

Teoria Quase Geostrofica e Aplicações:
Aproximações e Equações
MET 0225 Sinótica-Dinâmica
Meteorologia I
Instrutor: Paulo Kubota
paulo.kubota@inpe.br
012-3186-8400



Paulo Kubota

data	Tópicos
15/04/2021	PBL
20/04/2021	PBL
22/04/2021	PBL
27/04/2021	QG Vorticity. eq.
	QG Vorticity. eq.
	QG Vorticity. eq.
	Geop. Tend. eq.
	Geop. Tend. eq.
	Geop. Tend. eq.
	Omega and Vetor Q
	Omega and Vetor Q
	Omega and Vetor Q
	Avaliação 1
01/06/2021	Avaliação 2



Motivação.

O desejo de um sistema de equações simplificado, mas que retenha os principais processos dinâmicos necessários para descrever, diagnosticar e entender o comportamento de sistemas climáticos em larga escala.

Palayras chaves.

"As equações e suas derivações são reconhecidamente difíceis. É importante que não se memorize apenas as equações de maneira mecânica. É muito mais importante entender o que eles significam fisicamente." - Howie Bluestein.

Suposição abrangente da teoria QG.

O número de Rossby (R0 = U / fL) é pequeno, o que nos permite desprezar o vento ageostrófico em alguns (mas não todos) termos das equações que governam o movimento.

Equações governantes e suas derivações.

A teoria QG é baseada em versões simplificadas das equações de movimento, equação de continuidade e equação termodinâmica de energia.



Sumário

A equação do momento QG, a relação do vento geostrófico, a aproximação hidrostática, a equação de continuidade e a equação de energia termodinâmica formam um conjunto fechado de equações para as variáveis dependentes Φ , $\overrightarrow{V_a}$, $\overrightarrow{V_{ag}}$, ω e T.

$$\frac{\overrightarrow{DV_g}}{Dt} = -(f_o)\widehat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}}) - (\beta y)\widehat{k} \times (\overrightarrow{V_g})$$

$$\overrightarrow{V_g} = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = -\frac{RT}{P}$$

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0$$

$$\frac{DT}{Dt_g} - \frac{\sigma P}{R} \omega = \frac{J}{C_p}$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

FÍSICA DOS FLUÍDOS CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Rotação dos Fluidos

Uma partícula de fluido em <u>movimento</u> apresenta componentes de translação, rotação, deformação angular e deformação linear.

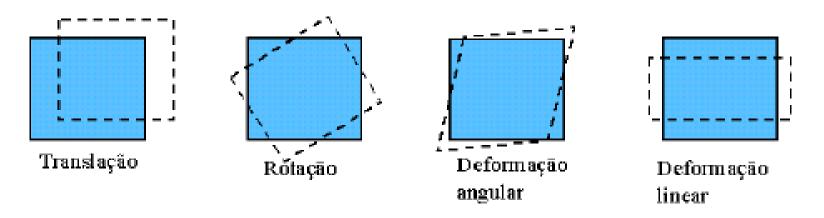


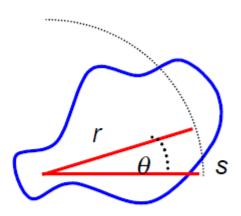
Figura 4.3 Componentes do movimento de um elemento de fluido

Posição angular

Quando um objeto de um formato arbitrário, tem uma trajetória circular em torno de um certo eixo, podemos definir algumas grandezas que descreverão esse movimento.

Podemos marcar um dado ponto do objeto e analisar o seu movimento. A distância deste ponto ao eixo de rotação é chamado de raio *r* da trajetória.

A sua trajetória descreve um arco de comprimento s . A posição angular associada ao arco e o raio é o ângulo θ .



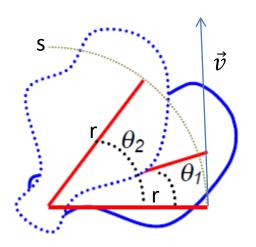
$$s = r\theta$$
 : $\theta = \frac{s}{r}$

A velocidade escalar

Quando observamos os corpos rígidos, a rotação se faz com raio constante, ou seja: cada ponto observado mantém uma distância constante ao eixo de rotação. Desse modo

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \to v = rw$$



onde v é a velocidade linear de um certo ponto do corpo e w é a velocidade angular desse ponto considerado. Na realidade, w é a velocidade angular do corpo por inteiro.

FÍSICA DOS FLUÍDOS CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Uma partícula de fluido movendo-se num escoamento real pode girar em torno de <u>três eixos de coordenadas</u>. Esta <u>rotação</u> é uma grandeza vetorial definida como:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} = \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_{x}\hat{\boldsymbol{\iota}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_{y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_{z}\boldsymbol{k}$$

Considera-se que o <u>sentido positivo</u> (+) do giro é dado pela <u>regra</u> <u>da mão direita</u> (anti-horária)

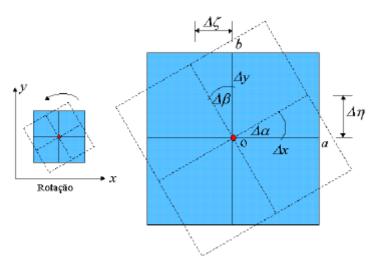


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

Componente y da velocidade no ponto a: (por expansão da série de Taylor)

FÍSICA DOS FLUÍDOS CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

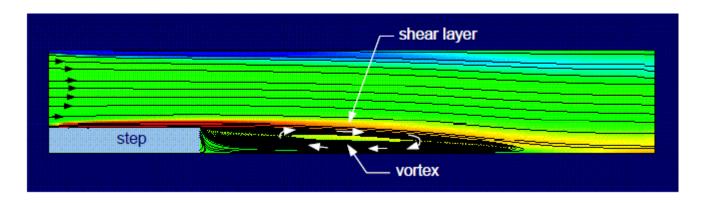
Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

A rotação é dada pela <u>velocidade angular média</u> de duas linhas <u>perpendiculares</u> que se cruzam no centro **ao** e **ob** no plano **xy**.

$$\overrightarrow{\omega}_z = \frac{1}{2}(\omega_{0a} + \omega_{0b})$$

Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

Onde ω_{0a} é a rotação da linha ao e ω_{0b} é a rotação da linha ob.



Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

Rotação da linha o-a Comprimento da linha ao: x.

Componente y da velocidade no ponto o: v0

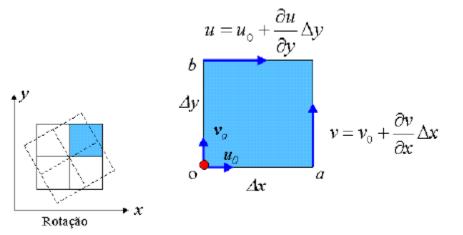
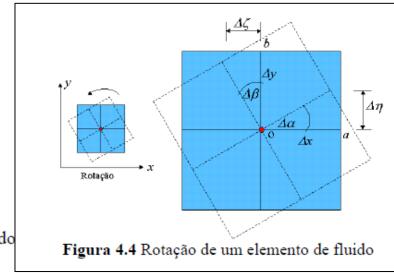


Figura 4.5 Detalhe das velocidades na rotação de um elemento de fluido



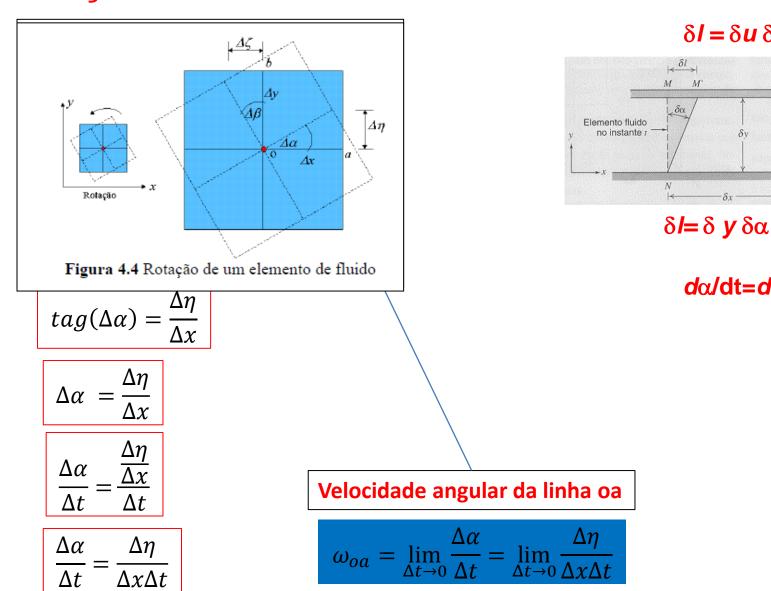
O elemento de fluido, quando submetido à tensão de cisalhamento τ_{yx} , experimenta uma taxa de deformação (ou taxa de cisalhamento) dada por: dou/dt=du/dy.

 $\delta I = \delta u \, \delta t$

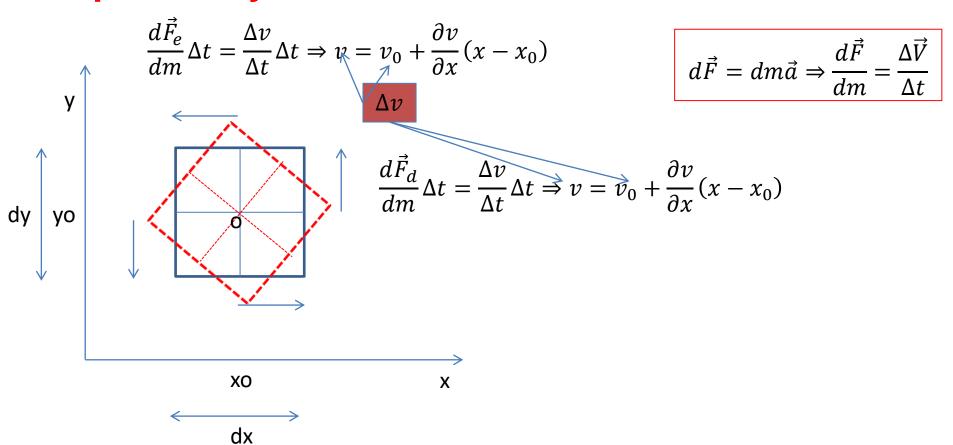
 $d\alpha/dt=du/dy$.

no instante $t + \delta t$

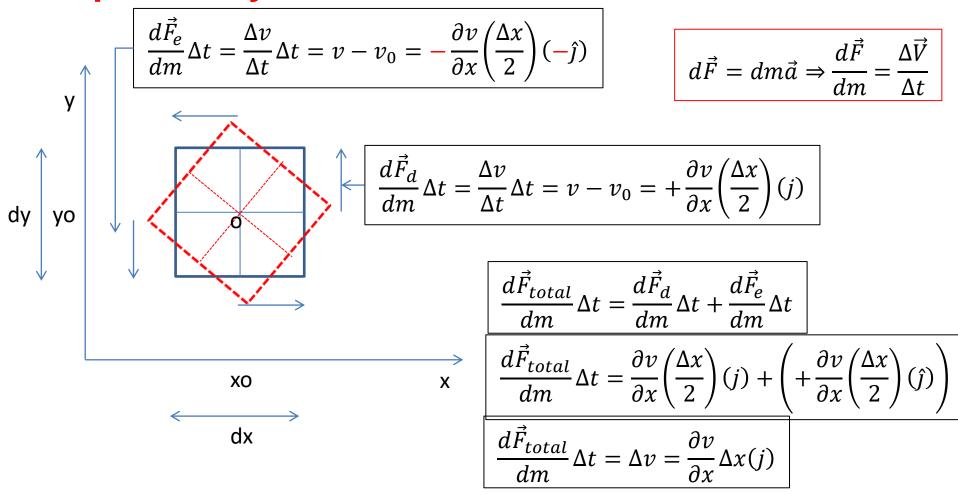
Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z



Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente y



Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente y



Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

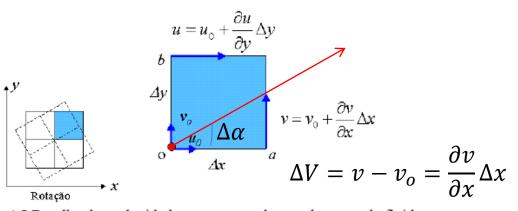
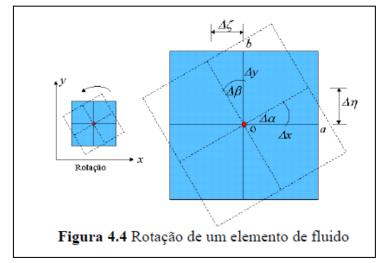


Figura 4.5 Detalhe das velocidades na rotação de um elemento de fluido



A velocidade escalar

$$\Delta v = \frac{\Delta \eta}{\Delta t}$$

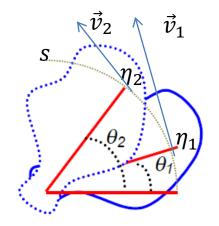
$$\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x = \frac{\Delta \eta}{\Delta t}$$

$$\Delta \eta = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta t$$

$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x(j)$$

$$\Delta \eta = \eta_2 - \eta_1$$

$$\Delta v = v_2 - v_1$$



Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

e desta forma

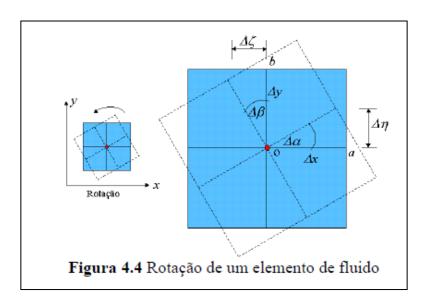
$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \eta}{\Delta x \Delta t}$$

$$\Delta \eta = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta t$$

$$\omega_{oa} = \frac{\partial v}{\partial x}$$



Rotação do elemento de fluido





Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

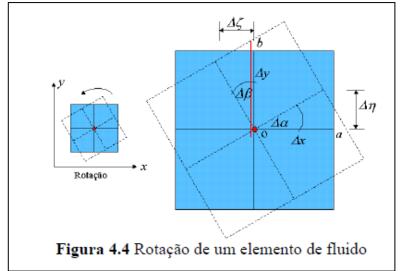
Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

Rotação da linha ob

Comprimento da linha *ob*: Δy .

$$tag(\Delta\beta) = \frac{\Delta\xi}{\Delta y}$$

$$\Delta\beta = \frac{\Delta\xi}{\Delta\gamma}$$



$$\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta\xi}{\Delta y}}{\Delta t}$$

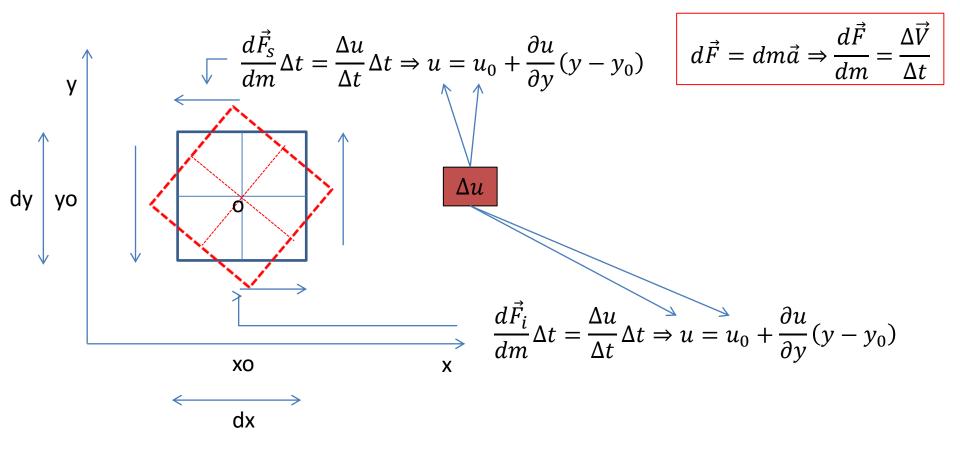
$$\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \frac{\Delta\xi}{\Delta y \Delta t}$$

Velocidade angular da linha oa

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta y \Delta t}$$



Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente x

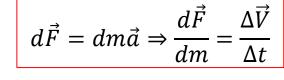


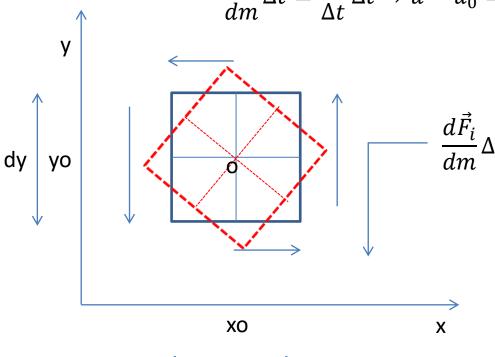


Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z,

componente x

$$\frac{d\vec{F}_s}{dm}\Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\Delta y}{2}\right)(-\hat{\imath})$$





dx

$$\frac{d\vec{F}_i}{dm}\Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow u - u_0 = -\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(\hat{\imath})$$

$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \frac{d\vec{F}_{i}}{dm}\Delta t + \frac{d\vec{F}_{s}}{dm}\Delta t$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(\hat{\imath}) + \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(\hat{\imath})\right)$$

$$\frac{\partial y \left(2 \right)}{\partial y} \left(2 \right) \left(\frac{\partial y}{\partial y} \left(2 \right) \right)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y(\hat{\imath})$$



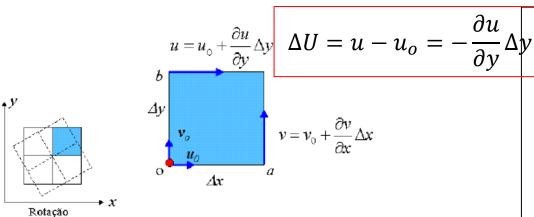


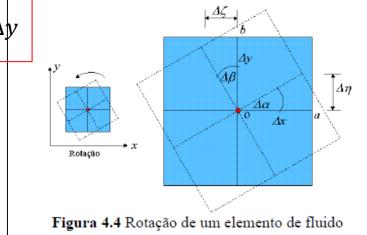
Figura 4.5 Detalhe das velocidades na rotação de um elemento de fluido

A velocidade escalar

$$\Delta u = \frac{\Delta \xi}{\Delta t}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y = \frac{\Delta \xi}{\Delta t}$$

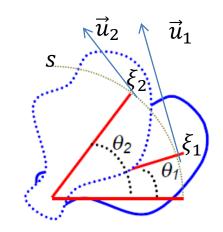
$$\Delta \xi = -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \Delta t$$



$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \Delta v = -\frac{\partial u}{\partial u}\Delta y(j)$$

$$\Delta \xi = \xi_2 - \xi_1$$

$$\Delta u = u_2 - u_1$$





e desta forma a velocidade angular da linha ob

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta y \Delta t}$$

$$\Delta \xi = -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \Delta t$$

$$\omega_{ob} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$



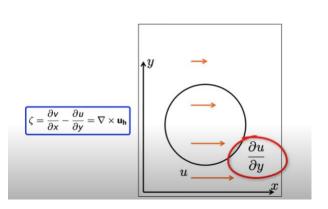
A rotação é dada pela <u>velocidade angular média</u> de duas linhas <u>perpendiculares</u> que se cruzam no centro **ao** e **ob** no plano **xy**.

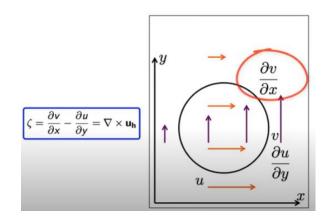
$$\overrightarrow{\omega}_z = \frac{1}{2}(\omega_{0a} + \omega_{0b})$$

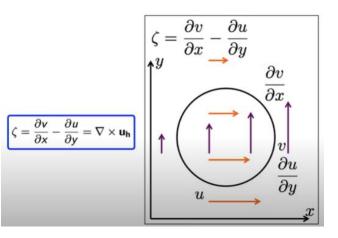
$$\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{z}} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_{0a} + \boldsymbol{\omega}_{0b}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

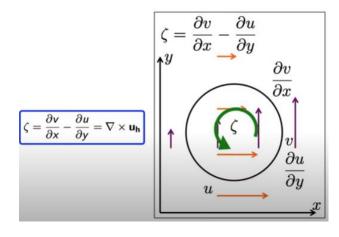


Vorticidade Relativa Geostrófica











Na forma vetorial a rotação num campo tridimensional é dada como:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} \right]$$

Onde o termo entre colchetes é definido como rotacional da velocidade:

$$rotacional \ \vec{V} = \nabla x \vec{V}$$

Desta forma, na notação vetorial, o vetor rotação é dado como:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla x \vec{V}$$



Força de Gradiente de Pressão



análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$f = f_o + \beta y$$

Isso permite que f_o substitua f na relação vento geostrófico, que se torna

momentum

$$\frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial t} + \overrightarrow{V_g} \cdot \overrightarrow{V_h} \overrightarrow{V_g} = -g \frac{\overline{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - (f_o + \beta y) \widehat{k} \times \left(\overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}} \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (\overline{\rho})}{\partial x_i}$$

Advecção media gravida de Coriolis

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (\bar{P})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\bar{P}}{\rho_0} \right) = \frac{\partial (\bar{\Phi})}{\partial x_i} = \nabla \bar{\Phi}$$

 $P = \rho_0 gz$

$$\frac{P}{\rho_0} = gz = \Phi$$

Portanto

$$\overrightarrow{V_g} = \frac{1}{f_0} \widehat{k} \times \nabla \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla \Phi = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (\bar{P})}{\partial x_i}$$

Gradiente

Pressão

de



análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$f = f_o + \beta y$$

Isso permite que f_o substitua f na relação vento geostrófico, que se torna

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$f_0 \vec{V}_a = \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$f_0 \vec{V}_g = \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial y} i + \frac{\partial \Phi}{\partial x} j$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial y}i + \frac{\partial\Phi}{\partial x}j$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = \hat{k} \times \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = \hat{k} \times \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \qquad -\frac{\partial \Phi}{\partial x} i - \frac{\partial \Phi}{\partial y} j = -\nabla \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla_h \Phi$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

$$\xi_g = \nabla_h \times \overrightarrow{V_g}$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivado pelo rotacional do vento geostrófico

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla_h \Phi$$

$$\xi_g = \nabla_h \times \overrightarrow{V_g} = \frac{1}{f_0} \nabla_h \times \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} i + \frac{\partial \Phi}{\partial x} j$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivado pelo rotacional do vento geostrófico

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla_h \Phi$$

$$\xi_g = \nabla_h \times \overrightarrow{V_g} = \frac{1}{f_0} \nabla_h \times \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} i + \frac{\partial \Phi}{\partial x} j \right)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = (0 - 0)i + (0 - 0)j + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)\right)k$$

$$= + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) k$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivado pelo rotacional do vento geostrófico

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla_h \Phi$$

$$\xi_g = \nabla_h \times \overrightarrow{V_g} = \frac{1}{f_0} \nabla_h \times \hat{k} \times \nabla_h \Phi = \frac{1}{f_0} \left(\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) k \right) = \frac{1}{f_0} \nabla_h^2 \Phi = \frac{g}{f_0} \nabla_h^2 Z$$

Pontos chaves:

Sempre que você ver $\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi$ pense em ξ_g



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivado pelo rotacional do vento geostrófico

$$\xi_g = \frac{g}{f_0} \nabla^2 Z \qquad = \frac{g}{f_0} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)_{\text{Y}} \qquad \text{Anti-Ciclônic}$$

$$\underset{\text{concavidade}}{\text{máximo}} \stackrel{\text{dy}}{\Rightarrow} \underbrace{\frac{dy}{dx} = 0 \cdots e \cdots \frac{d^2 y}{dx^2} < 0}$$

Pontos chaves:

Ciclônica (positiva no HN) ξ_g é associado com o mínimo de Z

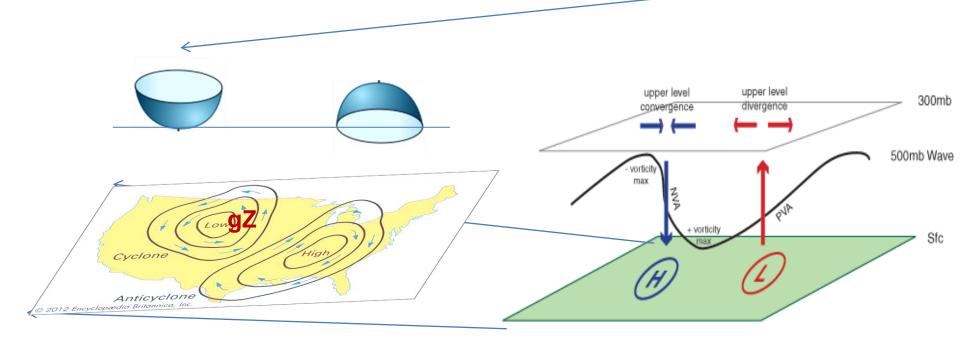
Anti-Ciclônica (negativa no HN) ξ_g é associado com o máxima de Z



Vorticidade Relativa Geostrófica

$$\xi_g = \frac{g}{f_0} \nabla^2 Z$$
 $= \frac{g}{f_0} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) k$

Ciclônica (positiva no HN) ξ_g é associado com o mínimo de gZ

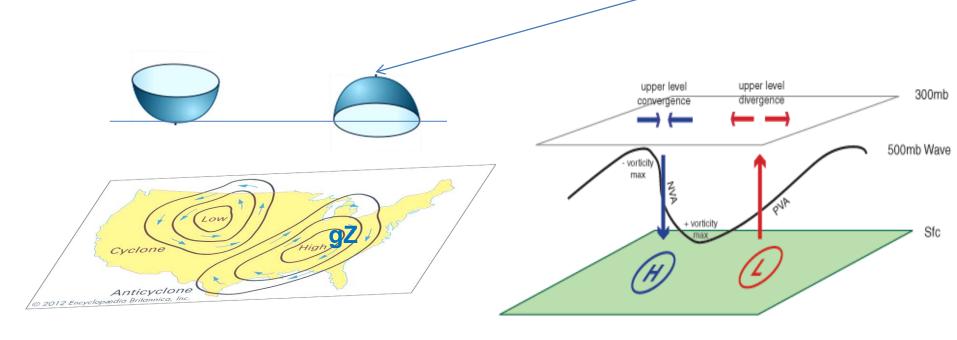




Vorticidade Relativa Geostrófica

$$\xi_g = \frac{g}{f_0} \nabla^2 Z = \frac{g}{f_0} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) k$$

AntiCiclônica (negativa no HN) ξ_q é associado com o máxima de gZ





Vorticidade Relativa Geostrófica

Equação do momentum Geostrófico

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -f_o \hat{k} \times \overrightarrow{V_{ag}} - \beta y \hat{k} \times \overrightarrow{V_g}$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_a/\partial t_a$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_a/\partial t_a$)

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -f_o \hat{k} \times \overrightarrow{V_{ag}} - \beta y \hat{k} \times \overrightarrow{V_g}$$

Resolva o produto vetorial dos dois termos:

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -f_o \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ u_{ag} & v_{ag} & \omega_{ag} \end{vmatrix} - \beta y \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ u_{g} & v_{g} & \omega_{g} \end{vmatrix}$$

$$\frac{D\vec{V_g}}{Dt} = -f_o[(0 - v_{ag})\hat{i} + (u_{ag} - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k}] - \beta y[(0 - v_g)\hat{i} + (u_g - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k}]$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\vec{V_g}}{Dt} = -f_o[(0 - v_{ag})\hat{i} + (u_{ag} - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k}] - \beta y[(0 - v_g)\hat{i} + (u_g - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k}]$$

Reagrupe os termos:

$$\frac{\overrightarrow{DV_g}}{Dt} = -f_o[(-v_{ag})\hat{\imath} + (u_{ag})\hat{\jmath}] - \beta y[(-v_g)\hat{\imath} + (u_g)\hat{\jmath}]$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -f_o[(-v_{ag})\hat{\imath} + (u_{ag})\hat{\jmath}] - \beta y[(-v_g)\hat{\imath} + (u_g)\hat{\jmath}]$$

Reagrupe as componentes i e j:

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = +f_o(v_{ag})\hat{\imath} + \beta y(v_g)\hat{\imath} - f_o(u_{ag})\hat{\jmath} - \beta y(u_g)\hat{\jmath}$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\overrightarrow{u_g}}{Dt} + \frac{D\overrightarrow{v_g}}{Dt} = +f_o(v_{ag})\hat{i} + \beta y(v_g)\hat{i} - f_o(u_{ag})\hat{j} - \beta y(u_g)\hat{j}$$

Separa a equação nas componentes zonal i e meridional j:

$$\frac{D\overrightarrow{u_g}}{Dt} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = 0$$

$$\frac{D\overrightarrow{v_g}}{Dt} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = 0$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_a/\partial t_a$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_a/\partial t_a$)

$$\frac{D\overrightarrow{u_g}}{Dt} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = 0$$

$$\frac{D\overrightarrow{v_g}}{Dt} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = 0$$

Derive a componente zonal em função de y

$$\frac{\partial}{\partial y} \qquad \frac{D\overrightarrow{u_g}}{Dt} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = 0$$

Derive a componente meridional em função de x

$$\frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{D\overrightarrow{v_g}}{Dt} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = 0$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_q/\partial t_q$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_q/\partial t_q$)

$$\frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{D\overrightarrow{u_g}}{Dt} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{D\overrightarrow{v_g}}{Dt} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = 0$$

Derive a componente zonal em função de y

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y} - f_o\left(\frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) - \beta \frac{\partial y}{\partial y}(v_g) - \beta y \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$

Derive a componente meridional em função de x

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x}\right) + \beta \frac{\partial y}{\partial x}(u_g) + \beta y \frac{\partial u_g}{\partial x} = 0$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_a/\partial t_a$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_a/\partial t_a$)

As componentes zonal e meridional

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y} - f_o\left(\frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) - \beta v_g - \beta y \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x}\right) + \beta y \frac{\partial u_g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x}\right) + \beta y \frac{\partial u_g}{\partial x} = 0$$

Subtraia a equação da componente meridional a componente zonal

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y} \right) + f_o \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) + \beta v_g = 0$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021 Analise de Escala da Equação da Voticidade

Vorticidade Relativa Geostrófica

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y} \right) + f_o \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) + \beta v_g = 0$$

Veja o termo $eta v_g$ que representa a variação do parâmetro de coriolis com a coordenada y

Pode-se fazer a seguinte consideração:



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021 Analise de Escala da Equação da Voticidade

Vorticidade Relativa Geostrófica

Usando o fato que o parâmetro de coriolis depende somente de y tal que

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_g \frac{\partial f}{\partial x} + v_g \frac{\partial f}{\partial y} - \omega_g \frac{\partial f}{\partial P}$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_g \frac{\partial f}{\partial x} + v_g \frac{\partial f}{\partial y} - \omega_g \frac{\partial f}{\partial P}$$

A variação do parâmetro de coriolis nas coordenadas t, x e z são nulas.

$$\frac{Df}{Dt} = v \frac{\partial f}{\partial y}$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

Note que f depende somente de y. Assim:

$$\frac{Df}{Dt} = v_g \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f = f_o + \frac{\partial f}{\partial y}y = f_o + \beta y$$

$$\frac{Df}{Dt} = v_g \frac{\partial (f_o + \beta y)}{\partial y}$$

$$\frac{Df}{Dt} = v_g \left[\frac{\partial (f_o)}{\partial y} + \frac{\partial (\beta y)}{\partial y} \right]$$

$$\frac{Df}{Dt} = \beta v_g$$



Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y} \right) + f_o \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) + \beta v_g = 0$$

$$\frac{Df}{Dt} = \beta v_g$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y} \right) + f_o \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) + \frac{Df}{Dt} = 0$$



Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y} \right) + f_o \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) + \frac{Df}{Dt} = 0$$

$$\xi_g = \frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y}$$

$$\frac{D(\xi_g)}{Dt} + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) + \beta y\left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) + \frac{Df}{Dt} = 0$$



Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_a/\partial t_a$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_a/\partial t_a$)

$$\frac{D(\xi_g)}{Dt} + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) + \beta y\left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) + \frac{Df}{Dt} = 0$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) + \beta y\left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = 0$$
 Equação da continuidade para a aproximação quase geostrófica

Equação da continuidade para a

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} + f_o\left(-\frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P}\right) + \beta y(\nabla_H \cdot \overrightarrow{V_g}) = 0$$



Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} + f_o\left(-\frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P}\right) + \beta y(\nabla_H \cdot \overrightarrow{V_g}) = 0$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} - f_o \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = 0$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\frac{Df}{Dt} = \beta v_g$$

$$\xi_g = \frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y}$$

$$\left(\nabla_{H}.\overrightarrow{V_{g}}\right)=0$$



Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} + f_o\left(-\frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P}\right) + \beta y(\nabla_H \cdot \overrightarrow{V_g}) = 0$$

$$\left(\nabla_{H}.\overrightarrow{V_{g}}\right)=0$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} - f_o \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = 0$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

A velocidade vertical é gerada somente pelo escoamento ageostrófico $\omega = \omega_{ag}$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$



Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial t} + u_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\frac{\partial(\xi_g)}{\partial t} + \frac{\partial(f)}{\partial t} + \left[u_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x}\right] + \left[v_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x}\right] = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial P} = \frac{1}{f_o} \left[\frac{\partial (\xi_g)}{\partial t} + \frac{\partial (f)}{\partial t} + u_g \frac{\partial (\xi_g + f)}{\partial x} + v_g \frac{\partial (\xi_g + f)}{\partial x} \right]$$



Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

$$\frac{\partial(\xi_g)}{\partial t} + \frac{\partial(f)}{\partial t} + u_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\frac{\partial \left(\xi_g\right)}{\partial t} \gg \frac{\partial (f)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}\nabla \cdot (\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$



Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{\partial \left(\xi_g\right)}{\partial t} \gg \frac{\partial (f)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot (\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial w}{\partial P}$$

A taxa de variação local da voticidade geostrófica é dada pela advecção de vorticidade absoluta pelo vento geostrófico Mais a concentração ou diluição da vorticidade pelo efeito divergente.

$$\frac{\partial \omega}{\partial P} = \frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}$$

Equação da continuidade para a aproximação quase geostrófica



Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

O parâmetro f da força de coriolis não depende de x e z. Portanto, na equação da divergência acima pode ser desprezada

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\nabla \cdot f = \beta$$



Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot (\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial w}{\partial P}$$

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot (\xi_g + f) = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot \xi_g - \overrightarrow{V_g} \nabla \cdot f = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot \xi_g - v_g \beta$$

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot \xi_g - v_g \beta$$



Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Tendência devido a advecção

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot \left(\xi_g + f\right) = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot \xi_g - \overrightarrow{V_g} \nabla \cdot f = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot \xi_g - v_g \beta$$
Cyclones

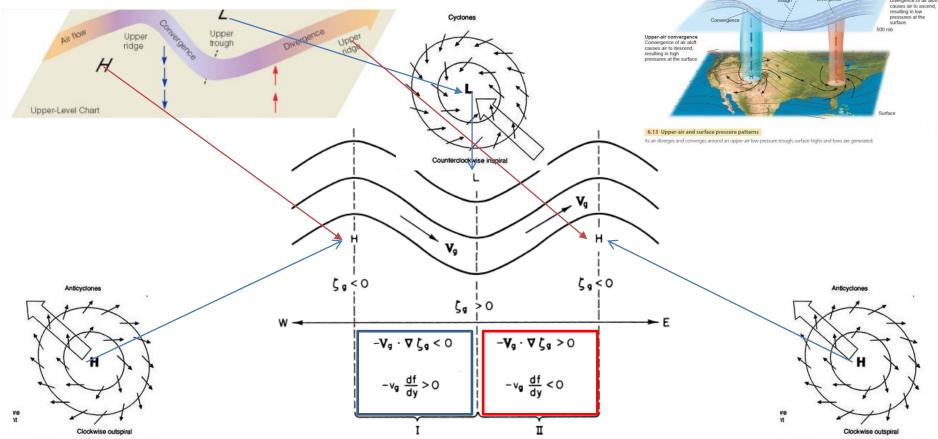


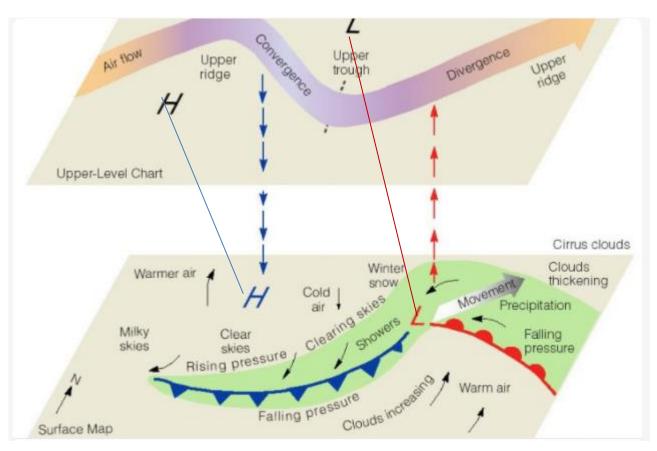
Fig. 6.7 Schematic 500-hPa geopotential field showing regions of positive and negative advections of relative and planetary vorticity.



Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Tendência devido a advecção

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot (\xi_g + f) = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot \xi_g - \overrightarrow{V_g} \nabla \cdot f = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot \xi_g - v_g \beta$$



Mid Latitude Cyclones Notes Grade 12 - My Courses



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021 Camada Limite Planetária

Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Tendência devido a advecção

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot \left(\xi_g + f \right) = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot \xi_g - \overrightarrow{V_g} \nabla \cdot f = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot \xi_g - v_g \beta$$

Como na discussão sobre a equação da vorticidade.

O termo que domina determina a progressão zonal do escoamento com comprimento de onda longa:

- Se o termo de beta β domina , as ondas irão retroceder (movimento para oeste) (onda de Rossby)
- Se o termo da vorticidade relativa ξ_g domina, as ondas irão se mover para leste. (ondas de Kelvin)



Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g} \nabla \cdot (\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

O que muda a vorticidade relativa geostrófica em um ponto?

• Advecção de vorticidade absoluta geostrófica

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} > 0$$
 se a advecção é ciclônica (positiva no hemisfério norte)

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t}$$
 < 0 se a advecção é anticiclônica (negativa no hemisfério norte)

• Alongamento e compressão (ou convergência e divergência)

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} > 0$$
 se ALONGAR (hemisfério norte)

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t}$$
 < 0 se a comprimir (hemisfério norte)



$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial t} + u_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Como alternativa, podemos escrever a equação da vorticidade QG como:

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Equação da continuidade para a aproximação quase geostrófica

$$\frac{\partial \omega}{\partial P} = \frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}$$

O que basicamente diz que no fluxo, apenas o alongamento (isto é, convergência) e a compressão (isto é, divergência) fazem com que a vorticidade absoluta geostrófica aumente ou diminua, respectivamente.



Exercício

1-Explique o motivo da velocidade vertical ser mantida pelo escoamento ageostrofico, quando se utiliza a teoria da aproximação quase geostrofica. R:

2- Usando a equação da continuidade, prove matematicamente a sua explicação.

R: