

---

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**  
**XXXIX Egzamin dla Aktuariuszy z 5 czerwca 2006 r.**

**Część I**

**Matematyka finansowa**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:**

.....

Czas egzaminu: 100 minut

- 
1. Inwestor dokonuje lokaty w kwocie 1000 PLN na 10 lat. Roczne stopy zwrotu w poszczególnych latach są niezależne i mają rozkład równomierny na przedziale  $(-10\%; 25\%)$ . Ile wynosi współczynnik  $E(X) / \sigma(X)$  dla tej lokaty? ( $E(X)$  - wartość oczekiwana stopy zwrotu z lokaty,  $\sigma(X)$  - odchylenie standardowe stopy zwrotu z lokaty). Podaj najbliższą wartość.

- A) 1,4
- B) 1,5
- C) 1,6
- D) 1,7
- E) 1,8

2. Zakład ubezpieczeń oferuje swojemu klientowi jako opcję dodatkową przy polisie życiowej możliwość zakupu za rok pewnego produktu finansowego, którego wartość rynkowa ( $f$ ) zależy od poziomu rynkowego odpowiedniej stopy procentowej ( $i$ ). Zależność ta dana jest funkcją :

$$f(i) = 100\,000 * \left( 1 + \sin \left( i * 200 \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

Klient zakładu będzie mógł nabyć ten produkt po ustalonej z góry cenie  $f(7\%)$ . Oblicz wysokość rezerwy netto jaką zakład powinien utworzyć dzisiaj na taką opcję dodatkową przy następujących założeniach:

- prawdopodobieństwo zgonu klienta w ciągu najbliższego roku  $q = 5\%$  (wówczas wygasa możliwość skorzystania z opcji dodatkowej),
- klient skorzysta z opcji dodatkowej zawsze, gdy będzie to dla niego korzystne w porównaniu do ceny rynkowej produktu,
- rynkowa stopa procentowa  $i$  dla tego typu produktu za rok ma rozkład równomierny na przedziale  $(4\%, 10\%)$ ,
- stopa techniczna dla tego typu rezerwy na najbliższy rok  $i_1 = 8\%$ ,
- rezerwa ma pokryć ryzyko ukształtowania się za rok ceny rynkowej produktu powyżej ceny oferowanej klientowi w opcji dodatkowej.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 25 000
- B) 26 000
- C) 27 000
- D) 28 000
- E) 29 000

3. Inwestor przyjmuje następujące założenia co do kształtowania się kursu akcji spółki X w kolejnych trzech okresach:

- obecna cena akcji wynosi 50,
- w każdym z trzech kolejnych okresów cena akcji może zmienić się o +20% (z prawdopodobieństwem 60%) lub -10% w odniesieniu do jej wartości z początku okresu, a prawdopodobieństwa zmiany są jednakowe w każdym okresie.

Inwestor zamierza nabyć europejską opcję call na 1 akcję spółki X z ceną wykonania 55 i terminem wykonania na koniec trzeciego okresu. Specyfika tej inwestycji polega na tym, że płatność za opcję następuje w dwóch ratach - pierwsza na początku inwestycji a druga na koniec drugiego okresu. Inwestor może nie zapłacić drugiej raty i wówczas opcja natychmiast wygasa bez możliwości jej wykonania. Inwestor w całości traci wówczas pierwszą ratę.

Jaką maksymalną kwotę inwestor byłby skłonny zapłacić za opcję (nominalna suma obu rat) przy następujących założeniach:

- pierwsza rata wynosi 40% ceny całkowitej (druga 60%),
- inwestor oczekuje stopy zwrotu z inwestycji w opcję na poziomie  $i = 10\%$  w skali jednego okresu.

Podaj najbliższą wartość.

- A) 8,85
- B) 9,45
- C) 10,05
- D) 10,65
- E) 11,25

4. Inwestor zamierza nabyć 10-letnią obligację zerokuponową o nominale 1000 PLN po cenie  $1000 / (1,06)^{10}$  PLN. Obligacja posiada opcję przedwczesnego wykupu przez emitenta za 5 lat po cenie  $1000 / (1,05)^5$  PLN. Rozkład zerokuponowej stopy 5 letniej za 5 lat jest równomierny na przedziale (2%;8%). Ile wynosi wartość oczekiwana rocznej efektywnej stopy zwrotu inwestora w okresie 10 lat (inwestor reinwestuje środki po stopie rynkowej o ile nastąpi wcześniejszy wykup, który to wykup następuje zawsze, o ile jest korzystny dla emitenta)? Podaj najbliższą wartość.

- A) 5,52%
- B) 5,62%
- C) 5,72%
- D) 5,82%
- E) 5,92%

5. Zakład ubezpieczeń oferuje produkt gwarantujący klientowi za 20 lat wypłatę 100 000 zł przy rocznej efektywnej stopie  $i = 4\%$ . Oblicz składkę brutto płaconą corocznie z góry przez 20 lat jeżeli:

- koszty początkowe wynoszą 500 zł,
- koszty związane z obsługą kolejnych składek (począwszy od drugiej) składają się z dwóch części:
  - stałej wynoszącej 75 zł,
  - zmiennej wyrażonej jako % składki, rosnącej liniowo od 3% (dla drugiej składki) do 6% (dla składki dwudziestej)

Podaj najbliższą wartość.

- A) 3 473
- B) 3 555
- C) 3 648
- D) 3 724
- E) 3 811

- 
6. Oblicz wartość obecną 20-letniej renty, która na końcu roku  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, 20$ ), wypłaca kwotę  $\binom{20}{k}$ . Stopa dyskontowa  $i = 5\%$ .

- A) 647 575
- B) 649 575
- C) 651 575
- D) 653 575
- E) 655 575

7. W chwili  $t = 0$  rozpoczyna się akumulacja kwoty 1 zł z intensywnością oprocentowania  $\delta_1(t)$ . Po losowym czasie  $T$  następuje zmiana intensywności oprocentowania na  $\delta_2(t)$  i dalej akumulacja odbywa się do chwili  $t = n$ . Funkcje akumulacji odpowiadające ciągłym intensywnościom oprocentowania  $\delta_1(t)$  i  $\delta_2(t)$  to odpowiednio  $a_1(t)$  i  $a_2(t)$ .  $T$  jest zmienną losową o obciętym rozkładzie wykładniczym ze średnią  $\alpha$ , z masą w punkcie  $n$ . Niech  $a(n)$  oznacza zakumulowaną wartość 1 zł w chwili  $n$ . Oblicz wartość oczekiwaną  $a(n)$ , jeżeli wiadomo, że dla każdego  $t > 0$  zachodzi relacja  $\frac{a_1(t)}{a_2(t)} = t$ . Podaj odpowiedź dla  $n = 10$  i  $\alpha = 5$ .

Podaj najbliższą wartość.

- A)  $4.12 * a_2(10)$
- B)  $4.22 * a_2(10)$
- C)  $4.32 * a_2(10)$
- D)  $4.42 * a_2(10)$
- E)  $4.52 * a_2(10)$



8. Dany jest nieskończony ciąg rent ciągłych, taki że renta startująca na początku roku  $t$  ( $t = 1, 2, \dots$ ) wypłaca z rosnąco liniowo intensywnością od 0 do  $t$  przez następnych  $t$  lat ( $(\bar{I}a)_{\overline{t}|i}$ ).

Wyznacz duration takiego ciągu płatności dla  $e^\delta - 1 = 10\%$ ,  $\delta$  stałe w czasie. Podaj najbliższą wartość.

- A) 20
- B) 21
- C) 22
- D) 23
- E) 24

*Uwaga.*  $\sum_{t=1}^{\infty} t^2 v^t = \frac{1}{i} * \left( 1 + \frac{3}{i} + \frac{2}{i^2} \right)$ , gdzie  $i > 0$ ,  $v = \frac{1}{1+i}$ .

9. 10-letnia obligacja płaci rocznie z dołu kupony równe  $C \cdot i/2$  ( $i > 0$  - efektywna stopa w terminie do wykupu - YTM). Wartość nominalna jest równa wartości wykupu i wynosi  $C = 1000$ . Oblicz wrażliwość wartości rynkowej obligacji  $P$  na zmianę efektywnej stopy zwrotu  $i$ ,  $\frac{dP}{di}$ . Podaj najbliższą wartość.

- A)  $-4\,000 \cdot (1+i)^{-10}$
- B)  $-4\,500 \cdot (1+i)^{-11}$
- C)  $-5\,000 \cdot (1+i)^{-11}$
- D)  $-5\,500 \cdot (1+i)^{-10}$
- E)  $-6\,000 \cdot (1+i)^{-10}$

**10.** Funkcja akumulacji  $a_1(t)$  spełnia zależność  $a_1(t+s) = a_1(t) * a_1(s)$ , dla dowolnych  $t, s > 0$ .

Funkcja akumulacji  $a_2(t)$  spełnia zależność  $a_2(t+s) = a_2(t) + a_2(s) - 1$ , dla dowolnych

$t, s > 0$ . Wiadomo, że  $a_1(10) = a_2(10) = 15$ . Wyznacz  $\frac{\delta_1(5)}{\delta_2(5)}$ , gdzie  $\delta_1$  i  $\delta_2$  są funkcjami

intensywności oprocentowania odpowiednio dla  $a_1$  i  $a_2$ . Podaj najbliższą wartość.

A) 0,75

B) 0,95

C) 1,15

D) 1,35

E) 1,55

**Egzamin dla Aktuariuszy z 5 czerwca 2006 r.****Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko: .....

Pesel: .....

OZNACZENIE WERSJI TESTU .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	D	
3	D	
4	B	
5	A	
6	A	
7	C	
8	B	
9	C	
10	E	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.