Zadanie 1.

Bank wystawia roczną opcję kupna na niepłacące dywidendy aktywo $\mathcal{A}$ o cenie $S_{T_0} = 115$. Cena wykonania opcji to $K = 120$. W celu zabezpieczenia portfela bank stosuje strategię replikującą, zakładającą inwestycję w aktywo $\mathcal{A}$ oraz aktywo wolne od ryzyka. Bank zakłada comiesięczną aktualizację portfela replikującego. Wiadomo, iż roczna stopa wolna od ryzyka wynosi $r = 2\%$, natomiast współczynnik zmienności cen akcji równy jest $\sigma = 15\%$. Proszę określić jaki zysk (odpowiedzi ze znakiem dodatnim) lub stratę (odpowiedzi ze znakiem ujemnym) zrealizuje bank przy aktualizacji portfela replikującego w $T_{\frac{1}{12}}$, jeśli wiadomo, że $S_{T_{\frac{1}{12}}} = 117$. Proszę podać najbliższą odpowiedź.

$$C_t = S_t e^{-\delta(T-t)} \Phi\{d_1(t, S_t, \delta)\} - K e^{-r(T-t)} \Phi\{d_2(t, S_t, \delta)\}$$

$$d_1(t, S_t, \delta) = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \delta + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2(t, S_t, \delta) = d_1(t, S_t, \delta) - \sigma\sqrt{T-t}$$

Portfel replikujący:

$$\begin{cases} \Delta_t = e^{-\delta(T-t)} \Phi\{d_1(t, S_t, \delta)\} \\ \Theta_t = -e^{-rT} K \Phi\{d_2(t, S_t, \delta)\} \end{cases}$$

Wartość portfela

$$\Pi_t = \Delta_t S_t + \Theta_t e^{rt}$$

$K = 120 \quad r = 0{,}02 \quad \delta = 0 \quad \sigma = 0{,}15 \quad T = 1$

Dla $t = 0$

$S_0 = 115$

$$d_1 = \frac{\ln(115/120) + (0{,}02 + \frac{0{,}15^2}{2}) \cdot 1}{0{,}15\sqrt{1}} = -0{,}0754$$

$$d_2 = -0{,}0754 - 0{,}15 \cdot \sqrt{1} = -0{,}2254$$

$\Phi(d_1) = 0{,}4699$

$\Phi(d_2) = 0{,}4108$

$$\begin{cases} \Delta_0 = 0,4699 \\ \Theta_0 = e^{-0,02\cdot 1} \cdot 120 \cdot 0,4108 = -48,3240 \end{cases}$$

Dla $t = \frac{1}{12}$

$S_{1/12} = 117$

$$d_1 = \frac{\ln(117/120) + \left(0,02 + \frac{0,15^2}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{12}\right)}{0,15\sqrt{1 - \frac{1}{12}}} = 0,0232$$

$$d_2 = 0,0232 - 0,15\sqrt{1 - \frac{1}{12}} = -0,1204$$

$\Phi(d_1) = 0,5092$

$\Phi(d_2) = 0,4507$

$$C_{1/12} = 117 \cdot 0,5092 - e^{-0,02\left(1 - \frac{1}{12}\right)} \cdot 120 \cdot 0,4507 = 6,3190$$

Zaktualizowana wartość portfela replikującego:

$$\Pi_{1/12} = 0,4699 \cdot 117 - 48,324 \cdot e^{0,02 \cdot \frac{1}{12}} = 6,5795$$

Zysk: $\Pi_{1/12} - C_{1/12} = 6,5795 - 6,319 = 0,26$

Odp. D

Zadanie 2.

Przyjmijmy założenia modelu Blacka Scholesa. Rozważmy roczną opcję wymiany, pozwalającą jej posiadaczowi wymienić akcję ABC na akcję XYZ. Przyjmijmy, że w chwili T_0 zachodzi $S_{T_0}^{ABC} = S_{T_0}^{XYZ} = 50$. Wiadomo, iż:

- roczna stopa wolna od ryzyka wynosi $r = 3\%$,
- współczynniki zmienności cen akcji równe są odpowiednio $\sigma_{ABC} = 0.1$ oraz $\sigma_{XYZ} = 0.15$,
- roczne stopy dywidendy akcji równe są odpowiednio $\gamma_{ABC} = 0.05$ oraz $\gamma_{XYZ} = 0.07$,
- współczynnik korelacji między akcjami ABC oraz XYZ wynosi $\rho = -0.2$.

Proszę wyznaczyć cenę opcji wymiany w chwili jej wystawienia w T_0 (proszę podać najbliższą wartość).

$$C_t^{EX} = S_t^{(1)} e^{-\delta_1(T-t)} \Phi\{d_1(S_t^{(1)}, S_t^{(2)})\} - S_t^{(2)} e^{-\delta_2(T-t)} \Phi\{d_2(S_t^{(1)}, S_t^{(2)})\}$$

$$d_1(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \frac{\ln(S_t^{(1)}/S_t^{(2)}) + (\delta_2 - \delta_1 + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = d_1(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{T-t}$$

$S_0^{ABC} = 50 \quad S_0^{XYZ} = 50 \quad r = 0{,}03 \quad \sigma_{ABC} = 0{,}1 \quad \sigma_{XYZ} = 0{,}15 \quad \delta_{ABC} = 0{,}05$

$\delta_{XYZ} = 0{,}07 \quad \rho = -0{,}2 \quad T = 1 \quad t = 0$

$$\sigma^2 = \frac{0{,}1^2 + 0{,}15^2 - 2\cdot(-0{,}2)\cdot 0{,}1 \cdot 0{,}15}{1-0} = 0{,}1962^2$$

$$d_1 = \frac{\ln(50/50) + (0{,}07 - 0{,}05 + \frac{0{,}1962^2}{2})\cdot 1}{0{,}1962 \cdot 1} = 0{,}2000$$

$$d_2 = 0{,}2 - 0{,}1962 \cdot 1 = 0{,}0038$$

$\Phi(d_1) = 0{,}5793$

$\Phi(d_2) = 0{,}5015$

$$C_t = 50e^{-0{,}05} \cdot 0{,}5793 - 50e^{-0{,}07} \cdot 0{,}5015 = 4{,}17$$

Odp. D

Zadanie 3.

Niech $T = 2.5$. Rozważmy 15-letnią obligację zmiennokuponową o nominale 100, wystawioną w chwili 0. Kupony obligacji płatne są na koniec każdego roku, w oparciu o roczną stopę obserwowaną na początku roku, za który płacony jest kupon. Załóżmy, że $r_{2.5}^{0.5} = 2.27\%$, $r_{2.5}^{1} = 3.24\%$, $r_2^1 = 1.74\%$ (wszystkie w/w stopy w wymiarze rocznym, r_t^s opisuje w chwili t stopę dla okresu s). Proszę wyznaczyć wartość obligacji w chwili T (proszę podać najbliższą wartość).

$$B_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r_0^{t_i})^{t_i}} + \frac{F}{(1+r_0^T)^T}$$

Trzeba policzyć niewypłacone kupony

$$C_3 = F \cdot r_2^1 = 100 \cdot 1{,}74\% = 1{,}74$$

$$B_{2,5} = \frac{1{,}74}{(1+0{,}0227)^{0,5}} + \frac{100}{(1+0{,}0227)^{0,5}} = 100{,}6045$$

A

Zadanie 4.

Rozważmy proces X_t, zdefiniowany następująco:

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\, dW_t,$$

gdzie:

- W_t jest procesem Wienera,
- a, b, σ są dodatnimi stałymi,
- $X_0 = 0.15$.

Wiemy, że $EX_2 = 0.19323$, $Var\, X_2 = 0.04418$ oraz $\lim_{t\to\infty} Var\, X_t = 0.045$. Niech $c := \frac{ab}{\sigma}$. Wówczas c wynosi (proszę wskazać najbliższą odpowiedź):

Jest to proces Ornsteina - Uhlenbecka :

$$X_t \sim N\left\{e^{-at}X_0 + b(1-e^{-at}),\ \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2at})\right\}$$

$$X_2 \sim N\left\{0{,}15e^{-2a} + b(1-e^{-2a}),\ \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-4a})\right\}$$

$$\begin{cases} 0{,}15e^{-2a} + b(1-e^{-2a}) = 0{,}19323 \\ \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-4a}) = 0{,}04418 \\ \frac{\sigma^2}{2a} = 0{,}045 \end{cases}$$

$$0{,}045(1-e^{-4a}) = 0{,}04418$$

$$a = 1{,}001278$$

$$\sigma^2 = 0{,}045 \cdot 2a$$

$$\sigma = 0{,}30019$$

$$b = 0{,}19998$$

$$c = \frac{ab}{\sigma} = 0{,}667 \approx \frac{2}{3}$$

Odp. C

Zadanie 5.

Niech X_t będzie procesem zdefiniowanym równaniem

$$dX_t = -\frac{1}{2}\exp(-2X_t)\,dt + \exp(-X_t)\,dW_t,$$

gdzie W_t jest procesem Browna. Niech $Y_t \coloneqq g(X_t)$, gdzie $g(x) = \exp(x)$.

Proszę wskazać, które z poniższych równań opisuje dynamikę procesu Y_t.

Lemat Ito :

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t)^2$$

$$g'(X_t) = \exp(X_t)$$

$$g''(X_t) = \exp(X_t)$$

x	dW_t	dt
dW_t	dt	0
dt	0	0

$$dY_t = \exp(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\exp(X_t)(dX_t)^2$$

$$dY_t = \exp(X_t)\left[-\frac{1}{2}\exp(-2X_t)\,dt + \exp(-X_t)\,dW_t\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\exp(X_t)\left[-\frac{1}{2}\exp(-2X_t)\,dt + \exp(-X_t)\,dW_t\right]^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\exp(-X_t)\,dt + dW_t + \frac{1}{2}\exp(X_t)\exp(-2X_t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\exp(-X_t)\,dt + \frac{1}{2}\exp(-X_t)\,dt + dW_t =$$

$$= dW_t$$

Odp. E

Zadanie 6.

Osoba A będzie otrzymywała 10-letną rentę o wartości obecnej 100 000 w ratach rocznych, na końcu każdego roku. Oprocentowanie renty wynosi 7% w wymiarze rocznym, kapitalizacja jest roczna.

Osoba B będzie otrzymywała 10-letną rentę o wartości obecnej 100 000 PLN w ratach miesięcznych, na końcu każdego miesiąca. Oprocentowanie renty wynosi 7% w wymiarze rocznym, kapitalizacja jest miesięczna.

Jaka będzie różnica pomiędzy nominalną roczną wypłatą dla rentobiorców A oraz B (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

Wzór na rentę prostą:

$$P = R\, a_{\overline{n}|i} = R\, \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

A) $i = 0{,}07 \qquad n = 10$

$$100\,000 = R_A \cdot \frac{1-1{,}07^{-10}}{0{,}07}$$

$$R_A = 14\,237{,}75$$

B) $i = 1{,}07^{\frac{1}{12}} - 1 \qquad n = 120$

$$100000 = R_B \cdot \frac{1-1{,}07^{\frac{1}{12}\cdot(-120)}}{1{,}07^{\frac{1}{12}}-1}$$

$$R_B = 1150{,}03$$

$$12 \cdot R_B = 13800{,}36$$

$$R_A - 12R_B = 437{,}39$$

Odp. E

Zadanie 7.

Dwie osoby deponują w banku kwoty 100. Oprocentowanie depozytu pierwszej z osób jest stałe i równe $\frac{K}{20}$ rocznie, $K > 0$. Intensywność oprocentowania depozytu drugiej z osób w chwili t wynosi $\delta_t = \frac{1}{K+0.2t}$. Po upływie pięciu lat pierwsza z osób zgromadziła kwotę X, druga zaś kwotę $\exp(1) \cdot X$. Proszę wyznaczyć wartość X (proszę podać najbliższą odpowiedź).

$$X = 100\left(1 + \frac{K}{20}\right)^5$$

$$eX = 100 \exp\left\{ \int_0^5 \frac{1}{K+0{,}2t} \, dt \right\}$$

$$X = 100 \exp\left\{ \int_0^5 \frac{1}{K+0{,}2t} \, dt - 1 \right\}$$

$$\left(1 + \frac{K}{20}\right)^5 = \exp\left\{ \int_0^5 \frac{1}{K+0{,}2t} \, dt - 1 \right\}$$

$$K = 2{,}62$$

$$X = 100\left(1 + \frac{2{,}62}{20}\right)^5 = 185{,}1$$

Zadanie 8.

Cena akcji $\mathcal{A}$ w chwili $t = 0$ wynosi 10 500. Akcja płaci półroczną dywidendę w wysokości 700. Na rynku dostępny jest kontrakt forward na akcję $\mathcal{A}$, który ma termin zapadalności za 5 miesięcy. Przed tym terminem przypada jedna płatność dywidendy. Jeżeli stopa wolna od ryzyka wynosi 11% (kapitalizacja ciągła) a cena kontraktu forward w $t = 0$ wynosi 10 272.92, to za ile miesięcy przypada płatność dywidendy (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

$$K = (S_0 - D)e^{rT}$$

$$D = de^{-rt}$$

$$K = (S_0 - de^{-rt})e^{rT}$$

$S_0 = 10\,500$ $\quad d = 700$ $\quad T = \frac{5}{12}$ $\quad r = 0,11$ $\quad K = 10272,92$

$$10272,92 = (10500 - 700e^{-0,11t})e^{0,11 \cdot \frac{5}{12}}$$

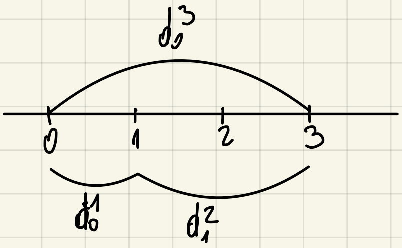
$$t = 0,1665 \approx \frac{2}{12}$$

Odp. B

Zadanie 9.

Jeśli w chwili $t = 0$ inwestor zainwestuje 1 000 na dwa lata, to w chwili $t = 2$ otrzyma 1 122. Alternatywnie, jeśli w chwili $t = 0$ inwestor zgodzi się zainwestować 1 000 w chwili $t = 1$ na dwa lata, otrzyma 1 148 w chwili $t = 3$. Jeżeli natomiast w chwili $t = 0$ zgodzi się zainwestować 1 000 w chwili $t = 1$ na okres jednego roku, to w chwili $t = 2$ otrzyma 1 062. Przy założeniu braku arbitrażu, proszę określić ile wynosi trzyletnia stopa par (*par yield*) (proszę podać najbliższą odpowiedź).

$$q = \frac{1-(1+r_T)^{-T}}{\sum_{t=1}^{T}(1+r_t)^{-t}}$$



$$d_0^3 = d_0^1 \cdot d_1^2$$

$$d_0^2 = 0{,}8913$$

$$d_1^2 = 0{,}9416$$

$$d_0^1 \cdot 0{,}9416 = 0{,}8913$$

$$d_0^1 = 0{,}9466$$

$$d_0^3 = 0{,}9466 \cdot 0{,}8711 = 0{,}8246$$

$$q = \frac{1-0{,}8246}{0{,}9466+0{,}8913+0{,}8246} = 0{,}065$$

C

Zadanie 10.

Inwestor rozważa zajęcie strategii „*bear call spread*" zbudowanej w oparciu o 9-miesięczne europejskie opcje call na akcje $\mathcal{A}$ z ceną wykonania 25 oraz 9-miesięczne europejskie opcje call na akcje $\mathcal{A}$ z ceną wykonania 27. Jaka będzie całkowita wypłata ze strategii (nie uwzględniając inwestycji początkowej), jeżeli cena akcji $\mathcal{A}$ za 9 miesięcy wyniesie 23 (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

Wypłata z opcji call: $\max(S_T - K, 0)$

$K_1 = 25$

$K_2 = 27$

$\max(23-27, 0) - \max(23-25, 0) = 0$

A