Equação da Tendência de Geopotencial: Aproximações e Equações

MET 0225 Sinótica-Dinâmica

Meteorologia I

Instrutor: Paulo Kubota

paulo.kubota@inpe.br

012-3186-8400

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Paulo Kubota

data	Tópicos
15/04/2021	PBL
20/04/2021	PBL
22/04/2021	PBL
27/04/2021	QG Vorticity. eq.
29/04/2021	QG Vorticity. eq.
04/05/2021	QG Vorticity. eq.
06/05/2021	Geop. Tend. eq.
11/05/2021	Geop. Tend. eq.
13/05/2021	Geop. Tend. eq.
18/05/2021	Omega and Vetor Q
20/05/2021	Omega and Vetor Q
25/05/2021	Omega and Vetor Q
27/05/2021	Avaliação 1
01/06/2021	Avaliação 2

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Motivação.
O desejo de um sistema de equações simplificado, mas que retenha os principais processos dinâmicos necessários para descrever, diagnosticar e entender o comportamento de sistemas climáticos em larga escala.

Palavras chaves.
“As equações e suas derivações são reconhecidamente difíceis. É importante que não se memorize apenas as equações de maneira mecânica. É muito mais importante entender o que eles significam fisicamente. ” - Howie Bluestein.

Suposição abrangente da teoria QG.
O número de Rossby ($R0 = U / fL$) é pequeno, o que nos permite desprezar o vento ageostrófico em alguns (mas não todos) termos das equações que governam o movimento.

Equações governantes e suas derivações.
A teoria QG é baseada em versões simplificadas das equações de movimento, equação de continuidade e equação termodinâmica de energia.

Derivação:

A equação de tendência de altura QG.

Derivada das equações termodinâmicas e de vorticidade de QG.

Veja Lackmann (2011) para detalhes.

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Sumário

A equação do momento QG, a relação do vento geostrófico, a aproximação hidrostática, a equação de continuidade e a equação de energia termodinâmica formam um conjunto fechado de equações para as variáveis dependentes Φ, $\overrightarrow{V_g}$, $\overrightarrow{V_{ag}}$, ω e T.

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o\ )\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_{ag}}\right) - (\beta y\ )\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_g}\right)$$

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\xi_g + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\overrightarrow{V_g} = \frac{1}{f_0}\hat{k} \times \nabla\Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = -\frac{RT}{P}$$

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0$$

Como obter a equação da termodinâmica?

$$\frac{DT}{Dt_g} - \frac{\sigma P}{R}\omega = \frac{J}{C_p}$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

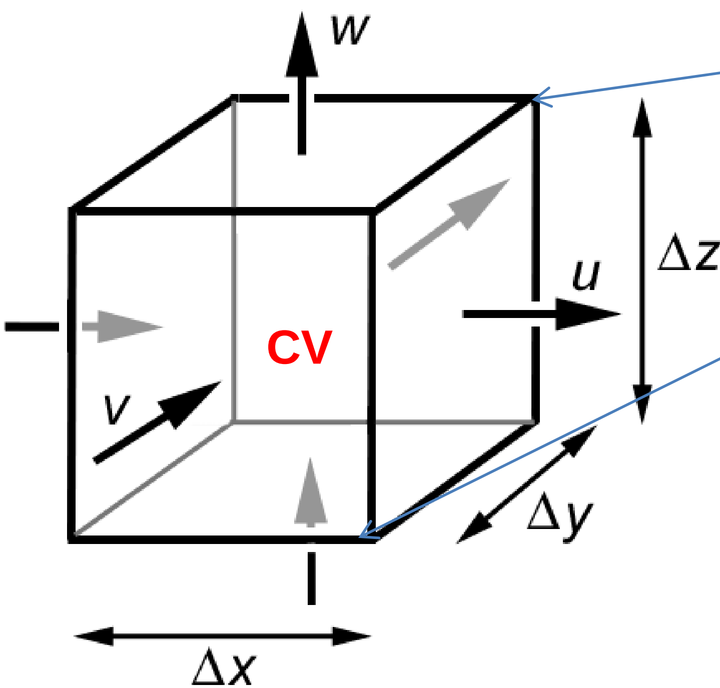
$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\xi_g + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Obtida na aula anterior

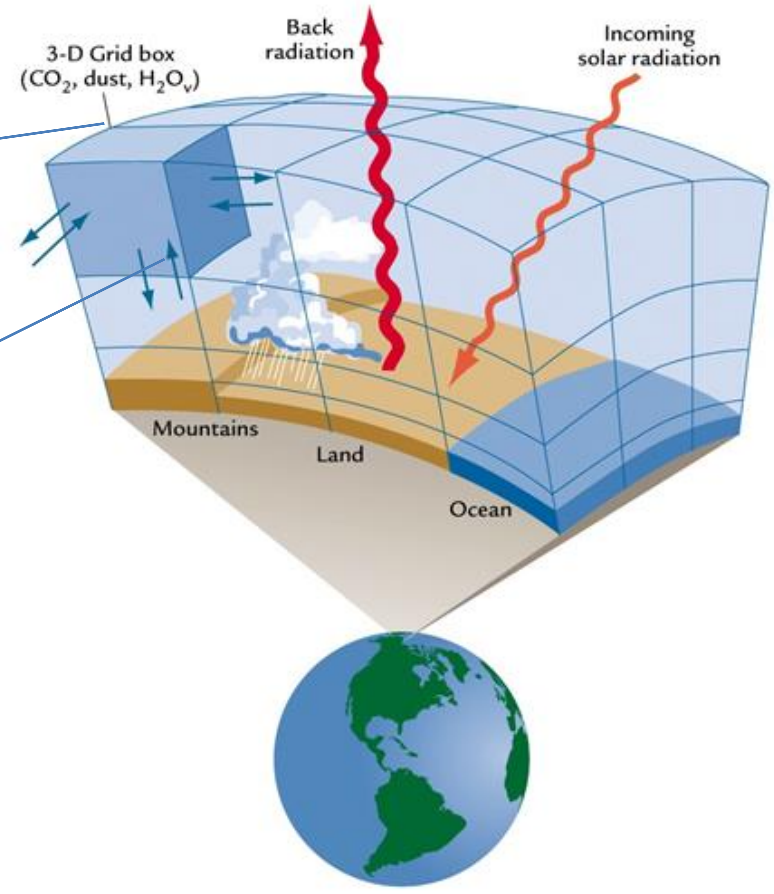
Como Derivar a Equação da Termodinâmica

$$\boxed{\frac{DT}{Dt} = ?}$$

Como Derivar a Equação da Termodinâmica



Volume de controle VC ou CV



. GCMs divide Earth into grid cells and use laws of physics to represent real world climate [*Ruddiman,* 2001].

Equação da Termodinâmica

Considerações básicas da termodinâmica para a atmosfera:

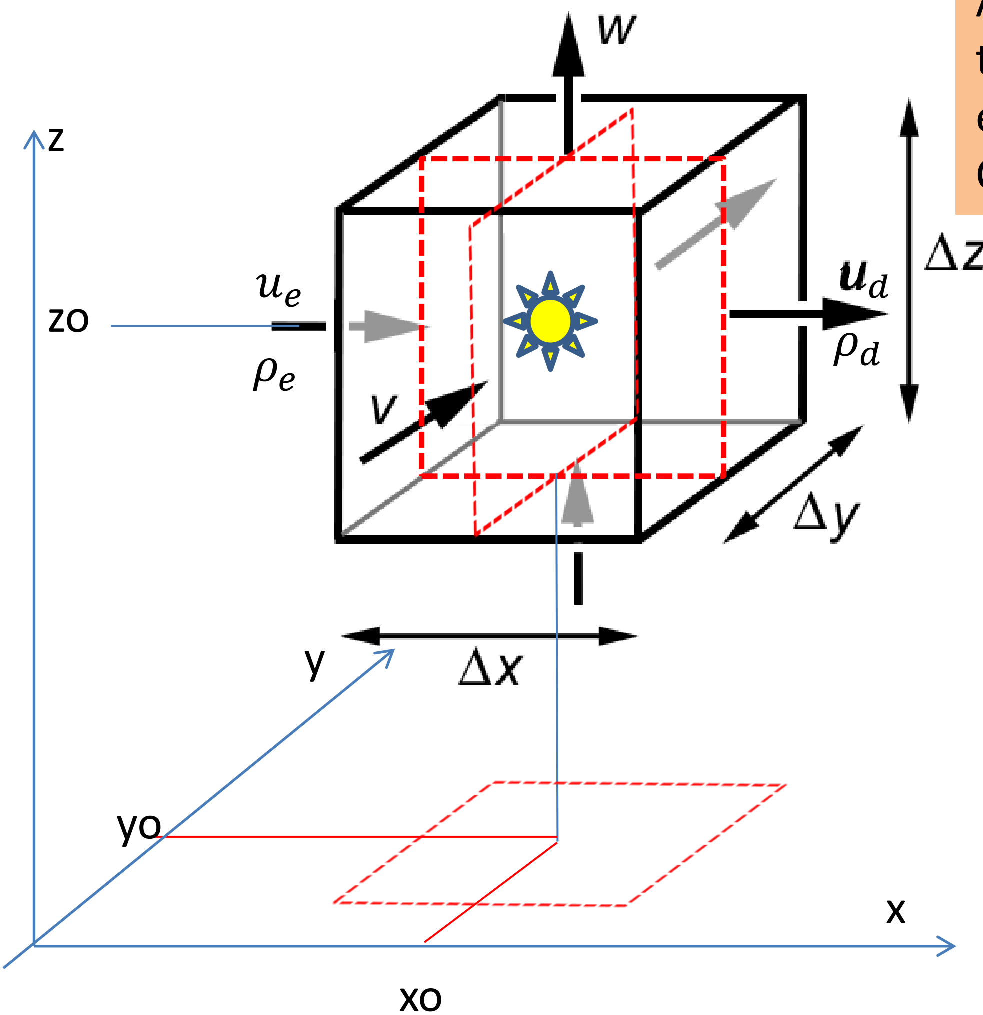
Estrutura da atmosfera Estática Obedece a hidrostática		Segue a lei da Equação de estado para os gases ideais
$P = -\rho g z$	=	$P = \rho R T$

Termodinâmica de uma atmosfera seca

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

PRINCIPIO → **VC=CV** → **Conservação de Energia**

A variação total da energia do CV = Variação da energia interna dentro do CV + Trabalho realizado nas face do CV



$$\Delta Q = \Delta U + W$$

Portanto:

$$\Delta U = \Delta Q - W$$

Conservação de Energia

A **variação pequena de temperatura** que ocorrem nos escoamento naturais permite uma **relação linear** entre o conteúdo de energia U do fluido e sua temperatura absoluta T , sob a forma

$$U = mC_vT$$

Onde

C_v=Calor especifico a volume constante

$$(C_v + R) = C_p$$

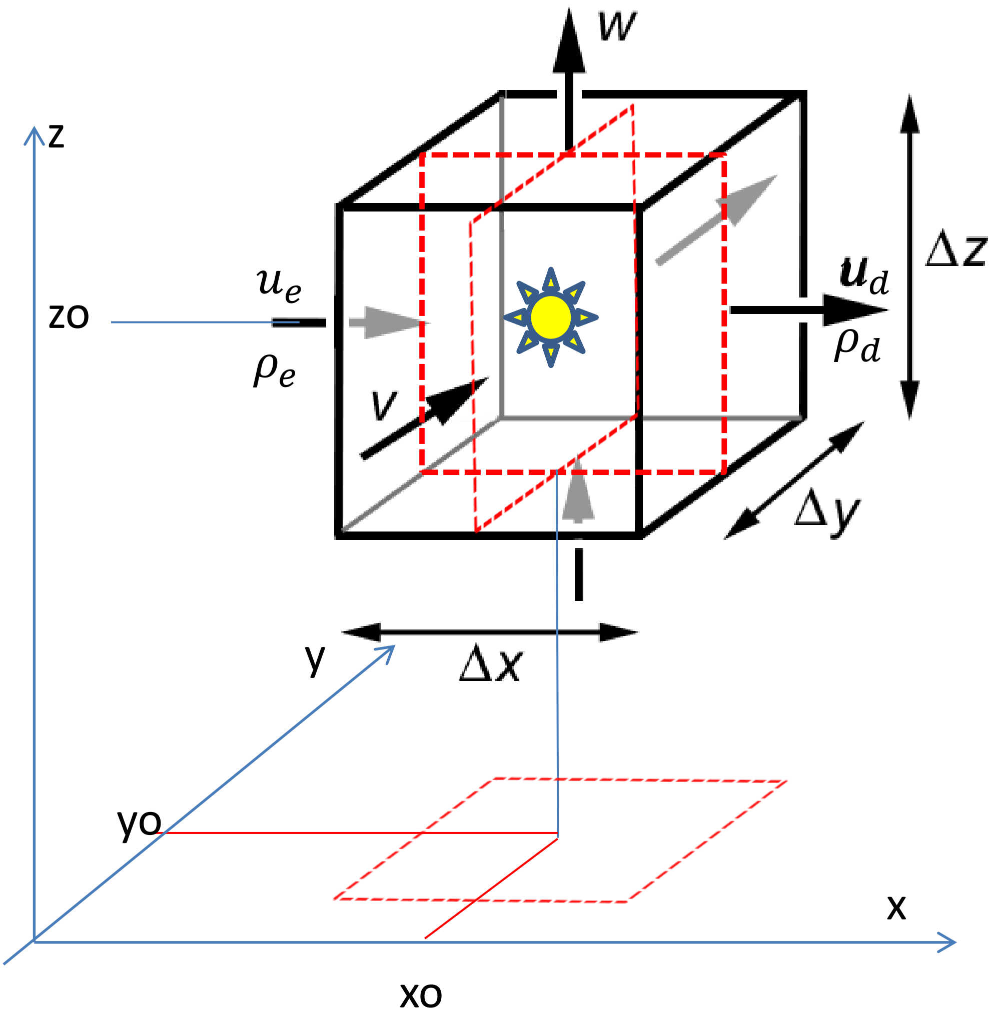
C_p=Calor especifico a pressão constante

$$C_v = C_p - R$$

R = Constante dos gases

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

PRINCIPIO —cv→ **Conservação de Energia**



Somando sobre todos o i-ésimos cv

$$\sum \Delta U_i = \sum \Delta Q_i - \sum W_i$$

$$mC_v \sum \Delta T_i = \sum \Delta Q_i - \sum P_i \Delta V$$

$$mC_v \sum \Delta T_i = \sum \Delta Q_i - \sum P_i \frac{m}{\rho}$$

Conservação de Energia

A Primeira lei da termodinâmica pode ser escrita na forma de variação de energia

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta \mathrm{U} = m C_v \Delta T}}$$

$$m C_v \Delta T = \Delta Q - \Delta W$$

Conservação de Energia

$$mC_v\Delta T = \Delta Q - \Delta W$$

Substituindo o valor de C_v

$$\boxed{C_v = C_p - R}$$

$$m(C_p - R)\Delta T = \Delta Q - \Delta W$$

$$mC_p\Delta T - mR\Delta T = \Delta Q - \Delta W$$

$$mC_p\Delta T - m\Delta RT = \Delta Q - \Delta W$$

Conservação de Energia

$$mC_p\Delta T - m\Delta RT = \Delta Q - \Delta W$$

Onde o trabalho feito pelo sistema é dado pela equação

$$\Delta W = F\Delta x$$

Pressão feita por um fluido sobre uma parede

Pressão

$$P = \frac{F}{Area}$$

$$F = P * Area$$

$$\Delta W = P * Area * \Delta x$$

$$\Delta W = P * \Delta V$$

$$\Delta W = P\, X \Delta\left(\frac{m}{\rho}\right)$$

Densidade

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$\Delta V = \Delta\left(\frac{m}{\rho}\right)$$

Conservação de Energia

$$mC_p\Delta T - m\Delta RT = \Delta Q - \Delta W$$

$$mC_p\Delta T - m\Delta RT = \Delta Q - P\ \boldsymbol{X}\Delta\left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

A equação dos gases ideais nos fornece a relação:

$$P = \rho RT$$

$$RT = \frac{P}{\rho}$$

$$mC_p\Delta T - m\Delta\frac{P}{\rho} = \Delta Q - P\ \boldsymbol{X}\Delta\left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

Conservação de Energia

$$mC_p\Delta T - m\Delta\frac{P}{\rho} = \Delta Q - P\,\boldsymbol{X}\Delta\left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

Para a conservação de energia a massa deve ser constante (m=cte).

$$mC_p\Delta T - m\Delta\frac{P}{\rho} = \Delta Q - \boldsymbol{m}P\,\boldsymbol{X}\Delta\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

Divide por Δt

$$mC_p\frac{\Delta T}{\Delta t} - m\,\frac{\Delta\frac{P}{\rho}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} - \boldsymbol{m}P\,\boldsymbol{X}\frac{\Delta\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}}\right)}{\Delta t}$$

Conservação de Energia

$$mC_p\frac{\Delta T}{\Delta t} - m\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} - mP\,\boldsymbol{X}\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

Fazendo o limite de $\Delta t \to 0$

$$\boxed{mC_p\frac{DT}{Dt} - m\frac{D}{Dt}\left(\frac{P}{\rho}\right)} = \boxed{\frac{DQ}{Dt}} - \boxed{mP\,\boldsymbol{X}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}}\right)}$$

Taxa de variação da energia interna no do sistema (VC) = Taxa total do calor transferido ao sistema (VC) - Taxa total do trabalho feito pelo sistema (VC)

Conservação de Energia

Derivada da divisão.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$mC_p\frac{DT}{Dt}-m\frac{D}{Dt}\left(\frac{P}{\rho}\right)=\frac{DQ}{Dt}-mP\,\boldsymbol{X}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

$$mC_p\frac{DT}{Dt}-m\left(\frac{\rho\frac{DP}{Dt}-P\frac{D\rho}{Dt}}{\rho^2}\right)=\frac{DQ}{Dt}-mP\,\boldsymbol{X}\left(\frac{\rho\frac{D1}{Dt}-1\frac{D\rho}{Dt}}{\rho^2}\right)$$

Para a conservação de energia a massa e o volume devem ser constantes $\rho=\frac{m}{V}$, ($\frac{D\rho}{Dt}$=0).

$$mC_p\frac{DT}{Dt}-m\frac{DP}{\rho Dt}+\cancel{m\frac{P}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}}=\frac{DQ}{Dt}+\cancel{m\frac{P}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}}$$

$$mC_p\frac{DT}{Dt}-m\frac{DP}{\rho Dt}=\frac{DQ}{Dt}$$

Conservação de Energia

$$mC_p\frac{DT}{Dt}-m\frac{DP}{\rho Dt}=\frac{DQ}{Dt}$$

$$C_p\frac{DT}{Dt}-\frac{DP}{\rho Dt}=\frac{D}{Dt}\left(\frac{Q}{m}\right)$$

$$q=\frac{Q}{m}$$

$$C_p\frac{DT}{Dt}-\frac{DP}{\rho Dt}=\frac{D(q)}{Dt}$$

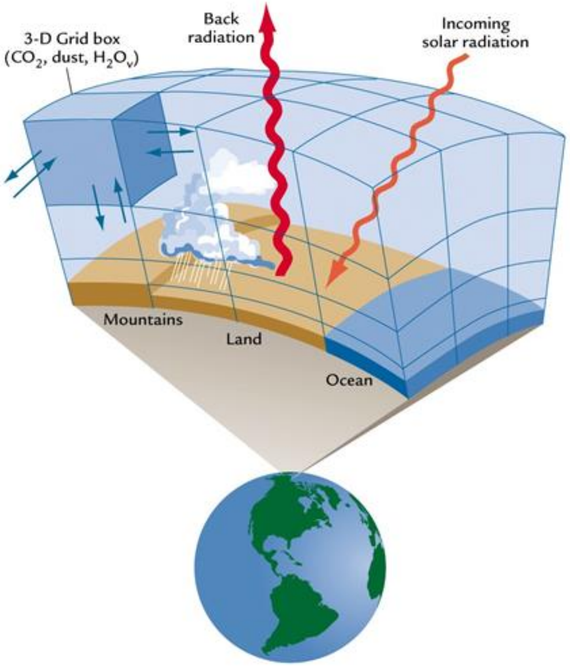
$$C_p\frac{DT}{Dt}-\frac{DP}{\rho Dt}=J$$

Conservação de Energia

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{\rho Dt} = J$$

$$J = \frac{D}{Dt}\left(\frac{Q}{m}\right) = \frac{D(q)}{Dt}$$

J = é a taxa de aquecimento por unidade de massa devido a radiação. Condução e liberação de calor latente



Equação da Termodinâmica

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{\rho Dt} = J$$

$$\frac{1}{\rho} = \alpha$$

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha \frac{DP}{Dt} = J$$

Equação da Termodinâmica

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha \frac{DP}{Dt} = J$$

$$\frac{DP}{Dt} = \omega$$

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha\omega = J$$

Equação da Termodinâmica

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha\omega = J$$

$$P = \rho RT$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho} = \frac{RT}{P}$$

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{RT}{P}\omega = J$$

Considere a equação da temperatura potencial:

$$\theta = T\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}}$$

Derive em função de P usando a relação:

Derivada da divisão.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{\partial\theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}} + T\left(\frac{R}{Cp}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}-1}\left(\frac{P_s{}'P - P_sP}{P^2}\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}} + T\left(\frac{R}{Cp}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}-1}\left(\frac{P_s{}'P - P_sP'}{P^2}\right)$$

Lembre-se P_s não varia com a altura

$$P_s{}' = \frac{dP_s}{dP} = 0$$

$$P' = \frac{dP}{dP} = 1$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}} + T\left(\frac{R}{Cp}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}-1}\left(\frac{P_s}{P}\right)\left(-\frac{1}{P}\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}} - T\left(\frac{R}{Cp}\frac{1}{P}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{\partial\theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}} - T\left(\frac{R}{Cp}\frac{1}{P}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}}$$

$$\left(\frac{P_s}{P}\right)^{-\frac{R}{C_p}}\frac{\partial\theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} - T\left(\frac{R}{Cp}\frac{1}{P}\right)$$

$$\boxed{\frac{\theta}{T} = \left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}}} \longleftrightarrow \boxed{\frac{T}{\theta} = \left(\frac{P_s}{P}\right)^{-\frac{R}{C_p}}}$$

$$\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} - \left(\frac{TR}{CpP}\right)$$

$$\left(\frac{TR}{CpP}\right) = -\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P}$$

Equação da Termodinâmica

$$\frac{DT}{Dt} - \frac{RT}{C_p P}\omega = \frac{J}{C_p}$$

<u>Parâmetro de estabilidade</u> em coordenada isobárica: **derivada da temperatura potencial**

$$\left(\frac{TR}{CpP}\right) = -\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P}$$

$$S_P = \frac{RT}{C_p P} = -\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P} = -T\frac{\partial \ln(\theta)}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P}$$

$$S_P = \frac{RT}{C_p P} = -T\frac{\partial \ln(\theta)}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P} \equiv -T\frac{\partial \ln(\theta)}{\partial P}$$

$$S_P = \frac{RT}{C_p P} \equiv -T\frac{\partial \ln(\theta)}{\partial P}$$

$$\frac{DT}{Dt} - S_P\omega = \frac{J}{C_p}$$

Equação da Termodinâmica

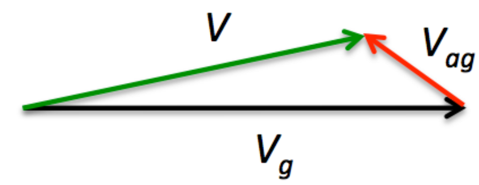
$$\frac{DT}{Dt} - S_P\omega = \frac{J}{C_p}$$

Aproximação Quase Geostrófica
Para a Equação da Termodinâmica

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{DT}{Dt} - \frac{\boldsymbol{RT}}{\boldsymbol{C_pP}}\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{C_p}}$$

$$\overrightarrow{V_{ag}} << \overrightarrow{V_g}$$



2. Desprese o seguinte.

- Orientação pelo vento ageostrófico
- Advecção de temperatura pleo vento ageostrófico .

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}\right).\nabla(T)$$

$$\overrightarrow{V_g} = u_g + v_g$$

Expanda os termos

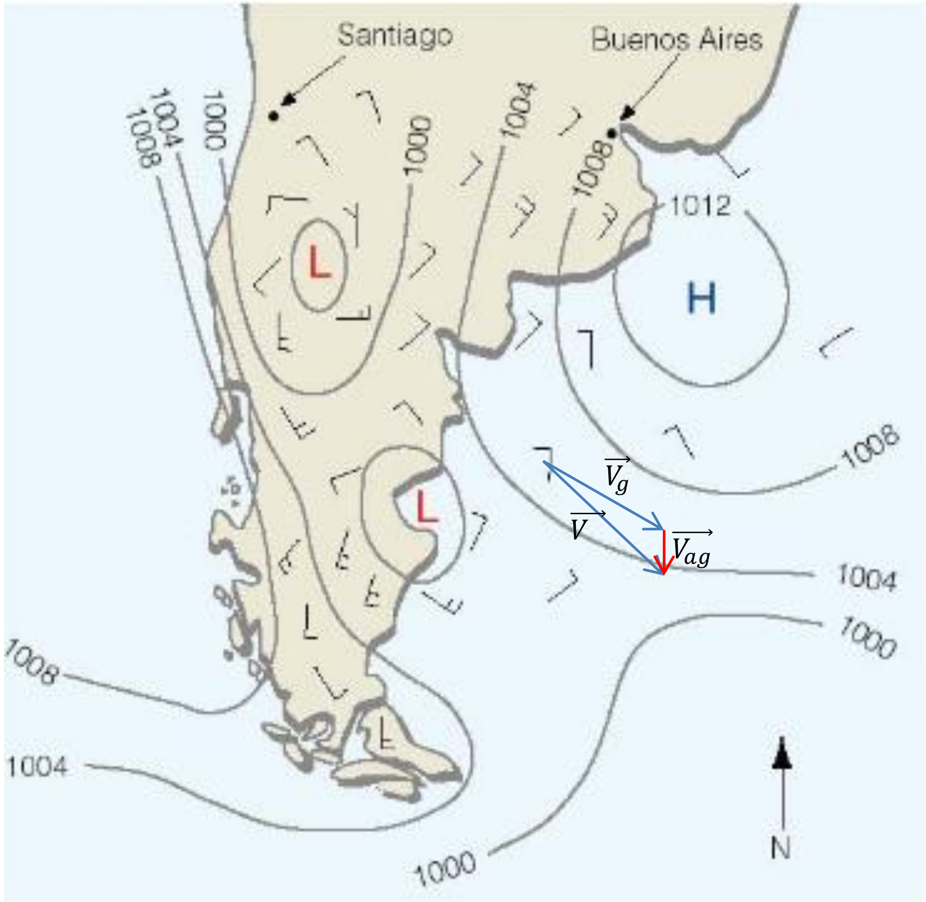
advecção ageostrófica de (T)

Mudança local doe(T)

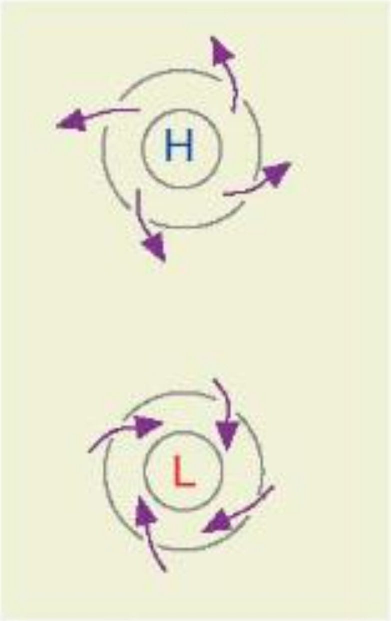
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\overrightarrow{V_g}\right).\nabla\left(\vec{T}\right) + \left(\overrightarrow{\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{ag}}}\right).\nabla(T)$$

Advecção geostrofica de (T)

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica



Condição válida para medias latitudes



Surface map
Southern Hemisphere

?

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

2. Desprese o seguinte.

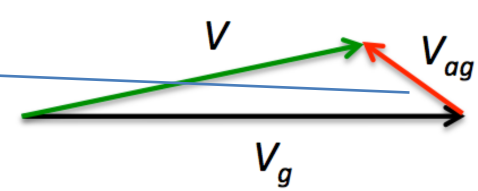
- Orientação pelo vento ageostrófico
- Advecção de temperatura pleo vento ageostrófico .

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\overrightarrow{V_g}).\nabla(\vec{T}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{V_{ag}}}).\nabla(T)$$

Considere

$$\overrightarrow{V_{ag}} << \overrightarrow{V_g}$$

$$\overrightarrow{V_{ag}} \quad \ll \quad \overrightarrow{V_g}$$



Portanto

$$(\overrightarrow{V_g}).\nabla(\vec{T}) \gg (\overrightarrow{V_{ag}}).\nabla(T)$$

$$(\overrightarrow{V_{ag}}).\nabla(T) \approx 0$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Portanto, para o escoamento quase geostrófico:

Mudança Geostrófica Local de T

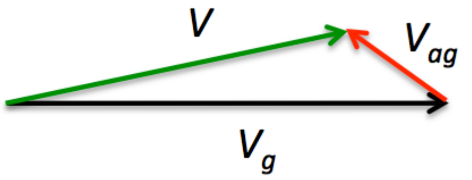
$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}} + \boxed{\left(\overrightarrow{V_g}\right).\nabla(T)}$$

Advecção Geostrófica de T

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

2. Desprese o seguinte (por análise de escala).

- Fricção.
- Orientação pelo vento ageostrófico
- Advecção de temperatura pleo vento ageostrófico .



$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\overrightarrow{V_g}).\nabla(T)$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + (\overrightarrow{V_g}).\nabla(T) = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\frac{\partial T}{\partial x} + v_g\frac{\partial T}{\partial y} - \omega\frac{\partial T}{\partial P}}$$

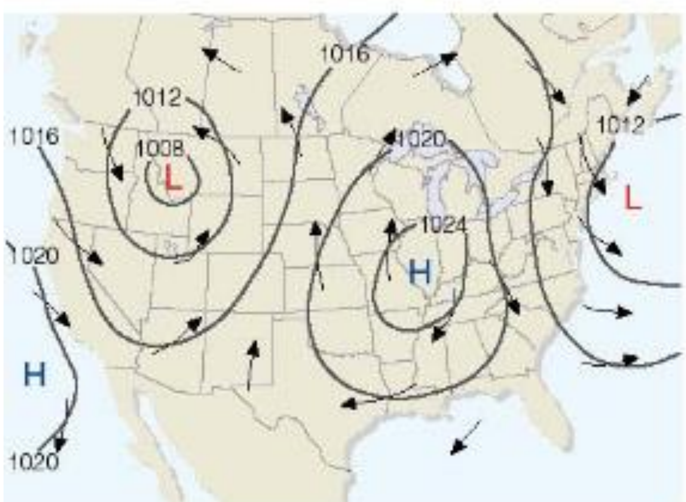
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

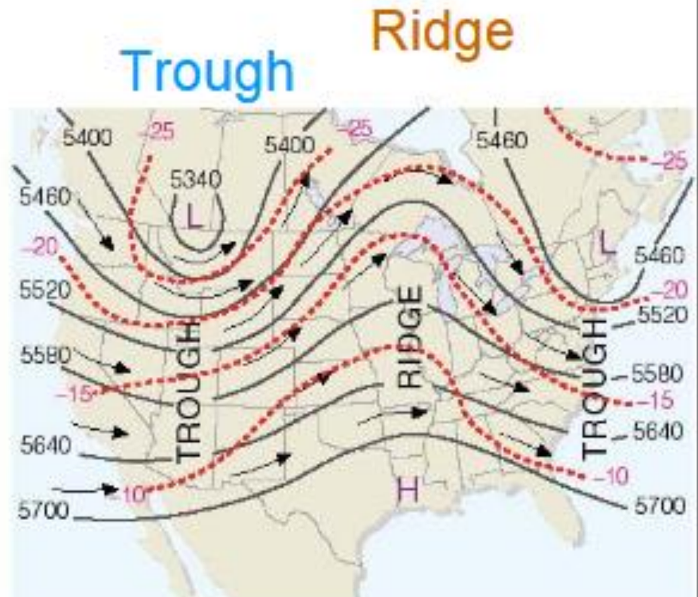
$$\boxed{\frac{DT}{Dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + (\overrightarrow{V_g}).\nabla(T) = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\frac{\partial T}{\partial x} + v_g\frac{\partial T}{\partial y} - \omega\frac{\partial T}{\partial P}}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\overrightarrow{V_g}).\nabla(T) = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\frac{\partial T}{\partial x} + v_g\frac{\partial T}{\partial y} - \boldsymbol{\omega\frac{\partial T}{\partial P}}$$

- **A advecção de temperatura pela velocidade vertical não pode ser despresada.**



(a) Surface map



(b) Upper-air map (500 mb)

$$\omega\frac{\partial T}{\partial P} \neq 0$$

$$\omega\frac{\partial T}{\partial P} \neq 0$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\boxed{\frac{DT}{Dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + (\overrightarrow{V_g}).\nabla(T) = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} - \omega \frac{\partial T}{\partial P}}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\overrightarrow{V_g}).\nabla(T) = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} - \boldsymbol{\omega} \frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial P}}$$

$Portanto\ a\ \ \boldsymbol{T}\ do\ VC = T_{tot}\ o\ que\ corresponde\ a\ temperatura\ total\ do\ CV$

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial T_{tot}}{\partial t} + (\overrightarrow{V_g}).\nabla(T_{tot}) = \frac{\partial T_{tot}}{\partial t} + u_g \frac{\partial T_{tot}}{\partial x} + v_g \frac{\partial T_{tot}}{\partial y} - \boldsymbol{\omega} \frac{\boldsymbol{\partial} T_{tot}}{\boldsymbol{\partial P}}$$

Temperatura total = Estado do Básico + perturbação

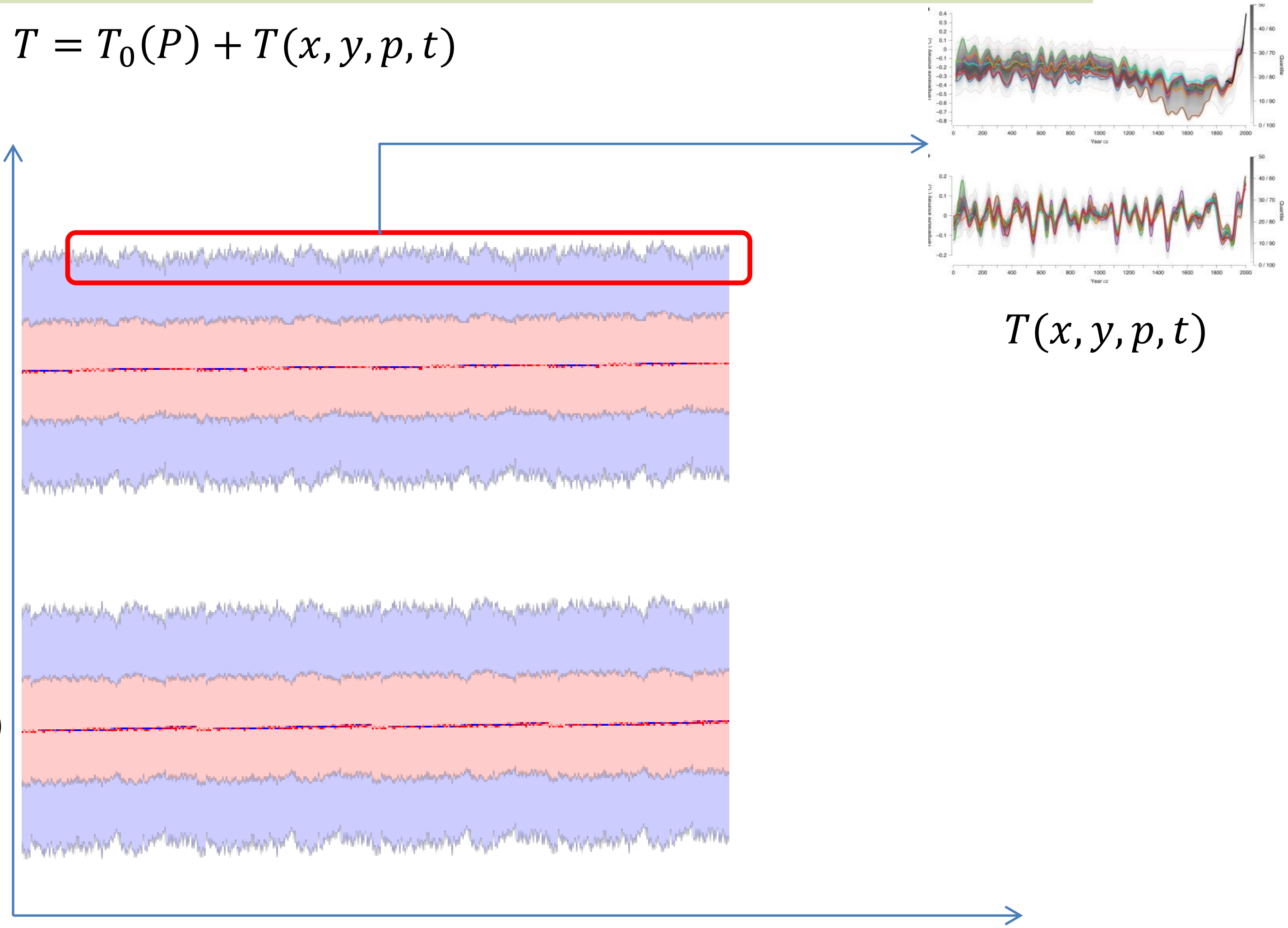
$$T_{tot} = T_0(P) + T(x, y, p, t)$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Temperatura total = Estado do Básico(media) + perturbação(anomalia)

$$T = T_0(P) + T(x, y, p, t)$$



$T(x, y, p, t)$

$T_0(P_2)$

$T = T_0(P)$

$T_0(P_1)$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial T_{tot}}{\partial t} + (\overrightarrow{V_g}).\nabla(T_{tot}) = \frac{\partial T_{tot}}{\partial t} + u_g\frac{\partial T_{tot}}{\partial x} + v_g\frac{\partial T_{tot}}{\partial y} - \boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{\partial} T_{tot}}{\boldsymbol{\partial P}}$$

Temperatura total = Estado do Básico + perturbação

$$T_{tot} = T_0(P) + T(x, y, p, t)$$

Substitua na equação acima:

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial(T_0 + T)}{\partial t} + (\overrightarrow{V_g}).\nabla(T_0 + T) = \frac{\partial(T_0 + T)}{\partial t} + u_g\frac{\partial(T_0 + T)}{\partial x} + v_g\frac{\partial(T_0 + T)}{\partial y} - \boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{\partial}(T_0 + T)}{\boldsymbol{\partial P}}$$

Abra os termos:

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T_0}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T_0}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial} T_0}{\boldsymbol{\partial P}} + \frac{\boldsymbol{\partial} T}{\boldsymbol{\partial P}}\right)$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T_0}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T_0}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial T_0}}{\boldsymbol{\partial P}} + \frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial P}}\right)$$

$$T_{tot} = T_0(P) + T(x,y,p,t)$$

na equação acima $T_0(P)$não depende de x,y,t:

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial P}}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial T_0}}{\boldsymbol{\partial P}}\right)$$

Lembre-se : $\rightarrow$ $\boxed{\left|\frac{\boldsymbol{\partial T_0}}{\boldsymbol{\partial P}}\right| \gg \left|\frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial P}}\right|}$

O gradiente vertical do estado médio é maior que o gradiente vertical do estado perturbado

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial P}}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial T_0}}{\boldsymbol{\partial P}}\right)$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{\boldsymbol{D}T_{tot}}{\boldsymbol{Dt}} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial} T}{\boldsymbol{\partial P}}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial} T_0}{\boldsymbol{\partial P}}\right)$$

Voltando q equação da termodinâmica completa:

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} - \frac{RT_{tot}}{C_p P}\omega = \frac{J}{C_p}$$

Substituímos a mesma temperatura no segundo termo da equação da termodinâmica

$$T_{tot} = T_0(P) + T(x, y, p, t)$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{DT_{tot}}{Dt} - \frac{RT_{tot}}{C_p P}\omega = \frac{J}{C_p}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial P}}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial T_0}}{\boldsymbol{\partial P}}\right) - \frac{RT_0}{C_p P}\omega - \frac{RT}{C_p P}\omega = \frac{J}{C_p}$$

$$\left|\frac{\boldsymbol{\partial T_0}}{\boldsymbol{\partial P}}\right| \gg \left|\frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial P}}\right|$$

O gradiente vertical do estado básico é maior que o estado perturbado

reagrupe os termos $T_0(P)$ *e* T**:**

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial P}} + \frac{RT}{C_p P}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial T_0}}{\boldsymbol{\partial P}} + \frac{RT_0}{C_p P}\right) = \frac{J}{C_p}$$

Procura-se um termo: $\longrightarrow$ $\boxed{\sigma = -\frac{RT_0}{P}\frac{d\ln\theta}{dP}}$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Para obter a relação indicada pela equação:

$$\sigma = -\frac{RT_0}{P}\frac{dln\theta}{dP}$$

Considere a equação da temperatura potencial:

$$\theta = T\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}}$$

Derive em função de P usando a relação:

Derivada da divisão.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{\partial\theta}{\partial P}=\frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}}+T\left(\frac{R}{Cp}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}-1}\left(\frac{P_s{}'P-P_sP}{P^2}\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial P}=\frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}}+T\left(\frac{R}{Cp}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}-1}\left(\frac{P_s{}'P-P_sP'}{P^2}\right)$$

Lembre-se P_s não varia com a altura

$$P_s{}'=\frac{dP_s}{dP}=0$$

$$P'=\frac{dP}{dP}=1$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial P}=\frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}}+T\left(\frac{R}{Cp}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}-1}\left(\frac{P_s}{P}\right)\left(-\frac{1}{P}\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial P}=\frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}}-T\left(\frac{R}{Cp}\frac{1}{P}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{\partial\theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}} - T\left(\frac{R}{Cp}\frac{1}{P}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}}$$

$$\left(\frac{P_s}{P}\right)^{-\frac{R}{C_p}}\frac{\partial\theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} - T\left(\frac{R}{Cp}\frac{1}{P}\right)$$

$$\boxed{\frac{\theta}{T} = \left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}}} \longleftrightarrow \boxed{\frac{T}{\theta} = \left(\frac{P_s}{P}\right)^{-\frac{R}{C_p}}}$$

$$\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} - \left(\frac{TR}{CpP}\right)$$

Voltando para a Equação da Termodinâmica

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial} T}{\boldsymbol{\partial P}} + \frac{RT}{C_p P}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial} T_0}{\boldsymbol{\partial P}} + \frac{RT_0}{C_p P}\right) = \frac{J}{C_p}$$

$$\frac{T}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} - \left(\frac{TR}{CpP}\right)$$

Portanto:

$$\left(\frac{TR}{CpP}\right) = -\frac{T}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial} T}{\boldsymbol{\partial P}} - \frac{T}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial} T_0}{\boldsymbol{\partial P}} - \frac{T_0}{\theta_0}\frac{\partial \theta_0}{\partial P} + \frac{\partial T_0}{\partial P}\right) = \frac{J}{C_p}$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

Usando equação termodinâmica para escoamento com aproximação quase geostrófica:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial}T}{\boldsymbol{\partial P}} - \frac{T}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{\partial}T_0}{\boldsymbol{\partial P}} - \frac{T_0}{\theta_0}\frac{\partial \theta_0}{\partial P} + \frac{\partial T_0}{\partial P}\right) = \frac{J}{C_p}$$

$$\frac{T}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} + \left(\frac{TR}{CpP}\right)$$

$$f(y) = ln(y)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial ln(\theta)}}{\boldsymbol{\partial P}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\theta}}\frac{\boldsymbol{\partial \theta}}{\boldsymbol{\partial P}}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(-\boldsymbol{T}\frac{\boldsymbol{\partial} ln\theta}{\boldsymbol{\partial P}} + 2\frac{\partial T}{\partial P}\right) - \boldsymbol{\omega}\left(-T_0\frac{\boldsymbol{\partial} ln\theta_0}{\boldsymbol{\partial P}} + 2\frac{\partial T_0}{\partial P}\right) = \frac{J}{C_p}$$

Previsão Quase Geostrófica

Usando equação termodinâmica para escoamento com aproximação quase geostrófica:

$$\frac{DT}{Dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\boldsymbol{\omega}\left(-\boldsymbol{T}\frac{\boldsymbol{\partial} ln\theta}{\boldsymbol{\partial P}}+2\frac{\partial T}{\partial P}\right)-\boldsymbol{\omega}\left(-T_0\frac{\boldsymbol{\partial} ln\theta_0}{\boldsymbol{\partial P}}+2\frac{\partial T_0}{\partial P}\right)=\frac{J}{C_p}$$

$$\frac{DT}{Dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{R}}\left(-\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{T}\frac{\boldsymbol{\partial} ln\theta}{\boldsymbol{\partial P}}+2\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}}\frac{\partial T}{\partial P}\right)-\boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{R}}\left(-\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}}T_0\frac{\boldsymbol{\partial} ln\theta_0}{\boldsymbol{\partial P}}+2\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}}\frac{\partial T_0}{\partial P}\right)=\frac{J}{C_p}$$

$$\sigma=-\frac{RT_0}{P}\frac{dln(\theta_0)}{dP}+2\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}}\frac{\partial T_0}{\partial P}$$

Previsão Quase Geostrófica

Usando equação termodinâmica para escoamento com aproximação quase geostrófica:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{R}}\left(-\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{T}\frac{\boldsymbol{\partial} ln\theta}{\boldsymbol{\partial P}} + 2\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}}\frac{\partial T}{\partial P}\right) - \boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{R}}\left(-\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}}T_0\frac{\boldsymbol{\partial} ln\theta_0}{\boldsymbol{\partial P}} + 2\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}}\frac{\partial T_0}{\partial P}\right) = \frac{J}{C_p}$$

$$\sigma = -\frac{RT_0}{P}\frac{dln(\theta_0)}{dP} + 2\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}}\frac{\partial T_0}{\partial P}$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = -\frac{\boldsymbol{RT}}{\boldsymbol{P}}\frac{\boldsymbol{\partial} ln\theta}{\boldsymbol{\partial P}} + 2\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}}\frac{\partial T}{\partial P}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{R}}(\sigma') - \boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{R}}(\sigma) = \frac{J}{C_p}$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

Usando equação termodinâmica para escoamento com aproximação quase geostrófica:

$$\boldsymbol{\sigma'} = -\frac{\boldsymbol{RT}}{\boldsymbol{P}}\frac{\boldsymbol{\partial ln\theta}}{\boldsymbol{\partial P}} + 2\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}}\frac{\partial T}{\partial P}$$

$$\sigma = -\frac{RT_0}{P}\frac{dln(\theta_0)}{dP} + 2\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}}\frac{\partial T_0}{\partial P}$$

$$\left|-\frac{RT_0}{P}\frac{dln(\theta_0)}{dP}\right| \gg \left|2\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}}\frac{\partial T_0}{\partial P}\right|$$

$$\boldsymbol{\sigma'} \equiv -\frac{\boldsymbol{RT}}{\boldsymbol{P}}\frac{\boldsymbol{\partial ln\theta}}{\boldsymbol{\partial P}}$$

$$\sigma \equiv -\frac{RT_0}{P}\frac{dln(\theta_0)}{dP}$$

$$\left|\frac{dln(\theta_0)}{dP}\right| \gg \left|\frac{\boldsymbol{\partial ln\theta}}{\boldsymbol{\partial P}}\right|$$

O gradiente vertical do estado básico é maior que o estado perturbado

$$\boldsymbol{\sigma'} \ll \boldsymbol{\sigma}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{R}}(\sigma') - \boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{R}}(\sigma) = \frac{J}{C_p}$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

Usando equação termodinâmica para escoamento com aproximação quase geostrófica:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{R}}(\sigma') - \boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{R}}(\sigma) = \frac{J}{C_p}$$

$$\boldsymbol{\sigma}' \ll \boldsymbol{\sigma}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{R}}(\sigma) = \frac{J}{C_p}$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

Usando equação termodinâmica para escoamento com aproximação quase geostrófica:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_g\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + v_g\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{R}}(\sigma) = \frac{J}{C_p}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V_g} \cdot \nabla\right)T - \frac{\sigma P}{R}\omega = \frac{J}{C_p}$$

$$\boxed{\frac{DT}{Dt_g} - \frac{\sigma P}{R}\omega = \frac{J}{C_p}}$$

Podem set reescrita em função de Φ e ω:
Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático: $\frac{J}{C_p}$

Previsão Quase Geostrófica

A equação de tendência de altura QG

A equação de tendência de altura QG é usada para entender e diagnosticar o desenvolvimento e decaimento de sistemas climáticos em larga escala.

Previsão Quase Geostrófica

A equação de tendência de altura QG

Usando as equações da vorticidade relativa quase geostrófica e a equação da termodinâmica:

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\xi_g + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\right)T - \frac{\sigma P}{R}\omega = \frac{J}{C_p}$$

- **Podem set reescrita em função de Φ e ω:**
- **Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático:**$\frac{J}{C_p}$

Previsão Quase Geostrófica

A equação de tendência de altura QG

Pode-se eliminar ω nas equações usando a relação de Φ com $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ definimos como tendência de geopotencial.

$$\chi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Usando a hidrostática

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

A equação de tendência de altura QG

Aproximação hidrostática (formulário de coordenadas de pressão)

$$P = -\rho g z$$

$$P = \rho R T$$

$$\rho = \frac{RT}{P}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$\partial P = -\rho g \partial z$$

$$\frac{\partial g z}{\partial P} = -\rho$$

$$\boldsymbol{\Phi = gz}$$

Potencial gravitacional por unidade de massa (Trabalho em Jaule para elevar 1kg de uma altura z a z+dz)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = -\frac{RT}{P}$$

$$T = -\frac{P}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial P}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Exercicio

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\right) T - \frac{\sigma P}{R}\omega = \frac{J}{C_p}$$

1) Quando elimina-se o termo de aquecimento diabático na equação quase geostrófica da termodinâmica :$\frac{J}{C_p}$:, devido a radiação e liberação de calor latente. Trabalha-se com que tipo de processo termodinâmico? Explique usando a 1 lei da termodinâmica.

R:

2) Qual a importância deste processo termodinâmico na região tropical e latitudes médias?

R: