Zadanie 1.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_5$ są niezależne i mają jednakowy rozkład o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & gdy \quad x > 0 \\ 0 & gdy \quad x \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest ustaloną liczbą. Niech Y oznacza zmienną losowa równą 1, gdy $X_1 \ge 3$, i równą 0 w pozostałych przypadkach. Niech $T = \sum_{i=1}^{5} X_i$. Wyznaczyć $E(Y \mid T = 5)$.

(A) 0,05120

(B) 0,00256

(C) 0,02560

(D) 0,10240

(E) 0,01024

Zadanie 2.

Obserwujemy niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$. Zmienne losowe X_1, X_2, X_3 mają ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_1}, a zmienne losowe Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 maja ten sam rozkład o dystrybuancie F_{μ_2}. Dystrybuanta F_μ spełnia warunek

$$F_\mu(x) = F(x - \mu)$$

dla pewnej ustalonej, nieznanej, ciągłej, ściśle rosnącej dystrybuanty F. Weryfikujemy hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ przy alternatywie $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ stosując test o obszarze krytycznym

$$K = \{S : S > 13\},$$

gdzie S jest sumą rang zmiennych losowych X_1, X_2, X_3 w próbce złożonej ze wszystkich obserwacji ustawionych w ciąg rosnący. Wyznaczyć rozmiar testu.

(A) $\frac{11}{35}$

(B) $\frac{12}{35}$

(C) $\frac{10}{35}$

(D) $\frac{9}{35}$

(E) $\frac{8}{35}$

Zadanie 3.

Zmienna losowa N ma rozkład Poissona z nieznanym parametrem $\lambda > 0$. O parametrze λ zakładamy, że podlega rozkładowi a priori gamma $Gamma(2,8)$. Zmienna losowa θ ma rozkład beta $Beta(1,2)$. Zmienne N i θ są niezależne i zmienne λ i θ są niezależne. Obserwujemy zmienną losową *X*, która przy znanych wartościach N i θ ma rozkład dwumianowy $bin(N,\theta)$. Wyznaczyć wartości a i b najlepszego liniowego predyktora zmiennej losowej N, to znaczy liczby a i b minimalizujące wielkość

$$E(N - aX - b)^2.$$

A) $a = \frac{54}{53}, \; b = \frac{35}{212}$

(B) $a = \frac{24}{25}, \; b = \frac{17}{100}$

(C) $a = \frac{18}{11}, \; b = \frac{5}{44}$

(D) $a = \frac{18}{11}, \; b = \frac{5}{22}$

(E) $a = \frac{54}{53}, \; b = \frac{35}{106}$

Uwaga. Gęstość rozkładu gamma $Gamma(\alpha,\beta)$ jest równa

$$p_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad \text{dla} \quad x > 0 .$$

Gęstość rozkładu beta $Beta(\alpha,\beta)$ jest równa

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \quad \text{dla} \quad x \in (0,1) .$$

Zadanie 4.

Na podstawie prostej próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ testowano hipotezę $H_0 : \sigma^2 = 1$ przy alternatywie $H_1 : \sigma^2 > 1$, gdzie σ^2 jest parametrem odpowiadającym za wariancję zmiennej losowej X_i za pomocą testu o obszarze krytycznym

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{20} X_i^2 > t \right\}.$$

Jeżeli dodatkowo wiadomo, że zmienne losowe X_i mają rozkład zadany gęstością

$$f_\theta(x) = \theta \, |x| \, e^{-\theta x^2}, \quad \text{gdy} \quad x \in R,$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem, to przy poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, wartość krytyczna *t* jest równa

(A) 55,7585

(B) 31,4104

(C) 18,3070

(D) 27,8793

(E) 15,7052

Zadanie 5.

Na podstawie prostej próby losowej $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ z rozkładu gamma o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x} & gdy \;\; x > 0 \\ 0 & gdy \;\; x \le 0 \end{cases}$$

estymujemy parametr θ wykorzystując estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$. Wyznaczyć w przybliżeniu rozmiar próby n taki, że

$$P\left(\frac{|\hat{\theta} - \theta|}{\theta} \le 0{,}05 \right) \approx 0{,}95 .$$

Posłużyć się aproksymacją rozkładem normalnym. Wybrać spośród podanych liczb najbliższe przybliżenie.

(A) 400

(B) 800

(C) 1600

(D) 3200

(E) 2400

Zadanie 6.

Rzucono niezależnie 16 razy symetryczną monetą. Obliczyć prawdopodobieństwo, że uzyskano 7 serii, jeśli wiadomo, że uzyskano 10 orłów i 6 reszek.

(A) $\frac{210}{1001}$

(B) $\frac{150}{1001}$

(C) $\frac{75}{1001}$

(D) $\frac{105}{1001}$

(E) $\frac{45}{1001}$

Uwaga. Serią nazywamy ciąg elementów jednego typu, przed i za którym występuje element drugiego typu, na przykład w ciągu : *aaabbbbaabbbbba* jest 5 serii (3 serie elementów typu *a* i 2 serie elementów typu *b*).

Zadanie 7.

Zmienne losowe X i Y są niezależne i każda ma rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{(1+x)^5} & gdy \quad x > 0 \\ 0 & gdy \quad x \le 0 \end{cases}.$$

Rozważamy zmienną losową $U = \frac{\ln(1+X)}{\ln[(1+X)(1+Y)]}$. Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

(A) Zmienna losowa U ma rozkład o gęstości $p(x) = 140x^3(1-x)^3$, gdy $x \in (0,1)$

(B) Zmienna losowa U ma rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$

(C) $E(X \mid U = 0{,}5) = 2$

(D) $Cov(X, U) < 0$

(E) $EU = 0{,}75$

Zadanie 8.

Zmienne losowe $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ i $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ są niezależne. Każda ze zmiennych losowych Z_i ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa $P(Z_i = 1) = p = 1 - P(Z_i = 0)$. Każda ze zmiennych losowych (X_i, Y_i) ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa taki, że $EX_i = EY_i = m$ i $VarX_i = VarY_i = \sigma^2$ i współczynnik korelacji $Corr(X_i, Y_i) = \rho$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i X_i$ i $T_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i Y_i$.

Zbadać zbieżność rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych

$$\frac{S_n - T_n}{\sqrt{n}} \text{ przy } n \to +\infty$$

(A) $\frac{S_n - T_n}{\sqrt{n}} \to N(0, 2p\sigma^2(1-\rho) + 2m^2 p^2)$

(B) $\frac{S_n - T_n}{\sqrt{n}} \to N(0, 2p\sigma^2 + 2m^2 p(1-p))$

(C) $\frac{S_n - T_n}{\sqrt{n}} \to N(0, 2p(1-p)\sigma^2(1-\rho))$

(D) $\frac{S_n - T_n}{\sqrt{n}} \to N(0, 2p\sigma^2(1-\rho))$

(E) $\frac{S_n - T_n}{\sqrt{n}}$ nie jest ciągiem zbieżnym do rozkładu normalnego

Zadanie 9.

Wiadomo, że A, B, C są zdarzeniami losowymi takimi, że

$$P(B)=\frac{2}{5} \qquad P(A\,|\,B)=\frac{1}{4} \qquad P(C\,|\,A)=\frac{1}{4}$$

$$P(A\cup B)=\frac{3}{5} \qquad P(C\,|\,A\cap B)=\frac{1}{2}.$$

Obliczyć $P(B\,|\,A\cap C)$.

(A) Podane informacje nie wystarczają do wyznaczenia $P(B\,|\,A\cap C)$

(B) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{10}$

(E) $\frac{2}{3}$

Zadanie 10.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_6$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-\theta, \theta]$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Niech $\hat{\theta}$ oznacza estymator największej wiarogodności parametru θ.
Obliczyć

$$P_\theta\left(\hat{\theta} < \theta < 2\hat{\theta}\right).$$

(A) 0,8232

(B) 0,9998

(C) 0,9858

(D) 0,9844

(E) 0,8220

Egzamin dla Aktuariuszy z 20 marca 2006 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	A	
3	A	
4	D	
5	B	
6	B	
7	B	
8	D	
9	E	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.