Dinâmica 11/10/2021 a 11/10/2021
Métodos de diferenças finitas.

MET-576-4

Modelagem Numérica da Atmosfera

Dr. Paulo Yoshio Kubota

Os métodos numéricos, formulação e parametrizações utilizados nos modelos atmosféricos serão descritos em detalhe.

3 Meses
24 Aulas (2 horas cada)

Dinâmica 11/10/2021 a 11/10/2021
Métodos de diferenças finitas.

Dinâmica:

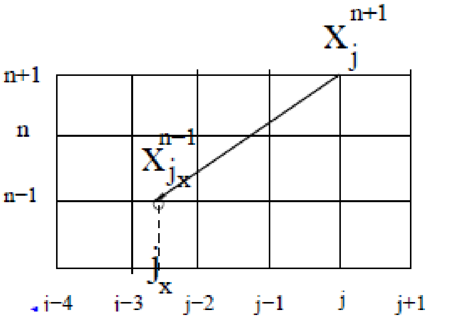
Métodos numéricos amplamente utilizados na solução numérica das equações diferencias parciais que governam os movimentos na atmosfera serão o foco, mas também serão analisados os novos conceitos e novos métodos.

Dinâmica 11/10/2021 a 11/10/2021
Métodos de diferenças finitas.

- ✓ **Métodos de diferenças finitas.**
- ✓ **Acurácia.**
- ✓ **Consistência.**
- ✓ **Estabilidade.**
- ✓ **Convergência.**
- ✓ **Grades de Arakawa A, B, C e E.**
- ✓ **Domínio de influência e domínio de dependência.**
- ✓ **Dispersão numérica e dissipação.**
- ✓ **Definição de filtros monótono e positivo.**
- ✓ **Métodos espectrais.**
- ✓ **Métodos de volume finito.**
- ✓ **Métodos Semi-Lagrangeanos.**
- ✓ **Conservação de massa local.**
- ✓ **Esquemas explícitos versus semi-implícitos.**
- ✓ **Métodos semi-implícitos.**

Semi-Lagrangian

A equação de Advecção pode ser escrita na forma Euleriano ou Lagrangiana. i.e.



$$\frac{\partial \emptyset}{\partial t} = -u\frac{\partial \emptyset}{\partial x} \qquad \textit{Euleriano}$$

$$\frac{D\emptyset}{Dt} = 0 \qquad \textit{Lagrangiano}$$

Para um esquema semi-Lagrangiana de três vezes nível no tempo

$$\frac{D\emptyset}{Dt} \approx \frac{\emptyset_j^{n+1} - \emptyset_{jx}^{n-1}}{2\Delta t} = 0$$

$$\Rightarrow \emptyset\left(x_j^{n+1}\right) = \emptyset\left(x_{jx}^{n-1}\right)$$

⇒ O valor futuro de $\emptyset$ no ponto de chegada é igual ao valor anterior de $\emptyset$ no ponto de partida.

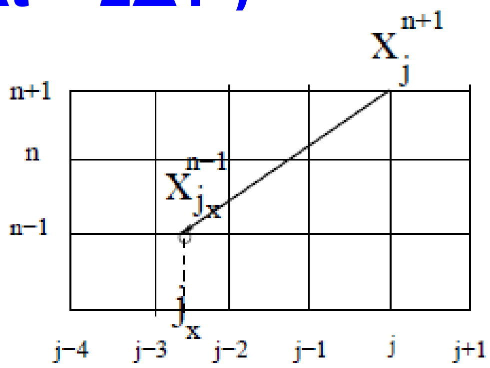
O método Semi-Lagrangian requer dois cálculo importantes

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campos advectado do ponto de partida

O cálculo do ponto de partida

Para uma velocidade constante caso (deixe Δt = 2ΔT)



$$x_{jx}^{n-1} = x_j^{n+1} - u\Delta t$$

No caso da variável velocidade:
Ponto repetitivo velocidade média

$$x_{jx}^{n-1} = x_j^{n+1} - u_m\Delta t$$

Série de Taylor aproximação (McGregor, 1993).

$$x_{jx}^{n-1} = x_j^{n+1} - \hat{u}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\Delta t^3}{6}\left(\hat{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)\right)$$

Para obter a função da ponderação para a interpolação

$$x_{jx}^{n-1} = x_{j-m} - \alpha$$

Onde,

$$\alpha = \frac{x_{j-m} - x_{jx}}{\Delta x}$$

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

2.1 Esquema ENO

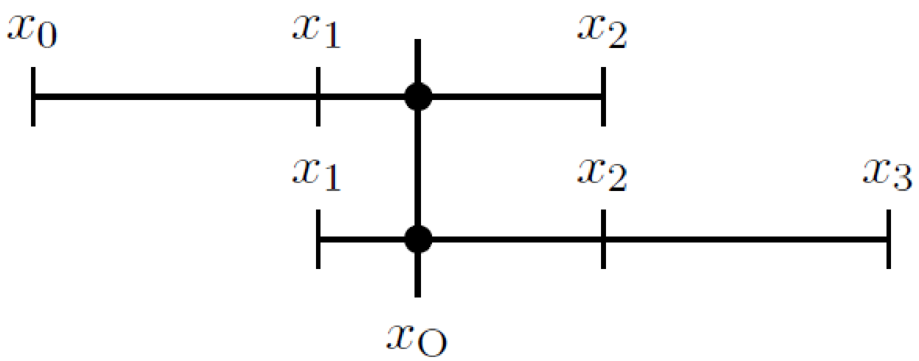
Para um esquema de interpolação de segunda ordem, um estêncil de 3 pontos é usado para construir um interpolador quadrático 1D.

Tendo quatro nós e o ponto de interpolação no intervalo central, podemos escolher o estêncil de 3 pontos esquerdo ou direito para obter o valor interpolado.

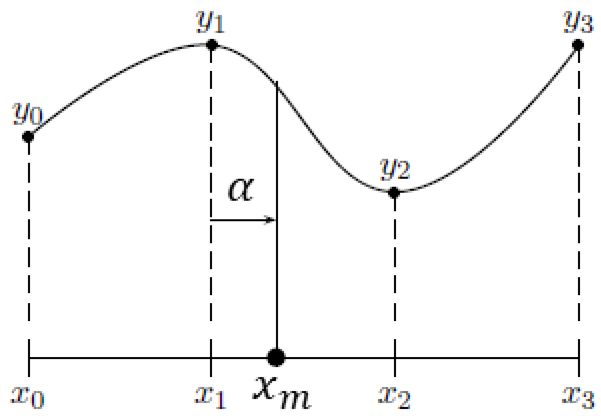
Se essa escolha for feita com base na suavidade da solução, falamos da técnica ENO. Em particular, a escolha entre os estênceis é feita calculando a aproximação da diferença finita para a segunda derivada para cada um dos dois estênceis e usando aquele com menor valor absoluto dessa quantidade

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida



Aqui, x_i são coordenadas de pontos de grade com valores da função correspondentes y_i . Por exemplo: if | $y_2 - 2y_1 + y_0$ | <| $y_3 - 2y_2 + y_1$ | (veja a figura abaixo),



Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador linear no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_1 + x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_1) + (x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_0)} + y_1 \frac{(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_0)} + y_1$$

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} - y_1 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha - y_1 \alpha + y_1$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha + (1 - \alpha) y_1$$

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)(x_m - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \frac{(x_m - x_1 + x_1 - x_2)}{(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left(\frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_2)} + \frac{(x_1 - x_2)}{(x_0 - x_2)} \right) + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\Delta x}{2\Delta x} \right) + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right) + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + y_1\frac{(x_m - x_1 + x_1 - x_0)(x_m - x_1 + x_1 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2\frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + y_1\frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\left(\frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_0)} + 1\right)\left(\frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_2)} + 1\right)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2\frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + y_1\left(\frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_0)} + 1\right)\left(\frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_2)} + 1\right) + y_2\frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - y_1(\alpha - 1)(\alpha + 1) + y_2\frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) + y_2\frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) - y_2\alpha\frac{(x_m-x_0)}{(x_2-x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) - y_2\alpha\frac{(x_m-x_1+x_1-x_0)}{(x_2-x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) - y_2\alpha\frac{\left((x_m-x_1)+(x_1-x_0)\right)}{(x_2-x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) - y_2\alpha\left(\frac{(x_m-x_1)}{(x_2-x_0)} + \frac{(x_1-x_0)}{(x_2-x_0)}\right)$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) - y_2\alpha\left(\frac{\alpha}{-2} + \frac{-\Delta x}{-2\Delta x}\right)$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) + y_2\alpha\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)(x_m - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left(\frac{\alpha + 1}{2}\right) - y_1(\alpha - 1)(\alpha + 1) + y_2 \alpha \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)(x_m - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Para uma malha regular de tamanho Δx tem-se:

$$y(x_m) = y_0 \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} + y_1 \frac{(\alpha + 1)(\alpha - 1)}{-1} + y_2 \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}$$

Onde:

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador cubico no estêncil 0 - 1 - 2 - 3 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)(x_m - x_2)(x_m - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)(x_m - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$+ y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)(x_m - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)(x_m - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

$$y(x_m) = -y(x_0)\frac{\alpha(1-\alpha^2)}{6} + y(x_1)\frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{2} + y(x_2)\frac{\alpha(1-\alpha^2)(2-\alpha)}{2} - y(x_3)\frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{6}$$

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

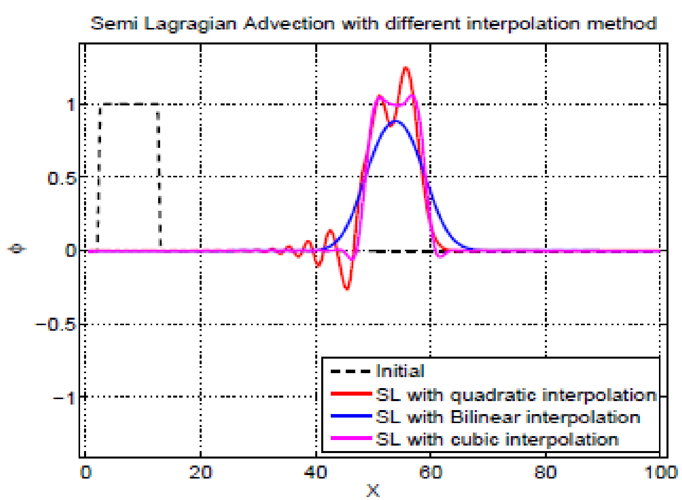
Linear (2pts)

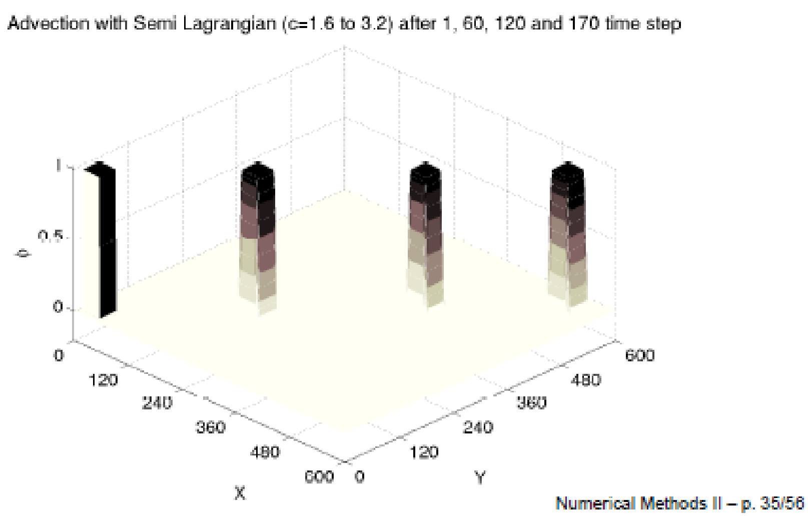
$$\emptyset(x_{jx}^{n-1}) = \alpha\emptyset(x_{j-m-1}^{n-1}) + (1-\alpha)\emptyset(x_{j-m}^{n-1})$$

Cúbicos (5pts))

$$\emptyset\left(x_{jx}^{n-1}\right) = -\frac{\alpha(1-\alpha^2)}{6}\emptyset\left(x_{j-m-2}^{n-1}\right) + \frac{\alpha(1+\alpha)(2-\alpha)}{2}\emptyset\left(x_{j-m-1}^{n-1}\right) + \frac{(1-\alpha^2)(2-\alpha)}{2}\emptyset\left(x_{j-m}^{n-1}\right) - \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{6}\emptyset\left(x_{j-m+1}^{n-1}\right)$$

Precisão e monotonicity





Análise de Estabilidade

Assumir um esquema de dois níveis no tempo e um de interpolação linear $\emptyset$ no ponto de partida ou seja .

$$\emptyset_j^{n+1} = \emptyset_*^n = (1-\alpha)\emptyset_{j-m}^n + \alpha\emptyset_{j-m-1}^n \quad \textbf{(23)}$$

(Note-se que quando m= 0, $\alpha = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$, e 23 se torna Idêntico ao esquema diferencial upstream). assim como para outros esquemas de advecção vamos supor que uma solução na forma:$\emptyset_j^n = A^n e^{ikj\Delta x}$

A substituição de 23 nós, obter

$$|A| = [1 - 2\alpha(1-\alpha)[1 - cos(k\Delta x)]]^{0.5} \quad \textbf{(24)}$$

Portanto |A| ≤ 1 Enquanto α(1 - α) ≥ 0 Ou seja, 0 ≤ α ≤ 1

O esquema é, portanto, estável se os pontos da interpolação são os dois são mais próximos do ponto de partida, mas é neutro somente
Se α = 0 Ou α = 1, Ou seja, quando a interpolação não é necessária