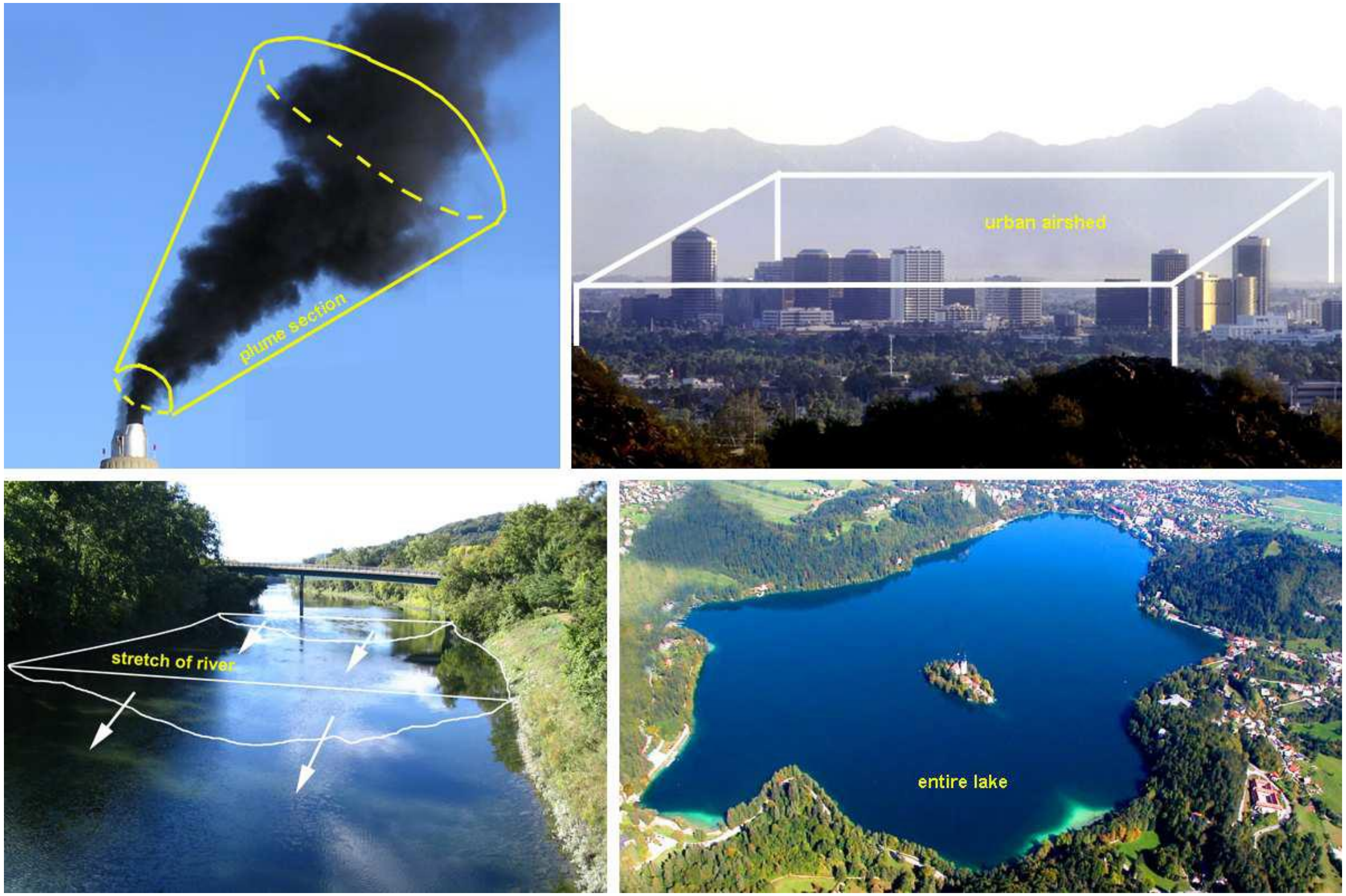
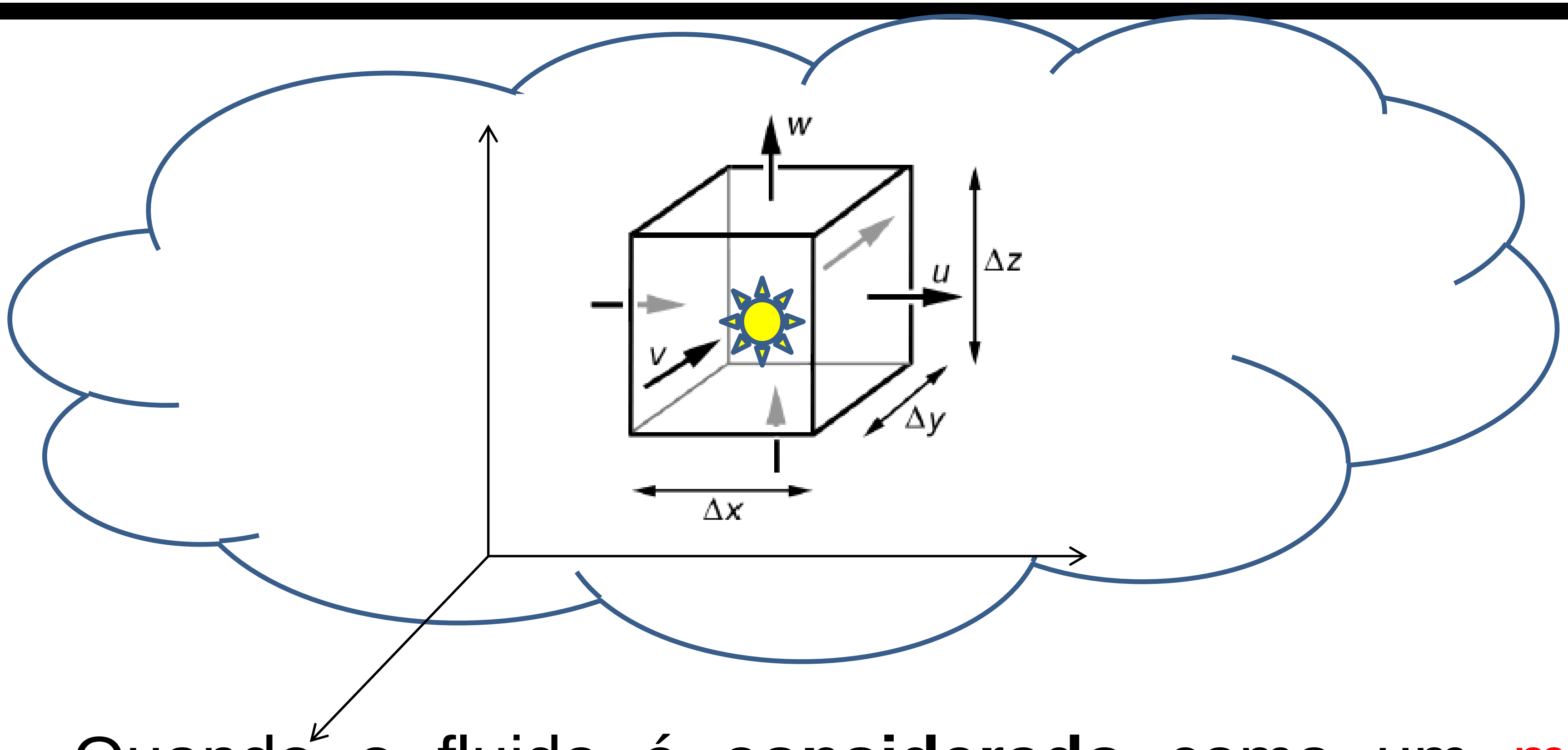
PRINCIPIO FISICO

Um volume de controle pode ser praticamente qualquer coisa imaginável, um pedaço de atmosfera, um trecho de rio, um lago, ou mesmo toda a troposfera.



Exemplos de Volume de controle

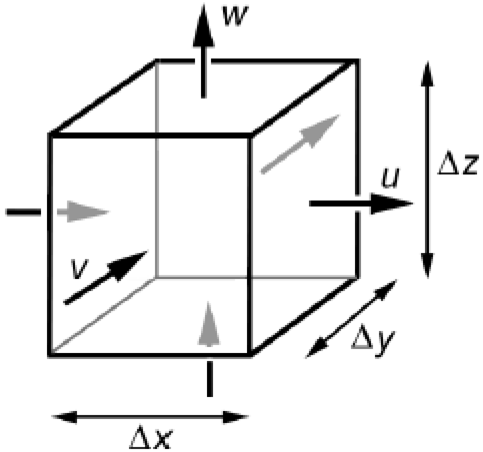
PRINCIPIO FISICO



Quando o fluido é **considerado** como um meio contínuo, a **quantidade física média** que descreve tais troca entre o volume de controle e os seus arredores é o fluxo.

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

O fluxo de qualquer quantidade (massa, momento, energia, substância dissolvida ou suspensa) é definida como a **quantidade da referida quantidade que cruza uma fronteira por unidade de área e por unidade de tempo**



$$fluxo = q = \frac{quantidade\ atravessando\ um\ contorno}{area\ do\ contorno\ \mathbf{X}\ duração\ do\ tempo}$$

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

Por exemplo, se a quantidade de massa é, então o fluxo é um taxa de massa por unidade de área e por unidade de tempo, para ser expresso em unidades tais como kg/m^{2}s.

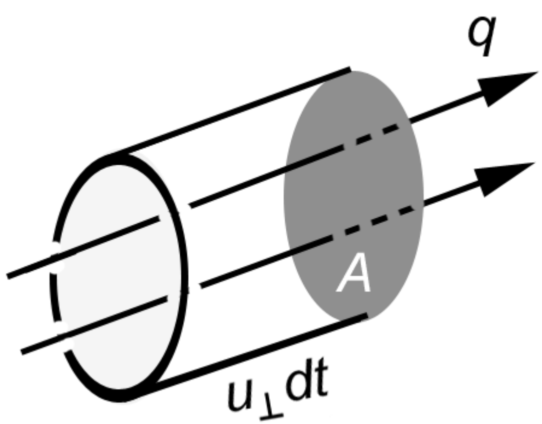
$$fluxo = q = \frac{quantidade\ atravessando\ um\ contorno}{area\ do\ contorno\ \mathbf{X}\ duração\ do\ tempo}$$

$$fluxo = \boxed{\frac{quantidade}{Volume\ do\ fluido}}\ X\ \frac{Volume\ do\ fluido\ atravessando\ um\ contorno}{area\ do\ contorno\ \mathbf{X}\ duração\ do\ tempo}$$

A "**quantidade por volume de fluido** " pode ser definido como **c**, **a concentração dessa quantidade**.

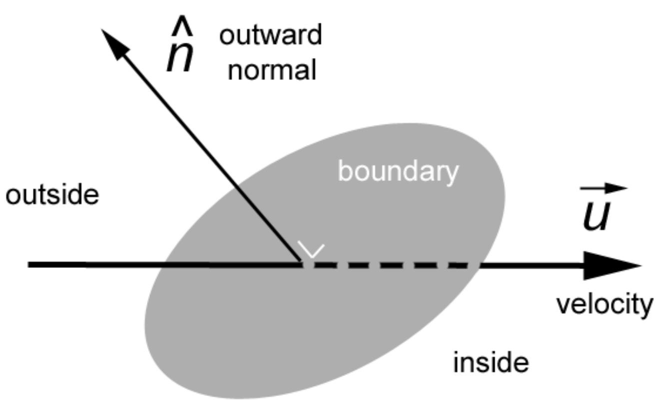
- Se a massa que é, **c** é a massa por unidade de volume, isto é, densidade e é definida ρ;
- se é momentum, **c** é a velocidade vezes massa (um vetor) por volume, igual a densidade vezes a velocidade ou $\boldsymbol{\rho\vec{u}}$; etc.

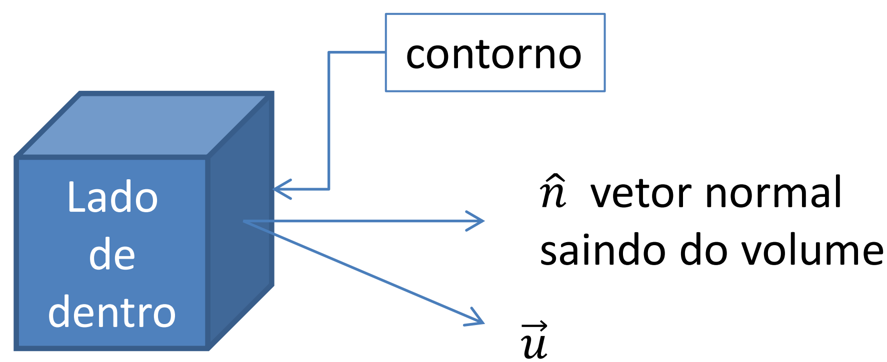
PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)



Definição de Fluxo

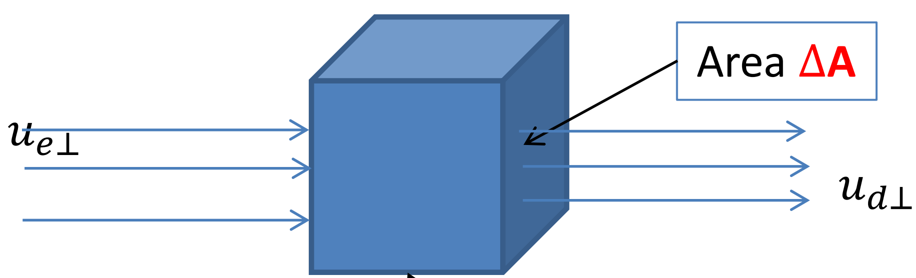
É como o escoamento de uma substancia atravessa uma superfície de contorno





PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

Se a **porção do contorno** em consideração tem uma **área ΔA** . E se $\boldsymbol{u_\perp}$ é o componente da velocidade do escoamento, que é **perpendicular a esta área**, então o **valor da quantidade** que atravessa a área A em um intervalo de tempo Δt está todo contido em um **volume de fluido** definido como ΔA base e o seu comprimento $\Delta \mathrm{x} = \Delta u_\perp \Delta t$



O **volume de fluido** ΔV atravessando o contorno é

$$\Delta V = \Delta A \Delta u_\perp \Delta t \Rightarrow (area\ vezes\ o\ comprimento)$$

$$\Delta x = \Delta u_\perp \Delta t$$

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

A **quantidade total (m)** transportada pelo volume é dado por $\Delta c \Delta V$ (quantidade no volume (**c**) vezes o volume (**V**)), onde **o fluxo** (quantidade transportada por área por unidade de tempo) é:

$$\boldsymbol{\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V}$$

$$\boldsymbol{q = \frac{\Delta c V}{\Delta A \Delta t} = \frac{\Delta c \Delta A \Delta u_{\perp} \Delta t}{\Delta A \Delta t} = \Delta c \Delta u_{\perp} = \Delta c u_{\perp}}$$

$$\boldsymbol{\Delta\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \Rightarrow \Delta m = \Delta\rho \Delta V = \Delta\rho V}$$

Assim, o fluxo de qualquer quantidade através de um limite é igual ao produto da concentração da referida quantidade (quantidade por volume) pela componente da velocidade perpendicular ao limite.

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

No entanto, como foi apenas definido a componente positiva se orientada ao longo de **n**, isto é, para o exterior de V; para considerar a componente como positivo se for dirigida para dentro de V , precisamos mudar o sinal: $u_{\perp} = -\vec{u} \cdot \hat{n}$. A definição do fluxo é então generalizada, onde **$\hat{n}$ é um vetor unitário 1 perpendicular a area**

$$\boxed{q = \Delta c u_{\perp} = -\Delta c \vec{u} \cdot \hat{n}}$$

Então

$$\boxed{q = \Delta c \vec{u} \cdot \hat{n}}$$

E a quantidade que atravessa a área **A** de um contornos por unidade de tempo é:

$$q = \frac{\textit{quantidade atravessando um contorno}}{\textit{area do contorno } X \textit{ duração do tempo}}$$

$$\boxed{q = \Delta c \vec{u} \cdot \hat{n}}$$

$$q = \frac{\textit{quantidade atravessando um contorno}}{\textit{area do contorno } \mathbf{X} \textit{ duração do tempo}}$$

$$\boxed{q = \frac{\Delta c \Delta V}{\Delta A \Delta t}}$$

$$\textit{quantidade atravessando um contorno} = q \ \mathbf{X} \ \textit{area do contorno} \ \mathbf{X} \ \textit{duração do tempo}$$

$$\boxed{\Delta c \Delta V = q(\Delta A \Delta t)}$$

$$\boxed{\frac{\Delta c \Delta V}{\Delta t} = q \Delta A}$$

$$\boxed{\frac{\Delta c V}{\Delta t} = q \Delta A}$$

No limite de um de tempo infinitesimal $\Delta t \rightarrow 0$: $\boxed{\Delta V \frac{dc}{dt} = q \Delta A}$

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

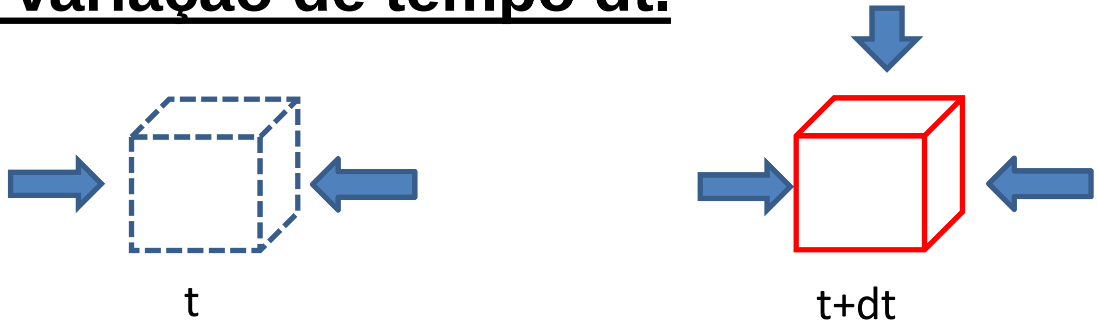
Estamos agora em condições de escrever **um balaço para um volume de controle**. Para levar em conta todo o montante da quantidade em questão, podemos escrever:

$$Acumulação\ no\ Volume\ de\ Controle = \begin{cases} \sum Importações\ através\ de\ fronteiras \\ -\sum Exportações\ através\ das\ fronteiras \\ +\sum Fontes\ dentro\ do\ volume\ de\ controle \\ -\sum Dissipadores\ dentro\ do\ volume\ de\ controle. \end{cases}$$

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

O balaço é escrito como uma taxa (ou seja, por unidade de tempo).

A **acumulação** é então a **diferença entre os valores presentes no volume de controle em tempos t e t + dt, dividido pelo variação de tempo dt.**



Durante o período de tempo dt, a taxa de acumulação é:

$$Acumulação\ no\ Volume\ de\ controle = \frac{1}{\Delta t}\left[(\Delta c \Delta V)_{t+dt} - (\Delta c \Delta V)_{dt}\right]$$

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

No limite de um de tempo infinitesimal $\Delta t \rightarrow 0$:

$$Acumulação\ no\ Volume\ de\ controle = \frac{\Delta(cV)}{\Delta t}$$

$$Acumulação\ no\ Volume\ de\ controle = \Delta V\,\frac{dc}{dt}$$

uma vez que o volume V do volume de controle é fixo ao longo do tempo

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

As exportações através das fronteiras podem ser contado como importações negativas.
Assim um único somatório é suficiente para todas as importações e exportações. Por unidade de tempo, esta soma é:

$$\sum As\ importações, menos\ as\ exportações\ através\ de\ fronteiras = \sum q_i \Delta A_i$$

$$\sum As\ importações, menos\ as\ exportações\ através\ de\ fronteiras = \sum \Delta c_i \Delta u_{\perp i} \Delta A_i$$

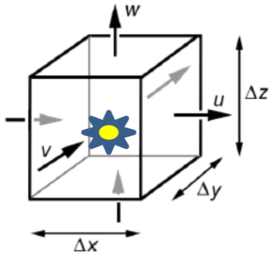
$$\boxed{\sum As\ importações, menos\ as\ exportações\ através\ de\ fronteiras = \sum \Delta c_i \left(\overrightarrow{\Delta u}_i \cdot \hat{n}_i\right) \Delta A_i}$$

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

A determinação das **fontes** e **sumidouros** **dentro do volume de controle** requer a especificação da quantidade para a qual o balanço é executado (massa, momento, energia, etc)

- Um **conhecimento dos mecanismos** pelos quais essa quantidade pode ser gerada ou dissipada.

Por enquanto, vamos apenas assumir todas as fontes e sumidouros em um único termo S, igual ao montante líquido da quantidade que é gerada no interior do volume de controle por unidade de tempo:

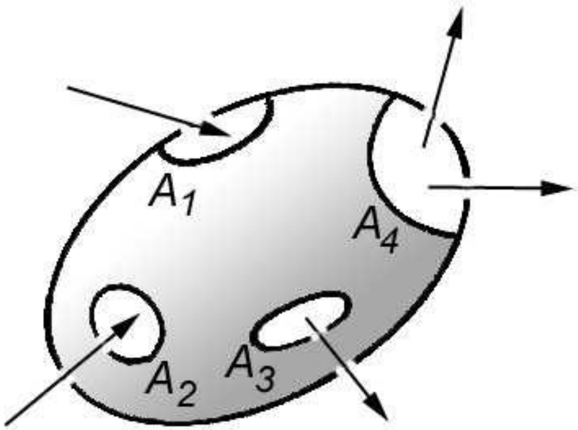


$$\sum Fontes\ menos\ souvedouros\ dentro\ do\ valume\ de\ controle = S$$

Agora, com todas as peças juntas, formam o balaço torna-se:

$$\Delta V \frac{dc}{dt} = \sum \Delta c_i \Delta u_{\perp i} \Delta A_i + S$$

Onde mais uma vez a soma sobre o **índice** i abrange todas as entradas e saídas do **volume de controle**.



Uma definição necessário para massa ser conservada.

De fato, "tudo tem que ir a algum lugar", e não há nenhuma fonte ou sumidouro de massa.

Nos sistemas de fluido, isto significa que a diferença entre a quantidade de massa que entra no volume de qualquer controle e a quantidade de massa que sai dele cria uma acumulação igual de fluido no interior desse volume

Quando a quantidade em questão é massa, a concentração Δc_i torna-se massa por volume, ou densidade, que definimos por ρ (unidades: kg / m^3).

Como não existe uma fonte ou sumidouro de massa (S = 0), o balaço torna-se:

$$\Delta V \frac{d\rho}{dt} = \sum \Delta c_i \Delta u_{\perp i} \Delta A_i$$

$$\Delta V \frac{d\rho}{dt} = \sum \rho \Delta u_{\perp i} \Delta A_i$$

Balaço para um Volume Infinitesimal

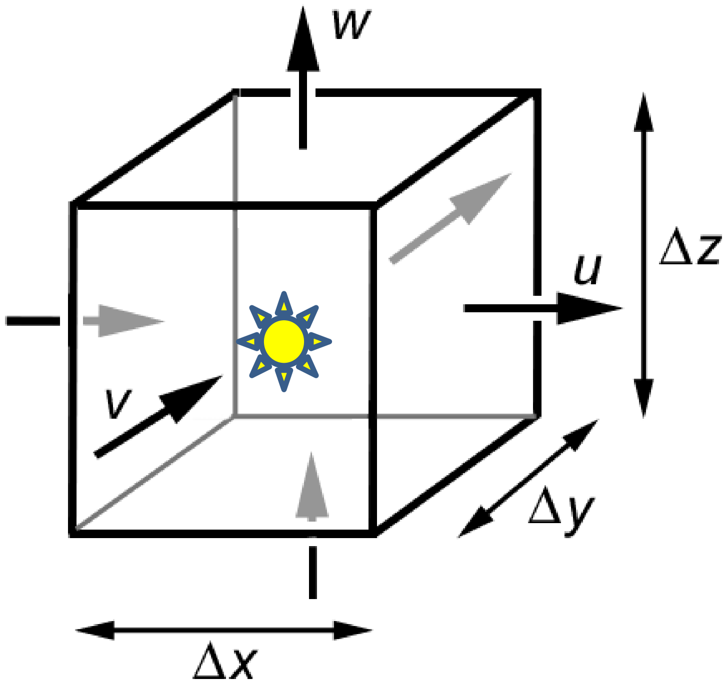
Em tais casos, e muitos outros, uma **representação contínua do fluido** é necessário, para **obter** as **equações governantes**, onde se aplica a análise para um elemento de volume **infinitesimal**

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta x \rightarrow 0; \Delta y \rightarrow 0; \Delta z \rightarrow 0$$

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

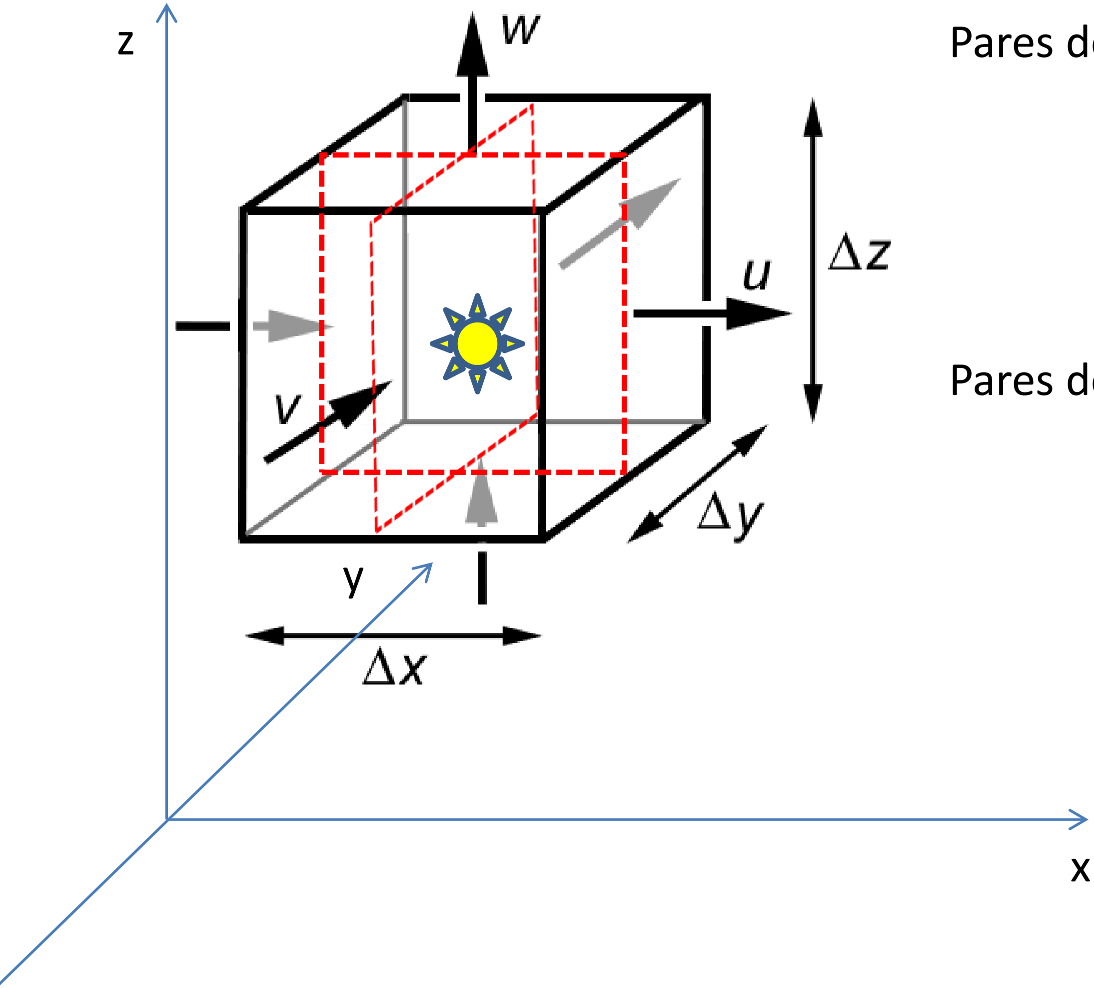
Este volume paralelepípedo tem seis lados e, portanto, sujeito a seis fluxos distintos da quantidade arbitrária c.



$$\Delta V \frac{d\rho}{dt} = \sum \Delta c_i \Delta u_{\perp i} \Delta A_i$$

Nos lados esquerdo e direito, a quantidade **c** **entra** e **sai** com a velocidade u da componente–x, e é necessário fazer a <u>**distinção**</u> entre os valores de **c** e **u** à **esquerda (x -Δx /2),** e a **direita (em x +Δx/2)**

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)



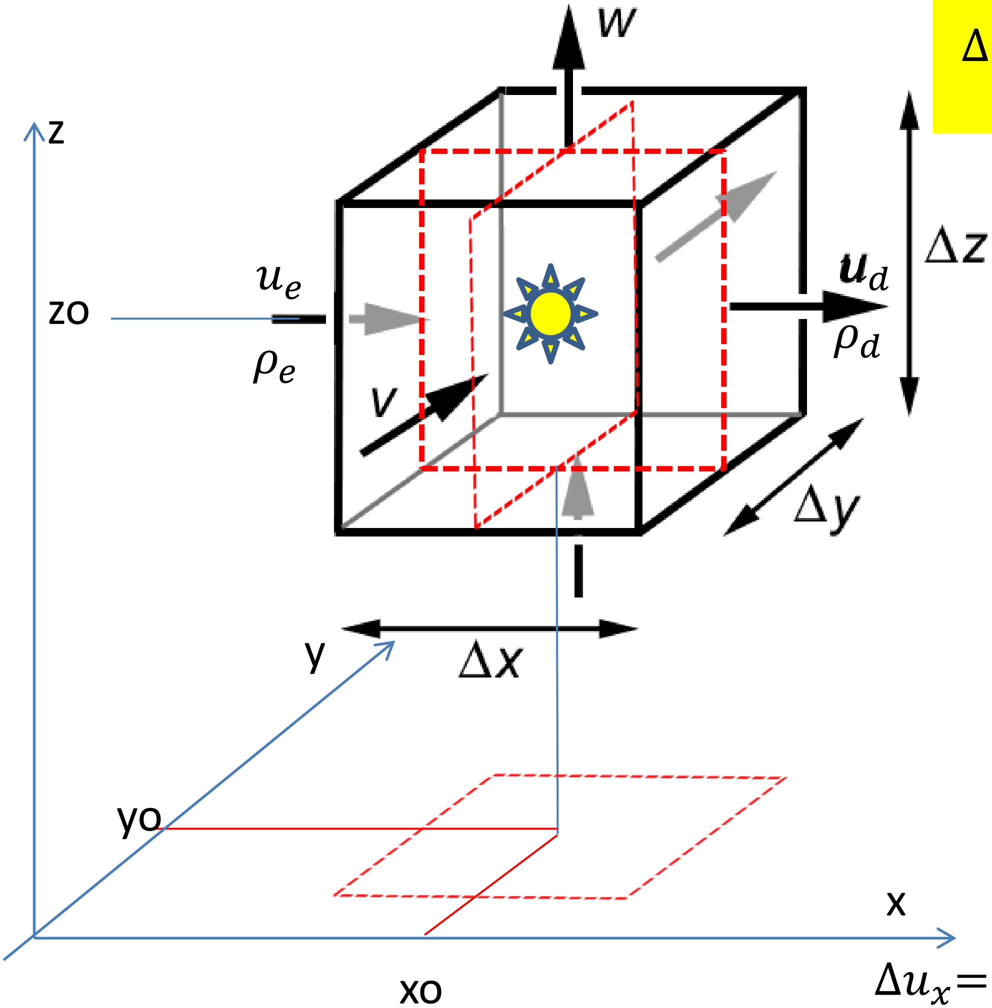
Pares de fluxos que entram e saem através Y

$$y + \frac{\Delta y}{2}$$

Pares de fluxos que entram e saem através Z

$$z + \frac{\Delta z}{2}$$

PRINCIPIO FISICO (Componente de Fluxo no eixo x)



$$\Delta V \frac{dc}{dt} = \sum \Delta c_i \Delta u_{\perp i} \Delta A_i + S$$

$$\Delta u_e - \Delta u_d = \Delta \vec{v}_{i\perp}$$

$$u_d = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_0)$$

$$\Delta u_d = u_d - u_0 = +\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

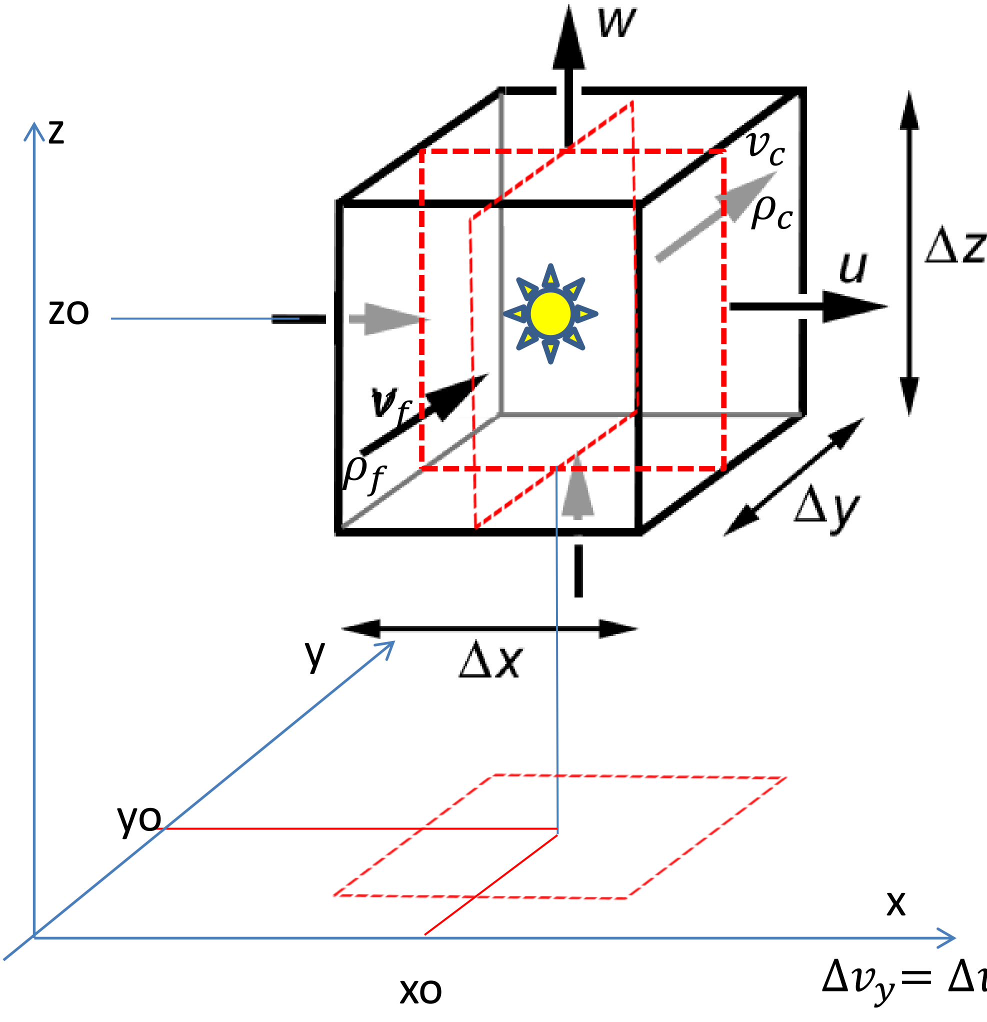
$$u_e = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_0)$$

$$\Delta u_e = u_e - u_0 = -\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\Delta u_x = \Delta u_e \text{-} \Delta u_d = \left(-\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right)$$

$$\Delta u_x = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right)$$

PRINCIPIO FISICO (Componente de Fluxo no eixo y)



$$\Delta V \frac{dc}{dt} = \sum \Delta c_i \Delta u_{\perp i} \Delta A_i + S$$

$$v_f - v_c = \vec{v}_{i\perp}$$

$$v_c = v_0 + \frac{\partial v}{\partial y}(y - y_0)$$

$$\Delta v_c = v_c - v_0 = +\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)$$

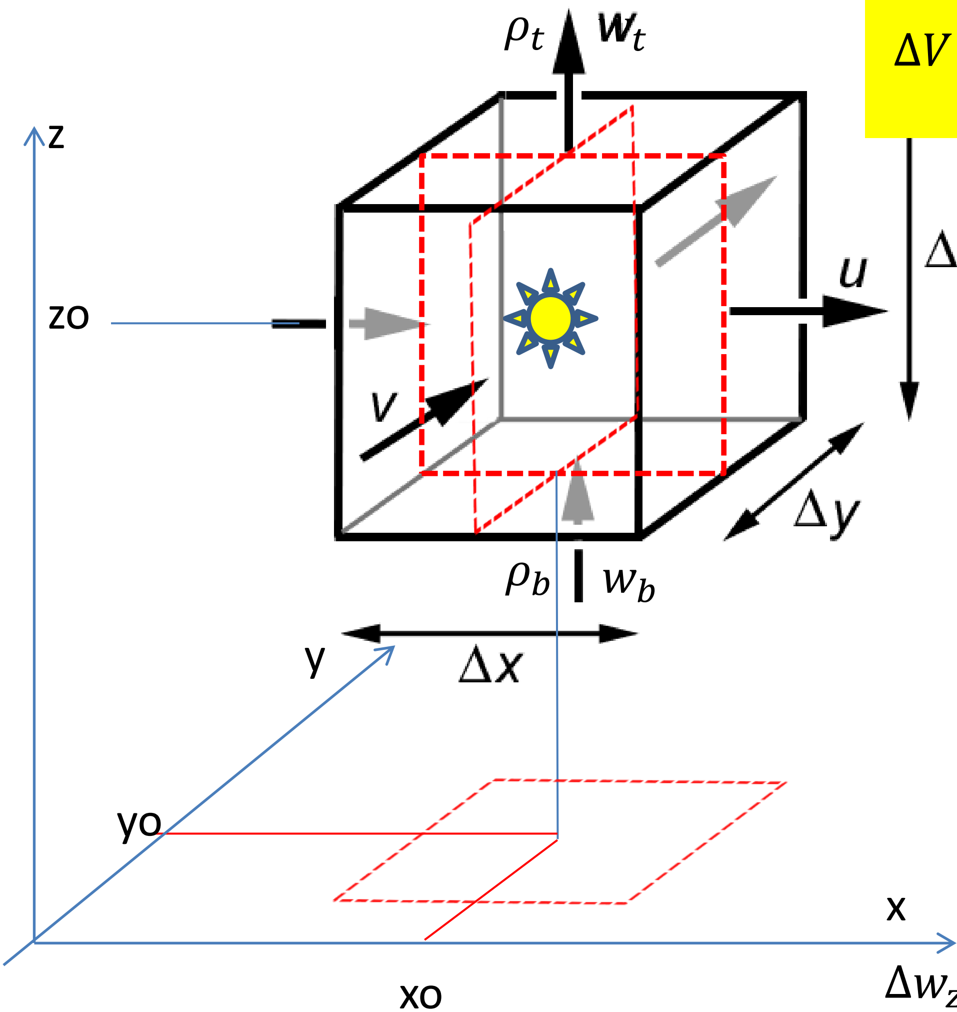
$$v_f = v_0 + \frac{\partial v}{\partial y}(y - y_0)$$

$$\Delta v_f = v_f - v_0 = -\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)$$

$$\Delta v_y = \Delta v_f - \Delta v_c = \left(-\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right) - \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\right)$$

$$\Delta v_y = -\left(\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)$$

PRINCIPIO FISICO (Componente de Fluxo no eixo z)



$$\Delta V \frac{dc}{dt} = \sum \Delta c_i \Delta u_{\perp i} \Delta A_i + S$$

$$w_b - w_t = \Delta \vec{v}_{i\perp}$$

Expansão de Taylor

$$w_t = w_0 + \frac{\partial w}{\partial z}(w - w_0)$$

$$\Delta w_t = w_t - w_0 = +\frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)$$

Expansão de Taylor

$$w_b = w_0 + \frac{\partial w}{\partial z}(z - z_0)$$

$$\Delta w_b = w_b - w_0 = -\frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)$$

$$\Delta w_z = \Delta w_b - \Delta\, w_t = \left(-\frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\Delta z}{2}\right) - \frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)\right)$$

$$w_z = -\left(\frac{\partial w}{\partial z}\Delta z\right)$$

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

$$\Delta V \frac{dc}{dt} = \sum \Delta c_i \Delta u_{\perp i} \Delta A_i + S$$

$$\Delta u_x = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right) \qquad \Delta v_y = -\left(\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) \qquad \Delta w_z = -\left(\frac{\partial w}{\partial z}\Delta z\right)$$

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{dc}{dt} = \Delta c_x \Delta u_x \Delta A_x + \Delta c_y \Delta v_y \Delta A_y + \Delta c_z \Delta w_z \Delta A_z + S$$

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{dc}{dt} = \Delta c_x \Delta u_x \Delta y \Delta z + \Delta c_y \Delta v_y \Delta \mathrm{x} \Delta z + \Delta c_z \Delta w_z \Delta x \Delta y + S$$

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{dc}{dt} = -\Delta c_x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right) \Delta y \Delta z - \Delta c_y \left(\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) \Delta \mathrm{x} \Delta z - \Delta c_z \left(\frac{\partial w}{\partial z}\Delta z\right) \Delta x \Delta y + S$$

Considere um fluido isotrópico

A **isotropia** é a propriedade que caracteriza as substâncias que possuem as mesmas propriedades físicas independentemente da direção considerada, mas dependem da posição no espaço.

$$c = \Delta c_x = \Delta c_y = \Delta\, c_z = \rho(x, y, z)$$

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

$$\Delta V \frac{dc}{dt} = \sum \Delta c_i \Delta u_{\perp i} \Delta A_i + S$$

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{d\rho}{dt} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) \Delta \mathrm{x} \Delta z - \rho \left(\frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y + S$$

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z - \rho \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \Delta \mathrm{x} \Delta z - \rho \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \Delta x \Delta y + S$$

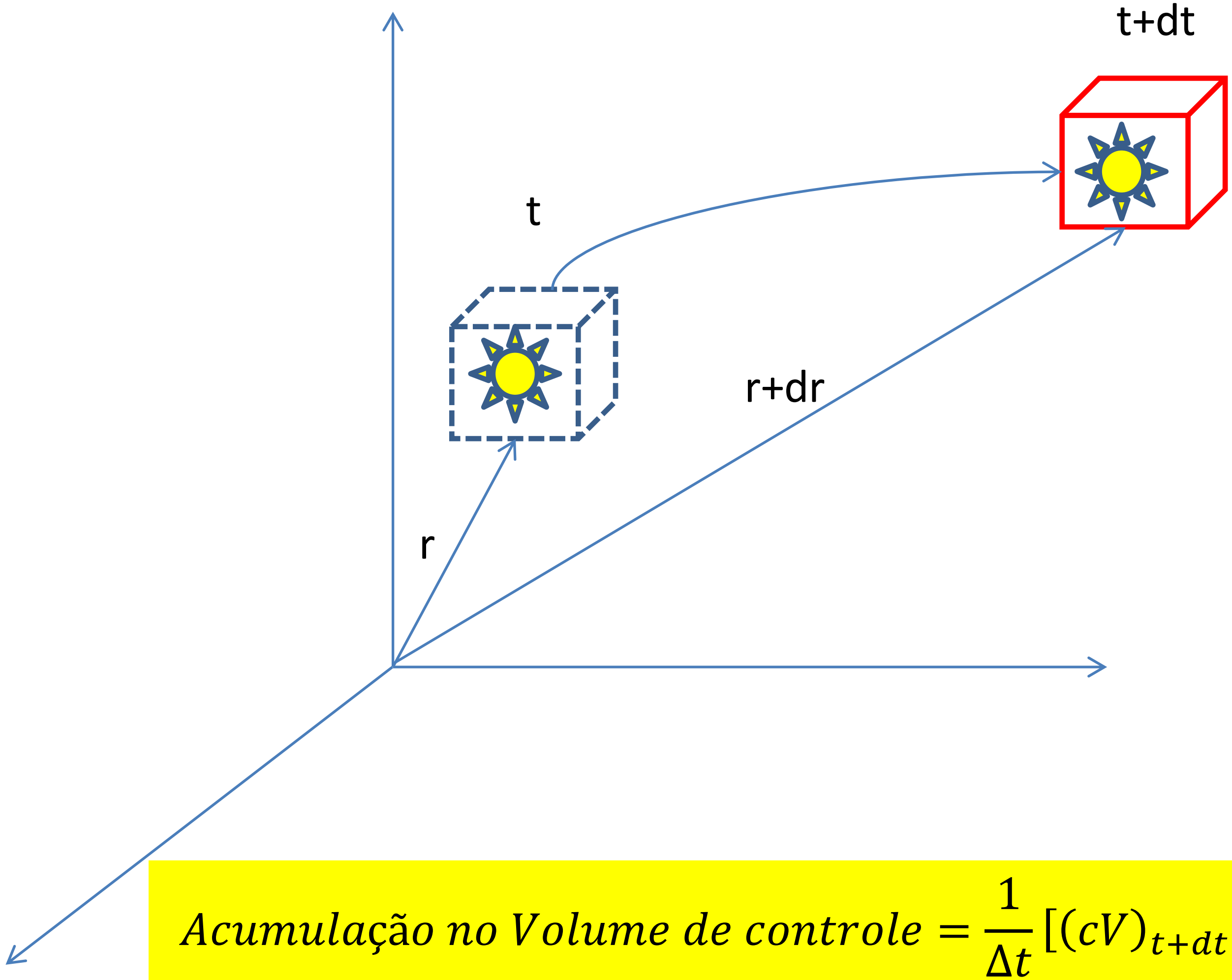
Dividindo a equação por $\Delta x \Delta y \Delta z$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial y} - \rho \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{S}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{S}{\Delta x \Delta y \Delta z}}$$

Acumulação no Volume de Controle

A **acumulação** é a **diferença entre os valores presentes no volume de controle em tempos t e t + dt, dividido pelo variação de tempo dt.**



$$\frac{\Delta cV}{\Delta t}$$

$$Acumulação\ no\ Volume\ de\ controle = \frac{1}{\Delta t}\left[(cV)_{t+dt} - (cV)_{dt}\right]$$

Acumulação no Volume de Controle

No tempo t o volume de controle encontra na posição x,y,z e possui uma quantidade de volume (**c**)

$$c]_t = c(x, y, z, t)$$

No tempo *t +dt* a volume de controle move-se para uma nova posição com coordenadas *x+dx, y+dy,z+dz* e possui uma quantidade de volume dada por:

$$c]_{t+dt} = c(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$$

A variação da quantidade de volume (**c**) do volume de controle movendo-se da posição *r* para *r+dr* é dada por: (expansão em série de taylor)

$$c(x, y, z, t) = c_0(x, y, z, t) + \frac{\partial c}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial c}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial c}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial c}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 c}{\partial^2 x}\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 c}{\partial^2 y}\frac{\Delta y^2}{2!} + \frac{\partial^2 c}{\partial^2 z}\frac{\Delta z^2}{2!} + \frac{\partial^2 c}{\partial^2 t}\frac{\Delta t^2}{2!} + \cdots ..$$

Truncando a serie nos termos de primeira ordem a equação se reduz a:

$$c(x,y,z,t) - c_0(x,y,z,t) = +\frac{\partial c}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial c}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial c}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial c}{\partial t}\Delta t$$

$$\Delta c = +\frac{\partial c}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial c}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial c}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial c}{\partial t}\Delta t$$

Difidindo a equação por Δt

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = +\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial c}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t} + \frac{\partial c}{\partial t}\frac{\Delta t}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = +\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial c}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t} + \frac{\partial c}{\partial t}$$

Fazendo o limite de $\Delta t \to 0$

$$\frac{dc}{dt} = +\frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial c}{\partial t}$$

$$\frac{dc}{dt} = + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial c}{\partial t}$$

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{dy}{dt} \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dc}{dt} = +u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} + w\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t}$$

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

$$V\frac{dc}{dt} = \sum c_i u_{\perp i} A_i + S$$

$$\frac{dc}{dt} = +u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} + w\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{S}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{S}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{S}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \frac{S}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

PRINCIPIO FISICO (Definição de Fluxo)

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \frac{S}{\Delta x \Delta y \Delta z}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \overrightarrow{\rho V} = \frac{S}{\Delta x \Delta y \Delta z}}$$

Equação da Conservação da Massa

As ***equações integrais*** de Mecânica dos Fluidos são utilizadas num **volume de controle (V.C.)** para analisar o campo de **escoamento de maneira global**.

As ***equações diferenciais*** são utilizadas para estudar o campo de escoamento em forma mais detalhada.

Equação da Conservação da Massa

Para obter a **expressão** que define a **conservação da massa na forma diferencial**, fazemos uma **análise** de um **volume de controle diferencial** num sistema de coordenadas cartesiano.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \overrightarrow{\rho V} = \frac{S}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

O princípio da conservação da massa é definido como:

$$\begin{bmatrix} \text{taxa de variação} \\ \text{da massa no V.C.} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{taxa de fluxo resultante} \\ \text{através do V.C.} \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \overrightarrow{\rho V} = 0$$

Equação da Conservação da Massa

Na *forma integral* esta expressão é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho dV = \int_{SC}\rho\vec{V}d\vec{A} = 0$$

A massa dentro do **V.C**. a qualquer instante é produto da massa específica (ρ) e o volume (***dxdydz***). Desta forma a taxa de variação da massa dentro do volume de controle na forma diferencial é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho dV = \frac{\partial \rho}{\partial t}dxdydz$$

Equação da Conservação da Massa

Pode ser demonstrado que a **taxa de fluxo** resultante através da superfície de controle é dada por:

$$\int_{SC} \rho \vec{V} d\vec{A} = \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial z} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right] \text{dxdydz}$$

Desta forma a equação da *conservação da massa* na forma diferencial é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right] = 0$$

Em notação vetorial é definido o *operador nabla* como:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

Equação da Conservação da Massa

De tal forma que a equação da conservação da massa considerando uma taxa de variação nula pode ser reduzida a:

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]=\nabla\cdot\rho\vec{V}$$

Na forma vetorial a equação da conservação da massa pode ser representada como:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\rho\vec{V}=0}$$

Escoamento Incompressível

No caso de *escoamento* ***incompressível*** ρ=constante. Isto significa que a massa específica não é função do tempo nem das coordenadas espaciais.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla . \vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ou na forma vetorial

$$\nabla . \vec{V} = 0$$

Escoamento Permanente

No caso de **escoamento permanente** *todas as propriedades do fluido são* ***independentes do tempo***. Desta forma, no máximo, poderá ocorrer é que ***V****(x,y,z)* e *(x,y,z)* sendo a equação da continuidade dada por:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

ou na forma vetorial

$$\boxed{\nabla \rho \vec{V} = 0}$$

Equação da Quantidade de Movimento

Sabemos a *equação da quantidade de movimento na sua forma integral*.

$$\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\rho d\forall + \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}d\vec{A}$$

Na forma diferencial expressamos as equações para um sistema infinitesimal de massa *dm*, para a qual a segunda lei de Newton pode ser expressa como:

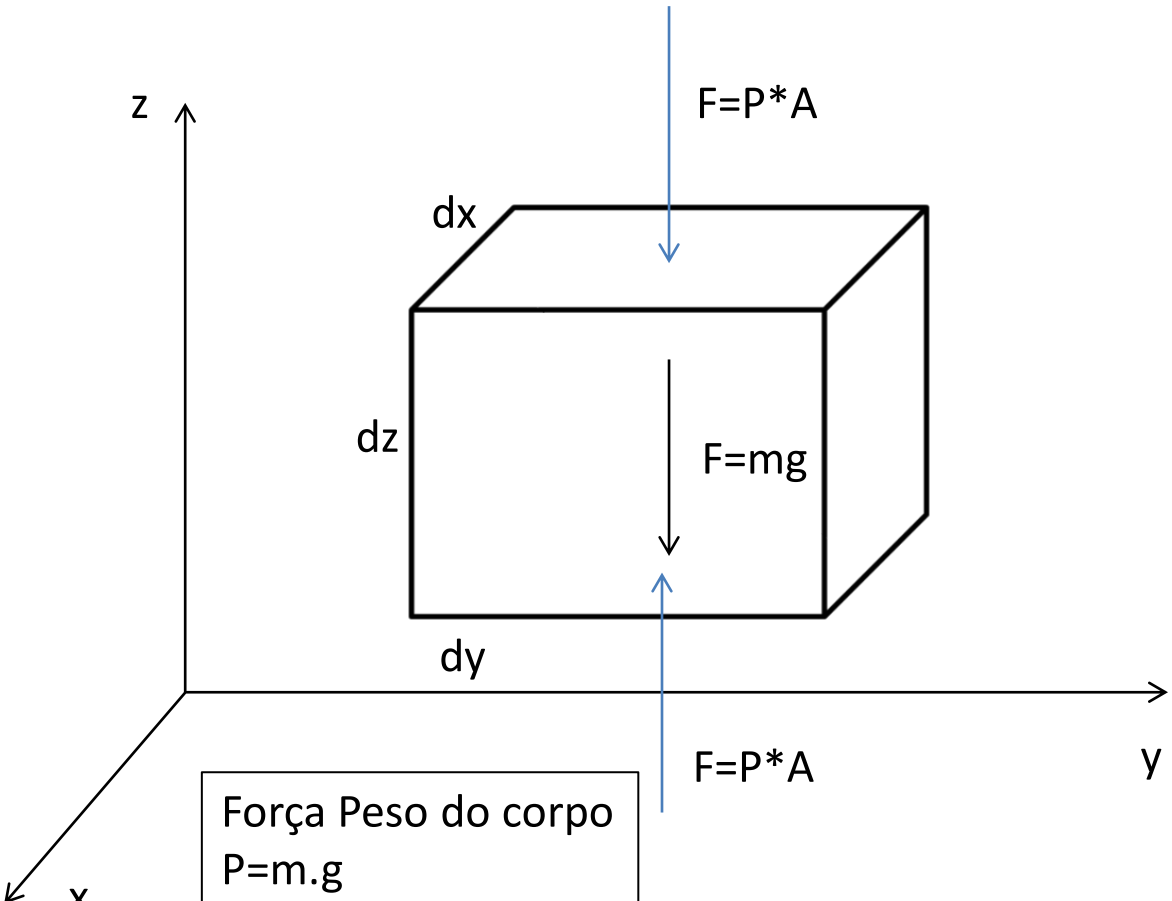
$$d\vec{F} = dm\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{sistema}$$

o termo *dm* é facilmente determinado pelo produto entre a massa específica do fluido dentro do V.C. e o volume diferencial.

$$\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{sistema} = \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

Equação da Quantidade de Movimento

Força Campo (peso do Corpo)



Força Peso do corpo
P=m.g
ρ=m/V => m= ρ*V
P=ρg*V
P=ρg*(dx*dy*dz)
P=γ*(dx*dy*dz)

$$dF_b = \vec{\gamma}\text{dxdydz}$$

$$F = Força\ Peso = P$$

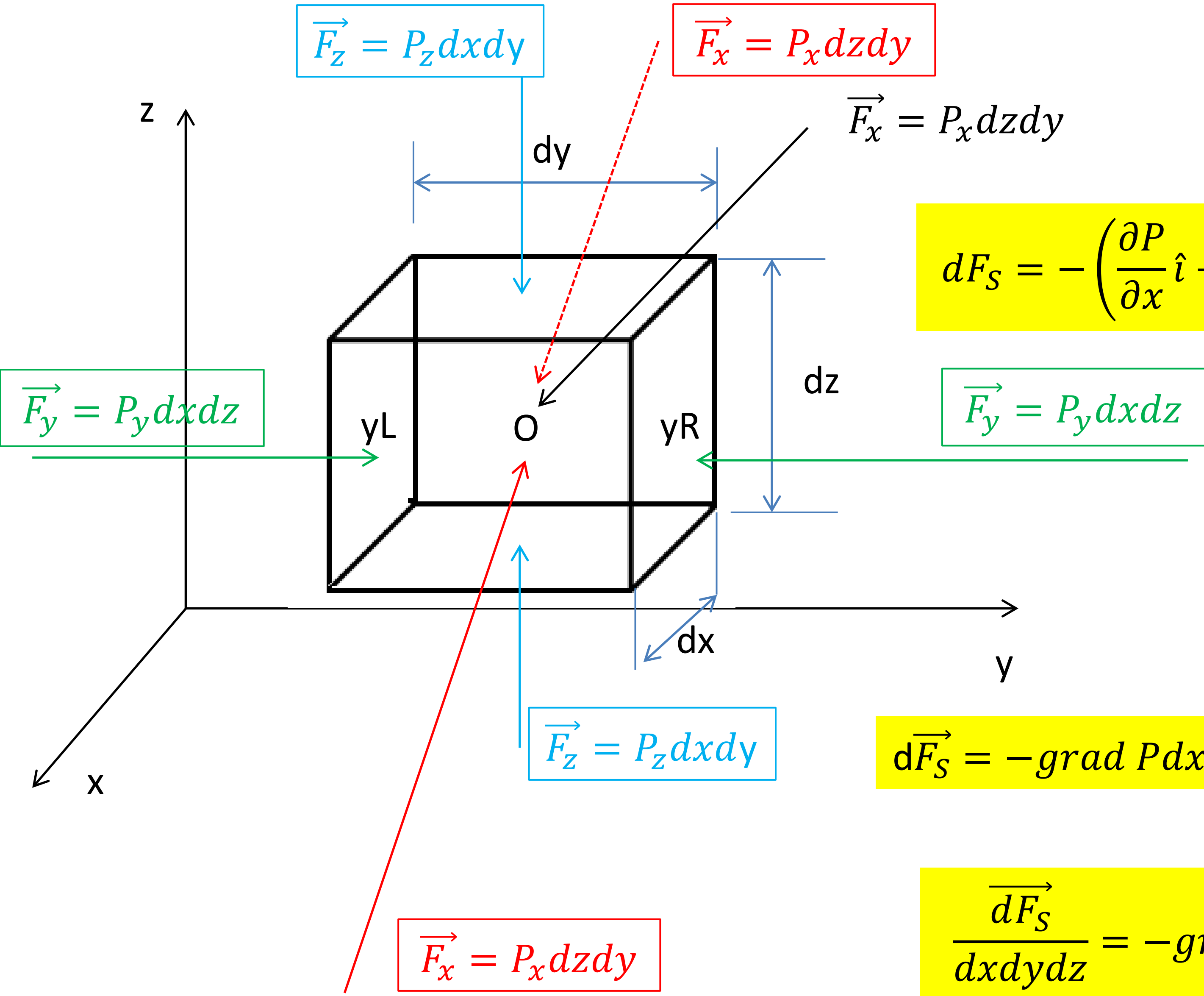
$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \rho g*(dx*dy*dz)$$

$$\rho dxdydz\frac{d\vec{V}}{dt} = \rho g*(dx*dy*dz)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g}$$

Equação da Quantidade de Movimento

Força de Superfície



$$dF_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{k}\right) \text{dxdydz}$$

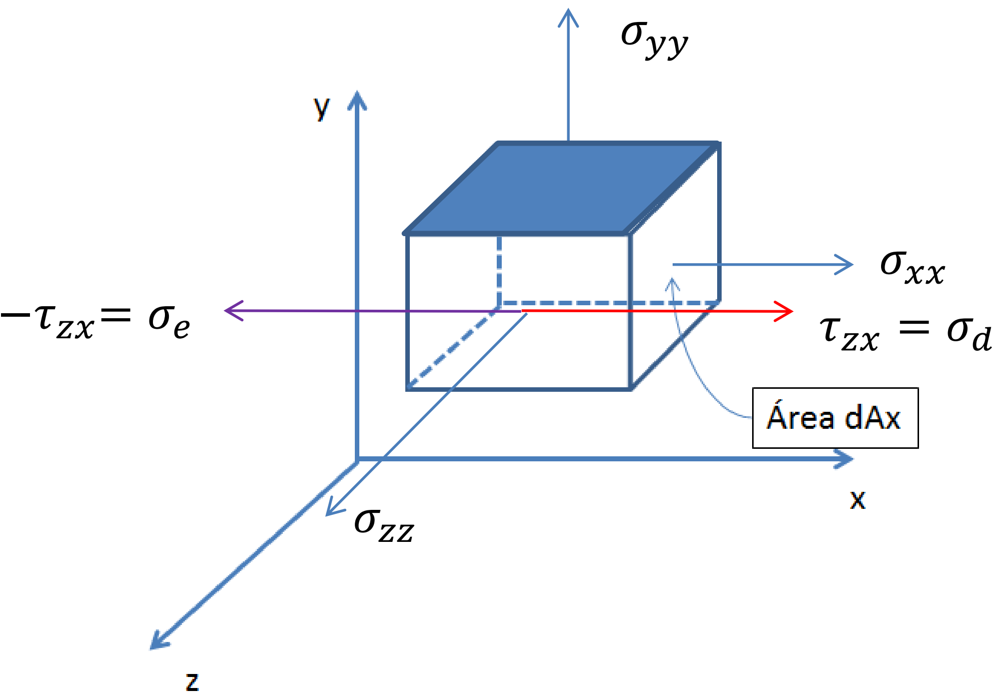
$$\text{d}\overrightarrow{F_S} = -grad\ P dxdydz = -\nabla P dxdydz$$

$$\frac{\overrightarrow{dF_S}}{dxdydz} = -grad\ P = -\nabla P$$

FÍSICA DOS FLUÍDOS

Tensões normais e tangenciais num elemento de fluido

Tensões de Superfície num Elemento de Fluido



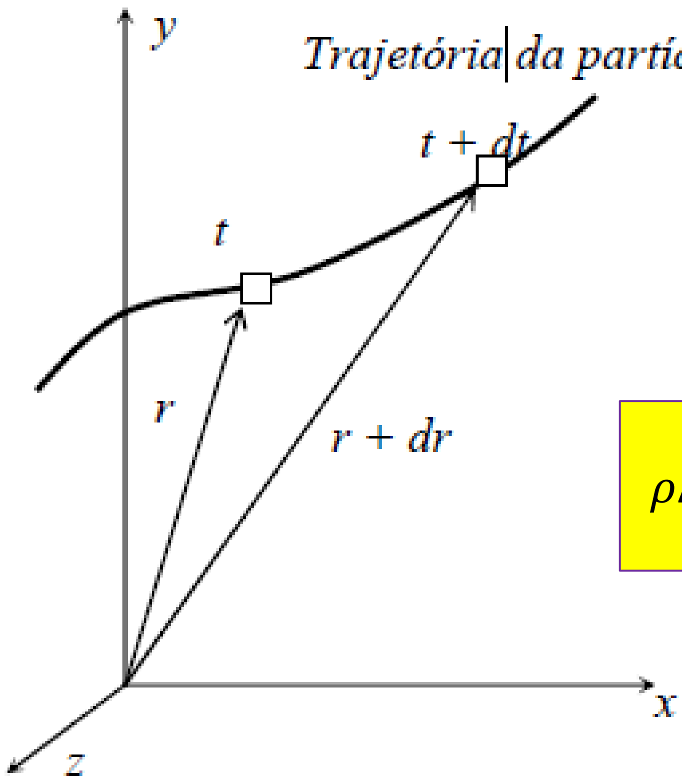
$$\Delta F_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) \Delta x \Delta \mathrm{y} \Delta \mathrm{z}$$

$$\Delta F_{sy} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) \Delta x \Delta \mathrm{y} \Delta \mathrm{z}$$

$$\Delta F_{sy} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right) \Delta x \Delta \mathrm{y} \Delta \mathrm{z}$$

CINEMÁTICA DE UM ELEMENTO DE FLUIDO

$$\Delta\vec{F} = \Delta m\vec{a} = \rho\Delta x\Delta y\Delta z\vec{a}$$



$$\Delta\vec{F} = \Delta m\vec{a} = \rho\Delta x\Delta y\Delta z\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{a}_p = \frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$$

$$\rho\Delta x\Delta y\Delta z\frac{D\vec{V}}{Dt} = \left(u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)\rho\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{pressão} + \vec{F}_{gravidade} + \vec{F}_{superficie} + \ldots . + \vec{F}_{n}$$

$$\vec{F}_{pressão} = -grad\ Pdxdydz = -\vec{\nabla}P\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\vec{F}_{gravidade} = \rho dxdydz\frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\vec{g}*(\Delta x*\Delta y*\Delta z)$$

$$\vec{F}_{superficie} = \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z + \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z + \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\boxed{\vec{F}_{total} = \left(u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)\rho\Delta x\Delta y\Delta z}$$

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{pressão} + \vec{F}_{gravidade} + \vec{F}_{superficie} + \ldots . + \vec{F}_{n}$$

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{pressão} + \vec{F}_{gravidade} + \vec{F}_{superficie} + \dots + \vec{F}_{n}$$

$$\left(u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)\rho\Delta x\Delta y\Delta z$$
$$= -\vec{\nabla}P\Delta x\Delta y\Delta z + \rho\vec{g}*(\Delta x*\Delta y*\Delta z) + \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$
$$+ \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z + \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\left(u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)\rho$$
$$= -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)$$

$$\left(u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)\rho$$
$$=-\vec{\nabla}P+\rho\vec{g}+\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)$$

Separando nas componentes x,y,z

$$\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)\rho=-\frac{\partial P}{\partial x}+\cancel{\rho\overrightarrow{g_x}}+\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

$$\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial t}\right)\rho=-\frac{\partial P}{\partial y}+\cancel{\rho\overrightarrow{g_y}}+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)$$

$$\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}\right)\rho=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho\overrightarrow{g_z}+\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\rho = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)\rho = -\frac{\partial P}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\rho = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho\overrightarrow{g_z} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right)$$

Considerando que as variações na densidade é pequena, a densidade $\boldsymbol{\rho}$ pode ser substituído em todos os lugares pela constante (referência) densidade $\boldsymbol{\rho_0}$, com uma grande exceção.

Esta exceção é o **termo gravitacional**, através do qual, mesmo uma pequena variação da densidade pode causar um **efeito de flutuação importante** na maioria das aplicações ambientais.

A simplificação resultante é conhecida como a **aproximação Boussinesq**.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\rho_0=-\frac{\partial P}{\partial x}+\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)\rho_0=-\frac{\partial P}{\partial y}+\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\rho_0=-\frac{\partial P}{\partial z}+\boldsymbol{\rho}\overrightarrow{g_z}+\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right)$$

Dividindo por ρ_0

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho_0}\overrightarrow{g_z}+\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}+\vec{\tau}_x$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y}+\vec{\tau}_y$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho_0}\overrightarrow{g_z}+\vec{\tau}_z$$

Na Forma Vetorial

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}.\nabla)\vec{V}=-\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}P+\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho_0}\vec{g}+\vec{F}_{tensão}$$

Equações de Navier Stokes

Para ***fluidos newtonianos***, as tensões podem ser expressas em termos de **gradientes de velocidades** e propriedades dos fluidos:

Sabemos que p/ **um fluido newtoniano** a tensão viscosa é proporcional a taxa de deformação por cisalhamento (**taxa de deformação angular**). As tensões podem ser expressas em termos dos gradientes de velocidade e das propriedades dos fluidos como:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\vec{V} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$

Onde p é a pressão termodinâmica local.

Equações de Navier Stokes

No caso de ***fluido incompressível***, $\nabla \cdot V = 0$, e a equação acima pode ser simplificada.
Fazendo desprezíveis as forças de campo ($B = 0$) se obtém **as *Equações de Navier Stokes*.**

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \vec{V}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla \vec{V}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \nabla \vec{V}\right)$$

no caso de **escoamento incompressível** **permanente** com viscosidade constante e incluindo as forças de campo

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Em forma vetorial pode ser representada como

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\vec{V}$$

Equações de Euler

Quando os termos viscosos são pequenos e podem ser desprezíveis ($\mu = 0$) as equações resultantes são conhecidas como ***Equações de Euler***, que podem ser representas na forma vetorial como:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p$$