10 phương pháp chứng minh 3 điểm thẳng hàng

1. Chứng minh điểm A thuộc đoạn thẳng BC

2. Chứng minh qua 3 điểm xác định một góc bẹt (180^0)

3. Chứng minh hai góc ở vị trí đối đỉnh mà bằng nhau.

4. Chứng minh 3 điểm xác định được hai đường thẳng cùng vuông góc hay cùng song song với một đường thẳng thứ 3. (Tiên đề Ơclit)

5. Dùng tính chất đường trung trực: *chứng minh 3 điểm đó cùng cách đều hai đầu đoạn thẳng.*

6. Dùng tính chất tia phân giác: *chứng minh 3 điểm đó cùng cách đều hai cạnh của một góc.*

7. Sử dụng tính chất đồng quy của các đường: trung tuyến, phân giác, đường cao trong tam giác.

8. Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt: hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành, hình thang.

9. Sử dụng tính chất tâm và đường kính của đường tròn.

10. Sử dụng tính chất hai đường tròn tiếp xúc nhau.

7 phương pháp chứng minh 3 đường thẳng đồng quy:

1. Tìm giao của hai đường thẳng, sau đó chứng minh đường thẳng thứ ba đi qua giao điểm đó .

2. Chứng minh một điểm thuộc ba đường thẳng đó.

3. Sử dụng tính chất đồng quy trong tam giác:

* Ba đường thẳng chứa các đường trung tuyến.

* Ba đường thẳng chứa các đường phân giác.

* Ba đường thẳng chứa các đường trung trực.

* Ba đường thẳng chứa các đường các đường cao.

4. Sử dụng tính chất các đường thẳng định ra trên hai đường thẳng song song những đoạn thẳng tỷ lệ.

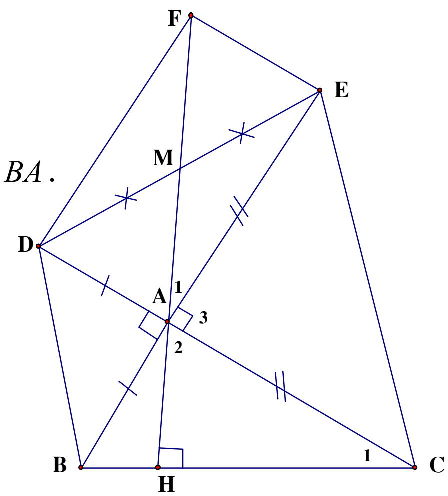
5. Sử dụng chứng minh phản chứng

6. Sử dụng tính thẳng hàng của các điểm

7. Chứng minh các đường thẳng đều đi qua một điểm.

BÀI TẬP VỀ CHỨNG MINH THẲNG HÀNG

Bài 1: Cho tam giác ABC có các góc B và C nhọn, đường cao AH. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân ABD, ACE ($\widehat{BAD} = \widehat{CAE} = 90^\circ$). Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng H, A, M thẳng hàng.



Giải

Dựng hình bình hành $AEFD$.

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AF (t/c hình bình hành) và $EF = DA = BA$.

Mặt khác $EA = CA$ (gt); $\widehat{AEF} = \widehat{CAB}$ (Cùng bù với $\widehat{DAE}$).

$\Rightarrow \Delta EFA = \Delta ABC$ (c – g – c).

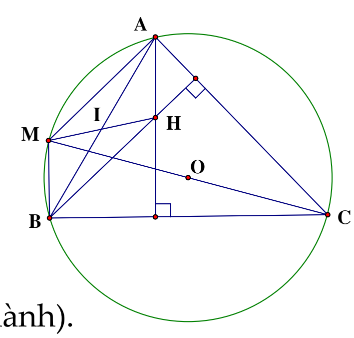
$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (Hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 180^\circ$ hay $\widehat{FAH} = 180^\circ \Rightarrow M$, A, H thẳng hàng.

Bài 2: Cho ΔABC có trực tâm H nội tiếp (O) đường kính CM, gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng H, I, M thẳng hàng.



Giải

$MB \perp BC$, $AH \perp BC$ (suy từ giả thiết).

$\Rightarrow MB // AH$.

Mà $MA // BH$ (cùng vuông góc với AC).

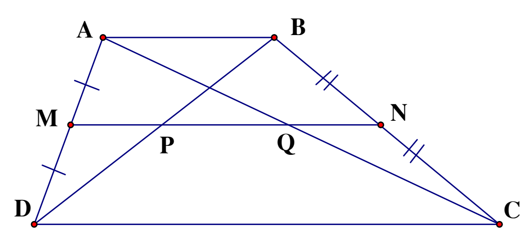
$\Rightarrow AMBH$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AB$ cắt MH tại trung điểm I của AB và MH (t/c hình bình hành).

Suy ra H, I, M thẳng hàng.

Bài 3: Chứng minh rằng: các trung điểm của hai cạnh bên và hai đường chéo của một hình thang luôn thẳng hàng.

Giải



Giả sử hình thang $ABCD$ $(AB // CD)$

và M, N, P, Q thứ tự là trung điểm

của AD, BC, BD, AC.

Cần chứng minh M, N, P, Q thẳng hàng.

Từ (gt) $\Rightarrow MN$, MP, MQ thứ tự là đường trung bình của hình thang $ABCD$, ΔABD, ΔACD.

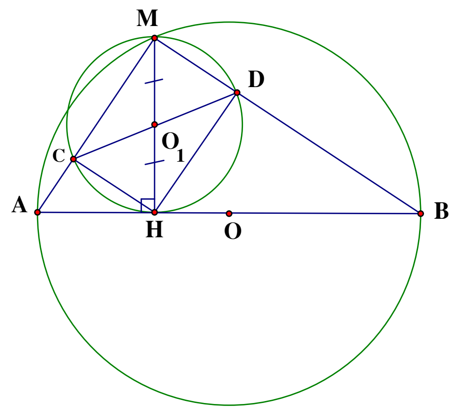
$\Rightarrow MN // AB$; $MP // AB$; $MQ // CD$ hay $MQ // AB$.

$\Rightarrow M$, N, P, Q thẳng hàng (theo tiên đề Ơclít).

Bài 4: Cho (O) đường kính AB. Điểm M chuyển động trên (O), $M \neq A; M \neq B$. Kẻ MH vuông góc với AB. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính MH cắt đường thẳng MA và MB tại C và D. Chứng minh rằng:

a) C, D, O_1 thẳng hàng.

b) $ABCD$ nội tiếp.



Giải

a) Ta có :

$\widehat{AMB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)).

$\Rightarrow \widehat{CMD} = 90^o$.

$\Rightarrow CD$ là đường kính của (O_1).

Suy ra C, D, O_1 thẳng hàng.

b) $MCHD$ là hình chữ nhật nội tiếp (O_1).

$\Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{MHD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$).

Mà $\widehat{MCD} = \widehat{B} \Rightarrow \widehat{MCD} + \widehat{ACD} = \widehat{B} + \widehat{ACD} = 180^o$.

Vậy $ABCD$ nội tiếp.

Bài 5: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên (O) lấy điểm D bất kỳ (khác A, B). Lấy điểm C bất kỳ trong đoạn AB, kẻ $CH \perp AD$ $(H \in AD)$. Phân giác của $\widehat{BAD}$ cắt (O) tại E, cắt CH tại F. Đường thẳng DF cắt (O) tại N. Chứng minh N, C, E thẳng hàng.

Giải

(gt) $\Rightarrow HC // DB$ (cùng vuông góc với AD).

$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ (2 góc đồng vị).

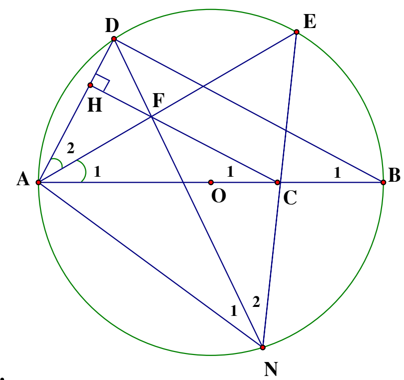
Mà $\widehat{B_1} = \widehat{N_1}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AD}$) $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{N_1}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AFCN$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{N_1}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{FC}$).

Hay $\widehat{A_1} = \widehat{FNC}$ mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt).

$\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{FNC}$ mà $\widehat{A_2} = \widehat{DNE} = \widehat{FNE}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{DE}$).

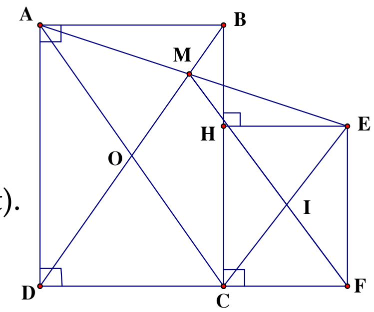


$\Rightarrow \widehat{FNC} = \widehat{FNE}$ mà NC và NE cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ DN.

Suy ra 2 tia NC và NE trùng nhau $\Rightarrow N$, C, E thẳng hàng.

Bài 6: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm 2 đường chéo. Điểm M trên đoạn OB, lấy E đối xứng với A qua M; H là hình chiếu của điểm E trên BC, vẽ hình chữ nhật $EHCF$. Chứng minh M, H, F thẳng hàng.

Giải



Gọi I là giao điểm của HF và CE.

$\Rightarrow H, I, F$ thẳng hàng $(*)$ (t/c hình chữ nhật).

Cần chứng minh: M, I, F thẳng hàng.

$MA = ME = \frac{1}{2}AE$ (gt) và $OA = OC = \frac{1}{2}AC$ (t/c hình chữ nhật).

$\Rightarrow OM$ là đường trung bình của ΔACE.

$\Rightarrow OM // CE \Rightarrow \widehat{ODC} = \widehat{ICF}$ (2 góc đồng vị).

Mà $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$ và $\widehat{ICF} = \widehat{IFC}$ (vì ΔOCD cân tại O, ΔICF cân tại I, t/c hình chữ nhật).

$\Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{IFC} \Rightarrow IF // AC$ mà $IM // AC$ (do IM là đường trung bình ΔACE).

$\Rightarrow M, I, F$ thẳng hàng (tiên đề Oclít).

Kết hợp với $(*)$ ta có: M, H, F thẳng hàng.

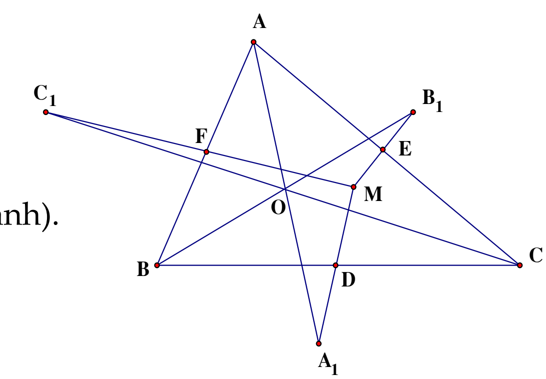
Bài 7: Cho ΔABC và điểm M bất kỳ trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Gọi O là giao điểm của BB_1 và CC_1. Chứng minh các điểm A, O, A_1 thẳng hàng.

Giải

Gọi D, E, F thứ tự là trung điểm BC, CA, AB.

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của ΔABC và ΔMB_1C_1 (suy từ giả thiết).

$\Rightarrow EF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}B_1C_1$ và $EF // BC // B_1C_1$.



$\Rightarrow BC // B_1C_1$ và $BC = B_1C_1$.

$\Rightarrow BCB_1C_1$ là hình bình hành.

$\Rightarrow O$ là trung điểm của BB_1 và CC_1 (t/c hình bình hành).

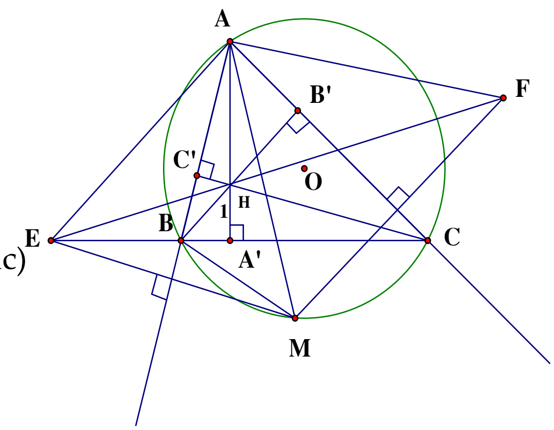
+ Tương tự ta có:

ABA_1B_1 là hình bình hành.

$\Rightarrow AA_1$ cắt BB_1 tại O là trung điểm của BB_1 và AA_1.

Suy ra A, O, A_1 thẳng hàng.

Bài 8: Cho ΔABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O), điểm M bất kỳ trên cung nhỏ BC. E, F thứ tự là các điểm đối xứng của M qua AB, AC, gọi H là trực tâm ΔABC. Chứng minh rằng E, H, F thẳng hàng.



Giải

Gọi B' là giao điểm của BH và AC;

A' là giao điểm của AH và BC.

Tứ giác $HA'CB'$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{A'CB'} = \widehat{BCA} = \widehat{BMA} = \widehat{BEA}$. (t/c đối xứng trục)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AHBE$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EHB} = \widehat{EAB} = \widehat{MAB}$.

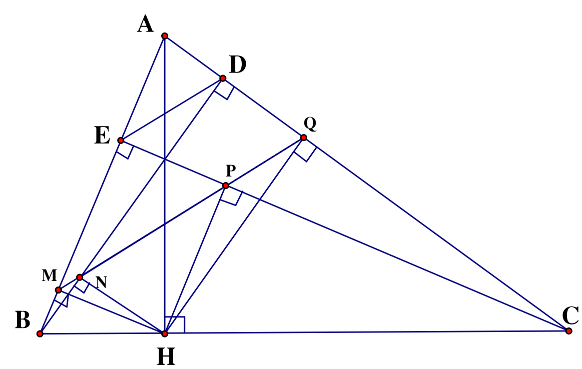
Tương tự ta có: $\widehat{A'HC} = \widehat{ABC}$, $\widehat{CHF} = \widehat{MAC}$.

$\Rightarrow \widehat{EHB} + \widehat{H} + \widehat{A'HC} + \widehat{CHF} = \widehat{MAB} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{MAC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 180^{\circ}$.

$\widehat{EHF} = 180^{\circ} \Rightarrow E$, H, F thẳng hàng.

Bài 9: Cho ΔABC nhọn, các đường cao AH, BD và CE. Gọi M, N, P, Q thứ tự là hình chiếu của H trên AB, BD, CE và AC. Chứng minh M, N, P, Q thẳng hàng.

Giải



+ Từ (gt) $\Rightarrow MH//CE$;

$NH//AC \Rightarrow \dfrac{BM}{BE} = \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BN}{BD}$ (định lý Talét).

$\Rightarrow MN//ED$ (1) (định ký Talét đảo).

+ Chứng minh tương tự ta có: $PQ//ED$ (2)

+ Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông HAC và HAB ta có:

$AH^2 = AQ.AC = AM.AB \Rightarrow \dfrac{AQ}{AM} = \dfrac{AB}{AC}$ mà $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AE}$ (vì $\Delta DAB \backsim \Delta EAC$ (g.g)).

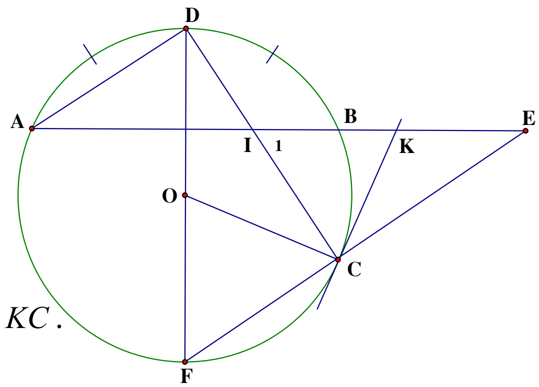
$\Rightarrow \dfrac{AQ}{AM} = \dfrac{AD}{AE}$ hay $\dfrac{AQ}{AD} = \dfrac{AM}{AE} \Rightarrow MQ//ED$. (định lý Talét đảo)

Kết hợp với (1), (2) ta có:

M, N, Q thẳng hàng và M, P, Q thẳng hàng (tiên đề Ơclít).

Do đó M, N, P, Q thẳng hàng.

Bài 10: Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Lấy I thuộc đoạn AB sao cho $IA > IB$. Gọi D là điểm chính giữa cung nhỏ AB, DI cắt (O) tại điểm thứ hai C. Tiếp tuyến với (O) tại C cắt AB tại K. Lấy điểm E sao cho $KE = KI = \frac{1}{2}IE$, EC cắt (O) tại F. Chứng minh rằng D, O, F thẳng hàng.



Giải

Ta có $\widehat{I_1} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{BC} + sđ\,\overset{\frown}{AD}\right)$. Mà $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$ (gt).

$\Rightarrow \widehat{I_1} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{BC} + sđ\,\overset{\frown}{DB}\right) = \frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{DBC}$.

$\Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{ICK} = \frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{DBC} \Rightarrow \Delta KIC$ cân tại $K \Rightarrow KI = KC$.

mà $KI = KE = \frac{1}{2}IE$ (gt).

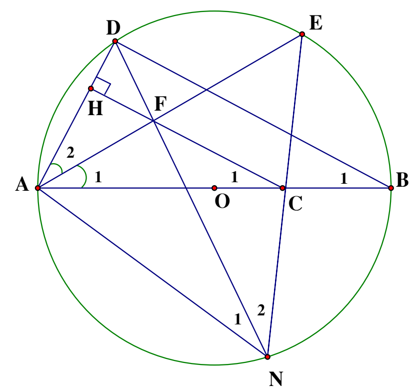
$\Rightarrow KC = IK = KE = \frac{1}{2}IE \Rightarrow \Delta CIE$ vuông tại C.

$\Rightarrow \widehat{DCF} = 90^\circ \Rightarrow DF$ là đường kính của (O).

Suy ra D, O, F thẳng hàng.

Bài 11: Cho (O) đường kính AB. Trên (O) lấy điểm D bất kỳ (khác A, B). Lấy điểm bất kỳ trong đoạn AB, kẻ $CH \perp AD$ $(H \in AD)$. Phân giác của $\widehat{BAD}$ cắt (O) tại E, cắt CH tại F. Đường thẳng DF cắt (O) tại N. Chứng minh N, C, E thẳng hàng.

Giải



(gt) $\Rightarrow HC // DB$ (cùng vuông góc với AD)

$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ (2 góc đồng vị).

Mà $\widehat{B_1} = \widehat{N_1}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AD}$) $\Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{C_1}$.

Suy ra tứ giác $AFCN$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{N_2}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{FC}$).

Hay $\widehat{A_1} = \widehat{FNC}$ mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt).

$\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{FNC}$ mà $\widehat{A_2} = \widehat{DNE} = \widehat{FNE}$ (2 góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{DE}$).

$\Rightarrow \widehat{FNC} = \widehat{FNE}$ mà NC và NE cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ DN.

Suy ra 2 tia NC và NE trùng nhau nên N, C, E thẳng hàng.

Bài 12: Cho ΔABC, đường tròn bàng tiếp trong góc A tiếp xúc với tia AB tại N. Kẻ đường kính MN. Trên tia đối của tia AB lấy điểm K sao cho $AK = BN$. Chứng minh rằng K, C, M thẳng hàng.

Giải

Gọi I, J theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A, góc B của ΔABC.

(I) tiếp xúc với BC và AC thứ tự tại P và H.

(J) tiếp xúc với BC và BA thứ tự tại Q và K'.

Ta có:

$CA + CB - AB = CA + CP + PB - AB$

$= CA + CH + NB - AB = AH + NB - AB = AN + NB - AB = 2NB$ (t/c tiếp tuyến)

$\Rightarrow CA + CB - AB - 2NB$.

Tương tự ta có: $CA + CB - AB = 2AK'$

$\Rightarrow AK = AK' = BN \Rightarrow K' \equiv K$

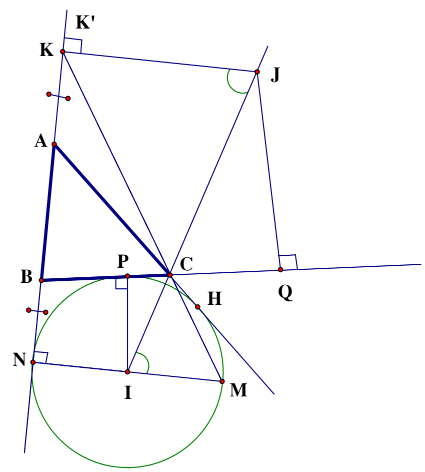
Mặt khác ΔPIC đồng dạng ΔQJC (g.g). Nên $\dfrac{IC}{JC} = \dfrac{IP}{JQ} = \dfrac{IM}{JK}$

mà $\widehat{CIM} = \widehat{CJK}$ (2 góc so le trong của $MN // JK$)

$\Rightarrow \Delta ICM$ đồng dạng ΔJCK (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{ICM} = \widehat{JCK}$. Suy ra 2 tia CK và CM đối nhau.

Vậy K, C, M thẳng hàng.



Bài 13: Tuyển Sinh 10 – Quảng Ninh 13-14

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O), (B,C là các tiếp điểm).

a, Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp.

b, Qua B kẻ đường thẳng song song với AO, cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E. Chứng minh ba điểm C, O, E thẳng hàng.

c, Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng AO với đường tròn (O), chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi OB = 2 cm, OA = 4 cm.

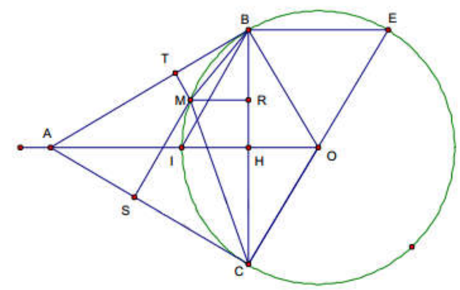
d, Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) lấy điểm M tùy ý (M ≠ B,C). Kẻ MD vuông góc với BC, MS vuông góc với CA, MT vuông góc với AB (R, S, T là chân các đường vuông góc). Chứng minh: $MS.MT = MR^2$

Giải

a) Do AB, AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O)

nên $\widehat{ABO} = 90^0$; $\widehat{ACO} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^o$. Do đó tứ giác ABOC nội tiếp.



b) Nối BC, ta thấy B và C là các tiếp điểm nên dễ dàng suy ra được $BC \perp AO$

Mà BE // AO $\Rightarrow$ BE $\perp$ BC hay $\widehat{EBC} = 90^0$

Suy ra CE là đường kính của đường tròn tâm (O).

Do đó O thuộc CE hay ba điểm C, O, E thẳng hàng

c) Nối BC, BI do AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên OA là tia phân giác của góc BOC (Tính chất tiếp tuyến) nên cung BI bằng cung CI.

$\widehat{ABI} = \widehat{CBI}$ hay BI là tia phân giác của góc ABC

Hơn nữa theo tính chất tiếp tuyến, ta có AB = AC; $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$. Do đó I là đường tròn nội tiếp tam giác ABC

AO $\cap$ BC = {H}$\Rightarrow$ IH là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Khi OA=4cm, OB = 2 cm$\Rightarrow$ OA = 2OB mà tam giác ABO vuông tại B $\Rightarrow \widehat{BAO} = 90^o$;

$\widehat{AOB} = 60^o$. Ta suy ra được $IH = \dfrac{IO}{2} = 1cm$

d. Dễ dàng chứng minh được $\Delta MBR \backsim \Delta MCS$ (g-g), suy ra $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{MR}{MS}$

Lập luận tương tự ta cũng có $\Delta MBT \backsim \Delta MCR$, suy ra $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{MT}{MR}$

Từ đó ta có : $MS.MT = MR^2$ (đpcm)

Bài 14: Tuyển sinh 10 – HCM 13-14

Cho tam giác ABC không có góc tù (AB < AC), nội tiếp đường tròn (O; R). (B, C cố định, A di động trên cung lớn BC). Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M. Từ M kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt (O) tại D và E (D thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại F, cắt AC tại I.

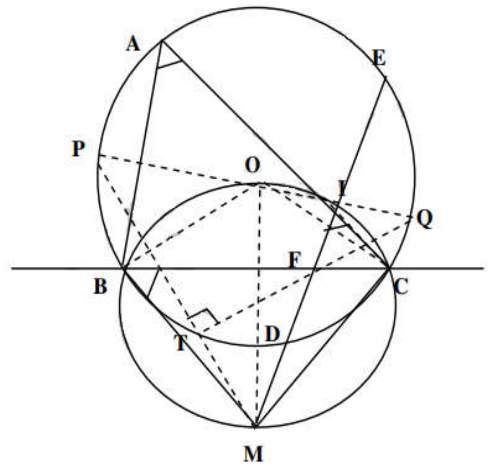
a) Chứng minh rằng $\widehat{MBC} = \widehat{BAC}$. Từ đó suy ra MBIC là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh rằng: FI.FM = FD.FE.

c) Đường thẳng OI cắt (O) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB). Đường thẳng QF cắt (O) tại T (T khác Q). Chứng minh ba điểm P, T, M thẳng hàng.

d) Tìm vị trí điểm A trên cung lớn BC sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất

Giải



a) Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{MBC}$ do cùng chắn cung BC

Và $\widehat{BAC} = \widehat{MIC}$ do AB//MI

=> $\widehat{MBC} = \widehat{MIC}$ =>ICMB nội tiếp đường tròn đường kính OM(vì 2 điểm B và C cùng nhìn OM dưới 1 góc vuông)

b) Do $\Delta FBD \backsim \Delta FEC$ nên $FB.FC = FE.FD$

Và 2 tam giác FBM và FIC đồng dạng nên $FB.FC = FI.FM$

So sánh ta có: $FI.FM = FD.FE$

c) Ta có $\widehat{PTQ} = 90^o$ do PQ là đường kính

Và $\Delta FIQ \backsim \Delta\ FTM$ có 2 góc đối đỉnh F bằng nhau và $\frac{FI}{FQ} = \frac{FT}{FM}$

(vì $FI.FM = FD.FE = FT.FQ$)

Nên $\widehat{FIQ} = \widehat{FTM}$ mà $\widehat{FIQ} = \widehat{OIM} = 90^o$ (I nhìn OM dưới góc 90º)

Nên P, T, M thẳng hàng vì $\widehat{PTM} = 180^o$

d) Ta có BC không đổi. Vậy diện tích S_{IBC} lớn nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ I đến BC lớn nhất. Vậy I trùng với O là yêu cầu của bài toán vì I nằm trên cung BC của đường tròn đường kính OM. Khi I trùng O thì ΔABC vuông tại B. Vậy diện tích tam giác ICB lớn nhất khi và chỉ khi AC là đường kính của đường tròn (O;R).

Bài 15: Tuyển sinh 10 – KomTum 14-15

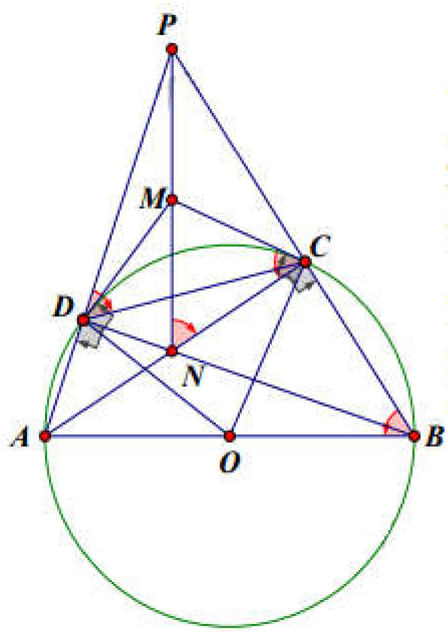
Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Từ A và B vẽ hai dây cung AC và BD của đường tròn (O) cắt nhau tại N bên trong đường tròn (C, D nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB). Hai tiếp tuyến Cx và Dy của đường tròn (O) cắt nhau tại M. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC.

1/ Chứng minh tứ giác DNCP nội tiếp đường tròn.

2/ Chứng minh ba điểm P, M, N thẳng hàng.

Giải

a) DNCP nội tiếp



$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$AC $\perp$ PB và BD $\perp$ PA$\Rightarrow \widehat{PAN} = \widehat{PCN} = 90°$

Tứ giác DNCP nội tiếp đường tròn đường kính PN

b)P,M,N thẳng hang

A,D,C,B cùng thuộc (O)$\Rightarrow$tứ giác ADCB nội tiếp$\Rightarrow$

$\widehat{OBC} = \widehat{PDC}$

Mà $\widehat{PDC} = \widehat{MNC}$ (cùng chắn cung PC của đường tròn (DNCP))

$\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$ (OCB cân tại O) và $\widehat{MCN} = \widehat{OCB}$ (cùng phụ $\widehat{OCN}$)

$\Rightarrow \widehat{MNC} = \widehat{MCN} \Rightarrow \Delta MCN$ cân tại M$\Rightarrow$MN=MC

vì MD=MC (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)$\Rightarrow$

$MN = MC = MD$

$\Rightarrow \Delta DCN$ nội tiếp đường tròn tâm M

Mặt khác DCN nội tiếp đường đường kính PN (vì tứ giác DNCP nội tiếp)

$\Rightarrow$ M là trung điểm PN$\Rightarrow$Vậy P,M, N thẳng hàng (đpcm)

Bài 16: Tuyển sinh 10 – Vũng Tàu 15-16

Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài (O). Dựng cát tuyến AMN không đi qua O, M nằm giữa A và N. Dựng hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là hai tiếp điểm và C thuộc cung nhỏ MN). Gọi I là trung điểm của MN.

a) Chứng minh tứ giác OI nội tiếp.

b) Hai tia BO và CI lần lượt cắt (O) tại D và E (D khác B, E khác C). Chứng minh $\widehat{CED} = \widehat{BAO}$.

c) Chứng minh OI vuông góc với BE

d) Đường thẳng OI cắt đường tròn tại P và Q (I thuộc OP); MN cắt BC tại F; T là giao điểm thứ hai của PF và (O). Chứng minh ba điểm A; T; Q thẳng hàng.

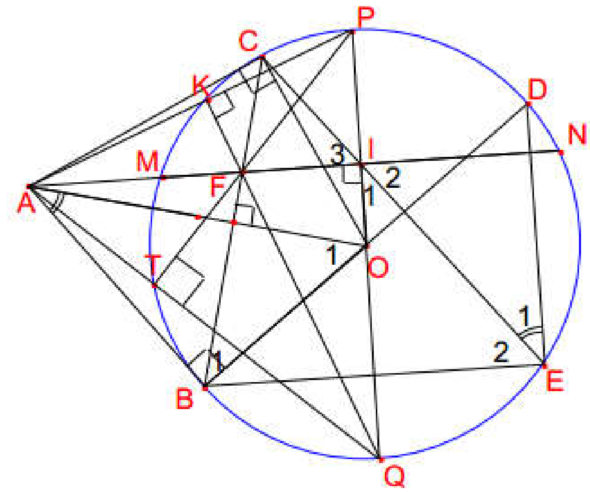
Giải

a\ Chứng minh tứ giác OI nội tiếp.

+ Ta có $\widehat{ABO} = 90^o$ (tctt)

$\widehat{AIO} = 90$ (IM = IN)

+ Suy ra $\widehat{ABO} + \widehat{AIO} = 180^0$ nên tứ giác ABOI nội tiếp đường tròn đường kính AO.



b\ Chứng minh $\widehat{CED} = \widehat{BAO}$

+ Vì AB; AC là hai tiếp tuyến của (O) nên AO ⊥ BC

+ Ta có: $\widehat{E_1} = \widehat{B_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD của đường tròn (O))

$\widehat{BAO} = \widehat{B_1}$ (cùng phụ $\widehat{O_1}$)

Suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{BAO}$ hay $\widehat{CED} = \widehat{BAO}$

c) Chứng minh OI vuông góc với BE

+ Ta có : $\widehat{E_2} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn cung BC); $\widehat{ABC} = \widehat{I_3}$ (A,B,O,I,C cùng thuộc đường tròn đường kính AO);

$\widehat{I_3} = \widehat{I_2}$ (đđ)

Suy ra $\widehat{E_2} = \widehat{I_2}$. Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên MN // BE .

+ Ta lại có MN ⊥ OI ($IM = IN$) nên OI ⊥ BE

d) Chứng minh ba điểm A; T; Q thẳng hàng.

+ Gọi K là giao điểm OF và AP

+ Ta có $\widehat{QKP} = 90^o$ (góc nt chắn nửa đường tròn) nên QK ⊥ AP

+ Trong tam giác APQ có hai đường cao AI và QK cắt nhau tại F nên F là trực tâm.

Suy ra PF là đường cao thứ 3 của tam giác APQ nên PF ⊥ QA (1)

+ Ta lại có $\widehat{QTP} = 90^o$ (góc nt chắn nửa đường tròn) nên PF ⊥ QT (2)

Từ (1);(2) suy ra QA ≡ QT. Do đó 3 điểm A; T; Q thẳng hàng.

Bài 17: Tuyển sinh 10 – Bình Dương 15-16

Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của cạnh AC. Đường tròn đường kính MC cắt BC tại N. Đường thẳng BM cắt đường tròn đường kính MC tại D.

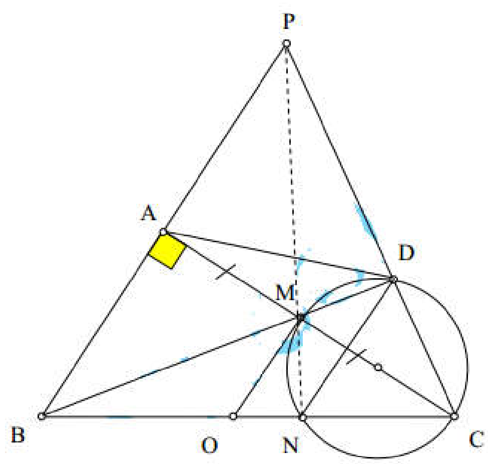
1) Chứng minh tứ giác BADC nội tiếp. Xác định tâm O của đường tròn đó.

2) Chứng minh DB là phân giác của góc ADN.

3) Chứng minh OM là tiếp tuyến của đường tròn đường kính MC.

4) BA và CD kéo dài cắt nhau tại P. Chứng minh ba điểm P, M, N thẳng hàng.

HD Giải



a) $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^o$ (gt) nên tứ giác BADC nội tiếp đường tròn tâm O là trung điểm của BC.

b) $\widehat{ADB} = \widehat{BDN}$ (= $\widehat{ACB}$) (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung trong các đường tròn ngoại tiếp tứ giác BADC, NMDC) nên DB là phân giác góc AND.

c) OM ⊥ AC (OM là đường trung bình tamgiác ABC) nên suy ra MO là tiếp tuyến đường tròn đường kính MC.

d) MN ⊥ BC (góc MNC nội tiếp nửa đường tròn đường kính MC)

PM ⊥ BC (M là trực tâm tam giác PBC)

Suy ra P, M, N thẳng hàng.

Bài 18: Tuyển sinh 10 Hà Nam 15 – 16

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm trên đường tròn. Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại A. Trên d lấy điểm D (D không trùng với A), kẻ tiếp tuyến DB của (O) (B là điểm, B không trùng với A).

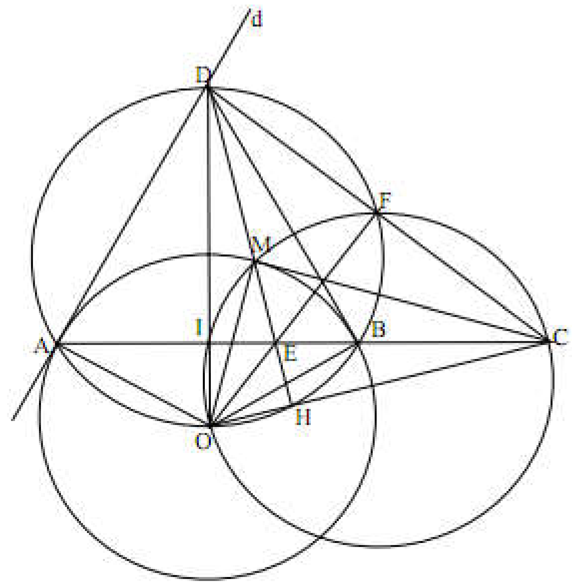
a) Chứng minh rằng tứ giác AOBD nội tiếp.

b) Trên tia đối của tia BA lấy điểm C. Kẻ DH vuông góc với OC (H thuộc OC). Gọi I là giao điểm của AB và OD. Chứng minh rằng OH.OC = OI. OD

c) Gọi M là giao điểm của DH với cung nhỏ AB của (O). Chứng minh rằng CM là tiếp tuyến của (O)

d) Gọi E là giao điểm của DH và CI. Gọi F là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính OD và đường tròn ngoại tiếp tam giác OIM. Chứng minh rằng O, E, F thẳng hàng.

Giải



a) DA và DB là các tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{OBD} = \widehat{OAD} = 90^o$

Xét tứ giác AOBD có $\widehat{OBD} + \widehat{OAD} = 180^o$, mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác AOBD nội tiếp

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có DA = DB và DO là tia phân giác của ABD

Do đó tam giác ABD cân tại D có DO là đường phân giác nên đồng thời là đường trung trực....

Xét ΔOIC và ΔOHD có

$\widehat{OIC} = \widehat{OHD} = 90^o$; $\widehat{DOC}$ chung nên

$\Delta OIC \backsim \Delta OHD$ (g.g)

$\dfrac{OI}{OH} = \dfrac{OC}{OD} \Rightarrow OH.OC = OI.OD (1)$

c) Xét tam giác AOD vuông tại A có AI là đường cao nên $OA^2 = OH.OD$ (2)

Mà OM = OA (là bán kính (O)). (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $OM^2 = OH.OC \Rightarrow \dfrac{OM}{OH} = \dfrac{OC}{OM}$

Xét ΔOHM và ΔOMC có chung $\widehat{MOC}$; $\dfrac{OM}{OH} = \dfrac{OC}{OM}$ nên $\Delta OHM \backsim \Delta OMC$ (c.g.c).

=> $\widehat{OMC} = \widehat{OIC} = 90^o$ nên CM là tiếp tuyến của (O).

d) Do $\widehat{OMC} = \widehat{OIC} = 90^o$ nên tứ giác OIMC nội tiếp đường tròn đường kính OC.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác CIM là đường tròn đường kính OC.

=> $\widehat{OFC} = 90^o$

Mặt khác ta có $\widehat{OFD} = 90^o$. Như vậy OFC;OFD kề bù suy ra ba điểm C, F, D thẳng hàng.

Xét tam giác OCD có ba đường cao CH, DI, OF mà có E là giao điểm CH, DI nên ba điểm O, E, F thẳng hàng.

Bài 19: Tuyển sinh 10 Sơn La 15 – 16

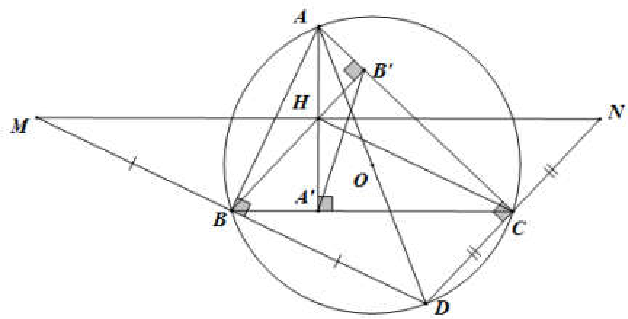
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, các đường cao AA′ và BB′ cắt nhau tại H. AO cắt đường tròn tại D.

a) Chứng minh tứ giác ABA′B′ nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh tứ giác BHCD là hình bình hành.

c) Gọi điểm M đối xứng với D qua AB, N đối xứng với D qua AC. Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Giải



a) Ta có AA′ ⊥ BC => $\widehat{AA'B} = 90^o$

BB′ ⊥ AC => $\widehat{AB'B} = 90^o$

-Xét tứ giác ABA′B′ có :

$\widehat{AA'B} = \widehat{AB'B} = 90^o$

=> Tứ giác ABA′B′ nội tiếp đường tròn.

b)Ta có : BH ⊥ AC (1)

$\widehat{ACD} = 90^o$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> DC ⊥ AC (2)

Từ (1), (2) => BH // DC (3)

+)Lại có: CH ⊥ AB (gt H là trực tâm)

$\widehat{ABD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> BD ⊥ AB

=> CH // BD (4)

Từ (3),(4) => Tứ giác BHCD là hình bình hành.

Xét ΔMND có

B là trung điểm MD

C là trung điểm DN

=>BC là đường trung bình của tam giác MND

=>BC // MN (5)

Lại có: tứ giác BHCD là hình bình hành

=>HC // BD và HC = BD

Có M là điểm đối xứng với D qua B

=>MB = BD

=> HC // MB và HC = MB

=>Tứ giác HDBM là hình bình hành.

=>BC // MH (6).

Từ (5) và (6) => M, N, H thẳng hàng.

Bài 20: Tuyển sinh 10 Hải Dương 15 – 16

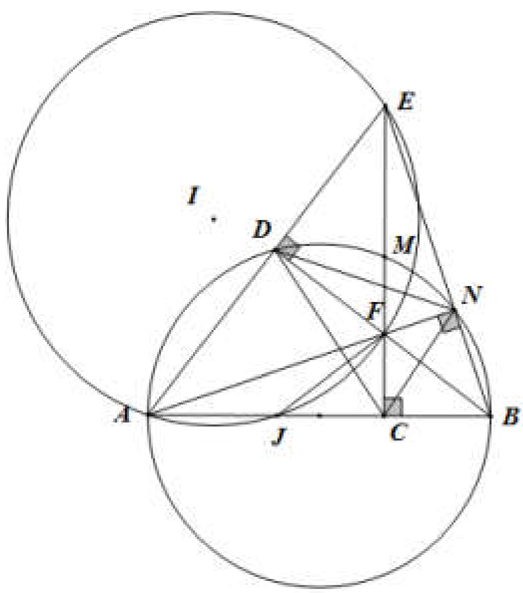
Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C là điểm cố dịnh thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Dựng đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C, cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M. Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F, tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E. Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

a) Chứng minh AD. AE = AC.AB

b) Chứng minh: Ba điểm B, F, D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp Δ CDN

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ AEF. Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB

Giải



a) Có $\widehat{ADB} = \widehat{ANB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ABD} = \widehat{AEC}$ (cùng phụ góc BAE)

=> Tam giác ADB đồng dạng với tam giác ACE(g-g)

=> $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AE} \Rightarrow AD \cdot AE = AC.AB$

b) Có AN ⊥ EB, EC ⊥ AB , EC giao AN tại F nên F là trực tâm của tam giác AEB

⇒ BF ⊥ EA

Mà BD ⊥ EA ⇒ B, D, F thẳng hàng

+ Tứ giác ADFC có hai góc đối bằng 90^o nên là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{DCF} = \widehat{DAF}$

Tương tự ta có: $\widehat{NCF} = \widehat{NBF}$

Mà $\widehat{DAF} = \widehat{NBF}$ (cùng phụ với góc AEB) => $\widehat{DCF} = \widehat{NCF}$

Suy ra CF là phân giác của góc DCN

Tương tự ta cũng có DF là phân giác của góc NDC

Vậy F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DCN

d) Gọi J là giao của (I) với đoạn AB.

Có $\widehat{FAC} = \widehat{CEB}\left(= 90^o - \widehat{ABE}\right)$ => tam giác FAC đồng dạng với tam giác BEC(g-g)

$=> \dfrac{FC}{BC} = \dfrac{AC}{EC} => CF \cdot CE = BCAC$

Vì AEFJ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{FJC} = \widehat{FEA}\ \left(= 180^o - \widehat{AJF}\right)$

=> $\Delta CFJ \backsim \Delta CAE$ (g-g) => $\dfrac{CF}{CA} = \dfrac{CJ}{CE} \Rightarrow CF \cdot CE = CA.CJ$

Suy ra $BC.AC \ = \ CA.CJ$ ⇒ BC = CJ ⇒ C là trung điểm BJ (vì J ≠ B)

Suy ra J là điểm cố định

Có IA = IJ nên I luôn thuộc đường trung trực của AJ, là đường cố định.

CÁC BÀI TẬP VỀ ĐỒNG QUY

Cách 1. Lợi dụng định lí về các đường đồng quy trong tam giác

- Sử dụng định lí ba đường cao của tam giác đồng quy tại một điểm
- Sử dụng định lí ba đường trung tuyến của tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là trọng tâm của tam giác.
- Sử dụng các định lí: 1.Ba đường phân giác của tam giác đồng quy tại một điểm.
- Giao điểm của hai đường phân giác ngoài nằm trên đường phân giác trong của góc thứ ba.
- Sử dụng định lí ba đường trung trực của tam giác đồng quy tại một điểm.

Cách 2. Sử dụng tính chất các đường chéo cắt nhau tai trung điểm mỗi đường của của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

Cách 3. Lùi về quen thuộc, chứng minh ba điểm thẳng hàng hoặc giao điểm của hai đường nằm trên đường thẳng thứ ba.

Bài 1: Cho tam giác ABC có ba đường trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Giải:

Áp dụng tính chất: Trong một tam giác, ba đường trung tuyến cùng đi qua một điểm.

Trong tam giác ABC có AD, BE, CF là ba đường trung tuyến nên AD, BE, CF cùn đi qua một điểm.

Vậy AD, BE, CF đồng quy.

Bài 2: Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Giải:

Áp dụng tính chất: Trong một tam giác, ba đường cao cùng đi qua một điểm.

Trong tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF nên AD, BE, CF cùng đi qua một điểm. Vậy AD, BE, CF đồng quy.

Bài 3: Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Giải:

Áp dụng tính chất: Trong một tam giác, ba đường phân giác cùng đi qua một điểm.

Trong tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF nên AD, BE, CF cùng đi qua một điểm. Vậy AD, BE, CF đồng quy.

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại A, kẻ đường cao AH $(H \in BC)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB. Chứng minh AH, BM, CN đồng quy.

Giải:

Vì ΔABC cân tại A có đường cao AH nên AH cũng là đường trung tuyến của ΔABC.

M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB nên BM, CN là các đường trung tuyến của ΔABC.

Vậy ba đường trung tuyến AH, BM, CN đồng quy.

Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A, kẻ đường cao BH, CK $(H \in AC, K \in AB)$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh AM, BH, CK đồng quy.

Giải:

Vì ΔABC cân tại A có đường trung tuyến AM nên AM cũng là đường cao của ΔABC.

Vì tam giác có ba đường cao cùng đi qua một điểm, do đó ba đường cao AM, BH, CK đồng quy.

Bài 6: Cho tam giác ABC cân tại A, kẻ đường cao AH $(H \in BC)$. Gọi BD, CE lần lượt là đường phân giác trong của góc B và góc C $(D \in AC, E \in AB)$. Chứng minh AH, BD, CE đồng quy.

Giải:

Vì ΔABC cân tại A có đường cao AH nên AH cũng là đường phân giác của ΔABC.

Vì tam giác có ba đường phân giác cùng đi qua một điểm, do đó ba đường phân giác AH, BD, CE đồng quy.

Bài 7: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE. N là giao điểm của BF và CE. Chứng minh rằng:

a) $EMFN$ là hình bình hành.

b) Các đường thẳng AC, EF, MN đồng quy.

Giải:

a) Tứ giác $AECF$ có $AE//CF, AE = CF$ nên tứ giác $AECF$ là hình bình hành. Suy ra $AF//CE$.

Chứng minh tương tự, $BF//DE$

Tứ giác $EMFN$ có $EM//FN, EN//FM$ nên là hình bình hành.

b) Gọi O là giao điểm của AC và EF. Ta sẽ chứng minh MN cũng đi qua O.

$AECF$ là hình bình hành, O là trung điểm của AC nên O là trung điểm của EF

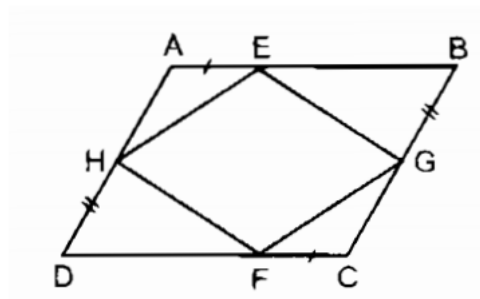
$EMFN$ là hình bình hành nên đường chéo MN đi qua trung điểm O của EF.

Vậy AC, EF, MN đồng quy tại O.

Bài 8: Trên hình vẽ bên, cho $ABCD$ là hình bình hành.
Chứng minh rằng:

a) $EFGH$ là hình bình hành.

b) Các đường thẳng AC, BD, EF, GH đồng quy.



Giải:

a) Chứng minh rằng $EG = HF; EH = GF$.

b) Gọi O là giao điểm của AC và EF. Tứ giác $AECF$ có $AE = CF, AE$€ CF nên là hình bình hành.

Suy ra O là trung điểm của AC, EF.

$ABCD$ là hình bình hành, O là trung điểm của AC nên O là trung điểm của BD.

$EGHF$ là hình bình hành, O là trung điểm của EF nên O là trung điểm của GH.

Vậy AC, BD, EF, GH đồng quy tại O.

Bài 9: Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy điểm E trên cạnh AB, lấy điểm F trên cạnh CD sao cho $AE = CF$. Chứng minh ba đường thẳng AC, BD, EF đồng quy.

Giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Hãy chứng minh $AECF$ là hình bình hành để suy ra ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Bài 10: Cho hình bình hành $ABCD$ có E,F theo thứ tự là trung điểm của AB,CD.

a) Tứ giác $DEBF$ là hình gì?

b) Chứng minh rằng các đường thẳng AC,BD,EF cùng cắt nhau tại một điểm.

Giải:

a) Tứ giác $DEBF$ là hình bình hành. Học sinh tự chứng minh.

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$, ta có O là trung điểm của BD.

Theo câu a), $DEBF$ là hình bình hành nên trung điểm O của BD cũng là trung điểm của EF.

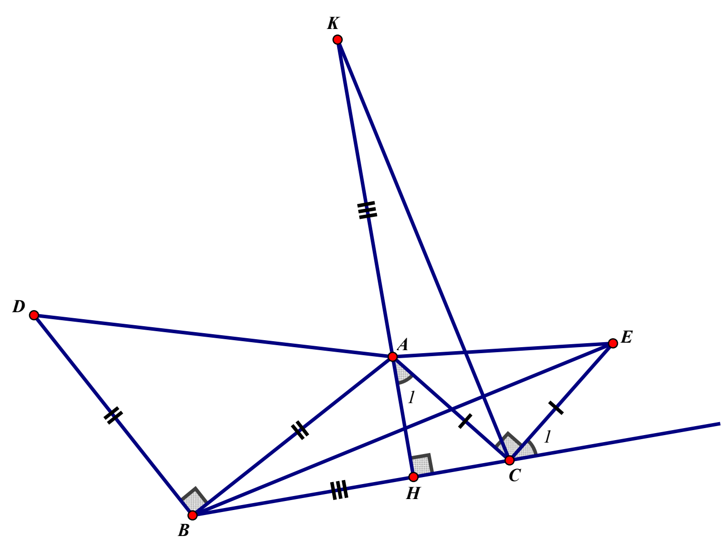
Vậy AC,BD,CF cùng cắt nhau tại điểm O.

Bài 11: Cho ΔABC với đường cao AH. Vẽ ra phía ngoài ΔABC các tam giác, ACE vuông cân tại C và ABD vuông cân tại B. Trên tia đối của tia AH lấy điểm K sao cho $AK = BC$ Chứng minh rằng

1) $BE \perp CK$.

2) Ba đường thẳng AH,BE,CD đồng quy tại một điểm.

Giải:



Ta có: $\widehat{C_1} = \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{KAC}$

Xét ΔBCE và ΔKAC có:

$BC = KA$ (gt)

$CE = AC$ (ΔACE vuông cân tại C)

$\widehat{BCE} = \widehat{KAC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BCE = \Delta KAC\,(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{KCA}$

Mặt khác: $\widehat{KCA} + \widehat{ECK} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{BEC} + \widehat{ECK} = 90°$

Vậy $BE \perp KC$.

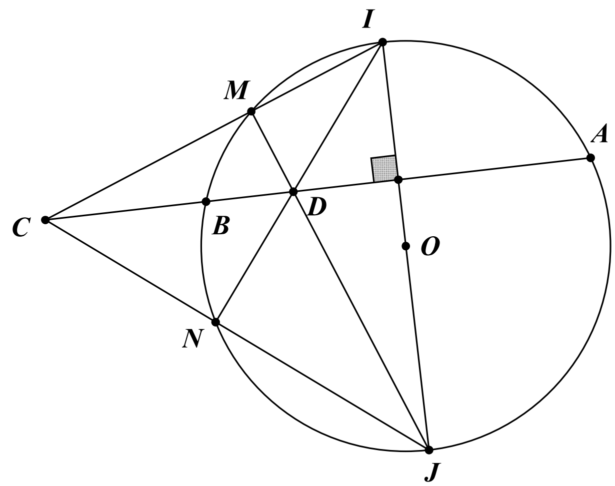
b) Chứng minh tương tự: $DC \perp KB$

Tam giác KBC có ba đường cao $KH \perp BC, BE \perp KC, CD \perp KB$

Vậy ba đường thẳng AH, BE, CD đồng quy tại một điểm.

Bài 12: Từ một điểm C ở ngoài đường tròn (O) kẻ các tuyến CBA. Gọi IJ là đường kính vuông góc với AB. Các đường thẳng CI, CJ theo thứ tự cắt đường tròn (O) tại M, N. Chứng minh rằng IN, JM, AB đồng quy tại một điểm D.

Giải



M thuộc đường tròn đường kính IJ nên $\widehat{JMI} = 90°$ hay $JM \perp CI$

Tương tự $IN \perp CJ$

Tam giác CIJ có 3 đường cao CA, JM, IN đồng quy tại D

Vậy IN, JM, AB đồng quy tại một điểm D.

Bài 13: Cho tam giác ABC, dựng tam giác đều MAB, NBC, PAC thuộc miền ngoài tam giác ABC. Chứng minh rằng MC, NA, PB đồng quy.

Giải:

Dễ thấy $\Delta AMC = \Delta ABP\left(c.g.c\right) \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{P_1}$

Trong ΔAPC, có: $\widehat{A_1} + \widehat{C_2} + \widehat{P_1} + \widehat{P_2} = 180°$ mà $\widehat{C_1} = \widehat{P_1}$

Trong ΔPCK, có: $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} + \widehat{K_2} + \widehat{P_2} = 180° \Rightarrow 60° + \left(\widehat{C_1} + \widehat{P_2}\right) + \widehat{K_2} = 180° \Rightarrow \widehat{K_2} = 60°$

Tương tự: $\Delta ABN = \Delta MBC \Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{C_3}$ mà $\widehat{N_1} + \widehat{N_2} = 60°$

$\Rightarrow \widehat{N_2} + \widehat{C_3} = 60°$ mà $\widehat{C_4} = 60°$

$\Rightarrow \Delta NKC$ có $\widehat{N_2} + \widehat{C_3} + \widehat{C_4} + \widehat{K_3} = 180° \Rightarrow \widehat{K_3} = 60°$

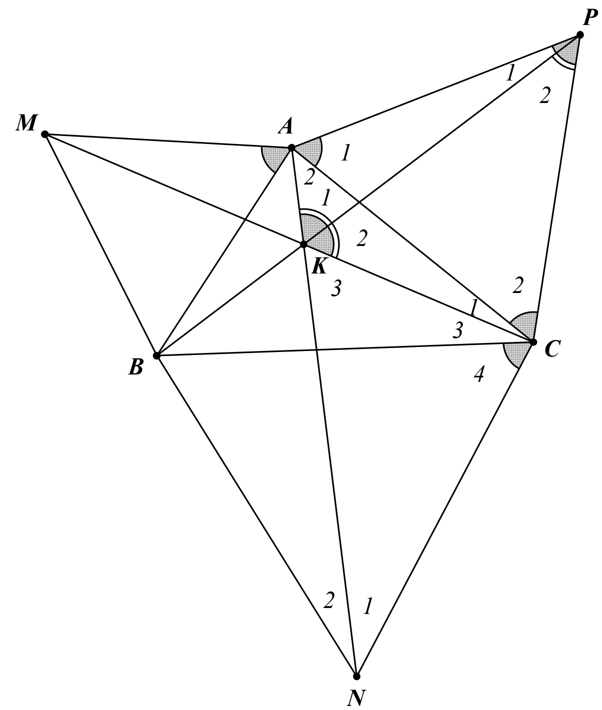
Chứng minh tương tự: $\widehat{K_1} = 60°$

Theo chứng minh trên ta có: $\widehat{K_1} = \widehat{K_2} = \widehat{K_3} = 60°$

$\Rightarrow \widehat{K_1} + \widehat{K_2} + \widehat{K_3} = 180°$

$\Rightarrow A, K, N$ thẳng hàng

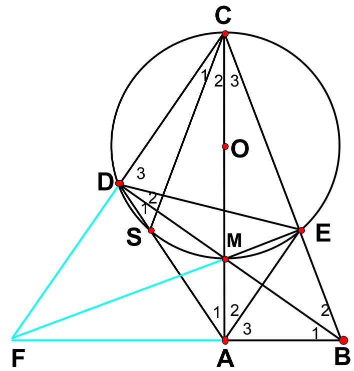
Vậy AN, MC, BP đồng quy.



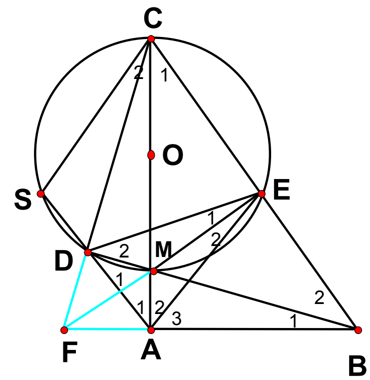
Bài 14: Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại. D. đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.
3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.
5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Giải:



Hình a



Hình b

1. Ta có $\widehat{CAB} = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\widehat{MDC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\widehat{CDB} = 90^0$ như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => ABCD là tứ giác nội tiếp.

2. ABCD là tứ giác nội tiếp => $\widehat{D_1} = \widehat{C_3}$ (nội tiếp cùng chắn cung AB).

$\widehat{D_1} = \widehat{C_3}$ => $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\widehat{C_2} = \widehat{C_3}$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau) => CA là tia phân giác của góc SCB.

<u>TH2</u> *(Hình b)*

$\widehat{ABC} = \widehat{CME}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$); $\widehat{ABC} = \widehat{CDS}$ (cùng <u>bù</u> $\widehat{ADC}$) => $\widehat{CME} = \widehat{CDS}$

=> $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{CS} \Rightarrow \overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\widehat{SCM} = \widehat{ECM}$ => CA là tia phân giác của góc SCB.

3. Xét ΔCMB Ta có BA⊥CM; CD ⊥ BM; ME ⊥ BC như vậy BA, EM, CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BA, EM, CD đồng quy.

4. Theo trên Ta có $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ => DM là tia phân giác của góc ADE.(1)

5. Ta có $\widehat{MEC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) => $\widehat{MEB} = 90^0$.

Tứ giác AMEB có $\widehat{MAB} = 90^0$; $\widehat{MEB} = 90^0$ => $\widehat{MAB} + \widehat{MEB} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác AMEB nội tiếp một đường tròn => $\widehat{A_2} = \widehat{B_2}$.

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp => $\widehat{A_1} = \widehat{B_2}$ (nội tiếp cùng chắn cung CD)

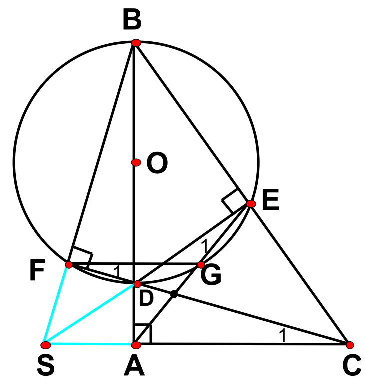
=> $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ => AM là tia phân giác của góc DAE (2)

Từ (1) và (2) Ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Bài 15 : Cho tam giác ABC vuông ở.A. và một điểm D nằm giữa A và.B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G. Chứng minh:

1. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.
2. Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp.
3. AC // FG.
4. Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.

Giải:



1. Xét hai tam giác ABC và EDB Ta có $\widehat{BAC} = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\widehat{DEB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\widehat{DEB} = \widehat{BAC} = 90^0$; lại có $\widehat{ABC}$ là góc chung

=> ΔDEB ~ Δ CAB.

2. Theo trên $\widehat{DEB} = 90^0$ => $\widehat{DEC} = 90^0$ (vì hai góc kề bù); $\widehat{BAC} = 90^0$ (vì ΔABC vuông tại A) hay $\widehat{DAC} = 90^0$ => $\widehat{DEC} + \widehat{DAC} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên ADEC là tứ giác nội tiếp.

* $\widehat{BAC} = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\widehat{DFB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{BFC} = 90^0$ như vậy F và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => AFBC là tứ giác nội tiếp.

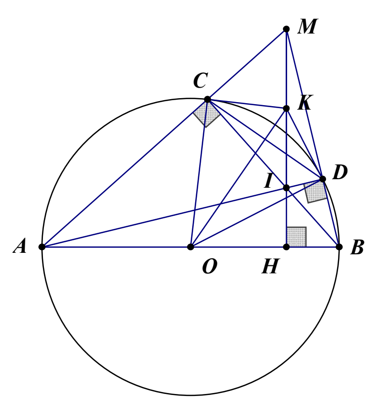
3. Theo trên ADEC là tứ giác nội tiếp => $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ vlại có $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$ => $\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$ mà đây là hai góc so le trong nên suy ra AC // FG.

4. (HD) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của tam giác DBC nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

Bài 16: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B); trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và. D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

1. Chứng minh MCID là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I.
3. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCID, Chứng minh KCOH là tứ giác nội

Giải:



1. $\widehat{BCA} = \widehat{BDA} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) ….

=> $\widehat{MCI} + \widehat{IDM} = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MCID nên MCID là tứ giác nội tiếp.

2. AD, MC, MH là ba đường cao của tam giác BAM nên đồng quy tại I.

3. Chỉ ra KCI là tam giác cân, từ đó $\widehat{CIK} = \widehat{HIB} = \widehat{CAB} = \widehat{ACO}$

$\widehat{ACO} + \widehat{OCI} = \widehat{KCI} + \widehat{OCI} = 90^0$. Từ đó chỉ ra $\widehat{OCK} = 90^0$ ….

Bài 17: Tuyển sinh 10 – Thái Bình

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O;R) cắt nhau tại T, đường thẳng AT cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D khác A.

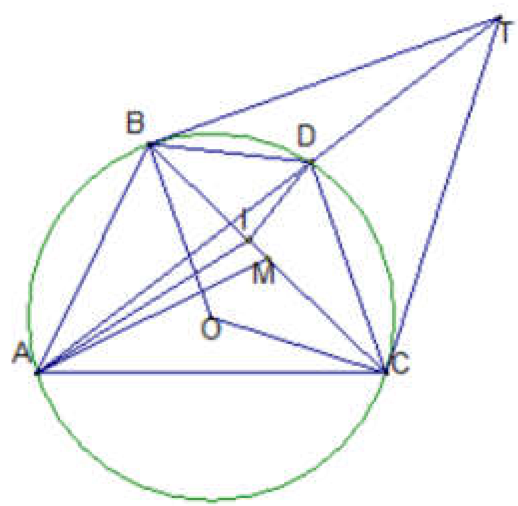
1.Chứng minh rằng $\Delta ABT \backsim \Delta BDT$.

2. Chứng minh rằng : AB.CD = BD.AC

3. Chứng minh rằng hai đường phân giác góc BAC và đường thẳng BC đồng quy tại một điểm

4.Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng góc $\widehat{BAD} = \widehat{MAC}$.

Giải



1.Xét tam giác ABT và tam giác BDT có:

$\widehat{BTD}$ chung

$\widehat{BAT} = \widehat{TBD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cùng chắn cung BD).

=> $\Delta ABT \backsim \Delta BDT$. (g-g)

2)Có $\Delta ABT \backsim \Delta BDT$. (g-g)

=> $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AT}{BT}$(1)

Chứng minh được $\Delta ACT \backsim \Delta CDT$ (g-g)

=> $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AT}{CT}$(2)

Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại T nên BT = CT (3)

Từ (1), (2), (3) có $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD} \Rightarrow AB.CD = BD.AC$

3.Phân giác góc BAC cắt BC tại I, theo tính chất phân giác trong tam giác ta có:

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$$

Từ AB.CD = BD.AC $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD} \Rightarrow \dfrac{IB}{IC} = \dfrac{BD}{CD}$

=>DI là phân giác góc BDC

Do đó hai đường phân giác góc BAC và BDC và đường thẳng BC đồng quy.

4. Lấy M’ trên đoạn BC sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CAM'}$

Do $\widehat{BAD} = \widehat{M'AC}$; $\widehat{BDA} = \widehat{M'CA}$ $(\frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AB})$

=> tam giác ADB đồng dạng với tam giác ACM’(g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BM'}{DC} \Rightarrow AB.DC = AD.BM'(5)$

Từ (4), (5)=> $BM' = CM' \Rightarrow M \equiv M' \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{MAC}$

Bài 18:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ 2 tiếp tuyến Ax và By. Lấy M trên đường tròn sao cho AM < BM. AM cắt By tại F, BM cắt Ax tại E.

a. Chứng minh: AB^2= AE.BF

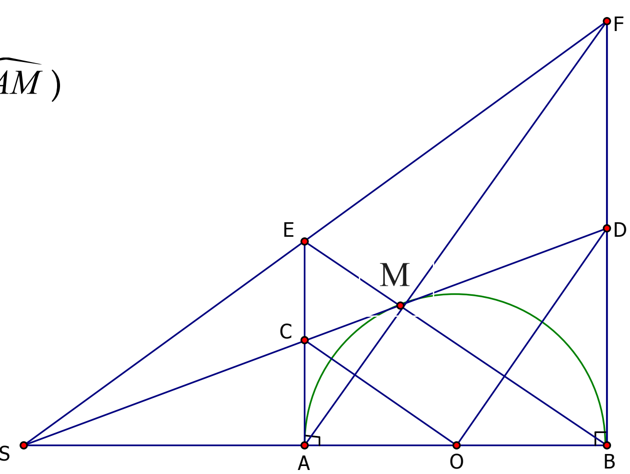
b. Tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt AE, BF tại C và D. Chứng minh C và D là trung điểm của AE và BF.

c. Chứng minh các đường thẳng AB, CD, EF đồng quy.

Giải

a. Ta có $\widehat{AMB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AM \perp BE$

Xét ΔEAB và ΔABF có:



$\widehat{EAB} = \widehat{ABF}$; $\widehat{AEB} = \widehat{FAB}$ (cùng phụ với $\widehat{EAM}$)

Suy ra ΔEAB ~ ΔABF (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BF} = \dfrac{AE}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AE.\,BF$

b. CA = CM và CO là tia phân giác của $\widehat{ACM}$

$\Rightarrow$ ΔAMC cân tại C và CO là đường cao $\Rightarrow CO \perp AM$

Do đó trong ΔABE có OA=OB, OC//BE nên CA=CE.

c. Gọi giao điểm của AB và EF là S. Ta sẽ chứng minh S, C, D thẳng hàng.

Giả sử SC cắt BF tại D'. Vì AE // BF nên theo định lí Ta-let, có:

$\frac{AC}{CE}=\frac{BD'}{D'F}=1 \Rightarrow$ D' là trung điểm của BF

$\Rightarrow$ D trùng với D' hay S, C, D thẳng hàng.

Vậy ba đường thẳng AB, EF, CD đồng quy tại S.

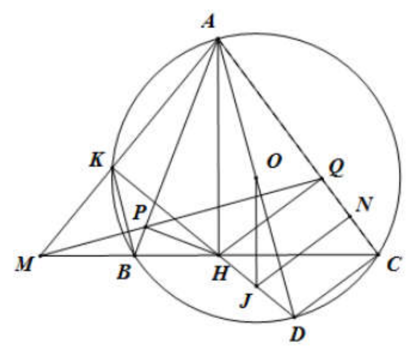
MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỨNG MINH THẲNG HÀNG, ĐỒNG QUY

TRONG CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH THPT CHUYÊN

Bài 1: Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Gọi P, Q lần lượt là chân của đường vuông góc kẻ từ H đến các cạnh AB, AC.

1. Chứng minh rằng BCQP là tứ giác nội tiếp.
2. Hai đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng MH^2= MB.MC
3. Đường thẳng MA cắt đường tròn (O) tại K (K khác A). Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCQP. Chứng minh rằng ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Giải



1. Tứ giác APHQ có APH +AQH = 90°+ 90° = 180° nên là tứ giác nội tiếp

⇒ APQ= AHQ

Ta có: AHQ =BCQ (cùng phụ với CHQ)

Do đó APQ =BCQ

Suy ra BPQC là tứ giác nội tiếp.

2. Vì BPQC là tứ giác nội tiếp nên

MBP= MQC

$$\Delta MBP \sim \Delta MQC(g.g) => \frac{MB}{MQ} = \frac{MP}{MC} => MB.MC = MP.MQ(1)$$

Vì APHQ là tứ giác nội tiếp nên: MQH =BAH

Mà BAH= MHP (cùng phụ với PBH)

nên MQH= MHP

$$\Delta MQH \sim \Delta MHP(g.g) => \frac{MQ}{MH} = \frac{MH}{MP} => MH^2 = MP.MQ(2)$$

Từ (1) và (2) ⇒ MH^2 =MB .MC

3. Vì AKBC là tứ giác nội tiếp nên

$MKB = MCA \Rightarrow \Delta MKB \sim \Delta MCA \Rightarrow \dfrac{MK}{MC} = \dfrac{MB}{MA}$

$\Rightarrow MK.MA = MB.MC$

Kết hợp với kết quả ý 2, ta có $MH^2 = MK.\text{MA}$

⇒ HK là đường cao của tam giác vuông AHM.

⇒ AK ⊥ KH

Do đó KH cắt (O) tại D (D khác K) thì AD là đường kính của (O).

Gọi J là trung điểm HD, N là trung điểm QC.

Khi đó OJ là đường trung bình của Δ AHD ⇒ OJ // AH ⇒ OJ ⊥ BC.

Mà OB = OC nên OJ là trung trực BC (3)

Vì HQ // DC (cùng vuông góc AC) nên HQCD là hình thang.

⇒ JN là đường trung bình của hình thang HQCD

⇒ JN // HQ ⇒ JN ⊥ QC

⇒ JN là trung trực của QC (4)

Từ (3) và (4) ⇒ J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BPQC (do BPQC là tứ giác nội tiếp) ⇒ J ≡ I

Mà K, H, J thẳng hàng nên I, K, H thẳng hàng.

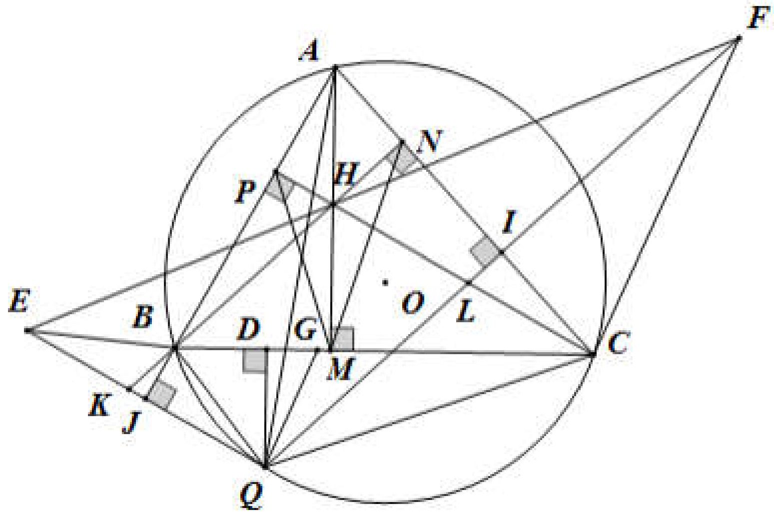
Bài 2: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) . Các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H. Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC. Gọi E, F là điểm đối xứng của Q qua AB, AC.

1) Chứng minh rằng : MH.MA = MP.MN

2) Chứng minh rằng : E, F, H thẳng hàng.

3) Gọi J là giao điểm của QE và AB. Gọi I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí của Q trên cung nhỏ BC để $\dfrac{AB}{QJ} + \dfrac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

Giải



1) CMR: MH.MA = MP.MN

1) Xét tứ giác ANMB có $\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = 90^o$ nên nó là tứ giác nội tiếp ⇒ $\widehat{BAM} = \widehat{BNM}$ hay $\widehat{PAM} = \widehat{HNM}$ (1)

Xét tứ giác CNHM có $\widehat{HNC} + \widehat{HMC} = 90^o + 90^o = 180^o$ nên nó là tứ giác nội tiếp

=> $\widehat{NHM} + \widehat{NCM} = 180^o$ (2)

Tứ giác APMC có $\widehat{APC} = \widehat{AMC} = 90^o$ nên là tứ giác nội tiếp ⇒ $\widehat{APM} + \widehat{ACM} = 180^o$ (3)

Từ (2) và (3) ⇒ $\widehat{NHM} = \widehat{APM}$ (4)

Từ (1) và (4) ⇒ ΔNHM ~ ΔAPM (g.g) $\Rightarrow \dfrac{NM}{AM} = \dfrac{HM}{PM} \Rightarrow MH.MA = MN.MP.$

2) CMR : E, F, H thẳng hàng.

Gọi K là giao BH và QE, L là giao CH và QF.

Tứ giác AJQI có $\widehat{AIQ} + \widehat{AJQ} = 90^o + 90^o = 180^o$ nên là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{JAI} + \widehat{JQI} = 180^o$

Mà $\widehat{JAI} + \widehat{BQC} = 180^o$ (do ABQC là tứ giác nội tiếp) nên $\widehat{JQI} = \widehat{BQC} \Rightarrow \widehat{BQE} = \widehat{CQF}$ (5)

Vì E, F đối xứng với Q qua AB, AC nên BQ = BE, CQ = CF ⇒ Δ BEQ và Δ CQF cân

=> $\widehat{CQF} = \widehat{CFQ}$ (6) . Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{CFL} = \widehat{BQK}$ (7)

Ta có LH // QK (cùng vuông góc AB); KH // QL (cùng vuông góc AC) nên QKHL là hình bình hành ⇒ $\widehat{QKH} = \widehat{QLH} = \widehat{FLC}$ hay $\widehat{QKB} = \widehat{FLC}$ (8)

Từ (7) và (8) ⇒ΔQKB ~ ΔFLC (g.g) => $\frac{QK}{FL} = \frac{QB}{FC}$

Hai tam giác cân BQE và CFQ đồng dạng, nên $\frac{QB}{FC} = \frac{QE}{QF} \Rightarrow \frac{QK}{FL} = \frac{QE}{QF} \Rightarrow \frac{QK}{QE} = \frac{FL}{FQ}$

Mà QK = LH (do QKHL là hình bình hành) nên $\frac{LH}{QE} = \frac{FL}{FQ}$

Vì LH' // QE nên theo định lý Ta–lét ta có: $\frac{LH'}{QE} = \frac{FL}{FQ}$

Do đó LH = LH' ⇒ H' ≡ H ⇒ H ∈ EF ⇒ H, E, F thẳng hàng.

3) Gọi J là giao điểm của QE và AB. Gọi I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí của Q trên cung nhỏ BC để $\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

Vẽ QD ⊥ BC tại D. Trên cạnh BC lấy điểm G sao cho $\widehat{CQG} = \widehat{BQA}$ => $\widehat{BQG} = \widehat{CQA}$

Vì ABQC là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BAQ} = \widehat{GCQ}$ => ΔBAQ ~ ΔGCQ (g.g) => $\frac{BA}{GC} = \frac{AQ}{CQ}$

Vì $\widehat{JAQ} = \widehat{DCQ}$; $\widehat{QJA} = \widehat{QDC} = 90^o$ => ΔJAQ ~ ΔDCQ (g.g) => $\frac{AQ}{CQ} = \frac{JQ}{DQ}$

Do đó $\frac{BA}{GC} = \frac{JQ}{DQ} \Rightarrow \frac{AB}{QJ} = \frac{GC}{DQ}$

Chứng minh tương tự ta có:

$\frac{AC}{QI} = \frac{GB}{DQ}$

$\Rightarrow \frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI} = \frac{GC+GB}{DQ} = \frac{BC}{DQ}$

Vì BC không đổi nên $\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất ⇔ DQ lớn nhất ⇔ Q là điểm chính giữa cung BC nhỏ của đường
tròn (O).

Bài 3: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy hai điểm C, D trên nửa đường tròn sao cho AC=BD (C nằm giữa A và D). Gọi E là giao điểm của AD và BC.

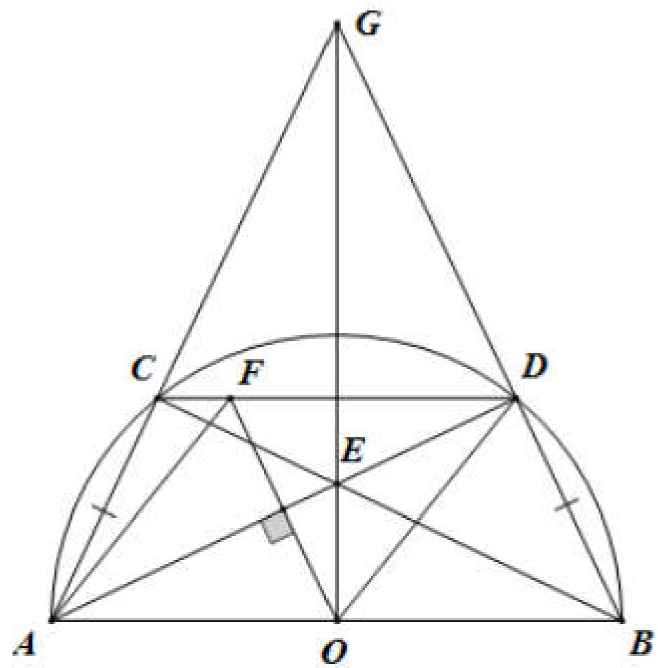
a) Chứng minh hai tam giác ACE, BDE bằng nhau.

b) Chứng minh tứ giác AOEC, BOED nội tiếp.

c) Đường thẳng qua O vuông góc AD cắt CD tại F. Tứ giác AODF là hình gì? Vì sao?

d) Gọi G là giao điểm của AC và BD. Chứng minh O, E, G thẳng hàng.

Giải



a) Vì C, D thuộc đường tr n đường kính AB nên:

$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tr n)

⇒ Hai tam giác ACE và BDE vuông

=> $\widehat{CAE} + \widehat{AEC} = 90^o$; $\widehat{DBE} + \widehat{BED} = 90^o$

Mà $\widehat{AEC} = \widehat{BED}$ (hai góc đối đỉnh) nên CAE =DBE

Xét Δ ACE và Δ BDE có:

$$\begin{cases} ACE = BDE = 90^o (\text{cmt}) \\ \text{AC} = \text{BD}(\text{gt}) \\ \text{CAE} = \text{DBE}(\text{cmt}) \end{cases} \Rightarrow \Delta ACE = \Delta BDE(g.c.g)$$

b) Vì Δ ACE = Δ BDE nên AE = BE (hai cạnh tương ứng)

Mà OA = OB nên OE là đường trung trực của đoạn AB

=> $\widehat{AOE} = 90^o$

Tứ giác AOEC có tổng hai góc đối $\widehat{AOE}+\widehat{ACE}=90^o+90^o=180^o$ nên AOEC là tứ giác nội tiếp

Chứng minh tương tự ta có BOED là tứ giác nội tiếp.

c) Vì EA = EB (cmt) nên Δ ABE cân ở E

=> $\widehat{EAB}=\widehat{EBA}$ (1)

Vì ACDB là tứ giác nội tiếp nên

$\widehat{EAB}=\widehat{ECD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD)(2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\widehat{ECD}=\widehat{EBA}$

$\Rightarrow$ CD // AB (3)

Vì OF $\perp$ AD, BD $\perp$ AD nên OF // BD (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ OFDB là hình bình hành

$\Rightarrow$ DF = OB = OA

Mà DF // OA nên tứ giác AODF là hình bình hành

Hình bình hành AODF có hai đường chéo OF và AD vuông góc với nhau nên nó là hình thoi.

d) Vì Δ ACE = Δ BDE nên $\widehat{CAE}=\widehat{DBE}$

Mà $\widehat{EAB}=\widehat{EBA}$ (cmt) nên $\widehat{CAE}+\widehat{EAB}=\widehat{DBE}+\widehat{EBA}\Rightarrow\widehat{CAB}=\widehat{DBA}$

$\Rightarrow$ Δ GAB cân ở G

$\Rightarrow$ GA = GB

$\Rightarrow$ G thuộc đường trung trực của đoạn AB.

$\Rightarrow$ G $\in$ OE

$\Rightarrow$ O, E, G thẳng hàng.

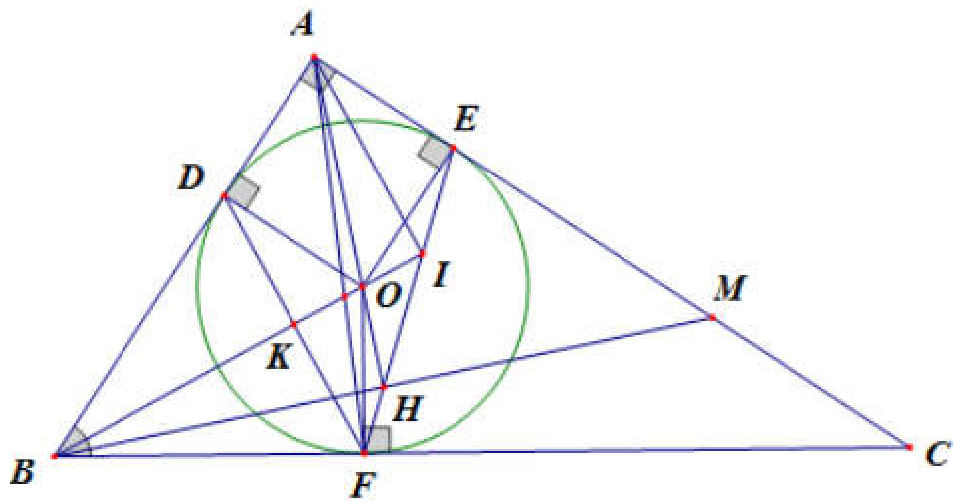
Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB,AC,BC. Đường thẳng BO cắt các đường thẳng EF và DF lần lượt tại I và K.

1. Tính số đo góc BIF
2. Giả sử M là điểm di chuyển trên đoạn CE .

a. Khi AM = AB, gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng ba điểm A,O,H thẳng hàng, từ đó suy ra tứ giác ABHI nội tiếp.

b. Gọi N là giao điểm của đường thẳng BM với cung nhỏ EF của (O), P, Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE và DF. Xác định vị trí điểm M để độ dài đoạn thẳng PQ max.

Giải



1. Vì BD, BF là các tiếp tuyến của (O) nên OD ⊥ BD, OF ⊥ BF.

Xét 2 tam giác vuông OBD và OBF có

$\left.\begin{array}{l} OB \text{ chung} \\ \widehat{OBD}=\widehat{OBF}(\text{gt}) \end{array}\right\}$ => $\Delta OBD = \Delta OBF$ (cạnh huyền–góc nhọn)

⇒ BD = BF

Mà OD = OF = r nên OB là trung trực của DF ⇒ OB ⊥ DF ⇒ Δ KIF vuông tại K.

Mà OD = OF = r nên OB là trung trực của DF ⇒ OB ⊥ DF ⇒ Δ KIF vuông tại K.

$\widehat{DOE} = 90^o$

Theo quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cho đường tròn (O), ta có:

$\widehat{DFE} = \frac{1}{2}\widehat{DOE} = 45^o$

⇒ Δ KIF vuông cân tại K.

=> $\widehat{BIF} = 45^o$

2.

a. Hình chữ nhật ADOE có OD = OE = r nên nó là hình vuông

⇒ AO là trung trực DE (1)

Vì AB = AM nên tam giác ABM vuông cân tại A, suy ra ABM = 45°

=> $\widehat{DBH} = \widehat{DFH} = 45^o$

⇒ BDHF là tứ giác nội tiếp (2)

Vì $\widehat{BDO} + \widehat{BFO} = 90^o + 90^o = 180^o$ nên BDOF là tứ giác nội tiếp (3)

Từ (2) và (3) ⇒ 5 điểm B, D, O, H, F nằm trên một đường tròn.

=> $\widehat{BHO} = \widehat{BFO} = 90^o$

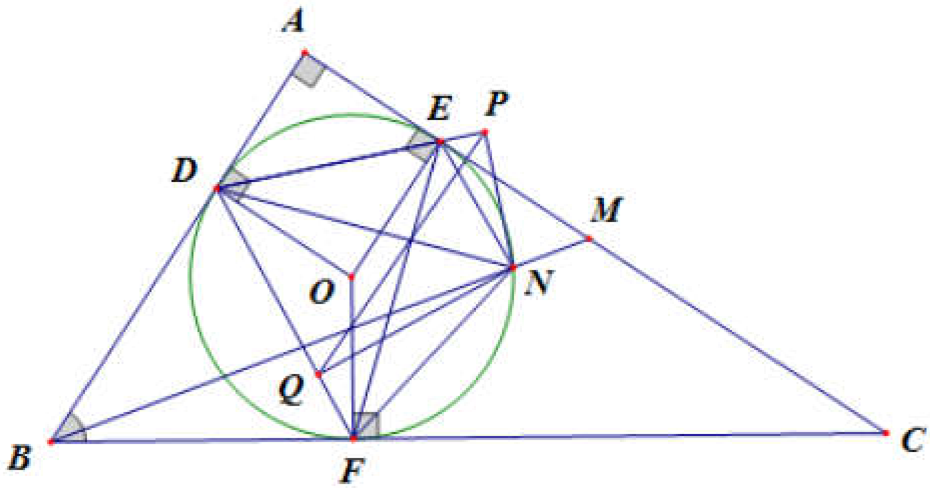
⇒ OH ⊥ BM.

Mặt khác $\widehat{ADE} = \widehat{ABM} = 45^o$ =>DE//BM⇒ OH ⊥ DE

Mà OD = OE nên OH là trung trực của đoạn OE (4)

Từ (1) và (4) ⇒ A, O, H thẳng hàng.

b.



Vì $\widehat{DPN} + \widehat{DQN} = 90^o + 90^o = 180^o$ nên DPNQ là tứ giác nội tiếp

=> $\widehat{QPN} = \widehat{QDN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QN) (5)

Mặt khác DENF là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{QDN} = \widehat{FEN}$ (6)

Từ (5) và (6) ta có $\widehat{FEN} = \widehat{QPN}$ (7)

Tương tự ta có: $\widehat{EFN} = \widehat{PQN}$ (8)

Từ (7) và (8) suy ra $\Delta NPQ \sim \Delta NEF (g.g) \Rightarrow \dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{NQ}{NF}$

Theo quan hệ đường vuông góc – đường xiên, ta có

$NQ \le NF \Rightarrow \dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{NQ}{NF} \le 1 \Rightarrow PQ \le EF$

Dấu bằng xảy ra khi Q ≡ F ⇔ NF ⊥ DF ⇔ D, O, N thẳng hàng.

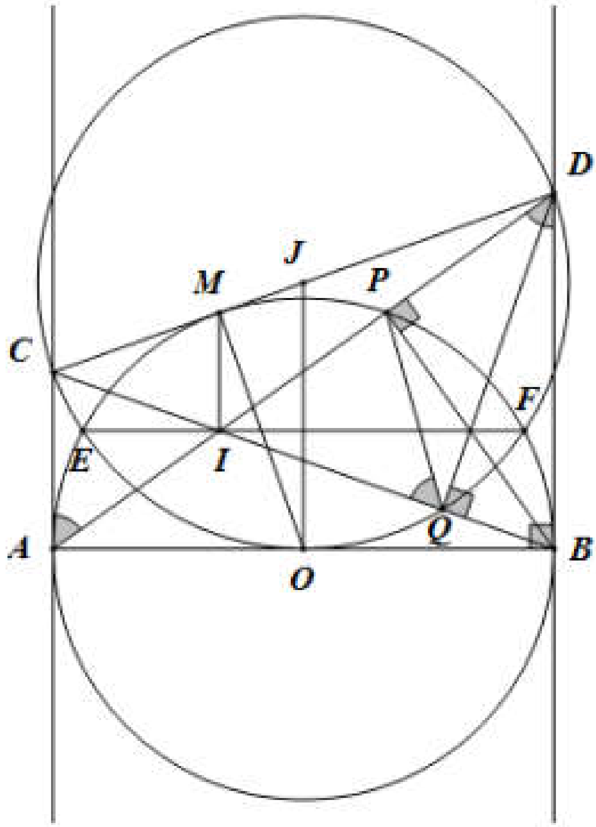
Do đó PQ max khi M là giao điểm của AC và BN, với N là điểm đối xứng với D qua O.

Bài 5:

Cho đường tròn (O) đường kính AB. Qua A và B lần lượt vẽ các tiếp tuyến d_1 và d_2 với (O). Từ điểm M bất kì trên (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt d_1 tại C và cắt d_2 tại D. Đường tròn đường kính CD cắt đường tròn (O) tại E và F (E thuộc cung AM), gọi I là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

b) Chứng minh MI vuông góc với AB và ba điểm E, I, F thẳng hàng.



a) Vì AC ⊥ AB, BD ⊥ AB ⇒ AC // BD ⇒ ACDB là hình thang

Vì CM, CA là tiếp tuyến của (O) nên CM = CA. Tương tự DM = DB

Gọi J là trung điểm của CD thì JO là đường trung bình của hình thang ACDB suy ra JO // BD và

$OJ = \dfrac{AC+BD}{2} = \dfrac{CM+MD}{2} = \dfrac{CD}{2} = IC = ID$ (1)

Vì BD ⊥ AB nên JO ⊥ AB tại O (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn (J) đường kính CD

b) Vì CA // BD nên theo định lý Talét ta có: $\dfrac{CI}{IB} = \dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CM}{MD} \Rightarrow$ IM // BD

Mà BD ⊥ AB nên MI ⊥ AB

Gọi P, Q lần lượt là giao của AD và (O), BC và (J)

Có $\widehat{APB} = \widehat{CQD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\widehat{DPB} = \widehat{BQD} = 90^o$

Suy ra BQPD là tứ giác nội tiếp => $\widehat{PDB} = \widehat{PQI}$

Vì AC // BD nên $\widehat{PDB} = \widehat{IAC}$

=> PQI = IAC => ΔPQI ~ ΔCAI (g.g) => $\frac{PI}{CI} = \frac{QI}{AI}$ => $IP.IA = IC.IQ$

Suy ra phương tích của điểm I đối với 2 đường tròn (O) và (J) là bằng nhau

Suy ra I nằm trên trục đẳng phương EF của 2 đường tròn.

Vậy I, E, F thẳng hàng.

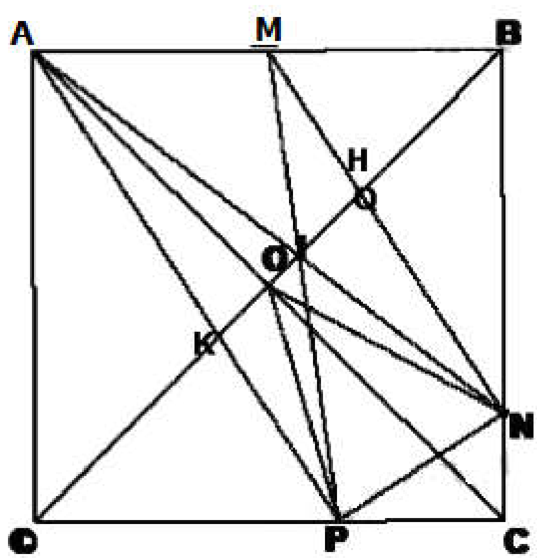
Bài 6: Cho hình vuông ABCD với tâm O .Gọi M là trung điểm AB các điểm N, P thuộc BC, CD sao cho MN//AP.Chứng minh rằng

1.Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và góc NOP=45^0

2.Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.

3.Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy

Giải



1.Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và góc NOP=45^0

1. Đăt AB = a ta có AC = a$\sqrt{2}$ Chứng minh Tam giác ADP đồng dạng tam giác NBM (g.g) suy ra $\frac{BM}{DP}=\frac{BN}{AD}\Rightarrow BN.DP=\frac{a^2}{2}$ mà OB.OD = $\frac{a^2}{2}$

tam giác DOP đồng dạng BNO (c.g.c). từ đó tính được $\widehat{NOP}=45^o$

2.Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.

Theo a ta có $\frac{OB}{DP}=\frac{ON}{OP}=\frac{OD}{DP}$; $\widehat{PON}$ = $\widehat{ODP}=45^0$

tam giác DOP đồng dạng ONP (c.g.c). suy ra $\widehat{DOP}=$ $\widehat{ONP}$

nên DO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiêp tam giác OPN

3.Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy

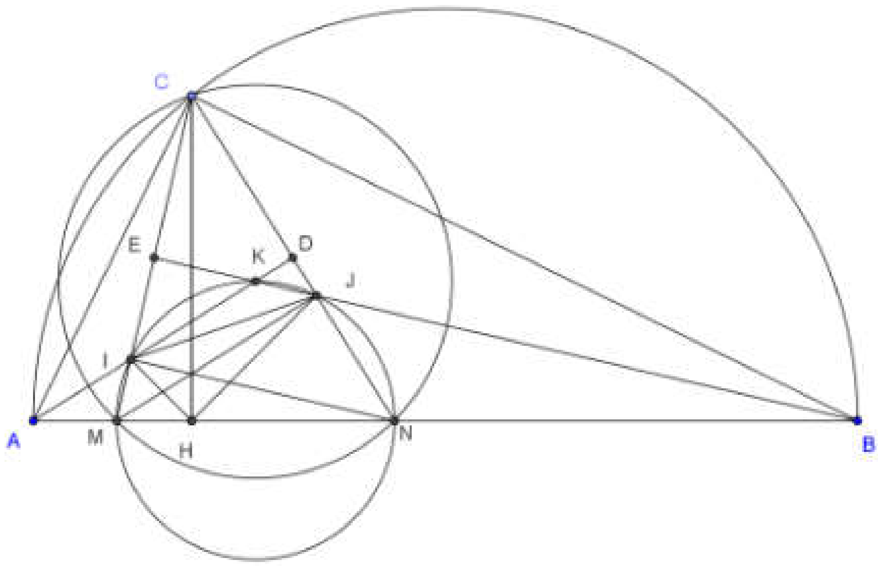
Đặt giao điểm cua MN và BC là Qvà AP là K áp dung tính chát phân giác cho tam giác MBN; APD

$\frac{QM}{QN}=\frac{BM}{BN};\frac{KP}{KA}=\frac{DP}{AD}\Leftrightarrow\frac{QM}{QN}=\frac{KP}{KA}\Rightarrow\frac{QM}{KP}=\frac{QN}{KA}(1)$ ta có. Giả sử MP cắt AN tại I . K I cắt MN tại H Áp dụng định lí ta lét $\frac{HM}{PK}=\frac{HN}{KA}(2)$

Từ (1) và (2) Suy ra $\frac{HM}{HN}=\frac{QM}{QN}$ Q trùng H, vậy BD, PM, AN đồng quy

Bài 7: Cho điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đường kính AB = 2R (C ≠ A, C ≠ B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB; I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH. Các đường thẳng CI, CJ cắt AB lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng AN = AC, BM = BC.
b) Chứng minh 4 điểm M, N, J, I cùng nằm trên một đường tròn và các đường thẳng MJ, NI, CH đồng quy.
c) Tìm giá trị lớn nhất của MN và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác CMN theo R.



a) Ta có: HCA =ABC (cùng phụ với HCB)

Vì CN là phân giác của góc HCB nên $\widehat{HCN} = \widehat{BCN}$

Do đó $\widehat{CAN} = \widehat{HCA} + \widehat{HCN} = \widehat{ABC} + \widehat{BCN}$

Mặt khác, xét Δ BCN với góc ngoài ANC ta có: $\widehat{ANC} = \widehat{ABC} + \widehat{BCN}$

Suy ra CAN= ANC ⇒ Δ ACN cân tại A ⇒ AC = AN.

Chứng minh tương tự ta có BC = BM.

b) Vì CM, CN lần lượt alà phân giác của góc ACH và BCH nên

$$\widehat{MCN} = \widehat{MCH} + \widehat{NCH} = \frac{1}{2}\widehat{ACH} + \frac{1}{2}\widehat{BCH} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} = 45^o$$

Tam giác ACN cân tại A có AI là phân giác kẻ từ đỉnh A, nên cũng là trung trực của đáy CN.

⇒ IC = IN.

⇒ Δ ICN cân tại I.

Tam giác ICN cân tại I có $\widehat{ICN} = 45^o$ nên là tam giác vuông cân tại I

⇒ CI ⊥ IN

Chứng minh tương tự ta có CJ ⊥ MJ.

Tứ giác MIJN có $\widehat{MIN} = \widehat{MJN} = 90^o$ nên là tứ giác nội tiếp

⇒ Bốn điểm M, I, J, N cùng thuộc một đường tròn.

Vì CH ⊥ MN, MJ ⊥ CN, NI ⊥ CM nên CH, MJ, NI đồng quy tại trực tâm của Δ CMN.

c) Đặt $AC = b; BC = a => a^2 + b^2 = BC^2 = 4R^2 (Pi - ta - go)$

Theo câu a, ta có AN=AC= b; BM=BC=b

Do đó a+b=AN+BM=BC+MN=>MN=a+b-BC=a+b-2R

Ta có:

$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2+b^2 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) = 8R^2$

$\Leftrightarrow a+b \leq 2\sqrt{2}R \Rightarrow MN = a+b-2R \leq 2R(\sqrt{2}-1)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b ⇔ CA = CB ⇔ C là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vì C thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên CH ≤ R.

Do đó $S_{CMN} = \frac{1}{2}CH.MN \leq \frac{1}{2}R.2.R(\sqrt{2}-1) = R^2(\sqrt{2}-1)$

Dấu bằng xảy ra ⇔ C là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vậy giá trị nhỏ nhất của MN là $2R(\sqrt{2}-1)$ và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác CMN là $R^2(\sqrt{2}-1)$

đều xảy ra khi và chỉ khi C là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB.

Bài 8: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O; R) cắt nhau tại T, đường thẳng AT cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D khác A.

1, Chứng minh rằng tam giác ABT đồng dạng với tam giác BDT.

2, Chứng minh rằng: AB.CD = BD.AC

3, Chứng minh rằng hai đường phân giác góc BAC , góc BDC và đường thẳng BC đồng quy tai một điểm.

4, Gọi M là trung điểm của BC, chứng minh rằng góc BAD bằng góc MAC.

Giải

1. Vì TB là tiếp tuyến của (O) nên

BAD = DBT (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cùng BD)

Xét Δ ABT và Δ BDT có:

$$\begin{cases} ATB \ \ (chung) \\ DBT = BAT \ \ (cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta ABT \sim \Delta BDT (g.g)$$

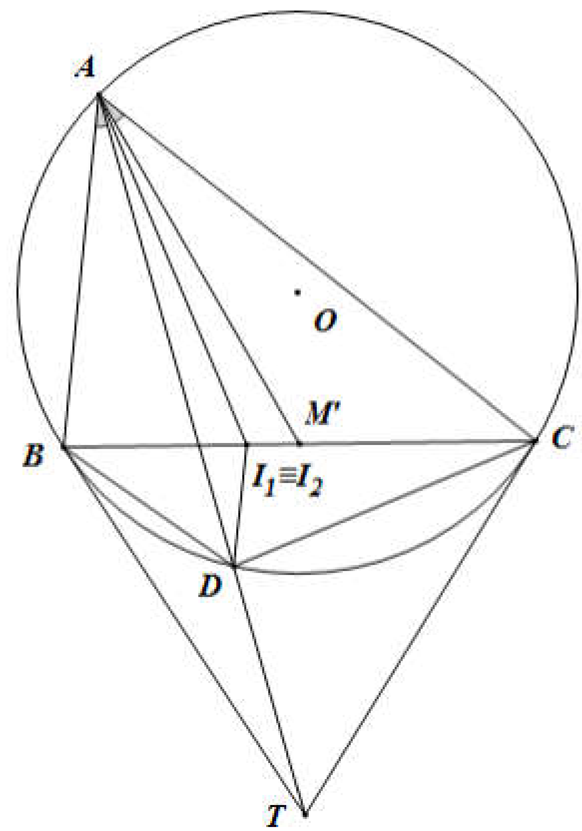
2. Vì $\Delta ABT \sim \Delta BDT \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AT}{BT} = \frac{BT}{DT} \Rightarrow \left(\frac{AB}{BD}\right)^2 = \frac{AT}{BT}.\frac{BT}{DT} = \frac{AT}{DT}$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\left(\frac{AC}{CD}\right)^2 = \frac{AT}{DT}$$

Do đó

$$\left(\frac{AB}{BD}\right)^2=\left(\frac{AC}{CD}\right)^2\Rightarrow\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}\Rightarrow AB.CD=BD.AC$$



3. Gọi I_1, I_2 lần lượt là giao điểm của BC với tia phân giác góc BAC và góc BDC.

Xét Δ ABC có tia phân giác AI_1, theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{I_1B}{I_1C}=\frac{AB}{AC}$$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{I_2B}{I_2C}=\frac{DB}{DC}$

Theo câu 2) ta có

$$AB.CD=BD.AC\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}\Rightarrow\frac{I_1B}{I_1C}=\frac{I_2B}{I_2C}$$

Mà I_1, I_2 cùng thuộc đoạn BC nên chúng chia trong đoạn BC theo các tỉ số bằng nhau.

$\Rightarrow I_1\equiv I_2$

⇒ Đường phân giác góc BAC, đường phân giác góc BDC và đường thẳng BC đồng quy.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường phân giác trong cắt nhau tại I. Các đường thẳng AI, BI, CI cắt (O) thứ tự tại M;N;P

a) Chứng minh tam giác NIC cân tại N.

b) Chứng minh I là trực tâm tam giác MNP.

c) Gọi E là giao điểm của MN và AC; F là giao điểm của PM và AB. Chứng minh E,I,F thẳng hàng.

d) Gọi K là trung điểm của BC. Giả sử $BI \perp IK$ và $BI = 2.IK$ thì $\widehat{BAC} = ?$

Bài 2

Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ tia $Cx \perp AB$. Trên Cx lấy hai điểm D và E sao cho D nằm trong đoạn CE và $\frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CD} = \sqrt{3}$. Đường tròn ($O_1$) ngoại tiếp tam giác ACD cắt (O_2) ngoại tiếp tam giác BEC tại điểm H ($H \neq C$)

CMR: a) Ba điểm A, H, E thẳng hàng.

b) H thuộc đường tròn đường kính AB

c) Đường thẳng đi qua hai điểm H và C luôn đi qua một điểm cố định khi C di chuyển trên đoạn thẳng AB ($C \neq A$; $C \neq B$)

Bài 3:

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và C là điểm chính giữa của cung AB. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng đi qua hai điểm A và K cắt (O) tại M ($M \neq A$). Kẻ $CH \perp AM$ ($H \in AM$). Đường thẳng OH cắt đường BC tại N. Đường thẳng MN cắt (O) tại D ($D \neq M$). CMR:

a) BHCM là hình bình hành

b) $\triangle OHC = \triangle OHM$

c) B, H, D thẳng hàng

Bài 4

Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn (C không trùng với A, B và trung điểm cung AB). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Đường tròn (O_1) đường kính AH cắt CA tại E, đường tròn (O_2) đường kính BH cắt CB tại F.

1) Chứng minh tứ giác AEFB là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi (O_3) là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEFB, D là điểm đối xứng của C qua O. Chứng minh ba điểm H, O_3, D thẳng hàng.

3) Gọi S là giao của các đường thẳng EF và AB, K là giao điểm thứ hai của SC với đường tròn (O). Chứng minh KE vuông góc với KF.

<u>Bài 5</u>

Cho tam giác ABC nhọn với trực tâm H. Đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng BH ở D, đường thẳng vuông góc với BC tại B cắt đường thẳng CH tại E. Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm của BE,CD.

1. Chứng minh rằng H,M,N thẳng hàng.

2. Đường thẳng MN cắt trung tuyến AL của tam giác ABC tại P.

Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP tiếp xúc với BC.

Mục lục

Sản phẩm sử dụng các nguồn tài liệu tổng hợp trong đề tuyển sinh từ nhiều nguồn và đồng nghiệp nên không tránh khỏi sai sót! Mong quý thầy cô góp ý!