Zadanie 1.

Zmienne losowe $X_1,\dots,X_n, n \geq 4$ są niezależne o jednakowym rozkładzie o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{dla } x \in [0,\theta], \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases}$$

dla pewnego parametru $\theta > 0$. Zdefiniujmy

$$Y = \alpha \cdot \max(X_1,\dots,X_n).$$

Estymator Y jest nieobciążonym estmatorem parametru θ dla parametru α wynoszącego

(A) $\frac{2n+2}{2n}$

(B) $\frac{n+1}{n}$

(C) $\frac{n+1}{2n}$

(D) $\frac{2n+1}{n}$

(E) $\frac{2n+1}{2n}$

Dystrybuanta zm. X_i :

$$F_X(x) = \frac{1}{\theta^2} \int_0^x 2t \, dt = \frac{1}{\theta^2} \frac{2t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{\theta^2}$$

Dystrybuanta $\max(X_1,\dots,X_n)$:

$$F_{max}(x) = \left(\frac{x^2}{\theta^2}\right)^n = \frac{x^{2n}}{\theta^{2n}}$$

Wartość oczekiwana zm. Y z dystrybuanty :

$$EY = \alpha \int_0^\theta P(Y > y)\, dy = \alpha \int_0^\theta 1 - \frac{y^{2n}}{\theta^{2n}} \, dy = \alpha \left[y - \frac{1}{\theta^{2n}} \frac{y^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^\theta =$$

$$= \alpha \left(\theta - \frac{1}{\theta^{2n}} \frac{\theta^{2n+1}}{2n+1} \right) = \alpha \left(\frac{\theta(2n+1)}{2n+1} - \frac{\theta}{2n+1} \right) = \alpha \left(\frac{2n\theta}{2n+1} \right)$$

Estymator jest nieobciążony gdy :

$$\alpha \frac{2n\theta}{2n+1} = \theta$$

$$\alpha = \frac{2n+1}{2n}$$

E

Zadanie 2.

Niech Z_1, Z_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Zdefiniujmy

$$X = 1 + Z_1,$$
$$Y = p + Z_1 + \sqrt{3}Z_2.$$

Wiadomo, że

$$E[X|Y=8] = 2, \qquad \mathrm{Var}[X|Y=4] = q.$$

Ile wynoszą parametry p i q?

(A) $p=2, q=1$

(B) $p=4, q=\frac{3}{4}$

(C) $p=1, q=1$

(D) $p=\frac{3}{4}, q=2$

(E) $p=\frac{3}{4}, q=\frac{3}{8}$

Wzory :
$$\begin{cases} X = \sigma_X Z_1 + \mu_X \\ Y = \sigma_Y\left(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}\, Z_2\right) + \mu_Y \end{cases}$$

$$E[X|Y=y] = \mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)$$

$$\mathrm{Var}(X|Y=y) = \sigma_X^2(1-\rho^2)$$

$\mu_X = 1 \qquad \sigma_X = 1 \qquad \mu_Y = p$

$\mathrm{Var}(X|Y=4) = 1\cdot(1-\rho^2) = q$

$1-\rho^2 = q$

$\rho^2 = 1-q$

$$\begin{cases} \sigma_Y \rho = 1 \\ \sigma_Y\sqrt{1-\rho^2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

$\sigma_Y\sqrt{1-1+q} = \sqrt{3}$

$\sigma_Y\sqrt{q} = \sqrt{3}$

$$\begin{cases} \sigma_Y = \sqrt{\frac{3}{q}} \\ \rho = \sqrt{\frac{q}{3}} \end{cases}$$

$$E[X \mid Y=8] = 1 + \sqrt{\frac{q}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{q}}}(8-p) = 2$$

$$\begin{cases} \frac{q}{3}(8-p) = 1 \\ 1 - \frac{q}{3} = q \end{cases}$$

$$q + \frac{q}{3} = 1$$

$$\frac{4q}{3} = 1$$

$$q = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4}(8-p) = 1$$

$$2 - \frac{1}{4}p = 1$$

$$-\frac{1}{4}p = -1$$

$$\begin{cases} p = 4 \\ q = \frac{3}{4} \end{cases}$$

B

Zadanie 3.

Mamy 7 niezależnych obserwacji $X_1,\ldots,X_7$ pochodzących z rozkładu ciągłego z medianą m. Sortujemy te obserwacje $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(7)}$ i tworzymy przedział $I = (X_{(2)}, X_{(6)})$. Ile wynosi $\mathbb{P}(m \in I)$, tj. jakie jest prawdopodobieństwo, że mediana należy do tego przedziału?

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{7}{8}$

(C) $\frac{5}{8}$

(D) $\frac{17}{64}$

(E) $\frac{19}{64}$

Mediana: $P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$ i $P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$

Dystrybuanta i-tej statystyki pozycyjnej: $F_{X_i}(x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} [F_X(x)]^k [1-F_X(x)]^{n-k}$

$P(X \leq m) = F_X(m) = \frac{1}{2}$

$P(X \geq m) = 1 - F_X(m) = \frac{1}{2}$

$P(X_2 < m < X_6) = \left| \begin{matrix} \text{wyprowadzenie} \\ \text{na końcu} \end{matrix} \right| = P(X_2 \leq m) - P(X_6 \leq m) = F_{X_2}(m) - F_{X_6}(m)$

$F_{X_i} = \sum_{k=i}^{7} \binom{7}{k} [F_X(m)]^k [1 - F_X(m)]^{7-k} = \sum_{k=i}^{7} \binom{7}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^7$

$P(X_2 < m < X_6) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left[\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} - \binom{7}{6} - \binom{7}{7}\right] = \frac{7}{8}$

B

Korzystając z prawa de Morgana:

$P(X_2 < m < X_6) = P(X_2 < m, X_6 > m) = 1 - P[(X_2 < m, X_6 > m)'] =$

$= 1 - P[(X_2 > m) \cup (X_6 < m)] = 1 - [P(X_2 > m) + P(X_6 < m) - \underbrace{P(X_2 > m, X_6 < m)}_{=0}] =$

$= 1 - [1 - P(X_2 < m) + P(X_6 < m)] = P(X_2 < m) - P(X_6 < m)$

Zadanie 4.

Wiadomo, że zmienna losowa X ma następującą funkcję tworzącą momenty:

$$M_X(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^3,$$

gdzie $\theta > 0$ jest nienzanym parametrem. Znane jest odchylenie zmiennej losowej X, a mianowicie $\sigma_X = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ile wynosi wartość parametru θ?

(A) $\theta = \frac{1}{9}$

(B) $\theta = \frac{1}{3}$

(C) $\theta = \frac{1}{4}$

(D) $\theta = 3$

(E) $\theta = 9$

$$M_X(t) = \theta^3 (\theta - t)^{-3}$$

$$EX = M_X'(t)\Big|_{t=0} = -3\theta^3 (\theta - t)^{-4}(-1)\Big|_{t=0} = 3\theta^3 (\theta - t)^{-4}\Big|_{t=0} = 3\theta^{-1}$$

$$EX^2 = M_X''(t)\Big|_{t=0} = -12\theta^3 (\theta - t)^{-5}(-1)\Big|_{t=0} = 12\theta^3 (\theta - t)^{-5}\Big|_{t=0} = 12\theta^{-2}$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = 12\theta^{-2} - 9\theta^{-2} = 3\theta^{-2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\theta}$$

$$\theta = 3$$

D

Zadanie 5.

Niech $X_1,\ldots,X_n, n \geq 7$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0,\theta^2)$ (normalmym o średniej 0 i wariancji θ^2). Dla każdego $i \in \{1,\ldots,n\}$ zaobserwowano jedynie czy obserwacja była mniejsza od 1 czy nie, a dokładniej:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X_i < 1, \\ 0 & \text{jeśli } X_i \geq 1. \end{cases}$$

Oznaczmy $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, przez Φ oznaczamy z kolei dystrybuantę rozkładu standardowego normalnego $N(0,1)$. Załóżmy, że $0 < T < n$. Na podstawie tak otrzymanych danych estymator parametru θ otrzymany metodą największej wiarogodności wyraża się wzorem:

(A) $\dfrac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{T}{n-1}\right)}$

(B) $\Phi^{-1}\left(\dfrac{T}{n}\right)$

(C) $-\Phi^{-1}\left(\dfrac{T}{n-1}\right)$

(D) $\dfrac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{T}{n}\right)}$

(E) $-\Phi^{-1}\left(\dfrac{T}{n}\right)$

$$P(Y_i=0) = P(X_i \geqslant 1) = 1 - P(X_i < 1) = 1 - P(Z_i < \tfrac{1}{\theta}) = 1 - \Phi(\tfrac{1}{\theta})$$

$$P(Y_i=1) = P(X_i < 1) = P(Z_i < \tfrac{1}{\theta}) = \Phi(\tfrac{1}{\theta})$$

Funkcja wiarygodności

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = y) = \prod_{i=1}^{T} P(Y_i=1) \cdot \prod_{i=1}^{n-T} P(Y_i=0) = [P(Y_i=1)]^T \, [P(Y_i=0)]^{n-T}$$

Suma $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ mówi nam o liczbie wystąpień $Y_i = 1$, dla $Y_i = 0$ mamy różnicę wszystkich obserwacji i T

$$l(\theta) = \ln\left\{[P(Y_i=1)]^T \, [P(Y_i=0)]^{n-T}\right\} = T\ln[P(Y_i=1)] + (n-T)\ln[P(Y_i=1)]$$

$$l'(\theta) = T \cdot \frac{P'(Y_i=1)}{P(Y_i=1)} + (n-T)\frac{P'(Y_i=0)}{P(Y_i=0)} := 0$$

$$T \cdot \frac{f_X(\frac{1}{\theta})}{\Phi(\frac{1}{\theta})} + (n-T)\frac{-f_X(\frac{1}{\theta})}{1-\Phi(\frac{1}{\theta})} = 0 \quad / : f_X(\tfrac{1}{\theta})$$

$$\frac{T}{\Phi(\frac{1}{\theta})} + \frac{-(n-T)}{1-\Phi(\frac{1}{\theta})} = 0$$

$$\frac{T}{\Phi(\frac{1}{\sigma})} = \frac{n - T}{1 - \Phi(\frac{1}{\sigma})}$$

$$T - \cancel{T\Phi(\tfrac{1}{\sigma})} = n\,\Phi(\tfrac{1}{\sigma}) - \cancel{T\Phi(\tfrac{1}{\sigma})}$$

$$\Phi(\tfrac{1}{\sigma}) = \frac{T}{n}$$

$$\frac{1}{\sigma} = \Phi^{-1}\left(\frac{T}{n}\right)$$

$$\sigma = \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{T}{n}\right)}$$

D

Zadanie 6.

Zmienna losowa U_1 ma rozkład jednostajny na odcinku (0,1), a zmienna losowa U_2 ma rozkład jednostajny na odcinku (1,2). Zmienne te są niezależne. Zdefiniujmy $Y = U_1/U_2$. Ile wynosi $\frac{\mathbb{E}Y}{\mathbb{E}Y^2}$?

(A) 3

(B) $3\ln(2)$

(C) 2

(D) $\frac{1}{2}$

(E) $\frac{\ln(2)}{2}$

$f_{U_1,U_2}(u_1,u_2) = 1$ bo zm. niezależne

$$E[g(u_1,u_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(u_1,u_2)\cdot f_{U_1,U_2}(u_1,u_2)\,du_1\,du_2$$

$$EY = \int_0^1\int_1^2 \frac{u_1}{u_2}\,du_2\,du_1 = \int_0^1 u_1\cdot\ln(u_2)\Big|_1^2\,du_1 = \int_0^1 \ln(2)\,u_1\,du_1 =$$

$$= \ln(2)\frac{u_1^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$$

$$EY^2 = \int_0^1\int_1^2 \frac{u_1^2}{u_2^2}\,du_2\,du_1 = \int_0^1 u_1^2\cdot\left[-\frac{1}{u_2}\right]_1^2\,du_1 = \int_0^1 u_1^2\cdot\left(-\frac{1}{2}+1\right)du_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u_1^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{EY}{EY^2} = \frac{\ln(2)}{2}\cdot 6 = 3\ln(2)$$

B

Zadanie 7.

Zmienne losowe $X_1,\ldots,X_n$ przy danej wartości parametru $\Theta=\theta\in(0,1)$ są warunkowo niezależne i mają rozkład

$$P(X_i=1|\Theta=\theta)=1-\theta^2, \qquad P(X_i=0|\Theta=\theta)=\theta^2.$$

Z kolei zmienna losowa Θ ma rozkład o gestości

$$f_\Theta(\theta)=2\theta, \quad \theta\in(0,1).$$

Oznaczmy $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$. Ile wynosi $\mathbb{P}(S_3>0|S_1=0)$?

(A) 1

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{8}$

(E) $\frac{1}{16}$

$$P(S_3>0|S_1=0)=P(X_1+X_2+X_3>0\mid X_1=0)=P(X_2+X_3>0\mid X_1=0)=$$

$$=P(X_2+X_3=2\mid X_1=0)+P(X_2+X_3=1\mid X_1=0)$$

Wzór: $P(A|B)=\int_{-\infty}^{\infty}P(A|C=c)f_{C|B}(c)\,dc$

$$P(X_2+X_3=i\mid X_1=0)=\int_0^1 P(X_2+X_3=i\mid \Theta=\theta)f_{\Theta|X_1=0}(\theta)\,d\theta, \quad i=1,2$$

Rozkład sumy $X_i+X_j\mid\Theta=\theta$

$X_i+X_j\mid\Theta=\theta$	0	1	2
p_i	θ^4	$2\theta^2(1-\theta^2)$	$(1-\theta^2)^2$

Z Bayesa:

$$f_{\Theta|X_1=0}(\theta)=c\cdot P(X_1=0\mid\Theta=\theta)f_\Theta(\theta)=c\cdot\theta^2\cdot2\theta=c\theta^3$$

Musi sumować się do 1: $\frac{1}{c}=\int_0^1\theta^3\,d\theta=\frac{\theta^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}\Rightarrow c=4$

$$f_{\Theta|X_1=0}(\theta)=4\theta^3$$

$$P(X_2+X_3=2 \mid X_1=0)=\int_0^1 (1-\theta^2)^2 \cdot 4\theta^3 \, d\theta = \frac{1}{6}$$

$$P(X_2+X_3=1 \mid X_1=0)=\int_0^1 2\theta^2(1-\theta^2)\cdot 4\theta^3 \, d\theta = \frac{1}{3}$$

$$P(S_3>0 \mid S_1=0) = \frac{1}{6}+\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

B

Zadanie 8.

Zmienne losowe X_1 i X_2 są niezależne o tym samym rozkładzie z gęstością

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{dla } x \geq 1, \\ 0 & \text{dla} x < 1. \end{cases}$$

Zdefiniujmy $Y = \frac{\min(X_1, X_2)}{\max(X_1, X_2)}$. Ile wynosi $\mathbb{E}Y$?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{2}{5}$

(C) $\frac{2}{15}$

(D) $\frac{22}{45}$

(E) $\frac{1}{3}$

$$\min(X_1, X_2) = \begin{cases} X_1, & X_1 < X_2 \\ X_2, & X_1 > X_2 \end{cases}$$

$$\max(X_1, X_2) = \begin{cases} X_2, & X_1 < X_2 \\ X_1, & X_1 > X_2 \end{cases}$$

$$EY = \int_1^\infty \left[\int_1^{X_2} \frac{X_1}{X_2} \cdot \frac{1}{X_1^2} \cdot \frac{1}{X_2^2}\, dX_1 + \int_{X_2}^{\infty} \frac{X_2}{X_1} \cdot \frac{1}{X_1^2} \cdot \frac{1}{X_2^2}\, dX_1 \right] dX_2 =$$

$$= \int_1^\infty \left[\frac{1}{X_2^3} \int_1^{X_2} \frac{1}{X_1}\, dX_1 + \frac{1}{X_2} \int_{X_2}^{\infty} \frac{1}{X_1^3}\, dX_1 \right] dX_2 =$$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{X_2^3} \left[\ln X_1 \right]_1^{X_2} + \frac{1}{X_2} \left[-\frac{1}{2X_1^2} \right]_{X_2}^{\infty} dX_2 =$$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{X_2^3} (\ln X_2) + \frac{1}{X_2} \left(\frac{1}{2X_2^2} \right) dX_2 = \int_1^\infty \frac{\ln X_2}{X_2^3} + \frac{1}{2X_2^3}\, dX_2 =$$

$$= \int_1^\infty \ln(X_2) \left(-\frac{1}{2X_2^2} \right)' dX_2 + \int_1^\infty \frac{1}{2X_2^3}\, dX_2 =$$

$$= \ln(X_2) \left(-\frac{1}{2X_2^2} \right) \Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{1}{2X_2^3}\, dX_2 + \int_1^\infty \frac{1}{2X_2^3}\, dX_2 =$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{1}{4X_2^2} \right]_1^\infty = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

A

Zadanie 9.

Wykonujemy n rzutów czterościenną kostką do gry. Weryfikujemy hipotezę H_0, które mówi, że każda z czterech ścian pojawia się z jednakowym prawdopodobieństwem 1/4. Standardowy test χ^2 na poziomie istotności 0.05 odrzuca H_0 jeśli wartość statystyki χ^2 przekracza 7.8147 (kwatnyl rzędu 0.95 rozkładu χ^2 z 3 stopniami swobody).

Jednakże, wykonujemy tylko $n = 4$ rzuty. Ta liczba rzutów jest za mała, by użyć asymptotycznego przybliżenia rozkładu χ^2. Ile wynosi faktyczny rozmiar testu "odrzucająmy hipotezę H_0, gdy wartość statystyki χ^2 przekroczy 7.8147"?

(A) $\frac{1}{64}$

(B) $\frac{3}{128}$

(C) $\frac{3}{16}$

(D) $\frac{9}{64}$

(E) $\frac{9}{16}$

Statystyka testowa $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ O - obserwacja

E - teoretyczna wartość oczekiwana

$O_i \sim Bin(4, \frac{1}{4})$

$E_i = np = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ przy założeniu H_0

Rozmiar testu: $\alpha = P(\text{odrzucamy } H_0 \mid H_0)$

$\alpha = P(\chi^2 > 7{,}8147)$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - np)^2}{np} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - 1)^2}{1} = \sum_{i=1}^{4} O_i^2 - 2O_i + 1 = \sum_{i=1}^{4}(O_i^2) - 2\cdot 4 + 4 =$$

$$= \sum_{i=1}^{4}(O_i^2) - 4$$

$\alpha = P\left(\sum_{i=1}^{4} O_i^2 > 7{,}8147 + 4\right) = P\left(\sum_{i=1}^{4} O_i^2 > 11{,}8147\right) = \Big|$ $\sum_{i=1}^{4} O_i^2 > 11{,}8147$ jest

tylko jedna taka sytuacja gdy jedna ze ścianek wypadnie 4 razy bo

wtedy mamy $\sum_{i=1}^{4} O_i^2 = 0+0+0+16 = 16$, trzeba obliczyć P(1 ścianka wypada

4 razy) $= \frac{1}{64} \Big|$

$\alpha = \frac{1}{64}$

A

Zadanie 10.

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym ze średnią 1. Zdefiniujmy: $U = 2X+Y, V = X-Y$.
Ile wynosi $\mathbb{P}(U < 6, V > 0)$?

(A) $\frac{1}{4} - 2e^{-2} + \frac{3}{2}e^{-4}$

(B) $\frac{1}{2} - 2e^{-3} + \frac{3}{2}e^{-4}$

(C) $1 - 2e^{-3} + \frac{3}{4}e^{-4}$

(D) $\frac{1}{2} - e^{-3} + \frac{1}{2}e^{-4}$

(E) $\frac{1}{2} - 2e^{-2} + \frac{3}{2}e^{-4}$

$$\begin{cases} U = 2X+Y \\ V = X-Y \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = U-2X \\ X = V+Y \end{cases} \qquad X = V+U-2X \qquad 3X = V+U \qquad X = \frac{V+U}{3}$$

$$Y = U - \frac{2V+2U}{3} = \frac{3U-2V-2U}{3} = \frac{U-2V}{3}$$

$$\begin{cases} X = \frac{V+U}{3} \\ Y = \frac{U-2V}{3} \end{cases}$$

Jakobian: $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-x-y}$$

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{3}\exp\left\{-\frac{v+u}{3} - \frac{u-2v}{3}\right\} = \frac{1}{3}\exp\left\{\frac{-v-u-u+2v}{3}\right\} = \frac{1}{3}\exp\left\{\frac{v-2u}{3}\right\}$$

Granice U i V:

$U > 0 \qquad -\infty < V < \infty$

$$\begin{cases} 0 < X \\ 0 < Y \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < \frac{V+U}{3} \\ 0 < \frac{U-2V}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < V+U \\ 0 < U-2V \end{cases} \qquad \begin{cases} -U < V \\ U > 2V \end{cases} \qquad \begin{cases} V > -U \\ V < \frac{1}{2}U \end{cases}$$

$$\begin{cases} V > 0 \\ U > 0 \\ V < \frac{1}{2} U \end{cases}$$

$$P(U<6, V>0) = \int_0^6 \int_0^{\frac{u}{2}} \frac{1}{3} \exp\left\{\frac{v-2u}{3}\right\} dv\, du =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 \left[3 \exp\left\{\frac{v-2u}{3}\right\}\right]\Bigg|_0^{\frac{u}{2}} du = \int_0^6 \exp\left\{\frac{\frac{u}{2} - \frac{4u}{2}}{3}\right\} - \exp\left\{-\frac{2}{3}u\right\} du =$$

$$= \int_0^6 \exp\left\{-\frac{1}{2}u\right\} - \exp\left\{-\frac{2}{3}u\right\} du =$$

$$= -2\exp\left\{-\frac{1}{2}u\right\} + \frac{3}{2}\exp\left\{-\frac{2}{3}u\right\}\Bigg|_0^6 =$$

$$= -2\exp\{-3\} + \frac{3}{2}\exp\{-4\} + 2 - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} - 2e^{-3} + \frac{3}{2}e^{-4}$$

B