ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP HỌC KÌ I

MÔN: TOÁN LỚP 9

Năm học : 2018-2019

TRƯỜNG LƯƠNG THẾ VINH- HÀ NỘI

I. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC:

1) Định nghĩa CBH, CBH số học, các phép tán về CBH. Bài toán rút gọn biểu thức có CBH và các bài toán liên quan.

2) Định nghĩa hàm số bậc nhất, đồ thị hàm số bậc nhất; hệ số góc của đường thẳng; vị trí tương đối giữa các đường thẳng và các bài toán liên quan.

3) Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn và một vài hệ đặc biệt.

4) Hệ thức lượng trong tam giác vuông, tỉ số lượng giác của góc nhọn và các bài toán giải tam giác.

5) Định nghĩa và các tính chất của đường tròn; vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn, của 2 đường tròn và các bài toán liên quan.

II. BÀI TẬP THAM KHẢO

ĐẠI SỐ

Bài 1.

a) Cho biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}}{x-4}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}$. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$.

b) Cho biểu thức $B=\frac{2}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để $B=10$.

c) Tìm các giá trị của x để biểu thức $\frac{B}{A}$ có giá trị lớn nhất . Tìm giá trị lớn nhất đó.

Bài 2. Cho biểu thức $P=\frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$

a) Rút gọn P

b) Tính P khi $x = 14 - 6\sqrt{5}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 3. Cho biểu thức: $M = \left(\dfrac{\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt{x}-2}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\right)$

a) Rút gọn M

b) Tìm x để $M = 2x$

c) Tìm x để: $P = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+M}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 4. Cho biểu thức $P = \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-6}\right)$

a) Rút gọn P

b) Tính P biết $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

c) Tìm các giá trị x nguyên để P nhận giá trị nguyên

Bài 5. Cho hàm số $y = (m+1)x - 3$ có đồ thị là đường thẳng d.

a) Tìm m để hàm số trên là hàm số đồng biến, nghịch biến?

b) Tìm m để đường thẳng d cắt đường thẳng $y = 3x + 1$; song song với đường thẳng $y = -5x + 3$; vuông góc với đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$?

c) Tìm m biết d và hai đường thẳng $y = -2x + 3$ và $y = x - 5$ đồng quy. Vẽ hình minh họa.

d) Tìm m để đường thẳng d cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 2.

e) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ tới d bằng 1.

f) Tìm m để đường thẳng d cắt Ox tại M, d cắt Oy tại N sao cho $S_{OMN} = 5$.

Bài 6. Cho $(d): y = (2-m)x + 1$

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì (d) luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O tới (d) bằng 1.

c) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O tới (d) lớn nhất.

d) Tìm giá trị của m (d) tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.

Bài 7. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = 3(x+5)+2m$; $(d_2): y = 2(x+m)+3$. Xác định m để giao điểm của (d_1) và (d_2) thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a. Nằm trên trục tung.
b. Nằm trên trục hoành.
c. Nằm bên trái trục tung.
d. Nằm phía trên trục hoành.
e. Nằm trong góc phần tư thứ hai.
f. Trên đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

Bài 8. Tìm tham số để hệ phương trình:

a. $\begin{cases} (m+1)x - y = 3 \\ mx + y = m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn: $x + y > 0$.

b. $\begin{cases} x - 2my = m+3 \\ mx - 3y = -5 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất là số nguyên.

Bài 9. Giải các hệ phương trình.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ x + 4y = -15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 5x + 6y = 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 9x - 2y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y-1} = 3 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{1-y} = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y} + \dfrac{3}{x-2y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{2x-y} - \dfrac{1}{x-2y} = \dfrac{1}{18} \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2y + xy^2 = 20 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$ h) $\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 \end{cases}$ i) Không dịch được đề

HÌNH HỌC

Bài 1: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Trên Ax lấy điểm C, nối OC. Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt By tại D.

a) Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

b) CMR: AB là tiếp tuyến của đường tròn đi qua ba điểm C, O, D

c) CMR: $CA.DB = R^2$

d) Cho góc $AOC = 60°$. Tính CA, DB, CD theo R.

Bài 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ hai tiếp tuyến Ax và By với (O). Kẻ tiếp tuyến thứ 3 với nửa đường tròn tại M cắt Ax và By tại C và D.

1) CMR: Tam giác COD là tam giác vuông và tích $AC.BD$ không phụ thuộc vị trí của M.

2) AM cắt OC tại E, BM cắt OD tại F. Tứ giác $MEOF$ là hình gì?

3) Tứ giác $AEFO; AEFB$ là hình gì?

4) CMR: $EC.EO + FO.FD = R^2$.

5) CMR: AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác COD.

6) Xác định vị trí của M để chu vi; diện tích hình thang $ACDB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

7) Tia BM cắt Ax tại K. CMR: C là trung điểm AK.

8) Kẻ đường cao MH của tam giác AMB. MH cắt BC tại N. CMR: N là trung điểm MH và A, N, D thẳng hàng.

9) Tìm quỹ tích giao điểm của AF và OM, giao điểm của AF và OE.

10) Xác định vị trí điểm M để chu vi tam giác MOH lớn nhất.

Bài 3: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB.C thuộc (O). Kẻ OH vuông góc với BC. OH cắt tiếp tuyến tại B ở E. Gọi D là giao điểm của OE với (O). M là giao điểm của AD với BC

a) Chứng minh $\widehat{ACB} = \widehat{ABE}$ và H là trung điểm của BC

b) Chứng minh AD là tia phân giác của $\widehat{CAB}$
c) EC là tiếp tuyến của (O)
AD cắt BE tại I. IH cắt BD tại K. Chứng minh KH.BI = IK.BH

Bài 4: Cho (O), đường kính AB, C thuộc (O), Kẻ bán kính OI vuông góc với BC tại H, gọi M là giao điểm của BC và AI. Vẽ (I) bán kính IB, AC cắt (I) tại K.

a) Chứng minh: H là trung điểm của BC.
b) AI là phân giác góc CAB.
c) B, I, K thẳng hàng.
d) Gọi E là trung điểm của AM. Chứng minh CE là tiếp tuyến của (I).

Bài 5: Cho ΔABC vuông ở A, đường cao AH $(AB > AC)$. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính BH và đường tròn (O_2) đường kính HC.

a) Xác định vị trí tương đối của (O_1) và (O_2)

b) AB cắt (O_1) tại D, AC cắt (O_2) tại E. Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

c) Giả sử $AH = 2\sqrt{2}cm; AB = 3cm$. Tính các cạnh của ΔABC.

Bài 6: Cho (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại A và B. Vẽ đường kính AOD và AO'C của hai đường tròn.

a) Chứng minh: C, B. O thẳng hàng và so sánh OO' với CD.
b) Qua A vẽ một cát tuyến cắt (O) và (O') lần lượt ở M và N. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của O và O' lên MN. Chứng minh: MN = 2HK.
c) Xác định vị trí của cát tuyến để MN lớn nhất?

Bài 7: Cho hai đường tròn tâm $(O;R)$ và $(O';R')$ nằm ngoài nhau $(R > R')$. Vẽ các tiếp tuyên chung ngoài đường $AB;CD$ của hai đường tròn $(C;A \in (O);D;B \in (O'))$

a/ CMR: Các đường thẳng $AB;CD;OO'$ đồng quy.

b/Xác đinh dạng của tứ giác $ABDC$

c/ AD cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt tại E và F CMR: AE = DF

Bài 8. Cho hai đường tròn (O; R), (O', R') tiếp xúc ngoài tại A. Tiếp tuyến chung ngoài MN cắt tiếp tuyến chung trong tại I.

a) Chứng minh các tam giác MAN và OIO' vuông

b) Xác định vị trí tương đối của MN với đường tròn đường kính OO'

c) Tính $S_{IOO'}$ biết R = 20 cm, R' = 15 cm

Bài 9. Cho đoạn thẳng AB và điểm C nằm giữa A và B vẽ một phía của AB các nửa đường tròn đường kính AB và AC, CB. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn lớn tại D, DA, DB cắt nửa đường tròn đường kính AC, CB tại M, N.

a) Tứ giác $DMCN$ là hình gì?

b) Chứng minh rằng $DM.DA = DN.DB$.

c) MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn đường kính AC, CB.

d) Xác định vị trí điểm C để MN có độ dài lớn nhất.

BẤT ĐẲNG THỨC GTLN – GTNN

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của : a) $A = \dfrac{8x+3}{4x^2+1}$ b) $B = \dfrac{x}{(x+2010)^2}$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của : a) $A = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 6y + 3$ b) $B = (x+1)^4 + (x+5)^4$

Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^3 + y^3 + x^2 + y^2$ biết $x + y = 1$

Bài 4. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $A = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}$.

Bài 5. (2011): Với $x > 0$, tìm GTNN của biểu thức : $M = 4x^2 - 3x + \dfrac{1}{4x} + 2011$.

Bài 6. (2012): Với x, $y > 0$ và $x \geq 2y$, tìm GTNN của biểu thức : $M = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

Bài 7: Với $a, b, c > 0$ và $a + b + c + ab + bc + ca = 6abc$

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \geq 3$

Bài 8: Với $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 2$

Tìm GTLN của $Q = \sqrt{2a+bc} + \sqrt{2b+ac} + \sqrt{2c+ab}$

Bài 9: Với 3 số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$

Tìm giá trị lớn nhất của $M=\dfrac{ab}{a+b+2}$

Bài 10. Cho các số a,b,c thỏa mãn $2\left(b^2+bc+c^2\right)=3\left(3-a^2\right)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b+c$

Bài 11. Cho hai số thực dương a,b sao cho $a+b=2$. Chứng minh $a^2+b^2\le\dfrac{2}{(ab)^2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI
ĐẠI SỐ

Bài 1.

ĐKXĐ : $x\ne 4$

a) Thay $x=25$ (tmđk) vào biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$, ta có :

$A=\dfrac{\sqrt{25}}{25-4}+\dfrac{1}{\sqrt{25}-2}=\dfrac{5}{21}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{12}{21}$

b) $B=10\Leftrightarrow\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}=10\quad(x\ne 4)$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}-10=1$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}=11$

$\Leftrightarrow x=121$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $B=10$ thì $x=121$.

c) $\dfrac{\text{B}}{\text{A}}=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}:\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}:\dfrac{2\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}.\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

Ta có :

$\sqrt{x}\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{x}+1\ge 1\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\le 1\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\le 2\Leftrightarrow\dfrac{\text{B}}{\text{A}}\le 2$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=0$

Vậy : GTLN của $\dfrac{\text{B}}{\text{A}}$ là 2 tại $x=0$

Bài 2.

a) ĐKXĐ: $x \ge 0;\ x \ne 9$

$$P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{2(\sqrt{x}-3)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}-3-2(x-6\sqrt{x}+9)-(x+4\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}-3-2x+12\sqrt{x}-18-x-4\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}+8\sqrt{x}-3x-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{(x+8)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$$

b) ĐKXĐ: $x \ge 0;\ x \ne 9$

Ta thấy $x = 14-6\sqrt{5}$ (TMĐK), thay $x = 14-6\sqrt{5}$ vào biểu thức P ta được

$$P = \frac{14-6\sqrt{5}+8}{\sqrt{14-6\sqrt{5}}+1} = \frac{22-6\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}+1} = \frac{2(11-3\sqrt{5})}{4-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2(11-3\sqrt{5})(4+\sqrt{5})}{16-5} = \frac{58-2\sqrt{5}}{9}$$

c. Ta có $P = \dfrac{x+8}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1+\dfrac{9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1+\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}-2 \ge \sqrt{(\sqrt{x}+1).\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}}-2 = 3-2 = 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=\dfrac{9}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2=9 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$ (TMĐK)

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 khi $x=4$.

Bài 3.

a) $M=\dfrac{\sqrt{x}-4+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}:\dfrac{x-4-x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}=\dfrac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}.\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{-4}=1-\sqrt{x}$ ĐKXĐ: $x>0, x\neq 4$

b) $M=2x \Leftrightarrow 1-\sqrt{x}=2x \Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ (thỏa mãn ĐK)

c) $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}$ ĐK: $x>0, x\neq 4$

Ta có: $\sqrt{x}+1>0; x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0 \Rightarrow P>0$

$$\frac{1}{P}=\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-2\left(\sqrt{x}+1\right)+3}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-2+\frac{3}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}+1+\frac{3}{\sqrt{x}+1}-3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $\left(\sqrt{x}+1\right)+\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}\geq 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{P}\geq 2\sqrt{3}-3$ (*)

Mà $P>0; 2\sqrt{3}-3>0$ nên (*) $\Leftrightarrow P\leq \dfrac{1}{2\sqrt{3}-3}=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi: $\sqrt{x}+1=\dfrac{3}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow x=4-2\sqrt{3}$ (thỏa mãn ĐK)

Vậy GTLN của P là $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$ tại x = $4-2\sqrt{3}$

Bài 4.

a) ĐKXĐ: $x\geq 0, x\neq 4$

$$P=\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}:\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)+\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$P=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{x-4-x+9+\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}.\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}+3}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

b) $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4}$ (thỏa mãn ĐK) $\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Thay vào P ta được: $P=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-2\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1\right)=\frac{5-3\sqrt{5}}{2}$

c) $P=1-\frac{3}{\sqrt{x}+1}$

Để $P\in Z\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{x}+1}\in Z\Rightarrow\sqrt{x}+1\in$ Ư(3)

Mà $\sqrt{x}+1>0\Rightarrow\sqrt{x}+1=1;3\ \Leftrightarrow x=4$ (không thỏa mãn); $x=0$ (thỏa mãn)

Bài 5. Cho hàm số $y=(m+1)x-3$ có đồ thị là đường thẳng d.

a) Hàm số $y=(m+1)x-3$ đồng biến trên R khi và chỉ khi $m+1>0\Leftrightarrow m>-1$

Hàm số $y=(m+1)x-3$ nghịch biến trên R khi và chỉ khi $m+1<0\Leftrightarrow m<-1$

b) Tìm m để đường thẳng d cắt đường thẳng $y=3x+1$; song song với đường thẳng $y=-5x+3$; vuông góc với đường thẳng $x-2y+1=0$?

- Đường thẳng d cắt đường thẳng $y=3x+1$ khi và chỉ khi: $m+1\neq3\Leftrightarrow m\neq2$

- Đường thẳng d song song với đường thẳng $y=-5x+3$ khi và chỉ khi: $m+1=-5\Leftrightarrow m=-6$ và $1\neq3$ (luôn đúng).

Vậy $m=-6$

- Có $x-2y+1=0\Leftrightarrow2y=x+1\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi:

$$(m+1)\frac{1}{2}=-1 \Leftrightarrow m+1=-2 \Leftrightarrow m=-3$$

c) Tìm m biết d và hai đường thẳng $y=-2x+3$ và $y=x-5$ đồng quy. Vẽ hình minh họa.

+) d và hai đường thẳng $y=-2x+3$ và $y=x-5$ phân biệt khi và chỉ khi:

$m+1\neq-2 \Leftrightarrow m\neq-3$ và $m+1\neq1 \Leftrightarrow m\neq0$

+) Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng $y=-2x+3$ và $y=x-5$ là nghiệm của phương trình:

$$-2x+3=x-5 \Leftrightarrow -3x=-8 \Leftrightarrow x=\frac{8}{3} \Rightarrow y=\frac{8}{3}-5=\frac{-7}{3}$$

d và hai đường thẳng $y=-2x+3$ và $y=x-5$ đồng quy khi và chỉ khi d đi qua điểm $\left(\frac{8}{3};\frac{-7}{3}\right)$

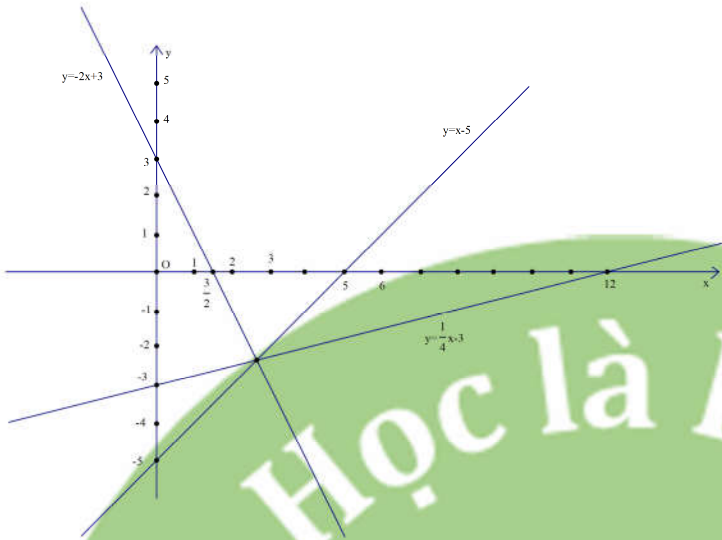
Hay $x=\frac{8}{3}; y=\frac{-7}{3}$ thỏa mãn công thức hàm số $y=(m+1)x-3$

Hay $(m+1)\cdot\frac{8}{3}-3=\frac{-7}{3} \Leftrightarrow (m+1)\cdot\frac{8}{3}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow m+1=\frac{1}{4} \Leftrightarrow m=\frac{-3}{4}$ (TM)

Vậy $m=\frac{-3}{4}$

Khi đó hàm số của đường thẳng d có dạng: $y=\left(\frac{-3}{4}+1\right)x-3=\frac{1}{4}x-3$

Vẽ hình:



d) Tìm m để đường thẳng d cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 2.

Đường thẳng d cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 2 khi và chỉ khi $x=2; y=0$ thỏa mãn công thức hàm số $y=(m+1)x-3$

Hay $(m+1).2-3=0 \Leftrightarrow m+1=\frac{3}{2} \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

e) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ tới d bằng 1.

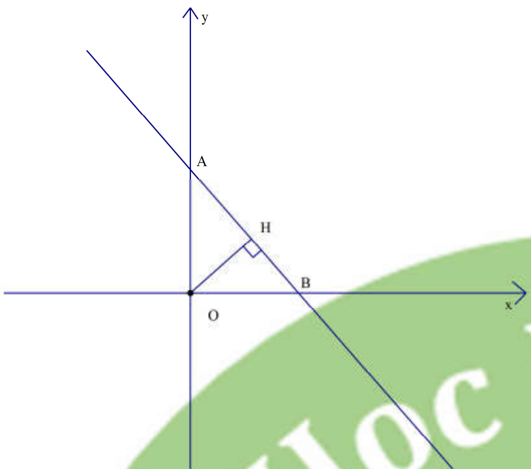
*TH1: $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ thì hàm số trở thành: $y=-3$ khoảng cách từ gốc tọa độ tới d bằng 3.

Vậy $m=-1$ không thỏa mãn.

*TH2: $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

Gọi A là giao điểm của d với Oy $\Rightarrow A(0;-3) \Rightarrow OA=|-3|=3$

Gọi B là giao điểm của d với Ox $\Rightarrow B\left(\frac{3}{m+1};0\right) \Rightarrow OB=\left|\frac{3}{m+1}\right|=\frac{3}{|m+1|}$



Kẻ $OH \perp AB\left(H \in AB\right)$

Xét ΔAOB vuông tại O, đường cao OH có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{\left(\frac{3}{|m+1|}\right)^2}=\frac{1}{9}+\frac{(m+1)^2}{9}=\frac{(m+1)^2+1}{9}$$

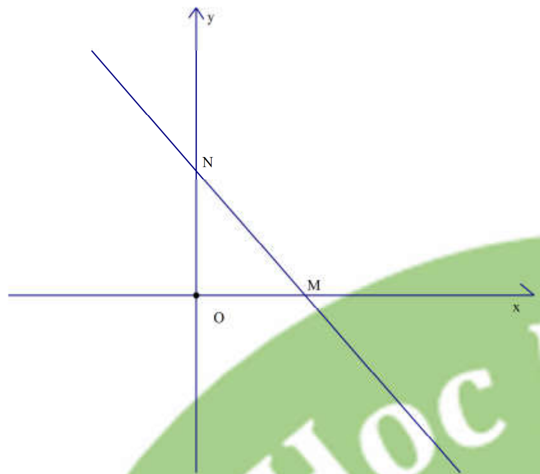
$$\Rightarrow OH^2=\frac{9}{(m+1)^2+1}\Rightarrow OH=\frac{3}{\sqrt{(m+1)^2+1}}$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ tới d bằng 1 khi và chỉ khi

$$\frac{3}{\sqrt{(m+1)^2+1}}=1\Leftrightarrow\sqrt{(m+1)^2+1}=3\Leftrightarrow(m+1)^2+1=9$$

$$\Leftrightarrow(m+1)^2=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+1=2\sqrt{2}\\ m+1=-2\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\sqrt{2}-1\\ m=-2\sqrt{2}-1\end{array}\right.$$

f) Tìm m để đường thẳng d cắt Ox tại M, d cắt Oy tại N sao cho $S_{OMN}=5$.



Đường thẳng d cắt Ox tại M, d cắt Oy tại N nên $m \neq -1$

d cắt Ox tại M $\Rightarrow M\left(\frac{3}{m+1};0\right) \Rightarrow OM = \left|\frac{3}{m+1}\right| = \frac{3}{|m+1|}$

d cắt Oy tại N $\Rightarrow N(0;-3) \Rightarrow ON = |-3| = 3$

$S_{\Delta OMN} = 5$ hay $\frac{1}{2} \cdot OM \cdot ON = 5$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{|m+1|} \cdot 3 = 5 \Leftrightarrow |m+1| = \frac{9}{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1 = \frac{9}{10} \\ m+1 = \frac{-9}{10} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{-1}{10} (TM) \\ m = \frac{-19}{10} (TM) \end{array}\right.$$

Bài 6. Cho $(d): y = (2-m)x + 1$

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì (d) luôn đi qua một điểm cố định.

Giả sử $(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (d) luôn đi qua với mọi m

$\Rightarrow y_0 = (2-m)x_0 + 1$ với mọi m

$\Leftrightarrow mx_0 + y_0 - 1 - 2x_0 = 0$ với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 - 1 - 2x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Vậy khi m thay đổi thì (d) luôn đi qua một điểm cố định $(0;1)$ với mọi m.

b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O tới (d) bằng 1.

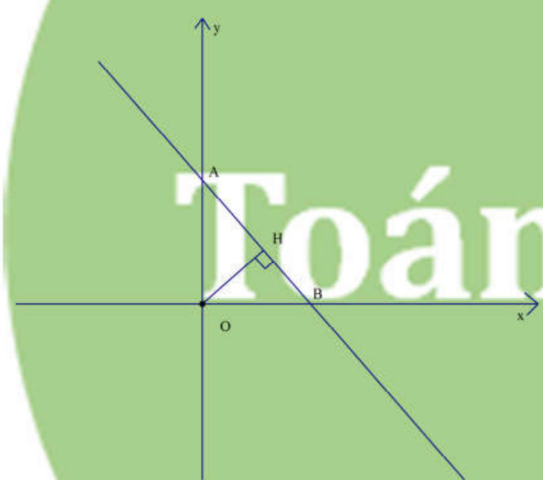
*TH1: $2-m=0 \Leftrightarrow m=2$ thì hàm số trở thành: $y=1$ khoảng cách từ gốc tọa độ tới d bằng 1.

Vậy $m=2$ thỏa mãn.

*TH2: $2-m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

$(d): y=(2-m)x+1$ cắt Oy tại điểm $A(0;1) \Rightarrow OA=|1|=1$

(d) cắt Ox tại điểm $B\left(\dfrac{-1}{2-m};0\right) \Rightarrow OB=\left|\dfrac{-1}{2-m}\right|=\dfrac{1}{|2-m|}$



Kẻ $OH \perp AB\,(H \in AB)$

Xét ΔAOB vuông tại O, đường cao OH có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{\left(\dfrac{1}{|2-m|}\right)^2}=1+(2-m)^2$$

$$\Rightarrow OH^2=\frac{1}{1+(2-m)^2} \Rightarrow OH=\frac{1}{\sqrt{1+(2-m)^2}}$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ tới d bằng 1 khi và chỉ khi $OH = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1+(2-m)^2}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+(2-m)^2} = 1 \Leftrightarrow 1+(2-m)^2 = 1$$

$\Leftrightarrow (2-m)^2 = 0$

$\Leftrightarrow m = 2$ (loại)

Vậy từ hai trường hợp trên được $m = 2$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ tới d bằng 1.

c) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O tới (d) lớn nhất.

*TH1: $2-m=0 \Leftrightarrow m=2$ thì hàm số trở thành: $y=1$ khoảng cách từ gốc tọa độ tới d bằng 1 (1)

*TH2: $2-m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

Theo câu trên, $OH^2 = \frac{1}{1+(2-m)^2} \Rightarrow OH = \frac{1}{\sqrt{1+(2-m)^2}}$

Có

$(2-m)^2 > 0 \;\; \forall m \neq 2$

$\Leftrightarrow 1+(2-m)^2 > 1 \;\; \forall m \neq 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+(2-m)^2} > 1 \;\; \forall m \neq 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+(2-m)^2}} < 1 \;\; \forall m \neq 2$

Hay $OH < 1 \;\; \forall m \neq 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra khoảng cách từ gốc tọa độ O tới (d) lớn nhất là bằng 1.

Vậy $m = 2$

d) Tìm giá trị của m (d) tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.

(d) tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2 khi và chỉ khi $m \neq 2$

Theo câu trên, $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{|2-m|} = \frac{1}{2|2-m|}$

$S_{\Delta OAB} = 2$ hay $\frac{1}{2|2-m|} = 2 \Leftrightarrow |2-m| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-m = \frac{1}{4} \\ 2-m = \frac{-1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{7}{4} (\text{TM}) \\ m = \frac{9}{4} (\text{TM}) \end{array}\right.$

Vậy $m = \frac{7}{4}$; $m = \frac{9}{4}$ thì (d) tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.

Bài 7:

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là:

$3(x+5) + 2m = 2(x+m) + 3 \Leftrightarrow 3x + 15 + 2m = 2x + 2m + 3 \Leftrightarrow x = -12$.

Vậy giao điểm của (d_1) và (d_2) là $M(-12; 2m-21)$.

a. $M(-12; 2m-21)$ có hoành độ là -12 nên không thể nằm trên trục tung. Vậy không tồn tại m để M nằm trên trục tung.

b. M nằm trên trục hoành nên $2m - 21 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{21}{2}$.

c. M nằm bên trái trục tung nên $-12 < 0$ (luôn đúng). Vậy M nằm bên trái trục tung với mọi $m \in \mathbb{R}$.

d. M nằm phía trên trục hoành nên $2m - 21 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{21}{2}$.

e. M nằm trong góc phần tư thứ hai nên $\begin{cases} -12 < 0 \\ 2m - 21 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{21}{2}$.

M nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ nhất nên $-12 = 2m - 21 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$.

Bài 8:

a. Cộng hai vế phương trình ta được: $(2m+1)x = m+3$.

Nếu $m \neq -\frac{1}{2}$ thì $x = \frac{m+3}{2m+1}$, từ đó $y = m - mx = m - \frac{m^2+3m}{2m+1} = \frac{m^2-2m}{2m+1}$.

Vậy với $m \neq -\frac{1}{2}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{m+3}{2m+1}; \frac{m^2-2m}{2m+1}\right)$.

Khi đó: $x+y=\dfrac{m+3}{2m+1}+\dfrac{m^2-2m}{2m+1}=\dfrac{m^2-m+3}{2m+1}$.

Vì $m^2-m+3=\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$ nên $x+y>0\Leftrightarrow 2m+1>0\Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{2}$.

b.

$$\begin{cases}x-2my=m+3\\mx-3y=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2my+m+3\\m(2my+m+3)-3y=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2my+m+3\\y=\dfrac{-m^2-3m-5}{2m^2-3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-13m-9}{2m^2-3}\\y=\dfrac{-m^2-3m-5}{2m^2-3}\end{cases}$$

.

Ta có: $y\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{-m^2-3m-5}{2m^2-3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{2m^2+6m+10}{2m^2-3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{(2m^2-3)+6m+13}{2m^2-3}\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow\left(1+\dfrac{6m+13}{2m^2-3}\right)\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(6m+13)\vdots(2m^2-3)\Leftrightarrow(6m+13)(6m-13)\vdots(2m^2-3)$

$\Leftrightarrow(36m^2-169)\vdots(2m^2-3)\Leftrightarrow\left[18(2m^2-3)-115\right]\vdots(2m^2-3)\Leftrightarrow 115\vdots(2m^2-3)$.

$2m^2-3$	1	-1	5	-5	23	-23	115	-115
m	$\pm\sqrt{2}$	±1	±2	Loại	$\pm\sqrt{13}$	Loại	$\pm\sqrt{59}$	Loại

Do $x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{-13m-9}{2m^2-3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1;-1\}$.

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất là số nguyên ứng với $m\in\{1;-1\}$.

Bài 9. Giải các hệ phương trình.

a) Ta có:

$$\begin{cases}2x-3y=10\\x+4y=-15\,(\times2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=10 & (1)\\2x+8y=-30 & (2)\end{cases}\overset{(2)-(1)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}2x-3y=10\\11y=-40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-5}{11}\\y=\dfrac{-40}{11}\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x,y)=\left(\frac{-5}{11};\frac{-40}{11}\right)$

b) Ta có:

$$\begin{cases}x-y=3\\5x+6y=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+y\\5(3+y)+6y=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+y\\11y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{30}{11}\\y=\dfrac{-3}{11}\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x,y)=\left(\frac{30}{11};\frac{-3}{11}\right)$

c) Ta có:

$$\begin{cases}3x+4y=2\\9x-2y=6(\times 2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+4y=2 & (1)\\18x-4y=12 & (2)\end{cases}\overset{(1)+(2)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}21x=14\\3x+4y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=0\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x,y)=\left(\frac{2}{3};0\right)$

d) ĐKXĐ: $\begin{cases}x\neq 0\\y-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\y\neq 1\end{cases}$,

Khi đó, hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y-1}=3\\\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{y-1}=5(\times 2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y-1}=3 & (1)\\\dfrac{8}{x}+\dfrac{4}{y-1}=10 & (2)\end{cases}\overset{(2)-(1)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\dfrac{6}{x}=7\\\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y-1}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{6}{7}\\\dfrac{4}{y-1}=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{6}{7}\\y=7\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x,y)=\left(\frac{6}{7};7\right)$

e) ĐKXĐ: $\begin{cases}2x-y\neq 0\\x-2y\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\neq 2x\\x\neq 2y\end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2x-y} \\ b = \dfrac{1}{x-2y} \end{cases}$ (*). Khi đó, hệ phương trình đã cho có dạng

$$\begin{cases} 2a+3b=\dfrac{1}{2} \ (1) \\ 2a-b=\dfrac{1}{18} \ (2) \end{cases} \overset{(1)-(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2a+3b=\dfrac{1}{2} \\ 4b=\dfrac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+3b=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{12} \\ b=\dfrac{1}{9} \end{cases} \quad (**)$$

Thay (**) vào (*), ta được

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y}=\dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=12(\times 2) \\ x-2y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y=24 \ (1) \\ x-2y=9 \quad (2) \end{cases} \overset{(1)-(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x=15 \\ x-2y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x,y)=(5;-2)$

f) Ta có: $\begin{cases} x^2+y^2=65 \\ x^2y+xy^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=65 \\ xy(x+y)=20 \end{cases}$ (I)

Chế lại $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x^2y+xy^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=17 \\ xy(x+y)=20 \end{cases}$ (I)

Đặt $\begin{cases} a=x+y \\ b=xy \end{cases}$. Khi đó hệ (I), có dạng:

$$\begin{cases} a^2-2b=17 \\ ab=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2-17}{2} \\ a.\dfrac{a^2-17}{2}=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2-17}{2} \quad (1) \\ a^3-17a-40=0 \ (2) \end{cases}$$

+ Xét phương trình (2) có dạng:

$$a^3-17a-40=0 \Leftrightarrow (a-5)(a^2+5a+8)=0 \Leftrightarrow (a-5)\left[\left(a^2+5a+\frac{25}{4}\right)+\frac{7}{4}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (a-5)\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right]=0 \Rightarrow a-5=0 \Leftrightarrow a=5$$

+ Với $a=5\Rightarrow b=4$. Suy ra, ta có hệ:

$$\begin{cases}x+y=5\\xy=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-x\\x(5-x)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-x\\x^2-5x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-x\\(x-1)(x-4)=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}\\\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x,y) là $(1;4);(4;1)$

g) Ta có:

$$\begin{cases}x^2-2y^2=2x+y\ \ (1)\\y^2-2x^2=2y+x\ \ (2)\end{cases}\overset{(1)-(2)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}3x^2-3y^2=x-y\\y^2-2x^2=2y+x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(x-y)(x+y)=x-y\\y^2-2x^2=2y+x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(3x+3y-1)=0\\y^2-2x^2=2y+x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-y=0\\3x+3y-1=0\end{array}\right.\\y^2-2x^2=2y+x\ \ (*)\end{cases}$$

+ Nếu $x-y=0\Rightarrow x=y$.

Ta thay $x=y$ vào phương trình (*) ta được phương trình:

$$x^2-2x^2=2x+x\Leftrightarrow x^2+3x=0\Leftrightarrow x(x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-3\end{array}\right.$$

Với $x=0\Rightarrow y=0$

$x=-3\Rightarrow y=-3$

+ Nếu $3x+3y-1=0\Leftrightarrow y=\dfrac{1-3x}{3}$

Ta thay $y=\dfrac{1-3x}{3}$ vào phương trình (*) ta được phương trình:

$$\left(\frac{1-3x}{3}\right)^2-2x^2=2.\frac{1-3x}{3}+x\Leftrightarrow 9x^2-3x+5=0\Leftrightarrow\left(9x^2-3x+\frac{1}{4}\right)+\frac{19}{4}=0$$

$\Leftrightarrow \left(3x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}=0$ (vô lí)

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm (x,y) là $(0;0)$ và $(-3;-3)$.

h) $\begin{cases} x^2+2xy+3y^2=9 \\ 2x^2+2xy+y^2=2 \end{cases}$ (I)

Đặt $y=tx$. Khi đó, hệ phương trình đã cho có dạng:

$$\begin{cases} x^2+2x^2t+3x^2t^2=9 \\ 2x^2+2x^2t+x^2t^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(3t^2+2t+1\right)=9 \\ x^2\left(t^2+2t+2\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{9}{3t^2+2t+1} \\ x^2=\dfrac{2}{t^2+2t+2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{t^2+2t+2}=\dfrac{9}{3t^2+2t+1} & (1) \\ x^2=\dfrac{2}{t^2+2t+2} & (2) \end{cases}$$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow 2\left(3t^2+2t+1\right)=9\left(t^2+2t+2\right)$

$\Leftrightarrow 3t^2+14t+16=0$

$\Leftrightarrow (t+2)(3t+8)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+2=0 \\ 3t+8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=\dfrac{-8}{3} \end{array}\right.$$

+ Thay $t=-2$ vào (2) thì ta được: $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \Rightarrow y=\mp 2$, thỏa mãn hệ (I)

+ Thay $t=\dfrac{-8}{3}$ vào (2) thì ta được: $x^2=\dfrac{9}{17} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{3\sqrt{17}}{17} \Rightarrow y=\mp\dfrac{8\sqrt{17}}{17}$ thỏa mãn hệ (I)

Vậy hpt (I) có nghiệm (x,y) là $(1;-2);(-1;2);\left(\dfrac{3\sqrt{17}}{17};-\dfrac{8\sqrt{17}}{17}\right);\left(-\dfrac{3\sqrt{17}}{17};\dfrac{8\sqrt{17}}{17}\right)$

Bài 10. Giải các phương trình.

a) $\sqrt{x^2-6x+6}=2x-1$ b) $\sqrt{x^2+11}+x^2=31$ c) $2(x^2+2)=5\sqrt{x^2+1}$

d) $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$ e) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$ f) $(x+3)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12$

g) $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}$ h) $x^2+4x+5=16\sqrt{x-1}+6\sqrt{x^2-16}$

i) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6$ j) $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

Lời giải

a) $\sqrt{x^2-6x+6}=2x-1$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\ge 0\\ x^2-6x+6=(2x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\ 3x^2+2x-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\ (x-1)(3x+5)=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x-1=0\\ 3x+5=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-5}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=1$.

b) $\sqrt{x^2+11}+x^2=31$

Đặt $t=\sqrt{x^2+11}$, với $t\ge\sqrt{11}$

thì $t^2=x^2+11\Rightarrow t^2-11=x^2$

Nên phương trình đã cho có dạng:

$$t+t^2-11=31\Leftrightarrow t^2+t-42=0\Leftrightarrow(t-6)(t+7)=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-6=0 \\ t+7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=-7 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện, ta suy ra $t=6$ thỏa mãn

Với $t=6$ thì ta có: $\sqrt{x^2+11}=6 \Leftrightarrow x^2+11=36 \Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow x=\pm 5$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x_1=-5$ và $x_2=5$

c) $2\left(x^2+2\right)=5\sqrt{x^2+1}$ (1)

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}$, với $t \geq 1$

thì $t^2=x^2+1 \Rightarrow t^2+1=x^2+2$

Nên phương trình đã cho có dạng:

$2\left(t^2+1\right)=5t \Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow (t-2)(2t-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-2=0 \\ 2t-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện, ta suy ra $t=2$ thỏa mãn

Với $t=2$ thì ta có: $\sqrt{x^2+1}=2 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Vậy phương trình (1) có nghiệm $x_1=-\sqrt{3}$ và $x_2=\sqrt{3}$

d) $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$ (1)

Lập phương hai vế, áp dụng hằng đẳng thức: $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

ta được: $x+34-x+3-3.\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}\left(\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}\right)=1$

Thay $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$ vào (1) ta có:

$3.\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}=36$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+34)(x-3)}=12$

Lập phương hai vế ta được:

$$x^2+31x-102=1728$$

$$\Leftrightarrow x^2+31x-1830=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+31x-1830=0$$

$$\Leftrightarrow (x-30)(x+61)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-30=0 \\ x+61=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=30 \\ x=-61 \end{array}\right.$$

Thử lại: $x=30$ thỏa mãn (1).

$x=-61$ thỏa mãn (1).

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm: $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=30 \\ x_2=-61 \end{cases}$

e) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$ (1)

ĐKXĐ: $x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1$

Khi đó, phương trình (1) tương đương:

$$\left(\sqrt[3]{x-2}-1\right)+\left(\sqrt{x+1}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2-1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1}+\frac{x+1-4}{\sqrt{x+1}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}=0 \end{array}\right.$$

+ Nếu $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ (t/m)

+ Nếu $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}=0$ (*)

Dễ thấy, với $x \geq -1$ thì $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}>0$, nên phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình (1) có một nghiệm: $x=3$

f) Ta có: $(x+3)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12$ (1)

ĐKXĐ: $10-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 10 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$.

Khi đó, phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+3)\sqrt{10-x^2}=(x+3)(x-4)$

$\Leftrightarrow (x+3)\left(\sqrt{10-x^2}-x+4\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ \sqrt{10-x^2}-x+4=0 \end{array}\right.$

+ Nếu $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ (t/m).

+ Nếu $\sqrt{10-x^2}-x+4=0 \Leftrightarrow \sqrt{10-x^2}=x-4$ (*)

Để phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$, điều này trái với điều kiện xác định của phương trình (1), nên phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là: $x=-3$.

g) $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}$ (1)

ĐKXĐ: $3x+10 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -10 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{-10}{3}$

Ta có, phương trình (1) $\left(x^2+6x+9\right)+\left(3x+10-2\sqrt{3x+10}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2 + \left(\sqrt{3x+10}-1\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \sqrt{3x+10}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ 3x+10=1 \end{cases} \Rightarrow x=-3$

Kết hợp với điều kiện, suy ra $x=-3$ là nghiệm của phương trình (1)

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là: $x=-3$

h) $x^2+4x+5=16\sqrt{x-1}+6\sqrt{x^2-16}$ (1)

ĐKXĐ: $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x^2-16\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 4 \\ x\le -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$

Khi đó, phương trình (1) tương đương:

$x^2-6\sqrt{x^2-16}+4x-16\sqrt{x-1}+5=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-16\right)-6\sqrt{x^2-16}+9+4(x-1)-16\sqrt{x-1}+16=0$

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{x^2-16}-3\right]^2+4\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-16}-3=0 \\ \sqrt{x-1}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-16}=3 \\ \sqrt{x-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-16=9 \\ x-1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=25 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow x=5\,(t/m)$

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là: $x=5$

i) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6$ (1)

ĐKXĐ: $\begin{cases} 2x-3\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{3}{2} \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x\ge \frac{3}{2}$

Khi đó, phương trình (1) tương đương với phương trình:

$\frac{2x-3-x}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2(x-3) \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2(x-3) \Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}-2=0 \end{array}\right.$

+ Nếu $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ (t/m)

+ Nếu $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}-2=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\right)=1$

Dễ thấy với $x \geq \dfrac{3}{2}$ thì $2\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\right)>1$,

nên phương trình $2\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\right)=1$ vô nghiệm.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là: $x=3$.

j) $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$ (1)

ĐKXĐ: $x>0$

Khi đó, phương trình (1) tương đương:

$\left(\sqrt{x^2+12}-4\right)-(3x-6)-\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+12-16}{\sqrt{x^2+12}+4}-3(x-2)-\dfrac{x^2+5-9}{\sqrt{x^2+5}+3}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}-3(x-2)-\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-3-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}-\dfrac{3}{x+2}\right)=0$

+ Nếu $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (t/m).

+ Dễ thấy với $x>0$ thì $(x+2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}-\dfrac{3}{x+2}\right)<0$

vì $\frac{1}{\sqrt{x^2+12}+4}<\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}<0$

$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}-\frac{3}{x+2}<0$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là: $x=2$.

HÌNH HỌC

Bài 1: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Trên Ax lấy điểm C, nối OC. Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt By tại D.

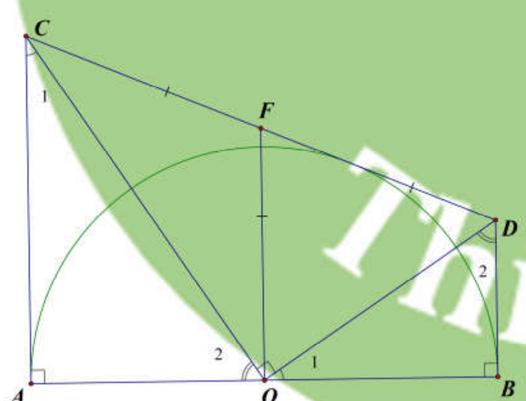
e) Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

f) CMR: AB là tiếp tuyến của đường tròn đi qua ba điểm C,O,D

g) CMR: $CA.DB=R^2$

h) Cho góc $AOC=60°$. Tính CA, DB, CD theo R.

Hướng dẫn giải



a) Xét tứ giác $ABCD$ có $\begin{cases}AC\perp AB\\BD\perp AB\end{cases}\Rightarrow ABCD$ là hình thang vuông

b) Lấy M là trung điểm của DC

ΔCOD vuông tại O nên $FC=FD=FO$ (1)

Xét hình thang vuông $ABCD$ có $\begin{cases} FC = FD \\ OA = OB \end{cases}$ nên FO là đường trung bình của hình thang ABDC $\Rightarrow FO//AC//BD \Rightarrow FO \perp AB \quad (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn đi qua ba điểm C,O,D

c) Có $\begin{cases} \widehat{O_1} + \widehat{D_2} = 90 \\ \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 90 \end{cases} \Rightarrow \widehat{O_2} = \widehat{D_2} \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{C_1}$

Xét $\Delta AOC \sim \Delta BDO\,(g.g)$ $\dfrac{OA}{BD} = \dfrac{AC}{BO} \Rightarrow AC.BD = OA.OB = R^2$

d) $\widehat{AOC} = 60°$

Trong ΔCAO: $\quad TanO_2 = \dfrac{AC}{OA} \Rightarrow AC = OA.\tan O_2 = R.\tan 60 = \sqrt{3}R$

$\Rightarrow OC^2 = OA^2 + AC^2 = R^2 + 3R^2 = 4R^2 \Rightarrow OC = 2R$

Có $CA.DB = R^2 \Rightarrow BD = \dfrac{R^2}{\sqrt{3}R} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}R$

Trong ΔOBD có: $OD^2 = OB^2 + BD^2 = R^2 + \dfrac{R^2}{3} = \dfrac{4R^2}{3} \Rightarrow OD = \dfrac{2R}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}R}{3}$

Xét ΔCOD vuông tại O:

$$CD^2 = OC^2 + OD^2 = (2R)^2 + \left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4R^2 + \dfrac{4R^2}{3} = \dfrac{16R^2}{3} \Rightarrow CD = \dfrac{4R}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}R}{3}$$

Bài 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ hai tiếp tuyến Ax và By với (O). Kẻ tiếp tuyến thứ 3 với nửa đường tròn tại M cắt Ax và By tại C và D.

1) CMR: Tam giác COD là tam giác vuông và tích $AC.BD$ không phụ thuộc vị trí của M.

2) AM cắt OC tại E, BM cắt OD tại F. Tứ giác $MEOF$ là hình gì?

3) Tứ giác $AEFO; AEFB$ là hình gì?

4) CMR: $EC.EO + FO.FD = R^2$.

5) CMR: AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác COD.

6) Xác định vị trí của M để chu vi; diện tích hình thang $ACDB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

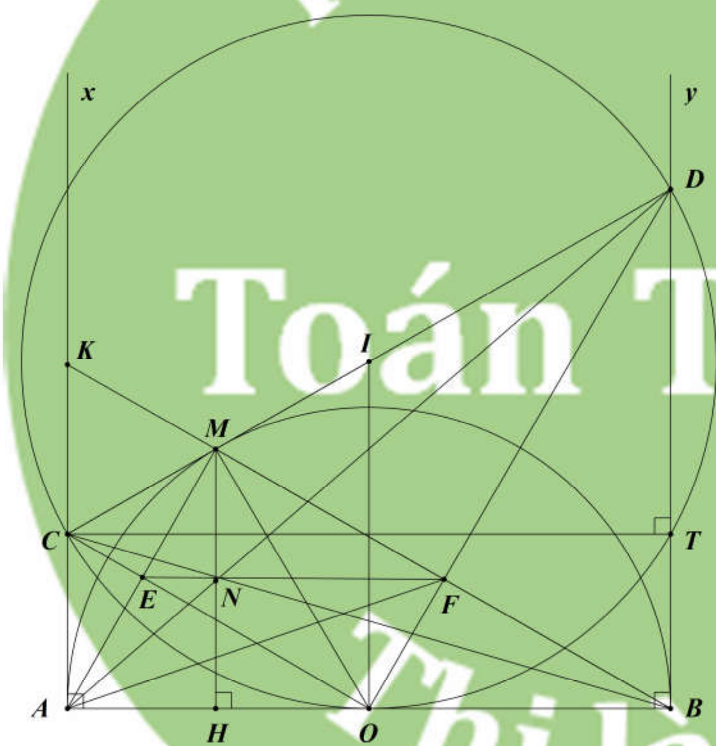
7) Tia BM cắt Ax tại K. CMR: C là trung điểm AK.

8) Kẻ đường cao MH của tam giác AMB. MH cắt BC tại N. CMR: N là trung điểm MH và A, N, D thẳng hàng.

9) Tìm quỹ tích giao điểm của AF và OM, giao điểm của AF và OE.

10) Xác định vị trí điểm M để chu vi tam giác MOH lớn nhất.

Hướng dẫn giải



1) Xét (O) có:

- CM, CA là hai tiếp tuyến cắt nhau tại C (M, A là tiếp điểm).

$\Rightarrow CM = CA$ và OC là phân giác của $\widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

- DM, DB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D (M, B là tiếp điểm).

$\Rightarrow CD$ là phân giác của $\widehat{MOB}$ và $DM = DB$ (tính chất).

Ta có: $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BOM}$ là hai góc kề bù.

Mà OC, OD lần lượt là phân giác của $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BOM}$.

$\Rightarrow OC \perp OD$.
$\Rightarrow \Delta COD$ vuông tại O.
Xét ΔCOD vuông tại O có: $OM \perp OD$ (vì CD là tiếp tuyến của (O) tại M).
$\Rightarrow OM^2 = CM.MD$ (hệ thức lượng)
$\Rightarrow R^2 = AC.BD$
Vậy $AC.BD$ không phụ thuộc vào vị trí của M.
2) Ta có: $\begin{cases} CM = CA(cmt) \\ OM = OA = R \end{cases}$
$\Rightarrow C$ và O cách đều hai đầu mút OM
$\Rightarrow CO$ là đường trung trực của OM
$\Rightarrow CO \perp AM$ tại E và E là trung điểm của AM.
Chứng minh tương tự: DO là đường trung trực của MB.
$\Rightarrow OD \perp MB$ tại F và F là trung điểm của BM.
Xét tứ giác $MEOF$ có:
$\widehat{EOF} = 90^0$ (vì $\widehat{COD} = 90^0$)
$\widehat{OEM} = \widehat{OFM} = 90^0\,(cmt)$
$\Rightarrow MEOF$ là hình chữ nhật.
3) Xét ΔMAB có: E, F lần lượt là trung điểm của MA, MB (cmt).
$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của ΔMAB (định nghĩa).
$\Rightarrow \begin{cases} EF // AB \\ EF = \dfrac{AB}{2} = AO \end{cases}$ (tính chất)
Xét tứ giác $AEFB$ có $EF // AB$ (cmt) $\Rightarrow AEFB$ là hình thang.
Xét tứ giác $AEFO$ có $EF = AO$; $EF // AB$ hay $EF // AO$.
$\Rightarrow AEFO$ là hình bình hành.
4) Ta có: $EC.EO = EM^2$ (hệ thức lượng)
$FO.FD = MF^2 = OE^2$
Mà $EM^2 + OE^2 = OM^2 = R^2$ (định lý Pytago).
$\Rightarrow EC.EO + FO.FD = R^2$.
5) Vì ΔCOD vuông tại O, gọi I là trung điểm CD.
$\Rightarrow \left(I; \dfrac{CD}{2}\right)$ là đường tròn ngoại tiếp ΔCOD.
Xét hình thang $ABDC$ ($AC // BD$ vì cùng vuông góc với AB) có:
O là trung điểm của AB.
I là trung điểm của CD.
$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của hình thang.
$\Rightarrow IO // AC$ (tính chất)
Mà $AC \perp AB$ (gt) $\Rightarrow IO \perp AB$.
$\Rightarrow AB$ là tiếp tuyến của $\left(I; \dfrac{CD}{2}\right)$.

6) $S_{ABDC}=\dfrac{(AC+BD).AB}{2}=\dfrac{(MC+MD).2R}{2}=CD.R$

$P_{ABDC}=AC+BD+CD+AB=MC+MD+CD+AB=2CD+2R=2(CD+R)$

Do đó S_{ABDC} và P_{ABDC} đạt GTNN khi CD ngắn nhất.
Kẻ $CT\perp By\ \Rightarrow CTBA$ là hình chữ nhật.
Mà $CD\ge CT$ (đường vuông góc nhỏ hơn đường xiên).
Dấu "=" xảy ra khi $CD\equiv CT$.
Mà $CT//AB$ (cùng vuông góc với By).
$\Rightarrow CD//AB.$

Lại có: $CM\perp CD\Rightarrow OM\perp AB\Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$.

7) Vì $KC//BD$ (hay $Ax//By$) $\Rightarrow \dfrac{KC}{BD}=\dfrac{MC}{MD}$ (hệ quả định lý Ta-lét)

Mà $MC=CA$; $MD=BD$ nên $\dfrac{KC}{BD}=\dfrac{AC}{BD}\ \Rightarrow KC=AC$.

$\Rightarrow C$ là trung điểm của AK.

8) Xét ΔBKC có $M\in KB$, $N\in BC$ và $MN//KC$ (Vì cùng vuông góc với AB).

$\Rightarrow \dfrac{MN}{KC}=\dfrac{BN}{BC}$ (hệ quả định lý Ta-lét) (1)

Xét ΔBAC có $H\in AB$, $N\in BC$ và $NH//AC$ (Vì cùng vuông góc với AB).

$\Rightarrow \dfrac{NH}{AC}=\dfrac{BN}{BC}$ (hệ quả định lý Ta-lét) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{MN}{KC}=\dfrac{NH}{AC}$.

Mà $KC=AC\Rightarrow MN=NH$.
$\Rightarrow N$ là trung điểm của MH.
* Chứng minh A, N, D thẳng hàng

Xét ΔCBD có: $MN\parallel BD\ \Rightarrow \dfrac{CN}{NB}=\dfrac{CM}{MD}$ (định lí Talet)

Mà $CM=CA, MD=BD$ nên $\dfrac{CN}{NB}=\dfrac{CA}{BD}$

Xét ΔACN và ΔDBN có: $\dfrac{CN}{NB}=\dfrac{CA}{BD}$, $\widehat{ACN}=\widehat{DBN}$ (2 góc so le trong)

$\Rightarrow \Delta ACN\backsim\Delta DBN$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{ANC}=\widehat{DNB}$ (2 góc tương ứng)

Mà C,N,B thẳng hàng.
Suy ra A, N, D thẳng hàng.

9) Tìm quỹ tích giao điểm của AF và OM; giao điểm AF với OE.

Gọi $AF\cap OM=\{S\}$

Xét tam giác MAB có MO, AF là hai đường trung tuyến cắt nhau tại S.
$\Rightarrow S$ là trọng tâm ΔMAB

$\Rightarrow OS = \frac{1}{3}OM = \frac{1}{3}R$

$\Rightarrow S \in \left(O; \frac{1}{3}R\right)$

$\Rightarrow S$ nằm trên nửa đường tròn tâm O, bán kính $\frac{R}{3}$, $S \notin AB$

Gọi $\{Q\} = AF \cap OE$

Vì AEFO là hình bình hành

$\Rightarrow Q$ là trung điểm OE.

Gọi P là trung điểm AO.

$\Rightarrow PQ$ là đường trung bình ΔAOE.

$\Rightarrow PQ \parallel AE$ mà $AE \perp EO$

$\Rightarrow PQ \perp EO$

$\Rightarrow \widehat{PQO} = 90^0$

$\Rightarrow Q$ thuộc nửa đường tròn đường kính PO, $Q \notin AB$.

10) $P_{\Delta MOH} = MH + OH + OM = MH + OH + R$

Ta có: $MH^2 + OH^2 \geq 2.MH.OH$

$\Leftrightarrow 2\left(MH^2 + OH^2\right) \geq MH^2 + 2.MH.OH + OH^2$

$\Leftrightarrow 2.OM^2 \geq \left(MH + OH\right)^2$

$\Leftrightarrow 2.R^2 \geq \left(MH + OH\right)^2$

$\Leftrightarrow MH + OH \leq \sqrt{2}.R$

Do đó $P_{\Delta MOH} \leq \sqrt{2}R + R$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MH = OH$.

Mà ΔMHO vuông tại H.

$\Rightarrow \Delta MHO$ vuông cân tại H.

$\Rightarrow \widehat{AOM} = 45^0$.

Vậy $M \in (O)$ sao cho $\widehat{AOM} = 45^0$ thì chu vi ΔMOH lớn nhất bằng $\left(\sqrt{2}+1\right)R$.

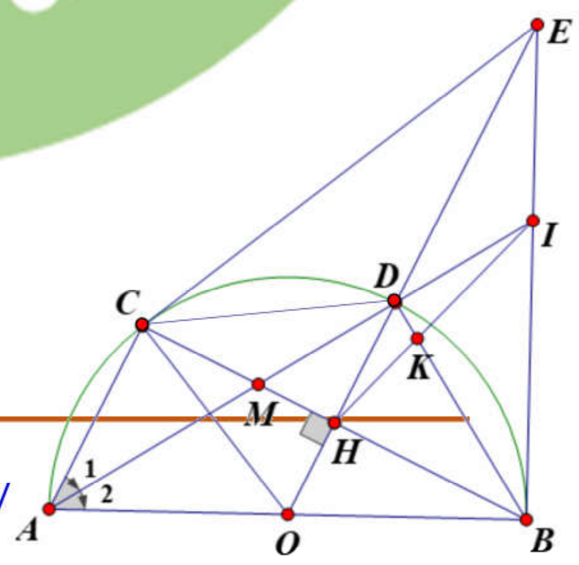
Bài 3: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB.C thuộc (O). Kẻ OH vuông góc với BC. OH cắt tiếp tuyến tại B ở E. Gọi D là giao điểm của OE với (O). M là giao điểm của AD với BC

d) Chứng minh $\widehat{ACB} = \widehat{ABE}$ và H là trung điểm của BC

e) Chứng minh AD là tia phân giác của $\widehat{CAB}$

f) EC là tiếp tuyến của (O)

g) AD cắt BE tại I. IH cắt BD tại K. Chứng minh KH.BI = IK.BH



Hướng dẫn giải

a) Xét ΔABC có $OC = OB = OA = \dfrac{AB}{2} = R$

=> ΔABC vuông tại C (t/c đường trung tuyến trong tam giác)

=> $\widehat{ACB} = 90^0$ (1)

mà BE là tiếp tuyến của (O) tại B=> $\widehat{ABE} = 90^0$ (2)

từ (1) và (2) ta có $\widehat{ACB} = \widehat{ABE} = (90^0)$

Ta có $OH \perp BC$ tại H mà=> H là trung điểm của BC(t/c2 về quan hệ giữa đường kính và dây)

b) ta có $\begin{matrix} AC \perp BC \\ OD \perp BC (c/m\,tren) \end{matrix}$

=> $AC // OD$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{ADO}$ (so le trong) (3)

Mà ΔAOD cân tại O vì OA=OD=R

=> $\widehat{A_2} = \widehat{ADO}$ (4)

Tứ 3 và 4 $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ => AD là tia phân giác của $\widehat{CAB}$

c) Xét tam giác ΔEOC và ΔEOB

có OE chung

OB=OC

$\widehat{COE} = \widehat{BOE}$ (ΔBOC cân tại O)

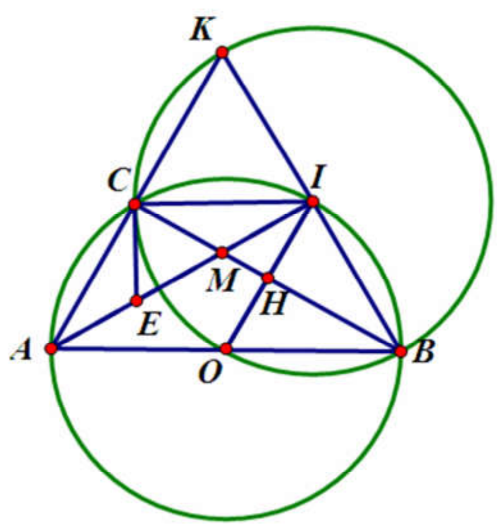
=> $\Delta EOC = \Delta EOB$ (c-g-c)
=> $\widehat{OCE} = \widehat{OBE} = 90^0$
=> $OC \perp CE$ tại C
=>EC là tiếp tuyến của (O)
h) Chứng minh KH.BI=IK.BH
Ta có ΔADB vuông tại D (định lý đường trung tuyến trong tam giác)
=> $\widehat{MDB} = 90^0$ ta lại có $\widehat{MCA} = 90^0$ => $\widehat{A_1} = \widehat{DBM}$ hay $\widehat{A_1} = \widehat{KBH}$
Mặt khác $\widehat{A_2} = \widehat{KBI}$ (cùng phụ với $\widehat{DBA}$)
Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (c/m câu c) => $\widehat{KBI} = \widehat{KBH}$ => BK là tia phân giác trong ΔHIB

$=> \frac{HK}{HB} = \frac{KI}{BI}$ => KH.BI=IK.BH (dpcm)

Bài 4: Cho (O), đường kính AB, C thuộc (O), Kẻ bán kính OI vuông góc với BC tại H, gọi M là giao điểm của BC và AI. Vẽ (I) bán kính IB, AC cắt (I) tại K.

e) Chứng minh: H là trung điểm của BC.
f) AI là phân giác góc CAB.
g) B, I, K thẳng hàng.
h) Gọi E là trung điểm của AM. Chứng minh CE là tiếp tuyến của (I).

Hướng dẫn giải



a) Xét (O) có:
OI là một phần đường kính
BC là dây cung
OI vuông góc BC tại H
⇨ H là trung điểm của BC (định lý)
b) Xét tam giác ABC có:

O là trung điểm của AB
H là trung điểm của BC(cmt)

⇨ OH là đường trung bình của tam giác ABC.
⇨ OH //AC => OI//AC => góc OIA = góc IAC

Mà góc OIA = góc OAI (vì tam giác OAI có OA = OI nên cân tại O).

➪ Góc IAC = góc IAO => AI là phân giác của góc ACB.
c) Ta có: OI //AC => OI //AK
Mà OI vuông góc với BC nên AK vuông góc với BC tại C
➪ Tam giác KBC vuông tại C.

Xét tam giác IBC có: IH là đường cao

IH đồng thời là đường trung tuyến

➪ Tam giác IBC cân tại I => IB = IC => C thuộc (I)

Xét (I) có: Tam giác KBC vuông tại C nội tiếp (I) (vì K, B, C thuộc (I)).

➪ BK là đường kính của (I)
➪ B, I, K thẳng hàng.
d)
Xét tam giác MCA vuông tại A có: CE là đường trung tuyến
EC = EM = EA (định lý)
Xét tam giác ECA có: EC = EA => Tam giác EAC cân tại C
=> góc ECA = góc EAC
Xét tam giác ICK có: IC = IK nên tam giác ICK cân tại I
➪ Góc ICK = góc IKC
Xét tam giác AKB có:
AI là phân giác góc KAB
AI là đường trung tuyến
➪ Tam giác AKB cân tại A.
➪ Đường trung tuyến AI đồng thời là đường cao
➪ AI vuông góc KB.
➪ Góc AIK = 90^0 => góc IAK + góc IKA = 90^0

Mà góc IAK = góc ECA, góc IKA = góc ICK (cmt)

➪ Góc ECA + góc ICK = 90^0.
➪ Góc ICE = 90^0 => IC vuông góc CE tại C

Xét (I) có:

C thuộc (I)

CE vuông góc với CI tại C

➪ CE là tiếp tuyến của (I).

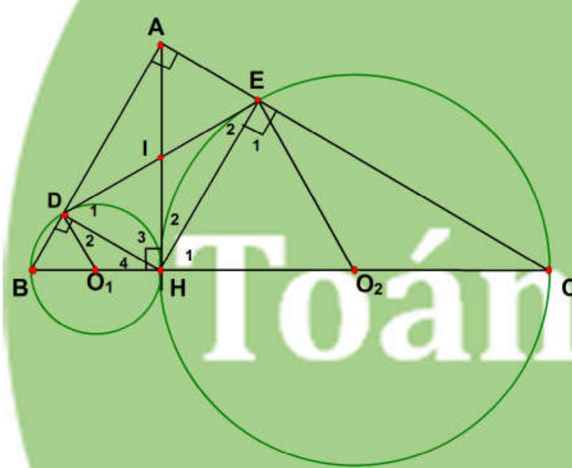
Bài 5: Cho ΔABC vuông ở A , đường cao AH $(AB > AC)$. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính BH và đường tròn (O_2) đường kính HC .

a) Xác định vị trí tương đối của (O_1) và (O_2)

b) AB cắt (O_1) tại D, AC cắt (O_2) tại E. Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn .

c) Giả sử $AH = 2\sqrt{2}cm; AB = 3cm$. Tính các cạnh của ΔABC .

Hướng dẫn giải



a) Gọi r là bán kính đường tròn $(O_1) \Rightarrow r = \dfrac{BH}{2}$

Gọi R là bán kính đường tròn $(O_2) \Rightarrow R = \dfrac{CH}{2}$

Ta có: $O_1O_2 = O_1H + O_2H = \dfrac{BH}{2} + \dfrac{CH}{2} = r + R$

$\Rightarrow$ Đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài.

b) Xét ΔBDH nội tiếp đường tròn (O_1) có BH là đường kính $\Rightarrow \Delta DBH$ vuông tại D

Xét ΔCEH nội tiếp đường tròn (O_2) có CH là đường kính $\Rightarrow \Delta CEH$ vuông tại E.

Xét tứ giác ADHE có: $\hat{A} = \hat{D} = \hat{E} = 90^0 \Rightarrow ADHE$ là hình chữ nhật

Gọi I là giao điểm của AH và DE $\Rightarrow IA = IH = IE = ID$

$\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{H}_3 \quad (1)$

$\Rightarrow \hat{E}_2 = \hat{H}_2 \quad (2)$

Xét ΔO_1DH có $O_1D = O_1H = r \Rightarrow \Delta O_1DH$ cân tại O_1

$\Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{H}_4 \quad (3)$

Từ (1), (3) $\Rightarrow \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = \hat{H}_3 + \hat{H}_4 \Rightarrow \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 90^0 \Rightarrow E\hat{D}O_1 = 90^0$

$\Rightarrow DE$ là tiếp tuyến của đường tròn (O_1).

Xét ΔO_2HE có $O_2E = O_2H = R \Rightarrow \Delta O_2HE$ cân tại O_2

$\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{H}_1 \quad (4)$

Từ (2), (4) $\Rightarrow \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \Rightarrow \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 90^0 \Rightarrow D\hat{E}O_2 = 90^0$

$\Rightarrow DE$ là tiếp tuyến của đường tròn (O_2).

Vậy DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

c) Xét ΔABC vuông tại A có AH là đường cao

$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow \frac{1}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{AC^2}$

$\Rightarrow AC^2 = 72$

$\Rightarrow AC = 6\sqrt{2}(cm)$

Xét ΔABC vuông tại A có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lí Py-ta-go)

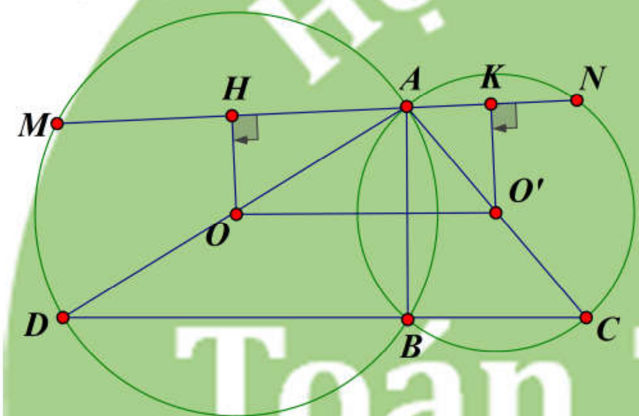
$\Rightarrow BC^2 = 3^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 81$

$\Rightarrow BC = 9cm$

Bài 6: Cho (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại A và B. Vẽ đường kính AOD và AO'C của hai đường tròn.

d) Chứng minh: C, B. O thẳng hàng và so sánh OO' với CD.
e) Qua A vẽ một cát tuyến cắt (O) và (O') lần lượt ở M và N. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của O và O' lên MN. Chứng minh: MN = 2HK.
f) Xác định vị trí của cát tuyến để MN lớn nhất?

Hướng dẫn giải



a)Ta có: $A, B, D \in (O) \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại B => $\widehat{ABD} = 90^0$
Ta có: $A, B, C \in (O) \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B => $\widehat{ABC} = 90^0$
Nên $\widehat{ABD} + \widehat{ABC} = 180^0$ => C, B. O thẳng hàng.
Xét ΔACD có O là trung điểm AD (gt) .
O' là trung điểm AC (gt)
=> OO' là đường trung bình của tam giác ACD (Đ/n)
=> $OO' = \dfrac{CD}{2}$ (tính chất đường trung bình)

b) Xét (O) có $OH \perp AM$ => H là trung điểm của AM (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)

$$=> AH = \frac{AM}{2} (1)$$

Xét (O') có $OK \perp AN$ => K là trung điểm của AN (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)

$$=> AK = \frac{AN}{2} \ (2)$$

Mà $AK + AH = HK; MN = AN + AM$ (3)

Từ (1;2;3) => MN = 2HK.

c) MN lớn nhất khi và chỉ khi HK lớn nhất (MN = 2 HK) .

Ta có $OH \perp AM$; $OK \perp AN$ nên OHKO' là hình thanh vuông.

Mà OO' không đổi nên HK lớn nhất = OO' khi đó OHKO' là hình chữ nhật => MN// OO'

Vậy MN lớn nhất = 2OO' khi cát tuyến MN đi qua A và song song OO'.

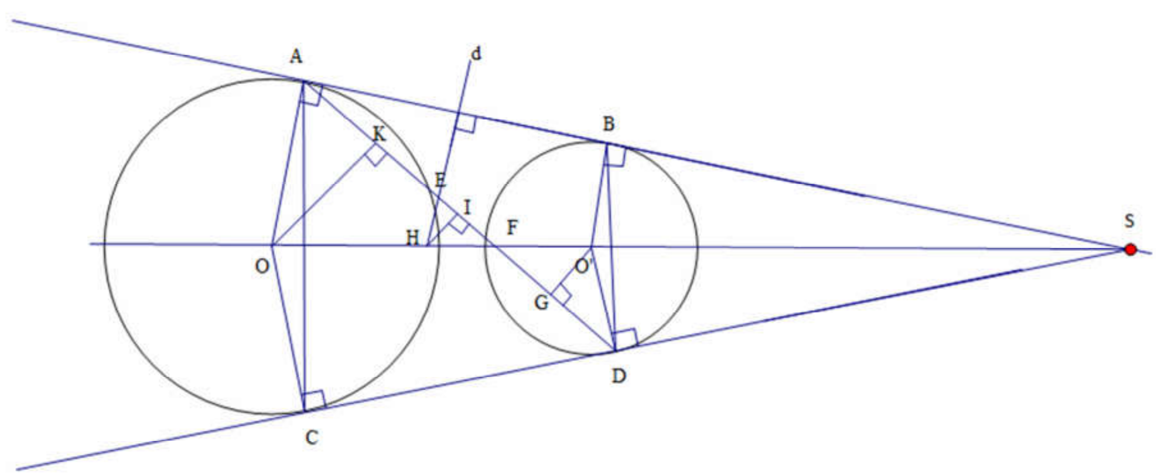
Bài 7: Cho hai đường tròn tâm $(O;R)$ và $(O';R')$ nằm ngoài nhau $(R > R')$. Vẽ các tiếp tuyến chung ngoài đường $AB;CD$ của hai đường tròn $(C;A \in (O);D;B \in (O'))$

a/ CMR: Các đường thẳng $AB;CD;$OO' đồng quy.

b/Xác đinh dạng của tứ giác $ABDC$

c/ AD cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt tại E và F CMR: AE = DF

Hướng dẫn giải



a/ Gọi $AB \cap CD = \{S\}$

ta có: $BS;DS$ là hai tiếp tuyến với tiếp điểm $B;D$ của đường tròn (O') nên $BS = DS$ (t/c)

$AS;CS$ là hai tiếp tuyến với tiếp điểm $A;C$ của đường tròn (O) nên $AS = CS$ (t/c)

Mặt khác có: $O'B = O'D = R'$ mà $BS = DS$ nên $O'S$ nằm trên đường trung trực của BD (1)

Mặt khác có: $OA = OC = R$ mà $AS = CS$ nên $O'S$ nằm trên đường trung trực của AC (2)

Mà $O'O$ nằm trên đường trung trực của $AC; BD$ (t/c) (3)

Từ (1);(2);(3) ta có $O'S; OS; O'O$ cùng nằm trên 1 đường thẳng.

Hay Các đường thẳng $AB; CD$; OO' đồng quy.

<u>Cách khác:</u>

Giả sử AB cắt CD tại S

Vì tiếp tuyến AB và CD của (O) cắt nhau tại S với A, C là các tiếp điểm

nên SO là phân giác của góc ASC (1)

Vì tiếp tuyến AB và CD của (O') cắt nhau tại S

B, D là tiếp điểm nên SO' là phân giác của góc BSD

Lại có S, A, B thẳng hàng và S, C, D thẳng hàng nên SO' cũng là phân giác của góc ASC (2)

Từ (1) và (2) suy ra S, O, O' thẳng hàng.

Vậy AB, CD và OO' đồng quy tại điểm S. (đpcm)

b) $O'O$ nằm trên đường trung trực của $AC; BD$

Nên $\left.\begin{matrix} O'O \perp AC \\ O'O \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC // BD$

Nên tứ giác $ABDC$ là hình thang (dhnb)

Mặt khác có: $\begin{matrix} \angle OAC = \angle OCA \\ \Rightarrow \angle BAC = \angle DCA \end{matrix}$

Vậy tứ giác $ABDC$ là hình thang cân.

c) Vẽ đường trung trực d của đoạn AB, d cắt $d \cap O'O = \{H\}$ Khi đó ta có: $HO = HO'$

Ta có: B và D đối xứng nhau qua $O'O$ nên $HB = HD; HA = HC$

Kẻ $HI \perp AD$ tại I ta có: $IA = IC$ (do ΔHAC cân tại H)

Kẻ $OK \perp AD$ tại K ;$O'G \perp AD$ tại $G \Rightarrow OK//HI//O'G$

Xét hình thang $ABO'O$ vì $OA//O'B(\perp AB)$

Ta có: $d//OA//O'B$ và d đi qua trung điểm của AB nên H là trung điểm của $O'O$

Xét hình thang $OKO'G$ có: $OK//IH//O'G$ và H là trung điểm của $O'O$

Nên I là trung điểm của $KG \Rightarrow IK = IG \Rightarrow AI - KH = IC - IG$ hay $AK = GD \Rightarrow 2AK = 2GD \Rightarrow AE = DF$

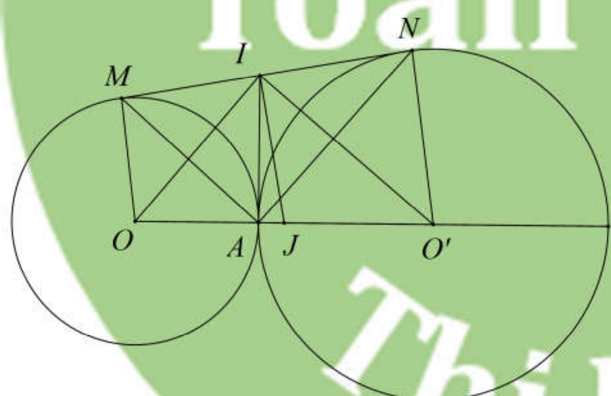
Bài 8. Cho hai đường tròn (O; R), (O', R') tiếp xúc ngoài tại A. Tiếp tuyến chung ngoài MN cắt tiếp tuyến chung trong tại I.

a) Chứng minh các tam giác MAN và OIO' vuông

b) Xác định vị trí tương đối của MN với đường tròn đường kính OO'

c) Tính $S_{IOO'}$ biết R = 20 cm, R' = 15 cm

Hướng dẫn giải



a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có IA = IM nên ΔIMA cân tại I

$$\Rightarrow \widehat{IAM} = \widehat{IMA} = \frac{180 - \widehat{MIA}}{2}$$

Tương tự ta có $\widehat{IAN} = \dfrac{180 - \widehat{NIA}}{2}$

$\widehat{AIN}+\widehat{AIM}=180^0$ (kề bù)

$$\widehat{MAN}=\widehat{IAM}+\widehat{IAN}=\frac{180-\widehat{MIA}}{2}+\frac{180-\widehat{NIA}}{2}=\frac{360-\left(\widehat{MIA}+\widehat{NIA}\right)}{2}=\frac{180}{2}=90^0$$

* Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có tia IO là tia phân giác của $\widehat{MIA}$ nên IO là tia phân giác của $\widehat{MIA}$ $\Rightarrow \widehat{AIO}=\frac{1}{2}\widehat{MIA}$

Tương tự ta có $\widehat{AIO'}=\frac{1}{2}\widehat{NIA}$

$\widehat{MIA}+\widehat{NIA}=180^0$ (kề bù)

$$\widehat{OIO'}=\widehat{AIO}+\widehat{AIO'}=\frac{1}{2}\widehat{MIA}+\frac{1}{2}\widehat{NIA}=\frac{1}{2}.180^0=90^0$$

b) Theo tính chất tiếp tuyến thì $OM\perp MN$ và $ON\perp MN$ $\Rightarrow$ OM // O'N

Do đó tứ giác OMNO' là hình thang

Gọi J là trung điểm của OO'.

$\Delta OIO'$ vuông, theo tính chất trung tuyến tam giác vuông thì IJ = JO nên I thuộc đường tròn đường kính OO' (1)

Ta có IM = IN (cùng bằng IA theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và AO = AO' nên AI là đường trung bình của hình thang OMNO'

$\Rightarrow$ IJ// OM mà OM $\perp$ MN nên IJ $\perp$ MN (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'

c) $\Delta IOO'$ vuông tại I có IA là đường cao nên IA^2 = OA.O'A = 20.15 = 300

$\Rightarrow$ IA = $10\sqrt{3}$ cm

$$S_{IOO'}=\frac{1}{2}IA.OO'=\frac{1}{2}IA(OA+O'A)=\frac{1}{2}.10\sqrt{3}(20+15)=175\sqrt{5}\ \text{cm}^2$$

Bài 9. Cho đoạn thẳng AB và điểm C nằm giữa A và B vẽ một phía của AB các nửa đường tròn đường kính AB và AC, CB. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn lớn tại D, DA, DB cắt nửa đường tròn đường kính AC, CB tại M, N.

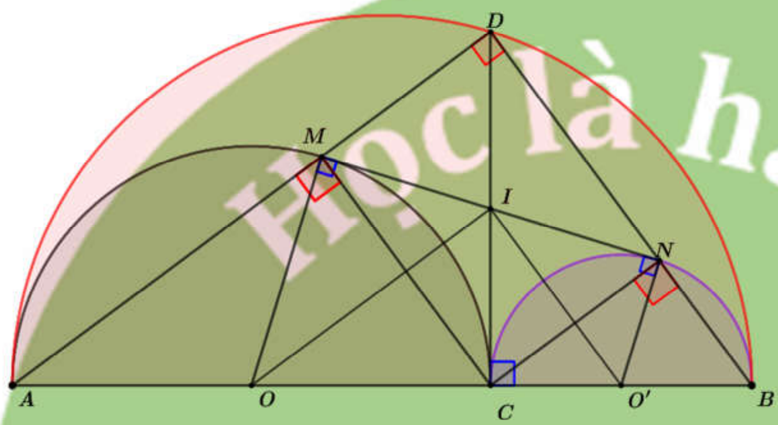
a) Tứ giác $DMCN$ là hình gì?

b) Chứng minh rằng $DM.DA = DN.DB$.

c) MN là tiếp tuyến chung của các nữa đường tròn đường kính AC, CB.

d) Xác định vị trí điểm C để MN có độ dài lớn nhất.

Hướng dẫn giải



Lời giải

a) Xét tam giác AMC nội tiếp đường tròn đường kính AC nên ΔAMC vuông tại M.

Xét tam giác CNB nội tiếp đường tròn đường kính BC nên ΔCMB vuông tại N.

Xét tam giác ABD nội tiếp đường tròn đường kính AB nên ΔABD vuông tại D.

Xét tứ giác $DMCN$, có

$\widehat{D} = \widehat{M} = \widehat{N} = 90°$

Suy ra $DMCN$ là hình chữ nhật.

b) Xét tam giác DCA vuông tại C, có CM là đường cao

suy ra $DM.DA = DC^2$ $\quad(1)$

Xét tam giác DCB vuông tại C có CN là đường cao nên

Suy ra $DN.DB = DC^2$ $\quad(2)$

Từ (1) và (2), suy ra $DM.DA = DN.DB$

c) Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AC và BC.

Gọi I là giao điểm của DC và MN.

Suy ra $IM = IC = IN$ ($DMCN$ là hình chữ nhật)

Xét tam giác MIO và tam giác ICO, ta có

$IM = IC$ (cmt)

IO là cạnh chung

$OM = OC$ (bán kính nửa đường tròn tâm O)

Suy ra $\Delta MIO = \Delta CIO$ (c-c-c)

Suy ra $\widehat{IMO} = \widehat{ICO} = 90°$

Suy ra $MN \perp OM$ tại M

Suy ra MN là tiếp tuyến của đường tròn tâm O.

Xét tam giác NIO' và tam giác ICO', ta có

$IN = IC$ (cmt)

IO' là cạnh chung

$O'M = O'C$ (bán kính nửa đường tròn tâm O)

Suy ra $\Delta NIO' = \Delta CIO'$ (c-c-c)

Suy ra $\widehat{INO'} = \widehat{ICO'} = 90°$

Suy ra $MN \perp O'N$ tại N

Suy ra MN là tiếp tuyến của đường tròn tâm (O').

Vậy MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

d) ta có $MN = CD$ ($DMCN$ là hình chữ nhật)

suy ra MN lớn nhất khi v à chỉ khi CD lớn nhất

mà CD lớn nhất khi CD đi qua tâm của đường tròn đường kính AB(quan hệ giữa dây và đk)

Khi đó C là trung điểm AB.

Vậy khi C là trung điểm của AB thì MN lớn nhất

BẤT ĐẲNG THỨC GTLN – GTNN

Bài 4. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $A=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}$.

Điều kiện $-1\le x\le 4$

Ta có $P>0$ và

$P^2=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}\right)^2=5+2\sqrt{(x+1)(4-x)}\le 5+(x+1)+(4-x)=10$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x+1=4-x\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ (TM)

Mặt khác $P^2=5+2\sqrt{(x+1)(4-x)}\ge 5\left(Do\ \sqrt{(x+1)(4-x)}\ge 0\right)$ mà $P>0\Rightarrow P\ge\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=4\end{array}\right.$ (TM)

Vậy $P_{max}=\sqrt{10}$ khi $x=\frac{3}{2}$

$P_{\min}=\sqrt{5}$ khi $x\in\{-1;4\}$

Bài 5. (2011): Với $x>0$, tìm GTNN của biểu thức : $M=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+2011$.

$M=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+2011=(4x^2-4x+1)+\left(x-1+\frac{1}{4x}\right)+2011$

$=(2x-1)^2+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2+2011\ge 2011.$

Min M $=2011$ khi $x=\frac{1}{2}$.

Bài 6. (2012): Với x, y >0 và $x\ge 2y$, tìm GTNN của biểu thức : $M=\frac{x^2+y^2}{xy}$.

Với $a\ge 0, b\ge 0$ ta có $a+b\ge 2\sqrt{ab}$

$$M=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{3x}{4y}+\left(\frac{x}{4y}+\frac{y}{x}\right).$$

Ta có $\left(\frac{x}{4y}+\frac{y}{x}\right)\ge 2\sqrt{\frac{x}{4y}.\frac{y}{x}}=1$

Mặt khác $x\ge 2y\Rightarrow \frac{3x}{4y}\ge\frac{3}{2}$.

Do đó $M\ge\frac{5}{2}$. Khi $x=2y$ thì $M=\frac{5}{2}$.

Vậy GTNN của M là $\frac{5}{2}$.

Bài 7: Với $a,b,c>0$ và $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$ .Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3$

Ta có a+ b + c + ab + bc + ca = 6abc (1)

mà a,b,c là các số dương nên, chia 2 vế của (1) cho abc ta được:

$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=6$ (2)

Đặt $\frac{1}{a}=x;\frac{1}{b}=y;\frac{1}{c}=z$ thì (2) trở thành: x+ y+ z + xy + yz + xz = 6

và ta cần chứng minh Bđt: $x^2+y^2+z^2\ge 3$

Vì x,y,z không âm, áp dụng bất đẳng thức cô si ta có:

$x^2+1\ge 2x$

$y^2+1\ge 2x$

$z^2+1\ge 2z$

Cộng 3 Bđt trên ta được: $x^2+y^2+z^2+3\ge 2(x+y+z)$ (*)

Mặt khác theo bất đẳng thức cô si ta có:

$x^2+y^2\ge 2xy$

$y^2+z^2\ge 2yz$

$x^2+z^2\ge 2xz$

Cũng cộng 3 bđt trên ta được: $2(x^2+y^2+z^2)\ge 2(xy+yz+zx)$ (**)

Lấy (*) + (**) $\Rightarrow 3(x^2+y^2+z^2)+3\ge 2(x+y+z+xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow 3(x^2+y^2+z^2)\ge 2.6-3$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge 3$ (đpcm)

Bài 8: Với $a,b,c>0$ và $a+b+c=2$. Tìm GTLN của $Q=\sqrt{2a+bc}+\sqrt{2b+ac}+\sqrt{2c+ab}$

Ta có:

$$\sqrt{2a+bc}=\sqrt{(a+b+c)a+bc}=\sqrt{a^2+ab+ac+bc}=\sqrt{(a+b)(a+c)}$$

Mà a,b,c >0, áp dụng bất đẳng thức cô sit a được:

$$\sqrt{(a+b)(a+c)}\le\frac{(a+b)+(a+c)}{2}=\frac{2a+b+c}{2}\ (1)$$

Tương tự ta có:

$$\sqrt{2b+ca}=\sqrt{(b+a)(b+c)}\le\frac{2b+a+c}{2}\ (2)$$

$$\sqrt{2c+ab}=\sqrt{(c+a)(c+b)}\le\frac{2c+a+b}{2}\ (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2) và (3) ta được

$$Q\le\frac{2a+b+c}{2}+\frac{2b+a+c}{2}+\frac{2c+a+b}{2}=\frac{4(a+b+c)}{2}=4$$

Vậy $Q_{max}=4 \Leftrightarrow a=b=c=\frac{3}{2}$

Bài 9: Với 3 số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2=4$

Tìm giá trị lớn nhất của $M=\frac{ab}{a+b+2}$

Ta có $a^2+b^2=4\Leftrightarrow(a+b)^2=4+2ab\Leftrightarrow(a+b)^2-4=2ab\Leftrightarrow(a+b-2)(a+b+2)=2ab$

$$\Rightarrow 2M=\frac{2ab}{a+b+2}=\frac{(a+b-2)(a+b+2)}{a+b+2}=a+b-2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia copki cho 2 số a và b ta có:

$$a+b=1.a+1.b\le\sqrt{(1^2+1^2)(a^2+b^2)}=\sqrt{2.4}=2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2M=a+b-2\le 2\sqrt{2}-2$$

$$\Rightarrow M\le\sqrt{2}-1$$

Vậy $M_{max} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow a = b$

Bài 10. Cho các số a, b, c thỏa mãn $2\left(b^2 + bc + c^2\right) = 3\left(3 - a^2\right)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a + b + c$

Ta có $2\left(b^2 + bc + c^2\right) = 3\left(3 - a^2\right) \Leftrightarrow 9 = 2b^2 + 2bc + 2c^2 + 3a^2$

Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab; a^2 + c^2 \geq 2ac \Rightarrow 2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab + 2ac$

$\Rightarrow 9 = 2b^2 + 2bc + 2c^2 + 3a^2 = \left(2a^2 + b^2 + c^2\right) + \left(b^2 + 2bc + c^2 + a^2\right)$

$\geq (2ac + 2ab) + \left(b^2 + 2bc + c^2 + a^2\right) = (a + b + c)^2$

$\Rightarrow -3 \leq a + b + c \leq 3$

Vậy $T_{max} = 3$ đạt được khi $a = b = c = 1$

Vậy $T_{\min} = -3$ đạt được khi $a = b = c = -1$

Bài 11. Cho hai số thực dương a, b sao cho $a + b = 2$. Chứng minh $a^2 + b^2 \leq \dfrac{2}{(ab)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta được: $2 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 1$

Do đó

$$\left(a^2 + b^2\right).(ab)^2 = \left(a^2 + b^2\right).(2ab).\left(\frac{ab}{2}\right) \leq \left(a^2 + b^2\right).(2ab).\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{\left(a^2 + b^2 + 2ab\right)^2}{4} = \frac{1}{8}(a + b)^4 = 2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \leq \frac{2}{(ab)^2}\ (dpcm)$$