



Um Exemplo: Modelo de Canal Barotrópico QG (Previsão do tempo)



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

2. Despreze o seguinte.

- **Fricção (PBL->** abaixo de ~ 1-2 km parte da atmosfera que sofre influencia do atrito).
- O ar em contato com a superfície sofre atrito, diminuindo efetivamente a velocidade do vento.

Magnitude: depende da velocidade do vento e da rugosidade da superfície.

Direção : oposta ao movimento da parcela aérea

análise de escala

momentum

$$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_j} = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j (\bar{u}_k) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção media

gravidade

Coriolis

Gradiente de Pressão

Atmosfera livre: a atmosfera acima da PBL isenta de efeitos de atrito.



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica



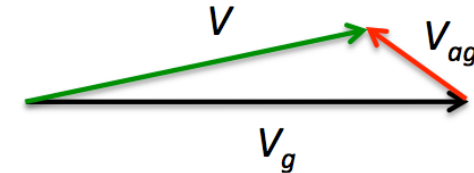
análise de escala

2. Faça as considerações na aceleração local e advectiva.

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_g + \vec{V}_{ag}$$



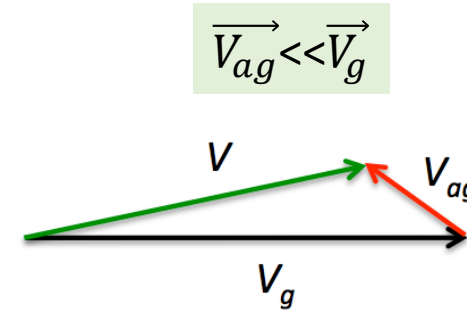
$$\frac{D\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}_g + \vec{V}_{ag}}{\partial t} + (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag})$$



Camada Limite Planetária

2. Despreze o seguinte.

- Orientação pelo vento ageostrófico
- velocidade vertical.
- Advecção do momento ageostrófico .
- Tendência local do momento ageostrófico .



$$\frac{D\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}}{\partial t} + (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag})$$

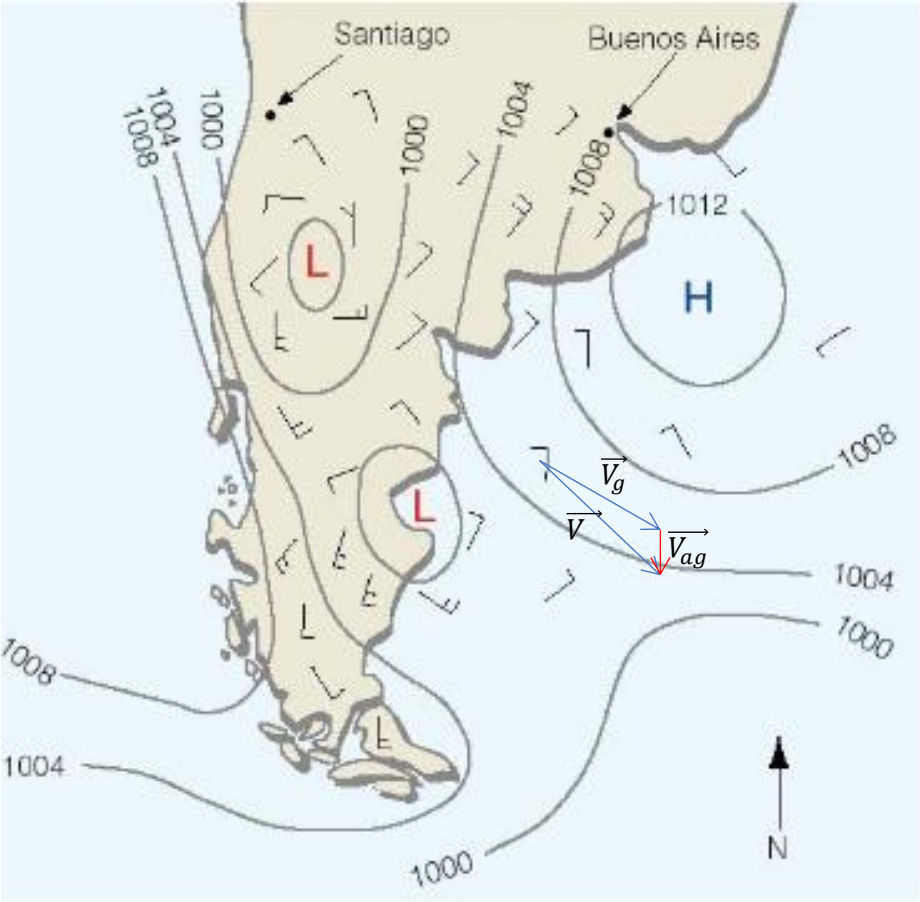
Expanda os termos

Aceleração local do (\vec{V}_g)	Aceleração advectiva geostrofica do (\vec{V}_g)	Aceleração advectiva geostrofica (\vec{V}_{ag})
$\frac{\partial\vec{V}_g}{\partial t}$	$(\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g)$	$(\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag})$
$\frac{\partial\vec{V}_{ag}}{\partial t}$	$(\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_g)$	$(\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag})$
Aceleração local do (\vec{V}_{ag})	Aceleração advectiva ageostrófica do (\vec{V}_g)	Aceleração advectiva ageostrófica (\vec{V}_{ag})

$$\frac{\partial\vec{V}_g}{\partial t} + \frac{\partial\vec{V}_{ag}}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) + (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_g) + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag}) + (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag})$$

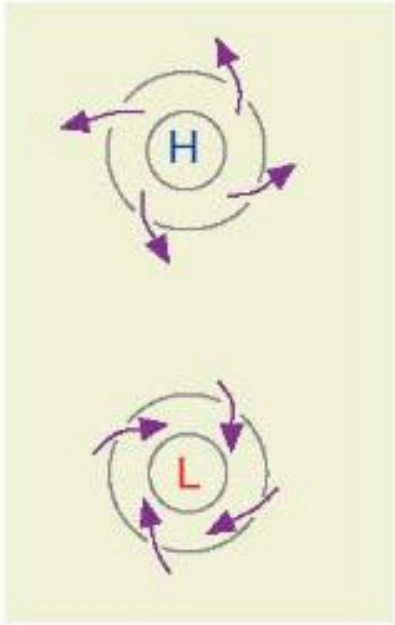


Teoria da Aproximação Quase Geostrófica



Em latitudes médias

$$\overrightarrow{V_{ag}} \ll \overrightarrow{V_g}$$



Surface map
Southern Hemisphere



Escoamento aproximadamente geostrófico

$$\overrightarrow{V} \cong \overrightarrow{V_g}$$



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

2. Despreze o seguinte.

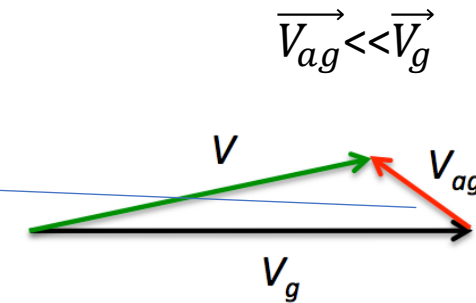
- Orientação pelo vento ageostrófico
- velocidade vertical.
- Advecção do momento ageostrófico .
- Tendência local do momento ageostrófico .

$$\vec{V} \cong \vec{V}_g$$

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}_{ag}}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) + (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_g) + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag}) + (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag})$$

Considere

$$\vec{V}_{ag} \ll \vec{V}_g$$



Portanto $\vec{V}_{ag} \cong 0$

$$\frac{\partial \vec{V}_{ag}}{\partial t} \approx 0, \quad (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_g) \approx 0, \quad (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag}) \approx 0, \quad (\vec{V}_{ag}) \cdot \nabla (\vec{V}_{ag}) \approx 0$$



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

Portanto, para o escoamento quase geostrófico:

Aceleração Geostrófica Local

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g)$$

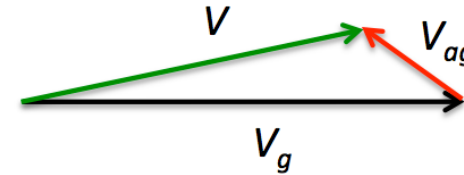
Aceleração Geostrófica Advectiva



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

2. Despreze o seguinte (por análise de escala).

- Fricção.
- Orientação pelo vento ageostrófico
- velocidade vertical.
- Advecção do momento ageostrófico .
- Tendência local do momento ageostrófico .



$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g)$$

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} - \omega \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial P}$$

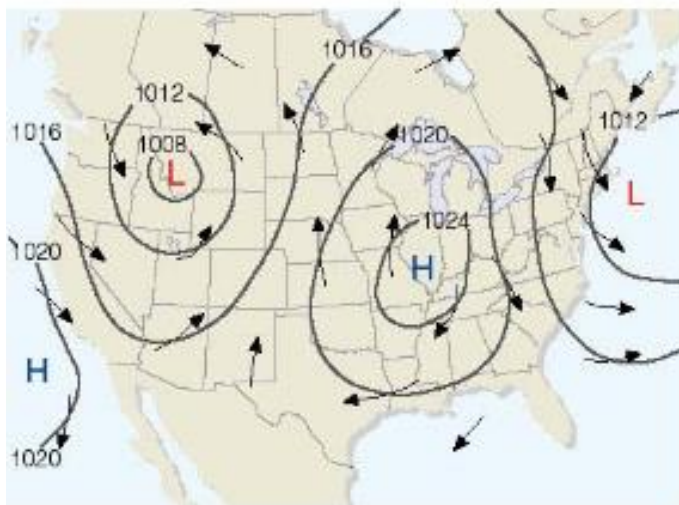


Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

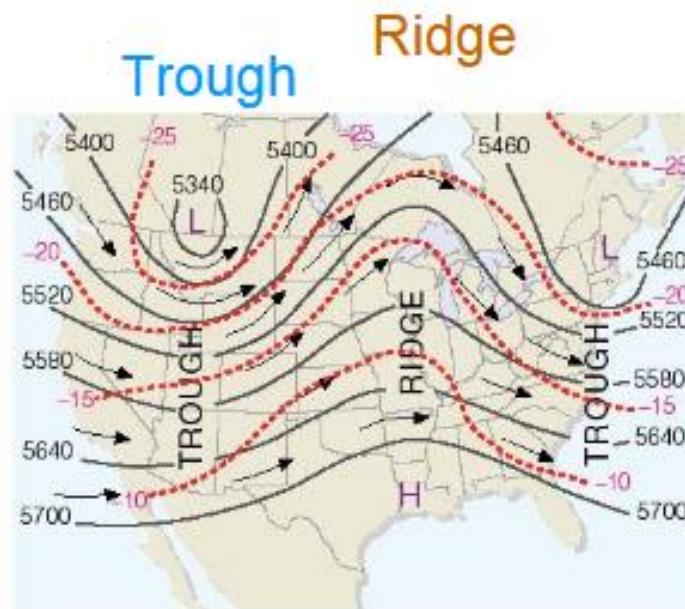
$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} - \omega \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial P}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} - \omega \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial P}$$

- **velocidade vertical pode ser desprezada por análise de escala .**



(a) Surface map



(b) Upper-air map (500 mb)

$$\omega \frac{\partial u_g}{\partial P} \Rightarrow 0$$

$$\omega \frac{\partial v_g}{\partial P} \Rightarrow 0$$



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} - \omega \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial P}$$

- **velocidade vertical pode ser desprezada por análise de escala .**

$$\omega \ll u_g$$

$$\omega \ll v_g$$

$$\omega \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial P} \ll u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} \quad e \quad v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g \equiv \frac{D\vec{V}_g}{Dt_g}$$



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica



$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g) \cdot \nabla (\vec{V}_g) = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g \equiv \frac{D\vec{V}_g}{Dt_g}$$

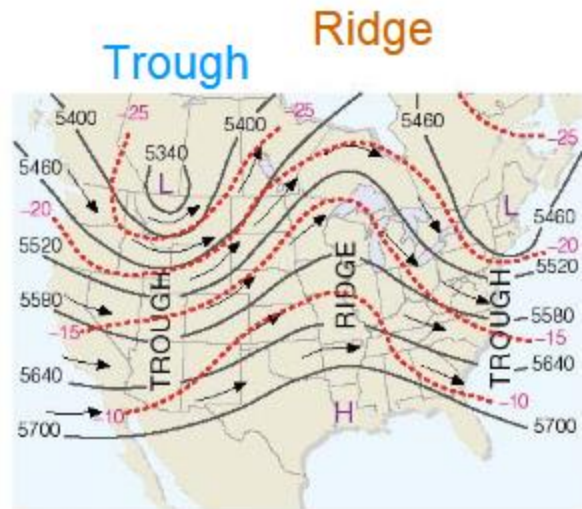
- velocidade vertical pode ser desprezada por análise de escala .

Aceleração do escoamento

Aceleração escoamento Geostrófico



$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \frac{D\vec{V}_g}{Dt_g}$$



(b) Upper-air map (500 mb)



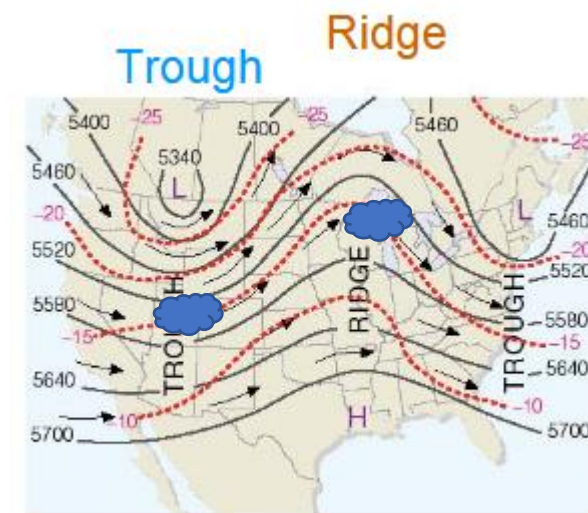
Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

2. Aproximação (por análise de escala).

- Orientação pelo vento ageostrófico
- velocidade vertical.
- Advecção do momento ageostrófico .
- Tendência local do momento ageostrófico .

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \frac{D\vec{V}_g}{Dt_g}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{D}{Dt_g} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}$$



(b) Upper-air map (500 mb)

Interpretação física: A taxa de mudança de momento seguindo o movimento das parcelas é aproximadamente igual à taxa de mudança de momento geostrófico seguindo o escoamento geostrófico.



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Coriolis

$$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_j} = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j (\bar{u}_k) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} - \frac{\partial(\overline{u_j' u_i'})}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i)}{\partial x_j^2}$$

momentum

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j (\bar{u}_k) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção
média

gravidade
de

Coriolis

Gradiente
de
Pressão

3. Suponha um **plano β para latitude média** (aproximação de expansão de Taylor para f)



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

3. Suponha um plano β para latitude média (aproximação de expansão de Taylor para f)

$$f = f_o + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2 + \dots$$

Ignorando termos de alta ordem

$$f = f_o + \frac{\partial f}{\partial y} y = f_o + \beta y$$

$$f = f_o + \beta y$$



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Coriolis

$$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_j} = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j (\bar{u}_k) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} - \frac{\partial(\overline{u_j' u_i'})}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i)}{\partial x_j^2}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - f \hat{k} \times \vec{V} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

momentum

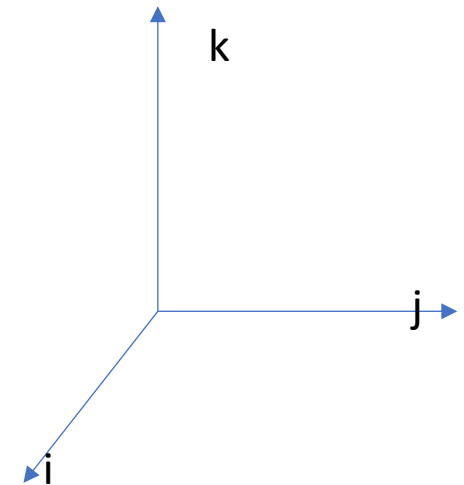
$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - (f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(P)}{\partial x_i}$$

Advecção
de

gravidade

Coriolis

Gradiente
de
Pressão



$$f \hat{k} \times \vec{V} = -f_o \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$f \hat{k} \times \vec{V} = -v \hat{i} + u \hat{j}$$



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica



análise de escala Força de Gradiente de Pressão

momentum

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - (f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção
media

gravida
de

Coriolis

Gradiente
de
Pressão



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$f = f_0 + \beta y$$

Isso permite que f_0 substitua f na relação vento geostrófico, que se torna

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla \Phi$$

$$f_0 \vec{V}_g = \hat{k} \times \nabla \Phi \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{j}$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = \hat{k} \times \hat{k} \times \nabla \Phi \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{j} = -\nabla \Phi$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla \Phi$$



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$f = f_o + \beta y$$

Isso permite que f_o substitua f na relação vento geostrófico, que se torna

momentum

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - (f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção
media

gravidade

Coriolis

Gradiente
de
Pressão

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\bar{P}}{\rho_0} \right) = \frac{\partial(\bar{\Phi})}{\partial x_i} = \nabla \bar{\Phi}$$

$$P = \rho_0 g z$$

$$\frac{P}{\rho_0} = g z = \Phi$$

Portanto

$$\hat{k} \times f_o \vec{V}_g = -\nabla \Phi = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força de Gradiente de Pressão

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla \Phi = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

momentum

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - (f_0 + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}$$

Advecção
media

gravidade

Coriolis

Gradiente
de
Pressão

$$P = \rho_0 g z$$

$$\frac{P}{\rho_0} = g z = \Phi$$

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - (f_0 + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \nabla \Phi_g - \nabla \Phi_{ag}$$



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica

análise de escala Força Peso pode ser desprezada

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -(f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \nabla \Phi_g - \nabla \Phi_{ag}$$

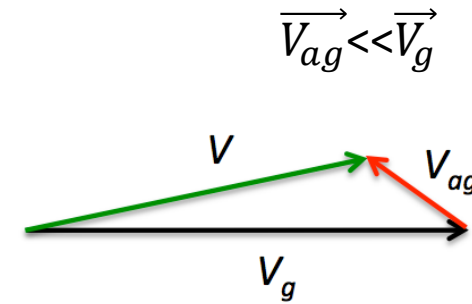
$$\hat{k} \times f_o \vec{V}_g = -\nabla \Phi = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (\bar{P})}{\partial x_i}$$

$$\frac{D \vec{V}_g}{Dt} = -(f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) + \hat{k} \times f_o \vec{V}_g - \nabla \Phi_{ag}$$

$$\frac{D \vec{V}_g}{Dt} = -(f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - (f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) + \hat{k} \times f_o \vec{V}_g - \nabla \Phi_{ag}$$

$$\frac{D \vec{V}_g}{Dt} = -\hat{k} \times f_o \vec{V}_g - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - (f_o) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) + \hat{k} \times f_o \vec{V}_g - \nabla \Phi_{ag}$$

$$\frac{D \vec{V}_g}{Dt} = -(f_o) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - \nabla \Phi_{ag}$$





Teoria da Aproximação Quase Geostrófica



análise de escala Força Peso pode ser desprezada

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -(\beta y)\hat{k} \times (\vec{V}_g) - (f_o)\hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y)\hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - \nabla\Phi_{ag}$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -(f_o)\hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y)\hat{k} \times (\vec{V}_g) - (\beta y)\hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - \nabla\Phi_{ag}$$



Teoria da Aproximação Quase Geostrófica



5. Usando a análise de escala, pode-se demonstrar que $-(\beta y) \hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}})$ pode ser desprezado, produzindo a forma final da equação do momento QG e $\overrightarrow{V_g} \gg \overrightarrow{V_{ag}}$

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o) \hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}}) - (\beta y) \hat{k} \times (\overrightarrow{V_g}) - (\beta y) \hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}}) - \nabla \Phi_{ag}$$

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o) \hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}}) - (\beta y) \hat{k} \times (\overrightarrow{V_g}) - (\beta y) \hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}}) - \nabla \Phi_{ag}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \beta y \\ u_{ag} & v_{ag} & 0 \end{vmatrix} = (0 - \beta y v_{ag})_i + (\beta y u_{ag} - 0)_j + (0 - 0)_k$$

$$\frac{D\overrightarrow{V_g}}{Dt} = -(f_o) \hat{k} \times (\overrightarrow{V_{ag}}) - (\beta y) \hat{k} \times (\overrightarrow{V_g}) - \nabla \Phi_{ag}$$

$$f = 2\Omega \sin(\theta_0 + \theta') \approx 2\Omega \sin \theta_0 + \frac{2\Omega \cos \theta_0}{r_0} r_0 (\theta - \theta_0)$$

$$= f_0 + \beta_0 y', \text{ where}$$

$$f_0 \equiv 2\Omega \sin \theta_0, \text{ and}$$

$$\beta_0 \equiv (2\Omega \cos \theta_0 / r_0)$$

Interpretação física: O primeiro termo à direita representa a força de Coriolis que atua no vento ageostrófico, o que leva a uma aceleração do escoamento geostrófico perpendicular ao vento ageostrófico.



4. Resumo das premissas e relações acima para reescrever a equação do momento horizontal

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla\Phi - f\hat{k} \times \vec{V}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_g + \vec{V}_{ag}$$

$$\hat{k} \times f_0 \vec{V}_g = -\nabla\Phi$$

$$f = f_0 + \frac{\partial f}{\partial y} y = f_0 + \beta y$$

$$\frac{D\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}}{Dt} = \hat{k} \times f_0 \vec{V}_g - (f_0 + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \nabla\Phi_{ag}$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} + \frac{\vec{V}_{ag}}{Dt} = \hat{k} \times f_0 \vec{V}_g - (f_0) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - (f_0) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - \nabla\Phi_{ag}$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} + \frac{\vec{V}_{ag}}{Dt} = -(f_0) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - \nabla\Phi_{ag}$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -(f_0) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - \nabla\Phi_{ag}$$



4. Equação do Momento Horizontal

$$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_j} = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j (\bar{u}_k) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} - \frac{\partial(\overline{u_j' u_i'})}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i)}{\partial x_j^2}$$

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla_h \vec{V}_g = -g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - (f_o + \beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P}_g)}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P}_{ag})}{\partial x_i}$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -(f_o) \hat{k} \times (\vec{V}_{ag}) - (\beta y) \hat{k} \times (\vec{V}_g) - \nabla \Phi_{ag}$$

Palavras chaves.

“É **importante entender fisicamente** o processo de simplificação da equação de momentum.

Cada termo da equação pode ser desprezado considerando alguma **suposição física** descrita nos slides anteriores.



Equação do momentum Geostrófico



Vorticidade Relativa Geostrófica

Equação do momentum Geostrófico

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -f_o \hat{k} \times \vec{V}_{ag} - \beta y \hat{k} \times \vec{V}_g - \nabla \Phi_{ag}$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -f_o \hat{k} \times \vec{V}_{ag} - \beta y \hat{k} \times \vec{V}_g - \nabla \Phi_{ag}$$

Resolva o produto vetorial dos dois termos:

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -f_o \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ u_{ag} & v_{ag} & \omega_{ag} \end{vmatrix} - \beta y \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ u_g & v_g & \omega_g \end{vmatrix}$$

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -f_o [(0 - v_{ag})\hat{i} + (u_{ag} - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k}] - \beta y [(0 - v_g)\hat{i} + (u_g - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k}] - \frac{\partial \Phi_{ag}}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial \Phi_{ag}}{\partial y} \hat{j}$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -f_o[(0 - v_{ag})\hat{i} + (u_{ag} - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k}] - \beta y[(0 - v_g)\hat{i} + (u_g - 0)\hat{j} + (0 - 0)\hat{k}] - \frac{\partial \Phi_{ag}}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial \Phi_{ag}}{\partial y}\hat{j}$$

Reagrupe os termos:

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -f_o[(-v_{ag})\hat{i} + (u_{ag})\hat{j}] - \beta y[(-v_g)\hat{i} + (u_g)\hat{j}] - \frac{\partial \Phi_{ag}}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial \Phi_{ag}}{\partial y}\hat{j}$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = -f_o[(-v_{ag})\hat{i} + (u_{ag})\hat{j}] - \beta y[(-v_g)\hat{i} + (u_g)\hat{j}] - \frac{\partial \Phi_{ag}}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial \Phi_{ag}}{\partial y}\hat{j}$$

Reagrupe as componentes i e j:

$$\frac{D\vec{V}_g}{Dt} = +f_o(v_{ag})\hat{i} + \beta y(v_g)\hat{i} - f_o(u_{ag})\hat{j} - \beta y(u_g)\hat{j} - \frac{\partial \Phi_{ag}}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial \Phi_{ag}}{\partial y}\hat{j}$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\vec{u}_g}{Dt} + \frac{D\vec{v}_g}{Dt} = +f_o(v_{ag})\hat{i} + \beta y(v_g)\hat{i} - f_o(u_{ag})\hat{j} - \beta y(u_g)\hat{j} - \frac{\partial\Phi_{ag}}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial\Phi_{ag}}{\partial y}\hat{j}$$

Separa a equação nas componentes zonal i e meridional j:

$$\frac{D\vec{u}_g}{Dt} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = -\frac{\partial\Phi_{ag}}{\partial x}\hat{i}$$

$$\frac{D\vec{v}_g}{Dt} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = -\frac{\partial\Phi_{ag}}{\partial y}\hat{j}$$



O Modelo Barotrópico

- Primeiro modelo numérico de previsão do tempo (em funcionamento)

(Charney, J. G., Fjortoft, R. e von Neumann, J. 1950. Integração numérica da equação de vorticidade barotrópica. Tellus, 2, 237–54.)

- Modelo simples para idealização (concepcional)) estudos



Equações do Modelo Barotrópico

Fluido incompressível homogêneo, densidade constante, equilíbrio hidrostático, coordenadas cartesianas, sistema z, barotrópico, ...

Equação do movimento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$$

Equação do Hidrostática

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -g\rho$$

Equação do Continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -g\rho$$

$$\int_P^{Pt} \frac{\partial P}{\partial z} dz = -g\rho \int_0^h dz$$

$$P = g\rho h$$

$$\int_P^0 \partial P = -g\rho \int_0^h dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{\partial gh}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{\partial gh}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\int_0^{w(h)} \partial w = -\frac{\partial u}{\partial x} \int_0^h dz - \frac{\partial v}{\partial y} \int_0^h dz$$

$$\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) h$$

$$\int_0^{w(h)} \frac{\partial w}{\partial z} dz = -\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz - \int_0^h \frac{\partial v}{\partial y} dz$$

$$w(h) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) h$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) h$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -g\rho$$

$$\int_P^{Pt} \frac{\partial P}{\partial z} dz = -g\rho \int_0^h dz$$

$$P = g\rho h$$

$$\int_P^0 \partial P = -g\rho \int_0^h dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{\partial gh}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{\partial gh}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) h$$

$$\frac{\partial gh}{\partial t} + u \frac{\partial gh}{\partial x} + v \frac{\partial gh}{\partial y} = -gh \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$



Vorticidade Relativa Geostrófica

Derivada fazendo o rotacional da equação do momento QG (ou seja, $\partial/\partial x$ da equação $\partial u_g/\partial t_g$ e $\partial/\partial y$ da equação $\partial v_g/\partial t_g$)

$$\frac{D\overline{u}_g}{Dt} + \frac{D\overline{v}_g}{Dt} = +f_o(v_{ag})\hat{i} + \beta y(v_g)\hat{i} - f_o(u_{ag})\hat{j} - \beta y(u_g)\hat{j} - \frac{\partial\Phi_{ag}}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial\Phi_{ag}}{\partial y}\hat{j}$$

Separa a equação nas componentes zonal i e meridional j:

$$\frac{D\overline{u}_g}{Dt} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = -\frac{\partial\Phi_{ag}}{\partial x}\hat{i}$$

$$\frac{D\overline{v}_g}{Dt} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = -\frac{\partial\Phi_{ag}}{\partial y}\hat{j}$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$u = u_g + u_a$$

$$v = v_g + v_a$$

$$h = h_o + h_a$$

$$\frac{\partial(u_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(v_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$u = h_o + h_a$$

$$\frac{\partial g(h_o + h_a)}{\partial t} + (u_g + u_a) \frac{\partial g(h_o + h_a)}{\partial x} + (v_g + v_a) \frac{\partial g(h_o + h_a)}{\partial y} = -g(h_o + h_a) \left(\frac{\partial(u_g + u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_g + v_a)}{\partial y} \right)$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$u = u_g + u_a$$

$$v = v_g + v_a$$

$$h = h_g + h_a$$

$$\frac{\partial(u_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(v_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$u = h_g + h_a$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g(h_g)}{\partial t} + \frac{\partial g(h_a)}{\partial t} + \left(u_g \frac{\partial g(h_g + h_a)}{\partial x} + u_a \frac{\partial g(h_g + h_a)}{\partial x} \right) + \left(v_g \frac{\partial g(h_g + h_a)}{\partial y} + v_a \frac{\partial g(h_g + h_a)}{\partial y} \right) \\ & = -g \left(h_g \left(\frac{\partial(u_g + u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_g + v_a)}{\partial y} \right) + h_a \left(\frac{\partial(u_g + u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_g + v_a)}{\partial y} \right) \right) \end{aligned}$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$u = u_g + u_a$$

$$v = v_g + v_a$$

$$\frac{\partial(u_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$h = h_0 + h_a$$

$$\frac{\partial(v_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g(h_g)}{\partial t} + \frac{\partial g(h_a)}{\partial t} + \left(u_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + u_g \frac{\partial g(h_a)}{\partial x} + u_a \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + u_a \frac{\partial g(h_a)}{\partial x} \right) \\ & + \left(v_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} + v_g \frac{\partial g(h_a)}{\partial y} + v_a \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} + v_a \frac{\partial g(h_a)}{\partial y} \right) \\ & = -g \left(h_g \left(\frac{\partial(u_g)}{\partial x} + \frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) + h_a \left(\frac{\partial(u_g)}{\partial x} + \frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right) \end{aligned}$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$u = u_g + u_a$$

$$v = v_g + v_a$$

$$\frac{\partial(u_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$h = h_g + h_a$$

$$\frac{\partial(v_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g(h_g)}{\partial t} + \frac{\partial g(h_a)}{\partial t} + u_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + v_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} + \left(u_g \frac{\partial g(h_a)}{\partial x} + u_a \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + u_a \frac{\partial g(h_a)}{\partial x} \right) \\ & + \left(v_g \frac{\partial g(h_a)}{\partial y} + v_a \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} + v_a \frac{\partial g(h_a)}{\partial y} \right) \\ & = -g \left(h_g \left(\frac{\partial(u_g)}{\partial x} + \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + \frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) + h_a \left(\frac{\partial(u_g)}{\partial x} + \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + \frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right) \end{aligned}$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$u = u_g + u_a$$

$$v = v_g + v_a$$

$$\frac{\partial(u_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$h = h_g + h_a$$

$$\frac{\partial(v_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g(h_g)}{\partial t} + \frac{\partial g(h_a)}{\partial t} + u_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + v_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} + \left(u_g \frac{\partial g(h_a)}{\partial x} + u_a \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + u_a \frac{\partial g(h_a)}{\partial x} \right) \\ & + \left(v_g \frac{\partial g(h_a)}{\partial y} + v_a \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} + v_a \frac{\partial g(h_a)}{\partial y} \right) \\ & = -g \left(h_g \left(\left(\frac{\partial(u_g)}{\partial x} + \frac{\partial(v_g)}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right) + h_a \left(\left(\frac{\partial(u_g)}{\partial x} + \frac{\partial(v_g)}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right) \right) \end{aligned}$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$u = u_g + u_a$$

$$v = v_g + v_a$$

$$h = h_g + h_a$$

$$\nabla_H \cdot \vec{V}_g = 0$$

$$\frac{\partial(u_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(v_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g(h_g)}{\partial t} + u_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + v_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} + \left(\frac{\partial g(h_a)}{\partial t} + u_g \frac{\partial g(h_a)}{\partial x} + v_g \frac{\partial g(h_a)}{\partial y} \right) + u_a \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + v_a \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} \\ & + \left(u_a \frac{\partial g(h_a)}{\partial x} + v_a \frac{\partial g(h_a)}{\partial y} \right) \\ & = -g \left(h_g \left(\left(\frac{\partial(u_g)}{\partial x} + \frac{\partial(v_g)}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right) + h_a \left(\left(\frac{\partial(u_g)}{\partial x} + \frac{\partial(v_g)}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right) \right) \end{aligned}$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$u = u_g + u_a$$

$$v = v_g + v_a$$

$$h = h_g + h_a$$

$$\nabla_H \cdot \vec{V}_g = 0$$

$$\frac{\partial(u_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(v_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$\vec{V}_g \gg \vec{V}_a$$

$$\begin{aligned} & \frac{Dg(h_g)}{Dt} + \left(\frac{Dg(h_a)}{Dt} \right) + u_a \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + v_a \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} + \left(u_a \frac{\partial g(h_a)}{\partial x} + v_a \frac{\partial g(h_a)}{\partial y} \right) \\ & = -g \left(h_g \left(\left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right) + h_a \left(\left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right) \right) \end{aligned}$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$u = u_g + u_a$$

$$v = v_g + v_a$$

$$h = h_g + h_a$$

$$\nabla_H \cdot \vec{V}_g = 0$$

$$\frac{\partial(u_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(v_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$\vec{V}_g \gg \vec{V}_a$$

$$\frac{Dg(h_g)}{Dt} = -g \left(h_g \left(\left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right) \right)$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$u = u_g + u_a$$

$$v = v_g + v_a$$

$$h = h_g + h_a$$

$$\frac{\partial(u_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} - f_o(v_{ag}) - \beta y(v_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(v_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + f_o(u_{ag}) + \beta y(u_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$\frac{\partial g(h_g)}{\partial t} + u_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + v_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} = -gh_g \left(\left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right)$$



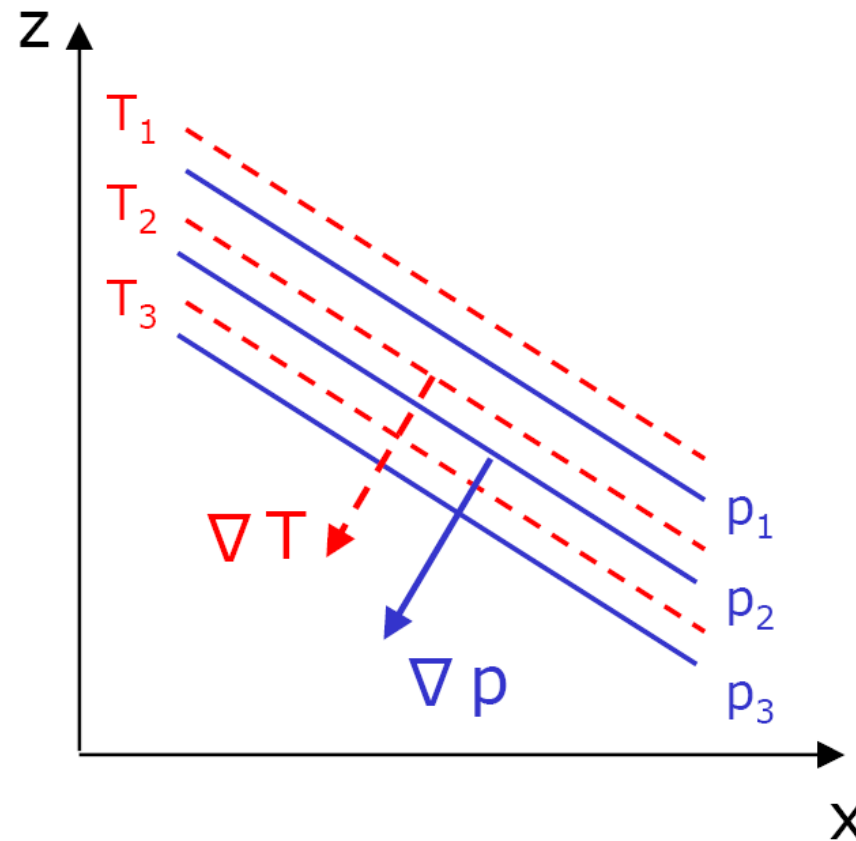
Atmosfera Barotrópica



Atmosfera Barotrópica

"Uma atmosfera barotrópica é aquela em que a densidade depende apenas da pressão, de modo que as superfícies isobáricas também são superfícies de densidade constante.

Para um gás ideal, as superfícies isobáricas também serão isotérmicas se a atmosfera for barotrópica."





Atmosfera Barotrópica



Para um gás ideal, as superfícies isobáricas também serão isotérmicas se a atmosfera for barotrópica."

"Para uma atmosfera barotrópica, temos:"

Because

$$p = \frac{\rho RT}{M}$$

$$\nabla p \times \nabla \rho = 0$$

$$\nabla p \times \nabla \rho = \nabla p \times \left(\frac{pM}{RT} \right) = \frac{M}{RT} \underbrace{\nabla p \times \nabla p}_{=0} - \frac{Mp}{RT^2} \nabla p \times \nabla T$$



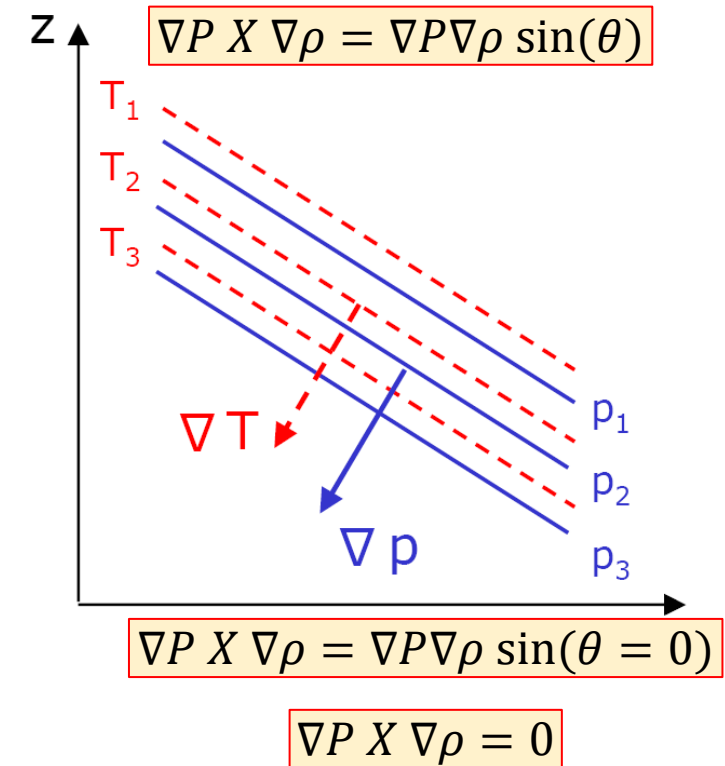
$$\begin{aligned} \nabla p \times \nabla T &= 0 \\ \nabla \rho \times \nabla T &= 0 \end{aligned}$$

Two examples are the: *homogenous atmosphere*

isothermal atmosphere

$$\nabla p = 0$$

$$\nabla T = 0$$



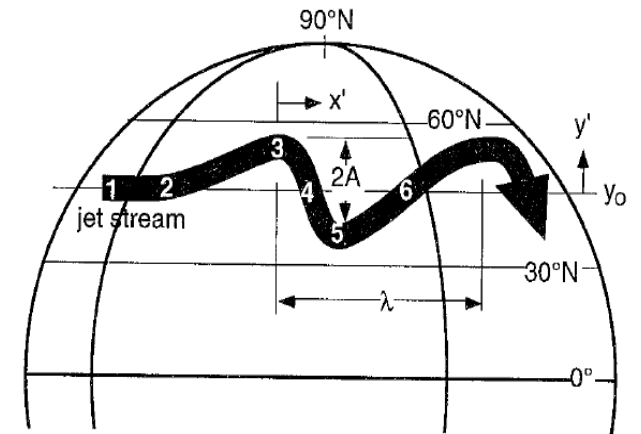


Barotropic Instability and Rossby Waves

"A instabilidade barotrópica e as ondas de Rossby são conceitos chave na dinâmica atmosférica e oceânica, sendo fundamentais para a compreensão do movimento em grande escala na atmosfera e nos oceanos da Terra."

Considere a corrente de jato nas latitudes médias fluindo de oeste para leste. Se pequenas perturbações (por exemplo, fluxo sobre montanhas) fizerem com que a corrente se desvie ligeiramente para o norte, a conservação da vorticidade potencial faz com que a corrente oscile para o norte e para o sul. Essa oscilação da corrente de jato é chamada de onda de Rossby ou onda planetária. Se considerarmos um fluxo zonal que não tenha vorticidade relativa, mas que tenha vorticidade planetária relacionada à latitude do fluxo, a conservação da vorticidade potencial pode ser escrita:

$$\left[\frac{V}{R} + f_c \right]_{\text{inicial}} = \left[\frac{V}{R} + f_c \right]_{\text{final}}$$



Vamos focar no termo de curvatura $\frac{V}{R}$ como substituto da vorticidade relativa completa

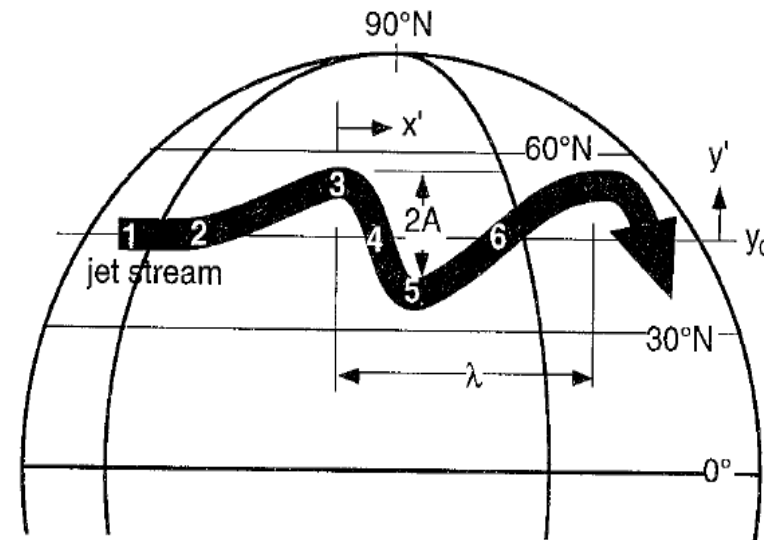


Barotropic Instability and Rossby Waves

"Se o fluxo for levemente perturbado no **ponto 2** para se desviar para o norte, o ar se moverá para latitudes mais altas, onde o parâmetro de Coriolis e a vorticidade planetária são maiores.

"Um cisalhamento ou curvatura negativa (R negativo) no **ponto 3** deve se formar no fluxo para compensar o aumento do cisalhamento planetário, a fim de manter a vorticidade potencial constante. (A corrente de jato gira no sentido horário no ponto 3 até apontar para sudeste)."

"À medida que se move para o sul em direção à sua latitude inicial (**ponto 4**), o jato apresenta menos curvatura (menos vorticidade relativa), mas ainda aponta para sudeste. O jato continuará a se mover para o sul em direção à sua latitude inicial até alcançar uma região onde a vorticidade planetária é menor (ponto 5). Para preservar a vorticidade potencial, ele desenvolve uma curvatura ciclônica e retorna para o nordeste.



"Acontece que o nosso fluxo inicial estável (zonal) do ponto 1 se tornou **ONDULADO** e é considerado instável."



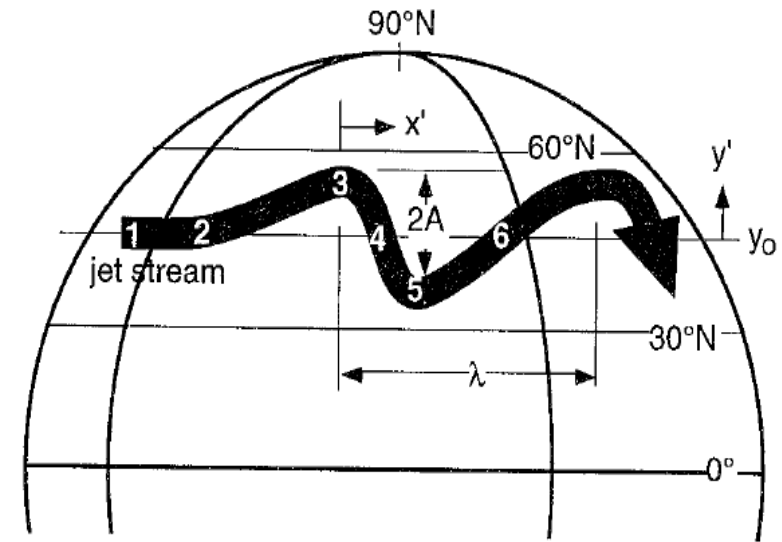
Barotropic Instability and Rossby Waves

O que acontece a seguir

à medida que o **escoamento se torna instável**, as **ondas de Rossby começam a crescer e se amplificar**. Essas ondas podem aumentar a intensidade das oscilações no escoamento, **levando à formação de sistemas meteorológicos em grande escala**, como ciclones e anticiclones.

Com o tempo, **a instabilidade pode gerar padrões de bloqueio**, que mantêm certos padrões de tempo (como longos períodos de calor ou frio) em uma região por um tempo prolongado.

Dependendo das condições atmosféricas, o fluxo pode se reorganizar ou retornar a uma condição mais estável após algum tempo, mas a atmosfera terá experimentado alterações significativas em sua dinâmica e distribuição de energia.





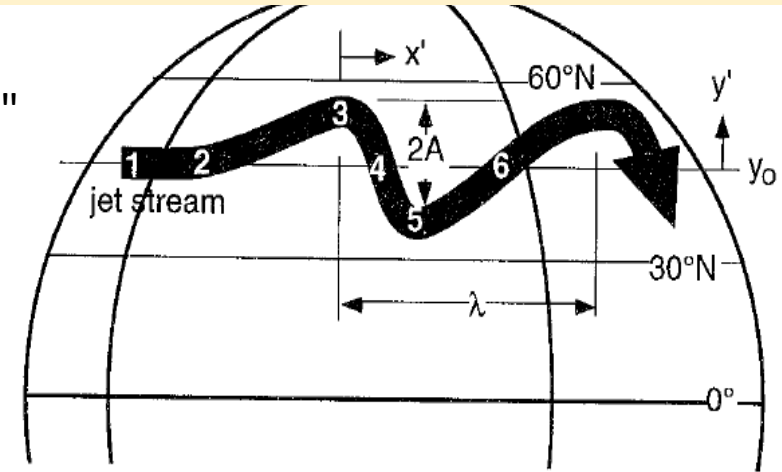
Barotropic Instability and Rossby Waves

"O escoamento 'ondulado' é uma onda de Rossby, que requer uma variação do parâmetro de Coriolis com a latitude para criar instabilidade, chamada de instabilidade barotrópica."

"O parâmetro que fornece a taxa de variação do parâmetro de Coriolis com a latitude é:"

$$\beta = \frac{\partial f_c}{\partial y} = \frac{2\Omega}{R_{terra}} \cdot \cos(\phi)$$

where $R_{earth} = 6357$ km is the average earth radius. Thus, $2 \cdot \Omega / R_{earth} = 2.29 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, and β is on the order of $(1.5 \text{ to } 2) \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.



"O caminho percorrido pela onda é dado por:"

$$y' \approx A \cos \left[2\pi \left(\frac{x' - ct}{\lambda} \right) \right]$$

(nas médias latitudes)
Valores típicos: $\lambda = 6000$ km
 $A = 1665$ km

"Onde y' é a distância de deslocamento norte-sul a partir da latitude central Y_0 da onda, x' é a distância a leste de alguma longitude arbitrária, c é a velocidade de fase, A é a amplitude norte-sul da onda e λ é o comprimento de onda."



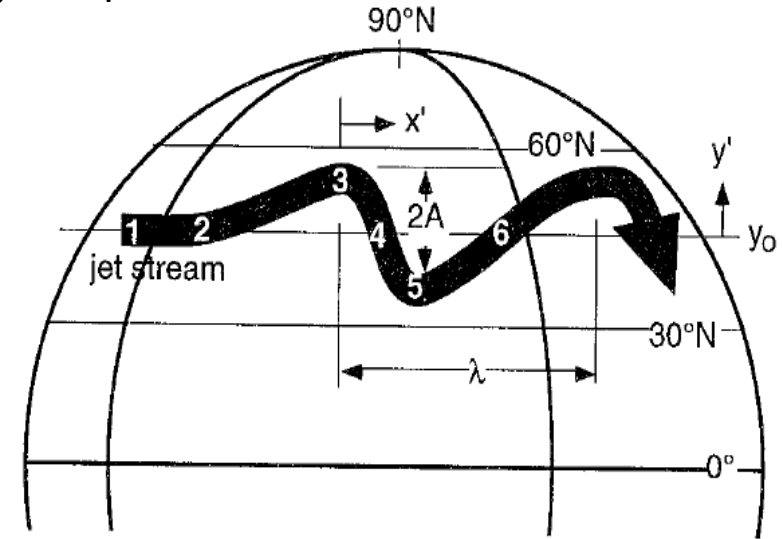
Barotropic Instability and Rossby Waves

Essas ondas se propagam em relação ao vento zonal médio U_0 à velocidade de fase c_0 de aproximadamente:"

$$c_0 = -\beta \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2$$

"Relação de dispersão (porque ondas de diferentes comprimentos de onda se propagam a diferentes velocidades de fase).

O sinal negativo indica a propagação para oeste em relação ao fluxo médio.



Uma velocidade de fase c em relação ao solo é definida como

$$c = U_0 + c_0$$

Isto fornece o movimento da crista da onda de oeste para leste.

(nas médias latitudes)
Valores típicos: $\lambda = 6000$ km
 $A = 1665$ km

Para valores típicos de c_0 e velocidade zonal U_0 , a velocidade de fase é positiva.

Nesse caso, o vento médio empurra as ondas em direção ao leste em relação aos observadores no solo.

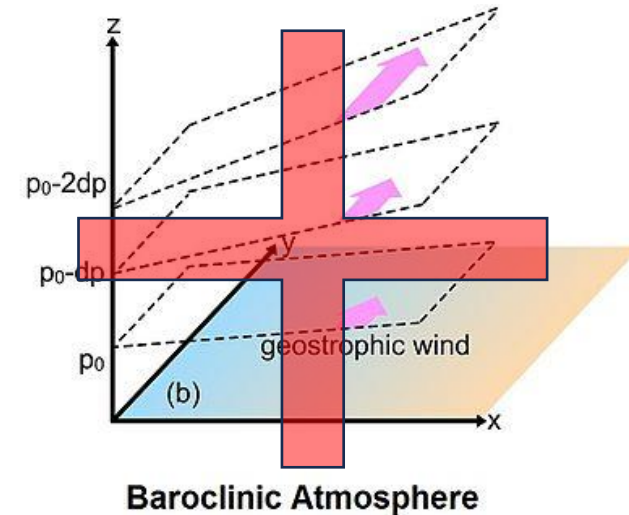
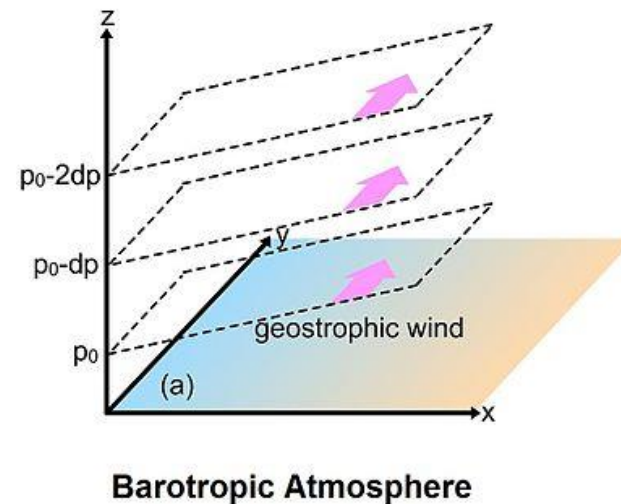
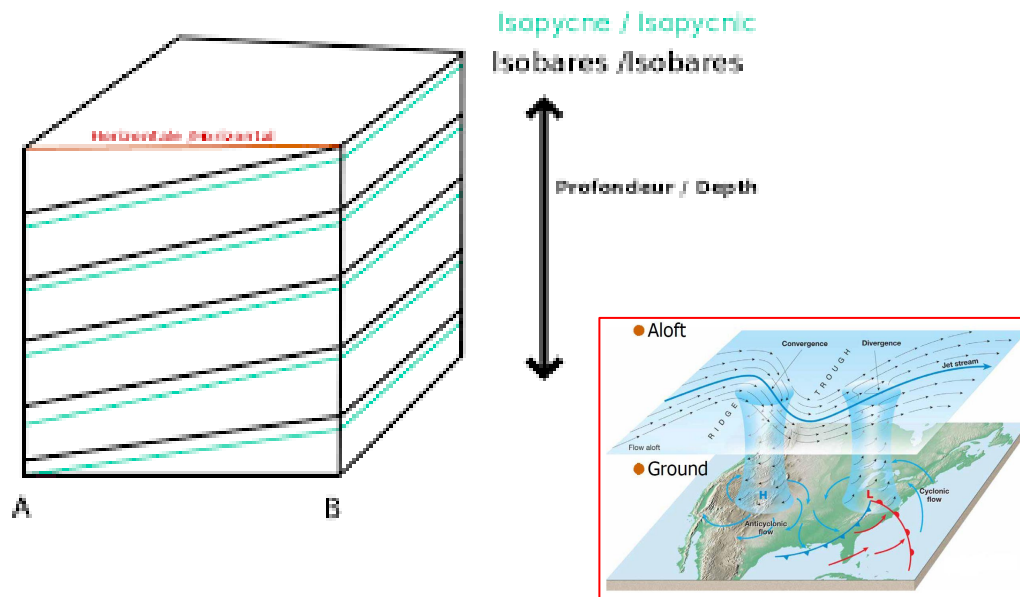
Com base nessas duas equações, podemos dizer que ondas de comprimento de onda mais curto (ondas curtas) viajam mais rápido em direção ao leste do que ondas longas.



Instabilidade Barotrópica

A **instabilidade barotrópica** refere-se a um mecanismo de instabilidade que ocorre em fluidos (como a atmosfera ou os oceanos) quando não há variação de densidade com a altura.

Fluide barotrope / Barotropic fluid



Em tal sistema, a velocidade do fluido varia apenas horizontalmente e não verticalmente.

Em essência, uma atmosfera ou oceano **barotrópico** é aquele em que a pressão é uma função apenas da densidade."



"Características Principais:

Estrutura Homogênea: Em um sistema barotrópico, a densidade é constante ao longo das superfícies de pressão, levando a um fluxo geostrófico simples, onde a força do gradiente de pressão é equilibrada pela força de Coriolis.

Free Atmosphere (no friction)



Surface

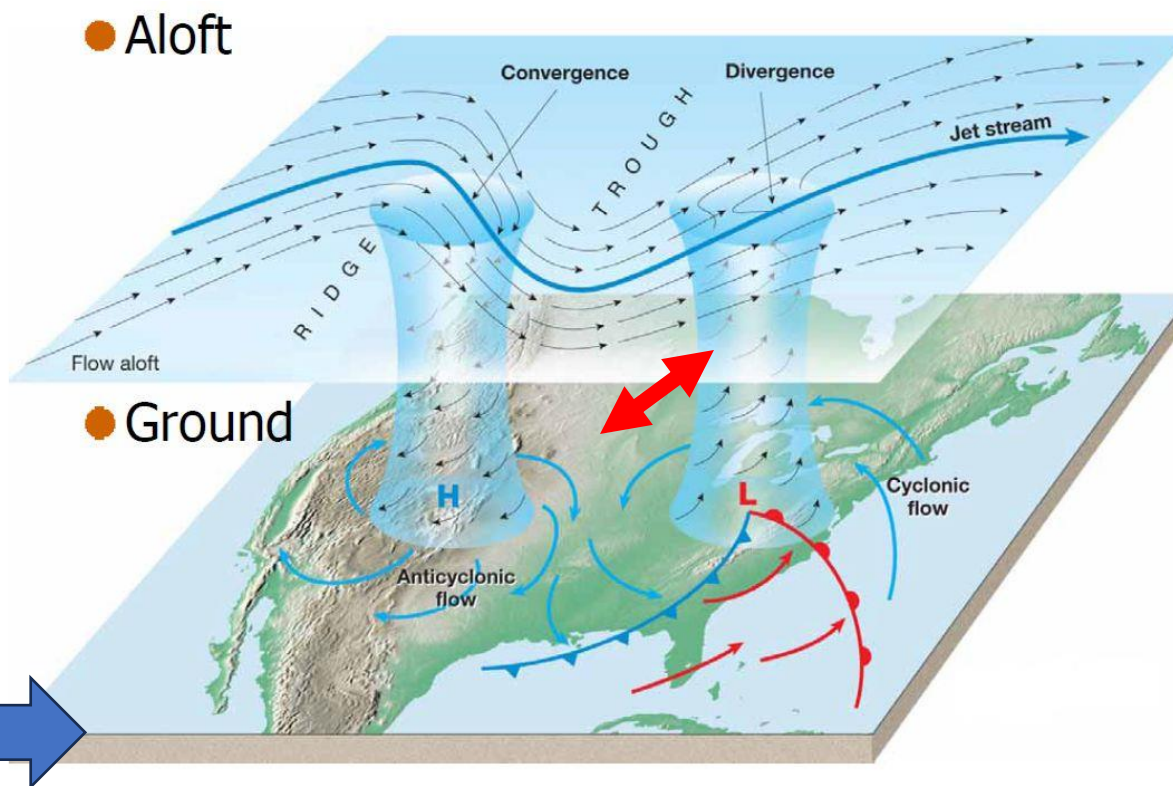


Cuidado com a fricção de superfície



"Características Principais:

Mecanismo de Instabilidade: A instabilidade barotrópica surge da interação **entre diferentes regimes de escoamento** ou do cisalhamento horizontal no escoamento.



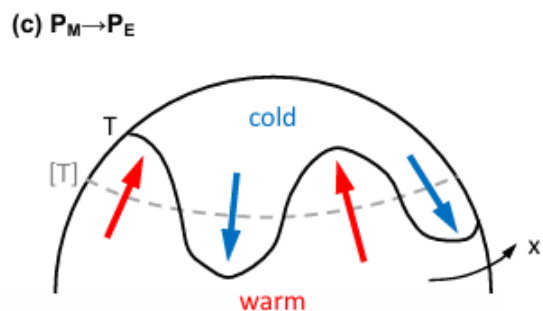
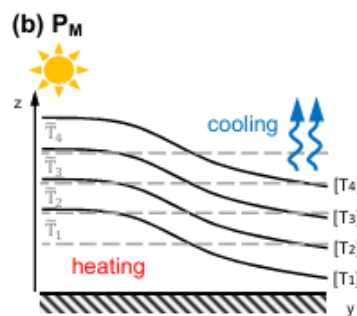
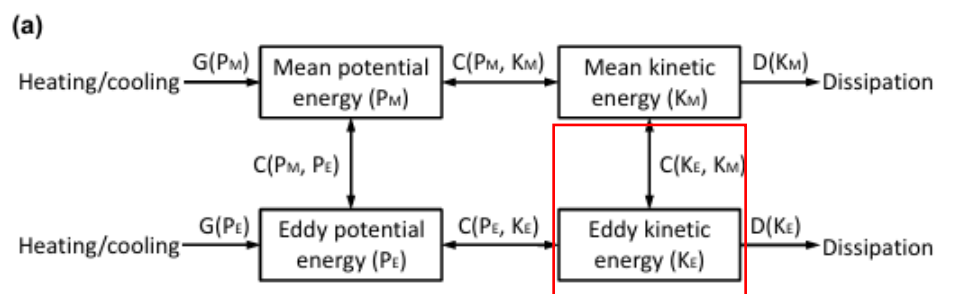
Esse cisalhamento pode amplificar distúrbios, levando ao crescimento de ondas em grande escala e turbulência.



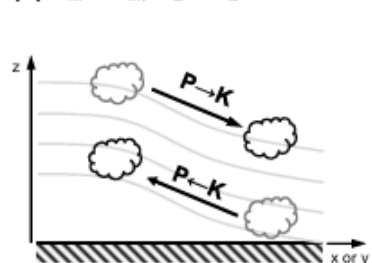
Instabilidade Barotrópica

"Características Principais:

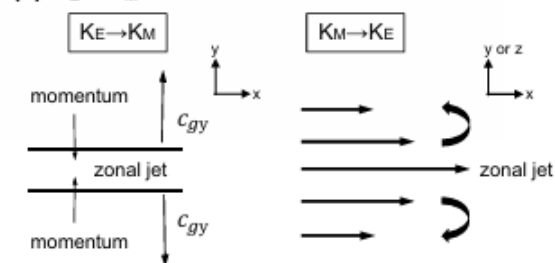
Fonte de Energia: A instabilidade é impulsionada pela conversão da energia cinética do escoamento médio [Km] em vórtices ou ondas [KE]."



(d) $P_M \leftrightarrow K_M, P_E \leftrightarrow K_E$



(e) $K_E \leftrightarrow K_M$



"Figura (a) Estrutura do ciclo de energia de Lorenz (LEC) na Terra: caixas representam os reservatórios de energia; setas representam geração (G), transformação (C) e dissipação (D) de energia.

(b) Geração de PM: o aquecimento e resfriamento desiguais inclinam as isótermas médias zonais (curvas pretas) afastadas das isótermas médias globais (linhas tracejadas cinzas), o que gera PM.

(c) Transporte de calor por vórtices baroclínicos, convertendo PM em PE: a isoterma média zonal (linha tracejada cinza) é deformada para a isoterma (curva preta) pelos vórtices baroclínicos, o que diminui a diferença meridional média zonal, ou seja, PM, mas leva à variância zonal, ou seja, PE.

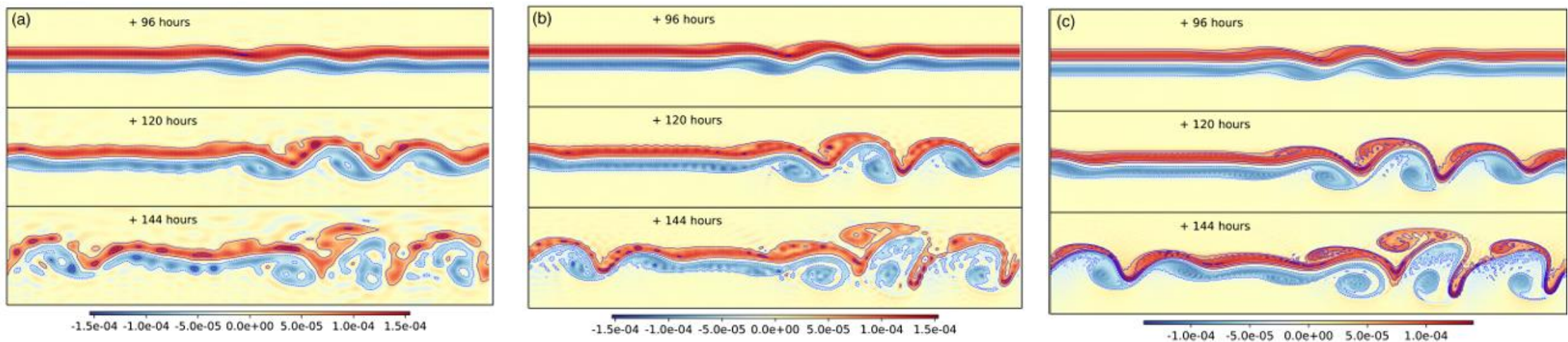
(d) Movimentos cruzados a isóbaras, convertendo energia potencial e energia cinética entre si.

(e) Interações entre ondas e fluxo médio, convertendo KE e KM entre si: sob um plano positivo, ondas arbitrárias com velocidade de grupo direcionada para longe da região de origem na direção y (cgy) podem transportar momento de volta, juntamente com a conversão de KE em KM; instabilidades de cisalhamento de jatos zonais geram vórtices, juntamente com a conversão de KM em KE.

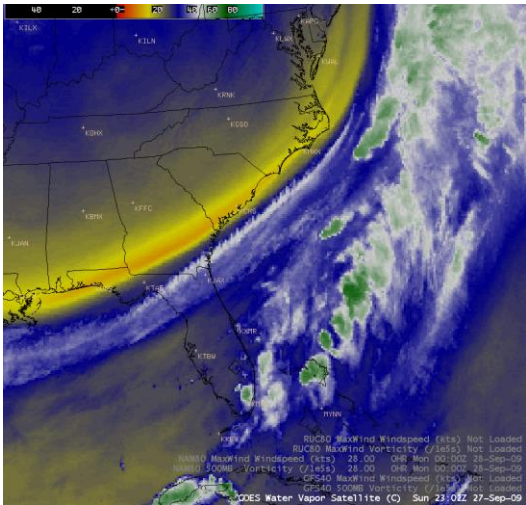


A **instabilidade barotrópica** é importante na formação de ondas atmosféricas e oceânicas em grande escala.

Ela contribui para sistemas meteorológicos como ciclones de médias latitudes, correntes oceânicas em grande escala e correntes de jato."



"FIGURA 5 Vorticidade relativa (s^{-1}) no teste de instabilidade barotrópica após 4, 5 e 6 dias, computada com RK4E e $\Delta t = 24$ min. (a) Resolução T42, (b) Resolução T85 e (c) Resolução T170. Os três painéis em cada figura correspondem a simulações de 96, 120 e 144 horas (de cima para baixo). Contornos negativos são pontilhados [A figura colorida pode ser visualizada em wileyonlinelibrary.com]."





2. Ondas de Rossby

As ondas de Rossby, também conhecidas como ondas planetárias, são ondas em grande escala que são influenciadas principalmente pelo efeito Coriolis, que varia com a latitude.

Essas ondas são fundamentais para entender a dinâmica da atmosfera e dos oceanos da Terra.

Características Principais:

Força Restauradora: O efeito Coriolis atua como a força restauradora para as ondas de Rossby, fazendo com que elas oscilam.

Comprimento de Onda e Frequência: As ondas de Rossby são caracterizadas por seus longos comprimentos de onda e baixas velocidades de fase em comparação com outras ondas atmosféricas, como as ondas de gravidade.

Movimento Meridional: Essas ondas se propagam para oeste em relação ao fluxo médio, apesar de o próprio fluxo estar se movendo para leste. Isso se deve à variação da força de Coriolis com a latitude, que faz com que massas de ar ou água oscilem para o norte e para o sul.

Velocidade de Fase e Velocidade de Grupo: A velocidade de fase (a velocidade com que as cristas das ondas se movem) das ondas de Rossby é para o oeste, enquanto a velocidade de grupo (a velocidade com que a energia é transferida) pode ser tanto para o leste quanto para o oeste, dependendo das características da onda.



Mathematical Representation:

The dispersion relation for Rossby waves in a barotropic atmosphere on a beta plane is given by:

$$\omega = \frac{-\beta k}{k^2 + l^2}$$

- ω is the frequency of the wave.
- β is the latitudinal variation of the Coriolis parameter.
- k and l are the zonal and meridional wavenumbers, respectively.

This equation shows that the phase speed of Rossby waves depends on the variation of the Coriolis parameter with latitude.

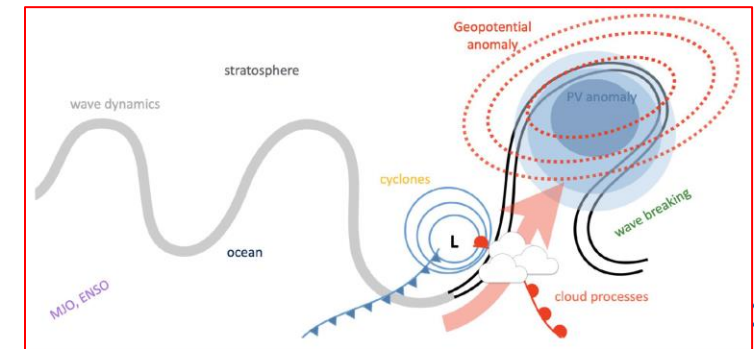
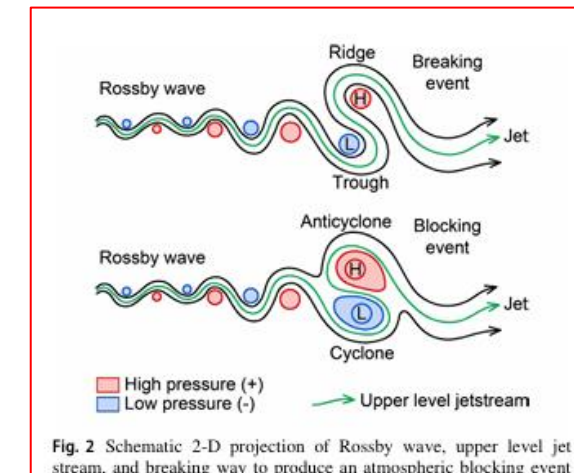
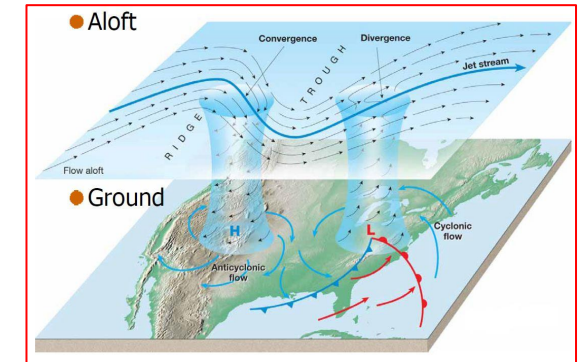


"Impacto das Ondas de Rossby:

As ondas de Rossby são cruciais na circulação atmosférica em grande escala, influenciando a corrente de jato e as trilhas de tempestades.

Elas desempenham um papel no desenvolvimento de padrões de bloqueio, que podem levar a condições meteorológicas prolongadas, como ondas de calor ou períodos de frio.

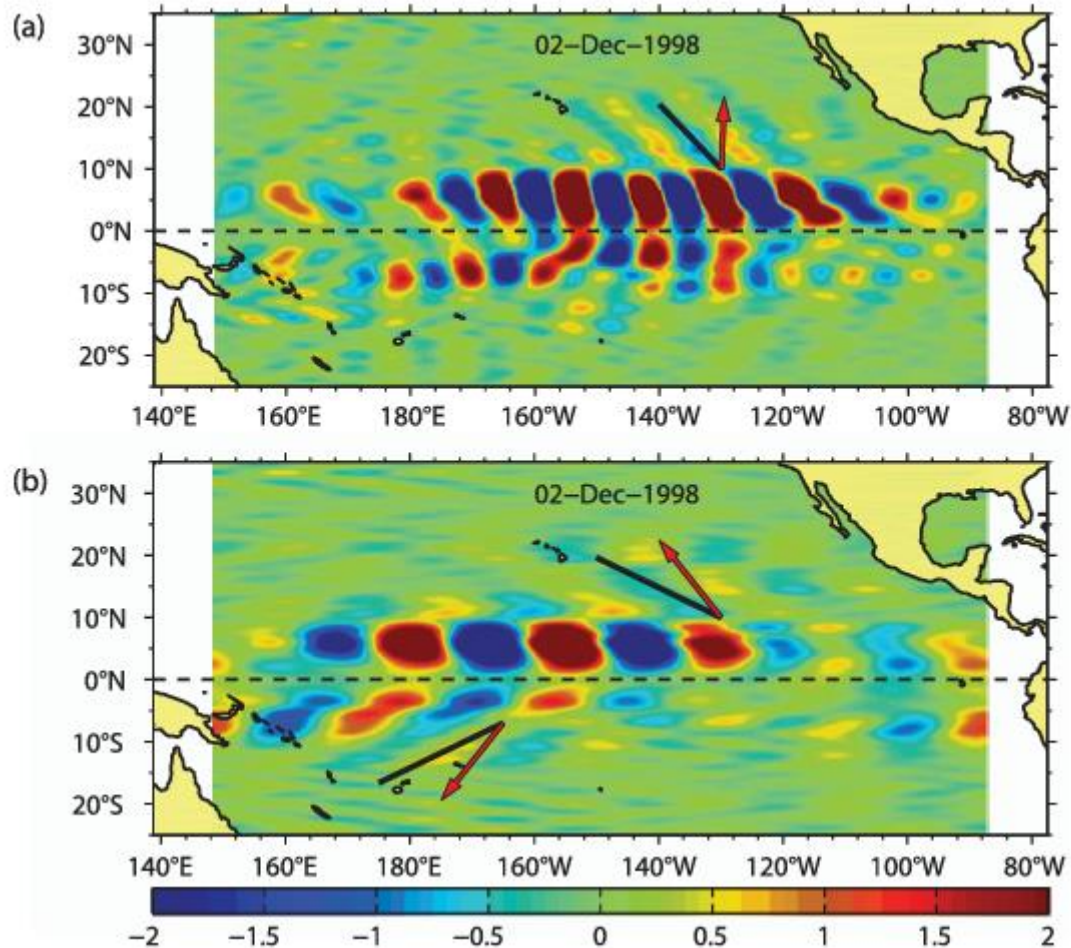
Nos oceanos, as ondas de Rossby influenciam o movimento de grandes massas de água e podem afetar a variabilidade climática (por exemplo, El Niño e La Niña)."





"Conexão Entre a Instabilidade Barotrópica e as Ondas de Rossby:

A **instabilidade barotrópica** pode dar origem a **ondas de Rossby**, uma vez que distúrbios em um sistema barotrópico podem crescer e evoluir para padrões de ondas de Rossby.



Essas ondas, por sua vez, podem interagir com o escoamento médio, **transferindo energia e momentum** entre diferentes escalas na atmosfera ou no oceano."



Barotropic Instability and Rossby Waves

"Em resumo, **a instabilidade barotrópica** é um mecanismo que amplifica distúrbios em um escoamento com cisalhamento horizontal, e as **ondas de Rossby** são ondas em grande escala impulsionadas pela variação da força de Coriolis com a latitude.

Juntas, elas desempenham papéis significativos na **formação das circulações atmosféricas e oceânicas** em grande escala."



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(u_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} - f_o(v_a) - \beta y(v_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(v_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + f_o(u_a) + \beta y(u_g) = - \frac{\partial g(h_a)}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$\frac{\partial g(h_g)}{\partial t} + u_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + v_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} = -gh_g \left(\left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right)$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left((u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} f_o(v_a) + \frac{\partial}{\partial y} \beta y(v_g) \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left((u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} \right) + \left(+ \frac{\partial}{\partial x} f_o(u_a) + \frac{\partial}{\partial x} \beta y(u_g) \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial g(h_a)}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$\frac{\partial g(h_g)}{\partial t} + u_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + v_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} = -g h_g \left(\left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right)$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left((u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} \right) - \left(f_o \frac{\partial v_a}{\partial y} + \beta \frac{\partial y}{\partial y} (v_g) + \beta y \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left((u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} \right) + \left(+f_o \frac{\partial u_a}{\partial x} + \beta \frac{\partial y}{\partial x} (u_g) + \beta y \frac{\partial u_g}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial g(h_a)}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$\frac{\partial g(h_g)}{\partial t} + u_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + v_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} = -gh_g \left(\left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right)$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left((u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} \right) - \left(f_o \frac{\partial v_a}{\partial y} + \beta v_g + \beta y \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left((u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} \right) + \left(+f_o \frac{\partial u_a}{\partial x} + \beta y \frac{\partial u_g}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial g(h_a)}{\partial y}$$

B) Integrando a equação de continuidade (0 a h) e usando condições de contorno para w (aqui: sem topografia de fundo):

$$\frac{\partial g(h_g)}{\partial t} + u_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + v_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} = -gh_g \left(\left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right)$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left((u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} \right) - \left(f_0 \frac{\partial v_a}{\partial y} + \beta v_g + \beta y \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left((u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} \right) + \left(+f_0 \frac{\partial u_a}{\partial x} + \beta y \frac{\partial u_g}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial g(h_a)}{\partial y}$$

Subtraia a equação da componente meridional a componente zonal

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + u_g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + v_g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + f_0 \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) + \beta v_g + \beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial g(h_a)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g(h_a)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + u_g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + v_g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + f_0 \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) + \beta v_g = -\beta y \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + u_g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + v_g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + \beta v_g = -(f_0) \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right)$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$\frac{\partial(u_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(u_g)}{\partial y} - f_o(v_a) - \beta y(v_g) = -\frac{\partial g h_a}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(v_g)}{\partial t} + (u_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial x} + (v_g) \frac{\partial(v_g)}{\partial y} + f_o(u_a) + \beta y(u_g) = -\frac{\partial g h_a}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} + \beta v_g = -(f_o) \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial g(h_g)}{\partial t} + u_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + v_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} = -g h_0 \left(\left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right)$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} + \beta v_g = -(f_0) \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial g(h_g)}{\partial t} + u_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + v_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} = -gh_0 \left(\left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right)$$

Com a função de corrente geostrofica

$$\psi = gh_g/f_0$$

$$u_g = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v_g = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\zeta_g = \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} + \beta v_g = -(f_0) \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial g(h_g)}{\partial t} + u_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial x} + v_g \frac{\partial g(h_g)}{\partial y} = -gh_0 \left(\left(\frac{\partial(u_a)}{\partial x} + \frac{\partial(v_a)}{\partial y} \right) \right)$$

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} + \beta v_g = \frac{(f_0)}{gh_0} \left(\frac{\partial gh_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial gh_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial gh_g}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} + \beta v_g = \frac{(f_0)}{gh_0} \left(\frac{\partial \psi f_0}{\partial t} + u_g \frac{\partial \psi f_0}{\partial x} + v_g \frac{\partial \psi f_0}{\partial y} \right)$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

1 equações de águas rasas ,primitivas'

A) Integrando a equação hidrostática e substituindo o gradiente de pressão na equação de movimento:

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} + \beta v_g = \frac{(f_0)}{gh_0} \left(\frac{\partial \psi f_0}{\partial t} + u_g \frac{\partial \psi f_0}{\partial x} + v_g \frac{\partial \psi f_0}{\partial y} \right)$$

Com a função de corrente geostrofica

$$\psi = gh_g/f_0$$
$$u_g = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$v_g = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\zeta_g = \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{(f_0)}{gh_0} \left(\frac{\partial \psi f_0}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi f_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi f_0}{\partial y} \right)$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{f_0^2}{gh_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} + \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

2 ,quasi-geostrophic' shallow water equations

with geostrophic streamfunction $\psi = gh_g/f_0$:

$$\begin{aligned} u_g &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v_g &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \zeta_g &= \nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\nabla^2 - \lambda^{-2}) \Psi}{\partial t} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial (\nabla^2 - \lambda^{-2}) \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial (\nabla^2 - \lambda^{-2}) \Psi}{\partial x} - \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ &= -J(\Psi, (\nabla^2 - \lambda^{-2}) \Psi) - \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}$$

with λ = Rossby Radius of Deformation = $(gh_0)^{1/2}/f_0$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

3 non-divergent shallow water equations

(QG-)vorticity equation (non divergent):

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} + \beta v_g = 0$$

Or:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial x} - \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ &= -J(\Psi, \nabla^2 \Psi) - \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}$$



Transformações/Aproximações(**Modelo Barotrópico**)

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{f_0^2}{gh_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

4 equivalent barotropic model

Assumption: absolute value of velocity may change with height but not the direction: $(u, v) = A(p)(\langle u \rangle(x, y, t), \langle v \rangle(x, y, t))$

$$\langle B \rangle = \frac{1}{p_s} \int_0^{p_s} B dp$$

It follows:

$$\frac{\partial (\nabla^2 - A(p_s) \lambda^{-2}) \Psi^*}{\partial t} = -J(\Psi^*, \nabla^2 \Psi^*) - \beta \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}$$

with $\psi^* = \langle A^2 \rangle \psi$; $\langle A \rangle = 1$

Valid for the equivalent barotropic level p^* with: $A(p^*) = \langle A^2 \rangle$

(typically 600-500hPa; minimum divergence)



(Equações do **Modelo Barotrópico**)

,primitive' equations:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -\frac{\partial gh}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -\frac{\partial gh}{\partial y} \\ \frac{\partial gh}{\partial t} + u \frac{\partial gh}{\partial x} + v \frac{\partial gh}{\partial y} &= -gh \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Quasi-Geostrophic: $\frac{\partial(\nabla^2 - \lambda^{-2})\Psi}{\partial t} = -J(\Psi, (\nabla^2 - \lambda^{-2})\Psi) - \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x}$

Non-divergent: $\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = -J(\Psi, \nabla^2 \Psi) - \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x}$

Equivalent barotropic: $\frac{\partial(\nabla^2 - A(p_s)\lambda^{-2})\Psi^*}{\partial t} = -J(\Psi^*, \nabla^2 \Psi^*) - \beta \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}$



(Equações do **Modelo Barotrópico para o modelo Numérico**)

A) The equation(s):

Here: barotropic non-divergent

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = -J(\Psi, \nabla^2 \Psi) - \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

B) The numerical method - general

Here: grid point method

C) The numerical method – specific

variables, operators, grid, discretizations, work flow, boundary conditions, etc.



(Modelo Barotrópico não divergente (Numérico))

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = -J(\Psi, \nabla^2 \Psi) - \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nabla^{-2} \left[-J(\Psi, \nabla^2 \Psi) - \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]$$

Prognostic variable: Streamfunction Ψ

Operators:

- Derivation in time: $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$
- Derivation in space: $\beta \frac{\partial \Psi}{\partial x}$
- Jacobi-Operator: $J(\Psi, \nabla^2 \Psi)$
- Laplace-Operator and its inverse: $\Psi \leftrightarrow \nabla^2 \Psi$

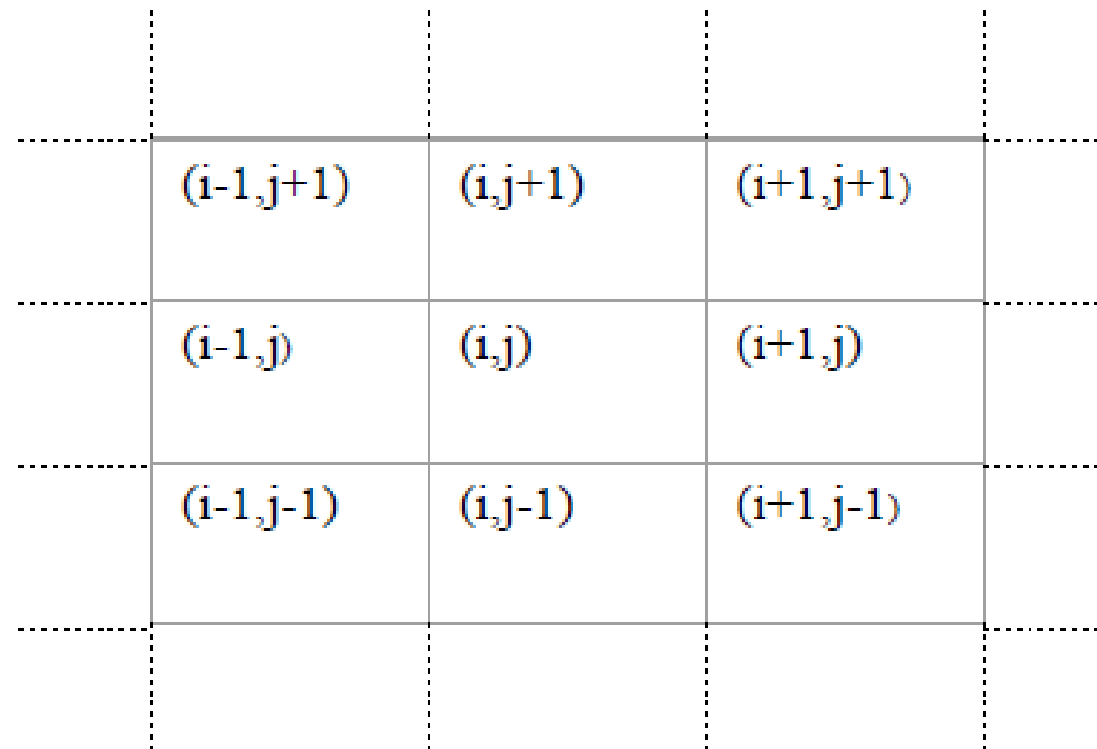


(Modelo Barotrópico não divergente (Numérico))

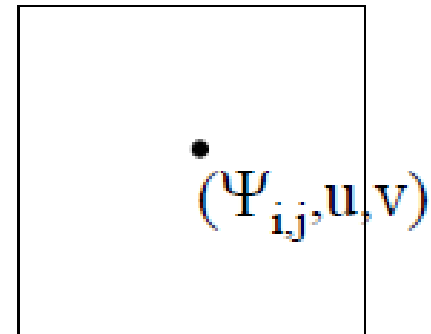
The Grid:

Lon-Lat grid; one prognostic variable only (Ψ) -> Arakawa A

The Grid:



Gridbox (i,j)





Previsão Numérica de Tempo e Clima



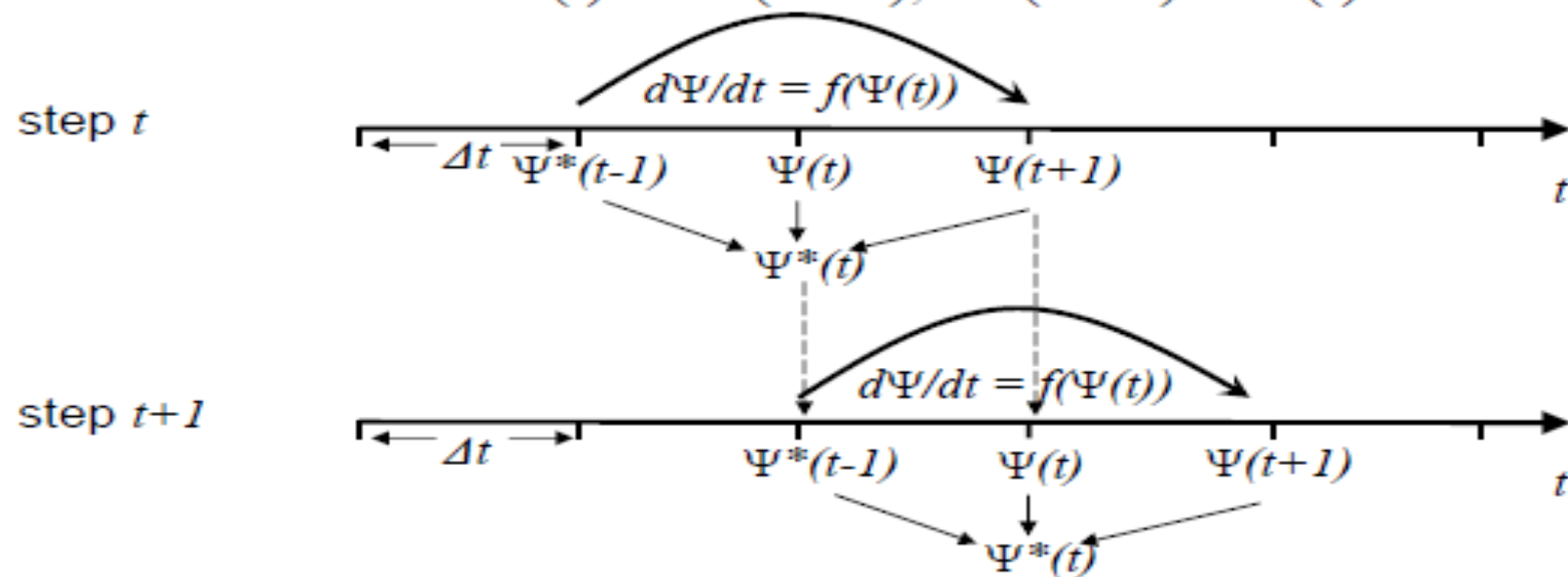
(Modelo Barotrópico não divergente (Discretização Numérica))

Time derivative: Leapfrog with Robert-Asselin filter

(Three level scheme; conservative (non-dissipative) system;
Computation of $\Psi(t)$ (and $\Psi(t+\Delta t)$) by weighted averages of
 $\Psi(t+\Delta t)$, $\Psi(t)$ and $\Psi(t-\Delta t)$)

Courant-Friedrich-Levy criterion: $(u\Delta t/\Delta x)^2 < (1-\gamma)^2$

- Calculation rule:
1. $\Psi(t+\Delta t) = \Psi^*(t-\Delta t) + 2\Delta t \cdot f(\Psi(t))$
 2. $\Psi^*(t) = \Psi(t) + \gamma(\Psi^*(t-\Delta t) - 2\Psi(t) + \Psi(t+\Delta t))$ ($\gamma = \text{filter const.}$)
 3. $\Psi^*(t) \rightarrow \Psi^*(t-\Delta t); \quad \Psi(t+\Delta t) \rightarrow \Psi(t)$ (e.g. $\gamma = 0.1$)





Previsão Numérica de Tempo e Clima



(Modelo Barotrópico não divergente (Discretização Numérica))

Derivation in space: centered differences

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} (\Psi_1 - \Psi_3)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta y} (\Psi_2 - \Psi_4)$$

Grid:

6 = (i-1,j+1)	2 = (i,j+1)	5 = (i+1,j+1)
3 = (i-1,j)	0 = (i,j)	1 = (i+1,j)
7 = (i-1,j-1)	4 = (i,j-1)	8 = (i+1,j-1)

Laplacian: centered differences

$$\nabla^2 \Psi(i, j) = \nabla^2 \Psi_0 = \frac{1}{\Delta x^2} (\Psi_1 + \Psi_3 - 2\Psi_0) + \frac{1}{\Delta y^2} (\Psi_2 + \Psi_4 - 2\Psi_0)$$



Previsão Numérica de Tempo e Clima



(Modelo Barotrópico não divergente (Discretização Numérica))

Jacobi-Operator: $J(\Psi, \nabla^2 \Psi)$

$$\begin{aligned} \text{analytically } J(a, b) &= \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial b}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial b}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial a}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial a}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Grid:

6 = (i-1, j+1)	2 = (i, j+1)	5 = (i+1, j+1)
3 = (i-1, j)	0 = (i, j)	1 = (i+1, j)
7 = (i-1, j-1)	4 = (i, j-1)	8 = (i+1, j-1)

$$\begin{aligned} \text{numerically: } J_1 &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \{ (a_1 - a_3)(b_2 - b_4) - (a_2 - a_4)(b_1 - b_3) \} \\ J_2 &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \{ a_1(b_5 - b_8) - a_3(b_6 - b_7) - a_2(b_5 - b_6) + a_4(b_8 - b_7) \} \\ J_3 &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \{ b_2(a_5 - a_6) - b_4(a_8 - a_7) - b_1(a_5 - a_8) + b_3(a_6 - a_7) \} \end{aligned}$$

$J = (J_1 + J_2 + J_3) / 3$ (Arakawa '66) enstrophy and energy conserving



(Modelo Barotrópico não divergente (Discretização Numérica))

Inverse Laplacian (solution of a Poisson-equation): $\nabla^2 \Theta = G(x, y)$

e.g. 'Successive Over-Relaxation' (SOR)

Discrete Laplacian:

$$\nabla^2 \Theta_0 - G_0 = \frac{1}{\Delta x^2} (\Theta_1 + \Theta_3 - 2\Theta_0) + \frac{1}{\Delta y^2} (\Theta_2 + \Theta_4 - 2\Theta_0) - G_0 = 0$$

Grid:

6 = (i-1, j+1)	2 = (i, j+1)	5 = (i+1, j+1)
3 = (i-1, j)	0 = (i, j)	1 = (i+1, j)
7 = (i-1, j-1)	4 = (i, j-1)	8 = (i+1, j-1)

Iterative solution:

1. estimate the error: $\varepsilon_0 = \nabla^2 \Theta_0 - G_0$

2. (over-) correct the error (using already new values):

$$\begin{aligned} \Theta'_0 &= \Theta_0 + \omega \varepsilon_0 / \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \right) \\ &= \Theta_0 + \omega \left(\frac{1}{\Delta x^2} (\Theta_1 + \Theta'_3 - 2\Theta_0) + \frac{1}{\Delta y^2} (\Theta_2 + \Theta'_4 - 2\Theta_0) - G_0 \right) / \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \right) \end{aligned}$$



(**Modelo Barotrópico não divergente (Discretização Numérica)**)

Work flow:

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = -J(\Psi, \nabla^2 \Psi) - \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

1. Initialization

- a) define grid
- b) set boundary conditions
- c) set initial conditions

2. Time loop

- a) compute the right hand side (tendency)
- b) Inverse Laplacian = solving a Poisson-equation
- c) compute ψ at new time step

3. Finalization

- a) write restart files



(Modelo Barotrópico não divergente (Resumo))

Equation: *barotropic non-divergent*
$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = -J(\Psi, \nabla^2 \Psi) - \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Method: Grid point

Grid: Arakawa A

Prognostic variable: streamfunction

Time stepping: Leapfrog with filter

Differentials in space: central differences

Jacobi operator: energy and enstrophy conserving (Arakawa)

Inverse Laplacian: 'Successive Over-Relaxation' (SOR)



(Modelo Barotrópico não divergente (Resumo))

How to test?

- use simple structures with know solutions (sin,cos) to check the derivatives
- use analytic solution to check the dynamics e.g. Rossby-Haurwitz wave

R-H wave:

only one wave number k and l in x- and y-direction: $\Psi(x, y, t) = \Psi_0 e^{i(kx+ly-\omega t)}$

$$\Rightarrow J(\Psi, \nabla^2 \Psi) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = -\beta \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{\beta}{K^2}$$

westward propagating, amplitude and
wavenumber conserving

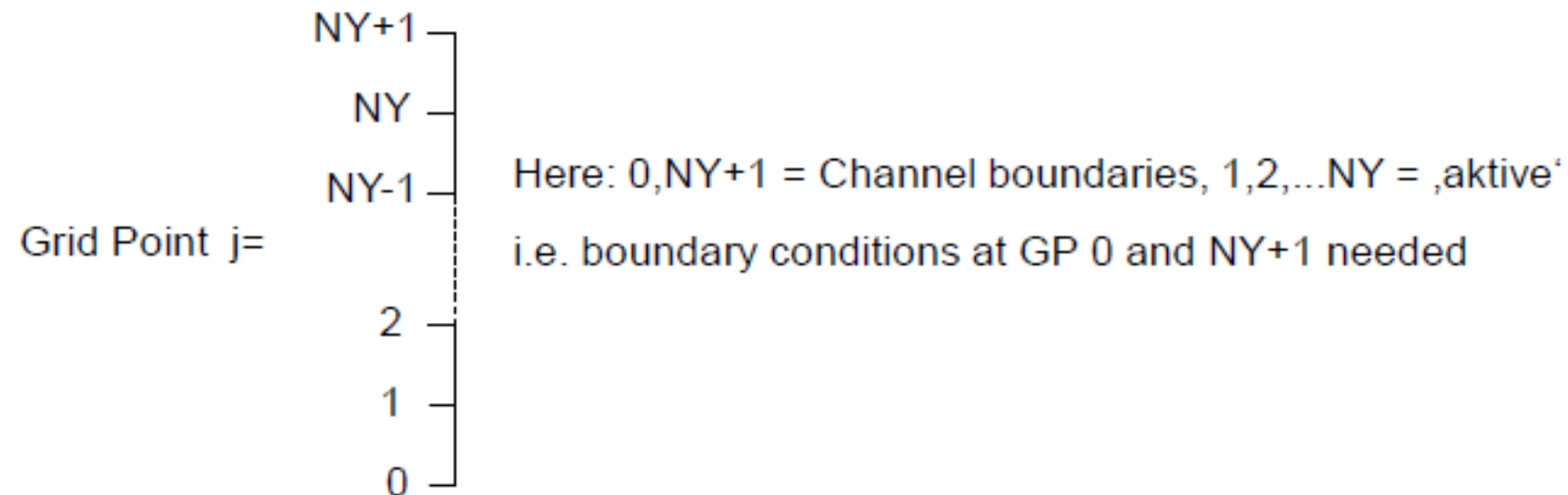


(Modelo Barotrópico não divergente (condição de contorno))

General: at each boundary (East, West, North, South) two boundary conditions are needed: u and v or streamfunction Ψ and vorticity ξ

Our model: non divergent barotropic vorticity equation, grid point method, A-grid, Ψ

The grid: Example: one longitude:





(Modelo Barotrópico não divergente (condição de contorno))

a) Prescribed from data

b) Cyclic: $A_0 = A_{NY}$ and $A_{NY+1} = A_1$ (with $A = u, v$ or Ψ, ξ)

c) No flow across boundary: $v_0 = v_{NY+1} = 0$, i.e. $\Psi_0 = \Psi_{NY+1} = \text{const in } x$, as $v_{0,NY+1} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{0,NY+1}$

and

c1) $u_0 = u_1$ and $u_{NY+1} = u_{NY}$ (**full slip boundary condition**), i.e. $\xi_{0,NY+1} = 0$,

$$\text{as } \xi_{0,NY+1} = - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{0,NY+1} \stackrel{!}{=} 0$$

c2) $u_{0,NY+1} = 0$ (**no slip boundary condition**), i.e. (in our model) $\xi_{0,NY+1} = 2 \frac{\Psi_{1,NY+1} - \Psi_{0,NY}}{(\Delta y)^2}$

$$\text{as } \xi_j = - \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{\Delta y} \text{ and } u_{-1/2,NY+3/2} \stackrel{!}{=} -u_{1/2,NY+1/2} \text{ and } u_{1/2,NY+1/2} = - \frac{\Psi_{1,NY+1} - \Psi_{0,NY}}{\Delta y}$$