Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial: Aproximações e Equações
MET 0225 Sinótica-Dinâmica
Meteorologia I

Instrutor: Paulo Kubota
paulo.kubota@inpe.br
012-3186-8400

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Paulo Kubota

data	Tópicos
15/04/2021	PBL
20/04/2021	PBL
22/04/2021	PBL
27/04/2021	QG Vorticity. eq.
29/04/2021	QG Vorticity. eq.
04/05/2021	QG Vorticity. eq.
06/05/2021	Geop. Tend. eq.
11/05/2021	Geop. Tend. eq.
13/05/2021	Geop. Tend. eq.
18/05/2021	Omega and Vetor Q
20/05/2021	Omega and Vetor Q
25/05/2021	Omega and Vetor Q
27/05/2021	Avaliação 1
01/06/2021	Avaliação 2

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Motivação.
O desejo de um sistema de equações simplificado, mas que retenha os principais processos dinâmicos necessários para descrever, diagnosticar e entender o comportamento de sistemas climáticos em larga escala.

Palavras chaves.
"As equações e suas derivações são reconhecidamente difíceis. É importante que não se memorize apenas as equações de maneira mecânica. É muito mais importante entender o que eles significam fisicamente. " - Howie Bluestein.

Suposição abrangente da teoria QG.
O número de Rossby (R0 = U / fL) é pequeno, o que nos permite desprezar o vento ageostrófico em alguns (mas não todos) termos das equações que governam o movimento.

Equações governantes e suas derivações.
A teoria QG é baseada em versões simplificadas das equações de movimento, equação de continuidade e equação termodinâmica de energia.

Derivação:

A equação de tendência de altura QG.

Derivada das equações termodinâmicas e de vorticidade de QG.

Veja Lackmann (2011) para detalhes.

Previsão Quase Geostrófica

A equação de tendência de altura QG

Usando as equações da vorticidade relativa quase geostrófica e a equação da termodinâmica:

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\xi_g + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\right)T - \frac{\sigma P}{R}\omega = \frac{J}{C_p}$$

- **Podem set reescrita em função de Φ e ω:**
- **Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático:**$\frac{J}{C_p}$

Previsão Quase Geostrófica

A equação de tendência de altura QG

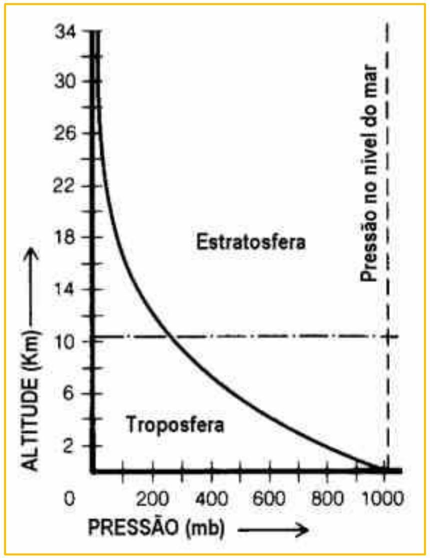
Pode-se eliminar ω nas equações usando a relação de Φ com $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ definimos como tendência de geopotencial.

$$\chi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Previsão Quase Geostrófica

A equação de tendência de altura QG

Usando a hidrostática



A equação de tendência de altura QG

Aproximação hidrostática (formulário de coordenadas de pressão)

$$P = -\rho g z$$

$$P = \rho R T$$

$$\rho = \frac{RT}{P}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$\partial P = -\rho g \partial z$$

$$\frac{\partial g z}{\partial P} = -\rho$$

$$\boldsymbol{\Phi = gz}$$

Potencial gravitacional por unidade de massa (Trabalho em Jaule para elevar 1kg de uma altura z a z+dz)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = -\frac{RT}{P}$$

$$T = -\frac{P}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial P}$$

Previsão Quase Geostrófica

Derivada das equações termodinâmicas QG.

Previsão Quase Geostrófica

Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático: $\frac{J}{C_p}$

Equação da termodinâmica pode ser reescrita na forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\right) T - \frac{\sigma P}{R} \omega = 0$$

Substitui-se na equação da termodinâmica:

$$\boxed{T = -\frac{P}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial P}}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\right)\left(-\frac{P}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right) - \frac{\sigma P}{R} \omega = 0$$

Previsão Quase Geostrófica

Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático: $\frac{J}{C_p}$

Equação da termodinâmica pode ser reescrita na forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\right)\left(-\frac{P}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right) - \frac{\sigma P}{R}\omega = 0$$

Elimine o $\frac{P}{R}$ **na equação da termodinâmica:**

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\right)\frac{P}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial P} - \sigma\frac{P}{R}\omega = 0$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático: $\frac{J}{C_p}$

Equação da termodinâmica pode ser reescrita na forma:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\right)\frac{\partial\Phi}{\partial P}-\sigma\omega=0$$

Reagrupe os termos da equação da termodinâmica:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial P}+\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)-\sigma\omega=0$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial P} + \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) - \sigma\omega = 0$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial P}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) - \sigma\omega = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial P}\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t}} - \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right) - \sigma\omega = 0$$

Previsão Quase Geostrófica

Definição da Tendencia a Altura Geopotencial

$$\chi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

- **Podem set reescrita em função de Φ e ω:**
- **Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático:** $\frac{J}{c_p}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\right) T - \frac{\sigma P}{R}\omega = 0$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial P} = -\overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right) - \sigma\omega$$

Entenderam?

Equivalência entre a equação da termodinâmica e da tendência do geopotencial

Previsão Quase Geostrófica

Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático: $\frac{J}{C_p}$

Equação da vorticidade relativa quase geostrofica pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\xi_g + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Substitui-se na equação da vorticidade :

$$\xi_g = \frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi$$

Previsão Quase Geostrófica

Equação da vorticidade relativa quase geostrofica

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g} \nabla . \left(\xi_g + f \right) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

Equação da Momentum pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V_g}\nabla.\left(\xi_g + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\xi_g = \nabla \times \vec{V_g}$$

$$\xi_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}$$

$$v_g = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$u_g = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Previsão Quase Geostrófica

Equação da Momentum pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V_g}\nabla.\left(\xi_g + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\xi_g = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$$

$$\xi_g = \frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$$

$$\xi_g = \frac{1}{f_0}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)$$

$$\xi_g = \frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi$$

Previsão Quase Geostrófica

Equação da Momentum pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\xi_g + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\xi_g = \frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi\right) = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Previsão Quase Geostrófica

Equação da Momentum pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi\right) = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + f_0\frac{\partial\omega}{\partial P}$$

$$\frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\Phi) = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + f_0\frac{\partial\omega}{\partial P}$$

$$\chi = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

$$\nabla^2\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + {f_0}^2\frac{\partial\omega}{\partial P}$$

$$\nabla^2\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + {f_0}^2\frac{\partial\omega}{\partial P}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

Portanto tem-se a equação da vorticidade em termo do geopotencial

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\xi_g + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\nabla^2\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + {f_0}^2\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Entenderam?

Equivalência entre a equação da vorticidade e da tendência do geopotencial

Previsão Quase Geostrófica

Equações Acopladas (termodinâmica - Vorticidade) usando a Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

Portanto as equações para o sistema Quase Geostrófico são:

$$\frac{\partial \chi}{\partial P} = -\overrightarrow{V_g} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P} \right) - \sigma \omega$$

A $\frac{\partial \chi}{\partial P}$ indica que a mudança vertical da tendência do geopotencial é igual a soma da advecção de espessura e a mudança da espessura adiabática forçada pelo movimento vertical

$$\nabla^2 \chi = -f_0 \overrightarrow{V_g} \nabla . \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) + {f_0}^2 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

O $\nabla^2 \chi$ indica que o laplaciano horizontal da tendência do geopotencial é igual a soma da advecção de vorticidade mais a geração de vorticidade pelo efeito divergente

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

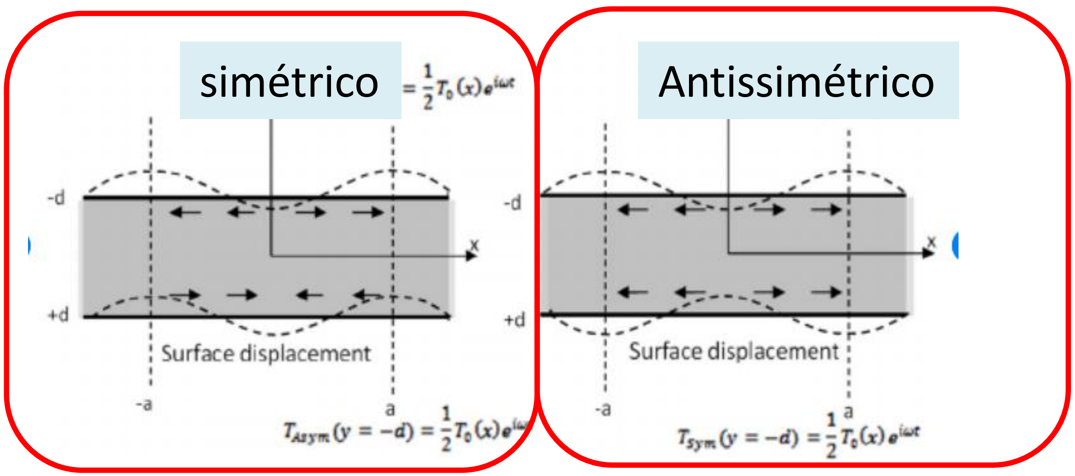
Previsão Quase Geostrófica

Para o caso especial (movimento puramente geostrófico $\omega = 0$)

$$\frac{\partial \chi}{\partial P} = -\overrightarrow{V_g} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P} \right)$$

$$\nabla^2 \chi = -f_0 \overrightarrow{V_g} \nabla . \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right)$$

Situação muito especial (escoamento barotrópico sem dependência da pressão) ou escoamento zonalmente simétrico (sem dependência de x)(onda em dois níveis da atmosfera)



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial

$$\frac{\partial \chi}{\partial P} = -\overrightarrow{V_g} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P} \right) - \sigma\omega$$

$$\nabla^2 \chi = -f_0 \overrightarrow{V_g} \nabla . \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) + {f_0}^2 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Multiplicando a equação da termodinâmica em função do geopotencial $\frac{\partial \chi}{\partial P}$ **por** $\frac{f_0^2}{\sigma}$

$$\frac{{f_0}^2}{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial P} = -\frac{{f_0}^2}{\sigma} \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P} \right) - {f_0}^2 \omega$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial

$$\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial \chi}{\partial P} = -\frac{{f_0}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right) - {f_0}^2\omega$$

Diferencie em relação a P

$$\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial \chi}{\partial P}\right) = -\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left({f_0}^2\omega\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial \chi}{\partial P}\right) = -\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) - {f_0}^2\frac{\partial \omega}{\partial P}}$$

Equação da Tendência de Geopotencial

Observe que o termo da esquerda da equação da termodinâmica em função do geopotencial é igual ao segundo temo a direita da equação da vorticidade relativa em função do geopotencial.

$$f_0{}^2\frac{\partial\omega}{\partial P} = -\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0{}^2}{\sigma}\frac{\partial\chi}{\partial P}\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0{}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$\nabla^2\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + f_0{}^2\frac{\partial\omega}{\partial P}$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial

$$f_0{}^2\frac{\partial\omega}{\partial P} = -\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0{}^2}{\sigma}\frac{\partial\chi}{\partial P}\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0{}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$\nabla^2\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + f_0{}^2\frac{\partial\omega}{\partial P}$$

Substituindo o temo na equação da vorticidade relativa QG, obtém-se:

$$\nabla^2\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0{}^2}{\sigma}\frac{\partial\chi}{\partial P}\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0{}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial

$$\nabla^2\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\chi}{\partial P}\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Reagrupando ao termos

$$\nabla^2\chi + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\chi}{\partial P}\right) = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Equação da Tendência de Geopotencial

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$A \qquad = \qquad B \qquad + \qquad C$$

A equação fornece a tendência do Geopotencial (A) em função da distribuição de vorticidade (B) e advecção da espessura (C)

O termo B é o principal termo forçante na troposfera superior

O termo C é o principal mecanismo para amplificação ou decaimento dos sistemas sinóticos de média latitude (isso envolve a mudança com a pressão da advecção de espessura (o aquecimento diabático também pode contribuir))

Equação da Tendência de Geopotencial

$$A \quad = \quad B \quad + \quad C$$

*** Observe que esses termos não serão sinônimos dos termos de advecção de vorticidade diferencial e de temperatura da equação ômega

Equação da Tendência de Geopotencial

TERMO A

$$A = \left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi$$

Essencialmente o Laplaciano (∇^2) 3D atuando em χ.
Para padrões sinusoidais (tipo onda), o Laplaciano pode ser aproximado por um sinal de menos.

$$A = \left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\chi \sim -\chi \propto -\frac{\partial Z}{\partial t}$$

Equação da Tendência de Geopotencial

TERMO A

$$A = \left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\chi \sim -\chi \propto -\frac{\partial Z}{\partial t}$$

Portanto a tendência da espessura pode ser relacionada a :

$$-\frac{\partial Z}{\partial t} \quad proporcional\ a \quad -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Equação da Tendência de Geopotencial

TERMO B

TERMO de Advecção de Vorticidade

$$-\frac{\partial Z}{\partial t} \quad proporcinal\ a \quad -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} \quad proporcinal\ a \quad -\left[-f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right]$$

Equação da Tendência de Geopotencial

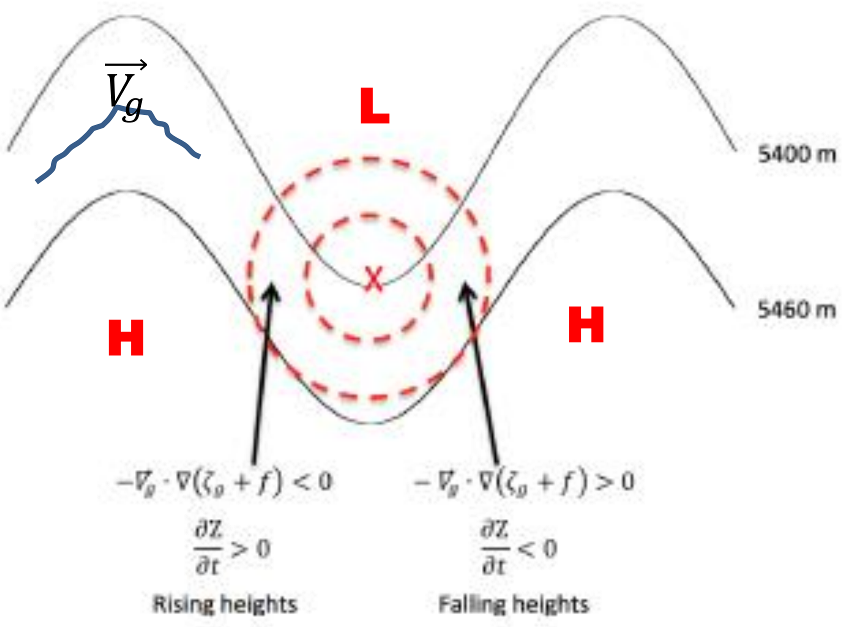
TERMO B

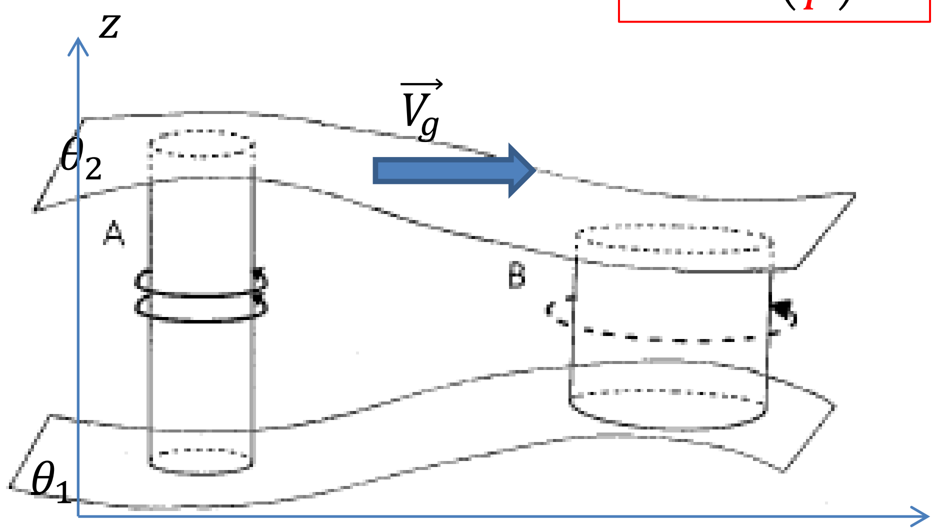
$$\frac{\partial Z}{\partial t} \quad proporcional\ a \quad -\left[-f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right]$$

Portanto.

- A advecção da vorticidade ciclônica (positiva no NH) resulta em queda de altura
- A advecção de vorticidade anticiclônica (negativa em NH) resulta em alturas crescentes
- Tipicamente Avaliada no nível em 500 mb

$$\theta = T\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}}$$





Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial

Portanto.

- A advecção da vorticidade ciclônica (positiva no NH) resulta em queda de altura
- A advecção de vorticidade anticiclônica (negativa em NH) resulta em alturas crescentes
- Tipicamente Avaliada no nível em 500 mb

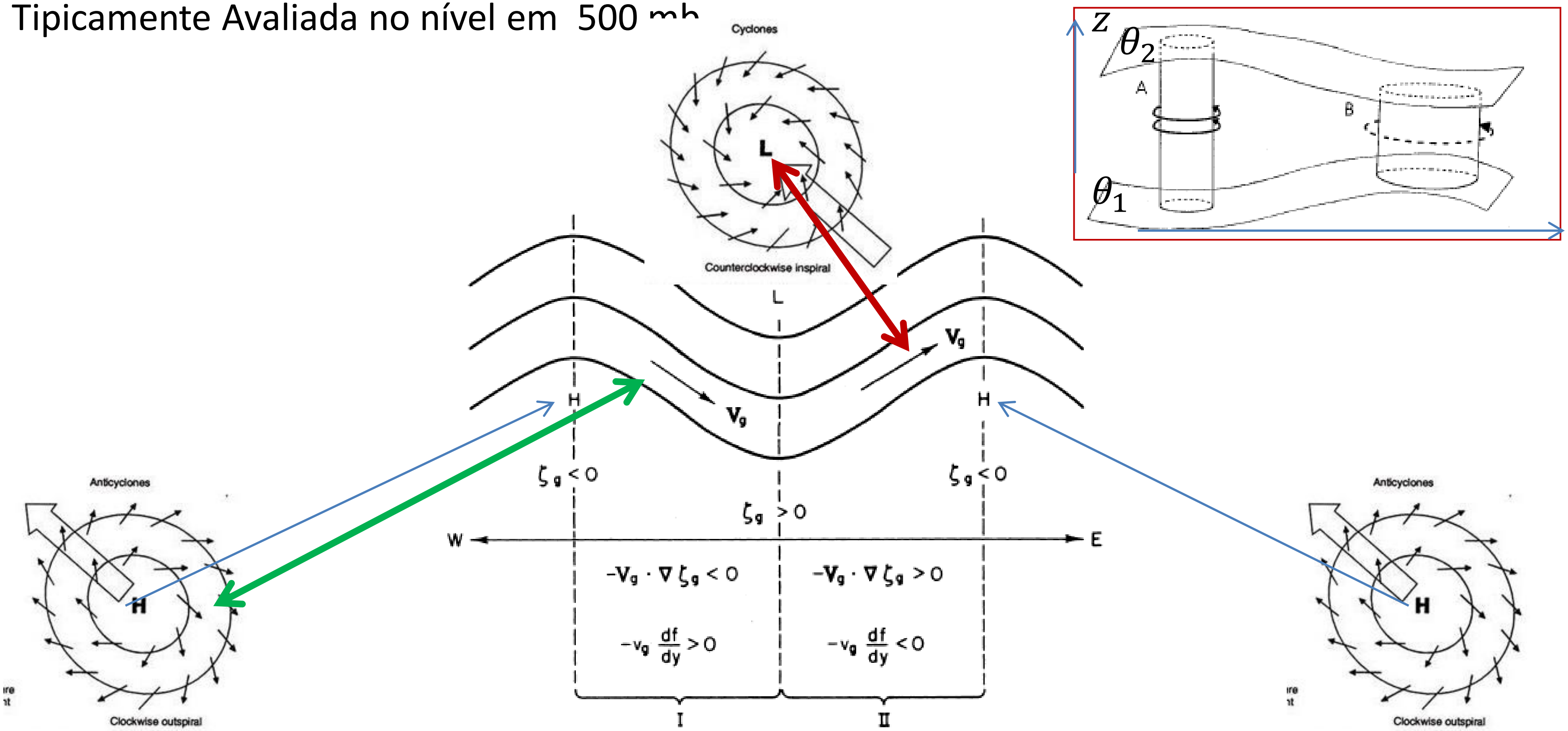


Fig. 6.7 Schematic 500-hPa geopotential field showing regions of positive and negative advections of relative and planetary vorticity.

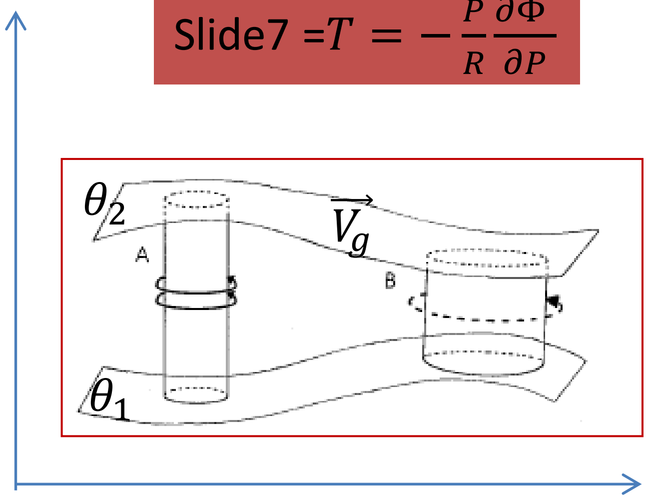
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial

Slide7 $= T = -\frac{P}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial P}$

TERMO C

TERMO de Advecção de Temperatura



$$-\frac{\partial Z}{\partial t} \quad proporcinal\ a \quad -\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\vec{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} \quad proporcinal\ a \quad \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\vec{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) \quad proporcinal\ a\ -\frac{\partial}{\partial z}\left[-\vec{V_g}.\nabla T\right]$$

Portanto

- A advecção diferencial positiva da temperatura $(-\vec{V_g}.\nabla T)$ resulta em quedas de altura
- A advecção diferencial negativa da temperatura$(-\vec{V_g}.\nabla T)$ resulta em aumentos de altura

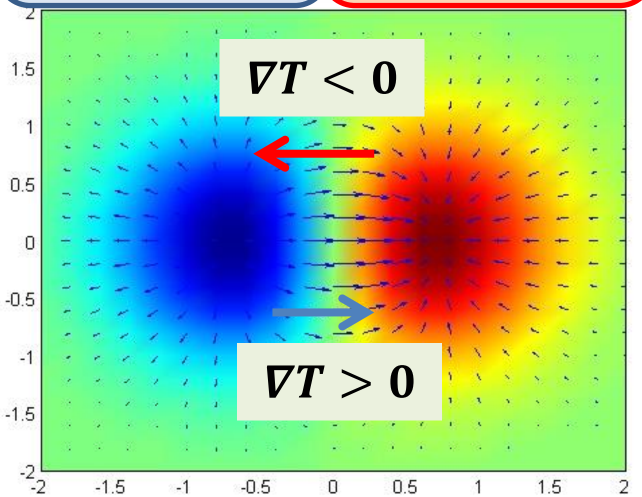
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

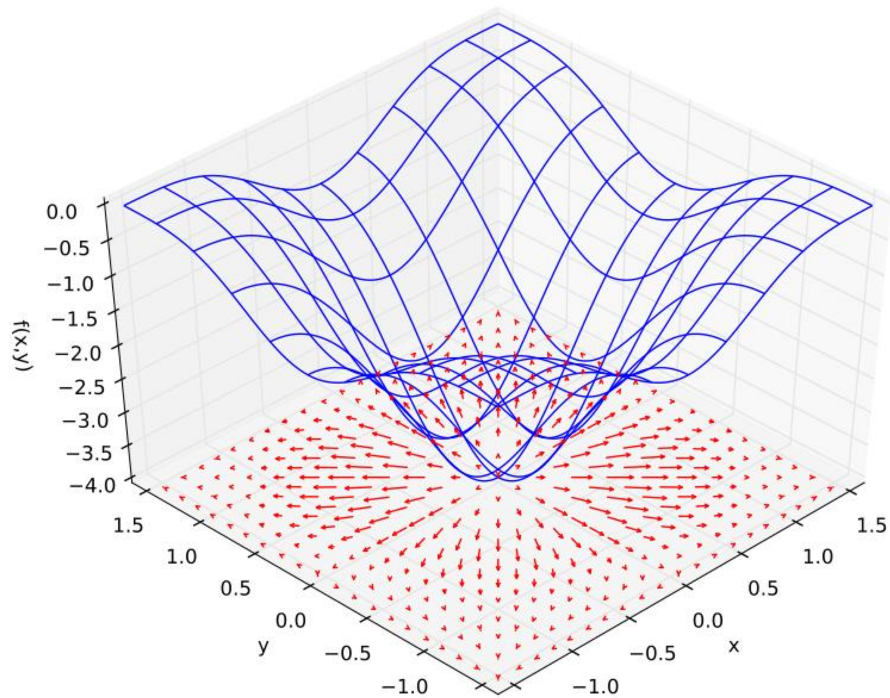
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial

$gradiente\ de\ temperatura\ \nabla T$>0 sempre aponta para maior temperatura

$-\vec{V}_g.\nabla T > 0$	$-\vec{V}_g.\nabla T < 0$
$\nabla T > 0$	$\nabla T < 0$





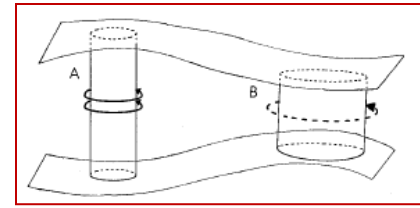
Portanto

- A advecção diferencial positiva da temperatura ($-\vec{V_g}.\nabla T > 0$) resulta em quedas de altura
- A advecção diferencial negativa da temperatura($-\vec{V_g}.\nabla T < 0$) resulta em aumentos de altura

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial



TERMO C

advecção fria na Baixa troposfera, sem advecção de temperatura na atmosfera superior

300 mb $\quad -\vec{V}_g \cdot \nabla T = 0$

500 mb $\quad dz \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial z}\left(-\vec{V}_g \cdot \nabla T\right) > 0} \rightarrow$ Height falls @ 500 mb

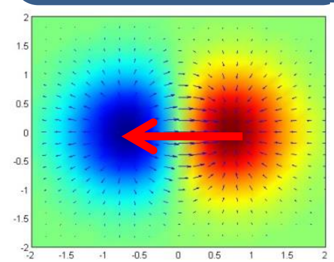
700 mb $\quad -\vec{V}_g \cdot \nabla T < 0$

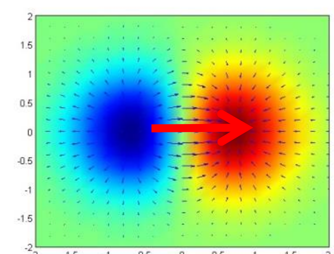
$-\vec{V}_g . \nabla T > 0$

$\nabla T < 0$

$-\vec{V}_g . \nabla T < 0$

$\nabla T > 0$





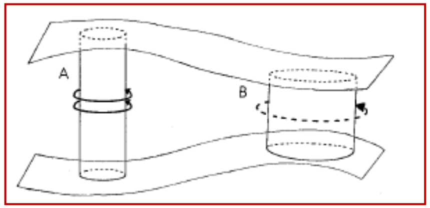
$$\frac{\partial Z}{\partial t} \quad proporcinal \quad \boxed{-\frac{\partial}{\partial z}\left[-\vec{V}_g . \nabla T\right]}$$

- A advecção diferencial negativa da temperatura ($-\vec{V}_g . \nabla T$) em baixo nivels resulta em queda de altura em 500mb

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial



TERMO C

advecção quente na Baixa troposfera, sem advecção de temperatura na atmosfera superior

300 mb $\quad -\vec{V}_g \cdot \nabla T = 0$

dz

500 mb $\quad \boxed{\frac{\partial}{\partial z}\left(-\vec{V}_g \cdot \nabla T\right) < 0} \rightarrow$ Height rises @ 500 mb

700 mb $\quad -\vec{V}_g \cdot \nabla T > 0$

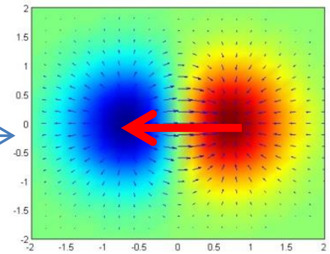
$-\vec{V}_g . \nabla T > 0$

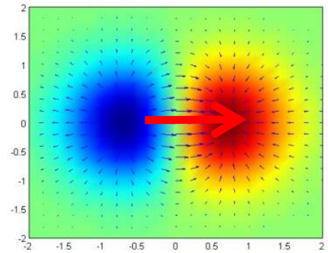
$\nabla T < 0$

$-\vec{V}_g . \nabla T < 0$

$\nabla T > 0$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} \quad proporcinal \quad \boxed{-\frac{\partial}{\partial z}\left[-\vec{V}_g . \nabla T\right]}$$

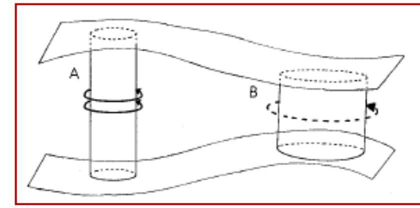




- A advecção diferencial positiva da temperatura $(-\vec{V}_g . \nabla T)$ na superficie resulta em aumento de altura em 500 mb

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

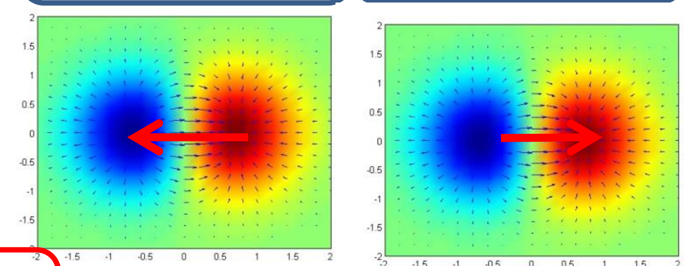
Equação da Tendência de Geopotencial



TERMO C

Sem advecção de temperatura na Baixa troposfera, advecção fria na atmosfera superior

$-\vec{V}_g.\nabla T > 0$ $\nabla T < 0$	$-\vec{V}_g.\nabla T < 0$ $\nabla T > 0$



300 mb $\quad -\vec{V}_g \cdot \nabla T < 0$

500 mb $\quad dz \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(-\vec{V}_g \cdot \nabla T\right) < 0 \rightarrow$ Height rises @ 500 mb

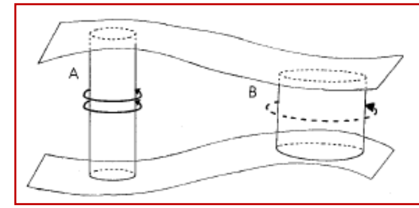
700 mb $\quad -\vec{V}_g \cdot \nabla T = 0$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} \quad proporcional \quad -\frac{\partial}{\partial z}\left[-\vec{V}_g.\nabla T\right]$$

- A advecção diferencial negativa da temperatura em altos nivels $(-\vec{V}_g.\nabla T)$ resulta em aumenta de altura

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial



TERMO C

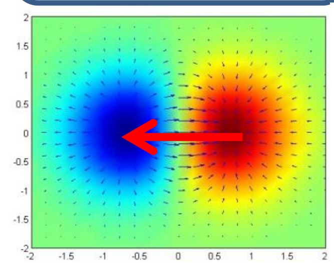
Sem advecção de temperatura na Baixa troposfera, advecção quente na atmosfera superior

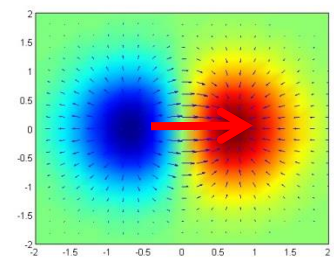
$-\vec{V}_g.\nabla T > 0$

$\nabla T < 0$

$-\vec{V}_g.\nabla T < 0$

$\nabla T > 0$





300 mb $-\vec{V}_g \cdot \nabla T > 0$

500 mb dz $\boxed{\frac{\partial}{\partial z}(-\vec{V}_g \cdot \nabla T) > 0} \rightarrow$ Height falls @ 500 mb

700 mb $-\vec{V}_g \cdot \nabla T = 0$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} \quad proporcinal \quad \boxed{-\frac{\partial}{\partial z}[-\vec{V}_g.\nabla T]}$$

- A advecção diferencial positiva da temperatura altos niveis $(-\vec{V}_g.\nabla T)$ resulta em queda de altura em 500mb

Equação da Tendência de Geopotencial

Termo C na prática

• Advecção quente acima de um cavado de nível superior tende a aprofundar a cavado

• A advecção fria abaixo de um cavado de nível superior tende a aprofundar o cavado

• O melhor caso para a amplificação do cavado é a advecção a quente de nível superior e a advecção a frio de nível inferior

• A advecção fria acima de uma crista de nível superior tende a contribuir com a crista

• A advecção quente abaixo de uma crista de nível superior tende a contribuir com a crista

• O melhor caso para amplificação de crista é a advecção fria de nível superior e a advecção a quente de nível inferior

• Regras básicas: como a advecção da temperatura muda com a altura é o que importa

Equação da Tendência de Geopotencial

Aplicações adicionais.

Às vezes, a equação de tendência da altura é usada para diagnosticar o desenvolvimento de ciclones e anticiclones de baixo nível:

• A advecção quente acima de uma superfície ciclonica (por exemplo, @ 850 mb) tenderá a aprofundar o ciclone

• A advecção fria acima de uma superfície anticiclonica tenderá a aprofundar o anticiclone

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

Forma conservativa da equação de tendência de geopotencial é a equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

Esta equação da tendência de geopotencial é util para analisar a mudança do geopotencial (nível superior de crista e cavado) desde que χ seja relacionado a processos relacionado a vorticidade e advecção de temperatura.

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Forma conservativa da equação de tendência de geopotencial é a equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Expando os termos

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right) + \frac{{f_0}^2}{\sigma}\overrightarrow{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\vec{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\vec{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right) + \frac{{f_0}^2}{\sigma}\vec{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Rearranje os termo

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\vec{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\vec{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right) + \frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\vec{V_g}}{\partial P}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\vec{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\vec{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right) + \frac{f_0}{\sigma}f_0\frac{\partial\vec{V_g}}{\partial P}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\overrightarrow{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right) + \frac{f_0}{\sigma}f_0\frac{\partial\overrightarrow{V_g}}{\partial P}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Observe o termo:

$$f_0\frac{\partial\overrightarrow{V_g}}{\partial P} = ??????$$

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\overrightarrow{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right) + \frac{f_0}{\sigma}f_0\frac{\partial\overrightarrow{V_g}}{\partial P}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

Sabe-se que:

$$f_0 \frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial P} = f_0 \left(\frac{\partial}{\partial P} \left(-\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right)$$

$$v_g = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$u_g = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$f_0 \frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$$

$$\nabla_h \times \Phi = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \Phi & \Phi & 0 \end{vmatrix} = (0-0)_i + (0-0)_j + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_k$$

$$f_0 \frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(-\hat{k} \times (\nabla \Phi) \right)$$

$$\hat{k} \times \nabla_h \Phi = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = \left(0 - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_i + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - 0 \right)_j + (0-0)_k$$

$$= \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_i + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_j$$

$$f_0 \frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial P} = -\hat{k} \times \left(\nabla \frac{\partial \Phi}{\partial P} \right)$$

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\overrightarrow{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right) + \frac{f_0}{\sigma}f_0\frac{\partial\overrightarrow{V_g}}{\partial P}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$f_0\frac{\partial\overrightarrow{V_g}}{\partial P} = -\hat{k}\times\left(\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)$$

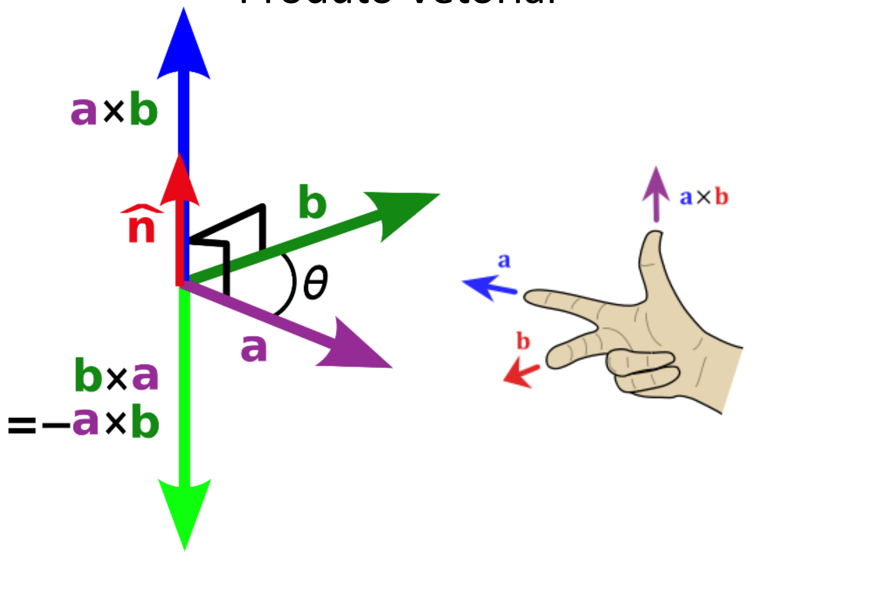
$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\overrightarrow{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right) + \frac{f_0}{\sigma}\left(-\hat{k}\times\left(\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)\cdot\left(\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)\right)$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

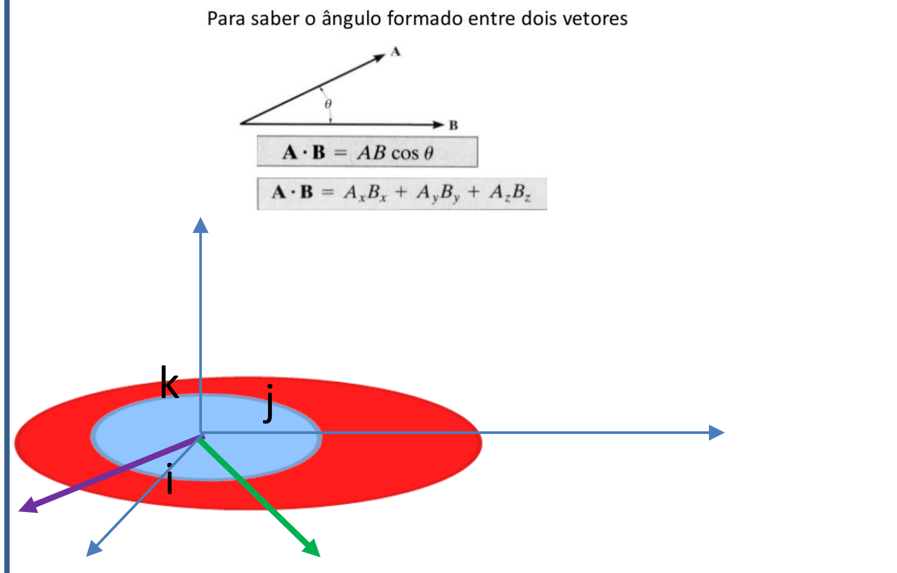
A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$\left[\nabla^2+\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0{}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi=-f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi+f\right)-\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{f_0{}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)+\frac{f_0}{\sigma}\left(-\hat{k}\times\left(\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)\cdot\left(\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)\right)$$

Produto Vetorial



Produto Escalar



O termo $\left(-\hat{k}\times\left(\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$ é perpendicular a $\left(\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$ e seu produto escalar é nulo:

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

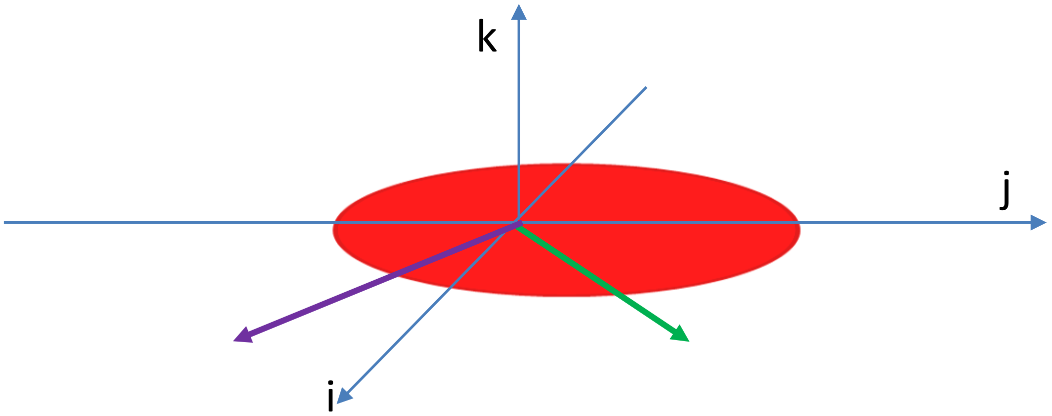
$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\vec{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\vec{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right) + \frac{f_0}{\sigma}\left(-\hat{k}\times\left(\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)\cdot\left(\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)\right)$$

$$f_0\frac{\partial\vec{V_g}}{\partial P} = -\hat{k}\times\left(\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)$$

$$-\hat{k}\times\nabla_h\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)_i - \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)_j$$

$$\left(\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)_i + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)_j$$

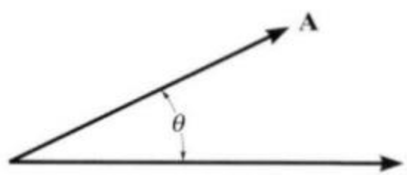


Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\overrightarrow{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right) + \frac{f_0}{\sigma}\left(-\hat{k}\times\left(\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)\cdot\left(\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)\right)$$

Para saber o ângulo formado entre dois vetores



$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

O termo $\left(-\hat{k}\times\left(\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$ é perpendicular $(\theta = 90)$ a $\left(\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$ e seu produto escalar é nulo:

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\overrightarrow{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$\left[\nabla^2\chi + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\chi\right] = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\overrightarrow{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$\nabla^2\chi + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\overrightarrow{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$\nabla^2\chi + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\chi = -f_0\vec{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\vec{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$\chi = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

$$\nabla^2\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -f_0\vec{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \left(\vec{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$\frac{\partial\nabla^2\Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right) + f_0\vec{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + \left(\vec{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) = 0$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$\frac{\partial \nabla^2 \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right) + f_0 \overrightarrow{V_g} \nabla . \left(\frac{1}{f_0}\nabla^2 \Phi + f\right) + \left(\overrightarrow{V_g} \cdot \frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) = 0$$

$$\chi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) + \overrightarrow{V_g} \nabla . \frac{f_0}{f_0}\nabla^2 \Phi + \overrightarrow{V_g} \nabla . f_0 f + \left(\overrightarrow{V_g} \cdot \frac{\partial}{\partial P}\nabla\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) = 0$$

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

Divide por f_0

$$\chi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) + \overrightarrow{V_g}\nabla.\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + \overrightarrow{V_g}\nabla.f + \left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) + \overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f + \left(\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right)\right) = 0$$

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi+\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)+\vec{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi+\ f+\left(\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)\right)=0$$

$$\chi=\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

O termo f não depende do tempo e sua variação local no tempo é nula $\frac{\partial f}{\partial t}=0$. Portanto pode-se adicionar este termo a equação

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi+\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)+\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi+\ f+\left(\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi+f+\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)+\vec{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi+\ f+\left(\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)\right)=0$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) + \vec{V_g}\nabla.\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f + \left(\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right)\right) = 0$$

$$\frac{D}{Dt_g}\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) = \frac{D_g q}{Dt} = 0$$

Assim a equação da vorticidade potencial Quase Geostrófica:

$$q = \left[\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right]$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$q = \left[\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right]$$

As tres partes da equação são:

- Vorticidade relativa
- Vorticidade planetária
- Alongamento ou encurtamento da vorticidade

A soma das vorticidades é conservada

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$q = \left[\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right]$$

A soma das vorticidades é conservada

$$\frac{D_g q}{Dt} = 0$$

Supõe-se também que a rotação da Terra domine $f \gg \frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi$

$$q = \left[f + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right]$$

$$\frac{D_g\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)}{Dt} = \frac{D_g}{Dt}\left(\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right)$$

A equação de vorticidade relevante contém apenas alongamento e encurtamento desta rotação básica

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$\frac{D_g q}{Dt} = 0$$

A equação de vorticidade relevante fica em função do termo que contém apenas alongamento e encurtamento desta rotação básica

$$\boxed{\xi_g = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi}$$

$$\frac{D_g(\xi + f)}{Dt} = \frac{D_g}{Dt}\left(\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right)$$

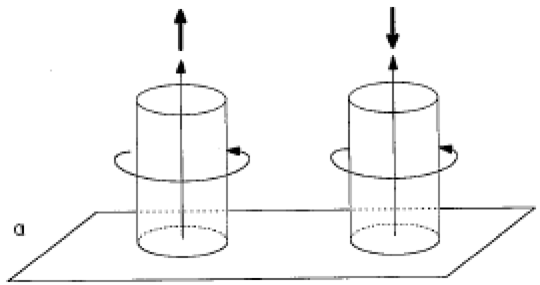
A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

Dois exemplos simples:.

Juntamente com o movimento vertical zero no solo, a ascensão para a troposféra implica alongamento e criação de vorticidade absoluta maior que f, isto é, vorticidade ciclônica relativa, na troposfera inferior.

Da mesma forma, a descida na metade da troposfera implica encolhimento e criação de vorticidade anticiclônica relativa.

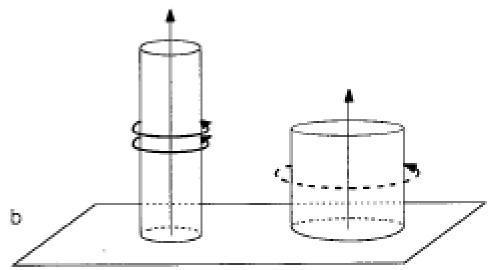
A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica



A ascensão e descida na média troposfera, mostradas , levam a, respectivamente, o alongamento e o encolhimento da vorticidade

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica



O aumento e diminuição associados a vorticidade e circulação mostrados. Se a vorticidade relativa inicial for zero, as duas situações correspondem a desenvolvimentos de superfícies ciclônicos (aumento) e anticiclônicos(diminuição).

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

Uma abordagem alternativa, mas equivalente, é observar que a quantidade de alongamento ocorrida é indicada pela distorção dos contornos de temperatura potencial, como na Figura . Isso, por sua vez, é descrito pela equação da energia termodinâmica.

A combinação desta equação com a equação de vorticidade fornece a equação de conservação para a vorticidade potencial de QG q. Para uma estabilidade estática uniforme, estado básico de repouso e f constante , então q = f.

$$q = \left[\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right]$$

The conservation of q then gives:

reduced static stability

$$\Rightarrow \frac{\partial\theta'}{\partial z} < 0 \quad \Rightarrow \xi > 0, \text{ cyclonic,}$$

increased static stability

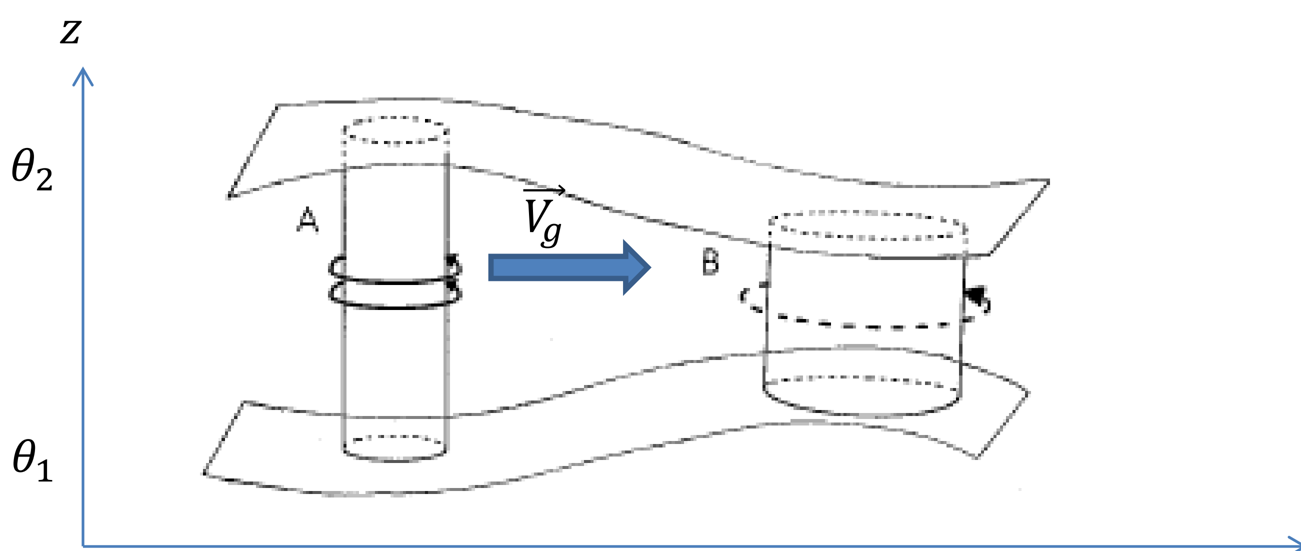
$$\Rightarrow \frac{\partial\theta'}{\partial z} > 0 \quad \Rightarrow \xi < 0, \text{ anticyclonic,}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

O alongamento e encolhimento dos dois cilindros delimitados pelas duas superfícies isentrópicas (temperatura potencial).

Portanto, a mudança de vorticidade e circulação, passando de A para B, ou vice-versa, são indicados pela separação vertical relativa dessas duas superfícies (isentrópicas).



$$\theta = T\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}}$$

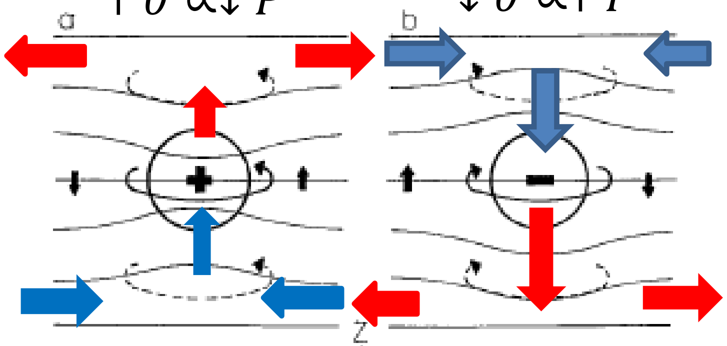
A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

Caso idealizado

As isentrópicas (temperatura potencial) e a circulação para **anomalias PV internas** positivas (a) e negativas (b) e para **anomalias de temperatura de superficie** quente (c) e fria (d). Também é mostrado o sentido do movimento vertical, se houver um fluxo básico ao longo das seções, que aumenta com a altura.

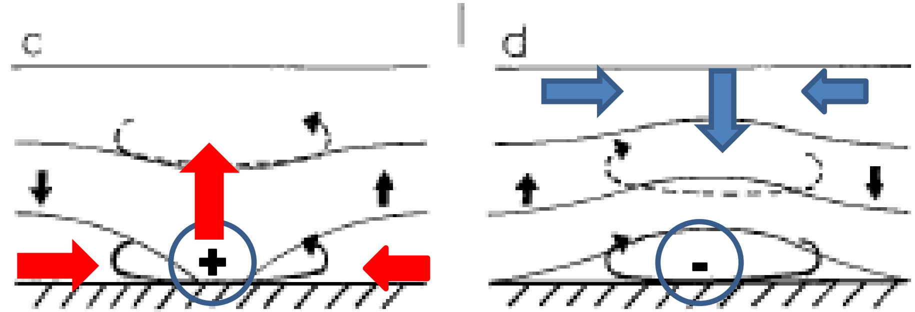
$$\boxed{\theta = T\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}}}$$

$\uparrow \theta \propto \downarrow P$ $\qquad$ $\downarrow \theta \propto \uparrow P$



$\downarrow \theta \propto \downarrow P$ $\qquad$ $\uparrow \theta \propto \uparrow P$

Convergência (expansão do ar abaixo) → Divergência (compressão do ar abaixo (aquece))



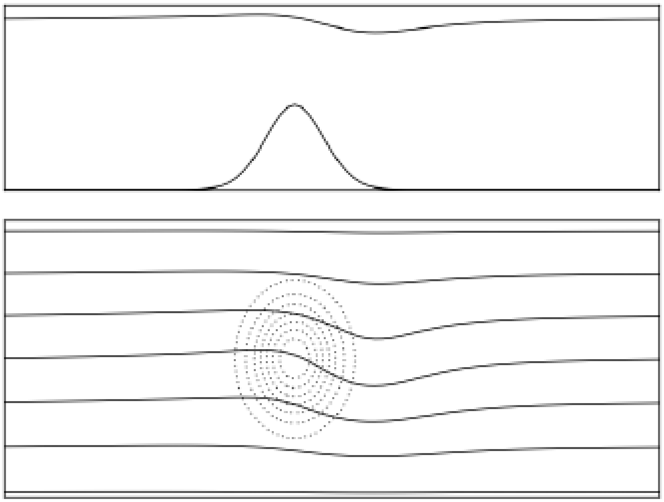
$\uparrow \theta \propto \downarrow P$ $\qquad$ $\downarrow \theta \propto \uparrow P$

Aquecimento e resfriamento da superfície

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

A conservação da vorticidade potencial pode ser usada para explicar a formação de vales do lado esquerdo, no fluxo em direção a oeste sobre uma barreira de montanha.



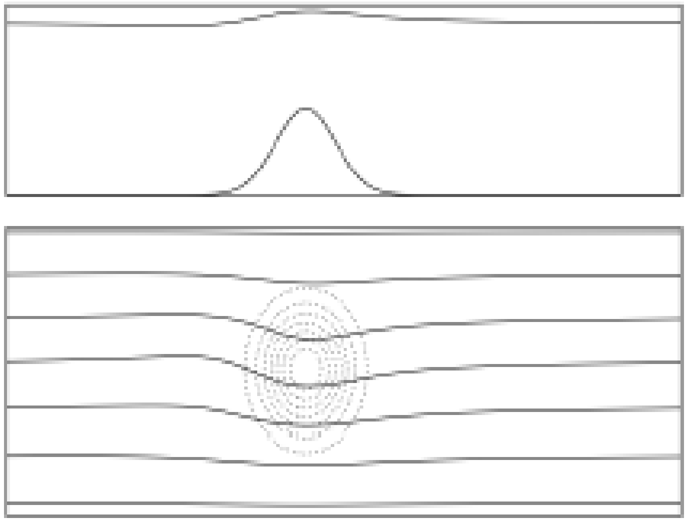
$\vec{V}_g$

À medida que a parcela começa a subir a montanha, sua profundidade diminui. Isso requer que a vorticidade absoluta também diminua.

A atmosfera responde a isso criando vorticidade de cisalhamento anticiclônico e curvatura ao lado na direção montanha acima.

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

A conservação da vorticidade potencial pode ser usada para explicar, no fluxo para a direção a leste sobre uma barreira de montanha



$\vec{V_g}$

À medida que a parcela sobe o lado oeste da montanha, novamente a vorticidade absoluta deve diminuir.

Isso é obtido pela parcela em direção ao sul (hemisfério norte), onde a vorticidade planetária é menor.

No entanto, a curvatura não pode ser muito grande aqui, porque a curvatura é ciclônica e funcionaria contra a diminuição da vorticidade absoluta.

Exercício

Resumo ou comente as consideração usadas para a derivação da equação da vorticidade potencial e tendência do geopotencial que mostram que o escoamento é dominado pela grande escala.
R: