Rachunek macierzowy - LU faktoryzacja

March 31, 2023

1 Rachunek macierzowy - LU faktoryzacja

Wykonali: Alicja Niewiadomska, Paweł Kruczkiewicz

[ ]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import time

from numpy.linalg import det

import warnings
warnings.filterwarnings("ignore")
```

1.1 Pseudokod rozwiązania

Zakładamy, że dana macierz ma wymiary 2^k x 2^k.

Dane: - `A` - macierz kwadratowe o rozmiarze 2^k - `k` - wyżej wspomniany wykładnik

Wartość zwracana: `L` - wynikowa macierz kwadratowa o rozmiarze 2^k `U` - wynikowa macierz kwadratowa o rozmiarze 2^k

```
def LU_rec(A, k):
    if k == 0: return [1], A

    A11, A12, A21, A22 = split_matrix_in_quatres(A)
    mat_mul = lambda M, N: mat_mul(M, N, k, 4)

    L11, U11 = LU_rec(A11, k-1)
    L11_inv = inverse(L11, k-1)
    U11_inv = inverse(U11, k-1)

    L21 = mat_mul(A21, U11_inv)
    U12 = mat_mul(L11_inv, A12)

    S = A22 - mat_mul(mat_mul(mat_mul(A21, U11_inv), L11_inv), A12)
    Ls, Us = LU_rec(S, k-1)

    L22 - Ls
```

```
    U22 = Us

    L = join_matrices(L11, np.zeros(L11.shape), L21, L22)
    U = join_matrices(U11, U12, np.zeros(U11.shape), U22)

    return L, U
```

gdzie operacje `mat_mul` oraz `inverse` definiujemy tak jak w poprzednich zadaniach.

1.2 Kod algorytmu

1.2.1 Funkcje pomocnicze

[ ]:
```
def split_matrix_in_quatres(A: np.array):
    half_i = A.shape[0] // 2
    return  A[:half_i, :half_i], \
            A[:half_i, half_i:], \
            A[half_i:, :half_i],\
            A[half_i:, half_i:]

def join_matrices(A11, A12, A21, A22):
    A1 = np.hstack((A11, A12))
    A2 = np.hstack((A21, A22))
    return np.vstack((A1, A2))
```

1.2.2 Algorytm rekurencyjny Bineta

[ ]:
```
def binet_rec_mat_mul(A: np.array, B: np.array, k: int, l: int) -> np.array:
    if k == 0:
        return A*B

    rec_step = lambda A1, B1, A2, B2: mat_mul(A1, B1, k-1, l) + mat_mul(A2, B2,␣
 ↪k-1, l)

    A11, A12, A21, A22 = split_matrix_in_quatres(A)
    B11, B12, B21, B22 = split_matrix_in_quatres(B)

    C11 = rec_step(A11, B11, A12, B21)
    C12 = rec_step(A11, B12, A12, B22)
    C21 = rec_step(A21, B11, A22, B21)
    C22 = rec_step(A21, B12, A22, B22)

    return join_matrices(C11, C12, C21, C22)
```

1.2.3 Algorytm rekurencyjny Strassena

[ ]:
```
def strassen_mat_mul(A: np.array, B: np.array, k: int, l: int) -> np.array:
    if k == 0:
        return A*B

    rec_step = lambda A1, B1: mat_mul(A1, B1, k-1, l)

    A11, A12, A21, A22 = split_matrix_in_quatres(A)
    B11, B12, B21, B22 = split_matrix_in_quatres(B)

    M1 = rec_step(A11 + A22, B11 + B22)
    M2 = rec_step(A21 + A22, B11)
    M3 = rec_step(A11, B12 - B22)
    M4 = rec_step(A22, B21 - B11)
    M5 = rec_step(A11 + A12, B22)
    M6 = rec_step(A21 - A11, B11 + B12)
    M7 = rec_step(A12 - A22, B21 + B22)

    C11 = M1 + M4 - M5 + M7
    C12 = M3 + M5
    C21 = M2 + M4
    C22 = M1 - M2 + M3 + M6

    return join_matrices(C11, C12, C21, C22)
```

1.2.4 Algorytm mnożenia macierzy z poprzedniego zadania

[ ]:
```
def mat_mul(A, B, k, l=4):
    if k <= l:
        return binet_rec_mat_mul(A, B, k, l)
    else:
        return strassen_mat_mul(A, B, k, l)
```

1.2.5 Algorytm rekurencyjnego odwracania macierzy

[ ]:
```
L = 4

def inverse(A, k):
    if k == 0:
        return A

    A11, A12, A21, A22 = split_matrix_in_quatres(A)
    mul = lambda M, N: mat_mul(M, N, k-1, L)

    A11_inv = inverse(A11, k-1)
    S22 = A22 - mul(mul(A21, A11_inv), A12)
```

```
    S22_inv = inverse(S22, k-1)

    B11 = mul(A11_inv, (np.ones(2**(k-1)) + mul(mul(A12, S22_inv), mul(A21,␣
↪A11_inv))))
    B12 = - mul(mul(A11_inv, A12), S22_inv)
    B21 = - mul(mul(S22_inv, A21), A11_inv)
    B22 = S22_inv

    return join_matrices(B11, B12, B21, B22)
```

1.2.6 Algorytm rekurencyjnej LU faktoryzacji

[ ]:
```
def LU_rec(A, k):
    n = A.shape[0]
    if n == 1:
        return np.array([[1]]), A

    A11, A12, A21, A22 = split_matrix_in_quatres(A)
    mul = lambda M, N: mat_mul(M, N, k-1, 4)

    L11, U11 = LU_rec(A11, k-1)

    L11_inv = inverse(L11, k-1)
    U11_inv = inverse(U11, k-1)

    L21 = mul(A21, U11_inv)
    U12 = mul(L11_inv, A12)

    S = A22 - mul(mul(mul(A21, U11_inv), L11_inv), A12)
    Ls, Us = LU_rec(S, k-1)

    U22 = Us
    L22 = Ls

    L = join_matrices(L11, np.zeros(L11.shape), L21, L22)
    U = join_matrices(U11, U12, np.zeros(U11.shape), U22)

    return L, U
```

1.3 Porównani wartości z biblioteką do obliczeń numerycznych

Biblioteką, a którą wzięliśmy funkcję kontrolną dla funkcji napisanej przez nas, jest `det0` z pakietu `numpy.linalg`.

[ ]:
```
def compare_lu_factorizations(n):
    result = {"actual": [], "expected": []}
```

```
    for k in range(1, n+1):
        n = 2**k
        A = 1.1*np.random.uniform(size=(n, n))
        _L, U = LU_rec(A, k)
        result["actual"].append(U.diagonal().prod())

        expected = det(A)
        result["expected"].append(expected)

    return pd.DataFrame(result)

compare_lu_factorizations(5)
```

[ ]:

```
          actual    expected
0   1.121020e-01    0.007332
1   5.860758e-02   -0.098029
2   1.852528e-01    0.418633
3 -1.774604e+220    0.083474
4            NaN -349.239378
```

Nasz algorytm niestety nie może posłużyć jako część algorytmu do obliczania wyznacznika macierzy. Jest to spowodowane tym, że jest on źle uwarunkowany numerycznie (nie zastosowano pivotingu w żadnym z używanych przezeń algorytmach rekurencyjnych).

Doskonałym przykładem potwierdzającym niestabilność jest tabela wyników przedstawiona powyżej - podczas gdy algorytm z biblioteki numerycznej obliczył wyznacznik w granicach błędu, nasz algorytm dla k=4 uzyskał wynik rzędu 220 zer, a dla macierzy k=5 dostaliśmy błąd pomiaru (NaN), co oznacza problem wynik mniejszy niż epsilon maszynowe,

Z powodu niestabilności reprezentacji liczb zmiennoprzecinkowych, niemożliwym jest sprawdzenie poprawności napisanego algorytmu.

1.4 Wykresy

[ ]:

```
plt.rcParams["figure.figsize"] = [15, 10]
plt.rcParams['font.size'] = 24
plt.style.use('fivethirtyeight')
```

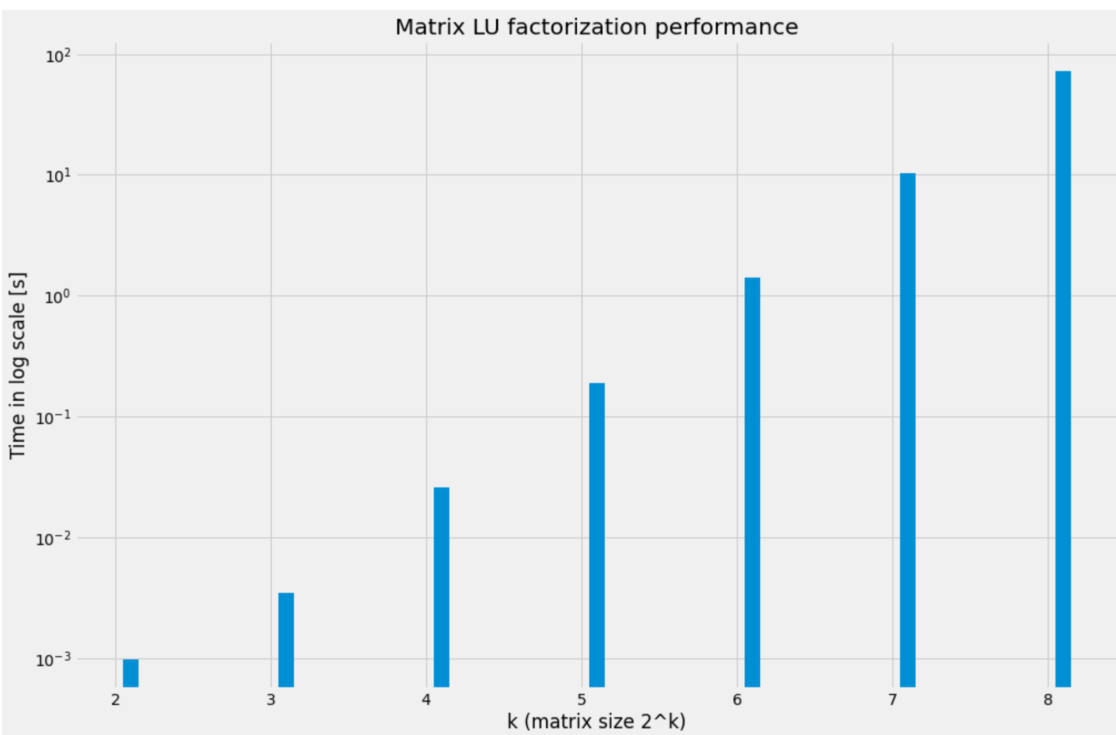
1.4.1 Wykres czasu mnożenia od wielkości macierzy A

[ ]:

```
k_values = np.arange(2, 9)
num_range = 100

### kod generujący czas

def measure_LU_times() -> np.array:
    def measure_one_time(k):
        size = 2**k
```

```python
        A = np.random.randint(0, num_range, (size, size))

        t1 = time.time()
        LU_rec(A, k)
        t2 = time.time()
        return t2 - t1

    return np.array([measure_one_time(k) for k in k_values])

### kod wykresu

def plot_time_results(times: np.array) -> None:
    x = k_values
    x_axis = np.arange(len(x))

    plt.bar(x_axis + 0.1, times, 0.1)

    plt.xticks(x_axis, x)
    plt.xlabel("k (matrix size 2^k)")
    plt.ylabel("Time in log scale [s]")
    plt.yscale("log")
    plt.title("Matrix LU factorization performance")
    plt.show()
```

[ ]:
```python
times = measure_LU_times()
plot_time_results(times.T)
```



Powyższy wykres jasno pokazuje, że złożoność obliczeniowa stworzonego algorytmu jest odpowiednia.

1.4.2 Wykres wykonanych obliczeń zmiennoprzecinkowych w zależności od wielkości macierzy A

[ ]:
```
### kod generujący liczbę obliczeń zmiennoprzecinkowych

def binet_rec_mat_mul_op_count(k: int, l: int) -> int:
    if k == 0:
        return 1  # multiplying matrices

    n =  2**(k-1)
    rec_step_op_count = 2 * mat_mul_op_count(k-1, l) + n*n

    C11_op_count = rec_step_op_count
    C12_op_count = rec_step_op_count
    C21_op_count = rec_step_op_count
    C22_op_count = rec_step_op_count

    return C11_op_count + C12_op_count + C21_op_count + C22_op_count


def strassen_mat_mul_op_count(k: int, l: int) -> int:
    if k == 0:
        return 1

    n = 2**(k-1)

    rec_step_op_count = mat_mul_op_count(k-1, l)

    M1_op_count = rec_step_op_count + 2*n*n
    M2_op_count = rec_step_op_count + n*n
    M3_op_count = rec_step_op_count + n*n
    M4_op_count = rec_step_op_count + n*n
    M5_op_count = rec_step_op_count + n*n
    M6_op_count = rec_step_op_count + 2*n*n
    M7_op_count = rec_step_op_count + 2*n*n

    C11_op_count = 3*n*n
    C12_op_count = n*n
    C21_op_count = n*n
    C22_op_count = 3*n*n

```

```
    return C11_op_count + C12_op_count + C21_op_count + C22_op_count +
↪M1_op_count + M2_op_count + M3_op_count + M4_op_count + M5_op_count +
↪M6_op_count + M7_op_count
```

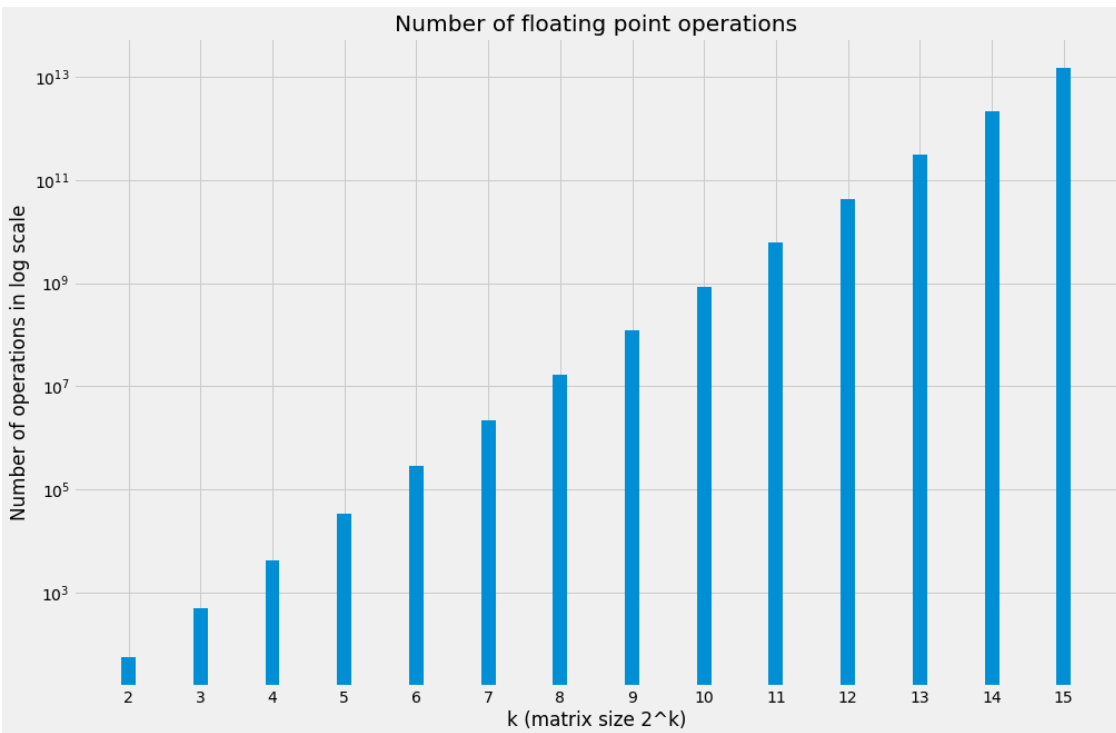
[ ]:
```
def mat_mul_op_count(k: int, l: int) -> int:
    if k <= l:
        return binet_rec_mat_mul_op_count(k, l)
    else:
        return strassen_mat_mul_op_count(k, l)
```

[ ]:
```
def inverse_op_count(k: int) -> int:
    if k == 0:
        return 0

    n = 2**(k-1)

    A11_inv_rec_step = inverse_op_count(k-1)
    S22_count = n*n + 2*mat_mul_op_count(k-1, L)
    S22_inv_rec_step = inverse_op_count(k-1)

    B11_count = n*n + 4*mat_mul_op_count(k-1, L)
    B12_count = 2*mat_mul_op_count(k-1, L)
    B21_count = 2*mat_mul_op_count(k-1, L)

    return A11_inv_rec_step + S22_count + S22_inv_rec_step + B11_count +
↪B12_count + B21_count
```

[ ]:
```
def LU_op_count(k: int) -> int:
    if k == 0:
        return 0

    n = 2**(k-1)

    LU11_rec_step = LU_op_count(k-1)

    L11_inv_op_count = inverse_op_count(k-1)
    U11_inv_op_count = inverse_op_count(k-1)

    L21_count = n*n
    U12_count = n*n

    S_count = n + n*n + n*n + n*n
    S_LU_count = LU_op_count(k-1)

    return LU11_rec_step + L11_inv_op_count + U11_inv_op_count + L21_count +
↪U12_count + S_count + S_LU_count
```

[ ]:
```
k_values = range(2, 16)
inverse_ops = np.array([LU_op_count(k) for k in k_values])

def plot_ops_results(ops: np.array) -> None:
    x = k_values
    x_axis = np.arange(len(x))

    plt.bar(x_axis, ops, 0.2)

    plt.xticks(x_axis, x)
    plt.xlabel("k (matrix size 2^k)")
    plt.ylabel("Number of operations in log scale")
    plt.yscale("log")
    plt.title("Number of floating point operations")
    plt.show()
```

[ ]:
```
plot_ops_results(inverse_ops.T)
```



Liczba obliczeń jest zgodna z oczekiwaniem.

1.5 Wnioski

W powyższym raporcie pokazano, że algorytm rekurencyjnej LU faktoryzacji wygląda obiecująco pod względem złożoności czasowej i obliczeniowej czy możliwości zrównoleglenia.

Badania można rozszerzyć o mądrzejsze używanie pamięci, co potencjalnie pokazałoby korzyści z używania rekurencyjnego wzoru na LU faktoryzację. Niestety, jest to niemożliwe w wybranym języku programowania.