



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Teoria Quase Geostrofica e Aplicações :
Aproximações e Equações
MET 0225 Sinótica-Dinâmica
Meteorologia I
Instrutor: Paulo Kubota
paulo.kubota@inpe.br
012-3186-8400



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Paulo Kubota

data	Tópicos
15/04/2021	PBL
20/04/2021	PBL
22/04/2021	PBL
27/04/2021	QG Vorticity. eq.
29/04/2021	QG Vorticity. eq.
04/05/2021	QG Vorticity. eq.
06/05/2021	Geop. Tend. eq.
11/05/2021	Geop. Tend. eq.
13/05/2021	Geop. Tend. eq.
18/05/2021	Omega and Vetor Q
20/05/2021	Omega and Vetor Q
25/05/2021	Omega and Vetor Q
27/05/2021	Avaliação 1
01/06/2021	Avaliação 2



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Motivação.

O desejo de um sistema de equações simplificado, mas que retenha os principais processos dinâmicos necessários para descrever, diagnosticar e entender o comportamento de sistemas climáticos em larga escala.

Palavras chaves.

“As equações e suas derivações são reconhecidamente difíceis. É importante que não se memorize apenas as equações de maneira mecânica. É muito mais importante entender o que eles significam fisicamente.” - Howie Bluestein.

Suposição abrangente da teoria QG.

O número de Rossby ($R0 = U / fL$) é pequeno, o que nos permite desprezar o vento ageostrófico em alguns (mas não todos) termos das equações que governam o movimento.

Equações governantes e suas derivações.

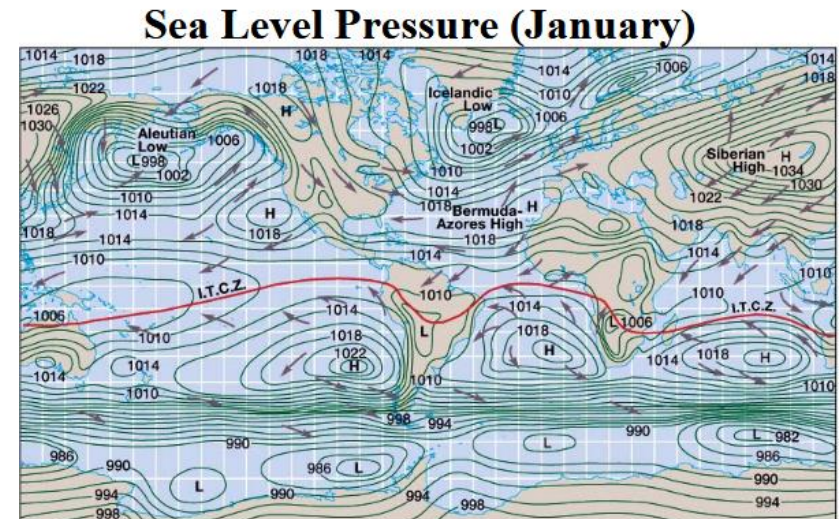
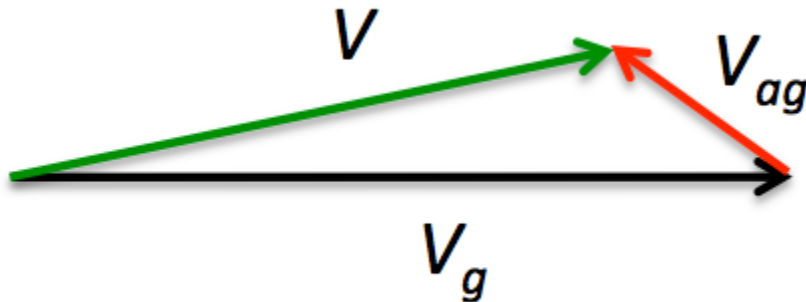
A teoria QG é baseada em versões simplificadas das equações de movimento, equação de continuidade e equação termodinâmica de energia.

Equação do momento horizontal.

Derivação

1. Divida o momento em componentes geostróficos e ageostróficos

$$\vec{V} = \vec{V}_g + \vec{V}_{ag}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala

momentum

$$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_j} = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j (\bar{u}_k) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} - \frac{\partial(\overline{u_j' u_i'})}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i)}{\partial x_j^2}$$

Advecção media
gravidade
Coriolis
Gradiente de Pressão

Transporte Turbulento
Estresse Viscoso

2. Despreze o seguinte.

- Fricção.
- Orientação pelo vento ageostrófico e velocidade vertical.
- Advecção do momento ageostrófico .
- Tendência local do momento ageostrófico .

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

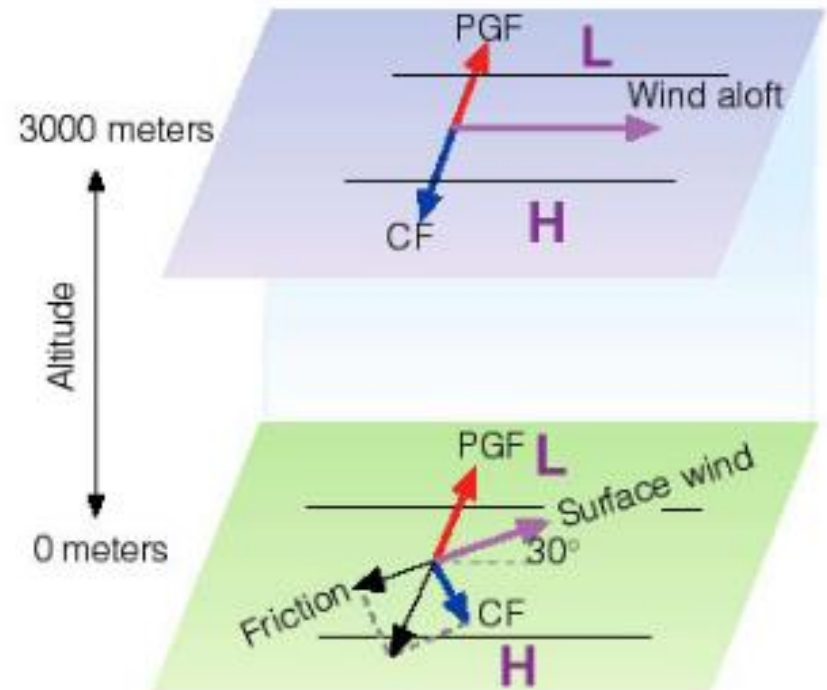
Efeito do atrito da superfície?

$$Fricção = -\frac{\partial(\overline{u_j' u_i'})}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2(\overline{u_i})}{\partial x_j^2}$$

Se a velocidade do vento for reduzida por atrito.

A força de Coriolis diminuirá e não equilibrará completamente a força do gradiente de pressão.

O desequilíbrio da força (PGF > CF) empurra o vento em direção à baixa pressão



2. Despreze o seguinte.

- **Fricção (PBL->** abaixo de ~ 1-2 km parte da atmosfera que sofre influencia do atrito).
- O ar em contato com a superfície sofre atrito, diminuindo efetivamente a velocidade do vento.

Magnitude: depende da velocidade do vento e da rugosidade da superfície.

Direção : oposta ao movimento da parcela aérea

análise de escala

momentum

$$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_j} = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j (\bar{u}_k) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t}$

$(\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_j}$
Advecção
media

$-g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3}$
gravidade

$- 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j (\bar{u}_k)$
Coriolis

$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$
Gradiente
de
Pressão

Atmosfera livre: a atmosfera acima da PBL isenta de efeitos de atrito.

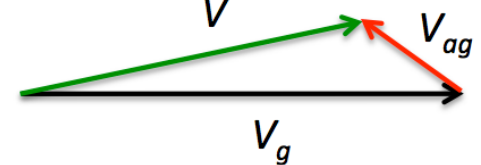
análise de escala

2. Faça as considerações na aceleração local e advectiva.

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$$

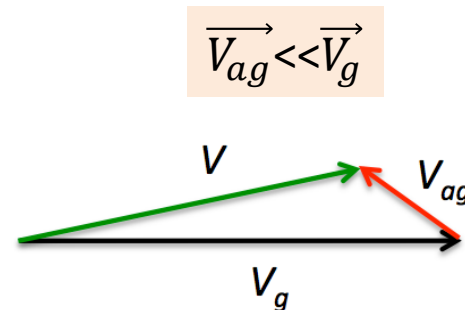
$$\vec{V} = \vec{V}_g + \vec{V}_{ag}$$



$$\frac{D\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}_g + \vec{V}_{ag}}{\partial t} + (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag})$$

2. Despreze o seguinte.

- Orientação pelo vento ageostrófico
- velocidade vertical.
- Advecção do momento ageostrófico .
- Tendência local do momento ageostrófico .



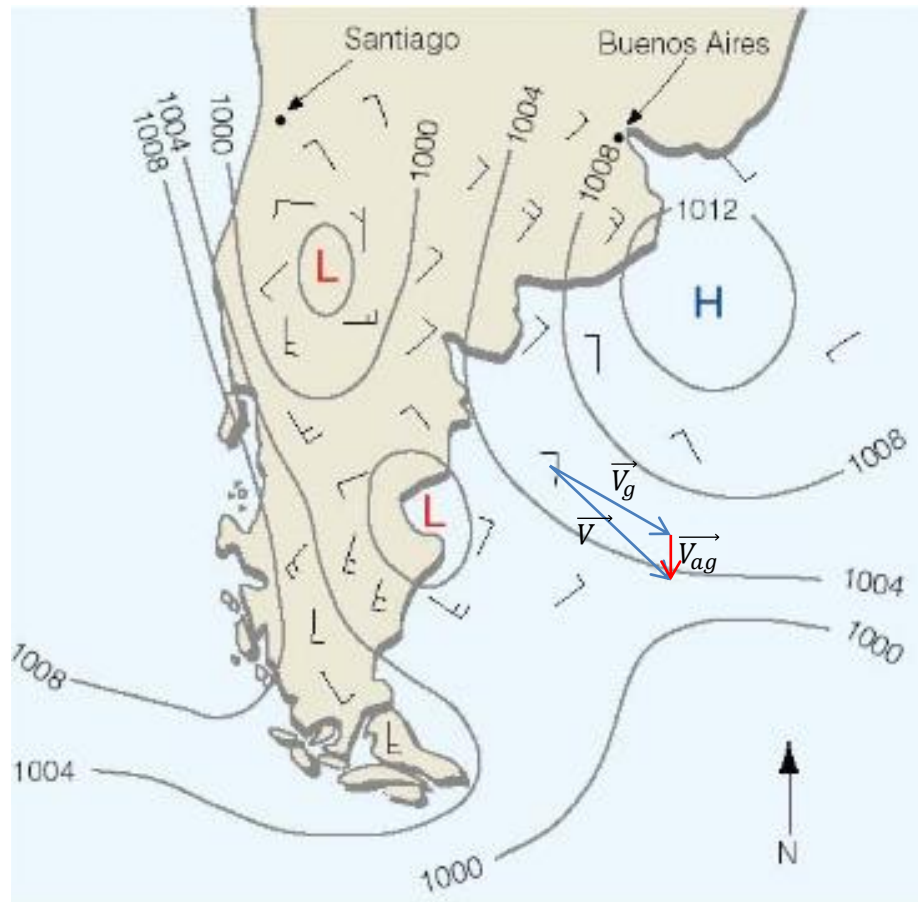
$$\frac{D\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}_g + \vec{V}_{ag}}{\partial t} + (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag})$$

Expanda os termos

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">Aceleração local do (\vec{V}_g)</div> <div style="color: purple;"> $\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t}$ </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">Aceleração advectiva geostrofica do (\vec{V}_g)</div> <div style="color: blue;"> $(\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_g)$ </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">Aceleração advectiva geostrofica (\vec{V}_{ag})</div> <div style="color: green;"> $(\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag})$ </div>
$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}_{ag}}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) + (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_g) + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag}) + (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag})$		
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Aceleração local do (\vec{V}_{ag})</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Aceleração advectiva ageostrófica do (\vec{V}_g)</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Aceleração advectiva ageostrófica (\vec{V}_{ag})</div>

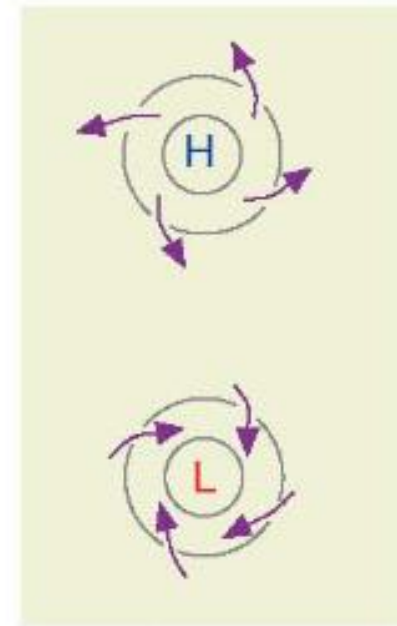
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica



Em latitudes médias

$$\overrightarrow{V_{ag}} \ll \overrightarrow{V_g}$$



Surface map
Southern Hemisphere

?

Escoamento aproximadamente geostrofico

$$\overrightarrow{V} \cong \overrightarrow{V_g}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

2. Despreze o seguinte.

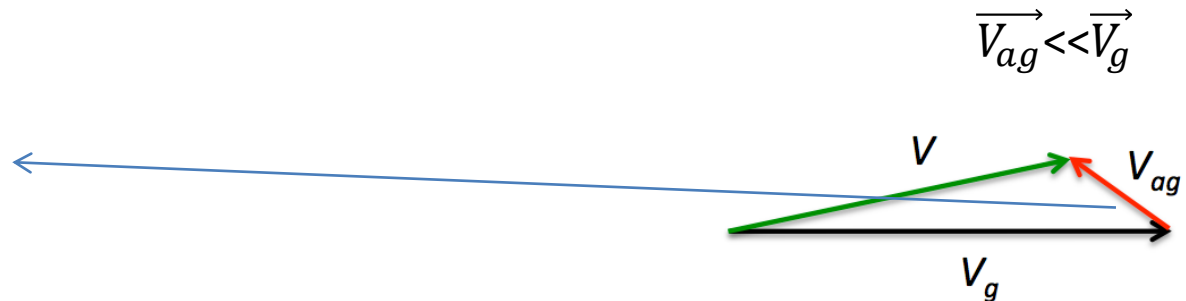
- Orientação pelo vento ageostrófico
- velocidade vertical.
- Advecção do momento ageostrófico .
- Tendência local do momento ageostrófico .

$$\vec{V} \cong \vec{V}_g$$

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}_{ag}}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) + (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_g) + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag}) + (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag})$$

Considere

$$\vec{V}_{ag} \ll \vec{V}_g$$



Portanto $\vec{V}_{ag} \cong 0$

$$\frac{\partial \vec{V}_{ag}}{\partial t} \approx 0, \quad (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_g) \approx 0, \quad (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag}) \approx 0, \quad (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag}) \approx 0$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Portanto, para o escoamento quase geostrófico:

Aceleração Geostrófica Local

The diagram shows the equation for geostrophic acceleration: $\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g)$. The first term, $\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t}$, is enclosed in a blue rounded rectangle, and a blue arrow points from it to the text 'Aceleração Geostrófica Local'. The second term, $(\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g)$, is enclosed in a red rounded rectangle, and a blue arrow points from it to the text 'Aceleração Geostrófica Advectiva'.

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g)$$

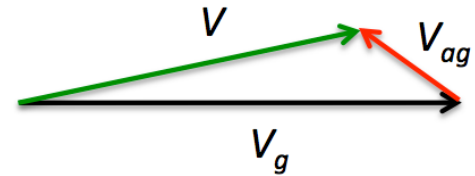
Aceleração Geostrófica Advectiva

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

2. Despreze o seguinte (por análise de escala).

- Fricção.
- Orientação pelo vento ageostrófico
- velocidade vertical.
- Advecção do momento ageostrófico .
- Tendência local do momento ageostrófico .



$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g)$$

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} - \omega \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial P}$$

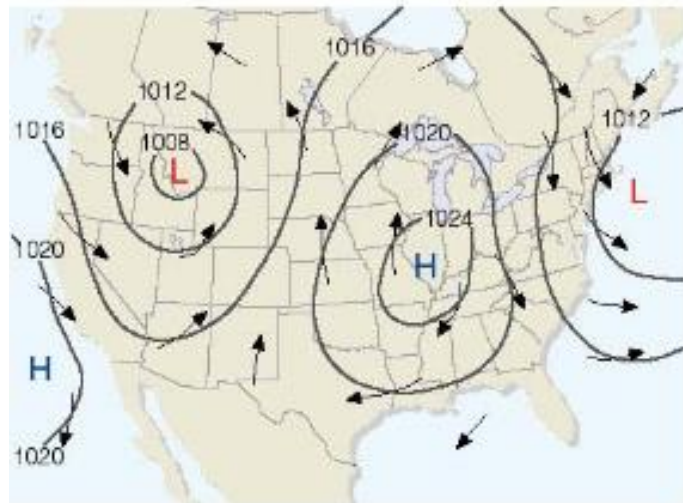
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

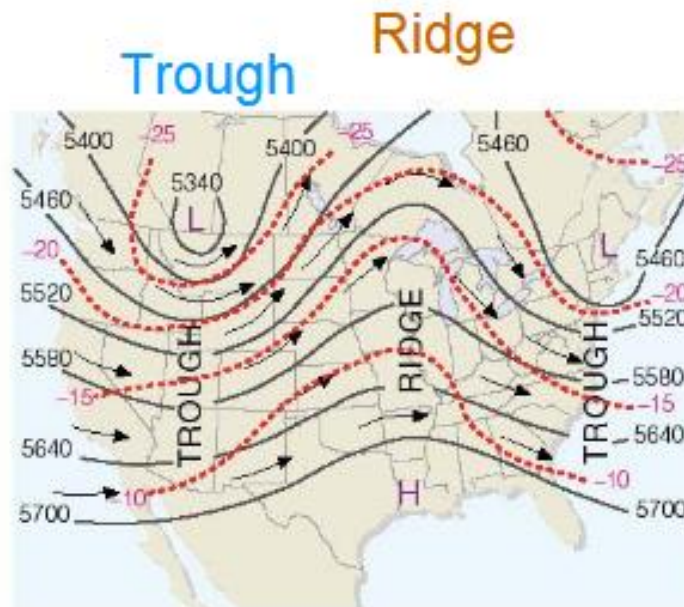
$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} - \omega \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial P}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} - \omega \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial P}$$

- **velocidade vertical pode ser desprezada por análise de escala .**



(a) Surface map



(b) Upper-air map (500 mb)

$$\omega \frac{\partial u_g}{\partial P} = 0$$

$$\omega \frac{\partial v_g}{\partial P} = 0$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} - \omega \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial P}$$

- **velocidade vertical pode ser desprezada por análise de escala .**

$$\omega \ll u_g$$

$$\omega \ll v_g$$

$$\omega \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial P} \ll u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} \quad e \quad v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g \equiv \frac{D\vec{V}_g}{Dt_g}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

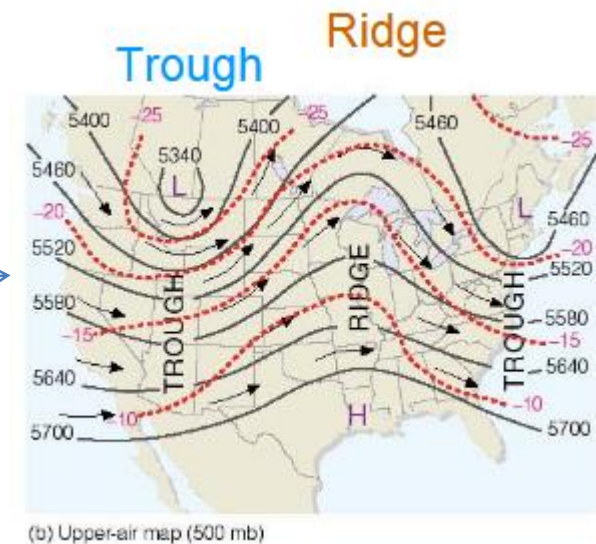
$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g \equiv \frac{D\vec{V}_g}{Dt_g}$$

- velocidade vertical pode ser desprezada por análise de escala .

Aceleração do escoamento

Aceleração escoamento Geostrófico

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \frac{D\vec{V}_g}{Dt_g}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

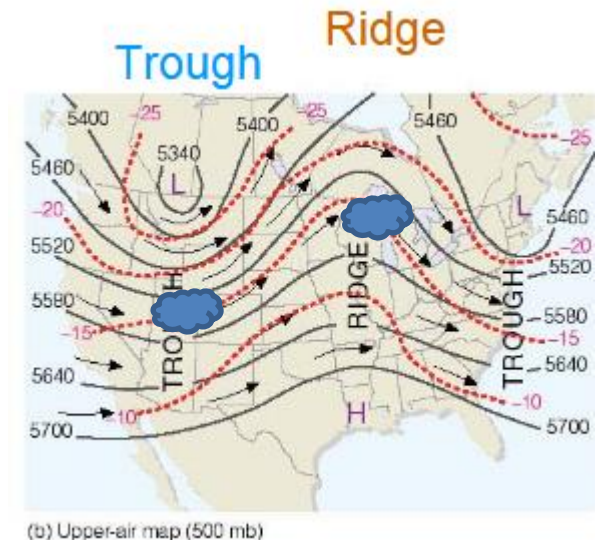
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

2. Aproximação (por análise de escala).

- Orientação pelo vento ageostrófico
- velocidade vertical.
- Advecção do momento ageostrófico .
- Tendência local do momento ageostrófico .

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \frac{D\vec{V}_g}{Dt_g}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{D}{Dt_g} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}$$



Interpretação física: A taxa de mudança de momento seguindo o movimento das parcelas é aproximadamente igual à taxa de mudança de momento geostrófico seguindo o escoamento geostrófico.



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Coriolis

momentum

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j (\overline{u_k}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(P)}{\partial x_i}$$

Advecção média gravidade Coriolis Gradiente de Pressão

3. Suponha um plano β para latitude média (aproximação de expansão de Taylor para f)



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

3. Suponha um plano β para latitude média (aproximação de expansão de Taylor para f)

$$f = f_o + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2 + \dots$$

Ignorando termos de alta ordem

$$f = f_o + \frac{\partial f}{\partial y} y = f_o + \beta y$$

$f = f_o + \beta y$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Coriolis

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - f \hat{k} \times \vec{V} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

momentum

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - (f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção
media

gravidade

Coriolis

Gradiente
de
Pressão



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

momentum

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - (f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção
media

gravidade

Coriolis

Gradiente
de
Pressão



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$f = f_0 + \beta y$$

Isso permite que f_0 substitua f na relação vento geostrófico, que se torna

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla \Phi$$

$$f_0 \vec{V}_g = \hat{k} \times \nabla \Phi \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{j}$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = \hat{k} \times \hat{k} \times \nabla \Phi \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{j} = -\nabla \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla \Phi$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$f = f_o + \beta y$$

Isso permite que f_o substitua f na relação vento geostrófico, que se torna

momentum

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - (f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção
media

gravidade

Coriolis

Gradiente
de
Pressão

$$P = \rho_0 g z$$

$$\frac{P}{\rho_0} = g z = \Phi$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\bar{P}}{\rho_0} \right) = \frac{\partial(\bar{\Phi})}{\partial x_i} = \nabla \bar{\Phi}$$

Portanto

$$\hat{k} \times f_o \vec{V}_g = -\nabla \Phi = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla \Phi = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

momentum

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - (f_0 + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção
media

gravidade

Coriolis

Gradiente
de
Pressão

$$P = \rho_0 g z$$

$$\frac{P}{\rho_0} = g z = \Phi$$

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - (f_0 + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \nabla \Phi$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força Peso pode ser desprezada

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -(f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \nabla \Phi$$

$$\hat{k} \times f_o \vec{V}_g = -\nabla \Phi = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -(f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) + \hat{k} \times f_o \vec{V}_g$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -(f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - (f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) + \hat{k} \times f_o \vec{V}_g$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -\hat{k} \times f_o \vec{V}_g - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - (f_o) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) + \hat{k} \times f_o \vec{V}_g$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -(f_o) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g)$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força Peso pode ser desprezada

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -(\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - (f_o) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag})$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -(f_o) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag})$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

5. Usando a análise de escala, pode-se demonstrar que $-(\beta y)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}})$ pode ser desprezado, produzindo a forma final da equação do momento QG e $\overrightarrow{V_g} \gg \overrightarrow{V_{ag}}$

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}}) - (\beta y)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_g}) - (\beta y)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}})$$

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}}) - (\beta y)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_g}) - (\beta y)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}})$$

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}}) - (\beta y)\hat{k} \times (\overrightarrow{V_g})$$

Interpretação física: O primeiro termo à direita representa a força de Coriolis que atua no vento ageostrófico, o que leva a uma aceleração do escoamento geostrófico perpendicular ao vento ageostrófico.



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

4. Resumo das premissas e relações acima para reescrever a equação do momento horizontal

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla\Phi - f\hat{k} \times \vec{V}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_g + \vec{V}_{ag}$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla\Phi$$

$$f = f_0 + \frac{\partial f}{\partial y} y = f_0 + \beta y$$

$$\frac{D\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}}{Dt} = \hat{k} \times f_0 \vec{V}_g - (f_0 + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag})$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} + \frac{\vec{V}_{ag}}{Dt} = \hat{k} \times f_0 \vec{V}_g - (f_0) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - (f_0) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag})$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} + \frac{\vec{V}_{ag}}{Dt} = -(f_0) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag})$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -(f_0) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g)$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

4. Equação do Momento Horizontal

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -(f_o) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g)$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Aproximação hidrostática (formulário de coordenadas de pressão)

$$P = -\rho g z$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$\partial P = -\rho g \partial z$$

$$\frac{\partial g z}{\partial P} = -\rho$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = -\frac{RT}{P}$$

$$P = \rho R T$$

$$\rho = \frac{RT}{P}$$

$$\Phi = g z$$

Potencial gravitacional por unidade de massa (Trabalho em Jaule para elevar 1kg de uma altura z a $z+dz$)



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Aproximação hidrostática (formulário de coordenadas de pressão)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = - \frac{RT}{P}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação de continuidade

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u_g}{\partial P} = 0 \quad \vec{V} = \vec{V}_g + \vec{V}_{ag}$$

$$\nabla \cdot (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) = \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} + \frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0$$

Pode ser escrito na forma

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0$$

Desde que:

$$\nabla \cdot (\vec{V}_g) = \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação de continuidade

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Prova matemática que $\nabla \cdot (\vec{V}_g) = 0$

$$\nabla \cdot (\vec{V}_g) = \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla \Phi \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \left(0 - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \hat{i} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - 0\right) \hat{j} + (0 - 0) \hat{k}$$

$$\vec{u}_g = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \vec{v}_g = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\nabla \cdot (\vec{V}_g) = \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0$$

$$-\frac{1}{f_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{1}{f_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0$$

Interpretação física: O vento geostrófico não é divergente. A divergência e a velocidade vertical está associada ao escoamento ageostrófico.



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Prova matemática que $\nabla \cdot (\vec{V}_g) = 0$ $\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla \Phi$

$$\nabla \cdot (\vec{V}_g) = \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0$$

$$-\frac{1}{f_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{1}{f_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0$$

Interpretação física: O vento geostrófico não é divergente. A divergência e a velocidade vertical está associada ao escoamento ageostrófico .



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Energia Termodinâmica

Semelhante ao momento, despreza-se a advecção da temperatura pelo vento ageostrófico, no entanto, os efeitos da velocidade vertical são mantidos, uma vez que a velocidade vertical tem uma grande influência na temperatura através do aquecimento e resfriamento adiabáticos.

$$\frac{DT}{Dt_g} - \frac{\sigma P}{R} \omega = \frac{J}{C_p}$$

Onde:

$$\sigma = -\frac{RT}{P} \frac{d \ln(\theta)}{dP} = \frac{RT}{P} \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dP}$$

Assim, σ é proporcional à estabilidade estática.

Normalmente, assumimos que o escoamento é adiabático (ou seja, $J = 0$), mas é possível incluir efeitos diabáticos, se desejado.



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Energia Termodinâmica

$$\frac{DT}{Dt_g} - \frac{\sigma P}{R} \omega = \frac{J}{C_p}$$

A advecção vertical não pode ser desprezada, pois forma a parte do termo de aquecimento e resfriamento adiabático.

Este termo deve ser mantido pois a estabilidade estática é grande o suficiente na escala sinótica. O aquecimento e o resfriamento adiabático pelo movimentos verticais é da mesma ordem da advecção horizontal de temperatura.

Divide a temperatura no estado básico que depende somente da pressão mais o desvio do estado básico.

$$T(x, y, P, t) = T_o(P) + T(x, y, P, t)$$

Assim somente é necessário o estado básico ser incluído no termo de estabilidade estática



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Sumário

A equação do momento QG, a relação do vento geostrófico, a aproximação hidrostática, a equação de continuidade e a equação de energia termodinâmica formam um conjunto fechado de equações para as variáveis dependentes Φ , \vec{V}_g , \vec{V}_{ag} , ω e T .

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -(f_0) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g)$$

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = -\frac{RT}{P}$$

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0$$

$$\frac{DT}{Dt_g} - \frac{\sigma P}{R} \omega = \frac{J}{C_p}$$