



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Modelo Numérico da Atmosfera

MET-576-4

Modelagem Numérica da Atmosfera

Dr. Paulo Yoshio Kubota

Os métodos numéricos, formulação e parametrizações utilizados nos modelos atmosféricos serão descritos em detalhe.

3 Meses
24 Aulas (2 horas cada)



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Modelo Numérico da Atmosfera

Dinâmica:

Métodos numéricos amplamente utilizados na solução numérica das equações diferenciais parciais que governam os movimentos na atmosfera serão o foco, mas também serão analisados os novos conceitos e novos métodos.



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Modelo Numérico da Atmosfera

- ✓ **Métodos de diferenças finitas.**
- ✓ **Acurácia.**
- ✓ **Consistência.**
- ✓ **Estabilidade.**
- ✓ **Convergência.**
- ✓ **Grades de Arakawa A, B, C e E.**
- ✓ **Domínio de influência e domínio de dependência.**
- ✓ **Dispersão numérica e dissipação.**
- ✓ **Definição de filtros monótono e positivo.**
- ✓ **Métodos espectrais.**
- ✓ **Métodos de volume finito.**
- ✓ **Métodos Semi-Lagrangeanos.**
- ✓ **Conservação de massa local.**
- ✓ **Esquemas explícitos versus semi-implícitos.**
- ✓ **Métodos semi-implícitos.**



Modelo Numérico da Atmosfera

Consistency

O FDE é **consistente** com o PDE se, no limite $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, o FDE coincidir com o PDE.

Obviamente, esse é um requisito básico que o FDE deve atender se suas soluções forem boas aproximações das soluções do PDE.

A consistência é bastante simples de verificar:

- Substitua u em vez de U no FDE.
- Avalie todos os termos usando uma expansão da série de Taylor centrada no ponto (x_j, t_n) .
- Subtraia o PDE do FDE.

Se a diferença (erro de truncamento local) for para zero como $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, então o **FDE é consistente com o PDE.**



Modelo Numérico da Atmosfera

Erro de truncamento e Consistência

Vamos verificar a consistência do esquema a montante para a equação de advecção.

Primeiro, considere a expansão da série Taylor:

$$\left. \begin{aligned} u_j^{n+1} &= \left(u + u_t \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt} \Delta t^2 + \dots \right)_j^n \\ u_{j-1}^n &= \left(u - u_x \Delta x + \frac{1}{2} u_{xx} \Delta x^2 - \dots \right)_j^n \end{aligned} \right\}$$

Nós substituímos isso no FDE e obtemos

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + c \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$\left(u_t + \frac{1}{2} u_{tt} \Delta t + \dots \right)_j^n + c \left(u_x - \frac{1}{2} u_{xx} \Delta x + \dots \right)_j^n \simeq 0$$

Subtrair o PDE resulta no erro de truncamento local:

$$\tau = \left(\frac{u_{tt}}{2} \right) \Delta t - \left(\frac{cu_{xx}}{2} \right) \Delta x + \text{H.O.T.} = O(\Delta t) + O(\Delta x)$$



Modelo Numérico da Atmosfera

Erro de truncamento e Consistência

Novamente, o erro de truncamento local é:

$$\tau = \left(\frac{u_{tt}}{2}\right) \Delta t - \left(\frac{cu_{xx}}{2}\right) \Delta x + \text{H.O.T.} = O(\Delta t) + O(\Delta x)$$

Claramente, quando $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, temos $\tau \rightarrow 0$. Portanto, o FDE é consistente.

Observe que os erros **de truncamento de tempo e espaço** são **de primeira ordem**, porque as diferenças finitas **não estão centradas** tanto no espaço quanto no tempo.

Erros de truncamento para **diferenças centralizadas** são de **segunda ordem**.

Portanto, em geral, diferenças centralizadas são mais precisas do que diferenças não centradas.

#

Erros de truncamento são um fator crucial para determinar a precisão da previsão no NWP.



Modelo Numérico da Atmosfera

Convergência e Estabilidade

A segunda questão levantada acima foi **se a solução do FDE converge para a solução do PDE.**

Isto é, se deixarmos $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, de modo que $j\Delta x \rightarrow x$ e $n\Delta t \rightarrow t$, portanto, $U(j\Delta x, n\Delta t) \Rightarrow u(x, t)$?

Isso é claramente importante **e pode ser respondido considerando outro problema, o da estabilidade computacional.**

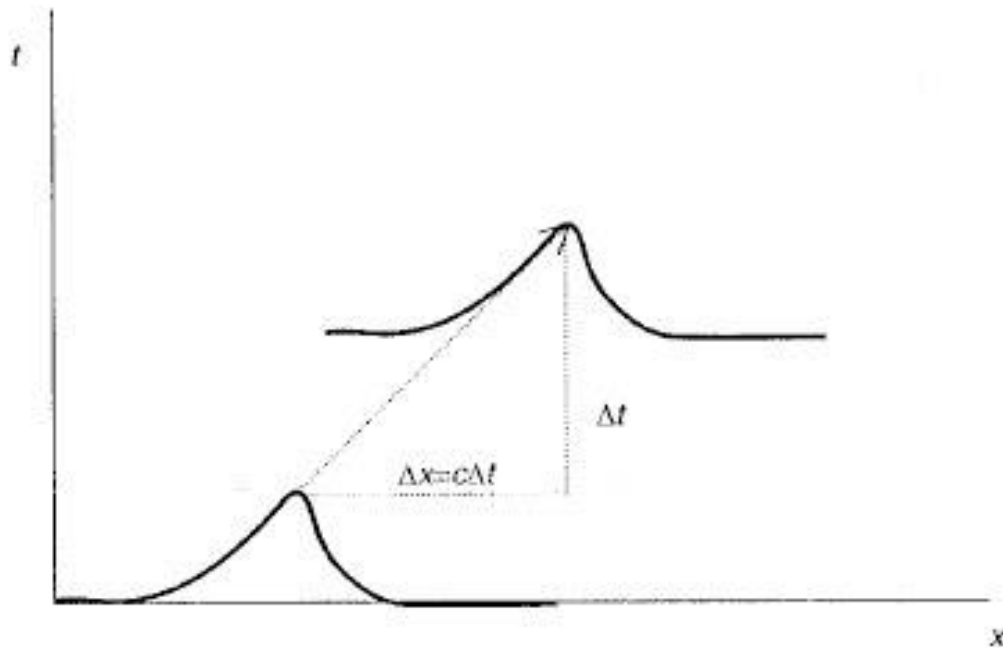
Considere novamente a equação de advecção

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

que tem a solução $u(x, t) = u(x + ct, 0)$

A forma da solução $u(x, 0)$ se translada ao longo do eixo x com velocidade c (veja a Figura abaixo).

Convergência e Estabilidade



Esquema da **solução** da equação de advecção (para $c > 0$).



Modelo Numérico da Atmosfera

Convergência e Estabilidade

O FDE para o esquema upstream pode ser escrito como

$$U_j^{n+1} = (1 - \mu)U_j^n + \mu U_{j-1}^n$$

onde

$$\mu \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

é o número Courant (ou número Lewy).

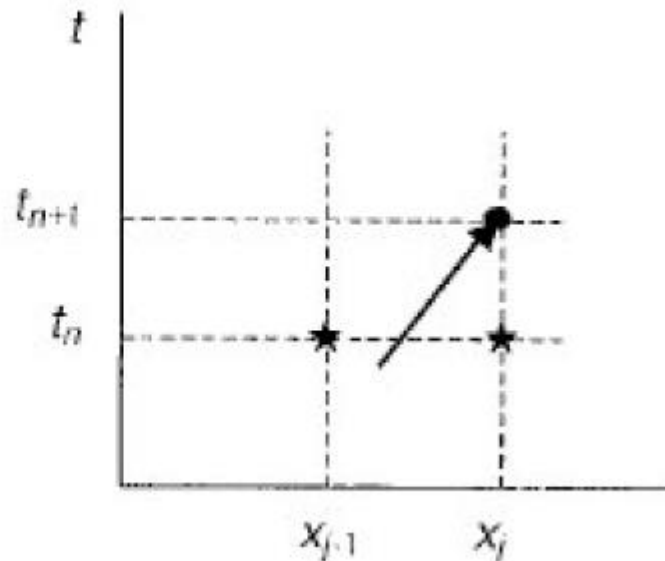
Vamos supor que $0 \leq \mu \leq 1$.

Então a solução FDE no novo nível de tempo U_j^{n+1} é **interpolada** entre os valores U_j^n e U_{j-1}^n .

Nesse caso, o esquema de advecção funciona da maneira que deveria, porque a verdadeira solução está entre esses valores (U_j^{n+1} e U_j^n).

Convergência e Estabilidade

(a) $0 \leq c \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}$



Esquema da relação entre Δx , Δt e c levando à interpolação da solução no nível de tempo $n + 1$.

$$0 < \mu \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$$



Modelo Numérico da Atmosfera

Convergência e Estabilidade

$$0 < \mu \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$$

No entanto, suponha que esta condição não seja satisfeita, de modo que

$$\mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x} > 1$$

$$\mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 0.$$

Então, a parcela que chega ao ponto x_j no tempo t_{n+1} vem de algum lugar fora do intervalo $(x_j - 1, x_j)$ no tempo t_n .

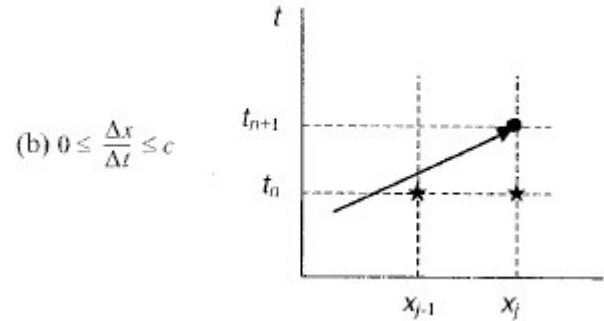
Lembre-se de que $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ é uma aproximação linear de $\frac{du}{dt} = 0$

Então os valores de U_j^{n+1} devem ser **extrapolada** dos valores U_j^n e U_{j-1}^n .



Modelo Numérico da Atmosfera

Convergência e Estabilidade

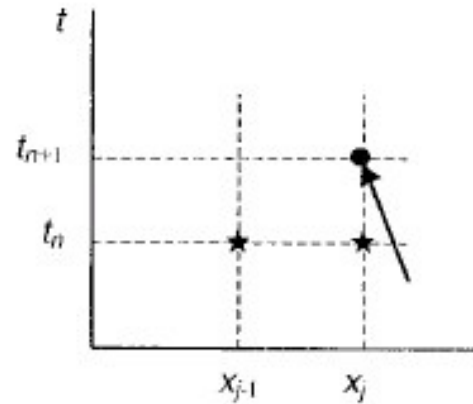


Esquema da relação entre Δx , Δt e c liderando à extraploação da solução no nível de tempo $n + 1$.

$$\mu \equiv \frac{c\Delta t}{|\Delta x|} > 1$$

Convergência e Estabilidade

$$(c) \quad c \leq 0 \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



Esquema da relação entre Δx , Δt e c liderando à extrapolação da solução no nível de tempo $n + 1$.

$$\mu \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 0$$



Modelo Numérico da Atmosfera

Convergência e Estabilidade

O problema com a extrapolação é que o máximo valor absoluto da solução U_j^n aumenta a cada intervalo de tempo.

Tomando valores absolutos do FDE, obtemos

$$|U_j^{n+1}| \leq |U_j^n| |1 - \mu| + |U_{j-1}^n| \mu$$

Agora definindo $\Upsilon^{n+1} = \max_j |U_j^n|$, tem-se:

$$\Upsilon^{n+1} \leq \{|1 - \mu| + |\mu|\} \Upsilon^n$$

e $\Upsilon^{n+1} \leq \Upsilon^n$ se e somente se $0 \leq \mu \leq 1$.

Se a condição $0 \leq \mu \leq 1$ não for satisfeita, a solução não é limitada e cresce com n .

Se deixarmos $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ com $\mu = \text{const.}$, Isso só piorará as coisas, porque então $n \rightarrow \infty$.

Na prática, se a condição $0 \leq \mu \leq 1$ não for satisfeita, o FDE explode em alguns intervalos de tempo.



Modelo Numérico da Atmosfera

Convergência e Estabilidade

Exercício prático:

Use o modelo simples SLAM para explorar o fenômeno da instabilidade computacional.

- Escolha Δt pequeno e faça uma integração completa.
- Aumente Δt e observe a solução do modelo “explodir”.
- Para experimento numérico, determine aproximadamente o valor máximo de Δt que produz integrações estáveis.
- Relacione este máximo com o número Courant. O que isso implica sobre a velocidade máxima de fase do sistema?



Modelo Numérico da Atmosfera

Estabilidade Computacional

Agora definimos estabilidade computacional.

Definição: Um FDE é **computacionalmente estável** se a solução do FDE em um tempo fixo $t = n\Delta t$ é limitado como $\Delta t \rightarrow 0$.

Observe que com $n\Delta t$ fixo, $\Delta t \rightarrow 0$ implica $n \rightarrow \infty$

Iremos derivar uma condição de estabilidade que envolve o **Courant Number**.

A condição no número de Courant é geralmente conhecida como critério **Courant-Friedrichs-Lewy** ou simplesmente a condição **CFL**.

#

Lembre-se da história de Courant, Friedrichs e Lewy em Göttingen.



Modelo Numérico da Atmosfera

Estabilidade Computacional

Agora podemos afirmar o teorema fundamental de Lax-Richtmyer:

Dado um problema de valor inicial linear corretamente proposto e um esquema de diferenças finitas que satisfaça a condição de *consistência*, então a *estabilidade* do FDE é a condição necessária e suficiente para a *convergência*.

$$\text{Estabilidade} < = > \text{Convergencia}$$

Para sistemas consistentes

Este teorema nos permite estabelecer *convergência* examinando as questões mais fáceis de *consistência* e *estabilidade*.

Estamos interessados na convergência não porque queremos deixar $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, mas porque queremos ter certeza de que os erros $u(j\Delta x, n\Delta t) - U_j^n$ sejam aceitavelmente pequenos.

Definição $u(j\Delta x, n\Delta t) - U_j^n$ é o *erro de truncamento global*.



Modelo Numérico da Atmosfera

Estabilidade Computacional

Exemplo: Usamos o critério do método máximo para estudar a condição de estabilidade da equação de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Uma aproximação FDE (esquema FTCS) é dada por

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

(a verificação da consistência deste FDE é imediata).

Nota: Uma vez que as diferenças são centradas no espaço, mas avançadas no tempo, o erro de truncamento é de primeira ordem no tempo e de segunda ordem no espaço

$$\tau = O(\Delta t) + O(\Delta x)^2.$$

Podemos escrever o FDE na forma de equação

$$U_j^{n+1} = \mu U_{j+1}^n + (1 - 2\mu)U_j^n + \mu U_{j-1}^n$$

$$\mu = \sigma \Delta t / \Delta x^2.$$



Modelo Numérico da Atmosfera

Estabilidade Computacional

Novamente

$$U_j^{n+1} = \mu U_{j+1}^n + (1 - 2\mu)U_j^n + \mu U_{j-1}^n$$

Se tomarmos valores absolutos, e deixarmos $\Upsilon^n = \max_j |U_j^n|$

$$\Upsilon^{n+1} \leq \{|\mu| + |1 - 2\mu| + |\mu|\}\Upsilon^n$$

Assim, obtemos a condição

$$0 \leq \mu \leq 1/2$$

para garantir que a solução permaneça limitada como $n \rightarrow \infty$.

Essa é a condição necessária para a estabilidade do FDE.

###

Infelizmente, o **critério do máximo** só pode ser aplicado em poucos casos.

Na maioria dos FDEs, alguns coeficientes das equações são negativos e o critério não pode ser aplicado.

Precisamos de **um método mais poderoso** de estabelecer estabilidade.



O Metodo de von Neumann

Outro critério de estabilidade com uma aplicação muito mais ampla é o critério de estabilidade de von Neumann.

Assumimos que podemos expandir a solução do FDE em um conjunto apropriado de autofunções.

Para simplificar, assumimos uma expansão para a série Fourier:

$$U(x, t) = \sum_k Z_k(t) e^{ikx}$$

A variável de espaço x e o número de onda k podem ser multidimensionais, $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $k = (k_1, k_2, k_3)$

mas, para simplificar, consideraremos o caso escalar. Nós definimos $x_j = j\Delta x$, $t_n = n\Delta t$

Definimos o número de onda para a série Fourier: $p = k\Delta x$

Então a expansão de Fourier é

$$U_j^n = \sum_p Z_p^n e^{ipj} \quad (\text{Note: } kx = kj\Delta x = pj)$$



Modelo Numérico da Atmosfera

O Método de von Neumann

Quando substituimos esta expansão de Fourier em um FDE linear, obtemos um sistema de equações

$$Z_p^{n+1} = \rho_p Z_p^n$$

Aqui ρ_p é um fator de amplificação que, aplicado ao p-ésimo componente de Fourier da solução no tempo $n\Delta t$, o avança para o tempo $(n + 1)\Delta t$; ρ_p depende de p , Δt e Δx .

Se conhecermos as condições iniciais

$$U_j^0 = \sum_p Z_p^0 e^{ipj}$$

então a solução do FDE é (lembre-se do aviso sobre sobrescritos)

$$Z_p^n = \rho_p^n Z_p^0$$

Portanto, a estabilidade é garantida se o fator ρ^n for limitado para todo P quando $\Delta t \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$

Portanto, devemos ter $|\rho_p| < M$ para todo P como $n \rightarrow \infty$.



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Métodos de diferenças finitas.

Consistência (exatidão) e Estabilidade da solução

- Se o erro de truncamento do esquema de diferença finita se aproxima de zero, quando $\Delta t \rightarrow 0$, então, o esquema é **coerente**.
- Para um problema de valor inicial, a coerência não é suficiente para garantir que um esquema numérico vá convergir para as soluções corretas quando $\Delta t \rightarrow 0$ (e $\Delta x \rightarrow 0$).
- O teorema de equivalência de Lax, diz que para os estados ser **consistente** no método linear, a **estabilidade** é a condição necessária e suficiente para a convergência.
- Para resolver um problema de valor inicial o **erro round_off** e de **truncamento**, irá acumular com cada passo de tempo, e a solução aproximada às vezes vai divergir da solução correta. Se o passo de tempo Δt é pequeno o erro a cada intervalo de tempo deve ser pequeno e deve se acumular mais lentamente.
- No entanto, algumas vezes, a **solução numérica** irá rapidamente **divergir** da solução correta, caso em que o **método numérico** é dito ser **Instável**.



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade EDO linear

Assume-se que a solução para a eq. 7 tem a forma $y^n = A^n e^{ik}$ e substitua no Esquema Avançado Eq. 9

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\lambda y \quad (7)$$

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = -\lambda y^n \quad (7)$$

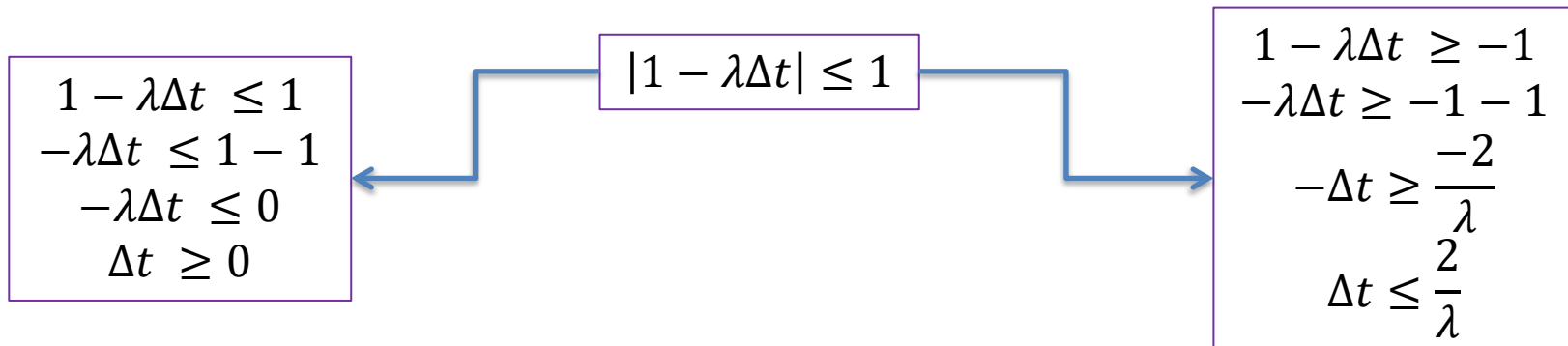
$$y^{n+1} = (1 - \lambda \Delta t) y^n \quad (9)$$

$$A^{n+1} e^{ik} = (1 - \lambda \Delta t) A^n e^{ik} \quad (10)$$

$$A^n A e^{ik} = A^n e^{ik} (1 - \lambda \Delta t) \quad (11)$$

$$A = (1 - \lambda \Delta t) \quad (12)$$

A é chamado de fator de amplificação. Então $|A| \leq 1$





Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade EDO linear

Assume-se que a solução para a eq. 7 tem a forma $y^n \approx A^n$ e substitua no Esquema Avançado Eq. 9

$$A = (1 - \lambda \Delta t) \quad (12)$$

O sistema é estável, se

$$\Delta t \geq 0 \quad \leftarrow \quad |1 - \lambda \Delta t| \leq 1 \quad \rightarrow \quad \Delta t \leq \frac{2}{\lambda}$$

N.B. Para uma equação não linear, a análise de estabilidade da forma linearizada da equação não linear é uma condição necessária, mas não é suficiente.



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Métodos de diferenças finitas.

```
MODULE Class_NumericalScheme
  IMPLICIT NONE
  PRIVATE
  INTEGER, PUBLIC , PARAMETER :: r8=8
  INTEGER, PUBLIC , PARAMETER :: r4=4

  REAL (KIND=r8)      :: dt
  REAL (KIND=r8)      :: lambda
  INTEGER , PARAMETER :: UnitData=1
  INTEGER , PARAMETER :: UnitCtl=2
  CHARACTER (LEN=400) :: FileName
  LOGICAL             :: CtrlWriteDataFile
  PUBLIC :: InitNumericalScheme
  PUBLIC :: SchemeForward
  PUBLIC :: SchemeUpdate
  PUBLIC :: SchemeWriteData
  PUBLIC :: SchemeWriteCtl
  PUBLIC :: AnaliticFunction

CONTAINS

  SUBROUTINE InitNumericalScheme(dt_in,lambda_in)
    IMPLICIT NONE
    REAL (KIND=r8) :: dt_in
    REAL (KIND=r8) :: lambda_in
    FileName=""
    dt=dt_in
    lambda=lambda_in
    FileName='EDOL'
    CtrlWriteDataFile=.TRUE.
  END SUBROUTINE InitNumericalScheme
```

```
FUNCTION SchemeForward(yc) RESULT(yp)
  IMPLICIT NONE
  ! Utilizando a diferenciacao forward
  !
  !  $y(n+1) - y(n)$ 
  !  $\frac{\quad}{dt} = \text{lambda} * y(n)$  ; onde  $\text{lambda} > 0$ 
  !
  REAL (KIND=r8), INTENT (IN ) :: yc
  REAL (KIND=r8) :: yp

  yp = yc -lambda*dt*yc

END FUNCTION SchemeForward

FUNCTION SchemeUpdate(y_in) RESULT (y_out)
  IMPLICIT NONE
  REAL (KIND=r8), INTENT(IN) :: y_in
  REAL (KIND=r8)             :: y_out
  y_out=y_in
END FUNCTION SchemeUpdate

FUNCTION AnaliticFunction(y0,tn) RESULT (y_out)
  IMPLICIT NONE
  REAL (KIND=r8), INTENT (IN) :: y0
  INTEGER , INTENT (IN) :: tn

  REAL (KIND=r8) :: y_out
  y_out=y0*exp(-lambda*tn*dt)
END FUNCTION AnaliticFunction
```



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Métodos de diferenças finitas.

```
FUNCTION SchemeWriteData(irec,y_in,ya) RESULT (ok)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER , INTENT (INOUT) :: irec
  REAL (KIND=r8), INTENT (IN) :: y_in
  REAL (KIND=r8), INTENT (IN) :: ya
  INTEGER      :: ok
  INTEGER      :: lrec
  REAL (KIND=r4) :: Yout
  INQUIRE (IOLENGTH=lrec) Yout

  IF(CtrlWriteDataFile)OPEN(UnitData,FILE=TRIM(FileName)//'.bin',&
  FORM='UNFORMATTED', ACCESS='DIRECT',
  STATUS='UNKNOWN', &
  ACTION='WRITE',RECL=lrec)
  CtrlWriteDataFile=.FALSE.
  Yout=REAL(y_in,KIND=r4)
  irec=irec+1
  WRITE(UnitData,rec=irec) Yout
  irec=irec+1
  WRITE(UnitData,rec=irec) REAL (ya,KIND=r4)
  ok=0
END FUNCTION SchemeWriteData
```

```
FUNCTION SchemeWriteCtl(nrec) RESULT (ok)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER, INTENT (IN) :: nrec
  INTEGER      :: ok

  OPEN(UnitCtl,FILE=TRIM(FileName)//'.ctl',FORM='FORMATTED',&
  ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS='UNKNOWN',ACTION='WRITE')
  WRITE (UnitCtl,'(A6,A)')dset '^',TRIM(FileName)//'.bin'
  WRITE (UnitCtl,'(A )')title EDO'
  WRITE (UnitCtl,'(A )')undef -9999.9'
  WRITE (UnitCtl,'(A )')xdef 1 linear -48.00 1'
  WRITE (UnitCtl,'(A )')ydef 1 linear -1.27 1'
  WRITE (UnitCtl,'(A6,I6,A25)')tdef ' ,nrec,' linear 00z01jan0001 1hr'
  WRITE (UnitCtl,'(A20 )')zdef 1 levels 1000 '
  WRITE (UnitCtl,'(A)')vars 2'
  WRITE (UnitCtl,'(A)')yc 0 99 resultado da edol yc'
  WRITE (UnitCtl,'(A)')ya 0 99 funcao analitica'
  WRITE (UnitCtl,'(A)')endvars'
  CLOSE (UnitCtl,STATUS='KEEP')
  CLOSE (UnitData,STATUS='KEEP')

  ok=0
END FUNCTION SchemeWriteCtl

END MODULE Class_NumericalScheme
```



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Métodos de diferenças finitas.

PROGRAM MAIN

```
USE Class_NumericalScheme, Only :r8, InitNumericalScheme, SchemeForward, SchemeUpdate,&  
    SchemeWriteCtl, SchemeWriteData, AnaliticFunction
```

IMPLICIT NONE

```
REAL (KIND=r8) :: yn  
REAL (KIND=r8) :: yc  
REAL (KIND=r8) :: yp  
REAL (KIND=r8) :: ya
```

```
REAL (KIND=r8), PARAMETER :: lambda=0.1 ![1/s]  
REAL (KIND=r8), PARAMETER :: y0=1.0_r8  
INTEGER , PARAMETER :: nrec=200  
REAL(KIND=r8) :: dt=1.5/lambda  
INTEGER :: test  
INTEGER :: irec  
INTEGER :: tn
```

CALL Init()

```
yc=y0  
irec=0  
DO tn=0,nrec  
    yp=SchemeForward(yc)  
    ya=AnaliticFunction(y0,tn)  
    test=SchemeWriteData(irec,yc,ya)  
    yn=SchemeUpdate(yc)  
    yc=SchemeUpdate(yp)  
END DO  
test=SchemeWriteCtl(nrec)
```

CONTAINS

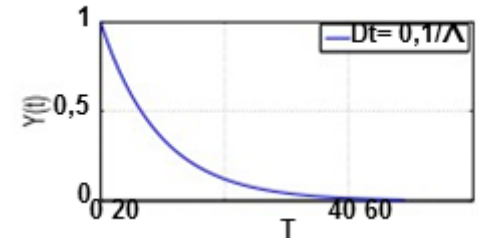
```
SUBROUTINE Init()  
    IMPLICIT NONE  
    CALL InitNumericalScheme(dt,lambda)  
END SUBROUTINE Init  
END PROGRAM MAIN
```



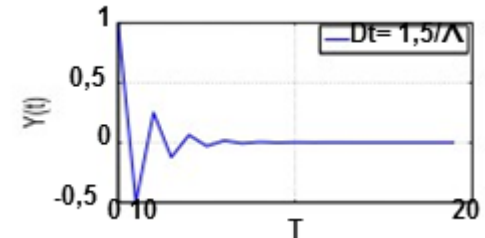
Métodos de diferenças finitas.

Há três possibilidades para a solução numérica ou seja $y^{n+1} = (1 - \lambda\Delta t)y^n$ depende a escolha de Δt

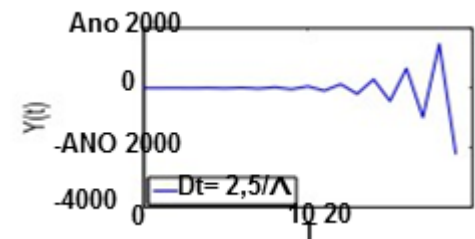
I) Se $\Delta t < \frac{1}{\lambda}$, então $0 < (1 - \lambda\Delta t) < 1$, A solução numérica é uma função crescente com o tempo



II) Se $\frac{1}{\lambda} < \Delta t < \frac{2}{\lambda}$, A solução numérica diminui a magnitude mas oscila no sinal O sistema é estável , mas não consistente.



(III) se $\Delta t > \frac{2}{\lambda}$ então, $(1 - \lambda\Delta t) < -1$,. A solução oscila no Sinal e aumenta em magnitude com o passar do tempo. O método é Instável para as grandes passo de tempo.





Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Métodos de diferenças finitas.

A restrição de Δt para garantir a estabilidade pode por vezes ser removido pela escolha do método numérico. ex. usando o esquema atrasado.

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y$$

$$\frac{y^n - y^{n-1}}{\Delta t} = -\lambda y^n$$

$$A^n - A^{n-1} = -\lambda \Delta t A^n$$

$$A^n - A^n A^{-1} = -\lambda \Delta t A^n$$

$$\rightarrow 1 - A^{-1} = -\lambda \Delta t$$

$$A^{-1} = 1 + \lambda \Delta t$$

$$A = \frac{1}{1 + \lambda \Delta t}$$

O sistema é estável, se $|A| \leq 1$

$$|A| = \left| \frac{1}{1 + \lambda \Delta t} \right| \leq 1$$



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

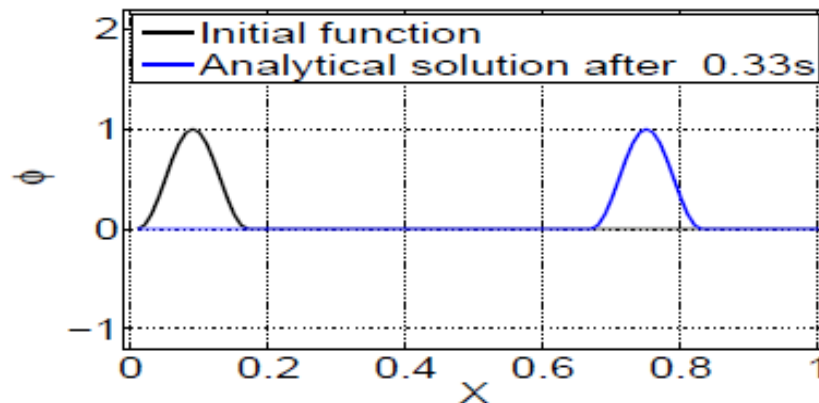
Métodos de diferenças finitas.

Exemplo: Equações diferenciais Parciais

Considere uma equação de **Advecção Linear** em uma dimensão

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

Onde **u** é a velocidade constante, o domínio é $0 \leq x \leq 1$, com condição de fronteira periódicas $\phi(x, 0) = \phi(1, t)$, E a condição inicial é dada como $\phi(x, 0) = F(x)$. Por exemplo $F(x) = \sin^2(x)$



A solução analítica é

$$\phi(x, t) = F(x - u * t).$$

A função inicial é advectada com velocidade u, e a forma é preservada.



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Métodos de diferenças finitas.

```
MODULE Class_Fields
  IMPLICIT NONE
  PRIVATE
  INTEGER, PUBLIC , PARAMETER :: r8=8
  INTEGER, PUBLIC , PARAMETER :: r4=4
  REAL (KIND=r8),PUBLIC ,ALLOCATABLE :: PHI_P(:)
  REAL (KIND=r8),PUBLIC ,ALLOCATABLE :: PHI_A(:)
  REAL (KIND=r8),PUBLIC ,ALLOCATABLE :: PHI_C(:)
  REAL (KIND=r8),PUBLIC ,ALLOCATABLE :: PHI_M(:)
  REAL (KIND=r8),PUBLIC      :: Uvel
  INTEGER ,PUBLIC           :: iMax
  PUBLIC :: Init_Class_Fields
```

CONTAINS

```
!-----
SUBROUTINE Init_Class_Fields(xdim,Uvel0)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER , INTENT (IN ) :: xdim
  REAL (KIND=r8), INTENT (IN ):: Uvel0
  iMax=xdim
  Uvel=Uvel0
  ALLOCATE (PHI_A(-1:iMax+2))
  ALLOCATE (PHI_P(-1:iMax+2))
  ALLOCATE (PHI_C(-1:iMax+2))
  ALLOCATE (PHI_M(-1:iMax+2))
END SUBROUTINE Init_Class_Fields
```

```
!-----
END MODULE Class_Fields
```

```
MODULE Class_NumericalMethod
  USE Class_Fields, Only : PHI_A,PHI_P,PHI_C,PHI_M,Uvel,iMax
  IMPLICIT NONE
  PRIVATE
  INTEGER, PUBLIC , PARAMETER :: r8=8
  INTEGER, PUBLIC , PARAMETER :: r4=4
  REAL (KIND=r8) :: Dt
  REAL (KIND=r8) :: Dx
```

```
PUBLIC :: InitNumericalScheme
PUBLIC :: SchemeForward
PUBLIC :: SchemeUpdate
PUBLIC :: SchemeUpStream
PUBLIC :: AnaliticFunction
```

CONTAINS

```
!-----
SUBROUTINE InitNumericalScheme(dt_in,dx_in)
  IMPLICIT NONE
  REAL (KIND=r8), INTENT (IN ) :: dt_in
  REAL (KIND=r8), INTENT (IN ) :: dx_in
  INTEGER :: i
  REAL (KIND=r8) :: x
  Dt=dt_in
  Dx=dx_in
  x=0.0
  DO i=1,iMax
    PHI_C(i)= sin(x)*sin(x)
    x = (6*i)* DX
  END DO
  PHI_M=PHI_C
  PHI_P=PHI_C
END SUBROUTINE InitNumericalScheme
```



```

IMPLICIT NONE
! Utilizando a diferenciacao forward
!
! 
$$\frac{F(j,n+1) - F(j,n)}{dt} + u \frac{F(j+1,n) - F(j,n)}{dx} = 0$$

!
!
INTEGER :: ok
INTEGER :: j
DO j=1,iMax
    PHI_P(j) = PHI_C(j) - (Uvel*Dt/Dx)*(PHI_C(j+1)-PHI_C(j))
END DO
CALL UpdateBoundaryLayer()
END FUNCTION SchemeForward

```

END MODULE Class_NumericalMethod



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Métodos de diferenças finitas.

```
MODULE Class_WritetoGrads
USE Class_Fields, Only: PHI_A, PHI_P, PHI_C, PHI_M, Uvel, iMax
IMPLICIT NONE
PRIVATE
INTEGER, PUBLIC      , PARAMETER :: r8=8
INTEGER, PUBLIC      , PARAMETER :: r4=4
INTEGER              , PARAMETER :: UnitData=1
INTEGER              , PARAMETER :: UnitCtl=2
CHARACTER (LEN=400)    :: FileName
LOGICAL              :: CtrlWriteDataFile
PUBLIC :: SchemeWriteCtl
PUBLIC :: SchemeWriteData
PUBLIC :: InitClass_WritetoGrads
CONTAINS
SUBROUTINE InitClass_WritetoGrads()
  IMPLICIT NONE
  FileName=""
  FileName='AdvecLinearConceitual1D'
  CtrlWriteDataFile=.TRUE.
END SUBROUTINE InitClass_WritetoGrads

FUNCTION SchemeWriteData(irec) RESULT (ok)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER , INTENT (INOUT) :: irec
  INTEGER              :: ok
  INTEGER              :: Irec
  REAL (KIND=r4)        :: Yout(iMax)
  INQUIRE (IOLENGTH=Irec) Yout
  IF (CtrlWriteDataFile) OPEN (UnitData, FILE=TRIM(FileName)//'.bin', &
    FORM='UNFORMATTED', ACCESS='DIRECT',
    STATUS='UNKNOWN', &
    ACTION='WRITE', RECL=Irec)
  ok=1
  CtrlWriteDataFile=.FALSE.
  Yout=REAL(PHI_C(1:iMax), KIND=r4)
  irec=irec+1
  WRITE(UnitData, rec=irec) Yout
```

```
Yout=REAL(PHI_A(1:iMax), KIND=r4)
irec=irec+1
WRITE(UnitData, rec=irec) Yout
ok=0
END FUNCTION SchemeWriteData
```

```
FUNCTION SchemeWriteCtl(nrec) RESULT (ok)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER, INTENT (IN) :: nrec
  INTEGER              :: ok
  ok=1
  OPEN(UnitCtl, FILE=TRIM(FileName)//'.ctl', FORM='FORMATTED', &
    ACCESS='SEQUENTIAL', STATUS='UNKNOWN', ACTION='WRITE')
  WRITE (UnitCtl, '(A6,A      )' 'dset ^', TRIM(FileName)//'.bin'
  WRITE (UnitCtl, '(A      )' 'title EDO'
  WRITE (UnitCtl, '(A      )' 'undef -9999.9'
  WRITE (UnitCtl, '(A6,I8,A18 )' 'xdef ', iMax, ' linear 0.00 0.001'
  WRITE (UnitCtl, '(A      )' 'ydef 1 linear -1.27 1'
  WRITE (UnitCtl, '(A6,I6,A25 )' 'tdef ', nrec, ' linear 00z01jan0001 1hr'
  WRITE (UnitCtl, '(A20      )' 'zdef 1 levels 1000 '
  WRITE (UnitCtl, '(A      )' 'vars 2'
  WRITE (UnitCtl, '(A      )' 'phic 0 99 resultado da edol yc'
  WRITE (UnitCtl, '(A      )' 'phia 0 99 solucao analitica ya'
  WRITE (UnitCtl, '(A      )' 'endvars'
  CLOSE (UnitCtl, STATUS='KEEP')
  CLOSE (UnitData, STATUS='KEEP')
  ok=0
END FUNCTION SchemeWriteCtl
END MODULE Class_WritetoGrads
```



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Métodos de diferenças finitas.

```
PROGRAM Main
USE Class_Fields, Only:Init_Class_Fields
USE Class_NumericalMethod, Only : InitNumericalScheme, &
    SchemeForward, SchemeUpdate, SchemeUpStream,&
    AnaliticFunction
USE Class_WritetoGrads, Only :InitClass_WritetoGrads, &
    SchemeWriteData, SchemeWriteCtl

IMPLICIT NONE
INTEGER           , PARAMETER :: r8=8
INTEGER           , PARAMETER :: r4=4
INTEGER           , PARAMETER :: xdim=100
REAL (KIND=r8)    , PARAMETER :: LX=1.0
REAL (KIND=r8)    , PARAMETER :: Uvel0=10.0!m/s
REAL (KIND=r8)    , PARAMETER :: dx=LX/xdim !m
REAL (KIND=r8)    , PARAMETER :: dt=0.1*dx/Uvel0 !s      !
c*Dt/Dx < 1
!                                     ! => Dt <
dx/Uvel0
INTEGER           , PARAMETER :: ninteraction=20000
CALL Init()
CALL run()
```

CONTAINS

```
SUBROUTINE Init()
IMPLICIT NONE
CALL Init_Class_Fields(xdim,Uvel0)
CALL InitNumericalScheme(dt,dx)
CALL InitClass_WritetoGrads
END SUBROUTINE Init
```

```
SUBROUTINE Run()
IMPLICIT NONE
INTEGER :: test,tn,irec
irec=0
DO tn=0,ninteraction
    test=SchemeUpStream()
    test=AnaliticFunction(tn)
    test=SchemeWriteData(irec)
    test=SchemeUpdate()
END DO
test=SchemeWriteCtl(ninteraction)
END SUBROUTINE Run

SUBROUTINE Finalize()
IMPLICIT NONE

END SUBROUTINE Finalize

END PROGRAM Main
```



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Métodos de diferenças finitas.

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4]$$

O Quociente é de segunda ordem de acurácia. É formado considerando a diferença de valores de u_j em um ponto de grade distante do ponto central. Simularmente um quociente pode ser construído considerando a diferença de dois pontos distante do ponto central. Substituindo Δx por $2\Delta x$

$$\frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4]$$

O Quociente é de segunda ordem de acurácia. Mas os coeficientes são grandes. Outra aproximação consistente para a derivada espacial pode ser construída pela combinação linear das duas equações acima. A combinação para o termo de segunda ordem no erro de truncamento é cancelada

$$\frac{4}{3} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + O[(\Delta x)^4]$$



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Métodos de diferenças finitas.

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4}{3} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} - O[(\Delta x)^4]$$

Por Exemplo: Resolvendo a equação de advecção linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

Na solução analítica o estado inicial de propaga no espaço com velocidade de fase constante c sem mudança de forma. A solução numérica, entretanto, ficará atrasada em relação a analítica e dispersa. A alta ordem de acurácia o atraso será menor (a diferença de fase será menor).

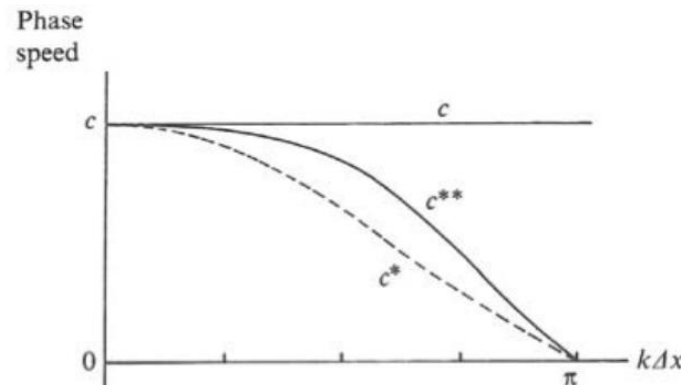
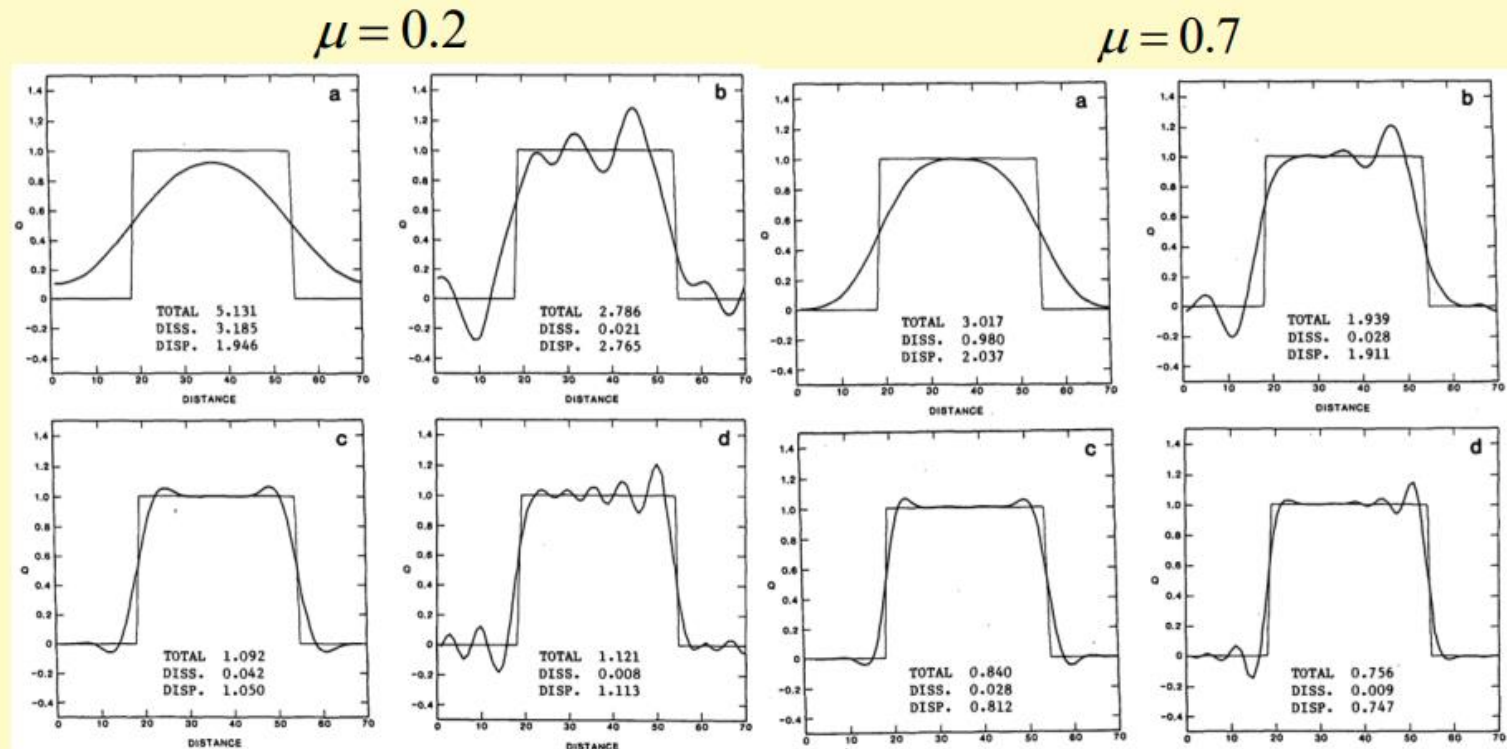


Figure 4.1 Phase speed for the linear advection equation, c , and for the corresponding differential-difference equations with second order (c^*) and with fourth order (c^{**}) centered space differencing.

Métodos de diferenças finitas.

O Aumento da ordem de acurácia não resolve o problema de dispersão que envolve a solução numérica (Takacs,1985)



Numerical solutions for (a) 1st-order scheme, (b) 2nd-order scheme, (c) 3rd-order scheme, and (d) 4th-order scheme, after two complete translations



Dinâmica 23/09/2021 a 23/09/2021

Métodos de diferenças finitas.

Exercício 1

Resolva numericamente a equação de advecção utilizando a acurácia de quarta ordem na discretização espacial e compare com a solução de segunda ordem.

Considere $\mu = \frac{c\Delta x}{\Delta t} = 0.2$ e $\mu = \frac{c\Delta x}{\Delta t} = 0.7$. Como condição inicial use uma onda quadrada.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4}{3} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} - O[(\Delta x)^4]$$