第六节

多元函数微分学的应用

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

（一）几何应用

回顾: 平面曲线的切线与法线

① 已知平面光滑曲线 $y=f(x)$, 在点 (x_0,y_0) 有

切线方程 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ $(f'(x_0)\neq 0)$

② 若平面光滑曲线方程为 $F(x,y)=0$, 因

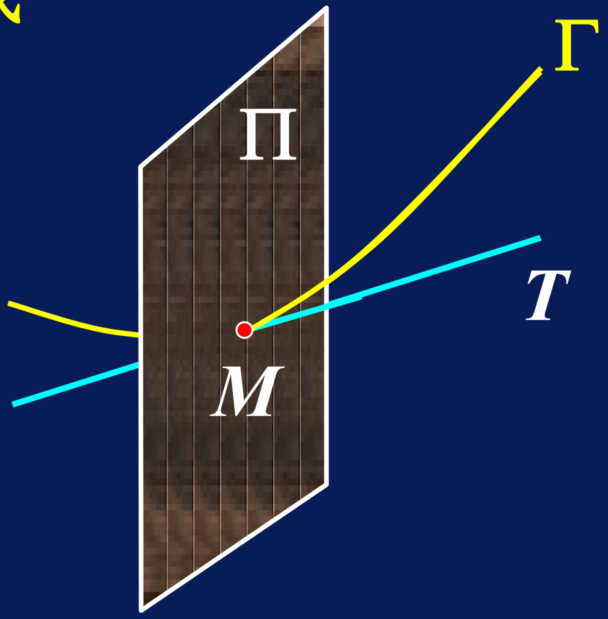
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$, 故在点 (x_0,y_0) 有

切线方程 $F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

法线方程 $F_y(x_0,y_0)(x-x_0)-F_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

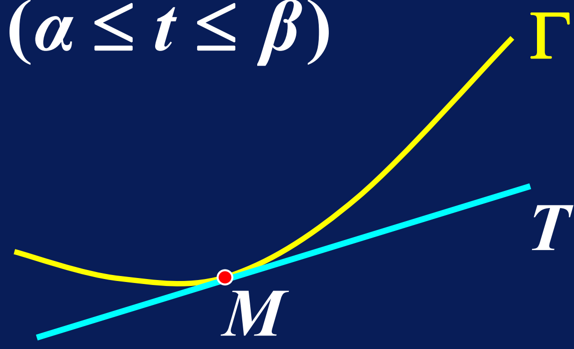
1.空间曲线的切线与法平面

空间光滑曲线Γ在点 M 处的**切线**为此点处割线的极限位置.过点 M 与切线垂直的平面称为曲线在该点的**法平面**.



(1) 曲线方程为参数方程的情形

$\Gamma: \quad x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta)$



写成向量形式:

$$\vec{r}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$$

当 $\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$ 都在 t_0 可导，由第七章知

$$\vec{r}'(t_0)=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

Γ 上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线的方向向量

其中 $x_0=\varphi(t_0),\ y_0=\psi(t_0),\ z_0=\omega(t_0)$.

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

Γ上点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程

此处要求$\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$不全为0，如个别为0，则理解为相应的分子为 0 .

$\vec{T}=(\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t))$ ——— 称为曲线 Γ的切向量

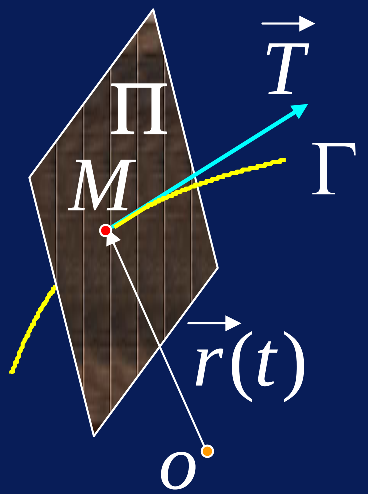
$\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$:

曲线 Γ上点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切向量 . 指向参数t增大的方向.

$\vec{T}$ 也是法平面的法向量, 因此得

曲线 Γ 上点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的

法平面方程



$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

注 若光滑曲线 Γ 表示为:

$$\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$$

则在点 $M(x_0, y_0, z_0)$处, 切向量:

$$\vec{T} = \{1, \varphi'(x_0), \psi'(x_0)\}$$

切线方程:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\varphi'(x_0)} = \frac{z - z_0}{\psi'(x_0)}$$

法平面方程:

$$(x - x_0) + \varphi'(x_0)(y - y_0) + \psi'(x_0)(z - z_0) = 0$$

(2) 曲线方程为一般方程的情形

$$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=x\\y=\varphi(x)\\z=\psi(x)\end{cases}$$

$$\left(\text{若}\ J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0\right)$$

则曲线 Γ 在$M(x_0,y_0,z_0)$处的切向量:

$$\vec{T}=\{1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\}$$

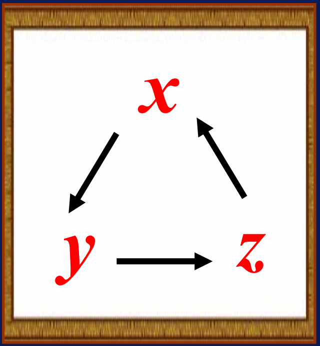
切向量求法之一

$$=\frac{1}{J}\left\{J,\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}\right\}_M,$$

或 $\vec{T}=\left\{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right\}$

于是在点 $M(x_0,y_0,z_0)$处有

切向量求法之二



切线方程:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程为:

$$\left.\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_M (x-x_0)+\left.\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}\right|_M (y-y_0)+\left.\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right|_M (z-z_0)=0.$$

2.曲面的切平面与法线

(1) 形如 $z=f(x,y)$ 的曲面的切平面与法线

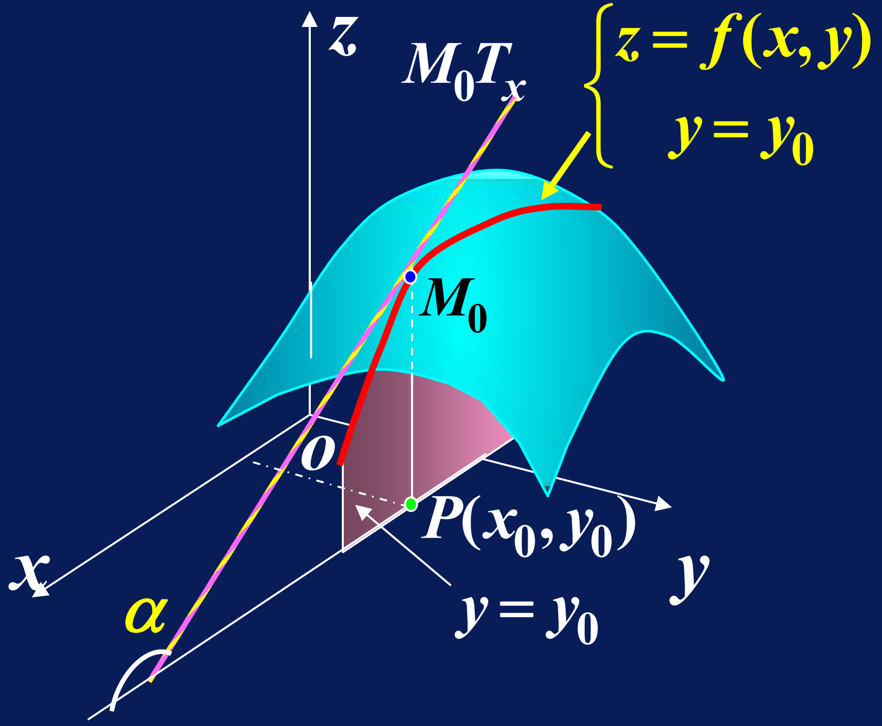
$$\tan\alpha = f_x(x_0,y_0)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$

在点 M_0 处的切线 M_0T_x

对 x 轴的斜率.



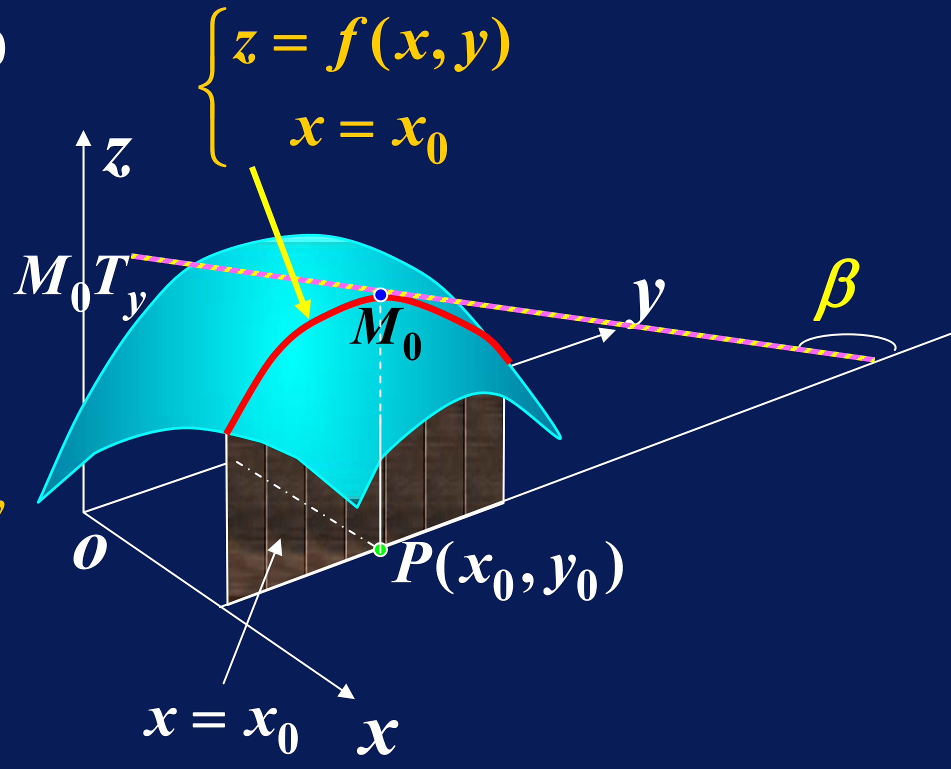
$$\tan\beta = f_y(x_0, y_0)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = x_0 \end{cases}$

在点 M_0 处的切线 M_0T_y

对 y 轴的斜率.



曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点M_0处的切向量为:

$$\overrightarrow{M_0T_x} = \left(1, \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}, \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x}\right)\Bigg|_{M_0}$$

$$= (1, 0, f_x(x, y_0))\big|_{M_0}$$

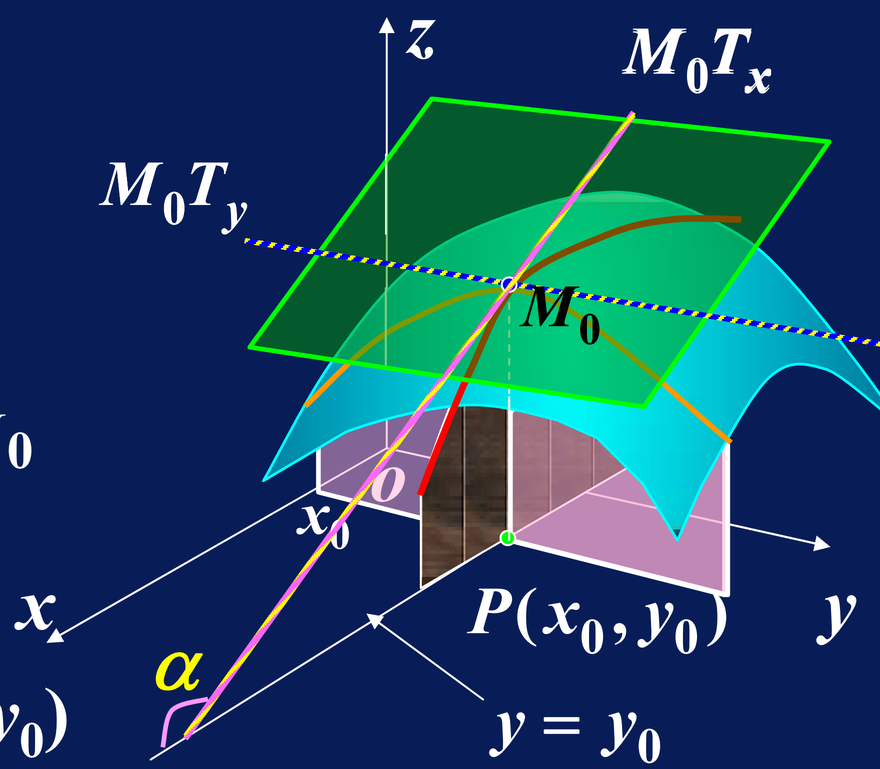
$$= (1, 0, f_x(x_0, y_0))$$

同理，曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$ 在点M_0处的切向量为:

$$\overrightarrow{M_0T_y}=\left(\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y},1,\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y}\right)\bigg|_{M_0}$$

$$=(0,1,f_y(x_0,y))\big|_{M_0}$$

$$=(0,1,f_y(x_0,y_0))$$



定义 设$f(x,y)$在点(x_0,y_0)具有连续偏导数，称由切线M_0T_x与M_0T_y确定的平面为曲面$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的**切平面**.

$$\boxed{\begin{cases} z=f(x,y)\\ x=x_0\end{cases}}$$

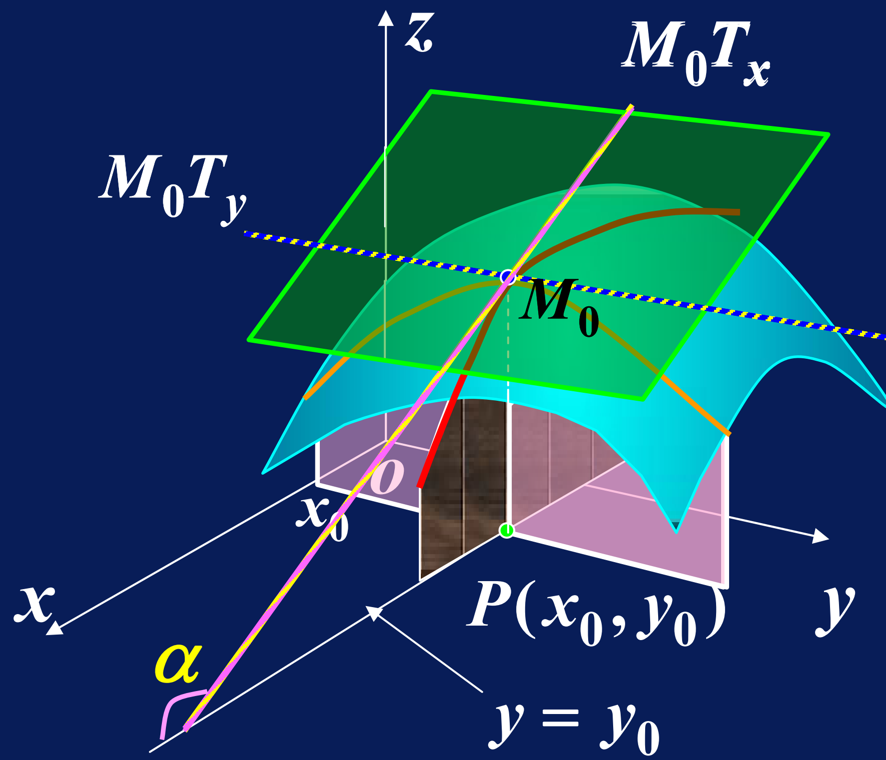
切平面的法向量:

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_0T_x} \times \overrightarrow{M_0T_y}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

$$= -f_x(x_0, y_0)\vec{i} - f_y(x_0, y_0)\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{n} = \pm(f_x(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0),\ -1)$$



曲面$z=f(x,y)$在点M_0的法向量

切平面方程：

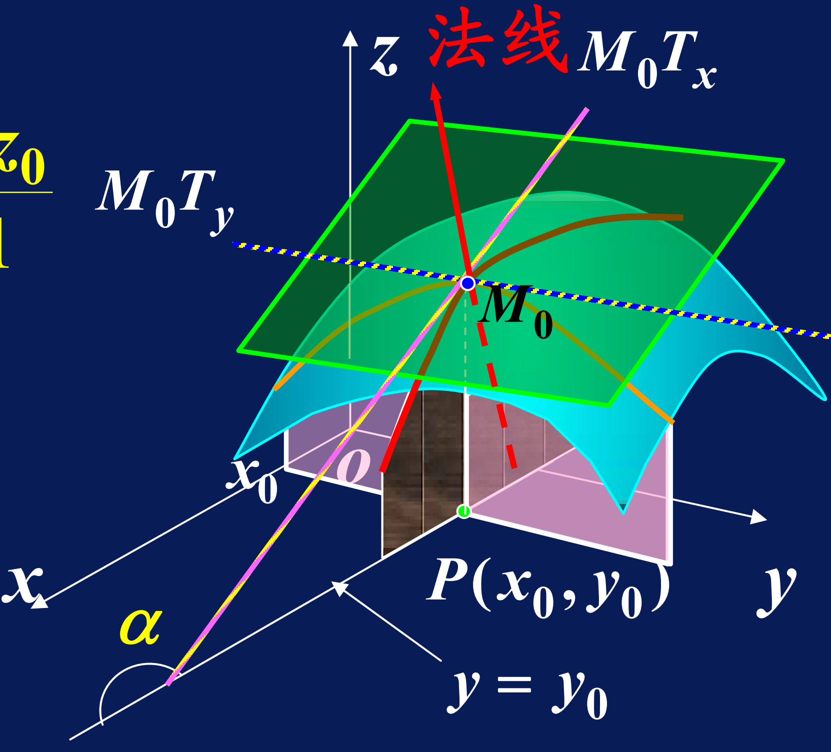
$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

记$z_0=f(x_0,y_0)$, 称通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$且垂直于切平面的直线为**曲面**$z=f(x,y)$在点M_0处**的法线**.

法线方程:

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

求曲面的切平面(或法线)方程:一求切点, 二求曲面的法向量.



注 1° 法向量的方向余弦

用 α, β, γ 表示法向量的方向角，

并假定法向量方向向上，

则 γ 为锐角．

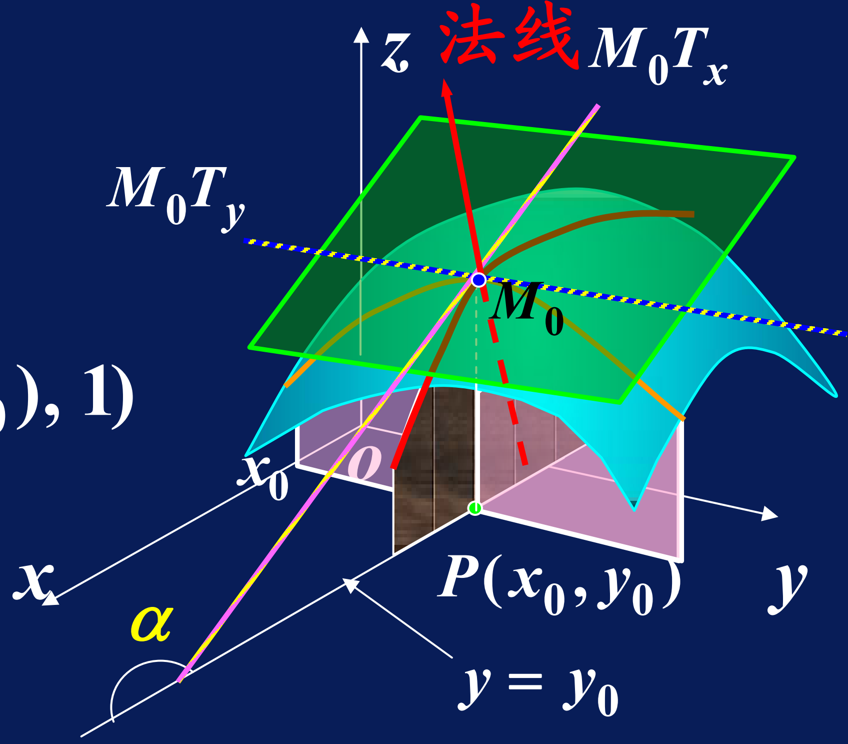
法向量：

$$\vec{n} = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$$

将 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$

分别记为 f_x, f_y，则

法向量的方向余弦：



法向量 $\vec{n} = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$

的方向余弦:

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}},$$

$$\cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}},$$

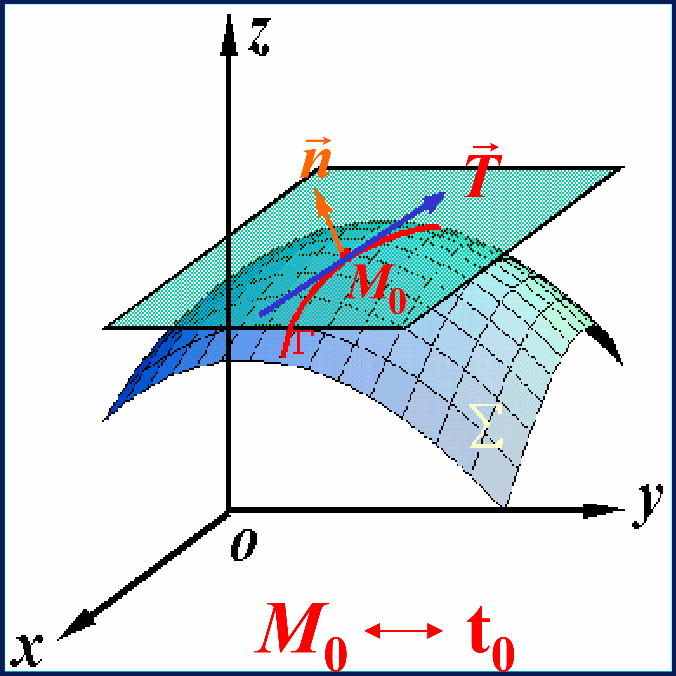
$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}}.$$

2° 设曲面 Σ 的方程为：$z = f(x, y)$

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$$

f_x, f_y在(x_0, y_0)处连续，则

可以证明：在曲面 Σ 上通过点 M_0且在点M_0处有切线的任一曲线在该点的切线都在同一平面(曲面 Σ 的切平面)上.



(2) 形如 $F(x, y, z)=0$ 的曲面的切平面与法线

若光滑曲面Σ： $F(x,y,z)=0,$

$$M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$$

函数 $F(x, y, z)$ 具有连续的一阶偏导数，且

$$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$$

则 $\Sigma: F(x,y,z)=0 \xrightarrow{\text{隐函数存在定理}} \Sigma: z=f(x,y),$

法向量:

$$\vec{n}=\pm(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0),-1)$$

$$\vec{n}=\pm(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$$

$$=\pm\left(-\frac{F_x}{F_z},\ -\frac{F_y}{F_z},-1\right)\Big|_{M_0}$$

$$=\pm\left(-\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)},\ -\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)},\ -1\right)$$

$$=\mp\frac{1}{F_z(x_0,y_0,z_0)}(F_x(x_0,y_0,z_0),\ F_y(x_0,y_0,z_0),\ F_z(x_0,y_0,z_0))$$

$$\boxed{\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))}$$

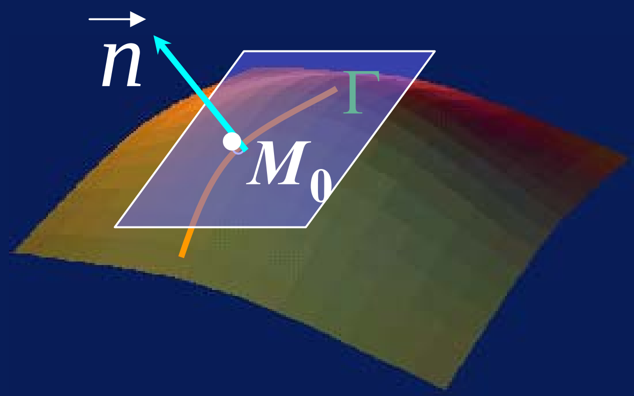
—— 曲面$F(x, y, z)=0$在点M_0的法向量

切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

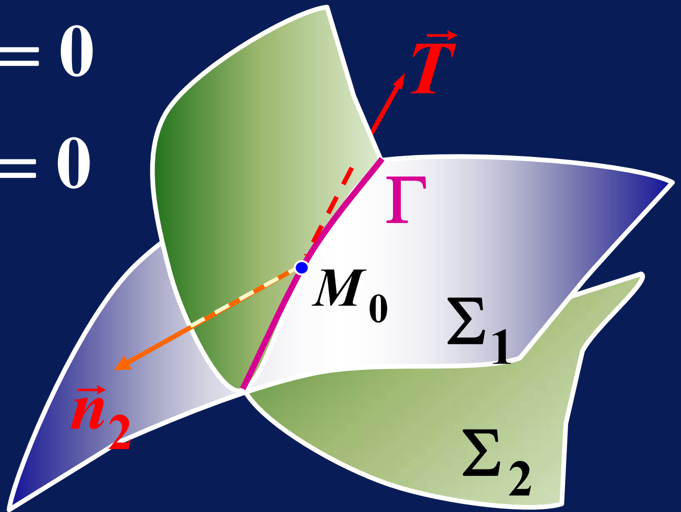
法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$



注 求光滑曲线Γ: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

切向量的**第三种**方法:



$\because \quad \vec{T} \perp \vec{n}_1, \qquad \vec{T} \perp \vec{n}_2$

$$\vec{n}_1 = (F_x(x_0,y_0,z_0), F_y(x_0,y_0,z_0), F_z(x_0,y_0,z_0))$$

$$\vec{n}_2 = (G_x(x_0,y_0,z_0), G_y(x_0,y_0,z_0), G_z(x_0,y_0,z_0))$$

$\therefore$ 曲线Γ在点M_0处的切向量:

$$\vec{T} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0} \qquad (\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2)$$

（二）二元函数可微的几何意义

二元函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$可微

$$\Longrightarrow f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

$$=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho)$$

$$(\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$$

$$\approx f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\forall M(x,y)\in U(P(x_0,y_0))$$

$$\Longrightarrow f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)$$

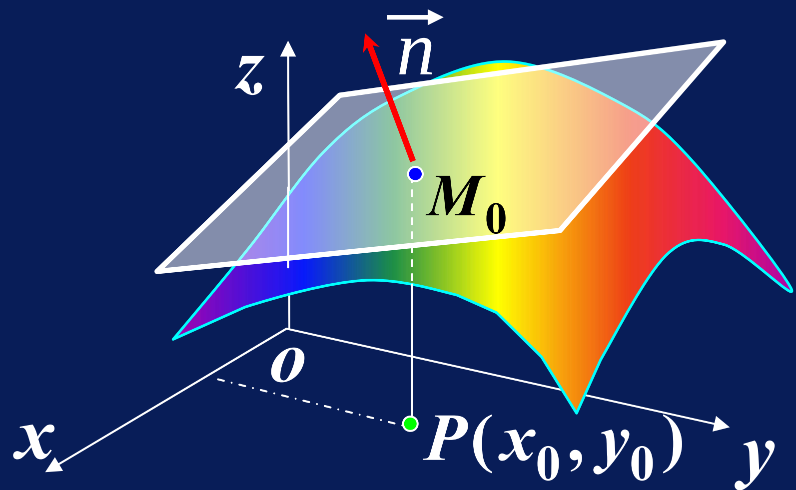
$$+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

记上式右端为 z，于是有 $f(x,y)\approx z$，而

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

即 $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-[z-f(x_0,y_0)]=0$

曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切平面方程



几何意义 由 $f(x,y)\approx z$ 知，若 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 可微，则曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 近旁的一小部分可用该点的切平面来近似.

★（三）全微分在近似计算中的应用

1. 利用近似公式作计算

由全微分定义

$$\Delta z = \underbrace{f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y}_{\mathrm{d}\,z} + o(\rho)$$

可知当 $|\Delta x|$ 及 $|\Delta y|$ 较小时, 有近似等式:

$$\Delta z \approx \mathrm{d}\,z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(用于误差分析)

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(用于近似计算)

2. 利用近似公式作误差估计

利用 $\Delta z \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

令 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 分别表示 x, y, z 的绝对误差限, 即

$|\Delta x| \le \delta_x$, $|\Delta y| \le \delta_y$, $|\Delta z| \le \delta_z$, 则

z 的绝对误差限约为

$$\delta_z = |f_x(x,y)|\delta_x + |f_y(x,y)|\delta_y$$

z 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left|\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_x + \left|\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_y$$

二、典型例题

例1 求曲线Γ：$x=\int_0^t e^u \cos u du \qquad y=2\sin t+\cos t,$

$z=1+e^{3t}$ 在$t=0$处的切线和法平面方程.

解　当$t=0$时，$x=0, y=1, z=2,$ 切点：$M(0,1,2)$

$$x'=e^t\cos t,\quad y'=2\cos t-\sin t,\quad z'=3e^{3t},$$

切向量：$\vec{T}=(x',y',z')_{t=0}=(1,2,3)$

切线方程：$\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3},$

法平面方程：

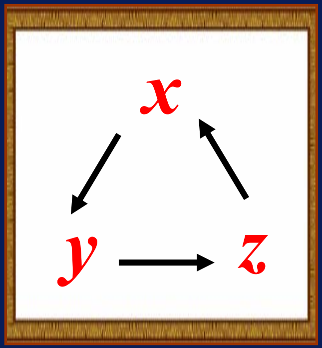
$$x+2(y-1)+3(z-2)=0,\ \text{即}\ x+2y+3z-8=0.$$

求空间曲线的切线(或法平面)：一求切点；二求切向量.

例2 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解 (方法1) 令 $F=x^2+y^2+z^2-6,\ G=x+y+z$,则

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right|_M=\left.2(y-z)\right|_M=-6;$$



$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M=0;\qquad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M=6$$

切向量 $\vec{T}=\left\{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right\}$

$$=(-6,\ 0,\ 6)$$

点 $M(1,-2,1)$,

切向量: $\vec{T}=(-6,\ 0,\ 6)$

切线方程 $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{6}$

即 $\begin{cases} x+z-2=0, \\ y+2=0. \end{cases}$

法平面方程

$$-6\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+6\cdot(z-1)=0$$

即 $x-z=0$

(方法2) $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

每个方程两边对 x 求导, 得 $\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0, \\ 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0. \end{cases}$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{z-x}{y-z}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y}{y-z}$$

曲线在点 $M(1,-2,1)$ 处的切向量为:

$$\vec{T}=\left(1,\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_M,\ \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_M\right)=(1,0,-1)$$

点 $M(1,-2,1)$ 处的切向量

$$\vec{T}=(1,0,-1)$$

切线方程 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$$

即 $$\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$$

法平面方程

$$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$$

即 $$x-z=0$$

(方法3)

曲面$x^2+y^2+z^2=6$与$x+y+z=0$的法向量分别为:

$$\left.\overrightarrow{n_1}\right|_M=\left.(2x,2y,2z)\right|_M=2(1,-2,1),$$

$$\left.\overrightarrow{n_2}\right|_M=(1,1,1),$$

曲线的切向量: $\left.\overrightarrow{T}\right|_M=(1,-2,1)\times(1,1,1)=(-6,\ 0,\ 6)$

切线方程 $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{6}$ 即 $\begin{cases} x+z-2=0, \\ y+2=0 \end{cases}$

法平面方程 $-6\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+6\cdot(z-1)=0,$

即 $x-z=0.$

例3 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=36$ 在点 $(1, 2, 3)$ 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-36$

法向量 $\vec{n}=(2x, 4y, 6z)$

$$\vec{n}\big|_{(1,2,3)}=(2,8,18)=2(1,4,9)$$

所以在球面上点 $(1, 2, 3)$ 处有:

切平面方程 $\quad (x-1)+4(y-2)+9(z-3)=0$

即 $\quad x+4y+9z-36=0$

法线方程 $\quad \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{9}.$

例4 计算 $1.04^{2.02}$ 的近似值.

解 设 $f(x,y)=x^y$, 则

$$f_x(x,y)=yx^{y-1},\quad f_y(x,y)=x^y\ln x$$

取 $x=1,\ y=2,\ \Delta x=0.04,\ \Delta y=0.02$

则 $$1.04^{2.02}=f(1.04,\ 2.02)$$

$$\approx f(1,2)+f_x(1,2)\Delta x+f_y(1,2)\Delta y$$

$$=1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08$$

例5 利用公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 计算三角形面积. 现测得

$$a=12.5\pm0.01,\ b=8.3\pm0.01,\ C=30^\circ\pm0.1^\circ$$

求计算面积时的绝对误差与相对误差.

解
$$\delta_S=\left|\frac{\partial S}{\partial a}\right|\delta_a+\left|\frac{\partial S}{\partial b}\right|\delta_b+\left|\frac{\partial S}{\partial C}\right|\delta_C$$

$$=\frac{1}{2}|b\sin C|\delta_a+\frac{1}{2}|a\sin C|\delta_b+\frac{1}{2}|ab\cos C|\delta_C$$

$$a=12.5,\ b=8.3,\ C=30^\circ,\ \delta_a=\delta_b=0.01,\ \delta_C=\frac{\pi}{1800}$$

故绝对误差约为 $\delta_S=0.13$

又 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times12.5\times8.3\times\sin30^\circ\approx25.94$

所以 S 的相对误差约为 $\dfrac{\delta_S}{|S|}=\dfrac{0.13}{25.94}\approx0.5\,\%$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例6 在直流电路中，测得电压 $U = 24$ 伏，相对误差为 0.3%；测得电流 $I = 6$ 安，相对误差为 0.5 %，求用欧姆定律计算电阻 R 时产生的相对误差和绝对误差．

解 由欧姆定律可知 $R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{24}{6} = 4(\text{欧})$

所以 R 的相对误差约为

$$\frac{\delta_R}{|R|} = \frac{\delta_U}{|U|} + \frac{\delta_I}{|I|} = 0.3\,\% + 0.5\,\% = 0.8\,\%$$

R 的绝对误差约为

$$\delta_R = |R| \times 0.8\,\% = 0.032\,(\text{欧})$$

三、同步练习

1. 前面当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$ 时推出了曲线Γ：

$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 的切向量为: $\vec{T}=\{1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\}$

或 $\vec{T}=\left\{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right\}$

想一想，当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\neq 0$ 或 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\neq 0$ 时，

曲线 Γ 的切向量是什么?

2. 如果平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切, 求 λ.

3. 设 $f(u)$ 可微, 证明 曲面 $z=xf(\frac{y}{x})$ 上任一点处的切平面都通过原点.

4. 证明曲面 $F(x-my, z-ny)=0$ 的所有切平面恒与定向量平行, 其中 $F(u,v)$ 可微.

5. 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求一点, 使此点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$, 并求出此切线方程.

6. 求曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\frac{t}{2}$ 在点 $M\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2}\right)$ 处的切线方程和法平面 方程.

7. 求圆柱螺旋线 $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = k\varphi$ 在 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程和法平面方程.

8. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点(1,1,1)处的切线与法平面方程.

9. 在曲面 $z = x^2 - y^2$ 上求一点，使该点处的切平面平行于平面 $2x - 2y - z + 3 = 0$

10. 试证曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}\,(a > 0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

11. 求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = x$ 的切平面，使它垂直于平面 $x - y - z = 0$ 和 $x - y - \frac{z}{2} = 2$.

12. 确定正数 σ 使曲面 $xyz = \sigma$ 与球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 相切.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

四、同步练习解答

1. **解** 当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\neq 0$ 时，$\vec{T}=\{\varphi'(y_0),1,\psi'(y_0)\}$

或 $\vec{T}=\left\{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right\}$

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\neq 0$ 时，

$$\vec{T}=\{\varphi'(z_0),\psi'(z_0),1\}$$

或 $\vec{T}=\left\{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right\}$

2. 如果平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切, 求 λ.

解　设切点为 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则

$$\begin{cases} \dfrac{6x_0}{3}=\dfrac{2y_0}{\lambda}=\dfrac{2z_0}{-3} & \text{(二法向量平行)} \\ 3x_0+\lambda y_0-3z_0+16=0 & \text{(切点在平面上)} \\ 3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16 & \text{(切点在椭球面上)} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\lambda=\pm 2$

3. 设 $f(u)$ 可微, 证明 曲面 $z = xf(\frac{y}{x})$ 上任一点处的切平面都通过原点.

解 在曲面上任意取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则通过此点的切平面为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M (y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

求出 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M$, 并证明原点的坐标满足上述方程 .

4. 证明曲面 $F(x-my, z-ny)=0$ 的所有切平面恒与定向量平行, 其中 $F(u,v)$可微.

分析　只须证曲面上任一点处的法向量与定向量垂直.

证　曲面上任一点的法向量

$$\vec{n}=(F_1',\ F_1'\cdot(-m)+F_2'\cdot(-n),\ F_2')$$

问题　观察一下,定向量是什么?

取定向量为 $\vec{l}=(m,1,n)$

则 $\vec{l}\cdot\vec{n}=0$, 故结论成立 .

5. 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上求一点，使此点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$，并求出此切线方程．

解 曲线上任一点处的切向量 $\vec{T} = \{1, 2t, 3t^2\}$，

平面的法线向量 $\vec{n} = \{1,2,1\}$，

因为切线与平面平行，所以 $\vec{T} \perp \vec{n}$，

故 $\vec{T} \cdot \vec{n} = 0$，

即 $1 \times 1 + 2 \times 2t + 1 \times 3t^2 = 0$，

解得 $t=-1,\ t=-\dfrac{1}{3},$

$$x=t,\ y=t^2, z=t^3.$$
$$\vec{T}=\{1,\ 2t,\ 3t^2\}$$

对应的点为

$$(-1,1,-1)\text{ 及 }\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right).$$

这两点处的切向量分别 为

$$\{1,-2,3\}\text{ 及 }\left\{1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\},$$

故切线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}\quad\text{及}\quad\frac{x+\frac{1}{3}}{1}=\frac{y-\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}}=\frac{z+\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}$$

6. 求曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\frac{t}{2}$ 在点 $M\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2}\right)$ 处的切线方程和法平面 方程.

解 点 M 处的切向量 :

$$x' = 1 - \cos t,\ y' = \sin t,\ z' = 2\cos\frac{t}{2},$$

点 $M\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2}\right)$ 处对应的参数 $t = \frac{\pi}{2}$,

当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $x' = 1,\ y' = 1,\ z' = \sqrt{2},$

故点 M 处的切向量 $\vec{T} = \{1, 1, \sqrt{2}\}.$

于是切线方程：

$$\frac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}.}.$$

法平面方程：

$$(x-\frac{\pi}{2}+1)+(y-1)+\sqrt{2}\left(z-2\sqrt{2}\right)=0,$$

即

$$x+y+\sqrt{2}z-\frac{\pi}{2}-4=0.$$

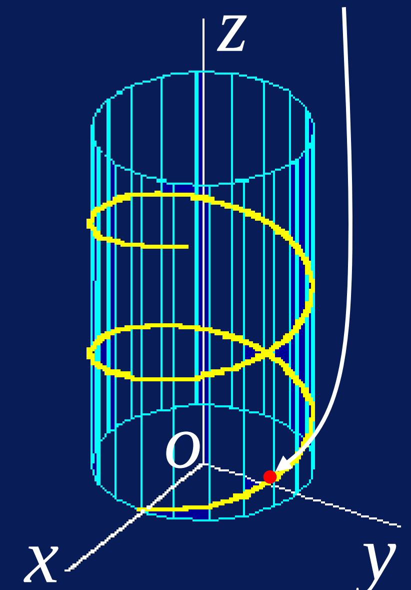
求空间曲线的切线（或法平面）：

一求切点；二求切向量.

7. 求圆柱螺旋线 $x=R\cos\varphi,\ y=R\sin\varphi,\ z=k\varphi$ 在 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程和法平面方程.

解 由于$x'=-R\sin\varphi,\ y'=R\cos\varphi,\ z'=k$,当$\varphi=\frac{\pi}{2}$时,对应的切向量为 $\overrightarrow{T}=(-R,0,k)$, 故

$M_0(0,R,\frac{\pi}{2}k)$



切线方程 $$\frac{x}{-R}=\frac{y-R}{0}=\frac{z-\frac{\pi}{2}k}{k}$$

即 $$\begin{cases} kx+Rz-\frac{\pi}{2}Rk=0 \\ y-R=0 \end{cases}$$

法平面方程 $$-Rx+k(z-\frac{\pi}{2}k)=0$$

即 $$Rx-kz+\frac{\pi}{2}k^2=0$$

8\. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点(1,1,1)处的切线与法平面方程.

解 点 (1,1,1) 处两曲面的法向量为

$$\vec{n}_1=(2x-3,2y,2z)\Big|_{(1,1,1)}=(-1,2,2)$$

$$\vec{n}_2=(2,-3,5)$$

因此切线的方向向量为 $\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(16,9,-1)$

由此得切线方程: $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面方程: $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$

即 $16x+9y-z-24=0$

9. 在曲面 $z = x^2 - y^2$ 上求一点，使该点处的切平面平行于平面 $2x - 2y - z + 3 = 0$

解　易得，曲面上任意一点　的法向量

$$\vec{n} = (2x, -2y, -1).$$

已知平面的法线向量 $\vec{n_1} = (2, -2, -1)$,

应有 $\vec{n} // \vec{n_1}$, 即 $\dfrac{2x}{2} = \dfrac{-2y}{-2} = \dfrac{-1}{-1}$,

解之得　$x = 1,\quad y = 1,$

代入 $z = x^2 - y^2$，得 $z = 0$，故所求点为 $(1,1,0)$.

10. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}(a>0)$上任何点处的切平面在各坐标轴 上的截距之和等于 a.

证 设(x_0,y_0,z_0)为曲面上任意一点，

则该点处的法向量 $\vec{n}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{x_0}},\dfrac{1}{\sqrt{y_0}},\dfrac{1}{\sqrt{z_0}}\right\}$.

切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0.$$

即 $$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}).$$

注意到点(x_0,y_0,z_0)在曲面上,

故 $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$.

于是切平面方程为

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{a},$$

即
$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1.$$

切平面在各坐标轴上的 截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})$$
$$=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a.$$

11. 求曲面 $x^2+y^2+z^2=x$的切平面，使它垂直于平面 $x-y-z=0$和 $x-y-\frac{z}{2}=2.$

解 设 (x_0,y_0,z_0)为曲面上的切点，

则切平面的法向量：

$$\vec{n}=(2x_0-1,2y_0,2z_0)$$

两已知平面的交线的方向向量：

$$\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix}=(-1,-1,0)$$

依题意，$\vec{n} // \vec{n}_1$ $\therefore$ $\dfrac{2x_0-1}{-1}=\dfrac{2y_0}{-1}=\dfrac{2z_0}{0}$

故得 $y_0=x_0-\dfrac{1}{2}, z_0=0$

代入 $x^2+y^2+z^2=x$，得切点：

$$(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{4},0) \text{ 及 } (-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4},0).$$

$\therefore$ 所求切平面方程为：

$$x+y-\frac{1+\sqrt{2}}{2}=0 \text{ 和 } x+y+\frac{\sqrt{2}-1}{2}=0.$$

12. 确定正数σ使曲面 $xyz=\sigma$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 相切.

解 二曲面在 M 点的法向量分别为

$$\vec{n}_1=(y_0z_0\,,x_0z_0\,,x_0y_0)\,,\quad \vec{n}_2=(x_0\,,y_0\,,z_0)$$

二曲面在点 M 相切, 故 $\vec{n}_1 /\!/ \vec{n}_2$, 因此有

$$\frac{x_0\,y_0z_0}{x_0^{\,2}}=\frac{x_0\,y_0\,z_0}{y_0^{\,2}}=\frac{x_0y_0\,z_0}{z_0^{\,2}}$$

$$\therefore \quad x_0^{\,2}=y_0^{\,2}=z_0^{\,2}$$

又点 M 在球面上, 故 $x_0^{\,2}=y_0^{\,2}=z_0^{\,2}=\dfrac{a^2}{3}$

于是有 $\sigma=x_0\,y_0\,z_0=\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$