***Nêu Phương Pháp Giải Các Bài Toán Tổng Quát Và Các Ví Dụ Minh Họa***

**Bài toán 1:**

**Bài toán 1a:** Trong không gian cho hai điểm , mặt phẳng và đường thẳng .

1/ Tìm tọa độ điểm  thuộc sao cho chu vi tam giác  nhỏ nhất.

2/ Tìm tọa độ điểm  thuộc sao cho chu vi tam giác  nhỏ nhất.

**Các ví dụ minh họa**

**Ví dụ 1:** Trong không gian cho hai điểm , mặt phẳng . Tìm tọa độ điểm  thuộc sao cho chu vi tam giác  nhỏ nhất.

**Ví dụ 2:** Trong không gian cho hai điểm , mặt phẳng . Tìm tọa độ điểm  thuộc sao cho chu vi tam giác  nhỏ nhất.

**Bài toán 1b:** Trong không gian cho hai điểm và đường thẳng .

2/ Tìm tọa độ điểm  thuộc sao cho chu vi tam giác  nhỏ nhất.

**Các ví dụ minh họa**

**Ví dụ 1:** Trong không gian , cho đường thẳng  và hai điểm  và . Tìm điểm  thuộc  sao cho tam giác  có chu vi nhỏ nhất.

**Ví dụ 2:** Trong không gian , cho đường thẳng  và hai điểm  và . Tìm điểm  thuộc  sao cho tam giác  có chu vi nhỏ nhất.

**Bài toán 2:**

**Bài 2.** Cho hai điểm và đường thẳng . Tìm trên  điểm để

a. đạt giá trị nhỏ nhất

b.  đạt giá trị nhỏ nhất

c. Tam giác có diện tích nhỏ nhất

**Ví dụ 1:** Trong hệ trục Oxyz, cho đường thẳng và hai điểm 

a. Tìm điểm  trên sao cho :đạt giá trị nhỏ nhất

b. Tìm điểm  trên sao cho : đạt giá trị nhỏ nhất

c. Tìm điểm  trên sao cho diện tích tam giác đạt giá trị nhỏ nhất.

**Ví dụ 2: a.** Trong không gian với hệ trục toạ độ  cho 2 điểm  và đường thẳng . Tìm tọa độ điểm  là điểm trên đường thẳng  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

**b.** Trong không gian với hệ trục toạ độ  cho 2 điểm  và đường thẳng . Tìm tọa độ điểm  là điểm trên đường thẳng  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

**c.** Trong không gian với hệ trục toạ độ  cho 2 điểm  và đường thẳng . Gọi  là điểm trên đường thẳng  sao cho diện tích tam giác  nhỏ nhất. Khoảng cách giữa 2 điểm  và  là

**Bài toán 3:**

**Bài toán 3.** Cho điểm  và đường thẳng .Viết phương trình mặt phẳng chứa  có  lớn nhất , nhỏ nhất.

**Bài tập minh họa:**

**Bài 1:**Trong không gian cho điểm và đường thẳng .Viết phương

trình mặt phẳng chứa sao cho  lớn nhất , nhỏ nhất.

**Bài 2:**Trong không gian cho điểm và đường thẳng .Viết phương trình mặt phẳng chứa sao cho  lớn nhất , nhỏ nhất.

**Bài toán 4**

**Bài toán 4:** Cho hai đường thẳng , . Viết phương trình mặt phẳng  chứa  và tạo với đường thẳng một góc lớn nhất.

**Bài tập ví dụ:**

**Bài 1:** Cho hai đường thẳng  và . Lập phương trình mặt phẳng  chứa đường thẳng  và tạo với đường thẳng một góc lớn nhất.

**Bài 2:** Cho hai đường thẳng  và . Lập phương trình mặt phẳng  chứa đường thẳng  và tạo với đường thẳng một góc lớn nhất.

**Bài toán 4.** Viết phương trình mặt phẳng  chứa đường thẳng , tạo với đường thẳng  ( không song song với ) một góc lớn nhất.

**Bài toán 4.1.** Viết phương trình mặt phẳng  chứa  và tạo với đường thẳng  một góc lớn nhất

**Bài toán 4.2.**Cho hai đường thẳng , . Viết phương trình mặt

**Bài toán 5:**

**Câu1.** Trong không gian với hệ tọa độ , cho mặt phẳng và đường thẳng  hai điểm  . Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng  và tạo với mặt phẳng một góc nhỏ nhất.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu2.** Trong không gian với hệ trục toạ độ , cho hai điểm ,  và mặt phẳng . Gọi  là mặt phẳng đi qua hai điểm ,  và tạo với  một góc nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng  có dạng  ( và ). Khi đó tích  bằng bao nhiêu?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Bài toán 6**

**Câu 6a.** Trong không gian với hệ trục tọa độ , cho hai điểm ,  và đường thẳng . Viết phương trình đường thẳng  đi qua , cắt  và cách điểm  một khoảng lớn nhất.

**Ví dụ 1**: Trong không gian với hệ trục tọa độ , cho hai điểm ,  và đường thẳng . Viết phương trình đường thẳng đi qua , cắt  và cách điểm  một khoảng lớn nhất.

**Ví dụ 2**: Trong không gian với hệ trục tọa độ , cho hai điểm ,  và đường thẳng . Viết phương trình đường thẳng đi qua , cắt  và cách điểm  một khoảng lớn nhất.

**Câu 6b.** Trong không gian , cho hai điểm ,  và đường thẳng . Viết phương trình đường thẳng  đi qua , cắt  và cách điểm  một khoảng nhỏ nhất.

**Ví dụ 1.** Trong không gian , cho hai điểm ,  và đường thẳng . Viết phương trình đường thẳng  đi qua , cắt  và cách điểm  một khoảng nhỏ nhất.

**Ví dụ 2.** Trong không gian , cho hai điểm ,  và đường thẳng .Viết phương trình đường thẳng  đi qua , cắt  và cách điểm  một khoảng nhỏ nhất.

**Bài toán 7:**

***Bài toán 7:*** Cho  , điểm . Tìm tọa độ điểm  trên  sao cho:

a)  nhỏ nhất. b)  nhỏ nhất.

**Câu 1.** Trong không gian tọa độ , cho điểm , , . Tìm điểm  trên mặt phẳng  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 2.** Trong không gian tọa độ , cho điểm , , . Tìm điểm  trên mặt phẳng  sao cho  đạt giá trị lớn nhất.

**Câu 3.** Trong không gian tọa độ , cho điểm , , . Tìm điểm  trên mặt phẳng  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 4.** Trong không gian tọa độ , cho điểm , , . Tìm điểm  trên mặt phẳng  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài toán 8**

**Bài toán 8.1** Cho mặt cầu , mp .

Tìm điểm  trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ nó đến mặt cầu đạt  hoặc đạt ?

**Bài tập minh họa.**

**Bài 1.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho:

mặt cầu  và mặt phẳng . Tìm điểm  thuộc sao cho khoảng cách từ đến mp là:

a) lớn nhất? b) nhỏ nhất?

**Bài toán 8.2** Cho mặt cầu  và đường thẳng 

. Tìm điểm  trên mặt cầu  sao cho khoảng cách từ nó đến đường thẳng  đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất?

**Bài tập minh họa.**

**Bài 1.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho: mặt cầu  và đường thẳng  . Tìm điểm  thuộc  sao cho khoảng cách từ đến đường thẳng  là:

a) lớn nhất? b) nhỏ nhất?

[***Phungthan.ddn@gmail.com***](mailto:Phungthan.ddn@gmail.com)

**Bài toán 1:**

**Bài toán 1:** Trong không gian cho hai điểm , mặt phẳng và đường thẳng .

1/ Tìm tọa độ điểm  thuộc sao cho chu vi tam giác  nhỏ nhất.

2/ Tìm tọa độ điểm  thuộc sao cho chu vi tam giác  nhỏ nhất.

**Lời giải**

***Tác giả:Phùng Văn Thân; Fb: Thân Phùng***

1/ Xét vị trí tương đối của hai điểm so với .

- Nếu nằm về hai phía so với thì không tồn tại điểm .

- Nếu nằm về một phía so với thì :

Tìm điểm  đối xứng với qua .

Viết phương trình đường thẳng .

Gọi 

Với mọi điểm  thuộc ta có .

Chu vi tam giác là 

Chu vi tam giác  nhỏ nhất bằng  khi .

**Các ví dụ minh họa**

**Ví dụ 1:** Trong không gian cho hai điểm , mặt phẳng . Tìm tọa độ điểm  thuộc sao cho chu vi tam giác  nhỏ nhất.

**Lời giải**

***Tác giả:Phùng Văn Thân; Fb: Thân Phùng***

Ta có  suy ra nằm về một phía so với .

Gọi là đường thẳng qua vuông góc với . Đường thẳng  có phương trình :

Gọi, tọa độ là nghiệm của hệ .

Gọi đối xứng với qua , khi đó .

Ta có , phương trình đường thẳng : 

Gọi , tọa độ là nghiệm của hệ .

Với mọi điểm  thuộc ta có .

Chu vi tam giác là 

Chu vi tam giác  nhỏ nhất bằng  khi .

**Ví dụ 2:** Trong không gian cho hai điểm , mặt phẳng . Tìm tọa độ điểm  thuộc sao cho chu vi tam giác  nhỏ nhất.

**Lời giải**

***Tác giả:Phùng Văn Thân; Fb: Thân Phùng***

Ta có  suy ra nằm về một phía so với .

Gọi là đường thẳng qua vuông góc với . Đường thẳng  có phương trình :.

Gọi, tọa độ là nghiệm của hệ .

Gọi đối xứng với qua , khi đó .

Ta có , phương trình đường thẳng : 

Gọi , tọa độ là nghiệm của hệ .

Với mọi điểm  thuộc ta có .

Chu vi tam giác là 

Chu vi tam giác  nhỏ nhất bằng  khi .

***tanbaobg@gmail.com***

**Bài toán 1:** Trong không gian cho hai điểm và đường thẳng .

2/ Tìm tọa độ điểm  thuộc sao cho chu vi tam giác  nhỏ nhất.

**Lời giải**

***Tác giả: Đỗ Tấn Bảo; Fb: Đỗ Tấn Bảo***

2/

***Trường hợp 1: Đường thẳng vuông góc với đường thẳng .***

Ta làm như sau:

+ Viết phương trình mặt phẳng  qua  và vuông góc với .

+ Sử dụng mệnh đề: chu vi của tam giác  nhỏ nhất khi và chỉ khi  là giao điểm của  với đường thẳng .

+ Xác định giao điểm  của  và  và kết luận  là điểm cần tìm.

***Trường hợp 2: Đường thẳng  không vuông góc với đường thẳng .***

Ta làm như sau

+ Tham số hoá điểm  theo phương trình đường thẳng  đã cho.

Tính độ dài .

+ Sử dụng mệnh đề: Chu vi của tam giác  nhỏ nhất khi và chỉ khi  nhỏ nhất.

+ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  và kết luận.

**Chú ý**. Người ta thường tìm giá trị nhỏ nhất của  bằng bất đẳng thức hoặc hàm số.

**Các ví dụ minh họa**

**Ví dụ 1:** Trong không gian , cho đường thẳng  và hai điểm  và . Tìm điểm  thuộc  sao cho tam giác  có chu vi nhỏ nhất.

**Lời giải**

***Tác giả: Đỗ Tấn Bảo; Fb: Đỗ Tấn Bảo***

Ta có . Chọn  là một véc tơ chỉ phương của .

Vì  nên .

Gọi  là mặt phẳng qua  và vuông góc . Suy ra phương trình của  là:

.

Vì  và  cố định nên chu vi tam giác  nhỏ nhất khi và chỉ khi  nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi  là giao điểm của  và đường thẳng .

Giả sử . Thay tọa độ điểm  vào phương trình  ta được .

Vậy  là điểm cần tìm.

**Ví dụ 2:** Trong không gian , cho đường thẳng  và hai điểm  và . Tìm điểm  thuộc  sao cho tam giác  có chu vi nhỏ nhất.

**Lời giải**

***Tác giả: Đỗ Tấn Bảo; Fb: Đỗ Tấn Bảo***

Giả sử . Khi đó.

Vì  và  cố định nên chu vi tam giác  nhỏ nhất khi và chỉ khi  nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt .

Do đó .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  cùng hướng . Điều này xảy ra khi và chỉ khi . Suy ra 

Vậy  là điểm cần tìm.

***Cách khác*** để tìm giá trị nhỏ nhất của  là dùng hàm số như sau:

.

 (\*)

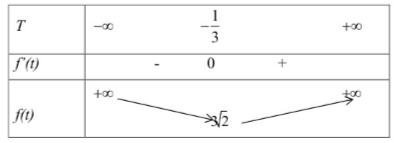
Điều kiện cần để  là nghiệm của (\*) thì .

Khi đó (\*) .

.

Đối chiếu điều kiện thì .

Bảng biến thiên:



Do đó  nhỏ nhất khi .

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài toán 2:**

***honghacma@gmail.com***

**Bài 2.** Cho hai điểm và đường thẳng . Tìm trên  điểm để

a. đạt giá trị nhỏ nhất

b.  đạt giá trị nhỏ nhất

c. Tam giác có diện tích nhỏ nhất

**Ví dụ 1:** Trong hệ trục Oxyz, cho đường thẳng và hai điểm 

a. Tìm điểm  trên sao cho :đạt giá trị nhỏ nhất

b. Tìm điểm  trên sao cho : đạt giá trị nhỏ nhất

c. Tìm điểm  trên sao cho diện tích tam giác đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

a. nên 







Vậy khi 

b. 



Xét hàm số 

Vậy khi 

c. Ta có 



Vậy diện tích tam giác  đạt giá trị nhỏ nhất khi khoảng cách từ  đến  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó khoảng cách từ  đến là độ dài đoạn vuông góc chung của  và 

Phương trình đường thẳng 

nên 

Giả sử 

, 



Vậy 

***Tác giả:Trương Hồng Hà ; Fb:Trương Hồng Hà***

***hieule1031993@gmail.com***

**Ví dụ 2: a.** Trong không gian với hệ trục toạ độ  cho 2 điểm  và đường thẳng . Tìm tọa độ điểm  là điểm trên đường thẳng  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

Gọi  là điểm thỏa mãn sao cho  thì  là trung điểm của 

Khi đó



đạt giá trị nhỏ nhất khi đạt giá trị nhỏ nhất khi  là hình chiếu của  lên đường thẳng .

Phương trình tham số của đường thẳng 

Ta có 

**Cách 1:** 

đạt giá trị nhỏ nhất khi 

**Cách 2:**

Ta có 

Ta có hệ phương trình 



**b.**Trong không gian với hệ trục toạ độ  cho 2 điểm  và đường thẳng . Tìm tọa độ điểm  là điểm trên đường thẳng  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

Gọi  là điểm thỏa mãn sao cho  thì  là trung điểm của 

Khi đó 

đạt giá trị nhỏ nhất khi  là hình chiếu của  lên đường thẳng .

Phương trình tham số của đường thẳng 

Ta có 

**Cách 1:** 

đạt giá trị nhỏ nhất khi 

**Cách 2:** Ta có 

Ta có hệ phương trình 



**c.** Trong không gian với hệ trục toạ độ  cho 2 điểm  và đường thẳng . Gọi  là điểm trên đường thẳng  sao cho diện tích tam giác  nhỏ nhất. Khoảng cách giữa 2 điểm  và  là

**Lời giải**

Ta có 2 đường thẳng  và  chéo nhau.

Gọi  là điểm trên  và  là hình chiếu vuông góc của  trên đường thẳng .

Vì  nên  nhỏ nhất khi  nhỏ nhất  là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng và .

Ta có 

Phương trình tham số của  là 

Phương trình tham số của là 

;

Ta có hệ phương trình 

Ta có .

**Bài toán 3:**

***tuthinguyen2310@gmail.com***

**Bài toán 3.** Cho điểm  và đường thẳng .Viết phương trình mặt phẳng chứa  có  lớn nhất , nhỏ nhất.

**Bài tập minh họa:**

**Bài 1:**Trong không gian cho điểm và đường thẳng .Viết phương

trình mặt phẳng chứa sao cho  lớn nhất , nhỏ nhất.

**Lời giải**

***Tác giả:Trần Thị Tú Phương ; Fb:Trần Phương***



\*) Viết phương trình mặt phẳng chứa sao cho  lớn nhất .

Gọi là hình chiếu vuông góc của trên và là hình chiếu vuông góc của trên .

Theo tính chất đoạn vuông góc và đoạn xiên thì  nên  lớn nhất khi .

Vậy mặt phẳng cần tìm là mặt phẳng vuông góc với  tại .

Ta có nên .

có vectơ chỉ phương .

.Do đó .

Chọn vectơ pháp tuyến của là .Chọn điểm 

Phương trình mặt phẳng là :.

\*) Viết phương trình mặt phẳng chứa sao cho  nhỏ nhất.

Khoảng cách nhỏ nhất  khi đó A thuộc mặt phẳng tức là ta lập mặt phảng  chứ điểm và đường thẳng .

Ta có :và .

Mặt phẳng chứa và có một vectơ pháp tuyến .

Phương trình .

**Bài 2:**Trong không gian cho điểm và đường thẳng .Viết phương trình mặt phẳng chứa sao cho  lớn nhất , nhỏ nhất.

**Lời giải**

***Tác giả:Trần Thị Tú Phương ; Fb: Trần Phương***

\*) Viết phương trình mặt phẳng chứa sao cho  lớn nhất .

Gọi là hình chiếu vuông góc của trên và là hình chiếu vuông góc của trên .

Theo tính chất đoạn vuông góc và đoạn xiên thì  nên  lớn nhất khi .

Vậy mặt phẳng cần tìm là mặt phẳng vuông góc với  tại .

Ta có nên .

có vectơ chỉ phương .

.Do đó .

Chọn vectơ pháp tuyến của là .Chọn điểm 

Phương trình mặt phẳng là :.

\*) Viết phương trình mặt phẳng chứa sao cho  nhỏ nhất.

Khoảng cách nhỏ nhất  khi đó A thuộc mặt phẳng tức là ta lập mặt phảng  chứ điểm và đường thẳng .

Ta có :và .

Mặt phẳng chứa và có một vectơ pháp tuyến .

Phương trình .

**Bài toán 4**

[***Caothithuyhang1977@gmail.com***](mailto:Caothithuyhang1977@gmail.com)

[***Thachtv.tc3@nghean.edu.vn***](mailto:Thachtv.tc3@nghean.edu.vn)

**Bài toán 4:** Cho hai đường thẳng , . Viết phương trình mặt phẳng  chứa  và tạo với đường thẳng một góc lớn nhất.

**1. Phương pháp hình học:**

Trước hết ta xét trường hợp  và  chéo nhau.

Gọi  là một điểm nào đó thuộc , dựng đường thẳng qua  và song song với . Lấy điểm  cố định trên đường thẳng đó. Hạ , .

Góc giữa mặt phẳng  và đường thẳng  là .

Ta có .

Mà  không đổi nên  lớn nhất khi nhỏ nhất hay .

Mặt phẳng  cần tìm là mặt phẳng chứa  và vuông góc với mặt phẳng , hay vectơ pháp tuyến của  vuông góc với hai vectơ  và 

Nên vectơ pháp tuyến của  là .



Trường hợp  và  cắt nhau tại , bài toán giải tương tự như trên. Kết luận không thay đổi: vectơ pháp tuyến của  là .

**2. Phương pháp hàm số**: Bài toán 4 còn có thể giải bằng phương pháp chuyển về tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số theo các bước:

• Gọi : 

• Vì chứa  nên  đi qua hai điểm . Khi đó các tham số  sẽ phụ thuộc vào hai trong bốn tham số, chẳng hạn đó là , . (Ta giải điều kiện  để rút hai ẩn ,  theo , )

• Xác định góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng . Đây là một phân thức hai biến , với tử thức và mẫu thức cùng bậc, nên có thể chuyển về một biến  .

• Khảo sát hàm  để xác định giá trị lớn nhất (nhỏ nhất)

• Kết luận mặt phẳng cần tìm.

**Bài tập ví dụ:**

**Bài 1:**Cho hai đường thẳng  và . Lập phương trình mặt phẳng  chứa đường thẳng  và tạo với đường thẳng một góc lớn nhất.

**Lời giải**

***Cách 1:*** Sử dụng phương pháp hình học.

Vận dụng kết quả đã chứng minh trong phần lí thuyết, ta có mặt phẳng  cần tìm qua  và có vectơ pháp tuyến của  là .

Ta có ,.

Do đó .

Vậy phương trình mặt phẳng .

***Cách 2:*** Sử dụng phương pháp hàm số.

Đường thẳng  đi qua hai điểm , .

Phương trình mp qua  có dạng .

Vì  qua  nên .

Ta có  và nên góc giữa mp và  là  thỏa mãn



Nếu  thì  nên 

Nếu  thì ta đặt , ta có:



Vì  nên  khi và chỉ khi  hay .

Tức là 

Mà trên khoảng  thì  lớn nhất đạt được tương ứng với  lớn nhất nên  khi .

**Bài 2:**Cho hai đường thẳng  và . Lập phương trình mặt phẳng  chứa đường thẳng  và tạo với đường thẳng một góc lớn nhất.

**Lời giải**

***Cách 1:*** Sử dụng phương pháp hình học.

Đường thẳng  đi qua điểm và có vectơ chỉ phương .

Đường thẳng  có vectơ chỉ phương 

Ta có mặt phẳng  cần tìm qua  và có vectơ pháp tuyến của  là .

Ta có .

Do đó .

Vậy phương trình mặt phẳng .

***Cách 2:*** Sử dụng phương pháp hàm số.

Đường thẳng  đi qua hai điểm, .

Phương trình mp qua  có dạng .

Vì  qua  nên .

Ta có  và nên góc giữa mp và  là  thỏa mãn



Nếu  thì  nên 

Nếu  thì ta đặt , ta có:

 .

Vì  nên  khi và chỉ khi  hay 

Tức là .

Mà trên khoảng  thì  lớn nhất đạt được tương ứng với  lớn nhất nên  khi.

**Bài toán 4.** Viết phương trình mặt phẳng  chứa đường thẳng , tạo với đường thẳng  ( không song song với ) một góc lớn nhất.

**Lời giải**



Lấy  là điểm thuộc , vẽ đường thẳng .

Lấy  và gọi ,  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  trên  và .

Khi đó .

Vậy góc giữa  và  lớn nhất khi và chỉ khi  trùng .

Hay  là mặt phẳng nhận  làm vectơ pháp tuyến.

Hay  là mặt phẳng chứa  và vuông góc với mặt phẳng  (chứa , song song với ),

VTPT của mặt phẳng  cần tìm là .

**Bài toán 4.1.** Viết phương trình mặt phẳng  chứa  và tạo với đường thẳng  một góc lớn nhất

**Lời giải**

Ta có .

 đi qua điểm  nên có phương trình 



***trichinhsp@gmail.com***

**Bài toán 4.2.**Cho hai đường thẳng , . Viết phương trình mặt phẳng  chứa  và tạo với  một góc lớn nhất.

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Trí Chính; Fb: Nguyễn Trí Chính.***



 có véc tơ chỉ phương  và  đi qua .

 có véc tơ chỉ phương  và  đi qua .

Có  và  không cùng phương, có , .

Có , .

Suy ra  và  chéo nhau nhưng không vuông góc nhau.

Có , Lấy , qua  vẽ đường thẳng  sao cho .

Lấy điểm , vẽ  tại ,  tại .

Có  là các yếu tố cố định,  thay đổi và 

Có .

Có ,

 lớn nhất 

Suy ra  là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng .

Gọi  là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng, chứa  và .

Có . Suy ra .

Gọi  là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng .

Thì . Suy ra 

Mặt phẳng  qua điểm  có vec tơ pháp tuyến .

Nên phương trình mặt phẳng  là: .

**Bài toán 5:**

***Email: nguyen.dinhhai.908@gmail.com***

**Câu1.** Trong không gian với hệ tọa độ , cho mặt phẳng và đường thẳng  hai điểm  . Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng  và tạo với mặt phẳng một góc nhỏ nhất.

**A.**. **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Đình Hải; Fb:Nguyen Dinh Hai***

**Chọn A**

Gọi  là giao tuyến của hai mặt phẳng  và . Khi đó góc giữa  và nhỏ nhất khi và chỉ khi  .

Ta có có véctơ pháp tuyến và 

Suy ra véctơ pháp tuyến của mặt phẳng  là 

.

***Email: nguyen.dinhhai.908@gmail.com***

**Câu2.** Trong không gian với hệ trục toạ độ , cho hai điểm ,  và mặt phẳng . Gọi  là mặt phẳng đi qua hai điểm ,  và tạo với  một góc nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng  có dạng  ( và ). Khi đó tích  bằng bao nhiêu?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.**.

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Đình Hải; Fb:Nguyen Dinh Hai***

**Chọn D**

Gọi  là giao tuyến của hai mặt phẳng  và . Khi đó góc giữa  và nhỏ nhất khi và chỉ khi  .

Ta có có véctơ pháp tuyến và 

Suy ra véctơ pháp tuyến của mặt phẳng  là 

Phương trình mặt phẳng : .

Vậy .

**Bài toán 6**

***Congnhangiang2009@gmail.com***

**Câu 6a.** Trong không gian với hệ trục tọa độ , cho hai điểm ,  và đường thẳng . Viết phương trình đường thẳng  đi qua , cắt  và cách điểm  một khoảng lớn nhất.

**Phương pháp giải**



Gọi  là hình chiếu của  trên .

 lớn nhất khi và chỉ khi .

**Cách 1:**



Gọi  là mặt phẳng xác định bởi điểm  và đường thẳng  .

Do  đi qua  cắt .

 cách  một khoảng lớn nhất khi .

Do .

Do 

 chọn .

Bước 1: Lấy  suy ra tìm 

Bước 2: 

Bước 3: viết phương trình đường thẳng  đi qua  và có vecto chỉ phương 

**Chú ý:** kiểm tra xem  có cắt  không?

**Cách 2:**



Do đi qua  và  nên  nằm trong mặt phẳng  đi qua  và vuông góc .

Bước 1: dựng  đi qua  và vuông góc .

Bước 2: tìm giao điểm .

Bước 3: viết phương trình đường thẳng  đi qua  và .

**Ví dụ 1**: Trong không gian với hệ trục tọa độ , cho hai điểm ,  và đường thẳng . Viết phương trình đường thẳng đi qua , cắt  và cách điểm  một khoảng lớn nhất.

**Lời giải**

***Tác giả : Hoàng Thị Thanh Nhàn, FB: Hoàng Nhàn***

**Cách 1:**

Gọi  là mặt phẳng xác định bởi  và .

Lấy hai điểm .







.

 .

.

Ta có  không cùng phương với  nên  thỏa mãn.

**Cách 2:**

Gọi  là mặt phẳng đi qua  và vuông góc với .

Ta có 

.

Gọi .

.

.

.

Ta có  đi qua  và nhận  làm vectơ chỉ phương

.

**Ví dụ 2**: Trong không gian với hệ trục tọa độ , cho hai điểm ,  và đường thẳng . Viết phương trình đường thẳng đi qua , cắt  và cách điểm  một khoảng lớn nhất.

**Lời giải**

***Tác giả : Hoàng Thị Thanh Nhàn, FB: Hoàng Nhàn***

Gọi  là mặt phẳng xác định bởi  và .

Lấy hai điểm .







.

 không cùng phương với  nên  thỏa mãn.

.

**nguyenminhduc.hl@gmail.**

**Câu 6b.** Trong không gian , cho hai điểm ,  và đường thẳng . Viết phương trình đường thẳng  đi qua , cắt  và cách điểm  một khoảng nhỏ nhất.

**Phương pháp giải**

****

Gọi  là mặt phẳng đi qua điểm  và chứa đường thẳng .Gọi  lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm  trên mặt phẳng  và trên đường thẳng .Do  đi qua  cắt  nên .

Ta có .

Do đó  nhỏ nhất khi  hay  đi qua hai điểm và 



***Chú ý***: Ta phải kiểm tra xem đường thẳng  có cắt đường thẳng  không? ( Do  và  nằm trong cùng mặt phẳng  nên nếu  không cùng phương thì  cắt đường thẳng ).

**Ví dụ 1.** Trong không gian , cho hai điểm ,  và đường thẳng . Viết phương trình đường thẳng  đi qua , cắt  và cách điểm  một khoảng nhỏ nhất.

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Minh Đức ; Fb: Ducminh***

Gọi  là mặt phẳng đi qua điểm  và chứa đường thẳng .Gọi  lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm  trên mặt phẳng  và trên đường thẳng .Do  đi qua  cắt  nên .

Ta có .

Do đó  nhỏ nhất khi  hay  đi qua hai điểm và 



Lấy 

Ta có , 



Phương trình mặt phẳng  là :

.

Phương trình đường thẳng là .

Tọa độ điểm ứng với tham số thỏa mãn:



.

Chọn .

Dễ thấy  không cùng phương nên  cắt đường thẳng .

Vậy phương trình đường thẳng  là .

**Ví dụ 2.** Trong không gian , cho hai điểm ,  và đường thẳng .Viết phương trình đường thẳng  đi qua , cắt  và cách điểm  một khoảng nhỏ nhất.

**Lời giải**

***Tác giả: Nguyễn Minh Đức ; Fb: Ducminh***

Gọi  là mặt phẳng đi qua điểm  và chứa đường thẳng .Gọi  lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm  trên mặt phẳng  và trên đường thẳng .Do  đi qua  cắt  nên .

Ta có .

Do đó  nhỏ nhất khi  hay  đi qua hai điểm và 



Lấy 

Ta có , 



Phương trình mặt phẳng  là :

.

Phương trình đường thẳng là .

Tọa độ điểm ứng với tham số thỏa mãn:



.

Chọn .

Dễ thấy  không cùng phương nên  cắt đường thẳng .

Vậy phương trình đường thẳng  là .

**Bài toán 7:**

***Hahoangduong30@gmail.com***

***lanh78vb@gmail.com***

***Bài toán 7:*** Cho  , điểm . Tìm tọa độ điểm  trên  sao cho:

a)  nhỏ nhất. b)  nhỏ nhất.

**Câu 1.** Trong không gian tọa độ , cho điểm , , . Tìm điểm  trên mặt phẳng  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

***Tác giả: Vũ Thị Ngọc Lánh, Face: Lánh Vũ Thị Ngọc***

Gọi điểm  thỏa mãn: 

Khi đó :





Với điểm  cố định,  và điểm  trên mặt phẳng sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất là hình chiếu của  trên mặt phẳng .

Vậy .

***lanh78vb@gmail.com***

**Câu 2.** Trong không gian tọa độ , cho điểm , , . Tìm điểm  trên mặt phẳng  sao cho  đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải**

***Tác giả: Vũ Thị Ngọc Lánh, Face: Lánh Vũ Thị Ngọc***

Gọi điểm  thỏa mãn

Khi đó 





Với điểm  cố định,  và điểm  trên mặt phẳng sao cho  đạt giá trị lớn nhất là hình chiếu của  trên mặt phẳng .

Gọi đường thẳng  qua và vuông góc với mặt phẳng 



là hình chiếu của  trên mặt phẳng  là giao điểm củavà 



Vậy .

**Câu 3.** Trong không gian tọa độ , cho điểm , , . Tìm điểm  trên mặt phẳng  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

***Tác giả: Vũ Thị Ngọc Lánh, Face: Lánh Vũ Thị Ngọc***

Gọi điểm  thỏa mãn

Khi đó 



Với điểm  cố định điểm  trên mặt phẳng sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất là hình chiếu của  trên mặt phẳng .

Vậy .

**Câu 4.** Trong không gian tọa độ , cho điểm , , . Tìm điểm  trên mặt phẳng  sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

***Tác giả: Vũ Thị Ngọc Lánh, Face: Lánh Vũ Thị Ngọc***

Gọi điểm  thỏa mãn

Khi đó 



Với điểm  cố định điểm  trên mặt phẳng sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất là hình chiếu của  trên mặt phẳng .

Gọi đường thẳng  qua và vuông góc với mặt phẳng 



là hình chiếu của  trên mặt phẳng  là giao điểm củavà 



Vậy .

**Bài toán 8**

***cunconsieuquay1408@gmail.com***

**Bài toán 8.1** Cho mặt cầu , mp .

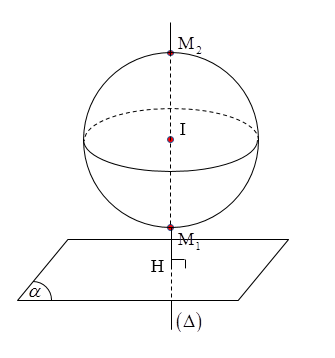
Tìm điểm  trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ nó đến mặt cầu đạt  hoặc đạt ?

**Lời giải**

***Nguyễn Thị Thanh Mai ; Fb: Thanh Mai Nguyen***

Giả sử mặt cầu có tâm , bán kính . Gọi  là hình chiếu của  lên mp.

\* TH1: :



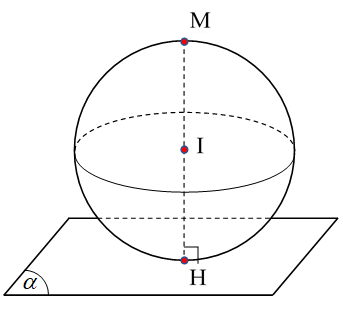
+ Gọi  là đường thẳng qua  và vuông góc với ,  cắt  tại hai điểm .

+ Giả sử . Suy ra:

.

Vậy  là điểm thuộc mặt cầu có khoảng cách đến mp đạt max và  là điểm thuộc mặt cầu có khoảng cách đến mp đạt min.

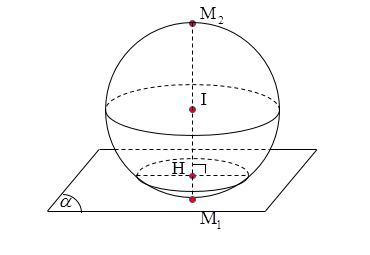
\* TH2: : Mặt cầu tiếp xúc mặt phẳng tại .



+  là đường thẳng qua  và vuông góc với ,  cắt  tại hai điểm .

+ Khi đó .

\* TH3: :



Mặt cầu cắt với mp theo giao tuyến là đường tròn  tâm  bán kính .

+ Gọi  là đường thẳng qua  và vuông góc với ,  cắt  tại hai điểm ( thuộc tia HI) thì  là điểm thuộc mặt cầu có khoảng cách đến mp đạt max và tập hợp tất cả các điểm thuộc đường tròn là điểm thuộc mặt cầu có khoảng cách đến mp bằng 0 tức đạt min.

**Bài tập minh họa.**

**Bài 1.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho:

mặt cầu  và mặt phẳng . Tìm điểm  thuộc sao cho khoảng cách từ đến mp là:

a) lớn nhất? b) nhỏ nhất?

**Lời giải**

+ có tâm và bán kính .

+ 

+ là đường thẳng qua  và vuông góc với , .

+ Giao điểm của  và  là nghiệm hệ phương trình 

+;

a) Vậy  thì khoảng cách từ  đến mp là lớn nhất.

b) Vậy  thì khoảng cách từ  đến mp là nhỏ nhất.

***thongqna@gmail.com***

**Bài toán 8.2** Cho mặt cầu  và đường thẳng 

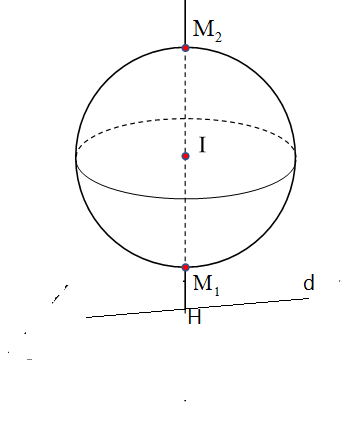
. Tìm điểm  trên mặt cầu  sao cho khoảng cách từ nó đến đường thẳng  đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất?

**Lời giải**

***Trần Văn Thông; Fb: Trần Thông***

Mặt cầu có tâm , bán kính . Gọi  là hình chiếu vuông góc của  lên đường thẳng . Khi đó sảy ra các trường hợp sau

**Trường hợp 1:** hay  và không có điểm chung.

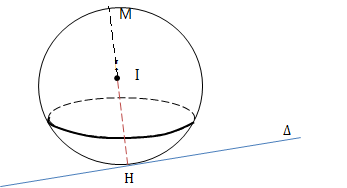


Gọi  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  và mặt cầu  . Không mất tínhtổng quát, ta giả sử  .

Với thuộc mặt cầu , ta có , dấu bằng xảy ra khi và .

Vậy khoảng cách từ  đến đường thẳng  đạt giá trị lớn nhất khi và đạt giá trị nhỏ nhất khi .

**Trường hợp 2:** hay  và tiếp xúc với nhau.

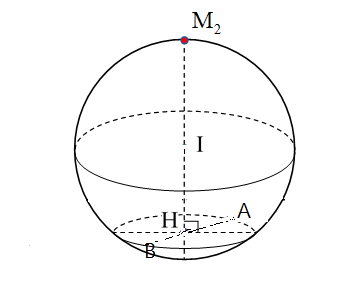


Gọi  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  và mặt cầu  . Không mất tính tổng quát, ta giả sử  .

Với thuộc mặt cầu , ta có , dấu bằng xảy ra khi và .

Vậy khoảng cách từ đến đường thẳng  đạt giá trị lớn nhất khi và đạt giá trị nhỏ nhất là  khi .

**Trường hợp 3:** hay  và cắt nhau tại hai điểm  và .



Gọi  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  và mặt cầu  trong đó nằm trên tia .

Khi đó . Hơn nữa, khi  hoặc  và  khi .

Vậy khoảng cách từ  đến đường thẳng  đạt giá trị lớn nhất khi và đạt giá trị nhỏ nhất là  khi  hoặc .

**Bài tập minh họa.**

**Bài 1.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho: mặt cầu  và đường thẳng  . Tìm điểm  thuộc  sao cho khoảng cách từ đến đường thẳng  là:

a) lớn nhất? b) nhỏ nhất?

**Lời giải**

Mặt cầu  có tâm và bán kính .

Gọi  là hình chiếu vuông góc của  lên .

Vì  nên . Khi đó  .

Mà suy ra .

Khi đó, ta tìm được và  nên  và không có điểm chung.

Đường thẳng có phương trình .

Gọi  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  và mặt cầu  .

Khi đó, tọa độ các điểm  thỏa mãn hệ .

Giải hệ ta tìm được .

Khi đó ,.

Với thuộc mặt cầu , ta có , dấu bằng sảy ra khi và .

Vậy khoảng cách từ  đến đường thẳng  lớn nhất bằng khi và nhỏ nhất bằng  khi .