



Dinâmica 18/10/2023 a 18/10/2023

## O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

**Modelo de água-rasa**  $\Rightarrow$  fluídos com escala de comprimento horizontal muito maior do que a profundidade.

**Ramos da ciência**  $\Rightarrow$  engenharia costeira e fluvial, oceanografia e meteorologia, etc.

**Meteorologia**  $\Rightarrow$  exemplo de aplicação

os movimentos de escala sinótica em latitudes médias, encontram-se em balanço quase-geostrófico ( $FGP \approx FC$ );

o desequilíbrio entre essas forças leva a excitação de ondas de gravidade inerciais;

permitem a dispersão da energia de forma que o estado da atmosfera tende sempre ao equilíbrio quase-geostrófico (Holton, 1992).

Portanto, na Meteorologia, uma das aplicações do modelo de água-rasa pode ser para o estudo do ajuste ao balanço geostrófico.



# **O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico**

---

## **OBJETIVOS**

**Resolver numericamente o modelo de água-rasa bidimensional por meio do método de diferenças finitas.**

**Analisar e entender o comportamento das variáveis atmosféricas (componentes zonal e meridional do vento e o campo do geopotencial) durante o processo do ajuste ao balanço geostrófico.**

**Para tanto será introduzida uma perturbação com a forma de uma gaussiana no campo do geopotencial e após serão feitas simulações para as latitudes de  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $75^\circ\text{S}$ . Sendo que para cada latitude o modelo será executado com as profundidades médias de 50, 250 e 1000 m.**



## DERIVAÇÃO A PARTIR DO MODELO DE EQUAÇÕES PRIMITIVAS

**Para o caso adiabático ( $J=0$ ) temos o sistema:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial P} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$



## DERIVAÇÃO A PARTIR DO MODELO DE EQUAÇÕES PRIMITIVAS

**Utilizamos o método de separação de variáveis com o objetivo de separar a estrutura horizontal e vertical**

$$u = \hat{u}(x, y, t)G(p) \quad v = \hat{v}(x, y, t)G(p) \quad \phi = \hat{\phi}(x, y, t)G(p)$$

**Substituindo nas equações do movimento e da termodinâmica, obtemos:**

$$\left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - f \hat{v} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right) G = 0$$

$$\left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + f \hat{u} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right) G = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial G}{\partial P} \right) - \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) G = 0$$



## DERIVAÇÃO A PARTIR DO MODELO DE EQUAÇÕES PRIMITIVAS

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial G}{\partial P} \right) - \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) G = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial G}{\partial P} \right) = \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) G = -c^2$$

$$\frac{\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t}}{\left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right)} = \frac{G}{\frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial G}{\partial P} \right)} = -c^2$$

### Estrutura Horizontal: equações de água-rasa

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - f \hat{v} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + f \hat{u} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + c^2 \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) = 0$$



## DERIVAÇÃO A PARTIR DO MODELO DE EQUAÇÕES PRIMITIVAS

### Estrutura vertical

$$\frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial G}{\partial P} \right) + \frac{G}{c^2} = 0$$

### Condições de Fronteira

### Problema de Sturm-Liouville

$$\frac{\partial G(0)}{\partial P} = 0 \qquad \frac{\partial G(P_0)}{\partial P} = 0$$



# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## DERIVAÇÃO A PARTIR DO MODELO DE EQUAÇÕES PRIMITIVAS

### Estrutura vertical Problema de Sturm-Liouville

**Hipótese:  $\sigma$  cte com a pressão**

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial^2 P} (G) + \frac{G}{c^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial^2 P} (G) + \frac{\sigma}{c^2} G = 0$$

$$G(P) = a_1 e^{\lambda P i} + a_2 e^{\lambda P i}$$

$$\lambda^2 + \frac{\sigma}{c^2} = 0$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{\sigma}}{c} i$$

$$G(P) = a_1 e^{\frac{\sqrt{\sigma}}{c} P i} + a_2 e^{-\frac{\sqrt{\sigma}}{c} P i}$$

$$G(P = 0) = a_1 e^{\frac{\sqrt{\sigma}}{c} P i} - a_1 e^{-\frac{\sqrt{\sigma}}{c} P i}$$

$$G(P = 0) = 2ia_1 \left( \frac{e^{\frac{\sqrt{\sigma}}{c} P i} - e^{-\frac{\sqrt{\sigma}}{c} P i}}{2i} \right)$$

**Utilizando as condições de fronteira:**

$$G(P) = 2ia_1 \sin\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{c} P\right)$$

$$G(P = P_0) = 2 \frac{\sqrt{\sigma}}{c} \sin\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{c} P_0\right) = 0$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{2i}$$

$$\sin\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{c} P_0\right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{c} P_0 = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$c_m = \frac{\sqrt{\sigma}}{m\pi} P_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

**Auto-valores**



# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

---

## DERIVAÇÃO A PARTIR DO MODELO DE EQUAÇÕES PRIMITIVAS

**Estrutura vertical      Problema de Sturm-Liouville**

**Auto-função da estrutura vertical**

$$G_m(P) = \cos\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{c_m} P\right) = \cos\left(\frac{P}{P_0} m\pi\right) \quad , m=0,1,2,3...$$





## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

**Método:** diferenças finitas

**Esquema:**

centrado no tempo - Leap-Frog (avançado no tempo em  $it=1$ )  
centrado no espaço

**Grade:** [grade C](#)

**Condições iniciais:**

$$u = v = 0$$

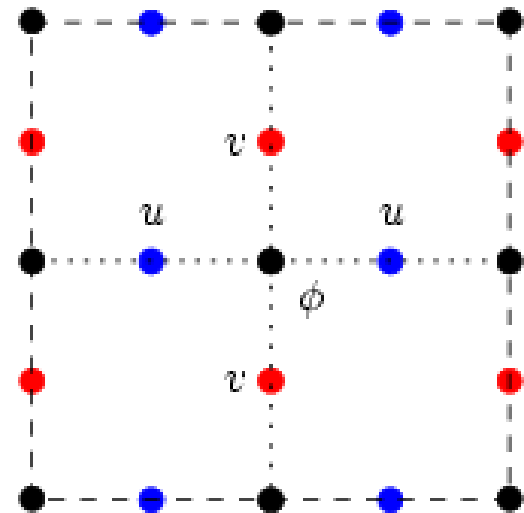
[perturbação gaussiana em  \$\phi\$](#)

**Condições de fronteira:** radiativa

$$u = N \text{ e } S$$

$$v = L \text{ e } O$$

$$\phi = N, S, L \text{ e } O$$



**Figura 1. Grade C.**

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

$$\frac{d\hat{u}}{dt} - f\hat{v} + \frac{d\hat{\phi}}{dx} = 0 \quad (1)$$

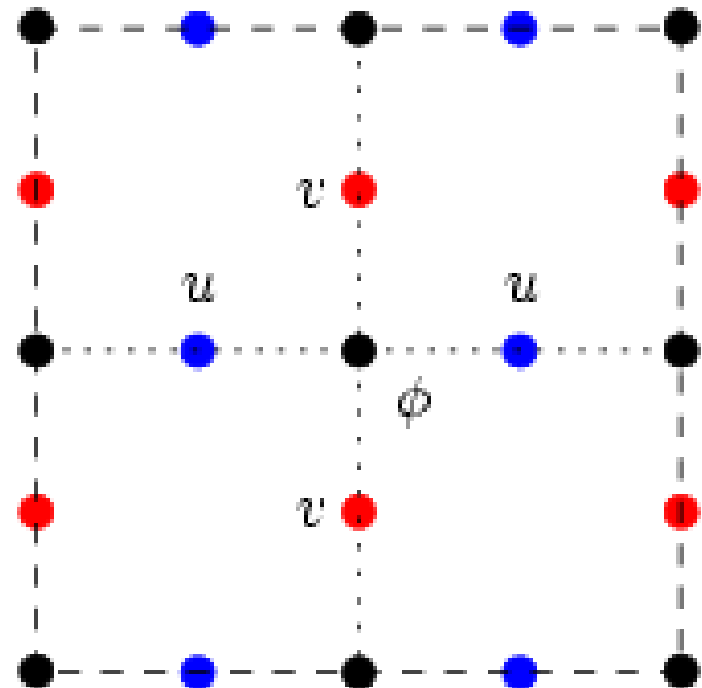
$$\frac{d\hat{v}}{dt} + f\hat{u} + \frac{d\hat{\phi}}{dy} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} + c^2 \left( \frac{d\hat{u}}{dx} + \frac{d\hat{v}}{dy} \right) = 0 \quad (3)$$

**Cálculo simples dos termos do gradiente de pressão, mas se requer interpolação para os termos de Coriolis em (1) e (2).**

**Cálculo simples dos termos da divergência em (3).**

### Particularidades da Grade C

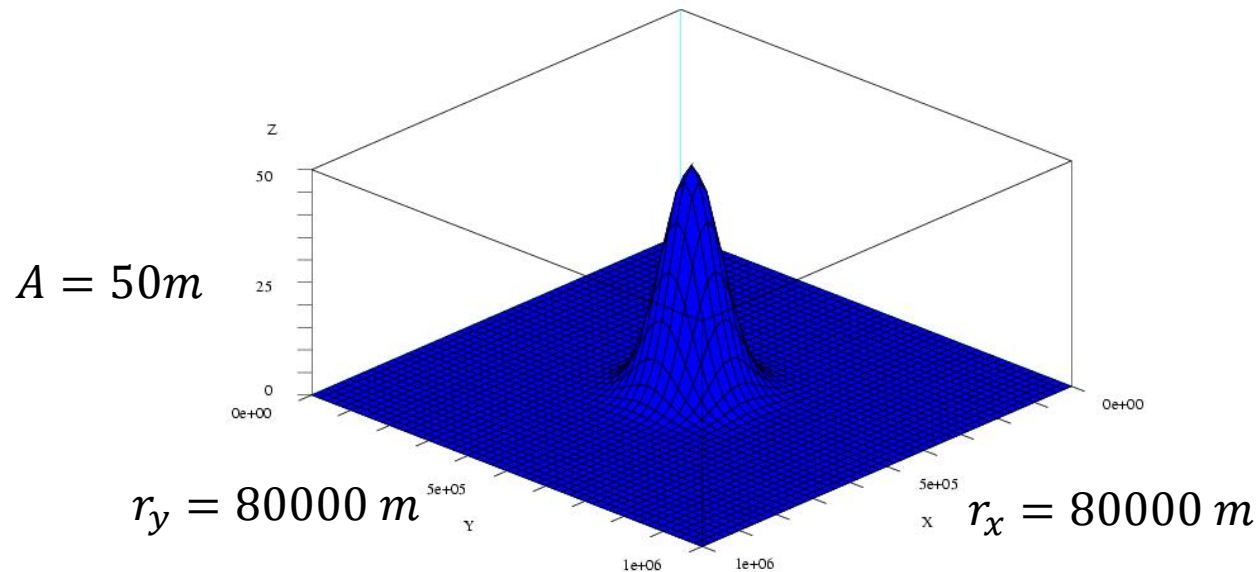


**Figura 1. Grade C.**



## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

### Perturbação Gaussiana



$$ci = \phi(x, y) = Ae^{-\left(\frac{x-x_0}{r_x}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{r_y}\right)^2}$$



## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

### Esquema Leap-Frog, centrado no tempo

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n-1} + f \frac{\Delta t}{2} (v_{i,j-1}^n + v_{i+1,j-1}^n + v_{i,j}^n + v_{i+1,j}^n) - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i,j}^n)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^{n-1} - f \frac{\Delta t}{2} (u_{i-1,j}^n + u_{i-1,j+1}^n + u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n) - \frac{2\Delta t}{\Delta y} (\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j}^n)$$

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^{n-1} - c^2 \frac{2\Delta t}{\Delta x} (u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) - c^2 \frac{2\Delta t}{\Delta y} (v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n)$$

### Esquema avançado no tempo

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + f \frac{\Delta t}{4} (v_{i,j-1}^n + v_{i+1,j-1}^n + v_{i,j}^n + v_{i+1,j}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i,j}^n)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n - f \frac{\Delta t}{4} (u_{i-1,j}^n + u_{i-1,j+1}^n + u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j}^n)$$

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n - c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) - c^2 \frac{\Delta t}{\Delta y} (v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n)$$



## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

### Perturbação no geopotencial

$$\phi(x, y) = A e^{-\left(\frac{x-x_0}{r_x}\right) - \left(\frac{y-y_0}{r_y}\right)} \quad A = 50m \quad r_y = 80000 m \quad r_x = 80000 m$$

### Condições radiativas para o geopotencial:, u e v

$$\text{Oeste: } \phi_{0,j}^{n+1} = \phi_{0,j}^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{1,j}^n - \phi_{0,j}^n)$$

$$\text{Leste: } \phi_{n_x,j}^{n+1} = \phi_{n_x,j}^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{n_x,j}^n - \phi_{n_x-1,j}^n)$$

$$\text{Sul: } \phi_{i,0}^{n+1} = \phi_{i,0}^n + c \frac{\Delta t}{\Delta y} (\phi_{i,1}^n - \phi_{i,0}^n)$$

$$\text{Norte: } \phi_{i,n_y}^{n+1} = \phi_{i,n_y}^n + c \frac{\Delta t}{\Delta y} (\phi_{i,n_y}^n - \phi_{i,n_y-1}^n)$$

$$\text{S: } u_{i,0}^{n+1} = u_{i,0}^n + \frac{\Delta t}{\Delta y} (u_{i,1}^n - u_{i,0}^n)$$

$$\text{N: } u_{i,n_y}^{n+1} = u_{i,n_y}^n + \frac{\Delta t}{\Delta y} (u_{i,n_y}^n - u_{i,n_y-1}^n)$$

$$\text{O: } v_{0,j}^{n+1} = v_{0,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (v_{1,j}^n - v_{0,j}^n)$$

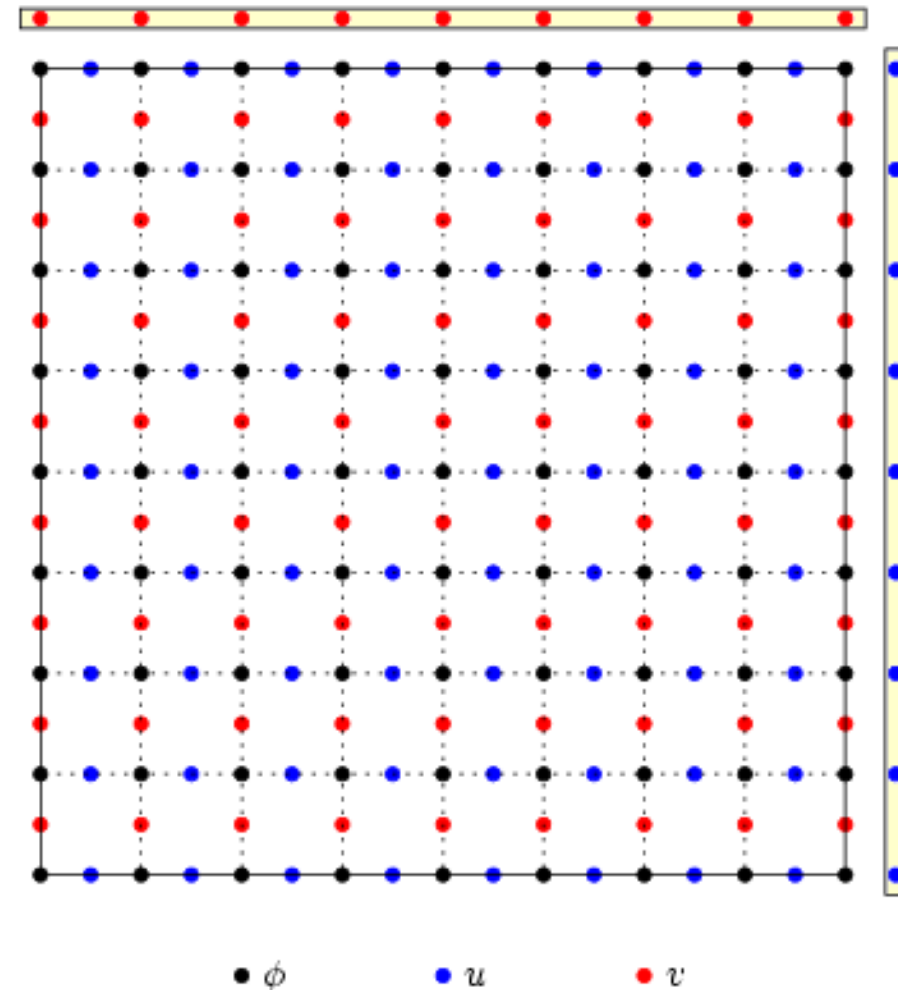
$$\text{L: } v_{n_x,j}^{n+1} = v_{n_y,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta y} (v_{n_y,j}^n - v_{n_y-1,j}^n)$$

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

### Detalhes da implementação:

1 os pontos de  $u$  e  $v$  não se localizam no mesmo local de  $\phi$   
**Solução:** interpolação linear

2. há menos pontos de  $u$  e  $v$  do que  $\phi$  na grade  
**Solução:** extrapolação linear



**Figura 2. Grade C de 9x9 pontos.**

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

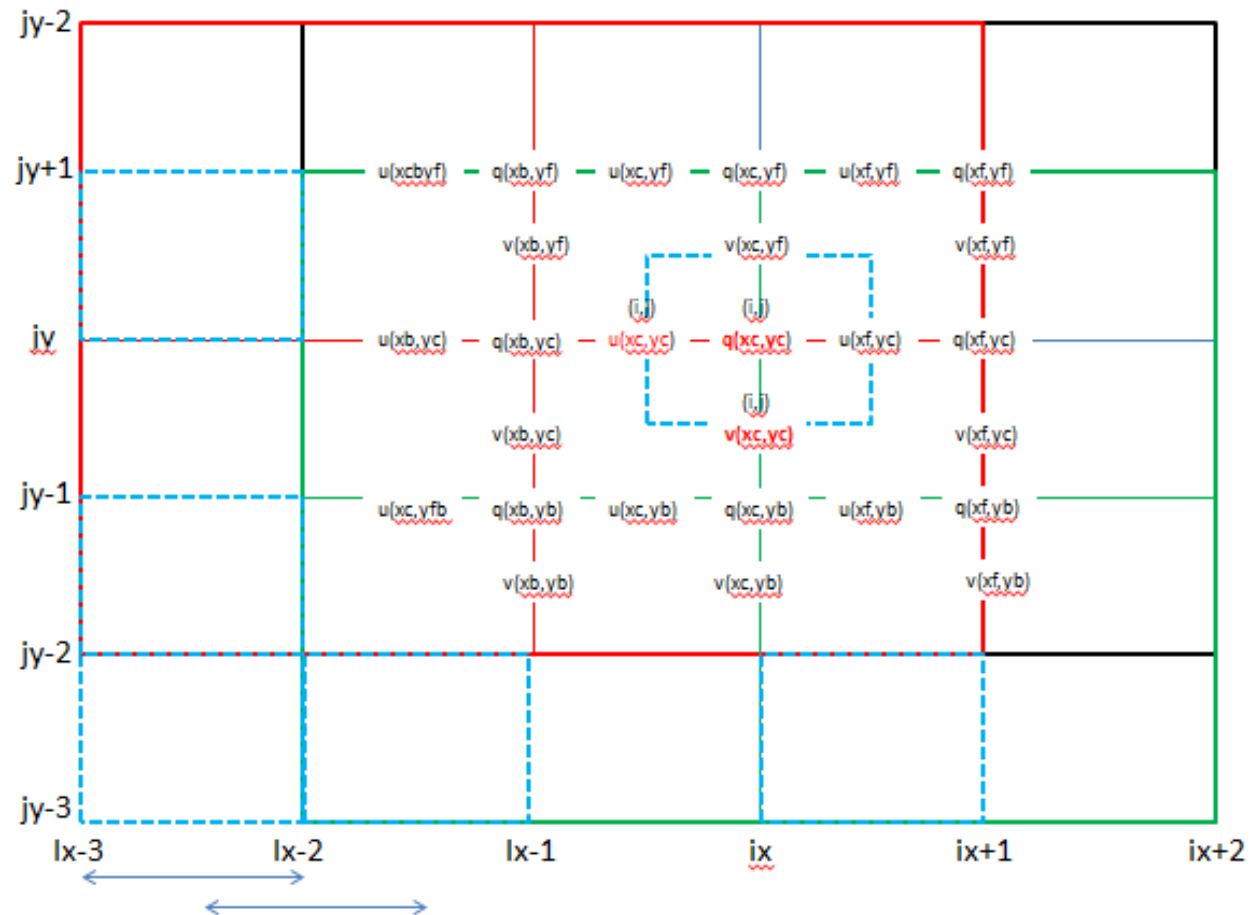
**Detalhes da implementação:**

**1 os pontos de  $u$  e  $v$  não se localizam no mesmo local de  $\phi$**

**Solução: interpolação linear**

**2. há menos pontos de  $u$  e  $v$  do que  $\phi$  na grade**

**Solução: extrapolação linear**



**Figura 2. Grade C.**



## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

### ASPECTOS ATMOSFÉRICOS

**Num modelo de água-rasa cinco tipos de onda podem estar presentes:**

**ondas de gravidade,  
ondas de gravidade inercial,  
ondas de Rossby,  
ondas de gravidade-Rossby e  
ondas de Kelvin.**

**mas isso quando o efeito Beta, que corresponde a variação do parâmetro de Coriolis com a latitude, é incluído nas equações do movimento.**

**Neste estudo não inclui-se o efeito Beta, portanto, nos resultados das simulações só será possível observar dois tipos de ondas: as ondas de gravidade e gravidade inercial.**

**Entretanto, as ondas de gravidade só ocorrem na região equatorial, onde o efeito de Coriolis é nulo.**

**Nas regiões onde Coriolis atua desenvolvem-se as ondas de gravidade-inercial**





## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

### ASPECTOS ATMOSFÉRICOS

#### Ondas de gravidade

**velocidade de fase:**  $C = \pm \sqrt{gH}$

**onde g é a força de gravidade e H é a profundidade média do fluido;**

**velocidade de fase (c) independe do número de onda (k), portanto são ondas não dispersivas;**

**direção de propagação: leste e oeste;**

**quanto maior H maior é a velocidade de fase.**

#### Ondas de gravidade inercial

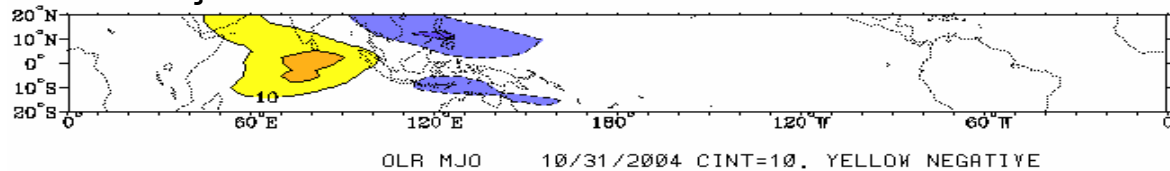
**existem devido a influência do efeito de Coriolis;**

**velocidade de fase depende do número de onda, portanto são ondas dispersivas;**

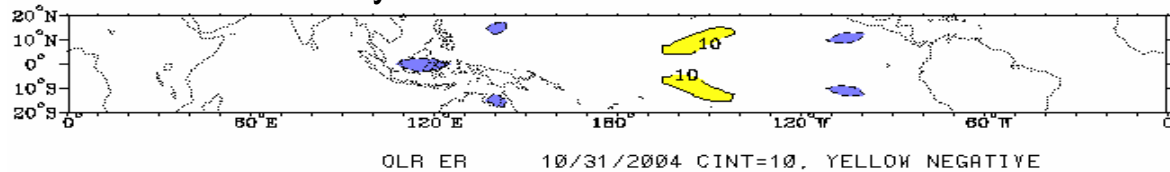
**direção de propagação: leste e oeste.**

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

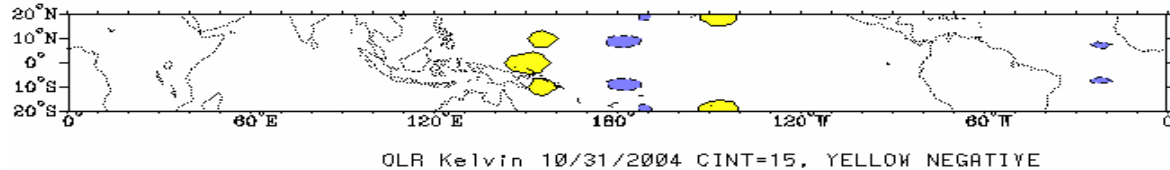
Oscilação de Madden-Julian  $\Rightarrow$  leste



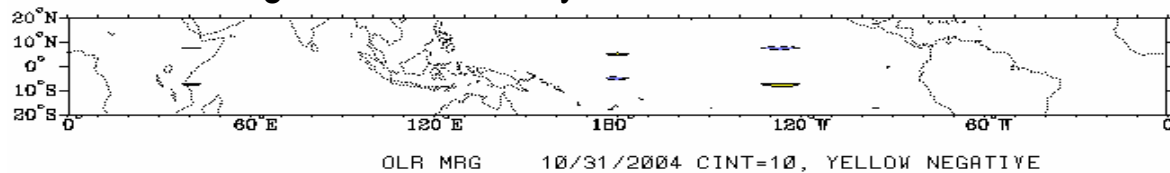
Ondas de Rossby  $\Rightarrow$  oeste



Ondas de Kelvin  $\Rightarrow$  leste



Ondas de gravidade-Rossby  $\Rightarrow$  oeste e leste





## **O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico**

### **SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA**

#### **Ajuste ao balanço geostrófico**

**Para movimentos de escala sinótica em latitudes médias, as forças de gradiente de pressão e Coriolis estão aproximadamente em balanço quase-geostrófico.**

**O desequilíbrio entre estas duas forças leva à excitação de ondas de gravidade inerciais.**

**Tais ondas como são dispersivas e com alta frequência permitem a dispersão da energia de forma que o estado da atmosfera tende sempre ao equilíbrio quase-geostrófico.**

**Este processo é então denominado de ajuste ao balanço geostrófico (Holton, 1992).**



## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA SIMULAÇÕES

**Com o objetivo de verificar o comportamento das variáveis atmosféricas :**

**componente zonal e meridional do vento e  
altura geopotencial**

**durante o processo do ajuste ao balanço geostrófico implementou-se o modelo de água-rasa bidimensional e inseriu-se uma perturbação inicial no campo do geopotencial.**

**Foram feitas análises para as latitudes de  
0°, 15°, 45° e 75°S**

**sendo que para cada latitude utilizou-se as profundidades médias de  
50, 250 e 1000 m.**

**Os cálculos consistiram de 241 passos no tempo ( $\Delta t = 60s$ ).**

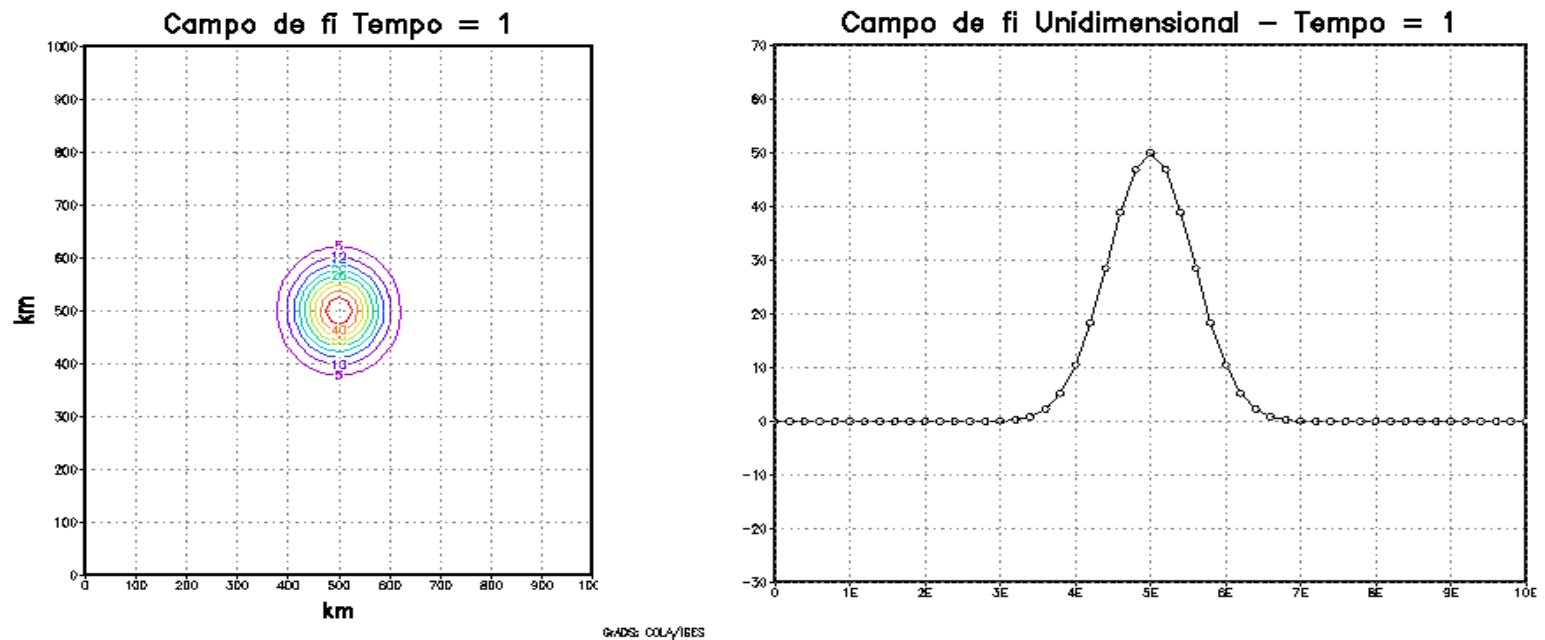
**Duas análises:**

**H cte e  $\phi$  variável**

**H variável e  $\phi$  cte**

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

Campo do geopotencial inicial com:  
perturbação gaussiana de 50m de altura e  
80 km de raio de decaimento



**Figura 3.** Perturbação inicial no campo do geopotencial.



# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

**Simulações:  $\phi=45^\circ$  e  $H=250\text{m}$**

**Campo do geopotencial bidimensional**

**Corte latitudinal no campo do geopotencial**

**Campo de  $u$  bidimensional**

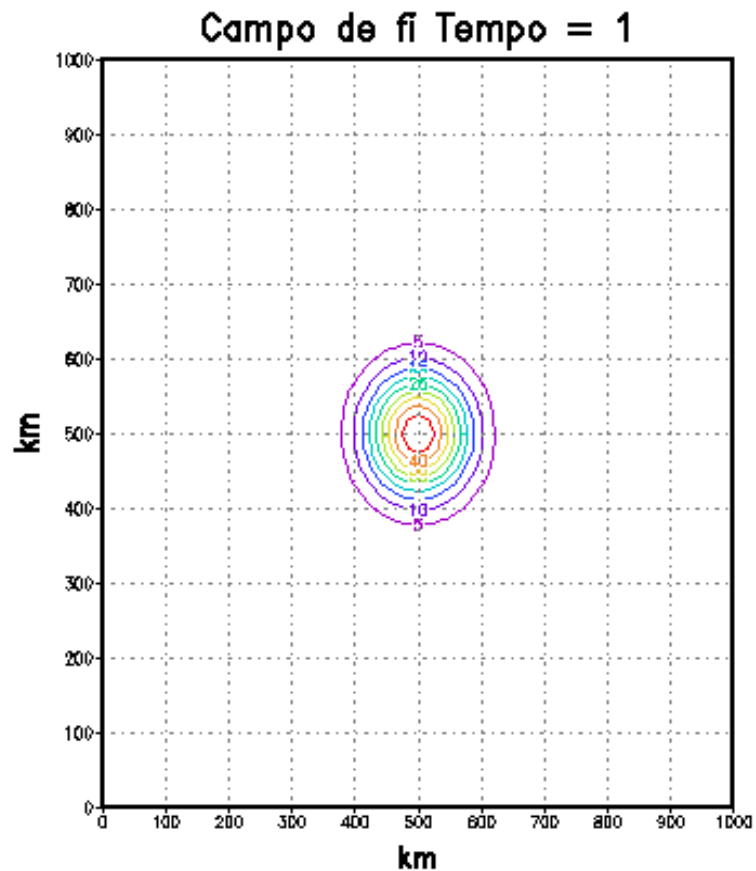
**Corte latitudinal no campo de  $u$**

**Campo de  $v$  bidimensional**

**Vetor velocidade horizontal**



## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

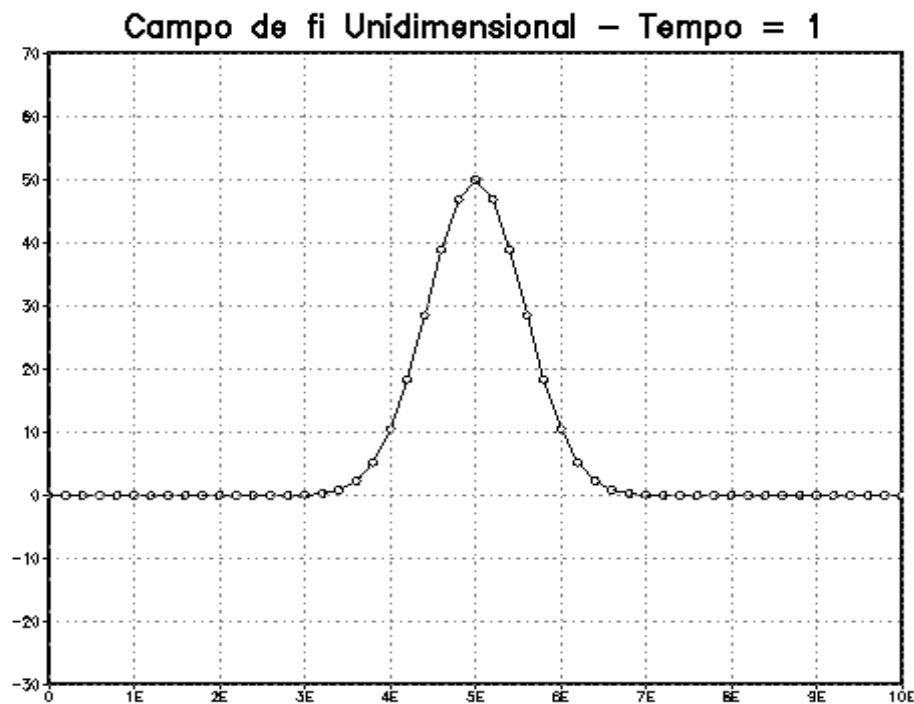


Ondas gravito-inerciais de alta frequência que se propagam para longe da região fonte em todas as direções.

Figura 4.



## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA



GrADS: COLA/IBES

Ondas gravito-inerciais de alta frequência que se propagam para longe da região fonte em todas as direções.

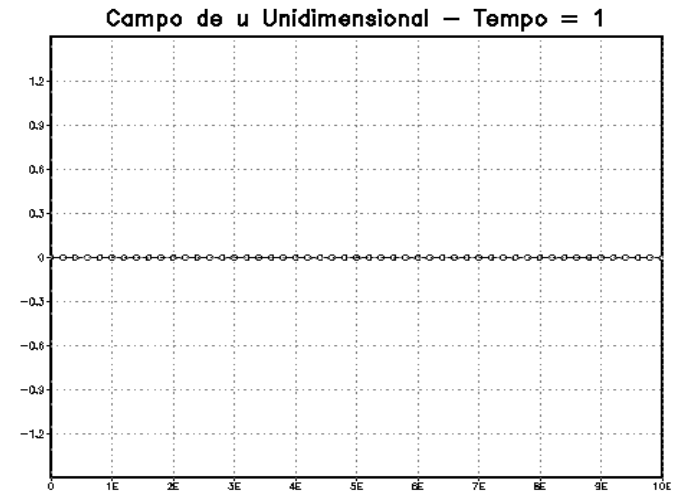
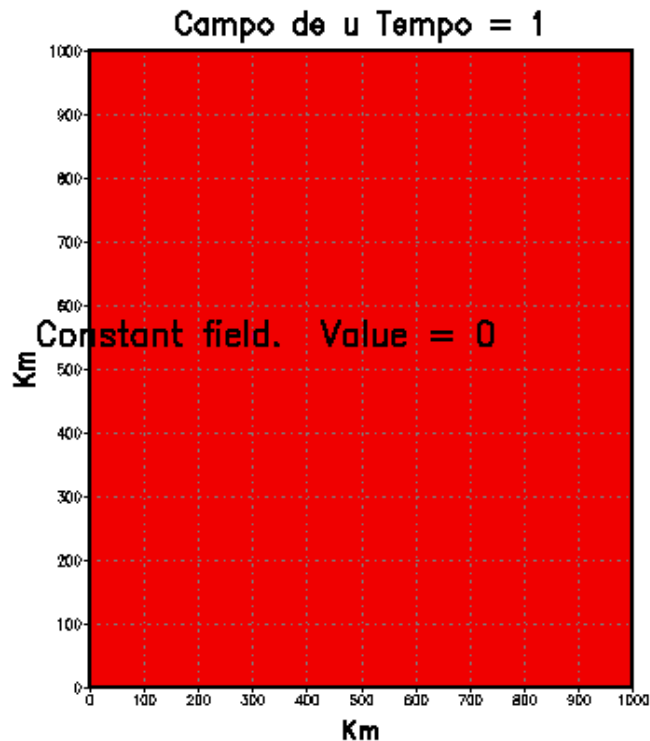
Figura 5.





# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA



GrADS: COLA/16ES

As componentes do vento tentam se ajustar ao campo do geopotencial que foi perturbado. Como as ondas gravito-inerciais dispersam a energia para longe da região perturbada a atmosfera vai tender ao equilíbrio quase-geotrófico.

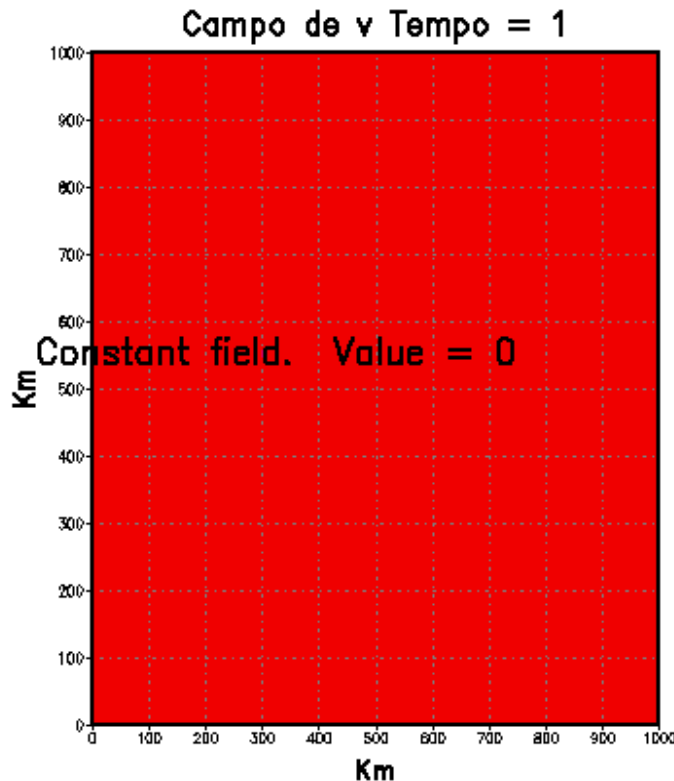
Figura 6.

- divergência
- rotação anticiclônica.



## O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

### SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA



As componentes do vento tentam se ajustar ao campo do geopotencial que foi perturbado. Como as ondas gravito-inerciais dispersam a energia para longe da região perturbada a atmosfera vai tender ao equilíbrio quase-geotrófico.

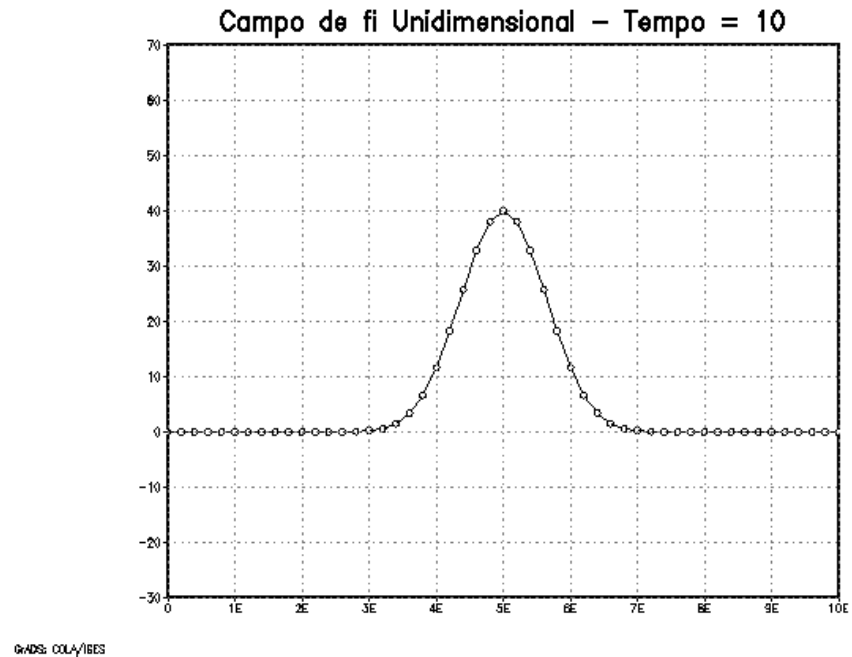
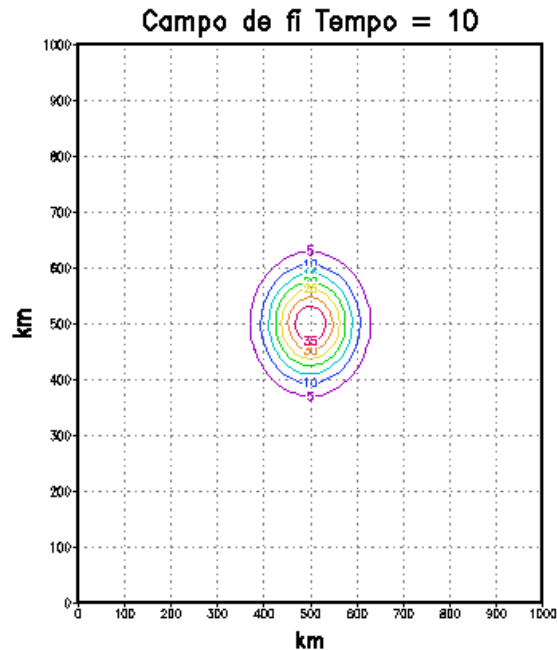
Figura 8.

- divergência
- rotação anticiclônica.



# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA



À medida que as ondas gravidade inerciais vão dispersando a energia o vento diminui de intensidade na região da perturbação inicial.

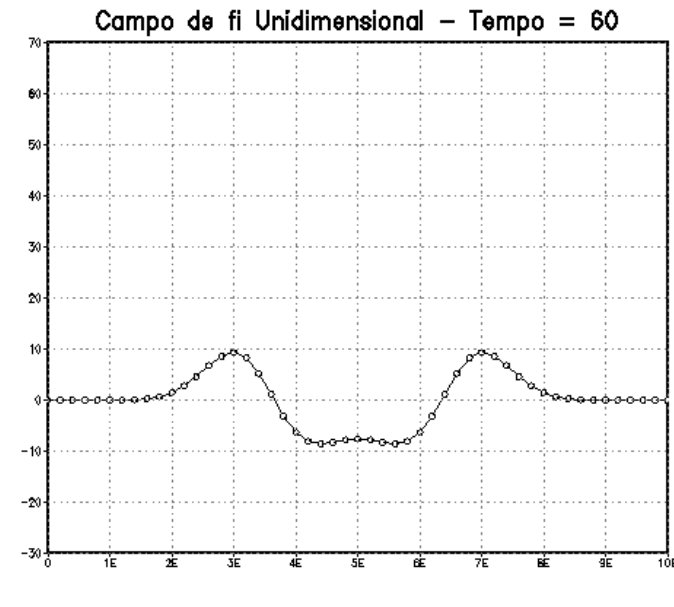
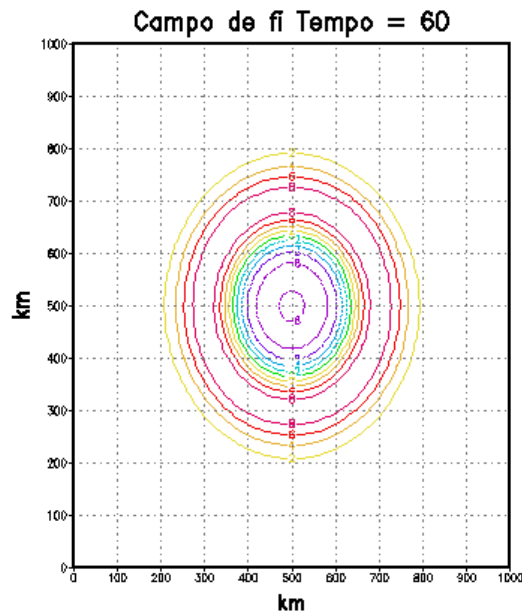
Campo de  $\eta$ : (a) bidimensional e (b) unidimensional.

- divergência
- rotação anticiclônica.



# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA



À medida que as ondas gravidade inerciais vão dispersando a energia o vento diminui de intensidade na região da perturbação inicial.

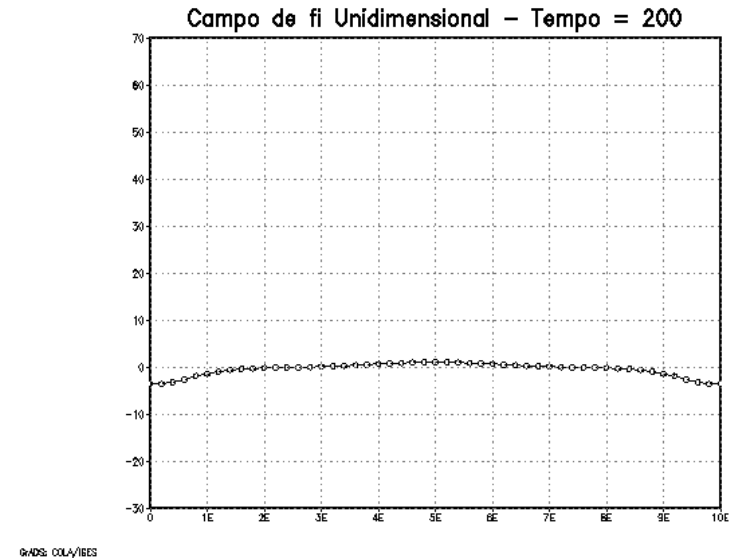
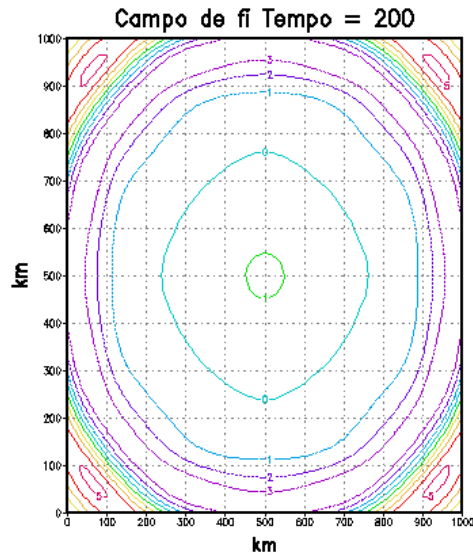
Campo de  $\eta$ : (a) bidimensional e (b) unidimensional.

-divergência  
-rotação anticiclônica.



# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA



À medida que as ondas gravidade inerciais vão dispersando a energia o vento diminui de intensidade na região da perturbação inicial.

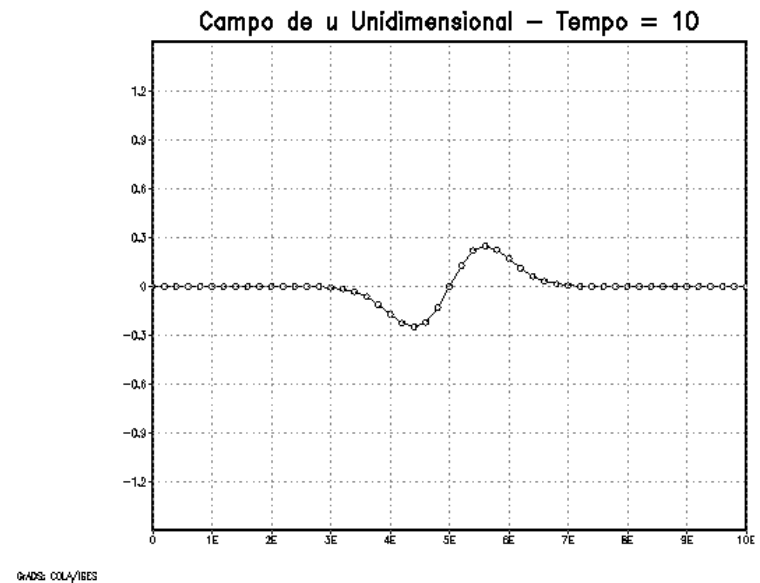
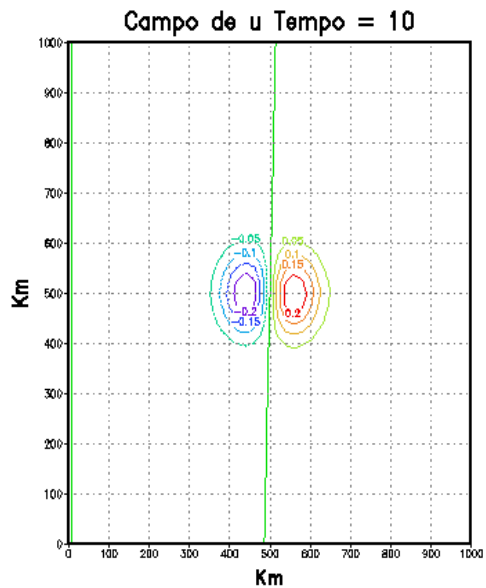
Campo de  $\eta$ : (a) bidimensional e (b) unidimensional.

- divergência
- rotação anticiclônica.



# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA



À medida que as ondas gravidade inerciais vão dispersando a energia o vento diminui de intensidade na região da perturbação inicial.

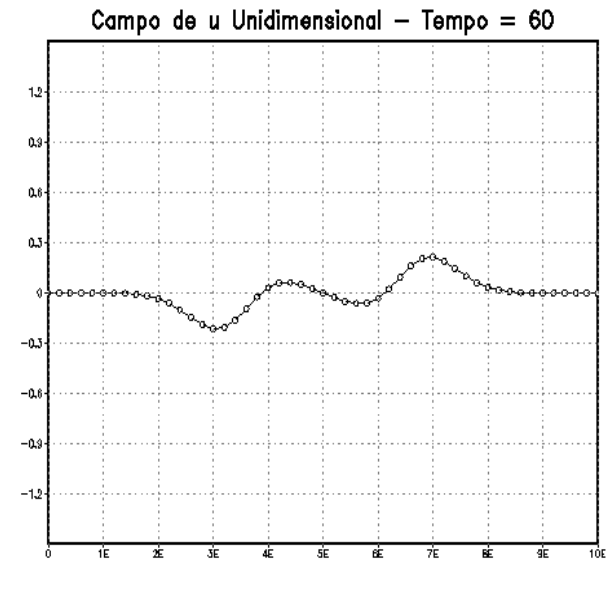
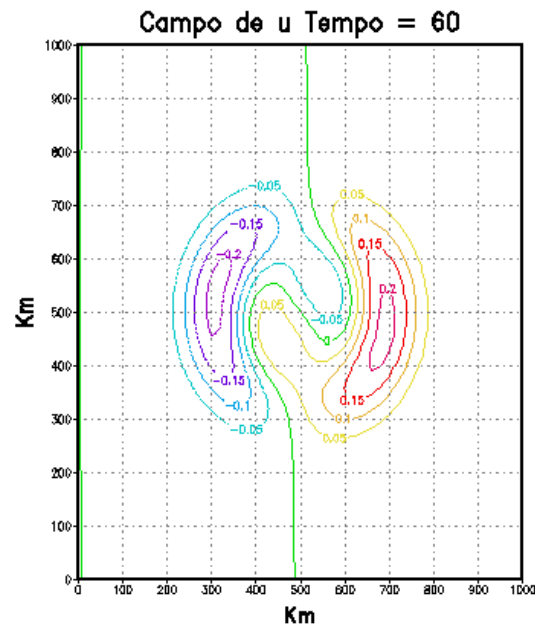
Campo de  $f_i$ : (a) bidimensional e (b) unidimensional.

- divergência
- rotação anticiclônica.



# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA



À medida que as ondas gravidade inerciais vão dispersando a energia o vento diminui de intensidade na região da perturbação inicial.

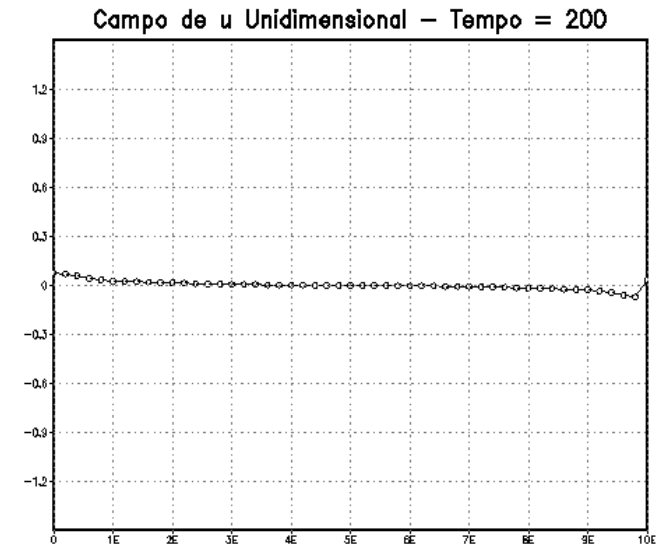
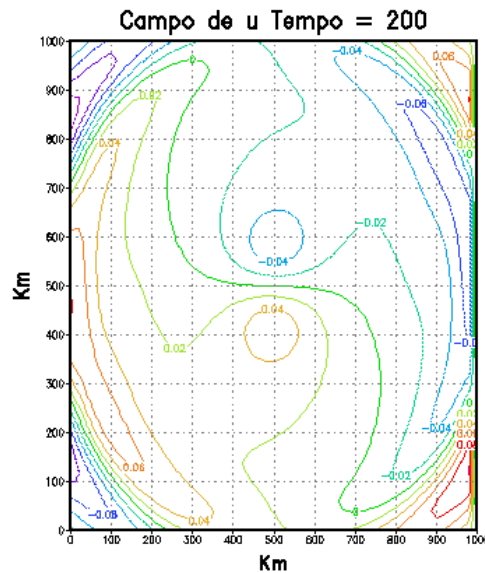
Campo de  $f_i$ : (a) bidimensional e (b) unidimensional.

- divergência
- rotação anticiclônica.



# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA



GrADS: COLA/IBES

À medida que as ondas gravidade inerciais vão dispersando a energia o vento diminui de intensidade na região da perturbação inicial.

Campo de  $f_i$ : (a) bidimensional e (b) unidimensional.

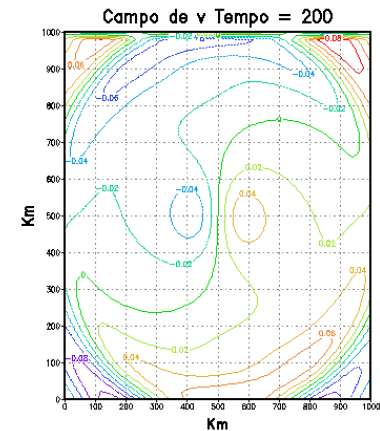
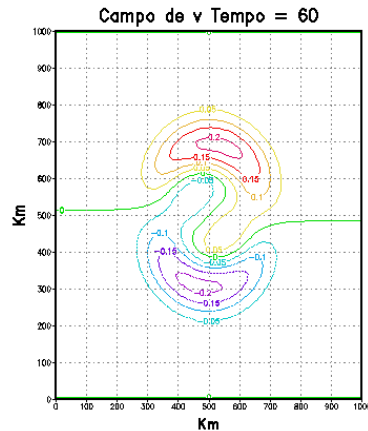
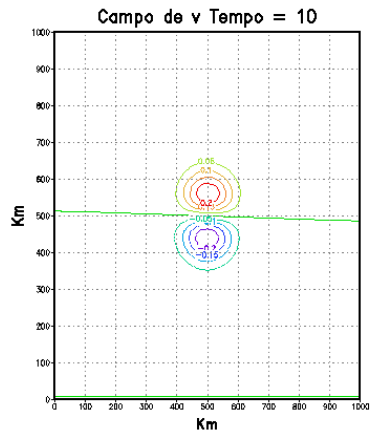
- divergência
- rotação anticiclônica.





# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA



À medida que as ondas gravidade inerciais vão dispersando a energia o vento diminui de intensidade na região da perturbação inicial.

Campo de  $f_i$ : (a) bidimensional e (b) unidimensional.

- divergência
- rotação anticiclônica.

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

Diagrama de Hovmoller –  $\phi$  Zonal

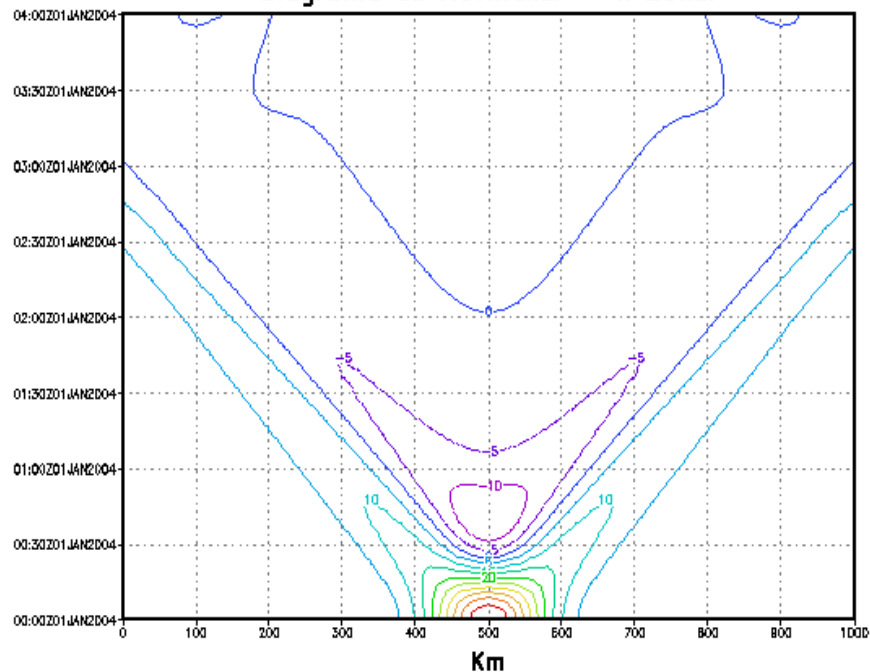
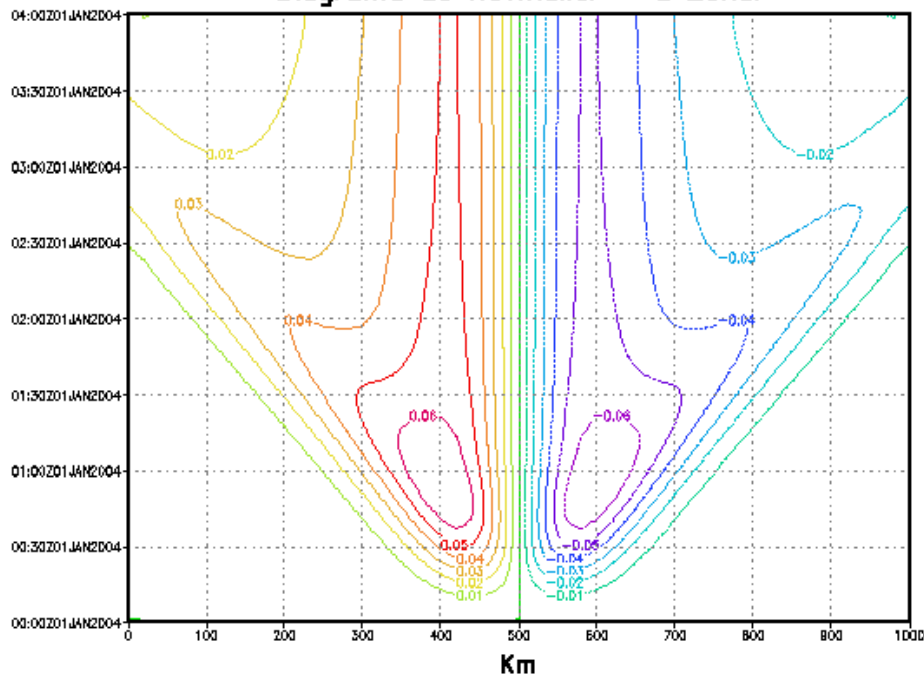


Diagrama de Hovmoller –  $u$  Zonal



Dispersão das ondas de gravidade inercial

**Figura 10.** Diagrama de Hovmoller do geopotencial para  $H=250$  e  $\phi=45^\circ\text{S}$ .



## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

### ANÁLISE 1: H CTE E $\phi$ VARIÁVEL

Caso 1: H=50m

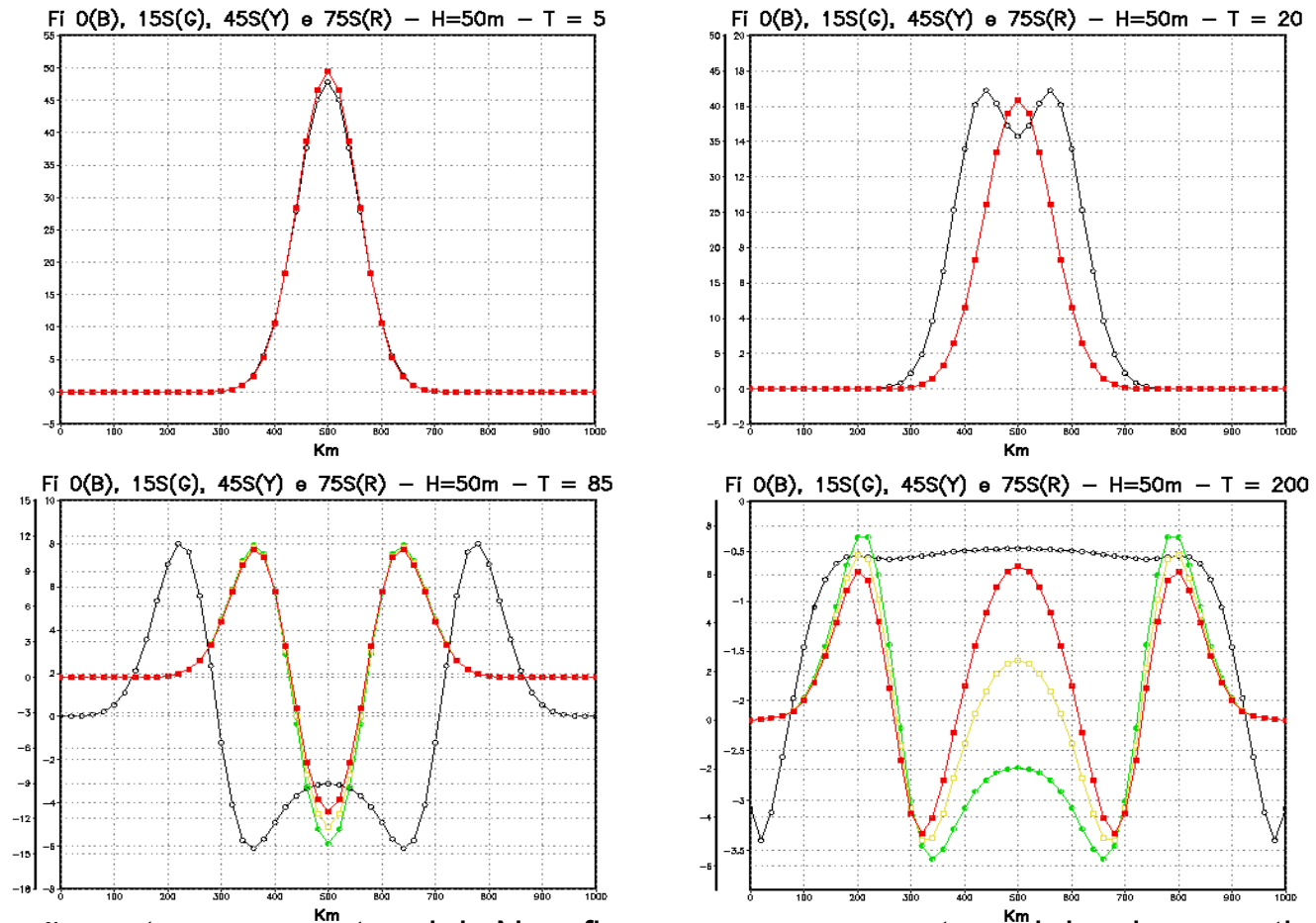
Caso 2: H=250m

Caso 3: H=1000m

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

### Caso 1: $H=50\text{m}$

Legenda

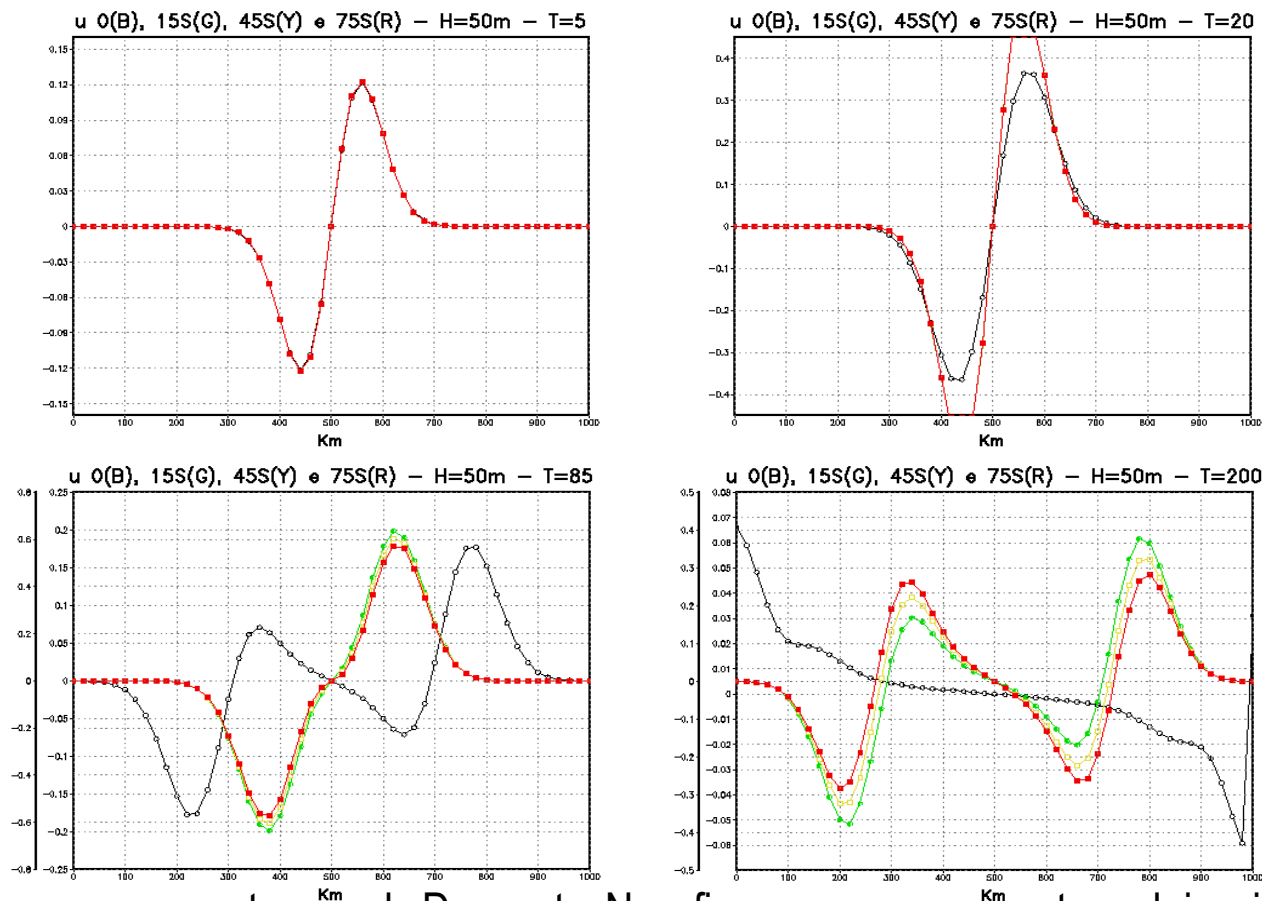


**Figura 13.** Comparação entre o geopotencial. Nas figuras que apresentam dois eixos verticais, o que localiza-se mais à esquerda refere-se a latitude de  $15^\circ\text{S}$ .

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

### Caso 1: $H=50\text{m}$

Legenda

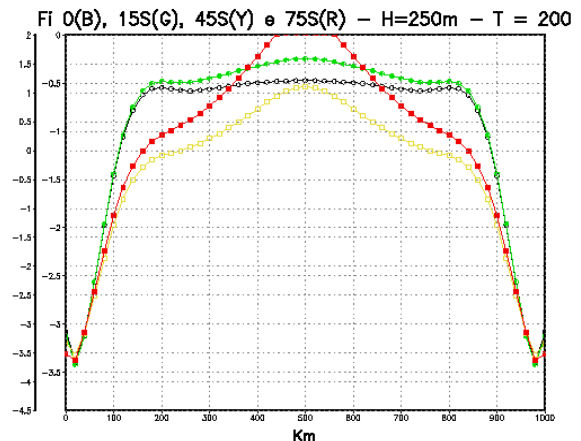
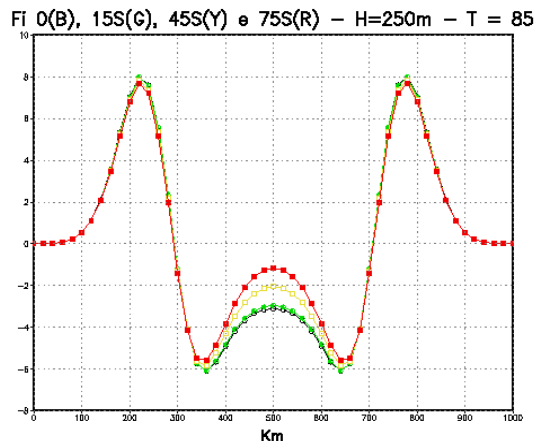
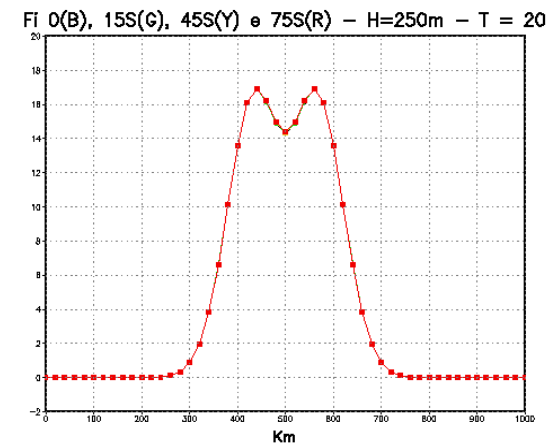
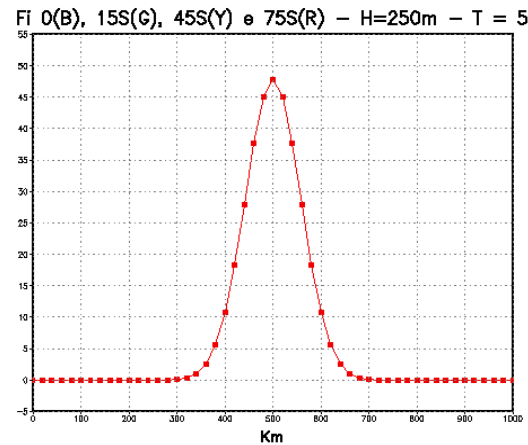


**Figura 14.** Comparação entre a componente zonal. Do vento Nas figuras que apresentam dois eixos verticais, o que localiza-se à esquerda refere-se a latitude de  $15^\circ\text{S}$ .

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

### Caso 2: $H=250\text{m}$

Legenda



**Figura 15.** Comparação entre o geopotencial. Na figura que apresenta dois eixos verticais, o que localiza-se mais à esquerda refere-se a latitude de  $45^\circ\text{S}$ .

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

Legenda



### Caso 2: $H=250\text{m}$

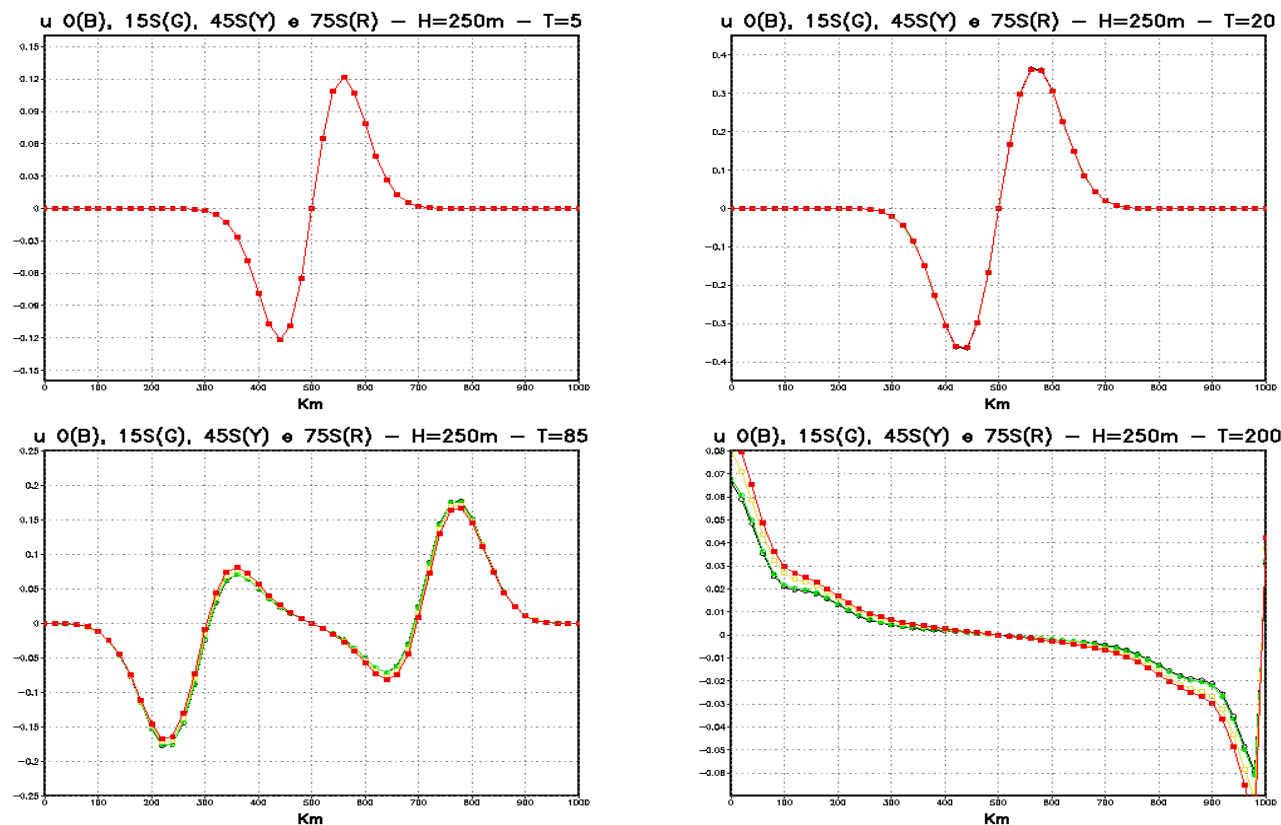


Figura 16. Comparação entre a componente zonal.



## SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

### CONCLUSÕES

Nas equações dinâmicas do modelo não foi inserido o efeito Beta, e como consequência só obtivemos ondas de gravidade puras e ondas gravito-inerciais, sendo que as primeiras existiram apenas na região equatorial, pois nesta região o efeito de Coriolis é aproximadamente nulo quando utilizamos o plano  $f$ .

No experimento em que  $H$  era fixo e  $\phi$  variava o resultado obtido na latitude de  $0^\circ$  foi o que mais diferiu dos demais. Esta diferença pode ser em função de que no equador ocorrem somente ondas de gravidade pura, uma vez que nesta região não há influência do efeito de Coriolis, pois não foi considerado efeito Beta nas equações do modelo de água-rasa. Já nas demais latitudes há a atuação de Coriolis o que proporcionou ondas de gravidade inercial.

Os resultados da análise fixando a  $\phi$  e variando  $H$  mostraram que quanto maior for a profundidade do fluido, mais rápido as componentes atmosféricas retornavam ao estado de equilíbrio. Isto ocorre porque com profundidades maiores a velocidade de fase das ondas é maior e conseqüentemente a dispersão de energia também é mais rápida.





# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

Resolva numericamente a Equação da água rasa nas malhas A, B, C, D e E.

### 1-Objetivo

- Desenvolver um modelo para simular as equações da água rasa

2 – Use o Conjunto de equações

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{s} * \frac{m}{s} \Rightarrow g * (bat/H) = \frac{m}{s^2} =$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta u) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta v) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - b u + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - g * (bat(x, y)/H)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - b v + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - g * (bat(x, y)/H)$$

### 3 - Método numérico

- Método de Diferenças Finitas - Esquema de Diferenças Centradas
- Esquema de 4 Ordem de Runge Kutta
- Use a ideia de malhas deslocadas 2D



# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

Equação da água rasa

4 - Estudo de caso

```
real*8, parameter :: omega = 1e-1
```

- Com menos rotação.
- Com rotação aprimorada.

```
! setting up the coriolis matrix
```

```
do i1 = 1, ny
```

```
  f(:, i1) = 2.0*omega*sin(pi*y(i1)/Ly)
```

```
end do
```

```
! perturbation
```

```
real*8, parameter :: perturb = 0.01
```

```
h(:, :, 1) = H0 - perturb*exp(-(xx**2.0 + yy**2.0))
```

- Com menos perturbacao.
- Com mais perturbacao.



# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta u) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta v) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v &= \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u &= \end{aligned}$$

Viscosidade  
momentum

$$-g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$-g \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$b u$$

$$b v$$

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

**Advecção**

**Coriolis**

**Gradiente  
de Pressão**

**difusão de  
momentum**

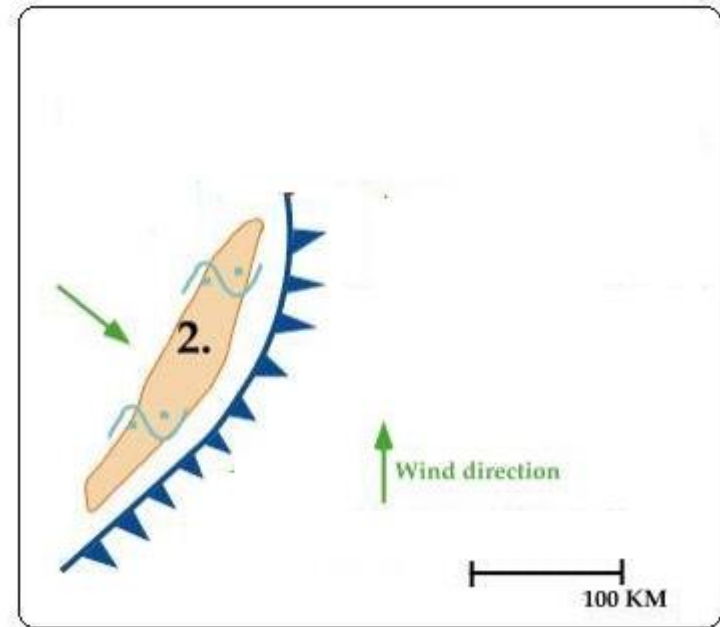


## O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

### HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y}$$



**Termo responsável pelo transporte de um determinado escalar.**

## HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

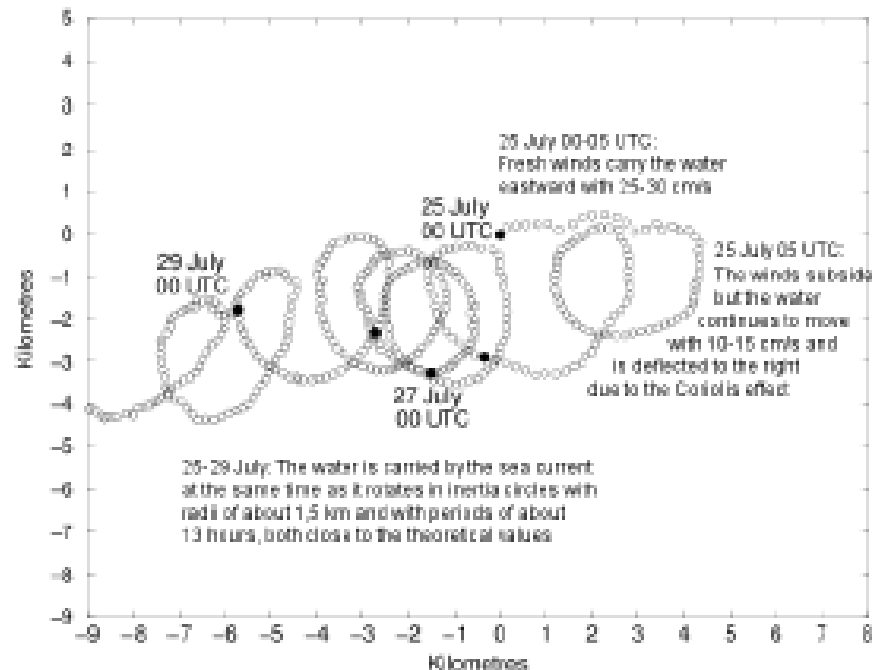
### 1.3.1 Coriolis

Inertial Oscillations governed by part of the momentum equation:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$$

- A drifting buoy set in motion by strong westerly winds in the Baltic Sea in July 1969.
- Once the wind subsides, the upper ocean follows inertia circles

Image copyright: Anders Persson  
Source of scientific data: Barry Boman  
Reproduced with kind permission from Anders Persson and Barry Boman.



## HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

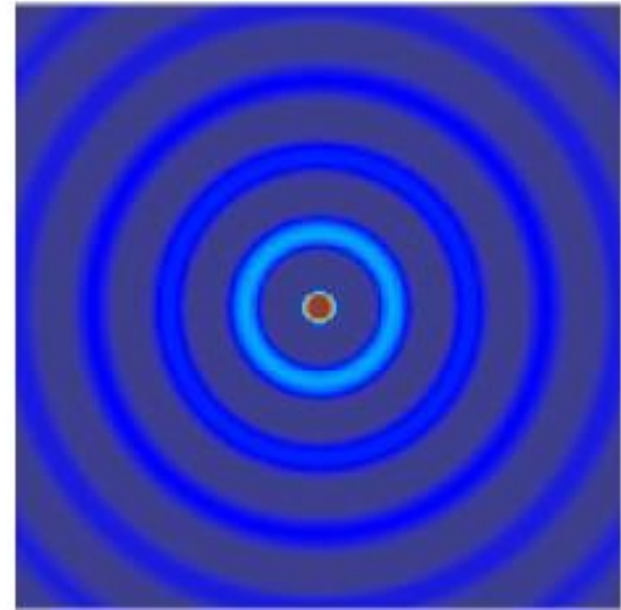
### 1.3.2 The Pressure Gradient Force

If the pressure gradient force is the only large term in the momentum equation, then together with the continuity equation and perfect gas law, we get equations for acoustic waves:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

where  $\rho_0$  is a reference density and  $c$  is the speed of sound.



Pressure Gradients lead to very fast acceleration - Acoustic Waves





## O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

### **HOMEWORK** SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

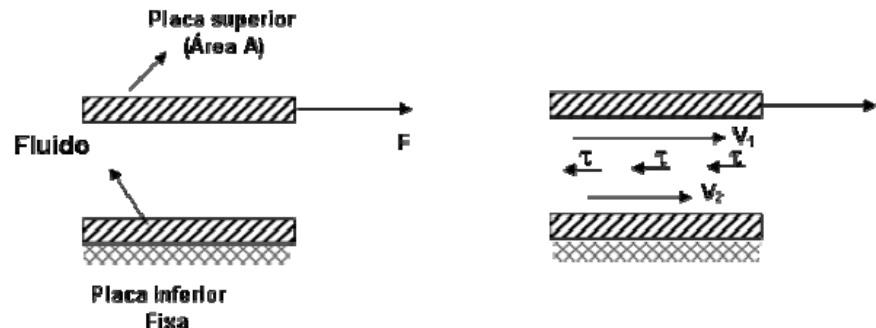
**Viscosidade momentum**  
**Força de Resistencia a deformação é**  
**proporcional do velocidade do fluido**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -bu$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -bv$$

### Viscosidade absoluta ou dinâmica (b)

Princípio da aderência:

As partículas fluidas junto às superfícies sólidas adquirem as velocidades dos pontos das superfícies com as quais estão em contato.



Junto à placa superior as partículas do fluido têm velocidade diferente de zero.

Junto à placa inferior as partículas têm velocidade nula.



# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

### 1.3.4 Diffusion

Diffusion of quantity  $\phi$  with diffusion coefficient  $\mu_\phi$  in arbitrary spatial dimensions

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu_\phi \nabla^2 \phi$$

And in 1d:

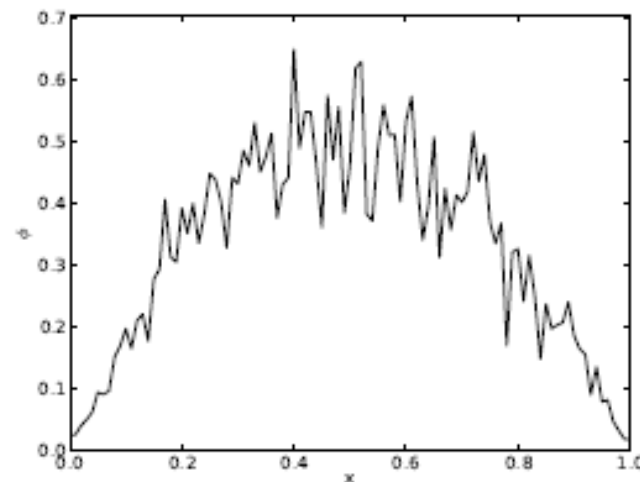
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu_\phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

The second derivative of  $\phi$  is high at troughs and low in peaks of  $\phi$ . Therefore diffusion tends to remove peaks and troughs and make a profile more smooth:

#### Discussion Questions:

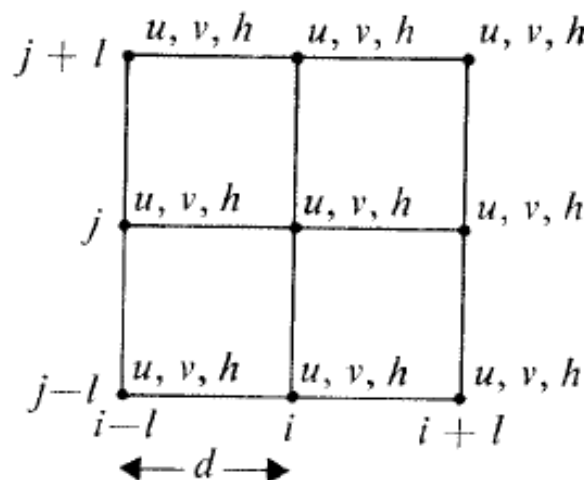
- Which equations have a diffusion coefficient?
- What causes diffusion?
- Is diffusion a large term of the equations of atmospheric motion?

Diffusion of a noisy profile  
(zero gradient boundary conditions)

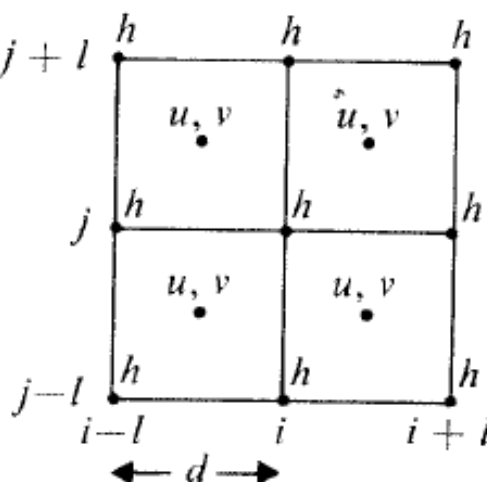




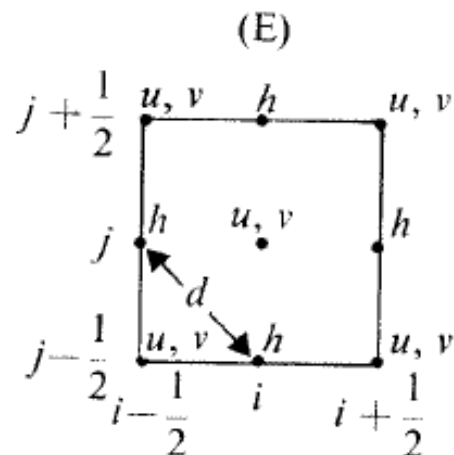
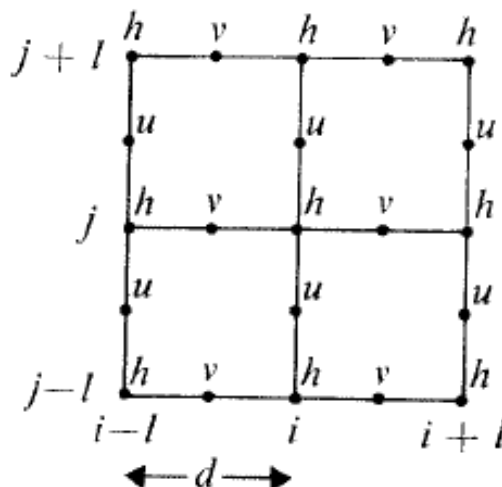
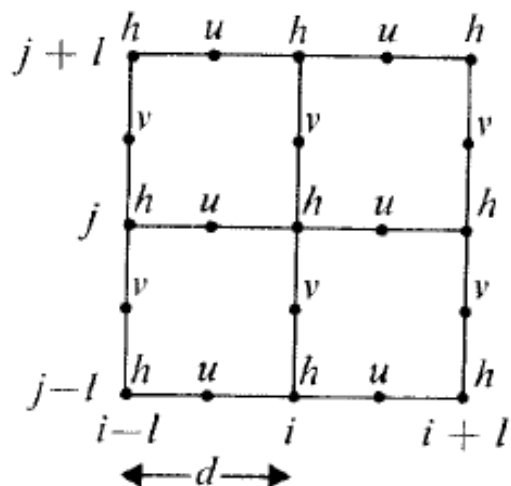
## HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA



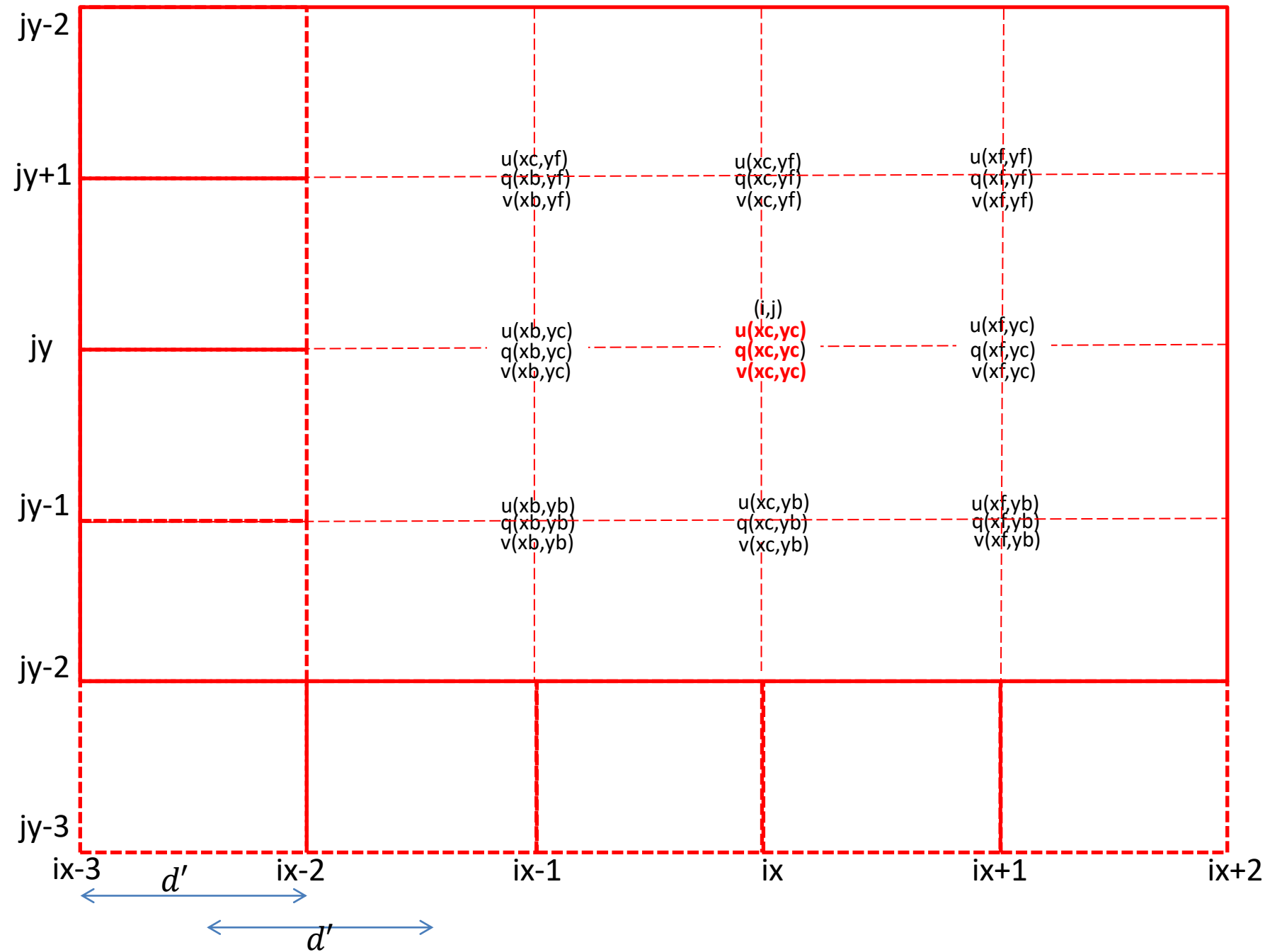
(C)



(D)



# MALHA A





## O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

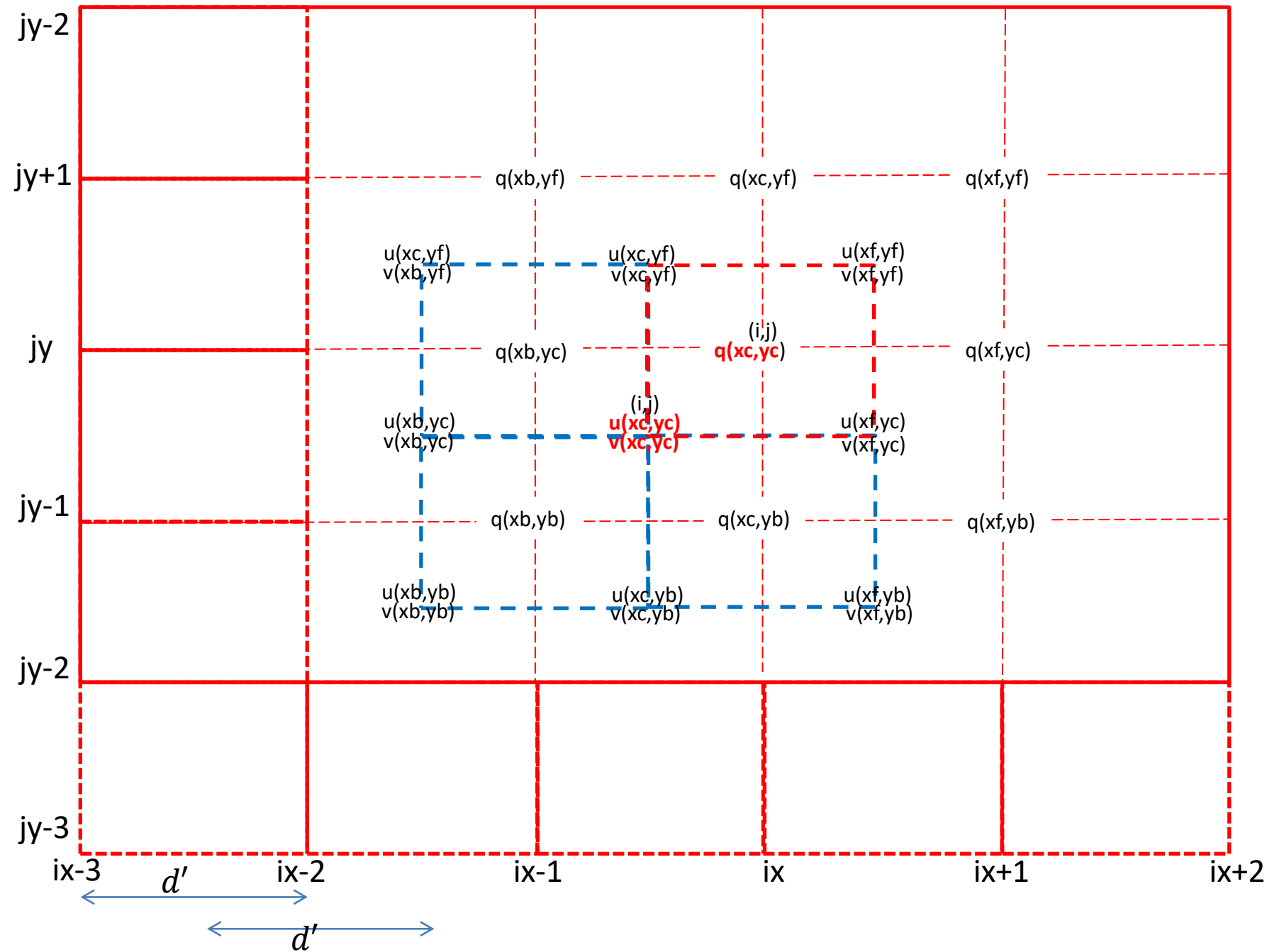
### HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA MALHA A

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \left( \frac{1}{2d'} (h_{i+1,j} - h_{i-1,j}) \right) + f v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \left( \frac{1}{2d'} (h_{i,j+1} - h_{i,j-1}) \right) - f u$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = H \left( \frac{1}{2d'} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \right) + H \left( \frac{1}{2d'} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) \right)$$

# MALHA B





## O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

### HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

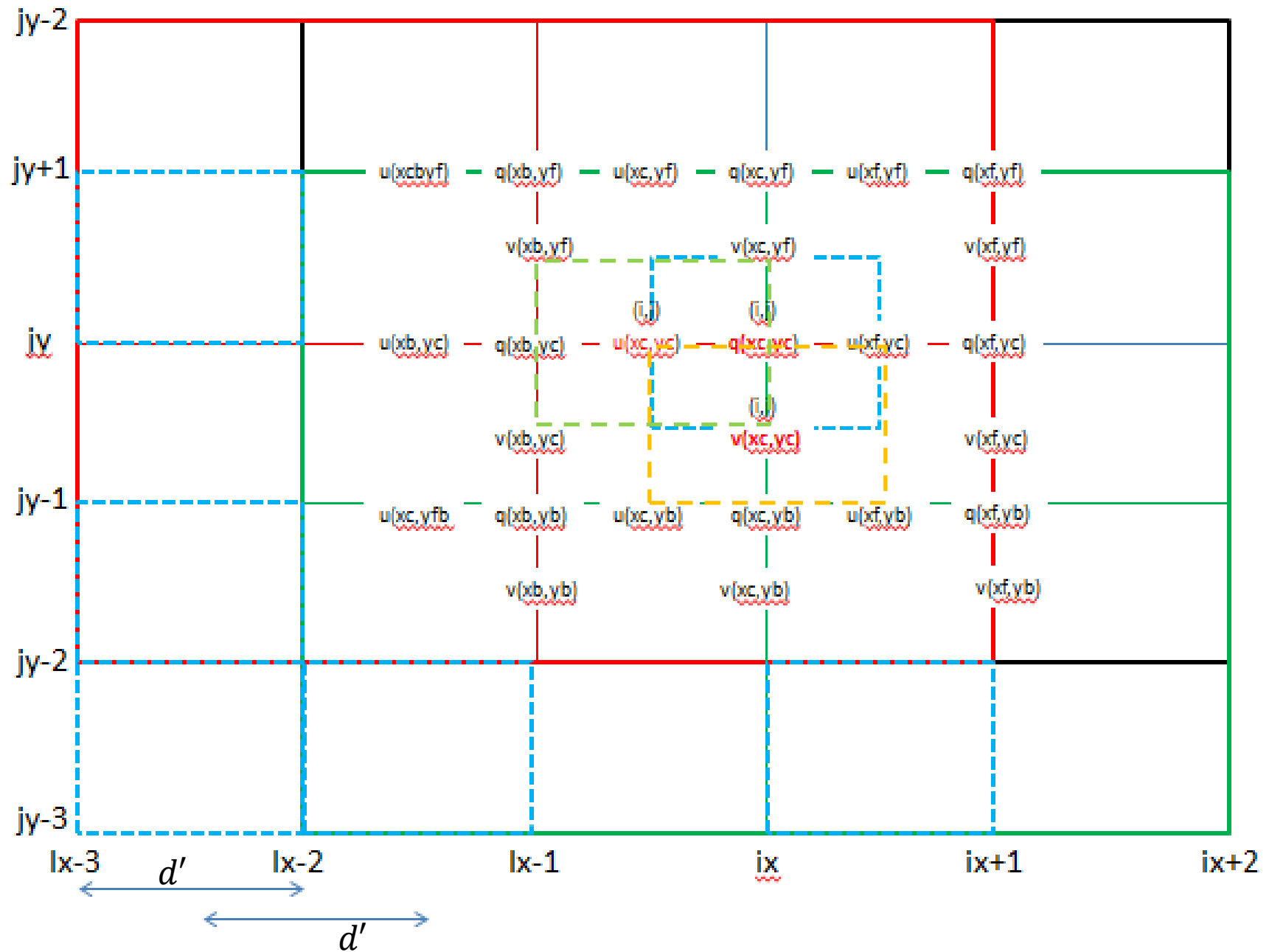
#### MALHA B

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \left( \frac{1}{2d'} \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \right) + fv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \left( \frac{1}{2d'} \left( h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \right) - fu$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} = & H \left( \frac{1}{2d'} \left( \left( u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \right) \right) \\ & + H \left( \frac{1}{2d'} \left( \left( v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

# MALHA C





## HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

### MALHA C

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \left( \frac{1}{d'} \left( h_{i+\frac{1}{2},j} - h_{i-\frac{1}{2},j} \right) \right) + f \left( \left( \frac{1}{4} \left( v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \right) \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \left( \frac{1}{d'} \left( h_{i,j+\frac{1}{2}} - h_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \right) - f \left( \left( \frac{1}{4} \left( u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \right) \right),$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = H \left( \frac{1}{d'} \left( \left( u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j} + v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \right) \right)$$







## HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

### MALHA D

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -g \left( \frac{1}{4d'} \left( \left( h_{i+1,j+\frac{1}{2}} - h_{i-1,j+\frac{1}{2}} + h_{i+1,j-\frac{1}{2}} - h_{i-1,j-\frac{1}{2}} \right) \right) \right) \\ &\quad + f \left( \left( \frac{1}{4} \left( v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \right) \right) \eta \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \left( \frac{1}{4d'} \left( \left( h_{i+\frac{1}{2},j+1} - h_{i+\frac{1}{2},j-1} + h_{i-\frac{1}{2},j+1} - h_{i-\frac{1}{2},j-1} \right) \right) \right) \\ &\quad - f \left( \left( \frac{1}{4} \left( u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \right) \right) \eta \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= H \left( \frac{1}{4d'} \left( \left( u_{i+1,j+\frac{1}{2}} + u_{i+1,j-\frac{1}{2}} \right) - \left( u_{i-1,j+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j-\frac{1}{2}} \right) \right) \right) \\ &\quad + H \left( \frac{1}{4d'} \left( \left( v_{i+\frac{1}{2},j+1} + v_{i-\frac{1}{2},j+1} \right) - \left( v_{i+\frac{1}{2},j-1} + v_{i-\frac{1}{2},j-1} \right) \right) \right) \eta\end{aligned}$$



# O Modelo de Água-Rasa e o Ajuste ao Balanço Geostrófico

## HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

SUBROUTINE Solve\_Forward\_f\_plane(TermEqMomU, TermEqMomV, TermEqConH, u, v, h)

```
REAL(KIND=8), dimension(1:Idim, 1:Jdim), intent(in) :: u, v, h
REAL(KIND=8), dimension(1:Idim, 1:Jdim), intent(out) :: TermEqMomU, TermEqMomV, TermEqConH
```

```
INTEGER :: xb, xc, xf, i, j, yb, yc, yf
```

```
REAL(KIND=8) :: udx, vdy, vbar, fcov, gdhx, ru, vis2dudx, vis2dudy
```

```
REAL(KIND=8) :: udx, vdy, ubar, fcou, gdhy, rv, vis2dvdx, vis2dvdy
```

```
REAL(KIND=8) :: hdu, hvd, dhud, dhvd
```

```
REAL(KIND=8) :: betau, betav
```

```
DO j=1,Jdim
```

```
CALL index(j,Jdim,yb,yc,yf)
```

```
DO i=1,Idim
```

```
CALL index(i,Idim,xb,xc,xf)
```

```
udx = u(xc,yc)*((u(xf,yc) - u(xc,yc))/DeltaX)
```

```
vbar = 0.25*(v(xc,yf) + v(xb,yf) + v(xb,yc) + v(xc,yc))
```

```
vdy = vbar*((u(xc,yf) - u(xc,yc))/DeltaY)
```

```
fcov = - f(xc,yc)*vbar
```

```
betav = -Beta*coordY(xc,yc)*vbar
```

```
gdhx = g*((h(xc,yc) - h(xb,yc))/DeltaX)
```

```
ru = r*u(xc,yc)
```

```
! Neta * (d(u)/dx)
```

```
! uxx = (u(xf,yc) - 2.0*u(xc,yc) + u(xb,yc))*nuxx
```

```
vis2dudx = - vis*((u(xf,yc) - 2.0*u(xc,yc) + u(xb,yc))/(DeltaX*DeltaX))
```

$$\frac{d(u)}{dt} + u \frac{d(u)}{dx} + v \frac{d(u)}{dy} - \text{beta} * v + g \frac{d(\text{Eta})}{dx} + b * u - \text{Neta} * \left( \frac{d(d(u))}{dx} + \frac{d(d(u))}{dy} \right) = 0$$

$$\text{TermEqMomU}(i,j) = \text{udux} + \text{vduy} + \text{fcov} + \text{gdhx} + \text{ru} + \text{vis2dudx} + \text{vis2dudy}$$

```
TermEqMomU(i,j) = -(udux + vduy + fcov + gdhx + ru + vis2dudx + vis2dudy)
```

```
ubar=0.25*(u(xf,yc) + u(xc,yc) + u(xc,yb) + u(xf,yb) )
```

```
udvx = ubar * ((v(xf,yc) - v(xc,yc))/DeltaX)
```

```
vdy = v(xc,yc) * ((v(xc,yf) - v(xc,yc))/DeltaY)
```

```
fcou = f(xc,yc) * ubar
```

```
betau = Beta*coordY(xc,yc) * ubar
```

```
gdhy = g * ((h(xc,yc) - h(xc,yb))/DeltaY)
```

```
rv = r * v(xc,yc)
```

```
! Neta * (d(d(u))/dx)
```

```
! uxx = (u(xf,yc) - 2.0*u(xc,yc) + u(xb,yc))*nuxx
```

```
vis2dvdx = -vis*((v(xf,yc) - 2.0*v(xc,yc) + v(xb,yc))/(DeltaX*DeltaX))
```

```
! Neta * (d(d(u))/dy)
```

```
! uxx = (u(xf,yc) - 2.0*u(xc,yc) + u(xb,yc))*nuxx
```

```
vis2dvdy = -vis*((v(xc,yf) - 2.0*v(xc,yc) + v(xc,yb))/(DeltaY*DeltaY))
```

$$\frac{d(v)}{dt} + u \frac{d(v)}{dx} + v \frac{d(v)}{dy} + \text{beta} * u + g \frac{d(\text{Eta})}{dy} + b * v - \text{Neta} * \left( \frac{d(d(v))}{dx} + \frac{d(d(v))}{dy} \right) = 0$$

```
TermEqMomV(i,j) = udx + vdy + fcou + gdhy + rv + vis2dvdx + vis2dvdy
```

```
TermEqMomV(i,j) = -(udvx + vdy + fcou + gdhy + rv + vis2dvdx + vis2dvdy)
```

```
hdu = H0 * ((u(xf,yc) - u(xc,yc))/DeltaX)
```

```
hvd = H0 * ((v(xc,yf) - v(xc,yc))/DeltaY)
```

```
dhud = (h(xf,yc)*u(xf,yc) - h(xc,yc)*u(xc,yc))/DeltaX
```

```
dhvd = (h(xc,yf)*v(xc,yf) - h(xc,yc)*v(xc,yc))/DeltaY
```

$$\frac{d(\text{Eta})}{dt} + \text{Eta} * \frac{d(u)}{dx} + \text{Eta} * \frac{d(v)}{dy} + u * \frac{d(\text{Eta})}{dx} + v * \frac{d(\text{Eta})}{dy} = 0$$

```
TermEqConH(i,j) = -(hdu + hvd + dhud + dhvd)
```

```
END DO
END DO
END SUBROUTINE Solve_Forward_f_plane
```



## HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

**Analise a Diferença entre as grades A, B, C, D.**

**1: Com menos perturbação.**

**2: Com mais perturbação.**

## HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA

**Verifique se a solução numérica está de acordo com a dispersão numérica das malhas A, B, C, D e E.**

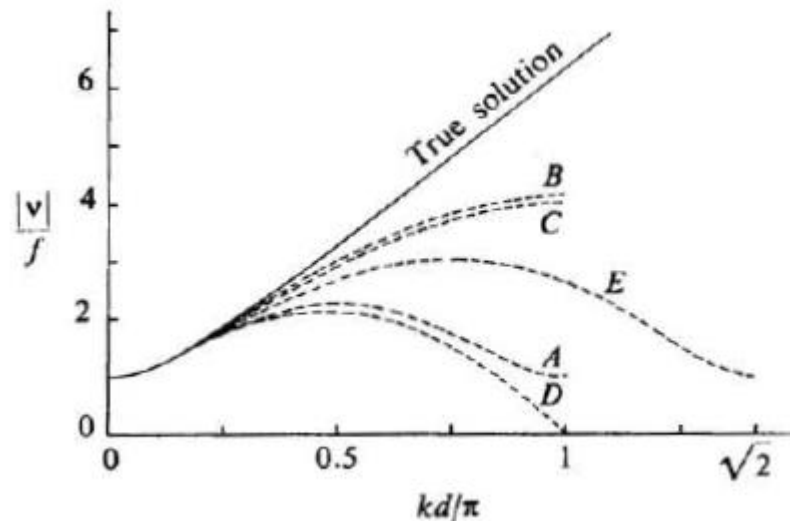
$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 kd, \quad (3.6)_A$$

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = 1 + 4 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{kd}{2}, \quad (3.6)_B$$

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = \cos^2 \frac{kd}{2} + 4 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{kd}{2}, \quad (3.6)_C$$

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = \cos^2 \frac{kd}{2} + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 kd, \quad (3.6)_D$$

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = 1 + 2 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{kd}{\sqrt{2}}, \quad (3.6)_E$$





## **HOMEWORK SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE ÁGUA-RASA**

**Verifique se a solução numérica está de acordo com a dispersão numérica das malhas A, B, C, D e E.**

**Num modelo de água-rasa cinco tipos de onda podem estar presentes:**

**ondas de gravidade,  
ondas de gravidade inercial,  
ondas de Rossby,  
ondas de Rossby-gravidade,  
ondas de Kelvin.**

**Nas soluções numéricas obtidas identifiquem as ondas:**