Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021
Modelo Numérico da Atmosfera

MET-576-4

Modelagem Numérica da Atmosfera

Dr. Paulo Yoshio Kubota

Os métodos numéricos, formulação e parametrizações utilizados nos modelos atmosféricos serão descritos em detalhe.

3 Meses
24 Aulas (2 horas cada)

Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Dinâmica:

Métodos numéricos amplamente utilizados na solução numérica das equações diferencias parciais que governam os movimentos na atmosfera serão o foco, mas também serão analisados os novos conceitos e novos métodos.

Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

- ✓ Métodos de diferenças finitas.
- ✓ Acurácia.
- ✓ Consistência.
- ✓ Estabilidade.
- ✓ Convergência.
- ✓ Grades de Arakawa A, B, C e E.
- ✓ Domínio de influência e domínio de dependência.
- ✓ Dispersão numérica e dissipação.
- ✓ Definição de filtros monótono e positivo.
- ✓ Métodos espectrais.
- ✓ Métodos de volume finito.
- ✓ Métodos Semi-Lagrangeanos.
- ✓ Conservação de massa local.
- ✓ Esquemas explícitos versus semi-implícitos.
- ✓ Métodos semi-implícitos.

Métodos de diferenças finitas.

Resumo

Em um domínio qualquer uma função periódica pode ser decomposta em componentes de Fourier. Se a evolução da função é governada por uma equação linear com coeficientes constantes. Então, seu comportamento pode ser determinado, através da observação do comportamento de cada componente Fourier.

Da mesma forma, a estabilidade de um método numérico linear pode ser encontrado considerando um único componente de Fourier e vendo se esta componente cresce com o tempo.

Análise de estabilidade de Von Neumann nos dá uma equação para o Fator de ampliação. $\phi_j^n = \phi(x_j, t_n) = A^n e^{ikj\Delta x}$.

Método de Von Neumann requer normalmente que o Fator de amplificação seja delimitada, de tal forma que $|A| \leq 1$

Análise de estabilidade de Von Neumann é uma Condição necessária e suficiente para a estabilidade de uma equação linear de diferença finita com Coeficiente constante. Para equações não-lineares, porém, ela é um Condição necessária, mas não é suficiente

Análise de Estabilidade da FTFS

Substituindo $\phi_j^n = \phi\left(x_j, t_n\right) = A^n e^{ikj\Delta x}$, na equação de advecção (12)

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} = 0 \qquad ()$$

$$\frac{A^{n+1}e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}}{\Delta t} = -u\frac{A^n e^{ik(j+1)\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}}{\Delta x} \qquad ()$$

$$A^{n+1}e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x} = -\frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(A^n e^{ik(j+1)\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}\right) \qquad ()$$

$$A^n A^1 e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x} = -\frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(A^n e^{ik(j)\Delta x} e^{ik(1)\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}\right) \qquad ()$$

$$A^n A^1 e^{ikj\Delta x} = A^n e^{ikj\Delta x} - \frac{u\Delta t}{\Delta x} A^n e^{ikj\Delta x}\left(e^{ik(1)\Delta x} - 1\right) \qquad ()$$

Análise de Estabilidade da FTFS

$$A^n A^1 e^{ikj\Delta x} = A^n e^{ikj\Delta x} - \frac{u\Delta t}{\Delta x} A^n e^{ikj\Delta x}\left(e^{ik(1)\Delta x} - 1\right) \qquad ()$$

Defina $C = u\frac{\Delta t}{\Delta x}$, é chamado de numero de Courant. Cancele os termos $A^n e^{ikj\Delta x}$

$$A\cancel{A^n e^{ikj\Delta x}} = \cancel{A^n e^{ikj\Delta x}} - C\cancel{A^n e^{ikj\Delta x}}\left(e^{ik(1)\Delta x} - 1\right) \qquad ()$$

$$A = 1 - C\left(e^{ik(1)\Delta x} - 1\right) \qquad ()$$

A solução numérica será estável se $|A| \leq 1$. $|A|^2$. É dado por A vezes o complexo conjugado ou seja

$$AA^* = \left(1 - C\left(e^{ik(1)\Delta x} - 1\right)\right)\left(1 - C\left(e^{-ik(1)\Delta x} - 1\right)\right) \qquad ()$$

$$AA^* = \left(1 - Ce^{ik(1)\Delta x} + C\right)\left(1 - Ce^{-ik(1)\Delta x} + C\right) \qquad ()$$

$$AA^* = 1 - Ce^{-ik(1)\Delta x} + C - Ce^{ik(1)\Delta x} + CCe^{ik(1)\Delta x}e^{-ik(1)\Delta x} - CCe^{ik(1)\Delta x} + \left(C - CCe^{-ik(1)\Delta x} + CC\right)$$

Análise de Estabilidade da FTFS

$$AA^* = 1 - Ce^{-ik(1)\Delta x} + 2C - Ce^{ik(1)\Delta x} + 2CC - CCe^{ik(1)\Delta x} + \left(-CCe^{-ik(1)\Delta x}\right)$$

$$AA^* = 1 - Ce^{-ik(1)\Delta x} - Ce^{ik(1)\Delta x} + 2CC + 2C - CCe^{ik(1)\Delta x} - CCe^{-ik(1)\Delta x}$$

$$AA^* = 1 - C\left(\left(e^{ik(1)\Delta x} + e^{-ik(1)\Delta x}\right)\right) + 2CC + 2C - CC\left(e^{ik(1)\Delta x} + e^{-ik(1)\Delta x}\right)$$

$$AA^* = 1 - 2C\left(\frac{\left(e^{ik(1)\Delta x} + e^{-ik(1)\Delta x}\right)}{2}\right) + 2CC + 2C - 2CC\left(\frac{\left(e^{ik(1)\Delta x} + e^{-ik(1)\Delta x}\right)}{2}\right)$$

$$AA^* = 1 - 2C\left(cos\left(k(1)\Delta x\right)\right) + 2CC + 2C - 2CC\left(cos\left(k(1)\Delta x\right)\right)$$

$$AA^* = 1 + 2C - 2C\left(cos\left(k(1)\Delta x\right)\right) + 2CC - 2CC\left(cos\left(k(1)\Delta x\right)\right)$$

$$AA^* = 1 + 2C\left(1 - cos\left(k(1)\Delta x\right)\right) + 2CC\left(1 - cos\left(k(1)\Delta x\right)\right)$$

$$AA^* = 1 + 2C(1 + C)\left(1 - cos\left(k(1)\Delta x\right)\right)$$

Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021
Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade da FTFS

$$AA^* = 1 + 2C(1 + C)\big(1 - cos(k(1)\Delta x)\big)$$

$$|A|^2 = 1 + 2C(1 + C)\big(1 - cos(k(1)\Delta x)\big) \leq 1$$

Para todos $\big(1 - cos(k(1)\Delta x)\big) > 0$ todos os numero de ondas, exceto o trivial, o caso onde k=0 , a equação acima se reduz a

$$2C(1 + C) \leq 0$$

Nunca pode ser satisfeita. Uma vez que $\mathrm{C} > 0$ pois $\mathrm{u} > 0$

Isto implica FTFS (com u+) é incondicionalmente Instável!

Métodos de diferenças finitas.

Regime UpStream

O Esquema Upstream (Avançado no tempo, Atrasado no espaço) aproxima a derivada espacial com Diferença Atrasada e a derivada temporal com diferença Avançada . Fórmula. p. ex.

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u\frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \qquad (14)$$

Análise de Estabilidade (Von Neumann) Regime UpStream

Podemos seguir o mesmo procedimento como no FTFS para fazer o Análise de estabilidade ou seja deixar a solução ter a forma de

$$\phi(x_j, t_n) = \phi_j^n = A^n e^{ikj\Delta x}$$

O método de Von Neumann normalmente requer que o Fator de amplificação seja delimitada . Tal que:

$$|A| \leq 1$$

$$\frac{A^{n+1}e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}}{\Delta t} + u\frac{A^n e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ik(j-1)\Delta x}}{\Delta x} = 0 \qquad (15)$$

Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021
Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade (Von Neumann) Regime UpStream

$$\frac{A^{n+1}e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}}{\Delta t} + u\frac{A^n e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ik(j-1)\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{A^{n+1}e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}}{\Delta t} + u\frac{A^n e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ik(j)\Delta x}e^{-ik\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

$$A^n A e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x} = -\frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(A^n e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ik(j)\Delta x}e^{-ik\Delta x}\right)$$

$$A^n A e^{ikj\Delta x} = A^n e^{ikj\Delta x} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(A^n e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}e^{-ik\Delta x}\right)$$

$$A^n A e^{ikj\Delta x} = A^n e^{ikj\Delta x} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}A^n e^{ikj\Delta x}\left(1 - e^{-ik\Delta x}\right)$$

Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade (Von Neumann) Regime UpStream

$$A^n A e^{ikj\Delta x} = A^n e^{ikj\Delta x} - \frac{u\Delta t}{\Delta x} A^n e^{ikj\Delta x}\left(1 - e^{-ik\Delta x}\right)$$

Define-se $C = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$, , onde C é chamado de numero de Courant.

$$AA^n e^{ikj\Delta x} = A^n e^{ikj\Delta x} - CA^n e^{ikj\Delta x}\left(1 - e^{-ik\Delta x}\right)$$

Cancele o termo $A^n e^{ikj\Delta x}$

$$A = 1 - C\left(1 - e^{-ik\Delta x}\right)$$

Análise de Estabilidade (Von Neumann) Regime UpStream

$$A = 1 - C\left(1 - e^{-ik\Delta x}\right)$$

A solução numérica será estável se $|A| \leq 1$. Onde $|A|^2$ é dado pela multiplicação de A pelo seu complexo conjugado A^*

$$AA^* = \left(1 - C\left(1 - e^{-ik\Delta x}\right)\right)\left(1 - C\left(1 - e^{ik\Delta x}\right)\right)$$

$$AA^* = \left(1 - C + Ce^{-ik\Delta x}\right)\left(1 - C + Ce^{ik\Delta x}\right)$$

$$AA^* = \left(1 - C + Ce^{ik\Delta x}\right) - \left(C - CC + CCe^{ik\Delta x}\right) + \left(Ce^{-ik\Delta x} - CCe^{-ik\Delta x} + Ce^{ik\Delta x}Ce^{-ik\Delta x}\right)$$

$$AA^* = 1 - C + Ce^{ik\Delta x} - C + CC - CCe^{ik\Delta x} + Ce^{-ik\Delta x} - CCe^{-ik\Delta x} + CC$$

$$AA^* = 1 - 2C + 2CC + Ce^{ik\Delta x} + Ce^{-ik\Delta x} - CCe^{ik\Delta x} - CCe^{-ik\Delta x}$$

$$AA^* = 1 - 2C + 2CC + 2C\left(\frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2}\right) - 2CC\left(\frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2}\right)$$

Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021
Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade (Von Neumann) Regime UpStream

$$AA^* = 1 - 2C + 2CC + 2C\left(\frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2}\right) - 2CC\left(\frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2}\right)$$

$$AA^* = 1 - 2C + 2CC + 2C(\cos(k\Delta x)) - 2CC(\cos(k\Delta x))$$

$$AA^* = 1 - 2C + 2CC + (2C - 2CC)(\cos(k\Delta x))$$

$$AA^* = 1 - 2C + 2CC - (-2C + 2CC)(\cos(k\Delta x))$$

$$AA^* = 1 + (-2C + 2CC) - (-2C + 2CC)(\cos(k\Delta x))$$

$$AA^* = 1 + (-2C + 2CC)(1 - \cos(k\Delta x))$$

$$AA^* = |A|^2 = 1 + (-2C + 2CC)(1 - \cos(k\Delta x))$$

Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade (Von Neumann) Regime UpStream

$$|A|^2 = 1 + (-2C + 2CC)(1 - \cos(k\Delta x))$$

$$|A|^2 = 1 + 2C(-1 + C)(1 - \cos(k\Delta x))$$

$$|A|^2 = 1 - 2C(1 - C)(1 - \cos(k\Delta x))$$

Se $(1 - \cos(k\Delta x)) > 0$. Para todos os numero de ondas, com exceção do caso trivial, ou seja, $k = 0$, a desigualdade acima se reduz a:

$$|A| \leq 1.$$

$$C(1 - C) \geq 0$$

$$C \geq 0\ eC \leq 0; \qquad\qquad 0 \leq C \leq 1;$$

O Esquema CTCS (Leapfrog)

Um outro método para resolver o problema de advecção (i.e. ∂Φ/∂t + u∂Φ/∂x = 0). É usar o esquema centrada no tempo, Centrado no espaço (CTCS). i.e.

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} + u\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \,. \tag{17}$$

Trata-se de uma fórmula de três-nível, uma vez que ela envolve valores de $\emptyset$ em três tempos t_{n+1}, t_n, t_{n-1}.

O esquema CTCS é de precisão de segunda ordem no espaço e no tempo. análise de estabilidade Von Neumann

Define-se $\emptyset = A^n e^{ikj\Delta x}$ para a análise de estabilidade de Von Neumann, que veremos em seguida

$$\emptyset_j^{n+1} = \emptyset_j^{n-1} - u\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\emptyset_{j+1}^n - \emptyset_{j-1}^n\right)$$

$$A^{n+1}e^{ikj\Delta x} = A^{n-1}e^{ikj\Delta x} - u\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(A^n e^{ik(j+1)\Delta x} - A^n e^{ik(j-1)\Delta x}\right)$$

O Esquema CTCS (Leapfrog)

$$A^{n+1}e^{ikj\Delta x} = A^{n-1}e^{ikj\Delta x} - u\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(A^n e^{ik(j+1)\Delta x} - A^n e^{ik(j-1)\Delta x}\right)$$

$$A^n A e^{ikj\Delta x} = \frac{A^n}{A}e^{ikj\Delta x} - u\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(A^n e^{ikj\Delta x}e^{ik\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}e^{-ik\Delta x}\right)$$

$$A^n A e^{ikj\Delta x} = \frac{A^n}{A}e^{ikj\Delta x} - C\left(A^n e^{ikj\Delta x}e^{ik\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}e^{-ik\Delta x}\right)$$

$$A^n A e^{ikj\Delta x} = \frac{A^n}{A}e^{ikj\Delta x} - CA^n e^{ikj\Delta x}\left(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}\right)$$

$$A = \frac{1}{A} - C\left(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}\right)$$

$$A^2 = 1 - C2i\left(\frac{e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}}{2i}\right)A$$

$$A^2 = 1 - C2i(\sin(k\Delta x))A$$

$$A^2 = 1 - C2i(\sin(k\Delta x))A$$

$$A^2 + C2i(\sin(k\Delta x))A - 1 = 0$$

$$A^2 - C2i(\sin(k\Delta x))A - 1 = 0$$

$$\boxed{\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}}$$

$$A = \frac{C2i(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{(-C2i(\sin(k\Delta x)))^2 - 4(1)(-1)}}{2}$$

$$A = \frac{C2i(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{((-1)^2 C^2 4(\sqrt{-1}^2)(\sin^2(k\Delta x)))^2 + 4}}{2}$$

$$A = \frac{C2i(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{-4C^2 \sin^2(k\Delta x) + 4}}{2}$$

$$A = Ci(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{-C^2 \sin^2(k\Delta x) + 1}$$

$$A = Ci(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)}$$

Há dois casos a considerar $|C| > 1$, em seguida, para algum Δx, tal que $(Csin(k\Delta x))^2 > 1$

$$A = Ci(\sin(k\Delta x)) \pm i\sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1}$$

$$|A|^2 = \left(Ci(\sin(k\Delta x)) \pm i\sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1}\right)\left(-Ci(\sin(k\Delta x)) \pm -i\sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1}\right)$$

$$|A|^2 = \left(Ci(\sin(k\Delta x)) \pm i\sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1}\right)\left(-Ci(\sin(k\Delta x)) \pm -i\sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1}\right)$$

$$|A|^2 = i\left(C(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1}\right)\left(-i\left(C(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1}\right)\right)$$

$$|A_\pm|^2 = \left(C(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1}\right)^2$$

Existe pelo menos uma raiz que $|A_\pm| > 1$, Portanto, a solução é estável durante $|C| > 0$

2. $|c| \leq 1$**em seguida,** $C(\sin(k\Delta x)) \leq 1$**. As duas raízes são:**

$$A = Ci(\sin(k\Delta x)) \pm i\sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1}$$

$$A = Ci(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)}$$

$$|A_+|^2 = \left(Ci(\sin(k\Delta x)) + \sqrt{1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)}\right)\left(-Ci(\sin(k\Delta x)) + \sqrt{1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)}\right)$$

$$|A_+|^2 = \left(-i^2 C^2 \sin^2(k\Delta x) + \ Ci(\sin(k\Delta x)) * \left(\sqrt{1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)}\right) - Ci(\sin(k\Delta x)) * \left(\sqrt{1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)}\right) + 1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)\right)$$

$$|A_+|^2 = (C^2 \sin^2(k\Delta x) + 1 - C^2 \sin^2(k\Delta x))$$

$$|A_+|^2 = 1$$

Da mesma forma para $|A_-|^2$

$$|A_+|^2 = (C^2 \sin^2(k\Delta x) + 1 - C^2 \sin^2(k\Delta x))$$

$$|A_+|^2 = 1$$

$\therefore$ **A condição de estabilidade é** $\left|C = \frac{u\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1$**.**