Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
Laboratorium 7
Singular Value Decomposition

29 marca 2023

Przydatne funkcje

- Matlab: `svd`, `plot3`, `scatter3`, `imread`, `imshow`, `rgb2gray`
- Python NumPy: `linalg.svd`, Python SciPy: `misc.imread`

Literatura

- *Marix Analysis and Applied Linear Algebra*, Carl D. Mayer, SIAM, 2000.
  - Singular Value Decomposition: rozdział 5.12

Zadanie 1 Przekształcenie sfery w elipsoidę

1. Korzystając z równania parametrycznego narysuj sferę jednostkową w 3D

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos(s)\sin(t) \\ \sin(s)\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$s \in [0, 2\pi],\ t \in [0, \pi]$$

2. Wygeneruj 3 różne macierze $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}$, ($\mathbf{A_i} \in \mathbb{R}^{3\times3}$), za ich pomocą dokonaj przekształcenia sfery w elipsoidę (mnożenie przez macierz), a następnie przedstaw wizualizację uzyskanego wyniku w 3D.

3. Dokonaj rozkładu według wartości osobliwych (SVD) każdej macierzy $\mathbf{A_i}$. Na wykresie elipsoidy odpowiadającej przekształceniu $\mathbf{A_i}$ dodaj wizualizację jej półosi wyznaczonych za pomocą SVD.

4. Wygeneruj taką macierz $\mathbf{A_i}$, aby stosunek jej największej i najmniejszej wartości osobliwej był większy od 100. Narysuj odpowiadającą jej elipsoidę.

5. Dla wybranej macierzy $\mathbf{A_i}$ przedstaw wizualizacje $\mathbf{S}\mathbf{V_i}^T$, $\mathbf{S}\mathbf{\Sigma_i}\mathbf{V_i}^T$ oraz $\mathbf{S}\mathbf{U_i}\mathbf{\Sigma_i}\mathbf{V_i}^T$, gdzie
$$\mathbf{A_i} = \mathbf{U_i}\mathbf{\Sigma_i}\mathbf{V_i}^T,$$
a $\mathbf{S}$ oznacza sferę z punktu 1 ($\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times 3}$).

Zadanie 2 Kompresja obrazu

1. Przygotuj przykładowe zdjęcie z skali szarości o rozmiarze co najmniej 512×512 pikseli (np. *Lenna image*)

2. Oblicz SVD macierzy pikseli $\mathbf{I}$, a następnie dokonaj przybliżenia tej macierzy za pomocą *low rank approximation* (k pierwszych wartości osobliwych) uzyskując kompresję obrazu wejściowego.
$$\mathbf{I}_a \simeq \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u_i}\mathbf{v_i}^T,$$
gdzie σ_i jest i-tą wartością osobliwą macierzy $\mathbf{I}$, $\mathbf{u_i}$ jest lewym wektorem osobliwym, $\mathbf{v_i}$ - prawym wektorem osobliwym, a $\mathbf{u_i}\mathbf{v_i}^T$ jest iloczynem zewnętrznym (*outer product*) dwóch wektorów.

3. Porównaj obraz wynikowy z obrazem źródłowym dla różnych wartości k (przedstawiając różnicę pomiędzy nimi w postaci zdjęcia oraz rysując wykres zależności $||\mathbf{I} - \mathbf{I}_a||$ od k).