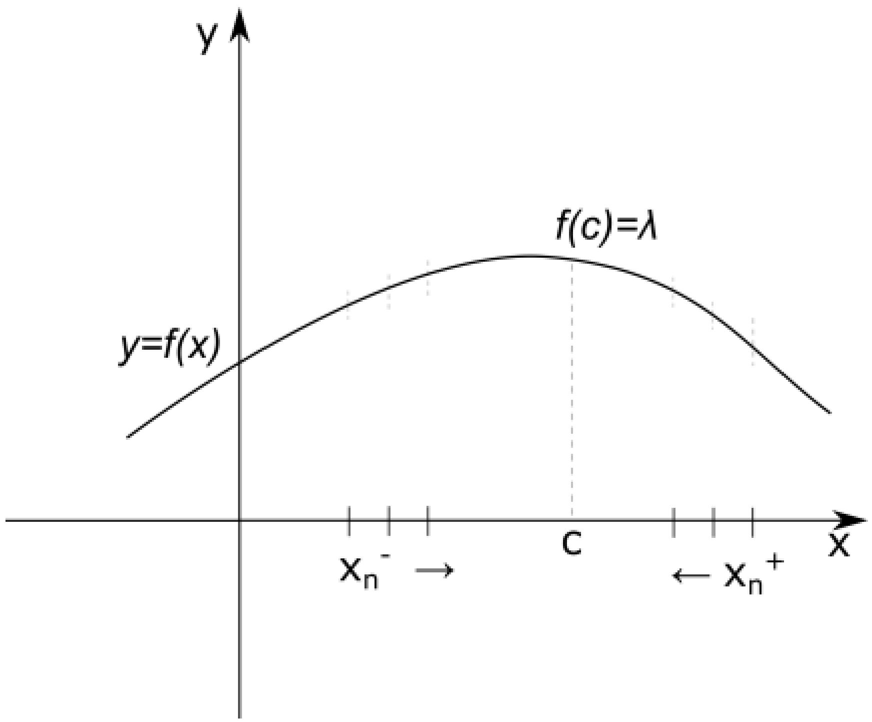
$$\lim_{x \to c} |f(x)| = \left|\lim_{x \to c} f(x)\right|$$



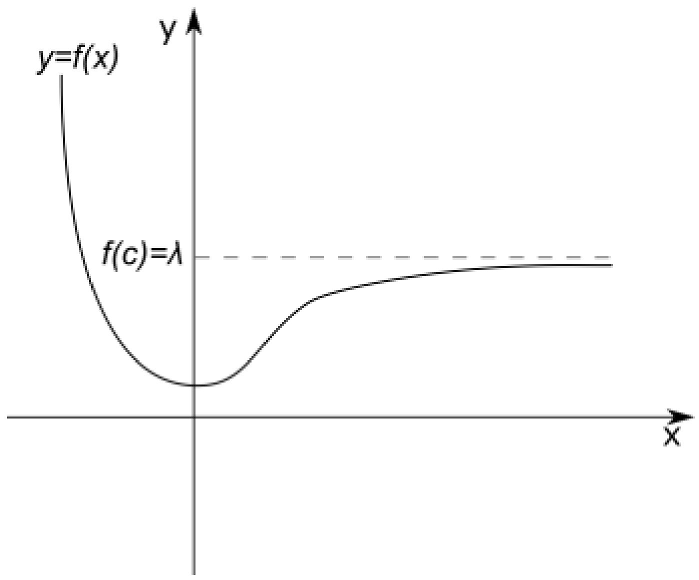
Limita funkce v bodě

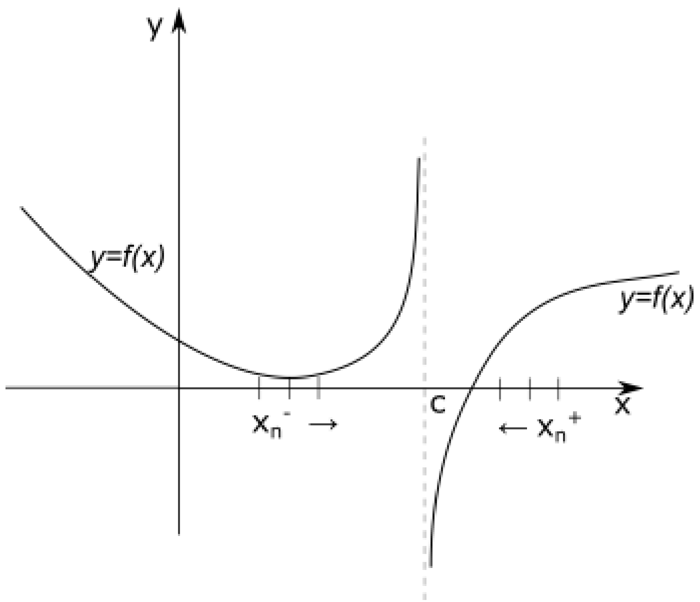
- Bod $c \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f
- Funkce má v bodě c limitu zprava i zleva rovnu číslu λ

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lambda, \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = \lambda$$



Limita funkce v bodě





$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty$$

Derivace – historie

- Euklidés (300 př.n.l, Řecko)
- Archimédes (287 - 212 př.n.l, Řecko)
  - pravidla pro počítání s nekonečně malými proměnnými pro zjištění objemu a plochy (Ostomachion)
- Aryabhata (500 n.l., Indie)
  - nekonečně malé veličiny pro studium pohybu Měsíce
- Bhaskar II (1114 - 1185 n.l., Indie)
  - dnešní Rolleova věta
- Isaac Newton (1642-1727, Anglie)
  - spolu s Leibnizem moderní pojetí diferenciálního počtu
  - vztah mezi derivací a integrací
  - fyzikální interpretace
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716, Německo)
  - moderní pojetí diferenciálního počtu
  - současné značení (dy/dx)
- Cauchy, Riemann, Weierstrass
  - teoretické základy diferenciálního počtu

Derivace v příkladech

- Vědecké a technické aplikace
  - Klasická mechanika tělesa:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

  - Ohřev vody ve slunečním kolektoru:

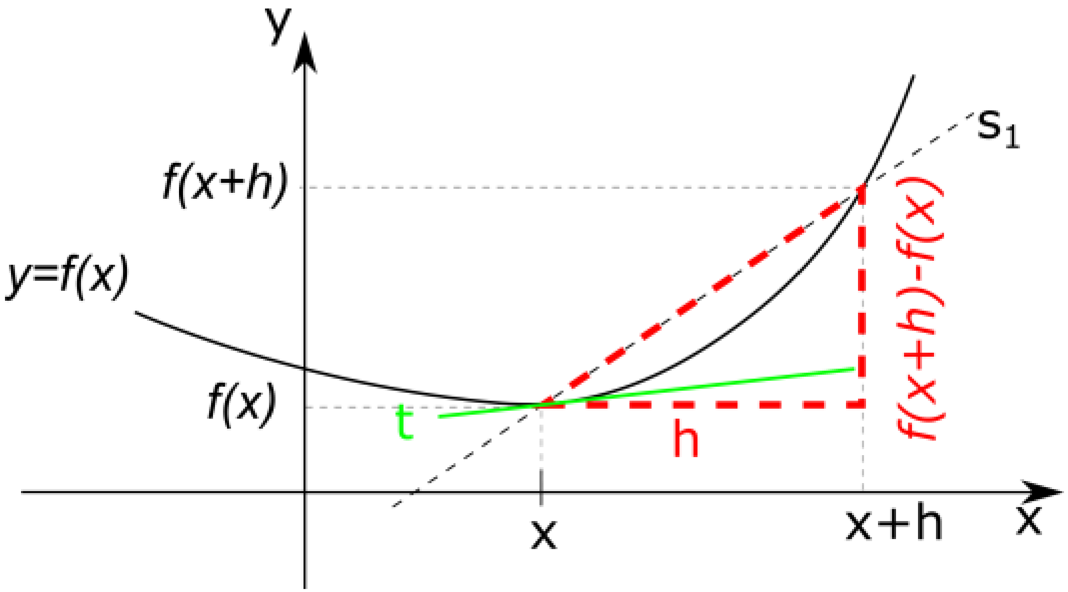
$$\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t} = a - (b+c)T_i + bT_{i-1}$$

- Bezpečnostní aplikace
- Šíření požáru:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 2\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

- Sociální aplikace
- Ekonomické aplikace
- Ostatní aplikace

Geometrický význam derivace

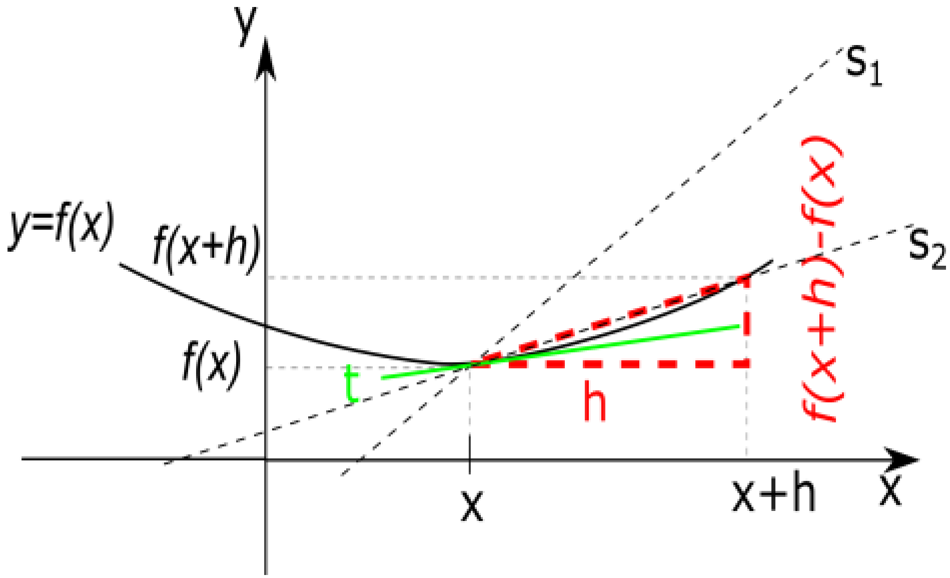


- Chceme zjistit **změnu** funkce $f(x)$ v bodě x, pokud se posuneme o krok h na ose x.
- Změnu vyjádříme pomocí směrnice přímky
  - $s_1: y = kx \quad \rightarrow \quad k = \frac{y}{x}$

$$k_{s1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Cílem je získat směrnici odpovídající tečně t v bodě $[x, f(x)]$

Geometrický význam derivace



- Bod $x + h$ přiblížíme k bodu x a získám směrnici sečny s_2

$$k_{s2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Limitním přibližováním bodu $x + h$ k bodu x získám směrnici tečny t

$$k_t = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Definice derivace

- Derivace funkce v bodě
- Funkce f je definována na okolí bodu c. Pokud má funkce vlastní limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

- pak je funkce v bodě c diferencovatelná, hodnotu limity označujeme jako f' a nazýváme ji derivací funkce f v bodě c

- Je-li funkce f na intervalu J diferencovatelná, pak je i na tomto intervalu spojitá

- Funkce f je třídy C^k na intervalu J, pokud existují na intervalu J všechny derivace funkce až do řádu k

Metody výpočtů derivací funkcí

- Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v nějakém bodě x_0 společného definičního oboru D. Potom v tomto bodě jsou diferencovatelné i funkce

$$cf, \qquad f \pm g, \qquad f \cdot g, \qquad \frac{f}{g} \quad (g \neq 0)$$

- a platí

$$(cf)' = cf' \qquad c\ konst.$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

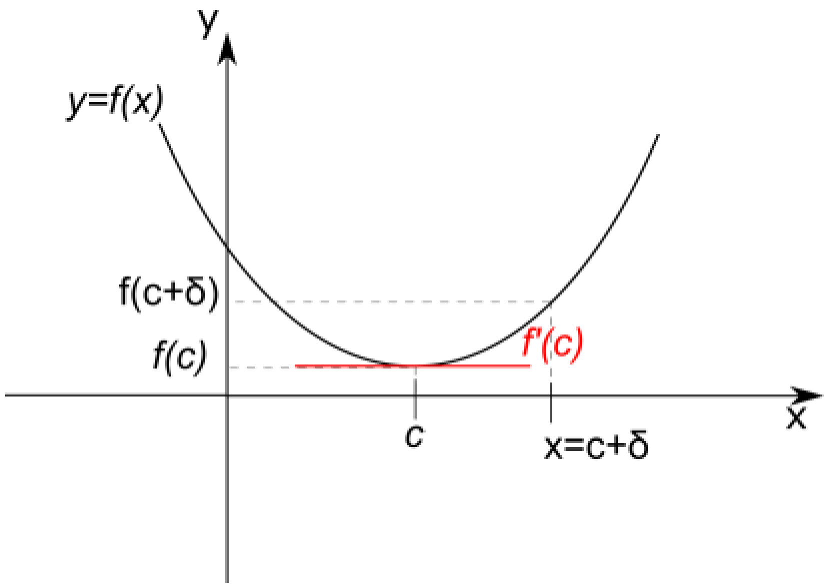
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad g \neq 0$$

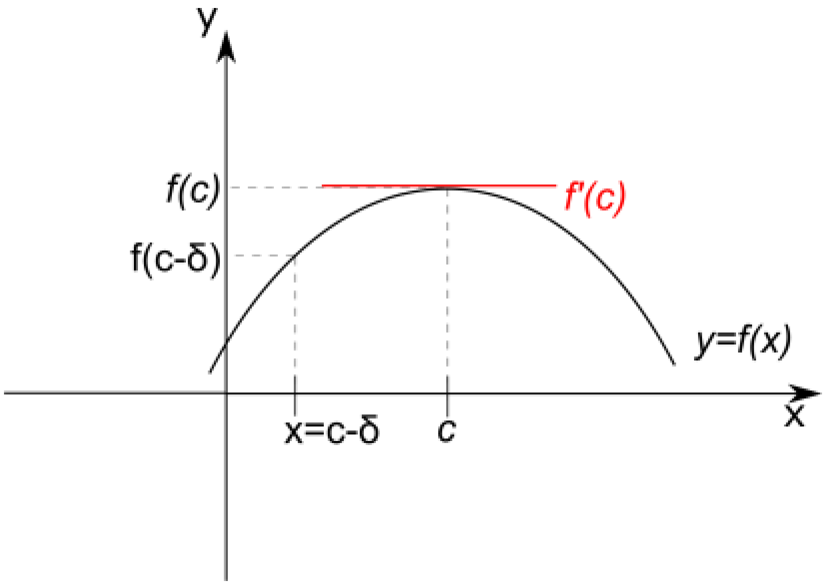
- Pro derivaci složené funkce platí

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Diferenciální počet

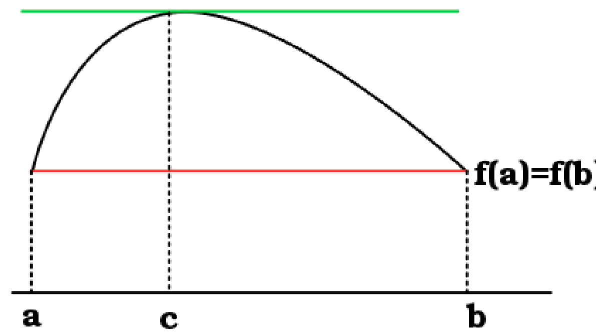
- Lokální extrém
  - funkce f definovaná v okolí bodu c má v bodě *lokální maximum*, resp. *minimum*, pokud platí pro každý bod x z okolí bodu c, že $f(x) \leq f(c)$, resp. $f(x) \geq f(c)$





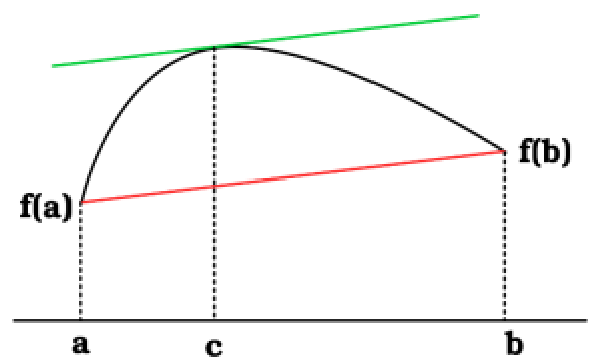
- Je-li funkce f v bodě c diferencovatelná a má v bodě lokální maximum, resp. minimum, potom platí, že $f'(c) = 0$

Nástroje diferenciálního počtu

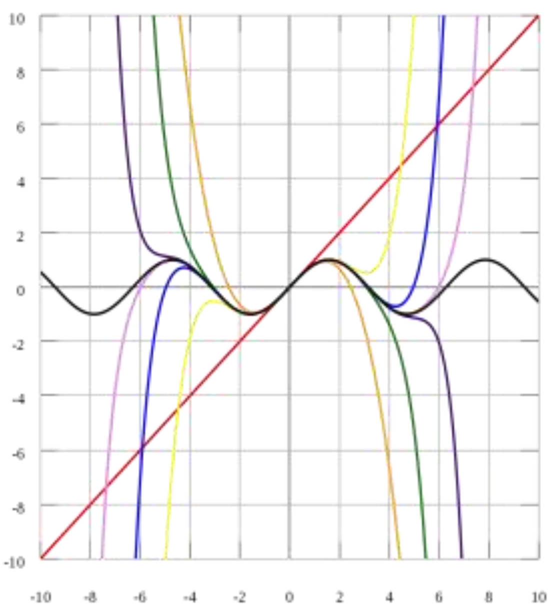


- Rolleova věta (Bhaskar II Indie)
  - Nechť f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť pro každý bod x otevřeného intervalu (a, b) existuje derivace $f'(x)$ a nechť $f(a) = f(b)$. Pak existuje bod c v otevřeném intervalu (a, b), pro nějž platí

$$f'(c) = 0$$



- Lagrangeova věta o střední hodnotě
- Taylorova věta
- L'Hospitalovo pravidlo
  - limita podílu dvou funkcí je rovna limitě podílu derivací těchto funkcí
    - za určitých podmínek

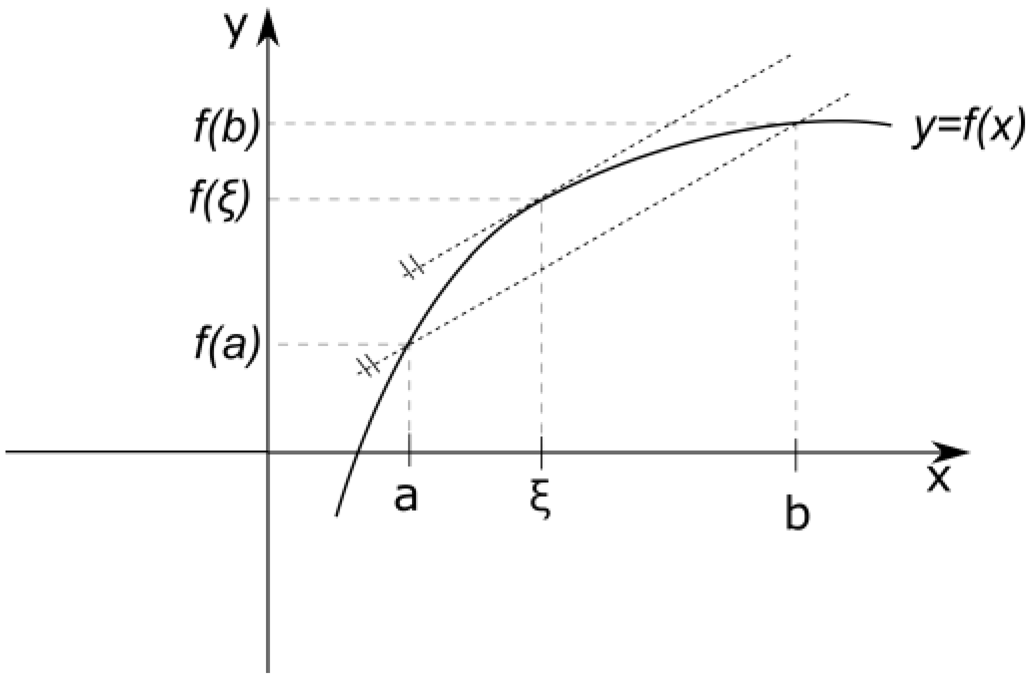


Lagrangeova věta o střední hodnotě

- Funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, diferencovatelná na otevřeném intervalu (a, b). Potom existuje alespoň jeden bod $\xi \in (a, b)$, pro který platí:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

  - existuje aspoň jeden bod v intervalu, kde je tečna rovna sklonu úsečky mezi koncovými body



Taylorův polynom

- Aproximace složitých funkcí pomocí jednodušších (polynom)
- Funkční hodnota polynomu je výsledkem elementárních operací

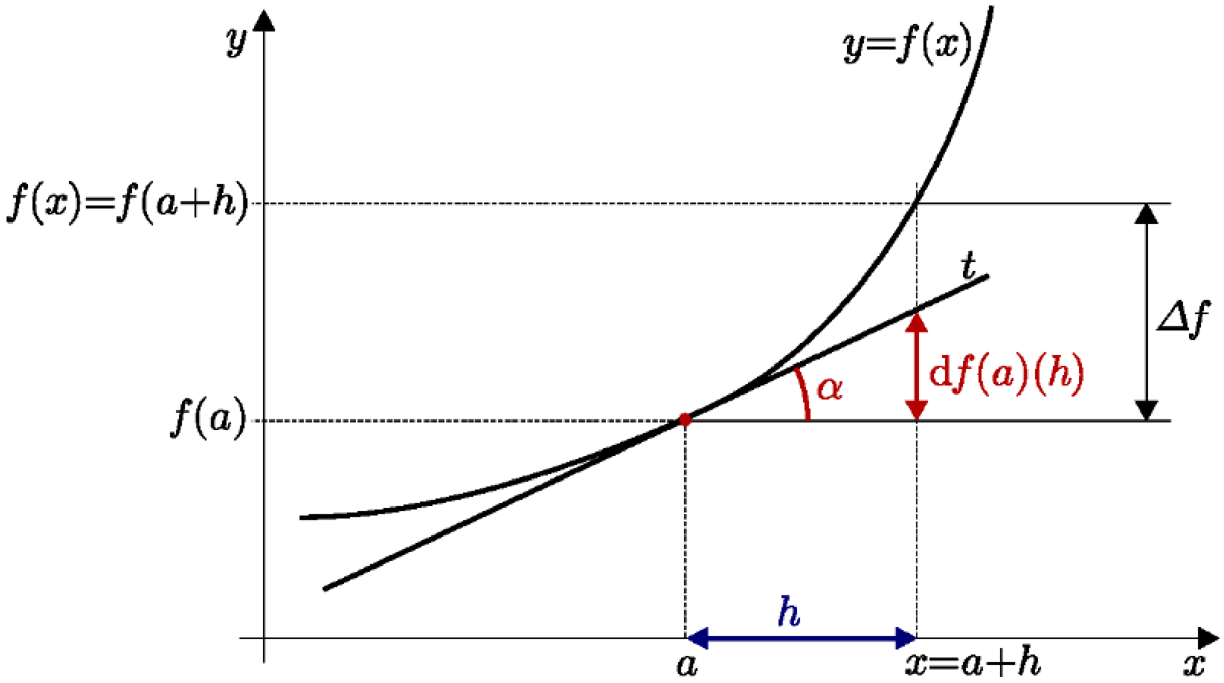
$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

- Derivace polynomu je opět polynom
- Odhad chyby aproximace

- Motivace
- Hledáme funkci g, která nejlépe aproximuje funkci f, tak aby platilo:
- $f(c) = g(c), \qquad f'(c) = g'(c), \qquad \ldots.., \qquad f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$

Taylorův polynom

- Přírůstek funkce (aproximace funkce tečnou)



$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h$$

po zderivování:

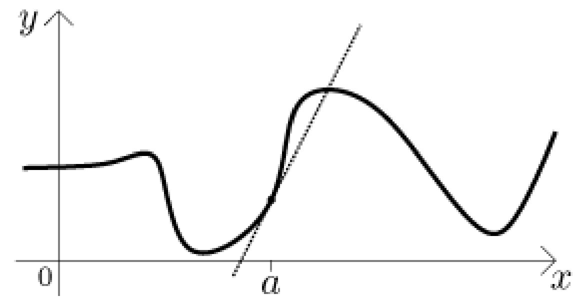
$$f'(x) = \big(f(a)\big)' + f'(a)(x - a)'$$

$$f'(x) = \quad 0 \quad + f'(a)$$

Taylorův polynom

- Aproximace přímkou (tečnou)
  - tečna a funkce v bodě a stejná hodnota i derivace
  - chyba rychle roste
  - funkce se kroutí, přímka ne
    - požadujeme $f(c) = g(c), \qquad f'(c) = g'(c)$

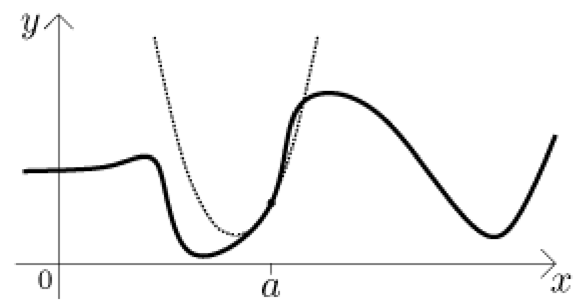
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$



- Aproximace parabolou
  - + požadavek stejného kroucení (2. derivace)

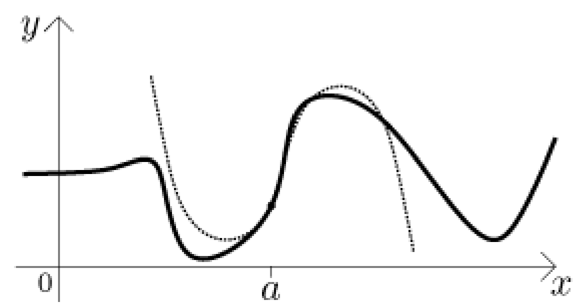
$$f''(c) = g''(c)$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$



- Aproximace kubikou
  - + 3. derivace

$$f^{(3)}(c) = g^{(3)}(c)$$



$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3$$

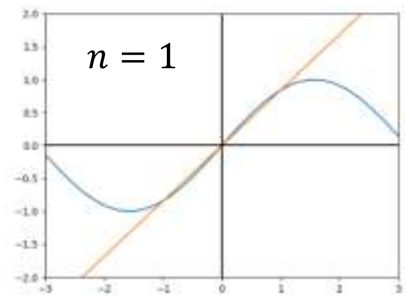
Taylorův polynom

- Funkci $f(x)$ chceme nahradit polynomem $g(x)$

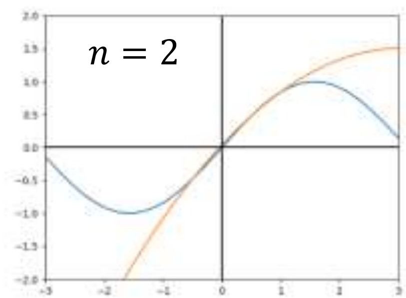
$$g(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n$$

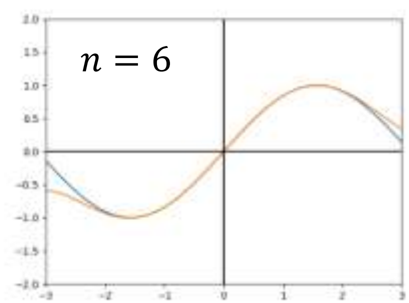
- a podmínky

$$f(c) = g(c), \qquad f'(c) = g'(c), \qquad \ldots, \qquad f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$$



stupeň n	**polynom**	**podmínka** (+ všechny předchozí)	**koeficienty** (+ všechny předchozí)
0	$g(x) = a_0$	$g(c) = f(c)$	$a_0 = f(c)$
1	$g(x) = a_0 + a_1(x-c)$	$g'(c) = f'(c)$	$a_1 = f'(c)$
2	$g(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2$	$g''(c) = f''(c)$	$a_2 = \dfrac{f''(c)}{2}$
…	…	…	…
n	$f(x) = f(c) + \dfrac{f'(c)}{1!}(x-c) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$	$g^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$	$a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$





Taylorova věta

- Pokud má funkce $f(x)$ v okolí bodu c konečné derivace do $(n+1)$. řádu, můžeme ji vyjádřit (rozvinout) jako mocninnou řadu (Taylorovu)

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \; + \; O_{n+1}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \; + \; O_{n+1}(x)$$

- Maclaurinova řada
  - pokud se jedná o rozvoj v okolí bodu 0

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \; + \; O_{n+1}(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \; + \; O_{n+1}(x)$$

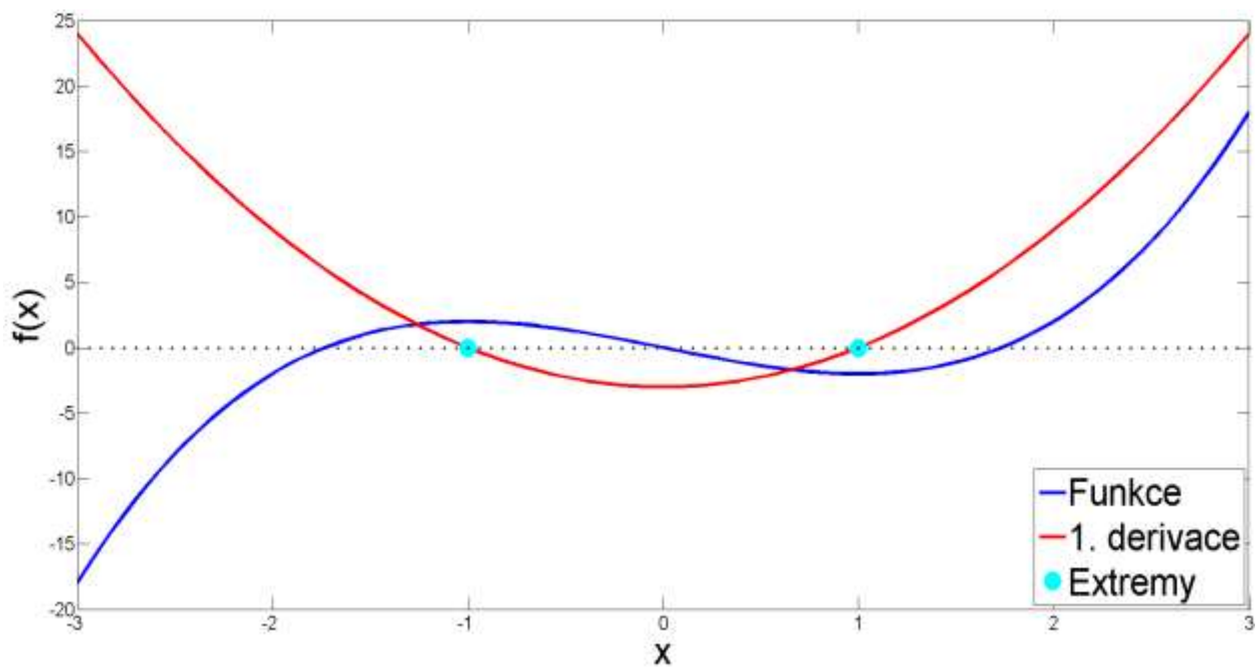
- Taylorův polynom
  - přibližné vyjádření hodnot funkce
    - můžeme zanedbat členy s vyššími derivacemi

Průběh funkce

- Definiční obor
- Intervaly monotónnosti
- Má-li f derivaci $f'(x) \neq 0$ v každém bodě otevřeného intervalu (a, b), pak je funkce f na tomto intervalu monotónní
  - pro $f'(c) > 0$ rostoucí
  - pro $f'(c) < 0$ klesající
  - (c libovolný bod intervalu)
- Lokální extrémy
- Jestliže funkce $f'(c) = 0$ a $f''(c) \neq 0$, pak má funkce $f(c)$ v bodě c lokální extrém
  - pro $f''(c) > 0$ ostré lokální minimum
  - pro $f''(c) < 0$ maximum
- Intervaly ryzí konvexity (konkavity), body inflexe
- Funkce f je spojitá na intervalu J a pro každý bod z tohoto intervalu platí, že $f''(c) > 0$, resp. $f''(c) < 0$
- Potom je funkce na intervalu ryze konvexní, resp. konkávní
- Jestliže $f''(c) = 0$ a $f''' \neq 0$, potom má funkce v bodě c inflexi

Průběh funkce

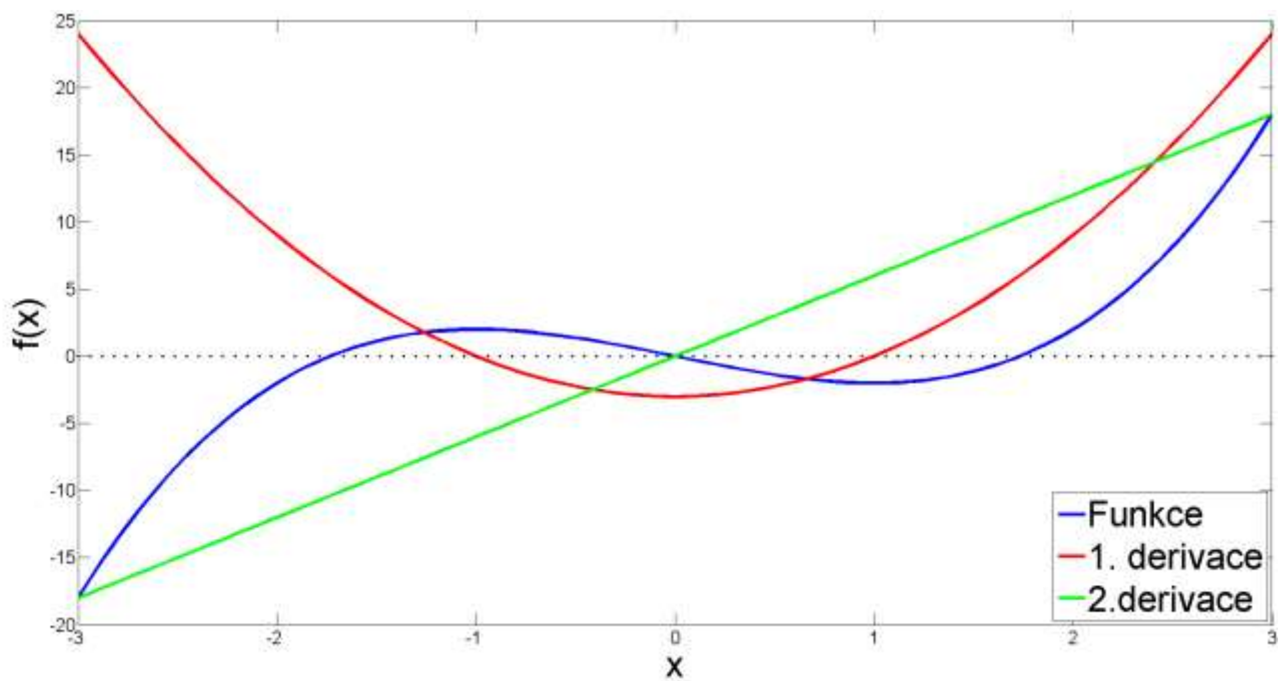
- Funkce $f(x) = x^3 - 3x$
- Definiční obor $Df = \mathbb{R}$
- První derivace $f'(x) = 3x^2 - 3$
  - řešíme $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1, \qquad x \in \{-1, 1\}$
- Intervaly monotónnosti $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0$, resp. < 0
  - rostoucí na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, \infty)$, klesající na $\langle -1,1\rangle$
- Lokální extrémy
  - kandidáti $x \in \{-1, 1\}$
  - přesvědčíme se pomocí 2. derivace



Průběh funkce

- Spočteme 2. derivaci $f''(x) = 6x$
  - řešíme $f''(x) = 6x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$
- Intervaly ryzí konvexity (konkavity) $f''(x) = 6x > 0$, resp. < 0
  - konvexní na $\langle 0, \infty)$, konkávní na $(-\infty, 0)$
- Hodnoty druhé derivace $f''(x)$ ve stacionárních bodech

  $f''(x) = 6x \quad \rightarrow \quad f''(-1) = -6 < 0, \quad f''(1) = 6 > 0$
  - $f(x)$ má v bodech $x \in \{-1,1\}$ ostré lokální maximum, resp. minimum

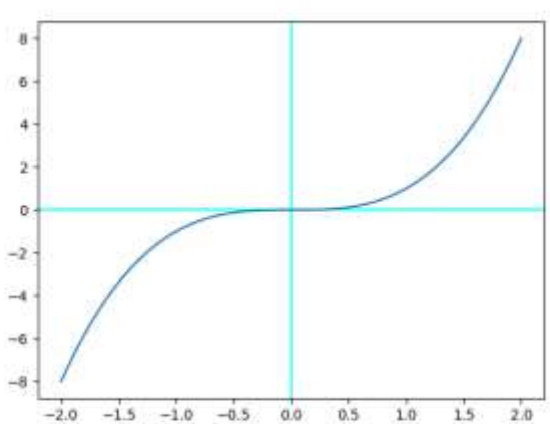


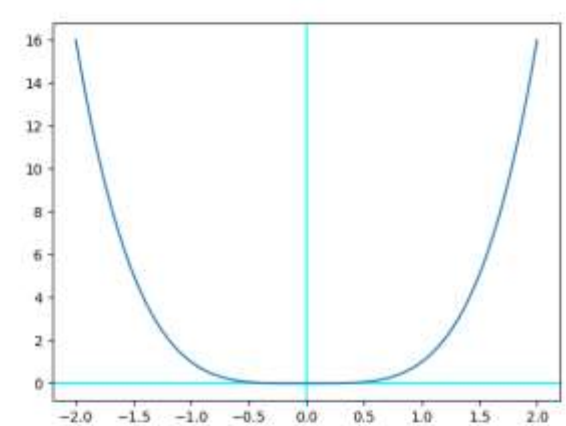
Průběh funkce

- Pokud $f'(c) = 0$ a $f''(c) = 0$, může a nemusí mít funkce v bodě c lokální extrém. Počítáme další derivace $f^{(n)}(c)$, dokud $f^{(n)}(c) > 0$, resp. $f^{(n)}(c) < 0$
- Pokud první nenulová derivace bude
  - lichá: jedná se o inflexní bod
  - sudá: ostrý lokální extrém

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= 3x^2 & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= 6x & f''(0) &= 0 \\
f^{(3)}(x) &= 6 & f^{(3)}(0) &= 6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= 4x^3 & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= 12x^2 & f''(0) &= 0 \\
f^{(3)}(x) &= 24x & f^{(3)}(0) &= 0 \\
f^{(4)}(x) &= 24 & f^{(4)}(0) &= 24
\end{aligned}
$$



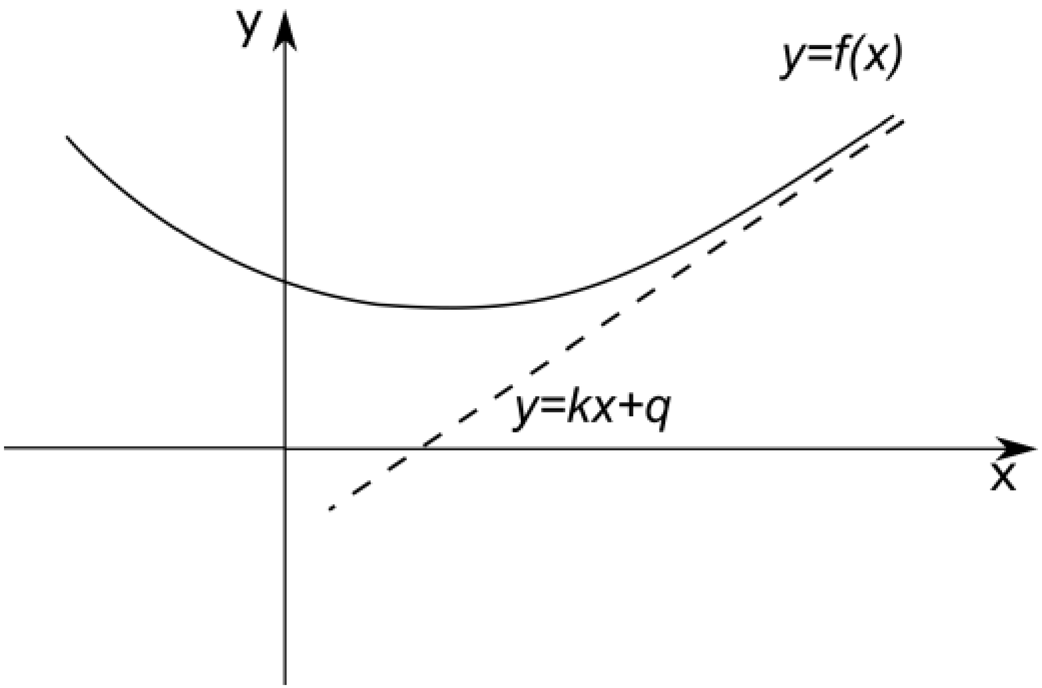


Asymptoty grafu funkce

- Přímka $y = kx + q$ se nazývá ***šikmá asymptota*** *grafu funkce*, pokud platí:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx - q] = 0 \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx - q] = 0$$

- a ***svislá asymptota***, pokud má funkce $f(x)$ v bodě x alespoň jednu jednostrannou nevlastní limitu



Příklady k procvičení

- Úprava výrazů pomocí symbolické matematiky
- Řešení rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ pomocí symbolické matematiky
- Řešení soustavy rovnic pomocí symbolické matematiky. Porovnání s metodami numerické matematiky a vestavěnými funkcemi
- Výpočet limit pomocí symbolické matematiky
- Výpočet derivace pomocí symbolické a numerické matematiky

Úprava výrazů - cvičení

- Pomocí symbolických manipulací upravte následující výraz

$$\frac{1-\frac{x}{y}}{\frac{x-y^2}{x}}$$

- DOPLNIT VÝRAZY

Řešení rovnice - cvičení

- Pomocí symbolických manipulací vyřešte kvadratickou rovnic

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Uvažujte takové sady koeficientů (a, b, c), aby byly zohledněny všechny možnosti řešení rovnice

Řešení soustavy rovnic – cvičení

- Nagenerujte náhodně soustavu N rovnic a vyřešte ji pomocí:
  - Iterační metody
  - Cramerova pravidla
  - Symbolické matematiky
- Jednotlivá řešení porovnejte z hlediska rychlosti a stability

$$x_i = \frac{d_{Ai}}{d_A}$$

$$x^{i+1} = D^{-1}\left[b - (L + U)x^i\right]$$

Limita funkce jedné proměnné – cvičení

- Pomocí symbolické matematiky vypočítejte následující limity

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 - 1}{x^2 - 2x + 10}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

Derivace funkce jedné proměnné

- Analytický výpočet derivace

$$f' = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

- Přibližný výpočet derivace - numerická derivace

$$f' = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} + O(h^2)$$

Numerická derivace

- Odhad derivace funkce provádíme, když
  - nemáme k dispozici analytický tvar funkce
  - funkce je zadána tabulkou nebo polem hodnot
  - funkce je zadána body v grafu
- Vzorce pro numerický odhad derivace lze získat pomocí
  - Taylorova rozvoje
  - derivací interpolačního polynomu
- Každý vzorec pro numerickou derivaci obsahuje chybový člen vyjádřený ve tvaru mocniny kroku h
  - Čím bude mocnina vyšší, tím bude odhad přesnější a naopak
    - (chyba metody)
  - Čím bude h vyšší, tím bude odhad méně přesný
    - (chyba zaokrouhlovací)
  - Zahrnutím více bodů z okolí x lze odhad zpřesnit

Dvoubodová numerická derivace

- Z Maclaurinova tvaru Taylorova rozvoje plyne, že

$$f(h) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{n!} h^i = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2} h^2! + \dots$$

- Mějme body x_0 a $x_1 = x_0 + h$. Poté bude rozvoj pro $f(x_0 + h)$ a $f(x_0 - h)$ vypadat následovně.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h$$

- a dvoubodová derivace funkce f v bodě x_0, bude mít tvar

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Dvoubodová numerická derivace

- Pro zpřesnění odhadu derivace v bodě x_0 lze využít hodnoty funkcí v obou krajních bodech, a to odečtením rovnic $f(x_0 + h)$ a $f(x_0 - h)$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h$$

- Po úpravě dostaneme

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Vícebodová numerická derivace

- Zpřesnění odhadu derivace můžeme také dosáhnout zahrnutím více bodů do odhadu derivace funkce f v bodě x
- Pro odvození vzorce pro numerickou derivaci využijeme v tomto případě interpolační polynom $P_n(x)$ řádu n

- Mějme funkci $f(x)$ definovanou ve třech ekvidistantně rozdělených uzlových bodech $\{x_0, x_1, x_2\}$ s krokem h.
- Poté platí, že hodnotu derivace funkce lze nahradit hodnotou derivace interpolačního polynomu řádu n $P_n(x)$ tak, že

$$f'(x) \doteq P_n'(x)$$

- V uzlových bodech se hodnoty derivace funkce a interpolačního polynomu můžou lišit. Tato situace bude výraznější tím více, čím vyšší řád polynomu budeme pro interpolaci používat

Vícebodová numerická derivace

- Nastíníme odvození odhadu numerické derivace funkce zadané třemi body
  $x_0 = x_1 - h$, x_1 a $x_2 = x_1 + h$
  s využitím interpolačního polynomu třetího řádu

- Interpolačním polynomem rozumíme funkci

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

- Pro polynom třetího řádu dostaneme soustavu rovnic ve tvaru:

$$f(x_1 - h) = a_0 + a_1(x_1 - h) + a_2(x_1 - h)^2$$
$$f(x_1) = a_0 + a_1(x_1) + a_2(x_1)^2$$
$$f(x_1 + h) = a_0 + a_1(x_1 + h) + a_2(x_1 + h)^2$$

- odvodíme vyjádření pro koeficienty a_1 a a_2 a výsledné vyjádření polynomu zderivujeme

Vícebodová numerická derivace

$$a_2 = \frac{f(x_1+h) - 2f(x_1+h) + f(x_1-h)}{2h^2}$$

$$a_1 = a_2 h - 2a_2 x_1 + \frac{f(x_1) - f(x_1-h)}{h}$$

- Nyní si můžeme vybrat, v jakém bodě chceme derivaci odhadnout, dosadíme koeficienty $a_1,\ a_2$ a rovnice zderivujeme
- Výsledkem jsou následující rovnice

$$f'(x_1-h) = \frac{-3f(x_1-h) + 4f(x_1) - f(x_1+h)}{2h}$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1+h) - f(x_1-h)}{2h}$$

$$f'(x_1+h) = \frac{f(x_1-h) - 4f(x_1) + 3f(x_1+h)}{2h}$$

Numerický odhad derivace – cvičení

- Porovnejte dva numerické odhady derivace funkce $f(x) = \sin(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ s přesným řešením získaným například pomocí symbolické matematiky
- Interval rozdělte na $n = \{4, 8, 12, 16, 20, 30\}$ subintervalů
- Spočítejte celkovou chybu derivace jako

$$\text{globErr} = \sum_{i=1}^{n} |f' - f'(x_i)|$$

		$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$
$n = 4$	$h = 0.785$	$E1 = 0.845$	$E2 = 0.299$
$n = 8$	$h = 0.393$	$E1 = 0.900$	$E2 = 0.140$
$n = 12$	$h = 0.262$	$E1 = 0.928$	$E2 = 0.091$
….	….	….	….
$n = 30$	$h = 0.105$	$E1 = 0.968$	$E2 = 0.036$
$n = 80$	$h = 0.039$	$E1 = 0.998$	$E2 = 0.013$

Numerický odhad derivace – cvičení

- Pro výše uvedený příklad proveďte také odhad derivace ve třech bodech, například

$$f'(x_1+h) = \frac{f(x_1-h) - 4f(x_1) + 3f(x_1+h)}{2h}$$

- a porovnejte přesnost s dvoubodovým odhadem