Zadanie 1. Na koniec roku 2021 analizujemy dane dotyczące pewnej grupy ubezpieczeń o łącznej wartości szkód, które zaszły w latach 2018-2021.
W poniższej tabeli w komórce (t, j) znajduje się zagregowana wartość szkód zaszłych w roku t, które zostały zlikwidowane w ciągu roku $(t+j)$.

rok zajścia szkody t \ opóźnienie w latach j	0	1	2	3
2018	1800	700	500	150
2019	1850	750	520	
2020	1950	790		
2021	2000			

Oblicz (stosując standardową metodę Chain-Ladder) wartość tej części rezerwy na odszkodowania i świadczenia, która odpowiada szkodom do zlikwidowania w ciągu roku 2022.
Przyjmij założenie, że proces zgłaszania i likwidacji szkód w tej grupie ubezpieczeń zamyka się w pełni w okresie trzyletnim.
Ww. część rezerwy wynosi:

1800	2500	3000	3150
1850	2600	3120	3276
1950	2740	3288	
2000	2800		

$$\frac{3150}{3000} \cdot 3120$$

$$\frac{3000+3120}{2500+2600} \cdot 2740$$

$$\frac{2500+2600+2740}{1800+1850+1950} \cdot 2000$$

$3276 - 3120 = 156$

$3288 - 2740 = 548$

$2800 - 2000 = 800$

$156 + 548 + 800 = 1504$

Odp. B

Zadanie 2.

W pewnym ubezpieczeniu może dojść do co najwyżej jednej szkody w ciągu roku. U ubezpieczonych występuje zjawisko „usypiania czujności". Przejawia się ono w tym, że prawdopodobieństwo że ubezpieczony dozna szkody w danym roku, jest mniejsze po roku szkodowym niż po roku bezszkodowym.

Jeśli więc oznaczymy przez N_t liczbę szkód w roku t, to zjawisko usypiania czujności polega na tym, że $\Pr(N_t = 1|N_{t-1} = 1) < \Pr(N_t = 1|N_{t-1} = 0)$.

Przyjmijmy, że:

$\Pr(N_t = 1|N_{t-1}, N_{t-2}, N_{t-3}, \dots) = \Pr(N_t = 1|N_{t-1})$, oraz iż:

$\Pr(N_t = 1|N_{t-1} = 1) = 1/10$,

$\Pr(N_t = 1|N_{t-1} = 0) = 3/10$,

Wobec tego $\lim_{t\to\infty} \Pr(N_t = 1)$ wynosi:

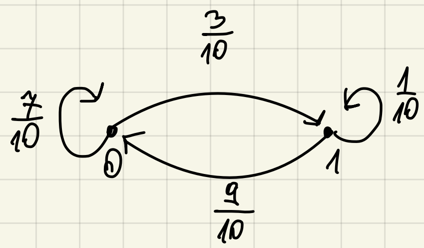
$P(1|1) = \frac{1}{10}$

$P(1|0) = \frac{3}{10}$

$P(0|1) = \frac{9}{10}$

$P(0|0) = \frac{7}{10}$

Rozkład stacjonarny - taki rozkład na $\{0, 1\}$, że po wykonaniu ruchu zostaje on taki sam



p = p-stwo, że jesteśmy w 0

$1-p$ = p-stwo, że jesteśmy w 1

P-stwa po wykonaniu jednego ruchu:

P-stwa, że jesteśmy w 0: $p \cdot \frac{7}{10} + (1-p) \cdot \frac{9}{10} = A$

P-stwa, że jesteśmy w 1: $p \cdot \frac{3}{10} + (1-p) \cdot \frac{1}{10} = B$

Warunek stacjonarności jest równoważny temu, że

$A = p, \quad B = (1-p)$

Rozwiązujemy układ równań:

$$p \cdot \frac{7}{10} + \frac{9}{10} - \frac{9}{10} \cdot p = p$$

$$p \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \cdot p = 1 - p$$

$$\frac{12}{10} p = \frac{9}{10}$$

$$p = \frac{3}{4}$$

Czyli

$(1-p) = \frac{1}{4}$

Czyli odpowiedź to $\frac{1}{4}$.

METODA NA WZORKACH

Macierz przejścia:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Rozkład stacjonarny

$$[\pi_1 \ \ \pi_2] = [\pi_1 \ \ \pi_2] P = [\pi_1 \ \ \pi_2] \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \left[\frac{7}{10}\pi_1 + \frac{9}{10}\pi_2 \quad \frac{3}{10}\pi_1 + \frac{1}{10}\pi_2 \right]$$

Mamy też $\pi_1 + \pi_2 = 1$

$$\pi_1 = \frac{7}{10}\pi_1 + \frac{9}{10}(1-\pi_1) = \frac{7}{10}\pi_1 + \frac{9}{10} - \frac{9}{10}\pi_1$$

$$\frac{12}{10}\pi_1 = \frac{9}{10}$$

$$\pi_1 = \frac{3}{4}$$

$$\pi_2 = \frac{1}{4}$$

Zadanie 3.

Każde ryzyko z pewnej populacji ryzyk generuje szkody zgodnie z procesem Poissona z parametrem intensywności λ. Zróżnicowanie wartości parametru λ w populacji dane jest gęstością:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \exp(-x)$$

Niech $T(t)$ oznacza chwilę wystąpienia pierwszej szkody po momencie t dla losowo wybranego z tej populacji ryzyka.

Wobec tego $E\{T(0) - 1 | T(0) > 1\}$ wynosi:

Jeżeli w jednostce czasu zachodzi średnio λ niezależnych zdarzeń, to rozkład wykładniczy opisuje odstępy między kolejnymi zdarzeniami.

$T(0) \sim Exp(\lambda)$

Idea polega na skorzystaniu ze wzoru:

$$E[E(X|Y,Z)|Y] = E(X|Y)$$

$$E(T(0)-1|T(0)>1) = E[E(T(0)-1|T(0)>1, \Lambda=\lambda)|T(0)>1]$$

$$E(T(0)-1|T(0)>1, \Lambda=\lambda) = E(T(0)|T(0)>1, \Lambda=\lambda) - 1$$

$$E(T(0)|T(0)>1, \Lambda=\lambda) = \frac{\int_1^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx}{\int_1^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx} =$$

$$\begin{cases} \int_1^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_1^\infty = e^{-\lambda} \\ \int_1^\infty \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\int_1^\infty x\left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right)'dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_1^\infty + \int_1^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \\ = e^{-\lambda} + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_1^\infty = e^{-\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda} \end{cases}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}} = 1 + \frac{1}{\lambda}$$

$$E(T(0)-1|T(0)>1, \Lambda=\lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(T(0)-1|T(0)>1) = E[E(T(0)-1|T(0)>1, \Lambda=\lambda)|T(0)>1] =$$

$$= E\left(\frac{1}{\lambda} \,\middle|\, T(0) > 1\right)$$

$$f_{\Lambda | T(0) > 1}(\lambda) = \frac{P(T(0) > 1 \mid \Lambda = \lambda) f_{\Lambda}(\lambda)}{\int_0^\infty P(T(0) > 1 \mid \Lambda = \lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda} =$$

$$\left[\int_0^\infty e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{2} \lambda^2 e^{-\lambda} d\lambda = \underbrace{\int_0^\infty \frac{2^3}{2!} \lambda^{3-1} e^{-2\lambda} d\lambda}_{\text{gęstość } \Gamma(3,2)} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \right]$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \lambda^2 e^{-2\lambda}}{\frac{1}{8}} = 4 \lambda^2 e^{-2\lambda}$$

$$E\left(\frac{1}{\lambda} \,\middle|\, T(0) > 1\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} 4 \lambda^2 e^{-2\lambda} d\lambda =$$

$$= 2 \underbrace{\int_0^\infty \lambda \cdot \frac{2^1}{1!} \lambda^{1-1} e^{-2\lambda} d\lambda}_{\substack{\text{wartość oczekiwana} \\ \text{rozkładu } \Gamma(1,2)}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Zadanie 4.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki:

$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności $\lambda = 1$,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wartości n pierwszych szkód
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$

Wartość pojedynczej szkody ma rozkład odwrotny gaussowski o gęstości określonej na półosi dodatniej wzorem:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^3}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y} - 2\right)\right]$$

Jeśli założymy, że współczynnik dopasowania R (*adjustment coefficient*) ma wynosić 0.18, to intensywność składki c powinna wynieść (z dobrym przybliżeniem):

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left[-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right]$$

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^3}} \exp\left[-\frac{(y-1)^2}{2y}\right] \Rightarrow \lambda = 1, \mu = 1$$

FGM odwrotnego rozkładu normalnego

$$M_Y(t) = \exp\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda}}\right)\right] = \exp(1 - \sqrt{1-2t})$$

$$M_Y(r) = 1 + (1+\theta) r EY$$

$$\theta = \frac{c}{\lambda EY} - 1$$

$$M_Y(r) = 1 + \frac{c}{\lambda EY} EY \cdot r = 1 + \frac{cr}{\lambda}$$

$$c = \frac{\lambda}{r}(M_X(r) - 1) = \frac{1}{0.18}\left[\exp(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0.18}) - 1\right] \approx 1.23$$

Odp. B

Zadanie 5.

Wartość pojedynczej szkody ma rozkład ucięty Pareto o dystrybuancie:

$$F(y) = \begin{cases} \frac{y}{1+y} & gdy \; y < 100 \\ 1 & gdy \; y \geq 100 \end{cases}$$

Współczynnik zmienności (stosunek odchylenia standardowego do wartości oczekiwanej) tego rozkładu z dobrym przybliżeniem wynosi:

$$EY = \int_0^{100} 1 - \frac{y}{1+y}\,dy = \int_0^{100} \frac{1}{1+y}\,dy = \ln(1+y)\Big|_0^{100} = 4.62$$

$$EY^2 = \int_0^{100} 2y\left(1 - \frac{y}{1+y}\right) dy = 190.77 \quad \text{(kalkulator)}$$

$$Var(Y) = 190.77 - (4.62)^2 = 169.43$$

$$\sigma = 13$$

$$\sigma = \frac{13}{4.62} \approx 2.82$$

Odp. A

Zadanie 6.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym postaci:

- $U(t) = u + c \cdot t - S(t)$,

gdzie $S(t)$ jest złożonym procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ, oraz dwupunktowym rozkładem wartości pojedynczej szkody Y, takim, że:

- $\Pr(Y = 1) = \frac{2}{3}$,
- $\Pr(Y = 2) = \frac{1}{3}$.

Wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu $\Psi(u)$ jest dla dowolnego kapitału początkowego $u \geq 0$ obustronnie ograniczona:

- $\left(\frac{2}{3}\right)^{u+2} \leq \Psi(u) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{u}$.

Wobec tego składka c przypadająca na jednostkowy okres czasu wynosi:

$EY = 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$c = (1+\theta)\lambda EY \Rightarrow 1+\theta = \frac{c}{\lambda EY}$

Aproksymacja Lundberga:

$\Psi_L(u) = e^{-Ru}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{u+2} \leq e^{-Ru} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{u}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{u} \leq e^{-Ru} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{u} \quad / \cdot e^{Ru}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}e^{R}\right)^{u} \leq 1^{u} \leq \left(\frac{2}{3}e^{R}\right)^{u}$

$1 = \frac{2}{3}e^{R}$

$e^{R} = \frac{3}{2}$

$R = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$M_Y(R) = 1 + (1+\theta)REY = 1 + \frac{cR}{\lambda}$

$M_Y(R) = \frac{2}{3}e^{R} + \frac{1}{3}e^{2R} = 1 + \frac{cR}{\lambda}$

$\frac{2}{3}e^{\ln(\frac{3}{2})} + \frac{1}{3}e^{2\ln(\frac{3}{2})} = 1 + \frac{c}{\lambda}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = 1 + \frac{c}{\lambda}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$\frac{3}{4} = \frac{c}{\lambda}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$c = \frac{3\lambda}{4\ln(\frac{3}{2})}$

Odp. C

Zadanie 7.

W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:

$$U_n = u + nc - (W_1 + W_2 + \cdots + W_n)$$

- składka roczna wynosi $c = 5 \times \ln\left(\frac{5}{4}\right)$,
- nadwyżka początkowa wynosi $u = c$,
- a łączne wartości szkód w kolejnych latach $W_1, W_2, W_3, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej równej jeden.

Oznaczmy przez N moment ruiny, a więc najmniejszą taką liczbę naturalną n, dla której $U_n < 0$. Oczywiście jeśli nadwyżka nigdy nie przyjmie wartości ujemnej, przyjmujemy $N = \infty$.

Prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr(N \le 2 | N < \infty)$ wynosi (w przybliżeniu):

Z definicji p-stwa warunkowego:

$$P(N \le 2 | N < \infty) = \frac{P(N \le 2, N < \infty)}{P(N < \infty)} = \frac{P(N \le 2)}{P(N < \infty)}$$

Najpierw policzmy $P(N \le 2)$

P-stwo ruiny w pierwszym roku wynosi:

$$P_1 = P(U_1 < 0) = P(2c - W_1 < 0) = P(W_1 > 2c) = 1 - P(W_1 \le 2c) = 1 - 1 + e^{-2c} =$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = 0.107374$$

P-stwo, że ruina nastąpi w dokładnie drugim roku (czyli w szczególności, że nie nastąpiła w pierwszym) wynosi:

$$P_2 = P(U_2 < 0, 0 < U_1) = P(3c < W_1 + W_2, W_1 < 2c)$$

Warunkujemy teraz po wszystkich możliwych wartościach zm. W_1 i stosujemy wzór na p-stwo całkowite:

$$P_2 = \int_0^{2c} P(3c < w + W_2) e^{-w} dw = \int_0^{2c} P(W_2 > 3c - w) e^{-w} dw =$$

$$= \int_0^{2c} e^{w-3c} e^{-w} dw = \int_0^{2c} e^{-3c} dw = w e^{-3c} \Big|_0^{2c} = 2c e^{-3c} =$$

$$= 0.078512$$

Czyli $P(N \le 2) = P_1 + P_2 = 0.1859$

Przejdźmy teraz do $P(N<\infty)$. Jest to dokładne p-stwo ruiny i możemy zastosować wzór dokładny na p-stwo ruiny dla rozkładu wykładniczego $Exp(\beta)$:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} \mid T<\infty]}$$

$$-U(T) = Y \sim Exp(1)$$

$$E[e^{RY}] = \int_0^\infty e^{Ry} e^{-y}\, dy = \int_0^\infty e^{-y(1-R)}\, dy = \frac{1}{1-R} e^{-y(1-R)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{1-R} \text{ dla } R<1$$

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{1-R}$$

$$M_Y(R) = e^{cR}$$

$$\frac{1}{1-R} = \left(e^{5\ln(\frac{5}{4})}\right)^R$$

$R = 0.2$ (kalkulator)

$$\psi(5\ln(\tfrac{5}{4})) = \frac{e^{-0.2\cdot 5\ln(\frac{5}{4})}}{1-0.2} = 0.64$$

$$P(N<\infty) = 0.64$$

Ostatecznie:

$$P(N\leq 2 \mid N<\infty) = \frac{0.1259}{0.64} = 0.29$$

Można też skorzystać ze wzoru dla rozkładu wykładniczego:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{1+\theta}$$

$$M_Y(R) = 1+(1+\theta)R\,EY$$

$$\frac{1}{1+R} = 1+(1+\theta)R \quad |:R$$

$$\frac{1}{R(1+R)} - \frac{1}{R} = (1+\theta)$$

$$(1+\theta) = \frac{1}{1-R}$$

$$\psi(u) = e^{-Ru}(1-R)$$

Zadanie 8.

Ubezpieczeni są losowo dobierani z populacji, w której:

- łączna wartość szkód dla ubezpieczonego charakteryzującego się wartością λ parametru Λ ma złożony rozkład Poissona z oczekiwaną liczbą szkód N równą λ,
- rozkład wartości pojedynczej szkody jest taki sam dla wszystkich ubezpieczonych, a jego wartość oczekiwana wynosi μ,
- parametr Λ ma rozkład Gamma (2,5) o wartości oczekiwanej 2/5 i wariancji 2/25.

Ubezpieczyciel sprzedaje członkom tej populacji ubezpieczenie w zamian za składkę płatną z góry w wysokości:

- $110\% \cdot \mu \cdot \mathrm{E}(\Lambda | N > 0)$,

a na koniec roku tym ubezpieczonym, którzy nie zgłosili żadnej szkody, **wypłaca bonus** w wysokości:

- $110\% \cdot \mu \cdot \left\{ \mathrm{E}(\Lambda | N > 0) - \mathrm{E}(\Lambda | N = 0) \right\}$.

Bonus wynosi:

$N \sim P(\lambda) \qquad f_\Lambda(\lambda) \sim \text{Gamma}(2,5)$

$EX_i = \mu \qquad E\Lambda = \frac{2}{5} \quad Var(\Lambda) = \frac{2}{25}$

$$P(\Lambda|N>0) = \frac{P(N>0|\Lambda=\lambda) f_\Lambda(\lambda)}{P(N>0)} = \frac{1}{P(N>0)} \cdot (1-e^{-\lambda}) \cdot 5^2 \lambda^{2-1} e^{-5\lambda} \frac{1}{\Gamma(2)} =$$

$$= \frac{1}{P(N>0)} \cdot 25\lambda(1-e^{-\lambda}) e^{-5\lambda}$$

$$P(N>0) = \int_0^\infty P(N>0|\Lambda=\lambda) f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda = \int_0^\infty (1-e^{-\lambda}) \frac{5^2}{\Gamma(2)} \lambda^{2-1} e^{-5\lambda}\, d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty \frac{5^2}{\Gamma(2)} \lambda^{2-1} e^{-5\lambda}\, d\lambda - 5^2 \int_0^\infty \lambda^{2-1} e^{-6\lambda}\, d\lambda =$$

$$= 1 - \frac{5^2}{6^2} = \frac{11}{36}$$

$$P(\Lambda|N>0) = \frac{36}{11} \cdot 25\lambda(1-e^{-\lambda}) e^{-5\lambda} = \frac{900}{11} \lambda(1-e^{-\lambda}) e^{-5\lambda}$$

$$E[\Lambda|N>0] = \frac{900}{11} \int_0^\infty \lambda^2 (1-e^{-\lambda}) e^{-5\lambda}\, d\lambda =$$

$$= \frac{900}{11} \int_0^\infty \lambda^2 e^{-5\lambda} - \lambda^2 e^{-6\lambda}\, d\lambda =$$

$$= \frac{900}{11} \left[\frac{\Gamma(3)}{5^3} - \frac{\Gamma(3)}{6^3} \right] = \frac{91}{165}$$

$$P(\Lambda \mid N=0) = \frac{P(N=0 \mid \Lambda=\lambda)\, f_\Lambda(\lambda)}{P(N=0)} = \frac{1}{\left(1-\frac{11}{36}\right)} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{5^2}{\Gamma(2)} \lambda^{2-1} e^{-5\lambda} =$$

$$= 36\, \lambda e^{-6\lambda}$$

$$E[\Lambda \mid N=0] = 36 \int_0^\infty \lambda^{3-1} e^{-6\lambda}\, d\lambda = 36 \cdot \frac{\Gamma(3)}{6^3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Bonus} = 1.1\,\mu \left(\frac{91}{165} - \frac{1}{3}\right) = 0.24\mu$$

Zadanie 9.

Łączna wartość szkód $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$ ma rozkład złożony geometryczny, gdzie liczba szkód ma rozkład:

$\Pr(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$

zaś wartość pojedynczej szkody Y_1 ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 2.

Wobec tego $E(N|X = 2)$ wynosi:

$P(X=2|N=n) \sim \Gamma(n, \frac{1}{2}) \qquad f_{X|N}(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n-1} e^{-\frac{1}{2}x}$

$P(N|X=2) = c \cdot P(X=2|N=n)\, P(N=n) = c \cdot \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^{n-1} e^{-\frac{1}{2}\cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} =$

$= c \cdot \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \Rightarrow c = e^{-\frac{1}{2}}$

$P(N|X=2) = Z \sim$ przesunięty rozkład Poissona z $\lambda = \frac{1}{2}$

$EZ = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = \frac{15}{10}$

Odp. A

Zadanie 10.

Niech $X = X_0 + X_1$ oznacza łączną wartość szkód zaszłych w ciągu pewnego roku, przy czy X_0 to łączna wartość szkód zlikwidowanych jeszcze przed końcem tego roku, zaś X_1 to łączna wartość szkód które na koniec roku jeszcze nie są zlikwidowane.

Warunkowe rozkłady tych zmiennych losowych przy zadanej wartości θ parametru ryzyka Θ charakteryzują się następującymi momentami:
$E(X_0|\Theta = \theta) = p \cdot \mu(\theta)$,
$E(X_1|\Theta = \theta) = q \cdot \mu(\theta)$,
$var(X_0|\Theta = \theta) = p \cdot \mu(\theta) \cdot c$,
$var(X_1|\Theta = \theta) = q \cdot \mu(\theta) \cdot c$,
$cov(X_0, X_1|\Theta = \theta) = 0$.

Rozkład parametru ryzyka jest taki, że:
$E[\mu(\Theta)] = \mu$, oraz:
$var[\mu(\Theta)] = a^2$.

Zakładamy, że $Pr[\mu(\Theta) > 0] = 1$, oraz że:
$c > 0$,
$p \in (0, 1)$,
$q = 1 - p$.
Zakładamy że znamy wartości parametrów p, c, μ oraz a^2. Spośród predyktorów zmiennej losowej X_1 postaci:

$$Pred(X_1|X_0) = \beta_1 X_0 + \beta_0$$

najmniejszym błędem średniokwadratowym obarczony jest predyktor dany wzorem:

$$E[\beta_1 X_0 + \beta_0 - X_1]^2 = E[\beta_1^2 X_0^2 + \beta_0^2 + X_1^2 + 2\beta_1\beta_0 X_0 - 2\beta_0 X_1 - 2\beta_1 X_0 X_1] =$$

$$= \beta_1^2 EX_0^2 + \beta_0^2 + EX_1^2 + 2\beta_1\beta_0 EX_0 - 2\beta_0 EX_1 - 2\beta_1 E(X_0 X_1) = *$$

$$\begin{cases} \frac{\delta *}{\delta \beta_1} = 2\beta_1 EX_0^2 + 2\beta_0 EX_0 - 2E(X_0 X_1) = 0 \\ \frac{\delta *}{\delta \beta_0} = 2\beta_0 + 2\beta_1 EX_0 - 2EX_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = \frac{EX_1 - \beta_0}{EX_0}$$

$$\frac{2(EX_1 - \beta_0)EX_0^2}{EX_0} + 2\beta_0 EX_0 = 2E(X_0 X_1)$$

$$2EX_1 EX_0^2 - 2\beta_0 EX_0^2 + 2\beta_0 (EX_0)^2 = 2E(X_0 X_1) EX_0$$

$$\beta_0 = \frac{E(X_0 X_1)EX_0 - EX_1 EX_0^2}{(EX_0)^2 - EX_0^2} = \frac{EX_1 EX_0^2 - E(X_0 X_1)EX_0}{Var(X_0)}$$

$$EX_0 = \mu p$$

$$EX_1 = \mu q$$

$$EX_0^2 = E(p\mu c + \mu^2 p^2) = p\mu c + p^2(a^2 + \mu^2)$$

$$E(X_0 X_1) = cov(X_0 X_1) + EX_0\, EX_1 = cov(EX_0, EX_1) + E[cov(X_0, X_1)] + \mu^2 pq =$$

$$= cov(\mu p, \mu q) + \mu^2 pq = pq\, a^2 + pq\, \mu^2 = pq(a^2 + \mu^2)$$

$$\beta_2 = \frac{\mu q[p\mu c + p^2(a^2+\mu^2)] - p^2 q(a^2+\mu^2)\mu}{p\mu c + p^2(a^2+\mu^2) - \mu^2 p^2} = \frac{pq\mu^2 c}{p\mu c + p^2 a^2} = \frac{q\mu^2 c}{\mu c + pa^2}$$

$$\beta_1 = \frac{\mu q - \frac{q\mu^2 c}{\mu c + pa^2}}{\mu p} = \frac{\mu p\, q a^2}{\mu p(\mu c + pa^2)} = \frac{q a^2}{\mu c + pa^2}$$

Odp. E