



Dinâmica 11/10/2021 a 11/10/2021

Introdução ao Método Espectral.

MET-576-4

Modelagem Numérica da Atmosfera

Dr. Paulo Yoshio Kubota

Os métodos numéricos, formulação e parametrizações utilizados nos modelos atmosféricos serão descritos em detalhe.

3 Meses
24 Aulas (2 horas cada)



Dinâmica 11/10/2021 a 11/10/2021

Introdução ao Método Espectral.

**Métodos Numérico Avançados para Dinâmica
de fluidos e transferência de calor**

Paulo Yoshio Kubota
Rixin Yu

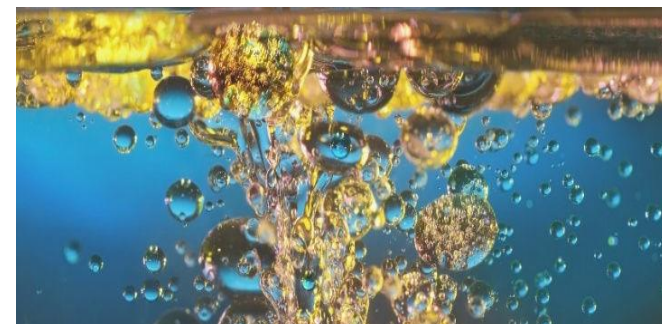
Conteúdo principal do curso •

O curso CFD oferecido em nosso departamento (Dinâmica de Fluidos e Transferência de Calor, MMVN05)

- Baixa velocidade (incompressível), problema de fluxo com física ligeiramente simples •

Este curso CFD “avançado” (MVKN70)

- Métodos numéricos que lidam com problemas de escoamento com física complexa
 - Alta velocidade, escoamento compressível (semana 1,2,4)
 - Onda de choque, descontinuidade
 - Problemas de escoamento multi-físico
 - Transferência de calor avançada: problema de radiação térmica (semana 3)
 - Fluxo de reação, combustão (semana 5)
- Outros tipos de problemas específicos de escoamento multi-físico (não abrangidos neste curso)
 - »Escoamento multifásicos (spray)
 - »Magnetohidrodinâmica (MHD)
 - »Microfluido, não newtoniano
 - »... ..





**Uma visão geral dos métodos de computação
aplicáveis a problemas de escoamento de fluido**



Dinâmica 11/10/2021 a 11/10/2021

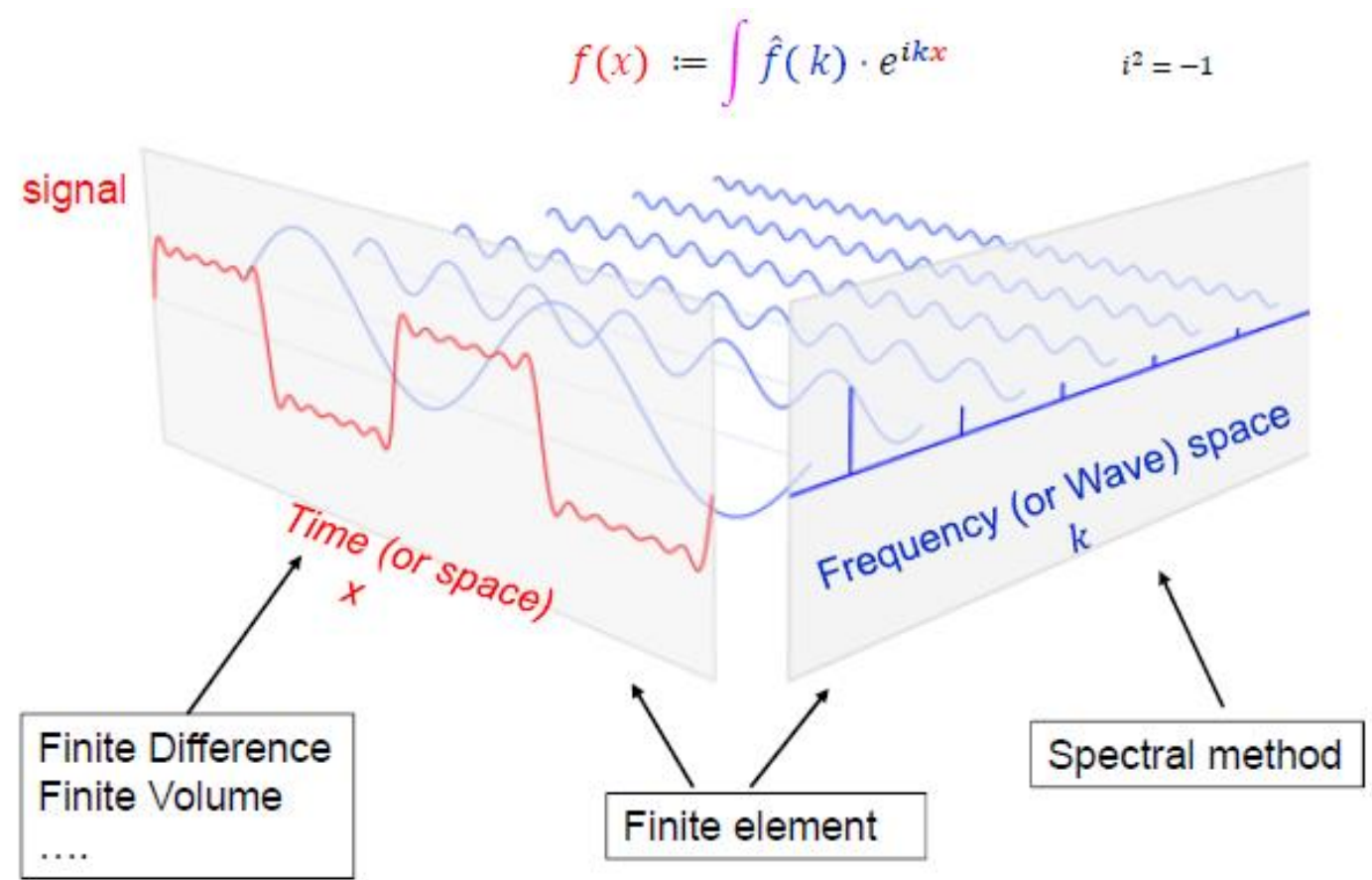
Introdução ao Método Espectral.

Visão geral dos métodos CFD

- Diferentes frameworks de métodos computacionais (capazes de lidar com os problemas de mecânica dos fluidos)
 - Métodos clássicos (P.D.E. (equações N.S.) discretização em uma aproximação de grade)
 - Volume finito / diferença finita
 - Discretização em uma grade (malha) com conectividade predeterminada
 - » Esquemas numéricos para transformar um sistema de P.D.E.s em um conjunto aproximado de equações algébricas.
 - » Ferramentas básicas: expansão de Taylor, interpolação / extrapolação.
 - » Conceitos: Ordem de precisão (erro de truncamento), análise de estabilidade Neuman, tratamentos de condições de contorno,
 - O caminho natural para a extensão para lidar com problemas complexos
 - » Grade deformadora, refinamento da malha (adaptativa)
- Elementos finitos, (pseudo) métodos espectrais (X)
- Outros métodos
 - Métodos sem malha (hidrodinâmica de partículas suaves, X)
 - Métodos de Lattice (malha) de Boltzmann (X)

Métodos espectrais
(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um **senal físico** na soma de uma série de ondas simples de diferentes amplitudes





Dinâmica 11/10/2021 a 11/10/2021

Introdução ao Método Espectral.

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um **sinal físico** na **soma** de uma série de **ondas simples** de diferentes **amplitudes**

Quaisquer duas ondas simples diferentes (k, k') são ortogonais (o que torna a decomposição possível!)

$$\int e^{ikx} \cdot e^{-ik'x} dx := \delta_{kk'} = \begin{cases} 1, & k = k' \\ 0, & k \neq k' \end{cases}$$

Para cada onda simples (Fourier), é fácil calcular a derivada (para auxiliar na resolução da equação diferencial)

$$\frac{d}{dx} e^{ikx} = (ik) \times e^{ikx}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{ikx} = (ik)^2 e^{ikx} = (-k^2) \times e^{ikx}$$

Para encontrar a **amplitude** de cada onda **simples decomposta**:

$$\hat{f}(k) := \int f(x) e^{-ikx}$$



Dinâmica 11/10/2021 a 11/10/2021

Introdução ao Método Espectral.

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um **sinal físico** na **soma** de uma série de **ondas simples** de diferentes **amplitudes**

É computacional possível para realizar a transformada de Fourier para calcular a amplitude.

- A discreta Transformada Rápida de Fourier (FFT)
 - Computacionalmente eficiente, reduzindo as contagens de operação de $O(N^2)$ a $O(N \log(N))$, onde N é o número de contagens de grade discreta.
 - A versão mais simples é o algoritmo Cooley-Tukey que funciona para $N = 2^m$,
 - outra versão do algoritmo FFT avançado pode lidar com N tão arbitrário quanto o número primo.
 - FFTW (software livre, implementação paralela disponível)



Dinâmica 11/10/2021 a 11/10/2021

Introdução ao Método Espectral.

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um **sinal físico** na **soma** de uma série de **ondas simples** de diferentes **amplitudes**

Demonstração do método espectral para resolver uma equação diferencial.

Quais das seguintes equações são fáceis de resolver?

Uma equação algébrica para um valor real k:

$$k^4 - bk^2 + c = 0,$$

com b, c, são constantes.

Uma equação diferencial para f (x):

Assume f only contains a single k simple-wave of

$$f(x) = \hat{f}e^{ikx},$$

then:

$$\frac{d}{dx}f = ik \times \hat{f}e^{ikx}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f = -k^2 \times \hat{f}e^{ikx}$$

$$\frac{d^4}{dx^4}f = +k^4 \times \hat{f}e^{ikx}$$

$$\frac{d^4}{dx^4}f(x) + b\frac{d^2}{dx^2}f(x) + cf(x) = 0, \quad \text{for } x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(k^4 - bk^2 + c) \times \hat{f}e^{ikx} = 0$$

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} \text{Any value,} & \text{if } k^4 - bk^2 + c = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Dinâmica 11/10/2021 a 11/10/2021

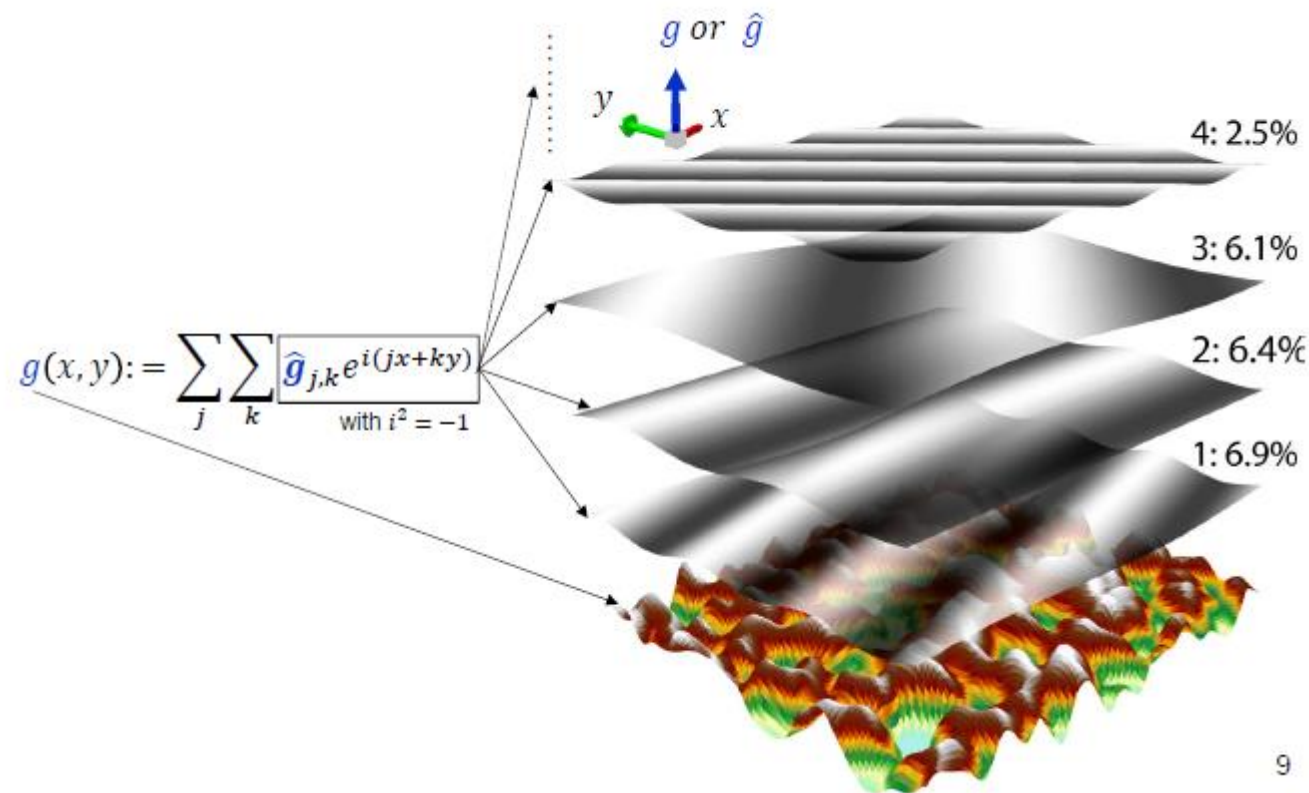
Introdução ao Método Espectral.

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um **sinal físico** na **soma** de uma série de **ondas simples** de diferentes **amplitudes**

Transformada Multidimensional de Fourier

**Decomposição em simples,
ondas multidimensionais**





Dinâmica 11/10/2021 a 11/10/2021

Introdução ao Método Espectral.

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um **sinal físico** na **soma** de uma série de **ondas simples** de diferentes **amplitudes**

Método espectral para resolver P.D.E.

- Uma equação diferencial parcial linear simples (equação de Poisson)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x, y) = g(x, y),$$

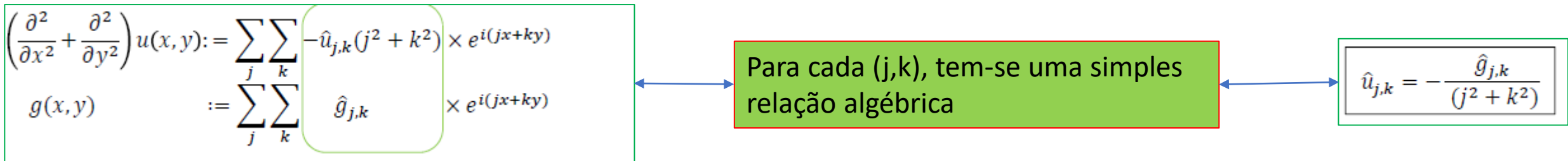
No domínio periódico

$$\begin{aligned} g(x, y) &= g(x + 2\pi, y) \\ &= g(x, y + 2\pi) \\ \text{with } x, y &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Decompor u e g na soma de ondas simples de Fourier 2D

$$u(x, y) := \sum_j \sum_k \hat{u}_{j,k} \times e^{i(jx+ky)}$$

$$g(x, y) := \sum_j \sum_k \hat{g}_{j,k} \times e^{i(jx+ky)}$$





Dinâmica 11/10/2021 a 11/10/2021

Introdução ao Método Espectral.

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um **sinal físico** na **soma** de uma série de **ondas simples** de diferentes **amplitudes**

Métodos espectrais para P.D.E. não lineares.

Simplificações das equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + \nu \nabla^2 u; \quad \nabla \cdot u = 0$$

A equação de viscosidade de Burger não linear (periódico em $x \in (0,2\pi)$, resolva para $t \geq 0$)

Decomposição de Fourier em x (não t)

$$u(x, t) := \sum_k \hat{u}_k(t) e^{ikx}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} u^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$$

↓ ↓ ↓

$$\sum_k \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_k + \frac{ik}{2} \sum_{p+q=k} \hat{u}_p \hat{u}_q + k^2 \hat{u}_k \right) = 0$$

Para resolver \hat{u}_k em um número de onda k , a relação acima não é mais algébrica devido ao envolvimento de outros números de onda p e q . Se o termo não linear assumir uma expressão mais complicada, o cálculo pode se tornar caro!



Dinâmica 11/10/2021 a 11/10/2021

Introdução ao Método Espectral.

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um **sinal físico** na **soma** de uma série de **ondas simples** de diferentes **amplitudes**

Para resolver \hat{u}_k em um número de onda k , a relação acima não é mais algébrica devido ao envolvimento de outros números de onda p e q . Se o termo não linear assumir uma expressão mais complicada, o cálculo pode se tornar caro!

Avanço de tempo de 1ª ordem:

$$\frac{\hat{u}_k(t^{n+1}) - \hat{u}_k(t^n)}{t^{n+1} - t^n} = \text{Exp.}(\hat{u}_k, \hat{u}_p, \hat{u}_q) \Big|^{t^n}$$

Dinâmica 11/10/2021 a 11/10/2021

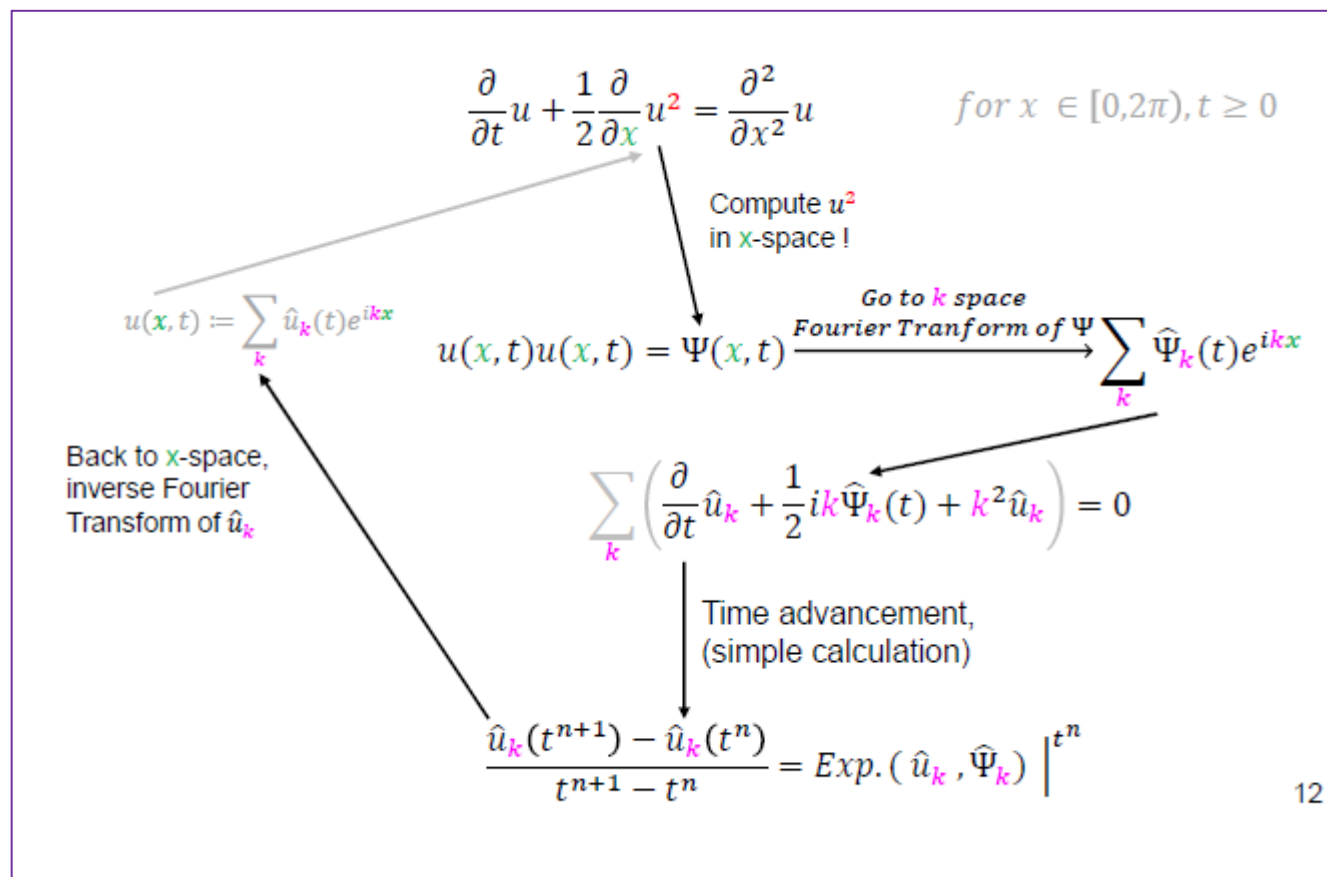
Introdução ao Método Espectral.

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um **sinal físico** na **soma** de uma série de **ondas simples** de diferentes **amplitudes**

Métodos **pseudo-espectrais** para resolver PDE **não linear**

Eq. de burger não linear..



Decomposição de um **sin**al físico na soma de uma série de **ondas** simples de diferentes **amplitudes**

Método espectral: Prós / Contras

- Os métodos espectrais e o Método dos Elementos Finitos estão intimamente relacionados
 - Os métodos espectrais usam funções de base “globais” “ortogonais” que são diferentes de zero em todo o domínio.
- Excelentes propriedades de erro de "convergência exponencial" (em outras palavras, os métodos espectrais são muito precisos quando a solução é suave)
- O FEM pode ser visto como usando funções de base “local” que são diferentes de zero apenas em pequenos subdomínios.
- Os métodos espectrais funcionam melhor com geometria simples (por exemplo, periódica) com soluções suaves, pode ser mais leve computacionalmente .
- Os métodos espectrais não são bons para problemas descontínuos (nenhum resultado de “captura de choque” espectral 3D conhecido), e vinculam ao fenômeno de Gibbs.

