Zad. 1

X_1 - spudłował gorszy, trafił lepszy

X_2 - spudłował lepszy, trafił gorszy

X - jeden spudłował a drugi trafił

$P(X_1) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48$

$P(X_2) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$

$P(X) = P(X_1) + P(X_2) = 0,56$

A - przy ostatnim strzale strzelec trafi w cel

L - strzela lepszy

G - strzela gorszy

$$P(L) = P(X_1 | X) = \frac{0,48}{0,56} = \frac{6}{7}$$

$$P(G) = P(X_2 | X) = \frac{0,08}{0,56} = \frac{1}{7}$$

$$P(A) = P(A|L)P(L) + P(A|G)P(G) = 0,8 \cdot \frac{6}{7} + 0,4 \cdot \frac{1}{7} = \frac{26}{35}$$

Zad. 2

Gęstość rozkładu z zadania:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)\right\}$$

Trzeba obliczyć pole obszaru spełniającego warunek $\sqrt{x^2+y^2} < r$

Współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$|J| = r$

$$\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} < r$$

$$r < r$$

$$P = \iint \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)\right\} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sigma} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} r \, dr \, d\varphi = \left| \begin{matrix} r^2 = t \\ 2r\,dr = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{t}{2\sigma^2}\right\} dt \, d\varphi = \frac{1}{4\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} -2\sigma^2 \exp\left\{-\frac{t}{2\sigma^2}\right\} \Big|_0^{\sigma^2} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -e^{-\frac{1}{2}} + 1 \, d\varphi = \frac{1-e^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \varphi \Big|_0^{2\pi} = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

zad. 3

Najłatwiej rozpatrzyć wszystkie przypadki.

$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Trójka na jednej kostce: $\binom{3}{1} \cdot 3 \cdot 3$ bo na dwóch pozostałych może być 4, 5, 6.

Trójka na dwóch kostkach: $\binom{3}{2} \cdot 3$

Trójka na trzech kostkach: 1

Razem: $3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 1 = 37$

$P(\min(k_1, k_2, k_3)) = \frac{37}{216}$

zad. 4

$f_{X,Y}(x,y) = x + y$

$f_Y(y) = \int_0^1 x + y \, dx = \frac{x^2}{2} + xy \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + y$

$f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = x + \frac{1}{2}$

$E[X|Y = \frac{1}{2}] = \int_0^1 x^2 + \frac{1}{2}x \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

zad. 5

$P(M = 0) = P(N = 0) = e^{-\lambda}$

$P(M = 1) = P(N > 0) = 1 - e^{-\lambda}$

$$L = \left[e^{-\lambda}\right]^{n-\sum_i M_i} \left[1-e^{-\lambda}\right]^{\sum_i M_i}$$

$$\ln L = -\lambda n + \lambda \sum_i M_i + \sum_i M_i \cdot \ln(1-e^{-\lambda})$$

$$\ln' L = -n + \sum_i M_i + \frac{e^{-\lambda}\sum_i M_i}{1-e^{-\lambda}} = 0$$

$$\frac{e^{-\lambda}\sum_i M_i}{1-e^{-\lambda}} = n - \sum_i M_i$$

$$\cancel{e^{-\lambda}\sum_i M_i} = n - \sum_i M_i - e^{-\lambda} n + \cancel{e^{-\lambda}\sum_i M_i}$$

$$n e^{-\lambda} = n - \sum_i M_i \quad | : n$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \bar{m} \quad | \ln$$

$$-\lambda = \ln(1-\bar{m})$$

$$\lambda = \ln\left(\frac{1}{1-\bar{m}}\right)$$

Zad. 6

TW. Statystyka testowa ma postać:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}.$$

Statystyka ta ma asymptotycznie rozkład χ^2 z liczbą stopni swobody wyznaczoną według wzoru: $df = (r-1)(c-1)$.

Czyli w zadaniu $df = (n-1)(m-1)$

Zad. 7

TW. Jeśli $N(t)$ jest procesem Poissona z współczynnikiem λ, wtedy czas pomiędzy zdarzeniami $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i $X_i \sim Exp(\lambda)$, dla $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Wzór: $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}$

$T = T_n - T_0 \sim \text{gamma}(n, \lambda)$

$$E\left[\alpha \frac{1}{T}\right] = \alpha \int_0^\infty \frac{1}{t} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\alpha \lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty t^{n-1-1} e^{-\lambda t} dt =$$

$$= \frac{\alpha \lambda^n}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(n-1)}{\lambda^{n-1}} = \frac{\alpha \lambda}{n-1}$$

$$\frac{\alpha \lambda}{n-1} = \lambda \Rightarrow \alpha = n-1$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n-1}{T_n - T_0}$$

zad. 8

EV - wartość oczekiwana

$$\begin{cases} \text{cov}(E, X_2) = 0 \\ \text{cov}(E, X_3) = 0 \end{cases} \qquad \text{cov}(E, X_2) = EV[E X_2] - EV[E] EX_2 = EV[E X_2]$$

$$\begin{cases} EV[E X_2] = 0 \\ EV[E X_3] = 0 \end{cases}$$

$$E = X_1 - a X_2 - b X_3$$

$$EV[E] = 0$$

$$\begin{cases} EV[X_2 (X_1 - a X_2 - b X_3)] = 0 \\ EV[X_3 (X_1 - a X_2 - b X_3)] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} EV[X_1 X_2 - a X_2^2 - b X_2 X_3] = 0 \\ EV[X_1 X_3 - a X_2 X_3 - b X_3^2] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} EV[X_1 X_2] - a EV[X_2^2] - b EV[X_2 X_3] = 0 \\ EV[X_1 X_3] - a EV[X_2 X_3] - b EV[X_3^2] = 0 \end{cases}$$

$$EV[X_1 X_2] = \text{Cov}(X_1, X_2) + EV[X_1] EV[X_2]$$

$$EV[X_2^2] = \text{Var}(X_2) + (EV[X_2])^2$$

$$\begin{cases} 1,5 - a - 0,5b = 0 & | \cdot 2 \\ 1 - 0,5a - b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 - 2a - b = 0 \\ 1 - 0,5a - b = 0 & | - \end{cases}$$

$2 - 1,5a = 0$

$1,5a = 2$

$a = \frac{4}{3}$

Zad. 9

$n = 100$

$(y_1, \ldots, y_{10})$, gdzie $y_i = \sum_{j=0}^{9} X_{10i-j}$

$$E\left[\sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y})^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{10}(y_i^2 - 2y_i\bar{y} + \bar{y}^2)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{10}(y_i^2) - \bar{y}^2\right] =$$

$$\left| \begin{array}{l} y_i \sim N(10\mu, 10\sigma^2) \\ \bar{y} \sim N(10\mu, \sigma^2) \end{array} \right|$$

$$= 10(100\mu^2 + 10\sigma^2) - 10(100\mu^2 + \sigma^2) = 1000\mu^2 + 100\sigma^2 - 1000\mu^2 - 10\sigma^2 =$$
$$= 90\sigma^2$$

$c \cdot 90\sigma^2 = \sigma^2$

$c = \frac{1}{90}$

Odp. D

Zad. 10

$f_X(x) = 0,5x + 0,5 \quad , \quad -1 \leq x \leq 1$

$$P(Y < y) = P(X^2 < y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{y}{4} + \frac{\sqrt{y}}{2} - \frac{y}{4} + \frac{\sqrt{y}}{2} = \sqrt{y}$$

$$f_Y(y) = (\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$