Zadanie 1.

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0,\pi/2)$, a Y o rozkładzie standardowym jednostajnym $\mathcal{U}[0,1)$. Zakładamy, że X i Y są niezależne. Zdefiniujmy:

$$Z = \begin{cases} X & \text{jeśli} \quad Y < \sin^2 X, \\ \pi/2 + X & \text{jeśli} \quad Y > \sin^2 X. \end{cases}$$

Zmienna Z przyjmuje wartości ze zbioru $(0,\pi)$ i ma gęstość

$$F_Z(z) = P(Z \le z, Y < \sin^2 X) + P(Z \le z, Y > \sin^2 X) =$$

$$= P(X \le z, Y < \sin^2 X) + P(X \le z - \tfrac{\pi}{2}, Y > \sin^2 X) =$$

$$= E[P(X \le z, Y < \sin^2 X \mid X = x)] + E[P(X \le z - \tfrac{\pi}{2}, Y > \sin^2 X \mid X = x)] =$$

$$= E[P(x \le z, Y < \sin^2 x)] + E[P(x \le z - \tfrac{\pi}{2}, Y > \sin^2 x)] =$$

$$= \int_0^z \sin^2(x) \tfrac{2}{\pi} \, dx \cdot \mathbb{1}(0 \le z \le \tfrac{\pi}{2}) + \int_0^{z-\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x)) \tfrac{2}{\pi} \, dx \cdot \mathbb{1}(\tfrac{\pi}{2} \le z \le \pi)$$

$$f_Z(z) = \tfrac{2}{\pi} \sin^2(z) \, \mathbb{1}(0 \le z \le \tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{2}{\pi}[1 - \sin^2(z - \tfrac{\pi}{2})] \, \mathbb{1}(\tfrac{\pi}{2} \le z \le \pi) =$$

$$= \tfrac{2}{\pi} \sin^2(z) \, \mathbb{1}(0 \le z \le \tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{2}{\pi}[1 - \cos^2(z)] \, \mathbb{1}(\tfrac{\pi}{2} \le z \le \pi) =$$

$$= \tfrac{2}{\pi} \sin^2(z) \, \mathbb{1}(0 \le z \le \tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{2}{\pi} \sin^2(z) [1 - \mathbb{1}(0 \le z \le \tfrac{\pi}{2})] =$$

$$= \tfrac{2}{\pi} \sin^2(z) \, \mathbb{1}(0 \le z \le \tfrac{\pi}{2}) - \tfrac{2}{\pi} \sin^2(z) \, \mathbb{1}(0 \le z \le \tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{2}{\pi} \sin^2(z) =$$

$$= \tfrac{2}{\pi} \sin^2(z)$$

Zadanie 2.

Ciąg $X_0, X_1, X_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnym zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Zdefiniujmy:

$$N = \min_{n \geq 1} \{X_n < X_0\},$$

tzn. N jest numerem pierwszej ze zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ o wartości mniejszej niż X_0.
Ile wynosi $\mathbb{E}N$?

$$N = \min_{n \geqslant 1} \{X_n < X_0\} \Rightarrow (N \mid X_0 = x) = \min_{n \geqslant 1} \{X_n < x\}$$

$$P(N=1 \mid X_0 = x) = P(X_1 < X_0 = x)$$

$$P(N=2 \mid X_0 = x) = P(X_1 \geqslant X_0 = x) \cdot P(X_2 < X_0 = x)$$

$$\vdots$$

$$P(N=n \mid X_0 = x) = P(X_1 \geqslant x) P(X_2 \geqslant x) \cdot \ldots \cdot P(X_{n-1} \geqslant x) P(X_n < x)$$

Jaki rozkład ma $N \mid X_0 = x$?

Ponieważ zm. $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne to:

$$P(N=n \mid X_0 = x) = P(X_1 \geqslant x) P(X_2 \geqslant x) \cdot \ldots \cdot P(X_{n-1} \geqslant x) P(X_n < x) =$$
$$= \left[P(X_i \geqslant x)\right]^{n-1} P(X_i < x)$$

Jest to rozkład geometryczny z parametrem $P(X_i < x)$

$$P(X_i < x) = 1 - e^{-x}$$

$$EN = E[E[N \mid X_0 = x]] = E\left[\frac{1}{P(X_i < x)}\right] = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \, dx$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - e^{-x} \\ dt = e^{-x} dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} \, dt = \ln(t) \Big| = \ln(1 - e^{-x}) \Big|_0^\infty =$$

$$= \ln(1) - \ln(0) = 0 - (-\infty) = \infty$$

Ta sama metoda tylko inaczej rozpisana

Rozważmy rozkład warunkowy $N' := N \mid X_0 = c$.

Obserwacja: N' ma rozkład geometryczny.

Dowód:

$P(N'=n) = P($numer pierwszej ze zm. $\{X_1, X_2, \dots\}$ o wartości mniejszej od c jest równy $n) =$

$= P($dla indeksów $0 < i < n$ mamy $X_i \geq c$ oraz $X_n < c) = |$niezależność$| =$

$= P(X_1 \geq c) P(X_2 \geq c) \cdot \ldots \cdot P(X_{n-1} \geq c) P(X_n < c) =$

$= |$niech $p = P(X_i \geq c)| = pp \cdot \ldots \cdot p(1-p) = p^{n-1}(1-p)$

Czyli rozkład geometryczny zaczynający się od 1.

$E(N') = \frac{1}{1-p}$

Ponieważ $p = P(X_i \geq c)$ to $p = e^{-1 \cdot c} = e^{-c}$ | bo X_i ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$, z treści zadania)

Korzystamy $EN = E[E(N \mid X_0)]$. Mamy więc

$$EN = E[(N \mid X_0 = c)] = E\left[\frac{1}{1-p}\right] = E\left[\frac{1}{1-e^{-c}}\right] = \int_0^\infty \frac{e^{-c}}{1-e^{-c}}\, dc = \infty$$

Odp. A

Zadanie 3.
Niezależne obserwacje $X_1, \ldots, X_n$ pochodzą z rozkładu o nieznanej średniej μ i znanej wariancji 4, liczba obserwacji n jest duża (zachodzi centralne twierdzenie graniczne). Testujemy hipotezę $H_0 : \mu = 1$ przeciw hipotezie alternatywnej $H_1 : \mu > 1$ używając testu opartego na średniej próbkowej $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ z obszarem krytycznym $\bar{X} > t$.

Dla której z par n i t prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy H_0 w przypadku, gdy $\mu = 0.9$ wynosi w przybliżeniu 0.05, a prawdopodobieństwo nie odrzucenia H_0 w przypadku, gdy $\mu = 1.2$ wynosi w przybliżeniu 0.1?

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{4}{n}\right)$$

$$\begin{cases} P(\bar{X} > t \mid \mu = 0.9) = 0.05 \\ P(\bar{X} < t \mid \mu = 1.2) = 0.1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P\left(Z > \frac{t - 0.9}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right) = 0.05 \\ P\left(Z < \frac{t - 1.2}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right) = 0.1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}(t - 0.9)\right) = 0.05 \\ \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}(t - 1.2)\right) = 0.1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{n}}{2}(t - 0.9) = \Phi^{-1}(0.95) \\ \frac{\sqrt{n}}{2}(t - 1.2) = \Phi^{-1}(0.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{n}}{2} t - 0.9\frac{\sqrt{n}}{2} = \Phi^{-1}(0.95) \\ \frac{\sqrt{n}}{2} t - 1.2\frac{\sqrt{n}}{2} = \Phi^{-1}(0.1) \end{cases}$$

$$-0.9\frac{\sqrt{n}}{2} + 1.2\frac{\sqrt{n}}{2} = \Phi^{-1}(0,95) - \Phi^{-1}(0,1)$$

$$0.15\sqrt{n} = \Phi^{-1}(0,95) - \Phi^{-1}(0,1)$$

$$\sqrt{n} = 19,5$$

$$n = 380,62 \approx 381$$

$$1.6445 + 0.45\sqrt{381} = \frac{\sqrt{381}}{2} t$$

$$t = 1,0685 \approx 1,069$$

Odp. D $n = 382$, $t = 1.069$

Zadanie 4.

Zmienna losowa Y ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$, ale wiadomo, że nie może być równa 1 (innymi ma warunkowy rozkład Poissona, pod warunkiem, że $Y \neq 1$).

Ile wynosi $\mathbb{E}Y$?

$$P(Y=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P(Y \neq 1) = 1 - \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = 1 - \lambda e^{-\lambda}$$

$$P(Y=k \mid Y \neq 1) = \frac{P(Y=k, Y\neq 1)}{P(Y \neq 1)}$$

$$E[Y \mid Y \neq 1] = \frac{E(Y, Y \neq 1)}{P(Y \neq 1)}$$

$$E[Y \mid Y \neq 1] = \frac{1}{1-\lambda e^{-\lambda}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \lambda e^{-\lambda} \right] =$$

$$= \frac{1}{1-\lambda e^{-\lambda}} \left[\lambda - \lambda e^{-\lambda} \right] = \frac{\lambda(1-e^{-\lambda})}{1-\lambda e^{-\lambda}} \cdot \frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}} =$$

$$= \frac{\lambda(e^{\lambda}-1)}{e^{\lambda}-\lambda}$$

Zadanie 5.

X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych z wartościami oczekiwanymi $\mathbb{E}X_i = \frac{1}{i}, i = 1,2,3.$

Zdefiniujmy $T = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$. Ile wynosi $\mathbb{E}T$?

$$Z = \min(X_2, X_3) \sim \mathcal{E}xp(2+3) = \mathcal{E}xp(5)$$

$$\max(X, Z) = \begin{cases} X, & X > Z \\ Z, & X < Z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[\max(X_1, Z)] &= EX \mathbb{1}(X_1 > Z) + EZ \mathbb{1}(X_1 < Z) = \\ &= EX_1(1 - \mathbb{1}(X_1 < Z)) + EZ \mathbb{1}(X_1 < Z) = \\ &= EX_1 - EX_1 \mathbb{1}(X_1 < Z) + EZ \mathbb{1}(X_1 < Z) = \\ &= EX_1 - EX \mathbb{1}(X_1 < Z) + EZ(1 - \mathbb{1}(X_1 > Z)) = \\ &= EX_1 - EX_1 \mathbb{1}(X_1 < Z) + EZ - EZ \mathbb{1}(X_1 > Z) = \\ &= EX_1 + EZ - E\min(X_1, Z) \end{aligned}$$

$$Y = \min(X_1, Z) \sim \mathcal{E}xp(6)$$

$$E[\max(X_1, Z)] = \frac{1}{1} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{31}{30}$$

Zadanie 6.

Wektor losowy $(X,Y)^T$ ma dwuwymiarowy rozkład normalny $N(\mu,\Sigma)$ z parametrami

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ile wynosi $\mathbb{E}(X^2Y^2)$?

$$E(X^2Y^2) = Var(XY) + [E(XY)]^2$$

$$E(XY) = E[E(XY|Y)] = E[Y\,E(X|Y)] =$$

$$\left| E(X|Y) = \mu_X + \frac{cov(X,Y)}{\sigma_Y^2}(Y-\mu_Y) = 1 + \frac{3}{9}(Y-0) = 1 + \frac{1}{3}Y \right|$$

$$= E[Y(1+\tfrac{1}{3}Y)] = E[Y + \tfrac{1}{3}Y^2] = EY + \tfrac{1}{3}EY^2 =$$

$$= 0 + \tfrac{1}{3}(0+9) = 3$$

$$Var(XY) = Var[E(XY|Y)] + E[Var(XY|Y)] =$$

$$= Var[Y\,E(X|Y)] + E[Y^2\,Var(X|Y)] =$$

$$\left| Var(X|Y) = \sigma_X^2(1-\rho^2) = 4\cdot(1-\tfrac{1}{4}) = 3 \right|$$

$$= Var[Y(1+\tfrac{1}{3}Y)] + E[3Y^2] =$$

$$= Var(Y + \tfrac{1}{3}Y^2) + 3EY^2 =$$

$$Var(Y+\tfrac{1}{3}Y^2) = E(Y+\tfrac{1}{3}Y^2)^2 - [E(Y+\tfrac{1}{3}Y^2)]^2 =$$

$$= E(Y^2 + \tfrac{2}{3}Y^3 + \tfrac{1}{9}Y^4) - [EY + \tfrac{1}{3}EY^2]^2 =$$

$$= EY^2 + \tfrac{2}{3}EY^3 + \tfrac{1}{9}EY^4 - [EY + \tfrac{1}{3}EY^2]^2 =$$

$$= 9 + 0 + \tfrac{1}{9}EY^4 - (0 + \tfrac{1}{3}\cdot 9)^2 =$$

$$= 9 + \tfrac{1}{9}EY^4 - 9 = \tfrac{1}{9}EY^4 = \left| Z = (\tfrac{Y}{3})^2 \sim \chi_1^2 \Rightarrow\right.$$

$$\left. E(\tfrac{Y^4}{81}) = EZ^2 = Var(Z) + (EZ)^2 = 2+1 = 3 \right| = 9E(\tfrac{Y^4}{81}) = 9\cdot 3 = 27$$

$$= 27 + 3\cdot 9 = 54$$

$$E(X^2Y^2) = 54 + 9 = 63$$

Druga podobna metoda

$$E[X^2Y^2] = E[E[X^2Y^2|Y]] = E[Y^2 E[X^2|Y]] = E[Y^2(\mathrm{Var}(X|Y) + (E[X|Y])^2)] =$$

$$= E\left[Y^2\left((1-\rho^2)\sigma_X^2 + \left(\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y-\mu_Y)\right)^2\right)\right] =$$

$$= E\left[Y^2\left(\frac{3}{4}\cdot 4 + \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot Y\right)^2\right)\right] = E\left[Y^2\left(3 + \left(1+\frac{Y}{3}\right)^2\right)\right] =$$

$$= E\left[Y^2\left(3 + 1 + \frac{2}{3}Y + \frac{Y^2}{9}\right)\right] = E\left[4Y^2 + \frac{2}{3}Y^3 + \frac{1}{9}Y^4\right] =$$

$$= E\left[4Y^2 + \frac{1}{9}Y^4\right] = 4EY^2 + \frac{1}{9}EY^4 = 4\cdot 9 + \frac{1}{9}\cdot 243 = 63$$

$$EY^4 = \mu EY^3 + 3\sigma^2 EY^2 = 3\cdot 9\cdot 9 = 243$$

$$EY^3 = \mu EY^2 + 2\sigma^2 EY = 0$$

Trzecia metoda z wykorzystaniem tw. Wicka

$EX = 1$ $\quad$ $W = X - 1$

$EY = 0$ $\quad$ $EW = 0$

$$EX^2Y^2 = E(W+1)^2Y^2 = E(W^2+2W+1)Y^2 = EW^2Y^2 + 2EWY^2 + EY^2$$

$$EY^2 = 9$$

$$EWY^2 = EWYY = 0$$

$$EWY = \mathrm{Cov}(W,Y) + EWEY = \mathrm{Cov}(X-1,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) = 3$$

$$EW^2Y^2 = EWWYY = EW^2\cdot EY^2 + EWY\cdot EWY + EWY\cdot EWY =$$

$$= 4\cdot 9 + 3\cdot 3 + 3\cdot 3 = 54$$

$$EX^2Y^2 = 54 + 9 = 63$$

Zadanie 7.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 6$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} x} & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

z nieznanym parametrem $\theta > 0$. Obserwujemy wartości

$$Y_i = \lceil X_i \rceil, \quad i = 1, \ldots, n$$

(gdzie $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą m taką, że $m \geq x$).

Oznaczmy $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Estymator największej wiarogodności parametru θ oparty na obserwacjach $Y_1, \ldots, Y_n$ podany jest wzorem:

Można pamiętać, że $X \sim exp(\lambda) \Rightarrow \lceil X \rceil \sim geo(1-e^{-\lambda})$ na $1, 2, 3, \ldots$

$$P(k-1 < X < k) = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} x} \, dx = -e^{-\frac{1}{\theta} x} \Big|_{k-1}^{k} =$$

$$= -e^{-\frac{1}{\theta} k} + e^{-\frac{1}{\theta}(k-1)} = e^{-\frac{k}{\theta}} e^{\frac{1}{\theta}} - e^{-\frac{k}{\theta}} = e^{-\frac{k}{\theta}} \left(e^{\frac{1}{\theta}} - 1\right) =$$

$$= \left(e^{-\frac{1}{\theta}}\right)^k \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\theta}}}{e^{-\frac{1}{\theta}}} \left(e^{\frac{1}{\theta}} - 1\right) = \left(e^{-\frac{1}{\theta}}\right)^{k-1} \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}}\right)$$ czyli to rozkład geometryczny

$$L = \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\frac{1}{\theta}}\right)^{y_i - 1} \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{\theta}}\right)^{\sum_{i=1}^{n}(y_i - 1)} \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}}\right)^n =$$

$$= \left(e^{-\frac{1}{\theta}}\right)^{S-n} \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}}\right)^n$$

$$\ln = (S-n) \ln\left(e^{-\frac{1}{\theta}}\right) + n \ln\left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}}\right) = -\frac{1}{\theta}(S-n) + n \ln\left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}}\right)$$

$$\ln' = \frac{1}{\theta^2}(S-n) - \frac{\frac{n}{\theta^2} e^{-\frac{1}{\theta}}}{1 - e^{-\frac{1}{\theta}}} = 0$$

$$S - n = \frac{n e^{-\frac{1}{\theta}}}{1 - e^{-\frac{1}{\theta}}}$$

$$(S-n)\left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}}\right) = n e^{-\frac{1}{\theta}} \quad \Big| \cdot e^{\frac{1}{\theta}}$$

$$(s-n)\,e^{\frac{1}{\theta}}\left(1-e^{-\frac{1}{\theta}}\right)=n$$

$$e^{\frac{1}{\theta}}-1=\frac{n}{s-n}$$

$$e^{\frac{1}{\theta}}=\frac{n}{s-n}+1$$

$$e^{\frac{1}{\theta}}=\frac{n}{s-n}+1=\frac{n+s-n}{s-n}=\frac{s}{s-n}$$

$$\frac{1}{\theta}=\ln\left(\frac{s}{s-n}\right)$$

$$\hat{\theta}=\left(\ln\left(\frac{s}{s-n}\right)\right)^{-1}$$

Zadanie 8.

Wykonano $n \geq 7$ niezależnych prób Bernoulliego z parametrem sukcesu $p \in (0,1)$. Oznaczmy liczbę sukcesów w tych próbach przez X. Rozważono estymator parametru p postaci

$$\hat{p} = \alpha X, \qquad \alpha > 0,$$

a następnie wyliczono, że błąd średniokwadratowy $\mathrm{MSE}(\hat{p}) = \mathbf{E}(\hat{p}-p)^2$ był najmniejszy dla $\alpha = \frac{1}{2(n-1)}$. Ile wynosi parametr p?

$$MSE(\hat{p}) = E(\hat{p}-p)^2 = E(\hat{p}^2 - 2\hat{p}p + p^2) = E\hat{p}^2 - 2p\,E\hat{p} + p^2 =$$

$$= E(\alpha^2 X^2) - 2p\,E(\alpha X) + p^2 = \alpha^2 EX^2 - 2\alpha p\,EX + p^2$$

$$EX^2 = Var(X) + (EX)^2 = np(1-p) + (np)^2 = np(1-p+np)$$

$$MSE'(\hat{p}) = 2\alpha\,EX^2 - 2p\,EX = 0$$

$$2\alpha\,EX^2 = 2p\,EX$$

$$\cancel{2}\alpha\,\cancel{np}(1-p+np) = \cancel{2}p\,\cancel{np}$$

$$\alpha(1-p+np) = p$$

$$\frac{1}{2(n-1)}(1-p+np) = p$$

$$\frac{1-p+np}{p} = 2n-2$$

$$1-p+np = 2np-2p$$

$$1-p+np-2np+2p = 0$$

$$1+p-np = 0$$

$$np-p = 1$$

$$p(n-1) = 1$$

$$p = \frac{1}{n-1}$$

Zadanie 9.
Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ t^2 & \text{dla } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ \frac{1}{4} & \text{dla } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ 1 - \frac{3}{4}e^{1-t} & \text{dla } t \ge 1. \end{cases}$$

Ile wynosi $\mathrm{Var}(F(X))$?

$P(F(X) \le t) = P(X \le F^{-1}(t)) =$, gdzie $F^{-1}(t) = \sup\{u : F(u) \le t\}$

$= F[F^{-1}(t)] = t$ dystrybuanta $U(0,1)$

$\mathrm{Var}(F(X)) = \frac{1}{12}$

Zadanie 10.

Dwie niezależne zmienne losowe $X_k, k = 1,2$ mają rozkłady o gęstości

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{2+k}{(1+x)^{3+k}} & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

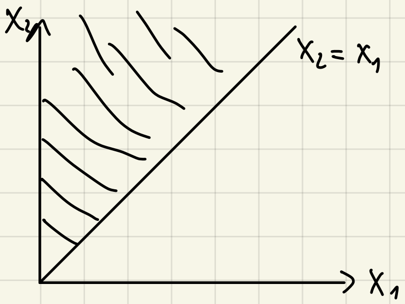
Rozważmy zmienną losową

$$T = \frac{\ln(1+X_1)}{\ln(1+X_2)}$$

Ile wynosi $\mathbb{P}(T < 1)$?

$$P(T<1) = P\left(\frac{\ln(1+X_1)}{\ln(1+X_2)} < 1\right) = P(\ln(1+X_1) < \ln(1+X_2)) = P(1+X_1 < 1+X_2) =$$

$$= P(X_1 < X_2)$$



$$f_1(x_1) = \frac{3}{(1+x_1)^4}$$

$$f_2(x_2) = \frac{4}{(1+x_2)^5}$$

$$P(T<1) = \int_0^\infty 4(1+x_2)^{-5} \int_0^{x_2} 3(1+x_1)^{-4}\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_0^\infty 4(1+x_2)^{-5} (-1)(1+x_1)^{-3} \Big|_0^{x_2} dx_2 =$$

$$= \int_0^\infty 4(1+x_2)^{-5} \left[1 - (1+x_2)^{-3}\right] dx_2 =$$

$$= \int_0^\infty 4(1+x_2)^{-5} - 4(1+x_2)^{-8}\, dx_2 =$$

$$= \left. \frac{4(1+x_2)^{-4}}{-4} - \frac{4(1+x_2)^{-7}}{-7} \right|_0^\infty =$$

$$= 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$