Spectral methods

Idea Principal

O método começou de ser utilizado em 1960-1970.
As derivadas são calculada no espaço espectral
Transformada de Fourier

$$q(x) = \sum_k \hat{q}_k e^{2\pi i k x}$$

Derivatives ($\frac{\partial q}{\partial x}$): $= 2\pi i k \sum_k \hat{q}_k e^{2\pi i k x}$

- **Dado um vetor de valores** $\boldsymbol{q} = [q_i]$
- **Calcula a Fast Fourier Transform FFT p**ara obter $\hat{\boldsymbol{q}} = [\hat{\boldsymbol{q}}_k]$
- **Calcula as derivadas (no espaço espectral, simplesmente multiplicando por** $2\pi i k$**)**
- **Retorna ao espaço físico com a FFT Inversa**

1970s: Viabilidade para uso na Atmosfera mostrado por Eliasen et al (1970) & Orszag (1970)

Spectral methods

1D Transporte

Equação 1D para transporte com velocidade constante (u) e contorno periódico:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Substituindo a Serie de Fourier $q(t,x) = \sum_k \hat{q}_k(t)e^{2\pi ikx}$ **na equação de transporte tem-se:**

$$\sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t)e^{2\pi ikx}}{\partial t} + u\sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t)e^{2\pi ikx}}{\partial x} = 0$$

Derivatives ($\frac{\partial q}{\partial x}$**):** $\frac{\partial \sum_k \hat{q}_k(t)e^{2\pi ikx}}{\partial x} = 2\pi ik \sum_k \hat{q}_k(t)e^{2\pi ikx}$

Spectral methods

1D Transporte

Derivatives ($\frac{\partial q}{\partial x}$): $\frac{\partial \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial x} = 2\pi i k \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}$

($\frac{\partial q}{\partial t}$): $\frac{\partial \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} e^{2\pi i k x}$

$$\sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial t} + u \sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial x} = 0$$

$$\left(\sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} e^{2\pi i k x} + u 2\pi i k \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x} \right) = 0$$

$$\sum_k \left(\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + u 2\pi i k \hat{q}_k(t) \right) e^{2\pi i k x} = 0$$

Spectral methods

1D Transporte

Equação 1D para transporte com velocidade constante (u) :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

No espaço espectral é resolvido para todo os k (numero de onda) como:

$$\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + 2\pi i k u \hat{q}_k(t)$$

Não há mais derivadas espaciais na EDO:

Algoritmo para Transporte 1D Espectral

Equação 1D para transporte com velocidade constante (u) :

FFT $q(x,t)$ **no tempo inicial para ober** $\hat{q}_k(t_0)$**:**

Resolve $\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + 2\pi i k u \hat{q}_k(t) = 0$**para todos os k com o seu esquema de time-steping favorito para obter** $\hat{q}_k(t)$ **para o tempo futuro:**

Transformada Inversa IFFT $\hat{q}_k(t)$ **para obter** $q(x,t)$

Derivadas no espaço muito acuradas

$$\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + 2\pi i k u \hat{q}_k(t)$$

Exemplo Não Linear

Equação 1D para transporte com velocidade variavel (u(x)) :

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + u(x)\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0$$

Como calcular a transformada de $u(x)\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}$ **e fazer o uso da derivada no espaço espectral? Transforma cada variável separadamente e depois combina.**

$$q(x,t) = \sum_{k} \hat{q}_k(t)e^{2\pi ikx}$$

$$\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + 2\pi iku\hat{q}_k(t)$$

$$\mathrm{u}(x) = \sum_{l} \hat{u}_l(t)e^{2\pi ilx}$$

$$u(x)\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = \sum_{k}\sum_{l} 2\pi ik\hat{u}_l\hat{q}_k(t)e^{2\pi ikx}e^{2\pi ilx}$$

Using this makes the method computationally intense ...

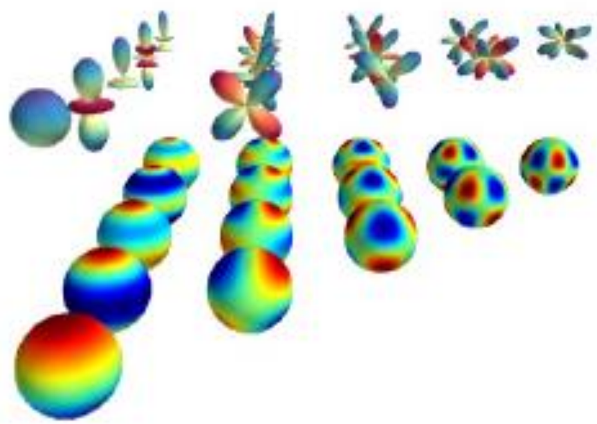
Global Models

Como utilizar este método em uma esfera?

Harmônicos Esféricos : Expansão de Fourier para cada circulo de latitude, e polinômios de Legendre Sobre os meridianos

$$\Upsilon_n^m(\lambda,\theta) = e^{-im\lambda} P_n^m(\sin\theta)$$

$$P_n^m(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-\mu^2)^{|m|/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+|m|}(1-\mu^2)}{d\mu^{n+|m|}}.$$



Spectral methods

Global Models

Harmônicos esféricos com transformada rápida de Fourier e transformadas "rápidas" de Legendre

Método pseudo-espectral

Evita a necessidade de tratamento especial nos pólos

Semi-implícito é mais fácil no espaço espectral

Com Semi-Lagrangiano: permite timeStep grandes

Muito preciso!

Usado na maioria dos modelos operacionais de Previsão de Tempo e em muitos modelos de Clima (BAM, IFS, GFS, ...).

Spectral methods

Global Models

- **Sistema Integrado de Previsão – ECMWF**
- **Modelo Espectral Global - Truncamento Triangular**
- **Grade Gaussiana Reduzida (Linear)**
- **Semi-implícito Semi-Lagrangiano**
- **Esquema de dois tempos**
- **Desenvolvidas Transformadas rápidas de Legendre**

Introduction – A history

- Resolution increases of the deterministic 10-day medium-range Integrated Forecast System (IFS) over ~28 years at ECMWF:
  - 1983: T 63 (~316km)
  - 1987: T 106 (~188km)
  - 1991: T 213 (~95km)
  - 1998: T_L319 (~63km)
  - 2000: T_L511 (~39km)
  - 2006: T_L799 (~25km)
  - 2010: T_L1279 (~16km)
  - 2015: T_L2047 (~10km) Hydrostatic, parametrized convection
  - 2020-???: (~1-10km) Non-hydrostatic, explicit deep convection, different cloud-microphysics and turbulence parametrization, substantially different dynamics-physics interaction...

Problemas Computacionais...

A maior parte do tempo computacional é gasta na resolução da transformação Harmônicos Esféricos (Legendre + Fourier).

Esta parte implica em uma comunicação global, que reduz sua escalabilidade

Talvez não consigamos ajustar as janelas de tempo necessárias para modelos de resolução muito alta.

Training Brazilian Atmospheric Model (BAM)

Cachoeira Paulista-SP
CPTEC/INPE
03 Dezembro 2020
Dr. Paulo Yoshio Kubota

Sumário

Treinamento
Treinamento do CPTEC em Modelagem Global da Atmosfera em Novembro de 2018.

O CPTEC é líder em desenvolvimento da modelagem atmosférica no Brsail. Nossos pesqusadores têm mais de uma duas década de experiência no ensino, desenvolvimento de modelagem atmosférica e análise de previsão meteorológica de tempo e clima, para estudantes de todo o mundo. Enquanto, as aulas enfocam os aspectos teóricos e operacionais do modelo BAM suportado pelo CPTEC, elas combinam a prática de modelagem com palestras sobre as teorias subjacentes e a ciência do software de modelagem.

O CPTEC oferece aulas em conjunto com as diciplinas anuais da pós-graduação, juntamente com pelo menos uma aula adicional (geralmente em fevereiro e março). Nossas aulas são realizadas em nosso centro de treinamento em Cachoeira Paulista, SP, Brasil. Também podemos organizar aulas fora do local em outros locais. As aulas on-line estão sendo planejadas.

Você deve fazer login no site do CPTEC para se inscrever em uma aula. Se você ainda não criou uma conta do CPTEC, poderá criar uma aqui.
Aulas oferecidas pelo CPTEC

Introdução ao Pré-processamento do Modelo BAM (Atmosfera)
Introdução ao Modelo do Modelo BAM (Atmosfera)
Introdução ao Pré-processamento do Modelo BAM (Atmosfera)

Ferramentas de análise estatística e gráfica(GRaDs, NCL)
Cursos Especiais (Fortran, OpenMp, MPI) CPTEC

Sumário

Método Numérico Avançado para modelagem do Sistema Terrestre.

Equações Governantes.
Dinâmica Hidrostática/Não Hidrostática.
Discretização Horizontal e Vertical.
Integração no Tempo, Advecção e Esquema de alta ordem para a discretização no espaço.
Transformada Espectral.
Técnica Numérica para resolver as equações prognosticas no modelo BAM do CPTEC (BAM).

Parametrização dos processos físicos de subgrade:

Processos Considerados
Parametrização dos Efeitos orográfico de escala de subgrade.
Parametrização de Radiação em previsão numérica de tempo.
Processos Físicos de superfície continental.
Processo da camada limite planetária.
Parametrização dos processos úmidos (convecção e nuvens).

Equações Governantes.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{a\,cos^2\varphi}\left(U\frac{\partial U}{\partial \lambda} + V\cos\varphi\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) + \dot{\sigma}\frac{\partial U}{\partial \sigma} - fV + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + RT\frac{\partial \ln(ps)}{\partial \lambda}\right) = F_u$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{a\,cos^2\varphi}\left(U\frac{\partial V}{\partial \lambda} + V\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) + \dot{\sigma}\frac{\partial V}{\partial \sigma} + fU + \frac{\cos\varphi}{a}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + RT\frac{\partial \ln(ps)}{\partial \varphi}\right) + \frac{\sin\varphi}{a\,cos^2\varphi}(U^2+V^2) = F_v$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{a\,cos^2\varphi}\left(U\frac{\partial T}{\partial \lambda} + V\cos\varphi\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) + \dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma} - \theta\dot{\sigma}\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = kT\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\right)ln(ps) + F_T$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial t} + \frac{1}{a\,cos^2\varphi}\left(U\frac{\partial q_n}{\partial \lambda} + V\cos\varphi\frac{\partial q_n}{\partial \varphi}\right) + \dot{\sigma}\frac{\partial q_n}{\partial \sigma} = F_{q_n}$$

$$\frac{\partial ln(ps)}{\partial t} + \int_0^1 \vec{V}\cdot\nabla ln(ps)\,d\sigma + \int_0^1 D\,d\sigma = 0$$

$U = ucos(\varphi), \qquad V = vcos(\varphi)$ and $\vec{V} = (U,V)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{RT}{\sigma} = 0$$

$$\sigma\frac{\partial ps}{\partial t} + \int_0^\sigma \nabla\cdot ps\vec{V}\,d\sigma = -ps\dot{\sigma}$$

Equações Governantes.

$U = u\cos(\varphi), \;\; V = v\cos(\varphi) \; and \; \vec{V} = (U, V), \quad T = \pi\theta$

T **Temperatura Virtual**

θ **Temperatura Potencial**

p_s **Pressão de superfície**

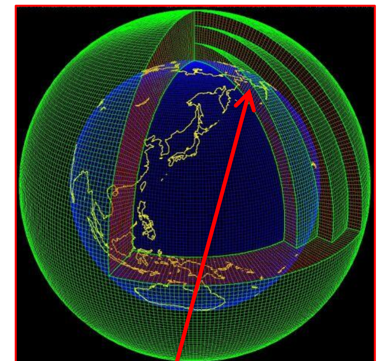
$\sigma = \frac{p}{p_s}$ **Coordenada vertical**

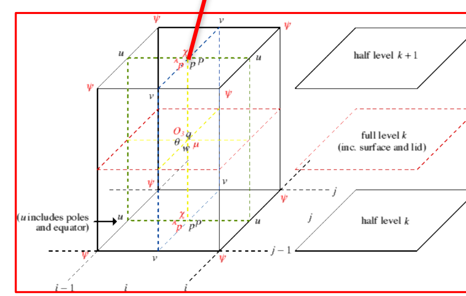
$\dot{\sigma}$ **Velocidade vertical**

f **Coriolis**

q **Umidade Especifica**

D **Divergência Horizontal**





F_u, F_v, F_T F_q **termos de forçantes devido as parametrizações física**

Variáveis Prognosticas e Discretização Espectral

D Campo de Divergência

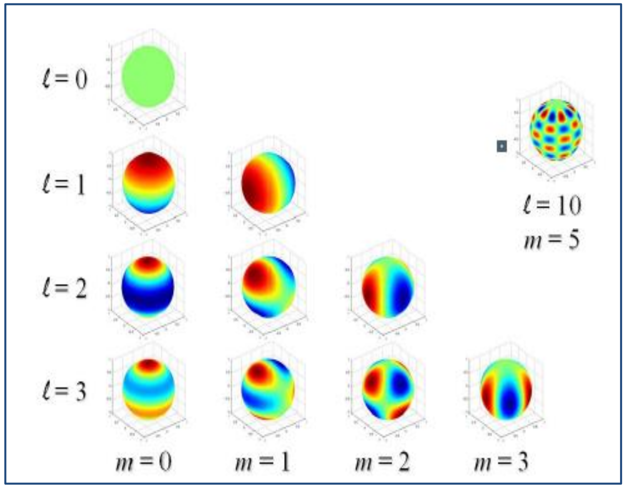
ξ Campo de Vorticidade

A velocidades U e V, são derivados de Campo de ξ e D

T Temperatura Virtual

q Umidade Especifica

$\ln(p_s)$ logaritmo da pressão de superfície (campo de 2 dimensões)



Será armazenada no espaço espectral . Em cada nível k, se armazena os coeficientes F_l^m de uma expansão. Dado que ,

$$F(\lambda,\varphi) = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=|M|}^{M} F_n^m P_n^m(\sin(\varphi))e^{im\lambda}$$

,onde tem-se empregado um truncamento triangular, para cada campo prognóstico F.

O principal aspecto da reformulação

Modelo BAM usa um Formalismo Euleriano para tratar a advecção

↓

Necessidade de adaptar o modelo para tratar a advecção usando um formalismo Semi-Lagranginano

↓

Esta mudança implica em um <u>novo Formalismo</u> Euleriano para tratar a advecção

O principal aspecto da reformulação

Podemos escrever o Sistema de Equação

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \boldsymbol{L}(W) + \boldsymbol{N}(W) = 0$$

W **será o vetor das variáveis prognosticas para as equações primitivas**

O operador diferencial é separado no operador N e L.

N**= inclui a não linearidade do sistema.**

L**= inclui a parte linear do sistema**

O principal aspecto da reformulação

No modelo Euleriano atual o sistema pede discretizado no tempo como:

$$(I + \Delta t L)\big(W(t+\Delta t)\big) = (I - \Delta t \boldsymbol{L})\big(W(t-\Delta t)\big) - 2\Delta t \boldsymbol{N}\big(W(t)\big)$$

O operador Não linear $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{W})$ é resolvido com a ajuda da transformação espectral

Onde inclui os termos de advecção horizontal $\vec{V} \cdot \boldsymbol{\nabla F}$ (onde F é U,V T ,q,..)

$$\vec{V} \cdot \nabla F = \nabla \cdot \left(\vec{V} F\right) - F\left(\overline{\nabla \cdot \vec{V}}\right) = \nabla \cdot \left(\vec{V} F\right) - FD$$

$$D = \nabla \cdot \vec{V} \text{ divergência horizontal}$$

O produto é resolvido no espaço físico (grid-point) e as derivadas são obtidas através da transformação espectral.

A solução do sistema é feita totalmente no espaço espectral

O principal aspecto da reformulação

A nova formulação das equações primitivas

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\partial W}{\partial t} + A(W) = -\tilde{\boldsymbol{L}}(W) - \tilde{\boldsymbol{N}}(W)$$

Nesta formulação isola-se o termo de advecção em $\boldsymbol{A(W)}$.
$\tilde{\boldsymbol{L}}$ contém a parte linear tratada implicitamente
$\tilde{\boldsymbol{N}}$ contén a contribuição não linear

$$\left(I + \Delta t\tilde{L}\right)(W(t+\Delta t)) = \left(I - \Delta t\tilde{L}\right)(W(t-\Delta t))_* - 2\Delta t\tilde{N}(W(t))_M$$

$(\quad)_*$ **define o ponto de partida de uma partícula em** $(t - \Delta t)$ **chegando em um ponto de grade gaussiano no tempo** $(t + \Delta t)$ **.**

$(\quad)_M$ **define o ponto médio da trajetória no tempo** (t)

O principal aspecto da reformulação

A velha formulação das equações primitivas	A nova formulação das equações primitivas
$\frac{\partial W}{\partial t} + L(W) + N(W) = 0$	$\frac{dW}{dx} = \frac{\partial W}{\partial t} + A(W) = -\tilde{L}(W) - \tilde{N}(W)$
$(I + \Delta t L)\big(W(t+\Delta t)\big) = (I - \Delta t L)\big(W(t-\Delta t)\big) - 2\Delta t N\big(W(t)\big)$	$(I + \Delta t\tilde{L})(W(t+\Delta t)) = (I - \Delta t\tilde{L})(W(t-\Delta t))_* - 2\Delta t\tilde{N}(W(t))_M$

A **principal diferença**, além da absorção da advecção nas trajetórias lagrangianas, é que o operador $\tilde{L}$ e $\tilde{N}$ terá que ser completamente **resolvido** no espaço da **malha** no ponto determinado pelas trajetórias Lagrangeanas.

Os operadores $\tilde{L}$ e $\tilde{N}$ são resolvidos em um determinado instante **t** e os valores no ponto da trajetória será obtido por interpolação.

Somente após resolver o lado direito da equação se inclui as tendência devido as parametrizações físicas e transforma para o espaço espectral para finalizar a resolução.

O principal aspecto da reformulação

A nova formulação das equações primitivas

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\partial W}{\partial t} + A(W) = -\tilde{L}(W) - \tilde{N}(W)$$

$$(I + \Delta t\tilde{L})(W(t+\Delta t)) = (I - \Delta t\tilde{L})(W(t-\Delta t))_* - 2\Delta t\tilde{N}(W(t))_M$$

Este novo esquema tem uma opção de discretização Euleriana como opção.

$$(I + \Delta t\tilde{L})(W(t+\Delta t)) = (I - \Delta t\tilde{L})(W(t-\Delta t)) - 2\Delta t\big(A(W(t)) + \widetilde{N}(W(t))\big)$$

Para esta **versão euleriana** os termos de **advecção** são adicionados a tendência, e todos os termos do **lado direito** são **resolvidos na grade gaussiana** sem a **necessidade de interpolação.**

Para esta **versão** Semi-Lagrrangiana os termos de advecção não são adicionados a tendência, Necessita-se **Calcular a trajetória** e interpolar a contribuição no lado direito da equação **calculada sobre a grade gaussiana**, no ponta da trajetória.

Discretização Euleriana Semi-Implícita

Emprega-se esquema semi-implícito de 3 níveis no tempo. Separa-se $T = T' + T_o$ e T_oé uma constante na vertical.

Equação de Momentum

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + A(W) = -\tilde{\boldsymbol{L}}(W) - \widetilde{\boldsymbol{N}}(W)$$

$$U^{n+1} + \frac{\Delta t}{a}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + RT_o \frac{\partial \ln(p_s)}{\partial \lambda}\right)^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t T_U$$

$$T_U = F_u^n - \frac{1}{a cos^2(\varphi)}\left(U \frac{\partial U}{\partial \lambda} + V cos(\varphi) \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)^n - \left(\dot{\sigma} \frac{\partial U}{\partial \sigma}\right)^n + fV^n - \frac{1}{a}\left(RT' \frac{\partial \ln(p_s)}{\partial \lambda}\right)^n - \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + RT_o \frac{\partial \ln(p_s)}{\partial \lambda}\right)^{n-1}$$

$$V^{n+1} + \frac{\cos(\varphi)\Delta t}{a}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + RT_o \frac{\partial \ln(p_s)}{\partial \varphi}\right)^{n+1} = V^{n-1} + 2\Delta t T_V$$

$$T_V = F_v^n - \frac{1}{a cos^2(\varphi)}\left(U \frac{\partial V}{\partial \lambda} + V cos(\varphi) \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^n - \left(\dot{\sigma} \frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^n - fU^n - \frac{\cos(\varphi)}{a}\left(RT' \frac{\partial \ln(p_s)}{\partial \varphi}\right)^n - \frac{\sin(\varphi)}{a cos^2(\varphi)}(U^2 + V^2)^n - \frac{\cos(\varphi)}{2a}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + RT_o \frac{\partial \ln(p_s)}{\partial \varphi}\right)^{n-1}$$

Discretização Euleriana Semi-Implícita

Emprega-se esquema semi-implícito de 3 níveis no tempo. Separa-se $T = T' + T_o$ e T_oé uma constante na vertical.

Equação de Termodinâmica (tendência)

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{a\cos^2\varphi}\left(U\frac{\partial T}{\partial \lambda} + V\cos\varphi\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) + \dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma} - \theta\dot{\sigma}\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = kT\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\right)ln(ps) + F_T}$$

$$T^{n+1} = T^{n-1} + 2\Delta t T_T$$

$$T_T = F_T^n - \frac{1}{acos^2\varphi}\left(U\frac{\partial T}{\partial \lambda} + Vcos(\varphi)\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)^n - \left(\dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)^n - \left(\dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma} - \theta\dot{\sigma}\frac{\partial \pi}{\partial \sigma}\right)^n + \left(kT\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\right)ln(ps)\right)^n$$

$$T_T^{n-1} = T_T^{n-1} - \frac{1}{2}\left(kT_o\int_0^1 Dd\hat{\sigma}\right)^{t_n-1}$$

Discretização Euleriana Semi-Implícita

Emprega-se esquema semi-implícito de 3 níveis no tempo. Separa-se $T = T' + T_o$ e T_oé uma constante na vertical.

Equação de umidade especifica é tratada explicitmente

$$q^{n+1} = q^{n-1} + 2\Delta t T_q$$

$$T_q = F_q^n - \frac{1}{acos^2\varphi}\left(U\frac{\partial q}{\partial \lambda} + Vcos(\varphi)\frac{\partial q}{\partial \varphi}\right)^n - \left(\dot{\sigma}\frac{\partial q}{\partial \sigma}\right)^n$$

Discretização Euleriana Semi-Implícita

Emprega-se esquema semi-implícito de 3 níveis no tempo. Separa-se $T = T' + T_o$ e T_oé uma constante na vertical.

Equação de Pressão de Superfícies

$$\ln(p_s)^{n+1} + \Delta t \left(\int_0^1 D d\sigma \right)^{n+1} = \ln(p_s)^{n-1} + 2\Delta t T_{p_s}$$

$$T_{p_s} = -\left(\int_0^1 (\vec{V} \cdot \nabla \ln(p_s)\, d\sigma) \right)^{n} - \frac{1}{2} \left(\int_0^1 D\, d\sigma \right)^{n-1}$$

Discretização Semi-Lagrangiana Semi-Implícita

- **Segue o esquema Euleriano.**
- **Os termos de advecção horizontal e vertical não são inclusos na tendência**
- **As tendências são separadas em partes relacionadas ao instante t e $t - \Delta t$ e interpolada correspondendo a localização da trajetória**

Evolução do TimeStep

- **Leap Frog**

Transformação Spectral para grade

- **Primeiro é derivar os coeficientes de alguns campos que são necessários para a transformada.**

No caso das velocidades U e V, e os componentes meridionais do gradiente de T, q e $\ln(p_s)$

$$U_n^m = \frac{1}{a}\left(im\chi_n^m + (n-1)\xi_n^m\psi_{n-1}^m - (n+2)\varepsilon_{n+1}^m\psi_{n+1}^m\right)$$

$$V_n^m = \frac{1}{a}\left(im\chi_n^m - (n-1)\xi_n^m\psi_{n-1}^m + (n+2)\varepsilon_{n+1}^m\psi_{n+1}^m\right)$$

$$\chi_n^m = -\left(\frac{a^2}{n(n+1)}\right)D_n^m \qquad \psi_n^m = -\left(\frac{a^2}{n(n+1)}\right)\xi_n^m \qquad \chi_0^0 = \xi_0^0 = 0$$

Transformação Espectral para grade

Os coeficientes para a componente meridional do gradiente de qualquer campo F.

$$\left(\cos(\varphi)\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)_n^m = \left(-(n-1)\xi_n^m F_{n-1}^m + (n+2)\varepsilon_{n+1}^m F_{n+1}^m\right)$$

Após este passo realiza-se a transformada de Legendre

$$F^m(\varphi) = \sum_{n=|m|}^{M} F_n^m P_n^m(\sin(\varphi))$$

$U(\varphi), V(\varphi), D(\varphi), \xi(\varphi), q(\varphi), T(\varphi), ln(p_s(\varphi)),$ $\cos(\varphi)\left(\frac{\partial T(\varphi)}{\partial \varphi}\right), \cos(\varphi)\frac{\partial q(\varphi)}{\partial \varphi}, e \cos(\varphi)\frac{\partial ln(p_s(\varphi))}{\partial \varphi},$

Após próximo passo realiza-se a transformada de Fourier

$$F(\lambda,\varphi) = \sum_{n=-M}^{M} F^m(\varphi)e^{im\lambda}$$

$U(\lambda,\varphi), V(\lambda,\varphi), D(\lambda,\varphi), \xi(\lambda,\varphi), q(\lambda,\varphi), T(\lambda,\varphi), ln(p_s(\lambda,\varphi)),$

$\frac{\partial U(\lambda,\varphi)}{\partial \lambda}, \frac{\partial V(\lambda,\varphi)}{\partial \lambda}, \frac{\partial T(\lambda,\varphi)}{\partial \lambda}, \frac{\partial q(\lambda,\varphi)}{\partial \lambda}, \frac{\partial \ln(ps)(\lambda,\varphi)}{\partial \lambda},$ $\cos(\varphi)\left(\frac{\partial T(\lambda,\varphi)}{\partial \varphi}\right), \cos(\varphi)\frac{\partial q(\lambda,\varphi)}{\partial \varphi}, e \cos(\varphi)\frac{\partial ln(p_s(\lambda,\varphi))}{\partial \varphi},$

Transformação Espectral para grade

```
SUBROUTINE      PhysBackTrans()
  USE FieldsDynamics, ONLY :    &
       qqp,                &  ! intent(in)
       qtmpp,              &  ! intent(in)
       fgtmp,              &  ! intent(out)
       fgq                    ! intent(out)

  USE Transform, ONLY:      &
       CreateSpecToGrid,    &
       DepositSpecToGrid,   &
       DoSpecToGrid,        &
       DestroySpecToGrid

  IMPLICIT NONE
  !$OMP SINGLE
  CALL CreateSpecToGrid(2, 0, 2, 0)
  CALL DepositSpecToGrid(qqp  ,   fgq)
  CALL DepositSpecToGrid(qtmpp, fgtmp)
  !$OMP END SINGLE
  CALL DoSpecToGrid()
  !$OMP BARRIER
  !$OMP SINGLE
  CALL DestroySpecToGrid()
  !$OMP END SINGLE
END SUBROUTINE      PhysBackTrans
```

2 variáveis espectrais

```
SUBROUTINE CreateSpecToGrid(nFullSpec, nSurfSpec, nFullGrid, nSurfGrid)
  INTEGER, INTENT(IN) :: nFullSpec
  INTEGER, INTENT(IN) :: nSurfSpec
  INTEGER, INTENT(IN) :: nFullGrid
  INTEGER, INTENT(IN) :: nSurfGrid
  CHARACTER(LEN=*), PARAMETER :: h="**(CreateSpecToGrid)**"
```

Computação em espaço de ponto de grade

Gradiente do vento completo (Somente no Euleriano)

$$\cos(\varphi)\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial \lambda} - (acos^2\varphi)\xi$$

$$\cos(\varphi)\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \lambda} + (acos^2\varphi)D$$

```
SUBROUTINE delwind(ulam, vlam, vor, div, uphi, vphi, cos2lat, &
     ibMax, kMax, ibLim)
  INTEGER, INTENT(IN ) :: ibMax
  INTEGER, INTENT(IN ) :: kMax
  REAL(KIND=r8),    INTENT(IN ) :: cos2lat(ibMax)
  REAL(KIND=r8),    INTENT(IN ) :: ulam(ibMax,kMax)
  REAL(KIND=r8),    INTENT(IN ) :: vlam(ibMax,kMax)
  REAL(KIND=r8),    INTENT(IN ) :: div (ibMax,kMax)
  REAL(KIND=r8),    INTENT(IN ) :: vor (ibMax,kMax)
  REAL(KIND=r8),    INTENT(OUT) :: uphi(ibMax,kMax)
  REAL(KIND=r8),    INTENT(OUT) :: vphi(ibMax,kMax)
  INTEGER, INTENT(IN ) :: ibLim
  INTEGER :: ib, k
  !
  !      From the vorticity, divergence and the e-w derivatives of
  !      U and V, computes the values of cos(phi) d/d phi F , where F = U,
  !      and F = V.
  !
  DO k=1,kMax
     DO ib=1,ibLim
        uphi(ib,k) =    vlam(ib,k)  - cos2lat(ib) * vor(ib,k)
        vphi(ib,k) =  - ulam(ib,k)  + cos2lat(ib) * div(ib,k)
     ENDDO
  ENDDO
END SUBROUTINE delwind
```

Computação em espaço de ponto de grade

Integral vertical da divergência

```
SUBROUTINE vertint(slagr,zsint,psint, adveps, divint, divintm, dot, &
     u, v, div, divm, plam, pphi, zlam, zphi, rcl, del, ibMax, kMax, ibLim)

   k=1
   DO i=1,ibLim
      divint(i,k) = del(k) * div(i,k)
      divintm(i,k) = del(k) * divm(i,k)
   ENDDO
   IF (slagr) THEN
      DO i=1,ibLim
         zsint(i) = del(k) * rcl(i)*(u(i,k)*zlam(i)+v(i,k)*zphi(i))
      ENDDO
   ENDIF

   DO k=2,kMax
      DO i=1,ibLim
         divint(i,k) = divint(i,k-1) + del(k) * div(i,k)
         divintm(i,k) = divintm(i,k-1) + del(k) * divm(i,k)
      ENDDO
      IF (slagr) THEN
         DO i=1,ibLim
            zsint(i) = zsint(i) + del(k)*rcl(i)*(u(i,k)*zlam(i)+v(i,k)*zphi(i))
         ENDDO
      ENDIF
   ENDDO


 END SUBROUTINE vertint
```

$$\int_0^1 D d\sigma = \int_0^1 D d\hat{\sigma} = \sum_{l=1}^{K} D_l \Delta l$$

$$Onde\ \Delta l = \Delta\hat{\sigma} \quad e\ \hat{\sigma}_l = 1 - \sigma_l \quad ,K\ é\ o\ numero\ de\ camadas$$

Computação em espaço de ponto de grade

Integração Vertical da advecção de ln (ps)

```
SUBROUTINE vertint(slagr,zsint,psint, adveps, divint, divintm, dot, &
     u, v, div, divm, plam, pphi, zlam, zphi, rcl, del, ibMax, kMax, ibLim)


   INTEGER :: i, k
   !

   DO k=1,kMax
      DO i=1,ibLim
         adveps(i,k) = rcl(i)*(u(i,k) * plam(i) + v(i,k) * pphi(i) )
      ENDDO
   ENDDO
   k=1
   DO i=1,ibLim
      dot(i,k) = 0.0_r8
      psint(i,k) = del(k) * adveps(i,k)
   ENDDO

   DO k=2,kMax
      DO i=1,ibLim
         psint(i,k) = psint(i,k-1) + del(k) * adveps(i,k)
      ENDDO
   ENDDO


 END SUBROUTINE vertint
```

$$\boxed{\int_0^1 \vec{V} \cdot \nabla \ln(p_s) d\sigma = \sum_{l=1}^{K} \vec{V} \cdot \nabla \ln(p_s)_l \, \Delta_l}$$

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do $\dot{\sigma}$ usando a equação da continuidade:

```
SUBROUTINE vertint(slagr,zsint,psint, adveps, divint, divintm, dot, &
     u, v, div, divm, plam, pphi, zlam, zphi, rcl, del, ibMax, kMax, ibLim)
     DO k=1,kMax
        DO i=1,ibLim
           adveps(i,k) = rcl(i)*(u(i,k) * plam(i) + v(i,k) * pphi(i) )
        ENDDO
     ENDDO
     k=1
     DO i=1,ibLim
        dot(i,k) = 0.0_r8
        psint(i,k) = del(k) * adveps(i,k)
        divint(i,k) = del(k) * div(i,k)
        divintm(i,k) = del(k) * divm(i,k)
     ENDDO
     DO k=2,kMax
        DO i=1,ibLim
           psint(i,k) = psint(i,k-1) + del(k) * adveps(i,k)
           divint(i,k) = divint(i,k-1) + del(k) * div(i,k)
           divintm(i,k) = divintm(i,k-1) + del(k) * divm(i,k)
        ENDDO
     ENDDO
     DO k=1,kMax-1
        DO i=1,ibLim
           dot(i,k+1)=dot(i,k) + del(k) * ( divint(i,kMax) + psint(i,kMax) &
                - div(i,k) - adveps(i,k) )
        ENDDO
     ENDDO
   END SUBROUTINE vertint
```

$$\hat{\sigma}\frac{\partial \ln(p_s)}{\partial t} + \int_0^{\hat{\sigma}} \left(D + \vec{V}\cdot\nabla\ln(p_s)\right)d\hat{\sigma} + \dot{\hat{\sigma}} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial ln(ps)}{\partial t} + \int_0^1 \vec{V}\cdot\nabla ln(ps)d\sigma + \int_0^1 D d\sigma = 0}$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_k = \hat{\sigma}_k \int_0^1 \left(D + \vec{V}\cdot\nabla\ln(p_s)\right)d\hat{\sigma} - \int_0^{\hat{\sigma}_k} \left(D + \vec{V}\cdot\nabla\ln(p_s)\right)d\hat{\sigma}$$

Considerando que: $\dot{\hat{\sigma}}_1 = \dot{\hat{\sigma}}_{K+1} = 0$

$$\dot{\hat{\sigma}}_{l+1} = \dot{\hat{\sigma}}_l + \Delta l \sum_{j=1}^{K} \left(D_j + \vec{V}_j\cdot\nabla\ln(p_s)\right)\Delta_j - \Delta_l\left(D_l + \vec{V}_l\cdot\nabla ln(p_s)\right)$$

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do $\omega = \frac{dp}{dt}$ velocidade vertical:

```
SUBROUTINE omega(omg, psint, adveps, divint, dot, ps, sl, &
     ibMax, kMax, ibLim)
   DO k=1,kMax-1
      DO i=1,ibLim
         omg(i,k) = ps(i) * ( sl(k) * &
              ( adveps(i,k) - psint(i,kMax) - divint(i,kMax) ) &
              - 0.5_r8 * ( dot(i,k+1) + dot(i,k) ) )
      ENDDO
   ENDDO
   k=kMax
   DO i=1,ibLim
      omg(i,k) = ps(i) * ( sl(k) * &
           ( adveps(i,k) - psint(i,kMax) - divint(i,kMax) ) &
           - 0.5_r8 * dot(i,k) )
   ENDDO
 END SUBROUTINE omega
```

$$\boxed{\frac{\partial ln(ps)}{\partial t} + \int_0^1 \vec{V} \cdot \nabla ln(ps) d\sigma + \int_0^1 D d\sigma = 0}$$

$$\omega = p_s\left(\dot{\sigma} + \sigma\left(\frac{\partial ln(p_s)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla ln(p_s)\right)\right)$$

$$\omega_k = p_{sk} + \left(\frac{\dot{\hat{\sigma}}_{k+1} + \dot{\hat{\sigma}}_k}{2} + \hat{\sigma}_k\left(\vec{V}_k \cdot \nabla ln(p_s) - \int_0^1 \left(\vec{V} \cdot \nabla ln(p_s) + D\right) d\hat{\sigma}\right)\right)$$

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do gradiente do geo potencial **a partir da equação da hidrostática:**

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} + \alpha p_s = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho} = \frac{RT}{P}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} + \frac{RT}{P} p_s = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} + \frac{RT}{\sigma} = 0$$

$$\sigma \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} + RT = 0$$

$$\boxed{T = \pi\theta}$$

$$\boxed{\pi = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{R}{cp}} = (\sigma)^{\frac{R}{cp}}}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = \frac{R}{cp} \sigma^{\frac{R}{cp}-1} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = \frac{R}{cp} \sigma^{\frac{R}{cp}} \sigma^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = \frac{R}{cp} \sigma^{\frac{R}{cp}} \sigma^{-1}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = \frac{R}{cp} \frac{\pi}{\sigma}$$

$$\boxed{\sigma \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} + RT = 0}$$

$$\boxed{\sigma \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} + R\pi\theta = 0}$$

$$\boxed{R\pi = \sigma cp \frac{\partial \pi}{\partial \sigma}}$$

$$\boxed{\sigma \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} + cp\theta\sigma \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = 0}$$

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do gradiente do geo potencial a partir da equação da hidrostática:

$$\boxed{\sigma \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} + cp\theta\sigma \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = 0}$$

$$\boxed{\frac{\Delta \phi}{\Delta \sigma} + cp\theta \frac{\Delta \pi}{\Delta \sigma} = 0}$$

$$\boxed{\Delta\phi + cp\theta\Delta\pi = 0} \qquad \boxed{T = \pi\theta}$$

$$\boxed{\Delta\phi + cp\Delta\theta\pi = 0}$$

Discretização de Arakawa

$$\phi_{k-1} - \phi_k = \frac{cp}{2}\left[T_{k-1}\left(\frac{\pi_k}{\pi_{k-1}} - 1\right) + T_k\left(1 - \frac{\pi_{k-1}}{\pi_k}\right)\right], k = 2, \ldots, K$$

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do gradiente do geo potencial a partir da equação da hidrostática:

Discretização de Arakawa

$$\phi_{k-1} - \phi_k = \frac{cp}{2}\left[T_{k-1}\left(\frac{\pi_k}{\pi_{k-1}} - 1\right) + T_k\left(1 - \frac{\pi_{k-1}}{\pi_k}\right)\right], k = 2, \ldots., K$$

$$\sum_{j=1}^{K} \phi_j \Delta_j = \hat{\phi}_1 + R \sum_{j=1}^{K} T_j \Delta_j ,$$

Onde $\hat{\phi}_1$ é a superfície geopotencial.

$$\frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\Delta_{k-1}} = \frac{cp}{2}\left(\frac{T_{k-1}}{\pi_{k-1}} + \frac{T_k}{\pi_k}\right)\left(\frac{\pi_k - \pi_{k-1}}{\Delta_{k-1}}\right) = \frac{cp}{2}(\theta_{k-1} + \theta_k)\left(\frac{\pi_k - \pi_{k-1}}{\Delta_{k-1}}\right)$$

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do gradiente do geo potencial a partir da equação da hidrostática:

```
SUBROUTINE delgeo (tlam, zlam, zslam, tphi, zphi, zsphi, hmt, imx, imax, kma>
  :
  INTEGER :: k,j,i
  !
  DO k = 1, kmax
    DO i = 1, imax
     zlam(i,k) = zslam(i)
     zphi(i,k) = zsphi(i)
    END DO
  END DO
  DO k = 1, kMax
     DO i = 1, iMax
        DO j = 1, kMax
           zlam(i,k) = zlam(i,k) +  (tlam(i,j)*hmt(j,k))
           zphi(i,k) = zphi(i,k) +  (tphi(i,j)*hmt(j,k))
        END DO
     END DO
  END DO
END SUBROUTINE delgeo
```

$$\sum_{j=1}^{K} \phi_j \Delta_j = \hat{\phi}_1 + R \sum_{j=1}^{K} T_j \Delta_j \,,$$

Onde $\hat{\phi}_1$ é a superfície geopotencial.

$$\frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\Delta_{k-1}} = \frac{cp}{2}\left(\frac{T_{k-1}}{\pi_{k-1}} + \frac{T_k}{\pi_k}\right)\left(\frac{\pi_k - \pi_{k-1}}{\Delta_{k-1}}\right) = \frac{cp}{2}(\theta_{k-1} + \theta_k)\left(\frac{\pi_k - \pi_{k-1}}{\Delta_{k-1}}\right)$$

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : equação de momentum **:**

$t_{n-1} = t - \Delta t$

A contribuição do tempo $t - \Delta t$ será adicionado a tendência

$$T_U^{n-1} = T_U^{n-1} - \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + RT_0 \frac{\partial ln(p_s)}{\partial \lambda}\right)^{t_n - 1}$$

$$T_V^{n-1} = T_V^{n-1} - \frac{\cos(\varphi)}{2a}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + RT_0 \frac{\partial ln(p_s)}{\partial \varphi}\right)^{t_n - 1}$$

Armazenado para ser usado no timestep seguinte

$t_n = t$

Temos de advecção horizontal (somente esquema Euleriano)

$$T_U^n = T_U^n - \frac{1}{acos^2\varphi}\left(U\frac{\partial U}{\partial \lambda} + Vcos(\varphi)\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)^{t_n}$$

$$T_V^n = T_V^{n-1} - \frac{1}{acos^2\varphi}\left(U\frac{\partial V}{\partial \lambda} + Vcos(\varphi)\ \frac{\partial V)}{\partial \varphi}\right)^{t_n}$$

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : equação de momentum :

$t_n = t$ **Temos de advecção horizontal (somente esquema Euleriano)**

$$T_U^n = T_U^n - \frac{1}{acos^2\varphi}\left(U\frac{\partial U}{\partial \lambda} + Vcos(\varphi)\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)^{t_n}$$

$$T_V^n = T_V^{n-1} - \frac{1}{acos^2\varphi}\left(U\frac{\partial V}{\partial \lambda} + Vcos(\varphi)\ \frac{\partial V)}{\partial \varphi}\right)^{t_n}$$

```
SUBROUTINE hadvec(u, v, flam, fphi, tend, rcl, ibMax, kMax, ibLim)
  REAL(KIND=r8),    INTENT(IN   ) :: rcl(ibMax) ! 1.0 r8 / ( cos(lat)**2 )
  REAL(KIND=r8),    INTENT(INOUT) :: tend(ibMax,kMax)
  !
  ! Computes the horizontal advection term of field f (whose horizontal
  ! derivatives are given in flam and fphi) and add its contribution to current
  ! tendency (stored in tend).
  !
  INTEGER :: i, k
  DO k=1,kMax
     DO i=1,ibLim
        tend(i,k) = tend(i,k) - rcl(i) * (u(i,k)*flam(i,k) + v(i,k)*fphi(i,k))
     END DO
  END DO
END SUBROUTINE hadvec
```

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : equação de momentum :

A contribuição da advecção vertical

$$T_U^n = T_U^n - \frac{1}{2\Delta_k}\left(\dot{\hat{\sigma}}_{k+1}(U_{k+1} - U_k) + \dot{\hat{\sigma}}_k(U_k - U_{k-1})\right)^{t_n}$$

$$T_V^n = T_V^n - \frac{1}{2\Delta_k}\left(\dot{\hat{\sigma}}_{k+1}(V_{k+1} - V_k) + \dot{\hat{\sigma}}_k(V_k - V_{k-1})\right)^{t_n}$$

```
SUBROUTINE vadvec(f, dot, rdel2, tend, ibMax, kMax, ibLim)
  k=1
  DO i=1,ibLim
     tend(i,k) = tend(i,k) - rdel2(k) * (dot(i,k+1)*(f(i,k+1) -f(i,k)))
  ENDDO
  DO k=2,kMax-1
     DO i=1,ibLim
        tend(i,k) = tend(i,k) - rdel2(k) * (dot(i,k+1)*(f(i,k+1)-f(i,k)) &
             + dot(i,k)*(f(i,k)-f(i,k-1)))
     ENDDO
  ENDDO
  k=kMax
  DO i=1,ibLim
     tend(i,k) = tend(i,k) - rdel2(k) * (dot(i,k)*(f(i,k)-f(i,k-1)))
  ENDDO
END SUBROUTINE vadvec
```

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : equação de momentum :

Termo de Coriolis $T_U^n = T_U^n + fV^{t_n}$

$$T_V^n = T_V^n - fU^{t_n}$$

```
SUBROUTINE coriol(u, v, tendu, tendv, fcor, ibMax, kMax, ibLim)
  REAL(KIND=r8),    INTENT(IN   ) :: fcor(ibMax) ! 2 * omega * sin(phi)

  DO k=1,kMax
     DO i=1,ibLim
        tendu(i,k) = tendu(i,k) + fcor(i) * v(i,k)
        tendv(i,k) = tendv(i,k) - fcor(i) * u(i,k)
     ENDDO
  ENDDO
END SUBROUTINE coriol
```

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : equação de momentum :

A contribuição do temo métrico (somente esquema Euleriano)

$$T_V^n = T_V^n - \frac{\sin(\varphi)}{acos^2\varphi}(U^2 + V^2)^{t_n}$$

```
SUBROUTINE metric(u, v, tend, ercossin, ibMax, kMax, ibLim)
  REAL(KIND=r8),    INTENT(IN   ) :: ercossin(ibMax) ! sin(lat) / ( er * cos(lat)**2 )
  DO k=1,kMax
     DO i=1,ibLim
        tend(i,k) = tend(i,k) - ercossin(i)*(u(i,k)*u(i,k) + v(i,k)*v(i,k))
     END DO
  END DO
END SUBROUTINE metric
```

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : equação de momentum :

Termo de não linear do gradiente de pressão

$$T_U^n = T_U^n - \left(\frac{RT'}{a}\frac{\partial \ln(p_s)}{\partial \lambda}\right)^{t_n}$$

$$T_V^n = T_V^n - \left(\frac{\cos(\varphi)RT'}{a}\frac{\partial \ln(p_s)}{\partial \varphi}\right)^{t_n}$$

```
SUBROUTINE nlprgr(plam, pphi, tmp, tendu, tendv, rc, ibMax, kMax, ibLim)
 REAL(KIND=r8),    INTENT(IN   ) :: rc  !R
  DO k=1,kMax
     DO i=1,ibLim
        tendu(i,k) = tendu(i,k) - rc * tmp(i,k) * plam(i)
        tendv(i,k) = tendv(i,k) - rc * tmp(i,k) * pphi(i)
     ENDDO
  ENDDO
 END SUBROUTINE nlprgr
```

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : equação de momentum :

A tendência final são a somatória de todas as contribuições do tempo t_{n-1} e t_n.

No caso Semi-Lagrangiano a integração destas contribuições primeiro deverá ser interpolada para o ponto de partida e para o ponto médio da trajetória lagrangiana, antes de ser somados.

As contribuições F_U e F_V da física também é adicionado as tendências.

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : equação de termodinamica:

Contribuição do termo $t - \Delta t$

$$T_T^{n-1} = T_T^{n-1} - \frac{1}{2}\left(kT_0 \int_0^1 D d\hat{\sigma}\right)^{t_{n-1}}$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{a\cos^2\varphi}\left(U\frac{\partial T}{\partial \lambda} + V\cos\varphi\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) + \dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma} - \theta\dot{\sigma}\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = kT\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\right)ln(ps) + F_T}$$

Contribuição do termo da advecção vertical (equação da termodinâmica)

$$\boxed{T = \pi\theta}$$

$$\dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma} - \theta\dot{\sigma}\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = \pi\dot{\sigma}\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \qquad \dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma} - \theta\dot{\sigma}\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = \pi\dot{\sigma}\frac{\Delta \theta}{\Delta \sigma}$$

$$\boxed{\pi = \frac{T}{\theta}} \qquad \boxed{\theta = \frac{T}{\pi}}$$

Considerando o tratamento explicito do termo $\dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma}$, outros termo tratado em duas partes no formalismo Euleriano Discretização de Arakawa

$$\frac{1}{2\Delta_k}\left[\dot{\hat{\sigma}}_{k+1}\left(\frac{\pi_k}{\pi_{k+1}}T'_{k+1} - T'_k\right) + \dot{\hat{\sigma}}_k\left(T'_k - \frac{\pi_k}{\pi_{k-1}}T'_{k-1}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2\Delta_k}\left[\dot{\hat{\sigma}}_{k+1}\left(\frac{\pi_k}{\pi_{k+1}}T_0(k-1) - T_0(k)\right) + \dot{\hat{\sigma}}_k\left(T_0(k) - \frac{\pi_k}{\pi_{k-1}}T_0(k-1)\right)\right]$$

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : equação de termodinamica:

No Esquema Semi-Lagrangiano o termo $\dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma}$, é incorporado pelo tratamento da advecção no formalismo Semi-Lagrangiano , o Termo $-\theta\dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma}$ permanece discretizado

$$\dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma} - \theta\dot{\sigma}\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = \pi\dot{\sigma}\frac{\partial \theta}{\partial \sigma}$$

$$\boxed{T = \pi\theta} \qquad \boxed{\pi = \frac{T}{\theta}} \qquad \boxed{\theta = \frac{T}{\pi}}$$

$$\frac{T'_k + T_0(k)}{2\Delta_k}\left[\dot{\hat{\sigma}}_{k+1}\left(\frac{\pi_{k+1}}{\pi_k} - 1\right) + \dot{\hat{\sigma}}_k\left(1 - \frac{\pi_{k-1}}{\pi_k}\right)\right]$$

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : equação de termodinamica:

Advecção horizontal da temperatura (termo explicito (no tempo t))

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{a\cos^2\varphi}\left(U\frac{\partial T}{\partial\lambda}+V\cos\varphi\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)+\dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial\sigma}-\theta\dot{\sigma}\frac{\partial\pi}{\partial\sigma}=kT\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\right)ln(ps)+F_T$$

$$T_T^n=T_T^n-\frac{1}{acos^2\varphi}\left(U\frac{\partial T}{\partial\lambda}+Vcos(\varphi)\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)^{t_n}$$

```
SUBROUTINE hadvec(u, v, flam, fphi, tend, rcl, ibMax, kMax, ibLim)
  REAL(KIND=r8),    INTENT(IN   ) :: rcl(ibMax) ! 1.0 r8 / ( cos(lat)**2 )
  REAL(KIND=r8),    INTENT(INOUT) :: tend(ibMax,kMax)
  !
  ! Computes the horizontal advection term of field f (whose horizontal
  ! derivatives are given in flam and fphi) and add its contribution to current
  ! tendency (stored in tend).
  !
  INTEGER :: i, k
  DO k=1,kMax
     DO i=1,ibLim
        tend(i,k) = tend(i,k) - rcl(i) * (u(i,k)*flam(i,k) + v(i,k)*fphi(i,k))
     END DO
  END DO
END SUBROUTINE hadvec
```

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : equação de termodinamica:

Contribuição do temos não-linear para a tendência de temperatura (termo explicito (no tempo t))

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{a\cos^2\varphi}\left(U\frac{\partial T}{\partial\lambda}+V\cos\varphi\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)+\dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial\sigma}-\theta\dot{\sigma}\frac{\partial\pi}{\partial\sigma}=kT\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\right)ln(ps)+F_T$$

$$\frac{\partial ln(ps)}{\partial t}+\int_0^1\vec{V}\cdot\nabla ln(ps)d\sigma+\int_0^1 Dd\sigma=0$$

$$T_T^n=T_T^n-\kappa\left(T_k'-T_0(k)\right)\left(\int_0^1 V\cdot\nabla\ln(p_s)\,d\sigma\right)-\kappa T_k'\int_0^1 Dd\sigma$$

```
SUBROUTINE tmptend(tend, tmp, tov, psint, adveps, divint, rk, &
     ibMax, kMax, ibLim)
   DO k=1,kMax
      DO i=1,ibLim
         tend(i,k) = tend(i,k) - tmp(i,k) * rk * divint(i,kMax) &
                 + rk * ( tov(k) + tmp(i,k) ) * ( adveps(i,k) - psint(i,kMax) )
      ENDDO
   ENDDO
 END SUBROUTINE tmptend
```

A tendência final T_T é a soma de T_T^{n-1}e T^n calculada em uma localização apropriada. A contribuição da física também é somada no final das tendências

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : equação de termodinamica:

Advecção vertical da temperatura (termo explicito (no tempo t))

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{a\cos^2\varphi}\left(U\frac{\partial T}{\partial \lambda} + V\cos\varphi\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) + \dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma} - \theta\dot{\sigma}\frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = kT\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\right)ln(ps) + F_T$$

```
SUBROUTINE vadvtmp(tmp, p1, p2, h1, h2, dot, psint, &
     ci, rdel2, tend, ibMax, kMax, ibLim, slagr)
   DO k=1,kMax-1
      DO i=1,ibLim
         w1(i,k)   = p1(k) * tmp(i,k+1) - tmp(i,k)
         w2(i,k+1) = tmp(i,k+1)         - p2(k+1) * tmp(i,k)
         w3(i,k) = ci(k+1) * psint(i,kMax) - psint(i,k)
      ENDDO
   ENDDO
   k=1
   DO i=1,ibLim
      tend(i,k) = tend(i,k) - rdel2(k) * (dot(i,k+1)*w1(i,k) + h1(k)*w3(i,k))
   ENDDO
   DO k=2,kMax-1
      DO i=1,ibLim
         tend(i,k) = tend(i,k) - rdel2(k) * (dot(i,k+1)*w1(i,k) + h1(k)*w3(i,k) &
              + dot(i,k)*w2(i,k) + h2(k)*w3(i,k-1))
      ENDDO
   ENDDO
   k=kMax
   DO i=1,ibLim
      tend(i,k) = tend(i,k) - rdel2(k) * (dot(i,k)*w2(i,k) + h2(k)*w3(i,k-1))
   ENDDO
 END SUBROUTINE vadvtmp
```

A tendência final T_T é a soma de T_T^{n-1} e T^n calculada em uma localização apropriada. A contribuição da física também é somada no final das tendências

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : equação de umidade especifica:

$$\frac{\partial q_n}{\partial t} + \frac{1}{a\cos^2\varphi}\left(U\frac{\partial q_n}{\partial \lambda} + V\cos\varphi\frac{\partial q_n}{\partial \varphi}\right) + \dot{\sigma}\frac{\partial q_n}{\partial \sigma} = F_{q_n}$$

A contribuição tendencia da advecção horizontal (termo explicito (no tempo t))

$$T_q^n = T_q^n - \frac{1}{a\cos^2\varphi}\left(U\frac{\partial q}{\partial \lambda} + V\cos(\varphi)\frac{\partial q}{\partial \varphi}\right)^{t_n}$$

```
SUBROUTINE hadvec(u, v, flam, fphi, tend, rcl, ibMax, kMax, ibLim)
  REAL(KIND=r8),    INTENT(IN   ) :: rcl(ibMax) ! 1.0 r8 / ( cos(lat)**2 )
  REAL(KIND=r8),    INTENT(INOUT) :: tend(ibMax,kMax)
  !
  ! Computes the horizontal advection term of field f (whose horizontal
  ! derivatives are given in flam and fphi) and add its contribution to current
  ! tendency (stored in tend).
  !
  INTEGER :: i, k
  DO k=1,kMax
     DO i=1,ibLim
        tend(i,k) = tend(i,k) - rcl(i) * (u(i,k)*flam(i,k) + v(i,k)*fphi(i,k))
     END DO
  END DO
END SUBROUTINE hadvec
```

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : equação de umidade especifica:

$$\frac{\partial q_n}{\partial t} + \frac{1}{a\cos^2\varphi}\left(U\frac{\partial q_n}{\partial \lambda} + V\cos\varphi\frac{\partial q_n}{\partial \varphi}\right) + \dot{\sigma}\frac{\partial q_n}{\partial \sigma} = F_{q_n}$$

A contribuição tendencia da advecção vertical(termo explicito (no tempo t))

$$T_q^n = T_q^n - \frac{1}{2\Delta_k}\left[\dot{\hat{\sigma}}_{k+1}(q_{k+1} - q_k) + \dot{\hat{\sigma}}_k(q_k - q_{k-1})\right]$$

```
SUBROUTINE vadvec(f, dot, rdel2, tend, ibMax, kMax, ibLim)
  k=1
  DO i=1,ibLim
     tend(i,k) = tend(i,k) - rdel2(k) * (dot(i,k+1)*(f(i,k+1) -f(i,k)))
  ENDDO
  DO k=2,kMax-1
     DO i=1,ibLim
        tend(i,k) = tend(i,k) - rdel2(k) * (dot(i,k+1)*(f(i,k+1)-f(i,k)) &
             + dot(i,k)*(f(i,k)-f(i,k-1)))
     ENDDO
  ENDDO
  k=kMax
  DO i=1,ibLim
     tend(i,k) = tend(i,k) - rdel2(k) * (dot(i,k)*(f(i,k)-f(i,k-1)))
  ENDDO
END SUBROUTINE vadvec
```

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : pressão de superficie :

$$\boxed{\frac{\partial ln(ps)}{\partial t} + \int_0^1 \vec{V} \cdot \nabla ln(ps) d\sigma + \int_0^1 D d\sigma = 0}$$

A contribuição da tendência ((no tempo t-1))

$$T_{ps}^{n-1} = T_{ps}^{n-1} - \frac{1}{2}\left(\int_0^1 D d\sigma\right)^{t_{n-1}}$$

$$\int_0^1 D d\sigma = \int_0^1 D d\hat{\sigma} = \sum_{l=1}^{K} D_l \Delta l$$

```
SUBROUTINE vertint(slagr,zsint,psint, adveps, divint, divintm, dot, &
     u, v, div, divm, plam, pphi, zlam, zphi, rcl, del, ibMax, kMax, ibLim)

   k=1
   DO i=1,ibLim
      divint(i,k) = del(k) * div(i,k)
      divintm(i,k) = del(k) * divm(i,k)
   ENDDO
   DO k=2,kMax
      DO i=1,ibLim
         divint(i,k) = divint(i,k-1) + del(k) * div(i,k)
         divintm(i,k) = divintm(i,k-1) + del(k) * divm(i,k)
      ENDDO
   ENDDO
   !
   !   log pressure tendency
   !   ---------------------
   DO i=1,ibLim
      tdlnp(i) = tdlnp(i) - half * divint(i,kMax)
   ENDDO
 END SUBROUTINE vertint
```

Computação em espaço de ponto de grade

Calculo do da tendencias : pressão de superficie :

$$\frac{\partial ln(ps)}{\partial t} + \int_0^1 \vec{V} \cdot \nabla ln(ps) d\sigma + \int_0^1 D d\sigma = 0$$

A contribuição da tendência ((no tempo t))

$$T_{ps}^{n} = T_{ps}^{n} - \left(\int_0^1 \vec{V} \cdot \nabla ln(ps) d\sigma \right)^{tn}$$

$$\int_0^1 \vec{V} \cdot \nabla \ln(p_s) d\sigma = \sum_{l=1}^{K} \vec{V} \cdot \nabla \ln(p_s)_l \, \Delta_l$$

```
SUBROUTINE vertint(slagr,zsint,psint, adveps, divint, divintm, dot, &
     u, v, div, divm, plam, pphi, zlam, zphi, rcl, del, ibMax, kMax, ibLim)
  DO k=1,kMax
     DO i=1,ibLim
        adveps(i,k) = rcl(i)*(u(i,k) * plam(i) + v(i,k) * pphi(i) )
     ENDDO
  ENDDO
  k=1
  DO i=1,ibLim
     psint(i,k) = del(k) * adveps(i,k)
  ENDDO
  DO k=2,kMax
     DO i=1,ibLim
        psint(i,k) = psint(i,k-1) + del(k) * adveps(i,k)
     ENDDO
  ENDDO
END SUBROUTINE vertint
```

Transformação do espaço em ponto de grade para o espaço espectral

$$\boxed{\frac{dW}{dx} = \frac{\partial W}{\partial t} + A(W) = -\tilde{L}(W) - \tilde{N}(W)}$$

$$\boxed{(I + \Delta t\tilde{L})(W(t+\Delta t)) = (I - \Delta t\tilde{L})(W(t-\Delta t))_{*} - 2\Delta t\tilde{N}(W(t))_{M}}$$

Após resolver as tendências o sistema implícito ainda precisa ser resolvido. Completaremos primeiro o lado direito da equação

Para uma variável prognostica F constrói-se o lado direto

$$\boxed{R_F = F^{t_{n-1}} + 2\Delta t T_F}$$

No esquema Semi-Lagrangiano os campos em t_{n-1} são obtidos pela interpolação

Assim, o lado direito da equações (T,Q, lnps,,Vort,Dive) será transformado para o espaço espectral

Transformação do espaço em ponto de grade para o espaço espectral

Como os campos em ponto de grade: $R(\lambda, \varphi)$ são transformado para o espaço espectral

Em outra palavra como obter os coeficientes espectrais R_n^m de um campo $R(\lambda, \varphi)$ em ponto de grade

Conhece a função R, e seus coeficientes harmônicos esféricos

$$R_n^m = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \int_{-\pi}^{\pi} R(\lambda, \varphi) P_n^m(\mu) e^{-im\lambda} d\lambda d\mu$$

$$\mu = \sin(\varphi)$$

Transformação do espaço em ponto de grade para o espaço espectral

$$R_n^m = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\pi}^{\pi} R(\lambda,\varphi)P_n^m(\mu)e^{-im\lambda}d\lambda d\mu$$

A integrar é feita em duas partes

Primeiro Consiste de uma transformada de Fourier (com respeito a λ)

$$R_n(\mu_j) = \frac{1}{N_\lambda}\sum_{l=1}^{N_\lambda} R(\lambda_l,\mu_j)e^{-im\lambda_l}$$

Onde N_λ é usualmente definido como 3M (M é o truncamento espectral)

Segundo Consiste de uma transformada de Legendre (integração gaussiana com respeito a μ)

$$R_n^m = \sum_{j=1}^{N_\varphi} \omega_j R_n(\mu_j) P_n^m(\mu_j)$$

ω_j são os pesos gaussianos da formula de integração e N_φ é o numero de latitude $N_\varphi = \frac{N_\lambda}{2}$

Transformação do espaço em ponto de grade para o espaço espectral

$$\boxed{R_F = F^{t_{n-1}} + 2\Delta t T_F}$$

A transformação da equação de momentum:

$$U^{t_{n+1}} + \frac{\Delta t}{a}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + RT_o \frac{\partial \ln(p_s)}{\partial \lambda}\right)^{t_{n+1}} = R_U$$

$$V^{t_{n+1}} + \frac{\Delta t cos(\varphi)}{a}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + RT_o \frac{\partial \ln(p_s)}{\partial \varphi}\right)^{t_{n+1}} = R_V$$

A transformação da equação de vorticidade e divergência:

$$\xi^{t_{n+1}} = \frac{1}{acos^2(\varphi)}\left(\frac{\partial R_V}{\partial \lambda} - \cos(\varphi)\frac{\partial R_U}{\partial \varphi}\right) = R_\xi$$

$$D^{t_{n+1}} + \Delta t \nabla^2(\phi + RT_0 \ln(p_s))^{t_{n+1}} = \frac{1}{acos^2(\varphi)}\left(\frac{\partial R_U}{\partial \lambda} + \cos(\varphi)\frac{\partial R_V}{\partial \varphi}\right) = R_D$$

Transformação do espaço em ponto de grade para o espaço espectral

$$R_F = F^{t_{n-1}} + 2\Delta t T_F$$

Os Termos R_ξ e R_D:

$$R_{\xi_n}^m = \frac{1}{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(im\tilde{V}^m(\varphi)P_n^m(\sin(\varphi)) + \tilde{U}^m(\varphi)H_n^m(\sin(\varphi))\right)\cos(\varphi)\,d\varphi$$

$$R_{D_n}^m = \frac{1}{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(im\tilde{U}^m(\varphi)P_n^m(\sin(\varphi)) - \tilde{V}^m(\varphi)H_n^m(\sin(\varphi))\right)\cos(\varphi)\,d\varphi$$

$$\tilde{U}^m(\varphi) = \frac{1}{2\pi cos^2(\varphi)}\int_{-\pi}^{\pi} R_U(\varphi,\lambda)e^{-im\lambda}d\lambda$$

$$\tilde{V}^m(\varphi) = \frac{1}{2\pi cos^2(\varphi)}\int_{-\pi}^{\pi} R_V(\varphi,\lambda)e^{-im\lambda}d\lambda$$

Transformação do espaço em ponto de grade para o espaço espectral

$$R_n^m = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\pi}^{\pi} R(\lambda,\varphi)P_n^m(\mu)e^{-im\lambda}d\lambda d\mu$$

```
SUBROUTINE PhysDirTrans()

  !$OMP SINGLE
  CALL CreateGridToSpec(1, 0)
  qqp  = 0.0_r8
  CALL DepositGridToSpec(qtmpp, fgtmp)
  !$OMP END SINGLE
  CALL DoGridToSpec()
  !$OMP BARRIER
  !$OMP SINGLE
  CALL DestroyGridToSpec()
  !$OMP END SINGLE
END SUBROUTINE PhysDirTrans
```

Difusão Horizontal

No momentum, a difusão horizontal é calculada através de um método explicito com o potencial de manipular várias restrições de estabilidade em alta resolução

A difusão horizontal para uma variável prognostica F empregado no modelo é na forma:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = T_F - c(-1)^p \nabla^{2p} F$$

Difusão Horizontal

No método explicito esta equação é integrada no espaço espectral :

Vorticidade e divergência

$$\frac{\tilde{F}_n^m(t+\Delta t)-\tilde{F}_n^m(t-\Delta t)}{2\Delta t}=T_F-c\left(\frac{n(n+1)}{a^2}\right)^p\tilde{F}_n^m(t-\Delta t)$$

Temperatura

$$\frac{\tilde{F}_n^m(t+\Delta t)-\tilde{F}_n^m(t-\Delta t)}{2\Delta t}=T_F-c\left(\frac{n(n+1)}{a^2}\right)^p\tilde{F}_n^m(t-\Delta t)-c\left(\frac{n(n+1)}{a^2}\right)^p\left(\tilde{T}_n^m-\tilde{C}_T lnps_n^m(t-\Delta t)\right)$$

No método implícito esta equação é integrada no espaço espectral :

Vorticidade e divergência

$$\tilde{F}_n^m(t+\Delta t)=\tilde{F}_n^m(t+\Delta t)\ -2c\Delta t\left(\frac{n(n+1)}{a^2}\right)^p\tilde{F}_n^m(t+\Delta t)$$

temperatura

$$\tilde{F}_n^m(t+\Delta t)=\left(1+2c\Delta t\left(\frac{n(n+1)}{a^2}\right)^p\right)^{-1}\left(\tilde{F}_n^m(t+\Delta t)+2c\Delta t\left(\frac{n(n+1)}{a^2}\right)^p\tilde{C}\ln(ps)_n^m\,(t+\Delta t)\right)$$

Difusão Horizontal

O Termo $-c\left(\frac{n(n+1)}{a^2}\right)^p \tilde{F}_n^m(t-\Delta t)$ é adicionado na tendência da variável prognostica F

O Termo $\tilde{C}_T = \sigma_1 \frac{\partial T}{\partial \sigma_1}, \dots, \sigma_k \frac{\partial T}{\partial \sigma_k}$.

O coeficiente de difusão c pode variar para cada variável , usualmente é definido um forte coeficiente para a divergência e outro para a outra variáveis prognosticas.

Difusão Horizontal

$$\tilde{F}_n^m(t+\Delta t) = \tilde{F}_n^m(t+\Delta t) - 2c\Delta t\left(\frac{n(n+1)}{a^2}\right)^p \tilde{F}_n^m(t+\Delta t)$$

$$\tilde{F}_n^m(t+\Delta t) = \left(1 + 2c\Delta t\left(\frac{n(n+1)}{a^2}\right)^p\right)^{-1} \tilde{F}_n^m(t+\Delta t)$$

```
SUBROUTINE ImplDifu(dt, mnRIFirst, mnRILast)
  !
  ! dependence on earth's radius removed
  !
  ALLOCATE(workImplDifu(2*mymnMax))
  DO mn = 1, 2*mymnMax
     workImplDifu(mn) = 2.0_r8*(snnp1(mn)**ndho)
  END DO
  DO k = 1, kMaxloc
     DO mn = mnRIFirst, mnRILast
        qdivp(mn,k) = qdivp(mn,k)/(1.0_r8+dt*dk*workImplDifu(mn))
     END DO
  END DO
 !
 ! diffusion coefficient for remaining fields
 !
 DO mn = mnRIFirst, mnRILast
    work(mn) = dt*tk*workImplDifu(mn)
 END DO

 DO k = 1, kMaxloc
    DO mn = mnRIFirst, mnRILast
       qtmpp(mn,k) = (qtmpp(mn,k)+work(mn)*ct(k)*qlnpp(mn))/(1.0_r8+work(mn))
       qrotp(mn,k) = qrotp(mn,k)/(1.0_r8+work(mn))
    END DO
 END DO

END SUBROUTINE ImplDifu
```

$$\tilde{F}_n^m(t+\Delta t) = \left(1 + 2c\Delta t\left(\frac{n(n+1)}{a^2}\right)^p\right)^{-1}\left(\tilde{F}_n^m(t+\Delta t) + 2c\Delta t\left(\frac{n(n+1)}{a^2}\right)^p \tilde{C}\ln(ps)_n^m(t+\Delta t)\right)$$