Zadanie 1.

Wybieramy dwie liczby X oraz Y niezależnie z rozkładem jednostajnym ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n^2\}$ dla jakiejś ustalonej liczby naturalnej $n \geq 4$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że $X + Y$ jest liczbą kwadratową (tzn. jest postaci k^2 dla jakiegoś k)?

$n = 4$

(A) $\frac{2n+3}{6n^2}$ $\frac{11}{96}$

(B) $\frac{2n^2+3n+5}{6n^3}$ $\frac{49}{384}$

(C) $\frac{2n^3+3n^2-5n-6}{6n^4}$ $\frac{25}{256}$

(D) $\frac{2n^2+3n-5}{6n^3}$ $\frac{13}{128}$

(E) Żadne z powyższych

Ustalam $n = 4$ wtedy : $\{1, 2, ---, 16\}$

$\Omega = 16 \cdot 16 = 256$

Wypiszę wszystkie pary dające wynik k^2.

Dla 4:

(1, 3) (2, 2) (3, 1)

Dla 9:

(1, 8) (2, 7) (3, 6) (4, 5) (5, 4) (6, 3) (7, 2) (8, 1)

Dla 16:

(1, 15) (2, 14) (3, 13) (4, 12) (5, 11) (6, 10) (7, 9) (8, 8) (9, 7) (10, 6) (11, 5) (12, 4)

(13, 3) (14, 2) (15, 1)

Dla 25:

(9, 16) (10, 15) (11, 14) (12, 13) (13, 12) (14, 11) (15, 10) (16, 9)

$A = 34$

$P = \frac{34}{256} = \frac{17}{128}$

Odp. E

Metoda pracilna

Liczba par dla każdego n będzie mniejsza od n^2 o jeden:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Stąd:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (k^2 - 1)$$

$$|\Omega| = n^2 \cdot n^2 = n^4$$

$$P = \frac{\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)}{n^4} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2 - n}{n^4} = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n}{n^4} =$$

$$= \frac{2n^2+3n+1}{6n^3} - \frac{1}{n^3} = \frac{2n^2+3n-5}{6n^3}$$

Zadanie 2.

Ciąg $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 1$ jest ciągiem niezależnym zmiennych losowych o rozkładzie normalnym o średniej $\mu = 25$ oraz wariancji $\sigma^2 = 4$. Zdefiniujmy

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Wiadomo, że wariancja Y wynosi 6.

Ile wynosi n?

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} \underbrace{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}_{= Z \sim \chi^2(n-1)}$$

$$Var(Y) = Var\left(\frac{\sigma^2}{n} Z\right) = \frac{\sigma^4}{n^2} \cdot 2(n-1) = 6$$

$$6 = \frac{32}{n^2}(n-1) = \frac{32n - 32}{n^2}$$

$$6n^2 - 32n + 32 = 0$$

$$\Delta = 256 \qquad \sqrt{\Delta} = 16$$

$$n_1 = \frac{32 - 16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$n_2 = \frac{32 + 16}{12} = 4$$

$$n = 4$$

Odp. A

Zadanie 3. Zaobserwowano niezależną próbkę $x_1, \ldots, x_{10}$ pochodzącą z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\theta^3} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) & x \geq 0 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

z parametrem $\theta > 0$. Z tej próbki wyliczono estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$ parametru θ otrzymując wartość $\hat{\theta} = 3/2$. Wiadomo również, że suma wszystkich obserwacji oprócz pierwszej wynosi 40 (tzn. $x_2 + \ldots + x_{10} = 40$).

Ile wynosiła obserwacja x_1?

$$L = \prod_{i=1}^{10} \frac{x_i^2}{2\theta^3} \exp\left(-\frac{x_i}{\theta}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{10} x_i^2}{2^{10}\theta^{30}} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{10} x_i\right)$$

$$l = \ln \prod_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\ln 2 - 30\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{10} x_i$$

$$l' = -\frac{30}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{10} x_i$$

$$\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{30}{\theta}$$

$$\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{10} x_i = 30$$

$$\frac{1}{30}(x_1 + 40) = \hat{\theta} = \frac{3}{2}$$

$$x_1 + 40 = \frac{90}{2}$$

$$x_1 = 5$$

Odp. C

Zadanie 4. W pierwszym kroku, z odcinka $(0,10)$ wybieramy losowo (jednostajnie) punkt X_1, w drugim kroku z odcinka $(0,X_1)$ wybieramy losowo (jednostajnie) punkt X_2, w trzecim kroku z odcinka $(0,X_2)$ wybieramy losowo (jednostajnie) punkt X_3, itd. W n-tym kroku wyberamy losowo punkt X_n, załóżmy, że $n \geq 4$. Dla liczby całkowitej $k \geq 3$ oznaczmy $Y = X_n^k$.

Ile wynosi $\dfrac{\sqrt{\operatorname{Var} Y}}{\mathbb{E} Y}$?

$$\left.\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n \cdot U_1(0,1) \\ X_2 &= X_1 \cdot U_2 \\ X_3 &= X_2 \cdot U_3 = X_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \end{aligned}\right\} \text{przykład}$$

$X_n = 10 \cdot U_1 \cdot \ldots \cdot U_n$, gdzie $U \sim U(0,1)$ niezależne

$$Y = X_n^k = (10 \cdot U_1 \cdot \ldots \cdot U_n)^k = 10^k \cdot U_1^k \cdot \ldots \cdot U_n^k$$

$$EY = 10^k \Big(E\underbrace{U_i^k}_{\text{Beta}\left(\frac{1}{k},1\right)}\Big)^n = 10^k \left(\frac{1}{1+k}\right)^n$$

$$EY^2 = 10^{2k} \left(EU^{2k}\right)^n = 10^{2k} \left(\frac{1}{1+2k}\right)^n$$

$$\operatorname{Var}(Y) = 10^{2k} \left(\frac{1}{1+2k}\right)^n - 10^{2k} \left(\frac{1}{1+k}\right)^{2n} = 10^{2k} \left[\left(\frac{1}{1+2k}\right)^n - \left(\frac{1}{1+k}\right)^{2n} \right]$$

$$\frac{\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}}{EY} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{1+2k}\right)^n - \left(\frac{1}{1+k}\right)^{2n}}{\left(\frac{1}{1+k}\right)^{2n}}} = \sqrt{\frac{(1+k)^{2n}}{(1+2k)^n} - 1} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1+2k+k^2}{1+2k}\right)^n - 1} = \sqrt{\left(\frac{k^2}{2k+1} + 1\right)^n - 1}$$

Zadanie 5.
Rzucamy sześcienną symetryczną kostką do chwili, aż otrzymamy wynik 6. Jaka jest średnia liczba rzutów (łącznie z ostatecznym wyrzuceniem sześciu oczek) pod warunkiem, że wyniki wszystkich rzutów były liczbami parzystymi?

X_k – wynik k-tego rzutu kostką

$X_{parzyste}$ – wszystkie rzuty aż do wyrzucenia 6 są wynikami parzystymi

Y – liczba wykonanych rzutów aż do wyrzucenia 6 włącznie

Rozważam zmienną losową $Y \mid X_{parzyste}$.

$$P(X_{parzyste}) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(Y=k \mid X_{parzyste}) = \frac{\left(\frac{2}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{4}{6} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{2}{3}$$

Zmienna losowa $Y \mid X_{parzyste}$ ma rozkład geometryczny o funkcji prawdopodobieństwa:

$$P_{Y\mid X_{parzyste}}(k) = q^{k-1}p \quad , k = 1, 2, \ldots, \quad q = 1-p$$

$$p = \frac{2}{3}$$

$$E[Y \mid X_{parzyste}] = \frac{1}{p} = 1{,}5$$

Zadanie 6.
Niezależne zmienne losowe X, Y mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1, tj. o gęstości $f(t) = e^{-t}$ dla $t > 0$. Określmy $S = X + Y$. Niech $f_{X|S=s}(x)$ oznacza gęstość warunkowej zmiennej losowej X pod warunkiem, że $S = s > 0$ (zauważmy, że ta warunkowa zmienna losowa przyjmuje wartości z przedziału $(0, s)$).
Jaka jest wariancja tej warunkowej zmiennej losowej?

$$f_X(x) = e^{-x}$$

$$f_Y(y) = e^{-y}$$

$$f_{XY}(x,y) = e^{-x-y}$$

$$Var(X \mid S=1) = ?$$

$$\begin{cases} M = X \\ N = X+Y \end{cases} \qquad \begin{cases} X = M \\ Y = N-M \end{cases} \qquad 0 < M < 1$$

$$f_{NM}(n,m) = e^{-m-n+m} = e^{-n}$$

$$E[M \mid N=1] = \frac{\int_0^1 m\,dm}{\int_0^1 dm} = \frac{1^2}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

$$E[M^2 \mid N=1] = \frac{\int_0^1 m^2\,dm}{\int_0^1 dm} = \frac{1^3}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1^2}{3}$$

$$Var(X \mid S=1) = \frac{1^2}{3} - \frac{1^2}{4} = \frac{1^2}{12}$$

Odp. E

DRUGA METODA

$$P(X<t \mid X+Y=1) = \frac{P(X<t,\ X+Y=1)}{P(X+Y=1)}$$

$$P(X<t,\ X+Y=1) = E[P(X<t,\ X+Y=1 \mid X=x)] = E[P(X<t,\ Y=1-x)] =$$

$$= \int_0^t e^{x-1} \cdot e^{-x}\,dx = \int_0^t e^{-1}\,dx = t e^{-1} \qquad \text{w om. z zadania} \quad x e^{-1}$$

$f_S(1) = \frac{1}{\Gamma(2)} 1^2 \cdot 1^{2-1} \cdot e^{-1} = 1e^{-1}$

$P(X < t \mid X+Y = 1) = \frac{xe^{-1}}{1e^{-1}} = \frac{x}{1}$ dystrybuanta rozkładu jednostajnego

$Var(X \mid S = 1) = \frac{1^2}{12}$

Zadanie 7. Rzucamy n razy symetryczną 6-ścienną kostką do gry. Niech A oznacza zdarzenie:

$$\{\text{wśród } n \text{ rzutów szóstka wypadła inną liczbę razy niż } 1\}.$$

(innymi słowy, szóstka wypadła 2,3,4,5,6 razy lub w ogóle).

Dla jakiego n prawdopodobieństwo zdarzenia A jest najmniejsze?

Rozważam sytuację gdy szóstka wypadła 1 raz, wtedy p-stwo z treści zadania to $1 - P(X=1)$, a zmienna X pochodzi z rozkładu dwumianowego.

Badam monotoniczność ciągu $\binom{n}{1}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$:

$$a_n = \frac{n}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n} - \frac{n}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} > 0$$

$$\frac{n+1}{6} - \frac{n}{6}\cdot\frac{6}{5} > 0$$

$$\frac{n}{6} + \frac{1}{6} - \frac{n}{5} > 0$$

$$\frac{1}{6} > \frac{n}{30}$$

$$n < 5$$

Ciąg jest rosnący do 5 wyrazu.

6 wyraz jest taki sam jak 5:

$$\frac{1}{6} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

Ciąg jest malejący od 6 wyrazu:

$$\frac{1}{6} < \frac{n}{30}$$

$$n > 5$$

Ciąg ma największe wartości dla wyrazów 5 i 6 więc dla tych wyrazów p-stwo będzie najmniejsze. Odp. C

Zadanie 8.

Mamy ciąg zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n, n \geq 4$ takich, że $EX_i = i, VarX_i = 1, i = 1, \ldots, n$ oraz $Cov(X_i, X_j) = 1$ dla $i \neq j$. Zmienne losowe $I_1, \ldots, I_n$ są wzajemnie niezależne, są też niezależne od ciągu $X_1, \ldots, X_n$, i mają rozkład $P(I_i = 0) = P(I_i = 2) = 1/2$. Oblicz $Var\left(\sum_{i=1}^{n} I_i X_i\right)$.

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} I_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(I_i X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(I_i X_i, I_j X_j)$$

$$Var(I_i X_i) = EI_i^2 X_i^2 - (EI_i X_i)^2 = EI_i^2 EX_i^2 - (EI_i EX_i)^2 =$$

$$\left| \begin{array}{ll} EI_i = 1, & EX_i = i \\ EI_i^2 = 2, & EX_i^2 = Var(X_i) + (EX_i)^2 = 1 + i^2 \end{array} \right|$$

$$= 2(1+i^2) - i^2 = 2 + 2i^2 - i^2 = 2 + i^2$$

$$Cov(I_i X_i, I_j X_j) = EI_i I_j X_i X_j - EI_i X_i \cdot EI_j X_j =$$

$$= EI_i I_j (EX_i X_j - EX_i EX_j) = EI_i I_j \cdot Cov(X_i, X_j) = 1$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} I_i X_j\right) = \sum_{i=1}^{n}(2+i^2) + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) = 2n + \sum_{i=1}^{n} i^2 + n(n-1) =$$

$$= 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n^2 - n = \frac{6n}{6} + \frac{6n^2}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(6 + 6n + 2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(2n^2 + 9n + 7)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

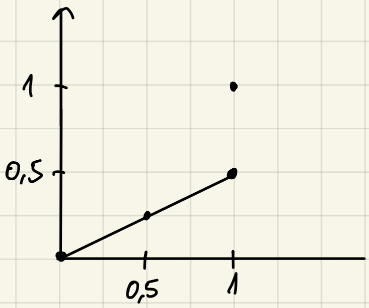
Odp. D

Zadanie 9.

Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } t \in [0,1), \\ 1 & \text{dla } t \geq 1. \end{cases}$$

Ile wynosi $\operatorname{Var}(F(X))$?



Dla $t \in [0,1)$:

$R_{F(X)} = [0, \frac{1}{2}) \cup \{1\}$ bo $F(t) = \frac{1}{2}t$ dla $t \in [0,1)$ i jest skok w 1

$P(F(X) < x) = P(X < F^{-1}(x)) = \frac{1}{2}F^{-1}(x) = x$ dla $0 < x < \frac{1}{2}$

Ostatecznie :

$$P(F(X) < t) = P(X < F^{-1}(t)) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ t & \text{dla } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 1 \end{cases}$$

Dla $t \in [0, \frac{1}{2})$:

$f_{F(X)}(x) = 1$

Dla $t = 1$:

$P(F(X) = 1) = \frac{1}{2}$

$$E(F(X)) = \int_0^{\frac{1}{2}} x\, dx + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

$$E(F(X))^2 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\, dx + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$$

$$\operatorname{Var}(F(X)) = \frac{13}{24} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{29}{192}$$

Odp. E

Zadanie 10.

Pobieramy próbkę niezależnych obserwacji zmiennych losowych o rozkładzie geometrycznym z parametrem $p \in (0,1)$ o rozkładzie

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Nasz sposób pobierania próbki nie daje możliwości zaobserwowania wartości zero. Próbka została pobierana do czasu, aż zebrano T niezerowych obserwacji $X_1, X_2, \ldots, X_T$ (czyli każdy $X_i \geq 1, i = 1, \ldots, T$). Nie mamy żadnej informacji o tym ile było obserwacji zerowych. Średnia zebranej próbki wynosi

$$\bar{X} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} X_i.$$

Estymator $\hat{p}$ parametru p uzyskany metodą największej wiarogodności podany jest wzorem:

$$P(X|X>0) = \frac{P(X=k, X>0)}{P(X>0)} = \begin{cases} \frac{P(X=k)}{P(X>0)} & \text{, gdy } k>0 \\ 0 & \text{, gdy } k=0 \end{cases}$$

$$P(X>0) = 1 - P(X=0) = 1 - p = q$$

$$P(X=k|X>0) = \frac{q^k p}{q} = q^{k-1} p \quad , \; k = 1, 2, \ldots$$

$$L = \prod_{i=1}^{T} q^{x_i - 1} p = q^{\sum_{i=1}^{T} x_i - T} p^T$$

$$l = \left(\sum_{i=1}^{T} x_i - T\right) \ln(1-p) + T \ln(p)$$

$$l' = -\frac{\sum_{i=1}^{T} x_i - T}{1-p} + \frac{T}{p}$$

$$\frac{T}{p} = \frac{\sum_{i=1}^{T} x_i - T}{1-p}$$

$$T - pT = p\sum_{i=1}^{T} x_i - pT$$

$$\frac{T}{\sum_{i=1}^{T} x_i} = p$$

$$\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}}$$

Odp. C