



# **Métodos de diferenças finitas.**

**MET-576-4**

**Modelagem Numérica da Atmosfera**

**Dr. Paulo Yoshio Kubota**

**Os métodos numéricos, formulação e parametrizações utilizados nos modelos atmosféricos serão descritos em detalhe.**

**3 Meses  
24 Aulas (2 horas cada)**



## **Dinâmica:**

**Métodos numéricos amplamente utilizados na solução numérica das equações diferenciais parciais que governam os movimentos na atmosfera serão o foco, mas também serão analisados os novos conceitos e novos métodos.**



- ✓ **Métodos de diferenças finitas.**
- ✓ **Acurácia.**
- ✓ **Consistência.**
- ✓ **Estabilidade.**
- ✓ **Convergência.**
- ✓ **Grades de Arakawa A, B, C e E.**
- ✓ **Domínio de influência e domínio de dependência.**
- ✓ **Dispersão numérica e dissipação.**
- ✓ **Definição de filtros monótono e positivo.**
- ✓ **Métodos espectrais.**
- ✓ **Métodos de volume finito.**
- ✓ **Métodos Semi-Lagrangeanos.**
- ✓ **Conservação de massa local.**
- ✓ **Esquemas explícitos versus semi-implícitos.**
- ✓ **Métodos semi-implícitos.**



# Métodos de diferenças finitas.

Notas: esquema upstream (upwind- FTBS )

## Time Discretization

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} (\Delta t)^2 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^4).$$



# Métodos de diferenças finitas.



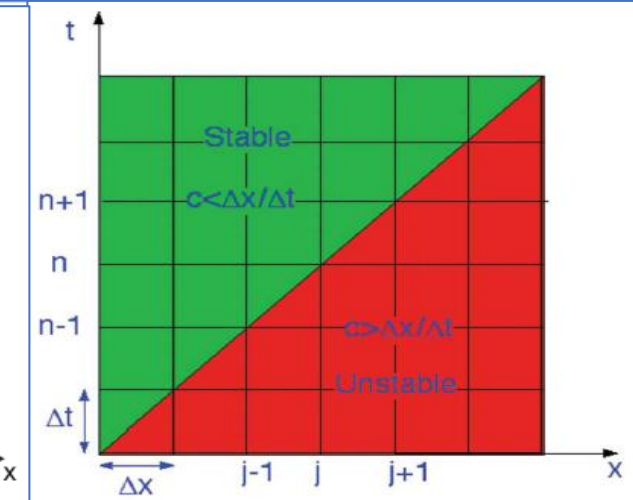
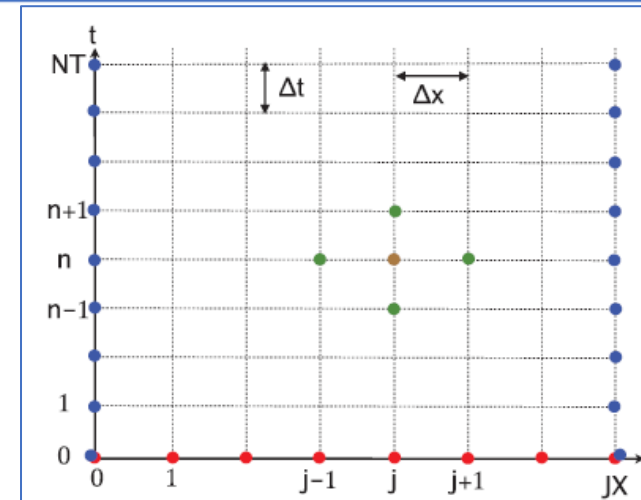
“ESTÁGIOS” E “NÍVEIS” MAIOR PRECISÃO DE ORDEM

Terminologia:

$n, n+1 \dots$  níveis de tempo

$\alpha, \beta, \dots$  coeficientes de derivadas espaciais

F aproximações para derivadas espaciais





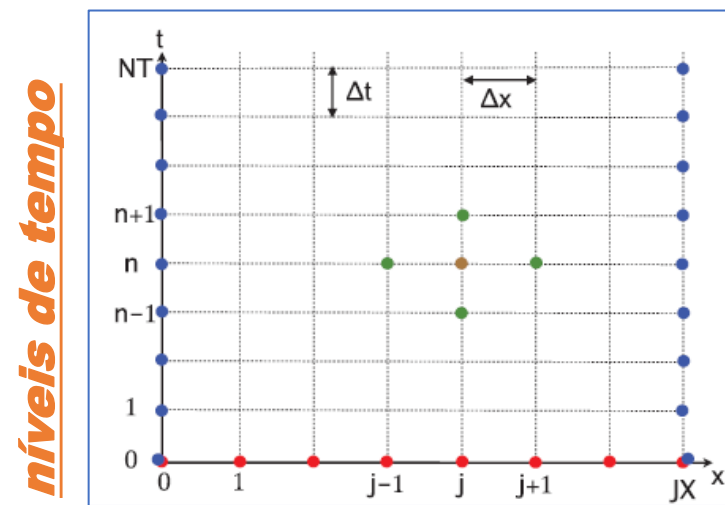
# Métodos de diferenças finitas.

## Diferenciação de tempo: **estágios** vs. **níveis**

Revisão: a diferenciação de tempo inclui

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t).$$

- 1) como **expressamos** a **derivada do tempo**
- 2) em que **níveis de tempo avaliamos** as derivadas espaciais



## Níveis

- 1) refere-se a quantos **níveis de tempo** estão em nosso esquema
- 2) Lax-Wendroff: 2 níveis. Leapfrog: 3 níveis

## Estágios

- 1) refere-se a **quantas vezes avaliamos as derivadas espaciais**
- 2) Lax-Wendroff: estágio único. Runge-Kutta: 2 ou mais estágios

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} (\Delta t)^2 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^4).$$



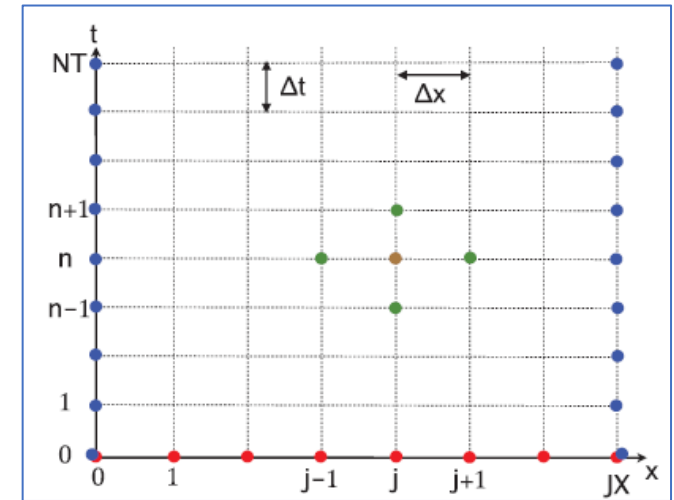
# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de estágio único e 2 níveis

**2 níveis:** existem dois níveis de tempo, **n** e **n+1**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t).$$

níveis de tempo



**Estágio único:** avalia derivadas espaciais **uma vez**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}.$$

**2 Estágios :** avalia derivadas espaciais **duas vez**

$$\frac{u_j^{n+1/2} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}.$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n+1/2}}{\Delta t} = c \frac{u_j^{n+1/2} - u_{j-1}^{n+1/2}}{\Delta x}.$$



# Métodos de diferenças finitas.



## Notas: esquema upstream (upwind- FTBS )

- *Centered explicit scheme*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

- *Centered implicit scheme*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0.$$

- *Upwind scheme*

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, & \text{if } a > 0, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0, & \text{if } a < 0. \end{cases}$$

- *Lax-Friedrichs*

$$\frac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

- *Beam-Warming* if  $a > 0$ ,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2} \frac{u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{\Delta x^2} = 0.$$





# Métodos de diferenças finitas.

## Os esquemas de diferenças temporais que são usados para EDPs

"Os esquemas de derivada temporal que são usados para EDPs (Equações Diferenciais Parciais) são frequentemente relativamente simples, **geralmente de segunda ordem** e, às vezes, até mesmo apenas **de primeira ordem de precisão (erro de truncamento)**. "

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u(x, t), t) \longrightarrow \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \frac{\partial u}{\partial t} dt = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u(x, t), t) dt \longrightarrow \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \partial u = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u(x, t), t) dt$$

$$u|_{n\Delta t}^{(n+1)} = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u(x, t), t) dt \longrightarrow u[(n+1)\Delta t] - u[n\Delta t] = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u(x, t), t) dt$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u_j^n) dt$$

ou

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + \int_{(n-1)\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u_j^n) dt$$



# Métodos de diferenças finitas.

Existem várias razões para isso.

"Primeiro, é uma **experiência geral** que esquemas construídos para ter uma alta ordem de precisão no tempo não são muito úteis ao resolver EDPs.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) + O(\Delta t^1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left( \frac{-u_j^{n+2} + 8u_j^{n+1} - 8u_j^{n-1} + u_j^{n-2}}{12\Delta t} \right) + O(\Delta t^4)$$

Isso contrasta com a experiência com equações diferenciais ordinárias, onde **métodos muito precisos**, como o esquema de Runge-Kutta de 4 orden, são extremamente bem-sucedidos.

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{6} (f^n + 2f_*^{n+1/2} + 2f^{n+1/2} + f_*^{n+1})$$



# Métodos de diferenças finitas.

**Existe uma razão básica para essa discrepância.**

Para uma equação diferencial **ordinária** de primeira ordem (EDO), a equação e **uma única condição inicial** ( $u(t_0)$ ) são tudo o que é **necessário para uma solução exata**. Assim, o erro na solução numérica é inteiramente devido ao grau de inadequação do esquema.

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = -\lambda t$$

Com uma (equação diferencial **parcial**) EDP, **o erro associado à solução numérica** surge tanto das **deficiências do esquema** quanto da **informação insuficiente sobre as condições iniciais** ( $u(x, t_0)$ ), que são conhecidas apenas em pontos discretos da grade ( $x_j = j\Delta x$ ).

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

Portanto, um aumento na precisão do esquema aplicado melhora apenas um desses dois componentes, e o resultado não é muito interessante."



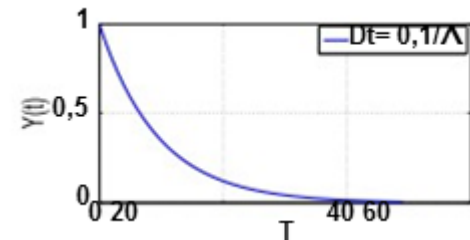
# Métodos de diferenças finitas.

**Segunda razão para não usar um esquema de diferenças finitas de alta precisão para as derivadas temporais:**

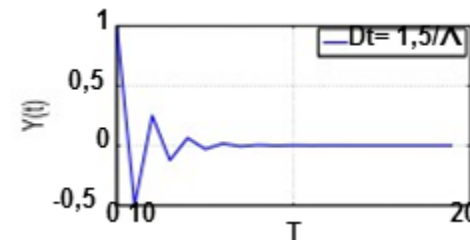
Para **atender a um requisito de convergência** do tipo que foi discutido, geralmente é necessário escolher um passo de tempo  $\Delta t$  significativamente menor do que o exigido para uma precisão adequada.

$$0 \leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

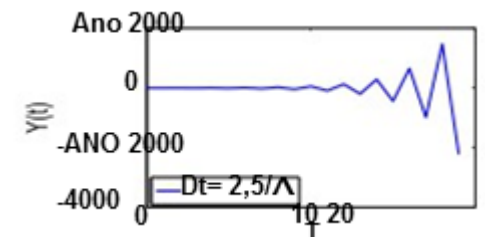
**I ) Se  $\Delta t < \frac{1}{\lambda}$ , então  $0 < (1 - \lambda \Delta t) < 1$ , A solução numérica é uma função crescente com o tempo**



**II ) Se  $\frac{1}{\lambda} < \Delta t < \frac{2}{\lambda}$ , A solução numérica diminui a magnitude mas oscila no sinal O sistema é estável , mas não consistente.**



**(III) se  $\Delta t > \frac{2}{\lambda}$  então,  $(1 - \lambda \Delta t) < -1$ ,. A solução oscila no Sinal e aumenta em magnitude com o passar do tempo. O método é Instável para as grandes passo de tempo.**





# Métodos de diferenças finitas.

**Segunda razão para não usar um esquema de diferenças finitas de alta precisão para as derivadas temporais:**

Uma vez que um passo de tempo foi especificado, **outros erros**, por exemplo, **da diferenciação espacial**, são **muito maiores do que aqueles devido à diferenciação temporal**.

Assim, **o esforço computacional é melhor gasto na redução desses erros**, e não no aumento da precisão dos esquemas de diferenciação temporal.

Isso, claro, **não significa** que não seja necessário **considerar cuidadosamente as propriedades de vários esquemas possíveis de diferenciação temporal**

**A precisão é apenas uma consideração importante ao escolher um esquema.**



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de dois níveis

Estes esquemas que usam a diferença de dois níveis no tempo  $n$  e  $n+1$ , tal que a integração no tempo é expressa:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u, t) dt$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u_j^n) dt$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\Delta t \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}.$$

$$\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u_j^n) dt = -c\Delta t \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

O problema agora é que a função  $f$  somente existe com valores discretos em  $f_j^n$  e  $f_j^{n+1}$  no tempo  $(n)\Delta t$  e  $(n+1)\Delta t$ .



# Métodos de diferenças finitas.



## Esquemas de dois níveis

Esquema de Euler avançado

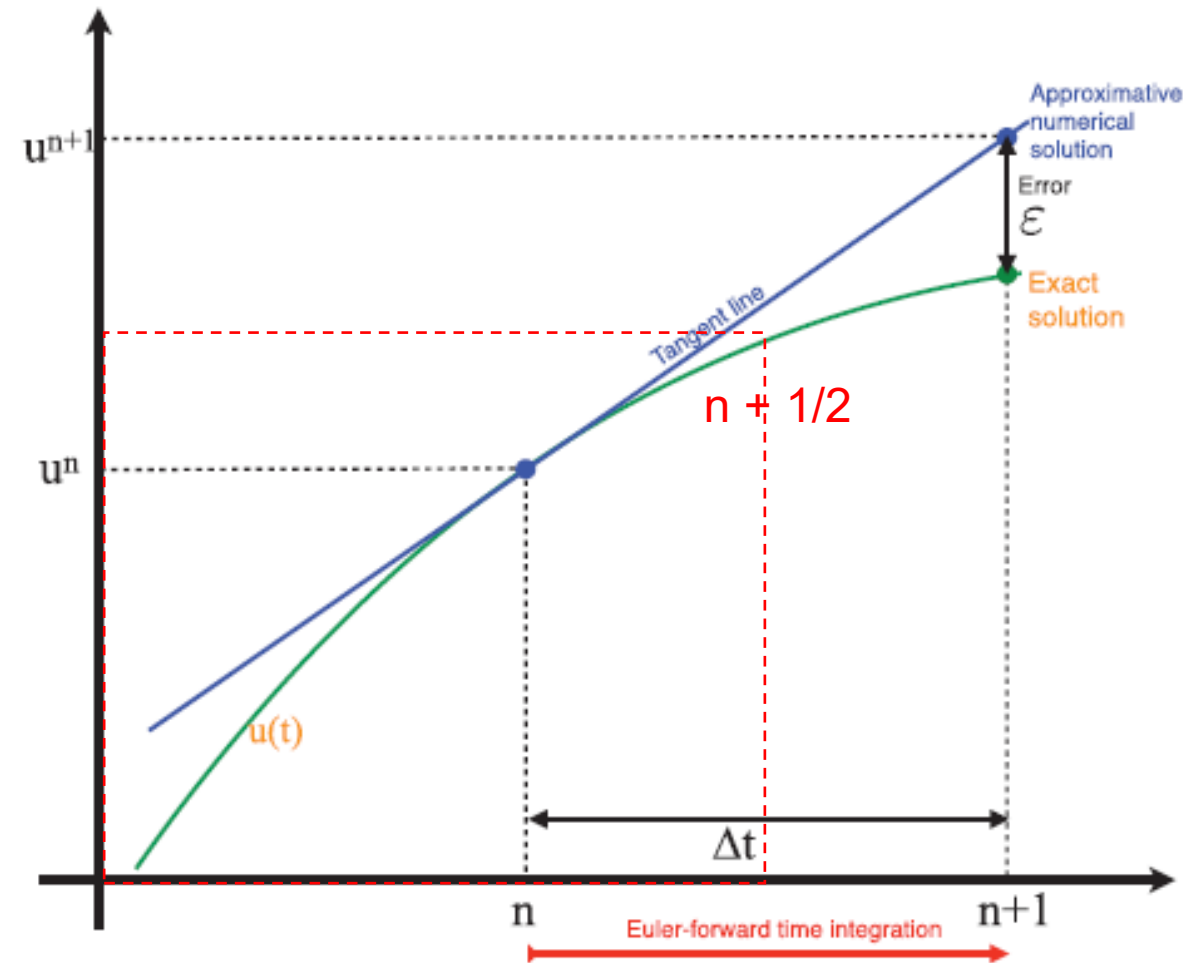
$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t f_j^n$$

$$f_j^n = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u_j^n) dt = -c\Delta t \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$$

Aqui, o erro de truncamento é  $O(\Delta t)$ , ou seja, o esquema é preciso até a primeira ordem.

Diz-se que ele é **descentralizado**, uma vez que a “derivada temporal” se refere ao nível de tempo  $n + 1/2$  e a **função ao nível de tempo  $n$** .

Este esquema de Euler para frente é de precisão de primeira ordem.



integração temporal com o esquema de Euler avançado



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de dois níveis

Esquema de Euler atrasado

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t f_j^{n+1}$$

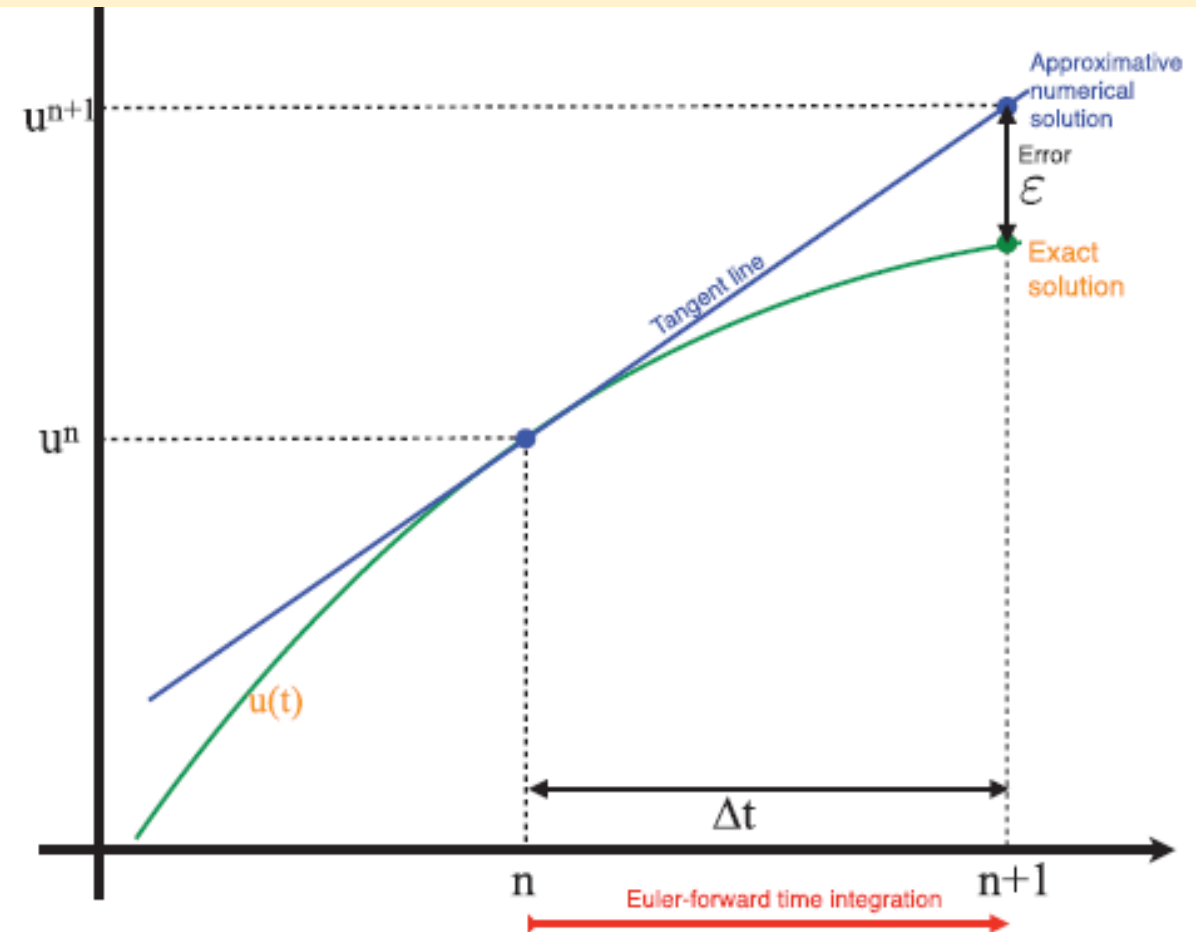
$$f_j^{n+1} = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u_j^n) dt = -c\Delta t \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x}$$

O esquema de Euler atrasado é **descentralizado** no tempo e tem **precisão de  $O(\Delta t)$** .

Se, como aqui, um valor de  $f$  é tomado no nível de tempo  $n + 1$  e  $f$  depende de  $u$ , ou seja,  $u_j^{n+1}$ , o esquema é dito **implícito**.

Para uma equação diferencial ordinária, pode ser uma questão simples resolver para  $u_j^{n+1}$ .

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = -\lambda t$$



integração temporal com o esquema de Euler atrasado





# Métodos de diferenças finitas.

Esquemas de dois níveis

Esquema de Euler para atrasado

Para uma EDP, no entanto, **será necessário resolver um conjunto de equações simultâneas**, com uma equação para cada um dos pontos da grade da região de computação.

Se nenhum valor de  $f$  depender de  $u_j^{n+1}$  no lado direito da equação acima, o esquema é dito explícito.

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t f_j^{n+1}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t f_j^n$$

Nos casos muito simples em que  $f$  depende apenas de  $t$ , como, por exemplo,  $du/dt = -\gamma u$ , a equação discretizada se torna  $u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \gamma u_j^{n+1}$ , que pode ser rearranjada como  $u_j^{n+1} = \frac{u_j^n}{1 + \gamma \Delta t}$  de modo que não haja termos no nível de tempo  $n + 1$  no lado direito. **Nesse caso, a equação discretizada pode ser integrada apesar de ser implícita.**



# Métodos de diferenças finitas.



## Esquemas de dois níveis

### Esquema de Crank-Nicolson"

O esquema de Crank-Nicolson é baseado na **regra do trapézio**. Se aproximarmos  $f$  pela sua média entre os níveis de tempo  $n$  e  $n + 1$ , obtemos

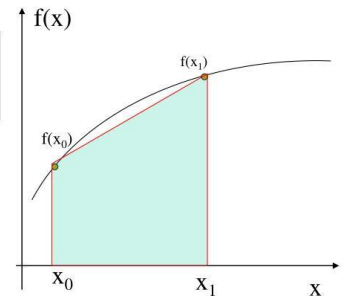
$$u_j^{n+1} = u_j^n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u_j^n) dt$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \left( \frac{f_j^n + f_j^{n+1}}{2} \right)$$

### Regra do trapézio simples

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

$$I = (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$$



Aproxima a área sob a curva pela área de um trapézio

baseado na **regra do trapézio**

Este **esquema é implícito**, pois requer informações do nível de **tempo futuro**  $n + 1$ .



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de dois níveis

### Esquema de Crank-Nicolson"

Note aqui que a aproximação por diferenças finitas está centrada em  $n + 1/2$  entre os dois passos de tempo  $n$  e  $n + 1$ , ou seja,

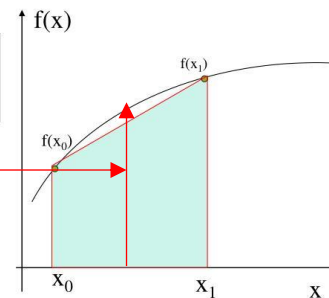
$$\varepsilon = O(\Delta t^1)$$

Regra do trapézio simples

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \varepsilon$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

$$I = (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$$



Aproxima a área sob a curva pela área de um trapézio

"O erro de truncamento  $\varepsilon$  pode ser encontrado a partir da série de Taylor na Equação (3.2).



$$f(y) = f(a) + (y-a)f'(a) + \frac{1}{2}(y-a)^2 f''(a) + \dots + \frac{1}{n!}(y-a)^n f^{(n)}(a).$$

Substituindo  $f(y)$  por  $u(t)$ ,  $a$  por  $t^{n+1/2}$  e  $y$  por  $t^{n+1}$ , obtemos a seguinte expressão:"



# Métodos de diferenças finitas.



## Esquemas de dois níveis

Esquema de Crank-Nicolson"

$$f(y) = f(a) + (y - a)f'(a) + \frac{1}{2}(y - a)^2 f''(a) + \dots + \frac{1}{n!}(y - a)^n f^{(n)}(a).$$

Substituindo  $f(y)$  por  $u(t)$ ,  $a$  por  $t^{n+1/2}$  e  $y$  por  $t^{n+1}$ , obtemos a seguinte expressão:"

$$u_j^{n+1} = u_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1!} \left( n+1 - n - \frac{1}{2} \right) \Delta t \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!} \left( \left( n+1 - n - \frac{1}{2} \right) \Delta t \right)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3!} \left( \left( n+1 - n - \frac{1}{2} \right) \Delta t \right)^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{m!} \left( \left( n+1 - n - \frac{1}{2} \right) \Delta t \right)^m \left( \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

$$u_j^{n+1} = u_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1!} \frac{1\Delta t}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3!} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{m!} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^m \left( \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

$$u_j^{n+1} = u_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1!} \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3!} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{m!} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^m \left( \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

$$u_j^{n+1} = u_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^4).$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de dois níveis

Esquema de Crank-Nicolson"

$$f(y) = f(a) + (y - a)f'(a) + \frac{1}{2}(y - a)^2 f''(a) + \dots + \frac{1}{n!}(y - a)^n f^{(n)}(a).$$

Substituindo  $f(y)$  por  $u(t)$ ,  $a$  por  $t^{n+1/2}$  e  $y$  por  $t^n$ , obtemos a seguinte expressão:"

$$u_j^n = u_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1!} \left( n - n - \frac{1}{2} \right) \Delta t \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!} \left( \left( n - n - \frac{1}{2} \right) \Delta t \right)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3!} \left( \left( n - n - \frac{1}{2} \right) \Delta t \right)^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{m!} \left( \left( n - n - \frac{1}{2} \right) \Delta t \right)^m \left( \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

$$u_j^n = u_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{1!} \frac{1\Delta t}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3!} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{m!} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^m \left( \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

$$u_j^n = u_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{1!} \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3!} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{m!} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^m \left( \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

$$u_j^n = u_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^4).$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de dois níveis

Esquema de Crank-Nicolson"

$$u_j^{n+1} = u_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^4). \quad (3.23)$$

$$u_j^n = u_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^4). \quad (3.24)$$

"Subtraindo a Equação (3.24) da Equação (3.23) e dividindo por  $\Delta t$ , obtemos"

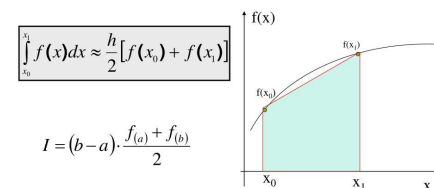
$$u_j^{n+1} - u_j^n = u_j^{n+\frac{1}{2}} + 2 \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2}{6} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^4).$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} (\Delta t)^2 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^4).$$

regra do trapézio

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}$$

Regra do trapézio simples



Aproxima a área sob a curva pela área de um trapézio

11/31



Paulo Toshio Kubota



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de dois níveis

Esquema de Crank-Nicolson"

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} (\Delta t)^2 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^4).$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \varepsilon.$$

$$\varepsilon = O(\Delta t^2) = \frac{1}{24} (\Delta t)^2 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^4)$$

O erro de truncamento  $\varepsilon$  é, portanto, de segunda ordem para o esquema de Crank-Nicolson.



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de dois níveis e 2 etapas

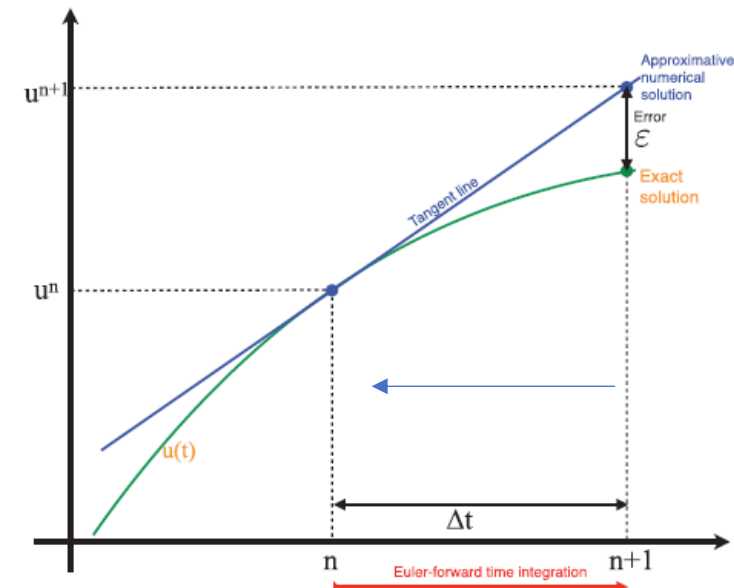
Esquema avançado-atrasado de Matsuno"

"Para aumentar a precisão em comparação aos esquemas de Euler para avançado e atrasado, **podemos construir esquemas iterativos como o esquema de Matsuno**, que é iniciado por um passo de tempo de Euler para avançado:"

$$u_{*j}^{n+1} = u_j^n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u_j^n) dt$$

$$\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u_j^n) dt = f(u_j^n) \cdot \Delta t = +\Delta t \left( \frac{f_j^n + f_j^{n+1}}{2} \right) = \frac{dx \rightarrow 0 \Rightarrow}{f_j^{n+1} \rightarrow f_j^n} = \left( \frac{f_j^n + f_j^{n+1}}{2} \right) \equiv \left( \frac{2f_j^n}{2} \right)$$

$$u_{*j}^{n+1} = u_j^n + \Delta t f_j^n$$







# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de dois níveis e 2 etapas

Esquema avançado-atrasado de Matsuno"

$$f(u_j^n) = -c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

$$u_{*j}^{n+1} = u_j^n + \Delta t f_j^n$$

$$u_{*j}^{n+1} = u_j^n + \Delta t f(u_j^n)$$

"Neste caso, o valor obtido de  $u_{*j}^{n+1}$  serve como uma aproximação de  $f_j^{n+1} = f(u_j^{n+1})$ , que posteriormente é usado para dar um passo para trás e obter um valor final de  $u_j^{n+1}$  :"

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t f(u_{*j}^{n+1})$$

$$f(u_{*j}^{n+1}) = f(u_j^n + \Delta t f(u_j^n), (n+1)\Delta t)$$

Este esquema é explícito e tem precisão de  $O(\Delta t)$

$f(u, t)$  onde tipicamente  $u = u(x, t)$ .

As variáveis independentes  $x$  e  $t$  são espaço e tempo.

$f$  é, portanto, uma função de  $u, x$  e  $t$ , correspondendo, por exemplo, à equação de advecção onde  $f = -c \partial u / \partial x$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(u(x, t), t) = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$f(u_j^n, (n+1)\Delta t) = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de dois níveis e 2 etapas

### Esquema de Heun "

"Isto é semelhante ao esquema de Matsuno e é explícito, **mas de precisão de segunda ordem**, uma vez que o segundo passo é feito usando o esquema de Crank-Nicolson:"

$$u_{*j}^{n+1} = u_j^n + \Delta t f_j^n$$

$$f_j^n = -c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

" $f(u, t)$  onde tipicamente  $u = u(x, t)$ .

As variáveis independentes  $x$  e  $t$  são espaço e tempo.

$f$  é, portanto, uma função de  $u$ ,  $x$  e  $t$ , correspondendo, por exemplo, à equação de advecção onde  $f = -c \partial u / \partial x$ ."

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2} (f_j^n + f_{*j}^{n+1})$$

$$f_{*j}^{n+1} = -c \frac{u_{*j}^{n+1} - u_{*j-1}^{n+1}}{\Delta x}$$

$$u_j^{n+1} = u_{*j}^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2} (f_j^n + f_{*j}^{n+1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u_j^{n+1} = u_{*j}^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left( -c \frac{u_{j-1}^n - u_j^n}{\Delta x} - c \frac{u_{*j-1}^{n+1} - u_{*j}^{n+1}}{\Delta x} \right)$$

$$f(u(x, t), t) = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de dois níveis e 2 etapas

### O esquema do ponto médio (método de Runge-Kutta de segunda ordem)

O esquema do ponto médio, **também conhecido como método de Runge-Kutta de segunda ordem**, é como os esquemas de Matsuno e Heun, **um esquema de múltiplas etapas**, que utiliza uma estimativa intermediária da solução ao longo do passo de tempo das Diferenças Finitas. O esquema consiste primeiro em aplicar um esquema de Euler para frente em meio passo de tempo

$$\frac{u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_j^n}{\Delta t/2} = -c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

$$\frac{u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_j^n}{\Delta t/2} = f_j^n$$

$$u_j^{n+\frac{1}{2}} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2} f_j^n$$

então usar a solução no nível de **tempo do ponto médio  $n + 1/2$**  para integrar com um esquema centrado:"

$$f_j^{n+\frac{1}{2}} = -c \frac{u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t f_j^{n+\frac{1}{2}}$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de dois níveis e 2 etapas

O esquema de Runge-Kutta de quarta ordem

O esquema de Runge-Kutta de quarta ordem é semelhante ao esquema anterior, **mas integra a solução com quatro passos em vez de dois**. O esquema consiste primeiro em aplicar um esquema de Euler avançado em meio passo de tempo

$$\frac{u_{*j}^{n+\frac{1}{2}} - u_j^n}{\Delta t/2} = -c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

$$\frac{u_{*j}^{n+\frac{1}{2}} - u_j^n}{\Delta t/2} = f_j^n$$

$$f_j^n = -c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

$$u_{*j}^{n+\frac{1}{2}} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2} f_j^n$$

posteriormente, recalculer a **solução no nível de tempo  $n + 1/2$**  com um esquema de Euler atrasado utilizando  $u_{*j}^{n+\frac{1}{2}}$

$$f_{*j}^{n+\frac{1}{2}} = -c \frac{u_{*j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{*j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

$$u_j^{n+\frac{1}{2}} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2} f_{*j}^{n+\frac{1}{2}}$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de dois níveis e 4 etapas

O esquema de Runge-Kutta de quarta ordem

Subsequentemente, **um esquema centrado** é usado para chegar ao nível de **tempo  $n + 1$** , utilizando  $u_j^{n+\frac{1}{2}}$ .

$$\frac{u_{*j}^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

$$\frac{u_{*j}^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = f_j^{n+\frac{1}{2}}$$

$$u_{*j}^{n+1} = u_j^n + \Delta t f_j^{n+\frac{1}{2}}$$

$$f_j^{n+\frac{1}{2}} = -c \frac{u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

posteriormente, **recalcular a solução no nível de tempo  $n + 1/2$**  com um esquema de Euler atrasado **utilizando  $u_{*j}^{n+\frac{1}{2}}$**

$$u_{*j}^{n+1} = u_j^n + \Delta t f_j^{n+\frac{1}{2}}$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de dois níveis

O esquema de Runge-Kutta de quarta ordem

A solução final é obtida utilizando a regra de Simpson com os quatro valores  $u_j^n$ ,  $u_{*j}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $u_j^{n+\frac{1}{2}}$  e  $u_{*j}^{n+1}$ , resultando em

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{6} (f^n + 2f_{*}^{n+1/2} + 2f^{n+1/2} + f_{*}^{n+1}).$$

Este método de Runge-Kutta de quarta ordem é estável, e como seu nome indica, preciso até a quarta ordem.

É raramente utilizado, exceto em alguns modelos regionais de alta resolução de previsão numérica do tempo. Métodos de Runge-Kutta de ordem ainda mais alta



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de três níveis

Esses esquemas utilizam o **tempo em três níveis** e a integração no tempo se torna

A forma mais simples de esquema de três níveis é atribuir a  $f$  um valor constante igual ao do meio do intervalo de tempo de comprimento  $2\Delta t$ , o que resulta no esquema leap-frog.

$$u_{*j}^{n+1} = u_j^{n-1} + \int_{(n-1)\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u_j^n, t) dt$$

$$\int_{(n-1)\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(u_j^n, t) dt = f(u_j^n, t) = +\Delta t \left( \frac{f_j^{n+1} + f_j^{n-1}}{2} \right) = \frac{DX \rightarrow 0 \Rightarrow}{f_j^{n+1} \rightarrow f_j^{n-1}} = \left( \frac{f_j^{n+1} + f_j^{n-1}}{2} \right) = \left( \frac{2f_j^n}{2} \right) = f_j^n$$

$$u_{*j}^{n+1} = u_j^{n-1} + 2\Delta t f_j^n$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas de três níveis

Esses esquemas utilizam o **tempo em três níveis** e a integração no tempo se torna

$$u_{*j}^{n+1} = u_j^{n-1} + 2\Delta t f_j^n$$

“no esquemas de **tempo em três níveis** a ordem de precisão  $(\Delta t)^2$ .

Este esquema tem sido amplamente utilizado em modelos atmosféricos e oceânicos.

Muitos dos modelos de circulação atmosférica atuais utilizam, no entanto, passos de tempo Lagrangeanos.

Esquemas de quarta ordem são, como mencionado acima, às vezes também utilizados.

Em alguns modelos, como o modelo oceânico ROMS, existem vários esquemas de tempo diferentes que podem ser utilizados.





# Métodos de diferenças finitas.

## Lax-Friedrich method

O esquema **Lax-Friedrichs** é um esquema explícito de primeira ordem, usando **diferença avançada no tempo** e **diferença centrada no espaço**. No entanto, o **esquema é estabilizado calculando a média de  $u_i^n$**  sobre as células vizinhas na aproximação temporal:

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{\Delta t} = -\frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

O esquema Lax-Friedrich é obtido **pelo isolamento  $u_i^{n+1}$**  no lado direito:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n)$$

Assumindo um fluxo linear  $F = a_0 u$  pode ser mostrado que o esquema Lax-Friedrich assume a forma:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{C}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Lax–Wendroff method

O método Lax–Wendroff, nomeado após Peter Lax e Burton Wendroff, é um método numérico para a solução de equações diferenciais parciais hiperbólicas, com base em diferenças finitas.

É de **precisão de segunda ordem no espaço e no tempo**.

Este método é **um exemplo de integração de tempo explícita** em que a função que define a equação governante é avaliada no momento atual.



# Métodos de diferenças finitas.

## Lax-Wendroff method

Séries de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x - a)^n = f(a) + \frac{f'}{1!} (x - a) + \frac{f''}{2!} (x - a)^2 + \frac{f'''}{3!} (x - a)^3 + \dots$$

A série na Equação acima é chamada **série de Taylor da função  $f$  em  $a$**  (ou **em torno de  $a$**  ou **centrada em  $a$** )

**Obtenha a expansão em série de Taylor para  $u_j^{n+1}$**

$$f(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} (\Delta t)^3 + \dots$$



## Lax-Wendroff method

$$f(u_j^{n+1}) = f(u_j^n) - \Delta t \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f(u(x, t))}{\partial x \partial t} - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 f(u(x, t))}{\partial x \partial t \partial t} - \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 f(u(x, t))}{\partial x \partial t^2} + \dots$$

$$f(u(x, t)) = a_0 u(x, t)$$

$$\frac{DF}{Dt} = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\frac{DF}{Dt} = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + F \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - F \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{DF}{Dt} = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F u}{\partial x} - F \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \stackrel{\text{continuidade}}{=} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{DF}{Dt} = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F u}{\partial x} = 0$$

$$F = u$$

$$\frac{DF}{Dt} = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial (F u)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 f(u(x, t))}{\partial x \partial t}$$



## Lax-Wendroff method

$$f(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} (\Delta t)^3 + \dots$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f(u(x, t))}{\partial x \partial t} + \dots$$

$$F = a_0 u(x, t)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - a_0 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \dots$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 f(u(x, t))}{\partial x \partial t}$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Lax-Wendroff method

$$f(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} (\Delta t)^3 + \dots$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - a_0 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \dots$$

$$F = a_0 u(x, t)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 f(u(x, t))}{\partial x \partial t}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + a_0 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x \partial x} + \dots$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Lax-Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + a_0 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x \partial x} + \dots$$

$$F = a_0 u(x, t)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 f(u(x, t))}{\partial x \partial t}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + a_0^2 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial x} + \dots$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Lax-Wendroff method

Suponha que se tenha uma equação da seguinte forma:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

Onde  $x$  e  $t$  são variáveis independentes, e o estado inicial  $u(x, t = 0)$  é especificado.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + a_0^2 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial x} + \dots$$





## Exercicio

Discretizar as derivadas  $\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial x \partial x} = ?$  e  $\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x \partial x \partial x \partial x} = ?$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + a_0^2 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial x} + \dots$$



## Lax-Wendroff method

### Caso Linear:

**Onde**  $f(u(x, t)) = Au(x, t)$  e  $A = Cte$

O método Lax-Wendroff pertence à classe dos esquemas conservadores e pode ser derivado de várias maneiras. Para simplificar, derivaremos o método usando uma equação modelo simples adv., ou seja, a equação de advecção linear com  $F = a_0 u$ , onde  $a_0$  é uma velocidade de propagação constante. O início de Lax-Wendroff é uma aproximação de Taylor de  $u_j^{n+1}$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^n + \dots$$

From the differential equation of Adv. we get by differentiation

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = -a_0 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n \quad \text{and} \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^n = a_0^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n$$



## Lax-Wendroff method

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

$$f = a_0 u$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + a_0^2 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial x} + \dots$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$C = a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{C}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{C^2}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Lax-Wendroff method

Antes da substituição na expansão de Taylor aproximamos as derivadas espaciais por diferenças centrais:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{(2\Delta x)} \quad \text{and} \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

e então o esquema de Lax-Wendroff segue por substituição:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{C}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{C^2}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

com o erro de truncamento local

$$T_j^n = \frac{1}{6} \cdot \left[ (\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + a_0 (\Delta x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_j^n = O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$$



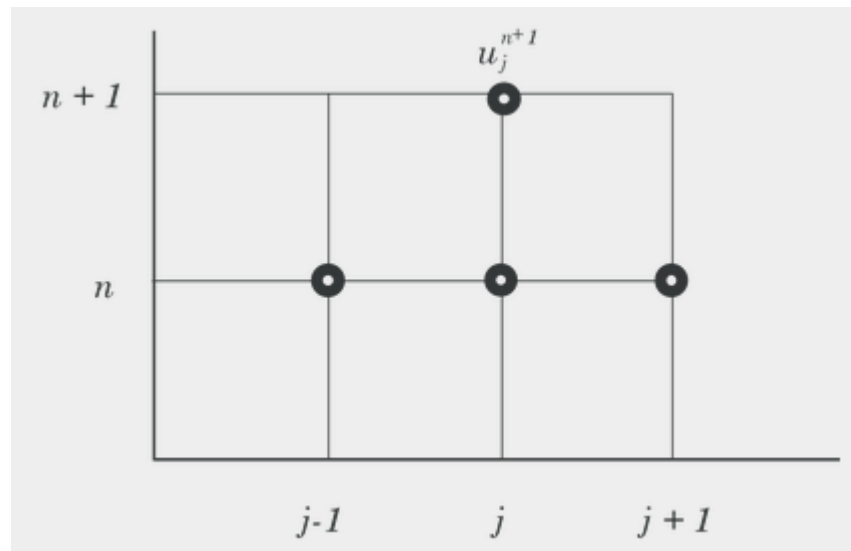
# Métodos de diferenças finitas.

## Lax-Wendroff method

A equação de diferença resultante também pode ser formulada como:

$$u_j^{n+1} = \frac{C}{2}(1+C)u_{j-1}^n + (1-C^2)u_j^n - \frac{C}{2}(1-C)u_{j+1}^n$$

O estêntico explícito de Lax Wendroff é ilustrado na Fig.





## Exercícios Lax–Wendroff method

- *Centered explicit scheme*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

- *Centered implicit scheme*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0.$$

- *Upwind scheme*

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, & \text{if } a > 0, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0, & \text{if } a < 0. \end{cases}$$

- *Lax-Friedrichs*

$$\frac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

- *Bear* Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{C}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{C^2}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$



# Métodos de diferenças finitas.

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

## Lax-Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \dots$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} + \dots$$



# Métodos de diferenças finitas.

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

## Lax-Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \dots$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x}$$

$$f(u(x, t)) = a_0 u(x, t)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial a_0 u(x, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -a_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} + \dots$$





# Métodos de diferenças finitas.

## Lax–Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \dots$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -a_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( - \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -a_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$f(u(x, t)) = a_0 u(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -a_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -a_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} + \dots$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Lax-Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \dots$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} = a_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( - \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} \right)$$

$$f(u(x, t)) = a_0 u(x, t)$$

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} = a_0^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} = -a_0^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} = a_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} = -a_0^3 \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} + \dots$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Lax-Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \dots$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} = -a_0^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} = -a_0^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left( - \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} \right)$$

$$f(u(x, t)) = a_0 u(x, t)$$

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} = -a_0^3 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3}$$

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} = a_0^4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} = -a_0^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} = a_0^4 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} + \dots$$



## Lax-Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \dots$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -a_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$f(u(x, t)) = a_0 u(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} = -a_0^3 \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3}$$

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} = a_0^4 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} + \dots$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \left( a_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left( a_0^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) - \frac{\Delta t^3}{6} \left( a_0^3 \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \right) + \frac{\Delta t^4}{24} \left( a_0^4 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \right) + \dots$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Resumo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} - O[(\Delta x)^1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+2}^n + 12u_j^n - 16u_{j-1}^n + 3u_{j-2}^n}{12\Delta x} + O[(\Delta x)^2]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{4\Delta x} + \frac{-4u_{j-1} + 4u_j - u_{j+2} + u_j}{3\Delta x} - O[\Delta x^3]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{-u_{j+2} + 8u_{j+1} - 8u_{j-1} + u_{j-2}}{12\Delta x} \right) - O[(\Delta x)^4]$$



# Métodos de diferenças finitas.

**Diferencial de n ordem**



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \quad (4B)$$

$$\frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \quad (4C)$$

Subtrair a 4B - 4C

$$\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} = \left( \frac{1}{6} - \frac{4}{6} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4]$$

$$\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} = -\frac{3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4]$$

$$\frac{6}{3} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{6}{3} \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} = -\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 \quad (2D)$$

$$-\frac{6}{3} \left( \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2(\Delta x)^3} - \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4(\Delta x)^3} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (3D)$$

$$-\frac{6}{3} \left( \frac{2u_{j+1} - 2u_{j-1} - u_{j+2} + u_{j-2}}{4(\Delta x)^3} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (4D)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{+u_{j+2} - 2u_{j+1} + 2u_{j-1} - u_{j-2}}{(\Delta x)^3} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (5D)$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} = + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (\Delta x)^4 + O[(\Delta x)^4] \quad (6B)$$

$$\frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{8\Delta x^2} = + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \quad (6C)$$

Multiplique a 6B por 2

$$2 \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} = + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (\Delta x)^4 + O[(\Delta x)^4] \quad (7B)$$

subtraia a 7B - 6C

$$2 \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} - \frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{8\Delta x^2} = \left( 2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6B)$$

$$\frac{2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})}{\Delta x^2} - \frac{(u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2})}{8\Delta x^2} = \frac{4 - 1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6B)$$

$$\frac{-u_{j-2} + 16u_{j+1} - 30u_j + 16u_{j-1} - u_{j+2}}{8\Delta x^2} = \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6B)$$





# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{-u_{j-2} + 16u_{j+1} - 30u_j + 16u_{j-1} - u_{j+2}}{8\Delta x^2} = \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6B)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \frac{-u_{j-2} + 16u_{j+1} - 30u_j + 16u_{j-1} - u_{j+2}}{4\Delta x^2} = \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6B)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \frac{-u_{j-2} + 16u_{j+1} - 30u_j + 16u_{j-1} - u_{j+2}}{4\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6B)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right) \frac{-u_{j-2} + 16u_{j+1} - 30u_j + 16u_{j-1} - u_{j+2}}{4\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6B)$$

$$\frac{-u_{j-2} + 16u_{j+1} - 30u_j + 16u_{j-1} - u_{j+2}}{12\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6B)$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} = + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \quad (6B)$$

$$\frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{8\Delta x^2} = + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \quad (6C)$$

Multiplique a 6C por 2

$$2 \frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{8\Delta x^2} = + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{8}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \quad (6C)$$

subtraia a 6B - 6C

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} - 2 \frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{8\Delta x^2} = \left( \frac{2}{4!} - \frac{8}{4!} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \quad 7B)$$

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} - 2 \frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{8\Delta x^2} = \left( -\frac{6}{4!} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \quad 7B)$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} - 2 \frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{8\Delta x^2} = \left(-\frac{6}{4!}\right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \quad 7B)$$

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} - \frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{4\Delta x^2} = \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \quad 7B)$$

$$\frac{4}{1} \left( -\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^4} + \frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{4\Delta x^4} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O[(\Delta x)^4] \quad 7B)$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{4}{1} \left( -\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^4} + \frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{4\Delta x^4} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O[(\Delta x)^4] \quad 7B)$$

$$\frac{4}{1} \left( \frac{-4u_{j+1} + 8u_j - 4u_{j-1} + u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{4\Delta x^4} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O[(\Delta x)^4] \quad 7B)$$

$$\frac{4}{4} \left( \frac{-4u_{j+1} + 8u_j - 4u_{j-1} + u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{\Delta x^4} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O[(\Delta x)^4] \quad 7B)$$

$$\left( \frac{u_{j+2} - 4u_{j+1} + 6u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{\Delta x^4} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O[(\Delta x)^4] \quad 7B)$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{a_0^2 \Delta t^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) - \frac{a_0^3 \Delta t^3}{6} \left( \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} \right) + \frac{a_0^4 \Delta t^4}{24} \left( \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} \right) + \dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{-u_{j+2} + 8u_{j+1} - 8u_{j-1} + u_{j-2}}{12\Delta x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-u_{j-2} + 16u_{j+1} - 30u_j + 16u_{j-1} - u_{j+2}}{12\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \left( \frac{+u_{j+2} - 2u_{j+1} + 2u_{j-1} - u_{j-2}}{2(\Delta x)^3} \right)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \left( \frac{u_{j+2} - 4u_{j+1} + 6u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{\Delta x^4} \right)$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Exercício:

**Exercício: Implemente Numericamente o Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem do método de **Lax-Wendroff**.**



## Runge-Kutta method



# Métodos de diferenças finitas.

## First Order Runge-Kutta method

Considere a situação em que a solução,  $y(t)$ , para uma equação diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(y(t), t)$$

deve ser aproximado por computador a partir de alguma condição inicial conhecida, ,  $y(t_0) = y_0$  (observe que a marca (') indica diferenciação). O texto a seguir desenvolve uma técnica intuitiva para fazer isso e apresenta vários exemplos. Esta técnica é conhecida como “**Método de Euler**” ou “**Runge-Kutta de Primeira Ordem**”.





## First Order Runge-Kutta method

Uma equação diferencial linear de primeira ordem sem entrada

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

or

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t)$$

$$\frac{1}{y(t)} \frac{dy(t)}{dt} = -2$$

$$\int_{y(t=0)}^{y(t=h)} \frac{1}{y(t)} dy(t) = -2 \int_0^h dt$$

$$\ln(y(t=h)) - \ln(y(t=0)) = -2h + 0$$

$$\ln\left(\frac{y(t=h)}{y(t=0)}\right) = -2h + 0$$

$$\frac{y(t=h)}{y(t=0)} = e^{-2h}$$

$$y(t=h) = y(t=0)e^{-2h}$$

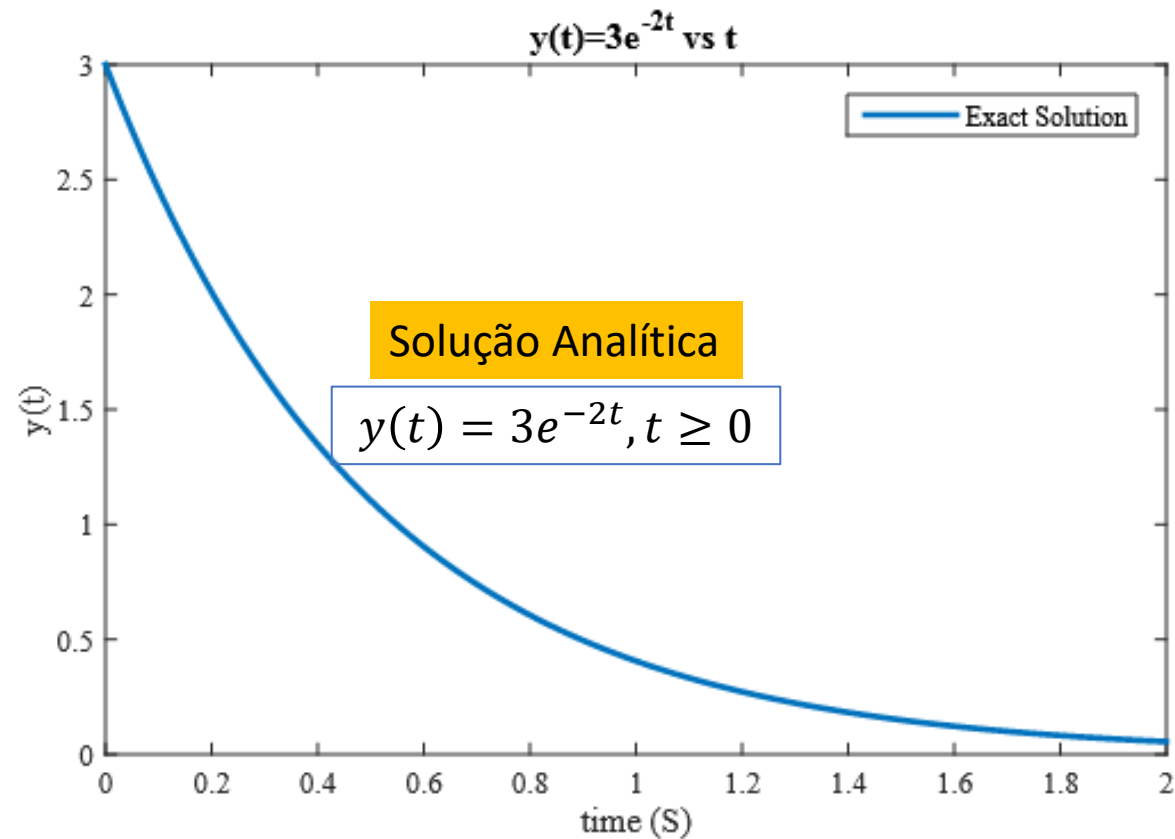
$$y(t) = 3e^{-2t}, t \geq 0$$

1. com a **condição inicial** definida como  $y(0) = 3$ .
2. Para este caso, a solução exata pode ser determinada como  $(y(t) = 3e^{-2t}, t \geq 0)$ .
3. Como sabemos a solução exata neste caso, poderemos utilizá-la para verificar a precisão da nossa solução aproximada.



## First Order Runge-Kutta method

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$





## First Order Runge-Kutta method

Existem várias maneiras de desenvolver uma solução aproximada, faremos isso usando a **Série de Taylor** para  $y(t)$  expandido em torno de  $t = 0$  (em geral expandimos em torno de  $t = t_0$ ).

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2} + \dots$$

Agora restringimos a nossa solução a um **curto intervalo de tempo**,  $h$ , após  $t = 0$  e **truncamos a série de Taylor** após a primeira derivada

$$y(h) = y(0) + y'(0)h + y''(0)\frac{h^2}{2} + \dots$$

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial y}{\partial t} \Delta t^1 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Delta t^2 \dots$$

$$y(h) \approx y(0) + y'(0)h$$

$$y(t) = y(0) + \frac{\partial y(0)}{\partial t} \Delta t + \dots$$



# Métodos de diferenças finitas.

## First Order Runge-Kutta method

1. com a **condição inicial** definida como  $y(0) = 3$ .

Agora restringimos a nossa solução a um **curto intervalo de tempo,  $h$** , após  $t = 0$  e **truncamos a série de Taylor** após a primeira derivada

$$\frac{y^*(t) - y(t=0)}{\Delta t} = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} = k_1 \dots$$

$$k_1 = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t}$$

$$\frac{y_1\left(\frac{t}{2}\right) - y^*(t=0)}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} = k_1 \dots$$

$$k_2 = \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t}$$

$$\frac{y_2\left(\frac{t}{2}\right) - y^*(t=0)}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} = k_2 \dots$$

$$k_3 = \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t}$$

$$\frac{y_3(t) - y^*(t=0)}{\Delta t} = \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} = k_3 \dots$$

$$k_4 = \frac{\partial y_3(t)}{\partial t}$$

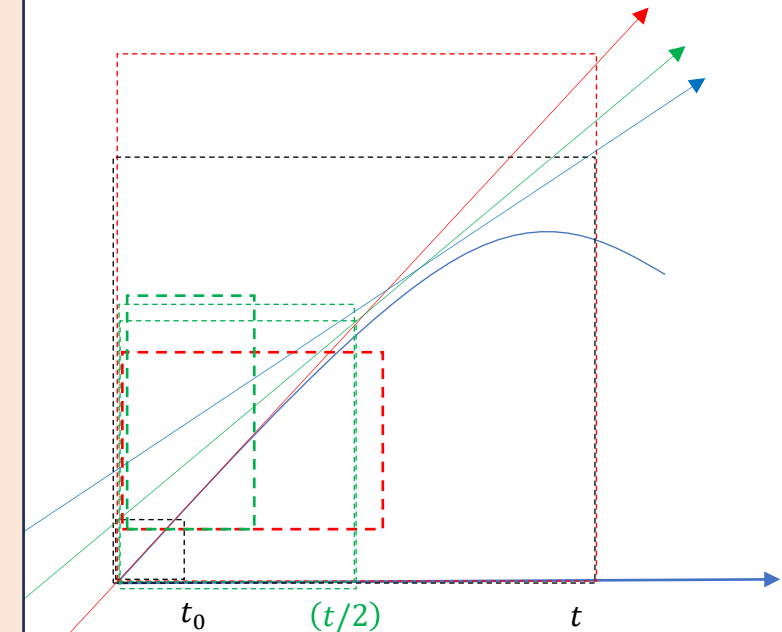
$$y^*(t) = y(0) + k_1 \Delta t$$

$$y_1\left(\frac{t}{2}\right) = y^*(t=0) + \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \dots$$

$$y_2\left(\frac{t}{2}\right) = y^*(t=0) + \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \dots$$

$$y_3(t) = y^*(t=0) + \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} \Delta t + \dots$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -C * \frac{\partial y}{\partial x}$$



$$\frac{\partial y}{\partial t} = -C * \frac{y_j^n - y_{j-1}^n}{\Delta x} = -C \frac{\partial y}{\partial x}$$



# Métodos de diferenças finitas.

## First Order Runge-Kutta method $y^*(h) = y(0) + k_1 h$

Chamamos o **valor da aproximação**  $y^*(h)$  e chamamos a derivada de  $y'(0) = k_1$ .

$$y(t) = 3e^{-2t}, t \geq 0$$

$$\frac{\partial y(t=0)}{\partial t} = k_1$$

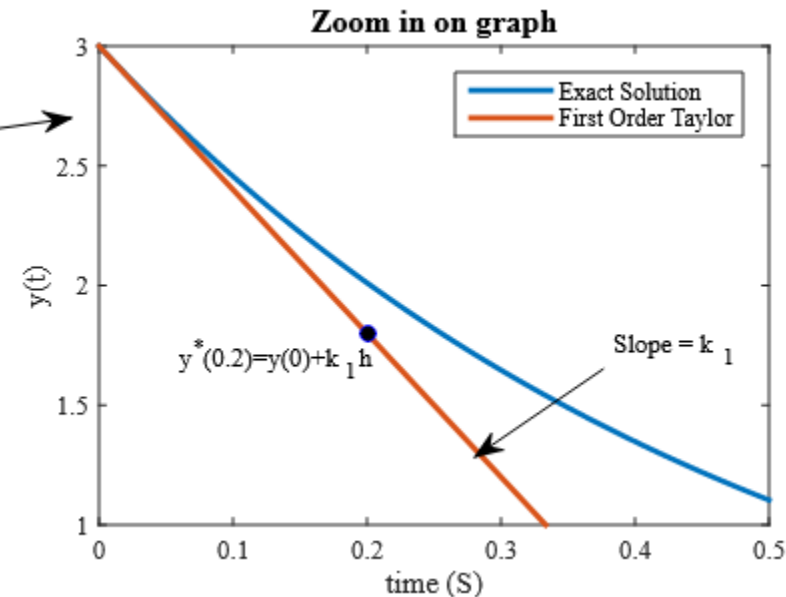
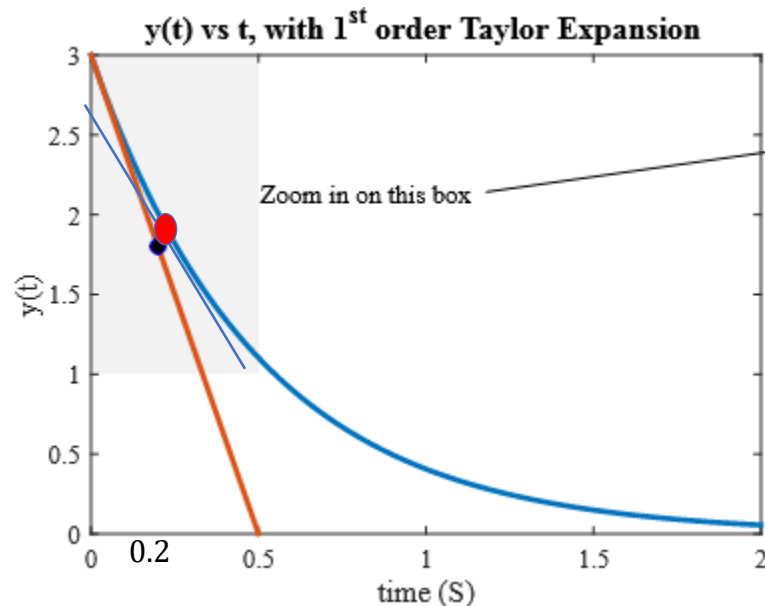
$$y(h) \approx y(0) + y'(0)h$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t)$$

$$k_1 = -6$$

$$y^*(h) = y(0) + k_1 \Delta t$$

Isso é mostrado no gráfico abaixo para  $\Delta t = 0.2$   $y_1(t) = y(t=0) + \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} \Delta t + \dots$





# Métodos de diferenças finitas.

## First Order Runge-Kutta method

Para encontrar o valor da aproximação após o próximo passo de tempo,  $y^*(2\Delta t)$ , simplesmente repetimos o processo usando nossa aproximação,  $y^*(t)$  para estimar a derivada no tempo  $t$  (não sabemos  $y(t)$  exatamente, então só podemos estimar a derivada - chamamos essa estimativa de  $k_1$ ).

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t)$$

$$y'(t) = -2y(t)$$

exact expression for derivative

$$k_1 = -2y^*(h)$$

approximation for derivative

$$y(2h) = y(h) + y'(h)h + y''(h)\frac{h^2}{2} + \dots$$

4aylor Series around  $t = h$

$$y(2h) \approx y(h) + y'(h)h$$

Truncated 4aylor Series

$$y^*(2h) = y^*(h) + k_1h$$

ApproximateSolution



# Métodos de diferenças finitas.

## First Order Runge-Kutta method

Em geral, avançamos um passo no tempo de  $t_0$  para  $t_0 + h$

$$y'(t_0) = -2y(t_0)$$

$$k_1 = -2y^*(t_0)$$

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0)h + y''(t_0)\frac{h^2}{2} + \dots$$

$$y(t_0 + h) \approx y(t_0) + y'(t_0)h$$

$$y^*(t_0 + h) = y^*(t_0) + k_1h$$

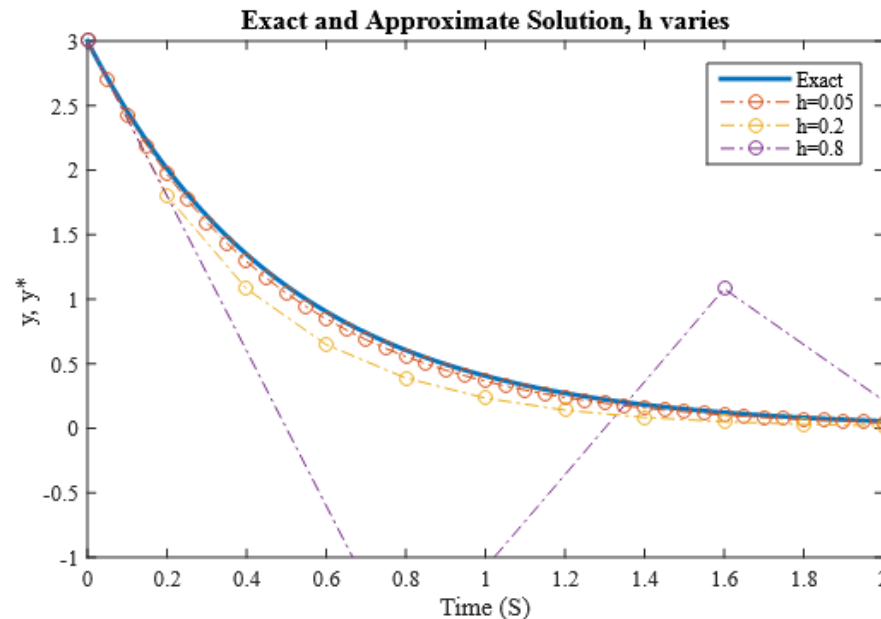
exact expression for derivative at  $t = t_0$

Previous approx for  $y(t)$  gives approx for derivative

4aylor Series around  $t = t_0$

Truncated 4aylor Series

Approximate Solution at next value of  $y$





# Métodos de diferenças finitas.

## First Order Runge-Kutta method

Conceito-chave: Algoritmo Runge-Kutta de primeira ordem

Para uma equação diferencial ordinária de primeira ordem definida por

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), t)$$

para progredir de um ponto em  $t = t_0$ ,  $y^*(t_0)$ , em um intervalo de tempo,  $h$  siga estas etapas (repetitivamente).

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y^*(t_0), t_0) && \text{approximation for derivative} \\ y^*(t_0 + h) &= y^*(t_0) + k_1 h && \text{approximate solution at next time step} \end{aligned}$$

Notas: **um valor inicial da função deve ser fornecido** para iniciar o algoritmo.





## Second Order Runge-Kutta method

Considere a situação em que a solução,  $y(t)$ , para uma equação diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(y(t), t), \quad \text{with } y(t_0) = y_0$$

deve ser aproximado por computador (a partir de alguma **condição inicial conhecida**,  $y(t_0) = y_0$ ; observe também que a marca (') indica diferenciação).

Esta técnica é conhecida como "Runge-Kutta de Segunda Ordem".



# Métodos de diferenças finitas.

## First Order Runge-Kutta method

1. com a **condição inicial** definida como  $y(0) = 3$ .

Agora restringimos a nossa solução a um **curto intervalo de tempo**,  $h$ , após  $t = 0$  e **truncamos a série de Taylor** após a primeira derivada

$$\frac{y^*(t) - y(t=0)}{\Delta t} = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} = k_1 \dots$$

$$k_1 = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t}$$

$$\frac{y_1\left(\frac{t}{2}\right) - y^*(t=0)}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} = k_1 \dots$$

$$k_2 = \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t}$$

$$\frac{y_2\left(\frac{t}{2}\right) - y^*(t=0)}{\frac{\Delta t}{2}} = + \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} = k_2 \dots$$

$$k_3 = \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t}$$

$$\frac{y_3(t) - y^*(t=0)}{\Delta t} = \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} = k_3 \dots$$

$$k_4 = \frac{\partial y_3(t)}{\partial t}$$

$$y^*(t) = y(0) + k_1 \Delta t$$

$$y_1\left(\frac{t}{2}\right) = y^*(t=0) + \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \dots$$

$$y_2\left(\frac{t}{2}\right) = y^*(t=0) + \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \dots$$

$$y_3(t) = y^*(t=0) + \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} \Delta t + \dots$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -C * \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$y(t) = y(t=0) + \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} \Delta t + \dots$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -C * \frac{y_j^n - y_{j-1}^n}{\Delta x} = -C \frac{\partial y}{\partial x}$$



## Second Order Runge-Kutta method

O método Runge-Kutta de primeira ordem usou a derivada no tempo  $t_0$  ( $t_0 = 0$  no gráfico abaixo) para estimar o valor da função em um intervalo de tempo no futuro.  $t$ . Repetimos o conceito central de gerar um avanço no tempo.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{dy(t)}{dt} = -2y(t)$$

com a condição inicial definida como  $y(0) = 3$ .

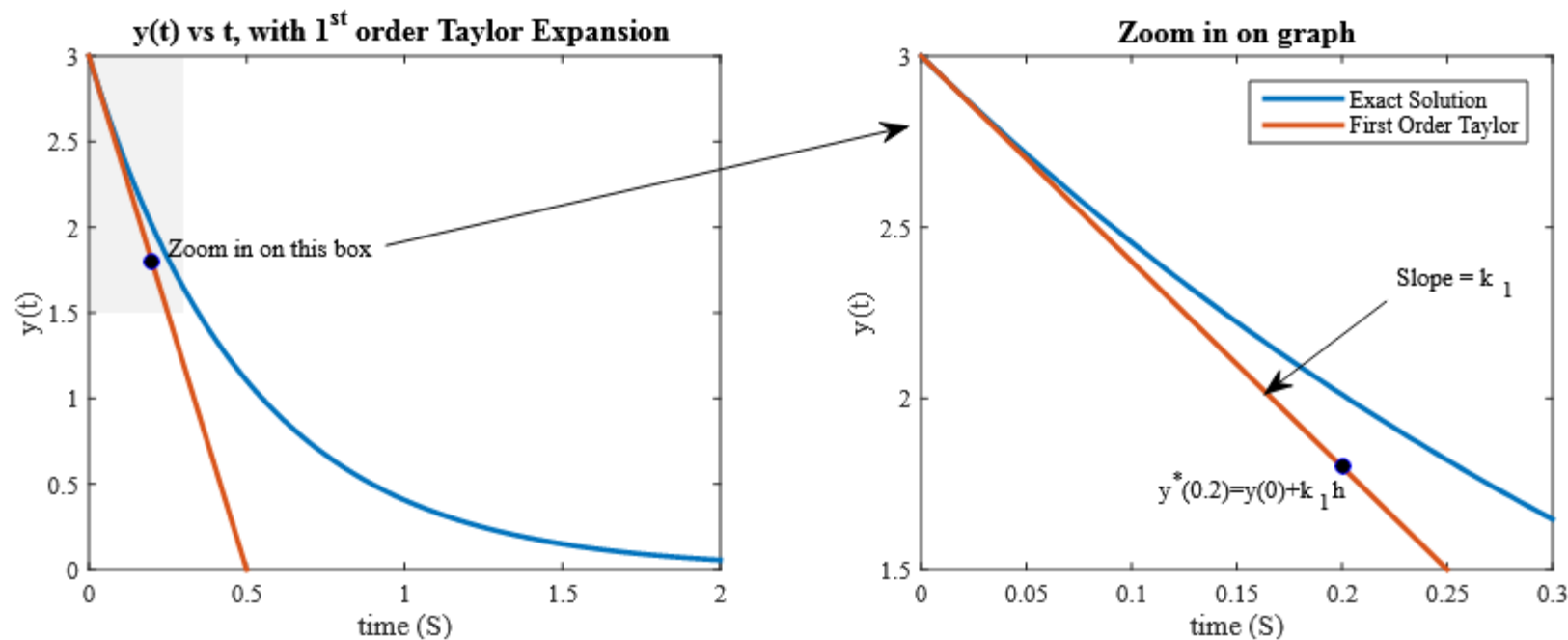
A solução exata neste caso é  $y(t) = 3e^{-2t}$ ,  $t \geq 0$ , embora em geral não saberemos isso e assim precisaremos de métodos de integração numérica para gerar uma aproximação.



# Métodos de diferenças finitas.

## Second Order Runge-Kutta method

No gráfico abaixo, a inclinação em  $t = 0$  é chamada de  $k_1$  e a estimativa é chamada de  $y^*(h)$ ; neste exemplo  $h = 0.2$



Gráficos do método Runge-Kutta Primeira Ordem



# Métodos de diferenças finitas.

## Second Order Runge-Kutta method

Isto obviamente leva a **algum erro na estimativa** e **gostaríamos de reduzir esse erro**.

Uma maneira de fazer isso, conceitualmente, é **usar a derivada no ponto intermediário** entre  $t = 0$  e  $t = h = 0,2$ . A inclinação neste ponto ( $t = \frac{1}{2}h = 0,1$ ) é mostrada abaixo (e é rotulada como  $k_2$ ). Observe que a linha (laranja) é tangente à curva (azul) em  $t = \frac{1}{2}h$ .

$$\frac{y_1(t) - y(t=0)}{\Delta t} + \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} + \dots, \quad y_1(t) = y(t=0) + \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} \Delta t + \dots$$

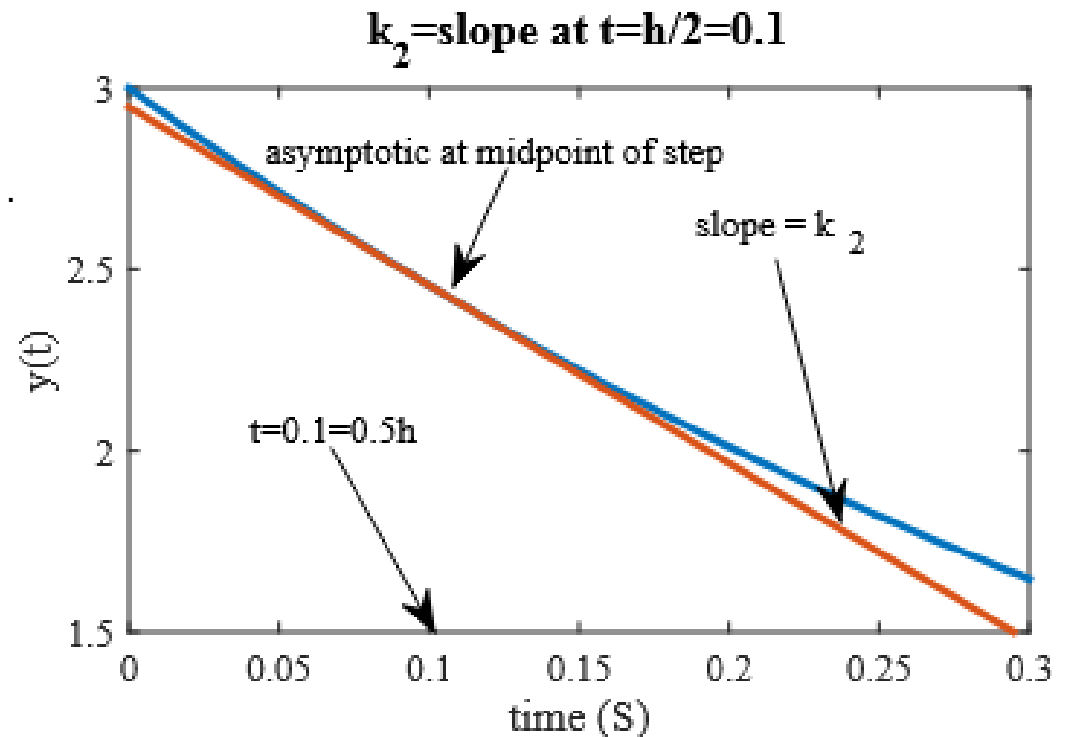
$$\frac{y_2\left(\frac{t}{2}\right) - y_1(t=0)}{\frac{\Delta t}{2}} = + \frac{\partial y_1(t)}{\partial t} + \dots, \quad y_2\left(\frac{t}{2}\right) = y_1(t=0) + \frac{\partial y_1(t)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \dots$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t)$$

$$\frac{\partial y_1(t)}{\partial t} = k_2 = -2(3e^{-2t})$$

$$\frac{\partial y_1(t)}{\partial t} = k_2 = -2(3e^{-2t})$$

$$y(t) = 3e^{-2t}, t \geq 0$$



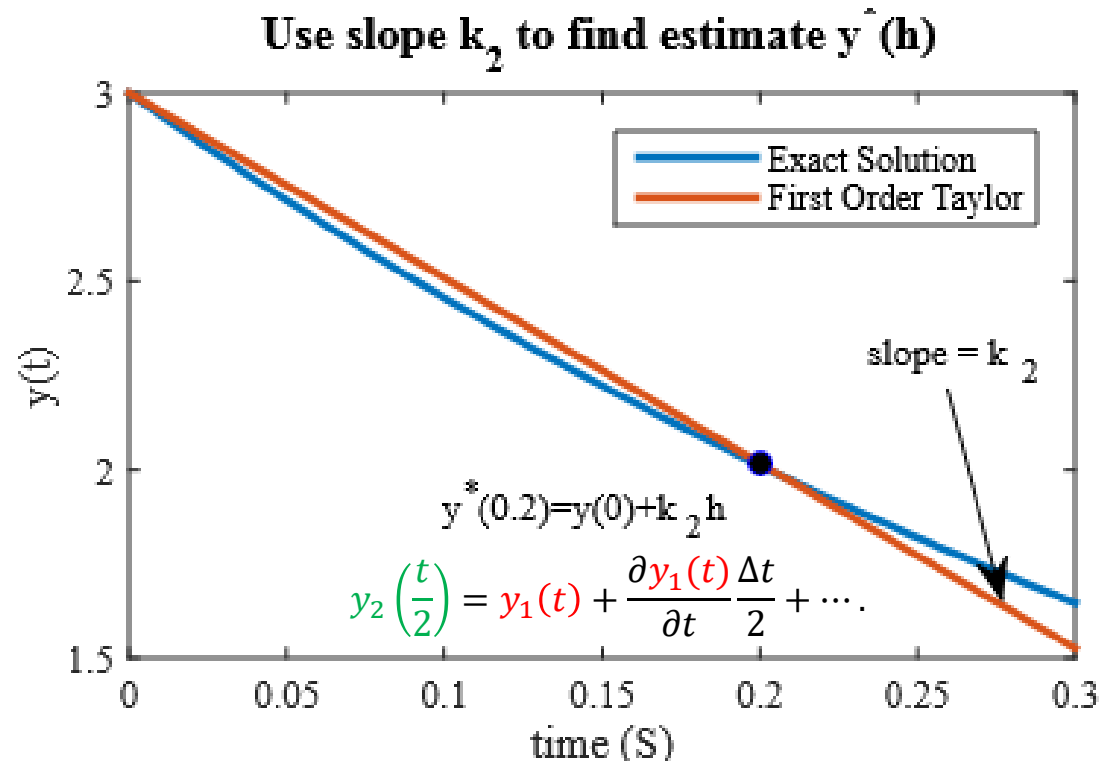


# Métodos de diferenças finitas.

## Second Order Runge-Kutta method

Agora, se utilizarmos este **declive intermédio**,  $k_2$ , à medida que avançamos no tempo, obteremos uma **estimativa melhor**,  $y^*(h)$ , do que fizemos antes.

No diagrama abaixo, o **valor exato da solução** é  $y(0.1) = 2.0110$  e a aproximação é  $y^*(0.1) = 2.0175$  para um erro de cerca de **0,3%** (em comparação com cerca de **10%** de erro para o Runge-Kutta de primeiro ordem).





## Second Order Runge-Kutta method

Esta parece ser uma **solução muito boa** e obviamente gera uma **aproximação significativamente mais precisa** do que a **técnica de primeira ordem** que utiliza uma reta com inclinação,  $k_1$ , calculada em  $t = 0$  problema é que não sabemos o valor exato de  $y(\frac{1}{2}h)$ , então não podemos encontrar o valor exato de  $k_2$  o coeficiente angular em  $t = \frac{1}{2}h$  (lembre-se de que o cálculo da derivada requer conhecimento do valor da função,  $y'(t) = -2y(t)$ )

Em vez disso, o que se faz é usar o Runge Kutta de primeira ordem para gerar um valor aproximado para  $y(t)$  em  $t = \frac{1}{2}h = 0.1$ , chame-o de  $y_1(\frac{1}{2}h)$ . Em seguida, **utilizamos esta estimativa para gerar  $k_2$**  (que será uma aproximação ao declive no ponto médio) e, em seguida, utilizamos  $k_2$  para determinar  $y^*(h)$ . Para passar do ponto inicial em  $t = 0$  para uma estimativa em  $t = h$ , siga o procedimento abaixo.



# Métodos de diferenças finitas.

## Second Order Runge-Kutta method

$$y(t) = 3e^{-2t}, t \geq 0$$

$$y'(0) = -2y(0)$$

$$k_1 = -2y(0)$$

$$y_1\left(\frac{h}{2}\right) = y(0) + k_1 \frac{h}{2}$$

$$k_2 = -2y_1\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$y(h) = y(0) + y'(0)h + y''(0)\frac{h^2}{2} + \dots$$

$$y(t) \approx y(0) + y'(0)h$$

$$y^*(h) = y(0) + k_2h$$

$$k_2 = -2\left(y(0) + k_1 \frac{h}{2}\right)$$

expression for derivative at  $t = 0$

derivative at  $t = 0$

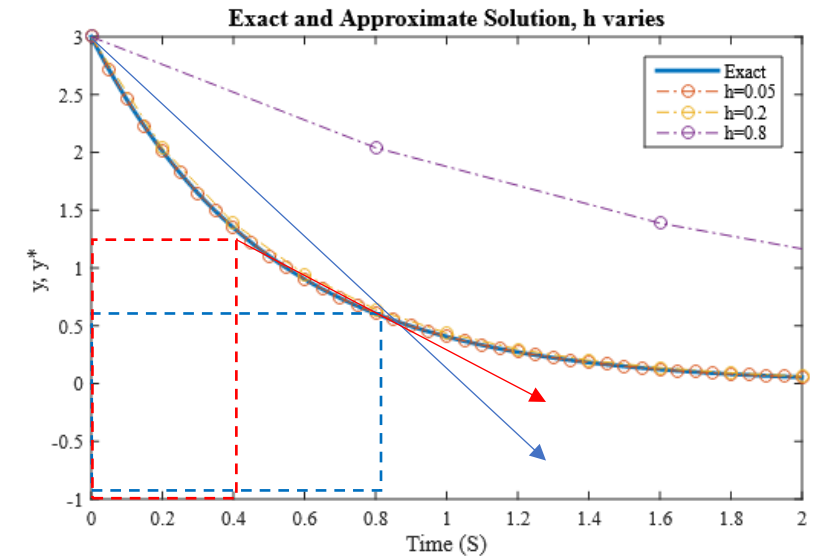
intermediate estimate of function at  $t = h/2$

estimate of slope at  $t = h/2$

Taylor Series around  $t = 0$

Truncate Taylor Series

estimate of  $y(h)$



Em geral, para ir da estimativa  $t = t_0$  para uma estimativa em  $t = t_0 + h$





## Second Order Runge-Kutta method

$$y'(t_0) = -2y(t_0)$$

expression for derivative at  $t = t_0$

$$k_1 = -2y^*(t_0)$$

approximate derivative at  $t = t_0$

$$y_1 \left( t_0 + \frac{h}{2} \right) = y^*(t_0) + k_1 \frac{h}{2}$$

intermediate estimate of function at  $t = t_0 + h/2$

$$k_2 = -2y_1 \left( t_0 + \frac{h}{2} \right)$$

estimate of slope at  $t = t_0 + h/2$

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0)h + y''(0)\frac{h^2}{2} + \dots$$

Taylor Series around  $t = t_0$

$$y(t_0 + h) \approx y(t_0) + y'(t_0)h$$

Truncated Taylor Series

$$y^*(t_0 + h) = y(t_0) + k_2h$$

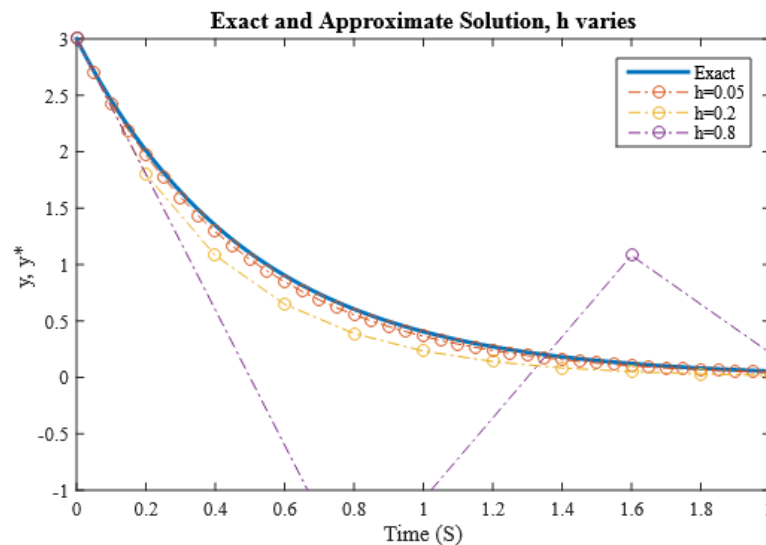
estimate of  $y(t_0 + h)$



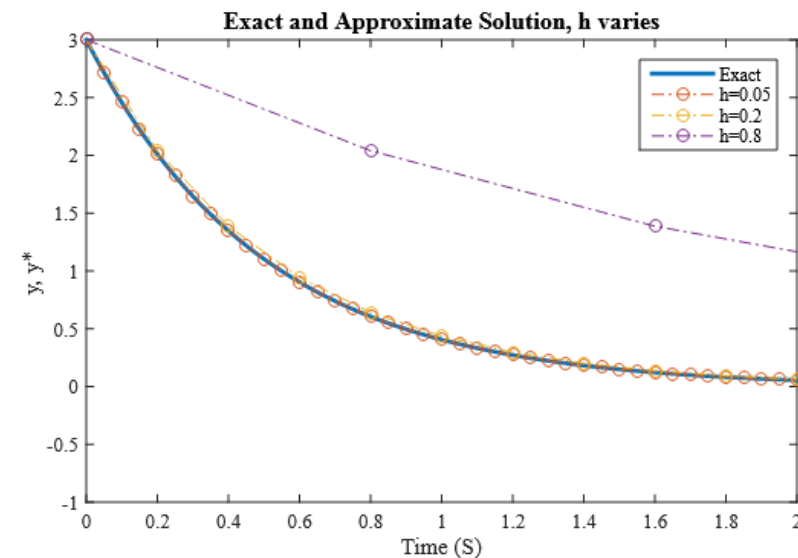
## Second Order Runge-Kutta method

Observe que valores maiores de  $h$  resultam em aproximações piores, mas que as soluções são muito melhores **do** que aquelas obtidas com Runge-Kutta de Primeira Ordem para o mesmo valor de  $h$ .

RK1



RK2





## Second Order Runge-Kutta method

Conceito-chave: Algoritmo Runge-Kutta de segunda ordem (**ponto médio**)

para progredir de um ponto em  $t = t_0$ ,  $y^*(t_0)$ , em um intervalo de tempo,  $h$ , siga estas etapas (repetitivamente).

$k_1 = f(y^*(t_0), t_0)$	estimate of derivative at $t = t_0$
$y_1 \left( t_0 + \frac{h}{2} \right) = y^*(t_0) + k_1 \frac{h}{2}$	intermediate estimate of function at $t = t_0 + \frac{h}{2}$
$k_2 = f \left( y_1 \left( t_0 + \frac{h}{2} \right), t_0 + \frac{h}{2} \right)$	estimate of slope at $t = t_0 + \frac{h}{2}$
$y^*(t_0 + h) = y^*(t_0) + k_2 h$	estimate of $y(t_0 + h)$

Notas:

Um valor inicial da função deve ser fornecido para iniciar o algoritmo.

Isto é frequentemente chamado de algoritmo de "**ponto médio**" para **Runge-Kutta de segunda ordem** porque usa a inclinação no ponto médio,  $k_2$ .



## Fourth Order Runge-Kutta method

desejamos aproximar a solução de uma equação diferencial de primeira ordem dada por

$$\frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(y(t), t), \quad \text{with } y(t_0) = y_0$$

O desenvolvimento do método Runge-Kutta de Quarta Ordem segue de perto o da Segunda Ordem,

Tal como acontece com a técnica de segunda ordem, existem muitas variações do método de quarta ordem, e todas elas usam quatro aproximações para a inclinação



# Métodos de diferenças finitas.

## Fourth Order Runge-Kutta method

Usaremos as seguintes aproximações de inclinação para estimar a inclinação em algum momento  $t_0$  (assumindo que temos apenas uma aproximação para  $y(t_0)$  (que chamamos de  $y^*(t_0)$ )).

$$y^*(h) = y(0) + k_1 h$$

$$y'(0) = -2y(0)$$

$$k_1 = -2y(0)$$

$$y_1\left(\frac{h}{2}\right) = y^*(0) + k_1 \frac{h}{2}$$

$$k_2 = -2y_1\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$y_2\left(\frac{h}{2}\right) = y^*(0) + k_2 \frac{h}{2}$$

$$k_3 = -2y_2\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$y_3(h) = y^*(0) + k_3 h$$

$$k_4 = -2y_3(h)$$

$$y^*(h) = y(0) + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} h$$

$$\frac{y^*(t) - y(t=0)}{\Delta t} = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} = k_1 \dots$$

$$k_1 = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} \quad y^*(0) = y(0) + k_1 \Delta t$$

$$\frac{y_1\left(\frac{t}{2}\right) - y^*(t=0)}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} = k_1 \dots$$

$$k_2 = \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} \quad y^*(0) = y(0) + k_2 \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{y_2\left(\frac{t}{2}\right) - y^*(t=0)}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} = k_2 \dots$$

$$k_3 = \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} \quad y^*(0) = y(0) + k_3 \frac{\Delta t}{2}$$

$$\frac{y_3(t) - y^*(t=0)}{\Delta t} = \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} = k_3 \dots$$

$$k_4 = \frac{\partial y_3(t)}{\partial t}$$

$$y^*(t) = y(0) + k_1 \Delta t$$

$$y_1\left(\frac{t}{2}\right) = y^*(t=0) + \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \dots$$

$$y_2\left(\frac{t}{2}\right) = y^*(t=0) + \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \dots$$

$$y_3(t) = y^*(t=0) + \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} \Delta t + \dots$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Fourth Order Runge-Kutta method

Usaremos as seguintes aproximações de inclinação para estimar a inclinação em algum momento  $t_0$  (assumindo que temos apenas uma aproximação para  $y(t_0)$  (que chamamos de  $y^*(t_0)$ )).

$$\frac{y^*(t) - y(t=0)}{\Delta t} = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} = k_1 \dots$$

$$k_1 = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t}$$

$$\frac{y_1\left(\frac{t}{2}\right) - y^*(t=0)}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} = k_1 \dots$$

$$k_2 = \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t}$$

$$\frac{y_2\left(\frac{t}{2}\right) - y^*(t=0)}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} = k_2 \dots$$

$$k_3 = \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t}$$

$$\frac{y_3(t) - y^*(t=0)}{\Delta t} = \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} = k_3 \dots$$

$$k_4 = \frac{\partial y_3(t)}{\partial t}$$

$$y^*(t) = y(0) + k_1 \Delta t$$

$$y_1\left(\frac{t}{2}\right) = y^*(t=0) + \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \dots$$

$$y_2\left(\frac{t}{2}\right) = y^*(t=0) + \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \dots$$

$$y_3(t) = y^*(t=0) + \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} \Delta t + \dots$$

$$\frac{y^*(h) - y(0)}{h} = ?$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -C * \frac{\partial y}{\partial x} = k_w = f(y, t)$$

$$k_1 = f(y^*(t_0), t_0)$$

$$k_2 = f\left(y^*(t_0) + k_1 \frac{h}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(y^*(t_0) + k_2 \frac{h}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = f(y^*(t_0) + k_3 h, t_0 + h)$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Fourth Order Runge-Kutta method

Usaremos as seguintes aproximações de inclinação para estimar a inclinação em algum momento  $t_0$  (assumindo que temos apenas uma aproximação para  $y(t_0)$  (que chamamos de  $y^*(t_0)$ )).

$$\frac{y^*(t) - y(t=0)}{\Delta t} = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} = k_1 \dots$$

$$k_1 = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t}$$

$$\frac{y_1\left(\frac{t}{2}\right) - y^*(t=0)}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} = k_1 \dots$$

$$k_2 = \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t}$$

$$\frac{y_2\left(\frac{t}{2}\right) - y^*(t=0)}{\frac{\Delta t}{2}} = + \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} = k_2 \dots$$

$$k_3 = \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t}$$

$$\frac{y_3(t) - y^*(t=0)}{\Delta t} = \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} = k_3 \dots$$

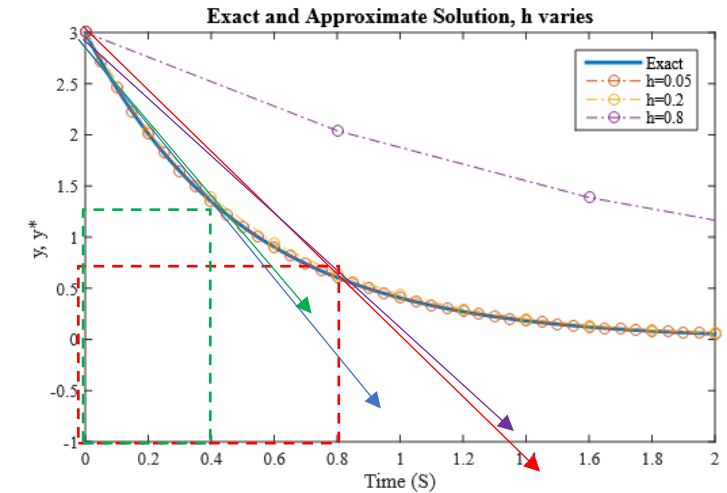
$$k_4 = \frac{\partial y_3(t)}{\partial t}$$

$$y^*(t) = y(0) + k_1 \Delta t$$

$$y_1\left(\frac{t}{2}\right) = y^*(t=0) + \frac{\partial y(t=0)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \dots$$

$$y_2\left(\frac{t}{2}\right) = y^*(t=0) + \frac{\partial y_1\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \dots$$

$$y_3(t) = y^*(t=0) + \frac{\partial y_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\partial t} \Delta t + \dots$$





## Fourth Order Runge-Kutta method

Cada uma dessas estimativas de inclinação pode ser descrita verbalmente.

$k_1$  é a inclinação no início do intervalo de tempo (é igual a  $k_1$  nos métodos de primeira e segunda ordem).

Se utilizarmos o declive  $k_1$  para percorrer metade do intervalo de tempo, então  $k_2$  é uma estimativa do declive no ponto médio. É igual ao declive,  $k_2$ , do método do ponto médio de segunda ordem. Esta inclinação provou ser mais precisa que  $k_1$  para fazer novas aproximações para  $y(t)$ .

Se utilizarmos o declive  $k_2$  para percorrer metade do intervalo de tempo, então  $k_3$  é outra estimativa do declive no ponto médio.

Finalmente, utilizamos o declive,  $k_3$ , para percorrer todo o intervalo de tempo (até  $t_0 + h$ ), e  $k_4$  é uma estimativa do declive no ponto final.





# Métodos de diferenças finitas.

## Fourth Order Runge-Kutta method

Em seguida, usamos uma soma ponderada dessas inclinações para obter nossa estimativa final de  $y^*(t_0 + h)$

$$\begin{aligned} y^*(t_0 + h) &= y^*(t_0) + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} h = y^*(t_0) + \left( \frac{1}{6} k_1 + \frac{1}{3} k_2 + \frac{1}{3} k_3 + \frac{1}{6} k_4 \right) h \\ &= y^*(t_0) + mh \quad \text{where } m \text{ is a weighted average slope approximation} \end{aligned}$$

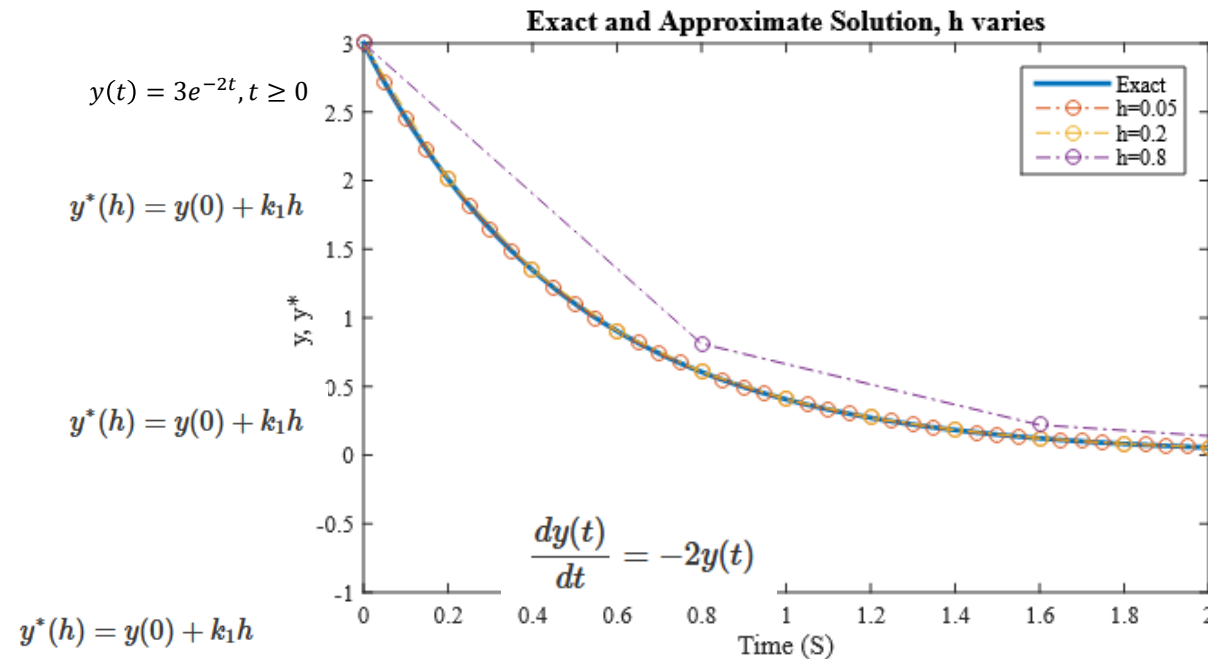


# Métodos de diferenças finitas.

## Fourth Order Runge-Kutta method

condição inicial definida como  $y(0) = 3$ . Para ir do valor inicial em  $t = 0$  até uma estimativa em  $t = h$ , siga o procedimento descrito abaixo

$$\begin{aligned} y'(0) &= -2y(0) \\ k_1 &= -2y(0) \\ y_1\left(\frac{h}{2}\right) &= y^*(0) + k_1 \frac{h}{2} \\ k_2 &= -2y_1\left(\frac{h}{2}\right) \\ y_2\left(\frac{h}{2}\right) &= y^*(0) + k_2 \frac{h}{2} \\ k_3 &= -2y_2\left(\frac{h}{2}\right) \\ y_3(h) &= y^*(0) + k_3 h \\ k_4 &= -2y_3(h) \end{aligned}$$



$$y^*(h) = y(0) + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} h \quad \text{estimate of } y(h)$$

$$\frac{y^*(h) - y(0)}{h} = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

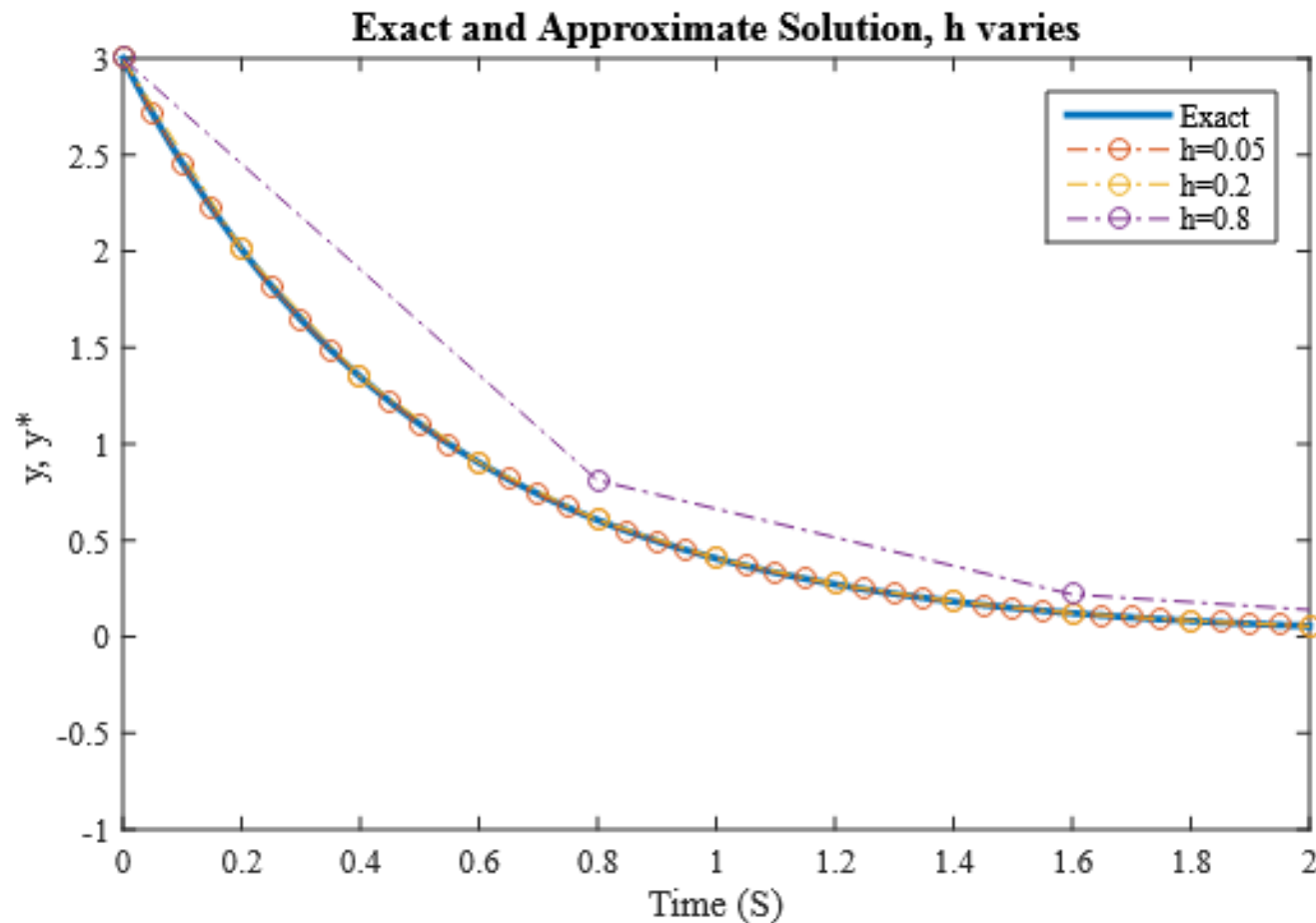
$$\frac{\partial y}{\partial t} = -C * \frac{\partial y}{\partial x} = k_w$$



# Métodos de diferenças finitas.

## Fourth Order Runge-Kutta method

condição inicial definida como  $y(0) = 3$ . Para ir do valor inicial em  $t = 0$  até uma estimativa em  $t = h$ , siga o procedimento descrito abaixo





## **Exercicios:**

**Implemente o esquema**

**6th Order Runge-Kutta method**

**Comparar com o esquema de 2th 4 th ordem**