NÁHODNÁ ČÍSLA V NUMERICKÝCH VÝPOČTECH

Náhodná čísla

- Proč potřebujeme náhodná čísla?
- Pro vytvoření náhodného stavu nebo náhodné události
  - náhodné souřadnice molekul
  - Brownův pohyb, chaos
  - fyzikální procesy (radioaktivní rozpad, šum, atd.)
  - pohyb lidí, rozhodovací procesy
  - náhodný směr výstřelu na videoherní postavu
  - náhodný videoherní quest
- Nejčastější aplikace
  - počítačové simulace
  - videohry
- **Chceme popsat různé jevy pomocí simulačních modelů**
- **Generování náhodných čísel**

Generátory náhodných čísel

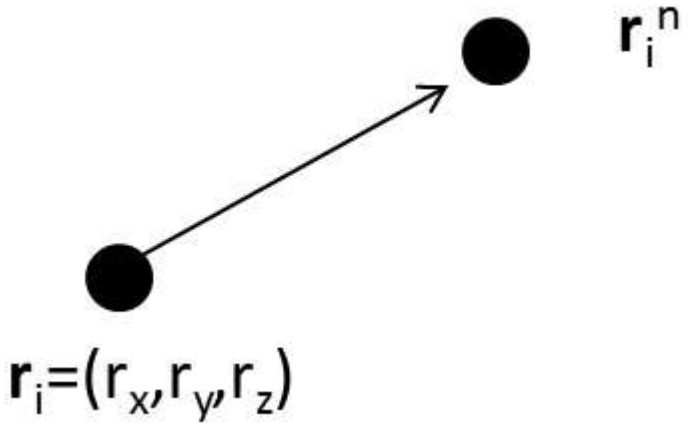
- Generování náhodných čísel
  - náročný proces
  - pseudonáhodná čísla
    - John von Neumann, 1946 prvotní metoda pro rychlé získání náhodných číslic
- Nevýhody pseudonáhodných čísel
  - zkoumáním minulé sekvence lze určit následné číslo
  - stále lepší metody
  - ale i rozvoj oblasti hlubokého učení
    - schopné rozpoznat následnou sekvenci čísel
- Dělení
  - Fyzikální generátory
  - Tabulky náhodných čísel
  - Lineární kongruenční generátory
- Základní generátory
  - Randu, ZXSPECTRUM, Marsaglia XorShift, Mersene Twister, Park&Miller,...

Možnosti získání náhodných čísel

- Základ vždy pozorování reálného jevu
  - co použít při simulacích?
- Přímo hodnoty měření
  - skutečná náhodnost
  - malý počet náhodných hodnot
- Odhad pravděpodobnostního rozdělení pozorovaného jevu
  - a generovat hodnoty z tohoto rozdělení
  - dostatečný počet „náhodných“ hodnot
  - odhad rozdělení a jeho parametrů

Generování náhodného jevu – posun částice

- Náhodný posun částice v kapalině
- Generování náhodného čísla ξ v intervalu $(0, 1)$
- Transformace ξ podle odhadnutého rozdělení
- Realizace náhodného jevu (sledovaná veličina)



- Ze svého rozdělení mám dané maximální posunutí $\boldsymbol{r}_{max}$
- Nageneruji náhodný směr

  $$\underline{\xi} = (\xi_{x\prime}, \xi_{y\prime}, \xi_{z\prime})$$

- Částici posunu na nové (náhodné místo)
- $\boldsymbol{r}_i^n = \boldsymbol{r}_i + \underline{\xi} \cdot \boldsymbol{r}_{max}$

- **Lze náhodný posun částice generovat i jiným způsobem?**

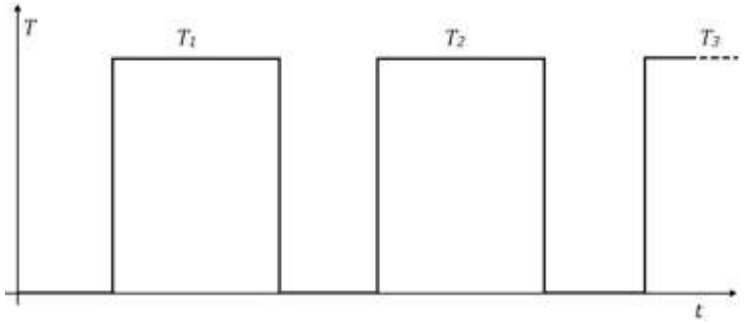
Generování náhodných čísel

- Náhodné číslo ξ
  - Je v intervalu (0,1), $\langle 0,1 \rangle$,…
  - Transformace na jiné rozdělení/interval
  - $\zeta^T = \zeta(b-a) + a, \qquad a, b \in \mathbb{R}$

- Základní dělení generátorů
  - Fyzikální generátory
  - Tabulky náhodných čísel
  - Vypočítaná náhodná čísla

Fyzikální generátory

- Opravdu náhodná čísla
  - Radioaktivní rozpad (Geiger-Müller)

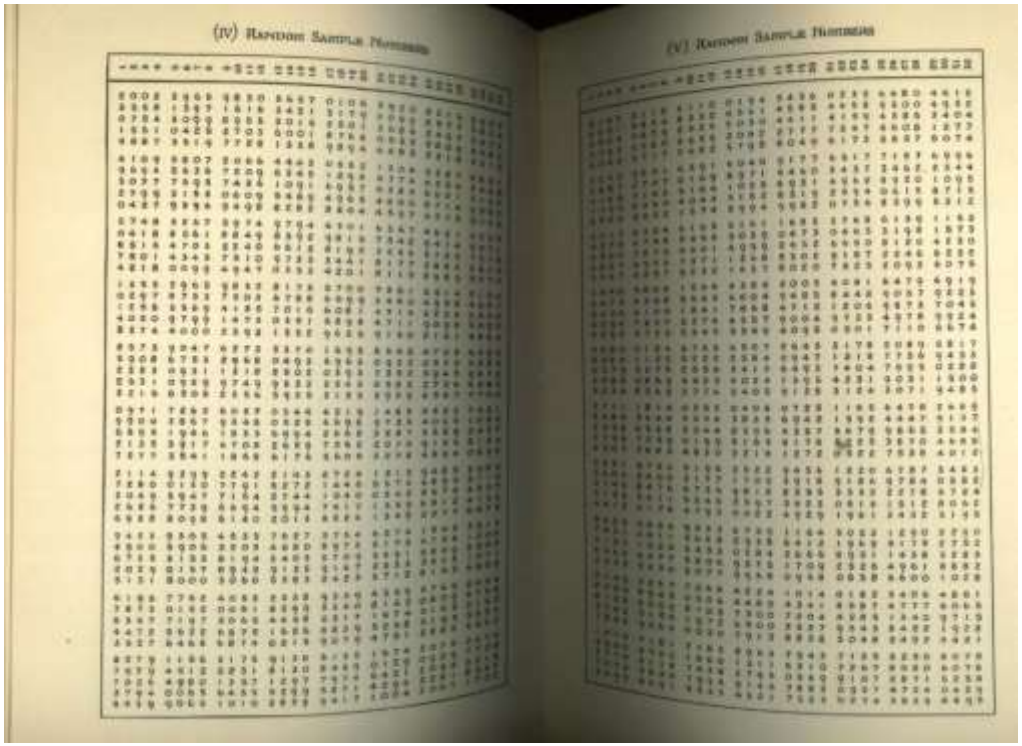


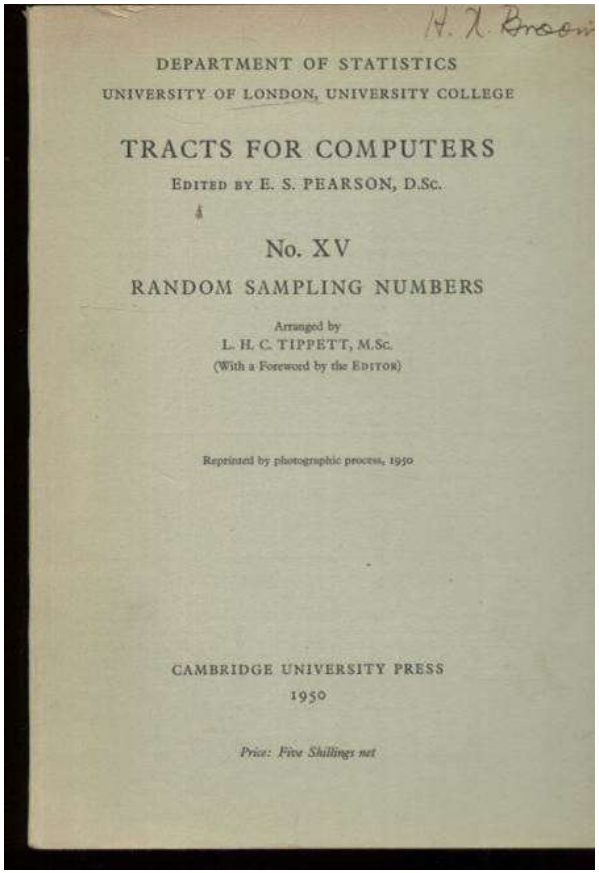
pokud $T_1 > T_2$ – zapíši 0
pokud $T_1 < T_2$ – zapíši 1

  - Šum elektronky/atmosféry
    - Random.org (1997)

Tabulky náhodných čísel

- Opravdu náhodná čísla
  - z fyzikálních generátorů
    - disk, CD nosič, páska
  - rozsáhlé soubory dat (tabulky)
    - 1927 – Tipper - 40 tis náhodných čísel
    - 1955 – RandCorp - 1 mil. náhodných čísel





Vypočítaná náhodná čísla

- Pseudonáhodná (kvazináhodná)
  - Algoritmus (posloupnost čísel), perioda P
  - náhodné číslo $\xi_{i+1} = f(\xi_i, \xi_{i-1}, \xi_{i-2}, \dots \xi_{i-n})$
- Von Neumannovy generátory
- Lineární kongruenční generátory
- Generátory s posuvnými registry
- Požadavky
  - co nejdelší perioda P
  - co největší náhodnost v rámci periody a rovnoměrné pokrytí
  - co největší rychlost generování čísla ξ_{i+1}

Vypočítaná náhodná čísla

- Von Neumannovy generátory (1946)
- „Každý, kdo se zabývá aritmetickými metodami vytváření náhodných čísel, se nepochybně dopouští hříchu“

- První známý generátor pseudonáhodných čísel
  - krátká perioda opakování náhodných čísel
  - řešil problém pomalého čtení náhodných čísel z děrných štítků pro počítač ENIAC
- Metoda prostředku čtverce (Middle-square)
  - (prostředních řádů druhé mocniny)
  - Zvolím počáteční číslo x_0 o $2k$ číslicích
  - Číslo se umocní
  - Z druhé mocniny se vybere prostředních 2k číslic
  - Získané číslo je dalším prvkem posloupnosti

Vypočítaná náhodná čísla

- Von Neumannovy generátory (1946)

x_0	x_0^2
1236	01527696

x_1	x_1^2
5276	27836176

x_2	x_2^2
8361	69906321

x_3	x_3^2
9063	81237969

- Krátká perioda P
- Malá náhodnost v rámci periody
- Pomalý proces generování

Lineární kongruenční generátory

- Historicky jeden z nejdůležitějších generátorů pseudonáhodných čísel
  - používán v mnoha implementacích novějších generátorů
    - např.: Park-Miller z C++11 standardní knihovny

- Princip:
  - 1. zvolíme parametr $\boldsymbol{M}$ (modulus)
    - prvočíslo nebo jeho mocninu
  - 2. zvolíme parametr $\boldsymbol{C}$ (inkrement)
    - pro $C = 0$ se nazývá generátor Lehmerův
  - 3. zvolíme parametr $\boldsymbol{a}$ (násobek)
  - 4. algoritmus vyžaduje semínko seed, které představuje první ξ_i
  - 5. další náhodné číslo ze vzorce: $\xi_{i+1} = (\boldsymbol{a} * \xi_i + \boldsymbol{C}) \bmod \boldsymbol{M}$

Lineární kongruenční generátory

- D. H. Lehmer (1948)

$$\xi_{i+1} = (a_0\xi_i + a_1\xi_{i-1} + \cdots + a_n\xi_{i-k} + b)(\mathrm{mod}\ M)$$

- Konstanty: a_j, b, M
  - vhodnou volbou konstant určujeme vlastnosti generátoru
  - $k > 0, \xi_i < M$
- Semínko (násada)
  - $\xi_0, \ldots, \xi_{-k} \qquad (i = 0)$
  - $\xi_1 = (a_0\xi_0 + a_1\xi_{-1} + \cdots + a_n\xi_{-k} + b)(\mathrm{mod}\ M)$
- **Stejná násada = stejná posloupnost čísel**

$$\xi_i = 0, 1, 2, \ldots, M{-}1, \qquad \xi_i = \frac{\xi_i}{M} \rightarrow \qquad \xi_i \in (0,1)$$

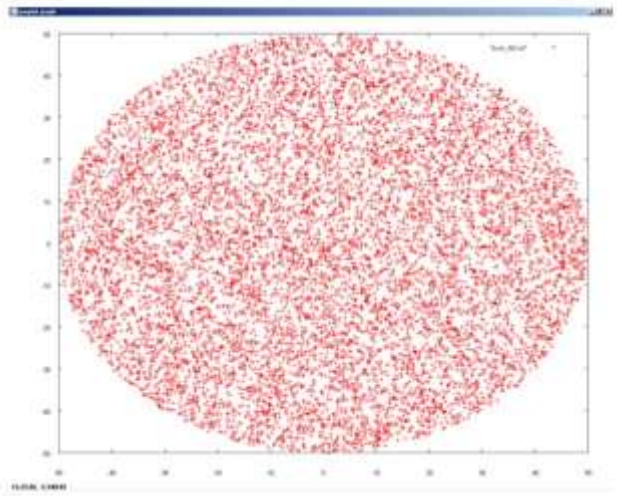
- Dělení
  - Multiplikativní generátory
  - Aditivní generátory
  - Smíšené generátory

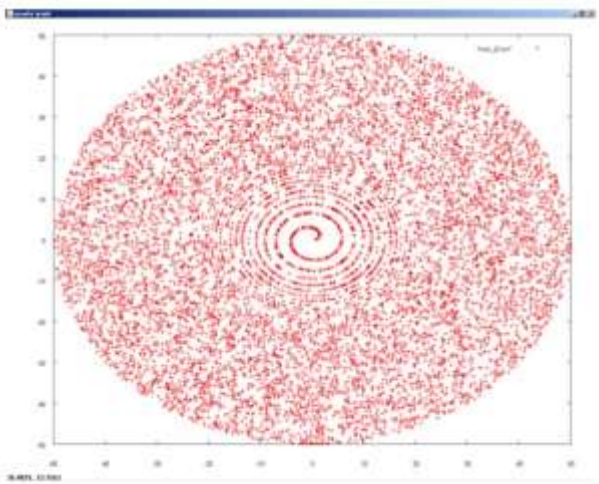
Multiplikativní LKG

- Multiplikativní generátory
  - velmi rychlé generování

D. H. Lehmer $\xi_{i+1} = a_0 \xi_i \pmod{M}$

- IBM 360: $\xi_{i+1} = 7^5 \xi_i \pmod{2^{31} - 1}$
- IBM 370: $\xi_{i+1} = 630360016\, \xi_i \pmod{2^{31} - 1}$
- Fortran: $\xi_{i+1} = 13^{13} \xi_i \pmod{2^{59}}$
- ZX SPECTRUM: $\xi_{i+1} = 75 \xi_i \pmod{65537}$
- RANDU: $\xi_{i+1} = a_0 \xi_i \pmod{2^{31}},\ a_0 = 1$
- jazyk BASIC (nevhodná volba konstant)





Aditivní LKG

- Aditivní generátory
  - $\xi_{i+1} = (\xi_{i-m} + \xi_{i-n}) (\mathrm{mod}\ M)$
- Vzniklé číslo ξ_{i+1} se otestuje
  - $\xi_{i+1} > M$: M odečteme
  - $\xi_{i+1} < M$: nic s číslem neděláme

- Fibonacciho generátor
  - využívá Fibonacciho posloupnost
    - předposlední a poslední hodnotu
  - $\xi_{i+1} = (\xi_i + \xi_{i-1}) (\mathrm{mod}\ M)$
- Opožděný Fibonacciho generátor (Mitchell, Moore, 1958)
  - využívá obecné hodnoty opožděnosti
    - nepoužívá se, ale jednoduchý
  - $\xi_{i+1} = \left(\xi_{i-j} + \xi_{i-k}\right) (\mathrm{mod}\ M)$
  - místo "+" může být jiná operace
    - $+ \ - \ * \ /$ ap.

Aditivní LKG

- Millerův-Prenticův generátor
  - $\xi_{i+1} = (\xi_{i-1} + \xi_{i-2n}) (\mathrm{mod}\ 3137) \qquad (P = 9.8 \cdot 10^6)$
- Další aditivní generátory
  - $\xi_{i+1} = (\xi_{i-5} + \xi_{i-17}) (\mathrm{mod}\ M)$

- Volba M ovlivňuje periodu generátoru
  - $M = 2^6 \quad \rightarrow \quad P = 1.6 \cdot 10^7$
  - $M = 2^{16} \quad \rightarrow \quad P = 4.3 \cdot 10^9$
  - $M = 2^{32} \quad \rightarrow \quad P = 2.8 \cdot 10^{14}$

Smíšené LKG

- Smíšené generátory
  - kombinují vlastnosti multiplikativního a aditivního
    - tak, aby došlo ke zlepšení vlastností

- $\xi_{i+1} = (a\xi_i + b)(\mathrm{mod}\ M)$

- $\xi_{i+1} = (69069\xi_i + 1)(\mathrm{mod}\ 2^{32})$

Minimal Standard

- Série pravidel (parametrů)
  - generátor má plnou periodu (rovnoměrné pokrytí)
    - vybraná subsekvence čísel je nerozeznatelná od celé, generované sekvence
  - generátor projde **testy spolehlivosti**
  - lze jej **efektivně** implementovat pomocí 32-bitové architektury

- Lewsi, Goodman, Miller (1969)
  - $\xi_{i+1} = a_0 \xi_i (\mathrm{mod}\, M), \qquad a_0 = 16807, \qquad M = 2^{31} - 1$
  - snadná implementace do vysokoúrovňových jazyků
  - seed generátor: $\xi_0 \in (1,\ 2^{31} - 1)$, jsou rovnocenné

Generátory pseudonáhodných bitů

- Posuvné registry
  - k ukládání a posouvání jednotlivých bitů
    - o jeden nebo více míst
    - vpravo nebo vlevo (shift right, shift left)
    - realizace pomocí kombinační logiky nebo speciálních posuvných instrukcí procesoru
  - jeden nebo více registrů
    - každý uchovává určitý počet bitů
- pro výpočet následujícího čísla se používá kombinace bitů z několika registrů
  - některé bity se mohou použít jako zpětná vazba do registru
- počáteční stav registrů = semínko
  - ovlivňuje celou posloupnost čísel
  - pokud se použije stejné, bude posloupnost stejná
- Vlastnosti
  - konečná perioda
  - jednoduchost
  - malá paměťová náročnost
  - rychlost

Lineární buněčné automaty

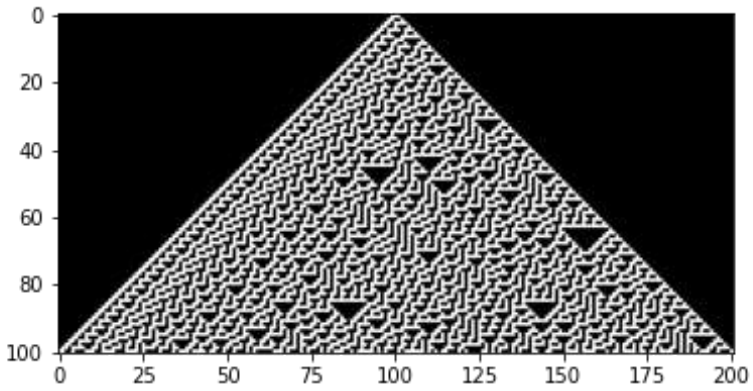
- Buněčný (celulární) automat
  - pravidelná struktura buněk v n-rozměrném prostoru
  - diskrétní v hodnotách, prostoru i čase
    - každá buňka může nabývat určitého počtu možných stavů (často jen 2)
  - její stav se mění v čase na základě pravidel
    - v závislosti na stavech sousedních buněk
- Lineární buněčný automat
  - buňky uspořádané do řetězce
  - každá buňka může nabývat pouze dvou stavů - 0 nebo 1
  - realizace pomocí posuvných registrů
    - umožňuje posouvat bity z jedné buňky na druhou (cyklicky)
  - nový stav kombinuje bity ze sousedních buněk a z posuvného registru
    - obv. pomocí logických operací (XOR, AND, OR)

Pravidlo 30

- Stephen Wolfram (1983)
  - název podle decimální reprezentace schémata binárních operací
- Pravidlo 30
  - jedno z nejzajímavějších výpočetních schémat základních automatů
    - pro aktualizaci stavu buněk v 1D buněčném automatu
  - vytváří automat, obsahující pseudonáhodné sekvence (aperiodické chaotické sekvence bitů).
- Vlastnosti
  - jednoduchá definice
  - přesto velmi komplexní a chaotické vzorce
    - použijeme jako náhodnou posloupnost

Pravidlo 30

- Princip
  - pro každou buňku vypočítá nový stav na základě stavů tří sousedících buněk v předchozí řadě
    - kombinace stavů buněk v aktuální a předchozí řadě
    - např. pokud má buňka sousedy 1, 0 a 0, její nový stav bude 1



111 → 0
110 → 0
101 → 0
100 → 1
011 → 1
010 → 1
001 → 1
000 → 0

- Postup
  - 1. Nastav prvotní řádek buněčného automatu na binární 0, prostředek na binární 1
  - 2. Proveď vývoj buněčného automatu do zvolené generace pomocí pravidla 30
  - 3. Vyber prostřední sloupec, přeskoč N bitů (semínko) a získej 8 binárních číslic
  - 4. Vytvoř z M binárních číslic poseudonáhodné číslo

Generátory s posuvnými registry

- S posuvnými registry s lineární zpětnou vazbou
  - posuvný registr délky L
    - L = $\{R_0, R_1, \ldots, R_{L-1}\}$ vnitřních registrů
    - časový signál
    - charakteristický mnohočlen C(x)

- Princip
  - v každém časovém okamžiku se:
    - obsah R_i přesune do R_{i-1}, R_0 se předá na výstup
    - do registru R_{L-1} se uloží (výpočtem) nový obsah
  - R_i uchovává jednu jednotku informace
    - Jeden bit (0,1), 2^n bitů (velikost slova / jednotka času)
  - vnitřní stav generátoru S = $\{S_0, \ldots, S_{L-1}\}$
  - charakteristický mnohočlen

$$C(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_L x^L$$

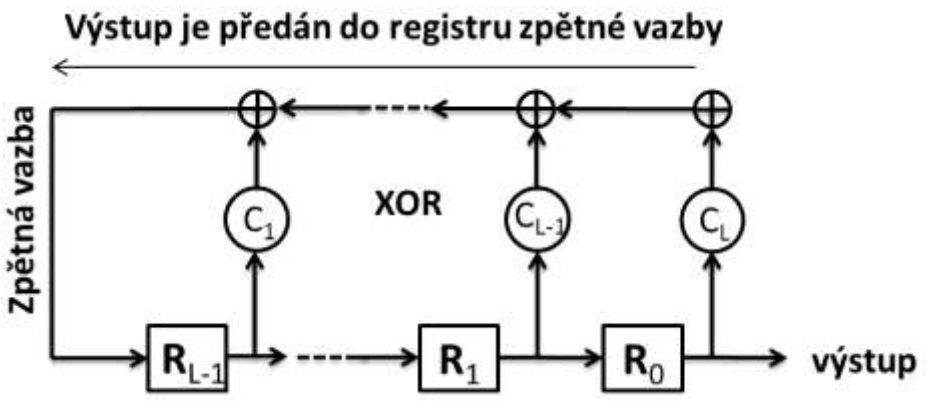
  - koeficienty: zbytek po dělení modulo
    - 1 – liché, 0 – sudé

Iniciace generátoru

Pozor na zakázané stavy logické funkce

Zacyklení generátoru

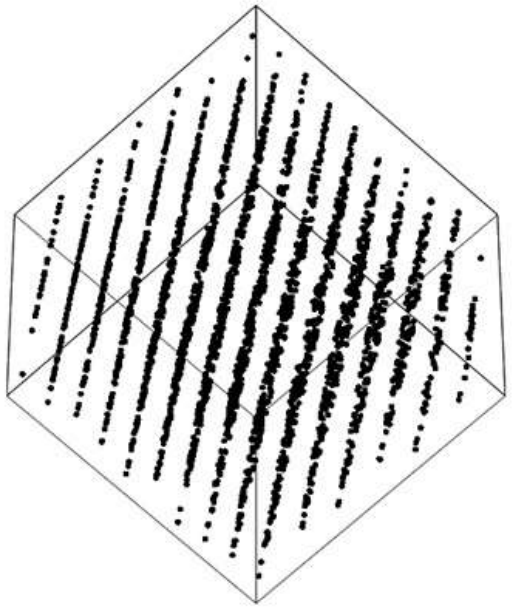
Iniciace pomocí LKG (Lehmer,…)



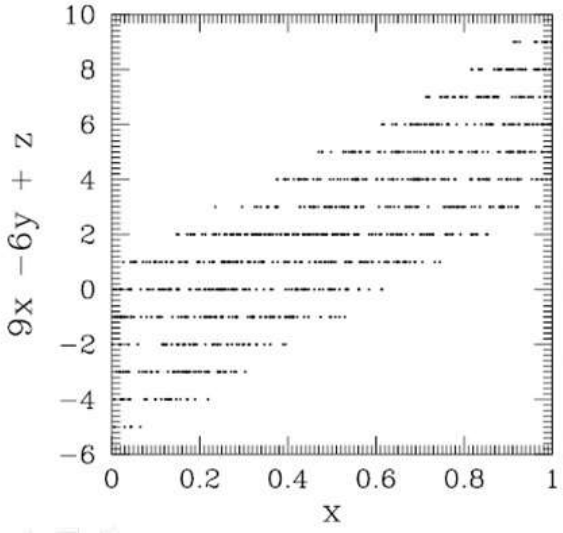
Marsaglia XORshift

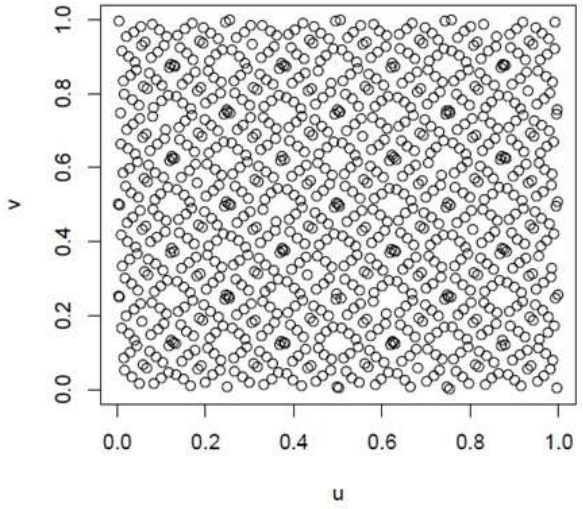
- George Marsaglia (2003)
  - na základě von Neumannova generátoru
- Užití operace XOR a bitového posunu
  - XOR (exkluzivní disjunkce)
    - logická operace, výstupem pravda, pokud vstupy unikátní
    - $A = (0,1,0,1), \quad B = (0,0,1,1), \quad A \oplus B = (0,1,1,0)$
  - logické shift (bitový posun)
    - levý posun: 001010111 → 010101110
    - pravý posun: 001010111 → 000101011
- Postup
  - bitové posuny (různé podle implementace)
    - např. Xorshift128 o 23, 17, 26 a 11 míst vlevo
  - posunuté bity se použijí pro XOR s jinými bity v registru
    - aby se vytvořil nový stav generátoru
    - aplikujeme XOR na vektor β (binární) s posunutou verzí sebe sama
    - $\beta >> a$ – bitový posuv doprava o a pozic
      - a je parametr generátoru
    - $\beta \oplus (\beta >> a)$ – XORshift vektoru β o a pozic doprava

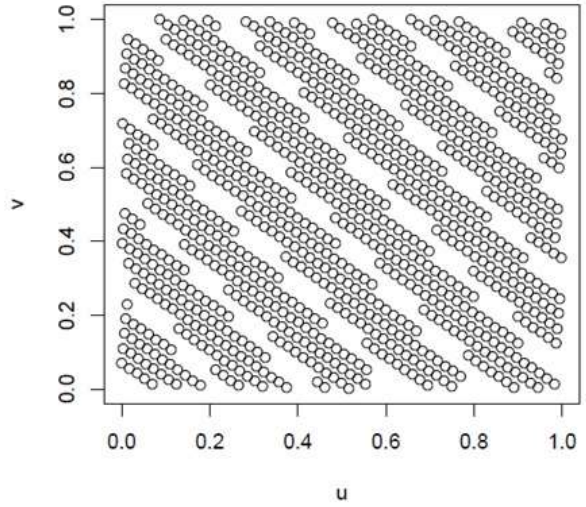
Marsaglia XORshift



- Produkuje sekvenci:
  - $2^{32} - 1$ x celých čísel
  - $2^{64} - 1$ x, y dvojic
  - $2^{96} - 1$ x, y, z trojic
- George Marsaglia (1924 - 2011)
  - americký matematik (statistik)
  - algoritmy: XORshift, Ziggurat, …
  - „Random numbers fall mainly in the planes.“
    - multiplikativní generátory: „Crystalline“ nature







Mersenne Twister

- Makoto Mastumoto, Takuji Nishimura, 1998
  - Mersenneho prvočíslo
    - prvočíslo o jedničku menší než mocnina 2, $M = 2^n - 1.$
    - $2^3 - 1 = 7$ (je prvočíslo), $M = 2^4 - 1 = 15$ (není prvočíslo)
  - www.mersenne.org
    - největší ověřené Mersenneho prvočíslo (r. 2021) 57 885 161 (48. Mersenneho prvočíslo),
    - r. 2006 32 582 657 (44.)

- Použití
  - dnes jeden z nejpoužívanějších
  - různé verze MT
    - nejvyužívanější verze (nastavení parametrů) MT19937
  - používá Python v modulu Random
  - dále R, Ruby, Free Pascal, PHP, Maple, MATLAB, GAUSS, Julia, Microsoft Visual C++,…
    - numpy jiný (PCG64 z roku 2014)

Mersenne Twister

- Založen na generátoru s posuvnými registry
  - polynom $C(x)$ s řádem P, stavový vektor x o velikosti w bitů
- Generuje stavový vektor x

$$x_{k+n} = x_{k+m} \oplus \left(x_k^u \mid x_{k+1}^l\right)A$$

  - x_n je stavový vektor v kroku n
  - x_k^u je subvektor složený z w-r levých bitů vektoru **x**
  - x_{k+1}^l je subvektor složený z w-r pravých bitů vektoru **x**
  - | představuje operaci zřetězení
    - "Hello" | "world" → "hello world"
  - A je transformační matice
  - $\oplus$ XOR
- Vlastnosti
  - velice dlouhá perioda
    - až $P = 2^{19937} - 1$
  - TinyMT (2012)
    - $P = 2^{512}$, ale méně zatěžuje procesor

Špatný Seed:
trvá dlouho, než začne generovat náhodnou sekvenci

Testy generátorů náhodných čísel

- Mějme uspořádanou k-tici náhodných celých čísel $n(k)$
- Testy náhodnosti
  - Statistické testy (chí kvadrát test)
  - Transformace (Hadamard, Marsaglia)
  - Komplexita (složitost)
    - Kolmogorovova komplexita: měří složitost k-tice podle počtu znaků, délky programu, který takovou k-tici vyprodukuje
- DIEHARD testy
- TESTU01

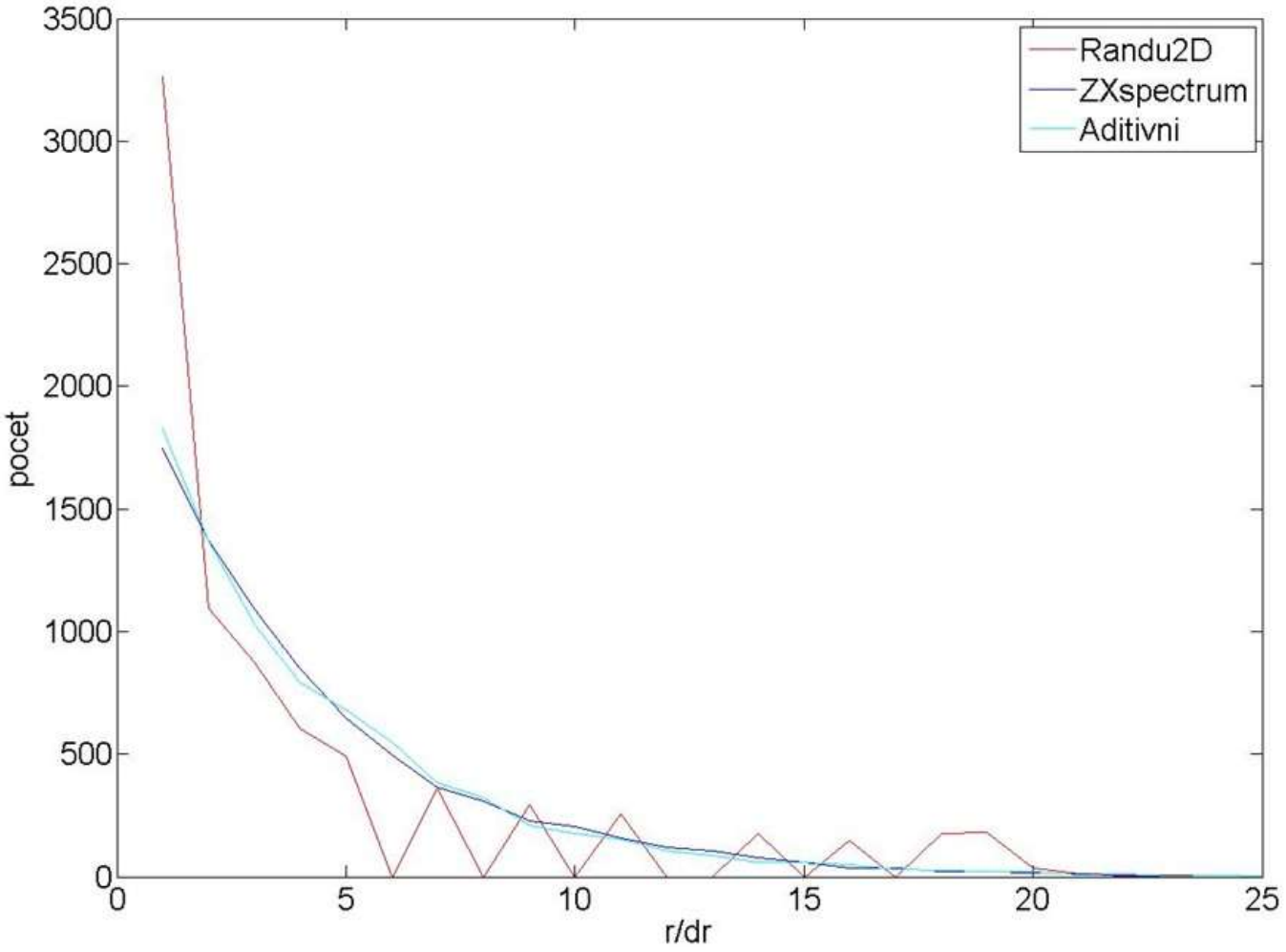
Testy generátorů náhodných čísel

- DIEHARD testy (Marsaglia 1995)
  - sada několika testů, např.
  - Birthday spacings
    - Vyberte náhodně dva body na generovaném intervalu, vzdálenost mezi těmito body podléhá exponenciálnímu rozdělení
  - Minimum distance test
    - Náhodně umístěte $n = 8\,000$ bodů do oblasti o velikosti 10 000 x 10 000 bodů, změřte vzdálenosti d mezi všemi $\frac{n(n-1)}{2}$ páry. Hledáme minimální vzdálenost. Veličina d^2 bude podléhat exponenciálnímu rozdělení se střední hodnotou 0.995
  - Runs test
    - Generujte reálná náhodná čísla na intervalu (0,1); počítejte kdy dojde k růstu čísla a kdy k poklesu, tyto počty splňují určité rozdělení
  - Parking lot test
    - Náhodně umístěte jednotkovou kružnici do čtverce o hraně 100 bodů; pokud se kružnice překrývají, zkuste to znovu; po 12,000 pokusech by počet úspěšně umístěných kružnic měl splňovat normální rozdělení
  - Count-the-1's test on a stream of bytes
    - Uvažuje řetězec bajtů. Každý bajt může obsahovat 0 až 8 jedniček s pravděpodobností $1/256$, $8/256$, $28/256$, $56/256$, $70/256$, $56/256$, $28/256$, $8/256$, $1/256$.
    - Nyní nechme vytvořit řetězec překrývajících se 5-písmenných slov. Každé písmeno nabývá hodnot A, B, C, D, a E. Písmena jsou určována počtem jedniček v bajtu: 0, 1 nebo 2 znamená A, 3 B, 4 C, 5 D a 6, 7 nebo 8 E. Takže je tu 55 možných 5-písmenných slov a v řetězce 256 000 (překrývajících se) 5-písmenných slov se spočítají výskyty jednotlivých slov

Testy generátorů náhodných čísel

- TestU01 (L'Ecuyer, Simard)
  - Knihovna v ANSI C.
  - Nástupce DIEHARD testů
  - Testy rozděleny na moduly
    - Implementace generátorů (předprogramované)
    - Implementace statistických testů
    - Implementace známých sad testů
    - Aplikace testů na generátor
    - SmallCrush, Crush, BigCrush: sady testů
  - Implementované generátory: http://simul.iro.umontreal.ca/indexe.html

Minimum distance test



Skutečná náhodná čísla

- Pseudonáhodná čísla
  - nemají zcela náhodnou distribuci
    - často lze odhadnout následné sekvence (např. neuronovou sítí)
  - problém (šifrovací aplikace, hry)
- Zařízení, která poskytují skutečně náhodná čísla
  - může být zpřístupněno webovými službami
- Generátory skutečně náhodných čísel
  - využívají nějaký fyzický nebo fyzikální fenomén
- Generátory založené na fyzických jevech
  - např. generování čísla ze sekvence pohybu myší nebo úhozů do klávesnice (či prodlevě mezi úhozy)
  - problémy
    - člověk může využívat podobný vzor pohybů a úhozů
    - komunikace s OS pomocí bufferů, které mohou náhodnost vyrušit

Skutečná náhodná čísla

- Generátory založené na fyzikálních jevech
  - lepší, ale finančně náročnější
- Nejčastější jevy
  - radioaktivní rozpad nuklidů
  - atmosférický šum
    - elektromagnetické vlnění v daném prostoru a čase
    - lze získat citlivou anténou
  - akustický tlak v místnosti (šum z hluku)
    - slabší generátory
    - problém s prediktivními jevy jako hluk z otáček větráku
- Využití externích webových služeb přes jejich rozhraní REST
  - levné, spolehlivé
  - např. random.org
    - data pro vygenerování náhodných číslic z atmosférického šumu
    - potřebujete získat API klíč
    - uvádíte v požadavku ve formátu JSON pomocí metody POST z HTTP protokolu
    - klíč můžete vygenerovat po registraci na stránce: https://accounts.random.org/create
    - při volbě developer licence je registrace zdarma, ale denní limit vygenerovaných čísel 1000

GENEROVÁNÍ JINÝCH ROZDĚLENÍ

Rozehrání náhodné veličiny

- Generování a transformace náhodné veličiny (rozehrání NV)

- Co umíme
  - generace náhodných čísel z rovnoměrného rozdělení
- Co potřebujeme
  - náhodnou veličinu X s jiným typem rozdělení
  - se zadanou hustotou pravděpodobnosti $f_X(x)$ či distribuční funkcí $F_X(x)$

- Metody
  - pro diskrétní NV
  - pro spojité NV
    - metoda inverzní funkce
    - metoda výběru
    - metoda superpozice

Rozehrání diskrétní náhodné veličiny

- Náhodná veličina (NV) X

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \qquad p_i = P(X = x_i)$$

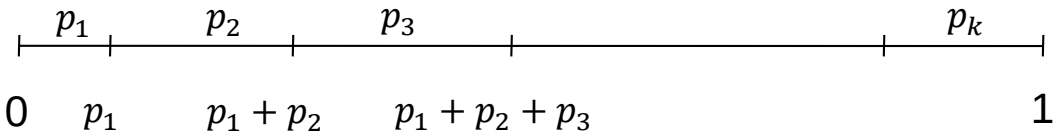
- Vytvoření vektoru (o n složkách)

$$(p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \dots, 1)$$

- Vygenerujeme číslo y z rovnoměrného rozdělení $R(0,1)$
- Určíme, do kterého intervalu padne interval a jemu odpovídající NV X
  - podle podmínky

$$y < \sum_{i=1}^{j} p_i$$

  - První interval j, pro který bude tato podmínka splněna, určí příslušnou hodnotu $X = x_j$

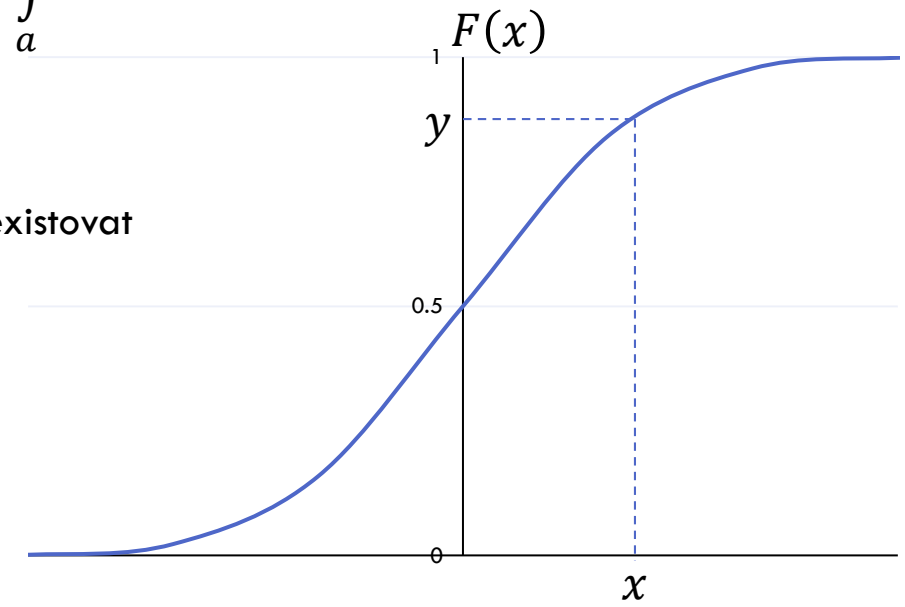


Rozehrání spojité náhodné veličiny

- Metoda inverzní funkce
  - hledáme NV X, hustota pravděpodobnosti $p(x)$, distr. funkce $F(x)$
  - náhodné číslo $y \in \langle 0,1 \rangle$ (z NV Y s rovnoměrným rozdělením $R(0,1)$)
  - potom náhodná veličina $X = F^{-1}(Y)$ má rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$

$$y = F(x) \implies x = F^{-1}(y)$$

$$\int_a^x p(x)dx = y$$

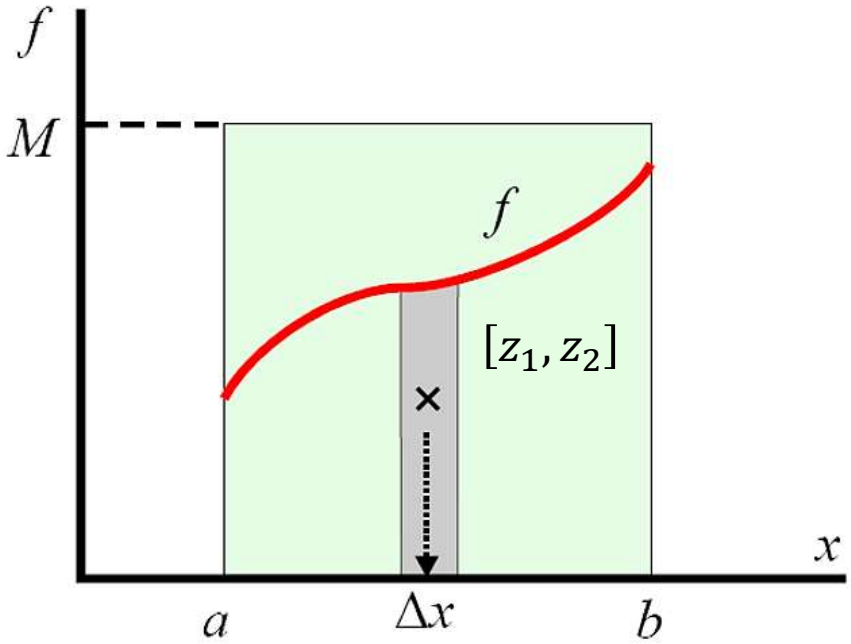


řešíme tuto rovnici, analytické řešení nemusí existovat
výsledkem transformační vztah $x = g(y)$

- např.
- $F(x) = \frac{x-a}{b-a} \implies x = y(b-a) + a$
- $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \implies x = -\frac{1}{\lambda} \ln y$

Rozehrání spojité náhodné veličiny

- Metoda výběru (von Neumannova)
  - vhodná, když nelze analyticky vyjádřit inverzní funkci
  - $p(x)$ veličiny X je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$
  - volíme $M \geq \sup\big(p(x)\big)$
  - generujeme dvě náhodná čísla veličiny Y: y_1, y_2 (rovnoměrné rozdělení)
  - $z_1 = a + y_1(b - a)$ (mezi a a b)
  - $z_2 = My_2$ (pod M)
  - pokud bod (z_1, z_2) leží pod křivkou $p(x)$, volíme $x = z_1$, jinak opakujeme



Rozehrání spojité náhodné veličiny

- Metoda superpozice (kompoziční)
  - hledáme NV X s distribuční funkcí $F(x)$ (složitou)
  - rozložíme $F(x)$ do tvaru

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i F_i(x)$$

    - $F_i(x)$ jsou distribuční funkce, p_i pravděpodobnosti
    - $p_1 + \cdots + p_m = 1, \qquad p_i > 0$
  - Zavedeme diskrétní NV Z s rozdělením

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

  - generujeme dvě nezávislé hodnoty y_1 a y_2 veličiny Y (rovnoměrné rozdělení)
  - rozehrajeme číslem y_1 hodnotu $Z = k; \qquad k = 1, \dots, m$ (číslo intervalu)
    - rozehrání diskrétní NV
  - z rovnice $F_k(x) = y_2$ určíme x
    - distribuční funkce veličiny X je rovna $F(x)$