Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Equação Omega

Teoria Quase Geostrofica e Aplicações :
Aproximações e Equações
MET 0225 Sinótica-Dinâmica
Meteorologia I

Instrutor: Paulo Kubota
paulo.kubota@inpe.br
012-3186-8400

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Equação Omega

Paulo Kubota

data	Tópicos
15/04/2021	PBL
20/04/2021	PBL
22/04/2021	PBL
27/04/2021	QG Vorticity. eq.
29/04/2021	QG Vorticity. eq.
04/05/2021	QG Vorticity. eq.
06/05/2021	Geop. Tend. eq.
11/05/2021	Geop. Tend. eq.
13/05/2021	Geop. Tend. eq.
18/05/2021	Omega and Vetor Q
20/05/2021	Omega and Vetor Q
25/05/2021	Omega and Vetor Q
27/05/2021	Avaliação 1
01/06/2021	Avaliação 2

Equação Omega

Motivação.

O desejo de um sistema de equações simplificado, mas que retenha os principais processos dinâmicos necessários para descrever, diagnosticar e entender o comportamento de sistemas climáticos em larga escala.

Palavras chaves.

“As equações e suas derivações são reconhecidamente difíceis. É importante que não se memorize apenas as equações de maneira mecânica. É muito mais importante entender o que eles significam fisicamente. ” - Howie Bluestein.

Suposição abrangente da teoria QG.

O número de Rossby (R0 = U / fL) é pequeno, o que nos permite desprezar o vento ageostrófico em alguns (mas não todos) termos das equações que governam o movimento.

Equações governantes e suas derivações.

A teoria QG é baseada em versões simplificadas das equações de movimento, equação de continuidade e equação termodinâmica de energia.

Equação Omega

Sumário

A equação do momento QG, a relação do vento geostrófico, a aproximação hidrostática, a equação de continuidade e a equação de energia termodinâmica formam um conjunto fechado de equações para as variáveis dependentes Φ, $\overrightarrow{V_g}$, $\overrightarrow{V_{ag}}$, ω e T.

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o\ )\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_{ag}}\right) - (\beta y\ )\hat{k} \times \left(\overrightarrow{V_g}\right)$$

$$\overrightarrow{V_g} = \frac{1}{f_0}\hat{k} \times \nabla\Phi$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P} = -\frac{RT}{P}$$

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial P} = 0$$

$$\frac{DT}{Dt_g} - \frac{\sigma P}{R}\omega = \frac{J}{C_p}$$

Previsão Quase Geostrófica

A equação de tendência de altura QG

Usando as equações da vorticidade relativa quase geostrófica e a equação da termodinâmica:

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V_g}.\nabla\left(\xi_g + f\right) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V_g} \cdot \nabla\right) T - \frac{\sigma P}{R} \omega = \frac{J}{C_p}$$

- **Podem set reescrita em função de Φ e ω:**
- **Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático:**$\frac{J}{C_p}$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\right)\right]\chi = -f_0\vec{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) - \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{{f_0}^2}{\sigma}\vec{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$A \qquad = \qquad B \qquad + \qquad C$$

A equação fornece a tendência do Geopotencial (A) em função da distribuição de vorticidade (B) e advecção da espessura (C)

O termo B é o principal termo forçante na troposfera superior

O termo C é o principal mecanismo para amplificação ou decaimento dos sistemas sinóticos de média latitude (isso envolve a mudança com a pressão da advecção de espessura (o aquecimento diabático também pode contribuir))

A Equação da Vorticidade Potencial Quase Geostrófica

$$q = \left[\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right]$$

As tres partes da equação são:

- Vorticidade relativa
- Vorticidade planetária
- Alongamento ou encurtamento da vorticidade

A soma das vorticidades é conservada

Previsão Quase Geostrófica

A equação de tendência de altura QG

Usando as equações da vorticidade relativa quase geostrófica e a equação da termodinâmica:

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V_g}.\nabla\left(\xi_g + f\right) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V_g} \cdot \nabla\right) T - \frac{\sigma P}{R}\omega = \frac{J}{C_p}$$

- **Podem set reescrita em função de Φ e ω:**
- **Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático:** $\frac{J}{C_p}$

Previsão Quase Geostrófica

A equação de Termodinamica QG

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\right) T - \frac{\sigma P}{R} \omega = \frac{J}{C_p}$$

Previsão Quase Geostrófica

A equação de tendência de altura QG

Pode-se eliminar ω nas equações usando a relação de Φ com $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ definimos como tendência de geopotencial.

$$\chi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Usando a hidrostática

A equação de tendência de altura QG

Aproximação hidrostática (formulário de coordenadas de pressão)

$$P = -\rho g z$$

$$P = \rho R T$$

$$\rho = \frac{RT}{P}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$\partial P = -\rho g \partial z$$

$$\frac{\partial gz}{\partial P} = -\rho$$

$$\boldsymbol{\Phi = gz}$$

Potencial gravitacional por unidade de massa (Trabalho em Jaule para elevar 1kg de uma altura z a z+dz)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = -\frac{RT}{P}$$

$$T = -\frac{P}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial P}$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático: $\frac{J}{C_p}$

Equação da termodinâmica pode ser reescrita na forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\right) T - \frac{\sigma P}{R}\omega = 0$$

Substitui-se na equação da termodinâmica:

$$T = -\frac{P}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial P}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\right)\left(-\frac{P}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right) - \frac{\sigma P}{R}\omega = 0$$

Previsão Quase Geostrófica

Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático: $\frac{J}{C_p}$

Equação da termodinâmica pode ser reescrita na forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\right)\left(-\frac{P}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)-\frac{\sigma P}{R}\omega=0$$

Elimine o $\frac{P}{R}$ na equação da termodinâmica:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\right)\frac{P}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial P}-\sigma\frac{P}{R}\omega=0$$

Previsão Quase Geostrófica

Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático: $\frac{J}{C_p}$

Equação da termodinâmica pode ser reescrita na forma:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\right)\frac{\partial\Phi}{\partial P}-\sigma\omega=0$$

Reagrupe os termos da equação da termodinâmica:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial P}+\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)-\sigma\omega=0$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial P} + \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) - \sigma\omega = 0$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial P}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) - \sigma\omega = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial P}\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t}} - \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right) - \sigma\omega = 0$$

$$\chi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

- **Podem set reescrita em função de Φ e ω:**
- **Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático:** $\frac{J}{C_p}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{V_g} \cdot \nabla\right) T - \frac{\sigma P}{R} \omega = 0$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial P} = -\overrightarrow{V_g} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right) - \sigma \omega$$

Equivalência entre a equação da termodinâmica e da tendência do geopotencial

Previsão Quase Geostrófica

Equação da vorticidade relativa quase geostrofica :

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V_g}.\nabla\left(\xi_g + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

Para simplificar as equações ignora-se o termo de aquecimento diabático: $\frac{J}{C_p}$

Equação da vorticidade relativa quase geostrofica pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\xi_g + f\right) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Substitui-se na equação da vorticidade :

$$\xi_g = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

Equação da Momentum pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\vec{V_g}.\nabla(\xi_g + f) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\xi_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}$$

$$v_g = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$u_g = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\xi_g = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$$

$$\xi_g = \frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$$

$$\xi_g = \frac{1}{f_0}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)$$

$$\xi_g = \frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

Equação da Momentum pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\xi_g + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\xi_g = \frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi\right) = -\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

Equação da Momentum pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi\right) = -\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + f_0\frac{\partial\omega}{\partial P}$$

$$\frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\Phi) = -\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + f_0\frac{\partial\omega}{\partial P}$$

$$\chi = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

$$\nabla^2\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -f_0\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + {f_0}^2\frac{\partial\omega}{\partial P}$$

$$\boxed{\nabla^2\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + {f_0}^2\frac{\partial\omega}{\partial P}}$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021

Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Previsão Quase Geostrófica

Portanto tem-se a equação da vorticidade em termo do geopotencial

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -\overrightarrow{V_g} \nabla . \left(\xi_g + f\right) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

$$\nabla^2 \chi = -f_0 \overrightarrow{V_g} . \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) + {f_0}^2 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Equivalência entre a equação da vorticidade e da tendência do geopotencial

Previsão Quase Geostrófica

Portanto Temos os Sistema de equação acopladas para os sistema Quase Geostrofico

Previsão Quase Geostrófica

Portanto as equações para o sistema Quase Geostrófico são:

$$\frac{\partial \chi}{\partial P} = -\overrightarrow{V_g} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P} \right) - \sigma\omega$$

A $\frac{\partial \chi}{\partial P}$ indica que a mudança vertical da tendência do geopotencial é igual a soma da advecção de espessura e a mudança da espessura adiabática forçada pelo movimento vertical

$$\nabla^2 \chi = -f_0 \overrightarrow{V_g} . \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) + {f_0}^2 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

O $\nabla^2 \chi$ indica que o laplaciano horizontal da tendência do geopotencial é igual a soma da advecção de vorticidade mais a geração de vorticidade pelo efeito divergente

Equação Omega

Resolver as equações Acopladas da equação da vorticidade relativa geostrófica e da equação da termodinâmica em função de omega

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Equação Omega

Diagnostico da velocidade vertical

As equações do sistema Quase Geostrófico pode ser utilizado para diagnosticar ω a partir do campo de Φ e $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$

Equação Omega

Se eliminarmos χ e manter ω das equações do sistema Quase Geostrófico

$$\frac{\partial \chi}{\partial P} = -\overrightarrow{V_g} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P} \right) - \sigma \omega$$

$$\nabla^2 \chi = -f_0 \overrightarrow{V_g} . \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) + {f_0}^2 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Obtém-se uma equação diagnostica que relaciona o campo de ω em qualquer estado do campo de Φ no mesmo tempo.

Equação Omega

Se eliminarmos χ e manter ω das equações do sistema Quase Geostrófico

$$\frac{\partial \chi}{\partial P} = -\vec{V_g} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right) - \sigma\omega$$

$$\nabla^2 \chi = -f_0 \vec{V_g} . \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f\right) + f_0{}^2 \frac{\partial \omega}{\partial P}$$

Aplica-se o laplaciano horizontal ∇_H^2 na equação de variação vertical da tendência de geopontencial

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial \chi}{\partial P}\right) = -\nabla^2 \left(\vec{V_g} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) - \nabla^2(\sigma\omega)$$

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2 \chi) = -\nabla^2 \left(\vec{V_g} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)\right) - \omega\nabla^2(\sigma) - \sigma\nabla^2(\omega)$$

$\omega\nabla^2(\sigma) = 0$, σ não depende da horizontal

$$\boxed{\sigma = -\frac{RT_0}{P}\frac{dln\theta}{dP}}$$

Parâmetro de estabilidade estática

Equação Omega

Se eliminarmos χ e manter ω das equações do sistema Quase Geostrófico

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -\nabla^2\left(\vec{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) - \omega\nabla^2(\sigma) - \sigma\nabla^2(\omega)$$

$\omega\nabla^2(\sigma) = 0$, σ não depende da horizontal

Parâmetro de estabilidade estática

$$\boxed{\sigma = -\frac{RT_0}{P}\frac{dln\theta}{dP}}$$

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -\nabla^2\left(\vec{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) - \sigma\nabla^2(\omega)$$

Equação Omega

Se eliminarmos χ e manter ω das equações do sistema Quase Geostrófico

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -\nabla^2\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) - \sigma\nabla^2(\omega)$$

$$\nabla^2\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + f_0{}^2\frac{\partial\omega}{\partial P}$$

Aplica-se a derivada em P na equação do $\nabla^2\chi$ da vorticidade relativa geostrofica

$$\nabla^2\chi = -f_0\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + f_0{}^2\frac{\partial\omega}{\partial P}$$

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -\frac{\partial}{\partial P}\left(f_0\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) + \frac{\partial}{\partial P}\left(f_0{}^2\frac{\partial\omega}{\partial P}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -f_0\frac{\partial}{\partial P}\left(\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) + f_0{}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial P^2}$$

Equação Omega

Equação Omega

Se eliminarmos χ e manter ω das equações do sistema Quase Geostrófico

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -\nabla^2\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) - \sigma\nabla^2(\omega)$$

A

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -f_0\frac{\partial}{\partial P}\left(\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) + {f_0}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial P^2}$$

B

Observe o termo da diferencial vertical do laplaciona da tendencia de geopotencial. Portanto, subtraindo a equação A da equação B elimina-se χ

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) - \frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -\nabla^2\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) + f_0\frac{\partial}{\partial P}\left(\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) - \sigma\nabla^2(\omega) - {f_0}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial P^2}$$

Reagrupando os termos:

$$0 = -\nabla^2\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) + f_0\frac{\partial}{\partial P}\left(\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) - \sigma\nabla^2(\omega) - {f_0}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial P^2}$$

Equação Omega

Se eliminarmos χ e manter ω das equações do sistema Quase Geostrófico

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -\nabla^2\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) - \sigma\nabla^2(\omega)$$

A

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -f_0\frac{\partial}{\partial P}\left(\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) + {f_0}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial P^2}$$

B

$$0 = -\nabla^2\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) + f_0\frac{\partial}{\partial P}\left(\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) - \sigma\nabla^2(\omega) - {f_0}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial P^2}$$

Isola-se os termos com ω

$$\sigma\nabla^2(\omega) + {f_0}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial P^2} = -\nabla^2\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) + f_0\frac{\partial}{\partial P}\left(\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right)$$

Equação Omega

Se eliminarmos χ e manter ω das equações do sistema Quase Geostrófico

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -\nabla^2\left(\vec{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) - \sigma\nabla^2(\omega)$$

A

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -f_0\frac{\partial}{\partial P}\left(\vec{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) + {f_0}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial P^2}$$

B

$$\sigma\nabla^2(\omega) + {f_0}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial P^2} = -\nabla^2\left(\vec{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) + f_0\frac{\partial}{\partial P}\left(\vec{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right)$$

Ordene os termos da vorticidade:

$$\sigma\nabla^2(\omega) + {f_0}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial P^2} = f_0\frac{\partial}{\partial P}\left(\vec{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) - \nabla^2\left(\vec{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Equação Omega

Se eliminarmos χ e manter ω das equações do sistema Quase Geostrófico

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -\nabla^2\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) - \sigma\nabla^2(\omega)$$

A

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -f_0\frac{\partial}{\partial P}\left(\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) + {f_0}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial P^2}$$

B

$$\sigma\left(\nabla^2 + \frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial P^2}\right)\omega = f_0\frac{\partial}{\partial P}\left(\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) - \nabla^2\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Termos com destaque em verde é da equação da vorticidade

Termos com destaque em laranja é da equação da termodinâmica

Equação Omega

Equação Omega

Se eliminarmos χ e manter ω das equações do sistema Quase Geostrófico

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -\nabla^2\left(\vec{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) - \sigma\nabla^2(\omega)$$

A

$$\frac{\partial}{\partial P}(\nabla^2\chi) = -f_0\frac{\partial}{\partial P}\left(\vec{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) + {f_0}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial P^2}$$

B

$$\sigma\left(\nabla^2 + \frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial P^2}\right)\omega = \frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\left(\vec{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) - \frac{1}{\sigma}\nabla^2\left(\vec{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

A equação do lado direito depende somente da advecção da vorticidade geostrófica absoluta e da advecção de temperatura pelo escoamento geotrofico.

Equação Omêga

Define-se como a Equação Omêga

$$\sigma\left(\nabla^2+\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial P^2}\right)\omega=\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\left(\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi+f\right)\right)-\frac{1}{\sigma}\nabla^2\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{A} \qquad = \qquad \boldsymbol{B} \qquad + \qquad \boldsymbol{C}$$

Equação Omega

O termo A

- Atua para propagar a resposta de uma forçante localizada.

- Considera-se o parâmetro de estabilidade σ constante e definido positivamente (atmosfera termal estável), se a atmosfera é instável , não se pode usar esta equação, porque não é especificado pela teoria QG.

- A magnitude de cada função forçante é inversamente proporcional a σ. Assim, o efeito de cada função forçante é aumentado quando σ é pequeno. (favorece o movimento vertical)e o feito é reduzido quando a σ é alto. (inibe o movimento vertical).

$$\sigma\left(\nabla^2+\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial P^2}\right)\omega=\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\left(\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi+f\right)\right)-\frac{1}{\sigma}\nabla^2\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Equação Omega

O termo B

A advecção de vorticidade absoluta geostrófica aumenta com a altura.

Efeito é mais forte na média troposfera. Nos níveis mais baixos, onde os padrões do escoamento são aproximadamente circulares a advecção de vorticidade absoluta é pequena.

Em 500mb : advecção de vorticidade ciclonica é máxima acima do centro de baixa pressão em superficie, resultando em:

$w > 0$ movimento ascendente

Em 500mb : advecção de vorticidade anticiclonica é máxima acima do centro de alta pressão em superfície, resultando em:

$w < 0$ movimento subsidente

$$\sigma\left(\nabla^2 + \frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial P^2}\right)\omega = \frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\left(\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) - \frac{1}{\sigma}\nabla^2\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Equação Omega

O termo C

Efeito é mais forte na baixa troposfera (próximo a superfície)

Em regiões de advecção quente
$\omega < 0 \Rightarrow w > 0$ (movimento ascendente ocorre a leste da baixa em superfície)

Em regiões de advecção fria:
$\omega > 0 \Rightarrow w < 0$ (Movimento subsidente ocorre a oeste da baixa em superfície)

Advecção quente: aumenta a espessura em 500-1000 hPa na região da crista em 500 hPa
Advecção fria: diminui a espessura 500-1000hPa na região do cavado em 500 hPa.

Então para manter o balanço geostrófico, precisa ocorrer movimento ascendente/subsidente na região da baixa/alta em superfície, para compensar o ar divergindo/convergindo em altos níveis.

$$\sigma\left(\nabla^2 + \frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial P^2}\right)\omega = \frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\left(\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) - \frac{1}{\sigma}\nabla^2\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Equação Omega

Os termos B e C são forçantes

Equação diagnostica que relaciona o campo de movimento vertical ω em qualquer instante com o campo geopotencial Φ.

A solução da equação requer informação sobre a distribuição do geopotencial Φ em apenas um instante no tempo.

$$\sigma\left(\nabla^2 + \frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial P^2}\right)\omega = \frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\left(\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right) - \frac{1}{\sigma}\nabla^2\left(\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Equação Omega

Com a equação da tendência geopotencial, podemos entender a equação ômega de maneira qualitativa, assumindo que os distúrbios atmosféricos são sinusoidais. O Lado esquerdo da equação é proporcional ao negativo de ômega, ou

$$\sigma\left(\nabla^2 + \frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial P^2}\right)\omega \quad \propto \quad -\omega$$

Equação Omega

Equação Omega

$$\sigma\left(\nabla^2+\frac{{f_0}^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial P^2}\right)\omega \quad \propto \quad -\omega$$

Portanto:

$$\omega=\frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\left(-\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi+f\right)\right)-\frac{1}{\sigma}\nabla^2\left(-\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

Omega é proporcional a diferencial vertical da $\frac{\partial}{\partial P}$ advecção da vorticidade absoluta menos advecção térmica

INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA EQUAÇÃO OMEGA

Assim como na equação de tendência, os termos no RHS da equação ômega podem ser explicados fisicamente.

Diferencial da Advecção de vorticidade absoluta PVA $= \frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f$:

$$\omega = \frac{f_0}{\sigma}\frac{\partial}{\partial P}\left(-\overrightarrow{V_g}.\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)\right)$$

Se o PVA aumentar com a altura, isso implica que haverá uma divergência crescente do vento advetivo com a altura.

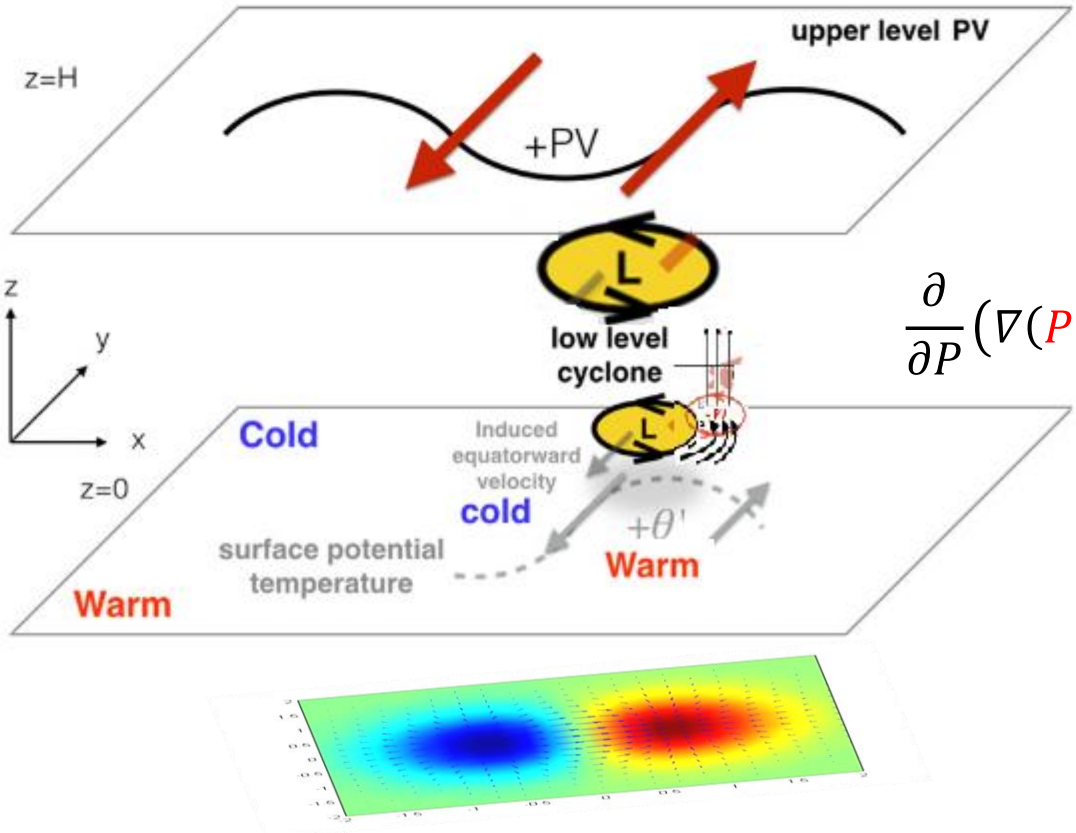
Essa crescente divergência $\frac{\partial}{\partial P}\left(\nabla(PVA)\right) > 0$ com a altura resultará em movimento vertical ascendente $w > 0$ e $\omega < 0$.

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Equação Omega

INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA EQUAÇÃO OMEGA

$$\omega = \frac{f_0}{\sigma}\left(-\overrightarrow{V_g}.\frac{\partial}{\partial P}\nabla(PVA)\right)$$

movimento vertical ascendente $\omega < 0$.

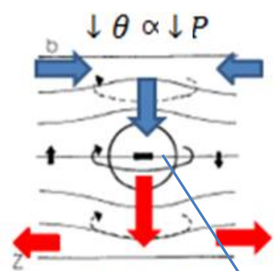


$$\frac{\partial}{\partial P}\left(\nabla(PVA)\right) > 0$$

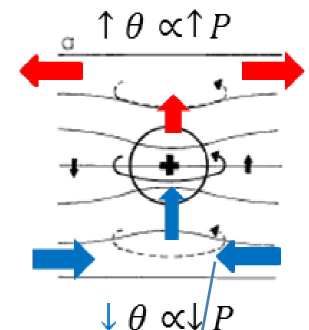
Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Equação Omega

INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA EQUAÇÃO OMEGA

$$\omega = \frac{f_0}{\sigma}\left(-\vec{V_g}\cdot\frac{\partial}{\partial P}\nabla(PVA)\right)$$

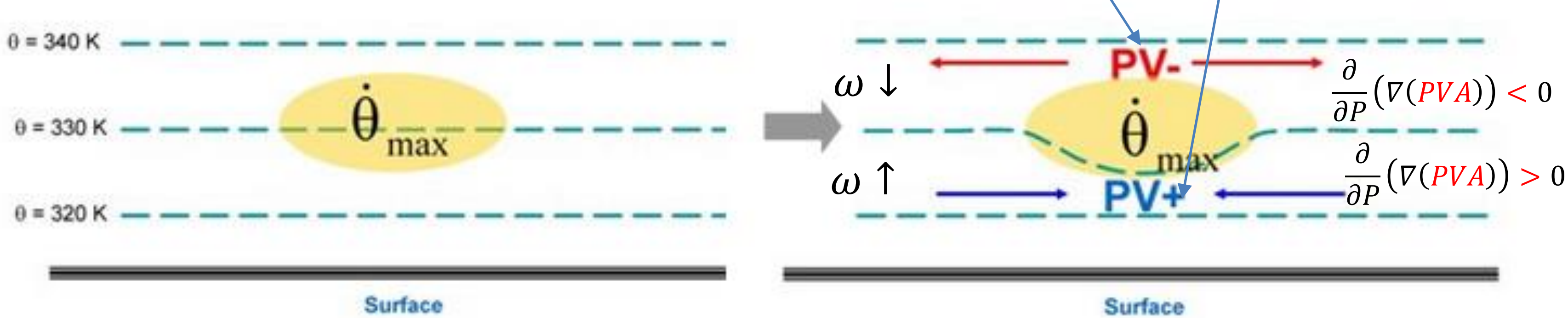


Divergência (compressão do ar abaixo (aquece))



Convergência

Above heating max → reduced static stability → PV decreases (-)
Below heating max → increased static stability → PV increases (+)

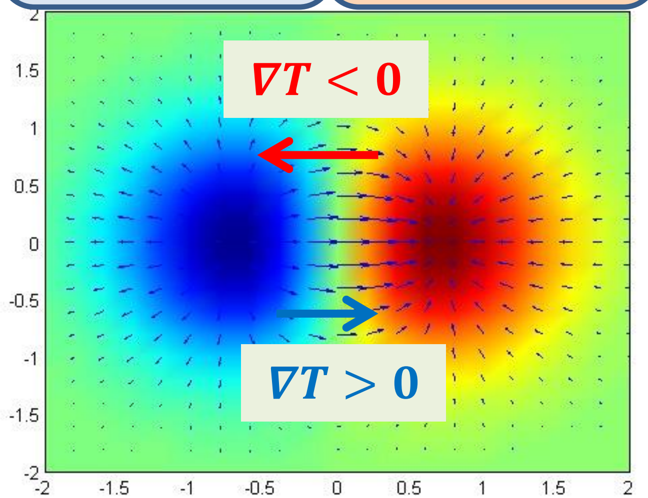


Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial

$gradiente\ de\ temperatura\ \nabla T$>0 sempre aponta para maior temperatura

$-\vec{V}_g.\nabla T > 0$	$-\vec{V}_g.\nabla T < 0$
$\nabla T < 0$	$\nabla T > 0$



Omega $\propto -\frac{\partial}{\partial z}\left[-\overrightarrow{V_g}.\nabla T\right]$

Portanto

• O diferencial da advecção positiva da temperatura ($\frac{\partial}{\partial z}\left(-\overrightarrow{V_g}.\nabla T\right) > 0$) resulta em aumento de omega com a altura

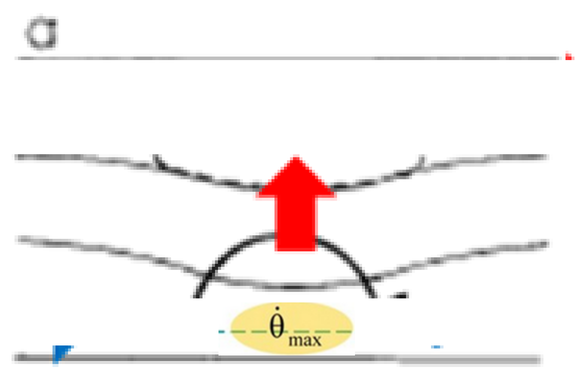
• O diferencial da advecção negativa da temperatura($\frac{\partial}{\partial z}\left(-\overrightarrow{V_g}.\nabla T\right) < 0$) resulta em queda de omega com a altura

Dinâmica I 15/04/2021 a 30/05/2021
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Equação da Tendência de Geopotencial

$$omega \propto -\frac{\partial}{\partial z}\left[-\vec{V_g}.\nabla T\right]$$

Movimento ascendente



$\uparrow \theta \propto P$

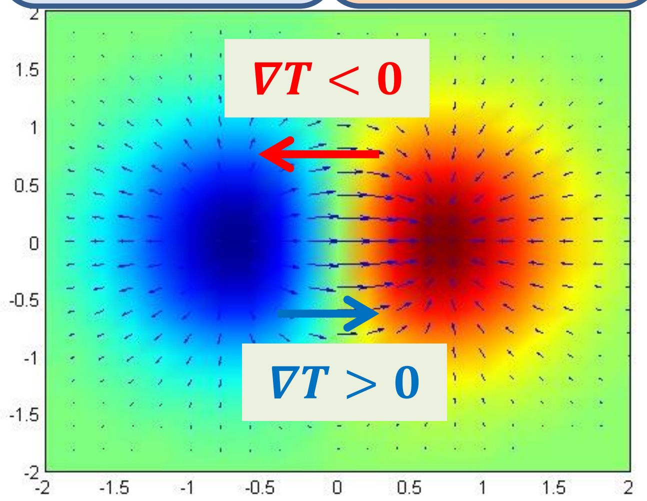
$\left[-\vec{V_g}.\nabla T\right] = 0$

$\frac{\partial}{\partial z}\left[-\vec{V_g}.\nabla T\right] < 0$

$\left[-\vec{V_g}.\nabla T\right] > 0$

$\boldsymbol{\nabla T < 0}$

$-\vec{V_g}.\nabla T > 0$	$-\vec{V_g}.\nabla T < 0$
$\nabla T < 0$	$\nabla T > 0$



Máximo aquecimento abaixo

Portanto

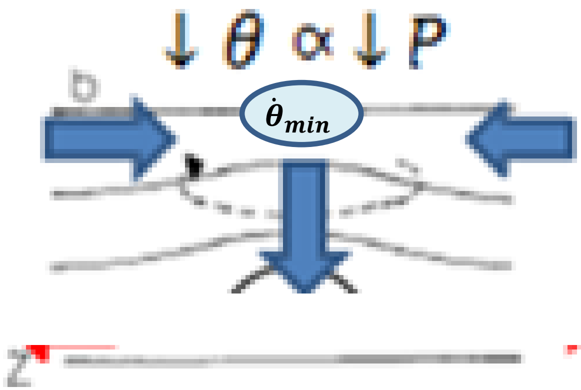
- O diferencial da advecção positiva da temperatura ($\frac{\partial}{\partial z}\left(-\vec{V_g}.\nabla T\right) > 0$) resulta em aumento de omega com a altura
- O diferencial da advecção negativa da temperatura($\frac{\partial}{\partial z}\left(-\vec{V_g}.\nabla T\right) < 0$) resulta em queda de omega com a altura

Equação da Tendência de Geopotencial

$$omega \propto -\frac{\partial}{\partial z}\left[-\vec{V}_g . \nabla T\right]$$

Movimento descendente

$\boldsymbol{\nabla T > 0}$

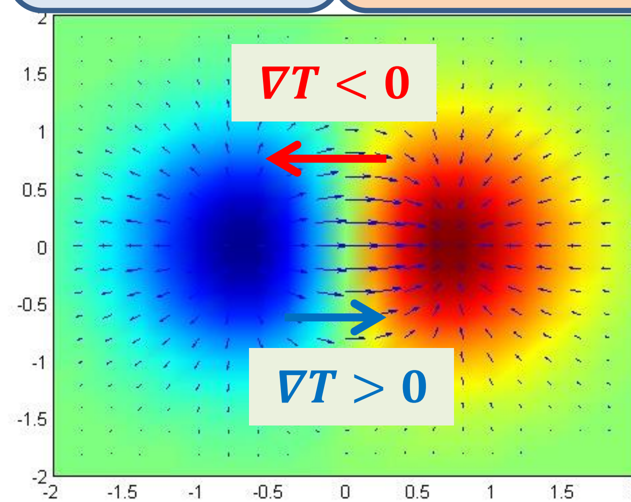


$$\left[-\vec{V}_g . \nabla T\right] > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[-\vec{V}_g . \nabla T\right] > 0$$

$$\left[-\vec{V}_g . \nabla T\right] = 0$$

$-\vec{V}_g . \nabla T > 0$	$-\vec{V}_g . \nabla T < 0$
$\nabla T < 0$	$\nabla T > 0$



Portanto

- O diferencial da advecção positiva da temperatura ($\frac{\partial}{\partial z}(-\vec{V}_g . \nabla T) > 0$) resulta em aumento de omega com a altura
- O diferencial da advecção negativa da temperatura($\frac{\partial}{\partial z}(-\vec{V}_g . \nabla T) < 0$) resulta em queda de omega com a altura

Equação Omega

INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA EQUAÇÃO OMEGA

Assim como na equação de tendência, os termos no RHS da equação ômega podem ser explicados fisicamente.

Advecção térmica:

$$\omega = -\frac{1}{\sigma}\nabla^2\left(-\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)$$

$$\omega\ proporcinal\ a\ -\frac{1}{\sigma}\nabla^2\left(-\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right)\ proporcinal\ a\ -\frac{\partial}{\partial z}\left[-\overrightarrow{V_g}.\nabla T\right]$$

A advecção quente aumentará a espessura da camada e resultará em niveis mais altos um aumento da espessura e nos niveis mais baixo uma redução da ESPESSURA.

Isso resulta em divergência do vento isobarico no alto e convergência do vento isobarico abaixo.

Esse padrão de convergência / divergência leva ao movimento ascendente.

Equação Omega

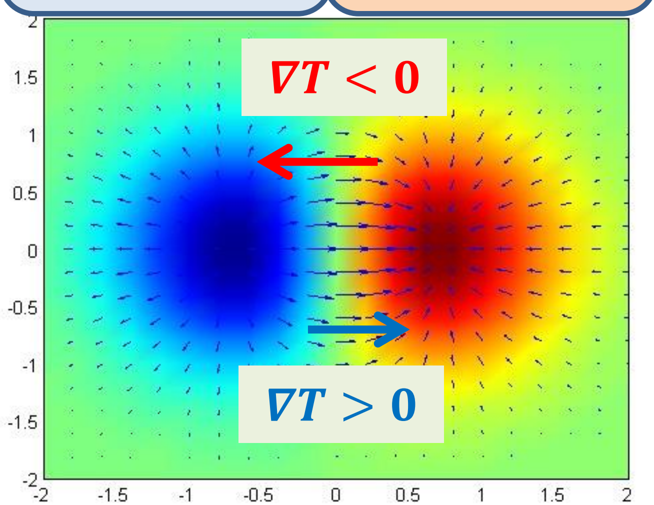
INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA EQUAÇÃO OMEGA

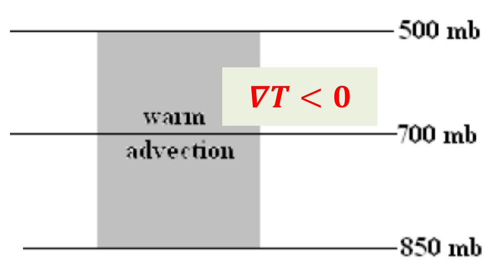
Assim como na equação de tendência, os termos no RHS da equação ômega podem ser explicados fisicamente.

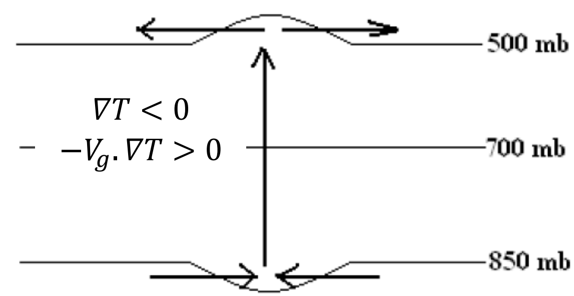
Advecção térmica: A advecção quente em 700mb

$$\omega \propto -\frac{\partial}{\partial z}\left[-\vec{V_g}.\nabla T\right]$$

$-\vec{V_g}.\nabla T > 0$	$-\vec{V_g}.\nabla T < 0$
$\nabla T < 0$	$\nabla T > 0$







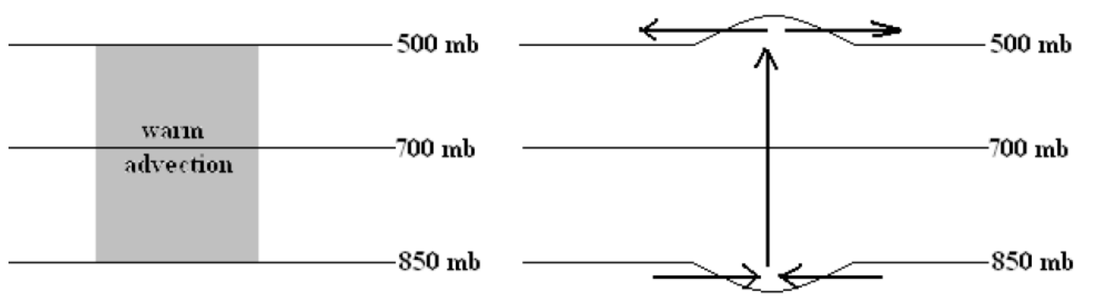
Thickness increase due to warm advection at 700 mb raises 500 mb heights and lowers 850 mb heights. The isallobaric wind diverges at 500 mb and converges at 850 mb, resulting in upward vertical motion at 700 mb.

$\nabla T > 0$

INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA EQUAÇÃO OMEGA

Assim como na equação de tendência, os termos no RHS da equação ômega podem ser explicados fisicamente.

Isso resulta em divergência do vento isobarico no alto e convergência do vento isobarico abaixo.



Thickness increase due to warm advection at 700 mb raises 500 mb heights and lowers 850 mb heights. The isallobaric wind diverges at 500 mb and converges at 850 mb, resulting in upward vertical motion at 700 mb.

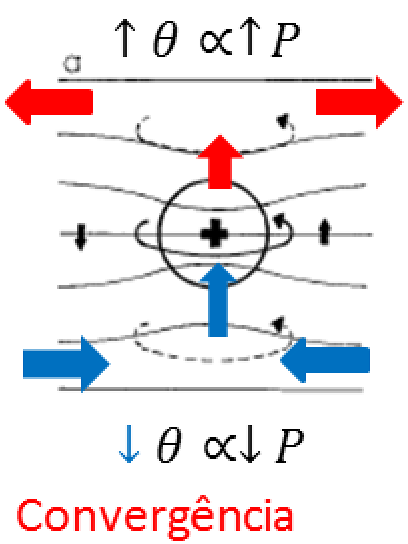
$$\omega \propto -\frac{1}{\sigma}\nabla^2\left(-\overrightarrow{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) \propto -\frac{\partial}{\partial z}\left[-\overrightarrow{V_g}.\nabla T\right]$$

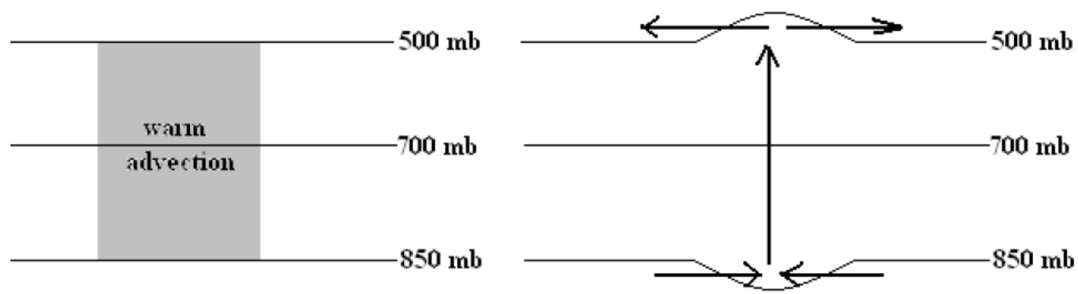
Equação Omega

INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA EQUAÇÃO OMEGA

Assim como na equação de tendência, os termos no RHS da equação ômega podem ser explicados fisicamente.

Isso resulta em divergência do vento isobarico no alto e convergência do vento isobarico abaixo.





Thickness increase due to warm advection at 700 mb raises 500 mb heights and lowers 850 mb heights. The isallobaric wind diverges at 500 mb and converges at 850 mb, resulting in upward vertical motion at 700 mb.

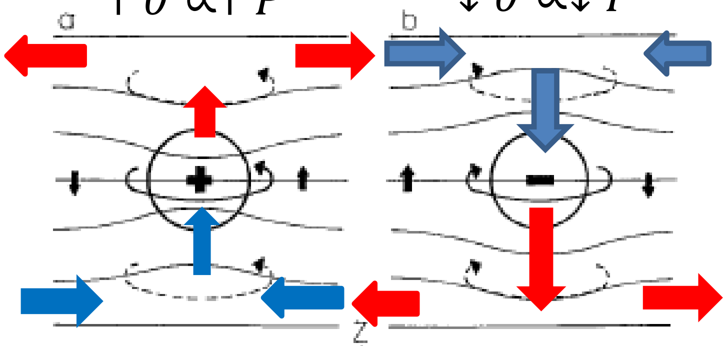
$$\omega \propto -\frac{1}{\sigma}\nabla^2\left(-\vec{V_g}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)\right) \propto -\frac{\partial}{\partial z}\left[-\vec{V_g}.\nabla T\right]$$

Equação Omega

As isentrópicas (temperatura potencial) e a circulação para **anomalias PV internas** positivas (a) e negativas (b) e para **anomalias de temperatura de superficie** quente (c) e fria (d). Também é mostrado o sentido do movimento vertical, se houver um fluxo básico ao longo das seções, que aumenta com a altura.

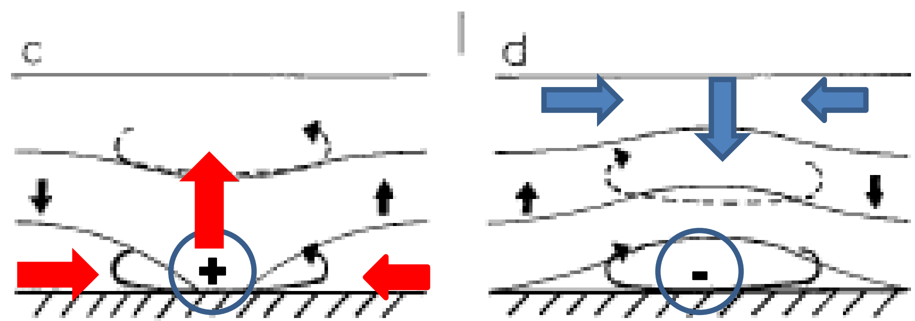
$$\theta = T\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}}$$

$\uparrow \theta \propto \uparrow P$ $\downarrow \theta \propto \downarrow P$



$\downarrow \theta \propto \downarrow P$ $\uparrow \theta \propto \uparrow P$

Convergência (expansão do ar abaixo) → Divergência (compressão do ar abaixo (aquece))



$\uparrow \theta \propto \downarrow P$ $\downarrow \theta \propto \uparrow P$

Aquecimento e resfriamento da superfície

Equação Omega

Exercício

1) Explique porque o termo B é melhor representado na média troposfera e o termo C para atmosfera próxima a superfície.

R: