**MỤC LỤC**

A. ĐẶT VẤN ĐỀ.........................................................................................................................2

B. NỘI DUNG

1. Chuyên đề 1: Phương pháp chứng minh phản chứng.....................................................3

2. Chuyên đề 2: Nguyên tắc Dirichlet..............................................................................10

3. Chuyên đề 3: Định lý Bézout – Lược đồ Horner..........................................................19

4. Chuyên đề 4: Dấu tam thức bậc hai..............................................................................23

5. Chuyên đề 5: Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên........................25

6. Chuyên đề 6: Phần nguyên và ứng dụng......................................................................36

7. Chuyên đề 7: Đường thẳng Simson..............................................................................45

8. Chuyên đề 8: Bất đẳng thức Erdos – Modell và một vài ứng dụng..............................53

9. Chuyên đề 9: Định lý Ptôlêmê và đặc trưng của tứ giác nội tiếp..................................62

C. KẾT LUẬN.............................................................................................................................72

D. TÀI LIỆU THAM KHẢO......................................................................................................73

**MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ TRANG BỊ CHO HỌC SINH CHUYÊN TOÁN TỪ TRUNG HỌC CƠ SỞ**

**1. Chuyên đề 1: Phương pháp chứng minh phản chứng:**

**1.1. Chứng minh phản chứng và các bước chứng minh phản chứng:**

Trong *chứng minh bằng phản chứng* (tiếng La tinh là reductio ad absurdum, có nghĩa là “thu giảm đến sự vô lí”), người ta sẽ chứng minh nếu một phát biểu nào đó xảy ra, thì dẫn đến mâu thuẫn về lôgic, vì vậy phát biểu đó không được xảy ra. Phương pháp này có lẽ là phương pháp phổ biến nhất trong chứng minh toán học.

1. (phủ định kết luận): Giả sử có điều trái với kết luận của bài toán.
2. (đưa đến mâu thuẫn): Từ điều giả sử trên và từ giả thiết của bài toán, ta suy ra một điều mâu thuẫn với giả thiết hay với các kiến thức đã học.

*Bước 3* (khẳng định kết luận): Vậy kết luận của bài toán là đúng.

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng  là số vô tỉ.

**Chứng minh:**

Giả sử  là số hữu tỉ, ta sẽ biểu diễn được  với .

Do đó  . Bình phương hai vế ta được: . Thì vế phải chia hết cho 2 nên vế trái cũng phải chia hết cho 2 (vì chúng bằng nhau và đều là số tự nhiên). Do đó  là số chẵn, có nghĩa là a cũng phải là số chẵn. Do vậy ta có thể viết , trong đó c cũng là số tự nhiên. Thay vào phương trình ban đầu ta có:  hay . Nhưng khi đó, tương tự như trên,  chai hết cho 2 nên b phải là số chẵn. Nhưng nếu a và b đều là số chẵn thì chúng sẽ có chung một ước số là 2. Điều này trái với giả thiết . Vậy giả sử  là số hữu tỉ là sai. Do đólà số vô tỉ.

**Ví dụ 2:** Không dùng máy tính, hãy chứng minh .

**Chứng minh:**

Giả sử  hay . Bình phương hai vế ta có:  hay , điều này vô lý. Vậy giả sử trên là sai, do đó .

**Ví dụ 3:** Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương  đồng thời thỏa mãn đồng thời các đẳng thức sau:

 

**Chứng minh:**

Giả sử tồn tại các số nguyên dương  thỏa mãn đồng thời các đẳng thức . Trừ từng vế các đẳng thức này ta được:

, , .

Suy ra  có cùng tính chẵn lẻ.

Nếu  cùng tính chẵn thì  là số chẵn, mâu thuẫn với (1).

Nếu  cùng lẻ thì  vẫn là số chẵn, mâu thuẫn với (1).

Điều này chứng tỏ giả sử trên là sai. Vậy ta có điều phải chứng minh.

**Ví dụ 4:** Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương thì số  không chia hết cho .

**Chứng minh:**

Giả sử với n là số nguyên dương thì  chia hết cho .

Khi đó, do  chia hết cho 3 nên  chia hết cho 3. Điều này là vô lí vì  không chia hết cho 3. Vậy điều giả sử  chia hết cho  là sai. Suy ra  không chia hết cho .

**Ví dụ 5:** Chứng minh: nếu  là một hoán vị tùy ý của các số  với n là số lẻ, thì tích  là một số chẵn.

**Chứng minh:**

Đầu tiên, ta có nhận xét rằng tổng của một số lẻ các số lẻ là một số lẻ. Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh rằng tồn tại một hiệu  nào đó là số chẵn. Giả sử rằng tất cả các hiệu  đều là số lẻ. Khi đó tổng 

vì các số  là sắp xếp lại của các số . Nhưng theo nhận xét trên thì S là số lẻ vì tổng của một số lẻ các số lẻ. Điều này mâu thuẫn. Do đó giả sử tất cả các hiệu là số chẵn, suy ra tích  là số chẵn.

* Có nhiều cách chứng minh về sự tồn tại vô hạn các số nguyên tố, ví dụ sau đưa ra cách chứng minh bằng phản chứng của Euclid cho kết quả này.

**Ví dụ 6:** Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố.

**Chứng minh:**

Giả sử chỉ có hữu hạn các số nguyên tố là  và giả sử . Xét tích . Rõ ràng  nên A là hợp số, do đó A có ít nhất một ước nguyên tố p. Khi đó do  là tất cả các số nguyên tố nên tồn tại  sao cho .

Như vậy ;  nên , mâu thuẫn.

Do đó giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố là sai. Vậy có vô hạn các số nguyên tố.

**Ví dụ 7:** Cho số nguyên n là hợp số, n > 1. Chứng minh rằng n có ước nguyên tố 

**Chứng minh:**

Do n là hợp số nên n có thể viết dưới dạng  với . Bây giờ nếu cả  và  thì , mâu thuẫn. Do đó phải có  hoặc . Bài toán được chứng minh.

***Nhận xét*.** Kết quả trong ví dụ này có thể dùng làm tiêu chuẩn để kiểm tra một số có phải là số nguyên tố hay không. Ví dụ: Để kiểm ra số 101 có là số nguyên tố hay không, trước tiên ta tính . Khi đó, theo Ví dụ 11,7 thì hoặc 101 là số nguyên tố hoặc 101 chia hết cho 2, 3, 5 hoặc 7 (là các số nguyên tố nhỏ hơn 10,04). Do không có số nào trong các số 2, 3, 5, 7 là ước của 101 nên 101 là số nguyên tố.

**Ví dụ 8:** Chứng minh rằng:

a) Tích của những số nguyên có dạng  là số có dạng .

b) Tồn tại vô số các số nguyên tố có dạng .

**Chứng minh:**

a) Vì với  thì

, do đó tích của những số nguyên có dạng là số có dạng .

b) ***Nhận xét:*** Mỗi số có dạng  sẽ có ít nhất một ước nguyên tố có dạng đó.

Thật vậy, rõ ràng n có ước cùng dạng với nó vì bản thân n là ước của n. Gọi p là ước nhỏ nhất trong các ước như thế. Nếu p là số nguyên tố thì nhận xét được chứng minh. Nếu p là hợp số thì p phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố lẻ (do p lẻ). Các thừa số này không thể có cùng dạng  (vì khi đó theo câu a p sẽ có dạng ). Vậy ít nhất một thừa số nguyên tố có dạng . Do ước của p cũng là ước của n nên n có ước nguyên tố dạng .

*Bây giờ ta sẽ chứng minh có vô số các số nguyên tố có dạng* .

Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố có dạng  là .

Xét số  thì N có dạng . Theo nhận xét trên thì N có ít nhất một ước nguyên tố có dạng . Nhưng từ cách xác định N thì N không chia hết cho bất cứ số nguyên tố nào có dạng . Điều mâu thuẫn này chứng tỏ giả sử trên là sai. Vậy có vô số các số nguyên tố có dạng .

**Ví dụ 9:** Cho a, b là hai số thực sao cho với mọi số thực  ta luôn có . Chứng minh rằng .

**Chứng minh:** Giả sử ngược lại là . Khi đó . Do  với mọi  nên với , ta có:  hay . Điều này mâu thuẫn với giả sử . Suy ra giả sử  là sai. Vậy .

**Ví dụ 10:** Cho a, b là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương x, y để .

**Chứng minh:**

Giả sử tồn tại các số nguyên dương  thỏa mãn đẳng thức đã cho, tức là:  (1)

Ta có: . Vì nên .

Do đó, tồn tại  sao cho .

Tương tự, tồn tại  sao cho . Thay vào đẳng thức (1) ta được  hay . Điều này vô lí vì . Vậy điều giả sử trên là sai. Ta có điều phải chứng minh.

**Ví dụ 11:** Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, b, c, ta luôn tìm được số nguyên dương n sao cho số  không phải là số chính phương.

**Chứng minh:**

Giả sử ngược lại, tồn tại  để với mọi số nguyên dương n thì  là số chính phương.

Khi đó: , ,

 ,  ,

là các số chính phương.

Nhận xét rằng: Một số chính phương khi chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1. Do đó số dư trong phép chia hiệu của hai số chính thương cho 4 chỉ có thể là 0, 1 hoặc –1.

Ta có: , mà 2b là số chẵn nên theo nhận xét trên thì . (1)

Tương tự, , mà  cũng là số chẵn nên . (2)

Từ (1) và (2) suy ra , vô lí. Do đó giả sử trên là sai. Vậy với mọi số nguyên a, b, c luôn tìm được số nguyên dương n sao cho số  không phải là số chính phương.

**Ví dụ 12:** Chứng minh rằng nếu một tam giác có hai đường phân giác trong bằng nhau thì tam giác đó cân.

**Chứng minh:**

|  |  |
| --- | --- |
| Xét  có hai đường phân giác trong bằng nhau . Ta sẽ chứng minh  cân tại .  Giả sử  không cân tại .  Xét . Qua  kẻ đường thẳng song song , qua  kẻ đường thẳng song song  cắt nhau tại .  Khi đó . Theo giả thiết . Vậy  cân tại . |  |

Vì  và .

Từ . Hai tam giác  có  chung,  , mâu thuẫn với .

Trường hợp , chứng minh tương tự dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy , suy ra  cân tại .

**Ví dụ 13:** Cho một tam giác có ba góc nhọn. Qua một đỉnh của tam giác đó vẽ đường cao, qua đỉnh thứ hai vẽ trung tuyến, qua đỉnh thứ ba vẽ phân giác. Chứng minh rằng nếu ba đường đã vẽ được cắt nhau, tạo thành một tam giác thì tam giác đó không phải là tam giác đều.

**Chứng minh:**

|  |  |
| --- | --- |
| Xét  có ba góc nhọn và đường cao , đường trung tuyến , đường phân giác  cắt nhau và tạo thành  như hình vẽ. Ta cần chứng minh  không là tam giác đều.  Giả sử ngược lại  đều. Khi đó trong tam giác vuông  có |  |

 có  hay .

 có đường trung tuyến  là đường cao nên  cân. Hơn nữa  nên  đều, dẫn đến  trùng nhau, trái giả thiết.

Vậy  không thể đều.

**Ví dụ 14:** Qua điểm  trong mặt phẳng, vẽ 5 đường thẳng phân biệt.

a) Có bao nhiêu góc đỉnh  được tạo thành trong hình vẽ?

b) Chứng minh rằng trong các góc đó, có ít nhất 1 góc không vượt quá .

**Chứng minh:**

|  |  |
| --- | --- |
| a) 5 đường thẳng cắt nhau tại  tạo thành 10 tia chung gốc . Mỗi tia trong 10 tia này tạo với 9 tia còn lại thành 9 góc, có 10 tia nên có  góc. Nhưng mỗi góc đã được tính 2 lần nên có tất cả  góc đỉnh  được tạo thành.  b) Trong 45 góc đỉnh  thì chỉ có 10 góc không có điểm trong chung có tổng số đo . Giả sử tất cả các |  |

góc đều lớn hơn  thì 10 góc vừa nêu có tổng số đo lớn hơn , mâu thuẫn. Vậy phải có ít nhất một góc không vượt quá .

**Ví dụ 15:** Trên một mặt phẳng có thể xếp được 7 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng 3 đoạn thẳng khác được không?

**Giải:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Câu trả lời là không. Thật vậy, giả sử xếp được 7 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng 3 đoạn thẳng khác.  Ta lập bảng gồm 7 hàng, 7 cột và đánh dấu các ô: nếu hai đoạn thẳng cắt nhau ta đánh dấu X, nếu không cắt nhau ta đánh dấu 0. Chẳng hạn nếu đoạn thẳng thứ I cắt đoạn thẳng thứ j ta đánh dấu X vào giao của dòng i và cột j, dòng j và cột i. Khi đó mỗi dòng có 3 dấu X. | |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | 1 |  | i |  | j |  | 7 | | 1 | 0 |  |  |  |  |  |  | |  |  | 0 |  |  |  |  |  | | i |  |  | 0 |  | X |  |  | |  |  |  |  | 0 |  |  |  | | j |  |  | X |  | 0 |  |  | |  |  |  |  |  |  | 0 |  | | 7 |  |  |  |  |  |  | 0 | |

Mặt khác bảng sẽ có 7 dấu 0 xếp theo đường chéo của hình vuông. Như nói ở trên nếu ô giao của dòng I cột j có dấu X thì ô giao của dòng j cột I cũng có dấu X, hai ô này đối xứng qua đường chéo gồm các ô có dấu 0. Vì vậy các ô được đánh dấu X trong bảng phải là số chẵn. Mâu thuẫn vì có 21 ô có dấu X theo giả thiết.

**BÀI TẬP:**

1.Chứng minh rằng:

a) Tổng của một số hữu tỉ và một số vô tỉ là một số vô tỉ.

b) Không tồn tại số hữu tỉ dương nhỏ nhất.

2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì phân số  là tối giản.

3. Tích của 43 số nguyên có trước bằng 1. Chứng minh rằng tổng của chúng không thể bằng 0.

4. Gọi là các số tự nhiên thỏa mãn . Chứng mỉnh rằng tồn tại ít nhất một số  là số chẵn.

5. *Số palindrome* (còn gọi là *số xuôi ngược* hay *số đối xứng*) là số mà đọc xuôi hay đọc ngược đều như nhau, ví dụ các số 151, 1991, 1211121, 15677651 là những số đối xứng. Chứng minh rằng không tồn tại số đối xứng dương chia hết cho 10.

6. Chứng minh: với mọt số tự nhiên n ta luôn có không chia hết cho 49.

7. Cho n là số tự nhiên khác 0; a là ước nguyên dương của . Chứng minh rằng  không thể là số chính phương.

8. Chứng minh rằng với  thì giữa n và n! có ít nhất một số nguyên tố. Từ đó suy ra có vô hạn các số nguyên tố.

9. Đặt các số  trên một vòng tròn theo một thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng luôn có 3 số liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 39.

10. cho dãy số:  và  Chứng minh rằng trong những số hạng của mỗi dãy số trên có vô số các số nguyên tố.

11. Chứng minh rằng trong một tam giác, góc đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn.

12. Chứng minh rằng trong một tam giác, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nữa cạnh huyền.

13. Chứng minh rằng nếu tam giác có 1 góc bằng  và cạnh đối diện với góc này bằng nữa một cạnh khác thì tam giác đó là tam giác vuông.

14. Cho  là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Chứng minh rằng:



không thể là số nguyên.

15. Trong 1 mặt phẳng cho  điểm  thỏa điều kiện: bất kỳ đường thẳng nào đi qua 2 trong trong những điểm đó đều chứa 1 điểm khác trong các điểm đã cho. Chứng minh tất cả các điểm trên cùng nằm trên 1 đường thẳng.

**2. Chuyên đề 2: Nguyên lí Dirichlet:**

**2.1 Giới thiệu về nguyên lí DirIchlet**

Dirichlet (Đi-rích-lê) (1805 – 1859) là nhà toán học người Đức, được cho là người đưa ra định nghĩa hiện đại về hàm số. Trên cơ sở quan sát thực tế, ông đã phát biểu thành một nguyên lí mang tên ông – nguyên lí Dirichlet: *Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà mỗi cái lồng có không quá 2 con thỏ*. Nói cách khác, *nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con trở lên*. Một cách tổng quát hơn, **nếu có k lồng để nhốt m con thỏ (với ) thì tồn tại ít nhất một lồng có chứa từ n + 1 con thỏ trở lên.**

Ta cũng có thể dễ dàng chứ minh nguyên lí Dirichet bằng phương pháp phản chứng như sau: Giả sử không có một lồng nào chứ n + 1 con thỏ trở lên, tức là mỗi lồng chứa nhiều nhất n con thỏ, thì số con thỏ chứa trong k lồng nhiều nhất chỉ có thể là kn con. Điều này mâu thuẫn với giả thiết có m con thỏ với **.**

Nguyên lí Dirichlet thật đơn giản, dễ hiểu nhưng được vận dụng vào giải rất nhiều bài toán trong số học, đại số, hình học về ciệc chỉ ra sự tồn tại của một hay nhiều đối tượng thỏa mãn một điều kiện đặt ra.

Khi sử dụng nguyên lí Dirichlet vào bài toán cụ thể, điều quan trọng là phải nhận ra (hay tạo ra) *Lồng* hoặc *Thỏ* hoặc cả *Lồng* và *Thỏ*.

**2.2 Một số dạng toán thường gặp**

1. Chứng minh sự tồn tại chia hết

Thông thường ta coi m số tự nhiên đã cho là m “con thỏ”, các số dư trong phép chia các số tự nhiên đó cho n là những “lồng”; như vậy sẽ có n cái lồng: lồng i gồm những số tự nhiên đã cho chia cho n dư i.

1. Chứng mình rằng:

a) Trong 2012 số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho 2011 có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho 2011).

b) Trong 2012 sô tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho 2012 hoặc luôn tìm được hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

**Giải**

a) Ta coi 2012 số tự nhiên đã cho là 2012 “con thỏ”; “lồng i” gồm các số chia cho 2011 dư i  nên có 2011 lồng: lồng 0, lồng 1, …, lồng 2010. Như vậy có 2011 lồng chứa 2012 con thỏ nên theo nguyên lí Dirchlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn hai con thỏ, tức là có ít nhất hai số chia cho 2011 có cùng số dư.

b) Nếu trong 2012 số đã cho có ít nhất một số chia hết cho 2012 thì ta chọn luôn số này. Nếu không có số nào chia hết cho 2012 thì khi chia cho 2012 nhận nhiều nhất 2012 số dư khác nhau là 1, 2, …, 2011. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

***Nhận xét***. Ta có thể tổng quát bài toán trên như sau:

1) Trong n + 1 số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho n).

2) Trong n số tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho n hoặc luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư.

1. Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng 20122012…2012 (gồm các số 2012 viết liên tiếp nhau) chia hết cho 2013.

**Giải**

Xét 2014 số sau: 2012, 20122012, ..., 2012...2012 (gồm 2014 bộ số 2102).

Đem 2014 số này lần lượt chia cho 2013, có 2014 số mà chỉ có 2013 số dư trong phép chia cho 2013 (là 0, 1, 2, ..., 2012) nên luôn tồn tại hai số chia cho 2013 có cùng số dư, chẳng hạn đó là a = 2012...2012 (gồm i bộ 2012) và b = 2012...2012 (gồm j bộ 2012) với . Khi đó

 (gồm j – i bộ 2012) sẽ chia hết cho 2013.

Lại có ƯCLN nên số 2012...2012 (gồm j – i bộ 2012 sẽ chia hết cho 2013. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây “thỏ” là số có dạng 2012...2012, “lồng” là số dư trong phép chia cho 2013).

***Nhận xét*.** Mấu chốt của bài toán là chọn ra 2014 (= 2013 + 1) số tự nhiên có dạng đã cho. Từ đó ta có thể phát biểu nhiều bài toán tương tự, chẳng hạn như: Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng 111...1 chia hết cho 29.

1. Cho sáu số tự nhiên . Chứng minh rằng trong sáu số ấy, tồn tại một số chia hết cho 6 hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho 6.

**Giải**

Trường hợp có một số bằng 0 thì ta chọn số 0 thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Trường hợp sáu số đều lớn hơn 0. Xét 6 số sau



Đem mỗi số này chia cho 6 ta nhận được số dư thuộc tập .

Nếu tồn tại chia hết cho 6 thì bài toán đã được chứng minh.

Nếu không có Si nào chia hết cho 6 thì ta có 6 số chia hết cho 6 chỉ nhận 5 loại số dư khác nhau ; theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia cho 6 có cùng số dư, chẳng hạn S2 và S5 do đó hiệu của hai số này sẽ chia hết cho 6, tức là  chia hết cho 6. Bài toán đã được chứng minh.

(Ở đây “thỏ” là các số Si, “lồng” là số dư trong phép chia cho 6).

***Nhận xét*.** Ta có thể phát biểu bài toán tổng quát sau:

Cho n số tự nhiên . Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho n hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho n.

1. Chứng minh rằng:

a) Trong n số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho n.

b) Trong 39 số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11.

**Giải:**

a) Giả sử không tìm được số nào trong n số tự nhiên liên tiếp đã cho mà chia hết cho n. Khi đó n số này chia cho n chỉ nhận được nhiều nhất là n – 1 số dư khác nhau , theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số chia hết cho n có cùng số dư, chẳng hạn là a và b với , khi đó a – b chia hết cho n, điều này mâu thuẫn với . Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Lấy 20 số tự nhiên liên tiếp đầu của dãy, ta luôn tìm được một số có chữ số hàng đơn vị là 0 và có chữ số hàng chục khác 9. Giả sử đó là N và tổng các chữ số của N là s. Khi đó 11 số  sẽ nằm trong 39 số đã cho. Vì N tận cùng bằng 0 nên tổng các chữ số của  lần lượt bằng . Vì N tận cùng bằng 0 và có chữ số hàng chục khác 9 nên tổng các chữ số của N + 10 bằng s + 1, tổng các chữ số của N + 19 bằng s + 10.

Trong 11 số tự nhiên liên tiếp  luôn tìm được một số chia hết cho 11. Chẳng hạn số đó là : Nếu  thì ta chọn được số  thỏa mãn yêu cầu bài toán; nếu i = 10 thì ta chọn được số N + 19 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

***Nhận xét*.** Mấu chốt để giải bài toán câu b) là phải tìm ra 11 số trong 39 số đã cho có tổng các chữ số thứ tự là 11 số tự nhiên liên tiếp, đồng thời sử dụng kết quả câu a).

1. Cho các số tự nhiên từ 1 đến 2012. Hỏi có thể chọn ra được nhiều nhất bao nhiêu số sao cho tổng của hai số bất kì trong chúng không chia hết cho hiệu của nó?

**Giải**

Nhận thấy, nếu hai số chia cho 3 cùng dư 2 thì hiệu của chúng chia hết cho 3, còn tổng của chúng chia cho 3 dư 1; nên tổng của chúng không chia hết cho hiệu của chúng.

Trong các số tự nhiên từ 1 đến 2012, sẽ có 671 số chia cho 3 dư 2 là các số có dạng . Khi đó hai số bất kì trong 671 số này có tổng chia 3 dư 1, hiệu chia hết cho 3, nên tổng không chia hết cho hiệu của chúng. Ta sẽ chứng minh rằng chọn được nhiều nhất  số trong các số từ 1 đến 2012, thì trong 672 số này luôn tìm được  sao cho  (Thật vậy, giả sử ngược lại thì hiệu giữa số nhỏ nhất và số lớn nhất trong các số đã chọn sẽ không nhỏ hơn . Điều này mâu thuẫn giả thiết với hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất không vượt quá ), nghĩa là a – b bằng 1 hoặc 2.

- Nếu a – b = 1 thì hiển nhiên a + b chia hết cho a – b (= 1)

- Nếu a – b = 2 thì a + b là số chẵn nên a + b chia hết cho a – b (= 2).

Như vậy từ 2012 số đã cho không thể chọn được hơn 671 số thỏa mãn điều kiện bài toán. Suy ra số lượng lớn nhất các số phải tìm là 671.

1. Bài toán về tính chất của các phần tử trong tập hợp

Thông thường ta phải lập ra những tập hợp có tính chất cần thiết rồi sử dụng nguyên lí Dirichlet để chứng tỏ có hai phần tử thuộc hai tập hợp bằng nhau.

1. Cho sáu số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số trong đó có một số bằng tổng hai số còn lại.

**Giải**

Gọi sáu số nguyên dương đã cho là  với .

Đặt  gồm 5 phần tử có dạng am với .

Đặt  gồm 5 phần tử có dạng  với .

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 9 phần tử  trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là .

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B, tức là , do đó .

Ba số  đôi một khác nhau. Thật vậy,  vì nếu  thì  trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số  trong các số đã cho mà  (đpcm).

(Ở đây, có 10 “thỏ” là 10 số  và có 9 “lồng” là 9 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

***Nhận xét*.** Để giải bài toán này, ta cần tạo ra hai tập hợp gồm các phần tử nhỏ hợn 10 và tổng số phần tử của hai tập hợp phải không nhỏ hơn 10. Từ đó suy ra tồn tại hai phần tử của hai tập hợp bằng nhau.

1. Cho X là tập hợp gồm 700 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp .

**Giải**

Giả sử 700 số nguyên dương đã cho là . Ta xét các tập hợp sau:



Tổng số phần tử của ba tập hợp A, B, C là 700.3 = 2100, trong đó mỗi phần tử đều không vượt quá 2006 + 9 = 2015, mà 2100 > 2015 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai phần tử bằng nhau. Vì mỗi tập hợp A, B, C có các phần tử đôi một khác nhau nên hai phần tử bằng nhau đó phải thuộc hai tập hợp: A và B, hoặc A và C, hoặc B và C.

- Nếu hai phần tử thuộc A và B, chẳng hạn  suy ra .

- Nếu hai phần tử thuộc A và C, chẳng hạn  suy ra .

- Nếu hai phần tử thuộc B và C, chẳng hạn  suy ra .

Như vậy luôn tồn lại hai số thuộc tập hợp A có hiệu là 3, 6, 9. Ta được điều phải chứng minh.

(Ở đây 2100 “thỏ” là 2010 phần tử của ba tập hợp A, B, C; 2015 “lồng” là các số từ 1 đến 2015)

***Nhận xét*.** Ta còn có kết quả mạnh hơn như sau:

Cho X là tập hợp gồm 505 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp .

*Chứng minh*.

Gọi A là tập hợp các số thuộc X mà chia hết cho 3, gọi B là tập hợp các số thuộc X mà chia cho 3 dư 1, gọi C là tập hợp các số thuộc X mà chia cho3 dư 2.

Có 505 số xếp vào ba tập hợp, mà 505 = 3.168 + 1 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một tập hợp có chứa từ 169 số trở lên.

Trong tập hợp này, hai số bất kì có hiệu là một bội của 3. Tồn tại hai số x, y có hiệu nhỏ hơn 12. Thật vậy, nếu mọi số trong tập hợp này đều có hiệu không nhỏ hơn 12 thì số lớn nhất trong tập hợp không nhỏ hơn 12.168 = 2016 > 2006, trái với đề bài.

Vậy trong tập hợp X tồn tại hai phần tử x, y mà .

1. Cho hai tập hợp số nguyên dương phân biệt mà mỗi số đều nhỏ hơn n. Chứng minh rằng nếu tổng số phần tử của hai tập hợp không nhỏ hơn n thì có thể chọn được trong mỗi tập hợp một phần tử sao cho tổng của chúng bằng n.

**Giải**

Giả sử hai tập hợp số nguyên dương đã cho là

 và 

với  ,  và .

Xét tập hợp .

Nhận thấy, có tất cả n – 1 số nguyên dương phân biệt nhỏ hơn n, các phần tử của A và C đều nhỏ hơn n và tổng số các phần tử của A và C không nhỏ hơn n. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai phần tử bằng nhau, chúng không cùng thuộc A và C, do đó một phần tử thuộc A và một phần tử thuộc C, tức là tồn tại hai số ap và  mà  (điều phải chứng minh).

(Ở đây coi m + k “thỏ” là các số nguyên dương thuộc tập hợp A hoặc C, n – 1 “lồng” là các số nguyên dương từ 1 đến n – 1).

1. Bài toán liên quan đến bảng ô vuông

Một bảng vuông kích thước n x n gồm n dòng, n cột và 2 đường chéo. Mỗi dòng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều có n ô vuông.

Một bảng các ô vuông kích thước m x n gồm m dòng và n cột.

1. Cho một mảng ô vuông kích thước 5 x 5. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số -1, 0, 1; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

**Giải**

Bảng ô vuông kích thước 5 x 5 có 5 dòng, 5 cột, 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng của các số được tính theo dòng, theo cột và theo đường chéo. Mỗi dòng, cột và đường chéo đều có ghi 5 số thuộc tập {–1; 0; 1}. Vì vậy giá trị mỗi tổng thuộc tập hợp {–5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5} có 11 phần tử. Có 12 tổng nhận trong tập 11 các giá trị khác nhau nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai tổng nhận cùng một giá trị. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây “thỏ” là tổng nên có 12 “thỏ”, “lồng” là giá trị của tổng nên có 11 “lồng”).

***Nhận xét*.** Với cách giải tương tự, ta có bài toán tổng quát sau:

Cho một bảng ô vuông kích thước n x n. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số –1, 0, 1; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

1. Trên bảng ô vuông kích thước 8 x 8, ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 64, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.

**Giải**

Ta xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 64. Hiệu giữa hai ô này là 63.

Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nhiều nhất là 14 (gồm 7 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 7 cặp ô chung cạnh tính theo cột).

Ta có 64 = 14.4 + 7 nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai ô kề nhau mà hai số ghi trên đó có hiệu không nhỏ hơn 4 + 1 = 5. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây, “thỏ” là hiệu của hai số trong 64 số (từ 1 đến 64) nên có 63 thỏ; “lồng” là số cặp ô vuông kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nên có nhiều nhất là 14 lồng).

***Nhận xét*.**

* Mấu chốt của bài toán là quan tâm đến hai ô vuông ghi số nhỏ nhất (số 1) và số lớn nhất (số 64) sẽ có hiện lớn nhất là 63; đồng thời xét từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 chỉ cần tối đa là (8 – 1) + (8 – 1) = 14 ô. Ở đây ta đã vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát: Có m thỏ, nhốt vào k lồng mà m = kn + r  thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn n + 1 con thỏ.
* Nếu thay bởi bảng chữ nhật gồm 8 x 10 ô vuông, trên đó ghi các số từ 1 đến 80 không lặp một cách tùy ý thì kết quả cầu bài toán còn đúng hay không? Hãy chứng minh.

1. Bài toán liên quan đến thực tế

Khi chứng minh sự tồn tại một số đối tượng thỏa mãn điều kiện nào đó, ta thường sử dụng nguyên lí Dirichlet.

Điều quan trọng nhất là phải xác định được “thỏ” và “lồng”.

1. Một tổ học tập có 10 học sinh. Khi viết chính tả, cả tổ đều mắc lỗi, trong đó bạn Bình mắc nhiều lỗi nhất (mắc 5 lỗi). Chứng minh rằng trong tổ ấy có ít nhất 3 bạn đã mắc một số lỗi bằng nhau.

**Giải**

Ta coi “thỏ” là học sinh (trừ bạn Bình) nên có 9 thỏ; “lồng” là số lỗi chính tả học sinh mắc phải nên có 4 lồng: lồng i gồm những học sinh mắc i lỗi (i = 1, 2, 3, 4). Có 9 thỏ nhốt vào 4 lồng, mà 9 = 4.2 + 1, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn 2 + 1 = 3 thỏ, tức là có ít nhất 3 bạn mắc một số lỗi bằng nhau.

1. Ở một vòng chung kết cờ vua có 8 đấu thủ tham gia. Mỗi đấu thủ đều phải gặp đủ 7 đấu thủ còn lại, mỗi người một trận. Chứng minh rằng, trong mọi thời điểm giữa các cuộc đấu, bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

**Giải**

Ta coi “thỏ” là đấu thủ nên có 8 thỏ; “lồng” là số trận đấu của đấu thủ nên có 8 lồng: “lồng i” gồm các đấu thủ đã thi đấu i trận (với i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Ta thấy lồng 0 và lồng 7 không đồng thời tồn tại, vì nếu có một đấu thủ chưa đấu trận nào thì sẽ không có đấu thủ nào đã đấu đủ 7 trận, cũng như nếu có đấu thủ đã đấu đủ 7 trận thì không có ai chưa đấu trận nào.

Như vậy, có 7 lồng chứa 8 con thỏ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một lồng chứa không ít hơn 2 con thỏ, tức là trong mọi thời điểm giữa các cược đấu luôn tìm được 2 đấu thủ đã đấu dùng một số trận.

1. Có 6 nhà khoa học viết thư trao đổi với nhau về một trong hai đề tài: bảo vệ môi trường và chương trình dân số. Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

**Giải**

Gọi 6 nhà khoa học là A, B, C, D, E, F.

Nhà khoa học A sẽ viết thư trao đổi với 5 nhà khoa học còn lại về 2 đề tài, có  nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 nhà khoa học (chẳng hạn B, C, D) được nhà khoa học A trao đổi về cùng một đề tài (chẳng hạn đề tài môi trường).

Trong ba nhà khoa học B, C, D nếu có hai người nào cũng trao đổi về đề bài môi trường (chẳng hạn B, C) thì ta chọn được A, B, C cùng trao đổi về một đề tài.

Nếu trong ba nhà khoa học B, C, D không có hai người nào trao đổi về đề tài môi trường thì họ sẽ trao đổi với nhau về đề tài dân số, ta sẽ chọn được B, C, D cùng trao đổi một đề tài.

(Ở đây coi nhà khoa học (trừ A) là “thỏ” nên có 5 thỏ, coi đề tài là “lồng” nên có 2 lồng và vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát).

1. Bài toán liên quan đến sự sắp xếp

Các bài toán về sắp xếp chỗ, phân công việc không đòi hỏi nhiều về kiến thức và kĩ năng tính toán, chúng chủ yếu kết hợp suy luận lôgic để xét các khả năng có thể xảy ra với nguyên lí Dirichlet.

1. Có 20 người quyết định đi bơi thuyền bằng 10 chiếc thuyền đôi. Biết rằng nếu hai người A và B mà không quen nhau thì tổng số những người quen của A và những người quen của B không nhỏ hơn 19. Chứng minh rằng có thể phân công vào các thuyền đôi sao cho mỗi thuyền đều là hai người quen nhau.

**Giải**

Nếu trong 20 người không có hai người nào quen nhau thì tổng số người quen của hai người bất kì là 0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là tổng số người quen của hai người không nhỏ hơn 19. Vậy tồn tại một số cặp quen nhau.

Ta xếp mỗi cặp quen nhau đó vào một thuyền đôi. Gọi k là số lượng thuyền lớn nhất mà trong đó ta có thể xếp được những cặp quen nhau vào một thuyền và kí hiệu thuyền thứ i xếp hai người Ai và Bi quen nhau .

Giả sử , kí hiệu tập hợp M gồm những người chưa được xếp vào thuyền nào, tức là gồm những người đôi một không quen nhau. Chọn hai người A và B trong tập hợp M. Theo bài ra thì tổng số người quen của A và số người quen của B không nhỏ hơn 19 và những người quen A hoặc quen B đã được xếp vào thuyền rồi. Như vậy có 19 người quen hệ quen A hoặc B được xếp vào nhiều nhất là 9 thuyền đôi (trừ 1 thuyền vì A, B chưa được xếp), mà 19 = 9.2 + 1 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một thuyền chở 2 người quen cả A và B. Nhưng khi đó ta có thể xếp lại như sau: trong k – 1 thuyền đầu tiên vẫn giữ nguyên, còn thuyền thứ k xếp Ak và B, còn thuyền thứ k + 1 xếp A và Bk. Điều này mâu thuẫn với giả sử.

Theo cách xếp này ta tiếp tục xếp đến hết 10 thuyền sao cho mỗi thuyền hai người đều quen nhau.

1. Chứng minh bất đẳng thức
2. Chứng minh: trong ba số thực bất kì luôn tìm được hai số có tích không âm.

**Giải**

Ta coi “thỏ” là số thực nên có 3 con thỏ; coi “lồng là loại số (số không âm hoặc số âm) nên có 2 lồng. Có 3 con thỏ nhốt vào 2 lồng nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 2 thỏ chứa trong một lồng, tức là tồn tại hai số không âm (hoặc 2 số âm), khi đó tích của chúng sẽ thành số không âm.

1. Chứng minh rằng trong bốn số khác nhau tùy ý được lấy ra từ tập hợp  có ít nhất hai số x, y thỏa mãn .

**Giải**

Ta có  thì 

Xét ba tập hợp:   và . Với 4 số có dạng  (với ) sẽ thuộc vào một trong ba tập hợp B, C, D ở trên nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai số thuộc cùng một tập hợp, tập hợp đó là B hoặc C. Gọi hai số đó là  ta có .

**3. Chuyên đề 3: Định lý Bézout – Lược đồ Horner:**

**3.1 Kiến thức cơ bản**

**3.1.1 Định lí Bézout**

1. **Định lí:** Số dư trong phép chia đa thức  cho nhị thức x – a bằng giá trị của đa thức  tại .

Chứng minh: Gọi thương của phép chia  cho x – a là .

Đa thức chia bậc một nên dư là một hằng số r.

Ta có  với mọi x.

.

Vậy  (đpcm)

*Chú ý.* Từ định lý Bézout ta suy ra hệ quả sau.

1. **Hệ quả.** Đa thức  chia hết cho x – a khi và chỉ khi  (hay a là nghiệm của đa thức ).
2. **Ứng dụng của định lí Bézout:**

**-** Định lý Bézout giúp chúng ta tính số dư của phép chia đa thức  cho x – a mà không cần thực hiên phép chia đa thức.

- Hệ quả của định lí Bézout giúp chúng ta phân tích đa thức bậc cao (bậc ) thành nhân tử: Nếu  thì  phải chứa nhân tử (x – a).

**3.1.2 Lược đồ Horner**

Ngoài các phương pháp đặt tính chia đa thức, hệ số bất định, trị số riêng ta còn có thể tìm được kết quả khi chia đa thức  cho nhị thức x – a; đồng thời cũng tính được giá trị của đa thức  tại x = a bằng lược đồ Horner (hay thuật toán Horner) như sau:

Nếu đa thức bị chia là , đa thức chia là x – a, đa thức thương là:  thì giữa các hệ số  với  và hằng số a có mối quan hệ sau:



 (r là số dư)

Để cho tiện ta thường lập bảng các hệ số:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

**3.2 Ví dụ minh họa**

Áp dụng hệ quả định lí Bézout phân tich các đa thức (thường có các hệ số nguyên và nghiệm nguyên) thành nhân tử, ta thường làm như sau:

* 1. Chọn một giá trị x = a nào đó (thường là ước của hạng tử tự do trong đa thức cần phân tích) tìm .
  2. Nếu  thì . Để tìm g(x) ta dùng phép chia đa thức  cho x – a, hoặc dùng lược đồ Horner, hoặc tách thêm bớt các hạng tử một cách hợp lí sao cho xuất hiện nhân tử chung x – a.
  3. Tiếp tục phần tích  thành nhân tử nếu còn phân tích được.

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: 

***Nhận xét:*** Thay x bằng các giá trị là ước của 10 (± 1; ± 2; ± 5; ± 10) ta thấy với x = – 1 thì . Vậy . Ta tìm :

*Cách 1:* Tách thêm bớt các hạn tử:

.





Phân tích tiếp 

Vậy 

*Cách 2:* Dùng đặc tính chia đa thức:

2x3 – 7x2 + x + 10 x + 2

–

2x3 + 2x2 2x2 – 9x +10

– 9x2 + x + 10

–

– 9x2 – 9x

10x + 10

–

10x + 10

0

Nhận xét với  thì  rồi chia tiếp  cho 

2x2 – 9x + 10 x – 2

–

2x2 – 4x 2x – 5

– 5x + 10

–

– 5x + 10

0

Vậy 

*Cách 3:* Dùng lược đồ Horner:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hệ số của |  | 2 |  |  |  |
| Hệ số của |  | 2 |  |  |  |

Vậy  và 

1. Cho đa thức . Chứng minh rằng:

a) Đa thức  chia hết cho x – 1 nếu tổng các hệ số bằng 0.

b) Đa thức  chia hết cho x + 1 nếu các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các chữ số của hạng tử bậc lẻ.

1. Không dùng chia đa thức, xét xem đa thức 

a) Có chia hết cho x + 2 hay không?

b) Có chia hết cho x – 2 hay không?

c) Có chia hết cho x – 4 hay không?

1. Tìm đa thức  biết rằng khi chia cho x + 2 thì dư – 4; chia cho  thì dư 21; chia cho  thì được thương là  và còn dư.
2. Cho đa thức  chia cho x – 3.

a) Dùng lược đồ Horner để tính số dư và viết đa thức thương.

b) Dùng Định lí Bézout để tính số dư.

**Bài tập tự luyện**

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng ba phương pháp: Tách và thêm bớt hạng tử. chia đa thức và dùng lược đồ Horner:

a) .

b) .

c) .

d) .

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng cách áp dụng định lý Bézout:

a) ; b) .

1. Tìm dư trong phép chia:

a) ; b).

1. Tìm dư của phép chia  cho:

a) ; b) ; c) .

1. Tìm giá trị của a để:

a)  chia hết cho ;

b)  chia hết cho ;

c)  chia  có số dư là 3.

1. Tìm a và b để:

a)  chia hết cho ;

b)  chia cho  dư;

c)  chia  dư 6; chia  dư 70.

1. Cho  và . Tìm giá trị của k để  chia hết cho ;

a) Bằng phương pháp sử dụng định lý Bézout.

b) Dùng lược đồ Horner.

1. Tìm đa thức  biết rằng khi chia cho x – 2 thì dư 4; chia cho x + 5 thì dư – 17; chia cho  thì được thương là  và còn dư.
2. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho giá trị của  chia hết cho giá trị của  (bằng ba cách: Chia đa thức; dùng định lí Bézout và lược đồ Horner).
3. Không làm phép chia, tìm các giá trị nguyên của k để:

a) Giá trị của biểu thức  chia hết cho giá trị của biểu thức ;

b) Giá trị của biểu thức  chia hết cho giá trị của biểu thức .

1. Cho . Chứng minh .
2. Chứng minh rằng:

Nếu đa thức bị chia là: , đa thức chia là: , đa thức thương là: , dư là: r thì giữa các hệ số  với  hằng số a và số dư r có mối quan hệ sau:



 (r là số dư).

Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào để giá trị của biểu thức  chia hết cho giá trị biểu thức .

**4. Chuyên đề 4: Dấu tam thức bậc hai:**

*Đây là chuyên đề rất dễ tìm thấy trong nhiều tài liệu vì thế ở chuyên đề này chúng tôi chỉ giới thiệu sơ lược mà không đi vào các bài giải chi tiết. Người đọc có thể tự tham khảo thêm.*

**4.1 Kiến thức cơ bản**

*4.1.1 Định lí về dấu của tam thức bận hai*

Cho tam thức bậc hai  với .

* 1. Nếu  thì  cùng dấu với a với mọi .
  2. Nếu  thì  cùng dấu với a với mọi .
  3. Nếu  thì  có hai nghiệm và:
* Với mọi x nằm *trong* khoảng hai nghiệm thì  *trái* dấu với a;
* Với mọi x nằm *ngoài* khoảng hai nghiệm thì  *cùng* dấu với a.

***Lưu ý.*** Nhớ câu “trong trái, ngoài cùng”.

*Giải bất phương trình bậc hai một ẩn*

Giả sử tam thức bậc hai với  có hai nghiệm x1 và x2 . Từ định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta suy ra:

.



*4.1.2 Điều kiện để bất phương trình bậc hai nghiệm đúng với mọi x.*

Cho tam thức bậc hai với 

1.  nghiệm đúng 
2.  nghiệm đúng 
3.  nghiệm đúng 
4.  nghiệm đúng 

***Lưu ý***

– Các kết quả trên đều được suy ra từ định nghĩa về đấu của tam thức bậc hai.

**4.2 Ví dụ minh họa**

1. Giải các bất phương trình:



1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  với .
2. Tìm giá trị của m để biểu thức sau có giá trị không âm với mọi x:

.

1. Tìm giá trị của m để nghiệm của bất phương trình sau là mọi số thực x

.

1. Cho tam thức bậc hai  với . Chứng minh rằng điều kiện đề  với mọi x và xảy ra được  là  và .

**Bài tập**

1. Giải các phương trình:

a) ; b).

1. Tìm giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x:

.

1. Cho phương trình

.

Tìm giá trị của m để phương trình:

1. Có nghiệm;
2. Có hai nghiệm trái dấu;
3. Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.
4. Cho biểu thức

.

Tìm giá trị của m để  với mọi x.

1. Cho biểu thức

.

Tìm giá trị của m để biểu thức A có giá trị lớn nhất là 2.

1. Cho biểu thức

.

Tìm các giá trị của m, n để biểu thức A có giá trị nhỏ nhất là 1, giá trị lớn nhất là 3.

**5. Chuyên đề 5: Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên:**

**5.1 Phương pháp phân tích**

**5.1.1 Biến đổi phương trình về dạng  trong đó  là các đa thức hệ số nguyên,  là số nguyên**

*Phương pháp:* Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ, phân tích đa thức thành nhân tử đưa phương trình về dạng trên. Sau đó dựa vào tính chất của các  để phân tích  (với ) rồi dẫn đến giải hệ phương trình



1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình .

***Giải.***

Biến đổi phương trình thành 

.

Vì  và  là các số nguyên nên  và  là các số nguyên.

Do vai trò của  như nhau, không giảm tổng quát giả sử  nên . Mà  nên xảy ra hai trường hợp



Vậy phương trình có bốn nghiệm  là .

*Nhận xét.* Bằng cách này ta có giải được phương trình dạng , trong đó  là các số nguyên.

1. Tìm số nguyên  để  là số chính phương.

***Giải.***

Ta có 



Do  nên , và chúng đều là số nguyên.

Ta có sự phân tích .

Vì vậy xảy ra bốn trường hợp



Vậy  có thể là .

**5.1.2 Biến đổi phương trình về dạng , trong đó  là các đa thức hệ số nguyên,  là số nguyên dương,  là số tự nhiên**

*Phương pháp:* Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ , đưa phương trình về dạng trên. Sau đó dựa vào tính chất các  để phân tích thành  (với ), dẫn đến giải hệ phương trình



1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình .

***Giải.***

Biến đổi như sau



Nhận thấy  là các số nguyên và  là số chẵn, nên  và  là hai số chính phương cùng tính chẵn lẻ, nên viết



Xảy ra các khả năng sau



Tìm được các nghiệm  là

 



Tìm được các nghiệm  là

 

Vậy có tất cả 8 bộ  thỏa mãn được mô tả ở  và .

**5.2 Phương pháp rút một ẩn theo ẩn còn lại**

Xét phương trình tìm nghiệm nguyên dạng 

**5.2.1 Nếu  là đa thức bậc nhất đối với**  **(hoặc** **) với hệ số nguyên** thì ta sẽ biểu diễn được  và  (hoặc  theo ) rồi sử dụng phép chia đa thức và tính chất chia hết để giải.

**5.2.2 Nếu  là đa thức bậc hai đối với**  **(hoặc** **) với hệ số nguyên** thì ta sẽ coi  là phương trình bậc hai ẩn (hoặc ) để xét điều kiện  phải là số chính phương.

1. Giải phương trình nghiệm nguyên 

***Giải.***

*Cách 1.* Phương trình này chỉ chứa bậc nhất đối với  nên ta có thể rút  theo .

Ta có .

Do  nguyên nên . Suy ra



Do  là các số nguyên suy ra  là số nguyên, nên . Từ đó tìm được  là .

*Cách 2.* Coi phương trình bậc hai đối với , ta có





Nên phương trình có nghiệm nguyên thì  phải là số chính phương, tức là



Từ đó cũng tìm được các nghiệm như trên

*Nhận xét.* Bằng cách này ta có giải được phương trình dạng

, hoặc 

Trong đó  là các số nguyên.

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình 

***Giải.***

Biến đổi phương trình về dạng



Nếu  thì  sẽ là số nguyên tùy ý.

Xét  thì  

Ta coi  là phương trình bậc hai theo ẩn , ta tính



Trường hợp  thì , nghiệm kép của  là 

Trường hợp , để phương trình có nghiệm nguyên thì  phải là số chính phương, tức là 

Vì  nên  và  nên  cùng chẵn. Lại có  Xảy ra bốn trường hợp

 với 

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên  là  với 

***Lưu ý.*** Trong trường hợp  là đa thức có hệ số nguyên với bậc cao hơn 2 theo biến  và , ta cũng có thể đưa về một trong hai trường hợp trên bằng cách đặt ẩn phụ.

1. Giải phương trình nghiệm nguyên 

***Giải.***

Ta có thể đưa về dạng phương trình bậc hai ẩn  bằng phép đặt  (với  nguyên). Khi đó ta có 

Do  nguyên nên , tính



Để cho  suy ra . Vì  nguyên nên  chỉ nhận giá trị  Thử chọn chỉ có  là thích hợp và tìm được  là 

**5.3 Phương pháp sắp thứ tự**

**5.3.1 Phương pháp sắp thứ tự toàn phần**

Khi phương trình đối xứng với các ẩn , ta thường giả sử  để giới hạn miền nghiệm của phương trình và bắt đầu đi tìm từ nghiệm bé nhất trở đi

1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình 

***Giải.***

Do vai trò  như nhau, không giảm tổng quát giả sử  Chia hai vế của phương trình cho  ta có



Do vậy 

1. Với  thì ta có 

Vì  nguyên dương và  nên  và 

Chỉ xảy ra trường hợp 

1. Với  thì ta có 

Vì  nguyên dương và  nên  và 

Xảy ra trường hợp 

1. Với  thì ta có  

Mặt khác  nguyên dương và  nên 

suy ra  (Mâu thuẫn với ).

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên dương  là  và các hoán vị của nó.

*Nhận xét.* Với cách làm tương tự, ta có thể tìm nghiệm nguyên dương của phương trình dạng  trong đó  là các số nguyên dương và 

1. Tìm tất cả các tam giác có số đo các cạnh là những số nguyên dương và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1.

***Giải.***

Gọi độ dài của ba cạnh của tam giác là  với  với 

Theo công thức tính diện tích tam giác, ta có

 với  là bán kính đường tròn nội tiếp.

Do  nên



Suy ra 

Vì  cùng chẵn hoặc cùng lẻ, mà  là số chẵn nên  cùng chẵn.

Đặt  với  dẫn đến phương trình 

Do  nên , suy ra  dẫn đến 

Xảy ra các khả năng

1. Nếu  thì  suy ra  (loại do ).
2. Nếu  thì  suy ra 
3. Nếu  thì  suy ra  (loại do ).

Do vậy . Suy ra 

Vậy tam giác có độ dài ba cạnh là  thỏa mãn.

**5.3.2 Phương pháp sắp thứ tự từng phần**

Ở một số phương trình nghiệm nguyên ta quan tâm đến một ẩn bằng cách chia tập hợp số của ẩn đó thành các tập hợp con rời nhau. Sau đó giải phương trình nghiệm nguyên trong từng tập con đó.

Ta thường sử dụng những nhận xét sau: Với  nguyên,  nguyên dương

1. Nếu  thì  với 
2. Nếu  thì

 với 

1. Không tồn tại số nguyên  sao cho 
2. Không tồn tại số nguyên  sao cho 
3. Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình

a) 

b) 

***Giải.***

a) Với  thay vào phương trình tìm được  hoặc 

Với  thì  hoặc 

Với  thì  điều này vô lí.

Với  thì  điều này vô lí.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm nguyên  là 

b) Với  thì .

Với  thì 

Với  thì  điều này vô lí.

Với  thì  điều này vố lí.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên  là 

*Nhận xét.* Với cách làm tương tự như trên, ta có thể tìm nghiệm nguyên dương của phương trình dạng  với  là số nguyên dương.

**5.4 Phương pháp sử dụng tính chất chia hết và tính chất của số nguyên tố**

*Phương pháp*

* Dựa vào đặc điểm của phương trình để phát hiện tính chia hết của một ẩn.
* Để chứng minh phương trình không có nghiệm nguyên thì có thể sử dụng tính chất chia hết: Chỉ ra tồn tại số nguyên  sao cho hai vế của phương trình khi cùng chia cho  có số dư khác nhau
* Nhưng kết quả thường dùng:

Với  thì  chia cho 3 dư 0 hoặc 1, chia cho 4 dư 0 hoặc 1, chia cho 8 dư 0 hoặc 1 hoặc 4;  chia cho 9 dư 0,1,8;  chia cho 16 dư 0,1.

* Ta thường sử dụng một số tính chất sau đây của số nguyên tố để giải phương trình

1. Nếu  là số nguyên tố thì  (với nguyên  nguyên).
2. Định lí Fermat nhỏ: Nếu  là số nguyên tố thì  với mọi số nguyên dương 

Đặc biệt nếu  thì 

1. Nếu  là số nguyên tố dạng  thì  và 

Thật vậy nếu  và  thì 

Giả sử  không chia hết cho  do  nên  không chia hết cho  Theo định lí Fermat nhỏ ta có  và  Khi đó



Suy ra  điều này mâu thuẫn với  là số nguyên tố dạng .

*Hệ quả. i)*  không có ước nguyên tố dạng  với 

*ii)* Nếu  là số nguyên tố và  thì  có dạng  với 

1. Nếu  là số nguyên tố lẻ dạng  hoặc  thì  và 
2. Giải phương trình nghiệm nguyên 

***Giải.***

Giả xử  là các số nguyên thỏa mãn phương trình đã cho.

Ta thấy 48 và  chia hết cho 4 nên  chia hết cho 4, mà  nên .

Đặt  thay vào phương trình đầu ta được 

 và   Thay các biểu thức của  ở  thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có vô số nghiệm  với 

1. Tìm những số tự nhiên lẻ  để  là số chính phương.

***Giải.***

Giả sử  (với  tự nhiên lẻ). Khi đó



Do  nên  hoặc 

Nếu  thì  ( lẻ), khi đó 

Nếu  thì  ( lẻ), khi đó 

Vậy số tự nhiên lẻ  cần tìm có dạng  lẻ).

1. Tìm các số nguyên  sao cho 

***Giải***

Giả sử tồn tại các số nguyên  thỏa mãn phương trình.

Nhận thấy  chia cho 16 dư 0 hoặc 1, nên  chia cho 16 có số dư là một trong các số 0, 1, 2, 3.

Trong khi đó số 2012 chia cho 16 dư 12. Hai điều này mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại các số nguyên  thỏa mãn đề bài.

1. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình 

***Giải.*** Giả sử tìm được bộ số nguyên dương  thỏa mãn điều kiện bài ra, ta có 

Gọi ƯCLN suy ra  và 

Đặt  với  là các số tự nhiên và  Suy ra  Suy ra  do đó  và  dẫn đến  nên  và  Điều này mâu thuẫn với 

*Nhận xét.* Bằng cách làm tương tự ta có thể chứng minh được hệ phương trình

 với  có ước nguyên tố dạng  và  không có nghiệm nguyên dương.

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình 

***Giải.*** Giả sử  là nghiệm của phương trình.

Khi đó  đặt  (với ) ta có 

Khi đó  đặt (với ) ta có 

Khi đó  đặt  (với ) ta có 

Như vậy  cũng là nghiệm nguyên của phương trình. Quá trình tiếp tục như vậy ta suy ra các bộ số  mọi  cũng là nghiệm của phương trình. Điều này xảy ra khi và chỉ khi 

Vậy phương trình có duy nhất nghiệm nguyên 

***Nhận xét.*** Ta gọi phương pháp giải trong ví dụ trên là phương pháp lùi vô hạn của Fermat, thường dùng để chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm.

**5.5 Phương pháp sử dụng bất đẳng thức**

*Phương pháp:* Để giải phương trình bằng phương pháp này, ta thường làm như sau:

Sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc để đánh giá một vế của phương trình không nhỏ hơn (hoặc không lớn hơn) vế còn lại. Muốn cho hai vế bằng nhau thì bất đẳng thức phải trở thành đẳng thức.

Các bất đẳng thức cơ bản thường dùng:

1) 

2) Bất đẳng thức Cô-si

+ Với hai số  không âm luôn có  đẳng thức xảy ta khi và chỉ khi 

+ Tổng quát, giả sử  với  Khi đó  đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

3) Bất đẳng thức Bu-nhia-kôp-xki

+ Với hai cặp số  và  luôn có  đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

+ Tổng quát, cho hai dãy số thực tùy ý  và  khi đó ta có



Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  với mọi 

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình



***Giải.***

Biến đổi phương trình về dạng



Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình



***Giải.***

Nhận thấy nếu  là một nghiệm nguyên của phương trình thì  cùng dương hoặc có hai số âm và một số dương.

Ngoài ra  cũng là nghiệm.

Do đó trước hết ta đi tìm nghiệm nguyên dương.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có



Suy ra 

Đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi 

Vậy nghiệm nguyên  của phương trình là



***Nhận xét.*** Bằng cách này ta có thể tìm nghiệm nguyên của phương trình dạng

 với  là các số nguyên dương.

1. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình



***Giải.***

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-kôp-xki cho hai bộ số  và ta có



suy ra  khi và chỉ khi 

Từ  hoặc 

Nếu  thì  khi đó  Vậy  hoặc 

Nếu  thì  tương tự tìm được  hoặc 

Vậy nghiệm nguyên  của hệ là



**Bài tập**

**Phương pháp phân tích**

1. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình

a) 

b)

1. Tìm số nguyên dương  sao cho  là số chính phương.
2. Tìm tất cả các tam giác vuông có độ dài cạnh là số tự nhiên và số đo diện tích bằng số đo chu vi.
3. Hãy viết số 2012 thành tổng của các số nguyên liên tiếp. Hỏi có bao nhiêu cách viết?
4. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình

a) 

b)

**Phương pháp rút một ẩn theo ẩn còn lại**

1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình 
2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình 
3. Giải phương trình tìm nghiệm nguyên 

**Phương pháp sắp thứ tự**

1. Tìm ba số nguyên dương biết tổng nghịch đảo của chúng bằng 1.
2. Tìm bốn số nguyên dương biết tổng bình phương các nghịch đảo của chúng bằng 1.
3. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình



1. Cho tam giác có số đo dường cao là số tự nhiên và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Chứng minh rằng tam giác đó đều.
2. Hãy tìm tất cả bộ ba số nguyên dương phân biệt  khác 1 sao cho  chai hết cho 
3. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau

a) 

b) 

c) 

1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

 với 

**Phương pháp sử dụng tính chất chia hết và tính chất của số nguyên tố**

1. Giải các phương trình tìm nghiệm nguyên

a)  b) 

1. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên 
2. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

a)  b) 

c)  d) 

**Phương pháp sử dụng các bất đẳng thức**

1. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

a)  b) 

1. Giải phương trình



1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

****

1. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình



**6. Chuyên đề 6: Phần nguyên và ứng dụng:**

**6.1 Phần nguyên**

**6.1.1 Định nghĩa**

Phần nguyên có số thực  là số nguyên lớn nhất không vượt quá  kí hiệu là  Ta có 

Phần lẻ của số thực  là hiệu của  với phần nguyên của nó, kí hiệu là 

Ta có 

**Ví dụ.**

****

**6.1.2 Tính chất**

1.  hoặc 
2.  và 
3. 
4. Nếu  thì 
5. Nếu  thì  và 
6. 
7. 

Tổng quát 

1. 
2. 
3. Nếu  thì 
4. 
5. Nếu  thì 
6. Nếu  là số nguyên thì 

Nếu  không là số nguyên thì 

**Chứng minh**

Các tính chất 1) đến 5) có thể chứng minh dễ dàng trên dựa vào định nghĩa phần nguyên.

1. Vì  nên tồn tại số  sao cho  Do đó.  suy ra

 Mà  nên 

1. Viết  Khi đó



Mà  nên



1. Áp dụng tính chất 7 ta có

 nên 

1. 

Vậy 

1.  suy ra  Không giảm tính tổng quát, giả sử 

Nếu  thì 

Nếu  thì từ 

Suy ra 

Vậy luôn có 

1. Đặt  thì 

* Nếu  thì 

 Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

* Nếu  thì 

 Suy ra điều phải chứng minh.

1. Ta có  mà  nên 



1. Nếu  là số nguyên thì 

Nếu  không nguyên thì  nên  suy ra 

Ta có 

**6.2 Ứng dụng**

**6.2.1 Chứng minh một số bài toán về số học**

1. Cho  và số  nguyên dương. Chứng minh rằng số các số nguyên dương là bội số của  và không vượt quá  là 

***Giải.***

Ta viết  trong đó  là số tự nhiên, 

Rõ ràng các bội số của  không vượt quá  là  tổng cộng có  số.

Mặt khác  Từ đó suy ra kết luận của bài toán.

1. Số  có tận cùng bao nhiêu số 0?

***Giải.***

Vì  nên để biết  có tận cùng bằng bao nhêu chữ số 0, ta cần phải tính số mũ của 5 khi phân tích  ra thừa số nguyên tố.

Theo **Ví dụ 1**, Số mũ của 5 khi phân tích  ra thừa số nguyên tố bằng

 (Do )

Do mũ của 2 khi phân tích  ra thừa số nguyên tố nhiều hơn 501.

Vậy  Có tận cùng là  chữ số 0.

*Nhận xét.* Nếu  thì số chữ số 0 tận cùng về bên phải của số  bằng



1. Tìm số tự nhiên  lớn nhất sao cho  chia hết cho 

***Giải.***

Ta có 

Số mũ cao nhất của 503 có trong 2011! Là

 (do ).

Vậy 2011! chia hết cho  và không chia hết cho , hiển nhiên 2011! chia hết cho  Do vậy 2011! chia hết cho  và không chia hết cho 

Muốn  chia hết cho  thì 

Vậy 

1. Tìm số tự nhiên  sao cho

**** (1)

***Giải.***

Viết  là có số tự nhiên). Thay vào (1) ta có





Suy ra  nên 

Vậy 

Do có 105 giá trị của k (từ 0 đến 1004). Với một  thì  nhận các giá trị từ  đến 2009. Vậy sô nghiệm tự nhiên  của (1) là



1. Tìm tất cả các số nguyên tố  sao cho

 là số nguyên tố.

***Giải.***

Nhận xét



Đặt 

Do đó 

Nên  suy ra  mà  là các số nguyên tố suy ra 

Nếu  thì  (thỏa mãn); nếu  thì  (thỏa mãn); nếu  thì  hoặc  (loại).

Vậy bài toán có hai nghiệm  và 

**6.2.2 Giải phương trình có chứa dấu phần nguyên**

1. **Dạng 1. **

*Phương pháp:* ****

1. Giải phương trình 
2. Giải phương trình  (gợi ý: )
3. **Dạng 2. **

*Phương pháp:* Đặt  ( nguyên), biểu diễn  đưa về phương trình  hay 

Tìm  sau đó từ  tìm ra .

1. Giải phương trình 

***Giải.***

Đặt  thì 

Ta có 



Do  nguyên nên  Suy ra 

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

1. Giải phương trình 

***Giải.***

Biến đổi phương trình về dạng 

Đặt  thì  (do ). Ta có



Do  là số tự nhiên nên  Do đó 

Vật tập nghiệm của phương trình là 

1. Giải phương trình 

Áp dụng tính chất 11)  ta có



Nên phương trình đã cho trở thành



Đặt  thì  Suy ra



(do  nguyên), tương ứng tìm được 

1. **Dạng 3. **

*Phương pháp:* Đặt  suy ra  dẫn đến 

Với  suy ra  từ đó tìm được 

Ứng với mỗi giá trị của  nguyên, giải hệ  để tìm 

Tập hợp các giá trị  tìm được từ hệ trên sẽ là nghiệm của phương trình.

1. Giải phương trình 

***Giải.***

Đặt  Theo tính chất 10) ta có

 Khi đó

 Suy ra 

Với  thì 

Với  thì 

Với  thì 

Với  thì 

Với  thì 

Với  thì 

Vậy tập nghiệm của phương trình là 

1. **Dạng 4. Phương trình chứa nhiều dấu phần nguyên**

*Phương pháp:* Sử dụng tính chất của phần nguyên, phân tích đa thức thành nhân tử, đặt ẩn phụ (nếu cần) để dưa về các dạng 

1. Giải phương trình 

***Giải.***

Nhận xét rằng

 suy ra  nên 

Do đó thay  rồi cộng theo vế ta có



Lại có  Do đó phương trình vô nghiệm.

1. Giải phương trình 

***Giải.***

Áp dụng tính chất 13) ta có



* Nếu  là số nguyên thì phương trình đã cho trở thành



Mà  là số nguyên nên 

* Nếu  không là số nguyên thì phương trình đã cho trở thành



Mà  không nguyên nên phải loại 

Vậy tập nghiệm của phương trình là 

**6.3 Bất phương trình có chứa dấu phần nguyên**

Khi giải bất phương trình có chứa dấu phần nguyên, ta thường đặt biểu thức  ( nguyên) để chuyển về giải bất phương trình không còn chứa dấu phần nguyên, rồi vận dụng định nghĩa và tính chất của phần nguyên để tìm ra nghiệm của bất phương trình.

1. Giải bất phương trình 

***Giải.***

*Cách 1.* Nhận xét rằng  ( nguyên) khi và chỉ khi 

Ta có  khi và chỉ khi  Do đó 

*Cách 2.* Đặt  ( là số nguyên­) thì có  Do vậy 

Từ  suy ra  suy ra 

Vậy  Bất phương trình có vô số nghiệm 

1. Giải bất phương trình 

***Giải.***

Áp dụng tính chất 4) ta có  Biến đổi bất phương trình thành



Đặt  ( là số nguyên) thì có  suy ra  mà t nguyên nên 

Với  thì  suy ra 

Với  thì  suy ra 

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là 

1. Giải bất phương trình 

***Giải.***

*Cách 1. Đặt*  ( là số nguyên) thì  suy ra  Do đó  hoặc .

* Với  thì  và  mà  nguyên nên  là số nguyên dương. Dẫn đến 
* Với  thì  và  mà  nguyên nên  là số nguyên dương. Dẫn đến 

Kết hợp với  dẫn đến 

*Cách 2.* Nhận xét rằng  khi và chỉ khi  và  .

Ta có  và  và 

Trước hết ta tìm  sao cho 

Đặt  ( nguyên) ta có

 suy ra  nên 

Với  thì  suy ra  nên 

Vậy nghiệm của bất phương trình là 

**Bài tập**

1. Tìm số tự nhiên  nhỏ nhất sao cho  chia hết cho 
2. Tìm số tự nhiên  nhỏ nhất sao cho 
3. Giải phương trình 
4. Giải các phương trình sau

a) 

b) 

1. Giải phương trình 
2. Giải phương trình 
3. Giải các bất phương trình

a) 

b) 

c) 

d) 

**7. Chuyên đề 7: Đường thẳng Simson:**

**7.1. ĐƯỜNG THẲNG SIMSON**

**Bài toán 1.** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn .  là điểm tùy ý trên ; gọi  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  trên . Chứng minh rằng  thẳng hàng.

***Giải.*** Không mất tính tổng quát, giả sử  thuộc cung  không chứa .

 là tứ giác nội tiếp . (1)

 là tứ giác nội tiếp . (2)

 nội tiếp .

Mà  (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra  thẳng hàng.

*Đường thẳng qua  có tên là* ***đường thẳng Simson*** *của tam giác  ứng với điểm  (hay đường thẳng Wallace).*

**Bài toán 2.** Cho tam giác ,  là điểm trong mặt phẳng chứa tam giác . Gọi  lần lượt là hình chiếu của  trên các cạnh  và  thẳng hàng. Chứng minh  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác .

***Giải.*** Theo giả thiết,  và  thẳng hàng, suy ra tứ giác  nội tiếp  (chắn cung ),  (đối đỉnh),  (chắn cung ) (1)

Tứ giác  nội tiếp  (2)

Từ (1), (2) . Suy ra tứ giác  nội tiếp nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác .

*Từ bài toán trên ta có kết quả:* ***“Cho tam giác ,  là điểm trong mặt phẳng chứa tam giác và không trùng với các đỉnh. Gọi  là hình chiếu của  trên ba cạnh của tam giác . Điều kiện cần và đủ để điểm  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác  là  thẳng hàng”.***

*Như vậy, với mỗi điểm  có một đường thẳng Simson đối với tam giác  cho trước.*

**7.2. VÍ DỤ MINH HỌA.**

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng:

a, Đường thẳng Simson của đỉnh  của tam giác  là đường cao hạ từ đỉnh đó.

b, Đường thẳng Simson của đỉnh  (điểm đối xứng với  qua tâm ) là cạnh .

***Giải.*** a, Hiển nhiên.

b,  là điểm đối xứng với  qua  là đường kính . Suy ra đường thẳng Simson chính là đường thẳng .

**Ví dụ 2.** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn ,  là các điểm thuộc . Chứng minh góc giữa 2 đường thẳng Simson của  và  đối với tam giác  bằng nửa số đo cung . Đặc biệt, nếu  đối xứng với nhau qua tâm , thì các đường thẳng Simson của chúng vuông góc với nhau tại một điểm trên đường tròn Euler.

***Giải.***  nội tiếp (1)

 nội tiếp (2)

Cộng vế - vế của (1) và (2), suy ra 

 ( là giao điểm của )

 tạo góc có số đo bằng nửa số đo cung  (trường hợp đặc biệt tự c/m).

**Ví dụ 3.** Cho đường tròn  đường kính ,  là điểm trên đường tròn. Đường phân giác của  cắt đường tròn tại . Gọi  là hình chiếu của  trên .

Chứng minh  thẳng hàng.

***Giải.***  là đường phân giác của 

Theo giả thiết,  nên theo bài toán 1 thì  thẳng hàng.

**Ví dụ 4.** Cho tam giác ,  là điểm thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác . Gọi  lần lượt là các điểm đối xứng của  qua . Chứng minh rằng  nằm trên 1 đường thẳng, và đường thẳng này luôn đi qua 1 điểm cố định. (*Vô địch Nhật Bản – 1996*)

***Giải.*** Gọi  lần lượt là giao điểm của  với .

Suy ra 

thẳng hàng.

Mặt khác,   là đường trung bình của , và  là đường trung bình của tam giác  thẳng hàng và .

Gọi  là trực tâm  là điểm đối xứng của qua  và  thuộc đường tròn ngoại tiếp  là hình thang cân . Tương tự, 

Suy ra  thẳng hàng  luôn đi qua trực tâm  của tam giác  (*đường thẳng Steiner*)

**Ví dụ 5.** Cho tam giác ,  là điểm thuộc cung  không chứa đỉnh . Gọi  là hình chiếu của  lần lượt trên các cạnh  . Chứng minh rằng

 (*Vô địch Mĩ – 1979*)

***Giải.*** Theo BT1 ta có  thẳng hàng.

Các tứ giác  nội tiếp  và  đồng dạng.

Kẻ  (1)

Ta có 

đồng dạng  (2)

Tương tự đồng dạng  (3)

Từ (2), (3) được . Kết hợp (1), suy ra ***Lưu ý:*** Đặc biệt, nếu  đều, ta có  (*Olympic Việt Nam*).

**Ví dụ 6.** Cho tam giác nhọn ,  là điểm thuộc cung  không chứa đỉnh . Gọi  lần lượt là hình chiếu của  lần lượt trên các cạnh . Xác định vị trí của  để độ dài  lớn nhất.

***Giải.*** Hạ  thẳng hàng.

Tứ giác  nội tiếp .

Tứ giác  nội tiếp .

Suy ra  đồng dạng 

. Do đó  lớn nhất khi và chỉ khi   là đường kính  đối xứng với  qua tâm .

**Ví dụ 7.** Cho góc , lấy điểm  cố định thuộc phân giác của góc . Dựng đường tròn (I) thay đổi qua  và  cắt  tại . Dựng hình bình hành . Chứng minh rằng  thuộc một đường thẳng cố định.

***Giải.*** Vì  trên đường phân giác của góc 

Kẻ  cố định, và  thẳng hàng  đường thẳng Simson của  đối với tam giác  cố định.

Hình bình hành  có  thuộc đường thẳng  song song với đường thẳng Simson, và cách  một khoảng không đổi, bằng 2 lần khoảng cách từ  đến .

**Ví dụ 8.** Cho ba điểm  thuộc một đường thẳng và  không thuộc đường thẳng đó. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác  và điểm  cùng thuộc một đường tròn.

***Giải.*** Gọi  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ; và  lần lượt là hình chiếu của  trên các cạnh của tam giác  ta có  là trung điểm của , suy ra  thẳng hàng.

Theo bài toán 2 ta có  nằm trên một đường tròn.

**Ví dụ 9.** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn  và đường phân giác . Gọi  lần lượt là hình chiếu của  trên . Từ  kẻ đường thẳng vuông góc với , cắt  tại . Chứng minh  thuộc trung tuyến kẻ từ  của tam giác .

***Giải.*** Gọi  là giao điểm của đường phân giác  với đường tròn ngoại tiếp tam giác  .

Kẻ , gọi  .

Theo bài toán 1, suy ra  thẳng hàng.

Mặt khác,  và 

. Gọi .

Dễ dàng chứng minh được  . Vậy  thuộc trung tuyến .

**Ví dụ 10.** Cho tứ giác  nội tiếp đường tròn ,  là các đường thẳng Simson của  tương ứng đối với các tam giác . Chứng minh rằng  đồng quy.

***Giải.*** Gọi  lần lượt là trực tâm của các tam giác  . Suy ra đường thẳng Steiner của các điểm  đối với các tam giác  lần lượt đi qua  đi qua trung điểm của 

Gọi  là trung điểm của 

 là hình bình hành  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Tương tự,  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra  đồng quy.

**Ví dụ 11.** Cho tứ giác  nội tiếp đường tròn. Gọi  là hình chiếu của  trên  và  là trung điểm của . Chứng minh  là tam giác vuông.

***Giải.*** Từ  kẻ . Theo bài toán 1 ta có  thẳng hàng.

Tứ giác  nội tiếp ; và .

Mặt khác  đồng dạng;

 và  đồng dạng 

Suy ra tứ giác  nội tiếp; Mà . Vậy  vuông.

**Ví dụ 12.** Cho tam giác  là các đường cao của tam giác . Gọi  là hình chiếu của  trên . Chứng minh rằng  đi qua trung điểm của .

***Giải.*** Từ  hạ , theo giả thiết , tứ giác  nội tiếp.

Theo bài toán 1 ta có  thẳng hàng.

Tứ giác  có

 là hình chữ nhật.  là đường chéo, chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Suy ra đpcm.

**Ví dụ 13.** Cho tứ giác  nội tiếp đường tròn. Gọi  là hình chiếu của  trên . Chứng minh rằng  khi và chỉ khi các đường phân giác của  và  cắt nhau trên .

***Giải.*** Theo giả thiết ta có  thẳng hàng.

 là tứ giác nội tiếp .

Tương tự, .

Suy ra  đồng dạng. Tương tự, ;  đồng dạng 

 khi và chỉ khi đường phân giác  cắt nhau trên .

**Ví dụ 14.** Cho tam giác nhọn  nội tiếp đường tròn , có trực tâm ,  là điểm trên cung nhỏ . Dựng hình bình hành ,  là trực tâm của tam giác . Gọi  là hình chiếu của  trên . Chứng minh rằng  đi qua trung điểm của . (*Olympic Việt Nam – 2004*)

***Giải.*** Theo giả thiết ta có  là trực tâm 

 tứ giác  nội tiếp  cắt  tại , suy ra  thẳng hàng (đường thẳng Simson).

Giả sử  cắt  tại  và cắt  tại , suy ra ;  là tứ giác nội tiếp  nội tiếp  là hình thang cân .

Mặt khác,  là hình bình hành  cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn  đi qua trung điểm .

**Ví dụ 15.** Cho hai đường tròn  cắt nhau tại  và . Một đường thẳng  thay đổi qua  cắt  lần lượt tại  ( nằm giữa ). Tiếp tuyến tại  của  và tại  của  cắt nhau tại . Gọi  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  xuống hai tiếp tuyến. Chứng minh rằng  tiếp xúc với một đường tròn cố định.

***Giải.***  là tiếp tuyến của   nội tiếp.

Hạ . Áp dụng định lý Simson cho điểm  đối với tam giác  ta có  thẳng hàng;  cố định, suy ra nằm trên đường tròn đường kính . Nên, luôn tiếp xúc với đường tròn đường kính .



**BÀI TẬP**

**1.** Cho đường tròn và ba dây cung tùy ý . Các đường tròn đường kính cắt nhau từng đôi một tại Chứng minh thẳng hàng.



**2.** Nếu 2 tam giác cùng nội tiếp đường tròn thì góc giữa 2 đường thẳng Simson của điểm trên đối với hai tam giác không phụ thuộc vào vị trí của trên .



**3.** Cho tam giác nội tiếp đường tròn . Gọi là điểm đối xứng của qua , là điểm đối xứng của qua , là điểm đối xứng của qua . Giả sử là trực tâm của tam giác .



Chứng minh rằng thẳng hàng khi và chỉ khi (*Anh – 1990*)



**4.** Cho đường tròn và đường thẳng không cắt . Điểm thay đổi trên *d*. Từ kẻ hai tiếp tuyến với . Gọi là hình chiếu của trên ; lần lượt là hình chiếu của trên . Chứng minh rằng luôn đi qua một điểm cố định, từ đó suy ra cũng đi qua một điểm cố định.



**5.** Cho tam giác nội tiếp đường tròn . sao cho đối xứng với nhau qua phân giác của góc . Chứng minh rằng vuông góc với đường thẳng Simson của đối với tam giác .



**6.** Cho góc nhọn và tia phân giác , điểm cố định trên ( khác ). Dựng đường tròn đi qua , cắt tại . Gọi là trung điểm của . Dựng hình vuông . Tìm quỹ tích điểm khi đường tròn thay đổi.



**7.** Cho tam giác không đều, là hình chiếu của trên . Gọi lần lượt là trung điểm . Gọi là đường thẳng đi qua chân hai đường cao hạ từ xuống . Tương tự cho . Chứng minh đồng quy.



**8.** Cho tứ giác nội tiếp đường tròn , là điểm trên đường tròn đó. Gọi là các đường thẳng Simson của đối với các tam giác . Gọi là hình chiếu của trên . Chứng minh thẳng hàng.



**9.** Cho tam giác nội tiếp đường tròn . là dây cung chuyển động trên đường tròn có độ dài không đổi. Chứng minh rằng đường thẳng Simson của đối với tam giác hợp với nhau một góc không đổi.



**10.** Cho tứ giác có cắt nhau tại cắt nhau tại . Chứng minh các trực tâm của các tam giác thẳng hàng.



**8. Chuyên đề 8: Bất đẳng thức Erdos – Modell và một vài ứng dụng:**

**8.1. BẤT ĐẲNG THỨC ERDOS – MORDELL.**

*Cho tam giác và là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Gọi theo thứ tự là khoảng cách từ đến các đỉnh . Còn lần lượt là khoảng cách từ đến các cạnh .*



*Khi đó ta có bất đẳng thức*



*Đẳng thức xảy ra khi và chỉ tam giác đều, và là tâm của tam giác đều đó.*



Bất đẳng thức Erdos – Mordell (E – M) là một bất đẳng thức khá nổi tiếng trong tam giác, được nhà toán học nổi tiếng người Hungari P. Erdos đề xuất vào năm 1935, khi nghiên cứu các tính chất của tam giác. Bị lôi cuốn bởi tính giản dị của bài toán, P. Erdos lao vào chứng minh, song vinh dự giải được bài toán đó không thuộc về ông, mà thuộc về nhà hình học nổi tiếng người Anh tên là Louis Mordel. L. Mordell đã chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp lượng giác (sử dụng định lí Sin và định lí Cosossin). Mãi đến năm 1945, nhà toán học người Nga Cadarinop mới đề xuất được một lời giải thuần túy hình học có thể chấp nhận được. Tiếp theo đó, nhiều nhà toán học trên thế giới đã nêu được những lời giải ngắn gọn cho bất đẳng thức. Chẳng hạn bằng cách sử dụng *định lý Ptolemy* của *André Avez*; sử dụng kiến thức tam giác đồng dạng của *Leon Bankoff*; sử dụng bất đẳng thức về diện tích của *V. Komornik*; sử dụng lượng giác của *Barrow; …*

Sau đây là một lời giải thuần túy hình học phù hợp với trình độ các bạn HS lớp 9.

***Chứng minh bất đẳng thức E – M***

Đặt . Lấy điểm đối xứng với điểm qua đường phân giác trong của góc . Dựng . Giả sử cắt tại .



Khi đó ; .



Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hay . Từ đó ta có:



() hay Từ đó (1). Tương tự (2), (3)



Cộng vế - vế (1), (2), (3) ta thu được



Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi , đồng thời là trực tâm của tam giác .



Từ cách chứng minh trên chúng ta còn một số kết quả sau:

**Hệ quả 1.** (Bất đẳng thức E – M dạng tích)

*Cho tam giác và là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Gọi*



*lần lượt là khoảng cách từ đến các đỉnh . Còn lần lượt là khoảng cách từ đến các cạnh . Khi đó ta có bất đẳng thức*



***Chứng minh.*** Từ cách chứng minh bất đẳng thức E – M ta có:

, , (\*). Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được



(đpcm)



**Hệ quả 2.** (Bất đẳng thức E – M dạng căn thức)

*Cho tam giác và là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Gọi*



*lần lượt là khoảng cách từ đến các đỉnh . Còn lần lượt là khoảng*



*cách từ đến các cạnh .*



*Khi đó ta có bất đẳng thức*



***Chứng minh.*** Từ (\*) ở hệ quả 1, theo bất đẳng thức Cauchy ta có



Cộng vế - vế các bất đẳng thức trên ta được



(đpcm)



**8.2. MỘT VÀI ÁP DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC ERDOS – MORDELL**

Chúng ta xét vài áp dụng của bất đẳng thức E – M và các hệ quả 1, hệ quả 2 thông

qua một số bài toán sau:

**Ví dụ 1.** Gọi là tâm, là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác đều là .



***Giải.*** Kẻ theo thứ tự vuông góc với các cạnh . Ta có .



Áp dụng bất đẳng thức E – M cho điểm trong tam giác , ta thấy



.



Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác đều.



Nói cách khác, điều kiện cần và đủ để tam giác đều là (đpcm)



**Ví dụ 2.** Giả sử là một điểm bất kì nằm trong tam giác . Gọi là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng . Đẳng thức xảy ra khi nào?



***Giải.*** Gọi lần lượt là khoảng cách từ đến các cạnh .



Kẻ , khi đó ta có . Từ đó .



Tương tự, , . Cộng theo vế 3 bất đẳng thức này được



(1)



Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được (2)



Áp dụng bất đẳng thức E – M cho điểm đối với thì (3)



Từ (1), (2), (3) suy ra



Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác đều (đpcm).



**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ta có các bất đẳng thức



a, b, .



Đẳng thức xảy ra khi nào?

***Giải.*** a, Gọi theo thứ tự là tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ; theo thứ tự là hình chiếu vuông góc kẻ từ đến các cạnh . Từ giả thiết tam giác nhọn, ta nhận thấy , hay .



Tương tự có . Từ đó:



Nhưng theo bất đẳng thức E – M cho điểm nằm trong tam giác ta có



Suy ra . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đều.



b, Dựng . Gọi là trực tâm .



Do tứ giác nội tiếp nên . Tứ giác nội tiếp nên . Tứ giác nội tiếp nên . Do đó:



(3)



Sử dụng bất đẳng thức E – M dạng tích ta có



Từ (3) suy ra . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đều.



**Ví dụ 4.** Cho tam giác nhọn , gọi theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp, tâm các đường tròn bàng tiếp tương ứng với các đỉnh của tam giác đó; là bán kính của đường tròn . Chứng minh rằng:



a, b,



c, d,



***Giải.*** a, Gọi lần lượt là tiếp điểm của đường tròn với các cạnh , . Sử dụng E – M dạng tích, ta có hay



*Lưu ý:* Bất đẳng thức ở câu a, cũng đúng cho tam giác bất kì.



b, Nhận xét rằng điểm là trực tâm của tam giác .



Áp dụng E – M cho điểm đối với tam giác ta nhận được



(theo ví dụ 1)



c, Áp dụng E – M dạng tích cho điểm đối với tam giác ta nhận được (theo câu a,).



d, Áp dụng E – M dạng căn thức cho điểm đối với tam giác ta có (1)



Áp dụng E – M dạng căn thức cho điểm đối với tam giác ta được:



(2)



Từ (1), (2) suy ra



Các đẳng thức ở câu a, b, c, d xảy ra khi và chỉ khi tam giác đều.



**Ví dụ 5.** Cho tam giác với . Gọi là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó. Chứng minh . Đẳng thức xảy ra khi nào?



***Giải.*** Gọi là nửa chu vi tam giác . Từ công thức Heron và , suy ra (1)



Gọi là tâm đường tròn nội tiếp tam giác . Theo định lý Pythagore và (1) ta có



(2)



Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có



hay (3).



Từ (2), (3) suy ra (4)



Áp dụng E – M dạng tích ta có (5).



Từ (4), (5) suy ra (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đều.



*Chú ý.* Các bạn học lớp 9 nếu đã làm quen với định lý Sin trong tam giác thì thấy ( là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ). Khi đó từ bất đẳng thức ta nhận được bất đẳng thức



**Hệ quả.** *Với mọi tam giác ta có bất đẳng thức*



*Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác đều.*



**Ví dụ 6.** Giả sử đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh theo thứ tự tại . Chứng minh . Đẳng thức xảy ra khi nào?



***Giải.***

Đặt và là nửa chu vi tam giác



Sử dụng định lý Ptolemy cho các tứ giác nội tiếp ta thấy hay (1).



Tương tự, (2), (3)



Nhân đẳng thức (1), (2), (3) theo vế ta được (4) Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có:



;;



Nhân ba bất đẳng thức theo vế ta thu được (5)



Áp dụng E – M dạng tích ta có (6)



Từ (4), (5), (6) suy ra . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác đều.



**Ví dụ 7. (IMO 1991)** Cho tam giác và là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Chứng minh có ít nhất một trong ba góc nhỏ hơn hoặc bằng .



***Giải.*** (*Phản chứng*). Giả sử không có góc nào trong 3 góc nhỏ hơn hoặc bằng . Khi đó, nếu có một góc lớn hơn hoặc bằng thì hai góc còn lại nhỏ hơn hoặc bằng . Giả sử cả ba góc đều lớn hơn và nhỏ hơn . Gọi , lần lượt là khoảng cách từ đến các cạnh . Khi đó ta có



(1)



Tương tự (2), (3).



Từ (1), (2), (3) ta suy ra (mâu thuẫn E – M). Từ đây ta có điều cần chứng minh.



**Ví dụ 8.** Giả sử là trực tâm của tam giác nhọn . Gọi lần lượt là trung điểm của ; là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh rằng . Đẳng thức xảy ra khi nào?



***Giải.*** Gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác . Còn là tâm đường tròn Euler của tam giác . Ta có các kết quả sau (*tự chứng minh*):



+ là trung điểm của .



+ Bán kính đường tròn Euler của tam giác bằng nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.



Sử dụng hai kết quả trên ta có:



Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên: (1)



Áp dụng E – M cho điểm nằm trong tam giác ta có



(2)



Từ (1), (2) suy ra (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác đều.



**Ví dụ 9.** Cho tam giác nhọn nội tiếp đường tròn . Các đường cao đồng quy tại . Kẻ . Chứng minh rằng



***Giải.*** Nhận xét rằng (có thể chứng minh các đẳng thức này bằng cách kẻ các đường kính của đường tròn qua rồi sử dụng tính chất đường trung bình trong tam giác).



+ Áp dụng E – M cho điểm trong tam giác ta có:



+ Áp dụng E – M cho điểm trong tam giác ta có:



(đpcm).



*Chú ý*: Tổng hợp các kết quả của Ví dụ 8 và Ví dụ 9 ta có dãy bất đẳng thức



**Ví dụ 10.** Cho tam giác và là một điểm bất kì trong tam giác đó. Gọi lần lượt là khoảng cách từ đến các đỉnh . Còn lần lượt là khoảng cách từ đến các cạnh .



Chứng minh bất đẳng thức



***Giải.*** Gọi theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ lên các cạnh .



Ta có , và .



Kẻ .



Khi đó (1)



(2)



(3)



Áp dụng E – M cho điểm trong tam giác ta có:



(4)



Từ (1), (2), (3), (4) suy ra đpcm.

**BÀI TẬP ÁP DỤNG:**

**1.** Cho tam giác nhọn nội tiếp đường tròn tâm bán kính . Gọi theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác . Chứng minh bất đẳng thức . Đẳng thức xảy ra khi nào?



**2.** Cho tam giác nhọn . Gọi lần lượt là độ dài các đường trung tuyến kẻ từ đỉnh ; và là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.



Chứng minh rằng . Đẳng thức xảy ra khi nào?



**3.** Chứng minh rằng với mọi tam giác ta có bất đẳng thức



.Đẳng thức xảy ra khi nào?



**4.** Cho tam giác nhọn nội tiếp đường tròn và ngoại tiếp đường tròn . Các đường cao đồng quy tại . Chứng minh các hệ thức sau:



a, b,



c, d,



**9. Chuyên đề 9: Định lý Ptôlêmê và đặc trưng của tứ giác nội tiếp:**

*Định lý Ptôlêmê là một trong những định lý đẹp nhất của Hình học sơ cấp. Đẹp trước hết vì tính tự nhiên và sự giản đơn trong cách phát biểu của định lý đó, nhưng chính yếu hơn là do các ứng dụng phong phú của nó. Có lẽ định lý Ptôlêmê là một trong những đặc trưng sâu sắc nhất về tứ giác nội tiếp đường tròn.*

**9.1. ĐỊNH LÝ PTÔLÊMÊ**

Định lý Ptôlêmê được phát biểu như sau: *Trong một tứ giác nội tiếp, tích hai đường chéo bằng tổng các tích các cặp cạnh đối diện.*

Sau đây là một phương pháp chứng minh định lý này:

Giả sử tứ giác nội tiếp đường tròn .



Trên lấy điểm sao cho .



Vì nên hai tam giác và đồng dạng (1)



Tương tự, nên hai tam giác và đồng dạng (2)



Từ (1), (2) ta được hay



**9.2. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ PTÔLÊMÊ**

Định lý Ptôlêmê thường được sử dụng để chứng minh các hệ thức trong tam giác.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác vuông tại có . Vẽ tam giác vuông cân tại ( nằm khác phía đối với ). Tính độ dài ?



***Giải.*** Đặt .



Áp dụng định lý Ptôlêmê vào tứ giác ta có .



Suy ra .



 **Ví dụ 2.** Cho hình bình hành . Một đường tròn đi qua cắt các đoạn thẳng theo thứ tự ở . Chứng minh .



***Giải.***

Áp dụng định lý Ptôlêmê vào tứ giác ta có (1).



Mặt khác, hai tam giác đồng dạng nên (2).



Từ (1), (2) suy ra .



**Ví dụ 3.** Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn . Gọi là các khoảng cách từ đến và là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác .



a, Chứng minh hệ thức



b, Kết quả thế nào nếu góc tù?



***Giải.***

 a, Gọi là chân các đường vuông góc hạ từ xuống . Khi đó là trung điểm của .



Ta có



Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp ta có hay . Do đó . Tương tự, , .



Mặt khác,



Suy ra .



Từ đó



.



Suy ra .



b, Khi góc tù, tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác nằm trong tam giác đó. Trong trường hợp này các hệ thức tương ứng sẽ là



và



Cộng theo vế các đẳng thức trên, có



*Lưu ý*: Kết quả không ấn tượng lắm. Tuy nhiên ta sẽ có kết quả đẹp hơn ở ví dụ dưới đây.



**Ví dụ 4.** Cho tam giác có góc tù nội tiếp đường tròn tâm bán kính . Gọi là bán kính của đường tròn bàng tiếp góc . Gọi là các khoảng cách từ đến . Chứng minh



 ***Giải.*** (1)



Gọi là tâm của đường tròn bàng tiếp góc , ta có:



(2)



Từ (1), (2) suy ra



Ta lại có



Từ đó,



***Bổ đề.*** Cho tam giác có và .



Khi đó



Thật vậy, kẻ . Khi đó trong tam giác vuông có . Do đó .



Tam giác vuông có



 **Ví dụ 5.** Cho tam giác đều cạnh nội tiếp đường tròn tâm và một điểm trên cung nhỏ . Đặt . Chứng minh: a, ; b, c,



***Giải.***

a, Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp có



Do đó



b, Chú ý rằng .



Áp dụng bổ đề trên cho các tam giác có và .



Do đó, (theo câu a,).



c, Áp dụng hằng đẳng thức nhận được



Từ đó (1)



Chú ý rằng nên



Và



Do đó, từ (1) suy ra



**Ví dụ 6.** Cho tam giác nội tiếp đường tròn và một điểm trên cung nhỏ . Gọi là chân đường vuông góc hạ từ xuống . Chứng minh hệ thức .



 ***Giải.*** Vì (cùng chắn cung ) nên hai tam giác đồng dạng.



Do đó . Suy ra .



Tương tự, nên tam giác đồng dạng, suy ra



Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp có



Từ đó (đpcm).



**Ví dụ 7.** Cho tam giác có . Chứng minh .



***Giải.*** Phân giác góc cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại .



Khi đó và nên .



Tương tự, nên . Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp ta có



**Ví dụ 8.** Cho tam giác có . Chứng minh



***Giải.*** Từ giả thiết , theo ví dụ 7 có .



Từ đó .



Trên cung lớn , lấy điểm sao cho .



Khi đó và nên



Mặt khác, nên .



Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp có hay .



Từ đó, .



Theo chứng minh trên nên .



Chia cả 2 vế đẳng thức cuối cùng cho ta được (đpcm).



**9.3. ĐỊNH LÝ PTÔLÊMÊ VÀ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN**

Trong phần này ta sẽ sử dụng định lý Ptôlêmê để tính hàm số lượng giác của một số góc nhọn.

**Ví dụ 9.** Tính và (không dùng bảng số và máy tính)



***Giải.***

* Dựng tam giác cân có . Đặt . Khi đó nên theo ví dụ 7 có ()



Từ đó .



* Kẻ . Khi đó và



Từ đó



Kẻ . Khi đó và



Vì nên



**Ví dụ 10.** Cho là các góc nhọn sao cho là góc nhọn. Chứng minh công thức



***Bổ đề:*** Cho tam giác có góc nhọn, nội tiếp đường tròn .



Khi đó (định lý hàm số Sin).



*Chứng minh:* Vẽ đường kính . Khi đó và



Trong tam giác vuông có .



***Giải.*** Trên đường tròn , đường kính lấy các điểm sao cho .



Khi đó nên và .



Áp dụng bổ đề, . Tương tự



Hơn nữa, , .



Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp có hay .



*Lưu ý:* a, Nếu bạn đọ biết thêm rằng và là góc tù thì , bạn sẽ thấy Định lý hàm số Sin vẫn đúng đối với tam giác tùy ý (không cần giả thiết tam giác nhọn).



b, Công thức gọi là *công thức cộng cung*. Thực ra công thức này đúng với tùy ý. Áp dụng thức nhận được . Khi ta nhận được công thức nhân đôi và .



**9.4. BẤT ĐẲNG THỨC PTÔLÊMÊ**

Bất đẳng thức Ptôlêmê được phát biểu như sau: Trong một tứ giác lồi ta có



Lấy điểm trong tứ giác sao cho



.



Khi đó hai tam giác đồng dạng nên



Ta lại có hai tam giác đồng dạng nên



Từ đó .



Đẳng thức này xảy ra khi và chỉ khi nằm trên đoạn , nghĩa là khi và chỉ khi hay là tứ giác nội tiếp.



**9.5. ĐẶC TRƯNG CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN.**

Từ bất đẳng thức Ptôlêmê ta suy ra: Điều kiện cần và đủ để tứ giác nội tiếp đường tròn là



Như vậy là một đặc trưng của tứ giác nội tiếp .



Thực ra, ta có thể tìm thấy nhiều đặc trưng khác của tứ giác nội tiếp. chúng được cho bởi bài toán sau:

Đối với tứ giác cho trước, các khẳng định sau là tương đương:



1. Tứ giác là tứ giác nội tiếp.



2. .



3. .



4. .



5. ( là giao điểm của và ).



6. thẳng hàng, trong đó lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ xuống (đường thẳng Simson).



7. , trong đó là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác tương ứng.



8. Tứ giác là hình chữ nhật, trong đó là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác tương ứng.



9. Tứ giác là tứ giác nội tiếp, trong đó là trọng tâm các tam giác tương ứng.



10. Hai đường phân giác của các góc và vuông góc với nhau.



11.



12.



Trong đó .



**Ví dụ 11.** Hãy chứng minh sự tương đương giữa các khẳng định (1) và (11) ở trên.

 ***Giải.*** Ta đã biết (1) suy ra (11) theo ví dụ 6.

Để chứng minh (11) suy ra (1), gọi là giao điểm của với đường tròn ngoại tiếp tam giác . Khi đó tứ giác là tứ giác nội tiếp, nên (\*), trong đó lần lượt là các chân đường vuông góc hạ từ đến .



Mặt khác, nên và (\*\*)



Thay (\*\*) vào (\*) ta có



Mà nên , với là giao điểm của với .



Theo tính chất tỉ lệ thức, ta có



Mà nên .



Do đó là tứ giác nội tiếp.



*Lưu ý:* Bạn đọc tự chứng minh sự tương đương của các cặp mệnh đề còn lại ở trên.

**9.6. VÀI NÉT VỀ LỊCH SỬ**

Ptôlêmê là nhà toán học Hy Lạp sống vào thế kỉ thứ hai sau Công nguyên, tên đầy đủ của ông là *Claudius Ptolememy*. Tác phẩm chính của ông “Syntaus Mathematica” viết vào khoảng năm 150 sau Công nguyên chủ yếu viết về Thiên văn học. Quyển I là bảng các dây cung cùng một giải thích ngắn gọn về việc nó được ra đời từ một mệnh đề hình học mà ngày nay ta gọi là *Định lý Ptôlêmê.* Sau đây là một số hệ quả được rút ra từ Định lý Ptôlêmê trong tác phẩm ấy.

1. Nếu là hai dây cung có bán kính đơn vị thì là dây tổng của hai dây cung đó.



2. Nếu là hai dây cung có bán kính đơn vị và thì là dây của hiệu hai cung đó.



3. Nếu là dây cung của một đường tròn bán kính đơn vị thì là dây cung của nửa cung đó.



Năm trăm năm sau, nhà toán học Ấn Độ Bramagupta trở lại nghiên cứu vấn đề này. Sau đây là một kết quả rút trong tác phẩm “Bramagupta – Sphuta – Siddhamata” của ông.

Cho tứ giác nội tiếp đường tròn bán kính , có . Khi đó



1. ;



2. ;



3.



Bạn đọc tự chứng minh các kết quả trên.

**BÀI TẬP**

**1.** Cho tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc. Gọi là độ dài bốn cạnh liên tiếp của tứ giác. Tính diện tích của tứ giác.



**2.** Cho hình vuông nội tiếp đường tròn , là điểm bất kì thuộc cung nhỏ . Chứng minh hệ thức .



**3.** Cho tam giác nhọn , các đường trung tuyến . Gọi theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác .



Chứng minh (*Hướng dẫn: sử dụng kết quả của ví dụ 3*).



**4.** Cho đường tròn , dây cố định khác đường kính. Hãy xác định điểm thuộc cung lớn sao cho tổng có giá trị lớn nhất.



**5.** Cho tam giác có là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng (*sử dụng kết quả của ví dụ 3 và E – M* )



**6.** Giả sử là một điểm trên đường tròn nội tiếp lục giác đều . Chứng minh:



a,



b,



**7.** Cho tam giác đều nội tiếp đường tròn và một điểm trên cung nhỏ . Gọi là chân đường vuông góc hạ từ xuống . Chứng minh:



a,



b, với là đường cao của tam giác .



**8.** Chứng minh các đẳng thức:

a,



b,



**9.** Sử dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm trong mặt phẳng tọa độ cho bởi công thức để chứng minh bất đẳng thức Ptôlêmê.



**D. TÀI LIỆU THAM KHẢO:**

*[1] Vũ Hữu Bình, Văn Như Cương, Nguyễn Ngọc Đạm, Nguyễn Bá Đang, Trương Công Thành, Phạm Thị Bạch Ngọc, 2015, Tài liệu chuyên Toán THCS, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.*