|  |  |
| --- | --- |
|  | **Hình giải tích trong không gian**  ***Phần 2***  **Phương trình mặt phẳng** |

**Bài 19.** Cho bốn điểm , ,  và . Viết phương trình các mặt phẳng

(a)  chứa ba điểm .

(b)  đi qua  và song song với .

(c)  đi qua  và vuông với .

(d)  đi qua  và song song với  và .

(e)  chứa  và cắt đoạn thẳng  tại điểm  sao cho .

(f)  là mặt phẳng trung trực của đoạn .

**Bài 20.** Cho hai mặt phẳng , cắt nhau theo giao

tuyến . Viết phương trình mặt phẳng

(a)  đi qua  và vuông góc với , .

(b)  đi qua ,  và vuông góc với .

(c)  đi qua và chứa .

(d)  chứa  và vuông góc với .

**Bài 21.** Cho mặt phẳng  . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua , chứa giá của vectơ  và vuông góc với mặt phẳng  .

**Bài 22.** Lập phương trình mặt phẳng  qua  và cắt các tia  lần lượt tại.

 sao cho  và  .

**Bài 23.** Lập phương trình mặt phẳng  qua điểm ,  và cắt tia ,  lần lượt tại ,  sao cho  (,  không trùng gốc ).

**Bài 24.** Cho hai điểm ,  và mặt phẳng . Tìm tọa độ điểm  thuộc  sao cho .

**Câu25.** **(D2013)**Cho điểm và mặt phẳng . Tính khoảng cách từ  đến . Viết phương trình mặt phẳng đi qua  và song song với .

**Câu26.** **(B2012)** Cho , . Viết phương trình mặt phẳng  qua  và cắt các trục  lần lượt tại  sao cho tam giác  có trọng tâm thuộc đường thẳng *.*

**Bài 27. (B008)** Cho ba điểm, , .

1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua 
2. Tìm tọa độ điểm  thuộc mặt phẳng sao cho 

**Bài 28.** Viết phương trình mặt phẳng  qua điểm  sao cho  cắt 3 trục  lần lượt tại sao cho  là trọng tâm của tam giác .

**Câu29.** Viết phương trình mặt phẳng  đi qua  sao cho  cắt các tia  lần lượt tại 3 điểm  và tứ diện  có thể tích lớn nhất.

**Bài30.** Viết phương trình mặt phẳng  đi qua điểm  sao cho cắt các trục  lần lượt tại ba điểm phân biệt sao cho là trực tâm của tam giác 

**Bài31.**Viết phương trình mặt phẳng  đi qua  sao cho  cắt các trục tọa độ  lần lượt tại hai điểm phân biệt , sao cho 

**Bài32.** Cho các điểm , trong đó  dương và mặt phẳng . Xác định  và , biết mặt phẳng  vuông góc với mặt phẳng  và

khoảng cách từ điểm  đến mặt phẳng  bằng 

**Bài33.** (B2009) Cho tứ diện  có các đỉnh , , , . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua  sao cho khoảng cách từ  đến  bằng khoảng cách từ  đến .

**Bài34.** Viết phương trình mặt phẳng qua hai điểm ,  và tạo với mặt phẳng  góc .

**Bài35.** Cho điểm . Lập phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm  và tạo với mặt phẳng góc .

**Bài36.** Cho hai mặt phẳng và . Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với và  sao cho khoảng cách từ đến  bằng 2.

**Câu37.** Cho ba điểm  . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua  sao cho khoảng cách từ điểm  đến mặt phẳng  bằng .

**Câu38.** Cho đường thẳng  và điểm  . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua điểm  song song với đường thẳng  và khoảng cách giữa đường thẳng  với mặt phẳng  bằng 3.

**Bài39.** Viết phương trình mặt phẳng  đi qua 2 điểm ,  sao cho khoảng cách từ điểm  đến  đạt giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất).

**Câu40.** Cho ba điểm . Viết phương trình mặt phẳng  chứa  sao cho khoảng cách từ  và  đến mặt phẳng  bằng nhau.

**Câu 41.** Cho hai điểm ,  và mặt phẳng . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua sao cho góc tạo bởi hai mặt phẳng  và  có số đo nhỏ nhất.

**Câu42.** Cho ba điểm , , . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua , song song với  và khoảng cách từ  đến  đạt giá trị lớn nhất.

**Câu43.** Cho hai điểm  và mặt phẳng . Tìm điểm  thuộc  sao cho khoảng cách từ  đến mặt phẳng bằng .

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Hình giải tích trong không gian**  ***Giải Phần 2***  **Phương trình mặt phẳng** |

***Phản biện: Tạ Trung Kiên –trungkienta1909@gmail.com***

[***Capuchino135@gmail.com***](mailto:Capuchino135@gmail.com)

**Bài 19.** Cho bốn điểm , ,  và . Viết phương trình các mặt phẳng

(a)  chứa ba điểm .

(b)  đi qua  và song song với .

(c)  đi qua  và vuông với .

(d)  đi qua  và song song với  và .

(e)  chứa  và cắt đoạn thẳng  tại điểm  sao cho .

(f)  là mặt phẳng trung trực của đoạn .

**Lời giải**

***Tác giả: Trần Thơm ; Fb: Kem LY***

(a)  chứa ba điểm  nên nhận  là các vectơ chỉ phương.

 có vectơ pháp tuyến .

Vậy  đi qua , có vectơ pháp tuyến  nên có phương trình tổng quát:

.

(b)  song song với .

Vậy  đi qua , có vectơ pháp tuyến  nên có phương trình tổng quát:

.

(c)  vuông với  nên nhận  là vectơ pháp tuyến.  đi qua  nên có phương trình tổng quát:

.

(d)  song song với  và  nên nhận  là các vectơ chỉ phương.

 có vectơ pháp tuyến .

Vậy  đi qua , có vectơ pháp tuyến  nên có phương trình tổng quát:

.

(e)  cắt đoạn thẳng  tại điểm  sao cho  hoặc .

TH1: .

Giả sử  và .

. Vậy .

 đi qua 3 điểm  nên nhận  làm vectơ chỉ phương. Do đó cũng nhận các vectơ  làm vectơ chỉ phương.

 có vectơ pháp tuyến .

Vậy phương trình của  là:

.

TH2: .

Giả sử  và .

. Vậy .

 đi qua 3 điểm  nên nhận  làm vectơ chỉ phương. Do đó cũng nhận các vectơ  làm vectơ chỉ phương.

 có vectơ pháp tuyến .

Vậy phương trình của  là:

.

(f)  là mặt phẳng trung trực của đoạn  nên nó đi qua trung điểm  và nhận  là vectơ pháp tuyến. Vậy phương trình của  là:

.

***mp01100207@gmail.com***

**Bài 20.** Cho hai mặt phẳng , cắt nhau theo giao

tuyến . Viết phương trình mặt phẳng

(a)  đi qua  và vuông góc với , .

(b)  đi qua ,  và vuông góc với .

(c)  đi qua và chứa .

(d)  chứa  và vuông góc với .

**Lời giải**

Gọi  là một véc tơ pháp tuyến của mp,  là một véc tơ pháp tuyến của mp.

(a) Gọi  là một véc tơ pháp tuyến của mp.

Do  vuông góc với ,  nên  chọn , 

Mà mp đi qua nên phương trình mpcó dạng

.

(b) Ta có . Gọi  là một véc tơ pháp tuyến của mp

 đi qua ,  và vuông góc với  nên  .

Khi đó chọn .

Mà mp đi qua nên phương trình mpcó dạng:

.

c) Ta có đường thẳng  là giao tuyến của và . Chọn , thuộc đường thẳng ; , .

Do mp đi qua và chứa nên mp nhận  làm véc tơ pháp tuyến suy ra phương trình mpcó dạng:

.

(d) Gọi  là một véc tơ pháp tuyến của mp, .

Do  chứa  và vuông góc với nên  .

Khi đó chọn 

Mà mp đi qua  nên phương trình mp có dạng:

.

[***trichinhsp@gmail.com***](mailto:trichinhsp@gmail.com)***, vanghhc@gmail.com***

**Bài 21.** Cho mặt phẳng  . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua , chứa giá của vectơ  và vuông góc với mặt phẳng  .

**Lời giải**

***Tác giả: Đinh Văn Vang; Fb: Tuan Vu***

Ta có vectơ pháp tuyến của  là 

.

Mặt phẳng  chứa giá của vectơ  và vuông góc với mặt phẳng có VTPT  và đi qua  nên có phương trình : 

.

**Bài 22.** Lập phương trình mặt phẳng  qua  và cắt các tia  lần lượt tại.

 sao cho  và  .

**Lời giải**

***Tác giả: Đinh Văn Vang; Fb: Tuan Vu***

Gọi , ,,(). Phương trình mặt phẳng  qua  có dạng  (phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn)

Từ giả thiết ta có .

Vậy mặt phẳng là .

[***dunghung22@gmail.com***](mailto:dunghung22@gmail.com)

**Bài 23.** Lập phương trình mặt phẳng  qua điểm ,  và cắt tia ,  lần lượt tại ,  sao cho  (,  không trùng gốc ).

**Lời giải**

***Tác giả: Hoàng Dũng; Fb: Hoang Dung***

Gọi ,  ( do mặt phẳng  cắt tia ,  lần lượt tại ,  ).

Khi đó phương trình mặt phẳng . Có .

Có ,

Ta có hệ phương trình: .

Suy ra phương trình mặt phẳng .

**Bài 24.** Cho hai điểm ,  và mặt phẳng . Tìm tọa độ điểm  thuộc  sao cho .

**Lời giải**

***Tác giả: Hoàng Dũng; Fb: Hoang Dung***

Gọi , điểm  thuộc  sao cho .

Ta có

.

Suy ra  hoặc .

Do đó  hoặc .

***anhson9802@gmail.com,langtham313vt@gmail.com***

**Câu25.** **(D2013)**Cho điểm và mặt phẳng . Tính khoảng cách từ  đến . Viết phương trình mặt phẳng đi qua  và song song với .

**Lời giải**

***Tác giả : Nguyễn Minh Cường, FB: yen nguyen***

\* Khoảng cách từ  đến : .

\* Gọi  là mặt phẳng cần tìm.

 đi qua  và có một vectơ pháp tuyến là .

Vậy phương trình .

**Câu26.** **(B2012)** Cho , . Viết phương trình mặt phẳng  qua  và cắt các trục  lần lượt tại  sao cho tam giác  có trọng tâm thuộc đường thẳng *.*

**Lời giải**

***Tác giả : Nguyễn Minh Cường, FB: yen nguyen***

.

 có dạng:  và trọng tâm  là .

. Phương trình đường thẳng .

Vì nên .

Vậy phương trình : .

***luulien1507@gmail.com***.

**Bài 27. (B008)** Cho ba điểm, , .

1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua 
2. Tìm tọa độ điểm  thuộc mặt phẳng sao cho 

**Lời giải**

***Tác giả: Lưu Thị Liên; Fb: LưuLiên***

1. ,

Mặt phẳng đi qua có vectơ pháp tuyến là  hay 

Suy ra phương trình mặt phẳng là  hay



1.  thuộc mặt phẳng thỏa mãn 

Vìnênhay 

Từ  và 

**Bài 28.** Viết phương trình mặt phẳng  qua điểm  sao cho  cắt 3 trục  lần lượt tại sao cho  là trọng tâm của tam giác .

**Lời giải**

***Tác giả: Lưu Thị Liên; Fb: LưuLiên***

Gọi  với 

Phương trình mặt phẳng  là 

 là trọng tâm của tam giác  suy ra 

Phương trình mặt phẳng  là  hay 

***dieptuandhsp@gmail.com***

**Câu29.** Viết phương trình mặt phẳng  đi qua  sao cho  cắt các tia  lần lượt tại 3 điểm  và tứ diện  có thể tích lớn nhất.

**Lời giải**

***Tác giả: Diệp Tuân; Fb: Tuân Diệp***

Giả sử mặt phẳng  cắt các tia  lần lượt tại các điểm khác gốc tọa độ là

 với.

Khi đó phương trình của  có dạng: .

Vì  đi qua  nên ta có: (1)

Thể tích khối tứ diện là:

Từ (1), áp dụng BĐT Cô si ta có:

Suy ra . Đẳng thức xảy ra .

Vậy phương trình .

**Bài30.** Viết phương trình mặt phẳng  đi qua điểm  sao cho cắt các trục  lần lượt tại ba điểm phân biệt sao cho là trực tâm của tam giác 

**Lời giải**

***Tác giả: Diệp Tuân ; Fb: Tuân Diệp***

Giả sử mặt phẳng  cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ là

 với 

Phương trình mặt phẳng  có dạng 

Mặt phẳng  đi qua điểm  nên 

Ta có:

Điểm  là trực tâm tam giác  khi và chỉ khi 

.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là 

[***ngonguyenanhvu@gmail.com***](mailto:ngonguyenanhvu@gmail.com)***,thanhdonguyen0683@gmail.com***

**Bài31.**Viết phương trình mặt phẳng  đi qua  sao cho  cắt các trục tọa độ  lần lượt tại hai điểm phân biệt , sao cho 

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Thành Đô; Fb:Thành Đô Nguyễn***

Giả sử 

 qua 

 qua 





Với 

Với 

Khi , chọn 

Khi , chọn 

**Bài 32.** Cho các điểm , trong đó  dương và mặt phẳng . Xác định  và , biết mặt phẳng  vuông góc với mặt phẳng  và

khoảng cách từ điểm  đến mặt phẳng  bằng 

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Thành Đô; Fb:Thành Đô Nguyễn***

Mặt phẳng  có phương trình 

Vì 

Ta có: 

Từ (1), (2) và  suy ra: 

***tpt0103@gmail.com,leminh0310@gmail.com***

**Bài33.** (B2009) Cho tứ diện  có các đỉnh , , , . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua  sao cho khoảng cách từ  đến  bằng khoảng cách từ  đến .

**Lời giải**

***Tác giả: Lê Minh; Fb: Lê Minh***

Giả sử  có véc tơ pháp tuyến .

.

Vì  đi qua  nên ta có:

.

Phương trình mặt phẳng .

Mặt khác: 

.

TH1: . Chọn . Vậy .

TH2: . Chọn . Vậy .

**Bài34.** Viết phương trình mặt phẳng qua hai điểm ,  và tạo với mặt phẳng  góc .

**Lời giải**

***Tác giả: Lê Minh; Fb: Lê Minh***

Giả sử  có véc tơ pháp tuyến . .

Mặt phẳng  có véc tơ pháp tuyến là .

Vì mặt phẳng  đi qua hai điểm  nên .

Mặt khác: .

Thay  vào  ta được: .

Chọn .

Vậy phương trình mặt phẳng .

***lieuluong.290983@gmail.com***

**Bài35.** Cho điểm . Lập phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm  và tạo với mặt phẳng góc .

**Lời giải**

***Tác giả: Lương Thị Hương Liễu; Fb: Lương Hương Liễu.***

Mặt phẳng có véc tơ pháp tuyến 

Mặt phẳng  đi qua có véc tơ pháp tuyến  nên có dạng:

Mà**.**

Suy ra, là véc tơ pháp tuyến của mp 

Theo đề:

1. 

Với : chọn . Phương trình 

Với : chọn . Phương trình 

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài: , 

**Bài36.** Cho hai mặt phẳng và . Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với và  sao cho khoảng cách từ đến  bằng 2.

**Lời giải**

***Tác giả: Lương Thị Hương Liễu; Fb: Lương Hương Liễu.***

Mặt phẳng có véc tơ pháp tuyến .

Mặt phẳng có véc tơ pháp tuyến .

Gọi là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng , khi đó:

 chọn 

Khi đó, phương trình mpcó dạng: 

Mà 

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng  thỏa yêu cầu đề bài.

***quankiet2@gmail.com, Tuluc0201@gmail.com***

**Câu37.** Cho ba điểm  . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua  sao cho khoảng cách từ điểm  đến mặt phẳng  bằng .

**Lời giải**

***Tác giả: Võ Tự Lực; Fb: Tự Lực***

Gọi (đk ) là vecto pháp tuyến của mặt phẳng .

Phương trình mặt phẳng  đi qua điểm và có vecto pháp tuyến là

 .

Điểm  thuộc mặt phẳng  nên  .

Khoảng cách từ điểm  đến mặt phẳng  bằng  nên

 .

Thế  vào  và bình phương hai vế ta được

 .

+)  , chọn  thế vào  ta được  . Phương trình mặt phẳng  là  .

+)  , chọn  thế vào  ta được  . Phương trình mặt phẳng  là  .

Vậy có hai phương trình mặt phẳng  cần tìm là  và  .

**Câu38.** Cho đường thẳng  và điểm  . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua điểm  song song với đường thẳng  và khoảng cách giữa đường thẳng  với mặt phẳng  bằng 3.

**Lời giải**

***Tác giả: Võ Tự Lực; Fb: Tự Lực***

Gọi (đk ) là vecto pháp tuyến của mặt phẳng .

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm  và có vecto pháp tuyến  là

 .

 nên đường thẳng đi qua  và có VTCP .

Theo giả thiết ta có:

+) Đường thẳng  song song với mặt phẳng  nên .

+) Khoảng cách từ đường thẳng  đến mặt phẳng  bằng  nên khoảng cách từ điểm  đến mặt phẳng  bằng  .



+)  , chọn  , thế vào  ta được  . Phương trình mặt phẳng  là  .

+)  , chọn  , thế vào  ta được  . Phương trình mặt phẳng  là  .

Vậy có hai mặt phẳng  cần tìm là  và  .

***Levietthuong38@gmail.com***

**Bài39.** Viết phương trình mặt phẳng  đi qua 2 điểm ,  sao cho khoảng cách từ điểm  đến  đạt giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất).

**Lời giải**

***Tác giả: Lê Viết Thương; Fb: Lê Viết Thương***

**TH1:** Khoảng cách từ  đến mặt phẳng  đạt giá trị nhỏ nhất.

Khoảng cách từ  đến mặt phẳng  đạt giá trị nhỏ nhấtbằng  khi  đi qua . Khi đó mặt phẳng  chính là mặt phẳng .

, , .

Mặt phẳng  đi qua điểm  và nhận  làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: .

**TH2:** Khoảng cách từ  đến  đạt giá trị lớn nhất.



Gọi  lần lượt là hình chiếu của  trên đường thẳng  và trên mặt phẳng .

Ta có mp  chứa  nên . Do đó khoảng cách từ  đến mp  lớn nhất khi  trùng , hay  là mp đi qua 2 điểm  và nhận  làm vectơ pháp tuyến.

Gọi  là mặt phẳng đi qua  và vuông góc với đường thẳng .

Khi đó mặt phẳng  đi qua điểm  và nhận  làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình: .

Đường thẳng  đi qua điểm  và nhận  làm vectơ chỉ phương nên có phương trình: .

Tọa độ điểm  là nghiệm của hệ phương trình 

Vậy mặt phẳng  đi qua điểm  và nhận  làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:



***Levietthuong38@gmail.com***

**Câu40.** Cho ba điểm . Viết phương trình mặt phẳng  chứa  sao cho khoảng cách từ  và  đến mặt phẳng  bằng nhau.

**Lời giải**

***Tác giả: Lê Viết Thương; Fb: Lê Viết Thương***

Nhận xét: Khoảng cách từ  và  đến mp  bằng nhau có thể phát biểu thành mp  cách đều 2 điểm  và . Điều này xảy ra khi mp  đi qua trung điểm  của đoạn  hoặc mp .





**TH1:** mp  đi qua trung điểm  của đoạn .

Khi đó mp  là mp đi qua ba điểm .

; ; .

Pt mặt phẳng : .

**TH2:** mp .

Ta có:

Mp  nhận  làm vtpt.

Phương trình mp : .

Vậy có hai mặt phẳng  cần tìm là  và  .

***Hoxuandung1010@gmail.com***

***trantuananh12a3@gmail.com***

**Câu 41.** Cho hai điểm ,  và mặt phẳng . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua sao cho góc tạo bởi hai mặt phẳng  và  có số đo nhỏ nhất.

**Lời giải**

***Tác giả:Trần Tuấn Anh ; Fb: Trần Tuấn Anh***

Gọi  là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng ; 

Vì ,  nên .

Ta có .

TH1:

.

TH2: 

.

Đặt  và .

Xét .

.

.

Bảng biến thiên.



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy .

Do đó chỉ có TH1 thỏa mãn, tức là . Khi đó chọn , .

.

**Câu42.** Cho ba điểm , , . Viết phương trình mặt phẳng  đi qua , song song với  và khoảng cách từ  đến  đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải**

***Tác giả:Trần Tuấn Anh ; Fb: Trần Tuấn Anh***

Gọi  là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng .

.

Vì  nên .

.

TH1: .

TH2: .

Đặt  và .

Xét .

 và .

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy .

Do đó chỉ có TH2 thỏa mãn, tức là . Khi đó chọn , ; .

.

**Câu43.** Cho hai điểm  và mặt phẳng . Tìm điểm  thuộc  sao cho khoảng cách từ  đến mặt phẳng bằng .

**Lời giải**

***Tác giả:Trần Tuấn Anh ; Fb: Trần Tuấn Anh***

.

Yêu cầu bài toán  .

Vậy  hoặc .