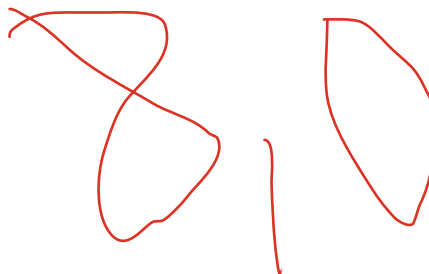




MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS



**Fontes de Erros na Discretização de Equações Governantes do
Escoamento Atmosférico: Análise de Truncamento, *Aliasing*,
Interpolação e Condições de Contorno em Modelagem
Numérica**

Ádria Martins Pereira

Augusto Gabriel Da Costa Pereira

Michelly Glayce Dos Santos Queiroz

Trabalho de Conclusão de Curso da
disciplina de Modelagem Numérica da
Atmosfera, ministrada pelo Prof. Dr.
Paulo Yoshio Kubota.

.RESUMO

Este trabalho investiga diferentes fontes de erros na discretização das equações governantes do escoamento atmosférico em modelos numéricos. São explorados os erros de truncamento, que surgem ao converter equações contínuas para discretas; o aliasing, que ocorre quando frequências altas são representadas como frequências mais baixas; e o erros de interpolação e extrapolação, relacionados à estimativa de valores entre ou fora dos pontos de grade. Além disso, são discutidas as implicações de condições de contorno inadequadas, com foco na melhoria da precisão dos modelos numéricos atmosféricos.

Palavras-chave: Erros de discretização. Equações Governantes. Modelagem Atmosférica.

ABSTRACT

This study examines various sources of errors in the discretization of the governing equations of atmospheric flow in numerical models. It explores truncation errors, which arise when converting continuous equations to discrete ones; aliasing, which occurs when high frequencies are represented as lower frequencies; and interpolation and extrapolation errors, related to estimating values between or outside grid points. Additionally, the implications of inadequate boundary conditions are discussed, focusing on improving the accuracy of atmospheric numerical models.

Keywords: Discretization Errors. Governing Equations. Atmospheric Modeling.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	4
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1 TRUNCAMENTO	6
2.2 <i>ALIASING</i>	7
2.3 INTERPOLAÇÃO	10
2.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO	12
3 CONCLUSÃO	14

1 INTRODUÇÃO

A discretização das equações governantes do escoamento atmosférico é uma etapa essencial na modelagem numérica, permitindo a transformação das equações diferenciais parciais contínuas em um sistema de equações algébricas resolvíveis computacionalmente (LAVEQUE, 2005). Entretanto, essa implementação envolve a conversão das equações diferenciais parciais contínuas em formas discretas, o que inevitavelmente introduz erros de discretização que podem afetar significativamente a precisão e confiabilidade das simulações atmosféricas (YI; GIRALDO, 2020; HWANG et al., 2022).

Métodos numéricos discretizam as equações contínuas no espaço e no tempo utilizando técnicas como diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos ou métodos espectrais e suas combinações (DÖRNBRACK; SCHUMANN, 2012). ~~A discretização vertical em modelos atmosféricos, incluindo métodos de elementos espectrais, pode melhorar a precisão e eficiência das simulações ao abordar os efeitos de erros de grade e aproximações numéricas (HWANG et al., 2022).~~ confuso No entanto, é importante notar que mesmo esses métodos avançados podem introduzir novas fontes de erros, como os associados à transformação de coordenadas e erros de grade, que comprometem a precisão das simulações (YI; GIRALDO, 2020).

Entre essas fontes de erro, os erros de truncamento são particularmente notáveis, ocorrendo quando as equações diferenciais contínuas são aproximadas por suas versões discretas. Esses erros são uma consequência direta dos métodos numéricos empregados, como diferenças finitas, elementos finitos ou volumes finitos, e são inerentes ao processo de discretização (PU; KALNAY, 2018; ZITKO, 2011). Enquanto técnicas de alta ordem podem reduzir os erros de truncamento, mas se mal implementados podem gerar onda espúrias que instabilizam a solução a escolha do método de discretização deve sempre considerar o equilíbrio entre precisão e estabilidade, visando minimizar os impactos negativos desses erros na modelagem atmosférica.

O artigo de Karban et al. (2022) aborda os problemas significativos de aliasing, que ocorrem quando componentes de alta frequência de um sinal são inadequadamente representados como componentes de baixa frequência

Type text here deveria explicar melhor

devido à discretização espacial e temporal inadequada. Estes problemas são mitigados por métodos de filtragem e técnicas de redução de aliasing, especialmente em simulações de alta fidelidade e bancos de dados de *large-eddy simulation* (LES), evitando a introdução de erros nas análises espectrais. O aliasing pode levar a uma representação incorreta das características do escoamento, especialmente em escalas menores, resultando em distorções nos resultados dos modelos (GUNST, 1995; KARBAN et al., 2022).

Erros de interpolação e extrapolação em modelagem meteorológica surgem ao calcular valores de variáveis atmosféricas em pontos fora da grade computacional, resultando em incertezas significativas. Esses erros são exacerbados pela distribuição desigual de estações meteorológicas, especialmente em áreas mal cobertas, onde a extrapolação de dados é essencial (FASSÒ et al., 2020; POPOV et al., 2019). O uso de modelos estocásticos dinâmicos, como o filtro de Kalman, tenta minimizar esses erros, mas sua eficácia depende dos parâmetros do modelo e da qualidade dos dados de entrada (KASAM et al., 2014). Erros de interpolação podem ser particularmente problemáticos em modelos de alta resolução, onde a necessidade de precisão é crucial. O uso de esquemas de interpolação de ordem superior pode mitigar esses erros, mas também introduz novas complexidades e potenciais instabilidades numéricas (DÖRNBRACK et al., 2012).

As condições de contorno são outra fonte crítica de erros na discretização. A aplicação incorreta dessas condições pode levar a reflexões espúrias e outros artefatos numéricos que comprometem a integridade das simulações, como demonstrado no uso de condições de contorno absorventes (ABC, *Absorbing Boundary Condition*) e camadas perfeitamente ajustadas (PML, *Perfectly Matched Layer*) (KUMAR; SHARMA, 2019). Kumar e Sharma (2019) destacam que essas reflexões ocorrem particularmente na interface entre a janela de computação real e a camada absorvente, o que pode introduzir artefatos numéricos. O estudo enfatiza a importância de selecionar perfis de absorção adequados para minimizar essas reflexões indesejadas e

garantir a absorção eficiente das ondas sem interferências adicionais nas simulações. A formulação e implementação cuidadosa das condições de contorno são fundamentais para minimizar a introdução de erros adicionais no sistema modelado (DÖRNBRAK; SCHUMANN, 2012).

O objetivo deste artigo é investigar e analisar as principais fontes de erros na discretização das equações governantes do escoamento atmosférico em modelos numéricos. Em particular, o estudo se concentra nos erros de truncamento, aliasing, interpolação e extrapolação, bem como nas implicações das condições de contorno inadequadas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 TRUNCAMENTO

O erro de truncamento é causado pela substituição de uma operação contínua por uma aproximação discreta e é diretamente relacionado à precisão do método numérico empregado (BURDEN; FAIRES, 2010). Isto é, os erros de truncamento surgem quando é aproximado um conceito matemático formado por uma sequência infinita de passos por meio de um procedimento finito. Por exemplo, a definição de integral é dada por um processo de limite de somas. Numericamente, é aproximado por uma soma finita.

Neste contexto, o erro de truncamento global possui duas causas: primeiro, em cada passo é usada uma fórmula aproximada para determinar a solução aproximada e segundo, os dados de entrada em cada etapa estão apenas aproximadamente corretos, já que em geral a solução exata não é igual à solução aproximada. Se supusermos que a solução exata é igual à solução aproximada, então o erro efetuado em cada passo é devido ao uso de uma fórmula aproximada. Esse erro é conhecido como erro de truncamento local. O erro global de truncamento é acumulado a partir dos erros locais em cada passo da discretização, e sua análise é crucial para entender a precisão do método numérico como um todo (HILDEBRAND, 1987).

A relação entre o erro de truncamento global e o erro de truncamento local depende da função $f(t,u)$ envolvida. Diante de suficiente regularidade, o erro acumulado é da mesma ordem de grandeza do erro de truncamento local acumulado ao longo do processo, isto é, pode ser estimado multiplicando o erro local pelo número de passos. Como o número de passos N necessários para calcular a solução de um problema de valor inicial no ponto $t=tf$ é dado por $N=tf/h$, tem-se que o erro de truncamento global é uma ordem inferior ao erro de truncamento local e equivale à ordem de precisão do método (VALLE, 2012).

Para minimizar o erro de truncamento, é essencial usar métodos numéricos de alta ordem e ajustar dinamicamente o tamanho do passo com base nas características do problema (REDDY, 2006). O erro de truncamento é uma consideração crítica em métodos numéricos e afeta diretamente a precisão das soluções aproximadas. A análise detalhada e a compreensão desse erro são fundamentais para o desenvolvimento de métodos numéricos mais eficazes e precisos.

2.2 ALIASING

Com relação a malha dos modelos. Não há nenhum comentário

O fenômeno de *aliasing* é um desafio significativo na modelagem numérica aplicada à meteorologia e ciências atmosféricas, uma vez que pode introduzir erros substanciais nas simulações. Aliasing ocorre quando a frequência de amostragem de um sinal não é suficientemente alta para capturar as variações do sinal original de forma precisa, resultando na sobreposição de espectros que distorcem a representação do sinal. No contexto meteorológico, onde se lida com dados atmosféricos em escalas temporais e espaciais variadas, o aliasing pode manifestar-se de várias maneiras, afetando a precisão de previsões (HE et al., 2023).

Por exemplo, ~~durante a discretização de dados meteorológicos~~, como temperaturas, velocidades do vento ou concentrações de vapor d'água, é essencial garantir que a resolução espacial e temporal seja adequada para capturar as variações relevantes desses campos. Se a resolução for

insuficiente, fenômenos de alta frequência, como fenômenos de mesoescala ou turbulências, podem ser representados de forma inadequada, gerando artefatos que não existem no sistema atmosférico real. Isso pode levar a interpretações errôneas, como a previsão de eventos na escala de tempo extremos inexistentes ou a subestimação da intensidade de sistemas de baixa pressão.

Estudos como os de Oppenheim (1997) destacam a importância de técnicas de filtragem adequadas para mitigar os efeitos do aliasing. Em modelagem numérica, isso pode envolver o uso de filtros passa baixa (FIGUEREDO et al., 2022) para remover componentes de alta frequência antes da amostragem ou a aplicação de métodos de interpolação para refinar a resolução dos dados (GUITTON; CLAERBOUT, 2010).

- Representação Gráfica de *Aliasing*

A Figura 1 demonstra o passo a passo de como evitar o aliasing ao reproduzir a resolução de um sinal. Vale ressaltar que se o suporte espectral de banda base de um sinal em um tempo discreto não estiver limitado a um intervalo de largura $\frac{2\pi}{M}$ radianos, a subamostragem por M resultará em aliasing.

Na Figura 1a foi criado um sinal com suporte espectral a $\frac{3\pi}{2}$ radianos. Utilizou-se o projeto de filtros de respostas ao impulso infinito (FIR) baseado em amostragem de sequência para projetar o sinal. O FIR depende é uma função de (n, f, m) , sendo eles: (1) n é a ordem do filtro, especificada como um escalar inteiro; (2) f vetor de pontos de frequência de 0 a 1, onde 1 representa à frequência de Nyquist; e (3) m é o vetor que contém a resposta de magnitude em cada um dos pontos especificados em f .

É apresentado na Figura 1a o espectro do sinal, o suporte espectral de banda base do sinal excede $[-\pi/2, \pi/2]$. Para a demonstração gráfica de aliasing, os dados de entrada são apresentados com frequência (f) e amplitude (a), sendo: $f = [0; 0,25; 0,5; 0,75; 1]$ e $a = [1; 0,6667; 0,3333; 0; 0]$.

Para a aplicação do FIR é definido $nf = 512$, portanto, $b = \text{FIR}(512, f, a)$.

É dado como Hx a representação do deslocamento do componente de frequência zero para o centro (fftshift), dependendo de $b = \text{FIR}(512, f, a)$ e nf , tendo nessa função a resposta de frequência do filtro digital, representado por freqz , sendo assim, $Hx = \text{fftshift}(\text{freqz}(b, 1, nf))$ e $\omega_k = -\pi + k \cdot \Delta\omega$:

$k = 0, 1, 2, nf - 1$ é o índice do termo na sequência;

$\Delta\omega = \frac{2\pi}{nf}$ é o passo ou incremento entre os termos consecutivos.

Portanto, a sequência completa ω é dada por $\omega_k = -\pi + k \cdot \frac{2\pi}{nf}$. A

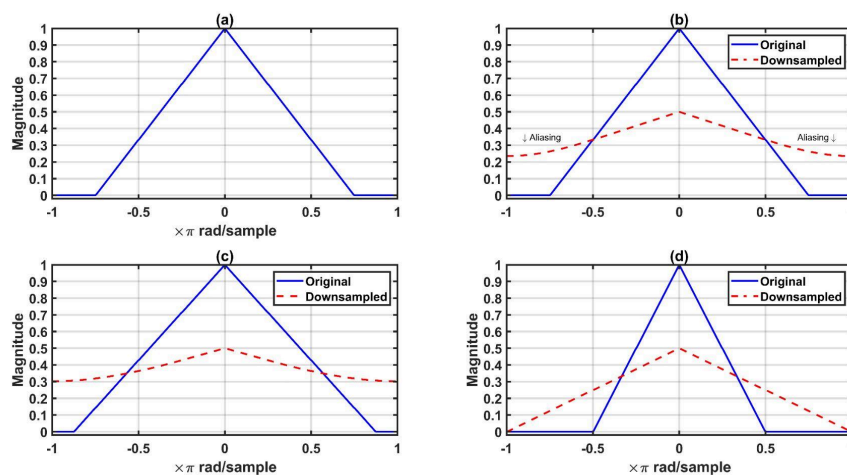
Figura 1 no eixo x representa $\frac{\omega_k}{\pi}$ e no eixo y representa o valor absoluto e magnitude complexa de Hx .

A Figura 1b demonstra redução da resolução do sinal por um fator de 2, apresentando o espectro do sinal com redução da resolução com o espectro do sinal original. Além de uma escala de amplitude do espectro, a superposição de réplicas espectrais sobrepostas causa distorção do espectro original para $|\omega| > \pi/2$.

Para a Figura 1c nota-se o aumento do suporte espectral da banda base do sinal para $[-7\pi/8, 7\pi/8]$ e é reduzida a resolução do sinal em 2. A análise é a relação do espectro original junto com o espectro do sinal com *downsample*. O aumento da largura espectral resulta em aliasing mais pronunciado no espectro do sinal com resolução reduzida porque mais energia do sinal está fora $[-\pi/2, \pi/2]$.

É construído um sinal com suporte espectral de banda base limitado a $[-\pi/2, \pi/2]$ na Figura 1d. Realizou-se a redução do sinal por um fator de 2, desta forma, demonstrando o espectro dos sinais originais e reduzidos. O sinal com resolução reduzida é de banda completa. O espectro do sinal com resolução reduzida é uma versão esticada e dimensionada do espectro original, mas a forma é preservada porque as cópias espectrais não se sobrepõem.

Figura 1. Impacto da redução de amostragem na magnitude do espectro de um sinal triangular. O gráfico (a) mostra o espectro do sinal original sem redução de amostragem. O gráfico (b) exibe o espectro do sinal após redução da resolução do sinal em um fator de 2, evidenciando o aliasing devido à subamostragem. O gráfico (c) apresenta o espectro do sinal com redução de sinal por um fator de 2, demonstrando um aumento mais pronunciado dos efeitos de aliasing. Finalmente, o gráfico (d) mostra o espectro após uma redução de amostragem por um fator de 2, onde o aliasing se torna ainda mais significativo, distorcendo consideravelmente o espectro original. As linhas azuis indicam o espectro do sinal original, enquanto as linhas vermelhas tracejadas representam o espectro do sinal reduzido em termos de amostragem.



2.3 INTERPOLAÇÃO

Qual a relação da interpolação com os metodos de discretização??????

A interpolação é um processo essencial na modelagem numérica de escoamentos atmosféricos, pois permite estimar valores em pontos onde os dados não estão diretamente disponíveis, ajustando valores entre pontos conhecidos. Essa técnica é crucial para converter dados entre grades de resolução diferentes ou alinhar pontos de grade de modelos numéricos com observações, assegurando coerência em diversas escalas espaciais e temporais. A escolha do método de interpolação adequado é vital, pois influencia diretamente a precisão dos resultados numéricos.

Diversos métodos de interpolação existem, cada um com características e aplicações específicas. A interpolação linear é simples e eficiente, mas pode introduzir erros significativos em dados que variam rapidamente. A interpolação bilinear considera variações bidimensionais, sendo mais adequada para superfícies como campos de pressão ou temperatura. Métodos mais avançados, como a interpolação bicúbica e splines cúbicas, suavizam os dados e capturam variações mais sutis, mas a um custo computacional maior. Press et al. (2007) observam que, embora a interpolação bicúbica ofereça suavidade, esta nem sempre está relacionada à precisão das derivadas, o que pode afetar a qualidade final da interpolação.

Os erros de interpolação são uma preocupação constante na modelagem numérica. Entre os principais estão os de truncamento, que ocorrem quando a interpolação não captura todas as nuances dos dados originais, e os de aliasing, que surgem quando frequências altas são mal representadas. Esses erros podem introduzir ruídos ou suavizar excessivamente os dados, levando à perda de informações importantes ou à criação de artefatos espúrios. Press et al. (2007) apontam que, embora aumentar a ordem da interpolação possa inicialmente reduzir erros, ordens excessivamente altas podem, paradoxalmente, amplificar erros, comprometendo a precisão. Durran (1999) também destaca que, em métodos Semi-Lagrangianos para calcular trajetórias de retaguarda, a variação da velocidade do vento pode introduzir erros de interpolação que não diminuem adequadamente com o refinamento da grade, prejudicando a convergência para a solução correta.

Para minimizar esses erros, é fundamental escolher o método de interpolação adequado ao tipo de dado e à resolução da grade. A validação dos resultados interpolados com dados observacionais é recomendada para identificar e corrigir discrepâncias. Métodos que preservam as características físicas dos dados, como os conservativos, podem melhorar a qualidade das previsões e reduzir os impactos negativos dos erros de interpolação.

2.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO

O erro de condições de contorno é um tema crucial na solução numérica de equações diferenciais parciais (EDPs). Segundo MURRAY (1989), erros nas condições de contorno ocorrem quando há uma implementação inadequada ou imprecisa das especificações de fronteira, afetando diretamente a precisão e a estabilidade da solução numérica. Esses erros de condições de contorno podem ser introduzidos por vários fatores, como a aproximação inadequada das condições de contorno, erros na formulação matemática ou limitações dos métodos numéricos utilizados.

Neste contexto, cada tipo de condição de contorno pode introduzir erros específicos na solução numérica. Erro significativo pode surgir em problemas de Dirichlet se a condição de contorno não for adequadamente representada na discretização, levando a desvios substanciais na solução (KLINE & NEILSEN, 2004). Essas condições especificam a derivada normal da função na fronteira. Erros ocorrem quando a discretização da derivada normal não é precisa, o que pode causar imprecisões na solução, especialmente em problemas de fluxo e calor. Em relação às condições de Robin, são uma combinação de Dirichlet e Neumann e o tratamento inadequado de uma das partes pode levar a erros complexos, que afetam tanto a função quanto suas derivadas. A implementação de condições de Robin deve equilibrar corretamente a influência das condições de Dirichlet e Neumann, de forma a minimizar o erro total (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Os métodos para implementar condições de contorno variam, e cada um pode impactar a precisão da solução de maneira diferente. Entre os métodos comuns estão o método de pontos interiores e o método de fronteiras. Métodos de pontos interiores são eficazes na implementação de condições de Dirichlet, mas podem introduzir erros se a discretização não for suficientemente refinada (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Já os métodos de fronteiras precisam ser ajustados com precisão para representar condições de Neumann e Robin, para garantir que o erro de contorno seja minimizado (CIARLET, 2002).

Para controlar e mitigar erros de condições de contorno, várias técnicas podem ser empregadas como o refinamento de malhas e os métodos adaptativos. O uso de malhas adaptativas e técnicas de refinamento local pode ajudar a minimizar os erros associados às condições de contorno e melhorar a precisão global da solução (SMITH, 2005). Dessa forma, o erro de condições de contorno é uma consideração crítica na modelagem numérica de EDPs. A implementação precisa e adequada das condições de contorno é essencial para garantir a precisão e a estabilidade das soluções. A análise cuidadosa e o controle desses erros são fundamentais para o sucesso das simulações computacionais.

3 CONCLUSÃO

A discretização das equações governantes do escoamento atmosférico em modelos numéricos introduz erros que afetam a precisão das simulações. Entre os principais, destacam-se os erros de truncamento, que resultam da aproximação das equações diferenciais contínuas, o aliasing, que distorce a representação de frequências altas, e os erros de interpolação e extrapolação usados para ajustar dados em grades diferentes. Além disso, condições de contorno inadequadas podem comprometer ainda mais os resultados. Para melhorar a qualidade das simulações, é fundamental adotar técnicas que minimizem essas fontes de erros, como o refinamento da malha, métodos avançados de interpolação e a escolha adequada de condições de contorno. Isso levará a modelos numéricos mais precisos e previsões mais confiáveis.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. (2010). *Numerical Analysis*. Cengage Learning.

CIARLET, P. G. (2002). *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. SIAM.

DURRAN, D. R. *Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics*. Vol. 32. Springer Science & Business Media, 2013.

FASSÒ, A. SOMMER, M.; ROHDEN C. VON. Interpolation uncertainty of atmospheric temperature profiles. *Atmospheric Measurement Techniques* 13.12 (2020): 6445-6458.

FIGUERÊDO, J. S. L. ET AL. UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA ENSINAR O FENÔMENO DE ALIASING PARA ALUNOS DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO. *Revista de Ensino de Engenharia* 41 (2022).

GUITTON, A.; CLAERBOUT J. An algorithm for interpolation in the pyramid domain. *Geophysical Prospecting* 58.6 (2010): 965-976.

GUNST, R. F. Estimating spatial correlations from spatial-temporal meteorological data. *Journal of Climate* 8.10 (1995): 2454-2470.

HE, C. ET AL. Improving the precision of monthly runoff prediction using the combined non-stationary methods in an oasis irrigation area. *Agricultural Water Management* 279 (2023): 108161.

HILDEBRAND, F. B. (1987). *Introduction to Numerical Analysis*. Dover Publications.

HWANG, Y.; SU D.; YU J. A high resolution numerical method for solving atmospheric models. *Chinese Journal of Physics* 77 (2022): 92-111.

KARBAN, U. ET AL. Solutions to aliasing in time-resolved flow data. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 36.6 (2022): 887-914.

KASAM, A. A.; BENJAMIN D. LEE; CHRISTIAAN, JJ P.. Statistical methods for interpolating missing meteorological data for use in building simulation. *Building Simulation*. Vol. 7. Tsinghua University Press, 2014.

KLINE, S. J.; NEILSEN, J. S. (2004). *Numerical Mathematics and Computing*. Brooks/Cole.

KUMAR, R.; SHARMA, A. "Absorbing boundary condition (ABC) and perfectly matched layer (PML) in numerical beam propagation: a comparison." *Optical and Quantum Electronics* 51 (2019): 1-13.

MURRAY, M. H. (1989). *Numerical Analysis of Boundary Value Problems*. Springer.

POPOV, Y. ET AL. Comparative Evaluation of Algorithms for Spatial Interpolation of Atmospheric State Parameters Based on a Dynamic Stochastic Model Taking into Account the Vertical Variation of a Meteorological Field. *Symmetry* 11.10 (2019): 1207.

PRESS, W. H. *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press, 2007.

PU, Z.; KALNAY, E. "Numerical weather prediction basics: Models, numerical methods, and data assimilation." *Handbook of hydrometeorological ensemble forecasting* (2019): 67-97.

RANDALL, J. L. "Finite difference methods for differential equations." *A Math* 585 (2005).

deveria

REDDY, J. N. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill.

SCHUMANN, U. E. D. *Atmospheric Physics: Background–Methods–Trends*. Springer Science & Business Media, 2012.

SMITH, B. (2005). *Computational Fluid Dynamics: A Practical Approach*. Wiley.
Valle, K. N. F. Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kutta. 2012. 40p. Monografia (Especialista em Educação Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. (2007). *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Pearson Education.

YI, T.; FRANCIS, X. G. Vertical discretization for a nonhydrostatic atmospheric model based on high-order spectral elements. *Monthly Weather Review* 148.1 (2020): 415-436.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. (2000). *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann.

ŽITKO, R. Quantitative determination of the discretization and truncation errors in numerical renormalization-group calculations of spectral functions. *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics* 84.8 (2011): 085142.