东华大学 2020～2021 学年一元微积分(A 上)试卷（A 卷）

踏实学习，弘扬正气；诚信做人，诚实考试；作弊可耻，后果自负

课程名称 <u>**一元微积分(A 上)**</u> 使用专业 <u>全校 20 级</u>

教师________班号______班级__________姓名 ________学号 ________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、 填空题（每题 4 分，共 40 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\sin n}{n+\sin n}=$ ______;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ______;

3. 设 $f(u)$ 可导，且 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{x+1}$，则 $f'\left(\dfrac{1}{x}\right)=$ __________;

4. 设 $y=x^{3x}$， 则 $\mathrm{d}y=$ ______________;

5. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-k}{x}\right)^{-3x}=2$，则 $k=$ ____________;

6. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{x+1}\right)=$ _______;

7. 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的水平渐近线为__________;

8. 曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程为 _____________;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\sin x+\ln(1+x)}{x\sin^2 x}=$ __________;

10. 设 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $y^{(n)}=$ ______________.

二、单项选择题（每题 4 分，共 12 分）.

1．设函数 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}$ ，则（　　）；

A．有无穷多个第一类间断点　　　B.　有一个可去间断点

C.　有两个可去间断点　　　　　D.　有三个可去间断点

2．设 $f(x),g(x)$ 在点 x_0 处二阶可导，且 $f(x_0)=g(x_0)=0,\ f'(x_0)g'(x_0)<0$，则（　　）；

A．点 x_0 不是 $f(x)g(x)$ 的驻点

B．点 x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点，但不是极值点

C．点 x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点，且是它的极小值点

D．点 x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点，且是它的极大值点

3．当 $x\to 0$ 时，x^{α} 与 $1-e^{2x}\cos x\cos 2x$ 是同阶无穷小，则（　　）；

A．$\alpha=1$　　　　B．$\alpha=2$

C．$\alpha=3$　　　　D．$\alpha=4$

三、解下列各题（每题 6 分，共 24 分）

1.　已知点 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的一个拐点，试求 a,b 的值及曲线的凹凸区间.

2. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

3. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2+y^2=2xy^3$ 所确定的隐函数，求 $y'(1),\ y''(1)$.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2}{\ln(1+x)}$.

四、(10 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3^x} & x<1, \\ ax+b & x\geq 1,\end{cases}$ 问常数 a,b 分别取何值时，函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导？

五、(10 分)在一个底圆半径为 R，高为 H 的正圆锥体中作内接正圆柱，圆柱的一个底面位于锥体的底面上，求圆柱体的最大体积.

六、（4 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导 $(a>0)$. 证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $abf'(\xi)=\eta^2 f'(\eta)$. .