Método Numérico

Interpolação

Paulo Yoshio Kubota

Interpolação

Problema Básico de Interpolação: Para dados:

$$(t1, y1);\ (t2, y2);\ \dots\ (tm, ym) \text{ com } t1 < t2 < \dots < tm\ ,$$

determine uma função $f : R \rightarrow R$ tal que

$$f(ti) = yi, \qquad i = 1; \dots; m$$

•f é uma função interpolante, ou interpoladora, para os dados dados.

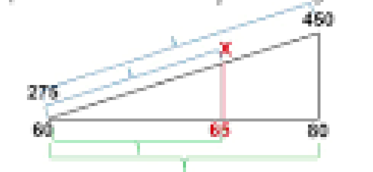
SOLUÇÃO DO EXEMPLO 01

Tabela 1. Relação entre o volume e a área do espelho d'água do reservatório.

Área (km²)	Volume (10⁶ m³)
20	40
40	135
60	275
65	X
80	450
100	665
120	915
140	1200

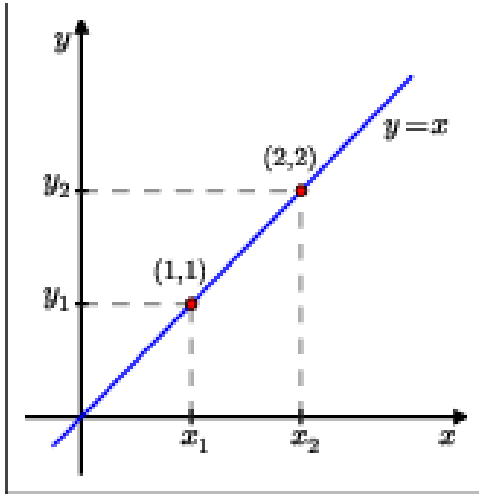
Calcular o volume para **65 km²**

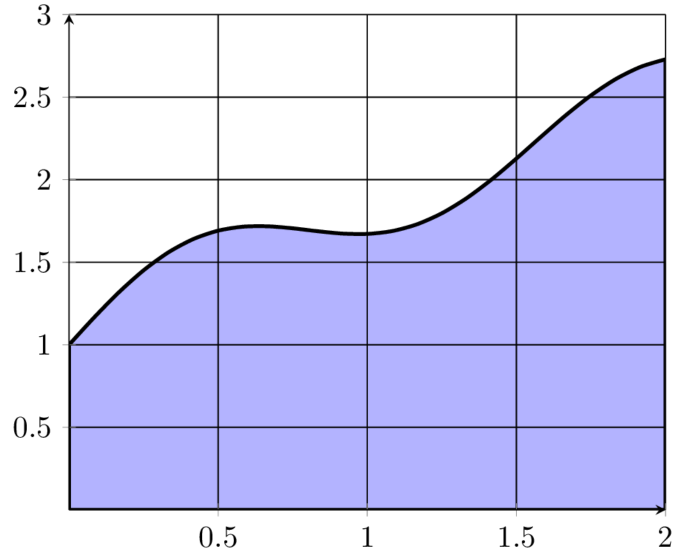
Aplicando-se semelhança de triângulos:



$$\frac{X - 275}{450 - 275} = \frac{65 - 60}{80 - 60}$$

$$X = \frac{(65 - 60)\cdot(450 - 275)}{(80 - 60)} + 275$$





Interpolação

Problema Básico de Interpolação: Para dados:

•Dados adicionais podem ser prescritos, como a inclinação da função interpoladora de pontos específicos.

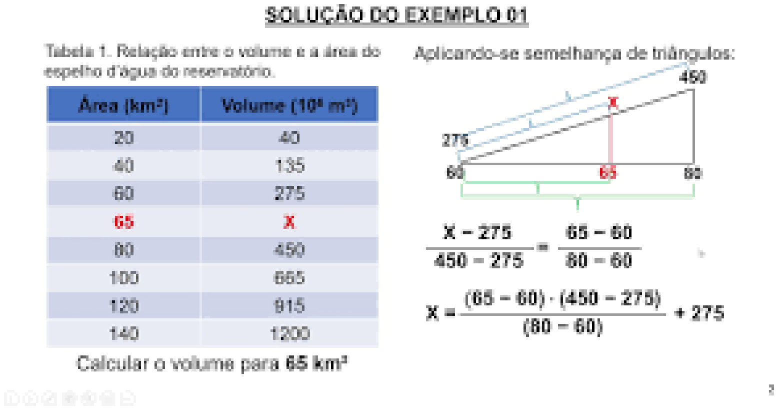

SOLUÇÃO DO EXEMPLO 01

Tabela 1. Relação entre o volume e a área do espelho d'água do reservatório.

Área (km²)	Volume (10⁶ m³)
20	40
40	135
60	275
65	X
80	450
100	665
120	915
140	1200

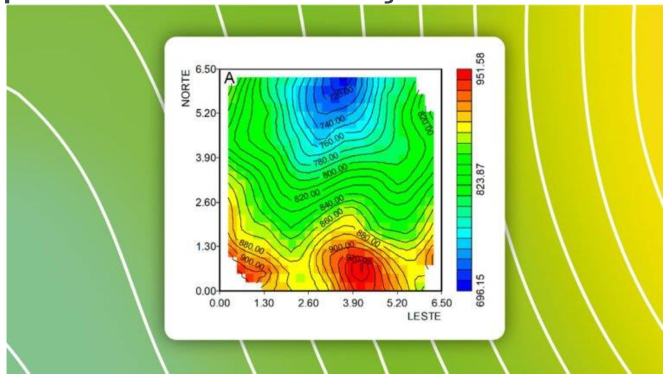
Calcular o volume para 65 km²

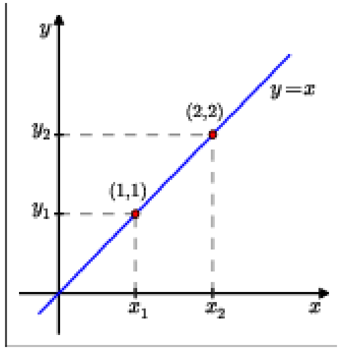
Aplicando-se semelhança de triângulos:

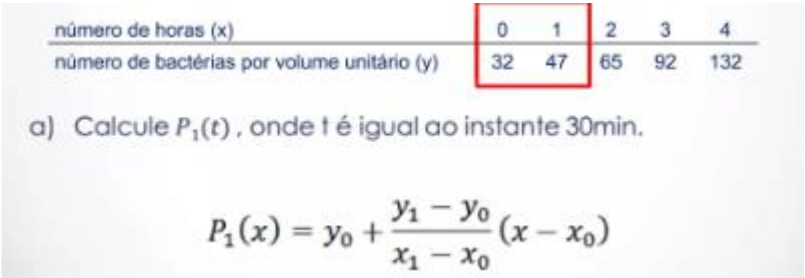
$$\frac{X-275}{450-275}=\frac{65-60}{80-60}$$

$$X=\frac{(65-60)\cdot(450-275)}{(80-60)}+275$$

•f pode ser uma função de mais de uma variável, mas consideraremos apenas o caso unidimensional.







número de horas (x)	0	1	2	3	4
número de bactérias por volume unitário (y)	32	47	65	92	132

a) Calcule $P_1(t)$, onde t é igual ao instante 30min.

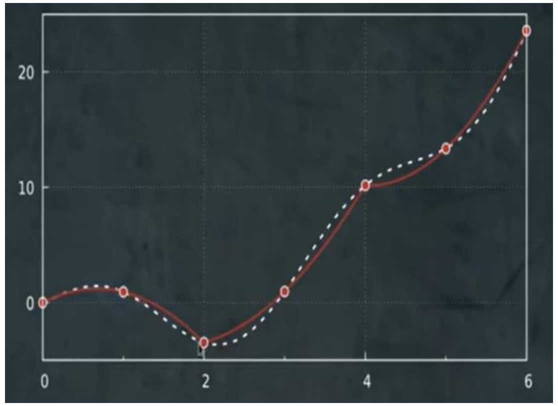
$$P_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

Paulo Yoshio Kubota

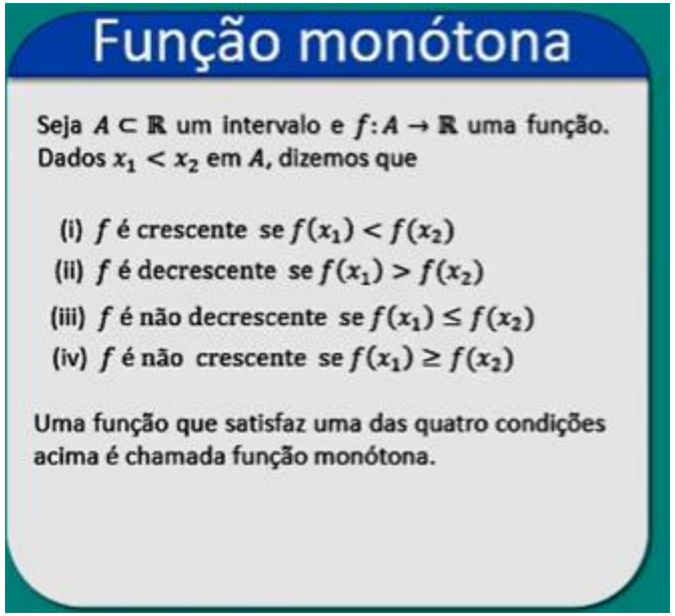
Interpolação

Problema Básico de Interpolação: Para dados:

•Restrições adicionais podem ser impostas, como a suavidade, monotonicidade ou **convexidade** da função interpoladora.



suavidade



Função monótona

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f: A \to \mathbb{R}$ uma função. Dados $x_1 < x_2$ em A, dizemos que

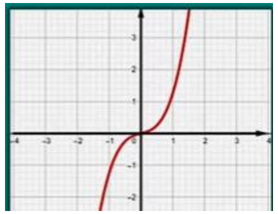
(i) f é crescente se $f(x_1) < f(x_2)$

(ii) f é decrescente se $f(x_1) > f(x_2)$

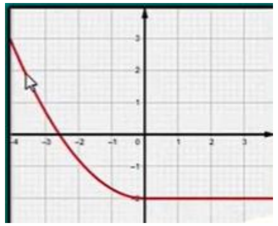
(iii) f é não decrescente se $f(x_1) \leq f(x_2)$

(iv) f é não crescente se $f(x_1) \geq f(x_2)$

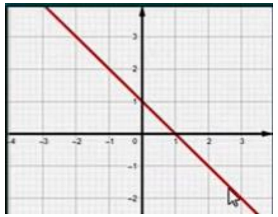
Uma função que satisfaz uma das quatro condições acima é chamada função monótona.



(i)

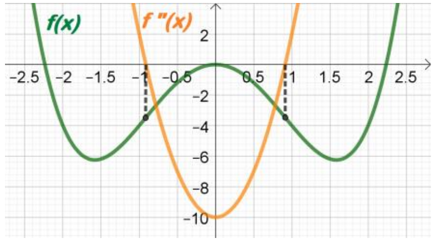


(iii)



(ii)

(iv)



convexidade

monotonicidade

Propósitos para Interpolação:

"A interpolação é útil para:

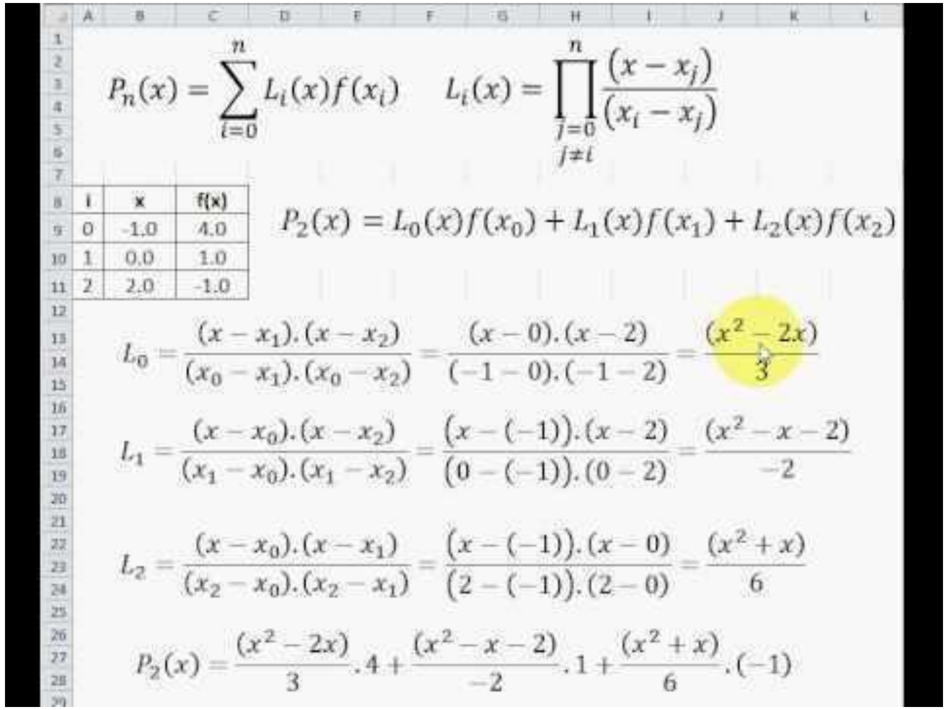
1.<u>**Traçar uma curva suave**</u> através de pontos de dados discretos.

2.**Gerar valores** entre as linhas de uma tabela.

3.**Diferenciar ou integrar** dados tabulares.

4.**Avaliar** rapidamente e facilmente funções matemáticas.

5.Substituir funções complicadas por funções simples."



$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

i	x	f(x)
0	-1.0	4.0
1	0.0	1.0
2	2.0	-1.0

$$P_2(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

$$L_0 = \frac{(x - x_1).(x - x_2)}{(x_0 - x_1).(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0).(x - 2)}{(-1 - 0).(-1 - 2)} = \frac{(x^2 - 2x)}{3}$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0).(x - x_2)}{(x_1 - x_0).(x_1 - x_2)} = \frac{(x - (-1)).(x - 2)}{(0 - (-1)).(0 - 2)} = \frac{(x^2 - x - 2)}{-2}$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0).(x - x_1)}{(x_2 - x_0).(x_2 - x_1)} = \frac{(x - (-1)).(x - 0)}{(2 - (-1)).(2 - 0)} = \frac{(x^2 + x)}{6}$$

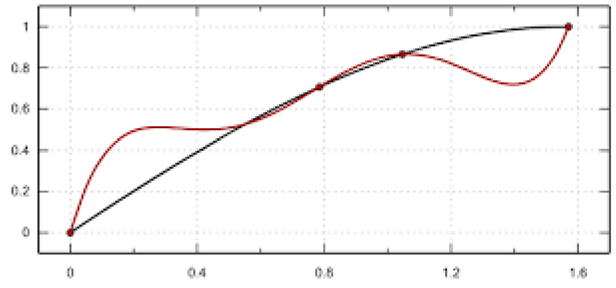
$$P_2(x) = \frac{(x^2 - 2x)}{3}.4 + \frac{(x^2 - x - 2)}{-2}.1 + \frac{(x^2 + x)}{6}.(-1)$$

Interpolação vs. Aproximação:

"

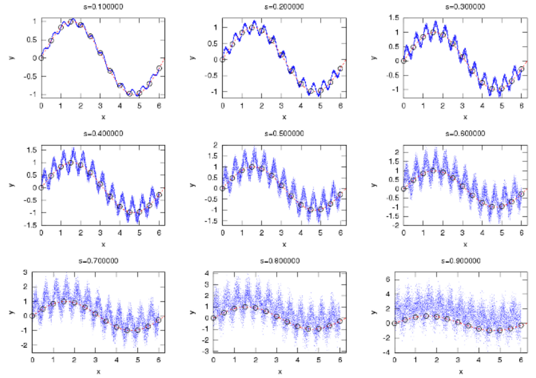
Por definição, a função de interpolação é dada exatamente aos pontos de dados

A *interpolação é inadequada se os pontos de dados estiverem sujeitos a erros significativos*



Geralmente é *preferível suavizar dados ruidosos*, por exemplo, por *aproximação de mínimos quadrados*

A aproximação também é mais apropriada para bibliotecas de funções especiais"



Desafios na Interpolação:

Muitas funções interpolam arbitrariamente um determinado conjunto de pontos de dados

- Que forma deve ter a função de interpolação?
- Como o interpolante deve se comportar entre os pontos de dados?
- O interpolante deve herdar propriedades dos dados, como monotonicidade, convexidade ou periodicidade?
- Os parâmetros que definem a função de interpolação são significativos?
- Se a função e os dados forem plotados, os resultados deverão ser visualmente agradáveis?

Escolha do Interpolante:

Escolha da função para interpolação com base em

Quão fácil é trabalhar com a função de interpolação:

1. **determinando seus parâmetros**
2. **avaliando interpolante**
3. **diferenciando ou integrando interpolante**

Quão bem as propriedades do interpolante correspondem às propriedades dos dados a serem ajustados (suavidade, monotonicidade, convexidade, periodicidade, etc.)

Funções para Interpolação

Famílias de funções comumente usadas para interpolação incluem:

- Polinômios
- Polinômios por partes
- Funções trigonométricas
- Funções exponenciais
- Funções racionais

Por enquanto vamos nos concentrar na interpolação por polinômios e polinômios por partes

Consideraremos a interpolação trigonométrica (DFT) mais tarde

Funções básicas

A família de funções para interpolar pontos de dados específicos é definida por um conjunto de funções de base, denotadas como $\phi_1(t)$, ..., $\phi_n(t)$

A **função interpolante** $f(t)$ é escolhida como uma **combinação linear das funções de base**.

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j \phi_j$$

Exigir que a função interpolante $f(t)$ ***interpole os dados*** (t_i, y_i) significa que a função $f(t)$ **deve satisfazer a seguinte condição** para cada ponto de dados (t_i, y_i)

$$f(t) = y_i \qquad f(t_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j \phi_j(t_i) = y_i \qquad i = 1, \dots, m$$

Este é um **sistema de equações lineares** $Ax = y$ para n-vetor x de parâmetros x_j, onde as entradas da matrix $m \ x \ n$ pode ser expresso da seguinte forma:

$$a_{ij} = \phi_j(t_i)$$

Existência, Singularidade e Condicionamento

A existência e a singularidade do interpolante depende do número de pontos de dados m e do **número de funções base** n

Se $m > n$, o interpolante geralmente **não existe**

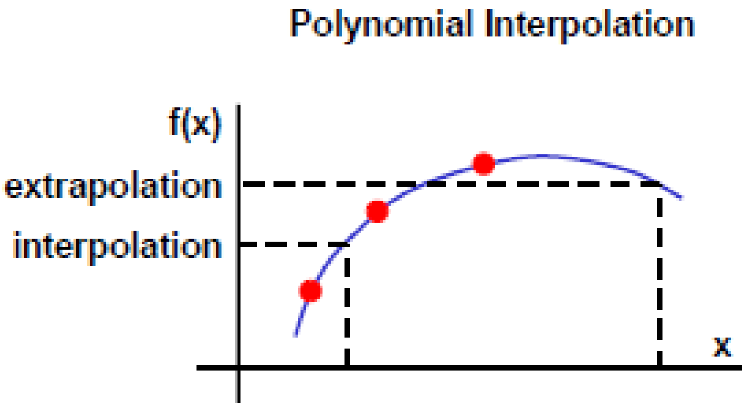
Se $m < n$, o interpolante **não é único**

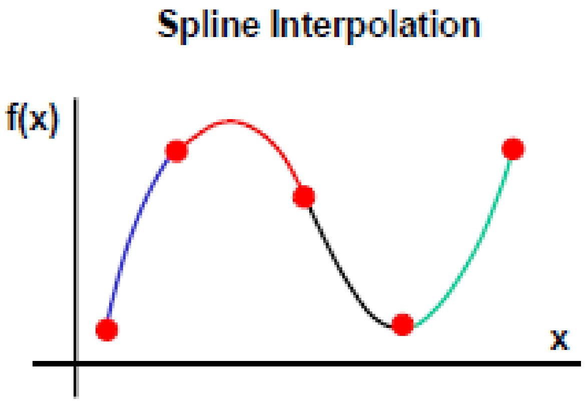
Se $m = n$, então a **matriz base A não é singular**, desde que os pontos de dados t_i sejam distintos, então os dados podem ser ajustados exatamente

A sensibilidade dos parâmetros x às perturbações nos dados depende de **Condicionamento**(A), que por sua vez depende da escolha das funções de base

Interpolação

- Estimando valores intermediários entre pontos de dados precisos.
- Primeiro, ***ajustamos uma função*** que passa exatamente pelos pontos de dados fornecidos e depois avaliamos os valores intermediários ***usando essa função***.





- Interpolação Polinomial: Um polinômio único de ordem n^{th}passa por n pontos.
- Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton
- Polinômios Interpoladores de Lagrange

- **Interpolação de Spline**: Passa diferentes curvas (na maioria das vezes de 3ª ordem) por diferentes subconjuntos dos pontos de dados.

Interpolação Polinomial

- Dados os seguintes $n + 1$ pontos de dados

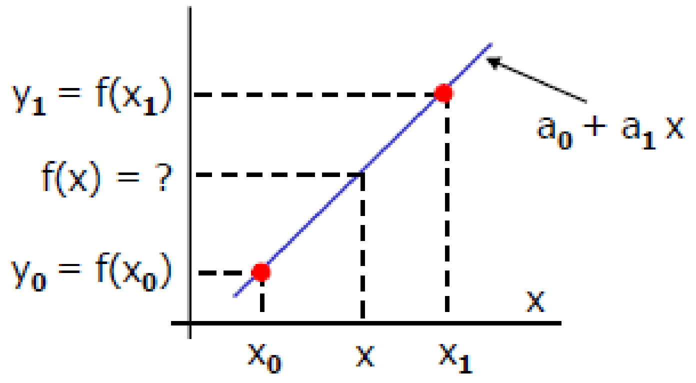
$$(x1, y1), (x2, y2), (x3, y3), \dots, (xn + 1, yn + 1)$$

existe um único polinômio de ordem n^{th} que passa por eles

$$p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

- A pergunta é encontrar os coeficientes a_0 , a_1 , . . ., a_n

- Interpolação Linear:



- Dado: (x0, y0) e (x1, y1)
- Uma reta passa por esses dois pontos.
- Usando triângulos semelhantes

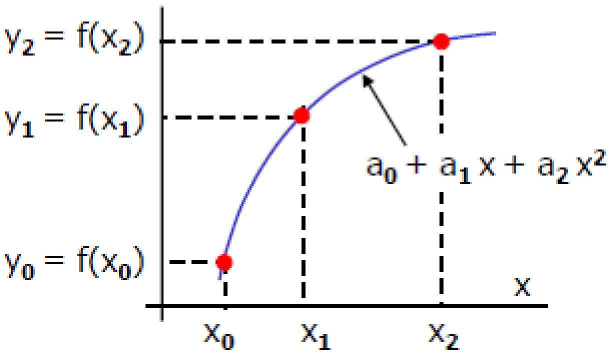
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = f(x_0) + \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\ \text{or} \\ f_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0) \end{array}}$$

Formula de interpolação linear

Interpolação Polinomial

- Interpolação Quadrática:



- Dado: (x0, y0), (x1, y1) e (x2, y2)
- Uma **parábola** passa por esses três pontos.
- Assim como no caso linear,

a equação dessa parábola pode ser escrita como

$$\boxed{f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)}$$

Fórmula de interpolação quadrática

- Como encontrar b0, b1 e b2 em termos das quantidades fornecidas?

- at $x = x_0$ $\quad f_2(x) = f(x_0) = b_0 \quad \rightarrow \quad b_0 = f(x_0)$

- at $x = x_1$ $\quad f_2(x) = f(x_1) = b_0 + b_1 x_1 \quad \rightarrow \quad b_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

- at $x = x_2$ $\quad f_2(x) = f(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \quad \rightarrow \quad b_2 = \dfrac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

• Podemos **generalizar as fórmulas** de interpolação linear e quadrática para um polinômio de ordem n que passa por $n+1$ pontos

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

onde as constantes são

$$b_0 = f(x_0) \qquad b_1 = f[x_1, x_0] \qquad b_2 = f[x_2, x_1, x_0] \qquad \ldots \qquad b_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

onde as funções entre colchetes são diferenças divididas finitas avaliadas de forma recursiva.

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \qquad 1^{st} \text{ finite divided difference}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \qquad 2^{nd} \text{ finite divided difference}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]}{x_n - x_0} \qquad n^{th} \text{ finite divided difference}$$

ota

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

- O polinômio interpolador de Newton de ordem n é:

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)\,f[x_2, x_1, x_0] + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\,f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

Exemplo 29:

A seguinte tabela logarítmica é fornecida.

x	f(x)=log(x)
4.0	0.60206
4.5	0.6532125
5.5	0.7403627
6.0	0.7781513

(a) Interpole log(5) usando os pontos x=4 e x=6.
(b) Interpole log(5) usando os pontos x=4.5 e x=5.5.
(c) Observe que o valor exato é log(5) = 0,69897.

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \qquad 1^{st} \text{ finite divided difference}$$

(a) Interpolação linear. $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_1, x_0]$

$$x_0 = 4,\ \ x_1 = 6 \quad \rightarrow \quad f[x_1, x_0] = [f(6) - f(4)] \,/\, (6 - 4) = 0.0880046$$

$$f(5) \approx f(4) + (5 - 4)\, 0.0880046 = 0.690106 \qquad \varepsilon_t = 1.27\ \%$$

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

Exemplo 29:

A seguinte tabela logarítmica é fornecida.

x	f(x)=log(x)
4.0	0.60206
4.5	0.6532125
5.5	0.7403627
6.0	0.7781513

(a) Interpole log(5) usando os pontos x=4 e x=6.
(b) Interpole log(5) usando os pontos x=4.5 e x=5.5.
(c) Observe que o valor exato é log(5) = 0,69897.

$$\boxed{f[x_i, x_j]} = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad 1^{st} \text{ finite divided difference}$$

(b) Novamente interpolação linear. Mas desta vez

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\boxed{f[x_1, x_0]}$$

$$x_0 = 4.5,\ \ x_1 = 5.5 \ \ \rightarrow \ \ f[x_1, x_0] = [f(5.5) - f(4.5)] / (5.5 - 4.5) = 0.0871502$$

$$f(5) \approx f(4.5) + (5 - 4.5)\, 0.0871502 = 0.696788 \qquad \varepsilon_t = 0.3\ \%$$

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

Exemplo 29 (continuação):

x	f(x)=log(x)
4.0	0.6020600
4.5	0.6532125
5.5	0.7403627
6.0	0.7781513

(c) Interpole log(5) usando os pontos x=4.5, x=5.5 e x=6.

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$ 2nd finite divided difference

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$ 1st finite divided difference

(c) Interpolação quadrática.

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_2, x_1, x_0]$$

$$x_0 = 4.5,\ x_1 = 5.5\ ,\ x_2 = 6 \rightarrow \quad f[x_1, x_0] = 0.0871502$$

$$f[x_2, x_1] = [f(6) - f(5.5)] / (6 - 5.5) = 0.0755772$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]\} / (6 - 4.5) = -0.0077153$$

$$f(5) \approx 0.696788 + (5 - 4.5)(5 - 5.5)\,(-0.0077153) = 0.698717 \qquad \varepsilon_t = 0.04\ \%$$

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

- Observe que 0,696788 foi calculado com a interpolação linear (b)
- Os ***erros diminuem quando os pontos usados estão mais próximos do ponto interpolado***.
-
- Os **erros diminuem à medida que o grau do polinômio interpolador aumenta**.

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

Tabela de Diferenças Divididas Finitas (FDD)

As diferenças divididas finitas utilizadas nos Polinômios Interpoladores de Newton podem ser apresentadas em forma de tabela. Isso facilita muito os cálculos.

x	$f(\ )$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$
x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$			

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

Tabela de Diferenças Divididas Finitas (FDD)

Exercício 27: As duas primeiras colunas da tabela a seguir são fornecidas. Calcule as diferenças divididas finitas ausentes..

x	f( )	f[,]	f[, ,]	f[, , ,]
4	0.6020600	?	?	?
4.5	0.6532125	?	?	
5.5	0.7403627	?		
6	0.7781513			

• Os números diminuem à medida que avançamos na tabela para a direita. Isso significa que a contribuição dos termos de ordem superior é menor do que a dos termos de ordem inferior.

• Isso é esperado. O ***comportamento oposto é um indicativo de uma interpolação inadequada***.

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

Tabela de Diferenças Divididas Finitas (FDD)

exemplo

x	f( )	f[,]	f[, ,]	f[, , ,]
4	0.6020600	0.1023050	-0.0101032	0.001194
4.5	0.6532125	0.0871502	-0.0077153	
5.5	0.7403627	0.0755772		
6	0.7781513			

(a) Usando os pontos x=4 e x=4.5.

log (5) ≈ 0,60206 + (5 - 4) * 0,102305 = 0,704365; ε_t = 0,8 % (isso é extrapolação)

(b) Usando os pontos x=4,5 e x=5,5.

log (5) ≈ 0,6532125 + (5 - 4,5) * 0,0871502 = 0,696788; ε_t = 0,3 %

(c) Usando os pontos x=4 e x=6.

As entradas da tabela acima não podem ser usadas para essa interpolação.

(d) Usando os pontos x=4,5 , x=5,5 e x=6.

log (5) ≈ 0,6532125 + (5-4,5) * 0,0871502 + (5-4,5)(5-5,5)(-0,0077153) = 0,698717; ε_t = 0,04 %

(e) Usando todos os quatro pontos.

log (5) ≈ 0,60206 + (5 - 4) * 0,102305 + (5 - 4)(5 - 4,5)(-0,0101032)(5 - 4)(5 - 4,5)(5 – 5,5)(0,001194) = 0,6990149; ε_t = 0,006 %

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

Exercicio:

x	f( )
-2	-0.909297
-1	-0.841471
0	0.000000
1	0.841471
3	0.141120
4	-0.756802
6	-0.279415

Para criar a tabela de Diferenças Finitas Divididas (FDD) para o conjunto de dados fornecido e interpolar para f(2), primeiro construiremos a tabela FDD usando os pontos de dados fornecidos. Em seguida, realizaremos interpolações lineares, quadráticas e cúbicas para f(2) usando os pontos especificados.

Importante: Sempre tente colocar o ponto interpolado no centro dos pontos usados para a interpolação.

- Para uma interpolação linear, utilize os pontos x=1 e x=3.
- Para uma interpolação quadrática, você pode usar os pontos x=0, x=1 e x=3 ou os pontos x=1, x=3 e x=4.
- Para uma interpolação cúbica de terceira ordem, utilize os pontos x=0, x=1, x=3 e x=4.

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

Exercicio:

Complete a seguinte tabela dada para a função log. Você observa algo estranho? Comente.

x	f( )	f[,]	f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]	f[, , , , ,]
0.5						
1						
3						
5						
8						
10						

Interpolação Polinomial

Erros da Interpolação de Newton com Diferenças Divididas

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0] + \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

A estrutura dos Polinômios Interpoladores de Newton é semelhante à série de Taylor.

O termo "remainder" (ou erro de truncamento) para a série de Taylor $R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1}$

- Da mesma forma, o resto do polinômio de interpolação de enésima ordem é

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

onde ξ está em algum lugar no intervalo que contém o ponto interpolado x e outros pontos de dados reformulação dos Polinômios Interpoladores de Newton.

Interpolação Polinomial

Os Polinômios Interpoladores de Lagrange

- É uma reformulação dos Polinômios Interpoladores de Newton.

$$\boxed{f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \quad \text{where} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}$$

- Para n=1 (linear): $f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$

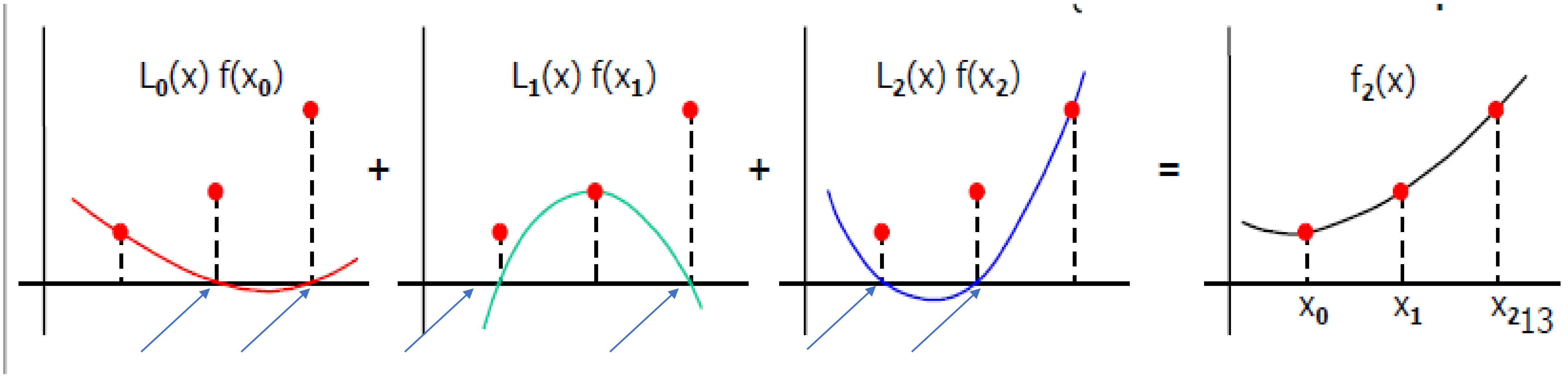
- Para n=2 (quadrático): $f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$

Interpolação Polinomial

Os Polinômios Interpoladores de Lagrange

- Para generalizar, um polinômio de ordem n é a soma de (n+1) polinômios de ordem n.
- Cada um desses polinômios de ordem n tem um valor de 1 em um dos pontos de fornecidos e **valores de 0 em todos os outros pontos de fornecidos**.
- Isso ocorre devido à seguinte propriedade das funções de Lagrange.

$$L_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{at} \quad x = x_i \\ 0 & \text{at} \quad \text{all other data points} \end{cases}$$



Interpolação Polinomial

Os Polinômios Interpoladores de Lagrange

"Exemplo

x	f(x)
1	4.75
2	4.00
3	5.25
5	19.75
6	36.00

"Calcule f(4) usando Polinômios Interpoladores de Lagrange
(a) de ordem 1
(b) de ordem 2
(c) de ordem 3"

(a) Interpolação linear. Selecione $x_0 = 3$, $x_1 = 5$

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$f_1(x) = L_0(x)\, f(x_0) + L_1(x)\, f(x_1)$$

$$f_1(x) = (x\text{-}5)/(3\text{-}5)\ 5.25 + (x\text{-}3)/(5\text{-}3)\ 19.75$$

$$f(4) \approx 12.5$$

Interpolação Polinomial

Os Polinômios Interpoladores de Lagrange

"Exemplo

x	f(x)
1	4.75
2	4.00
3	5.25
5	19.75
6	36.00

"Calcule f(4) usando Polinômios Interpoladores de Lagrange
(a) de ordem 1
(b) de ordem 2
(c) de ordem 3"

(b) Interpolação quadrático. Selecione $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$

$$f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$f_2(x) = L_0(x)\, f(x_0) + L_1(x)\, f(x_1) + L_2(x)\, f(x_2)$$

$$f_2(x) = (x-3)(x-5)/(2-3)(2-5)\ 4.00 + (x-2)(x-5)/(3-2)(3-5)\ 5.25 + (x-2)(x-3)/(5-2)(5-3)\ 19.75$$

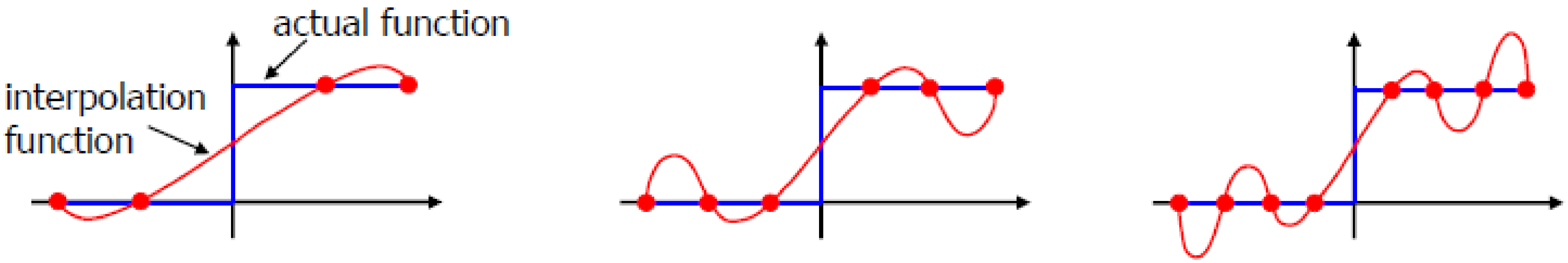
$$f(4) \approx 10.5$$

Interpolação Polinomial

"Interpolação por Spline"

• **Aprendemos** como ***interpolar entre n+1 pontos de dados usando polinômios de ordem) n*** (Newton e Legendre.

• Para um **grande número de pontos de dados** (tipicamente n > 6 ou 7), polinômios (Newton e Legendre) de **alta ordem são necessários**, mas às vezes eles sofrem de comportamento oscilatório.



• **Em vez de usar um único polinômio de alta ordem** que passa por todos os pontos de dados, ***podemos usar diferentes polinômios de ordem mais baixa*** entre cada par de dados.

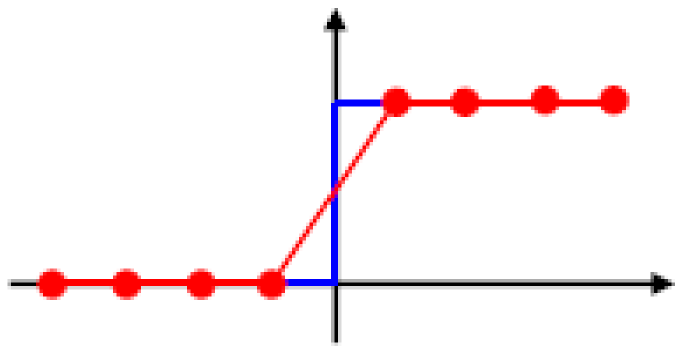
• Esses *polinômios de ordem mais baixa*, que **passam apenas por dois pontos**, são ***chamados de splines***.

• Os **splines de terceira ordem (cúbicos)** são os mais preferidos.

Interpolação Polinomial

"Interpolação por Spline"

"Splines de primeira ordem:"

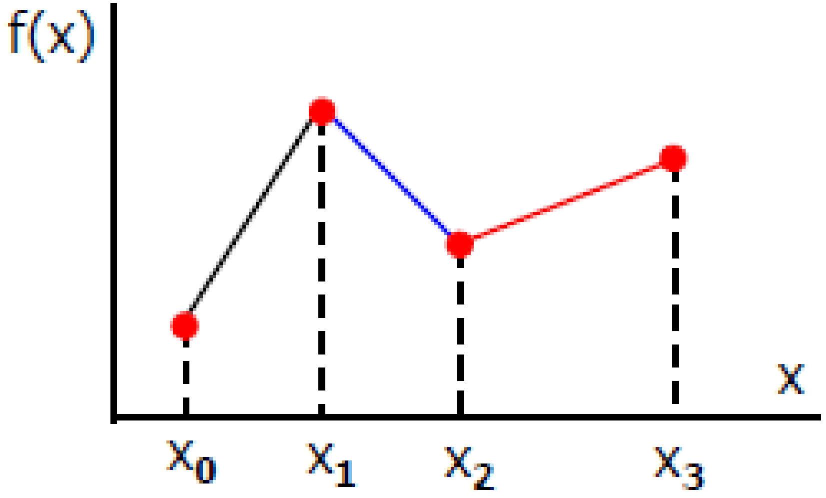


Interpolação Polinomial

"Interpolação por Spline"

"Splines Lineares:"

- Dado um conjunto de pontos de dados ordenados, cada par de pontos pode ser conectado usando **uma linha reta**.



$$f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) \qquad \text{for } x_0 \le x \le x_1$$

$$f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1) \qquad \text{for } x_1 \le x \le x_2$$

$$f(x) = f(x_2) + m_2(x - x_2) \qquad \text{for } x_2 \le x \le x_3$$

"onde as inclinações são $m_i = [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \,/\, (x_{i+1} - x_i)$

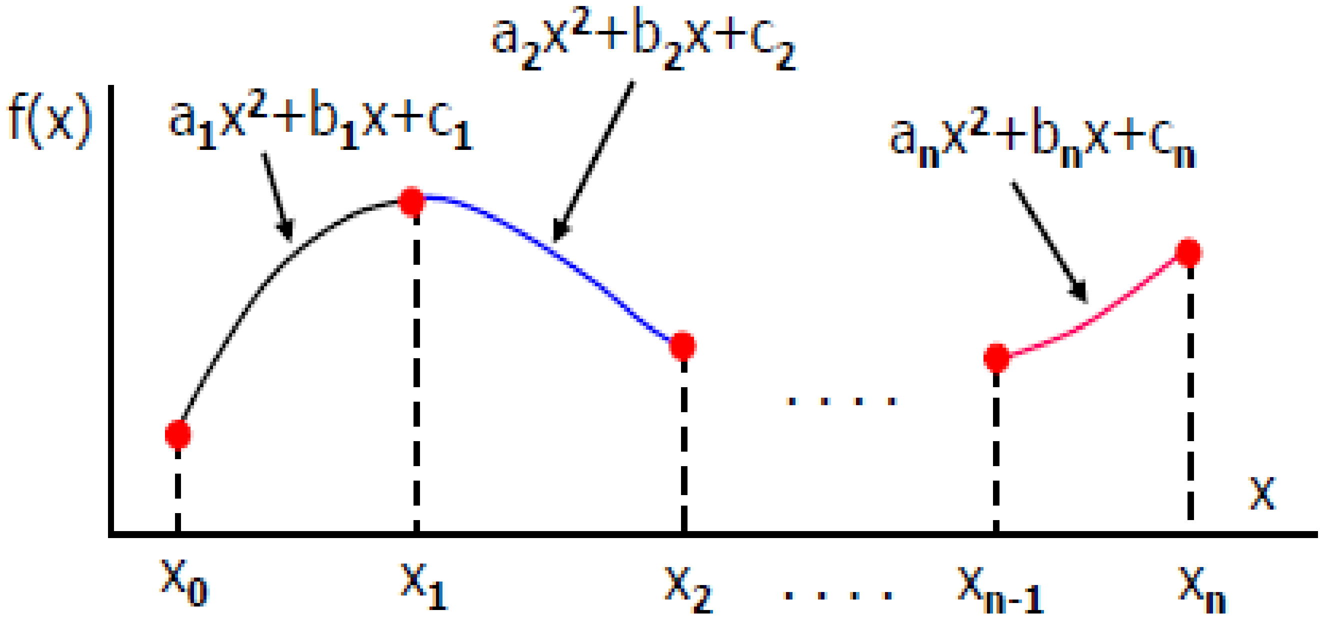
- As **funções não são contínuas** nos pontos interiores."

Interpolação Polinomial

"Interpolação por Spline"

"Splines Quadráticos:"

- Cada par de pontos de dados é conectado usando funções quadráticas.

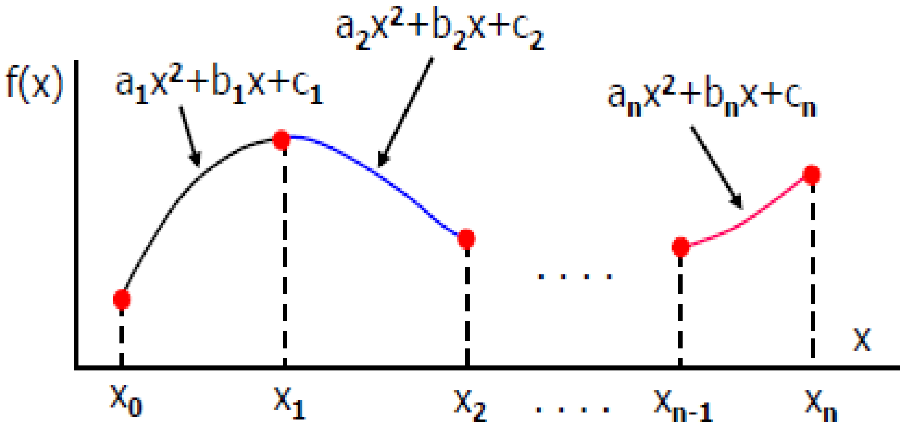


- Para n+1 pontos de dados, existem n splines e 3n constantes desconhecidas.
- Precisamos de 3n equações para resolvê-las.

Interpolação Polinomial

"Splines Quadráticos:"

- Essas 3n equações são



- As primeiras e últimas funções devem passar pelos pontos inicial e final (2 equações).

$$\boxed{\begin{array}{c} a_1\, x_0^2 + b_1\, x_0 + c_1 = f(x_0) \\ a_n\, x_n^2 + b_n\, x_n + c_n = f(x_n) \end{array}}$$

- Os valores das funções devem ser iguais nos pontos interiores (2n-2 equações).

$$\boxed{\begin{array}{c} a_{i-1}\, x_{i-1}^2 + b_{i-1}\, x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1}) \\ a_i\, x_{i-1}^2 + b_i\, x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1}) \end{array}}$$

For i=2 to n

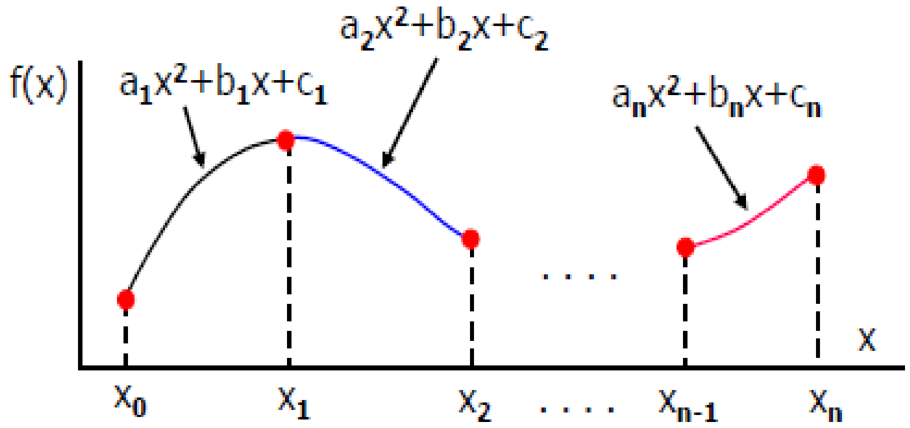
- As primeiras derivadas devem ser iguais nos pontos interiores (n-1 equações).

$$\boxed{2\, a_{i-1}\, x_{i-1} + b_{i-1} = 2\, a_i\, x_{i-1} + b_i}$$

for i = 1 to n

Interpolação Polinomial

"Splines Quadráticos:"



• Isso resulta em um total de 3n-1 equações. **Uma equação adicional é necessária**, e precisamos fazer uma **escolha arbitrária**. Entre muitas possibilidades, usaremos a seguinte:

• Tome a ***segunda derivada no primeiro ponto como zero*** (1 equação).

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$

$$2a_1x_0 + b_1 = f'(x_0)$$

$$2a_1 = f''(x_0) = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$\boxed{a_1 = 0}$$

ou seja, **os dois primeiros pontos são conectados por uma linha reta**.

$$b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$

• ***Resolva esse conjunto de 3n equações lineares***.

Interpolação Polinomial

"Splines Quadráticos:"

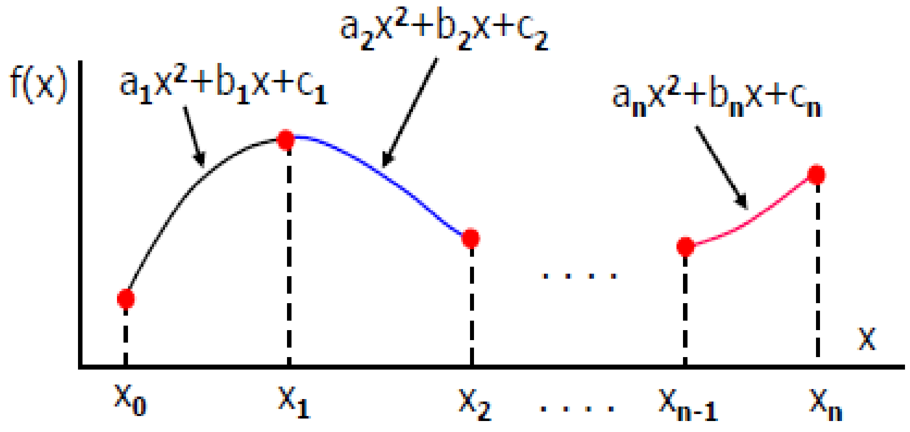
$$\boxed{a_1 = 0}$$

$$b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 &= f(x_0) \\ a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n &= f(x_n) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{i-1} x_{i-1}^2 + b_{i-1} x_{i-1} + c_{i-1} &= f(x_{i-1}) \\ a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i &= f(x_{i-1}) \end{aligned}}$$

$$\boxed{2 a_{i-1} x_{i-1} + b_{i-1} = 2 a_i x_{i-1} + b_i} \qquad \text{for } i = 1 \text{ to } n$$



- ***Resolva esse conjunto de 3n equações lineares***.

Interpolação Polinomial

"Splines Cúbicos:"

- Para n+1 pontos, haverá n intervalos e para cada intervalo haverá um polinômio de 3ª ordem.

$$a_i x_i^3 + b_i x_i^2 + c_i x + d_i \qquad \text{for } i = 1 \text{ to } n$$

- No total, há 4n incógnitas. Elas podem ser resolvidas usando as seguintes equações:
- As primeiras e últimas funções devem passar pelos pontos finais (2 equações).
- Os valores das funções devem ser iguais nos pontos interiores (2n-2 equações).
- As primeiras derivadas devem ser iguais nos pontos interiores (n-1 equações).
- As segundas derivadas devem ser iguais nos pontos interiores (n-1 equações).
- Isso resulta em um total de 4n-2 equações. Duas equações extras são (outras escolhas são possíveis):
- As segundas derivadas nos pontos finais são iguais a zero (2 equações).

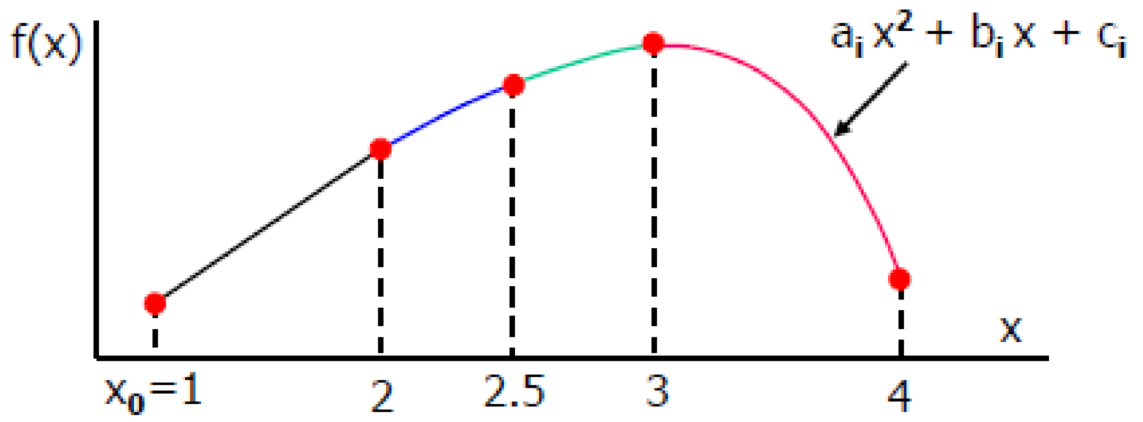
- Montar e resolver 4n equações é custoso. Há outra maneira de construir splines cúbicos que resulta em apenas n-1 equações com n-1 incógnitas. Consulte as páginas 502-503 do livro

Interpolação Polinomial

Exemplo "Splines Cúbicos:"

x	f(x)
1	1
2	5
2.5	7
3	8
4	2

Desenvolva splines quadráticos para esses pontos de dados e preveja f(3,4) e f(2,2).



- Existem 5 pontos e n=4 splines. No total, há 3n=12 incógnitas. As equações são:
- Pontos finais:

$$a_1 1^2 + b_1 1 + c_1 = 1 \quad , \quad a_4 4^2 + b_4 4 + c_4 = 2$$

- Pontos interiores:

$$a_1 2^2 + b_1 2 + c_1 = 5 \quad , \quad a_2 2^2 + b_2 2 + c_2 = 5$$

$$a_2 2.5^2 + b_2 2.5 + c_2 = 7, \quad a_3 2.5^2 + b_3 2.5 + c_3 = 7$$

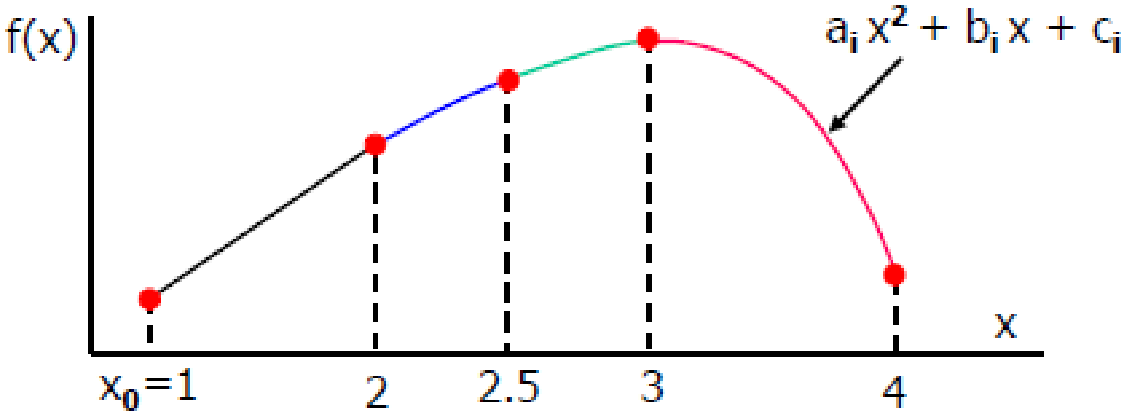
$$a_3 3^2 + b_3 3 + c_3 = 8 \quad , \quad a_4 3^2 + b_4 3 + c_4 = 8$$

Interpolação Polinomial

Examplo "Splines Cúbicos:"

Desenvolva splines quadráticos para esses pontos de dados e preveja f(3,4) e f(2,2).

x	f(x)
1	1
2	5
2.5	7
3	8
4	2



- Existem 5 pontos e n=4 splines. No total, há 3n=12 incógnitas. As equações são:
- Derivadas nos pontos interiores:

$$2a_1 2 + b_1 = 2a_2 2 + b_2$$

$$2a_2 2.5 + b_2 = 2a_3 2.5 + b_3$$

$$2a_3 3 + b_3 = 2a_4 3 + b_4$$

- Escolha arbitrária para a equação ausente:

$$a_1 = 0$$

Interpolação Polinomial

Examplo "Splines Cúbicos:"

- a1=0 já é conhecido. Resolva para as outras 11 incógnitas restantes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.25 & 2.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.25 & 2.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & -5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \\ -4 \\ 24 \\ -28 \\ -6 \\ 36 \\ 46 \end{Bmatrix}$$

Interpolação Polinomial

Examplo "Splines Cúbicos:"

- $a1=0$ já é conhecido. Resolva para as outras 11 incógnitas restantes

- As equações para os splines são:

1º spline: $f(x) = 4x - 3$ (Linha reta.)
2º spline: $f(x) = 4x - 3$ (A mesma que a 1ª. Coincidência)
3º spline: $f(x) = -4x^2 + 24x - 28$
4º spline: $f(x) = -6x^2 + 36x - 46$

Agora que você tem as equações para os splines, você pode usar essas fórmulas para calcular os valores de f(3.4) e f(2.2) substituindo os valores de x correspondentes nas equações dos splines.

- Para prever f(3.4), use o 4º spline. $f(3.4) = -6 (3.4)^2 + 36 (3.4) - 46 = 7.04$
- Para prever f(2.2), use o 2º spline. $f(2.2) = 4 (2.2) - 3 = 5.8$