Zadanie 1.

Przyjmijmy, że na rynku spełnione są założenia modelu Blacka-Scholesa oraz dostępna jest akcja $\mathcal{A}$ nie płacąca dywidendy. Przez $O_t^{\mathcal{A}}(S_t, K, T)$ oznaczmy opcję europejską na akcję $\mathcal{A}$ o następujących charakterystykach: opcja jest wystawiana w chwili t, cena akcji $\mathcal{A}$ w chwili t wynosi S_t, cena wykonania opcji wynosi K, a opcja wykonywana jest w momencie $T > t$.
Niech $C_N^{\mathcal{A}}(q)$ będzie ceną instrumentu finansowego wystawianego w chwili $t = 0$ przez firmę ABC o następującej charakterystyce:

- w każdej z chwil $t = 0,1, \dots, N-1$ następuje losowanie określające czy:
  - i) kupujący instrument otrzymuje od firmy ABC europejską opcję kupna $O_t^{\mathcal{A}}(S_t, S_t, N)$, czy też
  - ii) kupujący instrument wystawia firmie ABC europejską opcję sprzedaży $O_t^{\mathcal{A}}(S_t, S_t, N)$;
- prawdopodobieństwo wylosowania scenariusza i) wynosi q, a scenariusza ii) wynosi $1-q$;
- losowania są niezależne zarówno od siebie jak i od procesu cen akcji.

Zakładając, iż $S_0 = 100$, roczna stopa wolna od ryzyka wynosi stale $r = 4\%$, a zmienność równa jest $\sigma = 0.25$, proszę wyznaczyć wartość $C_{10}^{\mathcal{A}}\left(\frac{1}{2}\right)$. Proszę podać najbliższą wartość.

Parytet kupna - sprzedaży:

$$C_t + Ke^{-r(T-t)} = P_t + S_t$$

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)} = S_t(1-e^{-r(T-t)})$$

$$C_{10}^{A}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{t=0}^{9} e^{-rt} \tfrac{1}{2} E[C_t - P_t] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{t=0}^{9} e^{-rt} E[S_t(1-e^{-r(T-t)})] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{t=0}^{9} e^{-rt}(1-e^{-rT+rt}) ES_t =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{t=0}^{9}(e^{-rt} - e^{-rT}) ES_t =$$

$$\left| \begin{array}{l} S_t \sim LN[\ln S_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t] \\ ES_t = \exp\{\ln S_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\} = S_0 e^{rt} \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{9} (e^{-rt} - e^{-rT}) S_0 e^{rt} =$$

$$= \frac{1}{2} S_0 \sum_{t=0}^{9} (1 - e^{-rT} e^{rt}) =$$

$$= \frac{1}{2} S_0 \left[10 - e^{-rT} \sum_{t=0}^{9} e^{rt} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} S_0 \left[10 - e^{-rT} \frac{1 - e^{10r}}{1 - e^{r}} \right]$$

$$C_{10}^{A}(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot 100 \left[10 - e^{-0{,}04 \cdot 10} \frac{1 - e^{10 \cdot 0{,}04}}{1 - e^{0{,}04}} \right] = 96{,}017 \approx 96$$

D

Zadanie 2.

Rozważmy rynek akcji, na którym spełnione są założenia modelu Black'a-Scholes'a. Do wyceny akcji $\mathcal{A}$ inwestor stosuje model dwumianowy (t.j. zakłada, że jednym okresie cena akcji może urosnąć od wartość 1 do wartości $u > 1$ z prawdopodobieństwem p , bądź też spaść do wartości $d < 1$ z prawdopodobieństwem $1 - p$) z założeniem Jarrow'a-Rude'a $\left(p = \frac{1}{2}\right)$.

Inwestor kalibruje swój model w taki sposób, aby średnia i wariancja ceny akcji $\mathcal{A}$ po jednym okresie odpowiadała średniej i wariancji ceny akcji $\mathcal{A}$ na rynku Blacka-Scholesa dla długości okresu $\Delta t = \frac{1}{12}$. Zakładając, że stopa wolna od ryzyka wynosi $r = 2.5\%$, akcja $\mathcal{A}$ płaci dywidendę $q = 0.25\%$, natomiast współczynnik zmienności cen akcji równy jest $\sigma = 10\%$, proszę wyznaczyć wartość $u - 1$ (proszę podać najbliższą wartość).

W modelu Jarrowa-Rude'a :

$$u = \exp\left\{\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\right\}$$

$$u = \exp\left\{\left(0{,}025 - 0{,}0025 - \frac{0{,}1^2}{2}\right)\cdot \frac{1}{12} + 0{,}1\cdot\sqrt{\frac{1}{12}}\right\} = 1{,}03079$$

$$u - 1 = 1{,}03079 - 1 = 0{,}03079 \approx 3{,}1\%$$

E

Zadanie 3.

Rozważmy proces Browna W_t oraz proces Y, zdefiniowany jako $Y_t := t^2(W_t)^3$.

Proszę określić, które równanie opisuje dynamikę procesu Y_t.

Z lematu Ito:

$$dY_t = 2t(W_t)^3\,dt + 3t^2(W_t)^2\,dW_t + \frac{1}{2}\cdot 6t^2 W_t\,(dW_t)^2 =$$

$$= 2t(W_t)^3\,dt + 3t^2 W_t\,dt + 3t^2(W_t)^2\,dW_t =$$

$$= \frac{2}{t}\,t^2(W_t)^3\,dt + 3(t^6 W_t^3)^{\frac{1}{3}}\,dt + 3(t^3 W_t^3)^{\frac{2}{3}}\,dW_t =$$

$$= \left\{\frac{2Y_t}{t} + 3(t^4 Y_t)^{\frac{1}{3}}\right\}dt + 3(tY_t)^{\frac{2}{3}}\,dW_t$$

Odp. A

Zadanie 4.

Niech $\mathcal{D}_k$ oznacza sumę wartości k rent malejących $(Da)_{\bar{n}}$, tzn. $\mathcal{D}_k = \sum_{n=1}^{k}(Da)_{\bar{n}}$, natomiast I_k oznacza sumę wartości k rent rosnących $(Ia)_{\bar{n}}$, tzn. $I_k = \sum_{n=1}^{k}(Ia)_{\bar{n}}$. Proszę wskazać który z poniższych wzorów wyraża różnicę $\mathcal{D}_{15} - I_{15}$ dla każdego $i \neq 0$?

$$P_a = R_1 a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i}\left(a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}\right)$$

$$(Da)_{\overline{n}} = n a_{\overline{n}|i} - \frac{1}{i}\left(a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}\right)$$

$$(Ia)_{\overline{n}} = a_{\overline{n}|i} + \frac{1}{i}\left(a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}\right)$$

$$(Da)_{\overline{n}} - (Ia)_{\overline{n}} = n a_{\overline{n}|i} - a_{\overline{n}|i} - \frac{2}{i}\left(a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}\right) =$$

$$= a_{\overline{n}|i}(n-1) - \frac{2}{i}\left(a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}\right)$$

Da radę to wyprowadzić ale dużo roboty dlatego liczę na kalkulatorze i wstawiam do odpowiedzi (przyjmuję $i = 0{,}1$)

$$\sum_{n=1}^{15}\left[a_{\overline{n}|i}(n-1) - \frac{2}{i}\left(a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}\right)\right] = 124{,}8574$$

i) $\dfrac{105i - 30 + (2v+1)\ddot{a}_{15} - 15v^{15}}{i^2}$ $= 48{,}7966$

ii) $\dfrac{105i - 30 + (2i+3)a_{15} - 15v^{15}}{i^2}$ $= 124{,}8574$

iii) $\dfrac{105i - 15 + a_{15} + 2\ddot{a}_{15} - 30v^{15}}{i^2}$ $= 1265{,}7693$

iv) $\dfrac{105i - 28 + 3a_{15} - 17v^{15}}{i^2}$. $= 124{,}8574$

Odp. D

Zadanie 5.

Niech $T_0 = 0$. Rozważmy rynek Blacka-Scholesa, na którym nie ma możliwości arbitrażu i opcję wyboru (*chooser option*) na niepłacącą dywidendy akcje $\mathcal{A}$. Nabywca tej opcji będzie miał prawo określenia w chwili $T_1 = 1$, czy kontrakt ten jest opcją kupna czy też opcją sprzedaży (z ceną wykonania $K = 120$ oraz datą wygaśnięcia $T_2 = 4$). Wiedząc, że $S_0 = 100$, $r = 4\%$, oraz współczynnik zmienności dla akcji $\mathcal{A}$ wynosi $\sigma = 0.3$ proszę określić wartość najbliższą cenie opcji wyboru w chwili T_0:

$$V_0 = C(0, S_0, K, T_2) + e^{-\delta(T_2-T_1)} P(0, S_0, Ke^{-(r-\delta)(T_2-T_1)}, T_1)$$

$K = 120 \quad T_1 = 1 \quad T_2 = 4 \quad S_0 = 100 \quad r = 0{,}04 \quad \sigma = 0{,}3 \quad \delta = 0$

$$C(0, S_0, K, T_2) = S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT_2} \Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T_2}}\left(\ln\frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T_2\right) = \frac{1}{0{,}3\cdot 2}\left(\ln\frac{100}{120} + \left(0{,}04 + \frac{0{,}09}{2}\right)\cdot 4\right) = 0{,}262797$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T_2} = -0{,}337203$$

$$C(0, S_0, K, T_2) = 100\,\Phi(0{,}26) - 120e^{-0{,}04\cdot 4}\Phi(-0{,}34) = 22{,}74$$

$$P(0, S_0, K', T_1) = -S_0\Phi(-d_1) + K'e^{-rT_1}\Phi(-d_2)$$

$$K' = Ke^{-r(T_2-T_1)} = 120e^{-0{,}04\cdot 3} = 120e^{-0{,}12}$$

$$d_1 = \frac{1}{0{,}3\cdot 1}\left(\ln\frac{100}{120e^{-0{,}12}} + \left(0{,}04 + \frac{0{,}09}{2}\right)\cdot 1\right) = 0{,}075595$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T_1} = -0{,}224405$$

$$P(0, S_0, K', T_1) = -100\,\Phi(-0{,}08) + 120e^{-0{,}12}\cdot e^{-0{,}04}\Phi(0{,}22) = 12{,}82$$

$$V_0 = 22{,}74 + 12{,}82 = 35{,}56 \approx 36$$

Odp. E

Zadanie 6.

Polski inwestor planuje zakup 1 000 USD za 4 miesiące. Decyduje się na zakup 4-miesięcznej walutowej opcji kupna z ceną wykonania 4.5 PLN/USD. Wiemy, że stopa wolna od ryzyka w Polsce wynosi 8%, podczas gdy w Stanach Zjednoczonych równa jest 4%. Wiemy, że zmienność kursu wynosi 20%, a bieżący kurs to 4.2 PLN/USD. Proszę określić cenę opcji, która pozwoli zabezpieczyć płatność 1 000 USD za 4 miesiące. Proszę podać najbliższą wartość:

$$C_0 = S_0 e^{-r_f T} \Phi\{d_1(0, S_0, r_f)\} - K e^{-rT} \Phi\{d_2(0, S_0, r_f)\}$$

$T = 4/12 \quad S_0 = 4,2 \quad K = 4,5 \quad r = 0,08 \quad r_f = 0,04 \quad \sigma = 0,2$

$$d_1 = \frac{\ln(4,2/4,5) + (0,08 - 0,04 + \frac{0,2^2}{2}) \cdot \frac{4}{12}}{0,2\sqrt{4/12}} = -0,424291$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = -0,539761$$

$\Phi(d_1) = 0,335677$

$\Phi(d_2) = 0,294681$

$$C_0 = 4,2 \cdot e^{-0,04 \cdot 4/12} \cdot 0,335677 - 4,5 e^{-0,08 \cdot 4/12} \cdot 0,294681 = 0,1$$

$1000 \cdot 0,1 = 100$

Odp. C

Zadanie 7.

Rozważmy rynek, na którym jednoroczna stopa spot wynosi 9.7%, natomiast dwuletnia stopa spot wynosi 10.5%. Na rynku tym dwuletnia, stałokuponowa obligacja sprzedawana jest *at par*.

Firmy A oraz B zainteresowane są uzyskaniem z banku dwuletniego kredytu na kwotę K każda, przy czym firma A chciałaby uzyskać kredyt o zmiennym oprocentowaniu, a firma B – o oprocentowaniu stałym. Bank zaoferował pożyczki o następujących warunkach (stopy roczne):

	Firma A	Firma B
Stałe	11.5%	13.8%
Zmienne	LIBOR + 2.25%	LIBOR + 3.25%

Firmy stwierdziły, że najkorzystniejsze dla nich będzie, gdy:

- firma A weźmie kredyt o stałym oprocentowaniu,
- firma B weźmie kredyt o zmiennym oprocentowaniu,
- firmy A i B zawrą kontrakt *swap*, na mocy którego:
    - firma A płaci firmie B oprocentowanie zmienne LIBOR + c,
    - firma B płaci firmie A oprocentowanie stałe 10.75%.

Ile wynosić powinna wartość c, aby żadna z firm nie straciła na kontrakcie, jeśli:

- alternatywnie dla kontraktu *swap* obie firmy mogą emitować i kupować obligacje – zarówno stałokuponowe jak i zmiennokuponowe (w oparciu o stopę LIBOR),
- na rynku brak kosztów transakcyjnych związanych z pożyczką, zawarciem transakcji *swap*, bądź emisją lub kupnem obligacji?

$$\begin{tikzcd} \boxed{A} \arrow[r, shift left, "L+c"] & \boxed{B} \arrow[l, shift left, "10{,}75\%"] \end{tikzcd}$$

Stała sprawiedliwa stopa w kontrakcie IRS:

$$q = \frac{1 - \frac{1}{1{,}105^2}}{\frac{1}{1{,}097} + \frac{1}{1{,}105^2}} = 10{,}46\%$$

Stąd B płaci A trochę za dużo więc $c = 10{,}75\% - 10{,}46\% = 0{,}29\%$

Odp. C

Zadanie 8.

Kredyt w wysokości 5000 PLN jest spłacany przez 10 lat za pomocą równych rat na koniec każdego roku przy oprocentowaniu wynoszącym 4% w skali roku. Pożyczkobiorca może przyspieszyć spłacanie zadłużenia, jednakże w takim wypadku płaci karę w wysokości 3% od wartości nadpłaconej ponad ratę kredytu. Jeżeli łączna płatność (zwiększona rata plus ewentualna kara) na koniec pierwszego roku wyniesie 800 PLN, na koniec drugiego roku wyniesie 750 PLN, a na koniec trzeciego roku wyniesie 700 PLN, to jakie jest niespłacone saldo kredytu przed zapłaceniem raty kredytu na koniec czwartego roku? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

$$R = \frac{K_0}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{5000}{\frac{1-1{,}04^{-10}}{0{,}04}} = 616{,}4547$$

Obliczenie kar:

$R + 1{,}03 N_i = R_i$ R - rata bazowa, N_i - nadpłata, R_i - rata zapłacona

K_i - kara

$K_i = 0{,}3 N_i$

$$K_i = (R_i - R) \cdot \frac{0{,}03}{1{,}03}$$

$$K_1 = (800 - R) \cdot \frac{0{,}03}{1{,}03} = 5{,}3460$$

$$K_2 = 3{,}8897$$

$$K_3 = 2{,}4334$$

j	K_{j-1}	R_j	I_j	U_j	Kara	K_j
1	5000	800	200	600	5,3460	4405,3460
2	4405,3460	750	176,2138	573,7862	3,8897	3835,4495
3	3835,4495	700	153,4180	546,5820	2,4334	3291,3008
4	3291,3008		131,6520			

Saldo na koniec 3 roku plus odsetki z 4 roku: $3291{,}3008 + 131{,}6520 =$

$= 3423$. Odp. B

Zadanie 9.

Roczna stopa zwrotu w roku t, tj. (1+ i_t) gdzie i_0 oznacza stopę procentową w okresie od $t = 0$ do $t = 1$, ma rozkład log-normalny z wartością oczekiwaną 108% oraz odchyleniem standardowym 20%. Stopy zwrotu w kolejnych latach są od siebie niezależne. Jaką kwotę trzeba zainwestować jednorazowo w $t = 0$, aby z prawdopodobieństwem 95% wartość inwestycji po 5 latach wynosiła co najmniej 500 PLN? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

X_i - stopa zwrotu w i-tym roku

Wartość inwestycji po 5 latach : $K X_1 \cdot \ldots \cdot X_5 = K X^5$ bo wszystkie stopy mają ten sam rozkład

$$\begin{cases} 1{,}08 = \exp\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\} \\ 0{,}04 = \exp\{2\mu + 2\sigma^2\} - \exp\{2\mu + \sigma^2\} = \exp\{2\mu + \sigma^2\}(\exp\{\sigma^2\} - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln 1{,}08 = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \ln 0{,}04 = 2\mu + \sigma^2 + \ln\{\exp\{\sigma^2\} - 1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = \ln 1{,}08 - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \ln 0{,}04 = 2\ln 1{,}08 - \sigma^2 + \sigma^2 + \ln\{\exp\{\sigma^2\} - 1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln\{\exp\{\sigma^2\} - 1\} = \ln 0{,}04 - 2\ln 1{,}08 \\ \mu = \ln 1{,}08 - \frac{1}{2}\sigma^2 \end{cases}$$

$$\exp(\sigma^2) - 1 = \frac{25}{729}$$

$$\exp(\sigma^2) = \frac{754}{729}$$

$$\begin{cases} \sigma^2 = 0{,}033719 \\ \mu = 0{,}060102 \end{cases}$$

$$X \sim LN\{0{,}060102 ; 0{,}033719\}$$

$$X^5 \sim LN\{5 \cdot 0{,}060102 ; 5 \cdot 0{,}033719\}$$

$$X^5 \sim LN\{0{,}30051 ; 0{,}168595\}$$

$$P(KX^5 > 500) = 0{,}95$$

$$P(KX^5 < 500) = 0{,}05$$

$$P\left(X^5 < \frac{500}{K}\right) = 0{,}05$$

$$P\left(\ln X^5 < \ln\left(\frac{500}{K}\right)\right) = 0{,}05$$

$$P\left(Z < \frac{\ln\left(\frac{500}{K}\right) - 0{,}30051}{\sqrt{0{,}168595}}\right) = 0{,}05$$

$$\frac{\ln\left(\frac{500}{K}\right) - 0{,}30051}{\sqrt{0{,}168595}} = \Phi^{-1}(0{,}05)$$

$$\ln\left(\frac{500}{K}\right) - 0{,}30051 = \Phi^{-1}(0{,}05)\sqrt{0{,}168595}$$

$$\ln\left(\frac{500}{K}\right) = \Phi^{-1}(0{,}05)\sqrt{0{,}168595} + 0{,}30051$$

$$\frac{500}{K} = \exp\left\{\Phi^{-1}(0{,}05)\sqrt{0{,}168595} + 0{,}30051\right\}$$

$$K = \frac{500}{\Phi^{-1}(0{,}05)\sqrt{0{,}168595} + 0{,}30051}$$

$$K = 727{,}4$$

Odp. C

Zadanie 10.

Niech natężenie oprocentowania (*force of interest*) w chwili t wynosi:

$$\delta_t = \begin{cases} 0{,}05 & dla\ \ 0 < t \leq 4 \\ a(t^2 - t) & dla\ \ t > 4 \end{cases}$$

Ile wynosi wartość parametru a jeżeli wartość bieżąca w $t = 0$ jednorazowej płatności w wysokości 750 PLN dokonanej w $t = 8$ wynosi 50 PLN? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

$$50 = 750 \cdot \exp\{-0{,}05 \cdot 4\} \cdot \exp\{-a \int_4^8 t^2 - t \, dt\}$$

$$50 = 750 \cdot \exp\{-0{,}2\} \cdot \exp\{-a\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_4^8\}$$

$$0{,}081427 = \exp\{-a \cdot 125{,}3333\}$$

$$\ln 0{,}081427 = -125{,}3333\, a$$

$$a = 0{,}02$$

Odp. D