



Idea Principal

O método começou de ser utilizado em 1960-1970.

As derivadas são calculada no espaço espectral

Transformada de Fourier

$$q(x) = \sum_k \hat{q}_k e^{2\pi i k x}$$

Derivatives $(\frac{\partial q}{\partial x})$: $= 2\pi i k \sum_k \hat{q}_k e^{2\pi i k x}$

- ☐ **Dado um vetor de valores $q = [q_i]$**
- ☐ **Calcula a Fast Fourier Transform FFT para obter $\hat{q} = [\hat{q}_k]$**
- ☐ **Calcula as derivadas (no espaço espectral, simplesmente multiplicando por $2\pi i k$)**
- ☐ **Retorna ao espaço físico com a FFT Inversa**

1970s: Viabilidade para uso na Atmosfera mostrado por Eliassen et al (1970) & Orszag (1970)



1D Transporte

Equação 1D para transporte com velocidade constante (u) e contorno periódico:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Substituindo a Serie de Fourier $q(t, x) = \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}$ na equação de transporte tem-se:

$$\sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial t} + u \sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial x} = 0$$

Derivatives $(\frac{\partial q}{\partial x})$: $\frac{\partial \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial x} = 2\pi i k \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}$



1D Transporte

Derivatives $\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right): \frac{\partial \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial x} = 2\pi i k \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right): \frac{\partial \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} e^{2\pi i k x}$$

$$\sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial t} + u \sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial x} = 0$$

$$\left(\sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} e^{2\pi i k x} + u 2\pi i k \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x} \right) = 0$$

$$\sum_k \left(\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + u 2\pi i k \hat{q}_k(t) \right) e^{2\pi i k x} = 0$$



1D Transporte

Equação 1D para transporte com velocidade constante (u) :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

No espaço espectral é resolvido para todo os k (numero de onda) como:

$$\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + 2\pi i k u \hat{q}_k(t)$$

Não há mais derivadas espaciais na EDO:



Algoritmo para Transporte 1D Espectral

Equação 1D para transporte com velocidade constante (u) :

FFT $q(x, t)$ no tempo inicial para obter $\hat{q}_k(t_0)$:

Resolve $\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + 2\pi i k u \hat{q}_k(t) = 0$ para todos os k com o seu esquema de time-stepping favorito para obter $\hat{q}_k(t)$ para o tempo futuro:

Transformada Inversa IFFT $\hat{q}_k(t)$ para obter $q(x, t)$

Derivadas no espaço muito acuradas

$$\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + 2\pi i k u \hat{q}_k(t)$$



Exemplo Não Linear

Equação 1D para transporte com velocidade variavel ($u(x)$) :

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + u(x) \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = 0$$

Como calcular a transformada de $u(x) \frac{\partial q(x, t)}{\partial x}$ e fazer o uso da derivada no espaço espectral? Transforma cada variável separadamente e depois combina.

$$q(x, t) = \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}$$

$$\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + 2\pi i k u \hat{q}_k(t)$$

$$u(x) = \sum_l \hat{u}_l(t) e^{2\pi i l x}$$

$$u(x) \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = \sum_k \sum_l 2\pi i k \hat{u}_l \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x} e^{2\pi i l x}$$

Using this makes the method computationally intense ...