

## CHỦ ĐỀ: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

### I. Tóm tắt lý thuyết

#### Phương trình lượng giác

##### a. Phương trình lượng giác cơ bản

$$* \sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$* \cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$* \tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$* \cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

##### b. Dạng thường gặp:

##### \* Phương trình bậc hai đối với một HSLG:

$$1. a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$$

$$2. a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

$$3. a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

$$4. a \cot^2 x + b \cot x + c = 0$$

##### Cách giải:

đặt  $t = \sin x / \cos x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ) hoặc  $t = \tan x / \cot x$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) ta được phương trình bậc hai theo  $t$ .

##### \* Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ : $a \sin x + b \cos x = c$ ( $a^2 + b^2 > 0$ )

##### Cách giải:

Chia hai vế của phương trình cho  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha. \text{ Khi đó}$$

$$\text{Pt(1) thành: } \sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Phương trình  $a \sin x + b \cos x = c$  có nghiệm khi và chỉ khi  $a^2 + b^2 \geq c^2$

##### \* Phương trình đẳng cấp bậc hai: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ ( $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ )

##### Cách giải:

Xét xem  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  có là nghiệm của phương trình không.

Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $\cos x \neq 0$ ), chia hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$  (hoặc  $\sin^2 x$ ) ta được phương trình bậc 2 theo  $\tan x$  (hoặc  $\cot x$ ).

##### \* Phương trình đối xứng: $a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$ ( $a^2 + b^2 > 0$ )

##### Cách giải:

Đặt  $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ , ( $|t| \leq \sqrt{2}$ )  $\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ : ta được phương trình bậc hai theo  $t$ .

### II. Bài tập trắc nghiệm

#### Nhận biết

##### Câu 1. Chọn phát biểu sai

A. Hàm số  $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$  là hàm số lẻ.

B. Hàm số  $y = \sin x, y = \cos x$  tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ .

C. Hàm số  $y = \tan x, y = \cot x$  tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ .

D. Hàm số  $y = \sin x, y = \cos x$  có tập giá trị là  $[-1; 1]$ .

Câu 2. Đồ thị hàm số  $y = \cos x, y = \sin x$  là đường

A. Đường thẳng.

B. Cong kín.

C. Parabol.

D. Hình sin.

Câu 3.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  là nghiệm của phương trình

A.  $\cos x = 0$ .

B.  $\cos x = -1$

C.  $\sin x = -1$

D.  $\sin x = 1$

Câu 4. Tập xác định của hàm số  $y = \sin 3x$  là

A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

B.  $\mathbb{R}$

C.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

D.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Câu 5. Tìm khẳng định **đúng**?

A. Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số chẵn.

B. Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số tuần hoàn chu kỳ  $\pi$ .

C. Hàm số  $y = \sin x$  có giá trị trong khoảng  $(-1; 1)$ .

D. Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trong các khoảng  $\left( -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right) k \in \mathbb{Z}$ .

Câu 6. Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\sin x - 1}$  là

A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

B.  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

C.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$

Câu 7. Tập xác định của hàm số  $y = \cos \sqrt{x-1} + 2x$  là

A.  $[1; +\infty)$ .

B.  $(1; +\infty)$ .

C.  $(-\infty; 1)$ .

D.  $\mathbb{R}$ .

Câu 8. Tìm khẳng định **sai**?

A. Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn.

B. Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$ .

C. Hàm số  $y = \cos x$  có đồ thị là đường hình sin.

D. Hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trên tập xác định.

Câu 9. Khẳng định đúng là

A.  $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

B.  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

C.  $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

D.  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Câu 10. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A.  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

B.  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

C.  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$

D.  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Câu 11. Hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trong đoạn nào dưới đây?

A.  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$

B.  $[\pi; 2\pi]$

C.  $[-\pi; \pi]$

D.  $[0; \pi]$

**Câu 12.** Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số  $y = \tan x$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .
- B. Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số tuần hoàn chu kì  $2\pi$ .
- C. Giá trị của hàm số  $y = \tan x$  tại  $\frac{3\pi}{4}$  là 1.
- D. Hàm số  $y = \tan x$  đồng biến trên tập xác định.

**Câu 13.** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1}{\cos x + 2}$  là

- A.  $\mathbb{R}$ .
- B.  $\mathbb{Z}$ .
- C.  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$
- D.  $\emptyset$

**Câu 14.** Cho  $k \in \mathbb{Z}$ . Các điểm mà hàm số  $y = \frac{1}{1 + \cos x}$  không xác định là

- A.  $x = k2\pi$
- B.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
- C.  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
- D.  $x = \pi + k2\pi$

**Câu 15.** Trong các khẳng định sau khẳng định nào **sai**?

- A. Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số lẻ.
- B. Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số tuần hoàn chu kì  $\pi$ .
- C. Hàm số  $y = \cot x$  có tập giá trị là  $\mathbb{R}$ .
- D. Hàm số  $y = \cot x$  đồng biến trên tập xác định.

**Thông hiểu**

**Câu 16.** Giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $2\sin x - m = 0$  có nghiệm là

- A.  $m \leq -2$  hoặc  $m \geq 2$
- B.  $-2 \leq m \leq 2$
- C.  $m < 2$
- D.  $m \geq 2$

**Câu 17.** Các nghiệm của phương trình  $\sin 2x = \frac{1}{2}$  trong khoảng  $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$  là

- A.  $\frac{13\pi}{12}$  và  $\frac{7\pi}{6}$
- B.  $\frac{17\pi}{12}$  và  $\frac{7\pi}{4}$
- C.  $\frac{17\pi}{12}$  và  $\frac{13\pi}{12}$
- D.  $\frac{7\pi}{4}$  và  $\frac{7\pi}{6}$

**Câu 18.** Trong các phương trình sau đây phương trình nào vô nghiệm

- A.  $\sin x + \cos x = 2$
- B.  $\sin^2 x - 5\sin x + 4 = 0$
- C.  $\sin x = 2\cos x$
- D.  $\sin x - 2\cos x = 1$

**Câu 19.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  sao cho phương trình  $(\sqrt{3}\cos x + 2)(3\sin x - m + 1) = 0$  có nghiệm?

- A.  $m \leq -2$  hoặc  $m \geq 4$ .
- B.  $-2 \leq m \leq 4$ .
- C.  $-4 \leq m \leq 2$ .
- D.  $\forall m \in \mathbb{R}$ .

**Câu 20.** Số nghiệm thực của phương trình  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos x$  với  $x \in (0; 2\pi)$  là

- A. 3.
- B. 6.
- C. 5.
- D. 4.

**Câu 21.** Gọi  $x_1; x_2$  lần lượt là nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình  $2\sin 2x + \sqrt{3} = 0$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = x_1 + 2x_2$ .

- A.  $P = \frac{7\pi}{6}$ .
- B.  $P = \frac{\pi}{3}$ .
- C.  $P = \frac{5\pi}{6}$ .
- D.  $P = \frac{2\pi}{3}$ .

**Câu 22.** Gọi  $M; m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = -2\sin x + 3$ . Tính  $S = M + m$ .

- A.  $S = 5$
- B.  $S = 6$
- C.  $S = 4$
- D.  $S = 8$

**Câu 23.** Cho ba hàm số  $f(x) = \sin x$ ;  $g(x) = \cos x$ ;  $h(x) = \tan x$ . Tìm các hàm số đồng biến trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ .

A. Hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$ .

B. Hàm số  $f(x)$  và  $h(x)$ .

C. Hàm số  $g(x)$  và  $h(x)$ .

D. Cả ba hàm số  $f(x)$ ;  $g(x)$  và  $h(x)$ .

**Câu 24.** Số nghiệm thực của phương trình  $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$  với  $x \in (0; 2\pi)$  là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**Câu 25.** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A.  $y = 4\sin x \cdot \tan 2x$

B.  $y = \tan x - \sin x$

C.  $y = 2\sin 2x + 3$

D.  $y = 3\sin x + \cos x$

**Câu 26.** Phương trình  $\tan^2 x = 3$  có nghiệm là

A.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

B.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$

C. vô nghiệm

D.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

**Câu 27.** Nghiệm của phương trình  $\sin x \cdot (2\cos x - \sqrt{3}) = 0$  là

A.  $\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B.  $\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C.  $\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D.  $\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 28.** Phương trình  $\sqrt{3} \cdot \tan x + 3 = 0$  có nghiệm là

A.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

B.  $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

C.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

D.  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

**Câu 29.** Phương trình  $2\sin x - m = 0$  vô nghiệm khi m

A.  $m > 1$

B.  $m < -2$  hoặc  $m > 2$

C.  $m < -1$

D.  $-2 \leq m \leq 2$

**Câu 30.** Tập xác định của hàm số  $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  là

A.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

B.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

C.  $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$

D.  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

**Câu 31.** Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

A.  $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$

B.  $3\sin x - 4\cos x = 5$

C.  $\sin x = \cos \frac{\pi}{4}$

D.  $\sqrt{3}\sin x - \cos x = -3$

**Câu 32.** Phương trình  $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$  có nghiệm là

A.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

B. Vô nghiệm

C.  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$

D.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

**Câu 33.** Điều kiện để phương trình  $m \cdot \sin x - 3\cos x = 5$  có nghiệm là

A.  $m \geq 4$

B.  $-4 \leq m \leq 4$

C.  $m \geq \sqrt{34}$

D.  $\begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases}$

**Câu 34.** Chu kỳ của hàm số  $y = \sin 2x$  là

A.  $\pi$

B.  $2\pi$

C.  $\frac{\pi}{2}$

D.  $4\pi$

**Câu 35:** Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{6}) + 3$

A.  $y_{\max} = 5; y_{\min} = 1$

B.  $y_{\max} = 5; y_{\min} = -1$

C.  $y_{\max} = 3; y_{\min} = 1$

D.  $y_{\max} = 3; y_{\min} = -1$

**Vận dụng**

**Câu 36:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 1 - 2\cos x - \cos^2 x$  là

A. 2

B. 5

C. 0

D. 3

**Câu 37:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 4\sqrt{\sin x + 3} - 1$  lần lượt là

A.  $\sqrt{2}$  và 2

B. 2 và 4

C.  $4\sqrt{2}$  và 8

D.  $4\sqrt{2} - 1$  và 7

**Câu 38:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin^2 x - 4\sin x - 5$  là

A. -20

B. -9

C. 0

D. -8

**Câu 39:** Nghiệm của phương trình lượng giác  $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$  thỏa điều kiện  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  là

A.  $x = \frac{\pi}{3}$

B.  $x = \frac{\pi}{2}$

C.  $x = \frac{\pi}{6}$

D.  $x = \frac{5\pi}{6}$

**Câu 40:** Điều kiện xác định của hàm số  $y = \frac{\cot x}{\cos x}$  là

A.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

B.  $x = k2\pi$

C.  $x = k\pi$

D.  $x \neq k\frac{\pi}{2}$

**Câu 41:** Hàm số nào sau đây có đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng?

A.  $y = (x^2 + 1)\sin x$

B.  $y = (x^3 + x) \cdot \tan x$

C.  $y = |x| \cdot \cot 2x$

D.  $y = (2x + 1)\cos x$

**Câu 42:** Hàm số  $y = 1 + \sin^2 x$  có chu kỳ là:

A.  $T = \frac{\pi}{2}$

B.  $T = 4\pi$

C.  $T = 2\pi$

D.  $T = \pi$

**Câu 43:** Tìm  $m$  để phương trình  $5\cos x - m\sin x = m + 1$  có nghiệm.

A.  $m \leq -13$

B.  $m \leq 12$

C.  $m \leq 24$

D.  $m \geq 24$

**Câu 44:** Hàm số  $y = \frac{\cos x}{2 + m \cdot \cos x}$  xác định với mọi  $x \in \mathbb{R}$  khi nào?

A.  $|m| \geq 2$

B.  $|m| > 2$

C.  $|m| < 2$

D.  $|m| \leq 2$

**Câu 45:** Phương trình  $\tan^2 x - 2m \cdot \tan x + 1 = 0$  có nghiệm khi và chỉ khi

A.  $m \neq \pm 1$

B.  $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{cases}$

C.  $-1 \leq m \leq 1$

D.  $m \neq \pm 4$

**Vận dụng cao**

**Câu 46:** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0$  có nghiệm

$x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ ?

A.  $0 < m < 1$

B.  $-1 \leq m < 0$

C.  $\frac{1}{2} < m \leq 1$

D.  $-1 \leq m \leq \frac{1}{2}$

**Câu 47:** Phương trình  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$  tương đương với phương trình

A.  $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = 0$

B.  $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x = 0$

C.  $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 4x = 0$

D.  $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 5x = 0$

**Câu 48:** Xác định  $m$  để phương trình  $m \cdot \cos^2 x - m \cdot \sin 2x - \sin^2 x + 2 = 0$  có nghiệm.

- A.  $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 0 \end{cases}$       C.  $-3 \leq m \leq 1$       D.  $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$

**Câu 49.** Chu kì của hàm số  $y = \cos x \cdot \cos 5x + \sin 2x \cdot \sin 4x$  là

- A.  $T = 2\pi$       B.  $T = \pi$       C.  $T = \frac{\pi}{2}$       D.  $T = 4\pi$

**Câu 50.** Chu kì của hàm số  $y = \cos^4 x + \sin^4 x$  là

- A.  $T = 4\pi$       B.  $T = 2\pi$       C.  $T = \frac{\pi}{4}$       D.  $T = \frac{\pi}{2}$