Zadanie 1.

Niech proces S_t spełnia:

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t).$$

Zakładamy, że μ_t, σ_t są takie, iż istnieją rozwiązania powyższych równań, oraz dla każdego $t > 0$ zachodzi $S_t > 0$.

Proszę wskazać, który z poniższych wzorów opisuję dynamikę procesu $Y_t := \frac{1}{S_t}$.

(A) $dY_t = Y_t\big((\sigma_t^2 - \mu_t)dt - \sigma_t dW_t\big)$

(B) $dY_t = Y_t\left(\left(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)dt + \frac{1}{2}\sigma_t dW_t\right)$

(C) $dY_t = Y_t\left((\sigma_t^2 - \mu_t)dt + \frac{1}{2}\sigma_t^2 dW_t\right)$

(D) $dY_t = Y_t\left((2\mu_t - \sigma_t^2)dt - \frac{1}{2}\sigma_t dW_t\right)$

(E) $dY_t = Y_t\left(\left(\sigma_t^2 - \frac{1}{2}\mu_t\right)dt + \sigma_t^2 dW_t\right)$

Lemat Ito:

$$df = \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}(dS_t)^2$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial S_t} = -\frac{1}{S_t^2}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial S_t} = 2\frac{1}{S_t^3}$$

$$dY_t = -\frac{1}{S_t^2} dS_t + \frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{S_t^3}(dS_t)^2$$

$$dY_t = -\frac{1}{S_t^2} S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{S_t^3} S_t^2 \sigma_t^2 dt$$

$$dY_t = -Y_t\mu_t dt - Y_t\sigma_t dW_t + Y_t\sigma_t^2 dt$$

$$dY_t = Y_t(\sigma_t^2 dt - \mu_t dt - \sigma_t dW_t)$$

$$dY_t = Y_t((\sigma_t^2 - \mu_t)dt - \sigma_t dW_t)$$

A

Zadanie 2.

Załóżmy, że dzisiejsza cena akcji wynosi 250, a po kwartale może wzrosnąć do 290 lub też obniżyć się do 230. Prawdopodobieństwo wzrostu ceny inwestor ocenia subiektywnie na 30%. Załóżmy, że prosta stopa kwartalnych depozytów wynosi 2%. Proszę wyznaczyć cenę arbitrażową opcji kupna akcji o cenie wykonania 275 oraz terminie wygaśnięcia równym 3 miesiące. Proszę podać najbliższą wartość.

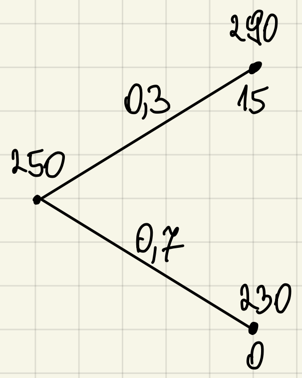
(A) 5.23

(B) 5.53

(C) 5.83

(D) 6.13

(E) 6.43



$i = 0,02$

$$q = \frac{250 \cdot 1,02 - 230}{290 - 230} = \frac{5}{12}$$

$$C_0 = 1,02^{-1} \cdot \frac{5}{12} \cdot 15 = 6,13$$

D

Zadanie 3.

Rozważmy dwie niepłacące dywidendy akcje, A i B, o procesach cen odpowiednio S_t^A i S_t^B.

Niech $t = 0, S_0^A = 105,\ S_0^B = 100$. Proszę wyznaczyć cenę opcji, która w chwili $T = 3$ daje możliwość wymiany jednej akcji B na jedną akcję A, wiedząc, iż: roczna stopa wolna od ryzyka wynosi $r = 5\%$, natomiast cena analogicznej opcji, pozwalającej wymienić jedną akcję A na jedną akcję B, w chwili 0 wynosi $X = 11$. Proszę podać najbliższą odpowiedź.

(A) 6.0

(B) 11.0

(C) 16.0

(D) 20.6

(E) 29.9

$S_0^A = 105$ $S_0^B = 100$ $T = 3$ $r = 5\%$ $X = 11$ Y - szukana cena

parytet:

$Y + S_0^B = X + S_0^A$

$Y + 100 = 11 + 105$

$Y = 16$

C

Zadanie 4.

Rozważmy dwóch inwestorów – inwestora A oraz inwestora B.

Inwestor A zajmuje długą pozycję w 1 000 kontraktów *forward* na pewien instrument bazowy. Termin wygaśnięcia każdego kontraktu to $T = 5$ miesięcy, a cena wykonania wynosi 100.

Inwestor B zajmuje długą pozycję w 1 000 kontraktów *futures* na ten sam instrument bazowy. Termin zamknięcia kontraktów to również $T = 5$ miesięcy. W ramach umowy inwestor B musi złożyć początkowy depozyt zabezpieczający w kwocie 5 za każdy kontrakt. Depozyt minimalny wynosi 60% depozytu początkowego; w przypadku gdyby kwota depozytu spadała poniżej wartości minimalnej, inwestor B zobowiązany jest do uzupełnienia kwoty depozytu do wartości początkowej.

Na koniec każdego miesiąca stosowany jest mechanizm *mark-to-market*, dopisywane są odsetki od depozytu (w miesięcznej wysokości 0.3% stanu depozytu z początku miesiąca), a także wystawiane są wezwania do uzupełnienia kwoty depozytu (dopłata jest dokonywana na początku kolejnego miesiąca w oparciu o finalny stan depozytu z końca miesiąca bieżącego i również może zarabiać odsetki).

Wiemy, iż cena instrumentu bazowego w chwili 0 wynosiła 100. Na koniec kolejnych 5 miesięcy kształtowała się na poziomie 102, 101, 97, 98, 99.

Niech W_A i W_B określają wyniki na kontraktach zawartych przez inwestorów A i B w momencie ich zakończenia (gdzie strata podawana jest ze znakiem „-„). Wówczas $W_B - W_A$ wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

(A) 68.2

(B) 73.2

(C) 78.2

(D) 82.2

(E) 87.2

t	F_t	Bilans	Margin call	Odsetki	Zysk / Strata	Bilans końcowy
0	100					5000
1	102	5000	0	15	2000	7015
2	101	7015	0	21,045	-1000	6036,05
3	97	6036,05	0	18,11	-4000	2054,15
4	98	2054,15	2945,85	15	1000	6015
5	99	6015		18,05	1000	7033,05

$W_B = 7033,05 - 5000 - 2945,85 = -912,8$

$W_A = -1000$

$W_B - W_A = -912,8 + 1000 = 87,2$ E

Zadanie 5.

Renta wieczysta wypłaca raty na końcu każdego roku. W latach nieparzystych pierwsza rata wynosi 1, a każda następna jest o 2 większa od poprzedniej. W latach parzystych pierwsza rata wynosi 2, a każda następna jest o 4 większa od poprzedniej.

Ile wynosi obecna wartość tej renty, jeżeli stopa procentowa jest równa 5%? Proszę wskazać najbliższą wartość.

(A) 600

(B) 610

(C) 620

(D) 630

(E) 640

v - czynnik dyskontujący

$$\underbrace{1v + 3v^3 + 5v^5 + \ldots}_{A} + \underbrace{2v^2 + 6v^4 + 10v^6 + \ldots}_{B}$$

$$A = v + 3v^3 + 5v^5 + \ldots$$

$$Av^2 = v^3 + 3v^5 + 5v^7 + \ldots$$

$$A - Av^2 = v + 2v^3 + 2v^5 + 2v^7 + \ldots = v + \frac{2v^3}{1-v^2} = \frac{v - v^3 + 2v^3}{1-v^2} = \frac{v + v^3}{1-v^2}$$

$$A(1-v^2) = \frac{v+v^3}{(1-v^2)}$$

$$A = \frac{v+v^3}{(1-v^2)^2}$$

$$B = 2v^2 + 6v^4 + 10v^6 + \ldots$$

$$Bv^2 = 2v^4 + 6v^6 + 10v^8 + \ldots$$

$$B - Bv^2 = 2v^2 + 4v^4 + 4v^6 + 4v^8 + \ldots = 2v^2 + \frac{4v^4}{1-v^2} =$$

$$= \frac{2v^2 - 2v^4 + 4v^4}{1-v^2} = \frac{2v^2 + 2v^4}{1-v^2}$$

$$B = \frac{2v^2 + 2v^4}{(1-v^2)^2}$$

$$A + B = \frac{\nu + \nu^3}{(1-\nu^2)^2} + \frac{2\nu^2 + 2\nu^4}{(1-\nu^2)^2} = \frac{\nu + 2\nu^2 + \nu^3 + 2\nu^4}{(1-\nu^2)^2}$$

$$A + B = 610,36$$

B

Zadanie 6.

Rozważmy model Vasicek'a dla stopy procentowej r_t. Wiemy, iż $r_0 = 3\%$, $\mathbb{E}r_2 = 5\%$, $VAR\ r_2 = 2\%$ oraz lim $\lim_{t\to\infty} VAR\ r_t = 4\%$.

Wiedząc, że $r_3 = 10\%$, proszę wyznaczyć cenę wystawianej w chwili $t = 3$ i zapadającej w chwili $t = 5$ obligacji zero-kuponowej o nominale 100. Proszę wskazać najbliższą odpowiedź.

(A) 81.10

(B) 81.60

(C) 82.10

(D) 82.60

(E) 83.10

$$P(t,T) = A(t,T)\exp\{-B(t,T)r_t\}, \text{ gdzie}$$

$$B(t,T) = \frac{1-\exp\{-a(T-t)\}}{a}$$

$$A(t,T) = \exp\left\{\left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)\left[B(t,T) - (T-t)\right] - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t,T)\right\}$$

$$dr_t = a(b - r_t)\,dt + \sigma\, dW_t$$

$$r_t \sim N\left\{e^{-at}r_0 + b(1-e^{-at});\ \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2at})\right\}$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}r_2 = e^{-2a}\cdot 0{,}03 + b(1-e^{-2a}) = 0{,}05 \\ \operatorname{Var}(r_2) = \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-4a}) = 0{,}02 \\ \lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{Var}(r_2) = \frac{\sigma^2}{2a} = 0{,}04 \end{cases}$$

$$0{,}04(1-e^{-4a}) = 0{,}02$$

$$\begin{cases} a = 0{,}1733 \\ b = 0{,}0983 \end{cases}$$

$$B(3,5) = \frac{1-\exp\{-0{,}1733(5-3)\}}{0{,}1733} = 1{,}6902$$

$$A(3,5) = \exp\left\{\left(0{,}0983 - \frac{0{,}04}{0{,}1733}\right)(1{,}6902 - 2) - \frac{1}{2}\cdot 0{,}04 \cdot 1{,}6902^2\right\} = 0{,}9840$$

$P(3,5) = 0,9840 \exp\{-1,6902 \cdot 0,1\} = 0,8310$

$100\,P(3,5) = 83,10$

E

Zadanie 7.

Rozważmy akcję, której cena wynosi 100. Cena akcji może w ciągu roku urosnąć o 10% lub spaść o 12%. Stopa procentowa w bieżącym roku wynosi 2%. W kolejnym roku, w przypadku wzrostu ceny akcji, stopa procentowa spadnie do poziomu 1%; jeśli natomiast nastąpi spadek cen akcji, to stopy procentowe wzrosną do poziomu 5%. Zakładając brak arbitrażu oraz wykorzystując portfel replikujący, inwestor wycenia opcję sprzedaży na akcję, o cenie wykonania 101, zapadającą za 2 lata. Cena opcji wynosi (proszę wskazać najbliższą wartość):

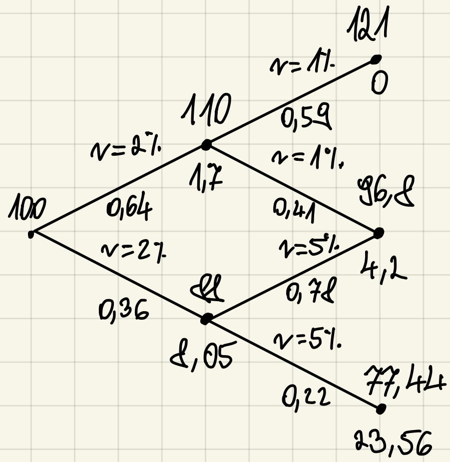
(A) 4.0

(B) 3.5

(C) 3.0

(D) 2.5

(E) 2.0



$$q_t = \frac{S_t e^{r\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}}{S^+_{t+\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}}$$

$$V_t = e^{-r\Delta t}\left[q_t X^+_{t+\Delta t} + (1-q_t) X^-_{t+\Delta t}\right]$$

$$q_1^1 = \frac{110 \cdot e^{0,01} - 96,8}{121 - 96,8} = 0,5911$$

$$V_1^+ = e^{-0,01}\left[0,59 \cdot 0 + 0,41 \cdot 4,2\right] = 1,7001$$

$$q_1^3 = \frac{88 \cdot e^{0,05} - 77,44}{96,8 - 77,44} = 0,7785$$

$$V_1^- = e^{-0,05}\left[0,78 \cdot 4,2 + 0,22 \cdot 23,56\right] = 8,0742$$

$$q_0^+ = \frac{100 e^{0,02} - 88}{110 - 88} = 0,6373$$

$$V_0 = e^{-0,02}\left[0,64 \cdot 1,7 + 0,36 \cdot 8,05\right] = 3,9722 \approx 4$$

A

Zadanie 8.

Firma POLEXP wzięła 5-letni kredyt z banku POLBANK w wysokości 400 tys. PLN. Na koniec każdego roku POLEXP ma do zapłaty odsetki od kredytu wg stopy WIBOR + 110 p.p., natomiast nominał kredytu ma zostać spłacony jednorazowo na koniec 5-tego roku. Jednocześnie firma POLEXP zawarła 5-letni kontrakt swap na stopę procentową o nominale 400 tys. PLN zgodnie z którym na koniec każdego roku POLEXP płaci 5.45% a otrzymuje WIBOR + 80 p.p.

W trzecim roku stopa WIBOR wyniosła 5.5%. Biorąc pod uwagę kontrakt swap, jaki był koszt odsetek kredytu dla firmy POLPEX na koniec 3-ciego toku? Proszę wskazać najbliższą odpowiedź.

(A) 21 800 PLN

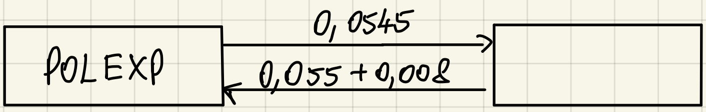
(B) 23 000 PLN

(C) 25 000 PLN

(D) 26 200 PLN

(E) Nie da się tego stwierdzić bez znajomości stopy WIBOR w pierwszym i drugim roku

Kontrakt swap na koniec 3 roku:



Odsetki do zapłaty na koniec 3 roku: $0,055+0,011$

Razem: $400\,000[0,055+0,011+0,0545-0,055-0,008] = 23\,000$

B

Zadanie 9.

Kredyt w wysokości 270 000 PLN z oprocentowaniem rocznym 7% zgodnie z pierwotnym planem jest spłacany przez 25 lat przy użyciu wpłat do funduszu umorzeniowego (ang. *sinking fund*) oraz odsetek płatnych na bieżąco, przy czym wpłaty do funduszu i odsetki są płacone na koniec każdego roku. Wpłaty w funduszu są akumulowane stopą 6% w skali roku.

Po dokonaniu pierwszych 10 wpłat nastąpiła modyfikacja planu: stopa akumulacji w funduszu została podniesiona o 0.5 p.p., a wysokość wpłat do funduszu obniżona tak, aby spłacanie kredytu zakończyło się po 20 latach od wzięcia kredytu. O ile wzrośnie roczna wplata do funduszu? Proszę wskazać najbliższą odpowiedź.

(A) 5 914 PLN

(B) 5 964 PLN

(C) 6 014 PLN

(D) 6 064 PLN

(E) 6 114 PLN

Fundusz umorzeniowy: $Z = \dfrac{K_0}{s_{\overline{n}|i}}$

$s_{\overline{25}|0,06} = 54,864512$

$Z = 4921,21$

Po 10 latach na funduszu uzbiera się:

$4921,21 \cdot s_{\overline{10}|0,06} = 64865,51$

Kwota pozostała do wpłaty na fundusz po kolejnych 10 latach:

$270\,000 - 64865,51 \cdot 1,065^{10} = 148238,52$

$s_{\overline{10}|0,065} = 13,494423$

$Z_2 = \dfrac{148238,52}{13,494423} = 10985,17$

$10985,17 - 4921,21 = 6063,96$

D

Zadanie 10.

Niech zmienne natężenie oprocentowania (*force of interest*) w chwili t (czas mierzony w latach) wynosi:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0{,}04 & dla\ t \leq 10 \\ 0{,}03 + 0{,}0003t^2 & dla\ t > 10 \end{cases}$$

Ile wynosi w chwili $t = 14$ zakumulowana wartość ciągłych rocznych płatności w wysokości 20 PLN dokonywanych między $t = 0$ a $t = 10$? Proszę wskazać najbliższą odpowiedź.

(A) 310 PLN

(B) 320 PLN

(C) 330 PLN

(D) 340 PLN

(E) 350 PLN

$$20 \int_0^{10} \exp\left\{ \int_0^t 0{,}04\, ds \right\} dt \cdot \exp\left\{ \int_{10}^{14} 0{,}03 + 0{,}0003\, t^2\, dt \right\} =$$

$$= 20 \int_0^{10} \exp\left\{ 0{,}04\, t \right\} dt \cdot \exp\left\{ \int_{10}^{14} 0{,}03 + 0{,}0003\, t^2\, dt \right\} =$$

$$= 330$$

C