Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Teoria Quase Geostrofica e Aplicações :
Aproximações e Equações
MET 0225 Sinótica-Dinâmica
Meteorologia I

Instrutor: Paulo Kubota
paulo.kubota@inpe.br
012-3186-8400

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Paulo Kubota

data	Tópicos
15/04/2021	PBL
20/04/2021	PBL
22/04/2021	PBL
27/04/2021	QG Vorticity. eq.
29/04/2021	QG Vorticity. eq.
04/05/2021	QG Vorticity. eq.
06/05/2021	Geop. Tend. eq.
11/05/2021	Geop. Tend. eq.
13/05/2021	Geop. Tend. eq.
18/05/2021	Omega and Vetor Q
20/05/2021	Omega and Vetor Q
25/05/2021	Omega and Vetor Q
27/05/2021	Avaliação 1
01/06/2021	Avaliação 2

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Motivação.
O desejo de um sistema de equações simplificado, mas que retenha os principais processos dinâmicos necessários para descrever, diagnosticar e entender o comportamento de sistemas climáticos em larga escala.

Palavras chaves.
“As equações e suas derivações são reconhecidamente difíceis. É importante que não se memorize apenas as equações de maneira mecânica. É muito mais importante entender o que eles significam fisicamente. ” - Howie Bluestein.

Suposição abrangente da teoria QG.
O número de Rossby (R0 = U / fL) é pequeno, o que nos permite desprezar o vento ageostrófico em alguns (mas não todos) termos das equações que governam o movimento.

Equações governantes e suas derivações.
A teoria QG é baseada em versões simplificadas das equações de movimento, equação de continuidade e equação termodinâmica de energia.

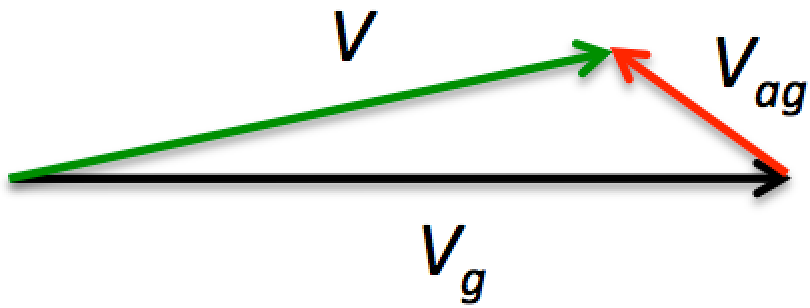
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

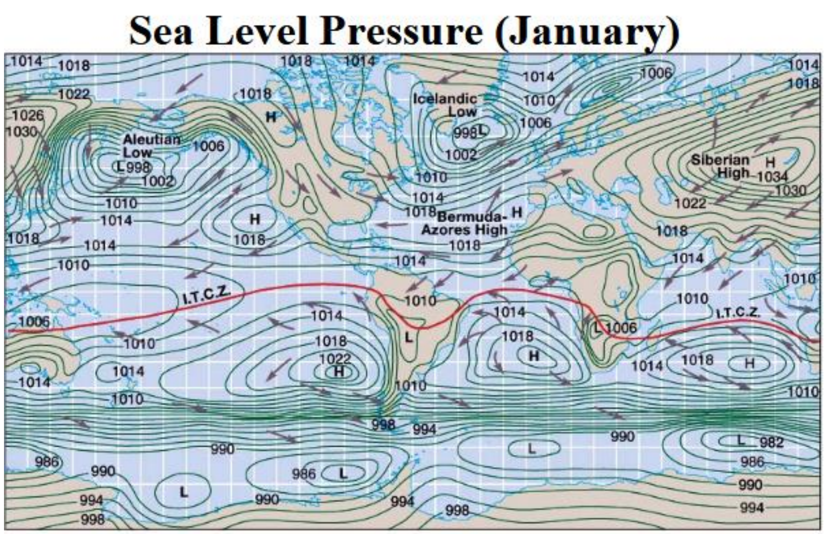
Equação do momento horizontal.

<u>**Derivação**</u>

1. Divida o momento em componentes geostróficos e ageostróficos

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}$$





Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala

momentum

$$\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial t} + (\overline{u_j})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j} = -g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k}) - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} - \frac{\partial\left(\overline{\boldsymbol{u_j}'\boldsymbol{u_i}'}\right)}{\partial x_j} + \nu\frac{\partial^2(\overline{u_i})}{\partial {x_j}^2}$$

Advecção media | gravidade | Coriolis | Gradiente de Pressão | Transporte Turbulento | Estresse Viscoso

2. Desprese o seguinte.

- Fricção.
- Orientação pelo vento ageostrófico e velocidade vertical.
- Advecção do momento ageostrófico .
- Tendência local do momento ageostrófico .

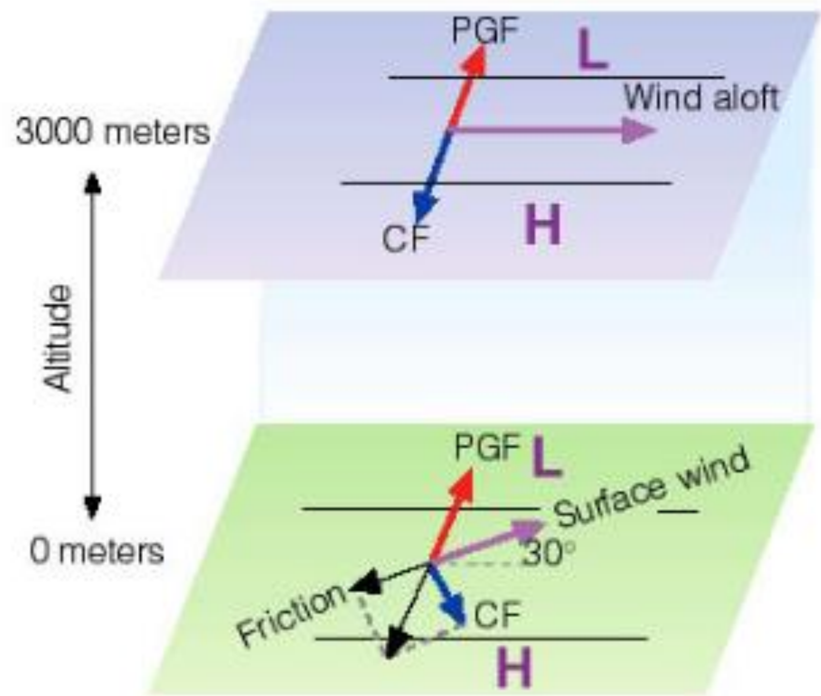
Efeito do atrito da superfície?

$$Fricção = -\frac{\partial\left(\overline{u_j{}'u_i{}'}\right)}{\partial x_j} + \nu\frac{\partial^2(\overline{u_i})}{\partial {x_j}^2}$$

Se a velocidade do vento <u>for reduzida por atrito</u>.

A força de Coriolis diminuirá e não equilibrará completamente a força do gradiente de pressão.

O desequilíbrio da força (PGF> CF) empurra o vento em direção à baixa pressão



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

2. Desprese o seguinte.

- **Fricção (PBL->** abaixo de ~ 1-2 km parte da atmosfera que sofre influencia do atrito**).**

- O ar em contato com a superfície sofre atrito, diminuindo efetivamente a velocidade do vento.

Magnitude: depende da velocidade do vento e da rugosidade da superfície.

Direção : oposta ao movimento da parcela aérea

análise de escala

momentum

$$\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial t} + (\overline{u_j})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j} = -g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k}) - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção media

gravidade

Coriolis

Gradiente de Pressão

Atmosfera livre: a atmosfera acima da PBL isenta de efeitos de atrito.

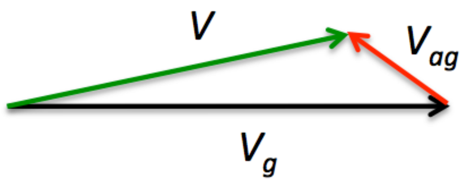
análise de escala

2. Faça as considerações na aceleração local e advectiva.

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.\nabla\vec{V}$$

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}$$



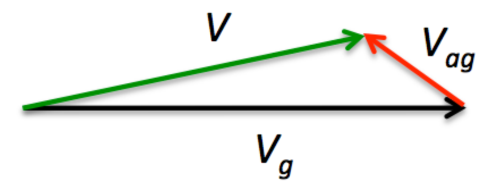
$$\frac{D\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}}{Dt} = \frac{\partial\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}\right).\nabla\left(\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}\right)$$

Camada Limite Planetária

2. Desprese o seguinte.

- Orientação pelo vento ageostrófico
- velocidade vertical.
- Advecção do momento ageostrófico .
- Tendência local do momento ageostrófico .

$$\overrightarrow{V_{ag}} << \overrightarrow{V_g}$$



$$\frac{D\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}}{Dt} = \frac{\partial\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}}{\partial t} + (\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}).\nabla(\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}})$$

Expanda os termos

Aceleração local do $(\overrightarrow{V_g})$

Aceleração advectiva geostrofica do $(\overrightarrow{V_g})$

Aceleração advectiva geostrofica $(\overrightarrow{V_{ag}})$

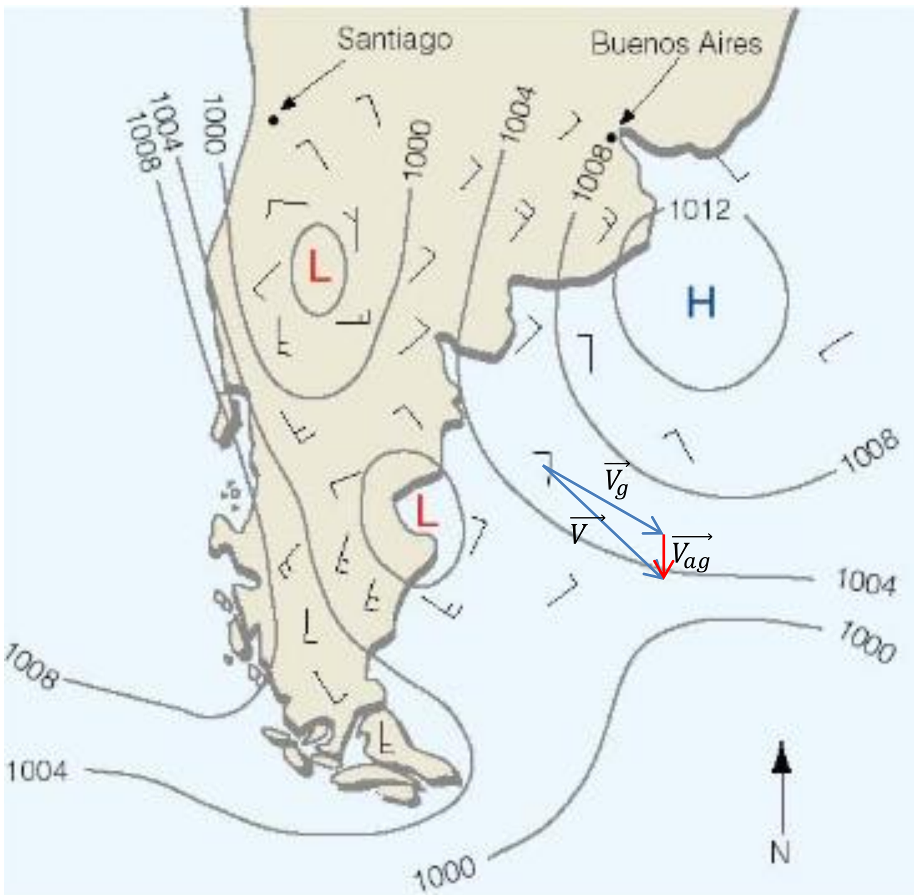
$$\frac{\partial\overrightarrow{V_g}}{\partial t} + \frac{\partial\overrightarrow{V_{ag}}}{\partial t} + (\overrightarrow{V_g}).\nabla(\overrightarrow{V_g}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{V_{ag}}}).\nabla(\overrightarrow{V_g}) + (\overrightarrow{V_g}).\nabla(\overrightarrow{\boldsymbol{V_{ag}}}) + (\overrightarrow{\boldsymbol{V_{ag}}}).\nabla(\overrightarrow{\boldsymbol{V_{ag}}})$$

Aceleração local do $(\overrightarrow{V_{ag}})$

Aceleração advectiva ageostrófica do $(\overrightarrow{V_g})$

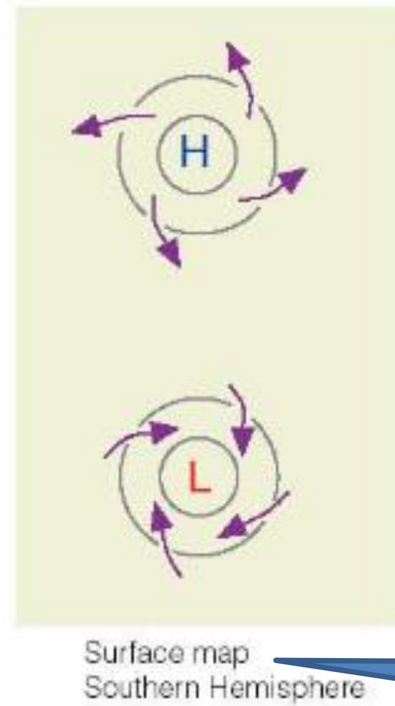
Aceleração advectiva ageostrófica $(\overrightarrow{V_{ag}})$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica



Em latitudes médias

$$\boxed{\overrightarrow{V_{ag}} << \overrightarrow{V_g}}$$



?

Escoamento aproximadamente geostrofico $\boxed{\vec{V} \cong \overrightarrow{V_g}}$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

2. Desprese o seguinte.

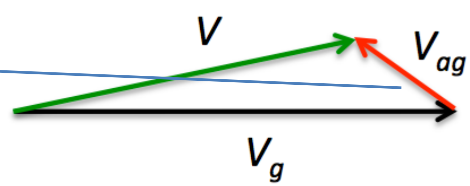
- Orientação pelo vento ageostrófico $\boxed{\vec{V} \cong \vec{V_g}}$
- velocidade vertical.
- Advecção do momento ageostrófico .
- Tendência local do momento ageostrófico .

$$\frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + \frac{\partial \overrightarrow{V_{ag}}}{\partial t} + (\vec{V_g}).\nabla(\vec{V_g}) + (\overrightarrow{V_{ag}}).\nabla(\vec{V_g}) + (\vec{V_g}).\nabla(\overrightarrow{V_{ag}}) + (\overrightarrow{V_{ag}}).\nabla(\overrightarrow{V_{ag}})$$

Considere

$\overrightarrow{V_{ag}} << \vec{V_g}$

$$\overrightarrow{V_{ag}} \quad \ll \quad \vec{V_g}$$



Portanto $\overrightarrow{V_{ag}} \cong 0$

$$\frac{\partial \overrightarrow{V_{ag}}}{\partial t} \approx 0, \qquad (\overrightarrow{V_{ag}}).\nabla(\vec{V_g}) \approx 0, \qquad (\vec{V_g}).\nabla(\overrightarrow{V_{ag}}) \approx 0, \qquad (\overrightarrow{V_{ag}}).\nabla(\overrightarrow{V_{ag}}) \approx 0$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Portanto, para o escoamento quase geostrófico:

Aceleração Geostrófica Local

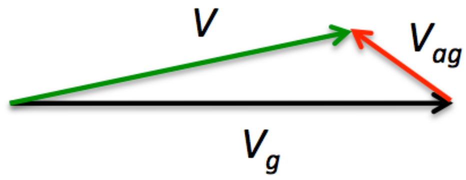
$$\boxed{\frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial t}} + \boxed{\left(\overrightarrow{V_g}\right).\nabla\left(\overrightarrow{V_g}\right)}$$

Aceleração Geostrófica Advectiva

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

2. Desprese o seguinte (por análise de escala).

- Fricção.
- Orientação pelo vento ageostrófico
- velocidade vertical.
- Advecção do momento ageostrófico .
- Tendência local do momento ageostrófico .



$$\frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{V_g}\right).\nabla\left(\overrightarrow{V_g}\right)$$

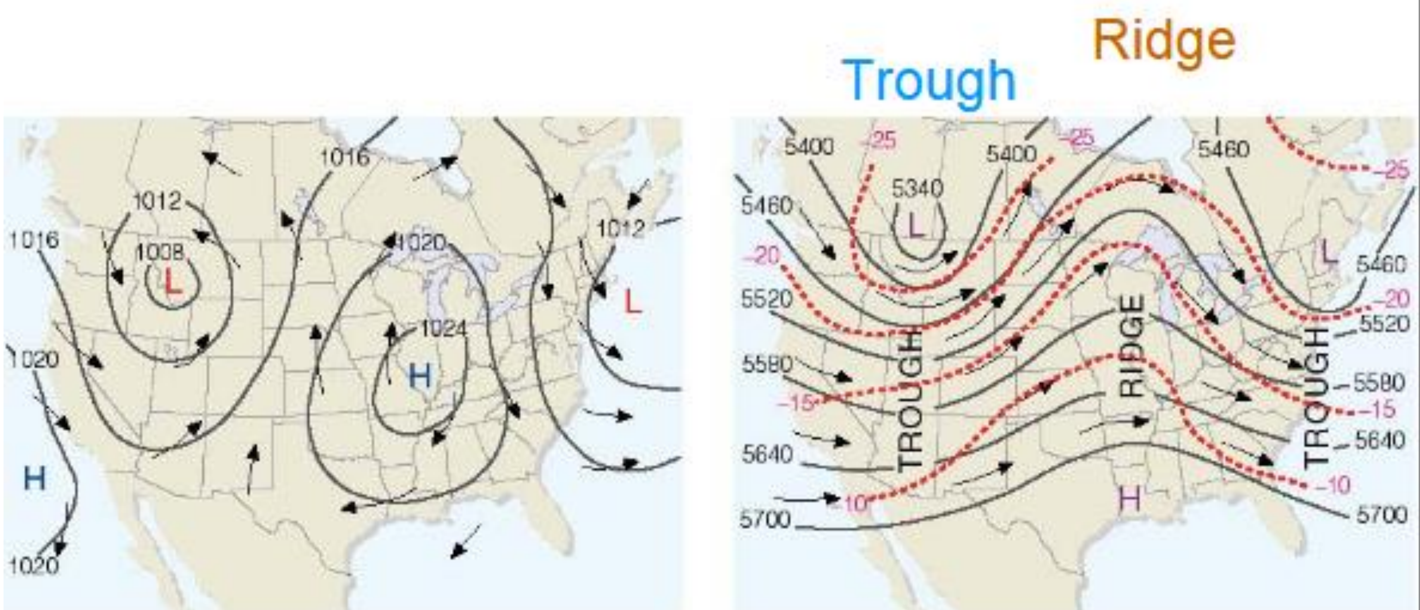
$$\boxed{\frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{V_g}\right).\nabla\left(\overrightarrow{V_g}\right) = \frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial t} + u_g\frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial x} + v_g\frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial y} - \omega\frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial P}}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\boxed{\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + (\vec{V_g}).\nabla(\vec{V_g}) = \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + u_g\frac{\partial \vec{V_g}}{\partial x} + v_g\frac{\partial \vec{V_g}}{\partial y} - \omega\frac{\partial \vec{V_g}}{\partial P}}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + (\vec{V_g}).\nabla(\vec{V_g}) = \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + u_g\frac{\partial \vec{V_g}}{\partial x} + v_g\frac{\partial \vec{V_g}}{\partial y} - \boldsymbol{\omega}\frac{\boldsymbol{\partial \vec{V_g}}}{\boldsymbol{\partial P}}$$

- **velocidade vertical pode ser despresada por analise de escala .**



(a) Surface map (b) Upper-air map (500 mb)

$$\omega\frac{\partial u_g}{\partial P} = 0$$

$$\omega\frac{\partial v_g}{\partial P} = 0$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + (\vec{V_g}).\nabla(\vec{V_g}) = \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial y} - \boldsymbol{\omega} \frac{\boldsymbol{\partial \overrightarrow{V_g}}}{\boldsymbol{\partial P}}$$

- **velocidade vertical pode ser despresada por analise de escala .**

$$\boldsymbol{\omega \ll u_g} \qquad \boldsymbol{\omega \ll v_g}$$

$$\boldsymbol{\omega} \frac{\boldsymbol{\partial \overrightarrow{V_g}}}{\boldsymbol{\partial P}} \ll u_g \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial x} \quad e \quad v_g \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial y}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + (\vec{V_g}).\nabla(\vec{V_g}) = \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + \vec{V_g}.\nabla_h \vec{V_g} \equiv \frac{D\vec{V_g}}{Dt_g}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + (\vec{V_g}).\nabla(\vec{V_g}) = \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + u_g\frac{\partial \vec{V_g}}{\partial x} + v_g\frac{\partial \vec{V_g}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + \vec{V_g}.\nabla_h\vec{V_g} \equiv \frac{D\vec{V_g}}{Dt_g}$$

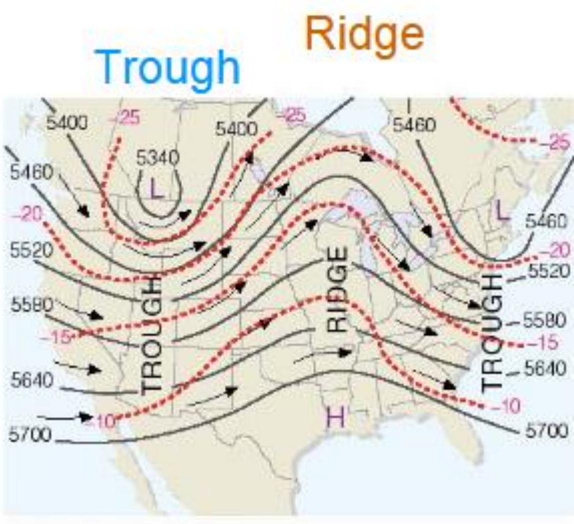
- velocidade vertical pode ser despresada por analise de escala .

Aceleração do escoamento

Aceleração escoamento Geostrófico

$\sim$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \frac{D\vec{V_g}}{Dt_g}$$



(b) Upper-air map (500 mb)

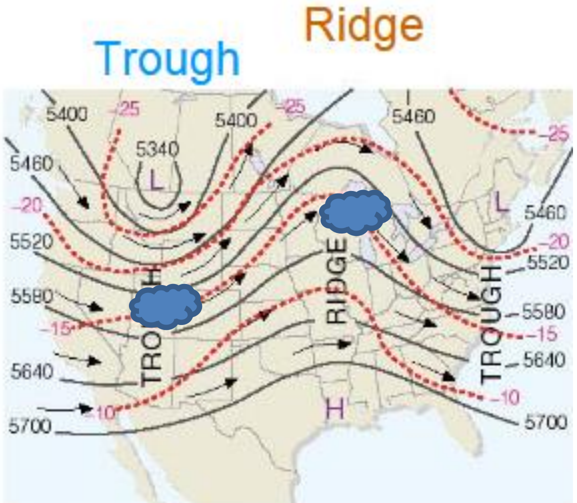
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

2. Aproximação (por análise de escala).

- Orientação pelo vento ageostrófico
- velocidade vertical.
- Advecção do momento ageostrófico .
- Tendência local do momento ageostrófico .

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \frac{D\vec{V_g}}{Dt_g}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{D}{Dt_g} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}$$



(b) Upper-air map (500 mb)

Interpretação física: A taxa de mudança de momento seguindo o movimento das parcelas é aproximadamente igual à taxa de mudança de momento geostrófico seguindo o escoamento geostrófico.

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Coriolis

$$\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial t} + (\overline{u_j})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j} = -g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k}) - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} - \frac{\partial\left(\overline{\boldsymbol{u_j}'\boldsymbol{u_i}'}\right)}{\partial x_j} + \nu\frac{\partial^2(\overline{u_i})}{\partial {x_j}^2}$$

momentum

$$\frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial t} + \vec{V_g}.\nabla_h\overrightarrow{V_g} = -g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - \boxed{2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k})} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção media

gravidade

Coriolis

Gradiente de Pressão

3. Suponha um plano β para latitude média (aproximação de expansão de Taylor para f)

3. Suponha um plano β para latitude média (aproximação de expansão de Taylor para f)

$$f = f_o + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}y^2 + \cdots$$

Ignorando termos de alta ordem

$$f = f_o + \frac{\partial f}{\partial y}y = f_o + \beta y$$

$$\boxed{f = f_o + \beta y}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Coriolis

$$\boxed{\frac{D\vec{V}}{Dt} = -g\,\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - f\hat{k}\times\vec{V} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}}$$

momentum

$$\frac{\partial\overrightarrow{V_g}}{\partial t} + \vec{V_g}.\nabla_h\overrightarrow{V_g} = -g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - \boxed{(f_o + \beta y)\hat{k}\times\left(\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}\right)} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção media

gravidade

Coriolis

Gradiente de Pressão

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

momentum

$$\frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial t} + \vec{V_g}.\nabla_h \overrightarrow{V_g} = -g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - (f_o + \beta y)\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}\right) - \boxed{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}}$$

Advecção media

gravidade

Coriolis

Gradiente de Pressão

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$\boxed{f = f_o + \beta y}$$

Isso permite que f_o substitua f na relação vento geostrófico, que se torna

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0}\hat{k} \times \nabla\Phi$$

$$f_0\vec{V}_g = \hat{k} \times \nabla\Phi \qquad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{vmatrix} \qquad -\frac{\partial\Phi}{\partial y}i + \frac{\partial\Phi}{\partial x}j$$

$$\hat{k} \times f_0\vec{V}_g = \hat{k} \times \hat{k} \times \nabla\Phi \qquad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} \qquad -\frac{\partial\Phi}{\partial x}i - \frac{\partial\Phi}{\partial y}j = -\nabla\Phi$$

$$\hat{k} \times f_0\vec{V}_g = -\nabla\Phi$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$\boxed{f = f_o + \beta y}$$

Isso permite que f_o substitua f na relação vento geostrófico, que se torna

momentum

$$\frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial t} + \overrightarrow{V_g}.\nabla_h \overrightarrow{V_g} = -g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - (f_o + \beta y)\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}\right) - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção media

gravidade

Coriolis

Gradiente de Pressão

$$P = \rho_0 g z$$

$$\frac{P}{\rho_0} = gz = \Phi$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{P}}{\rho_0}\right) = \frac{\partial(\bar{\Phi})}{\partial x_i} = \nabla\bar{\Phi}$$

Portanto

$$\hat{k} \times f_0 \overrightarrow{V_g} = -\nabla\Phi = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V_g} = -\nabla\Phi = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

momentum

$$\frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + \vec{V_g}.\nabla_h \vec{V_g} = -g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - (f_o + \beta y)\hat{k} \times \left(\vec{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}\right) - \boxed{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}}$$

Advecção media

gravidade

Coriolis

Gradiente de Pressão

$$P = \rho_0 g z$$

$$\frac{P}{\rho_0} = gz = \Phi$$

$$\frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + \vec{V_g}.\nabla_h \vec{V_g} = -g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - (f_o + \beta y)\hat{k} \times \left(\vec{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}\right) - \nabla\Phi$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força Peso pode ser desprezada

$$\frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + \vec{V_g}.\nabla_h \vec{V_g} = -(f_o + \beta y)\hat{k} \times (\vec{V_g} + \vec{V_{ag}}) - \nabla\Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V_g} = -\nabla\Phi = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

$$\frac{D\vec{V_g}}{Dt} = -(f_o + \beta y)\hat{k} \times (\vec{V_g} + \vec{V_{ag}}) + \hat{k} \times f_0 \vec{V_g}$$

$$\frac{D\vec{V_g}}{Dt} = -(f_o + \beta y)\hat{k} \times (\vec{V_g}) - (f_o + \beta y)\hat{k} \times (\vec{V_{ag}}) + \hat{k} \times f_0 \vec{V_g}$$

$$\frac{D\vec{V_g}}{Dt} = -\hat{k} \times f_o \vec{V_g} - (\beta y)\hat{k} \times (\vec{V_g}) - (f_o)\hat{k} \times (\vec{V_{ag}}) - (\beta y)\hat{k} \times (\vec{V_{ag}}) + \hat{k} \times f_0 \vec{V_g}$$

$$\frac{D\vec{V_g}}{Dt} = -(f_o)\hat{k} \times (\vec{V_{ag}}) - (\beta y)\hat{k} \times (\vec{V_g})$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força Peso pode ser desprezada

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(\beta y)\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_g}\right) - (f_o)\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_{ag}}\right) - (\beta y)\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_{ag}}\right)$$

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o)\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_{ag}}\right) - (\beta y)\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_g}\right) - (\beta y)\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_{ag}}\right)$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

5. Usando a análise de escala, pode-se demonstrar que $-(\beta y)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}})$ **pode ser desprezado, produzindo a forma final da equação do momento QG e** $\overrightarrow{V_g} \gg \overrightarrow{V_{ag}}$

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}}) - (\beta y)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_g}) - (\beta y)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}})$$

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}}) - (\beta y)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_g}) - (\beta y)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}})$$

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}}) - (\beta y)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_g})$$

Interpretação física: O primeiro termo à direita representa a força de Coriolis que atua no vento ageostrófico, o que leva a uma aceleração do escoamento geostrófico perpendicular ao vento ageostrófico.

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

4. Resumo das premissas e relações acima para reescrever a equação do momento horizontal

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla\Phi - f\hat{k}\times\vec{V}$$

$$\vec{V} = \vec{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}$$

$$\hat{k}\times f_0\vec{V_g} = -\nabla\Phi$$

$$f = f_o + \frac{\partial f}{\partial y}y = f_o + \beta y$$

$$\frac{D\vec{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}}{Dt} = \hat{k}\times f_0\vec{V_g} - (f_o + \beta y)\hat{k}\times\left(\vec{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}\right)$$

$$\frac{D\vec{V_g}}{Dt} + \frac{\overrightarrow{V_{ag}}}{Dt} = \hat{k}\times f_0\vec{V_g} - (f_o)\hat{k}\times\left(\vec{V_g}\right) - (\beta y)\hat{k}\times\left(\vec{V_g}\right) - (f_o)\hat{k}\times\left(\overrightarrow{V_{ag}}\right) - (\beta y)\hat{k}\times\left(\overrightarrow{V_{ag}}\right)$$

$$\frac{D\vec{V_g}}{Dt} + \frac{\overrightarrow{V_{ag}}}{Dt} = -(f_o)\hat{k}\times\left(\overrightarrow{V_{ag}}\right) - (\beta y)\hat{k}\times\left(\vec{V_g}\right) - (\beta y)\hat{k}\times\left(\overrightarrow{V_{ag}}\right)$$

$$\frac{D\vec{V_g}}{Dt} = -(f_o)\hat{k}\times\left(\overrightarrow{V_{ag}}\right) - (\beta y)\hat{k}\times\left(\vec{V_g}\right)$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

4. Equação do Momento Horizontal

$$\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial t} + (\overline{u_j})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j} = -g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k}) - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} - \frac{\partial\left(\overline{\boldsymbol{u_j}'\boldsymbol{u_i}'}\right)}{\partial x_j} + \nu\frac{\partial^2(\overline{u_i})}{\partial {x_j}^2}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{V_g}}{\partial t} + \overrightarrow{V_g}.\nabla_h\overrightarrow{V_g} = -g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - (f_o + \beta y)\hat{k}\times\left(\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}\right) - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o\ )\hat{k}\times\left(\overrightarrow{V_{ag}}\right) - (\beta y\ )\hat{k}\times\left(\overrightarrow{V_g}\right)$$

Palavras chaves.

“É **importante entender fisicamente** o processo de simplificação da equação de momentum. Cada termo da equação pode ser desprezado considerando alguma **suposição física** descrita nos slides anteriores.

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Aproximação hidrostática **(formulário de coordenadas de pressão)**

$$P = -\rho g z$$

$$P = \rho R T$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$\rho = \frac{RT}{P}$$

$$\partial P = -\rho g \partial z$$

$$\frac{\partial g z}{\partial P} = -\rho$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = -\frac{RT}{P}$$

$$\boldsymbol{\Phi = gz}$$

Potencial gravitacional por unidade de massa (Trabalho em Jaule para elevar 1kg de uma altura z a z+dz)

Aproximação hidrostática **(formulário de coordenadas de pressão)**

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = -\frac{RT}{P}$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação de continuidade

$$\nabla.\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u_g}{\partial P} = 0 \qquad \vec{V} = \overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}$$

$$\nabla.\left(\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}\right) = \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} + \frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0$$

Pode ser escrito na forma

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0$$

Desde que:

$$\nabla.\left(\overrightarrow{V_g}\right) = \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação de continuidade

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0$$

Prova matematica que $\nabla.\left(\overrightarrow{V_g}\right) = 0$

$$\nabla.\left(\overrightarrow{V_g}\right) = \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial x} = 0$$

$$\overrightarrow{V_g} = \frac{1}{f_0}\hat{k} \times \nabla\Phi \qquad \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{vmatrix} \qquad \left(0 - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - 0\right)\hat{\jmath} + (0-0)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{u_g} = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial\Phi}{\partial y} \qquad \overrightarrow{v_g} = \frac{1}{f_0}\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

$$\nabla.\left(\overrightarrow{V_g}\right) = \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{f_0}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f_0}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + \frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = 0$$

Interpretação física: O vento geostrófico não é divergente. A divergência e a velocidade vertical está associada ao escoamento ageostrófico .

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Prova matematica que $\nabla.\left(\overrightarrow{V_g}\right) = 0$

$$\overrightarrow{V_g} = \frac{1}{f_0}\hat{k} \times \nabla\Phi$$

$$\nabla.\left(\overrightarrow{V_g}\right) = \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0$$

Interpretação física: O vento geostrófico não é divergente. A divergência e a velocidade vertical está associada ao escoamento ageostrófico .

Equação da Energia Termodinâmica

Semelhante ao momento, despresa-se a advecção da temperatura pelo vento ageostrófico, no entanto, os efeitos da velocidade vertical são mantidos, uma vez que a velocidade vertical tem uma grande influência na temperatura através do aquecimento e resfriamento adiabáticos.

$$\frac{DT}{Dt_g} - \frac{\sigma P}{R}\omega = \frac{J}{C_p}$$

Onde:

$$\sigma = -\frac{RT}{P}\frac{dln(\theta)}{dP} = \frac{RT}{P}\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dP}$$

Assim, σ é proporcional à estabilidade estática.
Normalmente, assumimos que o escomaneto é adiabático (ou seja, J = 0), mas é possível incluir efeitos diabáticos, se desejado.

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Energia Termodinâmica

$$\frac{DT}{Dt_g} - \frac{\sigma P}{R}\omega = \frac{J}{C_p}$$

A advecção vertical não pode ser desprezada, pois forma a parte do termo de aquecimento e resfriamento adiabático.

Este termo deve ser mantido pois a estabilidade estática é grande o suficiente na escala sinótica. O aquecimento e o resfriamento adiabático pelo movimentos verticais é da mesma ordem da advecção horizontal de temperatura.

Divide a temperatura no estado básico que depende somente da pressão mais o desvio do estado básico.

$$T(x,y,P,t) = T_o(P) + T(x,y,P,t)$$

Assim somente é necessário o estado básico ser incluído no temo de estabilidade estática

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Sumário

A equação do momento QG, a relação do vento geostrófico, a aproximação hidrostática, a equação de continuidade e a equação de energia termodinâmica formam um conjunto fechado de equações para as variáveis dependentes Φ, $\overrightarrow{V_g}$, $\overrightarrow{V_{ag}}$, ω e T.

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o\,)\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_{ag}}\right) - (\beta y\,)\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_g}\right)$$

$$\overrightarrow{V_g} = \frac{1}{f_0}\hat{k} \times \nabla\Phi$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P} = -\frac{RT}{P}$$

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial P} = 0$$

$$\frac{DT}{Dt_g} - \frac{\sigma P}{R}\omega = \frac{J}{C_p}$$