

Zadanie 1.

Rzucamy kością do gry dotąd, aż uzyskamy przynajmniej po jednym z sześciu możliwych wyników. Jaka jest wartość oczekiwana liczby rzutów?

- (A) 12
- (B) 13.9
- (C) 14.7
- (D) 15.5
- (E) 16

Wskazówka: zacznij od tego, ile trzeba rzutów dla uzyskania dwóch różnych wyników

Zadanie 2.

W etapie I doświadczenia:

- losujemy (bez zwracania) 5 kul z urny zawierającej 6 kul białych i 4 kule czarne. Wylosowane kule przekładamy do drugiej urny (która do tego momentu była pusta).

W etapie II doświadczenia:

- losujemy z drugiej urny (bez zwracania) 2 kule.

Oblicz prawdopodobieństwo, iż po pierwszym etapie wszystkie 5 wylosowanych kul to były kule białe, jeśli obie kule wylosowane w drugim etapie są białe. Prawdopodobieństwo to wynosi:

(A) $\frac{1}{7}$

(B) $\frac{1}{14}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{3}{8}$

(E) $\frac{1}{8}$

Zadanie 3.

Ciągła zmienna losowa X ma gęstość f i dystrybuantę F takie, że:

- $f(x)$ jest ciągła dla $x > 1$,
- $F(1) = 0$,
- $\frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{1}{x}$ dla $x > 1$.

Stąd wynika, że:

- (A) $\Pr(X > 2) = \frac{1}{2}$
- (B) $(X - 1)$ ma rozkład wykładniczy
- (C) $\Pr(X > 2) = \frac{1}{4}$
- (D) $E(X) = 2$
- (E) podane informacje są sprzeczne; nie istnieje taka zmienna losowa

Zadanie 4.

Wiadomo, że zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$, zaś Y ma rozkład dyskretny:

$$\Pr(Y = 1) = \Pr(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

Niech ρ będzie współczynnikiem korelacji między zmiennymi X i Y .

Przy powyższych założeniach przedział zawierający wszystkie dopuszczalne wartości ρ to przedział:

(A) $[-1, 1]$

(B) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

(C) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

(D) $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

(E) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Zadanie 5.

Łączny rozkład zmiennych losowych X i Y ma gęstość:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y+x} & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \wedge y \geq x \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$VAR(Y)$ wynosi:

(A) 1

(B) $\ln 2$

(C) e^2

(D) $\frac{5}{2}$

(E) $\frac{13}{12}$

Zadanie 6.

Niech X_1, \dots, X_n będzie próbką prostą z rozkładu wykładniczego o gęstości:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

gdzie $\lambda > 0$ jest nieznanym parametrem oraz $n > 1$.

Niech $a > 0$ będzie daną liczbą. Interesuje nas estymacja następującego parametru:

$$p = e^{-\lambda \cdot a},$$

który możemy interpretować jako: $p = \Pr_\lambda(X_1 > a)$.

Niech N_a oznacza liczbę obserwacji większych od a , zaś $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

Rozważmy trzy estymatory parametru p :

$$\hat{p}_1 = \exp\left(-a \cdot \frac{n}{S}\right)$$

$$\hat{p}_2 = \frac{N_a}{n}$$

$$\hat{p}_3 = \begin{cases} 0 & \text{gdzie } S \leq a \\ \left(\frac{S-a}{S}\right)^{n-1} & \text{gdzie } S > a \end{cases}$$

Wybierz zdanie prawdziwe:

- (A) estymatory \hat{p}_1 , \hat{p}_2 i \hat{p}_3 są nieobciążone
- (B) estymator \hat{p}_2 jest nieobciążony, zaś \hat{p}_1 i \hat{p}_3 są obciążone
- (C) estymatory \hat{p}_1 i \hat{p}_2 są nieobciążone, zaś \hat{p}_3 jest obciążony
- (D) estymatory \hat{p}_2 i \hat{p}_3 są nieobciążone i $\text{VAR}(\hat{p}_2) < \text{VAR}(\hat{p}_3)$
- (E) estymatory \hat{p}_2 i \hat{p}_3 są nieobciążone i $\text{VAR}(\hat{p}_2) > \text{VAR}(\hat{p}_3)$

Wskazówka: może Ci pomóc obliczenie warunkowej wartości oczekiwanej $E(N_a|S)$

Zadanie 7.

Niech X_1, \dots, X_n będzie próbką prostą z rozkładu normalnego (μ, σ^2) , zaś:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$$\text{gdzie: } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Interesuje nas względny błąd estymacji:

$$R = \frac{S^2 - \sigma^2}{\sigma^2}.$$

Rozmiar próbki n , dla którego $E(R^2) = 0.01$, wynosi:

- (A) $n = 200$
- (B) $n = 201$
- (C) $n = 99$
- (D) $n = 100$
- (E) $n = 101$

Zadanie 8.

Jacek i Placek dostaną próbkę prostą X_1, \dots, X_{10} z rozkładu normalnego (μ, σ^2) .

Obaj nie znają wartości oczekiwanej μ , ale Jacek zna wariancję σ^2 , a Placek jej nie zna. Obaj budują w standardowy sposób przedziały ufności dla μ na poziomie ufności 0.95.

Placek się chwali: „mam szansę 10%, że mój przedział ufności będzie przynajmniej x razy krótszy, niż Twój”.

Znajdź x .

(A) $x \approx 2.27$

(B) $x \approx 2$

(C) $x \approx 1.47$

(D) $x \approx 1.25$

(E) $x \approx 1.05$

Zadanie 9.

Niech X_1, \dots, X_n będzie próbką prostą z rozkładu jednostajnego o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{dla } 0 < x < \theta \\ 0 & \text{w pozost. przyp.} \end{cases}$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

$$m = \min\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Zakładamy, że nieznaną parametr θ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, 1]$, tzn. gęstość a priori jest równa:

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < \theta \leq 1 \\ 0 & \text{w pozost. przyp.} \end{cases}$$

Gęstość a posteriori $\pi(\theta / X_1, \dots, X_n)$ jest:]

- (A) stała na przedziale $[M, 1]$
- (B) stała na przedziale $[m, 1]$
- (C) proporcjonalna do θ^{-n} na przedziale $[M, 1]$
- (D) proporcjonalna do $(1 - \theta)^n$ na przedziale $[M, 1]$
- (E) proporcjonalna do $(1 - \theta)^{-n}$ na przedziale $[M, 1]$

Zadanie 10.

Urządzenie zawiera dwa podzespoły: A i B. Obserwujemy działanie urządzenia w chwilach $t = 0, 1, 2, \dots$.

- Każdy z podzespołów w ciągu jednostki czasu może ulec awarii z prawdopodobieństwem q , niezależnie od drugiego.
- Jeśli w chwili t oba podzespoły są niesprawne, następuje naprawa i w chwili $t+1$ oba są już sprawne.
- Jeśli w chwili t tylko jeden podzespół jest niesprawny, to nie jest naprawiany.

W chwili 0 oba zespoły są sprawne. Prawdopodobieństwo, iż podzespół A jest sprawny w chwili t , dąży przy $t \rightarrow \infty$ do:

(przyjmujemy $p = 1 - q$)

(A) $\frac{p}{1+p}$

(B) $\frac{1+p}{2+p}$

(C) $\frac{1}{2+p}$

(D) $\frac{1+p}{2+2p-p^2}$

(E) $\frac{2p}{2+2p-p^2}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 17 czerwca 2000 r.**Prawdopodobieństwo i statystyka****Arkusz odpowiedzi***

..... KLUCZ ODPOWIEDZI

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	B	
3	A	
4	B	
5	E	
6	E	
7	B	
8	D	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.