Introdução ao Método Espectral.

MET-576-4

Modelagem Numérica da Atmosfera

Dr. Paulo Yoshio Kubota

Os métodos numéricos, formulação e parametrizações utilizados nos modelos atmosféricos serão descritos em detalhe.

3 Meses
24 Aulas (2 horas cada)

Métodos Numérico Avançados para Dinâmica de fluidos e transferência de calor

Paulo Yoshio Kubota
Rixin Yu

Introdução ao Método Espectral.

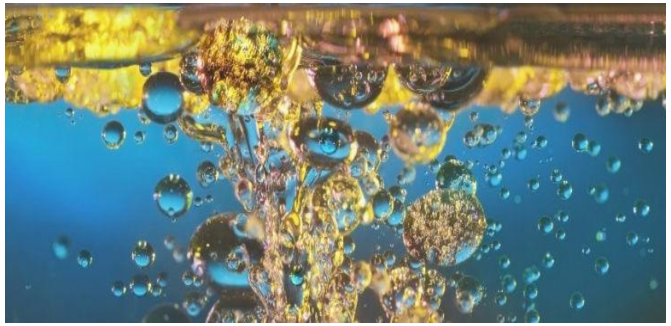
Conteúdo principal do curso •

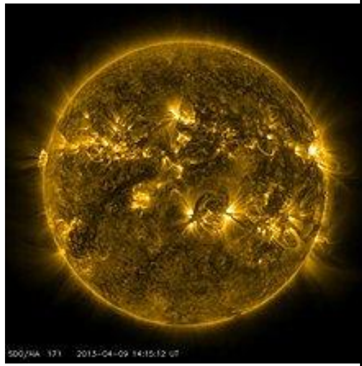
O curso CFD oferecido em nosso departamento (Dinâmica de Fluidos e Transferência de Calor, MMVN05)
- Baixa velocidade (incompressível), problema de fluxo com física ligeiramente simples •

Este curso CFD “avançado” (MVKN70)
- Métodos numéricos que lidam com problemas de escoamento com física complexa
    - Alta velocidade, escoamento compressível (semana 1,2,4)
        -Onda de choque, descontinuidade
    - Problemas de escoamento multi-físico
        -Transferência de calor avançada: problema de radiação térmica (semana 3)
        - Fluxo de reação, combustão (semana 5)

- Outros tipos de problemas específicos de escoamento multi-físico (não abrangidos neste curso)

»Escoamento multifásicos (spray)
»Magnetohidrodinâmica (MHD)
»Microfluido, não newtoniano
»… ..





Uma visão geral dos métodos de computação aplicáveis a problemas de escoamento de fluido

Visão geral dos métodos CFD

- Diferentes frameworks de métodos computacionais (capazes de lidar com os problemas de mecânica dos fluidos)
  - Métodos clássicos (P.D.E. (equações N.S.) discretização em uma aproximação de grade)
    - Volume finito / diferença finita
      - Discretização em uma grade (malha) com conectividade predeterminada
        »Esquemas numéricos para transformar um sistema de P.D.E.s em um conjunto aproximado de equações algébricas.
        »Ferramentas básicas: expansão de Taylor, interpolação / extrapolação.
        »Conceitos: Ordem de precisão (erro de truncamento), análise de estabilidade Neumman, tratamentos de condições de contorno,

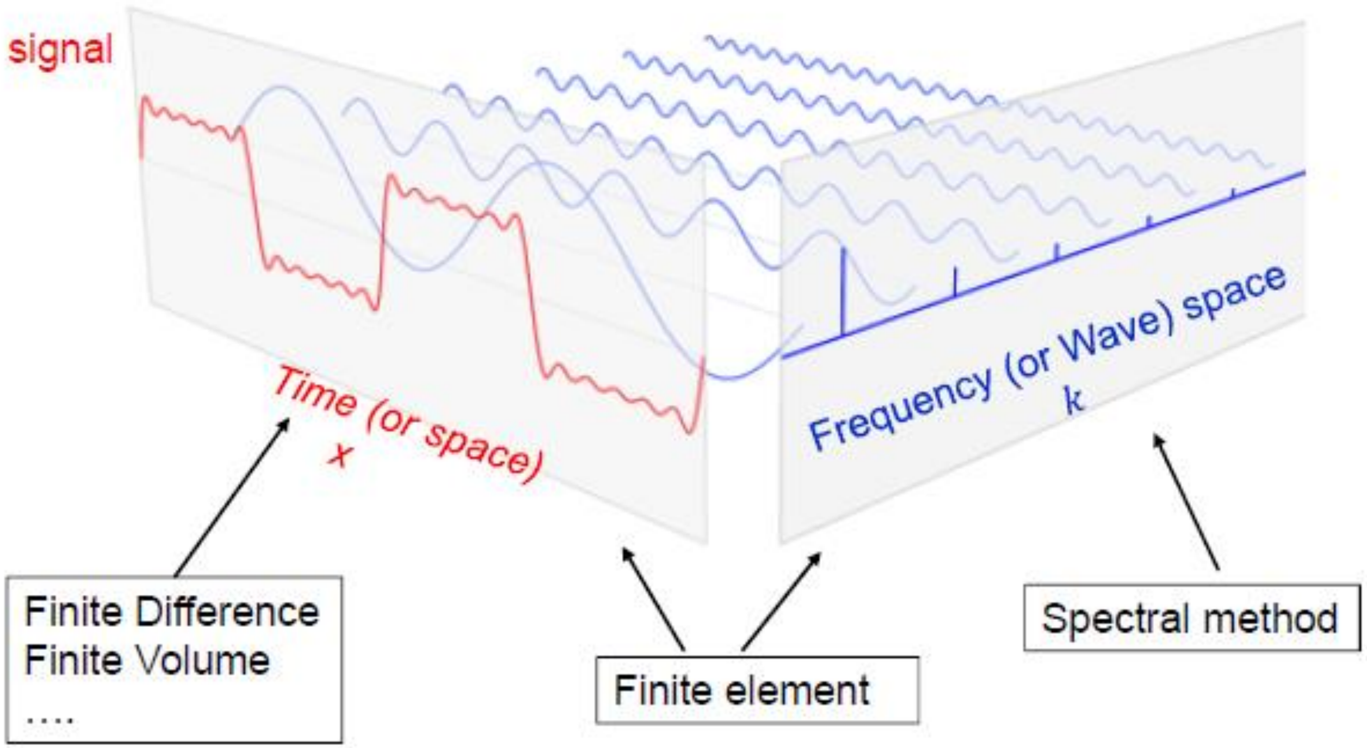
- O caminho natural para a extensão para lidar com problemas complexos
  »Grade deformadora, refinamento da malha (adaptativa)
- Elementos finitos, (pseudo) métodos espectrais (X)

- Outros métodos
  - Métodos sem malha (hidrodinâmica de partículas suaves, X)
  - Métodos de Lattice (malha) de Boltzmann (X)

Métodos espectrais
(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um sinal físico na soma de uma série de ondas simples de diferentes amplitudes

$$f(x) := \int \hat{f}(k) \cdot e^{ikx} \qquad i^2 = -1$$



Paulo Yoshio Kubota

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um sinal físico na soma de uma série de ondas simples de diferentes amplitudes

Quaisquer duas ondas simples diferentes (k, k ‘) **se são ortogonais** (o que torna a decomposição possível!)

$$\int e^{ikx} \cdot e^{-ik'x} dx := \delta_{kk'} = \begin{cases} 1, & k = k' \\ 0, & k \neq k' \end{cases}$$

Para cada onda simples (Fourier), é fácil calcular a derivada (para auxiliar na resolução da equação diferencial)

$$\frac{d}{dx} e^{ikx} = i\,k \times e^{ikx} \qquad \frac{d^2}{dx^2} e^{ikx} = (i\,k)^2 e^{ikx} = -k^2 \times e^{ikx}$$

Para encontrar a amplitude de cada onda simples decomposta:

$$\hat{f}(k) := \int f(x)\; e^{-ikx}$$

Introdução ao Método Espectral.

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um sinal físico na soma de uma série de ondas simples de diferentes amplitudes

É computacional possível para realizar a transformada de Fourier para calcular a amplitude.

- A discreta Transformada Rápida de Fourier (FFT)

  - Computacionalmente eficiente, reduzindo as contagens de operação de O (N^2) a O $(Nlog(N))$, onde N é o número de contagens de pontos de grade discreto.

  - A versão mais simples é o algoritmo Cooley-Tukey que funciona para $N = 2^m$,
    - outra versão do algoritmo FFT avançado pode lidar com N tão arbitrário quanto o número primo.
    - FFTW (software livre, implementação paralela disponível)

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um sinal físico na soma de uma série de ondas simples de diferentes amplitudes

Demonstração do método espectral para resolver uma equação diferencial.

Quais das seguintes equações são fáceis de resolver?

Uma equação algébrica para um valor real k:

$$k^4 - bk^2 + c = 0,$$

com b, c, são constantes.

Uma equação diferencial para f (x):

Assume f only contains a single k simple-wave of

$$f(x) = \hat{f}e^{ikx},$$

then:

$$\frac{d}{dx}f = ik \times \hat{f}e^{ikx}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f = -k^2 \times \hat{f}e^{ikx}$$

$$\frac{d^4}{dx^4}f = +k^4 \times \hat{f}e^{ikx}$$

$$\frac{d^4}{dx^4}f(x) + b\frac{d^2}{dx^2}f(x) + cf(x) = 0, \quad \text{for } x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\downarrow$$

$$(k^4 - bk^2 + c) \times \hat{f}e^{ikx} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} Any\ value, & if\ k^4 - bk^2 + c = 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Paulo Yoshio Kubota

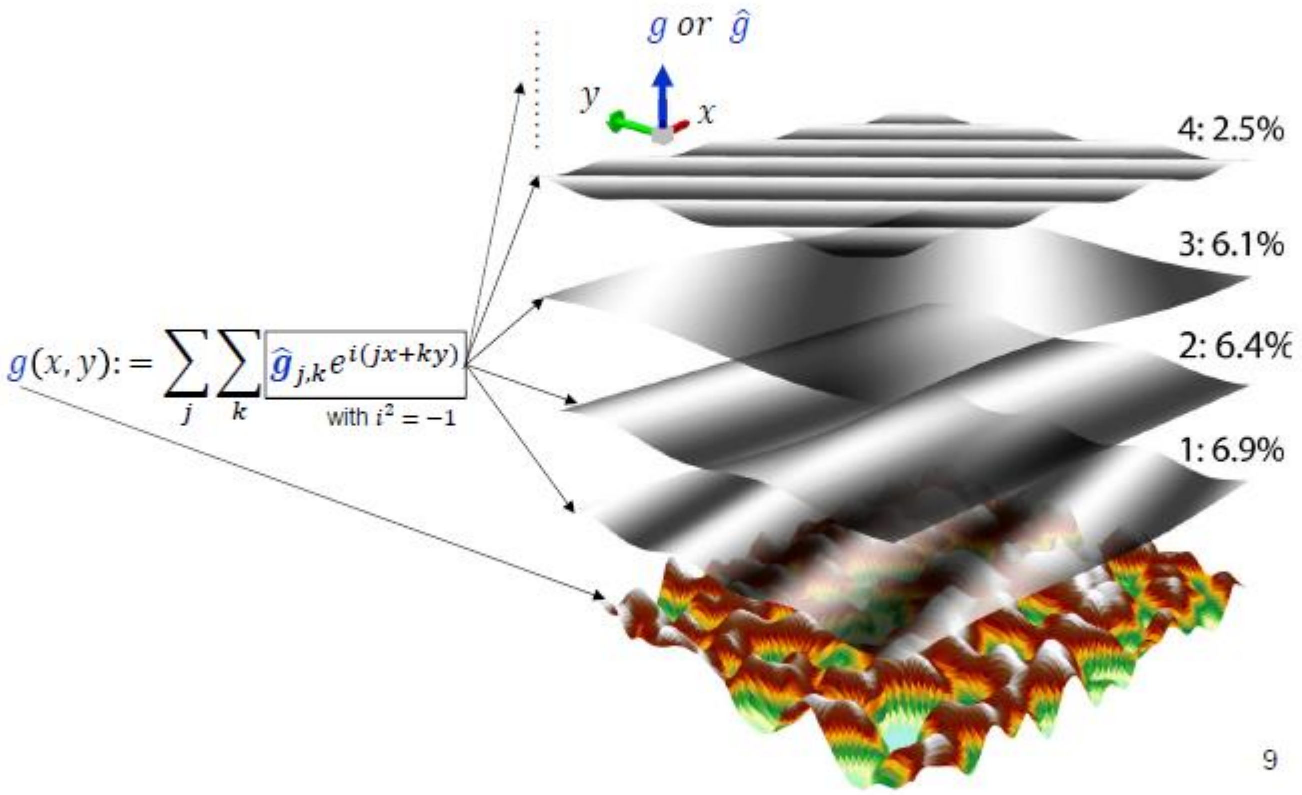
Introdução ao Método Espectral.

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um sinal físico na soma de uma série de ondas simples de diferentes amplitudes

Transformada Multidimensional de Fourier

Decomposição em simples, ondas multidimensionais



Introdução ao Método Espectral.

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um sinal físico na soma de uma série de ondas simples de diferentes amplitudes

Método espectral para resolver P.D.E.

- Uma equação diferencial parcial linear simples (equação de Poisson)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)=g(x,y),$$

No domínio periódico

$$g(x,y)=g(x+2\pi,y)$$
$$=g(x,y+2\pi)$$
$$\text{with } x,y\in[0,2\pi]$$

Decompor u e g na soma de ondas simples de Fourier 2D

$$u(x,y):=\sum_j\sum_k \hat{u}_{j,k}\times e^{i(jx+ky)}$$

$$g(x,y):=\sum_j\sum_k \hat{g}_{j,k}\times e^{i(jx+ky)}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y):=\sum_j\sum_k -\hat{u}_{j,k}(j^2+k^2)\times e^{i(jx+ky)}$$

$$g(x,y):=\sum_j\sum_k \hat{g}_{j,k}\times e^{i(jx+ky)}$$

Para cada (j,k), tem-se uma simples relação algébrica

$$\boxed{\hat{u}_{j,k}=-\frac{\hat{g}_{j,k}}{(j^2+k^2)}}$$

Paulo Yoshio Kubota

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um sinal físico na soma de uma série de ondas simples de diferentes amplitudes

Métodos espectrais para P.D.E. não lineares.

Simplificações das equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível

$$\boxed{\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}; \;\; \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0}$$

A equação de viscosidade de Burger não linear (periódico em $x \in (0,2\pi)$, resolva para $t \geq 0$)

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}u^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u$$

Decomposição de Fourier em x (não t)

$$u(x,t) := \sum_k \hat{u}_k(t) e^{ikx}$$

$$\sum_k \left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_k + \frac{ik}{2} \sum_{p+q=k} \hat{u}_p \hat{u}_q + k^2 \hat{u}_k \right) = 0$$

Para resolver $\hat{u}_k$ em um número de onda k, a relação acima não é mais algébrica devido ao envolvimento de outros números de onda p e q. Se o termo não linear assumir uma expressão mais complicada, o cálculo pode se tornar caro!

Paulo Yoshio Kubota

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um sinal físico na soma de uma série de ondas simples de diferentes amplitudes

Para resolver $\hat{u}_k$ em um número de onda k, a relação acima não é mais algébrica devido ao envolvimento de outros números de onda p e q. Se o termo não linear assumir uma expressão mais complicada, o cálculo pode se tornar caro!

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}u^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u$$

$$u(x,t) := \sum_k \hat{u}_k(t)e^{ikx}$$

$$\sum_k \left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_k + \frac{ik}{2}\sum_{p+q=k}\hat{u}_p\hat{u}_q + k^2\hat{u}_k \right) = 0$$

Avanço de tempo de 1ª ordem:

$$\frac{\hat{u}_k(t^{n+1}) - \hat{u}_k(t^n)}{t^{n+1} - t^n} = Exp.(\hat{u}_k, \hat{u}_p, \hat{u}_q)\Big|^{t^n}$$

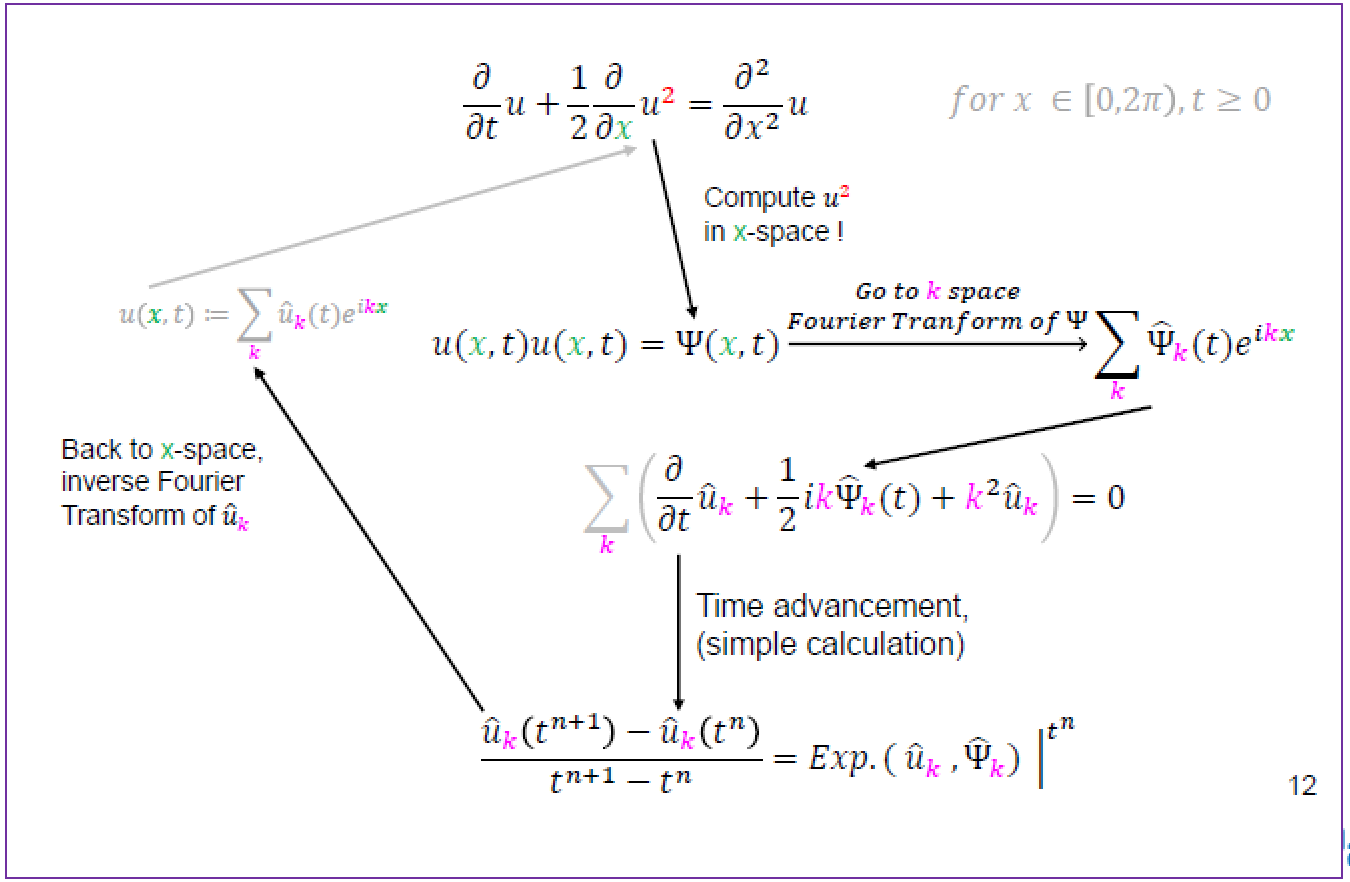
Introdução ao Método Espectral.

Métodos espectrais(Transformada de Fourier unidimensional)

Decomposição de um sinal físico na soma de uma série de ondas simples de diferentes amplitudes

Métodos pseudo-espectrais para resolver PDE não linear

Eq. de burger não linear..



Introdução ao Método Espectral.

Decomposição de um sinal físico na soma de uma série de ondas simples de diferentes amplitudes

Método espectral: Prós / Contras

• Os métodos espectrais e o Método dos Elementos Finitos estão intimamente relacionados

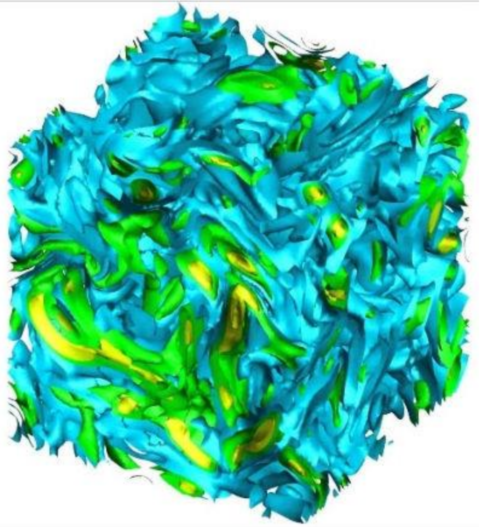
- Os métodos espectrais usam funções de base “globais” “ortogonais” que são diferentes de zero em todo o domínio.

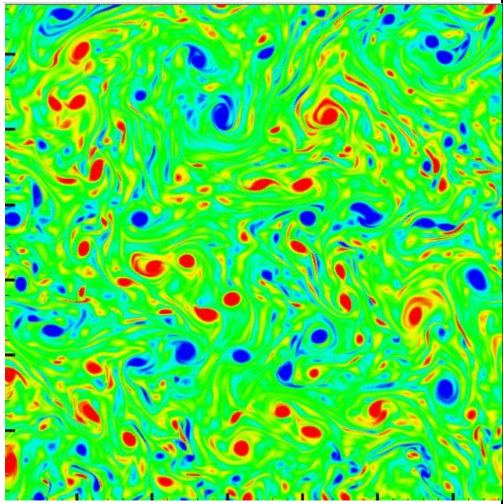
• Excelentes propriedades de erro de "convergência exponencial" (em outras palavras, os métodos espectrais são muito precisos quando a solução é suave)

- O FEM pode ser visto como usando funções de base “local” que são diferentes de zero apenas em pequenos subdomínios.

- • Os métodos espectrais funcionam melhor com geometria simples (por exemplo, periódica) com soluções suaves, pode ser mais leve computacionalmente .

- • Os métodos espectrais não são bons para problemas descontínuos (nenhum resultado de “captura de choque” espectral 3D conhecido), e produzem o fenômeno de Gibbs.





Paulo Yoshio Kubota