Zadanie 1.

Rozważmy model wyceny obligacji, w którym:

- dostępne są cztery obligacje zerokuponowe, które wygasają odpowiednio w chwilach $t = 1,2,3,4$.
- Jeśli przez $P(t,T)$ oznaczymy cenę w chwili t obligacji wygasającej w momencie T, to zachodzi $P(0,1) = 0.968, P(0,2) = 0.912, P(0,3) = 0.861, P(0,4) = 0.778$.

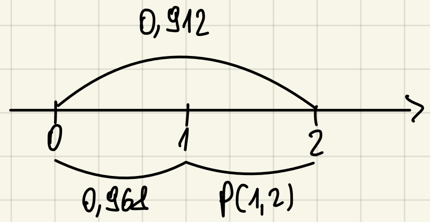
W chwili $t = 1$ wystąpi jeden z trzech stanów rynku: ω_1, ω_2 lub ω_3. Załóżmy, że żadne transakcje nie są możliwe pomiędzy chwilami 0 i 1, oraz że ceny obligacji w powyższych stanach rynku kształtują się następująco:

	ω_1	ω_2	ω_3
$P(1,2)$	0.970	0.940	0.910
$P(1,3)$	0.950	0.900	0.810
$P(1,4)$	0.830	X	0.76

Proszę wyznaczyć X (proszę podać najbliższą wartość), dla którego model ten jest wolny od arbitrażu.

p_1, p_2, p_3 - p-stwa znalezienia się w stanach $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 0,97p_1 + 0,94p_2 + 0,91p_3 = P(1,2) \\ 0,95p_1 + 0,9p_2 + 0,81p_3 = P(1,3) \end{cases}$$



$$P(1,2) = \frac{0,912}{0,968}$$

$$P(1,3) = \frac{0,861}{0,968}$$

$$P(1,4) = \frac{0,778}{0,968}$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 0,97p_1 + 0,94p_2 + 0,91p_3 = \frac{0,912}{0,968} \\ 0,95p_1 + 0,9p_2 + 0,81p_3 = \frac{0,861}{0,968} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = 0,424587 \\ p_2 = 0,222452 \\ p_3 = 0,352961 \end{cases}$$

$$0{,}83p_1 + Xp_2 + 0{,}76p_3 = \frac{0{,}778}{0{,}968}$$

$$X = 0{,}822926 \approx 0{,}823$$

Odp. A

Zadanie 2.

Rozważmy proces Z_t zadany następującym równaniem:

$$dZ_t = \sigma\, dB_t + a\, Z_t\, dt, \qquad a, \sigma > 0,$$

gdzie B_t jest standardowym procesem Browna.

Zakładając, iż $Z_0 = 100, \sigma = 30\%, a = 0.03$ proszę podać najbliższą wartość dla oszacowania $P(Z_1 > 103.5)$.

Proces Ornsteina - Uhlenbecha :

$$dZ_t = \alpha(\beta - Z_t)\,dt + \sigma\, dB_t$$

$$Z_t \sim N\{e^{-\alpha t} Z_0 + \beta(1-e^{-\alpha t}); \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1-e^{-2\alpha t})\}$$

$\beta = 0 \qquad \alpha = -a$

$$Z_t \sim N\{e^{at} Z_0; \frac{\sigma^2}{-2a}(1-e^{2at})\}$$

$$Z_1 \sim N\{e^{0,03} \cdot 100; \frac{0,3^2}{-2 \cdot 0,03}(1-e^{2 \cdot 0,03})\}$$

$$Z_1 \sim N\{103,045453; 0,092755\}$$

$$P(Z_1 > 103,5) = 1 - P(Z_1 < 103,5) = 1 - \Phi\left(\frac{103,5 - 103,045453}{\sqrt{0,092755}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(1,492484) = 1 - 0,932214 = 0,067786$$

Odp. B

Zadanie 3.

Renta wieczysta wypłaca raty na końcu każdego roku. W latach nieparzystych pierwsza rata wynosi 1, a każda następna jest o 3 większa od poprzedniej. W latach parzystych pierwsza rata wynosi 2, a każda następna jest o 2 większa od poprzedniej.

Ile wynosi obecna wartość tej renty, jeżeli stopa procentowa jest równa 4%. Proszę podać najbliższą wartość.

v - czynnik dyskontujący

$$\underbrace{1v + 4v^3 + 7v^5}_{A} + \ldots + \underbrace{2v^2 + 4v^4 + 6v^6}_{B}$$

$$A = v + 4v^3 + 7v^5 + \ldots$$

$$Av^2 = v^3 + 4v^5 + 7v^7 + \ldots$$

$$A - Av^2 = v + 3v^3 + 3v^5 + 3v^7 + \ldots = v + \frac{3v^3}{1-v^2} = \frac{v - v^3 + 3v^3}{1-v^2} = \frac{v + 2v^3}{1-v^2}$$

$$A(1-v^2) = \frac{v+2v^3}{1-v^2}$$

$$A = \frac{v+2v^3}{(1-v^2)^2}$$

$$B = 2v^2 + 4v^4 + 6v^6$$

$$B(1-v^2) = 2v^2 + 2v^4 + 2v^6 + \ldots = \frac{2v^2}{1-v^2}$$

$$B = \frac{2v^2}{(1-v^2)^2}$$

$$A + B = \frac{v + 2v^2 + 2v^3}{(1-v^2)^2}$$

$$v = 1{,}04^{-1}$$

$$A + B = 806{,}189927$$

Odp. D

Zadanie 4.

Niech $T_0 = 0$. Rozważmy rynek Blacka-Scholesa, na którym nie ma możliwości arbitrażu. Na rynku dostępne są niepłacące dywidendy akcje $\mathcal{A}$ o cenie $S_{T_0} = 95$ oraz europejskie opcje kupna i sprzedaży. Inwestor, kupując lub krótko sprzedając opcje, zbudował portfel, który w chwili $T_1 = 2$ zapewni następującą wypłatę:

$$W(S_{T_1}) = \begin{cases} 0 & gdy\ S_{T_1} < 75\ lub\ S_{T_1} > 155 \\ S_{T_1} - 75 & gdy\ S_{T_1} \geq 75\ i\ S_{T_1} < 115 \\ 155 - S_{T_1} & gdy\ S_{T_1} \geq 115\ i\ S_{T_1} \leq 155 \end{cases}$$

Roczna stopa wolna od ryzyka na rynku wynosi $r = 3\%$, natomiast współczynnik zmienności cen akcji równy jest $\sigma = 20\%$. Jaką wartość będzie miał parametr grecki *delta* dla tak zbudowanego portfela (proszę podać najbliższą wartość):

Replikacja: 1 opcja long call z K = 75, 2 opcje short call z K = 115,

1 opcja long call z K = 155

$\Delta_c = \Phi(d_1)$

$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln(S_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T\right]$

Opcja kupna K = 75

$d_1 = \frac{1}{0{,}2\sqrt{2}}\left[\ln(95/75) + (0{,}03 + \frac{0{,}2^2}{2})\cdot 2\right] = 1{,}189314$

$\Phi(d_1) = 0{,}88$

Opcja kupna K = 115

$d_1 = -0{,}321929$

$\Phi(d_1) = 0{,}37$

Opcja kupna K = 155

$d_1 = -1{,}377261$

$I(d_1) = 0,08$

Ostatecznie:

$A_C = 0,88 - 2 \cdot 0,37 + 0,08 = 0,22$

Odp. C

Zadanie 5.

Rozważmy:

- europejską opcję sprzedaży z ceną wykonania na poziomie K na niepłacącą dywidendy akcję $\mathcal{B}$ - $\mathcal{O}^{E,\mathcal{B},K}$,
- amerykańską opcję sprzedaży z ceną wykonania na poziomie K na niepłacącą dywidendy akcję $\mathcal{B}$ - $\mathcal{O}^{A,\mathcal{B},K}$.

Przez $P(\mathcal{O}^{E,\mathcal{B},K}, t, T)$ oraz $P(\mathcal{O}^{A,\mathcal{B},K}, t, T)$ oznaczmy ceny w chwili t odpowiednio opcji europejskiej oraz amerykańskiej wygasających w momencie T.

Załóżmy, że przy wycenie obu opcji inwestor posługuje się modelem CRR o kroku miesięcznym $\left(\frac{1}{12}\right)$. Wiemy, że cena akcji w chwili $t = 0$ to 100, a stopa wolna od ryzyka wynosi 0.3% w skali miesiąca. W ciągu miesiąca cena akcji może wzrosnąć lub spaść o 15%. Proszę wyznaczyć jaką kwotę otrzyma inwestor dla wartości:

$$P\left(\mathcal{O}^{A,\mathcal{B},110}, 0, \frac{1}{4}\right) - P\left(\mathcal{O}^{E,\mathcal{B},110}, 0, \frac{1}{4}\right).$$

Proszę podać najbliższą odpowiedź.

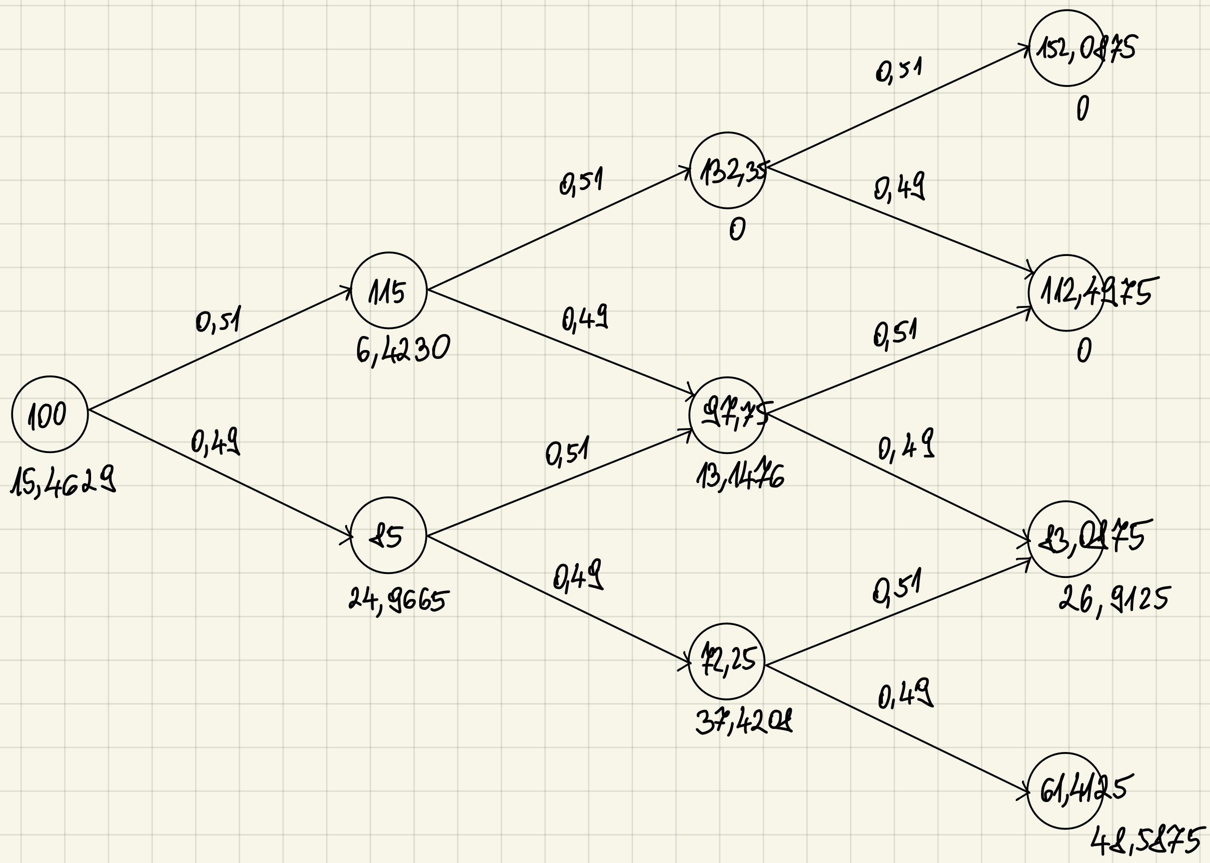
$$q_t = \frac{S_t e^{r\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}}{S^+_{t+\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}}$$

$$x_t = e^{-r\Delta t}\left[q_t x^+_{t+\Delta t} + (1-q_t)\, x^-_{t+\Delta t}\right]$$

Cena w chwili t dla opcji europejskiej : x_t

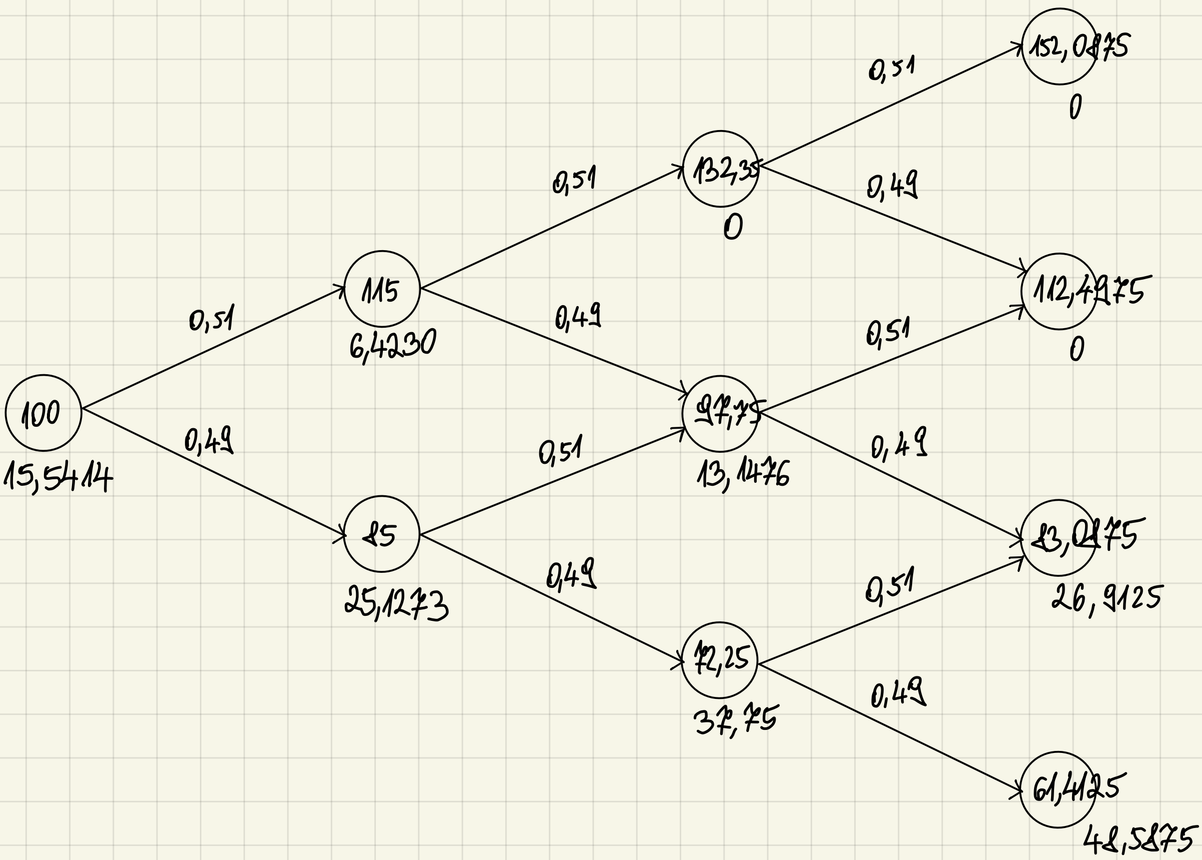
Cena w chwili t dla opcji amerykańskiej : $\max\{K - S_t, x_t\}$

Opcja europejska :



$$q_t = \frac{100e^{0,003} - 85}{115 - 85} = 0,51$$

Opja amerykańska :



$$P(O^{A,B,110}, 0, \tfrac{1}{4}) - P(O^{E,B,110}, 0, \tfrac{1}{4}) = 15,5414 - 15,4629 = 0,0785$$

Odp. D

Zadanie 6.

Dwuletnia obligacja korporacyjna o nominale 1 000 i kuponie 8% płatnym rocznie jest wyceniana w momencie emisji na 991.32. Ponadto, wiadomo, że:

- roczna obligacja rządowa o nominale 1 000 z 3% kuponem płatnym rocznie wyceniona jest w momencie emisji na 990.38,
- dwuletnia obligacja rządowa o nominale 1 000 z 3% kuponem płatnym rocznie jest wyceniona w momencie emisji na 976.58.

Załóżmy, że obligacje rządowe wyceniane są na podstawie stóp wolnych od ryzyka. Jakiego stałego narzutu na ryzyko kredytowe używa rynek przy wycenie obligacji korporacyjnej? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

Czynniki dyskontujące:

$$\begin{cases} 990,38 = 1030\, d_1 \\ 976,58 = 30\, d_1 + 1030\, d_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = 0,9615 \\ d_2 = 0,9201 \end{cases}$$

$$\frac{1}{1+r_{0,1}} = 0,9615 \qquad \frac{1}{(1+r_{0,2})^2} = 0,9201$$

$$r_{0,1} = 0,04 \qquad r_{0,2} = 0,0425$$

$$991,32 = \frac{80}{1,04+x} + \frac{1080}{(1,0425+x)^2}$$

$$x = 0,0425$$

Odp. C

Zadanie 7.

W przetargu na 26-tygodniowe bony skarbowe o wartości nominalnej 500 mln PLN zgłoszone zostały następujące oferty:

Oferta	Wartość nominalna (w mln PLN)	Cena za 1 tyś PLN wartości nominalnej
A	300	986.8
B	250	988.2
C	100	989.3

Średnia rentowność bonów sprzedanych na aukcji wyniosła (proszę podać najbliższą wartość):

Obliczenia w tysiącach

$I = Prn$

$r = \frac{I}{Pn}$

$1000 - 986,8 = 13,2$

$1000 - 988,2 = 11,8$

$1000 - 989,3 = 10,7$

$$r_A = \frac{13,2}{986,8 \cdot \frac{182}{360}} = 0,0265$$

$$r_B = \frac{11,8}{988,2 \cdot \frac{182}{360}} = 0,02362$$

$$r_C = \frac{10,7}{989,3 \cdot \frac{182}{360}} = 0,0214$$

Rozstrzygnięcie przetargu:

	liczba bonów w tys.
A	150 000
B	250 000
C	100 000

$P = 150\,000 \cdot 986,8 + 250000 \cdot 988,2 + 100000 \cdot 989,3 = 494\,000$

$I = 500\,000 - 494\,000 = 6000$

$I = P\bar{r}n$

$$\bar{r} = \frac{6}{494 \cdot \frac{182}{360}} = 0,024$$

Odp. B

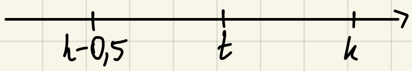
Zadanie 8.

Dwuletni kontrakt Interest Rate Swap typu fixed/float pomiędzy inwestorami A oraz B został zawarty w $t = 0$. Nominał kontraktu wynosi 500 000 PLN. Inwestor A płaci co pół roku kupony stałe oparte na stopie 3% w skali roku. Inwestor B płaci co pół roku kupony zmienne oparte na stopie WIBOR 6M. W t = 0 stopa WIBOR 6M wynosiła 2.2%.

Proszę wyznaczyć wartość ww. kontraktu IRS w $t = 0.25$ dla inwestora B przy założeniu, że struktura terminowa stóp procentowych w $t = 0.25$ dana jest wzorem $r(T) = 0.02 + 0.004T$ (T to okres zapadalności licząc od momentu t=0.25, np. T=0.25 oznacza zapadalność w t=0.5) oraz kapitalizacja jest półroczna (proszę podać najbliższą wartość).

r	T	$r(T)$	Kwota	$PV_{t=0,25}$
$r_{0,25}^{0,25}$	0,25	0,021	7500	7460,93
$r_{0,25}^{0,75}$	0,75	0,023	7500	7372,46
$r_{0,25}^{1,25}$	1,25	0,025	7500	7270,66
$r_{0,25}^{1,75}$	1,75	0,027	507500	484231,36

k - płatności kuponów



$$B_t^X = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+0{,}5\, r_t^{t_i-t})^{2(t_i-t)}} + \frac{F}{(1+0{,}5\, r_t^{t_i-t})^{2(t_m-t)}}$$

$$B_t^L = \frac{F(1+0{,}5\, r_{k-0,5}^{0,5})}{(1+0{,}5\, r_t^{k-t})^{2\cdot(k-t)}}$$

$$B_{0,25}^X = \frac{7500}{(1+0{,}5\cdot 0{,}021)^{2\cdot 0{,}25}} + \frac{7500}{(1+0{,}5\cdot 0{,}023)^{2\cdot 0{,}75}} + \frac{7500}{(1+0{,}5\cdot 0{,}025)^{2\cdot 1{,}25}} +$$

$$+ \frac{507500}{(1+0{,}5\cdot 0{,}027)^{2\cdot 1{,}75}} = 506335{,}41$$

$$B_{0,25}^L = \frac{500000(1+0{,}5\cdot 0{,}022)}{(1+0{,}5\cdot 0{,}021)^{2\cdot 0{,}25}} = 502866{,}84$$

$$V_{0,25}^X = B_{0,25}^X - B_{0,25}^L = 3468{,}57$$

Odp. B

Zadanie 9.

Rozważmy model Vašiček'a dla stopy procentowej, zadany następującym równaniem:

$$dr(t) = \big(b - ar(t)\big)dt + \sigma dW(t),$$

gdzie $W(t)$ jest standardowym procesem Wienera.

Załóżmy, że $r(0) = 7\%$, $a = 0.5$, $b = 0.06$, $\sigma = 0.05$. Proszę określić 90% przedział ufności dla $r(2)$ (proszę podać najbliższą odpowiedź).

Proces Ornsteina - Uhlenbecka :

$$dr(t) = \alpha(\beta - r(t))\,dt + \sigma dW(t)$$

$$r(t) \sim N\left\{e^{-\alpha t} r(0) + \beta(1 - e^{-\alpha t});\ \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\right\}$$

$$dr(t) = a\left(\frac{b}{a} - r(t)\right)dt + \sigma dW(t)$$

$$\alpha = a \qquad \beta = \frac{b}{a}$$

$$r(t) \sim N\left\{e^{-at} r(0) + \frac{b}{a}(1 - e^{-at});\ \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})\right\}$$

$$r(2) \sim N\left\{e^{-0,5\cdot 2} \cdot 0,07 + \frac{0,06}{0,5}(1 - e^{-0,5\cdot 2});\ \frac{0,05^2}{2\cdot 0,5}(1 - e^{-2\cdot 0,5\cdot 2})\right\}$$

$$r(2) \sim N\{0,101606;\ 0,002162\}$$

Przedział ufności :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{r(2) - \mu}{\sigma} \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,9$$

$$P\left(\mu - \sigma z_{\frac{\alpha}{2}} \le r(2) \le \mu + \sigma z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,9$$

$$z_{0,05} = 1,644854$$

$$\sigma z_{0,05} = 0,076475$$

$$\mu - \sigma z_{0,05} = 0,025$$

$$\mu + \sigma z_{0,05} = 0,178$$

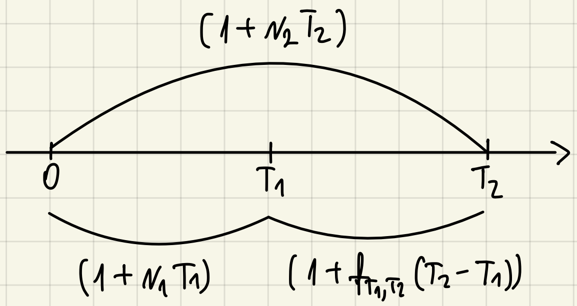
Odp. C

Zadanie 10.

Na rynku kwotowane są następujące wielkości:

- stopa depozytowa WIBOR 6M: 5.0%,
- kwotowania kontraktu FRA 6x12: 5.1%,
- kwotowania kontraktu FRA 12x18: 5.3%,
- stopa swap dwuletniego kontraktu IRS z płatnościami odsetek co pół roku: 5.5%,
- cena obligacji zerokuponowej o nominale 100 z terminem zapadalności 2.5 roku: 88.5,
- cena obligacji zerokuponowej o nominale 100 z terminem zapadalności 3 lata: 87.

Proszę wyznaczyć cenę trzyletniej obligacji z półrocznymi kuponami 4% o nominale 10 000 przy założeniu braku arbitrażu (proszę podać najbliższą wartość).



$$\frac{1}{(1+r_1T_1)} = d_1$$

$$\frac{1}{(1+r_2T_2)} = d_2$$

f_{T_1,T_2} - sprawiedliwa stopa kontraktu FRA

$$d_2 = \frac{d_1}{(1+f_{T_1,T_2}(T_2-T_1))}$$

$$d_{0,5} = \frac{1}{1{,}025} = 0{,}9756$$

$$d_1 = \frac{1}{1{,}025} \cdot \frac{1}{1{,}0255} = 0{,}9514$$

$$d_{1,5} = \frac{1}{1{,}025} \cdot \frac{1}{1{,}0255} \cdot \frac{1}{1{,}0265} = 0{,}9268$$

IRS:

$$100 = \frac{2{,}75}{1{,}025} + \frac{2{,}75}{1{,}025 \cdot 1{,}0255} + \frac{2{,}75}{1{,}025 \cdot 1{,}0255 \cdot 1{,}0265} + 102{,}75 \cdot d_2$$

$$d_2 = 0{,}8969$$

$$d_{2,5} = 0{,}885$$

$d_3 = 0,87$

Obligaja:

$$200 d_{0,5} + 200 d_1 + \ldots + 10200 d_3 = 9801,14$$

Odp. D