FÍSICA DOS FLUÍDOS

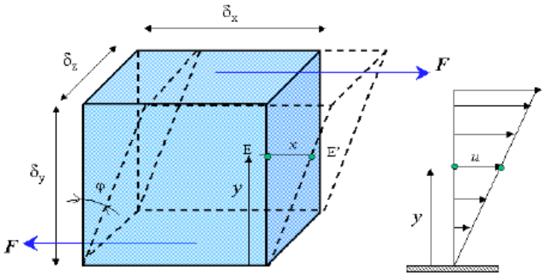
MTIG008 – FÍSICA FLUIDOS

Prof. Paulo Yoshio Kubota,
pkubota@gmail.com

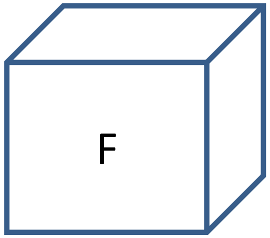
FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA E CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

Um fluido deforma-se continuamente quando uma tensão de cisalhamento tangencial de qualquer magnitude lhe é aplicada



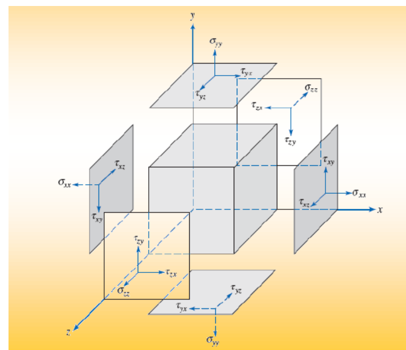
A ausência de **movimento relativo** (e de **deformação angular**) implica na **<u>ausência de tensões de cisalhantes</u>**.



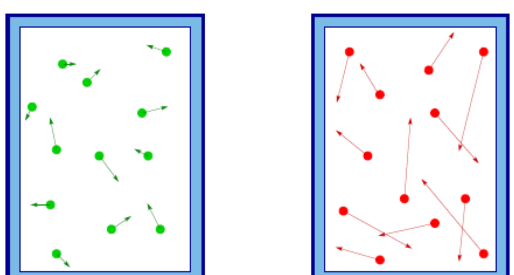
FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA E CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

Portanto, os fluidos tanto em **repouso** quanto em movimento de corpo rígido são capazes de suportar apenas **tensões normais**. Nesse caso, aplicam-se os princípios da **hidrostática** para o tratamento do problema.



Num fluido estático e homogêneo, uma **partícula retém a sua identidade por todo o tempo** e o elemento de fluido não se deforma.

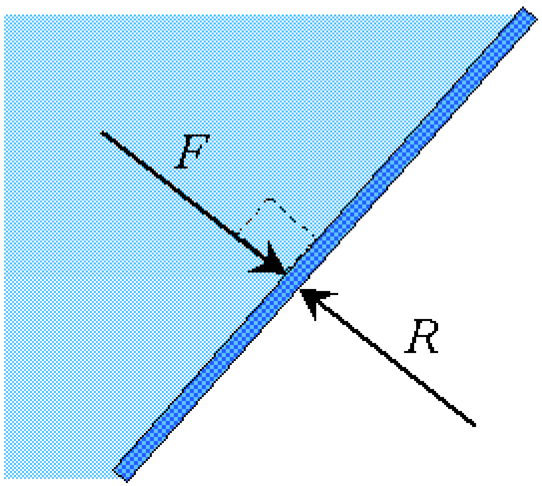


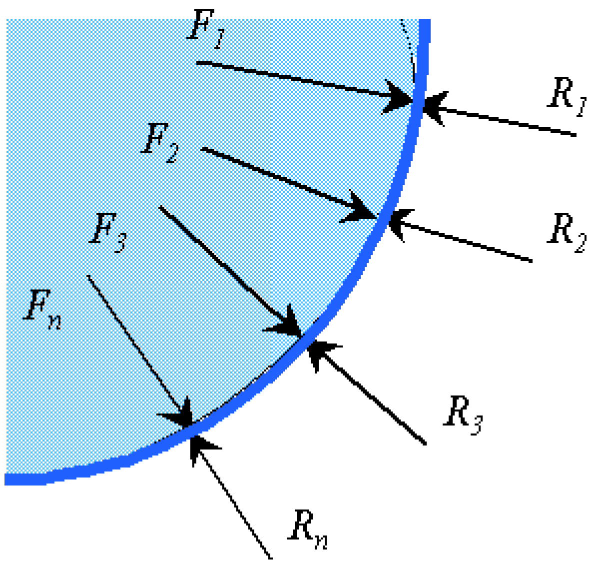
(a) (b)

FÍSICA DOS FLUÍDOS

FLUÍDOS ESTÁTICOS

- Nos ***fluidos estáticos*** não pode agir **nenhuma força de cisalhamento.**
- **Qualquer força entre** o fluido e a fronteira deve agir **normal** (perpendicular) em **relação à fronteira**





Esta declaração é também verdadeira para superfícies curvas

- Para um elemento de fluido em repouso o elemento estará em **equilíbrio** - se a **soma dos componentes das forças** em **<u>qualquer direção for zero</u>**.
- A **soma** dos momentos **das forças** no elemento sobre **qualquer ponto** também deve **<u>ser zero</u>**.

FLUÍDOS ESTÁTICOS

Pressão

Como mencionado um fluido **exerce** uma **força normal** em **qualquer fronteira** que esteja em contato.

Como esses **limites** ***podem ser grandes*** e a **força pode ser diferente de um lugar a outro** é **conveniente** trabalhar em termos de pressão, P, que é a força por unidade área.

Se a **força exercida** em cada **área unitária** é a mesma, a **pressão** é dita ***uniforme***.

$$\text{Pressão} = \frac{\text{Força}}{\text{Área sobre a qual se aplica a força}}$$

$$p = \frac{F}{A}$$

Unidades: Newton por metros quadrado $N\ m^{-2}$, $kgm^{-1}\ s^{-2}$. Dimensões: $ML^{-1}\ T^{-2}$.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA E CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

Introdução ao fluido estático

- Fluido em repouso:
- Sem tensões de cisalhamento
- Apenas das forças normais devido à pressão

- Forças normais são importantes:
- Queda de barragens de concreto
- Estouro de vasos de pressão
- Quebra de comportas em canais

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA E CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

Introdução à estática dos fluidos

● para o design: calcula a magnitude e a localização do forças normais

● Desenvolvimento de instrumentos que medem a pressão

● Desenvolvimento de sistemas que transferem pressão, por exemplo,
- Freio de automóveis
- Guindaste

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA E CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

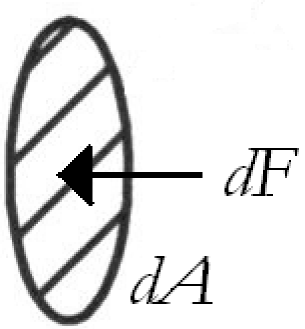
Introdução à estática dos fluidos

- Média de intensidade da pressão p = força por unidade de área
- Vamos:

- F = força de pressão total normal numa área finita A
- dF = força normal em uma área infinitesimal dA

- A pressão local sobre a área infinitesimal é

$$\boxed{P = \frac{dF}{dA}}$$



SE A Pressão é Uniforme, *p = F/A*

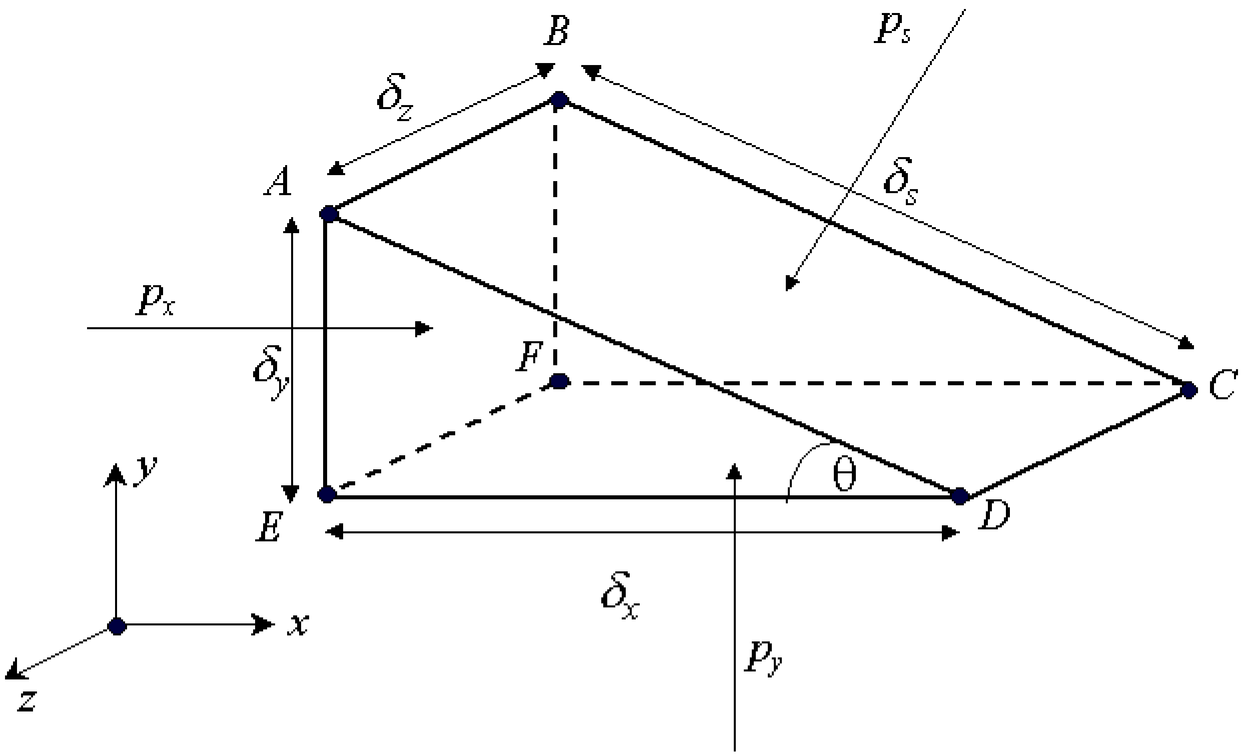
SI units: *Pa* (=*N/m2*), *kPa* (=*kN/m2*)

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Lei Pascal da Pressão agindo num Ponto

Demonstração de que a **pressão** atua **igualmente** em **todas as direções**.)

Considerando um pequeno elemento de fluido na forma de um prisma triangular que contém um ponto *P*.



podemos estabelecer um relacionamento entre as três pressões *Px* na direção do *x*, *Py* na direção *y* e *Ps* na direção normal.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Lei Pascal da Pressão agindo num Ponto

Como o fluido encontra-se em repouso sabemos que não há forças de cisalhamento e que toda força está agindo *normal em* ***relação a superfície***. Desta forma:

Ps age perpendicular em relação à superfície *ABCD*
Px age perpendicular em relação à superfície *ABFE*
Py age perpendicular em relação à superfície *FECD*

Para uma análise de forças no plano *x*-*y* consideramos *x* como positivo para direita ($\rightarrow$ +) e *y* positivo para cima ($\uparrow$+) . Em termos de forças a pressão ***Ps*** pode ser expressa como:

$$\boxed{F_s = P_s A_{ABCD} = P_s \delta s \delta z}$$

As componentes *x* e *y* são dadas por

$$\boxed{F_{sx} = F_s sin\theta \; e \; F_{sy} = F_s cos\theta}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Lei Pascal da Pressão agindo num Ponto

A pressão *Px* somente contribui com uma força na *direção-x* dada por

$$F_x = P_x A_{ABFE} = P_x \delta z \delta y$$

A pressão *Py* somente contribui com uma força na *direção-y*

$$F_y = P_y A_{FECD} = P_y \delta x \delta y$$

Considerando o peso do fluido atuando para baixo na direção do *eixo-y*,

$$\mathrm{W} = -mg \longleftrightarrow \mathrm{W} = -\rho \forall g \longleftarrow \rho = \frac{m}{\forall}$$

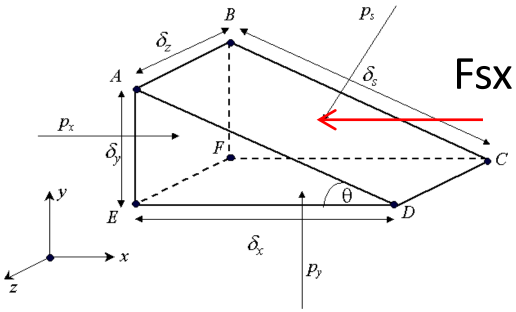
$$\mathrm{W} = -\rho g \times \frac{1}{2} \delta x \delta y \delta z$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Lei Pascal da Pressão agindo num Ponto

Sabemos que para que um elemento de fluido esteja em equilíbrio a **soma** dos componentes **das forças** em qualquer direção deve **ser igual a zero**.

Analisando as forças na direção do *eixo-x*:.



$$\left[\sum F_x = 0\right]$$

$$F_x + F_{sx} = 0$$

$$p_x \delta z \delta y - F_s \sin\theta = 0$$

$$p_x \delta z \delta y - \left(p_s \delta s \delta z\right)\sin\theta = 0$$

$$\text{como } \sin\theta = {}^{\delta y}\!/_{\delta s}$$

$$p_x \delta z \delta y - \left(p_s \delta s \delta z\right)\frac{\delta y}{\delta s} = 0$$

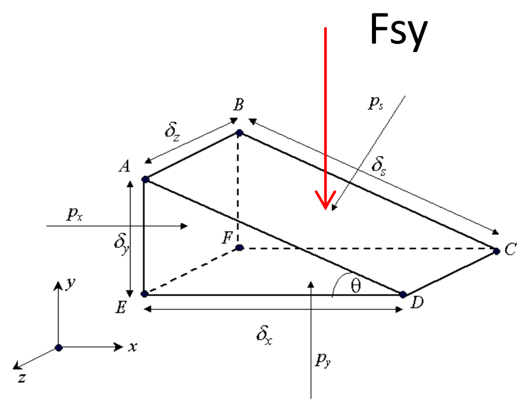
Desta forma como o fluido está em repouso (em equilíbrio)

$$\boxed{P_x = P_s}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Lei Pascal da Pressão agindo num Ponto

Analisando as forças na direção do *eixo-y*:



$$\left[\sum F_y = 0\right]$$

$$F_y + F_{sy} + W = 0$$

$$p_y \delta x \delta z - F_s \cos\theta - \rho g V_{prisma} = 0$$

$$p_y \delta x \delta_z - \left(p_s \delta s \delta z\right)\cos\theta - \rho g \frac{1}{2} \delta x \delta y \delta z = 0$$

como $\cos\theta = \dfrac{\delta x}{\delta s}$ obtemos para o estado de equilíbrio

$$p_y \delta x \delta_z + \left(-p_s \delta x \delta z\right) + \left(-\rho g \frac{1}{2} \delta x \delta y \delta z\right) = 0$$

Como o elemento de fluido é pequeno δx , $\delta\ y$ e δz são pequenos e desta forma o produto $\delta x \delta y \delta z$ é muito pequeno podendo ser considerado desprezível

$$\boxed{P_y = P_s}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Lei Pascal da Pressão agindo num Ponto

$$p_x = p_y = p_s$$

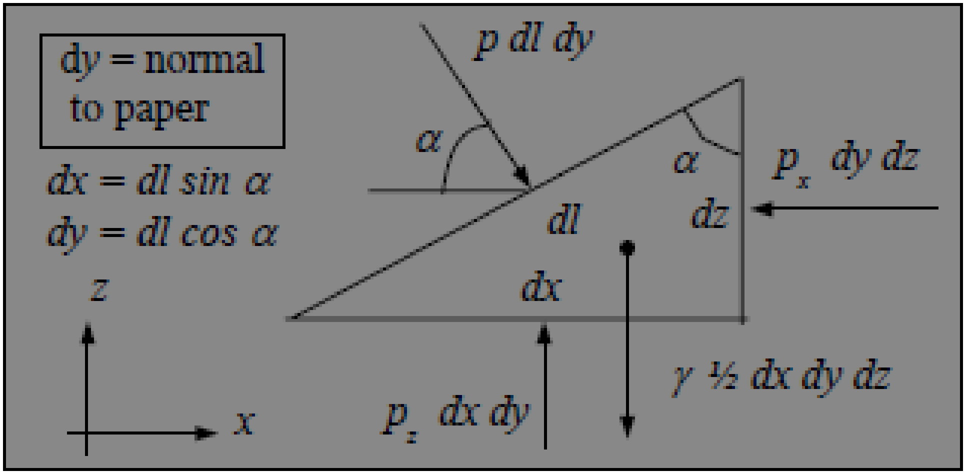
Considerando o elemento prismático, *Ps* é a pressão num plano qualquer com ângulo

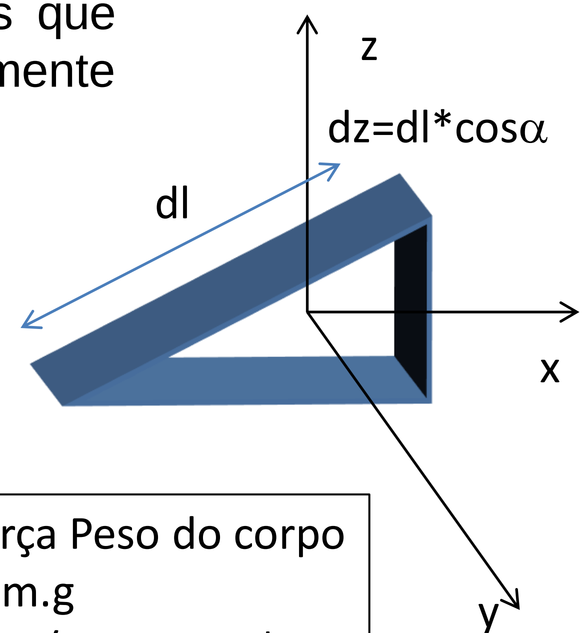
A pressão em qualquer ponto é a mesma em todas as direções.
É conhecida como **Lei de Pascal** e aplicada para fluidos em repouso.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Isotropia de pressão

Isotropia é a propriedade que caracteriza as substâncias que possuem as mesmas propriedades físicas independentemente da direção considerada.





Força Peso do corpo
P=m.g
ρ=m/V => m= ρ*V
P=ρg*V
P=ρg*(dx*dy*dz)/2
P=γ/2*(dx*dy*dz)

- ***Ao longo de y*: As Forças de Cancelam com o outro lado**

- *Ao Longo de x*: *P dy dl cos α – Px dy dz = 0*
  *P*dy*dz – Px*dy*dz=0*
  P=Px

Along z:
*Pz dy dx – P dy dl sin (α)- γ/2 *(dx dy dz) = 0*

- desprezando termo de alta ordem *p = py = px* (*isotropic*)

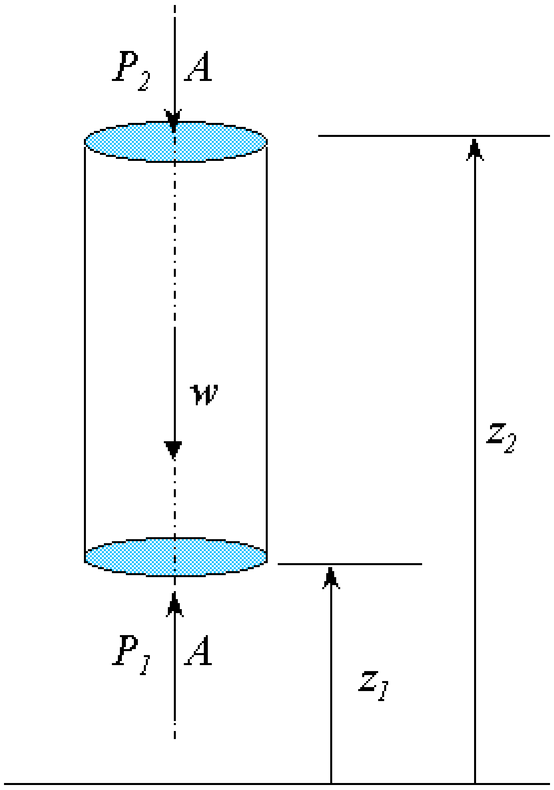
FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Variação da Pressão Verticalmente num Fluido com Efeito da Gravidade

Na figura podemos observar um elemento de fluido representado como uma coluna vertical com **área da seção transversal constante**, que tem a **mesma** massa específica .

A pressão no fundo do cilindro é $p1$ agindo no nível $z1$, e no topo $p2$ no nível $z2$. O fluido está em **repouso** e em **equilíbrio**, assim, o **somatório** de todas as **forças** na direção vertical é igual a zero.



FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Força devido a P_1 em A (para baixo) = P_1A
Força devido a P_2 em A (para baixo) = P_2A
Força devido ao peso do elemento (para baixo) =mg=ρVg= ρgA(z2-z1)

Tomando como positivo para cima (↑+), no estado de equilíbrio temos

$$p_1 A - p_2 A - \rho g A(z_2 - z_1) = 0$$

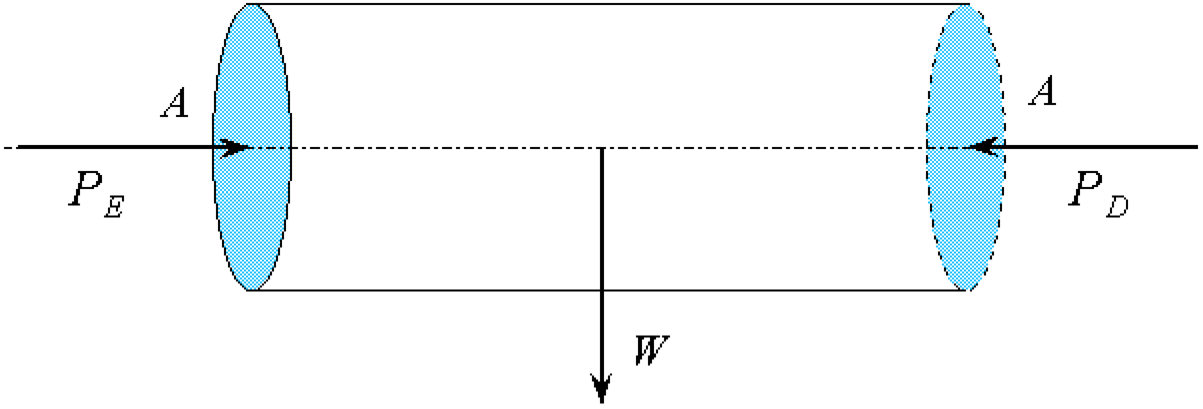
$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$$

Em um fluido sob a ação da gravidade a pressão aumenta com o aumento da altura $z = (z2 - z1)$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Igualdade de Pressão num Fluido Estático.

Considere o elemento cilíndrico horizontal de fluido da figura abaixo, com uma área transversal *(A)* constante, com massa específica ρ, pressão *P*1 na esquerda e pressão *P*2 na direita.



Como o fluido está em equilíbrio o somatório das forças agindo na *direção-x* é igual a zero.

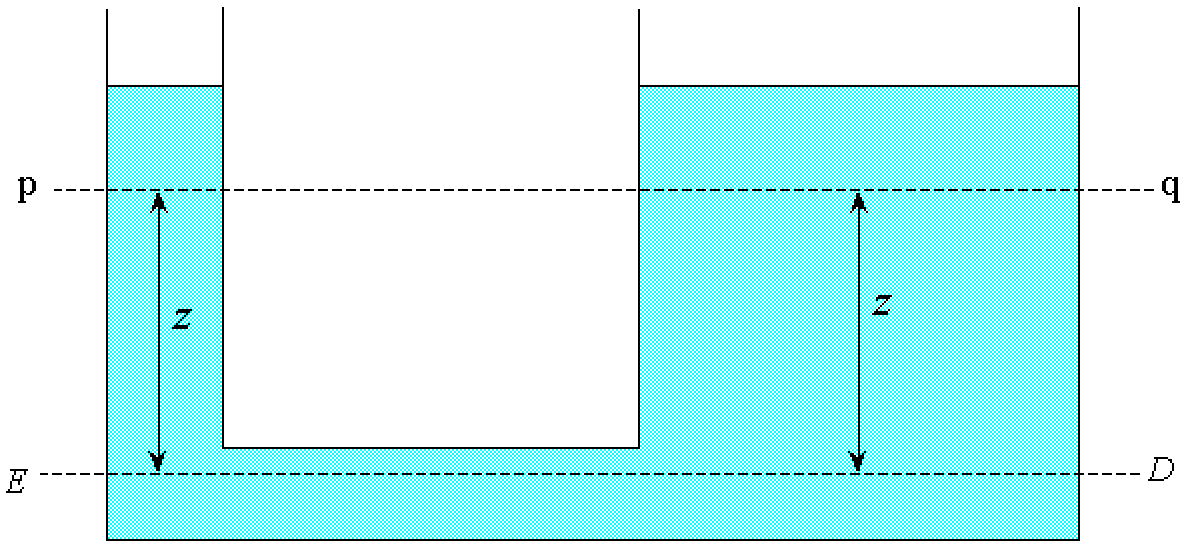
$$p_E A = p_D A$$

$p_E = p_D$ A pressão na direção horizontal é *constante.*

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

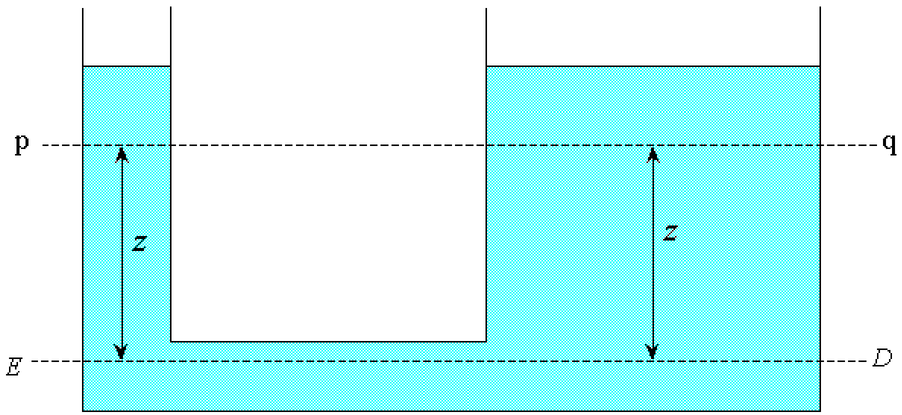
Este resultado é o mesmo para qualquer fluido *contínuo*



Mostramos acima que $P_E = P_D$ e da equação para uma mudança de pressão vertical temos que

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS



$$p_E = p_p + \rho g z$$

$$p_D = p_q + \rho g z$$

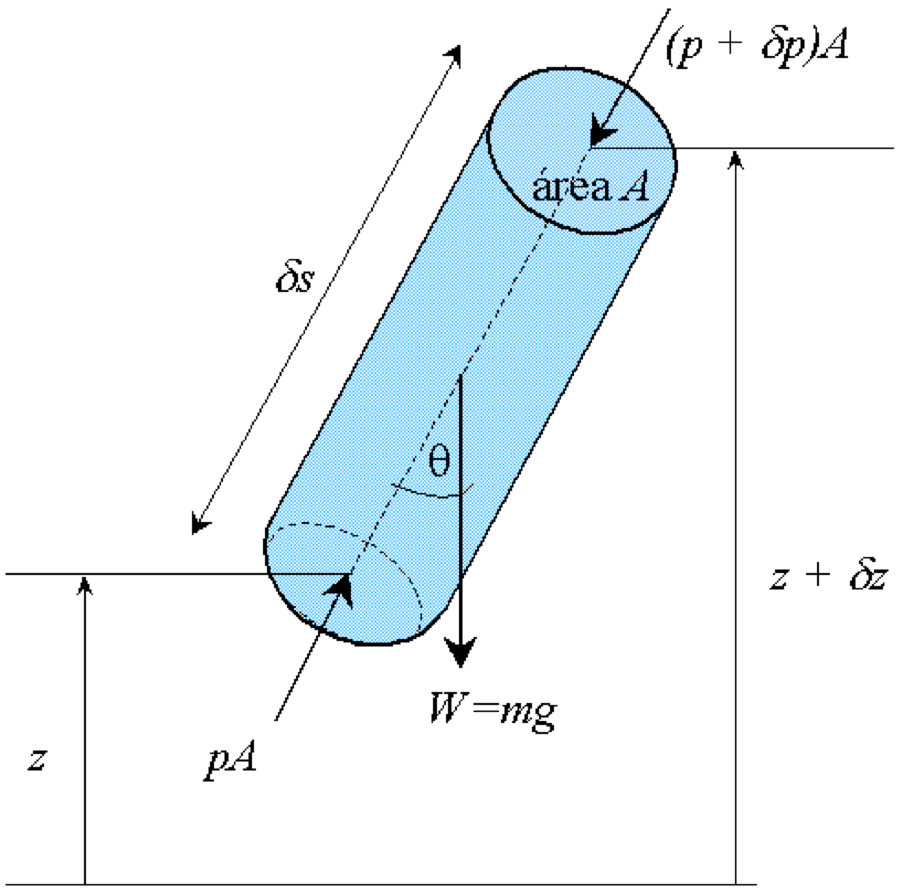
$$p_p + \rho g z = p_q + \rho g z$$

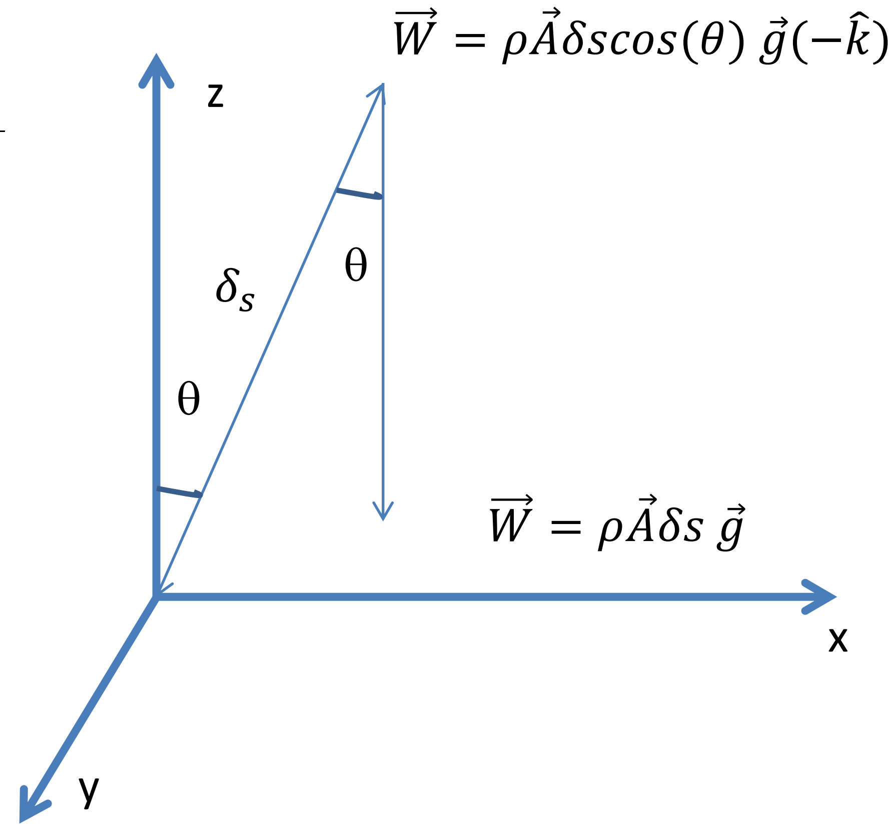
$$p_p = p_q$$

Equação Geral Para Variação de Pressão num Fluido Estático

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Equação Geral Para Variação de Pressão num Fluido Estático





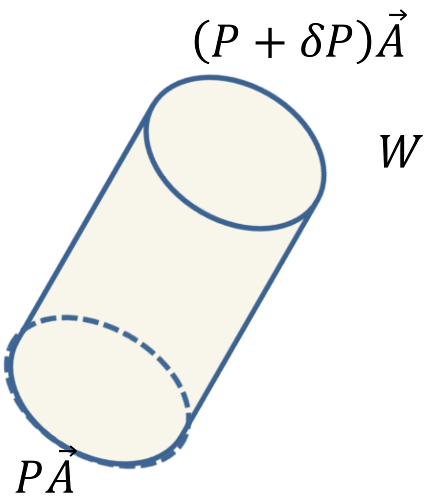
Considere o elemento de fluido cilíndrico mostrado acima, inclinada com ângulo θ em relação à vertical, de comprimento δs , seção ***A*** e massa específica constante ρ . A pressão inferior **P** está agindo na altura ***z*** e no topo, na altura ***z + δz*** , atua a pressão **P +δP** .

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

As forças agindo no elemento são:

- Força agindo inclinada na face (inferior) z $\quad P\vec{A}$
- Força agindo inclinada na face (superior) z + δz $\quad (P + \delta P)\vec{A}$
- Peso do elemento agindo verticalmente para baixo =mg



$$W = Mass.Espcifica \times Volume \times Gravidade$$

$$\vec{W} = \rho \times \vec{A} \times \delta s \times \vec{g}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Há também **forças** agindo nos **contornos do fluido**, atuando **normais** em todos os lados do elemento.

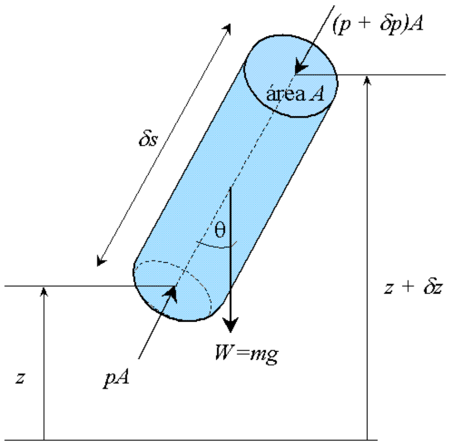
Pelo **equilíbrio do elemento** a **resultante das forças** em **qualquer direção é zero**.

Resolvendo as forças na direção ao longo o eixo central:

$$pA - (p + \delta p)A - \rho g A \delta s \ \cos\theta = 0$$

$$\delta p = -\rho g \delta s \cos\theta$$

$$\frac{\delta p}{\delta s} = -\rho g \cos\theta$$

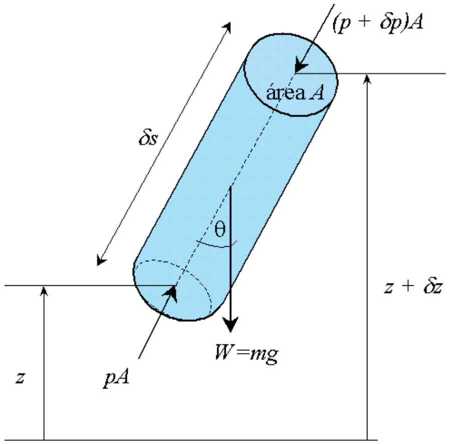


ou na forma diferencial: $$\frac{dP}{ds} = -\rho g \cos\theta$$

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Em um Fluido Estático

se = 90º (*cos90=0*) então *s* representa a direção *x* ou *y* (horizontal) , e desta forma:



$$\left(\frac{dP}{ds}\right)_{\theta=90} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} = -\rho g \cos 90 = 0$$

Confirmando que o **gradiente de pressão** em qualquer **plano horizontal** é **zero**

Ou de outro modo que a **pressão** em **qualquer ponto de um plano horizontal** é a **mesma**.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Em um Fluido Estático

Na vertical ***s*** representa a ***direção-z*** (vertical) quando θ= 0 (*cos0=1)*

$$\left(\frac{dP}{ds}\right)_{\theta=0} = \frac{dP}{dz} = -\rho g$$

A relação que representa a **variação de pressão** em **fluidos estáticos** compressíveis ou incompressíveis é definida como:

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Sua determinação dependerá da integração.

Para fluidos **incompressíveis** a massa especifica é constante e a integração somente dependente da altura z.

Para fluidos **compressíveis** a massa específica ***depende*** da pressão e da temperatura (**p,T**).

$$\int_{P1}^{P2} \frac{dP}{dz} dz = \int_{z1}^{z2} -\rho g dz$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Para fluidos **incompressíveis**

$$\int_{P1}^{P2} \frac{dP}{dz} dz = -\rho g \int_{z1}^{z2} dz$$

$$\int_{P1}^{P2} dP = -\rho g \int_{z1}^{z2} dz$$

$$P2\text{-}P1 = -\rho g(z2 - z1)$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Para fluidos **compressíveis**

Os **gases** são fluidos **compressíveis** já que **apresentam** uma **variação** significativa da massa específica em função da **pressão** e **temperatura**.

Efeito da Variação da Pressão com a Altura

Quando a **variação da altura** é da ordem de **milhares de metros** devemos **considerar a variação** da **massa específica** nos **cálculos da variação de pressão**. No caso de um gás perfeito é válida a equação:

$$\boxed{P = \rho R T}$$

$$\boxed{\rho = \frac{P}{RT}}$$

P é a pressão absoluta (*Pa*) ,
ρ é a massa específica (kg/m3),
R a constante do gás.
Para o ar
R=287 J/kg.K e
T é a temperatura absoluta (*K*)

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Considerando a Eq. de estática dos fluidos:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

$$\frac{dP}{dz} = -g\frac{P}{RT}$$

Separando as variáveis:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dz} = -g\frac{1}{RT}$$

podemos integrar considerando ***g*** e **R** como constantes no intervalo de integração:

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

intervalo de integração:

$$\int_{P1}^{P2} \frac{1}{P}\frac{dP}{dz}dz = -\frac{g}{R}\int_{z1}^{z2}\frac{dz}{T}$$

$$\int_{P1}^{P2} \frac{dP}{P} = -\frac{g}{R}\int_{z1}^{z2}\frac{dz}{T}$$

Admitindo que a temperatura (*T*) é constante e igual a *To* no intervalo de integração de z1 a z2

$$Ln(P2) - Ln(P1) = -\frac{g}{RTo}(z2 - z1)$$

$$Ln\left(\frac{P2}{P1}\right) = -\frac{g}{RTo}(z2 - z1)$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

$$e^{Ln\left(\frac{P2}{P1}\right)} = e^{-\frac{g}{RTo}(z2-z1)}$$

Explicitando a pressão final:

$$\frac{P2}{P1} = e^{-\frac{g}{RTo}(z2-z1)}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Exemplo:

O prédio ***<u>Empire State Building</u>*** de Nova York é uma das construções mais altas do mundo com uma **altura** de 381m. Determine a relação de pressão entre o topo e a base do edifício. Considere uma **temperatura uniforme** e igual a 15ºC. Compare este resultado com o que é obtido considerando o ar como **<u>incompressível</u>** e com **<u>peso especifico igual a</u>** 12,01 N/m3. Obs. Considere a pressão atmosférica padrão (101,33kPa).

Solução:

Fluido compressível

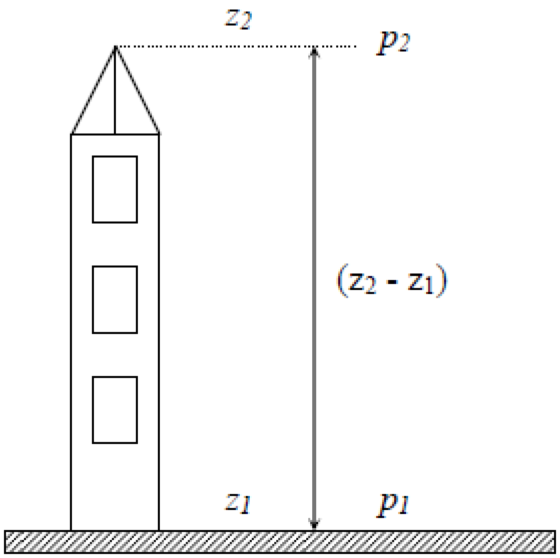
$$\frac{P2}{P1} = e^{-\frac{g}{RTo}(z2-z1)}$$

Fluido Incompressível

$$P2 - P1 = -\rho g(z2 - z1)$$

$$\frac{P2 - P1}{P1} = -\rho g\frac{(z2 - z1)}{P1}$$

$$\frac{P2}{P1} = 1 - \rho g\frac{(z2 - z1)}{P1}$$



FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Fluido compressível

$$\frac{p_2}{p_1} = \exp\left\{-\frac{g}{RT_0}(z_2 - z_1)\right\}$$

com

$(z_2\text{-}z_1) = 381\text{m}$; $g=9{,}81\ \text{m/s}^2$; $R=287\ \text{J/kg.K}$

$$\frac{p_2}{p_1} = \exp\left\{-\frac{9{,}81}{287x288}381\right\}$$

$$\frac{p_2}{p_1} \cong 0{,}956$$

Fluido Incompressível

$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$, dividindo por p_1

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{\rho g(z_2 - z_1)}{p_1}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{(12{,}01)(381)}{101{,}33x1000} = 0{,}955$$

- Observa-se que a **diferença** entre os dois resultados é muito **pequena**.
- Observa-se que a variação da pressão é muito pequena (da **ordem de 5**%), justificando-se que ***não*** seria **necessário considerar a compressibilidade do ar**.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS   Medidas de Pressão

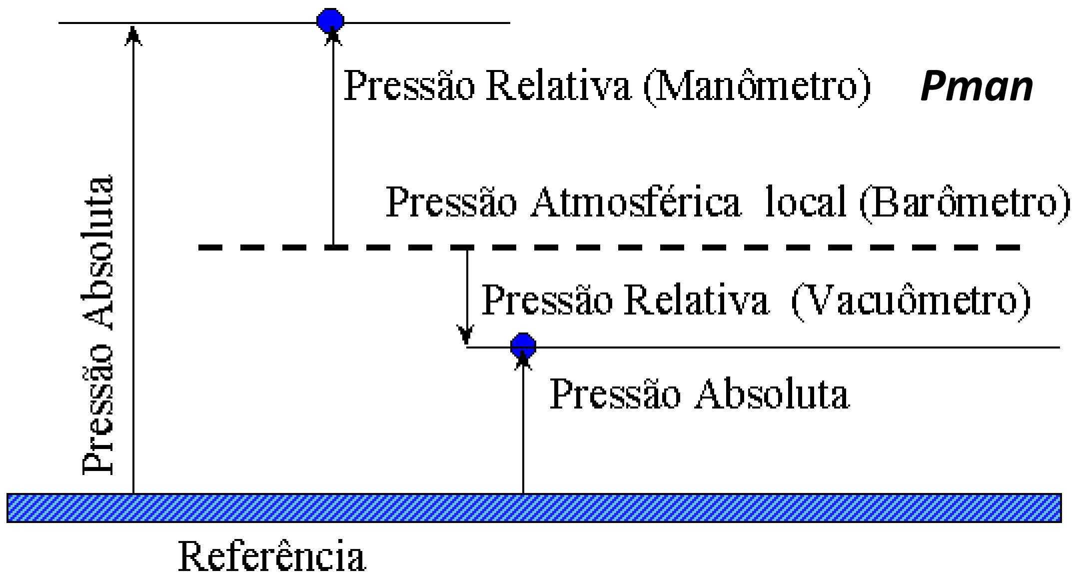
Pressão Atmosférica – *patm*

1. A magnitude da pressão atmosférica **varia com a altitude** e as **condições climatológicas** do lugar. É **medida em relação ao vácuo perfeito** por *barômetros* sendo registrada nas **estações meteorológicas**.
2. A pressão atmosférica apresenta uma **diminuição com a altitude** de aproximadamente **85mm** de mercúrio por cada **1000m** de altitude.
3. A pressão atmosférica próxima da **superfície terrestre** varia normalmente na faixa de **95 kPa a 105 kPa.** Ao **nível do mar** a *pressão atmosférica padrão* é de **101,33kPa**.

• Equivalências de *pressão atmosférica*: 101,33kPa 1 atm 760mmHg 10,36mH20

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS



Pressão Relativa (gauge) - *Pman*

$$p_{man} = \rho g h$$

Pressão Absoluta - *Pabs*

$$p_{abs} = P_{man} + p_{atm}$$

PressãoAbsoluta= Pressão Relativa+ PressãoAtmosféria

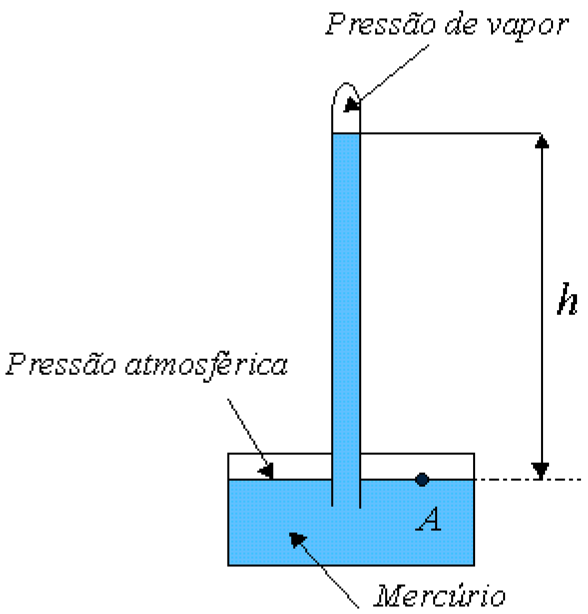
• Obs: A *pressão atmosférica* (***Patm***) por definição é uma *pressão absoluta* já que é medida em relação ao vácuo perfeito.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Barômetros

Pv



como *Pv* é muito pequeno na temperatura ambiente, considera-se desprezível e desta forma determina-se a pressão atmosférica diretamente em função da coluna de mercúrio.

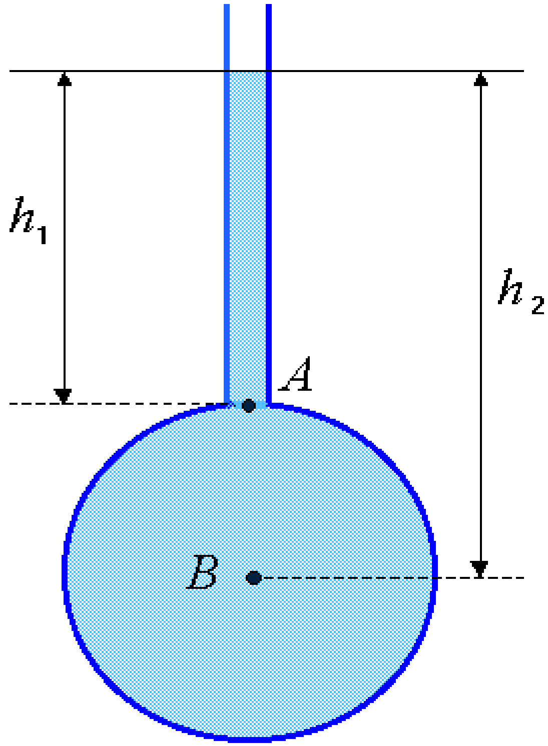
$$p_{atm} = p_v + \rho_{mer} g h$$

$$p_{atm} = \rho_{mer} g h$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Manômetros



Pressão em A = pressão da coluna de líquido acima de A

$$p_A = \rho g h_1$$

Pressão em B = pressão da coluna de líquido acima de B

$$p_B = \rho g h_2$$

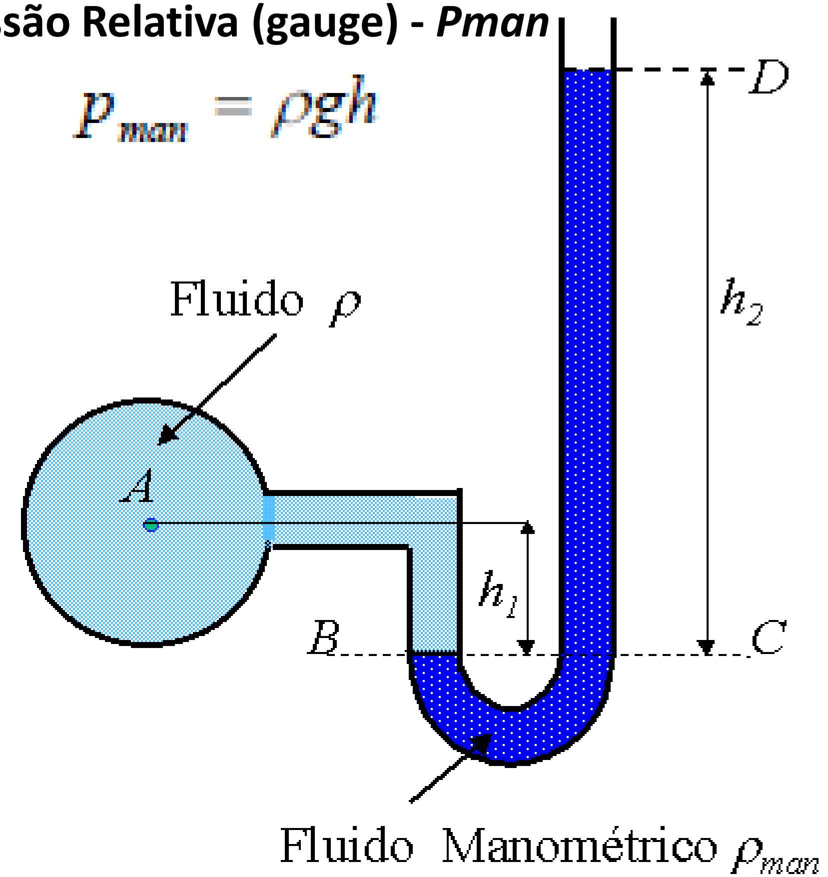
Este método é utilizado para líquidos e unicamente quando a altura líquida pode ser medida.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Pressão Relativa (gauge) - *Pman*

$$P_{man} = \rho g h$$



Pressão em B = Pressão em C

$$PB = PC$$

Pressão em B Pressão em A + Pressão da altura h1 de fluido que deve ser medido

$$PB = PA + \rho g h1$$

Pressão em C = Pressão em D + Pressão da altura h2 do fluido manométrico

$$PC = PD + \rho_{man} g h2$$

$$PC = Patm + \rho_{man} g h2$$

Como estamos medindo *pressão relativa* podemos subtrair Patm dando

$$PB = PC$$

$$PA = \rho_{man} g h2 - \rho g h1$$

Campo de Forças Agindo no Volume de Controle

No volume de controle podem agir *forças de superfície* e *forças de campo*.

Forças de Superfície

As *forças de superfície* ($\vec{F}_s$) agem nas superfícies do volume de controle devido à pressão ($\vec{F}_{sp}$) e às tensões de cisalhamento ($\vec{F}_{s\tau}$) .

$$\vec{F}_{sp} = \int_A P d\vec{A} \qquad \vec{F}_{s\tau} = \int_A \tau d\vec{A}$$

Campo de Forças Agindo no Volume de Controle

As forças de campo ($\vec{F}_b$) são forças que atuam sem contato físico e distribuídas sobre o volume de controle, tais como forças de campo gravitacional e forças de campo eletromagnético. No caso de sistemas fluido mecânicos considera-se como forças de campo a f*orça de campo gravitacional.*

Se denominamos $\overrightarrow{B}$ as *forças de campo por unidade de massa*, então a força de campo é dada por:

$$\vec{F}_b = \int_A \vec{B} dm$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{g}$$

$$\vec{F}_w = m\vec{g}$$

Onde $dm = \rho d\forall$. Quando a força de gravidade é a única força de campo é definida por unidade de *massa* como $\vec{B} = \vec{g}$. Quando $\vec{B}$ é considerara por unidade de *volume* $\vec{B} = \rho\vec{g}$. A força de campo é definida como:

$$\vec{F}_b = \int_A \vec{B} d\forall$$

As componentes da força de campo na direção *x,y,z* são dadas como:

$$dF_{Bx} = B_{mx} dm = B_x \rho d\forall = g_x \rho d\forall$$

$$dF_{By} = B_{my} dm = B_y \rho d\forall = g_y \rho d\forall$$

Forças de Campo Gravitacional

$$dF_{Bz} = B_{mz} dm = B_z \rho d\forall = g_z \rho d\forall$$

A força total agindo no volume de controle é:

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

cujas componentes são dadas por:

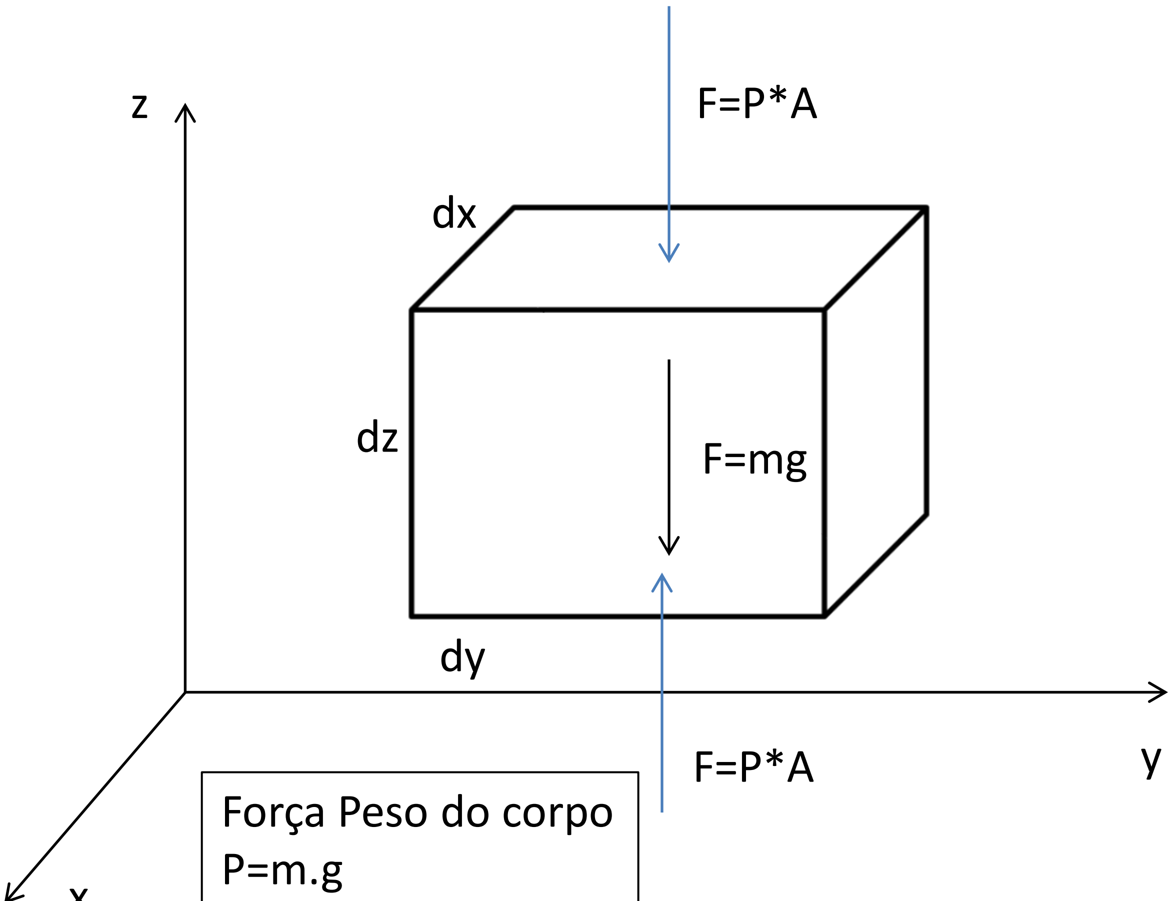
$$F_x = F_{sx} + F_{Bx}$$

$$F_y = F_{sy} + F_{By}$$

$$F_z = F_{sz} + F_{Bz}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Variação da Pressão em um Fluído Estático (1)



Força Peso do corpo
P=m.g
ρ=m/V => m= ρ*V
P=ρg*V
P=ρg*(dx*dy*dz)
P=γ*(dx*dy*dz)

Para a figura a esquerda:

- Mostra elementos diferencial

- Densidade do fluido constante

- Forças agindo :
  – Força Peso do corpo = γ·*dx·dy·dz*
  – Força de superfície = Força de Pressão

- Fluido em descanso
  => Elemento em Equilíbrio
  => Somas das forças deve ser zero

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força peso do Corpo

Forças de Campo

A única força de campo que deve ser considerada é a gravidade.

$$dF_B = \vec{g}dm$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m = \rho V$$

$$dm = \rho dV$$

$$F_b = mg$$

$$dF_b = dm\vec{g}$$

$$dF_b = \vec{g}\rho dV$$

$$dF_b = \vec{g}\rho \mathrm{dxdydz}$$

$$dF_b = \vec{\gamma} \mathrm{dxdydz}$$

sendo que $\vec{g}$ é vetor gravidade local, ρ é a massa especifica e dV é o volume do elemento dV = dx dy dz,

FÍSICA DOS FLUÍDOS

ESTÁTICA DOS FLUIDOS

- Em um fluido estático, **nenhuma tensão de cisalhamento pode estar presente**.

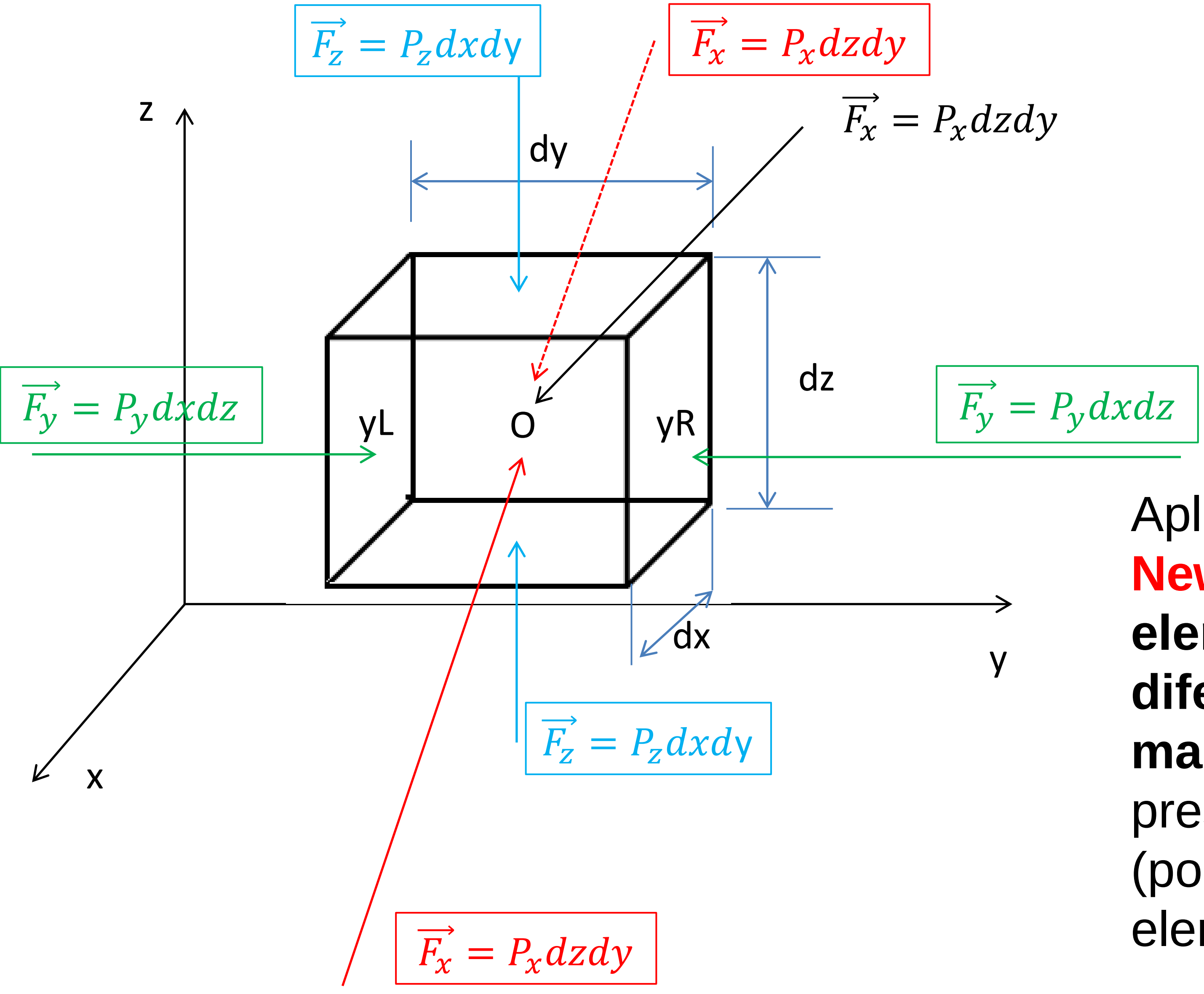
- A única força de superfície é a pressão.

- A **pressão** é um ***campo escalar*** expressa como p=p(x,y,z), ou seja, a **pressão varia com a posição dentro do fluido**.

A **força liquida** de P resultante dessa variação pode ser avaliada **somando-se todas as forças que atuam nas seis faces do elemento fluido**.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força de Superfície



Aplica-se a **2ª lei de Newton** a um **elemento de fluido diferencial de massa** Seja P a pressão no centro (ponto 0) do elemento.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Polinômio de Taylor de Ordem n

Definição – Polinômio de Taylor de Ordem n

Seja f uma função com derivadas de ordem k para k = 1, 2, ..., N em algum intervalo contendo *a* como um ponto interior. Então, para algum inteiro n de 0 a N, o **polinômio de Taylor de ordem n** gerado por f em x = *a* é o polinômio

$$Pn(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$Pn(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\frac{df(a)}{dx}(x-a) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f(a)}{d^2x}(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{d^kf(a)}{d^kx}(x-a)^k$$

$$f(x) = P(x)$$

$$Pn(y) = P(y) + \frac{dP(y)}{dy}(yL-y) + \frac{1}{2!}\frac{d^2P(y)}{d^2y}(yL-y)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{d^kP(y)}{d^ky}(yL-y)^k$$

$$Pn(x) = P(y) + \frac{dP(y)}{dy}(yR-y) + \frac{1}{2!}\frac{d^2P(y)}{d^2y}(yR-y)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{d^kP(y)}{d^ky}(yR-y)^k$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força de Superfície

Seja p a pressão no centro (ponto 0) do elemento. Para determinar a pressão em cada uma das seis faces do elemento, **utilizamos um desenvolvimento em serie de Taylor da pressão em torno do ponto 0**

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força de Superfície

$$PL(y) = P(y) + \frac{dP(y)}{dy}\left(-\frac{dy}{2}\right) + \cdots.$$

Sendo que os termos de ordem superiores são omitidos porque tem magnitude desprezível na da série de Taylor.

$$\boxed{PL(y) = P(y) - \frac{dP(y)}{dy}\left(\frac{dy}{2}\right) + \cdots.}$$

$$\boxed{PR(y) = P(y) + \frac{dP(y)}{dy}\left(\frac{dy}{2}\right) + \cdots}$$

$$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$$

$$\boxed{PL(x) = P(x) - \frac{dP(x)}{dx}\left(\frac{dx}{2}\right) + \cdots.}$$

$$\boxed{PR(x) = P(x) + \frac{dP(x)}{dy}\left(\frac{dx}{2}\right) + \cdots}$$

$$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$$

$$\boxed{Pb(z) = P(z) - \frac{dP(z)}{dz}\left(\frac{dz}{2}\right) + \cdots.}$$

$$\boxed{Pt(z) = P(z) + \frac{dP(z)}{dy}\left(\frac{dz}{2}\right) + \cdots}$$

$$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força de Superfície

A força de pressão atua contra a face, sendo que a **pressão positiva** corresponde a uma **tensão normal de compressão**.

Similarmente, as forças de pressão nas outras faces do elemento podem ser obtidas conforme deduções acima, **de modo que combinando todas as forças, obtemos a força superficial total agindo sobre o elemento**.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força de Superfície

As forças de pressão que atuam nas duas superfícies y do elemento diferencial. Cada força de pressão é um produto de 3 termos :

- A magnitude da pressão
- A magnitude é multiplicada pela área da face para dar a magnitude da força de pressão
- Vetor unitário indicando o sentido

$$PL(x) = P(x) - \frac{dP(x)}{dx}\left(\frac{dx}{2}\right)(\mathrm{i})$$

$$PR(x) = P(x) + \frac{dP(x)}{dy}\left(\frac{dx}{2}\right)(\mathrm{-i})$$

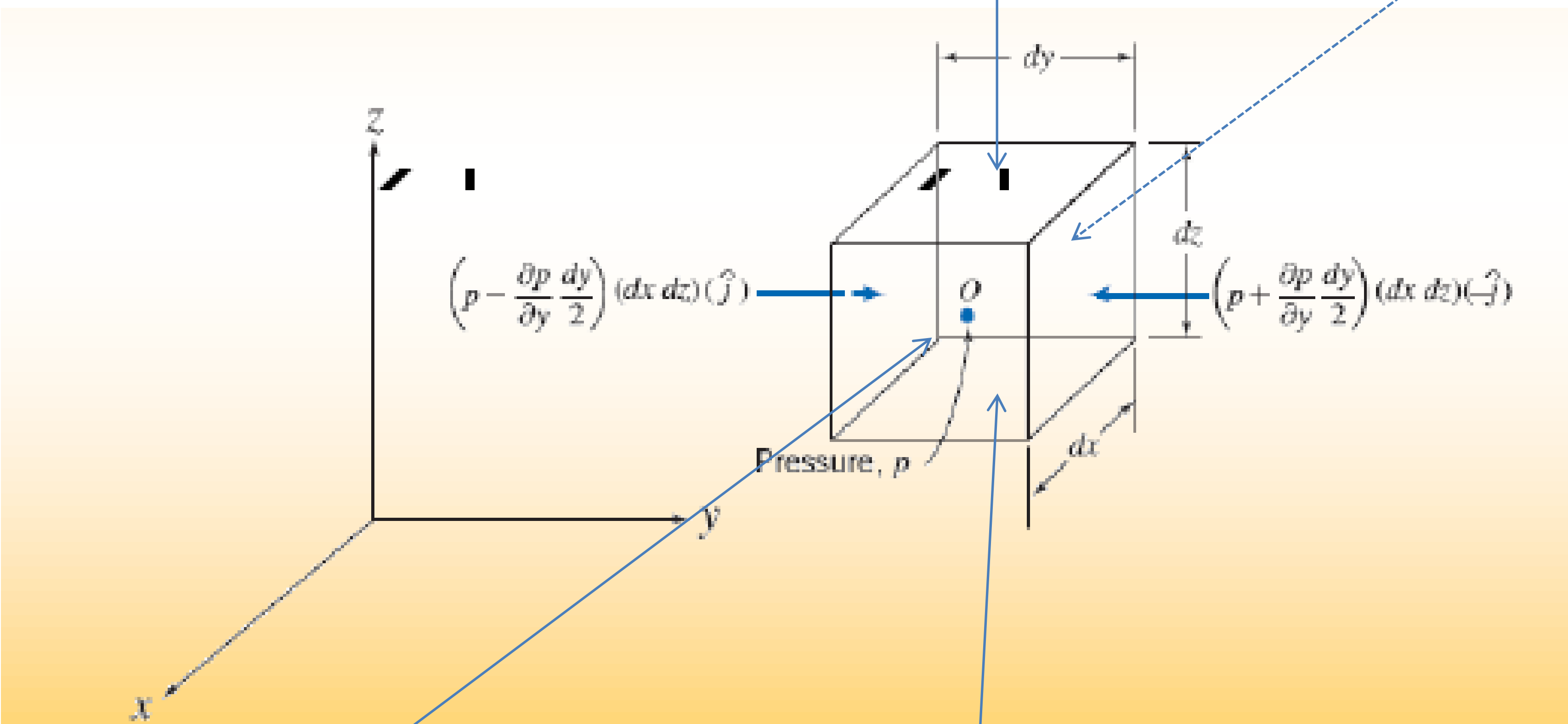
$$PL(x) = -PR(x) = P(x) - \frac{dP(x)}{dx}\left(\frac{dx}{2}\right)(i) = -P(x) - \frac{dP(x)}{dx}\left(\frac{dx}{2}\right)(i)$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força de Superfície

$$Pt(z) = P(z) + \frac{dP(z)}{dy}\left(\frac{dz}{2}\right)(\text{-k})$$

$$PR(x) = P(x) + \frac{dP(x)}{dy}\left(\frac{dx}{2}\right)(\text{-i})$$



$$PL(x) = P(x) - \frac{dP(x)}{dx}\left(\frac{dx}{2}\right)(\text{i})$$

$$Pb(z) = P(z) - \frac{dP(z)}{dz}\left(\frac{dz}{2}\right)(\text{k})$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força de Superfície

Fazendo o Balanço de todas as forças para um fluido hidrostático as forças na superfície do cubo

$$\boxed{d\overrightarrow{F_z} = \overrightarrow{F_z}\,\hat{k} + \overrightarrow{F_z}\,\widehat{-k}} \rightarrow \boxed{\left|\overrightarrow{F_z}\,\hat{k}\right| = \left|\overrightarrow{F_z}\,\widehat{-k}\right|} \rightarrow \boxed{d\overrightarrow{F_z} = \overrightarrow{F_z}\,\hat{k} - \overrightarrow{F_z}\,\widehat{-k}} \rightarrow \boxed{-\frac{dP(z)}{dz}(dz)dydx}$$

$$\boxed{d\overrightarrow{F_y} = \overrightarrow{F_y}\,\hat{j} + \overrightarrow{F_y}\,\widehat{-j}} \rightarrow \boxed{\left|\overrightarrow{F_y}\,\hat{j}\right| = \left|\overrightarrow{F_y}\,\widehat{-j}\right|} \rightarrow \boxed{d\overrightarrow{F_y} = \overrightarrow{F_y}\,\hat{j} - \overrightarrow{F_y}\,\widehat{-j}} \rightarrow \boxed{-\frac{dP(y)}{dy}(dy)dxdz}$$

$$\boxed{d\overrightarrow{F_x} = \overrightarrow{F_x}\,\hat{\imath} + \overrightarrow{F_x}\,\widehat{-i}} \rightarrow \boxed{\left|\overrightarrow{F_x}\,\hat{\imath}\right| = \left|\overrightarrow{F_x}\,\widehat{-i}\right|} \rightarrow \boxed{d\overrightarrow{F_x} = \overrightarrow{F_x}\,\hat{\imath} - \overrightarrow{F_x}\,\widehat{-i}} \rightarrow \boxed{-\frac{dP(x)}{dy}(dx)dydz}$$

Soma de vetores | MODULO | DIREÇÃO

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força de Superfície

Fazendo o Balanço de todas as forças para um fluido hidrostático as forças na superfície do cubo

$$\boxed{d\overrightarrow{F_S} = d\overrightarrow{F_x} + d\overrightarrow{F_y} + d\overrightarrow{F_z}}$$

$$\begin{aligned} d\vec{F}_S &= \left(P - \frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dydz)(i) + \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dydz)(-i) \\ &+ \left(P - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dxdz)(j) + \left(P + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dxdz)(-j) \\ &+ \left(P - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dxdy)(k) + \left(P + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dxdy)(-k) \end{aligned}$$

$$P(x) + \frac{dP(x)}{dx}\left(\frac{dx}{2}\right)dydz(-i) = -P(x) - \frac{dP(x)}{dx}\left(\frac{dx}{2}\right)dydz(i)$$

$$P(y) + \frac{dP(y)}{dy}dxdz\left(\frac{dy}{2}\right)(-j) = -P(y) - \frac{dP(y)}{dy}\left(\frac{dy}{2}\right)dxdz(j)$$

$$P(z) + \frac{dP(z)}{dz}dxdy\left(\frac{dz}{2}\right)(-k) = -P(z) - \frac{dP(z)}{dz}\left(\frac{dz}{2}\right)dxdy(k)$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força de Superfície

$$\boxed{d\overrightarrow{F_S} = d\overrightarrow{F_x} + d\overrightarrow{F_y} + d\overrightarrow{F_z}}$$

$$d\vec{F}_s = \left(P - \frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dydz)(i) + \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dydz)(-i) + \left(P - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dxdz)(j) + \left(P + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dxdz)(-j) + \left(P - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dxdy)(k) + \left(P + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dxdy)(-k)$$

$$d\vec{F}_s = \left(P - \frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dydz)(i) + \left(-P - \frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dydz)(i) + \left(P - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dxdz)(j) + \left(-P - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dxdz)(j) + \left(P - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dxdy)(k) + \left(-P - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dxdy)(k)$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força de Superfície

$$
\begin{aligned}
d\vec{F}_s &= \left(P - \frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dydz)(i) + \left(-P - \frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dydz)(i) \\
&+ \left(P - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dxdz)(j) + \left(-P - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dxdz)(j) \\
&+ \left(P - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dxdy)(k) + \left(-P - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dxdy)(k)
\end{aligned}
$$

$$
d\vec{F}_s = \left(-\frac{\partial P}{\partial x}dx\right)(dydz)(i) + \left(-\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)(dxdz)(j) + \left(-\frac{\partial P}{\partial z}dz\right)(dxdy)(k)
$$

$$
dF_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{k}\right) \text{dxdydz}
$$

$$
\mathrm{d}\overrightarrow{F_S} = -grad\, P dxdydz = -\nabla P dxdydz
$$

$$
\frac{\overrightarrow{dF_S}}{dxdydz} = -grad\ P = -\nabla P
$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força de Superfície

O termo entre parênteses é denominado gradiente de pressão e pode ser escrito como **grad p** ou ∇**p**.

$$grad\ P = \nabla P = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{k}\right)$$

gradiente é um **operador vetorial**, ou seja, tomando-se o gradiente de um campo escalar, obtêm um **campo vetorial**.

$$d\overrightarrow{F_S} = -\nabla P dxdydz$$

Fisicamente, o **<u>gradiente de pressão é o negativo da força de superfície por unidade de volume</u>** devido a pressão.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força de Superfície

Finalmente, **combinando** as formulações desenvolvidas para as **forças de superfície** e **forças de campo** obtidos acima, podemos avaliar a **força total** atuando sobre o **elemento fluido**.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força Total

$$d\vec{F} = d\overrightarrow{F_S} + d\overrightarrow{F_b}$$

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F_S} = -\nabla P dxdydz$$

$$d\overrightarrow{F_b} = \vec{g}\rho \mathrm{dxdydz}$$

$$d\vec{F} = -\nabla P dxdydz + \vec{g}\rho \mathrm{dxdydz}$$

$$d\vec{F} = (-\nabla P + \vec{g}\rho)dxdydz$$

$$d\vec{F} = (-\nabla P + \vec{g}\rho)dV$$

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = (-\nabla P + \vec{g}\rho)$$

$$\frac{d\vec{F}}{\rho dV} = (-\frac{1}{\rho}\nabla P + \vec{g})$$

$$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow \frac{1}{\rho dV} = \frac{1}{dm}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Força de Superfície

$$\frac{d\vec{F}}{\rho dV} = (-\frac{1}{\rho}\nabla P + \vec{g})$$

$$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow \frac{1}{\rho dV} = \frac{1}{dm}$$

Sabe-se que para uma partícula fluida, a 2 º lei de Newton fornece $d\vec{F} = dm\vec{a}$ logo $d\vec{F} = \rho dV\vec{a}$

Para u fluído Estático $\vec{a} = 0$

$\frac{d\vec{F}}{dV} = \rho\vec{a}$=0

$$\frac{d\vec{F}}{dm} = (-\frac{1}{\rho}\nabla P + \vec{g})$$

$$\frac{dm\vec{a}}{dm} = (-\frac{1}{\rho}\nabla P + \vec{g})$$

$$\frac{dmd\vec{V}}{dmdt} = (-\frac{1}{\rho}\nabla P + \vec{g})$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = (-\frac{1}{\rho}\nabla P + \vec{g})$$

$$\left(-\frac{1}{\rho}\nabla P + \vec{g}\right) = 0$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Segunda Lei de Newton (Hidrostático (repouso))

$$\boxed{\frac{d\vec{F}}{d\mathrm{V}} = \rho\vec{a} = 0}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{F}}{dV} = (-\nabla P + \vec{g}\rho) = 0}$$

$$\boxed{-\nabla P \quad + \quad \vec{g}\rho \quad = \quad 0}$$

Resultante (Saldo) da Força de pressão por unidade de Volume em um ponto

Força Peso de um corpo por unidade de volume em um ponto

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Relação Altura e Pressão (Hidrostática)

$$\boxed{-\vec{\nabla} P + \vec{g}\rho}$$

A equação vetorial acima pode ser expressa em componentes

$$\boxed{-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{k}\right) + \rho g\hat{\imath} + \rho g\hat{\jmath} + \rho g\hat{k} = 0}$$

$$\boxed{-\left(\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}\hat{\imath}} + \cancel{\frac{\partial P}{\partial y}\hat{\jmath}} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{k}\right) + \cancel{\rho g\hat{\imath}} + \cancel{\rho g\hat{\jmath}} + \rho g\hat{k} = 0}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial z}\hat{k}\right) = \rho g\hat{k} \equiv -\gamma}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Segunda Lei de Newton (Hidrostático (repouso))

As equações da variação de pressão em cada uma das 3 direções dos eixos de coordenada num fluido estático.

Para simplificar ainda mais, é lógico escolher um sistema de coordenadas no qual o vetor gravidade esteja alinhado com um dos seus eixos.

Se o sistema for escolhido com o eixo z apontando para cima na direção vertical.

Então, $g_x=0$; $g_y=0$; $g_z=-g$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0\ ; \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0\ ; \qquad -\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \ldots\ldots$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Segunda Lei de Newton (Hidrostático (repouso))

Como p varia **somente na direção z**, então podemos usar a derivada total no lugar da derivada parcial.

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Que é chamada de **Equação da Hidrostática** (a equação fundamental da estática dos fluidos).

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Segunda Lei de Newton (Hidrostático (repouso))

A equação da hidrostática está sujeita as restrições:

1) fluido estático;
2) gravidade é a única força de campo;
3) eixo z é vertical (p/ cima).

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Segunda Lei de Newton (Hidrostático (repouso))

Para achar a **distribuição** de pressão, devemos **integrar a equação da hidrostática**. Para a maioria das situações práticas a **variação de g é desprezível**, ou seja, **g é contante** com a elevação em qualquer lugar.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Segunda Lei de Newton (Hidrostático (repouso))

Para um fluido **incompressível** (ρ=cte) considerando g também constante, temos que

$$\frac{dp}{dz} - \rho g = constante$$

Seja Z_0 um nível de referência com P_0 , então P no nível Z é obtido por:

$$\int_{p_0}^{p} dp = -\int_{z_0}^{z} \rho \; g \; dz$$

$$p - p_0 = -\rho \; g \; (z - z_0) = \rho \; g \; (z_0 - z)$$

Sendo h = $z_0 - z$

Logo $\mathbf{p - p_0 = \rho \; g \; h}$

A diferença de pressão entre dois pontos num fluido estático, pode ser determinado medindo-se a diferença de elevação entre eles. Os dispositivos utilizados com esse propósito são chamados de manômetros.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

VARIAÇÃO DE p E NA ATMOSFERA

Em muitos problemas, a massa específica varia com a altitude. Para tirar a dependência de □ na equação da hidrostática, usa-se a equação de estado $P = \rho RT$, que fornece $\rho = \frac{P}{RT}$.

Na atmosfera padrão, T decresce linearmente com a altitude (até a troposfera), ou seja, $T = To + mz$

$$dp = -\rho\, g\, dz = -\frac{p}{R\,T}\, g\, dz = -\frac{p\, g}{R(T_0 - mz)}\, dz$$

Integrando-se de $z_0 = 0$ em $p = p_0$ até a altura z com pressão p, temos

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\int_0^z \frac{g\, dz}{R(T_0 - mz)}$$

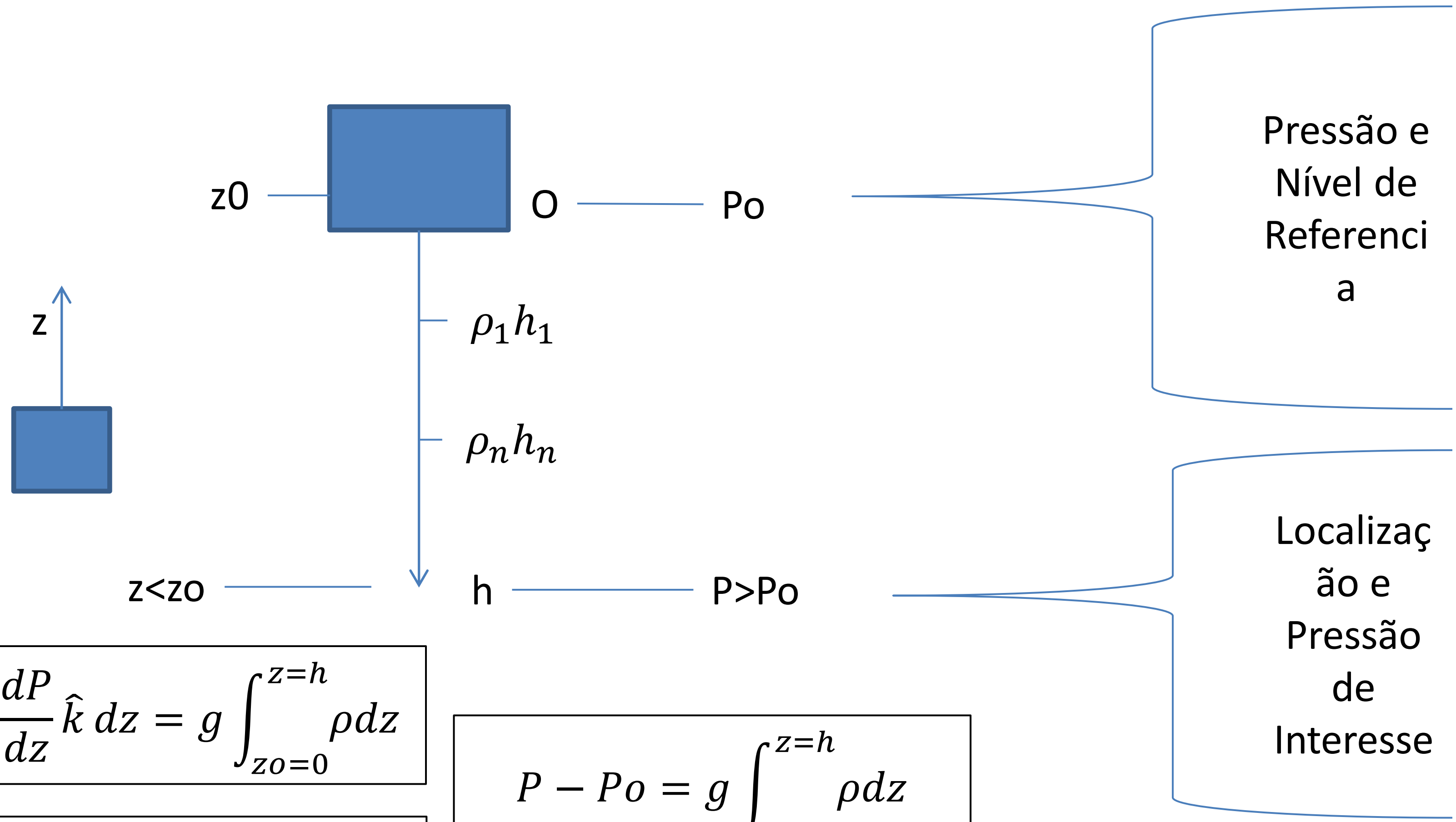
$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{g}{mR} \ln \left(\frac{T_0 - mz}{T_0} \right) = \frac{g}{mR} \ln\left(1 - \frac{mz}{T_0}\right)$$

Assim a variação de pressão em um gás cuja a temperatura varia linearmente com a altitude é dada por :

$$\boldsymbol{p = p_0 \left(1 - \frac{mz}{T_0}\right)^{g/mR} = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{g/mR}}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Fluido Incompressível : Manômetro



$$\int_{Po}^{P} \frac{dP}{dz}\hat{k}\,dz = g\int_{zo=0}^{z=h} \rho dz$$

$$\int_{Po}^{P} dP\,dz = g\int_{zo=0}^{z=h} \rho dz$$

$$P - Po = g\int_{zo=0}^{z=h} \rho dz$$

$$\Delta P = g\sum_{i=1}^{n} \rho_i h_i$$

$$P - Po = \rho g h$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

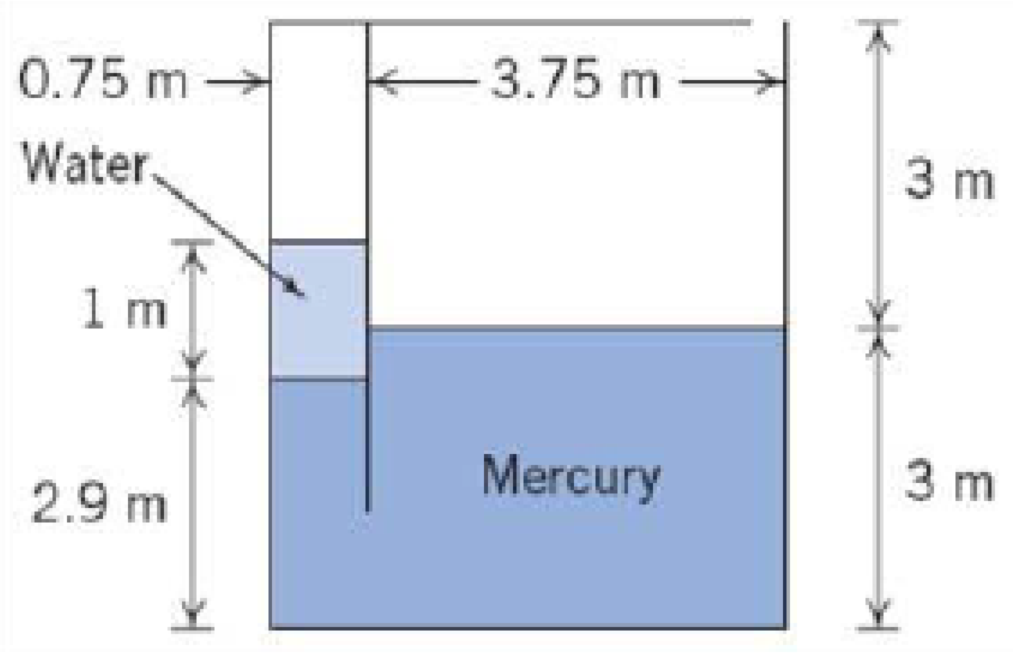
Um tanque particionado mostra o conteúdo de água e mercúrio.
Qual é a pressão no manómetro do ar retido na câmara esquerda?

Dados sobre a partição do tanque

$H1 = 3m$

$H2 = 2{,}9m$

$H3 = 1m$



$\rho_{H2O} = 1\frac{g}{cm^3}$

$\rho_{Hg} = 13{,}5\frac{g}{cm^3}$

$\rho_{Hg} = 13{,}5\rho_{H2O}$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

$$\boxed{P.mamometrica = resultante(saldo) = \rho_{Hg} * \mathrm{g} * \mathrm{H1} - \rho_{Hg} * \mathrm{g} * \mathrm{H2} - \rho_{H2O} * g * H3}$$

$$P.mamometrica = \rho_{Hg} * \mathrm{g} * (3\mathrm{m} - 2{,}9\mathrm{m}) - \rho_{H2O} * g * 1m$$

$$P.mamometrica = 13{,}5\rho_{H2O} * \mathrm{g} * (3\mathrm{m} - 2{,}9\mathrm{m}) - \rho_{H2O} * g * 1m$$

$$P.mamometrica = \rho_{H2O} * \mathrm{g} * (13{,}5 * 0{,}1\mathrm{m} - 1{,}0\mathrm{m})$$

$$P.mamometrica = 1000\frac{kg}{m^3} * 9{,}8\frac{m}{s^2} * (13{,}5 * 0{,}1\mathrm{m} - 1{,}0\mathrm{m})$$

$$P.mamometrica = 3430\frac{kg}{m^2}\frac{m}{s^2}$$

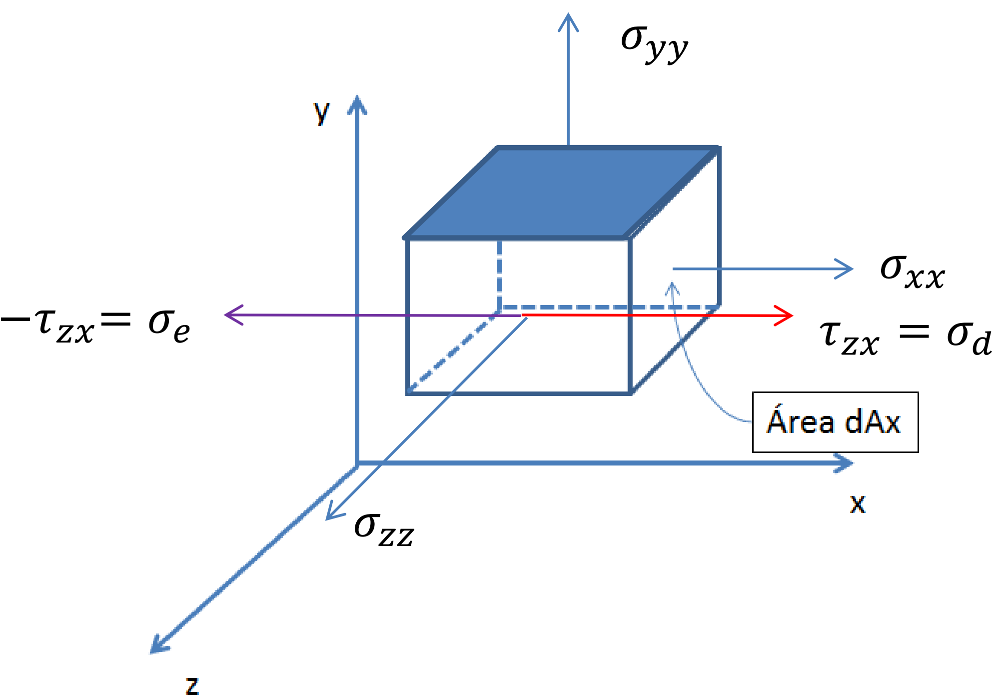
$P.mamometrica = 3430\frac{N}{m^2}$=>3430 Pa

$P.mamometrica =$3,430 kPa

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Tensões normais e tangenciais num elemento de fluido

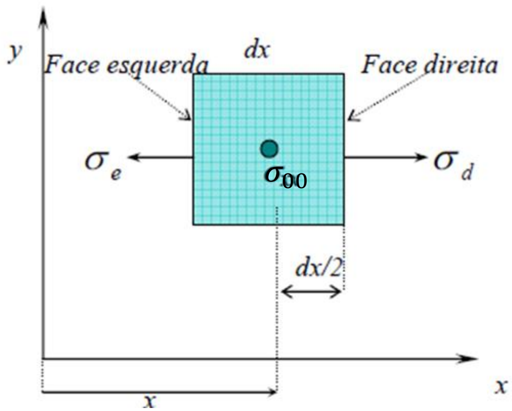
A modo de exemplificar determinaremos aqui todas as tensões que agem na direção-*x*. Com os mesmo procedimento podem ser avaliadas as tensões na direção-*y* e direção-*z*.

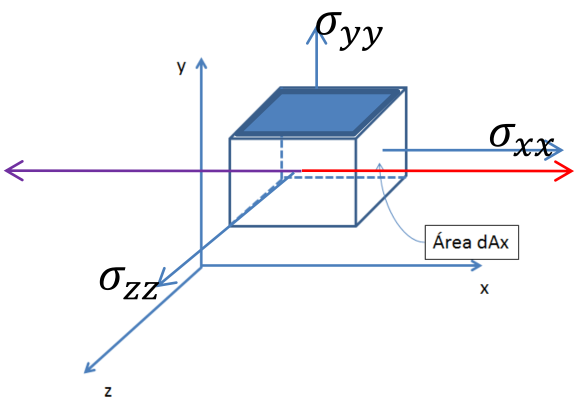


FÍSICA DOS FLUÍDOS

Tensões normais e tangenciais num elemento de fluido

No caso de ***tensões normais*** (Fig) considerando que no centro do cubo age a tensão normal $\boldsymbol{\sigma_{00}}$ apontando em forma positiva (+) obtemos as seguintes relações:





$\tau_{zx} = \sigma_d$

Na face direita

$$\sigma_d = \sigma_{xx} = \sigma_{00} + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right)(x - x_0)$$

$$\sigma_d = \sigma_{xx} = \sigma_{00} + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right)\frac{\Delta x}{2}$$

Na face esquerda

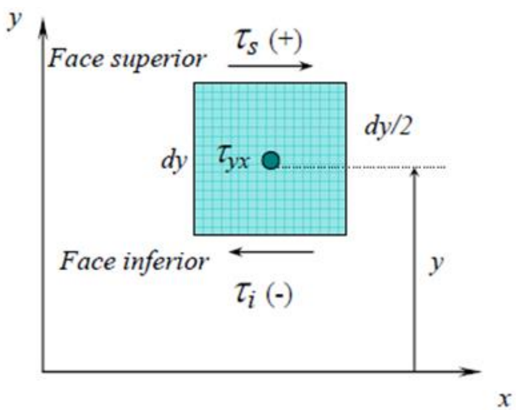
$$\sigma_e = \sigma_{xx} = \sigma_{00} + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right)(x - x_0)$$

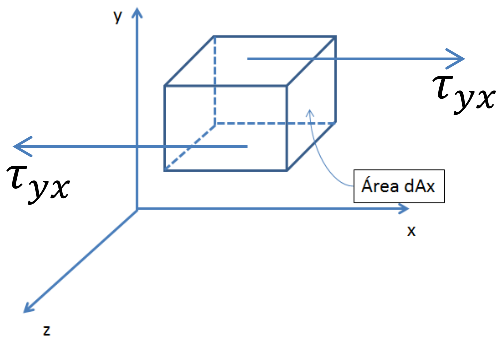
$$\sigma_e = \sigma_{xx} = \sigma_{00} - \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right)\frac{\Delta x}{2}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Tensões normais e tangenciais num elemento de fluido

No caso de ***tensões tangenciais*** considerando que no centro do cubo age a tensão de cisalhamento τ_{yx} (Fig) obtemos as seguintes relações:





Na face superior

$$\tau_s = \tau_{yx} = \sigma_{00} + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)(y - y_0)$$

$$\tau_s = \tau_{yx} = \tau_{00} + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)\frac{\Delta y}{2}$$

Na face inferior

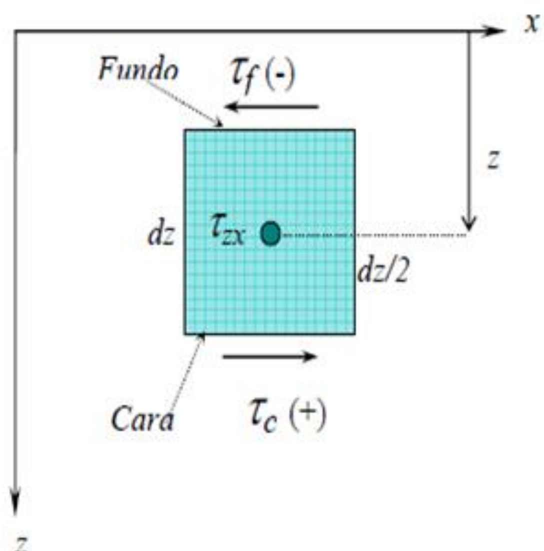
$$\tau_i = \tau_{yx} = \sigma_{00} + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)(y - y_0)$$

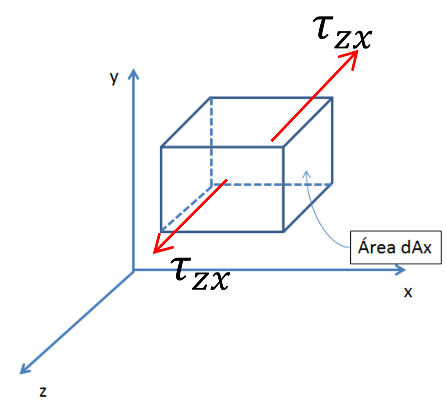
$$\tau_i = \tau_{yx} = \sigma_{00} - \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)\frac{\Delta y}{2}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Tensões normais e tangenciais num elemento de fluido

Da mesma forma podemos obter para o plano *x-y* (Fig) as tensões de cisalhamento nas faces do cubo denominadas *cara* (**frente**) e *fundo* do **plano normal a *z***. Considerando que no centro do cubo age a **tensão de cisalhamento** τ_{zx}(+), obtemos as seguintes relações:





Na face cara

$$\tau_c = \tau_{zx} = \sigma_{00} + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)(z - z_0)$$

$$\tau_c = \tau_{zx} = \tau_{00} + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\frac{\Delta z}{2}$$

Na face fundo

$$\tau_f = \tau_{zx} = \sigma_{00} + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)(z - z_0)$$

$$\tau_f = \tau_{zx} = \sigma_{00} - \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\frac{\Delta z}{2}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Tensões normais e tangenciais num elemento de fluido

Resumo: Tensões agindo nas fases do elemento de fluido – Direção -*x*

Face direita

$$\sigma_d = \sigma_{xx} = \sigma_{00} + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right)\frac{\Delta x}{2}$$

Face esquerda

$$\sigma_e = \sigma_{xx} = \sigma_{00} - \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right)\frac{\Delta x}{2}$$

Face superior

$$\tau_s = \tau_{yx} = \tau_{00} + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)\frac{\Delta y}{2}$$

Face inferior

$$\tau_i = \tau_{yx} = \sigma_{00} - \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)\frac{\Delta y}{2}$$

Face cara

$$\tau_c = \tau_{zx} = \tau_{00} + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\frac{\Delta z}{2}$$

Face do Fundo

$$\tau_f = \tau_{zx} = \sigma_{00} - \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\frac{\Delta z}{2}$$

Da mesma forma poderíamos obter as tensões **normais** e **tangenciais** que agem no *eixo-y* e as tensões **normais** e **tangenciais** que agem no *eixo-z*

Análise das Forças Superficiais Agindo num Elemento de Fluido

Para determinar a **quantidade de movimento** na **forma diferencial** é necessário avaliar o campo de **forças** agindo num **elemento de fluido**. A seguir deduziremos as forças que agem na direção-*x*. O mesmo procedimento pode ser aplicado para determinar as forças que agem em *y* e *z*.

Considera-se que as tensões num elemento de fluido cujo **volume de controle é um cubo diferencial** com massa ***dm*** e volume $d\forall = dxdydz$. No centro do cubo atuam tensões no sentido positivo da direção *x*. Estas tensões são σ_{xx}, τ_{yx}, τ_{zx}.

As ***tensões superficiais*** avaliadas nas faces do **elemento diferencial** são obtidas utilizando o desenvolvimento em **serie de Taylor.**

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Tensões normais e tangenciais num elemento de fluido

Resumo: Tensões agindo nas fases do elemento de fluido – Direção -*x*

Face direita

$$\Delta\sigma_d = \sigma_{xx} - \sigma_{00} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right)\frac{\Delta x}{2}$$

Face esquerda

$$\Delta\sigma_e = \sigma_{xx} - \sigma_{00} = -\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right)\frac{\Delta x}{2}$$

Face superior

$$\Delta\tau_s = \tau_{yx} - \tau_{00} = \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)\frac{\Delta y}{2}$$

Face inferior

$$\Delta\tau_i = \tau_{yx} - \sigma_{00} = -\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)\frac{\Delta y}{2}$$

Face cara

$$\Delta\tau_c = \tau_{zx} - \tau_{00} = \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\frac{\Delta z}{2}$$

Face do Fundo

$$\tau_f = \tau_{zx} - \sigma_{00} = -\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\frac{\Delta z}{2}$$

Tais tensões originam forças de superfície na direção-*x*, as quais são adicionadas considerando o sentido positivo (+) e negativo (-) de cada uma delas

$$\Delta F_{sx} = (\Delta\sigma_d - \Delta\sigma_e) + (\Delta\tau_s - \Delta\tau_i) + (\Delta\tau_c - \Delta\tau_f)$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Tensões normais e tangenciais num elemento de fluido

$$\Delta F_{sx} = (\Delta F\sigma_d - \Delta F\sigma_e) + (\Delta F\tau_s - \Delta F\tau_i) + \left(\Delta F\tau_c - \Delta F\tau_f\right)$$

Utilizando as áreas das faces do cubo tais forças são representadas como $\tau = \sigma = \frac{F}{A}$

$$\Delta F_{sx} = (\Delta\sigma_d \Delta A_d - \Delta\sigma_e \Delta A_e) + (\Delta\tau_s \Delta A_s - \Delta\tau_i \Delta A_i) + \left(\Delta\tau_c \Delta A_c - \Delta\tau_f \Delta A_f\right)$$

Sabe-se que:

$\Delta A_d = \Delta A_e = \Delta A_x$ $\quad$ $\Delta A_s = \Delta A_i = \Delta A_y$ $\quad$ $\Delta A_c = \Delta A_f = \Delta A_z$

Desta Forma:

$$\Delta F_{sx} = (\Delta\sigma_d - \Delta\sigma_e)\Delta A_x + (\Delta\tau_s - \Delta\tau_i)\Delta A_y + \left(\Delta\tau_c - \Delta\tau_f\right)\Delta A_z$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Tensões normais e tangenciais num elemento de fluido

$$\Delta F_{sx}= (\Delta\sigma_d - \Delta\sigma_e)\Delta A_x + (\Delta\tau_s - \Delta\tau_i)\Delta A_y + (\Delta\tau_c - \Delta\tau_f)\Delta A_z$$

Analisando cada termo das tensões:

$$\Delta\sigma_d - \Delta\sigma_e = \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right) - \left(-\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\Delta x$$

$$\Delta\tau_s - \Delta\tau_i = \left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right) - \left(-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right) = \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\Delta y$$

$$\Delta\tau_c - \Delta\tau_f = \left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right) - \left(-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right) = \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\Delta z$$

os elementos de área podem ser representados por:

$\Delta A_x = \Delta x\Delta y$ $\Delta A_y = \Delta x\Delta z$ $\Delta A_z = \Delta x\Delta y$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Tensões normais e tangenciais num elemento de fluido

Desta forma,

$$\Delta F_{sx} = (\Delta\sigma_d - \Delta\sigma_e)\Delta y\Delta z + (\Delta\tau_s - \Delta\tau_i)\Delta x\Delta z + (\Delta\tau_c - \Delta\tau_f)\Delta x\Delta y$$

Substituindo a variação das tensões:

$$\Delta F_{sx} = \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z + \left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta z + \left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x\Delta y$$

$$\Delta F_{sx} = \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\frac{\Delta F_{sx}}{\Delta x\Delta y\Delta z} = \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

$$\rho = \frac{m}{\Delta x\Delta y\Delta z}$$

$$\rho = \frac{m}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$\frac{\Delta F_{sx}}{\Delta x \Delta \mathrm{y} \Delta \mathrm{z}} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{ma}{\Delta x \Delta \mathrm{y} \Delta \mathrm{z}} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

$$\rho \frac{dV}{dt} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Tensões normais e tangenciais num elemento de fluido

Da mesma forma podem ser obtidas as componentes das forças na direção-*y* e na direção-*z*. Assim as três componentes das forças de superfície são dadas pelas relações apresentadas a seguir.

Forças de Superfície num Elemento de Fluido

$$\rho \frac{dV}{dt} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \frac{dV}{dt} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \frac{dV}{dt} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right)$$