Zadanie 1.

Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie z gęstością

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & gdy \ \ x > 1 \\ 0 & gdy \ \ x \le 1 \end{cases}.$$

Obliczyć $E\left(\dfrac{\min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}}{\max\{X_1, X_2, X_3, X_4\}}\right)$

(A) $\dfrac{16}{45}$

(B) $\dfrac{128}{245}$

(C) $\dfrac{8}{35}$

(D) $\dfrac{5}{16}$

(E) $\dfrac{16}{35}$

Zadanie 2.

Niech $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 1.
Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną $EN = \lambda$, niezależną od zmiennych $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$.
Niech

$$M_N = \min\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_N\}.$$

Wyznaczyć $Cov(M_N, N)$.

(A) $1 - \frac{\lambda+1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$

(B) $1 - \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$

(C) 1

(D) $-\frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$

(E) $e^{-\lambda} - \frac{1}{\lambda}$

Zadanie 3.

Niech $N, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienna losowa N ma rozkład geometryczny

$$P(N = n) = (1-q)q^n \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\ldots ,$$

gdzie $q \in (0,1)$ jest ustaloną liczbą, a $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną $\frac{1}{\lambda}$. Niech

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \ldots + X_N & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0 \end{cases}.$$

Wyznaczyć prawdopodobieństwo $P(S \le x)$, gdy $x \ge 0$.

(A) $1 - 2q\dfrac{e^{-\lambda(1-q)x}}{e^{-\lambda(1-q)x} + 1}$

(B) $1 - (1-q)e^{-\lambda(1-q)x}$

(C) $1 - qe^{-\lambda(1-q)x}$

(D) $1 - qe^{-\lambda q x}$

(E) $1 - \dfrac{q}{1 + \lambda(1-q)x}$

Zadanie 4.

W urnie znajduje się trzydzieści kul, na każdej narysowana jest litera i cyfra. Mamy

10 kul oznaczonych X1
8 kul oznaczonych Y1
8 kul oznaczonych X2
4 kule oznaczone Y2.

Losujemy bez zwracania 15 kul. Niech N_X określa liczbę kul oznaczonych literą X wśród kul wylosowanych, a N_2 liczbę kul z cyfrą 2 wśród kul wylosowanych. Obliczyć $E(N_X \mid N_2)$.

(A) $8 - \frac{5}{36}N_2$

(B) $\frac{1}{3}\left(25 - \frac{1}{3}N_2\right)$

(C) $\frac{1}{3}\left(25 + \frac{1}{3}N_2\right)$

(D) $\frac{1}{3}(25 + N_2)$

(E) $8 + \frac{5}{36}N_2$

Zadanie 5.

Zmienne losowe $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ są warunkowo niezależne przy danej wartości $\theta \in (0,1)$ i mają rozkład prawdopodobieństwa

$$P(X_i = 1 \mid \theta) = \theta = 1 - P(X_i = 0 \mid \theta).$$

Zmienna losowa θ ma rozkład beta określony na przedziale $(0,1)$ o gęstości

$$f(\theta) = 12\theta^2(1-\theta).$$

Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Obliczyć $P(S_8 > 0 \mid S_6 = 0)$.

(A) $\frac{5}{11}$

(B) $\frac{4}{5}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{4}$

(E) $\frac{7}{11}$

Zadanie 6.

Wykonujemy n rzutów kością do gry i weryfikujemy hipotezę H_0 mówiącą, że kość jest rzetelna - tzn. że każda liczba oczek pojawia się z jednakowym prawdopodobieństwem równym $\frac{1}{6}$. Standardowy test χ^2 na poziomie istotności 0.01 odrzuca hipotezę zerową, jeśli obliczona wartość statystyki χ^2 przekracza 15.0863 (kwantyl rzędu 0.99 rozkładu χ^2 z pięcioma stopniami swobody).
Przypuśćmy, że wykonaliśmy tylko $n = 6$ rzutów. Jest to zbyt mało, żeby asymptotyczne przybliżenie rozkładu χ^2 było zadowalające. Faktyczny rozmiar testu: „odrzucamy H_0, jeśli wartość statystyki χ^2 przekroczy 15.0863" wynosi:

(A) $\frac{1}{6^5}$

(B) $\frac{5}{6^5}$

(C) $\frac{31}{6^6}$

(D) $\frac{31}{6^5}$

(E) $\frac{1}{6^4}$

Zadanie 7.

Zakładamy, że zależność czynnika Y od czynnika x (nielosowego) opisuje model regresji liniowej $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Obserwujemy 5 elementową próbkę, w której $x_i = i$ dla $i = 1,2,\ldots,5$. Zmienne losowe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_5$ są niezależne i błędy mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej 0, przy czym $Var\varepsilon_i = i\sigma^2$, gdy $i = 1,2,\ldots,5$. Wyznaczono estymator $\hat{\beta}$ parametru β wykorzystując ważoną metodę najmniejszych kwadratów, to znaczy minimalizując sumę $\sum_{i=1}^{5} \frac{(Y_i - \beta x_i)^2}{Var\varepsilon_i}$. Wyznaczyć stałą z tak, aby $P\left(|\hat{\beta} - \beta| < z\sigma\right) = 0.95$.

(A) 1.96

(B) 7.59

(C) 3.96

(D) 0.51

(E) 0.42

Zadanie 8.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_6$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0,\theta)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Zbudowano test jednostajnie najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy $H_0 : \theta = 1$ przy alternatywie $H_1 : \theta \neq 1$ na poziomie istotności 0.125.
Obszar krytyczny tego testu jest równy

(A) $\left\{ \max\{X_1, X_2, \ldots, X_6\} \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \right\}$

(B) $\left\{ \max\{X_1, X_2, \ldots, X_6\} \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1, +\infty) \right\}$

(C) $\left\{ \max\{X_1, X_2, \ldots, X_6\} \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \right\}$

(D) $\left\{ \max\{X_1, X_2, \ldots, X_6\} \in \left(\sqrt[6]{\frac{7}{8}}, +\infty\right) \right\}$

(E) $\left\{ \max\{X_1, X_2, \ldots, X_6\} \in \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \right\}$

Zadanie 9.

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie próbką z rozkładu wykładniczego o gęstości określonej dla $x > 0$ wzorem:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x).$$

Nie obserwujemy dokładnych wartości zmiennych X_i, tylko wartości *zaokrąglone w górę* do najbliższej liczby całkowitej. Innymi słowy, dane są wartości zmiennych losowych $Z_1, Z_2, ..., Z_n$, gdzie

$$Z_i = \lceil X_i \rceil.$$

(symbol $\lceil a \rceil$ oznacza najmniejszą liczbą całkowitą k taką, że $a \le k$).

Niech $S = \sum_{i=1}^{n} Z_i$.

Oblicz estymator *największej wiarogodności* $\hat{\lambda}$ nieznanego parametru λ oparty na obserwacjach $Z_1, Z_2, ..., Z_n$.

(A) $\hat{\lambda} = \ln\left(\frac{S}{n} - 1\right)$

(B) $\hat{\lambda} = \frac{n}{S}$

(C) $\hat{\lambda} = \left\lceil \frac{n}{S} \right\rceil$

(D) $\hat{\lambda} = \frac{S}{n}$

(E) $\hat{\lambda} = -\ln\left(1 - \frac{n}{S}\right)$

Zadanie 10.

Załóżmy, że $W_1, W_2, ..., W_n, ...$ jest ciągiem zmiennych losowych takim, że

- zmienna W_1 ma gęstość Pareto: dla $w_1 > 0$

$$f(w_1) = \frac{4}{(1+w_1)^5}$$

- warunkowo, dla danych $W_1, W_2, ..., W_n$, zmienna W_{n+1} ma gęstość Pareto: dla $w_{n+1} > 0$

$$f(w_{n+1} \mid w_1, ..., w_n) = \begin{cases} \dfrac{4}{(1+w_{n+1})^5} & gdy \;\; w_n \le 1; \\ \dfrac{3}{(1+w_{n+1})^4} & gdy \;\; w_n > 1;. \end{cases}$$

Wyznaczyć $\lim_{n\to\infty} E(W_n)$.

(A) $\lim_{n\to\infty} E(W_n) = \frac{22}{45}$

(B) $\lim_{n\to\infty} E(W_n) = \frac{31}{90}$

(C) $\lim_{n\to\infty} E(W_n) = \frac{11}{32}$

(D) $\lim_{n\to\infty} E(W_n) = \frac{47}{96}$

(E) $\lim_{n\to\infty} E(W_n) = \frac{23}{90}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 8 października 2007 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	A	
3	C	
4	C	
5	A	
6	D	
7	D	
8	B	
9	E	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.