Chủ đề 2

# GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

**GÓC Ở TÂM – GÓC NỘI TIẾP – GÓC TẠO BỞI TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG**
**GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG, BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN**

## B. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

**MỤC LỤC**



Chủ đề bài toán về Góc với đường tròn hệ thống lại kiến thức góc ở tâm, góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung, góc có đỉnh ở bên trong và bên ngoài đường tròn nhằm cung cấp cho các em học sinh một số phương pháp giải toán hình học.

Chủ đề có được sự đóng góp bài tập bởi cô **Nguyễn Thu Huyền** – GV Toán trường THCS Phúc Đồng.

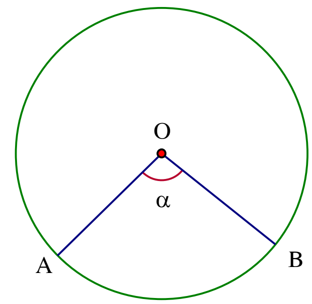
Chân thành cảm ơn cô!

*Chúc các em học sinh học tập tốt!*

## 🗁. GÓC Ở TÂM

### 🗁. Lý thuyết

### A. Kiến thức cần nhớ




1. **Góc ở tâm** là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.

   Ví dụ : $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm.

- Nếu $0^0 < \alpha < 180^\circ$ thì cung nằm bên trong góc được gọi là *cung nhỏ* và cung nằm bên ngoài góc được gọi là *cung lớn.*
- Nếu $\alpha = 180^\circ$ thì mỗi cung là một nửa đường tròn.
- Cung nằm bên trong góc gọi là cung bị chắn

2. **Số đo cung**

- Số đo cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo cung lớn bằng hiệu giữa $360^\circ$ và số đo cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn).
- Số đo của nửa đường tròn bằng $180^\circ$.

Chú ý : "*Cung không*" có số đo bằng $0^0$ và cung *cả đường tròn* có số đo bằng $360^\circ$.

3. **So sánh hai cung**

   Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau :

- Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.
- Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

4. **Khi nào thì sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{AC}$ + sđ $\overset{\frown}{CB}$ ?**

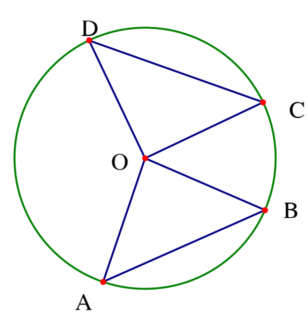
   Nếu điểm C là một điểm nằm trên cung AB thì : sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{AC}$ + sđ $\overset{\frown}{CB}$ .

5. **Định lý 1:** Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau :

   a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.

   b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

   Trong hình bên : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow$ AB = CD.




6. **Định lý 2:** Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau :

   a) Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.

   b) Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

   Trong hình bên : $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow$ AB < CD

## 7. Định lí bổ sung

- Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
- Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thỡ qua trung điểm của dây căng cung ấy ( đảo lại không đúng)
- Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

### *PHƯƠNG PHÁP GIẢI:*

Để tính số đo của góc ở tâm, số đo của cung bị chắn, ta sử dụng các kiến thức sau:

- ✓ Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- ✓ Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa $360^0$ và số đo của cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn).
- ✓ Số đo của nửa đường tròn bằng $180^0$. Cung cả đường tròn có số đo $360^0$.
- ✓ Sử dụng tỉ số lượng giác của một góc nhọn để tính góc.
- ✓ Sử dụng quan hệ đường kính và dây cung.

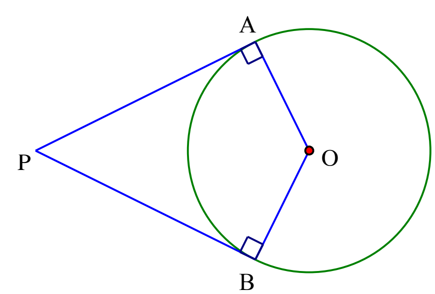
### . Bài tập

**Bài 1:** Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại P. Biết $\widehat{APB} = 55^0$. Tính số đo cung lớn AB.

**Hướng dẫn giải**

**Tìm cách giải.** Tính góc ở tâm trước, rồi tính số đo cung nhỏ AB. Cuối cùng tính số đo cung lớn.

**Trình bày lời giải**




Tứ giác APBO có $\widehat{OAP} = 90^\circ; \widehat{OBP} = 90^\circ$ ( vì PA, PB là tiếp tuyến), $\overline{APB} = 55^0$ nên:

$\widehat{AOB} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 55^0 = 125^\circ$ (tổng các góc trong tứ giác AOBP) suy ra số đo cung nhỏ AB là $125^0$.

Vậy số đo cung lớn AB là: $360^0 - 125^0 = 235^0$ .

**Bài 2:** Cho hai tiếp tuyến tại $A$ và $B$ của đường tròn ($O$) cắt nhau tại $M$, biết $\widehat{AMB}=40^0$.

a) Tính $\widehat{AMO}$ và $\widehat{AOM}$.

*b)* Tính số đo cung $AB$ nhỏ và số đo cung $AB$ lớn.

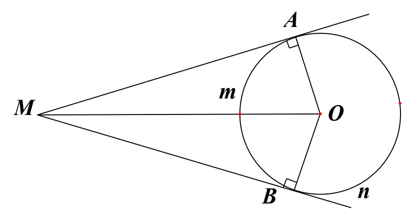
**Hướng dẫn giải**

**Tìm cách giải.** Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau từ đó tính ra góc ở tâm. Cuối cùng tính số đo cung lớn.

**Trình bày lời giải**

a) Do MA và MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M nên

MO là tia phân giác của $\widehat{AMB}$ hay $\widehat{AMO}=\frac{1}{2}\widehat{AMB}=20^0$ .




Tam giác AMO vuông tại A, tính được $\widehat{AOM}=70^0$.

OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$ nên $\widehat{AOB}=2.\widehat{AOM}=140^0$

b) sđ $\overset{\frown}{AmB}$ = sđ $\widehat{AOB}=140^0$

sđ $\overset{\frown}{AnB}=360^0-140^0=220^0$.

**Bài 3:** Trên một đường tròn (O) có cung AB bằng 140° . Gọi A′. B′ lần lượt là điểm đối xứng của A, B qua O; lấy cung $AD$ nhận B′ làm điểm chính giữa; lấy cung CB nhận A′ làm điểm chính giữa. Tính số đo cung nhỏ $CD$ .

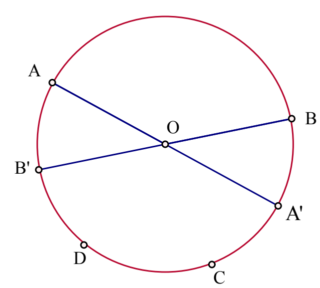
**Hướng dẫn giải**

**Tìm cách giải.** OA và OA′ là hai tia đối nhau nên sđ $\overset{\frown}{AA'}=180^0$. Do AD nhận B′ là điểm chính giữa cung nên sđ $sd\ AB'=sd$ B'D . Tương tự sđ $\overset{\frown}{BA'}=180^0$′ $sd\ A'B=sd$ A'C từ đó tính được số đo cung DC

**Trình bày lời giải**

Ta có $\widehat{AOB'}=\widehat{BOA'}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow sd$ AB' = sd A'B




B′ và C′ lần lượt là điểm chính giữa cung AD và cung BC nên ta có $sd\ \overset{\frown}{AB'}=sd\ \overset{\frown}{B'D}; sd\ \overset{\frown}{A'B}=sd\ \overset{\frown}{A'C}$

sđ $\overset{\frown}{AB}=140^\circ$ mà A′ là điểm đối xứng với A qua O nên

sđ $\overset{\frown}{AOA'}=180^0$

lại có sđ $\overset{\frown}{AB}$ + sđ $\overset{\frown}{BA'}=180^0$ $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BA'}=40^\circ$ = sđ $\overset{\frown}{AB'}=40^\circ$

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AC}=40^\circ$ $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{CB}=80^\circ$

sđ $\overset{\frown}{AB'}=40^\circ$ $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{B'D}=40^\circ$ $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{CD}$=180⁰ - sđ $\overset{\frown}{BC}$ - sđ $\overset{\frown}{B'D}=180^\circ-40^\circ-80^\circ=60^\circ$.

**Bài 4:** Cho đường tròn (*O*; *R*), lấy điểm *M* nằm ngoài (*O*) sao cho $OM = 2R.$ Từ *M* kẻ tiếp tuyến *MA* và *MB* với (*O*) (*A*, *B* là các tiếp điểm).

a) Tính $\widehat{AOM}$ ;

b) Tính $\widehat{AOB}$ và số đo cung *AB* nhỏ;

c) Biết *OM* cắt (*O*) tại *C*. Chứng minh *C* là điểm chính giữa của cung nhỏ *AB*.

**Hướng dẫn giải**

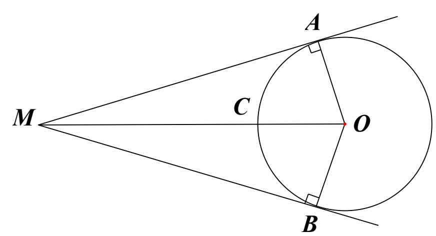
**Tìm cách giải.** Vận dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông khi biết độ dài hai cạnh (theo bán kính) từ đó tính ra được góc ở tâm.

**Trình bày lời giải**

a) Do MA và MB là các tiếp tuyến của (O) nên $MA \perp AO$ và $MB \perp BO$

Xét tam giác vuông MAO có

$\sin \widehat{AMO} = \dfrac{AO}{MO} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AMO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{AOM} = 60^0$;




b) Tương tự **bài 1** tính được $\widehat{AOB} = 120^0$, sđ $\overset{\frown}{AB} = 120^0$;

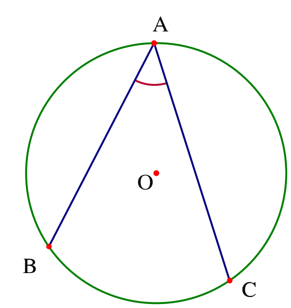
c) $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}.$

## . GÓC NỘI TIẾP - GÓC TẠO BỞI TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

### . Lý thuyết

**1. Định nghĩa .**

- Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.



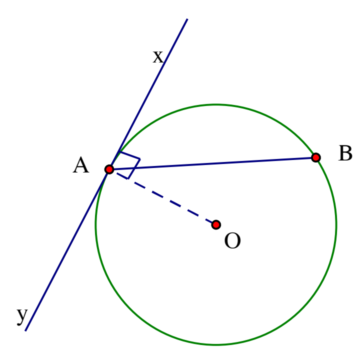

Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

Trong hình bên thì

$\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp

$\overset{\frown}{BC}$ là cung bị chắn

- Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và một cạnh là một tia tiếp tuyến còn cạnh kia chứa dây cung của đường tròn đó.




Theo hình bên thì

$\widehat{BAx}$ và $\widehat{BAy}$ là hai góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.

**2. Định lý .**

- Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.
- Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo góc của cung bị chắn.

**3. Hệ quả 1.** Trong một đường tròn :

a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng $90^0$) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

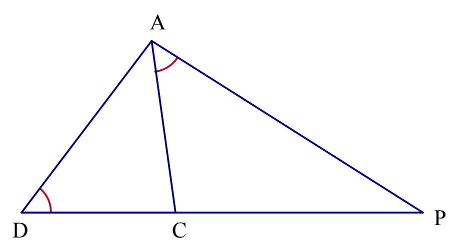
d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

**4. Hệ quả 2.** Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

**5. Thêm dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến.** Cho tam giác ACD. Trên tia đối của tia CD lấy điểm P. Tia AP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD nếu thoả mãn một trong hai điều kiện sau :

a) $\widehat{ADC} = \widehat{PAC}$;

b) $PA^2 = PC.PD$ .



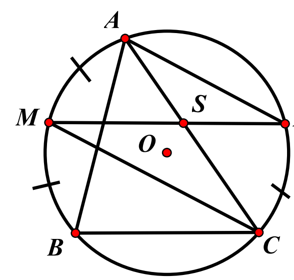

## *PHƯƠNG PHÁP GIẢI* MỘT SỐ DẠNG TOÁN

- ✓ Điểm nằm chính giữa cung chia cung đó thành 2 cung có số đo bằng nhau. Hai góc nội tiếp chắn hai cung đó thì bằng nhau.
- ✓ Để chứng minh đẳng thức hình học, suy nghĩ quy về chứng minh tam giác đồng dạng dựa vào các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc hai cung bằng nhau trong một đường tròn.
- ✓ Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.
- ✓ Góc nội tiếp ( nhỏ hơn bằng $90^0$ ) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung

**. Bài tập.**

**Bài 1:** Cho đường tròn $(O)$ có các dây cung $AB$, $BC$, $CA$. Gọi $M$ là điểm chính giữa của cung nhỏ $AB$. Vẽ dây $MN$ song song với $BC$ và gọi $S$ là giao điểm của $MN$ và $AC$. Chứng minh $SM = SC$ và $SN = SA$.

**Hướng dẫn giải**




**Tìm cách giải.** Vận dụng tính chất trong một đường tròn, góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau từ đó chỉ ra các tam giác ASN và MSC cân tại S

**Trình bày lời giải**

Do M là điểm chính giữa cung nhỏ AB nên sđ $\overset{\frown}{MB} =$ sđ $\overset{\frown}{MA}$

Do MN // BC nên $\widehat{NMC} = \widehat{MCB} \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{MB}$ = sđ $\overset{\frown}{NC}$

Vậy sđ $\overset{\frown}{MB} =$ sđ $\overset{\frown}{MA} =$ sđ $\overset{\frown}{NC}$

$\widehat{NAS} = \widehat{ANS}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

$\widehat{SMC} = \widehat{SCM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

Vậy các tam giác ASN và MSC cân tại C $\Rightarrow SN = SA; SM = SC$

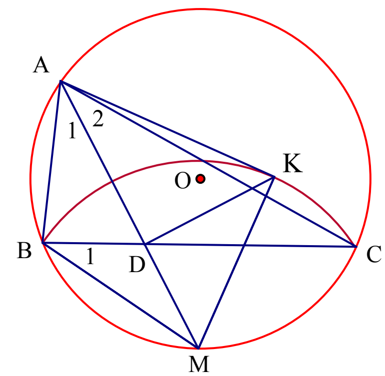
*Nhận xét:* Ở bài toán này học sinh có thể nhớ tới bài toán: Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau từ đó nhìn ra $\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{CN}$

**Bài 2:** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc A cắt BC tại D và cắt đường tròn tại điểm thứ hai là M. Kẻ tiếp tuyến AK với đường tròn (M, MB), K là tiếp điểm. Chứng minh rằng DK vuông góc với AM.

**Hướng dẫn giải**

**Tìm cách giải.** Ta có: $\widehat{\mathrm{AKM}} = 90^\circ$ nên DK $\perp$ AM $\Leftrightarrow \Delta DMK \backsim \Delta KMA$ . Mặt khác hai tam giác có $\widehat{AMK}$ chung. Do yêu cầu chứng minh về góc nên để chứng minh hai tam giác đồng dạng ta nên dùng c.g.c. Do vậy cần chứng minh $\dfrac{\mathrm{MD}}{\mathrm{MK}} = \dfrac{\mathrm{MK}}{\mathrm{MA}}$.

**Trình bày lời giải:**




$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ mà $\widehat{B_1} = \widehat{A_2}$ ( góc nội tiếp) nên $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$.

$\Delta MBD \backsim \Delta MAB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MD}{MB} = \dfrac{MB}{MA} \Rightarrow \dfrac{MD}{MK} = \dfrac{MK}{MA}$

Kết hợp với $\widehat{DMK} = \widehat{AMK}$ (góc chung)

ta có: $\Delta DMK \backsim \Delta KMA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MDK} = \widehat{MKA} = 90^\circ$

Vậy DK $\perp$AM.

**Bài 3:** Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, đường cao *AH* và nội tiếp đường tròn tâm *O*, đường kính *AM*.

a) Tính $\widehat{ACM}$;

b) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$;

c) Gọi *N* là giao điểm *AH* với đường tròn (*O*). Tứ giác *BCMN* là hình gì? Vì sao?

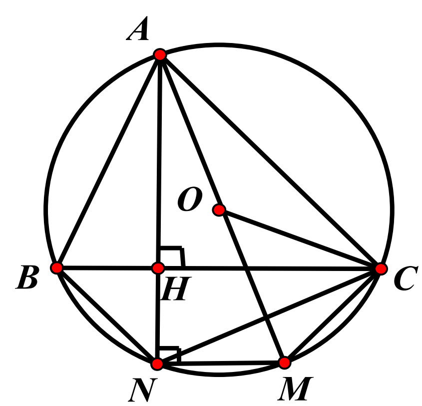
**Hướng dẫn giải**

**Tìm cách giải.** Ta có: $\widehat{ACM} = 90^0$ , góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. Nhận định tam giác AOC là tam giác cân nên nếu $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$ ta sẽ có $\widehat{BAH} = \widehat{CAO}$ từ đó tìm ra tam giác đồng dạng để giải toán.

**Trình bày lời giải**

a) Ta có $\widehat{ACM} = 90^0$ (góc nội tiếp).

b) Vì $\widehat{ABC} = \widehat{AMC}$ (cùng chắn cung AC) và $\widehat{AHB} = \widehat{ACM} = 90^0$




Nên $\Delta ABH$ và $\Delta AMC$ đồng dạng ( g-g)

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \widehat{BAH} = \widehat{OAC} \\ \widehat{OCA} = \widehat{OAC} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OCA}$$

c) $\widehat{ANM} = 90^0$, $AN \perp NM$ và $AN \perp BC$ nên MN // BC

$\Rightarrow MNBC$ là hình thang

$BC // MN \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BN} =$ sđ $\overset{\frown}{CM}$ (xem chứng minh **Bài 1**)

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BM} =$ sđ $\overset{\frown}{CN} \Rightarrow BM = CN \Rightarrow MNBC$ là hình thang cân.

**Bài 4:** Cho đường tròn tâm O và một dây AB của đường tròn đó. Các tiếp tuyến vẽ từ A và B của đường tròn cắt nhau tại C. Gọi D là một điểm trên đường tròn có đường kính OC ( D khác A và B). CD cắt cung AB của đường tròn (O) tại E. (E nằm giữa C và D). Chứng minh rằng:

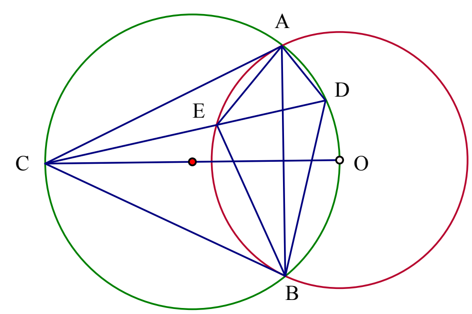
a) $\widehat{BED} = \widehat{DAE}$.

b) $DE^2 = DA.DB$.

## Hướng dẫn giải

### Tìm cách giải

- Trong quá trình chứng minh về góc, nên sử dụng tính chất về góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng hệ quả của chúng.
- Để chứng minh $DE^2 = DA.DB.$, nên ghép chúng vào hai tam giác có cạnh là DA, DB và DE là cạnh chung của hai tam giác, rồi chứng minh chung đồng dạng. Do đó ta chọn ΔBED và ΔEAD.




### Trình bày lời giải

a) Ta có : $\widehat{EBC} = \widehat{EAB}$ ; $\widehat{DCB} = \widehat{DAB}$ nên

$\widehat{EBC} + \widehat{DCB} = \widehat{EAB} + \widehat{DAB}$.

Mặt khác : $\widehat{EBC} + \widehat{DCB} = \widehat{BED}$, $\widehat{EAB} + \widehat{DAB} = \widehat{DAE}$ .

Vậy $\widehat{BED} = \widehat{DAE}$.

b) Ta có : $\widehat{ADE} = \widehat{ABC} = \widehat{CAB} = \widehat{EDB}$ mà theo câu a): $\widehat{BED} = \widehat{DAE}$, suy ra:

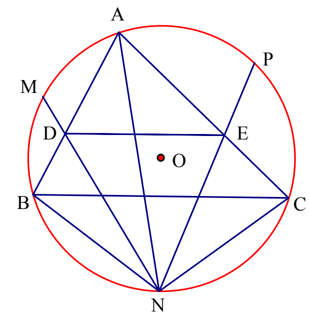
$$\Delta BED \backsim \Delta EAD \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DB}{DE} \Rightarrow DE^2 = DA.DB$$

**Bài 5:** Tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Các điểm M, N, P là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CA. Gọi D là giao điểm của MN và AB, E là giao điểm của PN và AC. Chứng minh rằng DE song song với BC.

## Hướng dẫn giải

**Tìm cách giải.** Khai thác điểm chính giữa của một cung , ta nhận được các tia phân giác của góc. Do vậy nếu khai thác tính chất đường phân giác của tam giác, ta được các tỉ số. Với suy luận đó, để chứng minh DE // BC ta cần vận dụng định lý Ta-lét đảo.

**Trình bày lời giải:**




$\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{PC} \Rightarrow$ NE là đường phân giác của $\Delta ANC \Rightarrow \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AN}{NC}$ (1)

$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} \Rightarrow$ ND là đường phân giác của $\Delta ANB \Rightarrow \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AN}{NB}$ (2)

$\overset{\frown}{BN} = \overset{\frown}{NC} \Rightarrow NB = NC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AD}{DB}$, do đó DE // BC.

**Bài 6:** Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và một cát tuyến MCD. Gọi I là giao điểm của AB và CD. Chứng minh rằng: $\dfrac{IC}{ID} = \dfrac{MC}{MD}$.

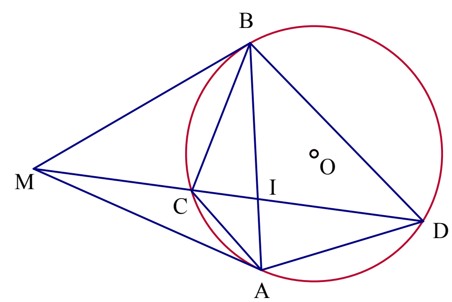
**Hướng dẫn giải**

**Tìm cách giải.** Khai thác góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung dễ dàng chỉ ra $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ và $\Delta MBC \backsim \Delta MDB$. Từ đó biến đổi các hệ thức để giải bài toán.

**Trình bày lời giải**

Ta có $\widehat{MAC} = \widehat{ADC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung); $\widehat{AMD}$ chung. Suy ra $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g-g) suy ra: $MA^2 = MC.MD$ và $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{AC}{AD}$

Tương tự: $\Delta MBC \backsim \Delta MDB$ suy ra: $\dfrac{MB}{MD} = \dfrac{BC}{BD}$




Xét $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{MC.MD}{MD^2} = \dfrac{MA^2}{MD^2} = \dfrac{MA}{MD} \cdot \dfrac{MB}{MD} = \dfrac{AC}{AD} \cdot \dfrac{BC}{BD}$ (1)

Mặt khác : $\Delta IAC \backsim \Delta IDB$ suy ra: $\dfrac{IC}{IB} = \dfrac{AC}{BD}$

$\Delta IBC \backsim \Delta IDA$ suy ra: $\dfrac{IB}{ID} = \dfrac{BC}{AD}$;

Do đó: $\dfrac{AC}{AD} \cdot \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{AC}{BD} \cdot \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{IC}{IB} \cdot \dfrac{IB}{ID} = \dfrac{IC}{ID}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{IC}{ID} = \dfrac{MC}{MD}$.

**Bài 7:** Gọi CA, CB lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn (O; R) với A, B là các tiếp điểm. Vẽ đường tròn tâm I qua C và tiếp xúc với AB tại B. Đường tròn (I) cắt đường tròn (O) tại M. Chứng minh rằng đường thẳng AM đi qua trung điểm của BC.

## Hướng dẫn giải

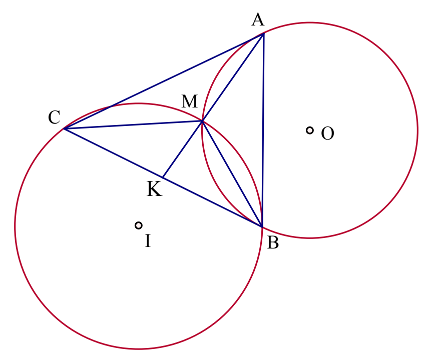
**Tìm cách giải.** Chỉ ra $KB^2 = KM.KA$ và $KC^2 = KM.KA$ từ đó suy ra KA = KB (K là giao điểm của AM và BC)

**Trình bày lời giải**

Gọi K là giao điểm của AM và BC.

Xét ΔKBM và ΔKAB có: $\widehat{K}$ chung; $\widehat{KBM} = \widehat{KAB}$ ( góc tạo bởi tia tiếp tuyến, dây cung và góc nội tiếp chắn cùng chắn cung $\overset{\frown}{BM}$ của (O) )

Do đó: $\Delta KBM \backsim \Delta KAB \Rightarrow \frac{KB}{KA} = \frac{KM}{KB} \Rightarrow KB^2 = KM.KA$ (1)



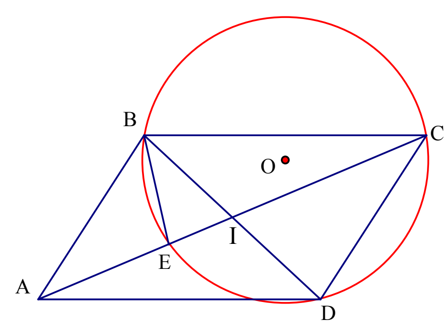

$\widehat{MCK} = \widehat{MBA}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BM}$ của (I)).

$\widehat{KAC} = \widehat{MBA}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AM}$ cuả (O)).

Do đó: $\widehat{MCK} = \widehat{KAC}$. Xét ΔKCM và ΔKAC có: $\widehat{K}$ chung , $\widehat{MCK} = \widehat{KAC}$. Do đó $\Delta KCM \backsim \Delta KAC \Rightarrow \frac{KC}{KA} = \frac{KM}{KC} \Rightarrow KC^2 = KM.KA$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $KC^2 = KB^2 \Rightarrow KC = KB$. Vậy AM đi qua trung điểm K của BC.

**Bài 8:** Cho hình bình hành ABCD, góc A < $90^0$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt AC ở E. Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB.




## Hướng dẫn giải

Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành.

IA = IC ⇒ $IE.IA = IE.IC$

$\Delta IBE \backsim \Delta ICD$ (g.g) ⇒ $IE.IC = IB.ID$

Từ đó suy ra: IE.IA = IE.IC = IB.ID = $IB^2 \Rightarrow \frac{IB}{IE} = \frac{IA}{IB}$.

Ta có ΔIBE và ΔIAB có $\frac{IB}{IE} = \frac{IA}{IB}$ và $\widehat{BIA}$ chung , suy ra $\Delta IBE \backsim \Delta IAB$ (c.g.c) nên $\widehat{IBE} = \widehat{IAB}$.

Suy ra BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB( định lí bổ sung)

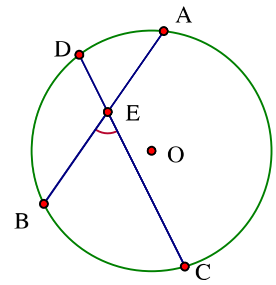
## . GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG VÀ BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

### . Lý thuyết

**1. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn**

Trong hình bên thì :

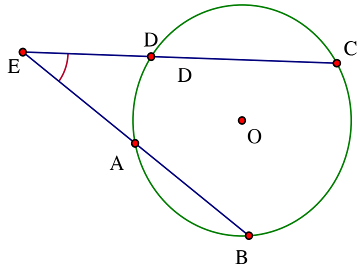
$\widehat{BEC}$ có đỉnh E nằm bên trong đường tròn (O) gọi là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.



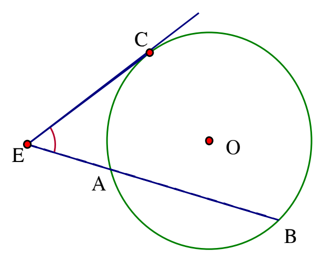

***Định lí*** : Số đo góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

$$\text{sđ } \widehat{BEC} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{AD} + \text{sđ } \overset{\frown}{BC}\right)$$

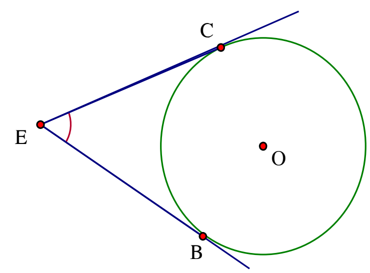
**2 . Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.**




Hình a




Hình b




Hình c

Trong hình (a,b,c) thì :

$\widehat{BEC}$ gọi là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.

***Định lí*** : Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

### *PHƯƠNG PHÁP GIẢI* MỘT SỐ DẠNG TOÁN

- ✓ Gặp bài toán tiên quan đến những góc có đỉnh ở bên trong hay bên ngoài đường tròn ta thường tính số đo của chúng theo số đo các cung bị chắn rồi biến đổi tổng hoặc hiệu của hai cung thành một cung
- ✓ Số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung
- ✓ Số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn

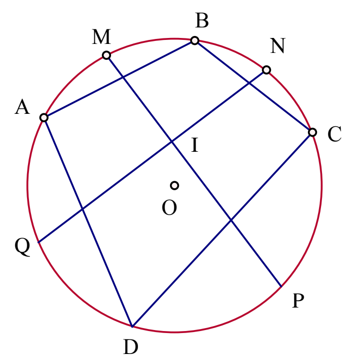
### . Bài tập.

**Bài 1:** Cho tứ giác ABCD có bốn đỉnh thuộc đường tròn . Gọi M, N, P, Q lần lượt là điểm chính giữa các cung AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng : $MP \perp NQ$.

## Hướng dẫn giải

**Tìm cách giải.** Để chứng minh $MP \perp NQ$ ta gọi I là giao điểm của MP và NQ và cần chứng minh $\widehat{MIQ} = 90^\circ$. Nhận thấy $\widehat{MIQ}$ là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn, do vậy ta cần biểu diễn góc $\widehat{MIQ}$ theo các cung của đường tròn và biến đổi các cung ấy.

**Trình bày lời giải**




Gọi I là giao điểm của MP và NQ. Ta có.

$$\widehat{MIQ} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{MQ} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{NP})$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{CD}).$$

$$= \frac{1}{4}.\,360^o = 90^o$$ . Vậy MP ⊥ NQ.

**Bài 2:** Cho đường tròn (O), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, điểm M thuộc cung nhỏ BC. Gọi E là giao điểm của MA và CD, F là giao điểm của MD và AB. Chứng minh rằng:

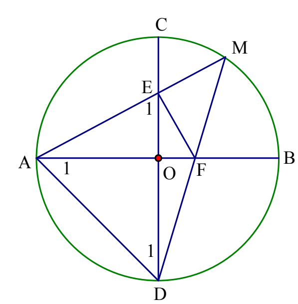
a) $\widehat{DAE} = \widehat{AFD}$;

b) Khi M di động trên cung nhỏ BC thì diện tích tứ giác AEFD không đổi.

## Hướng dẫn giải

**a)** $\widehat{DAE} = \dfrac{\text{sd}\overset{\frown}{DBM}}{2}$ (góc nội tiếp) .

$\widehat{AFD} = \dfrac{\text{sd}\overset{\frown}{DB} + sd\overset{\frown}{MB}}{2} = \dfrac{\text{sd}\overset{\frown}{DBM}}{2}$ ( góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)




Suy ra $\widehat{DAE} = \widehat{AFD}$

**b)** Ta có: $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}\left(=45^\circ\right)$ và $\widehat{E_1} = \widehat{ADF}$ ( cách chứn minh tương tự câu a) nên $\Delta DAE \backsim \Delta ADF\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{DE}{AD} = \dfrac{AD}{AF} \Rightarrow AF.DE = AD^2$ .

Mặt khác AEFD là tứ giác có hai đường chéo AF, DE vuông góc với nhau.

Do đó $S_{AEFD} = \dfrac{1}{2}\text{AF}\cdot\text{DE} = \dfrac{1}{2}\text{AD}^2$, không đổi.

## 🗁. MỘT SỐ BÀI TẬP

## DẠNG 1: GÓC NỘI TIẾP – GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

### I. Trắc nghiệm:

**Câu 1**: Mỗi khẳng định sau đúng hay sai:

A. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung luôn nhỏ hơn $90^0$.

B. Trong một đường tròn, các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

C. Góc vuông nội tiếp thì chắn nửa đường tròn.

D. Góc tù nội tiếp thì có số đo bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.

**Câu 2:**

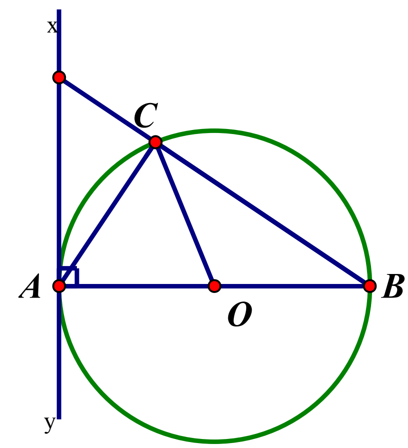
Cho hình vẽ, biết AB là đường kính của đường tròn (O), xy là tiếp tuyến của đường tròn tại A. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

A. Góc CAx là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.

B. Góc BAy là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.

C. Góc ACB là góc tù.

D. $\widehat{CAx} < \widehat{BCO}$




**Câu 3:** Ghép mỗi ý ở cột bên trái với mỗi ý ở cột bên phải để được khẳng định đúng

| | |
|---|---|
| A. Góc nội tiếp là góc | 1) có số đo bằng $90^0$ |
| B. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn | 2) bằng nhau. |
| C. Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì | 3) có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn. |
| D. Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp không bằng nhau, góc lớn hơn thì | 4) chắn dây lớn hơn. |
| | 5) có cung bị chắn lớn hơn. |

### II. Tự luận:

#### A. Dạng cơ bản:

**Bài 1:** Tam giác ABC nội tiếp (O;R). Tia phân giác của góc A cắt (O) tại M. Tia phân giác góc ngoài tại đỉnh A cắt (O) tại N. CMR:

a) Tam giác MBC cân.

b) 3 điểm M, O, N thẳng hàng.

**Bài 2:** Cho (O) và hai dây AB, CD bằng nhau và cắt nhau tại M. ( C thuộc cung nhỏ AB, B thuộc cung nhỏ CD).

a) CMR: cung AC = cung DB.

b) CMR: ΔMAC = ΔMDB.

c) Tứ giác ACBD là hình gì? CM?

**Bài 3:** Cho (O) và hai dây MA và MB vuông góc với nhau. Gọi I, K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA, MB. Gọi P là giao điểm của AK và BI.

a) CMR: A, O, B thẳng hàng.

b) CMR: P là tâm đường tròn nội tiếp ΔMBA.

c) Giả sử MA = 12cm, MB = 16cm, tính bán kính đường tròn nội tiếp ΔMBA.

**Bài 4 :** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt (O) tại M.

a) CMR : tam giác BMC cân.

b) CMR : góc BMC = góc ABC + góc ACB.

c) Gọi D là giao điểm của AM và BC. CMR : AB. AC = AD. AM; MD. MA = $MB^2$.

**Bài 5:** Cho nửa đường tròn (O) đường kính CB, A thuộc nửa đường tròn sao cho AB < AC. Tiếp tuyến tại A cắt đường thẳng BC ở I. Kẻ AH vuông góc với BC. CMR:

a) AB là tia phân giác của góc IAH.

b) $IA^2$ = IB. IC.

**Bài 6:** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ (I) đường kính BH cắt AB ở M. Vẽ (K) đường kính CH cắt AC ở N.

a) Tứ giác AMHN là hình gì ? CM ?

b) CMR : MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K) ?

c) Vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. CMR : Ax // MN.

**Bài 7 :** Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB, lấy hai điểm M và N sao cho cung AM = cung MN = cung NB. Gọi P là giao điểm của AM và BN ; H là giao điểm của AN với BM. CMR :

a) Tứ giác AMNB là hình thang cân.
b) 4 điểm P, M, H, N cùng thuộc một đường tròn.
c) PH vuông góc với AB.
d) ON là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PH.

## B. Bài tập nâng cao :

**Bài 1:** Cho (O) và (O′) bằng nhau, cắt nhau tại A và B. Qua B vẽ một cát tuyến cắt các đường tròn (O) và (O′) lần lượt tại C và D.

a) CMR : AC = AD.
b) Tìm quỹ tích trung điểm M của CD khi cát tuyến CBD quay quanh B.

**Bài 2:** Cho (O) đường kính AB; C chạy trên một nửa đường tròn. Vẽ đường tròn tâm I tiếp xúc với đường tròn (O) tại C, tiếp xúc với đường kính AB tại D. Đường tròn này cắt CA, CB lần lượt tại M và N.

a) CMR: 3 điểm M, I, N thẳng hàng .
b) CMR:ID vuông góc với MN .
c) CMR: đường thẳng CD đi qua một điểm cố định.
d) Suy ra cách dựng đường tròn (I) nói trên.

**Bài 3 :** Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC, từ điểm M trên cung BC không chứa điểm A, hạ các đường vuông góc với BC; CA; AB lần lượt tại D; H; K. Chứng minh rằng: $\frac{BC}{MD}=\frac{CA}{MH}+\frac{AB}{MK}$

**Bài 4:** Hai đường tròn (O) và (O′) cắt nhau tại A và B. Các điểm M và N theo thứ tự di chuyển trên các đường tròn (O) và (O′) sao cho chiều từ A đến M và từ A đến N trên các đường tròn (O) và (O′) đều theo chiều quay của kim đồng hồ và các cung AM và AN có số đo bằng nhau. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

## HƯỚNG DẪN GIẢI DẠNG 1

### I. Trắc nghiệm:

**Câu 1:**

A. S B. Đ C. Đ D. S

**Câu 2:**

A. Đ B. Đ C. S D. S

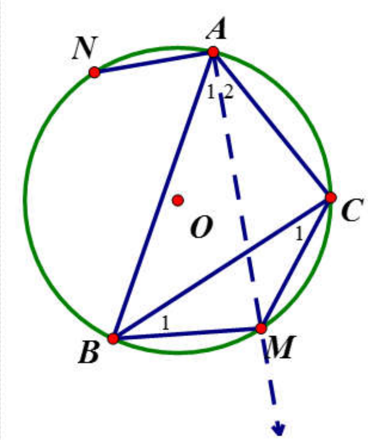
**Câu 3:** Nối: A – 3; B – 1; C – 2; D – 5

### II. Tự luận:

### A. Dạng cơ bản:

**Bài 1**: a) Chứng minh rằng tam giác MBC cân

Có $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ ; $\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$ . Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ => $\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ . Vậy tam giác MBC cân tại M.




b) Chứng minh ba điểm M; O; N thẳng hàng:

Có AM và AN là 2 tia phân giác của hai góc kề bù

=> AM $\perp$ AN => $\widehat{MAN} = 90^0$ => MN là đường kính của (O)

=> M; O; N thẳng hàng.

**Bài 2:**

a) Chứng minh rằng: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DB}$

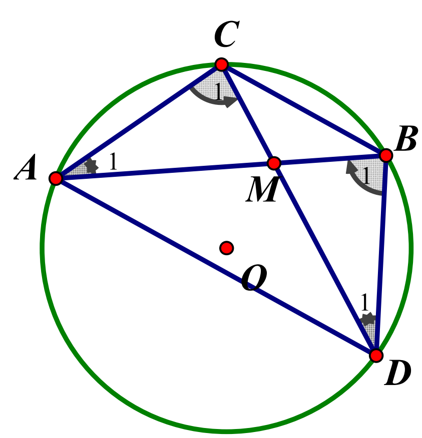
- Có sđ $\overset{\frown}{AC}$ + sđ $\overset{\frown}{CB}$ = sđ $\overset{\frown}{AB}$
- Có sđ $\overset{\frown}{BD}$ + sđ $\overset{\frown}{CB}$ = sđ $\overset{\frown}{DC}$

  ⇨ $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DB}$.

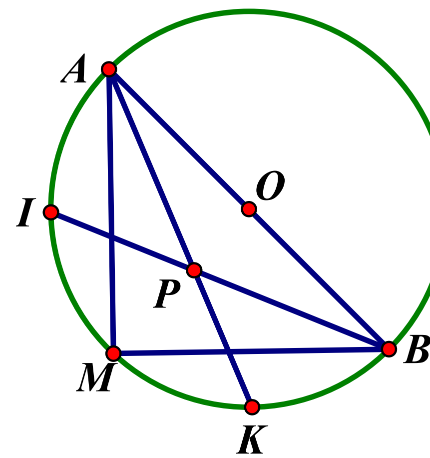
a) Chứng minh ΔMAC = ΔMDB.

- Có $\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ ; AC = BD; $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$

  $\Rightarrow$ ΔMAC = ΔMDB



**Bài 3:**




a) Chứng minh rằng 3 điểm A; O; B thẳng hàng.

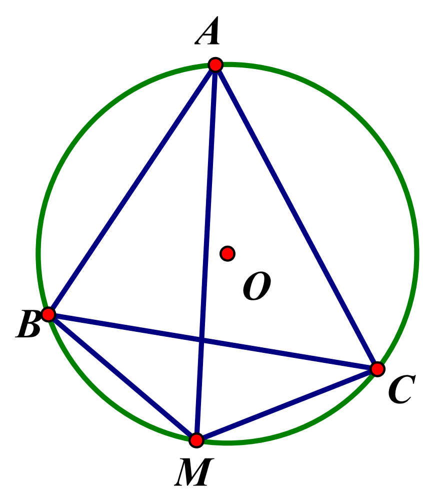
b) CMR: P là tâm đường tròn nội tiếp ΔMBA.

- Có I là điểm chính giữa cung nhỏ AM; K là điểm chính giữa cung nhỏ BM => AK; BI lần lượt là tia phân giác của các góc MAB và MBA của tam giác MBA => P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MBA.

c) Giả sử MA = 12cm, MB = 16cm, tính bán kính đường tròn nội tiếp ΔMBA.

Giả sử r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔMBA, a là độ dài cạnh huyền, p là nửa chu vi ΔMBA. Ta có: r = p – a

**Bài 4:**




a) Chứng minh rằng : tam giác BMC cân

- Có AM là tia phân giác của góc BAC => $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MC}$ => BM = MC => tam giác BMC cân

b) Chứng minh rằng: $\widehat{BMC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$

- Có $\widehat{BMC} = \widehat{BMA} + \widehat{AMC}$

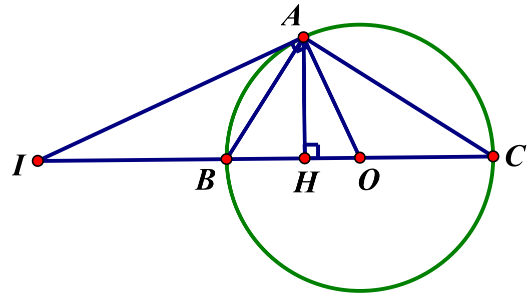
  Mà: $\widehat{BMA} = \widehat{ACB}; \widehat{AMC} = \widehat{ABC}$

  ⇨ $\widehat{BMC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$

c) Gọi D là giao điểm của AM và BC. CMR : AB. AC = AD. AM; MD. MA = MB².

- ΔABD ~ ΔAMC => AB. AC = AD. AM
- ΔMBD ~ ΔMAB => MD. MA = MB²

**Bài 5:**




a) CMR: AB là tia phân giác của $\widehat{IAH}$

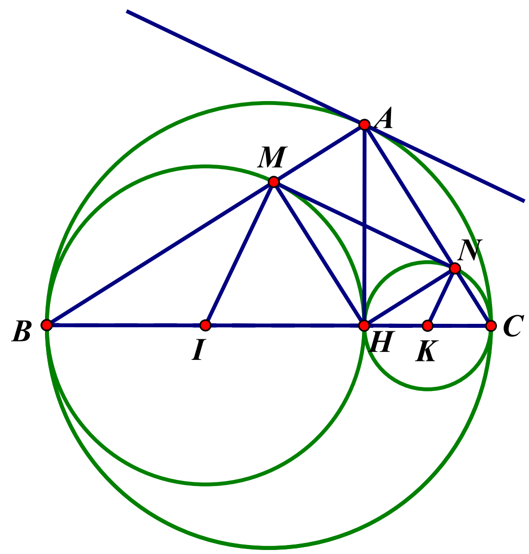
- $\widehat{IAB} = \widehat{ACB}$ ( góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

  ⇨ $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABH}$ )

  ⇨ $\widehat{IAB} = \widehat{BAH}$

b) CMR: IA² = IB. IC: Có ΔIAB ~ ΔICA => IA² = IB. IC

**Bài 6:**




a) Tứ giác AMHN là hình gì ? CM ?

- Tứ giác AMHN là hình chữ nhật.

b) CMR: MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

- Có AMHN là hình chữ nhật

=> $\widehat{NMH} = \widehat{AHM}$

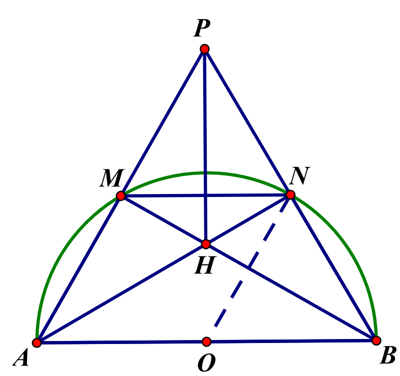
=> $\widehat{NMH} = \widehat{MBH}$ => MN là tiếp tuyến của (I)

- Chứng minh tương tự ta có MN là tiếp tuyến của (K).

c) Có Ax là tiếp tuyến của (O) => $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$

=> $\widehat{ACB} = \widehat{NHA} = \widehat{NMA}$ => $\widehat{xAB} = \widehat{NMA}$ => Ax // MN

**Bài 7 :**




a) Tứ giác AMNB là hình thang cân.

- Tứ giác AMNB có MN // AB => AMNB là hình thang.

  Lại có: AN = BM => AMNB là hình thang cân.

b) 4 điểm P, M, H, N cùng thuộc một đường tròn.

- Có $\widehat{AMB} = 90^0$ => $\widehat{PMH} = 90^0$ => P; M; H cùng thuộc đường tròn đường kính PH.
- Có $\widehat{ANB} = 90^0$ => $\widehat{PNH} = 90^0$ => P; N; H cùng thuộc đường tròn đường kính PH.

  ⇨ P; M; N; H cùng thuộc đường tròn đường kính PH.

c) PH vuông góc với AB

- Có H là trực tâm tam giác PAB => PH vuông góc với AB.

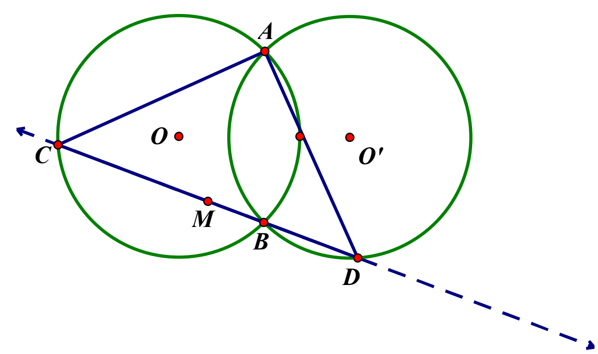
d) ON là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PH.

- Có $\widehat{ONA} = \widehat{NPH} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{NH}$ của đường tròn đi qua 4 điểm P; M; H; N mà cung NH nằm trong góc ONH => góc ONH là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung NH => ON là tia tiếp tuyến của đường tròn đi qua 4 điểm P; M; H; N.

## B. Bài tập nâng cao

**Bài 1:**

a) CMR : AC = AD.




- (O) có góc ACB là góc nội tiếp chắn cung nhỏ A$_m$B.
- (O’) có góc ADB là góc nội tiếp chắn cung nhỏ A$_n$B
- (O) và (O’) bằng nhau

  ⇨ $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ => ΔACD cân tại A

  ⇨ AC = AD.

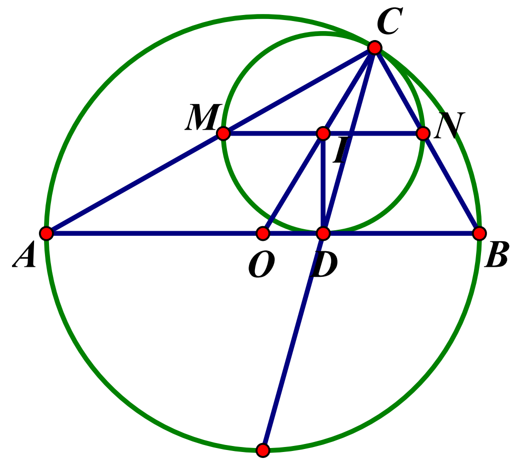
b) Tìm quỹ tích trung điểm M của CD khi cát tuyến CBD quay quanh B.

- Tam giác ACD cân tại A có M là trung điểm của CD => AM vuông góc với CD

  ⇨ $\widehat{AMB} = 90^0$ => M thuốc đường tròn đường kính AB.

**Bài 2:**

a) CMR: 3 điểm M, I, N thẳng hàng




- Có $\widehat{ACB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MCN} = 90^0 \Rightarrow$ MN là đường kính của (I) => M; I; N thẳng hàng.

b) CMR:ID vuông góc với MN.

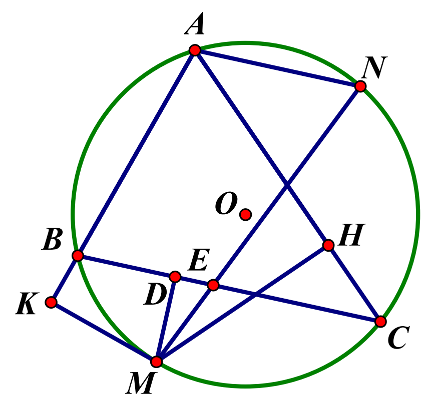
- Có AB là tiếp tuyến của (I) tại D => ID vuông góc với AB.
- Có MN // AB => ID vuông góc với MN.

c) CMR: đường thẳng CD đi qua một điểm cố định.

- Chứng minh CD là tia phân giác của góc ACB => CD đi qua điểm chính giữa của cung AB.

d) Suy ra cách dựng đường tròn (I) nói trên

**Bài 3 :**




- Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại N => AB = NC => $\widehat{BMN} = \widehat{AMC}$
- Gọi E là giao điểm của BC và MN; $\widehat{CBM} = \widehat{CAM}; \widehat{BEM} = \frac{1}{2}\text{sđ}\left(\overset{\frown}{BM} + \overset{\frown}{CN}\right)$

$= \frac{1}{2}\text{ sđ}\left(\overset{\frown}{BM} + \overset{\frown}{AB}\right) = \widehat{ACM}$

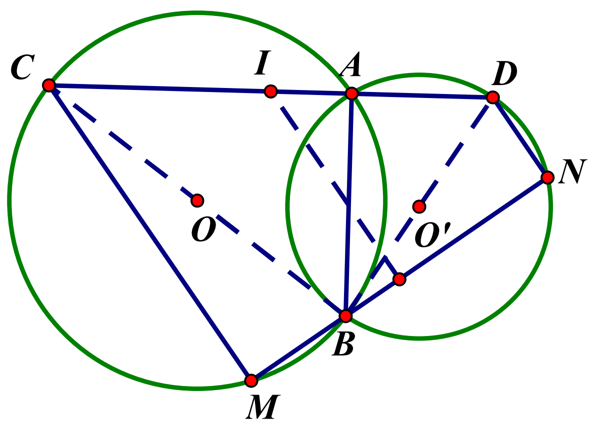
⇨ ΔBME ~ ΔAMC, có MH và MD là 2 đường cao tương ứng=> $\frac{AC}{MH} = \frac{BE}{MD}$ (1)

- $\widehat{MCB} = \widehat{MAB}; \widehat{CMN} = \widehat{AMB}\left(\overset{\frown}{NC} = \overset{\frown}{AB}\right)$

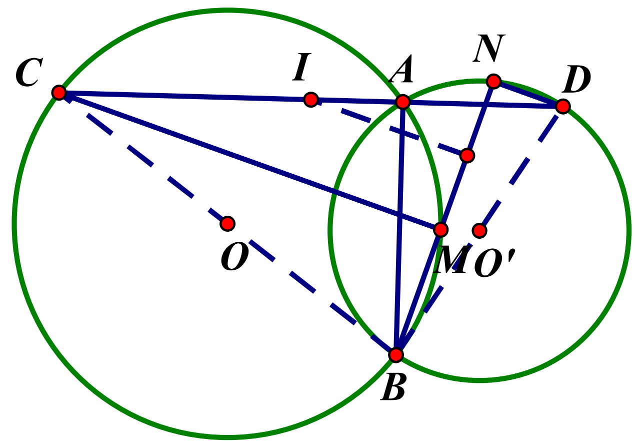
⇨ ΔCME ~ ΔAMB; có MD; MK là 2 đường cao tương ứng => $\frac{CE}{MD} = \frac{AB}{MK}$ (2)

- Từ (1) và (2) => $\frac{AC}{MH}+\frac{AB}{MK}=\frac{BE}{MD}+\frac{CE}{MD}=\frac{BC}{MD}$

**Bài 4:** Kẻ các đường kính BOC, BO’D thì C; A; D thẳng hàng, CAD là cát tuyến chung cố định.




Ha




Hb

Trường hợp M thuộc cung BC không chứa A ( Ha): $\widehat{ABN}=\widehat{ACM}$ , $\widehat{ACM}$ bù $\widehat{ABM}$ nên $\widehat{ABN}$ bù $\widehat{ABM}$ , do đó M; B; N thẳng hàng.

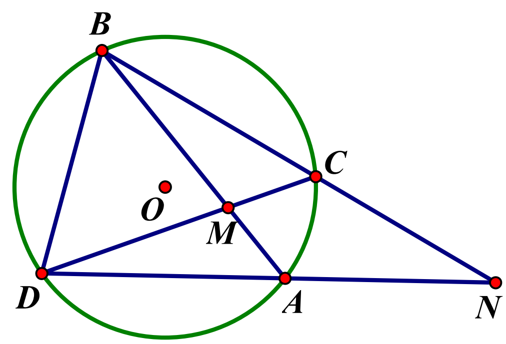
Trường hợp M thuộc cung BC có chứa A (Hb): $\widehat{ABN}=\widehat{ABM}$ nên M; B; N thẳng hàng.

Trong cả hai trường hợp, ta có CM và DN cùng vuông góc với MN. Do đó đường trung trực của MN luôn đi qua trung điểm I của CD, đó là điểm cố định.

## DẠNG 2: GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG VÀ BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

**I. Trắc nghiệm:** Cho hình vẽ, hãy điền dấu (x) vào ô thích hợp trong bảng sau:

| TT | Khẳng định | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| 1 | $\widehat{A} = \overset{\frown}{BMD}$ | | |
| 2 | $\widehat{BMC} = \dfrac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AD}}{2}$ | | |
| 3 | $\widehat{ABN} + \widehat{N} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BD}$ | | |
| 4 | $\widehat{N} = \dfrac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{BD} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{AC})$ | | |




**II. Tự luận:**

**Bài 1.** Cho đường tròn (O) trong đó có ba dây bằng nhau AB, AC, BD sao cho hai dây AC, BD cắt nhau tại M tạo thành góc vuông AMB. Tính số đo các cung nhỏ AB, CD.

**Bài 2.** Cho đường tròn (O) và dây AB. Vẽ tiếp tuyến xy // AB có M là tiếp điểm. Chứng minh rằng $\Delta MAB$ là tam giác cân.

**Bài 3.** Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Vẽ dây CD // AB. Đường thẳng AD cắt đường tròn tại một điểm thứ hai là E. Tia CE cắt AB tại M. Chứng minh:

a) $MB^2 = MC.ME$;　　　　b) M là trung điểm của AB

**Bài 4.** Cho hai đường tròn (O) và (O′) cắt nhau tại A và B. Vẽ dây AC của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O′). Vẽ dây AD của đường tròn (O′) tiếp xúc với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) $AB^2 = BC.BD$　　　　b) $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{AC^2}{AD^2}$

**Bài 5.** Cho đường tròn (O) và hai đường kính vuông góc AB và CD. Trên cung BD lấy một điểm M. Tiếp tuyến của (O) tại M cắt AB ở E ; CM cắt AB tại F. Chứng tỏ EF = EM.

**Bài 6.** Cho tam giác ABC, phân giác trong AD. Đường tròn (O) đi qua A, tiếp xúc với BC tại D. Đường tròn (O) cắt AB, AC tương ứng tại M và N. Chứng minh MN // BC.

**Bài 7.** Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD với đường tròn (B là tiếp điểm, C nằm giữa A và D). Tia phân giác của góc CBD cắt đường tròn tại m, cắt CD tại E và cắt tia phân giác của góc BAC tại H. Chứng minh rằng:

a) $AH \perp BE$ ; b) $MD^2 = MB \cdot ME$

**Bài 8.** Cho đường tròn (O) và dây AB. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và C là điểm nằm giữa A và B. Tia MC cắt đường tròn tại một điểm thứ hai là D.

a) Chứng minh rằng $MA^2 = MC \cdot MD$.

b) Vẽ đường tròn (O′) ngoại tiếp tam giác ACD. Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến của đường tròn (O′).

c) Vẽ đường kính MN của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm A, O′, N thẳng hàng.

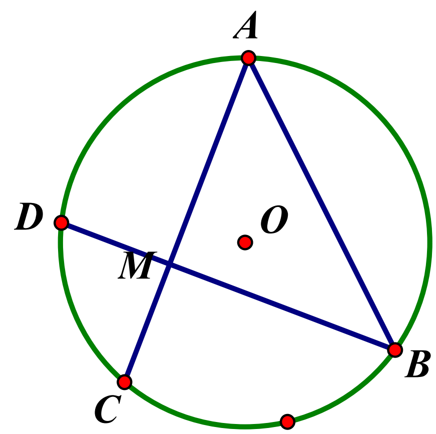
**Bài 9.** Cho đường tròn (O) và một dây AB. Vẽ đường kính $CD \perp AB$ (D thuộc cung nhỏ AB). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M. Các đường thẳng CM và DM cắt đường thẳng AB lần lượt tại E và F. Tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt đường thẳng AB tại N. Chứng minh rằng N là trung điểm của EF.

## HƯỚNG DẪN GIẢI DẠNG 2

### I. Trắc nghiệm:

1. sai  2. đúng  3. đúng  4. đúng

### II. Tự luận:




**Bài 1.** Đường tròn (O) có dây: AB = AC = BD

Suy ra sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{AC}$ = sđ $\overset{\frown}{BD}$

Do đó: sđ $\overset{\frown}{AD}$ = sđ $\overset{\frown}{AC}$ - sđ $\overset{\frown}{CD}$

= sđ $\overset{\frown}{BD}$ - sđ $\overset{\frown}{DC}$ = sđ $\overset{\frown}{BC}$

Theo định lý góc có đỉnh bên trong đường tròn, ta có:

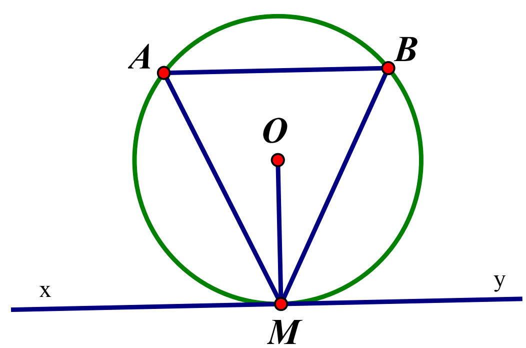
sđ $\overset{\frown}{AD}$ + sđ $\overset{\frown}{BC}$ = 2. sđ $\widehat{BMC} = 2.90^0 = 180^0$

nên sđ $\overset{\frown}{AD}$ = sđ $\overset{\frown}{BC}$ = $90^0$

Lại có: sđ $\overset{\frown}{AB}$ + sđ $\overset{\frown}{CD}$ = 2. sđ $\widehat{ABC} = 180^0$

Hơn nữa sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{BD}$ = sđ $\overset{\frown}{BC}$ + sđ $\overset{\frown}{DC}$ = $90^0$ + sđ $\overset{\frown}{DC}$

Suy ra: sđ $\overset{\frown}{DC}$ = $45^0$; sđ $\overset{\frown}{AB}$ = $90^0 + 45^0 = 135^0$




**Bài 2.** Ta có $OM \perp xy$ (tính chất của tiếp tuyến)

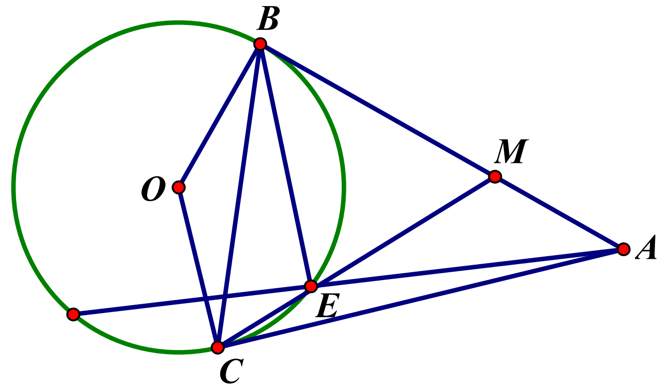
Mà xy // AB nên

Suy ra $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$ (định lý đường kính vuông góc với dây cung)

Do đó MA = MB (hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau)

**Bài 3.**

a) $\Delta MBE$ và $\Delta MCB$ có




$\widehat{M_1}$ chung; $\widehat{B_1} = \widehat{C_2}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BE)

Nên $\Delta MBE \backsim \Delta MCB$ (g.g)

Suy ra $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{ME}{MB}$

Do đó $MB^2 = MC.ME$ (1)

b) Ta có CD // AB nên $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ (cặp góc so le trong)

Mặt khác $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung CE).

⇨ $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$

Xét $\Delta MAE$ và $\Delta MCA$ có: $\widehat{M_2}$ chung; $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (chứng minh trên)

Vậy $\Delta MAE \backsim \Delta MCA$ (g.g). Suy ra $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{ME}{MA}$

Do đó $MA^2 = MC.ME$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MA^2 = MB^2$ do đó $MA = MB$

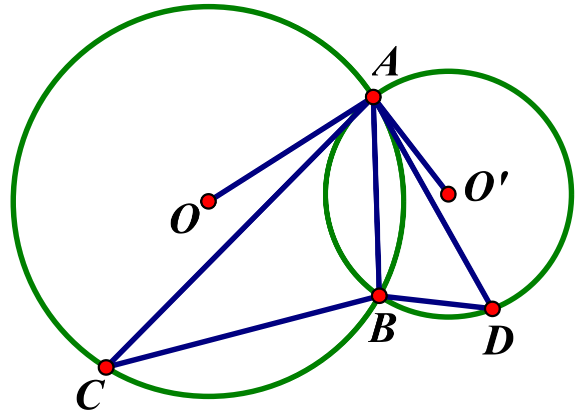
**Bài 4.** a) $\Delta ABC$ và $\Delta DBA$ có

$\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ ; $\widehat{C} = \widehat{A_2}$

(góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cung chắn cung AB)

Do đó $\Delta ABC \backsim \Delta DBA$ (g.g)

Suy ra $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{CB}{AB}$. Vậy $AB^2 = BC.BD$




b) $\Delta ABC \backsim \Delta DBA$ (chứng minh trên) => $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{CB}{AB} = \dfrac{AC}{DA}$

Do đó $\dfrac{AB}{BD}.\dfrac{CB}{AB} = \dfrac{AC}{DA}.\dfrac{AC}{DA}$. Vậy $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{AC^2}{AD^2}$

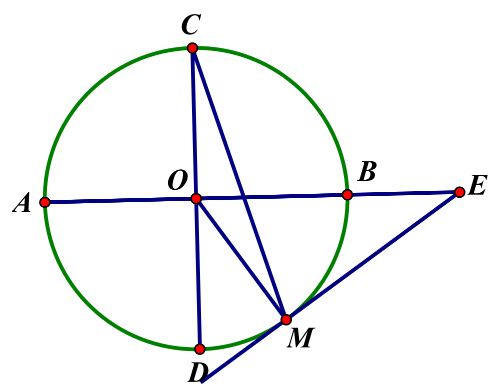
**Bài 5.**

Đường tròn (O) có:

$\widehat{EMF} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overparen{CBM}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây đi qua tiếp điểm)

$\Rightarrow \widehat{EMF} = \dfrac{1}{2}(\text{sđ}\,\overparen{MB} + \text{sđ}\,\overparen{BC})$

$\widehat{EFM} = \dfrac{1}{2}(\text{sđ}\,\overparen{MB} + \text{sđ}\,\overparen{AC})$ (góc có đỉnh ở trong đường tròn (O)




Mà: sđ $\overparen{BC}$ = sđ $\overparen{AC} = 90^o$ (vì $CD \perp AB$ ).

Do đó: $\widehat{EMF} = \widehat{EFM} \Rightarrow \Delta EFM$ cân tại E. Vậy: EF = EM.

**Bài 6.** Chứng minh $\Delta BMD \backsim \Delta BDA$, suy ra

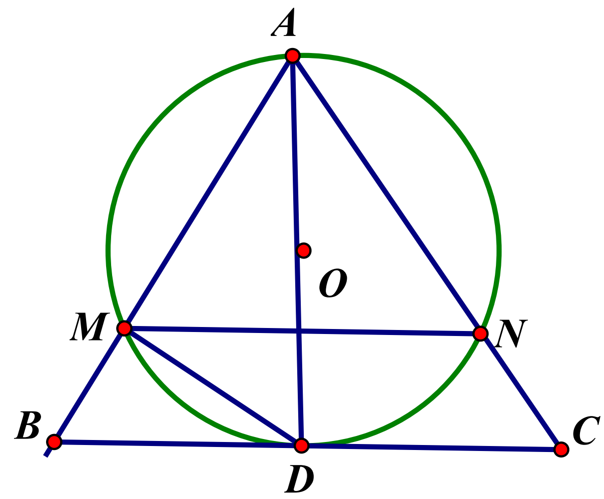
$BD^2 = BM \,.\, BA$

Tương tự, cũng có $CD^2 = CN \,.\, CA$, suy ra

$$\frac{BD^2}{CD^2} = \frac{BM.BA}{CN.CA}$$

Mà $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{CA}$, suy ra $\frac{AB^2}{CA^2} = \frac{BM.BA}{CN.CA}$ nên

$\frac{BM}{CN} = \frac{BA}{CA} \Rightarrow MN \;//\; BC$




**Bài 7.**

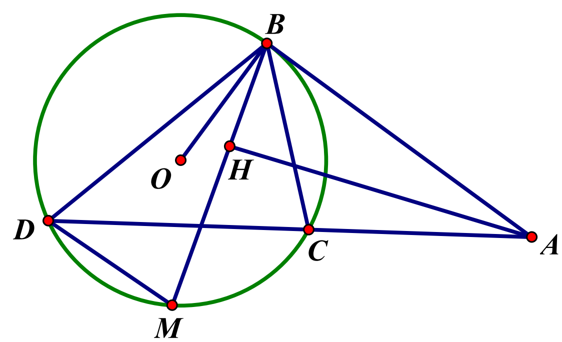
a) Vì $\widehat{CBM} = \widehat{DBM}$ nên $\overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{MD}$

(hai góc nội tiếp bằng nhau thì hai cung bị chắn bằng nhau)

Góc AEB là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn nên

$$\widehat{AEB} = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{MD}}{2}$$

$$= \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{MC}}{2} = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{BCM}}{2} \quad (1)$$




Góc ABM là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung nên sđ $\widehat{ABM} = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{BCM}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{ABM}$, do đó $\Delta ABE$ cân tại A.

Có AH là tia phân giác của góc A nên $AH \perp BE$

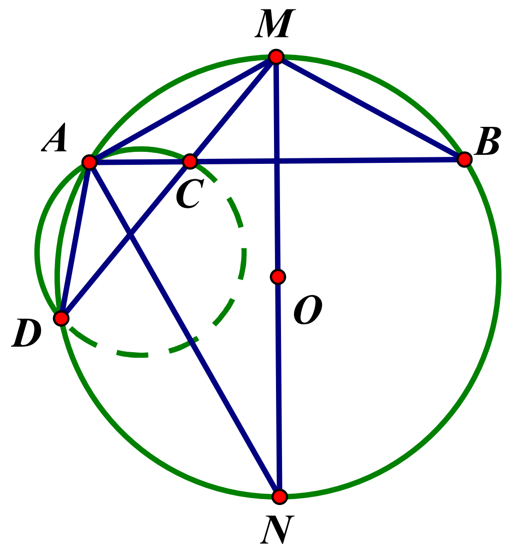
b) $\Delta MDE$ và $\Delta MBD$ có

$\widehat{MDE} = \widehat{MBD}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau); $\widehat{M}$ chung.

nên $\Delta MDE \backsim \Delta MBD$ (g. g).

Suy ra $\dfrac{MD}{MB} = \dfrac{ME}{MD}$ , do đó MD² = MB. ME

**Bài 8.**




**a)** $\Delta MAC$ và $\Delta MDA$ có: $\widehat{M_1}$ chung;

$\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

Vậy $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g. g).

Suy ra $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MA}$ .

Do đó MA² = MC . MD.

b) Ta có: $\widehat{MAC} = \widehat{D}$ (chứng minh trên), mà $\widehat{D} = \dfrac{sđ\,\overset{\frown}{AC}}{2}$ , nên $\widehat{MAC} = \dfrac{sđ\,\overset{\frown}{AC}}{2}$

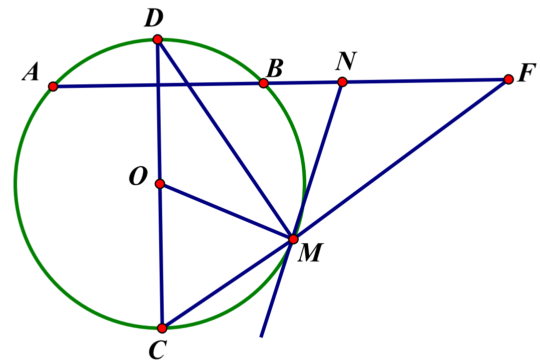
⇨ AM là một tia tiếp tuyến của đường tròn (O′) (Định lí đảo của định lí về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

c) Ta có $\widehat{MAN} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính MN).

Suy ra $NA \perp AM$ . Mặt khác $O'A \perp AM$ (tính chất của tiếp tuyến).

Qua điểm A chỉ vẽ được một đường thẳng vuông góc với AM, do đó ba điểm A, O′, N thẳng hàng

**Bài 9** . Ta sẽ chứng minh NE = NF bằng cách dùng NM làm trung gian.




Ta có $CD \perp AB$ nên $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{DB}$ và $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$ (định lí đường kính vuông góc với dây cung).

Góc $F_1$ là góc có đỉnh ở bên trong một đường tròn nên:

$$\hat{F}_1 = \frac{sđ\,\overset{\frown}{BM} + sđ\,\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{BM} + sđ\,\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{MBD}}{2} \quad (1)$$

$\widehat{M_3}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung nên $\widehat{M_3} = \dfrac{sđ\,\overset{\frown}{MBD}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{F}_1 = \widehat{M_3}$ do đó $\Delta NMF$ cân tại N, suy ra NF = NM.

Góc E là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn nên:

$$\hat{E} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{AC} - sđ\,\overset{\frown}{BM}}{2} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{BC} - sđ\,\overset{\frown}{BM}}{2} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{MC}}{2} \quad (3)$$

Góc $M_2$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung nên $\widehat{M_2} = \dfrac{sđ\,\overset{\frown}{MC}}{2}$ . (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\hat{E} = \widehat{M_2}$ , dẫn tới $\hat{E} = \widehat{M_1}$ (vì $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ )

Do đó $\Delta NME$ cân, suy ra NE = NM tại N. Do vậy NE = NF. Vậy N là trung điểm của EF

*Ngày 10/1/2019*

*Tổng hợp: TOÁN HỌA*

*0986 915 960*