

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

Egzamin dla Aktuariuszy z 6 grudnia 2003 r.

Część I

Matematyka finansowa

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas egzaminu: 100 minut

Ośrodek Doskonalenia Kadr Resortu Finansów, Warszawa 6 grudnia 2003 r.

1. Pożyczka w wysokości 100.000 jest spłacana przez okres 20 lat według następującego planu:

- (i) w pierwszym 10 – letnim okresie spłaty płatności w równych wysokościach są dokonywane na końcu każdego kwartału,
- (ii) w drugim 10 – letnim okresie spłaty równe raty kapitałowe są płatne na końcu każdego kwartału, natomiast odsetki naliczone od bieżącego zadłużenia są płacone na początku każdego kwartału.

Wiadomo, że efektywne oprocentowanie pożyczki wynosi 10% oraz 8% , odpowiednio w pierwszym oraz drugim 10 – letnim okresie spłaty (*ang. annual effective interest rate*). Wiadomo też, że kwota zadłużenia według stanu na koniec 10 roku (po dokonaniu ostatniej płatności w pierwszym 10 – letnim okresie spłaty, ale przed dokonaniem jakiegokolwiek płatności w drugim 10 – letnim okresie spłaty) będzie wynosić 60.000 . Wyznacz łączną wysokość odsetek zapłaconych przez cały okres spłaty pożyczki.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. 104 102
- B. 104 558
- C. 105 014
- D. 105 470
- E. 105 926

2. Informacje o wartości jednostki w czasie w pewnym funduszu inwestycyjnym zestawiono w poniższej tabeli:

Data	Wartość jednostki
31.12.2001 r.	10.00
31.03.2002 r.	11.50
30.04.2002 r.	12.00
30.06.2002 r.	8.00
31.12.2002 r.	13.00

Wiadomo, że do funduszu dokonywane są wpłaty wysokościach *100 000* w dniu 31.12.2001 r. i *150 000* w dniu 30.06.2002 r. oraz wypłaty w wysokościach *20 000* w dniu 31.03.2002 r. i *50 000* w dniu 30.04.2002 r. Wiadomo też, że w dniu 31.12.2002 r. wycofywane są wszystkie środki z funduszu i że w tym dniu następuje zakończenie okresu inwestowania. Oblicz, ile wynosi różnica pomiędzy stopą zwrotu z inwestowania środków w tym funduszu w 2002 r. wyznaczoną za pomocą metody kapitałowej (*ang. dollar - weighted*) oraz metody ważenia czasem (*ang. time - weighted*).

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. 0.3%
- B. 12.3%
- C. 30.7%
- D. 32.8%
- E. 62.3%

3. Pożyczka w wysokości I jest spłacana przez okres n - lat przy użyciu wpłat dokonywanych do funduszu umorzeniowego (*ang. sinking fund*) oraz odsetek spłacanych na bieżąco. Zarówno wpłaty do funduszu umorzeniowego, jak i płatności odsetek dokonywane są na końcu każdego roku. Wiadomo, że fundusz umorzeniowy akumulowany jest w oparciu o efektywną roczną stopę procentową i (*ang. annual effective interest rate*). Wiadomo też, że odsetki naliczane są przy użyciu efektywnej rocznej stopy procentowej j .

Wyznacz wysokość odsetek netto uzyskanych w ciągu pierwszych k - lat ($1 \leq k \leq n$), to jest różnicę pomiędzy odsetkami zapłaconymi a odsetkami zakumulowanymi w funduszu.

Odpowiedź:

A. $k \cdot j - i \cdot \frac{(Is)_{\overline{k-l|i}}}{s_{\overline{n|i}}}$

B. $k \cdot j - i \cdot \frac{(Is)_{\overline{k|i}}}{s_{\overline{n|i}}}$

C. $k \cdot j - i \cdot \frac{(I\ddot{s})_{\overline{k-l|i}}}{s_{\overline{n|i}}}$

D. $k \cdot j - i \cdot \frac{(I\ddot{s})_{\overline{k|i}}}{s_{\overline{n|i}}}$

E. żadna z odpowiedzi A, B, C, oraz D nie jest prawidłowa

4. Rozważmy ciąg nieskończony rent nieskończonych, o którym wiadomo, że płatności otrzymywane z tytułu k -tej renty są stałe i wynoszą k , natomiast pierwsza płatność z jej tytułu wypłacana jest na końcu k -tego roku ($k \in \{1, 2, \dots\}$).

Znajdź wartość obecną netto tego ciągu rent (*ang. net present value*) skalkulowaną przy użyciu efektywnej rocznej stopy procentowej $i = 5.00\%$ (*ang. annual effective interest rate*).

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. 8 420
- B. 8 520
- C. 8 620
- D. 8 720
- E. 8 820

5. Wiadomo, że inwestor ma otrzymać płatności odpowiednio w wysokościach 4 w chwili $t_0 = 0$ oraz $(m+1)^2$ w chwili $t_2 = 2$. Wiadomo też, że będzie musiał zapłacić $(m-4)$ w chwili $t_1 = 1$. Podaj warunek konieczny i wystarczający dla parametru m , gwarantujący, że będą istniały dwie różne wewnętrzne stopy zwrotu i_1 oraz i_2 (ang. *internal rate of return*) spełniające równocześnie następujące warunki:

- (i) każda z nich będzie większa od 25%,
- (ii) każda z nich będzie mniejsza od 100%,
- (iii) ich suma będzie mniejsza od 150%.

Odpowiedź:

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right)$

B. $m \in (0; +\infty)$

C. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (0; +\infty)$

D. $m \in \left(-\infty; -\frac{8}{3}\right) \cup (0; +\infty)$

E. żadna z odpowiedzi A, B, C oraz D nie jest prawidłowa

6. Inwestor rozważa zakup 51 – letniej renty pewnej natychmiast płatnej o płatnościach r_k otrzymywanych na końcu każdego roku zadanych wzorem:

$$r_k = \begin{cases} \min\{2k; 38\} & \text{dla } k \in \{1; 2; \dots; 26\} \\ 26 & \text{dla } k \in \{29; 30; \dots; 40\} \\ r_{k-1} - 2 & \text{dla } k \in \{41; 42; \dots; 51\} \end{cases}$$

Wiadomo też, że płatności otrzymane na końcu roku 27 oraz 28 wynoszą odpowiednio 34 oraz 30. Oblicz cenę brutto tej renty, jeśli wiadomo, że jej cena netto stanowi 80% ceny brutto i jest równa wartości obecnej netto (*ang. net present value*). W kalkulacji użyto efektywnej rocznej stopy procentowej $i = 10\%$ (*ang. annual effective interest rate*).

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. 193.81
- B. 203.81
- C. 213.81
- D. 223.81
- E. 233.81

7. Pożyczkobiorca zaciągnął kredyt w wysokości $L = 150\,000$ na okres 14 lat. Kredyt miał być spłacony przy użyciu renty pewnej natychmiast płatnej o równych płatnościach R_1 dokonywanych na końcu każdego roku. Przy kalkulacji wysokości płatności R_1 założono, że efektywna roczna stopa procentowa (*ang. annual effective interest rate*) będzie wynosić $i_1 = 5\%$ oraz $i_2 = 10\%$ odpowiednio w pierwszym oraz drugim 7 – letnim okresie spłaty. Po zapłaceniu 3 rat postanowiono, że pożyczkobiorca dodatkowo pożyczycy $75\,000$ oraz że spłaci całość zadłużenia równymi płatnościami R_2 dokonywanymi na końcu każdego roku przez okres 20 lat licząc od tej chwili. Wiadomo też, że przy kalkulacji wysokości płatności R_2 użyto efektywnej rocznej stopy procentowej $i_3 = 15\%$. Oblicz R_2 .

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. 28 553
- B. 29 553
- C. 30 553
- D. 31 553
- E. 32 553

8. Sprawdź, które z poniższych tożsamości są prawdziwe:

$$(i) \quad v^n \cdot (n \cdot d + 1) = i^2 \frac{\partial}{\partial i} \sum_{t=1}^n v^t$$

$$(ii) \quad i \cdot s_{\overline{k}|i} \cdot \frac{\partial}{\partial i} \sum_{t=1}^{\infty} (1+i)^{-t \cdot k} = k \cdot (1+i)^{k-1} \cdot \sum_{t=1}^{\infty} (1+i)^{-t \cdot k}$$

$$(iii) \quad (1+i)^t = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\delta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t \cdot \delta)^k}{k!} \right\}$$

Odpowiedź:

- A. tylko (i)
- B. tylko (ii)
- C. tylko (iii)
- D. tylko (i) oraz (iii)
- E. żadna z odpowiedzi A, B, C oraz D nie jest prawdziwa

Uwaga: $\frac{\partial f}{\partial x}$ oznacza pochodną funkcji f liczoną po argumentie x .

9. Cena europejskiej opcji *call* akcji firmy *X* zostaje wyznaczona przy zastosowaniu modelu dwumianowego. Oblicz cenę europejskiej opcji *call* firmy *X*, jeśli wiadomo, że termin wykonania wynosi 2 lata i że cena wykonania jest równa 95.00. Wiadomo też, że:

- (i) obecna cena akcji wynosi 100,
- (ii) w każdym z 2 lat cena akcji może zmienić się o 20% w odniesieniu do jej wartości z początku roku, a prawdopodobieństwa zmian są takie same w każdym roku,
- (iii) cena europejskiej opcji *call* firmy *X* o rocznym terminie wykonania i cenie wykonania równej 95.00 wyznaczona przy zastosowaniu modelu dwumianowego wynosi 9.09,
- (iv) efektywna roczna stopa procentowa (*ang. annual effective interest rate*) wynosi $i = 10.00\%$.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. 6.87
- B. 7.37
- C. 7.87
- D. 8.37
- E. 8.87

10. Natężenie oprocentowania (*ang. force of interest*) zadane jest wzorem:

$$\delta_t = \frac{1}{1 + 2 \cdot e^t} + \frac{2}{1 + 3 \cdot e^{2t}} \quad \text{dla } t > 0.$$

Wyznacz efektywną roczną stopę zwrotu (*ang. annual effective interest rate*) w ciągu 3 roku trwania inwestycji, to jest w okresie pomiędzy $t_1 = 2.0$ oraz $t_2 = 3.0$.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. 2.7%
- B. 4.7%
- C. 6.7%
- D. 8.7%
- E. 10.7%

Egzamin dla Aktuariuszy z 6 grudnia 2003 r.**Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko:Klucz odpowiedzi.....

Pesel:

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	A	
2	E	
3	A	
4	E	
5	E	
6	C	
7	D	
8	C	
9	A	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.