



**Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021**  
**Teoria da Aproximação Quase Geostrófica**

---

**Equação da Tendência de Geopotencial:  
Aproximações e Equações  
MET 0225 Sinótica-Dinâmica  
Meteorologia I  
Instrutor: Paulo Kubota  
[paulo.kubota@inpe.br](mailto:paulo.kubota@inpe.br)  
012-3186-8400**



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

---

Paulo Kubota

data	Tópicos
15/04/2021	PBL
20/04/2021	PBL
22/04/2021	PBL
27/04/2021	QG Vorticity. eq.
29/04/2021	QG Vorticity. eq.
04/05/2021	QG Vorticity. eq.
06/05/2021	Geop. Tend. eq.
11/05/2021	Geop. Tend. eq.
13/05/2021	Geop. Tend. eq.
18/05/2021	Omega and Vetor Q
20/05/2021	Omega and Vetor Q
25/05/2021	Omega and Vetor Q
27/05/2021	Avaliação 1
01/06/2021	Avaliação 2



# **Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021**

## **Teoria da Aproximação Quase Geostrófica**

---

### **Motivação.**

O desejo de um sistema de equações simplificado, mas que retenha os principais processos dinâmicos necessários para descrever, diagnosticar e entender o comportamento de sistemas climáticos em larga escala.

### **Palavras chaves.**

“As equações e suas derivações são reconhecidamente difíceis. É importante que não se memorize apenas as equações de maneira mecânica. É muito mais importante entender o que eles significam fisicamente.” - Howie Bluestein.

### **Suposição abrangente da teoria QG.**

O número de Rossby ( $R0 = U / fL$ ) é pequeno, o que nos permite desprezar o vento ageostrófico em alguns (mas não todos) termos das equações que governam o movimento.

### **Equações governantes e suas derivações.**

A teoria QG é baseada em versões simplificadas das equações de movimento, equação de continuidade e equação termodinâmica de energia.



# **Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021**

## **Teoria da Aproximação Quase Geostrófica**

---

**Derivação:**

**A equação de tendência de altura QG.**

**Derivada das equações termodinâmicas e de vorticidade de QG.**

**Veja Lackmann (2011) para detalhes.**



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

### Sumário

A equação do momento QG, a relação do vento geostrófico, a aproximação hidrostática, a equação de continuidade e a equação de energia termodinâmica formam um conjunto fechado de equações para as variáveis dependentes  $\Phi$ ,  $\vec{V}_g$ ,  $\vec{V}_{ag}$ ,  $\omega$  e  $T$ .

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -(f_0)\hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y)\hat{k} \times (\vec{V}_g)$$

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = -\frac{RT}{P}$$

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0$$

**Como obter a equação da termodinâmica?**

$$\frac{DT}{Dt_g} - \frac{\sigma P}{R} \omega = \frac{J}{C_p}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

---

### Vorticidade Relativa Geostrófica

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Obtida na aula anterior



# **Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021**

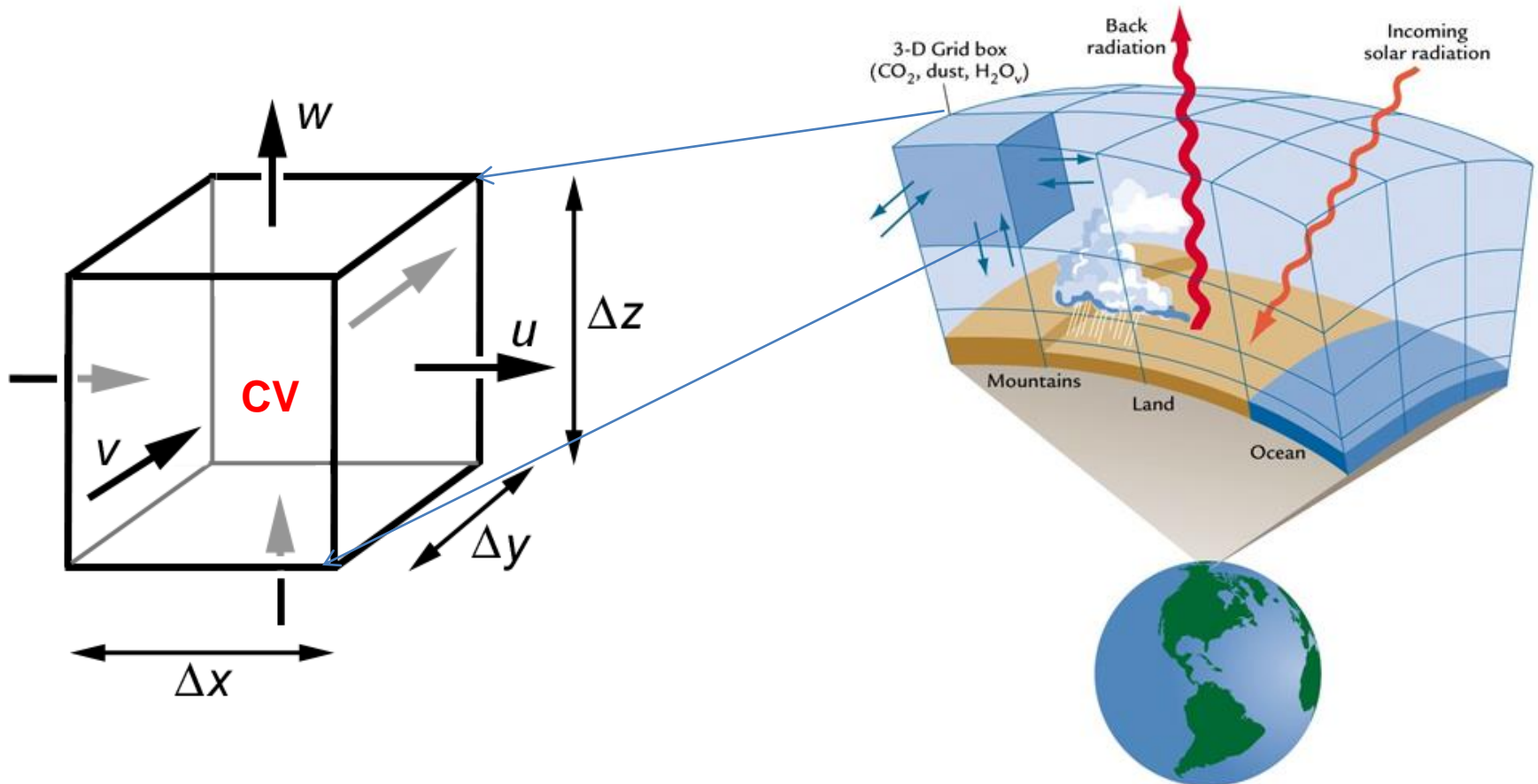
## **Teoria da Aproximação Quase Geostrófica**

---

### **Como Derivar a Equação da Termodinâmica**

$$\frac{DT}{Dt} = ?$$

### Como Derivar a Equação da Termodinâmica



Volume de controle **VC** ou **CV**

. GCMs divide Earth into grid cells and use laws of physics to represent real world climate [Ruddiman, 2001].





# **Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021**

## **Teoria da Aproximação Quase Geostrófica**

---

### **Equação da Termodinâmica**

**Considerações básicas da termodinâmica para a atmosfera:**

**Estrutura da  
atmosfera Estática  
Obedece a hidrostática**

$$P = -\rho g z$$

=

**Segue a lei da Equação de  
estado  
para os gases ideais**

$$P = \rho R T$$

**Termodinâmica de uma atmosfera seca**

# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

### PRINCIPIO

$$VC = CV$$

### Conservação de Energia

A variação total da energia do CV

=

Variação da energia interna dentro do CV

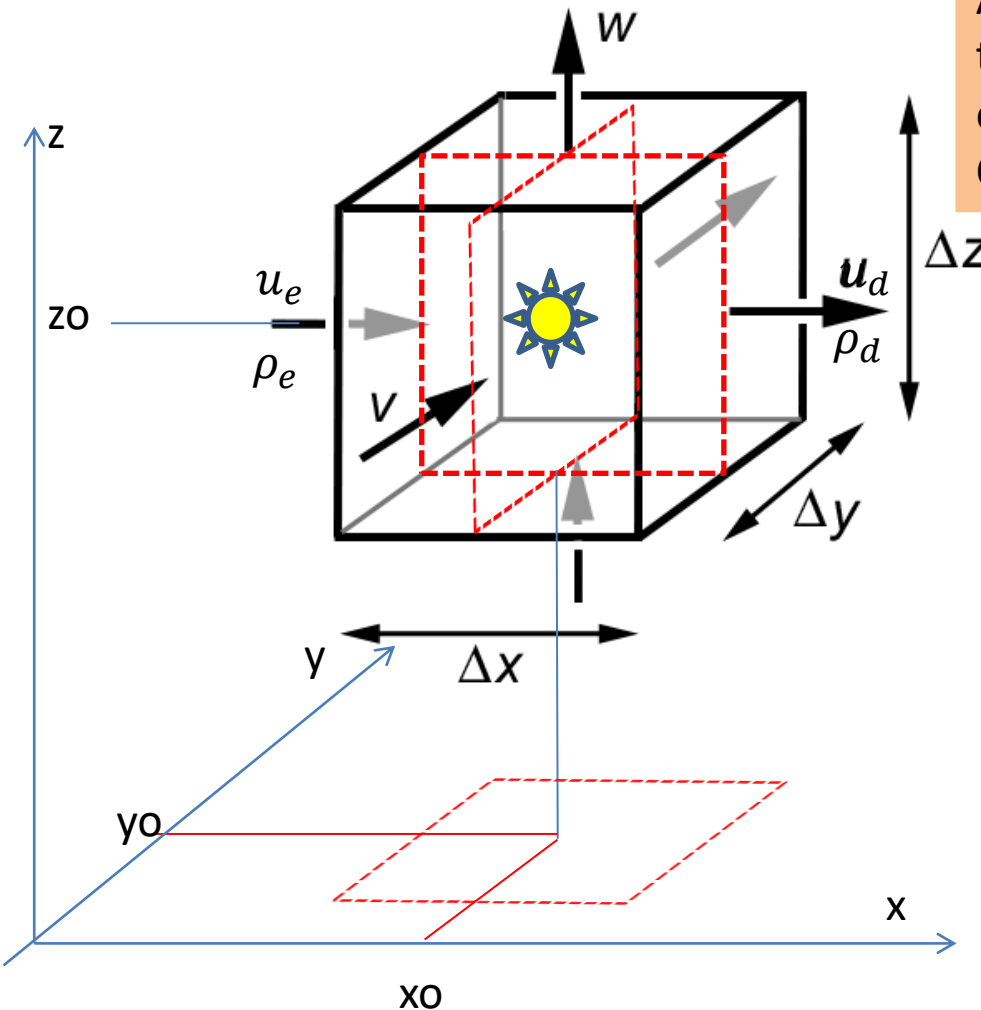
+

Trabalho realizado nas face do CV

$$\Delta Q = \Delta U + W$$

**Portanto:**

$$\Delta U = \Delta Q - W$$





# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

---

### Conservação de Energia

A **variação pequena de temperatura** que ocorrem nos escoamento naturais permite uma **relação linear** entre o conteúdo de energia **U** do fluido e sua temperatura absoluta **T**, sob a forma

$$U = mC_vT$$

**Onde**

$$(C_v + R) = C_p$$

$$C_v = C_p - R$$

$C_v$  = Calor específico a volume constante

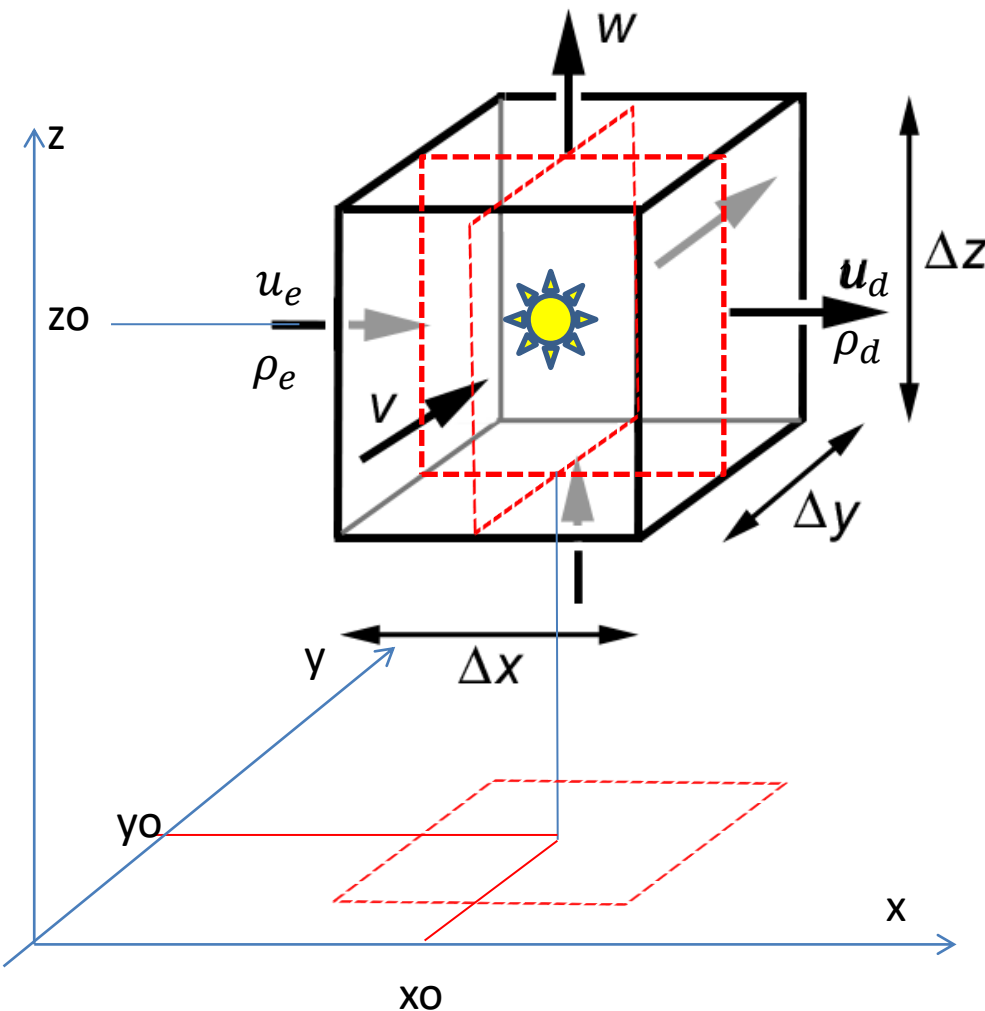
$C_p$  = Calor específico a pressão constante

$R$  = Constante dos gases

### PRINCIPIO

**CV**

### Conservação de Energia



Somando sobre todos o i-ésimos cv

$$\sum \Delta U_i = \sum \Delta Q_i - \sum W_i$$

$$mC_v \sum \Delta T_i = \sum \Delta Q_i - \sum P_i \Delta V$$

$$mC_v \sum \Delta T_i = \sum \Delta Q_i - \sum P_i \frac{m}{\rho}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

---

### Conservação de Energia

**A Primeira lei da termodinâmica pode ser escrita na forma de variação de energia**

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W$$

$$\Delta U = mC_v\Delta T$$

$$mC_v\Delta T = \Delta Q - \Delta W$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

### Conservação de Energia

$$mC_v\Delta T = \Delta Q - \Delta W$$

Substituindo o valor de  $C_v$

$$C_v = C_p - R$$

$$m(C_p - R)\Delta T = \Delta Q - \Delta W$$

$$mC_p\Delta T - mR\Delta T = \Delta Q - \Delta W$$

$$mC_p\Delta T - m\Delta RT = \Delta Q - \Delta W$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

### Conservação de Energia

$$mC_p\Delta T - m\Delta RT = \Delta Q - \Delta W$$

Onde o trabalho feito pelo sistema é dado pela equação

$$\Delta W = F\Delta x$$

Pressão feita por um fluido sobre uma parede

#### Pressão

$$P = \frac{F}{Area}$$

$$F = P * Area$$

$$\Delta W = P * Area * \Delta x$$

$$\Delta W = P * \Delta V$$

$$\Delta W = P \times \Delta \left( \frac{m}{\rho} \right)$$

#### Densidade

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$\Delta V = \Delta \left( \frac{m}{\rho} \right)$$



**Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021**

## **Teoria da Aproximação Quase Geostrófica**

### **Conservação de Energia**

$$mC_p\Delta T - m\Delta RT = \Delta Q - \Delta W$$

$$mC_p\Delta T - m\Delta RT = \Delta Q - P \times \Delta \left( \frac{m}{\rho} \right)$$

**A equação dos gases ideais nos fornece a relação:**

$$P = \rho RT$$

$$RT = \frac{P}{\rho}$$

$$mC_p\Delta T - m\Delta \frac{P}{\rho} = \Delta Q - P \times \Delta \left( \frac{m}{\rho} \right)$$





**Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021**

## **Teoria da Aproximação Quase Geostrófica**

### **Conservação de Energia**

$$mC_p\Delta T - m\Delta \frac{P}{\rho} = \Delta Q - P \Delta \left( \frac{m}{\rho} \right)$$

**Para a conservação de energia a massa deve ser constante (m=cte).**

$$mC_p\Delta T - m\Delta \frac{P}{\rho} = \Delta Q - mP \Delta \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

Divide por  $\Delta t$

$$mC_p \frac{\Delta T}{\Delta t} - m \frac{\Delta \frac{P}{\rho}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} - mP \Delta \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{\Delta t}{\Delta t}$$



**Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021**

## **Teoria da Aproximação Quase Geostrófica**

### **Conservação de Energia**

$$mC_p \frac{\Delta T}{\Delta t} - m \frac{\Delta}{\Delta t} \left( \frac{P}{\rho} \right) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} - mP \times \frac{\Delta}{\Delta t} \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

Fazendo o limite de  $\Delta t \rightarrow 0$

$$mC_p \frac{DT}{Dt} - m \frac{D}{Dt} \left( \frac{P}{\rho} \right) = \frac{DQ}{Dt} - mP \times \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

Taxa de variação da  
energia interna no  
do sistema (VC)

=

Taxa total do calor  
transferido ao  
sistema (VC)

-

Taxa total do  
trabalho feito pelo  
sistema (VC)



**Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021**

# **Teoria da Aproximação Quase Geostrófica**

## **Conservação de Energia**

Derivada da divisão.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$mC_p \frac{DT}{Dt} - m \frac{D}{Dt} \left( \frac{P}{\rho} \right) = \frac{DQ}{Dt} - mP \times \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

$$mC_p \frac{DT}{Dt} - m \left( \frac{\frac{\rho DP}{Dt} - P \frac{D\rho}{Dt}}{\rho^2} \right) = \frac{DQ}{Dt} - mP \times \left( \frac{\frac{\rho D1}{Dt} - 1 \frac{D\rho}{Dt}}{\rho^2} \right)$$

**Para a conservação de energia a massa e o volume devem ser constantes  $\rho = \frac{m}{V}$ , ( $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ ).**

$$mC_p \frac{DT}{Dt} - m \frac{DP}{\rho Dt} + m \cancel{\frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}} = \frac{DQ}{Dt} + m \cancel{\frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}}$$

$$mC_p \frac{DT}{Dt} - m \frac{DP}{\rho Dt} = \frac{DQ}{Dt}$$



**Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021**

# **Teoria da Aproximação Quase Geostrófica**

## **Conservação de Energia**

$$mC_p \frac{DT}{Dt} - m \frac{DP}{\rho Dt} = \frac{DQ}{Dt}$$

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{\rho Dt} = \frac{D}{Dt} \left( \frac{Q}{m} \right)$$

$$q = \frac{Q}{m}$$

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{\rho Dt} = \frac{D(q)}{Dt}$$

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{\rho Dt} = J$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

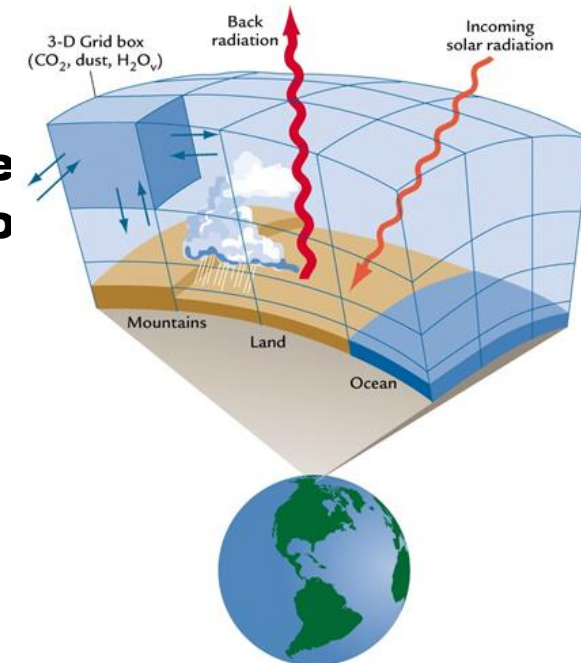
# Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

## Conservação de Energia

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{\rho Dt} = J$$

$$J = \frac{D}{Dt} \left( \frac{Q}{m} \right) = \frac{D(q)}{Dt}$$

**J** = é a taxa de aquecimento por unidade de massa devido a radiação. Condução e liberação de calor latente





# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

---

### Equação da Termodinâmica

$$c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{\rho Dt} = J$$

$$\frac{1}{\rho} = \alpha$$

$$c_p \frac{DT}{Dt} - \alpha \frac{DP}{Dt} = J$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

---

### Equação da Termodinâmica

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha \frac{DP}{Dt} = J$$

$$\frac{DP}{Dt} = \omega$$

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha \omega = J$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

---

### Equação da Termodinâmica

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha \omega = J$$

$$P = \rho RT$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho} = \frac{RT}{P}$$

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{RT}{P} \omega = J$$





# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

---

**Considere a equação da temperatura potencial:**

$$\theta = T \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{c_p}}$$

**Derive em função de P usando a relação:**

Derivada da divisão.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p}} + T \left( \frac{R}{C_p} \right) \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p}-1} \left( \frac{P_s' P - P_s P'}{P^2} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p}} + T \left( \frac{R}{C_p} \right) \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p}-1} \left( \frac{P_s' P - P_s P'}{P^2} \right)$$

Lembre-se  $P_s$  não varia com a altura

$$P_s' = \frac{dP_s}{dP} = 0$$

$$P' = \frac{dP}{dP} = 1$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p}} + T \left( \frac{R}{C_p} \right) \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p}-1} \left( \frac{P_s}{P} \right) \left( -\frac{1}{P} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p}} - T \left( \frac{R}{C_p} \frac{1}{P} \right) \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p}}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{c_p}} - T \left( \frac{R}{c_p} \frac{1}{P} \right) \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{c_p}}$$

$$\left( \frac{P_s}{P} \right)^{-\frac{R}{c_p}} \frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} - T \left( \frac{R}{c_p} \frac{1}{P} \right)$$

$$\boxed{\frac{\theta}{T} = \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{c_p}}} \longleftrightarrow \boxed{\frac{T}{\theta} = \left( \frac{P_s}{P} \right)^{-\frac{R}{c_p}}}$$

$$\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} - \left( \frac{TR}{c_p P} \right)$$

$$\left( \frac{TR}{c_p P} \right) = -\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

### Equação da Termodinâmica

$$\frac{DT}{Dt} - \frac{RT}{C_p P} \omega = \frac{J}{C_p}$$

Parâmetro de estabilidade em coordenada isobárica: **derivada da temperatura potencial**

$$\left( \frac{TR}{C_p P} \right) = -\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P}$$

$$S_P = \frac{RT}{C_p P} = -\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P} = -T \frac{\partial \ln(\theta)}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P}$$

$$S_P = \frac{RT}{C_p P} = -T \frac{\partial \ln(\theta)}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P} \equiv -T \frac{\partial \ln(\theta)}{\partial P}$$

$$S_P = \frac{RT}{C_p P} \equiv -T \frac{\partial \ln(\theta)}{\partial P}$$

$$\frac{DT}{Dt} - S_P \omega = \frac{J}{C_p}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

---

### Equação da Termodinâmica

$$\frac{DT}{Dt} - S_P \omega = \frac{J}{C_p}$$



**Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021**  
**Teoria da Aproximação Quase Geostrófica**

---

**Aproximação Quase Geostrófica**  
**Para a Equação da Termodinâmica**



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

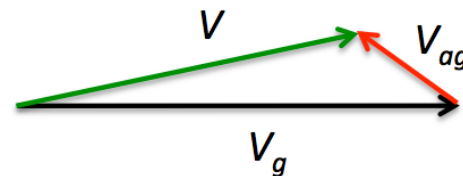
$$\frac{DT}{Dt} - \frac{RT}{C_p P} \omega = \frac{J}{C_p}$$

### 2. Despreze o seguinte.

- Orientação pelo vento ageostrófico
- Advecção de temperatura pelo vento ageostrófico.

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) \cdot \nabla(T)$$

$$\vec{V}_{ag} \ll \vec{V}_g$$



$$\vec{V}_g = u_g + v_g$$

### Expanda os termos

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla(\vec{T}) + (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla(T)$$

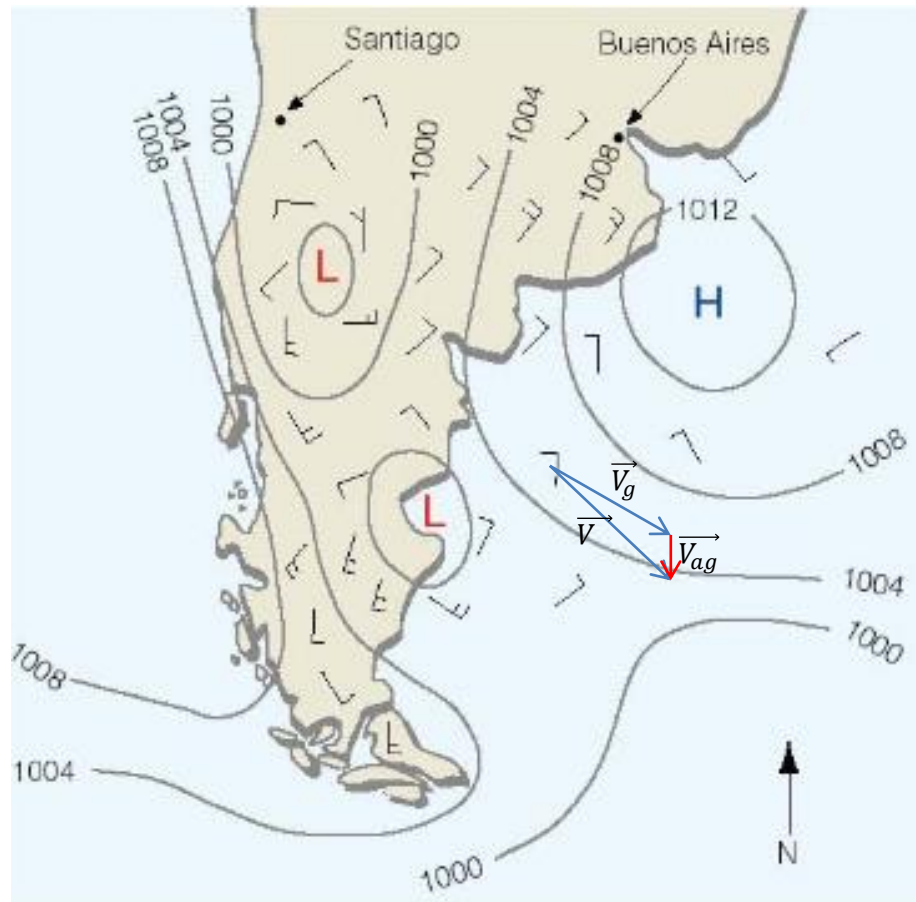
Mudança local de (T)

advecção ageostrófica de (T)

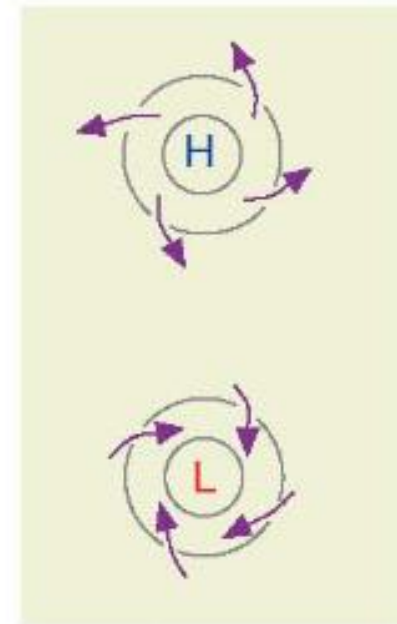
Advecção geostrofica de (T)

# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica



Condição válida para  
medias latitudes



Surface map  
Southern Hemisphere

?



### 2. Despreze o seguinte.

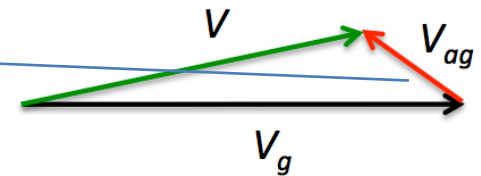
- Orientação pelo vento ageostrófico
- Advecção de temperatura pelo vento ageostrófico .

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla(\vec{T}) + (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla(T)$$

### Considere

$$\vec{V}_{ag} \ll \vec{V}_g$$

$$\vec{V}_{ag} \ll \vec{V}_g$$



### Portanto

$$(\vec{V}_g) \cdot \nabla(\vec{T}) \gg (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla(T)$$

$$(\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla(T) \approx 0$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

---

**Portanto, para o escoamento quase geostrófico:**

**Mudança Geostrófica Local de T**

The diagram shows the equation  $\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla(T)$  enclosed in a light orange rectangular box. This box is itself inside a larger rounded rectangle with a blue border. A blue arrow points from the top of the rounded rectangle up to the text 'Mudança Geostrófica Local de T'. Another blue arrow points from the bottom of the rounded rectangle down to the text 'Advecção Geostrófica de T'.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla(T)$$

**Advecção Geostrófica de T**

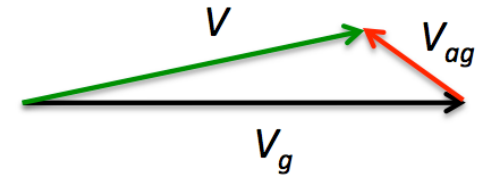


# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

2. Despreze o seguinte (por análise de escala).

- Fricção.
- Orientação pelo vento ageostrófico
- Advecção de temperatura pelo vento ageostrófico .



$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla(T)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla(T) = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} - \omega \frac{\partial T}{\partial P}$$

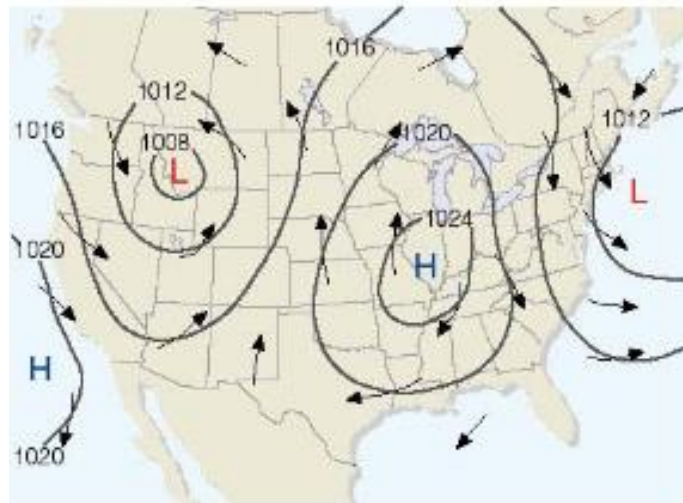
# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

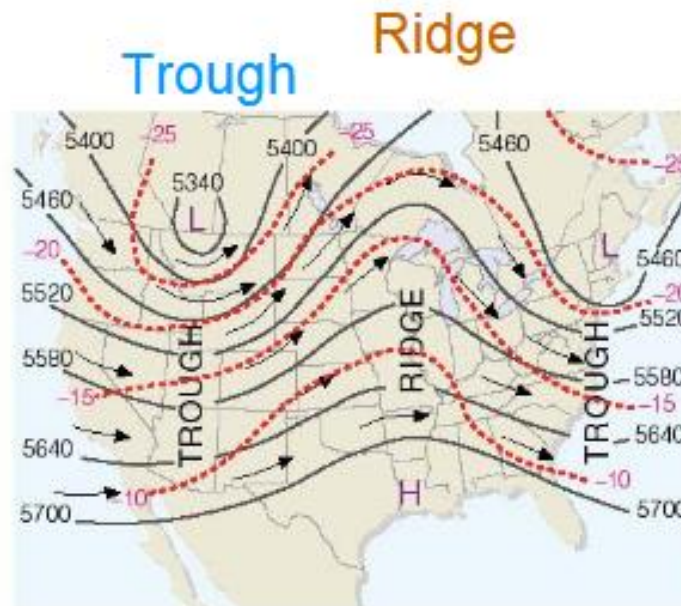
$$\frac{DT}{Dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla(T) = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} - \omega \frac{\partial T}{\partial P}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla(T) = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} - \omega \frac{\partial T}{\partial P}$$

- **A advecção de temperatura pela velocidade vertical não pode ser desprezada.**



(a) Surface map



(b) Upper-air map (500 mb)

$$\omega \frac{\partial T}{\partial P} \neq 0$$

$$\omega \frac{\partial T}{\partial P} \neq 0$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{DT}{Dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla(T) = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} - \omega \frac{\partial T}{\partial P}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla(T) = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} - \omega \frac{\partial T}{\partial P}$$

Portanto a  $T$  do VC =  $T_{tot}$  o que corresponde a temperatura total do CV

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial T_{tot}}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla(T_{tot}) = \frac{\partial T_{tot}}{\partial t} + u_g \frac{\partial T_{tot}}{\partial x} + v_g \frac{\partial T_{tot}}{\partial y} - \omega \frac{\partial T_{tot}}{\partial P}$$

**Temperatura total = Estado do Básico + perturbação**

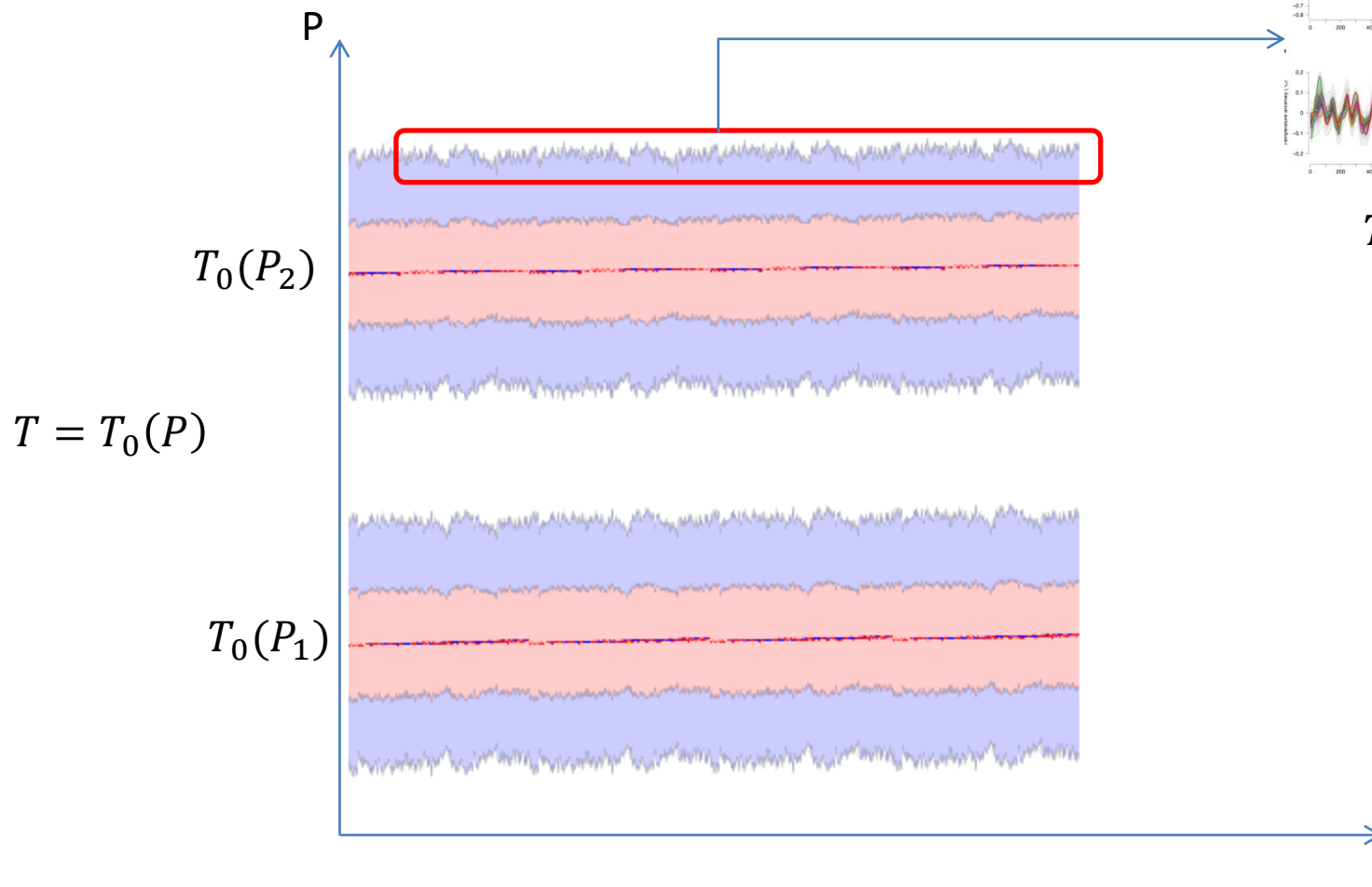
$$T_{tot} = T_0(P) + T(x, y, p, t)$$

# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Temperatura total = Estado do Básico(media) + perturbação(anomalia)

$$T = T_0(P) + T(x, y, p, t)$$



$$T(x, y, p, t)$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial T_{tot}}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla(T_{tot}) = \frac{\partial T_{tot}}{\partial t} + u_g \frac{\partial T_{tot}}{\partial x} + v_g \frac{\partial T_{tot}}{\partial y} - \omega \frac{\partial T_{tot}}{\partial P}$$

**Temperatura total = Estado do Básico + perturbação**

$$T_{tot} = T_0(P) + T(x, y, p, t)$$

**Substitua na equação acima:**

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial(T_0 + T)}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla(T_0 + T) = \frac{\partial(T_0 + T)}{\partial t} + u_g \frac{\partial(T_0 + T)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(T_0 + T)}{\partial y} - \omega \frac{\partial(T_0 + T)}{\partial P}$$

**Abra os termos:**

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T_0}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T_0}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \left( \frac{\partial T_0}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P} \right)$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T_0}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T_0}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \left( \frac{\partial T_0}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P} \right)$$

$$T_{tot} = T_0(P) + T(x, y, p, t)$$

na equação acima  $T_0(P)$  não depende de  $x, y, t$ :

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right) - \omega \left( \frac{\partial T_0}{\partial P} \right)$$

Lembre-se :

$$\left| \frac{\partial T_0}{\partial P} \right| \gg \left| \frac{\partial T}{\partial P} \right|$$

O gradiente vertical do estado médio é maior que o gradiente vertical do estado perturbado

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right) - \omega \left( \frac{\partial T_0}{\partial P} \right)$$





# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

---

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right) - \omega \left( \frac{\partial T_0}{\partial P} \right)$$

**Voltando q equação da termodinâmica completa:**

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} - \frac{RT_{tot}}{C_p P} \omega = \frac{J}{C_p}$$

**Substituimos a mesma temperatura no segundo termo da equação da termodinâmica**

$$T_{tot} = T_0(P) + T(x, y, p, t)$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} - \frac{RT_{tot}}{C_p P} \omega = \frac{J}{C_p}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right) - \omega \left( \frac{\partial T_0}{\partial P} \right) - \frac{RT_0}{C_p P} \omega - \frac{RT}{C_p P} \omega = \frac{J}{C_p}$$

$$\left| \frac{\partial T_0}{\partial P} \right| \gg \left| \frac{\partial T}{\partial P} \right|$$

O gradiente vertical do estado básico é maior que o estado perturbado

**reagrupe os termos**  $T_0(P)$  e  $T$ :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \left( \frac{\partial T}{\partial P} + \frac{RT}{C_p P} \right) - \omega \left( \frac{\partial T_0}{\partial P} + \frac{RT_0}{C_p P} \right) = \frac{J}{C_p}$$

Procura-se um termo:

$$\sigma = - \frac{RT_0}{P} \frac{d \ln \theta}{dP}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

---

**Para obter a relação indicada pela equação:**

$$\sigma = - \frac{RT_0}{P} \frac{d \ln \theta}{dP}$$

**Considere a equação da temperatura potencial:**

$$\theta = T \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{c_p}}$$

**Derive em função de P usando a relação:**

Derivada da divisão.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p}} + T \left( \frac{R}{C_p} \right) \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p} - 1} \left( \frac{P_s' P - P_s P'}{P^2} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p}} + T \left( \frac{R}{C_p} \right) \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p} - 1} \left( \frac{P_s' P - P_s P'}{P^2} \right)$$

Lembre-se  $P_s$  não varia com a altura

$$P_s' = \frac{dP_s}{dP} = 0$$

$$P' = \frac{dP}{dP} = 1$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p}} + T \left( \frac{R}{C_p} \right) \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p} - 1} \left( \frac{P_s}{P} \right) \left( -\frac{1}{P} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p}} - T \left( \frac{R}{C_p} \frac{1}{P} \right) \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{C_p}}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{c_p}} - T \left( \frac{R}{c_p} \frac{1}{P} \right) \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{c_p}}$$

$$\left( \frac{P_s}{P} \right)^{-\frac{R}{c_p}} \frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} - T \left( \frac{R}{c_p} \frac{1}{P} \right)$$

$$\boxed{\frac{\theta}{T} = \left( \frac{P_s}{P} \right)^{\frac{R}{c_p}}} \longleftrightarrow \boxed{\frac{T}{\theta} = \left( \frac{P_s}{P} \right)^{-\frac{R}{c_p}}}$$

$$\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} - \left( \frac{TR}{c_p P} \right)$$



# **Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021**

## **Teoria da Aproximação Quase Geostrófica**

---

**Voltando para a Equação da  
Termodinâmica**



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \left( \frac{\partial T}{\partial P} + \frac{RT}{C_p P} \right) - \omega \left( \frac{\partial T_0}{\partial P} + \frac{RT_0}{C_p P} \right) = \frac{J}{C_p}$$

$$\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} - \left( \frac{TR}{C_p P} \right)$$

**Portanto:**

$$\left( \frac{TR}{C_p P} \right) = - \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \left( \frac{\partial T}{\partial P} - \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P} \right) - \omega \left( \frac{\partial T_0}{\partial P} - \frac{T_0}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial P} + \frac{\partial T_0}{\partial P} \right) = \frac{J}{C_p}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

### Previsão Quase Geostrófica

Usando equação termodinâmica para escoamento com aproximação quase geostrófica:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \left( \frac{\partial T}{\partial P} - \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P} \right) - \omega \left( \frac{\partial T_0}{\partial P} - \frac{T_0}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial P} + \frac{\partial T_0}{\partial P} \right) = \frac{J}{C_p}$$

$$\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} + \left( \frac{TR}{C_p P} \right)$$

$$\frac{\partial \ln(\theta)}{\partial P} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial P}$$

$$f(y) = \ln(y)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \left( -T \frac{\partial \ln \theta}{\partial P} + 2 \frac{\partial T}{\partial P} \right) - \omega \left( -T_0 \frac{\partial \ln \theta_0}{\partial P} + 2 \frac{\partial T_0}{\partial P} \right) = \frac{J}{C_p}$$





# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

### Previsão Quase Geostrófica

Usando equação termodinâmica para escoamento com aproximação quase geostrófica:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \left( -T \frac{\partial \ln \theta}{\partial P} + 2 \frac{\partial T}{\partial P} \right) - \omega \left( -T_0 \frac{\partial \ln \theta_0}{\partial P} + 2 \frac{\partial T_0}{\partial P} \right) = \frac{J}{C_p}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \frac{P}{R} \left( -\frac{R}{P} T \frac{\partial \ln \theta}{\partial P} + 2 \frac{R}{P} \frac{\partial T}{\partial P} \right) - \omega \frac{P}{R} \left( -\frac{R}{P} T_0 \frac{\partial \ln \theta_0}{\partial P} + 2 \frac{R}{P} \frac{\partial T_0}{\partial P} \right) = \frac{J}{C_p}$$

$$\sigma = -\frac{RT_0}{P} \frac{d \ln(\theta_0)}{dP} + 2 \frac{R}{P} \frac{\partial T_0}{\partial P}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

### Previsão Quase Geostrófica

Usando equação termodinâmica para escoamento com aproximação quase geostrófica:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \frac{P}{R} \left( -\frac{R}{P} T \frac{\partial \ln \theta}{\partial P} + 2 \frac{R}{P} \frac{\partial T}{\partial P} \right) - \omega \frac{P}{R} \left( -\frac{R}{P} T_0 \frac{\partial \ln \theta_0}{\partial P} + 2 \frac{R}{P} \frac{\partial T_0}{\partial P} \right) = \frac{J}{C_p}$$

$$\sigma = -\frac{RT_0}{P} \frac{d \ln(\theta_0)}{dP} + 2 \frac{R}{P} \frac{\partial T_0}{\partial P}$$

$$\sigma' = -\frac{RT}{P} \frac{\partial \ln \theta}{\partial P} + 2 \frac{R}{P} \frac{\partial T}{\partial P}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \frac{P}{R} (\sigma') - \omega \frac{P}{R} (\sigma) = \frac{J}{C_p}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

### Previsão Quase Geostrófica

Usando equação termodinâmica para escoamento com aproximação quase geostrófica:

$$\sigma' = -\frac{RT}{P} \frac{\partial \ln \theta}{\partial P} + 2 \frac{R}{P} \frac{\partial T}{\partial P} \quad \sigma = -\frac{RT_0}{P} \frac{d \ln(\theta_0)}{dP} + 2 \frac{R}{P} \frac{\partial T_0}{\partial P}$$

$$\left| -\frac{RT_0}{P} \frac{d \ln(\theta_0)}{dP} \right| \gg \left| 2 \frac{R}{P} \frac{\partial T_0}{\partial P} \right|$$

$$\sigma' \equiv -\frac{RT}{P} \frac{\partial \ln \theta}{\partial P} \quad \sigma \equiv -\frac{RT_0}{P} \frac{d \ln(\theta_0)}{dP}$$

$$\left| \frac{d \ln(\theta_0)}{dP} \right| \gg \left| \frac{\partial \ln \theta}{\partial P} \right|$$

O gradiente vertical do estado básico é maior que o estado perturbado

$$\sigma' \ll \sigma$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \frac{P}{R} (\sigma') - \omega \frac{P}{R} (\sigma) = \frac{J}{C_p}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

### Previsão Quase Geostrófica

Usando equação termodinâmica para escoamento com aproximação quase geostrófica:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \frac{P}{R}(\sigma') - \omega \frac{P}{R}(\sigma) = \frac{J}{C_p}$$

$$\sigma' \ll \sigma$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \frac{P}{R}(\sigma) = \frac{J}{C_p}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

### Previsão Quase Geostrófica

Usando equação termodinâmica para escoamento com aproximação quase geostrófica:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + v_g \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \omega \frac{P}{R}(\sigma) = \frac{J}{C_p}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla \right) T - \frac{\sigma P}{R} \omega = \frac{J}{C_p}$$

$$\frac{DT}{Dt_g} - \frac{\sigma P}{R} \omega = \frac{J}{C_p}$$

Podem ser reescrita em função de  $\Phi$  e  $\omega$ :

Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático:  $\frac{J}{C_p}$



**Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021**  
**Teoria da Aproximação Quase Geostrófica**

---

**Previsão Quase Geostrófica**

**A equação de tendência de altura QG**

**A equação de tendência de altura QG é usada para entender e diagnosticar o desenvolvimento e decaimento de sistemas climáticos em larga escala.**



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

### Previsão Quase Geostrófica

## A equação de tendência de altura QG

Usando as equações da vorticidade relativa quase geostrófica e a equação da termodinâmica:

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla \right) T - \frac{\sigma P}{R} \omega = \frac{J}{C_p}$$

- Podem ser reescritas em função de  $\Phi$  e  $\omega$ :
- Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático:  $\frac{J}{C_p}$



# **Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021**

## **Teoria da Aproximação Quase Geostrófica**

---

### **Previsão Quase Geostrófica**

## **A equação de tendência de altura QG**

**Pode-se eliminar  $\omega$  nas equações usando a relação de  $\Phi$  com  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  definimos como tendência de geopotencial.**

$$\chi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

**Usando a hidrostática**





# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

### A equação de tendência de altura QG

**Aproximação hidrostática (formulário de coordenadas de pressão)**

$$P = -\rho g z$$

$$P = \rho R T$$

$$\rho = \frac{R T}{P}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$\partial P = -\rho g \partial z$$

$$\frac{\partial g z}{\partial P} = -\rho$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = -\frac{R T}{P}$$

$$\Phi = g z$$

**Potencial gravitacional por unidade de massa (Trabalho em Jaule para elevar 1kg de uma altura  $z$  a  $z+dz$ )**

$$T = -\frac{P}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial P}$$



# Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

## Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

### Exercício

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla \right) T - \frac{\sigma P}{R} \omega = \frac{J}{C_p}$$

- 1) Quando elimina-se o termo de aquecimento diabático na equação quase geostrófica da termodinâmica  $:\frac{J}{C_p}:$ , devido a radiação e liberação de calor latente. Trabalha-se com que tipo de processo termodinâmico? Explique usando a 1ª lei da termodinâmica.

R:

- 2) Qual a importância deste processo termodinâmico na região tropical e latitudes médias?

R: