Zadanie 1.

Przyjmijmy założenia modelu Blacka-Scholesa. Niech $\mathbb{Q}^{RN}$ będzie miarą neutralną względem ryzyka. Rozważmy procesy S_t^1 i S_t^2, opisujące ceny dwóch akcji, oraz rachunku oszczędnościowego B_t^1, dla których zachodzi:

$$dS_t^1 = rS_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^{\mathbb{Q}^{RN},1},$$

$$dS_t^2 = rS_t^2 dt + \sigma_2 S_t^2 dW_t^{\mathbb{Q}^{RN},2},$$

$$dB_t^1 = rB_t^1 dt,$$

gdzie r, σ_1 oraz σ_2 są stałymi, natomiast ρ jest parametrem korelacji, dla którego $dW_t^{Q,1} dW_t^{Q,2} = \rho dt.$

Rozważmy zmianę miary na miarę $\mathbb{Q}^1$ związaną z procesem S_t^1, dla której procesy B_t^1 / S_t^1 oraz S_t^2 / S_t^1 są martyngałami.

Proszę wskazać, który z poniższych wzorów opisuję dynamikę procesu S_t^1 po zastosowaniu takiej zmiany miary.

(A) $dS_t^1 = (r + \sigma_1^2) S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^{\mathbb{Q}^1,1}$

(B) $dS_t^1 = (r + \sigma_1) S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^{\mathbb{Q}^1,1}$

(C) $dS_t^1 = (r + \sigma_1) \rho S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^{\mathbb{Q}^1,1}$

(D) $dS_t^1 = (r + \sigma_1 \sigma_2) S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^{\mathbb{Q}^1,1}$

(E) $dS_t^1 = (r + \rho \sigma_1 \sigma_2) S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^{\mathbb{Q}^1,1}$

Przydatne informacje:

1. Całka Ito jest martyngałem jeżeli dryf wynosi 0
2. Zmienność nie zmienia się przy zmianie miary

Lemat Ito dla ilorazu:

$$d\frac{B_t}{S_t} = \frac{B_t}{S_t}\left[\frac{dB_t}{B_t} - \frac{dS_t}{S_t} + \left(\frac{dS_t}{S_t}\right)^2 - \frac{dB_t}{B_t}\cdot\frac{dS_t}{S_t}\right]$$

Z lematu Ito:

$$d\frac{B_t^1}{S_t^1} = \frac{B_t^1}{S_t^1}\left[r\,dt - r\,dt - \sigma_1 dW_t^{Q^{RN},1} + \left(r\,dt + \sigma_1 dW_t^{Q^{RN},1}\right)^2 - r\,dt\left(r\,dt + \sigma_1 dW_t^{Q^{RN},1}\right)\right] =$$

$$= \frac{B_t^1}{S_t^1}\left[\sigma_1^2 dt - \sigma_1 dW_t^{Q^{RN},1}\right] = \frac{B_t^1}{S_t^1}\sigma_1^2 dt - \sigma_1 \frac{B_t^1}{S_t^1} dW_t^{Q^{RN},1}$$

Korzystając z informacji 1 i 2:

$$d\frac{B_t^1}{S_t^1} = -\sigma_1 \frac{B_t^1}{S_t^1} dW_t^{Q^1,1}$$

$$\frac{B_t^1}{S_t^1}\left[\sigma_1^2\, dt - \sigma_1\, dW_t^{Q^{RN},1}\right] = -\sigma_1 \frac{B_t^1}{S_t^1}\, dW_t^{Q^1,1}$$

$$dW_t^{Q^{RN},1} = \sigma_1\, dt + dW_t^{Q^1,1}$$

$$dS_t^1 = r S_t^1\, dt + \sigma_1 S_t^1 \left(\sigma_1\, dt + dW_t^{Q^1,1}\right)$$

$$dS_t^1 = r S_t^1\, dt + \sigma_1^2 S_t^1\, dt + \sigma_1 S_t^1\, dW_t^{Q^1,1}$$

$$dS_t^1 = (r + \sigma_1^2) S_t^1\, dt + \sigma_1 S_t^1\, dW_t^{Q^1,1}$$

A

Zadanie 2.

Inwestor kupił w dniu emisji dwie obligacje, 10-letnią i 20-letnią. Nominał każdej obligacji wynosi 10 000. Każda obligacja wypłaca kupon o wartości 900 na koniec lat parzystych, począwszy od końca drugiego roku.

Inwestor sfinansował 70% wartości zakupu obligacji za pomocą 20-letniego kredytu, natomiast pozostałą część opłacił z własnych środków. Skumulowane odsetki kredytu zostaną opłacone na koniec okresu kredytu lub w momencie jego wcześniejszej spłaty całkowitej (wówczas odsetki naliczone będą jedynie za wykorzystany okres kredytu).

Odsetki otrzymane z obligacji są reinwestowane w funduszu.

Po pięciu latach inwestor sprzedaje obie obligacje, wycofuje środki z funduszu i spłaca kredyt w całości wraz z należnymi odsetkami.

Wiedząc, że:

- cena zakupu obligacji została ustalona przy stopie procentowej - 5%,
- cena sprzedaży obligacji została ustalona przy stopie procentowej – 4%,
- oprocentowanie kredytu wynosi – 7%,
- stopa zwrotu funduszu, w którym reinwestowane są środki otrzymane z wypłaconych kuponów obligacji wynosi – 8%,

oblicz efektywną (roczną) stopę zwrotu z zainwestowanych środków własnych (proszę podać najbliższą wartość).

(A) 5.15%

(B) 5.25%

(C) 5.35%

(D) 5.45%

(E) 5.55%

Wycena obligacji na $t=0$:

$$B_0^{20} = \sum_{k=1}^{10} 900 \cdot 1{,}05^{-2\cdot k} + 10000 \cdot 1{,}05^{-20} = 9240{,}11$$

$$B_0^{10} = \sum_{k=1}^{5} 900 \cdot 1{,}05^{-2\cdot k} + 10000 \cdot 1{,}05^{-10} = 9529{,}16$$

Wycena obligacji na $t=5$

$$B_5^{20} = \left[\sum_{k=1}^{8} 900 \cdot 1{,}04^{-2k} + 10000 \cdot 1{,}04^{-8}\right] \cdot 1{,}04 = 10898{,}99$$

$$B_5^{10} = 900 \cdot 1{,}04^{-1} + 900 \cdot 1{,}04^{-3} + 10900 \cdot 1{,}04^{-5} = 10624{,}49$$

Zysk z funduszu

$$F_5 = 2 \cdot (900 \cdot 1{,}08^{3} + 900 \cdot 1{,}08) = 4211{,}48$$

Kredyt:

$K_0 = 0{,}7[B_0^{20} + B_0^{10}] = 0{,}7 \cdot (9240{,}11 + 9529{,}16) = 13138{,}49$

Czyli zainwestowane środki własne to:

$PV = 5630{,}78$

Spłata kredytu po 5 latach:

$K_5 = 13138{,}49 \cdot 1{,}07^5 = 18427{,}41$

Zysk z inwestycji czyli FV to sprzedaż obligacji + zysk z funduszu − spłata kredytu:

$FV = 10898{,}99 + 10624{,}49 + 4211{,}48 - 18427{,}41 = 7307{,}55$

$$FV = PV(1 + r_{ef})^5$$

$$r_{ef} = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$$

$$r_{ef} = 0{,}0535 = 5{,}35\%$$

C

Zadanie 3.

Rozważmy amerykańską opcję sprzedaży na akcję niepłacącą dywidendy. Opcja została wystawiona w chwili 0, jej termin wykonania to $T = 3$, a cena wykonania wynosi $K = 100$. Roczna stopa wolna od ryzyka wynosi $r = 4.5\%$. Do chwili $\bar{t} = 1$ opcja nie została wykonana. Cena europejskiej opcji kupna w chwili $\bar{t} = 1$ wynosi $C_{\bar{t}}^{E}$. Proszę określić dla której z wartości $C_{\bar{t}}^{E}$ optymalnym będzie wcześniejsze wykonanie opcji amerykańskiej?

(A) Dla żadnej – nigdy nie jest optymalnym wcześniejsze wykonanie opcji tego typu

(B) 8.60

(C) 8.70

(D) 8.80

(E) 8.90

$T=3 \qquad K=100 \qquad r=4{,}5\% \qquad \bar{t}=1$

$C_{\bar{t}}^{E} < K(1-e^{-r(T-\bar{t})})$

$C_{\bar{t}}^{E} < 100(1-e^{-0{,}045(3-1)}) = 8{,}60$

B

Zadanie 4.

Rozważmy proces X_t, zdefiniowany następująco:

$$X_t = \exp\left(W_t + \frac{t}{2}\right) + \exp\left(W_t - \frac{t}{2}\right),$$

gdzie W_t jest procesem Wienera.

Proces X_t spełnia wówczas następujące równanie:

(A) $dX_t = X_t dW_t + \frac{t}{2}\exp\left(W_t - \frac{t}{2}\right) dt$

(B) $dX_t = X_t dW_t - \exp\left(W_t + \frac{t}{2}\right) dt$

(C) $dX_t = X_t dW_t + \exp\left(W_t + \frac{t}{2}\right) dt$

(D) $dX_t = X_t dW_t + \exp\left(W_t - \frac{t}{2}\right) dt$

(E) $dX_t = X_t dW_t - \exp\left(W_t - \frac{t}{2}\right) dt$

Lemat Ito:

$$dX_t = \frac{df}{dt}dt + \frac{df}{dW_t}dW_t + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dW_t^2}(dW_t)^2$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2}\exp(W_t + \frac{t}{2}) - \frac{1}{2}\exp(W_t - \frac{t}{2})$$

$$\frac{df}{dW_t} = \exp(W_t + \frac{t}{2}) + \exp(W_t - \frac{t}{2})$$

$$\frac{d^2f}{dW_t^2} = \exp(W_t + \frac{t}{2}) + \exp(W_t - \frac{t}{2})$$

$$dX_t = \left[\frac{1}{2}\exp(W_t + \frac{t}{2}) - \frac{1}{2}\exp(W_t - \frac{t}{2})\right]dt + \left[\exp(W_t + \frac{t}{2}) + \exp(W_t - \frac{t}{2})\right]dW_t +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\exp(W_t + \frac{t}{2}) + \exp(W_t - \frac{t}{2})\right]dt$$

$$dX_t = \exp(W_t + \frac{t}{2})dt + X_t dW_t$$

C

Zadanie 5.

Rozważmy model Blacka-Dermana-Toya drzewa dwumianowego dla rocznych stóp procentowych oraz następujące, niepełne, drzewo:

			Brak informacji
		Brak informacji	
	11.5%		12.5%
8%		12.3%	
	8.3%		*Brak informacji*
		9.5%	
			8%

Proszę wyznaczyć cenę 4-letniego *capletu* dla kwoty PLN 100, przy założeniu *cap rate* na poziomie 9.5%. Proszę podać najbliższą odpowiedź.

(A) 1.14

(B) 1.34

(C) 1.54

(D) 1.74

(E) 1.94

$$r_{t,i+1} = r_{t,i}\, e^{2\sigma_t \sqrt{h}} \qquad h = 1$$

$$0{,}123 = 0{,}095\, e^{2\sigma_2} \Rightarrow \sigma_2 = 0{,}1292$$

$$\begin{cases} x = 0{,}08\, e^{2\sigma_3} \\ 0{,}125 = x\, e^{2\sigma_3} \end{cases}$$

$$0{,}125 = 0{,}08\, e^{4\sigma_3} \Rightarrow \sigma_3 = 0{,}1116$$

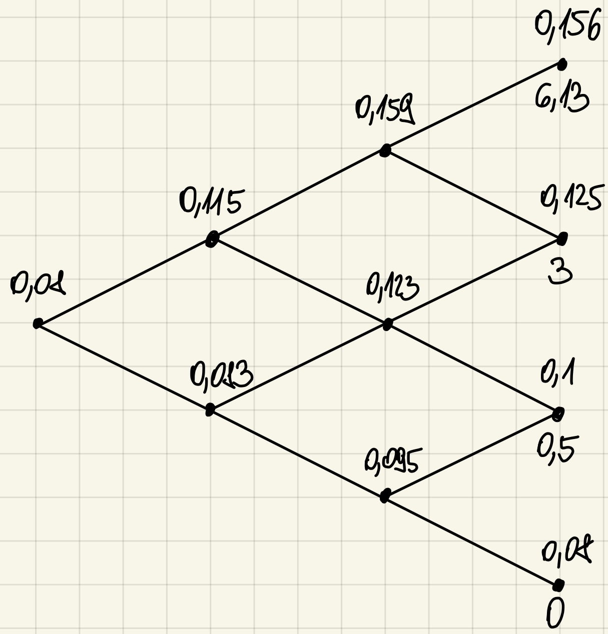
$$r_{2,3} = 0{,}123\, e^{2\cdot 0{,}1293} = 0{,}1593$$

$$r_{3,2} = 0{,}08\, e^{2\cdot 0{,}1116} = 0{,}1$$

$$r_{3,4} = 0{,}125\, e^{2\cdot 0{,}1116} = 0{,}1563$$

$$r_k = 0{,}095$$

$$C_{t,i} = \max\{0,\ 100(r_{t,i} - r_k)\}$$



Dyskontowanie po wszystkich możliwych ścieżkach dojścia do węzła razy p-stwo dojścia, które w tym modelu zawsze wynosi 0,5:

$$GGG: \frac{6,13}{1,08 \cdot 1,115 \cdot 1,159 \cdot 1,156} \cdot \frac{1}{8} = 0,4749$$

GGD: 0,2388

GDG: 0,2465

DGG: 0,2538

DDG: 0,0444

DGD: 0,0433

GDD: 0,0420

Cena to suma powyższych:

$C = 1,3437$

B

Zadanie 6.

Rozważmy model Vasicek'a dla stopy procentowej r_t. Wiemy, iż $r_0 = 5\%$, $\mathbb{E}r_2 = 7\%$, $Var\ r_2 = 1\%$ oraz lim $\lim_{t\to\infty} Var\ r_t = 2\%$.

Wiedząc, że $r_3 = 8\%$, proszę wyznaczyć cenę wystawianej w chwili $t = 3$ i zapadającej w chwili $t = 6$ obligacji zerokuponowej o nominale 100. Proszę podać najbliższą odpowiedź.

(A) 79.38

(B) 79.13

(C) 78.88

(D) 78.63

(E) 78.38

$P(t,T) = A(t,T)\exp\{-B(t,T)\, r_t\}$, gdzie

$$B(t,T) = \frac{1-\exp\{-a(T-t)\}}{a}$$

$$A(t,T) = \exp\left\{\left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)\left[B(t,T) - (T-t)\right] - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t,T)\right\}$$

$$dr_t = a(b - r_t)\,dt + \sigma\, dW_t$$

$$r_t \sim N\left\{ e^{-at} r_0 + b(1-e^{-at});\ \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2at}) \right\}$$

$$\begin{cases} E r_2 = e^{-2a} \cdot 0{,}05 + b(1-e^{-2a}) = 0{,}07 \\ Var(r_2) = \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-4a}) = 0{,}01 \\ \lim\limits_{t\to\infty} Var(r_2) = \frac{\sigma^2}{2a} = 0{,}02 \end{cases}$$

$$0{,}02(1-e^{-4a}) = 0{,}01$$

$$\begin{cases} a = 0{,}1733 \\ b = 0{,}1183 \end{cases}$$

$$B(3,6) = \frac{1-\exp\{-0{,}1733\cdot 3\}}{0{,}1733} = 2{,}3394$$

$$A(3,6) = \exp\left\{\left(0{,}1183 - \frac{0{,}007}{2\cdot 0{,}1733^2}\right)\left[2{,}3394 - 3\right] - \frac{0{,}007}{4\cdot 0{,}1733}\cdot 2{,}3394^2\right\} = 0{,}9451$$

$P(3,6) = 0,9451 \cdot \exp\{-2,3394 \cdot 0,08\} = 0,7838$

$100\,P(3,6) = 78,38$

E

Zadanie 7.

Załóżmy, że inwestor obserwuje następujące ceny akcji $\mathcal{A}$ na koniec poszczególnych giełdowych dni sesyjnych (zakładając 250 dni sesyjnych w ciągu roku):

Dzień	1	2	3	4	5	6
S	10.0	10.2	10.4	10.1	9.8	10.0

Wykorzystując powyższe informacje o zmienności ceny akcji $\mathcal{A}$, inwestor, korzystając z założeń modelu Blacka-Scholesa, wyznacza na koniec szóstego dnia sesyjnego cenę opcji kupna na akcję $\mathcal{A}$, zapadającej za rok, o cenie wykonania 11. Przyjmując, że stopa wolna od ryzyka $r = 5\%$, proszę określić cenę opcji (proszę podać najbliższą odpowiedź).

(A) 1.52

(B) 1.62

(C) 1.72

(D) 1.82

(E) 1.92

$$x_1 = \ln\left(\frac{10}{9,8}\right) = 0,0202$$

$$x_2 = \ln\left(\frac{9,8}{10,1}\right) = -0,0302$$

$$x_3 = \ln\left(\frac{10,1}{10,4}\right) = -0,0293$$

$$x_4 = \ln\left(\frac{10,4}{10,2}\right) = 0,0194$$

$$x_5 = \ln\left(\frac{10,2}{10}\right) = 0,0198$$

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_j = 0$$

$$s^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5} x_j^2 = 0,000737$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 \cdot n = 0,000737 \cdot 250 = 0,1842$$

$K = 11 \qquad S_0 = 10 \qquad r = 0,05$

$$d_1 = \frac{\ln(10/11) + \left(0,05 + \frac{0,1842}{2}\right)}{\sqrt{0,1842}} = 0,1090$$

$$d_2 = 0,1090 - \sqrt{0,1842} = -0,3202$$

$$\Phi(d_1) = 0,5434$$

$$\Phi(d_2) = 0,3744$$

$$C_0 = 10 \cdot \Phi(d_1) - 11 e^{-0,05}\,\Phi(d_2) = 1,5165 \approx 1,52$$

A

Zadanie 8.

W styczniu firma POLEXP spodziewa się płatności w wysokości 400 tys. EUR, która ma wpłynąć pod koniec kwietnia. W celu zabezpieczenia kursu PLN/EUR POLEXP zajmuje krótką pozycję w kontraktach *futures* na kurs PLN/EUR z terminem zamknięcia w czerwcu. Po otrzymaniu płatności w kwietniu POLEXP zamyka swoje pozycje w kontraktach *futures*. Załóżmy, że w styczniu, w momencie zajęcia krótkiej pozycji, kurs *futures* w kontraktach z terminem zamknięcia w czerwcu wynosi 4.29, natomiast w kwietniu, w momencie zamykania pozycji, kurs *spot* i *futures* w kontraktach czerwcowych wynosi odpowiednio 4.21 i 4.18. Ostatecznie, uwzględniając transakcje w kontraktach *futures*, płatność otrzymana przez POLEXP w kwietniu będzie warta (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

(A) 1 672 000 PLN

(B) 1 684 000 PLN

(C) 1 716 000 PLN

(D) 1 728 000 PLN

(E) Nie da się stwierdzić bez znajomości kursu *spot* w dniu zajęcia krótkiej pozycji w kontraktach *futures*

	Wpływy	Wypływy
0		
1		
2		
3		
4	$400 \cdot 4,21$	
5	$400 \cdot 4,29$	$400 \cdot 4,18$

Suma: $400 \cdot 4,29 + 400 \cdot 4,21 - 400 \cdot 4,18 = 1728$

D

Zadanie 9.

Firma X zakupiła pół roku temu 3-letni kontrakt swap na stopę procentową o wartości nominalnej 100 000 z wymianą odsetek co roku i wymianą nominału na koniec kontraktu: odsetki o stałym oprocentowaniu 4% są wymieniane na bieżące oprocentowanie WIBOR-12M. Załóżmy, że poziom stóp WIBOR-12M pół roku temu wynosił 3.5%, a strukturę stóp procentowych obecnie opisuje równanie $r = 3.5\% + 0.004t$. Jaka jest dzisiejsza wartość tego kontraktu dla strony płacącej stałe odsetki (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

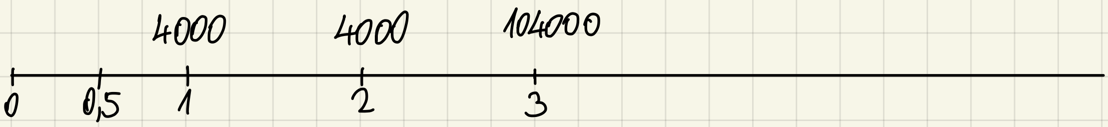
(A) 750

(B) 760

(C) 770

(D) 780

(E) 790



$$B_{0,5}^{X} = \frac{100000 \cdot 1{,}035}{1{,}037^{0,5}} = 101637$$

$$r_{0,5} = 0{,}035 + 0{,}004 \cdot 0{,}5 = 0{,}037$$

$$r_{1,5} = 0{,}035 + 0{,}004 \cdot 1{,}5 = 0{,}041$$

$$r_{2,5} = 0{,}035 + 0{,}004 \cdot 2{,}5 = 0{,}045$$

$$B_{0,5}^{L} = \frac{4000}{1{,}037^{0,5}} + \frac{4000}{1{,}041^{1,5}} + \frac{104000}{1{,}045^{2,5}} = 100857$$

$$V_{0,5}^{X} = B_{0,5}^{X} - B_{0,5}^{L} = 101637 - 100857 = 780$$

D

Zadanie 10.

Rozpatrzmy kompletny rynek instrumentów finansowych, na którym w chwili $t = 1$ możliwe są tylko trzy przyszłe stany: ω_1, ω_2, ω_3. Wypłaty w chwili $t = 1$ czterech instrumentów finansowych A, B C i D, które są zależne od stanu rynku, przedstawia poniższa tabela:

	A	B	C	D
ω_1	4	2	2	3
ω_2	2	3	1	2
ω_3	1	2	4	2

Jeśli ceny instrumentów A, B i C w chwili $t = 0$ wynoszą odpowiednio 3, 1.92 oraz 2, a stopa wolna od ryzyka wynosi 10%, to przy założeniu braku arbitrażu, jaka jest cena instrumentu D (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

(A) 2,48

(B) 2,58

(C) 2,68

(D) 2,78

(E) 2,88

$$\begin{cases} 4p_1 + 2p_2 + 1p_3 = 3e^{0,1} \\ 2p_1 + 3p_2 + 2p_3 = 1,92e^{0,1} \\ 2p_1 + 1p_2 + 4p_3 = 2e^{0,1} \end{cases}$$

$p_1 = 0,7326$

$p_2 = 0,1137$

$p_3 = 0,1579$

$p_1 + p_2 + p_3 \approx 1$ czyli brak arbitrażu

$3 \cdot 0,7326 + 2 \cdot 0,1137 + 2 \cdot 0,1579 = x \cdot e^{0,1}$

$x = 2,48$

A