MET-576-4

Modelagem Numérica da Atmosfera

Dr. Silvio Nilo Figueroa Rivero & Dr. Paulo Yoshio Kubota

Os métodos numéricos, formulação e parametrizações utilizados nos modelos atmosféricos serão descritos em detalhe.

3 Meses
24 Aulas (2 horas cada)

Dinâmica 18/10/2021 a 18/10/2021

Dinâmica:

Métodos numéricos amplamente utilizados na solução numérica das equações diferencias parciais que governam os movimentos na atmosfera serão o foco, mas também serão analisados os novos conceitos e novos métodos.

Dinâmica 18/10/2021 a 18/10/2021

- ✓ Métodos de diferenças finitas.
- ✓ Acurácia.
- ✓ Consistência.
- ✓ Estabilidade.
- ✓ Convergência.
- ✓ Grades de Arakawa A, B, C e E.
- ✓ Domínio de influência e domínio de dependência.
- ✓ Dispersão numérica e dissipação.
- ✓ Definição de filtros monótono e positivo.
- ✓ Métodos espectrais.
- ✓ Métodos de volume finito.
- ✓ Métodos Semi-Lagrangeanos.
- ✓ Conservação de massa local.
- ✓ Esquemas explícitos versus semi-implícitos.
- ✓ Métodos semi-implícitos.

Lei de Conservação

O principio Geral é que a taxa de mudança de $u(x,t)$ dentro do volume V é igual ao fluxo que passa o contorno.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V} u(x,t) + \int_{\partial V} f(u)\cdot n = 0$$

Onde $f(x,t)$ **é a função fluxo.**

$$\iiint_V \nabla\cdot F dV = \oint_S F\cdot dS = \oint_S (F\cdot n)\, dS$$

Supoen a região $V_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$)**.**

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i\mp\frac{1}{2}}} f(u)\cdot n\, dx = 0$$

Lei de Conservação

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i\mp\frac{1}{2}}} f_x(u) \cdot n\, dx = 0$$

Aplicando o teorema de Gauss e integrando analiticamente o termo resultante.

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)dx + f\left(u_{i+\frac{1}{2}}\right) - f\left(u_{i-\frac{1}{2}}\right) = 0$$

Podemos aplicar uma regra de quadratura, por exemplo, Ponto médio, à integral restante para obter uma forma semi-discreta

$$\left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial\left(u_t(x_i)\right)}{\partial t} + f\left(u_{i+\frac{1}{2}}\right) - f\left(u_{i-\frac{1}{2}}\right) = 0$$

Lei de Conservação

Considerando a equação elíptica $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u(x)}{\partial x} = f(x)$ **sobre um volume de controle** $V_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ **então.**

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u(x)}{\partial x}\, dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)\, dx$$

Resolvendo o lado esquerdo analiticamente e o direito via Midpoint

$$\frac{\partial\left(u\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(u\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\right)}{\partial x} = \left(f\left(u_{i+\frac{1}{2}}\right) - f\left(u_{i-\frac{1}{2}}\right)\right)\left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}\right) = 0$$

Usando diferenças centradas nas derivadas remanecentes

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h} = hf_i$$

$$h = \left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

Métodos de volume finito

Forma de conservação de equações dinâmicas de fluidos

φ (x, y, z, t) pode ser uma pequena concentração de umidade = nuvem

u (x, y, z, t) é a velocidade do fluxo de ar assumido incompressível

Forma Diferencial

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nabla \cdot (\vec{u}\varphi) = \nabla \cdot \upsilon \nabla \cdot \varphi}$$

Volume médio sobre a foram diferencial

$$\boxed{\frac{1}{V}\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \frac{1}{V}\int_V \nabla \cdot (\vec{u}\varphi)\, dV = \frac{1}{V}\int_V \nabla \cdot \upsilon \nabla \cdot \varphi \; dV}$$

$$\boxed{\frac{1}{V}\int_V \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV + \frac{1}{V}\int_V \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u})\, dV = -\frac{1}{V}\int_V \nabla \cdot P\, dV + \frac{1}{V}\int_V \upsilon \nabla \cdot \vec{u}\, dV}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u}) = -\nabla \cdot P + \upsilon \nabla \cdot \vec{u}}$$

No método de volume finito, as equações governantes (na forma diferencial)são médias de volume integrando-as em cada elemento de volumeda grade.

Métodos de volume finito

Forma Diferencial

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nabla \cdot (\vec{u}\varphi) = \nabla \cdot \upsilon \nabla \cdot \varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u}) = -\nabla \cdot P + \upsilon \nabla \cdot \vec{u}$$

Forma Conservativa

$$\frac{1}{V}\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \frac{1}{V}\int_V \nabla \cdot (\vec{u}\varphi)\, dV = \frac{1}{V}\int_V \nabla \cdot \upsilon \nabla \cdot \varphi \; dV$$

$$\frac{1}{V}\int_V \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV + \frac{1}{V}\int_V \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u})\, dV = -\frac{1}{V}\int_V \nabla \cdot P\, dV + \frac{1}{V}\int_V \upsilon \nabla \cdot \vec{u}\, dV$$

As integrais de volume do teorema de Gauss são convertidas em fluxos de concentração (CD-eqn) ou momentum (NS-eqn) sobre os limites da superfície do volume.

Métodos de volume finito

As integrais de volume do teorema de Gauss são convertidas em fluxos de concentração (CD-eqn) ou momentum (NS-eqn) sobre os limites da superfície do volume.

Em seguida, discutimos:

1) integração em 1d

2) integração em 1d, 2d ou 3d é apenas a utilização do teorema de Gauss

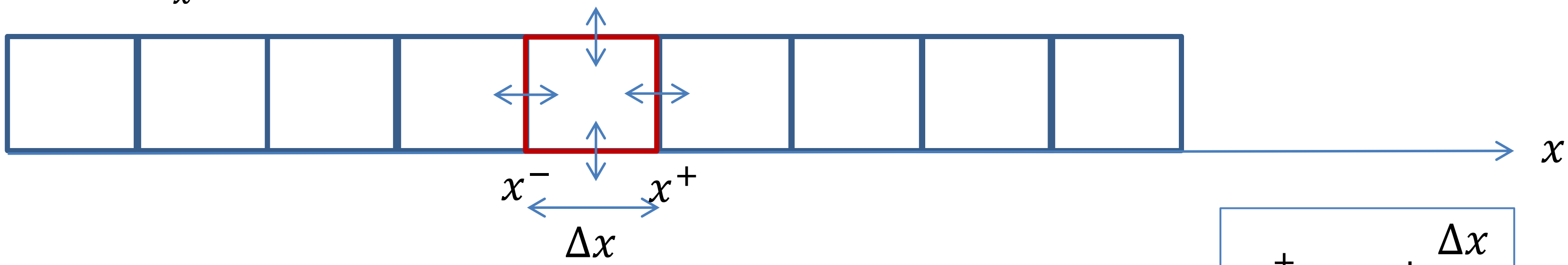
3) como derivar o método de volume finito para a equação convecção-difusão

4) que em malha uniforme o método do volume finito é igual ao método da diferença finita

Métodos de volume finito

1) integração em 1d

$$\int_{x^-}^{x^+} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = /_{x^-}^{x^+} \varphi(x) = \varphi(x^+) - \varphi(x^-)$$



$$x^+ = x + \frac{\Delta x}{2}$$

$$x^- = x - \frac{\Delta x}{2}$$

→ **Os valores da função integral nos pontos finais do intervalo determinam o fluxo de saída da integral.**

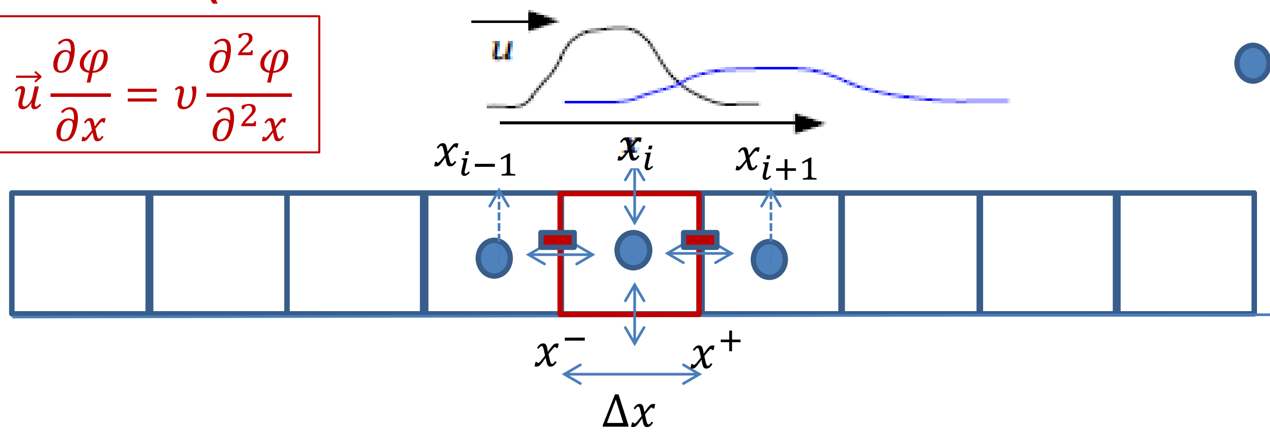
→ **Observe a "heurística": se integrarmos uma função sobre um volume, então os valores da função integral nos limites da superfície poderiam determinar o fluxo de saída da integral**

Métodos de volume finito

1) integração em 1d

Exemplo: O método de volume finito para 1d problema de convecção-difusão em uma grade uniforme (u = constante)

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \upsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x}}$$



$$\boxed{x_{i-1} = x_i - \Delta x}$$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i + \Delta x}$$

$$\boxed{x^+ = x + \frac{\Delta x}{2}}$$

$$\boxed{x^- = x - \frac{\Delta x}{2}}$$

Vamos integrar a equação de CD ao longo do comprimento Δx

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x^-}^{x^+} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx + \frac{1}{\Delta x}\int_{x^-}^{x^+} \vec{u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \frac{1}{\Delta x}\int_{x^-}^{x^+} \upsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} dx$$

Integração dá:

$$\frac{1}{\Delta x}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x^-}^{x^+} \varphi dx + \frac{1}{\Delta x} /_{x^-}^{x^+} \vec{u}\varphi = \frac{1}{\Delta x} /_{x^-}^{x^+} \upsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Métodos de volume finito

1) integração em 1d

$$\frac{1}{\Delta x}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x^-}^{x^+}\varphi dx + \frac{1}{\Delta x}/_{x^-}^{x^+}\vec{u}\varphi = \frac{1}{\Delta x}/_{x^-}^{x^+}\upsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

Integral no termo derivado do tempo:

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x^-}^{x^+}\varphi dx = \frac{1}{\Delta x}/_{x^-}^{x^+}\varphi = \frac{\varphi(x^+) - \varphi(x^-)}{\Delta x} \approx \varphi$$

O termo derivado do tempo é assim aproximado "como era antes ":

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Delta x}\int_{x^-}^{x^+}\varphi dx = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

A substituição de valores esquerdos e direitos do termo de convecção :

$$\frac{1}{\Delta x}/_{x^-}^{x^+}\vec{u}\varphi = \vec{u}\frac{\varphi(x^+) - \varphi(x^-)}{\Delta x}$$

A substituição de valores esquerdos e direitos do termo de difusão :

$$\frac{1}{\Delta x}/_{x^-}^{x^+}\upsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\upsilon\frac{\partial\varphi(x^+)}{\partial x} - \upsilon\frac{\partial\varphi(x^-)}{\partial x}\right)$$

Métodos de volume finito

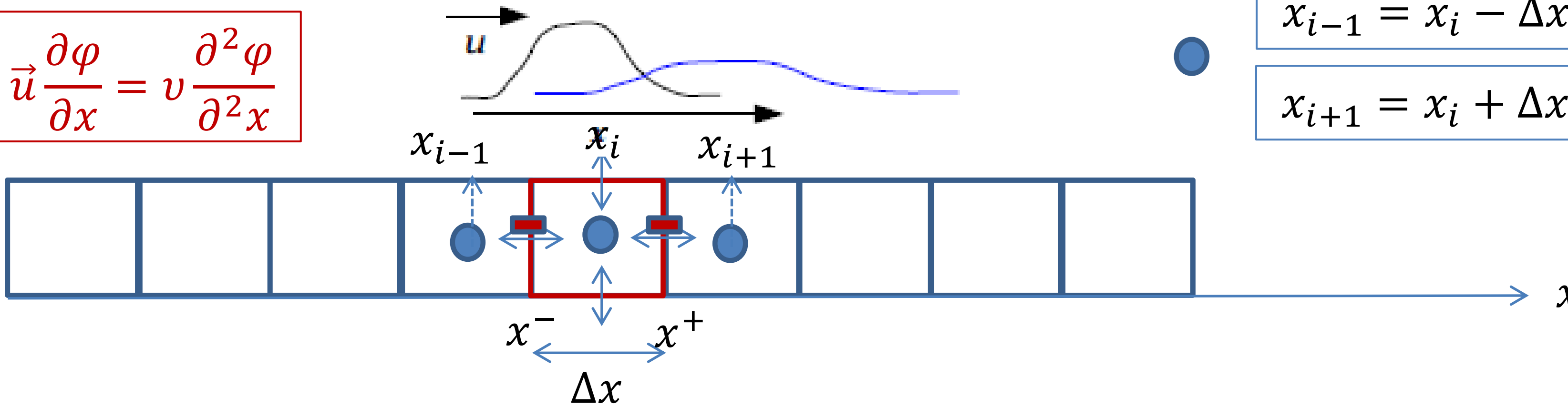
1) integração em 1d

Exemplo: O método de volume finito para 1d problema de convecção-difusão em uma grade uniforme (u = constante)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \upsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x}$$

$$x_{i-1} = x_i - \Delta x$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x$$



Os termos abaixo são interpolantes da quantidade transportada na face da célula

$$x^+ = x + \frac{\Delta x}{2}$$

$$x^- = x - \frac{\Delta x}{2}$$

Os termos abaixo são interpolantes dos gradientes da quantidade transportada na face da célula

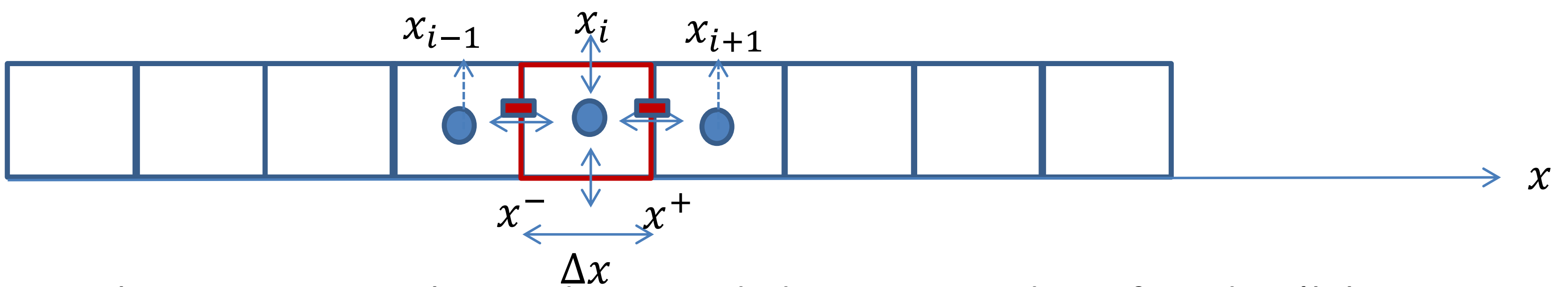
$$\upsilon \frac{\partial \varphi(x^+)}{\partial x}$$

$$\upsilon \frac{\partial \varphi(x^-)}{\partial x}$$

Como você consegue essas interpolações?

Métodos de volume finito

1) integração em 1d



Os termos abaixo são interpolantes da quantidade transportada na face da célula

$$x^+ = x + \frac{\Delta x}{2}$$

$$x^- = x - \frac{\Delta x}{2}$$

Os termos abaixo são interpolantes dos gradientes da quantidade transportada na face da célula

$$\upsilon \frac{\partial \varphi(x^+)}{\partial x}$$

$$\upsilon \frac{\partial \varphi(x^-)}{\partial x}$$

Como você consegue essas interpolações?

→ Na grade uniforme, pode-se simplesmente interpolar linearmente

$$\varphi(x^+) = \frac{1}{2}\left(\varphi_{x_{i+1}} + \varphi_{x_i}\right)$$

$$\varphi(x^-) = \frac{1}{2}\left(\varphi_{x_i} + \varphi_{x_{i-1}}\right)$$

$$\upsilon \frac{\partial \varphi(x^+)}{\partial x} \approx \upsilon \frac{\left(\varphi_{x_{i+1}} - \varphi_{x_i}\right)}{\Delta x}$$

$$\upsilon \frac{\partial \varphi(x^-)}{\partial x} \approx \upsilon \frac{\left(\varphi_{x_i} - \varphi_{x_{i-1}}\right)}{\Delta x}$$

Métodos de volume finito

Assim, começamos a partir desta integral

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x^-}^{x^+}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx + \frac{1}{\Delta x}\int_{x^-}^{x^+}\vec{u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx = \frac{1}{\Delta x}\int_{x^-}^{x^+}\upsilon\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x}\,dx$$

e encontrar a forma semidiscreta (o tempo ainda não está discreto):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{u}\,\frac{\varphi_{x_{i+1}} - \varphi_{x_{i-1}}}{2\Delta x} = \upsilon\,\frac{\varphi_{x_{i+1}} - 2\varphi_{x_i} + \varphi_{x_{i-1}}}{2\Delta x}$$

$$\vec{u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$\upsilon\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x}$$

Equivalente ao termo discretizado pelo método das diferenças finitas (fórmula de diferença central de 2ª ordem para a 1ª derivada)

Equivalente ao termo discretizado pelo método das diferenças finitas (fórmula de diferença central de 2ª ordem para a 2ª derivada)

Métodos de volume finito

→ A discretização do tempo pode então ser aplicada de várias formas, por ex. Euler, Runge-Kutta, Crank-Nicolson,…

→ No caso mais simples, poderíamos usar o **método explícito de Euler** para obter

$$\frac{\varphi_{x_i}^{n+1} - \varphi_{x_i}^{n}}{\Delta t} + \vec{u}\,\frac{\varphi_{x_{i+1}} - \varphi_{x_{i-1}}}{2\Delta x} = \upsilon\,\frac{\varphi_{x_{i+1}} - 2\varphi_{x_i} + \varphi_{x_{i-1}}}{2\Delta x}$$

que permite avaliar diretamente a solução na timestep n + 1 em cada ponto de grade i similar ao que será feito na atribuição de programação.

Conclusão:
Ao integrar o CD-eqn sobre um intervalo dx, acabamos de derivar o método do volume finito (precisão de espaço de segunda ordem) para grades uniformes em 1d e mostramos que o resultado é exatamente o mesmo do método de diferenças finitas.

Parte 5: Teorema de Gauss e o método de volume finito no OpenFOAM (para serdiscutido na aula 5)

Métodos de volume finito

O Teorema de Gauss, ou seja, Teorema da Divergência ou Apenas Simplesmente: "Generalização da Integração"

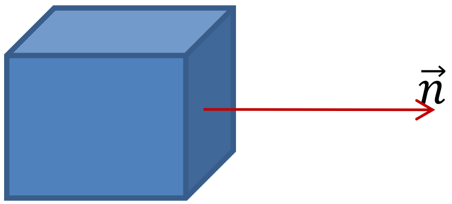
- **Teorema de Gauss para converter integrais de volume em integrais de superfície**

$$\boxed{\int_V \vec{\nabla}.\vec{F}\,dV = \int_S \vec{F}.\vec{n}\,dS}$$

$V\,(Volume)$

- **Os termos da convecção são da forma de divergência**

$$\boxed{\int_V \vec{\nabla}.(\vec{u}\varphi)\,dV = \int_S (\vec{u}\varphi).\vec{n}\,dS}$$



- **Os termos de difusão também são da forma de divergência**

$$\boxed{\int_V \vec{\nabla}.\left(\upsilon\vec{\nabla}\varphi\right)dV = \int_S \upsilon\left(\vec{\nabla}\varphi\right).\vec{n}\,dS}$$

dS

$Area\ da$
$Superficie\ da\ face$

Observação: As equações de transporte podem ser escritas em forma de fluxo de modo que a taxa de variação de uma quantidade dentro de um volume de controle V depende dos fluxos através do limite S.→ da idéia básica do método de volume finito.

Métodos de volume finito

Topologia de rede não estruturada

Quantidades vetoriais e escalares armazenadas nos centros das células (ponto P), enquanto os fluxos podem ser interpolados nas faces das células a partir de pontos adjacentes.

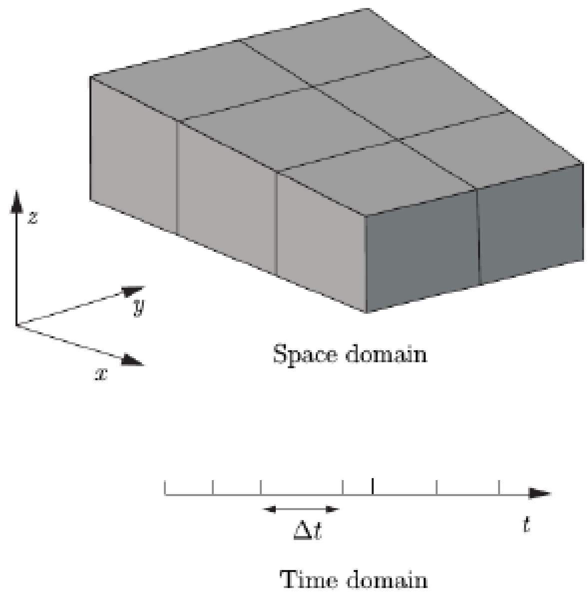


Figure 2.1: Discretisation of the solution domain

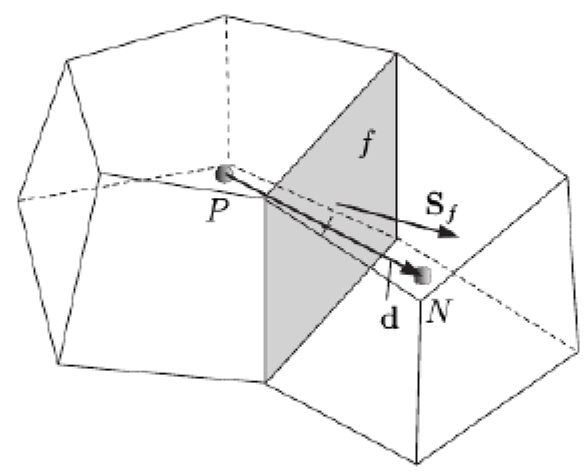


Figure 2.2: Parameters in finite volume discretisation

Topologia de rede não estruturada

O Teorema de Gauss forma o básico do método do volume finito

Forma Diferencial

$$\frac{1}{V}\int_V \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nabla \cdot (\vec{u}\varphi) = \nabla \cdot \upsilon \nabla \cdot \varphi}$$

$$\frac{1}{V}\int_V \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u}) = -\nabla \cdot P + \upsilon \nabla \cdot \vec{u}}$$

Forma de conservação

$$\boxed{\frac{1}{V}\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \frac{1}{V}\int_V \nabla \cdot (\vec{u}\varphi)\, dV = \frac{1}{V}\int_V \nabla \cdot \upsilon \nabla \cdot \varphi \; dV}$$

$$\boxed{\frac{1}{V}\int_V \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV + \frac{1}{V}\int_V \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u})\, dV = -\frac{1}{V}\int_V \nabla \cdot P\, dV + \frac{1}{V}\int_V \upsilon \nabla \cdot \vec{u}\, dV}$$

Aplicando o Teorema de Gauss

$$\frac{1}{V}\int_V \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nabla \cdot (\vec{u}\varphi) = \nabla \cdot \upsilon \nabla \cdot \varphi}$$

$$\boxed{\frac{1}{V}\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \frac{1}{V}\int_S (\vec{u}\varphi).\vec{n}\, dS = \frac{1}{V}\int_S \upsilon \nabla \varphi\, .\vec{n}\, dS}$$

$$\frac{1}{V}\int_V \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u}) = -\nabla \cdot P + \upsilon \nabla \cdot \vec{u}}$$

$$\boxed{\frac{1}{V}\int_V \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV + \frac{1}{V}\int_S (\vec{u}\vec{u}).\vec{n}\, dV = -\frac{1}{V}\int_S P.\vec{n}\, dS + \frac{1}{V}\int_S \upsilon \nabla \vec{u}\, .\vec{n} dS}$$

Métodos de volume finito

Topologia de rede não estruturada

O Teorema de Gauss forma o básico do método do volume finito

Aplicando o Teorema de Gauss

$$\frac{1}{V}\int_V \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nabla \cdot (\vec{u}\varphi) = \nabla \cdot \upsilon \nabla \cdot \varphi}$$

$$\boxed{\frac{1}{V}\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \frac{1}{V}\int_S (\vec{u}\varphi).\vec{n}\, dS = \frac{1}{V}\int_S \upsilon \nabla \varphi\, .\vec{n}\, dS}$$

$$\frac{1}{V}\int_V \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u}) = -\nabla \cdot P + \upsilon \nabla \cdot \vec{u}}$$

$$\boxed{\frac{1}{V}\int_V \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV + \frac{1}{V}\int_S (\vec{u}\vec{u}).\vec{n}\, dV = -\frac{1}{V}\int_S P.\vec{n}\, dS + \frac{1}{V}\int_S \upsilon \nabla \vec{u}\, .\vec{n} dS}$$

No método de discretização por volume finito, os fluxos nas faces das células são estimados numericamente utilizando funções de interpolação. Integração substituída por somatório.

$$\boxed{\frac{1}{V}\int_S (\vec{u}\varphi).\vec{n}\, dS \approx \frac{1}{V}\sum_{faces} (\vec{u}\varphi)_f.\vec{\boldsymbol{n}_f} dS_f}$$

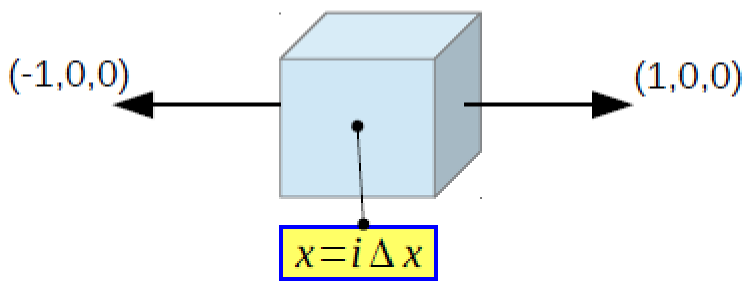
$$\boxed{\frac{1}{V}\int_S \upsilon \nabla \varphi\, .\vec{n}\, dS \approx \frac{1}{V}\sum_{faces} (\upsilon \nabla \varphi)_f.\vec{\boldsymbol{n}_f} dS_f}$$

Aqui, o índice "f" refere-se ao centro da face da célula.

Topologia de rede não estruturada

Example: Discretize Derivative of a Function *u=u(x)* Using the FVM

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z}\int_{\Delta x} u_x dx\, dy\mathrm{dz} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z}\int_{\Delta x} u_x dxdydz = \frac{1}{\Delta x}\int_{\Delta x} u.n_x dS = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

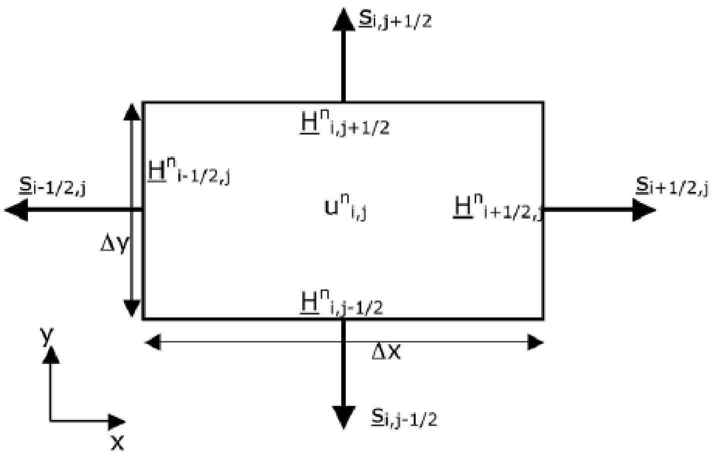


Métodos de volume finito

O método de volume finito (FVM) aplicado a EDP escrito no forma:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla . \vec{H} = Q}$$

O $\vec{H}$ é o vetor fluxo (densidade) e Q é o termo fonte.
Integrando a equação sobre uma região R de Área A com perímetro C usando uma versão do Teorema de Green.



$$A\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \oint_C \vec{H}.\vec{n}dS = A\bar{Q}$$

O onde a Barra Define o valor médio sobre R. $\vec{n}$ é um vetor unitário normal saindo em cada ponto sobre C

Métodos de volume finito

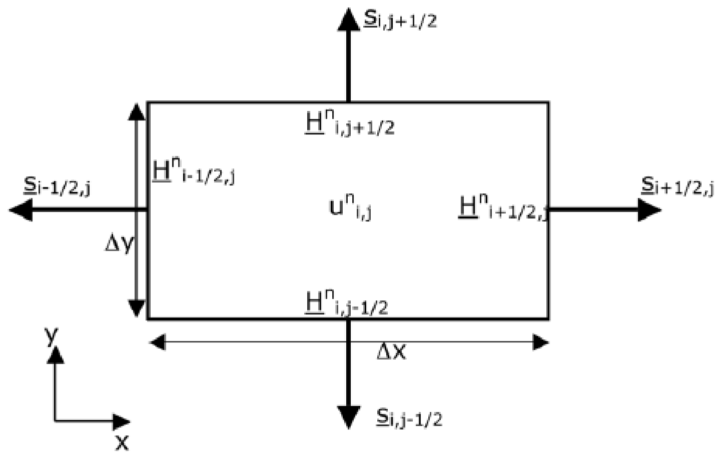
O metodo de volume finito (FVM) aplicado a EDP escrito no forma:

$$A\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} = -\frac{1}{A}\oint_{C} \vec{H}.\vec{n}dS + \bar{Q}$$

A equação é valido sobre qualquer região R.

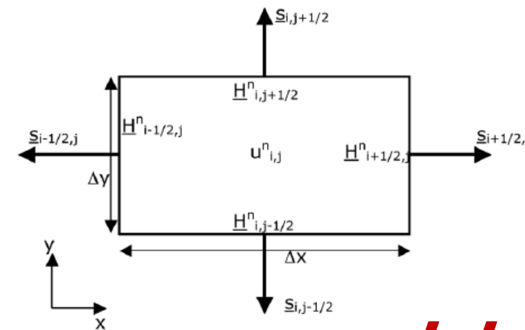
Discretizando a equação sobre k células a diferença forword de primeira ordem no tempo

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^{n}}{\Delta t} = \frac{1}{A}\left(\sum_{sides} \vec{H}^{n}.S\right) + q_k^{n}$$



Métodos de volume finito

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{1}{A}\left(\sum_{sides} \vec{H}^n . S\right) + q_k^n$$



Nota:

1 A equação pode ser considerada como um esquema geral de volume finito explicito.

2. A equação é de primeira ordem no tempo devido a discretização no tempo usado mas ordem mais alta e acurada pode ser usado.

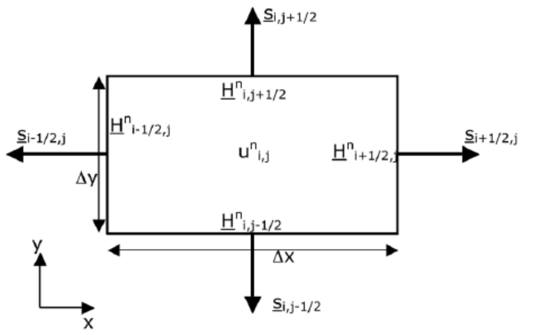
3 Um particular FVS baseado na equação acima é construído estimando os fluxos nas interfaces (o valor de $\vec{H}$ sobre os lados da célula)

4 Desde que $\vec{H} = \vec{H}(U)$, a estimativa da interface de fluxo pode ser feita pela extrapolação do valores de U no centro da célula para a interface ou extrapolação direta da célula dos valores de $\vec{H}$ do centro da célula para a interface

Métodos de volume finito

FVM sobre uma Malha Cartesiana

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{1}{A}\left(\sum_{sides} \vec{H}^n . S\right) + q_k^n$$



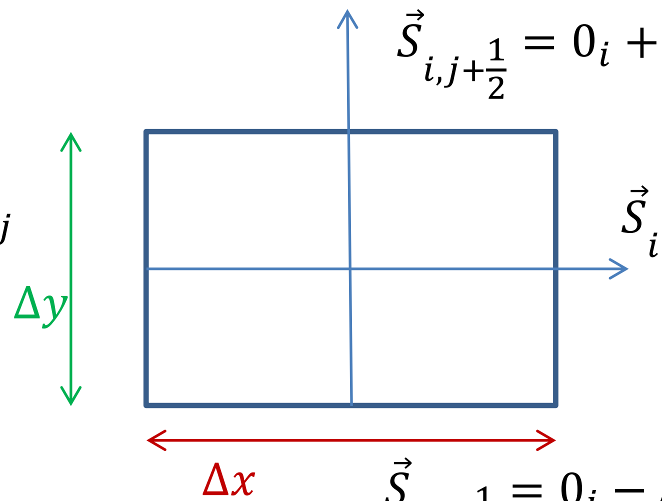
$\Delta x, \Delta y$ constante

O lado do vetor são claramente paralelo aos eixos x e y e da álgebra vetorial simples tem-se:

$$\vec{S}_{i,j+\frac{1}{2}} = 0_i + \Delta x_j$$

$$\vec{S}_{i-\frac{1}{2},j} = \Delta y_i - 0_j$$

$$\vec{S}_{i+\frac{1}{2},j} = \Delta y_i + 0_j$$



$$\vec{S}_{i,j-\frac{1}{2}} = 0_i - \Delta x_j$$

Métodos de volume finito

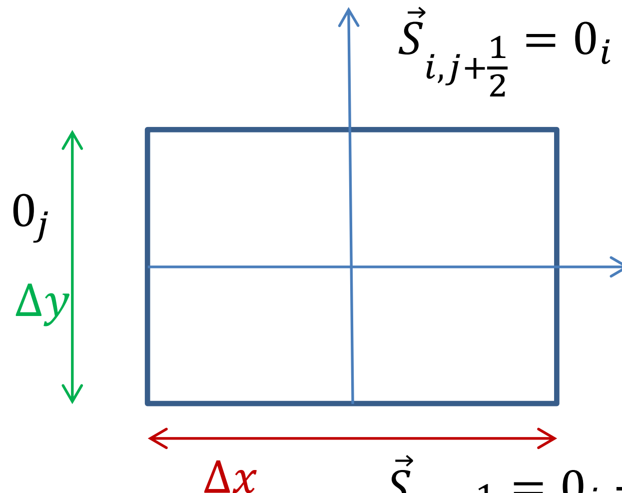
FVM sobre uma Malha Cartesiana

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{1}{A}\left(\sum_{sides} \vec{H}^n . S\right) + q_k^n$$

$$\vec{S}_{i,j+\frac{1}{2}} = 0_i + \Delta x_j$$

$$\vec{S}_{i-\frac{1}{2},j} = -\Delta y_i + 0_j$$

$$\vec{S}_{i+\frac{1}{2},j} = \Delta y_i + 0_j$$



$$\vec{S}_{i,j-\frac{1}{2}} = 0_i - \Delta x_j$$

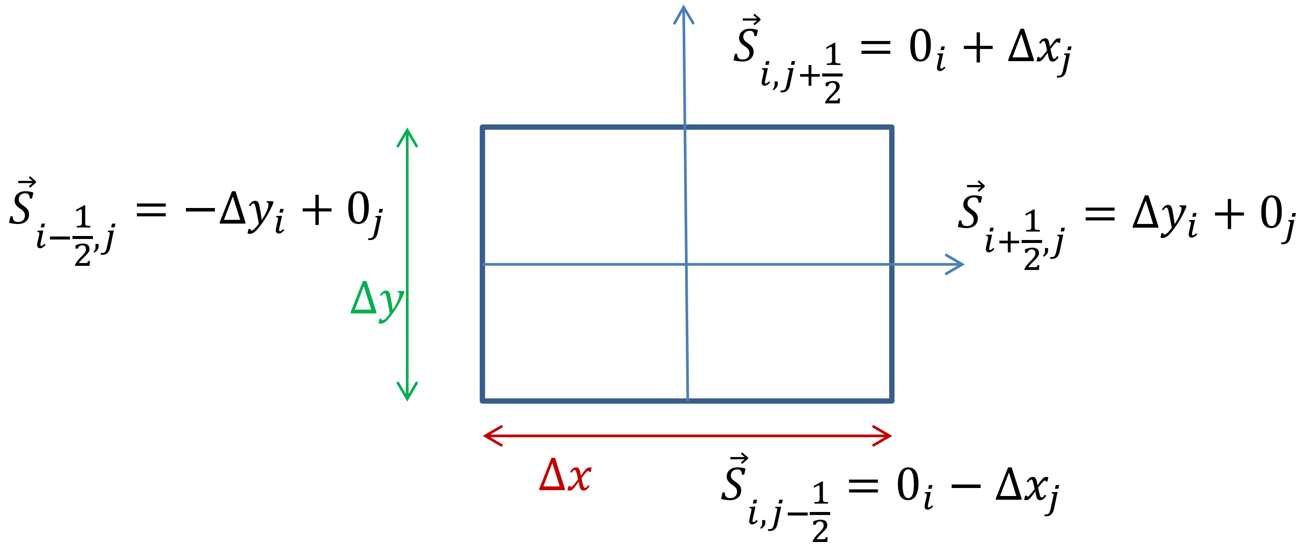
$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y}\left(\vec{H}^n_{i+\frac{1}{2},j}.\vec{S}^n_{i+\frac{1}{2},j} + \vec{H}^n_{i,j+\frac{1}{2}}.\vec{S}^n_{i,j+\frac{1}{2}} + \vec{H}^n_{i-\frac{1}{2},j}.\vec{S}^n_{i-\frac{1}{2},j} + \vec{H}^n_{i,j-\frac{1}{2}}.\vec{S}^n_{i,j-\frac{1}{2}}\right)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y}\left(\vec{H}^n_{i+\frac{1}{2},j}.\Delta y_i + \vec{H}^n_{i,j+\frac{1}{2}}.\Delta x_j + \vec{H}^n_{i-\frac{1}{2},j}.(-\Delta y_i) + \vec{H}^n_{i,j-\frac{1}{2}}.(-\Delta x_j)\right)$$

Métodos de volume finito

FVM sobre uma Malha Cartesiana

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y}\left(\vec{H}^{n}_{i+\frac{1}{2},j} . \Delta y_i + \vec{H}^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} . \Delta x_j + \vec{H}^{n}_{i-\frac{1}{2},j} . (-\Delta y_i) + \vec{H}^{n}_{i,j-\frac{1}{2}} . (-\Delta x_j)\right)$$



Podemos escrever $\vec{H}$ *em termos de suas componentes*

$$\vec{H} = F_i + G_j$$

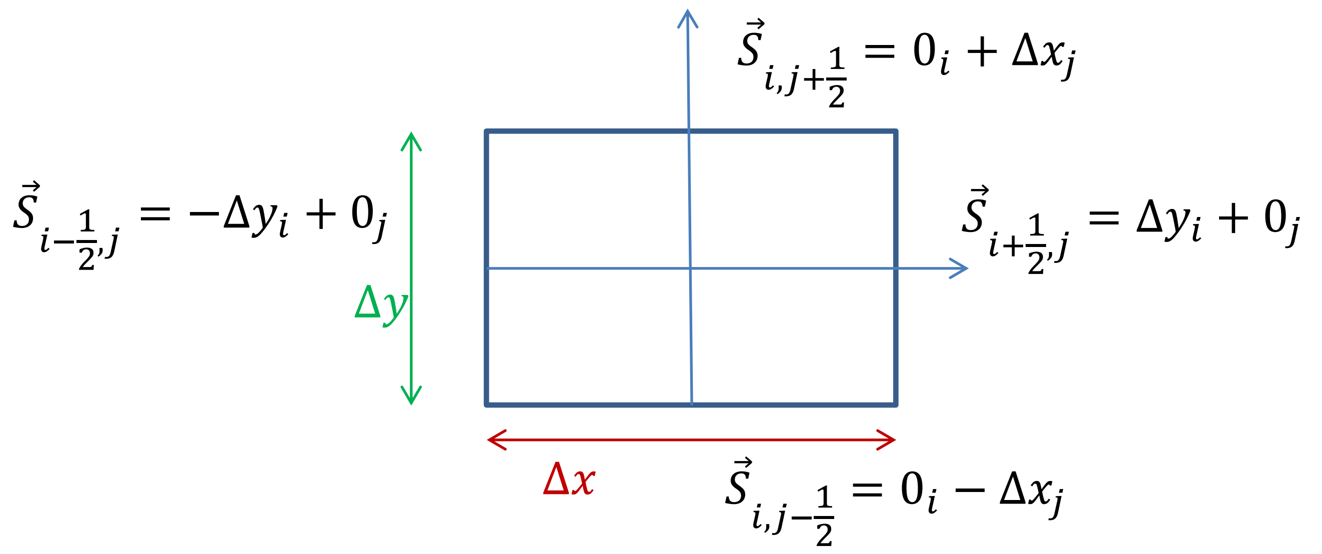
$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y}\left(F^{n}_{i+\frac{1}{2},j} . \Delta y_i + G^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} . \Delta x_j + F^{n}_{i-\frac{1}{2},j} . (-\Delta y_i) + G^{n}_{i,j-\frac{1}{2}} . (-\Delta x_j)\right)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y}\left(F^{n}_{i+\frac{1}{2},j} . \Delta y_i + G^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} . \Delta x_j - F^{n}_{i-\frac{1}{2},j} . (\Delta y_i) - G^{n}_{i,j-\frac{1}{2}} . (\Delta x_j)\right)$$

Métodos de volume finito

FVM sobre uma Malha Cartesiana

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y}\left(F^{n}_{i+\frac{1}{2},j}.\Delta y_i + G^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}.\Delta x_j - F^{n}_{i-\frac{1}{2},j}.(\Delta y_i) - G^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}.(\Delta x_j)\right)$$



Podemos Reescrever

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y}\left(F^{n}_{i+\frac{1}{2},j}.\Delta y_i - F^{n}_{i-\frac{1}{2},j}.\Delta y_i + G^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}.\Delta x_j - G^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}.\Delta x_j\right)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} - \Delta t\left(\frac{F^{n}_{i+\frac{1}{2},j} - F^{n}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{G^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} - G^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}\right)$$

Métodos de volume finito

FVM sobre uma Malha Cartesiana

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} - \Delta t\left(\left[\frac{F^{n}_{i+\frac{1}{2},j} - F^{n}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x}\right] + \left[\frac{G^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} - G^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}\right]\right)$$

Nota:

1 Em uma malha com coordenada cartesiana os lados da células são paralelos ao eixos x e y. tal que necessita fluxos normais aos lados da célula. O termo ($\vec{H}^{n}.S$) deve ser na direção x e y. Assim H possui componente em i e j e são nomeados de F e G .

2 No caminho para obter um FVS da equação acima os valores de F e G deve ser estimado no mesmo caminho.

3 Os termo no colchetes são reconhecidos como aproximações por diferenças finitas para $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial G}{\partial y}$ baseado nos valores de F e G nas interfaces entre a célula (i,j) e suas células vizinhas.

4 Sobre o item 3 nos podemos concluir que sobre uma malha cartesiana o esquema de volume finito se reduz a um esquema de diferenças finitas.

5 O esquema de diferenças finitas pode ser considerado um caso especial do esquema de volume finito.

Métodos de volume finito

FVM sobre uma Malha Cartesiana

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} - \Delta t\left(\left[\frac{F_{i+\frac{1}{2},j}^{n} - F_{i-\frac{1}{2},j}^{n}}{\Delta x}\right] + \left[\frac{G_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} - G_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta y}\right]\right)$$

Exemplo Especifico : Esquema Upwind Primeira Ordem (FOU)

Aplicando a equação acima para a equação linear 2D Nesta equação $\overrightarrow{H} = F_i + G_j$,

Onde $F = (v_x U)_i$ ***e G*** $= (v_y U)_j$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} - \Delta t\left(v_x\left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n}}{\Delta x}\right] + v_y\left[\frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} - u_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta y}\right]\right)$$

No nível de tempo $u_{i,j}^{n}$ é conhecido e é no centro de cada célula (i,j) . Resta estimar $u_{i+\frac{1}{2},j}^{n}$, $u_{i-\frac{1}{2},j}^{n}$, $u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}$, $u_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}$ que estão sobre as 4 faces da célula (i,j) com suas 4 células vizinhas. Supõem-se que a velocidade de escoamento v_x e v_y, são ambas positivas. Uma procedimento de estimativa razoável é para tomar a valores da interface u dos vizinhos upstream dos valores conhecidos do centro da célula.

Métodos de volume finito

FVM sobre uma Malha Cartesiana

$$u^n_{i+1/2,j} \approx u^n_{i,j} \;,\; u^n_{i-1/2,j} \approx u^n_{i-1,j},\; u^n_{i,j+1/2} \approx u^n_{i,j},\; u^n_{i,j-1/2} \approx u^n_{i,j-1}$$

$$\boxed{u^{n+1}_{i,j} = u^n_{i,j} - \Delta t\left(v_x\left[\frac{u^n_{ij} - u^n_{i-1,j}}{\Delta x}\right] + v_y\left[\frac{u^n_{i,j} - u^n_{i,j-1}}{\Delta y}\right]\right)}$$

Nota:

1 O termo em colchetes são aproximação por diferenças finitas de $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ usando primeira ordem de diferenças backward

2 A eq. Foi derivada sobre a base de uma quantidade media sobre a célula e fluxo na interface da célula e é consequentemente um esquema de volume finito mas é indistinguível do esquema de diferenças finitas derivada da teoria de Taylor.

3 A estimativa da interface de fluxo pode ser classificada como extrapolação do valor de u do centro da célula para a interface da célula usando gradientes de u. Neste caso é assumido que o gradiente d u em cada célula é zero tal que ela tomo a mesmo valor na interface Downstrteam como no centro da célula. Estimativa mais acurada da interface de fluxo pode ser alcançada pela primeiro calculado um vetor gradiente para u em cada célula de seus valores ao redor então usando oara extrapolar o valor de u do centro da célula para a interface da célula do qual os fluxo são então calculados.

FVM sobre uma Malha Cartesiana

$u^n_{i+1/2,j} \approx u^n_{i,j}$, $u^n_{i-1/2,j} \approx u^n_{i-1,j}$, $u^n_{i,j+1/2} \approx u^n_{i,j}$, $u^n_{i,j-1/2} \approx u^n_{i,j-1}$

$$\boxed{u^{n+1}_{i,j} = u^n_{i,j} - \Delta t\left(v_x\left[\frac{u^n_{ij} - u^n_{i-1,j}}{\Delta x}\right] + v_y\left[\frac{u^n_{i,j} - u^n_{i,j-1}}{\Delta y}\right]\right)}$$

O metodo produz um único valor de $\vec{H}$ *na interface.*

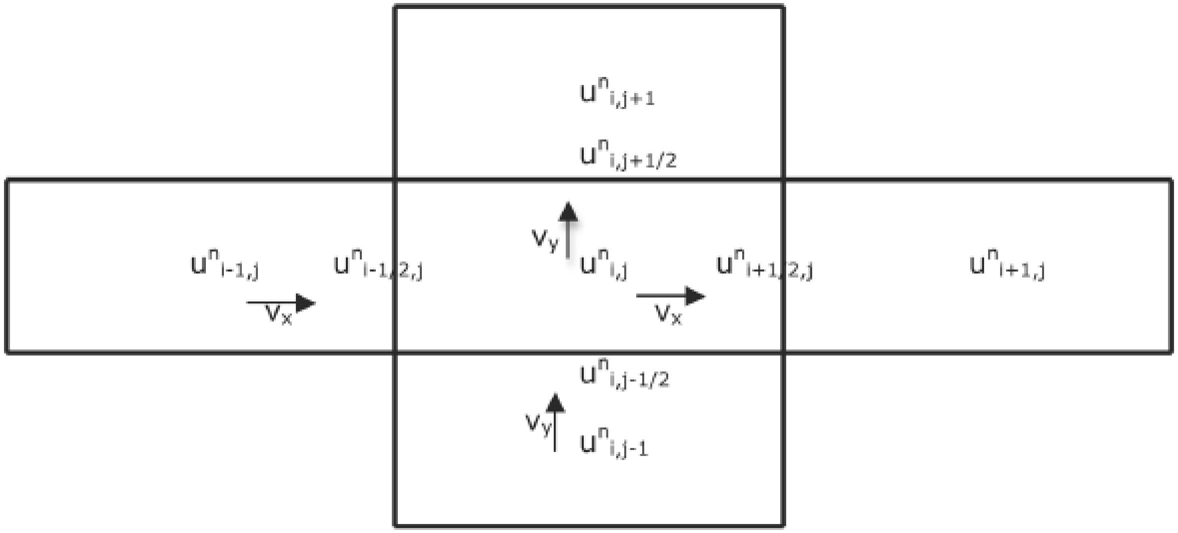
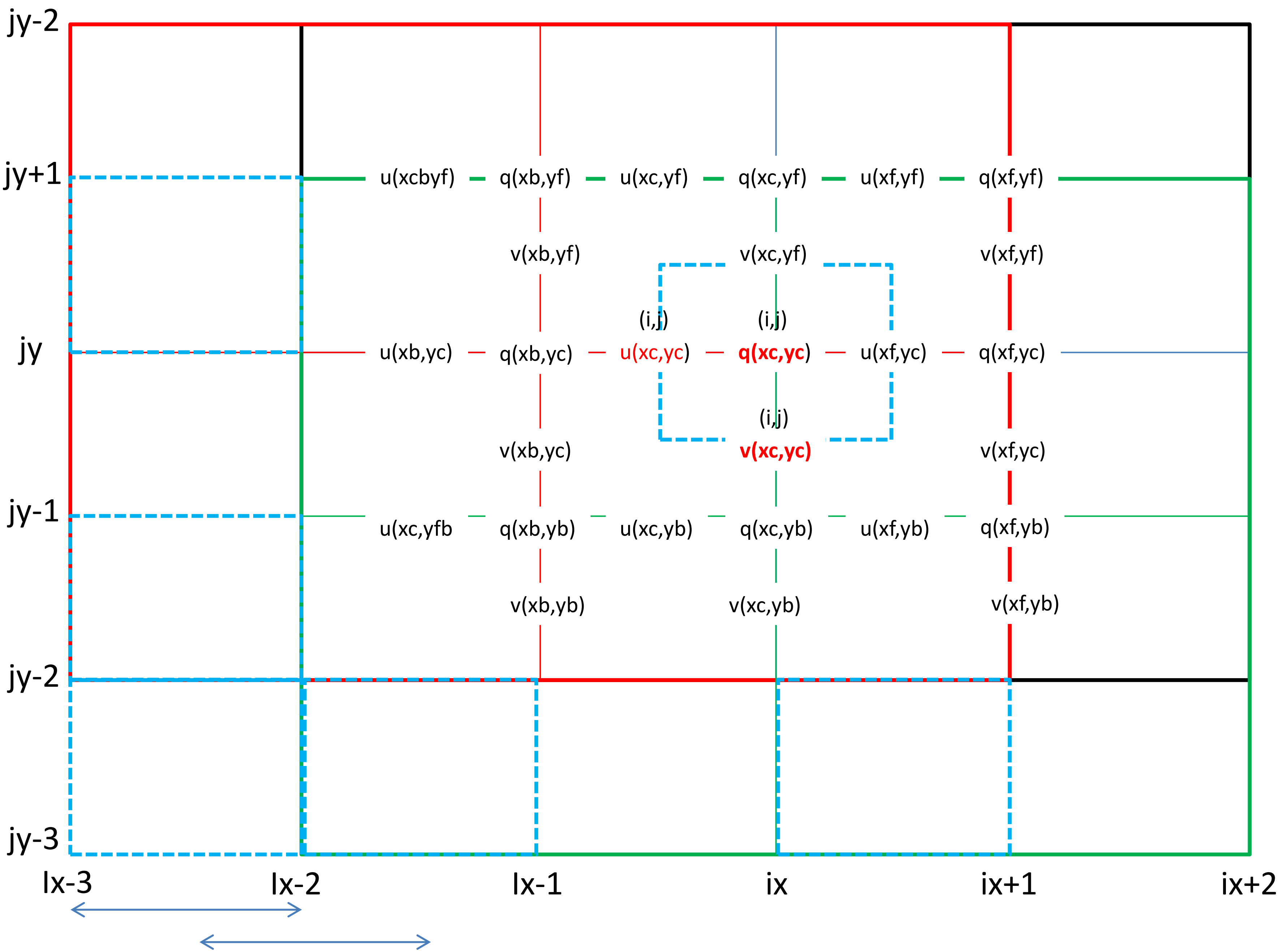


Figure 2.2: Interface values for an upwind 2D linear advection FVS



jy-2
jy+1
jy
jy-1
jy-2
jy-3
u(xcbyf)
q(xb,yf)
u(xc,yf)
q(xc,yf)
u(xf,yf)
q(xf,yf)
v(xb,yf)
v(xc,yf)
v(xf,yf)
(i,j)
(i,j)
u(xb,yc)
q(xb,yc)
u(xc,yc)
q(xc,yc)
u(xf,yc)
q(xf,yc)
(i,j)
v(xb,yc)
v(xc,yc)
v(xf,yc)
u(xc,yfb
q(xb,yb)
u(xc,yb)
q(xc,yb)
u(xf,yb)
q(xf,yb)
v(xb,yb)
v(xc,yb)
v(xf,yb)
Ix-3
Ix-2
Ix-1
ix
ix+1
ix+2

$$\underline{Q^{n+1} = Q^n + F^y + G^x}$$

$$F^y = F(Q^y, u) = \frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(Q^y_{i,j} - Q^y_{i-1,j}\right)$$

$$G^x = F(Q^x, v) = \frac{v\Delta t}{\Delta y}\left(Q^x_{i,j} - Q^x_{i,j-1}\right)$$

$$Q^y = Q^n - \frac{1v\Delta t}{2\Delta y}\overline{\delta_y Q^n}^y$$

$$Q^x = Q^n - \frac{1u\Delta t}{2\Delta y}\overline{\delta_x Q^n}^x$$

$$\delta_x Q^{n^x} = Q_{x+\frac{\Delta x}{2}} - Q_{x-\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\overline{Q_x}^x = \frac{1}{2}\left(Q_{x+\frac{\Delta x}{2}} + Q_{x-\frac{\Delta x}{2}}\right)$$

$$\overline{\delta_x Q^n}^x = \overline{Q_{x+\frac{\Delta x}{2}}}^x - \overline{Q_{x-\frac{\Delta x}{2}}}^x$$

$$\overline{\delta_x Q^n}^x = \frac{1}{2}\left(Q_{x+\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x}{2}} + Q_{x+\frac{\Delta x}{2}-\frac{\Delta x}{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(Q_{x-\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x}{2}} + Q_{x-\frac{\Delta x}{2}-\frac{\Delta x}{2}}\right)$$

$$\overline{\delta_x Q^n}^x = \frac{1}{2}(Q_{x+\Delta x} + Q_x) - \frac{1}{2}(Q_x + Q_{x-\Delta x})$$

$$\overline{\delta_x Q^n}^x = \frac{1}{2}(Q_{x+\Delta x} - Q_{x-\Delta x})$$

$$Q_{i,j}^{x} = Q_{i,j}^{n} - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta y}\overline{\delta_x Q^n}^{x} \qquad Q_{i,j-1}^{x} = Q_{i,j-1}^{n} - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta y}\overline{\delta_{x-1} Q^n}^{x-1}$$

$$\overline{Q_x}^{x} = \frac{1}{2}\left(q_{x+\frac{\Delta x}{2}} + q_{x-\frac{\Delta x}{2}}\right) \qquad \delta_x Q^{n^x} = q_{x+\frac{\Delta x}{2}} - q_{x-\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\overline{\delta_x Q^n}^{x} = \overline{Q_{x+\frac{\Delta x}{2}}}^{x} - \overline{Q_{x-\frac{\Delta x}{2}}}^{x}$$

$$\overline{\delta_x Q^n}^{x} = \frac{1}{2}\left(q_{x+\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x}{2}} + q_{x+\frac{\Delta x}{2}-\frac{\Delta x}{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(q_{x-\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x}{2}} + q_{x-\frac{\Delta x}{2}-\frac{\Delta x}{2}}\right)$$

$$\overline{\delta_x Q^n}^{x} = \frac{1}{2}(q_{x+\Delta x} + q_x) - \frac{1}{2}(q_x + q_{x-\Delta x})$$

$$\overline{\delta_x Q^n}^{x} = \frac{1}{2}(q_{x+\Delta x} - q_{x-\Delta x})$$

$$Q_{i,j}^{x} = Q_{i,j}^{n} - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta y}\overline{\frac{1}{2}(q_{x+\Delta x} - q_{x-\Delta x})} \qquad Q_{i,j-1}^{x} = Q_{i,j}^{n} - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta y}\overline{\frac{1}{2}(q_{x+\Delta x} - q_{x-\Delta x})}$$

$$Q_{i,j-1}^{x} = Q_{i,j-1}^{n} - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\overline{\delta_{x-1}Q^{n}}^{x}$$

$$\overline{Q_{x-1}}^{x} = \frac{1}{2}\left(q_x + q_{x-\frac{\Delta x}{2}}\right)$$

$$\delta_x Q^{n^x} = q_{x+\frac{\Delta x}{2}} - q_{x-\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\overline{\delta_x Q^{n}}^{x} = \overline{Q_{x+\frac{\Delta x}{2}}}^{x} - \overline{Q_{x-\frac{\Delta x}{2}}}^{x}$$

$$\overline{\delta_x Q^{n}}^{x} = \frac{1}{2}\left(q_{x+\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x}{2}} + q_{x+\frac{\Delta x}{2}-\frac{\Delta x}{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(q_{x-\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x}{2}} + q_{x-\frac{\Delta x}{2}-\frac{\Delta x}{2}}\right)$$

$$\overline{\delta_x Q^{n}}^{x} = \frac{1}{2}(q_{x+\Delta x} + q_x) - \frac{1}{2}(q_x + q_{x-\Delta x})$$

$$\overline{\delta_x Q^{n}}^{x} = \frac{1}{2}(q_{x+\Delta x} - q_{x-\Delta x})$$

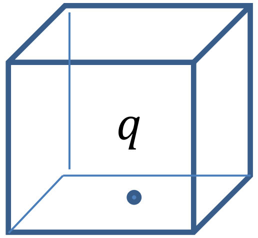
$$Q_{i,j}^{x} = Q_{i,j}^{n} - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta y}\overline{\frac{1}{2}(q_{x+\Delta x} - q_{x-\Delta x})}$$

$$Q_{i,j-1}^{x} = Q_{i,j-1}^{n} - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta y}\overline{\frac{1}{2}(q_{x+\Delta x} - q_{x-\Delta x})}$$

$$Q_{i,j}^{y} = Q_{i,j}^{n} - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta y}\overline{\delta_y Q^{n}}^{y}$$

$$\overline{\delta_y Q^{n}}^{y} = \frac{1}{2}\left(q_{y+\Delta y} - q_{y-\Delta y}\right)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla.\left(\vec{V}q\right) = 0$$



$$\frac{1}{|V_{i,j}|}\int_{V_{i,j}} \frac{\partial q}{\partial t}\,dV = -\frac{1}{|V_{i,j}|}\int_{V_{i,j}} \nabla.\left(\vec{V}q\right)dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{i,j} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{|V_{i,j}|}\int_{V_{i,j}} q\,dV = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z}\left(\sum_{z_0}^{z_1}\left\{\sum_{y_0}^{y_1}\left[\sum_{x_0}^{x_1}(\Delta q(x,y,z) * \Delta x)\right] * \Delta y\right\} * \Delta z\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{i,j} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{|V_{i,j}|}\int_{V_{i,j}} q\,dV = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z}\left(\sum_{z_0}^{z_1}\left\{\sum_{y_0}^{y_1}(\Delta \overline{q^{x}}(x,y,z) * \Delta x) * \Delta y\right\} * \Delta z\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{i,j} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{|V_{i,j}|}\int_{V_{i,j}} q\,dV = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z}\left(\sum_{z_0}^{z_1}\left(\Delta \overline{q^{xy}}(x,y,z)\right) * \Delta x * \Delta y * \Delta z\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{i,j} = \frac{1}{|V_{i,j}|}\int_{V_{i,j}} q\,dV = \left(\overline{q^{xyz}}\right)$$

$$Q_{i,j} = \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{V_{i,j}} q \, dV = (\overline{q^{xyz}})$$

$$\boxed{\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{V_{i,j}} \nabla . (\vec{V} q) dV}$$

Teorema de Gauss

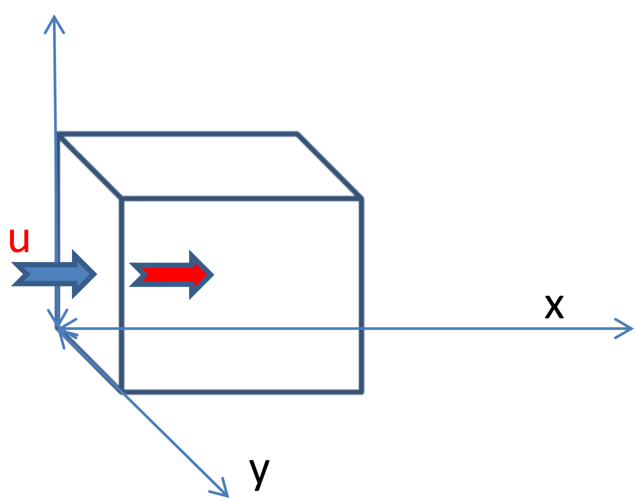
$$\boxed{\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{|S_{i,j}|} \int_{S_{i,j}} q\vec{V} \, . \vec{n} dS}$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{S_{i,j}} (qudxdy + qvdxdy)$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y} \left(\sum_{y_0}^{y_1} \left[\sum_{x_0}^{x_1} (qu) \cdot n_y \, \Delta x \right] \cdot n_x \, \Delta y + \sum_{y_0}^{y_1} \left[\sum_{x_0}^{x_1} (qv) \cdot n_y \, \Delta x \right] n_x \Delta y \right)$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\int_{S_{i,j}} (qudxdy) + \int_{S_{i,j}} (qvdxdy)\right)$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\sum_{y_0}^{y_1}\left[\sum_{x_0}^{x_1}(qu)\cdot n_y\,\Delta x\right]\cdot n_x\,\Delta y + \sum_{y_0}^{y_1}\left[\sum_{x_0}^{x_1}(qv)\cdot n_y\,\Delta x\right]\cdot n_x\,\Delta y\right)$$



$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\int_{S_{i,j}} (qudxdy) + \int_{S_{i,j}} (qvdxdy)\right)$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\int_{W-E}\left(\sum_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} (qu)\cdot n_y\ \Delta x\right)\cdot n_x\ dy + \int_{N-S}\left(\sum_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} (qv)\cdot n_x\ \Delta y\right)\cdot n_y\ dx\right)$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{\Delta x}{\Delta x \Delta y}\left(\left(\int_E (\overline{q^x u^y})_{x+\frac{1}{2}} dy - \int_W (\overline{q^x u^y})_{x-\frac{1}{2}} dy\right)\right) - \frac{\Delta y}{\Delta x \Delta y}\left(\left(\int_N \left((\overline{q^y v^x})_{y+\frac{1}{2}} dx\right) - \int_S \left((\overline{q^y v^x})_{y-\frac{1}{2}} dx\right)\right)\right)$$

$$\boxed{f(qu) = (\overline{q^x u^y})_{x+\frac{1}{2}} = cte\_em\_y}$$

$$\boxed{\int_E f(\overline{q^x u^y})_{x+\frac{1}{2}} dy = f(\overline{q^x u^y})_{x+\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{\Delta x}{\Delta x \Delta y}\left(\left((\overline{q^x u^y})_{x+\frac{1}{2}} - (\overline{q^x u^y})_{x-\frac{1}{2}}\right)\right) - \frac{\Delta y}{\Delta x \Delta y}\left(\left((\overline{q^y v^x})_{y+\frac{1}{2}} - (\overline{q^y v^x})_{y-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\int_{S_{i,j}} (qudxdy) + \int_{S_{i,j}} (qvdxdy)\right)$$

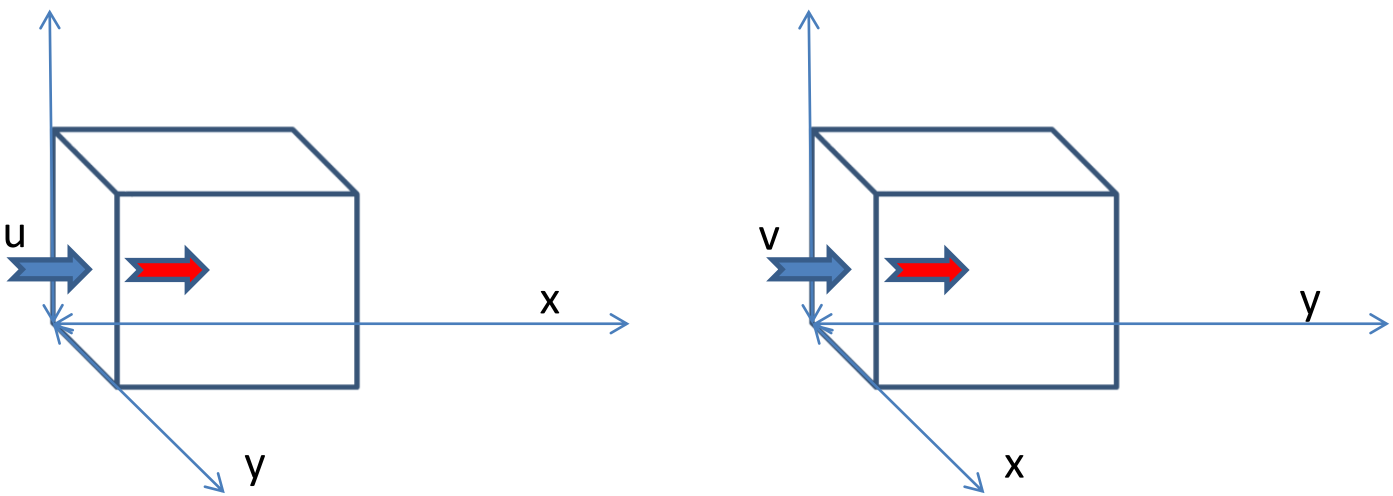
$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\sum_{y_0}^{y_1}\left[\sum_{x_0}^{x_1}(qu)\Delta x\right]\Delta y + \sum_{y_0}^{y_1}\left[\sum_{x_0}^{x_1}(qv)\Delta x\right]\Delta y\right)$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\sum_{y_0}^{y_1}(q\overline{u^{y}})\Delta x \Delta y + \sum_{x_0}^{x_1}(\overline{v^{x}})\Delta y \Delta x\right)$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\sum_{y_0}^{y_1}\left[\sum_{x_0}^{x_1}(q\overline{u^{y}})\Delta x\right]\Delta y + \sum_{x_0}^{x_1}\left[\sum_{y_0}^{y_1}(q\overline{v^{y}})\Delta y\right]\Delta x\right)$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\int_{S_{i,j}}(qudxdy) + \int_{S_{i,j}}(qvdxdy)\right)$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\sum_{y_0}^{y_1}\left[\sum_{x_0}^{x_1}(qu)\Delta x\right]\Delta y + \sum_{y_0}^{y_1}\left[\sum_{x_0}^{x_1}(qv)\Delta x\right]\Delta y\right)$$



$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\int_E(qudx) - \int_W(qudx) + \int_N(qudy) - \int_S(qudy) + \int_E(qvdx) - \int_W(qvdx) + \int_N(qvdy) - \int_S(qvdy)\right)$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\int_{S_{i,j}} (qudxdy + qvdxdy)$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\int_{S_{i,j}} (qudxdy) + \int_{S_{i,j}} (qvdxdy)\right)$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\int_{E} (qudx) - \int_{W} (qudx) + \int_{N} (qudy) - \int_{S} (qudy) + \int_{E} (qvdx) - \int_{W} (qvdx) + \int_{N} (qvdy) - \int_{S} (qvdy)\right)$$

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\int_{E} (qudy) - \int_{W} (qudy) + \int_{N} (qvdx) - \int_{S} (qvdx)\right)$$

$$F = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\int_{E} (qudx) - \int_{W} (qudx)\right)$$

$$F = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\Delta y q u^{n}_{i+\frac{1}{2},j} - \Delta y q u^{n}_{i-\frac{1}{2},j}\right)$$

$$q^{n}_{i+\frac{1}{2},j} \approx Q^{n}_{i+1,j} + Q^{n}_{i,j}$$

$$\mathrm{G} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\int_{N} (qvdy) - \int_{S} (qvdy)\right)$$

$$q^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} \approx Q^{n}_{i,j+1} + Q^{n}_{i,j}$$

$$\mathrm{G} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\Delta x q v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} - \Delta x q v^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}\right)$$

$$F = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\Delta y q u^{n}_{i+\frac{1}{2},j} - \Delta y q u^{n}_{i-\frac{1}{2},j}\right) \qquad \mathrm{G} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\Delta x q v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} - \Delta x q v^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}\right)$$

$$F = -\frac{1}{\Delta x}\left((qu)^{n}_{i+\frac{1}{2},j} - (qu)^{n}_{i-\frac{1}{2},j}\right) \qquad \mathrm{G} = -\frac{1}{\Delta y}\left((qv)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} - (qv)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}\right)$$

$$q^{n}_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{Q^{n}_{i+1,j} + Q^{n}_{i,j}}{2}$$

Grade c

$$q^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} \approx \frac{Q^{n}_{i,j+1} + Q^{n}_{i,j}}{2}$$

$$q^{n}_{i-\frac{1}{2},j} \approx \frac{Q^{n}_{i-1,j} + Q^{n}_{i,j}}{2} \qquad q^{n}_{i,j-\frac{1}{2}} \approx \frac{Q^{n}_{i,j-1} + Q^{n}_{i,j}}{2}$$

$$F = -\frac{1}{\Delta x}\left((u)^{n}_{i+\frac{1}{2},j}(q)^{n}_{i+\frac{1}{2},j} - (u)^{n}_{i-\frac{1}{2},j}(q)^{n}_{i-\frac{1}{2},j}\right)$$

$$F = -\frac{1}{\Delta x}\left((u)^{n}_{i+\frac{1}{2},j}\left(\frac{Q^{n}_{i+1,j} + Q^{n}_{i,j}}{2}\right) - (u)^{n}_{i-\frac{1}{2},j}\left(\frac{Q^{n}_{i-1,j} + Q^{n}_{i,j}}{2}\right)\right)$$

$$F = -\frac{1}{\Delta x}\left((u)^{n}_{i+\frac{1}{2},j}\left(\overline{Q^{n}_{i,j}}^{x}\right) - (u)^{n}_{i-\frac{1}{2},j}\left(\overline{Q^{n}_{i-1,j}}^{x}\right)\right)$$

$$F = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\Delta y q u^{n}_{i+\frac{1}{2},j} - \Delta y q u^{n}_{i-\frac{1}{2},j}\right) \qquad \mathrm{G} = -\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left(\Delta x q v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} - \Delta x q v^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}\right)$$

$$F = -\frac{1}{\Delta x}\left((qu)^{n}_{i+\frac{1}{2},j} - (qu)^{n}_{i-\frac{1}{2},j}\right) \qquad \mathrm{G} = -\frac{1}{\Delta y}\left((qv)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} - (qv)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}\right)$$

$$q^{n}_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{Q^{n}_{i+1,j} + Q^{n}_{i,j}}{2}$$

Grade c

$$q^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} \approx \frac{Q^{n}_{i,j+1} + Q^{n}_{i,j}}{2}$$

$$\mathrm{G} = -\frac{1}{\Delta y}\left((v)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}(q)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}} - (v)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}(q)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\mathrm{G} = -\frac{1}{\Delta y}\left((v)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\frac{Q^{n}_{i,j+1} + Q^{n}_{i,j}}{2}\right) - (v)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}\left(\frac{Q^{n}_{i,j-1} + Q^{n}_{i,j}}{2}\right)\right)$$

$$\mathrm{G} = -\frac{1}{\Delta y}\left((v)^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\overline{Q^{n}_{i,j}}^{y}\right) - (v)^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}\left(\overline{Q^{n}_{i,j-1}}^{y}\right)\right)$$

$$F = -\frac{1}{\Delta x}\left((u)^n_{i+\frac{1}{2},j}\left(\overline{Q^n_{i,j}}^x\right) - (u)^n_{i-\frac{1}{2},j}\left(\overline{Q^n_{i-1,j}}^x\right) \right)$$

$$\mathrm{G} = -\frac{1}{\Delta y}\left((v)^n_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\overline{Q^n_{i,j}}^y\right) - (v)^n_{i,j-\frac{1}{2}}\left(\overline{Q^n_{i,j-1}}^y\right) \right)$$