

Bài 1. (2,0 điểm). Hãy tính giá trị của

a) $M = (2\sqrt{300} + 3\sqrt{48} - 4\sqrt{75}) : \sqrt{3};$

b) $N = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}};$

c) $P = \frac{2}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \frac{12}{\sqrt{3}+3};$

Bài 2. (2,0 điểm) Cho các biểu thức:

$$A = 1 - \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}$$

Với $x \geq 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$.

a) Hãy tính giá trị của A khi $x = 16$

b) Rút gọn B .

c) Xét biểu thức $T = \frac{A}{B}$. Hãy tính giá trị nhỏ nhất của T .

Bài 3. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = (2-m)x + m + 1$ với m là tham số và $m \neq 2$ có đồ thị là đường thẳng d .

a) Khi $m = 0$, hãy vẽ d trên hệ trục tọa độ Oxy .

b) Tìm m để d cắt đường thẳng $y = 2x - 5$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

c) Tìm m để d cùng với các trục tọa độ Ox, Oy tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

Bài 4: (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài (O) . Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC .

a) Chứng minh: bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: OA là đường trung trực của BC .

c) Lấy D là điểm đối xứng với B qua O . Gọi E là giao điểm của đoạn thẳng AD với (O) (E không trùng với D). Chứng minh: $\frac{DE}{BE} = \frac{BD}{BA}$.

d) Tính số đo góc HEC .

Bài 5. (0,5 điểm) Cho $x > 0, y > 0$ thỏa mãn $xy = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{6}{3x+2y}.$$

Hướng dẫn giải

Bài 1:

$$a) M = (2\sqrt{300} + 3\sqrt{48} - 4\sqrt{75}) : \sqrt{3}$$

$$M = (20\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 20\sqrt{3}) : \sqrt{3} = 12\sqrt{3} : \sqrt{3} = 12$$

$$b) N = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$N = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 1$$

$$c) P = \frac{2}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \frac{12}{\sqrt{3}+3}$$

$$P = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} - \frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} + \frac{12(\sqrt{3}-3)}{(\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}+3)}$$

$$P = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} - \frac{\sqrt{3}+2}{3-4} + \frac{12(\sqrt{3}-3)}{3-9} = \sqrt{3}-1 + \sqrt{3}+2 - 2(\sqrt{3}-3)$$

$$P = 2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}+6=7$$

Bài 2:

$$a) A = 1 - \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9 \text{ } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$$

$$A = 1 - \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

Thay $x = 16$ $x = 16$ (TMĐK) vào biểu thức A ta có:

$$A = A = \frac{1}{1+\sqrt{16}} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$$

$$b) B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9 \text{ } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$\text{Với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9 \text{ } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9 \text{ để } T = \frac{A}{B} = \frac{1}{1+\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

Có $\sqrt{x} \geq 0$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 1} \leq \frac{3}{1}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{\sqrt{x} + 1} \geq -3 \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 1} \geq 1 - 3 \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 1} \geq -2$$

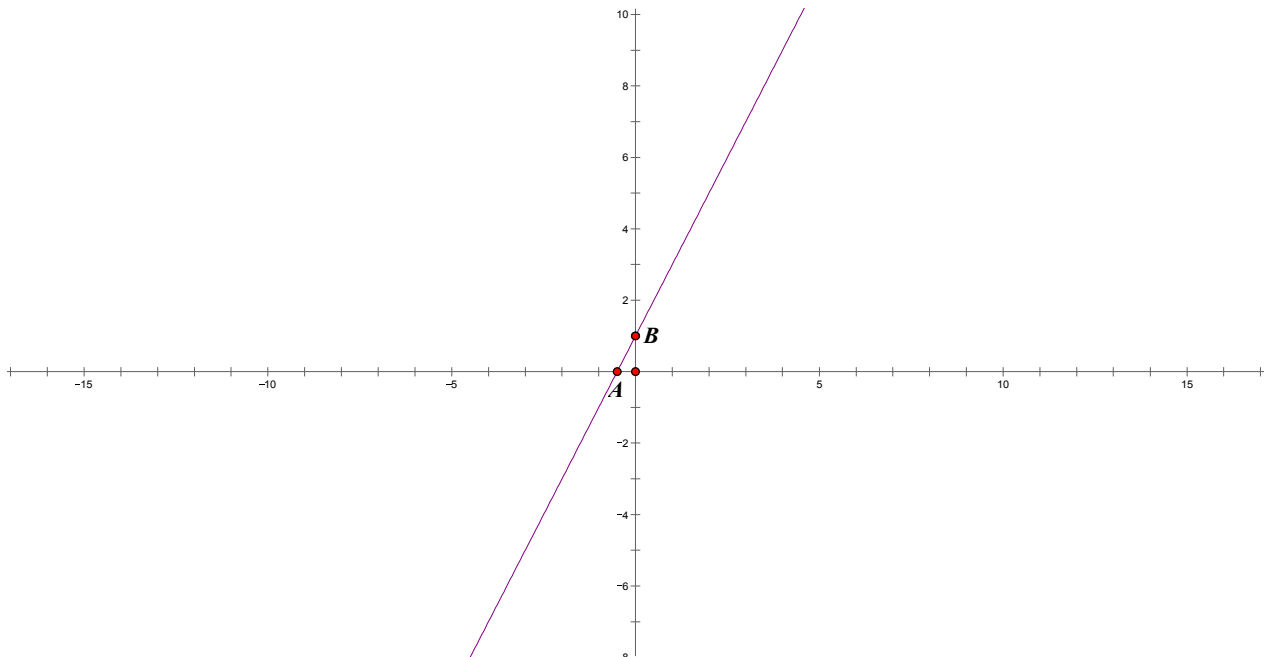
$$\Leftrightarrow T \geq -2$$

Vậy GTNN của $T = -2$ khi $x = 0$

Bài 3:

a) Với $m = 2$ ta có : $y = 2x + 1$

Đường thẳng $y = 2x + 1$ đi qua 2 điểm $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right); B(0; 1)$



b) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = (2 - m)x + m + 1$ và đường thẳng $y = 2x - 5$ là :

$$(2 - m)x + m + 1 = 2x - 5$$

$$\Leftrightarrow -mx + m = -6 \quad (1)$$

Vì 2 đường thẳng cắt nhau tại điểm có hoành độ là 2 , thay $x = 2$ vào (1) ta được:

$$-2m + m = -6$$

$$\Leftrightarrow -m = -6$$

$$\Leftrightarrow m = 6$$

Vậy với $m = 6$ đường thẳng $y = (2 - m)x + m + 1$ và đường thẳng $y = 2x - 5$ cắt nhau tại điểm có hoành độ là 2

c) Điều kiện $m \neq 2$

$$x = 0 \Rightarrow y = m + 1$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{m+1}{m-2}$$

Đường thẳng $y = (2-m)x + m + 1$ cắt hai cạnh Ox tại điểm $A\left(\frac{m+1}{m-2}; 0\right)$ và cắt Oy tại điểm $B(0; m+1)$.

Ta có:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{m+1}{m-2} \right| \cdot |m+1| = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{|m-2|} = 4$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 = 4|m-2|$$

Trường hợp 1: $m-2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$

$$(m+1)^2 = 4(m-2)$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 = 4m - 8$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 9 = 0$$

$$\Delta' = 1^2 - 1.9 = -8 < 0 \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm.}$$

Trường hợp 2: $m-2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$

$$(m+1)^2 = -4(m-2)$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 = -4m + 8$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m - 7 = 0$$

$$\Delta' = 3^2 - 1.(-7) = 16$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 4 > 0$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$m_1 = \frac{-3+4}{1} = 1$$

$$m_2 = \frac{-3-4}{1} = -7$$

Vậy với $m = 1$ hoặc $m = -7$ thì đường thẳng d cùng với trục tọa độ Ox, Oy tạo thành tam giác có diện tích bằng 2.

Bài 4:



b) Ta có $OB = OC = R$ và $AB = AC$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) nên OA là trung trực của BC .

c) Vì D là điểm đối xứng với B qua O mà $B \in (O)$ nên BD là đường kính của đường tròn (O) .

Tam giác ABD vuông tại B có đường cao là BE nên $\triangle DBA$ đồng dạng với $\triangle DEB$ (g - g)

Suy ra $\frac{DE}{DB} = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{DE}{BE} = \frac{DB}{BA}$ (1).

d) Ta có: $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ (vì cùng phụ với \widehat{ABH}) nên $\triangle DBC$ đồng dạng với $\triangle BAH$ (g - g)

$$\text{Suy ra } \frac{DC}{BH} = \frac{DB}{BA} \quad (2)$$

Từ (1),(2) ta được: $\frac{DE}{BE} = \frac{DC}{BH}$ (3)

Lại có: $\widehat{D_1} = \widehat{B_2}$ (hai góc nội tiếp của cùng chắn \widehat{CE} nhỏ của (O)) (4)

Từ (3),(4) ta được ΔCDE đồng dạng với ΔHBE (c – g – c)

Do đó $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_3$ (hai góc tương ứng)

$$\text{Nên } \widehat{HEC} = \widehat{E_2} + \widehat{E_3} = \widehat{E_2} + \widehat{E_1} = 90^\circ.$$

Bài 5:

Ta có
$$Q = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{6}{3x+2y} = \frac{3x+2y}{xy} + \frac{6}{3x+2y} = \frac{3x+2y}{6} + \frac{6}{3x+2y}.$$

Đặt $t = 3x+2y \Rightarrow t \geq 2\sqrt{3x \cdot 2y} = 12.$

Theo bất đẳng thức AM – GM và vì $t \geq 12$ nên ta có:

$$Q = \left(\frac{t}{6} + \frac{24}{t} \right) - \frac{18}{t} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{t}{6} \cdot \frac{24}{t}} - \frac{18}{12} = \frac{5}{2}.$$

Vậy $Q_{\min} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$