第三节

不定积分的分布积分法

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 分部积分公式

公式的作用：

改变被积函数

由导数公式 $(uv)' = u'v + uv'$

积分得 $uv = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$

$\longrightarrow \int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$

$$\boxed{\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u}$$ —— 分部积分公式

(二) 分部积分法选 u 的一般原则:

设 $\int f(x)\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$.

(1) $\mathrm{d}v=\psi(x)\mathrm{d}x$

$\int\psi(x)\mathrm{d}x$ 易积分, v 易求;

(2) $\int v\,\mathrm{d}u$ 比 $\int u\,\mathrm{d}v$ 易积分 .

(三) 分部积分法选 u 特例

(1) $\left.\begin{array}{l}\int x^n e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x \\ \int x^n \sin x\,\mathrm{d}x\end{array}\right\}$ 设 $u = x^n$（例1，例2）

(2) $\int x^n \ln x\,\mathrm{d}x$ 设 $u = \ln x$（例3(1)）

(3) $\int x^n \arcsin x\,\mathrm{d}x$ 设 $u = \arcsin x$（例3(2)）

(2)(3): $\mathrm{d}v = x^n\,\mathrm{d}x$

(四) 分部积分法选 u 优先原则

"对反代三指" 法

(或称为" LIATE " 法).

选 u 的优先顺序

L	对数函数
I	反三角函数
A	代数函数
T	三角函数
E	指数函数

二、典型例题

例1 （1）$I_1 = \int x e^x \,\mathrm{d}x$

$$= \int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{\mathrm{d}e^x}_{\mathrm{d}v}$$

$$= \underbrace{xe^x}_{uv} - \int \underbrace{e^x}_{v}\, \underbrace{\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u}$$

简化

$$= xe^x - e^x + C$$

问： 能否取 $u = e^x$? 不行.

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \underbrace{e^x}_{u}\cdot\underbrace{2x\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v}$$

$$= \frac{1}{2}\int e^x\,\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2e^x - \int x^2\,\mathrm{d}e^x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2e^x - \int \underline{x^2e^x\,\mathrm{d}x}\right)$$ 更不易积分

推广

(2) $I_2=\int \underbrace{x^2e^x\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = -\int \underbrace{x^2\,\mathrm{d}e^x}_{\mathrm{d}v} = -x^2e^x + \int \underbrace{e^x\,\mathrm{d}x^2}_{v\,\mathrm{d}u}$

$$= -x^2e^x + 2\underbrace{\int e^x\,x\,\mathrm{d}x}_{I_1}$$

简化

$$= -x^2e^x + 2(xe^x - e^x) + C$$

$$I_n = \int x^n \underbrace{e^x\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} \xlongequal{\text{令}u=x^n} x^ne^x - n\int x^{n-1}e^x\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{I_n = x^ne^x - nI_{n-1}}$$

例2 (1) $I_1=\int x\sin x\,\mathrm{d}x$

分析 取 $u=?$ $u\overset{?}{=}\sin x$, $x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}v$

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\sin x-\underline{\int\frac{x^2}{2}\cos x\,\mathrm{d}x}$$ 更不易积分

显然，u 选择不当，积分更难进行.

解 (1) $I_1=\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin x\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v}=-\int x\,\underbrace{\mathrm{d}\cos x}_{\mathrm{d}v}$

简化

$=-\underbrace{x\cos x}_{uv}+\int\underbrace{\cos x}_{v}\,\underbrace{\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u}=-x\cos x+\sin x+C$

$$(2)\quad I_2 = \int x^2 \underbrace{\sin x\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = -\int x^2 \underbrace{\mathrm{d}\cos x}_{\mathrm{d}v}$$

$$= -x^2\cos x + \int \underbrace{\cos x\,\mathrm{d}x^2}_{v\,\mathrm{d}u}$$

$$= -x^2\cos x + 2\underbrace{\int x\cos x\,\mathrm{d}x}_{I_1}$$

简化

$$= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C$$

推广

$$\boxed{\int x^n \sin x\,\mathrm{d}x,\ \text{令} u = x^n}$$

例3 求下列不定积分:

$$(1)\ I_1 = \int x \underbrace{\ln x}_{u} \,\mathrm{d}x = \int \ln x \underbrace{\mathrm{d}\frac{x^2}{2}}_{\mathrm{d}v}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \underbrace{\int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}\ln x}_{v\,\mathrm{d}u}$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x$$

简化

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

(2) $I_2 = \int x \arctan x \, \mathrm{d}x = \underbrace{\int \arctan x \, \mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)}_{u\,\mathrm{d}v}$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

简化

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C$$

例4 求积分 $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

I

A

解 $\because \quad (\sqrt{1+x^2})' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \underbrace{\arctan x}_{u}\, \mathrm{d}\sqrt{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

选u的优先顺序

对数函数

反三角函数

代数函数

三角函数

指数函数

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x} \quad 令\ x = \tan t$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln(\sec t + \tan t) + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

例5 $I=\int \underline{e^{x}\cos x\,\mathrm{d}x}=\int \cos x\,\underbrace{\mathrm{d}e^{x}}_{\mathrm{d}v}$

$=e^{x}\cos x-\int \underbrace{e^{x}\,\mathrm{d}\cos x}_{v\,\mathrm{d}u}$

$=e^{x}\cos x+\int \sin x\, e^{x}\,\mathrm{d}x$

难度相当

$=e^{x}\cos x+e^{x}\sin x-\int \underline{e^{x}\cos x\,\mathrm{d}x}$

注意循环形式

$=e^{x}\cos x+e^{x}\sin x-I$

$$I=\frac{1}{2}e^{x}(\sin x+\cos x)+C$$

问：选 $u=e^x$ 行吗？　　行.

$$I=\int \underset{u}{\underline{e^x}}\,\mathrm{d}(\sin x)=e^x\sin x-\int \sin x\,\mathrm{d}e^x$$

$$=e^x\sin x-\underline{\int \sin x\cdot e^x\,\mathrm{d}x}$$ (第二次分部积分)

$$=e^x\sin x+\int \underset{u}{\underline{e^x}}\,\mathrm{d}\cos x$$

两次所选u的函数类型不变！

$$=e^x\sin x+e^x\cos x-\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=e^x\sin x+e^x\cos x-I$$

$$\therefore\quad I=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C.$$

例6 $I=\int \tan^2 x\sec x\,\mathrm{d}x$

$$=\int \underbrace{\tan x\,\mathrm{d}\sec x}_{u\,\mathrm{d}v}$$

$$=\underbrace{\tan x\sec x}_{uv}-\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x$$

难度相当

$$=\tan x\sec x-\int(\tan^2 x+1)\sec x\,\mathrm{d}x$$

$$=\tan x\sec x-I-\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$$

故 $I=\dfrac{1}{2}\left[\tan x\sec x-\ln\left|\sec x+\tan x\right|\right]+C$

例7 $I_n = \int \sin^n x \, \mathrm{d}\, x$ （$n \geq 2$,自 然数 ），

试导出递推关系.

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

解 $I_n = \int \underbrace{\sin^{n-1} x \, \mathrm{d}(-\cos x)}_{u\,\mathrm{d}\,v}$

$$= \underbrace{-\cos x \sin^{n-1} x}_{uv} + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x \; \mathrm{d}\, x$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x$$

$$+ (n-1)\int \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}\, x - (n-1)\int \sin^n x \, \mathrm{d}\, x$$

$$I_n = \int \sin^n x \, \mathrm{d}x = -\cos x \sin^{n-1} x$$

$$\boxed{J_n = \int \cos^n x \, \mathrm{d}x}$$

$$+ (n-1)\underline{\int \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x} - (n-1)\int \sin^n x \, \mathrm{d}x$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$(n \geq 2, n \in N)$$

故 $$\boxed{I_n = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$$

同理 $$\boxed{J_n = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}}$$

例8 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\underbrace{(x^2+a^2)^n}_{u\,\mathrm{d}v}}$，试导出递推关系.

分析 欲将I_n表示成 I_{n-1}或I_{n+1}的表示式.

解 $I_n = \underbrace{\frac{x}{(x^2+a^2)^n}}_{uv} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$

$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \end{aligned}}$$

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

$$\boxed{I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}}$$

递推公式:

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n}$$

类似题:

(1) $$I_n=\int\frac{1}{\sin^n x}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1-\sin^2 x+\sin^2 x}{\sin^n x}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^n x}\,\mathrm{d}\,x+I_{n-2}=\frac{1}{1-n}\int\underbrace{\cos x}_{u}\,\mathrm{d}(\sin^{1-n}x)+I_{n-2}$$

(2) $$I_n=\int\frac{1}{x^n\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1+x^2-x^2}{x^n\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^n}\,\mathrm{d}\,x-I_{n-2}=\frac{1}{1-n}\int\underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{u}\,\mathrm{d}\,x^{1-n}-I_{n-2}$$

综合题

例9 $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{令 t=\sqrt{x}} 2\int t e^{t}\,\mathrm{d}t$

$$= 2(t e^{t} - e^{t}) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$$

例10 $I = \int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\int \ln\cos x\,\mathrm{d}\tan x}}$

$$u\,\mathrm{d}v$$

$$= \tan x \cdot \ln\cos x + \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \tan x \cdot \ln\cos x + \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \tan x \cdot \ln\cos x + \tan x - x + C$$

例11 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\dfrac{\cos x}{x}$，求 $\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

解 由题设 $f(x)=\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)'$ ，

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\cos x}{x}+C_1$$

故 $\int x f'(x)\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}f(x)=x f(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$

$$=x\left(\frac{\cos x}{x}\right)'-\frac{\cos x}{x}+C=-\sin x-2\frac{\cos x}{x}+C$$

注 若先求出 $f'(x)$, 再求积分会更复杂.

解2 由题设 $f(x)=(\dfrac{\cos x}{x})'=\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$

$$f'(x)=(\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2})'=\cdots$$

$$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(-\cos x+\frac{2\sin x}{x}+\frac{2\cos x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\cdots$$

例12 求 $I=\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

视 $\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}$ 为整体

解 (方法1) 先分部，再换元

$$I=\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x-1)$$

$$=2\int \underbrace{x\ \ d\sqrt{e^x-1}}_{u\,dv}$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-2\int\sqrt{e^x-1}\,dx$$

$$I=\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-2\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$$

令 $t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$， 则 $\mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$I=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\int\frac{4t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=2x\sqrt{e^x-1}-4\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4(t-\arctan t)+C$$

$$\boxed{I=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C}$$

(方法2)　先换元, 再分部

为去根式$\sqrt{e^x-1}$

$$I=\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x.$$

令 $t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1},$　则 $x=\ln(1+t^2),\ \mathrm{d}x=\dfrac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$

故 $$I=\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{(1+t^2)\ln(1+t^2)}{t}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$I=\int\frac{x\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x$$

迎合分母

$$=\int\frac{(1+t^2)\ln(1+t^2)}{t}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int\underbrace{\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}_{u\,\mathrm{d}v}=2t\ln(1+t^2)-4\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=2t\ln(1+t^2)-4t+4\arctan t+C$$

$$I=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$$

例13 求 $I=\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

解 (方法1) 先换元, 后分部 令$x=\tan t$,则

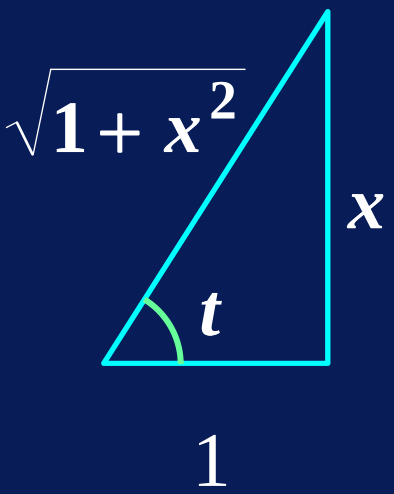
$$I=\int \frac{e^t}{\sec^3 t}\cdot \sec^2 t\,dt=\int e^t \cos t\,dt$$

$$=e^t\sin t-\int e^t\sin t\,dt$$

$$=e^t\sin t+e^t\cos t-\int e^t\cos t\,dt$$

故 $I=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)e^t+C$

$$I=\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x.\qquad x=\tan t$$



$$I=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)e^{t}+C,$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]e^{\arctan x}+C$$

(方法2) 分部积分法

$$I=\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}e^{\arctan x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}e^{\arctan x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}(1+x)\;-I$$

$$I=\frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C$$

三、同步练习

1. 求$\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$

2. 求$\int x^2 \mathrm{e}^{ax} \, \mathrm{d}x \, (a \neq 0)$

3. 求 $I = \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} \, \mathrm{d}x$.

4. $I = \int \sqrt{x^2 + a^2} \, \mathrm{d}x \, (a > 0)$.

5. 证明递推公式

$$I_n = \int \tan^n x \, dx$$

$$= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

6. 求 $I = \int \sin(\ln x) \, dx$

四、同步练习解答

1. 求 $\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$

解 $\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x = \int x^2 \, \mathrm{d}\sin x$

$= x^2 \sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x^2$

$= x^2 \sin x - 2\int x \sin x \, \mathrm{d}x$

$= x^2 \sin x + 2\int x \, \mathrm{d}\cos x$

$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\int \cos x \, \mathrm{d}x$

$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C$

2. 求$\int x^2 e^{ax}\, dx\,(a \neq 0)$

解 $\int x^2 e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}\int x^2\, de^{ax}$

$= \frac{1}{a}x^2 e^{ax} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\, dx^2 = \frac{1}{a}x^2 e^{ax} - \frac{2}{a}\int x e^{ax}\, dx$

$= \frac{1}{a}x^2 e^{ax} - \frac{2}{a^2}\int x\, de^{ax}$

$= \frac{1}{a}x^2 e^{ax} - \frac{2x}{a^2}e^{ax} + \frac{2}{a^2}\int e^{ax}\, dx$

$= \frac{1}{a}x^2 e^{ax} - \frac{2x}{a^2}e^{ax} + \frac{2}{a^3}e^{ax} + C$

3. 求 $I=\int \frac{x e^{x}}{(x+1)^{2}} \mathrm{d} x.$

E

A

解(方法1) $I=\int \frac{x}{(x+1)^{2}} \mathrm{d} e^{x}$

$$=\frac{x}{(x+1)^{2}} e^{x}-\int e^{x} \cdot\left[\frac{x}{(x+1)^{2}}\right]' \mathrm{d} x$$

$$=\frac{x}{(x+1)^{2}} e^{x}-\int e^{x} \cdot\left[-\frac{1}{(x+1)^{2}}+\frac{2}{(x+1)^{3}}\right] \mathrm{d} x$$

$$=\frac{x}{(x+1)^{2}} e^{x}+\int \frac{1}{(x+1)^{2}} \mathrm{d} e^{x}-2 \int \frac{e^{x}}{(x+1)^{3}} \mathrm{d} x$$

选u的优先顺序	
	对数函数
	反三角函数
	代数函数
	三角函数
	指数函数

$$\left[\frac{x}{(x+1)^{2}}\right]' =\left[\frac{(x+1)-1}{(x+1)^{2}}\right]' =\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^{2}}\right]'$$

$$I=\frac{x}{(x+1)^2}e^x+\int\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}e^x-2\int\frac{e^x}{(x+1)^3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x+1)^2}e^x+\left[\frac{e^x}{(x+1)^2}-\cancel{\int\frac{(-2)}{(x+1)^3}e^x\mathrm{d}x}\right]\cancel{-2\int\frac{e^x}{(x+1)^3}\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{e^x}{x+1}+C.$$

(方法2) $I=\int\frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}e^x\,\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{e^x}{x+1}\mathrm{d}x-\int\frac{e^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{e^x}{x+1}\mathrm{d}x+\int e^x\,\mathrm{d}\frac{1}{(x+1)}$$

$$=\cancel{\int\frac{e^x}{x+1}\mathrm{d}x}+\frac{e^x}{x+1}-\cancel{\int\frac{e^x}{x+1}\mathrm{d}x}=\frac{e^x}{x+1}+C.$$

4. $I=\underbrace{\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x}_{u\,\mathrm{d}v}\;(a>0).$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

迎合分母

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-I+a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

故 $I=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

5. 证明递推公式

$$I_n = \int \tan^n x \, dx$$

$$= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

为产生 I_{n-2}

证(方法1) $I_n = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx$

$$= \int \tan^{n-2} x \, d(\tan x) - I_{n-2}$$

$$= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$$

(方法2)

$$I_n = \int \tan^n x \, \mathrm{d}x = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

因 $I_n + I_{n-2} = \int (\tan^n x + \tan^{n-2} x) \, \mathrm{d}\, x$

$$= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x \, \mathrm{d}\, x$$

$$= \int \tan^{n-2} x \, \mathrm{d} \tan x = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + C$$

注　由$I_0 = x + C$，$I_1 = -\ln|\cos x| + C$，求$I_2, I_3, \cdots$等。

6. 求 $I=\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

解 令 $t=\ln x$，则 $x=e^t$, $\mathrm{d}x=e^t\,\mathrm{d}t$

$$\therefore\quad I=\int e^t\sin t\,\mathrm{d}t \longrightarrow \boxed{=e^t\sin t-\int e^t\cos t\,\mathrm{d}t}$$

$\sin t$	$\cos t$	$-\sin t$	
	$+$	$-$	$+\int$
e^t	e^t	e^t	

$$=e^t(\sin t-\cos t)-I$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C$$

$$=\frac{1}{2}x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$$

可用表格法求
多次分部积分