Zadanie 1. W pierwszej urnie znajdują się kule ponumerowane liczbami 1, 2, ... , 10, zaś w drugiej urnie – kule ponumerowane liczbami 6, 7, ... , 25. Wyciągamy losowo po jednej kuli z każdej urny. Prawdopodobieństwo, że obie kule mają ten sam numer jest równe:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{10}$

(D) $\frac{1}{40}$

(E) $\frac{1}{50}$

Zadanie 2. W pierwszej skrzynce jest 15 jabłek zdrowych i 5 zepsutych. W drugiej skrzynce jest 14 jabłek zdrowych i 6 zepsutych. Wybieramy losowo (z prawdopodobieństwem jedna druga) jedną ze skrzynek i wyciągamy z niej 3 różne jabłka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybraliśmy drugą skrzynkę, jeśli wiemy, że wszystkie 3 jabłka okazały się zdrowe?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{4}{9}$

(C) $\binom{29}{3}\Big/\binom{40}{3}$

(D) $\frac{14}{29}$

(E) $\frac{28}{29}$

Zadanie 3. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi takimi, że:

X ma gęstość: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & dla \quad 0 \le x \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$

$\Pr(Y = k | X = x) = \frac{x^k}{k!} \cdot e^{-x}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$

(A) X i Y są zmiennymi niezależnymi

(B) X i Y są zmiennymi nieskorelowanymi

(C) $[COV(X, Y)]^2 = VAR(X) \cdot VAR(Y)$

(D) X oraz $Y - X$ są zmiennymi nieskorelowanymi

(E) $COV(X, Y - X) = 1$

Zadanie 4. Macierz przejścia łańcucha Markowa o stanach E_1, E_2, E_3, E_4 jest równa:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Niech $P^n(2,1)$ będzie prawdopodobieństwem, że łańcuch po wykonaniu *n* kroków znajdzie się w stanie E_1, jeśli w chwili początkowej znajdował się w stanie E_2.

(A) $\lim_{n\to\infty} P^n(2,1) = \frac{2}{3}$

(B) $\lim_{n\to\infty} P^n(2,1) = \frac{1}{2}$

(C) $\lim_{n\to\infty} P^n(2,1) = 1$

(D) $\lim_{n\to\infty} P^n(2,1)$ nie istnieje

(E) $\lim_{n\to\infty} P^n(2,1) = \frac{5}{6}$

Zadanie 5. Zmienne losowe X i Y mają łączny rozkład prawdopodobieństwa o gęstości:

$$f(x,y)=\begin{cases} x\cdot e^{-x\cdot(y-x)} & dla \quad y>x, \quad 0\le x\le 1 \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

Jeżeli $\mu(X)=E(Y|X)$ to $\Pr(Y>\mu(X))$ wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) e^{-1}

(C) 1

(D) $\frac{1}{1+e}$

(E) $\frac{2}{1+e}$

Zadanie 6. $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest próbą losową z rozkładu o gęstości:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & dla \quad x \geq \theta \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

Estymator największej wiarogodności nieznanego parametru θ ma postać:

(A) $\hat{\theta} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} - n$

(B) $\hat{\theta} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

(C) $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - 1$

(D) $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \exp(-x_i) \right)$

(E) $\hat{\theta} = med\{x_1, x_2, \dots, x_n\} + \ln 2$

Zadanie 7. Wykonano 10 pomiarów pewnej nieznanej wielkości μ jednym przyrządem pomiarowym, a następnie 5 pomiarów innym przyrządem. Zakładamy, że wyniki pomiarów $X_1, X_2, \dots, X_{10}, X_{11}, \dots, X_{15}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym każda ze zmiennych $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ ma rozkład normalny o parametrach $(\mu, \quad 0.1^2)$, podczas gdy każda ze zmiennych $X_{11}, \dots, X_{15}$ ma rozkład normalny o parametrach $(\mu, \quad 0.2^2)$. Należy tak dobrać współczynniki $c_1, c_2, \dots, c_{15}$, żeby estymator:

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$$

był nieobciążonym estymatorem o minimalnej wariancji.

(A) $c_1 = \cdots = c_{15} = \dfrac{1}{15}$

(B) $c_1 = \cdots = c_{10} = \dfrac{1}{20}$ i $c_{11} = \cdots = c_{15} = \dfrac{1}{10}$

(C) $c_1 = \cdots = c_{10} = \dfrac{1}{10}$ i $c_{11} = \cdots = c_{15} = 0$

(D) $c_1 = \cdots = c_{10} = \dfrac{8}{90}$ i $c_{11} = \cdots = c_{15} = \dfrac{1}{45}$

(E) $c_1 = \cdots = c_{10} = \dfrac{8}{90}$ i $c_{11} = \cdots = c_{15} = \dfrac{1}{90}$

Zadanie 8. Zakładamy, że liczba roszczeń w ciągu roku dla pewnego portfela ryzyk jest zmienną losową X o rozkładzie Poissona. Zaobserwowano wartość $X = 2600$.
Czy test hipotezy:

$H_0: \quad E(X) = 2500$

przeciwko alternatywie:

$H_1: \quad E(X) > 2500$

prowadzi do odrzucenia H_0 na poziomie istotności α?

Test zbudowano w oparciu o przybliżenie rozkładu Poissona rozkładem normalnym i ma obszar krytyczny postaci $X > c$.

(A) TAK, dla $\alpha = 0.005$

(B) NIE, dla $\alpha = 0.005$; TAK, dla $\alpha = 0.01$

(C) NIE, dla $\alpha = 0.01$; TAK, dla $\alpha = 0.05$

(D) NIE, dla $\alpha = 0.05$; TAK, dla $\alpha = 0.1$

(E) NIE, dla $\alpha = 0.1$

Zadanie 9. $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ jest próbą losową z rozkładu normalnego o parametrach $(0, \sigma^2)$. Rozważmy najmocniejszy test hipotezy:

$H_0: \quad \sigma^2 = 1$

przeciwko alternatywie:

$H_1: \quad \sigma^2 = 3$

Na poziomie istotności 0.01. Moc testu wynosi:

(A) około 0.50

(B) około 0.05

(C) około 0.20

(D) około 0.90

(E) około 0.99

Zadanie 10. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o gęstości:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & dla \quad x \geq \theta \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

Funkcja tworząca momenty zmiennej losowej $Y = \min\{X, m\}$, gdzie $m > 0$ jest daną liczbą, wyraża się wzorem:

(A) $M_Y(t)=\frac{1}{1-t}\cdot\left[1-t\cdot e^{-m(1-t)}\right] \quad dla \quad t \neq 1; \qquad M_Y(1)=m+1$

(B) $M_Y(t)=\min\left\{\frac{1}{1-t}, \quad e^{mt}\right\} \quad dla \quad t<1; \qquad M_Y(t)=e^{mt} \quad dla \quad t \geq 1$

(C) $M_Y(t)=\frac{1}{1-t}\cdot e^{mt}$

(D) $M_Y(t)=\frac{m}{m-t}\cdot e^{mt} \quad dla \quad t<m; \qquad M_Y(t)=\infty \quad dla \quad t \geq m$

(E) $M_Y(t)=\frac{1}{1-t}\cdot\left[1-t\cdot e^{-m(1-t)}\right] \quad dla \quad t<1; \qquad M_Y(t)=\infty \quad dla \quad t \geq 1$

Egzamin dla Aktuariuszy z 5 kwietnia 1997 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	B	
3	D	
4	A	
5	B	
6	B	
7	D	
8	C	
9	D	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.