第一章　一元函数的极限与连续

第一节　一元函数

习题　1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+5x-3}}$；　　(2) $y=\sqrt{\sin x-\cos x}$；

(3) $y=\ln(x+1)$；　　(4) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$.

解　(1) 由 $\sqrt{2x^2+5x-3}\neq 0$ 且 $2x^2+5x-3\geq 0$ 得函数定义域为 $(-\infty,-3)\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)$.

(2) 由 $\sin x-\cos x\geq 0$ 得函数定义域为 $[\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi]$，$k$ 为整数.

(3) 由 $x+1>0$ 得函数定义域为 $(-1,+\infty)$.

(4) 由 $x-1\neq 0$ 得函数定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

2. 下列函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是否相同，为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1},\varphi(x)=\dfrac{1}{x+1}$；

(2) $f(x)=\ln x^2,\varphi(x)=2\ln x$；

(3) $f(x)=1,\varphi(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$；

(4) $f(x)=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1},\varphi(x)=\sqrt{x^2-1}$.

解　(1) $f(x)$ 定义域为 $\{x|x\neq\pm1,x\in\mathbf{R}\}$，$\varphi(x)$ 定义域为 $\{x|x\neq-1,x\in\mathbf{R}\}$，两函数定义域不同，故为不同函数.

(2) $f(x)$ 定义域为 $\{x|x\neq 0,x\in\mathbf{R}\}$，$\varphi(x)$ 定义域为 $\{x|x>0,x\in\mathbf{R}\}$，两函数定义域不同，故为不同函数.

(3) $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，$\varphi(x)$ 定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$，两函数定义域不同，故为不同函数.

(4) $f(x)$ 定义域为 $[1, +\infty)$，$\varphi(x)$ 定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$，两函数定义域不同，故为不同函数.

3. 已知 $f(x) = 2^x, g(x) = x\ln x$，求 $f[g(x)], g[f(x)], f[f(x)], g[g(x)]$.

解 $f[g(x)] = 2^{x\ln x}$；

$g[f(x)] = 2^x \ln 2^x = (\ln 2)x2^x$；

$f[f(x)] = 2^{2^x}$；

$g[g(x)] = x\ln x \ln(x\ln x)$.

4．下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y = \cos^2(1+2x)$；　　(2) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$；

(3) $y = \mathrm{e}^{\sin^2 x}$；　　(4) $y = \arcsin\sqrt{x^2+1}$.

解 (1) $y = u^2, u = \cos v, v = 1+2x$.

(2) $y = \ln u, u = x + \sqrt{v}, v = 1 + x^2$.

(3) $y = \mathrm{e}^u, u = v^2, v = \sin x$.

(4) $y = \arcsin u, u = \sqrt{v}, v = x^2 + 1$.

5. 求下列函数的反函数及反函数的定义域:

(1) $y = \ln(x+2) + 1$；　　(2) $y = \cos^2 x + 2, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$；

(3) $y = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$；　　(4) $y = \sin\dfrac{x-1}{x+1}(x \geq 0)$；

(5) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}(ad - bc \neq 0)$；　　(6) $y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty. \end{cases}$

解 (1) 由 $y = \ln(x+2) + 1$，知 $y \in \mathbf{R}$，且 $x = \mathrm{e}^{y-1} - 2$，故反函数为: $y = \mathrm{e}^{x-1} - 2$，反函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

(2) 由 $y=\cos^2 x+2, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，知 $y\in[2,3]$，且 $x=\arccos\sqrt{y-2}$，故反函数为: $y=\arccos\sqrt{x-2}$，反函数的定义域为 $[2,3]$.

(3) 由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$，知 $y\in(0,1)$，且 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$，故反函数为: $y=\log_2\frac{x}{1-x}$，反函数的定义域为 $(0,1)$.

(4) $\because x\geq 0$，$\therefore -1\leq\frac{x-1}{x+1}<1$，故 $y=\sin\frac{x-1}{x+1}\in[-\sin 1,\sin 1)$，又 $x=\frac{1+\arcsin y}{1-\arcsin y}$，故反函数为: $y=\frac{1+\arcsin x}{1-\arcsin x}$，反函数的定义域为 $[-\sin 1,\sin 1)$.

(5) 当 $c=0$ 时，易知反函数为 $y=\frac{d}{a}x-\frac{b}{a}$，反函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

当 $c\neq 0$ 时，$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}$，$ad-bc\neq 0$，知 $y\neq\frac{a}{c}$，又 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$，故反函数为: $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$，反函数的定义域为 $(-\infty,\frac{a}{c})\cup(\frac{a}{c},+\infty)$.

(6) 当 $-\infty<x<1$ 时，$y=x\in(-\infty,1)$，所以 $x=y$，$y\in(-\infty,1)$；

当 $1\leq x\leq 4$ 时，$y=x^2\in[1,16]$，所以 $x=\sqrt{y}$，$y\in[1,16]$；

当 $4<x<+\infty$ 时，$y=2^x\in(16,+\infty)$，故 $x=\log_2 y$，$y\in(16,+\infty)$.

故反函数为 $y=\begin{cases} x, & -\infty<x<1, \\ \sqrt{x}, & 1\leq x\leq 16, \\ \log_2 x, & 16<x<+\infty. \end{cases}$

6. 讨论下列函数的奇偶性:

(1) $y=2x^3-x^2$；　　(2) $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$；

(3) $y=x\sin\frac{1}{x}$；　　(4) $y=e^{2x}-e^{-2x}+\sin x$.

解 (1) 函数定义域为 $\mathbf{R}$，$\because 2(-x)^3-(-x)^2=-2x^3-x^2$，故函数为非奇非偶函数.

(2) 函数定义域为 $[-1,1]$，$\because \sqrt{1-(-x)}+\sqrt{1+(-x)}=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$，故函数为偶函数.

(3) 函数定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，$\because (-x)\sin\frac{1}{(-x)} = x\sin\frac{1}{x}$，故函数为偶函数.

(4) 函数定义域为 $\mathbf{R}$，$\because \mathrm{e}^{(-2x)} - \mathrm{e}^{-(-2x)} + \sin(-x) = -(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x} + \sin x)$，故函数为奇函数.

7. 证明:

(1) 两个偶函数之和是偶函数, 两个奇函数之和是奇函数;

(2) 两个偶函数之积是偶函数, 两个奇函数之积是偶函数, 偶函数与奇函数之积是奇函数.

证 (1) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为偶函数, 则

$$f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x),$$

故 $f(x)+g(x)$ 为偶函数;

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为奇函数, 则

$$f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -[f(x) + g(x)],$$

故 $f(x)+g(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为偶函数, 则

$$f(-x)\cdot g(-x) = f(x)\cdot g(x),$$

故 $f(x)\cdot g(x)$ 为偶函数;

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为奇函数, 则

$$f(-x)\cdot g(-x) = [-f(x)]\cdot[-g(x)] = f(x)\cdot g(x),$$

故 $f(x)\cdot g(x)$ 为偶函数;

设 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 则

$$f(-x)\cdot g(-x) = f(x)\cdot[-g(x)] = -f(x)\cdot g(x),$$

故 $f(x)\cdot g(x)$ 为奇函数.

8. 证明: 若对任何 x 均有 $f(a+x) = f(a-x)$ (a 为常数), 则 $f(x)$ 关于 $x = a$ 对称.

证 设点 $P(x, y)$ 是函数 $y = f(x)$ 图像上任一点, 由

$$f(x) = f(a + (x-a)) = f(a - (x-a)) = f(2a - x) = y,$$

知, 点 $P'(2a-x, y)$ 也在函数图像上, 而点 $P(x, y)$ 与点 $P'(2a-x, y)$ 关于 $x = a$ 对称, 故 $f(x)$ 关于 $x = a$ 对称.

9. 证明:

(1) 两个单调递增(递减)的函数之和是单调递增(递减)的;

(2) 两个单调递增(递减)的正值函数之积是单调递增(递减)的;

证 (1) 设 $f(x), g(x)$ 为单调递增函数, 则 $\forall\, x_1, x_2$，$x_1 > x_2$, 有

$$f(x_1) + g(x_1) > f(x_2) + g(x_2),$$

故 $f(x) + g(x)$ 是单调递增函数. 即两个单调递增函数之和是单调递增的, 类似可证

两个单调递减函数之和是单调递减的.

(2) 设 $f(x), g(x)$ 为单调递增的正值函数，则 $\forall\, x_1, x_2$，$x_1 > x_2$，有

$$f(x_1) > f(x_2) > 0，\ g(x_1) > g(x_2) > 0，$$

故 $f(x_1)\cdot g(x_1) > f(x_2)\cdot g(x_2)$，所以 $f(x)\cdot g(x)$ 是单调递增函数. 即两个单调递增正值函数之积是单调递增的, 类似可证两个单调递减正值函数之积是单调递减的;

10. 下列函数中, 哪些是周期函数? 如果是, 则求其最小正周期.

(1) $y=\sin^2 x$;　　(2) $y = x\cos x$;

(3) $y=\cos^2 x$;　　(4) $y=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})\ (\omega\neq 0)$.

解 (1) $y=\sin^2 x=\dfrac{\cos 2x-1}{2}=\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}$，故为周期函数, 最小正周期为 π.

(2) 非周期函数.

(3) $y=\cos^2 x=\dfrac{\cos 2x+1}{2}=\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}$，故为周期函数, 最小正周期为 π.

(4) 是周期函数, 最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

11. 利用 $y=\sin x$ 的图形, 作下列函数的图形:

(1) $y=\sin|x|$;　　(2) $y=\left|\dfrac{1}{2}\sin x\right|$;

(3) $y=\sin 2x$;　　(4) $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{2})$.

解 (1) 如图 1.1(a).

(2) 如图 1.1(b).

(3) 如图 1.1(c).

(4) 如图 1.1(d).

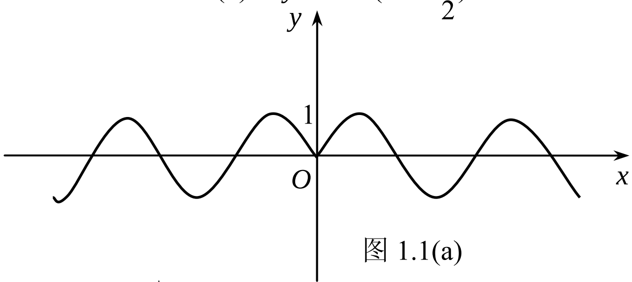

图 1.1(a)

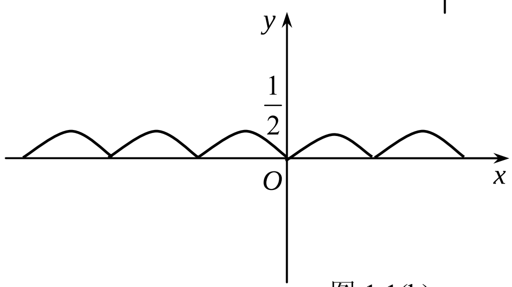

图 1.1(b)

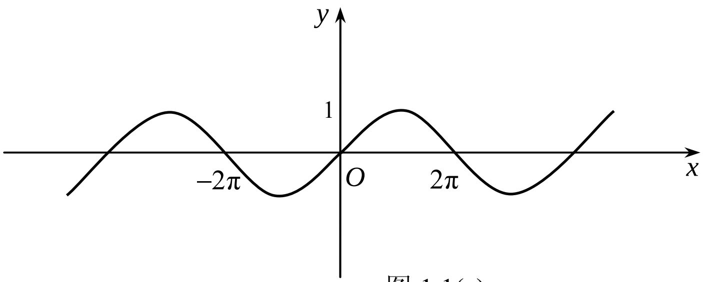

图 1.1(c)

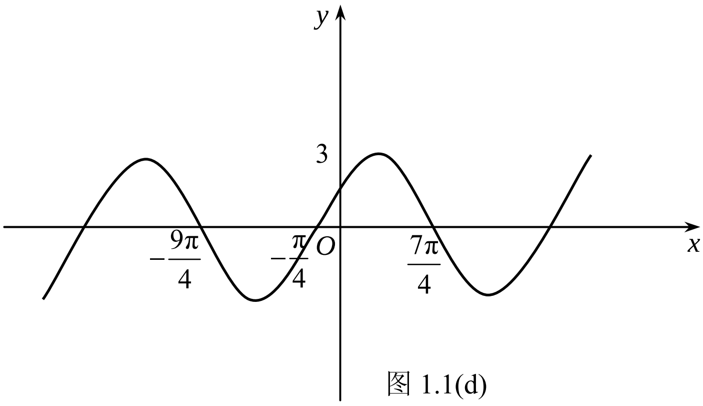

图 1.1(d)

12. 作下列函数的图形:

(1) $y=\left|x^2-1\right|$;　　(2) $y=\left|\ln(1-x)\right|$;

(3) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$.

解 (1) 如图 1.2(a).

(2) 如图 1.2(b).

(3) 如图 1.2(c).

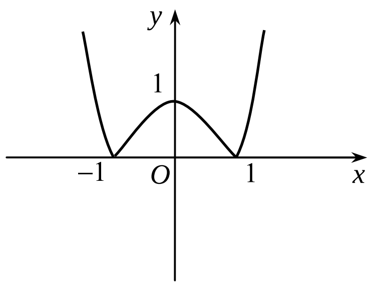

图 1.2(a)

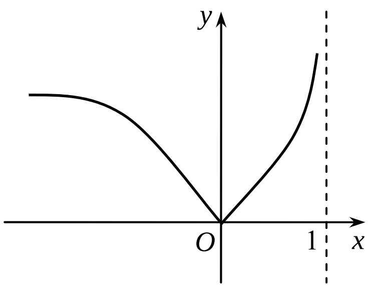

图 1.2(b)

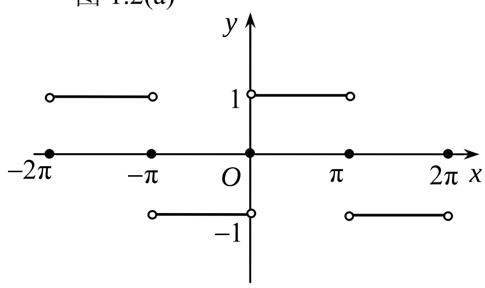

图 1.2(c)

13. (1) 设 $f(\frac{1}{x})=\sqrt{1+x^2} \quad (x>0)$，求 $f(x)$；

(2) 设 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x$，求 $f(\cos x)$.

解 (1) 由 $f(\frac{1}{x})=\sqrt{1+x^2}$，知 $f(x)=\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}=\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}$.

(2) $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x=2-2\sin^2\frac{x}{2}$，$\therefore f(x)=2-2x^2$，故

$$f(\cos x)=2-2\cos^2 x=2\sin^2 x.$$

14. 设 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1\end{cases}$ 及 $g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出两个函数的图形.

解 当 $x<0$ 时，$|g(x)|=\mathrm{e}^x<1$；当 $x=0$ 时，$|g(x)|=\mathrm{e}^x=1$；当 $x>0$ 时，$|g(x)|=\mathrm{e}^x<1$. 故 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0;\end{cases}$ 同样易得 $g[f(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ \frac{1}{\mathrm{e}}, & |x|>1.\end{cases}$

图形见图 1.3(a)和 1.3(b).

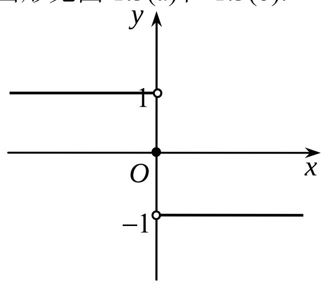

图 1.3(a)

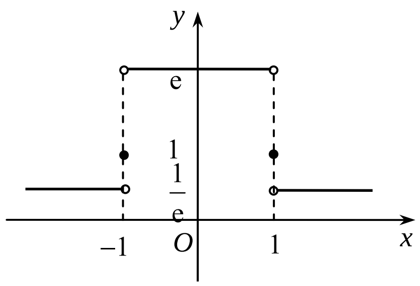

图 1.3(b)

15. 证明:

(1) $\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}y=2\mathrm{sh}\frac{x+y}{2}\mathrm{ch}\frac{x-y}{2}$；

(2) $\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y=\frac{1}{2}[\mathrm{sh}(x+y)+\mathrm{sh}(x-y)]$.

证 (1) $2\mathrm{sh}\frac{x+y}{2}\mathrm{ch}\frac{x-y}{2}=2\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{x-y}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{x-y}{2}}}{2}$

$$=\frac{e^{x}-e^{-x}+e^{y}-e^{-y}}{2}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}y\,,$$

故结论得证.

(2) $\frac{1}{2}[\mathrm{sh}(x+y)+\mathrm{sh}(x-y)]=\frac{1}{2}[\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}+\frac{e^{x-y}-e^{-(x-y)}}{2}]$

$$=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y\,,$$

结论得证.