Zadanie 1.

Ryzyko X ma rozkład z atomami: $\Pr(X = 0) = 0.7$
$\Pr(X = 1) = 0.1$
i gęstością: $f_X(x) = 0.2$ dla $x \in (0, 1)$

Ryzyko Y ma rozkład z atomami: $\Pr(Y = 0) = 0.7$
$\Pr(Y = 2) = 0.1$
i gęstością: $f_Y(x) = 0.1$ dla $x \in (0, 2)$

Jeśli X i Y są niezależne, to $\Pr(X + Y > 2)$ wynosi:

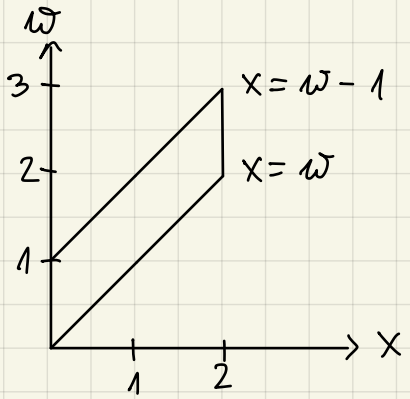
$W = X + Y \qquad F_X(x) = 0.7 + 0.2x$ dla $x \in (0.1)$

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(w - x)\, dF_Y(x) =$$

$$= F_X(w-0)P(Y=0) + F_X(w-2)P(Y=2) + \int_0^2 F_X(w-x)\cdot 0.1\, dx =$$

$$= 0.7 F_X(w) + 0.1 F_X(w-2) + 0.1 \int_0^2 F_X(w-x)\, dx$$

$$\begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < w - x < 1 \end{cases}$$
$w > x$
$w < x + 1$



Dla $w \in [2, 3)$

$$F_W(w) = 0.7 \cdot 1 + 0.1(0.7 + 0.2(w-2)) + \int_0^{w-1} 0.1\, dx +$$

$$+ \int_{w-1}^{2} 0.1(0.7 + 0.2(w-x))\, dx =$$

$$= 0.7 + 0.07 + 0.02w - 0.04 + 0.1w - 0.1$$

$$+ \int_{w-1}^{2} 0.07 + 0.02w - 0.02x\, dx =$$

$$= 0.63 + 0.12w + \left[0.07x + 0.02wx - 0.02\frac{x^2}{2}\right]_{w-1}^{2} =$$

$$= 0.63 + 0.12w + [0.07 \cdot 2 + 0.02 \cdot 2w - 0.01 \cdot 4 -$$
$$- 0.07(w-1) - 0.02w(w-1) + 0.01(w-1)^2]$$

$$= 0.63 + 0.12w + [0.14 + 0.04w - 0.04 -$$
$$- 0.07w + 0.07 - 0.02w^2 + 0.02w + 0.01(w^2 - 2w + 1)]$$

$$= 0.63 + 0.12w + 0.17 - 0.01w - 0.02w^2 +$$
$$+ 0.01w^2 - 0.02w + 0.01 =$$

$$= 0.81 + 0.09w - 0.01w^2$$

$$F_W(2) = 0.81 + 0.18 - 0.04 = 0.95$$

Szukane p-stwo to $1 - 0.95 = 0.05$

DRUGA METODA

Korzystamy z wzoru na p-stwo całkowite:

$$P(X+Y>2) = \sum P(X+Y>2 \mid X=x)P(X=x) + \int P(X+Y>2 \mid X=x) f_X(x)\,dx$$

- $P(X+Y>2 \mid X=0)P(X=0) = P(Y>2)P(X=0) = 0 \cdot 0.7 = 0$
- $P(X+Y>2 \mid X=1)P(X=1) = P(Y>1)P(X=1) = \left[\int_1^2 0.1\,dx + 0.1\right] \cdot 0.1 =$
  $= 0.2 \cdot 0.1 = 0.02$

Dla $0 < X < 1$

- $P(X+Y>2) = \int_0^1 P(X+Y>2 \mid X=u) f_X(u)\,du = \int_0^1 P(Y>2-u) \cdot 0.2\,du$

$$= 0.2 \int_0^1 \int_{2-u}^2 0.1\,dx + 0.1\,du = 0.2 \int_0^1 0.1u + 0.1\,du =$$
$$= 0.02 \int_0^1 u + 1\,du = 0.02 \cdot \left(\frac{u^2}{2} + 1\right)\Big|_0^1 = 0.03$$

$$P(X+Y>2) = 0 + 0.02 + 0.03 = 0.05$$

Wnioskując drugą zm. też działa:

- $P(X+Y>2 \mid Y=0)P(Y=0) = P(X>2)P(Y=0) = 0 \cdot 0.7 = 0$
- $P(X+Y>2 \mid Y=2)P(Y=2) = P(X>0)P(Y=2) = (1-P(X=0)) \cdot 0.1 =$

$$= (1-0.7) \cdot 0.1 = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03$$

Dla $0 < Y < 2$:

- $P(X+Y>2) = \int_0^2 P(X+Y>2 \mid Y=u) f_Y(u)\, du = \int_0^2 P(X>2-u) \cdot 0.1\, du = \left| \begin{array}{l} \text{dla } u<1: \\ P(X>2-u)=0 \end{array} \right| =$

$$= 0.1 \int_1^2 \int_{2-u}^1 0.2\, dx + 0.1\, du = 0.1 \int_1^2 0.2x \Big|_{2-u}^1 + 0.1\, du =$$

$$= 0.1 \int_1^2 0.2 - 0.4 + 0.2u + 0.1\, du = 0.1 \int_1^2 0.2u - 0.1\, du =$$

$$= 0.1 \left[0.2 \frac{u^2}{2} - 0.1u \right]_1^2 = 0.1(0.4 - 0.2 - 0.1 + 0.1) = 0.02$$

$P(X+Y>2) = 0 + 0.03 + 0.02 = 0.05$

Zadanie 2.
Dla pewnego ryzyka wartość pojedynczej szkody ma rozkład określony na zbiorze liczb naturalnych (bez zera), a łączna wartość szkód X ma złożony rozkład Poissona. Składka netto za nadwyżkę łącznej szkody X ponad k dla wybranych wartości k wynosi:

k	5	6	8	9
$E[(X-k)_+]$	0.285	0.203	0.091	0.054

Prawdopodobieństwo, iż łączna wartość szkód X wyniesie 6, 7 lub 8 wynosi:

$$E[(X-k)_+] = \int_k^\infty (x-k) f_X(x)\,dx = \int_k^\infty x f_X(x)\,dx - k\int_k^\infty f_X(x)\,dx =$$

$$= EX\mathbb{1}_{(X>5)} - kP(X>5)$$

1) $0.285 = EX\mathbb{1}_{(X>5)} - 5P(X>5)$

2) $0.203 = EX\mathbb{1}_{(X>6)} - 6P(X>6)$

3) $0.091 = EX\mathbb{1}_{(X>8)} - 8P(X>8)$

4) $0.054 = EX\mathbb{1}_{(X>9)} - 9P(X>9)$

(1) − (2):

$$0.082 = EX\mathbb{1}_{(X=6)} - 5P(X=6) + P(X>6) = 6\cdot P(X=6) - 5P(X=6) + P(X>6) =$$

$$= P(X=6) + P(X>6) = P(X>5)$$

(3) − (4):

$$0.037 = EX\mathbb{1}_{(X=9)} - 8P(X=9) + P(X>9) = 9P(X=9) - 8P(X=9) + P(X>9) =$$

$$= P(X=9) + P(X>9) = P(X>8)$$

$$P(X\in\{6,7,8\}) = P(X>5) - P(X>8) = [(1)-(2)] - [(3)-(4)] =$$

$$= 0.082 - 0.037 = 0.045$$

Odp. E

Zadanie 3.
W pewnym rodzaju ubezpieczenia każde ryzyko generuje szkodę (co najwyżej jedną) z takim samym prawdopodobieństwem. Ryzyka generują szkody o wartościach będących dodatnimi zmiennymi losowymi o gęstościach wykładniczych:
$f_{Y|B=\beta}(y) = \beta e^{-\beta y}, \quad y > 0$
Populacja ryzyk charakteryzuje się jednak dużym zróżnicowaniem skali tych ryzyk, reprezentowanej przez parametr β rozkładu.
Jeśli przyjmiemy, iż rozkład parametru skali w populacji ryzyk ma na półosi dodatniej gęstość:
$g_B(\beta) = \beta e^{-\beta}, \quad \beta > 0$
to dla losowo dobranego ryzyka z populacji, prawdopodobieństwo iż wartość szkody przekroczy 10 (o ile do szkody dojdzie) wynosi w przybliżeniu:

Szukamy $P(Y > 10)$, ze wzoru na p-stwo całkowite:

$$P(Y>10) = \int_0^\infty P(Y>10 \mid B=\beta)\, g_B(\beta)\, d\beta = \int_0^\infty (1 - P(Y \le 10))\, g_B(\beta)\, d\beta =$$

$$= \int_0^\infty e^{-10\beta} \beta e^{-\beta}\, d\beta = \int_0^\infty e^{-11\beta} \beta^{2-1}\, d\beta =$$

$$= \frac{\Gamma(2)}{11^2} = \frac{1}{121}$$

Odp. C

Zadanie 4.
Niech T_n oznacza moment zajścia n-tej szkody, w procesie pojawiania się szkód, który startuje w momencie $T_0 = 0$. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.
Likwidacja n-tej szkody następuje w momencie $T_n + D_n$.
Załóżmy, że zmienne losowe $T_1, D_1, (T_2 - T_1), D_2, (T_3 - T_2), D_3, \dots$, są niezależne, przy czym:

- $T_1, (T_2 - T_1), (T_3 - T_2), \dots$ mają taki sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1/200;
- $D_1, D_2, D_3, \dots$ mają taki sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1.
- Jednostką pomiaru czasu jest rok.

Niech N_0 oznacza liczbę szkód zaszłych i zlikwidowanych w ciągu pierwszego roku, zaś N_1 liczbę szkód zaszłych w ciągu pierwszego roku, i na koniec tego roku wciąż oczekujących na likwidację.
Wobec tego $cov(N_1, N_0)$ wynosi:

$Cov(N_1, N_0) = E(N_1 N_0) - (EN_1)(EN_0)$

Więc mamy do policzenia EN_0, EN_1, $E(N_1 N_0)$

Najpierw EN_0. Warunkujemy po całkowitej liczbie szkód w roku.

$EN_0 = \sum_k E(N_0 | N_0 + N_1 = k) P(N_0 + N_1 = k) =$ [ponieważ szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona] =

$= \sum_k E(N_0 | N_0 + N_1 = k) e^{-200} \cdot \frac{200^k}{k!}$

P-stwo, że szkoda, która zdarzyła się w momencie $0 < t < 1$ zostanie zlikwidowana w ciągu tego samego roku wynosi:

$P(t + D_1 < 1) = P(D_1 < 1 - t) = 1 - e^{t-1}$ (rozkład $D_1 \sim Exp(1)$)

Załóżmy, że mamy k szkód, z których każda zdarzyła się w momencie $U(0,1)$ (losowanie niezależne). Niech N oznacza liczbę z tych k szkód, które zostały zlikwidowane w tym samym roku.

$EN = P($pierwsza szkoda została zlikwidowana w tym samym roku$)$ +

$+ P($druga szkoda ...$) + P($k-ta szkoda ...$) =$

$= k \cdot P($x-ta szkoda została zlikwidowana w tym samym roku$) =$

$=$ [warunkowanie po momencie szkody] $=$

$$= k \int P(\text{szkoda została} \ldots \mid T = t) \cdot 1 \, dt =$$

$$= k \int 1 - e^{t-1} \, dt =$$

$$= k - \frac{k(e-1)}{e}$$

Z powyższego wynika, że rozkład warunkowy $N_0 \mid N_0 + N_1 = k$ to suma k niezależnych zm. zero-jedynkowych takich, że $P(X_i = 1) = 1 - \frac{e-1}{e} = \frac{1}{e}$

Wracamy do głównego rachunku

$$EN_0 = \sum_k E(N_0 \mid N_0 + N_1 = k) \, e^{-200} \frac{200^k}{k!} = [\text{ustaliliśmy rozważania}] =$$

$$= \sum_k k - \frac{k(e-1)}{e} e^{-200} \frac{200^k}{k!} = \left(1 - \frac{e-1}{e}\right) \sum_k k \, e^{-200} \frac{200^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{e} E(\text{Poiss}(200)) =$$

$$= \frac{200}{e}$$

$$EN_1 = E(N_0 + N_1) - EN_0 = E(\text{Poiss}(200)) - \frac{200}{e} = \frac{200(e-1)}{e}$$

$$E(N_0 N_1) = E[(N_0 + N_1) N_0] - EN_0^2$$

Policzmy najpierw $E((N_0 + N_1) N_0)$. Mamy:

$$E((N_0 + N_1) N_1) = \sum_k E[(N_0 + N_1) N_0 \mid N_0 + N_1 = k] \, e^{-200} \frac{200^k}{k!} =$$

$$= \sum_k k \, E(N_0 \mid N_0 + N_1 = k) \, e^{-200} \frac{200^k}{k!} =$$

$$= \sum_k k \left(k - \frac{k(e-1)}{e}\right) e^{-200} \frac{200^k}{k!} =$$

$$= \frac{1}{e} \sum_k k^2 e^{-200} \frac{200^k}{k!} =$$

$$= \frac{1}{e}(200^2 + 200) = \frac{200 \cdot 201}{e}$$

Policzmy teraz EN_0^2:

$$EN_0^2 = \sum_k E(N_0^2 \mid N_0 + N_1 = k) \, e^{-200} \frac{200^k}{k!} =$$

$$= \sum_k E(X_1 + \ldots + X_k)^2 \, e^{-200} \frac{200^k}{k!} =$$

$$= \sum_k k E X_1^2 + k(k-1) E(X_1 X_2) \, e^{-200} \frac{200^k}{k!} =$$

$$= 200 \, E X_1^2 + 200 \cdot 200 \, E(X_1 X_2) =$$

$$= \frac{200}{e} + \frac{200 \cdot 200}{e^2}$$

Ostatecznie :

$$\mathrm{Cov}(N_1, N_0) = E((N_0 + N_1) N_0) - E N_0^2 - E(N_0) E(N_1) =$$

$$= \frac{200 \cdot 201}{e} - \frac{200}{e} - \frac{200 \cdot 200}{e^2} - \frac{200}{e} \cdot \frac{200(e-1)}{e} =$$

$$= \frac{200}{e} \left(201 - 1 - \frac{200}{e} - 200 + \frac{200}{e}\right) = 0$$

Odp. E

Zadanie 5.
Likwidacja szkody zaistniałej w roku t następuje w tym samym roku z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, a w roku $(t+k)$ z prawdopodobieństwem danym dla każdego $k = 1,2,3,\ldots$ wzorem $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.
Wartość każdej szkody wynosi 1.
W latach 2019, 2020 i 2021 zaistniało odpowiednio 180, 210 oraz 240 szkód.
Wyznacz stan rezerwy szkodowej na koniec roku 2021, jeśli stan tej rezerwy na początek roku 2019 wynosił 240.

Wyobraźmy sobie, że w pewnym roku zaszło N szkód. Załóżmy, że przed tym rokiem, ani po nim nie zachodziły żadne szkody. Oczekiwana liczba szkód, które zostały zlikwidowane w tym roku wynosi $\frac{N}{3}$, czyli szkody niezlikwidowane to $N-\frac{N}{3}$

Oczekiwana liczba szkód, które zostały zlikwidowane w danym roku i roku następnym to $\frac{N}{3}+\frac{N}{3}$, czyli szkody niezlikwidowane to $N-\frac{N}{3}-\frac{N}{3}$

Ogólnie, oczekiwana liczba szkód, które zostały zlikwidowane w ciągu roku i $k-1$ następnych lat to:

$$\frac{N}{3}+\frac{N}{3}+\frac{N}{6}+\frac{N}{12}+\ldots\frac{N}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = N - N\,\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$ (suma ciągu geometrycznego)

Czyli z tego wynika, że:

liczba szkód, które nie zostały zlikwidowane w ciągu $k-1$ lat wynosi:
$N\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$,

liczba szkód, które nie zostały zlikwidowane w ciągu k lat wynosi:
$N\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$

Czyli ta liczba spada dwukrotnie rok do roku.

Czyli w przypadku, gdy nie mamy żadnych nowych szkód, rezerwa szkodowa spada dwukrotnie rok do roku.

Wracamy do zadania

Rezerwa szkodowa na koniec 2021 roku od szkód zaistniałych przed

początkiem 2019:

$240 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 30$ (bo spadają dwukrotnie rok do roku)

Reserwa szkodowa na koniec 2021 roku od szkód zaistniałych w 2019:

$120 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\right) = 120 \cdot \frac{1}{6} = 30$

Reserwa szkodowa na koniec 2021 roku od szkód zaistniałych w 2020:

$210 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)\right) = 210 \cdot \frac{1}{3} = 70$

Reserwa szkodowa na koniec 2021 roku od szkód zaistniałych w 2021:

$240 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 240 \cdot \frac{2}{3} = 160$

Ostatecznie $30 + 30 + 70 + 160 = 290$

Odp. B

Można też wyjść wzorku z rozważań $N \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{h-1}$

- $120 \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 30$
- $210 \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = 70$
- $240 \cdot \frac{2}{3} = 160$

Zadanie 6.
W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym nadwyżka początkowa wynosi $2\frac{1}{2}$, składka roczna wynosi 1, zaś łączne wartości szkód w kolejnych latach $W_1, W_2, W_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe o identycznym rozkładzie danym wzorem:
$Pr(W_1 = k) = (1-q)q^k, \quad k = 0,1,2,\ldots,$
gdzie $q < \frac{1}{2}$.
Prawdopodobieństwo ruiny w tym modelu dane jest wzorem:

Wzór dokładny na p-stwo ruiny

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]}$$

$u = 2.5$; $c = 1$

$$M_W(r) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kr}(1-q)q^k = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty}(e^r q)^k = \frac{1-q}{1-e^r q}$$

Szukamy wsp. dopasowania R czyli dodatniego rozwiązania równania:

$$M_W(r) = e^{cr} = e^r$$

$$\frac{1-q}{1-e^r q} = e^r$$

$$1-q = e^r - qe^{2r}$$

$$x = e^r$$

$$1-q = x - qx^2$$

$$qx^2 - x + 1 - q = 0$$

$$\Delta = 1 - 4q(1-q) = 1 - 4q + 4q^2 = (2q-1)^2$$

$$x_1 = \frac{1-2q+1}{2q} = \frac{1-q}{q}$$

$$x_2 = \frac{1+2q-1}{2q} = 1$$

$$1 = e^r \Rightarrow r = 0$$

$$\frac{1-q}{q} = e^{r} \Rightarrow R = \ln\left(\frac{1-q}{q}\right)$$ - dodatnie rozwiązanie

$$-U(T) = Y + \frac{1}{2}$$

$$E\left(e^{-RU(T)}\right) = E\left(e^{RY+\frac{R}{2}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{Rk+\frac{R}{2}} (1-q) q^{k} = e^{\frac{R}{2}} (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} (e^{R} q)^{k} =$$

$$= e^{\frac{R}{2}} (1-q) \cdot \frac{1}{1-e^{R} q} = \left(\frac{1-q}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1-q}{q} = \left(\frac{1-q}{q}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E\left[e^{-RU(T)}\right]} = \frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^{-\frac{5}{2}}}{\left(\frac{1-q}{q}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{1-q}{q}\right)^{-4} = \left(\frac{q}{1-q}\right)^{4}$$

Odp. D

Zadanie 7.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela, a więc proces:

$$U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu_Y t - S_{N(t)}, \text{ gdzie:}$$

- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ (lub zero, jeśli $n = 0$)
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie danym na półosi dodatniej gęstością: $f_Y(y) = \dfrac{\alpha v^\alpha}{(v+y)^{\alpha+1}}$.

Parametry procesu wynoszą:

- $\alpha = 2$, $v = 3$ oraz $\theta = \dfrac{1}{5}$.

Wiemy że prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u)$ jest funkcją nadwyżki początkowej u. Wiadomo, że dla odpowiednio dobranych parametrów a, b, c funkcja ta spełnia zależność:

$$\lim_{u\to\infty} \Psi(u)(1+au)^b = c$$

Parametry tej zależności wynoszą:

W przypadku gdy rozkład szkody jest z rozkładu Pareto / lognormalny / Weibull / etc.

(w praktyce te rozkłady, których ogony zbiegają do 0 wolniej niż wykładniczo, więc nie da się policzyć wsp. dopasowania) zachodzi następujący fakt:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\Psi(u)}{1-F_L(u)} = \frac{1}{\theta},$$

gdzie: $\Psi(u)$ – p-stwo ruiny

$1-F_L(u) = \frac{1}{EY}\int_u^\infty (1-F_Y(y))dy$ – ogon dystrybuanty pierwszego spadku poniżej poziomu początkowego

θ – względny narzut bezpieczeństwa

W przypadku zadania:

$$f_Y(y) = \frac{18}{(3+y)^3}$$

$$1-F_Y(y) = \int_y^\infty \frac{18}{(3+t)^3}\,dt = -\frac{9}{(3+t)^2}\Big|_y^\infty = \frac{9}{(3+y)^2}$$

$$EY = \int_0^\infty 1-F_Y(y)\,dy = \int_0^\infty \frac{9}{(3+y)^2}\,dy = -\frac{9}{3+y}\Big|_0^\infty = 3$$

$$1 - F_L(u) = \frac{1}{3} \int_u^{\infty} 1 - F_Y(y)\, dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{3+u} = \frac{3}{3+u}$$

Nasze tw. mówi, że:

$$\lim_{u \to \infty} \psi(u) \left(1 + \frac{1}{3} u\right)^1 = 5$$

Stąd:

$a = \frac{1}{3}$, $b = 1$, $c = 5$

Odp. A

Zadanie 8.

W pewnym ubezpieczeniu liczba szkód, które w ciągu t lat wygeneruje ubezpieczony charakteryzujący się wartością λ parametru ryzyka Λ jest procesem Poissona o intensywności λ (rocznie).

Zakładamy, że rozkład wartości parametru ryzyka Λ w populacji wszystkich ubezpieczonych (tak naszych, jak i tych, którzy ubezpieczają się u konkurentów) dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Lambda(\lambda) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)$, gdzie $(\alpha, \beta) = (2, 6)$

Załóżmy, że w pierwszym roku tak nasza firma, jak i firmy konkurencyjne proponowały wszystkim ubezpieczenie w zamian za tę samą składkę. W drugim roku nasza firma kontynuuje praktykę z roku poprzedniego, natomiast konkurenci wprowadzili składki niższe od przeciętnej za bezszkodowy przebieg ubezpieczenia w pierwszym roku, zaś wyższe od przeciętnej odpowiednio dla ubezpieczonych, którzy mieli w pierwszym roku szkody. Zakładając, że wszyscy ubezpieczeni wybiorą tego ubezpieczyciela, który jest dla nich tańszy, oczekiwana częstotliwość szkód w drugim roku (w przeliczeniu na jednego ubezpieczonego) w naszej firmie wzrośnie w stosunku do pierwszego roku o:

N - liczba szkód

$N \sim Poiss(\lambda)$

$\Lambda \sim \Gamma(2, 6)$

$E(\Lambda) = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{3}$

$$E(\Lambda \mid N>0) = \frac{\int_0^\infty \lambda P(N>0 \mid \Lambda=\lambda) f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda}{P(N>0)}$$

$$\int_0^\infty \lambda P(N>0 \mid \Lambda=\lambda) f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty \lambda (1 - P(N=0 \mid \Lambda=\lambda)) f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty \lambda (1 - e^{-\lambda}) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}\, d\lambda =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha+1-1} e^{-(\beta+1)\lambda}\, d\lambda \right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\beta+1)^{\alpha+1}} \right) = \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+1)^{\alpha+1}} \right) = \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{6^2}{7^3} = 0.1234$$

$$P(N>0) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda}) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}\, d\lambda =$$

$$= 1 - \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} e^{-(\beta+1)\lambda}\, d\lambda =$$

$$= 1 - \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta+1)^{\alpha}} = 1 - \frac{\beta^{\alpha}}{(\beta+1)^{\alpha}} = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{13}{49}$$

$$E(1 \mid N > 0) = \frac{0.1234}{\frac{13}{49}} = 0.4651$$

O ile wzrósł wskaźnik? $\longrightarrow \frac{0.4651}{\frac{1}{3}} = 1.3953$

Odp. C

Zadanie 9.

Niech N oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu roku z pewnego ubezpieczenia, z czego:

- N_0 to liczba szkód zgłoszonych przed końcem tego roku
- N_1 to liczba szkód które zostaną zgłoszone w ciągu lat następnych.

Oczywiście zachodzi $N = N_0 + N_1$.

Wiadomo, że zmienne N_0 oraz N_1 są warunkowo (przy ustalonej wartości parametru ryzyka Λ) niezależne i mają rozkłady Poissona z parametrami odpowiednio:

- Λq - zmienna N_0,
- Λp - zmienna N_1,

gdzie $p = 1 - q$ to liczba z przedziału $(0, 1)$.

O parametrze ryzyka Λ wiadomo, że:

- ma rozkład Gamma o wartości oczekiwanej $\frac{\alpha}{\beta}$ i wariancji $\frac{\alpha}{\beta^2}$

Oczekiwana liczba szkód zaszłych w ciągu roku pod warunkiem, że do końca roku zgłoszono n szkód, a więc:

$$E(N|N_0 = n)$$

wynosi:

$$E(N|N_0=n) = E(N_0+N_1|N_0=n) = E(n+N_1|N_0=n) = n + E(N_1|N_0=n)$$

$$E(N_1|N_0=n) = E[E(N_1|\Lambda=\lambda)|N_0=n] = E(\Lambda p|N_0=n) =$$

$$= p\,E[\Lambda|N_0=n]$$

$$P(\Lambda|N_0) = c\cdot P(N_0|\Lambda=\lambda) = c\cdot\frac{(\lambda q)^n}{n!}e^{-\lambda q}\cdot\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda} =$$

$$= c\cdot\lambda^n e^{-\lambda q}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda} =$$

$$= c\cdot\lambda^{\alpha+n-1}e^{-(\beta+q)\lambda}$$

Czyli $\Lambda|N_0 \sim \Gamma(\alpha+n, \beta+q)$

$$E(N_1|N_0=n) = p\,E[\Lambda|N_0=n] = p\cdot\frac{\alpha+n}{\beta+q}$$

Ostatecznie:

$$E(N|N_0=n) = n + E(N_1|N_0=n) = n + \frac{p\alpha+pn}{\beta+q}$$

Zadanie 10.
Ubezpieczyciel prowadzi dwa portfele ubezpieczeń. W obu portfelach pojedyncze ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona z taką samą intensywnością λ. Portfele różnią się rozkładem wartości pojedynczej szkody i liczbą ryzyk w portfelu (n_1 i n_2 odpowiednio). Stosunkowy narzut na składkę netto dla ryzyk w obu portfelach jest ten sam i wynosi θ. W rezultacie parametry modelu są następujące:

- <u>1 portfel:</u>

intensywność łączna $n_1\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 2\exp(-2y)$, składka za jedno ryzyko $\frac{1}{2}(1+\theta)\lambda$;

- <u>2 portfel:</u>

intensywność łączna $n_2\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 5\exp(-5y)$, składka za jedno ryzyko $\frac{1}{5}(1+\theta)\lambda$.

Jeśli wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela jest postaci:
$\Psi(u) = \frac{2}{3}\exp(-u) + \frac{1}{12}\exp\left(-\frac{5}{2}u\right), \quad u \geq 0,$
to wartości parametrów modelu $\left(\theta, \ \frac{n_1}{n_1+n_2}\right)$ wynoszą:

Mieszanina rozkładów wykładniczych (w klasycznym modelu teorii ruiny)

$$f_Y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \exp(-\beta_i x), & x > 0 \\ 0, & \text{p.p} \end{cases}$$

Zakładamy, że

1) $\beta_n > \dots > \beta_2 > \beta_1 > 0$,

2) $w_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

Wówczas: $\Psi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \exp(-r_i u)$,

gdzie $r_1, r_2, \dots, r_n$ to n największych rozwiązań równania:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\beta_i}{\beta_i - r} = 1 + (1+\theta) EY \cdot r$$

Rozwiązanie

<u>1 portfel</u>

$f(y) = 2\exp(-2y)$

<u>2 portfel</u>

$f(y) = 5\exp(-5y)$

$\psi(u) = \frac{2}{3} \exp(-u) + \frac{1}{12} \exp(-\frac{5}{2} u), \quad u \geq 0$

Czyli:

$\beta_1 = 2$

$\beta_2 = 5$

$\nu_1 = 1$

$\nu_2 = \frac{5}{2}$

$EY = \omega_1 EY_1 + \omega_2 EY_2 = \omega_1 \cdot \frac{1}{2} + \omega_2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \omega_1 + \frac{1}{5}$

Rozwiązujemy układ równań dla $\nu = \nu_1$ i $\nu = \nu_2$

$\nu_1 = 1$

$$\omega_1 \cdot \frac{2}{2-1} + (1-\omega_1) \frac{5}{5-1} = 1 + (1+\theta)\left(\frac{3}{10}\omega_1 + \frac{1}{5}\right)$$

$\nu_2 = \frac{5}{2}$

$$\omega_1 \cdot \frac{2}{2-\frac{5}{2}} + (1-\omega_1) \frac{5}{5-\frac{5}{2}} = 1 + (1+\theta) \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{10}\omega_1 + \frac{1}{5}\right)$$

Otrzymujemy:

$\omega_1 = \frac{1}{21}$

$\theta = \frac{1}{3}$ Odp. C

DRUGA METODA

Wzorek (przypadek erlangowej rozkładu początkowej)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{1+\theta}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{1}{1+\theta}$$

$$\frac{9}{12} = \frac{1}{1+\theta}$$

$$\theta = \frac{1}{3}$$

$$w_1 \cdot \frac{2}{2-1} + (1 - w_1)\frac{5}{5-1} = 1 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{10} w_1 + \frac{1}{5}\right)$$

$$2w_1 + \frac{5}{4}(1 - w_1) = 1 + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{10} w_1 + \frac{1}{5}\right)$$

$$2w_1 + \frac{5}{4} - \frac{5}{4} w_1 = 1 + \frac{2}{5} w_1 + \frac{4}{15}$$

$$\frac{7}{20} w_1 = \frac{1}{60}$$

$$w_1 = \frac{1}{21}$$

Zauważmy, że $\frac{n_1}{n_1+n_2} + \frac{n_2}{n_1+n_2} = 1$ oraz, że wartości $\frac{n_1}{n_1+n_2}$ i $\frac{n_2}{n_1+n_2}$ określają ilościowy skład portfela. Zatem te dwa portfele tworzą portfel, w którym wartość pojedynczej szkody jest daną gęstością będącą mieszanką gęstości rozkładów wykładniczych, tzn. ma gęstość daną wzorem:

$$f(y) = w_1 \beta_1 \exp(-\beta_1 y) + w_2 \beta_2 \exp(-\beta_2 y),$$

gdzie $w_1 = \frac{n_1}{n_1+n_2}$, $w_2 = \frac{n_2}{n_1+n_2}$.