FÍSICA DOS FLUÍDOS

MTIG008 – FÍSICA FLUIDOS

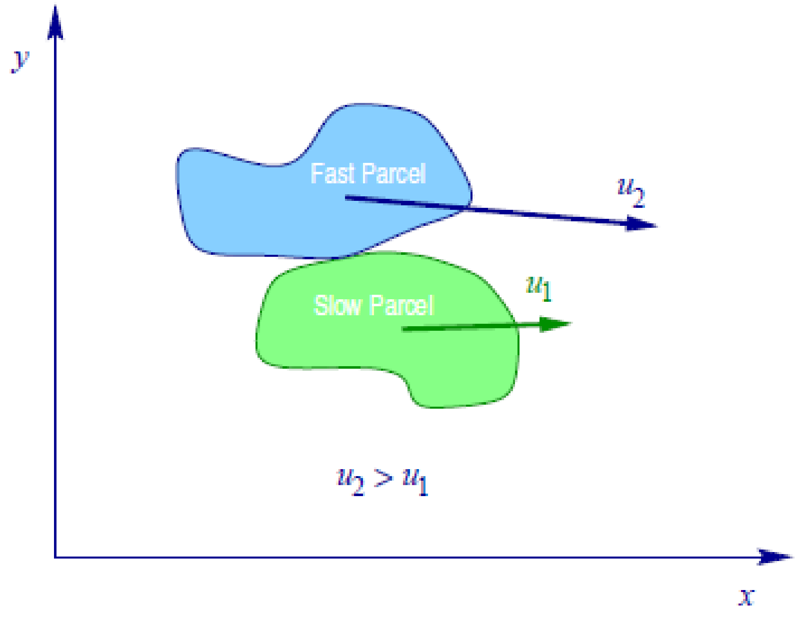
Prof. Paulo Yoshio Kubota,
pkubota@gmail.com

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Conceitos Básicos do Movimento dos Fluidos

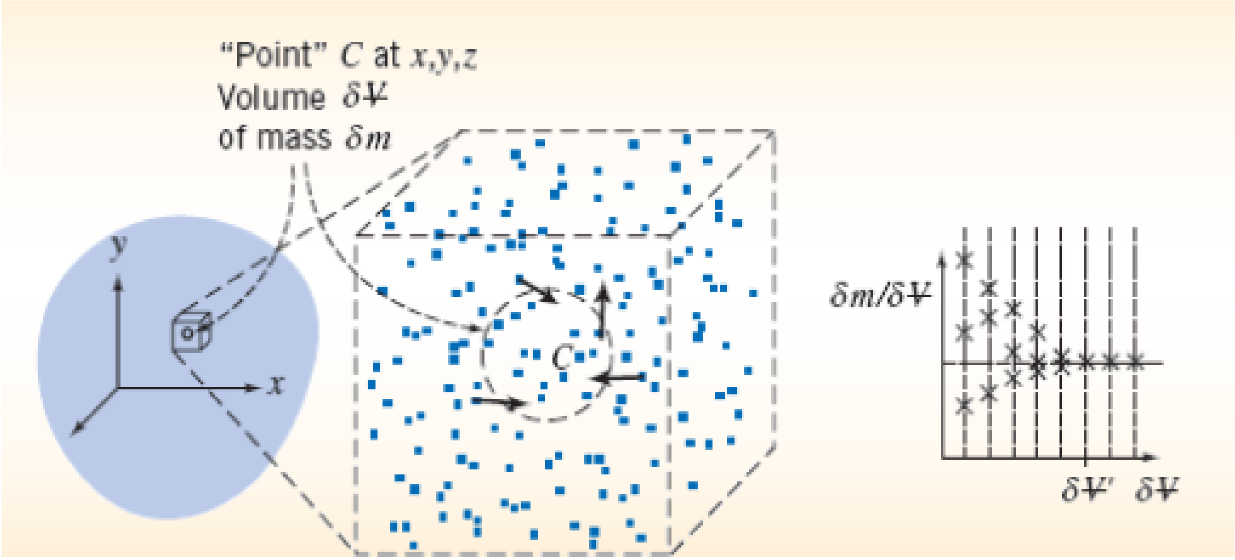
O movimento dos fluidos (***cinemática***) é utilizado para **analisar** os **efeitos das forças** sobre o **movimento dos fluidos** (***dinâmica***)



FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Conceitos Básicos do Movimento dos Fluidos



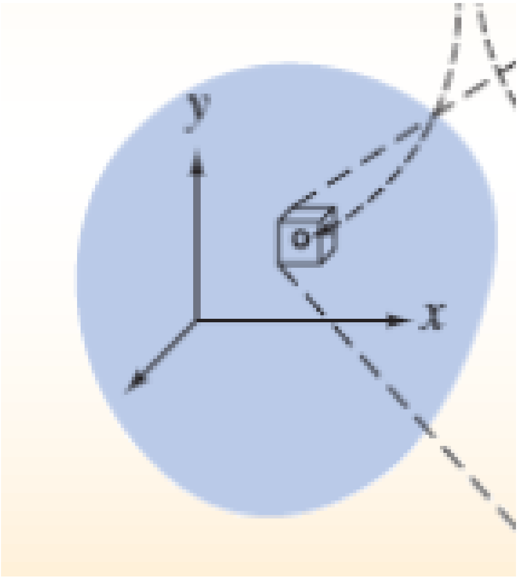
- Para o estudo da cinemática dos fluidos **considera-se** que estes são formados por **partículas**, cada uma **contendo muitas moléculas**.
- Trata-se o fluido como um ***meio contínuo*** composto de **partículas fluidas** que **interagem** entre **si** e com o **meio**.
- Estuda-se portanto o movimento das **partículas de fluido** e **não o movimento** das **moléculas do fluido**.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

A descrição de qualquer **propriedade do fluido** como **massa específica**, **pressão**, **velocidade** e **aceleração** é **formulada em função** das **partículas fluidas**.

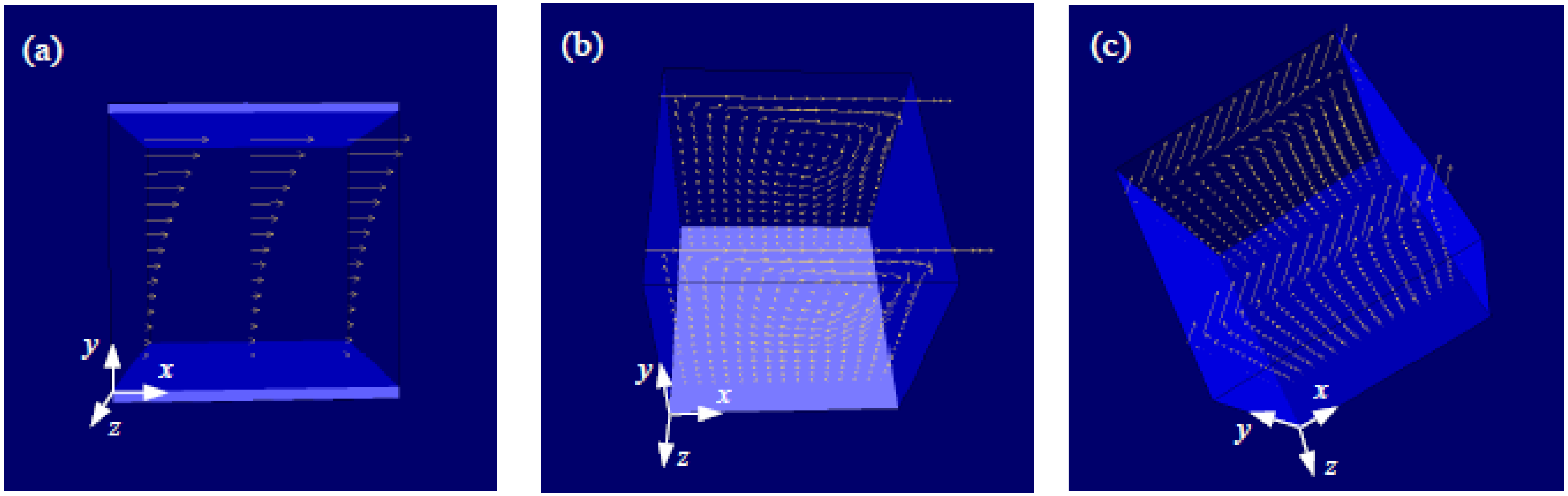
$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$



FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

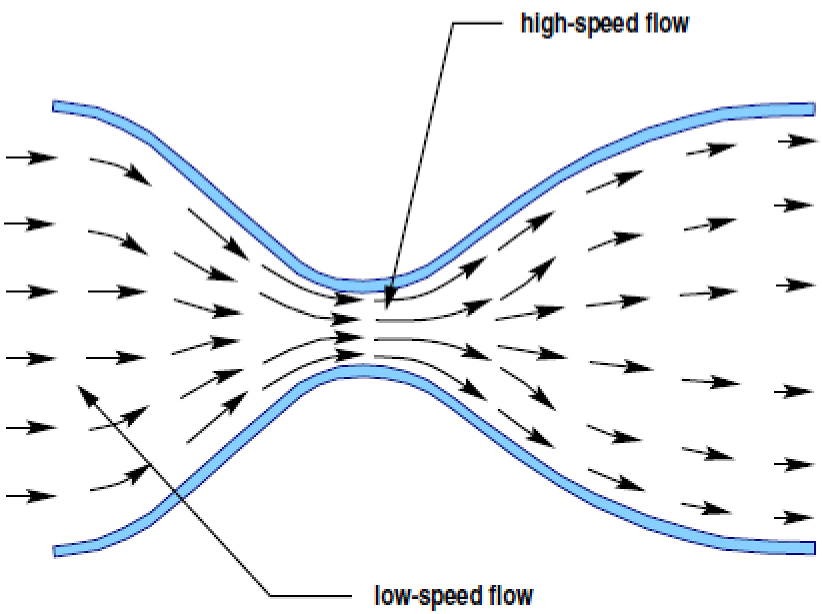
A representação dos **parâmetros dos fluidos em função** das **coordenadas espaciais** denomina-se ***campo de escoamento***.

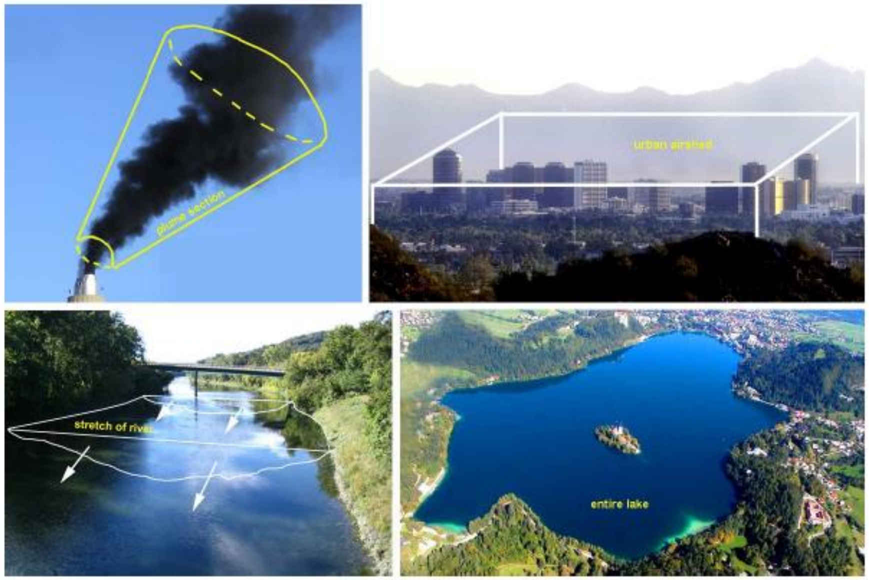


FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Campo *é uma* ***distribuição contínua*** *de quantidades* **escalares**, **vetoriais** *ou* **tensoriais** **descritas por funções** *contínuas de* **coordenadas espaciais e do tempo**.





FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Uma **quantidade *escalar*** requer de apenas uma **magnitude** para sua **descrição completa**, tal é o caso da temperatura.

Uma **quantidade *vetorial*** se requer sua **magnitude, direção e sentido**. Os **vetores** podem ser **somados** pela lei do **paralelogramo**. Velocidades, aceleração, forças são exemplos de quantidades vetoriais

Geralmente são empregadas **três** **componentes associadas com o sistema de coordenadas.** Estas são chamadas ***componentes escalares*.**

Os ***tensores*** são quantidades que requer de **nove ou mais componentes escalares** para sua **descrição completa**. Tensões de cisalhamento são um exemplo de quantidade tensorial.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Uma das **variáveis** mais **importantes** dos **escoamentos** é o **campo de velocidades**, que é definido em coordenadas cartesianas como:

$$\vec{V} = u(x, y, z, t)\hat{\imath} + v(x, y, z, t)\hat{\jmath} + z(x, y, z, t)\hat{k}$$

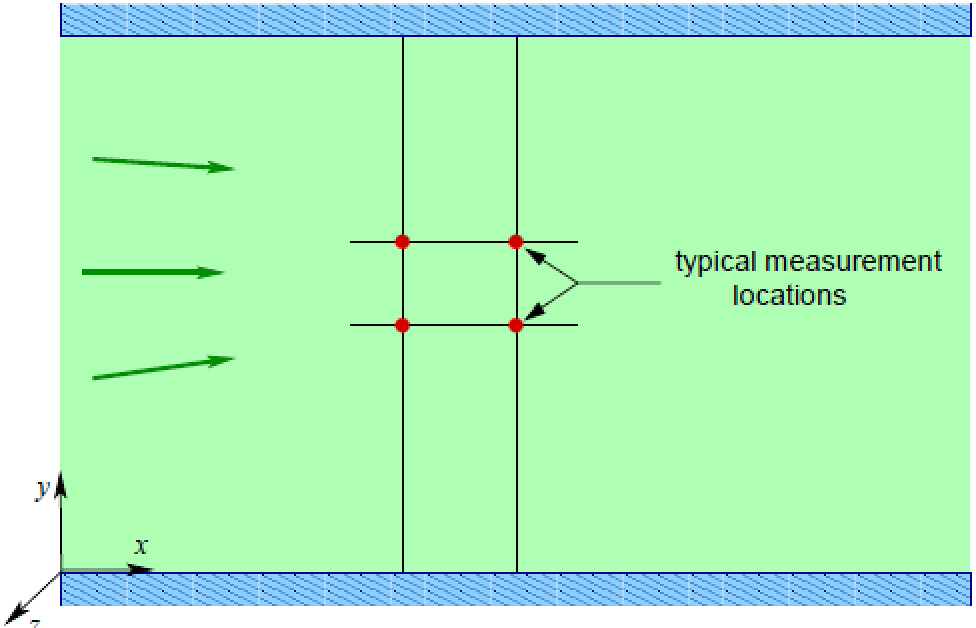
u, *v* e *w* são as componentes do vetor velocidade nas direções *x,y,z*.

A **velocidade da partícula** é igual a **taxa de variação temporal do vetor posição** desta partícula.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

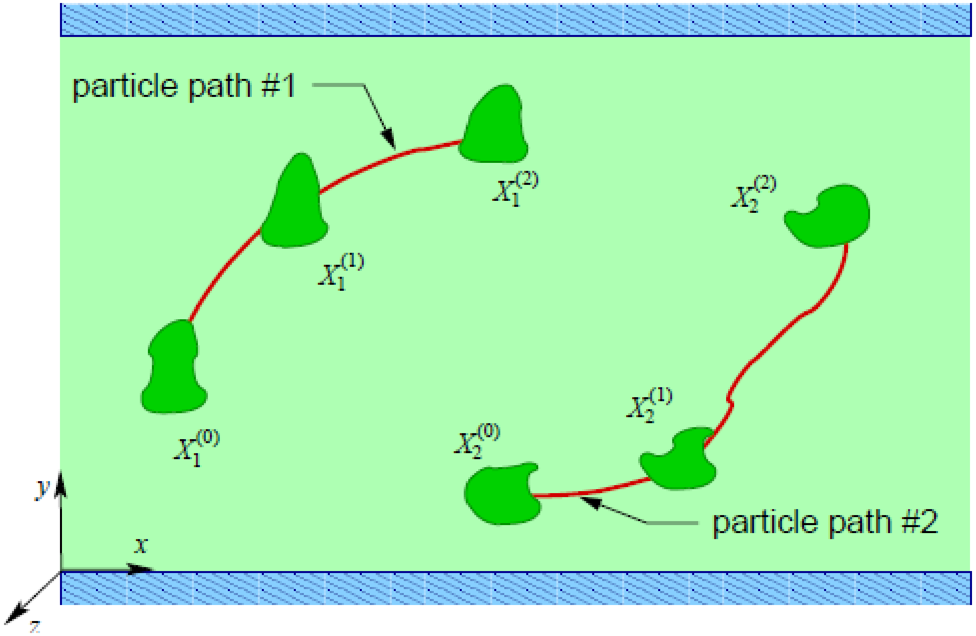
O método de analisar o movimento dos fluidos numa descrição completa dos seus parâmetros (massa específica, pressão, velocidade) em função das coordenadas espaciais e do tempo denomina-se **descrição Euleriana**. Desta forma obtém-se **informação do escoamento em função do que acontece em *pontos fixos do espaço* enquanto as partículas de fluido escoam por estes pontos**.



FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Existe outro método denominado **descrição Lagrangiana** no qual as partículas de fluidos são rotuladas (identificadas) e suas propriedades são determinadas acompanhando seu movimento. **Aqui se estuda a posição de uma ou várias partículas em função do tempo**.



FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Campo de Velocidades

As equações do movimento dos fluidos são definidas em *sistemas*.

Um *sistema fechado* é uma quantidade fixa de massa separada do meio exterior por fronteiras O contorno do sistema denomina-se **superfície de Controle, (*S.C.*).** A massa não pode atravessar as fronteiras. A energia em forma de Calor (Q) e Trabalho (W) podem atravessar as fronteiras do sistema. As fronteiras podem ser móveis ou fixas.

Um sistemas Abertos denominam-se ***Volume de Controle (V.C.)***, que consiste numa região fixa no espaço e na qual se estuda o escoamento do fluido que atravessa o volume. Neste ***Volume de Controle*** calor, trabalho e massa podem atravessar as fronteiras. Tal conceito é utilizado para a dedução das equações da continuidade, quantidade de movimento e da energia.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

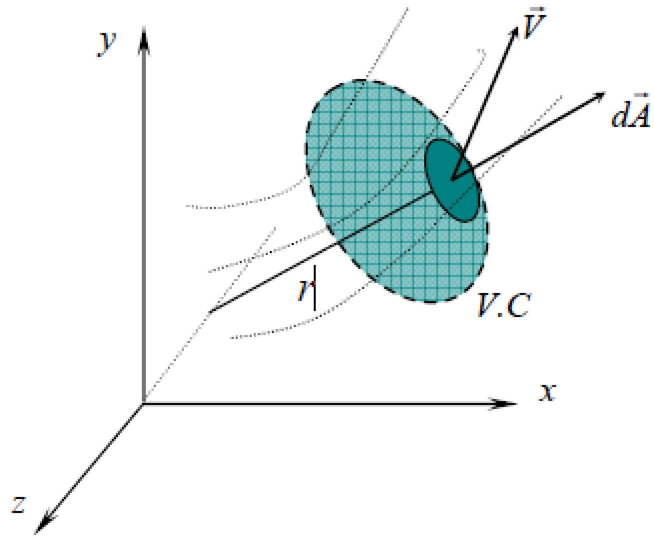
Considerando um dado volume de controle fixo no espaço definido em coordenadas cartesianas. A movimentação de uma partícula de fluido considerando tal sistema Euleriano de referência é dada por:

$$\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k}$$

onde *rx, ry, rz* são as componentes cartesianas do vetor posição nas direções *x,y,z*. O vetor velocidade da partícula de fluido em estudo é definida por:

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

A velocidade num ponto dado do campo de escoamento pode variar de um instante de tempo para outro. Desta forma pode-se representar como $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$



Aceleração de uma Partícula de Fluido num Campo de Velocidade

No tempo *t* a partícula se encontra na **posição *x,y,z*** e possui uma **velocidade**

$$\vec{V}\Big]_t = \vec{V}(x, y, z, t)$$

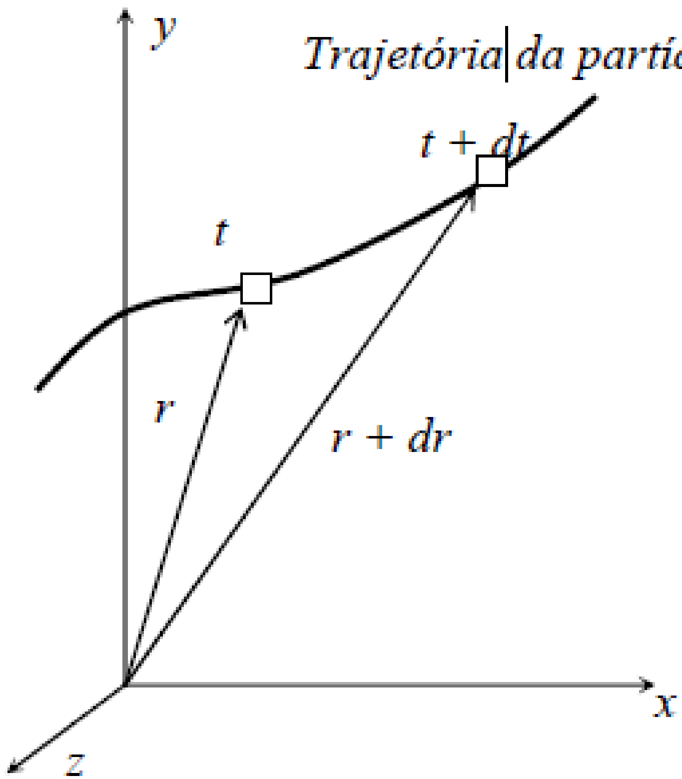
No tempo ***t +dt*** a partícula **move-se para uma nova posição** (Fig.) com coordenadas ***x+dx, y+dy, z+dz*** e possui uma velocidade dada por:

$$\vec{V}\Big]_{t+dt} = \vec{V}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

A **variação da velocidade** da partícula movendo-se da posição $\vec{r}$ para $\vec{r} + d\vec{r}$ é dada por:



$$P(x) = P(xo) + \frac{\partial P(x)}{\partial x}(x - xo) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 P(x)}{\partial^2 x}(x - xo)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{\partial^k P(x)}{\partial^k x}(x - xo)^k$$

$$P(x) - P(xo) = \frac{\partial P(x)}{\partial x}(x - xo) + \cdots$$

$$\Delta P(x) = \frac{\partial P(x)}{\partial x}\Delta x + \cdots$$

$$\mathrm{d}P(x) = \frac{\partial P(x)}{\partial x}dx$$

$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}dt$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

a aceleração total da partícula será:

$$\frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}\frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}\frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

$$\vec{a}_p = \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}\frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}\frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

como:

$$u_p = \frac{dx_p}{dt} \qquad v_p = \frac{dy_p}{dt} \qquad w_p = \frac{dz_p}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}u_p + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}v_p + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}w_p + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = u_p\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v_p\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w_p\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

A **aceleração** da partícula de fluido é denominada ***derivada substancial*** ou **total**.

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = u_p \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v_p \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w_p \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{a}_p = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}$$

$$\left[\frac{D\vec{V}}{Dt}\right] = \left[u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\right] + \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right]$$

$$\begin{bmatrix}\text{aceleração}\\ \text{substancial}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{aceleração}\\ \text{convectiva}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{aceleração}\\ \text{local}\end{bmatrix}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

O caso particular de **escoamento *permanente tridimensional***, a aceleração local é nula ($\frac{\partial V}{\partial t} = 0$) obtendo-se a expressão

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

Outros casos partículares **de escoamento unidimensional e bidimensional** simplificam a equação acima. Por exemplo para **escoamento *bidimensional não-permanente*** é dado por.

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Representação escalar da derivada substancial

A **equação vetorial da derivada substancial** pode ser apresentada **na forma escalar**, na qual as ***componentes escalares*** da aceleração substancial ou total da partícula sãos dadas por:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{a}_{xp} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{a}_{yp} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{a}_{zp} = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

em forma compacta

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{a}_{xp} = \vec{V}\nabla\vec{V} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$$

Obs. O termo ∇ representa o operador nabla.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

COMENTÁRIO – Aceleração da Partícula de Fluido:

$$\overrightarrow{a_p} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{V}\nabla\vec{V} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$$

A aceleração das partículas de fluido pode ser imaginada pela superposição de dois efeitos:

Aceleração Convectiva

Num dado instante *t* consideramos que o campo de escoamento é permanente:

- A partícula de fluido nesse instante está para mudar de posição.
- A partícula efetua uma mudança de velocidade porque a velocidade nas posições neste campo será, em geral, diferente em cada instante.
- Esta razão de variação da velocidade com o tempo devido à mudança de posição é denominada aceleração de transporte ou aceleração convectiva.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Aceleração Local

O termo $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ deve-se à **variação do campo de velocidade na posição ocupada pela partícula no instante *t*** e é chamada aceleração local.

Rotação dos Fluidos

Uma **partícula de fluido** em **movimento** apresenta componentes de **translação**, **rotação**, **deformação angular** e **deformação linear**.

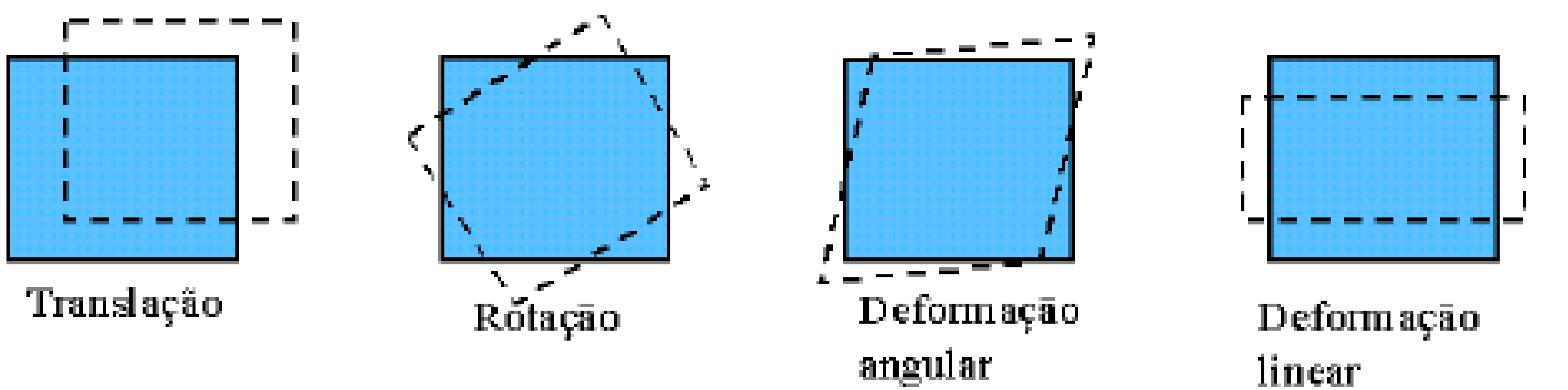


Figura 4.3 Componentes do movimento de um elemento de fluido

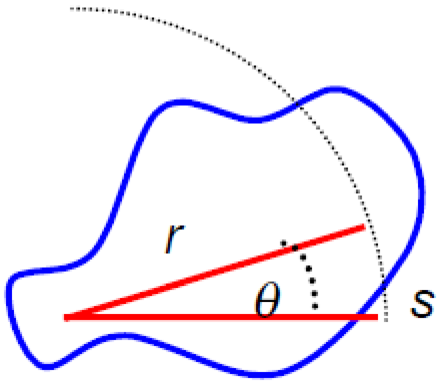
FÍSICA DOS FLUÍDOS

Posição angular

Quando um objeto de um formato arbitrário, tem uma trajetória circular em torno de um certo eixo, podemos definir algumas grandezas que descreverão esse movimento.

Podemos marcar um dado ponto do objeto e analisar o seu movimento. A distância deste ponto ao eixo de rotação é chamado de raio *r* da trajetória.

A sua trajetória descreve um arco de comprimento *s* .
A posição angular associada ao arco e o raio é o ângulo θ .



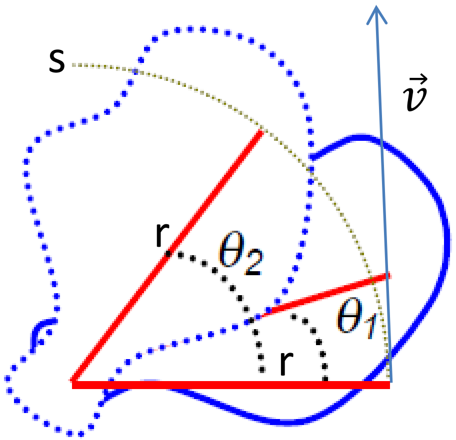
$$s = r\theta \quad \therefore \quad \theta = \frac{s}{r}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

A velocidade escalar

Quando observamos os corpos rígidos, a rotação se faz com raio constante, ou seja: cada ponto observado mantém uma distância constante ao eixo de rotação. Desse modo

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = r\frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$



$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \rightarrow v = rw$$

onde *v* é a velocidade linear de um certo ponto do corpo e *w* é a velocidade angular desse ponto considerado. Na realidade, *w* é a velocidade angular do corpo por inteiro.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Uma partícula de fluido movendo-se num escoamento real pode **girar** em torno de **três eixos de coordenadas**. Esta **rotação** é uma **grandeza vetorial** definida como:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_x \hat{\imath} + \vec{\omega}_y \hat{\jmath} + \vec{\omega}_z k$$

Considera-se que o **sentido positivo (+)** do giro é dado pela **regra da mão direita** (anti-horária)

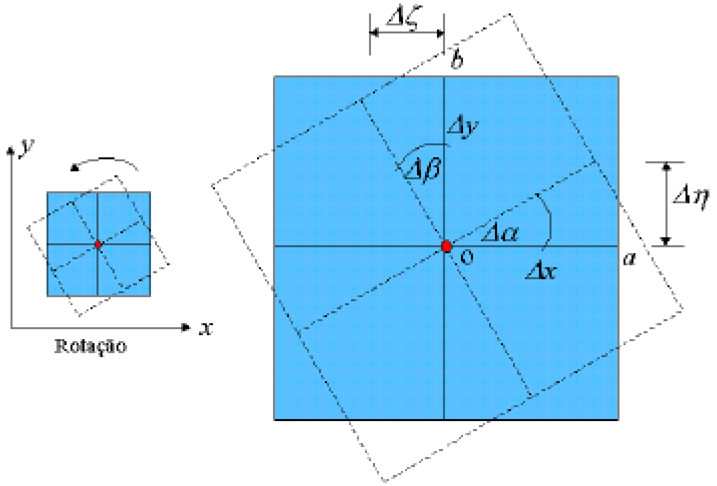


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

Componente *y* da velocidade no ponto *a*:
(por expansão da série de Taylor)

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

A **rotação** é dada pela **velocidade angular média** de duas linhas **perpendiculares** que se cruzam no centro ***ao*** e ***ob*** no plano ***xy***.

$$\vec{\omega}_z = \frac{1}{2}(\omega_{0a} + \omega_{0b})$$

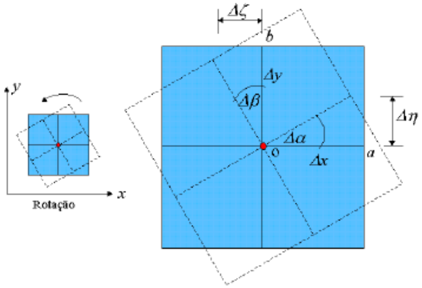
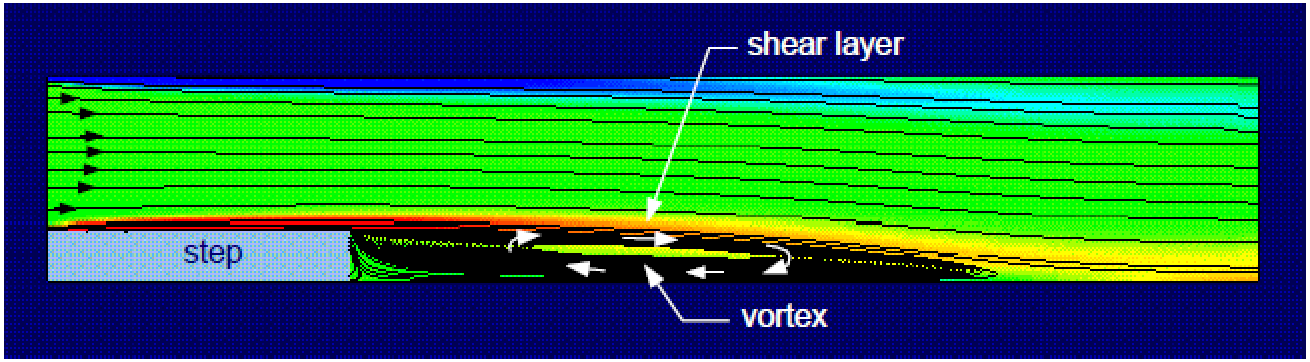


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

Onde ω_{0a}é a rotação da linha ao e ω_{0b}é a rotação da linha ***ob***.



FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

Rotação da linha *o-a* Comprimento da linha *ao*: *x*.

Componente *y* da velocidade no ponto *o*: *v0*

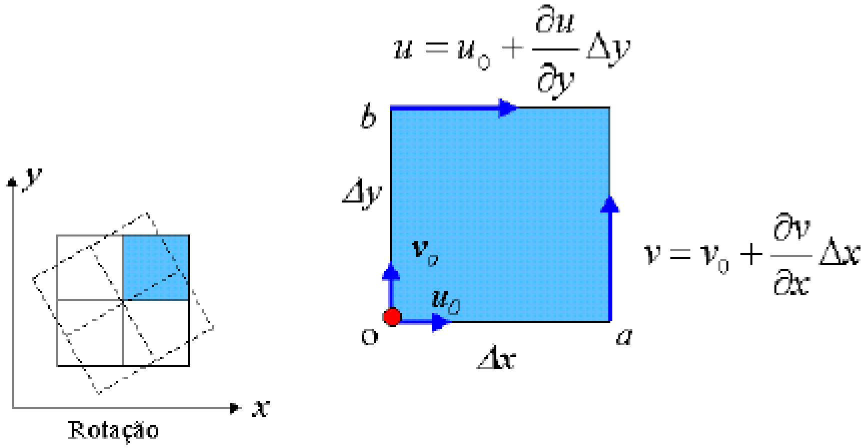


Figura 4.5 Detalhe das velocidades na rotação de um elemento de fluido

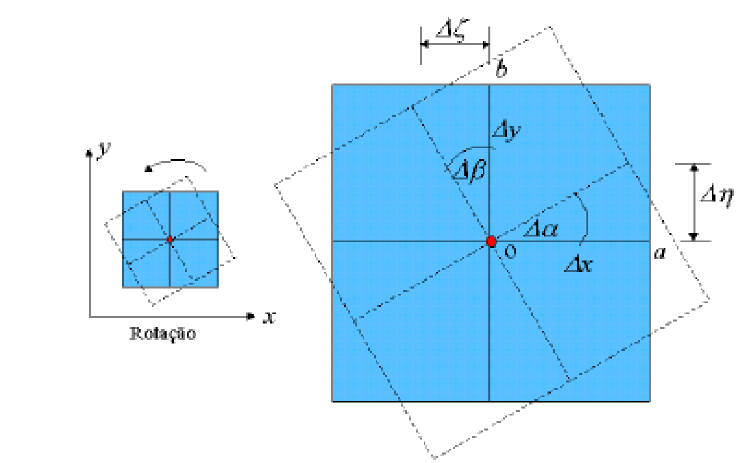


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

O elemento de fluido, quando submetido à tensão de cisalhamento τ_{yx} , ***<u>experimenta uma taxa de deformação</u>*** *(ou taxa de cisalhamento) dada por:*

$d\alpha/dt=du/dy$.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

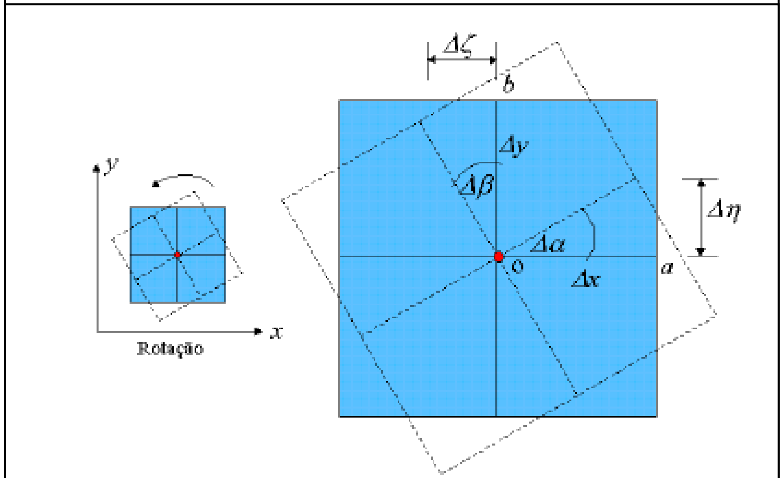


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

$$tag(\Delta\alpha) = \frac{\Delta\eta}{\Delta x}$$

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\eta}{\Delta x}$$

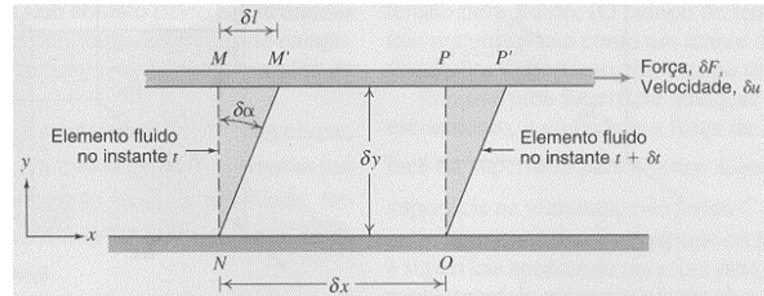
$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta\eta}{\Delta x}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta\eta}{\Delta x\Delta t}$$

Velocidade angular da linha oa

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\eta}{\Delta x\Delta t}$$

δl = δu δt



δl= δ y δα

dα/dt=du/dy.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

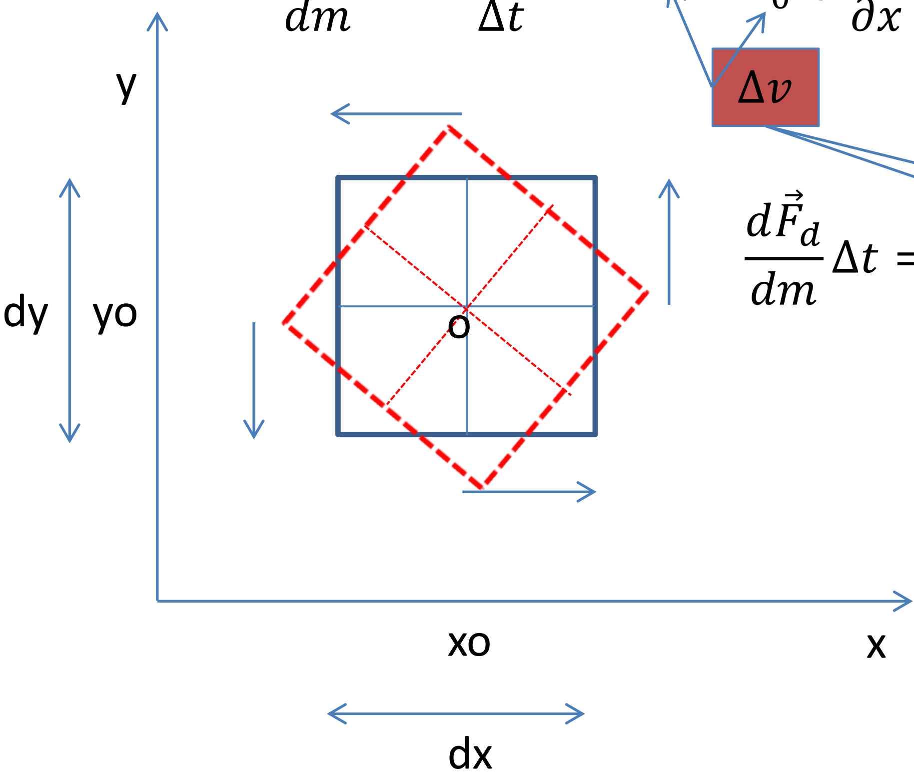
Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente y

$$\frac{d\vec{F}_e}{dm}\Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow v = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x}(x - x_0)$$

$$\boxed{d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}$$

Δv

$$\frac{d\vec{F}_d}{dm}\Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow v = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x}(x - x_0)$$

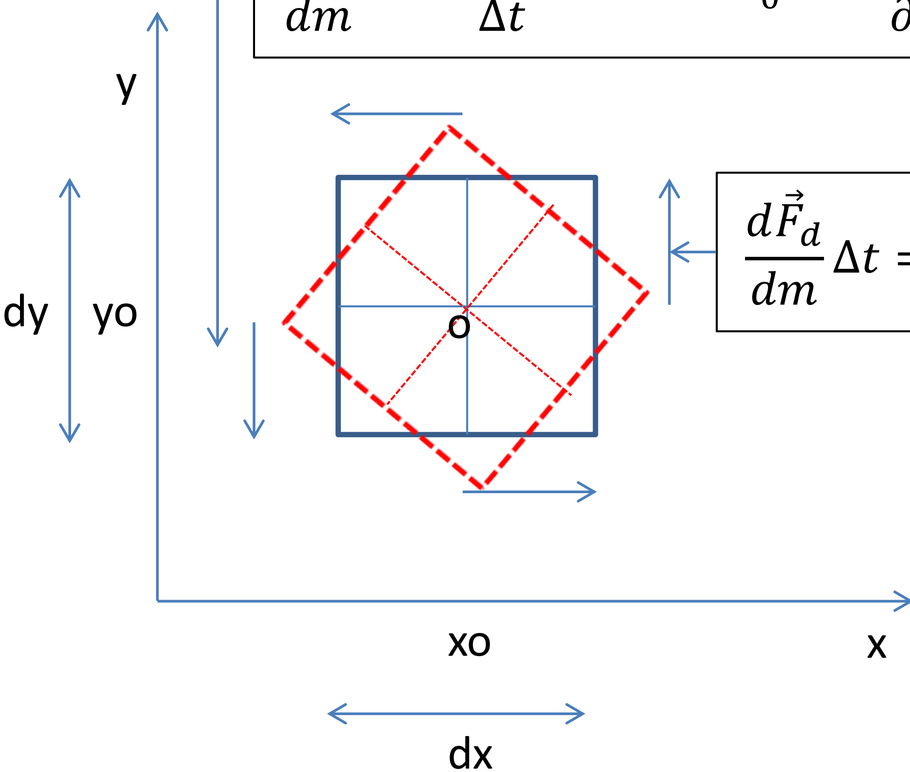


FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente y

$$\frac{d\vec{F}_e}{dm}\Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t = v - v_0 = -\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(-\hat{j})$$

$$d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$



$$\frac{d\vec{F}_d}{dm}\Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t = v - v_0 = +\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(j)$$

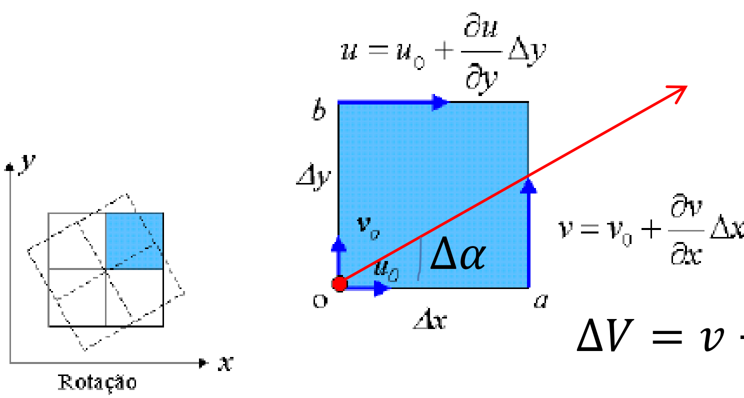
$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \frac{d\vec{F}_d}{dm}\Delta t + \frac{d\vec{F}_e}{dm}\Delta t$$

$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(j) + \left(+\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(\hat{j})\right)$$

$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x(j)$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z



$$\Delta V = v - v_o = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$$

Figura 4.5 Detalhe das velocidades na rotação de um elemento de fluido

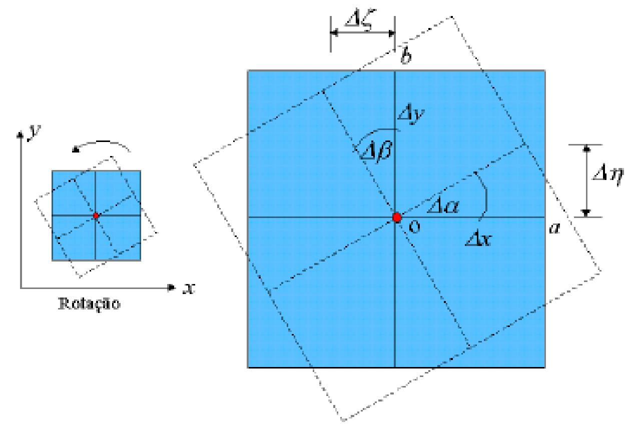


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

A velocidade escalar

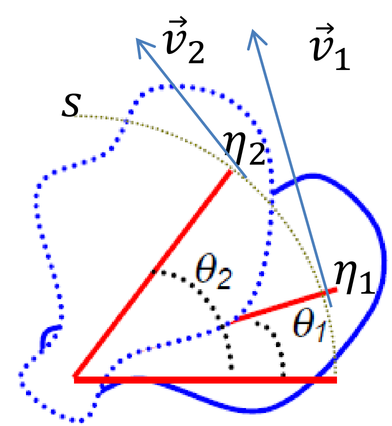
$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x(j)$$

$$\Delta v = \frac{\Delta\eta}{\Delta t}$$

$$\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$$

$$\Delta v = v_2 - v_1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = \frac{\Delta\eta}{\Delta t}$$



$$\Delta\eta = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\Delta t$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

e desta forma

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\eta}{\Delta x \Delta t}$$

$$\Delta\eta = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta t$$

$$\omega_{oa} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

Rotação da linha *ob*

Comprimento da linha *ob*: Δy.

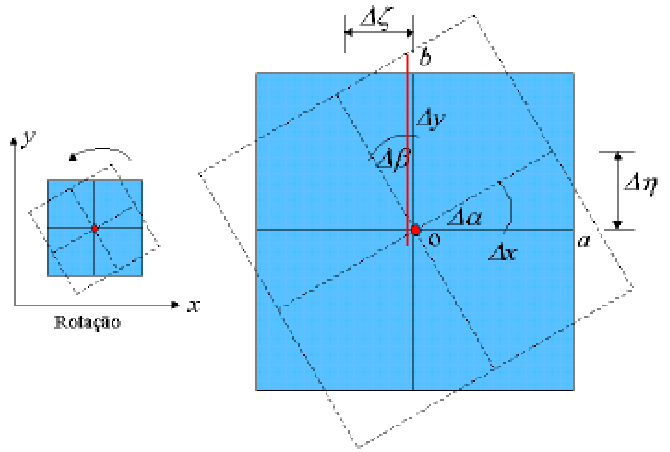


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

$$tag(\Delta\beta) = \frac{\Delta\xi}{\Delta y}$$

$$\Delta\beta = \frac{\Delta\xi}{\Delta y}$$

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta\xi}{\Delta y}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \frac{\Delta\xi}{\Delta y\Delta t}$$

Velocidade angular da linha oa

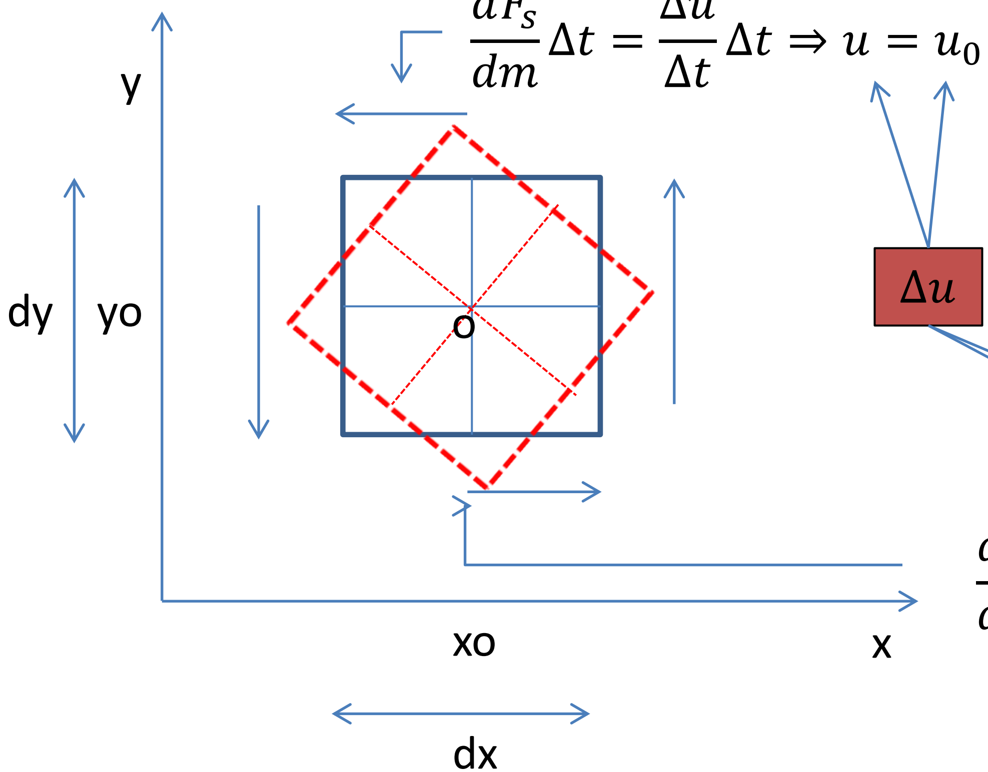
$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\xi}{\Delta y\Delta t}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente x

$$\boxed{d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}$$

$$\frac{d\vec{F}_s}{dm}\Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0)$$



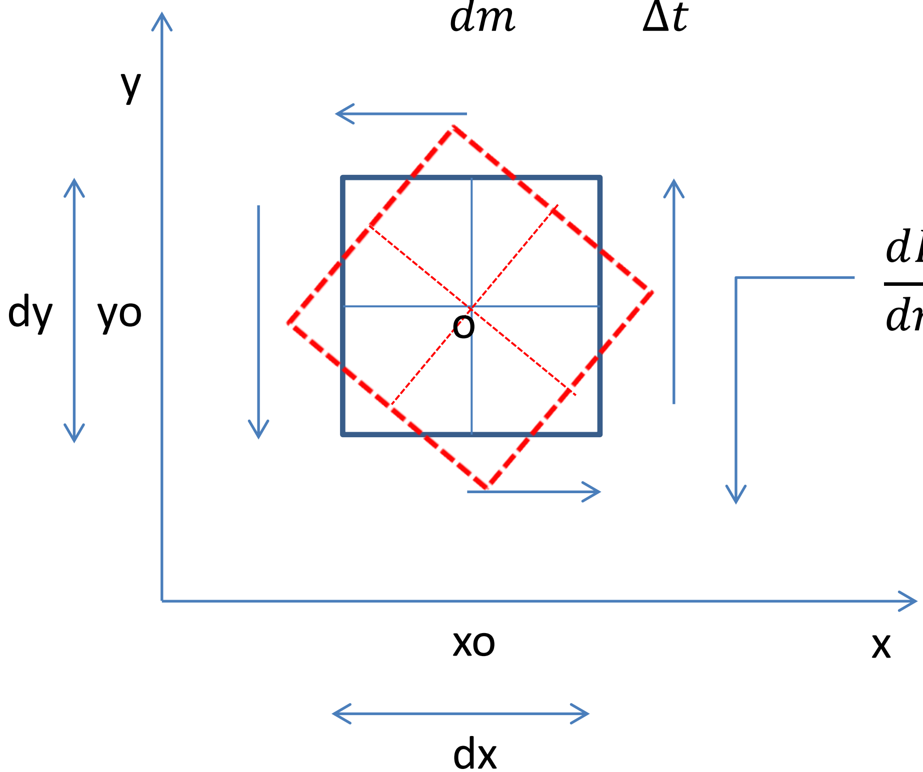
$$\frac{d\vec{F}_i}{dm}\Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0)$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente x

$$\boxed{d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}$$

$$\frac{d\vec{F}_s}{dm}\Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(-\hat{\imath})$$



$$\frac{d\vec{F}_i}{dm}\Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow u - u_0 = -\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(\hat{\imath})$$

$$\boxed{\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \frac{d\vec{F}_i}{dm}\Delta t + \frac{d\vec{F}_s}{dm}\Delta t}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(\hat{\imath}) + \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(\hat{\imath})\right)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y(\hat{\imath})$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

$$\Delta U = u - u_o = -\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$

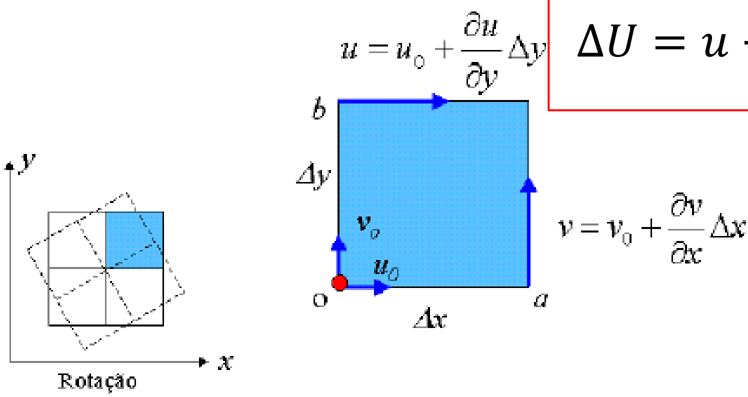


Figura 4.5 Detalhe das velocidades na rotação de um elemento de fluido

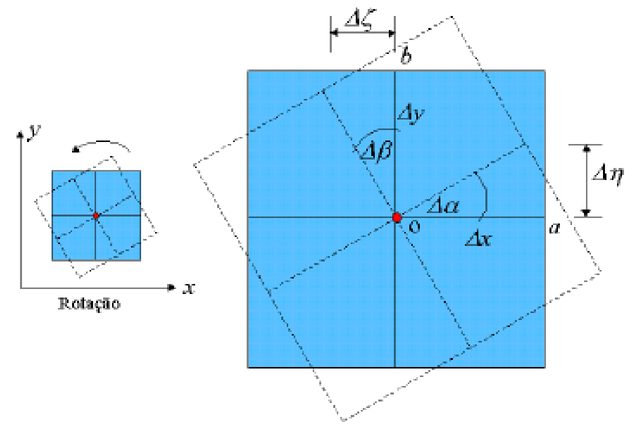


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

A velocidade escalar

$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \Delta v = -\frac{\partial u}{\partial u}\Delta y(j)$$

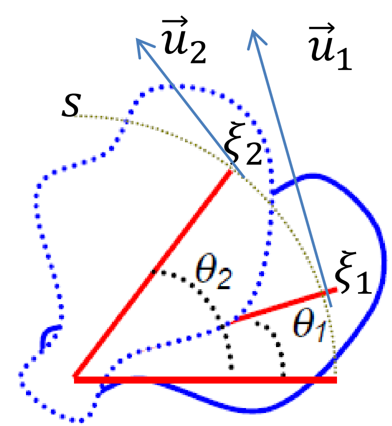
$$\Delta u = \frac{\Delta\xi}{\Delta t}$$

$$\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1$$

$$\Delta u = u_2 - u_1$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y = \frac{\Delta\xi}{\Delta t}$$

$$\Delta\xi = -\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\Delta t$$



FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

e desta forma a velocidade angular da linha ob

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta y \Delta t}$$

$$\Delta \xi = -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \Delta t$$

$$\omega_{ob} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

A **rotação** é dada pela **velocidade angular média** de duas linhas **perpendiculares** que se cruzam no centro ***ao*** e ***ob*** no plano ***xy***.

$$\vec{\omega}_z = \frac{1}{2}(\omega_{0a} + \omega_{0b})$$

$$\vec{\omega}_z = \frac{1}{2}(\omega_{0a} + \omega_{0b}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Da mesma forma podem ser derivadas as expressões de duas linhas mutuamente perpendiculares no planos ***yz*** e ***xz***.

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

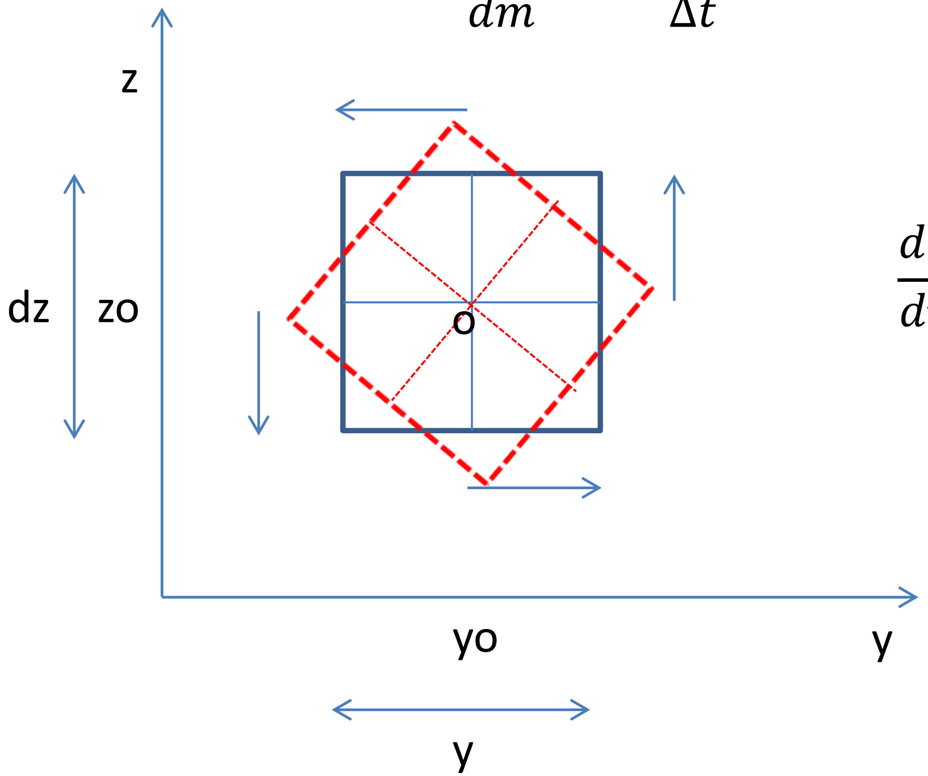
Rotação do elemento de fluido em torno do eixo x, plano *yz*

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo x, plano *yz componente y*

$$\boxed{d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}$$

$$\frac{d\vec{F}_d}{dm}\Delta t = \frac{\Delta w}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow w - w_0 = \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(\hat{\jmath})$$



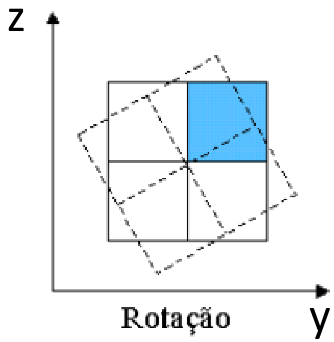
$$\frac{d\vec{F}_e}{dm}\Delta t = \frac{\Delta w}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow w - w_0 = -\frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(-\hat{\jmath})$$

$$\boxed{\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \frac{d\vec{F}_d}{dm}\Delta t + \frac{d\vec{F}_e}{dm}\Delta t}$$

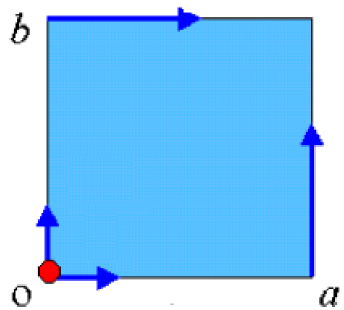
$$\frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(\hat{\jmath}) + \left(-\frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(-\hat{\jmath})\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}\Delta y(\hat{\jmath})$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS



$$w = w_0 + \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)$$



$$w = w_0 + \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)($$

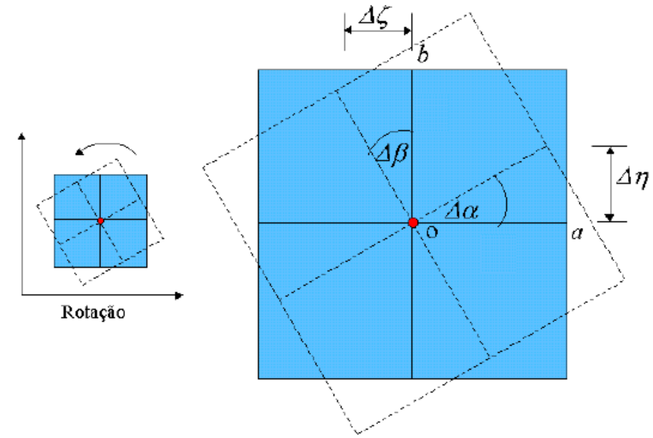


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

$$\boxed{\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \Delta w = -\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x(i)}$$

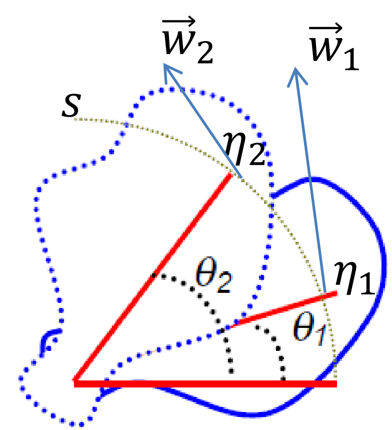
A velocidade escalar

$$\Delta w = \frac{\Delta \eta}{\Delta t}$$

$$\boxed{tag(\Delta\propto) = \frac{\Delta \eta}{\Delta y}}$$

$$\boxed{\Delta \eta = \eta_2 - \eta_1}$$

$$\boxed{\Delta w = w_2 - w_1}$$



$$\frac{\partial w}{\partial y}\Delta y = \frac{\Delta \eta}{\Delta t}$$

$$\boxed{\Delta\propto = \frac{\Delta \eta}{\Delta y}}$$

$$\Delta \eta = \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y \Delta t$$

Velocidade angular da linha oa

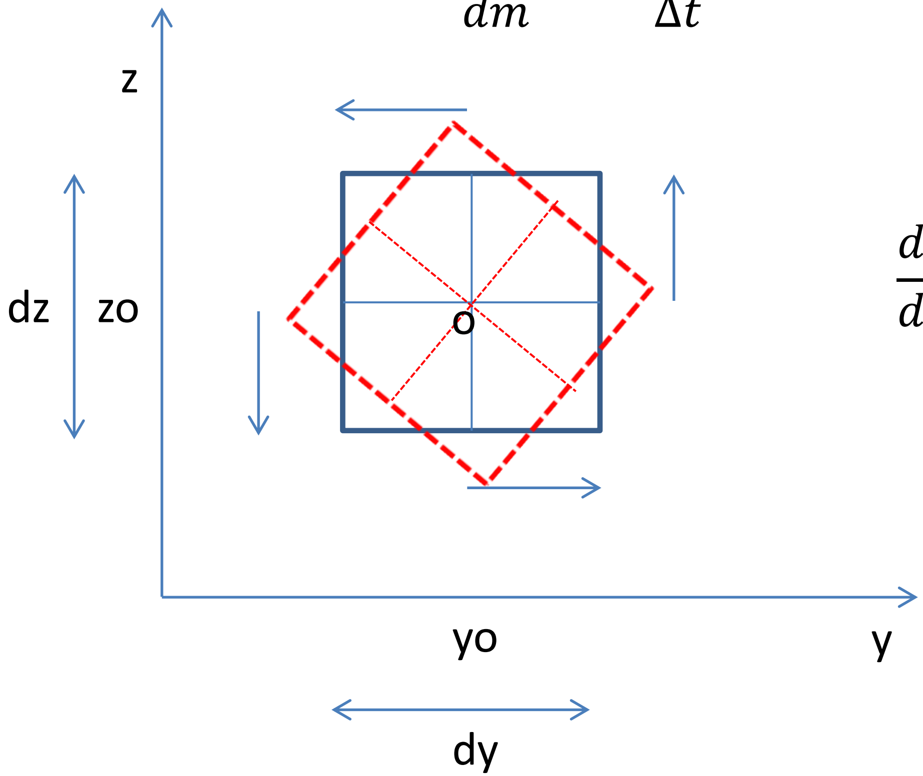
$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\propto}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \eta}{\Delta y \Delta t}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo x, plano *yz componente z*

$$\boxed{d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}$$

$$\frac{d\vec{F}_s}{dm}\Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow v - v_0 = \frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)(-\hat{j})$$



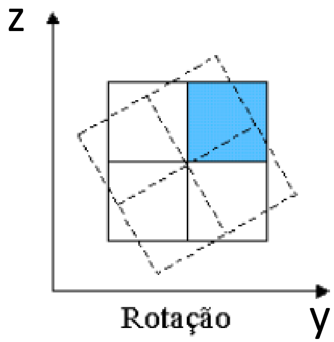
$$\frac{d\vec{F}_i}{dm}\Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow v - v_0 = -\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)(\hat{j})$$

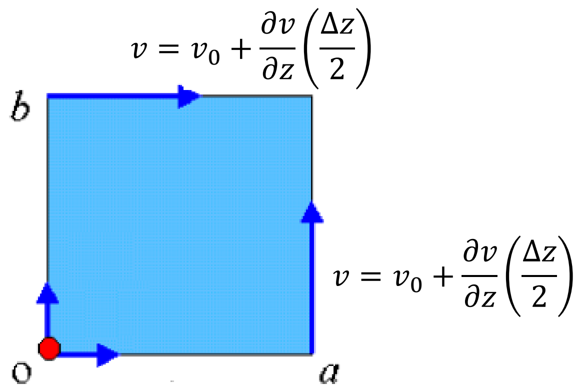
$$\boxed{\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \frac{d\vec{F}_i}{dm}\Delta t + \frac{d\vec{F}_s}{dm}\Delta t}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)(\hat{j}) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)(-\hat{j})\right)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial z}\Delta z(\hat{j})$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS





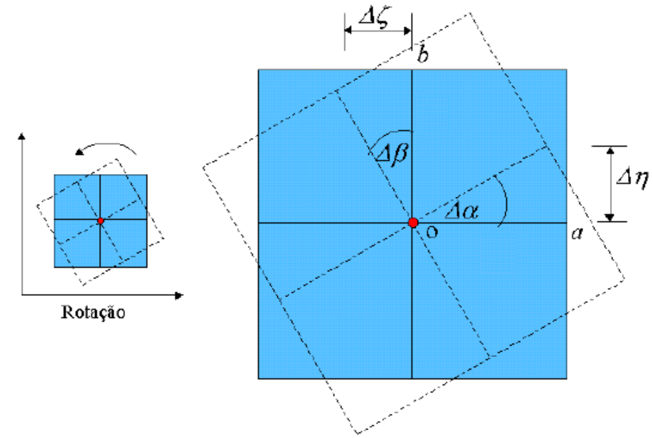


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

A velocidade escalar

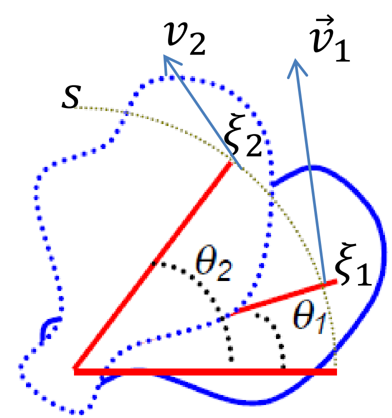
$$\boxed{\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \Delta v = -\frac{\partial v}{\partial z}\Delta z(i)}$$

$$\Delta v = \frac{\Delta\xi}{\Delta t}$$

$$\boxed{tag(\Delta\beta) = \frac{\Delta\xi}{\Delta z}}$$

$$\boxed{\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1}$$

$$\boxed{\Delta v = v_2 - v_1}$$



$$-\frac{\partial v}{\partial z}\Delta z = \frac{\Delta\xi}{\Delta t}$$

$$\boxed{\Delta\beta = \frac{\Delta\xi}{\Delta z}}$$

Velocidade angular da linha oa

$$\Delta\xi = -\frac{\partial v}{\partial z}\Delta z\Delta t$$

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\xi}{\Delta z\Delta t}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Da mesma forma podem ser derivadas as expressões de duas linhas mutuamente perpendiculares no planos ***yz*** .

$$\omega_x = \frac{1}{2}(\omega_{oa} + \omega_{ob})$$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

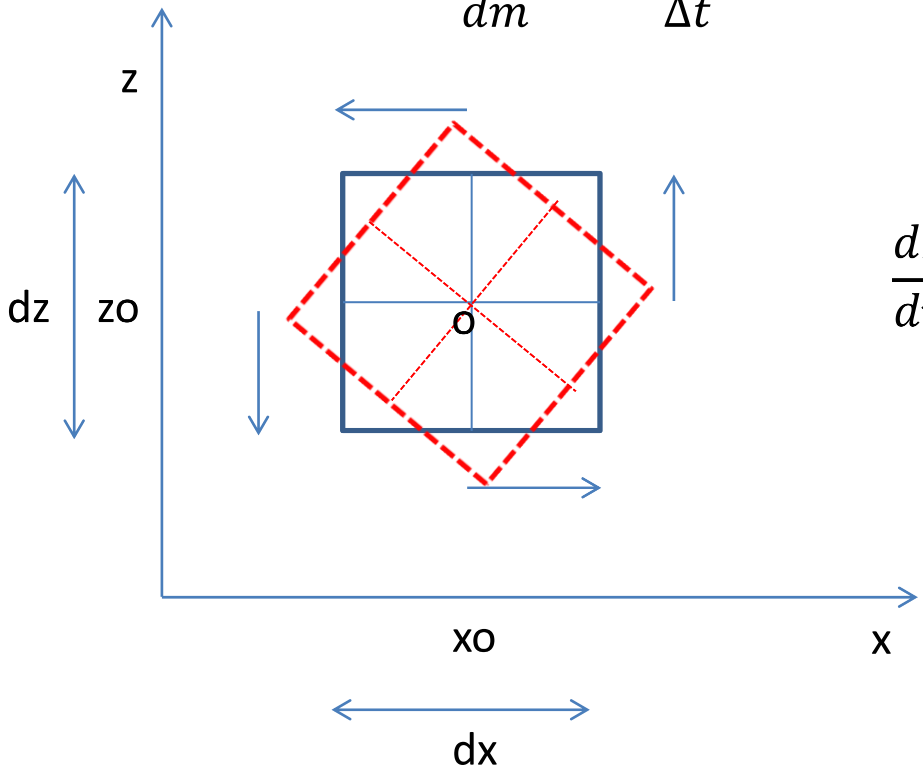
Rotação do elemento de fluido em torno do eixo x, plano *xz*

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo x, plano *xz componente y*

$$d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{F}_d}{dm}\Delta t = \frac{\Delta w}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow w - w_0 = \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(\hat{k})$$



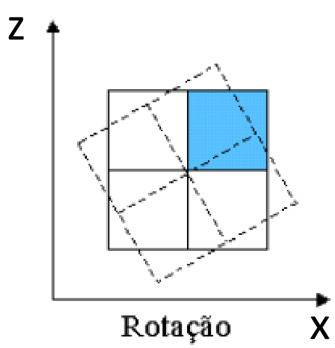
$$\frac{d\vec{F}_e}{dm}\Delta t = \frac{\Delta w}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow w - w_0 = -\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(-\hat{k})$$

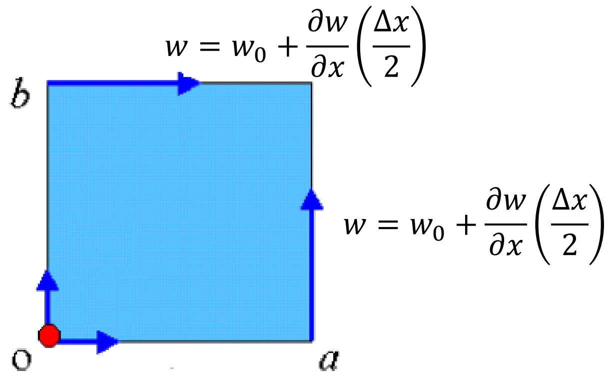
$$\boxed{\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \frac{d\vec{F}_d}{dm}\Delta t + \frac{d\vec{F}_e}{dm}\Delta t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(\hat{k}) + \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(-\hat{k})\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x(\hat{k})$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS





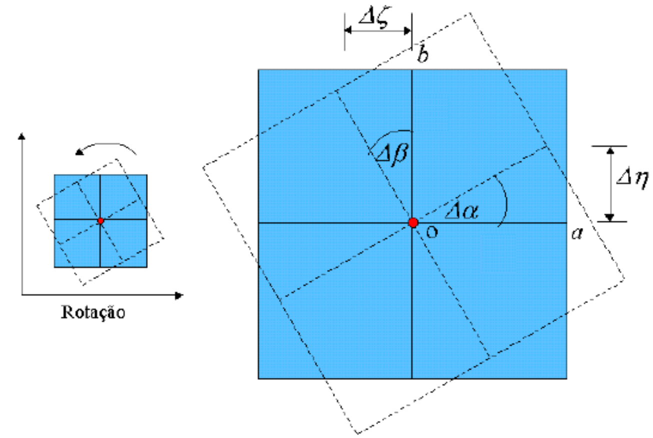


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

A velocidade escalar

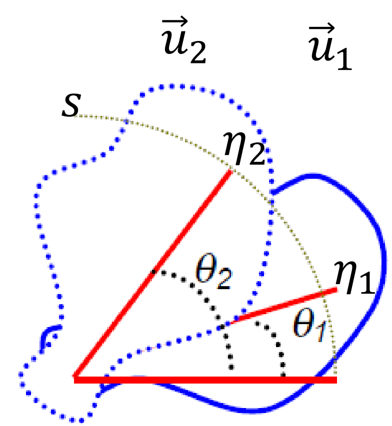
$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \Delta w = -\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x(i)$$

$$\Delta w = \frac{\Delta \eta}{\Delta t}$$

$$\boxed{tag(\Delta\propto) = \frac{\Delta \eta}{\Delta x}}$$

$$\boxed{\Delta \eta = \eta_2 - \eta_1}$$

$$\boxed{\Delta w = w_2 - w_1}$$



$$\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x = \frac{\Delta \eta}{\Delta t}$$

$$\boxed{\Delta\propto = \frac{\Delta \eta}{\Delta x}}$$

$$\Delta \eta = \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x \Delta t$$

Velocidade angular da linha oa

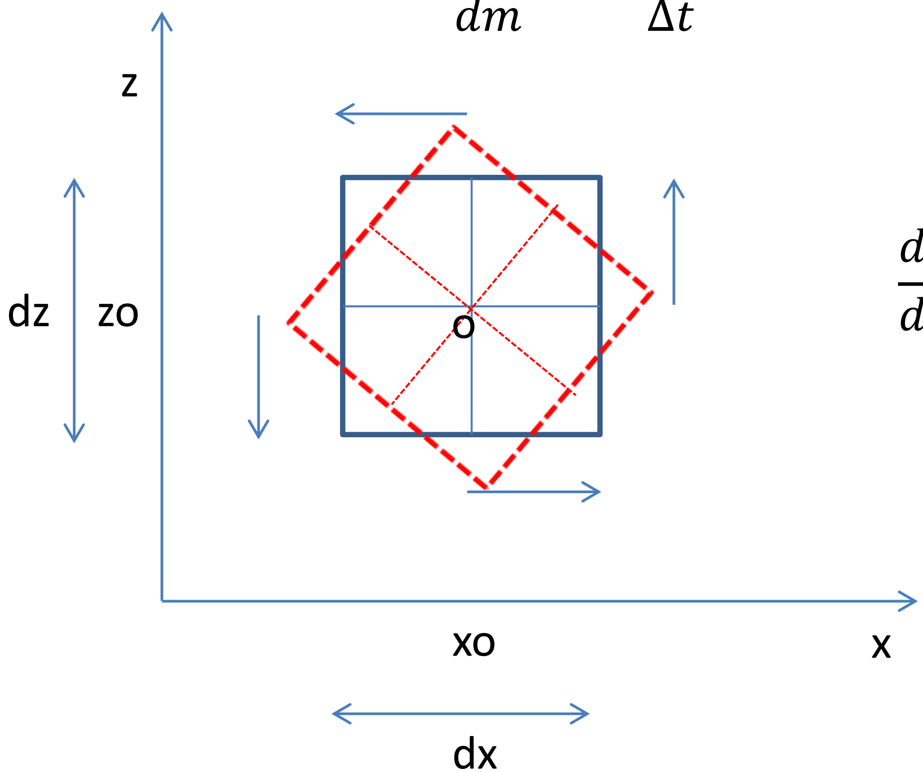
$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\propto}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \eta}{\Delta x \Delta t}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo x, plano *xz componente y*

$$\boxed{d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}$$

$$\frac{d\vec{F}_s}{dm}\Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)(-i)$$



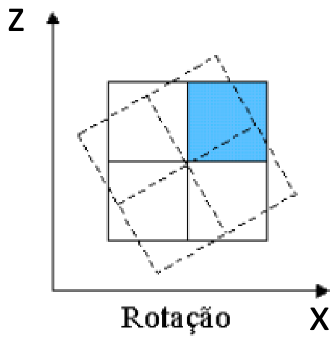
$$\frac{d\vec{F}_i}{dm}\Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow u - u_0 = -\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)(\hat{\imath})$$

$$\boxed{\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \frac{d\vec{F}_d}{dm}\Delta t + \frac{d\vec{F}_e}{dm}\Delta t}$$

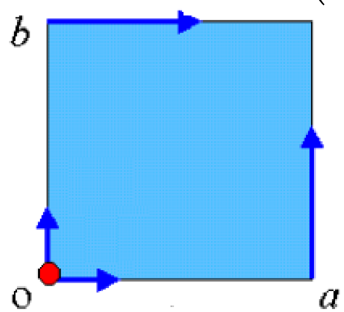
$$-\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)(\hat{\imath}) + \left(-\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)(\hat{\imath})\right)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z(\hat{\imath})$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS



$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)$$



$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)$$

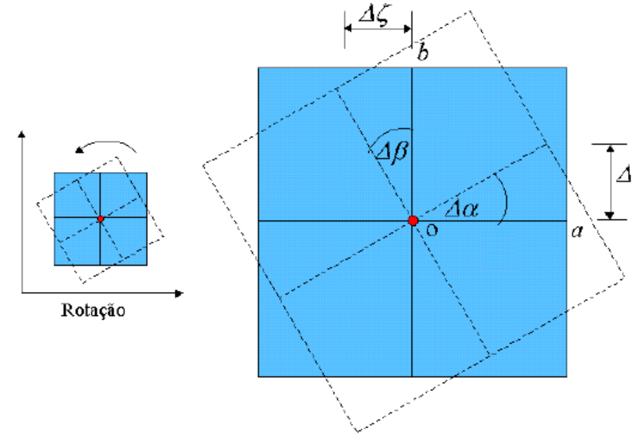


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

A velocidade escalar

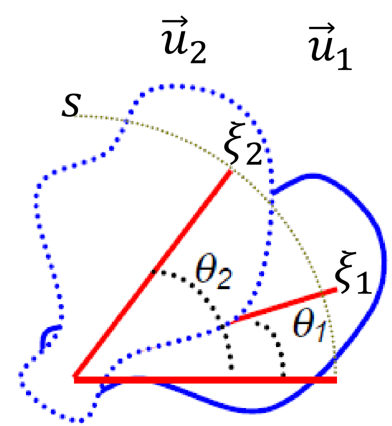
$$\boxed{\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \Delta u = -\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z(i)}$$

$$\Delta u = \frac{\Delta \xi}{\Delta t}$$

$$\boxed{tag(\Delta\beta) = \frac{\Delta \xi}{\Delta z}}$$

$$\boxed{\Delta \xi = \xi_2 - \xi_1}$$

$$\boxed{\Delta u = u_2 - u_1}$$



$$-\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z = \frac{\Delta \xi}{\Delta t}$$

$$\boxed{\Delta\beta = \frac{\Delta \xi}{\Delta z}}$$

Velocidade angular da linha ob

$$\Delta \xi = -\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z \Delta t$$

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \xi}{\Delta z \Delta t}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Da mesma forma podem ser derivadas as expressões de duas linhas mutuamente perpendiculares no planos ***xz***.

$$\omega_y = \frac{1}{2}(\omega_{oa} + \omega_{ob})$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Na forma vetorial a rotação num campo tridimensional é dada como:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}\right]$$

Onde o termo entre colchetes é definido como rotacional da velocidade:

$$\boxed{rotacional\ \vec{V} = \nabla x \vec{V}}$$

Desta forma, na notação vetorial, o vetor rotação é dado como:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla x \vec{V}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

- A rotação de uma partícula está associada a uma tensão de cisalhamento na superfície da partícula.

- Como as tensões de cisalhamento estão associadas a fluidos viscosos, somente estes fluidos apresentarão rotação de suas partículas de fluido.

- A condição de *irrotacionalidade* é válida nas regiões onde as forças viscosas são desprezíveis.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Defini-se a *vorticidade* como a grandeza que é duas vezes o valor da rotação:

$$\vec{\xi} = 2\vec{\omega} = \nabla x \vec{V}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

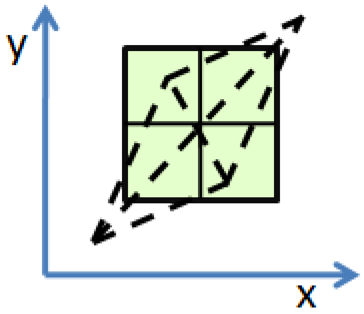
A *circulação* é definida como a integral de linha da componente tangencial da velocidade em torno de uma curva fechada fixa, no escoamento.

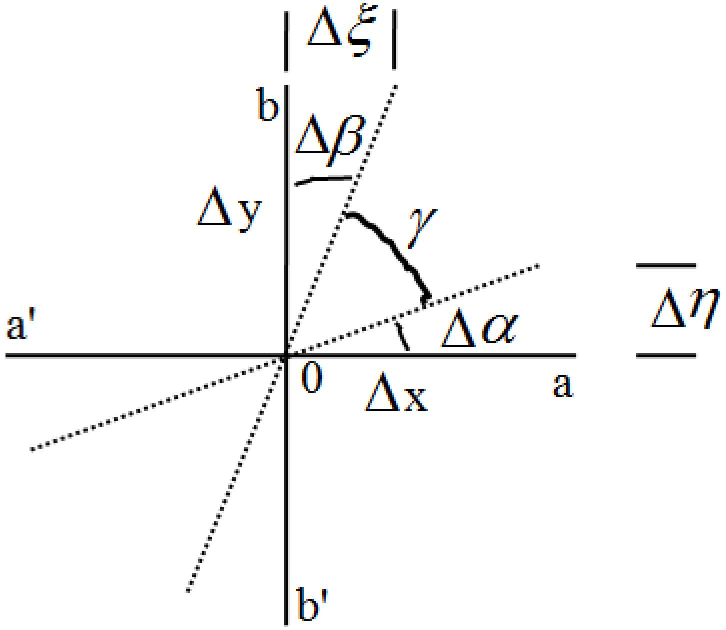
$$\Gamma = \oint_c \vec{V} d\vec{s}$$

ds é um vetor elementar de comprimento *ds* tangente a curva. Um sentido (+) corresponde a uma trajetória anti-horária de integração em torno da curva.

DEFORMAÇÃO ANGULAR

A deformação angular de um elemento fluido envolve **variações no ângulo** entre **duas linhas mutuamente perpendiculares no fluido**. Na FIG. notamos que a taxa de deformação angular do elemento fluido no plano xy é a taxa de decréscimo do ângulo γ entre as linhas 0a e 0b.



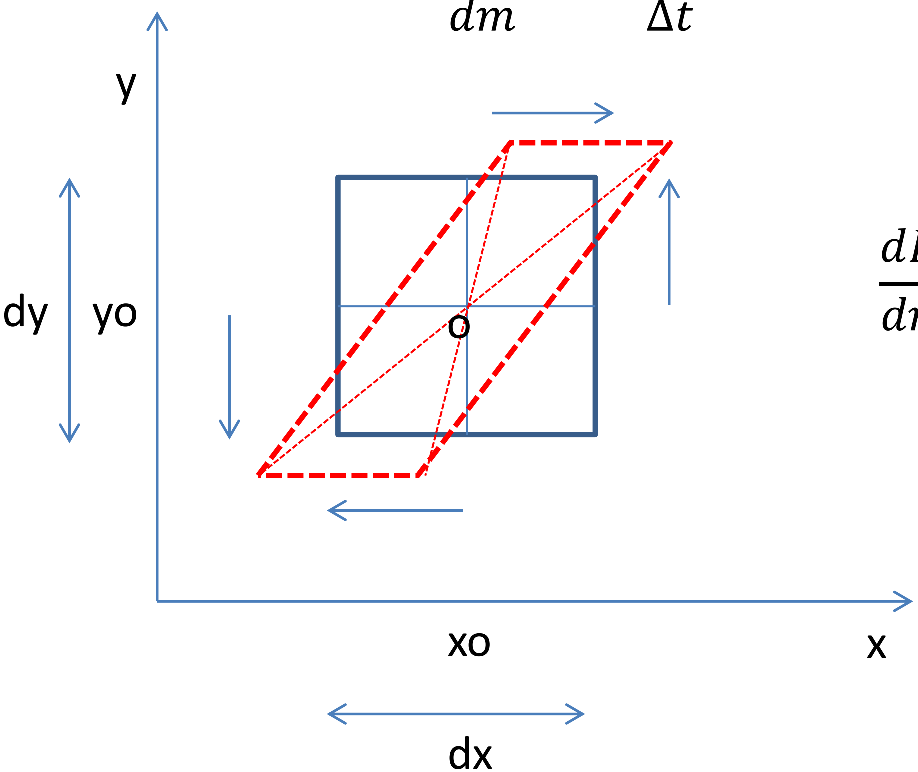


FÍSICA DOS FLUÍDOS

Deformação do elemento de fluido em torno do eixo x, plano *xy componente y*

$$\boxed{d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}$$

$$\frac{d\vec{F}_d}{dm}\Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow v - v_0 = \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(\hat{\jmath})$$



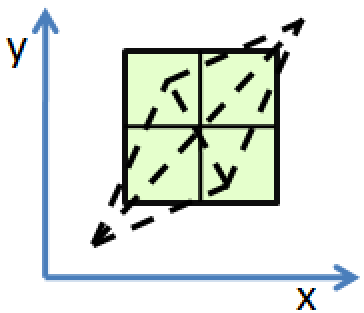
$$\frac{d\vec{F}_e}{dm}\Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow v - v_0 = -\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(-\hat{\jmath})$$

$$\boxed{\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \frac{d\vec{F}_d}{dm}\Delta t + \frac{d\vec{F}_e}{dm}\Delta t}$$

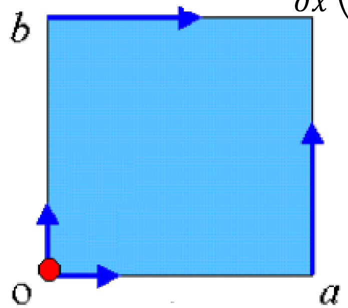
$$\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(\hat{\jmath}) + \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(-\hat{\jmath})\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x(\hat{\jmath})$$

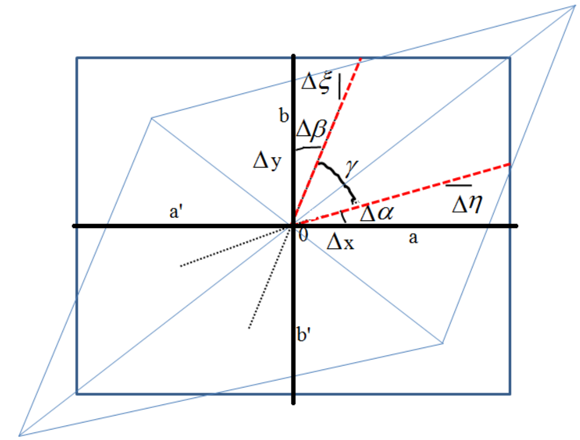
FÍSICA DOS FLUÍDOS



$$\mathrm{v} = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$



$$v = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$



A velocidade escalar

$$\Delta v = \frac{\Delta \eta}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = \frac{\Delta \eta}{\Delta t}$$

$$\Delta \eta = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x \Delta t$$

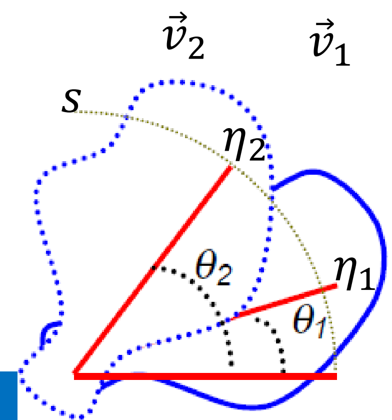
$$\boxed{tag(\Delta\propto) = \frac{\Delta \eta}{\Delta x}}$$

$$\boxed{\Delta\propto = \frac{\Delta \eta}{\Delta x}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \Delta w = \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x(i)}$$

$$\boxed{\Delta \eta = \eta_2 - \eta_1}$$

$$\boxed{\Delta v = v_2 - v_1}$$



Deformação angular da linha oa

$$\gamma_{oa} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\propto}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \eta}{\Delta x \Delta t}$$

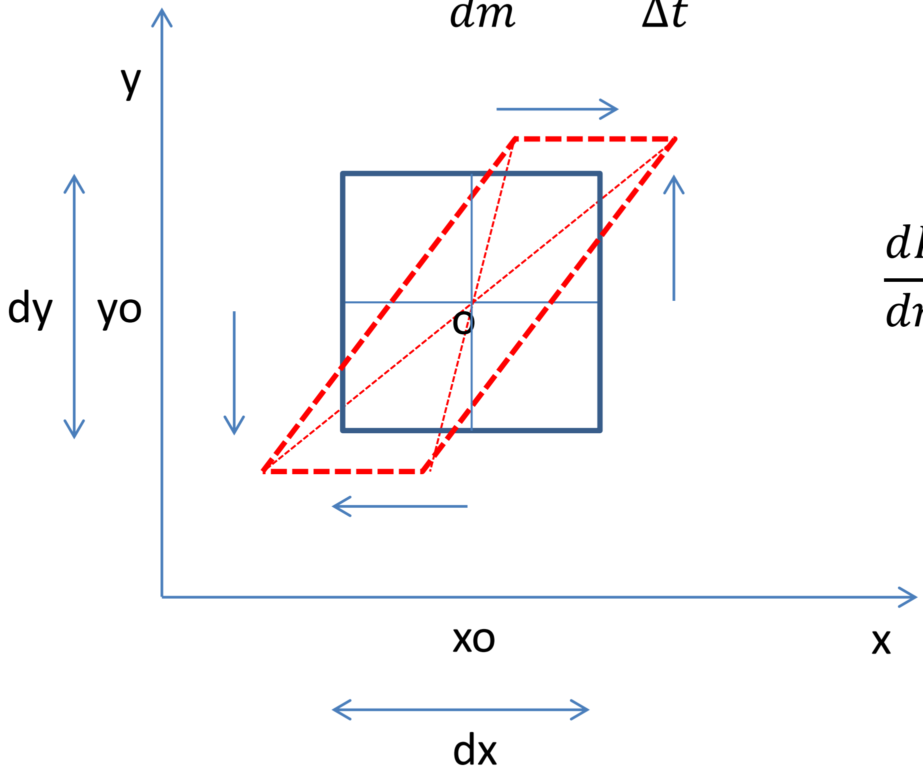
$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\propto}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Deformação do elemento de fluido em torno do eixo z, plano *xy componente y*

$$\boxed{d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}$$

$$\frac{d\vec{F}_s}{dm}\Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(i)$$



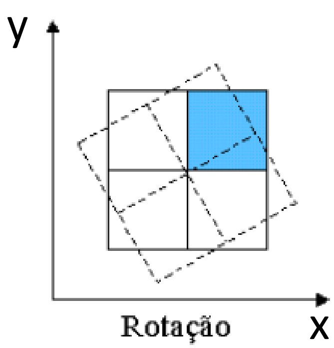
$$\frac{d\vec{F}_i}{dm}\Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow u - u_0 = -\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(-\hat{\imath})$$

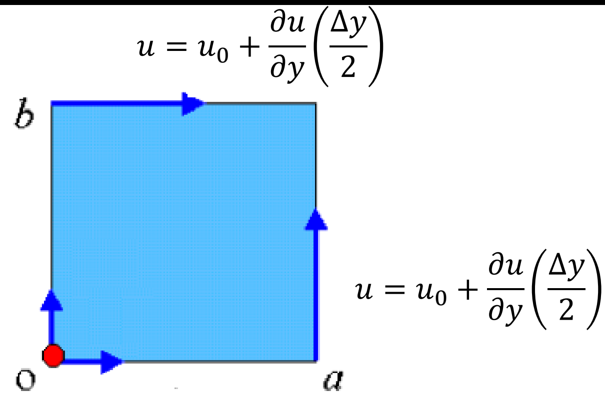
$$\boxed{\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \frac{d\vec{F}_s}{dm}\Delta t + \frac{d\vec{F}_i}{dm}\Delta t}$$

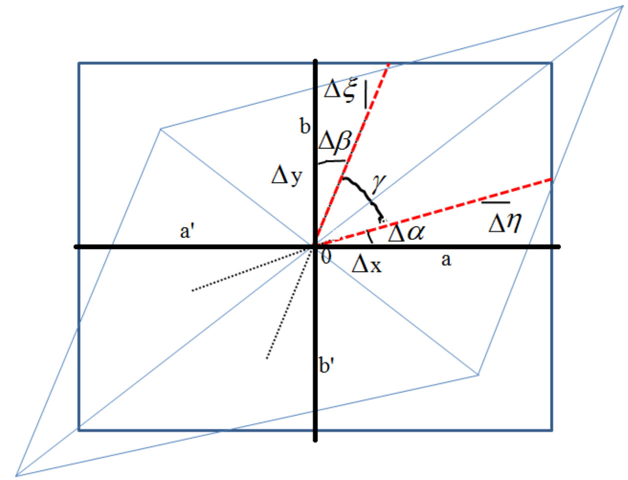
$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(\hat{\imath}) + \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(-\hat{\imath})\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y(\hat{\imath})$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS







A velocidade escalar

$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \Delta u = \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y(i)$$

$$\Delta u = \frac{\Delta\xi}{\Delta t}$$

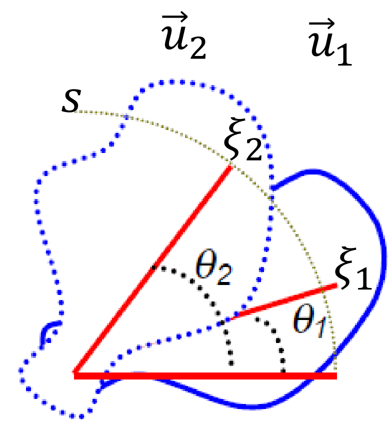
$$tag(\Delta\beta) = \frac{\Delta\xi}{\Delta y}$$

$$\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1$$

$$\Delta u = u_2 - u_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y = \frac{\Delta\xi}{\Delta t}$$

$$\Delta\beta = \frac{\Delta\xi}{\Delta y}$$



Deformação angular da linha ob

$$\Delta\xi = \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\Delta t$$

$$\gamma_{ob} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\xi}{\Delta y\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \frac{du}{dy}$$

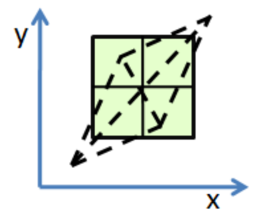
FÍSICA DOS FLUÍDOS

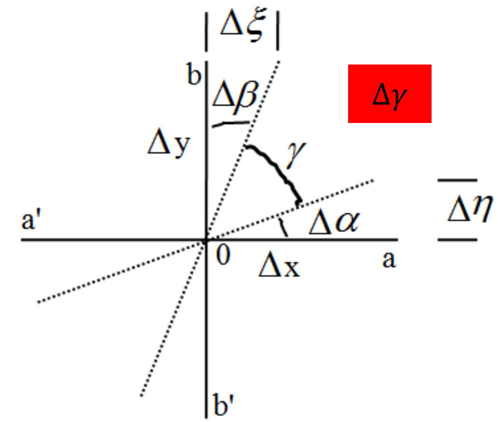
Visto que durante o intervalo de tempo Δt

$$\Delta\gamma + \Delta\alpha + \boldsymbol{\Delta\beta} = 90^o$$

$$\Delta\gamma - 90^o = -(\Delta\alpha + \Delta\beta)$$

A taxa de deformação angular é dada por: $\frac{d\gamma}{dt}$





$$\Delta\gamma - 90^o = -(\Delta\alpha + \Delta\beta)$$

$$-\Delta\gamma + 90^o = (\Delta\alpha + \Delta\beta)$$

$$\frac{-\Delta\gamma}{\Delta t} + \frac{90^o}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} + \frac{\Delta\beta}{\Delta t}\right)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{-\Delta\gamma}{\Delta t} + \frac{90^o}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} + \frac{\Delta\beta}{\Delta t}\right)\right]$$

$$-\frac{d\gamma}{dt} + \cancel{\frac{d90}{dt}} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} + \frac{\Delta\beta}{\Delta t}\right)\right]$$

$$-\frac{d\gamma}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)\right] + \lim_{\Delta t \to 0}\left[\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta t}\right)\right]$$

$$-\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Consequentemente, a taxa d deformação angular no plano xy é:

$$-\frac{d\gamma}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)\right] + \lim_{\Delta t \to 0}\left[\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta t}\right)\right]$$

$$-\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d \propto}{dt} + \frac{d\beta}{dt}$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

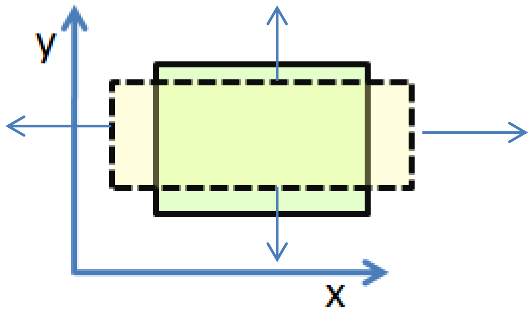
A tensão de cisalhamento relaciona-se com a taxa de deformação angular através da viscosidade do fluido.

Num escoamento viscoso (onde os gradientes de velocidade estão presentes) é altamente improvável que $\frac{\partial v}{\partial x}$ seja igual e oposta a $\frac{\partial u}{\partial y}$ em todo campo de escoamento. A presença de forças viscosas significa que o escoamento é rotacional.

DEFORMAÇÃO LINEAR

Durante a deformação linear, a forma de um elemento de fluido, descrita pelos ângulos de seus vértices, permanece imutável, visto que todos os ângulos retos continuam a sê-lo (ver Figura).

O elemento irá variar de comprimento na direção x apenas se $\partial u/\partial x$ for diferente de zero. Analogamente, uma mudança na dimensão y exige um valor diferente de zero para $\partial v/\partial y$ e uma mudança na direção z implica que $\partial w/\partial z$ é diferente de zero.
Essas quantidades representam as componentes das taxas longitudinais de deformação nas direções x, y e z, respectivamente.



$$\frac{\Delta u}{\Delta x}(i)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta y}(j)$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta y}(k)$$

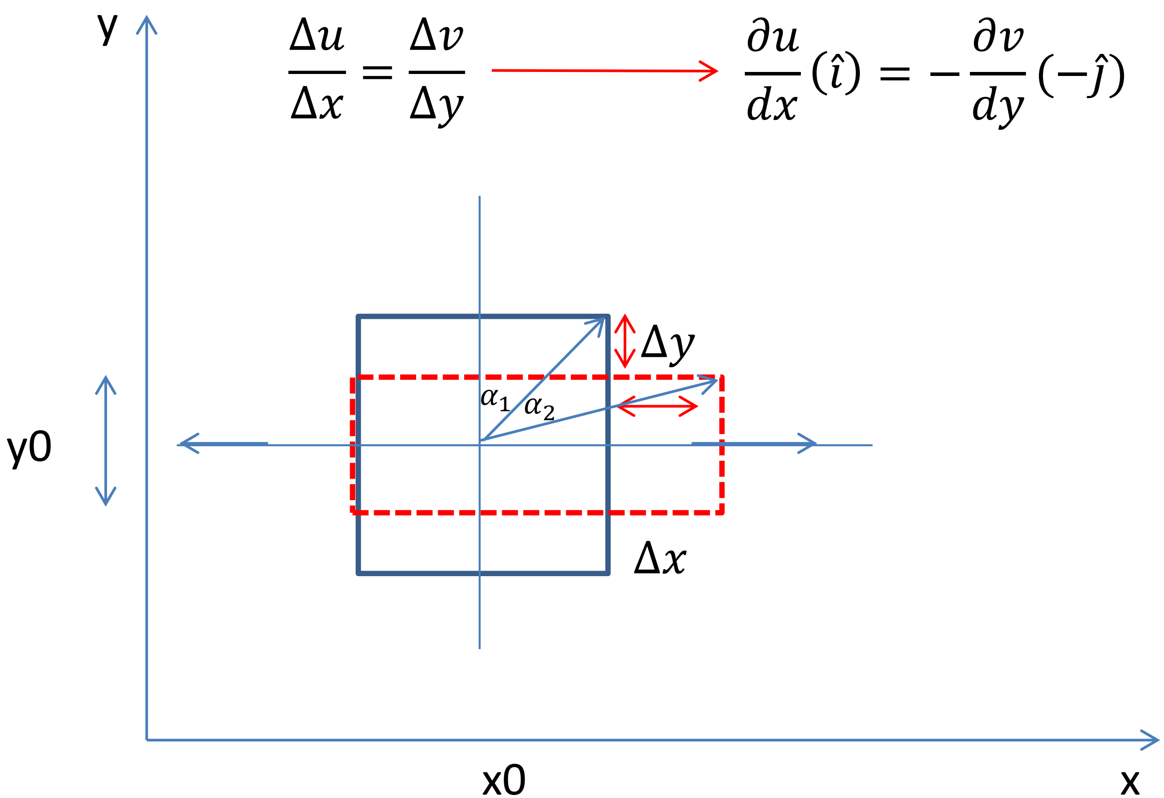
$$\tan \Delta\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta v \Delta t}{\Delta u \Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta u}$$

$$u = u_0 + \frac{\partial u}{dx}\Delta x(\hat{\imath})$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta y} \longrightarrow \frac{\partial u}{dx}(\hat{\imath}) = -\frac{\partial v}{dy}(-\hat{\jmath})$$

$$\Delta u = \frac{\partial u}{dx}\Delta x(\hat{\imath})$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{dx}(\hat{\imath})$$



$$\mathrm{v} = v_0 - \frac{\partial v}{dy}\Delta y(-\hat{\jmath})$$

$$\Delta v = -\frac{\partial v}{dy}\Delta y(-\hat{\jmath})$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta y} = -\frac{\partial v}{dy}(-\hat{\jmath})$$

taxa de dilatação volumétrica

$$:\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla \bullet \vec{V}$$

Para um escoamento incompressível, a taxa de dilatação volumétrica é igual a zero.