Dinâmica de Fluido Atmosférico:
Equação da Continuidade

MET 0225 Sinótica-Dinâmica

Meteorologia I

Instrutor: Paulo Kubota
paulo.kubota@inpe.br
012-3186-8400

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Equação da Continuidade

Paulo Kubota

data	Tópicos
15/04/2021	PBL
20/04/2021	PBL
22/04/2021	PBL
27/04/2021	QG Vorticity. eq.
29/04/2021	QG Vorticity. eq.
04/05/2021	QG Vorticity. eq.
06/05/2021	Geop. Tend. eq.
11/05/2021	Geop. Tend. eq.
13/05/2021	Geop. Tend. eq.
18/05/2021	Omega and Vetor Q
20/05/2021	Omega and Vetor Q
25/05/2021	Omega and Vetor Q
27/05/2021	Avaliação 1
01/06/2021	Avaliação 2

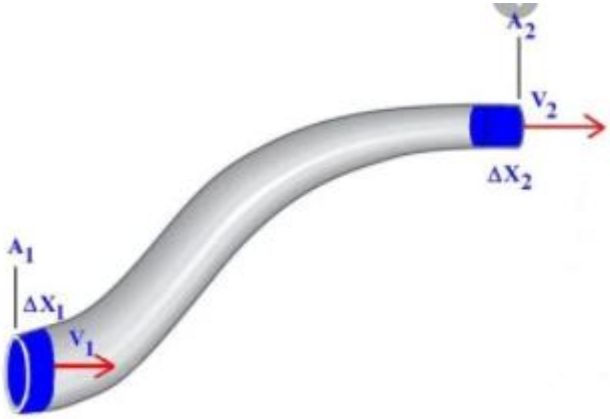
Palavras chaves.

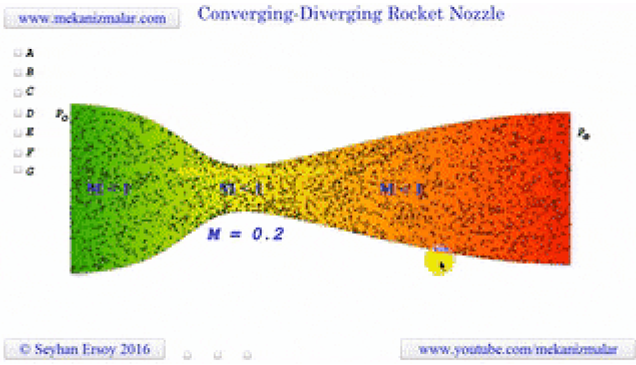
“As equações e suas derivações são reconhecidamente difíceis. É importante que não se memorize apenas as equações de maneira mecânica. É muito mais importante entender o que eles significam fisicamente. ”

- Howie Bluestein.

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Equação da Continuidade





$$m_1 = \rho V_1$$

$$m_1 = \rho A_1 \Delta x_1$$

$$\frac{m_1}{\Delta t} = \rho A_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta t}$$

$$\frac{m_1}{\Delta t} = \rho A_1 \overrightarrow{u_1}$$

$$\frac{m_1}{\Delta t \Delta x_1 A_1} = \rho \frac{A_1}{\Delta x_1 A_1} \overrightarrow{u_1}$$

$$\frac{\Delta \rho_1}{\Delta t} = \frac{\rho}{\Delta x_1} \overrightarrow{u_1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

$$m_1 = \rho A_1 \overrightarrow{u_1} \Delta t$$

$$m_1 = m_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0$$

$$\rho A_1 \overrightarrow{u_1} \Delta t = \rho A_2 \overrightarrow{u_2} \Delta t$$

Equação da Continuidade

Primeiro, aproximamos a *taxa de fluxo de massa dentro ou fora de cada uma das seis superfícies do volume de controle*, usando expansões da série Taylor em torno do ponto central, onde a densidade as componentes da velocidade são u, v, w e ρ.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f(x)}{\partial x}(x - x_0) + + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \cdots \ldots \ldots .$$

$$f(x) = \rho u \Rightarrow \frac{kg}{m^3} * \frac{m}{s}$$

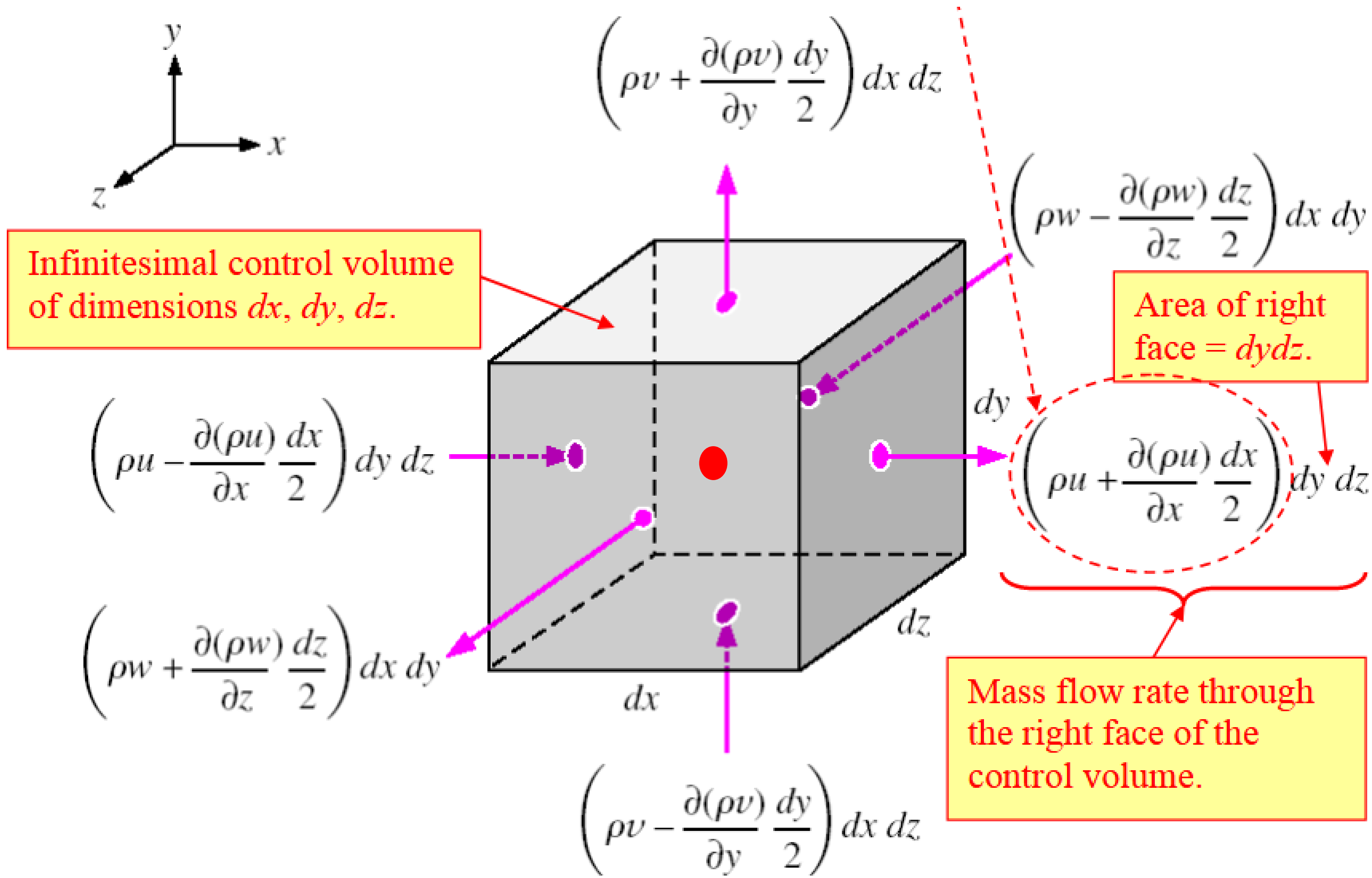
$$\Rightarrow \frac{kg}{m^2}\left(\frac{1}{s}\right) \; definição\ de\ fluxo\ (uma\ quantidade\ que\ atravessa\ 1\ m^2\ por\ segundo)$$

$$(x - x_0) = \Delta X = \frac{\Delta x}{2}$$

$$\rho u = \rho(x_0)u(x_0) + \frac{1}{1!}\frac{\partial \rho u}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \rho u}{\partial x^2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \cdots \ldots ..$$

$$\rho u = \rho(x_0)u(x_0) - \frac{1}{1!}\frac{\partial \rho u}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \rho u}{\partial x^2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \cdots \ldots ..$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Equação da Continuidade



Equação da Continuidade

Face a direita do centro

$$\boxed{\rho u} = \boxed{\rho(x_0)u(x_0)} + \boxed{\frac{1}{1!}\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}} + \boxed{\frac{1}{2!}\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x^2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \cdots \ldots ..}$$

No centro

Ignora-se os termos de alta ordem em Δx

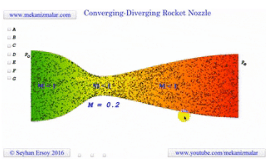
A taxa do fluxo de massa através de cada face é igual a ρ vezes o componente normal da velocidade através da face vezes a área da face.

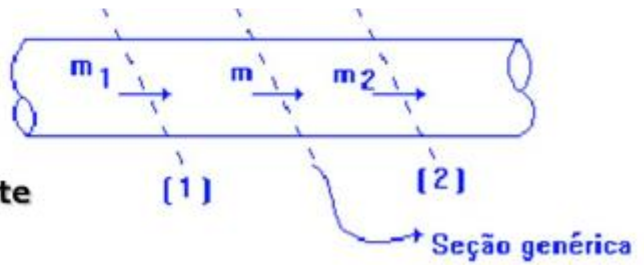
Face a esquerda do centro

$$\rho u = \rho(x_0)u(x_0) - \frac{1}{1!}\frac{\partial \rho u}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \rho u}{\partial x^2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \cdots \ldots ..$$

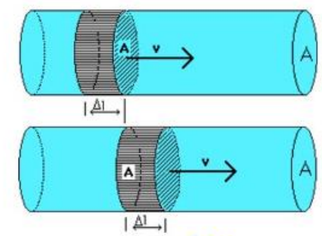
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Equação da Continuidade

Em seguida, somamos todas as taxas de fluxo de massa em todas as seis faces do volume de controle para gerar a equação de continuidade geral (incompressível):





m1 = m2 = m = cte

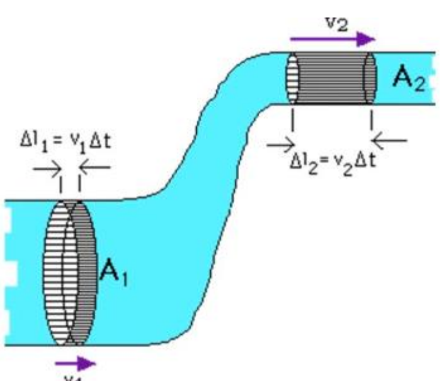


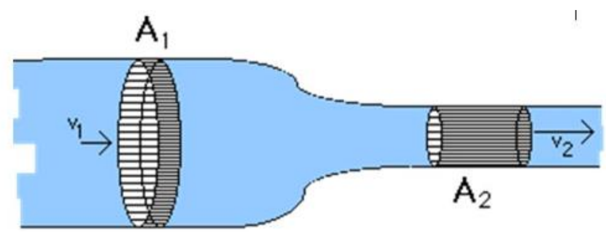
Fluxo de massa $= \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho A v$

$\rho = \Delta m/V \quad \Delta m = \rho . V$

$V = A.\Delta l$

$Q = \Delta m/\Delta t = \rho . V/\Delta t = \rho . A.\Delta l/\Delta t = \boldsymbol{\rho . A.v}$





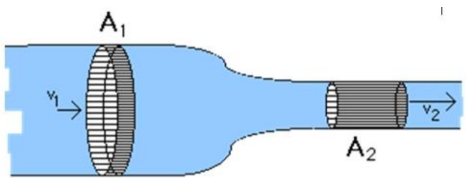
$\rho A v = constante$

Se ρ é constante (não há variação de massa):

$\boldsymbol{A_1 V_1 = A_2 V_2}$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Equação da Continuidade

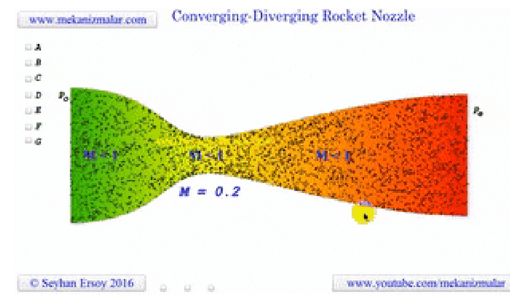


$\rho A v = constante$

Se ρ é constante (não há variação de massa):

$\boldsymbol{A_1 V_1 = A_2 V_2}$

$$\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 = cte$$



Fluxo de massa liquido entrando no CV:

Todos os fluxos de massa positivo (entrando no CV)

$$\sum_{in} \dot{m} \cong \underbrace{\left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)}_{face\ a\ esquerda} dydz + \underbrace{\left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)}_{face\ a\ baixo} \mathrm{dxdz} + \underbrace{\left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\frac{\Delta z}{2}\right)}_{face\ a\ traseira} \mathrm{dxdy}$$

Fluxo de massa saindo entrando do CV:

Todos os fluxos de massa positivo (saindo do CV)

$$\sum_{out} \dot{m} \cong \underbrace{\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)}_{face\ a\ direita} dydz + \underbrace{\left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)}_{face\ no\ topo} \mathrm{dxdz} + \underbrace{\left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\frac{\Delta z}{2}\right)}_{face\ a\ frente} \mathrm{dxdy}$$

Equação da Continuidade

Nós os conectamos à conservação integral da equação de massa para o nosso volume de controle:

$$\boxed{\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV} = \sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m}$$

Ente termo é aproximado no centro pontual do volume de controle

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} V = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$$

Equação da Continuidade

Nós os conectamos à conservação integral da equação de massa para o nosso volume de controle:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m}$$

$$\sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m}$$

$$\cong \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right) dydz + \left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right) \text{dxdz} + \left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\frac{\Delta z}{2}\right) \text{dxdy}$$

$$- \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right) dydz - \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right) \text{dxdz} - \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\frac{\Delta z}{2}\right) \text{dxdy}$$

$$\sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m} \cong \left(-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\right) dydz + \left(-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy\right) \text{dxdz} + \left(-\frac{\partial(\rho w)}{\partial y} dz\right) \text{dxdy}$$

$$\sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m} \cong -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\right) dydz - \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy\right) \text{dxdz} - \left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial y} dz\right) \text{dxdy}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Equação da Continuidade

Nós os conectamos à conservação integral da equação de massa para o nosso volume de controle:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m}$$

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} V = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$$

$$\sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m} \cong -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right) dxdydz - \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right) dy\mathrm{dxdz} - \left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\right) \mathrm{dzdxdy}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz \cong -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right) dxdydz - \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right) dy\mathrm{dxdz} - \left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\right) dz\mathrm{dxdy}$$

Dividindo pelo volume do CV, $dxdydz$

Equação da Continuidade

Nós os conectamos à conservação integral da equação de massa para o nosso volume de controle:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz \cong -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right) dxdydz - \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right) dy\mathrm{dxdz} - \left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\right) dz\mathrm{dxdy}$$

Dividindo pelo volume do CV, $dxdydz$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\right)$$

Equação da continuidade em coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} = 0$$

Equação da Continuidade

Nós os conectamos à conservação integral da equação de massa para o nosso volume de controle:

Equação da continuidade em coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial y} = 0$$

Forma Vetorial

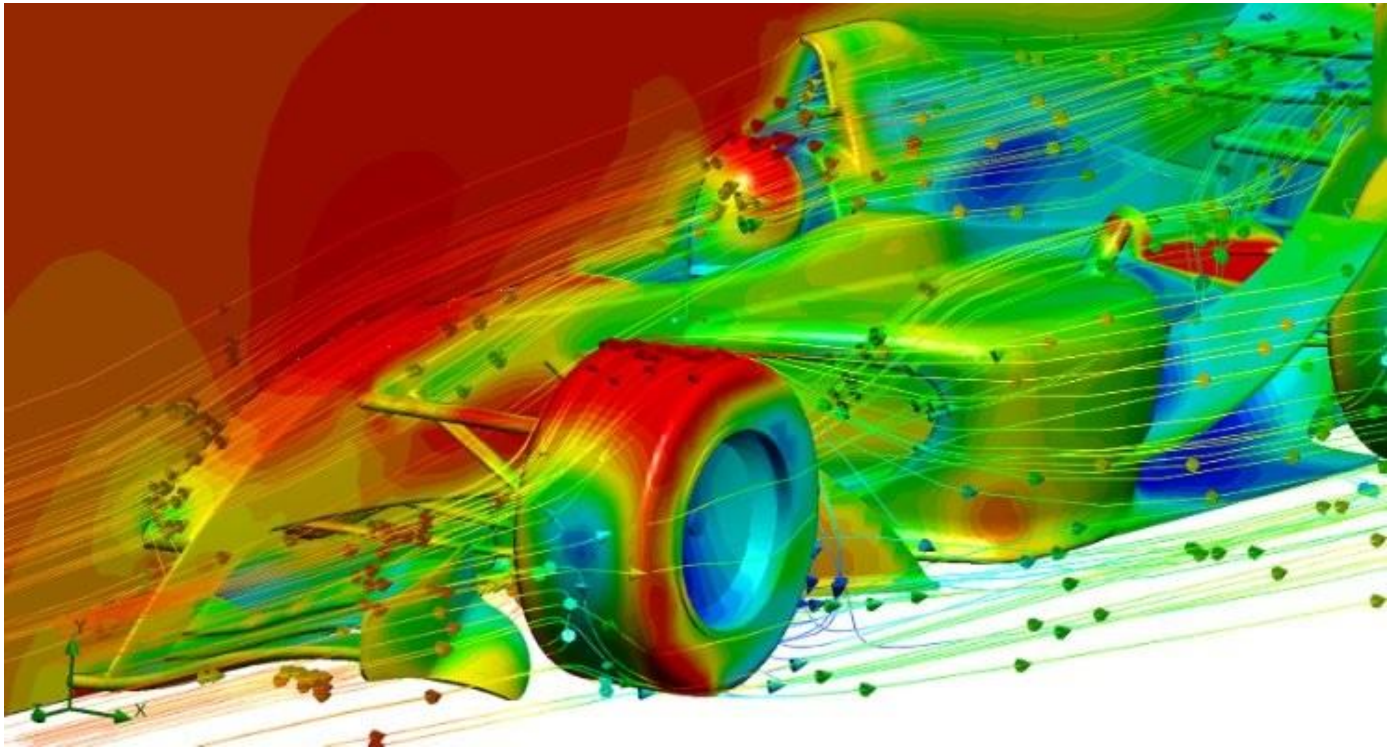
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho \vec{V}\right) = 0$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Equação da Continuidade

Esta é a equação da continuidade para o fluido compressível

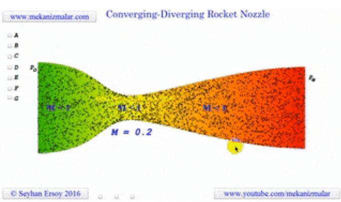
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho \vec{V}\right) = 0$$

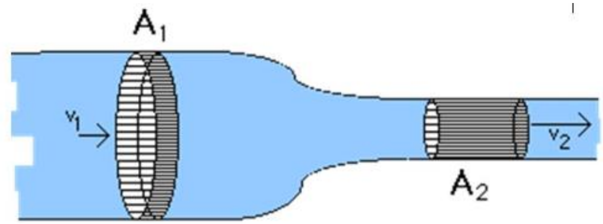


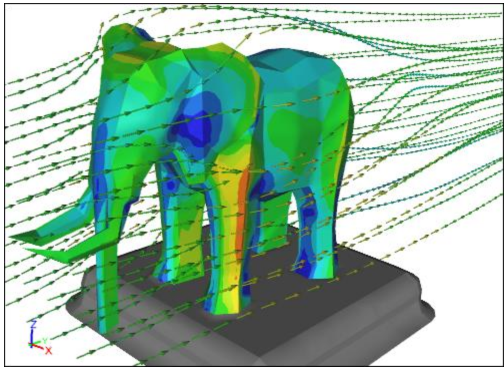
Equação da Continuidade

Em seguida, somamos todas as taxas de fluxo de massa em todas as seis faces do volume de controle para gerar a equação de continuidade geral (incompressível):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho\vec{V}\right) = 0$$







$\rho A v = constante$

Se ρ é constante (não há variação de massa):

$$A_1V_1 = A_2V_2$$

$$\rho = cte$$

$$\vec{\nabla}.\left(\rho\vec{V}\right) = 0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$$

Equação da Continuidade

Em seguida, somamos todas as taxas de fluxo de massa em todas as seis faces do volume de controle para gerar a equação de continuidade geral (fluído incompressível):

Forma Vetorial da Equação da Continuidade

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$$

Forma Diferencial da Equação da Continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Equação da Continuidade

Considerando a equação da hidrostática $\boxed{P = -\rho g z}$

$$P = -\rho g z \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \longrightarrow \partial P = -\rho g \partial z$$

$$P = -\rho g z \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial P}{\partial t} = -\rho g \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\omega = -\rho g w \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial P}} \frac{\partial \omega}{\partial P} = -\rho g \frac{\partial w}{\partial P}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial P} = -\rho g \frac{\partial w}{\partial P}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial P} = -\rho g \left(- \frac{\partial w}{\rho g \partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial P} = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Equação da Continuidade

Em seguida, somamos todas as taxas de fluxo de massa em todas as seis faces do volume de controle para gerar a equação de continuidade geral (fluído incompressível):

Forma Diferencial da Equação da Continuidade para fluido incompressível em coordenada cartesiana

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial P} = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

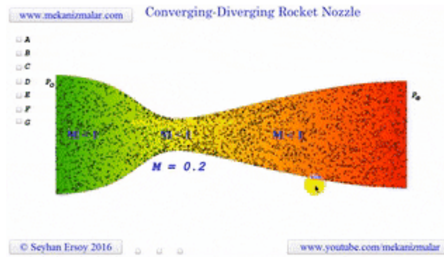
Forma Diferencial da Equação da Continuidade para fluido incompressível em coordenada isobárica

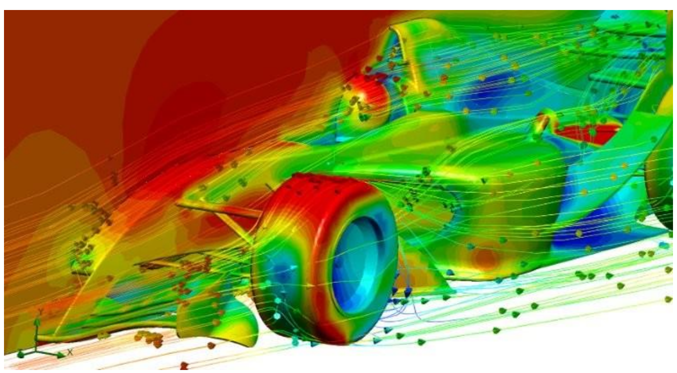
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0$$

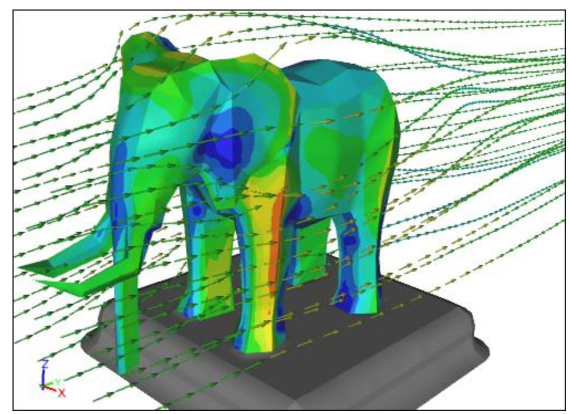
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Equação da Continuidade

fluído compressível X incompressível

Forma Diferencial da Equação da Continuidade para fluido *incompressível e* compressível em coordenada cartesiana







$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho \vec{V}\right) = 0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$$

Equação da Continuidade

5: Qual a relação das aproximações (fluído incompressível) e aproximação de Boussinesq usado na camada limite?

R: