

Zadanie 1.

Przyjmijmy założenia modelu Blacka-Scholesa. Niech \mathbb{Q}^{RN} będzie miarą neutralną względem ryzyka. Rozważmy procesy S_t^1 i S_t^2 , opisujące ceny dwóch akcji, oraz rachunku oszczędnościowego B_t^1 , dla których zachodzi:

$$dS_t^1 = rS_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^{\mathbb{Q}^{RN},1},$$

$$dS_t^2 = rS_t^2 dt + \sigma_2 S_t^2 dW_t^{\mathbb{Q}^{RN},2},$$

$$dB_t^1 = rB_t^1 dt,$$

gdzie r, σ_1 oraz σ_2 są stałymi, natomiast ρ jest parametrem korelacji, dla którego $dW_t^{\mathbb{Q},1} dW_t^{\mathbb{Q},2} = \rho dt$.

Rozważmy zmianę miary na miarę \mathbb{Q}^1 związaną z procesem S_t^1 , dla której procesy B_t^1 / S_t^1 oraz S_t^2 / S_t^1 są martyngałami.

Proszę wskazać, który z poniższych wzorów opisuje dynamikę procesu S_t^1 po zastosowaniu takiej zmiany miary.

(A) $dS_t^1 = (r + \sigma_1^2)S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^{\mathbb{Q}^1,1}$

(B) $dS_t^1 = (r + \sigma_1)S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^{\mathbb{Q}^1,1}$

(C) $dS_t^1 = (r + \sigma_1)\rho S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^{\mathbb{Q}^1,1}$

(D) $dS_t^1 = (r + \sigma_1\sigma_2)S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^{\mathbb{Q}^1,1}$

(E) $dS_t^1 = (r + \rho\sigma_1\sigma_2)S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^{\mathbb{Q}^1,1}$

Przydatne informacje:

1. Całka Ito jest martyngałem jeżeli dryf wynosi 0

2. Zmienność nie zmienia przy zmianie miary

Lemat Ito dla ilorazu:

$$d \frac{B_t}{S_t} = \frac{B_t}{S_t} \left[\frac{dB_t}{B_t} + \frac{dS_t}{S_t} + \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 - \frac{dB_t}{B_t} \cdot \frac{dS_t}{S_t} \right]$$

Z lematu Ito:

$$\begin{aligned} d \frac{B_t^1}{S_t^1} &= \frac{B_t^1}{S_t^1} \left[rdt - rdt - \nabla_1 dW_t^{\mathbb{Q}^{RN},1} + (rdt + \nabla_1 dW_t^{\mathbb{Q}^{RN},1})^2 - rdt(rdt + \nabla_1 dW_t^{\mathbb{Q}^{RN},1}) \right] = \\ &= \frac{B_t^1}{S_t^1} \left[\nabla_1^2 dt - \nabla_1 dW_t^{\mathbb{Q}^{RN},1} \right] \end{aligned}$$

Korzystając z informacji 1 i 2:

$$d \frac{B_t^1}{S_t^1} = \nabla_1 \frac{B_t^1}{S_t^1} dW_t^{\mathbb{Q}^1,1}$$

$$\frac{\beta_t^1}{\int_t^1} \left[\nabla_1^2 dt - \nabla_1 dW_t^{Q''',1} \right] = \nabla_1 \frac{\beta_t^1}{\int_t^1} dW_t^{Q',1}$$

$$dW_t^{Q'',1} = \nabla_1 dt + dW_t^{Q',1}$$

$$dS_t^1 = r S_t^1 dt + \nabla_1 S_t^1 (\nabla_1 dt + dW_t^{Q',1})$$

$$dS_t^1 = r S_t^1 dt + \nabla_1^2 S_t^1 dt + \nabla_1 S_t^1 dW_t^{Q',1}$$

$$dS_t^1 = (r + \nabla_1^2) S_t^1 dt + \nabla_1 S_t^1 dW_t^{Q',1}$$

(A)

Zadanie 2.

Inwestor kupił w dniu emisji dwie obligacje, 10-letnią i 20-letnią. Nominał każdej obligacji wynosi 10 000. Każda obligacja wypłaca kupon o wartości 900 na koniec lat parzystych, począwszy od końca drugiego roku.

Inwestor sfinansował 70% wartości zakupu obligacji za pomocą 20-letniego kredytu, natomiast pozostałą część opłacił z własnych środków. Skumulowane odsetki kredytu zostaną opłacone na koniec okresu kredytu lub w momencie jego wcześniejszej spłaty całkowitej (wówczas odsetki naliczone będą jedynie za wykorzystany okres kredytu).

Odsetki otrzymane z obligacji są reinwestowane w funduszu.

Po pięciu latach inwestor sprzedaje obie obligacje, wycofuje środki z funduszu i spłaca kredyt w całości wraz z należnymi odsetkami.

Wiedząc, że:

- cena zakupu obligacji została ustalona przy stopie procentowej - 5%,
- cena sprzedaży obligacji została ustalona przy stopie procentowej – 4%,
- oprocentowanie kredytu wynosi – 7%,
- stopa zwrotu funduszu, w którym reinwestowane są środki otrzymane z wypłaconych kuponów obligacji wynosi – 8%,

oblicz efektywną (roczną) stopę zwrotu z zainwestowanych środków własnych (proszę podać najbliższą wartość).

- (A) 5.15%
(B) 5.25%
(C) 5.35%
(D) 5.45%
(E) 5.55%

Wysoka obligacji na $t=0$:

$$B_0^{20} = \sum_{k=1}^{10} 900 \cdot 1,05^{-2 \cdot k} + 10000 \cdot 1,05^{-20} = 240,11$$

$$B_0^{10} = \sum_{k=1}^5 900 \cdot 1,05^{-2 \cdot k} + 10000 \cdot 1,05^{-10} = 529,16$$

Wysoka obligacji na $t=5$

$$B_5^{20} = \left[\sum_{k=1}^{\ell} 900 \cdot 1,04^{-2k} + 10000 \cdot 1,04^{-\ell} \right] \cdot 1,04 = 1022,99$$

$$B_5^{10} = 900 \cdot 1,04^{-1} + 900 \cdot 1,04^{-3} + 10900 \cdot 1,04^{-5} = 10624,49$$

Zysk z funduszu

$$F_5 = 2 \cdot (900 \cdot 1,01^3 + 900 \cdot 1,01) = 4211,42$$

Kredyt :

$$K_0 = 0,7 [B_0^{20} + B_0^{10}] = 0,7 \cdot (9240,11 + 9529,16) = 13132,49$$

Cyli rachunkowane środki własne to:

$$PV = 5630,72$$

Sposta medyty po 5 latach:

$$K_5 = 13132,49 \cdot 1,07^5 = 18427,41$$

Zysk z inwestycji cyli FV to spadek obligacji + zysk z funduszu - sposta medyty:

$$FV = 10000,99 + 10624,49 + 4211,42 - 18427,41 = 7304,55$$

$$FV = PV (1 + r_f)^5$$

$$r_f = \left(\frac{FV}{PV} \right)^{\frac{1}{5}} - 1$$

$$r_f = 0,0535 = 5,35\%$$

(C)

Zadanie 3.

Rozważmy amerykańską opcję sprzedawy na akcję nieplacącą dywidendy. Opcja została wystawiona w chwili 0, jej termin wykonania to $T = 3$, a cena wykonania wynosi $K = 100$. Roczna stopa wolna od ryzyka wynosi $r = 4.5\%$. Do chwili $\bar{t} = 1$ opcja nie została wykonana. Cena europejskiej opcji kupna w chwili $\bar{t} = 1$ wynosi $C_{\bar{t}}^E$. Proszę określić dla której z wartości $C_{\bar{t}}^E$ optymalnym będzie wcześniejsze wykonanie opcji amerykańskiej?

- (A) Dla żadnej – nigdy nie jest optymalnym wcześniejsze wykonanie opcji tego typu
- (B) 8.60
- (C) 8.70
- (D) 8.80
- (E) 8.90

$$T = 3 \quad K = 100 \quad r = 4,5\% \quad \bar{t} = 1$$

$$C_{\bar{t}}^E < K(1 - e^{-r(T - \bar{t})})$$

$$C_{\bar{t}}^E < 100(1 - e^{-0,045(3-1)}) = 8,60$$

(B)

Zadanie 4.

Rozważmy proces X_t , zdefiniowany następująco:

$$X_t = \exp\left(W_t + \frac{t}{2}\right) + \exp\left(W_t - \frac{t}{2}\right),$$

gdzie W_t jest procesem Wienera.

Proces X_t spełnia wówczas następujące równanie:

(A) $dX_t = X_t dW_t + \frac{t}{2} \exp\left(W_t - \frac{t}{2}\right) dt$

(B) $dX_t = X_t dW_t - \exp\left(W_t + \frac{t}{2}\right) dt$

(C) $dX_t = X_t dW_t + \exp\left(W_t + \frac{t}{2}\right) dt$

(D) $dX_t = X_t dW_t + \exp\left(W_t - \frac{t}{2}\right) dt$

(E) $dX_t = X_t dW_t - \exp\left(W_t - \frac{t}{2}\right) dt$

Lemat Możemy:

$$dX_t = \frac{df}{dt} dt + \frac{df}{dW_t} dW_t + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dW_t^2} (dW_t)^2$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2} \exp(W_t + \frac{t}{2}) - \frac{1}{2} \exp(W_t - \frac{t}{2})$$

$$\frac{df}{dW_t} = \exp(W_t + \frac{t}{2}) + \exp(W_t - \frac{t}{2})$$

$$\frac{d^2 f}{dW_t^2} = \exp(W_t + \frac{t}{2}) + \exp(W_t - \frac{t}{2})$$

$$dX_t = \left[\frac{1}{2} \exp(W_t + \frac{t}{2}) - \frac{1}{2} \exp(W_t - \frac{t}{2}) \right] dt + \left[\exp(W_t + \frac{t}{2}) + \exp(W_t - \frac{t}{2}) \right] dW_t + \frac{1}{2} \left[\exp(W_t + \frac{t}{2}) + \exp(W_t - \frac{t}{2}) \right] dt$$

$$dX_t = \exp(W_t + \frac{t}{2}) dt + X_t dW_t$$

(C)

Zadanie 5.

Rozważmy model Blacka-Dermana-Toya drzewa dwumianowego dla rocznych stóp procentowych oraz następujące, niepełne, drzewo:

	<i>Brak informacji</i>	
11.5%		12.5%
8%	12.3%	
8.3%		<i>Brak informacji</i>
	9.5%	
		8%

Proszę wyznaczyć cenę 4-letniego *capletu* dla kwoty PLN 100, przy założeniu *cap rate* na poziomie 9.5%. Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 1.14
- (B) 1.34
- (C) 1.54
- (D) 1.74
- (E) 1.94

$$v_{t,i+1} = v_{t,i} e^{2\sigma_t \sqrt{h}} \quad h=1$$

$$0.123 = 0.095 e^{2\sigma_2} \Rightarrow \sigma_2 = 0.1292$$

$$\begin{cases} x = 0.02 e^{2\sigma_3} \\ 0.125 = x e^{2\sigma_3} \end{cases}$$

$$0.125 = 0.02 e^{4\sigma_3} \Rightarrow \sigma_3 = 0.1116$$

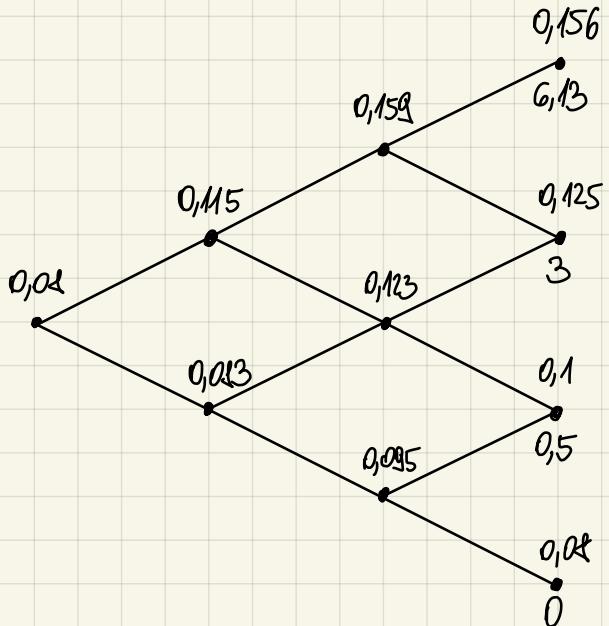
$$v_{2,3} = 0.123 e^{2 \cdot 0.1293} = 0.1593$$

$$v_{3,2} = 0.02 e^{2 \cdot 0.1116} = 0.1$$

$$v_{3,4} = 0.125 e^{2 \cdot 0.1116} = 0.1563$$

$$v_h = 0.095$$

$$C_{t,i} = \max \{ 0, 100(v_{t,i} - v_h) \}$$



Dyskontowanie po wszystkich możliwych ścieżkach do wejścia rynku p-tego dnia, które w tym modelu równe wynosi 0,5:

$$GGG: \frac{0,13}{1,02 \cdot 1,115 \cdot 1,159 \cdot 1,156} \cdot \frac{1}{2} = 0,4749$$

$$GGO: 0,2388$$

$$GOD: 0,2465$$

$$DGG: 0,2538$$

$$DDG: 0,0444$$

$$DGD: 0,0433$$

$$ODD: 0,0420$$

Cena to suma powyższych:

$$C = 1,3437$$

(B)

Zadanie 6.

Rozważmy model Vasicek'a dla stopy procentowej r_t . Wiemy, iż $r_0 = 5\%$, $\mathbb{E}r_2 = 7\%$, $\text{Var } r_2 = 1\%$ oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var } r_t = 2\%$.

Wiedząc, że $r_3 = 8\%$, proszę wyznaczyć cenę wystawianej w chwili $t = 3$ i zapadającej w chwili $t = 6$ obligacji zerokuponowej o nominale 100. Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 79.38
- (B) 79.13
- (C) 78.88
- (D) 78.63
- (E) 78.38

$$P(t, T) = A(t, T) \exp \left\{ -B(t, T) r_t \right\}, \text{ gdzie}$$

$$B(t, T) = \frac{1 - \exp \left\{ -\alpha(T-t) \right\}}{\alpha}$$

$$A(t, T) = \exp \left\{ \left(b - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} \right) [B(t, T) - (T-t)] - \frac{\sigma^2}{4\alpha} B^2(t, T) \right\}$$

$$dr_t = \alpha(b - r_t) dt + \sigma dW_t$$

$$r_t \sim N \left\{ e^{-at} r_0 + b(1 - e^{-at}) ; \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) \right\}$$

$$E r_2 = e^{-2\alpha} \cdot 0,05 + b(1 - e^{-2\alpha}) = 0,07$$

$$\text{Var}(r_2) = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-4\alpha}) = 0,01$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(r_t) = \frac{\sigma^2}{2a} = 0,02$$

$$0,02 (1 - e^{-4\alpha}) = 0,01$$

$$\begin{cases} a = 0,1733 \\ b = 0,1123 \end{cases}$$

$$B(3, 6) = \frac{1 - \exp \left\{ -0,1733 \cdot 3 \right\}}{0,1733} = 2,3394$$

$$A(3, 6) = \exp \left\{ \left(0,1123 - \frac{0,007}{2 \cdot 0,1733^2} \right) [2,3394 - 3] - \frac{0,007}{4 \cdot 0,1733} \cdot 2,3394^2 \right\} = 0,9451$$

$$P(3,6) = 0,9451 \cdot \exp \frac{1}{2} - 2,3394 \cdot 0,024 = 0,7838$$

$$100 P(3,6) = 78,38$$

(E)

Zadanie 7.

Założymy, że inwestor obserwuje następujące ceny akcji \mathcal{A} na koniec poszczególnych giełdowych dni sesyjnych (zakładając 250 dni sesyjnych w ciągu roku):

Dzień	1	2	3	4	5	6
S	10.0	10.2	10.4	10.1	9.8	10.0

Wykorzystując powyższe informacje o zmienności ceny akcji \mathcal{A} , inwestor, korzystając z założeń modelu Blacka-Scholesa, wyznacza na koniec szóstego dnia sesyjnego cenę opcji kupna na akcję \mathcal{A} , zapadającej za rok, o cenie wykonania 11. Przyjmując, że stopa wolna od ryzyka $r = 5\%$, proszę określić cenę opcji (proszę podać najbliższą odpowiedź).

- (A) 1.52
- (B) 1.62
- (C) 1.72
- (D) 1.82
- (E) 1.92

$$x_1 = \ln\left(\frac{10.2}{10.0}\right) = 0.0202$$

$$x_2 = \ln\left(\frac{10.4}{10.2}\right) = -0.0302$$

$$x_3 = \ln\left(\frac{10.1}{10.4}\right) = -0.0293$$

$$x_4 = \ln\left(\frac{9.8}{10.1}\right) = 0.0194$$

$$x_5 = \ln\left(\frac{10.0}{10.0}\right) = 0.0198$$

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 0,000737$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \cdot h = 0,000737 \cdot 250 = 0,1842$$

$$K=11 \quad S_0=10 \quad r=0,05$$

$$d_1 = \frac{\ln(10/11) + (0,05 + \frac{0,1842}{2})}{\sqrt{0,1842}} = 0,1090$$

$$d_2 = 0,1090 - \sqrt{0,1842} = -0,3202$$

$$\mathbb{E}(d_1) = 0,5434$$

$$\mathbb{E}(d_2) = 0,3744$$

$$C_0 = 10 \cdot \mathbb{E}(d_1) - 11 e^{-0,05} \quad \mathbb{E}(d_2) = 1,5165 \approx 1,52$$

(A)

Zadanie 8.

W styczniu firma POLEXP spodziewa się płatności w wysokości 400 tys. EUR, która ma wpłynąć pod koniec kwietnia. W celu zabezpieczenia kursu PLN/EUR POLEXP zajmuje krótką pozycję w kontraktach *futures* na kurs PLN/EUR z terminem zamknięcia w czerwcu. Po otrzymaniu płatności w kwietniu POLEXP zamyka swoje pozycje w kontraktach *futures*. Założymy, że w styczniu, w momencie zajęcia krótkiej pozycji, kurs *futures* w kontraktach z terminem zamknięcia w czerwcu wynosi 4.29, natomiast w kwietniu, w momencie zamykania pozycji, kurs *spot* i *futures* w kontraktach czerwcowych wynosi odpowiednio 4.21 i 4.18. Ostatecznie, uwzględniając transakcje w kontraktach *futures*, płatność otrzymana przez POLEXP w kwietniu będzie warta (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

- (A) 1 672 000 PLN
- (B) 1 684 000 PLN
- (C) 1 716 000 PLN
- (D) 1 728 000 PLN
- (E) Nie da się stwierdzić bez znajomości kursu *spot* w dniu zajęcia krótkiej pozycji w kontraktach *futures*

	Wpływy	Wydatki
0		
1		
2		
3		
4	$400 \cdot 4,21$	
5	$400 \cdot 4,29$	$400 \cdot 4,18$

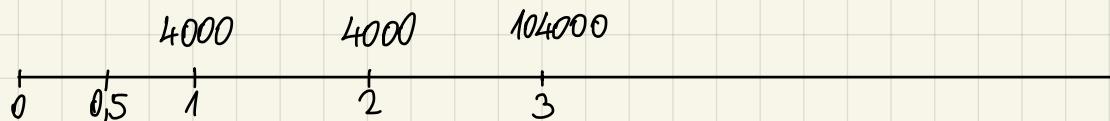
$$\text{Suma: } 400 \cdot 4,29 + 400 \cdot 4,21 - 400 \cdot 4,18 = 1728$$

(D)

Zadanie 9.

Firma X zakupiła pół roku temu 3-letni kontrakt swap na stopę procentową o wartości nominalnej 100 000 z wymianą odsetek co roku i wymianą nominału na koniec kontraktu: odsetki o stałym oprocentowaniu 4% są wymieniane na bieżące oprocentowanie WIBOR-12M. Założymy, że poziom stóp WIBOR-12M pół roku temu wynosił 3.5%, a strukturę stóp procentowych obecnie opisuje równanie $r = 3.5\% + 0.004t$. Jaka jest dzisiajsza wartość tego kontraktu dla strony płacącej stałe odsetki (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

- (A) 750
- (B) 760
- (C) 770
- (D) 780
- (E) 790



$$B_{0,5}^X = \frac{100000 \cdot 1,035}{1,037^{0,5}} = 101637$$

$$r_{0,5} = 0,035 + 0,004 \cdot 0,5 = 0,037$$

$$r_{1,5} = 0,035 + 0,004 \cdot 1,5 = 0,041$$

$$r_{2,5} = 0,035 + 0,004 \cdot 2,5 = 0,045$$

$$B_{0,5}^L = \frac{4000}{1,037^{0,5}} + \frac{4000}{1,041^{1,5}} + \frac{104000}{1,045^{2,5}} = 100257$$

$$V_{0,5}^X = B_{0,5}^X - B_{0,5}^L = 101637 - 100257 = 1370$$

D

Zadanie 10.

Rozpatrzmy kompletny rynek instrumentów finansowych, na którym w chwili $t = 1$ możliwe są tylko trzy przyszłe stany: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Wypłaty w chwili $t = 1$ czterech instrumentów finansowych A, B C i D, które są zależne od stanu rynku, przedstawia poniższa tabela:

	A	B	C	D
ω_1	4	2	2	3
ω_2	2	3	1	2
ω_3	1	2	4	2

Jeśli ceny instrumentów A, B i C w chwili $t = 0$ wynoszą odpowiednio 3, 1,92 oraz 2, a stopa wolna od ryzyka wynosi 10%, to przy założeniu braku arbitrażu, jaka jest cena instrumentu D (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

- (A) 2,48
- (B) 2,58
- (C) 2,68
- (D) 2,78
- (E) 2,88

$$\begin{cases} 4p_1 + 2p_2 + 1p_3 = 3e^{0,1} \\ 2p_1 + 3p_2 + 2p_3 = 1,92e^{0,1} \\ 2p_1 + 1p_2 + 4p_3 = 2e^{0,1} \end{cases}$$

$$p_1 = 0,7326$$

$$p_2 = 0,1134$$

$$p_3 = 0,1579$$

$$p_1 + p_2 + p_3 \approx 1 \text{ w chwili braku arbitrażu}$$

$$3 \cdot 0,7326 + 2 \cdot 0,1134 + 2 \cdot 0,1579 = x \cdot e^{0,1}$$

$$x = 2,48$$

(A)