|  |  |
| --- | --- |
|  | **Hình giải tích trong không gian**  **Phần 1**  **vecto và hệ trục toạ độ trong không gian** |

**Bài 1.** Cho hai vectơ  ; . Tính  ;  ;  ;  ; .

**Bài 2.** Cho vectơ . Tìm vectơ  cùng phương với  biết .

**Câu3.** Cho vectơ ; . tìm vectơ  có độ dài bằng , vuông góc với hai vectơ , và tạo với tia  một góc tù.

**Câu4.** Xét sự đồng phẳng của ba vectơ  ,  ,  sau đây

1. , , .
2. , , .

**Bài 5.** Cho ba điểm ; ;. Tìm ;để ,, thẳng hàng.

**Bài 6.** Cho bốn đỉnh ,,,.

**a.** Chứng minh ,,, đồng phẳng và tứ giác  là hình chữ nhật.

**b.** Tính độ dài các đường chéo và góc giữa hai đường chéo.

**Bài 7.** Cho 4 điểm  và .

**a.**Chứng minh tam giác  là tam giác vuông và tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

**b.** Tính thể tích tứ diện .

**Câu 8.**Cho ba điểm ; ; .

1. Chứng minh ba điểm ,****, không thẳng hàng.
2. Tính chu vi và diện tích tam giác .
3. Tìm toạ độ điểm  biết  là hình bình hành.
4. Tính độ dài đường cao của tam giác .
5. Tính các góc của tam giác .
6. Xác định toạ độ tực tâm của .
7. Xác định toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**Bài 9.** Trong không gian cho 4 điểm  và .

**a.** Chứng minh tam giác  là tam giác vuông và tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

**b.** Tính thể tích tứ diện .

**Bài10.** Trong không gian với hệ tọa độ  cho 3 điểm 

1. Tính diện tích tam giác 
2. Tìm tọa độ điểm trên  sao cho tứ diện có thể tích bằng 4
3. Tìm tọa độ điểm  trên  sao cho 
4. Tìm tọa độ điểm trên  sao cho 
5. Cho là phân giác trong của tam giác . Xác định tọa độ điểm 

**Bài 11.** Trong không gian với hệ tọa độ  cho 4 điểm Chứng minh 4 điểm đồng phằng và tính diện tích 

**Bài 12:**Trong không gian với hệ Oxyz cho ba điểm A(0;1;2), B(1;1;3), C(1;-1;4).

1. Tìm tọa độ điểm D trên (Oxy) sao cho BD song song với AC.
2. Tìm tọa độ điểm E trên (Ox) sao cho DE vuông góc với AB.
3. Tính diện tích tam giác ABC.
4. Tìm tọa độ điểm S trên Ox sao cho khối chóp S.ABC có thể tích bằng 1.
5. Cho CF là phân giác trong của tam giác ABC. Xác định tọa độ điểm F.

**Bài 13:**Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3).

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc Oz sao cho MA=MB.
2. Tìm tọa độ điểm N thuộc Oz sao cho A, B, C, N đồng phẳng.
3. Tìm tọa độ đỉnh D thuộc Oy biết tứ diện ABCD có thể tích bằng 15.

**Bài 14.** Trong không gian với hệ tọa độ  cho bốn điểm , , , .

1. Chứng minh rằng bốn điểm , , ,  không đồng phẳng.
2. Tính độ dài đường cao  của tam giác .
3. Tính thể tích khối tứ diện , từ đó suy ra dộ dài đường cao  của tứ diện.
4. Xác định tọa độ trọng tâm, trực tâm tam giác .
5. Tìm trên mặt phẳng  điểm  sao cho .

**Câu 15.** Cho hình chóp  có , tam giác  vuông tại . Trên  lần lượt lấy các điểm  sao cho  trong đó .

a) Tính độ dài đoạn .

b) Tìm  để  ngắn nhất.

c) Tìm  để  là đoạn vuông góc chung của  và .

**Câu 16.** Cho bốn điểm , , , .

a) Chứng minh rằng , , .

b) Gọi , ,  lần lượt là trung điểm của , , . Chứng minh rằng  là tứ diện đều.

1. Cho hai điểm  Tìm điểm  thuộc trục  sao cho biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất ?
2. Cho hai điểm  Tìm điểm  thuộc mặt phẳng  sao cho biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất ?

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Hình giải tích trong không gian**  **Giải Phần 1**  **vecto và hệ trục toạ độ trong không gian** |

***lycan0984@gmail.com***

**Bài 1.** Cho hai vectơ  ; . Tính  ;  ;  ;  ; .

**Lời giải**

***Tác giả: Trần Lê Hương Ly; Fb: Trần Lê Hương Ly***

* .
* 
* 
* 
* 

Ta có 



Suy ra 

**Bài 2.** Cho vectơ . Tìm vectơ  cùng phương với  biết .

**Lời giải**

***Tác giả: Trần Lê Hương Ly; Fb: Trần Lê Hương Ly***

Giả sử .

Vì vectơ  cùng phương với  nên tồn tại số  sao cho  ;  ; .

Lại có . Suy ra . Suy ra .

Vậy .

[***nguyentuyetle77@gmail.com***](mailto:nguyentuyetle77@gmail.com)

**Câu3.** Cho vectơ ; . tìm vectơ  có độ dài bằng , vuông góc với hai vectơ , và tạo với tia  một góc tù.

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Tuyết Lê ; Fb: Nguyen Tuyet Le.***

Gọi tọa độ của vectơ . Theo giả thiết ta có: 

Từ ,  suy ra , , thay vào ta được . Kết hợp điều kiện ta có:  . Vậy .

Cách 2: do cô **Hoàng Minh Tuấn ( pb)** đề xuất

Do ,  nên tồn tại số sao cho: 

Vì 

Từ đó  hoặc 

Mặt khác  tạo với một góc tù nên . Vậy 

[***nguyentuyetle77@gmail.com***](mailto:nguyentuyetle77@gmail.com)

**Câu4.** Xét sự đồng phẳng của ba vectơ  ,  ,  sau đây

1. , , .
2. , , .

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Tuyết Lê ; Fb: Nguyen Tuyet Le.***

Để xét sự đồng phẳng của ba vectơ  ,  ,  ta xét tích hỗn hợp  .

Nếu  thì ba vectơ , ,  đồng phẳng.

Nếu  thì ba vectơ , ,  không đồng phẳng.

(a) Ta có . Vậy ba vectơ  ,  ,  đồng phẳng.

(b) Ta có . Vậy ba vectơ  ,  ,  đồng phẳng.

[***nvanphu1981@gmail.com***](mailto:nvanphu1981@gmail.com)***, lyvanxuan@gmail.com***

**Bài 5.** Cho ba điểm ; ;. Tìm ;để ,, thẳng hàng.

**Lời giải**

***Tác giả: Mai Ngọc Thi ; Fb: Mai Ngọc Thi***

 ; 

Ta có : .

**Bài 6.** Cho bốn đỉnh ,,,.

**a.** Chứng minh ,,, đồng phẳng và tứ giác  là hình chữ nhật.

**b.** Tính độ dài các đường chéo và góc giữa hai đường chéo.

**Lời giải**

***Tác giả: Mai Ngọc Thi ; Fb: Mai Ngọc Thi***

**a.**;;

 ; .

Vậy ,,, đồng phẳng.

 nên ,,không thẳng hàng.

 nên  hay tứ giác  là hình bình hành.

Mặt khác :  nên tứ giác là hình chữ nhật.

**b.**; 

.

***vungoctan131@gmail.com***

**Bài 7.** Cho 4 điểm  và .

**a.**Chứng minh tam giác  là tam giác vuông và tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

**b.** Tính thể tích tứ diện .

**Lời giải**

***Tác giả:Vũ Ngọc Tân; Fb: Vũ Ngọc Tân***

**a.** Chứng minh tam giác  là tam giác vuông và tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

+) Chứng minh tam giác  là tam giác vuông

Ta có: ,, 

Xét  nên  nên  vuông tại .

Vậy  vuông tại .

+) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Theo công thức: .

Ta có : ,

khi đó vì  là tam giác vuông tại nên 

Chu vi tam giác  : .

Vậy .

**b.** Tính thể tích tứ diện .

Theo công thức: 

Ta có: , , 

Với , .

Vậy .

***tiendv@gmail.com***

**Câu 8.**Cho ba điểm ; ; .

1. Chứng minh ba điểm ,****, không thẳng hàng.
2. Tính chu vi và diện tích tam giác .
3. Tìm toạ độ điểm  biết  là hình bình hành.
4. Tính độ dài đường cao của tam giác .
5. Tính các góc của tam giác .
6. Xác định toạ độ tực tâm của .
7. Xác định toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**Lời giải**

***Tác giả: Đào Văn Tiến;face: Đào Văn Tiến***

1. Ta có ;  suy ra .

Do đó ;  không cùng phương suy ra ,****, không thẳng hàng.

1. Ta có ; ; ; ; ;.

Chu vi tam giác  là  và .

1. Gọi  sao cho ,****, ,  là bốn đỉnh hình bình hành.

Ta có .

1. Ta có ;; .
2. Áp dụng công thức hàm số cosin cho tam giác ta có

+ 

+ 

+ 

**Cách khác:** có thể dùng công thức .

1. Gọi  là toạ độ trực tâm tam giác 

Ta có  .

**Cách khác:** Tam giác  vuông tại  nên trực tâm tam giác  là .

1. Gọi  là toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác 

Ta có



**Cách khác:** Tam giác  vuông tại  nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm  của .

**Bài 9.** Trong không gian cho 4 điểm  và .

**a.** Chứng minh tam giác  là tam giác vuông và tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

**b.** Tính thể tích tứ diện .

**Lời giải**

***Tác giả: Vũ Ngọc Tân; Fb: Vũ Ngọc Tân***

**a.** Chứng minh tam giác  là tam giác vuông.

+) Chứng minh tam giác  là tam giác vuông

Ta có: ,, 

Xét  nên  nên  vuông tại .

Vậy  vuông tại .

**b.** Tính thể tích tứ diện .

Theo công thức: 

Ta có: , , 

Với , .

Vậy .

***minhphuongk34toan@gmail.com***

**Bài10.** Trong không gian với hệ tọa độ  cho 3 điểm 

1. Tính diện tích tam giác 
2. Tìm tọa độ điểm trên  sao cho tứ diện có thể tích bằng 4
3. Tìm tọa độ điểm  trên  sao cho 
4. Tìm tọa độ điểm trên  sao cho 
5. Cho là phân giác trong của tam giác . Xác định tọa độ điểm 

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Thị Minh Phương ; Fb:Minh Phương***

1. Ta có 

Khi đó diện tích tam giác : (đvdt)

1. Gọi . Ta có





Vậy điểm hoặc 

1. Gọi . Ta có



Ta cókhi cùng phương

Vậy 

1. Gọi . Ta có

 hoặc 



1. Gọi 

là phân giác trong tam giác 

mà  nằm giữa 

Vậy 

**Bài 11.** Trong không gian với hệ tọa độ  cho 4 điểm Chứng minh 4 điểm đồng phằng và tính diện tích 

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Thị Minh Phương ; Fb:Minh Phương***

Ta có: 



 đồng phẳng 4 điểm đồng phằng

Diện tích : ( đvdt)

***luongchinhhnn@gmail.com***

**Bài 12:**Trong không gian với hệ Oxyz cho ba điểm A(0;1;2), B(1;1;3), C(1;-1;4).

1. Tìm tọa độ điểm D trên (Oxy) sao cho BD song song với AC.
2. Tìm tọa độ điểm E trên (Ox) sao cho DE vuông góc với AB.
3. Tính diện tích tam giác ABC.
4. Tìm tọa độ điểm S trên Ox sao cho khối chóp S.ABC có thể tích bằng 1.
5. Cho CF là phân giác trong của tam giác ABC. Xác định tọa độ điểm F.

***Bài giải***

***Tác giả:Lương Thị Chính; Fb: ChínhLương***

**(a)** Gọi D(x;y;0) trên Oxy.





Vậy 

**(b)** Gọi E(x;0;0)





Vậy 

**(c)**

Diện tích tam giác,



**(d)** Gọi S(x; 0;0) trên Ox. 





**(e)** Gọi F(x;y;z) là chân đường phân giác trong



Khi đó





**Bài 13:**Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3).

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc Oz sao cho MA=MB.
2. Tìm tọa độ điểm N thuộc Oz sao cho A, B, C, N đồng phẳng.
3. Tìm tọa độ đỉnh D thuộc Oy biết tứ diện ABCD có thể tích bằng 15.

**Lời giải**

***Tác giả:Lương Thị Chính; Fb: ChínhLương***

**(a)** Gọi M(0;0;z)



**(b)** Gọi N(0;0;z)



Để A, B, C, N đồng phẳng



**(c)** Gọi D(0;y;0)





Vậy D(0; -22; 0); D(0; 23; 0)

[***Xuanmda@gmail.com***](mailto:Xuanmda@gmail.com)***, mainghiem7585@gmail.com***

**Bài 14.** Trong không gian với hệ tọa độ  cho bốn điểm , , , .

1. Chứng minh rằng bốn điểm , , ,  không đồng phẳng.
2. Tính độ dài đường cao  của tam giác .
3. Tính thể tích khối tứ diện , từ đó suy ra dộ dài đường cao  của tứ diện.
4. Xác định tọa độ trọng tâm, trực tâm tam giác .
5. Tìm trên mặt phẳng  điểm  sao cho .

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Thị Mai ; Fb:Mai Nguyen***

1. Ta có

,, .

, .

Do đó, bốn điểm , , ,  không đồng phẳng.

1. Ta có:

, , , .

.

Mặt khác, ta có: .

Vậy .

1. Thể tích khối tứ diện  là: 

Lại có: .

Vậy 

1. Tọa độ trọng tâm tam giác  là: .

Giả sử trực tâm  của tam giác  là . Ta có:

***, , .***

***.***

1. Giả sử , ta có:

, , .

. Hệ này vô nghiệm dẫn đến bài toán không có điểm  thỏa mãn.

***thuy.tranthithanhdb@gmail.com***

**Câu 15.** Cho hình chóp  có , tam giác  vuông tại . Trên  lần lượt lấy các điểm  sao cho  trong đó .

a) Tính độ dài đoạn .

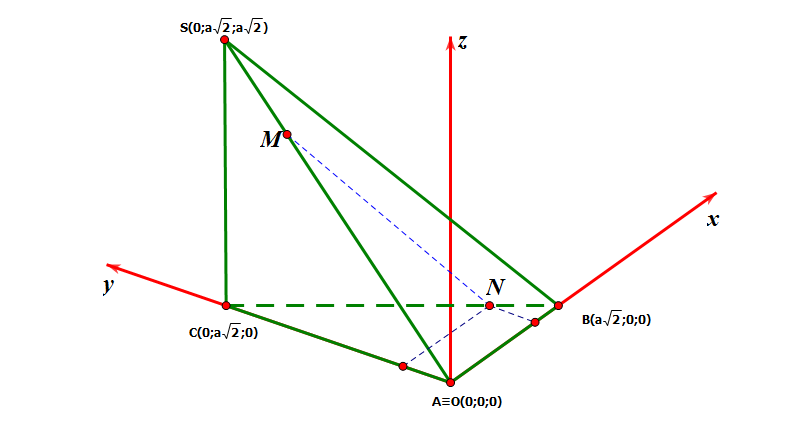
b) Tìm  để  ngắn nhất.

c) Tìm  để  là đoạn vuông góc chung của  và .

**Lời giải**

***Tác giả:Trần Thị Thanh Thủy; Fb: Song tử mắt nâu***

1. Chọn hệ trục tọa độ  như hình vẽ, ta có



.

Ta tính được tọa độ các điểm: .

.

1. Tìm  để  ngắn nhất.

 ngắn nhất  nhỏ nhất.

Ta có 

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

Vậy  ngắn nhất là .

1. Tìm  để  là đoạn vuông góc chung của  và .

***Cách 1.***

 là đoạn vuông góc chung của  và khi và chỉ khi  ngắn nhất

.

***Cách 2.***

 là đoạn vuông góc chung của  và khi và chỉ khi

.

Vậy  là đoạn vuông góc chung của  và khi và chỉ khi .

**Câu 16.** Cho bốn điểm , , , .

a) Chứng minh rằng , , .

b) Gọi , ,  lần lượt là trung điểm của , , . Chứng minh rằng  là tứ diện đều.

**Lời giải**

***Tác giả:Trần Thị Thanh Thủy; Fb: Song tử mắt nâu***

a) Ta có : , , .

Ta có : ,  Suy ra : .

Vậy .

Chứng minh tương tự ta cũng có : , .

b) Ta có: , ,.

Suy ra: . .

. .

. .

Do  nên  là tứ diện đều.

(Hiển nhiên  không thể đồng phẳng với ).

***Nghianguyennhan78@gmail.com***

1. Cho hai điểm  Tìm điểm  thuộc trục  sao cho biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất ?

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Thị Thanh Thảo; Fb: Nguyễn Thanh Thảo***

Điểm M thuộc trục nên tọa độ điểm .

Ta có



Để T đạt giá trị nhỏ nhất thì 

1. Cho hai điểm  Tìm điểm  thuộc mặt phẳng  sao cho biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất ?

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Thị Thanh Thảo; Fb: Nguyễn Thanh Thảo***

**Cách 1:**

Vì  nên A, B khác phía đối với mặt phẳng .

Gọi N là giao điểm của AB và .

Lấy  ta có .

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi.

Suy ra  nhỏ nhất khi và chỉ khi  hay 3 điểm A, B, M thẳng hàng.

Cần tìm điểm M thỏa mãn:



Vậy .

**Cách 2:**

Phương trìnhmặt phẳng là ***.***

Xét vị trí tương đối của A, B đối với mặt phẳng  ta có:

 Vậy A, B khác phía đối với mặt phẳng .

Đường thẳng AB quavà nhận  làm véc tơ chỉ phương, suy ra AB có phương trình: .

Gọi N là giao điểm của AB và , suy ra tọa độ điểm N là nghiệm của hệ:

.

Ta chứng minh  nhỏ nhất khi và chỉ khi 

Thật vậy, lấy  ta có .

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi. Vậy .