第五节

导数的简单应用

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

注意当曲线方程用隐函数形式，参数方程形式，或极坐标形式给出时，切线方程的写法.

（一）几何应用

- 切线、法线

平面曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x_0, f(x_0))$ 处

的切线斜率为：$\tan\alpha = f'(x_0)$.

切线方程：$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$,

法线方程：

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad 其中\ f'(x_0) \neq 0.$$

（二）物理应用

- 速度、加速度

位置函数 $s(t)$ 的一阶导数的物理意义是速度,

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=s'(t)$$

位置函数 $s(t)$ 的二阶导数的物理意义是加速度.

$$a(t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=s''(t)$$

（三）经济应用

定义 设 $f(x)\in C^{(1)}(a,b)$, 在经济科学中,

$f'(x)$ ------边际函数,

$f'(x_0)$ ------ x_0 处的边际函数值,或边际 $x_0\in(a,b)$

设x------产品数量,则

$C(x)$------产品成本, $M_C(x)=C'(x)$------边际成本

$R(x)$------销售收益, $M_R(x)=R'(x)$ ------边际收益

$P(x)$------销售利润 $M_P(x)=P'(x)$------边际利润

显然, $P(x)=R(x)-C(x)$.

（四）相关变化率

已知： $F(x,y)=0$ —— 相关方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varphi(t)\\[2em] \text{求：}\quad&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=?\end{aligned}\right\}\text{相关变化率}$$

相关变化率问题：

已知其中一个变化率时如何求出另一个变化率?

相关变化率问题解法:

找出相关联的变量间的等式

$\big\downarrow$ 对 t 求导

得相关变化率之间的关系式

$\big\downarrow$

求出未知的相关变化率

二、典型例题

例1 设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$，求该曲线在 $t = 0$ 点处的切线方程.

解 1° 求切点 令 $t = 0$，得 $x(0) = 0$,

$$e^{y(0)} \cdot 0 - y(0) + 1 = 0 \quad y(0) = 1. \quad \therefore \quad 切点\ (0,1)$$

2° 求斜率 方程组两边同时对 t 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t + 2 \\ e^y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \sin t + e^y \cos t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t + 2 \\ \mathrm{e}^y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \sin t + \mathrm{e}^y \cos t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{e}^y \cos t}{1 - \mathrm{e}^y \sin t}, \quad y\big|_{t=0} = y(0) = 1$$

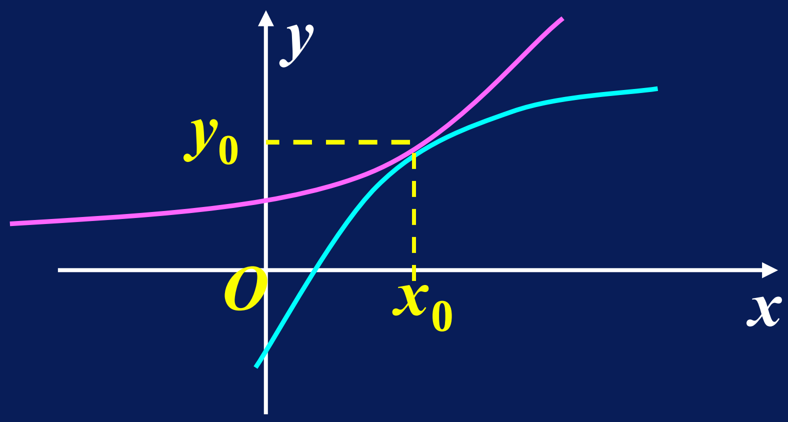
$$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{e}^y \cos t}{(1 - \mathrm{e}^y \sin t)(6t + 2)}\right|_{t=0} = \frac{\mathrm{e}^{y(0)}}{2} = \frac{\mathrm{e}}{2}.$$

所求切线方程为 $y - 1 = \frac{\mathrm{e}}{2}(x - 0)$, 即 $y = \frac{\mathrm{e}}{2}x + 1.$

例2 当a取何值时，曲线 $y=a^x$和直线 $y=x$ 相切，求切点的坐标.

分析 两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在点(x_0, y_0)相切

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0)=g(x_0) & (纵坐标相等) \\ f'(x_0)=g'(x_0) & (切线斜率相等) \end{cases}$$



解　设切点为(x_0, y_0)，则

$$y = a^x, y = x$$

$$\begin{cases} a^{x_0} = x_0 & ① \\ a^{x_0} \ln a = 1 & ② \end{cases}$$

① 代入 ②，得　$x_0 \ln a = 1$

$$x_0 = \frac{1}{\ln a}$$

②式两边取对数　$\ln(a^{x_0} \ln a) = 0,$

即　$x_0 \ln a + \ln(\ln a) = 0$　亦即　$1 + \ln(\ln a) = 0$

解得　$a = e^{e^{-1}}$，故切点为(e, e).

例3 一小球沿斜面向上而滚，在 t 秒之末与开始的距离为 $s = 3t - t^2$ (s的单位为米)，问其初速为多少？何时开始下滚？

解 $$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3 - 2t$$

初速： $v(0) = 3(\mathrm{m/s})$

令 $v(t) = 0$，得 $t = \dfrac{3}{2}$ (s)

$\therefore$ 当 $t = \dfrac{3}{2}$s时，小球开始下滚.

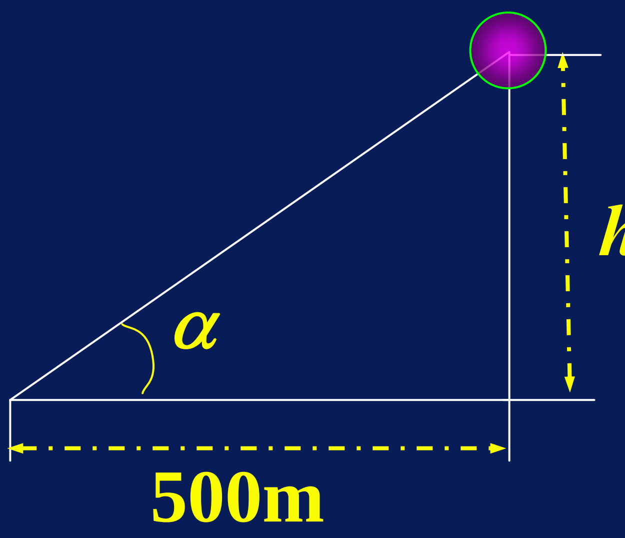
例4 一气球从离开观察员 500 m 处离地面铅直上升，其速率为 $140\,\mathrm{m/min}$，问当气球高度为 500 m 时，观察员视线的仰角增加率是多少？

解 设气球上升 t 分钟末其高度为 h，仰角为 α，

则 $\tan\alpha(t)=\dfrac{h(t)}{500}$

两边对 t 求导

$$\sec^2\alpha(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{500}\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$$



$$\sec^2\alpha(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{500}\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha}$$

已知$\dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=140\,\mathrm{m/min}$， $h=500\mathrm{m}$ 时,

$$\tan\alpha=\frac{500}{500}=1,\quad \sec^2\alpha=2,$$

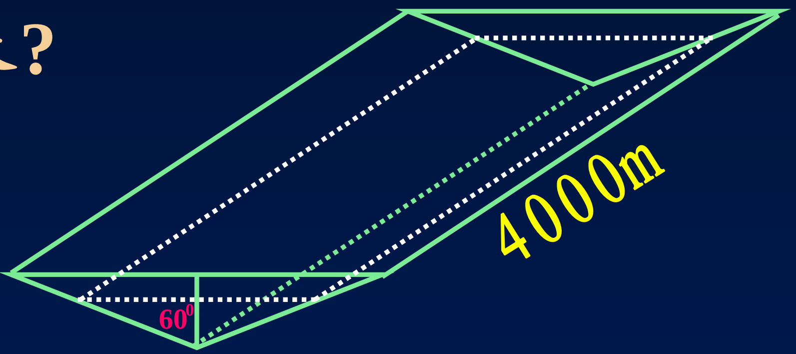
$$\boxed{\tan\alpha=\frac{h}{500}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{500}\cdot 140$$

$$=0.14\quad(\mathrm{rad/min})$$

三、同步练习

1. 河水以 $8\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ 的速度流入水库中,水库的形状是长为4000m,顶角为120°的水槽,问水深20m时,水面每小时上升几米?



2. 求等边双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(\dfrac{1}{2},2)$ 处的切线的斜率,并写出该点的切线方程和法线方程.

3. 设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$,求过C上点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$的切线方程, 并证明曲线$C$在该点的法线通过原点.

4. 求摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$在 $t=\frac{\pi}{2}$点处的切线方程.

5. 求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$(a为常数,)在点$(\rho,\ \theta)=(a,\frac{\pi}{2})$处的切线的斜率 .

6. 从原点向抛物线 $y=x^2+ax+b$引切线可引几条?

7. 一飞机在离地面2km的高度，以每小时200km的速度水平飞向目标O的上空，O处有一摄影机跟踪拍摄飞行过程，试求飞机飞至目标O上方时，摄影机转动的角速度.

8. 已知阻尼振动的位移函数为 $s = b\mathrm{e}^{-\lambda t}\sin\omega t$，（$b$, λ, ω 为常数），求任意时刻$t$振动的速度和加速度.

9. 某产品总成本C（元）为产量x的函数

$$C = C(x) = 1000 + 40\sqrt{x},$$

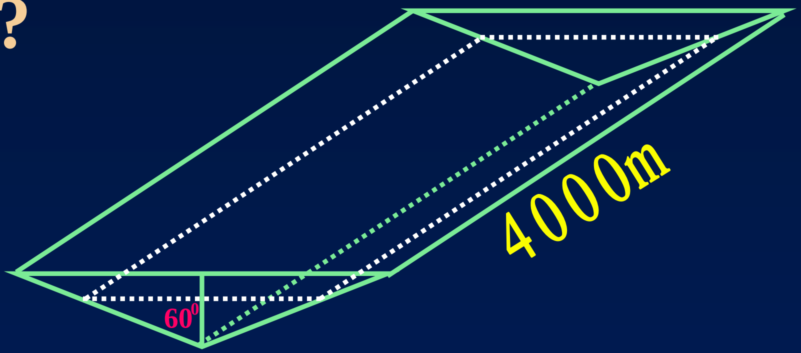
求生产100单位产品时的边际成本。

10. 有一底半径为 R cm，高为 h cm 的圆锥容器，今以 $25\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ 的速度自顶部向容器内注水，试求当容器内水位等于锥高的一半时水面上升的速度.

11.　　液体从深为18cm，顶部直径为12cm 的正圆锥形漏斗，漏入直径为10cm的圆柱形桶中，开始时漏斗盛满液体，已知漏斗中液面深12cm时，液面下落速度为1cm/min，问此时桶中液面上升的速度是多少？

四、同步练习解答

1. 河水以 $8\text{m}^3/\text{s}$ 的速度流入水库中,水库的形状是长为4000m,顶角为120°的水槽,问水深20m时,水面每小时上升几米?



解 设时刻t水深为$h(t)$,

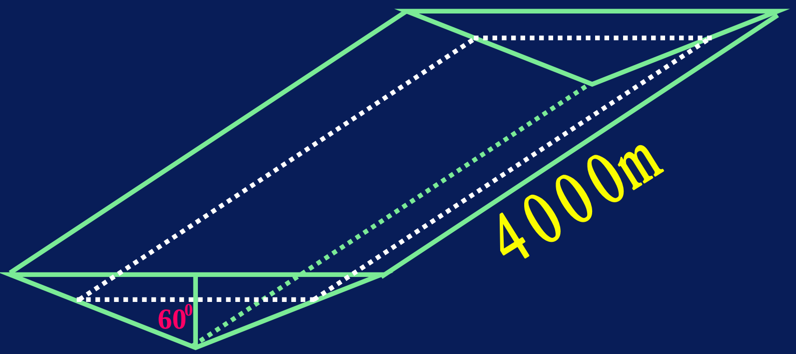
水库内水量为$V(t)$,则

$$V(t)=4000\cdot\frac{1}{2}\cdot h\cdot 2(h\cdot\tan 60^\circ)=4000\sqrt{3}h^2$$

$$V(t)=4000\cdot\frac{1}{2}\cdot h\cdot 2(h\cdot\tan 60^\circ)=4000\sqrt{3}h^2$$

上式两边都对t求导得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=8000\sqrt{3}h\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$



$$\because \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=8(\mathrm{m}^3/\mathrm{s})=28800(\mathrm{m}^3/\mathrm{h}),$$

$$\therefore \text{当 } h=20\ \mathrm{m} \text{ 时}, \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\approx 0.104(\mathrm{m}/\mathrm{h}).$$

水面上升之速率

2. 求等边双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $(\frac{1}{2},2)$ 处的切线的斜率，并写出该点的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义，得切线斜率为

$$k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=(\frac{1}{x})'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$$

所求切线方程为 $y-2=-4(x-\frac{1}{2})$，即 $4x+y-4=0.$

法线方程为 $y-2=\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})$，即 $2x-8y+15=0.$

3. 设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$,求过C上点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$的切线方程, 并证明曲线$C$在该点的法线通过原点.

解 方程两边对x求导得, $3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$

$$\therefore y'\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=-1.$$

所求切线方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-\frac{3}{2})$ 即 $x+y-3=0.$

法线方程为 $y-\frac{3}{2}=x-\frac{3}{2}$ 即 $y=x$, 显然通过原点.

4. 求摆线$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$在 $t=\dfrac{\pi}{2}$点处的切线方程.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\therefore \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = 1.$$

当 $t=\dfrac{\pi}{2}$时, $x = a(\dfrac{\pi}{2}-1)$, $y = a$.

所求切线方程为

$$y-a = x-a(\frac{\pi}{2}-1) \quad 即 \quad y = x + a(2-\frac{\pi}{2}).$$

5. 求心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)$(a为常数,)在点$(\rho,\ \theta) = (a, \frac{\pi}{2})$处的切线的斜率 .

解 心形线的参数方程:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

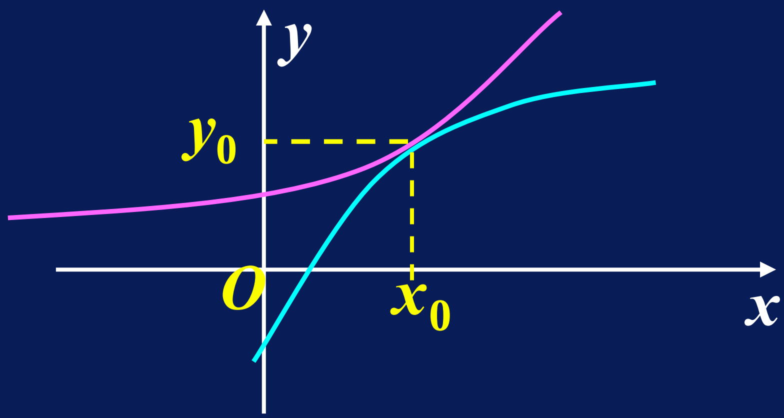
心形线在点 $(a, \frac{\pi}{2})$处的切线斜率:

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{-a\sin^2\theta + a(1+\cos\theta)\cos\theta}{-a\sin\theta\cos\theta - a(1+\cos\theta)\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

6. 从原点向抛物线 $y = x^2 + ax + b$ 引切线可引几条?

分析 两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在点(x_0, y_0)相切

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = g(x_0) & \text{(在切点相交)} \\ f'(x_0) = g'(x_0) & \text{(切线斜率相同)} \end{cases}$$



解 设过原点的直线为 $y = kx$，又设切点为(x_0, y_0),则

$$\begin{cases} kx_0 = x_0^2 + ax_0 + b & ① \\ k = 2x_0 + a & ② \end{cases}$$

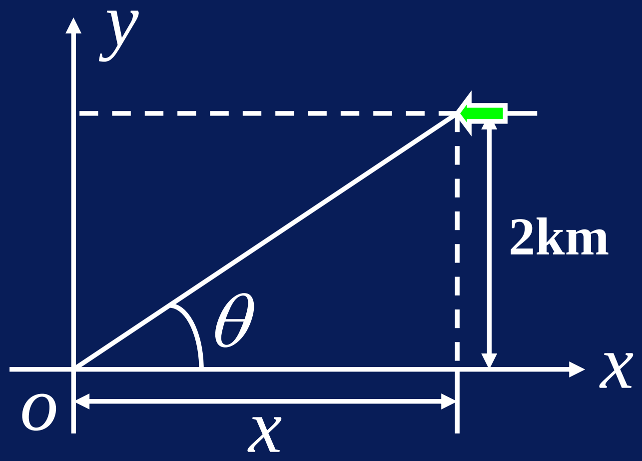
② $\times x_0$ - ① 得 $x_0^2 - b = 0$, $x_0^2 = b$

故 (1) $b > 0$时，$x_0 = \pm\sqrt{b}$, 引两条切线;

(2) $b = 0$时，$x_0 = 0$, 引一条切线;

(3) $b < 0$时，无切线.

7．一飞机在离地面2km的高度，以每小时200km的速度水平飞向目标O的上空，O处有一摄影机跟踪拍摄飞行过程，试求飞机飞至目标O上方时，摄影机转动的角速度.



解 如图建立坐标系，设 t 秒末飞机与目标水平距离为 x(km)，摄影机仰角为 θ，则飞机速度

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-200\text{km/h},\quad \theta=\arctan\frac{2}{x},$$

角速度 $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

$$= \frac{1}{1+(\frac{2}{x})^2} \cdot (-\frac{2}{x^2}) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{x^2+4} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

飞机飞至目标正上方时，角速度为

$$\omega\big|_{x=0} = -\frac{2}{4}(-200) = 100(\mathrm{rad/h})$$

$$= 100/3600 = \frac{1}{36}(\mathrm{rad/s}).$$

$$\theta = \arctan\frac{2}{x},$$

8. 已知阻尼振动的位移函数为 $s = be^{-\lambda t}\sin\omega t$，（$b, \lambda, \omega$ 为常数），求任意时刻 t 振动的速度和加速度.

解 速度 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = be^{-\lambda t}\cdot(-\lambda)\sin\omega t + be^{-\lambda t}\cos\omega t\cdot\omega$

$$= be^{-\lambda t}(\omega\cos\omega t - \lambda\sin\omega t)$$

加速度 $a = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = be^{-\lambda t}\cdot(-\lambda)(\omega\cos\omega t - \lambda\sin\omega t)$

$$+ be^{-\lambda t}[\omega(-\sin\omega t)\omega - \lambda\cos\omega t\cdot\omega]$$

$$= be^{-\lambda t}[(\lambda^2 - \omega^2)\sin\omega t) - 2\lambda\omega\cos\omega t].$$

9. 某产品总成本C（元）为产量x的函数

$$C = C(x) = 1000 + 40\sqrt{x},$$

求生产100单位产品时的边际成本。

解

$$C'(x) = (1000 + 40\sqrt{x})'$$

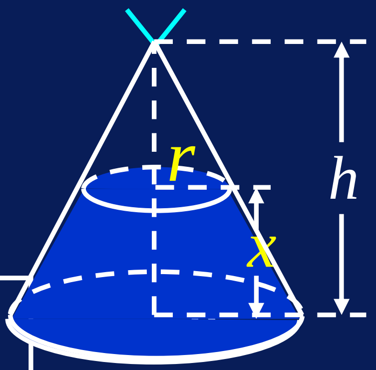
$$= \frac{20}{\sqrt{x}},$$

$$C'(100) = \frac{20}{\sqrt{x}}\bigg|_{x=100} = 2(\text{元}/\text{件}).$$

故生产100单位产品时的边际成本为 $2\text{元}/\text{件}$.

10. 有一底半径为 R cm , 高为 h cm 的圆锥容器 , 今以 25 cm^3/s 的速度自顶部向容器内注水,试求当容器内水位等于锥高的一半时水面上升的速度.

解 设时刻 t 容器内水面高度为 $x(t)$,



水的体积为 $V(t)$, 则

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 (h - x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{r}{R} &= \frac{h-x}{h} \\ r &= \frac{h-x}{h} R \end{aligned}}$$

$$= \frac{\pi R^2}{3h^2}[h^3 - (h-x)^3]$$

$$=\frac{\pi R^2}{3h^2}[h^3-(h-x)^3]$$

$$\Big\downarrow \text{两边对 } t \text{ 求导}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi R^2}{h^2}\cdot(h-x)^2\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad \text{而}\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=25\,(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$$

故 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{25h^2}{\pi R^2(h-x)^2},$$

当 $x=\frac{h}{2}$ 时, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{100}{\pi R^2}\,(\mathrm{cm}/\mathrm{s})$

11. 液体从深为18cm, 顶部直径为12cm 的正圆锥形漏斗，漏入直径为10cm的圆柱形桶中，开始时漏斗盛满液体，已知漏斗中液面深12cm时，液面下落速度为1cm/min, 问此时桶中液面上升的速度是多少？

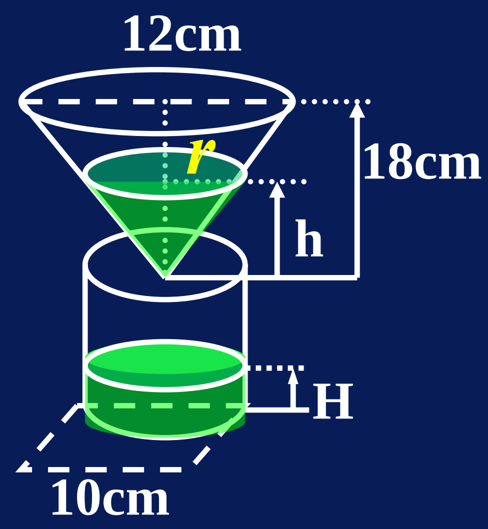
解 设桶中液面深为H，漏斗中液面深为h，

依题设，知 $\left.\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=12}=-1\,(\mathrm{cm}/\mathrm{min})$

需求: $\left.\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right|_{h=12}=?$

由 $V_{柱}+V_{锥}=V_0$（开始时的液体体积），得

$$25\pi H+\frac{1}{3}\pi r^2 h=V_0$$



$$\because \quad \frac{h}{18}=\frac{r}{6}, \qquad r=\frac{h}{3}$$

$$\therefore \quad 25\pi H+\frac{1}{27}\pi h^3=V_0$$

即 $25\pi H=V_0-\frac{1}{27}\pi h^3,$ 两边对 t 求导得:

$$25\pi\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\bigg|_{h=12}=-\frac{1}{27}\pi 3h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\bigg|_{h=12} \qquad \therefore \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\bigg|_{h=12}=0.64(\mathrm{cm}/\mathrm{min})$$