Zadanie 1.

Losujemy dwa punkty $P^{(1)} = (X^{(1)}, Y^{(1)})$ oraz $P^{(2)} = (X^{(2)}, Y^{(2)})$ jednostajnie z kwadratu jednostkowego, tzn. $X^{(1)}, Y^{(1)}, X^{(2)}, Y^{(2)}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(0,1)$. Następnie z tych punktów tworzymy prostokąt $\texttt{rect}(P^{(1)}, P^{(2)})$ o wierzchołkach:

$$V_1 = \left(\min(X^{(1)}, X^{(2)}), \min(Y^{(1)}, Y^{(2)})\right), \quad V_2 = \left(\min(X^{(1)}, X^{(2)}), \max(Y^{(1)}, Y^{(2)})\right),$$

$$V_3 = \left(\max(X^{(1)}, X^{(2)}), \max(Y^{(1)}, Y^{(2)})\right), \quad V_4 = \left(\max(X^{(1)}, X^{(2)}), \min(Y^{(1)}, Y^{(2)})\right).$$

Niech Z oznacza pole prostokąta $\texttt{rect}(P^{(1)}, P^{(2)})$. Ile wynosi EZ?

X - długość 1 boku

Y - długość 2 boku

$Z = XY$

Ponieważ XY są niezależne to ich gęstość łączna wynosi:

$f_{XY}(x,y) = 1$, ponadto $EZ = EXEY$.

$X = \max(X^{(1)}, X^{(2)}) - \min(X^{(1)}, X^{(2)}) =$ | dla ułatwienia zmienię oznaczenia | $=$

$= \max(X, Y) - \min(X, Y)$

$$\max(x,y) = \begin{cases} x, & x > y \\ y, & x < y \end{cases}$$

$EX = E[\max(X,Y)] - E[\min(X,Y)]$

$$\min(x,y) = \begin{cases} x, & x < y \\ y, & x > y \end{cases}$$

$$E[\max(X,Y)] = \int_0^1 \left(\int_0^y y\,dx + \int_y^1 x\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(yx\Big|_0^y + \frac{x^2}{2}\Big|_y^1 \right) dy =$$

$$= \int_0^1 y^2 + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\,dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\,dy = \frac{y^3}{6} + \frac{y}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$E[\min(X,Y)] = \int_0^1 \left(\int_0^y x\,dx + \int_y^1 y\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^y + yx\Big|_y^1 \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^2}{2} + y - y^2\,dy = \int_0^1 y - \frac{y^2}{2}\,dy = \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$EX = \frac{1}{3}$$

Dla EY mamy analogiczne obliczenia więc $EY = \frac{1}{3}$:

$$EZ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Druga metoda:

$$EX = \int_0^1 \int_0^1 |x-y| \, dx\,dy = \left| \, |x-y| = \begin{cases} x-y, & x > y \\ y-x, & x < y \end{cases} \right| =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^y y-x \, dx + \int_y^1 x-y \, dx \right) dy = \int_0^1 yx - \frac{x^2}{2} \Big|_0^y + \frac{x^2}{2} - yx \Big|_y^1 \, dy =$$

$$= \int_0^1 y^2 - \cancel{\frac{y^2}{2}} + \frac{1}{2} - y - \cancel{\frac{y^2}{2}} + \cancel{y^2} \, dy = \int_0^1 y^2 - y + \frac{1}{2} \, dy =$$

$$= \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$EY = \frac{1}{3}$$

$$EZ = \frac{1}{9}$$

Zadanie 2.

Zmienne losowe X oraz Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o gęstościach $f_{\theta_1}(\cdot)$ oraz $f_{\theta_2}(\cdot)$, gdzie

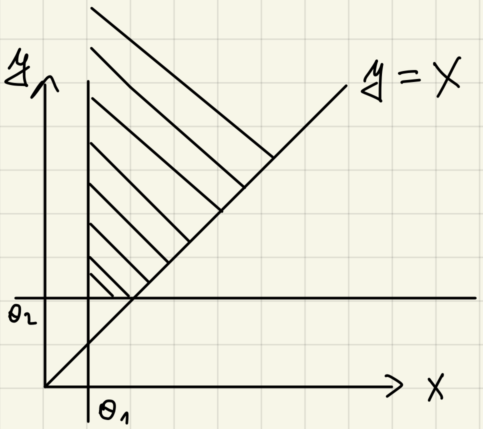
$$f_\theta(t) = \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{t-\theta}{\theta}\right), \quad t > \theta > 0.$$

Załóżmy, że $\theta_2 > \theta_1 > 0$. Zdefiniujmy $Z := \frac{Y}{X}$. Ile wynosi $P(Z > 1)$?

$$P(Z>1) = P\left(\frac{Y}{X} > 1\right) = P(Y > X)$$

$$f_{\theta_1}(x) = \frac{1}{\theta_1}\exp\left(-\frac{x-\theta_1}{\theta_1}\right)$$

$$f_{\theta_2}(y) = \frac{1}{\theta_2}\exp\left(-\frac{y-\theta_2}{\theta_2}\right)$$



$$P(Y>X) = \int_{\theta_2}^{\infty}\int_{\theta_1}^{y} \frac{1}{\theta_1\theta_2}\exp\left(-\frac{x-\theta_1}{\theta_1}\right)\exp\left(-\frac{y-\theta_2}{\theta_2}\right)dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\theta_1}\theta_2}\int_{\theta_2}^{\infty}\exp\left(-\frac{y-\theta_2}{\theta_2}\right)\cdot\exp\left(-\frac{x-\theta_1}{\theta_1}\right)(-\cancel{\theta_1})\Big|_{\theta_1}^{y}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\theta_2}\int_{\theta_2}^{\infty}\exp\left(-\frac{y-\theta_2}{\theta_2}\right)\left(1-\exp\left(-\frac{y-\theta_1}{\theta_1}\right)\right)dy =$$

$$= \frac{1}{\theta_2}\int_{\theta_2}^{\infty}\exp\left(-\frac{y-\theta_2}{\theta_2}\right) - \exp\left(-\frac{y-\theta_2}{\theta_2}-\frac{y-\theta_1}{\theta_1}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{\theta_2}\left[\exp\left(-\frac{y-\theta_2}{\theta_2}\right)(-\theta_2)\Big|_{\theta_2}^{\infty} - \exp\left(-\frac{y-\theta_2}{\theta_2}-\frac{y-\theta_1}{\theta_1}\right)\left(-\frac{\theta_1\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\right)\Big|_{\theta_2}^{\infty}\right] =$$

$$= 1 - \frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}\exp\left(-\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1}\right)$$

Zadanie 3.
Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n$ są niezależnymi obserwacjami z rozkładu z parametrami $\alpha > 0, \lambda > 0$ o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} (x-1)^{\alpha-1} e^{-\lambda(x-1)}, \ x \geq 1,$$

gdzie $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-x} dx.$

Z otrzymanej próbki policzono średnią $\bar{X}$ oraz wariancję próbkową $\hat{S}^2$. Na podstawie tej próbki skontruowano estymatory parametrów λ, α metodą momentów (tj. przyrównano wartość średnią rozkładu o gęstości f do średniej próbkowej oraz wariancję tego rozkładu do wariancji próbkowej). Wartości tak powstałych estymatorów to

Rozkład $f(x)$ jest przesuniętym rozkładem Gamma, oznaczam $y = x-1$,
dla rozkładu Gamma $EY = \frac{\alpha}{\lambda}$, $Var(Y) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$. Uwzględniając przesunięcie:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(x_i - 1) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(x_i) - 1 = \bar{X} - 1$$

Przesunięcie nie wpływa na wariancję:

$$\hat{S}_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}(x_i - 1 - \bar{x} + 1)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \hat{S}_X^2$$

$$\begin{cases} \bar{Y} = \frac{\alpha}{\lambda} \\ \hat{S}^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{Y}\lambda = \alpha \\ \lambda^2 \hat{S}^2 = \bar{Y}\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \lambda \bar{Y} \\ \lambda = \frac{\bar{Y}}{\hat{S}^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\bar{X}-1}{\hat{S}^2} \\ \alpha = \frac{(\bar{X}-1)^2}{\hat{S}^2} \end{cases}$$

Zadanie 4.

Niech $Y_1, \dots, Y_8$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości f, o której zakładamy, że jest ściśle dodatnia na całej prostej. Testujemy hipotezę:

$$\begin{array}{ll} H_0\colon & f \text{ jest symetryczna, tzn. } f(-x) = f(x) \\ & \text{vs.} \\ H_1 & f \text{ nie jest symatryczna.} \end{array}$$

Niech T oznacza liczbę elementow w ciągu $Y_1, \dots, Y_8$, które mają wartości dodatnie. Odrzucamy hipotezę H_0, gdy $T < 2$ lub $T > 6$. Jaki jest rozmiar takiego testu?

Odrzucamy hipotezę H_0, gdy $T<2$ lub $T>6$ cyli $T \in \{0,1,7,8\}$:

$P(T \in \{0,1,7,8\}) = P(T=0) + P(T=1) + P(T=7) + P(T=8) =$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left[\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}\right] = \frac{18}{256}$

Zadanie 5.

Mówimy, że $(X_1,\ldots,X_k)$ ma rozkład wielomianowy $M(n,p_1,\ldots,p_k)$, gdzie $n>0$ to liczba naturalna, $p_i \geq 0, i=1,\ldots,k, \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, jeśli

$$P(X_1=x_1,\ldots,X_k=x_k)=\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}p_1^{x_1}\cdots p_k^{x_k}$$

dla $x_i \in \{0,\ldots,n\}, i=1,\ldots,k$ takich, że $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$.

W modelu Hardy'ego-Weinberga wektor (X_1,X_2,X_3) ma rozkład wielomianowy

$$M(n,\theta^2,2\theta(1-\theta),(1-\theta)^2)$$

z pewnym parametrem $\theta \in (0,1)$.

Zdefiniujmy $T = X_1 + X_2$. Ile wynosi ET?

Jeśli zna się wzór na wartość oczekiwaną rozkładu wielomianowego to można szybko obliczyć:

$EX_i = np_i$

$ET = n\theta^2 + n2\theta(1-\theta) = \theta(2-\theta)n$

Jeżeli nie to można wyprowadzić ale trzeba znać inny wzór:

$$\sum_{x_1+x_2+\ldots x_k=n} \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!} p_1^{x_1}\ldots p_k^{x_k} = (p_1+p_2+\ldots+p_k)^n$$

$$EX_i = \sum_{x_i} \frac{n!}{x_i!} x_i p_i^{x_i} = \sum_{x_i} \frac{n!}{x_i!} p_i \frac{\delta}{\delta p_i}(p_i^{x_i}) = p_i \frac{\delta}{\delta p_i} \sum_{x_i} \frac{n!}{x_i!} p_i^{x_i} =$$

$$= p_i \frac{\delta}{\delta p_i}(p_1+p_2+\ldots+p_k)^n = p_i n(p_1+p_2+\ldots+p_k)^{n-1} = np_i,$$

bo $p_1+p_2+\ldots+p_k = 1$.

Zadanie 6.

Studenci pisali egzamin w dwóch salach, w sali A i sali B. W sali A egzamin pisały 42 osoby, średnia punktów wyniosła 50, a odchylenie standardowe 4. Natomiast w sali B egzamin pisało 30 osób, średnia punktów wyniosła 62, a odchylenie standardowe 5.

Ile wynosi odchylenie standardowe całej (połączonej) grupy 72 osób? Wskaż najbliższą odpowiedź.

Uwaga:

Dla próbki $x_1, \ldots, x_n$ wariancję próbkową definiujemy jako $\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, gdzie $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

A: $n = 42$, $\bar{x} = 50$, $s = 4$

B: $n = 30$, $\bar{x} = 62$, $s = 5$

Obliczę średnią całej grupy używając podanego wzoru:

$$50 = \frac{1}{42}\sum_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = 2100$$

$$62 = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{n} b_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} b_i = 1860$$

$$\bar{x} = \frac{1}{72}(2100 + 1860) = 55$$

Analogicznie z wariancją, biorąc pod uwagę, że wzór można zapisać jako:

$$s^2(n-1) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = s^2(n-1) + n\bar{x}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 105656$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 116045$$

$$s^2 = \frac{1}{71}(105656 + 116045 - 72 \cdot 55^2) = 54{,}94$$

$$s = 7{,}41$$

Zadanie 7.

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych takich, że $EX = 1, EY = \frac{1}{2}$.

Rozważmy zmienną losową $Z = \frac{X}{X+Y}$. Ile wynosi EZ ?

$$P(Z<t) = P\left(\frac{X}{X+Y} < t\right) = P\left(X < tX + tY\right) = P(tY > X - tX) =$$

$$= P\left(Y > \frac{X-tX}{t}\right) = \int_0^\infty P\left(Y > \frac{X-tX}{t} \mid X=x\right) f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\infty P\left(Y > \frac{x-tx}{t}\right) e^{-x}\,dx =$$

$$\left[P\left(Y > \frac{x-tx}{t}\right) = 2\int_{\frac{x-tx}{t}}^{\infty} e^{-2y}\,dy = -e^{-2y}\Big|_{\frac{x-tx}{t}}^{\infty} = e^{-2x\left(\frac{1-t}{t}\right)} \right]$$

$$= \int_0^\infty e^{-2x\left(\frac{1-t}{t}\right)-x}\,dx = e^{-x\left(\frac{2}{t}-1\right)}\left(-\frac{t}{2-t}\right)\Big|_0^\infty = \frac{t}{2-t}$$

$$F_Z(z) = \frac{z}{2-z}$$

$$f_Z(z) = \frac{2}{(2-z)^2}$$

$$EZ = \int_0^1 \frac{2z}{(2-z)^2}\,dz = 0.6137$$

Odp. A

Zadanie 8.

Niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 3$ pochodzą z rozkładu o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\lambda} & x \geq 1, \\ 0 & x < 1, \end{cases}$$

gdzie parametr $\lambda > 0$ jest nieznany.
Skonstruowano estymator największej wiarogodności $\hat{\lambda}$ parametru λ. Ile wynosi $E(\hat{\lambda})$?

$$f_X(x) = \lambda x^{-\lambda - 1}$$

$$L(\mathbf{x}; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda x_i^{-\lambda-1} = \lambda^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{-\lambda-1}$$

$$\ln(L) = n \ln\lambda - \lambda \ln \prod_{i=1}^{n} x_i - \ln \prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$\ln'(L) = \frac{n}{\lambda} - \ln \prod_{i=1}^{n} x_i := 0$$

$$\frac{n}{\lambda} = \ln \prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\ln \prod_{i=1}^{n} x_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$$

$$Y = \ln X$$

$$P(Y < y) = P(\ln X < y) = P(X < e^y) = 1 - e^{-\lambda y}$$

$$Y \sim Exp(\lambda)$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} Y \sim gamma(n, \lambda)$$

$$E(\hat{\lambda}) = E\left[\frac{n}{W}\right] = n \int_0^\infty \frac{1}{w} \frac{\lambda^n w^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} dx = n \int_0^\infty \frac{\lambda \lambda^{n-1} w^{n-1-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)\Gamma(n-1)} dx =$$

$$= \frac{n\lambda}{n-1}$$

Zadanie 9.

Rzucamy symetryczną kostką sześcienną, oznaczmy wynik przez N. Następnie, niezależnie od siebie i od N, rzucamy N razy tą kostką. Oznaczmy wyniki $X_1, \ldots, X_N$. Następnie te X_i, które są mniejsze od N zamieniamy na 0, tzn. rozważamy ciąg

$$Y_i = \begin{cases} X_i & \text{jeśli } X_i \geq N \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Niech $S = Y_1 + \ldots + Y_N$. Ile wynosi ES?

N	wartość oczekiwana
1	$1 \cdot \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$
2	$2 \cdot \frac{0+2+3+4+5+6}{6} = \frac{20}{3}$
3	$3 \cdot \frac{0+0+3+4+5+6}{6} = 9$
4	$4 \cdot \frac{0+0+0+4+5+6}{6} = 10$
5	$5 \cdot \frac{0+0+0+0+5+6}{6} = \frac{55}{6}$
6	$6 \cdot \frac{0+0+0+0+0+6}{6} = 6$

Wartości oczekiwane trzeba jeszcze pomnożyć przez prawdopodobieństwo otrzymania danej wartości na pierwszej kostce czyli $\frac{1}{6}$:

$$ES = \frac{1}{6}\left(\frac{7}{2} + \frac{20}{3} + 9 + 10 + \frac{55}{6} + 6\right) = \frac{133}{18}$$

Zadanie 10.

Wektor losowy (X,Y) przyjmuje dyskretne wartości z $\{0,1,\ldots\}^2$. Znana jest funkcja tworząca:

$$G_{X,Y}(s,t) = E(s^X t^Y) = \left(\frac{1-(p_1+p_2)}{1-(p_1 s+p_2 t)}\right)^n,$$

gdzie $n \in \{1,2,\ldots\}$, a $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$ takie, że $p_1+p_2<1$. Ile wynosi $P(X=1)$?

$$p(k) = P(X=k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$$

Chcemy obliczyć $P(X=1)$ więc ustawiamy $t=1$ i otrzymujemy:

$$G_{X,Y}(1,1) = E[1^X] = \left(\frac{1-(p_1+p_2)}{1-(p_1 1+p_2)}\right)^n$$

$$G'_{X,Y}(1,1) = n\left(\frac{1-(p_1+p_2)}{1-(p_1 1+p_2)}\right)^{n-1} \frac{(1-(p_1+p_2))p_1}{(1-(p_1 1+p_2))^2} =$$

$$= \frac{np_1}{1-(p_1 1+p_2)}\left(\frac{1-(p_1+p_2)}{1-(p_1 1+p_2)}\right)^n$$

$$G'_{X,Y}(0,1) = \frac{np_1}{1-p_2}\left(\frac{1-p_1-p_2}{1-p_2}\right)^n$$