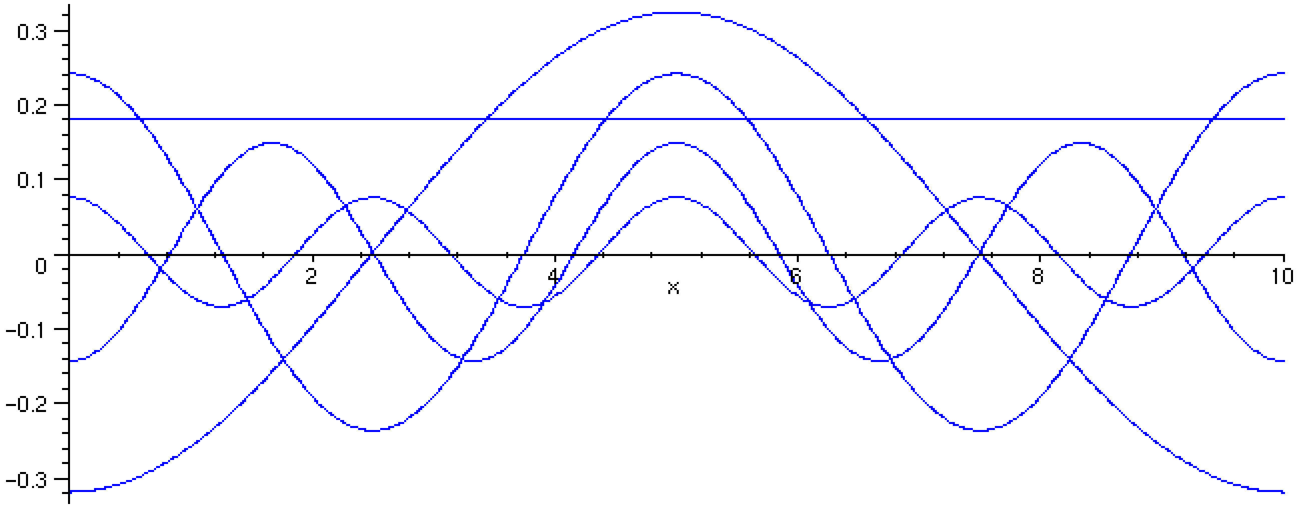
13.4 Aliasing e Instabilidade Não Lineares e Suavização Numérica



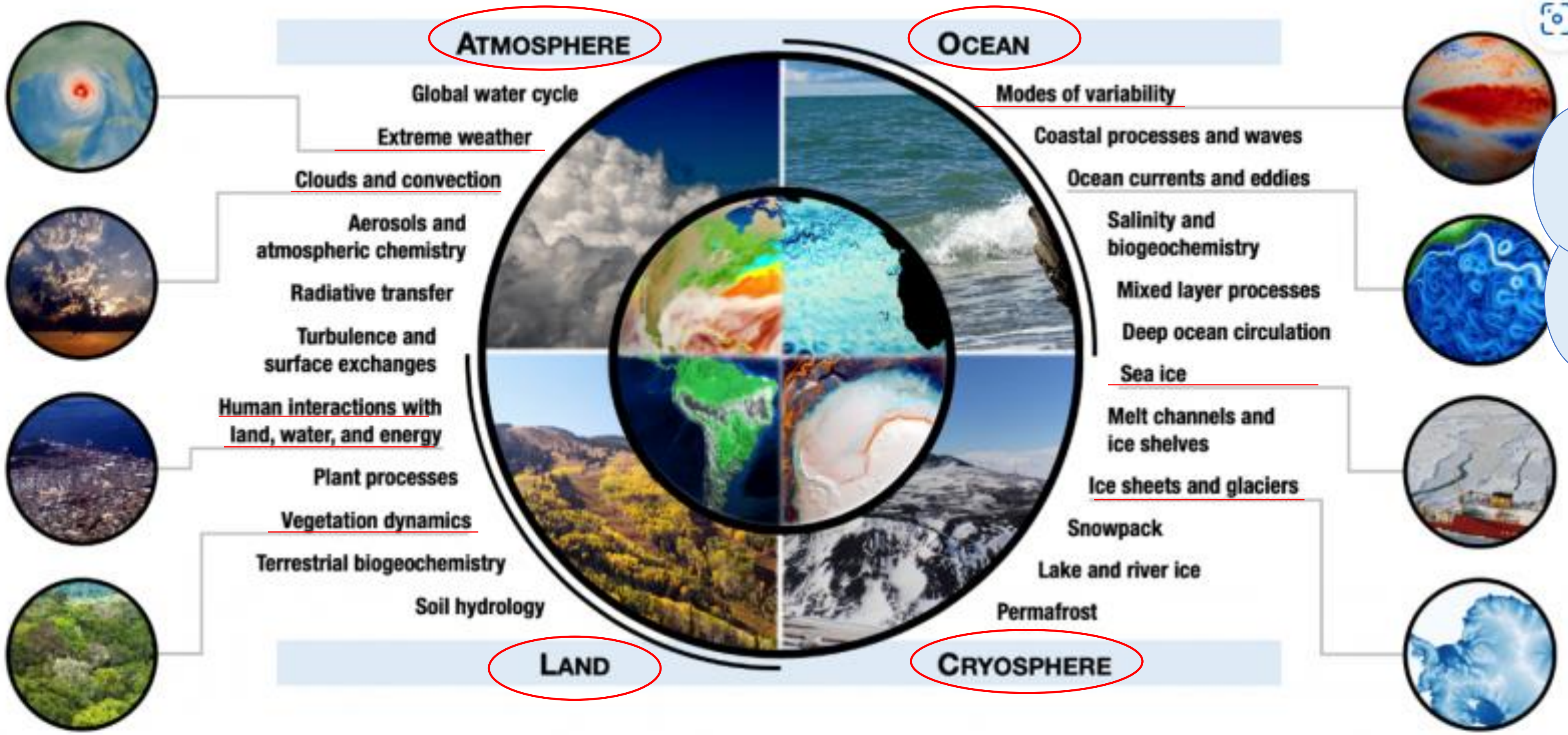
Paulo Yoshio Kubota

Fontes de Erros nos Modelos de Previsões Numéricas.

Cachoeira Paulista, INPE
24/10/2022

Paulo Yoshio Kubota

Encontro dos Alunos de Pós-Graduação em Meteorologia (EPGMET)

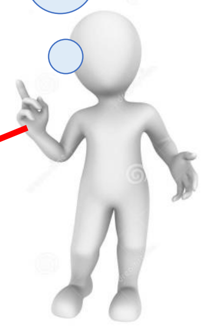


Earth system models include many interdependent components and processes to help us understand our planet.

Image courtesy of Paul Ullrich, University of California, Davis

Estes são os desafios?

Simular todos este sistemas de forma acoplada



Quais os problemas que devem ser considerados?

Modelos de Circulação Geral da Atmosfera

Evolução da Modelagem do Sistema Terrestre

Como acoplar oceano e atmosfera + ...?

Como Tratar o Sistema Terrestre globalmente?

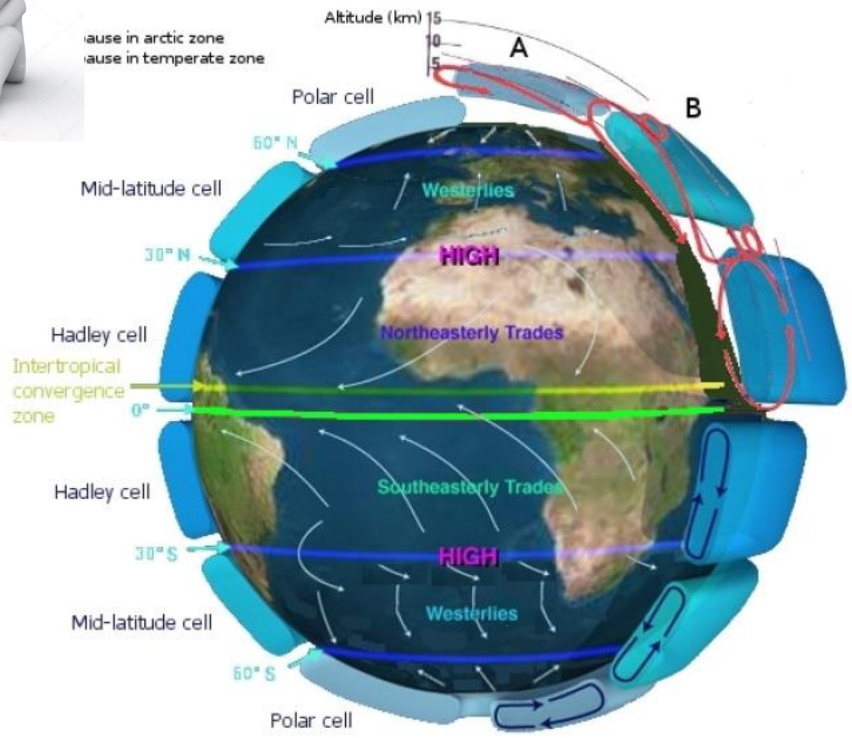
$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\delta_{i3} g + f_c \varepsilon_{ij3}\overline{u_j} - \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\upsilon \partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^{\ 2}} - \frac{\partial(\overline{u_i' u_j'})}{\partial x_j} + ??Termos??$$

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} = -\overline{\mathbf{v}}\cdot\nabla\overline{\theta} - \overline{w}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i'\theta'} + \frac{L}{\pi c_p}(c-e) + Q_{rad} + ??Termos??$$

$$\frac{\partial \overline{q}_v}{\partial t} = -\overline{\mathbf{v}}\cdot\nabla\overline{q}_v - \overline{w}\frac{\partial \overline{q}_v}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i' q_v'} - (c-e) + ??Termos??$$

$$\frac{\partial \overline{q}_l}{\partial t} = -\overline{\mathbf{v}}\cdot\nabla\overline{q}_l - \overline{w}\frac{\partial \overline{q}_l}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i' q_l'} + (c-e) - P_r + ??Termos??$$

Advecção de Larga escala	Subsidencia de Larga Escala	Transporte turbulento	Taxa de Condensação liquida	Taxa de Precipitação



➢ **Circulações impulsionadas por aquecimento desigual em um esfera rotativa**

Visão Geral

(1) Quais são as fontes de incerteza do modelo?

(2) Quais são as características das interações de crescimento de erro/escala?

(3) Como podemos melhorar a base física da representação da incerteza do modelo?

(4) Como podemos melhorar a colaboração em toda a comunidade científica?

(1)Quais são as fontes de incerteza do modelo?

- **Existem várias fontes de incerteza nos modelos que podem resultar em erro na simulação do modelo,**

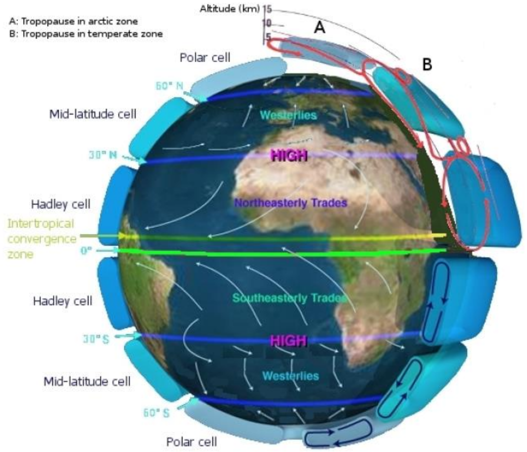
1) Decorrentes da Discretização da dinâmica {erros de truncamento espacial e temporal}

2) Limitações de nosso conhecimento de processos físicos em todo o “Sistema Terrestre" (atmosfera, oceano, superfície terrestre, gelo marinho, composição atmosfé

(1)Quais são as fontes de incerteza do modelo?

Erros Decorrentes do Método de Discretização da Dinâmica, Aproximações (hidrostática, não hidrostática, compressível, incompressível, atmosfera profunda, atmosfera rasa), tipo de grades, etc.)

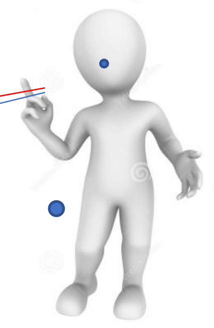
Dinâmica



Exemplo Equação de Advecção (não linear)

De volta a algo familiar.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{- or -} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$



O problema das diferenças finitas está na **multiplicação**.*

instabilidade não linear

Seja u(x)=sen(kx); então

$$u = \sin kx \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u^2}{\partial x} = k \sin^2 kx$$

Que **número de onda efetivo k que estamos trabalhando agora** ?

(1)Quais são as fontes de incerteza do modelo?

Aliasing, instabilidade não linear, e conservação

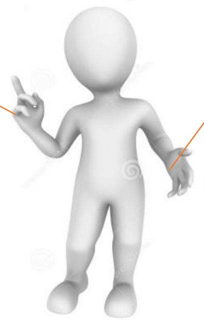
Exemplo

Alguns estudos investigaram as ***ondas de gravidade*** perto das ***frentes meteorológicas.***

as ***ondas de gravidade*** **WG** ***apareceram em observações***

As **WG** apareceram em simulações de alta resolução.
Mas algumas das ondas modeladas não são reais (Onda Espúrias).

Onda Espúrias apareceram em alta resolução horizontal.



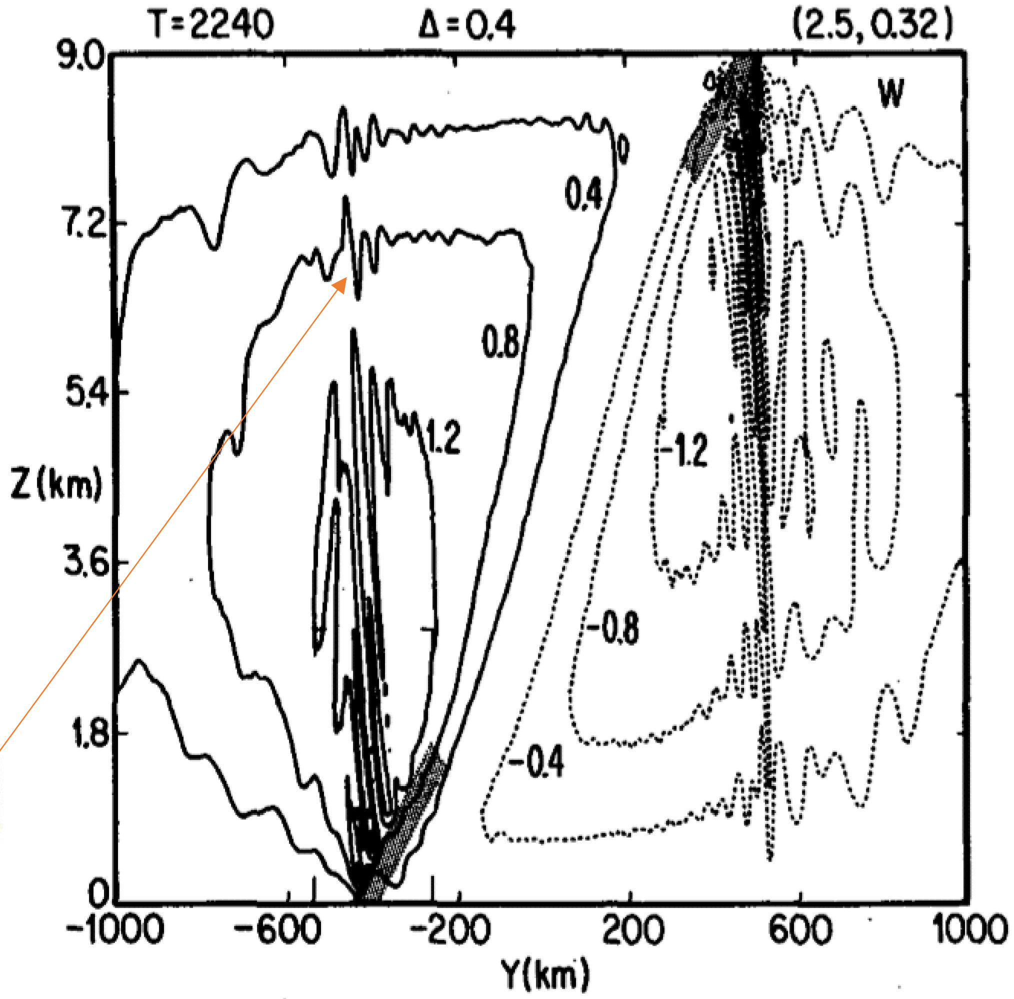


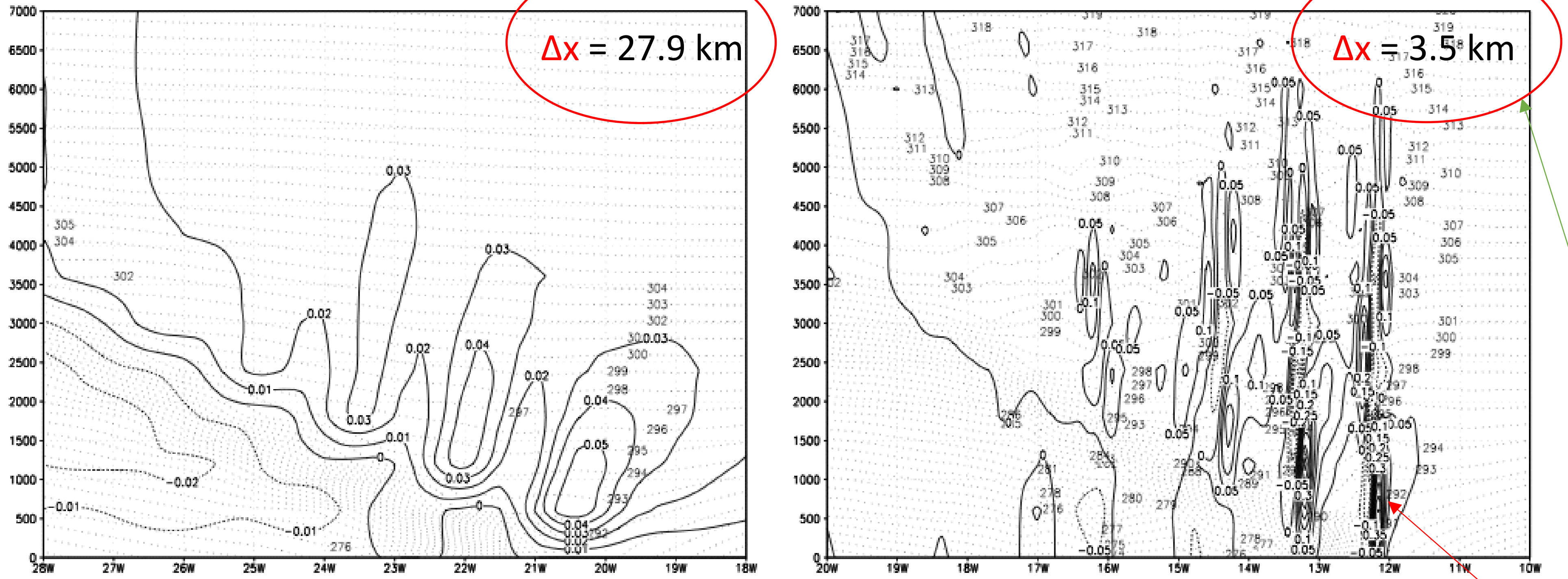
FIG. 2. Vertical velocity at T = 2240 min from the beginning of the experiment. The experiment that produced this figure had a horizontal resolution of 2.5 km and a vertical resolution of 320 m. This

lo Yoshio Kubota

(1)Quais são as fontes de incerteza do modelo?

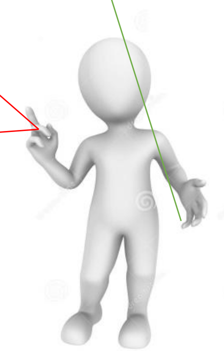
Aliasing, instabilidade não linear, e conservação

Ondas **Espúrias**



Iga (2005) - ondas sobre sistema frontal. O campo da velocidade vertical é mostrada.

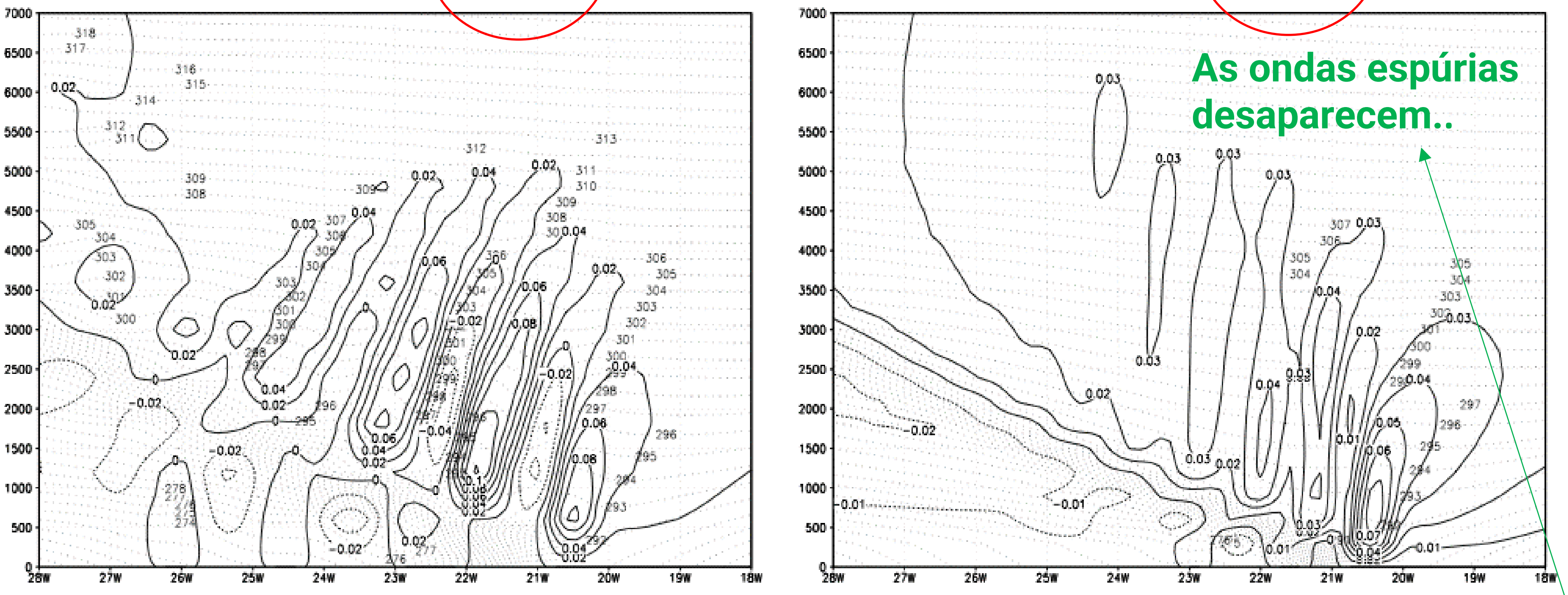
A única mudança é a diminuição de Δx.



Spurious waves

GLEVEL=9, dz=600m

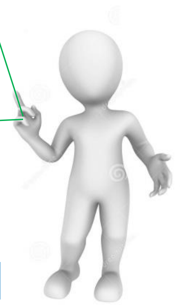
GLEVEL=9, dz=300m



As ondas espúrias desaparecem..

Iga (2005) - ondas sobre sistema frontal. O campo da velocidade vertical é mostrada.

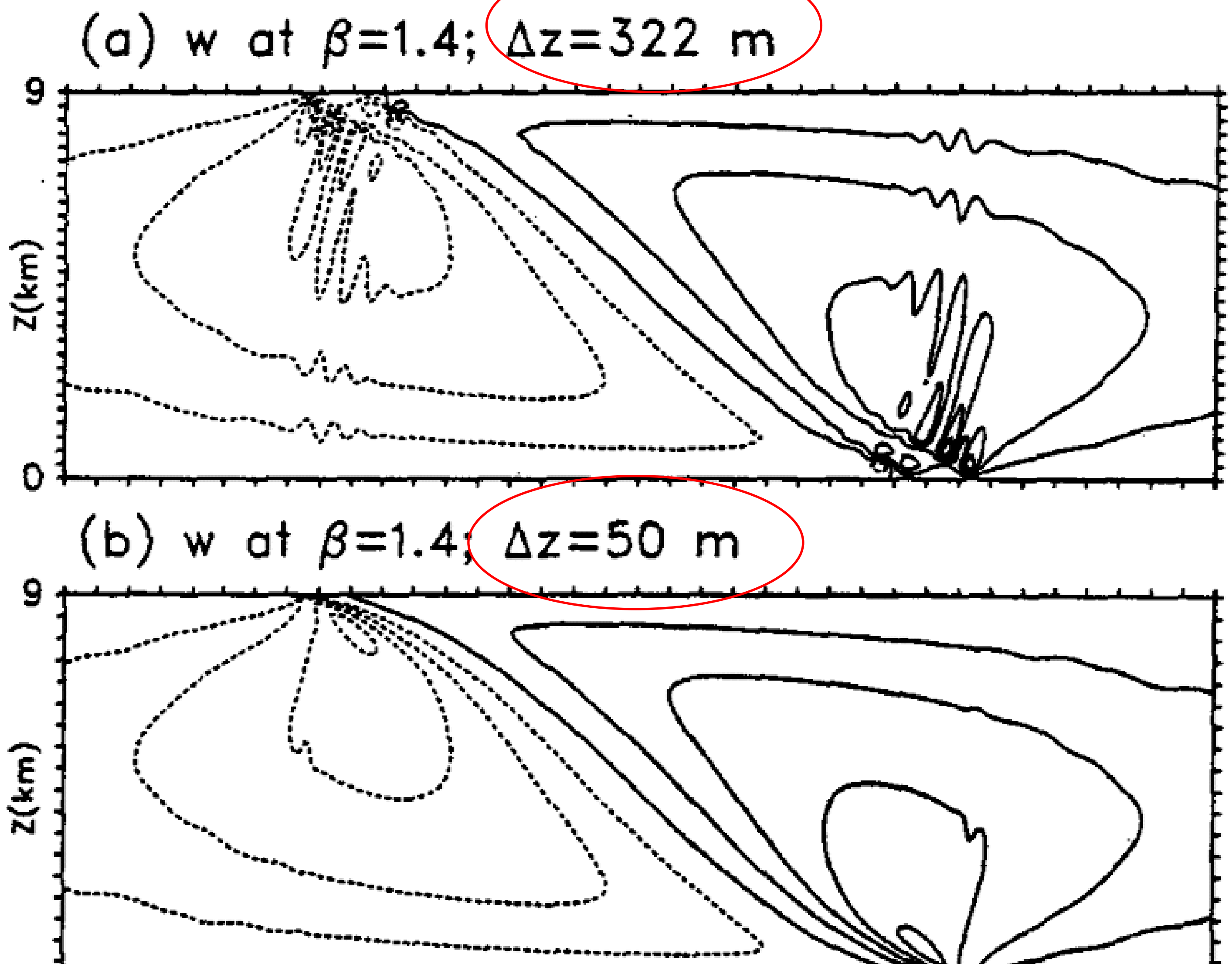
Δx=14 km. A única mudança é a diminuição em Δz.



(1)Quais são as fontes de incerteza do modelo?

Aliasing, instabilidade não linear, e conservação

Spurious waves



Snyder et al. 1993. A única mudança é Δz.

As ondas aparecem em alta **resolução horizontal**

As ondas desaparecem com o **aumento** da **resolução vertical**.

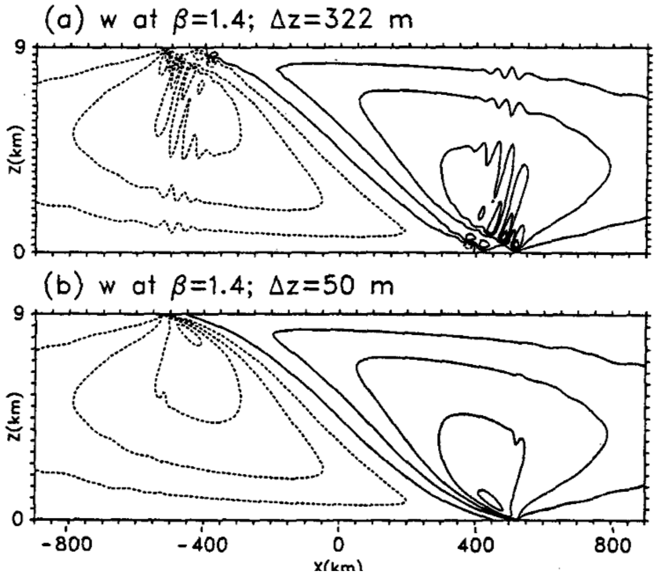
Por quê?

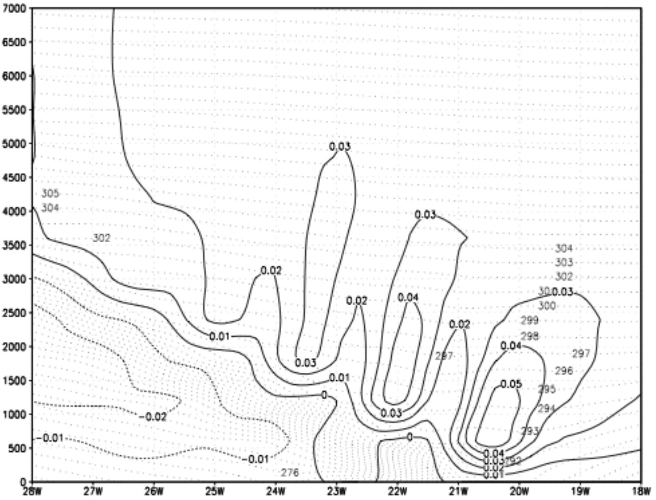
Paulo Yoshio Kubota

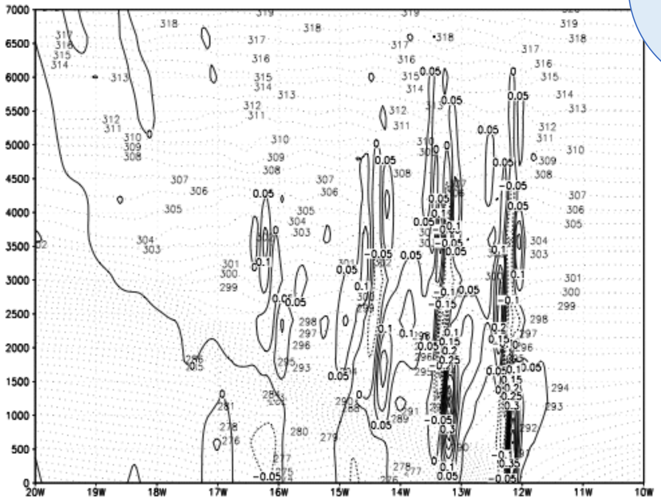
(1)Quais são as fontes de incerteza do modelo?

Aliasing, instabilidade não linear, e conservação

Spurious waves







Uma possibilidade…

Reduzindo Δx mantendo Δz constante.
Resulta em pequenas ondas horizontais com pequenas escalas verticais (muito pequenas) que também serão resolvidas

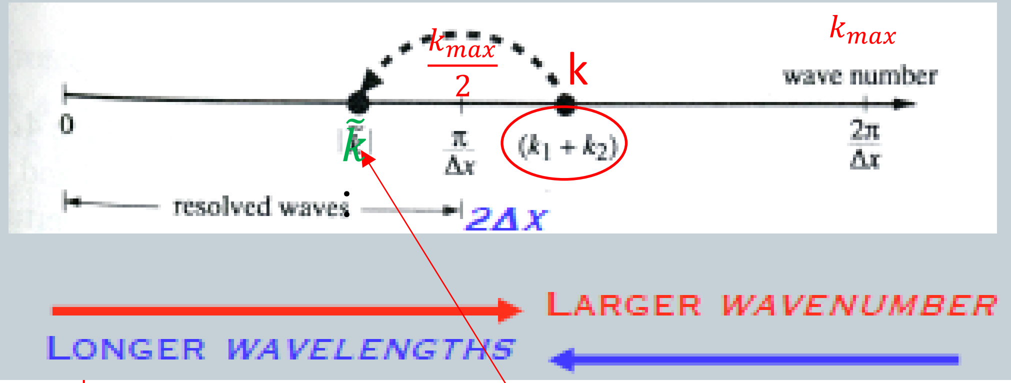
(1)Quais são as fontes de incerteza do modelo?

Aliasing, instabilidade não linear, e conservação

Aliasing

Mesmo se u(x)=sin(kx) for resolvido... Se ...$\frac{k_{max}}{2} < k_1 + k_2 = k < k_{max}$, o **termo não linear coloca energia** em $\tilde{k}$:

kmax < k < 2kmax

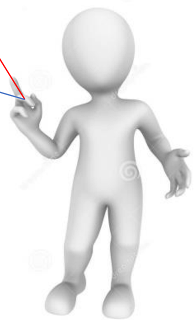


$$\lambda = \frac{2\pi L}{k}$$

Isso não tem solução!

Ele aparecerá em outros comprimentos de onda resolvíveis $\tilde{k}$

Isso é Aliasing.



(1)Quais são as fontes de incerteza do modelo?

Aliasing, instabilidade não linear, e conservação

Spurious waves

Para onde as ondas não resolvidas "vão"?

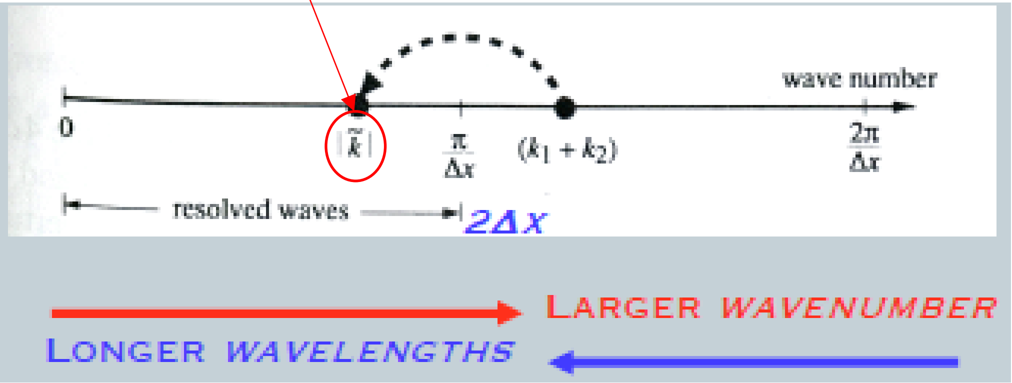
=> Durran eq. 3.91: Exemplos:

$2\Delta x \cdot 2{,}5\Delta x \rightarrow 10\Delta x$

$(4/3)\Delta x \rightarrow 4\Delta x$

$$\tilde{k} = \begin{cases} k_1 + k_2 - \dfrac{2\pi}{\Delta x}, & \text{if } k_1 + k_2 > \dfrac{\pi}{\Delta x} \\ k_1 + k_2 + \dfrac{2\pi}{\Delta x}, & \text{if } k_1 + k_2 < \dfrac{-\pi}{\Delta x} \end{cases}$$

Observe se ambas as ondas são 4Δx ou maiores: sem Aliasing

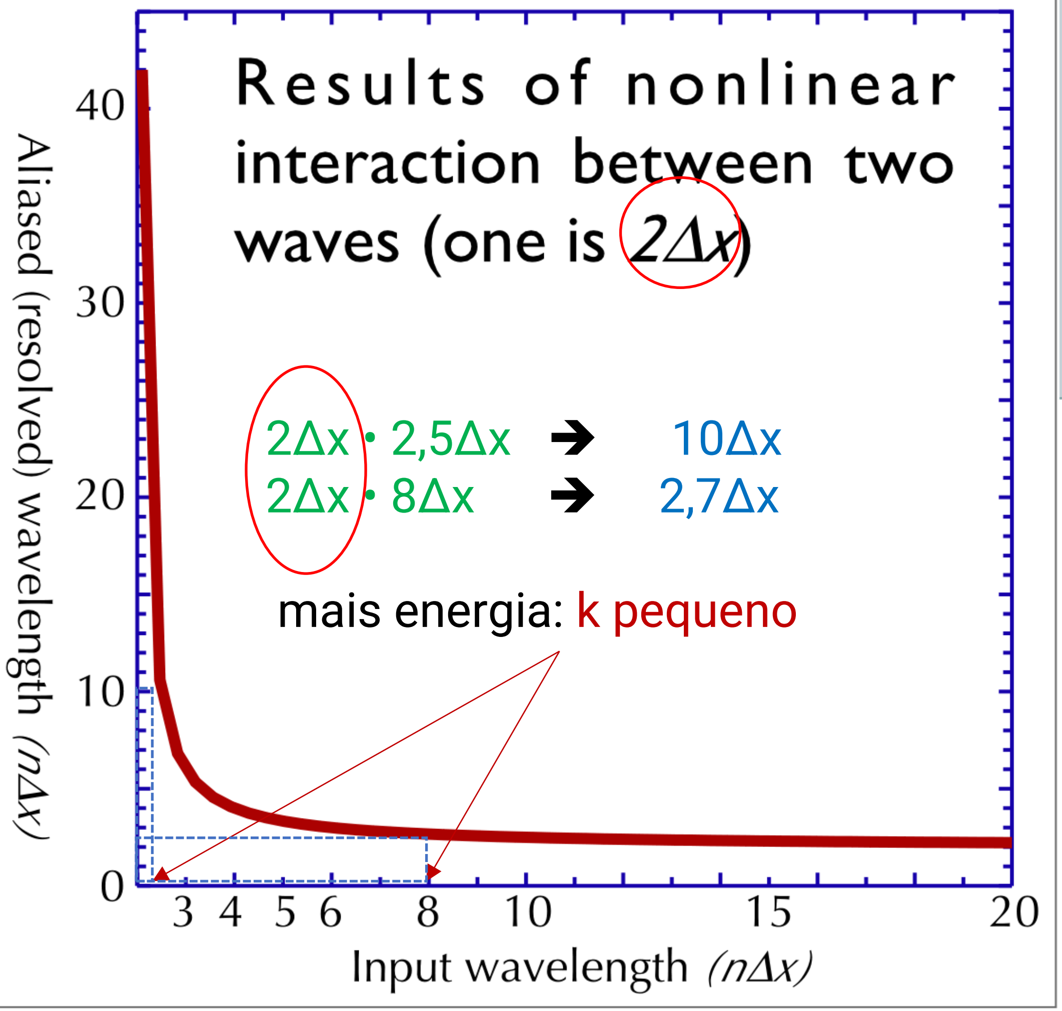


Paulo Yoshio Kubota

(1)Quais são as fontes de incerteza do modelo?

Aliasing, instabilidade não linear, e conservação

Spurious waves

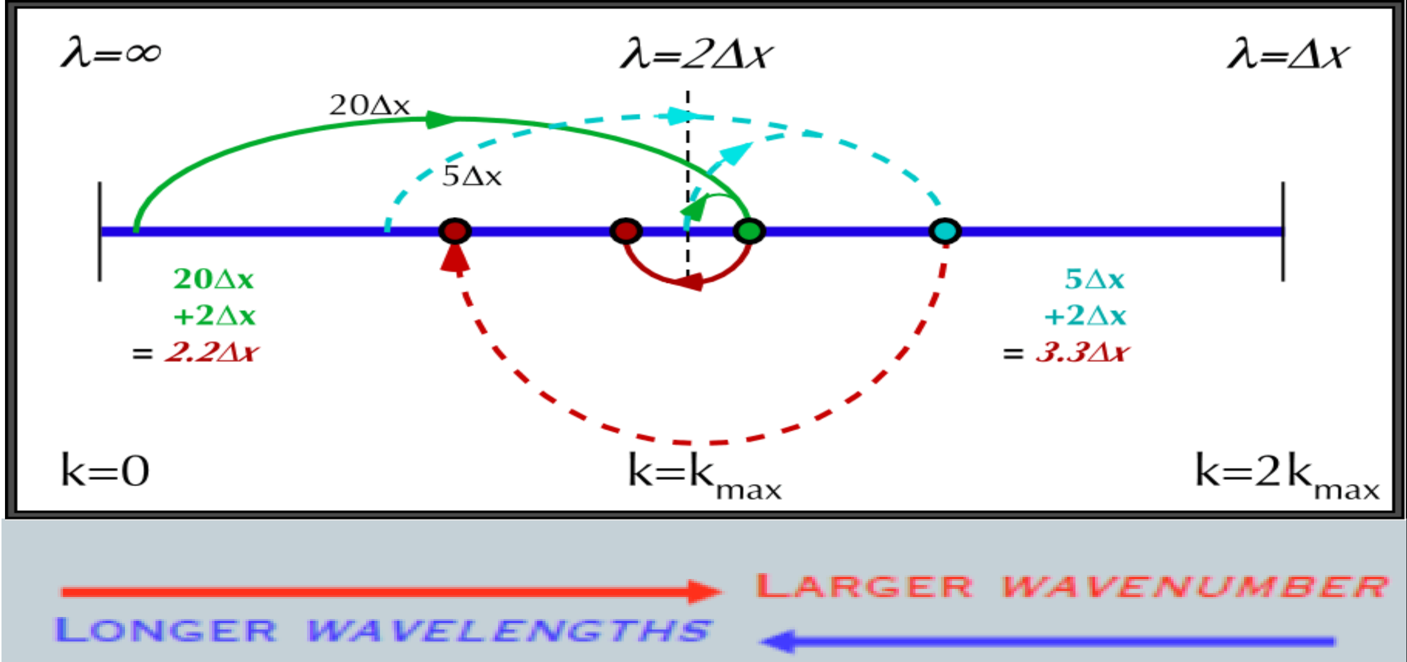


Input wave	Input k / kmax	+ 2Δx = k / kmax	aliased k / kmax	= final NΔx
2.1 Δx	0.95	1.95	0.05	42 Δx
5.0 Δx	0.40	1.40	0.60	3.3 Δx
10 Δx	0.20	1.20	0.80	2.5 Δx
20 Δx	0.10	1.10	0.90	2.2 Δx

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{- or -} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$u(x,t) = \sin(kx - vt)$$



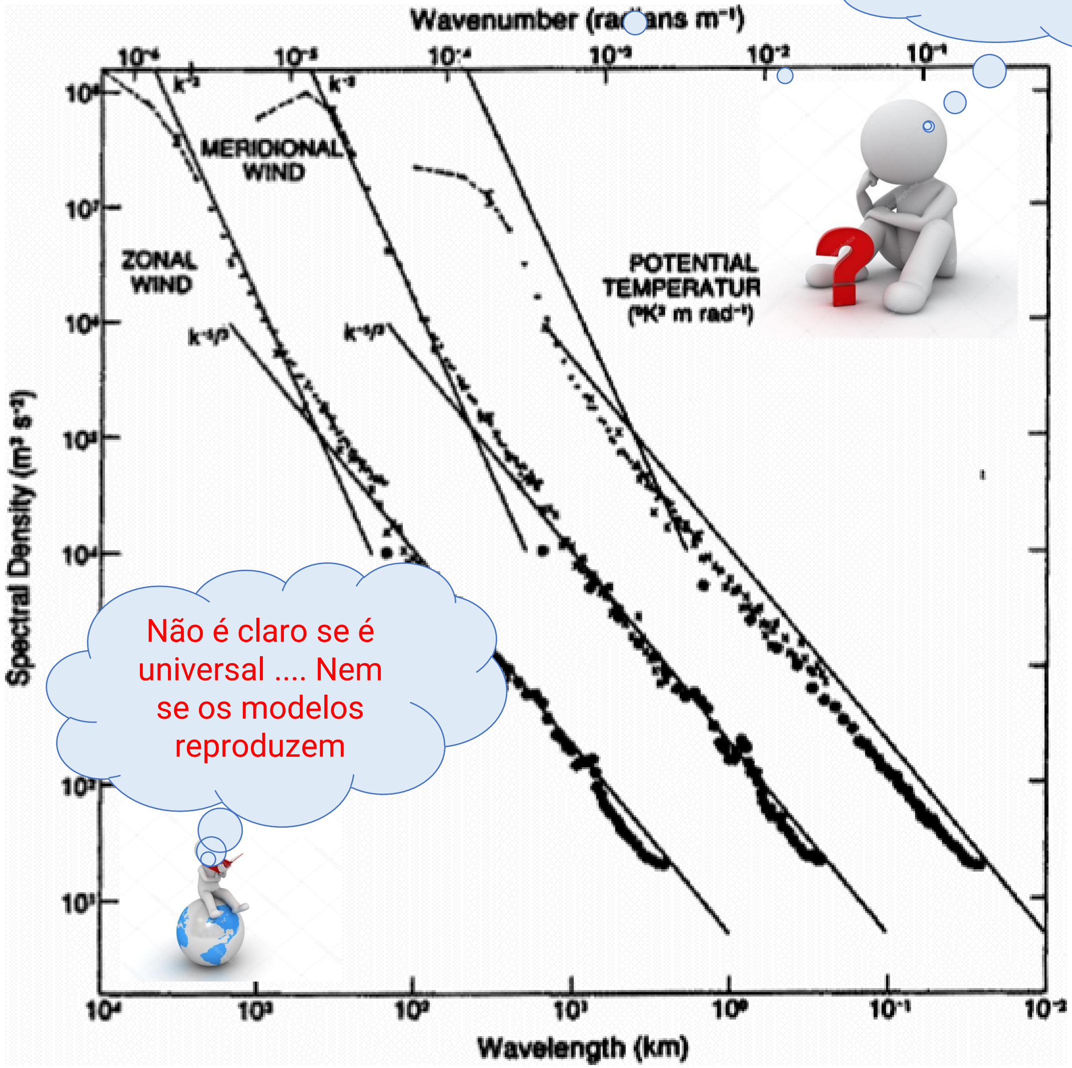
(1)Quais são as fontes de incerteza do modelo?

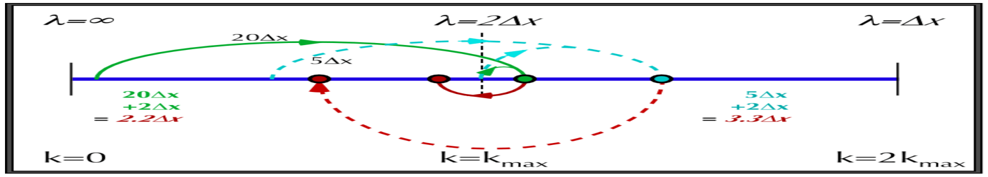
Aliasing, instabilidade não linear, e conservação

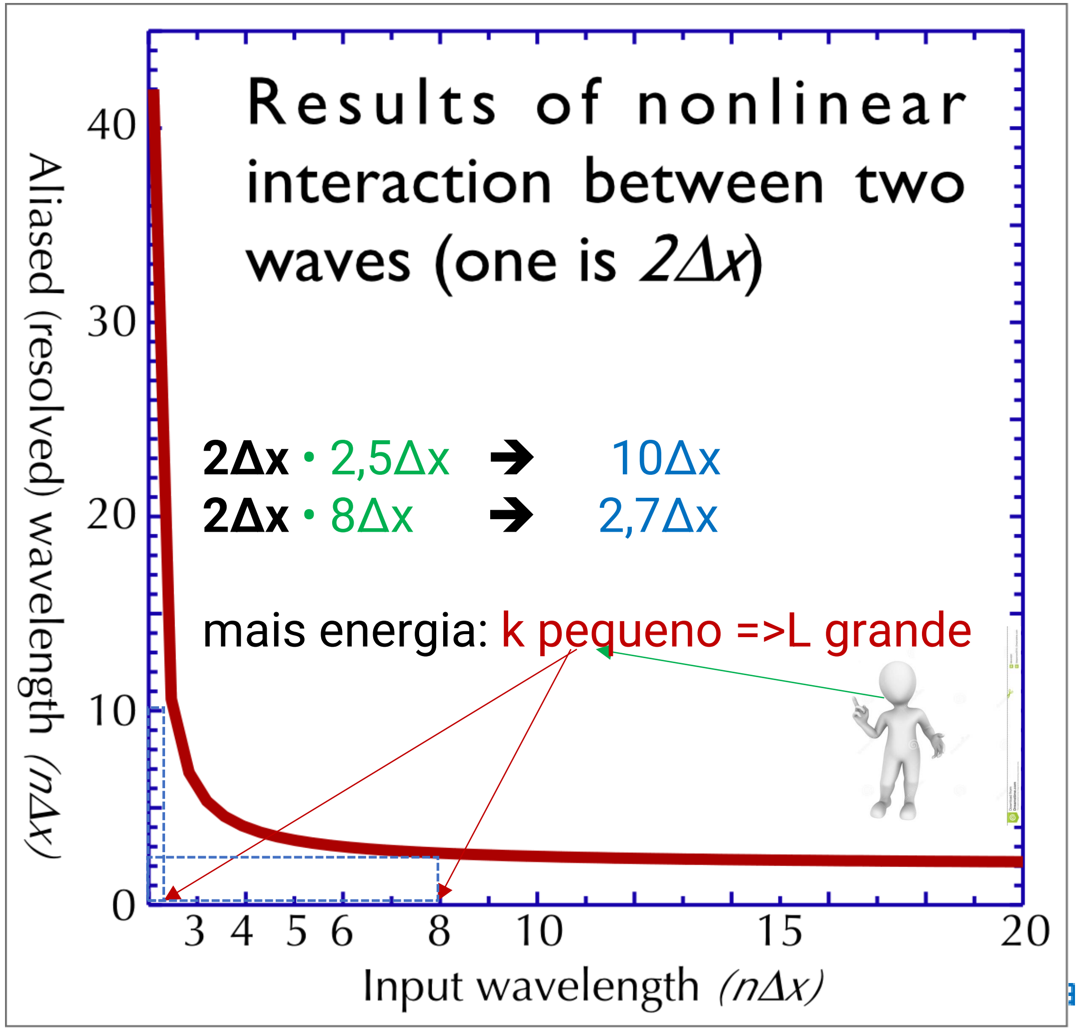
Qual o efeito no espectro?

O espectro -5/3 é universal ?

Não é claro se é universal .... Nem se os modelos reproduzem







2Δx • 2,5Δx → 10Δx

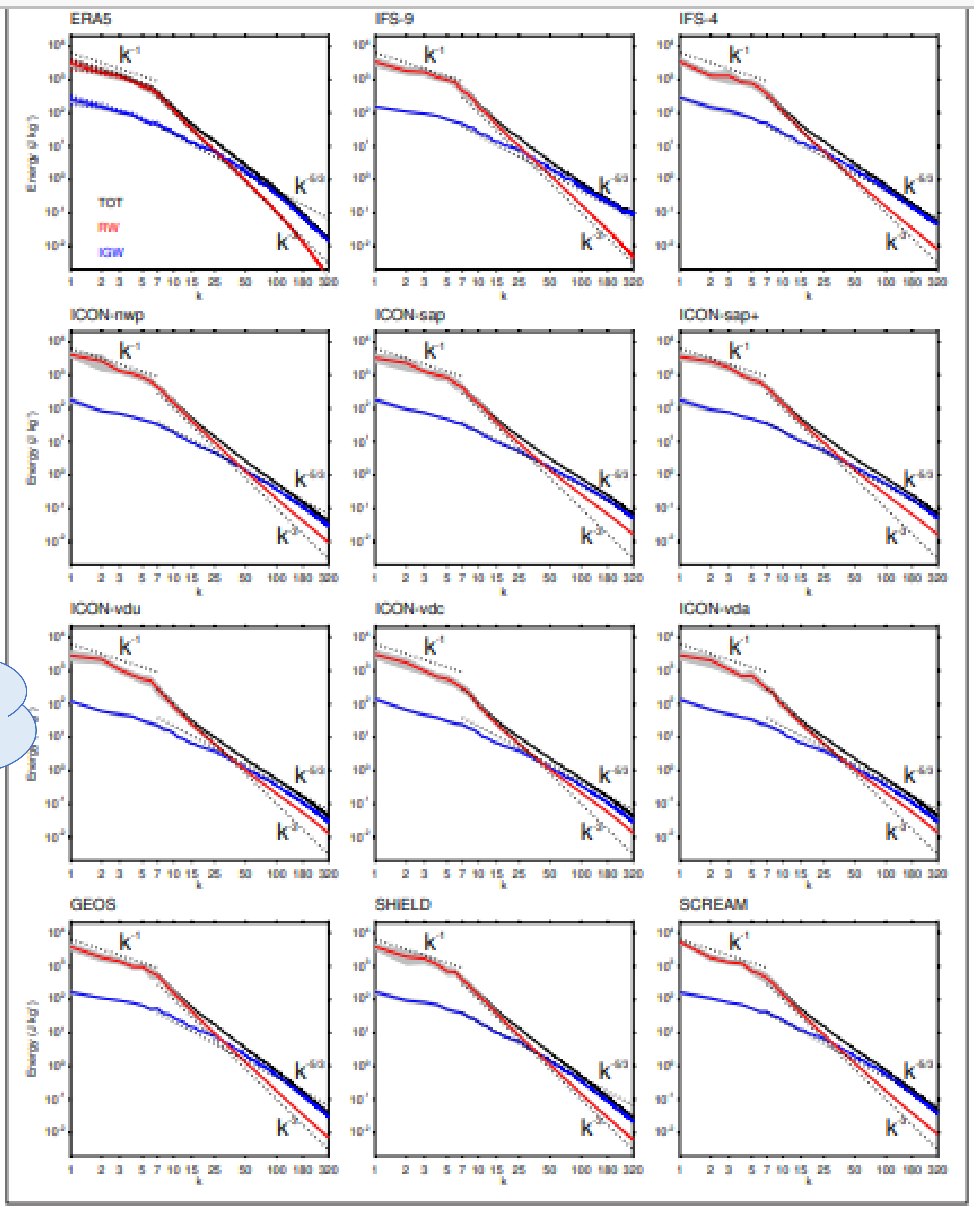
2Δx • 8Δx → 2,7Δx

mais energia: k pequeno =>L grande

(1)Quais são as fontes de incerteza do modelo?

Aliasing, instabilidade não linear, e conservação

Spurious waves



Espectros de energia global em função do número de onda zonal não dimensional k na reanálise do ERA5 e nas simulações.

São mostrados os espectros total (TOT; preto), RW (vermelho) e IGW (azul).

Além do ano de 2020, o painel ERA5 mostra em linhas tracejadas os espectros correspondentes para 2016, 2017, 2018, 2019.

O sombreamento cinza marca o desvio padrão calculado em dados de 6 horas. Para referência, as inclinações espectrais de k−1, k−5/3 e k−3 são desenhadas como linhas tracejadas pretas. Suas localizações são idênticas em cada painel. A faixa de eixos também é idêntica.

os modelos não reproduzem o espectro

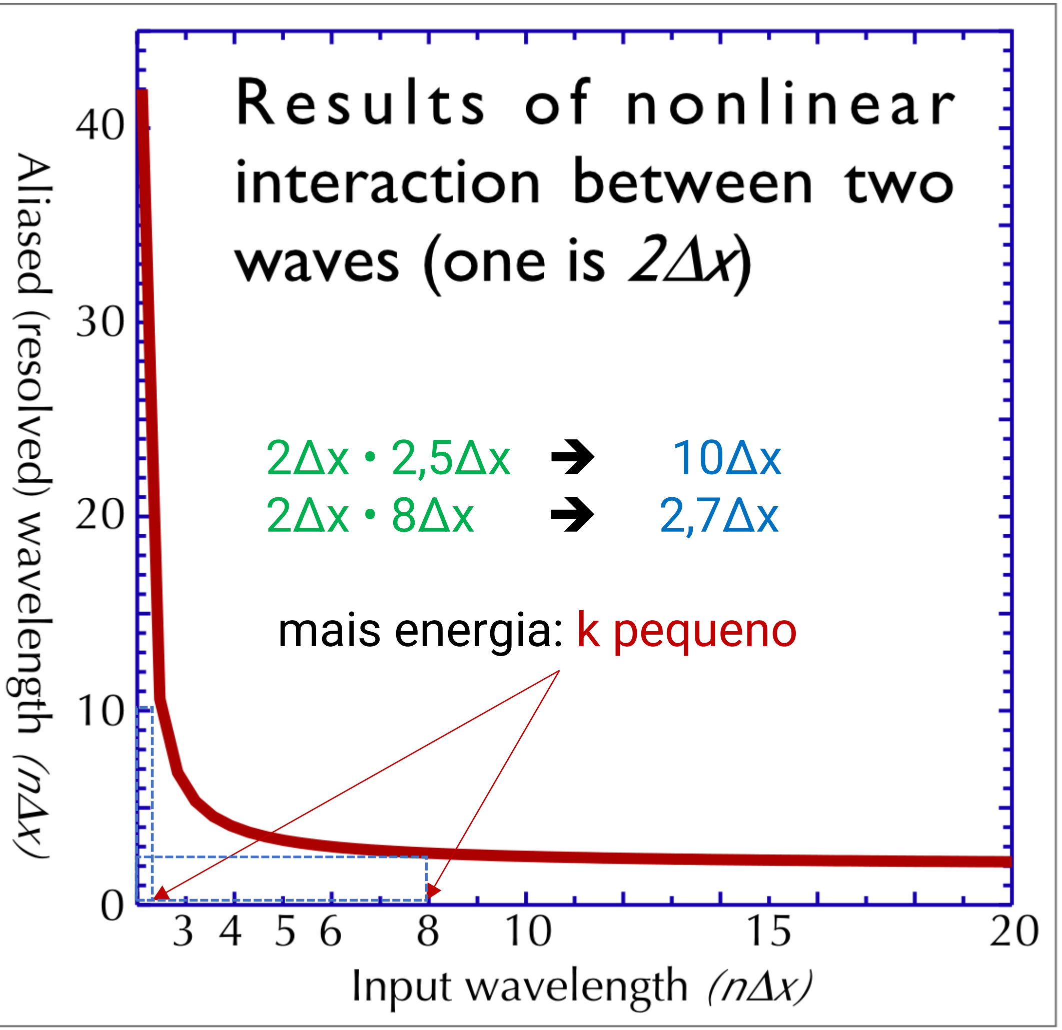
Claudia Christine Stephan

Paulo Yoshio Kubota

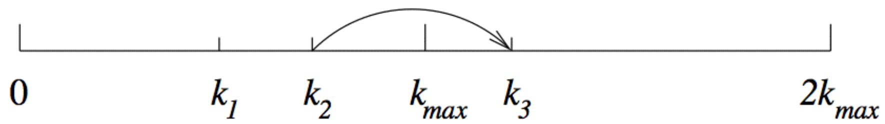
(1)Quais são as fontes de incerteza do modelo?

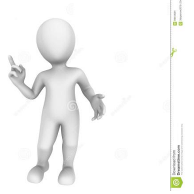
Aliasing, instabilidade não linear, e conservação

Spurious waves



Se a energia flui para os números de onda logo acima de kmax…





O alias o dobra de volta para os números de onda logo abaixo de kmax

÷ acumula energia perto do limite de resolução da grade
÷ Interação não linear adicional melhora o fluxo em números de onda logo acima de kmax: acelera o processo
÷ Isto é a instabilidade não linear.

E a amplitude?
÷ Mais energia em k pequeno. Digamos k2 logo abaixo de kmax…
÷ Não linear (k1+k2) tem mais energia se k1 for pequeno.

Paulo Yoshio Kubota

(1)Quais são as fontes de incerteza do modelo?

Aliasing, instabilidade não linear, e conservação

Será que todos as fontes de erros da dinâmica são tratados de forma correta?

As aproximações são utilizadas nas escalas corretas?

Erros na representação dos processos físicos

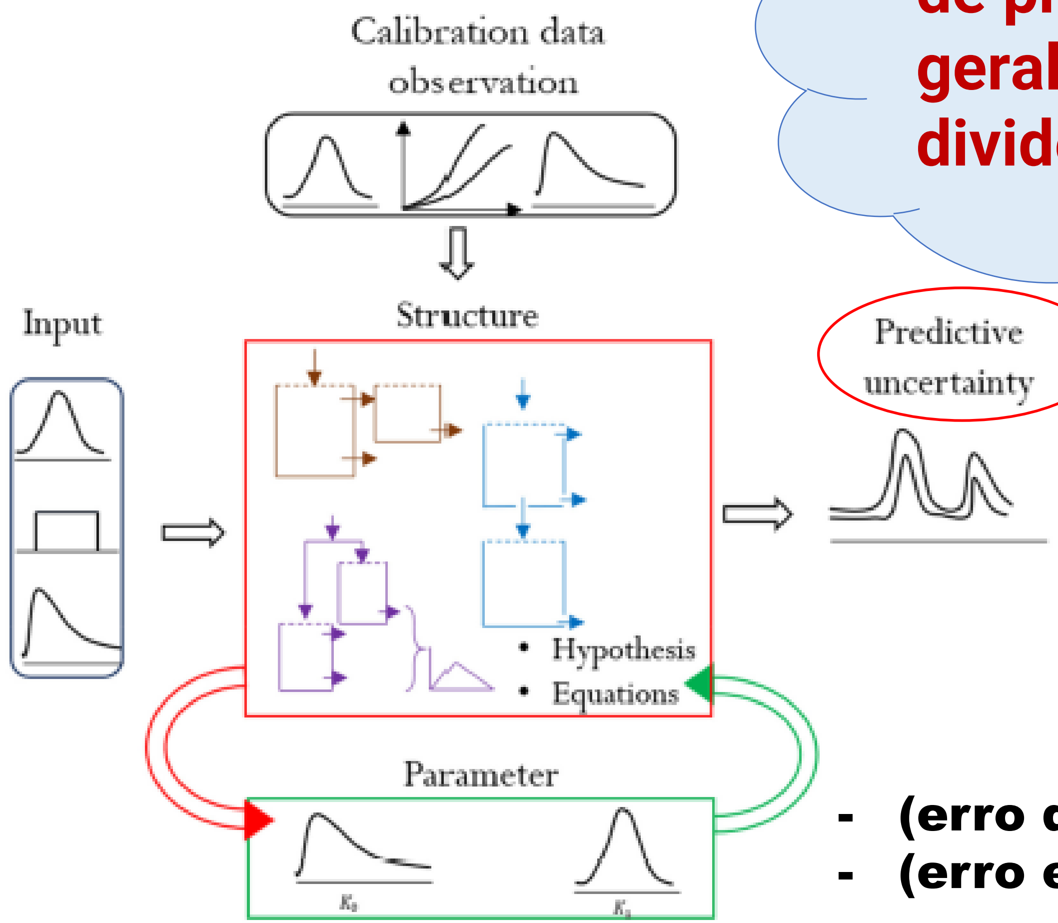
Em Geral, O erro do modelo é dominado pela *representação de processos físicos* (por exemplo, turbulência da camada limite, acoplamento de superfície, microfísica de nuvens, interação nuvem-radiação, aerossóis, ondas de gravidade de convecção, arrasto de superfície),

Entretanto não devemos negligenciar a incerteza na dinâmica.

(1)Quais são as fontes de incerteza do modelo?

fontes de erros

Uma parametrização de processo físico geralmente se dividem em:



- É **difícil separar diferentes fontes de erro** :
- (erro de truncamento **versus** incerteza do processo físico)
- (erro estrutural **versus** incerteza do parâmetro)

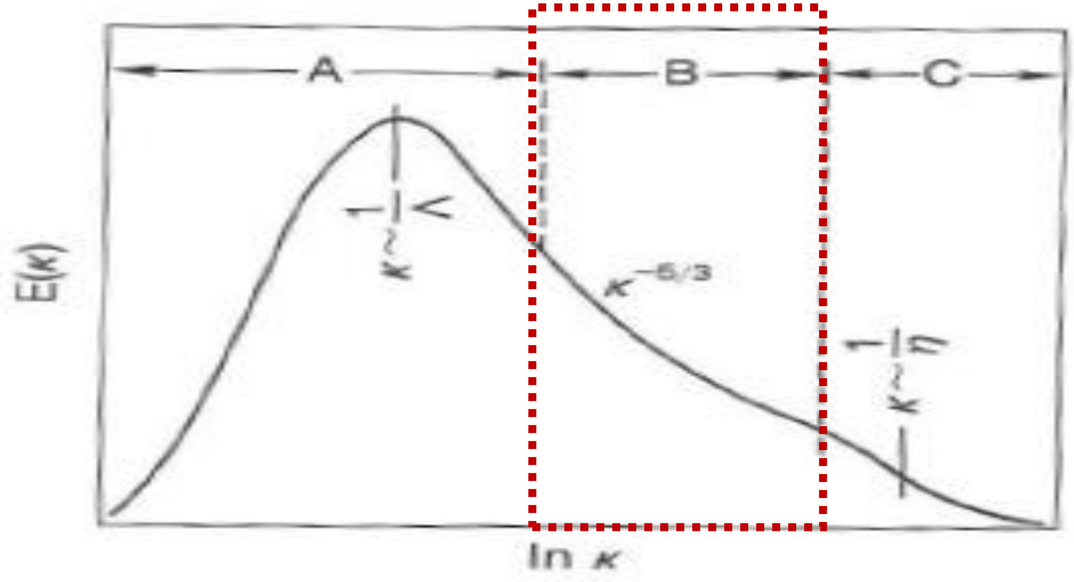
Fonte:Edom Moges

Paulo Yoshio Kubota

Ao discutir **instabilidades numéricas** no slide anterior, negligenciamos os efeitos não lineares.

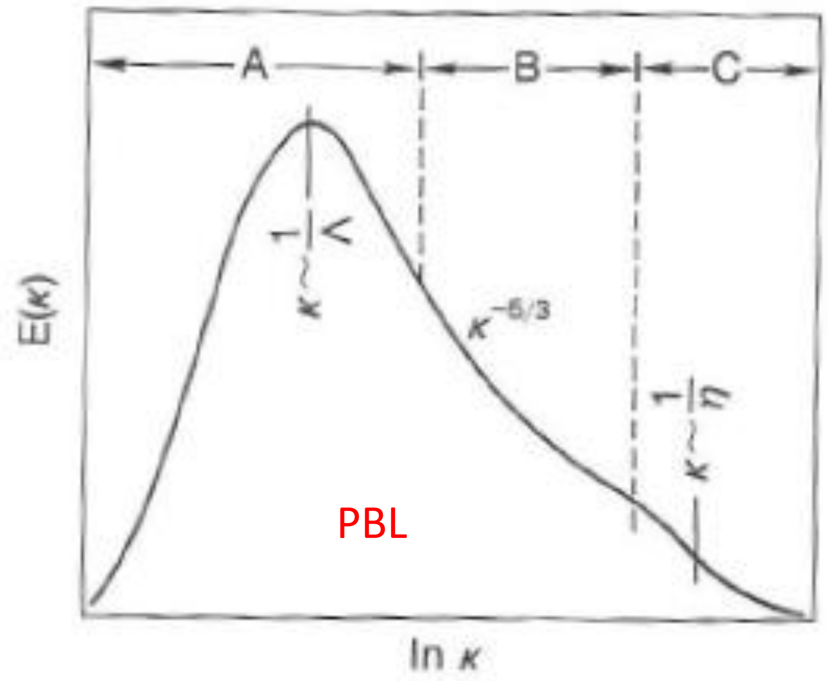
No entanto, na atmosfera real, ***a energia cinética gerada em grande escala ou mesoescala tende a se transferir para escalas menores***.

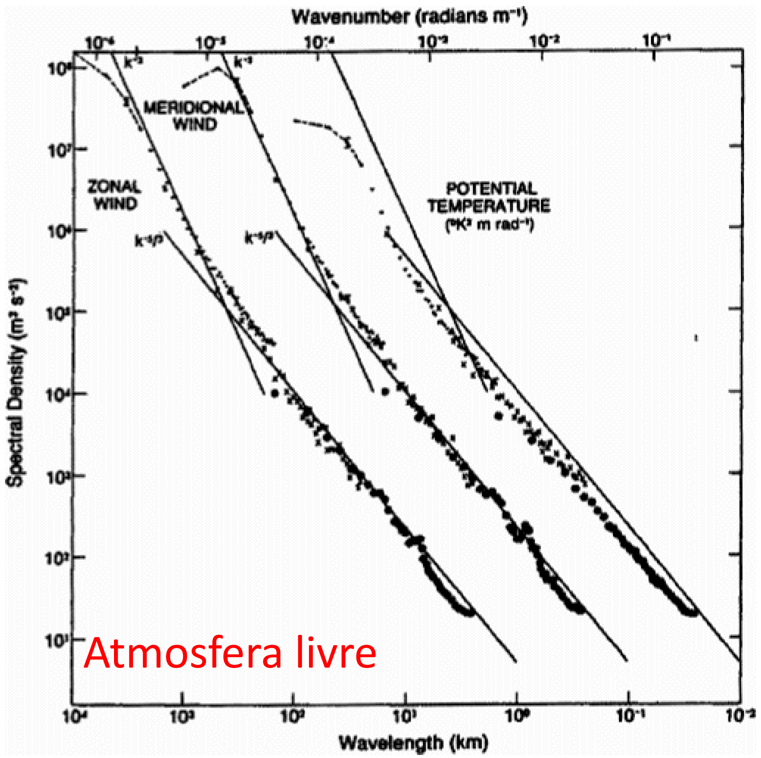
Quando é transferida para o chamado **subrange inercial**, a **energia cinética não é produzida nem dissipada**, mas **transmitida para escalas cada vez menores**.



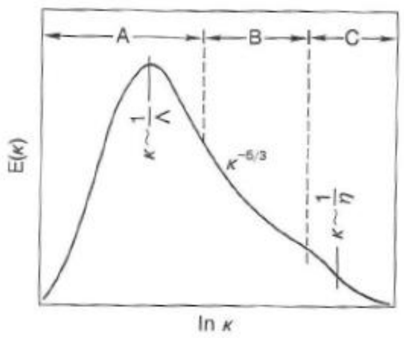
Previsão Numérica de Tempo e Clima

ESPECTRO DE ENERGIA NA CAMADA LIMITE ATMOSFÉRICA





Esquema do **espectro de energia na camada limite atmosférica** mostrando diferentes regiões de produção de energia(A) em dissipação (C) and o **subrange inercial (B) onde a ambas produção e dissipação de energia são desprezadas.** Λ é a escala integral da turbulência e η é a microescala de Kolmogorov, k : wavenumber, $E(k)$: energy. ((From Tennekes and Lumley 1972)).

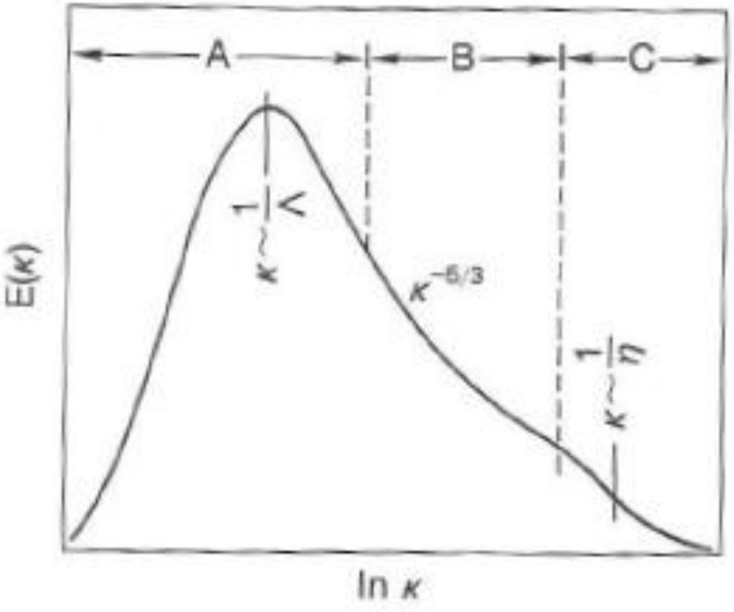


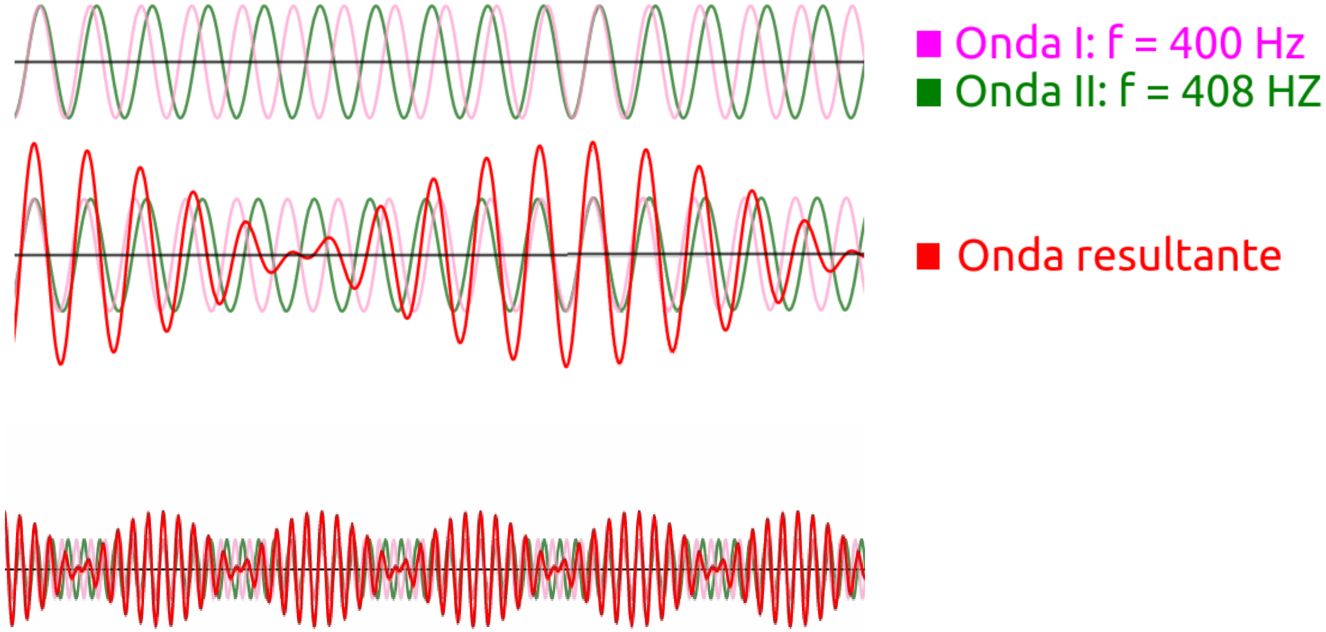
(2) Na faixa contendo energia (Faixa A), que contém a maior parte da energia turbulenta e onde a energia é produzida por flutuabilidade e cisalhamento.

(3) Na subfaixa inercial (Faixa B), a **energia cinética turbulenta é independente do forçamento original** do movimento e da dissipação molecular, de acordo com $E(k = a\varepsilon^{2/3}k^{-5/3})$, onde a é uma constante, ε é a taxa de dissipação parasita e k é o número de onda.

Nesta faixa (B),, a energia cinética turbulenta não é produzida nem dissipada, mas **transmitida (transferida)** para escalas cada vez menores (k<pequeno).

ESPECTRO DE ENERGIA NA CAMADA LIMITE ATMOSFÉRICA





(4) Na **faixa de dissipação (Faixa C),** onde **KE é convertida em energia interna por interação molecular**.

Em um modelo **numérico de mesoescala**, ***essa cascata de energia para escalas menores não pode ocorrer*** **porque a menor onda que pode ser resolvido tem um comprimento de onda de $2\Delta x$.**

Por exemplo, vamos ***considerar 2 ondas*** com a mesma amplitude ϕ_0 e diferentes números de onda, k_1 e k_2,

$$\phi_1 = \phi_o \cos k_1 \Delta x\,, \qquad (13.4.1)$$
$$\phi_2 = \phi_o \cos k_2 \Delta x\,.$$

$$cos(k_1\Delta x) = \frac{e^{ik_1\Delta x} + e^{-ik_1\Delta x}}{2}$$

$$cos(k_2\Delta x) = \frac{e^{ik_2\Delta x} + e^{-ik_2\Delta x}}{2}$$

Uma interação não linear entre essas duas ondas $\phi_1\phi_2$produz

$$\left(\frac{e^{ik_1\Delta x} + e^{-ik_1\Delta x}}{2}\right)\left(\frac{e^{ik_2\Delta x} + e^{-ik_2\Delta x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ik_1\Delta x}e^{ik_2\Delta x} + e^{ik_1\Delta x}e^{-ik_2\Delta x} + e^{-ik_1\Delta x}e^{ik_2\Delta x} + e^{-ik_1\Delta x}e^{-ik_2\Delta x}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{e^{ik_1\Delta x} + e^{-ik_1\Delta x}}{2}\right)\left(\frac{e^{ik_2\Delta x} + e^{-ik_2\Delta x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(k_1+k2)\Delta x} + e^{-i(k_1+k_2)\Delta x} + e^{i(k_1-k2)\Delta x} + e^{-i(k_1-k_2)\Delta x}}{2}\right)$$

$$\phi_1\phi_2 = (\phi_o^2/2)[\cos(k_1+k_2)\Delta x + \cos(k_1-k_2)\Delta x]. \qquad (13.4.2)$$

Em um modelo **numérico de mesoescala**, ***essa cascata de energia para escalas menores não pode ocorrer*** **porque a menor onda que pode ser resolvido tem um comprimento de onda de $2\Delta x$.**

$$\phi_1\phi_2 = (\phi_o^2/2)\left[\cos(k_1+k_2)\Delta x + \cos(k_1-k_2)\Delta x\right]. \qquad (13.4.2)$$

Por exemplo, isso pode acontecer na equação do momento,

$$U\frac{\partial u'}{\partial x} + u'\frac{\partial u'}{\partial x} = U\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u'^2).$$

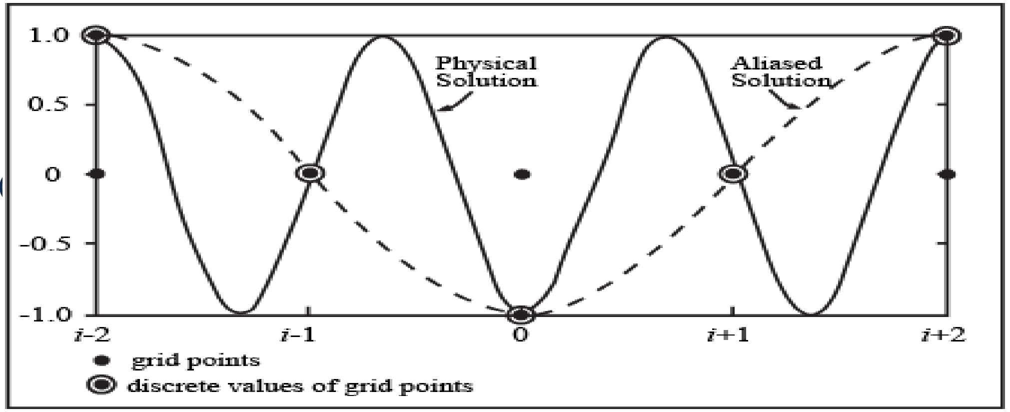
Pode ser visto claramente na equação acima, duas ondas com números de onda $\phi_1\phi_2$, k_1+k2 e k_1-k2 são resultantes dessa interação onda-onda.

Pode ser visto claramente na equação acima, duas ondas com números de onda, $k_1 + k2$ e $k_1 - k2$ são resultantes dessa interação onda-onda.

Assuma que k_1 e k_2 **representam as seguintes ondas** $2\Delta x$ e $4\Delta x$,

$$k_1 = 2\pi/2\Delta x$$

$$k_2 = 2\pi/4\Delta x$$



então nós temos

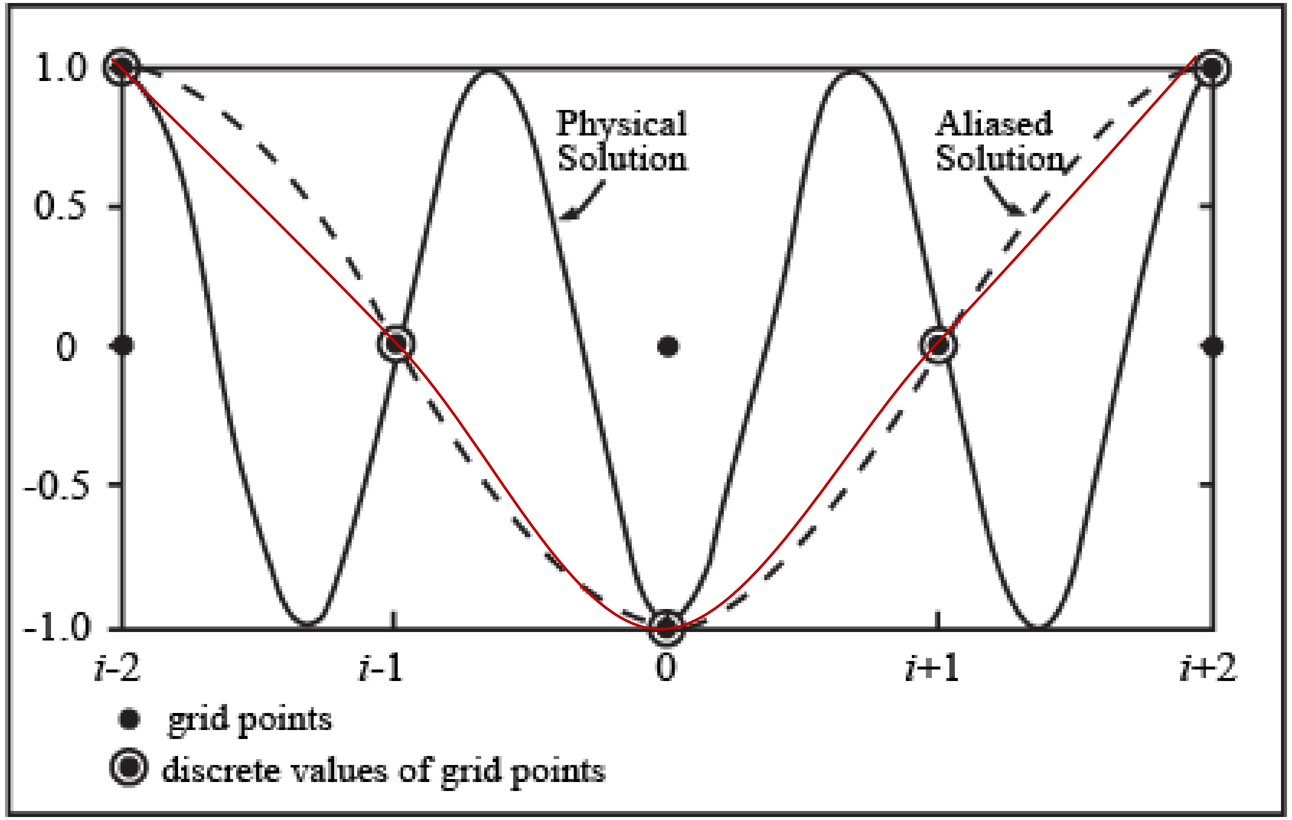
$$\phi_1\phi_2 = \left(\frac{\phi_0^2}{2}\right)\left\{\cos\left[2\pi\Delta x\left(\frac{3}{4\Delta x}\right)\right] + \boxed{\cos\left[2\pi\Delta x\left(\frac{1}{4\Delta x}\right)\right]}\right\}. \qquad (13.4.4)$$

O segundo termo dentro das chaves do lado direito da equação acima é uma onda de $4\Delta x$, que pode ser representada apropriadamente pela malha da grade.

No entanto, o primeiro termo é uma onda de $1.33\Delta x$, que ***não pode ser resolvida pela malha da grade***. Esta onda será fictíciamente representada por uma onda $4\Delta x$ porque o primeiro múltiplo inteiro de $4/3\Delta x$ é $4\Delta x$

No entanto, o primeiro termo é uma onda de $1.33\Delta x$, que não pode ser resolvida pela malha da grade. Esta onda será fictíciamente representada por uma onda $4\Delta x$ porque o primeiro múltiplo inteiro de $4/3\Delta x$ é $4\Delta x$

Esse fenômeno é chamado de aliasing não linear.



A Fig. 13.16 mostra um esquema que **ilustra como uma solução física** com um comprimento de onda de $4/3\Delta x$, **causada pela interação não linear de ondas $2\Delta x$ e $4\Delta x$** , é vista como uma onda computacional $4\Delta x$ na malha da grade numérica.

$$\phi_1\phi_2 = \left(\frac{\phi_o^2}{2}\right)\left\{\cos\left[2\pi\Delta x\left(\frac{3}{4\Delta x}\right)\right] + \cos\left[2\pi\Delta x\left(\frac{1}{4\Delta x}\right)\right]\right\}. \quad (13.4.4)$$

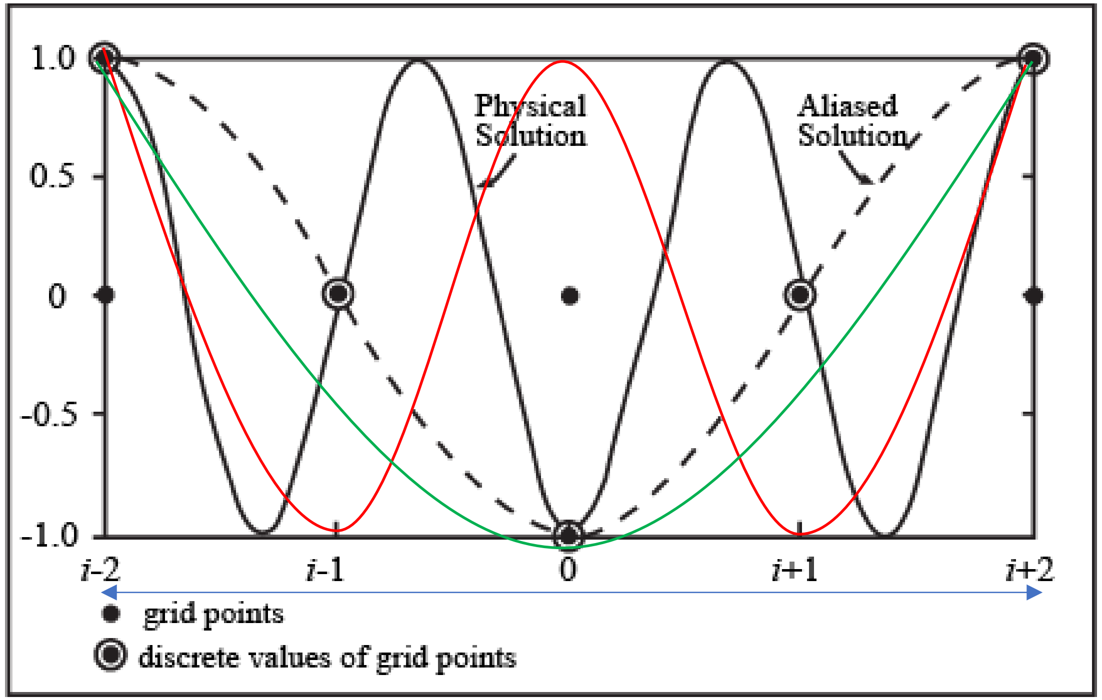


Fig. 13.16: Ilustração esquemática de **aliasing não linear**. Uma ***solução física com um comprimento de onda de $4/3\Delta x$***, causada pela interação não linear de ondas de $2\Delta x$ e $4\Delta x$, é vista como uma onda $4\Delta x$ em uma malha de grade numérica. (Depois de Pielke 2002, reproduzido com permissão de Elsvier.) (De Lin 2007)

No mundo real, temos a perturbação de grande escala gerada pelo forçamento, que então se transforma em uma perturbação de mesoescala, perturbação de pequena escala e então se dissipa em uma escala ainda menor.

Porém, não parece acontecer da mesma forma no modelo numérico, em que ondas com comprimento de onda menor que $< 2\Delta x$ **serão representadas como ondas de maior escala** $\cong 4\Delta x$**.**

Portanto, *<u>mesmo que um método numérico seja linearmente estável</u>*, os resultados podem ser degradado pelo ruído computacional.

Esse acúmulo errôneo de energia pode fazer com que as variáveis dependentes do modelo aumentem em magnitude abruptamente sem limites. Esse fenômeno é chamado de instabilidade computacional não linear.

Existem dois métodos propostos para evitar a instabilidade não linear:

(a) **Correção adequada das parametrizações dos termos de forçamento de sub-grade**, como u'w' , v'w' , θ 'w' , etc., de modo que a energia seja extraída das equações médias,

(b) **uso de um filtro ou suavizador espacial para remover as ondas mais curtas**, porem que deixe as ondas mais longas relativamente inalteradas.

Existem dois métodos propostos para evitar a instabilidade não linear:

A primeira abordagem é melhor que a segunda porque é baseada em princípios físicos. No entanto, requer um bom conhecimento sobre os termos de correlação subgrid-escala.

A segunda abordagem pode ser realizada de maneira relativamente mais fácil, como as propostas por Shapiro (1970; 1975).

Existem dois métodos propostos para evitar a instabilidade não linear:

Para entender a suavização numérica, podemos considerar um operador unidimensional simples de três pontos,

$$\bar{\phi}_j = (1-s)\phi_j + \left(\frac{s}{2}\right)\left(\phi_{j+1} + \phi_{j-1}\right)$$

onde $x = j\Delta x$ **e** s **é uma constante que pode ser negativa.,**

Se este operador for aplicado à forma harmônica de uma onda

$$\phi = Ae^{-ikx}$$

onde o número de onda $k = \frac{2\pi}{L}$ **e** A **é uma constante que pode ser complexa, então o resultado pode ser escrito como**

Existem dois métodos propostos para evitar a instabilidade não linear:

$$\bar{\phi}_j = (1-s)\phi_j + \left(\frac{S}{2}\right)\left(\phi_{j+1} + \phi_{j-1}\right) \qquad x = j\Delta x \qquad \phi = Ae^{-ikx} \qquad \phi = Ae^{-ik(j\Delta x)}$$

$$\bar{\phi}_j = (1-s)Ae^{-ik(j\Delta x)} + \left(\frac{S}{2}\right)\left(Ae^{-ik(j+1)\Delta x} + Ae^{-ik(j-1)\Delta x}\right)$$

$$\bar{\phi}_j = (1-s)Ae^{-ik(j\Delta x)} + \left(\frac{S}{2}\right)\left(Ae^{-ik(j\Delta x)}e^{-ik\Delta x} + Ae^{-ik(j\Delta x)}e^{ik\Delta x}\right)$$

$$\bar{\phi}_j = (1-s)Ae^{-ik(j\Delta x)} + \left(\frac{S}{2}\right)Ae^{-ik(j\Delta x)}\left(\left[e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}\right]\right)$$

$$\bar{\phi}_j = Ae^{-ik(j\Delta x)} - sAe^{-ik(j\Delta x)} + sAe^{-ik(j\Delta x)}\left(\left[\frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2}\right]\right)$$

$$\bar{\phi}_j = Ae^{-ik(j\Delta x)} - sAe^{-ik(j\Delta x)} + sAe^{-ik(j\Delta x)}cos(k\Delta x)$$

$$\bar{\phi}_j = Ae^{-ik(j\Delta x)}(1 - s + scos(k\Delta x))$$

$$\bar{\phi}_j = \phi[1 - s(1 - cos(k\Delta x))] \qquad \bar{\phi}_j = 1 - 2s\left(sin^2\left(\frac{\pi\Delta x}{L}\right)\right)$$

Existem dois métodos propostos para evitar a instabilidade não linear:

$$\bar{\phi}_j = \phi\left[1 - s\left(1 - cos(k\Delta x)\right)\right]$$

$$x = j\Delta x$$

$$\phi = Ae^{-ikx}$$

$$\phi = Ae^{-ik(j\Delta x)}$$

$$\bar{\phi}_j = \phi R$$

$$\boxed{\begin{aligned} cos\,2\theta &= 1 - 2\,sin^2\,\theta \\ 2\,sin^2\,\theta &= 1 - cos\,2\theta \end{aligned}}$$

$$R = \left[1 - s\left(1 - cos(k\Delta x)\right)\right]$$

$$R = 1 - 2s\left(sin^2\left(\frac{\pi\Delta x}{L}\right)\right)$$

$$R = 1 - 2s\left(sin^2\left(\frac{\pi\Delta x}{L}\right)\right)$$

Na equação acima, R é referido como a função de resposta.

(5) Se $R \geq 0$, então o número e a fase da onda não são afetados, mas apenas a amplitude da onda.
(6) Se $R \geq 1$, então a onda é amplificada pelo operador.
(7) Se $R < 1$, então a onda é amortecida pelo operador.
(8) Se $R < 0$, então a fase da onda é deslocada em 180^0, o que é indesejável.
(9) Com s = 1/2 , obtemos o suavizador de segunda ordem,

$$R = 1 - 2s\left(sin^2\left(\frac{\pi\Delta x}{L}\right)\right)$$

(9) Com s = 1/2 , obtemos o suavizador de segunda ordem,

$$\bar{\phi}_j = \frac{1}{4}(\phi_{j-1} + 2\phi_j + \phi_{j+1})$$

$$R(s) = [1 - s(1 - cos(k\Delta x))]$$

$cos\, 2\theta = 2\, cos^2\,\theta - 1$	$cos\, 2\theta = 1 - 2\, sin^2\,\theta$
$cos\, 2\theta + 1 = 2\, cos^2\,\theta$	$2\, sin^2\,\theta = 1 - cos\, 2\theta$
Replace θ *by* $\frac{x}{2}$	*Replace* θ *by* $\frac{x}{2}$
$\cos 2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 2\cos^2\frac{x}{2}$	$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos 2\left(\frac{x}{2}\right)$
$\cos x + 1 = 2\cos^2\frac{x}{2}$	$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \left[1 - \frac{1}{2}(1 - cos(k\Delta x))\right]$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \left[1 - \frac{1}{2}(1 - cos(k\Delta x))\right]$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{cos(k\Delta x)}{2}\right]$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}[1 + cos(k\Delta x)]$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}[2cos^2(k\Delta x)]$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = cos^2(k\Delta x)$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = cos^2\left(\frac{\pi\Delta x}{L}\right)$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = cos^2\left(\frac{\pi\Delta x}{L}\right)$$

De cima, se $\mathrm{L} = 2\Delta x$, então R = 0. Assim, para uma onda $2\Delta x$, o amortecimento irá eliminá-la imediatamente.

$cos\,2\theta = 2\,cos^2\,\theta - 1$	$cos\,2\theta = 1 - 2\,sin^2\,\theta$
$cos\,2\theta + 1 = 2\,cos^2\,\theta$	$2\,sin^2\,\theta = 1 - cos\,2\theta$
Replace θ *by* $\frac{x}{2}$	*Replace* θ *by* $\frac{x}{2}$
$\cos 2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 2\cos^2\frac{x}{2}$	$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos 2\left(\frac{x}{2}\right)$
$\cos x + 1 = 2\cos^2\frac{x}{2}$	$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$

Como um amortecedor de três pontos amortece as ondas mais curtas com muita força, é menos desejável.

Um amortecedor de cinco pontos pode ser obtido aplicando 2 armortecimento sucessivos de três pontos com s = 1/2 e -1/2,

$$\overline{\overline{\phi}}_j = \frac{1}{16}\left[10\phi_j + 4\left(\phi_{j-1} + \phi_{j+1}\right) - \left(\phi_{j-2} + \phi_{j+2}\right)\right]$$

$$= \phi_j - \frac{1}{16}\left[6\phi_j - 4\left(\phi_{j-1} + \phi_{j+1}\right) + \left(\phi_{j-2} + \phi_{j+2}\right)\right] \qquad (13.4.10)$$

O suavizador acima também removerá a onda $2\Delta x$ imediatamente, mas preservará mais as ondas mais longas.

$$\overline{\overline{\phi}}_j = \frac{1}{16}\left[10\phi_j + 4\left(\phi_{j-1} + \phi_{j+1}\right) - \left(\phi_{j-2} + \phi_{j+2}\right)\right]$$

$$= \phi_j - \frac{1}{16}\left[6\phi_j - 4\left(\phi_{j-1} + \phi_{j+1}\right) + \left(\phi_{j-2} + \phi_{j+2}\right)\right] \qquad (13.4.10)$$

De fato, o amortecedor de 5 pontos acima é análogo à forma de diferenças finitas da equação de difusão de 4ª ordem,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - c\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 0, \qquad (13.4.11)$$

$$\phi_j^{\tau+1} = \phi_j^{\tau} - \gamma\left[6\phi_j^{\tau} - 4(\phi_{j-1}^{\tau} + \phi_{j+1}^{\tau}) + (\phi_{j-2}^{\tau} + \phi_{j+2}^{\tau})\right], \qquad (13.4.12)$$

where $\gamma = c\Delta t / \Delta x^4$.

Se escolhermos $\gamma = \frac{1}{16}$, então a equação acima é análoga a (13.4.10).

Assim, ao aplicar o amortecedor de 5 pontos, tem um efeito semelhante à difusão de 4ª ordem. É por isso que a suavização numérica também é chamada de difusão numérica.

Para manter a amplitude de ondas mais longas, o coeficiente $\frac{1}{16}$, in (13.4.10) ou γ é frequentemente reduzido. O teste é necessário para descobrir o coeficiente mais apropriado da suavização numérica ou difusão.

Na prática, a suavização não é aplicada aos pontos de contorno.

Para os pontos de grade adjacentes aos contornos, pode ser necessário aplicar o suavizador de três pontos ou difusão de segunda ordem, que tem uma forma de

$$\overline{\phi_j} = \phi_j - \gamma_2\left[2\phi_j - \left(\phi_{j-1} + \phi_{j+1}\right)\right]. \qquad (13.4.13)$$

Para tornar (13.4.13) consistente com (13.4.12), exigimos

$$\gamma_2 = 4\gamma_1 . \qquad (13.4.14)$$

Observe que o esquema Leapfrog produz um modo computacional com onda $2\Delta t$.

Para suprimir isso, podemos aplicar o tempo mais suave (Robert, 1966; Asselin, 1972)

$$\phi^{\tau+1} = \overline{\phi}^{\tau-1} + 2\Delta t(\partial\phi/\partial t)^{\tau}, \qquad (13.4.15)$$

where

$$\overline{\phi}^{\tau-1} = \phi^{\tau-1} + \gamma\left(\phi^{\tau} - 2\phi^{\tau-1} + \overline{\phi}^{\tau-2}\right). \qquad (13.4.16)$$

Com base em testes numéricos, é preferível uma escolha de $\gamma < 0.25$.