



## Condição de Contorno

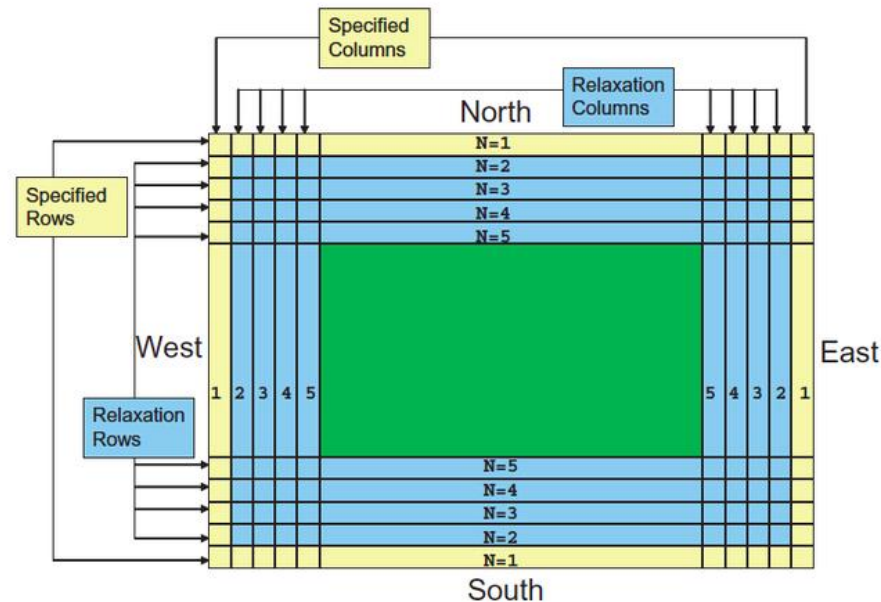


Figure 6.1: Specified and relaxation zones for a grid with a single specified row and column, and four rows and columns for the relaxation zone. These are typical values used for a specified lateral boundary condition for a real-data case.

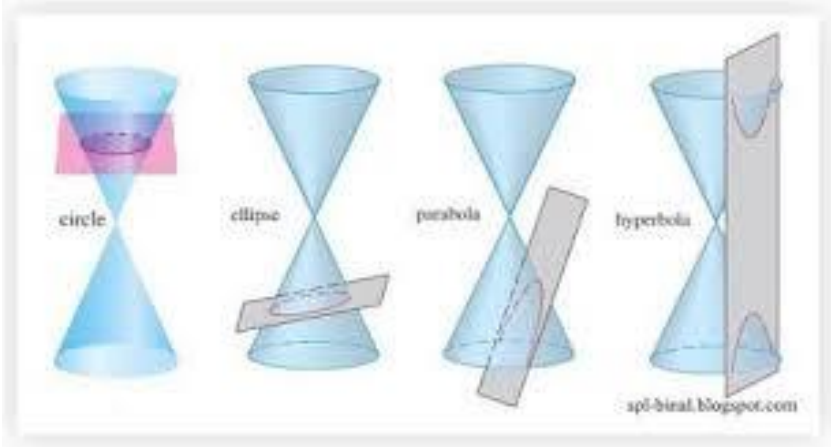


# Previsão Numérica de Tempo e Clima

Para tornar o **problema matemático bem colocado**, as condições de **contorno apropriadas precisam ser especificadas em quaisquer modelos de área limitada**, como mesoescala e modelos numéricos de previsão do tempo.

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi + G = 0$$

- ❑  $(B^2-4AC) > 0$  then the equation is called hyperbolic
- ❑  $(B^2-4AC) = 0$  then the equation is called parabolic
- ❑  $(B^2-4AC) < 0$  then the equation is called elliptic

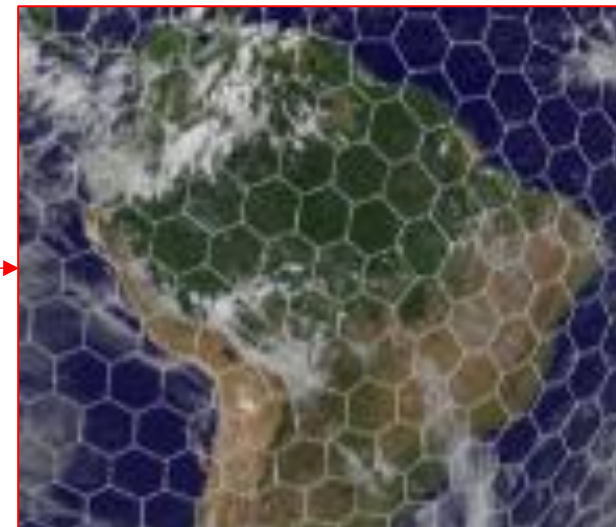
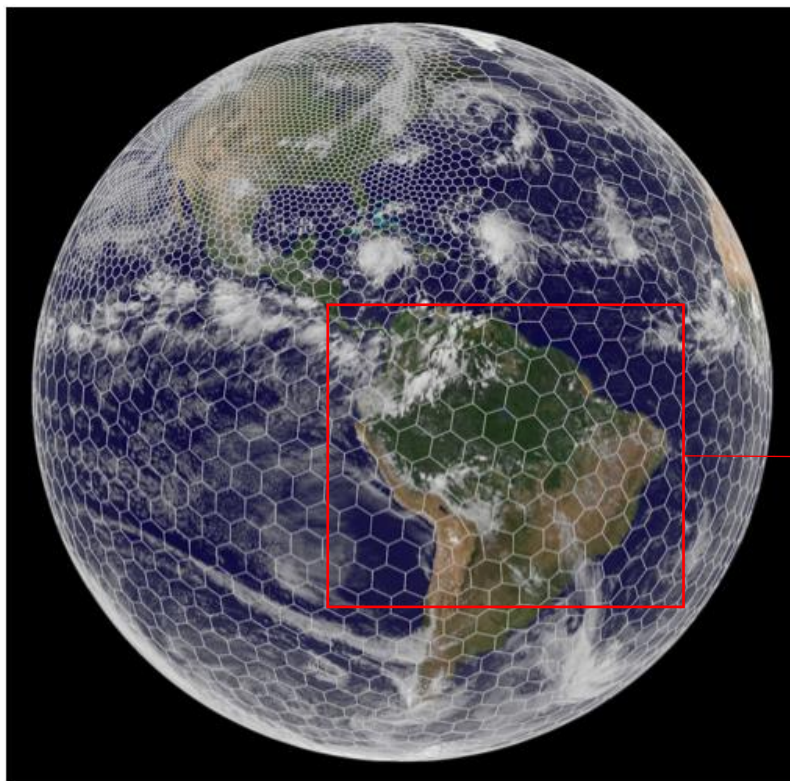


Type	Equation	Description
Parabolic	$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	Unsteady-state problem in which transport by conduction or diffusion is important
Elliptic	$f(x, y) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	Steady-state problem in which transport by conduction or diffusion is important
Hyperbolic	$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial u}{\partial x}$	Unsteady-state problem in which transport by convection phenomenon is important



# Previsão Numérica de Tempo e Clima

Se o **domínio do modelo** representa apenas **parte da atmosfera**, **então** em todas as direções, as **condições de contorno são necessárias** nos **limites superior, lateral e inferior** do domínio do modelo



Fonte: <https://mpas-dev.github.io/>

Global

Regional



# Previsão Numérica de Tempo e Clima

O **número de condições de contorno** depende da ordem das equações diferenciais em uma determinada direção envolvida.

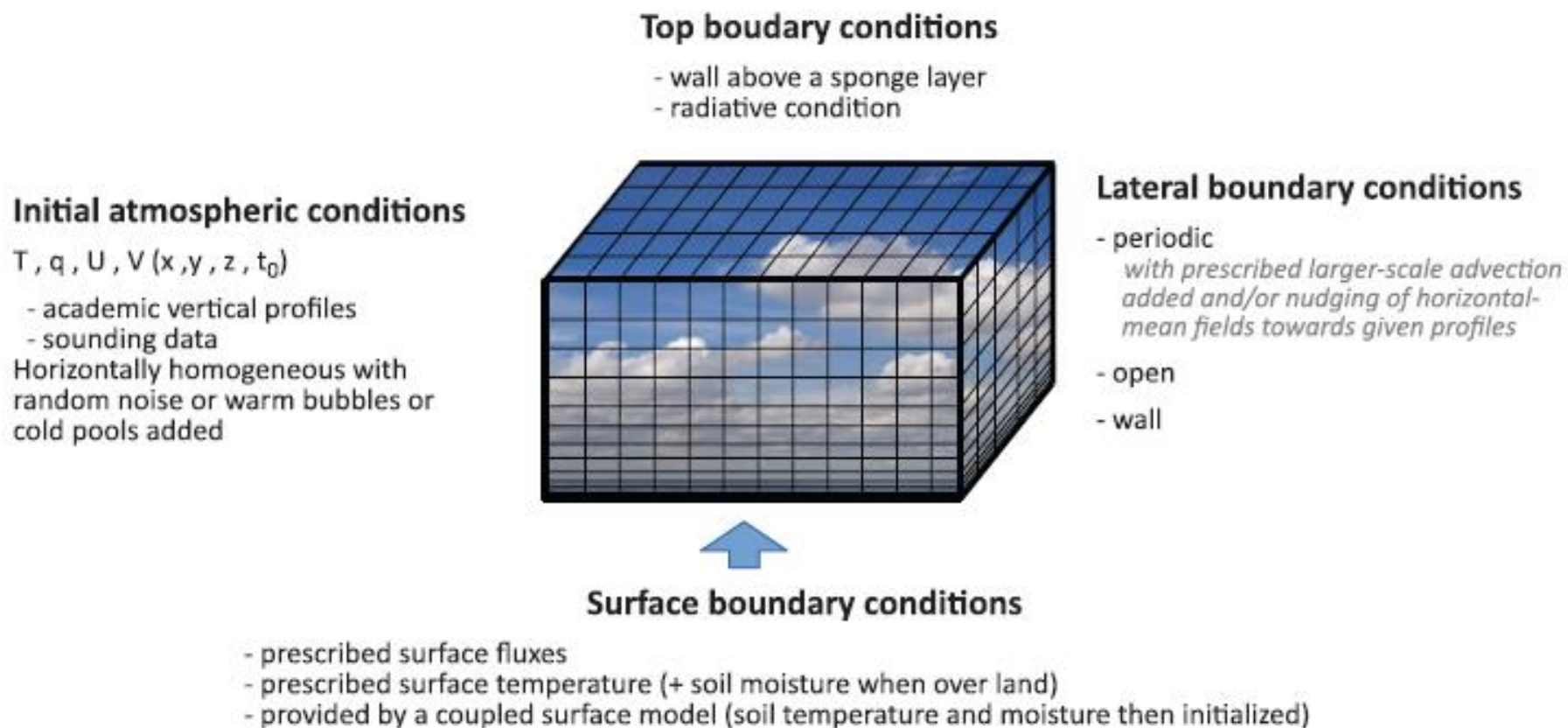


Fig. 8. Schematic of common choices of initial and boundary conditions in LES and CRMs.

Source: F. Guichard and F. Couvreux



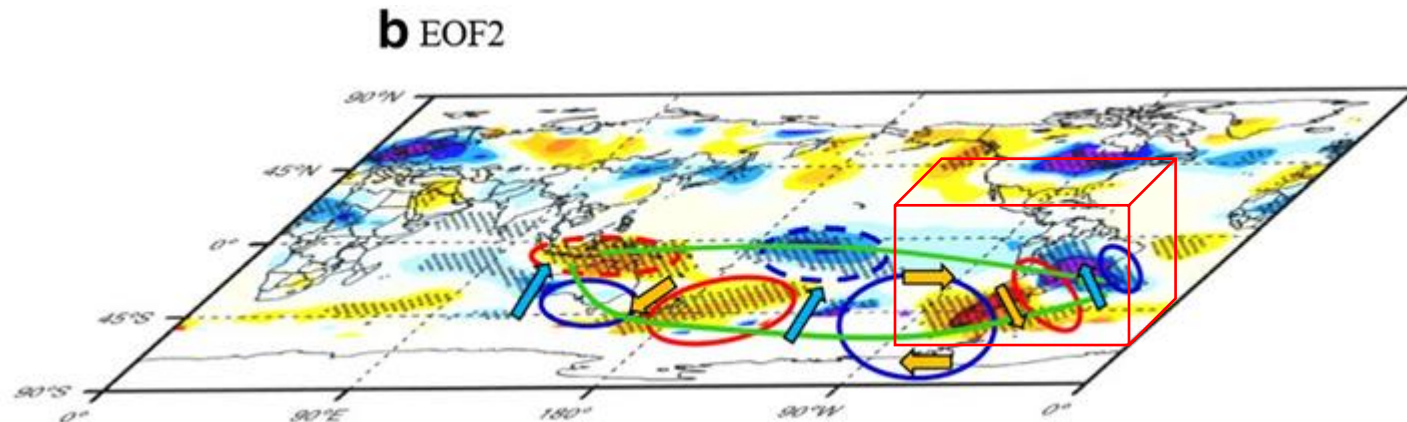
## 13.2.1 Condições de Fronteira Lateral



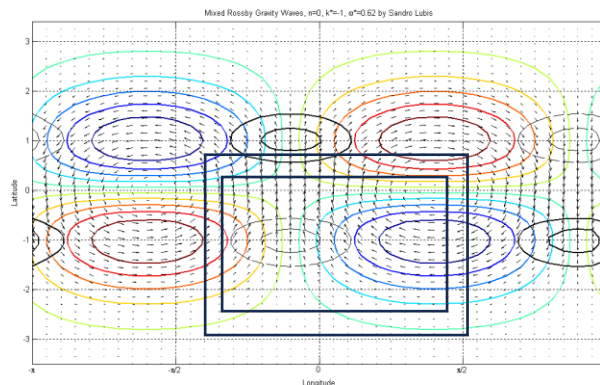


# Previsão Numérica de Tempo e Clima

O objetivo de **implementar as condições de contorno lateral** é **permitir que a onda ou perturbação se propague para fora ou para dentro do domínio computacional.**



Os valores dos limites laterais precisam ser atualizados com o tempo, **refletindo a evolução dependente do tempo da atmosfera real fora do domínio**, para que o sistema meteorológico possa se propagar no domínio aninhado. por exemplo, simulação de uma passagem frontal sobre um domínio finito.





# Previsão Numerica de Tempo e Clima

Basicamente, existem **cerca de cinco tipos de condições de contorno lateral** usadas em modelos de mesoescala:

**(1) Condições de contorno fechadas ou especificadas,**

**(2) Condições de contorno periódicas,**

**(3) Condições de contorno dependentes do tempo,**

**(4) Condições de contorno da esponja,**

**(5) Condições de limite aberto ou de radiação.**



**(1) Condições de contorno fechadas ou especificadas,**

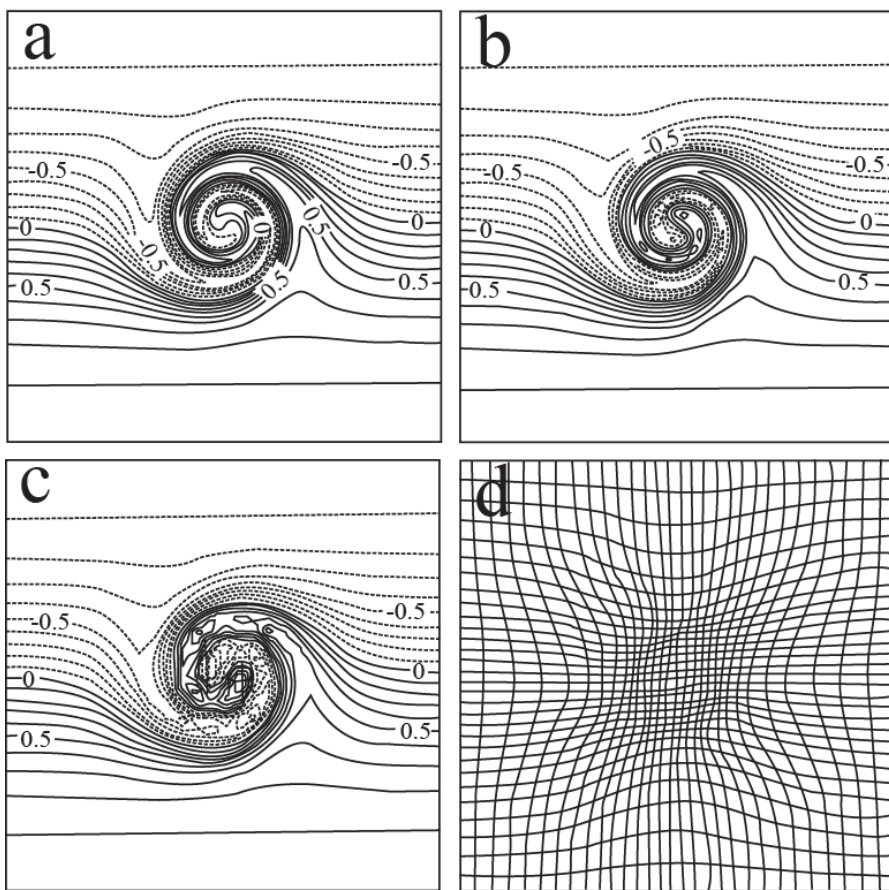




# Previsão Numérica de Tempo e Clima

## condições de fronteira lateral fechada ou especificada

(1) Nas **condições de fronteira lateral fechada ou especificada**, as **variáveis nas fronteiras laterais** são **especificadas como valores constantes ou gradientes constantes**, respectivamente.



As **ondas ou perturbações geradas dentro do domínio** **podem ou não** se **propagar para fora do domínio** se **valores constantes ou gradientes constantes** forem especificados.

Normalmente, **uma condição de contorno fechado** tende a **refletir ondas ou perturbações geradas dentro do domínio** de volta para o seu interior.

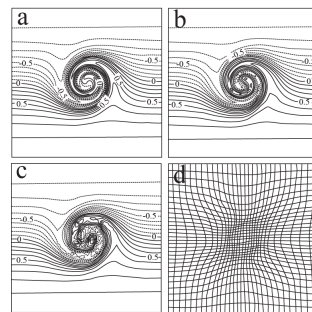
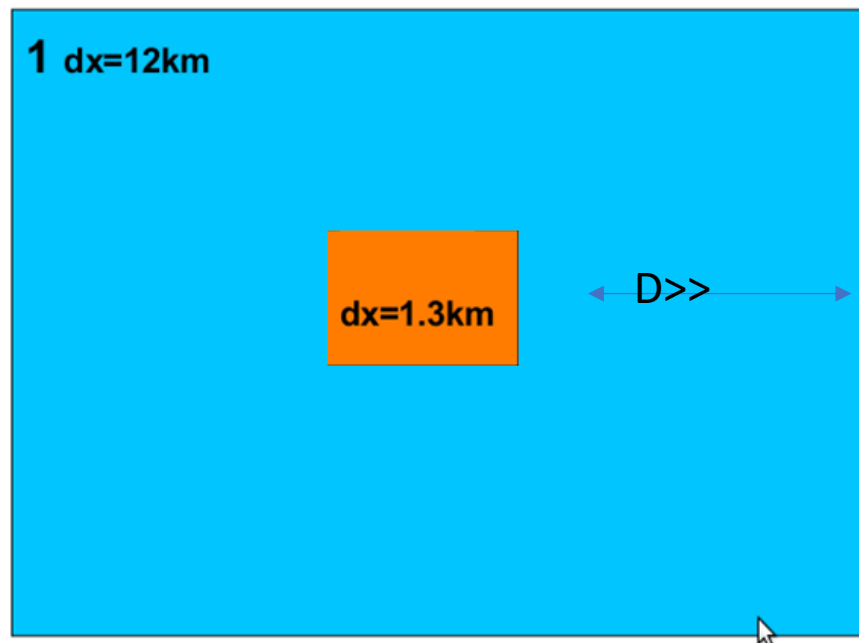


# Previsão Numérica de Tempo e Clima



## condições de fronteira lateral fechada ou especificada

Ocasionalmente, funciona se os limites laterais estiverem distantes das perturbações ou ondas geradas no tempo de integração desejado, ou se não houver ondas se propagando em direção a um limite lateral específico.



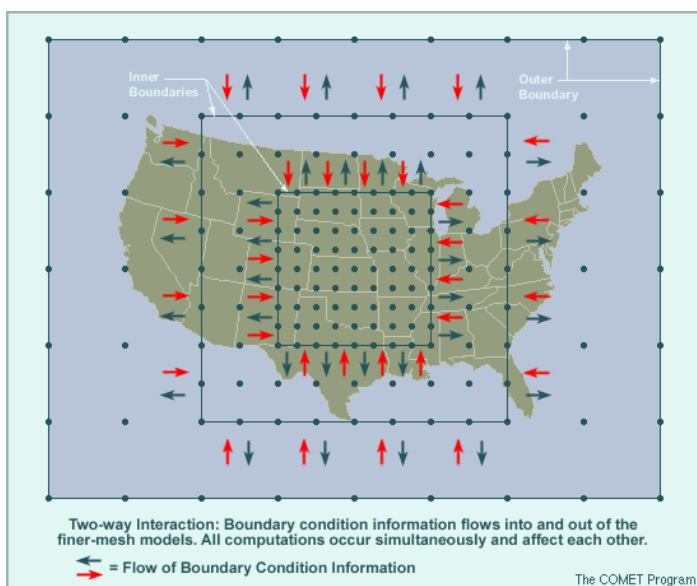
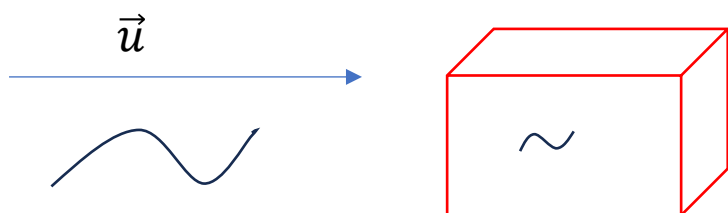


# Previsão Numérica de Tempo e Clima

## condições de fronteira lateral fechada ou especificada



Por exemplo, **um contorno de fluxo constante** pode funcionar se for consistente com a velocidade de entrada do sistema físico e as **ondas ou perturbações geradas** estiverem sendo **advectadas pelo fluxo de entrada**, de modo que nunca atinjam o contorno de entrada (upstream).



Matematicamente, esse tipo de condição de contorno especificada é chamada de **condição de contorno de Neumann**.

1. Constant surface temperature

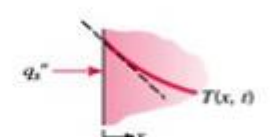
$$T(0, t) = T_s \quad (2.29)$$



Condição de Dirichlet

2. Constant surface heat flux  
(a) Finite heat flux

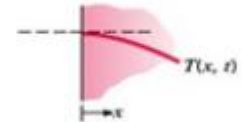
$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_s'' \quad (2.30)$$



Condição de Neumann

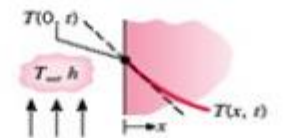
- (b) Adiabatic or insulated surface

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.31)$$



3. Convection surface condition

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)] \quad (2.32)$$

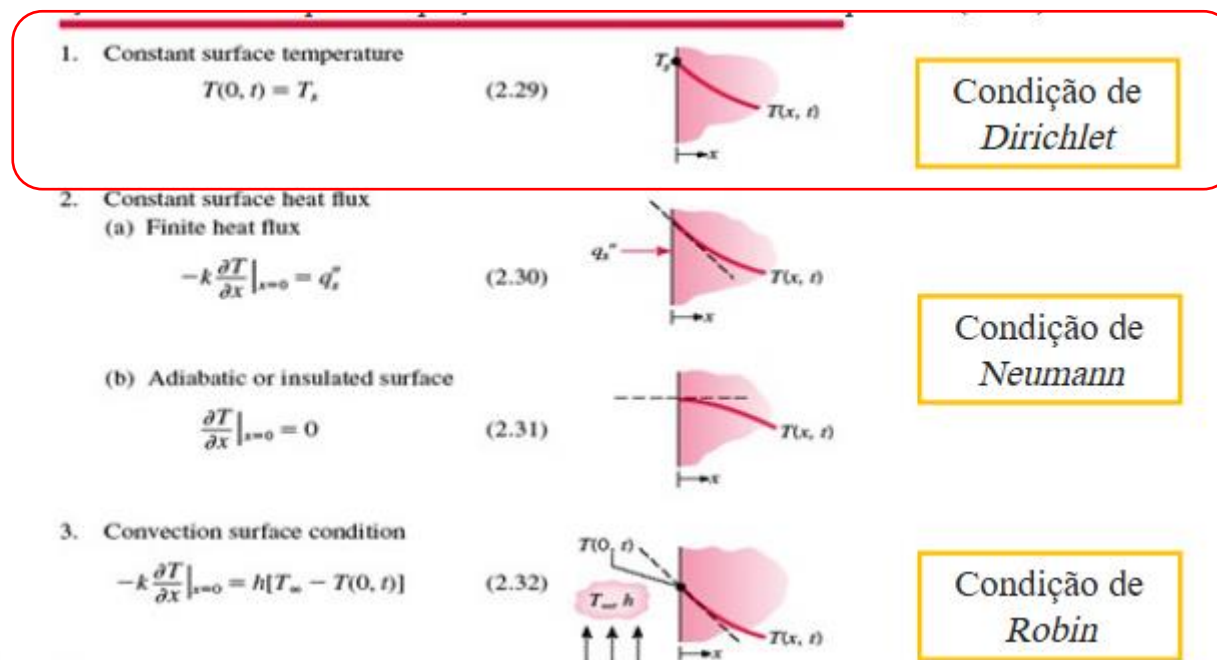
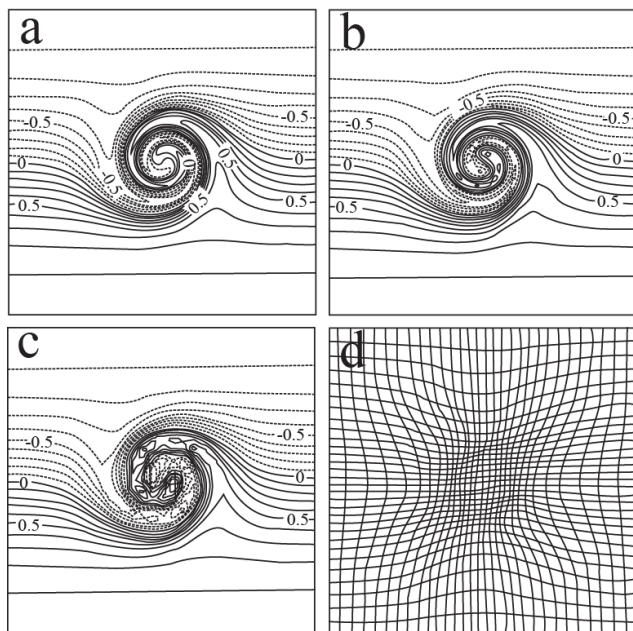


Condição de Robin



(1) Nas **condições de fronteira lateral fechada ou especificada**, as **variáveis nas fronteiras laterais** são **especificadas como valores constantes** ou **gradientes constantes**, respectivamente.

Uma **condição de contorno lateral de gradiente constante** especifica um gradiente constante, **tal como gradientes zero** (por exemplo,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ ,  $\varphi$  é a variável em questão), nos contornos laterais.



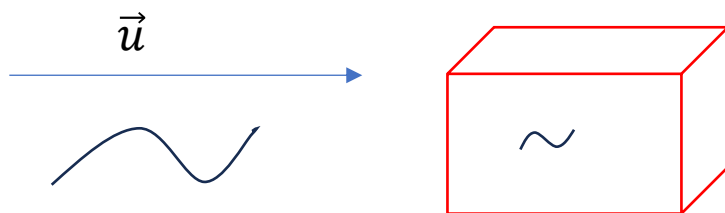
Matematicamente, esse tipo de condição de contorno especificada é chamada de **condição de contorno de Dirichlet**.



(1) Nas **condições de fronteira lateral fechada ou especificada**, as **variáveis nas fronteiras laterais** são **especificadas como valores constantes ou gradientes constantes**, respectivamente.

**Quão eficaz é a condição de contorno lateral de gradiente constante para propagar as ondas para fora do domínio?**

**R: Vai depender da consistência entre os gradientes constantes especificados e a velocidade de advecção das ondas físicas.**



Isso também é chamado de **condição de contorno de Neumann**.

**Numericamente, uma condição de contorno lateral com gradiente zero especifica  $\varphi_1^\tau = \varphi_2^\tau$  e  $\varphi_N^\tau = \varphi_{N-1}^\tau$  nos pontos de contorno  $i=1$  e  $i=N$ .**



**(1) Condições de contorno periódicas,**

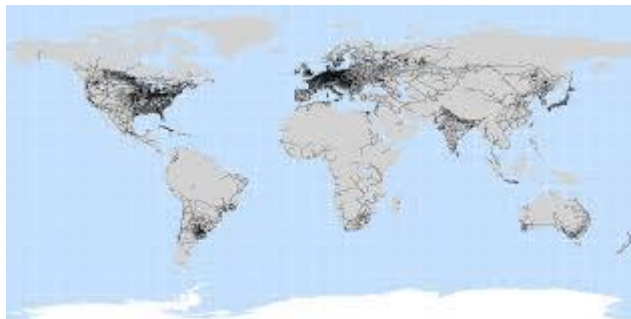




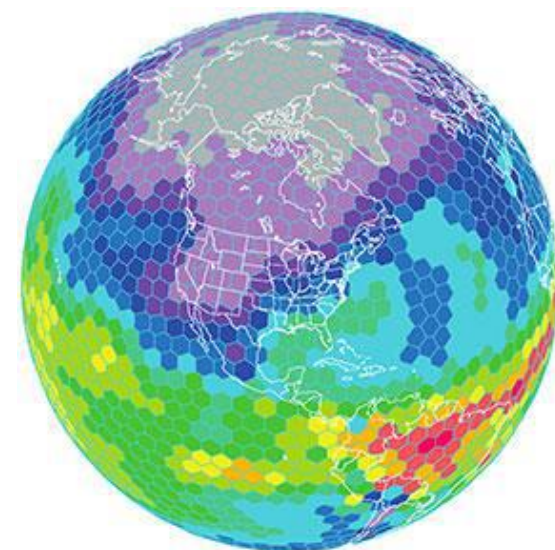
# Previsão Numérica de Tempo e Clima



Uma **condição de contorno periódica** assume que todas as variáveis no contorno direito são iguais ao contorno esquerdo, ou seja,  $\phi(x_N^\tau) = \phi(x_1^\tau)$ .



Este tipo de **condição de contorno** é adotado pelo **modelo global** que divide uma certa longitude artificialmente para fazer cálculos numéricos





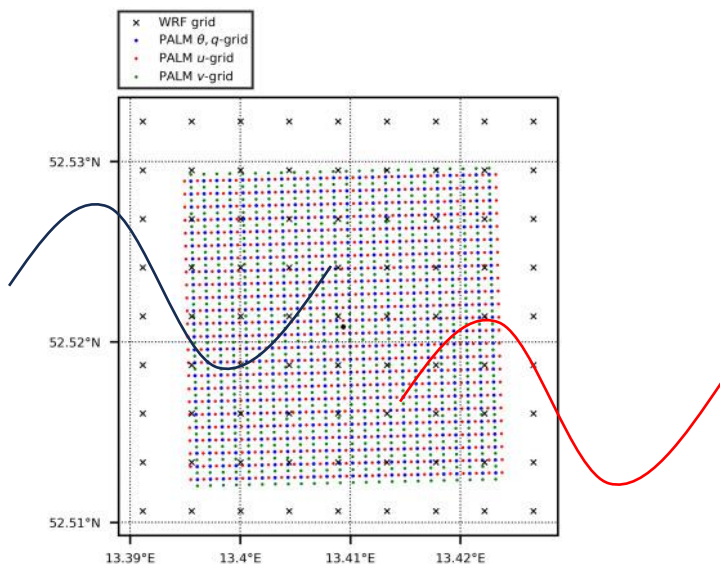
**(1) Condições de contorno dependentes do tempo,**



Uma **condição de contorno lateral dependente do tempo** é frequentemente adotada quando a integração numérica é realizada simultaneamente nos domínios interno e externo,

Os valores de contorno lateral do domínio interno precisam ser especificados pelos valores atualizados previstos pelo domínio externo.

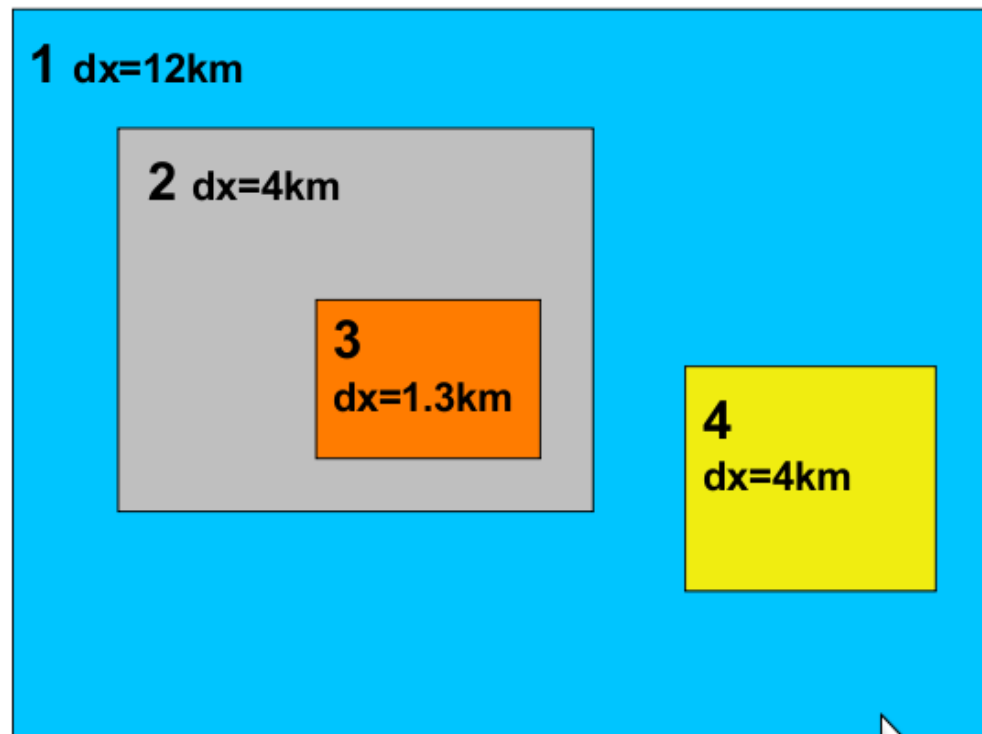
Desta forma, os **sistemas climáticos**, **ondas** ou **distúrbios** são capazes de **se propagar para o domínio interno.**



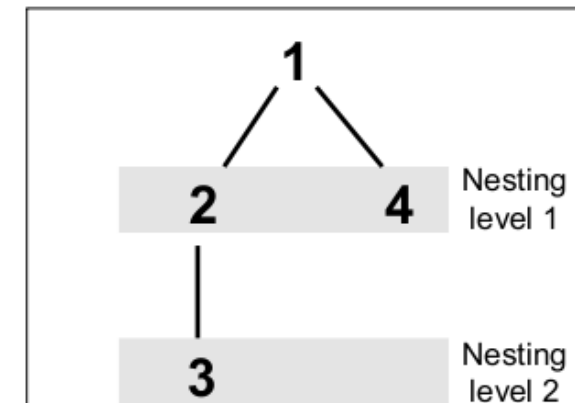


Uma **condição de contorno lateral dependente do tempo** é frequentemente adotada quando a integração numérica é realizada simultaneamente nos domínios interno e externo,

Example configuration – 4 domains



Each domain is assigned a *domain ID #*



*Nesting structure shown as a tree for the domains at left*

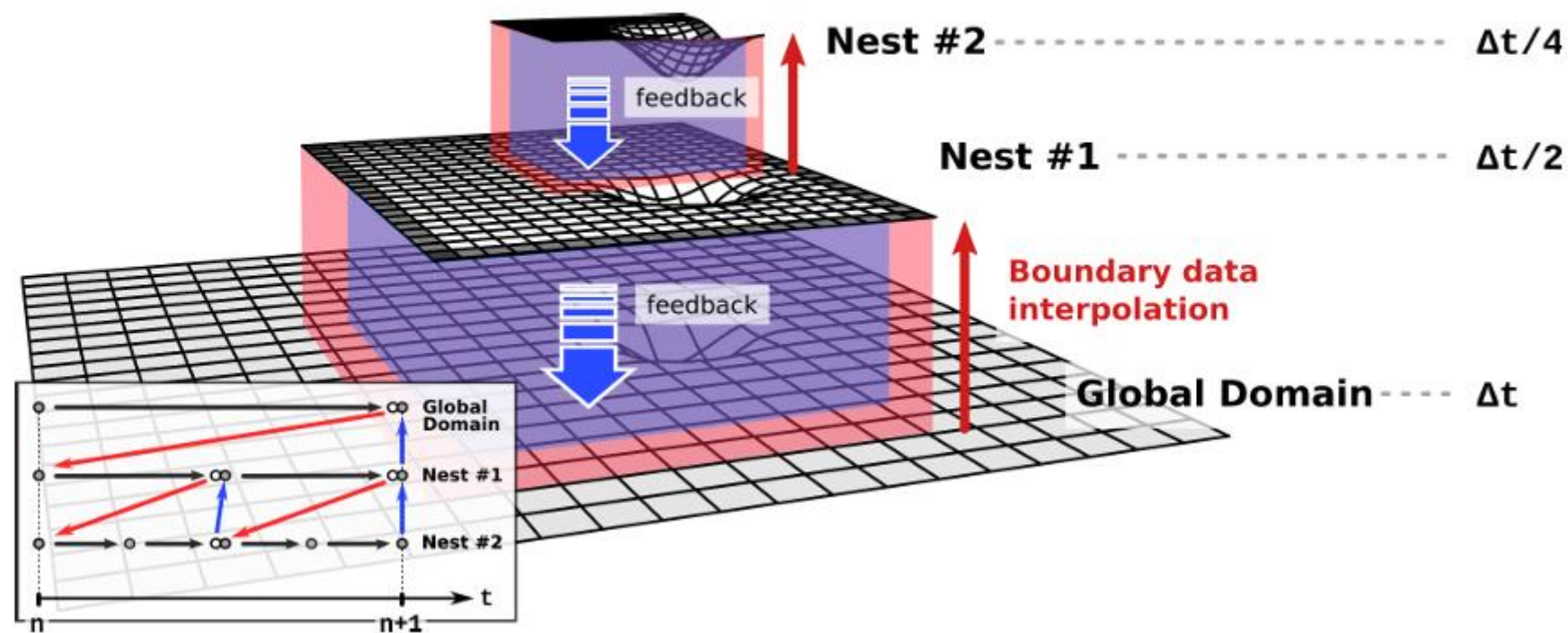


# Previsão Numérica de Tempo e Clima



Uma **condição de contorno lateral dependente do tempo** é frequentemente adotada quando a integração numérica é realizada simultaneamente nos domínios interno e externo,

G. Zängl et al.: Grid refinement in ICON v2.6.4



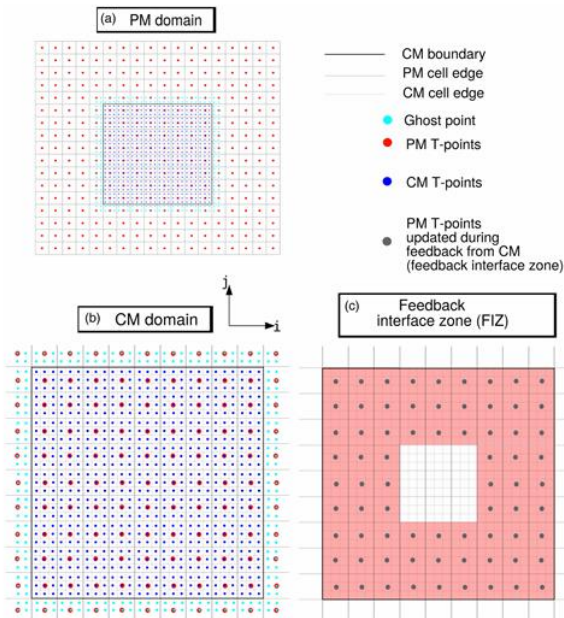
**Sem este tipo de contorno lateral, as simulações do domínio interno não podem representar as mudanças ambientais em larga escala com o tempo.**



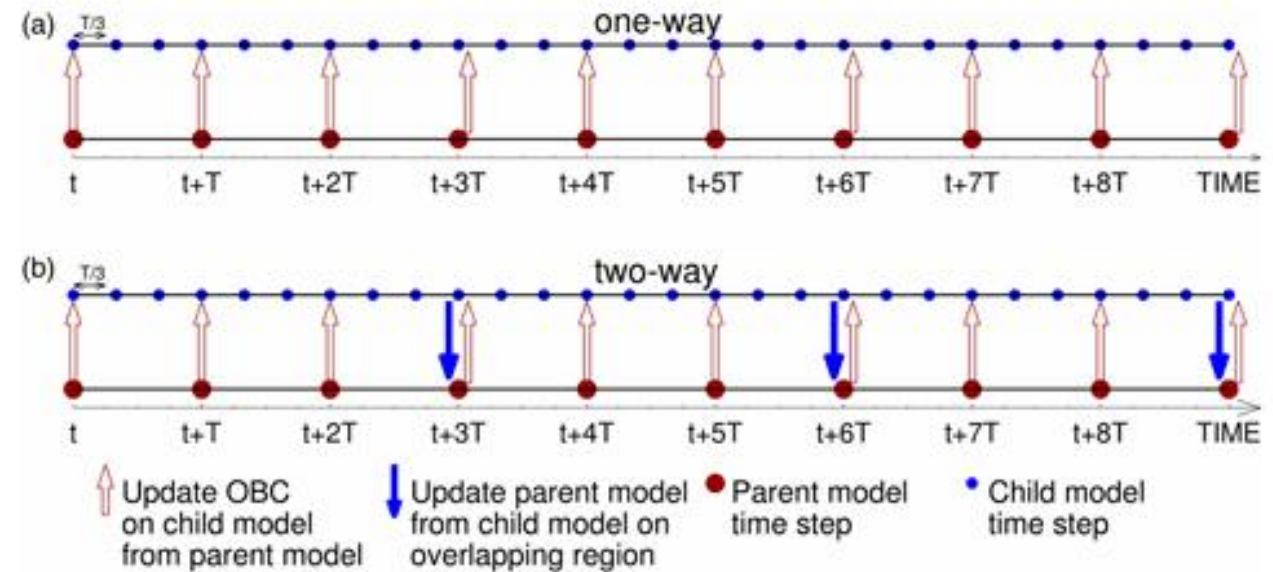


Uma **condição de contorno lateral dependente do tempo** é frequentemente adotada quando a integração numérica é realizada simultaneamente nos domínios interno e externo,

One-Way and Two-Way Nesting in the Circulation Model of the Eastern Canadian Shelf / 77



78 / J. Urrego-Blanco et al.



Se os valores dos limites laterais do domínio interno **não forem passados de volta** para o domínio externo. Isso é chamado de **aninhamento unidirecional** (one-way nesting).

Se os valores dos limites laterais do domínio interno **forem passados de volta** para o domínio externo. Isso será chamado de **aninhamento bidirecional** (two-way nesting).





**(1) Condições de contorno da  
esponja,**



# Previsão Numérica de Tempo e Clima



Uma **condição de contorno de esponja ou camada de absorção de onda** usa uma filtragem aprimorada perto dos limites laterais **para amortecer as ondas ou distúrbios gerados dentro do domínio** que saem para fora dos limites laterais.

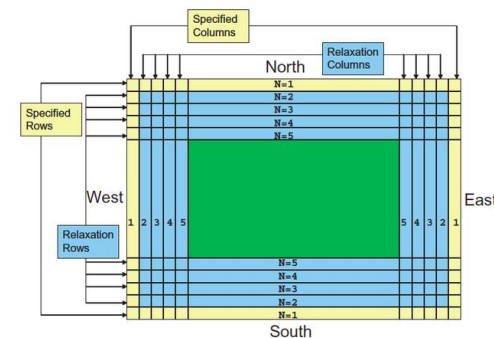
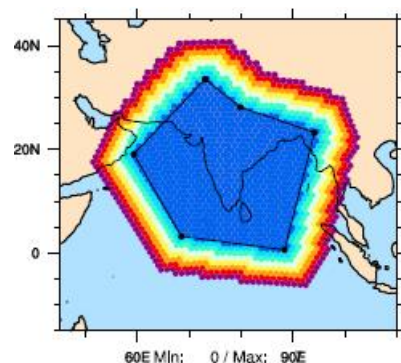
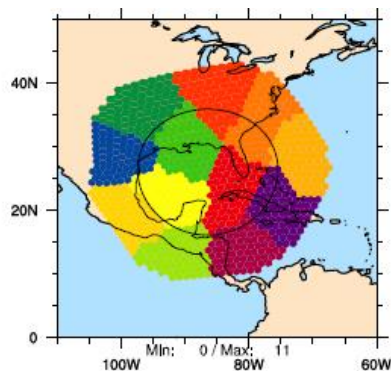


Figure 6.1: Specified and relaxation zones for a grid with a single specified row and column, and four rows and columns for the relaxation zone. These are typical values used for a specified lateral boundary condition for a real-data case.

Por exemplo, Perkey e Kreitzberg (1976) formularam a região da esponja da seguinte forma

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = W_i \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)_m + (1 - W_i) \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)_{ls} \quad 13.2.1$$

onde  **$m$**  define a tendência calculada do modelo da variável  $\phi$  e  **$ls$**  define a tendência especificada de larga escala e  **$W_i$**  a função peso:



Uma **condição de contorno de esponja ou camada de absorção de onda** usa uma filtragem aprimorada perto dos limites laterais **para amortecer as ondas ou distúrbios gerados dentro do domínio** que saem para fora dos limites laterais.

$$\begin{aligned} W_i &= 0.0 \text{ for the (physical) boundaries} \\ &= 0.4 \text{ for the boundaries } \pm \Delta x \\ &= 0.7 \text{ for the boundaries } \pm 2\Delta x \\ &= 0.9 \text{ for the boundaries } \pm 3\Delta x \\ &= 1.0 \text{ for all the interior points.} \end{aligned} \quad (13.2.2)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = W_i \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)_m + (1 - W_i) \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)_{ls} \quad 13.2.1$$



## 1.2 regionalização com fronteira aberta

Especificação de Zona Fronteira Regional MPAS



Filtros na zona de relaxamento

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = RHS_{\psi} + F_1(\psi_{LS} - \psi) - F_2 \Delta x^2 \nabla^2 (\psi_{LS} - \psi)$$

Amortecimento de  
Rayleigh para o valor  
de grande escala (LS)

Amortecimento espacial de 2ª  
ordem da perturbação do  
valor (LS)

$$F_1 = \gamma_1 \frac{(i-1)}{m}$$

$$F_2 = \gamma_2 \frac{(i-1)}{m}$$

m é a largura da zona de relaxamento (em # células). Exemplo (à direita), m = 5 (padrão)

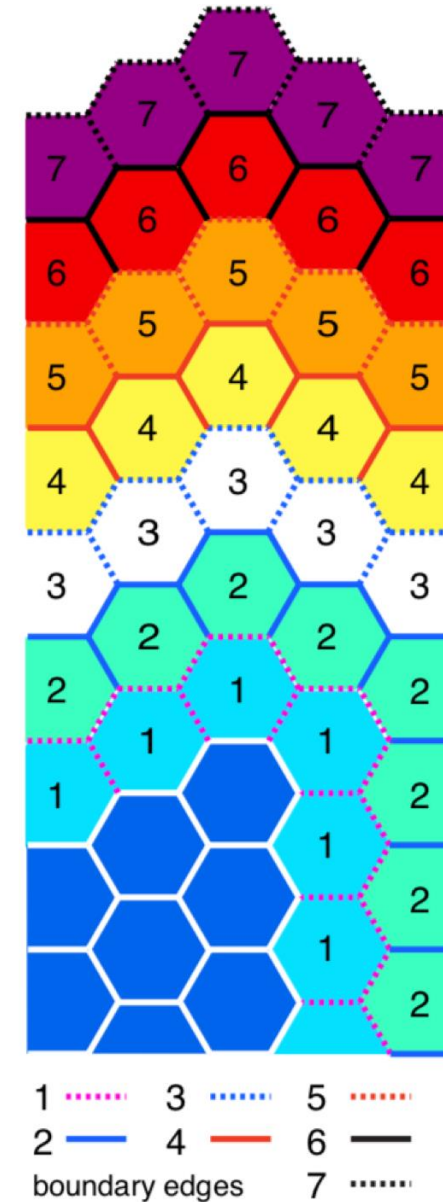
$$F_1 = \gamma_1(0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$$

$$F_2 = \gamma_2(0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$$

$$\gamma_1 = (0.06 \Delta x)^{-1}$$

$$\gamma_2 = (0.3 \Delta x)^{-1}$$

Esses valores ( $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ ) são hardwire no MPAS

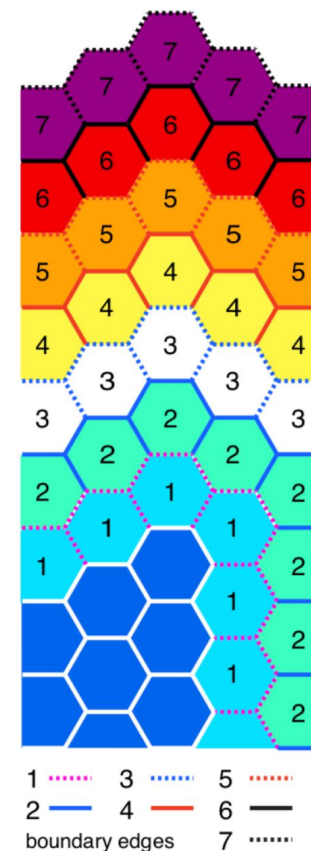




Uma **condição de contorno de esponja ou camada de absorção de onda** usa uma filtragem aprimorada perto dos limites laterais **para amortecer as ondas ou distúrbios gerados dentro do domínio** que saem para fora dos limites laterais.

No WRF, as Condições de Contorno Lateral (lineares no tempo) são:

- O arquivo wrfbdy **contém informações de células de grades** nos pontos do modelo em uma zona de contorno (por exemplo) uma **faixa de 5 pontos de largura** ao redor do domínio
- Os **campos de contorno são linearmente interpolados no tempo** desde os tempos de contorno até o tempo atual do modelo
- Isso **especifica os valores externos e é usado para deslocar os próximos 4 pontos internos**





# Previsão Numerica de Tempo e Clima

Uma **condição de contorno de esponja ou camada de absorção de onda** usa uma filtragem aprimorada perto dos limites laterais **para amortecer as ondas ou distúrbios gerados dentro do domínio** que saem para fora dos limites laterais.

Israel e Orzag (1981) examinaram as camadas absorventes viscosas e de amortecimento Rayleigh para o sistema linearizado de águas rasas.

Klemp e Lilly (1978) examinaram a reflexão produzida por uma camada de absorção de onda no limite superior, que será discutida nas condições de contorno superior.



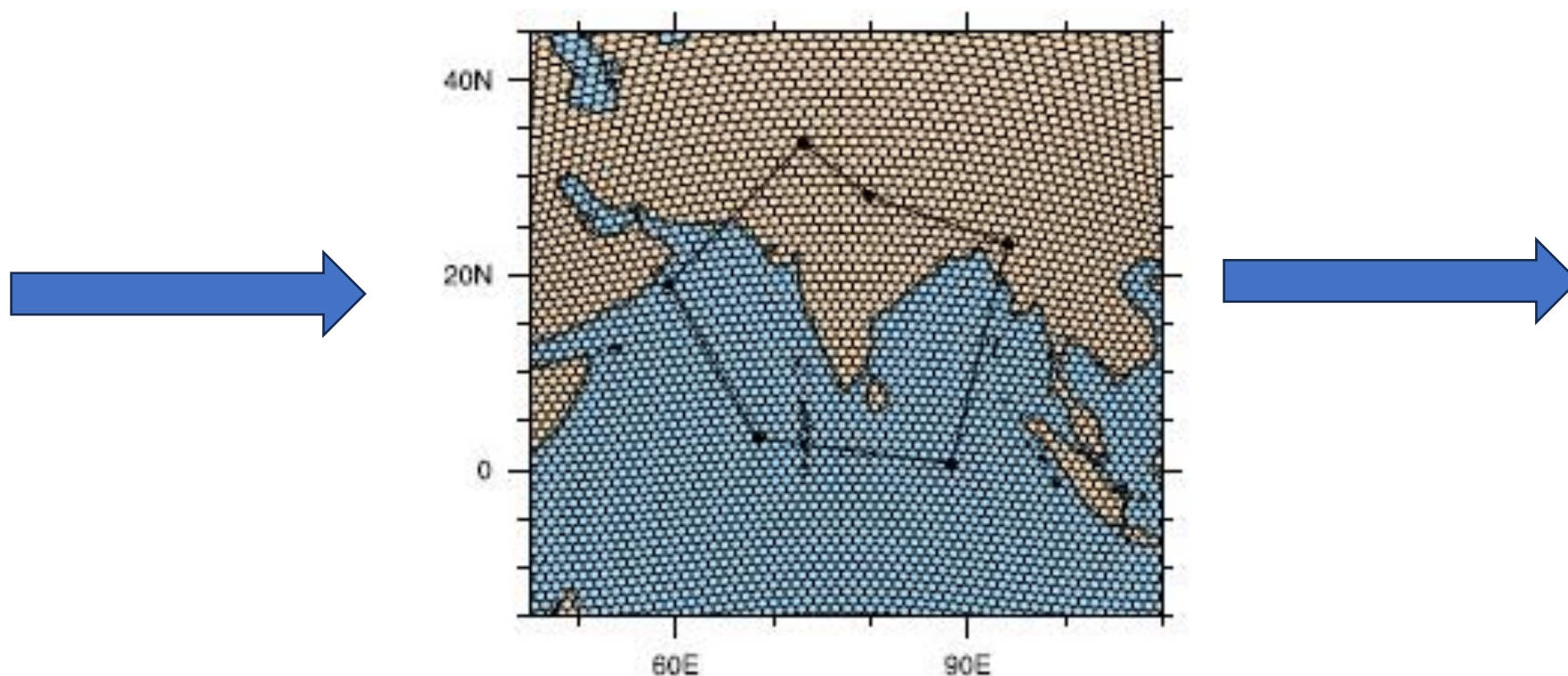


**(1) Condições de limite aberto ou de radiação.**



## Condições de contorno aberto ou Radiativa

Para **ondas de gravidade pura**, a **velocidade de fase horizontal** é **direcionada no mesmo sentido** que a **velocidade de grupo horizontal**, assim **é possível usar a equação de advecção para carregar a energia da onda para fora dos contornos laterais.**





## Condições de contorno aberto ou Radiativa

Baseado neste conceito, Orlanski (1976) propôs a condição de contorno aberto ou de radiação para um escoamento hiperbólico em um modelo numérico. Para o contorno de saída, a condição de contorno de radiação pode ser escrita

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (U - c_0^*) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad em \ x = L \quad 13.2.3$$

onde  $(U - c_0^*)$  é a velocidade de propagação no contorno do escoamento de saída ( $x=L$ ), que deve ser determinada.

A representação de diferença finita de leapfrog para passo de tempo  $\tau - 1$  da equação acima pode ser escrita



# Previsão Numérica de Tempo e Clima

## Condições de contorno aberto ou Radiativa

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (U - c_0^*) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{em } x = L \quad 13.2.3$$

$$\frac{\phi_{b-1}^\tau - \phi_{b-1}^{\tau-2}}{2\Delta t} = \frac{-((U - c_0^*))}{\Delta x} (\phi_{b-1}^{\tau-1} - \phi_{b-2}^{\tau-1}) \quad 13.2.4$$

Observe que o **primeiro termo entre colchetes do lado direito é adotado para evitar instabilidade numérica**. Com base na aproximação acima, a velocidade de fase pode ser estimada por

$$((U - c_0^*)) = -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \frac{\phi_{b-1}^\tau - \phi_{b-1}^{\tau-2}}{(\phi_{b-1}^{\tau-1} - \phi_{b-2}^{\tau-1})} \quad \text{avaliado em } b-1 \quad 13.2.5$$

$$U + c_0^* = 0 \quad \text{if R.H.S. of (13.2.5) } < 0,$$
$$U + c_0^* = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{if R.H.S. of (13.2.5) } > \Delta x / \Delta t, (13.2.5)$$

onde o subscrito b define o ponto contorno e R.H.S. significa o lado direito.



## Condições de contorno aberto ou Radiativa

Para um sistema de fluido hidrostático e incompressível, uma vez que  $w$  é acoplado a  $u$ , pode-se usar a velocidade de fase estimada de  $u$  para  $w$ .

Isso também pode ser aplicado às variáveis acopladas de temperatura potenciais e pressão.



## Condições de contorno aberto ou Radiativa

Uma vez que a velocidade de fase é estimada, o valor limite no intervalo de tempo  $\tau + 1$  pode ser determinado

$$\phi_b^{\tau+1} = \phi_b^{\tau-1} - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (U - c_0^*)(\phi_b^{\tau} - \phi_{b-1}^{\tau}) \quad 13.2.6$$

onde  $(U - c_0^*)$  é estimado pela Eq. (13.2.5).

Uma fórmula semelhante pode ser formada para o contorno do escoamento de entrada

$$\phi_b^{\tau+1} = \phi_b^{\tau-1} - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (U - c_0^*)(\phi_{b+1}^{\tau} - \phi_b^{\tau}) \quad 13.2.7$$

Observe que a especificação de  $\phi$  em ambos os contornos levará a um problema sobredeterminação para a equação de advecção de primeira ordem.





# Previsão Numerica de Tempo e Clima

## Condições de contorno aberto ou Radiativa

Na prática, uma condição de contorno lateral de gradiente zero for implementada como  $\phi_N^{\tau+1} = \phi_{N-1}^{\tau}$ .

Este tipo de condição de contorno lateral pode ser visto como um caso especial da radiação ou condição de contorno aberto, porque a onda que se propaga para fora do contorno é assumida como tendo uma velocidade de  $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Se a velocidade física real da onda for muito diferente dessa velocidade de fase numérica, pode ocorrer uma grande reflexão no contorno.



## ***Condição de Contorno Superior***



# Previsão Numérica de Tempo e Clima

## ***Condição de Contorno Superior***

**O contorno superior de um modelo de previsão meteorológica de mesoescala ou numérico deve ser colocado o mais longe possível da região com ondas ativas de mesoescala, sistemas convectivos e distúrbios climáticos.**

**Idealmente, deve ser colocado no topo da atmosfera, ou seja, Pressão=0.**

**No entanto, na prática, é impossível fazê-lo devido à restrição de recursos computacionais.**



# Previsão Numérica de Tempo e Clima

## ***Condição de Contorno Superior***

Dependendo dos sistemas climáticos simulados pelo modelo, o contorno superior de um domínio de modelo numérico pode ser colocado no fundo da estratosfera, na tropopausa ou dentro da camada estável da troposfera.

Por exemplo, uma circulação de brisa marítima em uma camada limite estável normalmente não penetra em grandes altitudes, portanto, permite que um contorno superior de um modelo de mesoescala seja colocado no meio da troposfera.

Por outro lado, ao simular um fluxo sobre uma montanha de mesoescala, as ondas da montanha muitas vezes podem se propagar a uma altitude muito elevada. Portanto, um domínio vertical muito maior é necessário.

Não importa quão alto o domínio do modelo se estenda na vertical, uma condição de contorno superior apropriada ainda é necessária.



## Condição de Contorno Superior

A adição de uma camada de esponja ou camada de absorção de onda ao topo do domínio físico ou camada é uma maneira simples de imitar a condição de contorno de radiação de Sommerfeld (1949) em um modelo numérico.

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = W_i \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)_m + (1 - W_i) \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)_{ls} \quad 13.2.1$$

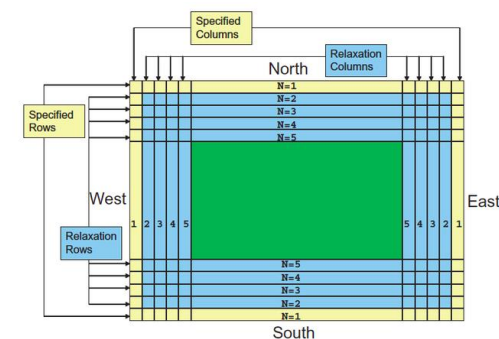


Figure 6.1: Specified and relaxation zones for a grid with a single specified row and column, and four rows and columns for the relaxation zone. These are typical values used for a specified lateral boundary condition for a real-data case.

A camada de esponja é projetada para amortecer as perturbações geradas na camada física fora do limite superior.



## **Condição de Contorno Superior**

Para elucidar a **formulação de uma camada de esponja**, podemos considerar o seguinte **estado estacionário**, **bidimensional**, **linear**, **hidrostático**, **não rotativo**, **fluxo Boussinesq com fricção de Rayleigh** e **resfriamento newtoniano** adicionado às equações de momento e termodinâmica, respectivamente,

$$U \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P'}{\partial x} = -v u' \quad 13.2.8$$

$$U \frac{\partial P'}{\partial z} + \frac{g \rho_o}{\theta_o} \theta' = 0 \quad 13.2.9$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad 13.2.10$$

$$U \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \frac{N^2 \theta_o}{g} w' = v \theta' \quad 13.2.11$$

As equações acima podem ser obtidas a partir das Eqs. (4.5.1)–(4.5.4).



# Previsão Numerica de Tempo e Clima

## **Condição de Contorno Superior**

Para **minimizar as reflexões causadas por aumentos rápidos na viscosidade**, pode-se considerar a seguinte função (Klemp e Lilly 1978), que aumenta gradualmente  $\nu$  de 0 em  $z_1$  para  $\nu_T$  em  $z_T$ ,

$$\nu(z) = \nu_T \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \left[ \frac{z - z_1}{z_T - z_1} \right] \right) \quad \text{onde } z_1 \leq z \leq z_T \quad 13.3.12$$

Para **investigar as propriedades de reflexão de onda da camada de absorção**, podemos assumir uma solução semelhante a onda na direção  $x$ ,

$$(u', w', P', \theta') = [\hat{u}(k, z), \hat{w}(k, z), \hat{P}(k, z), \hat{\theta}(k, z)] e^{ikx}$$





## **Condição de Contorno Superior**

$$(u', w', P', \theta') = [\hat{u}(k, z), \hat{w}(k, z), \hat{P}(k, z), \hat{\theta}(k, z)] e^{ikx} \quad 12.2.13$$

Substituindo a equação acima em (13.2.8)-(13.2.11) resulta

$$\hat{w}_{zz} + \frac{N^2}{U^2} \hat{w} = 0 \quad , \text{onde } z \leq z_1 \quad 12.2.14a$$

$$\hat{w}_{zz} + \frac{N^2}{U^2 \left(1 - i \frac{v}{kU}\right)^2} \hat{w} = 0 \quad , \text{onde } z \leq z_1 \quad 12.2.14b$$

As soluções gerais das equações acima podem ser escritas

$$\hat{w} = c_1 e^{il_1 z} + c_2 e^{-il_1 z} \quad , \quad \text{for } z \leq z_1, \quad (13.2.15a)$$

$$\hat{w} = d_1 e^{il_2 z} + d_2 e^{-il_2 z} \quad , \quad \text{for } z_1 \leq z \leq z_T, \quad (13.2.15b)$$



## Condição de Contorno Superior

$$(u', w', P', \theta') = [\hat{u}(k, z), \hat{w}(k, z), \hat{P}(k, z), \hat{\theta}(k, z)] e^{ikx} \quad 12.2.13$$

onde

$$l_1 = \frac{N}{U} \quad \text{and} \quad l_2 = \frac{N}{U \sqrt{1 - i\nu/kU}}, \quad (13.2.16)$$

são os **parâmetros do Scorer para fluxo básico uniforme** (U) na camadas física e esponja, respectivamente.

$$\hat{w} = c_1 e^{il_1 z} + c_2 e^{-il_1 z}, \quad \text{for } z \leq z_1, \quad (13.2.15a)$$

$$\hat{w} = d_1 e^{il_2 z} + d_2 e^{-il_2 z}, \quad \text{for } z_1 \leq z \leq z_T, \quad (13.2.15b)$$

Os quatro coeficientes na Eq. (13.2.15) pode ser **determinado pela condição de contorno superior, condição de contorno inferior e duas condições de interface** em (isto é,  $\hat{w}$  e  $\hat{w}_z$  são contínuos em  $z_1$ ).



## **Condição de Contorno Superior**

De acordo com o Teorema de Eliassen e Palm (1960), o termo  $c_1$  representa a propagação ascendente da energia da onda, enquanto o termo  $c_2$  representa a propagação descendente da energia da onda.

$$\hat{w} = c_1 e^{il_1 z} + c_2 e^{-il_1 z}, \quad \text{for } z \leq z_1, \quad (13.2.15a)$$

$$\hat{w} = d_1 e^{il_2 z} + d_2 e^{-il_2 z}, \quad \text{for } z_1 \leq z \leq z_T, \quad (13.2.15b)$$

$$r = \left| \frac{c_2}{c_1} \right|,$$

Assim, a razão  $r$  representa a refletividade produzida pela camada viscosa superior. Observe que  $r$  pode ser obtido após aplicar as condições de interface em  $z = z_1$  e a condição de contorno  $\hat{w} = 0$  em  $z = z_T$ .



## Condição de Contorno Superior

Para minimizar a reflexão do limite superior, Klemp e Lilly (1978) sugerem que **a profundidade da camada de esponja deve ser maior que o comprimento de onda hidrostático vertical**  $\lambda = \frac{2\pi U}{N}$  da perturbação de mesoescala.

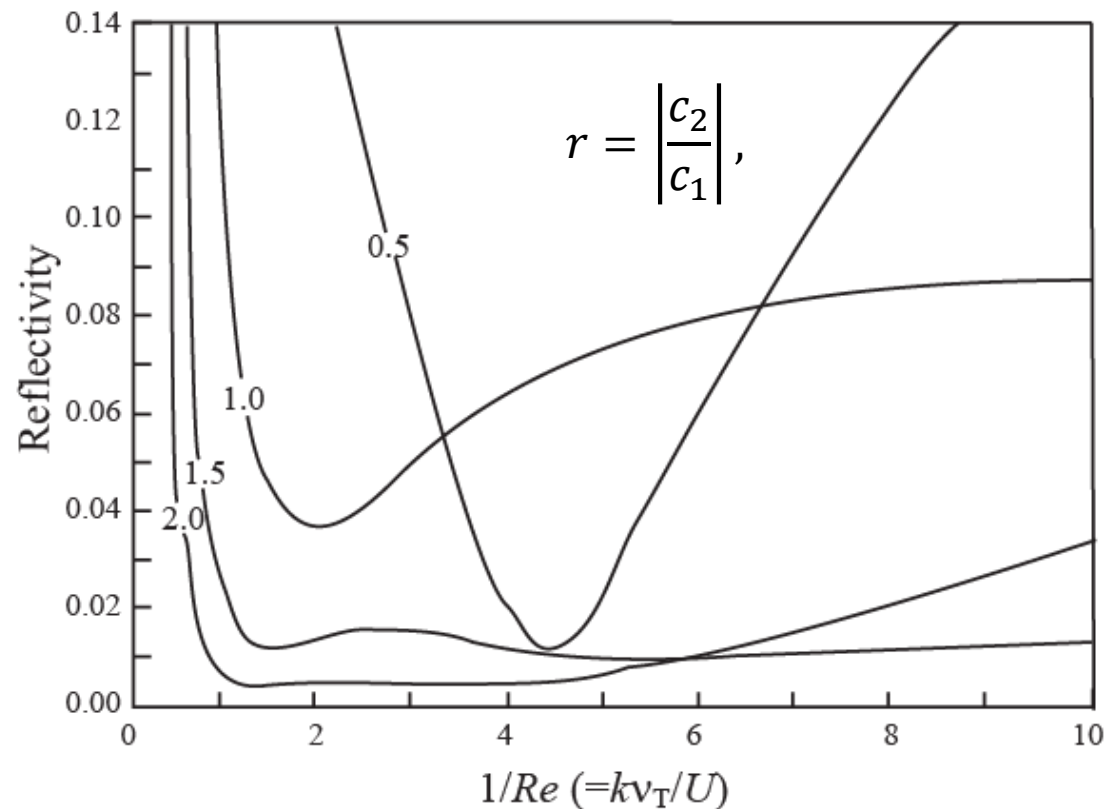


Fig. 13.8: Refletividade, da camada de esponja em função de um número de Reynolds inverso adimensional,  $1/Re$  para várias profundidades de camada de esponja adimensional ( $d = 0.5, 1.0, 1.5$  e  $2.0$ ).

Um valor de  **$r=1.0$**  corresponde à **reflexão completa do contorno superior do domínio computacional**.

Os números adimensionais são definidos como  $Re = \frac{U}{kv_T}$  e  $d = \frac{(z_T - z_1)}{\lambda}$ , onde  $\lambda = \frac{2\pi U}{N}$ . O coeficiente de viscosidade

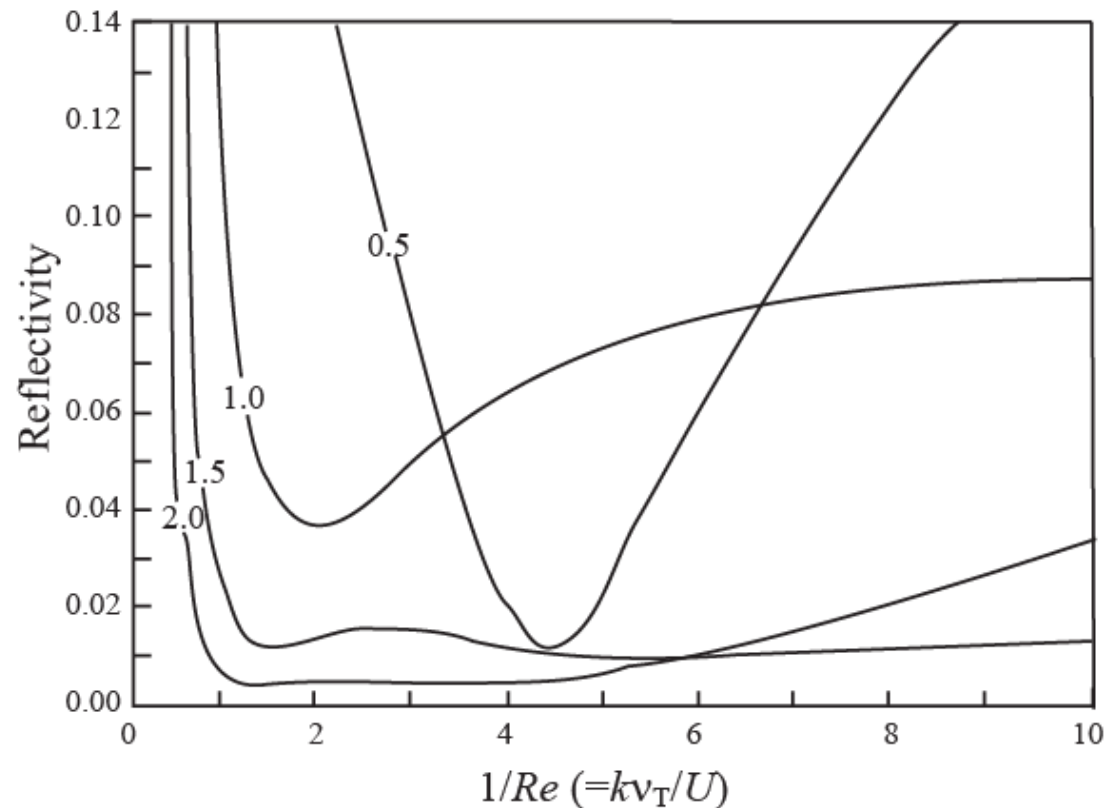
é definido como  $v = v_T \sin^2 \left[ \left( \frac{\pi}{2} \right) \frac{\ln(\frac{\bar{\theta}}{\theta_1})}{\ln(\frac{\theta_T}{\theta_1})} \right]$ , onde  $\theta_T$  e  $\theta_1$  são

**as temperaturas potenciais na parte superior e inferior** da camada de esponja, respectivamente. (Adaptado após Klemp e Lilly 1978) [Lin 2007]



## Condição de Contorno Superior

Experimentos numéricos não lineares sugerem que uma camada de esponja com profundidade maior que  $1.7\lambda$  é necessária (Lin e Wang 1996, Lin 2007). A Figura 13.8 mostra a refletividade da camada de esponja em função do número de Reynolds inverso adimensional,  $\frac{1}{Re} = \frac{kv_T}{U}$ , onde  $k$  é o número de onda horizontal.



Experimentos numéricos realizados por **Klemp e Lilly (1978) também sugerem que  $\frac{v_T}{v_1} < 6$**  é a melhor escolha para evitar a reflexão devido ao rápido aumento do coeficiente de viscosidade.



## Condição de Contorno Superior

Se a camada física for considerada invíscida ( $v_1 = 0$ ), pode-se escolher  $2 < \left[ \frac{v_T}{kU} \right] \leq 5$ , onde  $k$  é o número de onda horizontal.

Por exemplo, podemos escolher  $v_T = 0.002s^{-1}$  para um fluxo básico com  $U = 10m/s$  sobre uma montanha em forma de sino com largura media de  $a = 20km$ .

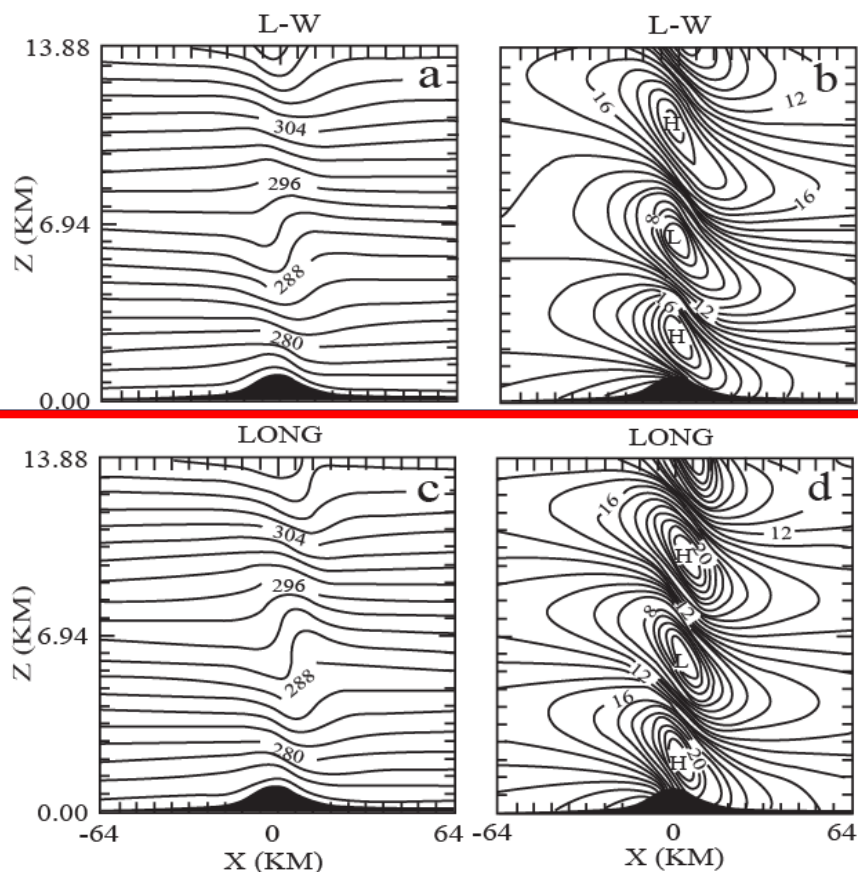


Fig. 13.9: Temperatura potencial ((a) e (c)) e campos de velocidade horizontal total ((b) e (d)) para um fluxo bidimensional, continuamente estratificado e uniforme sobre uma montanha em forma de **sino prevista no adimensional tempo  $\frac{Ut}{a} = 100$  por um modelo numérico hidrostático [(a) e (b)] e calculado pela solução hidrostática de estado estacionário de Long [(c) e (d)].**

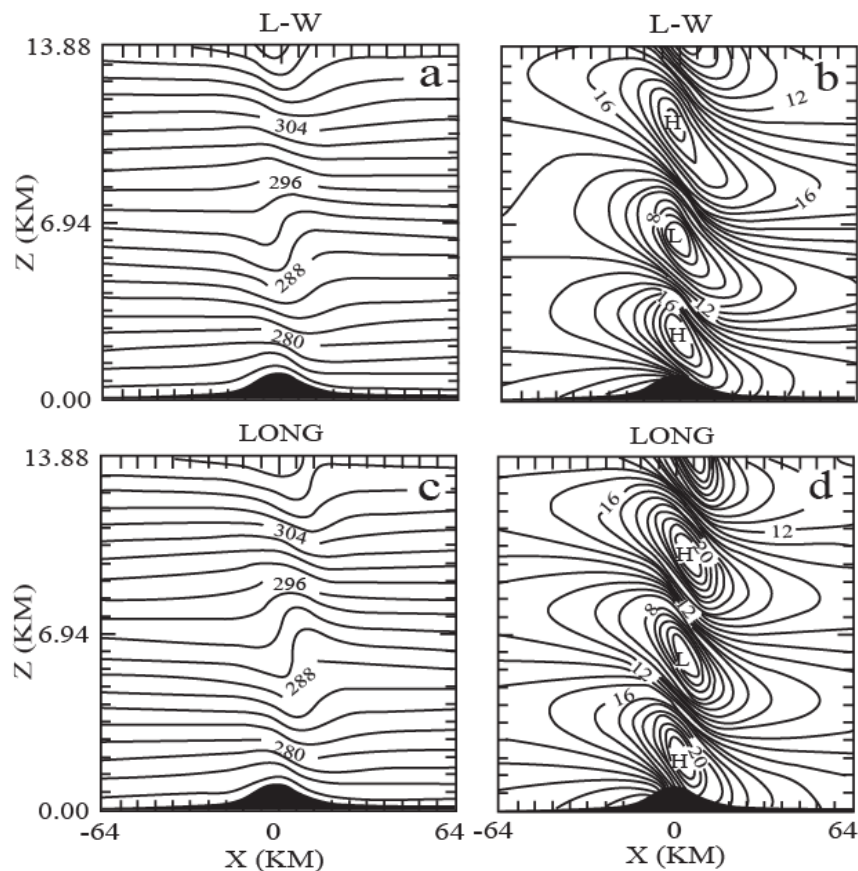
O número de Froude ( $F = \frac{U}{Nh}$ ) e o parâmetro hidrostático ( $\frac{Na}{U}$ ) associados à vazão básica são 1.3 e 7.7, respectivamente. O fluxo dimensional e os parâmetros orográficos são  $U = 13m/s$ ,  $N = 0.01s^{-1}$ ,  $h = 1$  km e  $a = 10$  km. A coordenada vertical é adimensionalizada pelo comprimento de onda hidrostático  $\lambda = \frac{2\pi U}{N}$ . (Após Lin e Wang 1996) [Lin 2007]



## Condição de Contorno Superior

Se a camada física for considerada invíscida ( $v_1 = 0$ ), pode-se escolher  $2 < \left[ \frac{v_T}{kU} \right] \leq 5$ , onde  $k$  é o número de onda horizontal.

Por exemplo, podemos escolher  $v_T = 0.002s^{-1}$  para um fluxo básico com  $U = 10m/s$  sobre uma montanha em forma de sino com largura media de  $a = 20km$ .



É utilizado um domínio vertical de  $3.4d$ , no qual a metade superior é a camada de esponja.

Pode-se ver claramente que as ondas hidrostáticas que se propagam verticalmente são efetivamente absorvidas pela camada de esponja.





***Condição de Contorno Superior***

**Condição de Limite  
Superior de Radiação**



## *Condição de Contorno Superior*

Uma vez que a adição de uma **camada de esponja** **aumenta significativamente o tempo computacional**, uma **aplicação direta da condição de radiação de Sommerfeld (1949)** foi proposta (Klemp e Durran 1983; Bougeault 1983).



## **Condição de Contorno Superior**

Para elucidar a **condição de limite de radiação numérica**, podemos considerar as equações 2D, lineares, hidrostáticas de Boussinesq para um estado básico uniforme na ausência da força de Coriolis:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad (13.2.18)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} - \left( \frac{g \rho_o}{\theta_o} \right) \theta' = 0, \quad (13.2.19)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (13.2.20)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + U \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \left( \frac{N^2 \theta_o}{g} \right) w' = 0. \quad (13.2.21)$$

Novamente, podemos assumir uma solução em forma de onda,

$$(u', w', p', \theta') = (u_o, w_o, p_o, \theta_o) e^{i(kx + mz - \omega t)}. \quad (13.2.22)$$



## **Condição de Contorno Superior**

e substitua nas Eqs. (13.2.18)-(13.2.21) para produzir a dispersão relação

$$m^2(\omega - kU)^2 = N^2k^2. \quad (13.2.23)$$

A partir da equação acima, a velocidade de fase horizontal e a velocidade de grupo horizontal caracterizam a propagação horizontal de ondas gravitacionais hidrostáticas,

$$c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = U \pm \frac{N}{m}. \quad (13.2.25)$$

$$c_{px} = \frac{\omega}{k} = U \pm \frac{N}{m}, \quad (13.2.24)$$



## **Condição de Contorno Superior**

Assim, para cada par de número de onda ( $k, m$ ), as velocidades de propagação horizontal das linhas de fase e energia são as mesmas.

Conseqüentemente, a energia da onda que se propaga para fora pode ser transmitida através de um contorno lateral por advecção numérica das perturbações através do contorno, com base em sua velocidade de fase horizontal, conforme proposto por Orlanski (1976) e discutido na Seção 4.2.2.

Observe que, para **ondas não hidrostáticas,  $c_{px}$  e  $c_{gx}$  não são idênticos, mas ainda se propagam na mesma direção.**

Assim, a condição de contorno radiativa ou condição de contorno lateral aberto ainda é capaz de advectar a energia para fora por uma simples equação de advecção.



## **Condição de Contorno Superior**

Na direção vertical, a situação é completamente diferente. Para simplificar, podemos assumir  $U = 0$ . **A velocidade de fase** e a **velocidade de grupo** podem ser derivadas,

$$c_{pz} = \frac{\omega}{m} = \pm \frac{Nk}{m^2}, \quad (13.2.26)$$

$$c_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial m} = \mp \frac{Nk}{m^2}. \quad (13.2.27)$$

Observe **que  $c_{pz}$  e  $c_{gz}$  têm sinais opostos**, o que implica que um  $c_{pz}$  positivo (ascendente) introduzirá uma propagação de energia descendente.

Assim, não podemos usar a equação de advecção para advectar a energia da onda gerada dentro do domínio para fora do contorno superior, como a adotada por Orlanski (1976) para a condição radiativa ou condição de contorno lateral aberto.



## **Condição de Contorno Superior**

Para **identificar modos de onda com propagação ascendente de energia**, consideramos perturbações lineares da forma

$$\phi(x, z, t) = \hat{\phi}(k, z, \omega) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (13.2.28)$$

onde  $\phi$  pode representar quaisquer variáveis dependentes,  $u', w', P', \theta'$ . Substituindo a equação acima na equação governante, (13.2.18)-(13.2.21), resulta

onde  $\phi$  pode representar quaisquer variáveis dependentes,  $u', w', P', \theta'$ . Substituindo a equação acima na equação governante, (13.2.18)-(13.2.21), resulta





## **Condição de Contorno Superior**

Para identificar modos de onda com propagação ascendente de energia, consideramos perturbações lineares da forma

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} + \frac{N^2 k^2}{(kU - \omega)^2} \hat{w} = 0. \quad (13.2.29)$$

Ao assumir um  $k$  positivo, a equação acima tem a seguinte solução geral,

$$\hat{w} = Ae^{iNz/(U-\omega/k)} + Be^{-iNz/(U-\omega/k)}. \quad (13.2.30)$$

Um argumento semelhante também pode ser feito facilmente para um  $k$  negativo. O fluxo de energia vertical (Eliassen e Palm 1960) pode então ser obtido,

$$\overline{p'w'} = \frac{\rho_o N}{2k} \left( |A|^2 - |B|^2 \right), \quad (13.2.31)$$



## **Condição de Contorno Superior**

$$\overline{p'w'} = \frac{\rho_o N}{2k} \left( |A|^2 - |B|^2 \right), \quad (13.2.31)$$

onde os termos **A** e **B** representam a propagação ascendente e descendente da energia das ondas, respectivamente. Assim, para evitar a reflexão da onda do limite superior, exigimos  $B=0$ . Assim, para ondas de propagação ascendente, escolhemos

$$\hat{w} = Ae^{iNz/(U-\omega/k)}. \quad (13.2.32)$$

Isso implica

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = \frac{iN}{U - \omega/k} \hat{w}. \quad (13.2.33)$$



## **Condição de Contorno Superior**

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = \frac{iN}{U - \omega / k} \hat{w}. \quad (13.2.33)$$

Da equação da continuidade e da equação do momento, temos ter

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = -ik\hat{u} = \frac{ik / \rho_o}{U - \omega / k} \hat{p}. \quad (13.2.34)$$

Se  $k$  positivos e negativos forem levados em consideração, então as duas equações acima levam a

$$\hat{p} = \frac{\rho_o N}{|k|} \hat{w} \quad \text{at} \quad z = z_T. \quad (13.2.35)$$

Como a **equação acima não depende da frequência**, podemos escrever a condição de contorno radiativa no topo do modelo em função do número de onda ou no espaço de Fourier,



## ***Condição de Contorno Superior***

$$\tilde{p}(z, t) = \frac{\rho_o N}{|k|} \tilde{w}(z, t) . \quad (13.2.36)$$

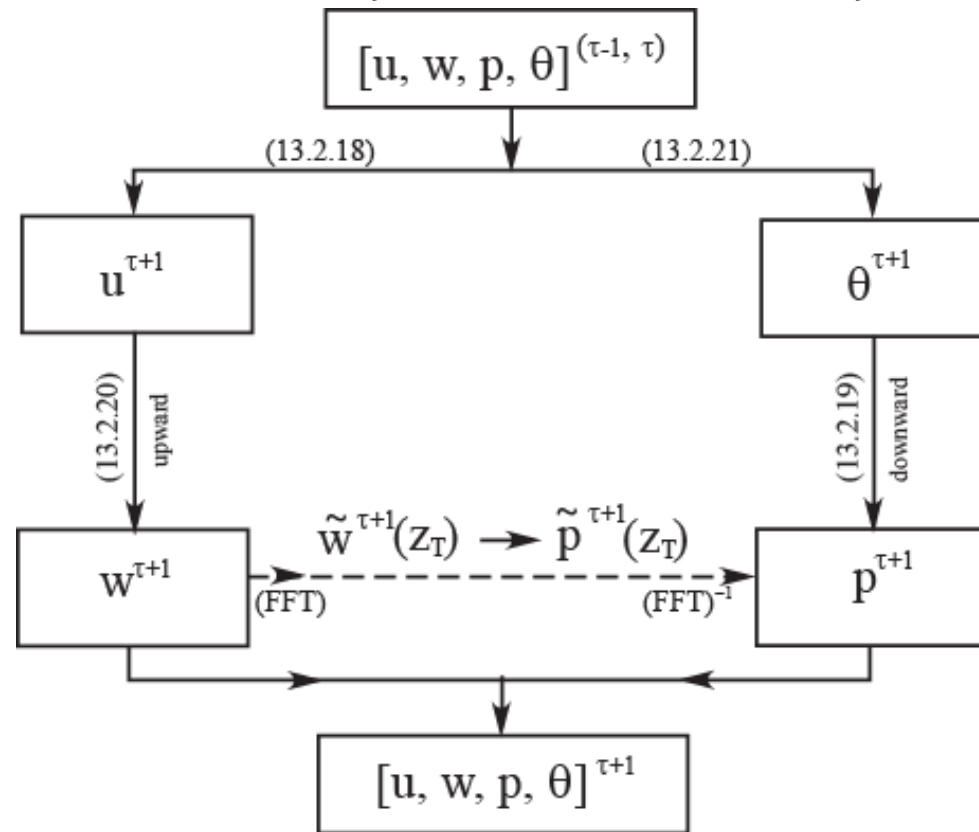
onde  $\tilde{p} = \tilde{w}$  são definidos como

$$(p, w) = (\tilde{p}, \tilde{w})e^{ikx} = (\hat{p}, \hat{w})e^{i(kx - \omega t)} . \quad (13.2.37)$$



## Condição de Contorno Superior

Implementação numérica da condição de contorno de radiativa superior



$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad (13.2.18)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} - \left( \frac{g \rho_o}{\theta_o} \right) \theta' = 0, \quad (13.2.19)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (13.2.20)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + U \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \left( \frac{N^2 \theta_o}{g} \right) w' = 0. \quad (13.2.21)$$

$$(u', w', p', \theta') = (u_o, w_o, p_o, \theta_o) e^{i(kx + mz - \omega t)}. \quad (13.2.22)$$

Fig. 13.10: Um fluxograma para modelar o sistema de fluxo de fluido de (13.2.18) - (13.2.21) e implementar a condição numérica de contorno radiativa superior no topo do domínio computacional.

FFT e FFT-1 definem a Transformada Rápida de Fourier e a Transformada Rápida de Fourier inversa.



## **Condição de Contorno Superior**

No procedimento de implementação, as cinco etapas a seguir são seguidas:

- (1) Integre  $w^{\tau+1}$  para cima até  $z_T$  com base na equação da continuidade, Eq. (13.2.20).

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (13.2.20)$$

- (2) Faça a transformada de Fourier de  $w^{\tau+1}(z_T)$  para obter  $\tilde{w}^{\tau+1}(z_T)$ . Um software numérico Fast Fourier Transform (FFT) pode acelerar a computação.

- (3) Aplique a Eq. (13.2.36) para obter  $\tilde{P}^{\tau+1}(z_T)$ .

$$\tilde{p}(z, t) = \frac{\rho_o N}{|k|} \tilde{w}(z, t). \quad (13.2.36)$$

- (4) Faça a transformada de Fourier inversa de  $\tilde{P}^{\tau+1}(z_T)$  para obter  $P^{\tau+1}(z_T)$

- (5) Integre a equação hidrostática  $P = \rho g z$  para baixo com base na condição de contorno superior de  $P^{\tau+1}(z_T)$  para obter  $P^{\tau+1}(z)$  em todos os níveis de altura no domínio.



## ***Condição de Contorno Superior***

Klemp e Durran (1983) demonstraram que a condição de contorno de radiação superior é influenciada pela não linearidade do sistema fluido.

Embora a condição de limite de radiação numérica seja baseada mais solidamente na teoria da onda de gravidade, outros fatores, como não linearidade, não hidrostaticidade e convecção profunda (que não é uma onda) etc., podem influenciar um sistema de fluxo de fluido mais complicado.

Além disso, a resposta do fluxo também é sensível à altura do domínio quando uma condição de contorno de radiação superior é implementada.





***Condição de Contorno Superior***

***Condição de Contorno Inferior  
??????***



Rode o modelo MONAN com as três opções de frequência da condição de contorno:

*Obs: output\_interval e input\_interval sempre devem ser os mesmos valores*

.../monan\_Linux/monan/pre/namelist/MONAN-Model\_v1.0.0\_egeon.gnu940/streams.init\_atmosphere.LBC.regional

```
<immutable_stream name="lbc"  
  type="output"  
  filename_template="lbc.$Y-$M-$D_$h.$m.$s.nc"  
  filename_interval="output_interval"  
  packages="lbc"  
  output_interval="3:00:00" />
```

```
</streams>
```

output\_interval="3:00:00"  
output\_interval="6:00:00"  
output\_interval="12:00:00"

.../monan\_linux/monan/model/namelist/MONAN-Model\_v1.0.0\_egeon.gnu940/streams.atmosphere.TEMPLATE.regional

```
<immutable_stream name="lbc_in"  
  type="input"  
  filename_template="lbc.$Y-$M-$D_$h.$m.$s.nc"  
  filename_interval="input_interval"  
  packages="limited_area"  
  input_interval="3:00:00" />
```

```
</streams>
```

input\_interval="3:00:00"  
input\_interval="6:00:00"  
input\_interval="12:00:00"