# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Camada Limite Planetária

*Paulo Kubota*

| data | Tópicos |
|---|---|
| 15/04/2021 | PBL |
| 20/04/2021 | PBL |
| 22/04/2021 | PBL |
| 27/04/2021 | QG Vorticity. eq. |
| 29/04/2021 | QG Vorticity. eq. |
| 04/05/2021 | QG Vorticity. eq. |
| 06/05/2021 | Geop. Tend. eq. |
| 11/05/2021 | Geop. Tend. eq. |
| 13/05/2021 | Geop. Tend. eq. |
| 18/05/2021 | Omega and Vetor Q |
| 20/05/2021 | Omega and Vetor Q |
| 25/05/2021 | Omega and Vetor Q |
| 27/05/2021 | Avaliação 1 |
| 01/06/2021 | Avaliação 2 |

- ***Coeficiente de Difusão;***

## 5.2 Energia Cinética Turbulenta

## 5.3 Equações de momentum da camada limite Planetária

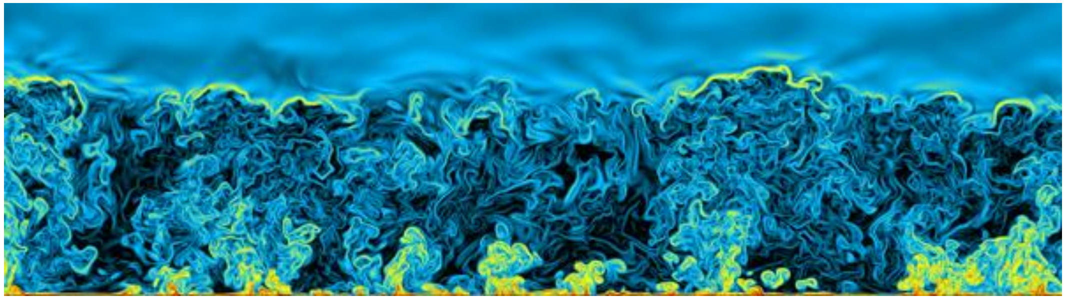
$$\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}=-\frac{\partial\left(\overline{\boldsymbol{u_j}'\boldsymbol{u_i}'}\right)}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}-g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k})+\nu\frac{\partial^2(\overline{u_i})}{\partial x_j{}^2}$$

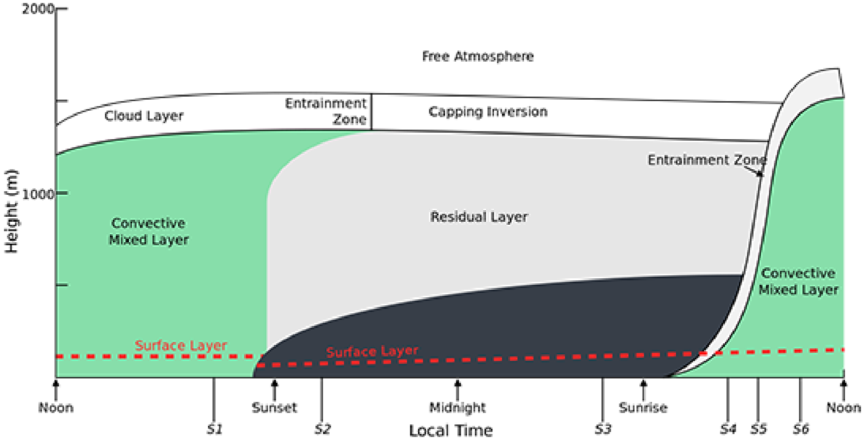
$$\frac{\partial\overline{(\boldsymbol{u_i}'\boldsymbol{u_k}')}}{\partial t}+(\bar{\bar{u}}_j)\frac{\partial\overline{(u_i'u_k')}}{\partial x_j}$$
$$=-\overline{(u_j'u_k')}\frac{\partial(\bar{\bar{u}}_i)}{\partial x_j}-g\frac{\overline{\rho'u_k'}}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j\overline{(u_k'u_k')}-\frac{\partial\overline{\left(u_j'u_i'u_k'\right)}}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\overline{P'u_k'})}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2\overline{(u_i'u_k')}}{\partial x_j{}^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial\bar{e}}{\partial t}+(\bar{\bar{u}}_j)\frac{\partial\bar{e}}{\partial x_j}=-\overline{(u_j'u_i')}\frac{\partial(\bar{\bar{u}}_i)}{\partial x_j}-g\frac{\overline{u_i'\rho'}}{\rho_0}\delta_{i3}-\frac{\partial\overline{\left(eu_j'\right)}}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\overline{P'u_i'})}{\partial x_i}-\epsilon}$$

# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
# Camada Limite Planetária

- ***A Camada limite Planetaria***






**Diurnal evolution of the atmospheric boundary layer. The black region is the stable (nocturnal) boundary layer. Time markers S1–S6 are used in lesson 11.3. After R. B. Stull's An Introduction to Boundary Layer Meteorology (1988).**
**Credit: NikNaks (Own work, based on [1]) [CC BY-SA 3.0], via Wikimedia Common**

## 5.3 Equações de momentum da camada limite Planetária

**Para o caso especial de turbulência horizontalmente homogênea, a camada viscosa, a viscosidade molecular e o temo da divergência horizontal do fluxo de momentum turbulento podem ser desprezados.**

$$\frac{\bar{D}\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$$

$$\frac{\bar{D}\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - f\bar{u} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}$$

## 5.3 Equações de momentum da camada limite Planetária

$$\frac{\bar{D}\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \qquad \frac{\bar{D}\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - f\bar{u} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}$$

**Para movimentos em escala sinótica em media latitudes:**

**O (termo de aceleração inercial, Porque?) pode ser desprezado comparando ao termo da força de Coriolis e gradiente de pressão.**

**Fora da camada limite a aproximação resultante é simplificada com o balanço geostrófico.**

**Na camada limite os termos inerciais são até pequenos comparados a força de Coriolis e gradiente de pressão mas o termo de fluxo turbulento deve ser incluído.**

$$0 = -f\bar{v}_g + f\bar{v} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \qquad 0 = f\bar{u}_g - f\bar{u} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}$$

# Camada Limite Planetária

## 5.3.1 Camada Limite bem Misturada

Atmosfera livre (camada estável)

Camada limite convectiva (camada instável)

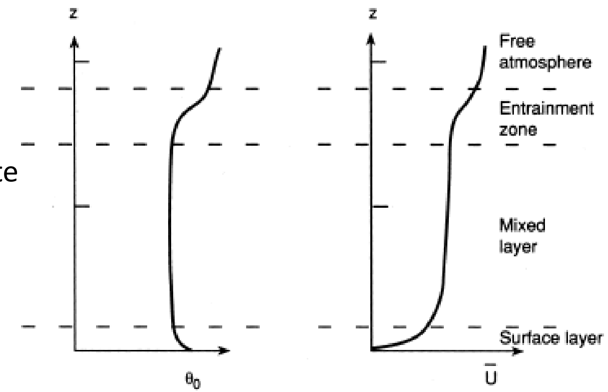
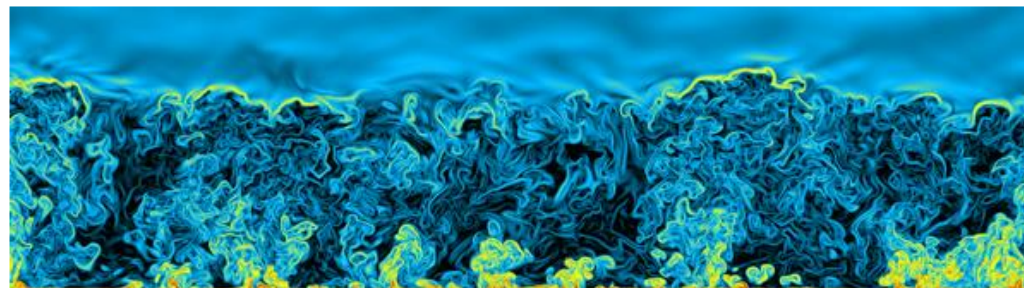
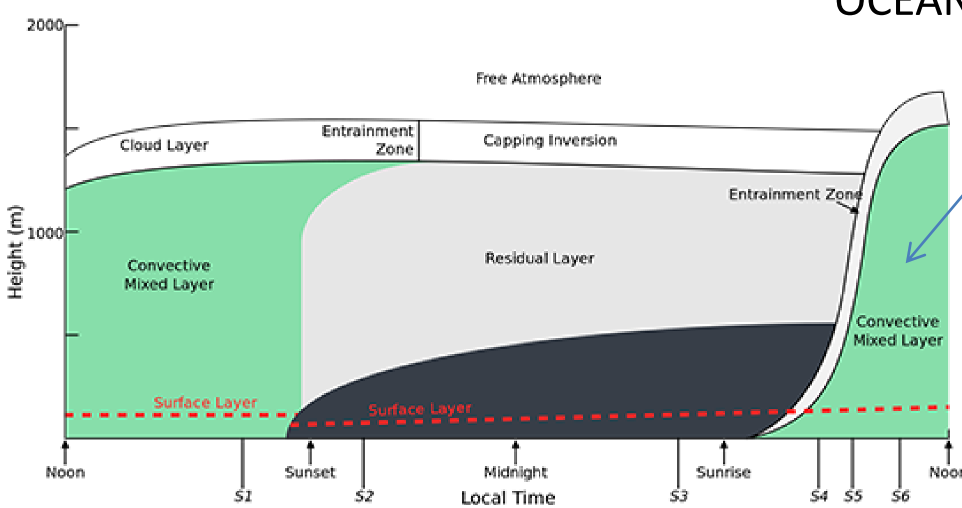



**Fig. 5.2** Mean potential temperature, $\theta_0$, and mean zonal wind, $U$, profiles in a well-mixed boundary layer. Adapted from Stull (1988).



OCEANOS X CONTINENTES



## 5.3.1 Camada Limite bem Misturada

Atmosfera livre (camada estável)

Camada limite convectiva (camada instável)

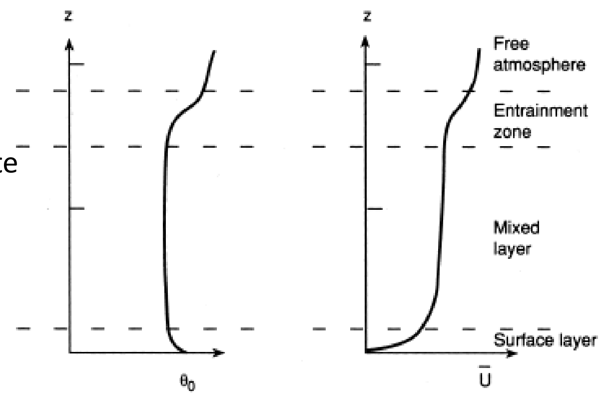



Fig. 5.2 Mean potential temperature, $\theta_0$, and mean zonal wind, $U$, profiles in a well-mixed boundary layer. Adapted from Stull (1988).

$\theta_0$ e $\bar{u}$ tem pouca dependência de z na Camada de Mistura

**Podemos tratar a camada como um SLAB:**

- **o perfil de** $\theta_0$ **e** $\bar{u}$ **são constante com a altura**
- **os fluxo turbulentos** $(\overline{u'w'})_s$ **variam linearmente com a altura.**
- **A turbulência desaparece no topo da camada limite** $(\overline{u'w'})_s = 0$

# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
## Camada Limite Planetária

**Neste caso : O fluxo de momentum pode ser substituída pela formula aerodinâmica global**

$$(\overline{u'w'})_s = -C_d|\vec{V}|\bar{u} \qquad (\overline{v'w'})_s = -C_d|\vec{V}|\bar{v}$$

Onde $C_d$ é o coeficiente de arrasto adimensional, para o oceano $C_d = 1.5e-3$ mas é varias vezes maior para uma superfície rugosa .
As aproximações da equações da CLP podem ser integrada da superfície ao topo da CLP com z=h

$$f(\bar{v}-\bar{v}_g) = -\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z} \qquad -f(\bar{u}-\bar{u}_g) = -\frac{\partial\overline{v'w'}}{\partial z}$$

$$f\left(\int_0^h \bar{v}(z)dz - \int_0^h \bar{v}_g(z)dz\right) = -\int_0^h \frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}dz$$

$$f\left((\bar{v}(h) - \bar{v}(0))(h-0) - \left(\bar{v}_g(h) - \bar{v}_g(0)\right)(h-0)\right) = -\left((\overline{u'w'})_h - (\overline{u'w'})_s\right)$$

$$f\left(\bar{v}(h) - \bar{v}_g(h)\right) = \frac{(\overline{u'w'})_s}{h}$$

# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
## Camada Limite Planetária

**Neste caso : O fluxo de momentum pode ser substituída pela formula aerodinâmica global**

$$(\overline{u'w'})_s = -C_d|\vec{V}|\bar{u}$$

$$(\overline{v'w'})_s = -C_d|\vec{V}|\bar{v}$$

$$f(\bar{v} - \bar{v}_g) = -\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$$

$$-f(\bar{u} - \bar{u}_g) = -\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}$$

$$f\left(\bar{v}(h) - \bar{v}_g(h)\right) = \frac{(\overline{u'w'})_s}{h}$$

$$-f\left(\bar{u}(h) - \bar{u}_g(h)\right) = \frac{(\overline{v'w'})_s}{h}$$

$$f\left(\bar{v}(h) - \bar{v}_g(h)\right) = \frac{-C_d|\vec{V}|\bar{u}}{h}$$

$$f\left(\bar{u}(h) - \bar{u}_g(h)\right) = \frac{C_d|\vec{V}|\bar{v}}{h}$$

# Camada Limite Planetária

## 5.3.1 Camada Limite bem Misturada

**Neste caso :** O fluxo de momentum pode ser substituída pela formula aerodinâmica global

$$f\left(\bar{v}(h) - \bar{v}_g(h)\right) = \frac{-C_d|\vec{V}|\bar{u}}{h}$$

$$f\left(\bar{u}(h) - \bar{u}_g(h)\right) = \frac{C_d|\vec{V}|\bar{v}}{h}$$

$$\bar{u}(h) = \bar{u}_g(h) + \kappa_s|\vec{V}|\bar{v}$$

$$\bar{v}_g(h) = 0$$

$$\bar{v}(h) = -\kappa_s|\vec{V}|\bar{u}$$

$$\kappa_s = \frac{C_d}{hf}$$

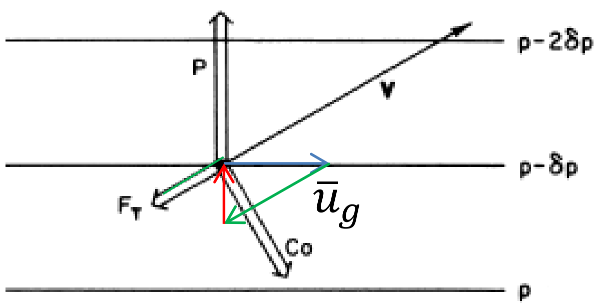



**Fig. 5.3** Balance of forces in the well-mixed planetary boundary layer: $P$ designates the pressure gradient force, Co the Coriolis force, and $F_T$ the turbulent drag.

Na camada de mistura a velocidade do vento é menor do que a velocidade geostrófica e há uma componente do movimento direcionada para a baixa pressão(para a esquerda do vento geostrofico no HN e a direita no HS)

5.3.2 A teoria do Fluxo –Gradiente

**Na neutralidade ou camada limite estavelmente estratificada a velocidade do vento e a direção variam significantemente com a altura. E o Modelo Slab não é mais apropriado.**

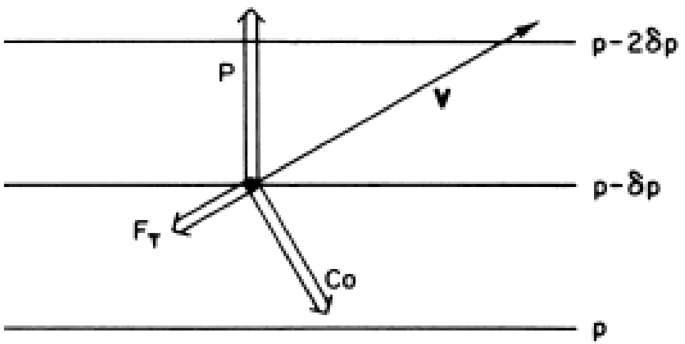



**Fig. 5.3** Balance of forces in the well-mixed planetary boundary layer: $P$ designates the pressure gradient force, Co the Coriolis force, and $F_T$ the turbulent drag.

**Alguma quantidades medias são necessárias para determinar a dependência vertical da divergência do fluxo de momentum turbulento em termo de variáveis medias .**

**Assim podemos obter o fechamento das equações da camada limite.**

## 5.3.2 A teoria do Fluxo –Gradiente

**A tradicional aproximação para este problema de fechamento é assumir que os vórtices turbulentos agem de maneira análoga a difusão molecular tal que os fluxos de um determinado campo é proporcional ao gradiente local da media.**

$$\overline{u'w'} = K_m\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right) \qquad \overline{v'w'} = K_m\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right) \qquad \overline{\theta'w'} = K_h\left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}\right)$$

$K_m$ **é o coeficiente de viscosidade dos vórtices turbulentos**
$K_h$ **é a difusividade de calor do vórtices turbulentos.**

## 5.3.2 A teoria do Fluxo –Gradiente

$K_m$ é o coeficiente de viscosidade dos vórtices turbulentos

$K_h$ é a difusividade de calor do vórtices turbulentos.

## Limitações da Teoria K

- A diferentemente do coeficiente de viscosidade molecular, a viscosidade dos vórtices depende do escoamento mais do que das propriedades físicas do fluido .
- São determinados empiricamente para cada situação.

## 5.3.2 A teoria do Fluxo –Gradiente

$K_m$ é o coeficiente de viscosidade dos vórtices turbulentos

$K_h$ é a difusividade de calor do vórtices turbulentos.

### Aproximação => K constante

- Adequando para estimar a difusão em pequena escala de traçadores passivos na atmosfera livre.
- Inadequado para a camada limite onde as escalas e a intensidade típicas da turbulência são fortemente dependentes dos vórtices de superfície e da estabilidade Estática
- Em muito casos, os vórtices turbulentos tem dimensões comparáveis a profundidade da PBL e nenhum fluxo de momentum ou calor será proporcional ao gradiente local da media.

## 5.3.3 Hipótese do Comprimento de Mistura

**L. Prandtl:**

Hipótese do comprimento de mistura, **assume que a parcela do fluido que é deslocado verticalmente carregará as propriedades médias do seu nível original a uma distância característica $\xi'$** e irá misturar com o ambiente através do processo de deslocamento de uma molécula **sobre um caminho médio livre antes de colidir e trocar momentum com outra molécula.**

Por analogia ao mecanismo molecular, seu deslocamento é utilizado para criar uma flutuação turbulenta em que a magnitude depende do $\xi'$ e do gradiente da propriedade media.

$$\theta' = -\xi' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \qquad u' = -\xi' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \qquad v' = -\xi' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

## 5.3.3 Hipótese do Comprimento de Mistura

$$\theta' = -\xi' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \qquad u' = -\xi' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \qquad v' = -\xi' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

$\xi' > 0$ parcela desloca-se par cima
$\xi' < 0$ parcela desloca-se par baixo

- Para $\theta'$ a hipótese é razoável

- Para $u'$ a hipótese é falha uma vez que a força gradiente de pressão pode mudar substancialmente a velocidade da parcela

## 5.3.3 Hipótese do Comprimento de Mistura

$$u' = -\xi' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \qquad v' = -\xi' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \qquad \theta' = -\xi' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$$

Se utilizarmos a hipótese do comprimento de mistura para o fluxo vertical turbulento de momentum zonal (Multiplica por $w'$ e faz a media )

$$-\overline{u'w'} = \overline{w'\xi'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \qquad -\overline{v'w'} = \overline{w'\xi'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \qquad -\overline{\theta'w'} = \overline{w'\xi'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$$

Para Estimar $w'$ em termo do campo médio, assume-se que aa estabilidade vertical da atmosfera é aproximadamente neutra tal que o efeito de flutuabilidade seja pequeno.

Neste caso a escala horizontal dos vórtices devem então ser comparável a escala vertical.

### 5.3.3 Hipótese do Comprimento de Mistura

$$-\overline{u'w'} = \overline{w'\xi'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \qquad \overline{-v'w'} = \overline{w'\xi'}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \qquad -\overline{\theta'w'} = \overline{w'\xi'}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$$

Para Estimar $w'$ em termo do campo médio, assume-se que a estabilidade vertical da atmosfera é **aproximadamente neutra tal que o efeito de flutuabilidade seja pequena**.

Neste caso

**a escala horizontal dos vórtices devem então ser comparável a escala vertical**.

$$|\boldsymbol{w'}| \sim |\boldsymbol{V'}|$$

$$w' = \xi' \left|\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}\right|$$

O valor absoluto do gradiente da velocidade é necessário se $\xi' > 0$ então $w' > 0$ (o deslocamento ascendente da parcela é associando com velocidades do vórtices ascendente )

## 5.3.3 Hipótese do Comprimento de Mistura

$$w' = \xi' \left|\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}\right|$$

O valor absoluto do gradiente da velocidade é necessário se $\xi' > 0$ então $w' > 0$ (o deslocamento ascendente da parcela é associando com velocidades do vórtices ascendente )

$$-\overline{u'w'} = \overline{\xi'^2} \left|\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$$-\overline{u'w'} = K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$$K_m = \overline{\xi'^2} \left|\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\right|$$

$$K_m = \bar{l}^2 \left|\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\right|$$

## 5.3.3 Hipótese do Comprimento de Mistura

$$K_m = \overline{l^2}\left|\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\right|$$

$$l = \sqrt{\left(\overline{\xi^2}\right)}$$

O comprimento de mistura é  raiz quadrada média do deslocamento da parcela, que é a mediada da média dos tamanhos dos vórtices.

O resultado sugere que grandes vórtices e grandes cisalhamento induz a grandes misturas turbulentas

### 5.3.3 Camada de Ekman

**A aproximação do fluxo gradiente é usado para representar o termo divergente do fluxo de momentum turbulento**

$$f\left(\bar{v} - \overline{v_g}\right) - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = 0$$

$$\overline{u'w'} = -K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$$\overline{v'w'} = -K_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

$$-f\left(\bar{u} - \overline{u_g}\right) - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} = 0$$

Considerando $K_m$ constante, pode-se obter as equações da camada de Ekman Clássica.

$$K_m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f\left(v - v_g\right) = 0$$

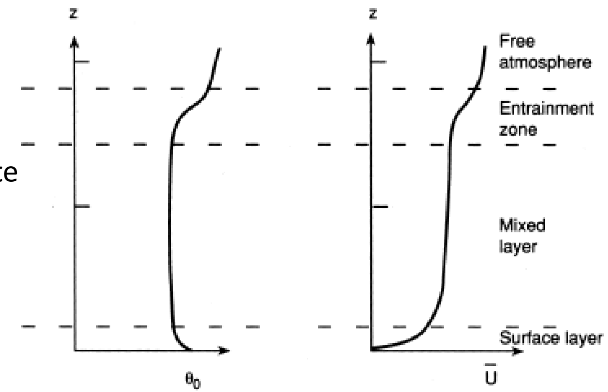
$$K_m \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f\left(u - u_g\right) = 0$$

# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
# Camada Limite Planetária

## 5.3.1 Camada Limite Superficial

Atmosfera livre (camada estável)

Camada limite convectiva (camada instável)



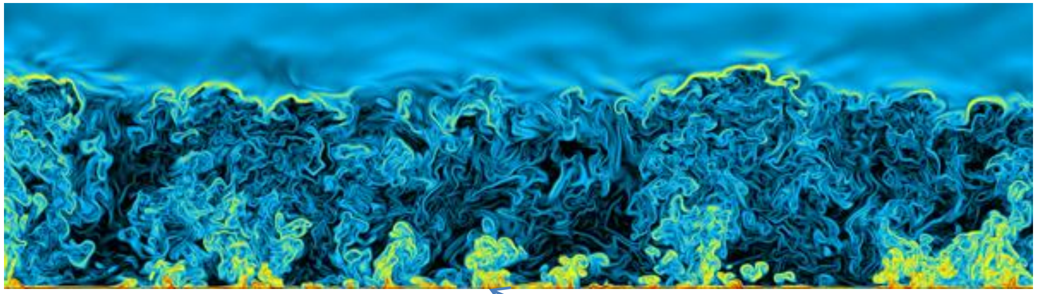
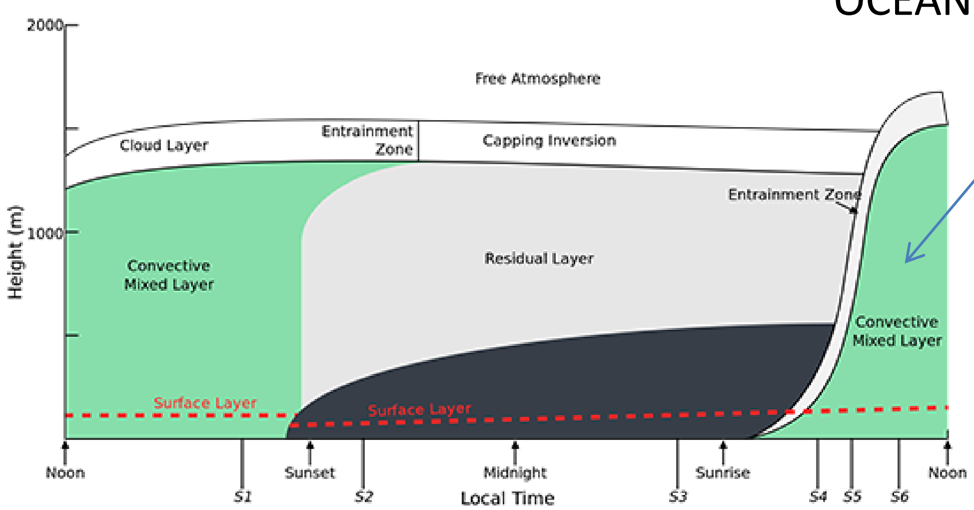



**Fig. 5.2** Mean potential temperature, $\theta_0$, and mean zonal wind, $U$, profiles in a well-mixed boundary layer. Adapted from Stull (1988).

OCEANOS X CONTINENTES



# PBL:Equações governantes do estado médio

Média de Reynolds $A = \overline{A} + A'$

Necessita ser parametrizado !

- lei do gas $\overline{p} = \overline{\rho} R_d \overline{T_v}$ $\overline{T_v} = T(1 + 0.61 q_v - q_l)$

Temperatura virtual

2nd ordem

- momentum

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\delta_{i3} g + f_c \varepsilon_{ij3} \overline{u_j} - \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\upsilon \partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j{}^2} - \frac{\partial(\overline{u_i' u_j'})}{\partial x_j}$$

Advecção media — gravidade — Coriolis — Gradiente de Pressão — Estresse Viscoso — Transporte Turbulento

- Eq. Continuidade $\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = 0$

- Calor

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\overline{\rho} c_p}\frac{\partial \overline{F_j}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_j \theta'}}{\partial x_j} - \frac{L_v E}{\overline{\rho} c_p}$$

Advecção media — radiação — Transporte Turbulento — Liberação de Calor Latente

- Agua Total

$$\frac{\partial \overline{q_t}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{q_t}}{\partial x_j} = \frac{S_{q_t}}{\overline{\rho}} - \frac{\partial \overline{u'_j q'_t}}{\partial x_j}$$

Advecção media — precipitação — Transporte Turbulento

# PBL: Turbulent kinetic energy equation

☞ TKE: a measure of the intensity of turbulent mixing $\bar{e} = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = \frac{g}{\theta_0}\overline{w'\theta_v'} - \overline{u_i' u_j'}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j' e}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{u_i' p'}}{\partial x_i} - \varepsilon$$

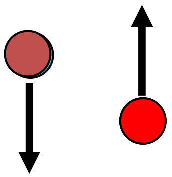
Produção de flutuabilidade | Cisalhamento mecânico | Transporte turbulento | Transporte pressão | dissipação

$$\theta_v = \theta(1 + 0.61 q_v - q_l)$$

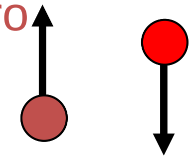
Temperatura potencial virtual

☞ Exemplo :

– $\theta_v' < 0$ , $w' < 0$ ou $\theta_v' > 0$ , $w' > 0$ $\longrightarrow$ $w'\theta_v' > 0$ fonte



– $\theta_v' < 0$ , $w' > 0$ ou $\theta_v' > 0$ , $w' < 0$ $\longrightarrow$ $w'\theta_v' < 0$ sumidouro



# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\delta_{i3}g + f_c\varepsilon_{ij3}\overline{u_j} - \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\upsilon\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^{\ 2}} - \frac{\partial(\overline{u_i'u_j'})}{\partial x_j}$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial \overline{u_i' u_i'}}{\partial x_i}}$$

$$\overline{w'\varphi'} = \mathbf{K(z)}\frac{d\varphi}{dz}$$

**Teoria do transporte gradiente ou teoria K**

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{K^d(z)} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_3}}$$

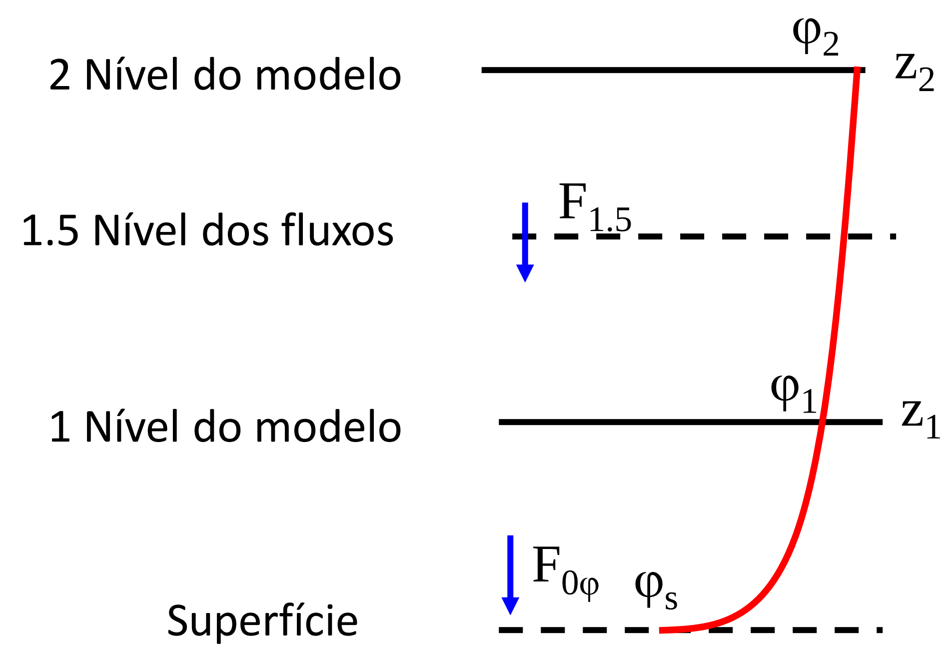
O UWMT atualiza as variáveis difundida u usando um esquema de Euler implícito backward.

$$\frac{u(t+\Delta t) - u^*}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{K^d(z)} \frac{\partial}{\partial z} u(t+\Delta t)$$

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

$$F=\rho K(z)\frac{d\varphi}{dz} \qquad (F=\overline{w'\varphi'})$$

Calcular $K(z_{1.5})$???




Formulação em diferenças finitas

$$F_{1.5} = \rho K(z_{1.5}) \frac{\varphi_2-\varphi_1}{z_2-z_1}$$

Na camada se superficie integrada:

$$\varphi_1 - \varphi_s = \int_{z_{o\varphi}}^{z_1} \frac{F_{0\varphi}}{\rho K(z)} dz$$

Camada de fluxo constante:

$$\varphi_1 - \varphi_s \approx \frac{F_0}{\rho} \int_{z_{0\varphi}}^{z_1} \frac{1}{K(z)} dz$$

Escoamento neutro:

$$K(z) = \kappa z u_*$$

$$\varphi_1 - \varphi_s \approx \frac{F_{0\varphi}}{\rho\kappa u_*} \int_{z_{0\varphi}}^{z_1} \frac{dz}{z} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 - \varphi_s = \frac{F_{0\varphi}}{\rho\kappa u_*} \ln\left(\frac{z_1}{z_{o\varphi}}\right)$$

u,v,T,q

$\kappa$ : Von Karman constant (0.4)

$u_*$ : Friction velocity

$\rho$ : Density

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial \overline{u_i' u_i'}}{\partial x_i}}$$

Esta equação informa que quando  o ar é misturado na caixa i da caixa j o ar carrega com ele uma quantidade ($c_{i,j}$) de  traçadores com concentração $\bar{\xi}_j(t)$

$$\bar{\xi}_i(t+\Delta t) = \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}(t,\Delta t)\bar{\xi}_j(t)$$

O coeficiente ($c_{i,j}$) representa a fração da ar na caixa i que permanece dentro da caixa i

Se $c_{i,j}$ é a fração de ar entrando na caixa i da caixa j então por definição a conservação de massa de ar requer que a soma sobre j de todas as frações de mistura seja unitária

$$\sum_{j=1}^{N} c_{i,j}(t,\Delta t) \ = 1$$

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Esta equação informa que quando o ar é misturado na caixa i da caixa j o ar carrega com ele uma quantidade $(c_{i,j})$ de traçadores com concentração $\bar{\xi}_j(t)$

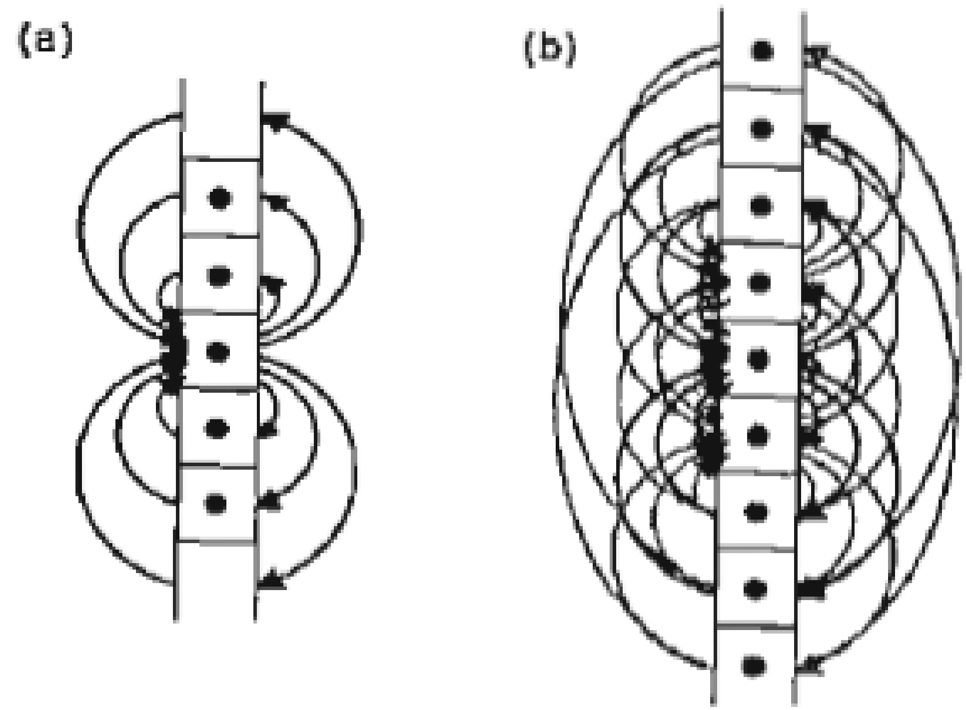



Fig. 6.8
(a) Schematic idealization of the eddies that mix air to and from the center grid box, in a 1-D column of air. (b) Superposition of eddies acting on 3 of the grid boxes. After Stull (1984).

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Sem Mistura

Grid Box Matrix Transiente

j = 1 2 3 4

$$\begin{array}{c} i=1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{j=1} \\ \bar{\xi}_{j=2} \\ \bar{\xi}_{j=3} \\ \bar{\xi}_{j=4} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\xi}_i(t+\Delta t) = \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}(t,\Delta t)\bar{\xi}_j(t)$$

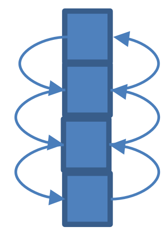
# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Mistura de pequenos vórtices (Teoria K)

Matrix Transiente

Grid Box

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} j = 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} i=1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\
1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\
0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\
0 & 0 & 1/3 & 2/3
\end{bmatrix}
\end{array}
*
\begin{bmatrix}
\bar{\xi}_{j=1} \\
\bar{\xi}_{j=2} \\
\bar{\xi}_{j=3} \\
\bar{\xi}_{j=4}
\end{bmatrix}
$$



$$\bar{\xi}_i(t + \Delta t) = \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}(t, \Delta t)\bar{\xi}_j(t)$$

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

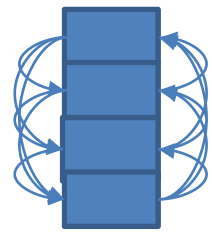
Mistura completa

Matrix Transiente

Grid Box

j = 1 2 3 4

$$\begin{matrix} i=1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{j=1} \\ \bar{\xi}_{j=2} \\ \bar{\xi}_{j=3} \\ \bar{\xi}_{j=4} \end{bmatrix}$$



$$\bar{\xi}_i(t+\Delta t) = \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}(t,\Delta t)\bar{\xi}_j(t)$$

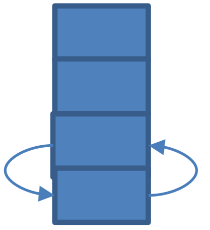
# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Patchy Turbulence

Matrix Transiente

Grid Box

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} j = 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} i = 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{j=1} \\ \bar{\xi}_{j=2} \\ \bar{\xi}_{j=3} \\ \bar{\xi}_{j=4} \end{bmatrix} \end{array}$$



Turbulência irregular

$$\bar{\xi}_i(t + \Delta t) = \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}(t, \Delta t)\bar{\xi}_j(t)$$

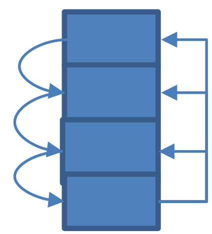
# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Detraining Updraft Core

Matrix Transiente

Grid Box

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} j = 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} i=1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{j=1} \\ \bar{\xi}_{j=2} \\ \bar{\xi}_{j=3} \\ \bar{\xi}_{j=4} \end{bmatrix} \end{array}$$



$$\bar{\xi}_i(t+\Delta t) = \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}(t,\Delta t)\bar{\xi}_j(t)$$

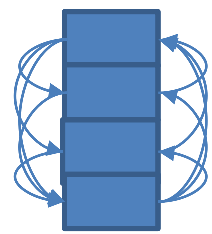
# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Top-down, Botton up

Matrix Transiente

Grid Box

$$
\begin{array}{c c}
j = & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} i = 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{j=1} \\ \bar{\xi}_{j=2} \\ \bar{\xi}_{j=3} \\ \bar{\xi}_{j=4} \end{bmatrix}
\end{array}
$$



$$\bar{\xi}_i(t+\Delta t) = \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}(t,\Delta t)\bar{\xi}_j(t)$$

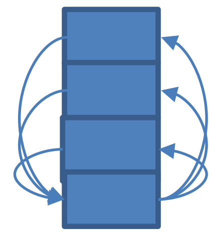
# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Eddies Triggered by One Layer

Matrix Transiente

Grid Box

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} j = 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} i = 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{j=1} \\ \bar{\xi}_{j=2} \\ \bar{\xi}_{j=3} \\ \bar{\xi}_{j=4} \end{bmatrix}
\end{array}
$$



Vórtices acionados por uma camada

$$\bar{\xi}_i(t + \Delta t) = \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}(t, \Delta t)\bar{\xi}_j(t)$$

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Determinação Do fluxo

Os Fluxos cinemático turbulentos são facilmente determinado, porque a matrix transiente indica diretamente o transporte entre as células de grade.
Assim, o fluxo cinemático $\overline{w'\xi'}(k)$ através do nível k é dado pela equação:

$$\overline{w'\xi'}(k) = \overline{w'\xi'}(k-1) + \frac{\Delta z}{\Delta t}\sum_{j=1}^{N} c_{k,j}\left(\overline{\xi_k} - \overline{\xi_j}\right)$$

Onde $\Delta z$ é o espaçamento do ponto de grade, e $\Delta t$ ó o intervalo de passo de tempo para a matriz $c_{i,j}$. O nível k é definido como a borda entre a célula de grade k e k+1. Embora, $\overline{\xi_i}$ seja conhecida no centro da célula de grade, $\overline{w'\xi'}(k)$ é conhecida na borda da célula de grade. Assim, fisicamente faz sentido, porque o fluxo representa o transporte entre a células de grade

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Determinação Do fluxo

O Fluxo trubulento através de um contorno solido é zero por definição, embora o fluxo não turbulento pode ser diferente de zero. Assim,

$$\overline{w'\xi'}(k=0) \equiv 0.$$

Com esta condição de contorno, a equação do fluxo pode ser escrita:

$$\overline{w'\xi'}(1) = \overline{w'\xi'}(0) + \frac{\Delta z}{\Delta t}\sum_{j=1}^{N} c_{k,j}\left(\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_j\right)$$

$$\overline{w'\xi'}(1) = \frac{\Delta z}{\Delta t}\sum_{j=1}^{N} c_{k,j}\left(\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_j\right)$$

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Exemplo

Supoem um camada de mistura rasa de 300m de profundidade dentro de uma coluna de ar de 500m. O perfil inicial de temperatura potencial e vento são indicados abaixo. Assume-se que a coluna é dividida em 5 caixa de 100m de expessura

| Caixa (No centro da caixa) | Z (m) | $\bar{\xi}_j = \bar{\theta}(^oC)$ | $\bar{\xi}_j = \bar{U}(m/s)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 50 | 15 | 5 |
| 2 | 150 | 15 | 5 |
| 3 | 250 | 15 | 5 |
| 4 | 350 | 16 | 7 |
| 5 | 450 | 18 | 6 |

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Exemplo

Assume-se que exista um fluxo molecular (não turbulento) de calor, $Q_H = 0.2\ Km/s$ e de momentum $F = -0.15\ m^2/s^2$ através da superfície e a interface do caixa adjacente a superfície. Use um passo de tempo de 10 min. Pode-se assumir no caso1 que há uma superfície de fluxo molecular entre a superfície e a interface do caixa adjacente a superfície e no caso 2 que não há uma superfície de fluxo molecular entre a superfície e a interface do caixa adjacente a superfície. Desprezando, outra forçantes tais como a radiação e a força de coriolis

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{Q_h}{\Delta z} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{Q_h}{\Delta z}\Delta t = \frac{0.2}{50} * 10 * (60) = 2.4$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{F}{\Delta z} \Rightarrow \Delta U = \frac{F}{\Delta z}\Delta t = \frac{-0.15}{50} * 10 * (60) = -1.8$$

| Caixa (No centro da caixa) | Z (m) | $\bar{\xi}_j = \bar{\theta}(^oC)$ | $\bar{\xi}_j = \bar{U}(m/s)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 50 | 16,2 | 4.1 |
| 2 | 150 | 15 | 5 |
| 3 | 250 | 15 | 5 |
| 4 | 350 | 16 | 7 |
| 5 | 450 | 18 | 6 |

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Exemplo

Note que somente a caixa próxima a superfice muda o valor, isso acontece porque ainda não aplicamos a matriz de turbulência transiente para a mistura da mudança de calor e momentum na camada de mistura.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & (j=1 & 2 & 3 & 4 & 5) & \\
c(t,\Delta t = 10min) = & \left[\begin{matrix} 0{,}590 & 0{,}236 & 0{,}118 & 0{,}056 & 0{,}000 \\ 0{,}236 & 0{,}590 & 0{,}118 & 0{,}056 & 0{,}000 \\ 0{,}118 & 0{,}118 & 0{,}708 & 0{,}056 & 0{,}000 \\ 0{,}056 & 0{,}056 & 0{,}056 & 0{,}832 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}00 & 1{,}000 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} (i=1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{matrix}
\end{array}
$$

$$\bar{\xi}_k(t+\Delta t) = \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}(t,\Delta t)\bar{\xi}_j(t)$$

K=2

$$\overline{\theta_2} = 0{,}236 * (16{,}2) + 0{,}590 * (15) + (0{,}118) * (15) + 0{,}056 * (16) + 0{,}000 * (18) = 15{,}34\ {}^{o}C$$

$$\overline{U_2} = 0{,}236 * (4{,}1) \ + 0{,}590 * (5) \ + (0{,}118) * (5) \ + 0{,}056 * (7) \ + 0{,}000 * (6) \ = 4{,}9 \ m/s$$

a)Calcule e plot o perfil final C após a mistura turbulenta

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Exemplo

a)Calcule e plot o perfil  final C após a mistura turbulenta após 10min

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Exemplo

$$\bar{\xi}_i(t+\Delta t) = \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}(t,\Delta t)\bar{\xi}_j(t)$$

a)Calcule e plot o perfil (C) final da temperatura potencial após a mistura turbulenta após 10min

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}590 & 0{,}236 & 0{,}118 & 0{,}056 & 0{,}000 \\ 0{,}236 & 0{,}590 & 0{,}118 & 0{,}056 & 0{,}000 \\ 0{,}118 & 0{,}118 & 0{,}708 & 0{,}056 & 0{,}000 \\ 0{,}056 & 0{,}056 & 0{,}056 & 0{,}832 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}00 & 1{,}000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 16{,}2 \\ 15{,}0 \\ 15{,}0 \\ 16{,}0 \\ 18{,}0 \end{bmatrix}$$

b)Calcule e plot o perfil (C) final da vento após a mistura turbulenta após 10min

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}590 & 0{,}236 & 0{,}118 & 0{,}056 & 0{,}000 \\ 0{,}236 & 0{,}590 & 0{,}118 & 0{,}056 & 0{,}000 \\ 0{,}118 & 0{,}118 & 0{,}708 & 0{,}056 & 0{,}000 \\ 0{,}056 & 0{,}056 & 0{,}056 & 0{,}832 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}00 & 1{,}000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4{,}1 \\ 5{,}0 \\ 5{,}0 \\ 7{,}0 \\ 6{,}0 \end{bmatrix}$$

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Exemplo

a) Calcule e plote os fluxos de calor e momentum após 10 min

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Exemplo

$$\overline{w'\xi'}(k) = \overline{w'\xi'}(k-1) + \frac{\Delta z}{\Delta t}\sum_{j=1}^{N} c_{k,j}\left(\overline{\xi_k} - \overline{\xi_j}\right)$$

Para k=1

$$\overline{w'\xi'}(1) = \overline{w'\xi'}(0) + \frac{\Delta z}{\Delta t}\sum_{j=1}^{N} c_{1,j}\left(\overline{\xi_1} - \overline{\xi_j}\right)$$

caso1 que há uma superfície de fluxo molecular entre a superfície e a interface do caixa adjacente a superfície

$$\boxed{\overline{w'\xi'}(0) = \overline{w'\theta'}(0) = Q_h}$$

$$\boxed{\overline{w'\xi'}(0) = \overline{w'u'}(0) = F}$$

caso 2 que não há uma superfície de fluxo molecular entre a superfície e a interface do caixa adjacente a superfície

$$\boxed{\overline{w'\xi'}(0) = \overline{w'\theta'}(0) = 0}$$

$$\boxed{\overline{w'\xi'}(0) = \overline{w'u'}(0) = 0}$$

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Exemplo

Para k=1

$$\overline{w'\xi'}(1) = \overline{w'\xi'}(0) + \frac{\Delta z}{\Delta t}\sum_{j=1}^{N} c_{1,j}\left(\overline{\xi_1} - \overline{\xi_j}\right)$$

caso 2 que não há uma superfície de fluxo molecular entre a superfície e a interface do caixa adjacente a superfície

$$\boxed{\overline{w'\xi'}(0) = \overline{w'\theta'}(0) = 0}$$

$$\boxed{\overline{w'\xi'}(0) = \overline{w'u'}(0) = 0}$$

$$\overline{w'\theta'}(1) = \overline{w'\theta'}(0) + \frac{\Delta z}{\Delta t}\sum_{j=1}^{N} c_{1,j}\left(\overline{\theta_1} - \overline{\theta_j}\right)$$

Fluxo de calor

$$\overline{w'\theta'}(1) = 0 + \left(\frac{100}{600s}\right) * [0{,}590 * (16{,}2 - 16{,}2) + 0{,}236 * (16{,}2 - 15{,}0) + 0{,}118 * (16{,}2 - 15{,}0) + 0{,}056 * (16{,}2 - 16{,}0) + 0{,}000 * (16{,}2 - 18{,}0)]$$

$$\overline{w'\theta'}(1) = 0{,}0726\ Kms - 1$$

Fluxo de momentum

$$\overline{w'u'}(1) = 0 + \left(\frac{100}{600s}\right) * [0{,}590 * (4{,}1 - 4.1) + 0{,}236 * (4{,}1 - 5{,}0) + 0{,}118 * (4{,}1 - 5{,}0) + 0{,}056 * (4{,}1 - 7{,}0) + 0{,}000 * (4{,}1 - 6{,}0)]$$

$$\overline{w'u'}(1) = -0.080\ m\text{^}2s\text{^} - 2$$

# Como parameterizar os momentum de 2 ordem $w'\varphi'$

Exemplo

$$\overline{w'\xi'}(1) = \overline{w'\xi'}(0) + \frac{\Delta z}{\Delta t}\sum_{j=1}^{N} c_{k,j}\left(\overline{\xi_1} - \overline{\xi_j}\right)$$

a) Calcule e plote os fluxos de calor e momentum após 10 min

$$\begin{bmatrix} \overline{\xi_k} \\ \overline{\xi_k} \\ \overline{\xi_k} \\ \overline{\xi_k} \\ \overline{\xi_k} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (j=1 & 2 & 3 & 4 & 5) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}590 & 0{,}236 & 0{,}118 & 0{,}056 & 0{,}000 \\ 0{,}236 & 0{,}590 & 0{,}118 & 0{,}056 & 0{,}000 \\ 0{,}118 & 0{,}118 & 0{,}708 & 0{,}056 & 0{,}000 \\ 0{,}056 & 0{,}056 & 0{,}056 & 0{,}832 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}00 & 1{,}000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (i=1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array} \quad * \quad \begin{bmatrix} \overline{\xi_i} - \overline{\xi_j} \\ \overline{\xi_i} - \overline{\xi_j} \\ \overline{\xi_i} - \overline{\xi_j} \\ \overline{\xi_i} - \overline{\xi_j} \\ \overline{\xi_i} - \overline{\xi_j} \end{bmatrix}$$

**Exercício 4**

**4) Qual o papel o coeficiente de difusão turbulenta ($K_m$) nas equações governantes da dinâmica da camada limite?**