Teoria Quase Geostrofica e Aplicações : Aproximações e Equações

MET 0225 Sinótica-Dinâmica

Meteorologia I

Instrutor: Paulo Kubota
paulo.kubota@inpe.br
012-3186-8400

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Paulo Kubota

data	Tópicos
15/04/2021	PBL
20/04/2021	PBL
22/04/2021	PBL
27/04/2021	QG Vorticity. eq.
29/04/2021	QG Vorticity. eq.
04/05/2021	QG Vorticity. eq.
06/05/2021	Geop. Tend. eq.
11/05/2021	Geop. Tend. eq.
13/05/2021	Geop. Tend. eq.
18/05/2021	Omega and Vetor Q
20/05/2021	Omega and Vetor Q
25/05/2021	Omega and Vetor Q
27/05/2021	Avaliação 1
01/06/2021	Avaliação 2

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Motivação.
O desejo de um sistema de equações simplificado, mas que retenha os principais processos dinâmicos necessários para descrever, diagnosticar e entender o comportamento de sistemas climáticos em larga escala.

Palavras chaves.
"As equações e suas derivações são reconhecidamente difíceis. É importante que não se memorize apenas as equações de maneira mecânica. É muito mais importante entender o que eles significam fisicamente. " - Howie Bluestein.

Suposição abrangente da teoria QG.
O número de Rossby (R0 = U / fL) é pequeno, o que nos permite desprezar o vento ageostrófico em alguns (mas não todos) termos das equações que governam o movimento.

Equações governantes e suas derivações.
A teoria QG é baseada em versões simplificadas das equações de movimento, equação de continuidade e equação termodinâmica de energia.

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Sumário

A equação do momento QG, a relação do vento geostrófico, a aproximação hidrostática, a equação de continuidade e a equação de energia termodinâmica formam um conjunto fechado de equações para as variáveis dependentes Φ, $\overrightarrow{V_g}$, $\overrightarrow{V_{ag}}$, ω e T.

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o\ )\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_{ag}}\right) - (\beta y\ )\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_g}\right)$$

$$\overrightarrow{V_g} = \frac{1}{f_0}\hat{k} \times \nabla\Phi$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P} = -\frac{RT}{P}$$

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial P} = 0$$

$$\frac{DT}{Dt_g} - \frac{\sigma P}{R}\omega = \frac{J}{C_p}$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Rotação dos Fluidos

Uma **partícula de fluido** em **movimento** apresenta componentes de **translação**, **rotação**, **deformação angular** e **deformação linear**.

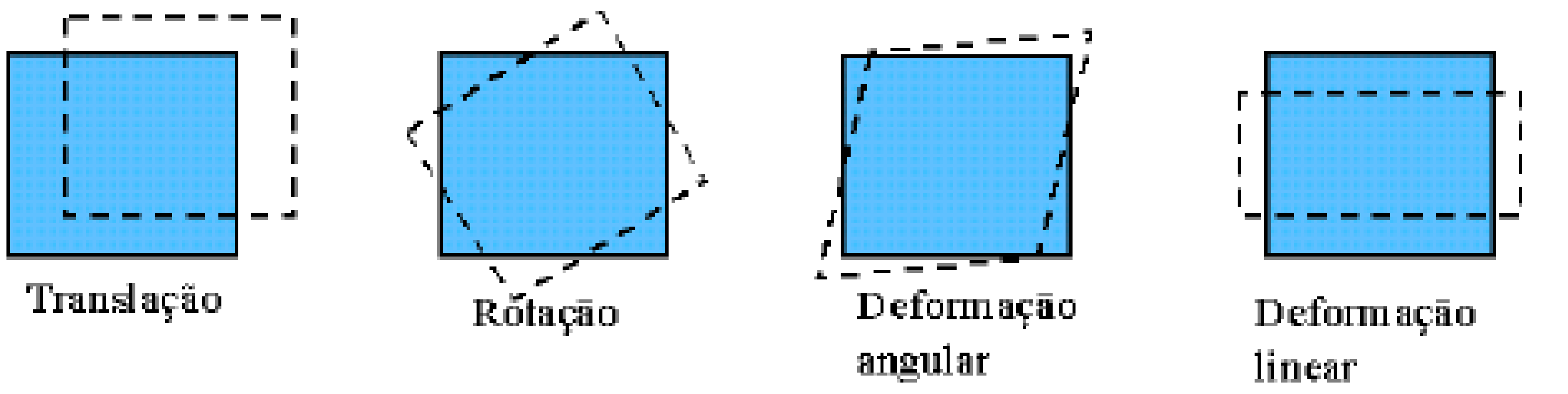


Figura 4.3 Componentes do movimento de um elemento de fluido

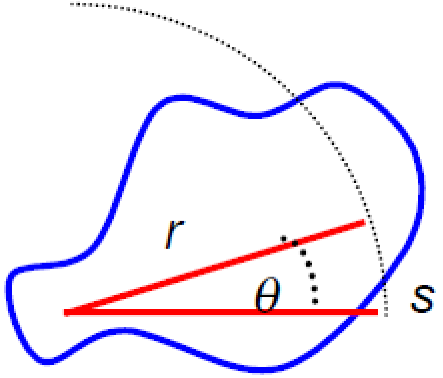
FÍSICA DOS FLUÍDOS

Posição angular

Quando um objeto de um formato arbitrário, tem uma trajetória circular em torno de um certo eixo, podemos definir algumas grandezas que descreverão esse movimento.

Podemos marcar um dado ponto do objeto e analisar o seu movimento. A distância deste ponto ao eixo de rotação é chamado de raio *r* da trajetória.

A sua trajetória descreve um arco de comprimento *s* .
A posição angular associada ao arco e o raio é o ângulo θ .



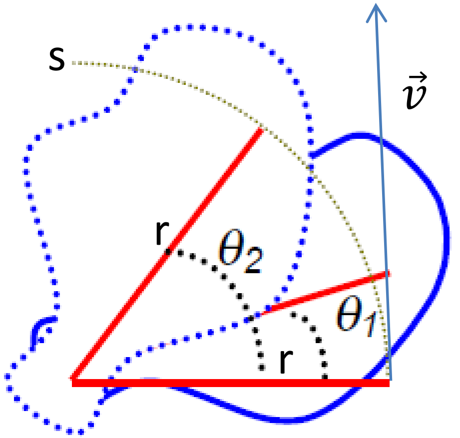
$$s = r\theta \quad \therefore \quad \theta = \frac{s}{r}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

A velocidade escalar

Quando observamos os corpos rígidos, a rotação se faz com raio constante, ou seja: cada ponto observado mantém uma distância constante ao eixo de rotação. Desse modo

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$



$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \rightarrow v = rw$$

onde *v* é a velocidade linear de um certo ponto do corpo e *w* é a velocidade angular desse ponto considerado. Na realidade, *w* é a velocidade angular do corpo por inteiro.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Uma partícula de fluido movendo-se num escoamento real pode **girar** em torno de **três eixos de coordenadas**. Esta **rotação** é uma **grandeza vetorial** definida como:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_x \hat{\imath} + \vec{\omega}_y \hat{\jmath} + \vec{\omega}_z k$$

Considera-se que o **sentido positivo (+)** do giro é dado pela **regra da mão direita** (anti-horária)

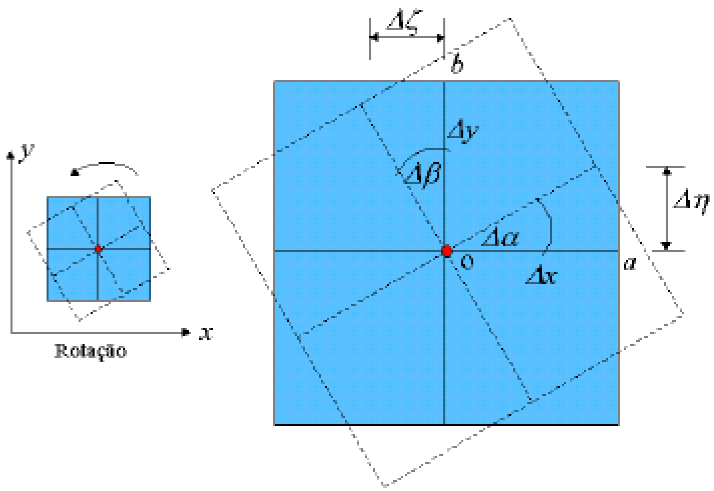


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

Componente *y* da velocidade no ponto *a*:
(por expansão da série de Taylor)

FÍSICA DOS FLUÍDOS

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

A **rotação** é dada pela **velocidade angular média** de duas linhas **perpendiculares** que se cruzam no centro ***ao*** e ***ob*** no plano ***xy***.

$$\vec{\omega}_z = \frac{1}{2}(\omega_{0a} + \omega_{0b})$$

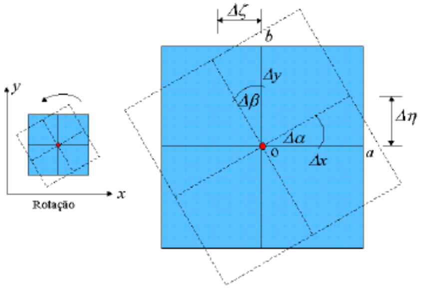
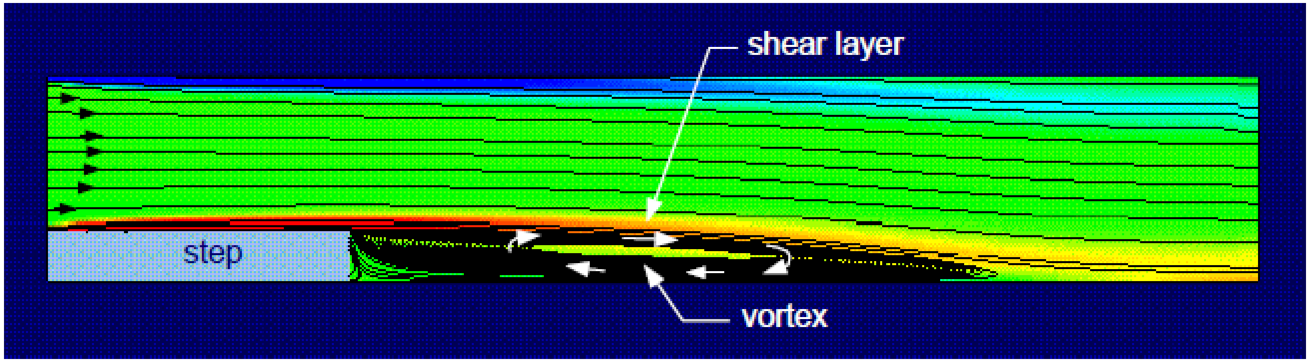


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

Onde ω_{0a} é a rotação da linha ao e ω_{0b} é a rotação da linha ***ob***.



FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

Rotação da linha *o-a* Comprimento da linha *ao*: *x*.
Componente *y* da velocidade no ponto *o*: *v0*

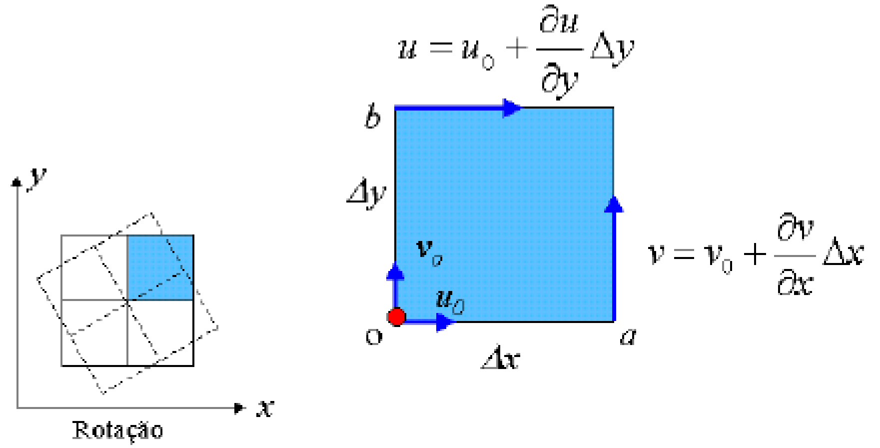


Figura 4.5 Detalhe das velocidades na rotação de um elemento de fluido

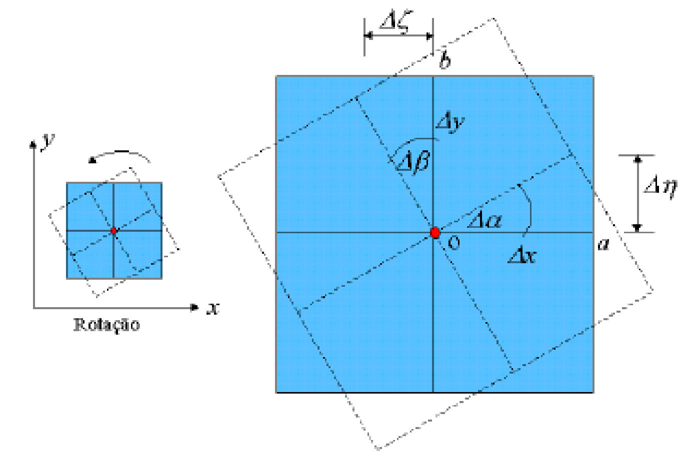


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

O elemento de fluido, quando submetido à tensão de cisalhamento τ_{yx} , ***<u>experimenta uma taxa de deformação</u>*** *(ou taxa de cisalhamento) dada por:*
$d\alpha/dt = du/dy$.

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

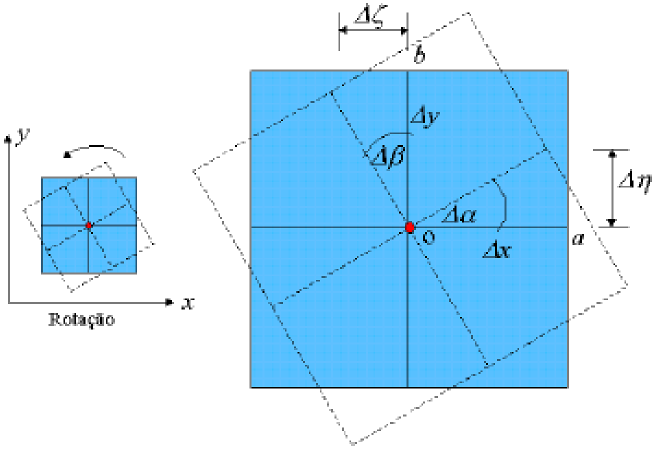
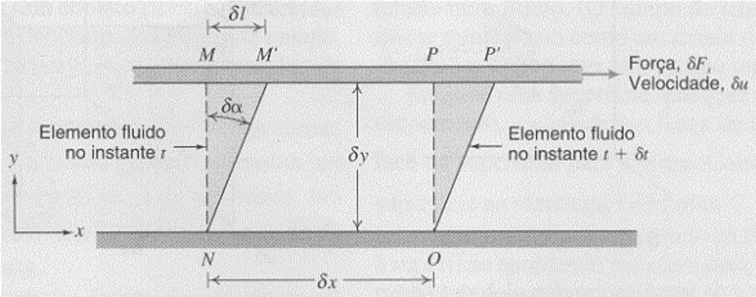


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

$\delta l = \delta u \, \delta t$



$\delta l = \delta\, y\, \delta\alpha$

$d\alpha/dt = du/dy.$

$$tag(\Delta\alpha) = \frac{\Delta\eta}{\Delta x}$$

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\eta}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta\eta}{\Delta x}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta\eta}{\Delta x \Delta t}$$

Velocidade angular da linha oa

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\eta}{\Delta x \Delta t}$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

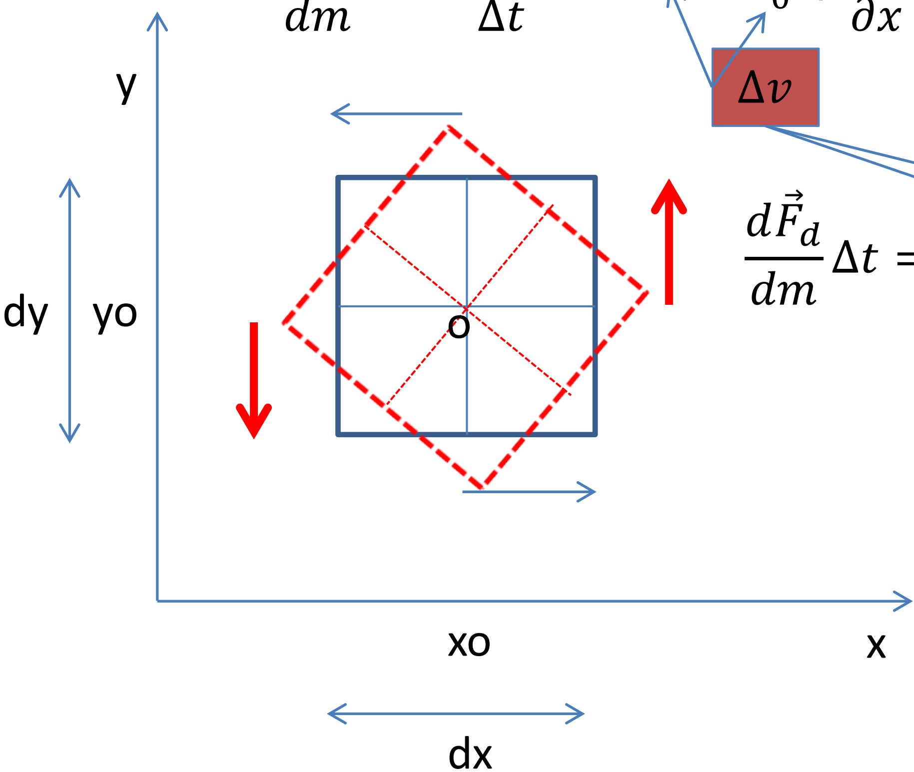
Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente y

$$\frac{d\vec{F}_e}{dm}\Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow v = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x}(x - x_0)$$

$$\boxed{d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}$$

Δv

$$\frac{d\vec{F}_d}{dm}\Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow v = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x}(x - x_0)$$

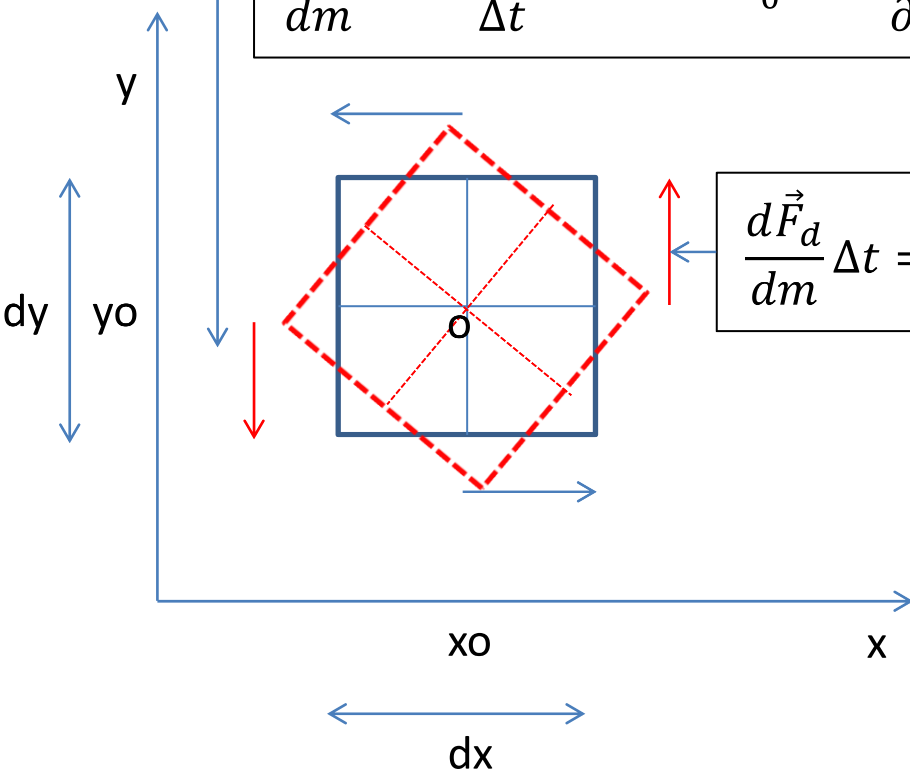


FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente y

$$\frac{d\vec{F}_e}{dm}\Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t = v - v_0 = -\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(-\hat{j})$$

$$d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$



$$\frac{d\vec{F}_d}{dm}\Delta t = \frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t = v - v_0 = +\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(j)$$

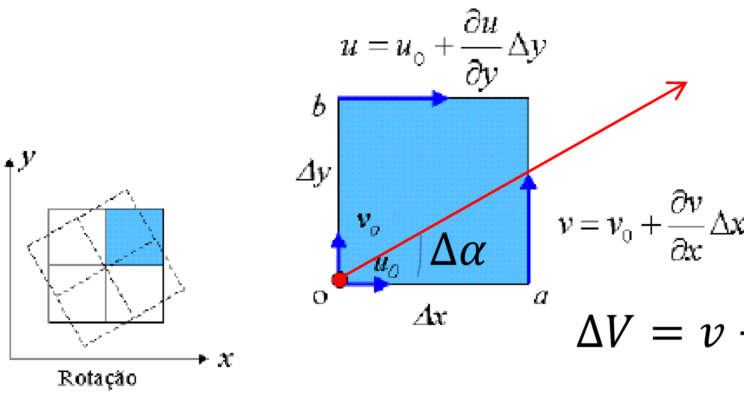
$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \frac{d\vec{F}_d}{dm}\Delta t + \frac{d\vec{F}_e}{dm}\Delta t$$

$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(j) + \left(+\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(\hat{j})\right)$$

$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x(j)$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z



$$\Delta V = v - v_o = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$$

Figura 4.5 Detalhe das velocidades na rotação de um elemento de fluido

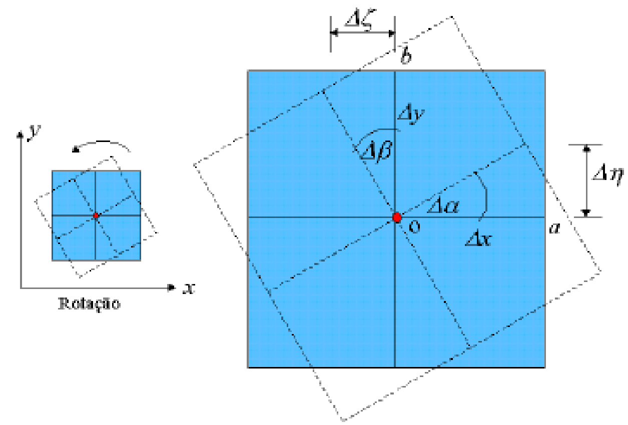


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

A velocidade escalar

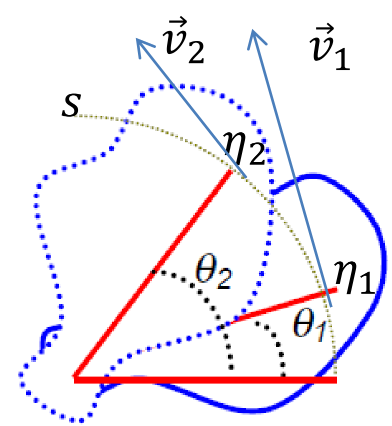
$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x(j)$$

$$\Delta v = \frac{\Delta\eta}{\Delta t}$$

$$\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$$

$$\Delta v = v_2 - v_1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = \frac{\Delta\eta}{\Delta t}$$



$$\Delta\eta = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\Delta t$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

e desta forma

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\eta}{\Delta x \Delta t}$$

$$\Delta\eta = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta t$$

$$\omega_{oa} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Rotação do elemento de fluido

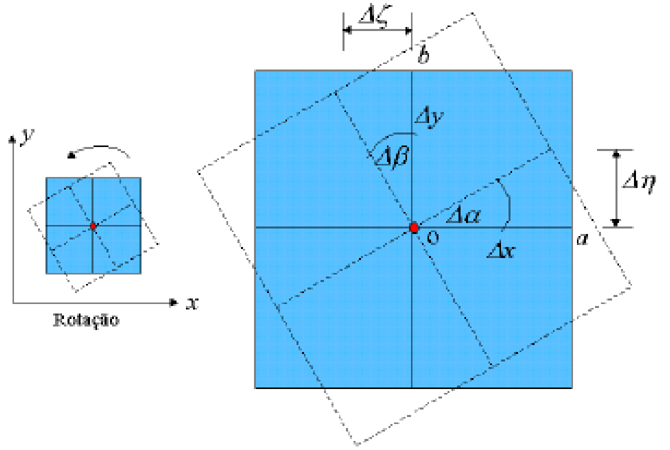


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z

Rotação da linha *ob*

Comprimento da linha *ob*: Δy.

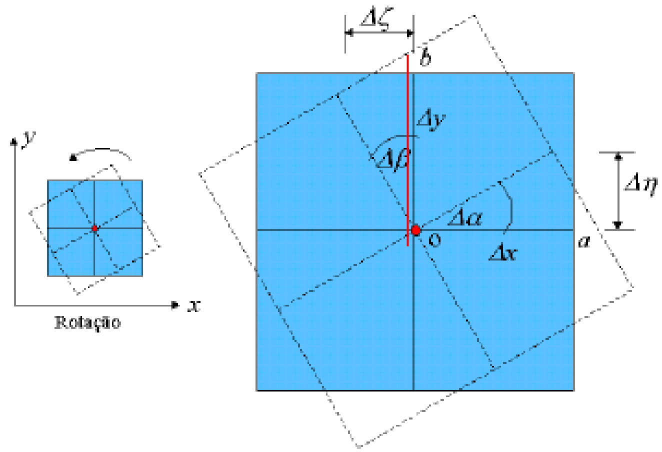


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

$$tag(\Delta\beta) = \frac{\Delta\xi}{\Delta y}$$

$$\Delta\beta = \frac{\Delta\xi}{\Delta y}$$

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta\xi}{\Delta y}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \frac{\Delta\xi}{\Delta y\Delta t}$$

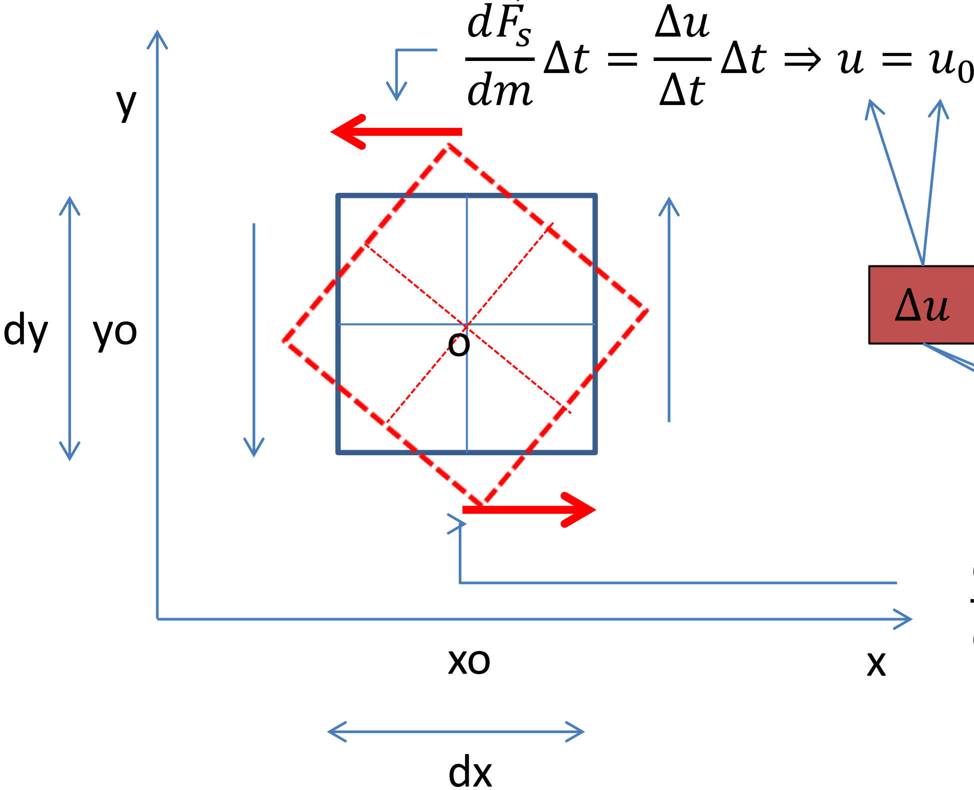
Velocidade angular da linha oa

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\xi}{\Delta y\Delta t}$$

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente x

$$d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{F}_s}{dm}\Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0)$$

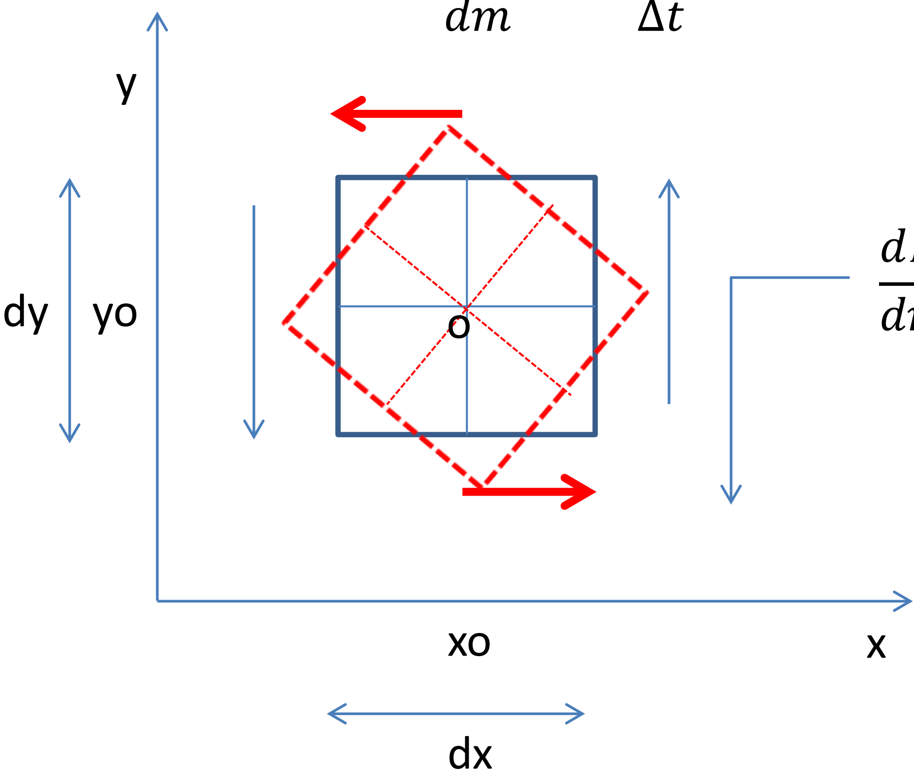


$$\frac{d\vec{F}_i}{dm}\Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0)$$

Rotação do elemento de fluido em torno do eixo z, componente x

$$\boxed{d\vec{F} = dm\vec{a} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}$$

$$\frac{d\vec{F}_s}{dm}\Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(-\hat{\imath})$$



$$\frac{d\vec{F}_i}{dm}\Delta t = \frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta t \Rightarrow u - u_0 = -\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(\hat{\imath})$$

$$\boxed{\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \frac{d\vec{F}_i}{dm}\Delta t + \frac{d\vec{F}_s}{dm}\Delta t}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(\hat{\imath}) + \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)(\hat{\imath})\right)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y(\hat{\imath})$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\Delta U = u - u_o = -\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$

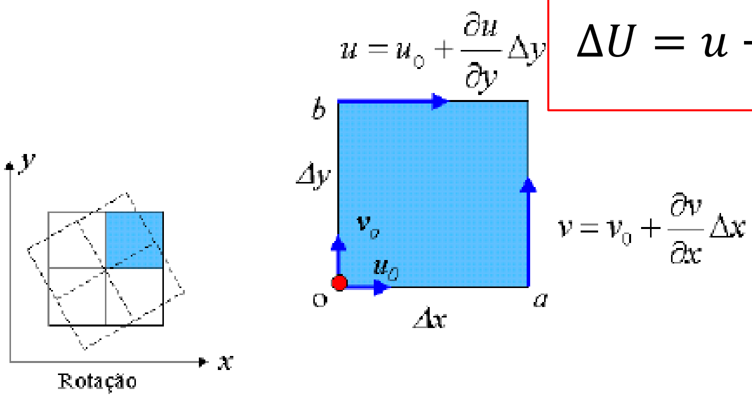


Figura 4.5 Detalhe das velocidades na rotação de um elemento de fluido

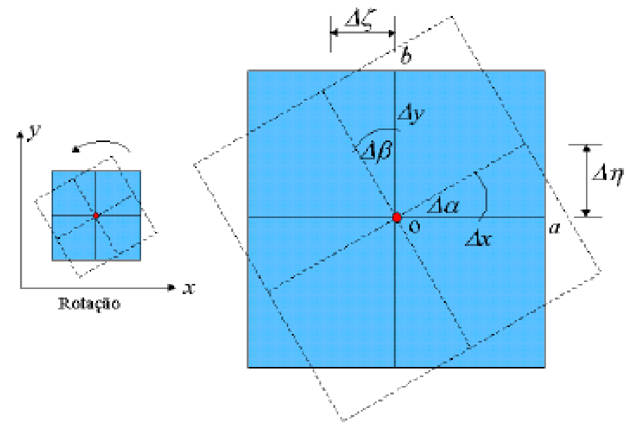


Figura 4.4 Rotação de um elemento de fluido

$$\frac{d\vec{F}_{total}}{dm}\Delta t = \Delta v = -\frac{\partial u}{\partial u}\Delta y(j)$$

A velocidade escalar

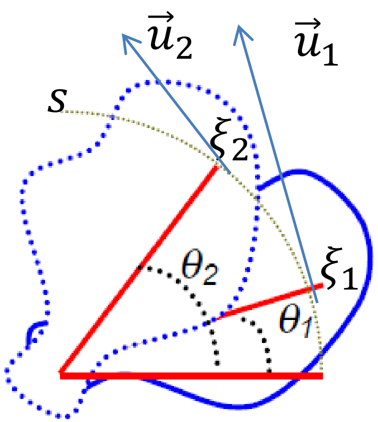
$$\Delta u = \frac{\Delta \xi}{\Delta t}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y = \frac{\Delta \xi}{\Delta t}$$

$$\Delta \xi = -\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y \Delta t$$

$$\Delta \xi = \xi_2 - \xi_1$$

$$\Delta u = u_2 - u_1$$



e desta forma a velocidade angular da linha ob

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\xi}{\Delta y \Delta t}$$

$$\Delta\xi = -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \Delta t$$

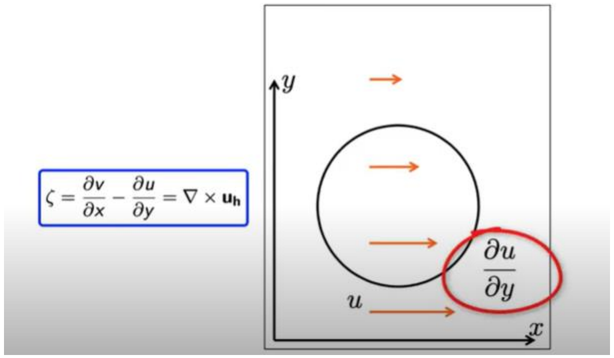
$$\omega_{ob} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

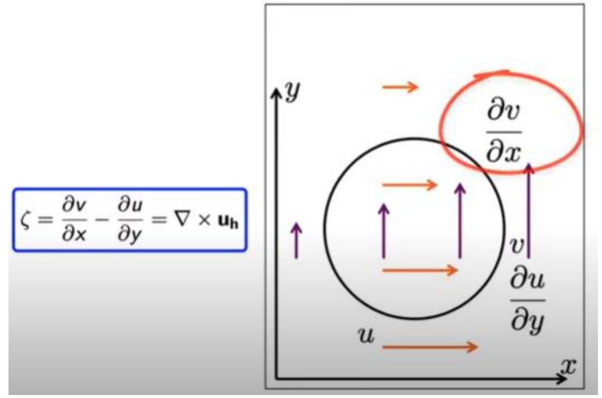
A **rotação** é dada pela **velocidade angular média** de duas linhas **perpendiculares** que se cruzam no centro ***ao*** e ***ob*** no plano ***xy***.

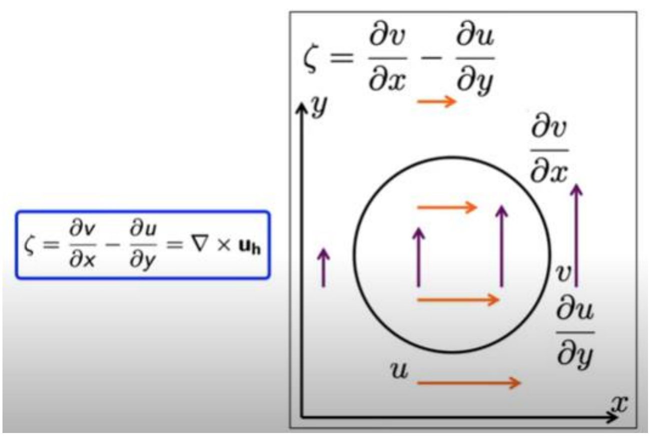
$$\vec{\omega}_z = \frac{1}{2}(\omega_{0a} + \omega_{0b})$$

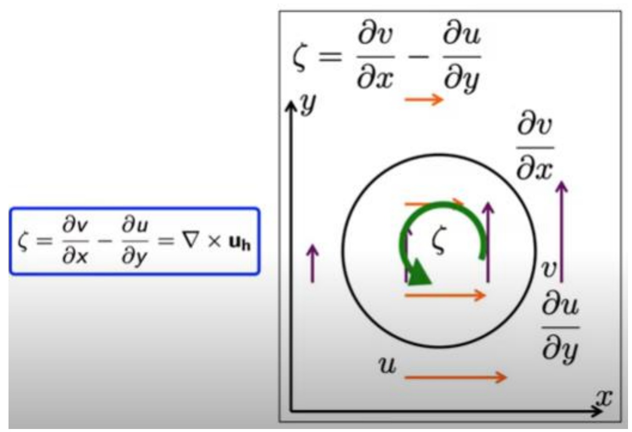
$$\vec{\omega}_z = \frac{1}{2}(\omega_{0a} + \omega_{0b}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Vorticidade Relativa Geostrófica









Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Na forma vetorial a rotação num campo tridimensional é dada como:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}\right]$$

Onde o termo entre colchetes é definido como rotacional da velocidade:

$$\boxed{rotacional\, \vec{V} = \nabla x \vec{V}}$$

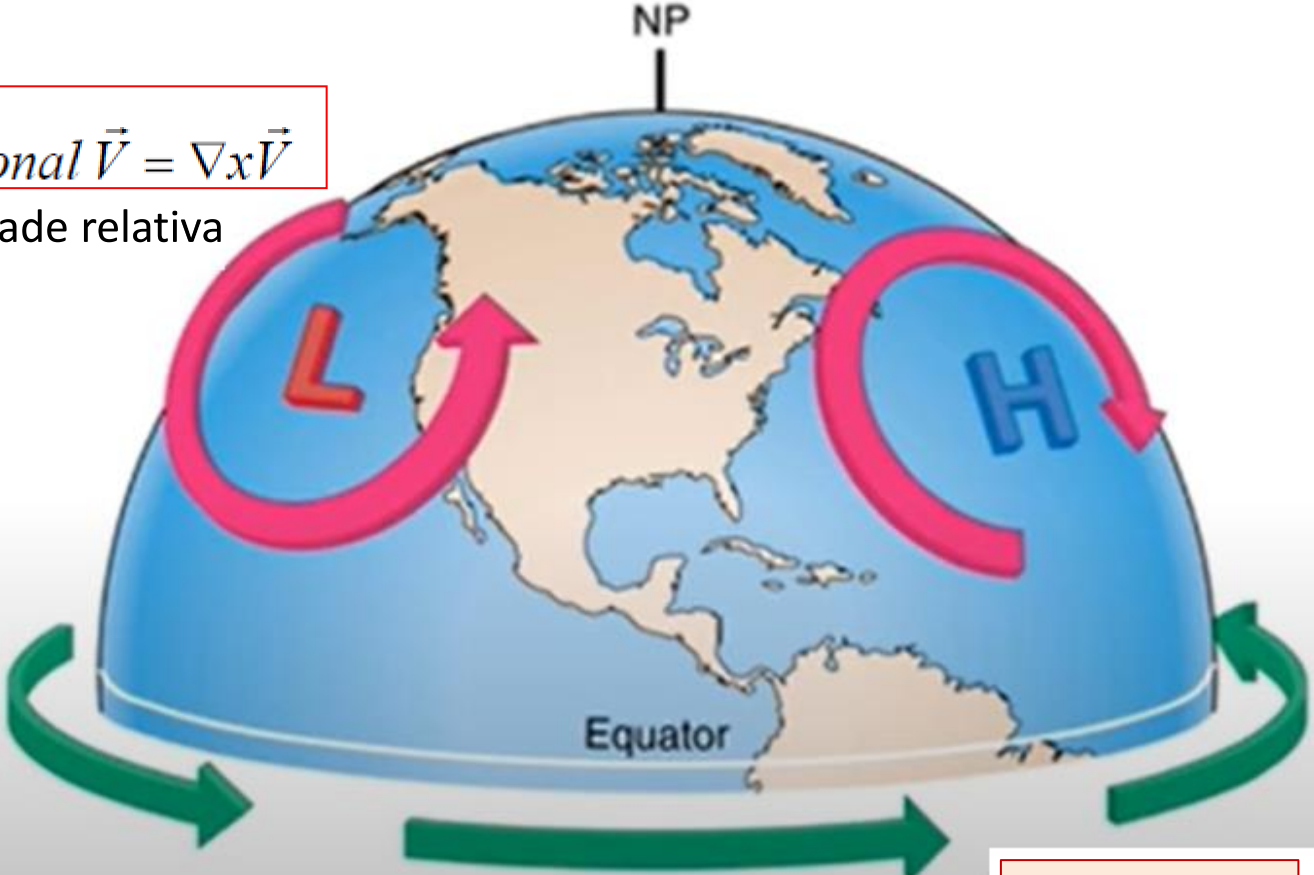
Desta forma, na notação vetorial, o vetor rotação é dado como:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla x \vec{V}$$

Vorticidade Relativa

$$\boxed{rotacional\,\vec{V} = \nabla x \vec{V}}$$

Vorticidade relativa



$$\boxed{f = f_o + \beta y}$$

Vorticidade Planetaria

Vorticidade Planetária

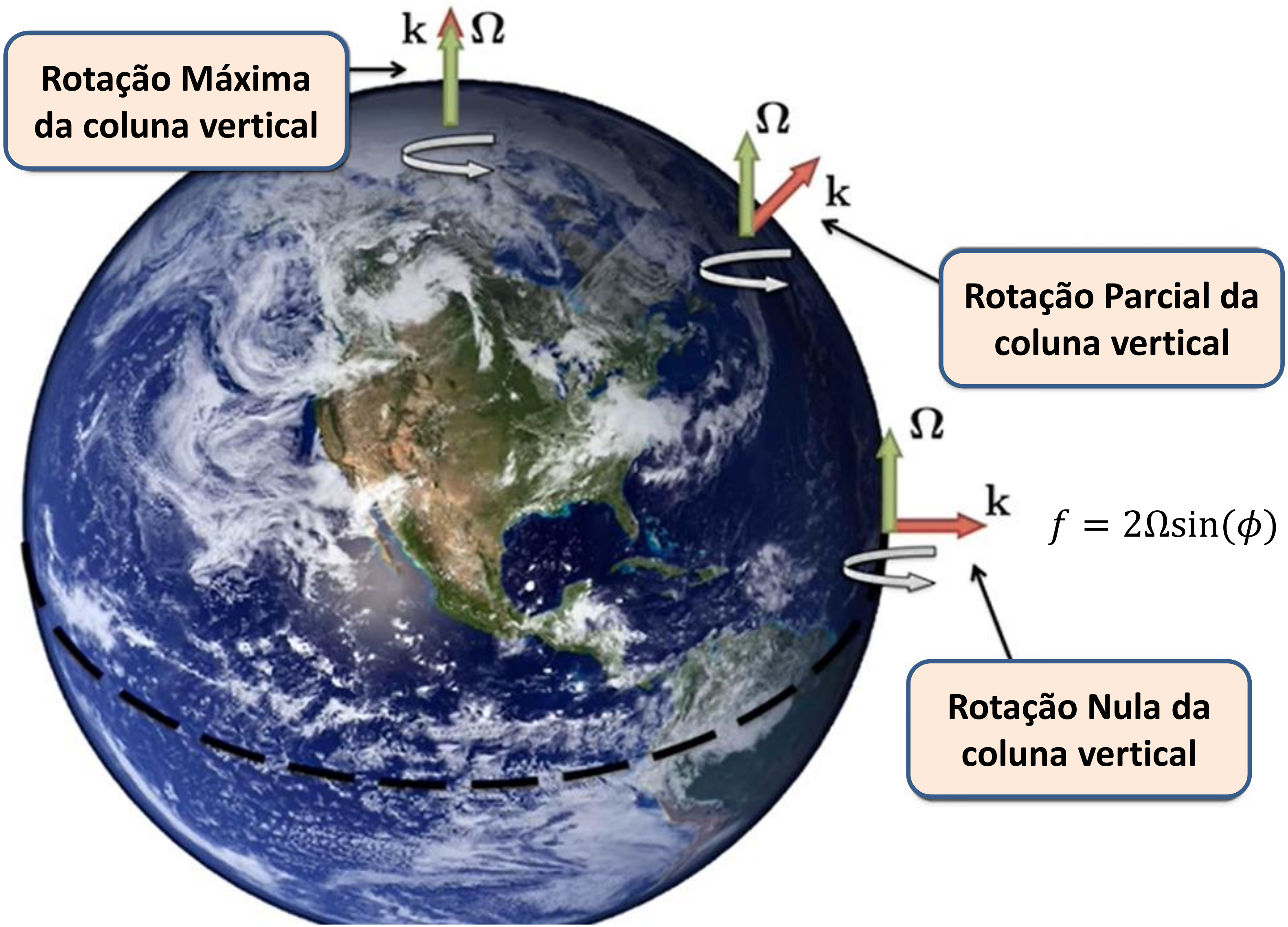
Definição: A componente da vorticidade devido a rotação da terra é chamada de vorticidade Planetária

$$\boxed{f = k \cdot (\nabla \times \overrightarrow{u_{terra}}) = 2\Omega \sin(\phi)}$$

Definição: A vorticidade planetária é a contribuição do momentum angular devido a rotação da superfície do planeta

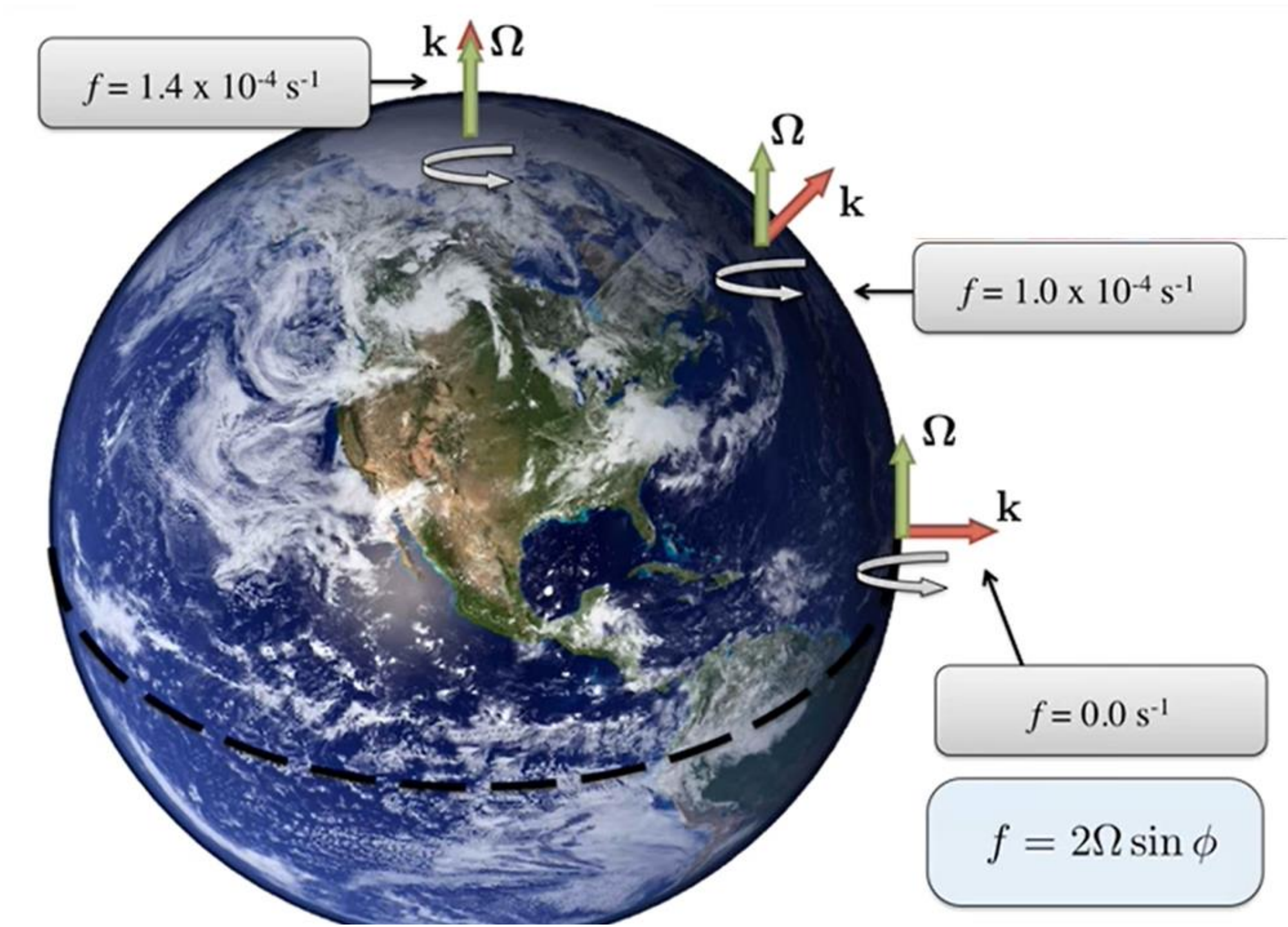
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica



$$f = 2\Omega\sin(\phi)$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica



Simplificação usando a Força de Gradiente de Pressão

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$\boxed{f = f_o + \beta y}$$

Isso permite que f_o substitua f na relação vento geostrófico, que se torna

momentum

$$\frac{\partial \vec{V_g}}{\partial t} + \vec{V_g}.\nabla_h \vec{V_g} = -g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - (f_o + \beta y)\hat{k} \times \left(\vec{V_g} + \overrightarrow{V_{ag}}\right) - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção media

gravidade

Coriolis

Gradiente de Pressão

$$P = \rho_0 g z$$

$$\frac{P}{\rho_0} = gz = \Phi$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{P}}{\rho_0}\right) = \frac{\partial(\bar{\Phi})}{\partial x_i} = \nabla\bar{\Phi}$$

Portanto

$$\vec{V_g} = \frac{1}{f_0}\hat{k} \times \nabla\Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V_g} = -\nabla\Phi = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$\boxed{f = f_o + \beta y}$$

Isso permite que f_o substitua f na relação vento geostrófico, que se torna

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0}\hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$f_0 \vec{V}_g = \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial y} i + \frac{\partial \Phi}{\partial x} j$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = \hat{k} \times \hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} i - \frac{\partial \Phi}{\partial y} j = -\nabla \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla_h \Phi$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$\boxed{f = f_o + \beta y}$$

Isso permite que f_o substitua f na relação vento geostrófico, que se torna

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0}\hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla_h \Phi$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivado pelo rotacional do vento geostrófico

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0}\hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0\vec{V}_g = -\nabla_h \Phi$$

$$\xi_g = \nabla_h \times \vec{V_g}$$

$$\boxed{\xi_g = \nabla_h \times \vec{V_g} = \frac{1}{f_0}\nabla_h \times \hat{k} \times \nabla_h \Phi}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} i + \frac{\partial \Phi}{\partial x} j$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivado pelo rotacional do vento geostrófico

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0}\hat{k} \times \nabla_h \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla_h \Phi$$

$$\boxed{\xi_g = \nabla_h \times \vec{V_g} = \frac{1}{f_0}\nabla_h \times \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} i + \frac{\partial \Phi}{\partial x} j\right)}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = (0-0)i + (0-0)j + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)\right) k$$

$$= +\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) k$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivado pelo rotacional do vento geostrófico

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0}\hat{k} \times \nabla_h \Phi \qquad \hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla_h \Phi$$

$$\boxed{\xi_g = \nabla_h \times \overrightarrow{V_g} = \frac{1}{f_0}\nabla_h \times \hat{k} \times \nabla_h \Phi = \frac{1}{f_0}\left(\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) k\right) = \frac{1}{f_0}\nabla_h{}^2 \Phi = \frac{g}{f_0}\nabla_h{}^2 Z}$$

Pontos chaves:

Sempre que você ver $\frac{1}{f_0}\nabla^2 \Phi$ pense em ξ_g

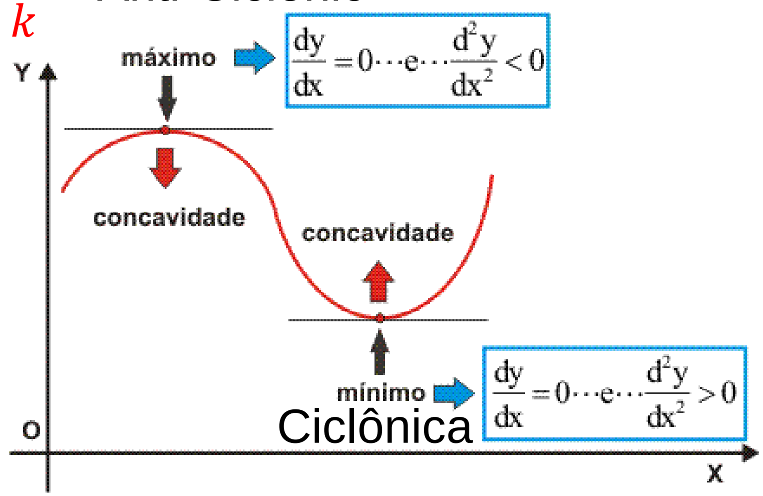
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivado pelo rotacional do vento geostrófico

$$\boxed{\xi_g = \frac{g}{f_0}\nabla^2 Z} \quad = \frac{g}{f_0}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)k$$

Anti-Ciclônic



Pontos chaves:

Ciclônica (positiva no HN) ξ_g é associado com o mínimo de Z

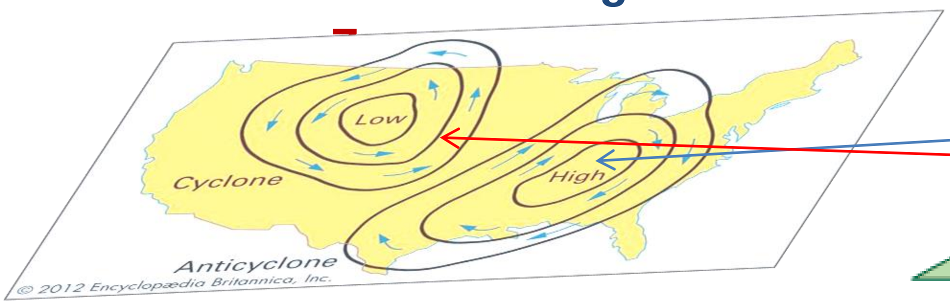
Anti-Ciclônica (negativa no HN) ξ_g é associado com o máxima de Z

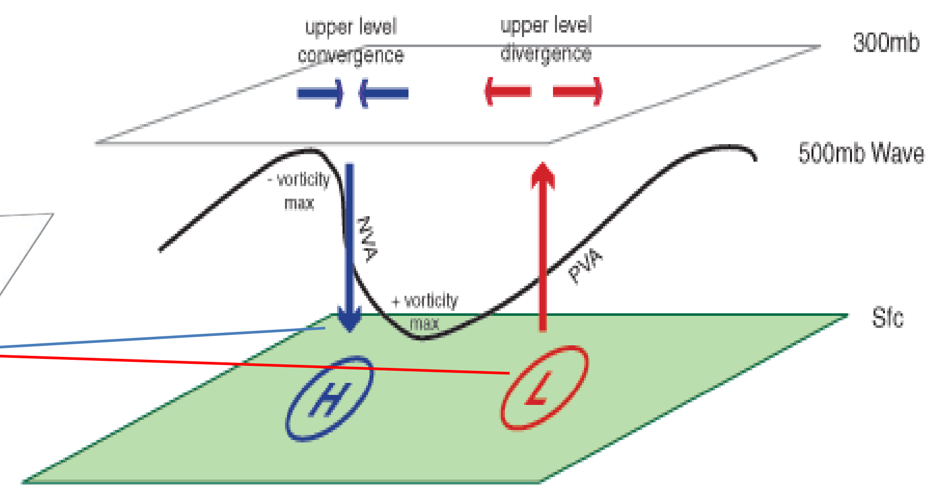
Vorticidade Relativa Geostrófica

$$\boxed{\xi_g = \frac{g}{f_0}\nabla^2 Z} \quad = \frac{g}{f_0}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)k$$

Ciclônica (positiva no HN) ξ_g é associado com o mínimo de gZ

gZ

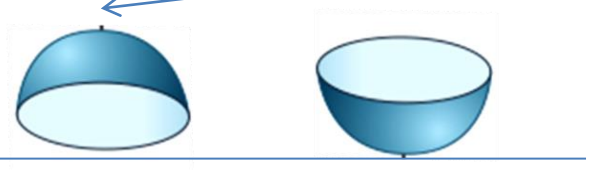




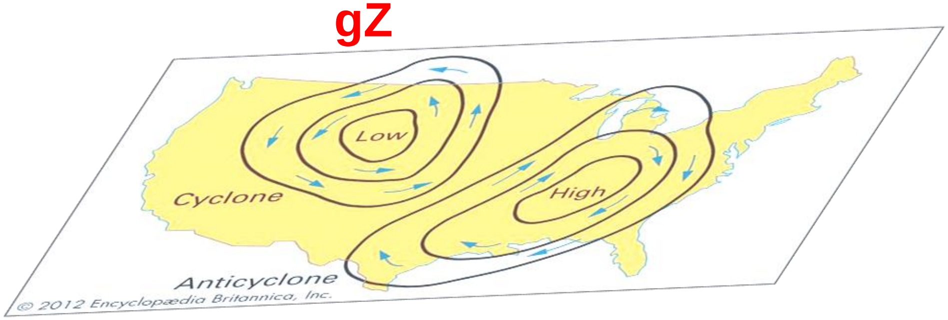
Vorticidade Relativa Geostrófica

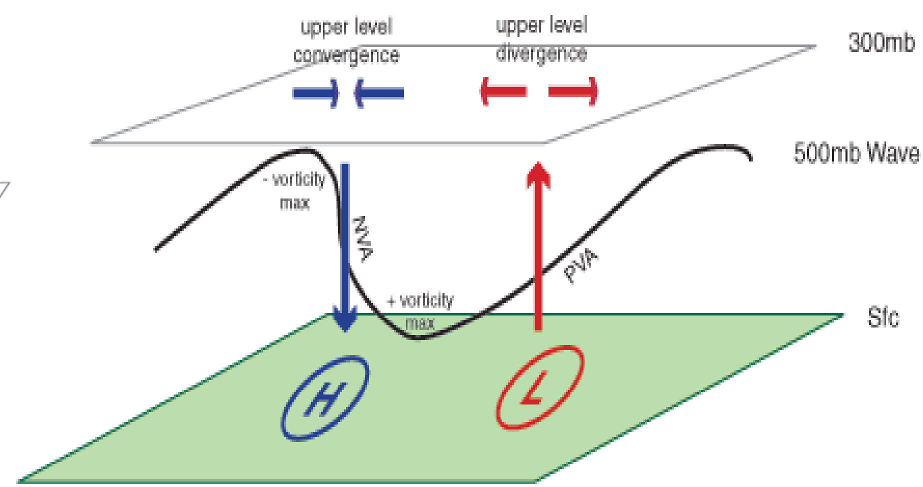
$$\boxed{\xi_g = \frac{g}{f_0}\nabla^2 Z} = \frac{g}{f_0}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)k$$

AntiCiclônica (negativa no HN) ξ_g é associado com o máxima de gZ



gZ





Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Vorticidade Absoluta

Definição: A vorticidade Absoluta ou Total η é a soma da contribuição da Vorticidade Relativa e a Vonticidade Planetária

$$Voticidade\ Absoluta = Vorticidade\ Relativa + Vorticidade\ Planetária$$

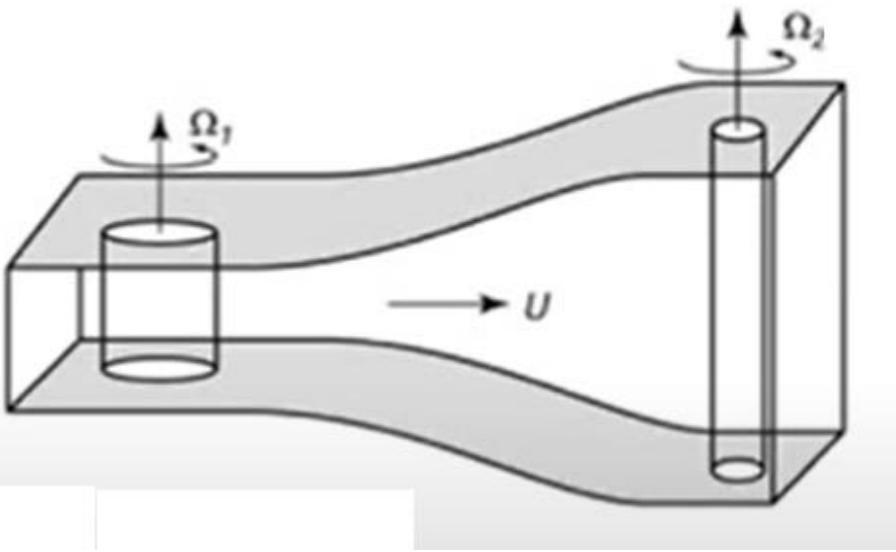
$$\eta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + f$$

$$u_a = u_{terra} + u$$

$$k \cdot (\Delta \times u_a) = k \cdot (\nabla \times u_{terra}) + k \cdot (\nabla \times u)$$

Conservação de Vorticidade Potencial.
Em um Fluido Barotrópico

$$PV = \frac{\zeta_g + f}{h} = \text{Constant}$$

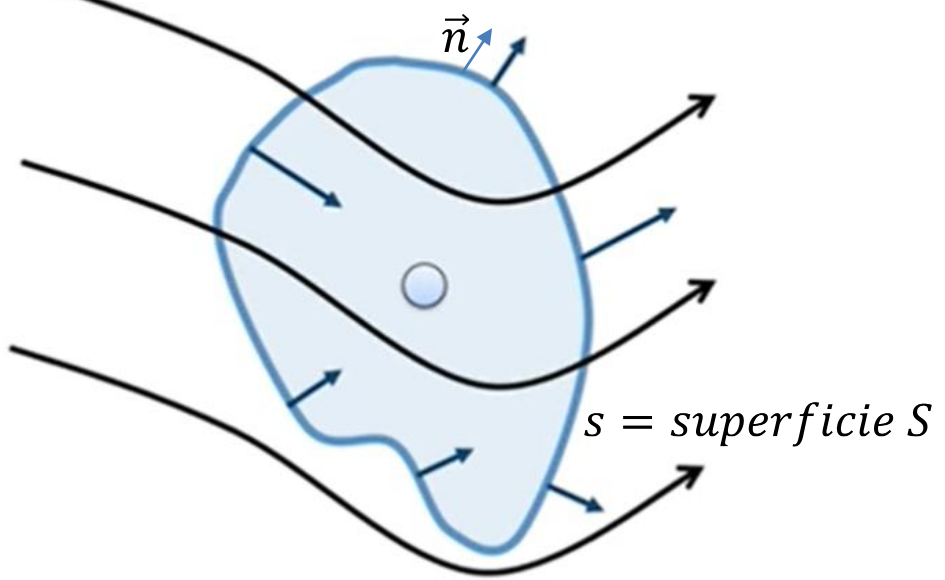


Pergunta: O que acontece com a velocidade angular Ω_2 em relação a Ω_1 considerando a conservação de vorticidade potencial?

Conceitos

Movimento Divergência

O movimento Associado com a região do volume de controle pode ser descrito em termo do movimento que entre e sai deste volume

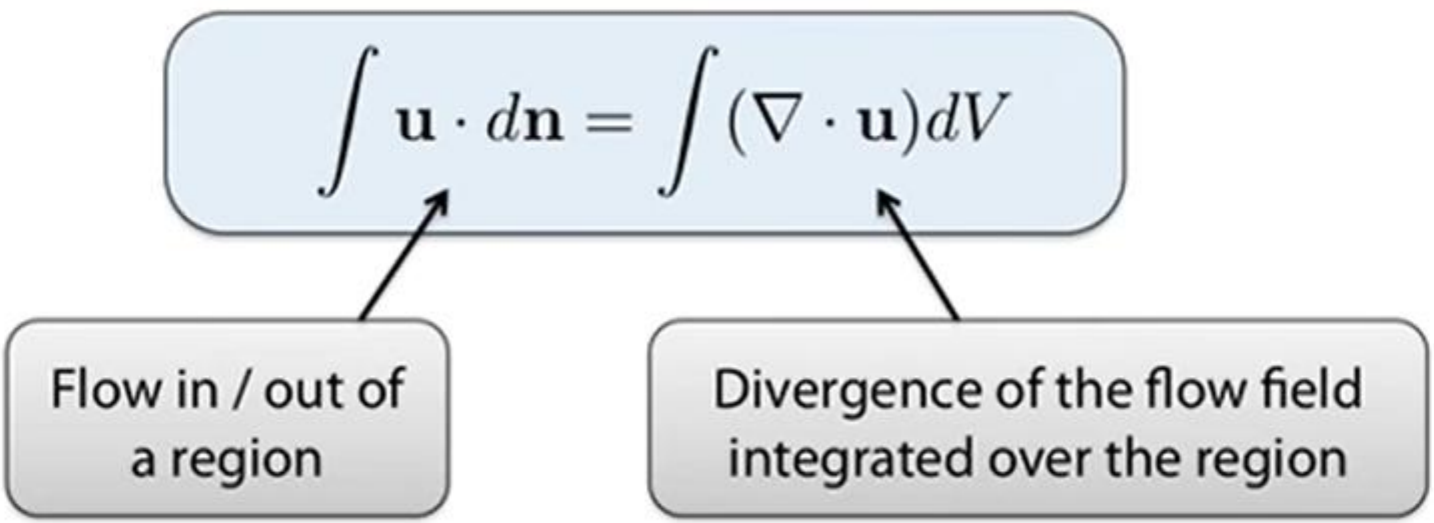


Movimento Divergência (Teorema de Gauss)

O escoamento entrado e saindo de um volume de controle deve ser associado a uma região particular do escoamento.

Por outro lado, a divergência é um conceito de conexão fechada (superfície fechada) que é descrita em um ponto.

Este conceito são conectados através do Teorema de Gauss



Divergência

Qual a contribuição da rotação da Terra na divergência?

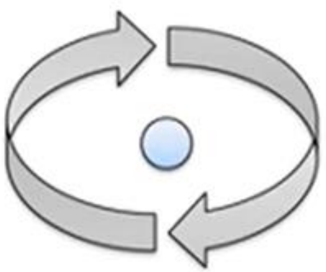
$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{u}_{earth} &= \nabla \cdot (2\Omega \sin \phi \mathbf{i}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(2\Omega \sin \phi) \\
&= \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda}(2\Omega \sin \phi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

A rotação do sistema de coordenada não contribui para a divergência do escoamento

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Escoamento=> Rotacional X Divergência

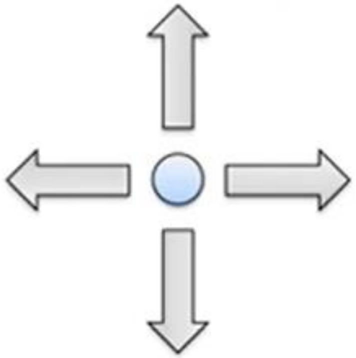
movimento Rotacional



$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$\sim 10^{-5} s^{-1}$

movimento Divergente



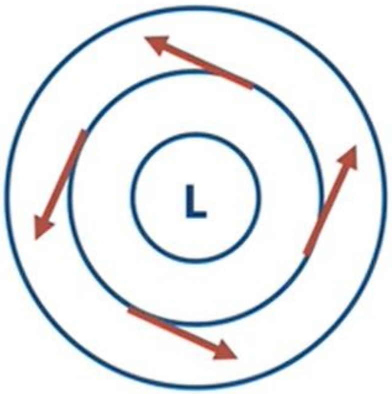
$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$\sim 10^{-6} s^{-1}$

A rotação é uma ordem de magnitude mais impotente do que a divergência!

Conceito de Vorticidade

Em um Nível Mais simples, A atmosfera pode ser descrita usando dinâmica de vórtex.
Os Vórtices são dominado pela rotação(curvatura)



Pergunta: Todos os escoamentos curvados tem vorticidade?
Todos os escoamento com vorticidade são curvados?

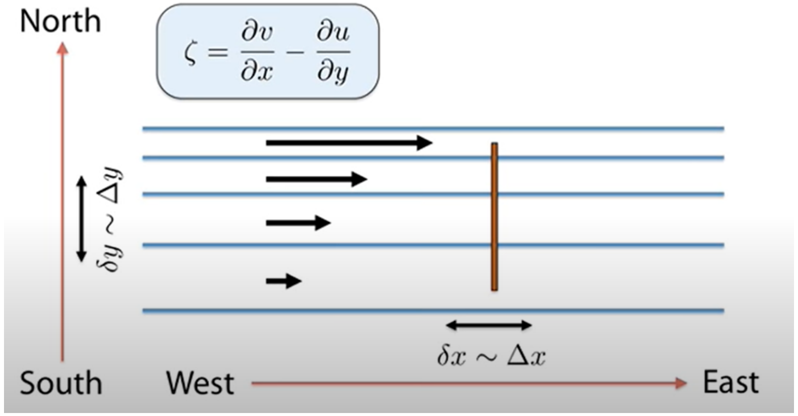
$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Obs: A vorticidade é associada a movimento de rotação pontual

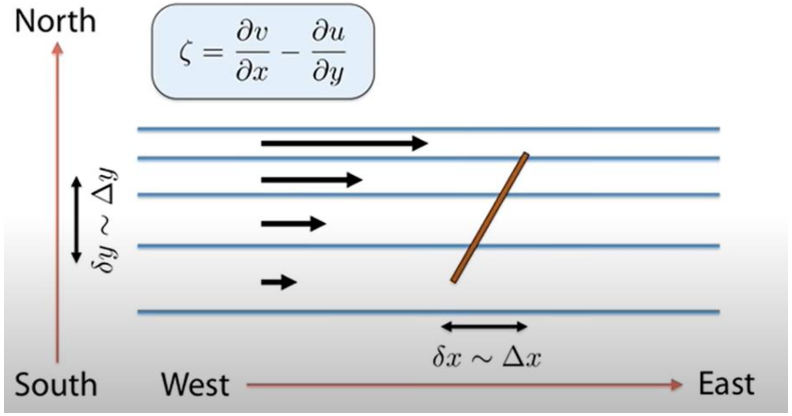
resposta: Não. Nem todos os escoamento curvado tem vorticidade. Porém, nem todos os escoamentos com vorticidade são curvados

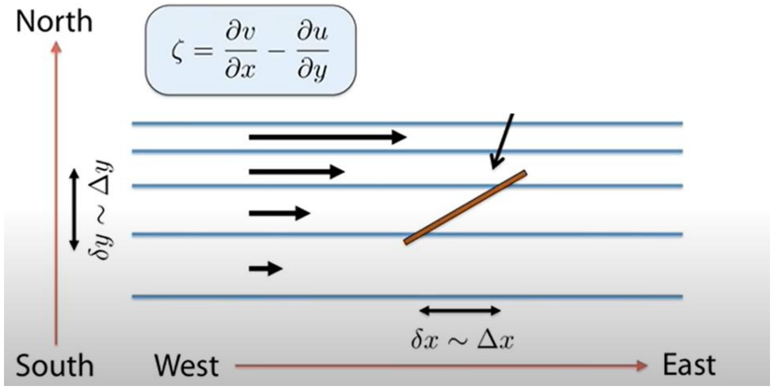
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Conceito de Vorticidade



Obs: movimento de rotação pontual, mas não é curvado (escoamento (Dx))





Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Conceito de Vorticidade

Relative velocity: $\mathbf{u} = (u, v, w)$

3D vorticity vector: $\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

Relative vorticity: $\zeta = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

Absolute vorticity: $\eta = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_a) = \zeta + f$

Planetary vorticity: $f = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{earth}) = 2\Omega \sin \phi$

Equação do momentum Geostrófico

Vorticidade Relativa Geostrófica

Equação do momentum Geostrófico

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -f_o\hat{k} \times \overrightarrow{V_{ag}} - \beta y\hat{k} \times \overrightarrow{V_g}$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -f_o\hat{k} \times \overrightarrow{V_{ag}} - \beta y\hat{k} \times \overrightarrow{V_g}$$

Resolva o produto vetorial dos dois termos:

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -f_o\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ u_{ag} & v_{ag} & \omega_{ag} \end{vmatrix} - \beta y\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ u_g & v_g & \omega_g \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -f_o\left[\left(0 - v_{ag}\right)\hat{\imath} + \left(u_{ag} - 0\right)\hat{\jmath} + (0-0)\hat{k}\right] - \beta y\left[\left(0 - v_g\right)\hat{\imath} + \left(u_g - 0\right)\hat{\jmath} + (0-0)\hat{k}\right]}$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -f_o\left[\left(0 - v_{ag}\right)\hat{\imath} + \left(u_{ag} - 0\right)\hat{\jmath} + (0 - 0)\hat{k}\right] - \beta y\left[\left(0 - v_g\right)\hat{\imath} + \left(u_g - 0\right)\hat{\jmath} + (0 - 0)\hat{k}\right]$$

Reagrupe os termos:

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -f_o\left[\left(-v_{ag}\right)\hat{\imath} + \left(u_{ag}\right)\hat{\jmath}\right] - \beta y\left[\left(-v_g\right)\hat{\imath} + \left(u_g\right)\hat{\jmath}\right]$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -f_o[(-v_{ag})\hat{\imath} + (u_{ag})\hat{\jmath}] - \beta y[(-v_g)\hat{\imath} + (u_g)\hat{\jmath}]$$

Reagrupe as componentes i e j:

$$\boxed{\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = +f_o(v_{ag})\hat{\imath} + \beta y(v_g)\hat{\imath} - f_o(u_{ag})\hat{\jmath} - \beta y(u_g)\hat{\jmath}}$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\overrightarrow{u_g}}{Dt}+\frac{D\overrightarrow{v_g}}{Dt}=+f_o\left(v_{ag}\right)\hat{\imath}+\beta y\left(v_g\right)\hat{\imath}-f_o\left(u_{ag}\right)\hat{\jmath}-\beta y\left(u_g\right)\hat{\jmath}$$

Separa a equação nas componentes zonal i e meridional j:

$$\frac{D\overrightarrow{u_g}}{Dt}-f_o\left(v_{ag}\right)-\beta y\left(v_g\right)=0$$

$$\frac{D\overrightarrow{v_g}}{Dt}+f_o\left(u_{ag}\right)+\beta y\left(u_g\right)=0$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\overrightarrow{u_g}}{Dt} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = 0$$

$$\frac{D\overrightarrow{v_g}}{Dt} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = 0$$

Derive a componente zonal em função de y

$$\frac{\partial}{\partial y} \qquad \frac{D\overrightarrow{u_g}}{Dt} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = 0$$

Derive a componente meridional em função de x

$$\frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{D\overrightarrow{v_g}}{Dt} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = 0$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{D\overrightarrow{u_g}}{Dt} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{D\overrightarrow{v_g}}{Dt} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = 0$$

Derive a componente zonal em função de y

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y} - f_o\left(\frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) - \beta\frac{\partial y}{\partial y}(v_g) - \beta y\frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$

Derive a componente meridional em função de x

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x}\right) + \beta\frac{\partial y}{\partial x}(u_g) + \beta y\frac{\partial u_g}{\partial x} = 0$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

As componentes zonal e meridional

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y} - f_o\left(\frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) - \beta v_g - \beta y\frac{\partial v_g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x}\right) + \beta y\frac{\partial u_g}{\partial x} = 0$$

Subtraia a equação da componente meridional a componente zonal

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y}\right) + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) + \beta y\left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) + \beta v_g = 0$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y}\right) + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) + \beta y\left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) + \beta v_g = 0$$

Veja o termo βv_g que representa a variação do parâmetro de coriolis com a coordenada y

Pode-se fazer a seguinte consideração:

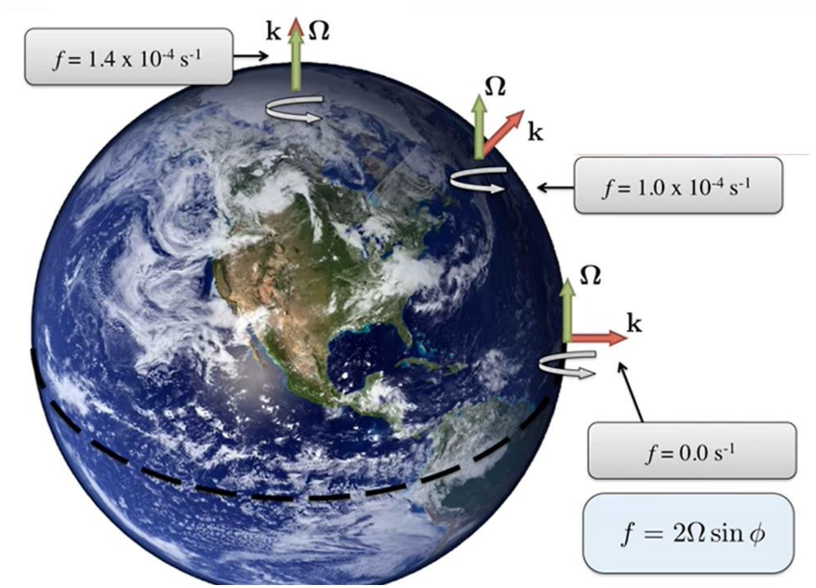
Vorticidade Relativa Geostrófica

Conceito sobre a Vorticidade Planetária

Vorticidade Relativa Geostrófica

Conceito sobre a Vorticidade Planetaria

$$\boxed{f = k \cdot (\nabla \times \overrightarrow{u_{terra}}) = 2\Omega \sin(\phi)}$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Usando o fato que o parâmetro de coriolis depende somente de y tal que

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_g \frac{\partial f}{\partial x} + v_g \frac{\partial f}{\partial y} - \omega_g \frac{\partial f}{\partial P}$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_g \frac{\partial f}{\partial x} + v_g \frac{\partial f}{\partial y} - \omega_g \frac{\partial f}{\partial P}$$

A variação do parâmetro de coriolis nas coordenadas t, x e z são nulas.

$$\frac{Df}{Dt} = v \frac{\partial f}{\partial y}$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

Note que f depende somente de y. Assim:

$$\frac{Df}{Dt} = v_g \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f = f_o + \frac{\partial f}{\partial y} y = f_o + \beta y$$

$$\frac{Df}{Dt} = v_g \frac{\partial (f_o + \beta y)}{\partial y}$$

$$\frac{Df}{Dt} = v_g \left[\frac{\partial (f_o)}{\partial y} + \frac{\partial (\beta y)}{\partial y} \right]$$

$$\boxed{\frac{Df}{Dt} = \beta v_g}$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y}\right) + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) + \beta y\left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) + \beta v_g = 0$$

$$\boxed{\frac{Df}{Dt} = \beta v_g}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y}\right) + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) + \beta y\left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) + \frac{Df}{Dt} = 0$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y}\right) + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) + \beta y\left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) + \frac{Df}{Dt} = 0$$

$$\xi_g = \frac{\partial \overrightarrow{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{u_g}}{\partial y}$$

$$\frac{D(\xi_g)}{Dt} + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) + \beta y\left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) + \frac{Df}{Dt} = 0$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\left(\xi_g\right)}{Dt} + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) + \beta y\left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) + \frac{Df}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\left(\xi_g + f\right)}{Dt} + f_o\left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}\right) + \beta y\left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = 0$$

Equação da continuidade para a aproximação quase geostrófica

$$\frac{D\left(\xi_g + f\right)}{Dt} + f_o\left(-\frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P}\right) + \beta y\left(\nabla_H . \vec{V_g}\right) = 0$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{Df}{Dt} = \beta v_g$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} + f_o\left(-\frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P}\right) + \beta y(\nabla_H . \vec{V_g}) = 0$$

$$\xi_g = \frac{\partial \vec{v_g}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{u_g}}{\partial y}$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} - f_o \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = 0$$

$$(\nabla_H . \vec{V_g}) = 0$$

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\boxed{\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}}$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\left(\xi_g + f\right)}{Dt} + f_o\left(-\frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P}\right) + \beta y\left(\nabla_H . \overrightarrow{V_g}\right) = 0$$

$$\left(\nabla_H . \overrightarrow{V_g}\right) = 0$$

$$\frac{D\left(\xi_g + f\right)}{Dt} - f_o \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = 0$$

$$\frac{D\left(\xi_g + f\right)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega_{ag}}{\partial P} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

A velocidade vertical é gerada somente pelo escoamento ageostrófico $\omega = \omega_{ag}$

$$\frac{D\left(\xi_g + f\right)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\left(\xi_g + f\right)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\frac{D\left(\xi_g + f\right)}{Dt} = \frac{\partial\left(\xi_g + f\right)}{\partial t} + u_g \frac{\partial\left(\xi_g + f\right)}{\partial x} + v_g \frac{\partial\left(\xi_g + f\right)}{\partial x} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\boxed{\frac{\partial\left(\xi_g\right)}{\partial t}} + \boxed{\frac{\partial\left(f\right)}{\partial t}} + \boxed{u_g \frac{\partial\left(\xi_g + f\right)}{\partial x}} + \boxed{v_g \frac{\partial\left(\xi_g + f\right)}{\partial x}} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial P} = \frac{1}{f_o}\left[\frac{\partial\left(\xi_g\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(f\right)}{\partial t} + u_g \frac{\partial\left(\xi_g + f\right)}{\partial x} + v_g \frac{\partial\left(\xi_g + f\right)}{\partial x}\right]$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{\partial(\xi_g)}{\partial t} + \frac{\partial(f)}{\partial t} + u_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\xi_g)}{\partial t} \gg \frac{\partial(f)}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}.\nabla(\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{\partial(\xi_g)}{\partial t} \gg \frac{\partial(f)}{\partial t} \quad => (f \cong cte\ com\ o\ \ tempo\ \ \{entretanto\ f\ varia\ bastante\ com\ a\ latitude\})$$

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V_g}.\nabla(\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial w}{\partial P}$$

A taxa de variação local da voticidade geostrófica é dada pela advecção de vorticidade absoluta pelo vento geostrófico Mais a concentração ou diluição da vorticidade pelo efeito divergente.

$$\frac{\partial \omega}{\partial P} = \frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}$$

Equação da continuidade para a aproximação quase geostrófica

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

O parâmetro f da força de coriolis não depende de x e z. Portanto, na equação da divergência acima pode ser desprezada

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\boxed{\nabla \cdot f = \beta}$$

Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}.\nabla(\xi_g + f) + f_0\frac{\partial w}{\partial P}$$

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}.\nabla(\xi_g + f) = -\overrightarrow{V_g}.\nabla\xi_g - \overrightarrow{V_g}.\nabla f = -\overrightarrow{V_g}.\nabla\xi_g - v_g\beta$$

$$\boxed{\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}.\nabla\xi_g - v_g\beta}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Tendência devido a advecção

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V_g}\nabla.(\xi_g + f) = -\vec{V_g}\nabla.\xi_g - \vec{V_g}\nabla.f = -\vec{V_g}\nabla.\xi_g - v_g\beta$$

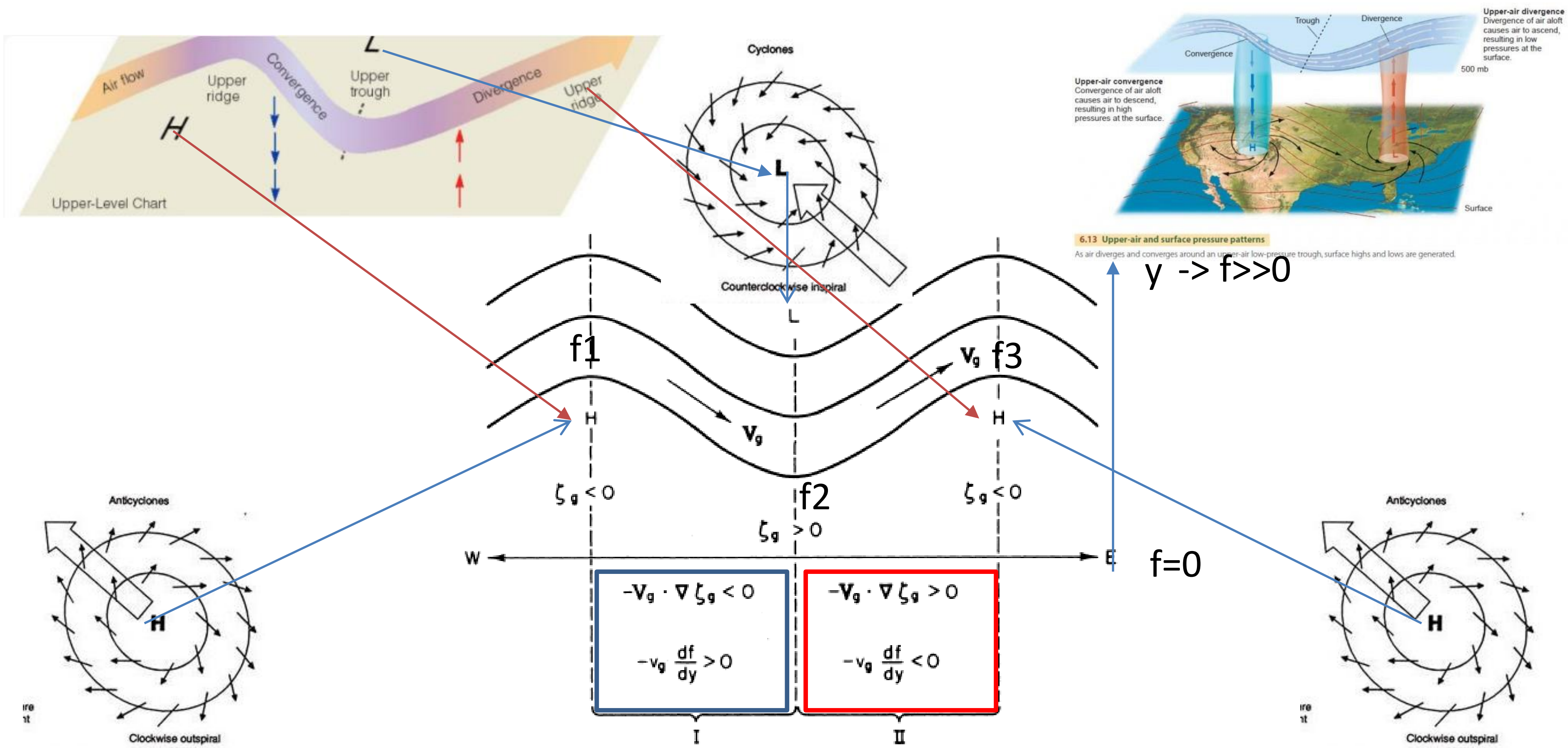


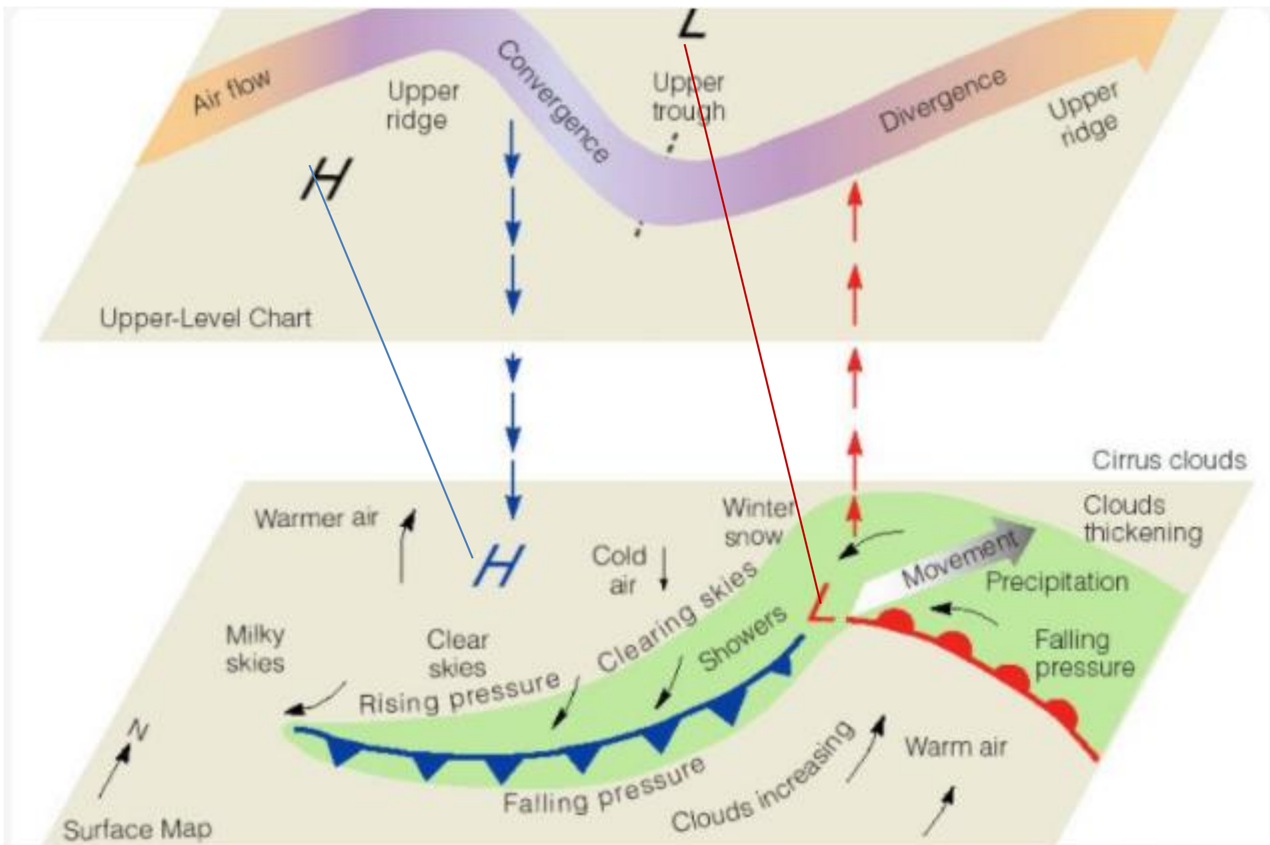
Fig. 6.7 Schematic 500-hPa geopotential field showing regions of positive and negative advections of relative and planetary vorticity.

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Tendência devido a advecção

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}\nabla.(\xi_g + f) = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\xi_g - \overrightarrow{V_g}\nabla.f = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\xi_g - v_g\beta$$



[Mid Latitude Cyclones Notes Grade 12 - My Courses]

Camada Limite Planetária

Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Tendência devido a advecção

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\xi_g + f\right) = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\xi_g - \overrightarrow{V_g}\nabla.f = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\xi_g - v_g\beta$$

Como na discussão sobre a equação da vorticidade.
O termo que domina determina a progressão zonal do escoamento com comprimento de onda longa:

- Se o termo de beta β domina , as ondas irão retroceder (movimento para oeste) (onda de Rossby)
- Se o termo da vorticidade relativa $\xi_g$domina, as ondas irão se mover para leste. (ondas de Kelvin)

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}\nabla.\left(\xi_g + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

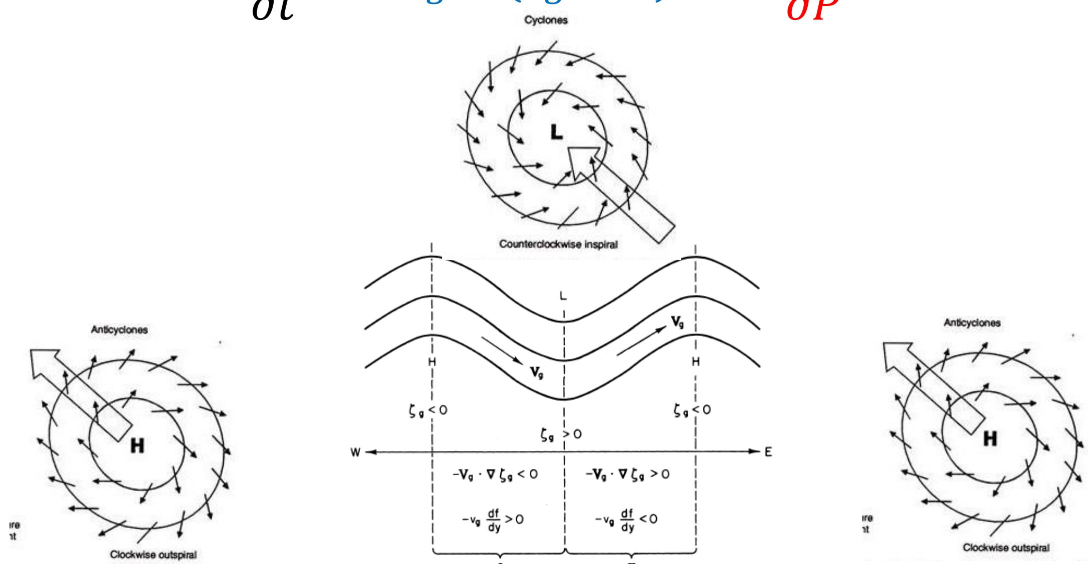
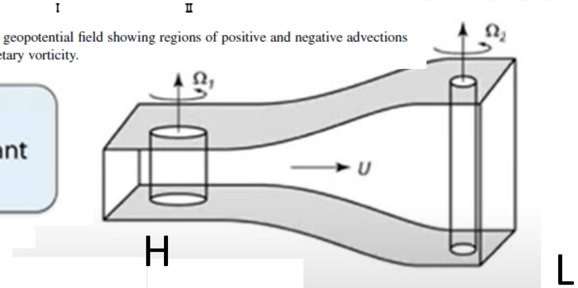


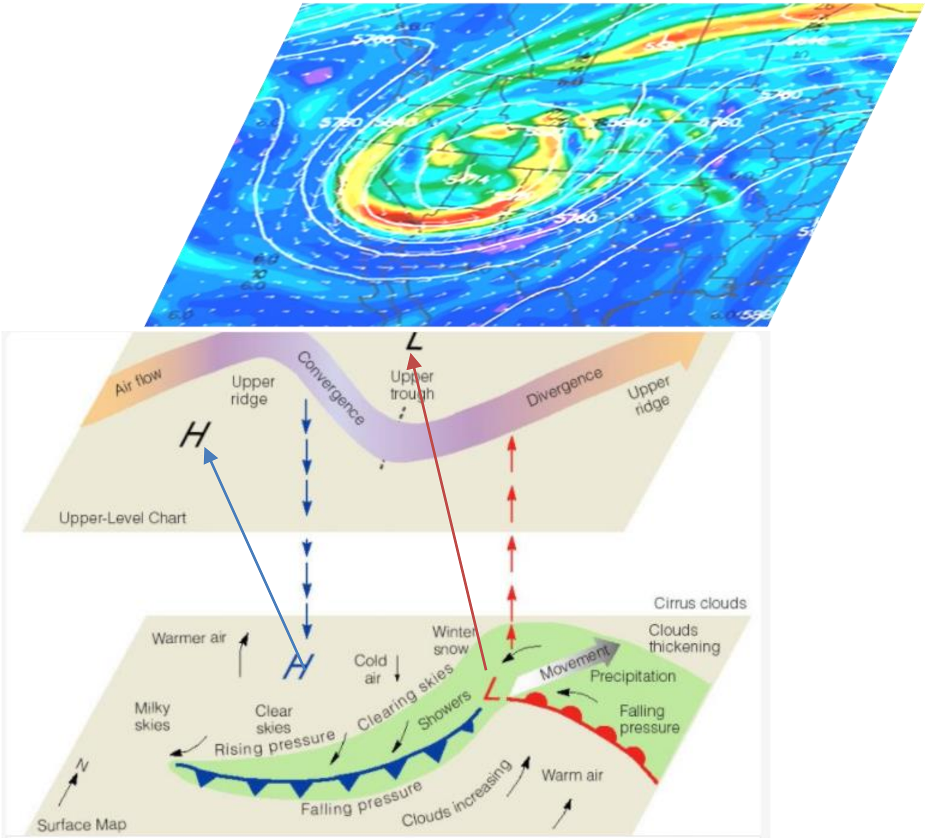
Fig. 6.7 Schematic 500-hPa geopotential field showing regions of positive and negative advections of relative and planetary vorticity.

$$PV = \frac{\zeta_g + f}{h} = \text{Constant}$$



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Vorticidade Quase Geostrófica



$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V_g}\nabla.\left(\xi_g + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Vorticidade Quase Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V_g}\nabla.(\xi_g) - \vec{V_g}\nabla.(f) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

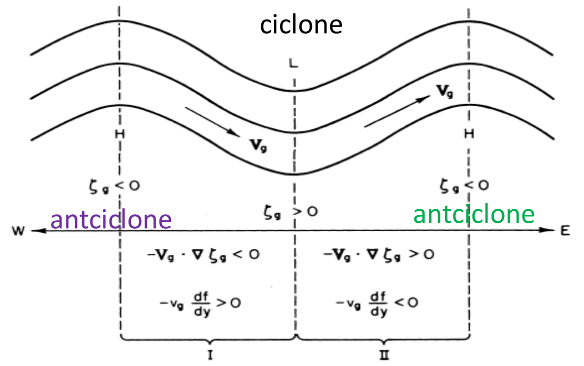


Fig. 6.7 Schematic 500-hPa geopotential field showing regions of positive and negative advections of relative and planetary vorticity.

O que muda a vorticidade relativa geostrófica em um ponto?

- Advecção de vorticidade absoluta geostrófica

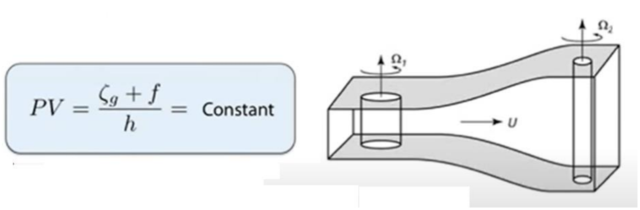
$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} < 0$ se a advecção é anticiclônica (negativa no hemisfério norte)

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} > 0$ se a advecção é ciclônica (positiva no hemisfério norte)

- Alongamento e compressão (ou convergência e divergência)

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} > 0$ se ALONGAR (hemisfério norte)

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} < 0$ se a comprimir (hemisfério norte)



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial t} + u_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\xi_g + f)}{\partial x} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Como alternativa, podemos escrever a equação da vorticidade QG como:

$$\frac{D(\xi_g + f)}{Dt} = f_o \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

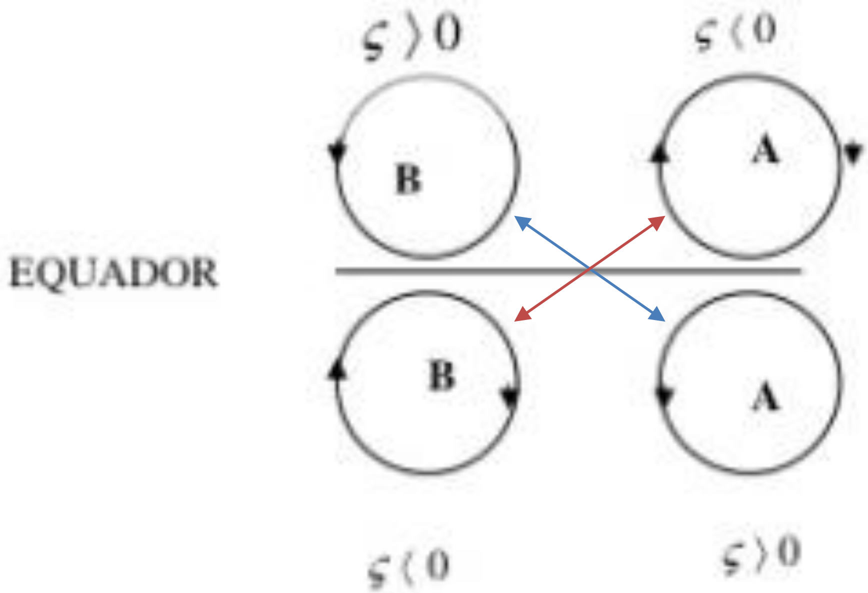
Equação da continuidade para a aproximação quase geostrófica

$$\frac{\partial \omega}{\partial P} = \frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}$$

O que basicamente diz que no fluxo, apenas o alongamento (isto é, convergência) e a compressão (isto é, divergência) fazem com que a vorticidade absoluta geostrófica aumente ou diminua, respectivamente.

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

<u>**Convenção de Sinais para ζ**</u>: Os sinais **positivo** e **negativo** dão o sentido do giro.



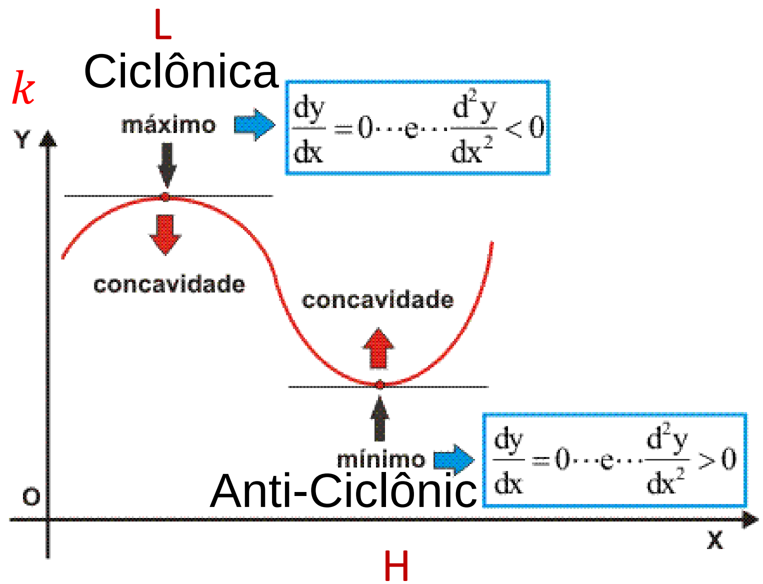
GIRO HORÁRIO	-	VORTICIDADE NEGATIVA	ciclônico no HS
			anticiclônico no HN
GIRO ANTI-HORÁRIO	-	VORTICIDADE POSITIVA	ciclônico no HN
			anticiclônico no HS

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Derivado pelo rotacional do vento geostrófico

$$\boxed{\xi_g = \frac{g}{f_0}\nabla^2 Z} \quad = \frac{g}{f_0}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right) k$$

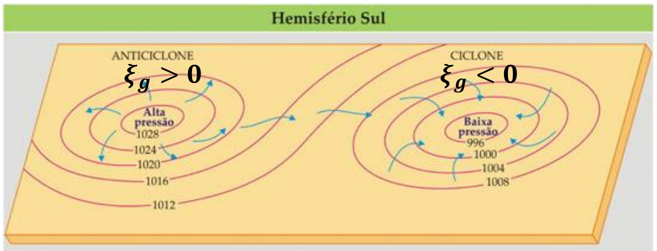


Pontos chaves:

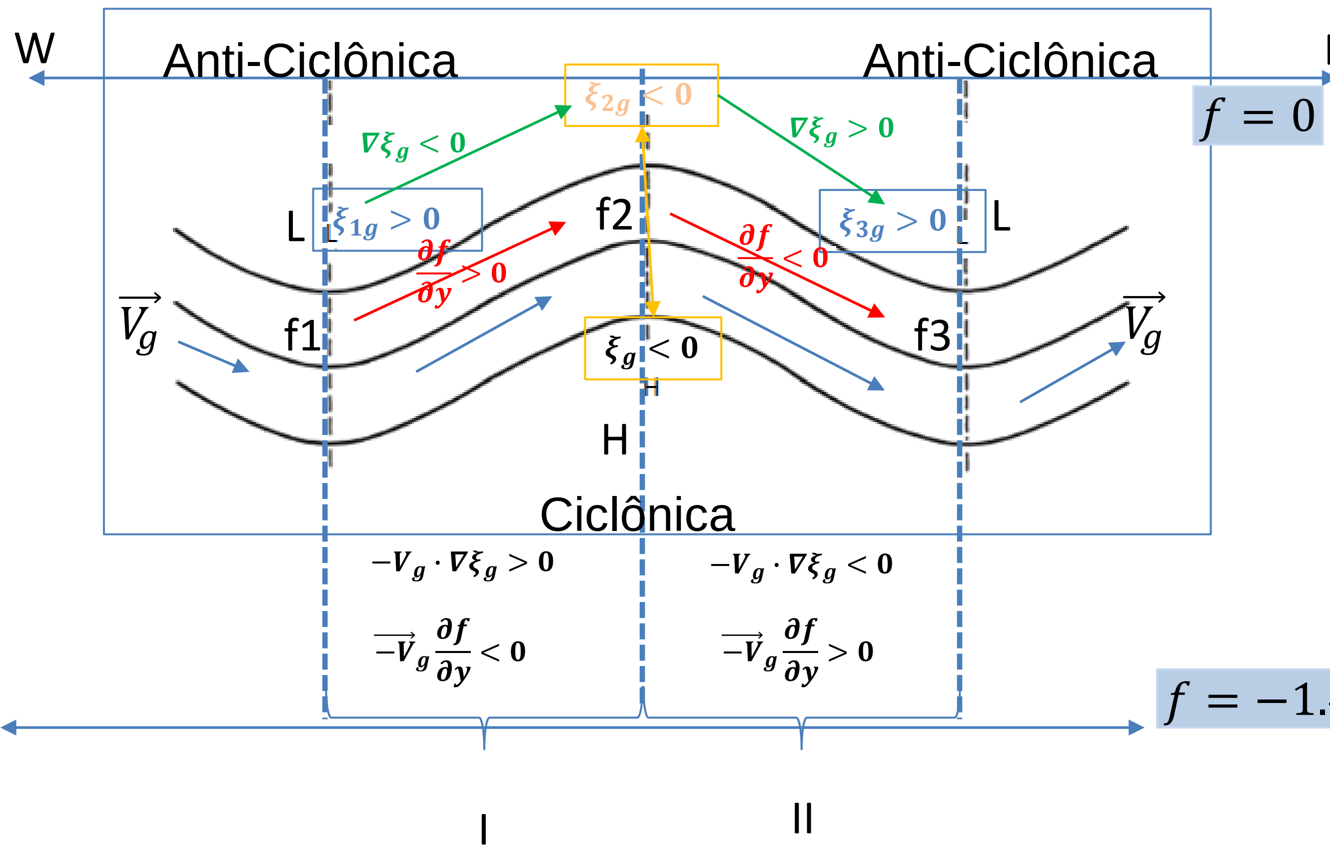
Ciclônica (negativa no HS) ξ_g é associado com o máximo de Z

Anti-Ciclônica (positiva no HS) ξ_g é associado com o mínimo de Z

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

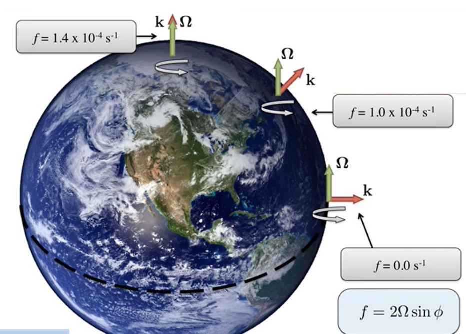


$$\xi_g = \frac{g}{f_0}\nabla^2 Z$$



$f = 0$

$no\ hemisferio\ Sul \Rightarrow$
$f < 0$



$f = -1.4x10^{-4}$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

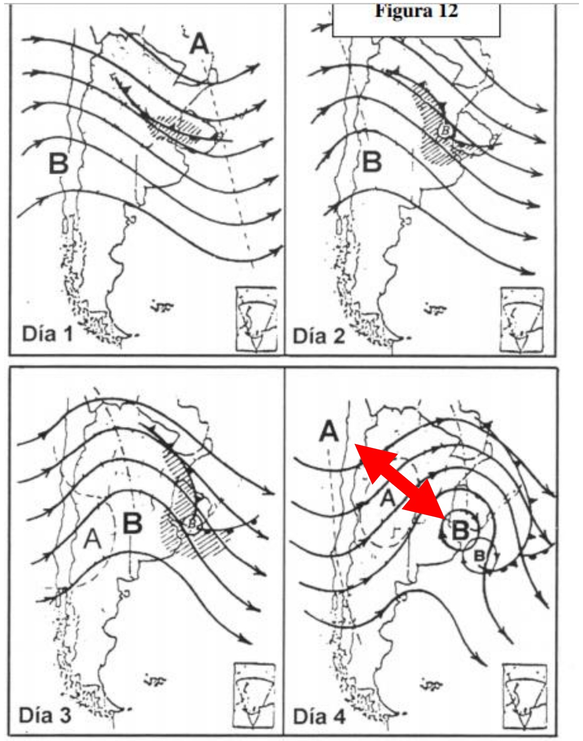
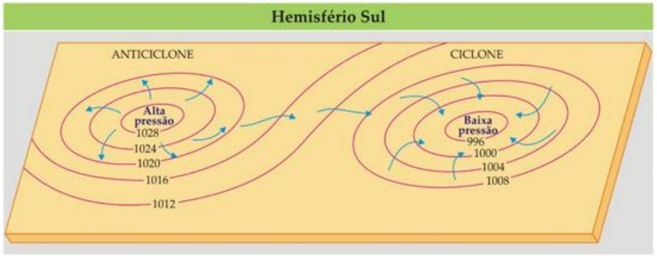


Figura 12

A Figura 12 mostra as etapas do desenvolvimento de uma Onda frontal, com seu correspondente cavado de altitude associado. Podem-se observar quatro caixas, onde é representada a chegada de um cavado em altitude sobre a Argentina e Uruguai e, a correspondente formação de uma baixa em superfície a partir de uma frente estacionária.



Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

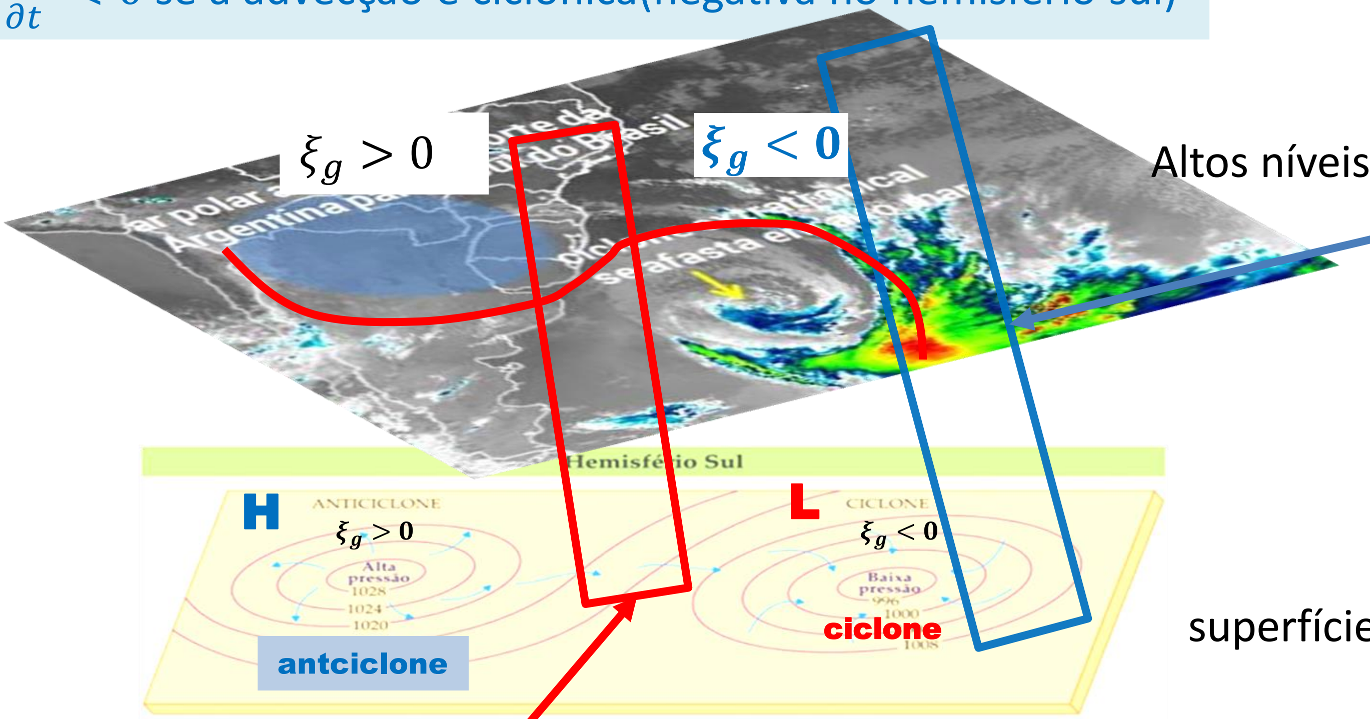
O que muda a vorticidade relativa geostrófica em um ponto?

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} > 0$ se a advecção é antciclônica (positiva no hemisfério sul)

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} < 0$ se a advecção é ciclônica(negativa no hemisfério sul)

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V_g}\nabla.(\xi_g) - \vec{V_g}\nabla.(f) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\boxed{\xi_g = \frac{g}{f_0}\nabla^2 Z}$$



$$-\vec{V_g}\nabla.(\xi_g) < 0$$
$$-\vec{V_g}\frac{\partial f}{\partial y} > 0$$

- Alongamento e compressão (ou convergência e divergência)

$$-\vec{V_g}\nabla.(\xi_g) > 0$$
$$-\vec{V_g}\frac{\partial f}{\partial y} < 0$$

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} < 0$ se comprimir (hemisfério sul)

$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} > 0$ se a ALONGAR (hemisfério sul)

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Exercício

1-Explique o motivo da velocidade vertical ser mantida pelo escoamento ageostrofico, quando se utiliza a teoria da aproximação quase geostrofica.
R:

2- Usando a equação da continuidade, prove matematicamente a sua explicação.
R:

3- Resuma em poucas palavras as considerações físicas para se obter a equação da Vorticidade Relativa Geostrofica discutida nas aulas.
R: