MET-576-4

Modelagem Numérica da Atmosfera

Dr. Paulo Yoshio Kubota

Os métodos numéricos, formulação e parametrizações utilizados nos modelos atmosféricos serão descritos em detalhe.

3 Meses
24 Aulas (2 horas cada)

Dinâmica:

Métodos numéricos amplamente utilizados na solução numérica das equações diferencias parciais que governam os movimentos na atmosfera serão o foco, mas também serão analisados os novos conceitos e novos métodos.

- ✓ Métodos de diferenças finitas.
- ✓ Acurácia.
- ✓ Consistência.
- ✓ Estabilidade.
- ✓ Convergência.
- ✓ Grades de Arakawa A, B, C e E.
- ✓ Domínio de influência e domínio de dependência.
- ✓ Dispersão numérica e dissipação.
- ✓ Definição de filtros monótono e positivo.
- ✓ Métodos espectrais.
- ✓ Métodos de volume finito.
- ✓ Métodos Semi-Lagrangeanos.
- ✓ Conservação de massa local.
- ✓ Esquemas explícitos versus semi-implícitos.
- ✓ Métodos semi-implícitos.

Consistência

O FDE é consistente com o PDE se, no limite $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, o FDE coincidir com o PDE.
Obviamente, esse é um requisito básico que o FDE deve atender se suas soluções forem boas aproximações das soluções do PDE.

A consistência é bastante simples de verificar:

- Substitua u em vez de U no FDE.

- Avalie todos os termos usando uma expansão da série de Taylor centrada no ponto $(x_j t_n)$.

- Subtraia o PDE do FDE.

Se a diferença (erro de truncamento local) for para zero como $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, então o FDE é consistente com o PDE.

Erro de truncamento e Consistência

Vamos verificar a consistência do **esquema upstream** para a equação de advecção.
Primeiro, considere a expansão da série Taylor:

$$\left.\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \left(u + u_t\Delta t + \tfrac{1}{2}u_{tt}\Delta t^2 + \cdots\right)_j^n \\ u_{j-1}^n &= \left(u - u_x\Delta x + \tfrac{1}{2}u_{xx}\Delta x^2 - \cdots\right)_j^n \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{cases} u_j^{n+1} - u_j^n = \left(u_t\Delta t + \dfrac{1}{2}u_{tt}\Delta t^2 + \cdots\right)_j^n \\ u_{j-1}^n - u_j^n = \left(-u_x\Delta x + \dfrac{1}{2}u_{xx}\Delta t^2 + \cdots\right)_j^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \left(u_t + \dfrac{1}{2}u_{tt}\Delta t + \cdots\right)_j^n \\ \dfrac{u_{j-1}^n - u_j^n}{\Delta x} = \left(-u_x + \dfrac{1}{2}u_{xx}\Delta x + \cdots\right)_j^n \end{cases}$$

Nós substituímos isso no FDE e obtemos

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + c\,\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$\left(u_t + \boxed{\tfrac{1}{2}u_{tt}\Delta t +} \cdots\right)_j^n + c\left(u_x - \boxed{\tfrac{1}{2}u_{xx}\Delta x +} \cdots\right)_j^n \simeq 0$$

Subtrair o PDE resulta no erro de truncamento local:

$$\tau = \left(\frac{u_{tt}}{2}\right)\Delta t - \left(\frac{cu_{xx}}{2}\right)\Delta x + \text{H.O.T.} = O(\Delta t) + O(\Delta x)$$

Erro de truncamento e Consistência

Novamente, o erro de truncamento local é:

$$\tau = \left(\frac{u_{tt}}{2}\right)\Delta t - \left(\frac{cu_{xx}}{2}\right)\Delta x + \mathrm{H.O.T.} = O(\Delta t) + O(\Delta x)$$

Claramente, quando $\Delta x \to 0$ e $\Delta t \to 0$, temos $\boldsymbol{\tau} \to \mathbf{0}$. Portanto, o FDE é consistente.

Observe que os erros de truncamento de tempo e espaço são de primeira ordem, porque as diferenças finitas não estão centradas tanto no espaço quanto no tempo.

Erros de truncamento para **diferenças centralizadas** são de segunda ordem.

Portanto, em geral, diferenças centralizadas são mais precisas do que diferenças não centradas.

# # #

Erros de truncamento são um fator crucial para determinar a precisão da previsão no NWP.

Convergência e Estabilidade

A segunda questão levantada acima foi **se a solução do FDE converge para a solução do PDE.**

Isto é, se deixarmos $\Delta x \to 0$ **e** $\Delta t \to 0$, **de modo que** $j\Delta x \to x$ **e** $n\Delta t \to t$, portanto, $U(j\Delta x, n\Delta t) \Rightarrow u(x,t)$?

Isso é claramente importante **e pode ser respondido considerando outro problema, o da estabilidade computacional.**

Considere novamente a equação de advecção

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,,$$

que tem a solução $u(x,t) = u(x + ct, 0)$

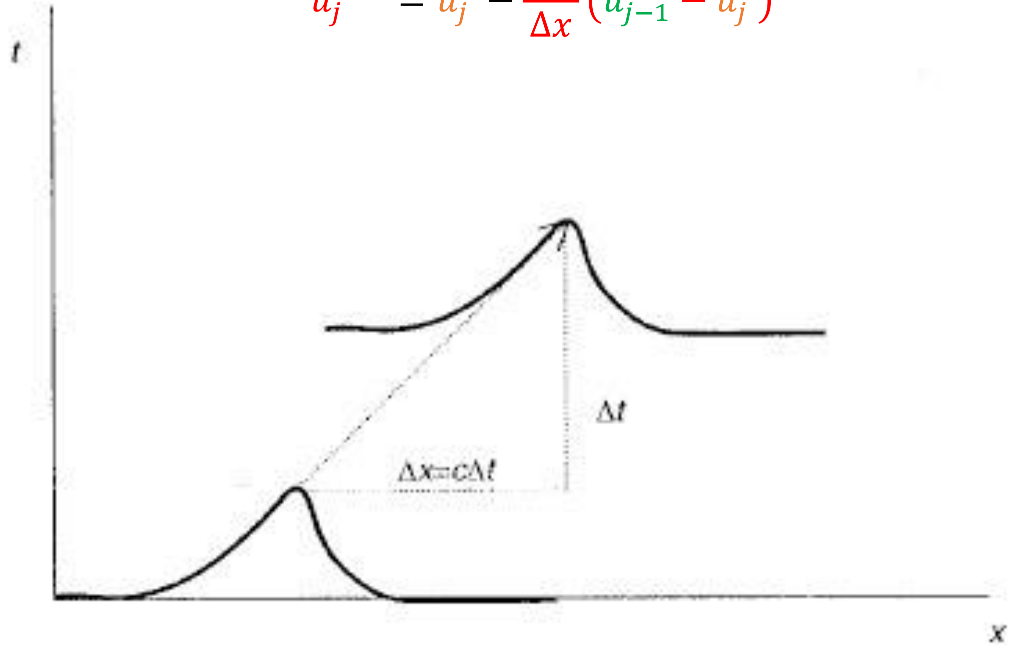
A forma da solução u (x, 0) se translada ao longo do eixo x com velocidade c (veja a Figura abaixo).

Convergência e Estabilidade

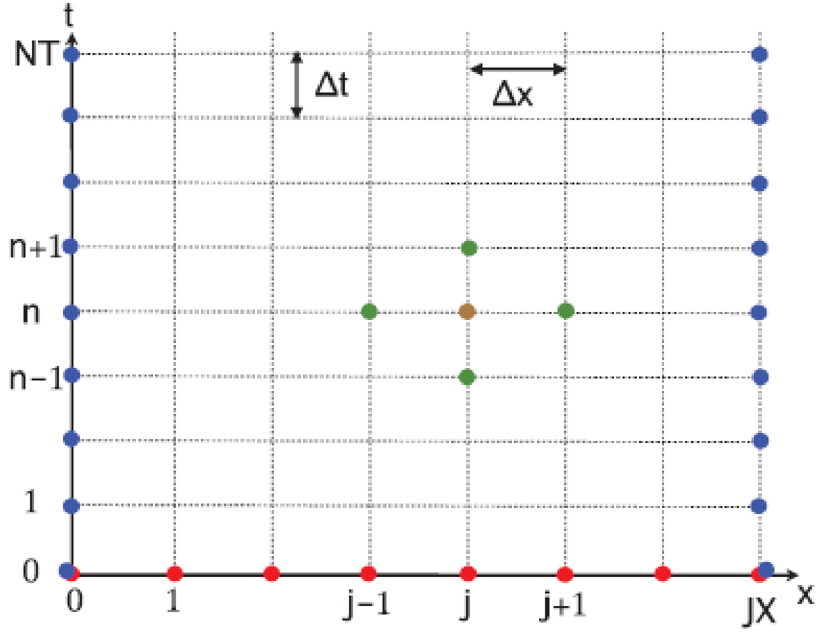
$\Delta x \to 0$ e $\Delta t \to 0$, de modo que $j\Delta x \to x$ e $n\Delta t \to t$, portanto, $U(j\Delta x, n\Delta t) \Rightarrow u(x,t)$?

A forma da solução u (x, 0) se translada ao longo do eixo x com velocidade c (veja a Figura abaixo).

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j-1}^n - u_j^n\right)$$



Esquema da solução da equação de advecção (para c> 0).



"Figura 4.1. Uma grade de diferenças finitas no tempo e no espaço. Os pontos da grade utilizados pelos esquemas centrados tanto no tempo quanto no espaço são mostrados como pontos verdes. Os pontos vermelhos são os pontos necessários para a condição inicial e os pontos azuis ilustram as duas fronteiras, nas quais as condições devem ser prescritas. O ponto marrom mostra o ponto 'aqui e agora' j, n."

Modelo Numérico da Atmosfera

Convergência e Estabilidade

$\Delta x \to 0$ e $\Delta t \to 0$, de modo que $j\Delta x \to x$ e $n\Delta t \to t$, portanto, $U(j\Delta x, n\Delta t) \Rightarrow u(x,t)$?

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,,$$

O FDE para o esquema upstream pode ser escrito como

$$U_j^{n+1} = (1-\mu)U_j^n + \mu U_{j-1}^n$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c\,\frac{u_{j-1}^n - u_j^n}{\Delta x}$$

onde

$$\mu \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + c\,\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j-1}^n - u_j^n\right)$$

μ é o número Courant (ou número Lewy).

Vamos supor que $0 \le \mu \le 1$.

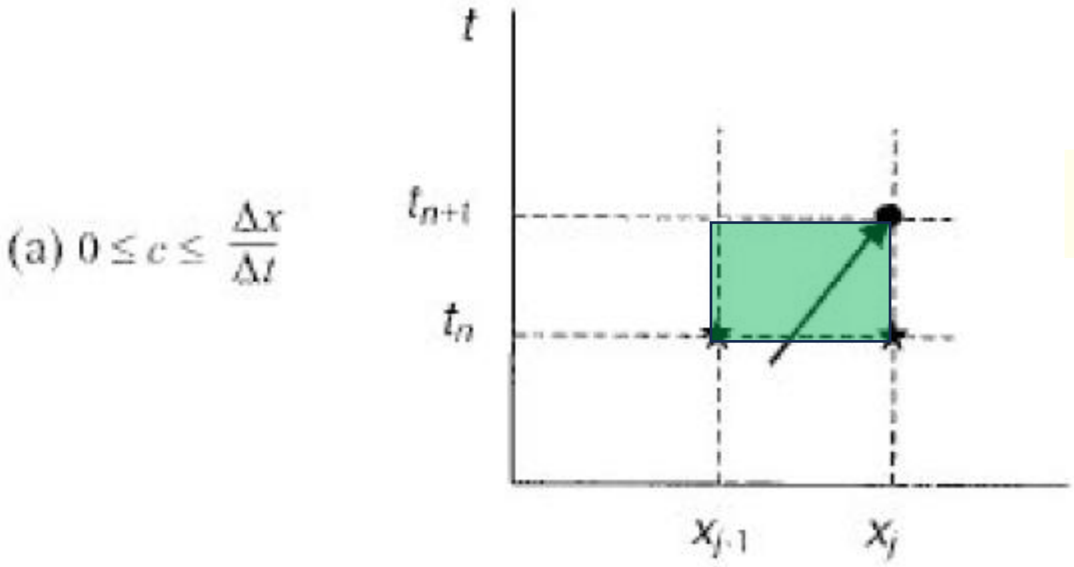
Então a solução FDE no novo nível de tempo U_j^{n+1} é **interpolada** entre os valores U_j^n e U_{j-1}^n.

Nesse caso, o esquema de advecção funciona da maneira que deveria, porque a verdadeira solução está entre esses valores (U_j^{n+1} e U_j^n).

Nesse caso, o esquema de advecção funciona da maneira que deveria, porque a verdadeira solução está entre esses valores (U_j^{n+1} e U_j^n).

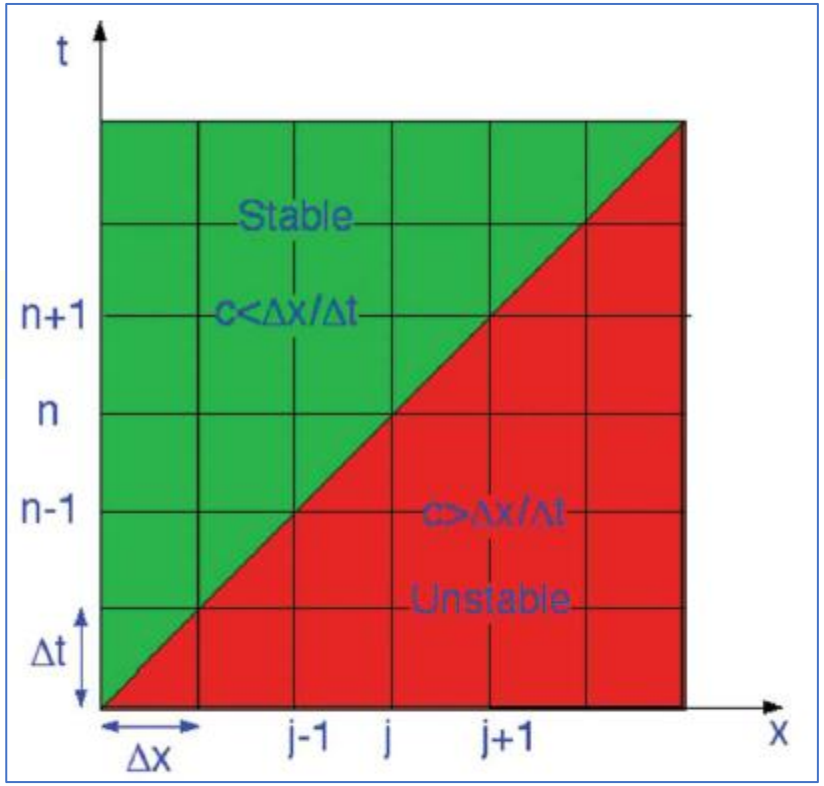
Convergência e Estabilidade

$\Delta x \to 0$ e $\Delta t \to 0$, de modo que $j\Delta x \to x$ e $n\Delta t \to t$, portanto, $U(j\Delta x, n\Delta t) \Rightarrow u(x,t)$?



$$\mu \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

$$U_j^{n+1} = (1-\mu)U_j^n + \mu U_{j-1}^n$$



Esquema da relação entre $\Delta x, \Delta t$ e c levando à interpolação da solução no nível de tempo $n+1$.

$$0 < \mu \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$$

Convergência e Estabilidade

$\Delta x \to 0$ e $\Delta t \to 0$, de modo que j$\Delta x \to x$ e n$\Delta t \to t$, portanto, $U(j\Delta x, n\Delta t) \Rightarrow u(x,t)$?

$$0 < \mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$$

No entanto, ***suponha que esta condição não seja satisfeita***, de modo que

Duas opções

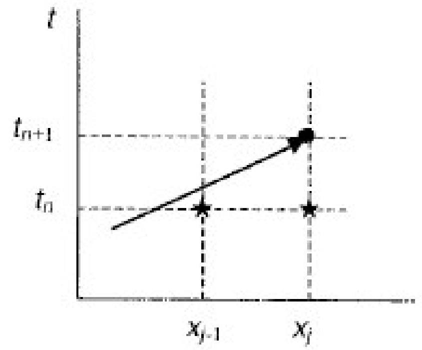
$$\boxed{\mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x} > 1}$$

ou

$$\boxed{\mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 0\,.}$$

Então, a parcela que chega ao ponto x_j no tempo t_{n+1} **vem de algum lugar fora do intervalo** $(x_j - 1, x_j)$ no tempo t_n.

(b) $0 \le \frac{\Delta x}{\Delta t} \le c$



Lembre-se de que $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ é uma aproximação linear de $\frac{du}{dt} = 0$

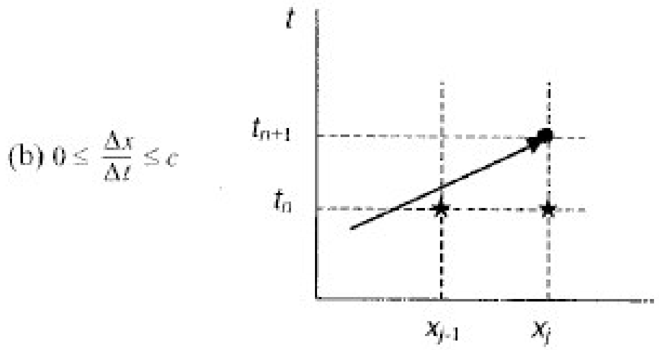
Então os valores de U_j^{n+1} devem ser extrapolada dos valores U_j^n e U_{j-1}^n.

Convergência e Estabilidade

$\Delta x \to 0$ e $\Delta t \to 0$, de modo que $j\Delta x \to x$ e $n\Delta t \to t$, portanto, $U(j\Delta x, n\Delta t) \Rightarrow u(x,t)$?

opções

$$\boxed{\mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x} > 1}$$



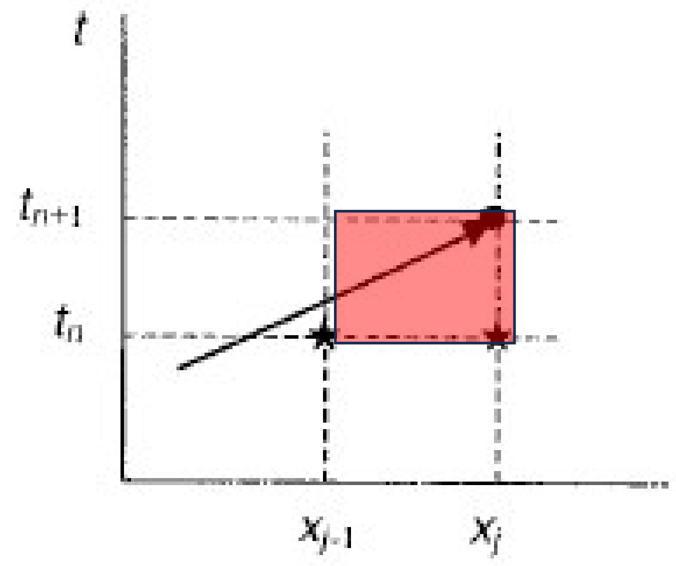
Então os valores de U_j^{n+1} devem ser extrapolada dos valores U_j^n e U_{j-1}^n.

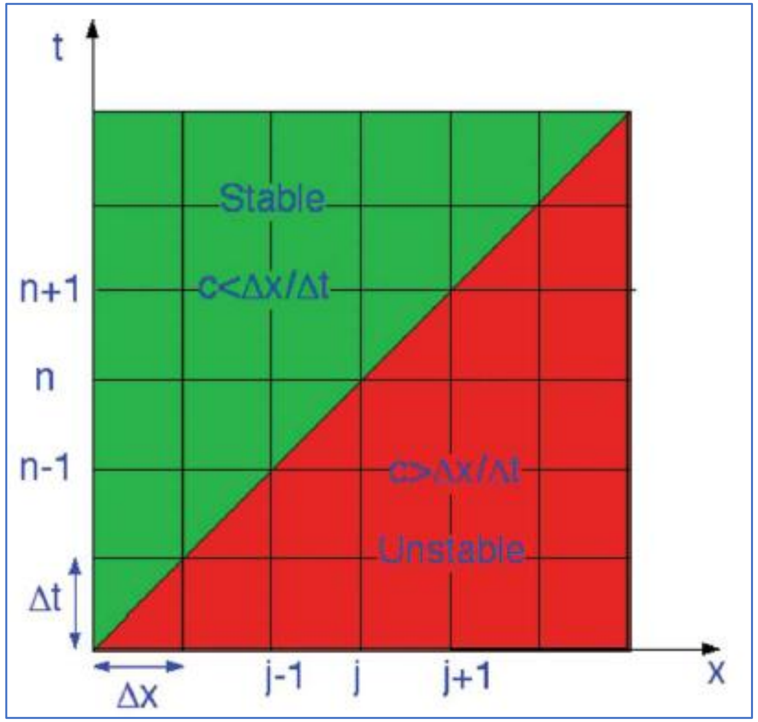
Paulo Yoshio Kubota

Convergência e Estabilidade

$\Delta x \to 0$ e $\Delta t \to 0$, de modo que $j\Delta x \to x$ e $n\Delta t \to t$, portanto, $U(j\Delta x, n\Delta t) \Rightarrow u(x,t)$?

(b) $0 \le \frac{\Delta x}{\Delta t} \le c$





$$u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j-1}^n - u_j^n\right)$$

Esquema da relação entre $\Delta x, \Delta t\ e\ c$ liderando à extrapolação da solução no nível de tempo $n + 1$.

$$\mu \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x} > 1$$

Convergência e Estabilidade

$\Delta x \to 0$ e $\Delta t \to 0$, de modo que $j\Delta x \to x$ e $n\Delta t \to t$, portanto, $U(j\Delta x, n\Delta t) \Rightarrow u(x,t)$?

O ***problema com a extrapolação é que o máximo valor absoluto da solução U_j^n aumenta a cada intervalo de tempo***.

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = -c\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}$$

$$U_j^{n+1} - U_j^n = -c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U_j^n - U_{j-1}^n\right)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}U_j^n + c\frac{\Delta t}{\Delta x}U_{j-1}^n$$

$$U_j^{n+1} = \left(1 - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)U_j^n + c\frac{\Delta t}{\Delta x}U_{j-1}^n$$

$$U_j^{n+1} = (1-\mu)U_j^n + \mu U_{j-1}^n$$

$$\mu = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\mu = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$(1-\mu) < 1$$

$$U_j^{n+1} = (1-\mu)U_j^n + \mu U_{j-1}^n$$

$$f(x) = \left(\frac{x - x_2}{x_2 - x_1}\right)f(x1) + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)f(x_2)$$

$x_1 \qquad x \qquad x_2$

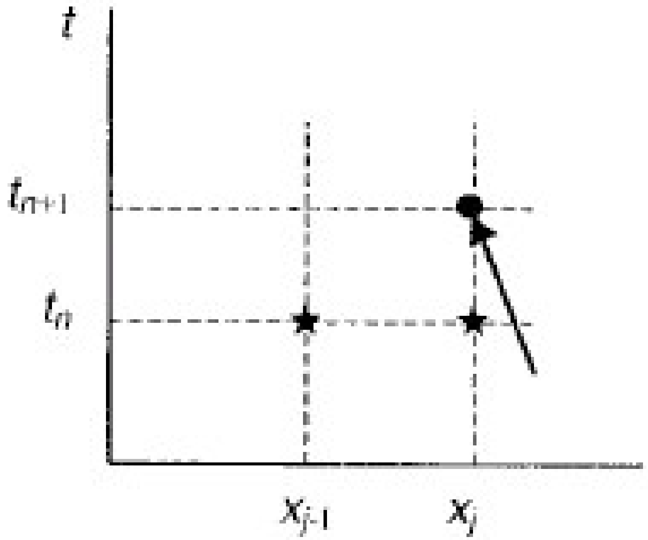
$$U_j^{n+1} = \left(1 - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)U_j^n + c\frac{\Delta t}{\Delta x}U_{j-1}^n$$

Convergência e Estabilidade

$\Delta x \to 0$ e $\Delta t \to 0$, de modo que j$\Delta x \to x$ e n$\Delta t \to t$, portanto, $U(j\Delta x, n\Delta t) \Rightarrow u(x,t)$?

$$\boxed{\mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 0\,.}$$

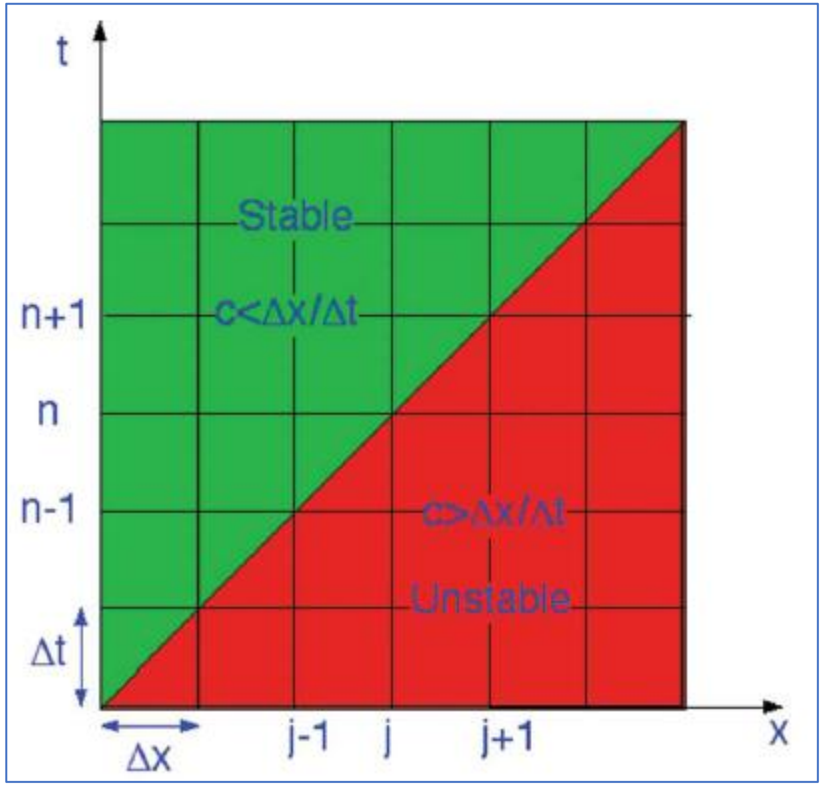
(c) $c \leq 0 \leq \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$



Então os valores de U_j^{n+1} devem ser extrapolada dos valores U_j^n e U_{j-1}^n.

Convergência e Estabilidade

Esquema da relação entre $\Delta x, \Delta t$ e c liderando à extrapolação da solução no nível de tempo $n + 1$.



Esquema da relação entre $\Delta x, \Delta t$ e c liderando à **extraploação da solução** no nível de tempo $n + 1$.

$$\mu \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 0$$

Convergência e Estabilidade

O problema com a extrapolação é que o máximo valor absoluto da solução U_j^n aumenta a cada intervalo de tempo.

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = -c\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}$$

$$U_j^{n+1} - U_j^n = -c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U_j^n - U_{j-1}^n\right)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}U_j^n + c\frac{\Delta t}{\Delta x}U_{j-1}^n$$

$$U_j^{n+1} = \left(1 - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)U_j^n + c\frac{\Delta t}{\Delta x}U_{j-1}^n$$

$$U_j^{n+1} = (1-\mu)U_j^n + \mu U_{j-1}^n$$

$$\mu = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\mu \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 0$$

$$(1-\mu) > 1$$

$$U_j^{n+1} = (1-\mu)U_j^n + \mu U_{j-1}^n$$

$$f(x) = \left(\frac{x - x_2}{x_2 - x_1}\right)f(x1) + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)f(x_2)$$

$x_1 \quad x \quad x_2$

Convergência e Estabilidade

O problema com a extrapolação é que o máximo valor absoluto da solução U_j^n aumenta a cada intervalo de tempo. Tomando valores absolutos do FDE, obtemos

$$U_j^{n+1} = (1-\mu)U_j^n + \mu U_{j-1}^n$$

$$\left|U_j^{n+1}\right| \le \left|U_j^n\right||1-\mu| + \left|U_{j-1}^n\right||\mu|$$

$$\mu = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\Upsilon^{n+1} = max_j\left(U_1^n, U_2^n, U_3^n, \dots, U_j^n\right) \qquad \Upsilon^{n+1} = max_j\left(U_1^n, U_2^n, U_3^n, \dots, U_{j-1}^n\right)$$

Agora definindo $\Upsilon^{n+1} = max_j\left|U_j^n\right|$; $\Upsilon^{n+1} = max_j\left|U_{j-1}^n\right|$; $\Upsilon^{n+2} = max_j\left|U_j^{n+1}\right|$ tem-se:

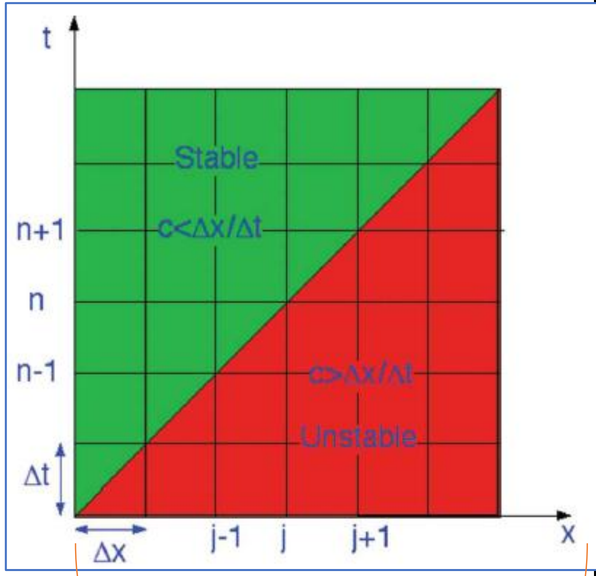
$$max_j\left|U_j^{n+1}\right| \le max_j\left|U_j^n\right||1-\mu| + max_j\left|U_{j-1}^n\right||\mu|$$

$$\Upsilon^{n+2} \le \Upsilon^{n+1}|1-\mu| + \Upsilon^{n+1}|\mu|$$

$$\Upsilon^{n+1}\Upsilon^1 \le \Upsilon^n\Upsilon^1|1-\mu| + \Upsilon^n\Upsilon^1|\mu|$$

$$\Upsilon^{n+1} \le \Upsilon^n|1-\mu| + \Upsilon^n|\mu|$$

$$\Upsilon^{n+1} \le \{|1-\mu| + |\mu|\}\Upsilon^n$$



Paulo Yoshio Kubota

Convergência e Estabilidade

O *problema com a extrapolação é que o máximo valor absoluto da solução U_j^n aumenta a cada intervalo de tempo*.

Tomando valores absolutos do FDE, obtemos

Convergência e Estabilidade

$$U_j^{n+1} = (1-\mu)U_j^n + \mu U_{j-1}^n$$

$$\Upsilon^{n+1} \leq \{|1-\mu| + |\mu|\}\Upsilon^n$$

$$\mu = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

e $\Upsilon^{n+1} \leq \Upsilon^n$ se e somente se $0 \leq \mu \leq 1$.

Se a condição $0 \leq \mu \leq 1$ não for satisfeita, a solução não é limitada e cresce com n.

Se deixarmos $\Delta x \to 0, \Delta t \to 0$ com μ = const., Isso só piorará as coisas, porque então $n \to \infty$.

Na prática, **se a condição $0 \leq \mu \leq 1$ não for satisfeita**, o FDE explode em alguns intervalos de tempo.

Convergência e Estabilidade

Estabilidade Computacional

Convergência e Estabilidade

Exercício prático:

Use o modelo simples SLAM para explorar o fenômeno da instabilidade computacional.

$$U_j^{n+1} = (1-\mu)U_j^n + \mu U_{j-1}^n$$

$$\mu = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

- Escolha Δt pequeno e faça uma integração completa.
- Aumente Δt e observe a solução do modelo “explodir”.
- Para experimento numérico, determine aproximadamente o valor máximo de Δt que produz integrações estáveis.
- Relacione este máximo com o número Courant. O que isso implica sobre a velocidade máxima de fase do sistema?

Estabilidade Computacional

Agora definimos estabilidade computacional.

Definição: Um FDE é computacionalmente estável se a solução do FDE em um tempo fixo t = nΔt é limitado como $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\mu = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Observe que com nΔt fixo, Δt->0 implica $n \rightarrow \infty$

Iremos derivar uma condição de estabilidade que envolve o Courant Number.

A condição no número de Courant é geralmente conhecida como critério **Courant-Friedrichs-Lewy** ou simplesmente a condição **CFL**.

# # #

Lembre-se da história de Courant, Friedrichs e Lewy em Göttingen.

Estabilidade Computacional

Agora podemos afirmar o teorema fundamental de Lax-Richtmyer:

Dado um problema de valor inicial linear corretamente proposto e um esquema de diferenças finitas que satisfaça a condição de consistência, então a estabilidade do FDE é a condição necessária e suficiente para a convergência.

$$Estabilidade <=> Convergencia$$

Para sistemas consistentes

Este teorema nos permite estabelecer convergência examinando as questões mais fáceis de consistência e estabilidade.

Estamos interessados na convergência não porque queremos deixar $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, mas porque queremos ter certeza de que os erros $u(j\Delta x, n\Delta t) - U_j^n$ sejam aceitavelmente pequenos.

Definição $u(j\Delta x, n\Delta t) - U_j^n$ é o erro de truncamento global.

Estabilidade Computacional

Exemplo: Usamos o critério do método máximo para estudar a condição de estabilidade da equação de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Uma aproximação FDE (esquema FTCS) é dada por

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = \sigma \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

(a verificação da consistência FDE é imediata).

Nota: Uma vez que as diferenças são centradas no espaço, mas avançadas no tempo, o erro de truncamento é de primeira ordem no tempo e de segunda ordem no espaço

$$\tau = O(\Delta t) + O(\Delta x)^2 .$$

Podemos escrever o FDE na forma de equação

$$U_j^{n+1} = \mu U_{j+1}^n + (1 - 2\mu) U_j^n + \mu U_{j-1}^n$$

$$\mu = \sigma \Delta t / \Delta x^2 .$$

Paulo Yoshio Kubota

Estabilidade Computacional

Novamente

$$U_j^{n+1} = \mu U_{j+1}^n + (1-2\mu)U_j^n + \mu U_{j-1}^n$$

Se tomarmos valores absolutos, e deixarmos $\Upsilon^n = max_j \left|U_j^n\right|$

$$\Upsilon^{n+1} \leq \{|\mu| + |1-2\mu| + |\mu|\}\Upsilon^n$$

$$\{|1-2\mu|\} \leq 2|\mu|$$

Assim, obtemos a condição

$$\left\{\left|\frac{1}{2} - \mu\right|\right\} \leq |\mu|$$

$$0 \leq \mu \leq 1/2$$

$$0 \leq \mu \leq 1/2$$

para garantir que a solução permaneça limitada como $n \to \infty$.

Essa é a condição necessária para a estabilidade do FDE.

# # #

Infelizmente, o critério do máximo só pode ser aplicado em poucos casos.

Na maioria dos FDEs, alguns coeficientes das equações são negativos e o critério não pode ser aplicado.

Precisamos de um método mais poderoso de estabelecer estabilidade.

O Método de von Neumann

Outro critério de estabilidade com uma aplicação muito mais ampla é o critério de estabilidade de von Neumann.
Assumimos que podemos expandir a solução do FDE em um conjunto apropriado de autofunções.
Para simplificar, assumimos uma expansão para a série Fourier:

$$U(x,t) = \sum_k Z_k(t) e^{ikx}$$

$$U_j^n = \sum_k Z_k^n e^{ikj\Delta x}$$

A variável de espaço x e o número de onda k podem ser multidimensionais, $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathrm{k} = (k_1, k_2, k_3)$

mas, para simplificar, consideraremos o caso escalar. Nós definimos $x_j = \mathrm{j}\Delta x$, $t_n = \mathrm{n}\Delta t$

Definimos o número de onda para a série Fourier: $p = k\Delta x$

Então a expansão de Fourier é

$$U_j^n = \sum_p Z_p^n e^{ipj} \qquad (\text{Note: } kx = kj\Delta x = pj)$$

Paulo Yoshio Kubota

O Método de von Neumann

$U_j^n = \sum_p Z_p^n e^{ipj}$ (Note: $kx = kj\Delta x = pj$)

Quando substituímos esta expansão de Fourier em um FDE linear, obtemos um sistema de equações

$$Z_p^{n+1} = \rho_p Z_p^n \qquad \rho_p = e^{ipj}$$

Aqui ρ_P é um fator de amplificação que, aplicado ao p-ésimo componente de Fourier da solução no tempo $\mathrm{n}\Delta t$, o avança para o tempo $(\mathrm{n}+1)\Delta t$; ρ_P depende de p, Δt e Δx.

Se conhecermos as condições iniciais

$$U_j^0 = \sum_p Z_p^0 e^{ipj}$$

então a solução do FDE é (lembre-se do aviso sobre sobrescritos)

$$Z_p^n = \rho_p^n Z_p^0$$

Portanto, a estabilidade é garantida se o fator ρ^n for limitado para todo $\mathrm{p} = k\Delta x$ quando $\Delta t \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$

Portanto, devemos ter $|\rho_P| < \mu$ para todo $\mathrm{p} = k\Delta x$ como $n \rightarrow \infty$.

Consistência (?exatidão?) e Estabilidade da solução

- **Se o erro de truncamento do esquema de diferença finita se aproxima de zero**, quando $\Delta t \to 0$, então, o esquema é coerente.
- Para um problema de valor inicial, a coerência não é suficiente para garantir que um esquema numérico vá convergir para as soluções corretas quando $\Delta t \to 0$ (e $\Delta x \to 0$).
- O teorema equivalência de Lax, diz que para os estados ser consistente **no método linear**, a estabilidade é a **condição necessária e suficiente para a convergência**.
- Para resolver um problema de valor inicial o **erro round_off** e de **truncamento**, irá acumular com cada passo de tempo, e a solução aproximada às vezes vai **divergir da solução correta**. Se o passo de tempo Δt é pequeno o erro a cada intervalo de tempo deve ser pequeno e deve se acumular mais lentamente.
- No entanto, algumas vezes, a solução numérica irá rapidamente divergir da solução correta, caso em que o método numérico é dito ser Instável.

Análise de Estabilidade EDO linear

Assume-se que a solução para a eq. 7 tem a forma $y^n = A^n e^{ik}$ e substitua no Esquema Avançado Eq. 9

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\lambda y \qquad (7)$$

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = -\lambda y^n \qquad (7)$$

$$y^{n+1} = (1 - \lambda \Delta t) y^n \qquad (9)$$

$$A^{n+1} e^{ik} = (1 - \lambda \Delta t) A^n e^{ik} \qquad (10)$$

$$A^n A e^{ik} = A^n e^{ik} (1 - \lambda \Delta t) \qquad (11)$$

$$A = (1 - \lambda \Delta t) \qquad (12)$$

A é chamado de fator de amplificação. Então $|A| \leq 1$

$$|1 - \lambda \Delta t| \leq 1$$

$$\begin{aligned} 1 - \lambda \Delta t &\leq 1 \\ -\lambda \Delta t &\leq 1 - 1 \\ -\lambda \Delta t &\leq 0 \\ \Delta t &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \lambda \Delta t &\geq -1 \\ -\lambda \Delta t &\geq -1 - 1 \\ -\Delta t &\geq \frac{-2}{\lambda} \\ \Delta t &\leq \frac{2}{\lambda} \end{aligned}$$

Análise de Estabilidade EDO linear

Assume-se que a solução para a eq. 7 tem a forma $y^n \approx A^n$ e substitua no Esquema Avançado Eq. 9

$$A = (1 - \lambda \Delta t) \qquad (12)$$

O sistema é estável, se

$$\boxed{\Delta t \geq 0} \longleftarrow \boxed{|1 - \lambda \Delta t| \leq 1} \longrightarrow \boxed{\Delta t \leq \frac{2}{\lambda}}$$

N.B. **Para uma equação não linear**, a análise de estabilidade da forma linearizada da equação não linear é uma **condição necessária, mas não é suficiente**.

Métodos de diferenças finitas.

```
MODULE Class_NumericalScheme
  IMPLICIT NONE
  PRIVATE
  INTEGER, PUBLIC      , PARAMETER :: r8=8
  INTEGER, PUBLIC      , PARAMETER :: r4=4

  REAL (KIND=r8)                  :: dt
  REAL (KIND=r8)                  :: lambda
  INTEGER             , PARAMETER :: UnitData=1
  INTEGER             , PARAMETER :: UnitCtl=2
  CHARACTER (LEN=400)             :: FileName
  LOGICAL                         :: CtrlWriteDataFile
  PUBLIC :: InitNumericalScheme
  PUBLIC :: SchemeForward
  PUBLIC :: SchemeUpdate
  PUBLIC :: SchemeWriteData
  PUBLIC :: SchemeWriteCtl
  PUBLIC :: AnaliticFunction

CONTAINS

 SUBROUTINE InitNumericalScheme(dt_in,lambda_in)
   IMPLICIT NONE
  REAL (KIND=r8) :: dt_in
  REAL (KIND=r8) :: lambda_in
  FileName=''
  dt=dt_in
  lambda=lambda_in
  FileName='EDOL'
  CtrlWriteDataFile=.TRUE.
 END SUBROUTINE InitNumericalScheme
```

```
FUNCTION SchemeForward(yc)  RESULT(yp)
    IMPLICIT NONE
    ! Utilizando a diferenciacao forward
    !
    ! y(n+1) - y(n)
    !-------------- = lambda * y(n) ; onde lambda > 0
    !       dt
    !
    REAL (KIND=r8), INTENT (IN   ) :: yc
    REAL (KIND=r8) :: yp

    yp =  yc -lambda*dt*yc

 END FUNCTION SchemeForward

 FUNCTION SchemeUpdate(y_in)  RESULT (y_out)
    IMPLICIT NONE
    REAL (KIND=r8), INTENT(IN) :: y_in
    REAL (KIND=r8)             :: y_out
    y_out=y_in
 END FUNCTION SchemeUpdate


 FUNCTION AnaliticFunction(y0,tn)  RESULT (y_out)
    IMPLICIT NONE
    REAL (KIND=r8), INTENT (IN) :: y0
    INTEGER       ,  INTENT (IN) :: tn

    REAL (KIND=r8)             :: y_out
    y_out=y0*exp(-lambda*tn*dt)
 END FUNCTION AnaliticFunction
```

Métodos de diferenças finitas.

```fortran
FUNCTION SchemeWriteData(irec,y_in,ya)  RESULT (ok)
   IMPLICIT NONE
   INTEGER   , INTENT (INOUT) :: irec
   REAL (KIND=r8), INTENT (IN) :: y_in
   REAL (KIND=r8), INTENT (IN) :: ya
   INTEGER          :: ok
   INTEGER          :: lrec
   REAL (KIND=r4)       :: Yout
   INQUIRE (IOLENGTH=lrec) Yout

IF(CtrlWriteDataFile)OPEN(UnitData,FILE=TRIM(FileName)//'.bin',&
FORM='UNFORMATTED', ACCESS='DIRECT',
STATUS='UNKNOWN', &
ACTION='WRITE',RECL=lrec)
   CtrlWriteDataFile=.FALSE.
   Yout=REAL(y_in,KIND=r4)
   irec=irec+1
   WRITE(UnitData,rec=irec) Yout
   irec=irec+1
   WRITE(UnitData,rec=irec) REAL (ya,KIND=r4)
   ok=0
 END FUNCTION SchemeWriteData
```

```fortran
 FUNCTION SchemeWriteCtl(nrec)  RESULT( ok)
   IMPLICIT NONE
   INTEGER, INTENT (IN) :: nrec
   INTEGER          :: ok

   OPEN(UnitCtl,FILE=TRIM(FileName)//'.ctl',FORM='FORMATTED',&
   ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS='UNKNOWN',ACTION='WRITE')
   WRITE (UnitCtl,'(A6,A)')'dset ^',TRIM(FileName)//'.bin'
   WRITE (UnitCtl,'(A   )')'title  EDO'
   WRITE (UnitCtl,'(A   )')'undef  -9999.9'
   WRITE (UnitCtl,'(A   )')'xdef  1 linear -48.00 1'
   WRITE (UnitCtl,'(A   )')'ydef  1 linear  -1.27 1'
   WRITE (UnitCtl,'(A6,I6,A25)')'tdef  ',nrec,' linear  00z01jan0001 1hr'
   WRITE (UnitCtl,'(A20 )')'zdef  1 levels 1000 '
   WRITE (UnitCtl,'(A)')'vars 2'
   WRITE (UnitCtl,'(A)')'yc 0 99 resultado da edol yc'
   WRITE (UnitCtl,'(A)')'ya 0 99 funcao analitica'
   WRITE (UnitCtl,'(A)')'endvars'
   CLOSE (UnitCtl,STATUS='KEEP')
   CLOSE (UnitData,STATUS='KEEP')

   ok=0
 END FUNCTION SchemeWriteCtl

END MODULE Class_NumericalScheme
```

Paulo Yoshio Kubota

Métodos de diferenças finitas.

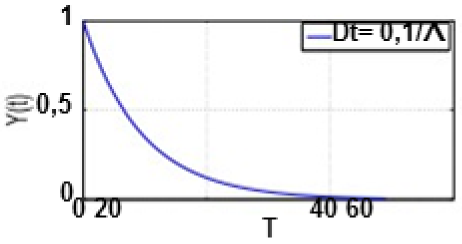
```
PROGRAM MAIN
 USE Class_NumericalScheme, Only :r8, InitNumericalScheme, SchemeForward, SchemeUpdate,&
                                    SchemeWriteCtl, SchemeWriteData, AnaliticFunction
 IMPLICIT NONE
 REAL (KIND=r8) :: yn
 REAL (KIND=r8) :: yc
 REAL (KIND=r8) :: yp
 REAL (KIND=r8) :: ya

 REAL (KIND=r8), PARAMETER :: lambda=0.1 ![1/s]
 REAL (KIND=r8), PARAMETER ::  y0=1.0_r8
 INTEGER       , PARAMETER ::  nrec=200
 REAL(KIND=r8) :: dt=1.5/lambda
 INTEGER       :: test
 INTEGER       :: irec
 INTEGER       :: tn

 CALL Init()
 yc=y0
irec=0
 DO tn=0,nrec
   yp=SchemeForward(yc)
   ya=AnaliticFunction(y0,tn)
   test=SchemeWriteData(irec,yc,ya)
   yn=SchemeUpdate(yc)
   yc=SchemeUpdate(yp)
 END DO
 test=SchemeWriteCtl(nrec)

CONTAINS

  SUBROUTINE Init()
   IMPLICIT NONE
   CALL InitNumericalScheme(dt,lambda)
  END SUBROUTINE Init
END PROGRAM MAIN
```

Paulo Yoshio Kubota

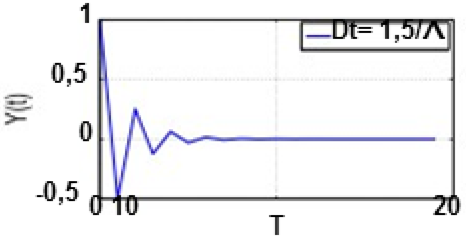
Métodos de diferenças finitas.

Há três possibilidade para a solução numérica ou seja $y^{n+1} = (1 - \lambda\Delta t)y^n$ depende a escolha de Δt

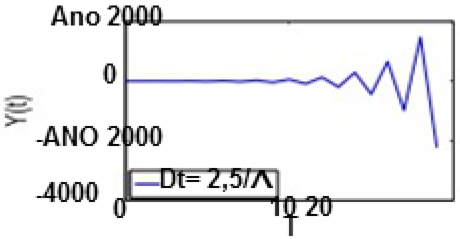
I) Se $\Delta t < \frac{1}{\lambda}$, então $0 < (1 - \lambda\Delta t) < 1$, A solução numérica é uma função decrescente com o tempo



II) Se $\frac{1}{\lambda} < \Delta t < \frac{2}{\lambda}$, A solução numérica diminui a magnitude mas oscila no sinal O sistema é estável , mas não consistente.



(III) se $\Delta t > \frac{2}{\lambda}$ então, $(1 - \lambda\Delta t) < -1$,. A solução oscila no Sinal e aumenta em magnitude com o passar do tempo. O método é Instável para as grandes passo de tempo.



Métodos de diferenças finitas.

A restrição de Δt para garantir a estabilidade pode por vezes *ser removido* pela escolha do método numérico. ex. usando o esquema atrasado.

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y$$

$$\frac{y^n - y^{n-1}}{\Delta t} = -\lambda y^n$$

$$A^n - A^{n-1} = -\lambda \Delta t A^n$$

$$A^n - A^n A^{-1} = -\lambda \Delta t A^n$$

$$1 - A^{-1} = -\lambda \Delta t$$

$$A^{-1} = 1 + \lambda \Delta t$$

$$A = \frac{1}{1 + \lambda \Delta t}$$

O sistema é estável, se |A| ≤ 1

$$|A| = \left|\frac{1}{1 + \lambda \Delta t}\right| \leq 1$$

Análise de Estabilidade EDO linear

Assume-se que a solução para a eq. 7 tem a forma$y^n = A^n e^{ik}$ e substitua no Esquema Avançado Eq. 9

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\lambda y \qquad (7)$$

$$\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{\Delta t} = -\lambda y^n \qquad (7)$$

$$y^{n+1} = (1y^{n-1} - \lambda \Delta t y^n) \qquad (9)$$

$$A^{n+1} e^{ik} = (A^{n-1} - \lambda \Delta t A^n) e^{ik} \qquad (10)$$

$$A^n A^1 e^{ik} = (A^n A^{-1} - \lambda \Delta t A^n) e^{ik} \qquad (11)$$

$$A^n A^1 e^{ik} = A^n (A^{-1} - \lambda \Delta t) e^{ik} \qquad (12)$$

$$A^1 = (A^{-1} - \lambda \Delta t) \qquad (13)$$

$$A - \frac{1}{A} = (-\lambda \Delta t) \qquad (14)$$

$$\frac{1}{A}(A^2 - 1) = (-\lambda \Delta t) \qquad (15)$$

$$(A^2 - 1) = (-\lambda \Delta t) A \qquad (16)$$

$$(A^2 + (\lambda \Delta t) A - 1) = 0 \qquad (17)$$

A é chamado de fator de amplificação. Então $|A| \leq 1$ $\qquad ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\left(A = \frac{-1 \pm \sqrt{(\lambda \Delta t)^2 - 4(1)(-1)}}{2} \right) \qquad \left(A = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{(\lambda \Delta t)^2 + 4}}{2} \right) \qquad \left(A = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{(\lambda \Delta t)^2 \frac{1}{2^2} + 1} \right)$$

Análise de Estabilidade EDO linear

$\Delta t \leq \frac{2}{\lambda}$

Assume-se que a solução para a eq. 7 tem a forma $y^n = A^n e^{ik}$ e substitua no Esquema Avançado Eq. 9

$$\left(A = \frac{-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1} \right)$$

$$\left(A = \frac{-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1} \right)$$

A é chamado de fator de amplificação. Então $|A| \leq 1$

$$|A| = \left| \frac{-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1} \right| \leq 1$$

$$\frac{-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1} \leq 1$$

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1} \leq 1 + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1} \leq \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1 \leq \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} - 1$$

$$\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4}$$

$$\frac{\lambda \Delta t}{2} \leq \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\Delta t \leq \frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{4 * 5}{4}}$$

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{5}}{\lambda}$$

Análise de Estabilidade EDO linear

$\Delta t \leq \frac{2}{\lambda}$

Assume-se que a solução para a eq. 7 tem a forma $y^n = A^n e^{ik}$ e substitua no Esquema Avançado Eq. 9

$$\left(A = \frac{-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1}\right)$$

$$\left(A = \frac{-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1}\right)$$

A é chamado de fator de amplificação. Então $|A| \leq 1$

$$|A| = \left|\frac{-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1}\right| \leq 1$$

$$\frac{-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1} \leq 1$$

$$-\sqrt{\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1} \leq 1 + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1} \leq -\frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1 \leq \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} - 1$$

$$\left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4}$$

$$\frac{\lambda \Delta t}{2} \leq \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\Delta t \leq \frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{4 * 5}{4}}$$

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{5}}{\lambda}$$

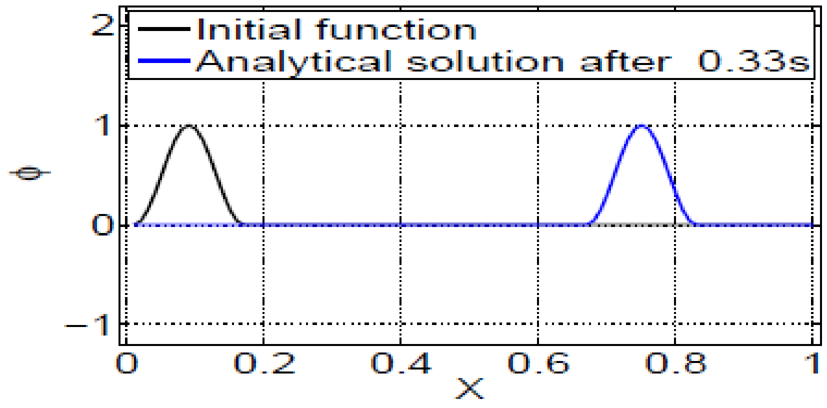
Paulo Yoshio Kubota

Exemplo: Equações diferenciais Parciais

Considere uma equação de Advecção Linear em uma dimensão

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad (10)$$

Onde u é a velocidade constante, o domínio é $0 \leq x \leq 1$**, com condição de fronteira periódicas** $\phi(x,0) = \phi(1,t)$ **, E a condição inicial é dada como** $\phi(x,0) = F(x)$**. Por exemplo** $F(x) = \sin^2(x)$



A solução analítica é

$$\boldsymbol{\phi(x,0) = F(x - u * t)}.$$

A função inicial é advectada com velocidade u, e a forma é preservada.

Métodos de diferenças finitas.

```
MODULE Class_Fields
  IMPLICIT NONE
  PRIVATE
  INTEGER, PUBLIC      , PARAMETER  :: r8=8
  INTEGER, PUBLIC      , PARAMETER  :: r4=4
  REAL (KIND=r8),PUBLIC ,ALLOCATABLE :: PHI_P(:)
  REAL (KIND=r8),PUBLIC ,ALLOCATABLE :: PHI_A(:)
  REAL (KIND=r8),PUBLIC ,ALLOCATABLE :: PHI_C(:)
  REAL (KIND=r8),PUBLIC ,ALLOCATABLE :: PHI_M(:)
  REAL (KIND=r8),PUBLIC              :: Uvel
  INTEGER      ,PUBLIC               :: iMax
  PUBLIC :: Init_Class_Fields
CONTAINS
!-----------------------------------------------------------------------------------------
  SUBROUTINE Init_Class_Fields(xdim,Uvel0)
    IMPLICIT NONE
    INTEGER      , INTENT (IN   ) :: xdim
    REAL (KIND=r8), INTENT (IN   ):: Uvel0
    iMax=xdim
    Uvel=Uvel0
    ALLOCATE (PHI_A(-1:iMax+2))
    ALLOCATE (PHI_P(-1:iMax+2))
    ALLOCATE (PHI_C(-1:iMax+2))
    ALLOCATE (PHI_M(-1:iMax+2))
  END SUBROUTINE Init_Class_Fields
!-----------------------------------------------------------------------------------------
END MODULE Class_Fields
```

```
MODULE Class_NumericalMethod
  USE Class_Fields, Only : PHI_A,PHI_P,PHI_C,PHI_M,Uvel,iMax
 IMPLICIT NONE
 PRIVATE
 INTEGER, PUBLIC      , PARAMETER :: r8=8
 INTEGER, PUBLIC      , PARAMETER :: r4=4
 REAL (KIND=r8) :: Dt
 REAL (KIND=r8) :: Dx

 PUBLIC :: InitNumericalScheme
 PUBLIC :: SchemeForward
 PUBLIC :: SchemeUpdate
 PUBLIC :: SchemeUpStream
 PUBLIC :: AnaliticFunction

CONTAINS
!-----------------------------------------------------------------------------------------
 SUBROUTINE InitNumericalScheme(dt_in,dx_in)
   IMPLICIT NONE
   REAL (KIND=r8), INTENT (IN   ) :: dt_in
   REAL (KIND=r8), INTENT (IN   ) :: dx_in
   INTEGER :: i
   REAL (KIND=r8) :: x
   Dt=dt_in
   Dx=dx_in
   x=0.0
   DO i=1,iMax
      PHI_C(i)= sin(x)*sin(x)
      x =  (6*i)* DX
   END DO
   PHI_M=PHI_C
   PHI_P=PHI_C
 END SUBROUTINE InitNumericalScheme
```

Paulo Yoshio Kubota

Métodos de diferenças finitas.

```
FUNCTION AnaliticFunction(tn)  RESULT (ok)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER,      INTENT (IN) :: tn
  INTEGER      :: j,ok
  REAL (KIND=r8) :: x
  ok=1
  x=0.0
  DO j=1,iMax
    PHI_A(j)=(sin(x - Uvel*tn*(dt))**2)
    x =  (6*j)* DX
  END DO
  ok=0
END FUNCTION AnaliticFunction

!-------------------------------------------------------------------------------------------
FUNCTION SchemeForward()  RESULT(ok)
  IMPLICIT NONE
  ! Utilizando a diferenciacao forward
  !
  ! F(j,n+1) - F(j,n)       F(j+1,n) - F(j,n)
  !-------------------- + u -------------------- = 0
  !      dt                    dx
  !
  INTEGER :: ok
  INTEGER :: j
  DO j=1,iMax
    PHI_P(j) = PHI_C(j) - (Uvel*Dt/Dx)*(PHI_C(j+1)-PHI_C(j))
  END DO
  CALL UpdateBoundaryLayer()
END FUNCTION SchemeForward
```

```
!-------------------------------------------------------------------------------------------
FUNCTION SchemeUpStream()  RESULT(ok)
  IMPLICIT NONE
  ! Utilizando a diferenciacao forward no tempo e
  ! backward no espaco (upstream)
  !
  ! F(j,n+1) - F(j,n)       F(j,n) - F(j-1,n)
  !-------------------- + u -------------------- = 0
  !      dt                    dx
  !
  INTEGER :: ok
  INTEGER :: j
  DO j=1,iMax
    PHI_P(j) = PHI_C(j) - (Uvel*Dt/Dx)*(PHI_C(j)-PHI_C(j-1))
  END DO
  CALL UpdateBoundaryLayer()
END FUNCTION SchemeUpStream
!-------------------------------------------------------------------------------------------
SUBROUTINE UpdateBoundaryLayer()
  IMPLICIT NONE
  PHI_P(0        )    =  PHI_P(iMax )
  PHI_P(-1       )    =  PHI_P(iMax-1)
  PHI_P(imax+1 )    =  PHI_P(1)
  PHI_P(iMax+2 )    =  PHI_P(2)
END  SUBROUTINE UpdateBoundaryLayer
!-------------------------------------------------------------------------------------------
FUNCTION SchemeUpdate()  RESULT (ok)
  IMPLICIT NONE
  INTEGER :: ok
  PHI_M=PHI_C
  PHI_C=PHI_P
  ok=0
END FUNCTION SchemeUpdate
!-------------------------------------------------------------------------------------------
END MODULE Class_NumericalMethod
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

Paulo Yoshio Kubota

Métodos de diferenças finitas.

```
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
MODULE Class_WritetoGrads
 USE Class_Fields, Only: PHI_A,PHI_P,PHI_C,PHI_M,Uvel,iMax
 IMPLICIT NONE
 PRIVATE
 INTEGER, PUBLIC      , PARAMETER  :: r8=8
 INTEGER, PUBLIC      , PARAMETER  :: r4=4
 INTEGER             , PARAMETER :: UnitData=1
 INTEGER             , PARAMETER :: UnitCtl=2
 CHARACTER (LEN=400)                :: FileName
 LOGICAL                            :: CtrlWriteDataFile
 PUBLIC :: SchemeWriteCtl
 PUBLIC :: SchemeWriteData
 PUBLIC :: InitClass_WritetoGrads
CONTAINS
 SUBROUTINE InitClass_WritetoGrads()
   IMPLICIT NONE
  FileName=''
  FileName='AdvecLinearConceitual1D'
  CtrlWriteDataFile=.TRUE.
 END SUBROUTINE InitClass_WritetoGrads

 FUNCTION SchemeWriteData(irec)  RESULT (ok)
   IMPLICIT NONE
   INTEGER   , INTENT (INOUT) :: irec
   INTEGER                    :: ok
   INTEGER                    :: lrec
   REAL (KIND=r4)             :: Yout(iMax)
   INQUIRE (IOLENGTH=lrec) Yout
   IF(CtrlWriteDataFile)OPEN(UnitData,FILE=TRIM(FileName)//'.bin',&
   FORM='UNFORMATTED', ACCESS='DIRECT',
STATUS='UNKNOWN', &
   ACTION='WRITE',RECL=lrec)
  ok=1
   CtrlWriteDataFile=.FALSE.
   Yout=REAL(PHI_C(1:iMax),KIND=r4)
   irec=irec+1
   WRITE(UnitData,rec=irec)Yout
   Yout=REAL(PHI_A(1:iMax),KIND=r4)
   irec=irec+1
   WRITE(UnitData,rec=irec)Yout
  ok=0
 END FUNCTION SchemeWriteData

 FUNCTION SchemeWriteCtl(nrec)  RESULT (ok)
   IMPLICIT NONE
   INTEGER, INTENT (IN) :: nrec
   INTEGER           :: ok
   ok=1
  OPEN(UnitCtl,FILE=TRIM(FileName)//'.ctl',FORM='FORMATTED', &
  ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS='UNKNOWN',ACTION='WRITE')
   WRITE (UnitCtl,'(A6,A         )')'dset ^',TRIM(FileName)//'.bin'
   WRITE (UnitCtl,'(A              )')'title  EDO'
   WRITE (UnitCtl,'(A              )')'undef  -9999.9'
   WRITE (UnitCtl,'(A6,I8,A18   )')'xdef  ',iMax,' linear 0.00 0.001'
   WRITE (UnitCtl,'(A              )')'ydef  1 linear  -1.27 1'
   WRITE (UnitCtl,'(A6,I6,A25   )')'tdef  ',nrec,' linear  00z01jan0001 1hr'
   WRITE (UnitCtl,'(A20            )')'zdef  1 levels 1000 '
   WRITE (UnitCtl,'(A          )')'vars 2'
   WRITE (UnitCtl,'(A          )')'phic 0 99 resultado da edol yc'
   WRITE (UnitCtl,'(A          )')'phia 0 99 solucao analitica ya'
   WRITE (UnitCtl,'(A          )')'endvars'
   CLOSE (UnitCtl,STATUS='KEEP')
   CLOSE (UnitData,STATUS='KEEP')
   ok=0
 END FUNCTION SchemeWriteCtl
END MODULE Class_WritetoGrads
```

Métodos de diferenças finitas.

```
PROGRAM Main
 USE Class_Fields, Only:Init_Class_Fields
 USE Class_NumericalMethod, Only : InitNumericalScheme, &
        SchemeForward,  SchemeUpdate, SchemeUpStream,&
        AnaliticFunction
 USE Class_WritetoGrads, Only :InitClass_WritetoGrads, &
                              SchemeWriteData, SchemeWriteCtl
 IMPLICIT NONE
 INTEGER              , PARAMETER  :: r8=8
 INTEGER              , PARAMETER  :: r4=4
 INTEGER              , PARAMETER :: xdim=100
 REAL (KIND=r8)       , PARAMETER :: LX=1.0
 REAL (KIND=r8)       , PARAMETER :: Uvel0=10.0!m/s
 REAL (KIND=r8)       , PARAMETER :: dx=LX/xdim   !m
 REAL (KIND=r8)       , PARAMETER :: dt=0.1*dx/Uvel0   !s       !
c*Dt/Dx < 1
!                                                   ! =>  Dt <
dx/Uvel0
 INTEGER            , PARAMETER :: ninteraction=20000
 CALL Init()
 CALL run()

CONTAINS

 SUBROUTINE Init()
  IMPLICIT NONE
  CALL Init_Class_Fields(xdim,Uvel0)
  CALL InitNumericalScheme(dt,dx)
  CALL InitClass_WritetoGrads
 END SUBROUTINE Init
```

```
SUBROUTINE Run()
  IMPLICIT NONE
  INTEGER :: test,tn,irec
  irec=0
  DO tn=0,ninteraction
    test=SchemeUpStream()
    test=AnaliticFunction(tn)
    test=SchemeWriteData(irec)
    test=SchemeUpdate()
  END DO
  test=SchemeWriteCtl(ninteraction)
 END SUBROUTINE Run

 SUBROUTINE Finalize()
  IMPLICIT NONE

 END SUBROUTINE Finalize

END PROGRAM Main
```

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^2+O[(\Delta x)^4]$$

O Quociente é de segunda ordem de acurácia. É formado considerando a diferença de valores de u_j em um ponto de grade distante do ponto central. Simularmente um quociente pode ser construído considerando a diferença de dois pontos distante do ponto central. Susbstituindo Δx por $2\Delta x$

$$\frac{u_{j+2}-u_{j-2}}{4\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{4}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^2+O[(\Delta x)^4]$$

O Quociente é de segunda ordem de acurácia. Mas os coeficientes são grandes. Outra aproximação consistente para a derivada espacial pode ser construída pelo combinação linear das duas equações acima. A combinação para o termo de segunda ordem no erro de truncamento é cancelada

$$\frac{4}{3}\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x}-\frac{1}{3}\frac{u_{j+2}-u_{j-2}}{4\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+O[(\Delta x)^4]$$

Métodos de diferenças finitas.

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4}{3}\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3}\frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} - O[(\Delta x)^4]$$

Por Exemplo: Resolvendo a equação de advecção linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}$$

Na solução analítica o estado inicial de propaga no espaço com velocidade de fase constante c sem mudança de forma.

A solução numérica, entretanto, ficará atrasada em relação a analítica e dispersa.

A alta ordem de acurácia o atraso será menor (a diferença de fase será menor).

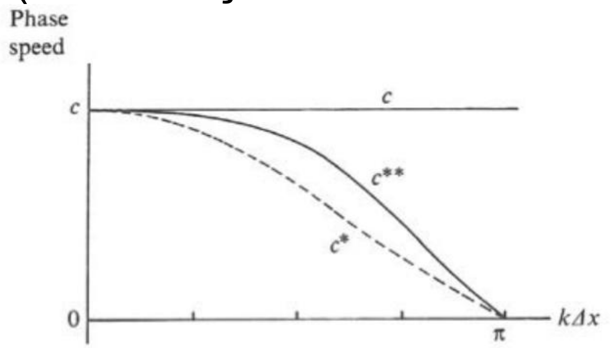
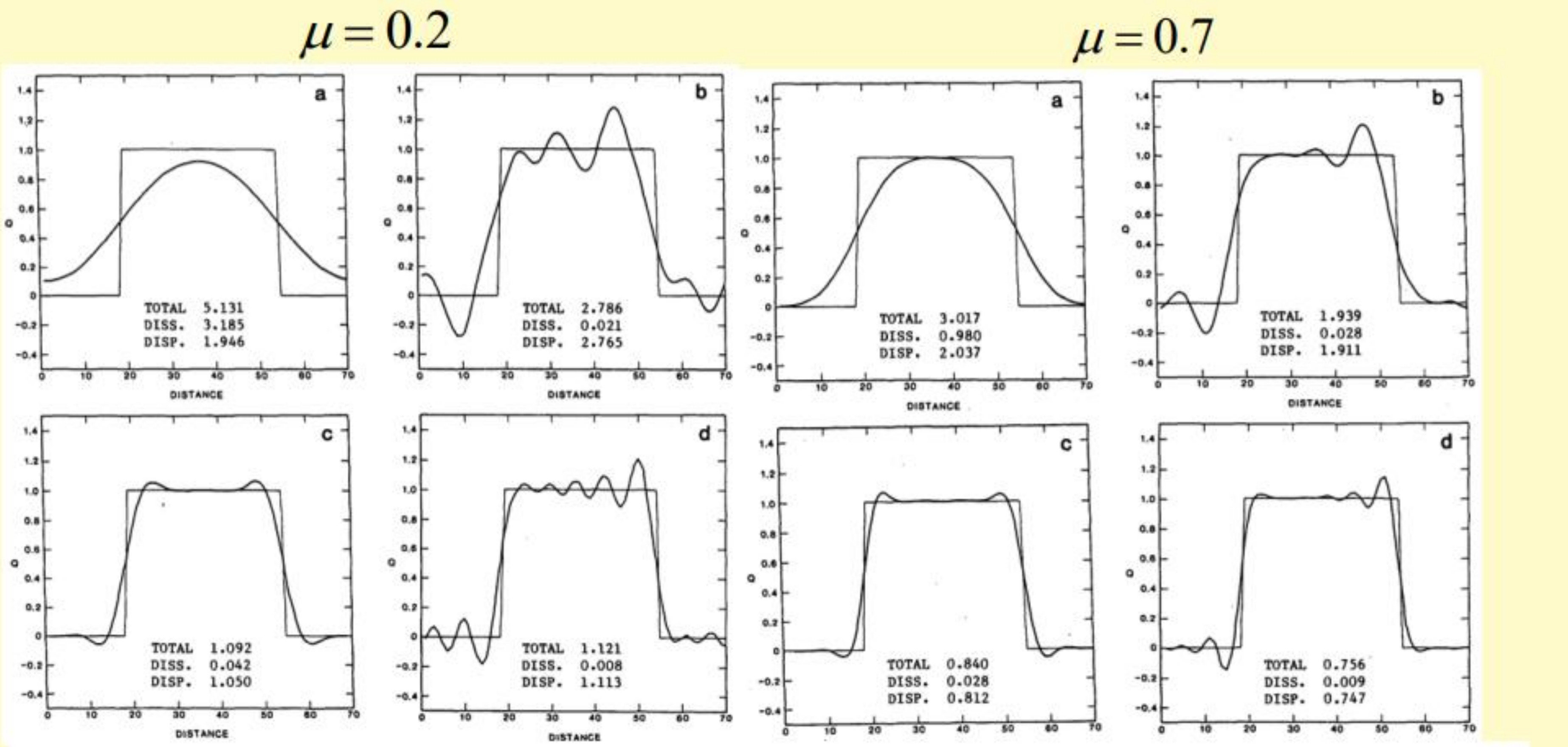


Figure 4.1 Phase speed for the linear advection equation, c, and for the corresponding differential-difference equations with second order (c^*) and with fourth order (c^{**}) centered space differencing.

Métodos de diferenças finitas.

O Aumento da ordem de acurácia não resolve o problema de dispersão que envolve a solução numérica (Takacs,1985)



Numerical solutions for (a) 1st-order scheme, (b) 2nd-order scheme, (c) 3rd-order scheme, and (d) 4th-order scheme, after two complete translations

Métodos de diferenças finitas.

Exercício 1

Resolva numericamente a equação de advecção utilizando a acurácia de quarta ordem na discretização espacial e compare com a solução de segunda ordem. Considere $\mu = \frac{c\Delta x}{\Delta t} = 0.2$ e $\mu = \frac{c\Delta x}{\Delta t} = 0.7$. Como condição inicial use uma onda quadrada.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4}{3}\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3}\frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} - O[(\Delta x)^4]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c\left(\frac{4}{3}\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3}\frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x}\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{4}{3}\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3}\frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x}\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{4}{3}\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2} - \frac{1}{3}\frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4}\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{4u_{j+1} - 4u_{j-1}}{6} - \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{12}\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{8u_{j+1} - 8u_{j-1} - u_{j+2} + u_{j-2}}{12}\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{-u_{j+2} + 8u_{j+1} - 8u_{j-1} + u_{j-2}}{12}\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \mu\left(\frac{-u_{j+2} + 8u_{j+1} - 8u_{j-1} + u_{j-2}}{12}\right)$$

Paulo Yoshio Kubota