Zadanie 1.

Rozważmy na rynku Blacka-Scholesa akcję z ceną początkową 25, oczekiwanym zwrotem 9% rocznie i współczynnikiem zmienności 10%. Proszę znaleźć 90% przedział ufności dla ceny akcji za 6 miesięcy. Proszę podać najbliższą odpowiedź.

$S_0 = 25 \qquad r = 0{,}09 \qquad \sigma = 0{,}1$

$S_t \sim LN\{\ln S_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})t,\ \sigma^2 t\}$

$S_{1/2} \sim LN\{\ln 25 + (0{,}09 - \frac{0{,}1^2}{2})\frac{1}{2}\ ;\ 0{,}1^2 \cdot \frac{1}{2}\} = LN\{3{,}261376\ ;\ 0{,}005\}$

$\ln(S_{1/2}) \sim N\{\mu, \sigma^2\} = N\{3{,}261376\ ;\ 0{,}005\}$

Konstrukcja przedziału ufności:

$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\ln(S_{1/2}) - \mu}{\sigma} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

$P(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma \leq \ln(S_{1/2}) \leq \mu + z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma) = 1 - \alpha$

$[\exp\{\mu - z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma\}\ ;\ \exp\{\mu + z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma\}]$

$\alpha = 0{,}1$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}644854$

$[\exp\{3{,}261376 - 1{,}644854 \cdot \sqrt{0{,}005}\}\ ;\ \exp\{3{,}261376 + 1{,}644854 \cdot \sqrt{0{,}005}\}]$

$[23{,}22\ ;\ 29{,}31]$

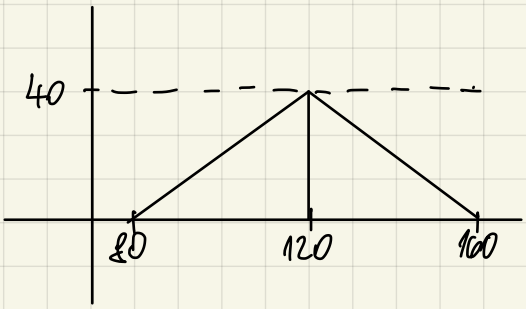
Odp. D

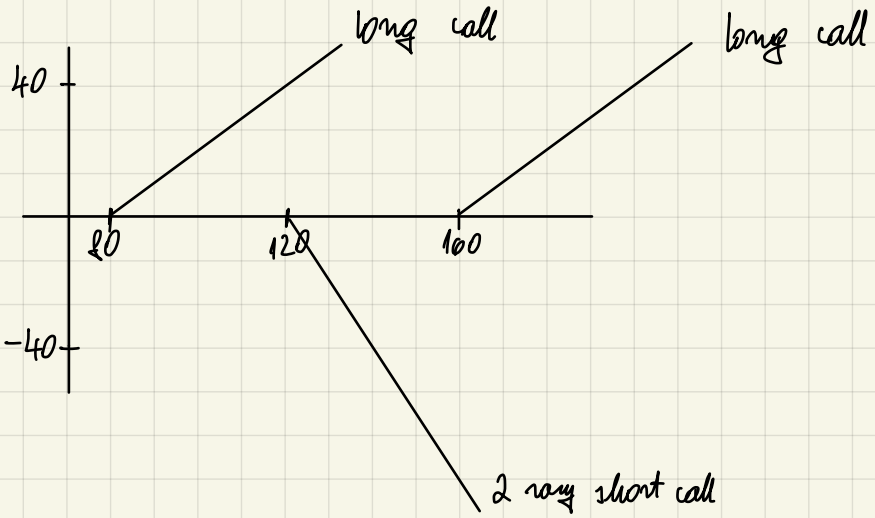
Zadanie 2.

Niech $T_0 = 0$. Rozważmy rynek Blacka-Scholesa. Na rynku dostępne są niepłacące dywidendy akcje $\mathcal{A}$ o cenie $S_{T_0} = 90$ oraz europejskie opcje kupna i sprzedaży. Inwestor, kupując lub krótko sprzedając opcje, zbudował portfel, który w chwili $T_1 = 2$ zapewni następującą wypłatę:

$$W(S_{T_1}) = \begin{cases} 0 & gdy\ S_{T_1} < 80\ lub\ S_{T_1} > 160 \\ S_{T_1} - 80 & gdy\ S_{T_1} \geq 80\ i\ S_{T_1} < 120 \\ 160 - S_{T_1} & gdy\ S_{T_1} \geq 120\ i\ S_{T_1} \leq 160 \end{cases}$$

Roczna stopa wolna od ryzyka wynosi $r = 2\%$, natomiast współczynnik zmienności cen akcji równy jest $\sigma = 15\%$. Jaką wartość będzie miał parametr grecki *delta* dla tak zbudowanego portfela? Proszę podać najbliższą wartość.





Opcja kupna $K = 80$

$$d_1 = \frac{\ln(90/80) + (0{,}02 + \frac{0{,}15^2}{2}) \cdot 2}{0{,}15\sqrt{2}} = 0{,}85$$

$$\Delta = \Phi(d_1) = 0{,}80234$$

Opcja kupna $K = 160$

$$d_1 = -2{,}42$$

$$\Delta = 0{,}00776$$

Pozycja krótka w opcjach kupna $K = 120$

$d_1 = -1,06$

$\Delta = -2\Phi(d_1) = -2 \cdot 0,14457$

Całość:

$\Delta_c = 0,80234 + 0,00776 - 2 \cdot 0,14457 = 0,52$

Odp. E

Zadanie 3.

Niech $T_0 = 0$. Rozważmy rynek Blacka-Scholesa, na którym dostępne są niepłacące dywidendy akcje $\mathcal{A}$ o cenie $S_{T_0} = 95$. Rozważmy binarną opcję kupna z funkcją wypłaty:

$$X_T = \begin{cases} \frac{S_T}{K_1} & S_T \in (K_1, K_2) \\ 0 & w\,p.p. \end{cases}.$$

Proszę podać cenę dla binarnej opcji kupna w chwili T_0, zakładając, iż $K_1 = 100$, $K_2 = 110$, $r = 5.0\%$, $\sigma = 0.2$, $T = 3$. Proszę podać najbliższą wartość.

$$V_0 = e^{-rT} E\left[\frac{S_T}{K_1}\right] = e^{-rT} \cdot \frac{1}{K_1} \cdot E[S_T \mathbb{1}\{S_T \in (K_1, K_2)\}]$$

$$S_T \sim LN\{\ln S_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T\} =$$

$$= LN\{\ln 95 + (0{,}05 - \frac{0{,}2^2}{2}) \cdot 3; 0{,}2^2 \cdot 3\} =$$

$$= LN\{4{,}6439; 0{,}12\}$$

$$ES_T \mathbb{1}\{S_T \in (K_1, K_2)\} = \int_{100}^{110} \frac{1}{\sqrt{0{,}12 \cdot 2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln(x) - 4{,}6439)^2}{2 \cdot 0{,}12}\right\} dx = 11{,}4758$$

$$V_0 = e^{-0{,}05 \cdot 3} \cdot \frac{11{,}4758}{100} = 0{,}0917 \approx 0{,}1$$

Odp. C

Zadanie 4.

Rozważmy model Hestona, w którym dynamika ceny aktywa zadana jest następująco:

$$dS_t = rS_t dt + S_t\sqrt{v_t}dW_t^1$$
$$dv_t = b(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}\left(\rho dW_t^1 + \sqrt{(1-\rho^2)}dW_t^2\right),$$

gdzie:

- W_t^1 oraz W_t^2 są niezależnymi procesami Browna,
- b, θ, σ są dodatnimi stałymi,
- $\rho \in [-1; 1]$ opisuje współczynnik korelacji między S a v.

Proszę wskazać, które z poniższych równań opisuje dynamikę procesu $X_t := \log(S_t)$.

Lemat Ito:

$$df(S_t) = f'(S_t)\,dS_t + \frac{1}{2}f''(S_t)(dS_t)^2$$

$$f(S_t) = \log(S_t)$$

$$f'(S_t) = \frac{1}{S_t} \qquad f''(S_t) = -\frac{1}{S_t^2}$$

$$dX_t = \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}(dS_t)^2 = \frac{1}{S_t}(rS_t\,dt + S_t\sqrt{v_t}\,dW_t^1) - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}(rS_t\,dt + S_t\sqrt{v_t}\,dW_t^1)^2 =$$

$$= r\,dt + \sqrt{v_t}\,dW_t^1 - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}S_t^2 v_t\,dt = r\,dt - \frac{1}{2}v_t\,dt + \sqrt{v_t}\,dW_t^1 =$$

$$= \left(r - \frac{1}{2}v_t\right)dt + \sqrt{v_t}\,dW_t^1$$

Odp. A

Zadanie 5.

W chwili 0, kwota K_0 została w całości zainwestowana w akcje pewnej spółki. Cena akcji tej spółki w chwili 0 wynosi S_0. Inwestor zakłada, że cena akcji tej spółki w chwili 1 ma rozkład logarytmiczno-normalny z $ES_1 = S_0$, $Var(S_1) = 0.14 \cdot S_0^2$. Przy tych założeniach oczekiwana wysokość straty z tej inwestycji, pod warunkiem, że nastąpi strata, wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

$$ES_1 = S_0$$

$$ES_1 = \exp\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\}$$

$$ES_1^2 = \exp\{2\mu + 2\sigma^2\}$$

$$Var(S_1) = \exp\{2\mu + 2\sigma^2\} - \exp\{2\mu + \sigma^2\}$$

$$\begin{cases} \exp\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\} = S_0 \\ \exp\{2\mu + 2\sigma^2\} - \exp\{2\mu + \sigma^2\} = 0{,}14\, S_0^2 \end{cases}$$

$$\exp\{2\mu + 2\sigma^2\} - \exp\{2\mu + \sigma^2\} = 0{,}14 \exp\{2\mu + \sigma^2\}$$

$$\frac{\exp\{2\mu + 2\sigma^2\}}{\exp\{2\mu + \sigma^2\}} - 1 = 0{,}14$$

$$\exp\{\sigma^2\} = 1{,}14$$

$$\sigma^2 = \ln 1{,}14$$

$$\mu + \frac{\sigma^2}{2} = \ln S_0$$

$$\mu = \ln S_0 - \frac{\ln 1{,}14}{2}$$

$$\mu = \ln S_0 - \ln 1{,}14^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{S_0}{\sqrt{1{,}14}}$$

$$E\left[\frac{K_0}{S_0}(S_0 - S_1) \,\middle|\, S_1 < S_0\right] = K_0 - \frac{K_0}{S_0} E[S_1 \mid S_1 < S_0]$$

$$E[S_1 \mid S_1 < S_0] = \frac{E[S_1 < S_0]}{P(S_1 < S_0)} = \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi\left\{\frac{\ln S_0 - \mu}{\sigma} - \sigma\right\}}{\Phi\left\{\frac{\ln S_0 - \mu}{\sigma}\right\}} =$$

$$= \frac{\exp\{\ln \frac{S_0}{\sqrt{1{,}14}} + \frac{1}{2}\ln 1{,}14\} \Phi\left\{\frac{\ln S_0 - \ln \frac{S_0}{\sqrt{1{,}14}}}{\sqrt{\ln 1{,}14}} - \sqrt{\ln 1{,}14}\right\}}{\Phi\left\{\frac{\ln S_0 - \ln \frac{S_0}{\sqrt{1{,}14}}}{\sqrt{\ln 1{,}14}}\right\}} =$$

$$= \frac{S_0\,\Phi\left\{\frac{\ln\sqrt{1{,}14}}{\sqrt{\ln 1{,}14}} - \sqrt{\ln 1{,}14}\right\}}{\Phi\left\{\frac{\ln\sqrt{1{,}14}}{\sqrt{\ln 1{,}14}}\right\}} = \frac{S_0\,\Phi\{-0{,}120929\}}{\Phi\{0{,}120929\}} = S_0\,\frac{0{,}421188}{0{,}571212} = 0{,}748827\cdot S_0$$

$$E\left[\frac{K_0}{S_0}(S_0 - S_1)\,\middle|\, S_1 < S_0\right] = K_0 - 0{,}748827\,K_0 = 0{,}25\,K_0$$

Odp. B

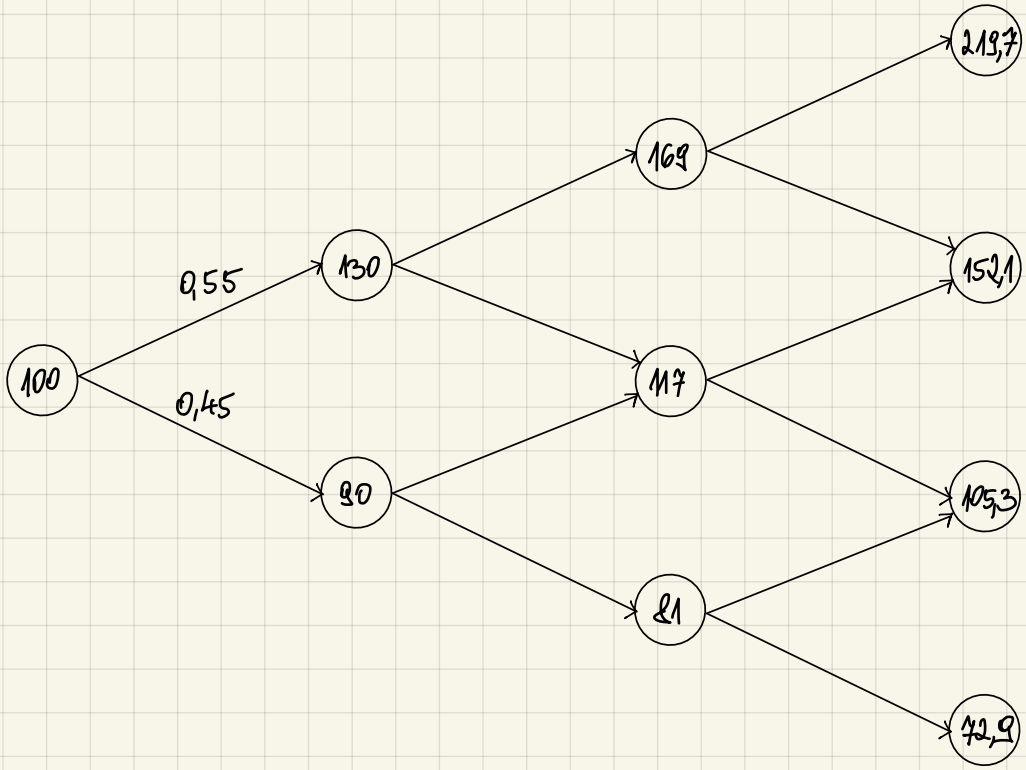
Zadanie 6.

Rozpatrujemy instrument finansowy wypłacający w chwili $t = 3$ kwotę $S_M - S_m$, gdzie S_i jest ceną akcji w chwili $t = i$, $i = 0, 1, 2, 3$, natomiast $S_M = max(S_0, S_1, S_2, S_3)$ i $S_m = min(S_0, S_1, S_2, S_3)$.

Inwestor wycenia instrument na drzewie dwumianowym przy następujących założeniach:

- $S_0 = 100$,
- w ciągu roku cena akcji rośnie o 30% lub spada o 10%,
- roczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 11.2\%$,
- rynek nie dopuszcza arbitrażu.

Jaką cenę instrumentu otrzyma inwestor wykorzystując opisaną metodę? Proszę podać najbliższą odpowiedź.



$$q_t = \frac{S_t e^{r\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}}{S^+_{t+\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}}$$

$$q_t = \frac{100 e^{0,112} - 90}{130 - 90} = 0,546282$$

$$1 - q_t = 0,453718$$

Ceny rosną lub maleją geometrycznie więc q_t w każdym okresie będzie takie samo.

Teraz trzeba rozpatrzeć wszystkie możliwe wypłaty i p-stwa dojścia do nich:

GGG: $V_T = 119,7$ $\quad p = q_t^3 = 0,163024$

GGD: $V_T = 69$ $\quad p = q_t^2 (1-q_t) = 0,135400$

GDG: $V_T = 52,1$ $\quad p = q_t^2 (1-q_t) = 0,135400$

DGG: $V_T = 62,1$ $\quad p = q_t^2 (1-q_t) = 0,135400$

GDD: $V_T = 30$ $\quad p = q_t (1-q_t)^2 = 0,112458$

DGD: $V_T = 27$ $\quad p = q_t (1-q_t)^2 = 0,112458$

DDG: $V_T = 24,3$ $\quad p = q_t (1-q_t)^2 = 0,112458$

DDD: $V_T = 27,1$ $\quad p = (1-q_t)^3 = 0,093402$

Pozostaje obliczyć wartość oczekiwaną i zaktualizować wynik na moment $t=0$:

$$V_0 = \exp\{-0,112 \cdot 3\} (119,7 \cdot 0,163024 + 69 \cdot 0,1354 + \ldots) = 40,01$$

Odp. D

Zadanie 7.

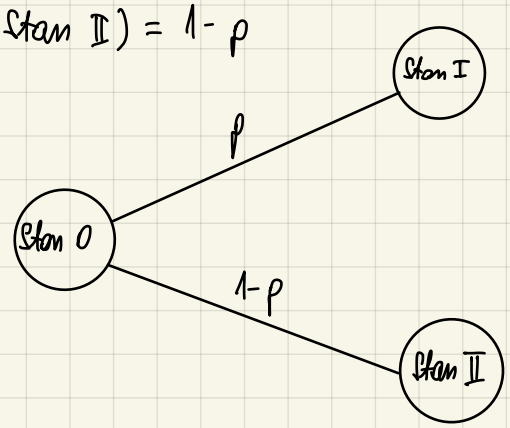
Rozpatrzmy rynek, na którym możliwe są tylko dwa przyszłe stany: I lub II. Na tym rynku dostępne są aktywa A i B oraz dwa aktywa jednostkowe. Funkcje wypłaty opisanych aktywów, w zależności od stanu, w którym znajduje się rynek podaje tabela:

Wypłata	Aktywo A	Aktywo B	Aktywo jednostkowe stanu I	Aktywo jednostkowe stanu II
Stan I	6.00	1.00	1.00	0.00
Stan II	1.00	3.00	0.00	1.00

Wiadomo ponadto, że w chwili obecnej cena aktywów A i B jest taka sama i wynosi 2.30. Ile wynosi na tym rynku stopa wolna od ryzyka? Zakładamy, że rynek nie dopuszcza arbitrażu. Podać najbliższą odpowiedź.

$P(\text{Stan I}) = p$

$P(\text{Stan II}) = 1-p$



A	B
6	1
1	3

$$\begin{cases} (6p + (1-p)\cdot 1)(1+r)^{-1} = 2,3 \\ (1p + (1-p)\cdot 3)(1+r)^{-1} = 2,3 \end{cases}$$

$$6p(1+r)^{-1} + (1-p)(1+r)^{-1} = p(1+r)^{-1} + 3(1-p)(1+r)^{-1} \quad /:(1+r)^{-1}$$

$$6p + 1 - p = p + 3 - 3p$$

$$6p - p - p + 3p = 3 - 1$$

$$7p = 2$$

$$p = \frac{2}{7}$$

$$\left(6\cdot\frac{2}{7} + \frac{5}{7}\right)(1+r)^{-1} = 2,3$$

$$(1+r)^{-1} = 2,3 \cdot \frac{7}{17}$$

$$r = 0,0559$$

Odp. A

Zadanie 8.

Kredyt jest spłacany przez $2n$ lat za pomocą równych rat w wysokości 250 na koniec każdego roku przy oprocentowaniu wynoszącym 4.94% w skali roku. Suma odsetek spłaconych w ratach 1 oraz $n+1$ wynosi 360. Ile wynoszą odsetki w 11. racie? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

$$V_{n+1} = V_1 (1+i)^n$$

$$\begin{cases} V_1 = R - I_1 \\ V_{n+1} = R - I_{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = R - I_1 \\ V_1 (1+i)^n = R - I_{n+1} \end{cases}$$

$$V_1 + V_1 (1+i)^n = 2R - (I_1 + I_{n+1})$$

$$V_1 \left(1 + (1+i)^n\right) = 2 \cdot 250 - 360 = 140$$

$$I_1 = K_0 \, i$$

$$K_0 = R \, a_{\overline{2n}|i} = R \frac{1-(1+i)^{-2n}}{i}$$

$$I_1 = R\left[1 - (1+i)^{-2n}\right]$$

$$V_1 = R - R\left[1 - (1+i)^{-2n}\right] = R\left[1 - 1 + (1+i)^{-2n}\right] = R(1+i)^{-2n}$$

$$250 (1+i)^{-2n} \left(1 + (1+i)^n\right) = 140$$

$$n = 19$$

$$V_1 = 250 \cdot 1{,}0494^{-2 \cdot 19} = 40{,}0110$$

$$I_{11} = R - V_{11} = R - V_1 (1+i)^{10} = 250 - 40{,}011 \cdot 1{,}0494^{10} = 185{,}198$$

Odp. D

Zadanie 9.

Stopa wolna od ryzyka wynosi 2% (kapitalizacja ciągła), stopa dywidendy dla akcji $\mathcal{A}$ wynosi 4.5% (kapitalizacja ciągła), a dywidendy są reinwestowane w sposób ciągły w akcje. Inwestor chce zreplikować 9 miesięczny kontrakt forward na dwadzieścia akcji $\mathcal{A}$ zajmując krótką pozycję na rynku długu i jednocześnie kupując akcje $\mathcal{A}$. Ile sztuk akcji $\mathcal{A}$ powinno znaleźć się w portfelu replikacyjnym? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

W celu replikacji takiego kontraktu w momencie $t=0$ trzeba pożyczyć Ke^{-rT} gotówki i kupić e^{-dT} jednostek akcji.

$$20e^{-0,045\cdot\frac{9}{12}} = 19,3363$$

Odp. B

Zadanie 10.

Na rynku zupełnym kwotowane są m.in. następujące ceny obligacji wolnych od ryzyka:

- cena obligacji 3-letniej z rocznym kuponem 4% o nominale 10 000 zł wynosi 10 340 zł,
- cena obligacji 3-letniej z rocznym kuponem 6% o nominale 10 000 zł wynosi 10 910 zł,
- cena zerokuponowej obligacji 2-letniej o nominale 10 000 zł wynosi 9 550 zł.

Wyemitowano 2-letnią obligację z rocznym kuponem 9% o nominale 10 000 zł. Na koniec drugiego okresu emitent obligacji może zbankrutować z prawdopodobieństwem 20%, wówczas nominał nie zostanie spłacony (na koniec 1 okresu prawdopodobieństwo bankructwa wynosi 0%). Jednocześnie na rynku skwotowano produkt pochodny credit default swap (CDS), z którego wypłata wynosi 1 000 zł na koniec drugiego okresu, jeśli emitent ww. obligacji zbankrutuje lub 0 zł jeśli do bankructwa nie dojdzie. Cena tego kontraktu wynosi 170 zł. Ile powinna wynosić cena ww. obligacji 2-letniej obarczonej ryzykiem w przypadku braku arbitrażu? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

Obliczamy wyznniki dyskontujące:

$$\begin{cases} 10340 = 400 \cdot d_1 + 400 \cdot d_2 + 10400 \cdot d_3 \\ 10910 = 600 \cdot d_1 + 600 \cdot d_2 + 10600 \cdot d_3 \\ 9550 = 10000 \cdot d_2 \end{cases}$$

$d_1 = 0{,}975$

$d_2 = 0{,}955$

$d_3 = 0{,}92$

Czyli ceny obligacji zerokuponowej z $T=1$ wynosi 9750 a z $T=3$ 9200.

Teraz trzeba zbudować portfel replikujący wypłatę z obligacji obarczonej ryzykiem.

n_1 - liczba obligacji zerokuponowych zapadalnych w $T=1$

n_2 - liczba obligacji zerokuponowych zapadalnych w $T=2$

n_D - liczba CDS

$$\begin{cases} t=1: & 900 = n_1 \cdot 10000 + n_2 \cdot 0 + n_D \cdot 0 \\ t=2 \text{ brak bankructwa}: & 10900 = n_1 \cdot 0 + n_2 \cdot 10000 + n_D \cdot 0 \\ t=2 \text{ bankructwo}: & 0 = n_1 \cdot 0 + n_2 \cdot 10000 + n_D \cdot 1000 \end{cases}$$

$n_1 = 0,09$

$n_2 = 1,09$

$n_3 = -10,9$

Cena obligacji wynosi to:

$0,09 \cdot 9750 + 1,09 \cdot 9550 - 10,9 \cdot 170 = 9434$

Odp. B