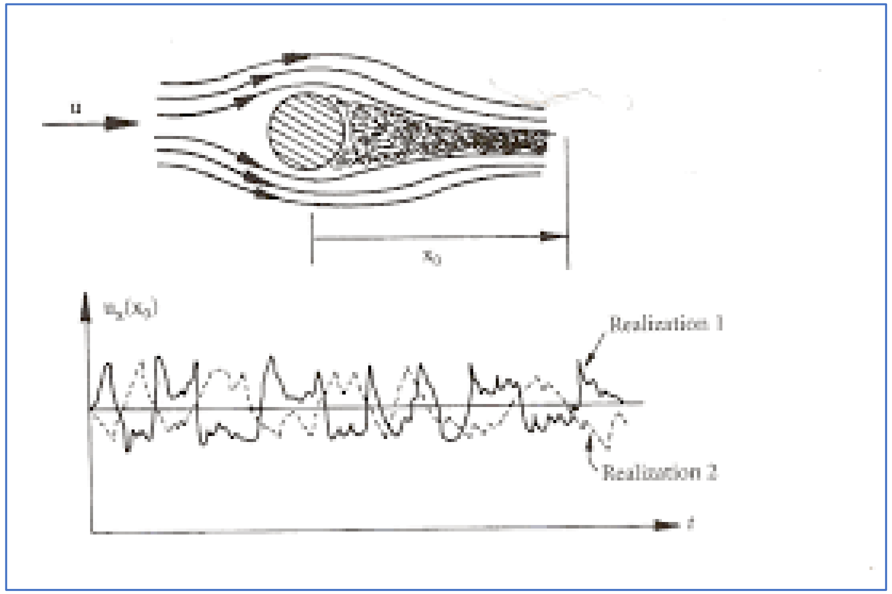
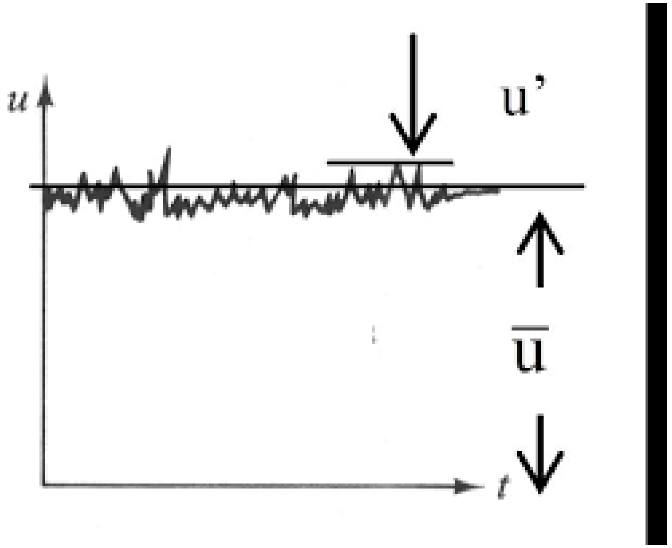
Linear Perturbation Theory

Paulo Yoshio Kubota

No método de perturbação, todas as variáveis de campo são divididas em duas partes:

- uma porção de estado básico, que geralmente se presume ser independente de tempo e longitude,
- e uma porção de perturbação, que é o desvio local do campo em relação ao estado básico.





Assim, por exemplo, se $\bar{u}$ designa uma velocidade zonal média em tempo e longitude, e u' é a diferença dessa média,

Atmospheric Oscillations:

Então o campo da velocidade zonal completa é $u(x,t) = \bar{u} + u'$(x, t)

Neste caso, **por exemplo a aceleração inercial** $\left[u\frac{\partial u}{\partial x}\right]$ pode ser escrita

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = (\bar{u} + u')\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} = \left(\bar{u}\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + u'\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x}\right) = \left(\bar{u}\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x} + \bar{u}\frac{\partial(u')}{\partial x} + u'\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x} + u'\frac{\partial(u')}{\partial x}\right)$$

$$\overline{u\frac{\partial u}{\partial x}} = \left(\bar{\bar{u}}\frac{\partial(\bar{\bar{u}})}{\partial x} + \bar{\bar{u}}\frac{\partial(\overline{u'})}{\partial x} + \overline{u'}\frac{\partial(\bar{\bar{u}})}{\partial x} + \overline{u'\frac{\partial(u')}{\partial x}}\right)$$

$$\overline{u'} = 0$$

$$\overline{u\frac{\partial u}{\partial x}} = \bar{\bar{u}}\frac{\partial(\bar{\bar{u}})}{\partial x} + \overline{u'\frac{\partial(u')}{\partial x}}$$

$$\overline{\mathrm{u}\frac{\partial u}{\partial x}} = \bar{\bar{u}}\frac{\partial(\bar{\bar{u}})}{\partial x} + \overline{u'\frac{\partial(u')}{\partial x}}$$

As ***<u>suposições básicas da teoria de perturbação</u>*** são que **as variáveis do estado básico devem satisfazer as equações governantes quando as perturbações são definidas como zero**, e os campos de perturbação devem ser pequenos o suficiente para que todos os termos nas equações governantes que envolvem produtos das perturbações possam ser negligenciados.

A ***<u>última exigência seria atendida</u>*** no exemplo acima se $\left|\frac{u'}{\bar{u}}\right| \ll 1$.Tal que

$$\left|\bar{u}\frac{\partial(u')}{\partial x}\right| \gg \left|u'\frac{\partial(u')}{\partial x}\right|$$

$$\overline{u\frac{\partial u}{\partial x}} = \bar{\bar{u}}\frac{\partial(\bar{\bar{u}})}{\partial x} + \overline{u'\frac{\partial(u')}{\partial x}}$$

Se ***os termos que são produtos das variáveis de perturbação forem negligenciados***, as equações governantes não lineares são *reduzidas* a **equações diferenciais lineares nas variáveis de perturbação**, nas quais as variáveis do estado básico são coeficientes especificados.

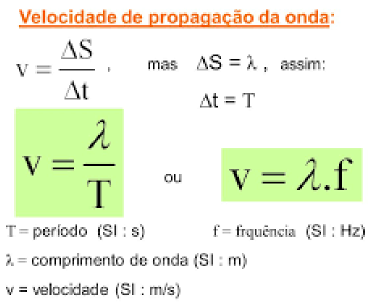
$$\overline{u\frac{\partial u}{\partial x}} = \bar{\bar{u}}\frac{\partial(\bar{\bar{u}})}{\partial x}$$

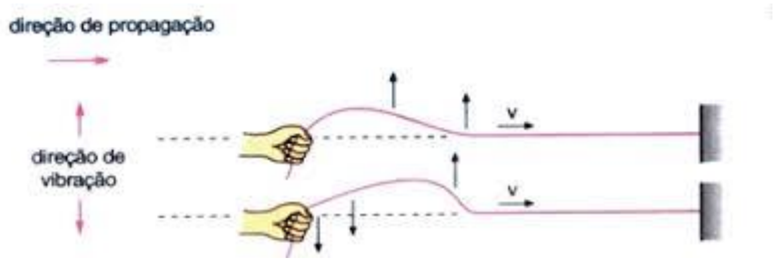
Essas equações podem ser resolvidas por métodos padrão para determinar o caráter e a estrutura das perturbações em termos do estado básico conhecido.

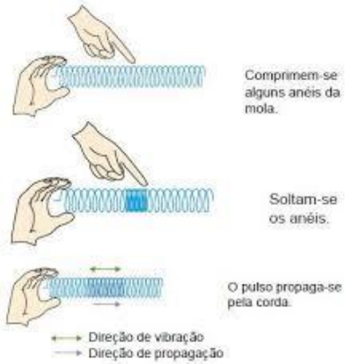
Para equações com coeficientes constantes, as soluções têm caráter sinusoidal ou exponencial.

Atmospheric Oscillations:

A solução das equações de perturbação então determina características como a velocidade de propagação, a estrutura vertical e as condições para o crescimento ou decaimento das ondas.







A técnica de perturbação é especialmente útil no estudo da estabilidade de um fluxo de estado básico dado em relação a pequenas perturbações sobressalentes.

PROPRIEDADES DAS ONDAS

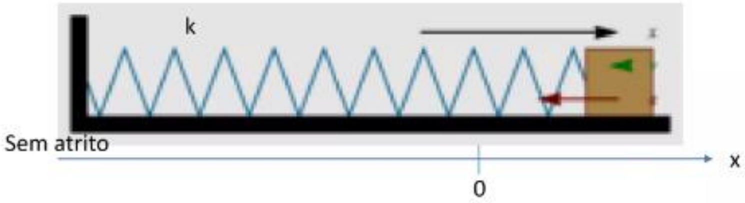
Os ***movimentos das ondas*** são **oscilações nas variáveis de campo** (como velocidade e pressão) que se **propagam no espaço e no tempo**.

Estamos preocupados com os movimentos de ondas senoidais lineares. .

Muitas das propriedades mecânicas de tais ondas também são características de um sistema familiar, o oscilador harmônico linear.

Uma propriedade importante do oscilador harmônico é que o período, ou o tempo necessário para executar uma única oscilação, é independente da amplitude da oscilação.

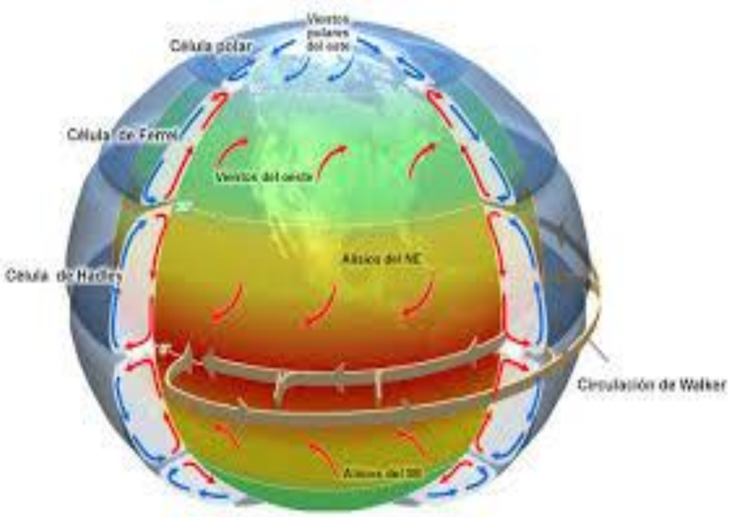
- Sistema massa-mola
  - Oscilador harmônico linear simples

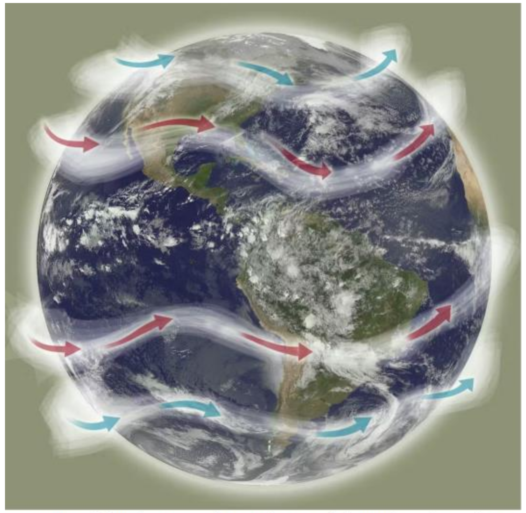


$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

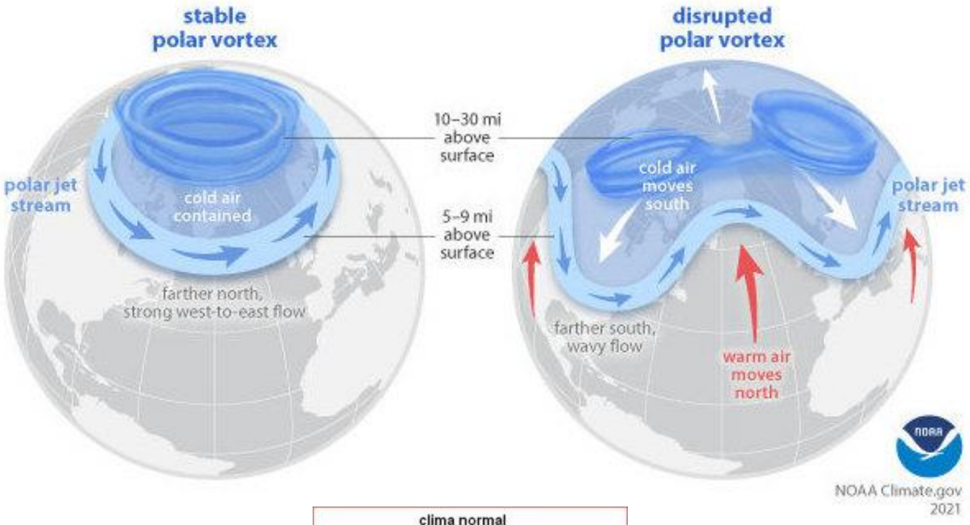
Atmospheric Oscillations:

Para a maioria dos sistemas vibratórios naturais, essa condição é válida apenas para oscilações de amplitude suficientemente pequena.





As correntes de jato são correntes de vento forte nos níveis superiores da atmosfera



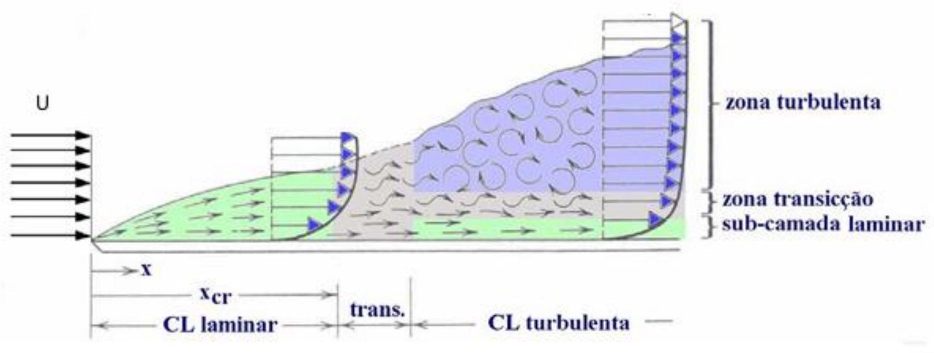
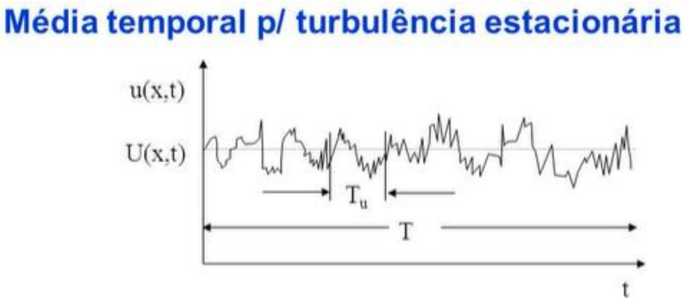
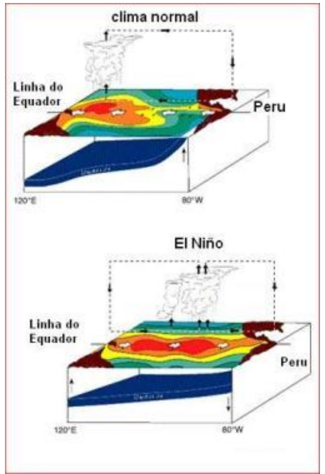


Fig. 2- Camada limite numa placa plana, onde CL (camada limite).





Paulo Yoshio Kubota

O exemplo clássico de tal sistema é o pêndulo simples (Fig. 7.1), que consiste em **uma massa *M*** suspensa por **uma corda sem massa de comprimento *l***, livre para realizar pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio $\theta = 0$.

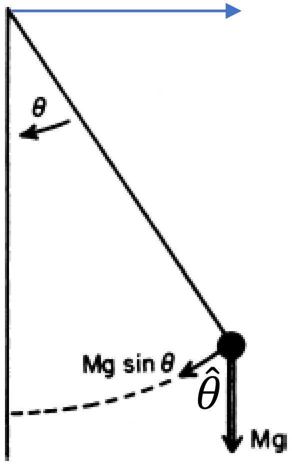
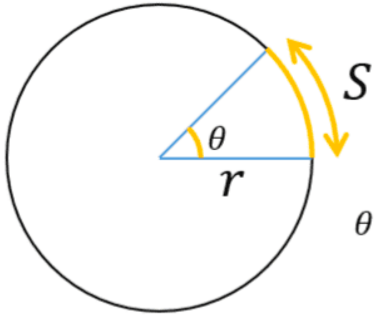


Fig. 7.1 A simple pendulum.

$$\vec{F}_{peso} = M\vec{g}$$

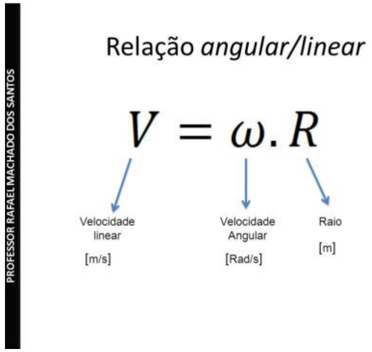
O componente da força gravitacional paralelo à direção do movimento é $F = -Mg\ sen\ \theta$.
Portanto, a equação do movimento para a massa M é:



$$\theta = \frac{S}{r}$$

$$S = r\theta$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = r\frac{\partial \theta}{\partial t}$$



$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = r\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$\vec{a} = r\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{peso} = M\vec{g}$$

$$M\vec{a} = \vec{F}_{peso} = M\vec{g}$$

$$Ml\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -M\ g\ sin(\theta)$$

Paulo Yoshio Kubota

$$Ml\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -M\ g\ sin(\theta)$$

Agora, para pequenos deslocamentos, $sin(\theta) = \theta$, de modo que a equação governante se torna:

$$Ml\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -M\ g\theta$$

$$l\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -\ g\theta$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \ v^2\theta = 0 \qquad (7.1)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \upsilon^2\theta = 0 \qquad (7.1)$$

onde υ^2 ≡ g/l. A equação do oscilador harmônico (7.1) tem a solução geral:

$$\theta = \theta_1 \cos \upsilon t + \theta_2 \sin \upsilon t$$

$$\theta = \theta_0 \cos(\upsilon t - \alpha)$$

onde θ_1, θ_2, θ_0 e α **são constantes determinadas pelas condições iniciais** e υ é a frequência de oscilação.

A **solução completa pode**, portanto, ser **expressa em termos de uma amplitude** θ_0 e uma fase $\phi(t) = \nu t - \alpha$.

A fase varia linearmente no tempo por um fator de **2π radianos** por período de onda.

Ondas propagantes também podem ser caracterizadas por suas *amplitudes* e fases.

Em ***uma onda propagante***, no entanto, **a fase depende não apenas do tempo**, ***mas também de uma ou mais variáveis espaciais***.

Assim, para **uma onda unidimensional** que se propaga na direção x, $\phi(x,t) = kx - \nu t - \alpha$.

Aqui, o número de onda, k, é definido como 2π dividido pelo comprimento de onda.

Para ondas propagantes, a fase é constante para um observador se movendo na velocidade de fase $c \equiv \nu/k$.

Isso pode ser verificado observando que, **se a fase deve permanecer constante acompanhando o movimento**,

$$\frac{D\phi}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{D}{Dt}(kx - \upsilon t - \alpha) = 0$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = k\frac{Dx}{Dt} - \upsilon = 0$$

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{\upsilon}{k} = c$$

Assim, $\boldsymbol{Dx/Dt = c = \upsilon/k}$ **para que a fase permaneça constante**.

Para $\upsilon > 0$ e $k > 0$, temos $c > 0$.

Nesse caso, se $\alpha = 0$, $\phi = k(x - ct)$, de modo que **x deve aumentar com o aumento de t** para que φ permaneça constante.

A fase, então, se propaga na direção positiva, como ilustrado para uma onda senoidal na Fig. 7.2.

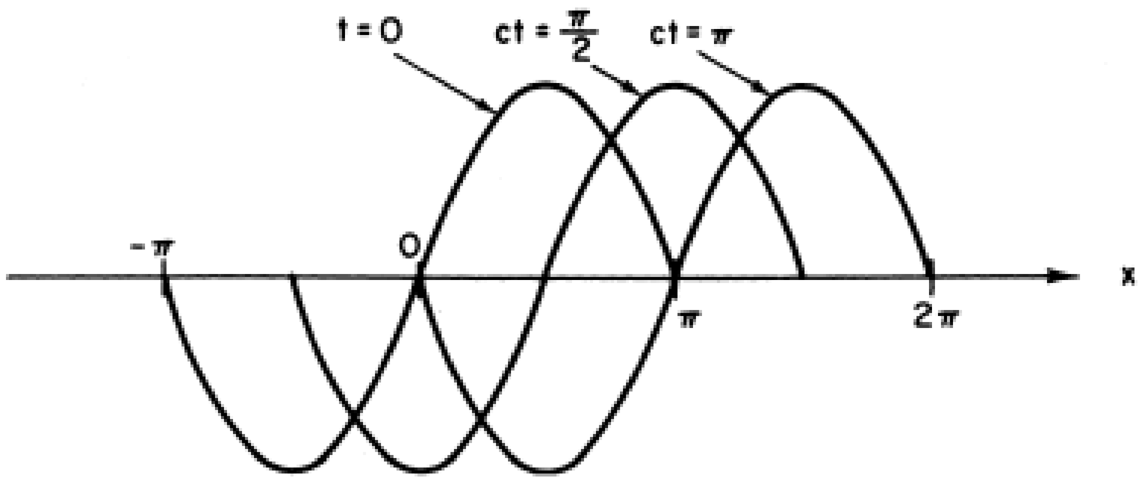


Fig. 7.2 Uma **onda senoidal se propagando na direção positiva de x a uma velocidade c**. (Assume-se que o número de onda $(k = 1)$ seja igual a um.)

$$\frac{Dx}{Dt} = c = \frac{\upsilon}{k} = \upsilon$$

7.2.1 Séries de Fourier

A *representação de uma perturbação como uma onda senoidal simples* pode parecer uma **simplificação excessiva**, **uma vez que as perturbações na atmosfera nunca são puramente senoidais**.

No entanto, pode ser demonstrado que **qualquer função razoavelmente comportada de longitude pode ser representada em termos de uma média zonal mais uma série de Fourier de componentes senoidais**:

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} (A_s \sin(k_s x) + B_s \cos(k_s x)) \qquad (7.2)$$

Onde:
$k_s = 2\pi s/L$ é o número de onda zonal (unidades m−1),
L é a distância ao redor de um círculo de latitude,
s é o número de onda planetária, é um inteiro que designa o número de ondas ao redor de um círculo de latitude.

Os coeficientes A_s são calculados multiplicando ambos os lados de (7.2) por $\sin(2\pi nx/L)$, onde n é um número inteiro, e integrando ao redor de um círculo de latitude.

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} (A_s \sin(k_s x) + B_s \cos(k_s x)) \qquad (7.2)$$

$$k_s = 2\pi s/L$$

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \left(A_s \sin\left(\frac{2\pi s x}{L}\right) + B_s \cos\left(\frac{2\pi s x}{L}\right) \right) \qquad (7.2)$$

$$f(x) \sin\left(\frac{2\pi s x}{L}\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \left(A_s \sin\left(\frac{2\pi s x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + B_s \cos\left(\frac{2\pi s x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right) \qquad (7.2)$$

Aplicando as relações de ortogonalidade,

$$f(x)\sin\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)=\sum_{s=1}^{\infty}\left(A_s\sin\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)+B_s\cos\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right) \qquad (7.2)$$

Aplicando as relações de ortogonalidade,

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(B_s\cos\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right)=0$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(A_s\sin\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right)=\sum_{s=1}^{\infty}\left(\int_0^L A_s\sin\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx\right)$$

$$\sin(x)=\sin(x_0)+\frac{1}{1!}\cos(x_0)\,[x-x_0]^1+\cdots..$$

$$\sin(x)=x+\cdots..$$

$$\sin(x)\sim x$$

$$\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{\cos(a)+\cos(b)}{2}$$

$$sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{\cos(b)-\cos(a)}{2}$$

$$sin\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{\sin(a)+\sin(b)}{2}$$

$$cos\left(\frac{a+b}{2}\right)sin\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{\sin(a)-\sin(b)}{2}$$

Séries de Fourier

Exemplo:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \text{ é } \quad 2L\ periódica$$

Objetivo:

Dada $f: R \to R,\ 2L - periódica$, gostaríamos de representa-la da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \to Série\ de\ Fourier$$

Encontrar os coeficientes a_n e b_n

Ortogonalidade

Considere $\nu = \{f : [a,b] - R \;\; ; \;\; f \text{ é } continua\ por\ partes\}$

Definimos, em ν, o produto interno: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Dizemos que f e g são ortogonais se $\langle f, g \rangle = 0$

$$\boxed{teorema \begin{cases} \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right), \ldots\ldots, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ldots. \\ 0, \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right), \ldots \quad , \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ldots.. \end{cases}}$$

É um conjunto ortogonal

$$teorema\begin{cases}\frac{1}{2}, \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right),\ \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right), \ldots\ldots, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ldots.\\ 0, \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right), \ldots \quad\quad , \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \ldots..\end{cases}$$

É um conjunto ortogonal

Intervalo $[-L, L]$

$$\begin{cases}\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases}0, se\ n \neq m\\ L, se\ n = m\end{cases}\\ \int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases}0, se\ n \neq m\\ L, se\ n = m\end{cases}\\ \int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0\end{cases}$$

$$teorema\begin{cases}\frac{1}{2},\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right),\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right),\ \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right),\dots\dots,\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\dots.\\ 0,\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right),\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right),\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right),\dots\qquad,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\dots..\end{cases}$$

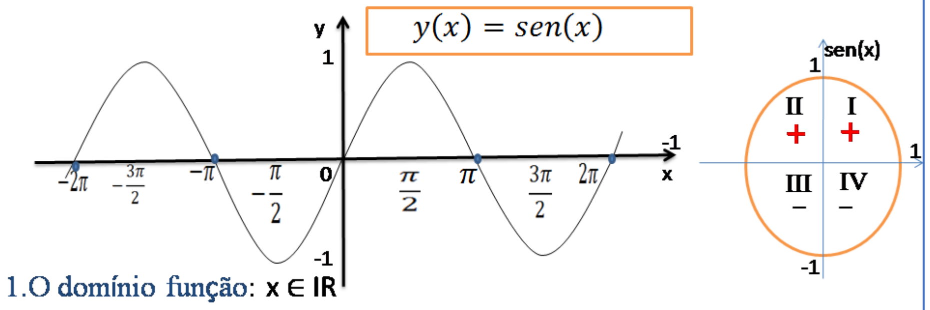
É um conjunto ortogonal

Intervalo $[-L, L]$

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx=\begin{cases}0, se\ n\neq m\\ L, se\ n=m\end{cases}\end{cases}$$

$$\cos(a)\cos(b)=\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$$

Função seno



$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)dx+\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right)dx$$

Para k inteiro $\neq 0$

$$\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{(k)\pi x}{L}\right)dx=\frac{L}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\Big|_{x=-L}^{x=L}=\frac{L}{k\pi}[\sin(k\pi)-\sin(-k\pi)]=0$$

Atmospheric Oscillations:

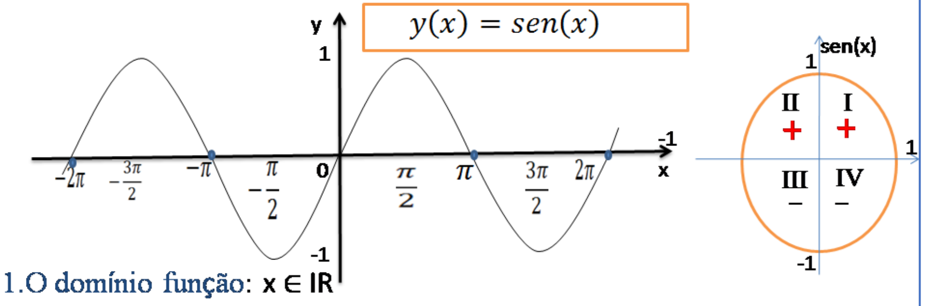
$$teorema\begin{cases}\frac{1}{2},\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right),\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right),\ \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right),\ldots\ldots,\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ldots.\\ 0,\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right),\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right),\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right),\ldots\qquad,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ldots..\end{cases}$$

É um conjunto ortogonal

Intervalo $[-L,L]$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)dx}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right)dx}_{=\begin{cases}0,se\ n\neq m\\ L\ ,se\ m=n\end{cases}}$$

Função seno



Para k inteiro $=0$

$$\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{(k)\pi x}{L}\right)dx=\frac{L}{k\pi}\sin\left(\frac{(k)\pi x}{L}\right)|_{x=-L}^{x=L}=\frac{L}{k\pi}\left[\frac{(k)\pi L}{L}-\frac{(k)\pi(-L)}{L}\right]=\frac{L}{k\pi}[(k)\pi+(k)\pi]=2L$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \text{ é } \qquad 2L \; periódica$$

Suponha que : $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, onde $\varphi_n(x)$ é um sistema ortogonal

$$\Rightarrow \langle g, \varphi_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = c_m \langle \varphi_m, \varphi_m \rangle$$

$$\Rightarrow c_m = \frac{\langle g, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_m, \varphi_m \rangle}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}$$

$$\boxed{n = 1,2,3,4 \ldots}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) dx}$$

Série de Fourier

Se $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \text{ é } \quad 2L\ periódica$$

Então

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}$$

$$\boxed{n = 1,2,3,4\ \ldots}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx}$$

Os coeficientes A_s são calculados multiplicando ambos os lados de (7.2) por $\sin(2\pi nx/L)$, onde n é um número inteiro, e integrando ao redor de um círculo de latitude.

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty}(A_s \sin(k_s x) + B_s \cos(k_s x)) \qquad (7.2)$$

$$k_s = 2\pi s/L$$

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty}\left(A_s \sin\left(\frac{2\pi sx}{L}\right) + B_s \cos\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)\right) \qquad (7.2)$$

$$f(x)\sin\left(\frac{2\pi sx}{L}\right) = \sum_{s=1}^{\infty}\left(A_s \sin\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + B_s \cos\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right) \qquad (7.2)$$

Aplicando as relações de ortogonalidade,

$$f(x)\sin\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)=\sum_{s=1}^{\infty}\left(A_s\sin\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)+B_s\cos\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right) \qquad (7.2)$$

Aplicando as relações de ortogonalidade,

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx=\begin{Bmatrix}0, & se\ \ s\neq n\\ \frac{L}{2} & se\ s=n\end{Bmatrix}$$

Obtém-se

$$A_s=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)dx$$

De forma semelhante, multiplicando ambos os lados de (7.2) por $\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)$ e integrando, obtemos:

$$B_s=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)dx$$

A_s e B_s são chamados de coeficientes de Fourier,

$$f(x)\sin\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)=\sum_{s=1}^{\infty}\left(A_s\sin\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)+B_s\cos\left(\frac{2\pi sx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right) \qquad (7.2)$$

$$f_s(x)=A_s\sin(k_s x)+B_s\cos(k_s x) \qquad (7.3)$$

é chamado de s-ésimo componente de Fourier ou s-ésima harmônica da função f(x).

Se os coeficientes de Fourier forem calculados, por exemplo, para a dependência longitudinal da perturbação geopotencial (observada), ***os componentes de Fourier de maior amplitude serão aqueles para os quais s está próximo do número observado de cavados ou cristas ao redor de um círculo de latitude***.

Quando apenas informações qualitativas são desejadas, geralmente é suficiente limitar a análise a um único componente típico de Fourier e assumir que o comportamento do campo real será semelhante ao do componente.

A expressão para um componente de Fourier pode ser escrita de forma mais compacta usando a notação exponencial complexa. De acordo com a fórmula de Euler:

$$f_s(x) = A_s \sin(k_s x) + B_s \cos(k_s x) \qquad (7.3)$$

$$e^{-i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$$

Onde $i \equiv \sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}}$ é uma unidade imaginaria. Assim pode-se escrever

$$f_s(x) = R_e\left[C_s e^{ik_s x}\right] = R_e[C_s \cos(k_s x) + iC_s \sin(k_s x)] \qquad (7.4)$$

onde Re[ ] define a "parte real de" e Cs é um coeficiente complexo. Comparando (7.3) e (7.4), vemos que as duas representações de $f_s(x)$ são idênticas, desde que:

$$B_s = Re[C_s] \qquad e \qquad A_s = -Im[C_s]$$

onde Im[ ] denota "parte imaginária de." Essa notação exponencial será geralmente utilizada para as aplicações da teoria de perturbação

7.2.2 Dispersão e Velocidade de Grupo

Uma **propriedade fundamental dos osciladores lineares** é que a **frequência de oscilação $\boldsymbol{\upsilon}$** ***depende apenas das características físicas do oscilador***, não do movimento em si.

Para **ondas propagantes**, no entanto, $\boldsymbol{\upsilon}$ **geralmente depende do número de onda da perturbação**, bem **como das propriedades físicas do meio**.

Assim, **porque $\boldsymbol{c = \upsilon/k}$**, a velocidade de fase também depende do número de onda, exceto no caso especial em que $\upsilon \propto$ k.

7.2.2 Dispersão e Velocidade de Grupo

Para **ondas nas quais a velocidade de fase varia com k**, **_os vários componentes senoidais de uma perturbação originária de um dado local são encontrados em diferentes lugares em um momento posterior_**, ou seja, **_elas se dispersam_**.

Tais **_ondas são chamadas de dispersivas_**, e a **fórmula que relaciona v e k é chamada de relação de dispersão**.

Alguns tipos de ondas, **como as ondas acústicas**, têm **_velocidades de fase independentes do número de onda_**.

Nas **ondas não dispersivas**, **_uma perturbação espacialmente localizada, consistindo em vários componentes de onda de Fourier (um grupo de ondas), preservará sua forma enquanto se propaga no espaço_** à velocidade de fase da onda.

7.2.2 Dispersão e Velocidade de Grupo

Para **ondas dispersivas**, no entanto, **a forma de um grupo de ondas não permanecerá constante** à medida que o grupo se propaga.

Como ***os componentes individuais de Fourier de um grupo de ondas podem se reforçar ou cancelar entre si***, dependendo das fases relativas dos componentes, a energia do grupo será concentrada em regiões limitadas, como ilustrado na Fig. 7.3.

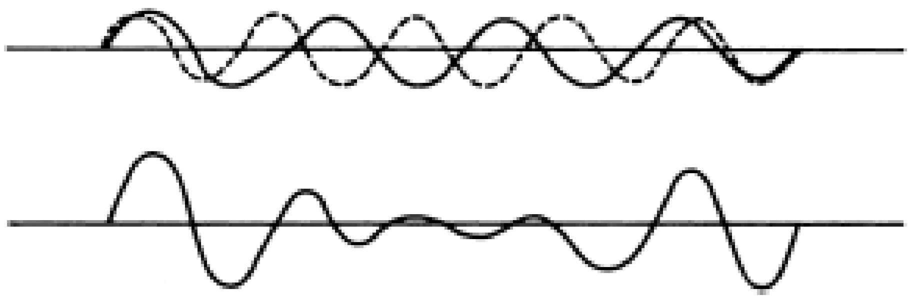


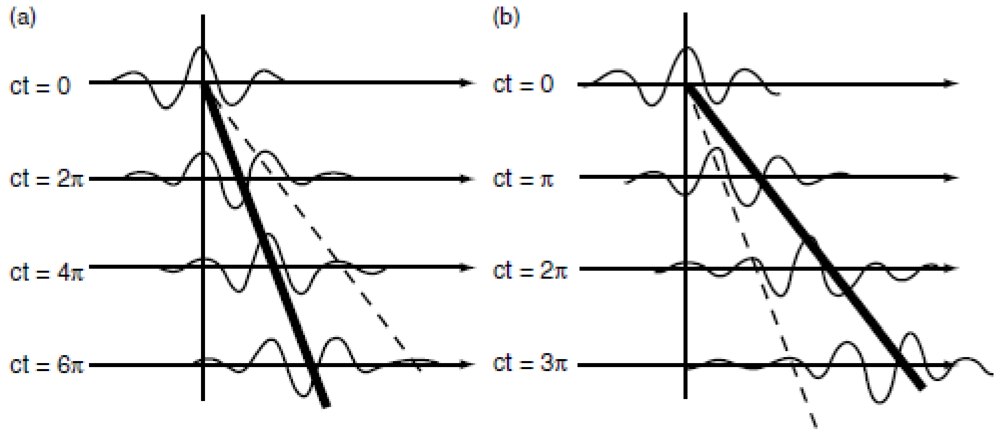
Fig. 7.3 Grupos de ondas formados a partir de dois componentes sinusoidais de comprimentos de onda ligeiramente diferentes. ***Para ondas não dispersivas, o padrão na parte superior do diagrama se propaga sem alteração de forma***. **Para ondas dispersivas, a forma do padrão muda com o tempo**.

Para ondas dispersivas, o **grupo geralmente se alarga com o passar do tempo**, ou seja, **a energia é dispersa**.

7.2.2 Dispersão e Velocidade de Grupo

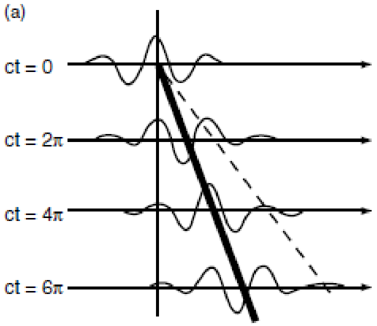
Quando as **ondas são dispersivas**, ***a velocidade do grupo de ondas geralmente é diferente da velocidade de fase média*** dos componentes de Fourier individuais.

Portanto, como mostrado na Figura 7.4, **os componentes individuais da onda podem se mover tanto mais rapidamente quanto mais lentamente do que o grupo de ondas** enquanto o grupo se propaga.

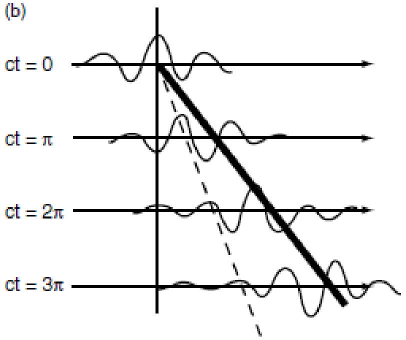


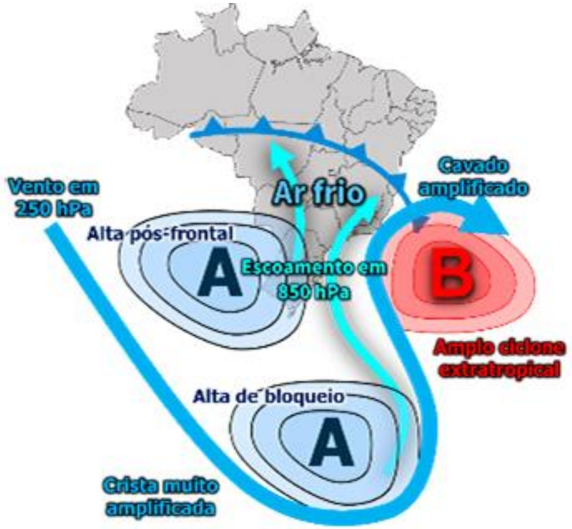
Esquemático mostrando a propagação de grupos de ondas:
(a) velocidade do grupo menor que a velocidade de fase e
(b) velocidade do grupo maior que a velocidade de fase.
As **linhas grossas mostram a velocidade do grupo**, e as **linhas finas mostram a velocidade de fase**.

7.2.2 Dispersão e Velocidade de Grupo



<u>Ondas superficiais em águas profundas</u> (como o rastro de um navio) **são caracterizadas por dispersão**, na qual **as cristas individuais das ondas se movem duas vezes mais rápido do que o grupo de ondas**.





No entanto, **em distúrbios atmosféricos em escala sinótica**, ***<u>a velocidade do grupo excede a velocidade de fase</u>***.

7.2.2 Dispersão e Velocidade de Grupo

Uma ***expressão para a velocidade do grupo***, que ***é a velocidade com a qual a perturbação observável*** (e, ***portanto, a energia***) ***se propaga***, pode ser derivada da seguinte forma:

Consideramos a superposição de duas ondas horizontalmente propagantes de igual amplitude, mas com comprimentos de onda ligeiramente diferentes, com números de onda e frequências diferentes por $2\delta k$ e $2\delta v$, respectivamente.

$$\psi(x,t) = e^{i[(k+\delta k)x-(v+\delta v)t]} + e^{i[(k-\delta k)x-(v-\delta v)t]}$$

A **perturbação total é assim, onde, para brevidade, a notação Re[ ] em** (7.4) é omitida, e é entendido que apenas a parte real do lado direito tem significado físico. Rearranjando termos e aplicando a fórmula de Euler, obtemos:

$$\psi(x,t) = \left[e^{i[(k)x+(\delta k)x-(v)t-(\delta v)t]} + e^{i[(k)x-(\delta k)x-(v)t+(\delta v)t]}\right]$$

$$\psi(x,t) = \left[e^{i[(kx-vt)+(\delta kx-\delta vt)]} + e^{i\left[[kx-vt]-(\delta k(x)+\delta vt)\right]}\right]$$

$$\psi(x,t) = \left[e^{i[(kx-vt)]}e^{i[(\delta kx-\delta vt)]} + e^{i\left[[kx-vt]\right]}e^{i[-(\delta k(x)+\delta vt)]}\right]$$

7.2.2 Dispersão e Velocidade de Grupo

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\psi(x,t) = \left[e^{i[(kx-vt)]}e^{i[(\delta kx-\delta vt)]} + e^{i\left[[kx-vt]\right]}e^{i[-(\delta k(x)+\delta vt)]}\right]$$

$$\psi(x,t) = \left[e^{i[(\delta kx-\delta vt)]} + e^{i[-(\delta k(x)+\delta vt)]}\right]e^{i[(kx-vt)]}$$

$$\psi(x,t) = \left[e^{i[(\delta kx-\delta vt)]} + e^{-i[(\delta k(x)-\delta vt)]}\right]e^{i[(kx-vt)]}$$

$$\psi(x,t) = 2[\cos(\delta kx - \delta vt)]e^{i[(kx-vt)]} \qquad (7.5)$$

A **perturbação (7.5) é o produto de uma onda** portadora **de alta frequência com comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$**, cuja **velocidade de fase, ν/k, é a média dos dois componentes de Fourier**, e de uma **envelope de baixa frequência com comprimento de onda $2\pi/\delta k$** que se move na velocidade $\delta\nu/\delta k$.

7.2.2 Dispersão e Velocidade de Grupo

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Assim, no limite em que $\delta k \rightarrow 0$, a velocidade horizontal do envelope de ondas, ou velocidade do grupo, é simplesmente:

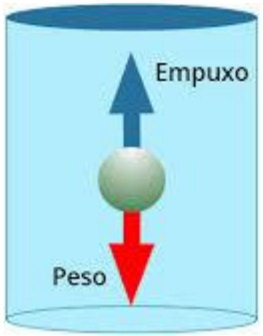
$$c_{gx} = \frac{\partial \upsilon}{\partial k}$$

Assim, **a energia da onda se propaga na velocidade do grupo**

. Este ***resultado se aplica geralmente a envelope de onda arbitrários***, desde que o comprimento de onda do grupo de ondas, $2\pi/\delta k$, seja grande em comparação com o comprimento de onda do componente dominante, $2\pi/k$.

7.3 TIPOS DE ONDA SIMPLES

As ***ondas em fluidos resultam da ação de forças restauradoras em parcela de fluido que foram deslocados de suas posições de equilíbrio***.



$$P - E = ma$$

As **forças restauradoras** podem ser devido à **compressibilidade**, **gravidade**, **rotação** ou **efeitos eletromagnéticos**.

Os dois exemplos **mais simples de ondas lineares em fluidos**: ondas acústicas e ondas gravitacionais em águas rasas.

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

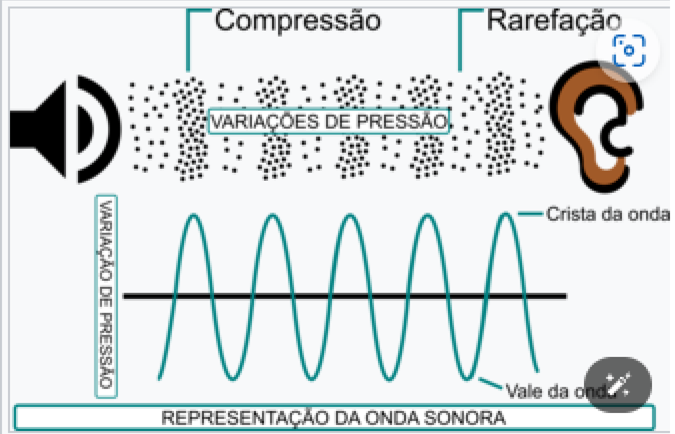
As ondas sonoras, ou ondas acústicas, são ondas longitudinais.

Ou seja, **são ondas nas quais as oscilações das partículas são paralelas à direção de propagação**.

O ***som*** é **propagado pela compressão e expansão adiabáticas** alternadas do meio.

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

Como exemplo, a Figura 7.5 mostra uma seção esquemática ao longo de um tubo que tem um diafragma em sua extremidade esquerda.



Propagação do Som

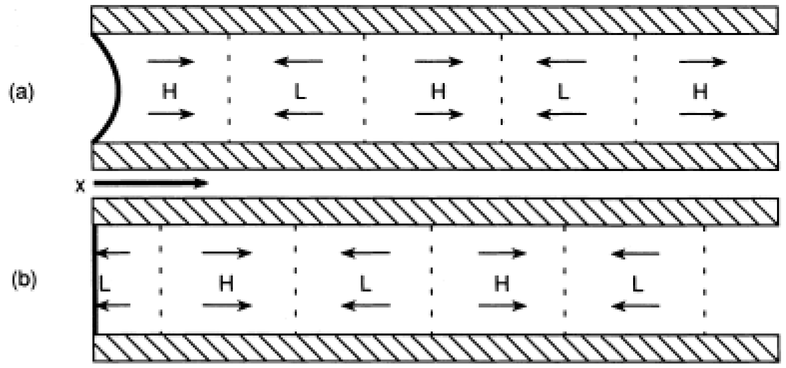


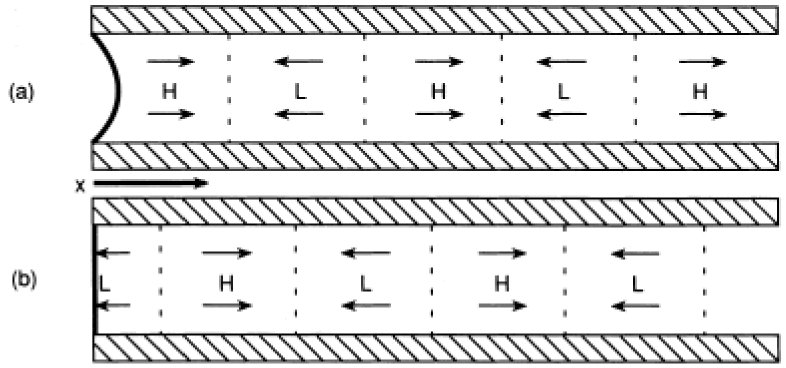
Diagrama esquemático ilustrando a propagação de uma onda sonora em um tubo com um diafragma flexível na extremidade esquerda. As etiquetas H e L designam os centros de alta e baixa pressão de perturbação. As setas mostram perturbações de velocidade. (b) A situação 1/4 de período depois do que em (a) para propagação na direção positiva de x.

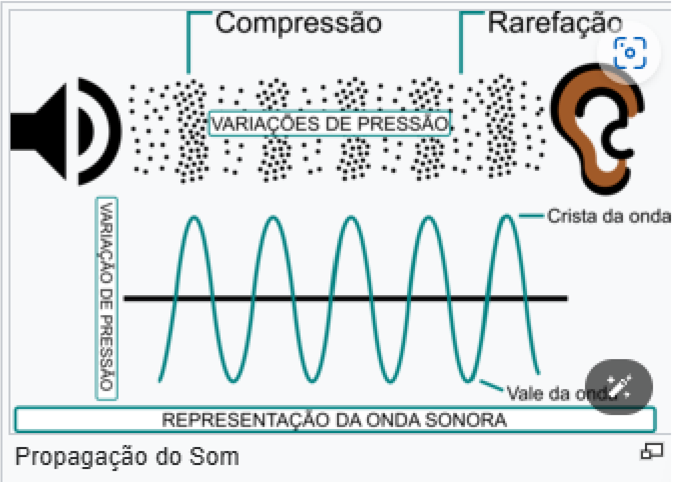
Se o diafragma for colocado em vibração, o ar adjacente a ele será alternadamente comprimido e expandido à medida que o diafragma se move para dentro e para fora.

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

A **força resultante do gradiente de pressão oscilante** **_será equilibrada_** **por uma aceleração oscilante do ar** na região adjacente, o que _causará uma oscilação de pressão oscilante mais adentro do tubo_, e assim por diante.

O resultado deste aumento e diminuição **contínuos de pressão** através da **compressão alternada** e **rarefação** é, como mostrado na Figura 7.5, um **padrão senoidal de perturbações de pressão e velocidade** que se propagam para a direita ao longo do tubo.



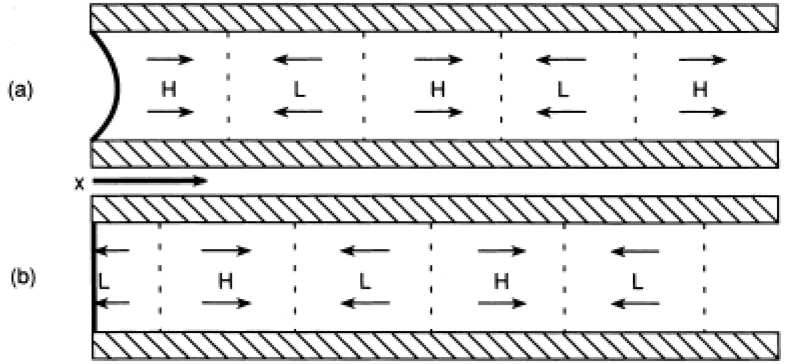


Propagação do Som

As **parcelas de ar individuais**, no entanto, **não têm um movimento líquido para a direita**; eles **_apenas oscilam para frente e para trás_** enquanto o **_padrão de pressão se move para a direita à velocidade do som_**.

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

Para ***introduzir o método de perturbação***, consideramos o problema ilustrado pela Figura 7.5, ou seja, **ondas sonoras unidimensionais** se propagando em um tubo reto paralelo ao eixo x.



Para **excluir a possibilidade de oscilações transversais** (ou seja, oscilações nas quais o movimento das partículas está em ângulo reto com a direção de propagação da fase), ***assumimos desde o início que v = w = 0***

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

Além disso, **eliminamos toda dependência de y e z** ao **assumir que u = u(x,t)**.
Com essas restrições, as equações de momentum, equação de continuidade e equação de energia termodinâmica para ***movimento adiabático*** são, respectivamente,

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad (7.6)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (7.7)$$

$$\frac{D \ln \theta}{Dt} = 0 \qquad (7.8)$$

onde, para este caso, $D/Dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$. Lembrando de (2.44) e da lei do gás ideal que a temperatura potencial pode ser expressa como

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

onde, para este caso, D/Dt = ∂/∂t + u∂/∂x. Lembrando de (2.44) e da lei do gás ideal que a temperatura potencial pode ser expressa como

$$\theta = T\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{c_p}} \qquad (2.44)$$

$$P = \rho R T$$

$$\theta = \frac{P}{\rho R}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{c_p}} \qquad (2.44)$$

onde P_s = 1000 hPa, podemos eliminar θ em (7.8) para obter

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$\theta = \frac{P}{\rho R}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{c_p}} \qquad (2.44)$$

$$\frac{D \ln \theta}{Dt} = 0 \qquad (7.8)$$

$$\ln \theta = \ln\left(\frac{P}{\rho R}\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{c_p}}\right) \qquad (2.44)$$

$$\ln \theta = \ln\left(\frac{P}{\rho R}\right) + \ln\left(\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{c_p}}\right) \qquad (2.44)$$

$$\ln \theta = \ln\left(\frac{P}{\rho R}\right) + \frac{R}{c_p}\ln\left(\frac{P_s}{P}\right) \qquad (2.44)$$

$$\ln \theta = \ln(P) - \ln(\rho R) + \frac{R}{c_p}[\ln(P_s) - \ln(P)]$$

$$\ln \theta = \ln(P) - \ln(\rho R) + \frac{R}{c_p}[\ln(P_s)] - \frac{R}{c_p}[\ln(P)]$$

$$\ln \theta = \ln(P) - \frac{R}{c_p}[\ln(P)] - \ln(\rho R) + \frac{R}{c_p}[\ln(P_s)]$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$\ln\theta = \ln(P) - \ln(\rho R) + \frac{R}{c_p}[\ln(P_s)] - \frac{R}{c_p}[\ln(P)]$$

Considerando que os gases se comportam como gases ideias, sabe-seque: $c_p - c_v \approx R$

$$c_p - R \approx c_v$$

$$\ln\theta = \ln(P) - \frac{R}{c_p}[\ln(P)] - [\ln(\rho) + \ln(R)] + \frac{R}{c_p}[\ln(P_s)]$$

$$\ln\theta = \left[1 - \frac{R}{c_p}\right]\ln(P) - \ln(\rho) + \ln(R) + \frac{R}{c_p}[\ln(P_s)]$$

$$\ln\theta = \left[\frac{c_p - R}{c_p}\right]\ln(P) - \ln(\rho) + \ln(R) + \frac{R}{c_p}[\ln(P_s)]$$

$$\ln\theta = \left[\frac{c_v}{c_p}\right]\ln(P) - \ln(\rho) + \ln(R) + \frac{R}{c_p}[\ln(P_s)]$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$\gamma = \left[\frac{c_p}{c_v}\right]$$

$$\ln\theta = \left[\frac{c_v}{c_p}\right]\ln(P) - \ln(\rho) + \ln(R) + \frac{R}{c_p}[\ln(P_s)]$$

$$\ln\theta = \frac{1}{\gamma}\ln(P) - \ln(\rho) + \ln(R) + \frac{R}{c_p}[\ln(P_s)]$$

$$\frac{D\ln\theta}{Dt} = 0 \qquad (7.8)$$

$$\frac{D}{Dt}\ln\theta = \frac{D}{Dt}\frac{1}{\gamma}\ln(P) - \frac{D}{Dt}\ln(\rho) + \frac{D}{Dt}\ln(R) + \frac{D}{Dt}\frac{R}{c_p}[\ln(P_s)]$$

onde P_s = 1000 hPa,

$$\frac{D\ln\theta}{Dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{D\ln(P)}{Dt} - \frac{D\ln(\rho)}{Dt} + 0 + 0$$

$$\frac{D\ln\theta}{Dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{D\ln(P)}{Dt} - \frac{D\ln(\rho)}{Dt} = 0$$

$$\frac{1}{\gamma}\frac{D\ln(P)}{Dt} - \frac{D\ln(\rho)}{Dt} = 0 \qquad (7.9)$$

$$\gamma = \left[\frac{c_p}{c_v}\right]$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$\frac{1}{\gamma}\frac{D\ln(P)}{Dt} - \frac{D\ln(\rho)}{Dt} = 0 \qquad (7.9)$$

$$\frac{1}{\gamma}\frac{D\ln(P)}{Dt} - \frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = 0 \qquad (7.9)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (7.7)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (7.7)$$

Eliminando ρ entre (7.7) e (7.9), obtemos

$$\frac{1}{\gamma}\frac{D\ln(P)}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (7.10)$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

As variáveis dependentes são agora divididas em porções de estado básico constante (denotadas por barras) e porções de perturbação (denotadas por primas):

$$\begin{cases} u(x,t) = \bar{u} + u'(x,t) \\ P(x,t) = \bar{P} + P'(x,t) \\ \rho(x,t) = \bar{\rho} + \rho'(x,t) \end{cases} \qquad (7.11)$$

Substituindo (7.11) em (7.6) e (7.10), obtemos

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad (7.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad (7.6)$$

$$\frac{1}{\gamma}\frac{D\ln(P)}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (7.10)$$

$$\frac{1}{P}\frac{DP}{Dt} + \gamma\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (7.10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u\frac{\partial P}{\partial x} + \gamma P\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (7.10)$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=0 \qquad (7.6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}+u\frac{\partial P}{\partial x}+\gamma P\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (7.10)$$

$$\begin{cases} u(x,t)=\bar{u}+u'(x,t) \\ P(x,t)=\bar{P}+P'(x,t) \\ \rho(x,t)=\bar{\rho}+\rho'(x,t) \end{cases} \qquad (7.11)$$

$$\frac{\partial \bar{u}+u'(x,t)}{\partial t}+\left(\bar{u}+u'(x,t)\right)\frac{\partial \bar{u}+u'(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{\left(\bar{\rho}+\rho'(x,t)\right)}\frac{\partial \bar{P}+P'(x,t)}{\partial x}=0 \qquad (7.6)$$

$$\frac{\partial \bar{P}+P'(x,t)}{\partial t}+\left(\bar{u}+u'(x,t)\right)\frac{\partial \bar{P}+P'(x,t)}{\partial x}+\gamma\left(\bar{P}+P'(x,t)\right)\frac{\partial \bar{u}+u'(x,t)}{\partial x}=0 \qquad (7.10)$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$\frac{\partial \bar{u} + u'(x,t)}{\partial t} + \left(\bar{u} + u'(x,t)\right)\frac{\partial \bar{u} + u'(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{\left(\bar{\rho} + \rho'(x,t)\right)}\frac{\partial \bar{P} + P'(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad (7.6)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial u'(x,t)}{\partial t} + \left(\bar{u} + u'(x,t)\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \left(\bar{u} + u'(x,t)\right)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{\left(\bar{\rho} + \rho'(x,t)\right)}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{1}{\left(\bar{\rho} + \rho'(x,t)\right)}\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial u'(x,t)}{\partial t} + \left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u'(x,t)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) + \left(\bar{u}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x} + u'(x,t)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right) + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{1}{\left(1 + \frac{\rho'(x,t)}{\bar{\rho}}\right)}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{1}{\left(1 + \frac{\rho'(x,t)}{\bar{\rho}}\right)}\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x} =$$

Em seguida, observamos que, desde que possamos usar a expansão binomial para aproximar o termo de densidade como

$$\frac{1}{\left(\bar{\rho} + \rho'(x,t)\right)} = \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{1}{\left(1 + \frac{\rho'(x,t)}{\bar{\rho}}\right)} = \frac{1}{\bar{\rho}}\left(1 + \frac{\rho'(x,t)}{\bar{\rho}}\right)^{-1} = \frac{1}{\bar{\rho}}\left(1 - \frac{\rho'(x,t)}{\bar{\rho}}\right)$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial u'(x,t)}{\partial t}+\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+u'(x,t)\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)+\left(\bar{u}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}+u'(x,t)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right)+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{1}{\left(1+\frac{\rho'(x,t)}{\bar{\rho}}\right)}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x}+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{1}{\left(1+\frac{\rho'(x,t)}{\bar{\rho}}\right)}\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}=0$$

$$\frac{1}{\left(\bar{\rho}+\rho'(x,t)\right)}=\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{1}{\left(1+\frac{\rho'(x,t)}{\bar{\rho}}\right)}=\frac{1}{\bar{\rho}}\left(1+\frac{\rho'(x,t)}{\bar{\rho}}\right)^{-1}=\frac{1}{\bar{\rho}}\left(1-\frac{\rho'(x,t)}{\bar{\rho}}\right)$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial u'(x,t)}{\partial t}+\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+u'(x,t)\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)+\left(\bar{u}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}+u'(x,t)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right)+\frac{1}{\bar{\rho}}\left(1-\frac{\rho'(x,t)}{\bar{\rho}}\right)\frac{\partial\bar{P}}{\partial x}+\frac{1}{\bar{\rho}}\left(1-\frac{\rho'(x,t)}{\bar{\rho}}\right)\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}=0$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

Desprezando os produtos das quantidades de perturbação e **observando que os campos do estado básico são constantes**, obtemos as equações de perturbação linear:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial u'(x,t)}{\partial t}+\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+u'(x,t)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)+\left(\bar{u}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}+u'(x,t)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right)+\frac{1}{\bar{\rho}}\left(1-\frac{\rho'(x,t)}{\bar{\rho}}\right)\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}+\frac{1}{\bar{\rho}}\left(1-\frac{\rho'(x,t)}{\bar{\rho}}\right)\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u'(x,t)}{\partial t}+\left(\bar{u}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right)+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}=0 \qquad (7.12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'(x,t)+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}=0 \qquad (7.12)$$

Não é necessário que a velocidade de perturbação seja pequena em comparação com a velocidade média para que a linearização seja válida.

É apenas necessário que os termos quadráticos nas variáveis de perturbação sejam pequenos em comparação com os termos lineares dominantes em (7.12) e (7.13).

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$\frac{\partial \bar{P} + P'(x,t)}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{P} + P'(x,t)}{\partial x} + \gamma\left(\bar{P} + P'(x,t)\right)\frac{\partial \bar{u} + u'(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad (7.10)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \frac{\partial P'(x,t)}{\partial t} + \left(\bar{u} + u'(x,t)\right)\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \left(\bar{u} + u'(x,t)\right)\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x} + \gamma\left(\bar{P} + P'(x,t)\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \gamma\left(\bar{P} + P'(x,t)\right)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \frac{\partial P'(x,t)}{\partial t} + \left(\bar{u}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + u'(x,t)\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}\right) + \left(\bar{u}\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x} + u'(x,t)\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}\right) + \gamma\left(\bar{P}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + P'(x,t)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)$$
$$+ \gamma\left(\bar{P}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x} + P'(x,t)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right) = 0$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

Desprezando os produtos das quantidades de perturbação e **observando que os campos do estado básico são constantes**, obtemos as equações de perturbação linear:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \frac{\partial P'(x,t)}{\partial t} + \left(\bar{u}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + u'(x,t)\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}\right) + \left(\bar{u}\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x} + u'(x,t)\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}\right) + \gamma\left(\bar{P}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + P'(x,t)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)$$
$$+ \gamma\left(\bar{P}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x} + P'(x,t)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial P'(x,t)}{\partial t} + \left(\bar{u}\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}\right) + \gamma\left(\bar{P}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)P'(x,t) + \gamma\bar{P}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad (7.13)$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'(x,t)+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}=0 \qquad (7.12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)P'(x,t)+\gamma\bar{P}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}=0 \qquad (7.13)$$

Derivando a (7.12) em relação a x, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'(x,t)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}\right]=0 \qquad (7.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u'(x,t)}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}\right]=0 \qquad (7.12)$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right)\right)\right]+\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right]=0 \qquad (7.12)$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u})\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right)\right)\right]+\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right]=0 \qquad (7.12)$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u})\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right)\right)\right]+\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right]=0 \qquad (7.12)$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right)\frac{\partial P'(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right]=0 \qquad (7.12)$$

Desprezando os produtos das quantidades de perturbação e **observando que os campos do estado básico são constantes**, obtemos as equações de perturbação linear:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right]+\left[\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right]=0 \qquad (7.12)$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right]+\left[\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right]=0 \qquad (7.12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}+\left[\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right]=0 \qquad (7.12)$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right]+\left[\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right]=0 \qquad (7.12)$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}\right]=-\left[\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right] \qquad (7.12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial\, x}\right)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}=-\left[\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right] \qquad (7.12b)$$

Eliminando $u'(x,t)$ multiplicando a (7.13) por $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ e substituindo de (7.12), obtemos:

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

Eliminando $u'(x,t)$ multiplicando a (7.13) por $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ e substituindo de (7.12b), obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)P'(x,t)+\gamma\bar{P}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}=0 \qquad (7.13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)P'(x,t)+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma\bar{P}\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}=0 \qquad (7.13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 P'(x,t)+\gamma\bar{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}=0 \qquad (7.13)$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

Eliminando $u'(x,t)$ multiplicando a (7.13) por $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ e substituindo de (7.12b), obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 P'(x,t)+\gamma\bar{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}=0 \qquad (7.13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u'(x,t)}{\partial x}=-\left[\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right] \qquad (7.12b)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 P'(x,t)-\gamma\bar{P}\left[\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right]=0 \qquad (7.13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 P'(x,t)-\left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right]=0 \qquad (7.14)$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 P'(x,t)-\left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right]=0 \qquad (7.14)$$

Esta é uma forma da equação de onda padrão conhecida da teoria eletromagnética.
Uma solução simples que representa uma onda senoidal plana se propagando em x

$$P' = Ae^{-ik(x-ct)} \qquad (7.15)$$

onde, para simplificar, omitimos a notação Re{ }, mas é entendido que apenas a parte real de (7.15) tem significado físico.
Substituindo a solução assumida (7.15) em (7.14), encontramos que a velocidade de fase c deve satisfazer:

$$\frac{\partial P'}{\partial t}=ikcAe^{-ik(x-ct)} \qquad \frac{\partial P'}{\partial x}=-ikAe^{-ik(x-ct)} \qquad \frac{\partial^2 P'}{\partial^2 x}=-ik(-ik)Ae^{-ik(x-ct)}=(ik)^2Ae^{-ik(x-ct)}$$

$$(ikc-ik\bar{u})^2Ae^{-ik(x-ct)}-\left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right](ik)^2Ae^{-ik(x-ct)}=0 \qquad (7.14)$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$(ikc - ik\bar{u})^2 A e^{-ik(x-ct)} - \left[\frac{\gamma \bar{P}}{\bar{\rho}}\right] (ik)^2 A e^{-ik(x-ct)} = 0 \qquad (7.14)$$

onde cancelamos o fator $Ae^{-ik(x-ct)}$, que é comum a ambos os termos. Resolvendo para c obtemos:

$$(ikc - ik\bar{u})^2 - \left[\frac{\gamma \bar{P}}{\bar{\rho}}\right] (ik)^2 = 0 \qquad (7.14)$$

$$(ikc)^2 - 2(ikc)\,(ik\bar{u}) + (ik\bar{u})^2 - \left[\frac{\gamma \bar{P}}{\bar{\rho}}\right] (ik)^2 = 0 \qquad (7.14)$$

$$(i)^2 (kc)^2 - 2(i)^2 (kc)\,(k\bar{u}) + (i)^2 (k\bar{u})^2 - (i)^2 \left[\frac{\gamma \bar{P}}{\bar{\rho}}\right] (k)^2 = 0 \qquad (7.14)$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$(i)^2(kc)^2 - 2(i)^2(kc)\,(k\bar{u}) + (i)^2(k\bar{u})^2 - (i)^2\left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right](k)^2 = 0 \qquad (7.14)$$

$$-(kc)^2 + 2(kc)\,(k\bar{u}) - (k\bar{u})^2 + \left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right](k)^2 = 0 \qquad (7.14)$$

$$-(k)^2(c)^2 + 2(k)^2(c)\,(\bar{u}) - (k)^2(\bar{u})^2 + \left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right](k)^2 = 0 \qquad (7.14)$$

$$-(c)^2 + 2(c)\,(\bar{u}) - (\bar{u})^2 + \left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right] = 0 \qquad (7.14)$$

$$-c^2 + 2\bar{u}c - \bar{u}^2 + \left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right] = 0 \qquad (7.14)$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$-c^2 + 2\bar{u}c - \bar{u}^2 + \left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right] = 0 \qquad (7.14)$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$c = \frac{-2\bar{u} \pm \sqrt{4\bar{u}^2 - 4\left(-\bar{u}^2 + \left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right]\right)}}{2(-1)}$$

$$c = \frac{-2\bar{u}}{-2} \pm \frac{\sqrt{4\bar{u}^2 + 4\left(-\bar{u}^2 + \left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right]\right)}}{-2}$$

$$c = \bar{u} \pm \frac{\sqrt{4\bar{u}^2 - 4\bar{u}^2 + 4\left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right]}}{-2}$$

$$c = \bar{u} \pm \frac{\sqrt{4\left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right]}}{-2}$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$-c^2 + 2\bar{u}c - \bar{u}^2 + \left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right] = 0 \qquad (7.14)$$

$$c = \bar{u} \pm \frac{\sqrt{4\left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right]}}{-2}$$

$$c = \bar{u} \pm \frac{\sqrt{4\left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right]}}{-\sqrt{4}}$$

$$c = \bar{u} \pm -\sqrt{\frac{4\left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right]}{4}}$$

$$c = \bar{u} \pm -\sqrt{\left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\right]}$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$c = \bar{u} \pm - \sqrt{\left[\frac{\gamma \bar{P}}{\bar{\rho}}\right]}$$

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\left[\frac{\gamma \bar{P}}{\bar{\rho}}\right]}$$

$$P = \rho R T$$

$$P \frac{P}{\rho} = RT$$

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{[\gamma R \bar{T}]} \qquad (7.16)$$

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 P'(x,t)-\left[\frac{\gamma\bar{P}}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 P'(x,t)}{\partial^2 x}\right]=0 \qquad (7.14)$$

$$P' = Ae^{-ik(x-ct)} \qquad (7.15)$$

$$c=\bar{u}\pm\sqrt{[\gamma R\bar{T}]} \qquad (7.16)$$

Portanto, (7.15) é uma solução de (7.14), desde que a velocidade de fase satisfaça (7.16).

De acordo com (7.16), a velocidade de propagação da onda em relação à velocida zonal é $c-\bar{u}=\pm c_s$,

onde $c_s \equiv \sqrt{[\gamma R\bar{T}]}$ e é chamada de velocidade adiabática do som.

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

A velocidade zonal média aqui desempenha apenas o papel de deslocamento Doppler da onda sonora, de modo que a frequência em relação ao solo correspondente a um determinado número de onda k é

$$\upsilon = kc = k(\bar{u} \pm c_s)$$

onde c é a velocidade de fase e $\bar{u}$ é a velocidade zonal média.

Assim, ***na presença de um vento***, ***a frequência percebida por um observador fixo depende da localização do observador em relação à fonte***.

7.3.1 Ondas Acústicas ou Sonoras

Assim, na presença de um vento, a frequência percebida por um observador fixo depende da localização do observador em relação à fonte.

$$\upsilon = kc = k(\bar{u} \pm c_s)$$

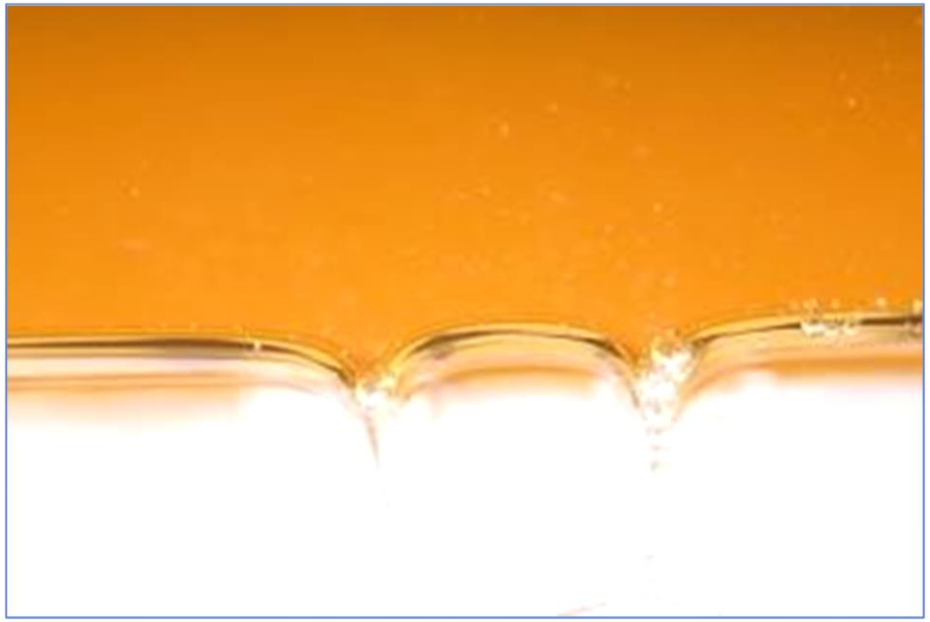
Se $\bar{u} > 0$, **a frequência de uma fonte estacionária parecerá ser mais alta para um observador a leste da fonte** $c = \bar{u} + c_s$) $\upsilon \rightarrow maior$ do que para um observador a oeste da fonte ($c = \bar{u} - c_s$) $\upsilon \rightarrow menor$.

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

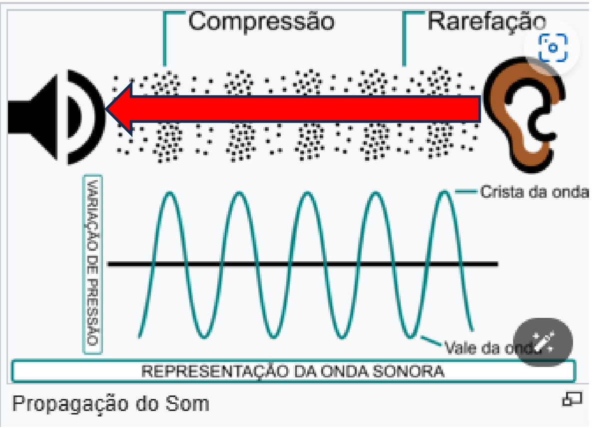
Como um segundo **exemplo de movimento ondulatório puro**, consideramos as **oscilações que se propagam horizontalmente** conhecidas como **ondas em água rasa**.

Ondas de gravidade em água rasa **só podem existir se o fluido tiver uma** superfície livre ou **uma descontinuidade interna de densidade**.



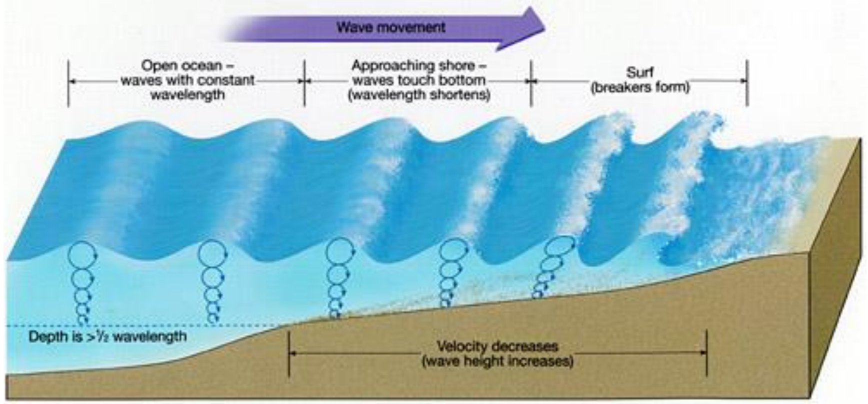
7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

As ***ondas acústicas a força restauradora é paralela à direção de propagação da onda***.



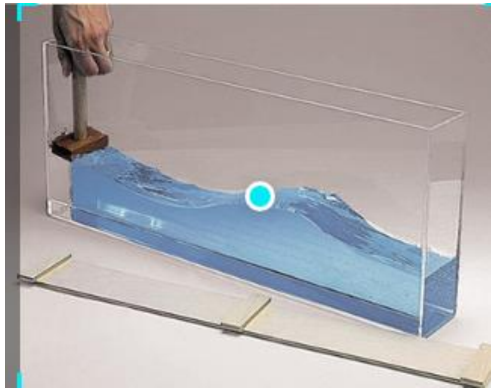
Propagação do Som

Em **ondas de gravidade em água rasa**, no entanto, **a força restauradora é vertical**, **de modo que é transversal à direção de propagação**.

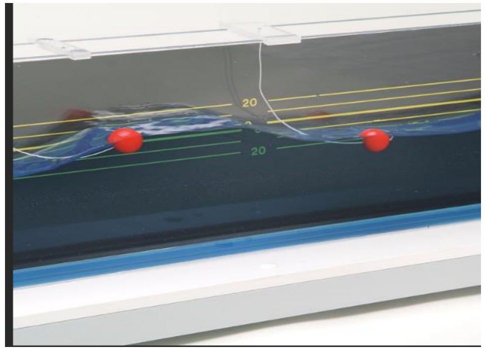


7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

O mecanismo de ***propagação das ondas de gravidade*** pode ser entendido **considerando-se a água em um canal** que se estende na direção x com uma pá oscilante na origem.



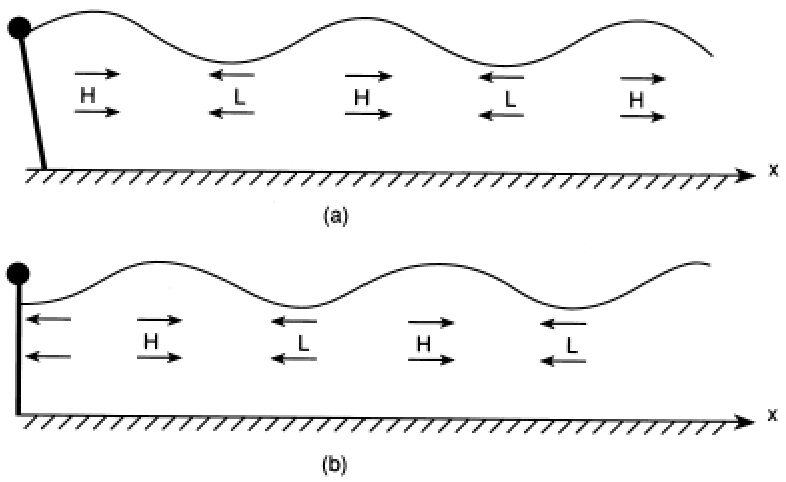
As **oscilações de vaivém da pá geram perturbações alternadas** para cima e para baixo na altura da superfície livre, que ***produzem acelerações positivas e negativas alternadas***.

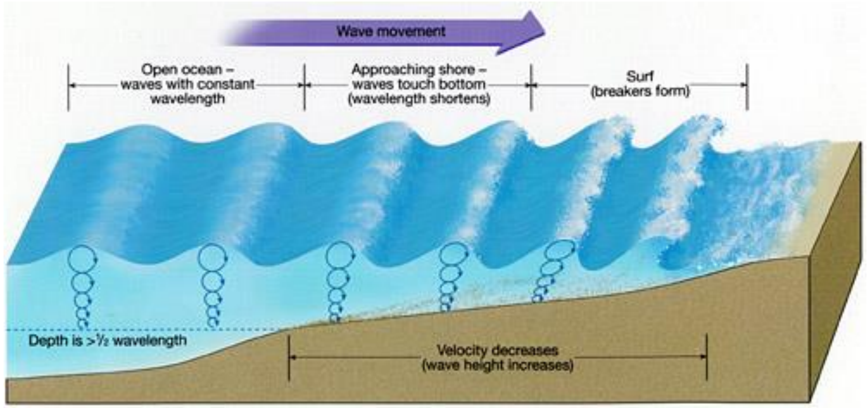


7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

Estas, por sua vez, levam a **padrões alternados** de convergência e divergência do fluido.

O **resultado líquido é uma perturbação sinusoidal da altura da superfície livre**, que se move para a direita, e ***tem a velocidade de perturbação e a altura da superfície livre exatamente em fase***, como mostrado na Fig. 7.6.

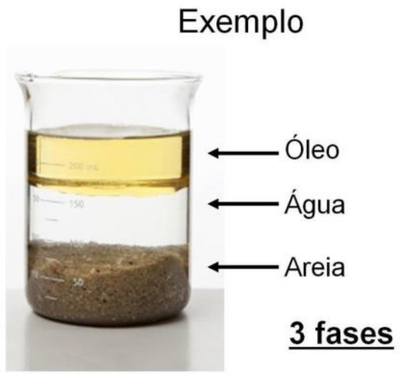




Um ***tipo similar de perturbação pode ser configurado*** **movendo-se** **para a esquerda**, mas, nesse caso, as ***perturbações da velocidade e da altura da superfície livre estariam exatamente 180° fora de fase***.

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

Como exemplo específico, **consideramos um sistema fluido composto por duas camadas homogêneas** e **incompressíveis de densidades diferentes**, conforme mostrado na Fig. 7.7.



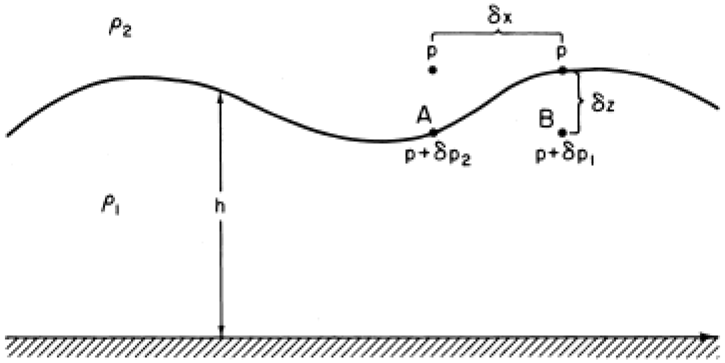
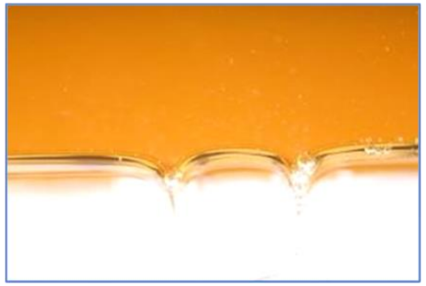


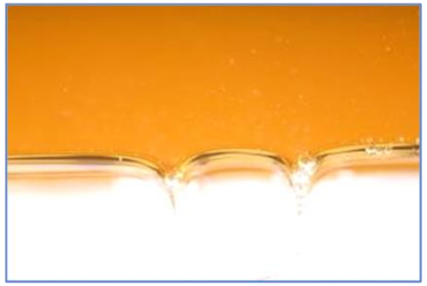
Fig. 7.7 A two-layer fluid system.

Ondas podem se propagar ao longo da interface entre as duas camadas.
A suposição de incompressibilidade é suficiente para excluir as ondas sonoras, permitindo isolar as ondas de gravidade



7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

. Se a **densidade da camada inferior ρ_1** ***é maior que*** a ***densidade da camada superior ρ_2***, o sistema está estratificado de maneira estável.



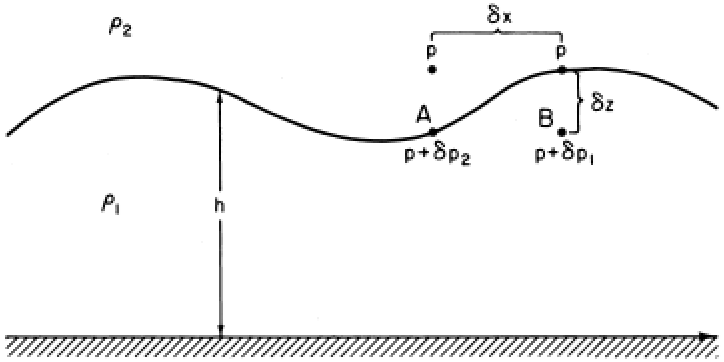


Fig. 7.7 A two-layer fluid system.

Como ρ_1 **e** ρ_2 **são constantes**, o **gradiente de pressão horizontal em cada camada é independente da altura**, se a **pressão for hidrostática**.

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

Isto pode ser verificado **diferenciando a aproximação hidrostática** em relação a x:

$$P = -\rho g z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} g z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial x} = -g\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial x} z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial x} = -g\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial x} z - g\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial x} = -g\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial z} z - g\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial x} = -g\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

Para simplificar, assumimos que **não há gradiente de pressão horizontal na camada superior**.

O **gradiente de pressão na camada inferior pode ser obtido pela integração vertical da equação hidrostática**.

Para os pontos A e B mostrados na Fig. 7.7, encontramos, respectivamente:

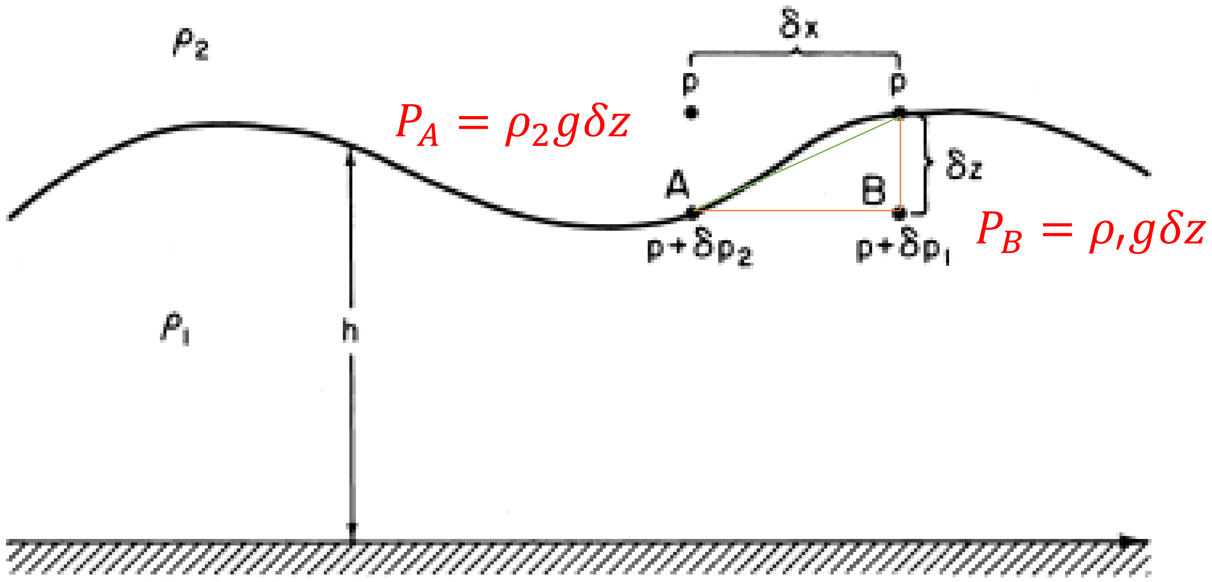


Fig. 7.7 A two-layer fluid system.

$$P + \delta P_2 = P + \rho_2 g\delta z = P + \rho_2 g\frac{\partial h}{\partial x}\delta x$$

$$P + \delta P_1 = P + \rho_1 g\delta z = P + \rho_1 g\frac{\partial h}{\partial x}\delta x$$

onde $\frac{\partial h}{\partial x}$ é a inclinação da interface

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

Levando o limite $\delta x \rightarrow 0$, obtemos o gradiente de pressão na camada inferior:

Pressão entre os pontos B e A

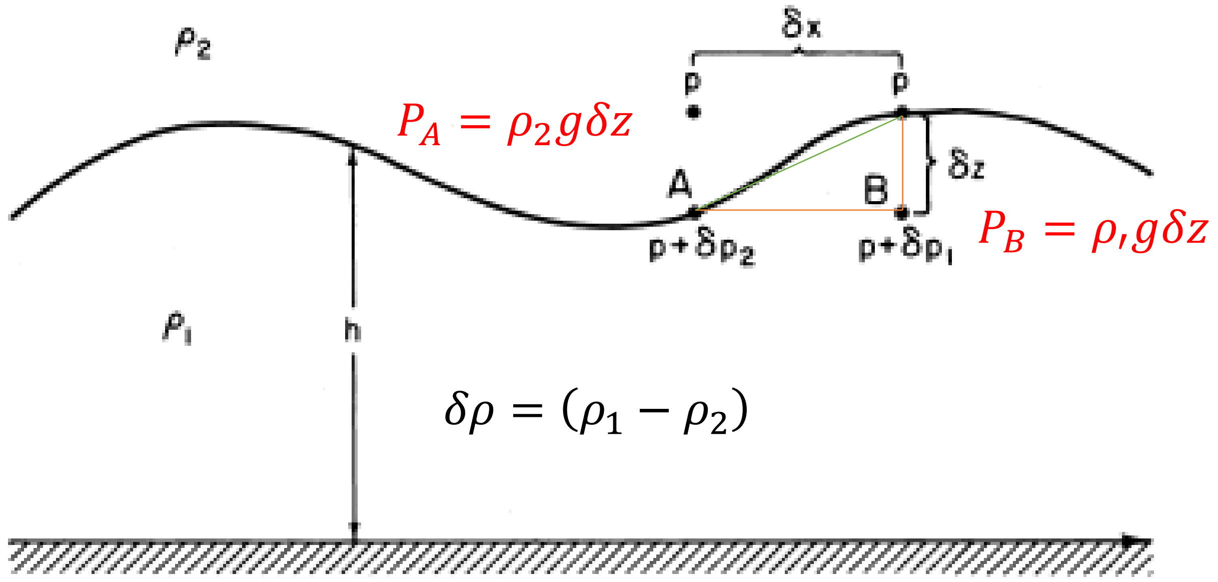
$$\frac{P_B - P_A}{\delta x} = \frac{1}{\delta x}\left[P + \rho_1 g \frac{\partial h}{\partial x}\delta x - \left(P + \rho_2 g \frac{\partial h}{\partial x}\delta x\right)\right]$$

$$\frac{P + \delta P_1 - (P + \delta P_2)}{\delta x} = \frac{1}{\delta x}\left[P + \rho_1 g \frac{\partial h}{\partial x}\delta x - P - \rho_2 g \frac{\partial h}{\partial x}\delta x\right]$$

$$\frac{P + \delta P_1 - P - \delta P_2}{\delta x} = \frac{1}{\delta x}\left[(\rho_1 - \rho_2) g \frac{\partial h}{\partial x}\delta x\right]$$

$$\lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{P + \delta P_1 - P - \delta P_2}{\delta x}\right] = \left[(\rho_1 - \rho_2) g \frac{\partial h}{\partial x}\right]$$

$$\lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{\delta(P_1 - P_2)}{\delta x}\right] = \left[(\rho_1 - \rho_2) g \frac{\partial h}{\partial x}\right]$$



$$\delta\rho = (\rho_1 - \rho_2)$$

Fig. 7.7 A two-layer fluid system.

$$\boxed{\lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{\delta(P_1 - P_2)}{\delta x}\right] = \left[\delta\rho g \frac{\partial h}{\partial x}\right]}$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

Equação do Momento no Plano x, z

Assumimos que o movimento é bidimensional no plano x,z,. A equação do momento na direção x para a camada inferior é então:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \omega\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P}{\partial x}$$

onde:

- u é a componente da velocidade na direção x.
- ω é a componente da velocidade na direção z.
- ρ_1 é a densidade da camada inferior.
- P é a pressão.

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

Simplificação

Utilizando o gradiente de pressão horizontal obtido anteriormente, $\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_1 g \frac{\partial h}{\partial x}$, podemos reescrever a equação do momento como:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_1 g \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \omega\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \omega\frac{\partial u}{\partial z} = g\frac{\partial h}{\partial x}$$

Interpretação

Esta equação descreve a variação temporal e espacial da velocidade u na camada inferior, considerando a influência do gradiente de pressão horizontal induzido pela inclinação da interface entre as duas camadas de fluido.

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

Equação do Momento no Plano x, z

Assumimos que o movimento é bidimensional no plano x,z,. A equação do momento na direção x para a camada inferior é então:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \omega\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial h}{\partial x} \qquad (7.17)$$

A equação da continuidade para o movimento bidimensional no plano x,z

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \qquad (7.18)$$

Agora, como o gradiente de pressão em (7.17) é independente de z, u também será independente de z, desde que inicialmente $u \neq u(z)$. Assim, (7.18) pode ser integrada verticalmente da fronteira inferior $z = 0$ até a interface $z = h$, resultando em

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

Agora, como o gradiente de pressão em (7.17) é independente de z, u também será independente de z, desde que inicialmente $u \neq u(z)$. Assim, (7.18) pode ser integrada verticalmente da fronteira inferior $z = 0$ até a interface $z = h$, resultando em

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial \omega}{\partial z} dz = 0 \qquad (7.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \int_0^h dz + \int_0^h \partial \omega = 0 \qquad (7.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}[h - 0] + \big(\omega(h) - \omega(0)\big) = 0 \qquad (7.18)$$

$$\omega(h) - \omega(0) = -h\frac{\partial u}{\partial x}$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

$$\omega(h) - \omega(0) = -h\frac{\partial u}{\partial x}$$

No entanto, $\omega(h)$ é apenas a taxa na qual a altura da interface está mudando,

$$\omega(h) = \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x}$$

e $\omega(0) = 0$ para uma fronteira inferior plana.

Portanto, a equação da continuidade integrada verticalmente pode ser escrita como

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} = -h\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0 \qquad (7.19)$$

As equações (7.17) e (7.19) formam um conjunto fechado nas variáveis (u) e (h)., definindo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \omega\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial x}{\partial x} \qquad (7.17)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (7.19)$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

Agora aplicamos a técnica de perturbação, definindo:

$$u = \bar{u} + u' \qquad\qquad h = H + h'$$

onde $\bar{u}$, como antes, é uma velocidade zonal constante do estado básico e H é a profundidade média da camada inferior. As formas de perturbação das equações (7.17) e (7.19) são então:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial x}{\partial x} \quad (7.17) \qquad\qquad \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + (\bar{u} + u')\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} = -\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial(H + h')}{\partial x} \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + (\bar{u} + u')\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} = -\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial(H + h')}{\partial x} \quad (7.17)$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

$$\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x}=-\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial(H+h')}{\partial x} \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial(\bar{u})}{\partial t}+\frac{\partial(u')}{\partial t}+(\bar{u}+u')\left(\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(u')}{\partial x}\right)=-\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial(H)}{\partial x}-\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial(h')}{\partial x} \quad (7.17)$$

onde $\bar{u}$, como antes, é uma velocidade zonal constante do estado básico e H é a profundidade média da camada inferior. Desprezando os produtos das quantidades de perturbação As formas de perturbação das equações (7.17) e (7.19) são então:

$$\frac{\partial(\bar{u})}{\partial t}+\frac{\partial(u')}{\partial t}+(\bar{u}+u')\left(\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(u')}{\partial x}\right)=-\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial(H)}{\partial x}-\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial(h')}{\partial x} \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial(u')}{\partial t}+(\bar{u}+u')\left(\frac{\partial(u')}{\partial x}\right)=-\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial(h')}{\partial x} \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial(u')}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(u')}{\partial x}+u'\frac{\partial(u')}{\partial x}=-\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial(h')}{\partial x} \quad (7.17)$$

$$\boxed{\frac{\partial(u')}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(u')}{\partial x}+\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial(h')}{\partial x}=0 \quad (7.20)}$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

Agora aplicamos a técnica de perturbação, definindo:

$$u = \bar{u} + u' \qquad\qquad h = H + h'$$

onde $\bar{u}$, como antes, é uma velocidade zonal constante do estado básico e H é a profundidade média da camada inferior. As formas de perturbação das equações (7.17) e (7.19) são então:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (7.19)$$

$$\frac{\partial (H + h')}{\partial t} + (\bar{u} + u')\frac{\partial (H + h')}{\partial x} + (H + h')\frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} = 0 \qquad (7.19)$$

$$\frac{\partial (H)}{\partial t} + \frac{\partial (h')}{\partial t} + (\bar{u} + u')\left(\frac{\partial (H)}{\partial x} + \frac{\partial (h')}{\partial x}\right) + (H + h')\left(\frac{\partial (\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial (u')}{\partial x}\right) = 0 \qquad (7.19)$$

$$\frac{\partial (h')}{\partial t} + (\bar{u} + u')\left(\frac{\partial (h')}{\partial x}\right) + (H + h')\left(\frac{\partial (u')}{\partial x}\right) = 0 \qquad (7.19)$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

$$\frac{\partial(h')}{\partial t} + (\bar{u} + u')\left(\frac{\partial(h')}{\partial x}\right) + (H + h')\left(\frac{\partial(u')}{\partial x}\right) = 0 \qquad (7.19)$$

$$\frac{\partial(h')}{\partial t} + \left(\bar{u}\frac{\partial(h')}{\partial x} + u'\frac{\partial(h')}{\partial x}\right) + \left(H\frac{\partial(u')}{\partial x} + h'\frac{\partial(u')}{\partial x}\right) = 0 \qquad (7.19)$$

onde $\bar{u}$, como antes, é uma velocidade zonal constante do estado básico e H é a profundidade média da camada inferior. Desprezando os produtos das quantidades de perturbação As formas de perturbação das equações (7.17) e (7.19) são então:

$$\frac{\partial(h')}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(h')}{\partial x} + H\frac{\partial(u')}{\partial x} = 0 \qquad (7.21)$$

onde assumimos que $H \gg h'$ é grande o suficiente para que os produtos das variáveis de perturbação possam ser desprezados.

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

Eliminando u' entre (7.20) e (7.21) obtemos

$$\frac{\partial(u')}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(u')}{\partial x}+\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial(h')}{\partial x}=0 \qquad (7.20)$$

$$\frac{\partial(h')}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(h')}{\partial x}+H\frac{\partial(u')}{\partial x}=0 \qquad (7.21)$$

Derivando a (7.20 em relação a x)

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(u')}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}\frac{\partial(u')}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial(h')}{\partial x}\right)=0$$

onde $\bar{u}$, como antes, é uma velocidade zonal constante do estado básico e H é a profundidade média da camada inferior.
Desprezando os produtos das quantidades de perturbação e $\delta\rho \sim \rho_1 = cte$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(u')}{\partial x}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\left(\frac{\partial(u')}{\partial x}\right)+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(u')}{\partial x}\right)+\frac{g}{\rho_1}\frac{\partial\delta\rho}{\partial x}\frac{\partial(h')}{\partial x}+\left(\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(h')}{\partial x}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(u')}{\partial x}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(u')}{\partial x}\right)+\left(\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(h')}{\partial x}\right)=0$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(u')}{\partial x}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(u')}{\partial x}\right)+\left(\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(h')}{\partial x}\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial(u')}{\partial x}+\left(\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial^2(h')}{\partial^2 x}\right)=0 \qquad (7.20b)$$

Multiplica a 7.21 por $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)$

$$\frac{\partial(h')}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(h')}{\partial x}+H\frac{\partial(u')}{\partial x}=0 \qquad (7.21)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)h'+H\frac{\partial(u')}{\partial x}=0 \qquad (7.21)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)h'+H\frac{\partial(u')}{\partial x}=0 \qquad (7.21)$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)h'+H\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial(u')}{\partial x}=0 \qquad (7.21)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 h'+H\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial(u')}{\partial x}=0 \qquad (7.21)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial(u')}{\partial x}+\left(\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial^2(h')}{\partial^2 x}\right)=0 \qquad (7.20b)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 h'-H\left(\frac{g\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial^2(h')}{\partial^2 x}\right)=0 \qquad (7.21b)$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 h' - \left(\frac{gH\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial^2 h'}{\partial^2 x}\right) = 0 \qquad (7.22)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 t}+2\bar{u}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}+ +\bar{u}^2\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\right)h' - \left(\frac{gH\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial^2 h'}{\partial^2 x}\right) = 0 \qquad (7.22)$$

que é uma equação de onda semelhante em forma a (7.14). É facilmente verificado por substituição direta que (7.22) tem uma solução da forma $h' = Ae^{[ik(x-ct)]}$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = -ikcAe^{[ik(x-ct)]} \qquad \frac{\partial h'}{\partial x} = ikAe^{[ik(x-ct)]} \qquad \frac{\partial h'}{\partial x} = ikAe^{[ik(x-ct)]}$$

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial^2 t} = -ikc(-ikc)Ae^{[ik(x-ct)]} \qquad \frac{\partial^2 h'}{\partial^2 x} = ik(ik)Ae^{[ik(x-ct)]} \qquad \frac{\partial^2 h'}{\partial t\partial x} = ik(-ikc)Ae^{[ik(x-ct)]}$$

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial^2 t} = (i)^2(kc)^2Ae^{[ik(x-ct)]} \qquad \frac{\partial^2 h'}{\partial^2 x} = (i)^2(k)^2Ae^{[ik(x-ct)]} \qquad \frac{\partial^2 h'}{\partial t\partial x} = -(i)^2(k)^2cAe^{[ik(x-ct)]}$$

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial^2 t} = -(kc)^2Ae^{[ik(x-ct)]} \qquad \frac{\partial^2 h'}{\partial^2 x} = -(k)^2Ae^{[ik(x-ct)]} \qquad \frac{\partial^2 h'}{\partial t\partial x} = (k)^2cAe^{[ik(x-ct)]}$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 t} + 2\bar{u}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} + +\bar{u}^2\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\right)h' - \left(\frac{gH\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial^2 h'}{\partial^2 x}\right) = 0 \qquad (7.22)$$

$$\left(-(kc)^2 Ae^{[ik(x-ct)]} + 2\bar{u}(k)^2 cAe^{[ik(x-ct)]} - \bar{u}^2(k)^2 Ae^{[ik(x-ct)]}\right) - \left(-\frac{gH\delta\rho}{\rho_1}(k)^2 Ae^{[ik(x-ct)]}\right) = 0 \qquad (7.22)$$

$$\left(-(kc)^2 + 2\bar{u}(k)^2 c - \bar{u}^2(k)^2\right) - \left(-\frac{gH\delta\rho}{\rho_1}(k)^2\right) = 0 \qquad (7.22)$$

$$\left(-(kc)^2 + 2\bar{u}(k)^2 c - \bar{u}^2(k)^2\right) + \frac{gH\delta\rho}{\rho_1}(k)^2 = 0 \qquad (7.22)$$

$$\left(-(k)^2(c)^2 + 2\bar{u}(k)^2 c - \bar{u}^2(k)^2\right) + \frac{gH\delta\rho}{\rho_1}(k)^2 = 0 \qquad (7.22)$$

$$\left(-(c)^2 + 2\bar{u}c - \bar{u}^2\right) + \frac{gH\delta\rho}{\rho_1} = 0 \qquad (7.22)$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

$$(-(c)^2 + 2\bar{u}c - \bar{u}^2) + \frac{gH\delta\rho}{\rho_1} = 0 \qquad (7.22)$$

$$-(c)^2 + 2\bar{u}c + \frac{gH\delta\rho}{\rho_1} - \bar{u}^2 = 0 \qquad (7.22)$$

$$(c)^2 - 2\bar{u}c - \frac{gH\delta\rho}{\rho_1} + \bar{u}^2 = 0 \qquad (7.22)$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$c = \frac{\overline{2u} \pm \sqrt{\overline{4u}^2 - 4\left(-\frac{gH\delta\rho}{\rho_1} + \bar{u}^2\right)}}{2}$$

$$c = \frac{2\bar{u} \pm \sqrt{4\bar{u}^2 - 4\left(-\frac{gH\delta\rho}{\rho_1} + \bar{u}^2\right)}}{\sqrt{4}}$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

$$c = \frac{2\bar{u} \pm \sqrt{4\bar{u}^2 - 4\left(-\frac{gH\delta\rho}{\rho_1} + \bar{u}^2\right)}}{\sqrt{4}}$$

$$c = \frac{2\bar{u} \pm \sqrt{4\bar{u}^2 + 4\frac{gH\delta\rho}{\rho_1} - 4\bar{u}^2}}{\sqrt{4}}$$

$$c = \frac{2\bar{u}}{2} \pm \sqrt{\frac{4\bar{u}^2 + 4\frac{gH\delta\rho}{\rho_1} - 4\bar{u}^2}{4}}$$

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{4\frac{gH\delta\rho}{\rho_1}}{4}}$$

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{gH\delta\rho}{\rho_1}}$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{gH\delta\rho}{\rho_1}}$$

Se as camadas superior e inferior são ar e água, respectivamente, então $\delta\rho \approx \rho_1$ e a fórmula da velocidade de fase simplifica-se para

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{gH\rho_1}{\rho_1}}$$

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{gH}$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

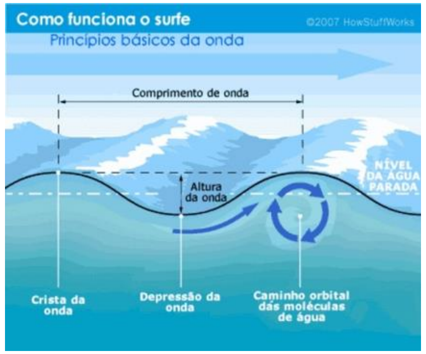
$$c = \bar{u} \pm \sqrt{gH}$$

A quantidade $\sqrt{gH}$ é chamada de velocidade da onda em águas rasas.

É uma ***aproximação válida*** apenas para ondas cujos comprimentos de onda que ***são muito maiores*** que a **profundidade do fluido H**.

Esta **restrição é necessária** para que as **velocidades verticais** sejam **suficientemente pequenas** para que a **aproximação hidrostática seja válida**.

Para uma **profundidade oceânica de 4 km, a velocidade da onda gravitacional em águas rasas é ≈ 200 m s** . Assim, as ondas longas na superfície do oceano viajam muito rapidamente

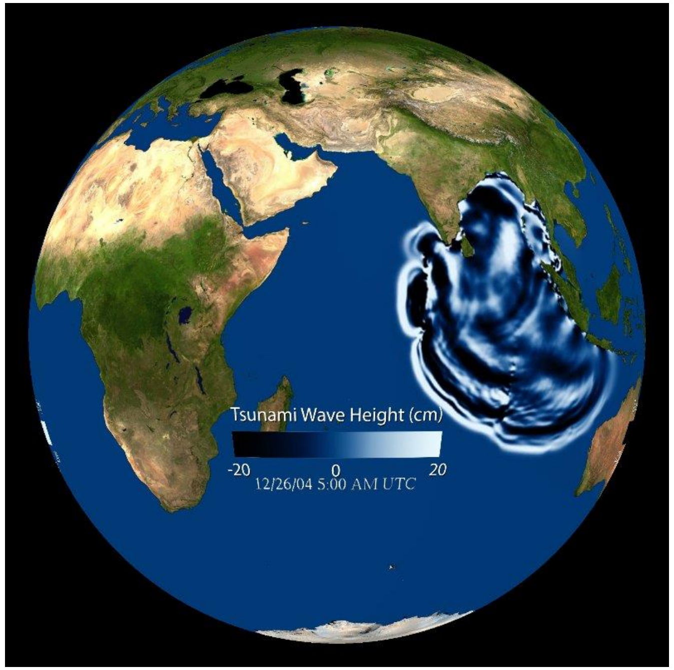


7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{gH}$$

Essas ondas longas **normalmente não são excitadas pelas tensões do vento**, mas podem ser produzidas por perturbações de grande escala, como terremotos.

Ondas longas excitadas por terremotos subaquáticos ou erupções vulcânicas são chamadas de tsunamis

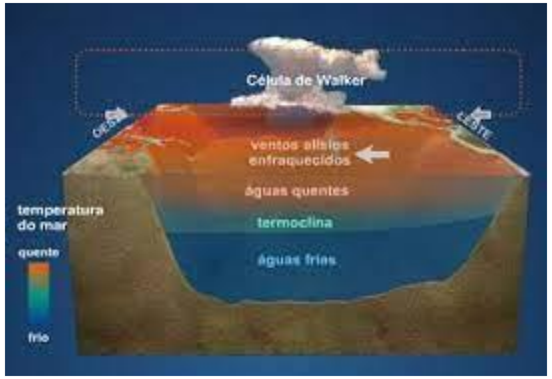


7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{gH}$$

Ondas gravitacionais em águas rasas também podem ocorrer em interfaces dentro do oceano onde há um gradiente de densidade muito acentuado (a difusão sempre impedirá a formação de uma verdadeira descontinuidade de densidade).

Em particular, as águas superficiais são separadas das águas profundas por uma região estreita de nítido contraste de densidade chamada termoclina.



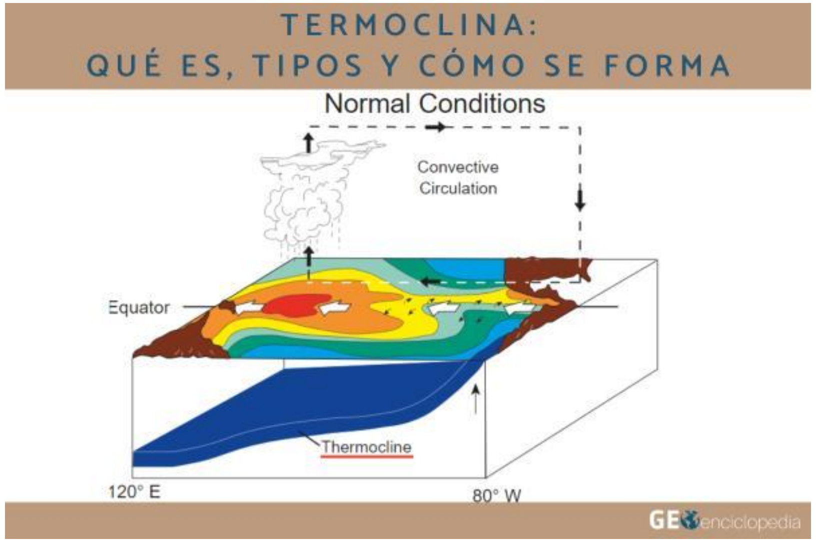
Se o **gradiente de pressão horizontal desaparece na camada acima da termoclina**, então (7.22) governa o deslocamento, h', da termoclina a partir de sua altura média H.

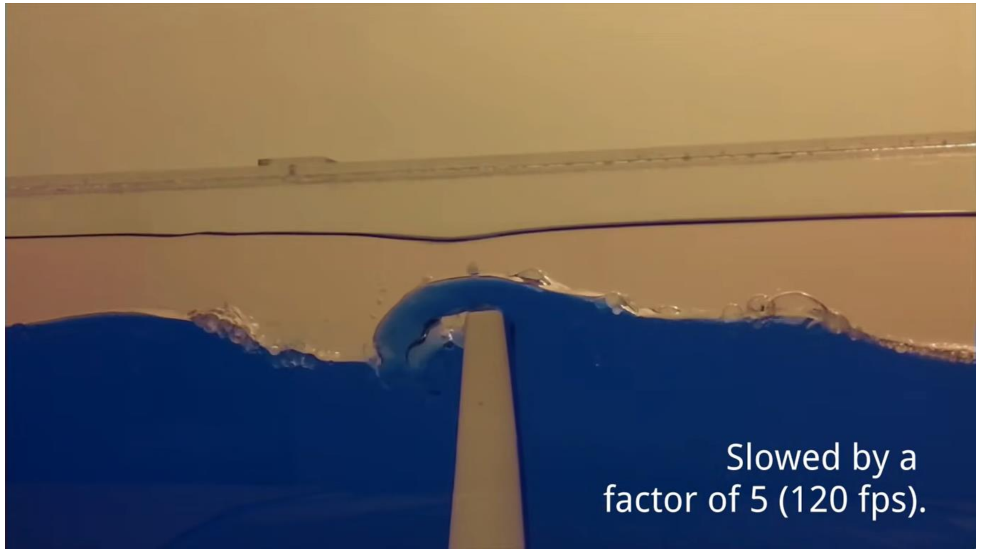
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 h' - \left(\frac{gH\delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial^2 h'}{\partial^2 x}\right) = 0 \qquad (7.22)$$

7.3.2 Ondas de Gravidade em Água Rasa

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{gH\delta\rho}{\rho_1}}$$

Se a densidade mudar em uma quantidade $\delta\rho/\rho_1 \approx 0{,}01$, através da termoclina, então a partir de (7.23) a velocidade da onda para *ondas que viajam ao longo da termoclina* será apenas um décimo da velocidade da onda superficial para um fluido da mesma profundidade.





As ondas gravitacionais que se propagam ao longo de uma descontinuidade de densidade interna são algumas vezes chamadas de ondas internas.

ONDAS DE GRAVIDADE INTERNA (FLUTUAÇÃO)

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

Estabilidade Estática

A Taxa de Decaimento Adiabático

Uma relação entre a taxa de variação da temperatura (ou seja, a taxa de diminuição da temperatura em relação à altura) e a ***taxa de mudança da temperatura potencial em relação à altura pode ser obtida ao tomar o logaritmo da temperatura potencial*** e diferenciar em relação à altura

$$\theta = T\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{c_p}}$$

$$\ln\theta = \ln\left(T\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{c_p}}\right)$$

$$\ln\theta = \ln(T) + \ln\left(\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{c_p}}\right)$$

$$\ln\theta = \ln(T) + \frac{R}{c_p}\ln\left(\left(\frac{P_s}{P}\right)\right)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\ln\theta = \ln(T) + \frac{R}{c_p}\ln\left(\left(\frac{P_s}{P}\right)\right)$$

$$\ln\theta = \ln(T) + \frac{R}{c_p}\ln(P_s) - \frac{R}{c_p}\ln(P)$$

$$\frac{\partial\ln\theta}{\partial z} = \frac{\partial\ln(T)}{\partial z} + \frac{R}{c_p}\frac{\partial\ln(P_s)}{\partial z} - \frac{R}{c_p}\frac{\partial\ln(\ln(P))}{\partial z}$$

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{R}{c_p}\frac{1}{P_s}\frac{\partial P_s}{\partial z} - \frac{R}{c_p}\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{R}{c_p}\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{c_p}\frac{R}{P}\frac{\partial P}{\partial z}$$

Estabilidade Estática

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{c_p}\frac{1}{\rho T}(-\rho g)$$

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{c_p}\frac{1}{T}$$

$$\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{c_p}$$

$$P = -\rho g z \qquad P = \rho R T$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \qquad \frac{1}{\rho T} = \frac{R}{P}$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{c_p}$$

Para uma atmosfera na qual a temperatura potencial é constante em relação à altura $\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0$, a taxa de variação é assim:

$$0 = \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{c_p}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{g}{c_p} = \Gamma_d$$

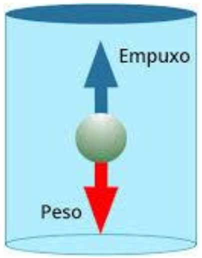
Portanto, a taxa de variação adiabática seca Γ_d é aproximadamente constante em toda a atmosfera inferior (camada limite de mistura).

7.4 ONDAS DE GRAVIDADE INTERNA (FLUTUAÇÃO)

As ***ondas gravitacionais atmosféricas só podem existir quando a atmosfera está estratificada de forma estável***, de modo que uma parcela de fluido deslocada verticalmente **sofrerá oscilações de flutuabilidade**.

2.7.3 Static Stability

$$N^2 = g\frac{d\ln\theta_0}{dz}$$



$$P - E = ma$$

Portanto, se $N^2 > 0$, a parcela oscilará em torno do seu nível inicial com um período $\tau = 2\pi/N$.

A frequência correspondente N é a frequência de empuxo:

Para condições troposféricas médias, $N \approx 1.2x10^{-1}s^{-1}$ de modo que o período de oscilação de empuxo seja de cerca de 8 min.

No caso de N = 0, **não existirá nenhuma força aceleradora e a parcela estará em equilíbrio neutro** no seu novo nível.

se $N^2 < 0$ (temperatura potencial diminuindo com a altura) o **deslocamento aumentará exponencialmente no tempo**.

7.4 ONDAS DE GRAVIDADE INTERNA (FLUTUAÇÃO)

Chegamos assim aos familiares critérios de estabilidade gravitacional ou estática para ar seco:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dz} > 0 & Estabilidade\ estável \\ \dfrac{d\theta}{dz} = 0 & Estabilidade\ neutra \\ \dfrac{d\theta}{dz} < 0 & Estabilidade\ Instável \end{cases}$$

Na ***escala sinótica***, **a atmosfera é sempre estratificada de forma estável** porque quaisquer regiões instáveis que se desenvolvem são estabilizadas rapidamente por processos convectivo.

Para uma atmosfera úmida, a situação é mais complicada

7.4 ONDAS DE GRAVIDADE INTERNA (FLUTUAÇÃO)

Como a ***força de empuxo é a força restauradora responsável pelas ondas gravitacionais***, o termo onda de empuxo é, na verdade, mais apropriado como nome para essas ondas.

Porém, neste texto usaremos geralmente **o nome tradicional de onda gravidade**.

Em um fluido, como o oceano, ***que é limitado tanto acima quanto abaixo***, as ***ondas gravitacionais se propagam principalmente no plano horizontal***, uma vez que as **ondas que viajam verticalmente são refletidas a partir dos limites para formar ondas estacionárias**.

7.4 ONDAS DE GRAVIDADE INTERNA (FLUTUAÇÃO)

Entretanto, **em um fluido que não possui limite superior**, ***como a atmosfera***, **as ondas gravitacionais podem se propagar tanto vertical quanto horizontalmente**.

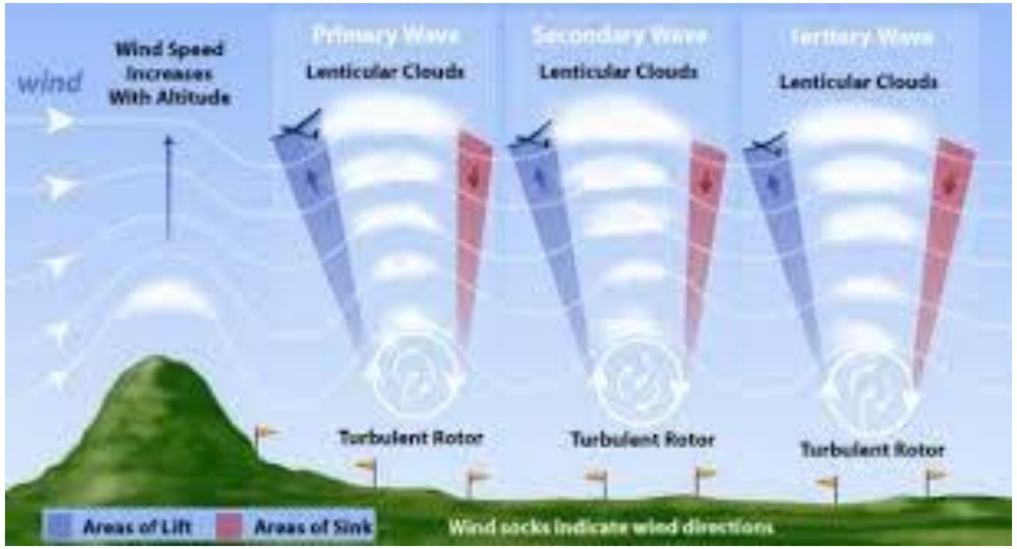
Nas ondas que se propagam verticalmente, a fase é função da altura.

Essas ondas são chamadas de ondas internas.

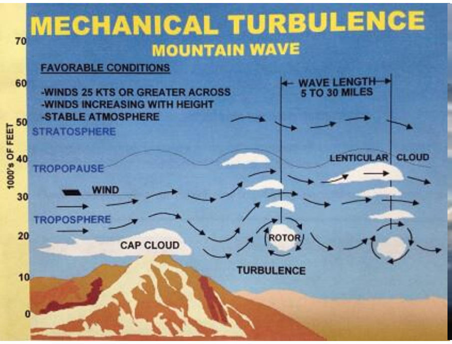
Embora ***as ondas gravitacionais internas geralmente não sejam de grande importância para a previsão do tempo em escala sinótica*** (e de fato são inexistentes nos modelos quase geostróficos filtrados), ***elas podem ser importantes em movimentos de mesoescala.***

7.4 ONDAS DE GRAVIDADE INTERNA (FLUTUAÇÃO)

Por exemplo, eles são responsáveis pela ocorrência de ondas de montanha.



Acredita-se também que sejam ***<u>um mecanismo importante para o transporte de energia e momentum para a atmosfera média</u>*** e ***<u>estão frequentemente associados à formação de turbulência de ar limpo</u>*** (CAT).



7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

Para simplificar, **desprezamos a força de Coriolis** e limitamos nossa discussão às ***ondas de gravidade interna bidimensionais*** que se propagam no plano x, z.

Uma expressão para a ***frequência de tais ondas pode ser obtida modificando a teoria das parcelas***.

Ondas de gravidade interna são ondas transversais nas quais as oscilações da parcela são paralelas às linhas de fase, conforme indicado na Fig.7.8

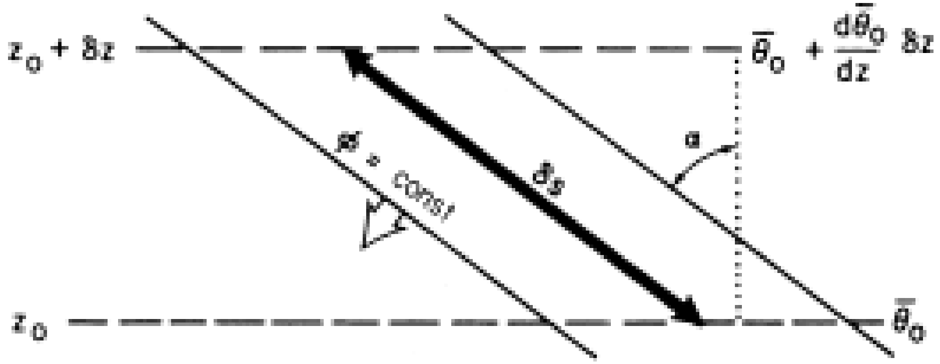
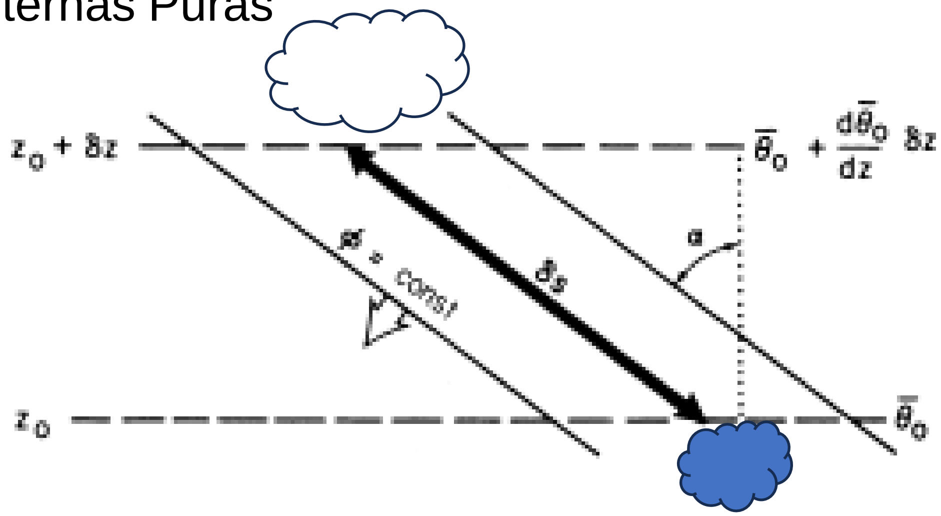


Fig. 7.8 Trajetória de oscilação da parcela (seta grossa) para ondas de gravidade pura com linhas de fase inclinadas em um ângulo α com a vertical.

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras



Uma parcela deslocado a uma distância δs ao longo de uma linha inclinada em um ângulo α em relação à vertical, como mostrado na Fig. 7.8, sofrerá um deslocamento vertical $\delta z = \delta s \cos(\alpha)$

Para tal parcela, a força de flutuabilidade vertical por unidade de massa é apenas −N2δz,

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

Estabilidade Estática

Se a temperatura potencial é uma função da altura, a **taxa de decaimento atmosférico**, $\Gamma \equiv -\frac{\partial T}{\partial z}$, diferirá da taxa de decaimento adiabática e

$$\frac{T}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{c_p}$$

$$\frac{T}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} = \Gamma_d - \Gamma$$

Se $\Gamma < \Gamma_d$ de **forma que θ aumente com a altura, uma parcela de ar que sofre um deslocamento adiabático de seu nível de equilíbrio será a flutuabilidade positiva** quando **deslocado para baixo e uma flutuabilidade negativa quando deslocado para cima**, de modo que ***tenderá a retornar ao seu nível de equilíbrio***, e a atmosfera é *considerada estaticamente estável* ou *estratificada de forma estável*.

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

Estabilidade Estática

Oscilações adiabáticas de uma parcela de fluido em torno de seu nível de equilíbrio em uma atmosfera estratificada de forma estável são chamadas de **oscilações de flutuabilidade**.

A ***frequência característica de tais oscilações pode ser derivada*** **considerando uma parcela que é deslocado verticalmente por uma pequena distância δz** sem perturbar seu ambiente.

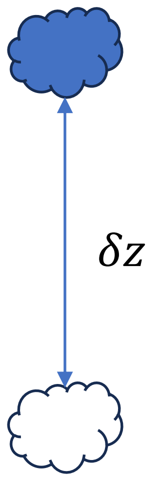
Se o **ambiente está em equilíbrio hidrostático**, $\rho_0 g = \frac{dP_0}{dz}$, onde ρ_0 e P_0 são a densidade e a pressão do ambiente.

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

Estabilidade Estática

A aceleração vertical da parcela é

$$a_w = \frac{Dw}{Dt} = \frac{D^2(\delta z)}{D^2 t} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$



onde ρ e P são a densidade e a pressão da parcela.

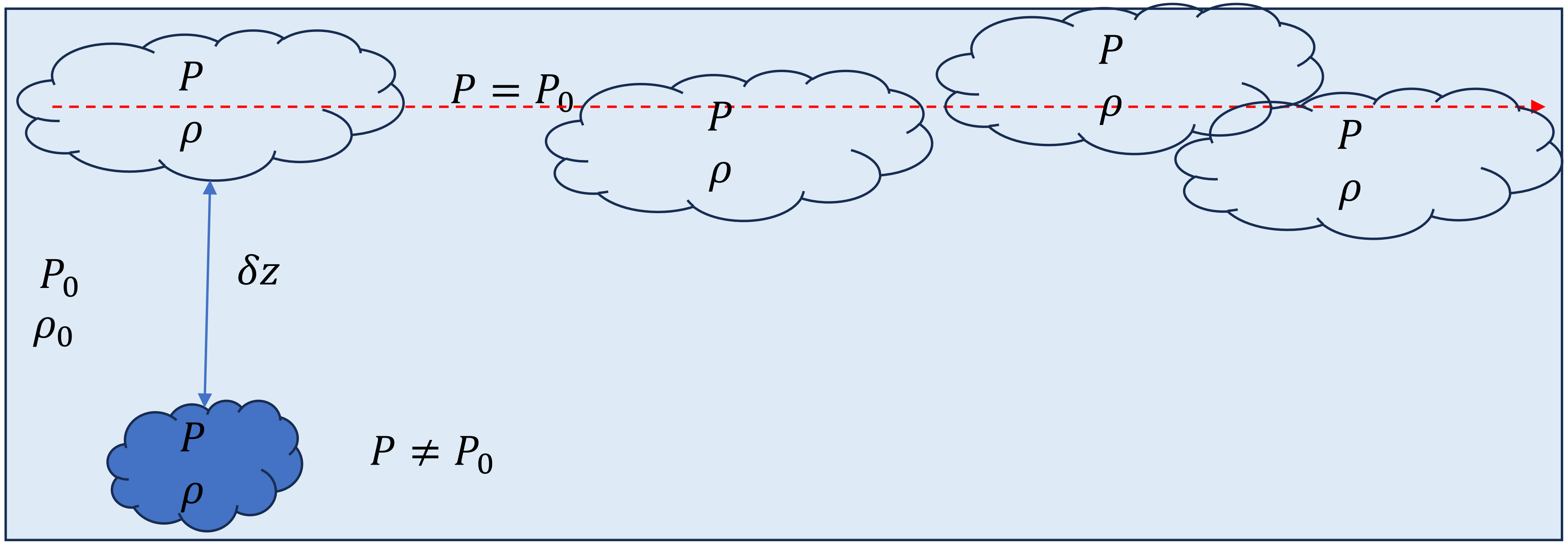
No método da parcela, **assume-se que a pressão da parcela se ajusta instantaneamente à pressão ambiental** durante o deslocamento: $P = P_0$.

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

deslocamento adiabático

Estabilidade Estática

No método da parcela, assume-se que a pressão da parcela se ajusta instantaneamente à pressão ambiental durante o deslocamento: $P = P_0$.



$$P = \rho RT \qquad \rho = \frac{M}{V}$$

$$P = -\rho g h$$

$$\frac{P - P_0}{\delta z} = -(\rho - \rho_0) g$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{P - P_0}{\delta z} = -\frac{(\rho - \rho_0)}{\rho} g$$

$$\rho = \frac{P}{RT} \qquad \rho_0 = \frac{P_0}{RT_0}$$

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho} \sim 1 - \frac{P_0}{RT_0}\frac{RT}{P}$$

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho} = 1 - \frac{P_0}{P}\frac{T}{T_0} \sim \frac{\theta}{\theta_0}$$

Paulo Yoshio Kubota

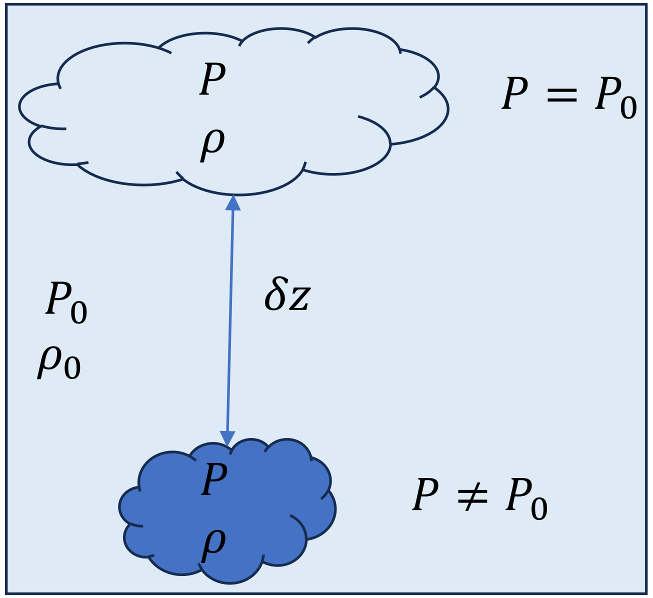
7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

deslocamento adiabático

$$\frac{\rho-\rho_0}{\rho}=1-\frac{P_0}{P}\frac{T}{T_0}\sim\frac{\theta}{\theta_0}$$

Estabilidade Estática

No método da parcela, assume-se que a pressão da parcela se ajusta instantaneamente à pressão ambiental durante o deslocamento: $P = P_0$.



$$a_w=\frac{Dw}{Dt}=\frac{D^2(\delta z)}{D^2t}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$a_w=\frac{Dw}{Dt}=\frac{D^2(\delta z)}{D^2t}=0=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}=-g$$

Essa condição deve ser verdadeira se a parcela não perturbar o ambiente.

Assim, com a ajuda da relação hidrostática, a pressão pode ser eliminada

$$a_w=\frac{D^2(\delta z)}{D^2t}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}=g\left(\frac{\rho_0-\rho}{\rho}\right)=g\frac{\theta}{\theta_0}$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

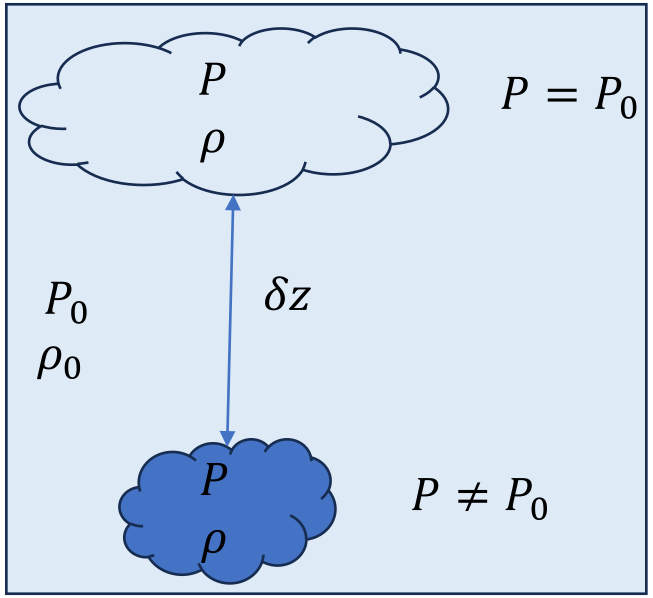
deslocamento adiabático

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho} = 1 - \frac{P_0}{P}\frac{T}{T_0} \sim \frac{\theta}{\theta_0}$$

Estabilidade Estática

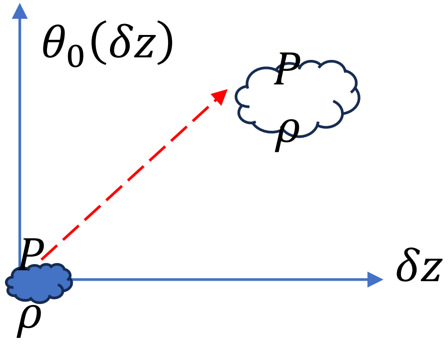
Aqui, temperatura potencial e a lei dos gases ideais foram usadas para expressar a força de flutuabilidade em termos de temperatura potencial.

$$a_w = \frac{D^2(\delta z)}{D^2 t} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = g\left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho}\right) = g\frac{\theta}{\theta_0}$$



Aqui, θ designa a devio da temperatura potencial da parcela de seu valor de estado básico (ambiental) $\theta_0(z)$.

Se a parcela estiver inicialmente no nível $z = 0$, onde a temperatura potencial é $\theta_0(z = 0)$, então para um pequeno deslocamento δz podemos representar a temperatura potencial ambiental como



$$\theta_0(\delta z) \approx \theta_0(z = 0) + \left(\frac{d\theta_0}{dz}\right)\delta z$$

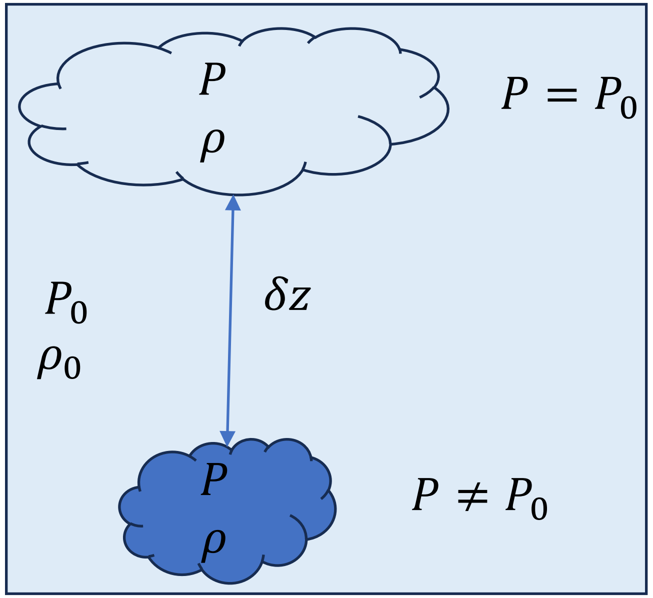
7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

deslocamento adiabático

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho} = 1 - \frac{P_0}{P}\frac{T}{T_0} \sim \frac{\theta}{\theta_0}$$

Estabilidade Estática

Se o deslocamento da parcela for adiabático, a temperatura potencial da parcela é conservada. Assim, $\theta = \theta_0(\delta z) = \theta_0(z=0) - \theta_0(z=\delta z) = -\left(\frac{d\theta_0}{dz}\right)\delta z$, e (2.51) torna-se



$$\frac{D^2(\delta z)}{D^2 t} = g\frac{\theta}{\theta_0}$$

$$\frac{D^2(\delta z)}{D^2 t} = -g\frac{1}{\theta_0}\left(\frac{d\theta_0}{dz}\right)\delta z$$

$$\frac{D^2(\delta z)}{D^2 t} = -g\left(\frac{d\ln\theta_0}{dz}\right)\delta z$$

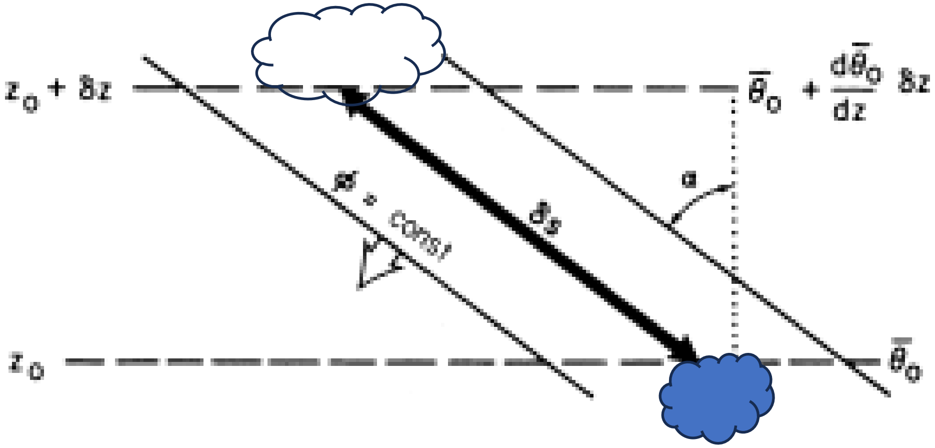
$$\frac{D^2(\delta z)}{D^2 t} = -N^2\delta z$$

buoyancy frequency

$$N^2 = g\left(\frac{d\ln\theta_0}{dz}\right)$$

N is often referred to as the Brunt–Vaisala frequency.

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras



$\vec{F} - N^2\delta z$

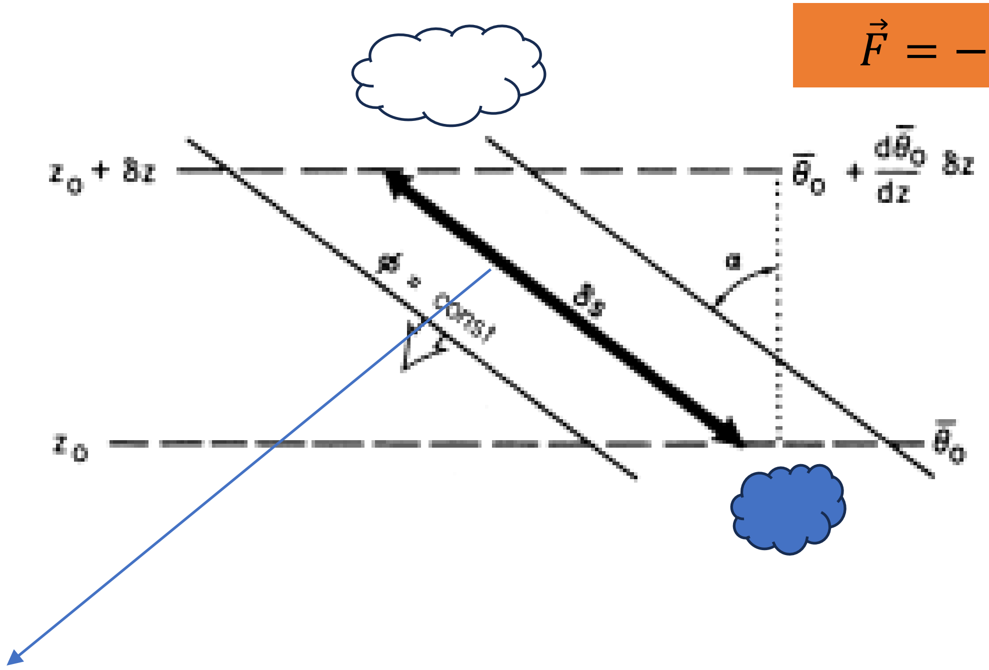
Uma parcela deslocado a uma distância δs ao longo de uma linha inclinada em um ângulo α em relação à vertical, como mostrado na Fig. 7.8, sofrerá um deslocamento vertical $\delta z = \delta s\cos(\alpha)$

$$\frac{D^2(\delta z)}{D^2 t} = -N^2\delta z$$

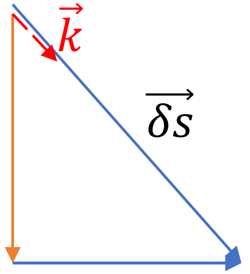
Para tal parcela, a força de flutuabilidade vertical por unidade de massa é apenas $-N^2\delta z$.

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

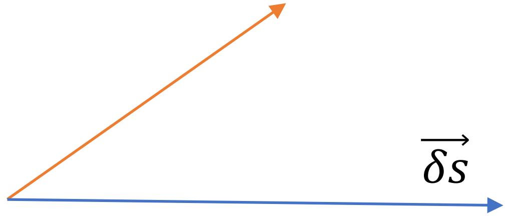
Assim, o componente da força de flutuabilidade paralelo ao caminho inclinado ao longo do qual a parcela oscila é apenas



$$\vec{F} = -N^2\delta z$$



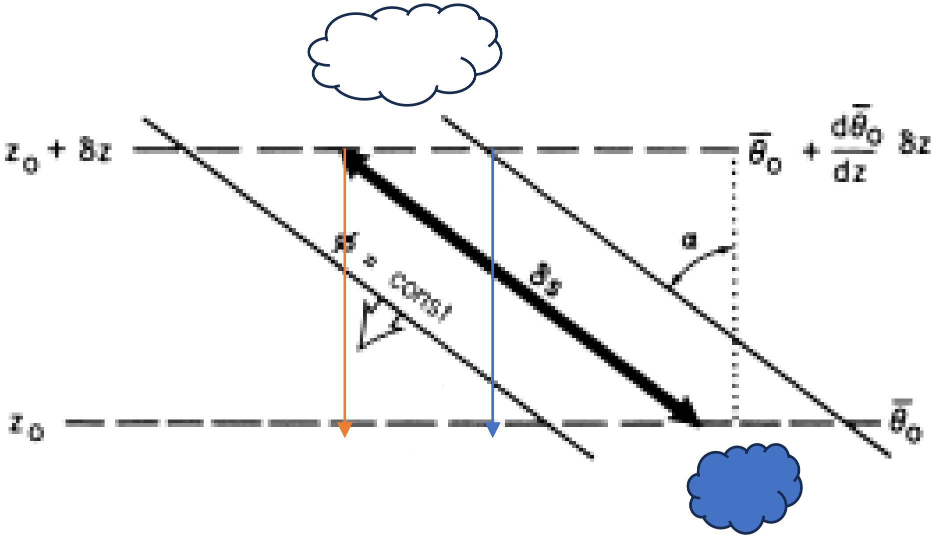
$$\vec{F} = -N^2\delta z$$



$$\vec{F}.\vec{k} = -N^2\delta z\cos(\alpha) = -N^2(\delta s\cos(\alpha))\cos(\alpha) = -N^2cos^2(\alpha)\delta s$$

$$\vec{F}.\vec{k} = -(N\cos(\alpha))^2\delta s$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras



$$-N^2\delta z\cos(\alpha) = -(N\cos(\alpha))^2\delta s$$

A equação de momentum para a oscilação da parcela é então

vertical $$\frac{D^2(\delta z)}{D^2 t} = -N^2\delta z$$

equivalentes

$$\frac{D^2(\delta s)}{D^2 t} = -N^2\delta s\cos(\alpha)$$ Inclinada sobre δs

$$\frac{D^2(\delta s)}{D^2 t} = -(N\cos(\alpha))^2\delta s$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

A equação geral de momento para a oscilação da parcela é então

$$\frac{D^2(\delta s)}{D^2 t} = -(N\cos(\alpha))^2 \delta s$$

"que tem a solução geral $\delta s = e^{[\pm i(ks-(N\cos(\alpha))t)]}$,ou $\delta s = e^{[\pm i(ks)]} e^{[\pm i((N\cos(\alpha))t)]}$ ou $\delta s = e^{[\pm i((N\cos(\alpha))t)]}$"

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} = \pm iN\cos(\alpha)\, e^{[\pm i(N\cos(\alpha))t]}."$$

$$\frac{\partial^2 \delta s}{\partial^2 t} = \pm i^2 (\mathrm{N}\cos(\alpha))^2 e^{[\pm i(N\cos(\alpha))t]}."$$

$$\pm i^2 (\mathrm{N}\cos(\alpha))^2 e^{[\pm i(N\cos(\alpha))t]} = -(N\cos(\alpha))^2 e^{[\pm i(N\cos(\alpha))t]}$$

$$\pm(\mathrm{N}\cos(\alpha))^2 = (N\cos(\alpha))^2$$

Assim, as parcelas executam uma oscilação harmônica simples na frequência ν = N cos α

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\upsilon = N\cos(\alpha)$$

"Esta frequência depende apenas da estabilidade estática (medida pela frequência de flutuabilidade N) e do ângulo das linhas de fase em relação à vertical."

"A derivação heurística acima pode ser verificada ao considerar as equações linearizadas para ondas internas de gravidade bidimensionais."

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

Para simplificar, **empregamos a aproximação de Boussinesq**, ***na qual a densidade é tratada como constante***, **exceto onde é acoplada à gravidade no termo de flutuabilidade** da equação de momento vertical.

Assim, nesta aproximação, **a atmosfera é considerada incompressível**, e as **variações locais de densidade são assumidas como pequenas perturbações** do campo de densidade do estado básico constante.

Como a **variação vertical da densidade do estado básico é negligenciada**, exceto onde acoplada à gravidade, **a aproximação de Boussinesq é válida apenas para movimentos em que a escala vertical é menor que a altura de escala atmosférica H(≈ 8 km)**."

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

“***desprezando os efeitos da rotação***, as equações básicas para o movimento bidimensional de uma atmosfera incompressível podem ser escritas como"

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+g=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+w\frac{\partial \theta}{\partial z}=0$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

"_**desprezando os efeitos da rotação**_, as equações básicas para o movimento bidimensional de uma atmosfera incompressível podem ser escritas como"

$$P = \rho RT = \frac{P}{\rho R} \qquad \theta = T\left(\frac{P_s}{P}\right)^k = \frac{P}{\rho R}\left(\frac{P_s}{P}\right)^k$$

Considerando que os gases se comportam como gases ideias, sabe-seque: $c_p - c_v \approx R$

$$c_p - R \approx c_v$$

"o que, após tomar logaritmos em ambos os lados, resulta em"

$$\theta = \frac{P}{\rho R}\left(\frac{P_s}{P}\right)^k$$

$$\ln(\theta) = \ln\left(\frac{P}{\rho R}\left(\frac{P_s}{P}\right)^k\right)$$

$$\ln(\theta) = \ln\left(\frac{P}{\rho R}\right) + \ln\left(\left(\frac{P_s}{P}\right)^k\right)$$

$$\ln(\theta) = \ln(P) - \ln(\rho R) + k\ln\left(\frac{P_s}{P}\right)$$

$$\ln(\theta) = \ln(P) - \ln(\rho R) + k\ln(P_s) - k\ln(P)$$

$$\ln(\theta) = (1-k)\ln(P) - \ln(\rho) + \ln(R) + k\ln(P_s)$$

$$\ln(\theta) = (1-k)\ln(P) - \ln(\rho) + \ln(R) + k\ln(P_s)$$

$$\gamma = \frac{1}{(1-k)} = \frac{1}{\left(1-\frac{R}{cp}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{cp-R}{cp}\right)} = \left(\frac{cp}{cp-R}\right) = \left(\frac{cp}{cv}\right)$$

$$\gamma = \left(\frac{cp}{cv}\right)$$

$$\ln(\theta) = \gamma^{-1}\ln(P) - \ln(\rho) + constante$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

"Negligenciando os efeitos da rotação, as equações básicas para o movimento bidimensional de uma atmosfera incompressível podem ser escritas como"

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad (7.25)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + g = 0 \qquad (7.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (7.27)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} + w\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \qquad (7.28)$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

$$\ln(\theta) = \gamma^{-1}\ln(P) - \ln(\rho) + constante \qquad (7.29)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

"Agora, linearizamos (7.25)–(7.29) ao permitir que"

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\text{P}= \bar{P}(z) + P' \qquad \text{u}= \bar{u} + u' \qquad \text{w}= \bar{w} + w' \qquad (7.30)$$

$$\theta = \bar{\theta}(z) + \theta'$$

"onde se assume que o fluxo zonal do estado básico $\bar{u}$ e a densidade ρ_0 são ambos constantes.

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \qquad \frac{d(\bar{P}(z) + P')}{dz} = -(\rho_0 + \rho')g \qquad \frac{d(\bar{P}(z)\,)}{dz} + \frac{d(P')}{dz} = -(\rho_0)g - (\rho')g$$

O campo de pressão do estado básico deve satisfazer a equação hidrostática"

$$\frac{d\left(\bar{\bar{P}}\,(z)\,\right)}{dz} + \frac{d(\overline{P'})}{dz} = -(\overline{\rho_0})g - (\overline{\rho'})g \qquad (\overline{P'}) = 0 \quad (\overline{\rho'}) = 0$$

$$\boxed{\frac{d(\bar{P}(z)\,)}{dz} = -(\rho_0)g}$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

"Agora, linearizamos (7.25)–(7.29) ao permitir que"

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\text{P}= \bar{P}(z) + P' \qquad \text{u}= \bar{u} + u' \qquad \text{w}= \bar{w} + w' \qquad (7.30)$$

$$\theta = \bar{\theta}(z) + \theta'$$

O campo de temperatura potencial do estado básico deve satisfazer a "

$$\ln(\theta) = \gamma^{-1}\ln(P) - \ln(\rho) + constante \qquad (7.29)$$

$$\ln(\bar{\theta}(z) + \theta') = \gamma^{-1}\ln(\bar{P}(z) + P') - \ln(\rho_0 + \rho') + cte$$

$$\ln\left(\overline{\bar{\theta}(z)} + \overline{\theta'}\right) = \gamma^{-1}\ln\left(\overline{\bar{P}(z)} + \overline{P'}\right) - \ln(\overline{\rho_0} + \overline{\rho'}) + cte$$

$$\ln \overline{\bar{\theta}(z)} = \gamma^{-1}\ln\left(\overline{\bar{P}(z)}\right) - \ln(\overline{\rho_0}) + cte$$

$$(\overline{P'}) = 0$$

$$(\overline{\rho'}) = 0$$

$$\left(\overline{\overline{\theta}'}\right) = 0$$

$$\ln \bar{\theta} = \gamma^{-1}\ln(\bar{P}) - \ln(\rho_0) + cte$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

"As equações linearizadas são obtidas substituindo de (7.30) em (7.25)– (7.29) e negligenciando todos os termos que são produtos das variáveis de perturbação.

Assim, por exemplo, os dois últimos termos em (7.26) são aproximados como"

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\text{u}= \bar{u} + u'$$

$$\text{w}= \bar{w} + w'$$

$$\text{P}= \bar{P}(z) + P'$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + g = 0 \qquad (7.26)$$

$$\frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial t} + (\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial x} + (\bar{w}+w')\frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial z} + \frac{1}{(\rho_0+\rho')}\frac{\partial(\bar{P}(z)+P')}{\partial z} + g = 0 \qquad (7.26)$$

$$\frac{\partial(\bar{w})}{\partial t} + \frac{\partial(w')}{\partial t} + (\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x} + (\bar{u}+u')\frac{\partial(w')}{\partial x} + (\bar{w}+w')\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z} + (\bar{w}+w')\frac{\partial(w')}{\partial z} + \frac{1}{(\rho_0+\rho')}\frac{\partial(\bar{P}(z)+P')}{\partial z} + g = 0$$

$$\frac{\partial(\bar{w})}{\partial t} + \frac{\partial(w')}{\partial t} + \left(\bar{u}\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x} + u'\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x}\right) + \left(\bar{u}\frac{\partial(w')}{\partial x} + u'\frac{\partial(w')}{\partial x}\right) + \left(\bar{w}\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z} + w'\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z}\right) + \left(\bar{w}\frac{\partial(w')}{\partial z} + w'\frac{\partial(w')}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{1}{(\rho_0+\rho')}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial z} + \frac{1}{(\rho_0+\rho')}\frac{\partial(P')}{\partial z} + g = 0$$

Paulo Yoshio Kubota

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$
\frac{\partial(\bar{w})}{\partial t}+\frac{\partial(w')}{\partial t}+\left(\bar{u}\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x}+u'\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x}\right)+\left(\bar{u}\frac{\partial(w')}{\partial x}+u'\frac{\partial(w')}{\partial x}\right)+\left(\overline{w\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z}}+w'\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z}\right)+\left(\bar{w}\frac{\partial(w')}{\partial z}+w'\frac{\partial(w')}{\partial z}\right)
$$
$$
+\frac{1}{(\rho_0+\rho')}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial z}+\frac{1}{(\rho_0+\rho')}\frac{\partial(P')}{\partial z}+g=0
$$

$$
\frac{\partial(\bar{w})}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x}+\bar{w}\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z}+\frac{\partial(w')}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(w')}{\partial x}+\bar{w}\frac{\partial(w')}{\partial z}+\left(u'\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x}+w'\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z}\right)+\left(u'\frac{\partial(w')}{\partial x}+w'\frac{\partial(w')}{\partial z}\right)
$$
$$
+\frac{1}{\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial z}+\frac{1}{\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z}+g=0
$$

Expansão em serie

$$
f(x=0)=(1+x)^{-1}\cong 1+\frac{1}{1!}(-1)\frac{\partial(1+x)}{\partial x}(x-x0)+
$$

$$
f(x=0)=(1+x)^{-1}\cong 1-x
$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\frac{\partial(\bar{w})}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x}+\bar{w}\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z}+\frac{\partial(w')}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(w')}{\partial x}+\bar{w}\frac{\partial(w')}{\partial z}+\left(u'\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x}+w'\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z}\right)+\left(u'\frac{\partial(w')}{\partial x}+w'\frac{\partial(w')}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{1}{\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial z}+\frac{1}{\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z}+g=0$$

$$f(x=0)=(1+x)^{-1}\cong 1-x$$

$$\frac{\partial(\bar{w})}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x}+\bar{w}\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z}+\frac{\partial(w')}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(w')}{\partial x}+\bar{w}\frac{\partial(w')}{\partial z}+\left(u'\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x}+w'\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z}\right)+\left(u'\frac{\partial(w')}{\partial x}+w'\frac{\partial(w')}{\partial z}\right)$$
$$+\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial z}+\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z}+g=0$$

"onde (7.31) foi utilizada para eliminar $\bar{P}(z)$ "

$$\frac{d(\bar{P}(z))}{dz}=-(\rho_0)g \qquad (7.31)$$

$$\frac{\partial(\bar{w})}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x}+\bar{w}\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z}+\frac{\partial(w')}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(w')}{\partial x}+\bar{w}\frac{\partial(w')}{\partial z}+\left(u'\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x}+w'\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z}\right)+\left(u'\frac{\partial(w')}{\partial x}+w'\frac{\partial(w')}{\partial z}\right)$$
$$+\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)(-g)+\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z}+g=0$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\frac{\partial(\overline{w})}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial(\overline{w})}{\partial x}+\overline{w}\frac{\partial(\overline{w})}{\partial z}+\frac{\partial(w')}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial(w')}{\partial x}+\overline{w}\frac{\partial(w')}{\partial z}+\left(u'\frac{\partial(\overline{w})}{\partial x}+w'\frac{\partial(\overline{w})}{\partial z}\right)+\left(u'\frac{\partial(w')}{\partial x}+w'\frac{\partial(w')}{\partial z}\right)$$
$$+\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)(-g)+\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z}+g=0$$

$$\frac{\partial(\overline{w})}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial(\overline{w})}{\partial x}+\overline{w}\frac{\partial(\overline{w})}{\partial z}+\frac{\partial(w')}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial(w')}{\partial x}+\overline{w}\frac{\partial(w')}{\partial z}+\left(u'\frac{\partial(\overline{w})}{\partial x}+w'\frac{\partial(\overline{w})}{\partial z}\right)+\left(u'\frac{\partial(w')}{\partial x}+w'\frac{\partial(w')}{\partial z}\right)$$
$$+\left(-g+\frac{\rho'}{\rho_0}g\right)+\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z}+g=0$$

$$\frac{\partial(\overline{w})}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial(\overline{w})}{\partial x}+\overline{w}\frac{\partial(\overline{w})}{\partial z}+\frac{\partial(w')}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial(w')}{\partial x}+\overline{w}\frac{\partial(w')}{\partial z}+\left(u'\frac{\partial(\overline{w})}{\partial x}+w'\frac{\partial(\overline{w})}{\partial z}\right)+\left(u'\frac{\partial(w')}{\partial x}+w'\frac{\partial(w')}{\partial z}\right)+\frac{\rho'}{\rho_0}g$$
$$+\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z}=0$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\frac{\partial(\overline{w})}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(\overline{w})}{\partial x}+\overline{w}\frac{\partial(\overline{w})}{\partial z}+\frac{\partial(w')}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(w')}{\partial x}+\overline{w}\frac{\partial(w')}{\partial z}+\left(u'\frac{\partial(\overline{w})}{\partial x}+w'\frac{\partial(\overline{w})}{\partial z}\right)+\left(u'\frac{\partial(w')}{\partial x}+w'\frac{\partial(w')}{\partial z}\right)+\frac{\rho'}{\rho_0}g$$
$$+\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z}=0$$

$$\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\cong 1$$

$$\frac{\partial(\overline{w})}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(\overline{w})}{\partial x}+\overline{w}\frac{\partial(\overline{w})}{\partial z}+\frac{\partial(w')}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial(w')}{\partial x}+\overline{w}\frac{\partial(w')}{\partial z}+\left(u'\frac{\partial(\overline{w})}{\partial x}+w'\frac{\partial(\overline{w})}{\partial z}\right)+\left(u'\frac{\partial(w')}{\partial x}+w'\frac{\partial(w')}{\partial z}\right)+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z}+\frac{\rho'}{\rho_0}g$$
$$=0 \qquad (7.33)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

"a forma de perturbação de (7.29) é obtida ao notar que"

$$\ln(\theta) = \gamma^{-1}\ln(P) - \ln(\rho) + constante \qquad (7.29)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\ln(\theta) - \gamma^{-1}\ln(P) + \ln(\rho) = +constante \qquad (7.29)$$

P= $\bar{P}(z) + P'$

$$\ln(\bar{\theta}(z) + \theta') = \gamma^{-1}\ln(\bar{P}(z) + P') - \ln(\rho_0 + \rho') + cte$$

$$\theta = \bar{\theta}(z) + \theta'$$

$$\ln\left[\bar{\theta}(z)\left(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}(z)}\right)\right] = \gamma^{-1}\ln\left[\bar{P}(z)\left(1 + \frac{P'}{\bar{P}(z)}\right)\right] - \ln\left[\rho_0\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)\right] + cte \qquad (7.34)$$

"Agora, lembrando que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$$\ln[\bar{\theta}(z)] + \ln\left[\left(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}(z)}\right)\right] = \gamma^{-1}\ln[\bar{P}(z)] + \gamma^{-1}\ln\left[\left(1 + \frac{P'}{\bar{P}(z)}\right)\right] - \ln[\rho_0] - \ln\left[\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)\right] + cte \qquad (7.34)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

"a forma de perturbação de (7.29) é obtida ao notar que"

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\ln(\theta) - \gamma^{-1}\ln(P) + \ln(\rho) = constante \qquad (7.29)$$

$$P = \bar{P}(z) + P'$$

$$\ln(\theta) - \gamma^{-1}\ln(P) + \ln(\rho) - constante \ = 0 \qquad (7.29)$$

$$\theta = \bar{\theta}(z) + \theta'$$

$$\ln[\bar{\theta}(z)\ ] + \ln\left[\left(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}(z)}\right)\right] = \gamma^{-1}\ln[\bar{P}(z)\ ] + \gamma^{-1}\ln\left[\left(1 + \frac{P'}{\bar{P}(z)}\right)\right] - \ln[\rho_0] - \ln\left[\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)\right] + cte \qquad (7.34)$$

$$\ln[\bar{\theta}(z)\ ] - \gamma^{-1}\ln[\bar{P}(z)] + \ln[\rho_0] - cte + \ln\left[\left(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}(z)}\right)\right] = +\gamma^{-1}\ln\left[\left(1 + \frac{P'}{\bar{P}(z)}\right)\right] - \ln\left[\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)\right] \qquad (7.34)$$

$$\ln\left[\left(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}(z)}\right)\right] = +\gamma^{-1}\ln\left[\left(1 + \frac{P'}{\bar{P}(z)}\right)\right] - \ln\left[\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)\right] \qquad (7.34)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\ln\left[\left(1+\frac{\theta'}{\bar{\theta}(z)}\right)\right] = +\gamma^{-1}\ln\left[\left(1+\frac{P'}{\bar{P}(z)}\right)\right] - \ln\left[\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\right] \qquad (7.34)$$

que $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$ para qualquer $\varepsilon \ll 1$, encontramos com a ajuda de (7.32) que (7.34) pode ser aproximado por"

$$\frac{\theta'}{\bar{\theta}(z)} = \gamma^{-1}\frac{P'}{\bar{P}(z)} - \frac{\rho'}{\rho_0} \qquad (7.34)$$

"Resolvendo para ρ' resulta em"

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = -\frac{\theta'}{\bar{\theta}(z)} + \gamma^{-1}\frac{P'}{\bar{P}(z)} \qquad (7.34)$$

$$\rho' = -\rho_0\frac{\theta'}{\bar{\theta}(z)} + \gamma^{-1}\rho_0\frac{P'}{\bar{P}(z)} \qquad (7.34)$$

$$\rho' = -\rho_0\frac{\theta'}{\bar{\theta}(z)} + \frac{\rho_0}{\gamma}\frac{P'}{\bar{P}(z)} \qquad (7.34)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$P = \rho_0 RT$$

$$c_s \equiv \sqrt{[\gamma R\bar{T}]}$$

$$\frac{P}{\rho_0} = RT$$

$$\gamma = \left(\frac{cp}{cv}\right)$$

$$\rho' = -\rho_0 \frac{\theta'}{\bar{\theta}(z)} + \frac{\rho_0}{\gamma}\frac{P'}{\bar{P}(z)} \qquad (7.34)$$

$$\rho' = -\rho_0 \frac{\theta'}{\bar{\theta}(z)} + \frac{P'}{c_s^2} \qquad (7.35)$$

"onde $c_s^2 = \frac{\bar{P}(z)\gamma}{\rho_0}$ é o quadrado da velocidade do som. $c_s^2 = \gamma RT$ "

"Para movimentos de ondas de flutuabilidade $\left|\rho_0 \frac{\theta'}{\bar{\theta}}\right| \gg \left|\frac{P'}{C_s^2}\right|$; ou seja, "

"flutuações de densidade devido a mudanças de pressão são pequenas comparadas àquelas devido a mudanças de temperatura.,"

Portanto, em uma primeira aproximação

$$\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \sim -\frac{\rho'}{\rho_0} \qquad (7.36)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$c_s \equiv \sqrt{[\gamma R\bar{T}]}$$

$$\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \sim -\frac{\rho'}{\rho_0} \qquad (7.36)$$

$$\frac{\partial(\bar{w})}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z} + \frac{\partial(w')}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(w')}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial(w')}{\partial z} + \left(u'\frac{\partial(\bar{w})}{\partial x} + w'\frac{\partial(\bar{w})}{\partial z}\right) + \left(u'\frac{\partial(w')}{\partial x} + w'\frac{\partial(w')}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z} + \frac{\rho'}{\rho_0}g = 0 \qquad (7.33)$$

"Usando (7.33) e (7.36), a versão linearizada do conjunto (7.25)–(7.28) pode ser escrita como"

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad (7.25)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + g = 0 \qquad (7.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (7.27)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} + w\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \qquad (7.28)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad (7.25)$$

u= $\bar{u} + u'$

P= $\bar{P}(z) + P'$

w= $\bar{w} + w'$

$$\theta = \bar{\theta}(z) + \theta'$$

$$\boxed{\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial t} + (\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x} + (\bar{w}+w')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial z} + \frac{1}{(\rho_0+\rho')}\frac{\partial(\bar{P}(z)+P')}{\partial x} = 0 \qquad (7.25)}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(u')}{\partial t} + (\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x} + (\bar{u}+u')\frac{\partial(u')}{\partial x} + (\bar{w}+w')\frac{\partial(\bar{u})}{\partial z} + (\bar{w}+w')\frac{\partial(u')}{\partial z} + \frac{1}{(\rho_0+\rho')}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial x} + \frac{1}{(\rho_0+\rho')}\frac{\partial(P')}{\partial x} = 0}$$

$$\frac{\partial(\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(u')}{\partial t} + (\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x} + (\bar{u}+u')\frac{\partial(u')}{\partial x} + (\bar{w}+w')\frac{\partial(\bar{u})}{\partial z} + (\bar{w}+w')\frac{\partial(u')}{\partial z} + \frac{1}{\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)}\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial x}$$
$$+ \frac{1}{\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)}\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(P')}{\partial x} = 0$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\frac{\partial(\bar{u})}{\partial t}+\frac{\partial(u')}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(u')}{\partial x}+(\bar{w}+w')\frac{\partial(\bar{u})}{\partial z}+(\bar{w}+w')\frac{\partial(u')}{\partial z}+\frac{1}{\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)}\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial x}$$

$$+\frac{1}{\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)}\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(P')}{\partial x}=0$$

Expansão em serie

$$f(x=0)=(1+x)^{-1}\cong 1+\frac{1}{1!}(-1)\frac{\partial(1+x)}{\partial x}(x-x0)+$$

$$f(x=0)=(1+x)^{-1}\cong 1-x$$

$$\frac{\partial(\bar{u})}{\partial t}+\frac{\partial(u')}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(u')}{\partial x}+(\bar{w}+w')\frac{\partial(\bar{u})}{\partial z}+(\bar{w}+w')\frac{\partial(u')}{\partial z}+\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial x}$$

$$+\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(P')}{\partial x}=0$$

$$\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\sim 1$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\frac{\partial(\bar{u})}{\partial t}+\frac{\partial(u')}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(u')}{\partial x}+(\bar{w}+w')\frac{\partial(\bar{u})}{\partial z}+(\bar{w}+w')\frac{\partial(u')}{\partial z}+\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial x}$$
$$+\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(P')}{\partial x}=0$$

$$\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\sim 1$$

$$\frac{\partial(\bar{u})}{\partial t}+\frac{\partial(u')}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(u')}{\partial x}+(\bar{w}+w')\frac{\partial(\bar{u})}{\partial z}+(\bar{w}+w')\frac{\partial(u')}{\partial z}+\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial x}+\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(P')}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial(\bar{u})}{\partial t}+\frac{\partial(u')}{\partial t}+\left(\bar{u}\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}+u'\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}\right)+\left(\bar{u}\frac{\partial(u')}{\partial x}+u'\frac{\partial(u')}{\partial x}\right)+\left(\bar{w}\frac{\partial(\bar{u})}{\partial z}+w'\frac{\partial(\bar{u})}{\partial z}\right)+\left(\bar{w}\frac{\partial(u')}{\partial z}+w'\frac{\partial(u')}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial x}+\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(P')}{\partial x}=0$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\frac{\partial(\bar{u})}{\partial t}+\frac{\partial(u')}{\partial t}+\left(\bar{u}\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}+u'\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}\right)+\left(\bar{u}\frac{\partial(u')}{\partial x}+u'\frac{\partial(u')}{\partial x}\right)+\left(\bar{w}\frac{\partial(\bar{u})}{\partial z}+w'\frac{\partial(\bar{u})}{\partial z}\right)+\left(\bar{w}\frac{\partial(u')}{\partial z}+w'\frac{\partial(u')}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial x}+\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(P')}{\partial x}=0$$

Ignore o produto de perturbações relacionado a processos de subgrade

$$\frac{\partial(\bar{u})}{\partial t}+\frac{\partial(u')}{\partial t}+\left(\bar{u}\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}+u'\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x}\right)+\left(\bar{u}\frac{\partial(u')}{\partial x}\right)+\left(\bar{w}\frac{\partial(\bar{u})}{\partial z}+w'\frac{\partial(\bar{u})}{\partial z}\right)+\left(\bar{w}\frac{\partial(u')}{\partial z}\right)+\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial x}+\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(P')}{\partial x}=0$$

Considere que o escoamento médio $\bar{u}$ é constante na vertical e horizontal e no tempo

$$\frac{\partial(u')}{\partial t}+\left(\bar{u}\frac{\partial(u')}{\partial x}\right)+\left(\bar{w}\frac{\partial(u')}{\partial z}\right)+\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(\bar{P}(z))}{\partial x}+\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(P')}{\partial x}=0$$

Considere que a pressão media do escoamento $\bar{P}(z)$ não varia na horizontal

$$\frac{\partial(u')}{\partial t}+\left(\bar{u}\frac{\partial(u')}{\partial x}\right)+\left(\bar{w}\frac{\partial(u')}{\partial z}\right)+\frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(P')}{\partial x}=0 \qquad (7.37)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + g = 0 \qquad (7.26)$$

$$\frac{\partial(\overline{w})}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(\overline{w})}{\partial x} + \overline{w}\frac{\partial(\overline{w})}{\partial z} + \frac{\partial(w')}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(w')}{\partial x} + \overline{w}\frac{\partial(w')}{\partial z} + \left(u'\frac{\partial(\overline{w})}{\partial x} + w'\frac{\partial(\overline{w})}{\partial z}\right) + \left(u'\frac{\partial(w')}{\partial x} + w'\frac{\partial(w')}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z} + \frac{\rho'}{\rho_0}g = 0 \qquad (7.33)$$

Ignore o produto de perturbações relacionado a processos de sub-escala

$$\frac{\partial(\overline{w})}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(\overline{w})}{\partial x} + \overline{w}\frac{\partial(\overline{w})}{\partial z} + \frac{\partial(w')}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(w')}{\partial x} + \overline{w}\frac{\partial(w')}{\partial z} + \left(u'\frac{\partial(\overline{w})}{\partial x} + w'\frac{\partial(\overline{w})}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z} + \frac{\rho'}{\rho_0}g = 0 \qquad (7.33)$$

Considere que o escoamento médio $\overline{w}$ é constante na vertical e horizontal e no tempo

$$\frac{\partial(w')}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(w')}{\partial x} + \overline{w}\frac{\partial(w')}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z} + \frac{\rho'}{\rho_0}g = 0 \qquad (7.33)$$

$$\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \sim -\frac{\rho'}{\rho_0} \qquad (7.36)$$

$$\frac{\partial(w')}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(w')}{\partial x} + \overline{w}\frac{\partial(w')}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z} - \frac{\theta'}{\bar{\theta}}g = 0 \qquad (7.38)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$\rho = \rho_0 + \rho'$

u= $\bar{u} + u'$

P= $\bar{P}(z) + P'$

w= $\bar{w} + w'$

$\theta = \bar{\theta}(z) + \theta'$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (7.27)$$

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial z} = 0 \qquad (7.27)$$

$$\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{w})}{\partial z} + \frac{\partial(w')}{\partial z} = 0 \qquad (7.27)$$

Considere que o escoamento médio $\bar{u}$ é constante na vertical e horizontal

Considere que o escoamento médio $\bar{w}$ é constante na vertical e horizontal

$$\frac{\partial(u')}{\partial x} + \frac{\partial(w')}{\partial z} = 0 \qquad (7.39)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + u\frac{\partial\theta}{\partial x} + w\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0 \qquad (7.28)$$

u= $\bar{u} + u'$

P= $\bar{P}(z) + P'$

w= $\bar{w} + w'$

$$\theta = \bar{\theta}(z) + \theta'$$

$$\frac{\partial(\bar{\theta}(z) + \theta')}{\partial t} + (\bar{u} + u')\frac{\partial(\bar{\theta}(z) + \theta')}{\partial x} + (\bar{w} + w')\frac{\partial(\bar{\theta}(z) + \theta')}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial t} + \frac{\partial(\theta')}{\partial t} + (\bar{u} + u')\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial x} + (\bar{u} + u')\frac{\partial(\theta')}{\partial x} + (\bar{w} + w')\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial z} + (\bar{w} + w')\frac{\partial(\theta')}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial t} + \frac{\partial(\theta')}{\partial t} + \left(\bar{u}\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial x} + u'\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial x}\right) + \left(\bar{u}\frac{\partial(\theta')}{\partial x} + u'\frac{\partial(\theta')}{\partial x}\right) + \left(\bar{w}\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial z} + w'\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial z}\right) + \left(\bar{w}\frac{\partial(\theta')}{\partial z} + w'\frac{\partial(\theta')}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial z} + \frac{\partial(\theta')}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(\theta')}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial(\theta')}{\partial z} + \left(u'\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial x} + w'\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial z}\right) + \left(+u'\frac{\partial(\theta')}{\partial x} + w'\frac{\partial(\theta')}{\partial z}\right) = 0$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\frac{\partial(\theta')}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(\theta')}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial(\theta')}{\partial z} + \left(u'\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial x} + w'\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial z}\right) + \left(+u'\frac{\partial(\theta')}{\partial x} + w'\frac{\partial(\theta')}{\partial z}\right) = -\left[\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial z}\right]$$

Ignore o produto de perturbações relacionado a processos de sub-escala

$$\frac{\partial(\theta')}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(\theta')}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial(\theta')}{\partial z} + \left(u'\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial x} + w'\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial z}\right) = -\left[\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial z}\right]$$

Considere que a temperatura potencial do escoamento médio $\bar{\theta}(z)$ é constante na horizontal e no tempo

$$\frac{\partial(\theta')}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(\theta')}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial(\theta')}{\partial z} + \left(w'\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial z}\right) = -\left[\bar{w}\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial z}\right]$$

Considere que a velocidade vertical do escoamento médio $\bar{w}$ muito pequena

$$\frac{\partial(\theta')}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(\theta')}{\partial x} + \left[w'\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial z}\right] = 0 \qquad (7.40)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\frac{\partial(u')}{\partial t} + \left(\bar{u}\frac{\partial(u')}{\partial x}\right) + \left(\bar{w}\frac{\partial(u')}{\partial z}\right) + \frac{1}{(\rho_0)}\frac{\partial(P')}{\partial x} = 0 \qquad (7.37)$$

$$\boxed{\frac{\partial(w')}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(w')}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial(w')}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial(P')}{\partial z} - \frac{\theta'}{\bar{\theta}}g = 0 \qquad (7.38)}$$

$$\frac{\partial(u')}{\partial x} + \frac{\partial(w')}{\partial z} = 0 \qquad (7.39)$$

$$\frac{\partial(\theta')}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial(\theta')}{\partial x} + \left[w'\frac{\partial(\bar{\theta}(z))}{\partial z}\right] = 0 \qquad (7.40)$$

Considere que a velocidade vertical do escoamento médio $\bar{w}$ muito pequena

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u' + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P'}{\partial x} = 0 \qquad (7.37)$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w' + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P'}{\partial z} - \frac{\theta'}{\bar{\theta}}g = 0 \qquad (7.38)}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \qquad (7.39)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\theta' + \left[w'\frac{\partial \bar{\theta}(z)}{\partial z}\right] = 0 \qquad (7.40)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

"Subtraindo ∂(7.37)/∂z de ∂(7.38)/∂x, podemos eliminar p' para obter"

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial P'}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w'+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial P'}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\theta'}{\bar{\theta}}g=0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial P'}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w'+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial P'}{\partial z}-\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\theta'}{\partial x}=0$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial P'}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w'-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'-\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\theta'}{\partial x}=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial w'}{\partial x}-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\theta'}{\partial x}=0$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

"Subtraindo ∂(7.37)/∂z de ∂(7.38)/∂x, podemos eliminar p' para obter"

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial w'}{\partial x}-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial \theta'}{\partial x}=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial z}\right)-\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial \theta'}{\partial x}=0 \qquad (7.41)$$

"que é apenas o componente y da equação de vorticidade."

Multiplique a equação (7.41) por $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial z}\right)-\frac{g}{\bar{\theta}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta'}{\partial x}=0 \qquad (7.41)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial w'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial z}\right)-\frac{g}{\bar{\theta}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta'}{\partial x}=0 \qquad (7.41)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial w'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial z}\right)-\frac{g}{\bar{\theta}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta'}{\partial x}=0 \qquad (7.41)$$

Devida a equação em relação a x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial w'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\frac{g}{\bar{\theta}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta'}{\partial x}=0 \qquad (7.41)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial w'}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial z}\right)-\frac{g}{\bar{\theta}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \theta'}{\partial x}=0 \qquad (7.41)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial w'}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u'}{\partial x}\right)-\frac{g}{\bar{\theta}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \theta'}{\partial x}=0 \qquad (7.41)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial w'}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u'}{\partial x}\right)-\frac{g}{\bar{\theta}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \theta'}{\partial x}=0 \qquad (7.41)$$

$$\frac{\partial(u')}{\partial x}+\frac{\partial(w')}{\partial z}=0 \qquad (7.39)$$

$$\frac{\partial(u')}{\partial x}=-\frac{\partial(w')}{\partial z} \quad (7.39)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)-\frac{g}{\bar{\theta}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \theta'}{\partial x}=0 \qquad (7.41)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

Derivando a equação (7.40 duas vezes em relação a x)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\theta'+\left[w'\frac{\partial\bar{\theta}(z)}{\partial z}\right]=0 \qquad (7.40)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\theta'+\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\left[w'\frac{\partial\bar{\theta}(z)}{\partial z}\right]=0 \qquad (7.40)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta'}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 x}[w']\frac{\partial\bar{\theta}(z)}{\partial z}+[w']\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\frac{\partial\bar{\theta}(z)}{\partial z}=0 \qquad (7.40)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta'}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2[w']}{\partial^2 x}\frac{\partial\bar{\theta}(z)}{\partial z}+[w']\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\frac{\partial\bar{\theta}(z)}{\partial z}=0 \qquad (7.40)$$

$$\frac{\partial\bar{\theta}(z)}{\partial z}=não\ varia\ com\ x$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta'}{\partial^2 x}+\frac{\partial\bar{\theta}(z)}{\partial z}\frac{\partial^2[w']}{\partial^2 x}=0 \qquad (7.40)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

Derivando a equação (7.40 duas vezes em relação a x)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta'}{\partial^2 x}+\frac{\partial\bar{\theta}(z)}{\partial z}\frac{\partial^2[w']}{\partial^2 x}=0 \qquad (7.40)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)-\frac{g}{\bar{\theta}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\theta'}{\partial x}=0 \qquad (7.41)$$

Portanto:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)+\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\bar{\theta}(z)}{\partial z}\frac{\partial^2[w']}{\partial^2 x}=0 \qquad (7.41)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)+g\frac{\partial\ln(\bar{\theta}(z))}{\partial z}\frac{\partial^2[w']}{\partial^2 x}=0 \qquad (7.41)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)+N^2\frac{\partial^2[w']}{\partial^2 x}=0 \qquad (7.42)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

Derivando a equação (7.40 duas vezes em relação a x)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)+N^2\frac{\partial^2 [w']}{\partial^2 x}=0 \qquad (7.42)$$

"onde $N^2 \equiv g\frac{\partial \ln(\bar{\theta}(z))}{\partial z}$ é o quadrado da frequência de flutuabilidade, que se assume ser constante."

"Rigorosamente falando, N^2 não pode ser exatamente constante se ρ_0 for constante.
No entanto, para distúrbios rasos, a variação de N^2 com a altura é insignificante."

"A equação (7.42) possui soluções de onda harmônica da forma"

$$w' = Re\{\hat{w}e^{-i\phi}\} = w_r\cos(\phi) - w_i\sin(\phi)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$w' = Re\{\hat{w}e^{-i\phi}\} = w_r \cos(\phi) - w_i \sin(\phi)$$

"onde $\hat{w} = w_r - iw_i$ é uma amplitude complexa com parte real w_r e parte imaginária w_i, e $\phi = kx + mz - \nu t$ é a fase, que se assume depender linearmente de z, assim como de x e t.

Aqui, o número de onda horizontal k é real porque a solução é sempre sinusoidal em x.

"No entanto, o número de onda vertical $\mathrm{m} = m_r - im_i$ pode ser complexo, caso em que m_r descreva a variação sinusoidal em z e m_i descreva o decaimento ou crescimento exponencial em z, dependendo se m_i é positivo ou negativo."

"Quando m é real, o número de onda total pode ser considerado como um vetor $\kappa \equiv (k, m)$, dirigido perpendicularmente às linhas de fase constante e na direção do aumento da fase, cujos componentes, $k = 2\pi/L_x$ e $m = 2\pi/L_z$, são inversamente proporcionais aos comprimentos de onda horizontal e vertical, respectivamente."

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)+N^2\frac{\partial^2[w']}{\partial^2 x}=0 \qquad (7.42)$$

$$w' = Re\{\hat{w}e^{-i\phi}\} = w_r\cos(\phi) - w_i\sin(\phi)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}+2\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}+2\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)+N^2\frac{\partial^2[w']}{\partial^2 x}=0 \qquad (7.42)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)+2\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)+\bar{u}^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)+2\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)+\bar{u}^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)\right)$$
$$+N^2\frac{\partial^2[w']}{\partial^2 x}=0$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$w' = \widehat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)+2\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)+\bar{u}^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)+2\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)+\bar{u}^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)\right)+N^2\frac{\partial^2[w']}{\partial^2 x}=0$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x} = -ik\widehat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)} \qquad \frac{\partial w'}{\partial z} = -im\widehat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right) = -k^2\widehat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)} \qquad \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right) = -m^2\widehat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right) = -i\nu k^2\widehat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right) = -i\nu m^2\widehat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right) = ikk^2\widehat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right) = -i^2\nu^2 k^2\widehat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right) = -i^2\nu^2 m^2\widehat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right) = -i^2k^2k^2\widehat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right) = \nu^2 k^2\widehat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right) = \nu^2 m^2\widehat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right) = k^2k^2\widehat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

Paulo Yoshio Kubota

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras $w' = \hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)+2\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)+\bar{u}^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)+2\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)+\bar{u}^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)\right)$$
$$+N^2\frac{\partial^2[w']}{\partial^2 x}=0$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x}=-ik\hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial z}=-im\hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)=-k^2\hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)=-m^2\hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)=-i\nu k^2\hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)=-i\nu m^2\hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)=ikm^2\hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)=i^2k\nu k^2\hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)=i^2k\nu m^2\hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)=-i^2k^2m^2\hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)=-\nu kk^2\hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)=-k\nu m^2\hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)=k^2m^2\hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras $w' = \hat{w}e^{-i(kx + mz - \nu t)}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right) + 2\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right) + \bar{u}^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 x}\right)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right) + 2\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right) + \bar{u}^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial^2 z}\right)\right) + N^2\frac{\partial^2[w']}{\partial^2 x} = 0$$

$$(\nu^2k^2 - 2\bar{u}\nu kk^2 + \bar{u}^2k^2k^2) + (\nu^2m^2 - 2\bar{u}k\nu m^2 + \bar{u}^2k^2m^2) - N^2k^2 = 0$$

$$(\nu^2k^2 - 2\bar{u}\nu k^3 + \bar{u}^2k^4) + (\nu^2m^2 - 2\bar{u}\nu km^2 + \bar{u}^2k^2m^2) - N^2k^2 = 0$$

$$k^2\,(\nu^2 - 2\bar{u}\nu k + \bar{u}^2k^2) + m^2(\nu^2 - 2\bar{u}\nu k + \bar{u}^2k^2) - N^2k^2 = 0$$

$$k^2\,(\nu - \bar{u}k)^2 + m^2(\nu - \bar{u}k)^2 - N^2k^2 = 0$$

$$(\nu - \bar{u}k)^2(k^2 + m^2) - N^2k^2 = 0$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras $w' = \hat{w}e^{-i(kx+mz-\nu t)}$

$$(\nu - \bar{u}k)^2(k^2 + m^2) - N^2k^2 = 0$$

"de modo que"

$$\hat{\nu} = \nu - \bar{u}k$$

$$(\hat{\nu})^2(k^2 + m^2) - N^2k^2 = 0$$

$$(\hat{\nu})^2 = \frac{N^2k^2}{(k^2 + m^2)}$$

$$\hat{\nu} = \pm\frac{N\,k}{\sqrt{(k^2 + m^2)}}$$

$$\hat{\nu} = \pm\frac{N\,k}{\kappa} \qquad (7.44)$$

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras $w' = \hat{w} e^{-i(kx + mz - \nu t)}$

$$\hat{\nu} = \pm \frac{N\, k}{\kappa} \qquad (7.44)$$

"onde $\hat{\nu}$, é a frequência intrínseca, é a frequência relativa ao vento médio .

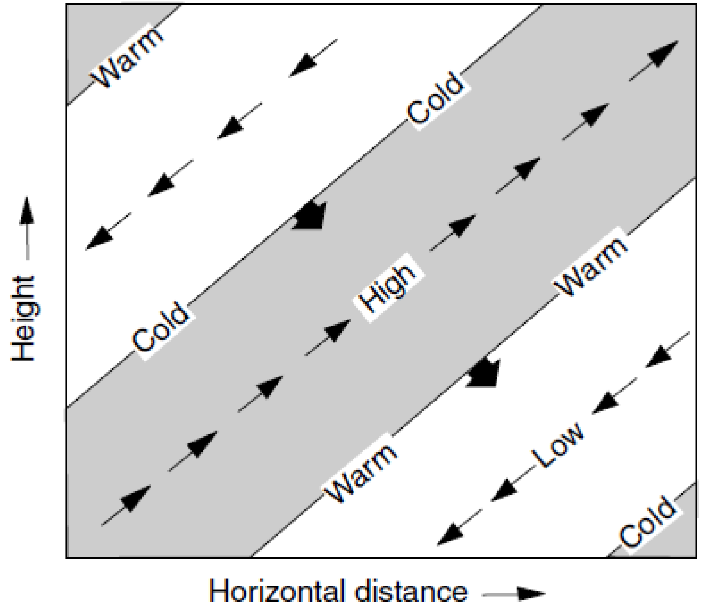
$$\hat{\nu} = \nu - \bar{u}k$$

Aqui, o sinal de mais deve ser considerado para a propagação da fase para o leste e o sinal de menos para a propagação da fase para o oeste, em relação ao vento médio."

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras $w' = \hat{w}e^{-i(kx + mz - \nu t)}$

"Se deixarmos $k > 0$ e $m < 0$, então as linhas de fase constante se inclinam para leste com o aumento da altura, como mostrado na Fig. 7.9
(ou seja, para $\phi = kx + mz$ permanecer constante à medida que x aumenta, z também deve aumentar quando $k > 0$ e $m < 0$).

A escolha da ***raiz positiva*** em (7.44) corresponde então à propagação da fase para leste e para baixo em relação ao fluxo médio, com velocidades de fase horizontais e verticais (relativas ao fluxo médio) dadas por $c_x = \frac{\hat{\nu}}{k}$ e $c_z = \frac{\hat{\nu}}{m}$, respectivamente.



" Fig. 7.9 Corte transversal idealizado ***mostrando as fases das perturbações*** de pressão, temperatura e velocidade ***para uma onda interna de gravidade***.

Setas finas indicam o campo de velocidade da perturbação, ***setas sólidas e truncadas*** indicam a velocidade de fase.

A sombra mostra as regiões de ***movimento ascendente***."

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras $w' = \hat{w}e^{-i(kx + mz - \nu t)}$

Os componentes da velocidade de grupo, por c_{gx} e c_{gz}, no entanto, são dados por"

$$c_{gx} = \frac{\partial \nu}{\partial k} = \bar{u} \pm \frac{Nm^2}{\left(k^2 + m^2\right)^{3/2}} \quad (7.45a)$$

$$c_{gz} = \frac{\partial \nu}{\partial m} = \pm \frac{(-Nkm)}{\left(k^2 + m^2\right)^{3/2}} \quad (7.45b)$$

"Assim, o componente vertical da velocidade de grupo tem um sinal oposto ao da velocidade de fase vertical em relação ao fluxo médio (a propagação de fase para baixo implica a propagação de energia para cima).

Além disso, é facilmente demonstrado a partir de (7.45) que o vetor de velocidade de grupo é paralelo às linhas de fase constante.

As ondas internas de gravidade têm, portanto, a notável propriedade de que a velocidade de grupo é perpendicular à direção de propagação de fase. "

7.4.1 Ondas Gravitacionais Internas Puras

$$w' = \hat{w}e^{-i(kx + mz - \nu t)}$$

Os componentes da velocidade de grupo, por c_{gx} e c_{gz}, no entanto, são dados por"

Como a energia se propaga na velocidade de grupo, isso implica que a energia se propaga paralelamente às cristas e vales das ondas, em vez de perpendicularmente a eles, como nas ondas acústicas ou nas ondas de gravidade em águas rasas.

Na atmosfera, as ondas internas de gravidade geradas na troposfera pela convecção cumuliforme, pelo fluxo sobre a topografia e por outros processos podem se propagar para cima por muitas alturas de escala até a mesosfera, mesmo que as oscilações individuais de parcelas de fluido estejam confinadas a distâncias verticais muito menores que um quilômetro."