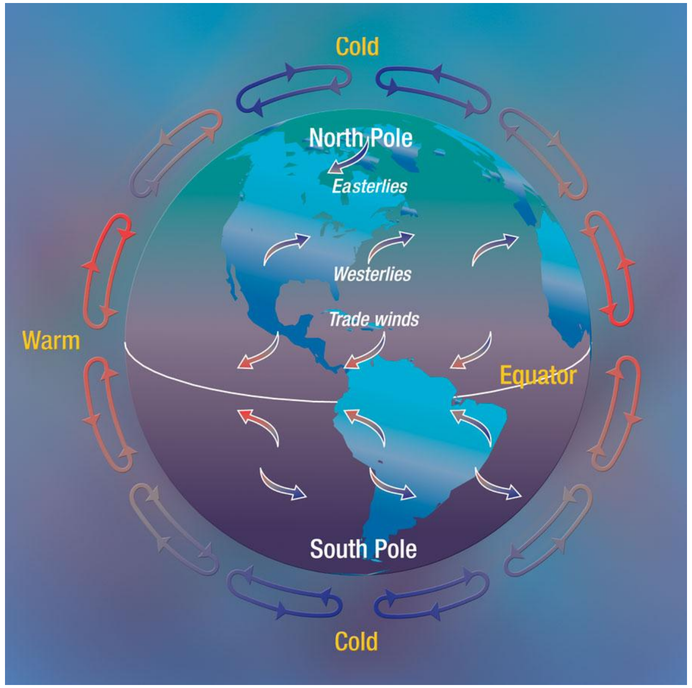
Equações Governantes Aplicadas a Atmosfera

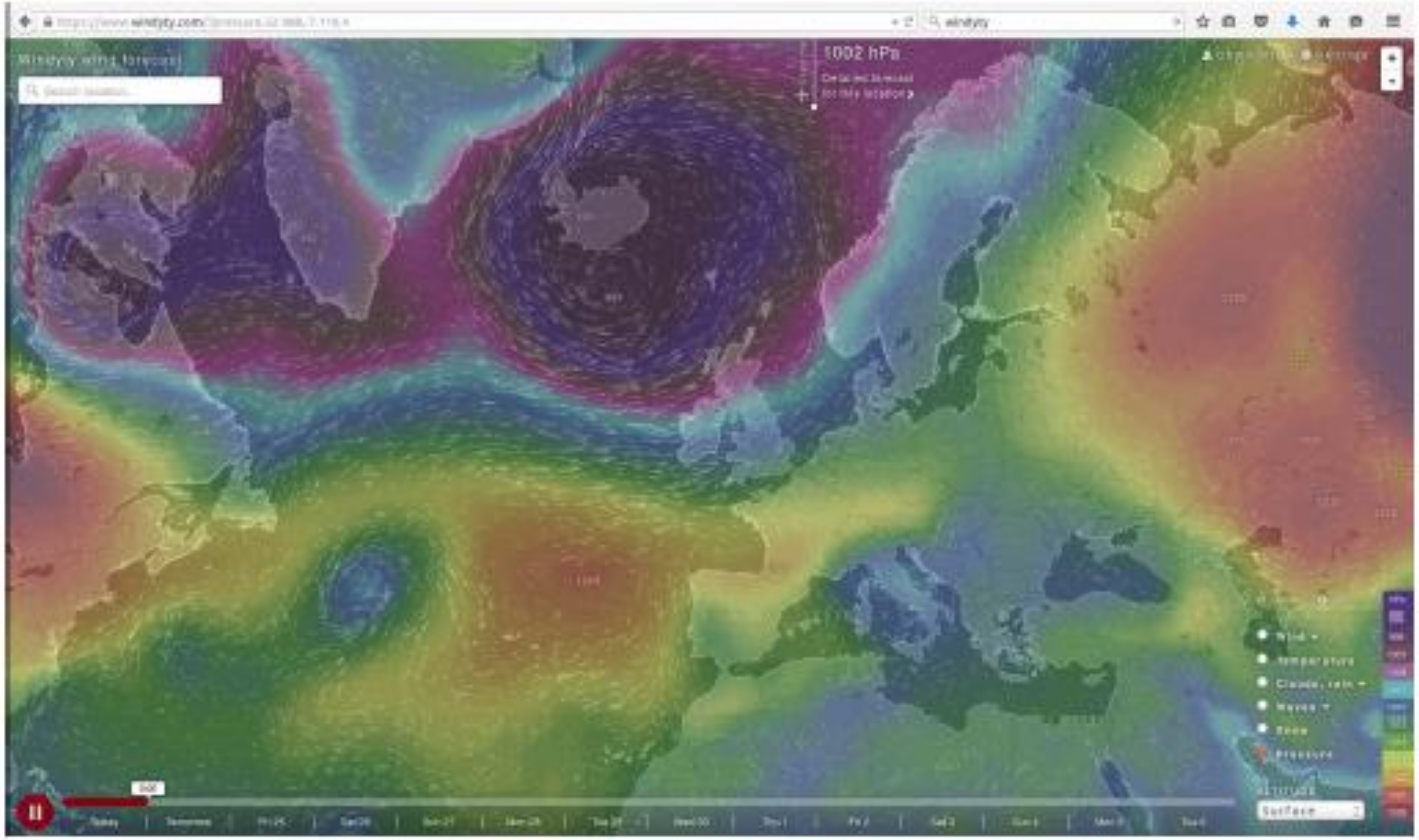
Paulo Yoshio Kubota

Review

Dinâmica Review

Modelagem Numérica da Atmosfera e Oceano
As previsões (do tempo e clima) prevêem os ventos, temperatura e pressão através das Equações de Navier-Stokes:





Paulo Yoshio Kubota

Dinâmica Review

A derivada Lagrangiana

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Psi$$

Momentum

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u} - \frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \mu_u \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right)$$

Continuidade

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Energia

$$\frac{D\theta}{Dt} = Q + \mu_\theta \nabla^2 \theta$$

Equação de estado, Lei dos gases ideais

$$p = \rho R T$$

Hidrostática

$$P = -\rho g H$$

Paulo Yoshio Kubota

$\boldsymbol{u}$ **Wind vector**

$\boldsymbol{g}$ **Gravity vector (downwards)**

$\boldsymbol{t}$ **Time**

$\boldsymbol{\theta}$ **Potential temperature, T (p0/p)k**

$\boldsymbol{\Omega}$**Rotation rate of planet**

$\boldsymbol{k}$ **heat capacity ratio 1.4**

$\boldsymbol{\rho}$ **Density of air**

$\boldsymbol{Q}$ **Source of heat**

$\boldsymbol{p}$ **Atmospheric pressure**

$\boldsymbol{\mu_u}$,$\boldsymbol{\mu_\theta}$ **Diffusion coefficients**

Aprenderemos como resolver numericamente as versões simplificadas.

Você **não precisa memorizar as equações**, mas **deve ser capaz de descrever o significado e comportamento** dos termos

1. Equação da Continuidade (Conservação da Massa)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

- ρ: densidade do ar (kg/m³)
- $\vec{v}$: vetor velocidade do vento (u, v, w)
- $\frac{D}{Dt}$: derivada material, que acompanha um volume de ar em movimento:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

📌 Interpretação:

Essa equação garante que, à medida que o ar se move e se expande ou comprime, a massa total se conserva. Se o ar converge (entra mais do que sai), a densidade aumenta. Se diverge, diminui.

2. Equação do Momento (Segunda Lei de Newton para fluidos)

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \vec{F}_r$$

- $\frac{D\vec{v}}{Dt}$: aceleração total do ar
- $2\vec{\Omega} \times \vec{v}$: força de Coriolis (efeito da rotação da Terra)
- ∇p: gradiente de pressão (diferenças de pressão geram movimento)
- $\vec{g}$: aceleração da gravidade (atua para baixo)
- $\vec{F}_r$: forças de atrito (como fricção com a superfície)

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u} - \frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \mu_u \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})\right)$$

📌 **Interpretação:**

É a forma vetorial da segunda lei de Newton: a força resulta em aceleração. Essa equação explica como o vento se move em resposta a pressões, forças de rotação da Terra, gravidade e atrito.

3. Equação da Energia Termodinâmica (Conservação de Energia Interna)

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{R}{c_p}\frac{T}{p}\frac{Dp}{Dt} + \frac{Q}{c_p}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{RT}{P}$$

$$C_p\frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{\rho Dt} = J$$

- T: temperatura
- p: pressão
- R: constante dos gases secos (~287 J/kg·K)
- c_p: calor específico a pressão constante (~1005 J/kg·K)
- Q: fontes ou sumidouros de calor (ex: radiação, condensação)

$$\frac{1}{\rho} = \alpha \qquad \frac{DP}{Dt} = \omega$$

$$C_p\frac{DT}{Dt} - \alpha\omega = J$$

$$\frac{DT}{Dt} - S_P\omega = \frac{J}{C_p}$$

📌 **Interpretação:**

Essa equação indica como a temperatura do ar muda por compressão/expansão (1º termo) e por troca de calor (2º termo).

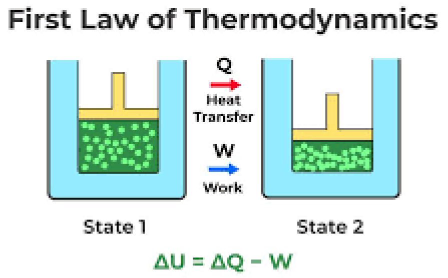
4. Equação de Estado (Lei dos Gases Ideais)

$$p = \rho R T$$

📌 Interpretação:

Relaciona pressão, densidade e temperatura. Fundamental para fechar o sistema de equações.

A Equação de Temperatura Potencial



$$\theta = T\left(\frac{1000}{P}\right)^{\frac{R_d}{C_p}}$$

A Equação de Temperatura Potencial

Derivada Lagrangiana

Advecção de θ

Difusão de θ

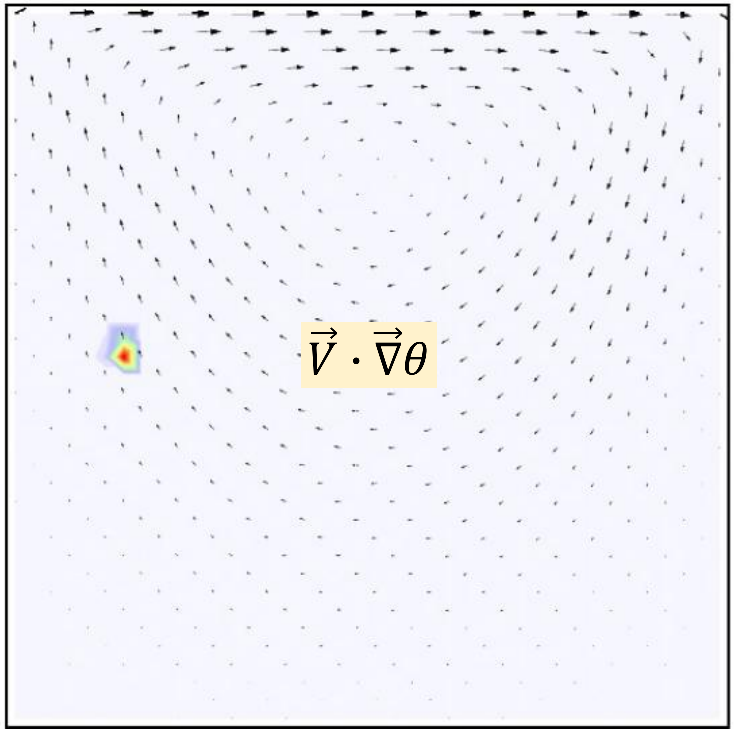
$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = Q + \mu_\theta\nabla^2\theta$$

Taxa de mudança em um ponto fixo

Fonte e sumidouro de Calor

Dinâmica Review

θ será criado e destruído pela fonte de calor, Q,



Será movido pelo campo de vento,u e θ serão difundido por um coeficiente de difusão, μ_θ

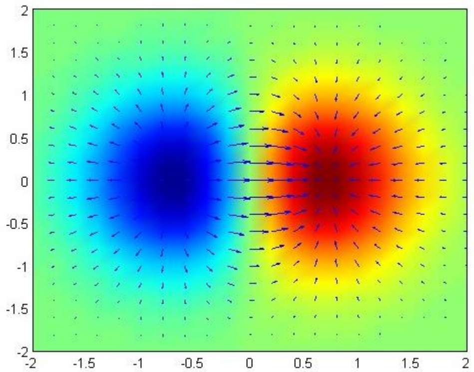
Dinâmica Review

Advecção da Poluição

Advecção Linear Pura

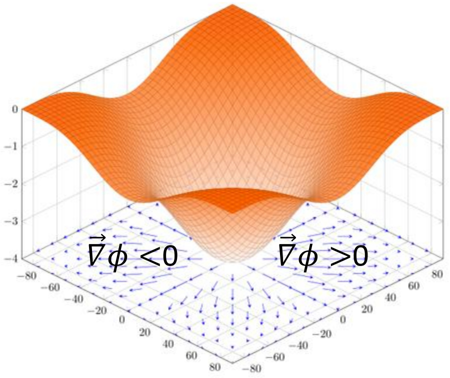
Advecção de concentração ϕ sem difusão ou fontes ou sumidouros:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\phi = 0$$

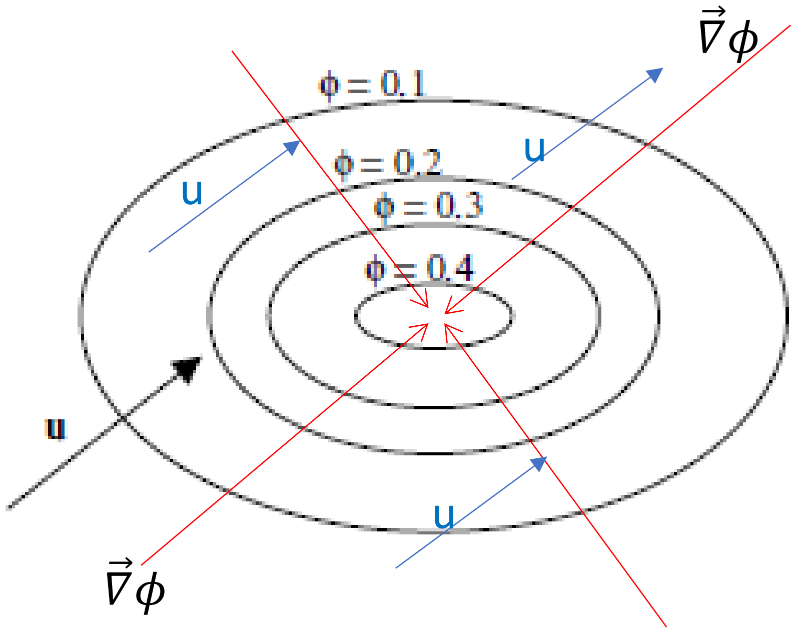


Mudanças de ϕ são produzidas pelo componente do vento na mesma direção dos gradientes de ϕ

A fim de entender por que o termo $\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\phi$ leva a mudanças em ϕ, considere uma região de atmosfera poluída onde o poluente tem os contornos de concentração mostrados :



Exercício: Desenhe na figura o direções dos gradientes de ϕ e portanto, marque com +, - ou 0 locais onde $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\phi$ é positivo, negativo e zero.



$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta$

Portanto, deduza onde ϕ está aumentando, diminuindo ou permanecendo o mesmo

Advecção / difusão com fontes e sumidouros

Derivada Lagrangiana

Advecção de ψ

Difusão de ψ

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\psi = S + \mu_{\psi}\nabla^{2}\psi$$

Taxa de mudança em um ponto fixo

Fonte e sumidouro de Calor

A equação de momentum

Derivada Lagrangiana

Gradiente de pressão

Difusão

$$\boxed{\frac{D\vec{u}}{Dt} = -2\vec{\Omega}x\vec{u} - \frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{g} + \mu_{\vec{u}}\left(\vec{\nabla}^2\psi + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\right)}$$

Coriolis

Aceleração gravitacional

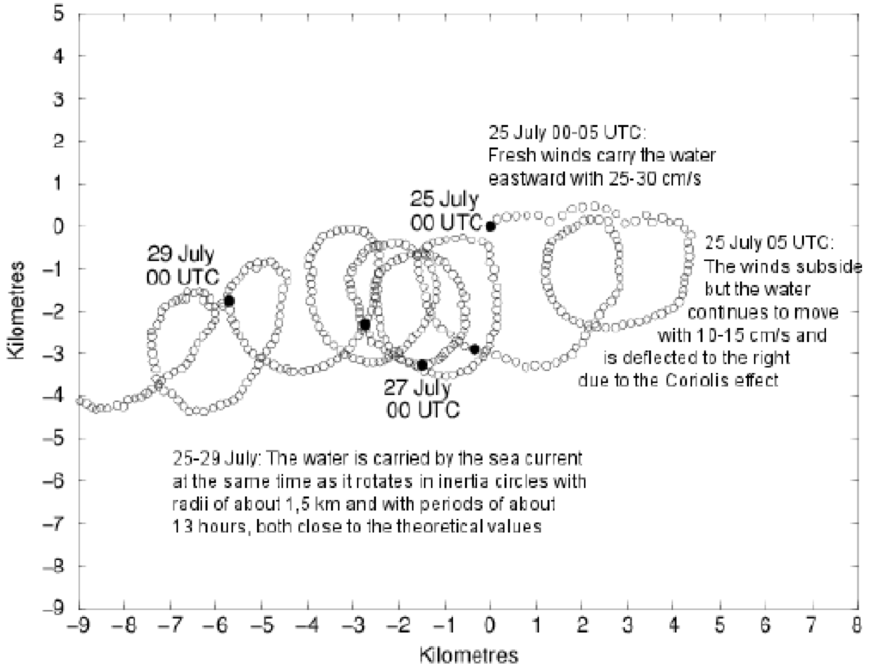
Coriolis

Oscilações inerciais governadas por parte da equação de momento:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -2\vec{\Omega} x \vec{u}$$

Uma bóia flutuante posta em um local com ventos fortes ventos de oeste no Mar Báltico em julho de 1969.

Assim que o vento diminui, a parte superior do oceano a bóia segue círculos de inércia



A Força de Gradiente de Pressão

Se a ***<u>força do gradiente de pressão é o único termo grande na equação de momento</u>***, então, junto com a equação de continuidade e a lei dos gases perfeitos, obtém-se as equações para ondas acústicas:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}P = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{P}{RT} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\frac{P}{T} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho RT\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

$$P = \rho RT$$

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

$$R = 287{,}058\ J/kgK$$

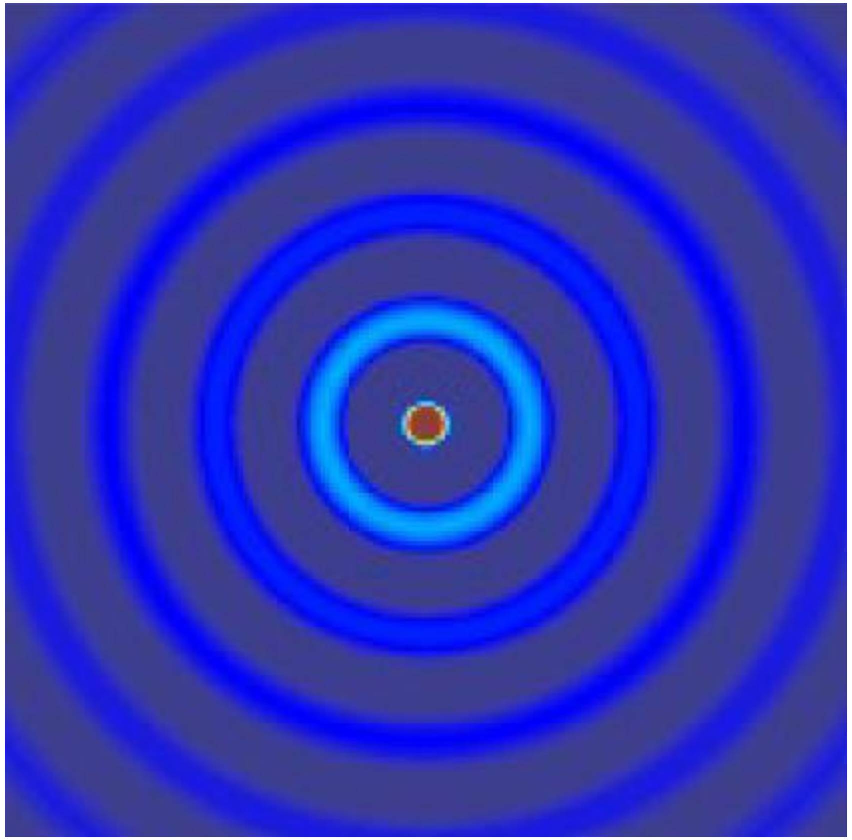
$$R = 287{,}058\ N * m/kgK$$

$$R = 287{,}058\ \frac{m}{s\char`^2 * K}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 c^2\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

A Força de Gradiente de Pressão

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$



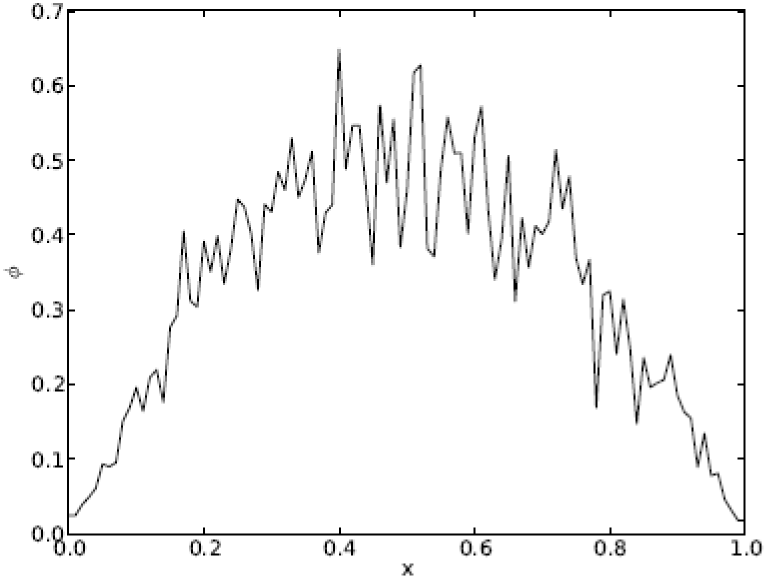
Dinâmica Review

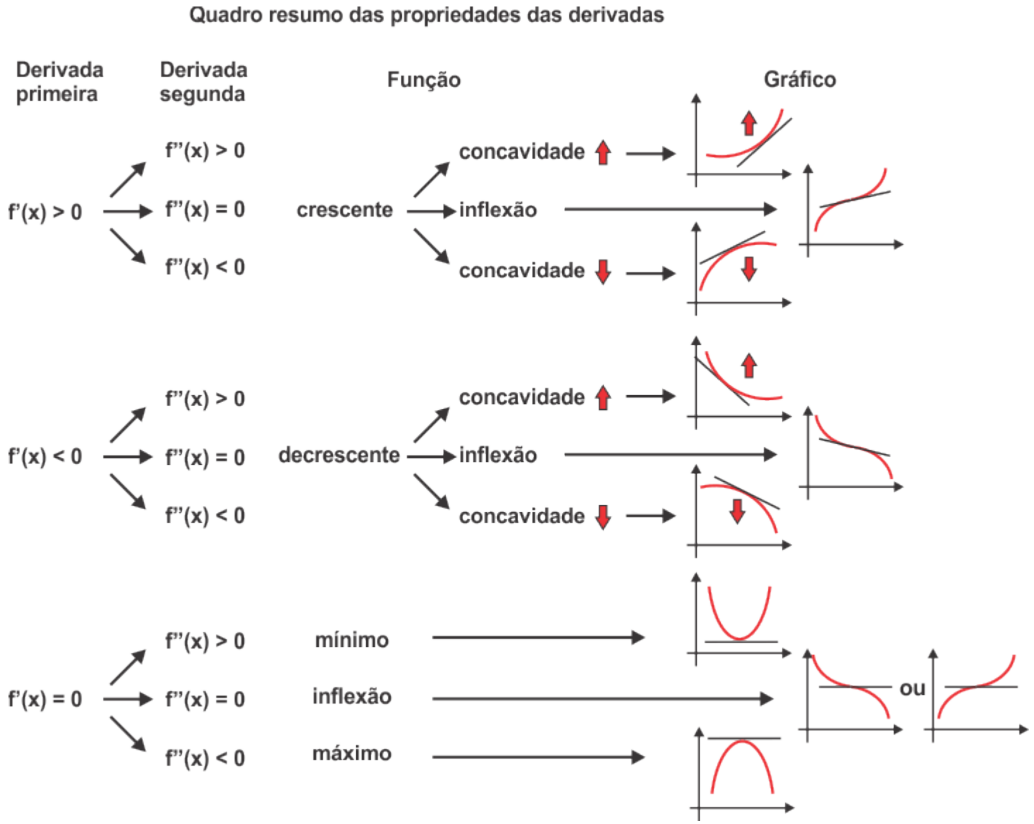
Difusão

A difusão de uma quantidade ϕ com coeficiente de difusão μ_ϕ em uma dimensão espacial arbitraria

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu_\phi \vec{\nabla}^2 \phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu_\phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$



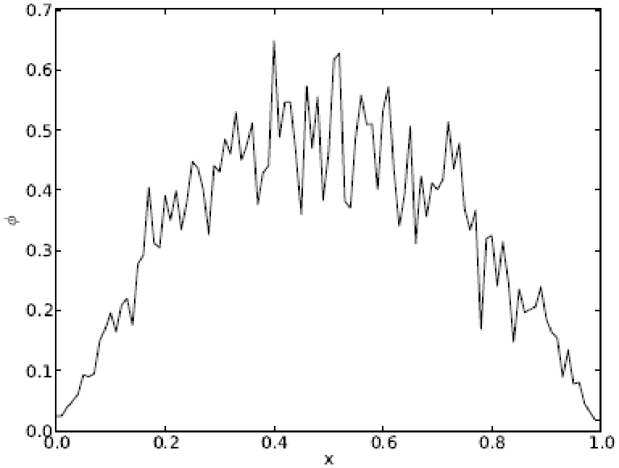


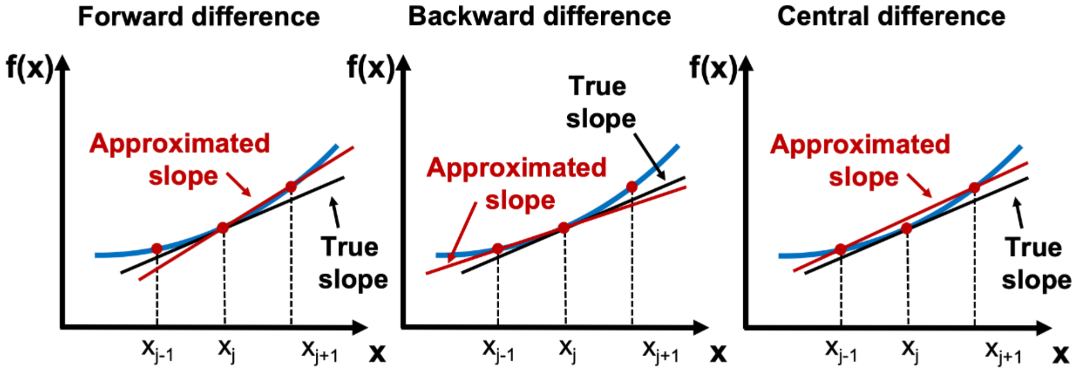
Fonte: [Interpretação gráfica das derivadas primeira e segunda]

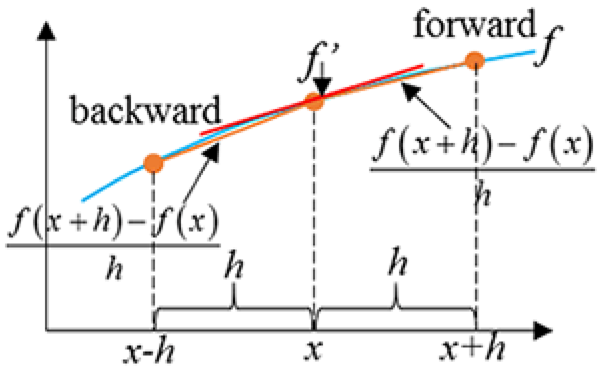
A **segunda derivada** de **ϕ é alta nos vales** e **baixa nos picos de ϕ**.
Portanto, a difusão tende a remover picos e os vales e tornar um perfil mais suave:

Paulo Yoshio Kubota

Esquemas Numéricos também podem gerar ruídos







$$f' = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Dinâmica Review

```
PROGRAM Main
 IMPLICIT NONE

CONTAINS

SUBROUTINE Init
ED SUBROUTINE Init

SUBROUTINE run
END SUBROUTINE run

SUBROUTINE finalize
END SUBROUTINE finalize

END PROGRAM Main
```

```
Module Main
 IMPLICIT NONE
 INTEGER :: xdim
 REAL, ALLOCATABLE       :: f(:)
 REAL   :: dx

CONTAINS

SUBROUTINE InitClass
 INTEGER :: x
 xdim=10
 Dx= 1.0/REAL(xdim)
 allocate(F(0:xdim)); F(0:xdim) =0.0

DO x=3, 7
     F(x) = 1.0
END DO

ED SUBROUTINE InitClass

SUBROUTINE run
   F(x) =  F(x) + Uo* ( F(x+1) –F(x-1) )/(2DX)
END SUBROUTINE run

SUBROUTINE finalize
   DEALOCATE(F)
END SUBROUTINE finalize

END Module Main
```

Questões de discussão:

- **Quais equações têm coeficiente de difusão?**
- **O que causa a difusão?**
- **A difusão é um termo grande nas equações do movimento atmosférico?**

Lista de Exercicio-01

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{D\ln\theta}{Dt} = 0 \qquad (3)$$

$$\theta = T\left(\frac{P_s}{P}\right)^{\frac{R}{c_p}} \qquad (4)$$

$$\gamma = \left[\frac{c_p}{c_v}\right] \qquad (5)$$

A partir das equações ao lado esquerdo encontre a velocidade de propagação da onda de som.

OBS(é essencial que faça passo a passo, não elimine as operações matemáticas)

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{[\gamma R\bar{T}]}$$

Paulo Yoshio Kubota