

Отчёт о 3-ей лабораторной работе "Интерполирование функций"

1. Постановка задачи.

Необходимо по заданным в некоторых точках значениям функции приблизить её значение полиномом в области задания.

2. Методы решения.

2.1 Интерполяционный многочлен Лагранжа $P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} f(x_i)$,

где $\omega(x) = (x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_n)$ - полином степени $n+1$:

а. в равномерной сетке с n узлами и шагом $\Delta x_i = \frac{x_n-x_0}{n}$;

б. в корнях полинома Чебышева: $x_i = ((x_n - x_0) \cos(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}) + x_0 + x_n)$;

2.2 Интерполяционный многочлен Ньютона для (a, b) :

$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_0, x_1, \dots, x_i) \cdot (x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1})$, где $f(x_0, x_1, \dots, x_i)$

- разделённые разности i порядка.

3. Свойства методов.

Теорема Если функция $f(x)$ $n+1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то погрешность интерполирования функции $f(x)$ по ее значениям $f(x_i)$ в попарно различных точках x_0, x_1, \dots, x_n интервала $[a, b]$, интерполяционным полиномом $P_n(x)$ может быть представлена в следующем виде:

$$R_n(y) = f(y) - P_n(y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(y),$$

где $\xi \in [a, b]$, $\omega(y) = (y-x_0) \cdot (y-x_1) \cdot \dots \cdot (y-x_n)$.

Полином Ньютона удобно использовать, когда количество узлов интерполяции меняется. Полином Лагранжа проще и быстрее с вычислительной точки зрения.

4. Численные эксперименты:

$f = \cos x$ на $[0, 2\pi]$ для разбиения интервала $n_1 = 4$ и $n_2 = 7$;

По интерполяционным формулам вычислялись значения для 100 точек в промежутке $[0, 2\pi]$. По этим значениям построены графики интерполяционных многочленов. Интерполяционные полиномы, полученные в WolframAlpha, и графики этих полиномов соответствуют графикам, построенным по результатам вычислений.

Интерполяционный полином для равномерной сетки, $n=4$

$$-1.32523 \times 10^{-17} x^3 + 0.170979 x^2 - 1.07429 x + 1$$

Интерполяционный полином для корней полинома Чебышева, $n=4$

$$-0.0814534 x^3 + 1.1408 x^2 - 4.4784 x + 4.33559$$

Интерполяционный полином для равномерной сетки, $n=7$

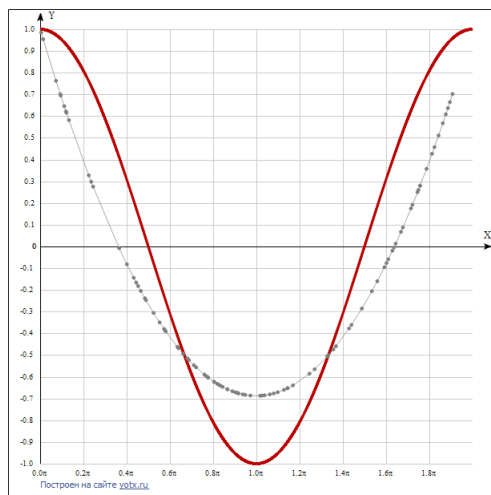
$$0.00105323 x^6 - 0.019853 x^5 + 0.115502 x^4 - \\ 0.145163 x^3 - 0.355845 x^2 - 0.0557254 x + 1$$

Интерполяционный полином для корней полинома Чебышева, $n=7$

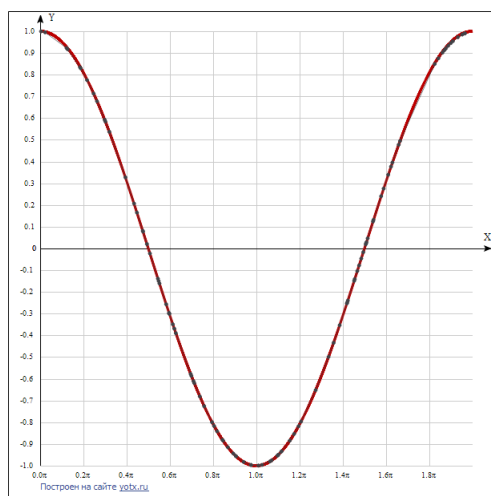
$$0.000966981 x^6 - 0.0182271 x^5 + 0.103968 x^4 - \\ 0.107197 x^3 - 0.412534 x^2 - 0.0266349 x + 1.0013$$

Результаты вычислений

Лагранж (полином для равномерной сетки) Красным обозначен график исходной функции, серым - интерполяционного полинома.

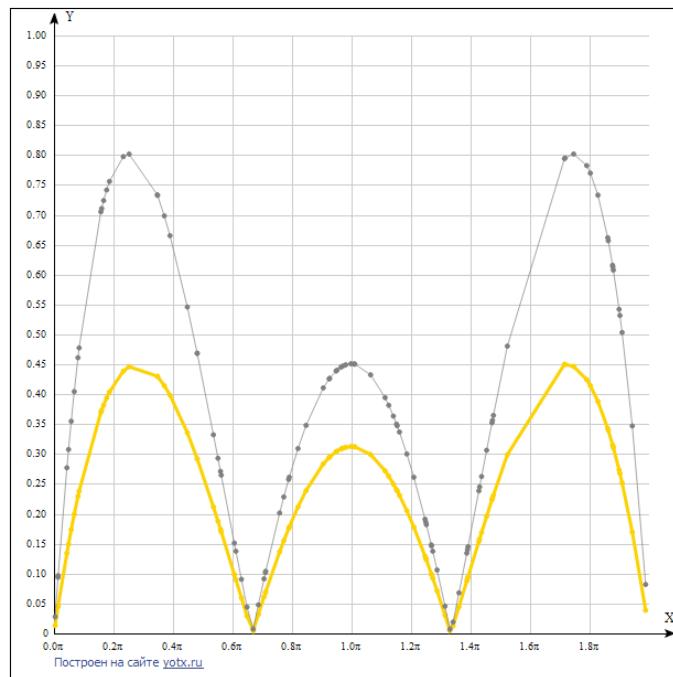


$n=4$

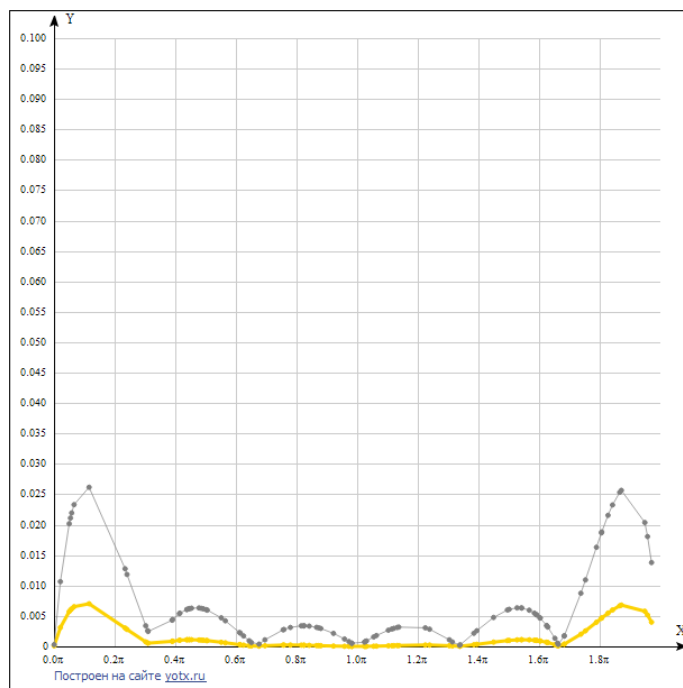


$n=7$

Погрешности приближенная (серый) + абсолютная(жёлтый).
 Абсолютная погрешность вычислялась по формуле $\varepsilon = |L_n(x) - f(x)|$.
 Относительная - по формуле из теоремы пункта 3.



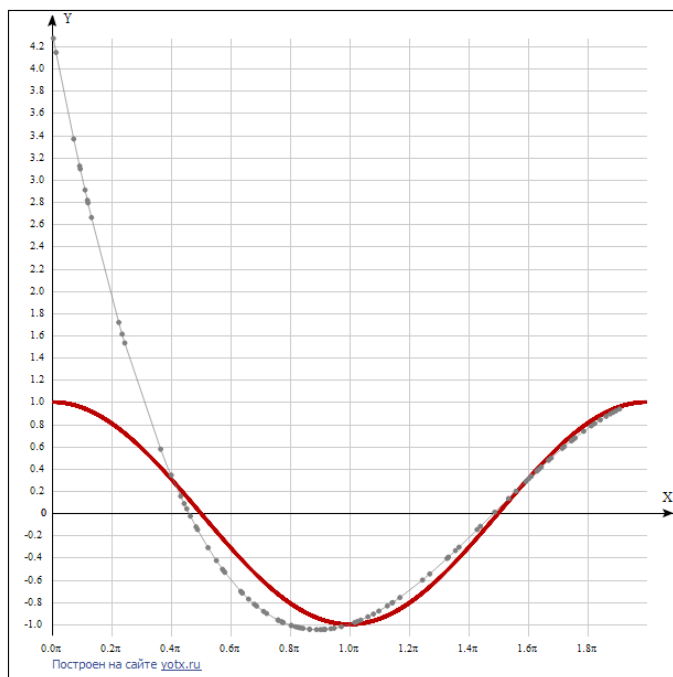
n=4



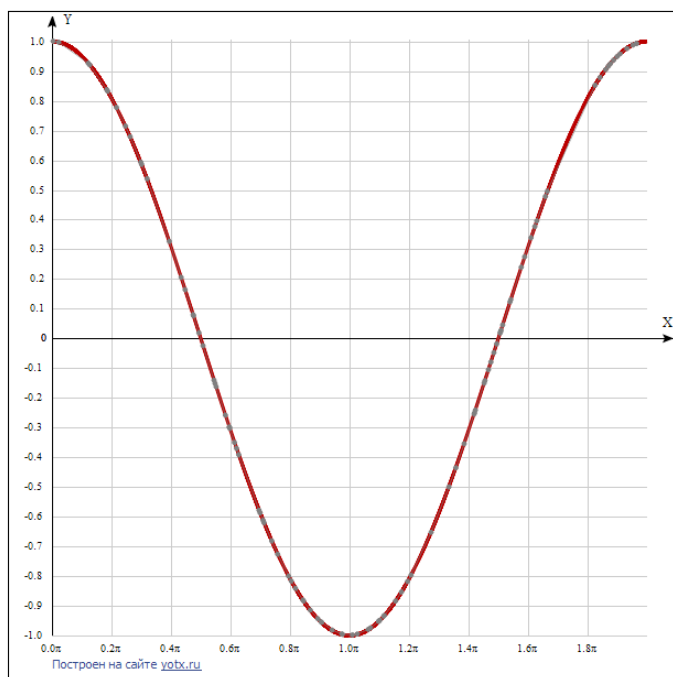
n=7

Лагранж (полином для корней полинома Чебышева)

Красным обозначен график исходной функции, серым - интерполяционного полинома.

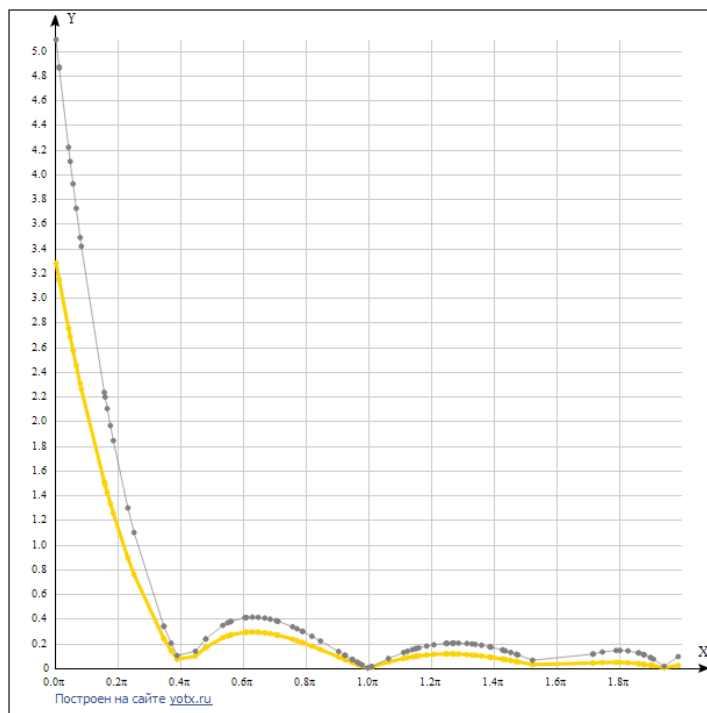


$n=4$

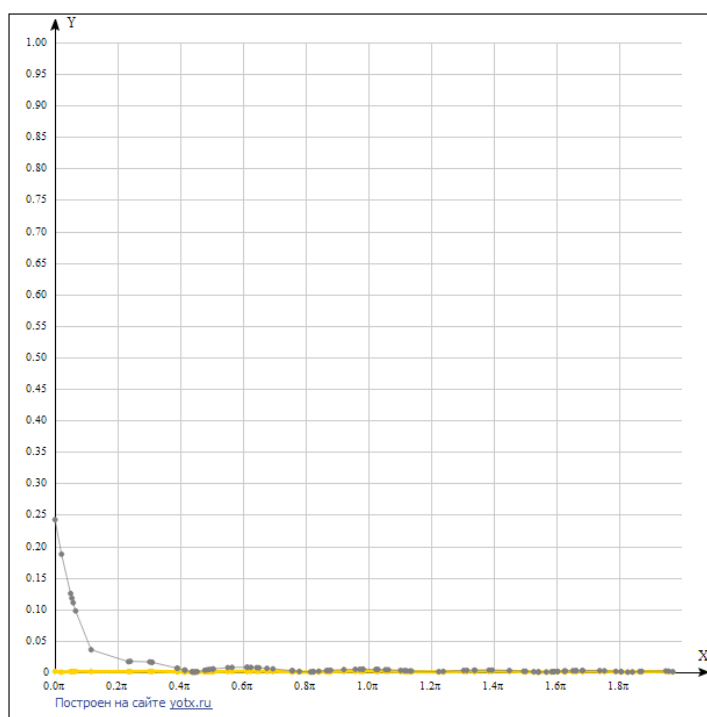


$n=7$

Погрешности приближенная (серый) + абсолютная(жёлтый).

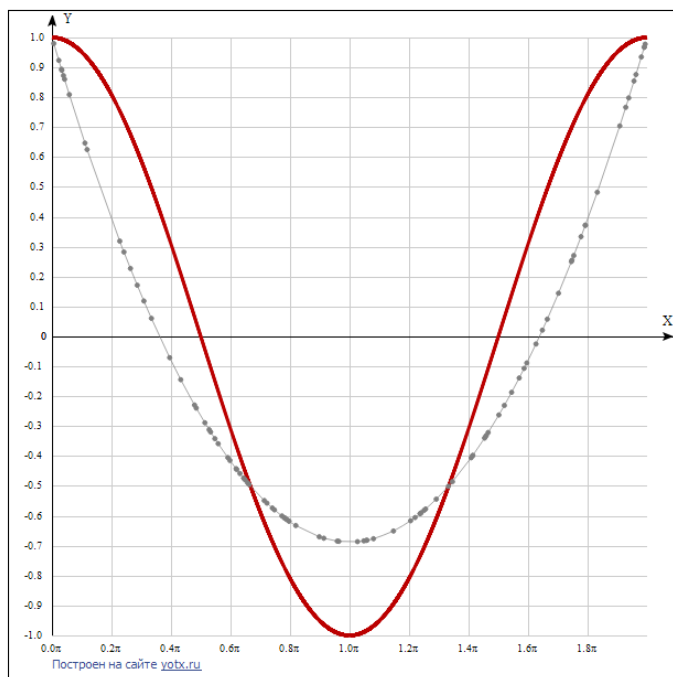


n=4

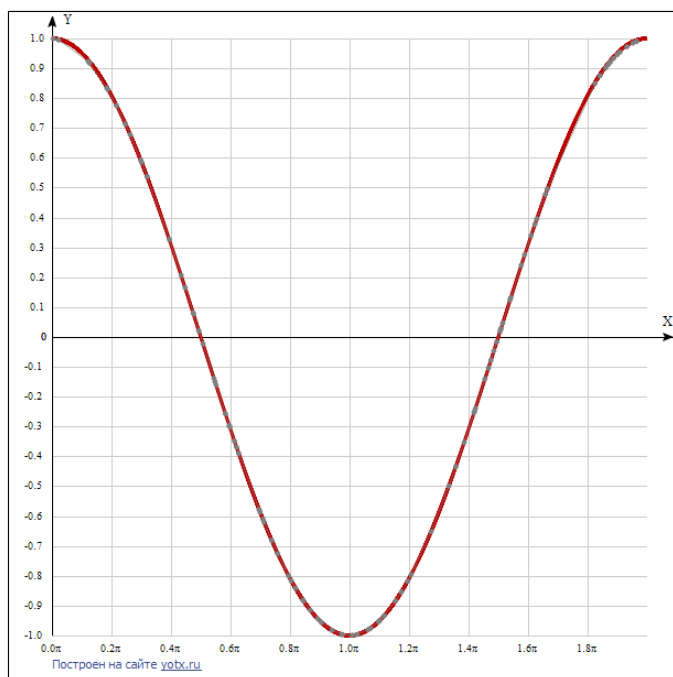


n=7

Ньютон(полином для равномерной сетки)
 Красным обозначен график исходной функции, серым -
 интерполяционного полинома.

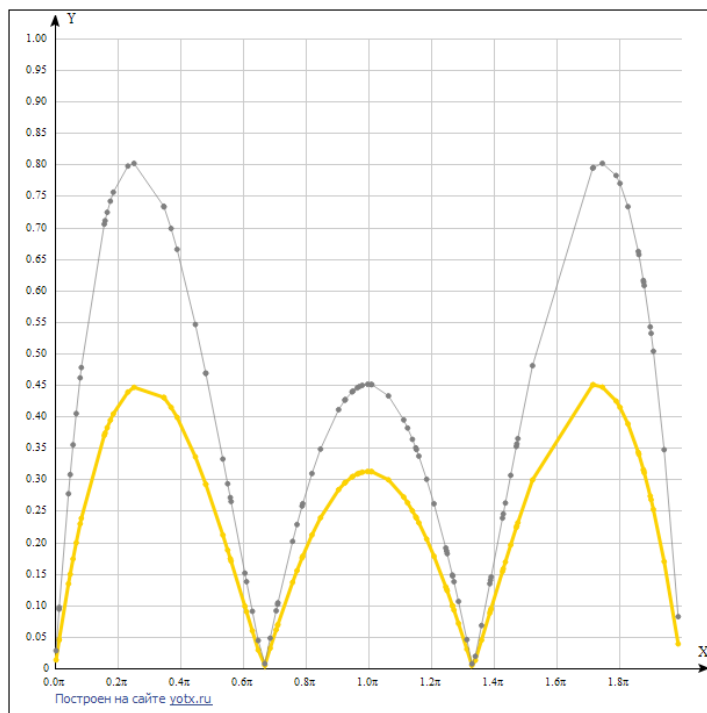


$n=4$

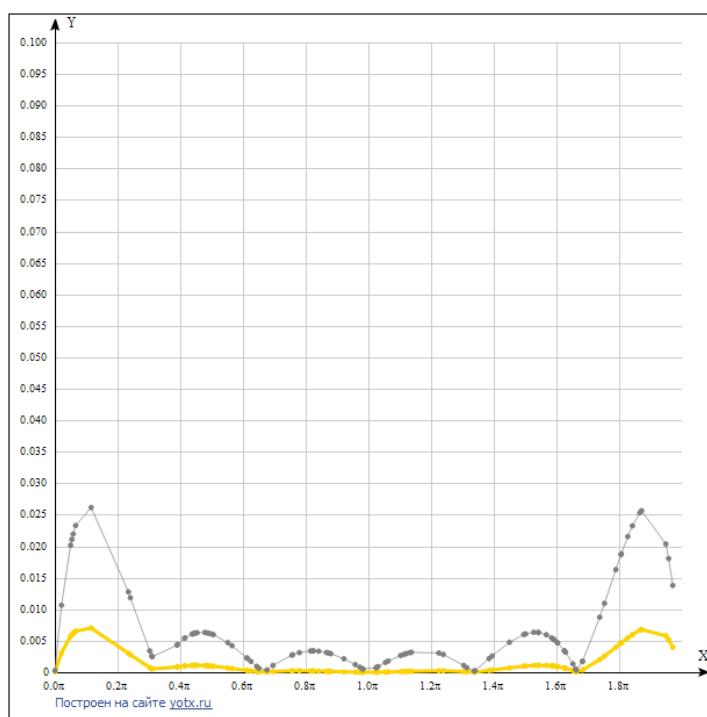


$n=7$

Погрешности приближенная (серый) + абсолютная(жёлтый).



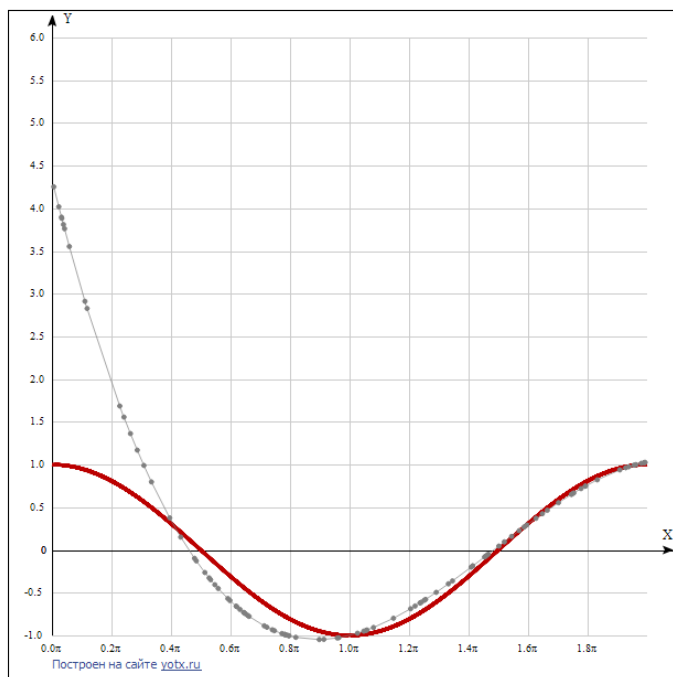
n=4



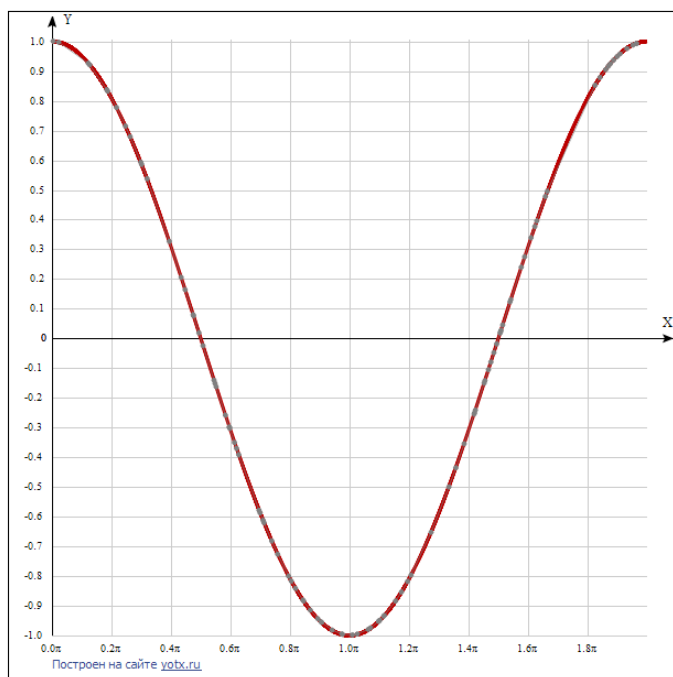
n=7

Ньютон (полином для корней полинома Чебышева)

Красным обозначен график исходной функции, серым - интерполяционного полинома.

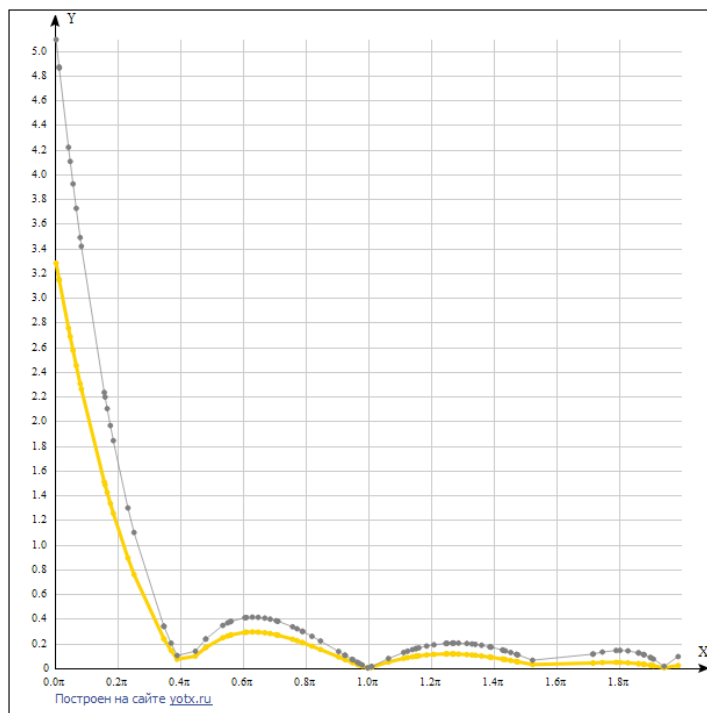


$n=4$

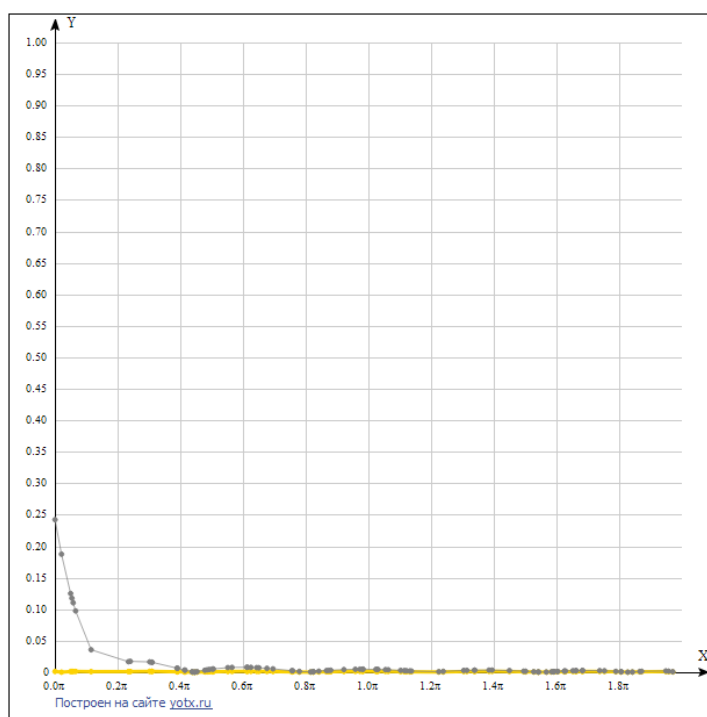


$n=7$

Погрешности приближенная (серый) + абсолютная(жёлтый).



n=4



n=7

По результатам численных экспериментов можно видеть, что выбор в качестве узлов интерполяции корней полинома Чебышева значительно уменьшает погрешность вычислений, но она возрастает около концов отрезка. Также погрешность уменьшается при увеличении количества узлов интерполяции.