Zadanie 1.

Rozważmy akcję $\mathcal{A}$, której bieżąca cena wynosi $S_0 = 40$. Akcja wypłaca kwartalne dywidendy w kwocie 0.50. Dwie najbliższe wypłaty planowane są w chwilach $T_1 = 1.5$ oraz $T_2 = 4.5$. Zakładając, że roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 3%, proszę określić 3-miesięczną cenę *forward* na akcję $\mathcal{A}$ (proszę podać najbliższą wartość).

$S_0 = 40$ $\quad r = 0,03$ $\quad d_1 = 0,5$ $\quad T_1 = 1,5$ miesiąca $\quad T = 3/12$

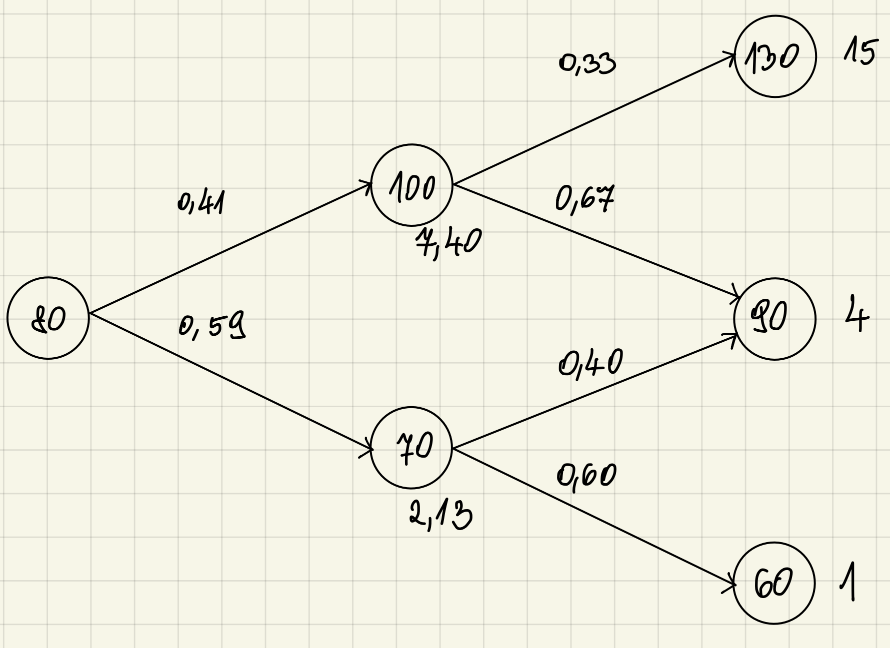
$$K = \left(40 - 0,5 \cdot e^{-0,03 \cdot \frac{1,5}{12}}\right) e^{0,03 \cdot \frac{3}{12}} = 39,80$$

Zadanie 2.

Rozważmy akcję $\mathcal{A}$, której cena w chwili $T_0 = 0$ wynosi 80. Do wyceny pewnego instrumentu pochodnego analitycy wykorzystują drzewo dwumianowe o kroku 0.5 roku. W procesie wyceny przyjęto, iż:

- w pierwszym okresie cena akcji wzrośnie do 100 (scenariusz U) lub spadnie do 70 (scenariusz D);
- jeśli w chwili $T_1 = 0.5$ zrealizuje się scenariusz U, to wówczas w kolejnym półroczu cena akcji wzrośnie do 130 lub spadnie do 90. W pierwszym przypadku wypłata z wycenianego instrumentu pochodnego wyniesie 15, w drugim zaś równa będzie 4.
- jeśli w chwili $T_1 = 0.5$ zrealizuje się zaś scenariusz D, to wówczas w kolejnym półroczu cena akcji wzrośnie do 90 lub spadnie do 60. Wypłaty z wycenianego instrumentu pochodnego wynosić będą wówczas odpowiednio 4 oraz 1.

Załóżmy, że stopa wolna od ryzyka wynosi 3% w kroku półrocznym.
Inwestorzy chcą zastosować strategię, która poprzez inwestowanie w akcję i instrument wolny od ryzyka pozwoli im zreplikować wypłatę z opcji w każdym z węzłów drzewa dwumianowego (dopuszczamy pożyczanie środków). Niech C będzie kwotą, jaką inwestor musi zainwestować na początku, aby zastosować strategię replikującą. Przez (x_0) oznaczmy natomiast ilość akcji w portfelu replikującym w chwili 0. Wówczas (proszę podać najbliższą odpowiedź):



$r = 0{,}03$ półrocznie

$$q_0 = \frac{80e^{0,03} - 70}{100 - 70} = 0{,}41 \qquad q^+_{0,5} = \frac{100e^{0,03} - 90}{130 - 90} = 0{,}33$$

$$1 - q_0 = 0{,}59 \qquad 1 - q^+_{0,5} = 0{,}67$$

$$q^-_{0,5} = \frac{70e^{0,03} - 60}{90 - 60} = 0{,}40$$

$$1 - q^-_{0,5} = 0{,}60$$

$$X^+_{0,5} = e^{-0,03}[0{,}33 \cdot 15 + 0{,}67 \cdot 4] = 7{,}40$$

$$X^-_{0,5} = e^{-0,03}[0{,}4 \cdot 4 + 0{,}6 \cdot 1] = 2{,}13$$

$$A_t = \frac{X^+_{t+\Delta t} - X^-_{t+\Delta t}}{S^+_{t+\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}}$$

$$A_0 = \frac{7{,}4 - 2{,}13}{100 - 70} = 0{,}1757$$

$$V_0 = e^{-0,03}[0{,}41 \cdot 7{,}40 + 0{,}59 \cdot 2{,}13] = 4{,}16$$

W oznaczeniach z zadania:

$(C;\ X_0) = (4{,}16;\ 0{,}18)$

Odp. A

Zadanie 3.

Załóżmy, że proces X zadany jest następującym równaniem:

$$dX_t = -X_t dt + dW_t.$$

Niech $Y_t = (X_t)^2$. Proszę określić, które równanie opisuje dynamikę procesu Y_t.

Z lematu Ito:

$$dY_t = 2X_t\, dX_t + \frac{1}{2} 2 (dX_t)^2 = 2X_t(-X_t dt + dW_t) + (-X_t dt + dW_t)^2 =$$

$$= -2X_t^2\, dt + 2X_t\, dW_t + dt = (1-2X_t^2)dt + 2X_t\, dW_t =$$

$$= (1-2Y_t)dt + 2\sqrt{Y_t}\, dW_t$$

Odp. E

Zadanie 4.

Rozważmy dwuwymiarowy proces Browna $W = (W^A, W^B)$, dla którego współczynnik korelacji wynosi ρ_{AB}.

Skonstruowany został portfel złożony z dwóch skorelowanych akcji S^A oraz S^B o dynamikach:

$$dS_t^A = \mu_A S^A dt + \sigma_A S^A dW_t^A,$$
$$dS_t^B = \mu_B S^B dt + \sigma_B S^B dW_t^B.$$

gdzie $\mu_A, \mu_B, \sigma_A, \sigma_B$ są stałymi.

Niech $g(x,y) = x^2 y$. Zdefiniujmy $S^C = g(S^A, S^B)$. Wówczas:

Lemat Ito:

$$df = \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial Y} dY + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(dX)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(dY)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} dX\, dY$$

Product rule

	dt	dW_t^A	dW_t^B
dt	0	0	0
dW_t^A	0	dt	$\rho_{AB}\, dt$
dW_t^B	0	$\rho_{AB}\, dt$	dt

$$dg = 2S^A S^B dS^A + (S^A)^2 dS^B + \frac{1}{2} 2 S^B (dS^A)^2 + \frac{1}{2}\cdot 0\,(dS^B)^2 + 2S^A\, dS^A\, dS^B$$

$$dg = 2S^A S^B(\mu_A S^A dt + \sigma_A S^A dW_t^A) + (S^A)^2(\mu_B S^B dt + \sigma_B S^B dW_t^B) + S^B \sigma_A^2 (S^A)^2 dt +$$
$$+ 2S^A \sigma_A \sigma_B S^A S^B \rho_{AB}\, dt$$

$$dS^C = 2S^C \mu_A dt + 2S^C \sigma_A dW_t^A + \mu_B S^C dt + \sigma_B S^C dW_t^B + \sigma_A^2 S^C dt +$$
$$+ 2S^C \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}\, dt$$

$$dS^C = (2\mu_A + \mu_B + \sigma_A^2 + 2\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}) S^C dt + 2\sigma_A S^C dW_t^A + \sigma_B S^C dW_t^B$$

A

Zadanie 5.

Załóżmy, że inwestor obserwuje następujące ceny akcji $\mathcal{A}$ na koniec poszczególnych giełdowych dni sesyjnych (zakładając 250 dni sesyjnych w ciągu roku):

Dzień	1	2	3	4	5	6
S	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	11.5

Wykorzystując powyższe informacje o zmienności ceny akcji $\mathcal{A}$, inwestor, korzystając z założeń modelu Blacka-Scholesa, wyznacza na koniec szóstego dnia sesyjnego cenę opcji kupna na akcję $\mathcal{A}$, zapadającej za rok, o cenie wykonania 12. Przyjmując, że stopa wolna od ryzyka $r = 3\%$, proszę określić cenę opcji (proszę podać najbliższą odpowiedź).

$\ln\left(\frac{S_h}{S_0}\right), \ln\left(\frac{S_{2h}}{S_h}\right), \ldots, \ln\left(\frac{S_{nh}}{S_{(n-1)h}}\right)$ - zm. niezależne

$$\ln\left(\frac{S_{jh}}{S_{(j-1)h}}\right) \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$$

$x_j = \ln\left(\frac{S_j}{S_{j-1}}\right)$: $\hat{\mu}_n = \frac{\bar{x}}{h}$, $\hat{\sigma}_n = \frac{s_x}{\sqrt{h}}$, gdzie $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$, $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2$

$x_2 = \ln\left(\frac{10,5}{10}\right) = 0,048790$

$x_3 = \ln\left(\frac{11}{10,5}\right) = 0,046520$

$x_4 = \ln\left(\frac{11,5}{11}\right) = 0,044452$

$x_5 = \ln\left(\frac{12}{11,5}\right) = 0,042560$

$x_6 = \ln\left(\frac{11,5}{12}\right) = -0,042560$

$\bar{x} = 0,027952$

$s_x = 0,039486$

$h = \frac{1}{250}$

$\hat{\mu}_n = \bar{x} \cdot 250 = 6,988$

$\hat{\sigma}_n = s_x \cdot \sqrt{250} = 0,624328$

$S_0 = 11,5$ $K = 12$ $r = 0,03$ $\sigma = 0,624328$ $T = 1$

$$d_1 = \frac{1}{0,6243}\left(\ln\frac{11,5}{12} + 0,03 + \frac{0,62^2}{2}\right) = 0,292047$$

$d_2 = d_1 - \sigma = -0{,}332281$

$\Phi(d_1) = 0{,}614875$

$\Phi(d_2) = 0{,}369839$

$C_0 = 11{,}5 \cdot \Phi(d_1) - 12 e^{-0{,}03} \Phi(d_2) = 2{,}76$

Odp. D

Zadanie 6.

Polski inwestor planuje zakup 1 000 USD za 4 miesiące. Decyduje się na zakup 4-miesięcznej walutowej opcji kupna z ceną wykonania 4.5 PLN/USD. Wiemy, że stopa wolna od ryzyka w Polsce wynosi 4%, podczas gdy w Stanach Zjednoczonych równa jest 5%. Wiemy, że zmienność kursu wynosi 15%, a bieżący kurs to 4.4 PLN/USD. Proszę określić cenę opcji, która pozwoli zabezpieczyć płatność 1 000 USD za 4 miesiące. Proszę podać najbliższą wartość:

$T = 4/12 \quad K = 4{,}5 \quad r = 4\% \quad r_f = 5\% \quad \sigma = 15\% \quad S_0 = 4{,}4$

$$d_1 = \frac{1}{0{,}15 \cdot \sqrt{\frac{4}{12}}} \left[\ln\left(\frac{4{,}4}{4{,}5}\right) + \left(0{,}04 - 0{,}05 + \frac{0{,}15^2}{2}\right) \cdot \frac{4}{12} \right] = -0{,}254683$$

$d_2 = -0{,}341285$

$\Phi(d_1) = 0{,}399484$

$\Phi(d_2) = 0{,}366444$

$C_0 = 0{,}101511$

$1000 C_0 = 101{,}511$

Odp. D

Zadanie 7.

W dniu 31 grudnia 2022 inwestor kupuje na rynku pierwotnym 4-letnią obligację po cenie 1 000 PLN. Nominał obligacji wynosi 1 000 PLN, zaś stałe kupony płatne są na koniec każdego roku. Strukturę czasową stóp procentowych na dzień 31 grudnia 2022 opisuje krzywa stóp *spot* (krzywa zerokuponowa):

$$s_n = \frac{1}{100}\frac{11n-8}{2n-1}, n = 1,2,3 \ldots$$

gdzie s_n oznacza n -letnią stopę *spot*.

Proszę wyznaczyć stopę kuponu tej obligacji (proszę podaj najbliższą wartość).

$s_1 = 0{,}03$

$s_2 = 0{,}046667$

$s_3 = 0{,}05$

$s_4 = 0{,}051429$

$$q = \frac{1 - 1{,}051429^{-4}}{1{,}03^{-1} + 1{,}046667^{-2} + 1{,}05^{-3} + 1{,}051429^{-4}} = 0{,}050974 \approx 5{,}1\%$$

Odp. D

Zadanie 8.

Który z poniższych portfeli opcji pozwoli na zreplikowanie wypłaty X_T opartej o cenę akcji S_T:

$$X_T = max\{K - |0.25S_T - K| - 1.25|S_T - K|; 0\}.$$

$f(S_T) = K - |0{,}25 S_T - K| - 1{,}25 |S_T - K|$

Dla $S_T \leqslant K$:

$f(S_T) = K - (-0{,}25 S_T + K) - 1{,}25(-S_T + K) =$

$= K + 0{,}25 S_T - K + 1{,}25 S_T - 1{,}25K =$

$= 1{,}5 S_T - 1{,}25K$

Dla $K < S_T \leqslant 4K$:

$f(S_T) = K - (-0{,}25 S_T + K) - 1{,}25(S_T - K) =$

$= K + 0{,}25 S_T - K - 1{,}25 S_T + 1{,}25K =$

$= -S_T + 1{,}25K$

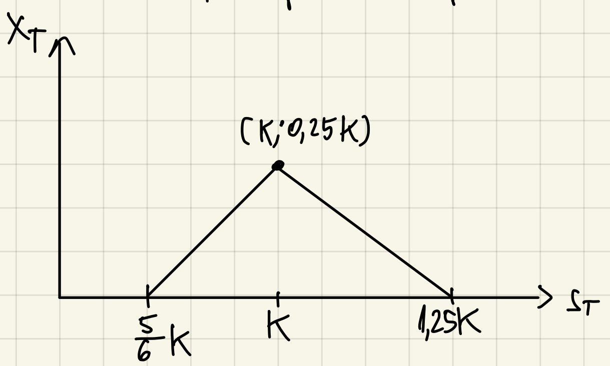
Dla $S_T > 4K$:

$f(S_T) = K - (0{,}25 S_T - K) - 1{,}25(S_T - K) =$

$= K - 0{,}25 S_T + K - 1{,}25 S_T + 1{,}25K =$

$= -1{,}5 S_T + 3{,}25K$

Szkicowanie funkcji z uwzględnieniem maksimum:



Nachylenie krzywej mówi ile opcji trzeba kupić, punkty przecięcia mówią jaka powinna być cena strike.

- kupno 1,5 opcji call z ceną strike $\frac{5}{6}K$
- sprzedaż 2,5 opcji call z ceną strike K
- kupno 1 opcji call z ceną strike $1{,}25K$ Odp. E

Zadanie 9.

W dniu 1 lipca 2022 roku bank udzielił kredytu w wysokości 70 000, który będzie spłacany przez 24 lata za pomocą renty płatnej kwartalnie z dołu. Kwartalna rata wzrasta o 150 co cztery lata. Roczna stopa procentowa z kapitalizacją kwartalną wynosi 8%. Ile wynoszą odsetki w 54 racie kredytu?

$$R\, a_{\overline{96}|2\%} + 150\, a_{\overline{64}|2\%} + 150\, a_{\overline{48}|2\%} + 150\, a_{\overline{32}|2\%} + 150\, a_{\overline{16}|2\%} = 70000 \cdot 1{,}02^{96}$$

$R = 1401{,}633716$

Część kapitałowa tworzy ciąg geometryczny o ilorazie $1+i$ oraz pierwszym wyrazie $U_1 = R - K_0\, i$

$U_1 = 1401{,}633716 - 70000 \cdot 0{,}02 = 1{,}633716$

$U_{54} = 1{,}633716 \cdot 1{,}02^{53} + 150 \cdot 1{,}02^{54-17} + 150 \cdot 1{,}02^{54-33} + 150 \cdot 1{,}02^{54-49} = 709{,}731275$

$I_{54} = R_{54} - U_{54} = 1401{,}633716 + 450 - 709{,}731275 = 1141{,}902441$

Odp. D

Zadanie 10.

Cena akcji X_t jest modelowana za pomocą modelu log-normalnego, tj.

$$log\left(\frac{S_t}{S_s}\right) \sim N\big((\mu - 0{,}5\sigma^2)(t-s); \sigma^2(t-s)\big).$$

W chwili $t = 0$ cena akcji wynosi 200 zł. W chwili $t = 2$ oczekiwana cena akcji wynosi $200\exp(0.7)$ *zł*, a wariancja ceny wynosi 40 000 $\exp(-0.7)$ *zł*. Jaka jest wartość parametru σ modelu log-normalnego?

$S_2 \sim LN\{\ln S_0 + (\mu - 0{,}5\sigma^2)\cdot 2, \sigma^2 \cdot 2\}$

$ES_2 = \exp\{\ln 200 + (\mu - 0{,}5\sigma^2)\cdot 2 + \sigma^2\} = \exp\{\ln 200 + 2\mu\}$

$\exp\{\ln 200 + 2\mu\} = 200\exp\{0{,}7\}$

$\exp\{2\mu\} = \exp\{0{,}7\}$

$2\mu = 0{,}7$

$\mu = 0{,}35$

$ES_2^2 = \exp\{2\ln 200 + 4(\mu - 0{,}5\sigma^2) + 4\sigma^2\} = \exp\{\ln 200^2 + 4\mu + 2\sigma^2\} =$

$= 200^2 \exp\{4 \cdot 0{,}35 + 2\sigma^2\}$

$Var(S_2) = 200^2\exp\{1{,}4 + 2\sigma^2\} - 200^2\exp\{1{,}4\} = 200^2[\exp\{1{,}4 + 2\sigma^2\} - \exp\{1{,}4\}]$

$200^2[\exp\{1{,}4 + 2\sigma^2\} - \exp\{1{,}4\}] = 40000\exp\{-0{,}7\}$

$\exp\{1{,}4 + 2\sigma^2\} = \exp\{-0{,}7\} + \exp\{1{,}4\}$

$\sigma^2 = 0{,}057760$

$\sigma = 0{,}24$

Odp. C