Zadanie 1.

Firma ABC, spodziewając się trudności ze spłatą trzech weksli:

- weksla o wartości nominalnej 2 000 zł, zapadającego 2 marca 2023;
- weksla o wartości nominalnej 3 000 zł, zapadającego 1 maja 2023;
- weksla o wartości nominalnej 4 000 zł, zapadającego 30 czerwca 2023;

zwraca się 1 stycznia 2023 roku do banku, który jest w posiadaniu wszystkich weksli, o ich zamianę na jeden weksel równoważny z terminem wykupu 1 stycznia 2024 roku.

Proszę określić jaka będzie wartość nominalna weksla równoważnego, jeśli stopa dyskontowa wynosi 11% (proszę podać najbliższą odpowiedź):

Weksel równoważny:

$$F_r = \frac{\sum_{i=1}^{3} F_i (1 - d m_i)}{1 - d m_r}$$

$$F_r = \frac{2000\left(1 - 0{,}11 \cdot \frac{61}{365}\right) + 3000\left(1 - 0{,}11 \cdot \frac{121}{365}\right) + 4000\left(1 - 0{,}11 \cdot \frac{181}{365}\right)}{1 - 0{,}11} = 9702{,}97$$

Odp. B

Zadanie 2.

Rozważmy 25-letni kredyt na kwotę 500 000 zł, oprocentowany w wymiarze 5% w skali roku, który spłacany jest równymi ratami, płatnymi na koniec kolejnych lat trwania kredytu.

Kredytobiorca ma możliwość dokonywania dodatkowych, wcześniejszych spłat częściowych kredytu, płatnych razem z ratą podstawową. Po każdej spłacie częściowej wyznaczana jest nowa rata kredytu, uwzględniająca pozostałe saldo kredytu oraz czas do końca kredytu.

Kredytobiorca rozważa strategię spłat częściowych, w których razem z każdą ratą spłacać będzie dodatkowo 10% salda kredytu, które pozostawałoby po płatności danej raty podstawowej.

Proszę określić o ile procent mniejsza będzie skumulowana kwota nominalnych odsetek, jakie zapłaci kredytobiorca stosując wspomnianą wyżej strategię wcześniejszych spłat, w stosunku do kwoty skumulowanych nominalnych odsetek w scenariuszu bez żadnych wcześniejszych wpłat częściowych.

$$R = \frac{K_0}{a_{\overline{25}|5\%}} = \frac{500\,000}{14,09394} = 35\,476,23$$

Odsetki nominalne :

$$I_{nom_1} = 25R - K_0 = 25 \cdot 35476,23 - 500000 = 386\,905,72$$

W scenariuszu z wpłatami częściowymi mamy następujące płatności rat podstawowych

$$R_1 = R, \quad R_2 = 0,9R, \quad R_3 = 0,9^2 R, \ldots, \quad R_{25} = 0,9^{24} R$$

$$\sum_{i=1}^{25} R_i = R + 0,9R + \ldots + 0,9^{24} R = R \, \frac{1-0,9^{25}}{1-0,9} = 9,282102 \cdot R = 329\,293,97$$

Oraz wpłat częściowych :

$$W_1 = 0,1 R_1 \, a_{\overline{24}|5\%} \qquad W_2 = 0,1 R_2 \, a_{\overline{23}|5\%} \quad \ldots \quad W_{24} = 0,1 R_{24} \, a_{\overline{1}|5\%}$$

$$\sum_{i=1}^{24} W_i = \sum_{i=1}^{24} 0,1R \cdot 0,9^{k-1} \cdot \frac{1-(1,05)^{k-25}}{0,05} =$$

$$= \frac{0,1}{0,05} R \left[\sum_{i=1}^{24} 0,9^{k-1} \left(1 - 1,05^{k-25}\right) \right] =$$

$$= 2R \left[\sum_{i=1}^{24} 0,9^{k-1} - \frac{1}{1,05^{24}} \sum_{i=1}^{24} (0,9 \cdot 1,05)^{k-1} \right] =$$

$$= 2R\left[\frac{1-0{,}9^{24}}{1-0{,}9} - \frac{1}{1{,}05^{24}}\frac{1-0{,}945^{24}}{1-0{,}945}\right] =$$

$$= 2R[9{,}202336 - 4{,}187299] =$$

$$= 10{,}030072\,R = 355\,829{,}14$$

Odsetki nominalne w drugim scenariuszu

$$I_{nom_2} = 329\,293{,}97 + 355\,829{,}14 - 500\,000 = 185\,123{,}11$$

Procenty :

$$\frac{I_{nom_1} - I_{nom_2}}{I_{nom_1}} = \frac{386\,905{,}72 - 185\,123{,}11}{386\,905{,}72} = 52{,}15\%$$

Odp. A

Zadanie 3.

Rozważmy opcję kupna na niepłacącą dywidendy akcję, której cena w chwili $t = 0$ wynosi 100 zł. Opcja wykonywana jest w chwili $t = 1$. Załóżmy, że współczynnik zmienności dla akcji wynosi $\sigma = 15\%$, podczas gdy stopa procentowa wolna od ryzyka $r = 2\%$. Cena wykonania opcji to 115 zł.

Inwestor A, chcąc kupić opcję wycenia ją w modelu CRR, w obliczeniach dzieląc czas do wykonania opcji na 4 podokresy. Niech P_A oznacza cenę opcji wyznaczoną przez tego inwestora we wzmiankowanym modelu.

Inwestor B, chcąc kupić tę samą opcję wycenia ją w modelu Jarrowa-Rudda, również dzieląc czas do wykonania opcji na 4 podokresy. P_B oznacza cenę opcji wyznaczoną przez tego inwestora we wzmiankowanym modelu.

Proszę wyznaczyć $P_A - P_B$ (proszę podać najbliższą odpowiedź):

Model CRR:

$$u = \exp\{\sigma\sqrt{\Delta t}\} \qquad d = \exp\{-\sigma\sqrt{\Delta t}\} \qquad p = \frac{e^{(r-\delta)\Delta t} - d}{u - d}$$

Model Jarrowa-Rudda

$$u = \exp\{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\} \qquad d = \exp\{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}\} \qquad p = \frac{1}{2}$$

W zadaniu bez dywidendy więc $\delta = 0$

Wypłata opcji call: $\max\{S_T - K, 0\}$

CRR:

$$u = \exp\{0{,}15\sqrt{\tfrac{1}{4}}\} = 1{,}077884$$

$$d = \exp\{-0{,}15\sqrt{\tfrac{1}{4}}\} = 0{,}927743$$

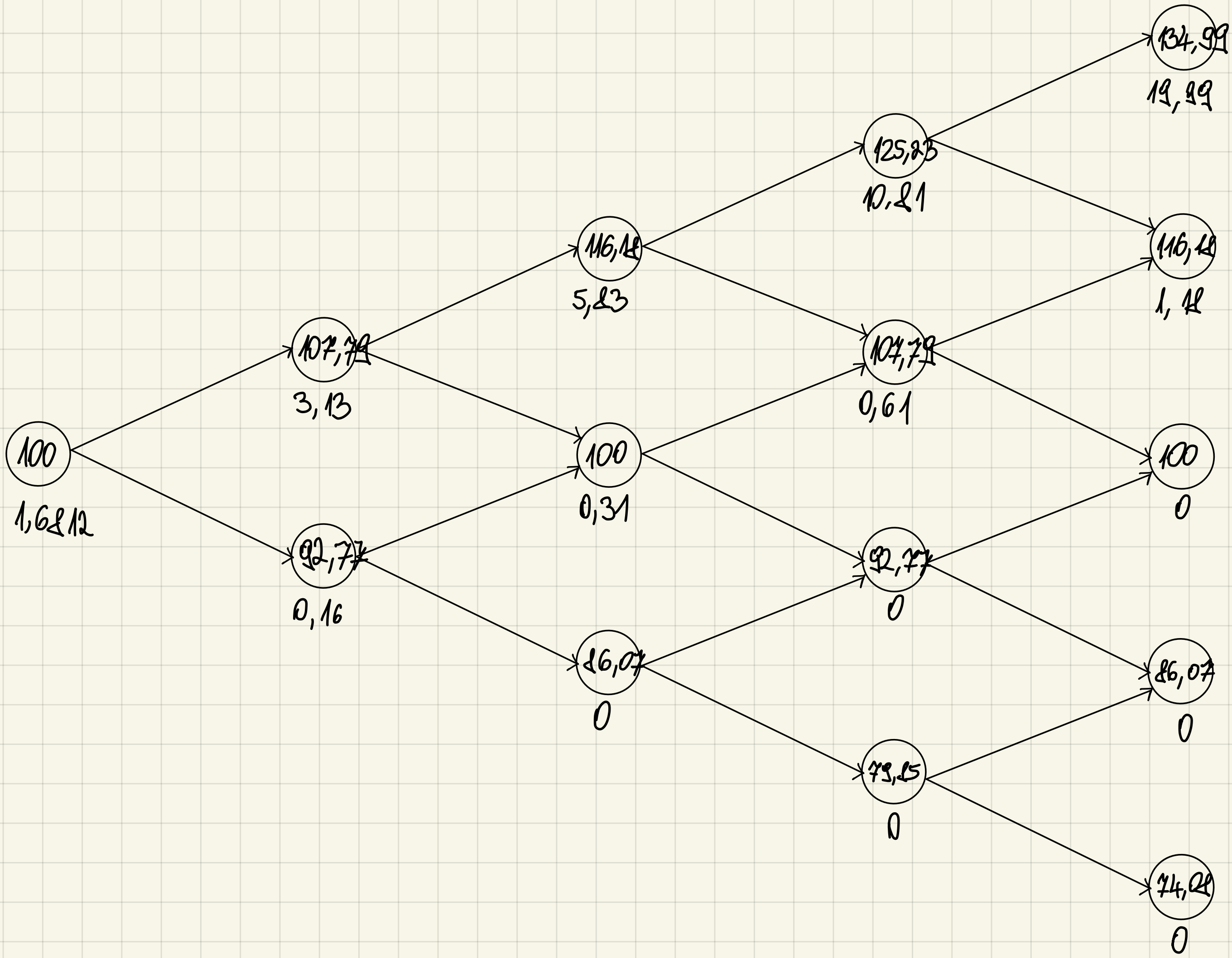
$$p = \frac{e^{0{,}02\cdot\frac{1}{4}} - 0{,}927743}{1{,}077884 - 0{,}927743} = 0{,}514644$$

$$1-p = 0{,}485356$$

$$S_1^+ = S_0 \cdot u = 107{,}79$$

$$S_1^- = S_0 \cdot d = 92{,}77$$

itd.



$$X_t = e^{-r\Delta t}\left[S^{+}_{t+\Delta t}\, p + (1-p)\, S^{-}_{t+\Delta t}\right]$$

$$X_3 = e^{-0,02\cdot\frac{1}{4}}\left[19,99\cdot 0,51 + 1,18\cdot 0,49\right] = 10,81$$

(na kalkulator trzeba wpisywać jak najwięcej cyfr)

$$X_3 = 0,61$$

itd.

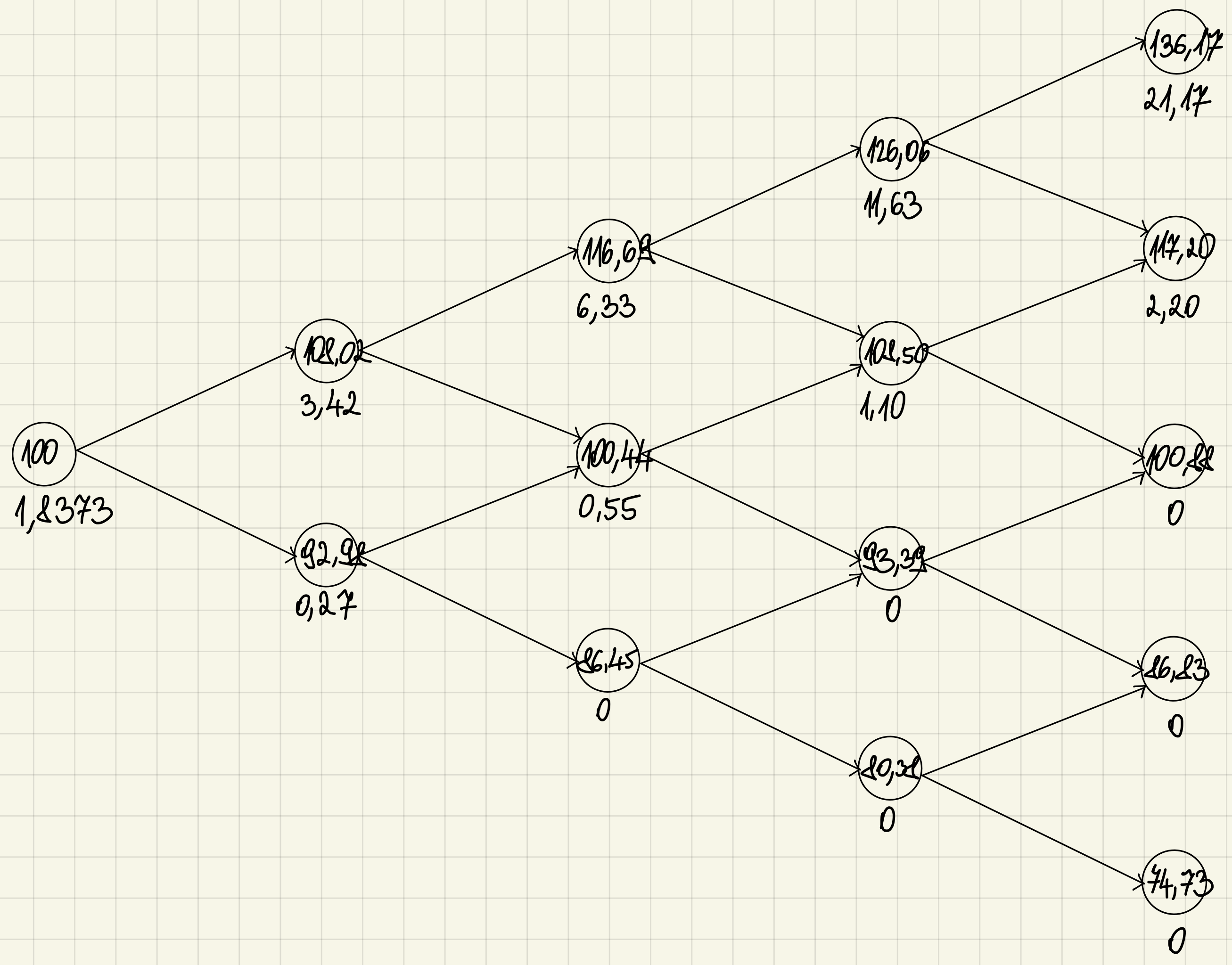
Jarrow - Rudd:

$$u = \exp\left\{\left(0,02 - \frac{0,15^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{4} + 0,15\sqrt{\frac{1}{4}}\right\} = 1,080245$$

$$d = \exp\left\{\left(0,02 - \frac{0,15^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{4} - 0,15\sqrt{\frac{1}{4}}\right\} = 0,929775$$

$$p = \frac{1}{2}$$

Dalej analogicznie do CRR.



$P_A - P_B = 1,6812 - 1,8373 = -0,1561$

Odp. A

Zadanie 4.

Załóżmy, że procesy X oraz Y mają dynamikę:

$$\frac{dX}{X} = a_X dt + b_X dW_X,$$

$$\frac{dY}{Y} = a_Y dt + b_Y dW_Y.$$

Wiedząc, że współczynnik korelacji dW_X oraz dW_Y wynosi ρ_{XY}, proszę określić jaka będzie dynamika procesu $U := XY$.

$$dg(t, S_1, S_2) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \mu_1 S_1 \frac{\partial g}{\partial S_1} + \mu_2 S_2 \frac{\partial g}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial S_2^2} + \right.$$

$$\left. + \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 g}{\partial S_1 \partial S_2} \right) dt + \sigma_1 S_1 \frac{\partial g}{\partial S_1} dW_1 + \sigma_2 S_2 \frac{\partial g}{\partial S_2} dW_2$$

$$dX = a_X X dt + b_X X dW_X$$

$$dY = a_Y Y dt + b_Y Y dW_Y$$

$$dU = (a_X XY + a_Y XY + \rho_{XY} b_X b_Y XY) dt + b_X XY dW_X + b_Y XY dW_Y =$$

$$= XY[(a_X + a_Y + b_X b_Y \rho_{XY}) + b_X dW_X + b_Y dW_Y] =$$

$$= U[(a_X + a_Y + b_X b_Y \rho_{XY}) + b_X dW_X + b_Y dW_Y]$$

$$\frac{dU}{U} = (a_X + a_Y + b_X b_Y \rho_{XY}) + b_X dW_X + b_Y dW_Y$$

Odp. A

Zadanie 5.

Załóżmy, że inwestor obserwuje następujące ceny akcji $\mathcal{A}$ na koniec poszczególnych giełdowych dni sesyjnych (zakładając 250 dni sesyjnych w ciągu roku):

Dzień	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
S	10.0	10.3	10.2	9.7	9.9	10.2	10.6	10.9	11.2	10.9	10.8

Wykorzystując powyższe informacje o zmienności ceny akcji $\mathcal{A}$, inwestor, korzystając z założeń modelu Blacka-Scholesa, wyznacza na koniec jedenastego dnia sesyjnego cenę opcji kupna na akcję $\mathcal{A}$, zapadającej za rok, o cenie wykonania 11. Przyjmując, że $r = 2\%$, proszę określić cenę opcji, jaką otrzyma inwestor (proszę podać najbliższą odpowiedź).

$\ln\left(\frac{S_h}{S_0}\right), \ln\left(\frac{S_{2h}}{S_h}\right), \ldots, \ln\left(\frac{S_{nh}}{S_{(n-1)h}}\right)$ – zm. niezależne

$$\ln\left(\frac{S_{jh}}{S_{(j-1)h}}\right) \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$$

$x_j = \ln\left(\frac{s_j}{s_{j-1}}\right)$: $\hat{\mu}_n = \frac{\bar{x}}{h}$, $\hat{\sigma}_n = \frac{s_x}{\sqrt{h}}$, gdzie $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$, $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2$

$x_2 = 0{,}0295$ $\quad x_3 = -0{,}009$ $\quad x_4 = -0{,}05$ $\quad x_5 = 0{,}0204$

$x_6 = 0{,}0298$ $\quad x_7 = 0{,}0384$ $\quad x_8 = 0{,}0279$ $\quad x_9 = 0{,}0271$

$x_{10} = -0{,}027$ $\quad x_{11} = -0{,}009$

$\bar{x} = 0{,}007696$

$s_x^2 = 0{,}0089$

$s_x = 0{,}0298$

$h = \frac{1}{250}$

$\hat{\mu}_n = 250 \cdot 0{,}007696 = 1{,}924$

$\hat{\sigma}_n = \sqrt{250} \cdot 0{,}0298 = 0{,}471179$

$$d_1 = \frac{1}{0{,}471179}\left[\ln(10{,}8/11) + \left(0{,}02 + \frac{0{,}471179^2}{2}\right)\right] = 0{,}239093$$

$$d_2 = d_1 - \sigma = -0{,}232086$$

$\Phi(d_1) = 0,594483$

$\Phi(d_2) = 0,401236$

$$C_0 = 10,2 \cdot \Phi(d_1) - 11 e^{-0,02} \Phi(d_2) = 2,02$$

Odp. C

Zadanie 6.

Niech $T_0 = 0$. Rozważmy rynek Blacka-Scholesa, na którym nie ma możliwości arbitrażu. Na rynku dostępne są niepłacące dywidendy akcje $\mathcal{A}$ o cenie $S_{T_0} = 100$ oraz europejskie opcje kupna na akcję $\mathcal{A}$ o trzyletnim terminie realizacji. Parametr grecki *delta* (pochodna funkcji ceny opcji po cenie instrumentu bazowego) dla tej opcji wynosi 0.4512, a parametr grecki *rho* (pochodna funkcji ceny opcji po stopie wolnej od ryzyka) wynosi 126.9638. Proszę podać cenę europejskiej opcji kupna na akcję $\mathcal{A}$ (proszę podać najbliższą wartość):

$$C_0 = S_0\,\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\,\Phi(d_2)$$

$$\Delta_0 = \Phi(d_1) \qquad \Phi(d_1) = 0{,}4512$$

$$\rho_0 = KT e^{-rT}\,\Phi(d_2) \qquad Ke^{-rT}\,\Phi(d_2) = \frac{126{,}9638}{T}$$

$$C_0 = 100 \cdot 0{,}4512 - \frac{126{,}9638}{3} = 2{,}7987 \approx 2{,}8$$

Odp. C

Zadanie 7.

Rozważmy dwuletnią obligację korporacyjną o następujących parametrach:

- nominał $N = 1000$ zł płatny jest po dwóch latach od momentu emisji;
- kupony $K_i, i = 1{,}2$ są zmienne i płatne w i-tą rocznicę emisji. Zależą one od stopy wolnej od ryzyka w następujący sposób $K_i = r_i + 5\%$, gdzie r_i oznacza stopę wolną od ryzyka w roku i;
- w momencie emisji krzywa wolnych od ryzyka stóp forward jest następująca: $r_1 = 2\%, r_2 = 3\%$,;
- prawdopodobieństwo niewypłacalności emitenta w każdym roku wynosi 5%. W przypadku upadłości emitenta nie jest możliwe odzyskanie należnych płatności z obligacji;

Jakiego stałego narzutu na stopy wolne od ryzyka (używane do dyskontowania płatności z opisanej obligacji) należy użyć zamiast uwzględnienia prawdopodobieństwa niewypłacalności, aby uzyskać prawidłową wycenę tej obligacji w momencie emisji? Podać najbliższą odpowiedź.

Kupony :

$c_1 = (0{,}02 + 0{,}05) \cdot 1000 = 70$

$c_2 = (0{,}03 + 0{,}05) \cdot 1000 = 80$

Cena obligacji :

$B_0 = 70 \cdot 1{,}02^{-1} \cdot 0{,}95 + (80 + 1000) 1{,}02^{-1} \cdot 1{,}03^{-1} \cdot 0{,}95^2 \approx 933$

$933 = 70 (1{,}02 + x)^{-1} + 1080 (1{,}02 + x)^{-1} (1{,}03 + x)^{-1}$

$x \approx 0{,}054$

Odp. D

Zadanie 8.

Rok temu (w chwili $t = 0$) firma A wzięła 5-letnią pożyczkę 1.8 mln USD ze stałym rocznym oprocentowaniem 3% płatnym corocznie na koniec roku. Jednocześnie, firma B wzięła 5-letnią pożyczkę 1.5 mln EUR ze stałym oprocentowaniem 2.8% płatnym corocznie na koniec roku. Firmy wymieniły się pożyczonymi kwotami oraz zawarły kontrakt *currency swap*, zgodnie z którym co roku wymieniają się płatnościami odsetkowymi, a na koniec 5-tego roku wymienią się również pożyczonymi kwotami, tak, aby móc je zwrócić odpowiednim pożyczkodawcom. Jaki jest kurs USD do EUR w chwili $t = 1$, bezpośrednio po wymianie pierwszej płatności odsetkowej, jeżeli w tym momencie wartość kontraktu dla firmy A wynosi -160 tyś. USD i przy założeniu, że terminowa struktura stóp procentowych w USD jest płaska na poziomie 2.5% rocznie, a terminowa struktura stóp procentowych w EUR jest płaska na poziomie 2.2% rocznie. Proszę podać najbliższą wartość.

Płatności odsetkowe firmy A:

$$c_A = 1{,}8 \text{ mln USD} \cdot 3\% = 54000 \text{ USD}$$

$$B_1^A = \sum_{k=1}^{4} \frac{54000}{1{,}025^k} + \frac{1{,}8 \text{ mln}}{1{,}025^4} = 1833858 \text{ USD}$$

Płatności odsetkowe firmy B:

$$c_B = 1{,}5 \text{ mln EUR} \cdot 2{,}8\% = 42000 \text{ EUR}$$

$$B_1^B = \sum_{k=1}^{4} \frac{42000}{1{,}022^k} + \frac{1{,}5 \text{ mln}}{1{,}022^4} = 1534103 \text{ EUR}$$

$$-160000 \text{ USD} = 1833858 \text{ USD} - W \cdot \frac{\text{USD}}{\text{EUR}} \cdot 1534103 \text{ EUR}$$

$$W = 1{,}3$$

Odp. C

Zadanie 9.

Na rynku międzybankowym dostępne są następujące kwotowania:

kupno (bid) – sprzedaż (ask) PLN/EUR 4.6733 – 4.7142.

Natomiast u dealera dostępne są następujące kwotowania:

I) PLN/EUR 4.6349 – 4.6651

II) PLN/EUR 4.6543 – 4.6932

III) PLN/EUR 4.7205 – 4.7311.

Arbitraż jest możliwy:

Arbitraż to osiągnięcie zysku bez poniesienia ryzyka czyli:

I) Kupuję u dealera za 4,6651 i sprzedaję w banku za 4,6733

II) Brak arbitrażu

III) Kupuję w banku za 4,7142 i sprzedaję u dealera za 4,7205

Odp. D

Zadanie 10.

Jeżeli:

- $\ddot{a}_{n+3} = 16.9904$,
- $\ddot{s}_{n+1} = 58.1094$.

wówczas $\bar{s}_1$ należy do przedziału:

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\,dt = -\frac{1}{\delta} e^{-\delta t}\Big|_0^n = -\frac{1}{\delta}(e^{-\delta n} - 1) = \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\delta n})$$

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \bar{a}_{\overline{n}|} e^{\delta n} = \frac{1}{\delta}(e^{\delta n} - 1)$$

$$\bar{s}_1 = \frac{1}{\delta}(e^{\delta} - 1)$$

$$\ddot{a}_n = 1 + a_{n-1}$$

$$\ddot{s}_n = s_{n+1} - 1$$

$$\ddot{a}_{n+3} = 1 + a_{n+2}$$

$$\ddot{s}_{n+1} = s_{n+2} - 1$$

$$s_{n+2} = (1+i)^{n+2} a_{n+2}$$

$$a_{n+2} = \ddot{a}_{n+3} - 1$$

$$\ddot{s}_{n+1} = (1+i)^{n+2} a_{n+2} - 1$$

$$\ddot{s}_{n+1} = (1+i)^{n+2}(\ddot{a}_{n+3} - 1) - 1$$

$$(1+i)^{n+2} = \frac{\ddot{s}_{n+1} + 1}{\ddot{a}_{n+3} - 1}$$

$$(1+i)^{-n-2} = \frac{\ddot{a}_{n+3} - 1}{\ddot{s}_{n+1} + 1}$$

$$\ddot{s}_{n+1} = (1+i)^{n+1}\ddot{a}_{n+1} = (1+i)^{n+2} a_{n+1} = (1+i)^{n+2}\sum_{j=1}^{n+1}(1+i)^{-j} =$$

$$= (1+i)^{n+1}(1+i)\left[\sum_{j=1}^{n+3}(1+i)^{-j} - (1+i)^{-n-2} - (1+i)^{-n-3}\right] =$$

$$= (1+i)^{n+1}\left(\ddot{a}_{n+3} - (1+i)^{-n-1} - (1+i)^{-n-2}\right)$$

$$\ddot{s}_{n+1}(1+i)^{-n-1} = \ddot{a}_{n+3} - (1+i)^{-n-1} - (1+i)^{-n-2}$$

$$\ddot{s}_{n+1}(1+i)^{-n-1} + (1+i)^{-n-1} = \ddot{a}_{n+3} - (1+i)^{-n-2}$$

$$(1+i)^{-n-1}(\ddot{s}_{n+1} + 1) = \ddot{a}_{n+3} - (1+i)^{-n-2}$$

$$(1+i)^{-n-1} = \frac{\ddot{a}_{n+3} - (1+i)^{-n-2}}{\ddot{s}_{n+1} + 1}$$

$$(1+i)^{-n-2} = \frac{16,9904 - 1}{58,1094 + 1} = 0,270522$$

$$(1+i)^{-n-1} = \frac{16,9904 - 0,270522}{58,1094 + 1} = 0,282863$$

Stopa ciągła równoważna stopie składanej:

$$(1+i)^{n+1} = e^{\delta(n+1)}$$

$$(1+i) = e^{\delta}$$

$$e^{\delta} = (1+i) = \frac{(1+i)^{-n-1}}{(1+i)^{-n-2}} = \frac{0,282863}{0,270522} = 1,045619$$

$$\delta = \ln 1,045619 = 0,044609$$

$$\bar{s}_1 = \frac{1}{0,044609}(1,045619 - 1) = 1,022635$$

Odp. C