Zadanie 1.

Kierowca, którego charakteryzuje wartość q parametru ryzyka Q, zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem q, zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$, przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Jeśli kierowcę z tej populacji przypadkowo wylosujemy, to charakteryzującą go wartość parametru q traktujemy jako realizację zmiennej losowej Q. Populacja jest niejednorodna, w związku z czym $var(Q) > 0$.
Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 3-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, ląduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Ląduje w klasie drugiej, o ile w danym roku był w klasie pierwszej;
- Ląduje w klasie trzeciej, o ile w danym roku był w klasie drugiej lub trzeciej.

Na podstawie obserwacji ustaliliśmy, że frakcja kierowców z tej populacji przebywających w klasie pierwszej wynosi 20/80, w klasie drugiej 9/80, zaś w klasie trzeciej 51/80. Oczywiście pominęliśmy przy tym obserwacje z pierwszych paru lat funkcjonowania systemu bonus-malus, kiedy przynależność do klasy zależała jeszcze od klasy startowej.
Wobec tego $var(Q)$ wynosi:

$$EQ = \frac{20}{80}$$

$$E[Q(1-Q)] = \frac{9}{80}$$

$$E[Q(1-Q)] = E[Q - Q^2] = EQ - EQ^2$$

$$EQ^2 = EQ - E[Q(1-Q)]$$

$$EQ^2 = \frac{20}{80} - \frac{9}{80} = \frac{11}{80}$$

$$Var(Q) = \frac{11}{80} - \left(\frac{20}{80}\right)^2 = \frac{3}{40} = \frac{6}{80}$$

Zadanie 7.

Zmienna losowa X jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poisson z parametrami odpowiednio (λ_1, F_1), (λ_2, F_2), oraz (λ_3, F_3). Wartości parametrów częstotliwości to λ_1, λ_2, λ_3, oraz dystrybuanty F_1, F_2, F_3, dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1,2)$	$F_i(x)$ dla $x \geq 2$
1	1	0	4/10	1
2	1/2	0	3/10	1
3	1/2	0	9/10	1

$\Pr(X = 3)$ wynosi:

Twierdzenie 1.2.3 (O dodawaniu dla złożonego rozkładu Poissona) *Niech $S_{N_1}, ..., S_{N_n}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi, że dla każdego $i = 1, 2, ..., n$ zmienna losowa S_{N_i} ma złożony rozkład Poissona z parametrem λ_i, czyli $S_{N_i} \sim CP(\lambda_i, F_i)$, gdzie F_i jest dystrybuantą składników zmiennej S_{N_i}. Załóżmy ponadto, że istnieje taka liczba t_0, że w przedziale $(-\infty, t_0)$ określone są funkcje generujące momenty $M_{X_i}(\cdot)$ rozkładów pojedynczej szkody X_i. Wówczas $S = S_{N_1} + ... + S_{N_k} \sim CP(\lambda, F)$, gdzie $\lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_n$, $F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i$.*

$\lambda = 2$

$$F = \frac{\frac{4}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10}}{2} = \frac{1}{2}$$

$3 = 1+1+1 = 1+2 = 2+1$

$P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$

$P(X_i = 2) = \frac{1}{2}$

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{2^3}{3!} e^{-2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2^2}{2!} e^{-2} = \left(\frac{1}{6} + 1\right) e^{-2} = \frac{7}{6} e^{-2}$$

$$P(X=k) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X=k \mid N=i) P(N=i)$$

$P_X(u) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) u^i$ — funkcja tworząca p-stwo

$P_X(u) = \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} u^2$ — trzeba policzyć F

$$P(X=k) = \sum_{i=0}^{\infty} [u^k] (P_X(u))^i P(N=i) = \sum_{i=0}^{\infty} [u^3] \left(\frac{1}{2} u + \frac{1}{2} u^2\right)^i \cdot \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} [u^3]\, u^i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} u\right)^i \cdot \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{3} [u^3]\, u^i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u\right)^i \cdot \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} =$$

Zadanie 10.

Liczba szkód N w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu ma rozkład Poissona z parametrem częstotliwości równym $\lambda = \ln(3)$.
Wartość każdej ze szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ ma ten sam rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi nieujemnej wzorem:

$$F_{Y_1}(y) = \frac{y}{1+y}$$

Wartości poszczególnych szkód i liczba szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi.
Niech:

$$M := \begin{cases} \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\} & jeżeli \;\; N > 0 \\ 0 & w\, p.p. \end{cases}$$

Mediana warunkowego rozkładu zmiennej M, pod warunkiem że wystąpiła co najmniej jedna szkoda, a więc taka liczba y, dla której:

$$\Pr((M < y | N > 0) = \frac{1}{2}$$

Wynosi:

$$P(M<y \mid N>0) = \frac{P(M<y,\, N>0)}{P(N>0)}$$

$$P(M<y,\, N>0) = \sum_{n=1}^{\infty} P(M<y \mid N=n)\, P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{\frac{\lambda y}{1+y}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda y}{1+y}\right)^n \frac{e^{-\frac{\lambda y}{1+y}}}{n!} =$$

$$= e^{-\lambda} e^{\frac{\lambda y}{1+y}} - e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\left(e^{\frac{\lambda y}{1+y}} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3^{\frac{y}{1+y}} - 1\right)$$

$$P(N>0) = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-\ln 3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{3}\left(3^{\frac{y}{1+y}} - 1\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \quad \Big| \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}\left(3^{\frac{y}{1+y}} - 1\right) = \frac{1}{3}$$

$$3^{\frac{y}{1+y}} = 2$$

$$\frac{y}{1+y}\ln 3 = \ln 2$$

$$y\ln 3 = \ln 2 + y\ln 2$$

$$y(\ln 3 - \ln 2) = \ln 2$$

$$y = \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$