



# **Métodos de diferenças finitas.**

**MET-576-4**

**Modelagem Numérica da Atmosfera**

**Dr. Paulo Yoshio Kubota**

**Os métodos numéricos, formulação e parametrizações utilizados nos modelos atmosféricos serão descritos em detalhe.**

**3 Meses  
24 Aulas (2 horas cada)**



## Dinâmica:

**Métodos numéricos amplamente utilizados na solução numérica das equações diferenciais parciais que governam os movimentos na atmosfera serão o foco, mas também serão analisados os novos conceitos e novos métodos.**



# Métodos de diferenças finitas.

- ✓ **Métodos de diferenças finitas.**
- ✓ **Acurácia.**
- ✓ **Consistência.**
- ✓ **Estabilidade.**
- ✓ **Convergência.**
- ✓ **Grades de Arakawa A, B, C e E.**
- ✓ **Domínio de influência e domínio de dependência.**
- ✓ **Dispersão numérica e dissipação.**
- ✓ **Definição de filtros monótono e positivo.**
- ✓ **Métodos espectrais.**
- ✓ **Métodos de volume finito.**
- ✓ **Métodos Semi-Lagrangeanos.**
- ✓ **Conservação de massa local.**
- ✓ **Esquemas explícitos versus semi-implícitos.**
- ✓ **Métodos semi-implícitos.**



# Métodos de diferenças finitas.

"Em um esquema de advecção Euleriano, um observador em um ponto fixo no espaço observa os arredores.

Tais esquemas funcionam bem em grades estruturadas, mas frequentemente levam a passos de tempo desnecessariamente restritivos impostos pelo requisito de estabilidade computacional.

Em um esquema de advecção Lagrangiano, o observador vê o mundo ao redor evoluir enquanto viaja 'a bordo' de uma partícula de fluido.



# Métodos de diferenças finitas.

Uma vantagem de um esquema Lagrangiano é que se pode usar passos de tempo muito maiores do que no caso Euleriano.

Uma desvantagem, porém, é que um conjunto de partículas regularmente espaçadas evoluirá, na maioria dos casos, para um conjunto altamente irregularmente espaçado, e características importantes do fluxo podem, conseqüentemente, ser perdidas.



# Métodos de diferenças finitas.

A vantagem dos esquemas de advecção semi-Lagrangianos é que eles combinam a resolução regular dos esquemas Eulerianos com a estabilidade aprimorada dos Lagrangianos.

Robert (1981) propôs usar um esquema semi-Lagrangiano para o tratamento da parte advectiva das equações (veja, por exemplo, Staniforth e Côté (1991) para uma revisão geral)



# Métodos de diferenças finitas.

A equação de advecção linear 1D

"Para apresentar a ideia básica subjacente ao método semi-Lagrangiano em seu contexto mais simples, vamos primeiro examinar a equação de advecção unidimensional formulada dentro de um framework Euleriano:"

$$\frac{\partial F}{\partial t} + c \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

"onde  $c$  é uma velocidade constante dada e  $F$  é o traçador advectado passivamente, como, por exemplo, a temperatura ou a umidade.



# Métodos de diferenças finitas.

A equação de advecção linear 1D

"A discretização mais direta dessa equação, conforme apresentado no Capítulo 4, é a diferenciação centrada tanto no tempo quanto no espaço:"

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Este esquema só produzirá uma solução estável quando integrado com um número de Courant  $\mu \leq 1$ , conforme mostrado pela área verde na Figura 11

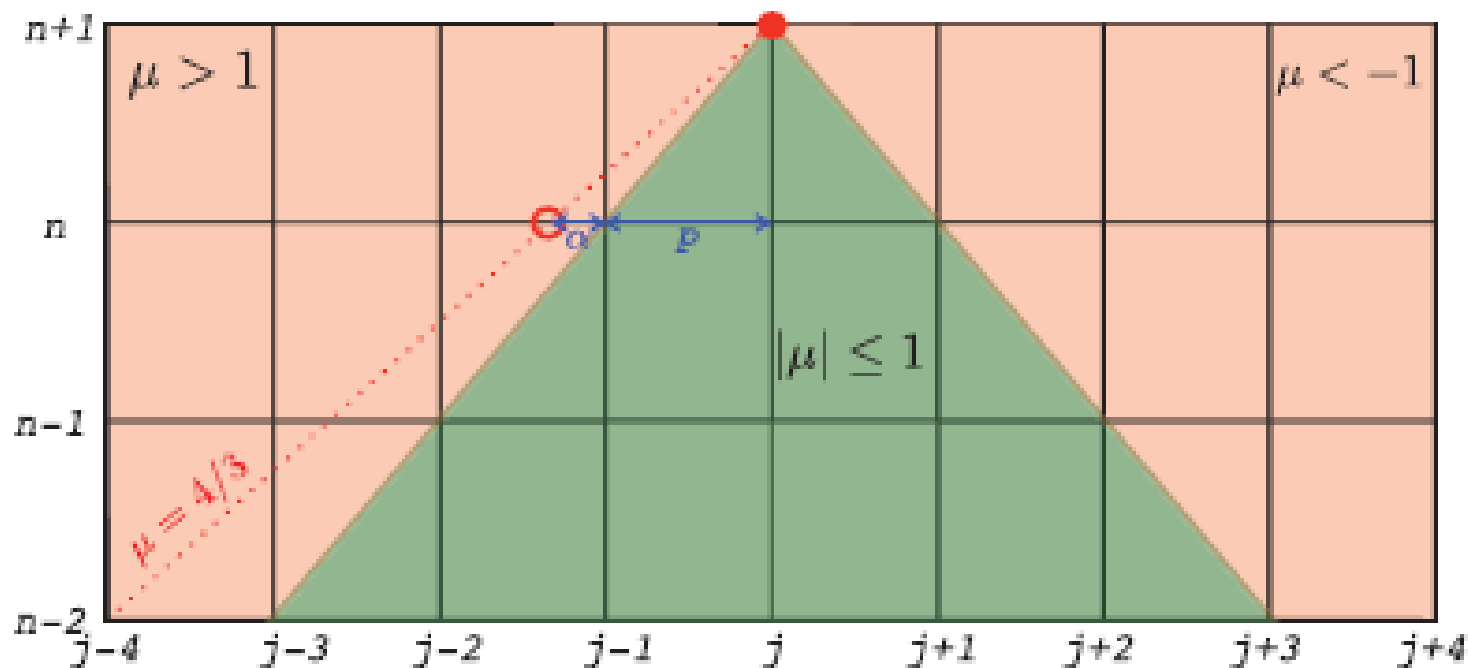




# Métodos de diferenças finitas.

A equação de advecção linear 1D

A **região estável verde** para a equação de advecção discretizada com diferenças finitas centradas tanto no tempo quanto no espaço.



A distância máxima que você pode percorrer durante um passo de tempo  $\Delta t$  é um comprimento de grade  $\Delta x$ . A **linha pontilhada vermelha** ilustra como a advecção com uma velocidade  $c = 4\Delta x / 3\Delta t$  **ocorre na região instável vermelha**.

No entanto, pode ser resolvida numericamente com um esquema semi-Lagrangiano



# Métodos de diferenças finitas.

A equação de advecção linear 1D

A Equação  $\frac{\partial F}{\partial t} + c \frac{\partial F}{\partial x} = 0$  pode ser formulada em um framework Lagrangiano em vez de um Euleriano, resultando em

$$\frac{DF}{Dt} = 0$$

onde a derivada Lagrangiana é definida como  $\frac{DF}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}$ . A Equação acima simplesmente mostra como o valor de  $F$  é constante ao longo da trajetória correspondente.

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} = 0$$

$$F_j^{n+1} = \Delta t * 0 + F_j^n$$

$$F_j^{n+1} = F_j^n$$

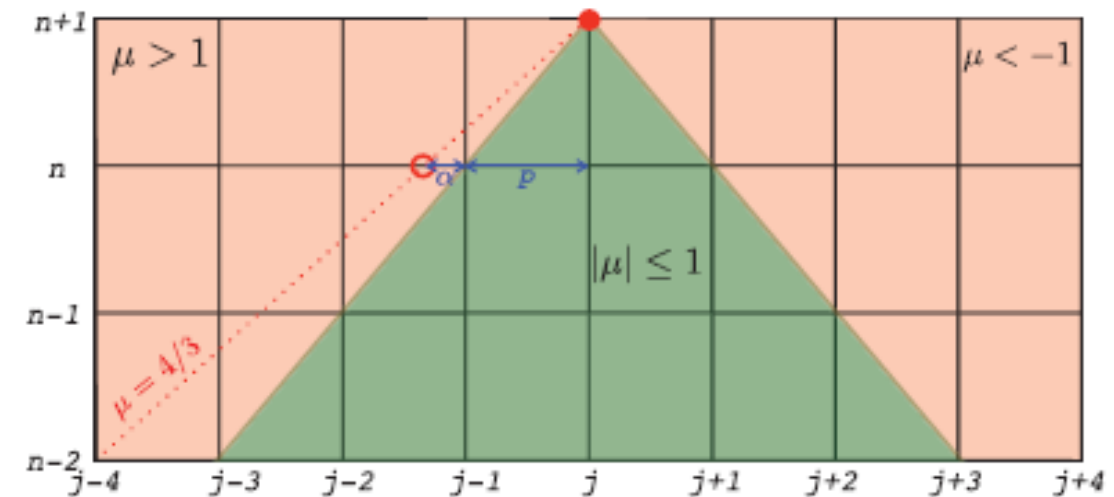


# Métodos de diferenças finitas.

A equação de advecção linear 1D

No espaço discretizado, isso implica que  $F_j^{n+1}$  deve ser igual ao valor de  $F_j^n$  no passo de tempo  $n$ , o que pode ser expresso como

$$F_j^{n+1} = F_*^n$$



onde o símbolo \* simboliza a posição espacial no nível de tempo  $n$ , que normalmente não é um ponto da grade.

No nosso caso, é onde **a linha pontilhada vermelha** na Figura **crusa o nível de tempo  $n$**  (indicado como o círculo vermelho localizado entre  $j - 2$  e  $j - 1$ ).

O valor de  $F_*^n$  pode, portanto, ser obtido por interpolação entre esses pontos da grade



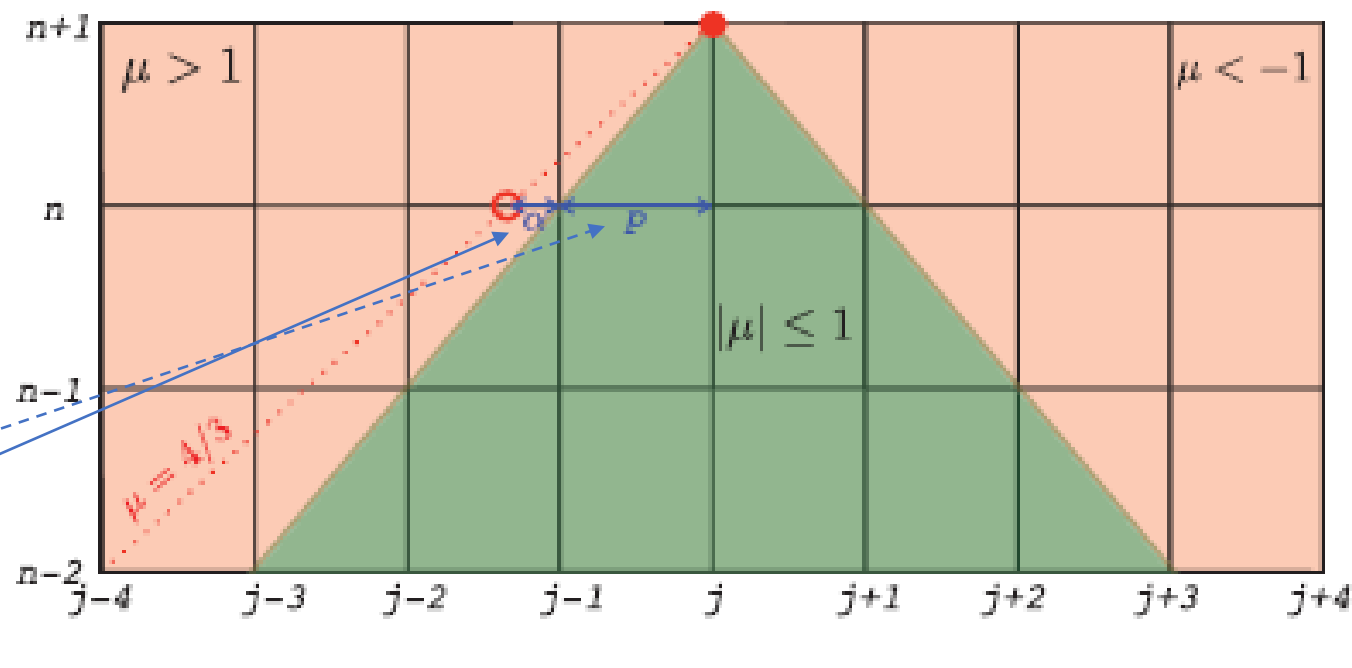
# Métodos de diferenças finitas.

$$F_*^n = \alpha F_{j-2}^n + (1 - \alpha) F_{j-1}^n$$

"Aqui,  $\alpha = \text{frac}(\mu)$  onde  $0 \leq \alpha < 1$  é a parte fracionária do número de Courant.

Fazendo uso da parte inteira do número de Courant,  $p \equiv \text{int}(\mu)$ , ou seja,  $\mu = p + \alpha$ , essa relação pode ser expressa de uma maneira mais geral como"

$$F_*^n = \alpha F_{j-p-1}^n + (1 - \alpha) F_{j-p}^n$$



No nosso exemplo,  $p = 1$  e  $\alpha = 1/3$ , conforme mostrado em azul na Figura

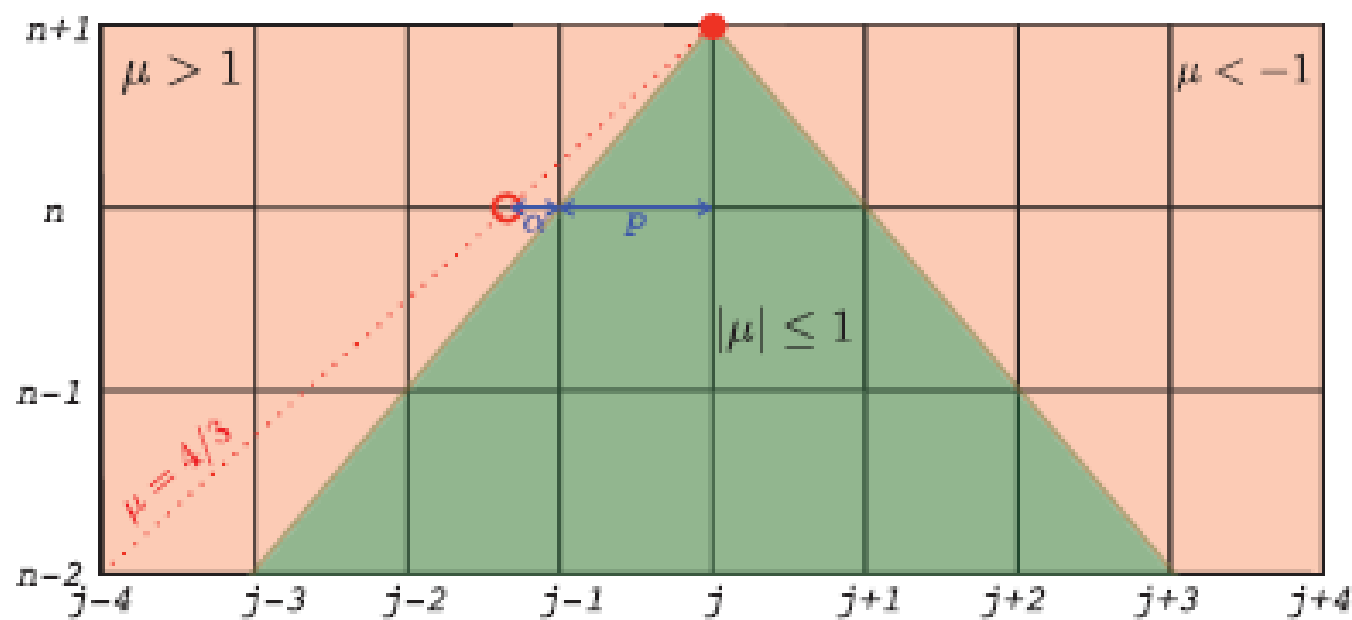


# Métodos de diferenças finitas.



. A expressão discreta pode ser obtida a partir das Equações  $F_j^{n+1} = F_*^n$  e  $F_*^n = \alpha F_{j-p-1}^n + (1 - \alpha) F_{j-p}^n$ , resultando em

$$F_j^{n+1} = \alpha F_{j-p-1}^n + (1 - \alpha) F_{j-p}^n$$





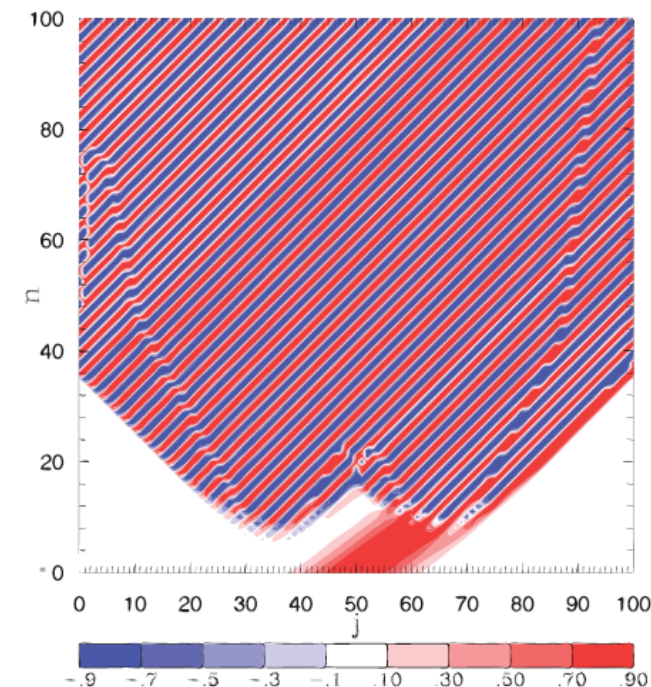
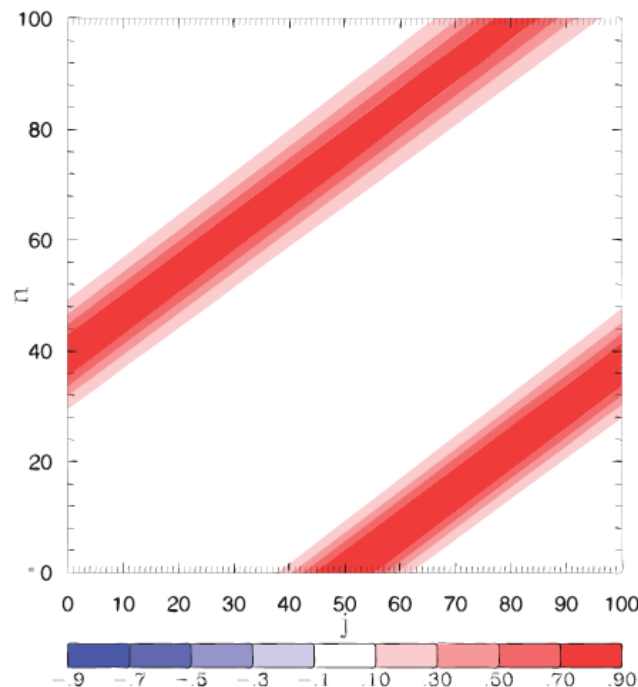
# Métodos de diferenças finitas.



. A expressão discreta pode ser obtida a partir das Equações  $F_j^{n+1} = F_*^n$  e  $F_*^n = \alpha F_{j-p-1}^n + (1 - \alpha) F_{j-p}^n$ , resultando em

$$F_j^{n+1} = \alpha F_{j-p-1}^n + (1 - \alpha) F_{j-p}^n$$

A Figura mostra como essa discretização semi-Lagrangiana da equação de advecção linear 1D pode ser usada com  $\mu = 4/3$  (painel esquerdo), mas é claramente instável (painel direito) para o esquema centrado no tempo e no espaço



Diagramas de Hovmöller da equação de advecção linear integrada numericamente com  $\mu = 4/3$ . Um esquema semi-Lagrangiano foi utilizado no painel esquerdo e um esquema centrado tanto no tempo quanto no espaço foi utilizado no painel direito. Observe que a integração com o esquema centrado explode após apenas alguns passos de tempo,



## Análise de estabilidade

"Uma análise de estabilidade de von Neumann é realizada para a discretização semi-Lagrangiana da equação de advecção linear 1D discutida acima. Procuramos uma solução da forma  $F_j^n = \lambda^n F_0 e^{ikj\Delta x}$  que substituímos na Equação abaixo, resultando no fator de amplificação

$$F_j^{n+1} = \alpha F_{j-p-1}^n + (1 - \alpha) F_{j-p}^n$$

$$F_j^{n+1} = \lambda^{n+1} F_0 e^{ikj\Delta x}$$

$$F_j^{n+1} = \lambda \lambda^n F_0 e^{ikj\Delta x}$$

$$F_{j-p-1}^n = \lambda^n F_0 e^{ik(j-p-1)\Delta x}$$

$$F_{j-p-1}^n = \lambda^n F_0 e^{ik(j)\Delta x} e^{ik(-p)\Delta x} e^{ik(1)\Delta x}$$

$$F_{j-p}^n = \lambda^n F_0 e^{ik(j-p)\Delta x}$$

$$F_{j-p}^n = \lambda^n F_0 e^{ik(j)\Delta x} e^{ik(-p)\Delta x}$$

$$\lambda \lambda^n F_0 e^{ikj\Delta x} = \alpha \lambda^n F_0 e^{ik(j)\Delta x} e^{ik(-p)\Delta x} e^{ik(1)\Delta x} + (1 - \alpha) \lambda^n F_0 e^{ik(j)\Delta x} e^{ik(-p)\Delta x}$$



## Análise de estabilidade

$$\lambda \lambda^n F_0 e^{ikj\Delta x} = \alpha \lambda^n F_0 e^{ik(j)\Delta x} e^{ik(-p)\Delta x} e^{ik(1)\Delta x} + (1 - \alpha) \lambda^n F_0 e^{ik(j)\Delta x} e^{ik(-p)\Delta x}$$

$$\lambda = \alpha e^{ik(-p)\Delta x} e^{ik(1)\Delta x} + (1 - \alpha) e^{ik(-p)\Delta x}$$

$$\lambda = \alpha e^{-ik(p)\Delta x} e^{ik\Delta x} + (1 - \alpha) e^{-ik(p)\Delta x}$$

$$\lambda \frac{1}{e^{-ik(p)\Delta x}} = (1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x})$$

$$\lambda = e^{-ik(p)\Delta x} (1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x})$$





# Métodos de diferenças finitas.



Análise de estabilidade

$$\lambda = e^{-ik(p)\Delta x} (1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x})$$

O esquema é estável para  $|\lambda| \leq 1$ , por isso consideramos

$$|\lambda|^2 = \left| e^{-ik(p)\Delta x} (1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x}) \right|^2$$

$$|\lambda|^2 = \left| e^{-ik(p)\Delta x} \right|^2 \left| (1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x}) \right|^2$$



# Métodos de diferenças finitas.



$$|(1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x})|^2 = (1 - \alpha(1 + e^{-ik\Delta x})) (1 - \alpha(1 + e^{ik\Delta x}))$$

$$|(1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x})|^2 = (1 - \alpha + \alpha e^{ik\Delta x} - \alpha + \alpha\alpha - \alpha\alpha e^{ik\Delta x} + \alpha e^{-ik\Delta x} - \alpha\alpha e^{-ik\Delta x} + \alpha\alpha e^{-ik\Delta x} e^{ik\Delta x})$$

$$|(1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x})|^2 = (1 - 2\alpha + \alpha\alpha + \alpha(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}) - \alpha\alpha(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}) + \alpha\alpha)$$

$$|(1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x})|^2 = \left(1 - 2\alpha + 2\alpha\alpha + 2\alpha \frac{(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x})}{2} - 2\alpha\alpha \frac{(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x})}{2}\right)$$

$$|(1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x})|^2 = (1 - 2\alpha + 2\alpha\alpha + 2\alpha\cos(k\Delta x) - 2\alpha\alpha\cos(k\Delta x))$$

$$|(1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x})|^2 = (1 - 2\alpha + 2\alpha\alpha + (2\alpha - 2\alpha\alpha)\cos(k\Delta x))$$

$$|(1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x})|^2 = (1 - 2\alpha(1 - \alpha) + 2\alpha(1 - \alpha)\cos(k\Delta x))$$



# Métodos de diferenças finitas.



$$|(1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x})|^2 = (1 - 2\alpha(1 - \alpha) + 2\alpha(1 - \alpha)\cos(k\Delta x))$$

$$|(1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x})|^2 = (1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \cos(k\Delta x)))$$

Usamos a fórmula de Euler,  $e^{i\beta} = \cos(\beta) + i\sin(\beta)$  e o resultado associado do valor absoluto  $|\cos(\beta) + i\sin(\beta)| = 1$ , que leva

$$|\lambda|^2 = |e^{-ik(p)\Delta x}|^2 |(1 - \alpha + \alpha e^{-ik\Delta x})|^2$$

$$|\lambda|^2 = (1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \cos(k\Delta x)))$$

O valor mínimo dessa expressão é obtido quando  $\cos(k\Delta x) = -1$ , o que resulta em

$$|\lambda|^2 = (1 - 4\alpha(1 - \alpha)) = (1 - 4\alpha + 4\alpha^2) = (1 - 2\alpha)^2$$



# Métodos de diferenças finitas.



$$|\lambda|^2 = \left(1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \cos(k\Delta x))\right)$$

O máximo é obtido para  $\cos(k\Delta x) = 1$ :

$$|\lambda|^2 = 1$$

O esquema é, portanto, incondicionalmente estável.

O passo de tempo pode ser muito maior do que no caso, por exemplo, do esquema leap-frog.



# Métodos de diferenças finitas.



$$|\lambda|^2 = \left(1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \cos(k\Delta x))\right)$$

O máximo é obtido para  $\cos(k\Delta x) = 1$ :

$$|\lambda|^2 = 1$$

No entanto, um passo de tempo maior diminuirá a precisão numérica em um GCM, um fato que deve ser levado em conta.

Em um GCM usado para previsão numérica do tempo, isso tornará possível usar um passo de tempo aproximadamente seis vezes maior do que no caso do esquema leap-frog.

A estabilidade absoluta do esquema semi-Lagrangiano pode ser compreendida no sentido de que dar um único passo ao longo do fluxo no tempo e no espaço é uma maneira de ajustar a resolução espacial.

Isso é como prescrever a resolução espacial de forma mais grosseira quando possível, 'como se o número de Courant fosse igual a um



# Semi-Lagrangian



A equação de Advecção pode ser escrita na forma **Euleriano** ou **Lagrangiana**. i.e.

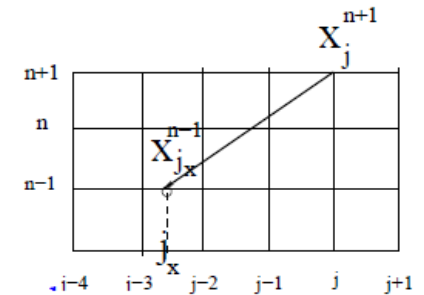
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{Euleriano}$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = 0 \quad \text{Lagrangiano}$$

Para um esquema **semi-Lagrangiana** de três vezes nível no tempo

$$\frac{D\phi}{Dt} \approx \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_{j_x}^{n-1}}{2\Delta t} = 0$$

$$\phi(x_j^{n+1}) = \phi(x_{j_x}^{n-1}) + 2\Delta t$$



=> O Valor futuro de  $\phi$  no ponto de chegada é igual ao valor anterior de  $\phi$  no ponto de partida

O método Semi-Lagrangian requer dois cálculos importantes

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado do ponto de partida



# O cálculo do ponto de partida



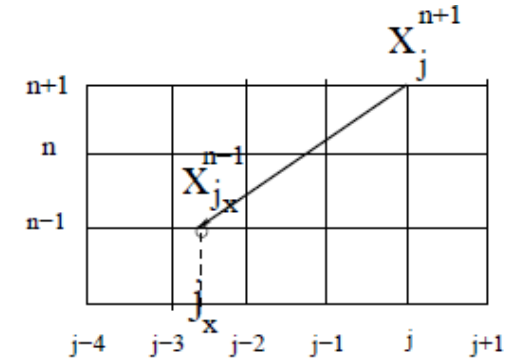
Para uma **velocidade constante** caso (deixe  $\Delta t = 2\Delta T$ )

$$x_{jx}^{n-1} = x_j^{n+1} - u\Delta t$$

No caso da **variável velocidade**: Ponto repete a **velocidade média**  $u_m$

$$\frac{x_j^{n+1} - x_{jx}^{n-1}}{\Delta t} = u$$

$$x_{jx}^{n-1} = x_j^{n+1} - u_m\Delta t$$



**Série de Taylor aproximação (McGregor, 1993).**

$$x_{jx}^{n-1} = x_j^{n+1} - \hat{u}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\Delta t^3}{6}\left(\hat{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)\right)$$

**Para obter a função da ponderação para a interpolação**

$$x_{jx}^{n-1} = x_{j-m} - \alpha$$

Onde,

$$\alpha = \frac{x_{j-m} - x_{jx}}{\Delta x}$$



# O cálculo do ponto de partida



## Interpolação do campo advectado no ponto de partida

### 2.1 Esquema ENO

Para um esquema de **interpolação de segunda ordem**, um estêncil de 3 pontos é usado para construir um interpolador quadrático 1D.

Tendo quatro nós e o ponto de interpolação no intervalo central, podemos escolher o estêncil de 3 pontos esquerdo ou direito para obter o valor interpolado.

Se essa escolha for feita com base na suavidade da solução, falamos da técnica ENO.

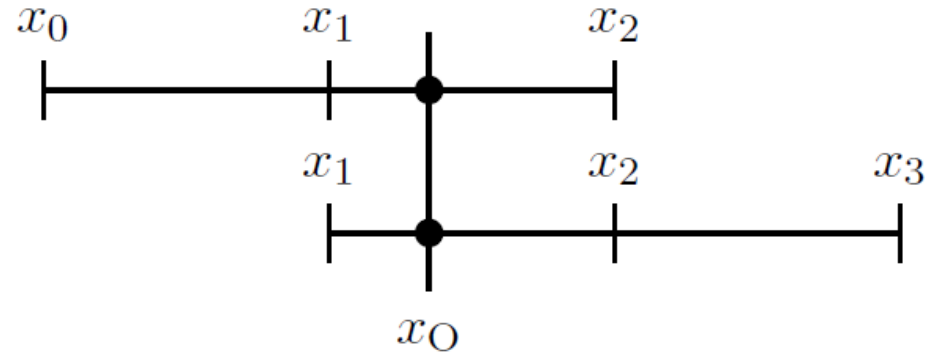
Em particular, a escolha entre os estênceis é feita calculando a aproximação da diferença finita para a segunda derivada para cada um dos dois estênceis e usando aquele com menor valor absoluto dessa quantidade



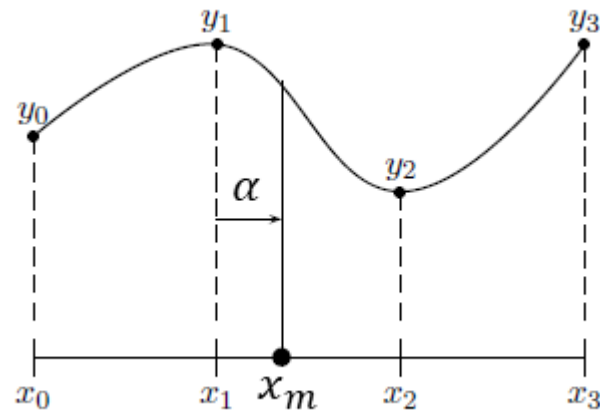


# O cálculo do ponto de partida

## Interpolação do campo advectado no ponto de partida



Aqui,  $x_i$  são coordenadas de pontos de grade com valores da função correspondentes  $y_i$ . Por exemplo: if  $|y_2 - 2y_1 + y_0| < |y_3 - 2y_2 + y_1|$  (veja a figura abaixo),



Usa-se o interpolador linear no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:



# O cálculo do ponto de partida

## Interpolação do campo advectado no ponto de partida

### interpolador linear

Usa-se o interpolador linear no estêncil 0 - 1 - 2

polinômio de interpolação terá a forma:



# O cálculo do ponto de partida



## Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador linear no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

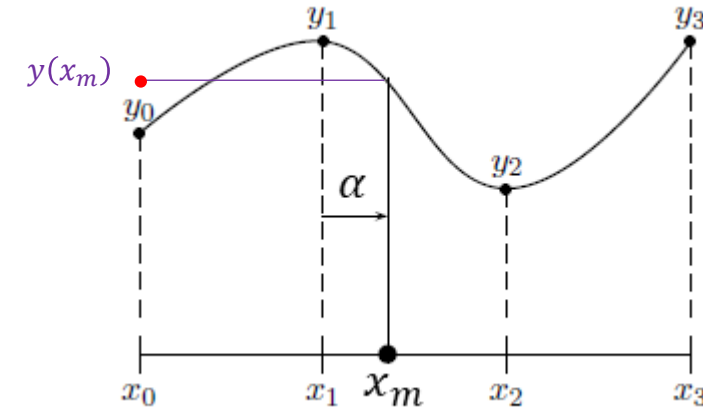
$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_1 + x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_1) + (x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_0)} + y_1 \frac{(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_0)} + y_1$$

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} - y_1 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1$$



$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha - y_1 \alpha + y_1$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha + (1 - \alpha) y_1$$



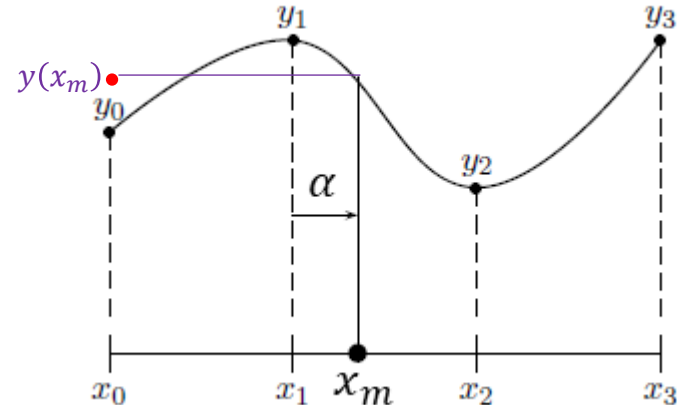
# O cálculo do ponto de partida



## interpolador quadrático

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2

polinômio de interpolação terá a forma:

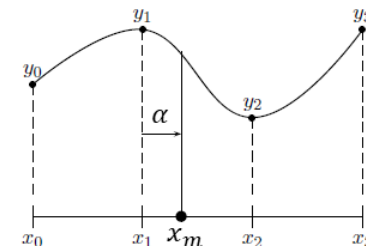




# O cálculo do ponto de partida

## Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:



$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)(x_m - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \frac{(x_m - x_1 + x_1 - x_2)}{(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_2)} - \frac{(x_2 - x_1)}{(x_0 - x_2)} \right) + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\Delta x}{2\Delta x} \right) + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right) + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$



# O cálculo do ponto de partida

## Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) + y_1 \frac{(x_m - x_1 + x_1 - x_0)(x_m - x_1 + x_1 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) + y_1 \frac{((x_m - x_1) + (x_1 - x_0))((x_m - x_1) + (x_1 - x_2))}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) + y_1 \frac{(x_1 - x_0) \left( \frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_0)} + 1 \right) (x_1 - x_2) \left( \frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_2)} + 1 \right)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) + y_1 \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \left( \frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_0)} + 1 \right) \left( \frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_2)} + 1 \right)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) + y_1 \left( \frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_0)} + 1 \right) \left( \frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_2)} + 1 \right) + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) + y_1 (-\alpha + 1)(\alpha + 1) + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$



# O cálculo do ponto de partida



## Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) + y_1 (-\alpha + 1)(\alpha + 1) + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) - y_1 (\alpha - 1)(\alpha + 1) - y_2 \alpha \frac{(x_m - x_0)}{(x_2 - x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) - y_1 (\alpha - 1)(\alpha + 1) - y_2 \alpha \frac{(x_m - x_1 + x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) - y_1 (\alpha - 1)(\alpha + 1) - y_2 \alpha \frac{((x_m - x_1) + (x_1 - x_0))}{(x_2 - x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) - y_1 (\alpha - 1)(\alpha + 1) - y_2 \alpha \left( \frac{(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)} + \frac{(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)} \right)$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) - y_1 (\alpha - 1)(\alpha + 1) - y_2 \alpha \left( -\frac{\alpha}{2} - \frac{\Delta x}{2\Delta x} \right)$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) - y_1 (\alpha - 1)(\alpha + 1) + y_2 \alpha \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$



# O cálculo do ponto de partida



## Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)(x_m - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) - y_1 (\alpha - 1)(\alpha + 1) + y_2 \alpha \left( \frac{1 + \alpha}{2} \right)$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$





# O cálculo do ponto de partida

## Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)(x_m - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

**Para uma malha regular de tamanho  $\Delta x$  tem-se:**

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) - y_1 (\alpha - 1)(\alpha + 1) - y_2 \alpha \left( \frac{1 - \alpha}{2} \right)$$

**Onde:**

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$



# O cálculo do ponto de partida



## interpolador cubico

Usa-se o **interpolador cubico** no estêncil 0 - 1 - 2

polinômio de interpolação terá a forma:



# O cálculo do ponto de partida

## Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador cubico no estêncil 0 - 1 - 2 - 3 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)(x_m - x_2)(x_m - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)(x_m - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)(x_m - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)(x_m - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

$$y(x_m) = -y(x_0) \frac{(1 - \alpha)\alpha(1 + \alpha)}{6} + y(x_1) \frac{(2 - \alpha)\alpha(1 + \alpha)}{2} + y(x_2) \frac{(2 - \alpha)(1 - \alpha)(1 + \alpha)}{2} - y(x_3) \frac{(2 - \alpha)(1 - \alpha)\alpha}{6}$$



# Interpolação do campo advectado no ponto de partida

## Linear (2pts)

$$y(x_m) = y_0\alpha + (1 - \alpha)y_1$$

$$x_m = X_j - u * Dt$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

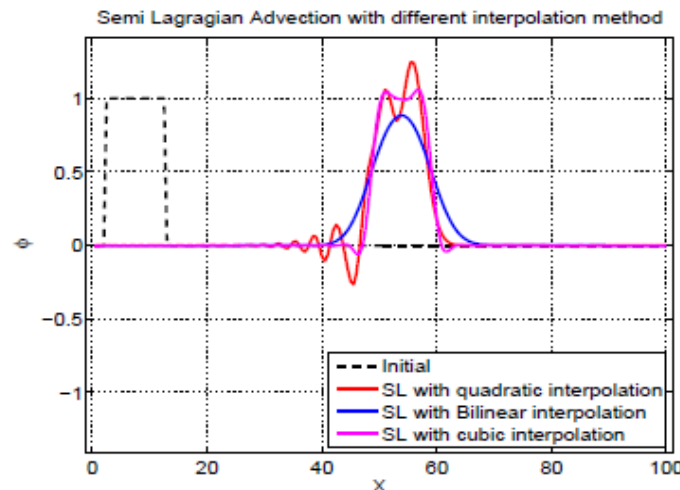
## Quadrático (3pts)

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) - y_2\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

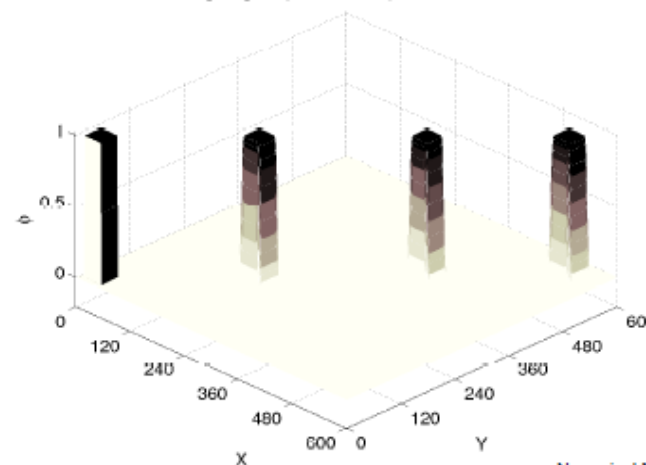
## Cúbicos (4pts)

$$y(x_m) = -y(x_0)\frac{(1-\alpha)\alpha(1+\alpha)}{6} + y(x_1)\frac{(2-\alpha)\alpha(1+\alpha)}{2} + y(x_2)\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)(1+\alpha)}{2} - y(x_3)\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)\alpha}{6}$$

## Precisão e monotonicity



Advection with Semi Lagrangian (c=1.6 to 3.2) after 1, 60, 120 and 170 time step





# Análise de Estabilidade

Assumir um esquema de dois níveis no tempo e um de interpolação linear  $\phi$  no ponto de partida ou seja .

$$\phi_j^{n+1} = \phi_*^n = (1 - \alpha)\phi_{j-m}^n + \alpha\phi_{j-m-1}^n \quad (23)$$

(Note-se que quando  $m=0$ ,  $\alpha = \frac{u\Delta\tau}{\Delta x}$ , e 23 se torna Idêntico ao esquema diferencial **upstream**). assim como para outros esquemas de advecção vamos supor que uma solução na forma:  $\phi_j^n = A^n e^{ikj\Delta x}$

A substituição de 23 nós, obter

$$|A| = [1 - 2\alpha(1 - \alpha)[1 - \cos(k\Delta x)]]^{0.5} \quad (24)$$

Portanto  $|A| \leq 1$  Enquanto  $\alpha(1 - \alpha) \geq 0$  Ou seja,  $0 \leq \alpha \leq 1$

O esquema é, portanto, estável se os pontos da interpolação são os dois são mais próximos do ponto de partida, mas é neutro somente

Se  $\alpha = 0$  Ou  $\alpha = 1$ , Ou seja, quando a interpolação não é necessária



# Execicio

## Implementar os esquemas de interpolação no método Lagrangiano

$$y(x_m) = y_0 \alpha + (1 - \alpha) y_1$$

$$y(x_m) = y_0 \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} - y_1 \frac{(\alpha + 1)(\alpha - 1)}{1} + y_2 \frac{\alpha(1 + \alpha)}{2}$$

$$y(x_m) = -y(x_0) \frac{\alpha(1 - \alpha^2)}{6} + y(x_1) \frac{\alpha(1 - \alpha)(2 - \alpha)}{2} + y(x_2) \frac{\alpha(1 - \alpha^2)(2 - \alpha)}{2} - y(x_3) \frac{\alpha(1 - \alpha)(2 - \alpha)}{6}$$