

---

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**  
**XLIV Egzamin dla Aktuariuszy z 3 grudnia 2007 r.**

**Część I**

**Matematyka finansowa**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:**

.....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Rachunki oszczędnościowe A i B założono w chwili 0 wpłacając na nie odpowiednio kwoty początkowe  $A_0$  i  $B_0$  w taki sposób, że łączna wpłata początkowa wyniosła 1. Następnie na rachunek A dokonywane są w sposób ciągły wpłaty z roczną intensywnością  $C_t = \frac{1}{1+t} A_t$ , gdzie  $A_t$  oznacza wartość rachunku w chwili  $t > 0$ . Ciągła intensywność oprocentowania środków na rachunku wynosi  $\delta_t^A = \frac{t}{1+t}$ . Na rachunek B nie są już dokonywane żadne dodatkowe wpłaty, natomiast środki na tym rachunku są oprocentowane w sposób ciągły ze zmienną intensywnością  $\delta_t^B = \frac{1}{\bar{s}_{3-t|}}$  dla  $0 < t \leq 3$ . We wzorze tym  $\frac{1}{\bar{s}_{3-t|}}$  obliczamy przy założeniu innej stałej ciągłej intensywności  $\delta_0$ , odpowiadającej stopie  $i = 10\%$  (służy ona wyłącznie do wyznaczenia  $\bar{s}_{3-t|}$ ). Suma zakumulowanych wartości rachunków po 2 latach wynosi 5. Wyznacz  $A_0$  i  $B_0$ . Odpowiedź (podaj najbliższą wartość).

- A) 0.61 i 0.39
- B) 0.55 i 0.45
- C) 0.32 i 0.68
- D) 0.44 i 0.56
- E) 0.49 i 0.51

2. Natężenie oprocentowania zadane jest wzorem:

$$\delta_t = \frac{1}{t+1} + \frac{3}{1+2 \cdot \exp(2t)}.$$

Oblicz efektywną stopę zwrotu w 5 roku trwania inwestycji, to jest w okresie od  $t_1 = 4.0$  do  $t_2 = 5.0$ .

- A) 14%
- B) 16%
- C) 18%
- D) 20%
- E) 22%

3. Inwestor kupuje w momencie emisji 10 letnią obligację o wartości nominalnej 100 000 z 5% kuponami rocznymi i wartością wykupu równą nominalnej. Inwestor natychmiast sprzedaje jednak tę obligację i za uzyskaną kwotę kupuje w momencie emisji 7 letnią obligację z rocznymi kuponami, której wartość wykupu równa się wartości nominalnej. Pierwszy kupon tej obligacji stanowi 3% wartości nominalnej, a każdy następny wzrasta o 2 punkty procentowe.

Znajdź wartość nominalną obligacji 7 letniej jeżeli oprocentowanie wynosi 6% (wskaż najbliższą wartość).

- A) 81 135
- B) 81 145
- C) 81 155
- D) 81 165
- E) 81 175

4. Dokonano 20 letniej inwestycji w kwocie, która powinna pozwolić na wypłatę 100 na koniec każdego roku przy zakładanej stopie procentowej 5%. W pierwszym roku faktyczna stopa zwrotu była zgodna z zakładaną i wypłacona została kwota 100.

Począwszy od drugiego roku stopa zwrotu z inwestycji wzrosła do poziomu 6% i utrzymała się na tej wysokości aż do końca 20 letniego okresu. Pozwoliło to na zwiększenie corocznej wypłaty do poziomu  $X$  począwszy od końca drugiego roku. Znajdź wartość  $X$  (wskaz najbliższą wartość).

- A) 108.3
- B) 108.5
- C) 108.7
- D) 108.9
- E) 108.1

5. Mamy nieskończony ciąg płatności dokonywanych na końcu każdego roku, przy czym płatność na koniec roku  $n$  wynosi  $a \cdot n + 5$ . Jaką wartość powinien mieć parametr  $a$ , aby duration tego ciągu płatności, przy stopie procentowej  $i = 4\%$ , była równa 50.

- A) 3.4
- B) 4.0
- C) 4.6
- D) 5.2
- E) 5.8

6. Rozważmy europejską opcję sprzedaży na rynku Blacka-Scholesa. Termin wygaśnięcia tej opcji upływa za 3 miesiące. Bieżąca cena akcji wynosi 60, cena wykonania opcji 80, zmienność cen akcji  $\sigma=3$ , a roczna, ciągła, stopa wolna od ryzyka  $r = 4\%$ . Bieżąca cena tej opcji wynosi:

- A) 35  
B) 29  
C) 52  
D) 48  
E) 50

Uwaga. Przybliżone wartości dystrybuanty rozkładu  $N(0,1)$  podaje tablica:

t	<b>0</b>	<b>0.05</b>	<b>0.1</b>	<b>0.15</b>	<b>0.2</b>	<b>0.25</b>	<b>0.3</b>	<b>0.35</b>
N(t)	0.5000	0.5199	0.5398	0.5596	0.5793	0.5987	0.6179	0.6368
t	<b>0.4</b>	<b>0.45</b>	<b>0.5</b>	<b>0.55</b>	<b>0.6</b>	<b>0.65</b>	<b>0.7</b>	<b>0.75</b>
N(t)	0.6554	0.6736	0.6915	0.7088	0.7257	0.7422	0.7580	0.7734
t	<b>0.8</b>	<b>0.85</b>	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>1</b>	<b>1.05</b>	<b>1.1</b>	<b>1.15</b>
N(t)	0.7881	0.8023	0.8159	0.8289	0.8413	0.8531	0.8643	0.8749
t	<b>1.2</b>	<b>1.25</b>	<b>1.3</b>	<b>1.35</b>	<b>1.4</b>	<b>1.45</b>	<b>1.5</b>	<b>1.55</b>
N(t)	0.8849	0.8944	0.9032	0.9115	0.9192	0.9265	0.9332	0.9394
t	<b>1.6</b>	<b>1.65</b>	<b>1.7</b>	<b>1.75</b>	<b>1.8</b>	<b>1.85</b>	<b>1.9</b>	<b>1.95</b>
N(t)	0.9452	0.9505	0.9554	0.9599	0.9641	0.9678	0.9713	0.9744
t	<b>2</b>	<b>2.05</b>	<b>2.1</b>	<b>2.15</b>	<b>2.2</b>	<b>2.25</b>	<b>2.3</b>	<b>2.35</b>
N(t)	0.9772	0.9798	0.9821	0.9842	0.9861	0.9878	0.9893	0.9906
t	<b>2.4</b>	<b>2.45</b>	<b>2.5</b>	<b>2.55</b>	<b>2.6</b>	<b>2.65</b>	<b>2.7</b>	<b>2.75</b>
N(t)	0.9918	0.9929	0.9938	0.9946	0.9953	0.9960	0.9965	0.9970
t	<b>2.8</b>	<b>2.85</b>	<b>2.9</b>	<b>2.95</b>	<b>3</b>	<b>3.05</b>	<b>3.1</b>	<b>3.15</b>
N(t)	0.9974	0.9978	0.9981	0.9984	0.9987	0.9989	0.9990	0.9992

7. Inwestor rozważa inwestycję w akcje dwóch spółek oraz obligacje. Na podstawie dotychczasowych obserwacji kursów akcji obu spółek, wiadomo, że roczne stopy zwrotu z tych akcji,  $S_1$  i  $S_2$ , cechują następujące parametry:

$$ES_1 = 8\%, \sigma S_1 = 3\%, ES_2 = 10\%, \sigma S_2 = 4\%, \rho(S_1, S_2) = 0.25,$$

natomiast obligacje są instrumentem wolnym ryzyka, dla którego oczekiwana stopa zwrotu  $ES_3 = S_3 = 4\%$ .

Inwestor konstruuje portfel w taki sposób aby ryzyko portfela, mierzone odchyleniem standardowym stopy zwrotu, było jak najmniejsze, a kwota zainwestowana w obligacje stanowiła połowę kwoty zainwestowanej w akcje. Jaka jest oczekiwana stopa zwrotu z tego portfela?

- A) 6.7%
- B) 8.0%
- C) 7.1%
- D) 7.7%
- E) 7.4%



8. Rozpatrzmy amerykańską opcję kupna na akcję nie płaćącą dywidendy, dla której termin wygaśnięcia upływa za 4 miesiące. Obecna cena akcji wynosi 20 a cena wykonania opcji 24. Wiadomo, że w ciągu każdego miesiąca kurs akcji rośnie bądź spada o 20%. Zakładamy ponadto, że rynek nie dopuszcza arbitrażu. Stopa wolna od ryzyka w ujęciu miesięcznym wynosi 1%. Przy podanych założeniach cena tej opcji wynosi, w przybliżeniu:

- A) 1.9
- B) 1.7
- C) 2.2
- D) 3.4
- E) 6.8

9. Wiadomo, że na 31.12.2006 krzywa stóp spot opisana jest przez następującą funkcję:

$$Y(0, T) = \frac{1}{100} (0.01 \cdot T^4 - 0.05 \cdot T^3 + 0.1 \cdot T^2 - 0.05 \cdot T + 3.86), \quad 0 \leq T \leq 4,$$

gdzie  $Y(0, T)$  oznacza  $T$ -letnią stopę spot w chwili 0, czyli 31.12.2006. Niech  $f(0, T)$  oznacza krzywą forward odpowiadającą krzywej  $Y(0, T)$ . Ile wynoszą stopy forward  $f(0, 0.9)$ ,  $f(0, 2.1)$ ,  $f(0, 3.2)$ ? Podać najbliższą odpowiedź:

- A)  $f(0, 0.9) = 3.900\%$ ,  $f(0, 2.1) = 4.093\%$ ,  $f(0, 3.2) = 5.301\%$
- B)  $f(0, 0.9) = 3.956\%$ ,  $f(0, 2.1) = 4.137\%$ ,  $f(0, 3.2) = 4.454\%$
- C)  $f(0, 0.9) = 3.910\%$ ,  $f(0, 2.1) = 4.060\%$ ,  $f(0, 3.2) = 4.910\%$
- D)  $f(0, 0.9) = 5.301\%$ ,  $f(0, 2.1) = 4.093\%$ ,  $f(0, 3.2) = 3.900\%$
- E)  $f(0, 0.9) = 4.370\%$ ,  $f(0, 2.1) = 4.120\%$ ,  $f(0, 3.2) = 3.970\%$

**10.** Pożyczka ma być spłacona w ciągu 30 lat rocznymi ratami w wysokości 10 000, płatnymi z dołu, przy efektywnej stopie oprocentowania równej 8%. Po 10 płatnościach pożyczkobiorca chciałby wpłacić jednorazowo kwotę  $X$ , w takiej wysokości, aby pozostały dług mógł spłacić w ciągu 10 lat ratami płatnymi co pół roku w wysokości 5000, przy nominalnej półrocznej stopie oprocentowania 4%.

Znajdź wartość  $X$  (wskaż najbliższą wartość).

- A) 30 210
- B) 30 230
- C) 30 250
- D) 30 270
- E) 30 290

**Egzamin dla Aktuariuszy z 3 grudnia 2007 r.****Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko: .....

Pesel: .....

OZNACZENIE WERSJI TESTU .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	E	
2	D	
3	C	
4	A	
5	C	
6	D	
7	C	
8	C	
9	A	
10	B	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.