



# **Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021**

## **Métodos de diferenças finitas.**

---

**MET-576-4**

**Modelagem Numérica da Atmosfera**

**Dr. Paulo Yoshio Kubota**

**Os métodos numéricos, formulação e parametrizações utilizados nos modelos atmosféricos serão descritos em detalhe.**

**3 Meses**  
**24 Aulas (2 horas cada)**



**Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021**

**Métodos de diferenças finitas.**

---

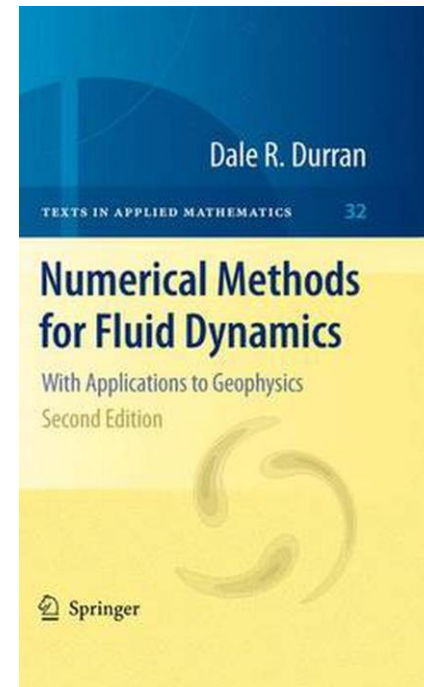
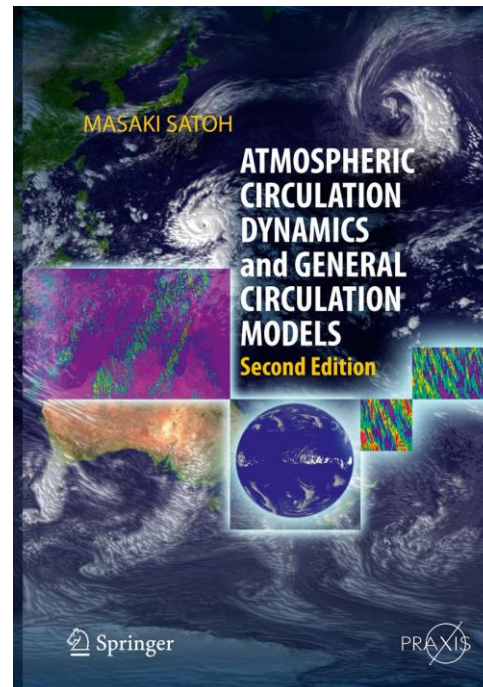
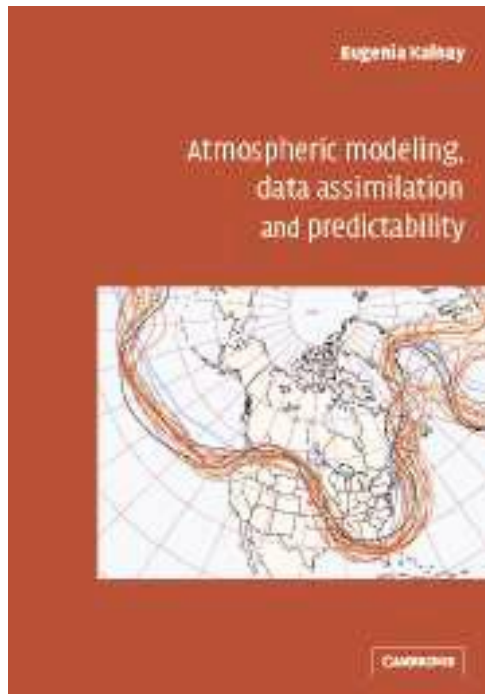
## **Dinâmica:**

**Métodos numéricos amplamente utilizados na solução numérica das equações diferenciais parciais que governam os movimentos na atmosfera serão o foco, mas também serão analisados os novos conceitos e novos métodos.**



- ✓ **Métodos de diferenças finitas.**
- ✓ **Acurácia.**
- ✓ **Consistência.**
- ✓ **Estabilidade.**
- ✓ **Convergência.**
- ✓ **Grades de Arakawa A, B, C e E.**
- ✓ **Domínio de influência e domínio de dependência.**
- ✓ **Dispersão numérica e dissipação.**
- ✓ **Definição de filtros monótono e positivo.**
- ✓ **Métodos espectrais.**
- ✓ **Métodos de volume finito.**
- ✓ **Métodos Semi-Lagrangianos.**
- ✓ **Conservação de massa local.**
- ✓ **Esquemas explícitos versus semi-implícitos.**
- ✓ **Métodos semi-implícitos.**

### Texto para o Curso





**Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021**

## **Métodos de diferenças finitas.**

**Modelo Numérico da Atmosfera possui um problema de valor de contorno e inicial**

### **Dado**

- Uma estimativa do estado atual da atmosfera (condições iniciais)**
- Condições de superfície e limites laterais adequadas o modelo simula ou prevê a evolução da atmosfera.**
- Quanto mais precisa a estimativa das condições iniciais, melhor será a qualidade das previsões.**

**Agora consideramos métodos de resolver PDEs**

- Da mesma forma, quanto mais preciso o método de solução, o melhor a qualidade das previsões.**



**Equação diferencial** é uma equação que apresenta **derivadas** ou **diferenciais** de uma **função desconhecida** (a incógnita da equação).

**Equação Diferencial Ordinária (EDO)**: Envolve derivadas de uma função de uma só variável independente.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\lambda y$$

**Equação Diferencial Parcial (EDP)**: Envolve derivadas parciais de uma função de mais de uma variável independente.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$$



Começamos olhando para a classificação de diferencial parcial equações (PDEs).

**O PDE linear geral de segunda ordem em 2D pode ser escrito**

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$
$$+ 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

**Equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem são classificadas em três tipos, dependendo do sinal de**

- **Hiperbólica** :  $B^2 - AC > 0$
- **Parabólica** :  $B^2 - AC = 0$
- **Elíptica** :  $B^2 - AC < 0$

**Lembre-se das equações das seções cônicas**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Hiperbólica**

$$x^2 = y$$

**Parabólica**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Elíptica**



Os exemplos mais simples (canônicos) dessas equações são

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

**Equação de onda (Hiperbólica)**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

**Equação de difusão (Parabólica)**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

**Equação de Poisson (Elíptica )**

**Exemplo de equação hiperbólica:**

- Corda vibratória.
- Ondas de água.

**Exemplo de equação parabólica:**

- Haste aquecida.
- Amortecimento viscoso.

**Exemplos de equação elíptica:**

- Forma de um tambor.
- Relação função de corrente/vorticidade.





**Nota:** As seguintes equações elípticas surgem repetidamente em uma infinidade de contextos em toda a ciência:

- **Equação de Poisson** :  $\nabla^2 u = f$
- **Equação de Laplace** :  $\nabla^2 u = 0$



**Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021**

## **Métodos de diferenças finitas.**

---

**O tipo de PDE com o qual estamos lidando, dependem essencialmente de:**

- 1. O comportamento das soluções,**
- 2. Condições iniciais e /ou de contorno Adequadas**
- 3. Os métodos numéricos que podem ser usados para encontrar as soluções .**

**Precisamos estudar os PDEs canônicos**

- 1. Para desenvolver uma compreensão de suas propriedades**
- 2. Aplicar métodos semelhantes às equações NWP mais complicadas.**



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

## Métodos de diferenças finitas.

Uma quarta equação canônica, de **importância** central na **ciência da atmosfera**, é

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Equação da advecção

A equação da advecção tem a solução:  $u(x, t) = u(x - ct, 0)$

A equação de advecção é uma PDE de primeira ordem, mas também pode ser **classificada como hiperbólica**, pois suas soluções satisfazem a equação de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0$$

Obviamente, se  $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , então  $u$  é uma solução da equação de onda.



**Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021**

## **Métodos de diferenças finitas.**

### **Problema Bem postado**

**Um problema de condição inicial / contorno **bem apresentado** tem uma **solução única** que depende **continuamente** das condições iniciais / contorno.**

**A especificação das condições iniciais e contorno adequadas para uma PDE é essencial para ter um problema bem colocado.**

- **Se **muitas condições** iniciais / contorno (**incertezas**) forem especificadas, não haverá solução.**
- **Se **poucos forem especificados**, a solução não será exclusiva.**
- **Se o número de condições iniciais / contorno estiver certo , mas forem especificadas **no lugar ou hora errada**, a solução será única, mas não dependerá somente do amortecimento das condições iniciais / contorno .**

**Para problemas mal apresentados, **pequenos erros nas condições iniciais / de contorno podem produzir erros enormes na solução.****



## Métodos de diferenças finitas.

### Problema Mal postado

**Em qualquer um dos casos de PDOs, ter um problema mal postado. Não se pode encontrar uma solução numérica para um problema mal postado: o cálculo reagirá explodindo.**

**Exemplo:** Resolva a equação hiperbólica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

sujeito às seguintes condições:

$$u(x, 0) = a_0(x) \quad u(x, 1) = a_1(x) \quad u(0, t) = b_0(t) \quad u(1, t) = b_1(t)$$

**Exemplo:** Resolva a equação de advecção

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

em  $0 < x < 1$  e  $t > 0$  com as condições iniciais / contorno

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad u(0, t) = u_L(t) \quad u(1, t) = u_R(t).$$



# Modelo Numérico da Atmosfera

---

## O Caso Parabólico

As equações elípticas **de segunda ordem** requerem **uma condição de contorno em cada ponto da fronteira espacial**.

Esses são problemas puros de valor contorno, independentes do tempo. As condições de contorno podem ser:

- O valor da função (**problema de Dirichlet**), quando especificamos a temperatura na borda de uma chapa.
- A derivada normal (**problema de Neumann**), quando especificamos o fluxo de calor.
- Uma condição de contorno mista, envolvendo uma combinação linear da função e sua derivada (**problema de Robin**).



# Modelo Numérico da Atmosfera

## O Caso Parabólico

As equações parabólicas lineares requerem uma condição inicial no instante inicial e uma condição de contorno em cada ponto dos limites espaciais.

Por exemplo:, para uma barra aquecida, precisamos da temperatura inicial em cada ponto  $T(x, 0)$  e da temperatura em cada extremidade,  $T(0, t)$  e  $T(L, t)$  em função do tempo.

Na ciência atmosférica, o caso parabólico surge principalmente quando consideramos processos difusivos: viscosidade interna; fricção da camada limite; etc.

Para dar um exemplo, considere os termos destacados das Equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V + 2\Omega \times V + \frac{1}{\rho} \nabla P = \nu \nabla^2 V$$



# Modelo Numérico da Atmosfera

## O Caso Hiperbólico

As **equações hiperbólicas** lineares requerem tantas **condições iniciais** quanto o número de **características** que saem de cada ponto na superfície em ( $t = 0$ ), e tantas **condições de contorno** quanto o número de **características** que cruzam um ponto no contorno (espaço) apontando para dentro do contorno.

**Por exemplo:** Resolva  $\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} = 0$  para  $x > 0$ ,  $t > 0$ .

As características são as soluções de  $\frac{\partial x}{\partial t} = c$ .

O contorno no espaço é  $x = 0$ .

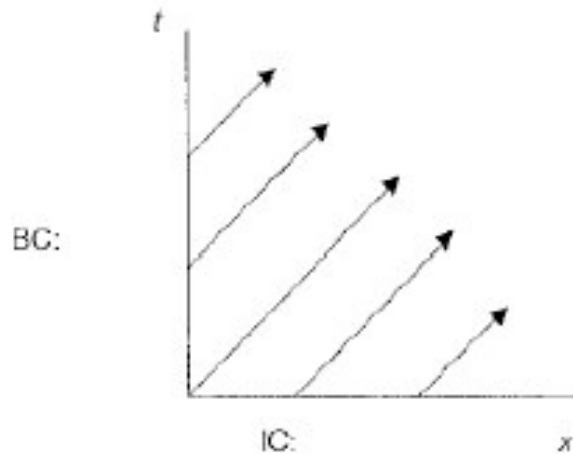
Se  **$c > 0$** , precisamos da condição inicial  $U(x, 0) = f(x)$  e da condição de contorno  $U(0, t) = g(t)$ .

Se  **$c < 0$** , precisamos da condição inicial  $U(x, 0) = f(x)$ , mas sem **condições de contorno**.

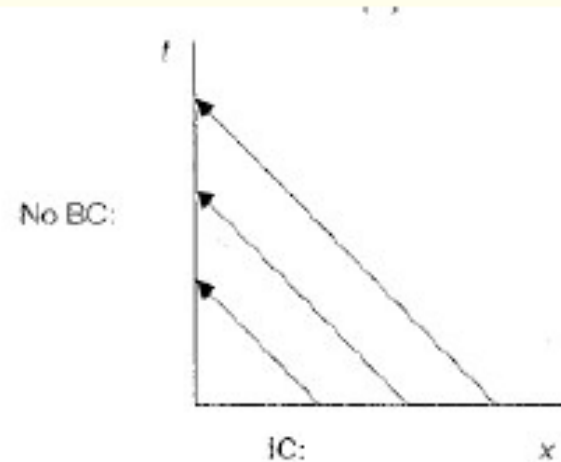


## O Caso Hiperbólico

(a) velocidade positiva



(b) velocidade negativa



Esquema das **características** da equação de advecção

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

para (a) velocidade positiva e (b) velocidade negativa  $c$ .



# Modelo Numérico da Atmosfera

Para **equações não lineares**, nenhuma declaração geral pode ser feita, mas o insight físico e a linearização local podem ajudar a determinar as condições iniciais/contorno adequadas.

Por exemplo, na equação de advecção não linear

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0$$

as **características** são  $\frac{dx}{dt} = u(x, t)$ .

Não sabemos a priori o sinal de  $u$  no contorno e se as características apontarão para dentro ou para fora (sinal de  $u$ ).



# Modelo Numérico da Atmosfera

---

Um método de resolver PDEs simples é o método de separação de variáveis. Infelizmente, na maioria dos casos, não é possível usá-lo.

No entanto, é instrutivo resolver alguns PDEs simples analiticamente, usando o método de separação de variáveis.



## Método de Separação de Variáveis

**Exemplo 1:** Uma equação elíptica.

Resolva, pelo método de separação de variáveis, o PDE:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

sujeito às condições de contorno

$$u(x, 0) = 0 \quad u(0, y) = 0 \quad u(1, y) = 0 \quad u(x, 1) = A \sin m\pi x,$$

Suponha que a solução seja um produto de uma função de  $x$  e a função de  $y$ :

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

A equação se torna

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

O lado esquerdo é uma função de  $x$ , o direito é uma função de  $y$ .



# Modelo Numérico da Atmosfera

## Método de Separação de Variáveis

Assim, eles devem ser iguais a uma constante  $-K^2$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + K^2 X = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - K^2 Y = 0$$

As soluções das duas equações são

$$X = C_1 \sin Kx + C_2 \cos Kx$$

$$Y = C_3 \sinh Ky + C_4 \cosh Ky$$

A condição de contorno  $u(0, y) = 0$  força  $C_2 = 0$ ,  
então  $X = C_1 \sin(Kx)$ .

A condição de contorno  $u(1, y) = 0$  força  $\sin(Kx) = 0$  ou  $K = n\pi$   
então  $X = C_1 \sin(n\pi x)$ .

A condição de contorno  $u(x, 0) = 0$  força  $C_4 = 0$ ,  
então  $X = C_3 \sinh(n\pi x)$ .

A condição de contorno  $u(x, 1) = A \sin(m\pi x)$  força  $C_1 \sin(n\pi x) \times C_3 \sinh(n\pi) = A \sin(n\pi x)$ , tal que,  $n = m$  e  $C_1 C_3 \sinh(n\pi) = A$



# Modelo Numérico da Atmosfera

---

## Método de Separação de Variáveis

Assim,  $C_1 C_3 = A/\sin(m\pi)$  e a solução será

$$u(x, y) = \left( \frac{A}{\sinh m\pi} \right) \sin m\pi x \sinh m\pi y$$



# Modelo Numérico da Atmosfera

Método de Separação de Variáveis

mais geral condição de contorno (BCs)

Suponha que a solução no lado "norte" seja agora

$$u(x, 1) = f(x)$$

Encontre a solução.

Notamos que a equação **é linear e homogênea**, de forma que, dadas duas soluções, uma combinação linear delas também é uma solução da equação.

Assumimos que podemos analisar Fourier a função  $f(x)$ :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi x$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k| < \infty$$



# Modelo Numérico da Atmosfera

## Método de Separação de Variáveis

Então, a solução pode ser expressa como:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{\sinh k\pi} \right) \sin k\pi x \sinh k\pi y$$

Da mesma forma, podemos encontrar soluções para valores de contorno não desaparecem nas outras três arestas.

Assim, o problema mais geral em um domínio retangular:

$$\nabla^2 u(x, y) = 0,$$

$$u(x, y) = F(x, y)$$

Sobre o contorno

pode ser resolvido.





# Modelo Numérico da Atmosfera

## Método de Separação de Variáveis

Outro exemplo: uma equação parabólica.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t \geq 0$$

Condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0$$

Condições de inicial:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi x$$

Encontre a solução:

$$u(x, t) = f(x) * f(t)$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\sigma k^2 \pi^2 t} \sin k\pi x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k\pi \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = -k^2 \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sigma k^2 \pi^2 u(x, t = 0)$$

$$\frac{\partial u}{u} = -\sigma k^2 \pi^2 \partial t$$

$$\ln(u) = -\sigma k^2 \pi^2 t$$

$$u = e^{-\sigma k^2 \pi^2 t}$$

Observe que quanto maior o número de onda, mais rápido ele vai para zero, ou seja, a solução é suavizada com o passar do tempo.



# Modelo Numérico da Atmosfera

Método de Separação de Variáveis

Outro exemplo: uma equação hiperbólica.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

Condições de limite:

$$u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0$$

Condições de inicial:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi x \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right] = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = -k^2 \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right] = -c^2 k^2 \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x)$$

$$\int_{t=0}^t \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right] dt = -c^2 k^2 \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) \int_{t=0}^t dt$$

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0}^t = -c^2 k^2 \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) t$$

Encontre a solução pelo método de separação de variáveis.

$u(x, t) = ?$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) = -c^2 k^2 \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) t$$

$$u(x, t) = u(x, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) t - c^2 k^2 \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) \frac{t^2}{2}$$



# Modelo Numérico da Atmosfera

## Método de Separação de Variáveis

Mesma equação acima, mas diferentes condições de contorno:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

Condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0$$

Em vez de duas condições iniciais, fornecemos uma condição inicial e uma condição "final":

$$u(x, 0) = f(x) \quad u(x, 1) = g(x)$$

Em outras palavras, tentamos resolver uma equação hiperbólica (onda) como se fosse uma equação elíptica (problema do valor de contorno).

$$u(x, t) = X(x) * Y(t) \quad X \frac{d^2 Y}{dt^2} - c^2 Y \frac{d^2 X}{dx^2} = 0 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{c^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}$$

Assim, eles devem ser iguais a uma constante  $-K^2$



# Modelo Numérico da Atmosfera

## Método de Separação de Variáveis

Exercício: Mostre que a solução é única, mas é verdade não dependem continuamente das condições de contorno, e portanto, não é um problema bem colocado.

Assim, eles devem ser iguais a uma constante  $-K^2$

$$\frac{c^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -K^2$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dt^2} = -K^2$$

$$u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad u(x, 1) = g(x)$$

**As soluções das duas equações são**

$$X = C_1 \sin Kx + C_2 \cos Kx$$

$$Y = C_3 \sinh Ky + C_4 \cosh Ky$$



# Modelo Numérico da Atmosfera

---

## Método de Separação de Variáveis

**Conclusão:** Antes de tentar resolver um problema numericamente, devemos ter certeza de que ele **está bem postado**: ele tem uma solução única que depende continuamente dos dados que definem o problema.

Pense.....

Lorenz mostrou que a atmosfera tem um limite finito de previsibilidade:

Mesmo que os modelos e as observações sejam perfeitos, o bater de uma borboleta no Brasil resultará em uma previsão completamente diferente para o Texas.

Isso significa que o problema do NWP não está bem postado?

Se não, porque não?

Considere novamente a definição de um problema mal-postado.



# Modelo Numérico da Atmosfera

## Problemas de valor inicial

PDEs hiperbólicos e parabólicos são **problemas de valor inicial** ou **problemas de marcha** (um termo introduzido por Richardson).

A solução é obtida usando **os valores iniciais conhecidos** e marchando ou avançando no tempo.

Se os valores de contorno são necessários, eles são chamados de problemas de **valores de contorno e iniciais mistos**.

Os **protótipos** mais simples desses problemas de valor inicial são:

The **advection equation** (with solution  $u(x, t) = u(x-ct, t=0)$ )

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ que é uma equação hiperbólica.}$$

A **equação de difusão**,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ que é uma equação parabólica.}$$



**Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021**

**Métodos de diferenças finitas.**

---

**Muitas vezes o método de separação de variáveis não pode ser aplicado para resolver as equações diferenciais parciais**

**Portanto:**

**Agora consideramos métodos de resolver PDEs numericamente**



**Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021**

## **Métodos de diferenças finitas.**

---

**Equação diferencial** é uma equação que apresenta **derivadas** ou **diferenciais** de uma **função desconhecida** (a incógnita da equação).

**Equação Diferencial Ordinária (EDO)**: Envolve derivadas de uma função de uma só variável independente.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\lambda y$$

**Equação Diferencial Parcial (EDP)**: Envolve derivadas parciais de uma função de mais de uma variável independente.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$$





**Ordem:** é a ordem da derivada de mais alta ordem da função incógnita que está presente na equação.

**Grau:** é o valor do expoente para a derivada mais alta da equação, quando a equação tem a “forma” de um polinômio na função incógnita e em suas derivadas,

$$Ay^3 + By^2 + Cy^1 + Dy^0 = 0$$

1)  $y'' + 3y' + 6y = \sin(x)$  e  $y'' + 3yy' + 6y = e^x$  tem *ordem 2* e *grau 1*

2)  $(y'')^3 + 3(y')^{10} + 6y = \tan(x)$  tem *ordem 2* e *grau 3*

3)  $(y')^3 = f(x, y)$  e  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  tem *ordem 1* e *grau 3*



Quanto à **linearidade** de uma **equação diferencial ordinária** de ordem **n** pode ser vista como uma função

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$$

A equação diferencial é linear se **F** for linear em  $y, y'(x), \dots, y^n(x)$



**Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021**

## **Métodos de diferenças finitas.**

---

### **Leitura recomendada**

- **Durran D. R. (1999) Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics. New York, Springer-Verlag.**
- **Haltiner, G.J. and Williams, R.T. (1980) Numerical prediction and dynamic meteorology. 2nd ed**
- **ECMWF                      Training                      Lecture                      notes**  
**(<http://www.ecmwf.int/newsevents/training/rcourse-notes/NUMERICAL-METHODS/>)**



**As diferenças entre soluções analíticas e métodos numéricos**

**1) Soluções numéricas são os seguintes:**

- ☐ **Valor aproximado**
- ☐ **Sempre particular para um determinado conjunto de parâmetros**

**2) Soluções analíticas são as seguintes:**

- ☐ **Exata**
- ☐ **Global**

**3) As principais fontes de erros para soluções numéricas são :**

- ☐ **Round-off**
- ☐ **Truncamento**



### Erro de Round-off

- Em geral, isso é **menos importante** do que as outras fontes de erro. No entanto, torna-se importante quando
- Somar os números pequenos aos numero grandes, especialmente quando se está em forma de acúmulos de somas

$$e.g. \hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i ; N = 10^8 ; \text{começando com } i = 1 ; i = 1, \dots, 10^8$$

1. A soma dos primeiros 9999999 número é 0.9999999e7.
2. Adicionar o próximo 0.1000000e1 (= 0.0000001e7) resultara' 0.1000000e8
3. O próximo xi será convertido em 0.0000000e8 e este xi Não vai Alterar mais a soma.
4. O mesmo será verdade para todos os xi e o último Resultado é  $10^7$  e a média será  $10^7 / 10^8 = 0,1$ .

- Devido a esse erro, é uma boa prática a utilização de Variáveis de precisão dupla para acumular somas.



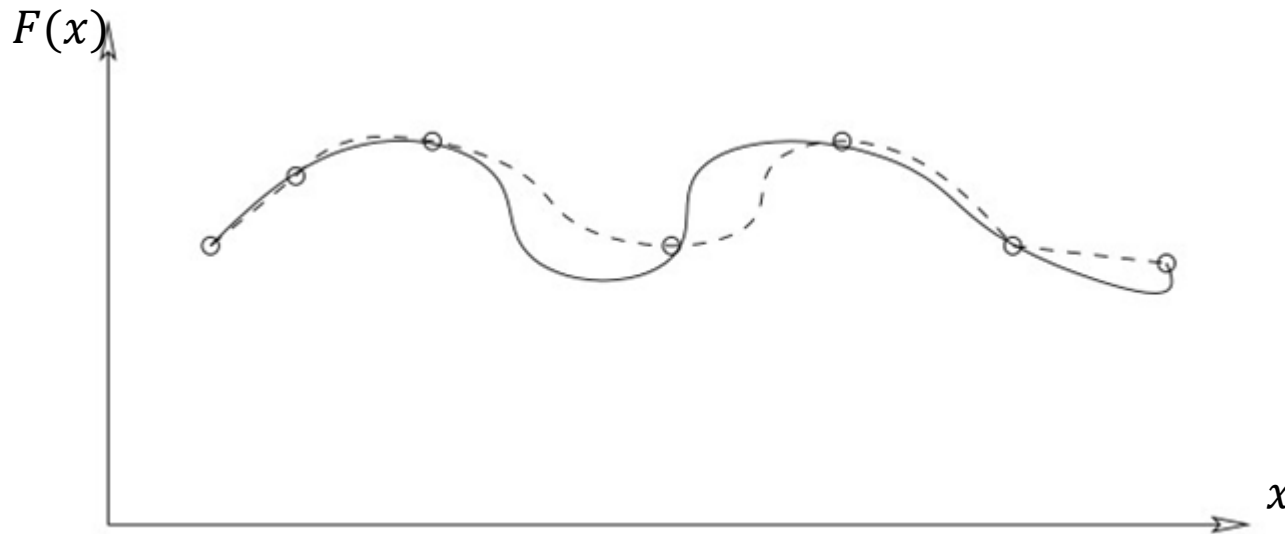
### Erro de Round-off

```
PROGRAM Main
  IMPLICIT NONE
  INTEGER, PARAMETER :: N=100000000
  REAL (KIND=4) :: X
  INTEGER :: i
  X=0.0
  DO i=1, N
    X=X+1.0
    IF (I > X) THEN
      PRINT*,X,i
      exit
    END IF
  END DO
  PRINT*,X,X/N
END PROGRAM Main
```



**Erro de truncamento**

- O Truncamento é produzido quando funções contínuas são representada por uma série de valores pontuais.
- Em geral, quando mais valores de ponto de grade ( **$\Delta x$  reduz**) são utilizados para aproximar a função mais precisa será aproximação.



- A resolução necessária para reduzir o erro de truncamento para um nível aceitável depende da função a ser aproximada.



**Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021**

## **Métodos de diferenças finitas.**

---

### **Resolver Numericamente as Equações Diferenciais**

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} + \mu \nabla^2 u$$

**Simplificando a equação para uma dimensão  
(considerando somente aceleração local e  
convectiva)**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

**Como representar as derivadas espaciais e temporais  
como função discretas**

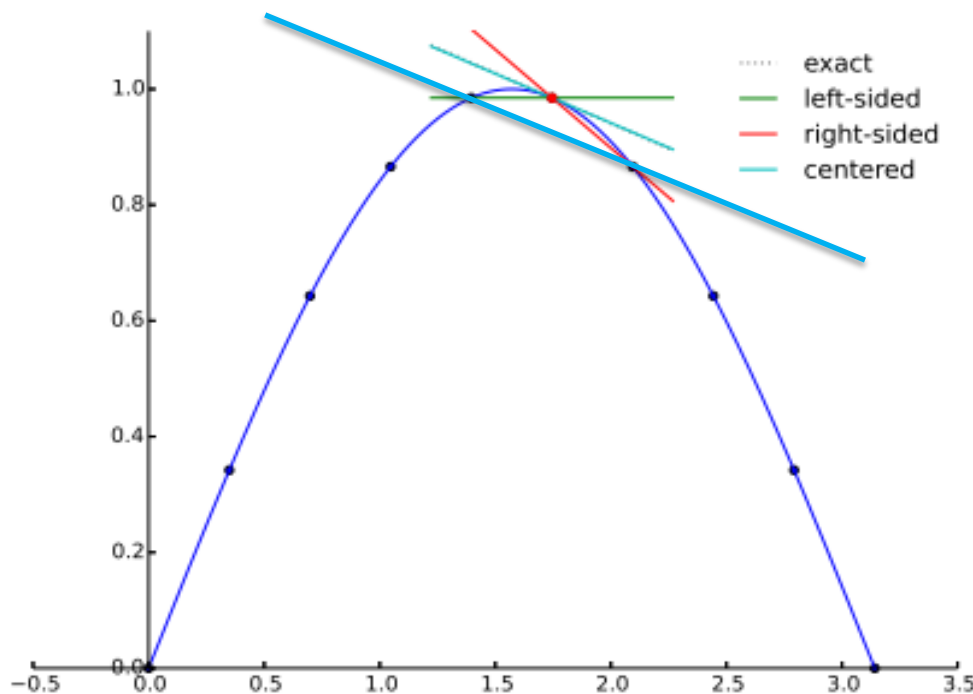




## Diferença numérica aproximação de diferenciação

### Diferenciação

Considere um conjunto de pontos espaçados, indicados com um índice  $i$ , com o espaçamento físico entre eles definido como  $\Delta x$ . Pode-se expressar a primeira derivada de uma quantidade  $a$  em um ponto  $i$  na forma:



$$\left. \frac{da}{dx} \right|_i \approx \frac{a_i - a_{i-1}}{\Delta x}$$

$$\left. \frac{da}{dx} \right|_i \approx \frac{a_{i+1} - a_i}{\Delta x}$$

$$\left. \frac{da}{dx} \right|_i \approx \frac{a_{i+1} - a_{i-1}}{2\Delta x}$$



**Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021**

## **Métodos de diferenças finitas.**

Se tomamos valores discretos para  $x$  e  $t$ :  $x_j = j\Delta x$  e  $t_n = n\Delta t$ .

A solução da equação de diferença finita também é definida nos pontos discretos  $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$ :

$$U_j^n = U(j\Delta x, n\Delta t) = U(x_j, t_n)$$

Ou seja, usamos um  $u$  pequeno para definir a solução do PDE (contínua) e um **U** **maiúsculo para definir a solução da equação de diferenças finitas** (FDE, uma solução discreta).

Considere novamente a equação de advecção

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

Suponha que escolhamos aproximar este PDE com o FDE

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + c \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

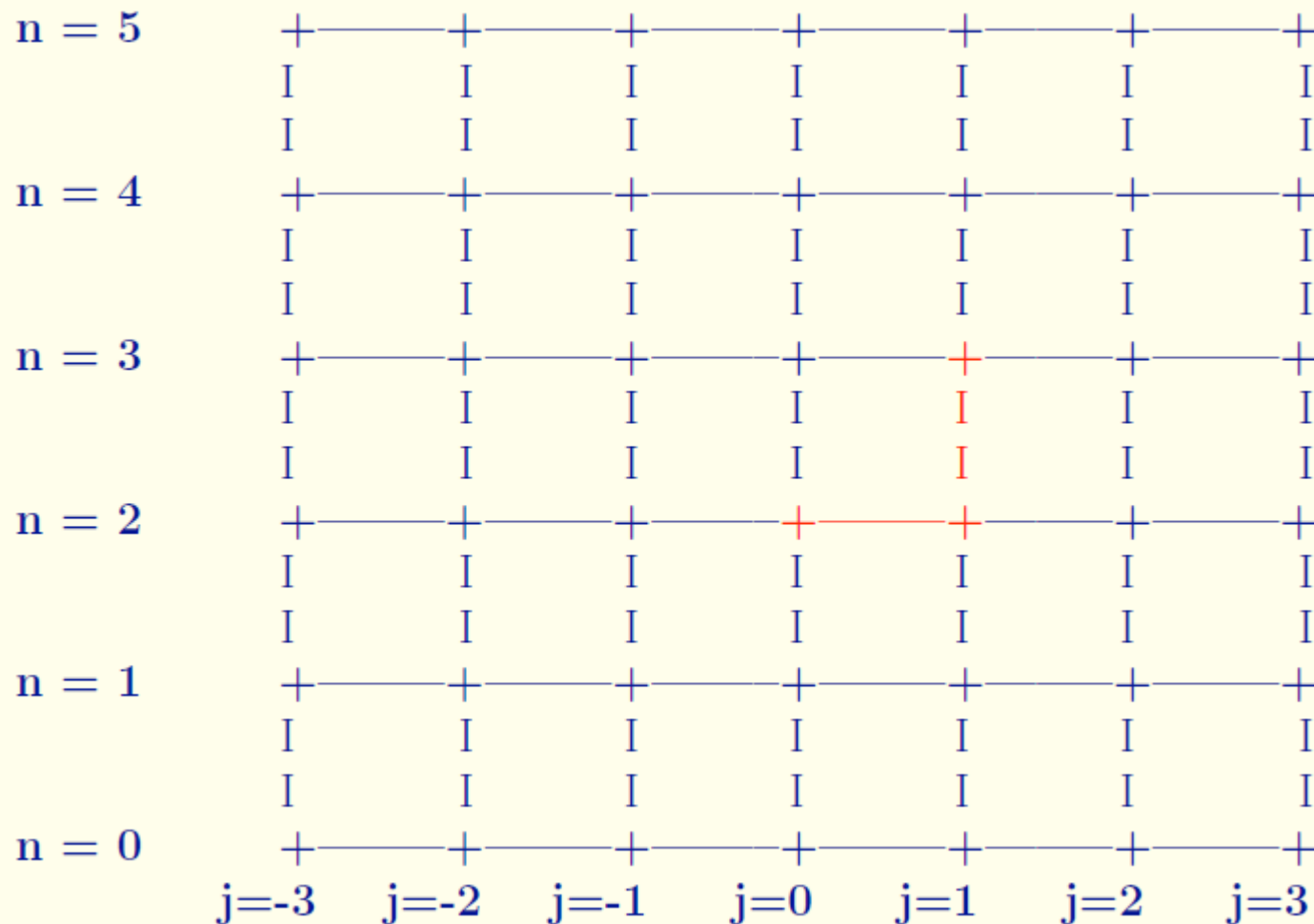


# Modelo Numérico da Atmosfera

The Finite Difference Method

Grade Espaço x Tempo

Tempo eixo vertical



Espaço Eixo Horizontal



# Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

## Modelo Numérico da Atmosfera

Repetir:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + c \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Isso é chamado de esquema upstream (estamos assumindo  $c > 0$ ).

Observe que ambas as diferenças não são centralizadas em relação ao ponto  $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$ .

Podemos fazer duas perguntas fundamentais:

- [1] O FDE é consistente com o PDE?
- [2] Para um dado tempo  $t > 0$ , a solução do FDE convergirá para a do PDE quando  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ ?

Esclareceremos essas questões a seguir.

Aviso: Às vezes, o sobrescrito  $n$  denota um potência ; às vezes é apenas um índice. Seja cuidadoso!



### Diferença numérica aproximação de diferenciação

Aproximações por diferença finita para derivadas são baseadas na série de Taylor Truncada.

$$f(x_{i+1}) = f(x + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x_i) + \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x_i) + O(\Delta x^4) \quad (1)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x f'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x_i) - \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x_i) + O(\Delta x^4) \quad (2)$$

Enquanto Eq. 2 Dá a Aproximação por diferença adiantada

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} + O(\Delta x) , \quad (3)$$

A reorganização das Eq. 1. Dá a Aproximação por diferença atrasada

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} + O(\Delta x) . \quad (4)$$

Estes são chamados aproximações de primeira ordem porque o Erro Truncamento é proporcional a  $\Delta x$  a potência de 1.



**Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021**

## **Métodos de diferenças finitas.**

### **Diferença numérica aproximação de diferenciação**

**Para Aproximação de diferença centralizada segunda-ordem: subtraindo a Eq. 2 da Eq. 1. E a reorganização leva a:**

$$f(x_{i+1}) = f(x + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x_i) + \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x_i) + O(\Delta x^4) \quad (1)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x f'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x_i) - \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x_i) + O(\Delta x^4) \quad (2)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) . \quad (5)$$

**Quando  $\Delta x$  Aproxima-se de zero,  $\Delta x^2$  Aproxima-se de zero muito mais rápido em relação a  $\Delta x$ .**

**Portanto, uma aproximação de segunda ordem irá convergir mais rápido do que uma aproximação primeira-ordem.**



## Diferença numérica aproximação de diferenciação

**Uma aproximação para a segunda derivada pode ser encontrado adicionando a Eq. 2 na Eq. 1.**

$$f(x_{i+1}) = f(x + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x_i) + \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x_i) + O(\Delta x^4) \quad (1)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x f'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x_i) - \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x_i) + O(\Delta x^4) \quad (2)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) . \quad (6)$$

**Esta fórmula tem precisão de segunda ordem.**



**Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021**

## **Métodos de diferenças finitas.**

### **Erro de Truncamento e Consistência**

O FDE é **consistente** com o PDE se, no limite  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ , o FDE coincidir com o PDE.

Obviamente, esse é um requisito básico que o FDE deve atender se suas soluções forem boas aproximações das soluções do PDE.

**Definição:** A diferença entre o PDE e o FDE é chamada de erro de discretização ou **erro de truncamento local**.

### **A consistência é bastante simples de verificar:**

- Substitua  $u$  em vez de  $U$  no FDE.
- Avalie todos os termos usando uma expansão da série de Taylor centrada no ponto  $(x_j, t_n)$ .
- Subtraia o PDE do FDE.

Se a diferença (erro de truncamento local) for para zero como  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ , então o **FDE é consistente com o PDE**.





## Exemplo: Equações diferenciais Ordinárias

**Considere uma equação diferencial ordinária linear**

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\lambda y \quad (7)$$

**Onde  $\lambda > 0$ , com a condição inicial ( $t = 0 \rightarrow y(t = 0) = y_0$ ).**

**Como já se sabe a **solução exata** é  $y = y_0 e^{-\lambda t}$**

**A derivada temporal da Eq. 7º pode ser aproximadas utilizando as diferenciação avançadas**

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = -\lambda y^n \quad (8) \quad y^{n+1} = y^n - \lambda \Delta t y^n \quad y^{n+1} = (1 - \lambda \Delta t) y^n \quad (9)$$

**Onde  $y^n$  é definido como  $y(t_n)$  e  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ , Portanto::**

$$y^{n+1} = (1 - \lambda n \Delta t) y^0$$