
Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy
XLIII Egzamin dla Aktuariuszy z 8 października 2007 r.

Część I

Matematyka finansowa

WERSJA TESTU A

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

.....

Czas egzaminu: 100 minut

1. Zakład ubezpieczeń majątkowych rozpoczyna działalność 1 stycznia 2008 roku. Początkowy margines wypłacalności wynosi na tę datę 180 mln PLN. Margines wypłacalności na koniec każdego następnego roku, utożsamiany z kwotą kapitału potrzebnego na bezpieczne prowadzenie działalności, wyliczany jest jako 18% składki przypisanej brutto za dany rok. Środki własne na pokrycie marginesu inwestowane są przy rocznej efektywnej stopie zwrotu 4%, zakładamy że zakład posiada środki na pokrycie 100% marginesu. Wyznacz wartość obecną (na 1 stycznia 2008 roku) łącznego kosztu zablokowania środków własnych w marginesie wypłacalności w ciągu 6 lat działalności ($k = 1, \dots, 6$, od 1 stycznia 2008 do 31 grudnia 2013), jeżeli składka w 2008 roku wyniosła 1050 mln PLN i rośnie o 5% rocznie, a właściciel oczekuje 10% stopy zwrotu.

- A) 48
- B) 53
- C) 58
- D) 63
- E) 68

Uwaga. Koszt zablokowania kapitału w marginesie wypłacalności to suma dopłat do środków na pokrycie marginesu w ciągu 6 lat (włączając w to początkową kwotę marginesu), pomniejszona o przychody z inwestycji osiągnięte przez 6 lat na środkach na pokrycie marginesu. Na koniec 2013 roku margines wypłacalności jest rozwiązywany i zablokowane środki są odzyskiwane. Jest to również wliczane do rachunku kosztu marginesu.

2. Duration renty $(Da)_{\overline{n}|}$ wynosi α_n , zaś renty $(Ia)_{\overline{n}|}$ wynosi β_n . Niech $r > 0$ oznacza stopę dyskontową. Spośród stwierdzeń:

- (i) $dur(a_{\overline{n}|}) = \frac{\alpha_n + \beta_n}{n+1}$
- (ii) $(Da)_{\overline{n}|} + (Ia)_{\overline{n}|} = (n+1)a_{\overline{n}|}$
- (iii) $dur(a_{\overline{n}|}) = \frac{(n+1)\alpha_n}{n+1 + \alpha_n - \beta_n}$
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1 + \frac{1}{r}$

prawdziwych jest:

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

3. Kwota $s > 0$ jest wypłacana w formie renty wieczystej o płatnościach b_n na początek roku

$n = 0, 1, \dots$. Wartość obecna renty o płatnościach $\frac{b_n}{n!}$, dokonywanych w tych samych

momentach co b_n , wynosi v^2 , gdzie $v > 0$ jest czynnikiem dyskontującym (nie musimy zakładać $v < 1$). Oblicz s przy założeniu, że płatności b_n nie są funkcją v . Odpowiedź (podaj najbliższą wartość).

- A) 1
- B) 2
- C) $\exp(1)$
- D) $\exp(2)$
- E) $b_0 + 2$

4. Rozważmy rentę pewną 10-letnią, której pierwsza płatność $b_{N,1}$ przypada na początku roku N ($N = 1, 2, \dots$). Płatność o numerze k , w kwocie $b_{N,k}$ tej renty przypada na początek roku $N + k - 1$, $k = 2, \dots, 10$. Płatności wynoszą:

$$b_{N,1} = -10N,$$

$$b_{N,k} = N(k-1), \quad k = 2, \dots, 10.$$

Przyjmujemy, że $N - 1$ jest zmienną losową o rozkładzie Poissona ze średnią $\lambda = 5$ (tzn., że

$$P(N-1=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots).$$

Inwestor nabył portfel 10-ciu takich rent (i -ta renta rozpoczyna się w na początku losowego roku N_i , zakładamy że N_i są niezależne, $i = 1, \dots, 10$). Oblicz średnią i wariancję wewnętrznej stopy zwrotu tego portfela (IRR). Odpowiedź (podaj najbliższą wartość).

- A) (30%,150%)
- B) (30%,0%)
- C) (45%,225%)
- D) (150%,225%)
- E) (45%,0%)

5. W dniu 31 grudnia 2007 Pan Jan kupuje na rynku pierwotnym 4-letnią obligację po cenie 1000 PLN. Nominał obligacji wynosi 1000 PLN, zaś stałe kupony płatne są na koniec każdego roku. Strukturę czasową stóp procentowych na dzień 31 grudnia 2007 opisuje krzywa stóp *spot* (krzywa zerokuponowa):

$$s_n = \frac{1}{100} \frac{12n-8}{2n-1}, \quad n=1,2,\dots$$

gdzie s_n oznacza n-letnią stopę *spot*. Wyznacz stopę kuponu tej obligacji. Odpowiedź (podaj najbliższą wartość).

- A) 4.0%
- B) 4.4%
- C) 5.0%
- D) 5.3%
- E) 5.7%

6. Ile wynosi w dniu emisji cena nieskończonego pakietu obligacji zerokuponowych, takiego że w każdą rocznicę zakupu wygasa dokładnie jedna obligacja z tego pakietu, a n -letnia obligacja ma nominal n^2 PLN? Wiadomo, że stopa procentowa jest stała, a czynnik dyskontujący wynosi 0.95. Podaj najbliższą wartość.

- A) 14 790 PLN
- B) 14 800 PLN
- C) 14 810 PLN
- D) 14 820 PLN
- E) 14 830 PLN

7. Bank proponuje klientom lokatę zawieraną na 1 rok kalendarzowy. Lokata gwarantuje klientowi, że na koniec roku otrzyma on następującą wypłatę:

$$K(1) = L \max\left(\frac{I(1)}{I(0)}, 1 + r\right),$$

gdzie L oznacza zainwestowaną sumę, $I(0)$ - wartość pewnego indeksu w momencie rozpoczęcia lokaty, $I(1)$ - wartość indeksu w momencie wygaśnięcia lokaty, zaś $r = 21,6\%$ roczną stopę procentową wolną od ryzyka. Wiadomo, że indeks $I(t)$ wzrasta w ciągu każdych trzech kolejnych miesięcy o 20% z prawdopodobieństwem 0,5 lub maleje o 20% również z prawdopodobieństwem 0,5. Ile wynosi, w momencie zawarcia lokaty, wartość oczekiwana kosztu udzielonej przez Bank gwarancji (gwarancji wypłaty kwoty $K(1)$ w momencie wygaśnięcia lokaty), wyrażona jako procent zainwestowanej sumy L ? Odpowiedź (podaj najbliższą wartość)

- A) 0%
- B) 8%
- C) 10%
- D) 16%
- E) 20%

8. Obligacja dwuletnia o wartości wykupu 10 000 PLN, równej wartości nominalnej, płaci roczne kupony równe 3% wartości nominalnej. Cena emisyjna wyznaczana jest w oparciu o następującą strukturę stóp procentowych: $r_1 = 5\%$ jest stopą procentową (*forward*) w pierwszym roku po emisji, zaś $r_2 = 4\%$ w drugim roku po emisji. Wiadomo, że pierwszy kupon będzie reinwestowany w momencie jego płatności na okres pozostały do wygaśnięcia obligacji, przy stopie procentowej r_2 . Za zakumulowaną wartość wypłat (uwzględniając opisaną reinwestycję kuponu) kupujemy w momencie wygaśnięcia obligacji 10-letnią rentę o stałych, rocznych płatnościach, płatną na początku kolejnych lat, skalkulowaną przy stałej stopie technicznej równej wewnętrznej stopie zwrotu (*YTM*) z obligacji. Jaka jest roczna wypłata z tej renty? Podać najbliższą odpowiedź.
- A) 1280 PLN
 - B) 1282 PLN
 - C) 1284 PLN
 - D) 1286 PLN
 - E) 1288 PLN

9. Kredyt hipoteczny w wysokości 500 000 PLN spłacany jest w 40 równych, rocznych ratach, płatnych z dołu przy stopie $i = 5\%$. Bezpośrednio po spłacie 8 raty ulega zmianie stopa procentowa. Jednocześnie kredytobiorca decyduje się na skrócenie pozostałego okresu kredytowania. Pozostała część kredytu będzie teraz spłacana przez kolejne 20 lat, w równych, płatnych z dołu, rocznych ratach, ze zmniejszoną stopą $r = 4\%$. Niech S_r oznacza sumę odsetek zapłaconych w pierwszych 10 latach nowego kredytu (tj. w latach 9, 10, ..., 18 licząc od momentu zaciągnięcia pożyczki), natomiast S_i sumę odsetek które byłyby zapłacone w tym samym okresie w oryginalnej formie. Ile wynosi $\frac{S_i}{S_r}$? Podaj najbliższą odpowiedź.

- A) 35%
- B) 40%
- C) 140%
- D) 155%
- E) 180%

10. 30-letni kredyt hipoteczny X jest spłacany w równych ratach na koniec kolejnych lat z efektywną stopą oprocentowania $i_1 = 6\%$ w skali roku. Na koniec 15 roku (po zapłaceniu 15-tej raty) kredytobiorca ma możliwość zaciągnięcia dodatkowego kredytu Y w wysokości równej wielkości aktualnego zadłużenia z tytułu kredytu dotychczasowego. Przyjmujemy założenie, że kredytobiorca zawsze skorzysta z tej opcji, o ile będzie wówczas wypłacalny (nie dojdzie wcześniej do jego bankructwa). Dodatkowy kredyt spłacany jest w 15 równych ratach płatnych na koniec kolejnych lat przy tej samej stopie $i_1 = 6\%$.

Warunkiem uruchomienia całości kredytu 30-letniego było opłacenie jednorazowej składki (netto) $P = 18\,000$ za ubezpieczenie niewypłacalności kredytobiorcy, skalkulowanej przy rocznej stopie technicznej $i_2 = 4\%$. Prawdopodobieństwo bankructwa kredytobiorcy w każdym z lat $1, 2, \dots, 30$ wynosi 0.5% o ile nie doszło do niego wcześniej (bankructwo jest nieodwracalne i może wystąpić tylko raz). W przypadku bankructwa kredytobiorcy, ubezpieczyciel przejmuje na siebie spłacanie kredytu i musi spłacić wszystkie pozostałe do zapłaty raty w terminach ich płatności (również wynikające z zaciągniętego kredytu dodatkowego, o ile miał miejsce). Jaka jest kwota zaciągniętego kredytu X ? Podaj najbliższą wartość.

- A) 195 200
- B) 196 200
- C) 197 200
- D) 198 200
- E) 199 200

Egzamin dla Aktuariuszy z 8 października 2007 r.**Matematyka finansowa****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko:

Pesel:

OZNACZENIE WERSJI TESTU

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	D	
3	B	
4	B	
5	E	
6	D	
7	B	
8	C	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.