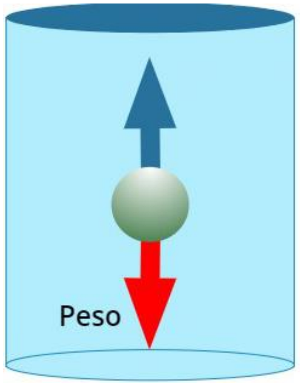
- ***Equação de movimento Linearizada***
- ***A Camada limite Planetaria***
- ***Energia Cinética Turbulenta;***

5.2 TURBULENT KINETIC ENERGY

A equação de Navier Stokes: conservação de momentum

$$\frac{Du_i}{Dt} = F_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

F_i representa a força de gravidade $+\frac{\rho}{\rho_0}$g



$dF_b = \vec{g}\rho$dxdydz

https://brasilescola.uol.com.br/fisica/empuxo.htm

5.2 TURBULENT KINETIC ENERGY

A equação de Navier Stokes: conservação de momentum

σ_{ij} é o tensor de cisalhamento (stress) $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)$

δ_{ij}=0 => $i \neq j$ e δ_{ij}=1 => $i = j$

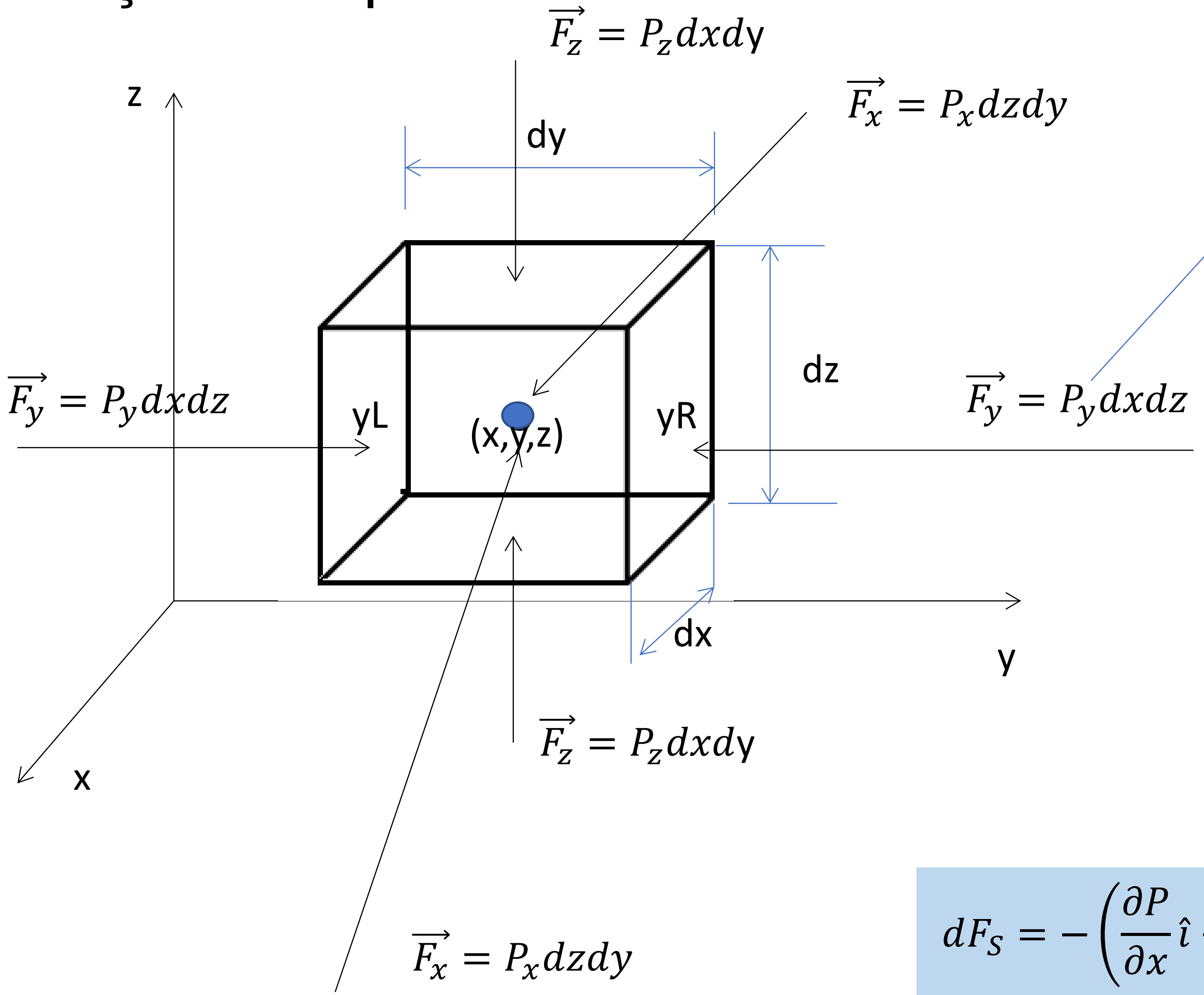
μ viscosidade dinâmica

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ viscosidade cinemática

https://wiki.anton-paar.com/br-pt/conceitobasicodeviscosimetria/

$$\frac{Du_i}{Dt} = F_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Força de Superfície



$$P = \frac{F}{A}$$

F=P*A

$$dF_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{k}\right)\text{dxdydz}$$

Paulo Yoshio Kubota

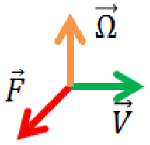
5.2 TURBULENT KINETIC ENERGY

A equação de Navier Stokes: conservação de momentum

Forma incompressível e com viscosidade constante mais o efeito da rotação da terra

$$\boxed{aproximação\ de\ Boussinesq \quad \rho = \rho_0 = cte}$$

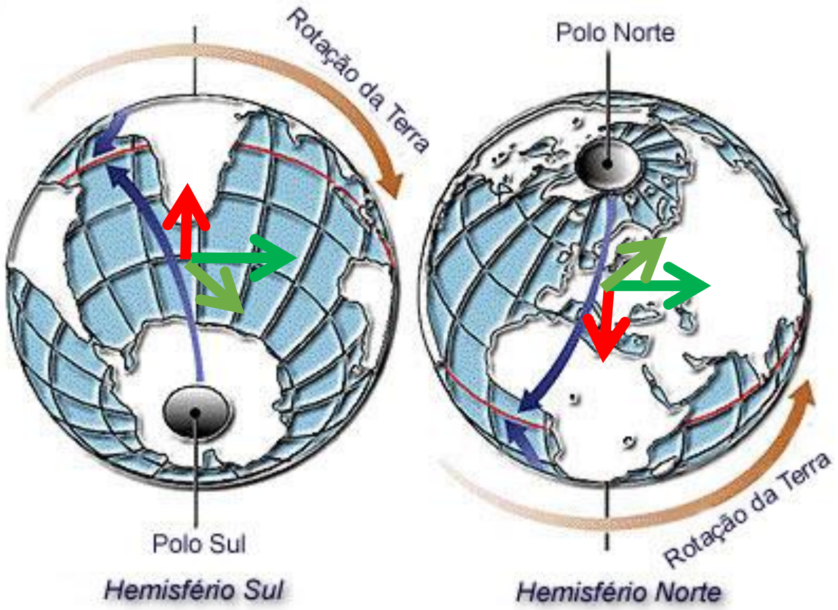
$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x_i} - g\frac{\rho}{\rho_0}\delta_{i3} - 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j u_k + \nu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial {x_j}^2}\right)$$



Onde:

$$\eta_{j=1,3} = (0, \quad \cos(\emptyset), \quad \sin(\emptyset))$$

$$2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j = 2\Omega\eta_3 = 2\Omega\sin(\emptyset) = f$$



5.2 TURBULENT KINETIC ENERGY

A equação de Navier Stokes: conservação de momentum para a atmosfera

A equação primitiva é uma equação diferencial parcial não lineares que é usadas para aproximar o escoamento atmosférico global.

- ***Equação Primitava Não Lineares da Atmosfera***

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x_i} - g\frac{\rho}{\rho_0}\delta_{i3} - 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j u_k + \nu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial {x_j}^2}\right)$$

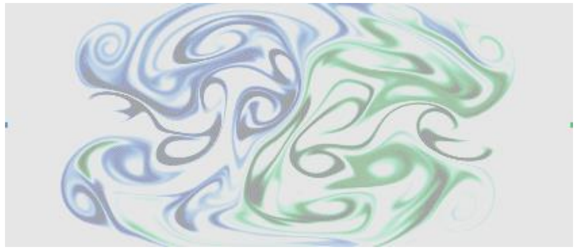
Onde:

$\eta_{j=1,3}$=(0, cos(Ø), sin(Ø))

$$2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j = 2\Omega\eta_3 = 2\Omega\sin(\emptyset) = f$$

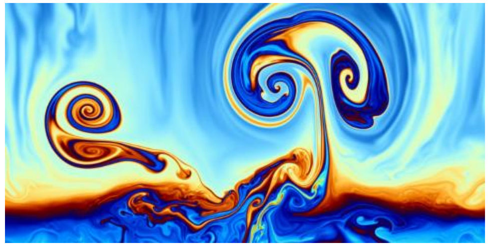
5.2 Media de Reynolds

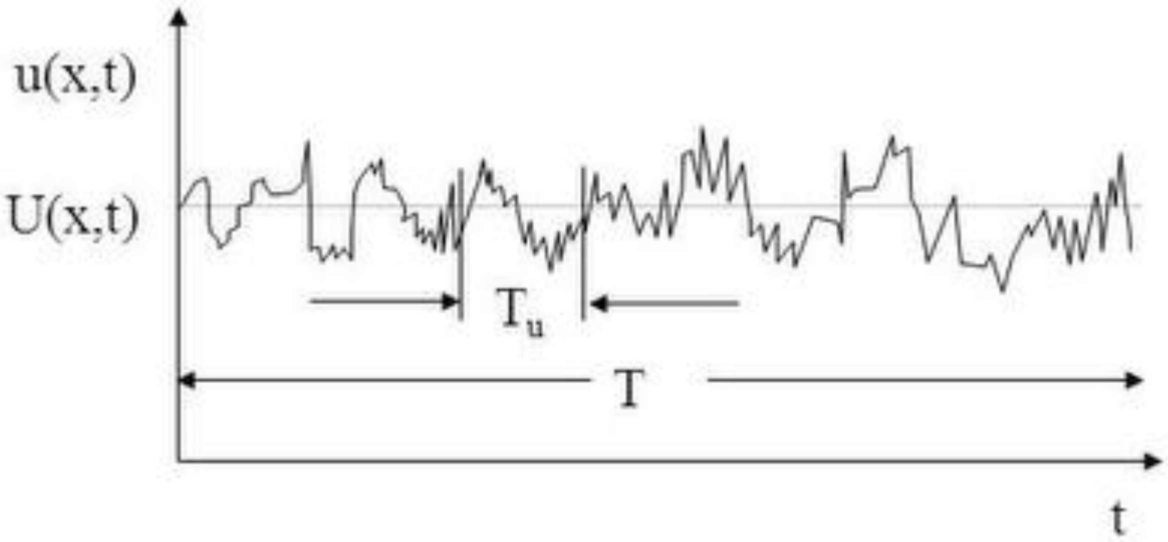
- Seguindo o esquema introduzido por Reynolds, assumimos que, para qualquer variável de campo, w e θ pode-se aplicar a decomposição.



$$w = \overline{w} + w'$$

$$\theta = \bar{\theta} + \theta'$$





5.2 TURBULENT KINETIC ENERGY **A equação de Navier Stokes: conservação de momentum**

i=1,2,3
J=1,2,3
K=1,2,3

$$\frac{Du_i}{Dt}=\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x_i}-\frac{\rho}{\rho_0}g\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j u_k+\nu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial {x_j}^2}\right)$$

$$u_i=\overline{u_i}+u_i'$$

Aplique a Média de Reynolds na Variáveis

$$\frac{\partial(\overline{u_i}+u_i')}{\partial t}+(\overline{u_j}+u_j')\frac{\partial(\overline{u_i}+u_i')}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P}+P')}{\partial x_i}-g\frac{(\rho+\rho')}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k}+u_k')+\nu\left(\frac{\partial^2(\overline{u_i}+u_i')}{\partial {x_j}^2}\right)$$

Expanda os termos

$$\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial t}+\frac{\partial(u_i')}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}+(\overline{u_j})\frac{\partial(u_i')}{\partial x_j}+(u_j')\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}+(u_j')\frac{\partial(u_i')}{\partial x_j}=$$
$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial x_i}-g\frac{\rho}{\rho_0}\delta_{i3}-g\frac{\rho'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k})-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k')+\nu\frac{\partial^2(\overline{u_i})}{\partial {x_j}^2}+\nu\frac{\partial^2(u_i')}{\partial {x_j}^2}$$

A equação de Navier Stokes: conservação de momentum

$$\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial t}+\frac{\partial({u_i}')}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}+(\overline{u_j})\frac{\partial({u_i}')}{\partial x_j}+({u_j}')\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}+({u_j}')\frac{\partial({u_i}')}{\partial x_j}=$$
$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\overline{P})}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial x_i}-g\frac{\rho}{\rho_0}\delta_{i3}-g\frac{\rho'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k})-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j({u_k}')+\nu\frac{\partial^2(\overline{u_i})}{\partial {x_j}^2}+\nu\frac{\partial^2({u_i}')}{\partial {x_j}^2}$$

Separa os termos na equação acima

$$\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}+(\overline{u_j})\frac{\partial({u_i}')}{\partial x_j}+({u_j}')\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}+({u_j}')\frac{\partial({u_i}')}{\partial x_j}=$$
$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\overline{P})}{\partial x_i}-g\frac{\rho}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k})+\nu\frac{\partial^2(\overline{u_i})}{\partial {x_j}^2}$$

A equação de Navier Stokes: conservação de momentum

$$\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial t} + (\overline{u_j})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j} + (u_j{}')\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j} + \boxed{(u_j{}')\frac{\partial(u_i{}')}{\partial x_j}} =$$
$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} - g\frac{\rho}{\rho_0}\delta_{i3} - 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k}) + \nu\frac{\partial^2(\overline{u_i})}{\partial x_j{}^2}$$

$$\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial t} + (\overline{u_j})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j} + (u_j{}')\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j} + \boxed{\frac{\partial\left(u_j{}'u_i{}'\right)}{\partial x_j} - (u_i{}')\frac{\partial\left(u_j{}'\right)}{\partial x_j}}$$
$$= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} - g\frac{\rho}{\rho_0}\delta_{i3} - 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k}) + \nu\frac{\partial^2(\overline{u_i})}{\partial x_j{}^2}$$

Aplique as media de Reynolds

$$\frac{\partial(\bar{\bar{u}}_i)}{\partial t} + (\bar{\bar{u}}_j)\frac{\partial(\bar{\bar{u}}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(\overline{u_j{}'u_i{}'}\right)}{\partial x_j} - (\overline{u_i{}'})\frac{\partial\left(\overline{u_j{}'}\right)}{\partial x_j} + (\overline{u_j{}'})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}$$
$$= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\left(\bar{\bar{P}}\right)}{\partial x_i} - g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{\overline{u_k}}) + \nu\frac{\partial^2(\bar{\bar{u}}_i)}{\partial x_j{}^2}$$

Paulo Yoshio Kubota

A equação de Navier Stokes: conservação de momentum

$$\frac{\partial(\overline{\overline{u}}_i)}{\partial t} + (\overline{\overline{u}}_j)\frac{\partial(\overline{\overline{u}}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(\overline{u_j{}'u_i{}'}\right)}{\partial x_j} - (\overline{u_i{}'})\frac{\partial\left(\overline{u_j{}'}\right)}{\partial x_j} + (\overline{u_j{}'})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}$$
$$= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\left(\overline{\overline{P}}\right)}{\partial x_i} - g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{\overline{u_k}}) + \nu\frac{\partial^2(\overline{\overline{u}}_i)}{\partial {x_j}^2}$$

Aplique as considerações da media de Reynolds

$\overline{\overline{u}}_i = \overline{u}_i$ $\quad$ $\overline{u_j{}'u_i{}'} \neq 0$ $\quad$ $\overline{u_j{}'} = 0$ $\quad$ $\overline{u_i{}'} = 0$

$$\frac{\partial(\overline{u}_i)}{\partial t} + (\overline{u}_j)\frac{\partial(\overline{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial\left(\overline{u_j{}'u_i{}'}\right)}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\overline{P})}{\partial x_i} - g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k}) + \nu\frac{\partial^2(\overline{u}_i)}{\partial {x_j}^2}$$

- ***Equação primitiva não linear para o escoamento da Atmosfera***

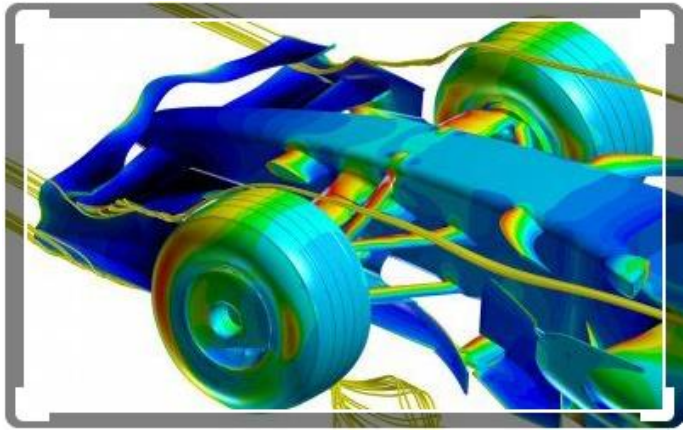
$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\rho}{\rho_0} g\delta_{i3} - 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j u_k + \nu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial {x_j}^2}\right)$$

- ***Equação Governante Linearizada do Estado Médio do escoamento da Atmosfera***

$$\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial t} + (\overline{u_j})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j} = -\frac{\partial\left(\overline{{u_j}'{u_i}'}\right)}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} - g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3} - 2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k}) + \nu\frac{\partial^2(\overline{u_i})}{\partial {x_j}^2}$$

Paulo Yoshio Kubota

- ***Equação governante da Camada Limite Planetária***



5.2 TURBULENT KINETIC ENERGY A equação de Navier Stokes: conservação de momentum

$$\frac{\partial(\overline{u}_i)}{\partial t}+\frac{\partial(u_i')}{\partial t}+(\overline{u}_j)\frac{\partial(\overline{u}_i)}{\partial x_j}+(\overline{u}_j)\frac{\partial(u_i')}{\partial x_j}+(u_j')\frac{\partial(\overline{u}_i)}{\partial x_j}+(u_j')\frac{\partial(u_i')}{\partial x_j}=$$
$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\overline{P})}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial x_i}-g\frac{\rho}{\rho_0}\delta_{i3}-g\frac{\rho'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k})-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k')+\nu\frac{\partial^2(\overline{u}_i)}{\partial {x_j}^2}+\nu\frac{\partial^2(u_i')}{\partial {x_j}^2}$$

Separe os termos com perturbação que se cancelariam com a media de Reynolds

$$\frac{\partial(u_i')}{\partial t}+(\overline{u}_j)\frac{\partial(u_i')}{\partial x_j}+\boxed{(u_j')\frac{\partial(\overline{u}_i)}{\partial x_j}}+\boxed{(u_j')\frac{\partial(u_i')}{\partial x_j}}$$
$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial x_i}-g\frac{\rho'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k')+\nu\frac{\partial^2(u_i')}{\partial {x_j}^2}$$

$$\frac{\partial(u_i')}{\partial t}+(\overline{u}_j)\frac{\partial(u_i')}{\partial x_j}+\boxed{\frac{\partial(u_j'\overline{u}_i)}{\partial x_j}-(\overline{u}_i)\frac{\partial(u_j')}{\partial x_j}}+\boxed{\frac{\partial(u_j'u_i')}{\partial x_j}-(u_i')\frac{\partial(u_j')}{\partial x_j}}$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(P')}{\partial x_i}-g\frac{\rho'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k')+\nu\frac{\partial^2(u_i')}{\partial {x_j}^2}$$

5.2 TURBULENT KINETIC ENERGY A equação de Navier Stokes: conservação de momentum

$$\frac{\partial(u_i')}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(u_i')}{\partial x_j}+\boxed{(u_j')\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}}+\boxed{(u_j')\frac{\partial(u_i')}{\partial x_j}}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial x_i}-g\frac{\rho'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k')+\nu\frac{\partial^2(u_i')}{\partial {x_j}^2}$$

Aplique a derivada do produto nos termos em destaque:

$$\frac{\partial(u_i')}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(u_i')}{\partial x_j}+\boxed{\frac{\partial(u_j'\overline{u_i})}{\partial x_j}-(\overline{u_i})\frac{\partial(u_j')}{\partial x_j}}+\boxed{\frac{\partial(u_j'u_i')}{\partial x_j}-(u_i')\frac{\partial(u_j')}{\partial x_j}}$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(P')}{\partial x_i}-g\frac{\rho'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k')+\nu\frac{\partial^2(u_i')}{\partial {x_j}^2}$$

5.2 TURBULENT KINETIC ENERGY A equação de Navier Stokes: conservação de momentum

$$\frac{\partial(u_i')}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(u_i')}{\partial x_j}+\frac{\partial(u_j'\overline{u_i})}{\partial x_j}-(\overline{u_i})\frac{\partial(u_j')}{\partial x_j}+\frac{\partial(u_j'u_i')}{\partial x_j}-(u_i')\frac{\partial(u_j')}{\partial x_j}$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(P')}{\partial x_i}-g\frac{\rho'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k')+\nu\frac{\partial^2(u_i')}{\partial {x_j}^2}$$

Considere que a propriedade da equação da continuidade para o fluxo $\nabla.\vec{V}=0$

$$\nabla.\vec{V'}=\frac{\partial(u_j')}{\partial x_j}=0,\qquad j=1,2,3$$

$$\frac{\partial(u_i')}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(u_i')}{\partial x_j}+\frac{\partial(u_j'\overline{u_i})}{\partial x_j}+\frac{\partial(u_j'u_i')}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial x_i}-g\frac{\rho'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k')+\nu\frac{\partial^2(u_i')}{\partial {x_j}^2}$$

5.2 TURBULENT KINETIC ENERGY A equação de Navier Stokes: conservação de momentum

$$\frac{\partial(u_i')}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(u_i')}{\partial x_j}+\frac{\partial(u_j'\overline{u_i})}{\partial x_j}+\frac{\partial(u_j'u_i')}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial x_i}-g\frac{\rho'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k')+\nu\frac{\partial^2(u_i')}{\partial {x_j}^2}$$

Para evitar cancelamento dos termos turbulentos aplicando a media de Reynolds. Multiplica-se os termos turbulentos da equação por u_k'

$$\frac{\partial(u_i'u_k')}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(u_i'u_k')}{\partial x_j}+\frac{\partial(u_j'\overline{u_i}u_k')}{\partial x_j}+\frac{\partial(u_j'u_i'u_k')}{\partial x_j}$$
$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P'u_k')}{\partial x_i}-g\frac{\rho'u_k'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k'u_k')+\nu\frac{\partial^2(u_i'u_k')}{\partial {x_j}^2}$$

5.2 TURBULENT KINETIC ENERGY

A equação de Navier Stokes: conservação de momentum

$$\frac{\partial(u_i'u_k')}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(u_i'u_k')}{\partial x_j}+\boxed{\frac{\partial\left(u_j'\overline{u_i}u_k'\right)}{\partial x_j}}+\frac{\partial\left(u_j'u_i'u_k'\right)}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P'u_k')}{\partial x_i}-g\frac{\rho'u_k'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k'u_k')+\nu\frac{\partial^2(u_i'u_k')}{\partial {x_j}^2}$$

Expanda a derivada do termo em destaque

$$\frac{\partial(u_i'u_k')}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(u_i'u_k')}{\partial x_j}=\boxed{-\left(u_j'u_k'\right)\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}-\left(u_j'\overline{u_i}\right)\frac{\partial(u_k')}{\partial x_j}-\overline{u_i}u_k'\frac{\partial(u_j')}{\partial x_j}}-\frac{\partial\left(u_j'u_i'u_k'\right)}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P'u_k')}{\partial x_i}-g\frac{\rho'u_k'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k'u_k')+\nu\frac{\partial^2(u_i'u_k')}{\partial {x_j}^2}$$

5.2 TURBULENT KINETIC ENERGY **A equação de Navier Stokes: conservação de momentum**

$$\frac{\partial(u_i'u_k')}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(u_i'u_k')}{\partial x_j}$$
$$=-(u_j'u_k')\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}-(u_j'\overline{u_i})\frac{\partial(u_k')}{\partial x_j}-\overline{u_i}u_k'\frac{\partial(u_j')}{\partial x_j}-\frac{\partial(u_j'u_i'u_k')}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P'u_k')}{\partial x_i}-g\frac{\rho'u_k'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k'u_k')+\nu\frac{\partial^2(u_i'u_k')}{\partial {x_j}^2}$$

Considere que a propriedade da equação da continuidade para o fluxo $\nabla.\vec{V}=0$

$$\nabla.\vec{V'}=\frac{\partial(u_j')}{\partial x_j}=0,\qquad j=1,2,3$$

$$\frac{\partial(u_i'u_k')}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(u_i'u_k')}{\partial x_j}$$
$$=-(u_j'u_k')\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}-(u_j'\overline{u_i})\frac{\partial(u_k')}{\partial x_j}-\frac{\partial(u_j'u_i'u_k')}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P'u_k')}{\partial x_i}-g\frac{\rho'u_k'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k'u_k')+\nu\frac{\partial^2(u_i'u_k')}{\partial {x_j}^2}$$

5.2 TURBULENT KINETIC ENERGY **A equação de Navier Stokes: conservação de momentum**

$$\frac{\partial(u_i'u_k')}{\partial t}+(\bar{u}_j)\frac{\partial(u_i'u_k')}{\partial x_j}$$
$$=-(u_j'u_k')\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_j}-(u_j'\bar{u}_i)\frac{\partial(u_k')}{\partial x_j}-\frac{\partial\left(u_j'u_i'u_k'\right)}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P'u_k')}{\partial x_i}-g\frac{\rho'u_k'}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(u_k'u_k')$$
$$+\nu\frac{\partial^2(u_i'u_k')}{\partial {x_j}^2}$$

Aplique as considerações da media de Reynolds

$$\left(\overline{u_j'\bar{u}_i}\right)\frac{\partial\left(\overline{u_k'}\right)}{\partial x_j}=0$$

$$\frac{\partial\left(\overline{u_i'u_k'}\right)}{\partial t}+(\bar{\bar{u}}_j)\frac{\partial\left(\overline{u_i'u_k'}\right)}{\partial x_j}$$
$$=-\overline{(u_j'u_k')}\frac{\partial(\bar{\bar{u}}_i)}{\partial x_j}-\frac{\partial\overline{\left(u_j'u_i'u_k'\right)}}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\left(\overline{P'u_k'}\right)}{\partial x_i}-g\frac{\overline{\rho'u_k'}}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j\overline{(u_k'u_k')}+\nu\frac{\partial^2\overline{(u_i'u_k')}}{\partial {x_j}^2}$$

5.2 TURBULENT KINETIC ENERGY

A equação de Navier Stokes: conservação de momentum

$$\frac{\partial\overline{(u_i'u_k')}}{\partial t}+(\bar{\bar{u}}_j)\frac{\partial\overline{(u_i'u_k')}}{\partial x_j}=-\overline{(u_j'u_k')}\frac{\partial(\bar{\bar{u}}_i)}{\partial x_j}-\frac{\partial\overline{(u_j'u_i'u_k')}}{\partial x_j}-g\frac{\overline{\rho'u_k'}}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j\overline{(u_k'u_k')}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\overline{(P'u_k')}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2\overline{(u_i'u_k')}}{\partial x_j{}^2}$$

O termo do lado esquerdo é a ***taxa temporal local de mudança*** e ***advecção*** de $\overline{(u_i'u_k')}$

O 1 e termo do lado direito são os termos de produção resultante da interação da turbulência e o escoamento médio

O 2 termo (terceiro momento) correlação tripla pode ser interpretado como transporte de turbulência (segundo momento) pela flutuação turbulenta com o ganho ou perda devido a divergência do fluxo turbulento

O 3 termo representa a produção e destruição da flutuabilidade (conversão da energia cinética turbulenta para a energia potencial turbulenta)

O termo 4 é a rotação e pode ser desprezado para média temporal menor do que 1 hora

O termo 5 é a interação da flutuação de pressão e do campo de velocidade

O termo 6 é a dissipação molecular

Paulo Yoshio Kubota

Para caso de homogeneidade horizontal

$$\frac{\partial \overline{(u_i' u_k')}}{\partial t} + (\overline{\overline{u_j}}) \frac{\partial \overline{(u_i' u_k')}}{\partial x_j} = -\overline{(u_j' u_k')} \frac{\partial (\overline{\overline{u_i}})}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{(u_j' u_i' u_k')}}{\partial x_j} - g \frac{\overline{\rho' u_k'}}{\rho_0} \delta_{i3} - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j \overline{(u_k' u_k')} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (\overline{P' u_k'})}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{(u_i' u_k')}}{\partial {x_j}^2}$$

O termo molecular $\nu \frac{\partial^2 \overline{(u_i' u_k')}}{\partial {x_j}^2} \rightarrow 0$ **é desprezado no caso da covariância, porque a viscosidade é dominante somente em numero de ondas grandes.**

Porém, neste caso a turbulência é isotrópica e assim a covariância é zero na horizontal.

(j=k) $$\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial t} = -\overline{w'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{g}{\overline{\theta_v}} \overline{u' \theta_v'} - \frac{\partial \overline{u' w'^2}}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u' \frac{\partial P'}{\partial z}} + \overline{w' \frac{\partial P'}{\partial x}} \right)$$

Isotrópico é a caracterização de uma substância que possui as mesmas propriedades físicas, independentemente da direção considerada.

Paulo Yoshio Kubota

Para caso de homogeneidade horizontal e o estado básico em condições neutra $\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial t} = 0$ e $\frac{g}{\overline{\theta_v}}\overline{u'\theta_v'} = 0$

(j=k) $$\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial t} = -\overline{w'^2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{g}{\overline{\theta_v}}\overline{u'\theta_v'} - \frac{\partial \overline{u'w'^2}}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\left(\overline{u'\frac{\partial P'}{\partial z}} + \overline{w'\frac{\partial P'}{\partial x}}\right)$$

Isto mostra que o termo de correlação de pressão-velocidade destrói o stress na mesma taxa como ela é produzida

$$0 = -\overline{w'^2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{u'w'^2}}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\left(\overline{u'\frac{\partial P'}{\partial z}} + \overline{w'\frac{\partial P'}{\partial x}}\right)$$

$$+\overline{w'^2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'w'^2}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\left(\overline{u'\frac{\partial P'}{\partial z}} + \overline{w'\frac{\partial P'}{\partial x}}\right)$$

Equação
da
Energia Cinética Turbulenta

5.2 Energia Cinética Turbulenta

$$\frac{\partial\left(\overline{u_i'u_k'}\right)}{\partial t}+\left(\bar{\bar{u}}_j\right)\frac{\partial\left(\overline{u_i'u_k'}\right)}{\partial x_j}$$
$$=-\overline{\left(u_j'u_k'\right)}\frac{\partial\left(\bar{\bar{u}}_i\right)}{\partial x_j}-\frac{\partial\overline{\left(u_j'u_i'u_k'\right)}}{\partial x_j}-g\frac{\overline{\rho'u_k'}}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j\overline{\left(u_k'u_k'\right)}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\left(\overline{P'u_k'}\right)}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2\overline{\left(u_i'u_k'\right)}}{\partial x_j{}^2}$$

$$\overline{u_k'u_k'}=\overline{u_k'^2}=\overline{u_k'}^2=0$$

$$\bar{e}=\frac{\overline{u_i'^2}}{2}=\frac{\overline{\left(u'^2+v'^2+w'^2\right)}}{2}\qquad i=k=1,2,3$$

$$\frac{\partial\bar{e}}{\partial t}+\left(\bar{\bar{u}}_j\right)\frac{\partial\bar{e}}{\partial x_j}=-\overline{\left(u_j'u_i'\right)}\frac{\partial\left(\bar{\bar{u}}_i\right)}{\partial x_j}-g\frac{\overline{u_i'\rho'}}{\rho_0}\delta_{i3}-\frac{\partial\overline{\left(eu_j'\right)}}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\left(\overline{P'u_i'}\right)}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2\overline{\left(u_i'u_k'\right)}}{\partial x_j{}^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial\bar{e}}{\partial t}+\left(\bar{\bar{u}}_j\right)\frac{\partial\bar{e}}{\partial x_j}=-\frac{\overline{\left(u_j'u_i'\right)}}{2}\frac{\partial\left(\bar{\bar{u}}_i\right)}{\partial x_j}-g\frac{\overline{u_i'\rho'}}{2\rho_0}\delta_{i3}-\frac{\partial\overline{\left(eu_j'\right)}}{\partial x_j}-\frac{1}{2\rho_0}\frac{\partial\left(\overline{P'u_i'}\right)}{\partial x_i}-\epsilon}$$

5.2 Energia Cinética Turbulenta

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \left(\bar{\bar{u}}_j\right)\frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = -\frac{\overline{\left(u_j{}'u_i{}'\right)}}{2}\frac{\partial\left(\bar{\bar{u}}_i\right)}{\partial x_j} - g\frac{\overline{u_i{}'\rho'}}{2\rho_0}\delta_{i3} - \frac{\partial\overline{\left(eu_j{}'\right)}}{\partial x_j} - \frac{1}{2\rho_0}\frac{\partial\left(\overline{P'u_i{}'}\right)}{\partial x_i} - \epsilon$$

A quantidade ϵ é um parâmetro significante para a atmosfera desde que seja relacionado a dissipação da energia cinética turbulenta de todos os movimentos atmosféricos

5.2 Energia Cinética Turbulenta

A essência da equação da energia cinética turbulenta pode ser expressa pela equação:

$$\frac{D\bar{e}}{Dt} = -\frac{\overline{(u_j'u_i')}}{2}\frac{\partial(\bar{\bar{u}}_i)}{\partial x_j} - g\frac{\overline{u_i'\rho'}}{2\rho_0}\delta_{i3} - \frac{\partial\overline{(eu_j')}}{\partial x_j} - \frac{1}{2\rho_0}\frac{\partial(\overline{P'u_i'})}{\partial x_i} - \epsilon$$

$$\frac{\bar{D}(TKE)}{Dt} = MP + BPL + TR - \varepsilon$$

MP **é a produção mecânica**

BPL **é a produção e perda por flutuabilidade**

TR **redistribuição de tke por transporte e força de pressão**

ε **dissipação por atrito**

5.2 Energia Cinética Turbulenta

$$BPL \equiv \overline{w'\theta'}\frac{g}{\theta_0}$$

É a conversão da energia potencial do escoamento médio e a energia cinética turbulenta:
É positivo para movimentos que baixa o centro de massa da atmosfera
É negativo para movimentos que aumenta o centro de massa da atmosfera

Correlação positiva(fonte tke)
Atms. instável

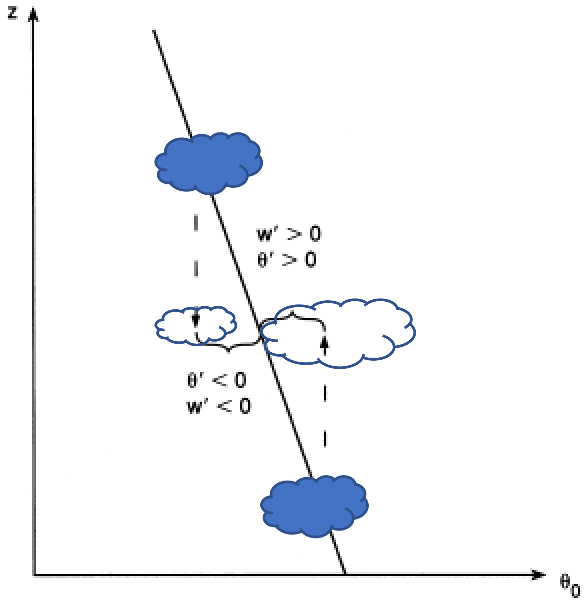
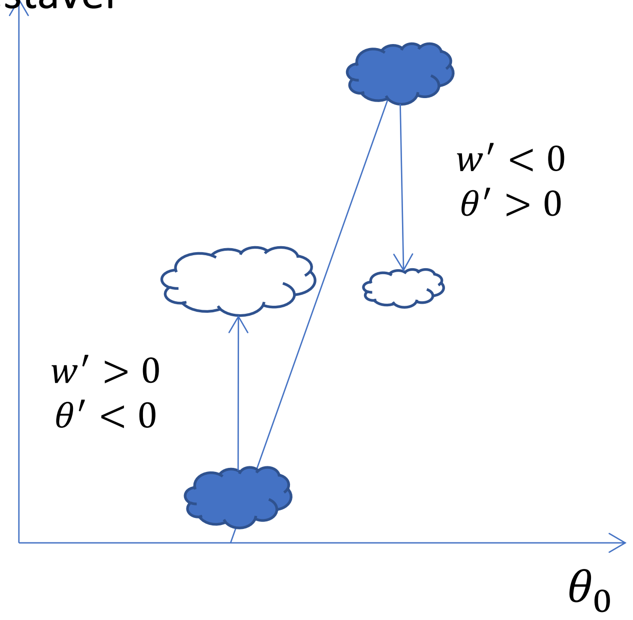


Fig. 5.1 Correlation between vertical velocity and potential temperature perturbations for upward or downward parcel displacements when the mean potential temperature $\theta_0(z)$ decreases with height.

Correlação negativa (destroi tke)
Atms. estável



5.2 Energia Cinética Turbulenta

Para ambos *as condições estáveis e instáveis da CLP* a *turbulência pode ser produzida mecanicamente pela instabilidade dinâmica através do cisalhamento*. Conversão de energia entre o escoamento médio e a flutuação turbulenta.

$$MP \equiv -\frac{\overline{u'w'}}{2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\overline{v'w'}}{2}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

$MP > 0$ **quando o fluxo de momentum ($\overline{u'w'}$) é direcionado para baixo e o gradiente vertical é positivo**

5.2 Energia Cinética Turbulenta

Estatisticamente na camada limite estável **a** ***turbulência pode existir somente se a produção mecânica for grande o suficiente*** **para superar o efeito de supressão da estabilidade e da viscosidade**

Esta condição é medida pelo numero de Richardson de fluxo

$$Rf \equiv -\frac{BPL}{MP} \equiv \frac{\overline{w'\theta'\frac{g}{\theta_0}}}{-\overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v'w'}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}}$$

5.2 Energia Cinética Turbulenta

$$Rf \equiv -\frac{BPL}{MP} \equiv \frac{\overline{w'\theta'\frac{g}{\theta_0}}}{-\overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v'w'}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}}$$

- **Se** $Rf < 0$ **a CLP é estatisticamente instável (a turbulências é sustentada pela convecção)**
- $Rf > 0$ **a CLP é estatisticamente estável**
- $Rf < 0.25$**(a produção mecânica excede a produção por flutuabilidade por um fato de 4)**

5.2 Energia Cinética Turbulenta

5.3 Equações de momentum da camada limite Planetária

$$\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}=-\frac{\partial\left(\overline{u_j{}'u_i{}'}\right)}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i}-g\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k})+\nu\frac{\partial^2(\overline{u_i})}{\partial {x_j}^2}$$

$$\frac{\partial\left(\overline{u_i{}'u_k{}'}\right)}{\partial t}+(\bar{\bar{u}}_j)\frac{\partial\left(\overline{u_i{}'u_k{}'}\right)}{\partial x_j}=-\overline{\left(u_j{}'u_k{}'\right)}\frac{\partial(\bar{\bar{u}}_i)}{\partial x_j}-g\frac{\overline{\rho' u_k{}'}}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j\overline{(u_k{}'u_k{}')}-\frac{\partial\left(\overline{u_j{}'u_i{}'u_k{}'}\right)}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\left(\overline{P' u_k{}'}\right)}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2\left(\overline{u_i{}'u_k{}'}\right)}{\partial {x_j}^2}$$

$$\frac{\partial\bar{e}}{\partial t}+(\bar{\bar{u}}_j)\frac{\partial\bar{e}}{\partial x_j}=-\frac{\overline{\left(u_j{}'u_i{}'\right)}}{2}\frac{\partial(\bar{\bar{u}}_i)}{\partial x_j}-g\frac{\overline{u_i{}'\rho'}}{2\rho_0}\delta_{i3}-\frac{\partial\left(\overline{e u_j{}'}\right)}{\partial x_j}-\frac{1}{2\rho_0}\frac{\partial\left(\overline{P' u_i{}'}\right)}{\partial x_i}-\epsilon$$

5.2 Energia Cinética Turbulenta

5.3 Equações de momentum da camada limite Planetária

$$\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial t}+(\overline{u_j})\frac{\partial(\overline{u_i})}{\partial x_j}=-\frac{\partial\left(\overline{u_j{}'u_i{}'}\right)}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\overline{P})}{\partial x_i}-g\frac{\rho}{\rho_0}\delta_{i3}-2\Omega\varepsilon_{ijk}\eta_j(\overline{u_k})+\nu\frac{\partial^2(\overline{u_i})}{\partial x_j{}^2}$$

Para o caso especial de turbulência horizontalmente homogênea:

-> A camada viscosa, a viscosidade molecular e o temo da divergência horizontal do fluxo de momentum turbulento podem ser desprezados.

$$\frac{\overline{D}\overline{u}}{Dt}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\overline{P}}{\partial x}+f\overline{v}-\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}$$

$$\frac{\overline{D}\overline{v}}{Dt}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\overline{P}}{\partial y}-f\overline{u}-\frac{\partial\overline{v'w'}}{\partial z}$$

Só pode ser resolvida se conhecermos a distribuição vertical do fluxo de momentum

Exercício 3

1) Qual o empecilho de incluir as equações prognóstica de fluxos turbulentos $\frac{D\left(\overline{u'w'}\right)}{Dt}$ às equações que governam o escoamento básico na camada limite planetária?