

1. Które z poniższych tożsamości są prawdziwe?

$$(i) \quad i \cdot \sum_{t=1}^n \left(\left(a_{\overline{m}|} + (t-1) \cdot \overline{a_{\overline{k}|}} \right) \cdot v^t \right) - a_{\overline{n}|} \cdot a_{\overline{m}|} = \overline{a_{\overline{k}|}} \cdot \frac{a_{\overline{n}|} - n \cdot v^n}{i}$$

$$(ii) \quad \frac{(a_{\overline{n}|})^m - 1}{1 - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}} = v^n \cdot \sum_{t=1}^m (t \cdot (a_{\overline{n}|})^t)$$

$$(iii) \quad \frac{\partial}{\partial i} \left\{ \sum_{t=1}^n (t \cdot a_{\overline{t}|}) \right\} + \frac{1}{i^2} \sum_{t=1}^n (-t^2 \cdot v^{t+1} \cdot i - t \cdot v^t + t) = 0$$

Odpowiedź:

- A. tylko (i)
- B. tylko (ii)
- C. tylko (iii)
- D. (i), (ii) oraz (iii)
- E. żadna z odpowiedzi A, B, C oraz D nie jest prawidłowa

Uwaga: W powyższych tożsamościach n , m oraz k są liczbami naturalnymi większymi od 0, natomiast v oraz δ oznaczają odpowiednio stopę dyskontującą oraz intensywność oprocentowania odpowiadające efektywnej stopie procentowej (ang. effective rate of return)

$i > 0$. $\frac{\partial}{\partial i}$ oznacza pochodną cząstkową.

2. Dane jest $a(t) = \frac{\ln(5) - \ln(3)}{\ln(t+5) - \ln(t+3)}$. Wyznacz obecną wartość renty płatnej z dołu $a_{\overline{10}|}$.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. 4,00
- B. 4,20
- C. 4,40
- D. 4,60
- E. 4,80

3. Dane są 3 fundusze oznaczone odpowiednio przez F_I , F_{II} oraz F_{III} oprocentowane przy efektywnej rocznej stopie zwrotu (*ang. annual effective interest rate*) odpowiednio równej $i_I = 10\%$, $i_{II} = 8\%$ oraz $i_{III} = 6\%$. Odsetki z każdego z funduszy są wypłacane na końcu każdego roku oraz reinwestowane w następujący sposób:

- (i) odsetki z funduszu F_I są reinwestowane w funduszu F_{II} oraz odsetki z funduszu F_{II} są reinwestowane w funduszu F_{III} ;
- (ii) odsetki z funduszu F_{III} są reinwestowane w tym samym funduszu.

W chwili początkowej $t = 0$ do funduszu F_I dokonywana jest wpłata. Wyznacz efektywną roczną stopę zwrotu z inwestycji, jeżeli po 10 - letnim okresie inwestowania wszystkie środki zgromadzone w poszczególnych funduszach zostaną umorzone.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. 8,4%
- B. 8,7%
- C. 9,0%
- D. 9,3%
- E. 9,6%

4. Rozważmy plan spłaty 30 - letniego kredytu w wysokości 500 000, o którym wiadomo, że:

- (i) przez pierwsze 10 lat na końcu każdego roku spłacane będą jedynie odsetki od kwoty bieżącego zadłużenia;
- (ii) przez kolejne 10 lat na końcu każdego roku spłacany będzie jedynie kapitał przy użyciu równych rat, przy czym łącznie nominalnie zapłacone zostanie 40% pierwotnej kwoty zadłużenia;
- (iii) przez ostatnie 10 lat na końcu każdego roku spłacone zostanie pozostałe zadłużenie przy użyciu równych rat.

Proszę obliczyć wysokość raty płatnej w ostatnim 10 – letnim okresie spłaty, jeśli wiadomo, że w całym okresie spłaty efektywna roczna stopa procentowa (*ang. annual effective interest rate*) wyniesie $i = 8\%$, z wyjątkiem roku 5, 15 oraz 25, kiedy to w wyniku wahań kursowych efektywna roczna stopa procentowa wzrośnie i wyniesie odpowiednio 10%, 12% oraz 14%.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. 120 226
- B. 126 226
- C. 132 226
- D. 138 226
- E. 144 226

5. Rozważmy 19 – letnią rentę pewną natychmiast płatną o płatnościach dokonywanych na końcu każdego roku. Niech r_k oznaczające płatność z tytułu tej renty otrzymywaną na końcu k – tego roku będzie zdefiniowane następująco:

$$r_k = \begin{cases} r_{k+1} + r_{k+2} + \dots + r_9 + r_{10} & \text{dla } k \in \{1, 2, \dots, 9\} \\ 1 & \text{dla } k = 10 \\ r_1 + r_2 + \dots + r_{k-2} + r_{k-1} & \text{dla } k \in \{11, \dots, 19\} \end{cases}$$

Proszę obliczyć cenę brutto tej renty, jeśli wiadomo, że cena netto jest równa wartości obecnej tej renty (*ang. present value*) obliczonej przy efektywnej rocznej stopie procentowej (*ang. annual effective interest rate*) wynoszącej $i = 7\%$, a wszelkie inne narzuty na koszty i zysk stanowią 20% ceny brutto.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. 95 638
- B. 96 138
- C. 96 638
- D. 97 138
- E. 97 638

6. O pewnym planie wpłat i wypłat wiadomo, że jeżeli w chwili przystąpienia otrzyma się z niego wypłatę w wysokości k , na końcu pierwszego roku po przystąpieniu należy wpłacić kwotę $\frac{110}{30} \cdot k$, a rok później otrzyma się kwotę $\frac{100}{30} \cdot k$. Do planu można przystąpić na początku każdego roku, ale wyjście z niego następuje zawsze na końcu drugiego roku licząc od daty przystąpienia. Do planu można przystępować wielokrotnie, niekoniecznie po uprzednim wyjściu z niego. Inwestor przystępuje do planu 3-krotnie: w chwili $t = 0$, w chwili $t = 1$ oraz w chwili $t = 2$ i otrzymuje z tego planu wypłaty w tych chwilach odpowiednio w wysokościach: 48, 240 oraz 460. Proszę obliczyć sumę czynników dyskontujących v odpowiadających wewnętrznym stopom zwrotu i (ang. *internal rate of return*) zrealizowanym przez inwestora.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. 0,3
- B. 0,5
- C. 0,7
- D. 0,9
- E. 1,1

Uwaga: Przy kalkulacji wysokości wypłat otrzymywanych z planu na końcu poszczególnych lat inwestor nie uwzględnił kwot, które będzie wpłacał do planu na końcu tych lat.

7. Proszę rozważyć inwestycję, o której wiadomo, że w chwili $t = 0$ otrzymuje się kwotę $(k - \frac{1}{2})^2$, po ośmiu latach, czyli w chwili $t = 8$ otrzymuje się kwotę $(k - 1)$, a na końcu szesnastego roku, czyli w chwili $t = 16$, otrzymuje się kwotę 1 .

Który z poniższych warunków jest warunkiem koniecznym i wystarczającym nieistnienia wewnętrznej stopy zwrotu (*ang. internal rate of return*) dla tej inwestycji?

Odpowiedź:

- A. $k \in R - (0; \frac{2}{3})$
- B. $k \in (1; +\infty)$
- C. $k \in \left\{ (0; \frac{2}{3}) \cup (1; +\infty) \right\}$
- D. $k \in \left\{ (0; \frac{2}{3}) \cup (1; +\infty) \right\} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$
- E. żadna z odpowiedzi A, B, C oraz D nie jest prawidłowa

Uwaga: k jest liczbą rzeczywistą.

8. Przyjmijmy następujące oznaczenia dla opcji europejskich:

E - cena wykonania opcji,

C_E - cena europejskiej opcji call przy cenie wykonania E ,

P_E - cena europejskiej opcji put przy cenie wykonania E .

Inwestor zamierza zrealizować strategię inwestycyjną, która posiada następującą funkcję wypłaty $W(x)$:

$$W(x) = \begin{cases} 20 & \text{dla } x > 140 \\ x - 120 & \text{dla } 100 < x \leq 140 \\ -20 & \text{dla } x \leq 100 \end{cases}$$

za pomocą zakupu lub sprzedaży odpowiednich opcji.

Wyznacz koszt realizacji tej strategii inwestycyjnej, jeżeli wiadomo, że:

(i) dane są ceny odpowiednich opcji put i call wynoszą:

C_{100}	C_{110}	C_{120}	C_{140}
37,221	34,436	31,937	27,651
P_{100}	P_{110}	P_{120}	P_{140}
X	40,979	47,710	X

(ii) parytet kupna sprzedaży jest zachowany,

(iii) na rynku nie występują koszty transakcji.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. -9
- B. -3
- C. 3
- D. 9
- E. 15

Uwaga: Koszt dodatni oznacza, że inwestor sumarycznie płaci, natomiast ujemny oznacza, że inwestor otrzymuje kwotę w chwili zakupu lub sprzedaży opcji

9. Na rynku dostępne są dwa rodzaje papierów wartościowych:

- (i) 10 – letnie obligacje stałokuponowe o kuponach rocznych w wysokości 8% o wartości wykupu równej wartości nominalnej,
- (ii) papier dłużny płacący co rok stałą kwotę.

Zakład Ubezpieczeń posiadający następujące zobowiązania: 10 000 płatne za 8 lat 15 000 płatne za 9 lat oraz 20 000 płatne za 10 lat zamierza zainwestować swoje środki całkowicie w te dwa dostępne papiery wartościowe. Podaj, jaki procent całkowitego funduszu należy zainwestować w obligacje stałokuponowe, aby przy obecnej stopie procentowej równej $i = 8\%$ duration aktywów \bar{d}_A była równa duration zobowiązań \bar{d}_B .

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. 50%
- B. 55%
- C. 60%
- D. 65%
- E. 70%

10. Mając dane $\bar{a}_{\overline{n}|} = 10,00$ oraz $\bar{a}_{\overline{2n}|} = 15,00$ wyznacz $(\overline{D\bar{a}})_{\overline{2n}|}$.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

- A. 235
- B. 245
- C. 255
- D. 265
- E. 275

Uwaga: Do obliczeń można przyjąć $\ln(2) = 0,693147$.

Egzamin dla Aktuariuszy z 25 stycznia 2003 r.**Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko : KLUCZ ODPOWIEDZI

Pesel.....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	D	
3	D	
4	B	
5	E	
6	A	
7	A	
8	A	
9	E	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.