



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Teoria Quase Geostrofica e Aplicações :
Aproximações e Equações
MET 0225 Sinótica-Dinâmica
Meteorologia I
Instrutor: Paulo Kubota
paulo.kubota@inpe.br
012-3186-8400



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Paulo Kubota

data	Tópicos
15/04/2021	PBL
20/04/2021	PBL
22/04/2021	PBL
27/04/2021	QG Vorticity. eq.
29/04/2021	QG Vorticity. eq.
04/05/2021	QG Vorticity. eq.
06/05/2021	Geop. Tend. eq.
11/05/2021	Geop. Tend. eq.
13/05/2021	Geop. Tend. eq.
18/05/2021	Omega and Vetor Q
20/05/2021	Omega and Vetor Q
25/05/2021	Omega and Vetor Q
27/05/2021	Avaliação 1
01/06/2021	Avaliação 2



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Motivação.

O desejo de um sistema de equações simplificado, mas que retenha os principais processos dinâmicos necessários para descrever, diagnosticar e entender o comportamento de sistemas climáticos em larga escala.

Palavras chaves.

“As equações e suas derivações são reconhecidamente difíceis. É importante que não se memorize apenas as equações de maneira mecânica. É muito mais importante entender o que eles significam fisicamente.” - Howie Bluestein.

Suposição abrangente da teoria QG.

O número de Rossby ($R0 = U / fL$) é pequeno, o que nos permite desprezar o vento ageostrófico em alguns (mas não todos) termos das equações que governam o movimento.

Equações governantes e suas derivações.

A teoria QG é baseada em versões simplificadas das equações de movimento, equação de continuidade e equação termodinâmica de energia.



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Sumário

A equação do momento QG, a relação do vento geostrófico, a aproximação hidrostática, a equação de continuidade e a equação de energia termodinâmica formam um conjunto fechado de equações para as variáveis dependentes Φ , \vec{V}_g , \vec{V}_{ag} , ω e T .

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -(f_0) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g)$$

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = -\frac{RT}{P}$$

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial P} = 0$$

$$\frac{DT}{Dt_g} - \frac{\sigma P}{R} \omega = \frac{J}{C_p}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

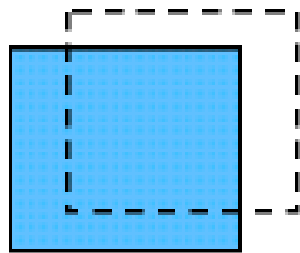
Vorticidade Relativa Geostrófica

FÍSICA DOS FLUÍDOS

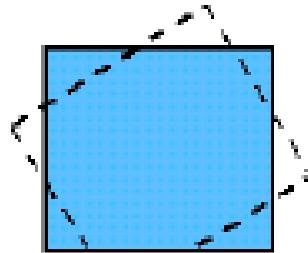
CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Rotação dos Fluidos

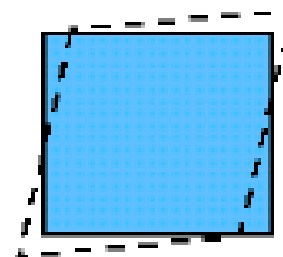
Uma **partícula de fluido** em movimento apresenta componentes de **translação**, **rotação**, **deformação angular** e **deformação linear**.



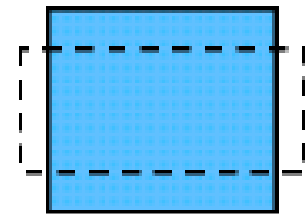
Translação



Rotação



Deformação
angular



Deformação
linear

Figura 4.3 Componentes do movimento de um elemento de fluido

FÍSICA DOS FLUÍDOS

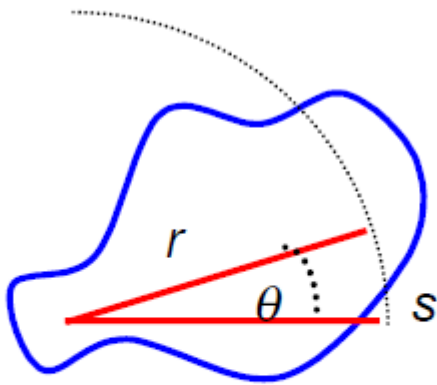
Posição angular

Quando um objeto de um formato arbitrário, tem uma trajetória circular em torno de um certo eixo, podemos definir algumas grandezas que descreverão esse movimento.

Podemos marcar um dado ponto do objeto e analisar o seu movimento. A distância deste ponto ao eixo de rotação é chamado de raio r da trajetória.

A sua trajetória descreve um arco de comprimento s .

A posição angular associada ao arco e o raio é o ângulo θ .



$$s = r\theta \quad \therefore \quad \theta = \frac{s}{r}$$

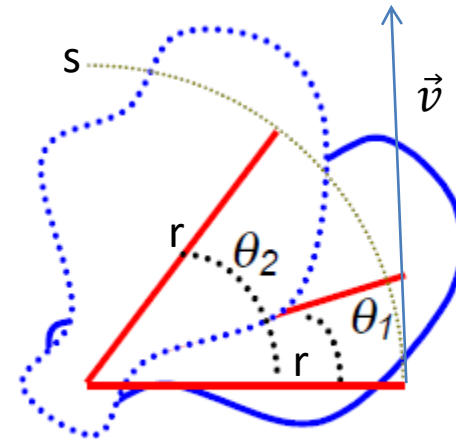
FÍSICA DOS FLUÍDOS

A velocidade escalar

Quando observamos os corpos rígidos, a rotação se faz com raio constante, ou seja: cada ponto observado mantém uma distância constante ao eixo de rotação. Desse modo

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \rightarrow v = rw$$



onde v é a velocidade linear de um certo ponto do corpo e w é a velocidade angular desse ponto considerado. Na realidade, w é a velocidade angular do corpo por inteiro.

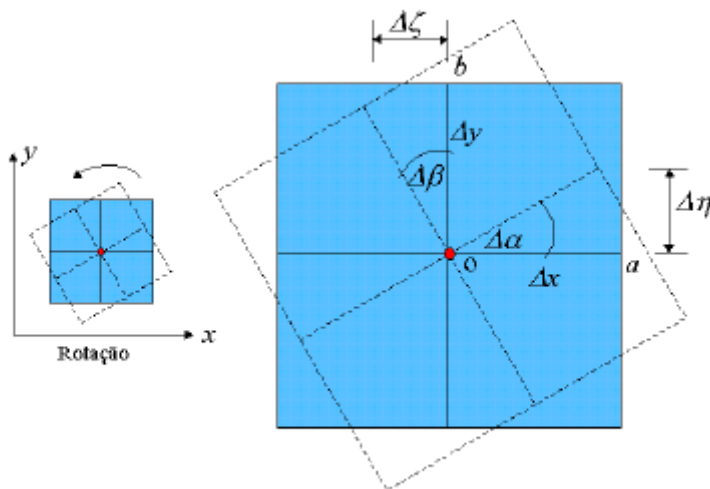
FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Uma partícula de fluido movendo-se num escoamento real pode **girar** em torno de três eixos de coordenadas. Esta rotação é uma grandeza vetorial definida como:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_x \hat{i} + \vec{\omega}_y \hat{j} + \vec{\omega}_z \hat{k}$$

Considera-se que o sentido positivo (+) do giro é dado pela regra da mão direita (anti-horária)



Componente y da velocidade no ponto a :
(por expansão da série de Taylor)

Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

A **rotação** é dada pela velocidade angular média de duas linhas perpendiculares que se cruzam no centro **ao** e **ob** no plano **xy**.

$$\vec{\omega}_z = \frac{1}{2}(\omega_{0a} + \omega_{0b})$$

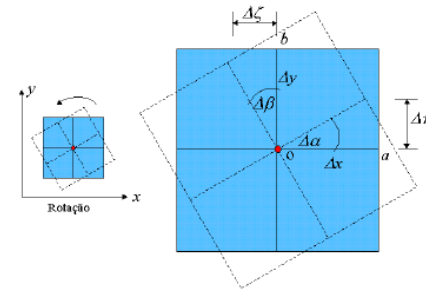
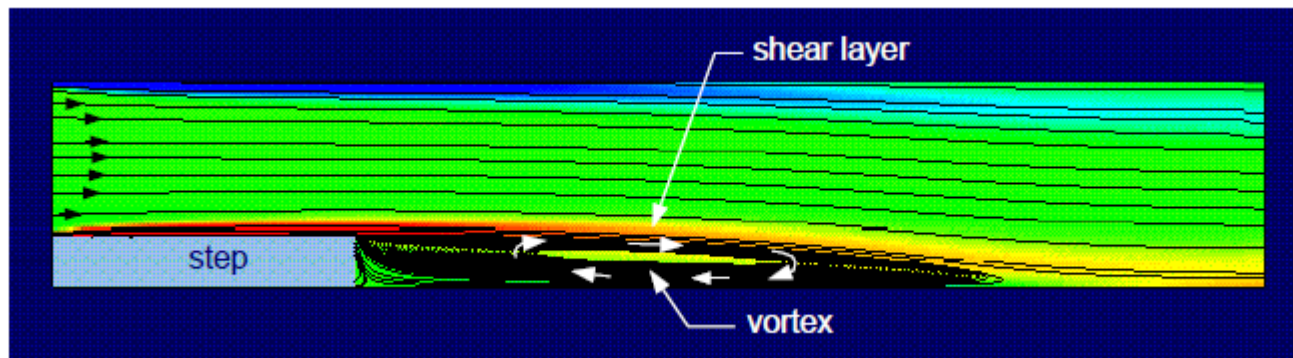


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

Onde ω_{0a} é a rotação da linha **ao** e ω_{0b} é a rotação da linha **ob**.



FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

Rotação da linha o-a Comprimento da linha ao: x .

Componente y da velocidade no ponto o: v_0

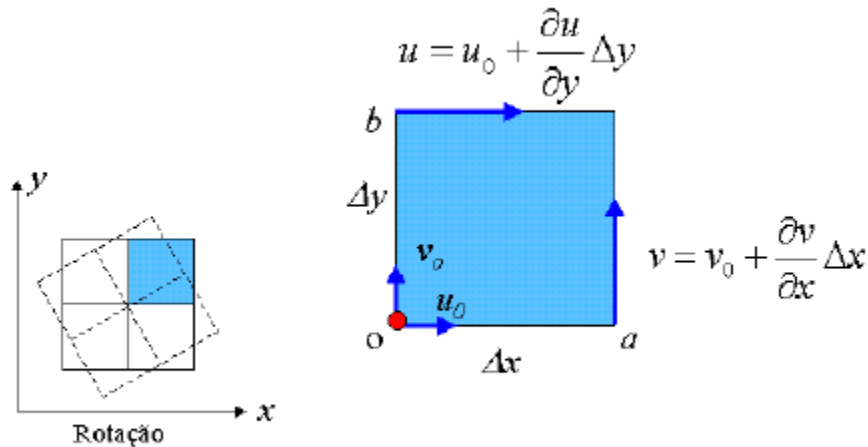


Figura 4.5 Detalhe das velocidades na rotação de um elemento de fluido

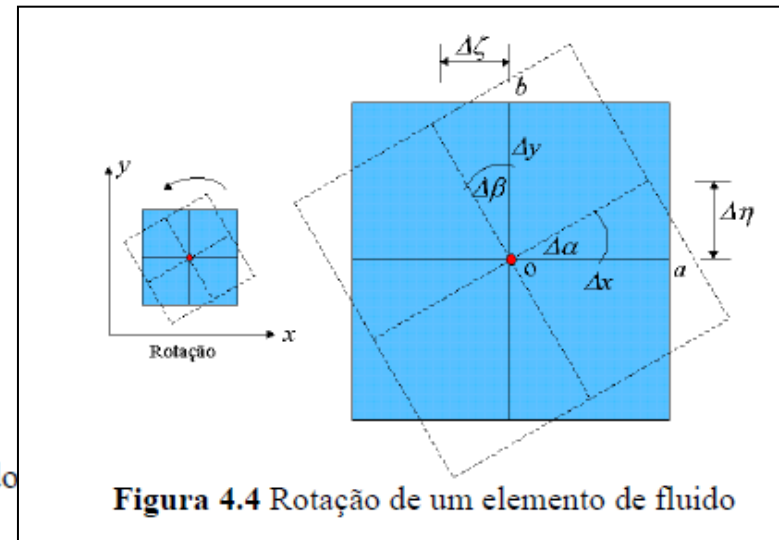


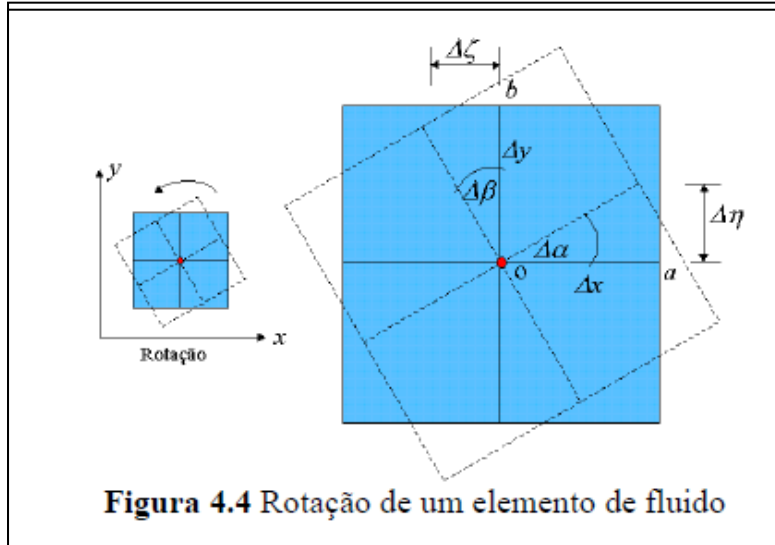
Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

O elemento de fluido, quando submetido à tensão de cisalhamento τ_{yx} , experimenta uma taxa de deformação (ou taxa de cisalhamento) dada por:

$$d\alpha/dt = du/dy.$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z



$$\tan(\Delta\alpha) = \frac{\Delta\eta}{\Delta x}$$

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\eta}{\Delta x}$$

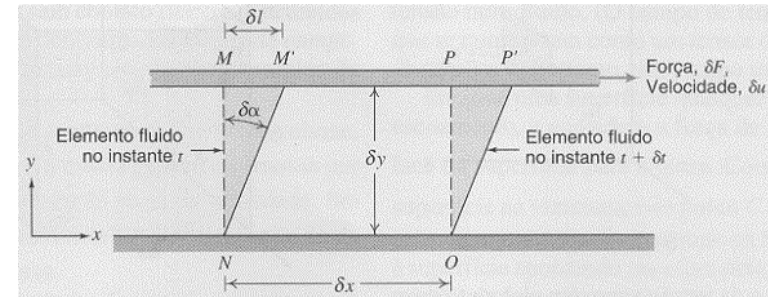
$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta\eta}{\Delta x \Delta t}$$

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta\eta}{\Delta x \Delta t}$$

Velocidade angular da linha oa

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\eta}{\Delta x \Delta t}$$

$$\delta l = \delta u \delta t$$

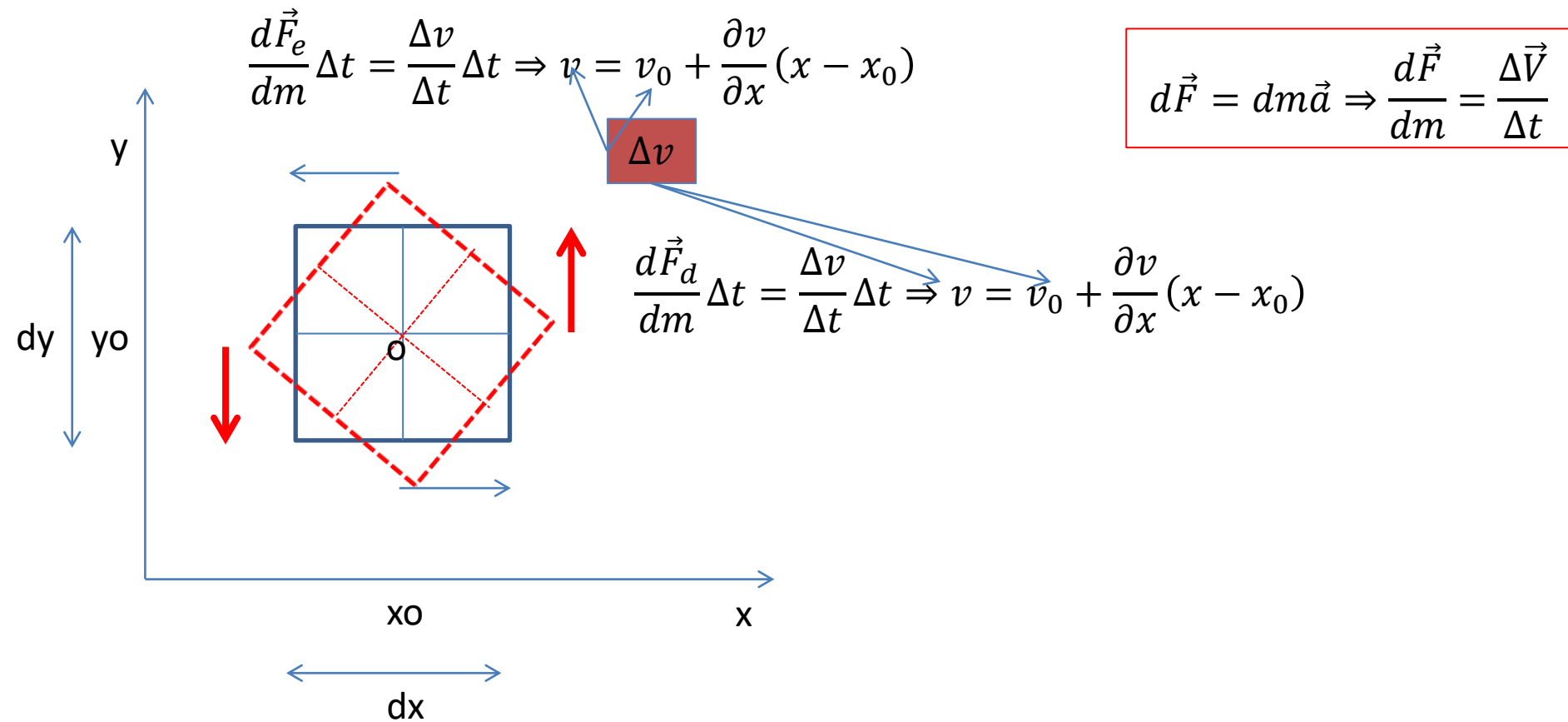


$$\delta l = \delta y \delta\alpha$$

$$d\alpha/dt = du/dy.$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente y



FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente y

$$\frac{d\vec{F}_e}{dm} \Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta t = v - v_0 = -\frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) (-\hat{j})$$

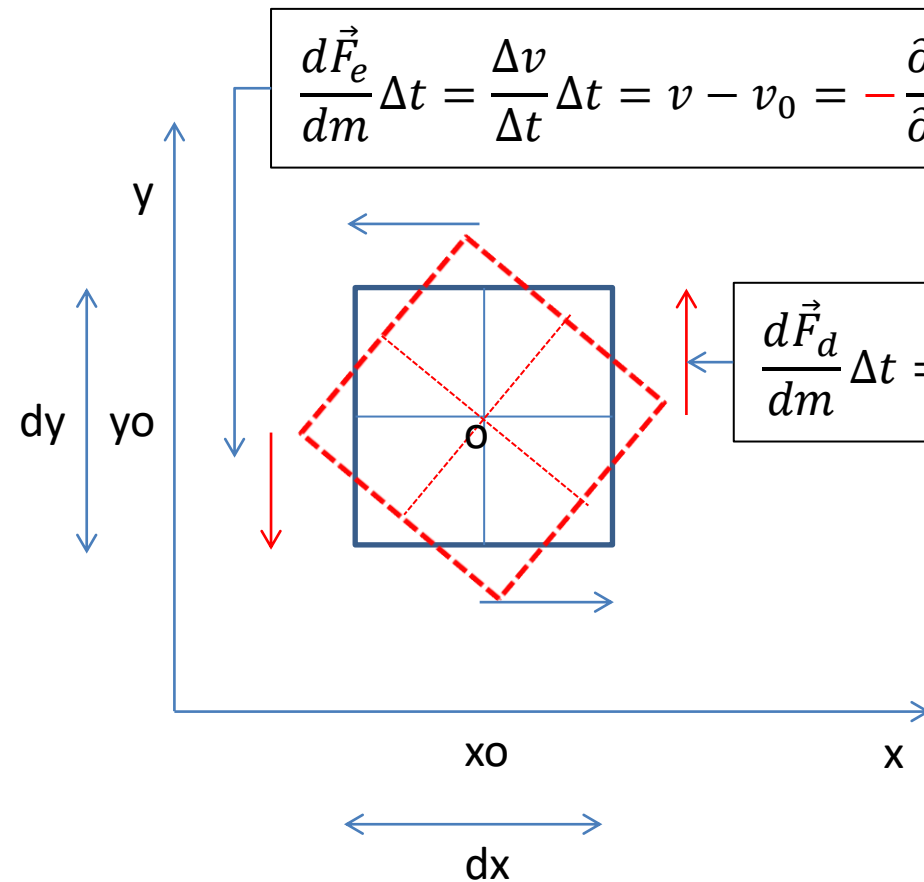
$$d\vec{F} = dm \vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{F}_d}{dm} \Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta t = v - v_0 = +\frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) (\hat{j})$$

$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm} \Delta t = \frac{d\vec{F}_d}{dm} \Delta t + \frac{d\vec{F}_e}{dm} \Delta t$$

$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm} \Delta t = \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) (\hat{j}) + \left(+\frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) (\hat{j}) \right)$$

$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm} \Delta t = \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x (\hat{j})$$



FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

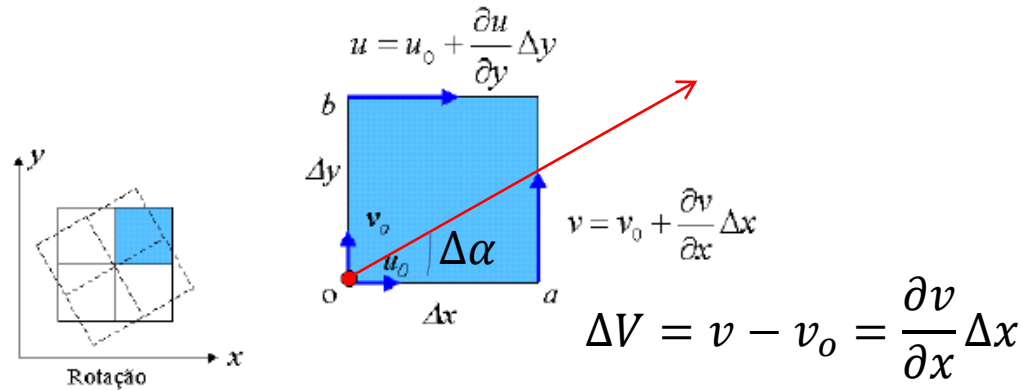


Figura 4.5 Detalhe das velocidades na rotação de um elemento de fluido

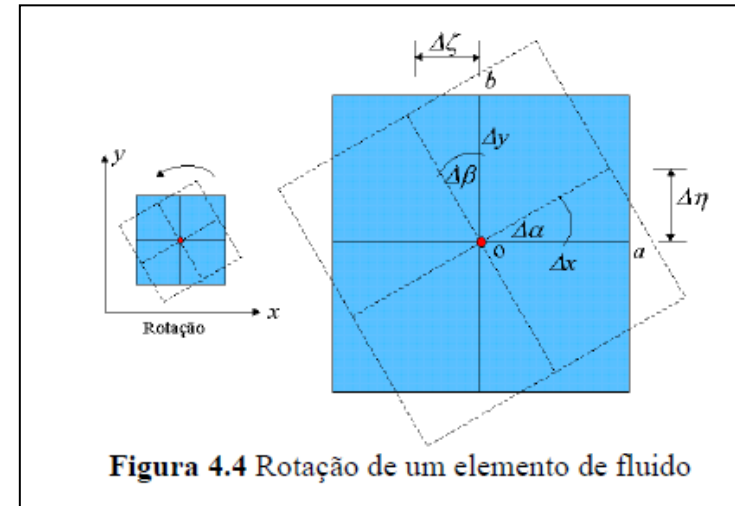


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

A velocidade escalar

$$\Delta v = \frac{\Delta\eta}{\Delta t}$$

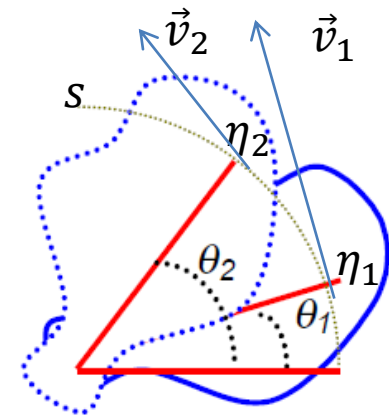
$$\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x = \frac{\Delta\eta}{\Delta t}$$

$$\Delta\eta = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta t$$

$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm} \Delta t = \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x(j)$$

$$\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$$

$$\Delta v = v_2 - v_1$$



FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

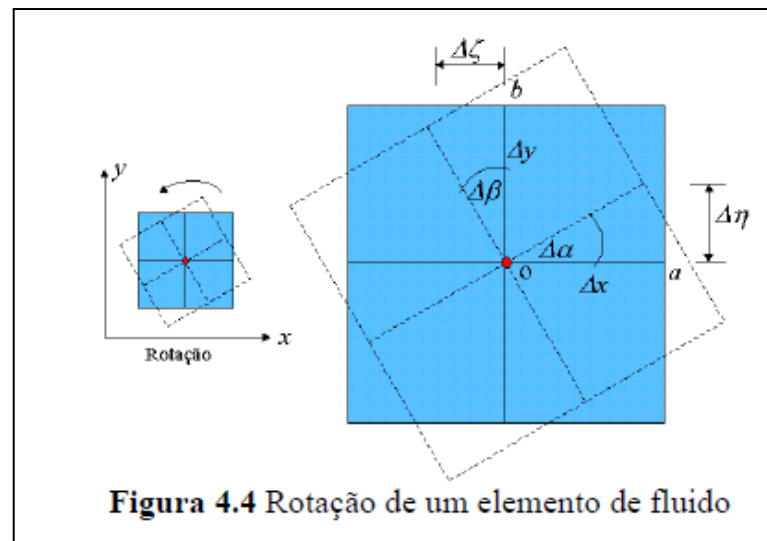
e desta forma

$$\omega_{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \eta}{\Delta x \Delta t}$$

$$\Delta \eta = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta t$$

$$\omega_{\alpha} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Rotação do elemento de fluido



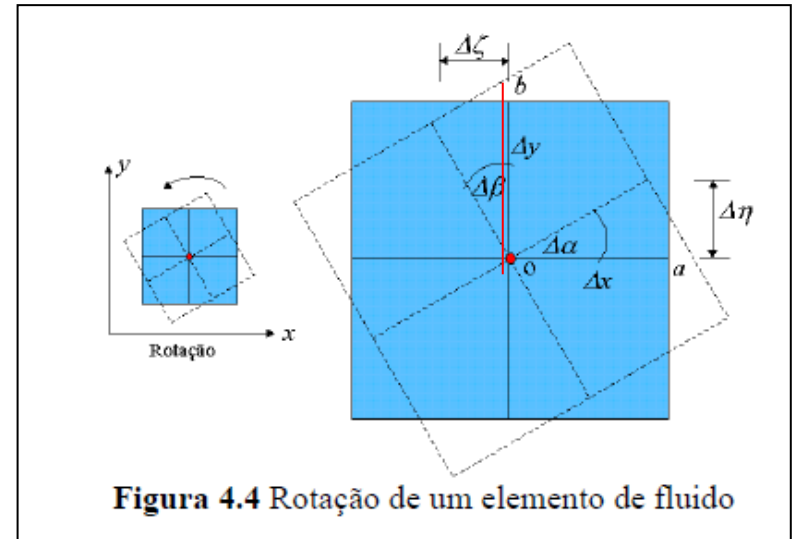
Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

Rotação da linha *ob*

Comprimento da linha *ob*: Δy .

$$\tan(\Delta\beta) = \frac{\Delta\xi}{\Delta y}$$

$$\Delta\beta = \frac{\Delta\xi}{\Delta y}$$



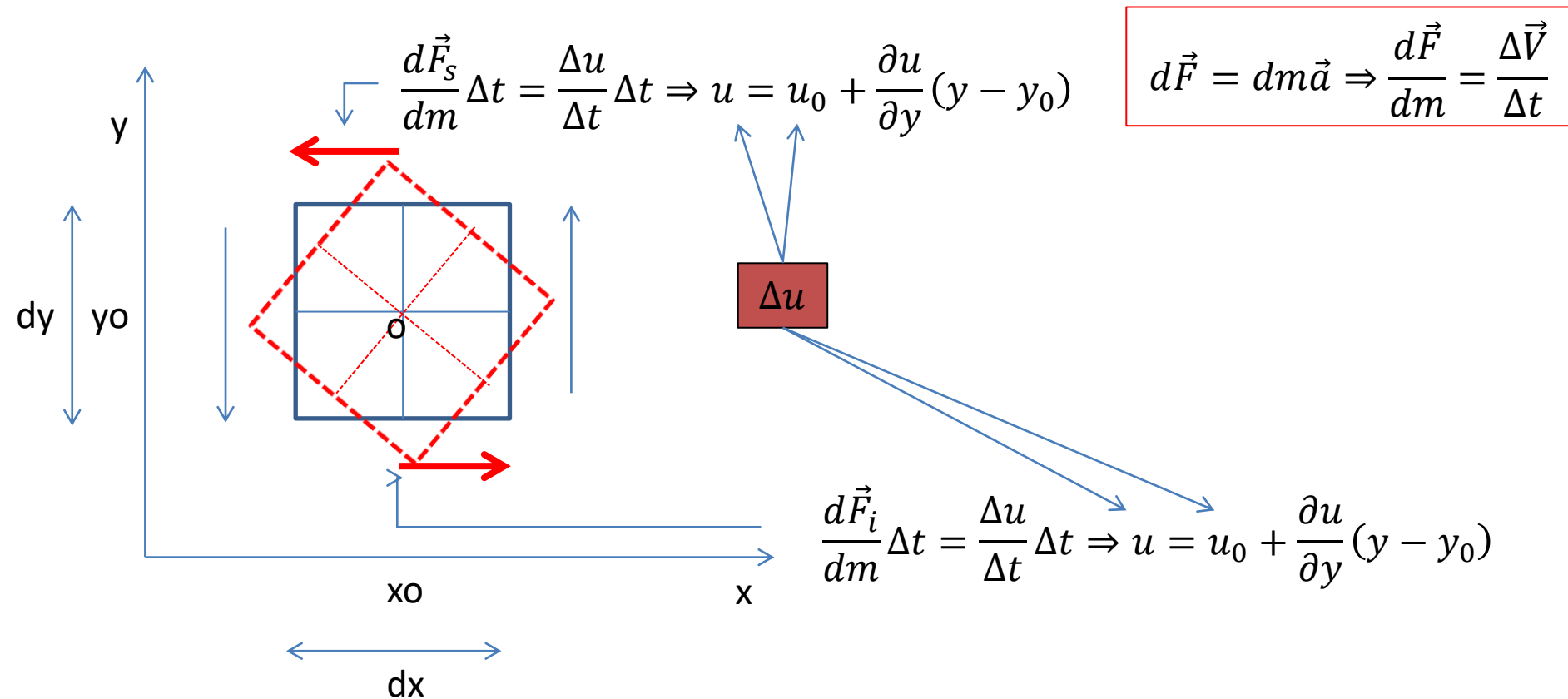
$$\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \frac{\Delta\xi}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \frac{\Delta\xi}{\Delta y \Delta t}$$

Velocidade angular da linha *oa*

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\xi}{\Delta y \Delta t}$$

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente x



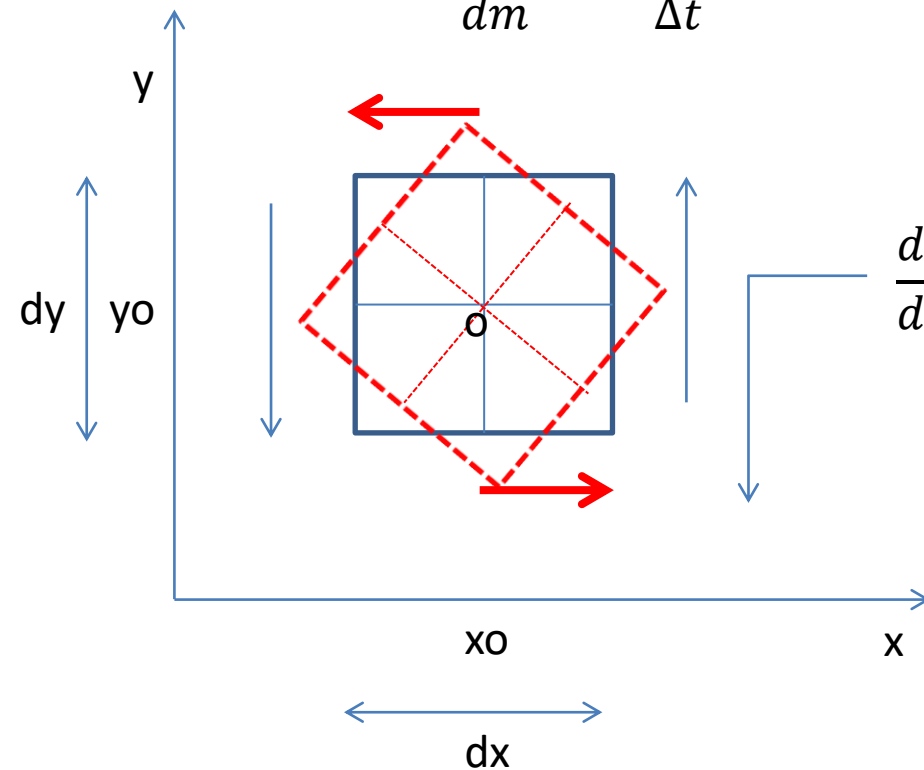
Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente x

$$d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{F}_s}{dm} \Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t} \Delta t \Rightarrow u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\Delta y}{2} \right) (-\hat{i})$$

$$\frac{d\vec{F}_i}{dm} \Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t} \Delta t \Rightarrow u - u_0 = -\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\Delta y}{2} \right) (\hat{i})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}_{total}}{dm} \Delta t &= \frac{d\vec{F}_i}{dm} \Delta t + \frac{d\vec{F}_s}{dm} \Delta t \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\Delta y}{2} \right) (\hat{i}) + \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\Delta y}{2} \right) (\hat{i}) \right) \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y (\hat{i}) \end{aligned}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

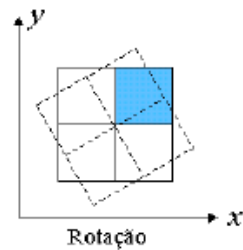


Figura 4.5 Detalhe das velocidades na rotação de um elemento de fluido

$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$

$$v = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$$

$$\Delta U = u - u_0 = -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$

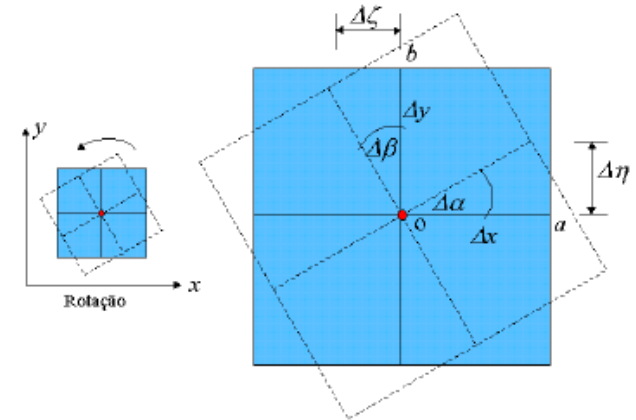


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

A velocidade escalar

$$\Delta u = \frac{\Delta \xi}{\Delta t}$$

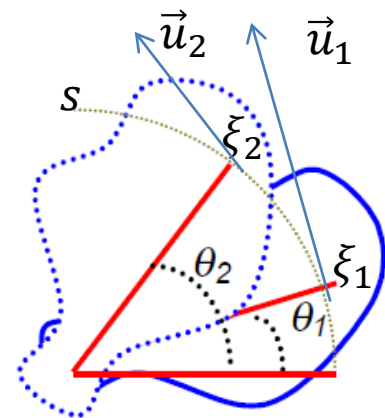
$$-\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y = \frac{\Delta \xi}{\Delta t}$$

$$\Delta \xi = -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \Delta t$$

$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm} \Delta t = \Delta v = -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y(j)$$

$$\Delta \xi = \xi_2 - \xi_1$$

$$\Delta u = u_2 - u_1$$





Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

e desta forma a velocidade angular da linha ob

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta y \Delta t}$$

$$\Delta \xi = -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \Delta t$$

$$\omega_{ob} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

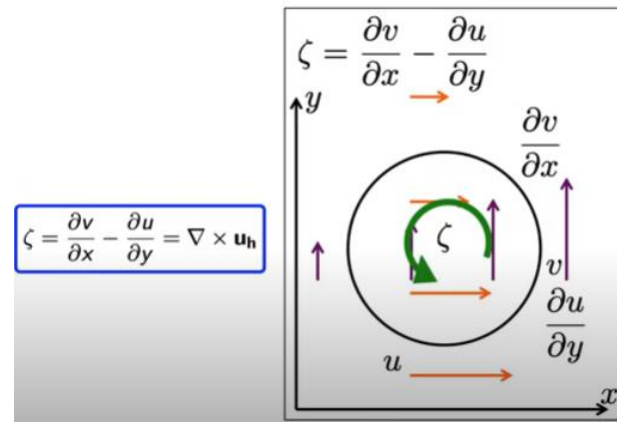
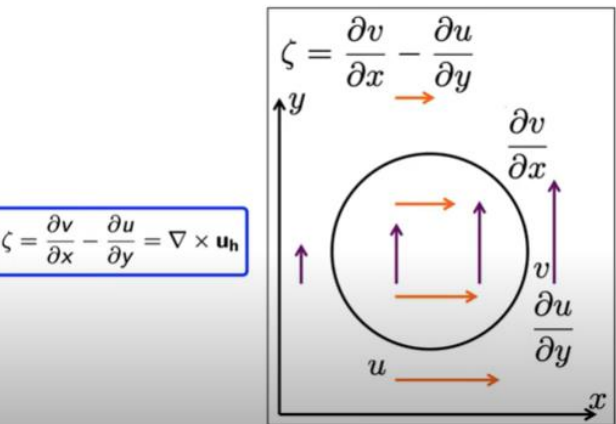
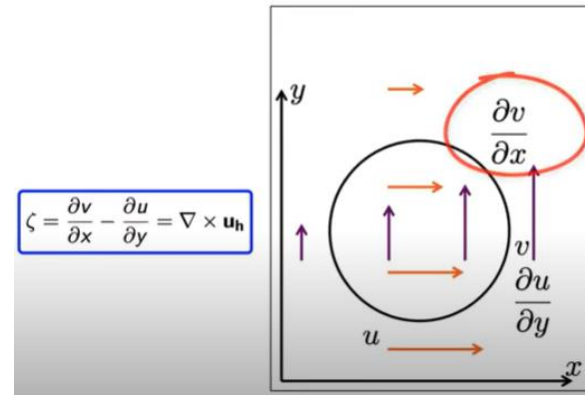
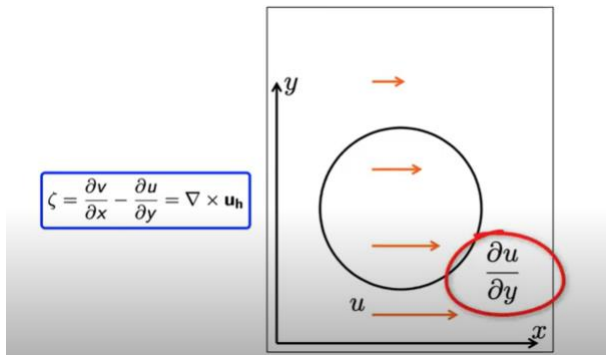
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

A **rotação** é dada pela velocidade angular média de duas linhas perpendiculares que se cruzam no centro **ao** e **ob** no plano **xy**.

$$\vec{\omega}_z = \frac{1}{2}(\omega_{0a} + \omega_{0b})$$

$$\vec{\omega}_z = \frac{1}{2}(\omega_{0a} + \omega_{0b}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Vorticidade Relativa Geostrófica





Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Na forma vetorial a rotação num campo tridimensional é dada como:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} \right]$$

Onde o termo entre colchetes é definido como rotacional da velocidade:

$$\text{rotacional } \vec{V} = \nabla_x \vec{V}$$

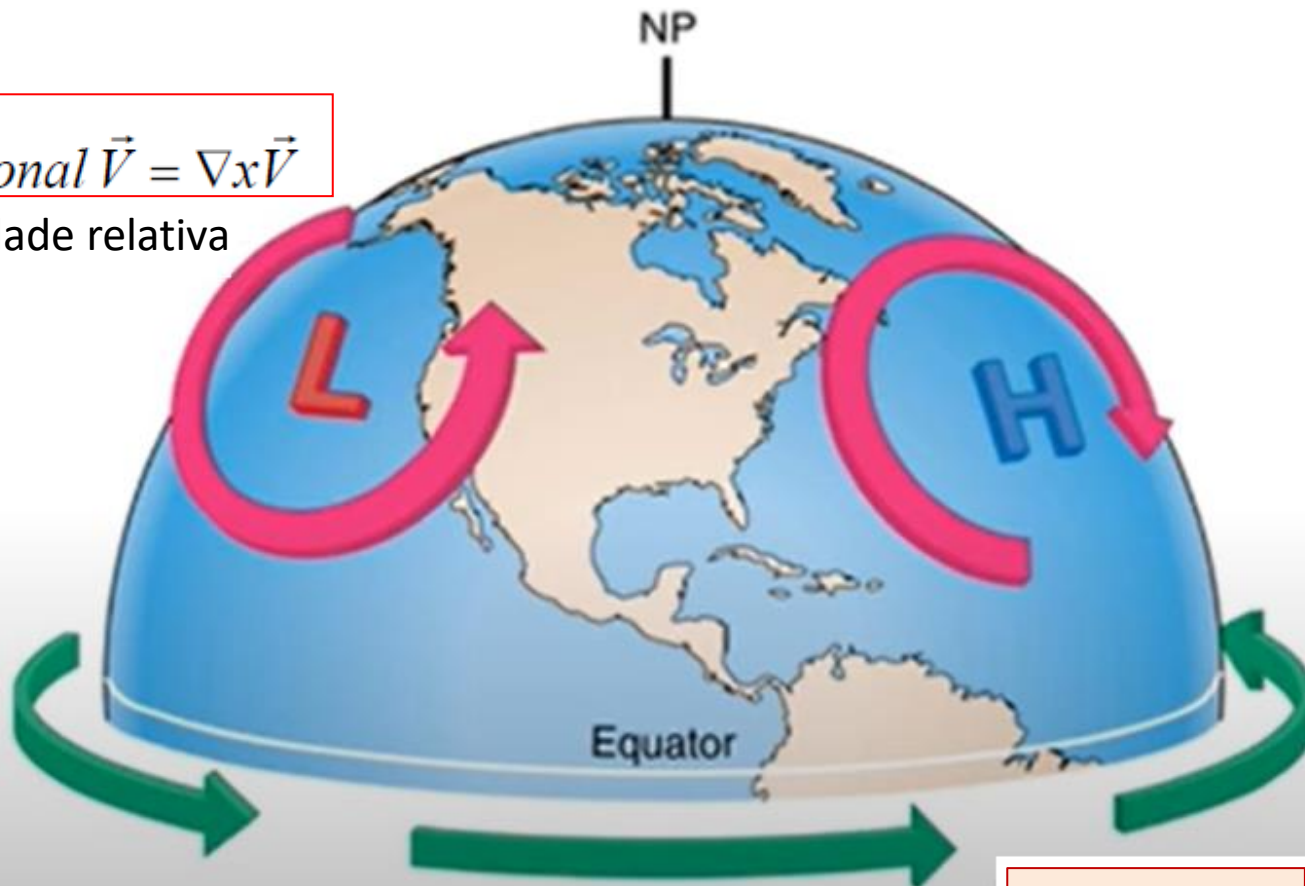
Desta forma, na notação vetorial, o vetor rotação é dado como:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla_x \vec{V}$$

Vorticidade Relativa

$$\text{rotacional } \vec{V} = \nabla \times \vec{V}$$

Vorticidade relativa



$$f = f_o + \beta y$$

Vorticidade Planetaria



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Planetária

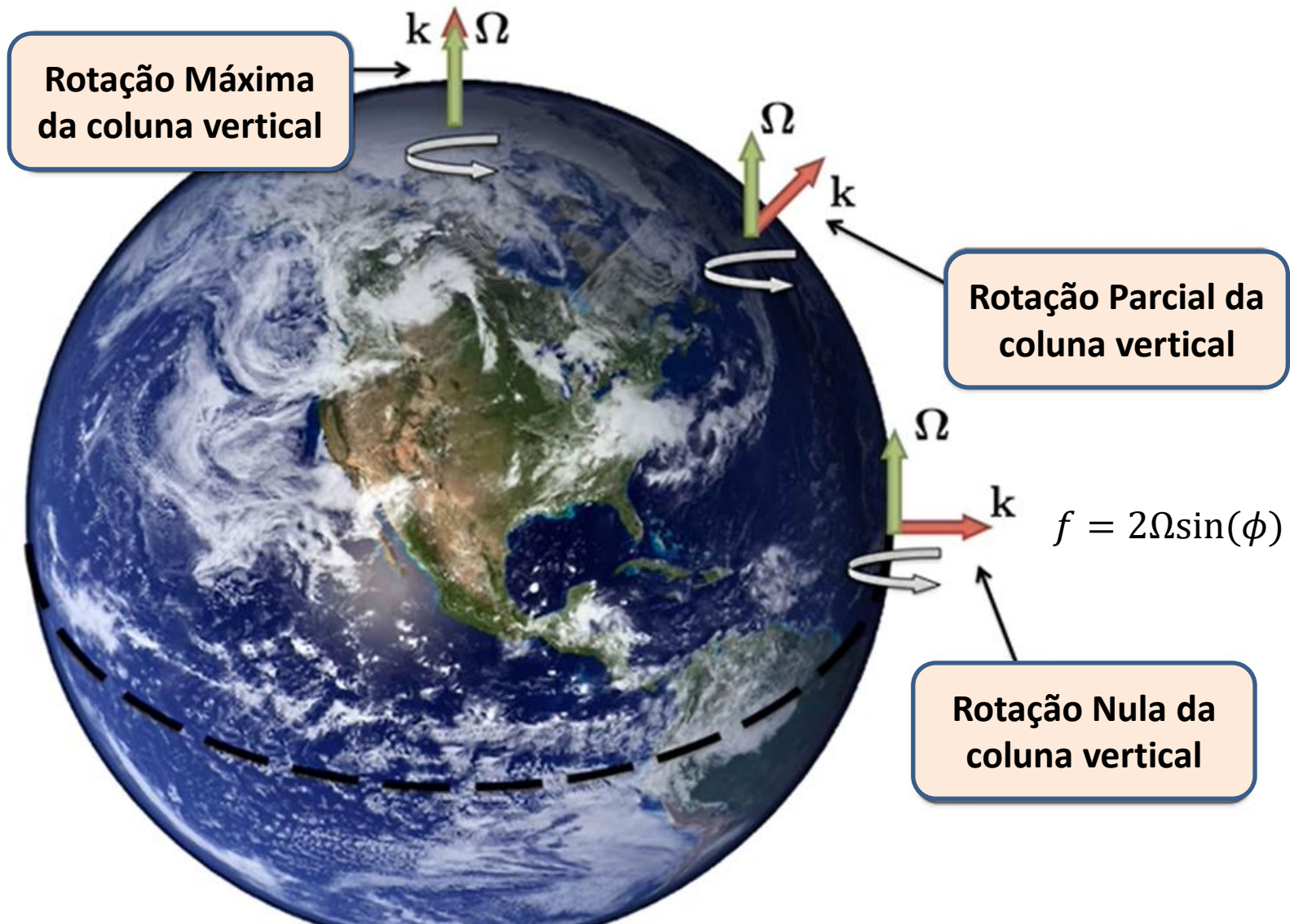
Definição: A componente da vorticidade devido a rotação da terra é chamada de vorticidade Planetária

$$f = k \cdot (\nabla \times \overrightarrow{u_{terra}}) = 2\Omega \sin(\phi)$$

Definição: A vorticidade planetária é a contribuição do momentum angular devido a rotação da superfície do planeta

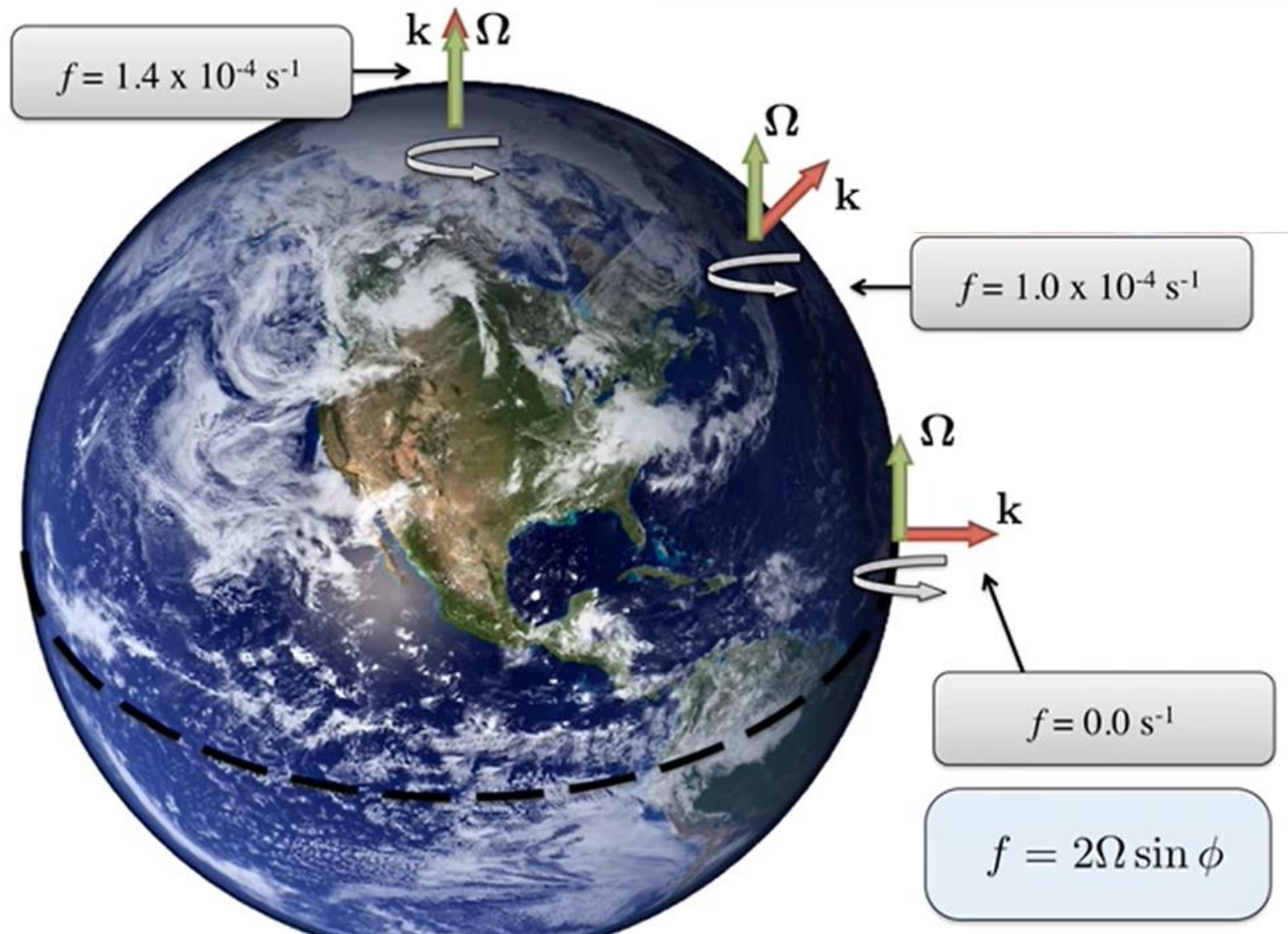
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica





Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

**Simplificação usando a
Força de Gradiente de Pressão**



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$f = f_0 + \beta y$$

Isso permite que f_0 substitua f na relação vento geostrófico, que se torna

momentum

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - (f_0 + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção
media

gravidade

Coriolis

Gradiente
de
Pressão

$$P = \rho_0 g z$$

$$\frac{P}{\rho_0} = g z = \Phi$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\bar{P}}{\rho_0} \right) = \frac{\partial(\bar{\Phi})}{\partial x_i} = \nabla \bar{\Phi}$$

Portanto

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla \Phi = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$f = f_0 + \beta y$$

Isso permite que f_0 substitua f na relação vento geostrófico, que se torna

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$f_0 \vec{V}_g = \hat{k} \times \nabla_h \Phi \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{j}$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = \hat{k} \times \hat{k} \times \nabla_h \Phi \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{j} = -\nabla \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla_h \Phi$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$f = f_0 + \beta y$$

Isso permite que f_0 substitua f na relação vento geostrófico, que se torna

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla_h \Phi$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivado pelo rotacional do vento geostrófico

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla_h \Phi$$

$$\xi_g = \nabla_h \times \vec{V}_g$$

$$\xi_g = \nabla_h \times \vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \nabla_h \times \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{j}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivado pelo rotacional do vento geostrófico

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla_h \Phi$$

$$\xi_g = \nabla_h \times \vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \nabla_h \times \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} i + \frac{\partial \Phi}{\partial x} j \right)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = (0 - 0)i + (0 - 0)j + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \right) k$$
$$= + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) k$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivado pelo rotacional do vento geostrófico

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla_h \Phi$$

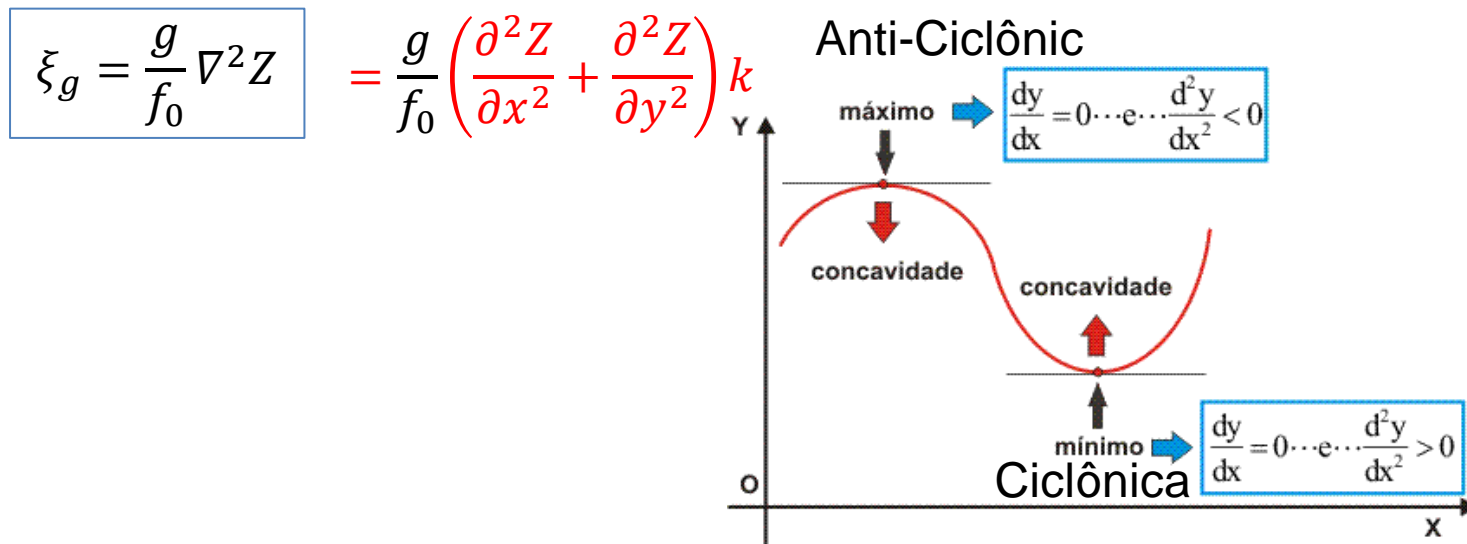
$$\xi_g = \nabla_h \times \vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \nabla_h \times \hat{k} \times \nabla_h \Phi = \frac{1}{f_0} \left(\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) k \right) = \frac{1}{f_0} \nabla_h^2 \Phi = \frac{g}{f_0} \nabla_h^2 Z$$

Pontos chaves:

Sempre que você ver $\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi$ pense em ξ_g

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivado pelo rotacional do vento geostrófico



Pontos chaves:

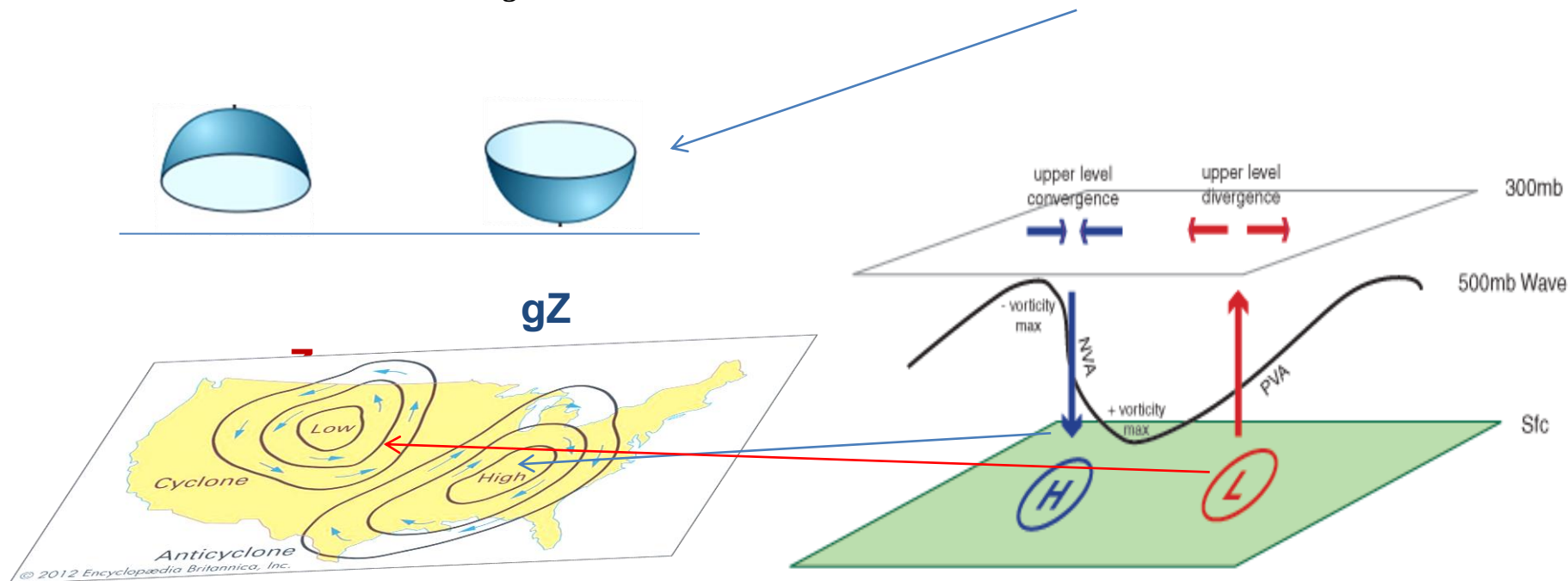
Ciclônica (positiva no HN) ξ_g é associado com o mínimo de Z

Anti-Ciclônica (negativa no HN) ξ_g é associado com o máxima de Z

Vorticidade Relativa Geostrófica

$$\xi_g = \frac{g}{f_0} \nabla^2 Z = \frac{g}{f_0} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) k$$

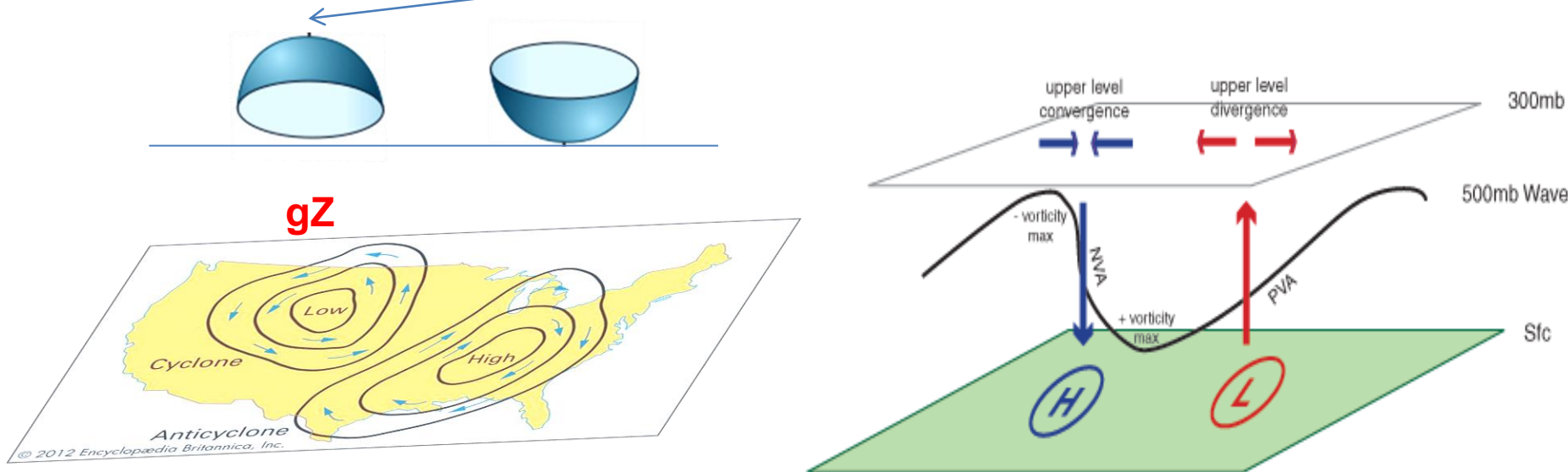
Ciclônica (positiva no HN) ξ_g é associado com o mínimo de gZ



Vorticidade Relativa Geostrófica

$$\xi_g = \frac{g}{f_0} \nabla^2 Z = \frac{g}{f_0} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)$$

AntiCiclônica (negativa no HN) ξ_g é associado com o máxima de gZ





Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Absoluta

Definição: A vorticidade Absoluta ou Total η é a soma da contribuição da Vorticidade Relativa e a Vorticidade Planetária

$$Vorticidade\ Absoluta = Vorticidade\ Relativa + Vorticidade\ Planetária$$

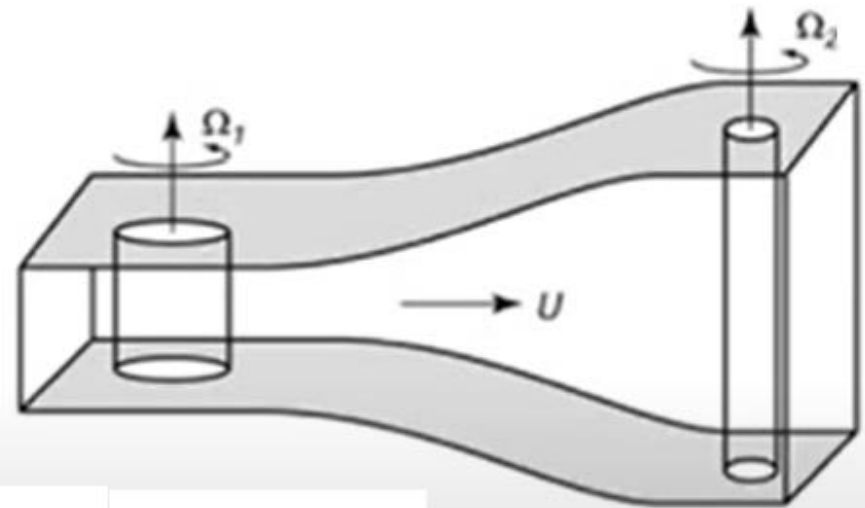
$$\eta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + f$$

$$u_a = u_{terra} + u$$

$$k \cdot (\nabla \times u_a) = k \cdot (\nabla \times u_{terra}) + k \cdot (\nabla \times u)$$

Conservação de Vorticidade Potencial. Em um Fluido Barotrópico

$$PV = \frac{\zeta_g + f}{h} = \text{Constant}$$



Pergunta: O que acontece com a velocidade angular Ω_2 em relação a Ω_1 considerando a conservação de vorticidade potencial?

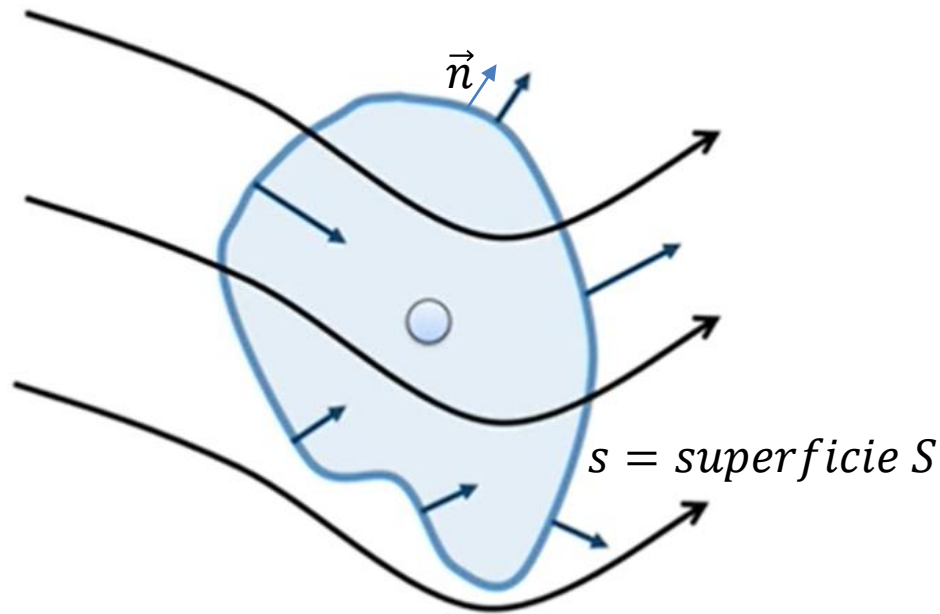


Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Conceitos

Movimento Divergência

O movimento Associado com a região do volume de controle pode ser descrito em termo do movimento que entre e sai deste volume

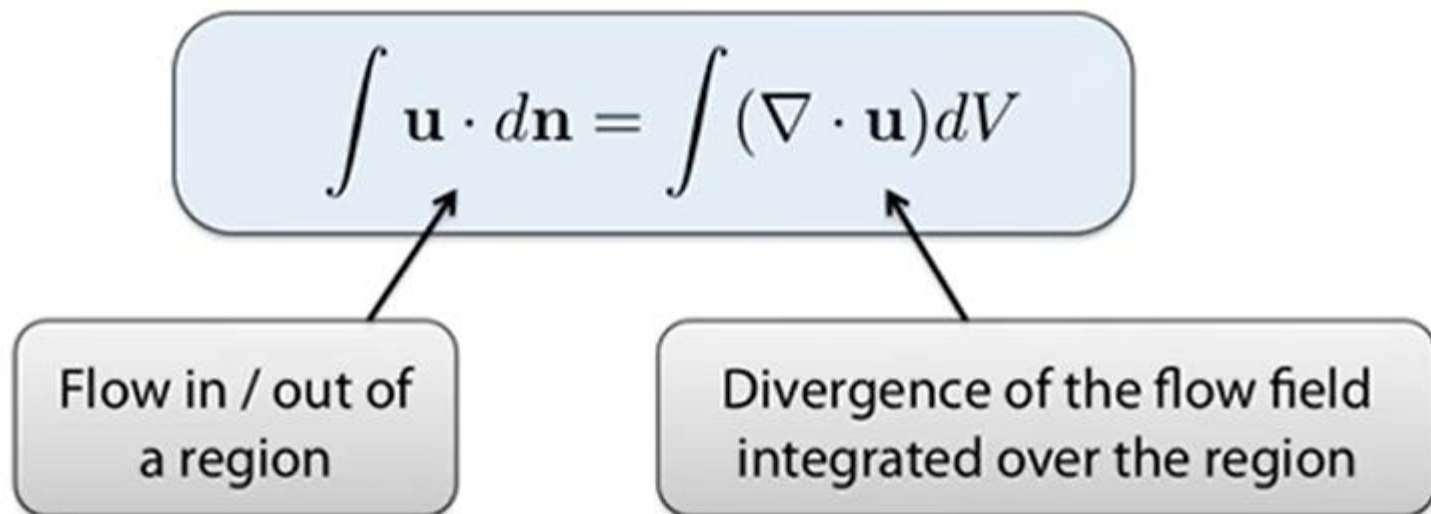


Movimento Divergência (Teorema de Gauss)

O escoamento entrado e saindo de um volume de controle deve ser associado a uma região particular do escoamento.

Por outro lado, a divergência é um conceito de conexão fechada (superfície fechada) que é descrita em um ponto.

Este conceito são conectados através do Teorema de Gauss





Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Divergência

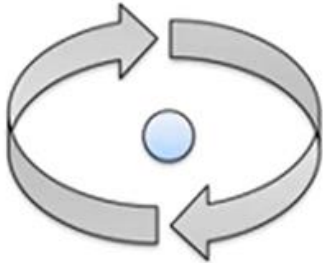
Qual a contribuição da rotação da Terra na divergência?

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u}_{earth} &= \nabla \cdot (2\Omega \sin \phi \mathbf{i}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (2\Omega \sin \phi) \\ &= \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (2\Omega \sin \phi) \\ &= 0\end{aligned}$$

A rotação do sistema de coordenada não contribui para a divergência do escoamento

Escoamento=> Rotacional X Divergência

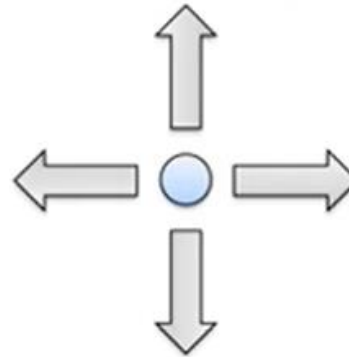
movimento Rotacional



$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\sim 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

movimento Divergente



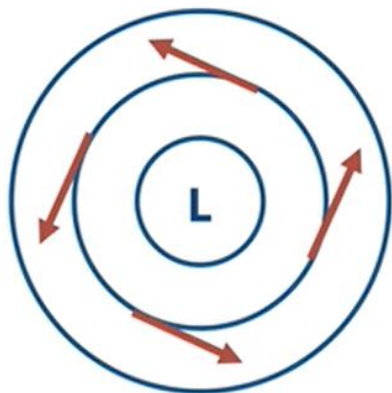
$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sim 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

A rotação é uma ordem de magnitude mais impotente do que a divergência!

Conceito de Vorticidade

Em um Nível Mais simples, A atmosfera pode ser descrita usando dinâmica de vórtex.
Os Vórtices são dominado pela rotação (curvatura)



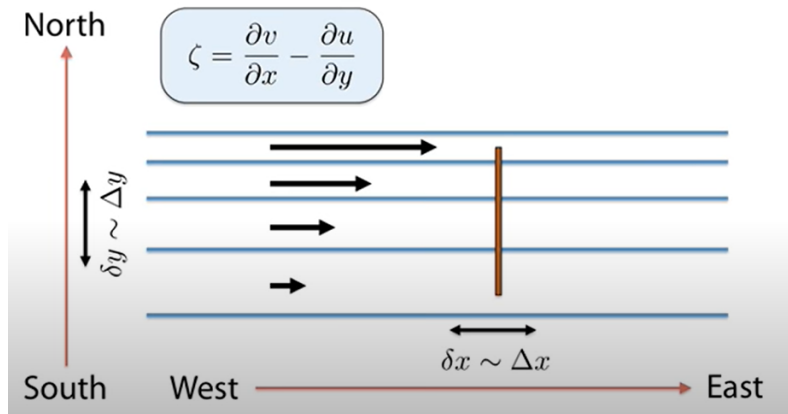
Pergunta: Todos os escoamentos curvados tem vorticidade?
Todos os escoamento com vorticidade são curvados?

Obs: A vorticidade é associada a movimento de rotação pontual

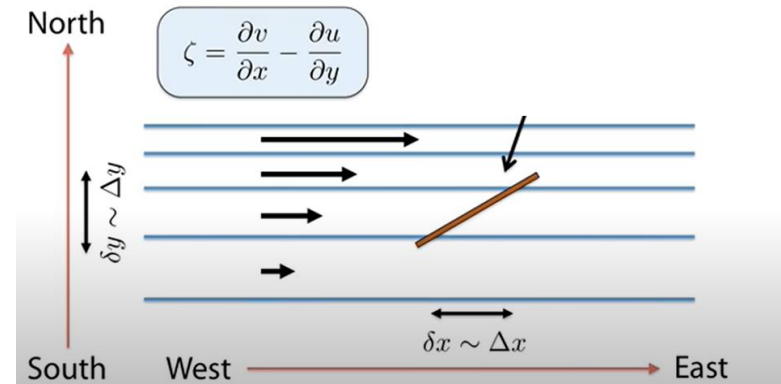
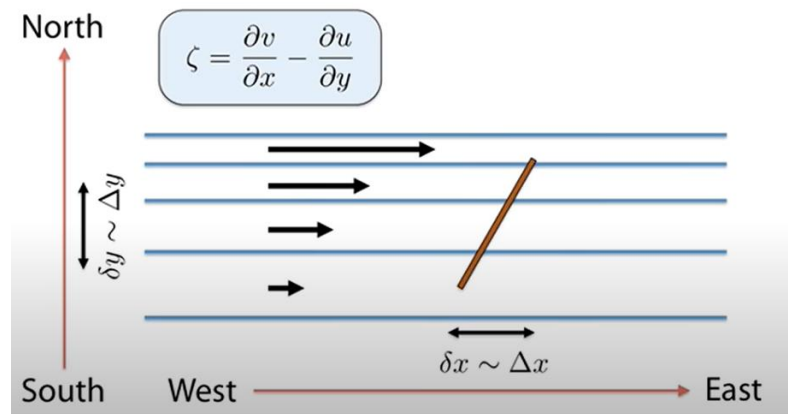
$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

resposta: Não. Nem todos os escoamento curvado tem vorticidade. Porém, nem todos os escoamentos com vorticidade são curvados

Conceito de Vorticidade



Obs: movimento de rotação pontual, mas não é curvado (escoamento (Dx))





Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Conceito de Vorticidade

Relative velocity: $\mathbf{u} = (u, v, w)$

3D vorticity vector: $\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

Relative vorticity: $\zeta = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

Absolute vorticity: $\eta = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_a) = \zeta + f$

Planetary vorticity: $f = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{earth}) = 2\Omega \sin \phi$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação do momentum Geostrófico



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Equação do momentum Geostrófico

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -f_o \hat{k} \times \vec{V}_{ag} - \beta y \hat{k} \times \vec{V}_g$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -f_o \hat{k} \times \vec{V}_{ag} - \beta y \hat{k} \times \vec{V}_g$$

Resolva o produto vetorial dos dois termos:

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -f_o \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ u_{ag} & v_{ag} & \omega_{ag} \end{vmatrix} - \beta y \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ u_g & v_g & \omega_g \end{vmatrix}$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -f_o [(0 - v_{ag})\hat{i} + (u_{ag} - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k}] - \beta y [(0 - v_g)\hat{i} + (u_g - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k}]$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -f_o[(0 - v_{ag})\hat{i} + (u_{ag} - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k}] - \beta y[(0 - v_g)\hat{i} + (u_g - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k}]$$

Reagrupe os termos:

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -f_o[(-v_{ag})\hat{i} + (u_{ag})\hat{j}] - \beta y[(-v_g)\hat{i} + (u_g)\hat{j}]$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -f_o[(-v_{ag})\hat{i} + (u_{ag})\hat{j}] - \beta y[(-v_g)\hat{i} + (u_g)\hat{j}]$$

Reagrupe as componentes i e j:

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = +f_o(v_{ag})\hat{i} + \beta y(v_g)\hat{i} - f_o(u_{ag})\hat{j} - \beta y(u_g)\hat{j}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\vec{u}_g}{Dt} + \frac{D\vec{v}_g}{Dt} = +f_o(v_{ag})\hat{i} + \beta y(v_g)\hat{i} - f_o(u_{ag})\hat{j} - \beta y(u_g)\hat{j}$$

Separa a equação nas componentes zonal i e meridional j:

$$\frac{D\vec{u}_g}{Dt} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = 0$$

$$\frac{D\vec{v}_g}{Dt} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = 0$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\vec{u}_g}{Dt} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = 0$$

$$\frac{D\vec{v}_g}{Dt} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = 0$$

Derive a componente zonal em função de y

$$\frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{D\vec{u}_g}{Dt} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = 0$$

Derive a componente meridional em função de x

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{D\vec{v}_g}{Dt} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = 0$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{D\vec{u}_g}{Dt} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{D\vec{v}_g}{Dt} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) \right) = 0$$

Derive a componente zonal em função de y

$$\frac{D}{Dt} \frac{\partial \vec{u}_g}{\partial y} - f_o \left(\frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) - \beta \frac{\partial y}{\partial y} (v_g) - \beta y \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$

Derive a componente meridional em função de x

$$\frac{D}{Dt} \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial x} + f_o \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} \right) + \beta \frac{\partial y}{\partial x} (u_g) + \beta y \frac{\partial u_g}{\partial x} = 0$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

As componentes zonal e meridional

$$\frac{D}{Dt} \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y} - f_o \left(\frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) - \beta v_g - \beta y \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{D}{Dt} \frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} + f_o \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} \right) + \beta y \frac{\partial u_g}{\partial x} = 0$$

Subtraia a equação da componente meridional a componente zonal

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y} \right) + f_o \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) + \beta v_g = 0$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Análise de Escala da Equação da Vorticidade

Vorticidade Relativa Geostrófica

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial x} - \frac{\partial \vec{u}_g}{\partial y} \right) + f_0 \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) + \beta v_g = 0$$

Veja o termo βv_g que representa a variação do parâmetro de coriolis com a coordenada y

Pode-se fazer a seguinte consideração:



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Analise de Escala da Equação da Vorticidade

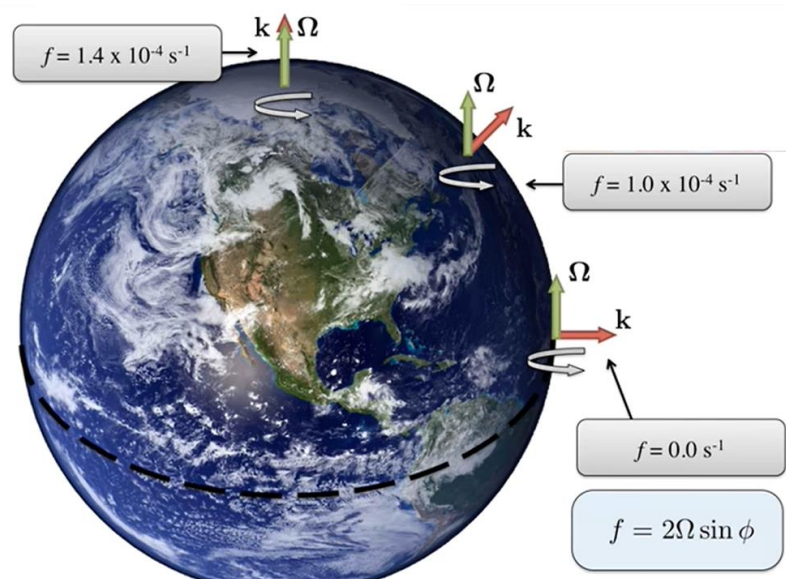
Vorticidade Relativa Geostrófica

**Conceito sobre a
Vorticidade Planetária**

Vorticidade Relativa Geostrófica

Conceito sobre a Vorticidade Planetária

$$f = k \cdot (\nabla \times \overrightarrow{u_{terra}}) = 2\Omega \sin(\phi)$$





Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Analise de Escala da Equação da Vorticidade

Vorticidade Relativa Geostrófica

Usando o fato que o parâmetro de coriolis depende somente de y tal que

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_g \frac{\partial f}{\partial x} + v_g \frac{\partial f}{\partial y} - \omega_g \frac{\partial f}{\partial p}$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_g \frac{\partial f}{\partial x} + v_g \frac{\partial f}{\partial y} - \omega_g \frac{\partial f}{\partial p}$$

A variação do parâmetro de coriolis nas coordenadas t , x e z são nulas.

$$\frac{Df}{Dt} = v \frac{\partial f}{\partial y}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

Note que f depende somente de y . Assim:

$$\frac{Df}{Dt} = v_g \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f = f_o + \frac{\partial f}{\partial y} y = f_o + \beta y$$

$$\frac{Df}{Dt} = v_g \frac{\partial (f_o + \beta y)}{\partial y}$$

$$\frac{Df}{Dt} = v_g \left[\frac{\partial (f_o)}{\partial y} + \frac{\partial (\beta y)}{\partial y} \right]$$

$$\frac{Df}{Dt} = \beta v_g$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial x} - \frac{\partial \vec{u}_g}{\partial y} \right) + f_o \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) + \beta v_g = 0$$

$$\frac{Df}{Dt} = \beta v_g$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial x} - \frac{\partial \vec{u}_g}{\partial y} \right) + f_o \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) + \frac{Df}{Dt} = 0$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial x} - \frac{\partial \vec{u}_g}{\partial y} \right) + f_0 \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) + \frac{Df}{Dt} = 0$$

$$\xi_g = \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial x} - \frac{\partial \vec{u}_g}{\partial y}$$

$$\frac{D(\xi_g)}{Dt} + f_0 \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) + \frac{Df}{Dt} = 0$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D(\xi_g)}{Dt} + f_o \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) + \frac{Df}{Dt} = 0$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} + f_o \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right) + \beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = 0$$

Equação da continuidade para a aproximação quase geostrófica

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} + f_o \left(-\frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} \right) + \beta y (\nabla_H \cdot \vec{V}_g) = 0$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} + f_o \left(-\frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} \right) + \beta y (\nabla_H \cdot \vec{V}_g) = 0$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} - f_o \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = 0$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\frac{Df}{Dt} = \beta v_g$$

$$\xi_g = \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial x} - \frac{\partial \vec{u}_g}{\partial y}$$

$$(\nabla_H \cdot \vec{V}_g) = 0$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} + f_o \left(-\frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} \right) + \beta y (\nabla_H \cdot \vec{V}_g) = 0$$

$$(\nabla_H \cdot \vec{V}_g) = 0$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} - f_o \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = 0$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

A velocidade vertical é gerada somente pelo escoamento ageostrófico $\omega = \omega_{ag}$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial t} + u_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial y} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\xi_g)}{\partial t}} + \boxed{\frac{\partial(f)}{\partial t}} + \boxed{u_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x}} + \boxed{v_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial y}} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial P} = \frac{1}{f_o} \left[\frac{\partial(\xi_g)}{\partial t} + \frac{\partial(f)}{\partial t} + u_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial y} \right]$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{\partial(\xi_g)}{\partial t} + \frac{\partial(f)}{\partial t} + u_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial y} = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\frac{\partial(\xi_g)}{\partial t} \gg \frac{\partial(f)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{\partial(\xi_g)}{\partial t} \gg \frac{\partial(f)}{\partial t} \Rightarrow (f \cong \text{cte com o tempo} \{ \text{entretanto } f \text{ varia bastante com a latitude} \})$$

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

A taxa de variação local da vorticidade geostrófica é dada pela **advecção de vorticidade absoluta pelo vento geostrófico** Mais a **concentração ou diluição da vorticidade pelo efeito divergente**.

$$\frac{\partial \omega}{\partial P} = \frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}$$

Equação da continuidade para a aproximação quase geostrófica



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

O parâmetro f da força de coriolis não depende de x e z . Portanto, na equação da divergência acima pode ser desprezada

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\nabla \cdot f = \beta$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial w}{\partial p}$$

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) = -\vec{V}_g \cdot \nabla \xi_g - \vec{V}_g \cdot \nabla f = -\vec{V}_g \cdot \nabla \xi_g - v_g \beta$$

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla \xi_g - v_g \beta$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Tendência devido a advecção

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) = -\vec{V}_g \cdot \nabla \xi_g - \vec{V}_g \cdot \nabla f = -\vec{V}_g \cdot \nabla \xi_g - v_g \beta$$

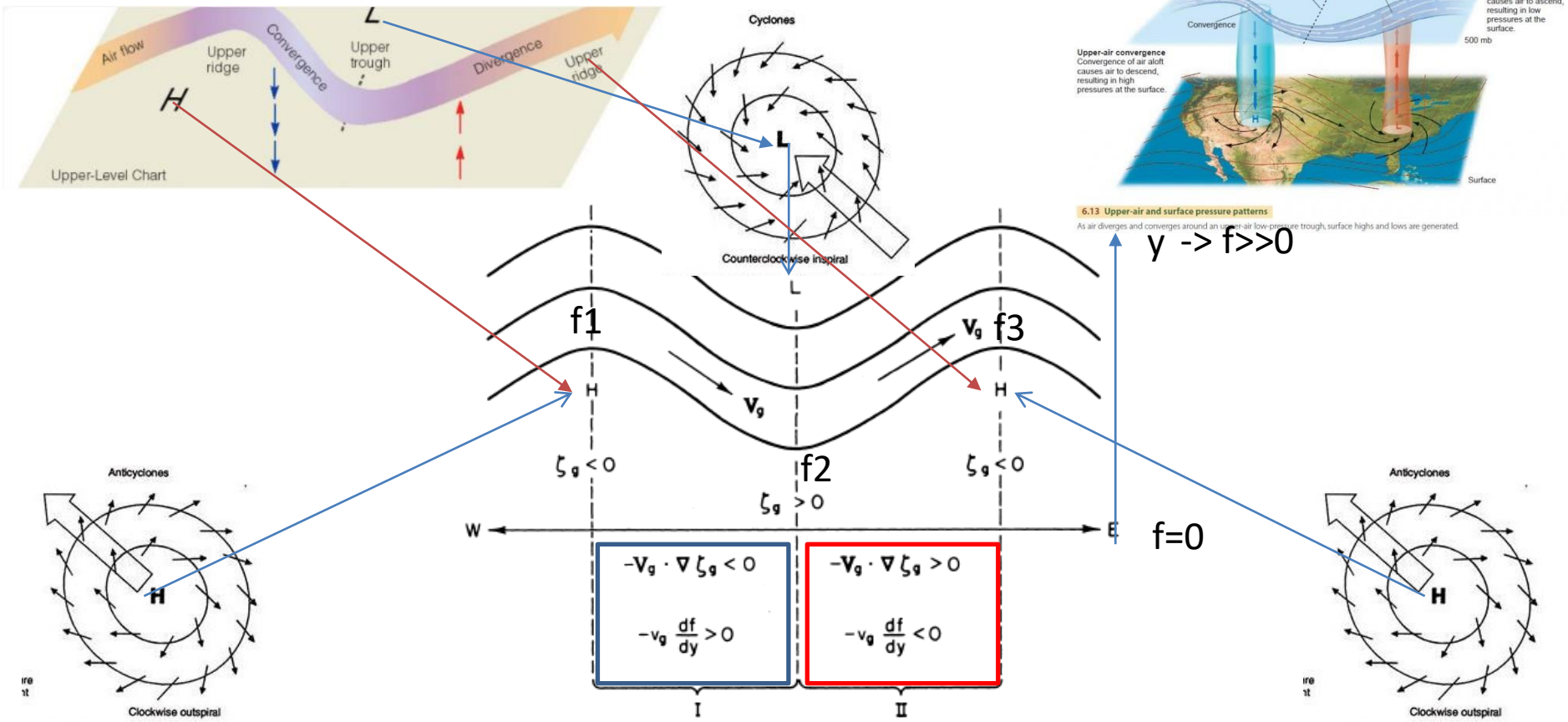


Fig. 6.7 Schematic 500-hPa geopotential field showing regions of positive and negative advections of relative and planetary vorticity.

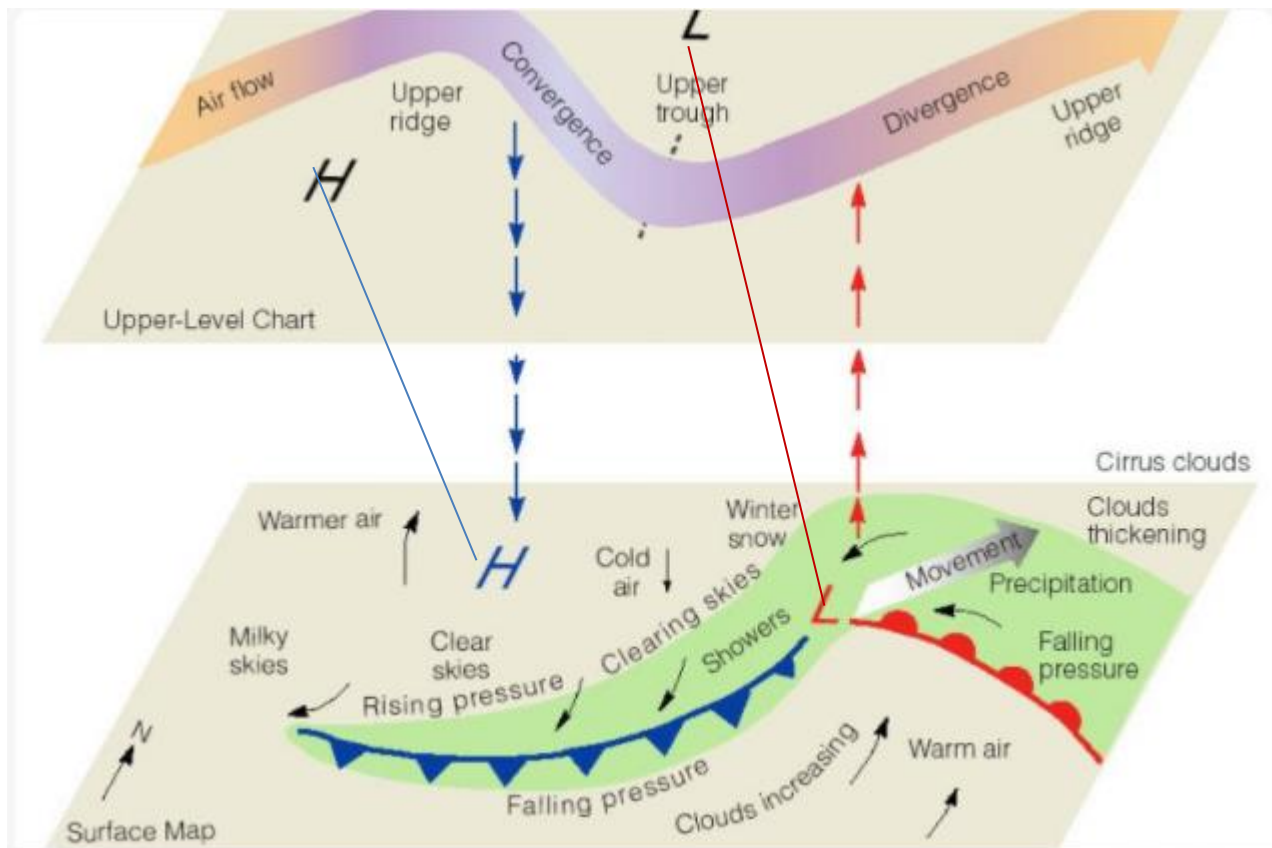
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Tendência devido a advecção

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) = -\vec{V}_g \cdot \nabla \xi_g - \vec{V}_g \cdot \nabla f = -\vec{V}_g \cdot \nabla \xi_g - v_g \beta$$





Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Camada Limite Planetária

Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Tendência devido a advecção

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \nabla \cdot (\xi_g + f) = -\vec{V}_g \nabla \cdot \xi_g - \vec{V}_g \nabla \cdot f = -\vec{V}_g \nabla \cdot \xi_g - v_g \beta$$

Como na discussão sobre a equação da vorticidade.

O termo que domina determina a progressão zonal do escoamento com comprimento de onda longa:

- Se o termo de beta β domina , as ondas irão retroceder (movimento para oeste) (onda de Rossby)
- Se o termo da vorticidade relativa ξ_g domina, as ondas irão se mover para leste. (ondas de Kelvin)

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

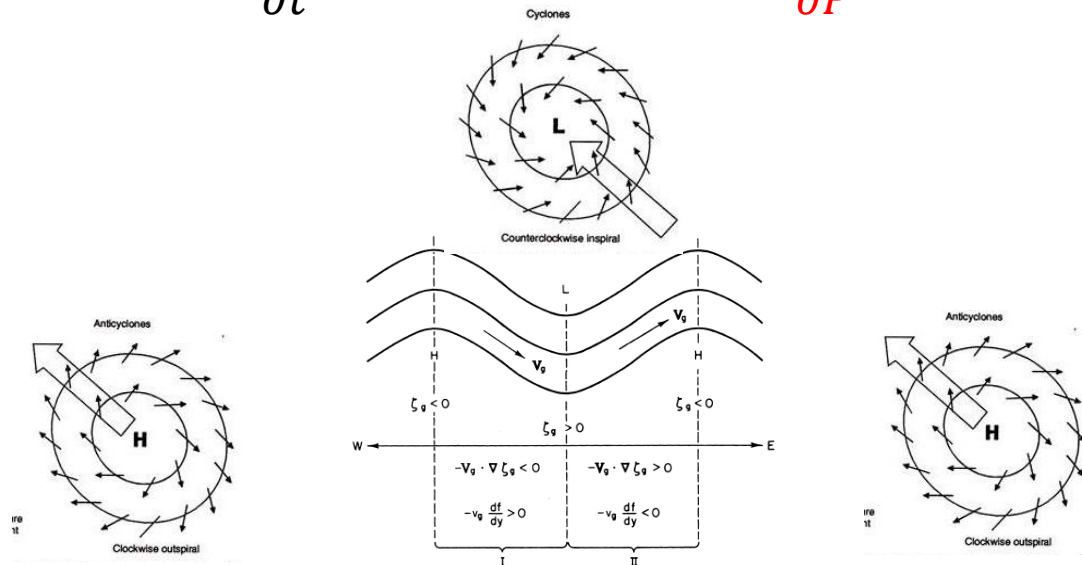
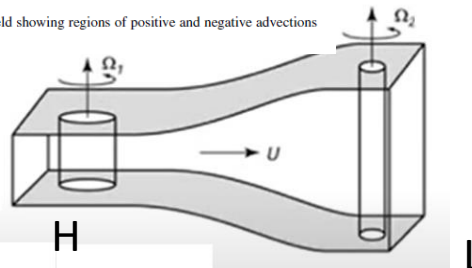


Fig. 6.7 Schematic 500-hPa geopotential field showing regions of positive and negative advections of relative and planetary vorticity.

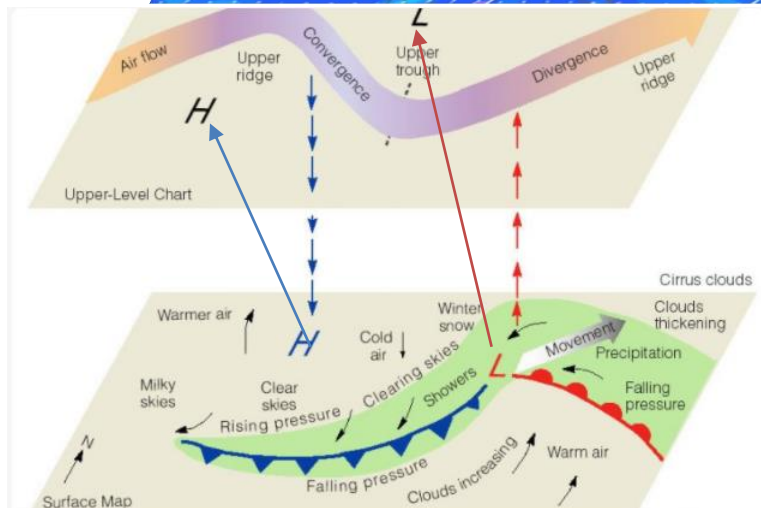
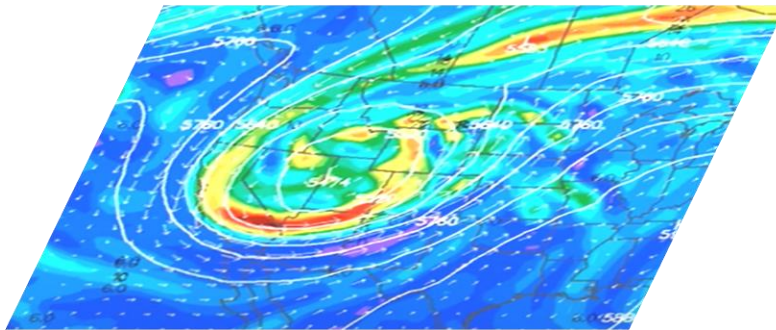
$$PV = \frac{\zeta_g + f}{h} = \text{Constant}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Vorticidade Quase Geostrófica



$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla(\xi_g) - \vec{V}_g \cdot \nabla(f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

O que muda a vorticidade relativa geostrófica em um ponto?

- Advecção de vorticidade absoluta geostrófica

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} < 0$ se a advecção é anticiclônica (negativa no hemisfério norte)

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} > 0$ se a advecção é ciclônica (positiva no hemisfério norte)

- Alongamento e compressão (ou convergência e divergência)

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} > 0$ se **ALONGAR** (hemisfério norte)

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} < 0$ se a **comprimir** (hemisfério norte)

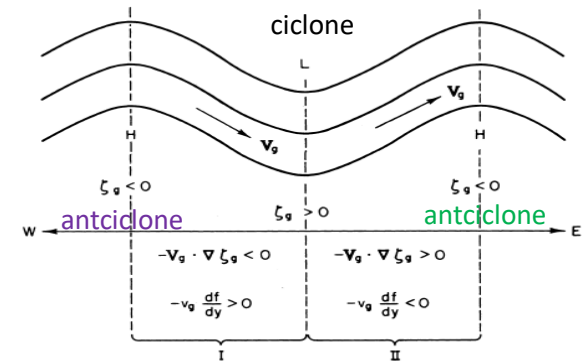
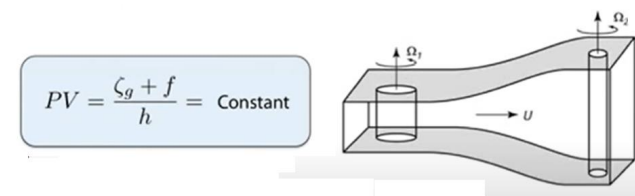


Fig. 6.7 Schematic 500-hPa geopotential field showing regions of positive and negative advections of relative and planetary vorticity.





Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial t} + u_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial y} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Como alternativa, podemos escrever a equação da vorticidade QG como:

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Equação da continuidade para a
aproximação quase geostrófica

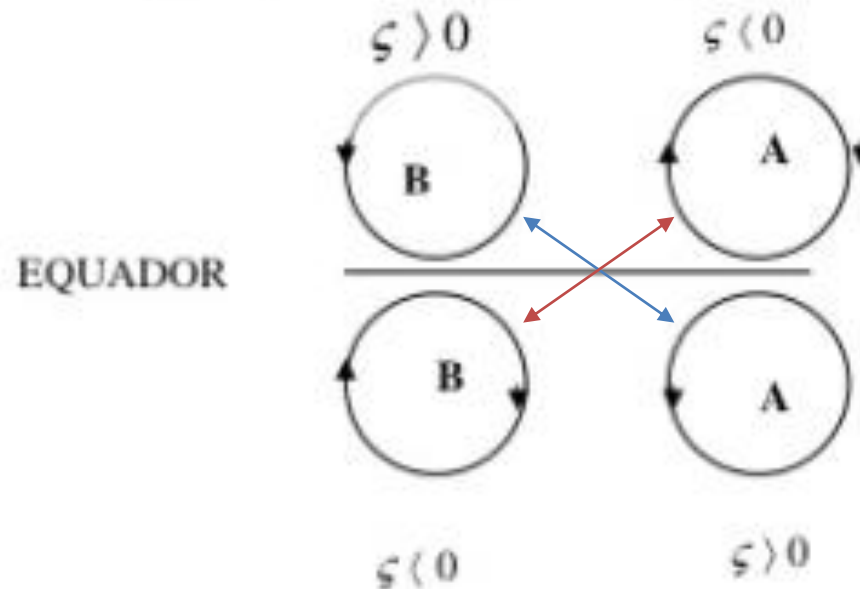
$$\frac{\partial \omega}{\partial P} = \frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}$$

O que basicamente diz que no fluxo, apenas o **alongamento** (isto é, convergência) e a **compressão** (isto é, divergência) fazem com que a vorticidade absoluta geostrófica **aumente** ou **diminua**, respectivamente.

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Convenção de Sinais para ζ Os sinais positivo e negativo dão o sentido do giro.



GIRO HORÁRIO

= VORTICIDADE NEGATIVA

ciclônico no HS

anticiclônico no HN

GIRO ANTI-HORÁRIO

= VORTICIDADE POSITIVA

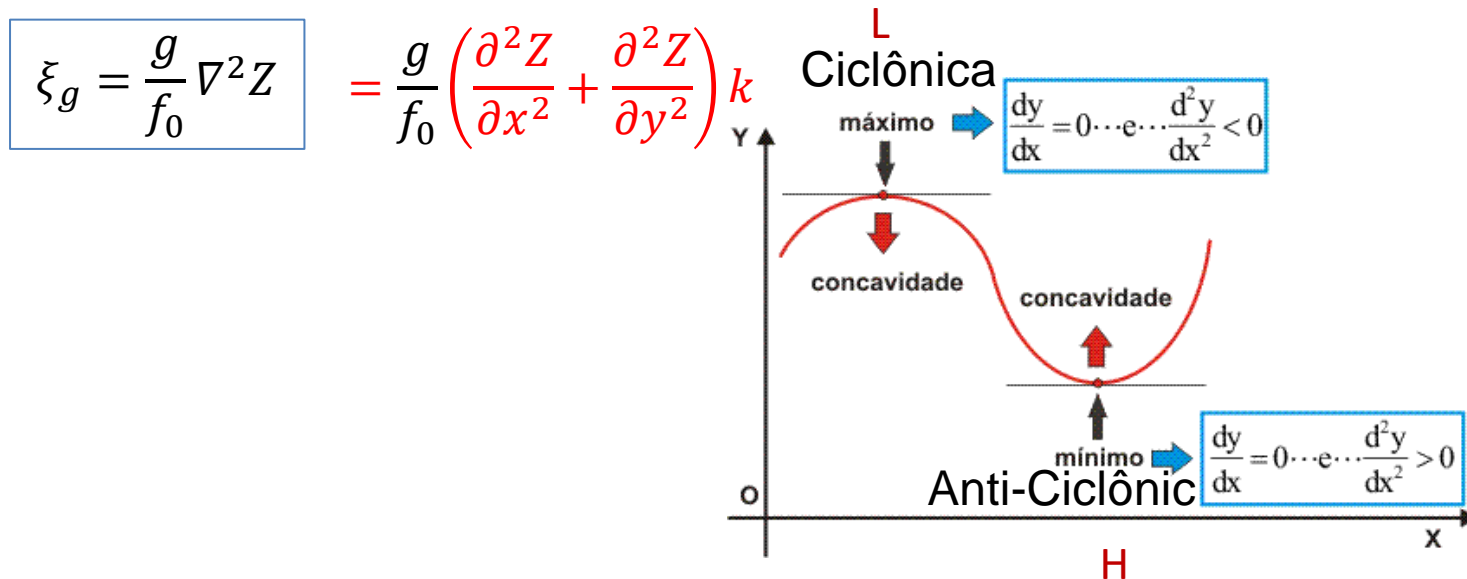
ciclônico no HN

anticiclônico no HS

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Derivado pelo rotacional do vento geostrófico



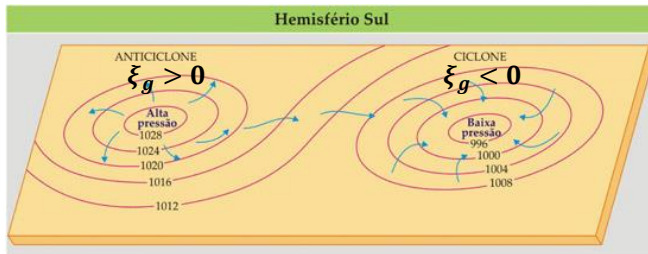
Pontos chaves:

Ciclônica (negativa no HS) ξ_g é associado com o máximo de Z

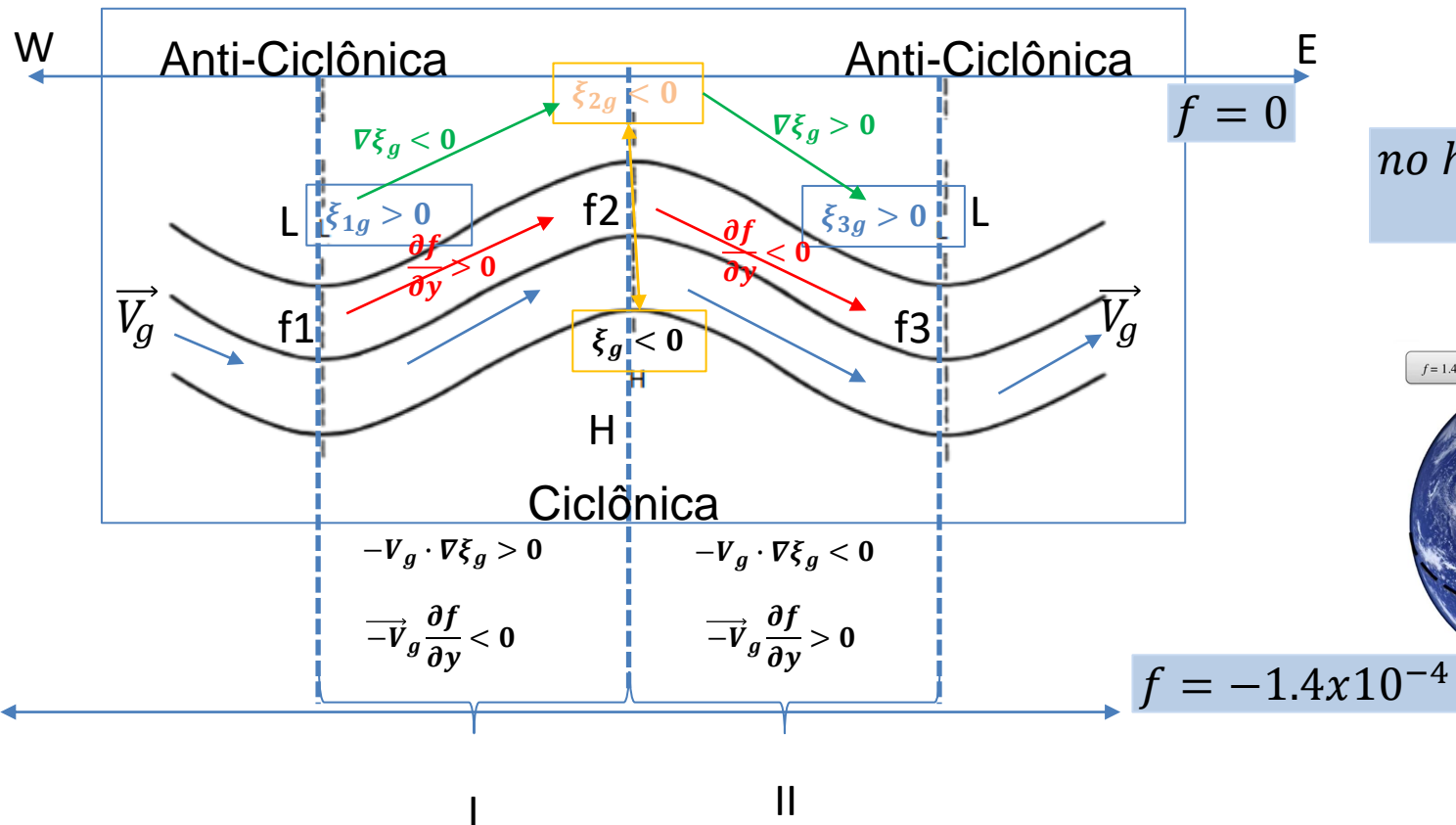
Anti-Ciclônica (positiva no HS) ξ_g é associado com o mínimo de Z

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

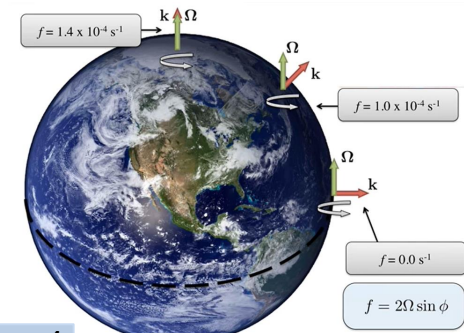
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica



$$\xi_g = \frac{g}{f_0} \nabla^2 Z$$



no hemisferio Sul \Rightarrow
 $f < 0$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

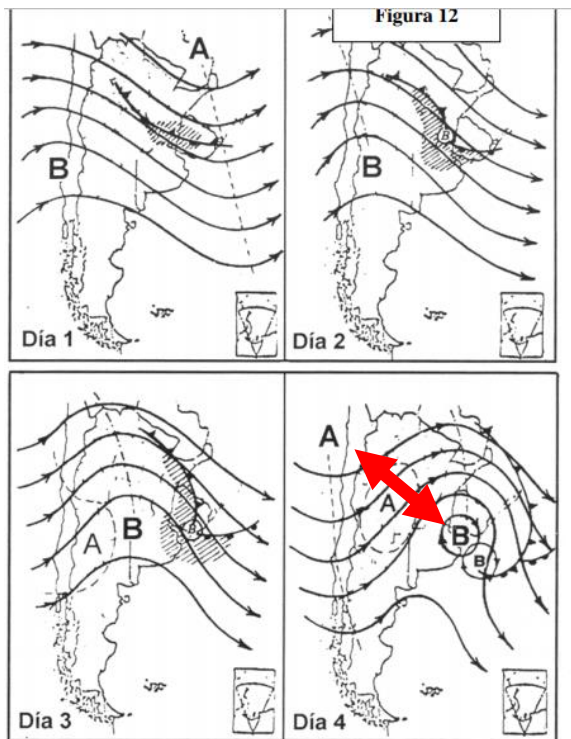
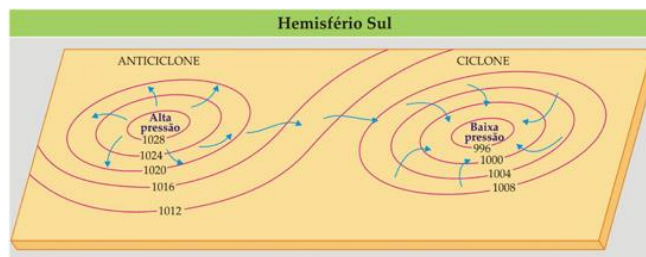


Figura 12

A Figura 12 mostra as etapas do desenvolvimento de uma Onda frontal, com seu correspondente cavado de altitude associado. Podem-se observar quatro caixas, onde é representada a chegada de um cavado em altitude sobre a Argentina e Uruguai e, a correspondente formação de uma baixa em superfície a partir de uma frente estacionária.



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

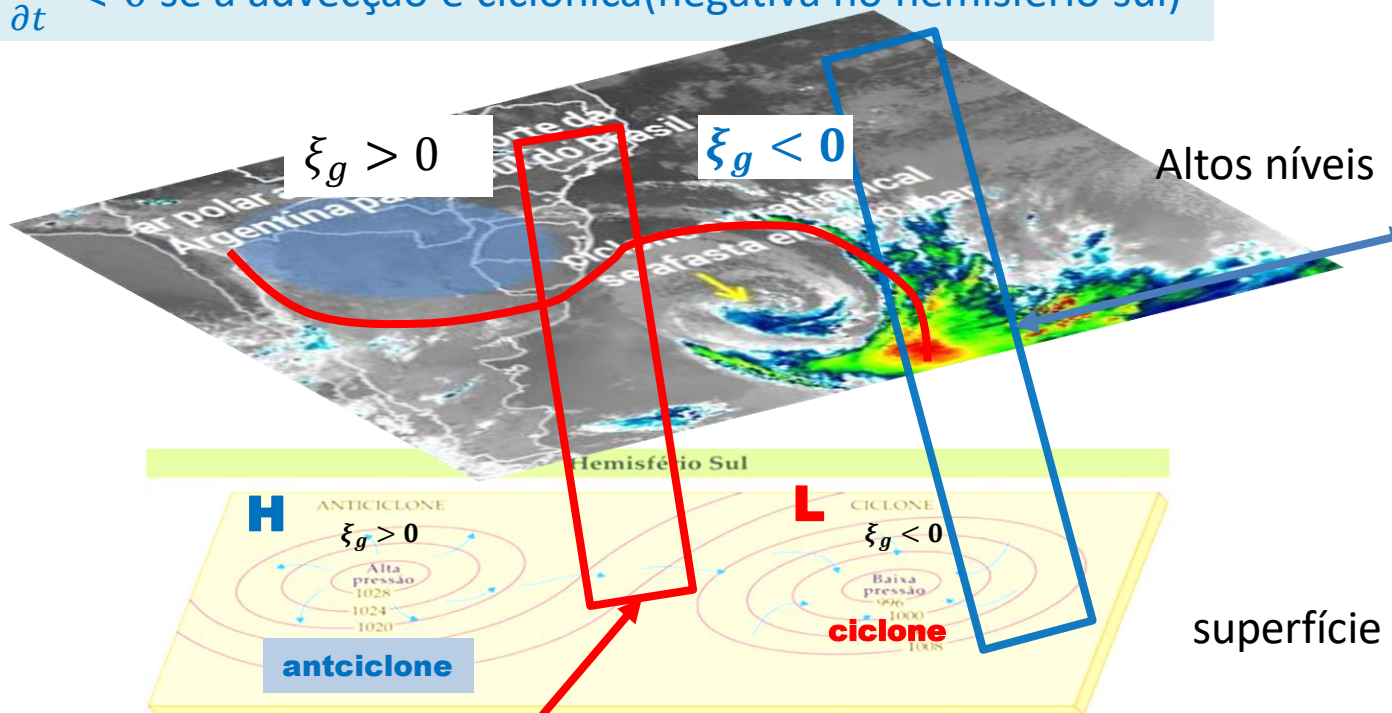
O que muda a vorticidade relativa geostrófica em um ponto?

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla(\xi_g) - \vec{V}_g \cdot \nabla(f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\xi_g = \frac{g}{f_0} \nabla^2 Z$$

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} > 0$ se a advecção é ant ciclônica (positiva no hemisfério sul)

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} < 0$ se a advecção é ciclônica (negativa no hemisfério sul)



$$\begin{aligned} -\vec{V}_g \cdot \nabla(\xi_g) &< 0 \\ -\vec{V}_g \cdot \frac{\partial f}{\partial y} &> 0 \end{aligned}$$

- Alongamento e compressão (ou convergência e divergência)

$$\begin{aligned} -\vec{V}_g \cdot \nabla(\xi_g) &> 0 \\ -\vec{V}_g \cdot \frac{\partial f}{\partial y} &< 0 \end{aligned}$$

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} < 0$ se comprimir (hemisfério sul)

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} > 0$ se a ALONGAR (hemisfério sul)



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Exercício

1-Explique o motivo da velocidade vertical ser mantida pelo escoamento ageostrofico, quando se utiliza a teoria da aproximação quase geostrofica.

R:

2- Usando a equação da continuidade, prove matematicamente a sua explicação.

R:

3- Resuma em poucas palavras as considerações físicas para se obter a equação da Vorticidade Relativa Geostrofica discutida nas aulas.

R: