

Analiza szeregów czasowych - raport 3.

Miłosz Kubera(249823)
Patryk Krukowski(249824)

22 maja 2021

Spis treści

1	Zadanie 2	1
1.1	Opis wskaźników	1
1.1.1	Simple moving average	1
1.1.2	Bollinger Bands	2
1.1.3	Momentum	2
1.1.4	Stochastic Oscillator	3
1.1.5	Relative strength index	3
1.1.6	Moving average convergence/divergence	4
1.2	Podpunkt b	4
1.2.1	SMA	6
1.2.2	Bollinger Bands	8
1.2.3	Momentum	9
1.2.4	STS	10
1.2.5	RSI	11
1.2.6	MACD	12
1.3	podpunkt c	13
1.3.1	Bollinger bands	13
1.3.2	SMA	15
1.3.3	STS	15
1.3.4	RSI	16
1.3.5	MACD	17
2	Zadanie 3.	18
2.1	Wstęp i opis eksperymentów	18
2.2	Podpunkt (a)	19
2.3	Podpunkt (b)	23
2.4	Podpunkt (c)	26
2.5	Podpunkt (d)	27
2.6	Podpunkt (e)	28
2.7	Podpunkt (f)	32

1 Zadanie 2

1.1 Opis wskaźników

Wskaźniki analizy technicznej są bardzo przydatnym a zatem i mocno rozwiniętym narzędziem. Niektóre są bardzo popularne, a niektóre są niszowe, jednakże jest ich sporo i kluczowym jest dobieranie we właściwy sposób. Ogólnie analiza techniczna polega na analizie trendów statystycznych występujących w aktywności giełdowej, między innymi w zmianach cenach akcji oraz objętości (innym podejściem jest analiza firm). W pierwszym podpunkcie krótko omówimy następujące wskaźniki analizy technicznej:

- SMA - simple moving average
- Bollinger Bands
- Momentum
- STS - Stochastic oscillator
- RSI - Relative strength index
- MACD - Moving average convergence/divergence

Uwaga: z racji wygody miejscami będziemy operować angielskimi terminami.

1.1.1 Simple moving average

Jednym z najprostszych wskaźników mogą być odpowiednio wykorzystane ruchome średnie. Oznaczając poprzez P_t cenę (np. akcji) w danym czasie t obliczamy SMA poprzez:

$$SMA_t(n) = \frac{P_t + \dots + P_{t-n+1}}{n}$$

Otrzymana wartość jest ruchomą średnią w okresie n dni. Przyjętym standardem jest stosowanie SMA na *cenach zamknięcia*. Oczywiście nasuwa się pytanie jak korzystać z tego narzędzia. Najpopularniejsze są dwa schematy:

- *Golden cross* – kiedy krótka SMA przekracza poziom długiej SMA
- *Death cross* - kiedy 50-dniowa SMA spada poniżej 200-dniowej SMA

Przypadek Death Cross oznacza **masywny** sygnał, że spadek będzie postępował w sposób znaczący. Przypadek Golden cross interpretujemy na dwa sposoby: sygnał kupna, gdy krótka SMA przechodzi z poniżej długiej SMA ponad nią, oraz sygnał sprzedaży, gdy przechodzi z ponad poniżej długiej SMA. Nieco innym podejściem jest EMA - exponential moving average. Charakteryzuje się ona przede wszystkim tym, że zmiany w niedalekiej przeszłości mają większe znaczenie, niż te które nastąpiły dawno temu (można to interpretować jak przypisanie coraz mniejszej wagi, im dalej w przeszłość) i dlatego jest preferowana.

1.1.2 Bollinger Bands

Wstęga bollingera jest narzędziem bazującym na SMA (lub EMA). Jest to przedział między którym zmiany w cenach **nie** oznaczają tworzenia się nowego trendu. W wypadku wstęg bollingera rozważane są ceny zamknięcia lub średnia z cen zamknięcia, najwyższych oraz najniższych. Szerokość wstęgi określana jest w sposób następujący:

$$B_t(n) = k \cdot stdev(P_t, n),$$

gdzie zazwyczaj $k = 2, n = 20$. Górna oraz dolna wstęga są określane jako:

$$UpBand_t = P_t + B_t(n); LowBand_t = P_t - B_t(n)$$

Natomiast aby określić cenę wykorzystamy z poniższego wzoru:

$$\%B = \frac{P_t - LowBand_t}{UpBand_t - LowBand_t}$$

Przy czym wartość %B jest większa od 1 jeżeli znajduje się powyżej górnej linii oraz mniejsza od 0 gdy jest poniżej dolnej.

Jakie informacje możemy wyznaczyć korzystając ze wstęgi bollingera:

- "The squeeze" – najważniejsza koncepcja wstęgi bollingera: kiedy górna i dolna granica znajdują się blisko siebie (a zatem blisko MA) jest to informacja o małej zmienności i jest uważana za potencjalny znak, że w bliskiej przyszłości nastąpi zwiększenie zmienności a co za tym idzie szanse zysku (lub strat). Równoważnie gdy górna i dolna granica są oddalone o siebie, jest to znak o możliwym 'uspokojeniu' się akcji a co za tym idzie mniejsze szanse.
- Breakouts" – przekroczenie któreś z granic, jest uważane za sytuację wyjątkową (ponad 90% transakcji odbywa się wewnątrz wstęgi).

John Bollinger - twórca wstęgi bollingera, sugerował, że powinno się używać wstęg **tylko** jako miary zmienności cen i równocześnie z nią korzystać z 2 lub nawet 3 innych wskaźników.

1.1.3 Momentum

Innym bardzo prostym wskaźnikiem, jest tzw. momentum. Obliczane jest bardzo prosto:

$$M_t(n) = P_t - P_{t-n}$$

$M_t(n)$ nazywamy n-dniowym momentum dla dnia t . Uznaje się, że sygnał sprzedaży występuje gdy momentum zmienia się z pozytywnego na negatywnego. Sygnał kupna vice versa.

1.1.4 Stochastic Oscillator

Oscylator stochastyczny jest również pewnego rodzaju wyznacznikiem momentum. Rozróżniane są tzw 'fast stochastic indicator' oraz 'slow stochastic indicator'. Typowa formuła obliczania aktualnej wartości stochastic oscillator wygląda następująco:

$$\%K = \left(\frac{C - L14}{H14 - L14} \right) \cdot 100$$

gdzie C – 'najświeższa' cena zamknięcia; $L14$ – lowest price traded w 14 poprzednich sesjach handlowych; $H14$ – highest price traded w 14 poprzednich sesjach handlowych.

Obliczany w ten sposób współczynnik $\%K$ nazywany jest fast stochastic indicator'em. Slow stochastic indicator brany jest jako $\%D = 3 - \text{period moving average of } \%K$. Zazwyczaj plotując oscylator stochastyczny zawarte są dwie linie: faktyczna wartość oscylatora ($\%K$) oraz właśnie jego 3-dniową SMA. Ponieważ narzędzie to obrazuje momentum, przecięcie się tych linii uważane jest za sygnał o zmianie tendencji (duża zmiana momentum). Rozejście się tych linii również jest uważane za ważny sygnał o zmianie.

1.1.5 Relative strength index

RSI, podobnie jak STS jest indykatozem momentum. Konkretnie jest to miara magnitudy niedawnych zmian w cenach w celu ewaluacji warunków nadmiernego kupna/sprzedaży danych assetów. RSI również jest rodzajem oscylatora (także przyjmuje wartości między 0 a 100). Narzędzie to jest (moim zdaniem) trochę bardziej czytelne, mianowicie jeżeli otrzymujemy wartości powyżej 70 to dany asset jest nadmiernie kupowany lub też jego wartość jest zawyżona. Natomiast wartości poniżej 30 oznaczają nadmierne sprzedawanie lub że jest zaniżoną wartością. Jeżeli wartość jest zawyżona (nadmierne kupowanie) – $RSI \geq 70$ – jest to sygnał o możliwym odwróceniu trendu lub o korektywnym spadku ceny. RSI w przeciwieństwie do STS analizuje prędkość zmian w cenach. RSI obliczane jest w trzech krokach:

1. Informacja czy cena spadła czy wzrosła każdego dnia
2. Obliczenie RS - stosunek (prosty lub wykładniczy) średnich liczb w dniach wzrostów do średnich liczb w dniach spadków
3. RSI - normalizacja RS na skalę 0-100

Wyliczenia wyglądają następująco (dla SMA):

indykatory wzrostu i spadku: U_t, D_t $U_t = 1$ gdy $P_t > P_{t-1}$ i 0 w przeciwnym wypadku. $D_t = 1$ gdy $P_t < P_{t-1}$ i 0 w przeciwnym wypadku.

średnie w dniach wzrostów i spadków:

$$up_t(n) = \frac{U_t + U_{t-1} + \dots + U_{t-n+1}}{n}$$

; spadki analogicznie.

otrzymujemy

$$RS = \frac{up_t(n)}{down_t(n)}$$

Wówczas ostatecznie:

$$RSI_t(n) = 100 \cdot \frac{RS_t(n)}{1 + RS_t(n)}$$

1.1.6 Moving average convergence/divergence

MACD jest różnicą między krótkoterminową EMA oraz długoterminową EMA: zazwyczaj odejmowana jest 26-okresowa EMA od 12-okresowej EMA. Standardowy wzór zatem zadany jest jako:

$$MACD_t = EMA(P_t, 12) - EMA(P_t, 26)$$

Oprócz tego kalkulowana jest 9-dniowa EMA, tzw. "linia sygnału", będącą swojego rodzaju 'spustem' do podjęcia działania – kupno gdy MACD przegrzeza linię sygnału, oraz sprzedaż (lub shortowanie) gdy MACD spada poniżej linii sygnału. Metoda ta jednak ma trochę wad,

mianowicie możemy otrzymać sygnał o możliwej zmianie, która się nie wydarzy (fałszywy pozytywny). Równocześnie divergence nie przewiduje wszystkich 'odwróceń'. Mówiąc prostym językiem: MACD może przewidywać zbyt wiele zmian które nie zachodzą, oraz za mało tych które zachodzą.

1.2 Podpunkt b

W drugim podpunkcie analizujemy notowania Tesla Inc. (TSLA). Firmę tę wybraliśmy ze względu na dosyć popularne głosy o tym, że jest ona przewartościowana na giełdzie. Dane pobieramy ze źródła yahoo finance. W celu pobrania danych korzystamy z funkcji `getSymbols`.

```
## [1] "TSLA"
```

Rozpocznijmy od kilku prostych wykresów: line chart, barchart oraz candlestick chart, przy czym dla wykresów typu bar oraz candlestick wybieramy okres ostatnich dwóch miesięcy (kwiecień oraz maj)



Rysunek 1: Notowania TSLA od 2019-01-01 - line chart

Zasady dotyczące wykresu typu *bar* są następujące: Góra słupka oznacza najwyższą cenę, dół oznacza najniższą cenę. Lewa wypustka oznacza cenę na otwarciu, prawa wypustka cenę na zamknięciu. Jeżeli Zamknięcie jest wyżej niż otwarcie, wówczas słupek jest koloru zielonego, w przeciwnym wypadku jest pomarańczowy.



Rysunek 2: Notowania TSLA 2021-01-01::2021-04-01 - bar chart

Wykres *candlestick* jest bardzo podobny do typu bar: również obrazuje ceny otwarcia, zamknięcia, górną oraz dolną.



Rysunek 3: Notowania TSLA od 2019-01-01 - line chart

Przejdźmy zatem do wskaźników analizy technicznej. Będziemy bazować tegorocznych notowaniach TSLA.

1.2.1 SMA

Przypomnijmy, że dla SMA sygnał kupna następuje gdy krótka SMA przekracza z dołu ponad długą SMA, natomiast sygnał sprzedaży gdy przekracza z góry poniżej. Zaczniemy od zastosowania reguły 'death cross', plotujemy zatem SMA dla $n=50$ (kolor niebieski) oraz SMA dla $n=200$ (kolor czerwony). Otrzymujemy poniższy wykres:



Rysunek 4: SMA $n=50$ oraz SMA $n=200$

Widzimy, że długa SMA znajdowała się sporo poniżej krótkiej, jednakże zbliżają się do siebie. Oczywiście nie możemy tego traktować jako pewnik, że istotnie 'death cross' zostanie osiągnięty, jednak wygląda to niepokojąco. W połączeniu z niedawnym ogłoszeniem, że TESLA jednak nie będzie przyjmować płatności BitCoin zaczynamy jednak widzieć pewne zależności. Spójrzmy jeszcze na SMA z innymi wartościami, np $n=15$ oraz $n=50$.

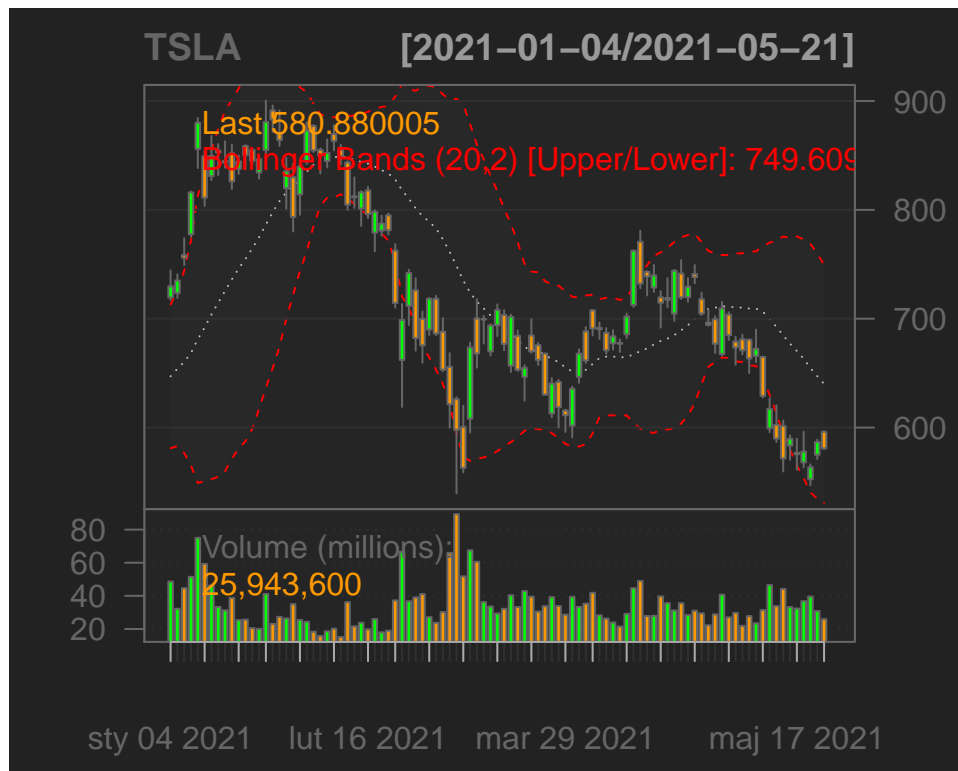


Rysunek 5: SMA $n=50$ oraz SMA $n=200$

W tym wypadku widzimy już pewne przecięcia: w okolicy przełomu lutego oraz marca 50-dniowa SMA przekroczyła 15-dniową, był to zatem sygnał sprzedaży. Przy następnym przecięciu otrzymaliśmy sygnał kupna, jednak patrząc na wykres faktycznych wartości powinniśmy byli szybko sprzedać, aby nie być stratnym, ponieważ następny otrzymany sygnał sprzedaży jest poniżej wartości sygnału kupna.

1.2.2 Bollinger Bands

Wstęgi Bollingera generalnie wśród inwestorów nie są uważane, za wskaźnik który daje jasny sygnał do kupna/sprzedaży, ponieważ 90% trade'ów następuje wewnątrz wstęgi. Teoretycznie jednak przekroczenie którejś z granic wstęgi może takim sygnałem być. Rozważmy standardową wstęgę z parametrami $n=20$ oraz $sd=2$, biorąc prostą ruchomą średnią:



Rysunek 6: BBands n=20, sd=2, maType='SMA'

Zauważmy, że widoczne są obszary tzw. 'squeeze', w szczególności w okolicach połowy lutego, i istotnie następuje po nim zwiększona zmienność cen – gwałtowny spadek. podobną sytuację (choć mniej) widzimy w okolicy 3 maja.

1.2.3 Momentum

Nad narzędziem jakim jest momentum nie będziemy się rozwodzić. Zasada jest prosta: przy zmianie z negatywnego na pozytywne otrzymujemy sygnał kupna, natomiast sygnał sprzedaży odwrotnie. Otrzymujemy poniższy wykres dla $n=10$, $n=5$ oraz $n=1$:



Rysunek 7: BBands $n=20$, $sd=2$, $maType='SMA'$

Z racji na to, że momentum jest tworzone jako osobny wykres od razu zwróćmy uwagę jak się zmieniają odczyty w zależności od parametrów (podpunkt c). Przede wszystkim im mniejsze n tym większe oscylacje. Patrząc na okolice 8 marca 2021 widzimy, że 1-dniowe momentum skacze z poniżej 0 na okolicie 100, 5-dniowe wzrasta z poniżej -100 w okolicie 0, natomiast 10-dniowe pomalą wzrasta z okolicy -200, ale nie przekracza 0. Otrzymujemy zatem nieco sprzeczne informacje, mianowicie:

- 1-dniowe momentum, daje sygnał kupna, ale zaraz daje sygnał sprzedaży (podczas gdy widzimy jeszcze potencjalny, co prawda mały, zysk na faktycznych dalszych odczytach)
- 5-dniowe momentum, daje sygnał kupna nieco później od 1-dniowej, a sygnał sprzedaży dużo później
- 10-dniowe momentum, daje bardzo opóźnione sygnały kupna oraz sprzedaży

Dobór parametrów dla tego wskaźnika jest zatem istotnym problemem.

1.2.4 STS

Kolejnym rozpatrywanym wskaźnikiem jest oscylator stochastyczny, który obrazuje w pewien sposób momentum. Zauważmy (na poniższym wykresie), że ta implementacja zwraca nieco inne wartości. Konkretnie pomiędzy -100 a 100. Otrzymujemy następujące sygnały: wartość +40 i wyżej oznacza, że mamy nadmiernie kupowany asset, natomiast -40 i poniżej oznacza nadmiernie sprzedawany asset. Jest to jeden z rozróżnianych sygnałów kupna/sprzedaży. Oprócz tego jest także tzw *SMI Divergence* jego jednak nie omówimy, ponieważ jest dosyć skomplikowany. Najprostszy jest jednak określanie przekroczenia linii sygnału. Gdy %K przekracza z dołu na górę linii %D wówczas mamy sygnał kupna, natomiast gdy %D spada poniżej %K mamy sygnał sprzedaży. Dla przykładu weźmy oscylator stochastyczny z bazowymi parametrami:



Rysunek 8: Stochastic oscillator, $n=13$, $\text{slow}=25$, $\text{fast}=2$, $\text{signal}=9$

Widzimy, że w okolicy 26 kwietnia 2021 sygnał przekracza SMI, otrzymujemy zatem sygnał sprzedaży. W okolicy 15 marca natomiast sygnał spada poniżej SMI, zatem mamy sygnał kupna.

1.2.5 RSI

Relative strength index ma stosunkowo prostą zasadę działania, opisaną w podpunkcie (a). Jest to jednak stosunkowo zaawansowany wskaźnik, i rozróżniamy także (bardziej skomplikowane) tzw. RSI Divergences czy też RSI Swing Rejections. Rozważmy prosty przykład z bazowym $n = 14$:



Rysunek 9: RSI, $n=14$

Widzimy wyraźny sygnał kupna dla 8 marca, jednak najwyższa potem wartość RSI jest równa około 63 w okolicy 13 kwietnia, nie mieliśmy zatem jasnego sygnału sprzedaży (patrzając jednak dalej powinniśmy byli to zrobić).

1.2.6 MACD

Zasada działania również jest prosta, zatem nie będziemy jej ponownie przytaczać. Dla przykładu rozważmy na poniższym wykresie MACD z bazowymi współczynnikami $\text{fast}=12$, $\text{slow}=26$, $\text{signal}=9$:



Rysunek 10: MACD, fast=12, slow=26, signal=9

Otrzymujemy sygnał sprzedaży w okolicy 19 stycznia, sygnał kupna w okolicy 15 marca oraz sygnał sprzedaży w okolicy 1 maja. Widzimy dosyć dobrą skuteczność tego wskaźnika, jednak sygnał sprzedaży w maju był nieco spóźniony (w porównaniu z rzeczywistymi odczytami). Warto zwrócić uwagę, że 'prędkość' z jaką przecinana jest linia sygnału uważana jest za wyznacznik

1.3 podpunkt c

W ostatniej części tego zadania spojrzymy jak się zmieniają wskaźniki w zależności od parametrów (dla tych, o których nie wspominaliśmy w podpunkcie b)

1.3.1 Bollinger bands

parametrem wstęgi bollingera jest przede wszystkim wartość n . Oprócz tego mamy parametr sd . Możemy również stosować EMA zamiast SMA. Rozważmy dwie wstęgi bollingera z parametrami $n=10$, $sd=2$ oraz $n=20$ $sd=2$:



Rysunek 11: BBands n=10, sd=2, maType='SMA'



Rysunek 12: BBands n=20, sd=2, maType='SMA'

Widzimy następującą różnicę: dla $n=10$ otrzymana wstęga jest dużo węższa. Oprócz tego 'squeeze' na przełomie stycznia oraz lutego jest widoczny wcześniej. Dodatkowo widzimy squeeze

na w końcu kwietnia, który nie jest widoczny dla $n=20$ (a po którym obserwujemy spadek cen).

1.3.2 SMA

Parametrem dla SMA również jest n . Ponieważ zasada działania dotyczy przecinania się różnych linii SMA zastosujemy na jednym wykresie cztery takie linie dla $n=10$ (żółty), 40(zielony), 100(czerwony) i 200(niebieski):



Rysunek 13: SMA $n=10$, $n=40$, $n=100$, $n=200$

Widzimy tutaj sporo przecięć, i wszystkie w miare dobrze obrazują następujące po nich tendencje (zgodnie z zasadami opisanymi w podpunkcie a). Zauważmy, że wygląda na to, że linia żółta ($n=10$) jest bliska przekroczenia z góry na dół linii niebieskiej ($n=200$), możliwe zatem, że będziemy obserwować dalszy spadek (stan na 21.05) o czym z resztą będziemy mogli się niedługo przekonać. Problem doboru parametrów jest zatem kwestią jak dużą responsywność na fluktuacje cen chcemy uzyskać.

1.3.3 STS

Oscylator stochastyczny ma dużo parametrów: n *slow*, *fast*, *signal*. Rozważamy następujące SMI:

- $n=13$, *slow*=25, *fast*=2, *signal*=20
- $n=5$, *slow*=30, *fast*=4, *signal*=9
- $n=13$, *slow*=10, *fast*=2, *signal*=9



Rysunek 14: różne SMI

Zwróćmy uwagę, że różnice w parametrach pogłębiły kształty krzywych. W szczególności to widać dla trzeciego z SMI. Co do samego kształtu są one jednak podobne, występują także lekkie przesunięcia punktów przecięć. Ponieważ SMI obrazuje jednak także nadmierne sprzedawanie/kupowanie (prędkość zmiany) wymagana jest ostrożność.

1.3.4 RSI

Relative Strength index zależy jedynie od parametru n (oprócz tego możemy także wybrać typ ruchomej średniej). Tworzymy wykres dla $n=14$ oraz $n=5$



Rysunek 15: RSI, $n=14$, $n=5$

Widzimy, że zmniejszenie wartości n spowodowało zwiększenie oscylacji, zwiększyło zatem czułość wskaźnika na odczyty wartości. Co do zasady, kształt wykresu jest generalnie podobny, tylko uwydatniony. Zmiana parametru może zatem powodować znaczące różnice w sygnałach.

1.3.5 MACD

Dla Moving average convergence/divergence przyjmujemy parametry fast, slow oraz signal. Dla przykładu bierzemy następujące wartości:

- fast=12, slow=15, signal=2
- fast=3, slow=15, signal=13
- fast=12, slow=26, signal=9



Rysunek 16: Różne MACD

Pierwszym co się rzuca w oczy jest fakt, że mała wartość signal(albo/i bliska wartość 12-15 oraz 2) powoduje pokrywanie się lini sygnału z MACD. Kładąc mniejsze wartości fast oraz slow (środkowy wykres) otrzymaliśmy większą wrażliwość na fluktuacje, niż widzimy to na dolnym wykresie. Dla tego narzędzia zatem dobór parametrów także jest bardzo ważny.

2 Zadanie 3.

2.1 Wstęp i opis eksperymentów

W tej części sprawozdania zajmiemy się analizą danych *globtemp* przedstawiających odchylenia średniej rocznej temperatury, mierzonej w stopniach Celsjusza latach 1880-2015, od średniej temperatury globalnej w latach 1951-1980. Rozważany szereg czasowy ma długość równą 136 oraz nie obserwujemy wartości zakodowanych jako NA.

```
szereg <- ts(globtemp, frequency=1, start= start(globtemp), end=end(globtemp))
anyNA(szereg) #Brak NA

## [1] FALSE

length(szereg) #długość szeregu czasowego

## [1] 136
```

Zasadniczym celem tej części sprawozdania jest przeprowadzenie analizy dotyczącej dopasowania i diagnostyki modelu autoregresji AR(p). W szczególności, sprawdzimy stacjonarność danych, wybierzemy optymalny rząd modelu autoregresji, wyznaczmy estymatory nieznan

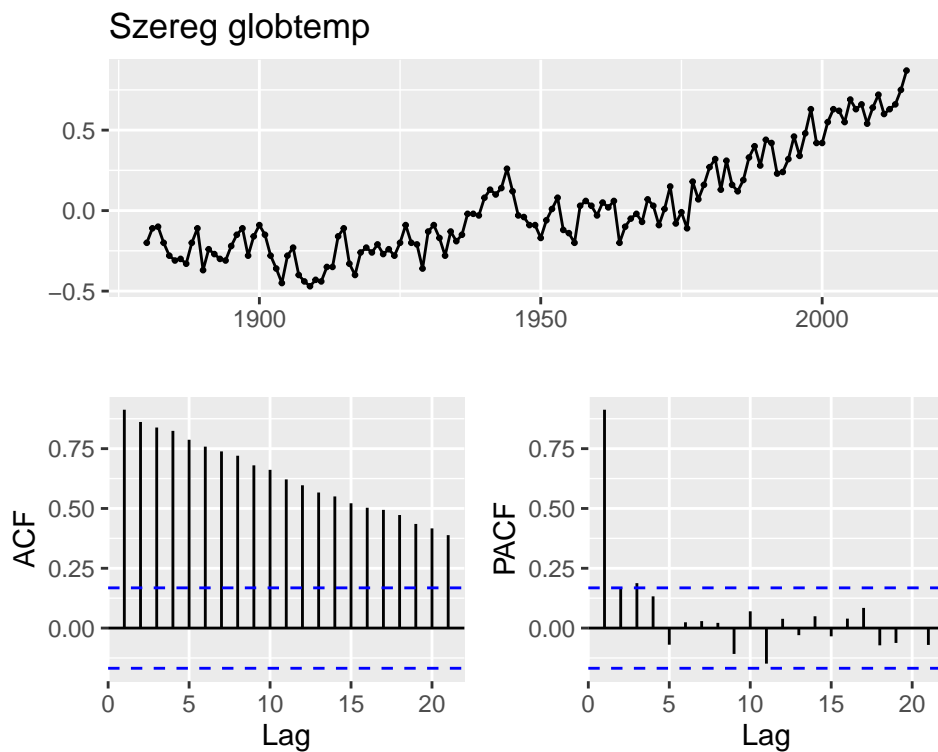
parametrów modelu autoregresji metodą Yule’a-Walkera, Burga oraz metodą największej wiarygodności, przeprowadzimy diagnostykę modelu, a w ostatniej fazie wykorzystamy dopasowane modele do konstrukcji prognoz. Najważniejsze użyte narzędzia/przeprowadzone symulacje:

- Estymacja/eliminacja trendu metodami takimi jak różnicowanie, wielomiany, wielomiany trygonometryczne
- Analiza wykresów estymatorów funkcji ACF i PACF.
- Kryteria informacyjne (AIC i FPE).
- Testy białoszumowości.

Przejdźmy teraz do konkretnej części analizy.

2.2 Podpunkt (a)

Naszym celem jest zweryfikowanie stacjonarności danych. Spójrzmy na wykres szeregu oraz estymatory funkcji ACF i PACF.



Rysunek 17: Wykres szeregu czasowego dotyczącego danych *globtemp* wraz z funkcją ACF i PACF

Na rysunku 17 widzimy, że dane zawierają wyraźny trend długoterminowy. Tę obserwację potwierdza wolne zanikanie estymatora funkcji ACF. Ponadto nie obserwujemy sezonowości. Wobec tego zakładamy następujący model

$$X_t = f(t) + Z_t,$$

gdzie X_t to wartości szeregu czasowego, $f(t)$ to deterministyczna składowa trendu, a Z_t to losowe fluktuacje. Model ten wydaje się bardziej odpowiedni, niż model multiplikatywny, ponieważ

wariancja nie rośnie wraz z poziomem szeregu. Na wszelki przypadek sprawdzimy jednak, czy transformacja potęgowa Boxa-Coxa może być dla nas użyteczna.

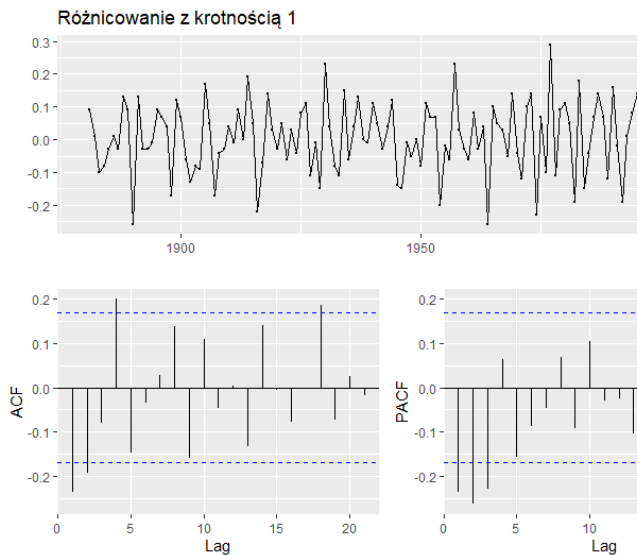
Uwaga 1 Szereg *globtemp* zawiera wartości ujemne! Wobec tego dodajemy stałą dodatnią do wartości szeregu (u nas stała = 1).

Rysunek 18: Transformacje potęgowe Boxa-Coxa dla szeregu czasowego *globtemp* z lat 1880-2015

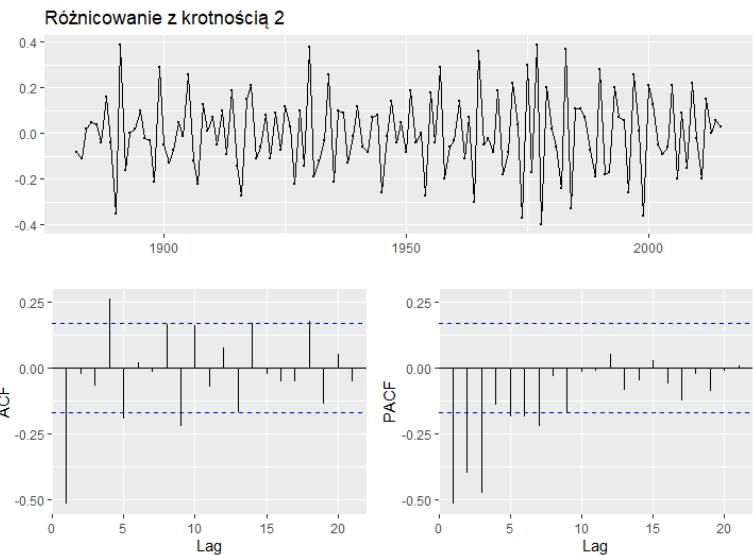
Jak widzimy z powyższej animacji, nie ma potrzeby, by użyć transformacji potęgowej Boxa-Coxa, ponieważ jej zastosowanie nie poprawia zachowania się szeregu lub poprawa jest mało widoczna, zatem nie opłaca się komplikować analizy. Teraz przystąpimy do estymacji i eliminacji trendu z danych następującymi metodami:

- Różnicowanie szeregu czasowego *globtemp*.
- Estymacja/eliminacja trendu metodą parametryczną, tj. u nas wielomianami oraz wielomianami trygonometrycznymi.

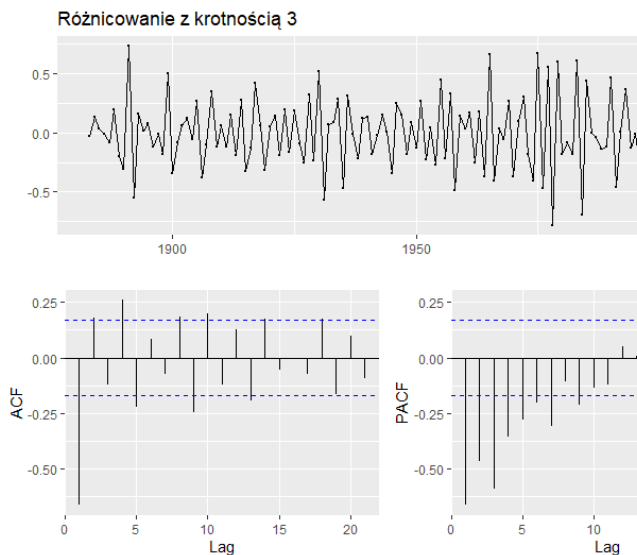
(a) Różnicowanie



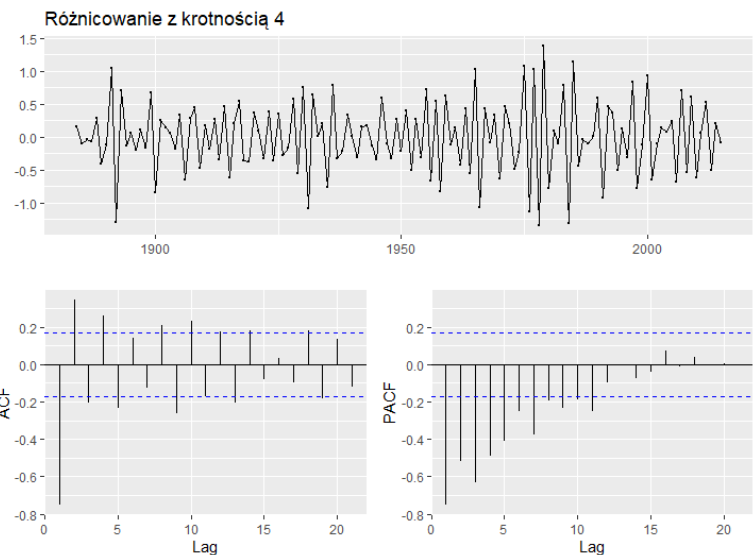
Rysunek 19: Efekt jednokrotnego różnicowania



Rysunek 20: Efekt dwukrotnego różnicowania



Rysunek 21: Efekt potrójnego różnicowania

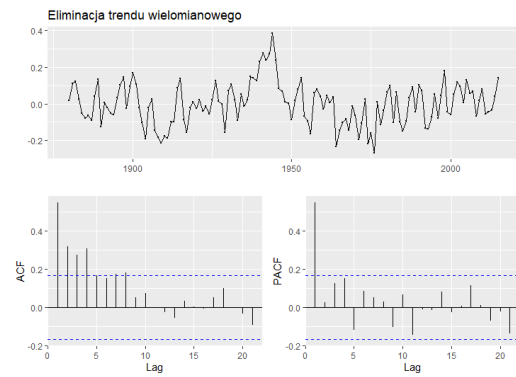
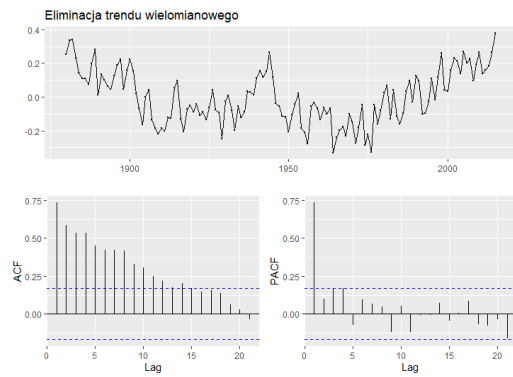


Rysunek 22: Efekt poczwórnego różnicowania

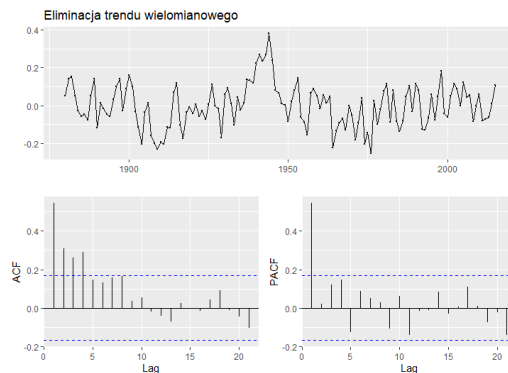
Różnicowanie jednokrotne daje już zadowalające rezultaty, ponieważ pozbyliśmy się trendu oraz funkcja ACF szybko zanika, co możemy zauważyć na rysunku nr 19.

- (b) Estymacja i eliminacja trendu poprzez wielomiany stopnia pierwszego, drugiego oraz trzeciego.

Rysunek nr 23 nie daje zadowalających wyników, natomiast estymacja i eliminacja trendu wielomianem drugiego i trzeciego stopnia (rysunki nr 24 i 25) daje już nam podobne rezultaty na zadowalającym poziomie. W związku z tym lepiej wybrać prostszy model, tzn. estymację i eliminację trendu poprzez wielomian stopnia drugiego.



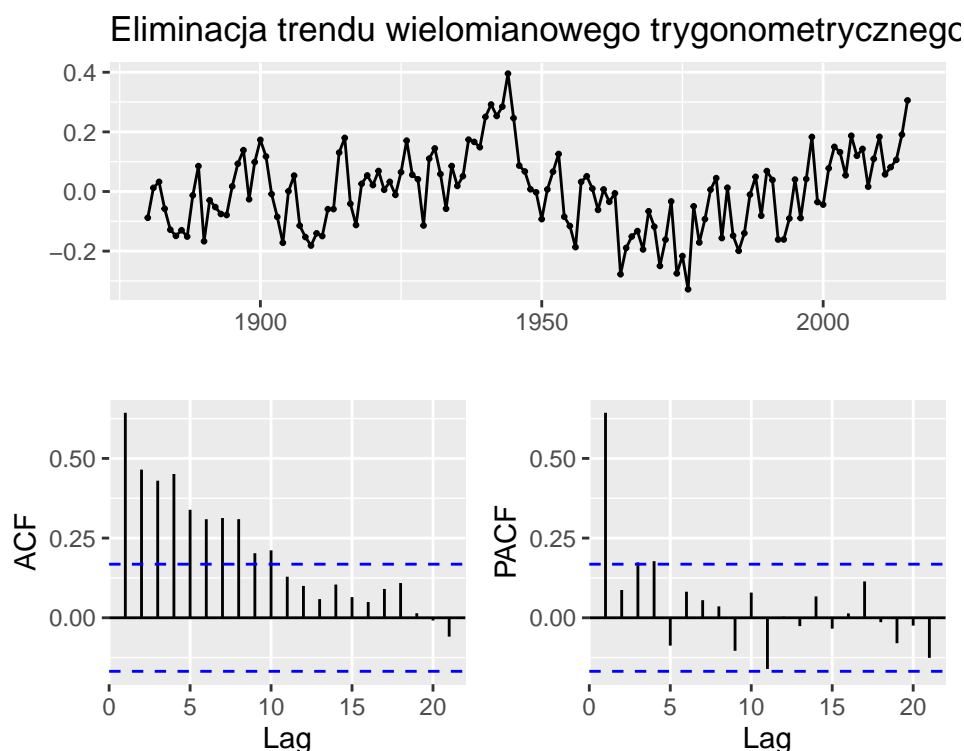
Rysunek 23: Efekt estymacji i eliminacji trendu z danych poprzez wielomian stopnia pierwszego
Rysunek 24: Efekt estymacji i eliminacji trendu z danych poprzez wielomian stopnia drugiego



Rysunek 25: Efekt estymacji i eliminacji trendu z danych poprzez wielomian stopnia trzeciego

(c) Estymacja i eliminacja trendu poprzez wielomian trygonometryczny.

```
wielomian_tryg <- function(x,n,s) {
  x <- ts(x)
  y <- 0
  for (k in 1:n) {
    y <- y + sin(k*x/s) + cos(k*x/s)
  }
  return(y)
}
trend_tryg <- tslm(szereg~I(wielomian_tryg(trend,3, 100)))$fitted
ggtsdisplay(szereg-trend_tryg,
             main='Eliminacja trendu wielomianowego trygonometryczne-
             go')
```



Rysunek 26: Estymacja i eliminacja trendu wielomianem trygonometrycznym stopnia trzeciego

Ta metoda także także daje dobre wyniki.

Wniosek 1 *Metody parametryczne estymacji i eliminacji trendu oparte na wielomianach (w tym trygonometrycznych) oraz metoda różnicowania (jedynie usunięcie trendu) prowadzą do uzyskania szeregu, który możemy uznać za **stacjonarny**.*

Do dalszych rozważań przyjmujemy jednokrotnie zróżnicowany szereg, do którego dopasujemy odpowiedni model autoregresji. Diagnostyka modelu pokaże nam, czy rzeczywiście wspomniany jednokrotnie zróżnicowany szereg jest "dobry" dla naszych rozważań.

```
szereg_diff <- diff(szereg, differences = 1)
```

2.3 Podpunkt (b)

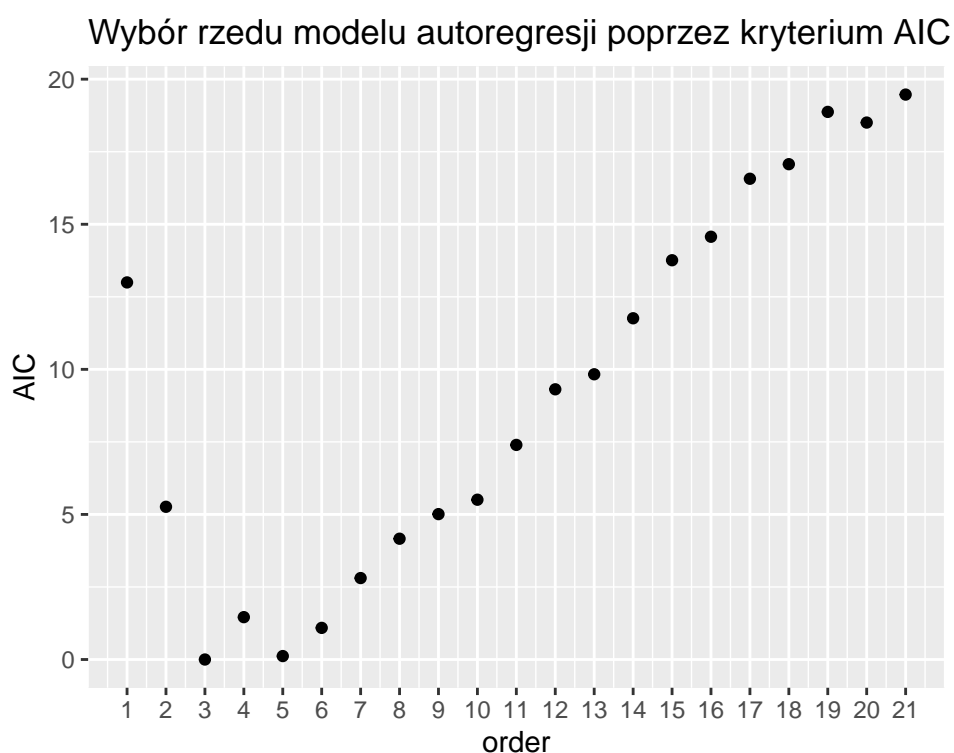
W podpunkcie tym wybierzemy optymalne rzędy modelu autoregresji AR(p), wykorzystując:

- Funkcję PACF (właściwie to jej estymator) - z rysunku nr 19 wynika, że rząd autoregresji powinien być równy 3, ponieważ dla opóźnień $h > 3$ próbkowa cząstkowa autokorelacja zanika, tzn. dalsze wartości są statystycznie nieistotne.
- Kryterium AIC - dopasowujemy model autoregresji do danych w ten sposób, by rząd modelu został wybrany poprzez minimalizację kryterium AIC. Możemy zyskać dostęp do tej opcji, zaznaczając opcję `aic=TRUE`. Ponadto współczynniki modelu estymujemy poprzez metodę Yule'a-Walkera.

```

model_1 <- ar(szereg_diff, aic=TRUE, method='yule-walker', se.fit=TRUE)
df_1<- data.frame(c(seq(1, model_1$order.max, by=1)), model_1$aic[2:22])
colnames(df_1) <- c('order', 'AIC')
#Uwaga: na wykresie są przedstawione różnice pomiędzy AIC, a nie ich wartości!
#AIC także wskazuje na rząd równy 2
ggplot(df_1, aes(x = order, y = AIC)) +
  geom_point() +
  ggtitle('Wybór rzędu modelu autoregresji poprzez kryterium AIC') +
  scale_x_continuous(breaks=1:21)

```



Rysunek 27: Różnice pomiędzy wartościami AIC dla najlepiej dopasowanego modelu autoregresji oraz każdego z pozostałych modeli dla badanych danych

Uwaga 2 Współrzędne y punktów z rysunku nr 27 to nie wartości tego kryterium, a różnice pomiędzy wartościami tego kryterium wyliczonymi dla najlepiej dopasowanego modelu oraz każdego z pozostałych modeli.

Kryterium AIC sugeruje rząd równy 3, co jest zgodne z rysunkiem 19. Ponieważ zaznaczyliśmy opcję `aic=TRUE` (rząd wybrany przez minimalizację kryterium AIC) w funkcji `ar`, to aby uzyskać optymalny rząd modelu autoregresji, wystarczy wykonać poniższy kod.

```
model_1$order

## [1] 3
```

Lecz niewiele brakuje do wybrania rzędu równego 5, co także jest zgodne z rysunkiem 19.

- Kryterium FPE - tym razem dopasowujemy do danych model autoregresji poprzez minimalizację kryterium FPE, gdzie

$$FPE(p) := \hat{\sigma}^2 \frac{n+p}{n-p},$$

a $\hat{\sigma}$ jest estymatorem wariancji białego szumu. Zaimplementujemy teraz kryterium FPE w R.

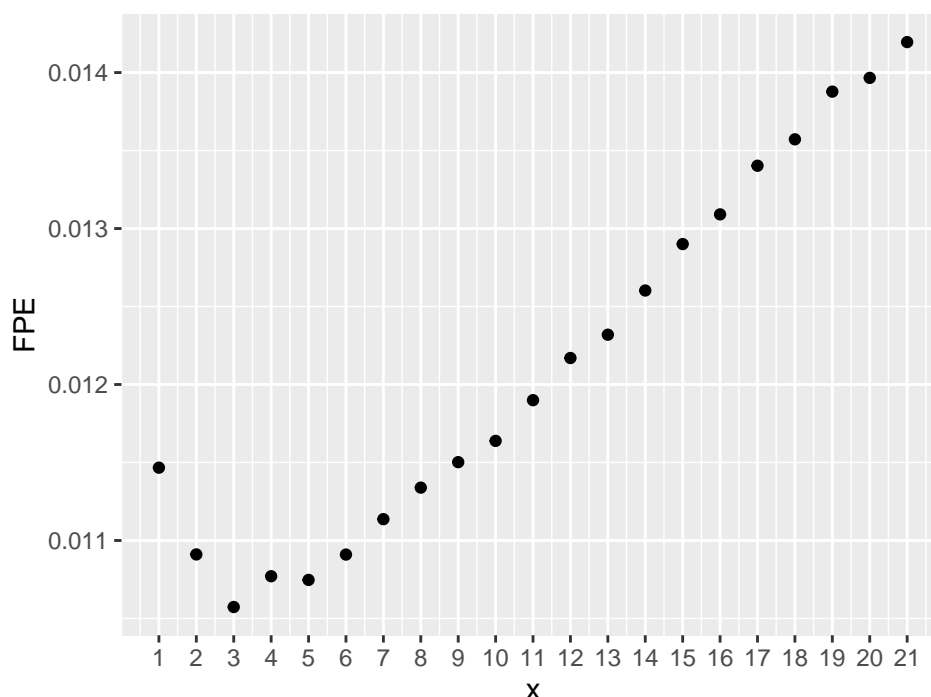
```
fpe <- function(time_series, p.max, method) {
  #inicjalizacja wektora
  var_hat <- rep(0, p.max)
  fpe_values <- rep(0, p.max)
  for(p in 1:p.max) {
    #dostajemy sie do estymatora wariancji białego szumu
    var_hat <- ar(time_series, FALSE, p, method=method)$var.pred
    #liczymy FPE zgodnie ze wzorem
    fpe_values[p] <- var_hat*(length(time_series)+p)/(length(time_series)-
p)
  }
  return(fpe_values)
}
which.min(fpe(szereg_diff, p.max=model_1$order.max, method='yule-walker'))

## [1] 3
```

Kryterium FPE także wybrało rząd autoregresji $p = 3$. Zwizualizujemy teraz metodę na wykresie.

Wniosek 2 Dla jednokrotnie zróżnicowanego szeregu, do którego dopasowujemy model autoregresji, optymalnym rzędem wybranym podczas podpunktu (b) jest $p = 3$.

Wybór rzędu modelu autoregresji – kryterium FPE



Rysunek 28: Wartości kryterium FPE dla dopasowania modelu autoregresji do badanych danych

2.4 Podpunkt (c)

Wyznamy teraz parametry zidentyfikowanych modeli autoregresji i porównamy wyniki dla metody Yule’a-Walkera oraz Burga (estymacja wstępna) z metodą największej wiarygodności (estymacja właściwa). Wyznamy najpierw wartości pożądaných estymatorów, dopasowując odpowiednie modele autoregresji, i przedstawimy je w formie tabeli w celu lepszej wizualizacji.

```
#tworzymy modele, by otrzymać współczynniki
model_2 <- ar(szereg_diff, aic=TRUE, method='burg', se.fit=TRUE)
model_3 <- ar(szereg_diff, aic=TRUE, method='mle', se.fit=TRUE)

#estymatory
yw_par <- model_1$ar
burg_par <- model_3$ar
mle_par <- model_3$ar

model_2$order

## [1] 3

model_3$order

## [1] 3
```

W szczególności możemy zauważyć, że rzędy modeli autoregresji wybranych dla *model2* oraz *model3* poprzez minimalizację kryterium AIC są także równe 3.

	yw_par	burg_par	mle_par
1	-0.36	-0.36	-0.37
2	-0.33	-0.34	-0.34
3	-0.23	-0.24	-0.24

Tabela 1: Wartości estymatorów współczynników dopasowanego modelu autoregresji AR(3) metodą Yule’a-Walkera, Burga oraz największej wiarygodności

Z tabeli nr 1 wynika, że estymatory mają bardzo zbliżone do siebie wartości. Popatrzmy teraz na ich wariancję. Z wykładu wiadomo, że estymatory wyznaczone podczas estymacji wstępnej (u nas uzyskane metodą Yule’a-Walkera, Burga) są zwykle bardziej obciążone, niż estymatory wyznaczone podczas estymacji właściwej (u nas metoda ML).

	war_yw	war_burg	war_mle
1	0.007234	0.006963	0.006962
2	0.007371	0.007095	0.007093
3	0.007234	0.006963	0.006962

Tabela 2: Estymatory wariancji dla poszczególnych współczynników modelu autoregresji AR(3)

Estymatory wariancji dla współczynników uzyskanych podczas estymacji wstępnej są niewiele większe od estymatora wariancji dla współczynników uzyskanych podczas estymacji właściwej.

Wniosek 3 *Pomimo tego, iż estymacja wstępna wymaga mniejszego nakładu obliczeń, estymatory uzyskane tą metodą oraz ich estymowane wariancje są w naszym przypadku sensowne, gdyż mają wartości bardzo bliskie tym uzyskanym w wyniku estymacji właściwej.*

2.5 Podpunkt (d)

Wyznamy teraz przedziały ufności dla parametrów zidentyfikowanego modelu AR(3), wykorzystując twierdzenie o asymptotycznej normalności estymatorów Yule’a-Walkera. Przypomnijmy założenia:

- Szereg ma średnią równą zero - założenie to jest spełnione, gdyż funkcja *ar* odejmuje średnią z szeregu przy dopasowaniu modelu.
- Szereg jest przyczynowy - jest tak, ponieważ model autoregresji został dopasowany z wykorzystaniem metody Yule’a-Walkera.

Teraz konstruujemy przedziały ufności, są one postaci

$$\left(\hat{\phi}_i - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\text{Var} \hat{\phi}_i}, \quad \hat{\phi}_i + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\text{Var} \hat{\phi}_i} \right),$$

przy czym oznaczenia są zgodne z wykładem.

```

alfa <- 0.05
L_1 <- yw_par[1] - qnorm(1-alfa/2, 0,1)*sqrt(model_1$asy.var.coef[1,1])
R_1 <- yw_par[1] + qnorm(1-alfa/2, 0,1)*sqrt(model_1$asy.var.coef[1,1])
L_2 <- yw_par[2] - qnorm(1-alfa/2, 0,1)*sqrt(model_1$asy.var.coef[2,2])
R_2 <- yw_par[2] + qnorm(1-alfa/2, 0,1)*sqrt(model_1$asy.var.coef[2,2])
L_3 <- yw_par[3] - qnorm(1-alfa/2, 0,1)*sqrt(model_1$asy.var.coef[3,3])
R_3 <- yw_par[3] + qnorm(1-alfa/2, 0,1)*sqrt(model_1$asy.var.coef[3,3])

```

	L	R	wsp.
ϕ_1	-0.5245	-0.1911	0
ϕ_2	-0.5001	-0.1635	0
ϕ_3	-0.3956	-0.0622	0

Tabela 3: Przedziały ufności; L i R to odpowiednio lewy i prawy przedział ufności dla współczynników dopasowanego modelu

Z tabeli nr 3, porównując kolumnę *wsp.* z L i R , widzimy, że zera nie należą do odpowiednich przedziałów ufności. Oznacza to, że parametry modelu są **statystycznie istotne** na poziomie ufności $\alpha = 0.05$. Dla lepszego zrozumienia przypomnijmy, że hipoteza zerowa H_0 postuluje, że $\beta_i = 0$, a H_1 , że $\beta_i \neq 0$.

2.6 Podpunkt (e)

W podpunkcie tym zweryfikujemy dopasowany model autoregresji przy pomocy analizy reszt.

- Graficzny test białoszumowości.

```

reszty <- model_1$resid

graph_test <- function(ts, conf.int=1.96/sqrt(NROW(ts)),lag_max=floor(NROW(ts)/4),p
  if(plot==TRUE){
    ts_name <- deparse(substitute(ts))
    plot<- ggAcf(ts,ci=NA,col='white',lag_max = lag_max, main=paste('Test gra-
    ficzny dla szeregu: ', ts_name))+
      geom_hline(yintercept = conf.int, linetype='dashed',color='lightblue')+
      geom_hline(yintercept = -conf.int,linetype='dashed',color='lightblue')+
      theme_dark()
    cond_1 <- sum(abs(plot$data$Freq)<=conf.int)/lag_max #warunek pierwszy te-
    stu graficznego białoszumowości (95% znajdujących się wewnątrz przedzia-
    łu)
    cond_2 <- any(abs(plot$data$Freq)>=conf.int+0.05*conf.int) #warunek dru-
    gi testu graficznego białoszumowości (■aden *ISTOTNIE* nie przekracza prze-
    dzia■łu )
    lista <- list(cond_1,cond_2,plot)
    return(lista)}
  else{ #dodatkowe, w celu przyspieszenia obliczeń dla symulacji - wykres nie-
    potrzebny
    acf <- ggAcf(ts,plot=FALSE,lag_max=lag_max)$acf[-1]

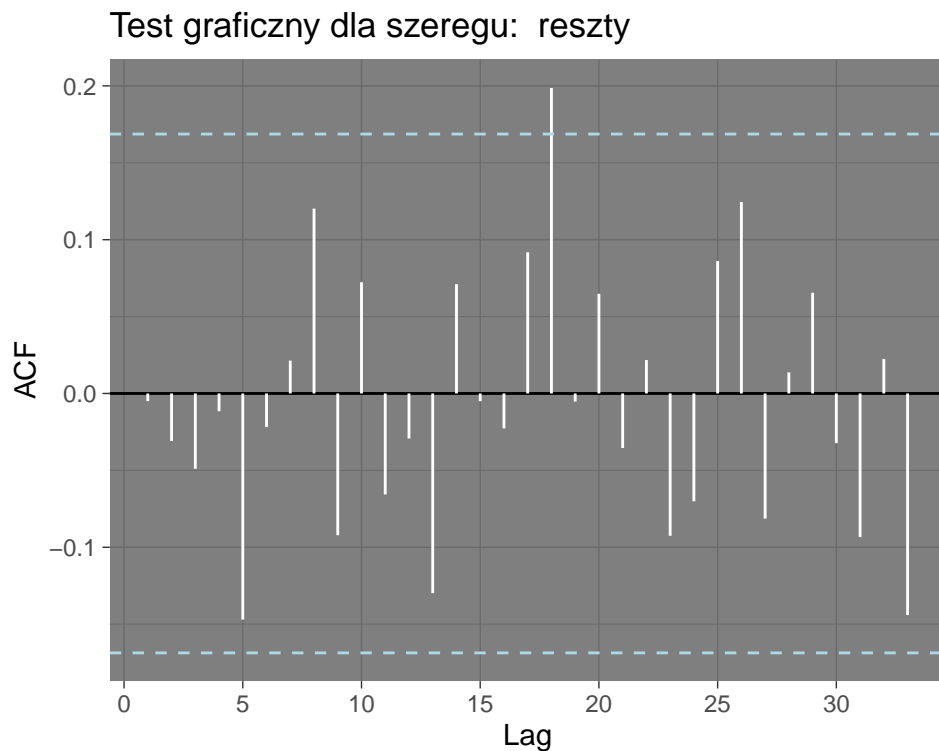
```

```

cond_1 <- sum(abs(acf)<=conf.int)/lag_max
cond_2 <- any(abs(acf)>=conf.int+0.05*conf.int)
lista <- list(cond_1, cond_2,acf)
return(lista)}}
graph_test(reszty)

## [[1]]
## [1] 0.969697
##
## [[2]]
## [1] TRUE
##
## [[3]]

```



Rysunek 29: Estymator funkcji ACF dla reszt z dopasowanego modelu

Jak możemy zaobserwować z powyższego rysunku oraz odczytać z wyniku zwróconego przez test graficzny, blisko 97% autokorelacji próbkowych jest nieistotnych. Zatem test graficzny potwierdza, że reszty są białym szumem.

- Formalny test statystyczny oparty na statystyce Ljung-Boxa, taki sam test został przez nas zaimplementowany na pierwszym sprawozdaniu, z tą różnicą tym razem, że w teście przedstawionym poniżej dodajemy dodatkowy parametr p , który uwzględnia liczbę stopni swobody. Przyjmujemy, że $p = 3$, ponieważ dopasowaliśmy szybciej model autoregresji AR(3).

```

theor_test <- function(ts, p){
  if(NROW(ts)<=500){
    test <-Box.test(ts, lag=log(NROW(ts)), type='Ljung-Box', fitdf = p)
  }
  else{
    if(NROW(ts)>750){
      test <-Box.test(ts,lag=20,type='Ljung-Box', fitdf=p)
    }
    else{
      test <-Box.test(ts,lag=10,type='Ljung-Box', fitdf=p)
    }
  }
  return(test)
}

theor_test(reszty, 3)

##
## Box-Ljung test
##
## data:  ts
## X-squared = 0.47969, df = 1.9053, p-value = 0.7667

```

Jako że p-wartość jest dużo większa od poziomu istotności $\alpha = 0.05$, nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, mówiącej o tym, że mamy do czynienia z **białym szumem**.

- Test oparty na dopasowaniu modelu autoregresji do reszt - jeżeli wybrany rząd jest równy zero, oznacza to, że reszty możemy uznać za ciąg nieskorelowany (biały szum).

Uwaga 3 *Badany przez nas szereg reszt zawiera wartości zakodowane jako NA. Musimy je pominąć podczas dopasowywania modelu autoregresji.*

```

ar(reszty[4:length(reszty)], aic=TRUE, method='yule-walker')$order

## [1] 0

ar(reszty[4:length(reszty)], aic=TRUE, method='mle')$order

## [1] 0

```

Rząd dopasowanego modelu (minimalizacja kryterium AIC) autoregresji metodą Yule'a-Walkera, jak i największej wiarygodności, jest równy zero. Zatem rozważany test potwierdza, że reszty stanowią **biały szum**.

- Test znaków - także potwierdza, że reszty możemy uznać za **biały szum**.

```

difference.sign.test(reszty)

##
##  Difference Sign Test
##
## data:  reszty
## statistic = 1.0513, n = 132, p-value = 0.2931
## alternative hypothesis: nonrandomness

```

Wniosek 4 Wszystkie powyższe cztery testy zgodnie potwierdziły, że reszty możemy poczytać za ciąg nieskorelowany, czyli biały szum. Oznacza to, że model autoregresji jest poprawnie dopasowany do danych.

W podpunkcie tym sprawdzimy jeszcze normalność reszt - czasami założenie to jest bardzo istotne, np. gdy konstruujemy przedziały predykcyjne. Do sprawdzenia normalności reszt użyjemy:

- Test Jarque-Bera - w teście testujemy H_0 : skośność = 0 i kurtoza = 3 (wartości teoretyczne dla rozkładu normalnego) vs H_1 : H_0 jest fałszywa.

```

JarqueBera.test(reszty)

##
##  Jarque Bera Test
##
## data:  reszty
## X-squared = 3.7041, df = 2, p-value = 0.1569
##
##
##  Skewness
##
## data:  reszty
## statistic = 0.18297, p-value = 0.3908
##
##
##  Kurtosis
##
## data:  reszty
## statistic = 2.2654, p-value = 0.08495

```

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. A zatem test Jarque-Bera mówi nam o tym, że rozkład reszt możemy uznać za normalny.

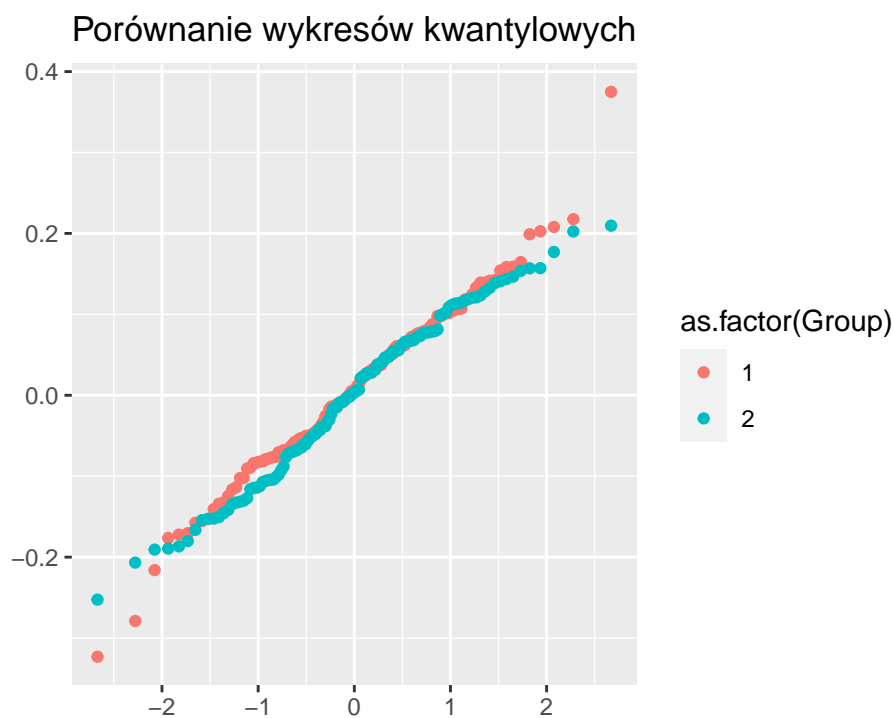
- Test Shapiro-Wilka - testujemy H_0 : skośność = 0 i eksces = 0 (wartości teoretyczne dla rozkładu normalnego) vs H_1 : jedna z wartości skośności lub ekscesu jest różna od zera.

```
shapiro.test(reszty)

##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  reszty
## W = 0.98347, p-value = 0.1099
```

Nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej na poziomie istotności $\alpha = 0.05$. A zatem test Shapiro-Wilka mówi nam o tym, że rozkład reszt możemy uznać za normalny.

- Wykres kwantylowy.



Rysunek 30: Wykresy kwantylowe dla rozkładu normalnego (grupa 1) i reszt (grupa 2)

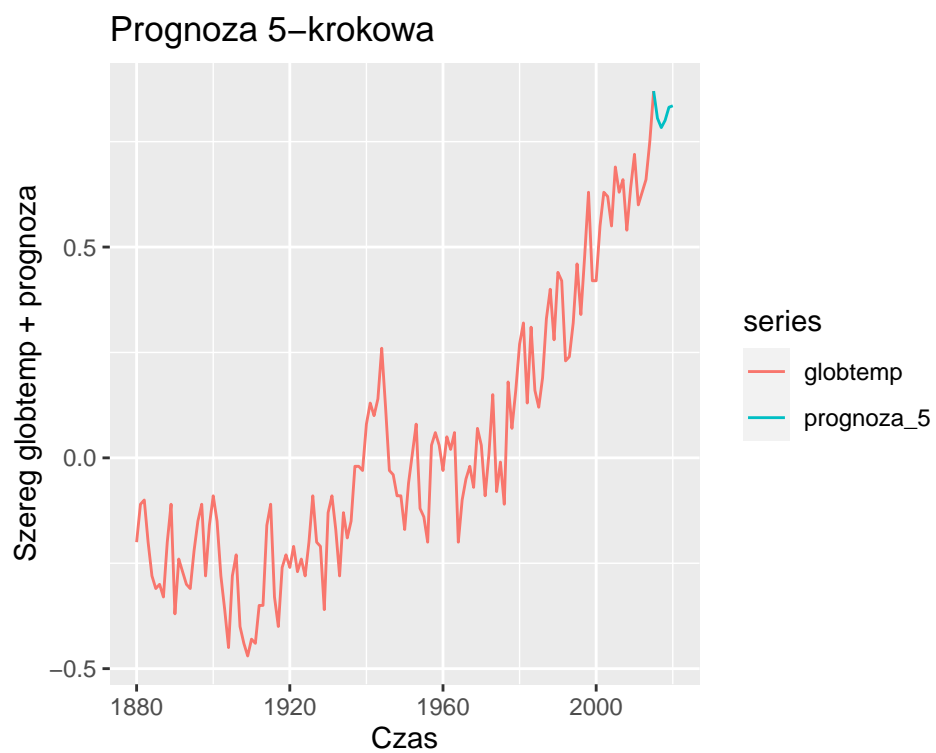
Wykresy kwantylowe także potwierdzają normalność reszt.

Wniosek 5 *Test Jarque-Bera, test Shapiro-Wilka oraz wykres kwantylowy potwierdzają, że szeregi rezydów ma rozkład normalny.*

2.7 Podpunkt (f)

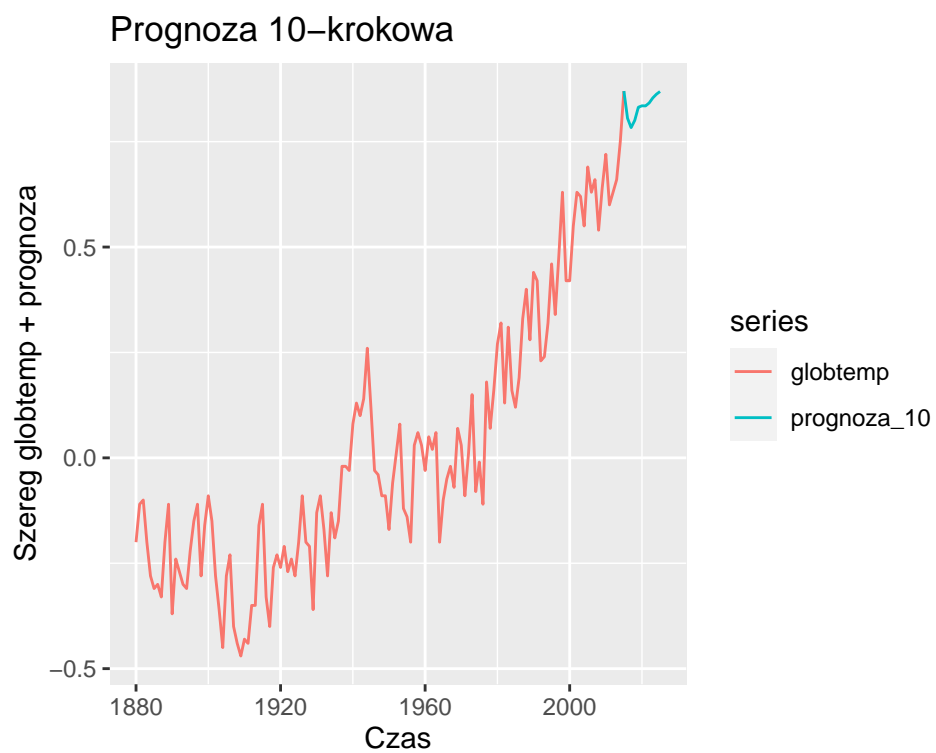
Wyznaczamy prognozy:

- 5-krokowe (pamiętajmy o odwróceniu transformacji różnicowania!).



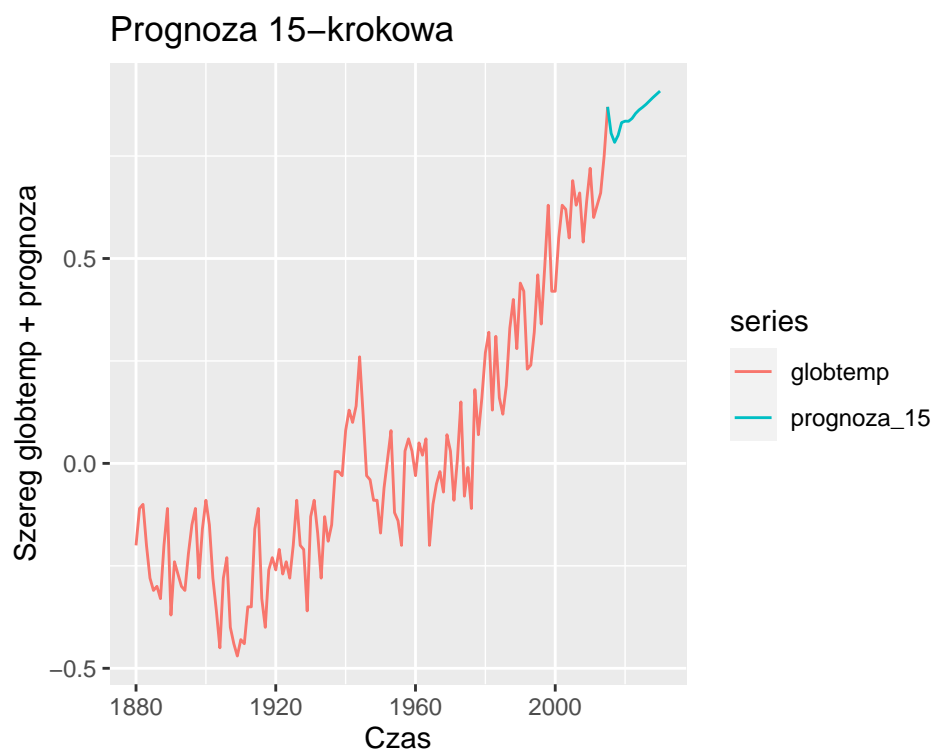
Rysunek 31: Szereg czasowy *globtemp* wraz ze skonstruowaną 5-krokową prognozą

- 10-krokowe.



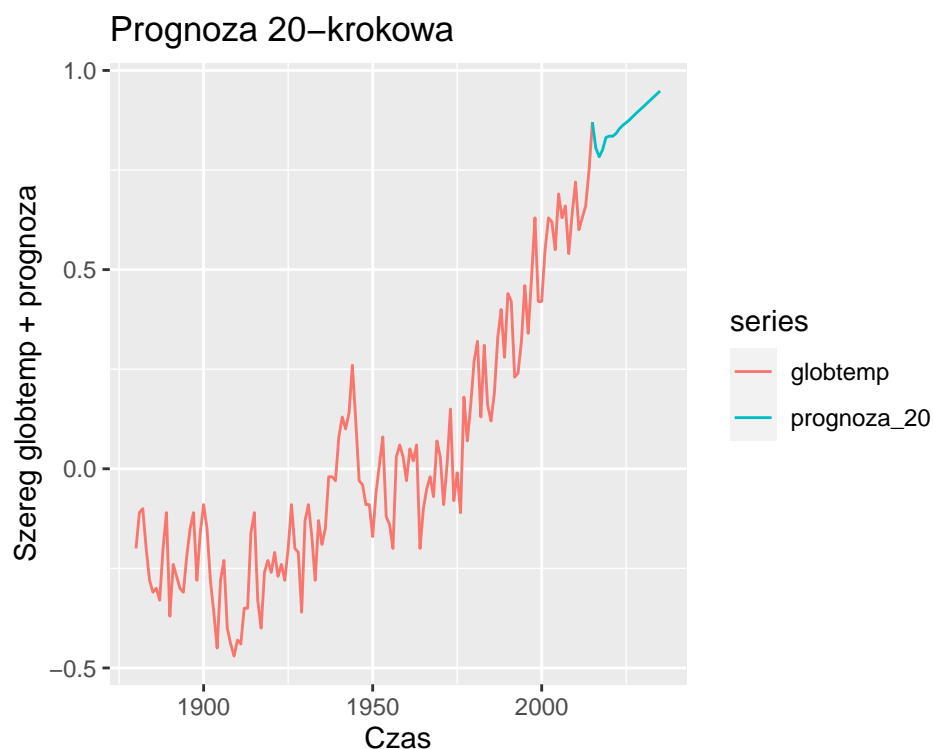
Rysunek 32: Szereg czasowy *globtemp* wraz ze skonstruowaną 10-krokową prognozą

- 15-krokowe



Rysunek 33: Szereg czasowy *globtemp* wraz ze skonstruowaną 15-krokową prognozą

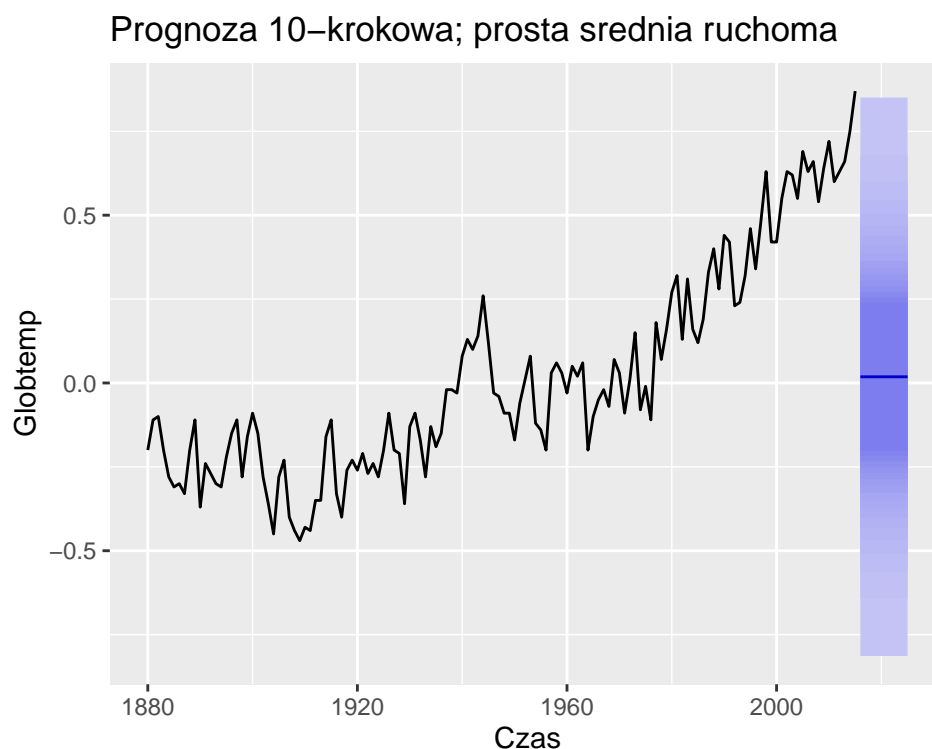
- 20-krokowe



Rysunek 34: Szereg czasowy *globtemp* wraz ze skonstruowaną 20-krokową prognozą

Użyjemy teraz prostych metod prognozowania jako metod referencyjnych w stosunku do tych użytych szybciej. Robimy tak, ponieważ chcemy uniknąć sytuacji, w której metody proste dają porównywalne wyniki kosztem o wiele mniej złożonej analizy.

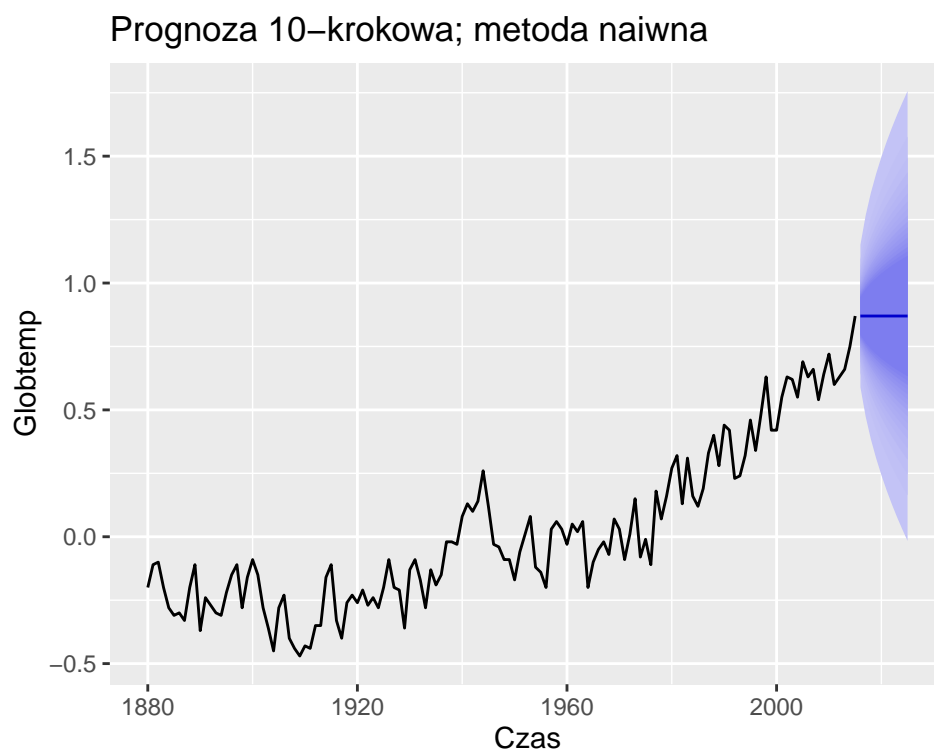
- Prosta średnia ruchoma dla prognozy 10-krokowej - uśredniamy wszystkie (nie zawsze tak musi być) obserwacje szeregu czasowego i wykorzystujemy tę wartość jako prognozę dla kolejnego okresu (u nas jest to jeden rok). Prognozy dla dalszych lat uzyskujemy poprzez podejście sekwencyjne.



Rysunek 35: Prognoza 10-krokowa dla szeregu globtemp skonstruowana przy pomocy prostej średniej ruchomej

Narysowaliśmy także przedziały predykcyjne w celu lepszej wizualizacji. Jak widzimy, metoda ta wypada bardzo słabo. Bezpośrednią przyczyną tego zjawiska jest występowanie trendu.

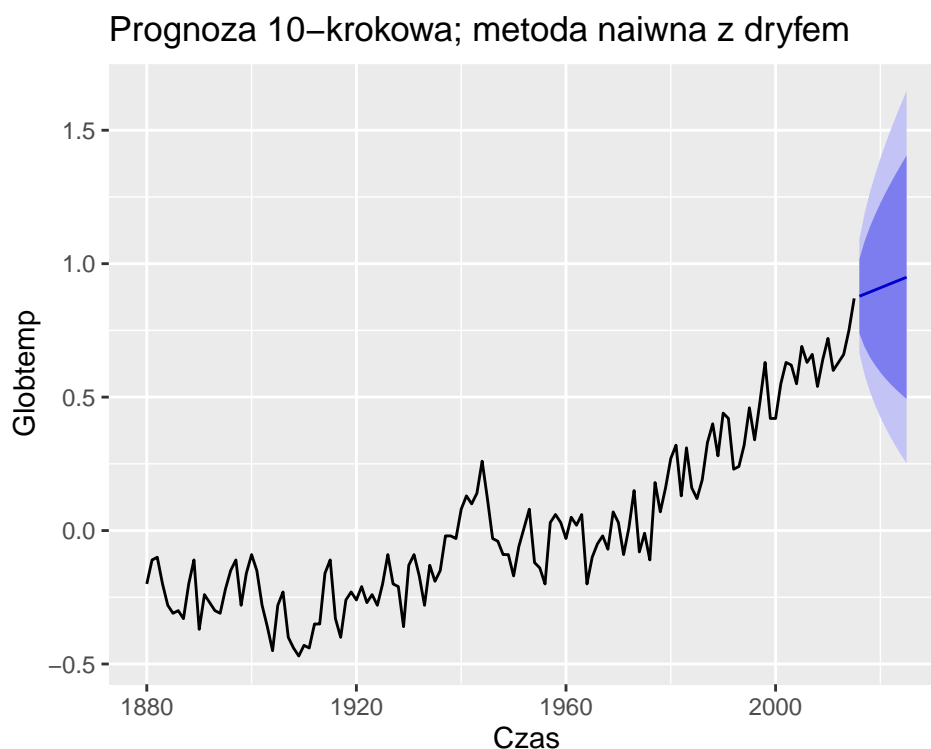
- Metoda naiwna dla prognozy 10-krokowej - wybrana historyczna obserwacja (u nas jest to ostatnia historyczna obserwacja) stanowi najlepszą prognozę dla przyszłej (nieznanej) wartości szeregu czasowego.



Rysunek 36: Prognoza 10-krokowa dla szeregu globtemp skonstruowana przy pomocy metody naiwnej

Metoda ta także wypada kiepsko z oczywistych względów.

- Metoda naiwna z dryfem dla prognozy 10-krokowej - w tym przypadku prognoza jest równa ostatniej wartości szeregu, do której dodajemy średnią zmianę.



Rysunek 37: Prognoza 10-krokowa dla szeregu globtemp skonstruowana przy pomocy metody naiwnej z dryfem

Metoda ta z pewnością działa lepiej, niż wariant tej samej metody bez dryfu wraz z metodą prostej średniej ruchomej, gdyż uwzględnia trend, lecz prognoza wciąż do najlepszych nie należy. Choćby dlatego, że trend szeregu *globtemp* jest raczej kwadratowy, aniżeli liniowy.

Wniosek 6 *Przeprowadzona przez nas prognoza z wykorzystaniem różnicowania oraz dopasowania modelu autoregresji do zróżnicowanego szeregu czasowego globtemp jest bardziej wiarygodna, niż prognozy z wykorzystaniem prostych metod prognozowania.*

Rysunki nr [31](#), [32](#), [33](#), [34](#) mówią nam o tym, że prognoza, odpowiednio dla 5, 10, 15 oraz 20 kolejnych lat (od 2015 roku), średnich odchyłeń rocznych temperatury (mierzonej w stopniach Celsjusza) od temperatury średniej globalnej w latach 1951-1980 ma drobny spadek w okolicach 2018 roku oraz liniową tendencję wzrostową dla kolejnych lat.