第二节　二重积分的计算

习题　9-2

1. 分别用两种不同的次序，将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为二次积分，其中积分区域 D 是

(1) 以 $A(1,0)$，$B(3,0)$，$C(3,4)$，$D(1,4)$ 为顶点的矩形;

(2) 以 $O(0,0)$，$A(1,2)$，$B(0,2)$ 为顶点的三角形;

(3) 由 $x+y=1,\ y-x=1,\ y=0$ 围成;

(4) 由曲线 $y=\ln x$，直线 $x=2$ 及 x 轴围成;

(5) 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $x+y=2$ 围成;

(6) 以 $O(0,0)$，$A(2a,0)$，$B(3a,a)$，$C(a,a)$ 为顶点的平行四边形.

解　(1) 积分区域如图 9.1,

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_1^3\mathrm{d}x\int_0^4 f(x,y)\mathrm{d}y$；　或　　$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^4\mathrm{d}y\int_1^3 f(x,y)\mathrm{d}x$.

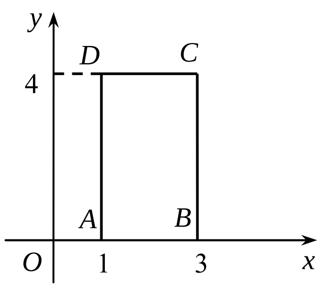

图 9.1

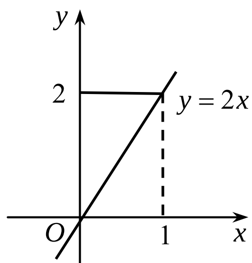

图 9.2

(2) 积分区域如图 9.2,

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2x}^2 f(x,y)\mathrm{d}y$；或 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\frac{1}{2}y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(3) 积分区域如图 9.3,

将 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为先对 y 后对 x 的积分得:

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{1+x} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y;$$

将 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为先对 x 后对 y 的积分得:

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(4) 积分区域如图 9.4, 故

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y;$$

或

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\ln 2}\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^2 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

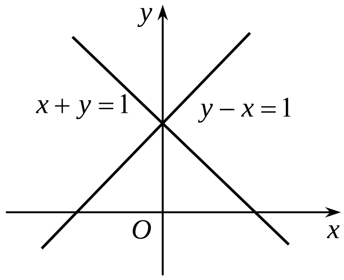

图 9.3

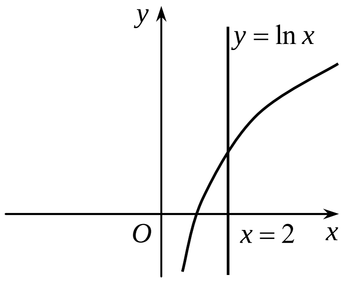

图 9.4

(5) 积分区域如图 9.5, 求得 $y=x^2$ 与 $x+y=2$ 的交点为 $(1,1)$, $(-2,4)$,故

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-2}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y;$$

或

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^4\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

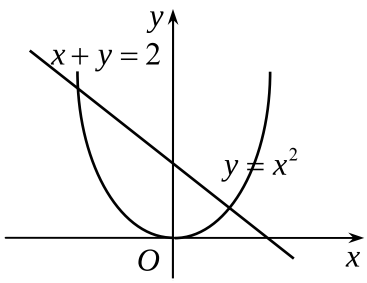

图 9.5

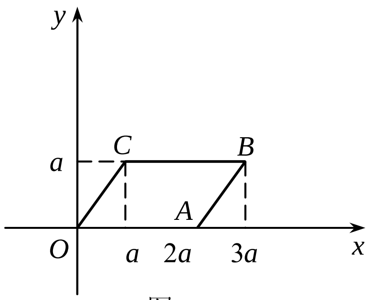

图 9.6

(6) 积分区域如图 9.6, 故

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$+\int_a^{2a}\mathrm{d}x\int_0^a f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{2a}^{3a}\mathrm{d}x\int_{x-2a}^a f(x,y)\mathrm{d}y;$$

或

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^a\mathrm{d}y\int_y^{y+2a}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

2. 改换下列二次积分的积分次序

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{x^2-1}^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$;　　(4) $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(5) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{2\sqrt{1-x}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(6) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解　(1) 如图 9.7, 积分区域为$\begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ y \le x \le 1, \end{cases}$

也可表示成$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ o \le y \le x, \end{cases}$ 所以

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y.$$

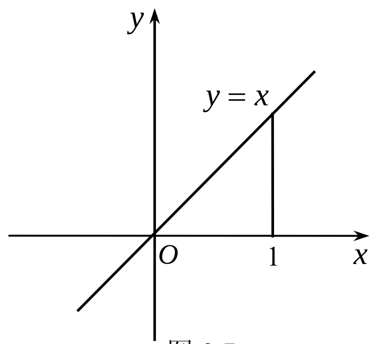

图 9.7

(2) 如图 9.8, 积分区域为$\begin{cases} 0 \le y \le 2, \\ y^2 \le x \le 2y, \end{cases}$

也可表示成$\begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ \dfrac{x}{2} \le y \le \sqrt{x}, \end{cases}$ 所以

$$\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^4 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

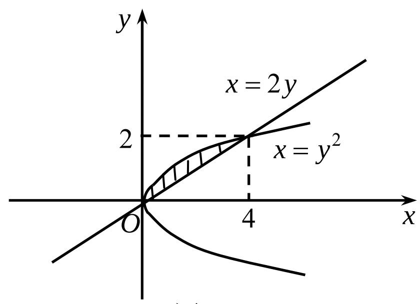

图 9.8

(3) 如图 9.9, 积分区域为$\begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ 1-x^2 \le y \le x^2-1, \end{cases}$

也可表示成$\begin{cases} -1 \le y \le 0, \\ -\sqrt{1+y} \le x \le \sqrt{1+y}, \end{cases}$ 和

$\begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}, \end{cases}$ 所以

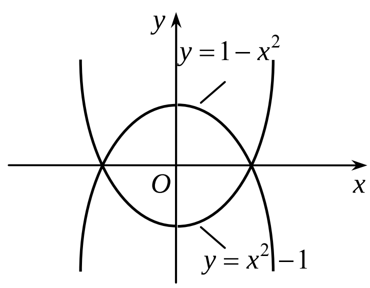

图 9.9

$$\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{x^2-1}^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^0 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1+y}}^{\sqrt{1+y}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(4) 如图 9.10，积分区域为$\begin{cases}1\le x\le 2,\\ \dfrac{1}{x}\le y\le x,\end{cases}$，

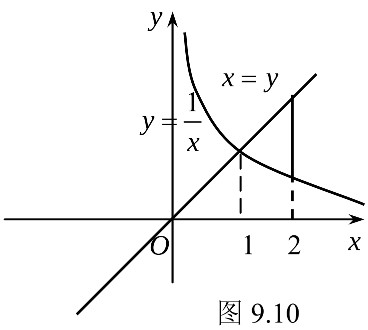

图 9.10

$x=y$ 与 $y=\dfrac{1}{x}$ 在第一象限的交点为 $(1,1)$，故上述

积分区域也可表示成$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\le y\le 1,\\ \dfrac{1}{y}\le x\le 2,\end{cases}$ 和 $\begin{cases}1\le y\le 2,\\ y\le x\le 2,\end{cases}$

所以 $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 f(x,y)\mathrm{d}x$.

(5) 如图 9.11，积分区域为

$\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 2\sqrt{1-x}\le y\le\sqrt{4-x^2},\end{cases}$ 和 $\begin{cases}1\le x\le 2,\\ 0\le y\le\sqrt{4-x^2},\end{cases}$

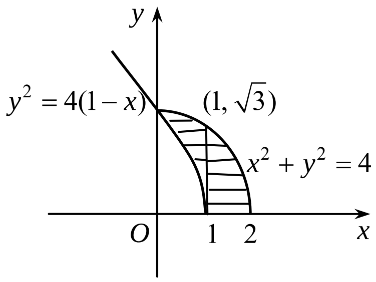

图 9.11

也可表示成$\begin{cases}0\le y\le 2,\\ 1-\dfrac{y^2}{4}\le x\le\sqrt{4-y^2},\end{cases}$ 所以

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2\sqrt{1-x}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1-\frac{y^2}{4}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(6) 如图 9.12，积分区域为$\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le y\le\sqrt{2x-x^2},\end{cases}$ 和

$\begin{cases}1\le x\le 2,\\ 0\le y\le 2-x,\end{cases}$ 也可表示成$\begin{cases}0\le y\le 1,\\ 1-\sqrt{1-y^2}\le x\le 2-y,\end{cases}$

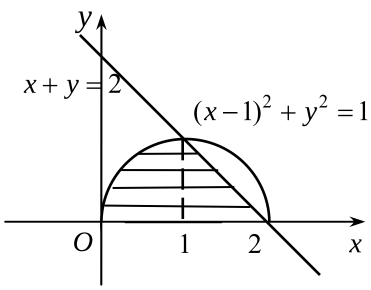

图 9.12

所以

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

3. 计算下列二重积分

(1) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$；

(2) $\iint\limits_D \dfrac{1}{x+y}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le x\le 1,1\le x+y\le 2\right\}$；

(3) $\iint\limits_D \sin(x+y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由直线 $x=0$, $y=\pi$ 与 $y=x$ 围成的闭区域;

(4) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\left\{(x,y)\middle|4x\geq y^2, x\leq 1\right\}$;

(5) $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=x$, $y=2x$, $y=2$ 所围成的闭区域;

(6) $\iint\limits_D y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $x=2$, $y=2$ 及 $xy=1$ 所围闭区域.

解 (1) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1(y^3+y+\frac{1}{4})\mathrm{d}y=1.$$

(2) 积分区域如图 9.13,

$$\iint\limits_D \frac{1}{x+y}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x}\frac{1}{x+y}\mathrm{d}y=\int_0^1\ln 2\mathrm{d}x=\ln 2.$$

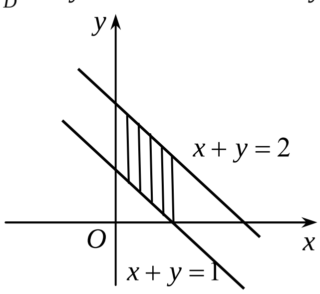

图 9.13

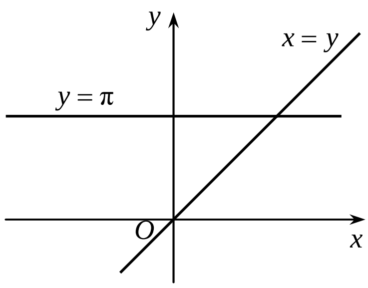

图 9.14

(3) 积分区域如图 9.14,

$$\iint\limits_D \sin(x+y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_x^\pi\sin(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^\pi(-\cos(x+\pi)+\cos(2x))\mathrm{d}x$$

$$=0.$$

(4) 积分区域如图 9.15,

$$\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4x}}^{\sqrt{4x}}xy^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\frac{16}{3}x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x=\frac{32}{21}.$$

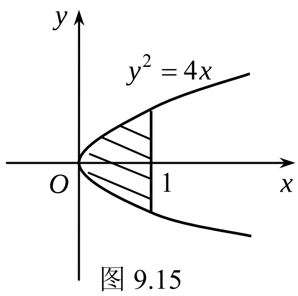

图 9.15

(5) 积分区域如图 9.16,

$$\iint_D (x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2(\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2)\mathrm{d}y=\frac{13}{6}.$$

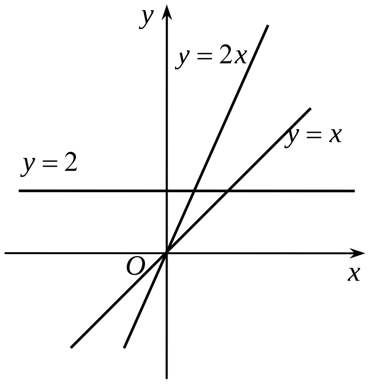

图 9.16

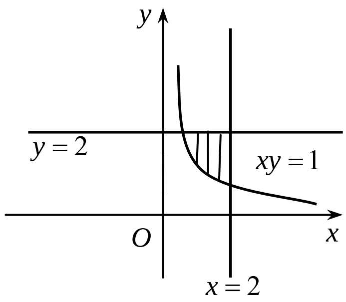

图 9.17

(6) 积分区域如图 9.17,

$$\iint_D y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{2}y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e})\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^4-2\mathrm{e}.$$

4. 如果二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的被积函数 $f(x,y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积, 即 $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, 积分区域 D 是矩形 $\{(x,y)|a\le x\le b, c\le y\le d\}$, 证明这个二重积分等于两个单积分的乘积, 即

$$\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x]\cdot[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y].$$

证 $\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$,

其中 $\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}y$ 是对 y 求积分, 故 $\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}y=f_1(x)\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y$, 因此

$$\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[f_1(x)\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x,$$

由于 $\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y$ 是一常数, 于是,

$$\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y][\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x],$$

即 $$\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x][\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y].$$

5． 利用“对称性”计算下列二重积分

(1) $\iint\limits_D x^3\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2y\right\}$；

(2) $\iint\limits_D (|x|+|y|)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|\,|x|+|y|\le 1\right\}$.

解 (1) 积分区域如图 9.18,

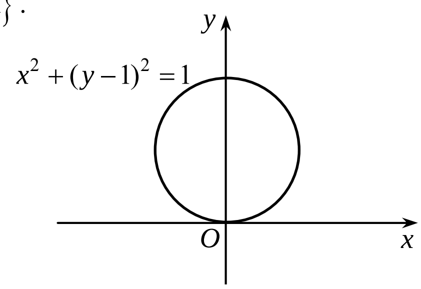

图 9.18

由于积分区域 D 关于 y 轴对称，且被积函数 $f(x,y)=x^3\cos(x^2+y^2)$ 关于 x 是奇函数，故

$$\iint\limits_D x^3\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=0.$$

(2) 积分区域如图 9.19,

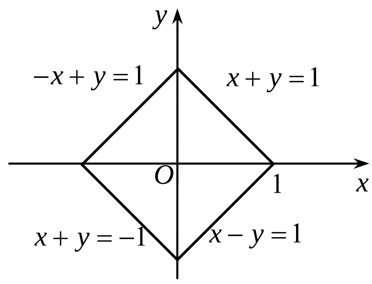

图 9.19

由于积分区域 D 关于 x 轴和 y 轴都对称，且被积函数 $f(x,y)=|x|+|y|$ 关于 x 和 y 都是偶函数，故

$$\iint\limits_D (|x|+|y|)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}(|x|+|y|)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}(x+y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2y\text{且}x\ge 0,y\ge 0\right\}$，故

$$\iint\limits_D (|x|+|y|)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}(x+y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}.$$

6． 计算 $I=\iint\limits_D\left|y-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$.

解 积分区域如图 9.20，曲线 $y=x^2$ 将区域 D 分成 D_1 和 D_2，在 D_1 上，$\left|y-x^2\right|$ $=y-x^2$，在 D_2 上，$\left|y-x^2\right|=x^2-y$，于是

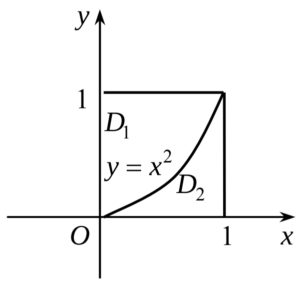

图 9.20

$$I=\iint\limits_{D_1}(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1(y-x^2)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4}{15}+\frac{1}{10}=\frac{11}{30}.$$

7． 通过交换积分次序计算下列二次积分

(1) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\mathrm{d}x \int_{x^2}^{\pi} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$;　　(2) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^1 e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_x^{2x} \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$.

解 (1) 积分区域如图 9.21, 交换积分次序,

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\mathrm{d}x \int_{x^2}^{\pi} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{y}} x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2}\mathrm{d}y = 1 .$$

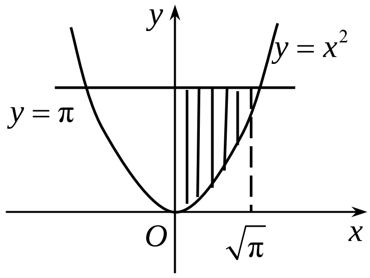

图 9.21

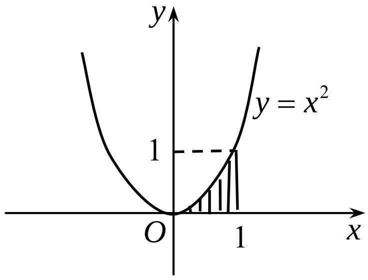

图 9.22

(2) 积分区域如图 9.22, 交换积分次序,

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^1 \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y = \int_0^1 x(\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} .$$

(3) 积分区域如图 9.23,
交换积分次序,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_x^{2x} \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{y} \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{y}{2}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{4}(\mathrm{e} - 1) .$$

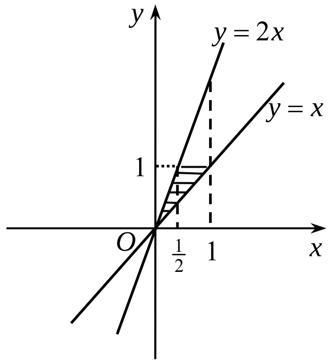

图 9.23

8. 画出积分区域, 把积分 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示成极坐标形式的二次积分, 其中积分区域 D 是:

(1) $\left\{(x, y) \middle| a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2\right\}$;　　(2) $\left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 \le ax, a > 0\right\}$;

(3) $\left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 \le by, b > 0\right\}$;　　(4) $\left\{(x, y) \middle| 0 \le y \le 1 - x, 0 \le x \le 1\right\}$;

(5) $\left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 \le 2x \text{和} x^2 + y^2 \le 2y \text{之公共部分}\right\}$.

解 (1) 在极坐标系中，积分区域 D (如图 9.24) 可表示为 $\begin{cases} a \le \rho \le b, \\ 0 \le \theta \le 2\pi, \end{cases}$ 故

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_a^b f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \mathrm{d}\rho .$$

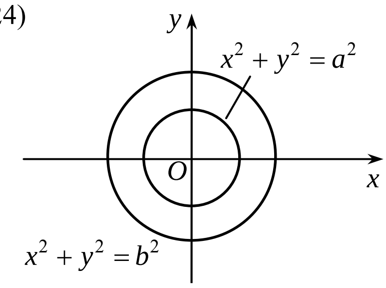

图 9.24

(2) 在极坐标系中，积分区域 D (如图 9.25) 可表示为 $\begin{cases} 0 \le \rho \le a\cos\theta, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ 故

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \mathrm{d}\rho .$$

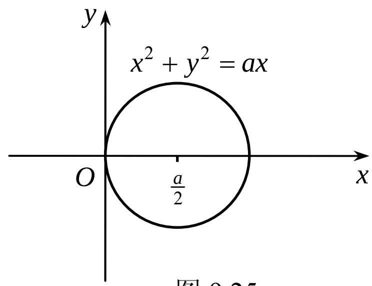

图 9.25

(3) 在极坐标系中，积分区域 D (如图 9.26) 可表示为 $\begin{cases} 0 \le \rho \le b\sin\theta, \\ 0 \le \theta \le \pi, \end{cases}$ 故

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{b\sin\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \mathrm{d}\rho .$$

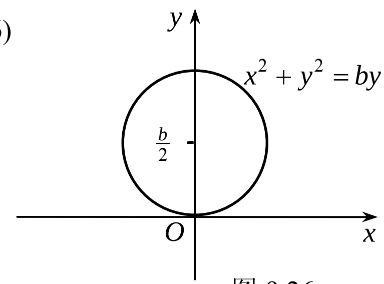

图 9.26

(4) 在极坐标系中，积分区域 D (如图 9.27)可表示为

$$\begin{cases} 0 \le \rho \le \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta}, \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

故

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \mathrm{d}\rho .$$

(5) 在极坐标系中，积分区域 D (如图 9.28)由 D_1 和 D_2 构成，

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le \rho \le 2\sin\theta, \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}, \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} 0 \le \rho \le 2\cos\theta, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

故

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho .$$

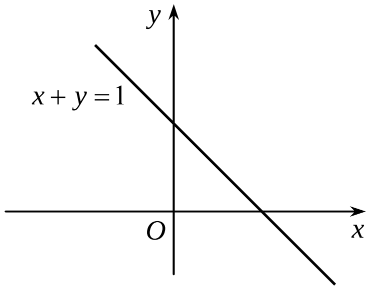

图 9.27

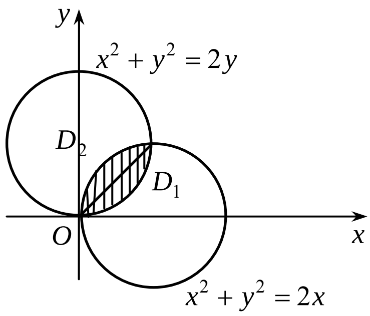

图 9.28

9. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分

(1) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{3}x} f(\frac{y}{x})\mathrm{d}y$;

(3) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$;　　(4) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 (1) 在极坐标系中, 积分区域(如图 9.29)

由 D_1 和 D_2 构成,

$$D_1:\begin{cases}0\le\rho\le\dfrac{1}{\cos\theta},\\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4},\end{cases}$$

$$D_2:\begin{cases}0\le\rho\le\dfrac{1}{\sin\theta},\\ \dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

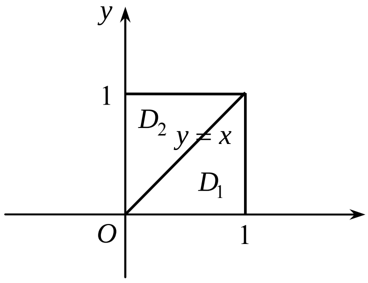

图 9.30

故 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho .$$

(2) 在极坐标系中, 积分区域(如图 9.30)

可表示为$\begin{cases} 0 \le \rho \le \dfrac{1}{\cos\theta}, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}, \end{cases}$

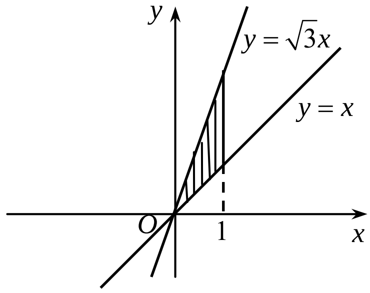

图 9.30

故 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{3}x} f(\frac{y}{x})\mathrm{d}y$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} f(\tan\theta)\rho\mathrm{d}\rho\,.$$

(3) 在极坐标系中，积分区域(如图 9.31)

可表示为$\begin{cases} 0 \le \rho \le 1, \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$

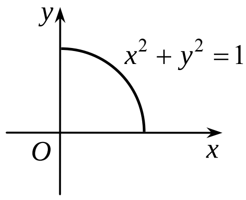

图 9.31

故 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho\,.$$

(4) 在极坐标系中，积分区域(如图 9.32)

可表示为$\begin{cases} 0 \le \rho \le \tan\theta\sec\theta, \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}, \end{cases}$

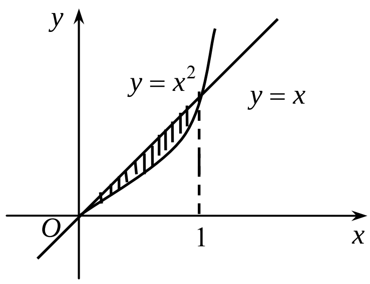

图 9.32

故 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\,.$$

10. 利用极坐标计算下列二重积分或二次积分

(1) $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 4\right\}$；

(2) $\displaystyle\iint_D \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| \pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\right\}$；

(3) $\displaystyle\iint_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le R^2\right\}$；

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x+y>1, x^2+y^2\le 1\right\}$；

(5) $\displaystyle\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y\,.$

解 (1) 在极坐标系中，积分区域可表示为 $\begin{cases} 0 \le \rho \le 2, \\ 0 \le \theta \le 2\pi, \end{cases}$

故 $$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 e^{\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(e^4-1)\mathrm{d}\theta = \pi(e^4-1).$$

(2) 在极坐标系中，积分区域可表示为 $\begin{cases} \pi \le \rho \le 2\pi, \\ 0 \le \theta \le 2\pi, \end{cases}$

故 $$\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\pi^{2\pi}\sin\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho = \pi(\cos\pi^2-\cos 4\pi^2).$$

(3) 在极坐标系中，积分区域可表示为 $\begin{cases} 0 \le \rho \le R, \\ 0 \le \theta \le 2\pi, \end{cases}$，

故 $$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan(\tan\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\arctan(\tan\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\arctan(\tan\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}t\mathrm{d}t\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}t\mathrm{d}t\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho = 0.$$

(4) 在极坐标系中，积分区域(如图 9.33)可表示为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta} \le \rho \le 1, \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

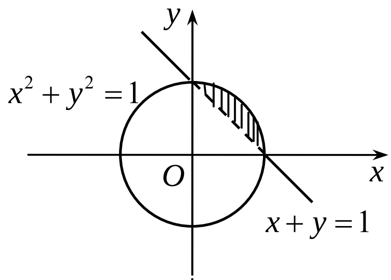

图 9.33

故

$$\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^1\frac{(\sin\theta+\cos\theta)}{\rho}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta-1)\mathrm{d}\theta = 2-\frac{\pi}{2}.$$

(5) 在极坐标系中，积分区域(如图 9.34)可表示为

$$\begin{cases} 0 \le \rho \le 2a\cos\theta, \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

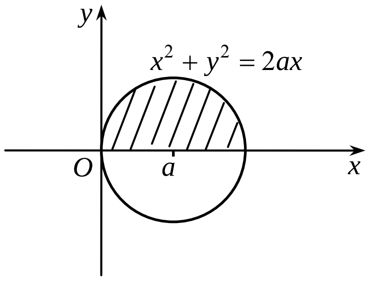

图 9.34

故

$$\int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho^2 \cdot \rho \mathrm{d}\rho = \frac{3}{4}\pi a^4 .$$

11. 计算二重积分 $\iint\limits_D \left| x^2 + y^2 - 2 \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为圆域 $x^2 + y^2 \le 3$.

解 将积分区域分块表示为 $D = D_1 + D_2$，其中

$$D_1 = \{(x, y) \big| x^2 + y^2 \le 2\}, \quad D_2 = \{(x, y) \big| 2 \le x^2 + y^2 \le 3\},$$

在 D_1 上，$x^2 + y^2 - 2 \le 0$，在 D_2 上，$x^2 + y^2 - 2 \ge 0$，故

$$\iint\limits_D \left| x^2 + y^2 - 2 \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} (2 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} (x^2 + y^2 - 2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2)\rho \mathrm{d}\rho + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (\rho^2 - 2)\rho \mathrm{d}\rho = \frac{5}{2}\pi .$$

12. 选用适当的坐标计算下列各题

(1) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y = x - 4$，$y^2 = 2x$ 围成的平面区域;

(2) $\iint\limits_D (x + y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D = \left\{(x, y) \big| x^2 + y^2 - 2Rx \le 0\right\}$;

(3) $\iint\limits_D \dfrac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x = 2$，$y = x$ 与双曲线 $xy = 1$ 所围成的区域;

(4) $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D = \left\{(x, y) \big| \sqrt{2x - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}, y \ge 0\right\}$.

解 (1) 积分区域如图 9.35,

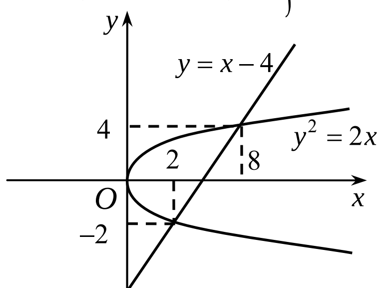

图 9.35

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{4} \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} xy\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{4} \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} xy\mathrm{d}x = 90 .$$

(2) $$\iint\limits_D (x + y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2R\cos\theta} \rho(\sin\theta + \cos\theta) \cdot \rho \mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{8}{3}R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta\sin\theta+\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta=\pi R^3 .$$

(3) 积分区域如图 9.36,

$$\iint_D\frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}y=\int_1^2(\frac{x}{3}-\frac{1}{3x^5})\mathrm{d}x=\frac{27}{64} .$$

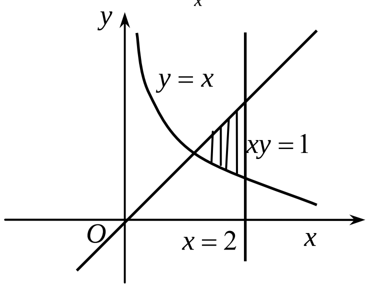

图 9.36

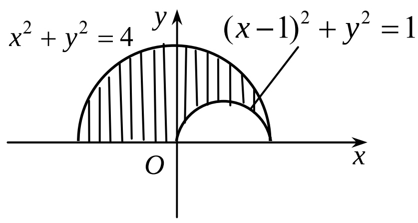

图 9.37

(4) 积分区域如图 9.37,

$$\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{2}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4(1-\sin^4\theta)\mathrm{d}\theta+2\pi=\frac{13}{4}\pi .$$

13. 将下列方程变换为极坐标方程, 并计算曲线所围图形的面积.

(1) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 所围图形(圆外部分)的面积 $(a>0)$;

(2) 心脏线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 与圆 $x^2+y^2=\sqrt{3}ay$ 所围图形(心脏线内部分)的面积 $(a>0)$.

解 (1) 如图 9.38, 方程 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 的极坐标系形式为

$$\rho^2=2a^2\cos2\theta ,$$

$x^2+y^2=a^2$ 的极坐标系形式为 $\rho=a$,

易知 A 点的极坐标为 $(a,\frac{\pi}{6})$, 所求面积为图中阴影部分 D 的面积, 由对称性,

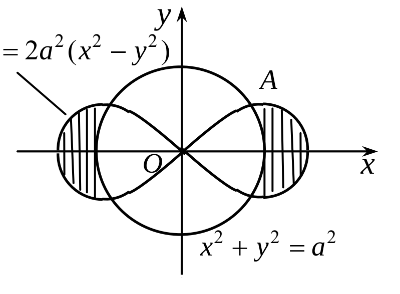

图 9.38

$$S=\iint_D \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}\theta \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} \rho \mathrm{d}\rho$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos 2\theta-1)\mathrm{d}\theta=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2 .$$

(2) 如图 9.39,

$x^2+y^2=\sqrt{3}ay$ 的极坐标形式为

$\rho=\sqrt{3}a\sin\theta$，点 B 的极坐标为 $(\frac{3}{2}a,\frac{\pi}{3})$，

所求面积 $S=\iint_D \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{3}a\sin\theta} \rho \mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho \mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{2}a^2\sin^2\theta \mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 \mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3}{4}(\pi-\sqrt{3})a^2 .$$

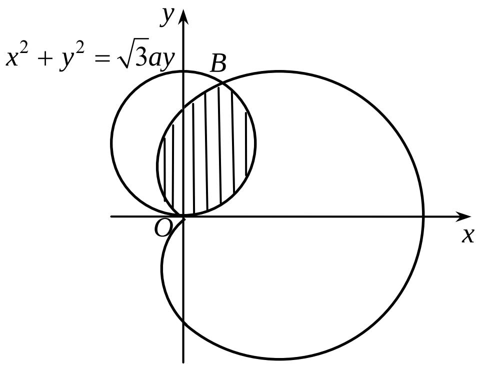

图 9.39