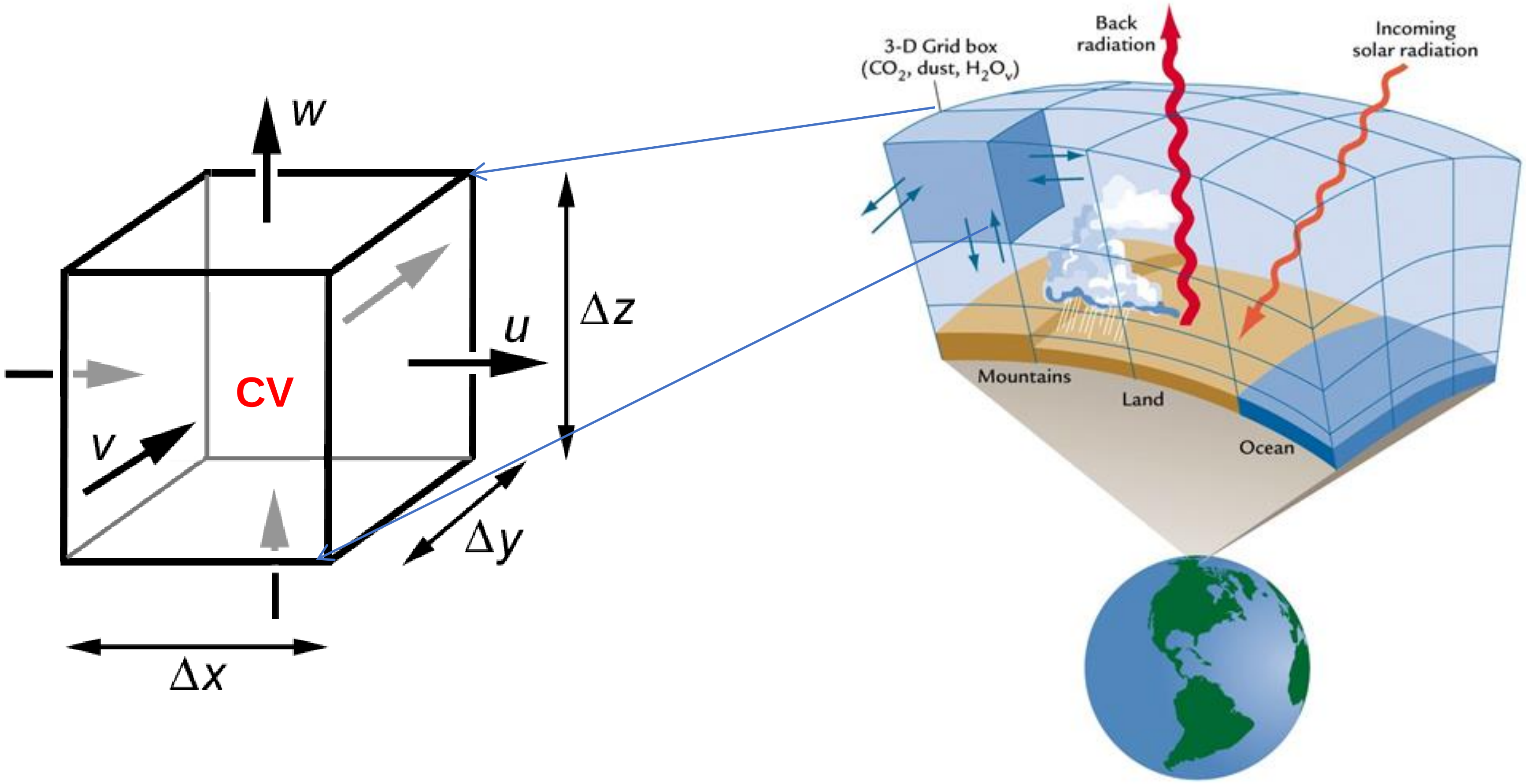
Como Derivar a Equação da Termodinâmica

$$\boxed{\frac{DT}{Dt} = ?}$$

Como Derivar a Equação da Termodinâmica



Volume de controle VC ou CV

. GCMs divide Earth into grid cells and use laws of physics to represent real world climate [*Ruddiman,* 2001].

Equação da Termodinâmica

Considerações básicas da termodinâmica para a atmosfera:

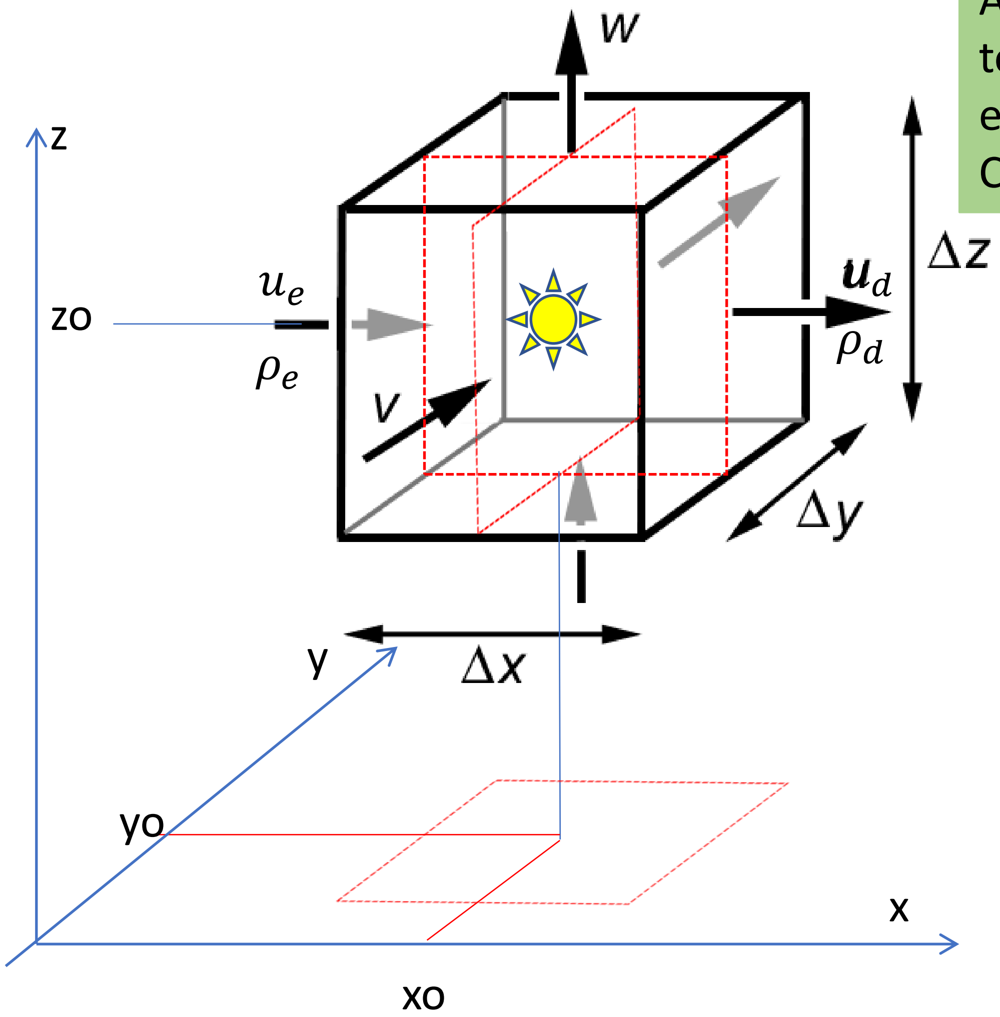
Estrutura da atmosfera Estática Obedece a hidrostática		Segue a lei da Equação de estado para os gases ideais
$P = -\rho g z$	=	$P = \rho R T$

Termodinâmica de uma atmosfera seca

Previsão Numérica de Tempo e Clima

PRINCIPIO → VC=CV → **Conservação de Energia**

A variação total da energia do CV	=	Variação da energia interna dentro do CV	+	Trabalho realizado nas face do CV



$$\Delta Q = \Delta U + W$$

Portanto:

$$\Delta U = \Delta Q - W$$

Conservação de Energia

A **variação pequena de temperatura** que ocorrem nos escoamento naturais permite uma **relação linear** entre o conteúdo de energia U do fluido e sua temperatura absoluta T , sob a forma

$$U = mC_vT$$

Onde

C_v=Calor especifico a volume constante

$$(C_v + R) = C_p$$

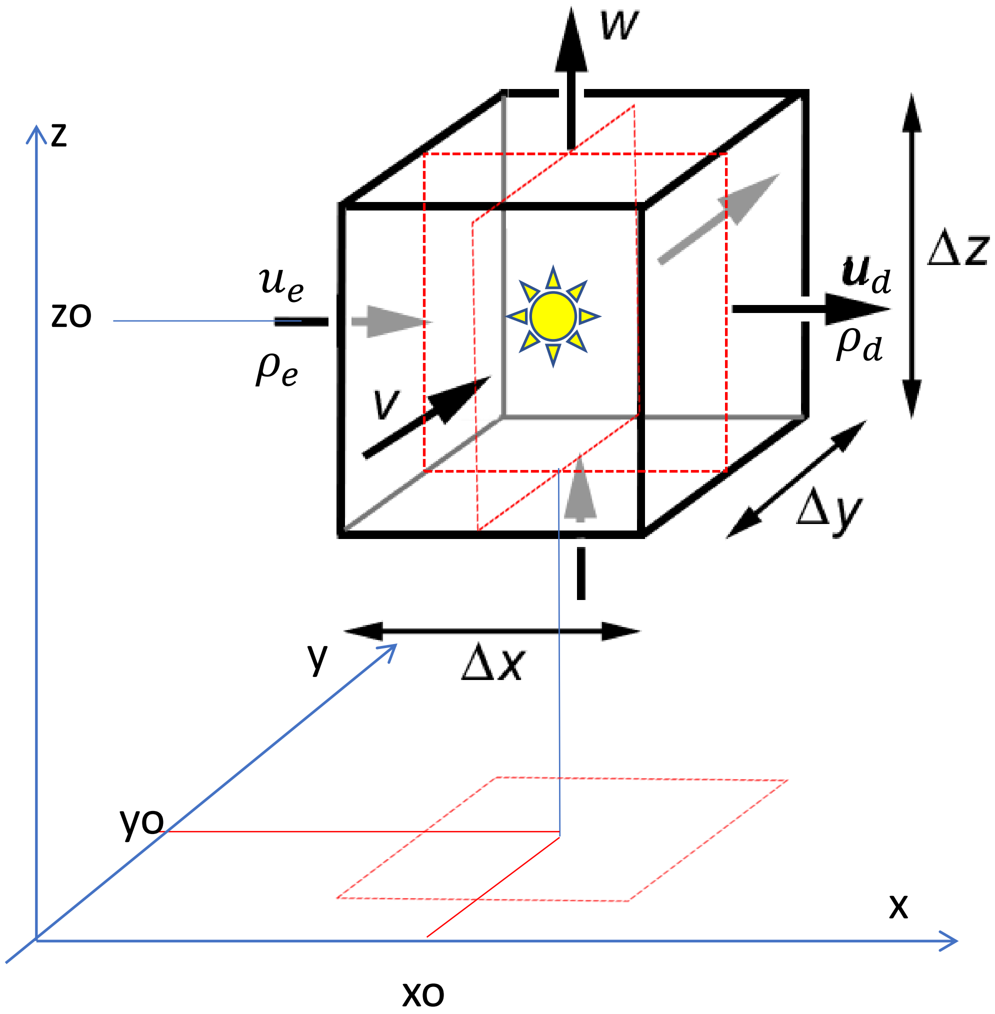
C_p=Calor especifico a pressão constante

$$C_v = C_p - R$$

R = Constante dos gases

Previsão Numérica de Tempo e Clima

PRINCIPIO $\xrightarrow{\text{cv}}$ Conservação de Energia



Somando sobre todos o i-ésimos cv

$$\sum \Delta U_i = \sum \Delta Q_i - \sum W_i$$

$$mC_v \sum \Delta T_i = \sum \Delta Q_i - \sum P_i \Delta V$$

$$mC_v \sum \Delta T_i = \sum \Delta Q_i - \sum P_i \frac{m}{\rho}$$

Conservação de Energia

A Primeira lei da termodinâmica pode ser escrita na forma de variação de energia

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta \mathrm{U} = m C_v \Delta T}}$$

$$m C_v \Delta T = \Delta Q - \Delta W$$

Conservação de Energia

$$mC_v\Delta T = \Delta Q - \Delta W$$

Substituindo o valor de C_v

$$\boxed{C_v = C_p - R}$$

$$m(C_p - R)\Delta T = \Delta Q - \Delta W$$

$$mC_p\Delta T - mR\Delta T = \Delta Q - \Delta W$$

$$mC_p\Delta T - m\Delta RT = \Delta Q - \Delta W$$

Conservação de Energia

$$mC_p\Delta T - m\Delta RT = \Delta Q - \Delta W$$

Onde o trabalho feito pelo sistema é dado pela equação

$$\Delta W = F\Delta x$$

Pressão feita por um fluido sobre uma parede

Pressão

$$P = \frac{F}{Area}$$

$$F = P * Area$$

$$\Delta W = P * Area * \Delta x$$

$$\Delta W = P * \Delta V$$

$$\Delta W = P\ \boldsymbol{X}\Delta\left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

Densidade

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$\Delta V = \Delta\left(\frac{m}{\rho}\right)$$

Conservação de Energia

$$mC_p\Delta T - m\Delta RT = \Delta Q - \Delta W$$

$$mC_p\Delta T - m\Delta RT = \Delta Q - P\ \boldsymbol{X}\Delta\left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

A equação dos gases ideais nos fornece a relação:

$$P = \rho RT$$

$$\mathrm{RT} = \frac{P}{\rho}$$

$$mC_p\Delta T - m\Delta\frac{P}{\rho} = \Delta Q - P\ \boldsymbol{X}\Delta\left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

Conservação de Energia

$$mC_p\Delta T - m\Delta\frac{P}{\rho} = \Delta Q - P\,\boldsymbol{X}\Delta\left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

Para a conservação de energia a massa deve ser constante (m=cte).

$$mC_p\Delta T - m\Delta\frac{P}{\rho} = \Delta Q - \boldsymbol{m}P\,\boldsymbol{X}\Delta\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

Divide por Δt

$$mC_p\frac{\Delta T}{\Delta t} - m\,\frac{\Delta\frac{P}{\rho}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} - \boldsymbol{m}P\,\boldsymbol{X}\frac{\Delta\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\rho}}\right)}{\Delta t}$$

Conservação de Energia

$$mC_p\frac{\Delta T}{\Delta t} - m\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} - mP\,\boldsymbol{X}\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

Fazendo o limite de $\Delta t \rightarrow 0$

$$\boxed{mC_p\frac{DT}{Dt} - m\frac{D}{Dt}\left(\frac{P}{\rho}\right)} = \boxed{\frac{DQ}{Dt}} - \boxed{mP\,\boldsymbol{X}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}}\right)}$$

Taxa de variação da energia interna no do sistema (VC) = Taxa total do calor transferido ao sistema (VC) - Taxa total do trabalho feito pelo sistema (VC)

Conservação de Energia

Derivada da divisão.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$mC_p\frac{DT}{Dt}-m\frac{D}{Dt}\left(\frac{P}{\rho}\right)=\frac{DQ}{Dt}-mP\,\boldsymbol{X}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

$$mC_p\frac{DT}{Dt}-m\left(\frac{\rho\frac{DP}{Dt}-P\frac{D\rho}{Dt}}{\rho^2}\right)=\frac{DQ}{Dt}-mP\,\boldsymbol{X}\left(\frac{\rho\frac{D1}{Dt}-1\frac{D\rho}{Dt}}{\rho^2}\right)$$

Para a conservação de energia a massa e o volume devem ser constantes $\rho=\frac{m}{V}$, ($\frac{D\rho}{Dt}$=0).

$$mC_p\frac{DT}{Dt}-m\frac{DP}{\rho Dt}+m\frac{P}{\rho^2}\cancel{\frac{D\rho}{Dt}}=\frac{DQ}{Dt}+m\frac{P}{\rho^2}\cancel{\frac{D\rho}{Dt}}$$

$$mC_p\frac{DT}{Dt}-m\frac{DP}{\rho Dt}=\frac{DQ}{Dt}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0\Rightarrow\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow m=\rho V$$

Previsão Numérica de Tempo e Clima

Conservação de Energia

$$mC_p\frac{DT}{Dt} - m\frac{DP}{\rho Dt} = \frac{DQ}{Dt}$$

$$C_p\frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{\rho Dt} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{Q}{m}\right)$$

$$q = \frac{Q}{m}$$

$$C_p\frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{\rho Dt} = \frac{D(q)}{Dt}$$

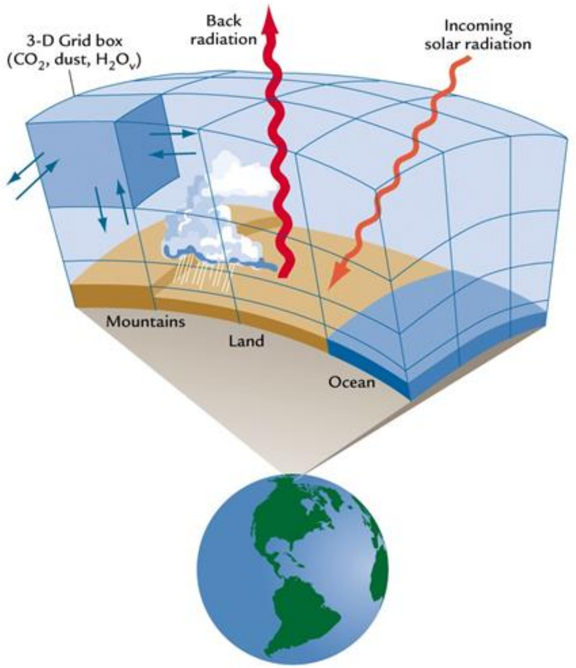
$$C_p\frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{\rho Dt} = J$$

Conservação de Energia

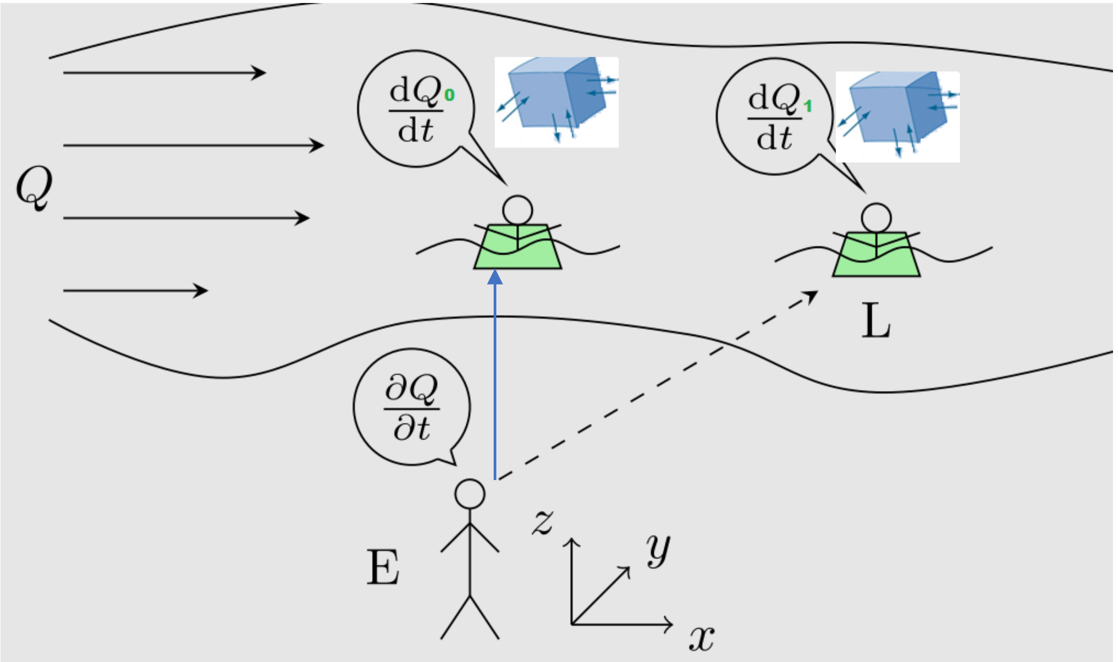
$$C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{\rho Dt} = J$$

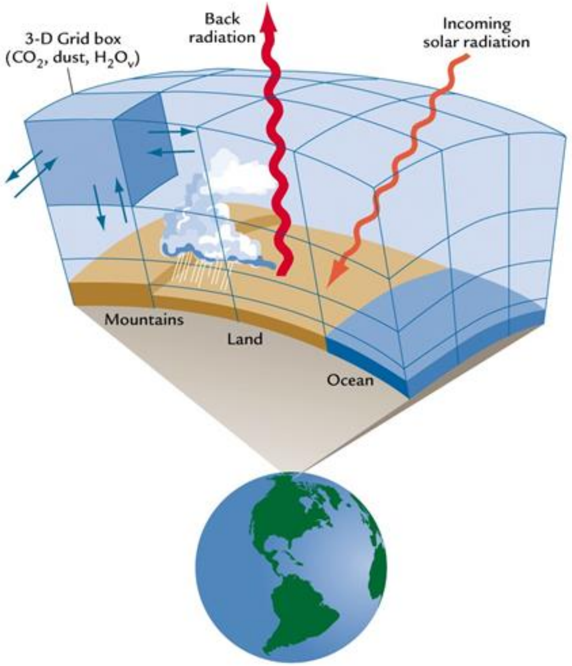
$$J = \frac{D}{Dt}\left(\frac{Q}{m}\right) = \frac{D(q)}{Dt}$$

J = é a taxa de aquecimento por unidade de massa devido a radiação. Condução e liberação de calor latente



Conservação de Energia





Equação da Termodinâmica

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{\rho Dt} = J$$

$$\frac{1}{\rho} = \alpha$$

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha \frac{DP}{Dt} = J$$

Equação da Termodinâmica

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha \frac{DP}{Dt} = J$$

$$\frac{DP}{Dt} = \omega$$

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha\omega = J$$

Equação da Termodinâmica

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha\omega = J$$

$$P = \rho RT$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho} = \frac{RT}{P}$$

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{RT}{P}\omega = J$$

Considere a equação da temperatura potencial:

$$\theta = T\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}}$$

Derive em função de P usando a relação:

Derivada da divisão.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial P}=\frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}}+T\left(\frac{R}{Cp}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}-1}\left(\frac{P_s{}'P-P_sP}{P^2}\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial P}=\frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}}+T\left(\frac{R}{Cp}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}-1}\left(\frac{P_s{}'P-P_sP'}{P^2}\right)$$

Lembre-se P_s não varia com a altura

$$\boldsymbol{P_s{}'=\frac{dP_s}{dP}=0}$$

$$\boldsymbol{P'=\frac{dP}{dP}=1}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial P}=\frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}}+T\left(\frac{R}{Cp}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}-1}\left(\frac{P_s}{P}\right)\left(-\frac{1}{P}\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial P}=\frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}}-T\left(\frac{R}{Cp}\frac{1}{P}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{Cp}}$$

Previsão Numérica de Tempo e Clima

$$\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}} - T\left(\frac{R}{Cp}\frac{1}{P}\right)\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}}$$

$$\left(\frac{P_s}{P}\right)^{-\frac{R}{C_p}}\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} - T\left(\frac{R}{Cp}\frac{1}{P}\right)$$

$$\boxed{\frac{\theta}{T} = \left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{C_p}}} \longleftrightarrow \boxed{\frac{T}{\theta} = \left(\frac{P_s}{P}\right)^{-\frac{R}{C_p}}}$$

$$\frac{T}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{\partial T}{\partial P} - \left(\frac{TR}{CpP}\right)$$

$$\left(\frac{TR}{CpP}\right) = -\frac{T}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial P} + \frac{\partial T}{\partial P}$$

$$C_p\frac{DT}{Dt}-\frac{RT}{P}\omega=J$$

Equação da Termodinâmica

$$\frac{DT}{Dt}-\frac{RT}{C_pP}\omega=\frac{J}{C_p}$$

Parâmetro de estabilidade em coordenada isobárica: **derivada da temperatura potencial**

$$\left(\frac{TR}{CpP}\right)=-\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial P}+\frac{\partial T}{\partial P}$$

$$S_P=\frac{RT}{C_pP}=-\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial P}+\frac{\partial T}{\partial P}=-T\frac{\partial\ln(\theta)}{\partial P}+\frac{\partial T}{\partial P}$$

$$S_P=\frac{RT}{C_pP}=-T\frac{\partial\ln(\theta)}{\partial P}+\frac{\partial T}{\partial P}\equiv-T\frac{\partial\ln(\theta)}{\partial P}$$

$$S_P=\frac{RT}{C_pP}\equiv-T\frac{\partial\ln(\theta)}{\partial P}$$

$$\frac{DT}{Dt}-S_P\omega=\frac{J}{C_p}$$

Equação da Termodinâmica

$$\frac{DT}{Dt} - S_P\omega = \frac{J}{C_p}$$