

### Zadanie 1.

Bank wystawia roczną opcję kupna na niepłacące dywidendy aktywo  $\mathcal{A}$  o cenie  $S_{T_0} = 115$ . Cena wykonania opcji to  $K = 120$ . W celu zabezpieczenia portfela bank stosuje strategię replikującą, zakładającą inwestycję w aktywo  $\mathcal{A}$  oraz aktywo wolne od ryzyka. Bank zakłada comiesięczną aktualizację portfela replikującego. Wiadomo, iż roczna stopa wolna od ryzyka wynosi  $r = 2\%$ , natomiast współczynnik zmienności cen akcji równy jest  $\sigma = 15\%$ . Proszę określić jaki zysk (odpowiedzi ze znakiem dodatnim) lub stratę (odpowiedzi ze znakiem ujemnym) zrealizuje bank przy aktualizacji portfela replikującego w  $T_{\frac{1}{12}}$ , jeśli wiadomo, że  $S_{T_{\frac{1}{12}}} = 117$ . Proszę podać najbliższą odpowiedź.

$$C_t = S_t e^{-\delta(T-t)} \Phi(d_1(t, S_t, \delta)) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(t, S_t, \delta))$$

$$d_1(t, S_t, \delta) = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \delta + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

$$d_2(t, S_t, \delta) = d_1(t, S_t, \delta) - \sigma \sqrt{T-t}$$

Portfel replikujący:

$$\begin{cases} \Delta_t = e^{-\delta(T-t)} \Phi(d_1(t, S_t, \delta)) \\ \theta_t = -e^{-rT} K \Phi(d_2(t, S_t, \delta)) \end{cases}$$

Wartość portfela

$$\Pi_t = \Delta_t S_t + \theta_t e^{rT}$$

$$K = 120 \quad r = 0,02 \quad \delta = 0 \quad \sigma = 0,15 \quad T = 1$$

$$\text{Dla } t = 0$$

$$S_0 = 115$$

$$d_1 = \frac{\ln(115/120) + (0,02 + \frac{0,15^2}{2}) \cdot 1}{0,15 \sqrt{1}} = -0,0754$$

$$d_2 = -0,0754 - 0,15 \cdot \sqrt{1} = -0,2254$$

$$\Phi(d_1) = 0,4699$$

$$\Phi(d_2) = 0,4102$$

$$\begin{cases} \Delta_0 = 0,4699 \\ \theta_0 = e^{-0,02 \cdot 1} \cdot 120 \cdot 0,4108 = -48,3240 \end{cases}$$

$$\text{Dla } t = \frac{1}{12}$$

$$S_{112} = 117$$

$$d_1 = \frac{\ln(117/120) + (0,02 + \frac{0,15^2}{2})(1 - \frac{1}{12})}{0,15 \sqrt{1 - \frac{1}{12}}} = 0,0232$$

$$d_2 = 0,0232 - 0,15 \sqrt{1 - \frac{1}{12}} = -0,1204$$

$$\Phi(d_1) = 0,5092$$

$$\Phi(d_2) = 0,4507$$

$$C_{112} = 117 \cdot 0,5092 - e^{-0,02(1 - \frac{1}{12})} \cdot 120 \cdot 0,4507 = 6,3190$$

Zaktualizowana wartość portfela replikującego:

$$\hat{\pi}_{112} = 0,4699 \cdot 117 - 48,324 \cdot e^{0,02 \cdot \frac{1}{12}} = 6,5795$$

$$z_{sh} : \hat{\pi}_{112} - C_{112} = 6,5795 - 6,319 = 0,26$$

Odp. D

## Zadanie 2.

Przyjmijmy założenia modelu Blacka Scholesa. Rozważmy roczną opcję wymiany, pozwalającą jej posiadaczowi wymienić akcję ABC na akcję XYZ. Przyjmijmy, że w chwili  $T_0$  zachodzi  $S_{T_0}^{ABC} = S_{T_0}^{XYZ} = 50$ . Wiadomo, iż:

- roczna stopa wolna od ryzyka wynosi  $r = 3\%$ ,
- współczynniki zmienności cen akcji równe są odpowiednio  $\sigma_{ABC} = 0.1$  oraz  $\sigma_{XYZ} = 0.15$ ,
- roczne stopy dywidendy akcji równe są odpowiednio  $\gamma_{ABC} = 0.05$  oraz  $\gamma_{XYZ} = 0.07$ ,
- współczynnik korelacji między akcjami ABC oraz XYZ wynosi  $\rho = -0.2$ .

Proszę wyznaczyć cenę opcji wymiany w chwili jej wystawienia w  $T_0$  (proszę podać najbliższą wartość).

$$C_t^{EX} = S_t^{(1)} e^{-\delta_1(T-t)} \Phi\{d_1(S_t^{(1)}, S_t^{(2)})\} - S_t^{(2)} e^{-\delta_2(T-t)} \Phi\{d_2(S_t^{(1)}, S_t^{(2)})\}$$

$$d_1(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \frac{\ln(S_t^{(1)}/S_t^{(2)}) + (\delta_2 - \delta_1 + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = d_1(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{T-t}$$

$$S_0^{ABC} = 50 \quad S_0^{XYZ} = 50 \quad r = 0,03 \quad \gamma_{ABC} = 0,1 \quad \sigma_{XYZ} = 0,15 \quad \gamma_{ABC} = 0,05$$

$$\delta_{XYZ} = 0,07 \quad \rho = -0,2 \quad T = 1 \quad t = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{0,1^2 + 0,15^2 - 2 \cdot (-0,2) \cdot 0,1 \cdot 0,15}{1-0} = 0,1962^2$$

$$d_1 = \frac{\ln(50/50) + (0,07 - 0,05 + \frac{0,1962^2}{2}) \cdot 1}{0,1962 \cdot 1} = 0,2000$$

$$d_2 = 0,2 - 0,1962 \cdot 1 = 0,0038$$

$$\Phi(d_1) = 0,5793$$

$$\Phi(d_2) = 0,5015$$

$$C_t = 50 e^{-0,05} \cdot 0,5793 - 50 e^{-0,07} \cdot 0,5015 = 4,17$$

Odp. D

### Zadanie 3.

Niech  $T = 2.5$ . Rozważmy 15-letnią obligację zmiennokuponową o nominale 100, wystawioną w chwili 0. Kupony obligacji płatne są na koniec każdego roku, w oparciu o roczną stopę obserwowaną na początku roku, za który płacony jest kupon. Załóżmy, że  $r_{2.5}^{0.5} = 2.27\%$ ,  $r_{2.5}^1 = 3.24\%$ ,  $r_2^1 = 1.74\%$  (wszystkie w/w stopy w wymiarze rocznym,  $r_t^s$  opisuje w chwili  $t$  stopę dla okresu  $s$ ). Proszę wyznaczyć wartość obligacji w chwili  $T$  (proszę podać najbliższą wartość).

$$B_0 = \sum_{i=1}^n \frac{C}{(1+r_0^{t_i})^{t_i}} + \frac{F}{(1+r_0^T)^T}$$

Trzeba policzyć niewypłacone kupony

$$C_3 = F \cdot r_2^1 = 100 \cdot 1,74\% = 1,74$$

$$B_{2.5} = \frac{1,74}{(1+0,0227)^{0.5}} + \frac{100}{(1+0,0227)^{0.5}} = 100,6045$$

Odp. A

#### Zadanie 4.

Rozważmy proces  $X_t$ , zdefiniowany następująco:

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t,$$

gdzie:

- $W_t$  jest procesem Wienera,
- $a, b, \sigma$  są dodatnimi stałymi,
- $X_0 = 0.15$ .

Wiemy, że  $EX_2 = 0.19323$ ,  $Var X_2 = 0.04418$  oraz  $\lim_{t \rightarrow \infty} Var X_t = 0.045$ .

Niech  $c := \frac{ab}{\sigma}$ . Wówczas  $c$  wynosi (proszę wskazać najbliższą odpowiedź):

jest to proces Ornsteina - Uhlenbecka :

$$X_t \sim N\left(e^{-at} X_0 + b(1 - e^{-at}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})\right)$$

$$X_2 \sim N\left(0.15e^{-2a} + b(1 - e^{-2a}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-4a})\right)$$

$$0.15e^{-2a} + b(1 - e^{-2a}) = 0.19323$$

$$\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-4a}) = 0.04418$$

$$\frac{\sigma^2}{2a} = 0.045$$

$$0.045(1 - e^{-4a}) = 0.04418$$

$$a = 1.001278$$

$$\sigma^2 = 0.045 \cdot 2a$$

$$\sigma = 0.30019$$

$$b = 0.19992$$

$$c = \frac{ab}{\sigma} = 0.667 \approx \frac{2}{3}$$

Odp. C

**Zadanie 5.**

Niech  $X_t$  będzie procesem zdefiniowanym równaniem

$$dX_t = -\frac{1}{2} \exp(-2X_t) dt + \exp(-X_t) dW_t,$$

gdzie  $W_t$  jest procesem Browna. Niech  $Y_t := g(X_t)$ , gdzie  $g(x) = \exp(x)$ .

Proszę wskazać, które z poniższych równań opisuje dynamikę procesu  $Y_t$ .

Lemat Itô :

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) (dX_t)^2$$

$$g'(X_t) = \exp(X_t)$$

$$g''(X_t) = \exp(X_t)$$

$x$	$dW_t$	$dt$
$dW_t$	$dt$	0
$dt$	0	0

$$dY_t = \exp(X_t) dX_t + \frac{1}{2} \exp(X_t) (dX_t)^2$$

$$\begin{aligned} dY_t &= \exp(X_t) \left[ -\frac{1}{2} \exp(-2X_t) dt + \exp(-X_t) dW_t \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \exp(X_t) \left[ -\frac{1}{2} \exp(-2X_t) dt + \exp(-X_t) dW_t \right]^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \exp(-X_t) dt + dW_t + \frac{1}{2} \exp(X_t) \exp(-2X_t) dt = \\ &= -\frac{1}{2} \exp(-X_t) dt + \frac{1}{2} \exp(-X_t) dt + dW_t = \\ &= dW_t \end{aligned}$$

Odp. E

### Zadanie 6.

Osoba A będzie otrzymywała 10-letnią rentę o wartości obecnej 100 000 w ratach rocznych, na końcu każdego roku. Oprocentowanie renty wynosi 7% w wymiarze rocznym, kapitalizacja jest roczna.

Osoba B będzie otrzymywała 10-letnią rentę o wartości obecnej 100 000 PLN w ratach miesięcznych, na końcu każdego miesiąca. Oprocentowanie renty wynosi 7% w wymiarze rocznym, kapitalizacja jest miesięczna.

Jaka będzie różnica pomiędzy nominalną roczną wypłatą dla rentobiorców A oraz B (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

Wzór na rentę prostą:

$$P = R a_{\overline{m}|i} = R \frac{1 - (1+i)^{-m}}{i}$$

$$A) \quad i = 0,07 \quad m = 10$$

$$100\,000 = R_A \cdot \frac{1 - 1,07^{-10}}{0,07}$$

$$R_A = 14\,237,75$$

$$B) \quad i = 1,07^{\frac{1}{12}} - 1 \quad m = 120$$

$$100\,000 = R_B \cdot \frac{1 - 1,07^{\frac{1}{12} \cdot (-120)}}{1,07^{\frac{1}{12}} - 1}$$

$$R_B = 1150,03$$

$$12 \cdot R_B = 13\,800,36$$

$$R_A - 12R_B = 437,39$$

Odp. E

**Zadanie 7.**

Dwie osoby deponują w banku kwoty 100. Oprocentowanie depozytu pierwszej z osób jest stałe i równe  $\frac{K}{20}$  rocznie,  $K > 0$ . Intensywność oprocentowania depozytu drugiej z osób w chwili  $t$  wynosi  $\delta_t = \frac{1}{K+0.2t}$ . Po upływie pięciu lat pierwsza z osób zgromadziła kwotę  $X$ , druga zaś kwotę  $\exp(1) \cdot X$ . Proszę wyznaczyć wartość  $X$  (proszę podać najbliższą odpowiedź).

$$X = 100 \left(1 + \frac{K}{20}\right)^5$$

$$eX = 100 \exp \left\{ \int_0^5 \frac{1}{K+0.2t} dt \right\}$$

$$X = 100 \exp \left\{ \int_0^5 \frac{1}{K+0.2t} dt - 1 \right\}$$

$$\left(1 + \frac{K}{20}\right)^5 = \exp \left\{ \int_0^5 \frac{1}{K+0.2t} dt - 1 \right\}$$

$$K = 2,62$$

$$X = 100 \left(1 + \frac{2,62}{20}\right)^5 = 125,1$$



### Zadanie 8.

Cena akcji  $\mathcal{A}$  w chwili  $t = 0$  wynosi 10 500. Akcja płaci półroczną dywidendę w wysokości 700. Na rynku dostępny jest kontrakt forward na akcję  $\mathcal{A}$ , który ma termin zapadalności za 5 miesięcy. Przed tym terminem przypada jedna płatność dywidendy. Jeżeli stopa wolna od ryzyka wynosi 11% (kapitalizacja ciągła) a cena kontraktu forward w  $t = 0$  wynosi 10 272,92, to za ile miesięcy przypada płatność dywidendy (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

$$K = (S_0 - D) e^{rT}$$

$$D = d e^{-rt}$$

$$K = (S_0 - d e^{-rt}) e^{rT}$$

$$S_0 = 10500 \quad d = 700 \quad T = \frac{5}{12} \quad r = 0,11 \quad K = 10272,92$$

$$10272,92 = (10500 - 700 e^{-0,11t}) e^{0,11 \cdot \frac{5}{12}}$$

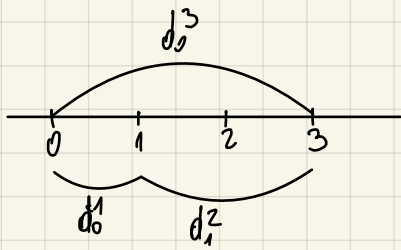
$$t = 0,1665 \approx \frac{2}{12}$$

Odp. B

### Zadanie 9.

Jeśli w chwili  $t = 0$  inwestor zainwestuje 1 000 na dwa lata, to w chwili  $t = 2$  otrzyma 1 122. Alternatywnie, jeśli w chwili  $t = 0$  inwestor zgodzi się zainwestować 1 000 w chwili  $t = 1$  na dwa lata, otrzyma 1 148 w chwili  $t = 3$ . Jeżeli natomiast w chwili  $t = 0$  zgodzi się zainwestować 1 000 w chwili  $t = 1$  na okres jednego roku, to w chwili  $t = 2$  otrzyma 1 062. Przy założeniu braku arbitrażu, proszę określić ile wynosi trzyletnia stopa par (*par yield*) (proszę podać najbliższą odpowiedź).

$$q = \frac{1 - (1 + r_T)^{-T}}{\sum_{t=1}^T (1 + r_t)^{-t}}$$



$$d_0^3 = d_0^1 \cdot d_1^2$$

$$d_0^2 = 0,8913$$

$$d_1^2 = 0,9416$$

$$d_0^1 \cdot 0,9416 = 0,8913$$

$$d_0^1 = 0,9466$$

$$d_0^3 = 0,9466 \cdot 0,8711 = 0,8246$$

$$q = \frac{1 - 0,8246}{0,9466 + 0,8913 + 0,8246} = 0,065$$

(C)

**Zadanie 10.**

Inwestor rozważa zajęcie strategii „bear call spread” zbudowanej w oparciu o 9-miesięczne europejskie opcje call na akcje  $\mathcal{A}$  z ceną wykonania 25 oraz 9-miesięczne europejskie opcje call na akcje  $\mathcal{A}$  z ceną wykonania 27. Jaka będzie całkowita wypłata ze strategii (nie uwzględniając inwestycji początkowej), jeżeli cena akcji  $\mathcal{A}$  za 9 miesięcy wyniesie 23 (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

Wypłata z opcji call:  $\max(S_T - K, 0)$

$$K_1 = 25$$

$$K_2 = 27$$

$$\max(23 - 27, 0) - \max(23 - 25, 0) = 0$$

Ⓐ