Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása

2019. május 6.

Nemlineáris egyenletrendszerek

Az egyenletrendszer a következő formában adott:

$$f_i(x_1, x_2, ..., x_M) = 0 \qquad i = 1...N$$

- az f_i függvények az x_j változókban nem lineárisak
- egyenletrendszer esetén több függvény gyökét keressük szimultán módon

Sokkal nehezebb probléma, mint a lineáris eset.

- ott az egyenletek lineáris kombinálgatásával lehetett eliminálni
- lineárisan kombinálni itt is lehet, de nem vezet megoldásra

A megoldás léte

A megoldás léte

- $N > M$ esetben általában nincsen megoldás
- $N \leq M$ esetben sem garantált
- ha van megoldás, akkor nem garantált, hogy egyértelmű
- gyakori, hogy a gyökök nem diszkrétek, egész intervallum gyök
- lehetnek nem valós gyökök is

Inverzfüggvény-tétel

- ha egy f függvény egy x pontban folytonos, és a deriváltja nem nulla, akkor az x pont egy környezetében invertálható
- ez általánosítható többdimenziós esetre is
- $N \leq M$ esetben tudunk mondani valamit a megoldás létére

Mitől jobb egyik vagy másik módszer?

Függvénykiértékelések száma

- minél kevesebb függvénykiértékelés mellett
- minél pontosabban meg akarjuk határozni a gyököt
- kovergencia sebessége

Stabilitás

- általában „kézzel” kell a gyök közeléből indítani
- garantálja-e valami, hogy ott is marad a közelben
- nem divergál-e el a végtelenbe

A módszerek általános tulajdonságai

Sokat segít, ha nem csak f-et, de a deriváltját is ismerjük

- jóval gyorsabb algoritmusok

Egy változós esetben vannak hatékony módszerek

- megfelelően jól viselkedő függvényekre
- a gyököket be lehet keretezni

Iteratív módszerek

A nem lineáris módszerek mindig iteratívak

- kiindulunk valamilyen értékekből
- ez lehet egy intervallum, amin belül a gyököt sejtjük
- a gyököt lépésről lépésre közelítjük meg

A közelítő módszer következménye

- a gyököt általában csak közelítőleg kapjuk meg
- viszont tetszőlegesen kis hibával meghatározhatjuk

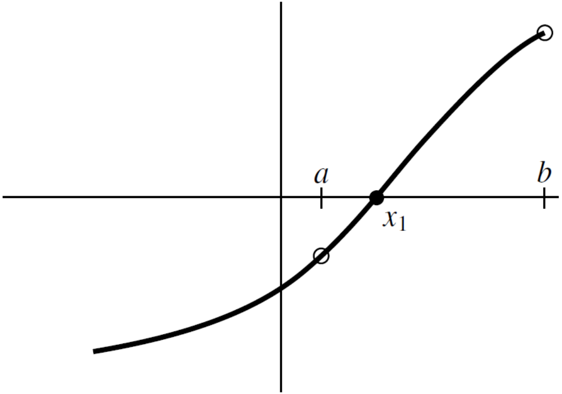
Nem mindig konvergál

- el kell tudni dönteni, hogy konvergál-e
- megfelelő helyről kell kiindulni
- jó helyre konvergált-e?

Gyök bekeretezése egy dimenzióban

Példa gyök bekeretezhetőségére

- tudjuk, hogy a függvény folytonos $a < x < b$ intervallumon
- $f(a) < 0$ és $f(b) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ létezik gyök az intervallumon



Rosszul viselkedő függvények

A bekeretezős módszer nem mindig egyszerű

A fő problémát a szinguláris viselkedés okozza

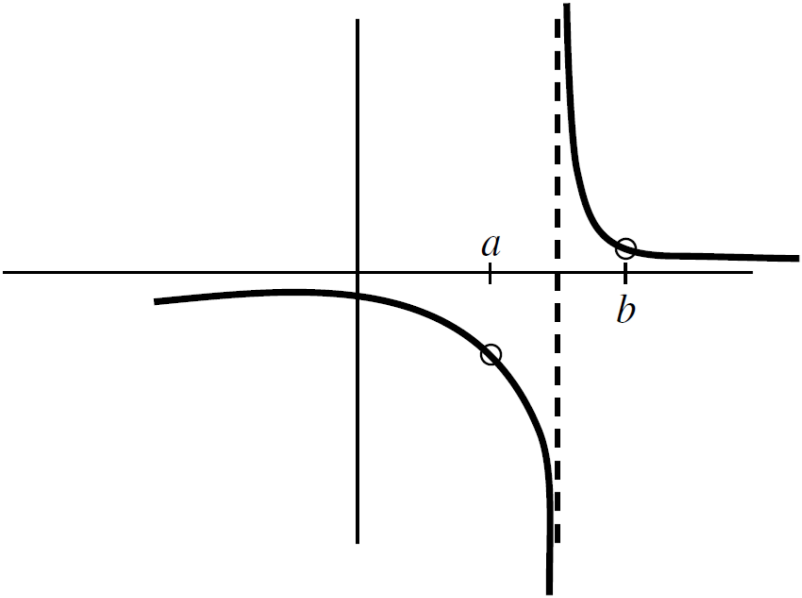
- a függvény nem folytonos
- valahol divergál
- valamelyik deriváltja divergál

A gyök léte nem féltetlenül jelent előjelváltást

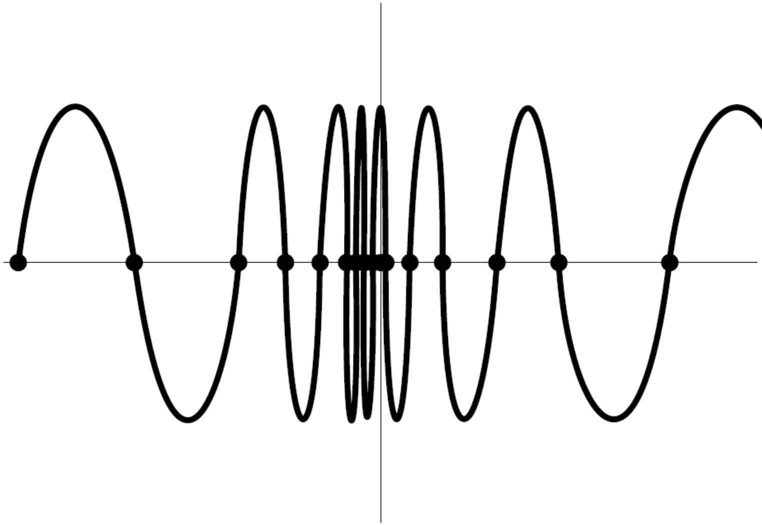
- lehet, hogy a gyök minimumhelyen van
- de a minimumhely nem feltétlen gyök

Egy intervallumon belül sok gyök is lehet

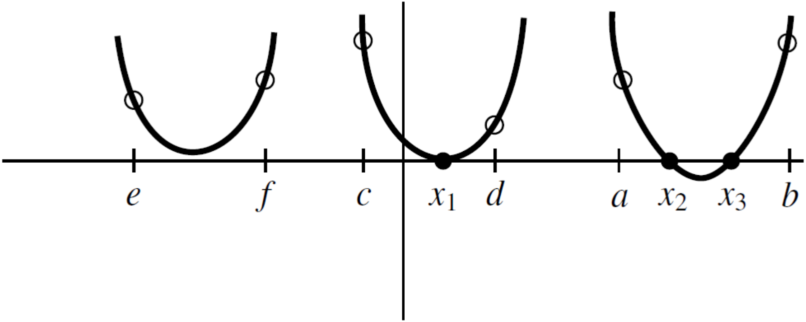
Szakaszonként folytonos, divergens függvény



Függvény rosszul viselkedő deriválttal



Gyökök és minimumok konfigurációi



A nem lineáris gyökkeresés a függvény analízisével kezdődik

A nem lineáris algoritmusok nem garantáltan jók

- nincsen globális megoldás
- mindig valami jó becslés kell a gyökök helyére

Iteratív módszerek gyakori problémája

- ha rossz helyről eldivergál
- jó kiindulási pontokat kell találni
- a jó kiindulási pontok megtalálására nincsen algoritmus
- analitikusan kell kezelni a függvényt

Érdemes mindig ábrázolni

- ha könnyen deriválható, akkor a deriváltakat is vizsgálni

Felezős módszer

Kiindulás

- valamilyen módon sikerült bekeretezni a gyököt
- adott tehát egy $[a, b]$ intervallum
- $f(a)f(b) < 0$, azaz a függvény előjelet vált

Iteratív lépés

- megfelezzük az intervallumot
- a felezőpont előjele megegyezik valamelyik végpont előjelével
- az előjelváltó fél intervallumot tartjuk meg

A felezős módszer leállási feltétele

A konvergenciához szükséges lépések száma

- a kiindulási intervallum hossza: ϵ_0
- a gyök értékére előírt pontosság: ϵ
- a módszer az intervallumot felezi, így a lépések száma

$$n = \log_2 \frac{\epsilon_0}{\epsilon}$$

Leállási feltétel

- ha az intervallum hossza eléri ϵ-t, megállunk
- gyöknek az intervallum felezőpontját tekintjük

A felezős módszer tulajdonságai

Fő előny:

- a módszer mindig konvergál

Fő gondok:

- csak előjelváltó esetben működik
- csak egy gyököt talál meg
- ha a függvénynek szakadása van, és ezért vált előjelet, akkor a módszer nem a gyököt, hanem a szakadási pontot találja meg

A szekáns módszer

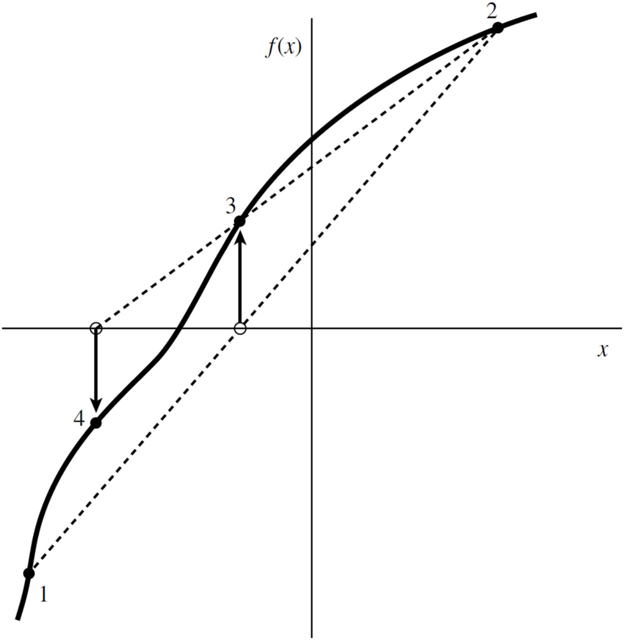
Kiindulás

- valamilyen módon megközelítettük a gyököt
- nem is kell feltétlen bekeretezni
- egy x_0 és x_1 pontból indulunk

Iteratív lépés

- tekintjük az $f(x_{i-1})$ és $f(x_i)$ értékeket
- x_{i-1} és x_i között lineárisan interpoláljuk a függvény
- az x_{i+1} értéke a lineáris interpoláció gyöke lesz

A szekáns módszer



A szekáns módszer tulajdonságai

Gyorsabban konvergál, mint a felezős módszer

- ott az intervallum mindig a felére csökkent
- itt a konvergencia sebessége ϵ gyenge hatványával megy

$$\lim_{i \to \infty} |\epsilon_{i+1}| = c \cdot |\epsilon_i|^\alpha ,$$

ahol

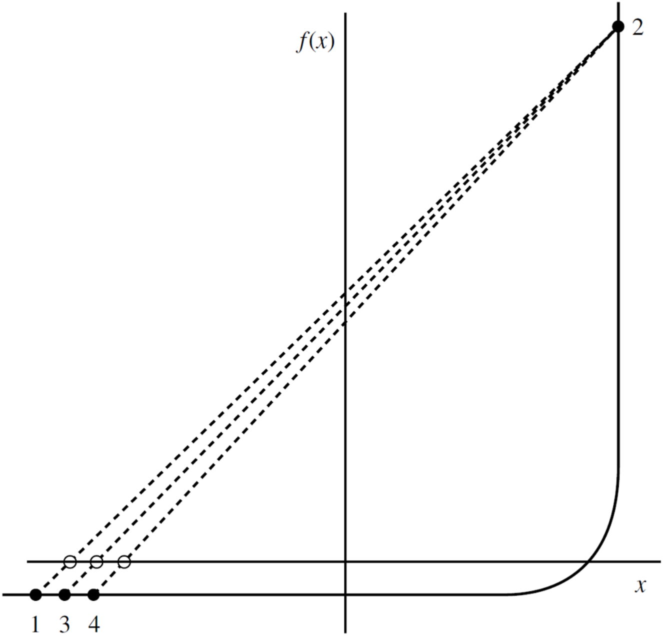
$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618$$

A módszer nem tartja bekeretezve a gyököt

- nem csak ott működik, ahol a függvény előjelet vált
- de ha a gyök lokális minimum környékén van, akkor eltéved
- akár a végtelenbe is elmehet

Akkor működik jól, ha a függvény jól közelíthető egyenessel.

A szekáns módszer egy problémája



Regula falsi módszer

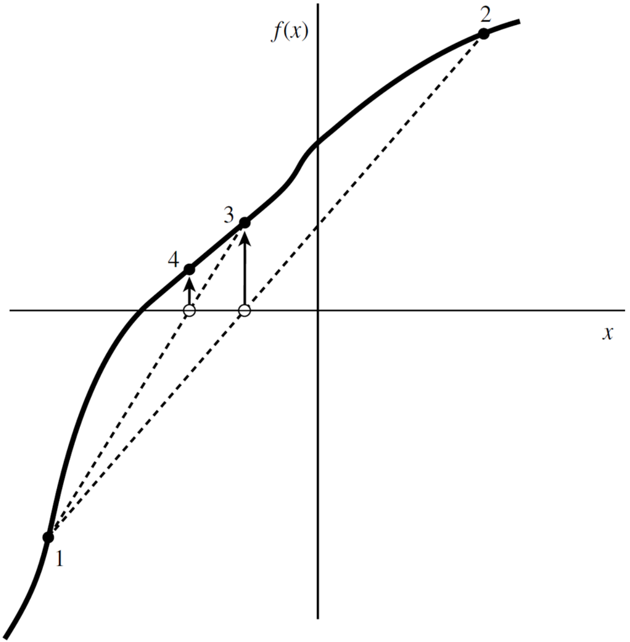
A módszer az előző kettő kombinációja

- bekeretezve tartja a gyököt
- de nem az intervallumot felezgeti, hanem egyenessel metszi az abszcisszát

A szekáns módszert így módosítjuk

- nem a legrégebbi pontot dobjuk el
- (hiszen így kifuthatnánk az intervallumból)
- hanem a metszéspont megtalálása utána azt a kettőt tartja meg, amelyeknél a függvény előjele különböző

Regula falsi módszer



A regula falsi módszer algoritmusa

Kiindulás

- valamilyen módon sikerült bekeretezni a gyököt
- adott tehát egy $[a, b]$ intervallum
- $f(a)f(b) < 0$, azaz a függvény előjelet vált

Iteratív lépés

- $[a, b]$-n lineárisan interpolálunk
- megkeressük az egyenes és az x-tengely metszéspontját
- azt az új intervallumot tartjuk meg, ahol f előjelet vált

Némileg gyorsabb, mint a felezős módszer

Magasabb rendű módszerek

A szekáns módszernél egyenessel interpoláltunk

- csak kellően sima függvényekre hatékony
- interpolálhatnánk magasabb rendű függvénnyel is
- ehhez nem elég az intervallum két végpontja

Például: inverz kvadratikus módszer

- nem kettő, hanem három ponttal dolgozunk
- ezekre parabolát illesztünk $y = ax^2 + bx + c$ alakban
- a gyököket a megoldóképlettel határozzuk meg

Magasabb rendre nehezen általánosítható

- nem léteznek megoldóképletek

A belassulást elkerülő módszerek

Vannak függvények, ahol az elvileg gyorsabb módszerek lemaradnak

- pl. a regula falsi lehet lassabb a felezős módszernél is
- ilyenkor érdemes a módszereket kombinálni
- figyeljük a konvergencia sebességét
- ha lassú, akkor más módszerre váltunk

Wijngaarden–Dekker–Brent-módszer (röviden Brent)

- alapesetben az inverz kvadratikus módszert használja
- ha az új pont a kereten kívül esik, vagy
- a konvergencia túl lassú
- akkor inkább felezi az intervallumot

A függvény deriváltjának felhasználása

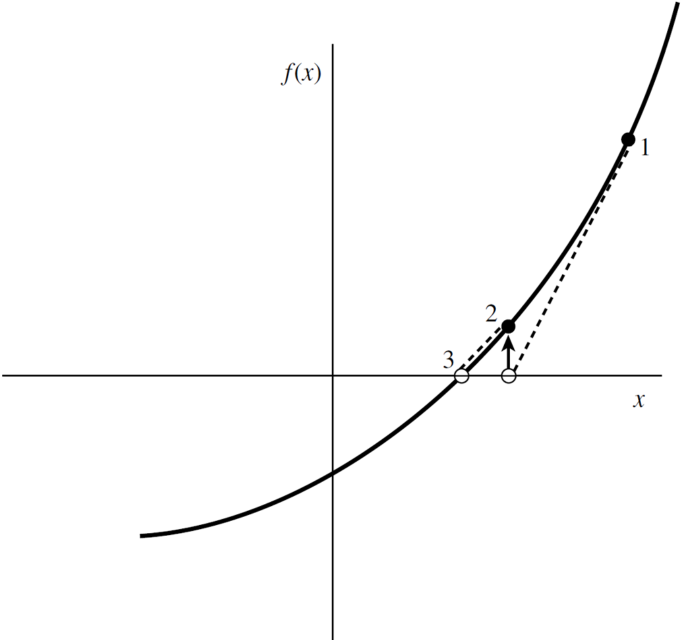
Az eddigit módszerek nem használták a függvény deriváltját

- viszont lehet, hogy az is expliciten adott
- ekkor gyorsabb módszer lehetséges

A Newton–Ralphson-módszer

- egyetlen pontból indulunk
- meghúzzuk a függvény érintőjét
- az x tengellyel vett metszet lesz az új pont

A Newton–Ralphson-módszer



A Newton–Ralphson-módszer tulajdonságai

Kellően sima függvény esetén jól működik, ugyanis

- a gyök körüli Taylor-sorból elég csak az első tagot megtartani

$$f(x+\delta) \approx f(x) + f'(x)\delta + \frac{1}{2}f''(x)\delta^2 + \dots$$

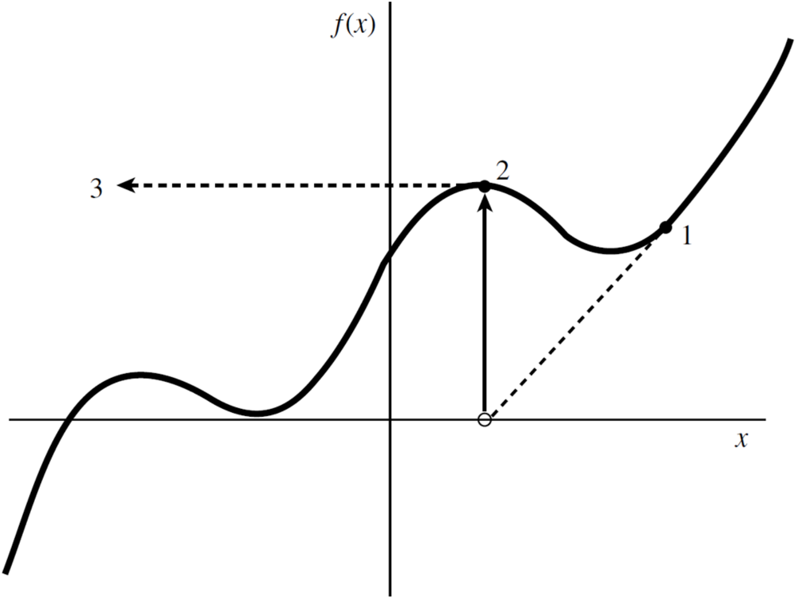
- ezzel a gyöktől való eltérés egy jó közelítése

$$\delta \approx -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

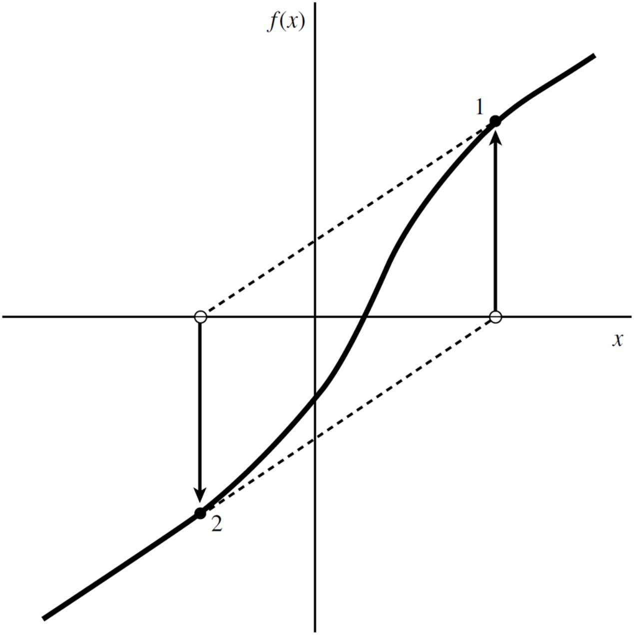
Belátható, hogy a konvergencia sebessége négyzetes:

$$\epsilon_{i+1} = c \cdot \epsilon_i^2$$

Newton–Ralphson-módszer: túl lapos függvény



Newton–Ralphson-módszer: „páratlan” függvény



A Newton–Ralphson-módszer javítása

A Newton–Ralphson-módszer gyakran nem konvergál

- ilyenkor érdemes hibrid módszert választani
- a Wijngaarden–Dekker–Brent-módszerhez hasonlóan

Egy dimenzióban nem szabad numerikus deriváltat használni

- több függvénykiértékelést igényel
- nem elég pontos, így lassítja a konvergenciát
- a szekáns módszer gyorsabb

A Newton–Ralphson-módszer lokálisan gyors, de globálisan instabil

- érdemes ezért más módszerrel bekeretezni a gyököt
- ha már közel járunk, akkor N–R-módszerrel pontosítjuk

Polinomok gyökei

Az n-ed rendű polinomnak n gyöke van

- lehetnek valósak vagy komplexek
- ha az együtthatók valósak, akkor
  - a gyökök valósak, vagy
  - komplex konjugált párok

A gyököket egyesével keressük

- valamilyen módszerrel egy gyököt megtalálunk: r
- leosztjuk a polinomot $(x - r)$-rel

$$P_i(x) = (x - r)P_{i+1}(x)$$

- P_{i+1} meghatározására létezik egyszerű algoritmus
- az eggyel alacsonyabb fokú polinom egy gyökét ismét valami elemi algoritmussal keressük

Polinomok gyökeinek megtalálása

Problémák:

- a gyökkeresés nagyon sok lépést igényel
- felhalmozódnak a numerikus hibák
- a megtalált gyök, amivel osztunk, sem teljesen pontos

Javítási lehetőség

- megkeressük a gyököket
- egyenként pontosítjuk őket a Newton–Ralphson-módszerrel
- gyökök „polírozása”

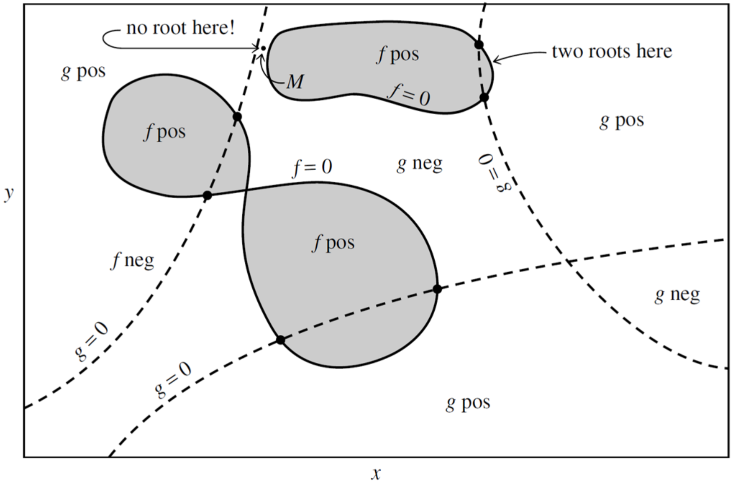
Módszerek komplex gyökök megtalálására

- ld. Numerical Recipes
- pl. Laguerre-módszer

Gyökök keresése több dimenzióban

Több dimenzióban nincsen általánosan jó gyökkereső módszer.

- a probléma már két függvény esetén is nagyon bonyolult



A többdimenziós módszer vázlata

Meg kell határozni valahogyan az f_i függvények zéró-kontúrjait

- a gyökök a kontúrok metszéspontjaiban lesznek
- de eleve a kontúrok meghatározása is közel lehetetlen

Mindenképpen tudnunk kell részleteket is a problémáról

- hány gyököt várunk
- ezeket kb. hol várjuk

Jobb híján

- olyan módszert keresünk, ami egy gyököt meg tud találni
- abban az esetben, ha a gyöktől elég közelről indulunk

Newton–Ralphson-módszer több dimenzióban

A deriváltat most a teljes Jacobi-mátrix helyettesíti:

$$J_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

Ezzel a függvény Taylor-sora

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\delta\mathbf{x} + \ldots$$

Hasonlóan, mint egy dimenzióban

- keressük azt a $\delta\mathbf{x}$ vektort,
- ami a gyök irányába lépteti az aktuális legjobb becslést

Ehhez a $\mathbf{J}\delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani, majd

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \delta\mathbf{x}$$