LỜI NÓI ĐẦU

Chúng tôi biên soạn quyển sách này, chủ yếu là giải các bài tập trong sách giáo khoa Giải tích 12 qua đó giúp cho các em học sinh lớp 12 phát huy khả năng tự học và tự mình giải được các bài tập liên hệ một cách có hệ thống và chính xác. Quyển sách được trình bày với các nội dung sau:

1. Tóm tắt giáo khoa:

Tóm tắt các kiến thức cơ bản trong từng chương gồm: các khái niệm, định nghĩa, định lí, các công thức để giải được các bài tập liên hệ.

2. Hướng dẫn giải các bài tập tự luận và các câu hỏi trắc nghiệm khách quan trong sách giáo khoa.

Chúng tôi hi vọng rằng, với nội dung được trình bày trong quyển sách này sẽ là tài liệu rất cần thiết, là điểm tựa giúp cho các em học sinh phát huy một cách có hiệu quả khả năng tự học của mình.

TÁC GIẢ

b) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 2$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = x^2 + 6x - 7$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -7$

x	$-\infty$		-7		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗		↘		↗	

Vậy hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; -7)$, $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-7; 1)$.

c) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ hoặc $x = 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$.

d) $y = -x^3 + x^2 - 5$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = -3x^2 + 2x = x(-3x + 2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \frac{2}{3}$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y		↘		↗		↘	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ và nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty; 0)$, $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Bài 2

Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số:

a) $y = \dfrac{3x+1}{1-x}$ b) $y = \dfrac{x^2-2x}{1-x}$

c) $y = \sqrt{x^2-x-20}$ d) $y = \dfrac{2x}{x^2-9}$

Giải

a) $y = \dfrac{3x+1}{1-x}$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Đạo hàm $y' = \dfrac{4}{(1-x)^2} > 0, \forall x \neq 1$

Suy ra hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ và không có khoảng nghịch biến.

b) $y = \dfrac{x^2-2x}{1-x}$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Đạo hàm $y' = \dfrac{-x^2+2x-2}{(1-x)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ và không có khoảng đồng biến.

c) $y = \sqrt{x^2-x-20}$

Điều kiện $x^2 - x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -4$ hoặc $x \geq 5$

Đạo hàm $y' = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-20}}$ $(x < -4$ hoặc $x > 5)$, y' cùng dấu với $2x - 1$.

x	$-\infty$		-4		5		$+\infty$
y'		$-$	‖		‖	$+$	
y		↘	0		0	↗	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -4)$ và nghịch biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

d) $y = \dfrac{2x}{x^2-9}$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

Đạo hàm $y' = \dfrac{-2(x^2+9)}{(x^2-9)^2} < 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$, $(3; +\infty)$.

Bài 3

Chứng minh rằng hàm số $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Giải

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↘		↗		↘	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$.

Bài 4

Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Giải

Điều kiện $2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

Đạo hàm $y' = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$ $(0 < x < 2)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		2
y'	‖	$+$	0	$-$	‖
y	0	↗	1	↘	0

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Bài 5

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\tan x > x \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ b) $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3} \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

Giải

a) Chứng minh $\tan x > x$, với mọi $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Viết bất đẳng thức dưới dạng: $\tan x - x > 0$

Xét hàm số: $f(x) = \tan x - x$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Ta có: $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$, $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Suy ra hàm số đồng biến trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó: $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow \tan x - x > 0$ (vì $f(0) = 0$)

Vậy: $\tan x > x$, $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

b) Chứng minh $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$, $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức:

$$\tan x - \frac{x^3}{3} - x > 0$$

Gọi $g(x) = \tan x - \dfrac{x^3}{3} - x$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $g'(x) = 1 + \tan^2 x - \dfrac{x^2}{2} - 1 = \tan^2 x - \dfrac{x^2}{2}$

$g''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x) - x = \tan x + 2\tan^3 x + (\tan x - x) \geq 0$, $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Như thế hàm số $g'(x)$ đồng biến trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow g'(x) \geq g'(0) = 0$, vì $g'(0) = 0$.

Với điều kiện đó, hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Suy ra $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow \tan x - \dfrac{x^3}{3} - x > 0 \Leftrightarrow \tan x > \dfrac{x^3}{3} + x$

Vậy $\tan x > \dfrac{x^3}{3} + x$, với mọi $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in \mathscr{D}$.

a) x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$, nếu tồn tại một khoảng $(a; b) \subset \mathscr{D}$ chứa điểm x_0 sao cho:

$$f(x) < f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$. Ta viết $y_{CĐ} = f(x_0)$.

b) x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$, nếu tồn tại một khoảng $(a; b) \subset \mathscr{D}$ chứa điểm x_0 sao cho:

$$f(x) > f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$. Ta viết $y_{CT} = f(x_0)$.

Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị của hàm số tại các điểm cực trị được gọi là cực trị của hàm số. Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số $f(x)$ thì ta nói hàm số đạt cực trị tại điểm x_0.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lí 1:

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và đạt cực trị tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý:

Nếu $f'(x_0) = 0$ thì hàm số $f(x)$ có thể không đạt cực trị tại điểm x_0.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí 2: (Dấu hiệu 1)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 (có thể trừ điểm x_0).

a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Định lí 3: (Dấu hiệu 2)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 sao cho $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$.

a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f(x) đạt cực đại tại điểm x_0.

b) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f(x) đạt cực tiểu tại điểm x_0.

B. BÀI TẬP

Bài 1

Áp dụng quy tắc I, hãy tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$

b) $y = x^4 + 2x^2 - 3$

c) $y = x + \dfrac{1}{x}$

d) $y = x^3(1 - x)^2$

e) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$

Giải

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x = -3 \text{ hoặc } x = 2)$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗	71 CĐ	↘	−54 CT	↗	

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm x = −3 và đạt cực tiểu tại điểm x = 2.

b) $y = x^4 + 2x^2 - 3$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Do $x^2 + 1 > 0, \ \forall x$ nên y' cùng dấu với 4x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		−	0	+	
y		↘	−3 CT	↗	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại điểm x = 0.

c) $y = x + \dfrac{1}{x}$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Đạo hàm: $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ hoặc } x = 1)$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗	-2 CĐ	↘	‖	↘	2 CT	↗	

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

d) $y = x^3(1 - x)^2$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = x^2(5x^2 - 8x + 3)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2(5x^2 - 8x + 3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3}{5} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Chú ý rằng khi $x \neq 0$ thì y' cùng dấu với $5x^2 - 8x + 3$.

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
y'		+	0	+	0	−	0	+	
y		↗		↗	CĐ	↘	CT	↗	

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \dfrac{3}{5}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Nhận xét: Hàm số có $y'(0) = 0$, nhưng không đạt cực trị tại điểm này, vì đạo hàm không đổi dấu.

e) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, vì $x^2 - x + 1 > 0,\ \forall x$

Đạo hàm: $y' = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Nhận thấy y' cùng dấu với $2x - 1$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	
y		$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = \frac{1}{2}$.

Bài 2

Áp dụng quy tắc II, hãy tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 2x^2 + 1$ b) $y = \sin 2x - x$

c) $y = \sin x + \cos x$ d) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$

Giải

a) $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x = 0,\ x = -1,\ x = 1)$

$f''(x) = 4(3x^2 - 1)$

Suy ra $f''(0) = -4 < 0$, $f''(\pm 1) = 8 > 0$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ và đạt cực tiểu tại hai điểm $x = \pm 1$.

b) $y = f(x) = \sin 2x - x$.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = 2\cos 2x - 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$$

Đạo hàm cấp hai $f''(x) = -4\sin 2x$.

- $f''\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -2\sqrt{3} < 0$

  $\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

- $f''\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = 2\sqrt{3} > 0$

  $\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) $y = f(x) = \sin x + \cos x$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Ta có: $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, suy ra $f'(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đạo hàm cấp hai $f''(x) = -\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

- $f''\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) = -\sqrt{2} < 0$

  $\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

- $f''\left(-\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right) = \sqrt{2} > 0$

  $\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

d) $y = f(x) = x^5 - x^3 - 2x + 1$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2 = (x - 1)(x + 1)(5x^2 + 2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Đạo hàm cấp hai: $f''(x) = 20x^3 - 6x = 2x(10x^2 - 3)$

Suy ra: $f''(1) = 14 > 0$ và $f''(-1) = -14 < 0$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Bài 3

Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{|x|}$ không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng vẫn đạt cực tiểu tại điểm đó.

Giải

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Gọi $y = f(x) = \sqrt{|x|}$.

- Khi $\Delta x > 0$:

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt{\Delta x} - 0 = \sqrt{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty$$

• Khi $\Delta x < 0$:

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt{-\Delta x} - 0 = \sqrt{-\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{\sqrt{-\Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-}\left(-\frac{1}{\sqrt{-\Delta x}}\right) = -\infty$$

Như vậy đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 0$ không tồn tại.

Nhưng ta luôn có:

$f(x) = \sqrt{|x|} \geq 0, \forall x$, và đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

Suy ra, hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

Vậy hàm số $y = \sqrt{|x|}$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$, nhưng vẫn đạt cực tiểu tại điểm đó.

Bài 4

Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số

$$y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$$

luôn luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Giải

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 2mx - 2$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2mx - 2 = 0$ (*)

Dễ thấy phương trình (*) có hai nghiệm số phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ và y' đổi dấu khi x vượt qua hai nghiệm này.

Vậy với mọi m hàm số luôn có một cực đại và một cực tiểu.

Bài 5

Tìm a và b để các cực trị của hàm số

$$y = \frac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$$

đều là những số dương và $x_0 = -\frac{5}{9}$ là điểm cực đại.

Giải

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Gọi $y = f(x) = \frac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$.

Đạo hàm: $y' = f'(x) = 5a^2x^2 + 4ax - 9$

- Nếu $x_0 = -\dfrac{5}{9}$ là điểm cực đại của hàm số thì ta có:

$$f'\left(-\frac{5}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{125}{81}a^2 - \frac{20}{9}a - 9 = 0 \Leftrightarrow \left(a = \frac{81}{25} \text{ hoặc } a = -\frac{9}{5}\right)$$

- Nếu $a = \dfrac{81}{25}$ thì $f(x) = \dfrac{2187}{125}x^3 + \dfrac{162}{25}x^2 - 9x + b$

và $f'(x) = \dfrac{6561}{125}x^2 + \dfrac{324}{25}x - 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6561}{125}x^2 + \frac{324}{25}x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{25}{81} \text{ hoặc } x = -\frac{5}{9}\right)$$

Lập bảng xét dấu, ta suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -\dfrac{5}{9}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = \dfrac{25}{81}$.

Ta có: $y_{CT} = f\left(\dfrac{25}{81}\right) = -\dfrac{400}{243} + b$

Do đó $y_{CĐ}$ và y_{CT} đều dương khi và chỉ khi

$$y_{CT} > 0 \Leftrightarrow -\frac{400}{243} + b > 0 \Leftrightarrow b > \frac{400}{243}$$

- Nếu $a = -\dfrac{9}{5}$ thì $f(x) = \dfrac{27}{5}x^3 - \dfrac{18}{5}x^2 - 9x + b$

và $f'(x) = \dfrac{81}{5}x^3 - \dfrac{36}{5}x - 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{81}{5}x^3 - \frac{36}{5}x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left(x = 1 \text{ hoặc } x = -\frac{5}{9}\right)$$

Lập bảng xét dấu, ta suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -\dfrac{5}{9}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Ta có: $y_{CT} = f(1) = -\dfrac{36}{5} + b$

Do đó $y_{CĐ}$ và y_{CT} đều dương khi và chỉ khi:

$$y_{CT} > 0 \Leftrightarrow -\frac{36}{5} + b > 0 \Leftrightarrow b > \frac{36}{5}$$

Vậy: $a = \dfrac{81}{25}$ và $b > \dfrac{400}{243}$ hoặc $a = -\dfrac{9}{5}$ và $b > \dfrac{36}{5}$

Bài 6

Xác định giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Giải

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ có đạo hàm:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2},$$

Nếu f(x) đạt cực đại tại điểm x = 2 thì ta có:

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{m^2 + 4m + 3}{(2 + m)^2} = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 3 = 0, (m \neq -2)$$

$$\Leftrightarrow (m = -1 \text{ hoặc } m = -3)$$

Kiểm tra lại, ta chỉ nhận giá trị m = –3.

Vậy nếu m = –3 thì hàm số đạt cực đại tại điểm x = 2.

§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hàm số y = f(x) xác định trên tập $\mathcal{D}$.

a) Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên $\mathcal{D}$ nếu:

- $f(x) \leq M$ với mọi $x \in \mathcal{D}$.
- Tồn tại một số $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x_0) = M$.

  Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in \mathcal{D}} f(x)$

b) Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) trên $\mathcal{D}$ nếu:

- $f(x) \geq m$ với mọi $x \in \mathcal{D}$
- Tồn tại một số $x_1 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x_1) = m$.

  Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in \mathcal{D}} f(x)$

2. Cách tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) ***Trường hợp 1:*** f(x) là hàm số liên tục trên khoảng (a; b).

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng (a; b), rồi dựa vào bảng biến thiên mà kết luận.

Nếu trên khoảng (a; b) hàm số có một cực trị duy nhất là cực đại (hoặc cực tiểu) tại điểm x_0 thì $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số đã cho trên khoảng (a; b).

b) ***Trường hợp 2:*** f(x) là hàm số liên tục trên đoạn [a; b].

Ta có thể dùng trường hợp 1 để giải bài toán này, tuy nhiên ta có thể giải theo cách sau:

- Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng (a; b) mà đạo hàm f'(x) bằng 0 hoặc không xác định.
- Tính các giá trị $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.
- *Kết luận:* Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên, ta được:

$$M = \max_{[a;b]} f(x) \quad \text{và} \quad m = \min_{[a;b]} f(x)$$

B. BÀI TẬP

Bài 1

Tính giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên các đoạn [–4; 4] và [0; 5]

b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên các đoạn [0; 3] và [2; 5].

c) $y = \dfrac{2-x}{1-x}$ trên các đoạn [2; 4] và [–3; –2]

d) $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn [–1; 1]

Giải

a) Gọi $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ hoặc } x = 3)$$

* Trên đoạn [–4; 4]:

Xét các giá trị: $f(-1) = 40$, $f(3) = 8$, $f(-4) = -41$, $f(4) = 15$

Suy ra: $\max\limits_{x\in[-4;4]} y = f(-1) = 40$ và $\min\limits_{x\in[-4;4]} y = f(-4) = -41$

* Trên đoạn [0; 5]:

Xét các giá trị: $f(1) = 24$, $f(3) = 8$, $f(5) = 40$

Suy ra: $\max\limits_{x\in[0;5]} y = f(5) = 40$ và $\min\limits_{x\in[0;5]} y = f(3) = 8$

b) Gọi $y = f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 6x = x(2x^2 - 3)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

* Trên đoạn [0; 3]:

Dựa vào bảng biến thiên ta kết luận:

Hàm số có $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 4$. Hàm số không tồn tại giá trị nhỏ nhất.

b) Gọi $y = f(x) = 4x^3 - 3x^4$.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = 12x^2 - 12x^3 = 12x^2(1 - x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ hoặc } x = 1)$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	+	0	−	
y	$-\infty$	↗		↗	1 CĐ	↘	$-\infty$

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(1) = 1$. Hàm số không tồn tại giá trị nhỏ nhất.

Bài 5

Tính giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = |x|$ b) $y = x + \dfrac{4}{x}$ $(x > 0)$

Giải

a) Gọi $y = f(x) = |x|$.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Ta luôn có: $f(x) = |x| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$

Vậy: $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 0$

b) Gọi $y = f(x) = x + \dfrac{4}{x},\ x \in (0; +\infty)$.

Ta có : $y' = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

x	0		2		$+\infty$
y'	‖	−	0	+	
y	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(2) = 4$.

§4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{hoặc } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \text{ hoặc } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

2. Tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$$

B. BÀI TẬP

Bài 1

Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số:

a) $y = \dfrac{x}{2-x}$ b) $y = \dfrac{-x+7}{x+1}$

c) $y = \dfrac{2x-5}{5x-2}$ d) $y = \dfrac{7}{x} - 1$

Giải

a) $y = \dfrac{x}{2-x}$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

* $\lim\limits_{x\to 2^+} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} y = +\infty$. Suy ra đồ thị có tiệm cận đứng $x = 2$.

* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{x} - 1\right)} = -1$. Vậy đồ thị có tiệm cận ngang $y = -1$.

b) $y = \dfrac{-x+7}{x+1}$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

* $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = -\infty$. Suy ra đồ thị có tiệm cận đứng $x = -1$.

* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-1+\dfrac{7}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = -1$. Vậy đồ thị có tiệm cận ngang $y = -1$.

c) $y = \dfrac{2x-5}{5x-2}$

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{5}\right\}$

Ta có: * $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{5}\right)^+} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{5}\right)^-} y = +\infty$

$$* \lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{5}{x}}{5-\frac{2}{x}} = \frac{2}{5}$$

Vậy đồ thị có tiệm cận đứng $x = \dfrac{2}{5}$ và tiệm cận ngang $y = \dfrac{2}{5}$.

d) $y = \dfrac{7}{x} - 1$

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

* $\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} y = -\infty$

$$* \lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{7}{x}-1\right) = -1$$

Vậy đồ thị có tiệm cận đứng $x = 0$ và tiệm cận ngang $y = -1$.

Bài 2

Tìm các tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số:

a) $y = \dfrac{2-x}{9-x^2}$

b) $y = \dfrac{x^2+x+1}{3-2x-5x^2}$

c) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

d) $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

Giải

a) $y = \dfrac{2-x}{9-x^2} \Leftrightarrow y = \dfrac{x-2}{x^2-9}$

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{-3; 3\}$

Ta có: * $\lim\limits_{x\to 3^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 3^-} y = -\infty$

$\lim\limits_{x\to(-3)^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-3)^-} y = -\infty$

$$* \lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}} = 0$$

Vậy đồ thị có hai tiệm cận đứng $x = -3$, $x = 3$ và một tiệm cận ngang $y = 0$.

b) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{3 - 2x - 5x^2}$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1; \frac{3}{5}\}$

Ta có: * $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{5}\right)^+} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{5}\right)^-} y = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x} - 5} = -\dfrac{1}{5}$

Vậy đồ thị có hai tiệm cận đứng $x = -1$, $x = \frac{3}{5}$ và một tiệm cận ngang $y = -\frac{1}{5}$.

c) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Ta có: * $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\infty$

Vậy đồ thị có tiệm cận đứng $x = -1$ và không có tiệm cận ngang.

d) $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

Tập xác định : $\mathscr{D} = [0; +\infty)\setminus\{1\}$

Ta có: * $\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$

Vậy đồ thị có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang bên phải $y = 1$.

§5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Sơ đồ khảo sát hàm số:

Tuần tự thực hiện các bước sau:

1. Tập xác định:

Tìm tập xác định của hàm số.

2. Sự biến thiên:

* Xét chiều biến thiên của hàm số:

– Tính đạo hàm y';

– Tìm các điểm tại đó đạo hàm y' bằng 0 hoặc không xác định;

– Xét dấu đạo hàm y' và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

* Tìm cực trị.

* Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).

* Lập bảng biến thiên.

3. Đồ thị:

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.

B. BÀI TẬP

Bài 1

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc ba sau:

a) $y = 2 + 3x - x^3$ b) $y = x^3 + 4x^2 + 4x$

c) $y = x^3 + x^2 + 9x$ d) $y = -2x^3 + 5$

Giải

a) Hàm số $y = 2 + 3x - x^3$.

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = 3(1 - x^2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$

Suy ra:

$y' < 0$ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$.

y' > 0 khi x ∈ (–1; 1). Hàm số đồng biến trên khoảng (–1; 1).

• Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x = –1, y_{CT} = 0 và đạt cực đại tại điểm x = 1, $y_{CĐ}$ = 4.

• Các giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}-1\right) = -\infty \text{ và } \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}-1\right) = +\infty$$

• Bảng biến thiên:

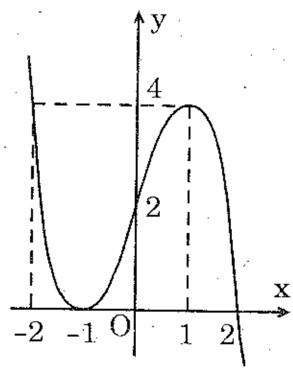
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

3) Đồ thị:

Vì $2 + 3x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc x = 2 nên (–1; 0) và (2; 0) là giao điểm của đồ thị và trục hoành.

Khi x = 0 thì y = 2 nên đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; 2). Điểm (0; 2) là tâm đối xứng của đồ thị.

Đồ thị của hàm số có dạng như hình bên.



b) $y = x^3 + 4x^2 + 4x$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 8x + 4$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 8x + 4 \Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = -\frac{2}{3}.$$

y' > 0 khi x ∈ (–?; –2) ∪ $(-\frac{2}{3};+\infty)$. Hàm số đồng biến trên các khoảng (–?; –2) ∪ $(-\frac{2}{3};+\infty)$.

y' < 0 khi x ∈ $(-2;-\frac{2}{3})$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;-\frac{2}{3})$.

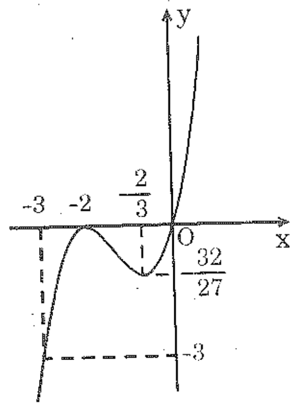
• Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -\frac{2}{3}, y_{CT} = -\frac{32}{27}$ và đạt cực đại tại điểm x = –2, $y_{CĐ}$ = 0.

• Các giới hạn:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right) = -\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$\frac{32}{27}$	↗	$+\infty$



3) Đồ thị:

Gốc tọa độ O và điểm (−2; 0) là giao điểm của đồ thị và trục hoành.

c) $y = x^3 + x^2 + 9x$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 2x + 9 > 0,\ \forall x$

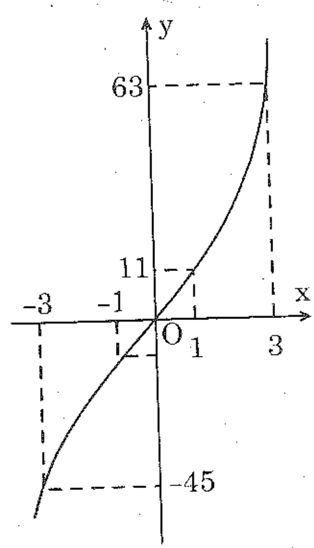
Suy ra, hàm số đồng biến trên toàn tập xác định $\mathbb{R}$. Như thế hàm số không có cực trị.

• Các giới hạn:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{9}{x^2}\right) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{9}{x^2}\right) = -\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

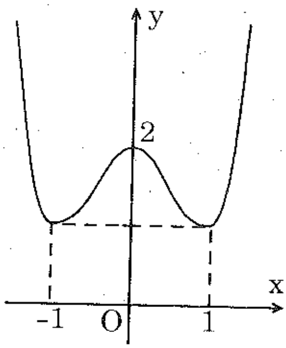


3) Đồ thị:

Gốc tọa độ O là giao điểm của đồ thị và trục hoành.

g biến thiên:

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

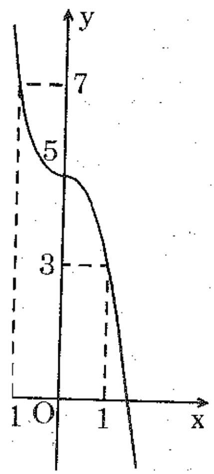


:. Như thế hàm

hị:

và cắt trục tung tại điểm (0; 2). Hàm
$- 2x^2 + 2$ là một hàm số chẵn nên đồ
trục tung làm trục đối xứng.

$-2 + \frac{5}{x^2}\Big) = +\infty$



$^4 + x^2 - \frac{3}{2}$

xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

iến thiên:

biến thiên: $y' = 2x^3 + 2x = 2x(x^2 + 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

khi $x \in (-\infty; 0)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng

hi $x \in (0; +\infty)$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(0; +\infty)$

bậc bốn sau:

$+ 2$

ị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $y_{CT} = -\frac{3}{2}$.

ạn:

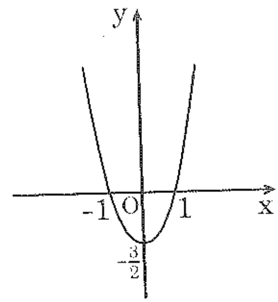
$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x^4}\right) = +\infty$$

biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

n các khoảng

3) Đồ thị:



Đồ thị và cắt trục tung tại điểm $(0; -\frac{3}{2})$ và cắt trục hoành tại hai điểm (–1; 0), (0; 1).

Hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}$ là một hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

d) $y = -2x^2 - x^4 + 3$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = -4x - 4x^3 = -4x(1 + x^2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x(1 + x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Dễ thấy khi $x \neq 0$ thì y' cùng dấu với $-4x$.

$y' > 0$ khi $x \in (-\infty; 0)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

$y' < 0$ khi $x \in (0; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

• Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$, $y_{CĐ} = 3$ và không đạt cực tiểu.

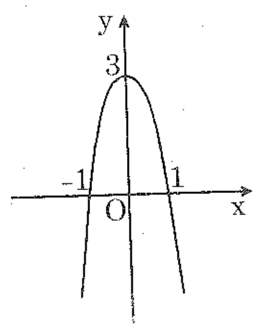
• Giới hạn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4\left(-1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right) = -\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	0	–	
y	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

3) Đồ thị:

Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; 3) và cắt trục hoành tại hai điểm (–1; 0), (1; 0).



Hàm số $y = -2x^2 - x^4 + 3$ là một hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

Bài 3

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số phân thức:

a) $y = \frac{x+3}{x-1}$ b) $y = \frac{1-2x}{2x-4}$ c) $y = \frac{-x+2}{2x+1}$

Giải

a) $y = \dfrac{x+3}{x-1}$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = \dfrac{-4}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$

• Cực trị: Hàm số không có cực trị.

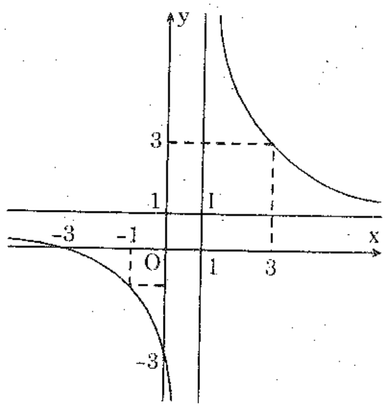
• Giới hạn:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{1}{x}} = 1 \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận ngang y = 1.

$\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận đứng x = 1.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	1 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘ 1



3) Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; −3) cắt trục hoành tại điểm (−3; 0).

Giao điểm I(1; 1) của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.

b) $y = \dfrac{1-2x}{2x-4}$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = \dfrac{6}{(2x-4)^2} > 0, \forall x \neq 2$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$

• Hàm số không có cực trị.

• Giới hạn:

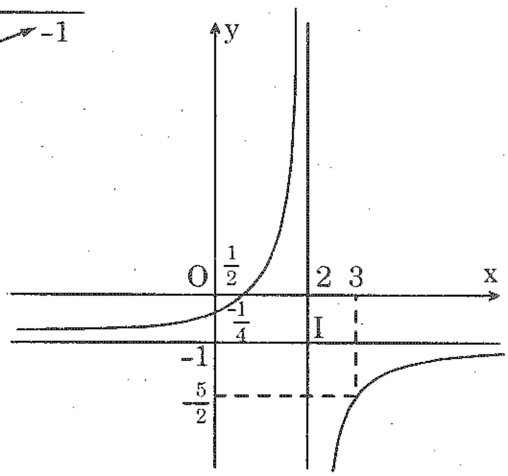
$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}-2}{2-\frac{4}{x}} = -1 \Rightarrow \text{đồ thị có tiệm cận ngang } y = -1.$$

$\lim\limits_{x\to 2^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} y = +\infty \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận đứng $x = 2$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	-1 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ -1

3) Đồ thị cắt trục tung tại điểm $\left(0;-\frac{1}{4}\right)$, cắt trục hoành tại điểm $\left(\frac{1}{2};0\right)$. Giao điểm I(2; -1) của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.



c) $y = \frac{-x+2}{2x+1}$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

2) Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = \frac{-5}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq -\frac{1}{2}$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2};+\infty)$

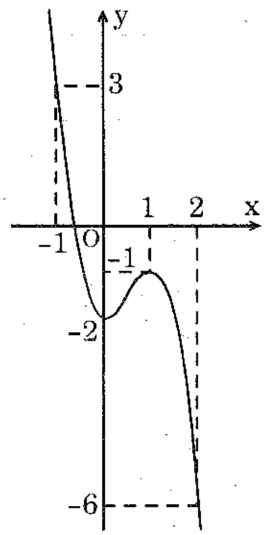
- Hàm số không có cực trị.
- Giới hạn:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{đồ thị có tiệm cận ngang } y = -\frac{1}{2}.$$

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} y = -\infty \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận đứng $x = -\frac{1}{2}$.

3. Đồ thị:

Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; –2) và có tâm đối xứng là điểm $I\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$.



Dựa vào đồ thị ta thấy, đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất, ta suy ra phương trình:

$$-2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

có một nghiệm duy nhất thuộc khoảng (–1; 0).

c) Ta có $2x^2 - x^4 = -1 \Leftrightarrow 2x^2 - x^4 + 1 = 0$

Ta xét hàm số $y = 2x^2 - x^4 + 1$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm 1$$

Suy ra:

$y' > 0$ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$.

$y' < 0$ khi $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$.

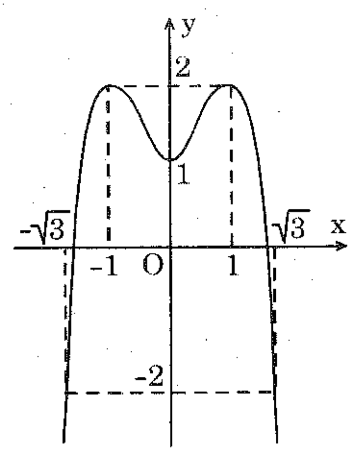
- Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $y_{CT} = 1$ và đạt cực đại tại điểm $x = \pm 1$, $y_{CĐ} = 2$.

- Giới hạn:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(\frac{2}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^4}\right) = -\infty$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	0	–	
y	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$



3) Đồ thị:

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm (0; 1). Hàm số $y = 2x^2 - x^4 + 1$ là một hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

Dựa vào đồ thị ta thấy, đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt, do đó phương trình:

$$2x^2 - x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x^4 = -1$$

có hai nghiệm phân biệt.

Bài 5

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = -x^3 + 3x + 1.$$

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận về số nghiệm của phương trình sau theo tham số m

$$x^3 - 3x + m = 0.$$

Giải

a) Khảo sát hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = 3(1 - x^2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$

Suy ra:

$y' < 0$ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$.

$y' > 0$ khi $x \in (-1; 1)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

• Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$, $y_{CT} = -1$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1$, $y_{CĐ} = 3$.

• Giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(-1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty \text{ và } \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(-1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

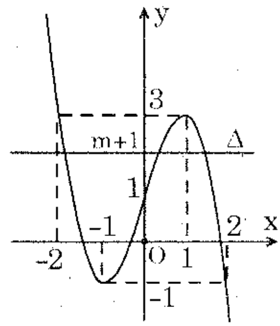
• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

3) Đồ thị:

Khi $x = 0$ thì $y = 1$ nên đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$. Điểm $(0; 1)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

b) Biện luận số nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + m = 0$.



Ta có: $x^3 - 3x + m = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x + 1 = m + 1$

Do đó số nghiệm của phương trình đã cho là số điểm chung của đồ thị (C) và đường thẳng Δ: $y = m + 1$.

Dựa vào đồ thị ta có kết quả sau:

+ Nếu $m + 1 < -1 \Leftrightarrow m < -2$ thì phương trình có một nghiệm.
+ Nếu $m + 1 = -1 \Leftrightarrow m = -2$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.
+ Nếu $-1 < m + 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ thì phương trình có ba nghiệm phân biệt.
+ Nếu $m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.
+ Nếu $m + 1 > 3 \Leftrightarrow m > 2$ thì phương trình có một nghiệm.

Bài 6

Cho hàm số

$$y = \frac{mx - 1}{2x + m}$$

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b) Xác định m để tiệm cận đứng của đồ thị đi qua $A(-1; \sqrt{2})$.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 2.

Giải

a) Xét hàm số $y = \dfrac{mx - 1}{2x + m}$.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$

Đạo hàm: $y' = \dfrac{m^2 + 2}{(2x + m)^2} > 0, \forall x \neq -\dfrac{m}{2}$

Vậy hàm số $y = \dfrac{mx - 1}{2x + m}$ luôn đồng biến trên các khoảng xác định của nó là $\left(-\infty; -\dfrac{m}{2}\right), \left(-\dfrac{m}{2}; +\infty\right)$.

b) Do $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{m}{2}\right)^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{m}{2}\right)^+} y = +\infty$ nên đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{m}{2}$.

Tiệm cận đứng này đi qua điểm $A(-1; \sqrt{2})$ khi và chỉ khi:

$$-\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$$

c) Khi m = 2, phương trình của hàm số trở thành $y = \frac{2x-1}{2x+2}$.

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = \frac{6}{(2x+2)^2} > 0, \forall x \neq -1$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$.

• Hàm số không có cực trị.

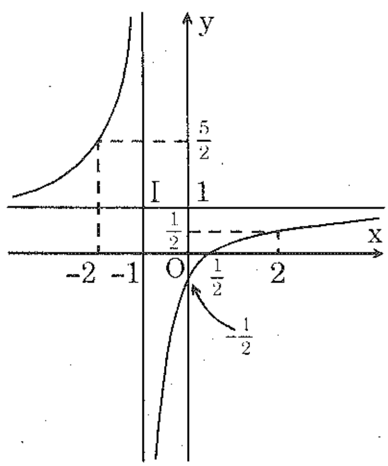
• Giới hạn:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{2}{x}} = 1 \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận ngang y = 1.

$\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to (-1)^-} y = +\infty \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận đứng x = −1.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	1	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	1



3) Đồ thị cắt trục tung tại điểm $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$, cắt trục hoành tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Giao điểm I(−1; 1) của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.

Bài 7

Cho hàm số

$$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + m$$

a) Với giá trị nào của tham số m, đồ thị của hàm số đi qua điểm (–1; 1)?

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 1.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng $\frac{7}{4}$.

Giải

a) Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + m$.

Đồ thị (C_m) đi qua điểm (–1; 1) khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$$

Vậy giá trị của m cần tìm là $m = \frac{1}{4}$.

b) Khi m = 1, phương trình của hàm số trở thành $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1$.

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = x^3 + x = x(x^2 + 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Khi $x \neq 0$ thì y' cùng dấu với x.

Suy ra:

$y' < 0$ khi $x \in (-\infty; 0)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

$y' > 0$ khi $x \in (0; +\infty)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x = 0, $y_{CT} = 1$ và không có cực đại.
- Giới hạn:

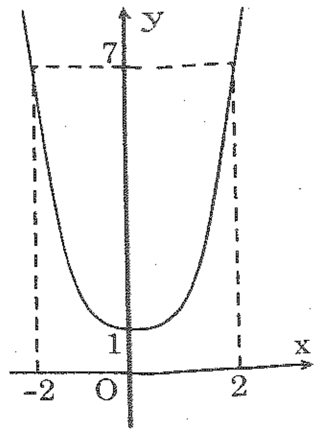
$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} x^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		–	0	+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3) Đồ thị:

Đồ thị và cắt trục tung tại điểm (0; 1).



Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1$ là một hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

c) $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1$ (C)

Gọi A là điểm trên (C) có tung độ $y = \frac{7}{4}$.

Phương trình định hoành độ điểm A:

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A có dạng:

$$y = y'(x_A)(x - x_A) + y_A \qquad (*)$$

• Với $A\left(1; \frac{7}{4}\right)$

Ta có: $y' = x^3 + x \Rightarrow y'(1) = 2$

Thế vào (*) ta được phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là:

$$y = 2(x-1) + \frac{7}{4} \Leftrightarrow y = 2x - \frac{1}{4}$$

• Với $A\left(-1; \frac{7}{4}\right)$

Ta có: $y'(-1) = -2$

Thế vào (*) ta được phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là:

$$y = -2(x+1) + \frac{7}{4} \Leftrightarrow y = -2x - \frac{1}{4}$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm, phương trình là:

$$y = 2x - \frac{1}{4} \text{ và } y = -2x - \frac{1}{4}$$

Bài 8

Cho hàm số

$$y = x^3 + (m + 3)x^2 + 1 - m \text{ (m là tham số)}$$

có đồ thị là (C_m).

a) Xác định m để hàm số có điểm cực đại là $x = -1$.

b) Xác định m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại điểm $x = -2$.

x	$-\infty$		$-\frac{m}{2}$		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	

Điều kiện để hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ là:

$$y' \geq 0,\ \forall x \in (-1;+\infty) \Leftrightarrow -\frac{m}{2} \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 2$$

(ii) Định m để hàm số có cực trị trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Điều kiện để hàm số có cực trị trên khoảng $(-1; +\infty)$ là:

$$-1 < -\frac{m}{2} \Leftrightarrow m < 2$$

c) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành:

$$2x^2 + 2mx + m - 1 = 0\ (*)$$

Biệt thức: $\Delta' = m^2 - 2m + 2 = (m - 1)^2 + 1 > 0,\ \forall m$

Suy ra phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt. Vậy với mọi
, đồ thị (C_m) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

ài 6

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$$

b) Giải bất phương trình $f'(x - 1) > 0$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ
biết rằng $f''(x_0) = -6$.

Giải

Khảo sát hàm số:

) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

) Sự biến thiên:

Chiều biến thiên: $y' = -3x^2 + 6x + 9 = 3(-x^2 + 2x + 3)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ hoặc } x = 3)$$

uy ra:

< 0 khi $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên các
ng $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$.

> 0 khi $x \in (-1; 3)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$, $y_{CT} = -3$ và đạt cực
ại điểm $x = 3$, $y_{CĐ} = 29$.

ược.
của

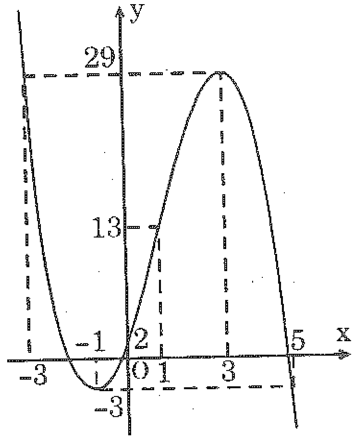
• Các giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(-1+\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

và $$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(-1+\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right) = +\infty$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	29	↘	$-\infty$



3) Đồ thị:

Đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm (0; 2), nhận điểm I(1; 13) làm tâm đối xứng.

b) Giải bất phương trình $f'(x-1) > 0$.

Ta có: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$

Suy ra: $f'(x-1) > 0 \Leftrightarrow -3(x-1)^2 + 6(x-1) + 9 > 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 2(x-1) - 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$

Vậy: $0 < x < 4$

c) Ta có: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 \Rightarrow f''(x) = -6x + 6$

Do đó $f''(x_0) = -6 \Leftrightarrow -6x_0 + 6 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 2$

$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 24$ và $f'(2) = 9$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x_0 là:

$$y = 9(x-2) + 24 \Leftrightarrow y = 9x + 6$$

Bài 7

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = x^3 + 3x^2 + 1.$$

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận số nghiệm của phương trình sau theo m.

$$x^3 + 3x^2 + 1 = \frac{m}{2}$$

c) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C).

Giải

a) Khảo sát hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ hoặc } x = -2)$$

Suy ra:

$y' > 0$ khi $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(0; +\infty)$.

$y' < 0$ khi $x \in (-2; 0)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

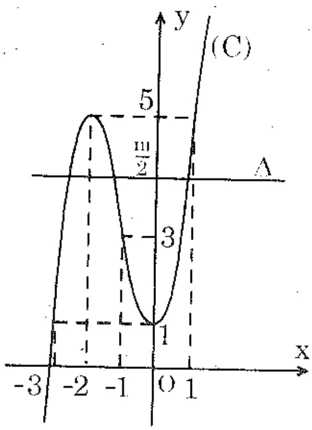
• Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $y_{CT} = 1$ và đạt cực đại tại điểm $x = -2$, $y_{CĐ} = 5$.

• Các giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty \text{ và } \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$



3) Đồ thị:

Đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm (0; 1), nhận điểm I(−1; 3) làm tâm đối xứng.

b) Biện luận số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 + 1 = \frac{m}{2}$ (*)

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng Δ: $y = \frac{m}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có kết luận sau:

• $m < 2$ hoặc $m > 10$ (tức là $\frac{m}{2} < 1$ hoặc $\frac{m}{2} > 5$): phương trình (*) có một nghiệm.

- $m = 2$ (tức là $\frac{m}{2} = 1$): phương trình (*) có hai nghiệm.
- $2 < m < 10$ (tức là $1 < \frac{m}{2} < 5$) : phương trình (*) có ba nghiệm.
- $m = 10$ (tức là $\frac{m}{2} = 5$) : phương trình (*) có hai nghiệm.

c) Điểm cực đại và cực tiểu của (C) là A(–2; 5), B(0; 1).

Phương trình của đường thẳng qua A và B là $y = -2x + 1$.

Bài 8

Cho hàm số

$$f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1 \text{ (m là tham số)}$$

a) Xác định m để hàm số đồng biến trên tập xác định.

b) Với giá trị nào của tham số m, hàm số có một cực đại và một cực tiểu?

c) Xác định m để $f''(x) > 6x$.

Giải

a) Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1$.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(x) = 3(x^2 - 2mx + 2m - 1)$.

Điều kiện để hàm số đồng biến trên tập xác định là:

$f'(x) \geq 0,\ \forall x \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 1$

b) Hàm số f(x) có một cực đại và một cực tiểu khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \bullet \text{ phương trình } f'(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \\ \bullet\ f'(x) \text{ đổi dấu khi x vượt qua } x_1, x_2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Delta' = (m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

c) Ta có: $f'(x) = 3(x^2 - 2mx + 2m - 1) \Rightarrow f''(x) = 6(x - m)$

Do đó $f''(x) > 6 \Leftrightarrow 6(x - m) > 6x \Leftrightarrow m < 0$

Bài 9

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.

c) Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $x^4 - 6x^2 + 3 = m$.

Giải

a) Khảo sát hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$.

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm\sqrt{3}$$

Suy ra:

$y' < 0$ khi $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{3}), (0; \sqrt{3})$.

$y' > 0$ khi $x \in (-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{3}; 0), (\sqrt{3}; +\infty)$.

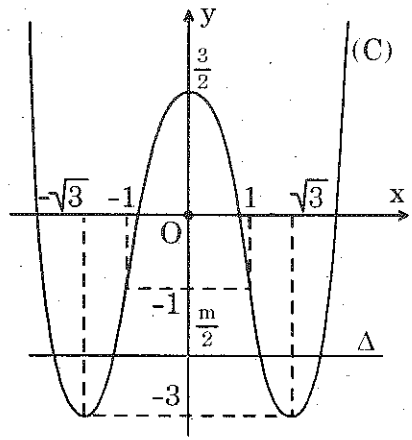
- Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = \pm\sqrt{3}$, $y_{CT} = -3$ và đạt cực đại tại điểm $x = 0$, $y_{CĐ} = \frac{3}{2}$.

- Giới hạn:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} x^4\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{2x^4}\right) = +\infty$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3	↗	$+\infty$



3) Đồ thị:

Đồ thị và cắt trục tung tại điểm $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. Hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ là một hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

b) $f'(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6(x^2 - 1)$

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.

Ta có:

- $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 6(x_0^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1 \Rightarrow y_0 = -1$
- $f'(1) = -4$, $f'(-1) = 4$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là:

$$y = -4(x - 1) - 1 \Leftrightarrow y = -4x + 3$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là:

$$y = 4(x + 1) - 1 \Leftrightarrow y = 4x + 3$$

c) Biện luận số nghiệm của phương trình $x^4 - 6x^2 + 3 = m$ (1)

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{m}{2}$ (2)

Phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng Δ: $y = \dfrac{m}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có kết luận sau:

- $m < -6$ (tức là $\dfrac{m}{2} < -3$): phương trình (1) vô nghiệm.
- $m = -6$ (tức là $\dfrac{m}{2} = -3$): phương trình (1) có hai nghiệm.
- $-6 < m < 3$ (tức là $-3 < \dfrac{m}{2} < \dfrac{3}{2}$): phương trình (1) có bốn nghiệm.
- $m = 3$ (tức là $\dfrac{m}{2} = 3$): phương trình (1) có ba nghiệm.
- $m > 3$ (tức là $\dfrac{m}{2} > 3$): phương trình (1) có hai nghiệm.

Bài 10

Cho hàm số

$$y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1 \text{ (m là tham số)}$$

có đồ thị là (C_m).

a) Biện luận theo m số cực trị của hàm số.

b) Với giá trị nào của m thì (C_m) cắt trục hoành?

c) Xác định m để (C_m) có cực đại, cực tiểu.

Giải

a) Xét hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$.

Tập xác đinh: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = -4x^3 + 4mx = 4x(-x^2 + m)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x(-x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - m = 0 \end{array}\right.$$

- $m \le 0$: $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Dễ thấy hàm số có một cực trị (cực đại) tại điểm $x = 0$.

- $m > 0$: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{array}\right.$

Suy ra hàm số có ba cực trị (đạt cực đại tại hai điểm $x = \pm\sqrt{m}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$).

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$$-x^4 + 2mx^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0 \qquad (1)$$

Đặt $X = x^2$ $(X \geq 0)$, phương trình (1) trở thành:

$$X^2 - 2mX + 2m - 1 = 0 \qquad (2)$$

Điều kiện để (C_m) cắt trục hoành là phương trình (1) có nghiệm, tức là phương trình (2) có ít nhất một nghiệm không âm.

Ta có: $\Delta' = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0, \ \forall m$

Như thế với mọi m, phương trình (2) luôn có nghiệm.

Phương trình (2) có hai nghiệm đều âm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} P = 2m - 1 > 0 \\ S = 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \varnothing$$

Suy ra, với mọi m phương trình (2) có ít nhất một nghiệm không âm.

Vậy với mọi m, đồ thị (C_m) luôn cắt trục hoành.

c) Theo câu a), nếu $m > 0$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu.

Bài 11

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = \frac{x+3}{x+1}$$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m đường thẳng $y = 2x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N.

c) Xác định m sao cho độ dài MN là nhỏ nhất.

d) Tiếp tuyến tại một điểm S bất kì của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại P và Q. Chứng minh rằng S là trung điểm của PQ.

Giải

a) Khảo sát hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$.

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

2) Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = \dfrac{-2}{(x+1)^2} < 0, \ \forall x \neq -1$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$.

- Cực trị: Hàm số không có cực trị.

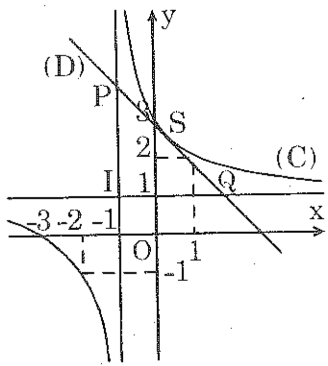
• Giới hạn:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow \text{đồ thị có tiệm cận ngang } y = 1.$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} y = +\infty,\ \lim_{x\to(-1)^-} y = -\infty \Rightarrow \text{đồ thị có tiệm cận đứng } x = -1.$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		-	‖	-	
y	1	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	1



3) Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; 3), cắt trục hoành tại điểm (–3; 0).

Giao điểm I(–1; 1) của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.

b) Gọi Δ: $y = 2x + m$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ:

$$\frac{x+3}{x+1} = 2x + m \Leftrightarrow 2x^2 + (m+1)x + m - 3 = 0\ (*)\ (x \neq -1)$$

Biệt thức: $\Delta = (m+1)^2 - 8(m-3) = m^2 - 6m + 25 = (m-3)^2 + 16 > 0,\ \forall m$

Suy ra phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy với mọi giá trị của m, đường thẳng Δ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M, N.

c) Tìm m để độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất.

Gọi $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ $(x_1 \neq -1, x_2 \neq -1)$ thì x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình (*).

Do M, N thuộc Δ nên $y_1 = 2x_1 + m$, $y_2 = 2x_2 + m$.

Ta có: $MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{5(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{5}\,|x_2 - x_1|$

$$= \sqrt{5}\,\frac{\sqrt{(m-3)^2 + 16}}{2}$$

Suy ra: $MN \geq 2\sqrt{5}$

Vậy $\min MN = 2\sqrt{5}$ khi $m = 3$.

Ghi chú: Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì ta có:

$$|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

d) Gọi hoành độ của S là $x_S = a$ $(a \neq -1)$, suy ra $y_S = \frac{a+3}{a+1}$.

Ta có: $y' = \frac{-2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(x_S) = y'(a) = \frac{-2}{(a+1)^2}$

Gọi (D) là tiếp tuyến của (C) tại điểm S, thì (D) có phương trình:

$$y = \frac{-2}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{a+3}{a+1} \Leftrightarrow y = \frac{-2}{(a+1)^2}.x + \frac{a^2+6a+3}{(a+1)^2}$$

- (D) cắt tiệm cận đứng tại P, suy ra $x_P = -1$.
- (D) cắt tiệm cận ngang tại Q, hoành độ của Q nghiệm đúng phương trình:

$$\frac{-2}{(a+1)^2}x + \frac{a^2+6a+3}{(a+1)^2} = 1 \Leftrightarrow x = 2a+1$$

Suy ra $x_Q = 2a + 1$.

Dễ thấy $x_S = \frac{x_P + x_Q}{2} = a$.

Vì ba điểm S, P, Q thẳng hàng, nên điều kiện trên chứng tỏ điểm S là trung điểm của đoạn thẳng PQ.

Bài 12

Cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6.$$

a) Giải phương trình $f'(\sin x) = 0$.

b) Giải phương trình $f''(\cos x) = 0$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.

Giải

a) Giải phương trình $f'(\sin x) = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \Rightarrow f'(x) = x^2 - x - 4$$

Do đó:

$$f'(\sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x - 4 = 0$$

Đặt $t = \sin x$ $(-1 \le t \le 1)$, ta được phương trình: $t^2 - t - 4 = 0$

Phương trình trên có nghiệm $t_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}, t_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Cả hai nghiệm đều không thích hợp. Vậy phương trình vô nghiệm.

b) $f'(x) = x^2 - x - 4 \Rightarrow f''(x) = 2x - 1$. Do đó:

$$f''(\cos x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là điểm trên đồ thị, với x_0 là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.

Ta có: $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{2}$

Suy ra $M_0\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{47}{12}\right), f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{17}{4}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại M_0 là:

$$y = -\frac{17}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{47}{12} \Leftrightarrow y = -\frac{17}{4}x + \frac{145}{24}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Chọn khẳng định đúng trong các bài sau đây:

1. Số điểm cực trị của hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - x + 7$ là:

A. 1 B. 0 C. 3 D. 2

2. Số điểm cực đại của hàm số $y = x^4 + 100$ là:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

4. Hàm số $y = \dfrac{2x-5}{x+3}$ đồng biến trên:

A. $\mathbb{R}$ B. $(-\infty; 3)$ C. $(-3; +\infty)$ D. $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$

5. Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$$

A. Song song với đường thẳng x = 1

B. Song song với trục hoành

C. Có hệ số góc dương

D. Có hệ số góc bằng –1

Giải

1. Chọn B

$y' = -x^2 - 1 < 0,\ \forall x$. Hàm số không có cực trị.

2. Chọn A

$y' = 4x^3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Suy ra hàm số đạt một cực tiểu tại điểm x = 0.

3. Chọn B

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ có một tiệm cận đứng x = –1, và một tiệm cận ngang y = –1.

4. Chọn C

Hàm số $y = \dfrac{2x-5}{x+3}$ có đạo hàm $y' = \dfrac{11}{(x+3)^2} > 0,\ \forall x \neq -3$.

Vậy hàm số đồng biến trong hai khoảng $(-\infty; -3)$, $(-3; +\infty)$.

5. Chọn B

Ta có: $y' = x^3 - 4x + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên, ta suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm x = 3.

Điểm cực tiểu của đồ thị là A(3; –5).

Suy ra tiếp tuyến tại A song song với trục hoành.

CHƯƠNG II. HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

§1. LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Lũy thừa với số mũ nguyên

1. Lũy thừa với số mũ nguyên dương

Cho a là một số thực, n là một số nguyên dương.

Lũy thừa bậc n của a, kí hiệu a^n, được xác định như sau:

- $a^1 = a$
- $a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số}}$ với $n > 1$

Số a được gọi là cơ số, số n được gọi là số mũ của lũy thừa a^n.

2. Lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm:

Cho a là một số thực khác 0 và n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa:

$$a^0 = 1;\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

II. Căn bậc n

Cho số thực a và n là một số nguyên dương.

Số b được gọi là căn bậc n của số a nếu $b^n = a$.

- Khi n lẻ, $a \in \mathbb{R}$: Tồn tại duy nhất một căn bậc n của a, kí hiệu $\sqrt[n]{a}$.
- Khi n chẵn: $\left\{\begin{array}{l} a < 0\text{: không tồn tại căn bậc n của a;} \\ a = 0\text{: có một căn bậc n của 0, đó là 0, kí hiệu } \sqrt[n]{0} = 0; \\ a > 0\text{: có hai căn bậc n của a, là hai số đối nhau.} \end{array}\right.$

Ta kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là căn số học bậc n của a), giá trị âm là $-\sqrt[n]{a}$.

Nhận xét:

– Căn bậc 1 của số a chính là a.

– Căn bậc n của số 0 là 0.

Các tính chất của căn bậc n:

Giả sử các biểu thức dưới đây đều có nghĩa:

1) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
3) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

III. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho a là một số thực dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ta định nghĩa

$$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

- Ta thường viết $a^{\frac{m}{n}}$ với $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản.
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (a > 0, n nguyên dương)

IV. Lũy thừa với số mũ vô tỉ

Cho số dương a, α là một số vô tỉ và (r_n) là một dãy số hữu tỉ sao cho $\lim r_n = \alpha$.

Khi đó ta định nghĩa:

$$\boxed{a^\alpha = \lim a^{r_n}}$$

V. Tính chất

Với $a > 0$, $b > 0$ và các số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có:

1) $a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ 2) $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$ 3) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\beta}$ 5) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$

6) * Nếu $a > 1$ thì $\alpha > \beta$ khi và chỉ khi $a^\alpha > a^\beta$.

* Nếu $0 < a < 1$ thì $\alpha > \beta$ khi và chỉ khi $a^\alpha < a^\beta$.

B. BÀI TẬP

Bài 1

Tính:

a) $9^{\frac{2}{5}}.27^{\frac{2}{5}}$ b) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$

c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 0,25^{-\frac{5}{2}}$ d) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$

Giải

a) $9^{\frac{2}{5}}.27^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{4}{5}}.3^{\frac{6}{5}} = 3^{\frac{10}{5}} = 3^2 = 9$

b) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}} = 12^{\frac{3}{2}}.3^{-\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}.2^3.3^{-\frac{3}{2}} = 3^0.2^3 = 8$

§5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Sơ đồ khảo sát hàm số:

Tuần tự thực hiện các bước sau:

1. Tập xác định:

Tìm tập xác định của hàm số.

2. Sự biến thiên:

* Xét chiều biến thiên của hàm số:

– Tính đạo hàm y';

– Tìm các điểm tại đó đạo hàm y' bằng 0 hoặc không xác định;

– Xét dấu đạo hàm y' và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

* Tìm cực trị.

* Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).

* Lập bảng biến thiên.

3. Đồ thị:

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.

B. BÀI TẬP

Bài 1

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc ba sau:

a) $y = 2 + 3x - x^3$ b) $y = x^3 + 4x^2 + 4x$

c) $y = x^3 + x^2 + 9x$ d) $y = -2x^3 + 5$

Giải

a) Hàm số $y = 2 + 3x - x^3$.

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = 3(1 - x^2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$

Suy ra:

$y' < 0$ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$.

$y' > 0$ khi $x \in (-1; 1)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

• Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$, $y_{CT} = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1$, $y_{CĐ} = 4$.

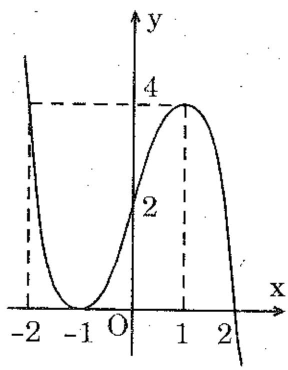
• Các giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} - 1\right) = -\infty \text{ và } \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} - 1\right) = +\infty$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

3) Đồ thị:



Vì $2 + 3x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$ nên $(-1; 0)$ và $(2; 0)$ là giao điểm của đồ thị và trục hoành.

Khi $x = 0$ thì $y = 2$ nên đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; 2)$. Điểm $(0; 2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

Đồ thị của hàm số có dạng như hình bên.

b) $y = x^3 + 4x^2 + 4x$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 8x + 4$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 8x + 4 \Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = -\frac{2}{3}.$$

$y' > 0$ khi $x \in (-?; -2) \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-?; -2) \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$.

$y' < 0$ khi $x \in (-2; -\frac{2}{3})$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; -\frac{2}{3})$.

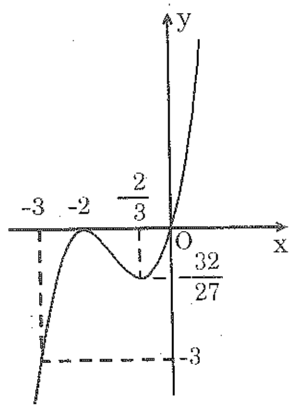
• Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -\frac{2}{3}, y_{CT} = -\frac{32}{27}$ và đạt cực đại tại điểm $x = -2$, $y_{CĐ} = 0$.

• Các giới hạn:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right) = -\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$\frac{32}{27}$	↗	$+\infty$



3) Đồ thị:

Gốc tọa độ O và điểm (–2; 0) là giao điểm của đồ thị và trục hoành.

c) $y = x^3 + x^2 + 9x$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 2x + 9 > 0,\ \forall x$

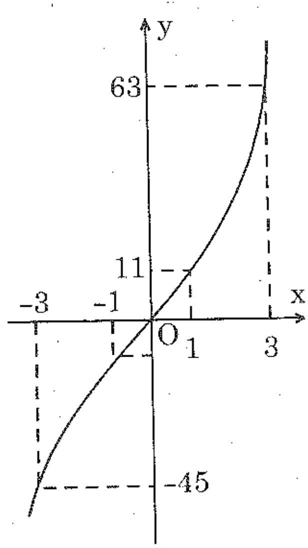
Suy ra, hàm số đồng biến trên toàn tập xác định $\mathbb{R}$. Như thế hàm số không có cực trị.

• Các giới hạn:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{9}{x^2}\right) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{9}{x^2}\right) = -\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$



3) Đồ thị:

Gốc tọa độ O là giao điểm của đồ thị và trục hoành.

d) $y = -2x^3 + 5$

1) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = -6x^2 \le 0, \ \forall x$

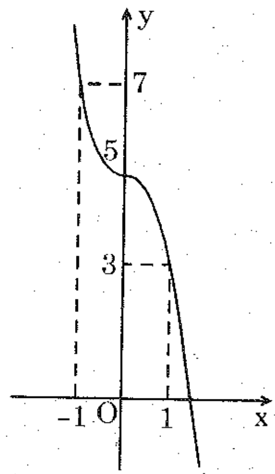
Suy ra, hàm số đồng biến trên toàn tập xác định $\mathbb{R}$. Như thế hàm số không có cực trị.

• Các giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(-2+\frac{5}{x^2}\right) = -\infty \text{ và } \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(-2+\frac{5}{x^2}\right) = +\infty$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	5	↘	$-\infty$



3) Đồ thị:

Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; 5), điểm này cũng là tâm đối xứng của đồ thị.

Bài 2

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc bốn sau:

a) $y = -x^4 + 8x^2 - 1$

b) $y = x^4 - 2x^2 + 2$

c) $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - \frac{3}{2}$

d) $y = 2x^2 - x^4$

Giải

a) $y = -x^4 + 8x^2 - 1$

1) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = -4x^3 + 16x = 4x(-x^2 + 4)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x(-x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 2$

Suy ra:

$y' > 0$ khi $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$.

$y' < 0$ khi $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$.

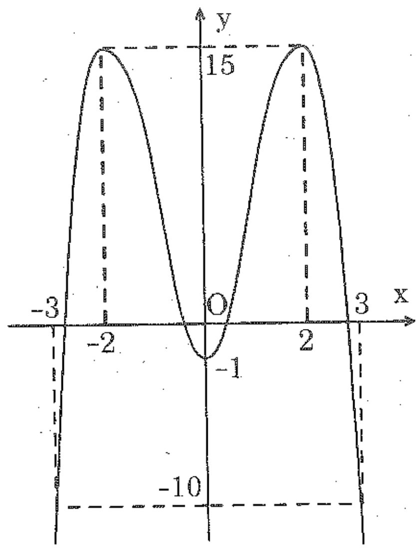
• Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $y_{CT} = -1$ và đạt cực đại tại hai điểm $x = \pm 2$, $y_{CĐ} = 15$.

• Giới hạn:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} x^4 \left(-1 + \frac{8}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right) = -\infty$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y	$-\infty$	↗	15	↘	−1	↗	15	↘	$-\infty$



3) Đồ thị:

Đồ thị và cắt trục tung tại điểm $(0; -1)$. Hàm số $y = -x^4 + 8x^2 - 1$ là một hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

b) $y = x^4 - 2x^2 + 2$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$

Suy ra:

$y' < 0$ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$.

$y' > 0$ khi $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$

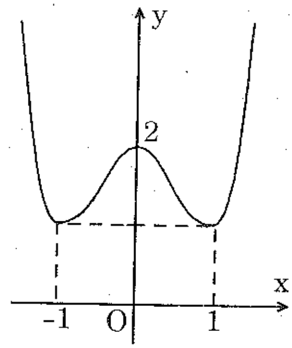
• Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = \pm 1$, $y_{CT} = 1$ và đạt cực đại tại điểm $x = 0$, $y_{CĐ} = 2$.

• Giới hạn:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right) = +\infty$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$



3) Đồ thị:

Đồ thị và cắt trục tung tại điểm (0; 2). Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ là một hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

c) $y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = 2x^3 + 2x = 2x(x^2 + 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Suy ra:

$y' < 0$ khi $x \in (-\infty; 0)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$

$y' > 0$ khi $x \in (0; +\infty)$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(0; +\infty)$

• Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $y_{CT} = -\frac{3}{2}$.

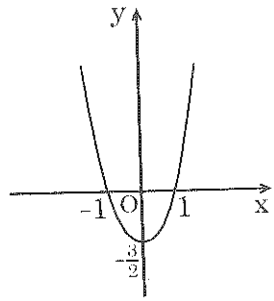
• Giới hạn:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x^4}\right) = +\infty$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

3) Đồ thị:



Đồ thị và cắt trục tung tại điểm $(0;-\frac{3}{2})$ và cắt trục hoành tại hai điểm (–1; 0), (0; 1).

Hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}$ là một hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

d) $y = -2x^2 - x^4 + 3$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = -4x - 4x^3 = -4x(1 + x^2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x(1 + x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Dễ thấy khi $x \neq 0$ thì y' cùng dấu với $-4x$.

$y' > 0$ khi $x \in (-\infty; 0)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

$y' < 0$ khi $x \in (0; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

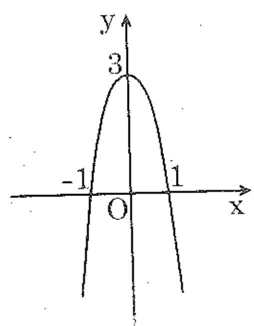
• Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$, $y_{CĐ} = 3$ và không đạt cực tiểu.

• Giới hạn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4\left(-1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right) = -\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	0	–	
y	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

3) Đồ thị:



Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; 3) và cắt trục hoành tại hai điểm (–1; 0), (1; 0).

Hàm số $y = -2x^2 - x^4 + 3$ là một hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

Bài 3

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số phân thức:

a) $y = \frac{x+3}{x-1}$ b) $y = \frac{1-2x}{2x-4}$ c) $y = \frac{-x+2}{2x+1}$

Giải

a) $y = \dfrac{x+3}{x-1}$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = \dfrac{-4}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1), (1; +\infty)$

• Cực trị: Hàm số không có cực trị.

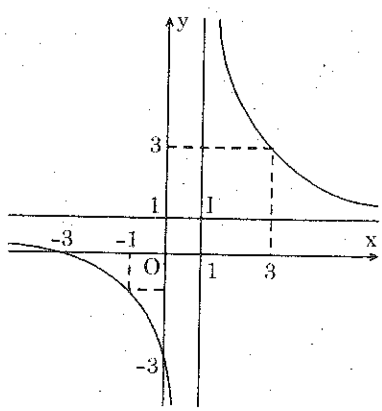
• Giới hạn:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{1}{x}} = 1 \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận ngang y = 1.

$\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty, \ \lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận đứng x = 1.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		–	‖	–	
y	1 ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$	↘	1



3) Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; –3) cắt trục hoành tại điểm (–3; 0).

Giao điểm I(1; 1) của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.

b) $y = \dfrac{1-2x}{2x-4}$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = \dfrac{6}{(2x-4)^2} > 0, \forall x \neq 2$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2), (2; +\infty)$

• Hàm số không có cực trị.

• Giới hạn:

c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+0,25^{-\frac{5}{2}}=(2^{-4})^{-\frac{3}{4}}-(2^{-2})^{-\frac{5}{2}}=2^3+2^5=40$

d) $(0,04)^{-1,5}-(0,125)^{-\frac{2}{3}}=(5^{-2})^{-\frac{3}{2}}-(2^{-3})^{-\frac{2}{3}}=5^3-2^2=121$

Bài 2

Cho a, b là những số thực dương. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $a^{\frac{1}{3}}.\sqrt{a}$ b) $b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{b}$ c) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}$ d) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}$

Giải

a) $a^{\frac{1}{3}}.\sqrt{a}=a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}}$ $(a>0)$

b) $b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{b}=b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=b$ $(b>0)$

c) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}=a^{\frac{4}{3}}.a^{-\frac{1}{3}}=a$ $(a>0)$

d) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{3}}.b^{-\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=b^{\frac{1}{6}}$ $(b>0)$

Bài 3

Viết các số sau theo thứ tự tăng dần:

a) $1^{3,75};2^{-1};\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ b) $98^0;\left(\frac{3}{7}\right)^{-1};32^{\frac{1}{5}}$

Giải

a) Ta có: $1^{3,75}=1;\ 2^{-1}=\frac{1}{2};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2^3=8$

Xếp theo thứ tự tăng dần: $2^{-1};1^{3,75};\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

b) Ta có: $98^0=1;\ \left(\frac{3}{7}\right)^{-1}=\frac{7}{3};\ 32^{\frac{1}{5}}=(2^5)^{\frac{1}{5}}=2$

Xếp theo thứ tự tăng dần: $98^0;32^{\frac{1}{5}};\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$

Bài 4

Cho a, b là những số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}$ b) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}(\sqrt[5]{b^4}-\sqrt[5]{b^{-1}})}{b^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}})}$

c) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$ d) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$

Giải

a) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)} = \dfrac{a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}} = \dfrac{a + a^2}{a+1} = a\ (a > 0)$

b) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}})}{b^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}})} = \dfrac{b^{\frac{1}{5}}.b^{\frac{4}{5}} - b^{\frac{1}{5}}.b^{-\frac{1}{5}}}{b^{\frac{2}{3}}.b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}}.b^{-\frac{2}{3}}} = \dfrac{b-1}{b-1} = 1\ (b > 0 \text{ và } b \neq 1)$

c) Nhân tử và mẫu với $\sqrt[3]{ab} = a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}$, ta được:

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} = \frac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2})} = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2})} = \frac{1}{\sqrt[3]{ab}}\ (a>0, b>0, a \neq b)$$

d) Nhân tử và mẫu với $\sqrt[3]{ab} = a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}$, ta được:

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = \frac{\sqrt[3]{ab}}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}.\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}}$$

$$= \sqrt[3]{ab}.\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{ab}\ (a > 0, b > 0)$$

Bài 5

Chứng minh rằng:

a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}}$ b) $7^{6\sqrt{3}} > 7^{3\sqrt{6}}$

Giải

a) Ta có $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$ vì $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2} \Leftrightarrow (2\sqrt{5})^2 > (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 20 > 18$ (đúng)

Vì $0 < \dfrac{2}{3} < 1$ nên $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}}$

b) Ta có $6\sqrt{3} > 3\sqrt{6}$ vì $6\sqrt{3} > 3\sqrt{6} \Leftrightarrow (6\sqrt{3})^2 > (3\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow 108 > 54$ (đúng)

Do $7 > 1$ nên $7^{6\sqrt{3}} > 7^{3\sqrt{6}}$.

§2. HÀM SỐ LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Định nghĩa

Hàm số $y = x^{\alpha}$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ tùy thuộc vào giá trị của α.

Ví dụ:

+ Hàm số $y = x^{-4}$ xác định với mọi $x \neq 0$.

+ Hàm số $y = x^{\pi}$ xác định với mọi $x > 0$.

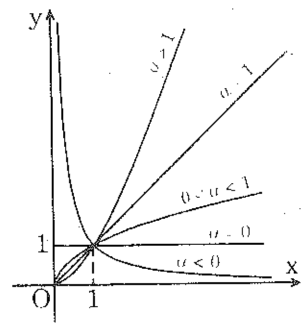
II. Đạo hàm

1. Hàm số lũy thừa $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$ có đạo hàm định bởi:

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

2. Hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm với mọi $x > 0$ và

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$



Đối với hàm số hợp $y = u^{\alpha}$, $u = u(x)$, ta có

$$(u^{\alpha})' = \alpha u' u^{\alpha-1}$$

Chú ý: Khi $\sqrt[n]{x}, \sqrt[n]{u}$ có nghĩa, ta cũng có:

- $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$ $(x \neq 0)$

- $(\sqrt[n]{u})' = \dfrac{u'.\sqrt[n]{u}}{nu}$ $(u \neq 0)$

III. Các đặc điểm của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ trên khoảng $(0; +\infty)$:

1) Khi $\alpha > 0$ hàm số luôn đồng biến, khi $\alpha < 0$ hàm số luôn nghịch biến.

2) Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm (1; 1).

3) Tiệm cận:

- Khi $\alpha > 0$ đồ thị không có tiệm cận.
- Khi $\alpha < 0$ đồ thị có tiệm cận ngang là trục hoành, tiệm cận đứng là trục tung.

B. BÀI TẬP

Bài 1

Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = (1-x)^{-\frac{1}{3}}$ b) $y = (2-x^2)^{\frac{3}{5}}$

c) $y = (x^2-1)^{-2}$ d) $y = (x^2-x-2)^{\sqrt{2}}$

Giải

a) Điều kiện $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D} = (-\infty; 1)$

b) Điều kiện $2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D} = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

c) Điều kiện $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

Tập xác định của hàm số là: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

d) Điều kiện $x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x < -1$ hoặc $x > 2)$

Tập xác định của hàm số là: $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Bài 2

Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = (2x^2 - x + 1)^{\frac{1}{3}}$ b) $y = (4 - x - x^2)^{\frac{1}{4}}$

c) $y = (3x + 1)^{\frac{\pi}{2}}$ d) $y = (5 - x)^{\sqrt{3}}$

Giải

a) $y' = \left((2x^2 - x + 1)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(2x^2 - x + 1)'.(2x^2 - x + 1)^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{3}(4x - 1)(2x^2 - x + 1)^{-\frac{2}{3}}$

b) $y' = \left((4 - x - x^2)^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}(4 - x - x^2)'.(4 - x - x^2)^{-\frac{3}{4}}$

$= -\frac{1}{4}(2x + 1)(4 - x - x^2)^{-\frac{3}{4}}$

c) $y' = \left((3x + 1)^{\frac{\pi}{2}}\right)' = \frac{3\pi}{2}(3x + 1)^{\frac{\pi}{2}-1}$

d) $y' = \left((5 - x)^{\sqrt{3}}\right)' = -\sqrt{3}(5 - x)^{\sqrt{3}-1}$

Bài 3

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = x^{\frac{4}{3}}$ b) $y = x^{-3}$

Giải

a) Khảo sát hàm số $y = x^{\frac{4}{3}}$.

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = (0; +\infty)$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} > 0,\ \forall x \in (0; +\infty)$

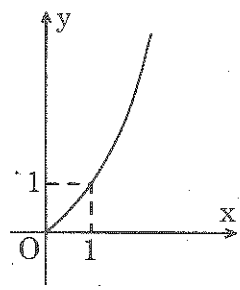
Suy ra, hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

• Các giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty \text{ và } \lim_{x\to 0^+} y = 0$$

• Bảng biến thiên:

x	0		+∞
y'	‖	+	
y	0	↗	+∞



3) Đồ thị:

Đồ thị đi qua điểm (1; 1). Gốc tọa độ O không thuộc đồ thị của hàm số.

b) Khảo sát hàm số $y = x^{-3}$.

1) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = -3x^{-4} < 0,\ \forall x \neq 0$

Suy ra, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

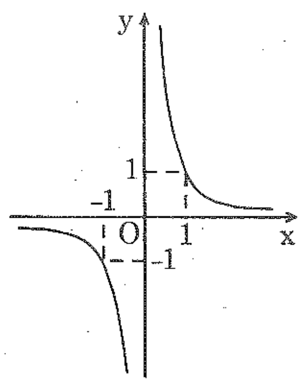
• Các giới hạn:

$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, suy ra đồ thị có tiệm cận ngang y = 0.

$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ và $\lim_{x\to 0^-} y = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$, suy ra đồ thị có tiệm cận đứng x = 0.

• Bảng biến thiên:

x	−∞		0		+∞
y'		−	‖	−	
y	0 ↘		−∞ ‖ +∞	↘	0



3) Đồ thị:

Đồ thị đi qua hai điểm (1; 1), (−1; −1).

Hàm số $y = x^{-3}$ là một hàm số lẻ, nên đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Bài 4

Hãy so sánh các số sau với 1:

a) $(4,1)^{2,7}$ b) $(0,2)^{0,3}$ c) $(0,7)^{3,2}$ d) $(\sqrt{3})^{0,4}$

Giải

a) $(4,1)^{2,7} > 1$ b) $(0,2)^{0,3} < 1$

c) $(0,7)^{3,2} < 1$ d) $(\sqrt{3})^{0,4} < 1$

Bài 5

Hãy so sánh các cặp số sau:

a) $(3,1)^{7,2}$ và $(4,3)^{7,2}$ b) $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3}$ và $\left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$

c) $(0,3)^{0,3}$ và $(0,2)^{0,3}$

Giải

a) $(3,1)^{7,2} < (4,3)^{7,2}$ b) $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3} < \left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$ c) $(0,3)^{0,3} > (0,2)^{0,3}$

§3. LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Định nghĩa

Cho hai số dương a và b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn hệ thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu của $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b \ (a, b > 0, a \neq 1)$$

Từ định nghĩa ta suy ra:

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1;$$

$$a^{\log_a b} = b, \log_a(a^\alpha) = \alpha$$

Chú ý: $\log_a x$ có nghĩa khi và chỉ khi $x > 0$.

II. Các qui tắc tính lôgarit

Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, x và y là hai số dương bất kì, ta có các tính chất sau:

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ 2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

4) $\log_a(x^\alpha) = \alpha\log_a x\ (\alpha \in \mathbb{R})$

5) $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x\ (n \in \mathbb{N}^*)$

III. Đổi cơ số

Cho a, b là hai số dương khác 1, x là một số dương bất kì, ta có:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \Leftrightarrow \log_b x = \log_b a.\log_a x$$

Đặc biệt:

1) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \Leftrightarrow \log_a b.\log_b a = 1$

2) $\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha}\log_a x\ (\alpha \neq 0)$

IV. Lôgarit thập phân và lôgarit tự nhiên

1. Lôgarit thập phân

Lôgarit cơ số 10 được gọi là lôgarit thập phân.

$\log_{10}x$ thường được viết là lgx hoặc logx.

2. Lôgarit tự nhiên

Lôgarit cơ số e được gọi là lôgarit tự nhiên.

$\log_e x$ thường được viết là lnx.

Ta có: $\ln x = \frac{\lg x}{\lg e}\ (x > 0)$

B. BÀI TẬP

Bài 1

Không sử dụng máy tính, hãy tính:

a) $\log_2 \frac{1}{8}$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 2$

c) $\log_3 \sqrt[4]{3}$

d) $\log_{0,5}0,125$

Giải

a) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 2 = \log_{2^{-2}} 2 = -\frac{1}{2}$

c) $\log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4}\log_3 3 = \frac{1}{4}$

d) $\log_{0,5} 0,125 = \log_{2^{-1}}(2^{-3}) = 3$

Bài 2

Tính:

a) $4^{\log_2 3}$ b) $27^{\log_9 2}$ c) $9^{\log_{\sqrt{3}} 2}$ d) $4^{\log_8 27}$

Giải

a) $4^{\log_2 3} = 2^{2\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9$

b) $27^{\log_9 2} = 3^{\frac{3}{2}\log_3 2} = (3^{\log_3 2})^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

c) $9^{\log_{\sqrt{3}} 2} = (\sqrt{3})^{4\log_{\sqrt{3}} 2} = 2^4 = 16$

d) $4^{\log_8 27} = 2^{\frac{2}{3}\log_2 27} = (2^{\log_2 27})^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

Bài 3

Rút gọn biểu thức:

a) $\log_3 6.\log_8 9.\log_6 2$ b) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$

Giải

a) $\log_3 6.\log_8 9.\log_6 2 = \log_3 6.\log_6 2.\log_8 9$

$= \log_3 2.\frac{1}{3}\log_2 3^2 = \frac{2}{3}\log_3 2.\log_2 3 = \frac{2}{3}$

b) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4 = 2\log_a |b| + 2\log_a |b| = 4\log_a |b|, (a > 0, a \neq 1, b \neq 0)$

Bài 4

So sánh các cặp số sau:

a) $\log_3 5$ và $\log_7 4$ b) $\log_{0,3} 2$ và $\log_5 3$

c) $\log_2 10$ và $\log_5 30$

Giải

a) $\log_3 5 > 1$ và $\log_7 4 < 1$ nên $\log_3 5 > \log_7 4$

b) $\log_{0,3} 2 < 0$ và $\log_5 3 > 0$ nên $\log_{0,3} 2 < \log_5 3$

c) $\log_2 10 > \log_2 8 = 3$ và $\log_5 30 < \log_5 5^3 = 3$

Suy ra $\log_2 10 > \log_5 30$

Bài 5

a) Cho $a = \log_{30} 3$, $b = \log_{30} 5$. Hãy tính $\log_{30} 1350$ theo a, b.

b) Cho $c = \log_{15} 3$. Hãy tính $\log_{25} 15$ theo c.

Giải

a) Ta có $\log_{30} 1350 = \log_{30}(30.3^2.5) = \log_{30} 30 + 2\log_{30} 3 + \log_{30} 5 = 1 + 2a + b$

b) Ta có $c = \log_{15} 3 = \dfrac{1}{\log_3 15} = \dfrac{1}{1 + \log_3 5}$

Suy ra $\log_3 5 = \dfrac{1-c}{c}$

Do đó $\log_{25} 15 = \dfrac{1}{2}\log_5 15 = \dfrac{1}{2}(1 + \log_5 3) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{c}{1-c}\right) = \dfrac{1}{2(1-c)}$

§4. HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Hàm số mũ

1. Định nghĩa

Cho a là một số thực dương, khác 1. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

2. Đạo hàm của hàm số mũ

1) $(e^x)' = e^x$

2) $(a^x)' = a^x\ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$

3) $(e^u)' = u'e^u$

4) $(a^u)' = u'a^u\ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$

3. Khảo sát hàm số mũ: $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$

a) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

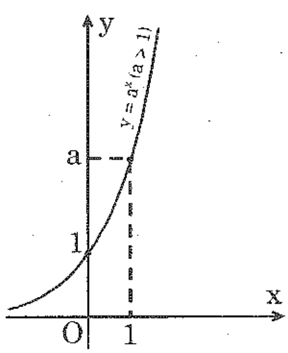
b) Đạo hàm: $y' = a^x\ln a$

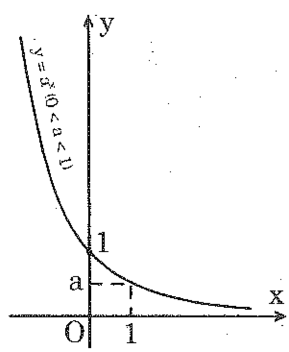
- Khi $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Khi $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Tiệm cận:

Đồ thị hàm số $y = a^x$ có tiệm cận ngang là trục hoành.

d) Đồ thị: Đồ thị hàm số $y = a^x$ đi qua hai điểm (0; 1), (1; a).





II. Hàm số lôgarit

1. Định nghĩa:

Cho a là một số thực dương, khác 1. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a.

2. Đạo hàm của hàm số lôgarit: (a > 1, a ≠ 1)

1) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} (x > 0)$

2) $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x} \ (x \neq 0)$

3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a} (x > 0)$

4) $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x\ln a} \ (x \neq 0)$

5) $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u} \ (u > 0)$

6) $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u} \ (u \neq 0)$

7) $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a} \ (u > 0)$

8) $(\log_a |u|)' = \dfrac{u'}{u\ln a} \ (u \neq 0)$

3. Khảo sát hàm số lôgarit: $y = \log_a x$ (a > 0, a ≠ 1)

a) Tập xác định: $\mathcal{D} = (0; +\infty)$

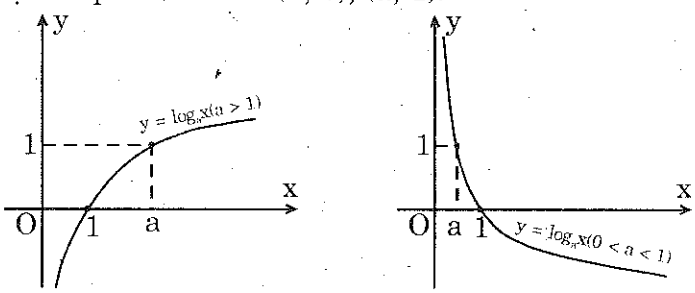
b) Sự biến thiên:

Đạo hàm $y' = \dfrac{1}{x\ln a}$

- Khi a > 1 thì hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- Khi 0 < a < 1 thì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

c) Tiệm cận: Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ có một tiệm cận đứng là trục tung.

d) Đồ thị: Đi qua hai điểm (1; 0), (a; 1).



B. BÀI TẬP

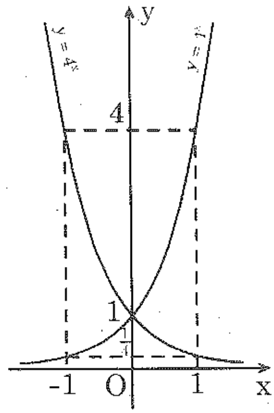
Bài 1

Vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = 4^x$

b) $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

Giải



a) Hàm số $y = 4^x$ là một hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, đi qua các điểm (0; 1), (1; 4).

b) Hàm số $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x \Leftrightarrow y = 4^{-x}$ là một hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, đi qua các điểm (0; 1), (–1; 4).

Nhận xét: Đồ thị hai hàm số $y = 4^x$ và $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ đối xứng với nhau qua trục tung.

Bài 2

Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = 2xe^x + 3\sin 2x$ b) $y = 5x^2 - 2^x\cos x$ c) $y = \frac{x+1}{3^x}$

Giải

a) $y' = (2xe^x + 3\sin 2x)' = 2e^x(1 + x) + 6\cos 2x$

b) $y' = 10x + 2^x(\sin x - \ln 2.\cos x)$

c) $y' = \frac{1 - (x+1)\ln 3}{3^x}$

Bài 3

Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \log_2(5 - 2x)$ b) $y = \log_3(x^2 - 2x)$

c) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4x + 3)$ d) $y = \log_{0,4}\frac{3x+2}{1-x}$

Giải

Gọi $\mathscr{D}$ là tập xác định của các hàm số đã cho.

a) Điều kiện $5 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2} \Rightarrow \mathscr{D} = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$

b) Điều kiện $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow (x < 0$ hoặc $x > 2) \Rightarrow \mathscr{D} = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

c) Điều kiện $x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow (x < 1$ hoặc $x > 3) \Rightarrow \mathscr{D} = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

d) Điều kiện $\frac{3x+2}{1-x} > 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 1 \Rightarrow \mathscr{D} = \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$

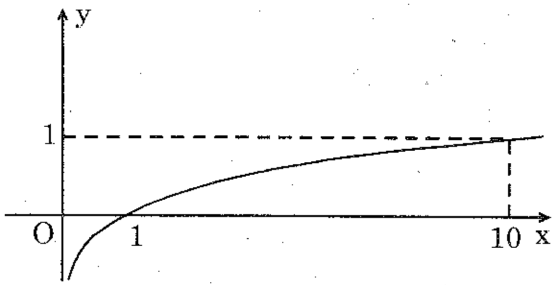
Bài 4

Vẽ đồ thị của các hàm số:

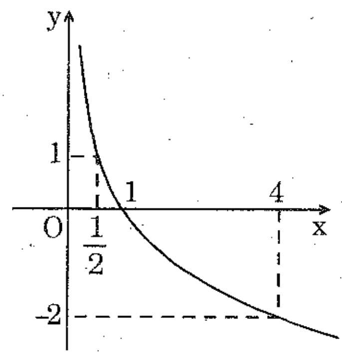
a) $y = \log x$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Giải

a) Đồ thị hàm số y = logx đi qua các điểm (1; 0), (10; 1) và có tiệm cận đứng là trục tung.



b) Đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ đi qua các điểm (1; 0), $\left(\frac{1}{2};1\right)$ và có tiệm cận đứng là trục tung.



Bài 5

Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = 3x^2 - \ln x + 4\sin x$

b) $y = \log(x^2 + x + 1)$

c) $y = \dfrac{\log_3 x}{x}$

Giải

a) $y' = 6x - \dfrac{1}{x} + 4\cos x$

b) $y' = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

c) $y' = \left(\dfrac{\ln x}{x\ln 3}\right)' = \dfrac{1-\ln x}{x^2 \ln 3}$

§5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Phương trình mũ:

1. Phương trình mũ cơ bản:

$$a^x = b^b \text{ và } a^x = c \ (a > 0,\ a \neq 1)$$

Cách giải:

a) $a^x = a^b \Leftrightarrow x = b$

b) • Nếu $c \leq 0$ thì phương trình $a^x = c$ vô nghiệm.

• Nếu $c > 0$ thì: $a^x = c \Leftrightarrow x = \log_a c$

2. Một số phương trình mũ thường gặp

Để giải các phương trình mũ thường gặp, ta có thể áp dụng một trong các phương pháp sau:

- Phương pháp đưa về cùng một cơ số.
- Phương pháp đặt ẩn số phụ.
- Phương pháp lấy lôgarit hai vế (lôgarit hóa).
- Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số mũ.

II. Phương trình lôgarit

1. Phương trình lôgarit đơn giản:

$$\log_a x = \log_a b \text{ và } \log_a x = c \ (a > 0, a \neq 1)$$

Cách giải:

a) $\log_a x = \log_a b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ x = b \end{cases}$

b) $\log_a x = c \Leftrightarrow x = a^c$

2. Một số phương trình lôgarit thường gặp

Để giải các phương trình lôgarit thường gặp, ta có thể áp dụng một trong các phương pháp sau:

- Phương pháp đưa về cùng một cơ số.
- Phương pháp đặt ẩn số phụ.
- Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số lôgarit.

B. BÀI TẬP

Bài 1

Giải các phương trình mũ:

a) $(0{,}3)^{3x-2} = 1$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$

c) $2^{x^2-3x+2} = 4$

d) $(0{,}5)^{x+7}.(0{,}5)^{1-2x} = 2$

Giải

a) $(-0,3)^{3x-2} = 1 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25 \Leftrightarrow 5^{-x} = 5^2 \Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow x = -2$

c) $2^{x^2-3x+2} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+2} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

d) $(0{,}5)^{x+7}.(0{,}5)^{1-2x} = 2 \Leftrightarrow (0{,}5)^{8-x} = 2 \Leftrightarrow 2^{x-8} = 2 \Leftrightarrow x - 8 = 1 \Leftrightarrow x = 9$

Bài 2

Giải các phương trình mũ:

a) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$

c) $64^x - 8^x - 56 = 0$

d) $3.4^x - 2.6^x = 9^x$

Giải

a) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108 \Leftrightarrow \dfrac{3^{2x}}{3} + 3^{2x} = 108 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28 \Leftrightarrow 2.2^x + \dfrac{2^x}{2} + 2^x = 28 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$

c) $64^x - 8^x - 56 = 0 \Leftrightarrow (8^x)^2 - 8^x - 56 = 0$ (*)

Đặt $t = 8^x$ $(t > 0)$, ta được phương trình: $t^2 - t - 56 = 0$

Phương trình trên có hai nghiệm $t_1 = 8$, $t_2 = -7$ (loại nghiệm $t_2 = -7$).

Như vậy:

$$(*) \Leftrightarrow 8^x = 8 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 1$.

d) $3.4^x - 2.6^x = 9^x \Leftrightarrow 3.(2^x)^2 - 2.2^x.3^x = (3^x)^2$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2 + 2.\left(\frac{3}{2}\right)^x - 3 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ $(t > 0)$, ta được phương trình: $t^2 + 2t - 3 = 0$

Phương trình trên có hai nghiệm $t_1 = 1$, $t_2 = -3$ (loại nghiệm $t_2 = -3$)

Như vậy: $(*) \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 0$.

Bài 3

Giải các phương trình lôgarit:

a) $\log_3(5x + 3) = \log_3(7x + 5)$

b) $\log(x - 1) - \log(2x - 11) = \log 2$

c) $\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = 3$

d) $\log(x^2 - 6x + 7) = \log(x - 3)$

Giải

a) $\log_3(5x + 3) = \log_3(7x + 5) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3 > 0 \\ 7x + 5 > 0 \\ 5x + 3 = 7x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{3}{5} \\ x > -\dfrac{5}{7} \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Xét phương trình $\log(x-1) - \log(2x-11) = \log 2$ (*)

Điều kiện: $\begin{cases} x-1>0 \\ 2x-11>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>\dfrac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{11}{2}$

Với điều kiện đó, phương trình (*) tương đương với phương trình:

$\log\left(\dfrac{x-1}{2x-11}\right) = \log 2 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2x-11} = 2 \Leftrightarrow x-1 = 4x-22 \Leftrightarrow x = 7$ (nhận)

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm x = 7.

c) Xét phương trình $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3$ (*)

Điều kiện: $\begin{cases} x-5>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x>5$

Với điều kiện đó, phương trình (*) tương đương với phương trình:

$$\log_2(x-5)(x+2) = 3 \Leftrightarrow (x-5)(x+2) = 2^3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$$

Giải được x = 6 hoặc x = –3 (loại x = –3).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm x = 6.

d) Xét phương trình $\log(x^2 - 6x + 7) = \log(x-3)$ (*)

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ x^2-6x+7 = x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x=5 \text{ hoặc } x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm x = 5.

Bài 4

Giải các phương trình lôgarit:

a) $\dfrac{1}{2}\log(x^2+x-5) = \log 5x + \log\dfrac{1}{5x}$

b) $\dfrac{1}{2}\log(x^2-4x-1) = \log 8x - \log 4x$

c) $\log_{\sqrt{2}} x + 4\log_4 x + \log_8 x = 13$

Giải

a) Xét phương trình $\dfrac{1}{2}\log(x^2+x-5) = \log 5x + \log\dfrac{1}{5x}$ (*)

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-5>0 \text{ và } x>0 & (1) \\ \log(x^2+x-5) = 0 & (2) \end{cases}$

- (1) $\Leftrightarrow x > \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$
- Từ (2): $x^2 + x - 5 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có một nghiệm x = 2.

b) Xét phương trình $\dfrac{1}{2}\log(x^2 - 4x - 1) = \log 8x - \log 4x \quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 - \sqrt{5} \text{ hoặc } x > 2 + \sqrt{5} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2 + \sqrt{5}$

Với điều kiện đó, ta có:

$(*) \Leftrightarrow \log(x^2 - 4x - 1) = 2\log 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 5 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có một nghiệm x = 5.

c) Xét phương trình $\log_{\sqrt{2}} x + 4\log_4 x + \log_8 x = 13 \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow 2\log_2 x + 2\log_2 x + \dfrac{1}{3}\log_2 x = 13 \Leftrightarrow \dfrac{13}{3}\log_2 x = 13$

$\Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$

Vậy phương trình có một nghiệm x = 8.

§6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

1. Bất phương trình mũ

a) Bất phương trình mũ cơ bản

$$a^x > b,\ a^x \geq b,\ a^x < b,\ a^x \leq b \ (a > 0,\ a \neq 1)$$

b) Cách giải bất phương trình $a^x > b$: (Các bất phương trình còn lại được giải tương tự)

- $b \leq 0$: Bất phương trình được nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $b > 0$:
  - Với $a > 1$, $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$.
  - Với $0 < a < 1$, $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

Chú ý: Để giải các bất phương trình mũ, ta dùng tính đồng biến hoặc nghịch biến của hàm số mũ:

(i) Nếu $a > 1$ thì $a^M > a^N \Leftrightarrow M > N$.

(ii) Nếu $0 < a < 1$ thì $a^M > a^N \Leftrightarrow M < N$.

2. Bất phương trình lôgarit

a) Bất phương trình lôgarit cơ bản

$$\log_a x > b,\ \log_a x \ge b,\ \log_a x < b,\ \log_a x \le b\ (a > 0,\ a \ne 1)$$

b) Cách giải bất phương trình $\log_a x > b$: (Các bất phương trình còn lại được giải tương tự)

Với $a > 1$, $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$

Với $0 < a < 1$, $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$

Chú ý: Để giải các bất phương trình lôgarit, ta dùng tính đồng biến hoặc nghịch biến của hàm số lôgarit:

Với $M > 0$, $N > 0$ ta có:

(i) Nếu $a > 1$ thì $\log_a M > \log_a N \Leftrightarrow M > N$.

(ii) Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a M > \log_a N \Leftrightarrow M < N$.

B. BÀI TẬP

Bài 1

Giải các bất phương trình mũ:

a) $2^{-x^2+3x} < 4$

b) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \ge \frac{9}{7}$

c) $3^{x+2} + 3^{x-1} \le 28$

d) $4^x - 3.2^x + 2 > 0$

Giải

a) $2^{-x^2+3x} < 4 \Leftrightarrow 2^{-x^2+3x} < 2^2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x < 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 2 \end{array}\right.$

Vậy: $x < 1$ hoặc $x > 3$

b) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \ge \frac{9}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \ge \left(\frac{7}{9}\right)^{-1}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x \le -1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le 1$$

Vậy: $\frac{1}{2} \le x \le 1$

c) $3^{x+2} + 3^{x-1} \le 28 \Leftrightarrow 9.3^x + \frac{1}{3}.3^x \le 28 \Leftrightarrow 3^x \le 3 \Leftrightarrow x \le 1$

Vậy $x \le 1$.

d) $4^x - 3.2^x + 2 > 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 3.2^x + 2 > 0$

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$.

Ta được: $t^2 - 3t + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < 1 \\ t > 2 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta được:

$$\left[\begin{array}{l}0 < t < 1\\ t > 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x < 1\\ 2^x > 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x < 0\\ x > 1\end{array}\right.$$

Vậy $x < 0$ hoặc $x > 1$.

Bài 2

Giải các bất phương trình lôgarit:

a) $\log_8(4 - 2x) \ge 2$

b) $\log_{\frac{1}{5}}(3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}}(x + 1)$

c) $\log_{0,2}x - \log_5(x - 2) < \log_{0,2}3$

d) $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 \le 0$

Giải

a) $\log_8(4 - 2x) \ge 2 \Leftrightarrow \begin{cases}4 - 2x > 0\\ 4 - 2x \ge 8^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x < 2\\ x \le -30\end{cases} \Leftrightarrow x \le -30$

Vậy $x \le -30$.

b) $\log_{\frac{1}{5}}(3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}}(x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases}3x - 5 > 0\\ x + 1 > 0\\ 3x - 5 < x + 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > \dfrac{5}{3}\\ x > -1\\ x < 3\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} < x < 3$

Vậy $\dfrac{5}{3} < x < 3$

c) $\log_{0,2} x - \log_5(x - 2) < \log_{0,2} 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}} x - \log_5(x - 2) < \log_{\frac{1}{5}} 3$ (*)

Điều kiện: $\begin{cases}x > 0\\ x - 2 > 0\end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Với điều kiện trên ta có:

(*) $\Leftrightarrow -\log_5 x - \log_5(x - 2) < -\log_5 3 \Leftrightarrow \log_5 x(x - 2) > \log_5 3$

$\Leftrightarrow x(x - 2) > 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x < -1\\ x > 3\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện, ta được $x > 3$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Hãy nêu các tính chất của lũy thừa với số mũ thực.
(xem lại giáo khoa)

2. Hãy nêu các tính chất của hàm số lũy thừa.
(xem lại giáo khoa)

3. Hãy nêu các tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit.

(xem lại giáo khoa)

4. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \dfrac{1}{3^x - 3}$ b) $y = \log\dfrac{x-1}{2x-3}$

c) $y = \log\sqrt{x^2 - x - 12}$ d) $y = \sqrt{25^x - 5^x}$

Giải

Gọi $\mathscr{D}$ là tập xác định của hàm số đã cho.

a) $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

b) $\mathscr{D} = (-\infty;1) \cup \left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

c) Điều kiện $x^2 - x - 12 > 0 \Leftrightarrow (x < -3$ hoặc $x > 4)$

Vậy $\mathscr{D} = (-\infty;-3) \cup (4;+\infty)$.

d) Điều kiện $25^x - 5^x \geq 0 \Leftrightarrow 5^x(5^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow 5^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Vậy $\mathscr{D} = [0;+\infty)$.

5. Biết $4^x + 4^{-x} = 23$. Hãy tính $2^x + 2^{-x}$.

Giải

Ta có: $(2^x + 2^{-x})^2 = 4^x + 4^{-x} + 2 = 25$

Suy ra: $2^x + 2^{-x} = 5$

6. Cho $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$. Hãy tính $\log_a x$ với:

a) $x = a^3b^2\sqrt{c}$ b) $x = \dfrac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}$

Giải

a) $\log_a x = \log_a(a^3b^2\sqrt{c}) = 3\log_a a + 2\log_a b + \dfrac{1}{2}\log_a c = 3 + 2.3 + \dfrac{1}{2}(-2) = 8$

b) $\log_a x = \log_a\left(\dfrac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}\right) = 4\log_a a + \dfrac{1}{3}\log_a b - 3\log_a c = 4 + \dfrac{1}{3}.3 - 3.(-2) = 11$

7. Giải các phương trình:

a) $3^{x+4} + 3.5^{x+3} = 5^{x+4} + 3^{x+3}$ b) $25^x - 6.5^x + 5 = 0$

c) $4.9^x + 12^x - 3.16^x = 0$ d) $\log_7(x-1)\log_7 x = \log_7 x$

e) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$ f) $\log\dfrac{x+8}{x-1} = \log x$

Giải

a) $3^{x+4} + 3.5^{x+3} = 5^{x+4} + 3^{x+3} \Leftrightarrow 3.3^{x+3} + 3.5^{x+3} = 5.5^{x+3} + 3^{x+3}$

$$\Leftrightarrow 3^{x+3} = 5^{x+3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+3} = 1 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

Vậy $x = -3$.

b) $25^x - 6.5^x + 5 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 6.5^x + 5 = 0$ (1)

Đặt $t = 5^x$ ($t > 0$), phương trình (1) trở thành phương trình:

$$t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow (t = 1 \text{ hoặc } t = 5)$$

Như vậy $(5^x)^2 - 6.5^x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 1 \\ 5^x = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$, $x = 1$.

c) $4.9^x + 12^x - 3.16^x = 0 \Leftrightarrow 4.(3^x)^2 + 4^x.3^x - 3.(4^x)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 3\left(\left(\frac{4}{3}\right)^x\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^x - 4 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ ($t > 0$), phương trình (1) trở thành phương trình:

$$3t^2 - t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t = -1 \text{ hoặc } t = \frac{4}{3}), \text{ loại } t = -1$$

Như vậy (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 1$.

d) $\log_7(x - 1)\log_7 x = \log_7 x$

Điều kiện $x > 1$.

Ta có: $\log_7(x - 1)\log_7 x = \log_7 x \Leftrightarrow \log_7 x.(1 - \log_7(x - 1)) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \log_7 x = 0 \\ 1 - \log_7(x - 1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_7 x = 0 \\ \log_7(x - 1) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (loại)} \\ x - 1 = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 8$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 8$.

e) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$ (1)

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x = 6 \Leftrightarrow \log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 27$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 27$.

f) $\log\frac{x + 8}{x - 1} = \log x$ (1)

Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x + 8}{x - 1} > 0 \\ x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 1$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \frac{x+8}{x-1} = x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có một nghiệm x = 4.

8. Giải các bất phương trình:

a) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$

b) $(0,4)^x - (2,5)^{x+1} > 1,5$

c) $\log_3\left[\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)\right] < 1$

d) $\log^2_{0,2} x - 5\log_{0,2} x < -6$

Giải

a) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448 \Leftrightarrow 4.2^{2x-3} + 2.2^{2x-3} + 2^{2x-3} \geq 448$

$$\Leftrightarrow 7.2^{2x-3} \geq 448 \Leftrightarrow 2^{2x-3} \geq 2^6 \Leftrightarrow 2x - 3 \geq 6 \Leftrightarrow x \geq \frac{9}{2}$$

Vậy: $x \geq \frac{9}{2}$

b) $(0,4)^x - (2,5)^x > 1,5 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x - \frac{5}{2}.\left(\frac{5}{2}\right)^x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2.\left(\frac{2}{5}\right)^x - 5.\left(\frac{5}{2}\right)^x > 3$

Đặt $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$, ta được bất phương trình:

$$2t - \frac{5}{t} > 3 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 5 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 \\ t > \frac{5}{2} \end{array}\right.$$

Vì t > 0 nên ta suy ra:

$$t > \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow x < -1$$

Vậy: $x < -1$

c) Ta có: $\log_3\left[\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)\right] < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 & (1) \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) > 0 & (2) \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) < 3 & (3) \end{cases}$

- (1) $\Leftrightarrow |x| > 1$ (a)
- (2) $\Leftrightarrow x^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2}$ (b)
- (3) $\Leftrightarrow x^2 - 1 > \frac{1}{8} \Leftrightarrow x^2 > \frac{9}{8} \Leftrightarrow |x| > \frac{3}{2\sqrt{2}}$ (c)

Từ (a), (b), (c) ta suy ra: $\frac{3}{2\sqrt{2}} < |x| < \sqrt{2}$

d) Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$(\log_{0,2}x)^2 - 5\log_{0,2}x + 6 < 0 \qquad (*)$$

Đặt $t = \log_{0,2}x$, ta được bất phương trình:

$$t^2 - 5t + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 3$$

Như vậy (*) tương đương với:

$$2 < \log_{0,2}x < 3 \Leftrightarrow 0{,}008 < x < 0{,}04$$

Vậy: $0{,}008 < x < 0{,}04$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Tập xác định của hàm số $y = \log\dfrac{x-2}{1-x}$ là:

A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ B. $(1; 2)$

C. $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ D. $\mathbb{R}\backslash\{1; 2\}$

2. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ B. $\log_2 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

C. $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a > b > 0$ D. $\log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow a = b > 0$

3. Cho hàm số $f(x) = \ln(4x - x^2)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f'(2) = 1$ B. $f'(2) = 0$

C. $f'(5) = 1{,}2$ D. $f'(-1) = -1{,}2$

4. Cho hàm số $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7)$. Nghiệm của bất phương trình $g(x) > 0$ là:

A. $x > 3$ B. $x < 2$ hoặc $x > 3$

C. $2 < x < 3$ D. $x < 2$

5. Trong các hàm số:

$$f(x) = \ln\frac{1}{\sin x},\ g(x) = \ln\frac{1+\sin x}{\cos x},\ h(x) = \ln\frac{1}{\cos x}$$

hàm số nào có đạo hàm là $\dfrac{1}{\cos x}$?

A. $f(x)$ B. $g(x)$ C. $h(x)$ D. $g(x)$ và $h(x)$

6. Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+5} = 1$ là :

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. Nghiệm của phương trình $10^{\log 9} = 8x + 5$ là:

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{7}{4}$

Giải

1. Chọn B

Điều kiện: $\frac{x-2}{1-x} > 0 \geq \Leftrightarrow 1 < x < 2$

2. Chọn C

Chỉ có khẳng định (C) là sai:

Ta có: $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow 0 < a < b$

3. Chọn B

Điều kiện: $4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$

Ta có: $f'(x) = (\ln(4x - x^2))' = \frac{4-2x}{4x-x^2}$

Suy ra: $f'(2) = 0$, không tồn tại $f'(5)$ và $f'(-1)$.

4. Chọn C

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 7 > 0 \\ x^2 - 5x + 7 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 7 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ 2 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

5. Chọn B

$$f(x) = \ln\frac{1}{\sin x} = -\ln(\sin x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\cot x$$

$$g(x) = \ln(1 + \sin x) - \ln(\cos x) \Rightarrow g'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$h(x) = \ln\frac{1}{\cos x} = -\ln(\cos x) \Rightarrow h'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

6. Chọn C

$$2^{2x^2 - 7x + 5} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{5}{2} \end{array}\right.$$

7. Chọn B

$$10^{\log 9} = 8x + 5 \Leftrightarrow 8x + 5 = 9 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

CHƯƠNG III. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

§1. NGUYÊN HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Khái niệm nguyên hàm

1. Định nghĩa

– Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng (a; b). Hàm số F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng (a; b) nếu F'(x) = f(x) với mọi x ∈ (a; b).

– Thay khoảng (a; b) bằng đoạn [a; b] thì ta có định nghĩa sau đây: Hàm số F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm số f(x) trên đoạn [a; b] nếu:

(i) F(x) là nguyên hàm của f(x) trên khoảng (a; b).

(ii) Tại a và b, F(x) lần lượt có đạo hàm bên phải và bên trái sao cho

$$F'(a^+) = f(a) \text{ và } F'(b^-) = f(b).$$

2. Định lí

Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng (a; b) thì:

a) Với mọi hằng số C, F(x) + C cũng là một nguyên hàm của f(x) trên khoảng (a; b).

b) Ngược lại, nếu G(x) là một nguyên hàm bất kì của hàm số f(x) trên khoảng (a; b) thì tồn tại một hằng số C sao cho G(x) = F(x) + C.

Người ta dùng kí hiệu $\int f(x)dx$ để chỉ họ tất cả các nguyên hàm của f(x).

Ta viết: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Trong đó F(x) là một nguyên hàm của f(x) và C là một hằng số bất kì.

II. Các tính chất của nguyên hàm

Với f(x) và g(x) là hai hàm số liên tục trên một khoảng I:

a) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

b) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

c) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (k \neq 0)$

III. Sự tồn tại nguyên hàm

Định lí

Mọi hàm số liên tục trên khoảng (a; b) (hay đoạn [a; b]) đều có nguyên hàm trên khoảng (hay đoạn) đó.

IV. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

a) $\int 0dx = C$, $\int dx = x + C$

b) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$

c) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C \ \ (x \neq 0)$

d) $\int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x} + C \ \ (x \neq 0)$

e) $\int e^x dx = e^x + C$

f) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ \ (0 < a \neq 1)$

g) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

h) $\int \cos x dx = \sin x + C$

i) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

j) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$

IV. Một số phương pháp tìm nguyên hàm

1. Phương pháp đổi biến số

Cho hàm số f(x) liên tục trên khoảng (a; b) và F(x) là một nguyên hàm của nó. Nếu x = u(t) là hàm số có đạo hàm liên tục và có tập giá trị $T \subset (a; b)$ thì ta có:

$$\int f[u(t)].u'(t)dt = F[u(t)] + C$$

2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Cho u(x) và v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên một khoảng hay một đoạn nào đó, ta có:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

$$\text{hay } \int udv = uv - \int vdu$$

B. BÀI TẬP

Bài 1

Trong các cặp hàm số dưới đây, hàm số nào là nguyên hàm của hàm số còn lại?

a) e^{-x} và $-e^{-x}$

b) $\sin 2x$ và $\sin^2 x$

c) $\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^2 e^x$ và $\left(1 - \dfrac{4}{x}\right)e^x$

Giải

a) $(e^{-x})' = -e^{-x}$. Hàm số e^{-x} là nguyên hàm của hàm số $-e^{-x}$.
$(-e^{-x})' = e^{-x}$. Hàm số $-e^{-x}$ cũng là nguyên hàm của hàm số e^{-x}.

b) $(\sin^2 x)' = 2\sin x.\cos x = \sin 2x$

Vậy hàm số $\sin^2 x$ là nguyên hàm của hàm số $\sin 2x$.

c) Gọi $f(x) = \left(1 - \frac{4}{x}\right)e^x \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{x^2}.e^x + \left(1 - \frac{4}{x}\right)e^x = \left(\frac{4}{x^2} + 1 - \frac{4}{x}\right)e^x = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x$

Vậy $\left(1 - \frac{4}{x}\right)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x$.

Bài 2

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}}$

b) $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{e^x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}$

d) $f(x) = \sin 5x.\cos 3x$

e) $f(x) = \tan^2 x$

g) $f(x) = e^{3-2x}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(1-2x)}$

Giải

a) $\int f(x)dx = \int (x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{3}})dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$

b) $\int f(x)dx = \int \left(\frac{2^x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)dx = \int \frac{2^x}{e^x}dx - \int e^{-x}dx$

- $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C_1$

- $\int \frac{2^x}{e^x}dx = \int \left(\frac{2}{e}\right)^x dx = \dfrac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\ln\frac{2}{e}} + C_2 = \frac{1}{\ln 2 - 1}.\frac{2^x}{e^x} + C_2$

Vậy $\int f(x)dx = \frac{1}{\ln 2 - 1}.\frac{2^x}{e^x} + e^{-x} + C = \frac{2^x}{e^x(\ln 2 - 1)} + \frac{1}{e^x} + C$

c) $\int f(x)dx = 4\int \frac{1}{\sin^2 2x}dx = -2\cot 2x + C$

d) $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int(\sin 8x + \sin 2x)dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 8x}{8} + \frac{\cos 2x}{2}\right) + C =$

$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\cos 8x + \cos 2x\right) + C$

e) $\int f(x)dx = \int((1 + \tan^2 x) - 1)dx = \tan x - x + C$

g) $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}\int e^{3-2x}d(3 - 2x) = -\frac{1}{2}e^{3-2x} + C$

h) Đặt $\frac{1}{(1 + x)(1 - 2x)} = \frac{A}{1 + x} + \frac{B}{1 - 2x}$

Suy ra $A(1 - 2x) + B(x + 1) = 1 \Leftrightarrow (-2A + B)x + A + B = 1$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -2A + B = 0 \\ A + B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{1}{3} \text{ và } B = \frac{2}{3}$$

Ta được: $\frac{1}{(1 + x)(1 - 2x)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 + x} + \frac{2}{1 - 2x}\right)$

Do đó $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\left(\int\frac{1}{1 + x}dx + 2\int\frac{1}{1 - 2x}dx\right) = \frac{1}{3}(\ln|1 + x| - \ln|1 - 2x|) + C =$

$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - 2x}\right| + C$

Bài 3

Sử dụng phương pháp đổi biến số, hãy tính:

a) $\int(1 - x)^9 dx$ (đặt $u = 1 - x$)

b) $\int x(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} dx$ (đặt $u = 1 + x^2$)

c) $\int \cos^3 x \sin x dx$ (đặt $t = \cos x$)

d) $\int\frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}$ (đặt $u = e^x + 1$)

Giải

a) Đặt $u = 1 - x \Rightarrow du = -dx$

$$\int(1 - x)^9 dx = -\int u^9 du = -\frac{u^{10}}{10} + C = -\frac{(1 - x)^{10}}{10} + C$$

b) Đặt $u = 1 + x^2 \Rightarrow du = 2xdx$

$$\int x(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{5}(1 + x^2)^{\frac{5}{2}} + C$$

c) Đặt $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

$$\int \cos^3 x \sin x dx = -\int u^3 du = -\frac{u^4}{4} + C = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2}dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1 + 2e^x}dx = \int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}dx$

Đặt $u = e^x + 1 \Rightarrow du = e^x dx$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2}dx = \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{e^x + 1} + C$$

Bài 4

Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, hãy tính:

a) $\int x\ln(1 + x)dx$ b) $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx$

c) $\int x\sin(2x + 1)dx$ d) $\int (1 - x)\cos x dx$

Giải

a) Đặt $u = \ln(x + 1)$ và $dv = xdx$

Ta được $du = \dfrac{1}{x + 1}dx$ và $v = \dfrac{x^2}{2}$

Áp dụng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần:

$$\int x\ln(x + 1)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x + 1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x + 1}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x + 1) - \frac{1}{2}\int\left(x - 1 + \frac{1}{x + 1}\right)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x + 1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x + 1)\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln(x + 1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C$$

b) Đặt $u = x^2 + 2x - 1$ và $dv = e^x dx$

Ta được $du = 2(x + 1)dx$ và $v = e^x$

Áp dụng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần:

$$\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx = e^x(x^2 + 2x - 1) - 2\int (x + 1)e^x dx$$

Đặt $s = x + 1$ và $dt = e^x dx$

Ta được $ds = dx$ và $t = e^x$

$$\int (x + 1)e^x dx = (x + 1)e^x - \int e^x dx = (x + 1)e^x - e^x + C_1 = xe^x + C_1$$

Vậy $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx = e^x(x^2 + 2x - 1) - 2xe^x + C = (x^2 - 1)e^x + C$

c) Đặt $u = x$ và $dv = \sin(2x + 1)dx$

Ta được $du = dx$ và $v = -\dfrac{1}{2}\cos(2x + 1)$

Áp dụng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần:

$$\int x\sin(2x+1)dx = -\frac{1}{2}x\cos(2x+1) + \frac{1}{2}\int\cos(2x+1)dx =$$

$$= -\frac{x}{2}\cos(2x+1) + \frac{1}{4}\sin(2x+1) + C$$

d) Đặt u = 1 – x và dv = cosxdx

Ta được du = –dx và v = sinx

Áp dụng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần:

$$\int(1-x)\cos x dx = (1-x)\sin x + \int\sin x dx = (1-x)\sin x - \cos x + C$$

§2. TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

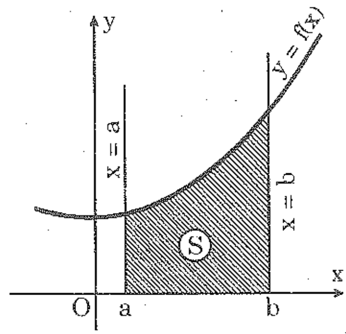
I. Diện tích của hình thang cong

Cho hàm số y = f(x) liên tục không âm trên đoạn [a; b].

Ta gọi hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$$

là một hình thang cong.



Nếu gọi F(x) là một nguyên hàm của f(x) thì diện tích S của hình thang cong định bởi công thức:

$$S = F(b) - F(a)$$

II. Định nghĩa tích phân

1. Định nghĩa 1

Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b]. Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên đoạn [a; b] thì hiệu số F(b) – F(a) được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số f(x).

Kí hiệu: $\int_a^b f(x)dx$

- Hai số a và b gọi là hai cận tích phân: a gọi là cận dưới và b gọi là cận trên.
- f(x) gọi là hàm số dưới dấu tích phân, f(x)dx gọi là biểu thức dưới dấu tích phân.

Ta có dùng kí hiệu sau:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Công thức trên được gọi là công thức Niu–tơn – Lai–bơ–nít.

2. Định nghĩa 2

a) Nếu hàm số f(x) xác định tại a ta định nghĩa $\int_a^a f(x)dx = 0$.

b) Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b] ta định nghĩa $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Nhận xét:

a) Ta luôn có $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$

b) Nếu f(x) liên tục và không âm trên đoạn [a; b] thì $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi các đường y = f(x), y = 0, x = a, x = b.

III. Các tính chất của tích phân

Cho f(x) và g(x) là hai hàm số liên tục trên khoảng [a; b]. Ta có:

1) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (với k là một hằng số)

3) Nếu $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với $c \in (a; b)$

5) Nếu $f(x) \leq g(x)$ thì $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

IV. Một số phương pháp tính tích phân

1. Phương pháp đổi biến số

Nếu:

(i) Hàm số x = u(t) có đạo hàm liên tục trên đoạn [α; β].

(ii) Hàm số hợp f(u(t)) được xác định trên đoạn [α; β].

(iii) u(α) = a, u(β) = b

thì ta có: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)]u'(t)dt$

2. Phương pháp tích phân từng phần

Cho u(x) và v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng I và a, b là hai số thuộc I.

Ta có công thức sau:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Hay $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

B. BÀI TẬP

Bài 1

Tính các tích phân sau:

a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{(1-x)^2}dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx$

c) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x(x+1)}dx$

d) $\int_0^2 x(x+1)^2dx$

e) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1-3x}{(x+1)^2}dx$

f) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin3x\cos5xdx$

Giải

a) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{(1-x)^2}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{2}{3}}dx$

$$= -\frac{3}{5}(1-x)^{\frac{5}{3}}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{(1-x)^5}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{10\sqrt[3]{4}}(3\sqrt[3]{9}-1)$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

c) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = (\ln x - \ln|x+1|\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \ln2$

d) $\int_0^2 x(x+1)^2dx = \int_0^2 (x^3 + 2x^2 + x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{34}{3}$

e) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1-3x}{(x+1)^2}dx = 4\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{(x+1)^2}dx - 3\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x+1}dx$

$$= -\frac{4}{x+1}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} - 3\ln|x+1|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{4}{3} - 3\ln2$$

f) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin3x\cos5x dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin8x - \sin2x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos8x}{8} - \frac{\cos2x}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$

Bài 2

Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^2 |1-x|dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

c) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x+1}+1}{e^x}dx$

d) $\int_0^{\pi} \sin2x\cos^2 x dx$

Giải

a) $\int_0^2 |1-x|dx = -\int_0^1 (x-1)dx + \int_1^2 (x-1)dx = -\frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_0^1 + \frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_1^2 = 1$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

c) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x+1}+1}{e^x}dx = \int_0^{\ln 2} (e^{x+1} + e^{-x})dx = (e^{x+1} - e^{-x})\Bigg|_0^{\ln2} = e + \frac{1}{2}$

d) $\int_0^{\pi} \sin2x\cos^2 x dx = 2\int_0^{\pi} \cos^3 x\sin x dx = -2\int_0^{\pi} \cos^3 x d(\cos x) = -\frac{\cos^4 x}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 0$

Bài 3

Sử dụng phương pháp đổi biến số, hãy tính:

a) $\int_0^3 \frac{x^2}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}dx$ (đặt $u = x+1$)

b) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ (đặt $x = \sin t$)

c) $\int_0^1 \frac{e^x(1+x)}{1+xe^x}dx$ (đặt $u = 1 + xe^x$)

d) $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx (a > 0)$ (đặt $x = a\sin t$)

Giải

a) Đặt $u = x + 1 \Rightarrow du = dx$.

Khi $x = 0$ thì $u = 1$ và khi $x = 3$ thì $u = 4$.

$$\int_0^3 \frac{x^2}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}dx = \int_1^4 \frac{(u-1)^2}{u^{\frac{3}{2}}}du = \int_1^4 \frac{u^2-2u+1}{u^{\frac{3}{2}}}du = \int_1^4 \left(u^{\frac{1}{2}} - 2u^{-\frac{1}{2}} + u^{-\frac{3}{2}}\right)du$$

$$= \left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 4u^{\frac{1}{2}} - 2u^{-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{5}{3}$$

b) Đặt $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, suy ra $dx = \cos t dt$.

Khi $x = 0$ thì $t = 0$ và khi $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}.\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}.\cos t dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

c) Đặt $u = 1 + xe^x \Rightarrow du = (x + 1)e^x dx$

Khi $x = 0$ thì $u = 1$ và khi $x = 1$ thì $u = 1 + e$.

$$\int_0^1 \frac{e^x(1+x)}{1+xe^x}dx = \int_1^{1+e} \frac{du}{u} = \ln|u|\Bigg|_1^{1+e} = \ln(1+e)$$

d) Đặt $x = a\sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, suy ra $dx = a\cos t\, dt$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$ và khi $x = \frac{a}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos t dt}{\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}$$

Bài 4

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, hãy tính:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin x dx$

b) $\int_1^e x^2 \ln x dx$

c) $\int_0^1 \ln(1+x)dx$

d) $\int_0^1 (x^2-2x-1)e^{-x}dx$

Giải

a) Đặt u = x + 1, dv = sinxdx. Ta được du = dx, v = −cosx

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin x dx = -(x+1)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 1 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

b) Đặt u = lnx, dv = x^2dx. Ta được $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^3}{3}$

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9}\Big|_1^e$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3-1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$$

c) Đặt u = ln(x + 1), dv = dx. Ta được $du = \frac{1}{x+1}dx$, v = x

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx = x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \ln 2 - \int_0^1\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \ln 2 - (x - \ln|x+1|)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1$$

d) Đặt u = x^2 − 2x − 1, dv = e^{-x}dx. Ta được du = (2x − 2)dx, v = $-e^{-x}$.

$$\int_0^1 (x^2-2x-1)e^{-x}dx = -(x^2-2x-1)e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 (2x-2)e^{-x}dx$$

$$= \frac{2}{e} - 1 + \int_0^1 (2x-2)e^{-x}dx$$

Đặt s = 2x − 2, dt = e^{-x}dx. Ta được ds = 2dx, t = $-e^{-x}$.

$$\int_0^1 (2x-2)e^{-x}dx = -(2x-2)e^{-x}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 e^{-x}dx = 2 - 2e^{-x}\Big|_0^1 = -\frac{2}{e}$$

Vậy $\int_0^1 (x^2-2x-1)e^{-x}dx = -1$.

Bài 5

Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^1 (1+3x)^{\frac{3}{2}}dx$ b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3-1}{x^2-1}dx$ c) $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$

Giải

a) $\int_0^1 (1+3x)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{3}.\frac{2}{5}(1+3x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \frac{62}{15}$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3-1}{x^2-1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+x+1}{x+1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}+\ln\frac{3}{2}$$

c) Đặt $u = \ln(1+x), dv = \frac{1}{x^2}dx$.

Ta được $du = \frac{1}{1+x}dx, v = -\frac{1}{x}$

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx = -\frac{1}{x}.\ln(1+x)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(1+x)}dx = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 + \int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \ln2 - \frac{1}{2}\ln3 + (\ln x - \ln(1+x))\Big|_1^2 = \ln2 - \frac{1}{2}\ln3 + (\ln2 - \ln3) - (-\ln2)$$

$$= 3\ln2 - \frac{3}{2}\ln3 = 3\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Bài 6

Tính $\int_0^1 x(1-x)^5dx$ bằng hai phương pháp:

a) Đổi biến số u = 1 − x.

b) Tích phân từng phần.

Giải

a) Đặt $u = 1 - x \Rightarrow du = -dx$

Khi x = 0 thì u = 1 và khi x = 1 thì u = 0.

$$\int_0^1 x(1-x)^5dx = -\int_1^0 (1-u)u^5du = \int_0^1 (u^5-u^6)du = \left(\frac{u^6}{6}-\frac{u^7}{7}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}-\frac{1}{7} = \frac{1}{42}$$

b) Đặt $u = x$, $dv = (1-x)^5dx$

Ta được $du = dx$, $v = -\dfrac{(1-x)^6}{6}$

$$\int_0^1 x(1-x)^5dx = -x.\frac{(1-x)^6}{6}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^6dx = -\frac{1}{42}(1-x)^7\Bigg|_0^1 = \frac{1}{42}$$

§3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

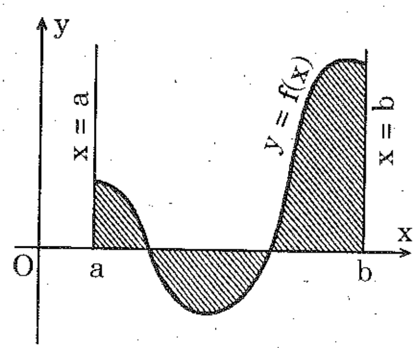
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Tính diện tích hình phẳng

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi và trục hoành

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức:

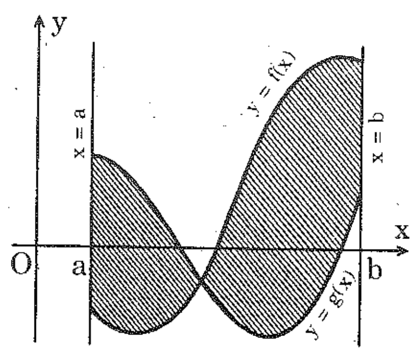
$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$



2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn đồ thị hai hàm số trên và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức:

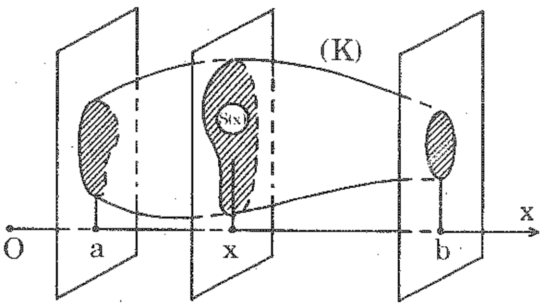
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$



II. Tính thể tích

1. Thể tích của vật thể

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz ta đặt vật thể (K). Cắt (K) bằng một mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ x, ta được một thiết diện có diện tích bằng S(x). Nếu S(x) là hàm số liên tục trên đoạn [a; b] thì thể tích của vật thể (K) được định bởi công thức:



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

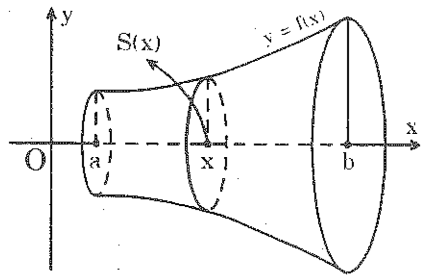
2. Thể tích khối tròn xoay

a) Quay quanh trục hoành

Cho hàm số y = f(x) liên tục trên đoạn [a; b]. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$$

quay một vòng quanh trục Ox tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích V của nó được tính theo công thức:



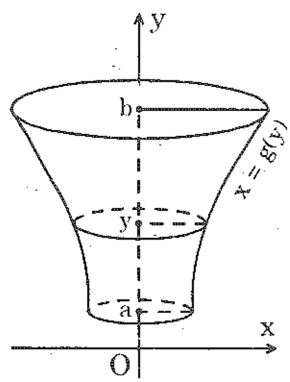
$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2dx \text{ hay } V = \pi\int_a^b y^2dx$$

b) Quay quanh trục tung

Cho hàm số x = g(y) liên tục trên đoạn [a; b]. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$x = g(y),\ x = 0,\ y = a,\ y = b$$

quay một vòng quanh trục Oy tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích V của nó được tính theo công thức:



$$V = \pi\int_a^b [g(y)]^2dy \text{ hay } V = \pi\int_a^b x^2dy$$

B. BÀI TẬP

Bài 1

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $y = x^2$, $y = x + 2$

b) $y = |\ln x|$, $y = 1$

c) $y = (x - 6)^2$, $y = 6x - x^2$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

Câu 1 và 2, đọc giả tự thực hiện.

1. a) Phát biểu định nghĩa nguyên hàm của hàm số f(x) trên một khoảng.

b) Nêu phương pháp tính nguyên hàm từng phần. Cho ví dụ minh họa.

2. a) Phát biểu định nghĩa tích phân của hàm số f(x) trên một đoạn.

b) Nêu các tính chất của tích phân. Cho ví dụ minh họa.

3. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = (x - 1)(1 - 2x)(1 - 3x)$ b) $f(x) = \sin 4x\cos^2 2x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$ d) $f(x) = (e^x - 1)^3$

Giải

a) $\int f(x)dx = \int f(6x^3 - 11x^2 + 6x - 1)dx = \dfrac{3}{2}x^4 - \dfrac{11}{3}x^3 + 3x^2 - x + C$

b) $\int f(x)dx = \dfrac{1}{2}\int \sin 4x dx + \dfrac{1}{4}\int \sin 8x dx = -\dfrac{1}{32}\cos 8x - \dfrac{1}{8}\cos 4x + C$

c) $\int f(x)dx = \int \dfrac{1}{(1-x)(1+x)}dx = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{x+1}dx - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{x-1}dx$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$$

d) $\int f(x)dx = \int (e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1)dx = \dfrac{1}{3}e^{3x} - \dfrac{3}{2}e^{2x} + 3e^x - x + C$

4. Tính:

a) $\int (2 - x)\sin x dx$ b) $\int \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$

c) $\int \dfrac{e^{3x} + 1}{e^x + 1}dx$ d) $\int \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}dx$

e) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}dx$ f) $\int \dfrac{1}{(1+x)(2-x)}dx$

Giải

a) Đặt $u = 2 - x$, $dv = \sin x dx$, ta được $du = -dx$, $v = -\cos x$

$$\int (2 - x)\sin x dx = (x - 2)\cos x - \int \cos x dx = (x-2)\cos x - \sin x + C$$

b) Đặt $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$. Suy ra $dx = 2dt$.

$$\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{(t^2+1)^2}{t}.2tdt = 2\int (t^4 + 2t^2 + 1)dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{4t^3}{3} + 2t + C$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx = \int (e^{2x} - e^x + 1)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}dx = \frac{1}{2}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}dx = \int (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x^3}) + C$$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)(2-x)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-2| + C$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right| + C$$

5. Tính:

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$

b) $\displaystyle\int_1^{64} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$

c) $\displaystyle\int_0^2 x^2e^{3x}dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$

Giải

a) Đặt $t = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow t^2 = x + 1 \Leftrightarrow x = t^2 - 1$. Suy ra $dx = 2tdt$

Khi $x = 0$ thì $t = 1$, khi $x = 3$ thì $t = 2$.

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int_1^2 \frac{t^2-1}{t}.2tdt = 2\int_1^2 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3}$$

b) $\displaystyle\int_1^{64} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int_1^{64} x^{-\frac{1}{3}}dx + \int_1^{64} x^{\frac{1}{6}}dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_1^{64} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}\Bigg|_1^{64} = \frac{1839}{14}$

c) Đặt $u = x^2$, $dv = e^{3x}dx$, ta được $du = 2xdx$, $v = \dfrac{1}{3}e^{3x}$

$$\int_0^2 x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x}\Bigg|_0^2 - \frac{2}{3}\int_0^2 xe^{3x}dx = \frac{4}{3}e^6 - \frac{2}{3}\int_0^2 xe^{3x}dx$$

Tính $\int_0^2 xe^{3x}dx$.

Đặt s = x, dt = $e^{3x}dx$, ta được ds = dx, $t = \frac{1}{3}e^{3x}$

$$\int_0^2 xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x}\Big|_0^2 - \frac{1}{3}\int_0^2 e^{3x}dx = \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{9}e^{3x}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{9}(e^6-1) = \frac{5e^6+1}{9}$$

Suy ra $\int_0^2 x^2e^{3x}dx = \frac{2(e^6-1)}{27}$

d) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,dx = \int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}\,dx = \int_0^{\pi}\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$

$$= \int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|\,dx$$

Xét phương trình sinx + cosx = 0.

Ta có sinx + cosx = 0 ⇔ sinx = –cosx ⇔ tanx = –1 ⇔ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$x \in [0;\pi] \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

Do đó $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,dx = \left|\int_0^{\frac{3\pi}{4}}(\sin x+\cos x)dx\right| + \left|\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}(\sin x+\cos x)dx\right|$

$$\left|(-\cos x+\sin x)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}\right| + \left|(-\cos x+\sin x)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\right| = (\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}$$

6. Tính:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\sin^2 x\,dx$

b) $\int_{-1}^{1}|2^x-2^{-x}|\,dx$

c) $\int_1^2\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^2}dx$

d) $\int_0^2\frac{1}{x^2-2x-3}dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2dx$

f) $\int_0^{\pi}(x+\sin x)^2dx$

Giải

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4x)dx$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\left(x+\frac{\sin 4x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{8}$$

b) Trước hết ta thấy phương trình $2^x - 2^{-x} = 0$ có một nghiệm $x = 0$.

Do đó: $\int_{-1}^{1}|2^x - 2^{-x}|dx = \left|\int_{-1}^{0}(2^x - 2^{-x})dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(2^x - 2^{-x})dx\right|$

$$= \left|\frac{1}{\ln 2}(2^x + 2^{-x}\Big|_{-1}^{0}\right| + \left|\frac{1}{\ln 2}(2^x + 2^{-x})\Big|_{0}^{1}\right| = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

c) $\int_{1}^{2}\frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{x^2}dx = \int_{1}^{2}\left(x + 6 + \frac{11}{x} + \frac{6}{x^2}\right)dx$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 6x + 11\ln x - \frac{6}{x}\right)\Big|_{1}^{2} = \frac{21}{2} + 11\ln 2$$

d) $\int_{0}^{2}\frac{1}{x^2 - 2x - 3}dx = \int_{0}^{2}\frac{1}{(x+1)(x-3)}dx = \frac{1}{4}\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-3|\Big|_{0}^{2} - \frac{1}{4}\ln|x+1|\Big|_{0}^{2} = -\frac{1}{2}\ln 3$$

e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x + \cos x)^2dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1 + \sin 2x)dx = \left(x - \frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1$

g) $\int_{0}^{\pi}(x + \sin x)^2dx = \int_{0}^{\pi}(x^2 + 2x\sin x + \sin^2 x)dx$

$$= \int_{0}^{\pi}x^2dx + 2\int_{0}^{\pi}x\sin x dx + \int_{0}^{\pi}\sin^2 x dx$$

- $\int_{0}^{\pi}x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}$
- Đặt $u = x$, $dv = \sin x dx$, ta được $du = dx$, $v = -\cos x$.

$$\int_{0}^{\pi}x\sin x dx = -x\cos x\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi}\cos x dx = \pi + \sin x\Big|_{0}^{\pi} = \pi$$

- $\int_{0}^{\pi}\sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

Vậy $\int_{0}^{\pi}(x + \sin x)^2dx = \frac{\pi^3}{3} + 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{3} + \frac{5\pi}{2}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, kết quả là:

A. $\frac{C}{\sqrt{1-x}}$

B. $C\sqrt{1-x}$

C. $-2\sqrt{1-x}+C$

D. $\frac{2}{\sqrt{1-x}}+C$

2. Tính $\int 2^{\sqrt{x}} \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx$, kết quả sai là:

A. $2^{\sqrt{x}+1}+C$

B. $2(2^{\sqrt{x}}-1)+C$

C. $2(2^{\sqrt{x}}+1)+C$

D. $2^{\sqrt{x}}+C$

3. Tích phân $\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x dx$ bằng:

A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 0

4. Cho hai tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$, hãy chỉ ra khẳng định đúng:

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

D. Không so sánh được.

5. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong

a) $y = x^3$ và $y = x^5$ bằng:

A. 0 B. -4 C. $\frac{1}{6}$ D. 2

b) $y = x + \sin x$ và $y = x$ $(0 \le x \le 2\pi)$ bằng:

A. -4 B. 4 C. 0 D. 1

6. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$ và $y = x$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. 0 B. $-\pi$ C. π D. $\frac{\pi}{6}$

Giải

1. Chọn C

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}+C$$

2. Chọn A

$$\int 2^{\sqrt{x}}\frac{\ln 2}{\sqrt{x}}dx = 2.2^{\sqrt{x}} + C = 2^{\sqrt{x}+1} + C$$

3. Chọn B

$$\int_0^{\pi}\cos^2x\sin xdx = -\int_0^{\pi}\cos^2xd(\cos x) = -\frac{\cos^3x}{3}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

4. Chọn D

Đặt $u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -du$

Khi $x = 0$ thì $u = \frac{\pi}{2}$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2xdx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - u\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2udu = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2xdx$$

5. a) Chọn C

Gọi $f(x) = x^3$, $g(x) = x^5$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^5 = 0 \Leftrightarrow x^3(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

$$S = \int_{-1}^{1}\left|x^3 - x^5\right|dx = \int_{-1}^{0}(x^5 - x^3)dx + \int_0^1(x^3 - x^5)dx$$

$$= \left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}$$

b) Chọn B

Gọi $f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x$.

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

$x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = \pi$ hoặc $x = \pi$.

$$S = \int_0^{2\pi}|\sin x|dx = \int_0^{\pi}\sin xdx - \int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx = -\cos x\Bigg|_0^{\pi} + \cos x\Bigg|_{\pi}^{2\pi} = 4$$

6. Chọn D

Gọi $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x$.

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

$$V = \pi\int_0^1(\sqrt{x})^2dx - \pi\int_0^1x^2dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

CHƯƠNG IV. SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Khái niệm số phức

1. Đơn vị ảo: Số i sao cho $i^2 = -1$ được gọi là đơn vị ảo. Số 1 được gọi là đơn vị thực.
2. Số phức: Mỗi biểu thức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ được gọi là một số phức. Số a được gọi là phần thực và số b được gọi là phần ảo của số phức z.

Ta qui ước:

+ Nếu $z = a + 0i$ thì $z = a$
+ Nếu $z = 0 + 0i$ thì $z = 0$
+ Nếu $z = 0 + bi$ với $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ thì ta viết $z = bi$ và gọi z là số thuần ảo.

3. Tập hợp các số phức: Tập hợp tất cả các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$. Vậy:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$$

4. Hai số phức bằng nhau

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ $(a, a', b, b' \in \mathbb{R})$

$$z = z' \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b = b'$$

5. Biểu diễn hình học các số phức

Mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bằng điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Ta viết $M(a + bi)$ hay $M(z)$.

Mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn các các số phức được gọi là mặt phẳng phức.

* Trục hoành Ox, biểu diễn các số thực $z = a + 0i$ được gọi là trục thực.

* Trục tung Oy, biểu diễn các số thuần ảo $z = 0 + bi$ được gọi là trục ảo.

Nếu điểm $M(a; b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$ thì độ dài $|\overrightarrow{OM}|$ được gọi là môđun của z.

Kí hiệu: $|z|$

Vậy: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

6. Số phức liên hợp

Định nghĩa

Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là số phức kí hiệu $\bar{z}$ định bởi $\bar{z} = a - bi$

B. BÀI TẬP

Bài 1

Tính phần thực và phần ảo của số phức z, biết:

a) $z = 1 - \pi i$

b) $z = \sqrt{2} - i$

c) $z = 2\sqrt{2}$

d) $z = -7i$

Giải

Gọi x là phần thực và y là phần ảo của số phức z, tức là $z = x + yi$.

a) $x = 1$ và $y = -\pi$

b) $x = \sqrt{2}$ và $y = -1$

c) $x = 2\sqrt{2}$ và $y = 0$

d) $x = 0$ và $y = -7$

Bài 2

Tìm các số thực x và y, biết:

a) $(3x - 2) + (2y + 1)i = (x + 1) - (y - 5)i$

b) $(1 - 2x) - i\sqrt{3} = \sqrt{5} + (1 - 3y)i$

c) $(2x + y) + (2y - x)i = (x - 2y + 3) + (y + 2x + 1)i$

Giải

a) Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - 2 = x + 1 \\ 2y + 1 = -y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ và } y = \frac{4}{3}$$

b) Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 - 2x = \sqrt{5} \\ -\sqrt{3} = 1 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ và } y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

c) Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y = x - 2y + 3 \\ 2y - x = y + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Bài 3

Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện:

a) Phần thực của z bằng -2.

b) Phần ảo của z bằng 3.

c) Phần thực của z thuộc khoảng (–1; 2).

d) Phần ảo của z thuộc đoạn [1; 3].

e) Phần thực và phần ảo của z đều thuộc đoạn [–2; 2].

Giải

a) Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z có phần thực bằng –2 là đường thẳng có phương trình $x = -2$.

b) Tương tự: là đường thẳng $y = 3$.

c) Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z có phần thực thuộc khoảng (–1; 2) là dãi nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy, giữa hai đường thẳng $x = -1$ và $x = 2$ (không kể các điểm nằm trên hai đường thẳng này).

d) Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z có phần ảo thuộc khoảng [1; 3] là dãi nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy, giữa hai đường thẳng $y = 1$ và $y = 3$, kể các điểm nằm trên hai đường thẳng này.

e) Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z có phần thực và phần ảo đều thuộc khoảng [–2; 2] là một hình vuông nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy, giới hạn bởi các đường thẳng $x = -2$, $x = 2$, $y = -2$ và $y = 2$, kể các điểm nằm trên các cạnh của hình vuông.

Bài 4

Tính $|z|$ với.

a) $z = -2 + i\sqrt{3}$ b) $z = \sqrt{2} - 3i$

c) $z = -5$ d) $z = i\sqrt{3}$

Giải

a) $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$ b) $|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-3)^2} = \sqrt{11}$

c) $|z| = 5$ d) $|z| = \sqrt{3}$

Bài 5

Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn từng điều kiện:

a) $|z| = 1$ b) $|z| \le 1$

c) $1 < |z| \le 2$ d) $|z| = 1$ và phần ảo của z bằng 1.

Giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phức Oxy.

a) $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Vậy tập hợp các điểm M với $|z| = 1$ là đường tròn tâm O bán kính $R = 1$.

b) $|z| \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \le 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 1$

Vậy tập hợp các điểm M với $|z| \le 1$ là hình tròn tâm O bán kính R = 1.

c) $1 < |z| \le 2 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x^2 + y^2} \le 2 \Leftrightarrow 1 < x^2 + y^2 \le 4$

Vậy tập hợp các điểm M với $1 \le |z| \le 2$ là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn (C_1) và (C_2) tâm O, bán kính lần lượt là $R_1 = 1$ và $R_2 = 2$, kể cả các điểm trên (C_2) nhưng loại các điểm trên (C_1).

d) $\begin{cases} |z| = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy tập điểm M là tập {(0; 1)}.

Bài 6

Tìm $\bar{z}$, biết:

a) $z = 1 - i\sqrt{2}$

b) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{3}$

c) $z = 5$

d) $z = 7i$

Giải

a) $\bar{z} = 1 + i\sqrt{2}$

b) $\bar{z} = -\sqrt{2} - i\sqrt{3}$

c) $\bar{z} = 5$

d) $\bar{z} = -7i$

§2. CỘNG, TRỪ VÀ NHÂN CÁC SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ $(a, a', b, b' \in \mathbb{R})$

1. Tổng, hiệu các số phức

a) Ta định nghĩa: $z + z' = a + a' + (b + b')i$

b) Số phức kí hiệu $-z$ định bởi $-z = -a - bi$ được gọi là số phức đối của số phức $z = a + bi$.

Ta định nghĩa: $z - z' = z + (-z') = a - a' + (b - b')i$

2. Phép nhân các số phức

$$z.z' = (a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

B. BÀI TẬP

Bài 1

Thực hiện các phép tính sau:

a) $(3 - 5i) + (2 + 4i)$

b) $(-2 - 3i) + (-1 - 7i)$

c) $(4 + 3i) - (5 - 7i)$

d) $(2 - 3i) - (5 - 4i)$

Giải

a) $(3 - 5i) + (2 + 4i) = 5 - i$

b) $(-2 - 3i) + (-1 - 7i) = -3 - 10i$

c) $(4 + 3i) - (5 - 7i) = -1 + 10i$

d) $(2 - 3i) - (5 - 4i) = -3 + i$

Bài 2

Tính $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ với:

a) $\alpha = 3, \beta = 2i$

b) $\alpha = 1 - 2i, \beta = 6i$

c) $\alpha = 5i, \beta = -7i$

d) $\alpha = 15, \beta = 4 - 2i$

Giải

a) $\alpha + \beta = 3 + 2i, \alpha - \beta = 3 - 2i$

b) $\alpha + \beta = 1 + 4i, \alpha - \beta = 1 - 8i$

c) $\alpha + \beta = -2i, \alpha - \beta = 12i$

d) $\alpha + \beta = 19 - 2i, \alpha - \beta = 11 + 2i$

Bài 3

Thực hiện các phép tính sau:

a) $(3 - 2i)(2 - 3i)$

b) $(-1 + i)(3 + 7i)$

c) $5(4 + 3i)$

d) $(-2 - 5i)4i$

Giải

a) $(3 - 2i)(2 - 3i) = -13i$

b) $(-1 + i)(3 + 7i) = -10 - 4i$

c) $5(4 + 3i) = 20 + 15i$

d) $(-2 - 5i)4i = 20 - 8i$

Bài 4

Tính i^3, i^4, i^5.

Nêu cách tính i^n với n là một số tự nhiên tùy ý.

Giải

Ta có: $i^3 = i^2.i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = 1$, $i^5 = i^4.i = i$

Ta suy ra cách tính i^n với $n \in \mathbb{N}$ như sau:

Gọi $n = 4p + r$ với $p, r \in \mathbb{N}$ và $0 \le r \le 4$ thì $i^n = i^r$.

Bài 5

Tính:

a) $(2 + 3i)^2$

b) $(2 + 3i)^3$

Giải

a) $(2 + 3i)^2 = -5 + 12i$

b) $(2 + 3i)^3 = (-5 + 12i)(2 + 3i) = -46 + 9i$

§3. PHÉP CHIA CÁC SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

a) Số phức nghịch đảo của một số phức:

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \quad (z \neq 0)$$

b) Phép chia số phức z = a + bi cho số phức z' = a' + b'i (z' ≠ 0):

$$\frac{z}{z'} = \frac{a+bi}{a'+b'} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + \frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}i$$

B. BÀI TẬP

Bài 1

Thực hiện các phép chia sau:

a) $\dfrac{2+i}{3-2i}$

b) $\dfrac{1+i\sqrt{2}}{2+i\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{5i}{2-3i}$

d) $\dfrac{5-2i}{i}$

Giải

a) $\dfrac{2+i}{3-2i} = \dfrac{(2+i)(3+2i)}{3^2+(-2)^2} = \dfrac{4}{13} + \dfrac{7}{13}i$

b) $\dfrac{1+i\sqrt{2}}{2+i\sqrt{3}} = \dfrac{(1+i\sqrt{2})(2-i\sqrt{3})}{2^2+(\sqrt{3})^2} = \dfrac{2+\sqrt{6}}{7} + \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{7}i$

c) $\dfrac{5i}{2-3i} = \dfrac{5i(2+3i)}{2^2+(-3)^2} = -\dfrac{15}{13} + \dfrac{10}{13}i$

d) $\dfrac{5-2i}{i} = -2-5i$

Bài 2

Tìm nghịch đảo $\dfrac{1}{z}$ của số phức z, biết:

a) $z = 1 + 2i$

b) $z = \sqrt{2} - 3i$

c) $z = i$

d) $z = 5 + i\sqrt{3}$

Giải

a) $z = 1+2i \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1+2i} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$

b) $z = \sqrt{2} - 3i \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 3i} = \dfrac{\sqrt{2}}{11} + \dfrac{3}{11}i$

c) $z = i \Rightarrow \dfrac{1}{z} = -i$

d) $z = 5 + i\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{5 + i\sqrt{3}} = \dfrac{5}{28} - \dfrac{\sqrt{3}}{28}i$

Bài 3

Thực hiện các phép tính sau:

a) $2i(3 + i)(2 + 4i)$

b) $\dfrac{(1+i)^2(2i)^3}{-2+i}$

c) $3 + 2i + (6 + i)(5 + i)$

d) $4 - 3i + \dfrac{5+4i}{3+6i}$

Giải

a) $2i(3 + i)(2 + 4i) = (-2 + 6i)(2 + 4i) = -28 + 4i$

b) $\dfrac{(1-i)^2(2i)^3}{-2+i} = \dfrac{2i.(-8i)}{-2+i} = \dfrac{16}{-2+i} = -\dfrac{32}{5} - \dfrac{16}{5}i$

c) $3 + 2i + (6 + i)(5 + i) = 3 + 2i + (29 + 11i) = 32 + 13i$

d) $4 - 3i + \dfrac{5+4i}{3+6i} = 4 - 3i + \dfrac{(5+4i)(3-6i)}{45} = 4 - 3i + \dfrac{39}{45} - \dfrac{18}{45}i = \dfrac{219}{45} - \dfrac{153}{45}i$

Bài 4

Giải các phương trình sau:

a) $(3 - 2i)z + (4 + 5i) = 7 + 3i$ (1)

b) $(1 + 3i)z - (2 + 5i) = (2 + i)z$ (2)

c) $\dfrac{z}{4-3i} + (2 - 3i) = 5 - 2i$ (3)

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow (3 - 2i)z = 3 - 2i \Leftrightarrow z = 1$

b) (2) $\Leftrightarrow (-1 + 2i)z = 2 + 5i \Leftrightarrow z = \dfrac{2+5i}{-1+2i} \Leftrightarrow z = \dfrac{(2+5i)(-1-2i)}{5}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{8}{5} - \dfrac{9}{5}i$

c) (3) $\Leftrightarrow \dfrac{z}{4-3i} = 3 + i \Leftrightarrow z = (3 + i)(4 - 3i) \Leftrightarrow z = 15 - 5i$

§4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRONG C

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Căn bậc hai của số phức

a) Định nghĩa: Số phức z được gọi là căn bậc hai của số phức u nếu $z^2 = u$.

b) Các tìm căn bậc hai của số phức u:

(i) Trường hợp u = a là một số thực:

+ u = 0: căn bậc hai của u là 0.

+ u = a > 0: Có đúng hai căn bậc hai của u là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.

+ u = a < 0: Có đúng hai căn bậc hai của u là $\sqrt{a}i$ và $-\sqrt{a}i$.

(ii) Trường hợp u = a + bi (a, b ∈ ℝ và b ≠ 0).

Gọi z = x + yi là căn bậc hai của u, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

2. Phương trình bậc hai

Ta xét phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ (*) với A, B, C cho trước và $A \neq 0$.

Xét biệt thức $\Delta = B^2 - 4AC$

• Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt:

$$z_1 = \frac{-B + \delta}{2A},\ z_2 = \frac{-B - \delta}{2A}$$

Trong đó δ là một căn bậc hai của Δ.

Đặc biệt:

+ Nếu Δ là một số thực dương thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$z_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A},\ z_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}$$

+ Nếu Δ là một số thực âm thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$z_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}i}{2A},\ z_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}i}{2A}$$

• Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (*) có nghiệm kép:

$$z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}$$

B. BÀI TẬP

Bài 1

Tìm các căn bậc hai phức của các số sau:

$$-7; -8; -12; -20; -121$$

Giải

Gọi u là căn bậc hai của các số phức đã cho.

* $z = -7 \Leftrightarrow z = 7i^2 \Rightarrow u = \pm\sqrt{7}i$

Tương tự:

* $z = -8 \Rightarrow u = \pm 2\sqrt{2}i$

* $z = -12 \Rightarrow u = \pm 2\sqrt{3}i$

* $z = -20 \Rightarrow u = \pm 2\sqrt{5}i$

* $z = -121 \Rightarrow u = \pm 11i$

Bài 2

Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức:

a) $-3z^2 + 2z - 1 = 0$ (1)

b) $7z^2 + 3z + 2 = 0$ (2)

c) $5z^2 - 7z + 11 = 0$ (3)

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow 3z^2 - 2z + 1 = 0$

$$\Delta' = -2 = 2i^2$$

Phương trình (1) có hai nghiệm: $z_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{2}}{3}$

b) $\Delta = -47 = 47i^2$

Phương trình (2) có hai nghiệm: $z_{1,2} = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{47}}{14}$

c) $\Delta = -171 = 171i^2$

Phương trình (3) có hai nghiệm: $z_{1,2} = \dfrac{7 \pm i\sqrt{171}}{10}$

Bài 3

Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức:

a) $z^4 + z^2 - 6 = 0$ b) $z^4 + 7z^2 + 10 = 0$

Giải

a) Đặt $t = z^2$ ta được phương trình:

$$t^2 + t - 6 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm $t_1 = 2$, $t_2 = -3$

* $t = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

* $t = -3 \Leftrightarrow x^2 = 3i^2 \Leftrightarrow x = \pm i\sqrt{3}$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{2},\ x_{3,4} = \pm i\sqrt{3}$$

b) Đặt $t = x^2$ ta được phương trình:

$$t^2 + 7t + 10 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm $t_1 = -2$, $t_2 = -5$.

* $t = -2 \Leftrightarrow x^2 = 2i^2 \Leftrightarrow x = \pm i\sqrt{2}$

* $t = -5 \Leftrightarrow x^2 = 5i^2 \Leftrightarrow x = \pm i\sqrt{5}$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm:

$$x_{1,2} = \pm i\sqrt{2},\ x_{3,4} = \pm i\sqrt{5}$$

Bài 4

Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, z_1, z_2 là hai nghiệm (thực hoặc phức) của phương trình $az^2 + bz + c = 0$. Hãy tính $z_1 + z_2$ và $z_1.z_2$ theo các hệ số a, b, c.

Giải

Ta có $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Trong đó $\sqrt{b^2 - 4ac}$ là một căn bậc hai của số phức $b^2 - 4ac$.

Do đó nếu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ thì ta có:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ và } z_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Suy ra $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ và $z_1.z_2 = \frac{c}{a}$

Bài 5

Cho $z = a + bi$ là một số phức. Hãy tìm một phương trình bậc hai với hệ số thực nhận z và $\bar{z}$ làm nghiệm.

Giải

Gọi hai nghiệm của phương trình bậc hai là:

$$z_1 = a + bi, z_2 = \bar{z} = a - bi$$

Suy ra $z_1 + z_2 = 2a$ và $z_1.z_2 = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

Vậy $z_1 = a + bi$ và $z_2 = a - bi$ là hai nghiệm của phương trình:

$$z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$$

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

1. Thế nào là phần thực, phần ảo, môđun của một số phức?

Viết công thức tính môđun của một số phức theo phần thực và phần ảo của nó.

Giải

Nếu số phức z được viết dưới dạng $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thì ta gọi:

* x là phần thực và y là phần ảo của số phức z.

* Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng Oxy thì độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z và kí hiệu là $|z|$.
Ta có $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Tìm mối liên hệ giữa khái niệm môđun và khái niệm giá trị tuyệt đối của một số thực.

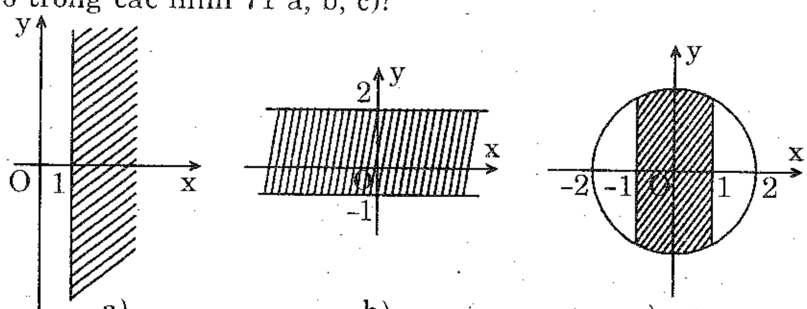
Đáp: Nếu số phức $z = a$ là một số thực ($a \in \mathbb{R}$) thì môđun của z bằng với giá trị tuyệt đối của nó tức là $|z| = |a|$.

3. Nêu định nghĩa số phức liên hợp của số phức z. Số phức nào bằng số phức liên hợp của nó?

Đáp: Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì số phức $\bar{z} = x - yi$ được gọi là số phức liên hợp của z.

Như vậy $z = \bar{z}$ khi và chỉ khi z là một số thực, tức là $z = x \in \mathbb{R}$.

4. Số phức thỏa mãn điều kiện nào thì có điểm biểu diễn ở phần gạch chéo trong các hình 71 a, b, c)?



Hình 71

Giải

Gọi z = x + yi (x, y $\in \mathbb{R}$) là số phức với điểm biểu diễn là M(x; y) trong mặt phẳng phức Oxy.

* Hình a) là tập hợp các đểm M với z có phần thực $x \geq 1$.

* Hình b) là tập hợp các điểm M với z có phần ảo $y \in [-1; 2]$.

* Hình c) là tập hợp các đểm M với z có phần thực $x \in [-1; 1]$ và môđun $|z| \leq 2$.

5. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn từng điều kiện:

a) Phần thực của z bằng 1.

b) Phần ảo của z bằng –2.

c) Phần thực của z thuộc đoạn [–1; 2], phần ảo của z thuộc đoạn [0; 1].

d) $|z| \leq 2$

Giải

Gọi z = x + yi (x, y $\in \mathbb{R}$) là số phức với điểm biểu diễn là M(x; y) trong mặt phẳng phức Oxy.

a) Tập hợp các điểm M với z có phần thực bằng 1 là một đường thẳng có phương trình x = 1.

b) Tập hợp các điểm M với z có phần ảo bằng –2 là một đường thẳng có phương trình y = –2.

c) Tập hợp các điểm M với z có phần thực $x \in [-1; 2]$ và phần ảo $y \in [0; 1]$ là một hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng x = –1, x = 2, y = 0, y = 1, kể cả các điểm nằm trên các cạnh của hình chữ nhật đó.

d) Tập hợp các điểm M với z có môđun $|z| \leq 1$ là hình tròn tâm O bán kính R = 2.

6. Tìm các số thực x, y sao cho:

a) 3x + yi = 2y + 1 + (2 – x)i   b) 2x + y – 1 = (x + 2y – 5)i

Giải

a) $3x + yi = 2y + 1 + (2 - x)i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y + 1 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy: x = 1 và y = 1

b) $2x + y - 1 = (x + 2y - 5)i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$

Vậy: $x = -1$ và $y = 3$

7. Chứng tỏ rằng với mọi số phức z, ta luôn có phần thực và phần ảo của z không vượt quá môđun của nó.

Giải

Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thế thì $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ta luôn có:

* $x^2 \le x^2 + y^2 \Rightarrow x \le \sqrt{x^2 + y^2}$, hay $x \le |z|$
* $y^2 \le x^2 + y^2 \Rightarrow y \le \sqrt{x^2 + y^2}$, hay $y \le |z|$

8. Thực hiện các phép tính sau:

a) $(3 + 2i)[(2 - i) + (3 - 2i)]$

b) $(4 - 3i) + \dfrac{1+i}{2+i}$

c) $(1 + i)^2 - (1 - i)^2$

d) $\dfrac{3+i}{2+i} - \dfrac{4-3i}{2-i}$

Giải

a) $(3 + 2i)[(2 - i) + (3 - 2i)] = (3 + 2i)(5 - 3i) = 21 + i$

b) $(4 - 3i) + \dfrac{1+i}{2+i} = 4 - 3i + \dfrac{(1+i)(2-i)}{5} = 4 - 3i + \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}i\right) = \dfrac{23}{5} - \dfrac{14}{5}i$

c) $(1 + i)^2 - (1 - i)^2 = 2i - (-2i) = 3i$

d) $\dfrac{3+i}{2+i} - \dfrac{4-3i}{2-i} = \dfrac{(3+i)(2-i)}{5} - \dfrac{(4-3i)(2+i)}{5} = \dfrac{7-i}{5} - \dfrac{11-2i}{5} = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5}i$

9. Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a) $(3 + 4i)z + (1 - 3i) = 2 + 5i$

b) $(4 + 7i)z - (5 - 2i) = 6iz$

Giải

a) $(3 + 4i)z + (1 - 3i) = 2 + 5i \Leftrightarrow (3 + 4i)z = 1 + 8i \Leftrightarrow z = \dfrac{1+8i}{3+4i}$

Vậy: $z = \dfrac{(1+8i)(3-4i)}{25} = \dfrac{35+20i}{25} = \dfrac{7}{5} + \dfrac{4}{5}i$

b) $(4 + 7i)z - (5 - 2i) = 6iz \Leftrightarrow (4 + i)z = 5 - 2i \Leftrightarrow z = \dfrac{5-2i}{4+i} = \dfrac{(5-2i)(4-i)}{17}$

Vậy: $z = \dfrac{18}{17} - \dfrac{13}{17}i$

10. Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a) $3z^2 + 7z + 8 = 0$ b) $z^4 - 8 = 0$ c) $z^4 - 1 = 0$

Giải

a) Giải phương trình $3z^2 + 7z + 8 = 0$.

$$\Delta = -47 = 47i^2$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $z_{1,2} = \dfrac{-7 \pm i\sqrt{47}}{6}$

b) Giải phương trình $z^4 - 8 = 0$.

Ta có: $z^4 - 8 = 0 \Leftrightarrow z^4 = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 2\sqrt{2} \\ z^2 = -2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}i^2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có bốn nghiệm:

$$z_{1,2} = \pm\sqrt[4]{8}, z_{3,4} = \pm i\sqrt[4]{8}$$

c) Giải phương trình $z^4 - 1 = 0$.

Ta có: $z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 1 \\ z^2 = -1 = i^2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có bốn nghiệm:

$$z_{1,2} = \pm 1,\ z_{3,4} = \pm i$$

11. Tìm hai số phức, biết tổng của chúng bằng 3 và tích của chúng bằng 4.

Giải

Hai số phức cần tìm là các nghiệm của phương trình

$$z^2 - 3z + 4 = 0$$

Ta có: $\Delta = -7 = 7i^2$

Vậy hai số thỏa mãn đề bài là $z_{1,2} = \dfrac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$

12. Cho hai số phức z_1, z_2. Biết rằng $z_1 + z_2$ và z_1z_2 là hai số thực. Chứng tỏ rằng z_1, z_2 là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số thực.

Giải

Đặt $z_1 + z_2 = a$ và $z_1z_2 = b$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Như vậy z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình:

$$z^2 - az + b = 0$$

Nhận thấy phương trình trên là phương trình bậc hai với hệ số thực.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Số nào trong các số sau là số thực?

A. $(\sqrt{3}+2i)-(\sqrt{3}-2i)$ B. $(2+i\sqrt{5})+(2-i\sqrt{5})$

C. $(1+i\sqrt{3})^2$ D. $\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$

2. Số nào trong các số sau là số ảo?

A. $(\sqrt{2}+3i)+(\sqrt{2}-3i)$ B. $(\sqrt{2}+3i)(\sqrt{2}-3i)$

C. $(2+2i)^2$ D. $\dfrac{2+3i}{2-3i}$

3. Đẳng thức nào trong các đẳng thức sau là đúng?

A. $i^{1977}=-1$ B. $i^{2345}=i$

C. $i^{2005}=1$ D. $i^{2006}=-i$

4. Đẳng thức nào trong các đẳng thức sau là đúng?

A. $(1+i)^8=-16$ B. $(1+i)^8=16i$

C. $(1+i)^8=16$ D. $(1+i)^8=-16i$

5. Biết rằng nghịch đảo của số phức z bằng số phức liên hợp của nó, trong các kết luận sau, kết luận nào là đúng?

A. $z\in\mathbb{R}$ B. $|z|=1$

C. z là một số ảo D. $|z|=-1$

6. Trong các kết luận sau, kết luận nào là sai?

A. Môđun của số phức z là một số thực.

B. Môđun của số phức z là một số phức.

C. Môđun của số phức z là một số thực dương.

D. Môđun của số phức z là một số thực không âm.

Giải

1. Chọn B

* $(\sqrt{3}+2i)-(\sqrt{3}-2i)=4i$

* $(2+i\sqrt{5})+(2-i\sqrt{5}=4$

* $(1+i\sqrt{3})^2=-2+2\sqrt{3}i$

* $\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}=\dfrac{(\sqrt{2}+i)^2}{3}=\dfrac{1+2\sqrt{2}i}{3}$

2. Chọn C

* $(\sqrt{2}+3i)+(\sqrt{2}-3i)=2\sqrt{2}$

* $(\sqrt{2}+3i)(\sqrt{2}-3i)=11$

* $(2+2i)^2=8i$

* $\dfrac{2+3i}{2-3i}=-\dfrac{5}{13}+\dfrac{12}{13}i$

3. Chọn B

Ta có: $i^{1977}=i^{4(494)+1}=1$, $i^{2345}=i^{4(586)+1}=i$

$i^{2005}=i^{4(501)+1}=i$, $i^{2006}=i^{4(501)+2}=-1$

4. Chọn C

Ta có: $(1+i)^2=2i \Rightarrow (1+i)^4=-4$ và $(1+i)^8=16$

5. Chọn B

Gọi $z=x+iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thì $\bar{z}=x-yi$ và $\dfrac{1}{z}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ ($z \neq 0$ hoặc $y \neq 0$)

Theo giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x}{x^2+y^2} & (1) \\ -y=-\dfrac{y}{x^2+y^2} & (2) \end{cases}$$

* Nếu $x=0$ thì $y \neq 0$. Từ (2) suy ra $y^2=1$ hay $x^2+y^2=1$.
* Nếu $y=0$ thì $x \neq 0$. Từ (1) suy ra $x^2=1$ hay $x^2+y^2=1$.
* Nếu $x \neq 0$ và $y \neq 0$ thì từ (1) và (2) cùng đưa đến $x^2+y^2=1$.

Như vậy ta luôn có $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$.

6. Chọn D

ÔN TẬP CUỐI NĂM

Các câu hỏi từ 1 đến 10, đọc giả xem lại trong sách giáo khoa.

I. Câu hỏi

1. Định nghĩa sự đơn điệu (đồng biến, nghịch biến) của một hàm số trên một khoảng.

2. Phát biểu các điều kiện cần và đủ để hàm số f(x) đơn điệu trên một khoảng.

3. Phát biểu các điều kiện đủ để hàm số f(x) có cực trị (cực đại, cực tiểu) tại điểm x_0.

4. Nêu sơ đồ khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

5. Nêu định nghĩa và các tính chất cơ bản của lôgarit.

6. Phát biểu các định lí về quy tắc tính lôgarit, công thức đổi cơ số của lôgarit

7. Nêu tính chất của hàm số mũ, hàm số lôgarit, mối liên hệ giữa đồ thị các hàm số mũ và hàm số lôgarit cùng cơ số.

8. Nêu định nghĩa và các phương pháp tính nguyên hàm.

9. Nêu định nghĩa và các phương pháp tính tích phân.

10. Nhắc lại các định nghĩa số phức, số phức liên hợp, môđun của số phức. Biểu diễn hình học của số phức.

II. Bài tập

1. Cho hàm số $f(x) = ax^2 - 2(a + 1)x + a + 2 \quad (a \neq 0)$

   a) Chứng tỏ rằng phương trình f(x) = 0 luôn có nghiệm thực. Tính các nghiệm đó.

   b) Tính tổng S và tích P của các nghiệm của phương trình f(x) = 0. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của S và P theo a.

Giải

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 - 2(a + 1)x + a + 2 = 0 \qquad (*)$

Do tổng các hệ số của phương trình (*) bằng 0, nên phương trình luôn có hai nghiệm thực phân biệt:

$$x_1 = 1 \text{ và } x_2 = \frac{a+2}{a} = 1 + \frac{2}{a}$$

b) Ta có: $S = x_1 + x_2 = 2 + \frac{2}{a}$ và $P = x_1x_2 = 1 + \frac{2}{a}$

(i) Xét hàm số $S = 2 + \frac{2}{a}$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $S' = \dfrac{-2}{a^2} < 0, \forall a \neq 0$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$.

• Hàm số không có cực trị.

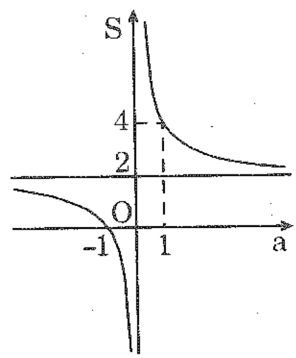
• Giới hạn:

$\lim\limits_{a\to\pm\infty} S = \lim\limits_{a\to\pm\infty}\left(2 + \dfrac{2}{a}\right) = 2 \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận ngang $S = 2$.

$\lim\limits_{a\to 0^+} S = +\infty, \lim\limits_{x\to 0} S = -\infty \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận đứng $a = 0$.

• Bảng biến thiên:

a	$-\infty$		a		$+\infty$
S'		-	||	-	
S	2	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	2



3) Đồ thị cắt trục hoành tại điểm $(-1; 0)$.

Giao điểm $I(0; 2)$ của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.

(ii) Xét hàm số $P = 1 + \dfrac{2}{a}$.

1) Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $P' = \dfrac{-2}{a^2} < 0, \forall a \neq 0$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$

• Hàm số không có cực trị.

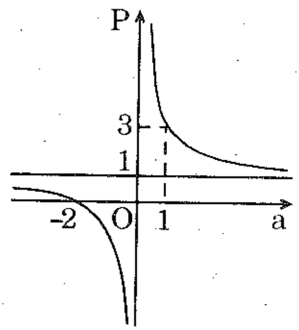
• Giới hạn:

$\lim\limits_{a\to\pm\infty} P = \lim\limits_{a\to\pm\infty}\left(1 + \dfrac{2}{a}\right) = 1 \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận ngang $P = 1$.

$\lim\limits_{a\to 0^+} P = +\infty, \lim\limits_{x\to 0} P = -\infty \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận đứng $a = 0$.

• Bảng biến thiên:

a	$-\infty$		a		$+\infty$
P'		$-$	||	$-$	
P	1	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	1



3) Đồ thị cắt trục hoành tại điểm (–2; 0).

Giao điểm J(0; 1) của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.

2. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + (a+3)x - 4$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi a = 0.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và các đường thẳng $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

Giải

a) Khi a = 0 phương trình của hàm số trở thành $y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4$.

1) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = -x^2 - 2x + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 1$

Suy ra:

$y' < 0$ khi $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$, $(1; +\infty)$.

$y' > 0$ khi $x \in (-3; 1)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.

• Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -3$, $y_{CT} = -13$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1$, $y_{CĐ} = -\frac{7}{3}$.

• Các giới hạn: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) = -\infty$

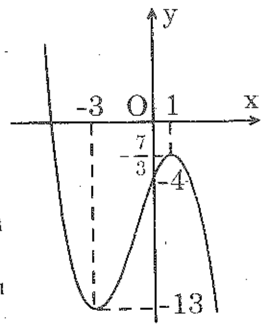
$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} x^3\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) = +\infty$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-13	$\nearrow$	$-\frac{7}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

3) Đồ thị:

Khi x = 0 thì y = –4 nên đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; –4).



b) Ta có: $S = \int_{-1}^{1}\left|-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4\right|dx$

$$S = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 4\right)dx = \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$S = \frac{35}{12} - \left(-\frac{23}{4}\right) = \frac{26}{3} \text{ (đvdt)}$$

3. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

a) Tìm a và b để đồ thị của hàm số đi qua hai điểm A(1; 2) và B(–2; –1).

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ứng với các giá trị tìm được của a và b.

c) Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường y = 0, x = 0, x = 1 và đồ thị (C) xung quanh trục hoành.

Giải

a) Đồ thị hàm số đi qua hai điểm A(1; 2) và (–2; –1) khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 1 + a + b + 1 = 2 \\ -8 + 4a - 2b + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

b) Khi a = 1 và b = –1 phương trình của hàm số trở thành:

$$y = x^3 + x^2 - x + 1$$

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 2x - 1$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = \frac{1}{3}$

$y' > 0$ khi $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

$y' < 0$ khi $x \in \left(-1; \frac{1}{3}\right)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

- Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại điểm x = –1, $y_{CĐ} = 2$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = \frac{1}{3}$, $y_{CT} = \frac{22}{27}$.

• Các giới hạn:

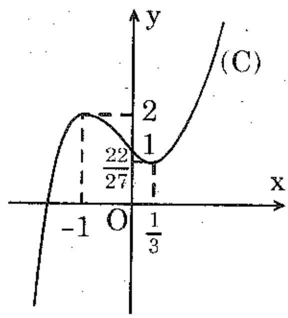
$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

và $$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$\frac{22}{27}$	↗	$+\infty$

3) Đồ thị:



Khi x = 0 thì y = 1 nên đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; 1).

c) Áp dụng công thức của vật thể tròn xoay, ta có:

$$V = \pi\int_0^1 (x^3 + x^2 - x + 1)^2dx$$

$$V = \pi\int_0^1 (x^6 + 2x^5 - x^4 + 3x^2 - 2x + 1)dx$$

$$V = \pi\left(\frac{x^7}{7} + \frac{2x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + x^3 - x^2 + x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{134\pi}{105} \text{ (đvtt)}$$

4. Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình

$$s(t) = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + \frac{t^2}{2} - 3t$$

trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

a) Tính v(2), a(2), biết v(t), a(t) lần lượt là vận tốc, gia tốc của chuyển động đã cho.

b) Tìm thời điểm t mà tại đó vận tốc bằng 0.

Giải

a) Vận tốc của chuyển động thẳng tại thời điểm t:

$$v(t) = s'(t) = t^3 - 3t^2 + t - 3$$

Gia tốc của chuyển động thẳng tại thời điểm t:

$$a(t) = v'(t) = 3t^2 - 6t + 1$$

Suy ra: $v(2) = -5$ (m/s), $a(2) = 1$ (m/s^2)

b) Theo giả thiết ta có phương trình:

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2+1) = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

Vậy khi $t = 3$ thì vận tốc bằng 0.

5. Cho hàm số $y = x^4 + ax^2 + b$.

a) Tính a, b để hàm số có cực trị bằng $\frac{3}{2}$ khi $x = 1$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho khi $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các điểm có tung độ bằng 1.

Giải

a) Gọi $f(x) = x^4 + ax^2 + b$, suy ra $f'(x) = 4x^3 + 2ax$.

Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2a = 0 \\ 1 + a + b = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy $a = -2$ và $b = \frac{5}{2}$.

b) Khảo sát hàm số $y = x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ (ứng với $a = -\frac{1}{2}$ và $b = 1$)

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = 4x^3 - x = x(4x^2 - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm\frac{1}{2}$$

$y' < 0$ khi $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right), \left(0; \frac{1}{2}\right)$

$y' > 0$ khi $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right), \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

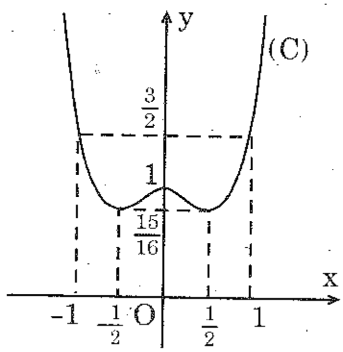
- Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại điểm x = 0, $y_{CĐ} = 1$ và đạt cực đại tại điểm $x = \pm\frac{1}{2}$, $y_{CT} = \frac{15}{16}$
- Giới hạn:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = +\infty$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	$\frac{15}{16}$	↗	1	↘	$\frac{15}{16}$	↗	$+\infty$

3) Đồ thị:



Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm (0; 1).

Hàm số $y = x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ là một hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại các điểm có tung độ bằng 1:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng y = 1.

$$x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

* Tiếp tuyến của (C) tại điểm (0; 1) có phương trình y = 1.

* Ta có: $y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right)$ là:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}$$

Tương tự phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};1\right)$ là $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}$

Tóm lại có ba tiếp tuyến phương trình là:

$$y = 1,\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}$$

6. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+m-1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 2.

b) Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại điểm M có hoành độ $a \neq -1$.

Giải

a) Khi m = 2 phương trình của hàm số trở thành $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.

1) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

2) Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên: $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$

• Hàm số không có cực trị.

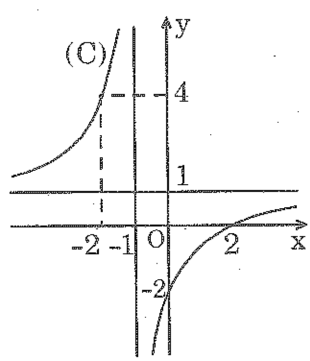
• Giới hạn:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow \text{đồ thị có tiệm cận ngang } y = 1.$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} y = -\infty,\ \lim_{x\to(-1)^-} y = +\infty \Rightarrow \text{đồ thị có tiệm cận đứng } x = -1.$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1



3) Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; –2), cắt trục hoành tại điểm (2; 0).

Giao điểm I(–1; 1) của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.

b) Phương trình của tiếp tuyến d:

Lấy điểm M bất kì trên (C) với $x_M = a$ $(a \neq -1)$

$$x_M = a \Rightarrow y_M = \frac{a-2}{a+1} \text{ và } y'(a) = \frac{3}{(a+1)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y = \frac{3}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{a-2}{a+1} \Leftrightarrow y = \frac{3}{(a+1)^2}x + \frac{a^2-4a-2}{(a+1)^2}$$

7. Cho hàm số $y = \dfrac{2}{2-x}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm các giao điểm của (C) và đồ thị của hàm số $y = x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại mỗi giao điểm.

c) Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và các đường thẳng $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ xung quanh trục Ox.

Giải

a) Khảo sát hàm số $y = \dfrac{2}{2-x}$.

1) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

2) Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = \dfrac{2}{(2-x)^2} > 0, \forall x \neq 2$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$

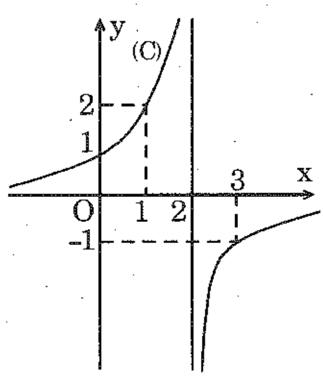
- Hàm số không có cực trị.
- Giới hạn:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{2-x} = 0 \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận ngang $y = 0$.

$\lim\limits_{x\to 2^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} y = +\infty \Rightarrow$ đồ thị có tiệm cận đứng $x = 2$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	0



3) Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; 1).

Giao điểm I(2; 0) của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.

b) Gọi (P): $y = x^2 + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P):

$$\frac{2}{2-x} = x^2 + 1 \Leftrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Suy ra (C) và (P) có hai giao điểm là A(0; 1) và B(1; 2).

Ta có: $y'(0) = \frac{1}{2}$ và $y'(1) = 2$

* Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A:

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

* Phương trình tiếp tuyến của (C) tại B:

$$y = 2(x-1) + 2 \Leftrightarrow y = 2x$$

c) Áp dụng công thức thể tích của vật thể tròn xoay, ta có:

$$V = \pi\int_0^1\left(\frac{2}{2-x}\right)^2 dx = 4\pi\int_0^1\frac{1}{(x-2)^2}dx = -4\pi\frac{1}{x-2}\Big|_0^1 = 2\pi \text{ (đvtt)}$$

8. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ trên đoạn $\left[-2; \frac{5}{2}\right]$

b) $f(x) = x^2\ln x$ trên đoạn $[1; e]$

c) $f(x) = xe^{-x}$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$

d) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$

Giải

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$

Ta có: $f(-1) = 8$, $f(2) = -19$, $f(-2) = -3$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{33}{2}$

Suy ra: – GTLN của f(x) trên $\left[-2; \frac{5}{2}\right]$ là $f(-1) = 8$

– GTNN của f(x) trên $\left[-2; \frac{5}{2}\right]$ là $f(2) = -19$

b) $f'(x) = x(2\ln x + 1)$, $(x > 0)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2} \notin [1; e]$$

Suy ra: – GTLN của f(x) trên [1; e] là $f(e) = e^2$

– GTNN của f(x) trên [1; e] là $f(1) = 0$

c) $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	

Từ bảng ta suy ra $\max\limits_{[0;+\infty)} f(x) = f(1) = \dfrac{1}{e}$

Vì $f(x) = xe^{-x} \geq 0,\ \forall x \in [0; +\infty)$ nên $\min\limits_{[0;+\infty)} f(x) = f(0) = 0$

d) $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2(\cos x + \cos 2x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos(\pi + x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$x \in \left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ suy ra $x = \pi$, $x = \dfrac{\pi}{3}$

Ta có: $f(\pi) = 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -2$

Vậy trên đoạn $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ $f(x)$ có GTLN $= f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ và GTNN $= f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -2$.

9. Giải các phương trình sau:

a) $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0$

b) $(3^x + 2^x)(3^x + 3.2^x) = 8.6^x$

c) $\log_{\sqrt{3}}(x - 2).\log_5 x = 2.\log_3(x - 2)$

d) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0$

Giải

a) $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0 \Leftrightarrow 13.(13^x)^2 - 13^x - 12 = 0$

Đặt $t = 13^x$ $(t > 0)$, ta được phương trình $13t^2 - t - 12 = 0$.

Phương trình trên có hai nghiệm $t_1 = 1$, $t_2 = -\dfrac{12}{13}$ (loại t_2)

Ta được: $t_1 = 13 \Leftrightarrow 13^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 0$.

b) $(3^x + 2^x)(3^x + 3.2^x) = 8.6^x \Leftrightarrow (3^x)^2 - 4.3^x.2^x + 3(2^x)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right)^x + 3 = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ $(t > 0)$, ta được phương trình $t^2 - 4t + 3 = 0$.

Phương trình trên có hai nghiệm $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

$$* \ t_1 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$* \ t_2 = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3 \Leftrightarrow x_2 = \log_{\frac{3}{2}} 3$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0$, $x_2 = \log_{\frac{3}{2}} 3$

c) Điều kiện: $x > 2$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$2\log_3(x-2).\log_5 x = \log_3(x-2) \Leftrightarrow \log_3(x-2)(\log_5 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(x-2) = 0 \\ \log_5 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 1 \\ x = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$

d) Đặt $t = \log_2 x$, ta được phương trình:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 \end{array}\right.$$

$$* \ t = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$$

$$* \ t = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 4$, $x_2 = 8$.

10. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{2^x}{3^x - 2^x} \le 2$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1$

c) $\log^2 x + 3\log x \ge 4$

d) $\dfrac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \le \dfrac{1}{4}$

Giải

a) * Khi $x > 0$ tức là $3^x > 2^x$:

$$\frac{2^x}{3^x - 2^x} \le 2 \Leftrightarrow 2^x \le 2(3^x - 2^x) \Leftrightarrow 3.2^x \le 2.3^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} \ge 1 \Leftrightarrow x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$$

* Khi $x < 0$ tức là $3^x < 2^x$:

$$\frac{2^x}{3^x - 2^x} \le 2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} \le 1 \Leftrightarrow x - 1 \le 0 \Leftrightarrow x \le 1$$

Kết hợp với $x < 0$ ta được $x < 0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = (-\infty; 0) \cup [1; \infty)$.

b) Điều kiện $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x < -1$ hoặc $x > 1)$

Với điều kiện đó ta có:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1 \Leftrightarrow \log_2(x^2-1) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow x^2 < 2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là:

$$S = (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$$

c) Điều kiện $x > 0$

Ta có: $\log^2 x + 3\log x \geq 4 \Leftrightarrow \log^2 x + 3\log x - 4 \geq 0$

Đặt $t = \log x$, phương trình trên trở thành bất phương trình:

$$t^2 + 3t - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq -4 \\ t \geq 1 \end{array}\right.$$

Như vậy: $\log^2 x + 3\log x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log x \leq -4 \\ \log x \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \dfrac{1}{10\,000} \\ x \geq 10 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là:

$$S = \left(0; \frac{1}{10\,000}\right] \cup [10; +\infty)$$

c) Điều kiện $x > 0$ và $x \neq \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\dfrac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \leq \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1 - \dfrac{1}{2}\log_2 x}{1 + \log_2 x} \leq \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1 - \log_2 x}{1 + \log_2 x} \leq 0$ (*)

Đặt $t = \log_2 x$, bất phương trình (*) trở thành:

$$\frac{1-t}{1+t} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq -1 \\ t \geq 1 \end{array}\right.$$

Như vậy: $\dfrac{1 - \log_2 x}{1 + \log_2 x} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \leq -1 \\ \log_2 x \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là:

$$S = \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [2; +\infty)$$

11. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần:

a) $\displaystyle\int_1^{e^4} \sqrt{x}\ln x dx$ b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x dx$ d) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}dx$

Giải

a) Đặt $u = \ln x$ và $dv = \sqrt{x}dx$, ta được $du = \dfrac{dx}{x}$ và $v = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$$\int_1^{e^4} \sqrt{x}\ln x dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x\Big|_1^{e^4} - \frac{2}{3}\int_1^{e^4} x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{8}{3}e^6 - \frac{4}{9}\sqrt{x^3}\Big|_1^{e^4}$$

$$= \frac{4}{3}e^6 - \frac{4}{9}(e^6 - 1) = \frac{4}{9}(5e^6 + 1)$$

b) Đặt $u = x$ và $dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x}$, ta được $du = dx$ và $v = -\cot x$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin^2 x} dx = -x\cot x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln 2$$

c) Đặt $u = \pi - x$ và $dv = \sin x dx$, ta được $du = -dx$ và $v = -\cos x$

$$\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x dx = (x - \pi)\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi - \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi$$

d) Đặt $u = 2x + 3$ và $dv = e^{-x}dx$, ta được $du = 2dx$ và $v = -e^{-x}$

$$\int_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}dx = -(2x+3)e^{-x}\Big|_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} e^{-x}dx = e - 3 - 2e^{-x}\Big|_{-1}^{0} = 3e - 5$$

12. Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến số:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{24}} \tan\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)dx$ (đặt $u = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 4x\right)$

b) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{dx}{9 + 25x^2}$ (đặt $x = \dfrac{3}{5}\tan t$)

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^4 x dx$ (đặt $u = \cos x$)

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1 + \tan x}}{\cos^2 x}dx$ (đặt $u = \sqrt{1 + \tan x}$)

Giải

a) $$\int_0^{\frac{\pi}{24}} \tan\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{24}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)}dx$$

Đặt $u = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) \Rightarrow du = 4\sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)dx$

Khi $x = 0$ thì $u = \frac{1}{2}$, khi $x = \frac{\pi}{24}$ thì $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{24}} \tan\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)dx = \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{u}du = \frac{1}{4}\ln u\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{8}\ln 3$$

b) Ta có: $\int_{\frac{\sqrt{3}}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{dx}{9 + 25x^2} = \frac{1}{25}\int_{\frac{\sqrt{3}}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{dx}{\frac{9}{25} + x^2}$

Đặt $x = \frac{3}{5}\tan t, t \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, suy ra $dx = \frac{3}{5}(1 + \tan^2 t)dt$

Khi $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{6}$ và khi $x = \frac{3}{5}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{dx}{9 + 25x^2} = \frac{1}{15}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 t}{1 + \tan^2 t}dt = \frac{1}{15}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{180}$$

c) Đặt $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

Khi $x = 0$ thì $u = 1$ và khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)\cos^4 x \sin x dx$$

$$= \int_0^1 (1 - u^2)u^4 du = \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{35}$$

d) Đặt $u = \sqrt{1 + \tan x} \Leftrightarrow u^2 = 1 + \tan x \Rightarrow 2udu = \frac{1}{\cos^2 x}dx$

Khi $x = -\frac{\pi}{4}$ thì $u = 0$ và khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $u = \sqrt{2}$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1 + \tan x}}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\sqrt{2}} u.2udu = 2\int_0^{\sqrt{2}} u^2 du = \frac{2}{3}u^3\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

13. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành.

b) $y = \ln x$, $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ và trục hoành.

Giải

a) Ta có $S = \int_{-1}^{2}(x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 6$ (đvtt)

b) Dễ thấy đồ thị hàm số y = lnx cắt trục hoành tại điểm (1; 0).

Do đó: $S = \int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x dx + \int_{1}^{e}\ln x dx$

Tính $\int \ln x dx$.

Đặt u = lnx và dx = du, ta được $du = \frac{dx}{x}$ và v = x.

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

Vậy: $S = -(x\ln x - x)\Bigg|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\Bigg|_{1}^{e} = \left(1 - \frac{2}{e}\right) + 1 = 2 - \frac{2}{e}$ (đvtt)

14. Tìm thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$ và $y = x^3$ xung quanh trục Ox.

Giải

Gọi $f(x) = 2x^2$ và $g(x) = x^3$.

$$f(x) - g(x) = 2x^2 - x^3 = x^2(2 - x)$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(2 - x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra là:

$$V = \pi\int_0^2(2x^2)^2dx - \pi\int_0^2(x^3)^2dx = 4\pi\int_0^2 x^4dx - \pi\int_0^2 x^6dx$$

$$= \frac{4\pi}{5}x^5\Bigg|_0^2 - \frac{\pi}{7}x^7\Bigg|_0^2 = \frac{256\pi}{35}$$

15. Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a) $(3 + 2i)z - (4 + 7i) = 2 - 5i$

b) $(7 - 3i)z + (2 + 3i) = (5 - 4i)z$

c) $z^2 - 2z + 13 = 0$

d) $z^4 - z^2 - 6 = 0$

Giải

a) $(3 + 2i)z - (4 + 7i) = 2 - 5i \Leftrightarrow (3 + 2i)z = 6 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{6 + 2i}{3 + 2i}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(6 + 2i)(3 - 2i)}{13} = \frac{22}{13} - \frac{6}{13}i$$

Vậy phương trình có một nghiệm $z = \frac{22}{13} - \frac{6}{13}i$.

b) $(7 - 3i)z + (2 + 3i) = (5 - 4i)z \Leftrightarrow (2 + i)z = -2 - 3i \Leftrightarrow z = \frac{-2-3i}{2+i}$

$$z = \frac{(-2-3i)(2-i)}{5} = -\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i$$

Vậy phương trình có một nghiệm $z = -\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i$.

c) Giải phương trình $z^2 - 2z + 13 = 0$.

Ta có: $\Delta' = -12 = 12i^2$

Suy ra phương trình có hai nghiệm: $z_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{3}i$

d) Giải phương trình $z^4 - z^2 - 6 = 0$.

Đặt $t = z^2$, ta được phương trình $t^2 - t - 6 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm thực $t_1 = 3$, $t_2 = -2$.

* $t_1 = 3 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{3}$

* $t_2 = -2 \Leftrightarrow z^2 = 2i^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{2}i$

Vậy phương trình có bốn nghiệm: $z = \pm\sqrt{3}, z = \pm\sqrt{2}i$

16. Trên mặt phẳng tọa độ, hãy tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn từng bất đẳng thức:

a) $|z| < 2$ b) $|z - i| \le 1$ c) $|z - 1 - i| < 1$

Giải

Gọi M(x; y) là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

a) Ta có: $|z| < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 4$

Vậy tập hợp các điểm M là hình tròn tâm O bán kính R = 1, không kể các điểm trên biên.

b) Ta có: $z - i = x + (y - 1)i$. Do đó:

$$|z - i| \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \le 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 \le 1$$

Vậy tập hợp các điểm M là hình tròn tâm I(0; 1), bán kính R = 1, kể các điểm trên biên.

c) Ta có: $z - 1 - i = x - 1 + (y - 1)i$. Do đó:

$$|z - 1 - i| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1$$

Vậy tập hợp các điểm M là hình tròn tâm J(1; 1), bán kính R = 1, không kể các điểm trên biên.