Matematický software

Diferenciální počet funkce jedné proměnné

RNDr. Zbyšek Posel, Ph.D.

Katedra informatiky

Pojem funkce

Reálná funkce

V oboru M, kde $M \in \mathbb{R}$, je definována reálná funkce, jestliže je dán předpis, podle kterého každému $x \in M$ je přiřazeno právě jedno číslo y. Oboru M potom říkáme *definiční obor funkce*.

- x je argument funkce (nezávislá proměnná).
- y je funkční hodnota (závislá proměnná).
- Definičním oborem funkce je většinou interval $\langle a, b \rangle$.
- Funkce je většinou dána předpisem (analyticky) nebo grafem.

Druhy funkcí

- Elementární funkce

$$y = f(x) \rightarrow y = kx + q$$

- Algebraické funkce

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0}$$

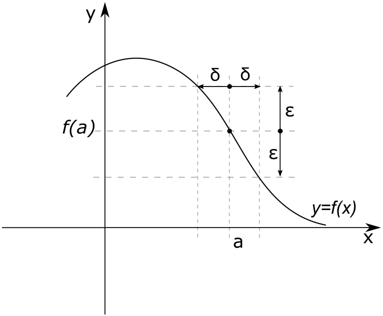
- Transcendentní funkce
  - Goniometrické, hyperbolické, mocninné, exponenciální, logaritmické
  - Cyklometrické funkce - $y = arcsin(x)$
  - Integrální rovnice - $g(x) = \int_a bf(x)\mathrm{d}x$

Spojitost funkce

Cauchyova definice

$f(x)$ je spojitá v bodě a, pokud k libovolnému číslu $\epsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna x z okolí bodu δ platí definice

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \quad \text{a} \quad |x - a| < \delta$$

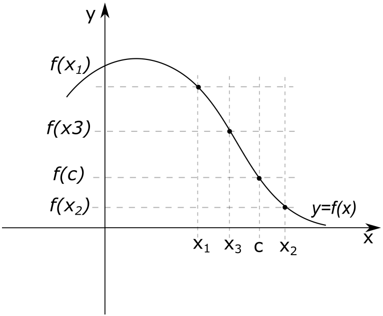


Spojitost funkce

Heineova definice

O funkci $f(x)$ řekneme že je v $\langle a, b\rangle$ spojitá, jestliže pro každou posloupnost (x_n) v $\langle a, b\rangle$ platí implikace:

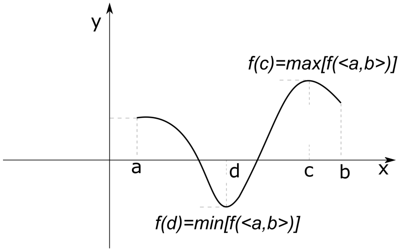
$$x_n \to c \Rightarrow f(x_n) \to f(c)$$

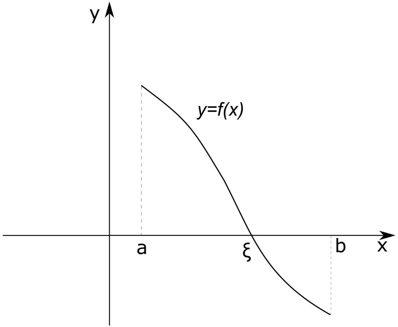


Spojitost funkce

Weierstrassova věta: Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, potom existuje na intervalu minimum, $f = \min(f(\langle a, b\rangle))$ a maximum funkce $f = \max f(\langle a, b\rangle))$.

Bolzanova věta: Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, a $f(a) > 0, f(b) < 0$ nebo obráceně $f(a) < 0,\ f(b) > 0$, potom existuje alespoň jeden bod $\xi \in (a, b)$, pro který platí $f(\xi) = 0$.





Více lze o spojitosti funkce nalézt v [?] a v [?].

Limita funkce v bodě

Heineova definice

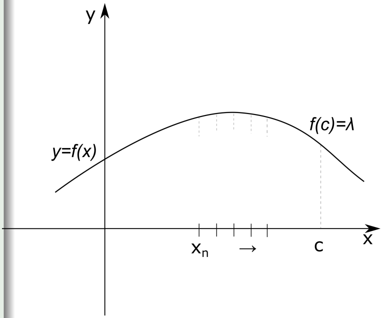
Bod $c \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Potom číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ bude limitou funkce f v bodě c

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lambda$$

pokud platí pro každou posloupnost x_n:

$$x_n \to c \Rightarrow f(x_n) \to \lambda$$

$$\lambda = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{vlastní limita} \\ \pm\infty & \text{nevlastní limita} \end{cases}$$



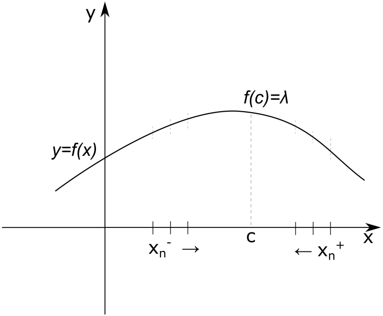
Limita funkce v bodě

- Funkce má v hromadném bodě svého definičního oboru c nejvýše jednu limitu.
- Funkce f je v bodě c spojitá, právě tehdy, když
$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$$
- $$\lim_{x \to c} |f(x)| = |\lim_{x \to c} f(x)|$$

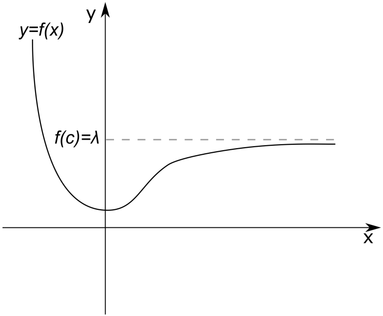
Limita funkce v bodě

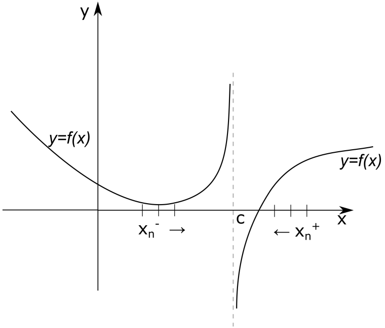
Bod $c \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Funkce má v bodě c limitu zprava i zleva rovnu číslu λ.

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lambda, \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = \lambda$$



Limita funkce v bodě





$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty$$

Více lze o limitě funkce nalézt např. v [?] a v [?].

Derivace - Historie

- Euklidés (300 př.n.l, Řecko)
- Archimédes (287 - 212 př.n.l, Řecko) - počítání s nekonečně malými proměnnými pro zjištění objemu a plochy (Ostomachion).
- Aryabhata (500 n.l., Indie) - nekonečně malé veličiny pro studium pohybu Měsíce.
- Bhaskar II (1114 - 1185 n.l., Indie) - Rolleova věta
- Newton, Leibniz (Anglie, Německo) - moderní pojetí diferenciálního počtu, vztah mezi derivací a integrací
- Cauchy, Riemann, Weierstrass - teoretické základy diferenciálního počtu

Derivace v příkladech

- Vědecké a technické aplikace
  - Klasická mechanika tělesa:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{m}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}\mathbf{t}^2}$$

- Bezpečnostní aplikace
- Sociální aplikace
- Ekonomické aplikace
- Ostatní aplikace

Derivace v příkladech

- Vědecké a technické aplikace
  - Klasická mechanika tělesa:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{m}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}\mathbf{t}^2}$$

  - Ohřev vody ve slunečním kolektoru:

$$\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t} = a - (b + c)T_i + bT_{i-1}$$

- Bezpečnostní aplikace
- Sociální aplikace
- Ekonomické aplikace
- Ostatní aplikace

Derivace v příkladech

- Vědecké a technické aplikace
  - Klasická mechanika tělesa:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{m}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}\mathbf{t}^2}$$

  - Ohřev vody ve slunečním kolektoru:

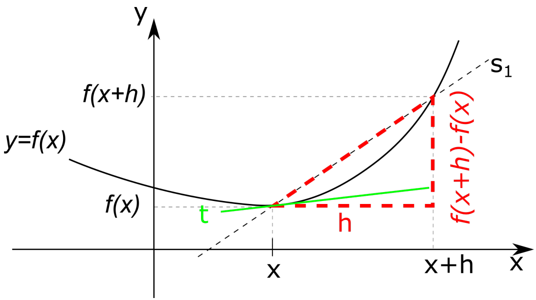
$$\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t} = a - (b + c)T_i + bT_{i-1}$$

- Bezpečnostní aplikace
- Šíření požáru:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \pi 2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

- Sociální aplikace
- Ekonomické aplikace
- Ostatní aplikace

Geometrický význam derivace

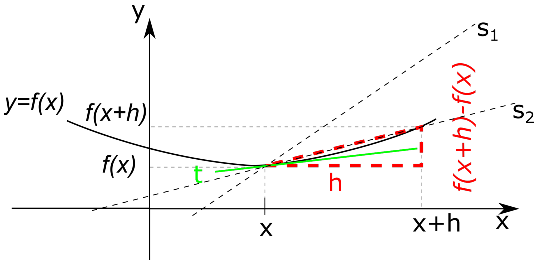


- Chceme zjistit **změnu** funkce $f(x)$ v bodě x, pokud se posuneme o krok h na ose x.
- Změnu vyjádříme pomocí směrnice přímky s_1: $y = kx \rightarrow k = \frac{y}{x}$

$$k_{s_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x}$$

- Cílem je získat směrnici odpovídající tečně t v bodě $[x, f(x)]$

Geometrický význam derivace



- Bod $x + h$ přiblížím k bodu x a získám směrnici sečny s_2.

$$k_{s_2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x}$$

- Limitním přibližováním bodu $x + h$ k bodu x získám směrnici tečny t

$$k_t = \lim_{x+h \to x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{x+h \to x} \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x}$$

Definice derivace

Derivace funkce v bodě

Funkce f je definována na okolí bodu c. Pokud má funkce vlastní limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

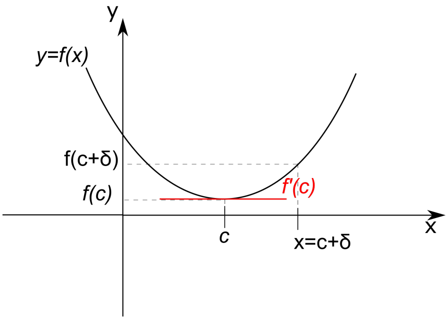
pak je funkce v bodě c diferencovatelná a hodnotu limity označujeme jako f' a nazýváme ji jako derivaci funkce f v bodě c.

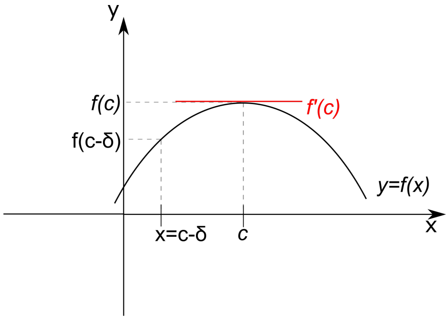
- Existují pravidla pro derivování elementárních funkcí a složených funkcí.
- Je-li funkce f na intervalu J diferencovatelná, pak je i na tomto intervalu spojitá.
- Funkce f je třídy C^k na intervalu J, pokud existují na intervalu J všechny derivace funkce až do řádu k.

Více o derivacích funkce jedné proměnné lze nalézt např. v [**?**] a v [**?**] nebo v [**?**].

Diferenciální počet

Funkce f definovaná v okolí bodu c má v bodě *lokální maximum*, resp. *minimum*, pokud platí pro každý bod x z okolí bodu c, že $f(x) \leq f(c)$, resp. $f(x) \geq f(c)$.





Je-li funkce f v bodě c diferencovatelná a má v bodě lokální maximum resp. minimum, potom platí, že $f'(c) = 0$.

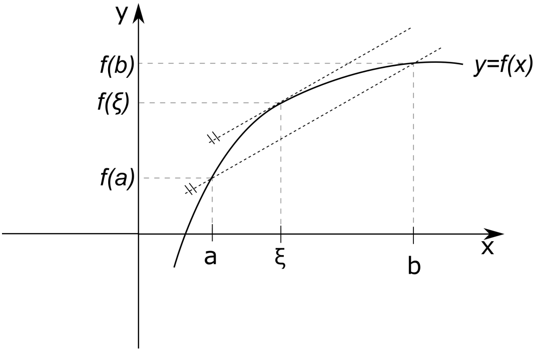
Nástroje diferenciálního počtu

- Rolleova věta (Bhaskar II Indie)
- Lagrangeova věta o střední hodnotě
- L'Hostpitalovo pravidlo
- Taylorova věta

Lagrangeova věta o střední hodnotě

Funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, diferencovatelná na otevřeném intervalu (a, b). Potom existuje alespoň jeden bod $\xi \in (a, b)$, pro který platí:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Taylorova věta

- Aproximace složitých funkcí pomocí jednodušších (polynom).

Motivace

Hledáme funkci g, která nejlépe aproximuje funkci f, tak aby platilo:

$$f(c) = g(c),\ f'(c) = g'(c), \ldots.., f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$$

Taylorova věta

- Aproximace složitých funkcí pomocí jednodušších (polynom).
- Funkční hodnota polynomu je výsledkem elementárních operací.

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

Motivace

Hledáme funkci g, která nejlépe aproximuje funkci f, tak aby platilo:

$$f(c) = g(c),\ f'(c) = g'(c), ..., f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$$

Taylorova věta

- Aproximace složitých funkcí pomocí jednodušších (polynom).
- Funkční hodnota polynomu je výsledkem elementárních operací.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

- Derivace polynomu je opět polynom.

Motivace

Hledáme funkci g, která nejlépe aproximuje funkci f, tak aby platilo:

$$f(c) = g(c),\ f'(c) = g'(c), ..., f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$$

Taylorova věta

- Aproximace složitých funkcí pomocí jednodušších (polynom).
- Funkční hodnota polynomu je výsledkem elementárních operací.

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

- Derivace polynomu je opět polynom.
- Odhad chyby aproximace.

Motivace

Hledáme funkci g, která nejlépe aproximuje funkci f, tak aby platilo:

$$f(c) = g(c),\ f'(c) = g'(c), ..., f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$$

Taylorova věta

Mějme polynom $g(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + ... + a_n(x-c)^n$

a podmínku $f(c) = g(c),\ f'(c) = g'(c), ..., f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$

Stupeň	Polynom	Podmínka	koeficienty
0	$g(x) = a_0$	$g(c) = f(c)$	$a_0 = f(c)$
1	$g(x) = a_0 + a_1 x$	$g(c) = f(c), g'(c) = f'(c)$	$a_0 = f(c), a_1 = f'(c)$
.	.	.	.
.	.	.	.

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + ... + \frac{f^n(x-c)}{n!}(x-c) + O_{n+1}(x)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + ... + \frac{f^n(0)}{n!}(x) + O_{n+1}(x)$$

Více lze nalézt např v [**?**] nebo v [**?**].

Průběh funkce

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Průběh funkce

$$f(x) = x^3 - 3x$$

- Definiční obor a intervaly monotonie
    - Definiční obor: $\mathbf{Df} = \mathbb{R}$
    - Intervaly monotonie: rostoucí na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, \infty)$, klesající na $\langle -1, 1\rangle$

Průběh funkce

$$f(x) = x^3 - 3x$$

- Definiční obor a intervaly monotonie
  - Definiční obor: $\mathbf{Df} = \mathbb{R}$
  - Intervaly monotonie: rostoucí na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, \infty)$, klesající na $\langle -1, 1\rangle$
- Lokální extrémy

Jestliže funkce $f'(c) = 0$ a funkce $f(c)$ je v bodě c rostoucí, resp. klesající, potom má funkce $f(c)$ v bodě c ostré lokální maximum, resp. minimum.

Průběh funkce

$$f(x) = x^3 - 3x$$

- Definiční obor a intervaly monotonie
  - Definiční obor: $\mathbf{Df} = \mathbb{R}$
  - Intervaly monotonie: rostoucí na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, \infty)$, klesající na $\langle -1, 1\rangle$
- Lokální extrémy

Jestliže funkce $f'(c) = 0$ a funkce $f(c)$ je v bodě c rostoucí, resp. klesající, potom má funkce $f(c)$ v bodě c ostré lokální maximum, resp. minimum.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1, \quad x \in \{-1, 1\}$$

Průběh funkce

$$f(x) = x^3 - 3x$$

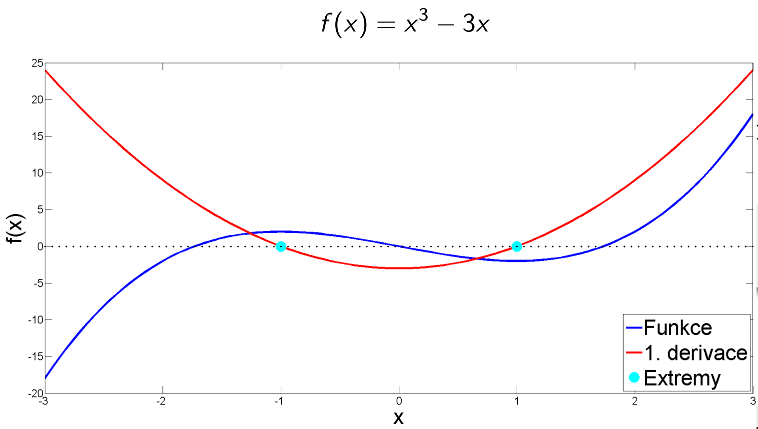
- Definiční obor a intervaly monotonie
  - Definiční obor: $\mathbf{Df} = \mathbb{R}$
  - Intervaly monotonie: rostoucí na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, \infty)$, klesající na $\langle -1, 1\rangle$
- Lokální extrémy

Jestliže funkce $f'(c) = 0$ a funkce $f(c)$ je v bodě c rostoucí, resp. klesající, potom má funkce $f(c)$ v bodě c ostré lokální maximum, resp. minimum.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1, \qquad x \in \{-1, 1\}$$

Jestliže funkce $f'(c) = 0$ a $f''(c) \neq 0$ pak má funkce $f(c)$ v bodě c lokální extrém, a to pro $f''(c) > 0$, resp. $f''(c) < 0$ ostré lokální minimum, resp. maximum.

Průběh funkce



- De
- Lo

1⟩

Jestliže … potom
má fun…

Jestliže funkce $f'(c) = 0$ a $f''(c) \neq 0$ pak má funkce $f(c)$ v bodě c lokální extrém, a to pro $f''(c) > 0$, resp. $f''(c) < 0$ ostré lokální minimum, resp. maximum.

Průběh funkce

Zjistíme hodnoty druhé derivace $f''(x)$ ve stacionárních bodech.

Průběh funkce

Zjistíme hodnoty druhé derivace $f''(x)$ ve stacionárních bodech.

$$f''(x) = 6x \to f''(-1) = -6 < 0, \quad f''(1) = 6 > 0$$

Průběh funkce

Zjistíme hodnoty druhé derivace $f''(x)$ ve stacionárních bodech.

$$f''(x) = 6x \to f''(-1) = -6 < 0, \quad f''(1) = 6 > 0$$

Funkce $f(x)$ má v bodech $x \in \{-1, 1\}$ ostré lokální maximum, resp. minimum.

Průběh funkce

Zjistíme hodnoty druhé derivace $f''(x)$ ve stacionárních bodech.

$$f''(x) = 6x \to f''(-1) = -6 < 0, \quad f''(1) = 6 > 0$$

Funkce $f(x)$ má v bodech $x \in \{-1, 1\}$ ostré lokální maximum, resp. minimum.

Pokud $f'(c) = f''(c) = 0$ může a nemusí mít funkce v bodě c lokální extrém. Jestliže n je sudé číslo, má funkce $f(c)$ v bodě c ostrý lokální extrém pokud platí, že $f^{(n)}(c) > 0$, resp. $f^{(n)}(c) < 0$.

Průběh funkce

Zjistíme hodnoty druhé derivace $f''(x)$ ve stacionárních bodech.

$$f''(x) = 6x \to f''(-1) = -6 < 0, \quad f''(1) = 6 > 0$$

Funkce $f(x)$ má v bodech $x \in \{-1, 1\}$ ostré lokální maximum, resp. minimum.

Pokud $f'(c) = f''(c) = 0$ může a nemusí mít funkce v bodě c lokální extrém. Jestliže n je sudé číslo, má funkce $f(c)$ v bodě c ostrý lokální extrém pokud platí, že $f^{(n)}(c) > 0$, resp. $f^{(n)}(c) < 0$.

- Intervaly ryzí konvexity (konkavity), body inflexe

Průběh funkce

Zjistíme hodnoty druhé derivace $f''(x)$ ve stacionárních bodech.

$$f''(x) = 6x \rightarrow f''(-1) = -6 < 0, \quad f''(1) = 6 > 0$$

Funkce $f(x)$ má v bodech $x \in \{-1, 1\}$ ostré lokální maximum, resp. minimum.

Pokud $f'(c) = f''(c) = 0$ může a nemusí mít funkce v bodě c lokální extrém. Jestliže n je sudé číslo, má funkce $f(c)$ v bodě c ostrý lokální extrém pokud platí, že $f^{(n)}(c) > 0$, resp. $f^{(n)}(c) < 0$.

- Intervaly ryzí konvexity (konkavity), body inflexe

Pokud je funkce f spojitá na intervalu J a pokud pro každý bod z tohoto intervalu platí, že $f''(c) > 0$, resp. $f''(c) < 0$. Potom je funkce na intervalu ryze konvexní, resp. konkávní.
Jestliže $f''(c) = 0$ a $f''' \neq 0$ potom má funkce v bodě c inflexi.

Průběh funkce

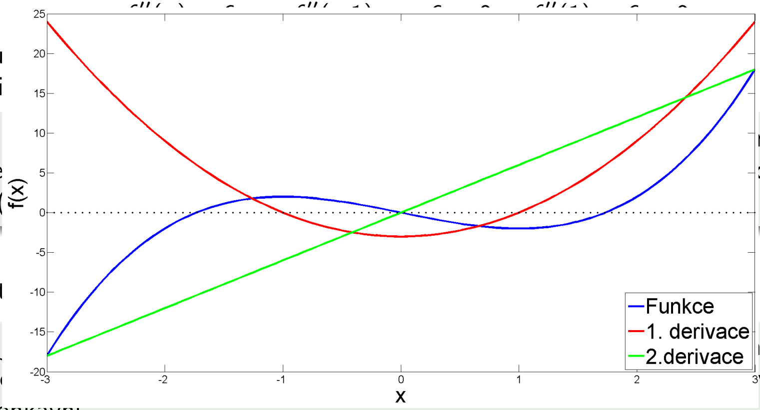
Zjistíme hodnoty druhé derivace $f''(x)$ ve stacionárních bodech.

Fu
mi

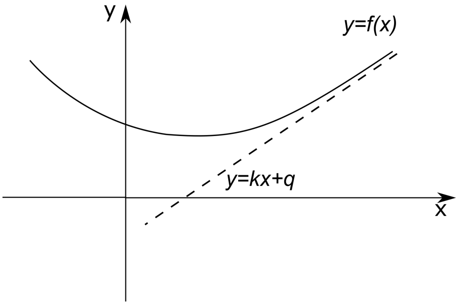
Pokud … m.
Jestliže … d platí,
že $f^{(n)}($…

- Int…

Pokud … tervalu
platí, ž… vexní,
resp. konkávní.
Jestliže $f''(c) = 0$ a $f''' \neq 0$ potom má funkce v bodě c inflexi.



Asymptota grafu funkce



Přímka $y = kx + q$ se nazývá šikmá *asymptota grafu funkce* pokud platí:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx - q] = 0 \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx - q] = 0$$

a *svislá asymptota* pokud má funkce $f(x)$ v bodě x alespoň jednu jednostrannou nevlastní limitu.

- Úprava výrazů pomocí symbolické matematiky
- Řešení rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ pomocí symbolické matematiky
- Řešení soustavy rovnic pomocí symbolické matematiky. Porovnání s metodami numerické matematiky a vestavěnými funkcemi.
- Výpočet limit pomocí symbolické matematiky.
- Výpočet derivace pomocí symbolické a numerické matematiky.

Úprava výrazů - cvičení

Pomocí symbolických manipulací upravte následující výraz

$$\frac{1-\frac{x}{y}}{\frac{x-y^2}{x}}$$

DOPLNIT VÝRAZY

Řešení rovnice - cvičení

Pomocí symbolických manipulací vyřešte kvadratickou rovnic

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Uvažujte takové sady koeficientů (a, b, c), aby byly zohledněny všechny možnosti řešení rovnice.

Řešení soustavy rovnic - cvičení

Nagenerujte náhodně soustavu N rovnic a vyřešte ji pomocí:

- Iterační metody
- Cramerova pravidla
- Symbolické matematiky.

Jednotlivá řešení porovnejte z hlediska rychlosti a stability

$$x_i = \frac{d_{Ai}}{d_A} \qquad x^{i+1} = D^{-1}\left[b - (L+U)x^i\right]$$

Limita funkce jedné proměnné - cvičení

Pomocí symbolické matematiky vypočítejte následující limity.

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-1}{x^2-2x+10}$$

.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+x-2}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x-e}$$

Derivace funkce jedné proměnné

- Analytický výpočet derivace

$$f' = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

- Přibližný výpočet derivace - numerická derivace

$$f' = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} + O(h^2)$$

Numerická derivace

Odhad derivace funkce provádíme když

- nemáme k dispozici analytický tvar funkce,
- funkce je zadána tabulkou nebo polem hodnot
- funkce je zadána body v grafu.

Vzorce pro numerický odhad derivace lze získat pomocí

- Taylorova rozvoje,
- derivací interpolačního polynomu.

Každý vzorec pro numerickou derivaci obsahuje

- chybový člen vyjádřený ve tvaru mocniny kroku h.
- Čím bude mocnina vyšší, tím bude odhad přesnější a naopak. (chyba metody)
- Čím bude h vyšší, tím bude odhad méně přesný. (chyba zaokrouhlovací)
- Zahrnutím více bodů z okolí x lze odhad zpřesnit.

Dvoubodová numerická derivace

Z Maclaurinova tvaru Taylorova rozvoje plyne, že

$$f(h) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{n!} h^i = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2} h^2! + \ldots$$

Mějme body x_0 a $x_1 = x_0 + h$. Poté bude rozvoj pro $f(x_0 + h)$ a $f(x_0 - h)$ vypadat následovně.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$$
$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h$$

a dvoubodová derivace funkce f v bodě x_0, bude mít tvar

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Dvoubodová numerická derivace

Pro zpřesnění odhadu derivace v bodě x_0 lze využít hodnoty funkcí v obou krajních bodech, a to odečtením rovnic $f(x_0 + h)$ a $f(x_0 - h)$.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h$$

Po úpravě dostaneme

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Vícebodová numerická derivace

Zpřesnění odhadu derivace můžeme také dosáhnout zahrnutím více bodů do odhadu derivace funkce f v bodě x. Pro odvození vzorce pro numerickou derivaci využijeme v tomto případě interpolační polynom $P_n(x)$ řádu n.

Mějme funkci $f(x)$ definovanou ve třech ekvidistantně rozdělených uzlových bodech $\{x_0, x_1, x_2\}$ s krokem h. Poté platí, že hodnotu derivace funkce lze nahradit hodnotou derivace interpolačního polynomu řádu n $P_n(x)$ tak, že

$$f'(x) \doteq P_n'(x)$$

. V uzlových bodech se hodnoty derivace funkce a interpolačního polynomu můžou lišit. Tato situace bude výraznější tím více, čím vyšší řád polynomu budeme pro interpolaci používat.

Vícebodová numerická derivace

Nastíníme odvození odhadu numerické derivace funkce zadané třemi body $x_0 = x_1 - h$,x_1 a $x_2 = x_1 + h$ s využitím interpolačního polynomu třetího řádu.

Interpolačním polynomem rozumíme funkci

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_{n-1} x^{n-1}$$

Pro polynom třetího řádu dostaneme soustavu rovnic ve tvaru:

$$\begin{aligned} f(x_1 - h) &= a_0 + a_1(x_1 - h) + a_2(x_1 - h)^2 \\ f(x_1) &= a_0 + a_1(x_1) + a_2(x_1)^2 \\ f(x_1 + h) &= a_0 + a_1(x_1 + h) + a_2(x_1 + h)^2 \end{aligned}$$

odvodíme vyjádření pro koeficienty a_1 a a_2 a výsledné vyjádření polynomu zderivujeme.

Vícebodová numerická derivace

$$a_2 = \frac{f(x_1 + h) - 2f(x_1 + h) + f(x_1 - h)}{2h^2}$$

$$a_1 = a_2 h - 2a_2 x_1 + \frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h}$$

Nyní si můžeme vybrat v jakém bodě chceme derivaci odhadnout, dosadíme koeficienty a_1,a_2 a rovnic zderivujeme. Výsledkem jsou následující rovnice.

$$f'(x_1 - h) = \frac{-3f(x_1 - h) + 4f(x_1) - f(x_1 + h)}{2h}$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1 - h)}{2h}$$

$$f'(x_1 + h) = \frac{f(x_1 - h) - 4f(x_1) + 3f(x_1 + h)}{2h}$$

Numerický odhad derivace-cvičení

Porovnejte dva numerické odhady derivace funkce $f(x) = sin(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Interval rozdělte na $n = \{4, 8, 12, 16, 20, 30\}$ subintervalů s přesným řešením získaným například pomocí symbolické matematiky. Spočítejte celkovou chybu derivace jako

$$\texttt{globErr} = \sum_{i=1}^{n} |f_i' - f'(x_i)|$$

Numerický odhad derivace-cvičení

Porovnejte dva numerické odhady derivace funkce $f(x) = sin(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Interval rozdělte na $n = \{4, 8, 12, 16, 20, 30\}$ subintervalů s přesným řešením získaným například pomocí symbolické matematiky. Spočítejte celkovou chybu derivace jako

$$\texttt{globErr} = \sum_{i=1}^{n} |f_i' - f'(x_i)|$$

		$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$
$n = 4$	$h = 0.785$	$E1 = 0.845$	$E2 = 0.299$
$n = 8$	$h = 0.393$	$E1 = 0.900$	$E2 = 0.140$
$n = 12$	$h = 0.262$	$E1 = 0.928$	$E2 = 0.091$
....	....	....	....
$n = 30$	$h = 0.105$	$E1 = 0.968$	$E2 = 0.036$
$n = 80$	$h = 0.039$	$E1 = 0.998$	$E2 = 0.013$

Numerický odhad derivace-cvičení

Pro výše uvedený příklad proveďte také odhad derivace ve třech bodech, například

$$f'(x_1 + h) = \frac{f(x_1 - h) - 4f(x_1) + 3f(x_1 + h)}{2h}$$

a porovnejte přesnost s dvoubodovým odhadem.

Literatura I