RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE I RÓŻNICOWE

11.01.2020

ZADANIE DOMOWE - WYPROWADZENIE

PAWEŁ KRUCZKIEWICZ

401 685

Temat: Rozwiązać metodą elementów skończonych następujące równanie:

$$(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

Dokładne równanie: Równanie transportu ciepła (4.1)

$1°$ $$-k(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$$

$2°$ $$u(2) = 0$$

$3°$ $$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$$

$4°$ $$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1,2] \end{cases}$$

, gdzie u to poszukiwana funkcja $[0,2] \ni x \to u(x) \in \mathbb{R}$

Nazewnictwo:

$2°$ - warunek brzegowy Dirichleta

$3°$ - warunek brzegowy Cauchy'ego

1. ROZPISANIE WZORU

$$\overset{z\ 2^\circ}{}$$

$$-ku''=0 \qquad | \cdot v \quad (v(2)=0)$$

$$-ku''v=0 \qquad | \int_0^2$$

$$-\int_0^2 k u'' v\,dx \overset{*}{=} -\int_0^2 (ku')' v\,dx = \left| \begin{matrix} s=v & s'=v' \\ t'=(ku')' & t=ku' \end{matrix} \right| = -ku'v\Big|_0^2 + \int_0^2 k u' v'\,dx =$$

$$= -k(2)u'(2)\underset{\substack{\| \\ 0}}{v(2)} + \underset{\substack{\| \\ 1}}{k(0)}u'(0)\cdot v(0) + \int_0^2 k u' v'\,dx = k(0)u'(0)v(0) + \int_0^2 k u' v'\,dx$$

z 3° $\quad u'(0)+u(0)=20 \Rightarrow u'(0)=20-u(0)$

$$k(0)u'(0)v(0) + \int_0^2 k u' v'\,dx = k(0)(20-u(0))v(0) + \int_0^2 k u' v'\,dx = 20k(0)v(0) - \cancel{20}\,k(0)u(0)v(0) + \int_0^2 k u' v'\,dx$$

Podst. do 1° $\qquad -k(0)u(0)v(0) + \int_0^2 k u' v'\,dx = -20k(0)v(0)$

Oznaczamy:

$$B(u,v) = -k(0)u(0)v(0) + \int_0^2 k u' v'\,dx$$

$$L(v) = -20k(0)v(0)$$

$$B(u,v) = L(v)$$

$*$ $k'=0 \wedge (k'u')' = k'u' + k'u'' = ku''$

2. ROZWIĄZANIE

Przyjmujemy przestrzeń $V_h \subset [0,2]$, ~~t. że~~ dzieląca $[0,2]$ na n przedziałów dł. h ($h = \frac{2}{n}$ - dla danego n, $\forall_{i \in \{1,\dots,n\}} x_{i+1} = x_i + h$) oraz o wektorach bazowych, będących funkcjami B-spline

Rozpisujemy owe funkcje*:

$\forall i \in \{2, \dots, n\}$

$$e_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h} & \text{dla } x \in [x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{h} & \text{dla } x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases} \qquad e_i' = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{-1}{h} & \text{dla } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

$$e_1 = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h} & \text{dla } x \in [x_0, x_1) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases} \qquad e_1' = \begin{cases} \frac{-1}{h} & \text{dla } x \in [x_0, x_1) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

$$e_{n+1} = \begin{cases} \frac{x - x_n}{h} & \text{dla } x \in [x_n, x_{n+1}) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases} \qquad e_{n+1}' = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{dla } x \in [x_n, x_{n+1}) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Teraz nasze ~~xx~~ $u \approx u_h = \sum_{i=1}^{n+1} u_i e_i$

Zatem $B\left(\sum_{i=1}^{n+1} u_i e_i, v_j\right) \overset{**}{=} \sum_{i=1}^{n+1} u_i B(e_i, v_j) = L(v_j) \quad \forall j \in \{1, \dots, n+1\}$

* Obliczone algorytmem Cox de Boora ($e_i = B_{i,1}$) ** z biliniowości $B(u,v)$

Na koniec przyjmujemy za funkcje testowe v_j, funkcje bazowe e_j, otrzymując układ równań:

$$\forall_{j\in\{1,\dots,n+1\}} \quad \sum_{i=1}^{n+1} u_i B(e_i, e_j) = L(e_j)$$

Zapisujemy je w postaci macierzy

$$\begin{bmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_2,e_1) & \dots & B(e_{n+1},e_1) \\ B(e_1,e_2) & B(e_2,e_2) & & \vdots \\ B(e_1,e_3) & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ B(e_1,e_{n+1}) & B(e_2,e_{n+1}) & \dots & B(e_{n+1},e_{n+1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ \\ \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ \vdots \\ \\ \\ L(e_{n+1}) \end{bmatrix}$$

Z war. Dirichleta można wyzerować n+1-szą kolumnę i n+1-szy rząd, a ~~elementowi~~ $A(n+1,n+1)=1$

$$\begin{bmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_2,e_1) & \dots & 0 \\ B(e_1,e_2) & \ddots & & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ \vdots \\ \\ L(e_{n+1}) \end{bmatrix}$$

Rozwiązując powyższe równanie, otrzymujemy przybliżoną wartość funkcji $u(x)$

* $u_1 = u(x_1), \dots, u_{n+1} = u(x_{n+1})$

3. SZCZEGÓŁY IMPLEMENTACYJNE

1) Środowisko:

Program rozwiązujący opisane równanie napisano w MATLABie. Wykorzystano go również do stworzenia przybliżonego wykresu funkcji u.

2) Optymalizacja:

Ponieważ macierz główna równania jest macierzą wstęgową*, można wypełnić ją w czasie $O(n)$. Do jej stworzenia wykorzystano wbudowaną funkcję zeros(n+1)

3) Całkowanie:

Do obliczenia całek wykorzystano całkowanie numeryczne kwadraturą Gaussa z wyborem 2 punktów. Ze względu na pewne niuanse omawianego zagadnienia 1, warto nadmienić, że w implementacji:

1° Całkę $\int_0^2 ku'v'dx$ oblicza się wybierając przedział, w którym funkcja $e_i \cdot e_j$ jest niezerowa (wykorzystano fakt, że $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$ dla $a, b, x_0 : a \leq x_0 \leq b$)

2° Gdy ~~nie~~ wybrany przedział $[a,b]$ zawiera 1, obliczamy całkę jako:

$$\int_a^b ku'v'dx = \int_a^1 ku'v'dx + \int_1^b ku'v'dx$$

* Jest tak, ponieważ $e_i \cdot e_j = 0$ dla $\forall i,j \in \{1,\dots,n+1\} : |i-j| > 1$