



Conceitos Básicos



Equação de Navier-Stokes



- A PNT é possível porque a atmosfera é um sistema físico governado por leis determinísticas
 - Mecânica dos fluidos
 - Termodinâmica
 - Transferência radiativa
- Expressas por equações matemáticas acuradas



Equação Primitivas



$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\rho}{\rho_0} g \delta_{i3} - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j u_k + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} - S_p \omega = \frac{J}{C_p}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \overrightarrow{qV} = S$$

$$P = \rho RT$$



Equações, análise de escala, filtros



$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\rho}{\rho_0} g \delta_{i3} - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j u_k + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \overline{\rho \vec{V}} = \frac{S}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} - S_P \omega = \frac{J}{C_p}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{VC} \nabla \cdot \overline{\rho \vec{V}} dV = \int_{VC} \frac{S}{\Delta x \Delta y \Delta z} dV$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \overline{q \vec{V}} = S$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} \int_{VC} dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} \int_{VC} dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} xyz$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} \int_{VC} dx dy dz$$

$$\int_{VC} \nabla \cdot \overline{\rho \vec{V}} dV = \int_{SC} \rho \vec{V} d\vec{A} = \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{VC} \nabla \cdot \overline{\rho \vec{V}} dV = \int_{VC} \frac{S}{\Delta x \Delta y \Delta z} dV$$



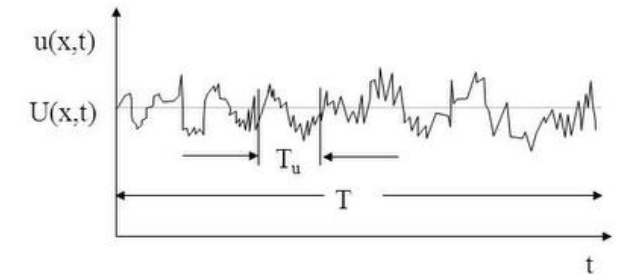
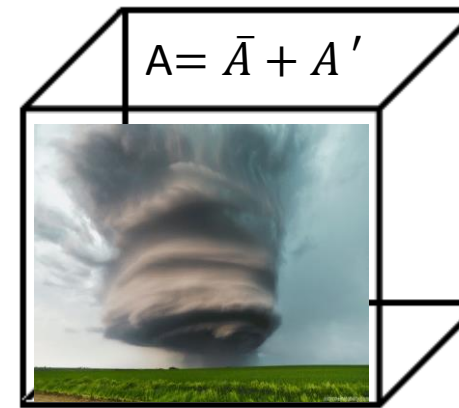
Equações Governantes

$$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} + g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} + 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j (\bar{u}_k) - \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i)}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial(\overline{u_j' u_i'})}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial(\bar{T})}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{T})}{\partial x_j} - S_P \bar{\omega} = - \frac{\partial(\overline{u_j' T'})}{\partial x_j} + \frac{\bar{J}}{C_p}$$

$$\frac{\partial(\bar{q})}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{q})}{\partial x_j} = - \frac{\partial(\overline{u_j' q'})}{\partial x_j} + \bar{S}$$

$$\bar{P} = \bar{\rho} R \bar{T}$$



x

y



- A análise de escala é utilizada para determinar a importância relativa de termos individuais em relações conservativas
- A técnica envolve a **estimação da sua ordem de magnitude** usando valores representativos e constantes



- Propósito:
 - Simplificar equações [hidrostático, não-hidrostático]
 - Filtrar movimentos não desejados



Valores típicos



- $U \sim 10 \text{ m s}^{-1}$: velocidade horizontal
- $W \sim 1 \text{ cm s}^{-1}$: velocidade vertical
- $L \sim 10^6 \text{ m}$: comprimento
- $H \sim 10^4 \text{ m}$: profundidade
- $dP/r \sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$: flutuação horizontal de pressão
- $T=L/U \sim 10^5 \text{ s}$: tempo



Aproximações da Equação de Navier-Stokes



- As equações da **dinâmica atmosférica** descrevem **vários tipos de ondas** (<https://www.ecmwf.int/sites/default/files/elibrary/2002/16926-atmospheric-waves.pdf>)
- Ondas acústicas e **??de gravidade??** sem significado meteorológico
- As primeiras (Ondas acústicas) são filtradas (**aproximação hidrostática**)
- Entretanto os termos que geram as ondas de gravidade **são importantes**



Dinâmica Não-Hidrostática



1.3 dinâmica não-hidrostática,

$$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_j} = - \frac{\partial(\overline{u_j' u_i'})}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} - g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j (\bar{u}_k) + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i)}{\partial x_j^2}$$

Hydrostatic Equation

Non-hydrostatic Equation

Hydrostatic approximation:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = b \quad H/L \ll 1$$

Difference in height between upper & lower isobaric surfaces

$$\frac{\partial z}{\partial p} = - \frac{RT}{p g}$$

Mean temperature within a layer

Vertical momentum equation for a nonhydrostatic atmosphere

Nonhydrostatic vertical pressure gradient force in a grid box, where ρ_0 is the environmental density, p' is the departure of pressure from the large-scale environmental hydrostatic balance

Change in vertical motion with time $\frac{\partial w}{\partial t} = - \left\{ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + gB - gq$

Advection of vertical momentum by the wind field

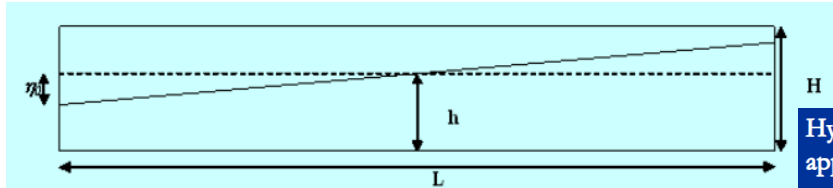
Buoyancy (B) differences from large-scale average

Precipitation loading, where q is specific humidity

	Hydrostatic	Non-hydrostatic
Buoyancy	Indirect (first, horizontal pressure gradients are created, then convergence, finally vertical motion)	Direct (buoyancy - vertical motion)
Perturbation pressure acting against buoyancy	No	Yes, important for regulating convective updraft velocity and convective cloud structure and for gravity wave energy propagation
Previous vertical motion	No	Yes, vertical motion is advected
Water loading	No	Yes



1.3 dinâmica não-hidrostática,

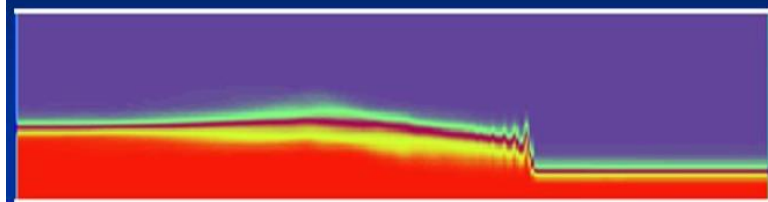


Hydrostatic approximation:

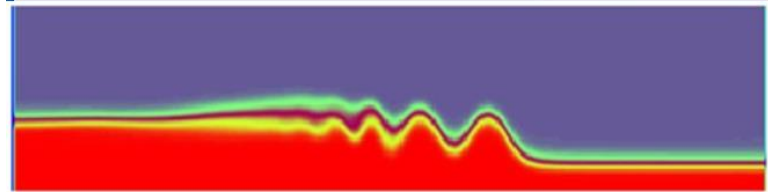
$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = b \quad H/L \ll 1$$

Simulação de onda de gravidade interna

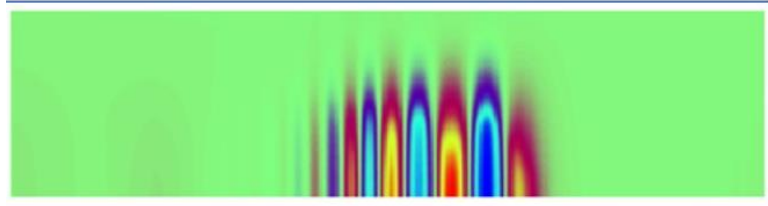
Horn et al. 2000 experiment



Hydrostatic

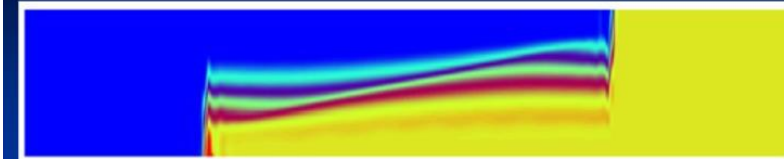


Non-hydrostatic

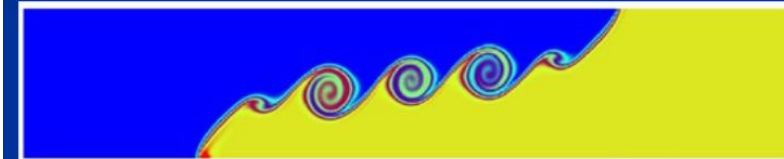


Non-hydrostatic pressure distribution

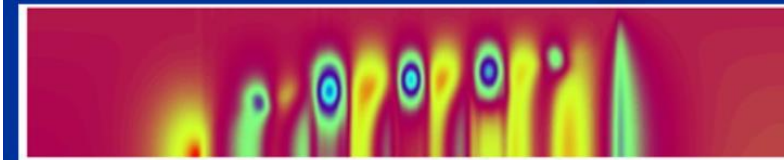
Intabilidade baroclinica de Kelvin Helmholtz



Density distribution in hydrostatic simulations



Density distribution in non-hydrostatic simulations



Nh pressure correction

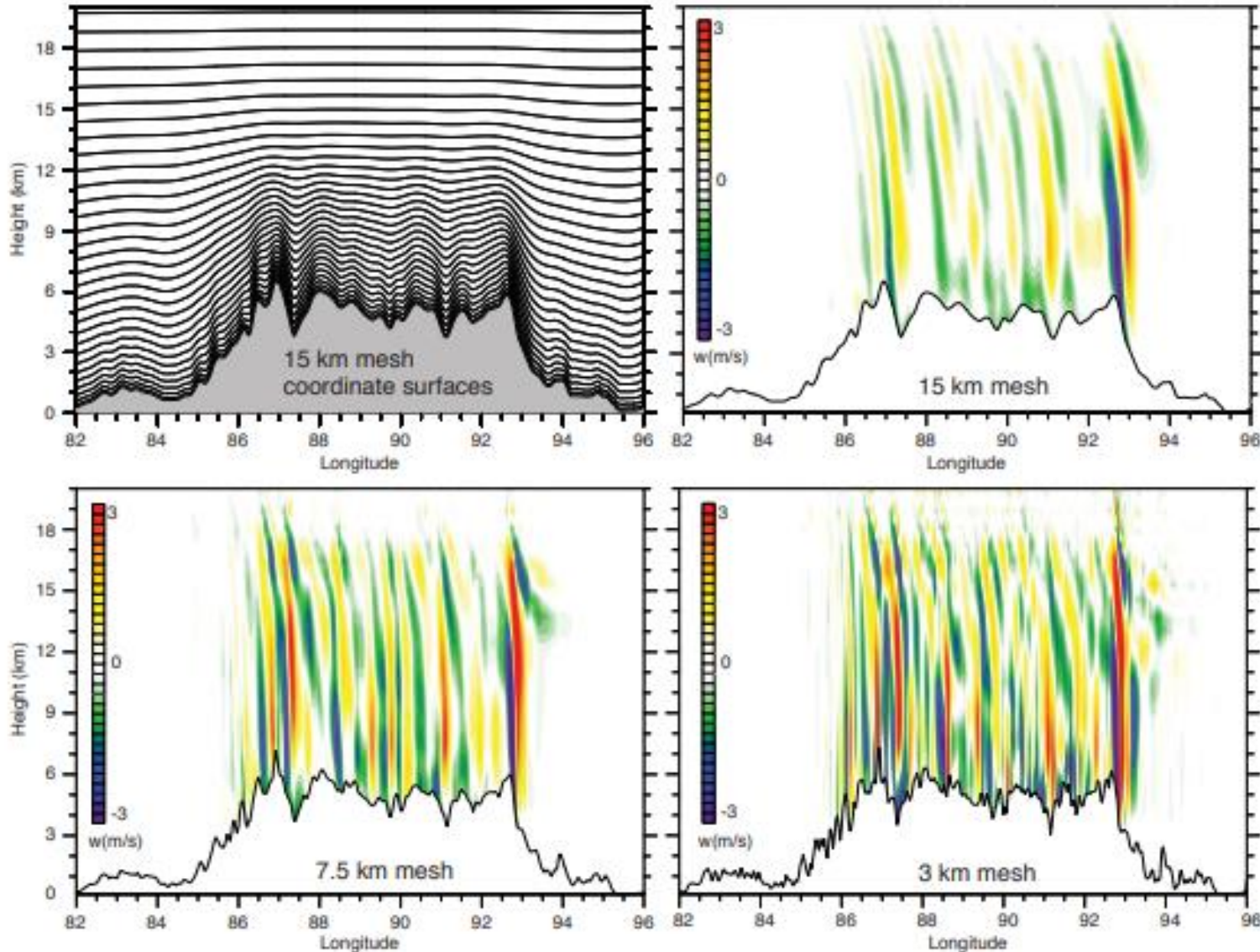
Hydrostatic stable time step two times smaller then non-hydrostatic!

$$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_j} = - \frac{\partial(\overline{u_j' u_i'})}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} - g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j(\bar{u}_k) + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i)}{\partial x_j^2}$$



1.3 dinâmica não-hidrostatica,

coordenada vertical híbrida (Klemp, 2011).



Uma das principais razões para aumentar a resolução nas escalas não hidrostáticas é resolver melhor a topografia, e começar a resolver explicitamente a estrutura e a evolução do sistema convectivo.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_j} \\ &= - \frac{\partial(\overline{u_j' u_i'})}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} - g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} \\ & \quad - 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j (\bar{u}_k) + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i)}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$



Supercell Thunderstorm within Directionally Sheared Environment



Vertical momentum equation for a nonhydrostatic atmosphere

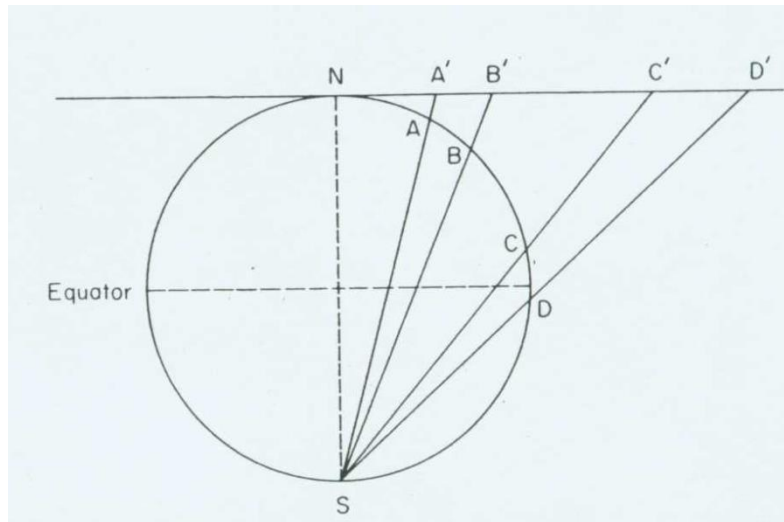
$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \left\{ \underbrace{u \frac{\partial w}{\partial x}}_{\text{I}} + \underbrace{v \frac{\partial w}{\partial y}}_{\text{II}} + \underbrace{w \frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{III}} \right\} - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z}}_{\text{IV}} + \underbrace{gB}_{\text{V}} - \underbrace{gq}_{\text{VI}}$$

Essas circulações induzidas pela perturbação de pressão dão origem à divisão da tempestade.

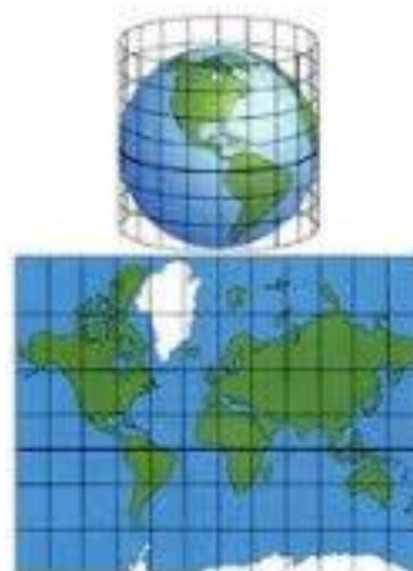


Projeções de mapa

- O por que usar projeções?



Projeção Cilíndrica



Projeção Cônica



Projeção Plana
(Azimutal)



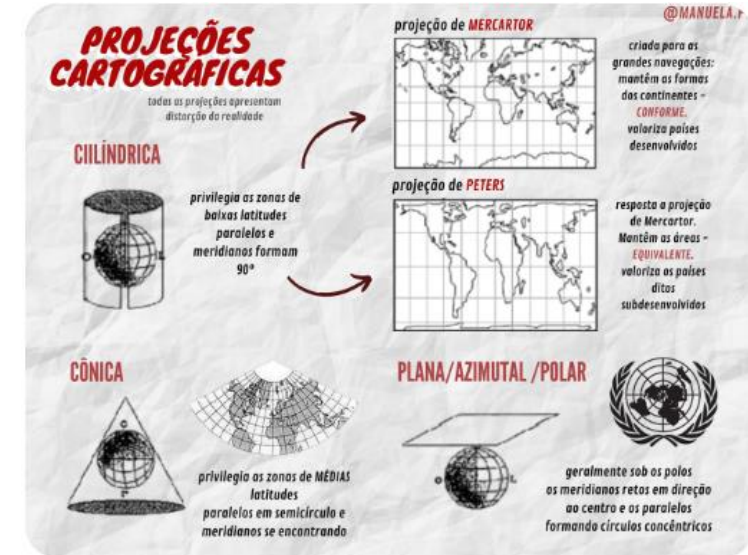
Devido a curvatura da Terra, a distância entre pontos deve ser mantida quando projetado sobre um mapa



Projeções de mapa



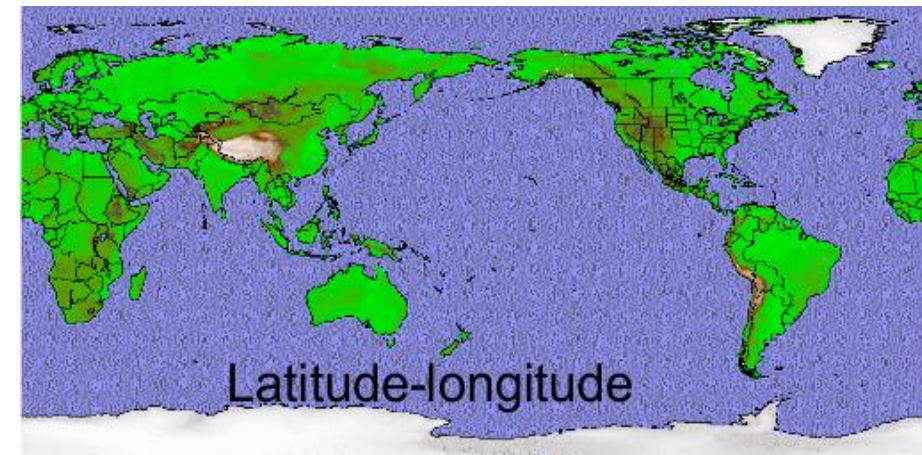
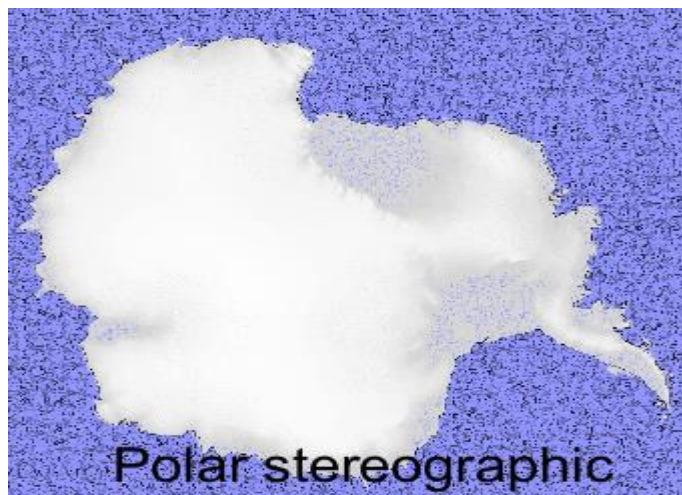
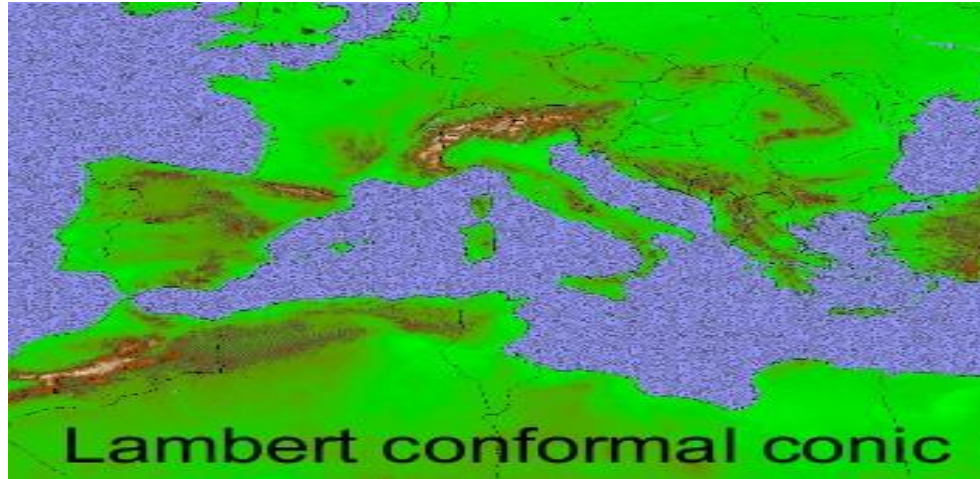
- Quais são os mais comuns tipos de projeção?
 - Polar(plana)
 - Lambert (cônica)
 - Mercator(Cilíndrica)
- Verdadeira a determinadas latitudes, sendo usado fatores de escala fora das mesmas
- Que tipo de projeção usam os modelos utilizados no CPTEC?





Projeções de mapa

Tipos

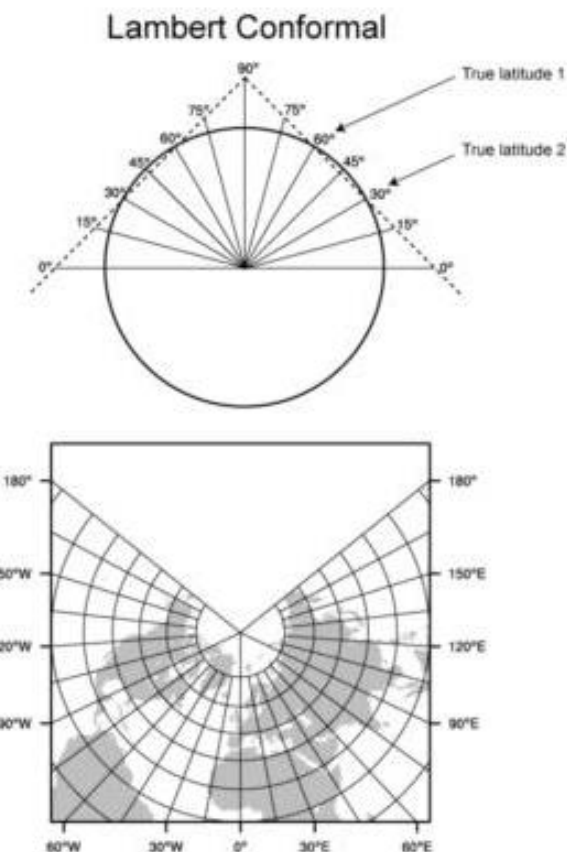




Projeções de mapa

Lambert

- Latitudes medias
- Domínio não pode conter o pólo
- Domínio não pode ser periódico na direção leste-oeste
- Uma ou duas latitudes verdadeiras (fixar o cone)

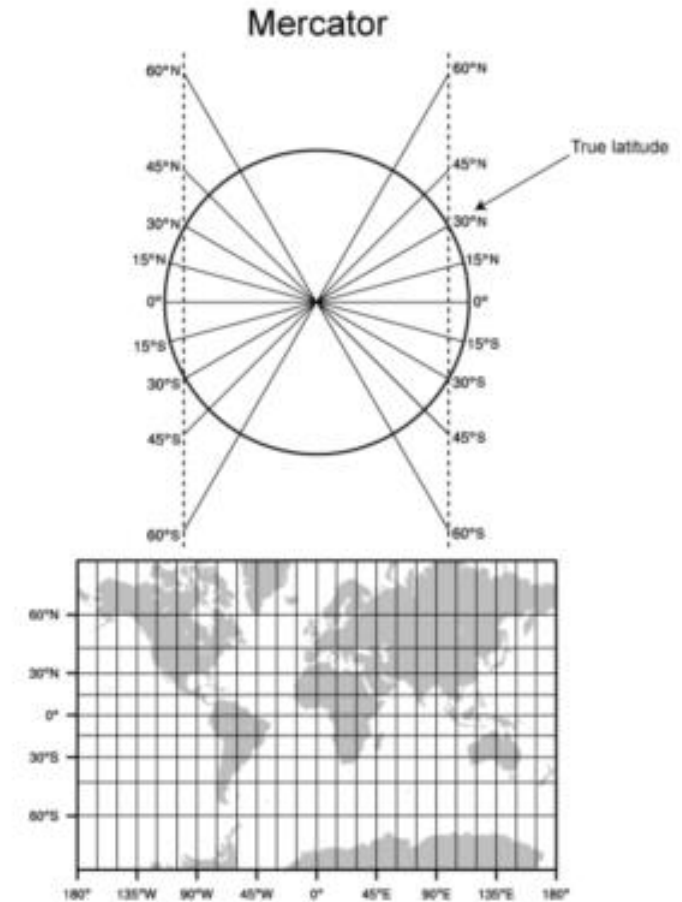




Projeções de mapa

Mercator

- Trópicos
- Pode ser usado um domínio periódico
- Uma latitude deve ser especificada (para girar o cilindro)

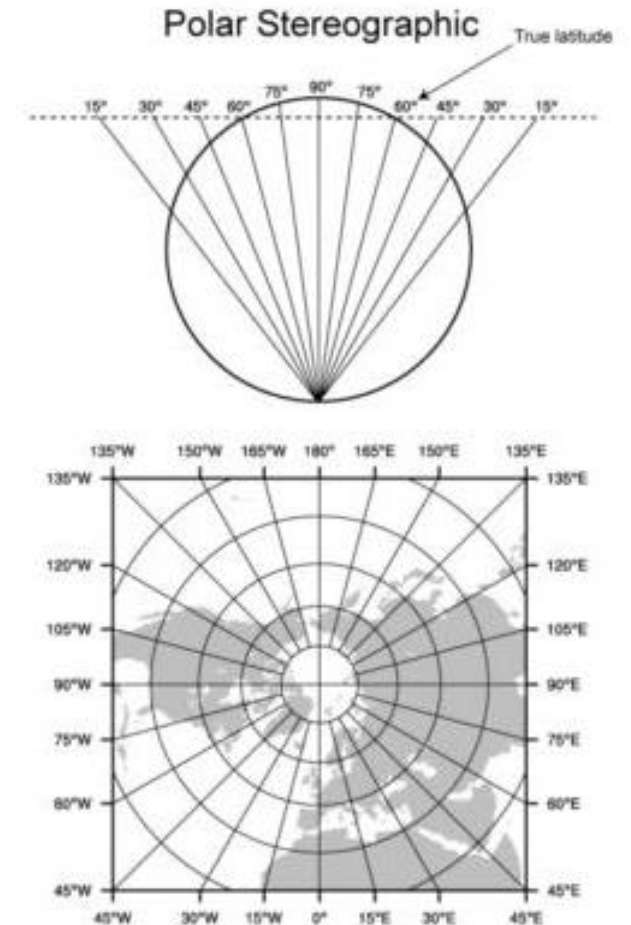




Projeções de mapa

Polar

- Altas latitudes especialmente para regiões que incluem os pólos
- Uma latitude especificada





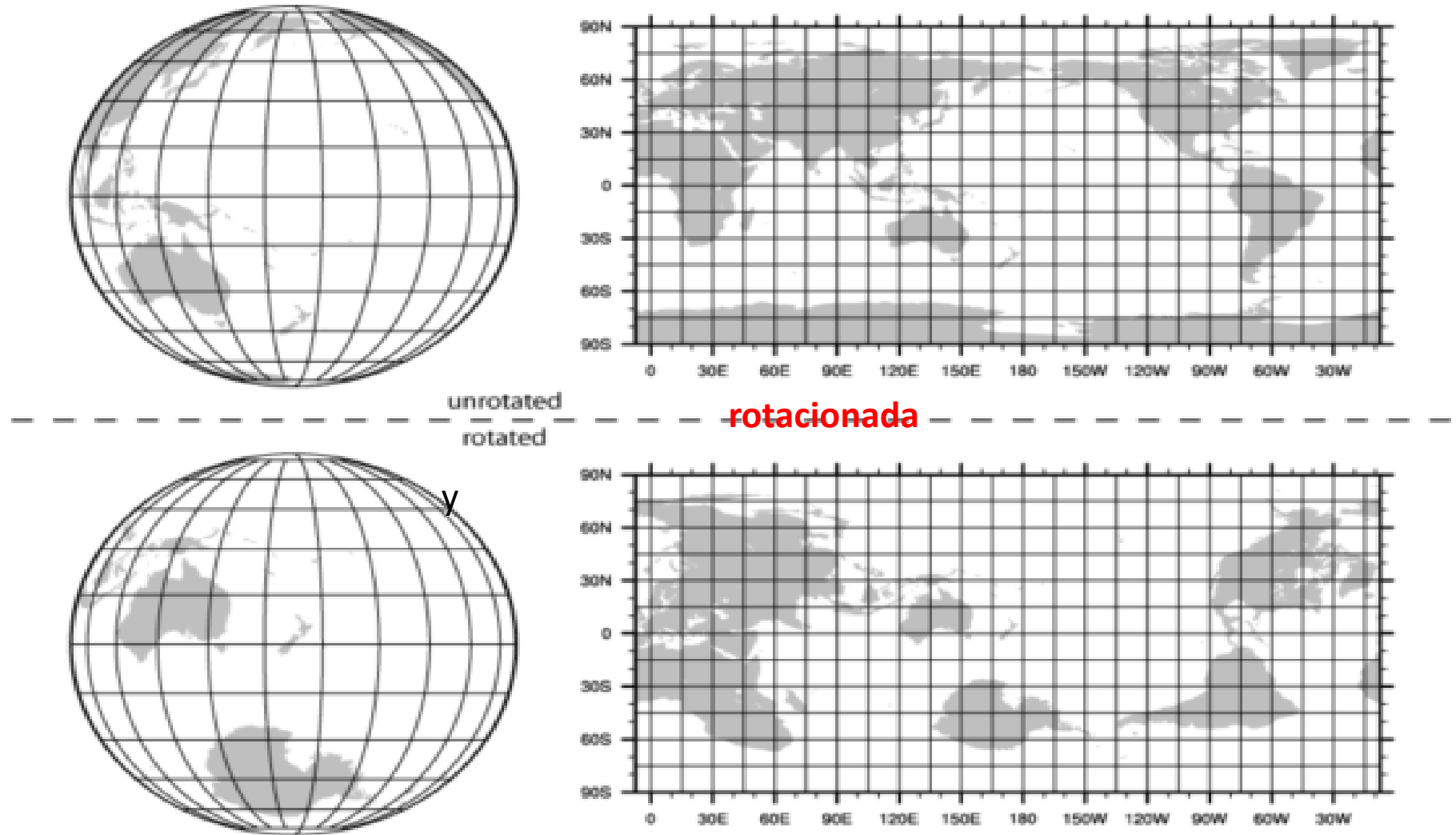
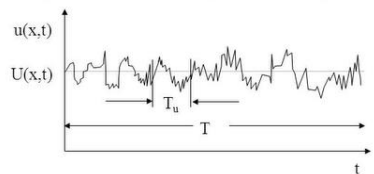
Projeções de mapa

Latitude-longitude

- Domínios globais ou regionais
- Pode ser usada normal ou rotacionada
- A rotação envolve mover os pólos da projeção longe dos pólos da Terra



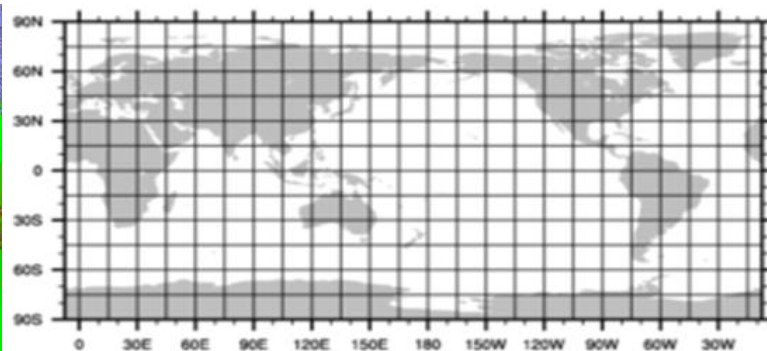
Projeções de mapa





13.1 Considerações sobre modelagem

□ Uma etapa importante no desenvolvimento de um modelo numérico para **simular um sistema de mesoescala** é determinar o tamanho de domínio apropriado, **intervalos de grade**, **intervalo de tempo** e **tempo total de integração do modelo**



$\Delta t = ?$

*n*iterações = ?



13.1 Considerações sobre modelagem



A seleção do tamanho do domínio, **intervalo da grade**, **tempo total de integração** e **intervalo de tempo** em um modelo de mesoescala geralmente é determinada por **fatores físicos e numéricos**, como:

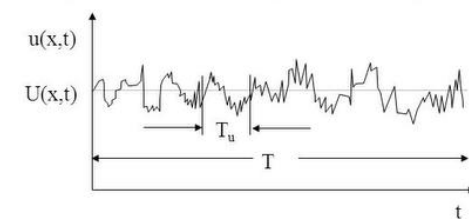
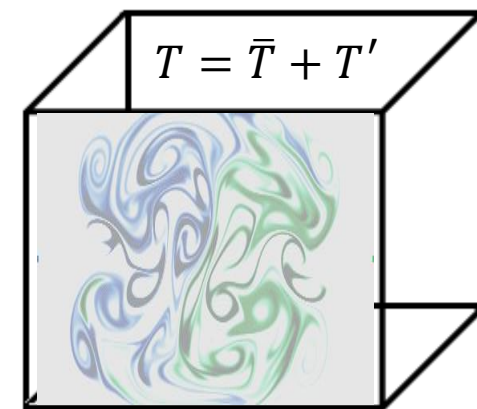
(1) Escalas espaciais e dimensionalidade do **forçamento** $\sum_{i=1}^n \bar{F}_i$ e **processos físicos** $\frac{\partial(\overline{u_j' u_i'})}{\partial x_j}$

(2) Escalas de tempo do **forçamento** Δt e das **respostas do fluido ao forçamento** $(\bar{u}_i, \bar{T}, \bar{q}, \bar{P})$

(3) **Limitações de previsibilidade (erros(c), numéricos), etc)** dos fenômenos atmosféricos

(4) **Critério de estabilidade** $(\Delta t \Rightarrow 0, \Delta x \Rightarrow 0,)$ do esquema numérico adotado

(5) **Disponibilidade de recursos computacionais.**





13.1 Considerações sobre modelagem

. Para representar adequadamente os sistemas de mesoescala, é necessário que: :

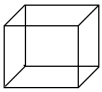
(a) As **variações meteorologicamente significativas** nas variáveis dependentes (\bar{u}_i , \bar{T} , \bar{q} , \bar{P}) causadas pelo **forçamento de mesoescala** ($\sum_{i=1}^n \bar{F}_i$) e **respostas de fluidos** estão contidas no modelo

$$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\bar{P})}{\partial x_i} + g \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \delta_{i3} + 2\Omega \varepsilon_{ijk} \eta_j (\bar{u}_k) - \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i)}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial(\overline{u_j' u_i'})}{\partial x_j}$$

$$\bar{P} = \bar{\rho} R \bar{T}$$

$$\frac{\partial(\bar{T})}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{T})}{\partial x_j} - S_p \bar{\omega} = - \frac{\partial(\overline{u_j' T'})}{\partial x_j} + \frac{\bar{J}}{C_p}$$

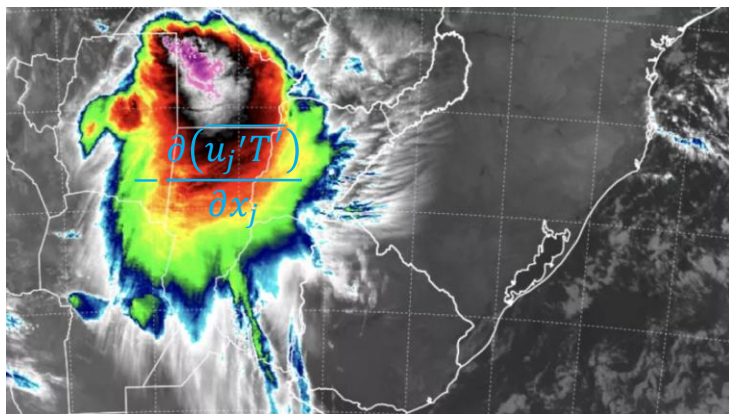
$$\frac{\partial(\bar{q})}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{q})}{\partial x_j} = - \frac{\partial(\overline{u_j' q'})}{\partial x_j} + \bar{S}$$

(b) O volume médio  usado para definir o **espaçamento da grade Δx** do modelo deve ser **suficientemente pequeno $\Delta x \Rightarrow 0$** , de modo que o **forçamento** $\sum_{i=1}^n \bar{F}_i$ e as **respostas de mesoescala** \bar{u}_i , \bar{T} , \bar{q} , \bar{P} sejam representados com precisão.

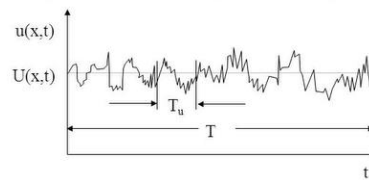


13.1 Considerações sobre modelagem

Para representar adequadamente os sistemas de mesoescala, é necessário que: :



$$\frac{\partial(\bar{T})}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{T})}{\partial x_j} - S_P \bar{\omega} = - \frac{\partial(\overline{u_j'T'})}{\partial x_j} + \frac{\bar{J}}{C_p}$$



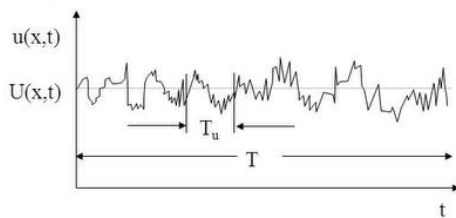
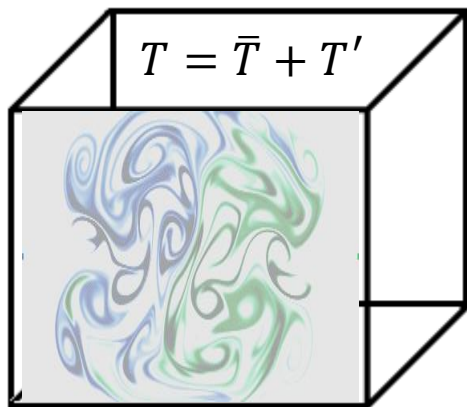
Na modelagem de mesoescala e na previsão numérica do tempo, bem como na dinâmica de fluidos computacional geral, é preciso **representar** com **precisão processos multiescala** $(\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{T})}{\partial x_j}$, $-\frac{\partial(\overline{u_j'T'})}{\partial x_j}$, em um domínio finito.



13.1 Considerações sobre modelagem

• Para representar adequadamente os sistemas de mesoescala, é necessário que: :

Por um lado, é importante capturar os **sistemas climáticos** de **menor escala** — $\frac{\partial(\overline{u_j' T'})}{\partial x_j}$.



$$\frac{\partial(\bar{T})}{\partial t} + (\bar{u}_j) \frac{\partial(\bar{T})}{\partial x_j} - S_p \bar{\omega} = - \frac{\partial(\overline{u_j' T'})}{\partial x_j} + \frac{\bar{J}}{C_p}$$

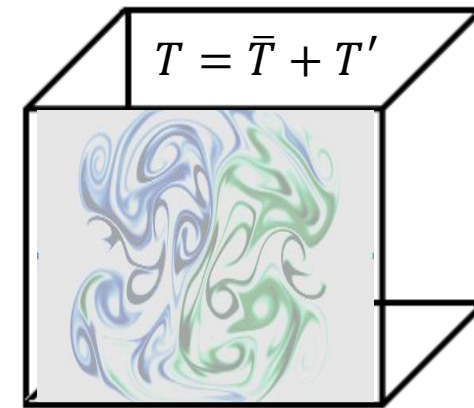
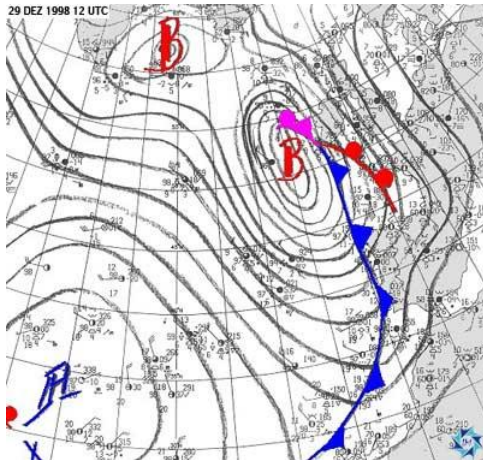
- Assim, a **grade** e os **intervalos de tempo** devem ser **suficientemente finos** para resolver esses **sistemas e processos climáticos de pequena escala**.



13.1 Considerações sobre modelagem

. Para representar adequadamente os sistemas de mesoescala, é necessário que: :

Por outro lado, é igualmente importante capturar o ambiente de maior escala, responsável pela formação e modificação do sistema climático de pequena escala.



Portanto, o domínio do modelo deve ser grande o suficiente para incluir o ambiente de grande escala.

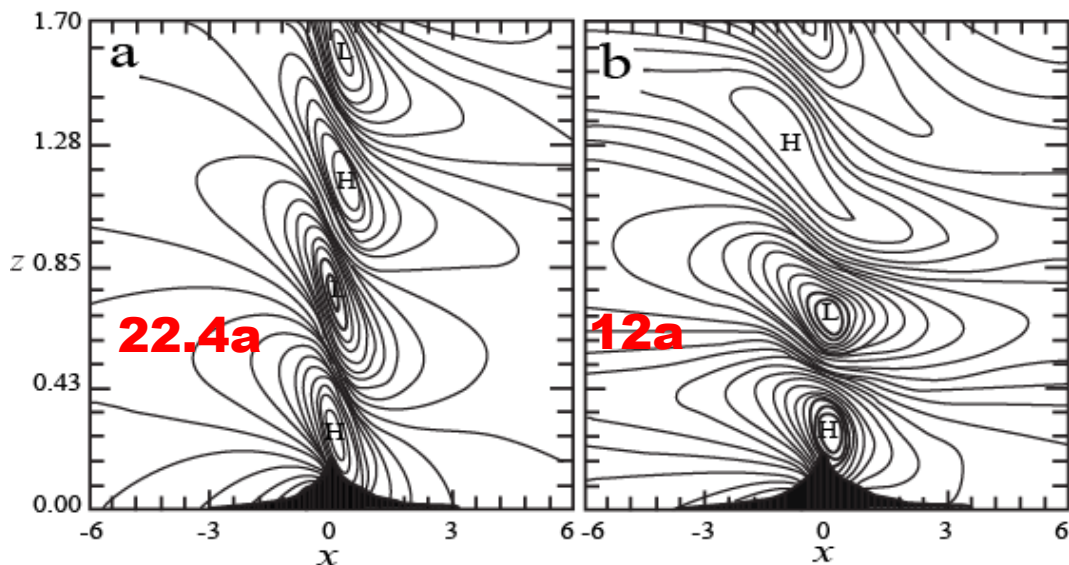


13.1 Considerações sobre modelagem

Para representar adequadamente os sistemas de mesoescala, é necessário que: :

Podem **surgir problemas** se um domínio for selecionado de forma inadequada.

Por exemplo, a Fig. 13.1 mostra alguns resultados da simulação numérica do campo de vento horizontal para um fluxo hidrostático sobre uma montanha em forma de sino com meia largura a e altura h , $h(x) = \frac{h}{1+(x/a)^2}$, mas com **2 tamanhos de domínio diferentes, 12a e 22.4a**.



$$h(x) = \frac{h}{1 + (x/a)^2}$$

a =meia largura da montanha

12a e 22.4a.



13.1 Considerações sobre modelagem

. Para representar adequadamente os sistemas de mesoescala, é necessário que: :

$$h(x) = \frac{h}{1 + (x/a)^2}$$

a=meia largura da montanha

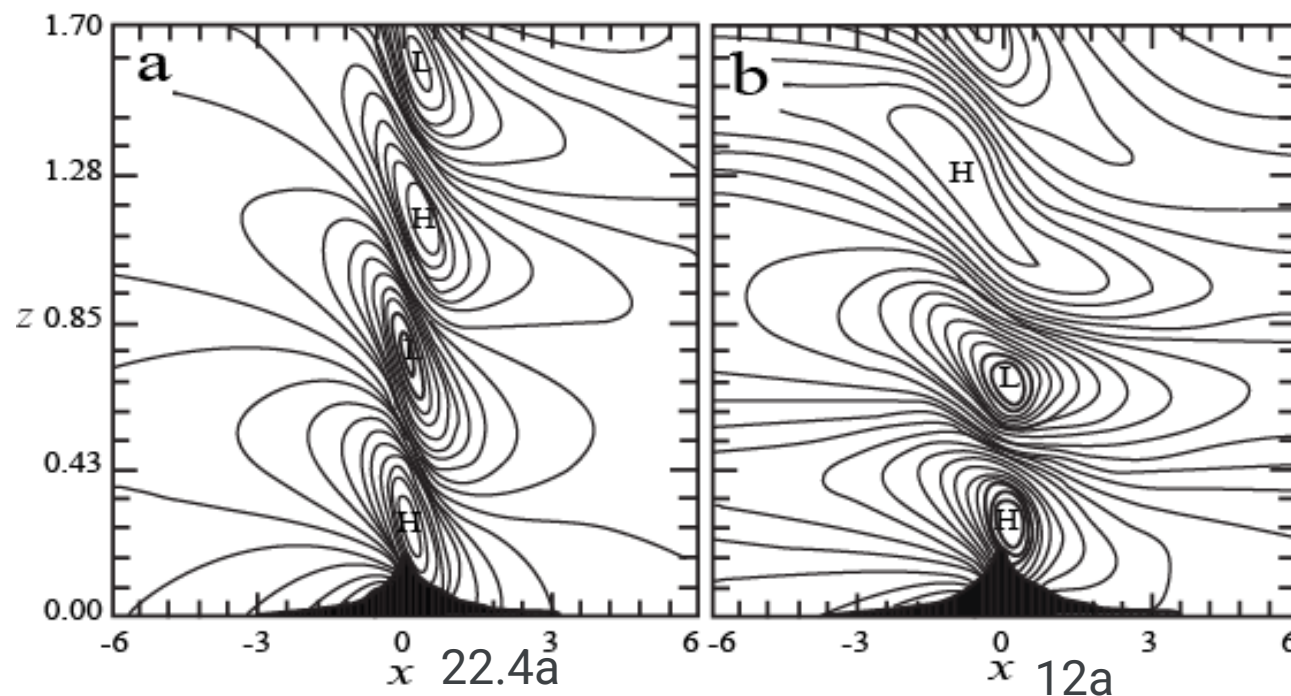


Fig. 13.1: **Sensibilidade das respostas do fluxo ao tamanho do domínio numérico** para um fluxo hidrostático sobre uma montanha em forma de sino. **São exibidos os campos de vento horizontais para diferentes tamanhos de domínio:** (a) 22.4a e (b) 12a, onde a é a meia largura da montanha. A abscissa e a ordenada são adimensionalizadas por a e $2\pi U/N$ (comprimento de onda vertical), respectivamente. O número de Froude é 1,2 para ambos os casos. (Lin e Wang 1996; Lin 2007)



13.1 Considerações sobre modelagem

. Para representar adequadamente os sistemas de mesoescala, é necessário que: :

Na figura, o eixo horizontal é adimensionalizado por a , enquanto o eixo vertical é adimensionalizado pelo **comprimento de onda hidrostático vertical** $\left(\lambda = \frac{2\pi U}{N}\right)$.

Ambos os casos têm o mesmo **número de Froude**, $\left(F \equiv \frac{U}{Nh}\right) = 1.2$, que é o único parâmetro de controle adimensional para um fluxo bidimensional, hidrostático, não rotativo e invíscido passando por uma montanha de mesoescala.



13.1 Considerações sobre modelagem

. Para **representar adequadamente os sistemas de mesoescala**, é necessário que: :

Os **resultados foram fortemente influenciados pelo tamanho do domínio**, uma vez que **as respostas de fluxo sobre a montanha são fortemente influenciadas pelas condições de fluxo upstream no limite esquerdo** do domínio numérico.

As condições de fluxo upstream, como o vento horizontal básico e a frequência de Brunt-Vaisala, no limite esquerdo, foram influenciadas pelos distúrbios de propagação upstream gerados pela orografia.

Assim, se um tamanho de domínio inadequado for escolhido para realizar simulações numéricas, os resultados podem ser contaminados por fatores numéricos.



13.1 Considerações sobre modelagem

. Para **representar adequadamente os sistemas de mesoescala,**
é necessário que: :

Uma vez que o tamanho do domínio é escolhido, o próximo passo natural é escolher um tamanho de grade apropriado ou intervalo de grade

A determinação do tamanho da grade horizontal usada em um modelo numérico depende das escalas espaciais do forçamento, das respostas do fluido e da estabilidade numérica.



13.1 Considerações sobre modelagem

- Para representar adequadamente os sistemas de mesoescala, é necessário que: :

O intervalo da grade deve representar bem as respostas de forçamento e fluido; caso contrário, os resultados simulados não serão precisos.



13.1 Considerações sobre modelagem

. Para representar adequadamente os sistemas de mesoescala, é necessário que: :

Depois que o tamanho do domínio, o intervalo da grade e a estrutura da grade são escolhidos, o próximo passo é escolher o intervalo de tempo.

Isso normalmente é determinado pela variação temporal do critério de forçamento e estabilidade, que depende do método das diferenças finitas ou do método numérico adotado.

O **critério de estabilidade linear**, pode servir como uma primeira estimativa do intervalo de tempo necessário para garantir a estabilidade computacional do modelo.

As equações não lineares possuem um critério mais rígido de estabilidade computacional, que está relacionado com a **escala de tempo** e a **previsibilidade do fenômeno climático** de interesse e os recursos computacionais disponíveis.



Coordenadas verticais



- $\Delta\phi = \phi_C - \phi_A = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_\eta \Delta x$



Coordenadas verticais



$$\overrightarrow{\Delta\phi} = \phi_c - \phi_A = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_\eta \Delta x$$

$$\overrightarrow{C - A} = \overrightarrow{C - B} + \overrightarrow{B - A}$$

$$\phi_c - \phi_A = \phi_c - \phi_B + \phi_B - \phi_A$$

$$\phi_c - \phi_A = \phi_B - \phi_A + \phi_c - \phi_B$$

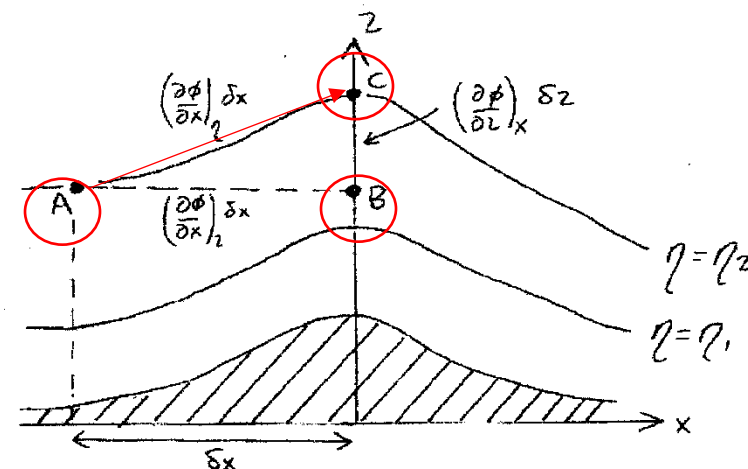
$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_\eta \Delta x = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_z \Delta x + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_x \Delta z$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_\eta = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_z \frac{\Delta x}{\Delta x} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_x \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_\eta = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_z + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_x \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_\eta = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_z + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)_\eta$$

$$\overrightarrow{C - A} = \overrightarrow{C - B} + \overrightarrow{B - A}$$



$$\text{para } x = s \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)_\eta = \left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)_z + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_s \left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)_\eta$$

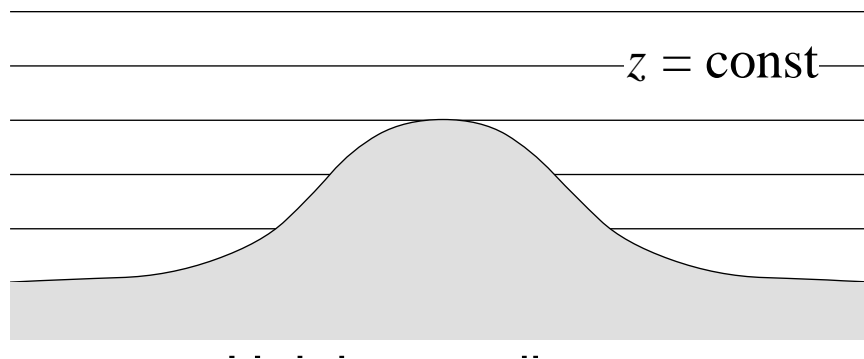


Coordenadas verticais

- Ao simular um fluxo de mesoescala em um domínio finito, a coordenada vertical de altura pode apresentar problemas.



- Por exemplo, pode interceptar o terreno em uma área montanhosa e criar um problema ao lidar com a condição de limite inferior.





Coordenadas verticais

- Problemas semelhantes ocorrem com a coordenada de pressão e a coordenada isentrópica quando superfícies isobáricas e superfícies isentrópicas interceptam o limite inferior, respectivamente. Isso pode acontecer onde existe um bloqueio pela orografia.



Coordenadas verticais

- Escrever as equações primitivas em termos de uma arbitrária coordenada vertical

Usando as definições acima, pode-se derivar a derivada material de A em uma nova sistema de coordenada

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{H,\xi} A + \xi \frac{\partial A}{\partial \xi}$$

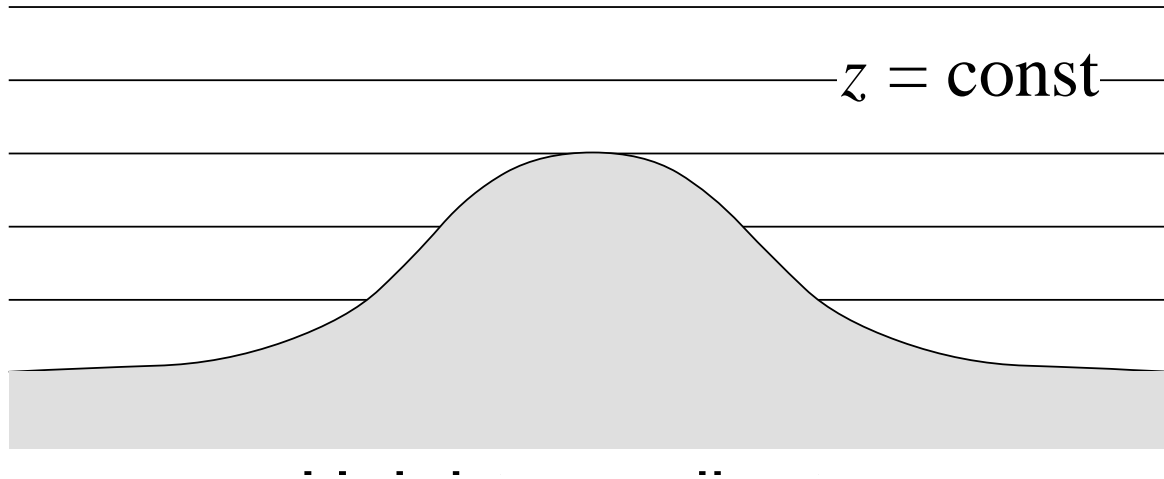
Onde $\nabla_{H,\xi} A$ é o operador gradiente horizontal ao longo da superfície de ξ *constante*

- Qual a coordenada mais apropriada para a modelagem numérica?



Coordenadas verticais

Coordenadas Z





Coordenadas verticais

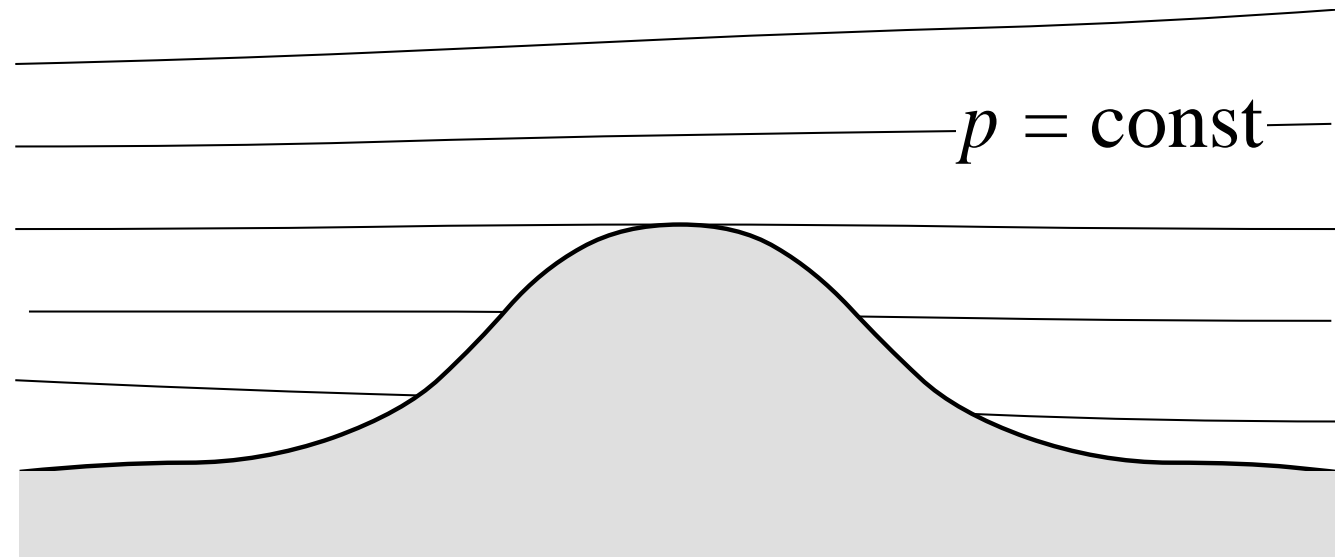
Z

- Vantagens:
 - Intuitivo, fácil de construir as equações
- Problemas:
 - Difícil de representar a superfície da Terra porque tem diferentes alturas



Coordenadas verticais

Coordenadas Pressão





Coordenadas verticais

Pressão

- Vantagens
 - Coordenada natural
 - Simplifica propriedades conservativas
 - Fácil de representar o topo da atmosfera, dados são observados em níveis de pressão
- Problemas
 - Superfície: Difícil de representar a superfície da Terra, a pressão muda



Coordenadas verticais

Para evitar o problema, Phillips (1957) propôs uma coordenada sigma vertical, que combina a coordenada de pressão de superfície mais baixa com a topografia inferior.

Neste tipo de coordenadas verticais $\sigma - P$, a coordenada de pressão é normalizada pela pressão de superfície, P_s ,

$$\sigma = \frac{P}{P_s}$$

Assim, $\sigma = 1$ na superfície e $\sigma = 0$ no topo da atmosfera.



Coordenadas verticais

A velocidade vertical, $\dot{\sigma} = \frac{D\sigma}{Dt}$, é 0 tanto na superfície quanto no topo da atmosfera. Na Eq. (13.1.8), σ também pode ser definido como

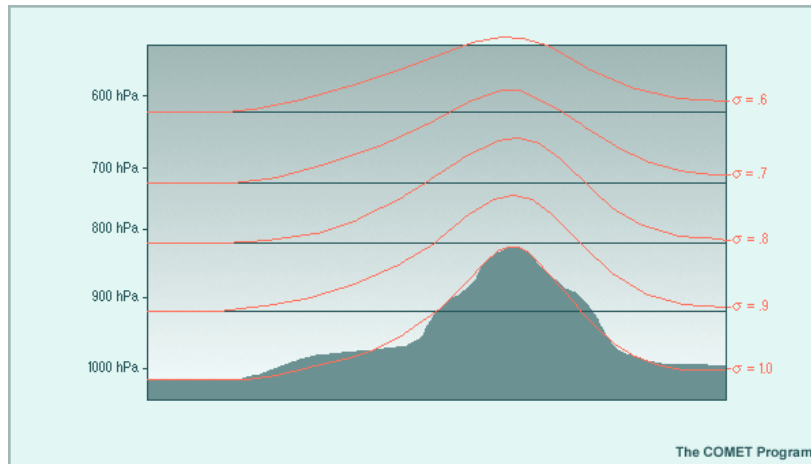
$$\sigma = \frac{P - P_S}{P_T - P_S}$$

onde P_T é a pressão no topo do domínio numérico.



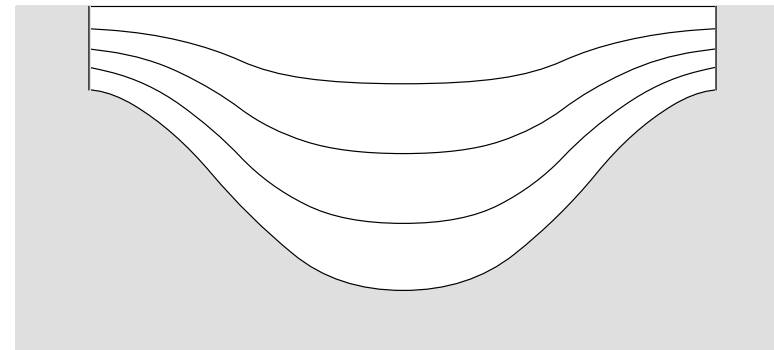
Coordenadas verticais

Sigma



oceano

atmosfera





Coordenadas verticais

Sigma

- Z= sigma

$$\sigma = \frac{p}{p_s}$$

- Vantagens
 - Coordenada de superfície
 - Fácil de representar o topo e base da atmosfera
- Contra
 - Erros no cálculo do gradiente de pressão em zonas de topografias íngremes: Andes, etc.



Coordenadas verticais

Isentrópicas

O mesmo conceito também pode ser aplicado à coordenada isentrópica, na qual σ pode ser definido como

$$\sigma = \frac{\theta - \theta_s}{\theta_T - \theta_s}$$

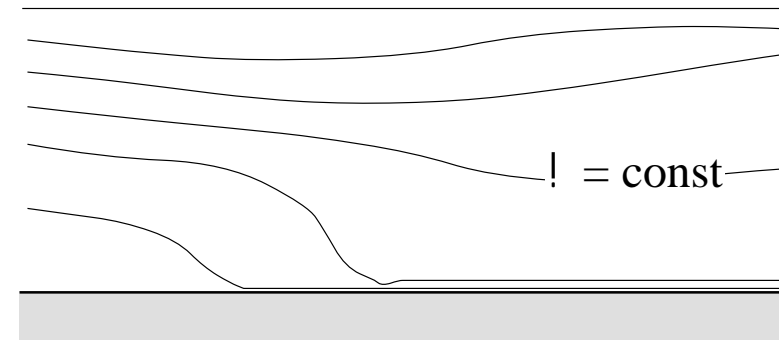
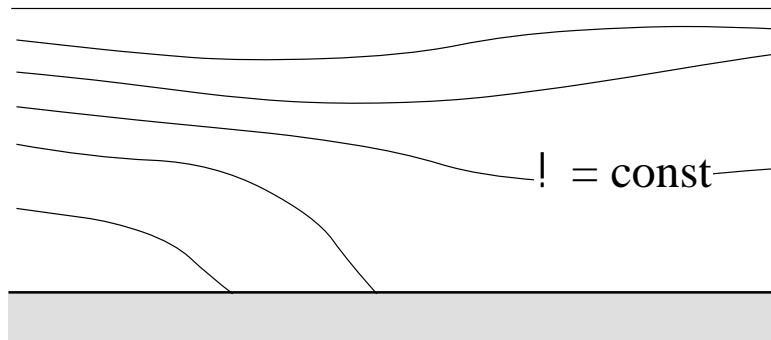
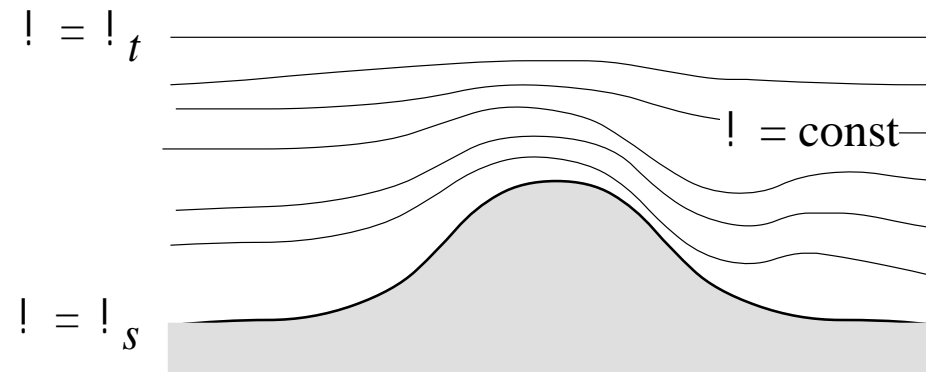
Este tipo de coordenadas é chamado de coordenadas $\sigma - \theta$.

Uma das vantagens da coordenada isentrópica vertical é que ela pode resolver a estrutura vertical dos sistemas climáticos, como o dobramento da tropopausa e a frontogênese de nível superior.



Coordenadas verticais

Isentrópicas





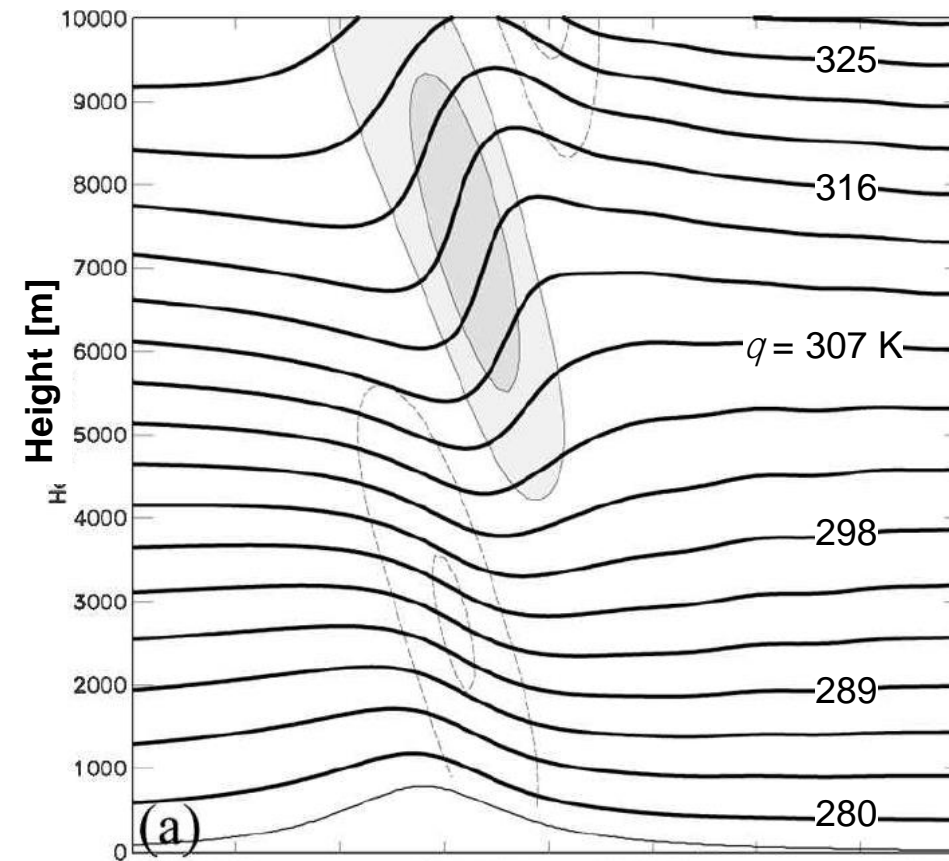
Coordenadas verticais

Isentrópicas

- Vantagens:
 - Superfícies são aproximadamente horizontais na media e alta atmosfera e θ é constante em processos adiabáticos
 - Regiões frontais são melhor definidas
 - Porém, resolução vertical pobre na troposfera superior dos trópicos e na fronteira inferior
- Problemas:
 - Processos diabáticos não são isentrópicos
 - Intercepta a superfície em grandes ângulos



Coordenadas verticais





Coordenadas verticais

$$\sigma - Z$$

- Quando a coordenada sigma é aplicada às coordenadas de altura, ela é chamada de $\sigma - Z$ ou as coordenadas que segue do terreno em que σ pode ser definido como

$$\sigma = \frac{Z_T(Z - Z_s)}{Z_T - Z_s}$$

onde Z_s é a altura da superfície inferior na coordenada $\sigma - Z$, que é independente do tempo, e Z_T é uma altura de domínio constante.



Coordenadas verticais

Sigma-P

Em uma coordenada σ geral, a pressão, P , pode ser escrita como

$$P(x, y, z, t) = P[x, y, \sigma(x, y, z, t), t]$$

$$\text{para } x = s \Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)_\eta = \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)_z + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_s \left(\frac{\Delta z}{\Delta s} \right)_\eta$$

O gradiente de pressão na direção x nas coordenadas z pode ser obtido executando a regra da cadeia,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_z = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_\sigma + \frac{\partial P}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_z$$



Coordenadas verticais

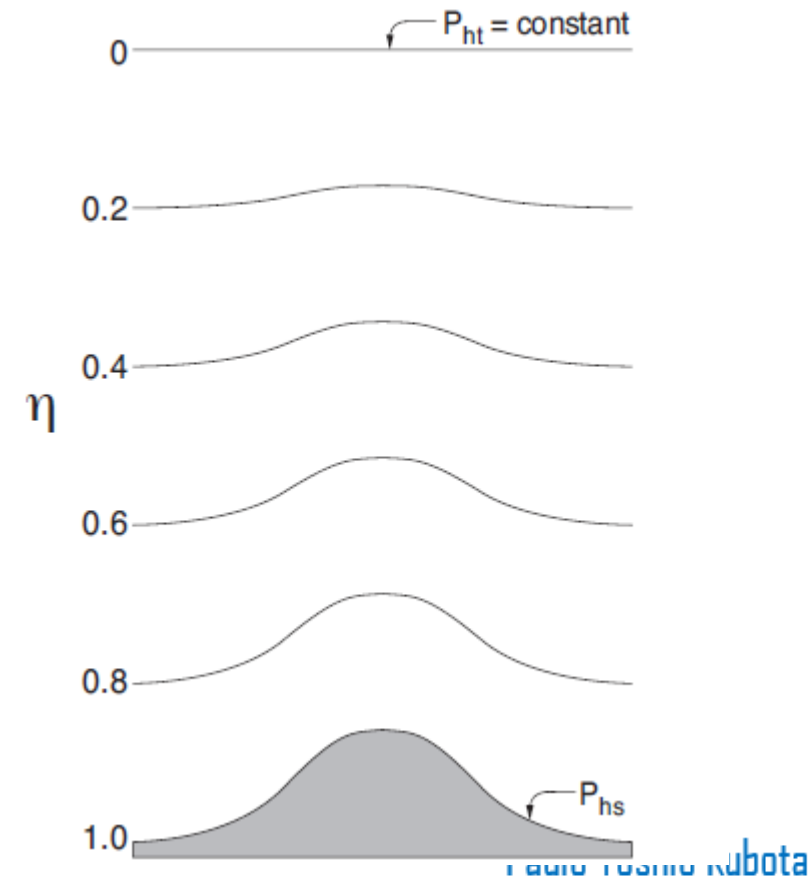
Sigma-P

Se alguém substituir P por uma variável geral A , então a transformação acima pode ser usada para derivar o gradiente de A na direção x .

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_\sigma + \frac{\partial A}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_z$$

O gradiente de pressão $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$ na coordenada σ pode ser obtido derivando $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_z$ de $\left(\sigma = \frac{Z_T(Z-Z_S)}{Z_T-Z_S}\right)$ e substituindo em (13.1.12),

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_\sigma + \left[\frac{\sigma - Z_T}{Z_T - Z_S} \frac{\partial Z_S}{\partial x}\right] \frac{\partial P}{\partial \sigma}$$





Coordenadas verticais

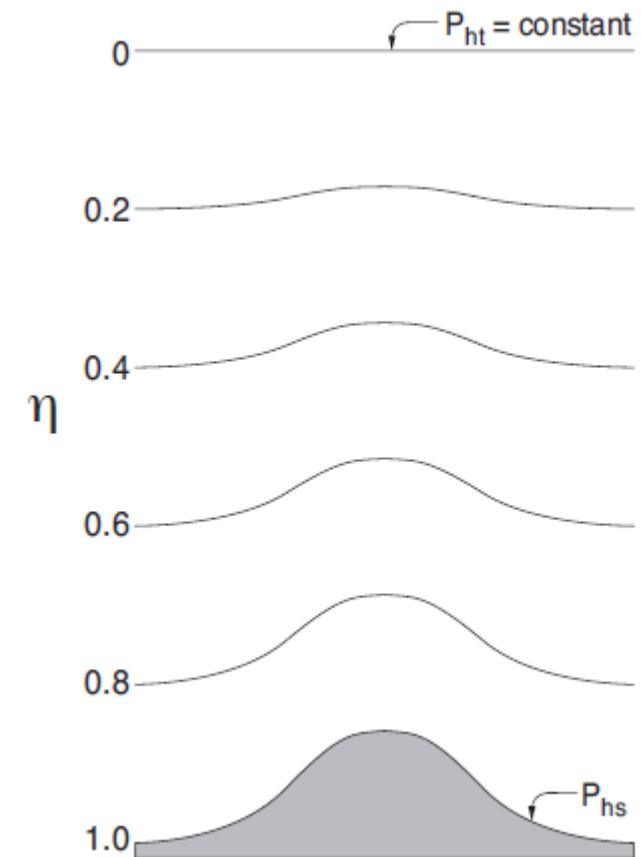
Sigma-P

O modelo Advanced Research WRF (ARW) usa uma coordenada vertical de pressão hidrostática seguindo o terreno ($\sigma - p$) (Skamarock et al. 2008).

$$\eta = \frac{P_h - P_{ht}}{P_{ht} - P_{hs}}$$

onde P_h é o componente hidrostático da pressão, e P_{hs} e P_{ht} referem-se a valores ao longo da superfície e limites superiores, respectivamente. Foi proposto por Laprise (1992).

As condições de contorno assumidas são $P = \text{const}$ no limite superior ($\eta = 0$), e $\dot{\eta} = 0$ em $\eta = 0$ e nas partes horizontais da superfície do solo ($\eta = \eta_s$).

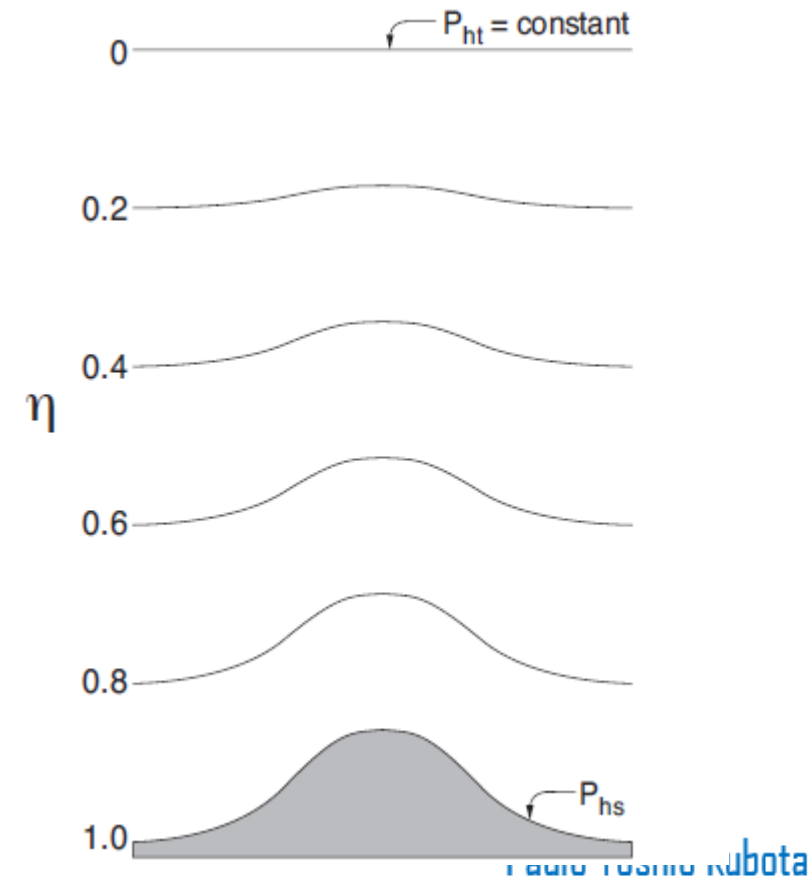




Coordenadas verticais

Sigma-P

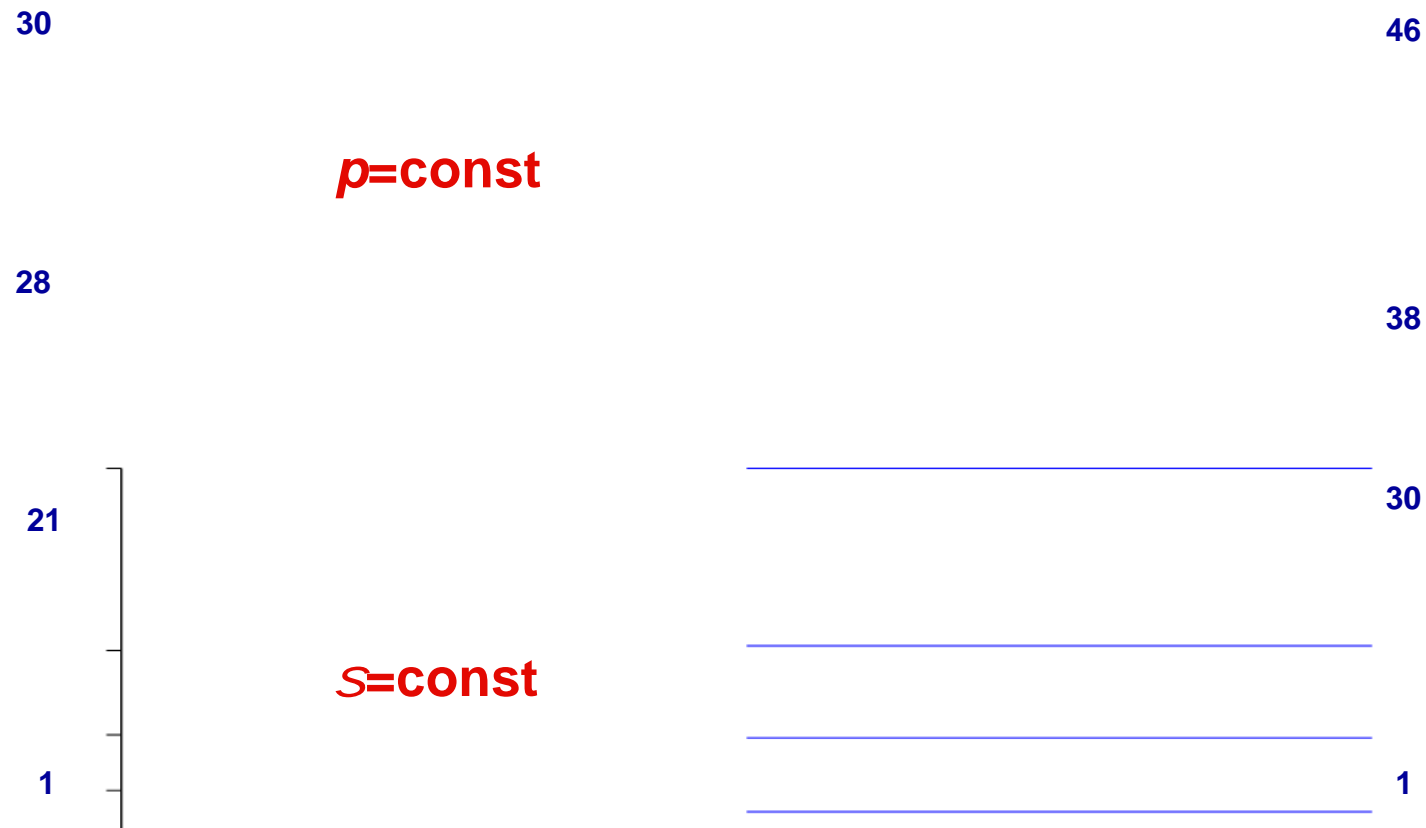
Um problema dos sistemas de coordenadas verticais sigma é que os erros em dois termos da força do gradiente de pressão que não se cancelam (Smagorinski et al. 1967; veja também a revisão em Mesinger e Janjic' 1985).





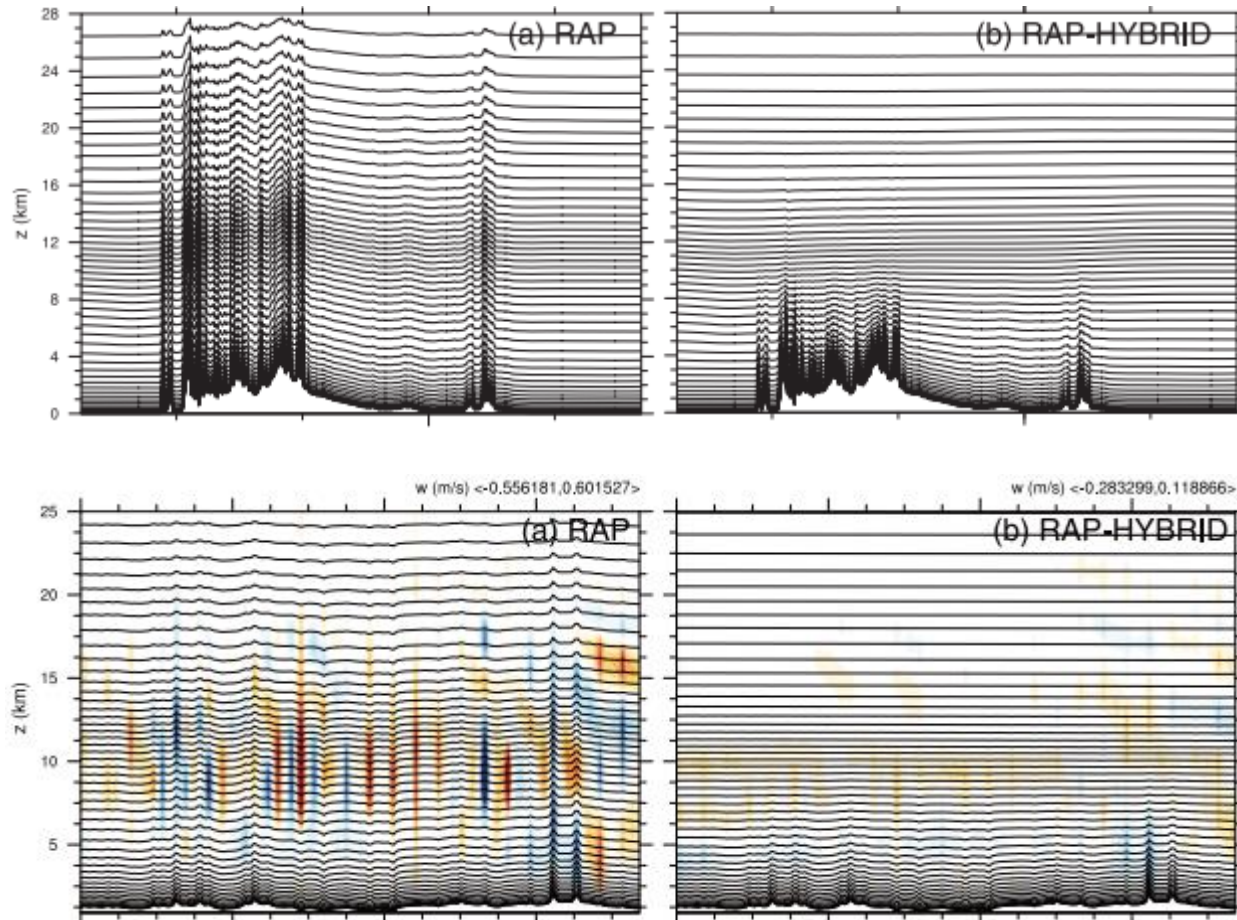
Coordenadas verticais

- Combinam vantagens de ambas as coordenadas





Coordenadas verticais



Park et al.
2019 MWR



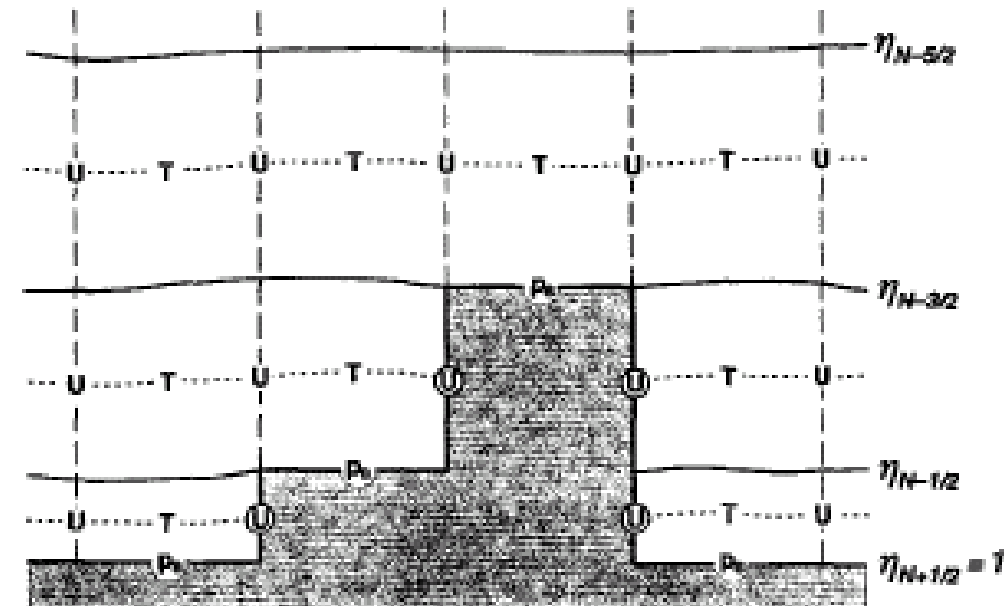
Coordenadas verticais

ETA

Para evitar esse problema, Mesinger et al. (1988) adotaram uma coordenada vertical completamente diferente, a step-mountain ou coordenada eta, no modelo NCEP ETA. Nesse modelo, eta (η) é definido como

$$\eta = \frac{P - P_T}{P_S - P_T} \eta_s$$

$$\eta_s = \frac{P_{rf}(Z_s) - P_T}{P_{rf}(0) - P_T}$$

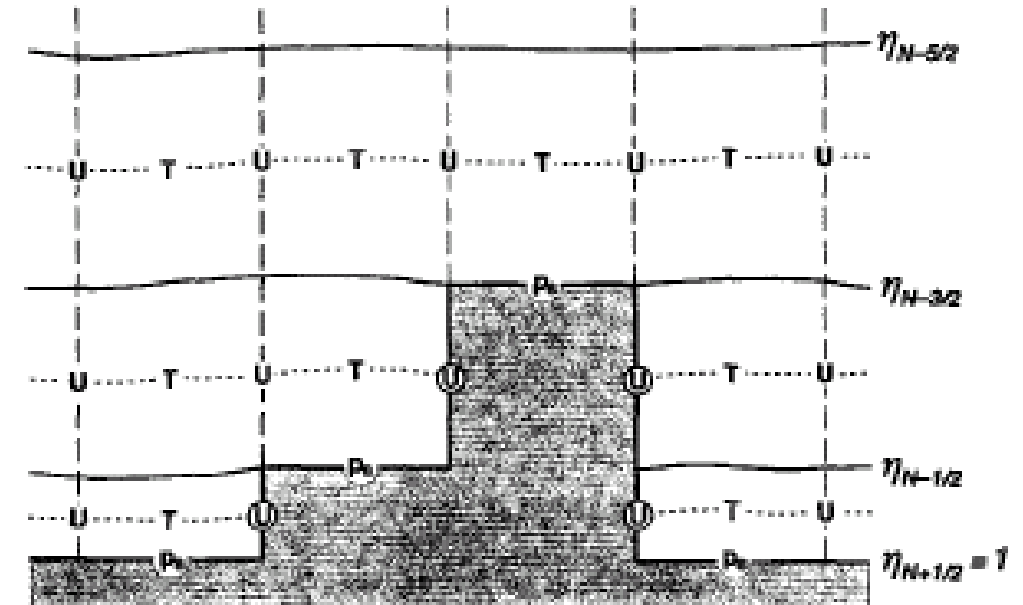




Coordenadas verticais

$$\eta = \frac{P - P_T}{P_s - P_T} \eta_s \quad \eta_s = \frac{P_{rf}(Z_s) - P_T}{P_{rf}(0) - P_T} \quad \text{ETA}$$

Nas equações acima, P é a pressão; os subscritos T e s definem os valores de topo e superfície da atmosfera do modelo; (Z_s) é a altura geométrica e $P_{rf}(Z_s)$ é uma pressão de referência adequadamente definida em função de (Z_s) .





Coordenadas verticais

ETA

- Vantagens:
 - Melhora o calculo do gradiente de pressão
- Problemas:
 - Não representa acuradamente a topografia



Coordenadas verticais

Um terceiro método é adotar uma aproximação de elementos finitos das equações governantes, que simplesmente aproximam a superfície da montanha por um lado dos elementos finitos.

Não há transformação de coordenadas necessária nesta abordagem. Tem a mesma vantagem de não ter que transformar as equações governantes em formas complicadas, além de ter uma precisão de ordem superior em comparação com a coordenada degrau-montanha.

Talvez esta seja uma maneira melhor de tratar a condição de limite inferior; no entanto, o método de elementos finitos é um método completamente diferente dos métodos de diferenças finitas mais populares. Isso dificulta a aplicação se o modelo usar um método de diferenças finitas.



Coordenadas verticais

- Quais são as vantagens e limitações da diferentes coordenadas verticais?
- Existem outras coordenadas verticais? por que não são comumente utilizadas?



13.1.1 Sistemas de Malha

□ Diferentes tipos de malhas de grade podem ser adotados:

- (a) malha de grade uniforme,
- (b) malha de grade esticada (deformada),
- (c) malha de grade aninhada,
- (d) malha de grade móvel,
- (e) malha de grade adaptável,
- (f) malha de grade não estruturada,
- (g) malha de grade escalonada (deslocada).

Alguns deles podem ser combinados em um modelo.



13.1.1 Sistemas de Malha

Para uma malha de grade uniforme, os intervalos de grade são definidos para serem iguais.

Vantagens: fácil de codificar em uma linguagem de programação e simples de inserir recursos geográficos no modelo.

Desvantagens: (1) é difícil incorporar adequadamente feições grandes e pequenas dentro do mesmo domínio de modelo, (2) não pode resolver sistemas climáticos em áreas que precisam de alta resolução, (3) não conserva massa.



13.1.1 Sistemas de Malha

Para uma malha de grade uniforme, os intervalos de grade são definidos para serem iguais.

Por exemplo, se usarmos o mesmo intervalo de grade na vertical, será difícil resolver adequadamente a circulação da camada limite, enquanto é mais do que suficiente para resolver a circulação na atmosfera livre (isto é, acima da camada limite), especialmente na troposfera superior.

Em geral, o **espaçamento uniforme** da grade em todos os níveis não é viável devido à limitação da velocidade de computação.



13.1.1 Sistemas de Malha



Na malha de grade (stretched) deformada, os intervalos de grade variam espacialmente.

Vantagens: um domínio muito maior do que a malha de grade uniforme com o mesmo número de pontos de grade pode ser adotado para simulações numéricas.

Ao adotar uma malha de grade deformada de uma resolução mais fina perto da superfície e uma resolução relativamente grosseira na troposfera superior e na estratosfera, permite que um modelo resolva movimentos turbulentos de menor escala presentes na camada limite planetária.



13.1.1 Sistemas de Malha

Na malha de grade (stretched) deformada, os intervalos de grade variam espacialmente.

Desvantagens:

- (a) Difícil de codificar as equações de diferenças finitas no computador.**
- (b) Reflexões podem ocorrer se os intervalos da grade forem muito esticados (Klemp e Lilly 1978).**



13.1.1 Sistemas de Malha



Na malha de grade (stretched) deformada, os intervalos de grade variam espacialmente.

Em muitos modelos de mesoescala e NWP, a grade vertical costuma ser esticada. A mistura turbulenta vertical fornece uma medida da resolução de grade necessária.

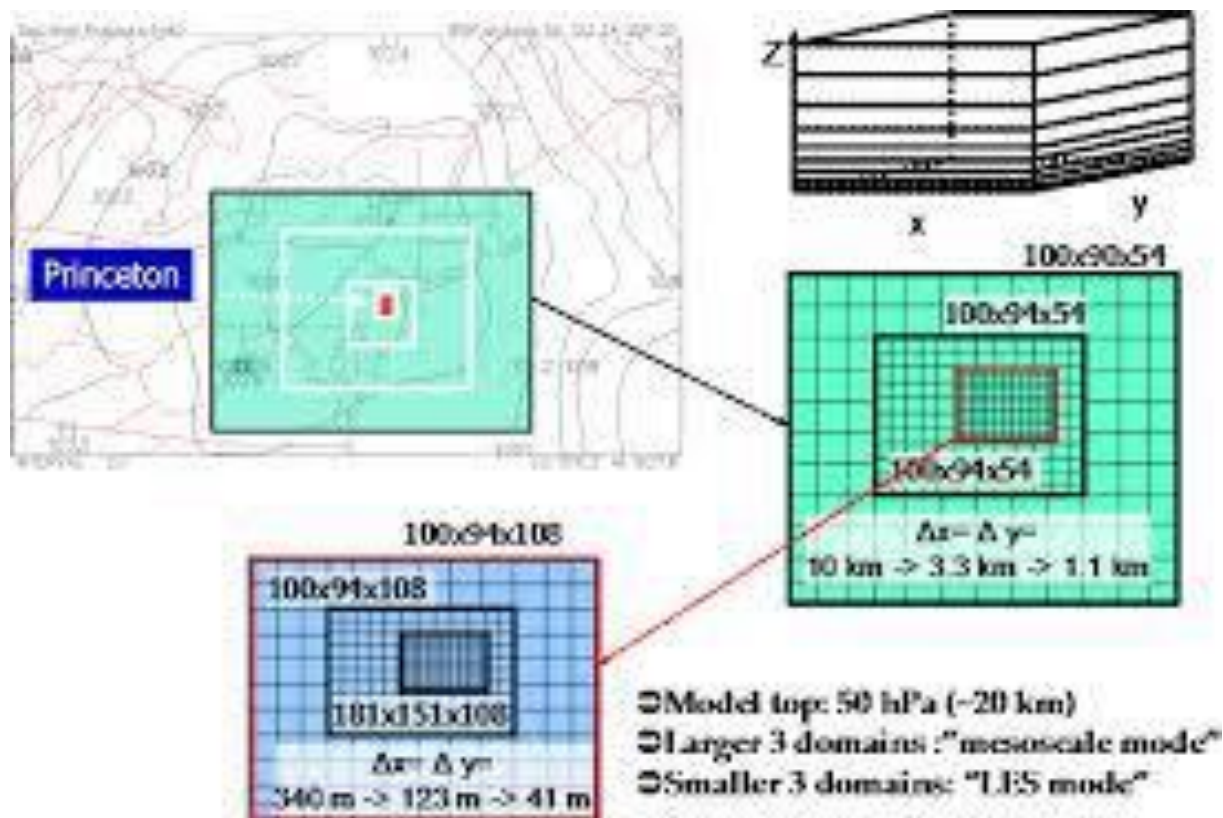
Em geral, os modelos de mesoescala e NWP têm os menores incrementos de grade perto da superfície, devido à circulação da camada limite planetária, e a malha da grade mais grosseira se estende para cima.



13.1.1 Sistemas de Malha



Na malha de grade (stretched) deformada, os intervalos de grade variam espacialmente.



Para evitar a reflexão interna dos contornos internos, é desejável uma transição suave da resolução fina para a grosseira.



13.1.1 Sistemas de Malha



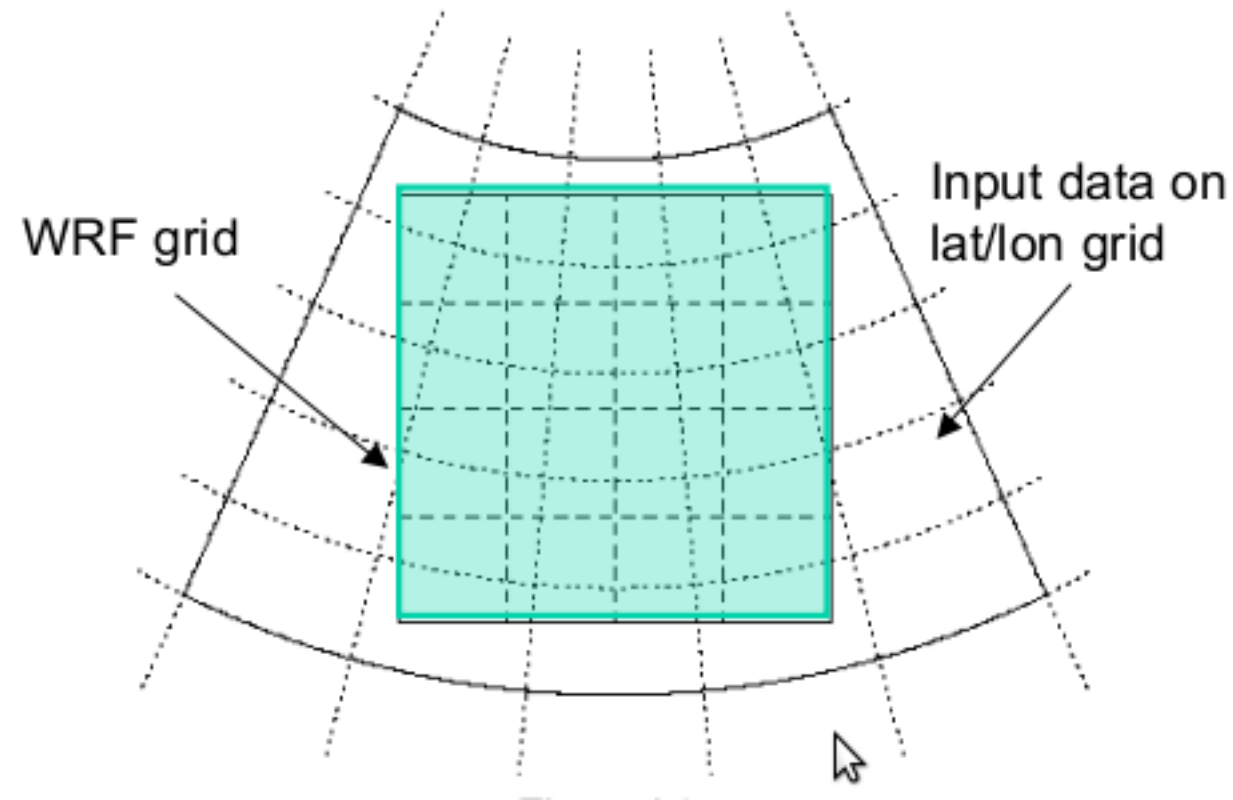
Na malha de grade (stretched) deformada, os intervalos de grade variam espacialmente.

A **extensão vertical dos intervalos** da grade pode ser definida por uma função conhecida, como uma função logarítmica, ou especificada por alturas específicas.



Aninhamento (Nesting)

Aninhamento (Nesting)





13.1.1 Sistemas de Malha

Na *malha de grade aninhada*.

Um alinhamento bidirecional (two-way stretching) também pode ser usado.

Por exemplo, ao simular fluxo com um nível crítico Z_c , onde a velocidade básica do vento é igual à velocidade de fase de uma onda em propagação [$U(Z_c) = c$], uma resolução muito mais fina é necessária para resolver a onda que tem comprimento de onda vertical aproximando-se de 0 nas proximidades do nível crítico.

Nessa situação, pode ser necessário definir uma malha de grade de deformada com uma resolução muito fina próxima ao nível crítico e que se estende para uma resolução mais grosseira tanto para cima quanto para baixo.



13.1.1 Sistemas de Malha



Na malha de grade aninhada.

Uma alternativa à abordagem de grade deformada é inserir uma malha de grade de malha fina, ou seja, **uma malha de grade aninhada**, dentro de uma grade grossa.

Desta forma, permite-nos simular as características de pequena escala, que não são resolvíveis usando a malha de grade grossa.

A malha grossa fornece as condições de contorno da malha fina.



13.1.1 Sistemas de Malha



Na malha de grade aninhada.

Dois tipos de aninhamento de grade podem ser usados neste tipo de malhas de grade:

- (i) Aninhamento unidirecional (One-way)** ou representação de grade parasitária: Permite apenas que perturbações na malha de grade grosseira entrem na malha de grade aninhada fina.
- (ii) Interação bidirecional (two-way)**: permite que perturbações entrem e saiam da malha de grade aninhada fina.



13.1.1 Sistemas de Malha

Na *malha de grade aninhada*.

Dois tipos de aninhamento de grade podem ser usados neste tipo de malhas de grade:

Vantagens: Permite que sistemas e processos climáticos de menor escala sejam simulados sem sobrecarregar o tempo computacional.



13.1.1 Sistemas de Malha



Dois **tipos de aninhamento de grade** podem ser usados neste tipo de malhas de grade:

Desvantagens:

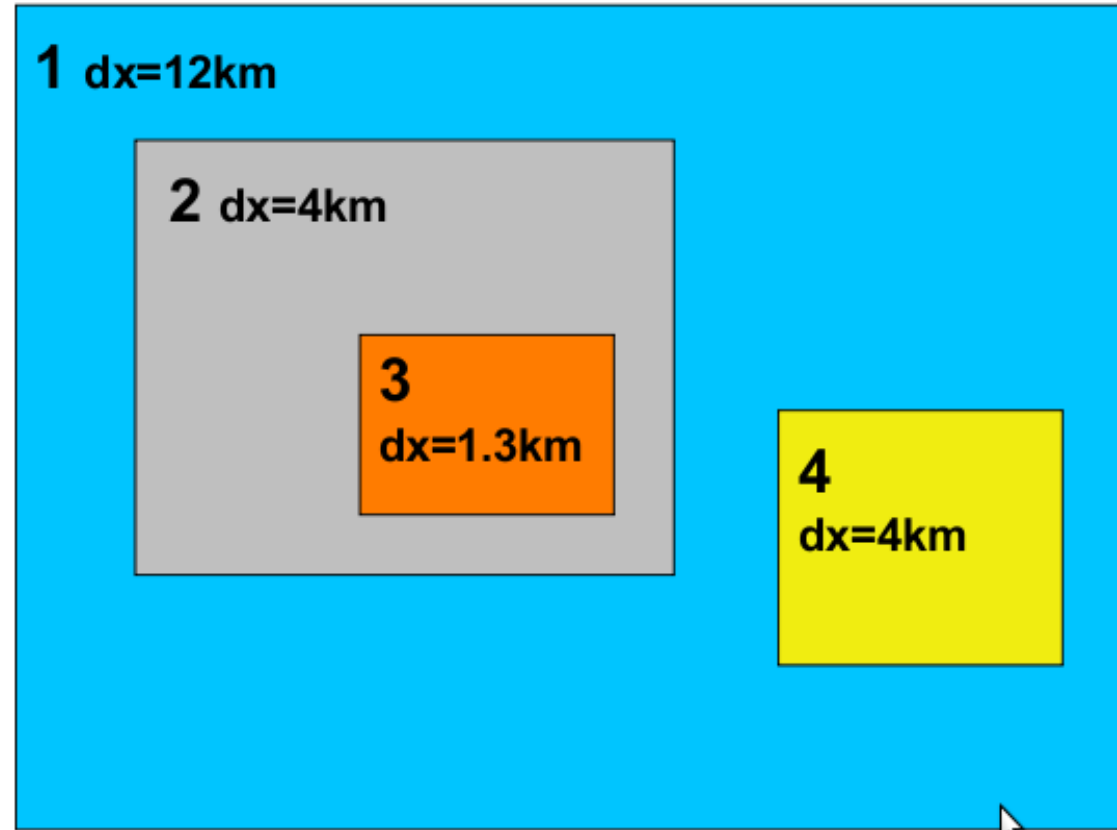
(1) Condições de **contorno de interface imprecisas** levarão a **soluções numéricas imprecisas** no domínio interno (aninhamento unidirecional) ou em ambos os domínios (aninhamento bidirecional).

(2) A **interação entre múltiplas malhas aninhadas**, particularmente a **tendência de propagação de ondas dispersivas para mudar descontinuamente suas velocidades ao passar de uma malha para a próxima e refletir fora dos limites de cada malha aninhada, tem sido um tópico de grande preocupação** (Dietachmayer e Droegemeier 1992).

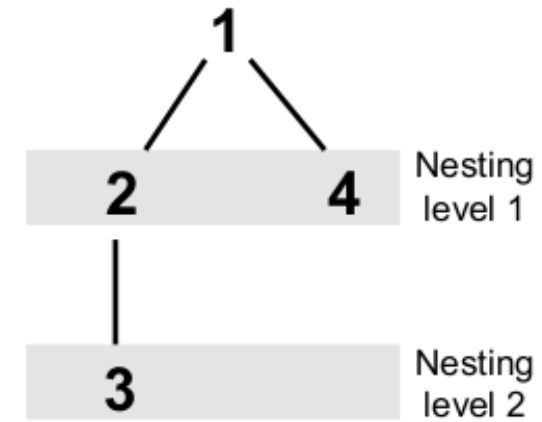


Aninhamento (Nesting)

Example configuration – 4 domains



Each domain is assigned a *domain ID #*



Nesting structure shown as a tree for the domains at left



13.1.1 Sistemas de Malha

A malha de grade aninhada mencionada acima também pode ser projetada para se mover com um sistema climático (malha de grade móvel), como um ciclone, furacão, frente ou tempestade.

Vantagens: pode seguir o sistema meteorológico e sempre fornecer uma resolução mais precisa nas proximidades do sistema meteorológico.

Desvantagens: Deve-se saber a priori, e durante o cálculo, quais regiões do domínio exigirão maior resolução espacial.



13.1.1 Sistemas de Malha



A **malha de grade aninhada mencionada** acima também pode ser **projetada para se mover com um sistema climático** (malha de grade móvel), como um ciclone, furacão, frente ou tempestade.

Para **melhorar** as técnicas de **grade aninhada** e **grade móvel**, as técnicas **de malha de grade adaptativa** foram propostas.

Pontos de grade podem ser adicionados de **maneira estruturada através da colocação de grades múltiplas** e talvez sobrepostas em escala mais fina no domínio (Berger e Oliger 1984).



13.1.1 Sistemas de Malha



malhas de grade adaptáveis

A Fig. 13.2 mostra um exemplo do uso de **4 malhas de grade adaptáveis** para simular a **evolução de uma corrente de densidade produzida por um resfriamento prescrito** (Skamarock et al. 1989; Skamarock e Klemp 1993).

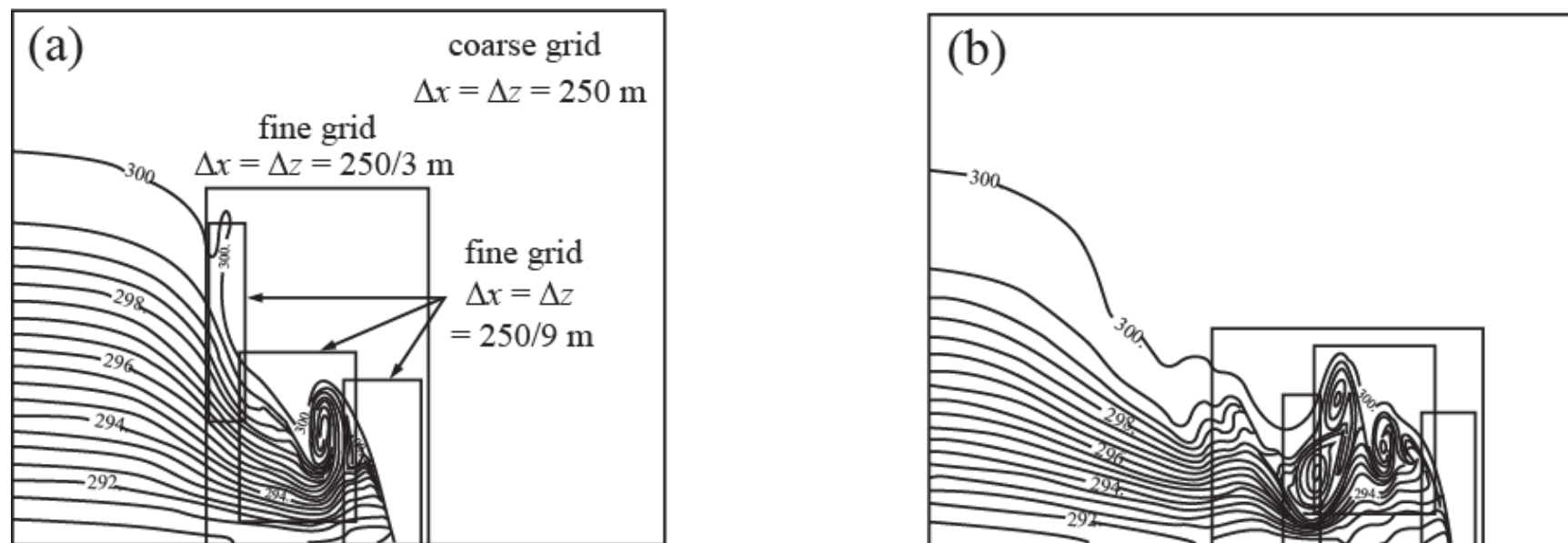


Fig. 13.2: Campos de temperatura potencial em (a) 450 s e (b) 900 s em uma simulação de colapso de piscina fria usando malhas de grade adaptáveis. (Após Skamarock 1989) [De Lin 2007]



13.1.1 Sistemas de Malha



malhas de grade adaptáveis

Regiões de **fortes gradientes de temperatura potenciais** ao longo da frente de rajada e **ondas de Kelvin-Helmholtz** são bem simuladas.

Na **malha de grade adaptável**, um número fixo de **pontos de grade** ou **pontos de colocação** também pode ser **redistribuído de uma maneira predeterminada para fornecer aumento de resolução** localmente e, portanto, uma solução melhorada em certas regiões do domínio.



13.1.1 Sistemas de Malha

malhas de grade adaptáveis

A Fig. 13.3 mostra uma simulação de frontogênese cinemática, que é semelhante a um vórtice de Rankine suavizado sendo advectado por um campo estável e não divergente, usando esse tipo de adaptação de grade dinâmica contínua estruturada.

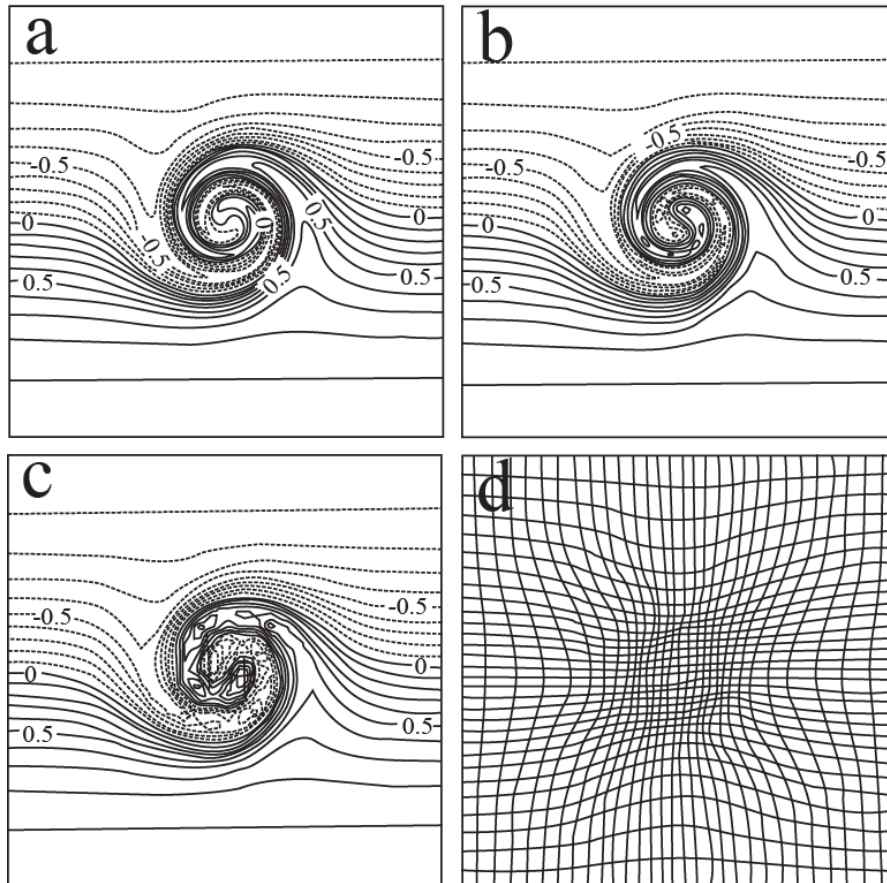


Fig. 13.3:

- (a) Solução exata de um escalar passivo Q em $t = 4$ s para uma frontogênese cinemática sendo advetada por um campo de fluxo estável e não divergente com estrutura semelhante à de um vórtice de Rankine suavizado (Doswell 1984).
- (b) Solução numérica para Q em $t = 4$ s em uma malha de grade uniforme fixa de 31×31 .
- (c) Solução numérica para Q em $t = 4$ s usando uma adaptação de grade dinâmica contínua (CDGA).
- (d) Distribuição de pontos de grade em $t = 4$ s com parâmetros padrão. (Adaptado após Dietachmayer e Droegemeier 1992) [De Lin 2007]



13.1.1 Sistemas de Malha



malhas de grade adaptáveis

- Com ambos os pontos de grade 31×31 , o **resultado (Fig. 13.3c) usando CDGA (Fig. 13.3d) é muito melhor do que a malha de grade uniforme (Fig. 13.3b), comparando com a solução exata (Fig. 13.3a)**.
- Uma **limitação deste tipo de malha de grade adaptável estruturada** é que ela **não é adequada para adaptação de grade dinâmica** porque a **geração de grade requer um alto grau de interação e experiência do usuário**. Assim, não é uma tarefa fácil aplicar este tipo de método para simulações de casos reais.
- Para resolver o problema, **a malha de grade não estruturada foi proposta para lidar com recursos de grande e pequena escala sem ter que envolver malha de grade aninhada**.



13.1.1 Sistemas de Malha



malhas de grade adaptáveis

- **Uma desvantagem dessa abordagem é como resolver a parametrização física em várias escalas.**



13.1.1 Sistemas de Malha



(g) Malha de grade deslocada (Staggered)

□ Quando um sistema de equações governantes com várias variáveis desconhecidas, **como o sistema de águas rasas discutido** na seção 4.4 de Lin (2007), **as variáveis não precisam necessariamente ser definidas nos mesmos pontos da grade.**

Em vez disso, eles podem ser deslocada um em relação ao outro em diferentes pontos da grade.

Esse tipo de sistema de grade é **chamado de malha de grade deslocada**, que é **motivada pela necessidade de preservar algumas relações de conservação.**

o Por exemplo, Lilly (1961) propôs um sistema de grade deslocada que ajuda a preservar a energia cinética total.

o Nesse **tipo de malha de grade**, as **variáveis são deslocada umas em relação às outras.**



13.1.1 Sistemas de Malha



(g) Malha de grade deslocada (Staggered)

Considere a equação de continuidade incompressível 2D,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

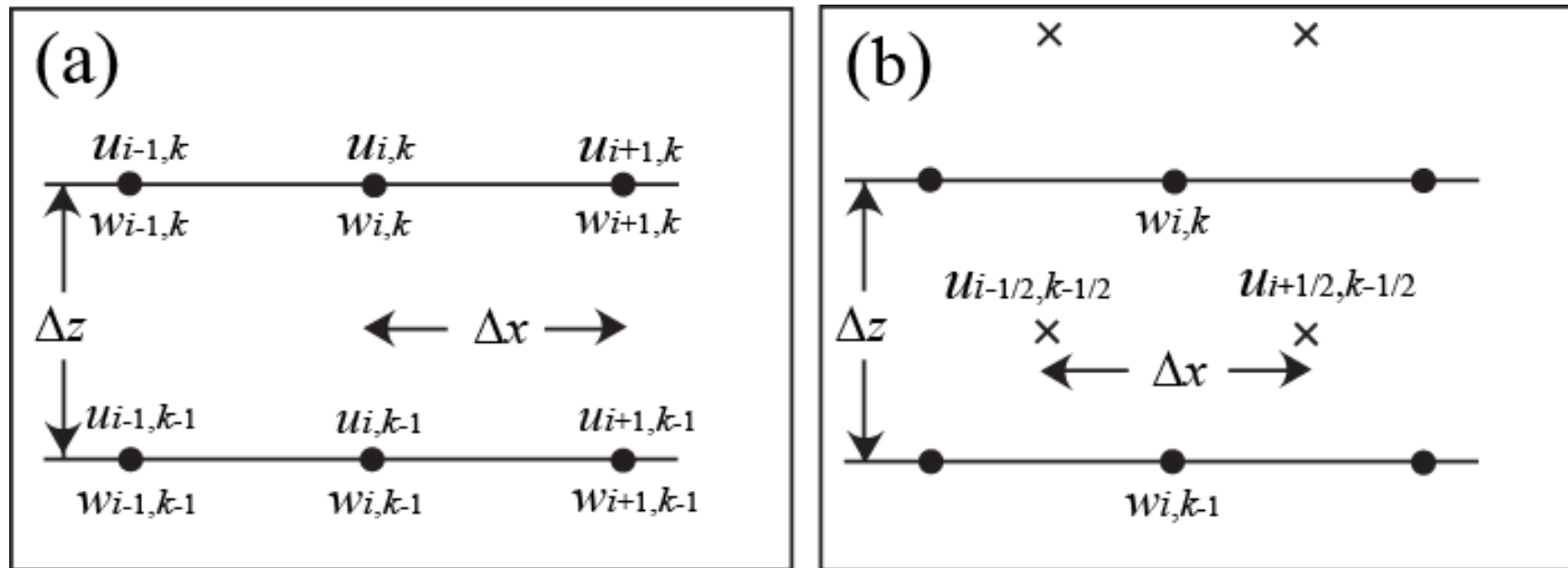


Fig. 13.4: Um esquema de (a) uma malha de grade não deslocada e (b) uma malha de grade deslocada para o cálculo de u e w com a equação de continuidade incompressível bidimensional.



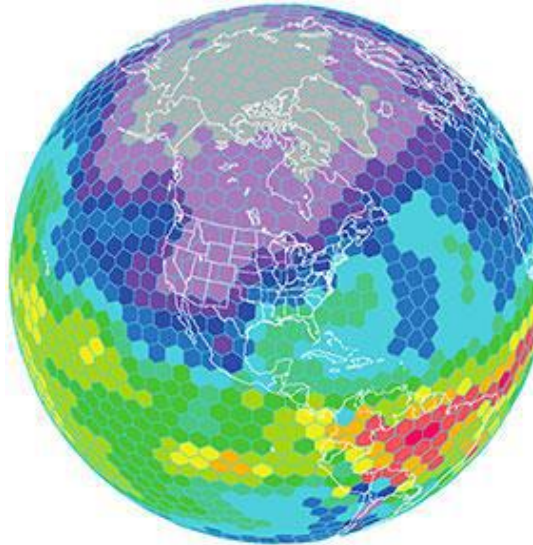
13.1.1 Sistemas de Malha



(g) Malha de grade deslocada (Staggered)

Grade deslocada em MPAS:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$





13.1.1 Sistemas de Malha

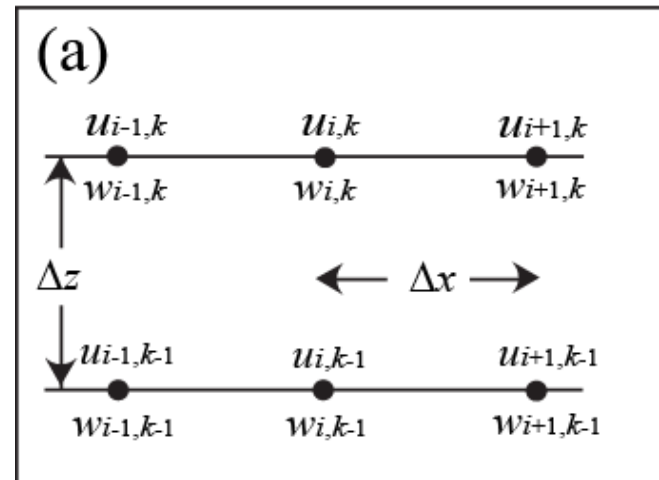


(g) Malha de grade deslocada (Staggered)

Para uma malha de grade não deslocada (Fig. 13.4a), uma forma de diferença finita simples pode ser escrita

$$w_{i,k} = w_{i,k-1} - \frac{u_{i+1,k-\frac{1}{2}} - u_{i-1,k-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \Delta z$$

onde



$$u_{i+1,k-\frac{1}{2}} = \frac{(u_{i+1,k} + u_{i+1,k-1})}{2}$$

$$u_{i-1,k-\frac{1}{2}} = \frac{(u_{i-1,k} + u_{i-1,k-1})}{2}$$

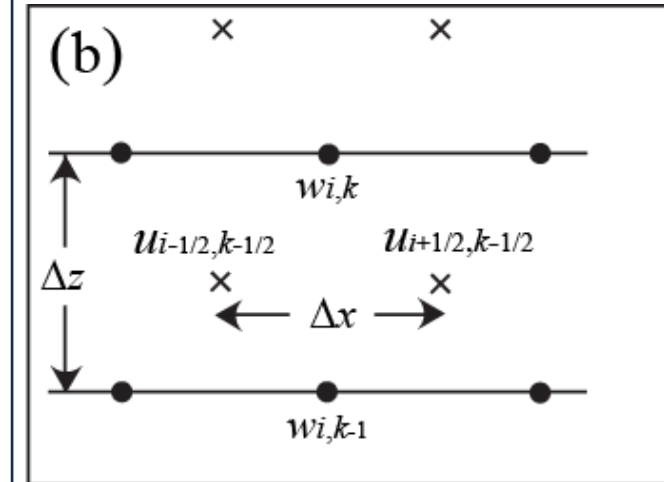
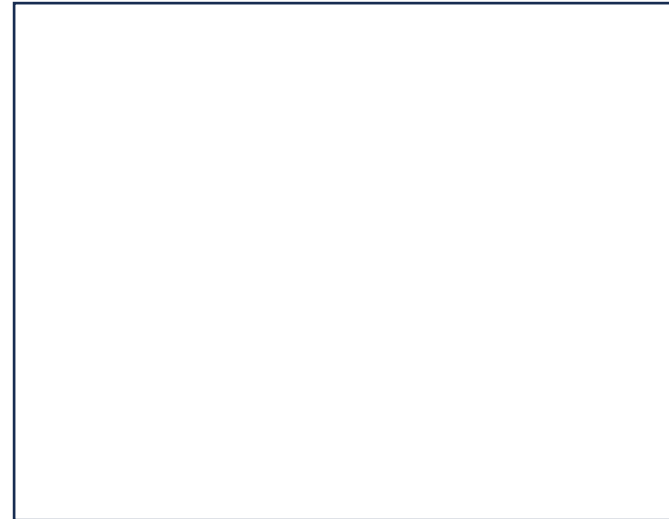


13.1.1 Sistemas de Malha

(g) Malha de grade deslocada (Staggered)

Para uma malha de grade deslocada (Fig. 13.4b), uma forma de diferença finita simples pode ser escrita

$$w_{i,k} = w_{i,k-1} - \frac{u_{i+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \Delta z$$



onde u é definido como localizado a meio caminho entre os pontos da grade em que w é definido.



13.1.1 Sistemas de Malha



(g) Malha de grade deslocada (Staggered)

Assim, **deslocar as variáveis dependentes conforme** dado por (13.1.4) **aumenta a resolução efetiva por um fator de dois**, uma vez que as derivadas são definidas sobre um incremento Δx , por exemplo, em vez de $2\Delta x$, mas sem exigir a média como em (13.1. 2).



13.1.1 Sistemas de Malha



(g) Malha de grade deslocada (Staggered)

☒ Para examinar a estabilidade computacional e a velocidade de fase associada a uma malha de grade deslocada, podemos considerar a aplicação do esquema de diferenças centradas no tempo e de segunda ordem para a versão bidimensional das equações de águas rasas, Eqs. (4.4.21) e (4.4.23), com $U=0$ em uma malha de grade deslocada conforme mostrado na Fig. 13.5,

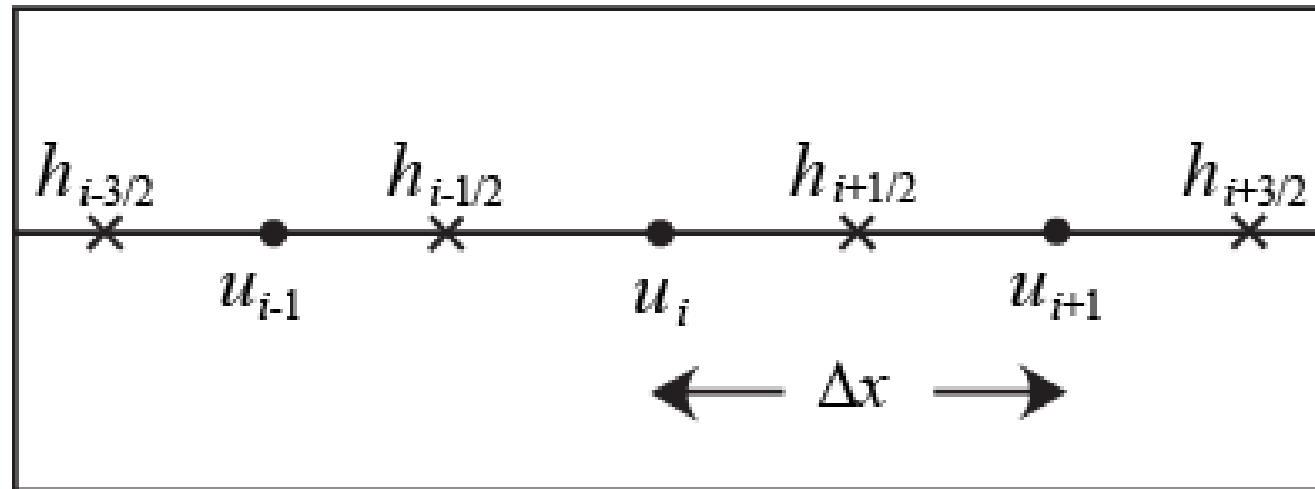


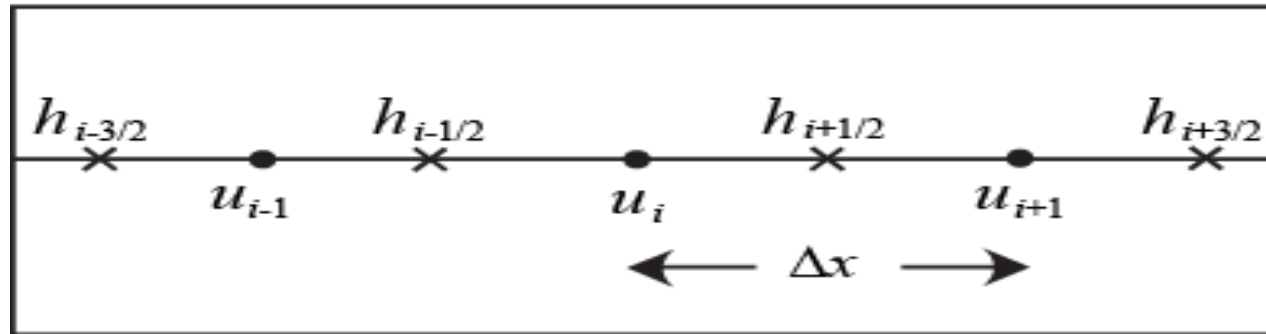
Fig. 13.5: A schematic of a staggered grid mesh for the shallow water system.



13.1.1 Sistemas de Malha



(g) Malha de grade deslocada (Staggered)



$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau-1}}{2\Delta t} + g \frac{h_{i+1/2}^{\tau} - h_{i-1/2}^{\tau}}{\Delta x} = 0, \quad (13.1.5)$$

$$\frac{h_{i+1/2}^{\tau+1} - h_{i+1/2}^{\tau-1}}{2\Delta t} + H \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_i^{\tau}}{\Delta x} = 0, \quad (13.1.6)$$

Fig. 13.5: A schematic of a staggered grid mesh for the shallow water system.



13.1.1 Sistemas de Malha

(g) Malha de grade deslocada (Staggered)

Pode-se derivar que a dispersão computacional ou discreta relação para o sistema acima é

$$\sin \omega \Delta t = \pm \frac{2c\Delta t}{\Delta x} \sin \frac{k\Delta x}{2}, \quad (13.1.7)$$

onde $c = \pm \sqrt{gH}$ são as velocidades da fase de águas rasas. Como as soluções do sistema de ondas bidimensionais de águas rasas são neutras, um ω real é necessário.

Assim, uma **solução estável para a grade deslocada** requer $|C| = \left| \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right| \leq \frac{1}{2}$. Também pode ser derivado que o **critério de estabilidade para uma malha de grade não deslocada** é $|C| = \left| \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$.

Portanto, o **intervalo de tempo máximo para um sistema de grade deslocada é metade do sistema de malha não deslocada** correspondente, o que **implica que o tempo computacional é quase o dobro**.



13.1.1 Sistemas de Malha



(g) Malha de grade deslocada (Staggered)

Este **requisito mais rigoroso no intervalo de tempo** de integração **pode ser compensado** por uma **velocidade de fase computacional aprimorada ao usar uma malha de grade deslocada**, como mostrado na Fig. 13.6.

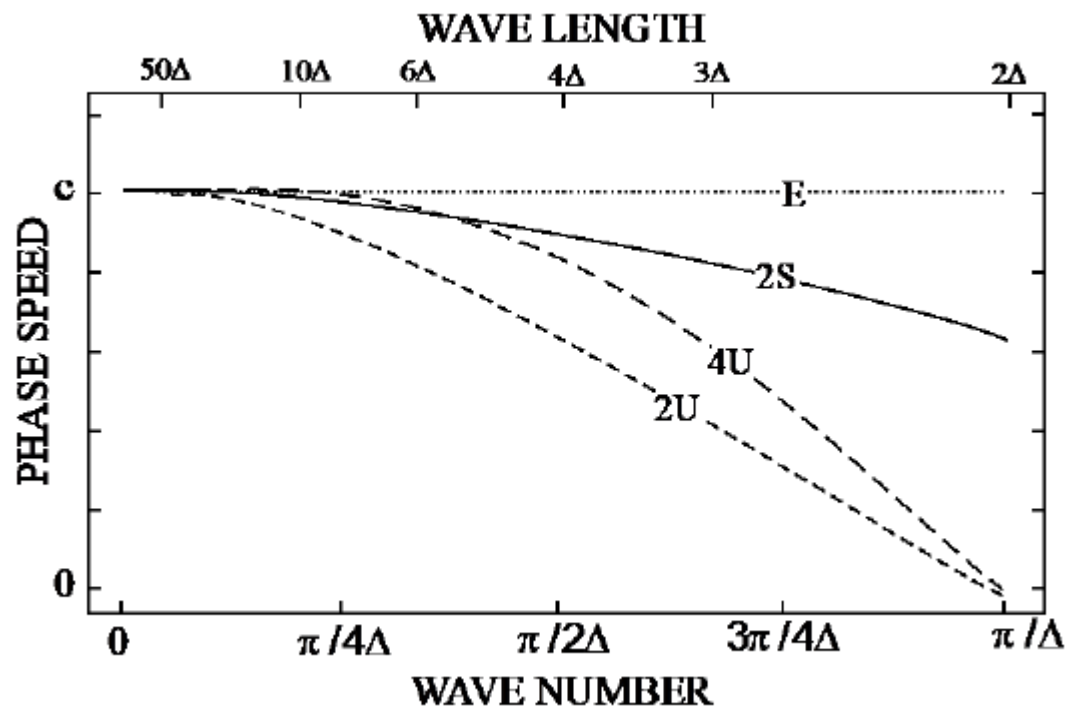


Fig. 13.6: Velocidade de fase em função da **resolução espacial para a solução exata (E)**,

Para:

derivada espacial de segunda ordem (2U) e derivada espacial quarta ordem (4U) em **uma malha de grade não deslocada**

E para derivadas espaciais de segunda ordem em uma **malha de grade deslocada (2S)**.

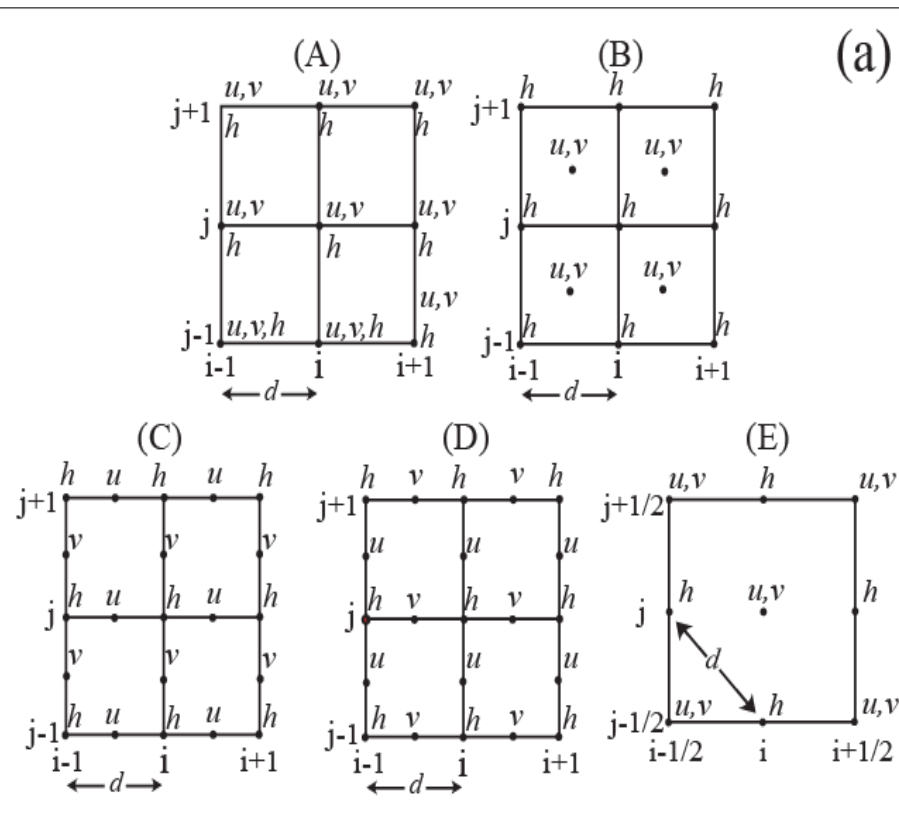
O símbolo Δ define um intervalo de grade. (Depois de Durran 1998, com a gentil permissão da Springer Sciences and Media.) [Lin 2007].



13.1.1 Sistemas de Malha

(g) Malha de grade deslocada (Staggered)

A Fig. 13.7 mostra cinco malhas de grade propostas por Arakawa e Lamb (1977). Para malhas de grade deslocada, **as malhas de grade B e C, que são freqüentemente chamadas de grade Arakawa-B e grade Arakawa-C** na comunidade de modelagem numérica, podem preservar melhor a velocidade de fase e a velocidade de grupo (Fig. 13.7).

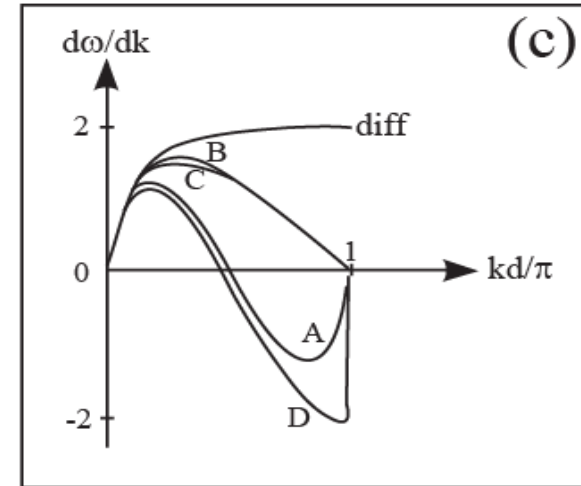
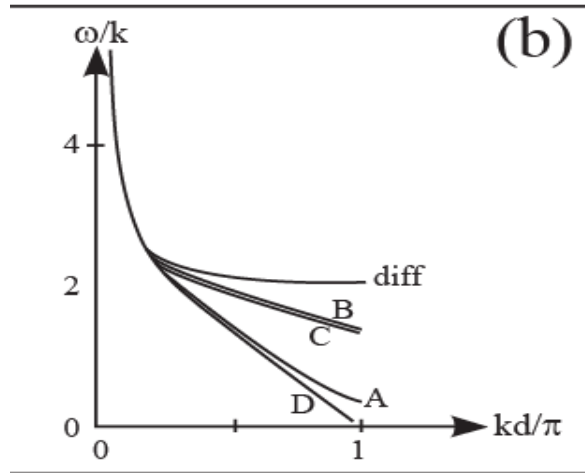




13.1.1 Sistemas de Malha

(g) Malha de grade deslocada (Staggered)

MALHA B e C podem preservar melhor a velocidade de fase e a velocidade de grupo



A velocidade de fase computacional ($c_p = \frac{\omega}{k}$) e a velocidade de grupo ($c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$) analisadas como funções de $\frac{kd}{\pi}$ para as **quatro grades (A,B,C e D)** conforme mostrado nos painéis (b) e (c), respectivamente (Schoenstadt 1978).

A solução da equação diferencial também está incluída (**diff**). Esses resultados usam os seguintes valores: $\sqrt{gH} = 10^2 m/s$, $f = 10^{-4} s^{-1}$ e $d = 500m$, onde **d é o intervalo da grade** (Adaptado após Arakawa e Lamb 1977)