Zadanie 1.

Rozważmy model Blacka-Scholesa i funkcję $C(S_t, t, T-t, K, \sigma, r)$ ceny opcji kupna jako funkcję kluczowych parametrów – bieżącej ceny akcji oraz czasu, czasu pozostałego do realizacji opcji, ceny wykonania opcji, współczynnika zmienności i stopy procentowej wolnej od ryzyka. Rozważmy cenę opcji w chwili $t = 0$, zakładając, że $S_0 = s$.

Inwestor, analizując jak zmienia się cena opcji przy założeniu modyfikacji jednego z argumentów funkcji (przy założeniu, iż pozostałe się nie zmieniają), doszedł do następujących wniosków:

- Funkcja C jest malejąca jako funkcja zmiennej s.
- Funkcja C jest malejąca jako funkcja zmiennej K.
- Funkcja C jest rosnąca jako funkcja zmiennej $T-t$.
- Funkcja C jest rosnąca jako funkcja zmiennej σ.
- Funkcja C jest rosnąca jako funkcja zmiennej r.

Proszę stwierdzić ile z wniosków inwestora jest prawdziwych.

Funkcja C jest malejąca tylko jako funkcja zmiennej K.

4

Odp. B

Zadanie 2.

Rozważmy proces Z_t zadany następującym równaniem:

$$dZ_t = \sigma\, dB_t + a\, Z_t\, dt, \qquad a, \sigma > 0,$$

gdzie B_t jest standardowym procesem Browna.

Zakładając, iż $Z_0 = 100, \sigma = 50\%, a = 0.025$ proszę podać najbliższą wartość dla oszacowania $P(Z_1 \leq 103)$.

Proces Ornsteina - Uhlenbecka :

$$dZ_t = \alpha(\beta - Z_t)\, dt + \sigma\, dB_t$$

$$Z_t \sim N\left\{ e^{-\alpha t} Z_0 + \beta(1 - e^{-\alpha t}) ; \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}) \right\}$$

$t = 1 \qquad \beta = 0 \qquad \alpha = -a \qquad \sigma = \sigma$

$$Z_1 \sim N\left\{ e^{a} Z_0 ; \frac{\sigma^2}{-2a}(1 - e^{2a}) \right\}$$

$$Z_1 \sim N\left\{ e^{0{,}025} \cdot 100 ; \frac{0{,}5^2}{-2 \cdot 0{,}025}(1 - e^{2 \cdot 0{,}025}) \right\}$$

$$Z_1 \sim N\{ 102{,}5315 ; 0{,}256355 \}$$

$$P(Z_1 \leq 103) = P\left(Z \leq \frac{103 - 102{,}5315}{\sqrt{0{,}256355}}\right) = \Phi(0{,}925313) = 0{,}8226$$

Odp. A

Zadanie 3.

Rozważmy 15-letnią inwestycję, w ramach której ulokowana została kwota 1 000 000 PLN na bankowym koncie inwestycyjnym gwarantującym stałe oprocentowanie roczne. Na końcu każdego roku z konta wypłacane są wszystkie należne odsetki, po czym niezwłocznie lokowane są w trzech funduszach inwestycyjnych F_1, F_2 i F_3, których stopy zwrotu są stałe i wynoszą odpowiednio: 4.00%, 4.25%, 4.50%.

Wiadomo, że alokacja środków do poszczególnych funduszy na końcu roku $k = 1,2,\dots,14$ jest następująca:

- F_1 – 25% środków,
- F_2 – $\frac{16-k}{30}$ środków pozostałych po alokacji do F_1,
- F_3 – reszta środków,

Po upływie 15 lat wszystkie należne środki wycofano i inwestycja została zakończona. Proszę obliczyć, jakie było oprocentowanie bankowego konta inwestycyjnego, wiedząc, że efektywna roczna stopa zwrotu z zainwestowanego kapitału w tej inwestycji wyniosła 3.83%. Proszę podać najbliższą wartość.

x – szukane oprocentowanie

Odsetki z inwestycji:

$$I = 15 \cdot 3{,}83\% = 0{,}5745$$

Wpłaty na fundusze:

	F_1	F_2	F_3
1	$0{,}25x$	$0{,}375x$	$0{,}375x$
2	$0{,}25x$	$0{,}35x$	$0{,}4x$
3	$0{,}25x$	$0{,}325x$	$0{,}425x$
⋮	⋮	⋮	⋮

Mamy trzy renty o wartościach końcowych:

$$S_1 = 0{,}25x \cdot \frac{1-1{,}04^{-14}}{0{,}04} \cdot 1{,}04^{14} = 4{,}572978\,x$$

$$S_2 = \left[0{,}375x \cdot \frac{1-1{,}0425^{-14}}{0{,}0425} - \frac{0{,}025x}{0{,}0425}\left(\frac{1-1{,}0425^{-14}}{0{,}0425} - 14 \cdot 1{,}0425^{-14}\right)\right] \cdot 1{,}0425^{14} = 4{,}267244\,x$$

$$S_3 = \left[0{,}375x \cdot \frac{1-1{,}045^{-14}}{0{,}045} + \frac{0{,}025x}{0{,}045}\left(\frac{1-1{,}045^{-14}}{0{,}045} - 14 \cdot 1{,}045^{-14}\right)\right] \cdot 1{,}045^{14} = 9{,}839602\,x$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0{,}5745$$

$$4{,}572978\,x + 4{,}267244\,x + 9{,}839602\,x = 0{,}5745$$

$$19{,}679824\,x = 0{,}5745$$

$$x = 0{,}029$$

Zadanie 4.

Spółka z branży naftowej emituje 3-letnią obligację zerokuponową, która w momencie zapadalności wypłaci 1 000 EUR. Obligacja ta w momencie emisji jest wyceniana przez rynek na 950 EUR. W tym samym momencie spółka emituje analogiczną obligację zerokuponową, która dodatkowo wypłaci w momencie zapadalności premię zależną od kursu baryłki ropy. Premia ta jest pomnożoną przez 100 nadwyżką kursu baryłki ropy w momencie zapadalności ponad 90 EUR, przy czym nadwyżka kursu ograniczona jest do 10 EUR. Inwestor posiada następujące kwotowania wygasających za trzy lata europejskich opcji na baryłkę ropy:

Typ opcji:	Cena wykonania EUR	Cena opcji EUR
Kupna	90.00	14.20
Kupna	100.00	9.60
Sprzedaży	90.00	11.70
Sprzedaży	100.00	23.80

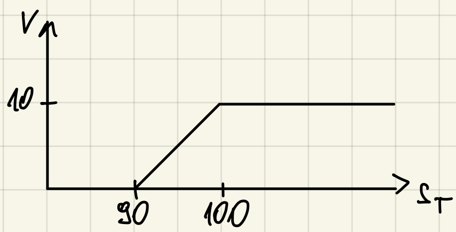
Jaką, co najwyżej, cenę jest skłonny zapłacić inwestor za obligację z premią? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

Szukana cena to 950 plus cena kombinacji opcji

S_T - cena baryłki w momencie zapadalności opcji

Premia:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad S_T < 90 \\ S_T - 90 & \text{dla} \quad 90 \le S_T \le 100 \\ 10 & \text{dla} \quad S_T > 100 \end{cases}$$



Wypłata jest replikowana przez 1 opcję long call z ceną wykonania 90 i 1 opcję short call z ceną wykonania 100.

$950 + 100(14,2 - 9,6) = 1410$

Odp. E

Zadanie 5.

Załóżmy, że linia lotnicza musi zakupić 1 000 $(10 + (-1)^k)$ baryłek ropy na koniec miesięcy $3k$ począwszy od chwili obecnej dla $k = 1, \dots, 8$. Aby zabezpieczyć się przed ryzykiem zmian ceny ropy linia lotnicza zakupuje kontrakt *swap,* na mocy którego linia lotnicza będzie płaciła stałą cenę za baryłkę ropy – c – w momentach jej dostawy. Proszę wyznaczyć c (podać najbliższą odpowiedź) zakładając dla $k = 1, \dots, 8$ poniższe ceny *forward* na baryłkę ropy ($F_{0,3k}$) oraz ceny obligacji zerokuponowych o nominałach 100 i terminie wykupu za $3k$ miesięcy ($B_{0,3k}$) :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_{0,3k}$	81.00	82.38	83.95	85.66	87.48	89.39	91.39	93.45
$B_{0,3k}$	0.987	0.976	0.963	0.95	0.941	0.923	0.911	0.903

Proszę podać najbliższą odpowiedź.

Strumień płatności linii lotniczej w swapie ma wartość obecną równą:

$$1000 \cdot c \sum_{k=1}^{8} (10 + (-1)^k) B_{0,3k} = 1000 c \cdot 75,49$$

Ciąg dostaw ropy naftowej ma wartość obecną równą:

$$1000 \sum_{k=1}^{8} (10 + (-1)^k) B_{0,3k} F_{0,3k} = 1000 \cdot 6552,69$$

Przyrównujemy wartości:

$$1000 c \cdot 75,49 = 1000 \cdot 6552,69$$

$$c \approx 86,80$$

Odp. C

Zadanie 6.

Załóżmy, że do modelowania krótkoterminowej stopy procentowej wykorzystywany jest model Mertona, gdzie:

$$r_t = r_0 + at + \sigma B_t, \qquad r_0, a, \sigma > 0,$$

gdzie B_t jest standardowym procesem Browna.

Wówczas cena obligacji zerokuponowej dana jest wzorem:

$$B(t,T) = E\left[\exp\left\{-\int_t^T r_s \, ds\right\}\right]$$

$$r_u = r_0 + au + \sigma B_u \qquad r_t = r_0 + at + \sigma B_t$$

$$r_u - r_t = a(u-t) + \sigma(B_u - B_t)$$

$$r_u - r_t = a(u-t) + \sigma B_{u-t} \quad \left| s = u - t \right|$$

$$r_u = r_t + as + \sigma B_s$$

$$\int_t^T r_s \, ds = \int_0^{T-t} (r_t + as + \sigma B_s) \, ds = (T-t) r_t + \frac{a}{2}(T-t)^2 + \sigma \int_0^{T-t} B_s \, ds$$

$$\int_0^{T-t} B_s \, ds \sim N\left(0, \frac{1}{3}(T-t)^3\right)$$

$$B(t,T) = E\left[\exp\left\{-r_t(T-t) - \frac{a}{2}(T-t)^2 - \sigma \int_0^{T-t} B_s \, ds\right]\right. =$$

$$= \exp\left\{-r_t(T-t) - \frac{a}{2}(T-t)^2\right\} E\left[\exp\left\{-\sigma \int_0^{T-t} B_s \, ds\right\}\right]$$

$$-\sigma \int_0^{T-t} B_s \, ds \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{3}(T-t)^3\right)$$

$$\exp\left\{-\sigma \int_0^{T-t} B_s \, ds\right\} \sim LN\left(0, \frac{\sigma^2}{3}(T-t)^3\right)$$

$$E\left[\exp\left\{-\sigma \int_0^{T-t} B_s \, ds\right\}\right] = \exp\left\{\frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3\right\}$$

$$B(t,T) = \exp\left\{-r_t(T-t) - \frac{a}{2}(T-t)^2 + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3\right\}$$

Odp. E

Zadanie 7.

Rozważmy model Blacka, w którym dynamika ceny *futures* $f_t = f_S(t, T)$ przy ustalonej dacie T wygaśnięcia kontraktu, jest opisana stochastycznym równaniem różniczkowym:

$$df_t = \mu f_t dt + \sigma f_t dB_t, \qquad \mu, \sigma > 0,$$

gdzie B_t jest standardowym procesem Browna.

Przyjmijmy, że w dowolnej chwili portfel zabezpieczający sprzedaną opcję kupna *futures* zawiera α_t kontraktów futures oraz β_t jednostek pieniężnych umieszczonych na rachunku bankowym.

Wiedząc, że $\mu = 10\%, \sigma = 25\%, T = 3, f_1 = 1$ oraz $K = 1.2$, proszę wyznaczyć (α_1, β_1). Proszę podać najbliższą odpowiedź.

$$\alpha_t = e^{-\mu(T-t)} \Phi\{d_1(f_1)\}$$

$$\beta_t = -e^{-\mu T} \Phi\{d_2(f_1)\}$$

$$d_1(f_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{f_1}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right]$$

$$d_2(f_1) = d_1(f_1) - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$d_1 = \frac{1}{0{,}25\sqrt{3-1}}\left[\ln\left(\frac{1}{1{,}2}\right) + \frac{0{,}25^2}{2}(3-1)\right] = -0{,}338907$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}25\sqrt{3-1} = -0{,}692460$$

$$\Phi(d_1) = 0{,}367340$$

$$\Phi(d_2) = 0{,}244324$$

$$\alpha_1 = e^{-0{,}1(3-1)} \Phi(d_1) = 0{,}300753$$

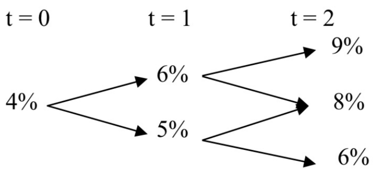
$$\beta_1 = e^{-0{,}1 \cdot 3} \Phi(d_2) = -0{,}217200$$ coś nie ma takiej odpowiedzi ale gdy policzyć cenę:

$$C_1 = e^{-0{,}1(3-1)}\left[1 \cdot \Phi(d_1) - 1{,}2 \cdot \Phi(d_2)\right] = 0{,}060710$$

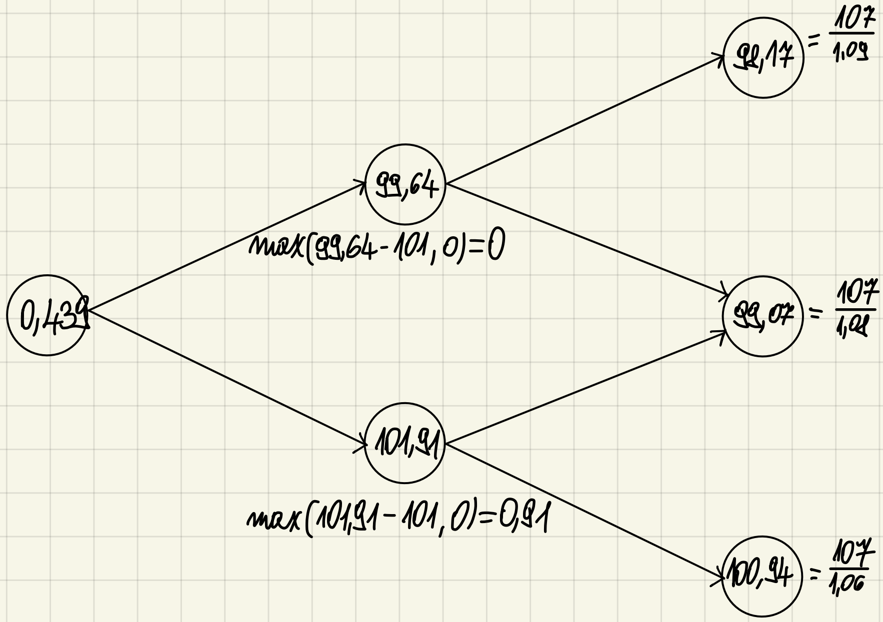
Odp. C

Zadanie 8.

Załóżmy, że zmiany w czasie stóp procentowych opisuje poniższe drzewo dwumianowe, oraz że prawdopodobieństwa neutralne względem ryzyka (*risk neutral*) w każdym z węzłów drzewa wynoszą po 50% dla obu gałęzi:



Rozważmy trzyletnią obligację o nominale równym 100 PLN i rocznym kuponie 7%, z opcją wykupu przez emitenta w t = 1 po cenie 101 PLN (po płatności kuponu), którą emitent wykona zawsze, gdy będzie to dla niego korzystne. Jaka jest wartość tej opcji wykupu w t = 0 dla emitenta? Proszę podać najbliższą odpowiedź.



$$\frac{7+0{,}5(98{,}17+99{,}07)}{1{,}06} = 99{,}64$$

$$\frac{7+0{,}5(99{,}07+100{,}94)}{1{,}05} = 101{,}91$$

$$\frac{0{,}5\cdot 0+0{,}5\cdot 0{,}91}{1{,}04} = 0{,}439$$

Odp. A

Zadanie 9.

Niech natężenie oprocentowania (*force of interest*) w chwili t wynosi:

$$\delta_t = \begin{cases} 0{,}03 \ + \ 0{,}004t^2 & dla \ \ 0 < t \le 5 \\ 0{,}01 \ + \ 0{,}024t & dla \ \ t > 5 \end{cases}$$

Ile wynosi wartość w $t = 0$ strumienia ciągłych wpłat o stopie intensywności $\mu_t = 100\exp(0{,}012t^2)$, następujących począwszy od $t = 8$ do $t = 11$? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

$$\int_8^{11} 100 e^{0{,}012t^2} e^{-\int_8^t 0{,}01+0{,}024s\,ds}\,dt \cdot e^{-\int_5^8 0{,}01+0{,}024t\,dt} \cdot e^{-\int_0^5 0{,}03+0{,}004t^2\,dt} =$$

$$\left| \int_8^t 0{,}01+0{,}024s\,ds = 0{,}01s + \frac{0{,}024}{2}s^2 \Big|_8^t = 0{,}01t + 0{,}012t^2 - 0{,}848 \right|$$

$$= 637{,}032054 \cdot 0{,}607745 \cdot 0{,}728574 = 282{,}07$$

Odp. D

Zadanie 10.

Inwestor w $t = 0$ sprzedaje trzymiesięczny kontrakt futures na jedną akcję spółki X po cenie 980. Załóżmy, że cenę tego kontraktu na koniec kolejnych miesięcy prezentuje poniższa tabela:

t (miesiące)	**cena futures**
1	1010
2	970
3	1020
4	1005

Załóżmy, że początkowy depozyt zabezpieczający (*margin*) wynosi 0, ale raz w miesiącu, na koniec miesiąca, wykonywane są bieżące rozrachunki rynkowe – równanie do rynku (*marking to markets*). Ile wynosi wartość depozytu inwestora na koniec 3 miesiąca, jeśli depozyt jest oprocentowany w sposób ciągły roczną stopą 8%? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

t	F_t^T	zysk / strata	depozyt
0	980		
1	1010	-30	-30
2	970	$+40$	$-30e^{0,08\cdot\frac{1}{12}} + 40 = 9,80$
3	1020	-50	$9,80\,e^{0,08\cdot\frac{1}{2}} - 50 = -40,14$
4	1005	$+15$	$-40,14\,e^{0,08\cdot\frac{1}{12}} + 15 = -25,40$

Odp. B