第六章

习题课

- 一、主要内容
- 二、典型例题

一、主要内容

理　论　依　据

名称释译

微　元　法

所求量的特点

解　题　步　骤

定积分应用中的常用公式

目 录　上 页　下 页　返 回　结 束

1、理论依据

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则它的变上限积分

$$U(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (1)$$

是 $f(x)$ 的一个原函数 ,即 $dU(x)=f(x)dx$,

于是

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b dU=U \qquad (2)$$

这表明连续函数的定积 分就是 (1) 的微分的定积分 .

2、名称释译

由理论依据 (2) 知,所求总量 A 就是其微分 $dU = f(x)dx$ 从 a 到 b 的无限积累(积分):

$$U = \int_a^b f(x)dx$$

这种取微元 $f(x)dx$ 计算积分或原函数的方法称元素(微元)法.

3、所求量的特点

(1) U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a,b]$ 有关的量；

(2) U 对于区间 $[a,b]$ 具有可加性，就是说，如果把区间 $[a,b]$ 分成许多部分区间，则 U 相应地分成许多部分量，而 U 等于所有部分量之和；

(3) 部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$；

就可以考虑用定积分来表达这个量 U.

4、解题步骤

1° 根据问题的具体情况，选取一个变量例如 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a,b]$；

2° 设想把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，取其中任一小区间并记为 $[x, x+dx]$，求出相应于这小区间的部分量 ΔU 的近似值．如果 ΔU 能近似地表示为 $[a,b]$ 上的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积，就把 $f(x)dx$ 称为量 U 的元素且记作 $\mathrm{d}U$，即

$$dU = f(x)dx;$$

3° 以所求量 U 的元素 $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，

在区间 $[a,b]$ 上作定积分，得

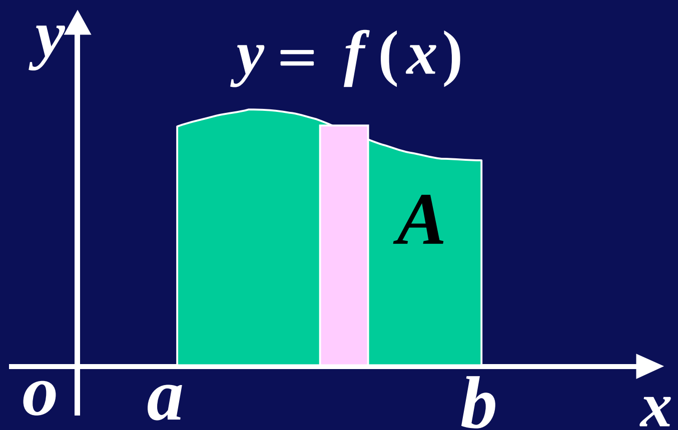
$$U=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

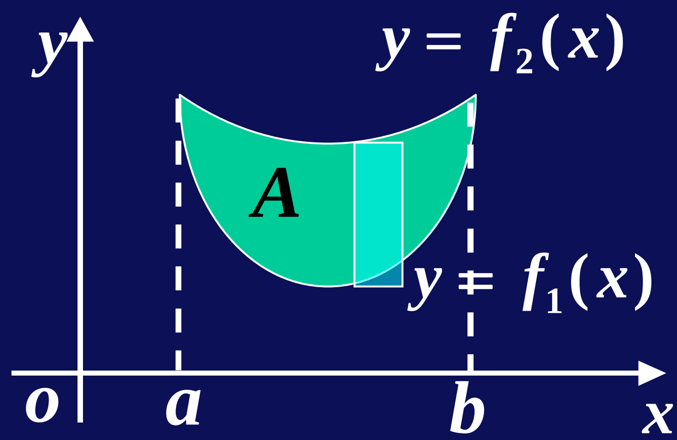
即为所求量 U .

5、定积分应用的常用公式

(1) 平面图形的面积

直角坐标情形





$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

参数方程所表示的函数

如果曲边梯形的曲边 $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0,\ x \in [a,b])$

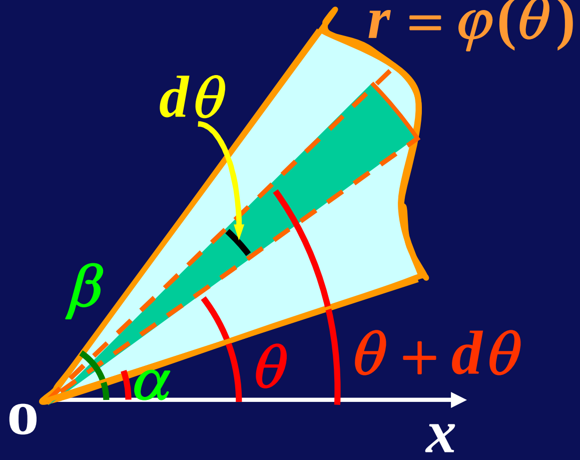
由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 给出，而 $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b,$

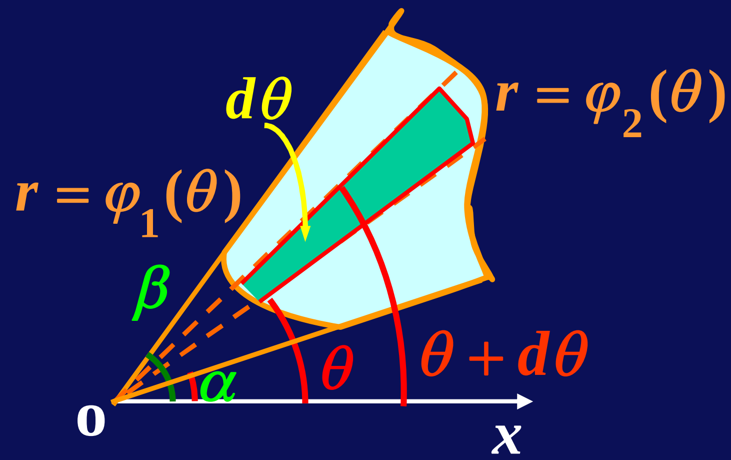
则曲边梯形的面积

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

在 $[\alpha, \beta]$（或 $[\beta, \alpha]$）上 $x = \varphi(t)$ 具有连续导数，$y = \psi(t)$ 连续.

极坐标情形

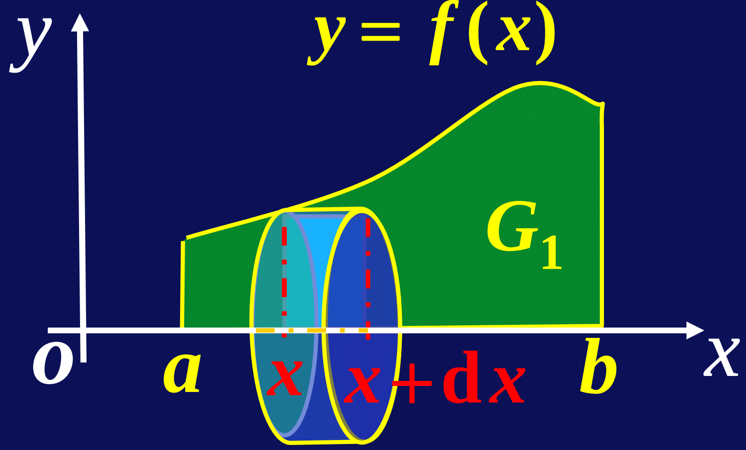




$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi(\theta)]^2 d\theta$$

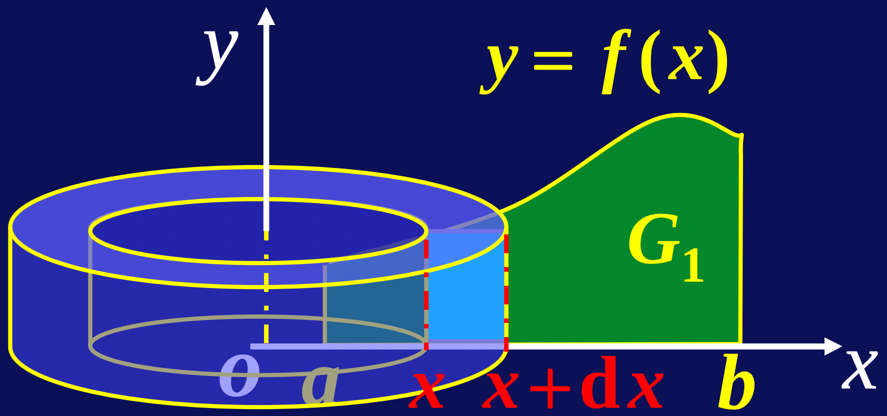
$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi_2^2(\theta)-\varphi_1^2(\theta)]d\theta$$

(2) 体积



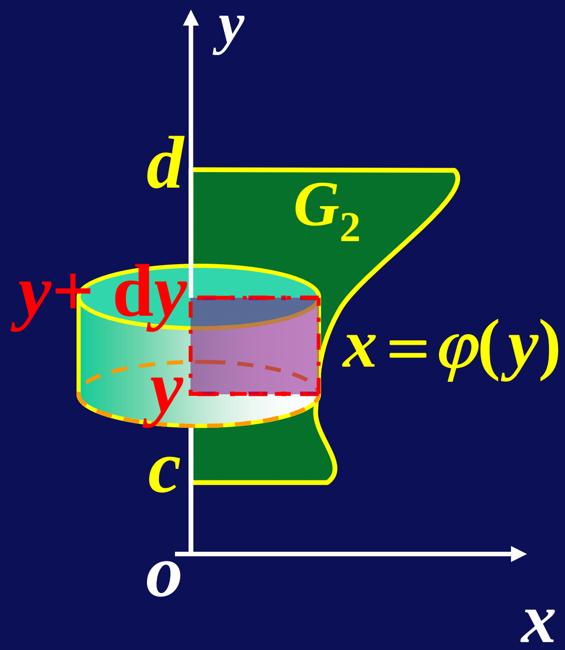
- G_1 绕 x 轴旋转

$$V_x = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \mathrm{d}x$$



- G_1 绕 y 轴旋转

$$V_y = \int_a^b 2\pi x |f(x)| \mathrm{d}x$$



- G_2 绕 y 轴旋转

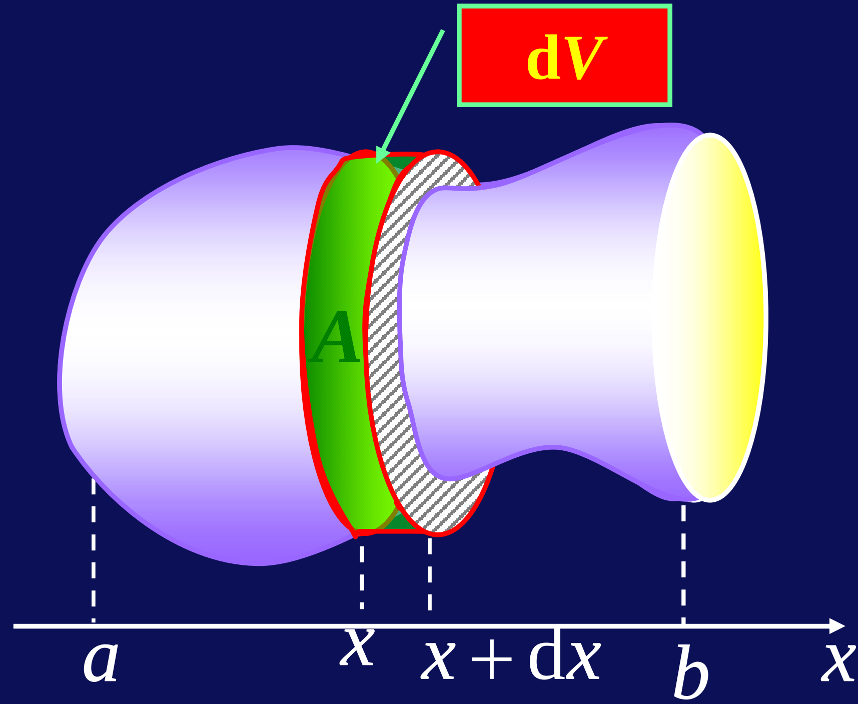
$$V_y = \int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 \,\mathrm{d}\, y$$

- G_2 绕 x 轴旋转

$$V_x = \int_c^d 2\pi\, y\,|\varphi(y)|\,\mathrm{d}\, y$$

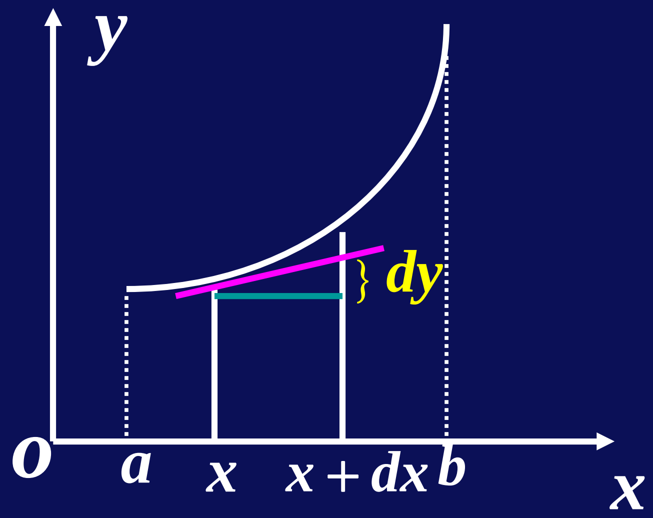
平行截面面积为已知的立体的体积

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}\,x$$



(3) 平面曲线的弧长

A．曲线弧为 $y = f(x)$



弧长 $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

B．曲线弧为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

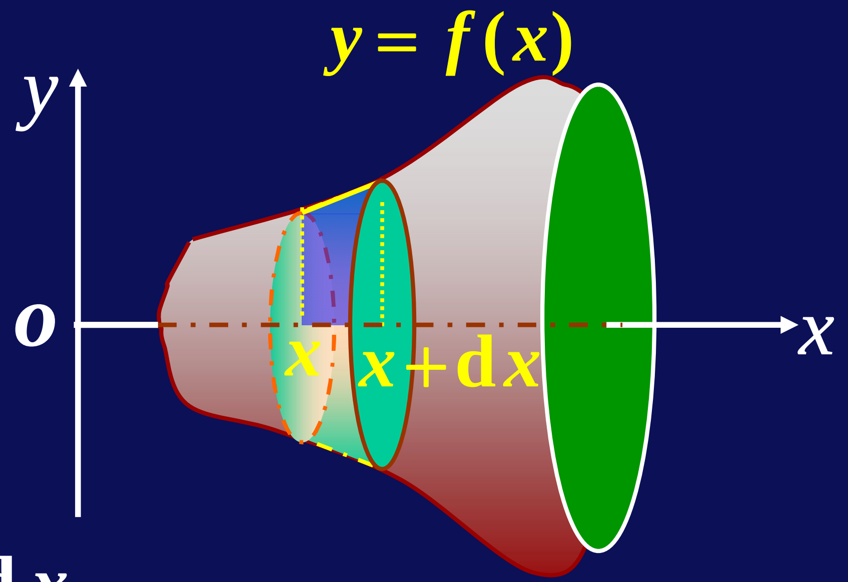
其中$\varphi(t), \psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上具有连续导数

弧长 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$

C. 曲线弧为 $r=r(\theta)\quad(\alpha\le\theta\le\beta)$

弧长 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$

(4) 旋转体的侧面积



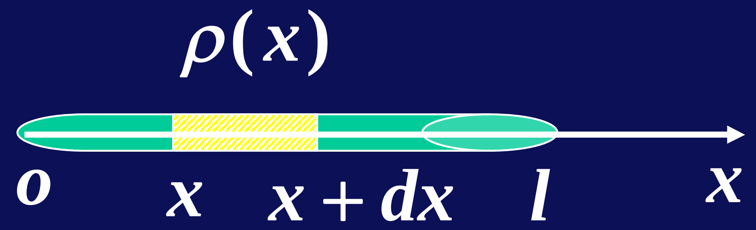
$y=f(x)\ge 0,\quad a\le x\le b$

$$S_{侧}=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

(5) 细棒的质量 ($\rho(x)$ 为线密度)

$$m=\int_0^l \mathrm{d}m$$

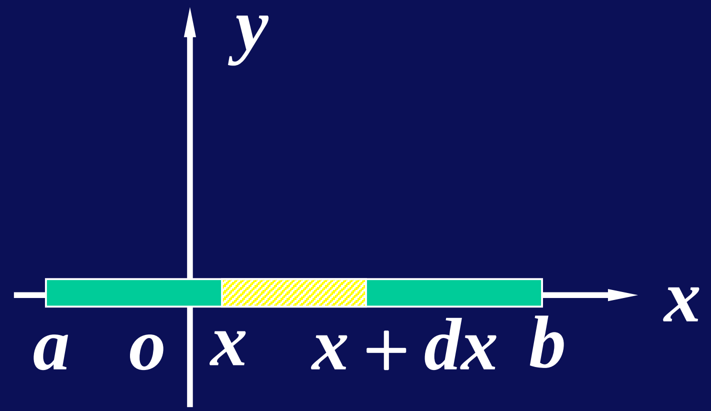
$$=\int_0^l \rho(x)\,\mathrm{d}x$$



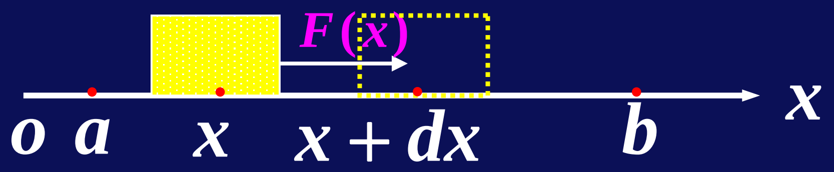
(6) 转动惯量

$$I_y=\int_a^b \mathrm{d}I_y$$

$$=\int_a^b x^2\rho(x)\,\mathrm{d}x$$



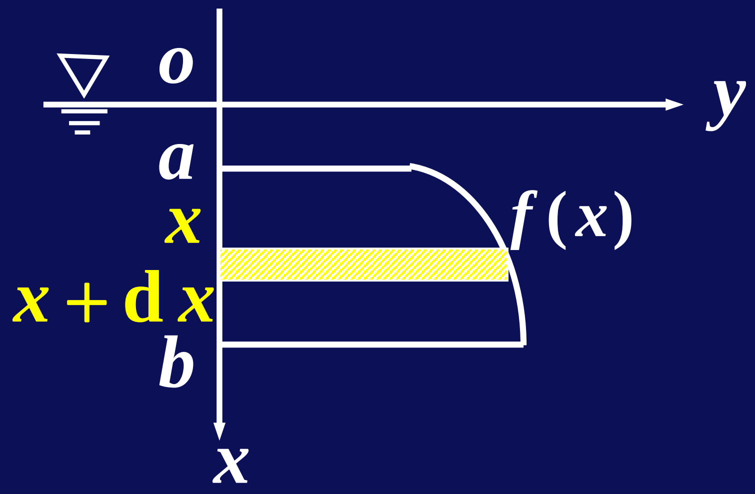
(7) 变力所作的功



$$W = \int_a^b \mathrm{d}W$$

$$= \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

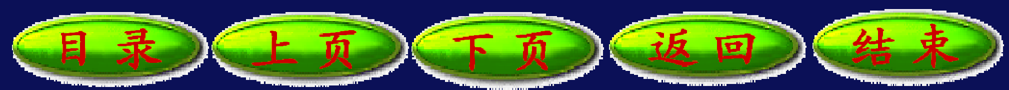
(8) 水压力



$$P = \int_a^b \mathrm{d}P$$

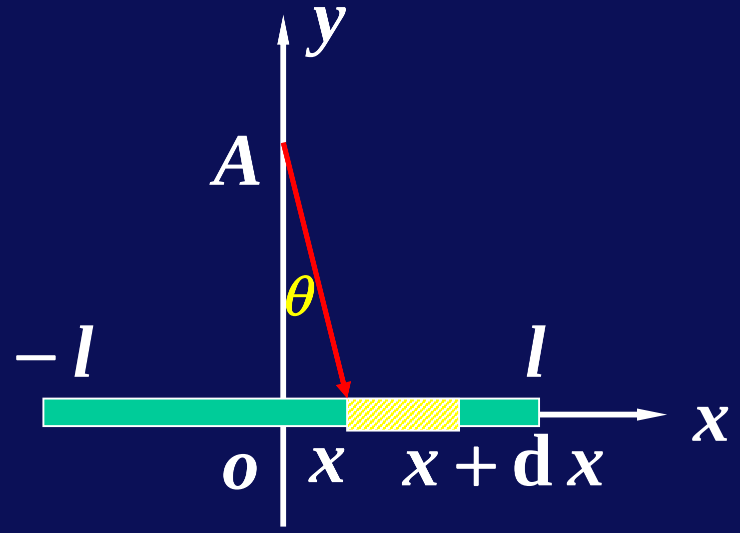
$$= \int_a^b \mu x f(x)\,\mathrm{d}x$$

(μ 为比重)



(9) 引力

$$F_y = \int_{-l}^{l} \mathrm{d}F_y = \int_{-l}^{l} \frac{Ga\rho\,\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$F_x = 0.$ （G 为引力系数）

(10) 函数的平均值 $\overline{y} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

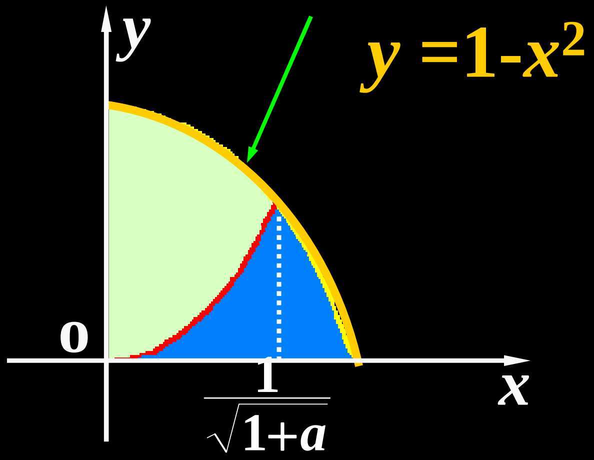
(11) 均方根 $\overline{y} = \sqrt{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$

二、典型例题

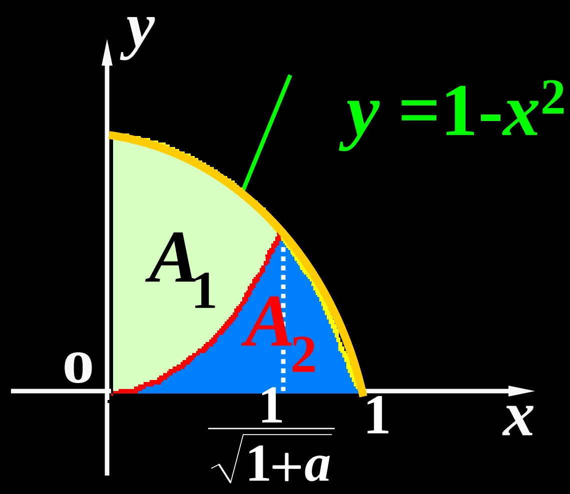
例1 设曲线 L_1： $y=1-x^2\ (0\le x\le 1)$, x轴和y轴所围区域被曲线 L_2： $y=ax^2$分成面积相等的两部分，其中常数 $a>0$, 试确定a的值.

解 求两曲线交点坐标：

$$\begin{cases} y=1-x^2 \\ y=ax^2 \end{cases} \quad (0\le x\le 1)$$



解得 $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+a}}, \quad y = \dfrac{a}{1+a}.$



一方面，

$$A_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} [(1-x^2) - ax^2]\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} [1-(1+a)x^2]\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+a}} - [\frac{1+a}{3} x^3]\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} = \frac{2}{3\sqrt{1+a}}$$

$$A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

$$(a < b)$$

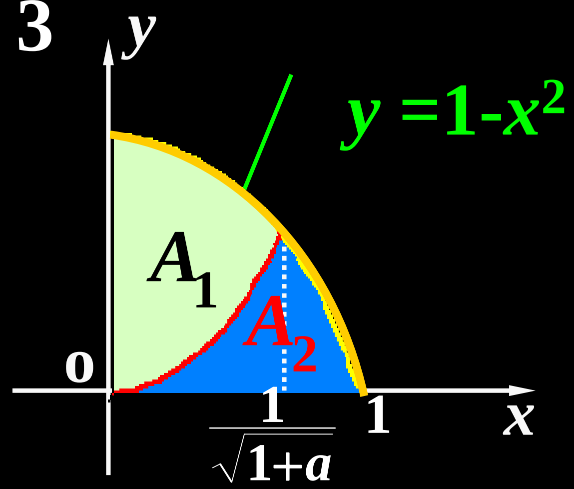
另一方面，

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = \frac{2}{3}$$

又依题设， $A_1 = A_2$， $\therefore$ $A_1 = \dfrac{1}{3}$

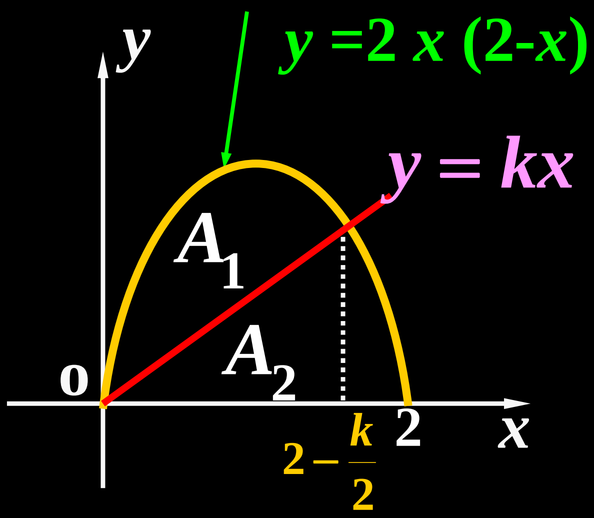
从而 $\dfrac{2}{3\sqrt{1+a}} = \dfrac{1}{3}$,

解得 $a = 3.$



类似题 设 D是由抛物线 $y=2x(2-x)$与x轴所围成的区域，直线 $y=kx$将区域 D分为面积相等的两部分，求 k的值.

解 求交点：$\begin{cases} y=2x(2-x) \\ y=kx \end{cases}$



解得 $x=2-\dfrac{k}{2}$,

$$y=(2-\frac{k}{2})k.$$

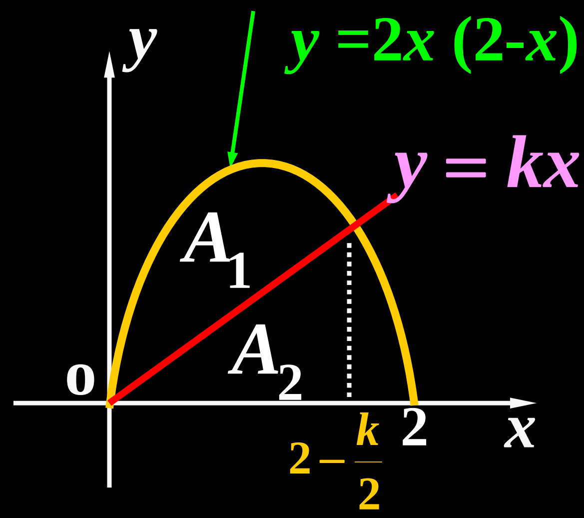
一方面，

$$A_1 = \int_0^{2-\frac{k}{2}} [2x(2-x) - kx]\,dx$$

$$= \int_0^{2-\frac{k}{2}} [(4-k)x - 2x^2]\,dx$$

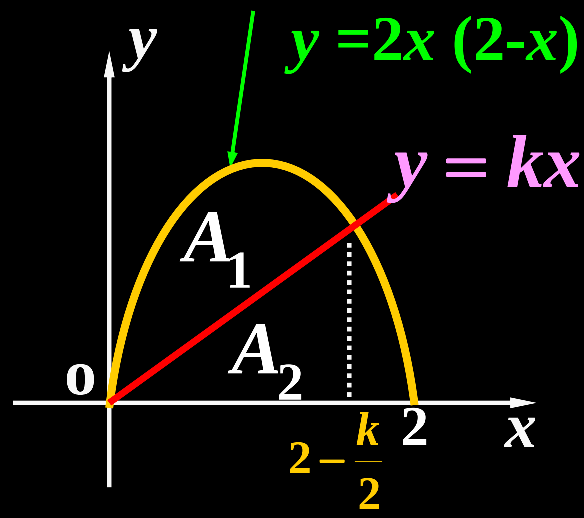
$$= (4-k)\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{2-\frac{k}{2}} - \frac{2}{3}x^3\Big|_0^{2-\frac{k}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}(2-\frac{k}{2})^3$$



另一方面，

$$A_1 + A_2 = \int_0^2 2x(2-x)\,dx = \frac{8}{3}$$



又依题设， $A_1 = A_2,$

$$\therefore \quad A_1 = \frac{4}{3}$$

从而 $\frac{1}{3}(2-\frac{k}{2})^3 = \frac{4}{3},$ 解得 $k = 4 - 2\sqrt[3]{4}.$

例2 求抛物线 $y=1-x^2$ 在 $(0,1)$ 内的一条切线，使它与两坐标轴和抛物线所围图形的面积最小.

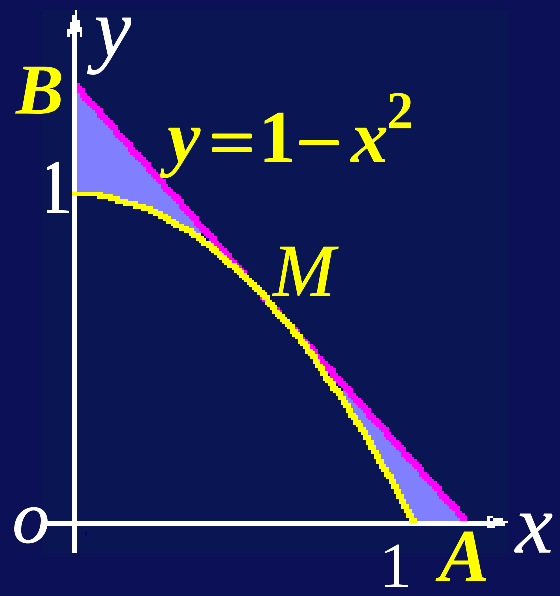
解 设抛物线上切点为 $M(x,1-x^2)$

则该点处的切线方程为

$$Y-(1-x^2)=-2x(X-x)$$

它与 x, y 轴的交点分别为

$$A(\frac{x^2+1}{2x},0),\ B(0,\ x^2+1)$$



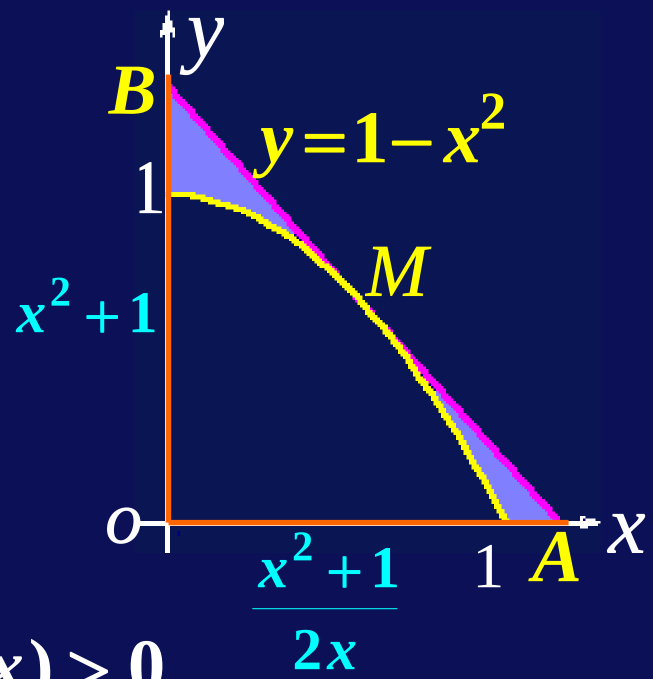
所围图形的面积:

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^2}{2x}-\int_0^1(1-x^2)\,\mathrm{d}\,x=\frac{(x^2+1)^2}{4x}-\frac{2}{3}$$

$$S'(x)=\frac{1}{4x^2}(x^2+1)\cdot(3x^2-1)$$

令 $S'(x)=0$,

得[0 , 1] 上的唯一驻点 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



$x<\frac{\sqrt{3}}{3}$, $S'(x)<0$; $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$, $S'(x)>0$

目录 上页 下页 返回 结束

因此 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 是 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上的唯一极小点,

从而为最小值点．代入

$$Y-(1-x^2)=-2x(X-x)$$

得所求切线为

$$Y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}X+\frac{4}{3}.$$

例3 设 $0 < k < 1$. 试确定 k, 使由抛物线 $y = 2x(2-x)$与直线 $x = k, x = 2k$ 及 $y = 0$所围成的图形绕 y轴旋转所得旋转体的体积最大 .

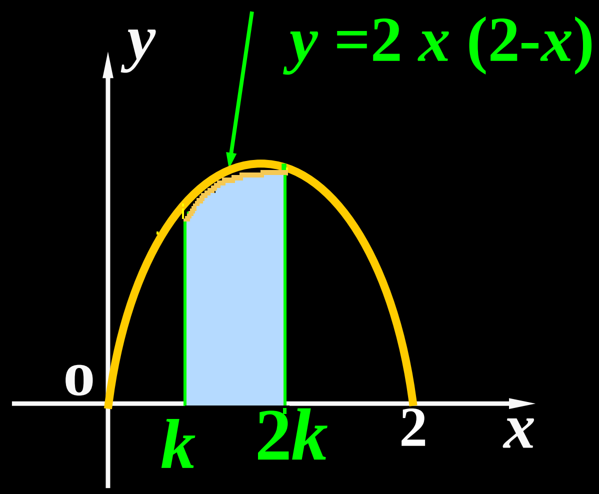
解 $V \ldots - x)\, dx$

$$V_y = 2\pi\int_a^b x\, f(x)\, dx$$

$$(a < b)$$

$$= 4\pi\int_k \ldots x \ldots (2 - x)\, dx$$

$$(0 < k < 1)$$



$$V(k)=4\pi\int_k^{2k}x^2(2-x)\,dx,\quad (0<k<1)$$

$$V'=4\pi[(2k)^2(2-2k)\cdot 2-k^2(2-k)]$$

$$=4\pi k^2(14-15k)=-60\pi k^2(k-\frac{14}{15})$$

令 $V'=0$，得唯一驻点：$k=\dfrac{14}{15}$

当 $0<k<\dfrac{14}{15}$ 时，$V'>0$; 当 $\dfrac{14}{15}<k<1$ 时，$V'<0$.

$\therefore\quad k=\dfrac{14}{15}$ 是 V 的极大值点，从而是 V 的最大值点.

类似题 设非负函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足

$$x f'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$$

曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 1$ 及坐标轴所围图形

面积为 2 ,

(1) 求函数 $f(x)$;

(2) a 为何值时, 所围图形绕 x 轴一周所得旋转体

体积最小 ?

解 (1) 当 $x \neq 0$ 时, 由所给关系式

$$x f'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2,$$ 得

$$\frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{3}{2}a,$$ 即 $$\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{3}{2}a$$

故得 $$f(x) = \frac{3}{2}ax^2 + Cx$$

又 $\because$ $$2 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}ax^2 + Cx\right)\mathrm{d}x = \frac{a}{2} + \frac{C}{2}$$

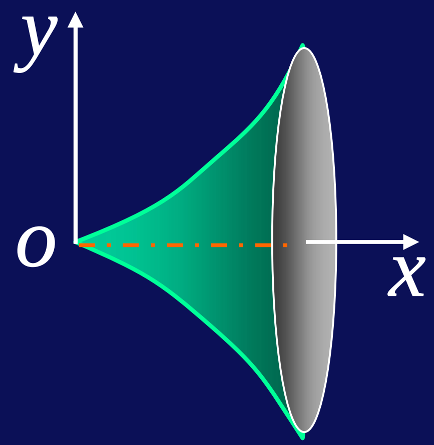
$\therefore$ $C = 4 - a,$ 从而 $$f(x) = \frac{3}{2}ax^2 + (4-a)x.$$

目录 上页 下页 返回 结束

(2) 旋转体体积

$$V=\int_0^1 \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{10}a^2+a+16\right)$$

令 $V'=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{5}a+1\right)=0$，得 $a=-5$



又 $V''\Big|_{a=-5}=\frac{\pi}{15}>0,$

$\therefore\ a=-5$ 为唯一极小点,

因此 $a=-5$ 时 V 取最小值 .

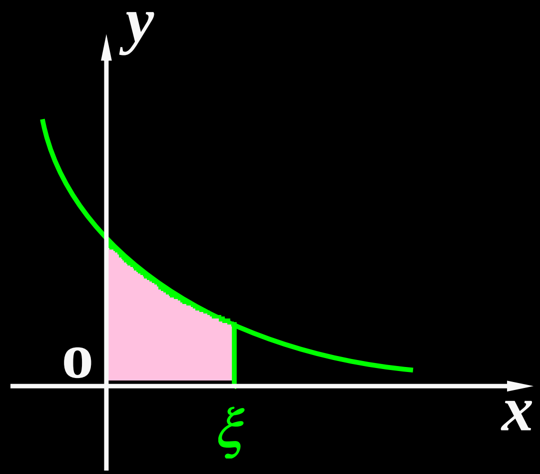
目 录　上 页　下 页　返 回　结 束

例4 设曲线 $y = e^{-x}$ $(x \ge 0)$.

(1) 把曲线 $y = e^{-x}$, x轴，y轴和直线 $x = \xi(\xi > 0)$ 所围平面图形绕 x轴旋转一周，得一旋转 体，求此旋转体体积 $V(\xi)$；并求满足：

$$V(a) = \frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty} V(\xi)$$

的a.



解 $V(\xi) = \int_0^\xi \pi\, y^2 dx$

$$= \int_0^\xi \pi\, e^{-2x} dx$$

$$= \int_0^{\xi} \pi e^{-2x} dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2\xi})$$

$$\therefore \quad \lim_{\xi \to +\infty} V(\xi) = \lim_{\xi \to +\infty} \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2\xi}) = \frac{\pi}{2}$$

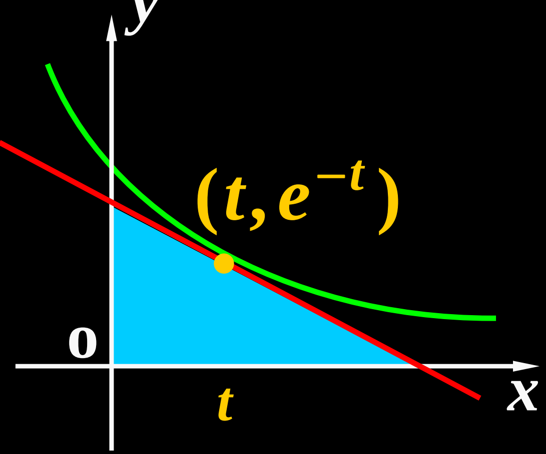
由 $\quad V(a) = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{\xi \to +\infty} V(\xi),$ 得

$$\frac{\pi}{2}(1 - e^{-2a}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad e^{-2a} = \frac{1}{2},$$

解得 $\quad a = \dfrac{1}{2} \ln 2.$

(2) 在曲线 $y = e^{-x}$ $(x \geq 0)$上找一点，使过该点的切线与两个坐标轴所 夹的平面图形的面积最大，并求出该面积 .

解 设切点为 (t, e^{-t})



则切线方程为:

$$y - e^{-t} = -e^{-t}(x - t).$$

令 $x = 0$, 得 y截距:

$$Y = (1 + t)e^{-t}$$

令 $y=0$， 得 x 截距： $X=1+t$

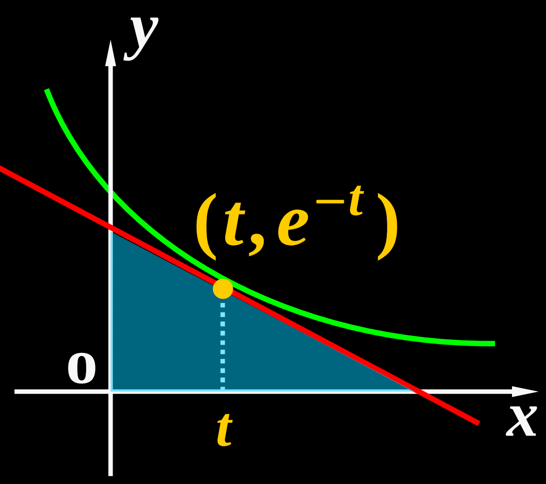
面积： $A=\frac{1}{2}XY=\frac{1}{2}(1+t)^2e^{-t}\quad(t\geq 0)$

$$A'=\frac{1}{2}[2(1+t)e^{-t}-(1+t)^2e^{-t}]$$

$$=\frac{1}{2}(1-t^2)e^{-t}$$

令 $A'=0$， 得唯一驻点：

$t=1.\quad(t=-1$舍去$)$



又 $\because \quad A'' = \frac{1}{2}(t^2 - 2t - 1)e^{-t}$,

$A''(1) = -e^{-1} < 0$

$\therefore$ 当$t = 1$时，A有极大值，从而有最大 值.

所求切点为： $(1, e^{-1})$;

最大面积为： $A_{\max} = \frac{1}{2}(1+1)^2 e^{-1} = 2e^{-1}$.

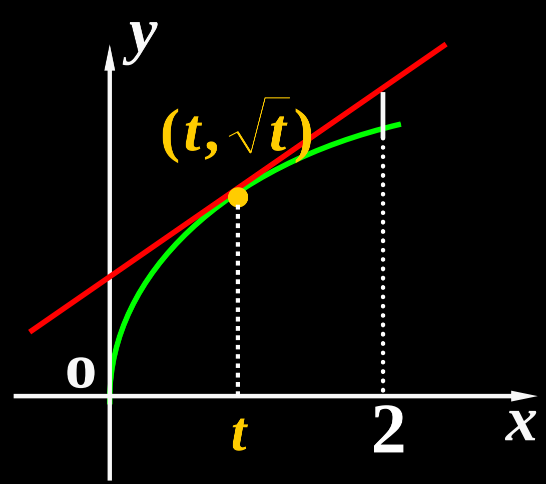
类似题　求曲线 $y=\sqrt{x}$的一条切线，使该曲线与切线 l及直线 $x=0, x=2$所围成的平面图形的面积最小．

解　设切点为 $(t,\sqrt{t})$

则切线方程为：

$$y-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$$

即　$$y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}.$$

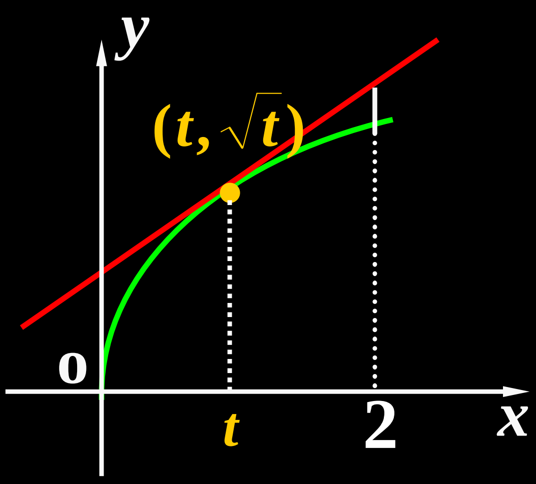


所围图形的面积：

$$A=\int_0^2[(\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2})-\sqrt{x}]dx$$

$$=t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}\sqrt{2}\quad(0<t\le 2)$$

$$A'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t}{t^{3/2}}$$



令 $A'=0$, 得唯一驻点：

$t=1.$

$$A' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-t}{t^{3/2}}$$

当 $0 < t < 1$ 时， $A' < 0;$

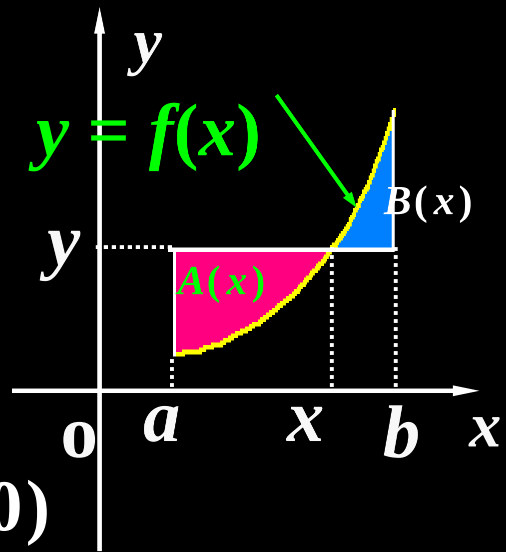
当 $1 < t < 2$ 时， $A' > 0,$

$\therefore$ 当 $t = 1$ 时，A 有极小值，从而有最小 值.

所求切线方程为： $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$

例5 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f'(x)>0, f(a)\ge 0$，证明：对图示的两个面积函数 $A(x)$和$B(x)$存在唯一的 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{A(\xi)}{B(\xi)}=2017.$$



分析 $\dfrac{A(\xi)}{B(\xi)}=2017$

$$\Leftrightarrow A(\xi)-2017B(\xi)=0 \quad (B(\xi)\ne 0)$$

令 $F(x)=A(x)-2017B(x)$

则问题转化为证明： $F(x)$在(a,b)内有唯一的零点 .

证 令 $F(x)=A(x)-2017B(x)$

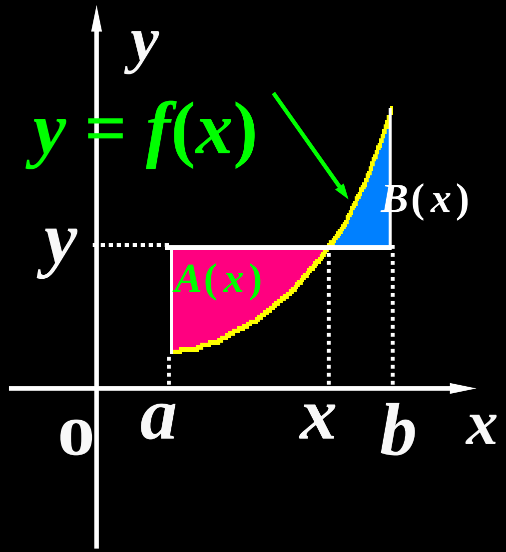
$\because\quad f'(x)>0,\quad x\in[a,b]$

$\therefore\quad f(x)$在$[a,b]$上单调增加，

又 $\because\quad f(a)\geq 0,$

$\therefore\quad \forall\ x\in(a,b]$

有 $\quad f(x)>f(a)\geq 0$

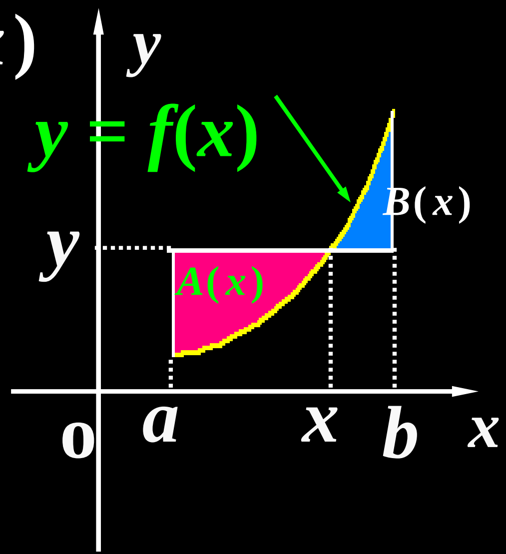


于是 $A(x) = \boxed{f(x)(x-a)} - \int_a^x f(t)dt$

矩形面积

$$B(x) = \int_x^b f(t)dt - f(x)(b-x)$$

$$A(a) = 0, \quad B(b) = 0.$$



1° 零点的存在性

$\because \quad f(x)$在$[a,b]$上可导

$\therefore A(x), B(x), F(x)$均在$[a,b]$上可导，且

$$A'(x) = [\,f'(x)(x-a) + \cancel{f(x)}\,] - \cancel{f(x)}$$

$$= f'(x)(x-a) > 0 \qquad (\forall\ x \in (a,b]\,)$$

$\therefore \quad A(x)$在$[a,b]$上单调增加

故 $\forall\ x \in (a,b]$， 有 $A(x) > A(a) = 0$

$$A(b) > A(a) = 0$$

$$B'(x) = -\cancel{f(x)} - [\,f'(x)(b-x) - \cancel{f(x)}\,]$$

$$= -f'(x)(b-x) < 0 \qquad (\forall\ x \in [a,b)\,)$$

$\therefore \quad B(x)$在$[a,b]$上单调减少

故 $\forall\, x \in [a,b)$， 有 $B(x) > B(b) = 0$

$$B(a) > B(b) = 0$$

$$\therefore \quad F(a) = A(a) - 2017\,B(a)$$

$$= 0 - 2017\,B(a) < 0$$

$$F(b) = A(b) - 2017\,B(b)$$

$$= A(b) - 2017 \cdot 0 > 0$$

由零点定理知，$F(x)$在(a,b)内至少有一个零点 .

2° 零点的至多性

依题设， $f'(x) > 0, \quad x \in [a,b]$

$\therefore \ F'(x) = A'(x) - 2017B'(x)$

$= f'(x)(x-a) + 2017 f'(x)(b-x) > 0$

$(\forall \ x \in (a,b))$

$\therefore \quad F(x)$在$[a,b]$上单调增加，

从而 F(x)在(a,b)内至多有一个零点 .

综上所述： $F(x)$在(a,b)内有唯一零点 ξ，使

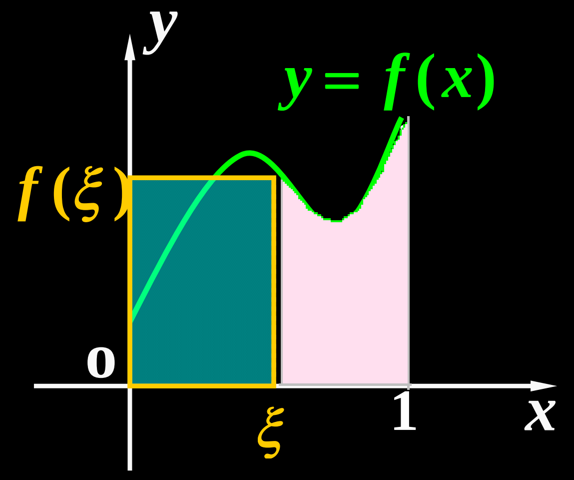
$F(\xi) = 0.$ 又因 $B(x) > 0 \ (x \in (a,b))$

所以命题成立 .

例6 设 $f(x)$是在$[0,1]$上的非负连续函数，证 明：$\exists \xi \in (0,1)$，使得在$[0,\xi]$上以 $f(\xi)$为高的矩形面积，等于在 $[\xi,1]$上以 $y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积.

分析 需证：$\int_{\xi}^{1} f(x)dx = \xi f(\xi)$

$(\exists \xi \in (0,1))$



$$\Leftrightarrow \quad \int_{\xi}^{1} f(x)dx - \xi f(\xi) = 0.$$

有两条思路:

(1) 令 $g(x)=\int_x^1 f(t)dt - x\,f(x)$, 则

$g(x)$在$[0,1]$上连续, 考虑对 $g(x)$用零点定理.

$\boxed{\text{但此路不通!}}$

若 $f(x)\equiv 0$, 则命题显然成立;

若 $f(x)\not\equiv 0$, 则由 $f(x)\geq 0$, 知

虽然 $g(0)=\int_0^1 f(t)dt>0$,

但 $g(1)=-f(1)\leqslant 0$

不能保证： $g(0)g(1) < 0.$

(2) 想 $F'(x) = g(x) = \int_x^1 f(t)dt - x f(x)$

$F(x) = ?$ 考虑对 $F(x)$在[0,1]上用罗尔定理 .

$$F(x) = \int_1^x g(u)du = \int_1^x [\int_u^1 f(t)dt - u f(u)]du$$

$$= \underline{\int_1^x [\int_u^1 f(t)dt]du} - \int_1^x u f(u)du$$

$$= u[\int_u^1 f(t)dt]\Big|_1^x - \int_1^x u[\int_u^1 f(t)dt]'du - \int_1^x u f(u)du$$

$$=\{x[\int_x^1 f(t)dt]-0\}-\cancel{\int_1^x u[-f(u)]du}-\cancel{\int_1^x u\,f(u)\,du}$$

$$=x\int_x^1 f(t)dt.$$

证 令 $F(x)=x\int_x^1 f(t)dt,$ 则

由 $f(x)$的连续性，可知 $F(x)$在[0,1]可导，且

$$F'(x)=\int_x^1 f(t)dt-xf(x)$$

$$F(0)=0\cdot\int_0^1 f(t)dt=0=1\cdot\int_1^1 f(t)dt=F(1)$$

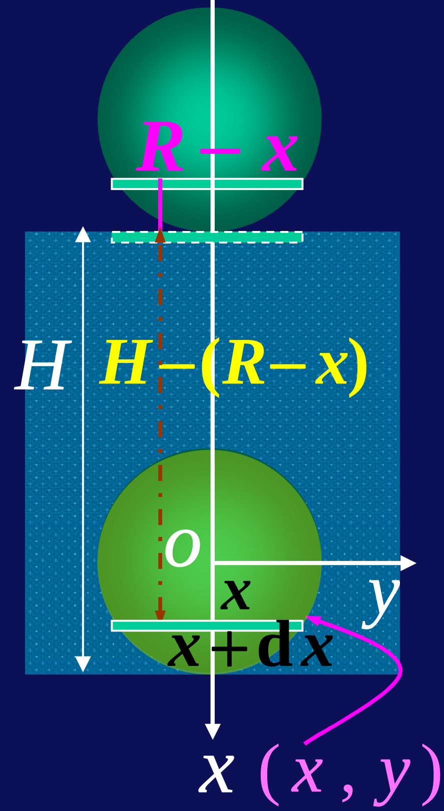
$\therefore$ 由罗尔定理， $\exists \xi \in (0,1)$, 使

$$F'(\xi) = 0$$

即 $\int_{\xi}^{1} f(x)dx - \xi f(\xi) = 0,$

亦即 $\int_{\xi}^{1} f(x)dx = \xi f(\xi).$

例7 半径为 R，密度为 ρ 的球沉入深为 H ($H > 2R$) 的水池底，水的密度 $\rho_0 < \rho$，现将其从水池中取出，需做多少功？



解 建立坐标系如图．则对应 $[x, x + \mathrm{d}x]$

上球的薄片提到水面上的功元素为

$$\mathrm{d}W_1 = (\rho - \rho_0)g\cdot\pi y^2\,\mathrm{d}x\cdot(H - R + x)$$

$$= (\rho - \rho_0)g\pi(R^2 - x^2)(H - R + x)\,\mathrm{d}x$$

提出水面后的功元素为

$$\mathrm{d}W_2 = \rho g\pi y^2\,\mathrm{d}x\cdot(R - x) = \rho g\pi(R^2 - x^2)(R - x)\,\mathrm{d}x$$

因此功元素为:

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_1 + \mathrm{d}W_2$$

$$= \mathrm{g}\pi[(\rho-\rho_0)H + \rho_0(R-x)](R^2-x^2)\mathrm{d}x$$

球从水中提出所做的功为

$$W = \mathrm{g}\pi\int_{-R}^{R}[(\rho-\rho_0)H + \rho_0(R-\underline{x)](R^2-x^2})\mathrm{d}x$$

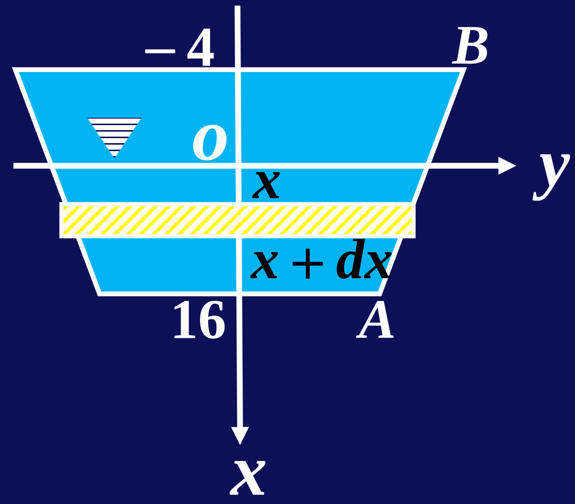
"偶倍、奇零"

$$= 2\mathrm{g}\pi[(\rho-\rho_0)H + \rho_0 R]\int_0^R(R^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3[(\rho-\rho_0)H + \rho_0 R]\mathrm{g}$$

例8 一等腰梯形闸门，如图所示，梯形的上下底分别为 50 米和 30 米，高为 20 米，如果闸门顶部高出水面 4 米，求闸门一侧所受的水的静压力．

解 如图建立坐标系,



则梯形的腰 AB 的方程为

$$y = -\frac{1}{2}x + 23.$$

此闸门一侧受到静水压力为

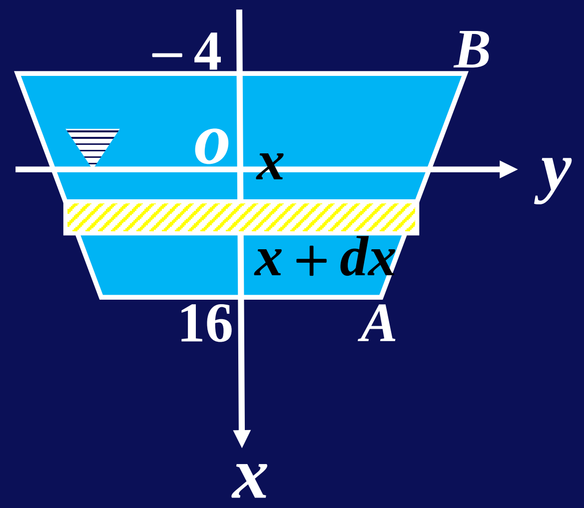
$$P = 2\int_0^{16} \rho g x(-\frac{1}{2}x + 23)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \rho g(-\frac{x^3}{3} + 23x^2)\Big|_0^{16}$$

$$= \rho g(-\frac{1}{3}\times 4096 + 23\times 256)$$

$$= 4522.67\,\rho g$$

$$\approx 4.43\times 10^7\ (\text{牛}).$$



目录 上页 下页 返回 结束

例9 $y=2x$ 与 $y=4x-x^2$ 所围区域绕 $y=2x$ 旋转所得旋转体体积.

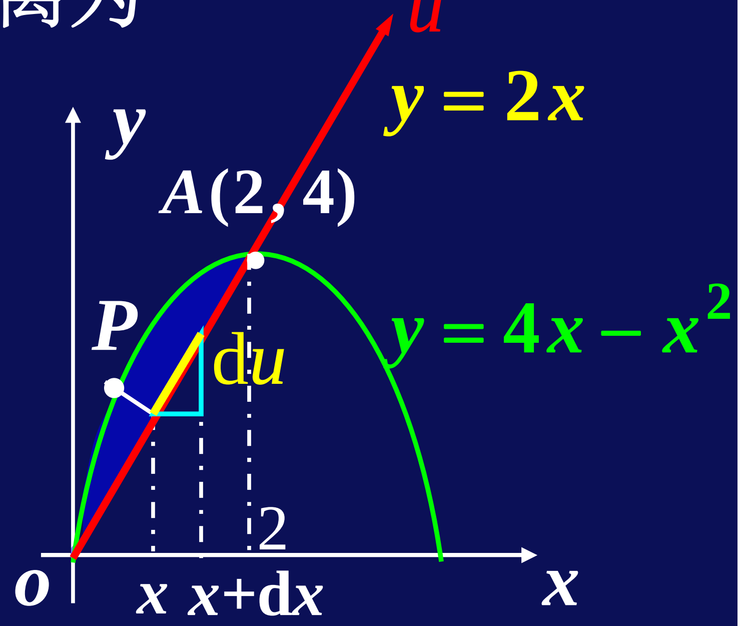
解 曲线与直线的交点坐标为 $A(2,4)$, 曲线上任一点 $P(x,4x-x^2)$ 到直线 $y=2x$ 的距离为

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|x^2-2x\right|$$

以 $y=2x$ 为数轴 u(如图), 则

$$\mathrm{d}u=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$

$$=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(2\mathrm{d}x)^2}=\sqrt{5}\,\mathrm{d}x$$



$$\mathrm{d}V=\pi\rho^2\,\mathrm{d}u \qquad (\mathrm{d}u=\sqrt{5}\,\mathrm{d}x)$$

$$=\pi\cdot\frac{1}{5}(x^2-2x)^2\cdot\sqrt{5}\,\mathrm{d}\,x$$

故所求旋转体体积为

$$V=\pi\int_0^2\frac{1}{5}(x^2-2x)^2\sqrt{5}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{16}{75}\sqrt{5}\pi$$