1. а)

$$\begin{cases} \langle c, x\rangle + \sum\limits_{i=1}^n x_i \ln x_i \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n_{++}} \quad c\in\mathbb{R}^n \\ \sum\limits_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = \langle c, x\rangle + \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i + \lambda\left(\sum x_i - 1\right)$$

Найдём стационарные точки ф-ии Лагранжа

$$\nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) = c + \ln x + 1_n + \lambda 1_n = 0 \quad (\ln x = (\ln x_1, \dots, \ln x_n))$$

$$\ln x = -(1+\lambda)1_n - c$$

$$\ln x_i = -(1+\lambda) - c_i \quad i=\overline{1,n}$$

$$x_i = e^{-(1+\lambda)-c_i}$$

Поставим x в ограничение:

$$\sum_{i=1}^n e^{-(1+\lambda)-c_i} = 1$$

$$e^{-(1+\lambda)} \sum_{i=1}^n e^{-c_i} = 1$$

$$e^{1+\lambda} = \sum_{i=1}^n e^{-c_i}$$

$$\lambda = \ln\left(\sum_{i=1}^n e^{-c_i}\right) - 1$$

$$\Rightarrow x_i = e^{-(1+\ln(\sum_{i=1}^n e^{-c_i}) - 1) - c_i} \quad i=\overline{1,n}$$

$$x_i = e^{\ln\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n e^{-c_i}}\right) - c_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n e^{-c_i}} e^{-c_i}$$

Заметим, что задача является выпуклой:

$\exists\, g(x) = \sum\limits_{i=1}^n x_i \ln x_i$

Тогда
$$dg(x) = \sum_{i=1}^n d(x_i \ln x_i) = \sum_{i=1}^n \left(dx^i \ln x_i + x_i \frac{1}{x_i} dx^i\right) =$$

$$= \langle \ln x + 1_n, dx\rangle$$

$$d^2 g(x) = d(\langle \ln x + 1_n, dx_1\rangle) = dx_1^T \operatorname{diag}\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) dx_2$$

$$\nabla^2 g(x) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) > 0 \text{ при } x\in\mathbb{R}_{++}$$

$\Rightarrow g(x)$ – выпуклая

$\langle c, x\rangle$ – также выпуклая функция

$\Rightarrow \langle c, x\rangle + \sum\limits_{i=1}^n x_i \ln x_i$ выпукла как их положительно взвешенная сумма.

Ограничение-равенство задаётся аффинной функцией $\Rightarrow$ задача выпукла и выполнены условия регулярности

Т.к. задача выпукла $x^* = \frac{e^{-c}}{\sum e^{-c_i}}$ – точка глобального минимума.

в) $\begin{cases} \langle c, x \rangle \to \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \langle Ax, x \rangle \le 1 \end{cases}$

$A \in \mathbb{S}^n_{++}$, $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Как видим, задача является выпуклой

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \langle c, x \rangle + \lambda(\langle Ax, x \rangle - 1)$$

$$(*) \begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = c + 2\lambda Ax = 0 \\ \langle Ax, x \rangle \le 1 \\ \lambda \ge 0 \\ \lambda(\langle Ax, x \rangle - 1) = 0 \end{cases}$$

Найдём точки, удовлетворяющие условиям (*) из теоремы ККТ

Пусть $\lambda = 0 \Rightarrow c = 0$ — Противоречие с условием

$\Rightarrow \lambda > 0$ и $\langle Ax, x \rangle = 1$

Тогда $Ax = -\frac{1}{2\lambda} c$

$$x = -\frac{1}{2\lambda} A^{-1} c$$

$$\Rightarrow \langle A(-\tfrac{1}{2\lambda} A^{-1} c), -\tfrac{1}{2\lambda} A^{-1} c \rangle = 1$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} \langle c, A^{-1} c \rangle = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\langle c, A^{-1} c \rangle}$$

$$(A \in \mathbb{S}^n_{++} \Rightarrow A^{-1} \in \mathbb{S}^n_{++} \Rightarrow \langle c, A^{-1} c \rangle > 0)$$

$$\Rightarrow x^* = -\frac{1}{\sqrt{\langle c, A^{-1} c \rangle}} A^{-1} c$$

Проверим усл-е регулярности LICQ.
Имеется всего одно активное ограничение
$\Rightarrow$ для независимости градиентов активных ограничений остаётся проверить, что его градиент $\ne 0$

$\nabla(\langle Ax, x \rangle - 1)\big|_{x = x^*} = 2Ax^* \ne 0$, т.к. $x^* \ne 0$ и A – невырожденная
$x^* \ne 0$, т.к. $c \ne 0$ и A^{-1} – невыр.

Т.к. задача выпукла,

$x^* = -\frac{1}{\sqrt{\langle c, A^{-1} c \rangle}} A^{-1} c$ – точка глоб. минимума

Ответ

1c) $\begin{cases} f(x) = \langle Bx, x\rangle \to \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \langle Ax, x\rangle \leq 1 \end{cases}$

$A \in S^n_{++},\ B \in S^n_+$

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = \langle Bx, x\rangle + \lambda(\langle Ax, x\rangle - 1)$$

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) = 2Bx + 2\lambda A x = 0 \\ \langle Ax, x\rangle \leq 1 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(\langle Ax, x\rangle - 1) = 0 \end{cases}$$

$\rfloor\ \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} Bx = 0 \\ \langle Ax, x\rangle \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \operatorname{Ker} B \\ \langle Ax, x\rangle \leq 1 \end{cases}$

$\rfloor\ \lambda > 0 \Rightarrow \begin{cases} (B + \lambda A)x = 0 \\ \langle Ax, x\rangle = 1 \end{cases}$

$B + \lambda A > 0 \Rightarrow$ Первое уравнение имеет только нулевое решение, но $\langle A0, 0\rangle \neq 1$

$\Rightarrow$ при $\lambda > 0$ решения нет

Если $\operatorname{Ker} B \neq 0$, для $x \neq 0$ из $\operatorname{Ker} B$ можно применить условие рег-ти LICQ как в 1b.

Для $x = 0$ можно применить условие Слейтера

Ответ: $x^* \in \{x \in \operatorname{Ker} B \mid \langle Ax, x\rangle \leq 1\}$

2. a) $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i} \to \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n_{++}} \\ \langle a, x \rangle \leq b \end{cases}$ – аффинная => вып-ное условие рег-ти

$a, c \in \mathbb{R}^n_{++}, \; b > 0$

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i} + \lambda(\langle a, x \rangle - b)$$

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = -\frac{c}{x^2} + \lambda a = 0 \\ \langle a, x \rangle \leq b \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(\langle a, x \rangle - b) = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0 \Rightarrow -\frac{c}{x^2} = 0 \Rightarrow$ противоречие

$\lambda > 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{c}{x^2} + \lambda a = 0 \\ \langle a, x \rangle = b \end{cases}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{c_i}{x_i^2 a_i} \quad i = \overline{1, n}$$

$$x_i = \sqrt{\frac{c_i}{\lambda a_i}}$$

$$\sum_i a_i x_i = \sum_i a_i \sqrt{\frac{c_i}{\lambda a_i}} = \sum_i \sqrt{\frac{a_i c_i}{\lambda}} = b$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\sum_i \sqrt{a_i c_i}}{b} \Rightarrow \lambda = \frac{\left(\sum_i \sqrt{a_i c_i}\right)^2}{b^2}$$

$$x_i = \sqrt{\frac{c_i}{a_i}} \cdot \frac{b}{\sum_j \sqrt{a_j c_j}}$$

$\nabla^2 \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i} \right) = \operatorname{diag}\left(\frac{2c}{x^3}\right) \succ 0$ при $x \in \mathbb{R}^n_{++}$

=> задача является выпуклой и необх. условия ККТ явл-ся достаточными

Ответ: $x_i^* = \sqrt{\frac{c_i}{a_i}} \cdot \frac{b}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{a_i c_i}}$. x^* – глоб. минимум и он единственен

2в) $\begin{cases} \mathrm{Det}(X) \to \max\limits_{X \in S_{++}^n} \\ \langle A, X\rangle \le b \end{cases}$

$A \in S_{++}^n$, $b > 0$

Переформулируем задачу:

$\begin{cases} -\ln \mathrm{Det}(X) \to \min\limits_{X \in S_{++}^n} \\ \langle A, X\rangle \le b \end{cases}$

Приведём доказательство вогнутости $\ln \mathrm{Det}(X)$ на S_{++}^n из Convex Optimization Boyd'а.

$\rfloor f(X) = \ln \mathrm{Det}(X)$

Рассмотрим $X = Z + tV$, $Z \in S_{++}^n$, $V \in S^n$

t пробегает такие значения, что $X = Z + tV > 0$.

Т.к. S_{++}^n открыто, можем считать, что 0 лежит внутри отрезка, пробегаемого t.

$g(t) = f(Z + tV)$

$g(t) = \log \mathrm{Det}(Z + tV) = \log \mathrm{Det}(Z^{\frac{1}{2}}(I + tZ^{-\frac{1}{2}}VZ^{-\frac{1}{2}})Z^{\frac{1}{2}}) = \log \mathrm{Det}(I + tZ^{-\frac{1}{2}}VZ^{-\frac{1}{2}}) + \log \mathrm{Det}(Z) =$

$= \log \mathrm{Det}(I + tZ^{-\frac{1}{2}}VZ^{-\frac{1}{2}})$

$= \left[Z^{-\frac{1}{2}}VZ^{-\frac{1}{2}} \overset{\text{спек. разложение}}{=\!=} Q^T \Lambda Q \right] =$

$= \log \mathrm{Det}(I + tQ^T \Lambda Q) + \log \mathrm{Det}(Z) =$

$= \log \mathrm{Det}(Q^T(I + t\Lambda)Q) + \log \mathrm{Det}(Z) =$

$= \log \mathrm{Det}(I + t\Lambda) + \log \mathrm{Det}(Z) = \log\left(\prod\limits_{i=1}^n (1 + t\lambda_i)\right) + \log \mathrm{Det}(Z)$

$= \sum\limits_{i=1}^n \log(1 + t\lambda_i) + \log \mathrm{Det}(Z)$

$g'(t) = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 + t\lambda_i}$

$g''(t) = -\sum\limits_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{(1 + t\lambda_i)^2} < 0 \Rightarrow g$ — строго вогнута в 0

В силу произвольности $Z \in S_{++}^n$ и „направления прямой" $V \in S^n$, мы получаем, что $f(X)$ локально строго вогнута в каждой точке S_{++}^n

$\Rightarrow f(X)$ строго вогнута на S_{++}^n

2в) (продолжение)

Итак $-\ln \mathrm{Det}(X)$ – выпуклая функция,

$\langle A, X\rangle - 6$ – аффинная функция

$$\Rightarrow \begin{cases} -\ln \mathrm{Det}(X) \to \min\limits_{X\in S^n_{++}} \\ \langle A, X\rangle - 6 \le 0 \end{cases}$$ – выпуклая задача

$$\mathcal{L}(X,\lambda) = -\ln \mathrm{Det}(X) + \lambda(\langle A, X\rangle - 6)$$

Условия ККТ:

$$\begin{cases} D_X \mathcal{L}(X,\lambda) = -X^{-1} + \lambda A = 0 \\ \langle A, X\rangle \le 6 \\ \lambda \ge 0 \\ \lambda(\langle A, X\rangle - 6) = 0 \end{cases}$$

$$d(\ln \mathrm{Det}(X)) = \frac{1}{\mathrm{Det}(X)} d(\mathrm{Det}(X)) = \frac{1}{\cancel{\mathrm{Det}(X)}} \cancel{\mathrm{Det}}(X) \langle \underbrace{X^{-T}}_{= X^{-1} \text{ т.к. } X\in S^n_{++}}, dX\rangle$$

$\lambda = 0 \Rightarrow X^{-1} = 0$ Противоречие, т.к. $X \in S^n_{++}$

$$\lambda > 0 \Rightarrow \begin{cases} X^{-1} = \lambda A, \\ \langle A, X\rangle = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{\lambda} A^{-1} \\ \underbrace{\mathrm{tr}\left(\frac{1}{\lambda} A A^{-1}\right)}_{\frac{n}{\lambda}} = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{n}{6} \Rightarrow X^* = \frac{6}{n} A^{-1}$$

Т.к. задача является выпуклой,

X^* – глобальный минимум.

(соответственно максимум исход. задачи)

Ответ: $X^* = \frac{6}{n} A^{-1}$ и это решение единственно.

2c) $\begin{cases} Tr(X^{-1}) \to \min\limits_{X \in S^n_{++}} & \leftarrow \text{выпуклая, покажем ниже} \\ \langle A, X \rangle \leq b & \leftarrow \text{аффинная} \Rightarrow \text{задача выпуклая} \end{cases}$

$A \in S^n_{++}$, $b > 0$

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = Tr(X^{-1}) + \lambda(\langle A, X \rangle - b)$$

$$\begin{cases} \nabla_X \mathcal{L}(X, \lambda) = -X^{-2} + \lambda A = 0 \\ \langle A, X \rangle \leq b \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(\langle A, X \rangle - b) = 0 \end{cases}$$

$$d(Tr(X^{-1})) = Tr(d(X^{-1})) = Tr(-X^{-1} dX X^{-1}) = Tr(-X^{-2} dX) =$$
$$= \langle (-X^{-2})^T, dX \rangle = [X \in S^n_{++}] = \langle -X^{-2}, dX \rangle$$

$\lambda = 0 \Rightarrow X^{-2} = 0$ — противоречие с $X \in S^n_{++}$

$\lambda > 0 \Rightarrow \quad X^{-2} = \lambda A$

$X^{-1} = \sqrt{\lambda} \sqrt{A}$ — для $A \in S^n_{++}$ однозначно извлекается положительно определённый корень

$X = \lambda^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}}$

$$\langle A, \lambda^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} \rangle = b$$
$$\lambda^{-\frac{1}{2}} Tr(A A^{-\frac{1}{2}}) = b \qquad \Rightarrow X^* = \frac{b}{Tr(\sqrt{A})} A^{-\frac{1}{2}}$$
$$\lambda^{-\frac{1}{2}} Tr(\sqrt{A}) = b$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{tr^2(\sqrt{A})}{b^2}$$

Ответ: $X^* = \frac{b}{Tr(\sqrt{A})} A^{-\frac{1}{2}}$ — глоб. минимум, и он единственен

2c) (продолжение)

Утв. $\operatorname{Tr}(X^{-1})$ – выпуклая функция.

∇ Воспользуемся техникой, применённой в 2в.

$$g(t) := \operatorname{Tr}\left((Z+tV)^{-1}\right), \quad Z \in S^n_{++}, \; V \in S^n.$$

Будем рассматривать t из окрестности 0, такие, что $tZ^{-1}V$ имеет все собств. зн-я $|\lambda_i(tZ^{-1}V)| < 1$, $i=\overline{1,n}$

Тогда можем разложить $(Z+tV)^{-1}$ в ряд:

$$(Z+tV)^{-1} = Z^{-1}(I+tZ^{-1}V)^{-1} =$$
$$= Z^{-1}\left(I + tZ^{-1}V + t^2(Z^{-1}V)^2 + \dots\right)$$

$$\Rightarrow g''(t) = \left(\operatorname{Tr}\left(Z^{-1}(I + tZ^{-1}V + t^2(Z^{-1}V)^2 + \dots)\right)\right)'' =$$
$$= \operatorname{Tr}\left(2Z^{-1}(Z^{-1}V)^2 + \dots\right)$$

$$g''(0) = \operatorname{Tr}(2Z^{-2}VZ^{-1}V) = 2\operatorname{Tr}(Z^{-1}VZ^{-1}VZ^{-1}) =$$

$$\cancel{= \left[(Z^{-1}V)^T = V^T Z^{-T} = VZ^{-1}\right] = 2\operatorname{Tr}\left((VZ^{-1})^T Z^{-1} V Z^{-1}\right) =}$$

$$\cancel{= \left[C = VZ^{-1}\right] = 2\operatorname{Tr}(C^T Z^{-1} C)}$$

$$= \left[Z^{-1} = Q^T \underbrace{\Lambda}_{\text{диагональная}\; \geq 0} Q\right] = 2\operatorname{Tr}(Z^{-1}VQ^T \Lambda QVZ^{-1}) =$$

$$= \left[(QVZ^{-1})^T = Z^{-T}V^TQ^T = Z^{-1}VQ^T, \; QVZ^{-1} = C\right] = 2\operatorname{Tr}(C^T \Lambda C) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle c_i, c_i \rangle \geq 0$$

В силу произвольности Z и V получаем вып-ть $\operatorname{Tr}(X^{-1})$ на S^n_{++} $\triangle$

3. $$\begin{cases} \operatorname{Det}(X) \to \max\limits_{X \in S^n_{++}} \\ \|Xe_i\| \le 1 \quad i = \overline{1,n} \end{cases}$$

$\langle x, x \rangle$ – выпуклая функция,

таким образом, $\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 \le \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2$

отсюда $\|\alpha Xe + (1-\alpha)Ye\|^2 \le \alpha\|Xe\|^2 + (1-\alpha)\|Ye\|^2$

$\Rightarrow g_i(X) = \|Xe_i\|^2 - 1$ – выпуклые функции

Перейдём к следующей задаче:

$$\begin{cases} -\ln \operatorname{Det}(X) \to \min\limits_{X \in S^n_{++}} \\ \|Xe_i\|^2 \le 1 \quad i = \overline{1,n} \end{cases}$$

строго выпуклая функция (выпуклость $\ln \operatorname{Det}(X)$ показана в 2в)

$\Rightarrow$ задача является выпуклой

$$\mathcal{L}(X, \lambda) = -\ln \operatorname{Det}(X) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\langle Xe_i, Xe_i \rangle - 1)$$

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{L}(X, \lambda) = -X^{-1} + 2\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i X e_i e_i^T = 0 \\ \|Xe_i\|^2 \le 1 \quad i = \overline{1,n} \\ \lambda_i \ge 0 \quad i = \overline{1,n} \\ \lambda_i (\|Xe_i\|^2 - 1) = 0 \quad i = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$d(\langle Xe_i, Xe_i \rangle) = 2\langle Xe_i, dXe_i \rangle = 2 e_i^T X^T dX e_i =$$

$$= 2\operatorname{Tr}(e_i^T X^T dX e_i) = 2\operatorname{Tr}(e_i e_i^T X^T dX) =$$

$$= 2\operatorname{Tr}((Xe_i e_i^T)^T dX) = \langle 2Xe_i e_i^T, dX \rangle$$

Попробуем $X = I$ – допустимая точка.

Остаётся проверить, найдутся ли двойственные переменные λ

$\nabla \mathcal{L}(I, \lambda) = -I + 2\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \Rightarrow \lambda_i = \frac{1}{2} \quad i = \overline{1,n}$

Градиенты ограничений $\nabla_X (\|Xe_i\|^2 - 1)\big|_{X=I} = 2e_i e_i^T$ линейно независимы

$\Rightarrow$ вып-но условие рег-ти LICQ.

Задача выпукла $\Rightarrow I$ – глобальный оптимум, и он единственен

целевая ф-я строго выпукла

I - единственное решение, т.к. задача является выпуклой со строго выпуклой целевой функцией.

Следствие.

$$\mathrm{Det}(X) = \|Xe_1\| \ldots \|Xe_n\| \, \mathrm{Det}(X') \leq \|Xe_1\| \ldots \|Xe_n\|$$

Мы воспользовались полилинейностью детерминанта.

X' - матрица со столбцами $\dfrac{Xe_i}{\|Xe_i\|}$.

Таким образом $\|X'e_i\| \leq 1 \Rightarrow \mathrm{Det}(X') \leq \mathrm{Det}(I) = 1$

$$\Rightarrow \mathrm{Det}(X) \leq \|Xe_1\| \ldots \|Xe_n\|$$

4. $$\begin{cases} \langle C^{-1}, X \rangle - \ln \operatorname{Det}(X) \longrightarrow \min\limits_{X \in S^n_{++}} \\ \langle Xa, a \rangle \leq 1 \text{ — аффинное ограничение} \end{cases}$$

$C \in S^n_{++}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(X, \lambda) = \langle C^{-1}, X \rangle - \ln \operatorname{Det}(X) + \lambda(\langle Xa, a \rangle - 1) \\ \nabla_X \mathcal{L}(X, \lambda) = C^{-1} - X^{-1} + \lambda a a^T = 0 \\ \langle Xa, a \rangle \leq 1 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda(\langle Xa, a \rangle - 1) = 0 \end{cases}$$

$\nabla(\langle Xa, a \rangle - 1) = aa^T \neq 0 \Rightarrow$ вып. усл-я рег-ти

$\lambda = 0 \Rightarrow X = C$ — решение, если $\langle Ca, a \rangle \leq 1$

$\lambda > 0 \Rightarrow X^{-1} = C^{-1} + \lambda a a^T$

$$X = (C^{-1} + \lambda a a^T)^{-1}$$

$$X = \left(C^{-1}(I + \lambda C a a^T)\right)^{-1}$$

$$X = (I + \lambda C a a^T)^{-1} C$$

Шермана-Моррисона:

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, тогда

$I_m + AB$ обратима $\Leftrightarrow$ обратима $I_n + BA$

$$(I_m + AB)^{-1} = I_m - A(I_n + BA)^{-1} B$$

Положим $A = \lambda C a$, $B = a^T$. Таким образом $A \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $B \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

$\Rightarrow I_1 + BA = 1 + \lambda a^T C a > 0 \Rightarrow I_1 + BA$ обратима

Тогда $(I_n + \lambda C a a^T)^{-1} = I_n - \lambda C a (1 + \lambda a^T C a)^{-1} a^T$

$$\Rightarrow X = \left(I - \frac{\lambda C a a^T}{1 + \lambda a^T C a}\right) C$$

$$\langle Xa, a \rangle = \left\langle \left(C - \frac{\lambda C a a^T C}{1 + \lambda a^T C a}\right) a, a \right\rangle =$$

$$= a^T C a - \frac{\lambda (a^T C a)^2}{1 + \lambda a^T C a} = 1$$

$$\frac{a^T C a + \cancel{\lambda (a^T C a)^2} - \cancel{\lambda (a^T C a)^2}}{1 + \lambda a^T C a} = 1$$

$$a^T C a = 1 + \lambda a^T C a$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{a^T C a - 1}{a^T C a} \quad \Rightarrow$$

$$X = C - \frac{\lambda C a a^T C}{1 + \lambda a^T C a} = C - \frac{\frac{a^T C a - 1}{a^T C a} C a \ldots}{1 + \frac{a^T C a - 1}{a^T C a} a^T \ldots}$$

$$= C - \frac{\left(1 - \frac{1}{a^T C a}\right) C a a^T C}{a^T C a} = C - \frac{C a a^T C}{a^T C a} + \frac{C a \ldots}{(a^T \ldots}$$

Из $\lambda \geq 0 \Rightarrow a^T C a \geq 1$

Таким образом
$$X^* = \begin{cases} C, & a^T C a \leq 1 \\ C - \frac{C a a^T C}{a^T C a} + \frac{C a a^T C}{(a^T C a)^2}, & a^T C a > 1 \end{cases}$$

$$g(X) = \langle C^{-1}, X \rangle \qquad f(X) = -\ln \operatorname{Det}(X)$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \text{ – выпукла} \\ f(x) \text{ – строго выпукла} \end{array}\right\} \Rightarrow g + f \text{ – строго выпукла}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha g(x) + (1-\alpha) g(y) \\ f(\alpha x + (1-\alpha) y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \end{array}\right\} \Rightarrow g(\alpha x + (1-\alpha) y) + f(\alpha x + (1-\alpha) y) < \alpha (g(x) + f(x)) + (1-\alpha)(g(y) + f(y))$$

$\Rightarrow$ Задача является выпуклой и имеет строго выпуклую целевую функцию

$\Rightarrow X^*$ – единственное решение.

5а)

$$\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ s\in\mathbb{R}^n}} \left\{ \frac{1}{2}\|s-b\|^2 + \frac{\rho}{2}\|x\|^2 : s = Ax \right\}$$

$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$, $\rho>0$

$$\mathcal{L}(s,x,\mu) = \frac{1}{2}\|s-b\|^2 + \frac{\rho}{2}\|x\|^2 + \mu^T(s-Ax)$$

$$g(\mu) = \min_{x,s}\mathcal{L}(s,x,\mu)$$

$$\begin{cases} \nabla_s\mathcal{L}(s,x,\mu) = s-b+\mu = 0 \\ \nabla_x\mathcal{L}(s,x,\mu) = \rho x - A^T\mu = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow s^* = b-\mu$$
$$x^* = \frac{1}{\rho}A^T\mu$$

$$\nabla^2\mathcal{L}(s,x,\mu) = \begin{pmatrix} \nabla^2_{ss}\mathcal{L} & \nabla^2_{sx}\mathcal{L} \\ \nabla^2_{sx}\mathcal{L} & \nabla^2_{xx}\mathcal{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0$$

$\Rightarrow$ точка минимума

$$\mathcal{L}(s^*,x^*,\mu) = \frac{1}{2}\|\mu\|^2 + \frac{1}{2\rho}\|A^T\mu\|^2 + \mu^T\left(b-\mu-\frac{1}{\rho}AA^T\mu\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\|\mu\|^2 + \frac{1}{2\rho}\|A^T\mu\|^2 + \mu^Tb - \|\mu\|^2 - \frac{1}{\rho}\|A^T\mu\|^2 =$$
$$= -\frac{1}{2}\|\mu\|^2 - \frac{1}{2\rho}\|A^T\mu\|^2 + \mu^Tb$$

Ответ: $g(\mu) = -\frac{1}{2}\|\mu\|^2 - \frac{1}{2\rho}\|A^T\mu\|^2 + \mu^Tb$

5б)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m t_i + \frac{\rho}{2}\|x\|^2 \longrightarrow \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n,\, t\in\mathbb{R}^n} \\ Ax \geq 1_m - t \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\rho>0$

$$\mathcal{L}(x,t,\mu,\lambda) = \sum t_i + \frac{\rho}{2}\|x\|^2 + \mu^T(1_m - t - Ax) - \lambda^T t$$

$$\begin{cases} \nabla_x\mathcal{L}(x,t,\mu,\lambda) = \rho x - A^T\mu = 0 \\ \nabla_t\mathcal{L}(x,t,\mu,\lambda) = 1_m + \mu - \lambda = 0 \end{cases}$$

(если это не выполнено н-м сделать $\mathcal{L}\to-\infty$ из-за линейной части t $\Rightarrow$ у $\mathcal{L}$ не будет минимума)

Удовлетворяя $\nabla_t\mathcal{L} = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x,t,\mu,\lambda) = \frac{\rho}{2}\|x\|^2 + \mu^T(1_m - Ax)$$

Исключая t, можем минимизировать $\mathcal{L}$ по x.

$$\nabla^2_x\mathcal{L} = \rho I > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\rho}A^T\mu \text{ — точка минимума}$$

5в (продолжение)

$$\mathcal{L}(x^*, t, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\rho}\|A^T\mu\|^2 + \langle 1_m, \mu\rangle - \mu^T A A^T \mu =$$

$$= -\frac{1}{2\rho}\|A^T\mu\|^2 + \langle 1_m, \mu\rangle$$

Т.о. получаем следующую двойственную задачу

$$\begin{cases} g(\mu, \lambda) = -\frac{1}{2\rho}\|A^T\mu\|^2 + \langle 1_m, \mu\rangle \to \max\limits_{\mu, \lambda} \\ \mu \geq 0,\ \lambda \geq 0 \\ \lambda = 1_m - \mu \end{cases}$$

Можно исключить λ:

$$\begin{cases} g(\mu) = -\frac{1}{2\rho}\|A^T\mu\|^2 + \langle 1_m, \mu\rangle \to \max\limits_{\mu} \\ 0 \leq \mu \leq 1 \end{cases}$$

6. а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = e^x$

$$f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (\langle s, x \rangle - f(x)) =$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}} (s \cdot x - e^x)$$

$g(s,x) = sx - e^x$

$g'_x(s,x) = s - e^x = 0 \Rightarrow x = \log s$

$g''_{xx}(s,x) = -e^x < 0 \Rightarrow$ лок. макс.

$\rfloor s > 0: \quad g(s,x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -\infty$

$\Rightarrow$ при $s > 0$ достигается max при $x = \log s$

$s = 0 \Rightarrow \sup_x g(s,x) = 0$, т.к. $g(0,x) < 0$ и $g(0,x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

$s < 0 \Rightarrow g(s,x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty \Rightarrow \sup_x g(s,x) = +\infty$

Ответ: $f^*(s) = \begin{cases} s \log s - s, & s > 0 \\ 0, & s = 0 \\ +\infty, & s < 0 \end{cases}$

б) $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} x \log x - x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$g(s,x) = sx - f(x)$

При $x \neq 0$ $g'_x(s,x) = s - \log x - x \cdot \frac{1}{x} + 1 = s - \log x = 0$

$\Rightarrow x = e^s$

$g''_{xx}(s,x) = -\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow$ лок. макс.

При $x > 0$ $g(s,x) = sx - x \log x + x = x(s + 1 - \log x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

становится < 0 при больших x

$g(s,x) \xrightarrow[x \to 0+]{} 0$

$g(s, e^s) = se^s - e^s s + e^s$

$\Rightarrow f^*(s) = e^s$

c) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x) = -\ln x$

$g(s,x) = sx + \ln x$

$g'_x(s,x) = s + \frac{1}{x} = 0 \qquad x = -\frac{1}{s}$

$g''_{xx}(s,x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \Rightarrow$ лок. макс.

$s<0 \Rightarrow \quad g(s,x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

$\qquad\qquad\quad g(s,x) \xrightarrow[x\to 0+]{} -\infty$

$\Rightarrow \; x = -\frac{1}{s}$ - точка супремума

$s=0 \Rightarrow f^*(s) = +\infty$, т.к. $g(s,x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

$s>0 \Rightarrow f^*(s) = +\infty$ — // —

$$f^*(s) = \begin{cases} -1-\ln(-s), & s<0 \\ +\infty, & s\geq 0 \end{cases}$$

d) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$

$g(s,x) = sx - \frac{1}{x} \qquad g'_x(s,x) = s + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{-s}}$ при $s<0$

$s>0 \Rightarrow g(s,x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

$s=0 \Rightarrow g(0,x)<0$ и $g(0,x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \sup\limits_x g(0,x) = 0$

$s<0 \Rightarrow g(s,x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

$\qquad\qquad g(s,x) \xrightarrow[x\to 0+]{} -\infty \qquad \Rightarrow \sup\limits_x g(s,x) = \frac{s}{\sqrt{-s}} - \sqrt{-s} = -2\sqrt{-s}$

$\qquad\qquad g''_{xx}(s,x) = -\frac{2}{x^3} < 0$

$$f^*(s) = \begin{cases} +\infty, & s>0 \\ \cancel{0,\ s=0} \\ -2\sqrt{-s}, & s\leq 0 \end{cases}$$

~~e) $f:(-\infty,0]$ $\quad f(x) = -2\sqrt{-x}$~~

~~$h(x) = \frac{1}{x}$~~

~~$f(x) = h^*(x) \Rightarrow f^*(s) = h^{**}(s)$, по теореме Фенхеля-Моро~~

~~$h^{**}(s) = h(s)$, если h - выпуклая и замкнута~~

e) $f: (-\infty, 0] \to \mathbb{R} \quad f(x) = -2\sqrt{-x}$

$g(s,x) = sx + 2\sqrt{-x}$

$s \le 0 \Rightarrow g(s,x) = (-s)(-x) + 2\sqrt{-x} =$

$= \sqrt{-x}\,(-s\sqrt{-x} + 2) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$

$s > 0 \quad g(s,x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

$g(s,x) \xrightarrow[x \to 0-]{} 0$

$g'_x(s,x) = s + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{-x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0 \qquad g''_{xx}(s,x) = -\frac{1}{2}(-x)^{-\frac{3}{2}} < 0$

$\Rightarrow$ лок макс.

$s - \frac{1}{\sqrt{-x}} = 0$

$x = -\frac{1}{s^2}$

$g(s, -\frac{1}{s^2}) = -\frac{1}{s} + 2\sqrt{\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s}$

$\Rightarrow f^*(s) = \begin{cases} +\infty, & s \le 0 \\ \frac{1}{s}, & s > 0 \end{cases}$

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \max(x, 0)$

$g(s,x) = sx - \max(x,0) = \begin{cases} x(s-1), & x \ge 0 \\ xs, & x < 0 \end{cases}$

При $s > 1 \quad g(s,x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

При $0 \le s \le 1 \quad g(s,x) \le 0$, т.к. и при $x \ge 0$ и при $x < 0$ функция неположительна

При $s < 0 \quad g(s,x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow f^*(s) = \begin{cases} 0, & s \in [0,1] \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$

7a) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)$

$$g(s,x) = \langle s, x\rangle - \ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)$$

$$\nabla_x g(s,x) = s - \frac{e^x}{\sum e^{x_i}} = 0$$

$$d\left(\ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)\right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}} d\left(\sum e^{x_i}\right) =$$

$$= \left\langle \frac{e^x}{\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}}, dx \right\rangle$$

$$d^2\left(\ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)\right) = d\left(\left\langle \frac{e^x}{\sum e^{x_i}}, dx_1 \right\rangle\right) =$$

$$= \left\langle d(e^x)\frac{1}{\sum e^{x_i}} + e^x d\left(\frac{1}{\sum e^{x_i}}\right), dx_1 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathrm{diag}(e^{x_1}, \dots, e^{x_n}) dx_2 \cdot \frac{1}{\sum e^{x_i}} + e^x \cdot \left(-\frac{1}{(\sum e^{x_i})^2}\right)\langle e^x, dx_2\rangle, dx_1 \right\rangle =$$

$$= dx_1^T \frac{\mathrm{diag}(e^{x_1}, \dots, e^{x_n})}{\sum e^{x_i}} dx_2 - dx_1^T \frac{e^x e^{x^T}}{(\sum e^{x_i})^2} dx_2 =$$

$$= dx_1^T \left(\frac{\mathrm{diag}(e^{x_1} \dots e^{x_n})}{\sum e^{x_i}} - \frac{e^x e^{x^T}}{(\sum e^{x_i})^2} \right) dx_2$$

$$\parallel$$

$$\nabla^2\left(\ln\left(\sum e^{x_i}\right)\right)$$

$$h^T \nabla^2\left(\ln\left(\sum e^{x_i}\right)\right) h = \sum h_i^2 \frac{e^{x_i}}{\sum e^{x_i}} - \left(\sum h_i \frac{e^{x_i}}{\sum e^{x_i}}\right)^2 \geq 0$$ по нер-ву Йенсена

$$\Rightarrow \nabla^2_{xx} g(s,x) = -\nabla^2\left(\ln\left(\sum e^{x_i}\right)\right) \leq 0$$

$\Rightarrow$ уравнение $s = \frac{e^x}{\sum e^{x_i}}$ описывает ~~локальные~~ глобальные максимумы по x т.к. функция выпукла

$$\frac{e^x}{\sum e^{x_i}} = s \Rightarrow x^* = \log s + \log\left(\sum e^{x_i}\right) \cdot \mathbb{1}_n$$

Считаем, что $s \geq 0$ (в случае $s_i = 0$ м.о. устремить $x_i \to -\infty$)

$$g(s, x^*) = \left\langle s, \log s + \log\left(\sum e^{x_i}\right)\cdot \mathbb{1}_n \right\rangle - \log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\log s_i + \log(\sum e^{x_i})}\right) =$$

$$= \left[s = \frac{e^x}{\sum e^{x_i}} \Rightarrow \sum s_i = 1 \right] = \langle s, \log s\rangle + \log\left(\sum e^{x_i}\right) -$$

$$- \log\left(\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right) = \langle s, \log s\rangle + \cancel{\log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)} - \log\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right) -$$

$$- \cancel{\log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)} = \langle s, \log s\rangle - \underbrace{\log\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)}_{= 0 \text{ т.к. } \sum s_i = 1}$$

Если $S \notin \mathbb{R}^n_+$, имеем следующее:

Пусть для какого-то i_0 $S_{i_0} < 0$, тогда возьмём $x_k = (0, \dots, \underset{\underset{i_0}{\uparrow}}{-k}, \dots, 0)$

$$f(S, x_k) = \overset{\nearrow +\infty}{-kS_{i_0}} - \overset{\nearrow \text{const}}{\ln(n-1+e^{-k})} \longrightarrow +\infty$$

Мы имеем, что для экстремума должно выполняться $\sum\limits_{i=1}^{n} S_i = 1$, иначе возьмём $x_t = t \cdot \mathbb{1}_n$.

$$f(S, x_t) = t\sum_{i=1}^{n} S_i - \ln(n e^t) = t\left(\sum_{i=1}^{n} S_i - 1\right) - \ln n$$

$$\xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty, \text{ если } \langle S, \mathbb{1}_n \rangle > 1$$

$$\text{и } \xrightarrow[t \to -\infty]{} +\infty, \text{ если } \langle S, \mathbb{1}_n \rangle < 1$$

$$\Rightarrow f^*(S) = \begin{cases} \langle S, \log S \rangle \cancel{- \log\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right)}, & \text{если } \sum S_i = 1 \text{ и } S \in \mathbb{R}_+ \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

3 (бонус)

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{ \frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle - \langle b,x\rangle : \|x\| \le 1 \right\}$$

$A \in S^n_{++}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$

Перепишем задачу как следующую

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle - \langle b,x\rangle \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \\ \frac{1}{2}\langle x,x\rangle \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

← выпуклая задача, целевая функция строго выпукла

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = \frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle - \langle b,x\rangle + \lambda\cdot\frac{1}{2}(\langle x,x\rangle - 1)$$

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) = Ax - b + \lambda x = 0 \\ \langle x,x\rangle \le 1 \\ \lambda \ge 0 \\ \lambda(\langle x,x\rangle - 1) = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0 \Rightarrow x = A^{-1}b$, если $\langle A^{-1}b, A^{-1}b\rangle \le 1$, то $x^* = A^{-1}b$ – решение и оно единственно.

$\lambda > 0 \Rightarrow (A+\lambda I)x = b \Rightarrow x = (A+\lambda I)^{-1}b$

из условия доп. нежёсткости

$$\Rightarrow \langle (A+\lambda I)^{-1}b, (A+\lambda I)^{-1}b\rangle = 1$$

$$\langle (A+\lambda I)^{-1}b, (A+\lambda I)^{-1}b\rangle = b^T(A+\lambda I)^{-T}(A+\lambda I)^{-1}b = b^T(A+\lambda I)^{-2}b$$

$$f(\lambda) := b^T(A+\lambda I)^{-2}b = [A = C^T\Lambda C] = b^T(C^T(\Lambda+\lambda I)C)^{-2}b =$$

$$= b^T C^{-1}(\Lambda+\lambda I)^{-1}C^{-T}C^{-1}(\Lambda+\lambda I)^{-1}C^{-T} = [C^{-1} = C^T] = b^TC^T(\Lambda+\lambda I)^{-1}\underbrace{CC^T}_{=I}(\Lambda+\lambda I)^{-1}C b =$$

$$= b^TC^T(\Lambda+\lambda I)^{-2}Cb = \{\tilde{b} = Cb\} = \tilde{b}^T(\Lambda+\lambda I)^{-2}\tilde{b} =$$

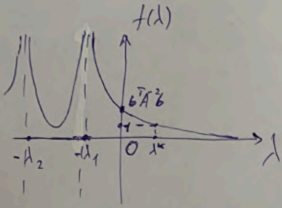
$$= \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{b}_i^2}{(\lambda_i+\lambda)^2}$$

Пусть без ограничения общности $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ – упорядоченные по возрастанию с.з. A, рассмотрим $f(\lambda)$ на луче $(-\lambda_1, +\infty)$

$$f'(\lambda) = -2\sum_{i=1}^n \frac{\tilde{b}_i^2}{(\lambda_i+\lambda)^3} < 0 \qquad f''(\lambda) = 6\sum_{i=1}^n \frac{\tilde{b}_i^2}{(\lambda_i+\lambda)^4} > 0$$

$\Rightarrow$ Функция строго выпукла на $(-\lambda_1, +\infty)$ и убывает

$$f(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0, \quad f(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to-\lambda_1]{} +\infty$$



Если $b^T A^{-2} b < 1$, $f(\lambda) = 1$ не имеет решения при $\lambda \geq 0$, но тогда, как было показано ранее $x = A^{-1} b$ является реше

При этом видно, что $f(\lambda) = 1$ всегда имеет решение на $(-\lambda_1, +\infty)$, отрицательный корень при $b^T A^{-2} b < 1$

Могут также быть корни на интервалах $(-\lambda_i, -\lambda_{i-1})$ $i = 2, \dots, n$.

Если $b^T A^{-2} b \geq 1$, на $[0, +\infty)$ найдётся единственный корень λ^*.

$$\Rightarrow \quad x^* = \begin{cases} A^{-1} b, & b^T A^{-2} b \leq 1 \\ (A + \lambda^* I)^{-1} b, & b^T A^{-2} b > 1 \end{cases}$$

λ^* – корень $f(\lambda) = 1$ на $[0, +\infty)$

В более общем виде $x^* = (A + \lambda^* I)^{-1} b$, где $\lambda^* = \max(0, \bar{\lambda})$, где $\bar{\lambda}$ – корень $f(\lambda) = 1$ на $(-\lambda_1, +\infty)$, или, иначе говоря, $\bar{\lambda}$ – наибольший корень $f(\lambda) = 1$.

x^* – единственное решение, т.к. задача выпукла, а целевая функция – строго выпукла.