第二节

二重积分的计算(1)

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 直角坐标系下二重积分的计算

1. D为X–型区域

$$D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\boxed{\int_a^b\left[\boxed{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y}\right]\mathrm{d}x}$$

先对y, 后对x积分的二次积分

$$\underline{\underline{\text{记作}}}\ \int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

2. D为Y–型区域

$$D=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$$

先对x, 后对y积分的二次积分

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \boxed{\int_c^d \left[\boxed{\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}y}$$

记作

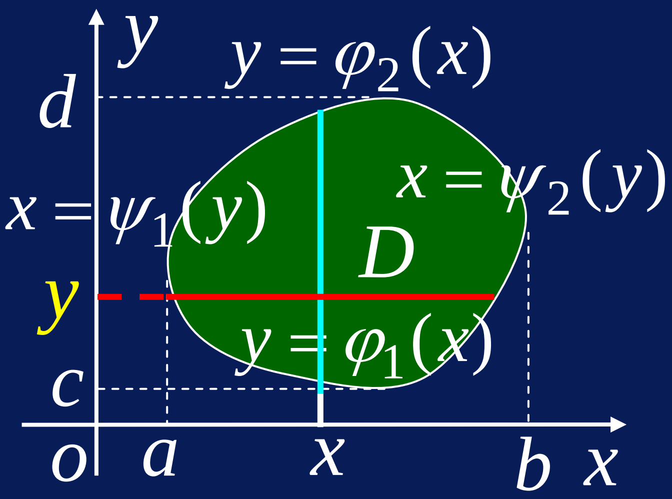
$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

若积分区域既是 X–型区域又是 Y–型区域，

则有 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$



为计算方便，可选择积分次序，

必要时还可以交换积分次序.

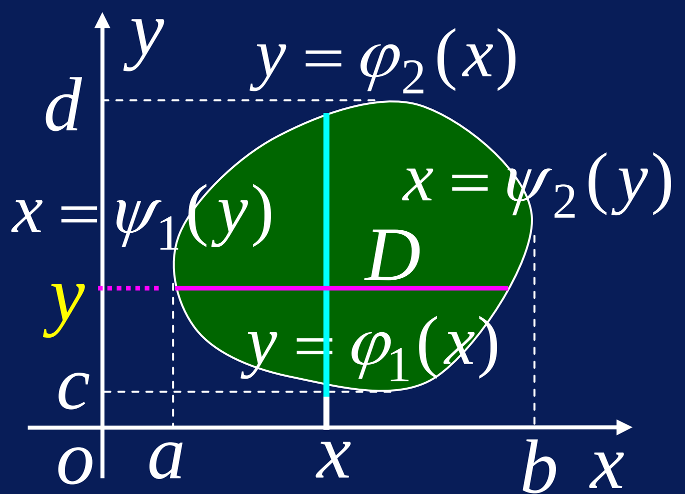
注 1° 对于给定的积分区域 D，外层积分的上、下限均为常数.

2° 内层积分上下限只能是外层积分变量的函数或常数，不能与内层积分变量有关.

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

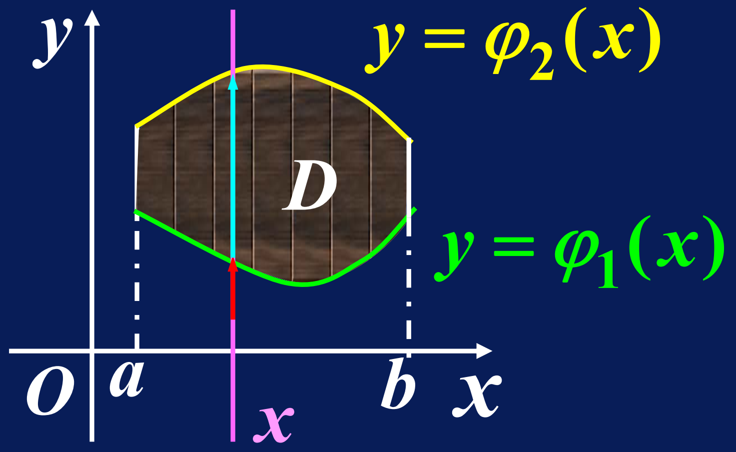
$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$



3° 对于 X – 型区域 D,用直线 $x=x$ 由下至上穿 D，穿入点所对应的纵坐标为内层积分的下限.

(出)

(上)



$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

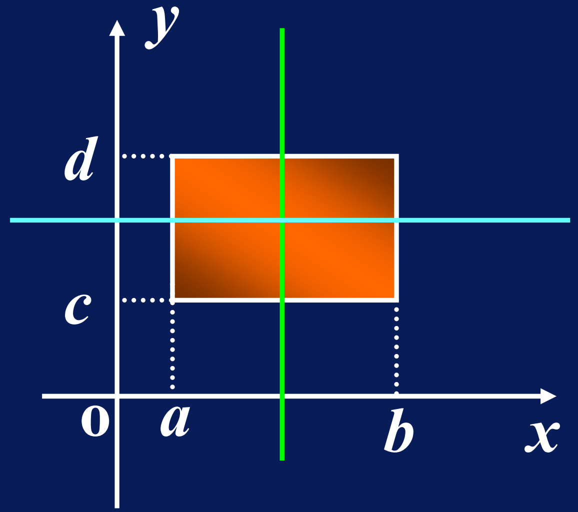
4° 两种特殊情形

设 $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$, 则

(1) $$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$



积分顺序可交换

(2) 当 $f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$时, 有

$$\iint\limits_D g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d g(x)h(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b [g(x)\cdot\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y]\,\mathrm{d}x$$

$$=[\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x]\cdot[\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y]$$

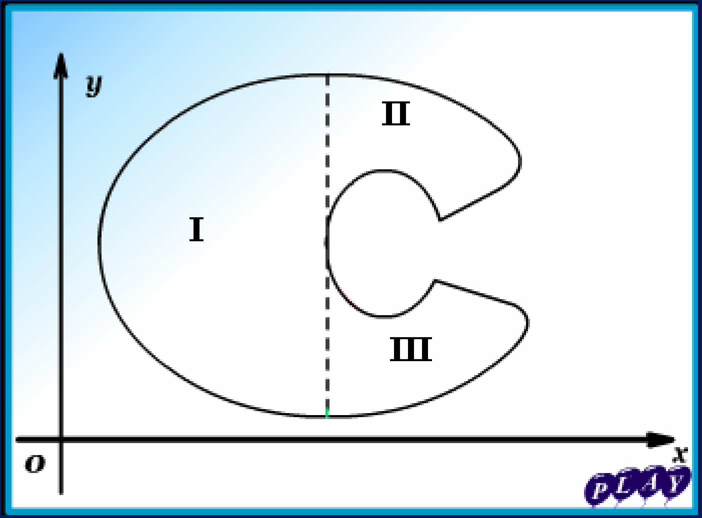
3. D既不是X–型区域，也不是Y–型区域

解决方法：可将它分成若干个 X–型域或Y–型域，

如图中区域 D 被分成三个子区域，

则有

$$\iint_D = \iint_{\mathrm{I}} + \iint_{\mathrm{II}} + \iint_{\mathrm{III}}.$$



计算二重积分的步骤

1° 画出积分域;

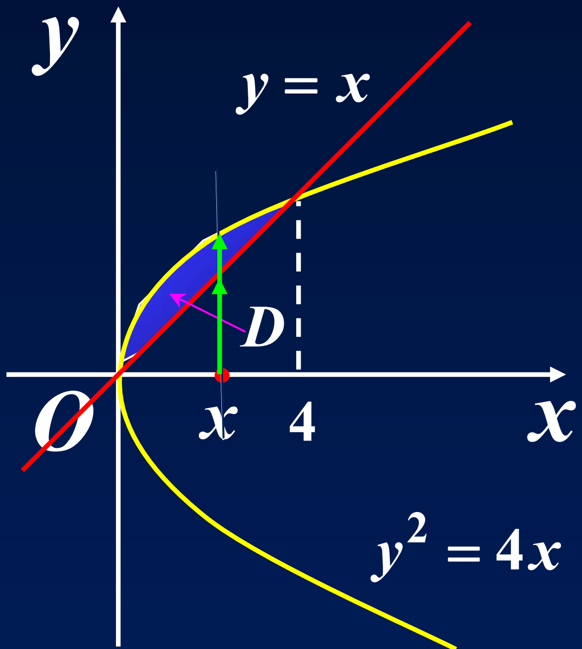
2° 确定积分次序;

3° 写出积分限;

4° 计算累次积分.

二、典型例题

例1 化二重积分 $\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 为二次积分，其中 D 是由 $y = x$ 和 $y^2 = 4x$ 所围.



解 D 是 $X-$型的，$x \in [0,4]$.

$\forall x \in (0,4)$，$x \le y \le 2\sqrt{x}$.

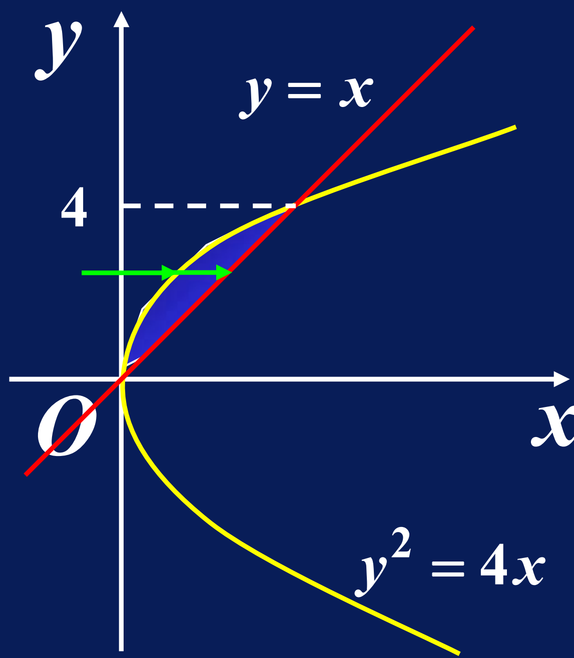
$D: x \le y \le 2\sqrt{x},\ 0 \le x \le 4,$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^4 \mathrm{d}x \int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

D 又是 $Y-$ 型的， $y\in[0,4]$.

$\forall\, y\in(0,4),\quad \dfrac{y^2}{4}\le x\le y.$

$D:\dfrac{y^2}{4}\le x\le y,\ 0\le y\le 4,$



$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^4 \mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

例2 交换下列二次积分的积分次序:

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_{1-y}^{1+y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x;$

(2) $\int_1^2 \mathrm{d}\,x \int_1^x xy\,\mathrm{d}\,y;$

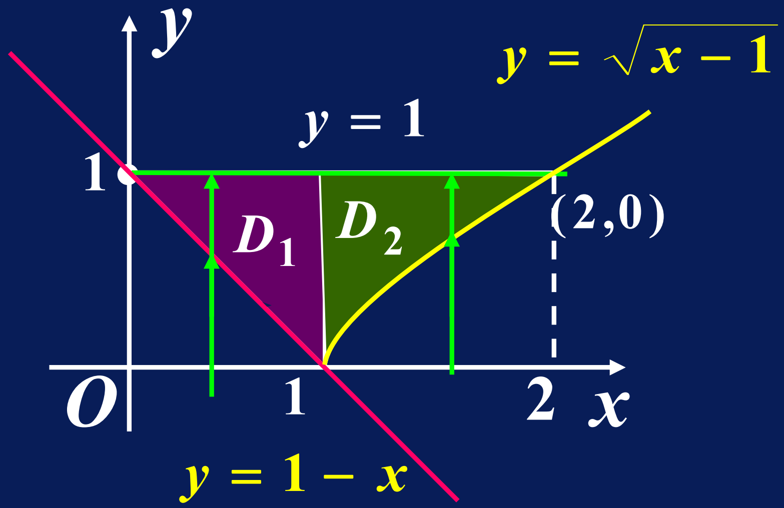
(3) $\int_0^1 \mathrm{d}\,x \int_x^{2x} f\,\mathrm{d}\,y + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\,x \int_x^{\frac{2}{x}} f\,\mathrm{d}\,y.$

解 (1) 由二次积分的积分限可知

$$D: 0 \le y \le 1,\ 1 - y \le x \le 1 + y^2,$$

化为先对 y 后 x 的积分,

$$D = D_1 \cup D_2,$$

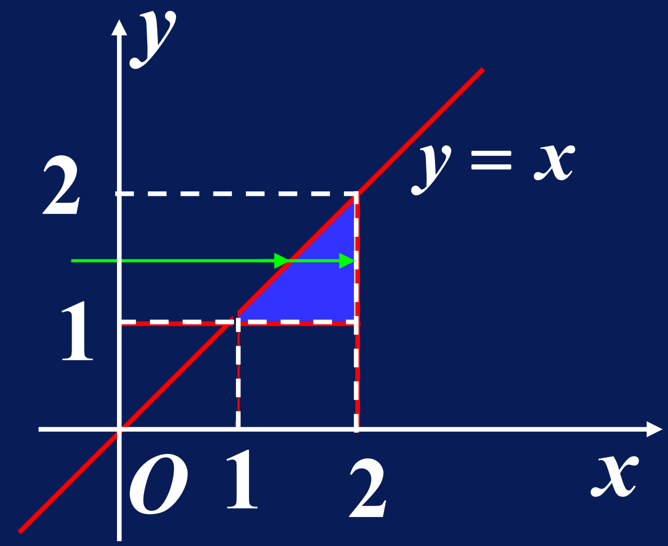


则有

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{1} f(x, y)\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x-1}}^{1} f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

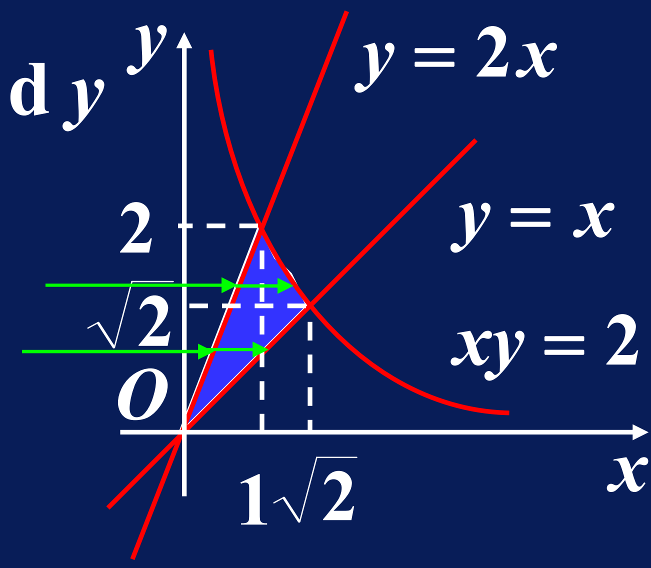
(2) $\int_1^2 \mathrm{d}\,x \int_1^x xy\,\mathrm{d}\,y$

$$= \int_1^2 \mathrm{d}\,y \int_y^2 xy\,\mathrm{d}\,x$$



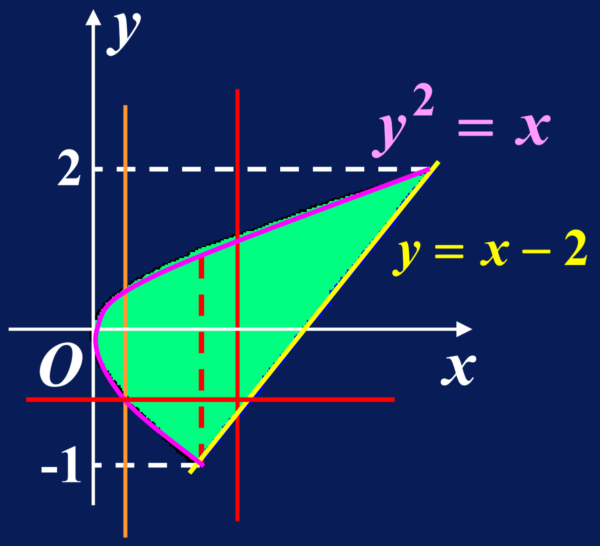
(3) $\int_0^1 \mathrm{d}\,x \int_x^{2x} f\,\mathrm{d}\,y + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\,x \int_x^{\frac{2}{x}} f\,\mathrm{d}\,y$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\,y \int_{\frac{y}{2}}^{y} f\,\mathrm{d}\,x + \int_{\sqrt{2}}^{2} \mathrm{d}\,y \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{2}{y}} f\,\mathrm{d}\,x$$



例3 计算$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域.

解 1° 画D的草图



求交点：$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{cases}$

$y^2 - y - 2 = 0,\ (y+1)(y-2) = 0$

$y = -1, y = 2$ 交点：$(1,-1), (4,2)$.

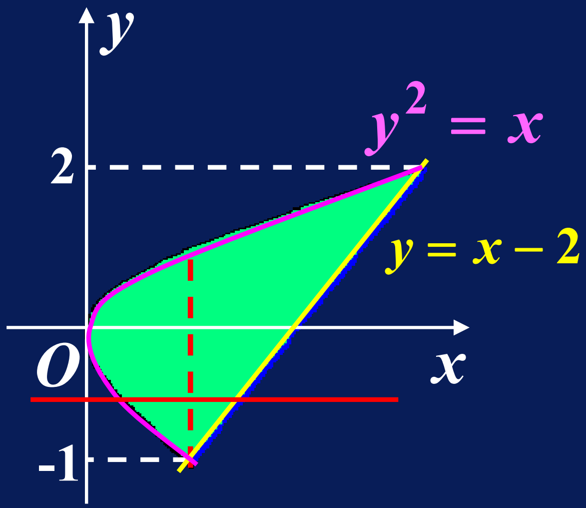
2° 选择积分变量，定限

先对 x, 后对 y 积分

$$I = \iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{2}\left(\int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

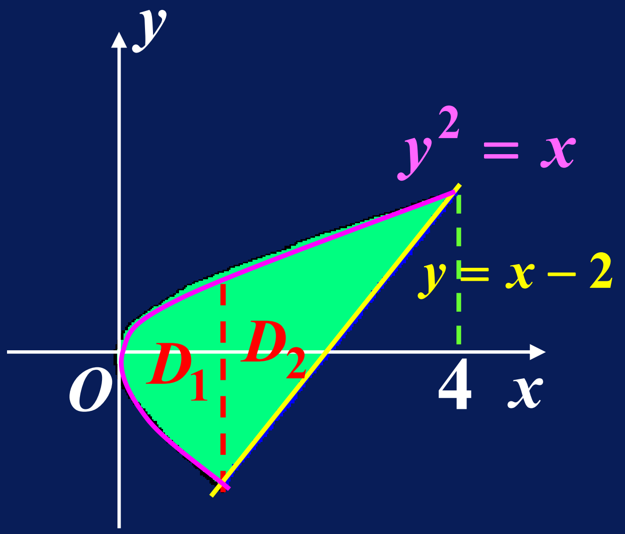
$$= \int_{-1}^{2} y\left(\int_{y^2}^{y+2} x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$



$$= \int_{-1}^{2} y\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=y^2}^{x=y+2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} y[(y+2)^2 - y^4]\mathrm{d}y = \frac{45}{8}.$$

注　若选择先对y后对x积分的次序，

则有



$$\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} xy\,\mathrm{d}\sigma$$

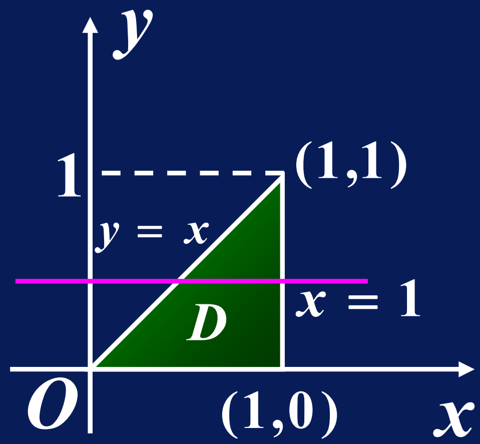
$$=\int_0^1\left[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x+\int_1^4\left[\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

显然这样计算会麻烦些.

例4 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{x^2}\,d\sigma$, 其中 D 是由直线

$y=x, x=1$ 和 x 轴围成的三角形区域 .

解 D 既是 $X-$ 型, 又是 $Y-$ 型.



若将积分区域看成 $Y-$ 型:

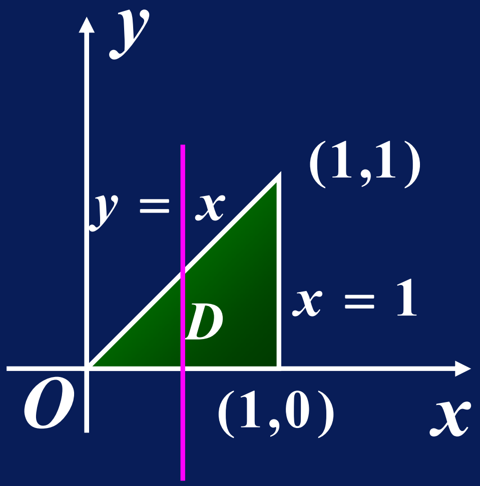
$$D: y \le x \le 1, 0 \le y \le 1,$$

则有 $$\iint\limits_D e^{x^2}\,d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2}\,dx,$$

但 $\int e^{x^2}\,dx$ 无法算出.

若将积分区域看成 $X-$型：

则 $\iint\limits_D e^{x^2}\,d\sigma = \int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}\,dy$



$$= \int_0^1 \left(e^{x^2} y\right)\Big|_0^x dx$$

$$= \int_0^1 x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}(e-1).$$

注 计算二重积分时，要适当地选择积分次序．先对哪个变量积分，要视积分区域 D 及被积函数 $f(x,y)$ 的不同情况而定．

例5 计算 $I=\iint\limits_D(\sqrt{y^2-2x^2y+x^4}+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

其中 $D: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1.$

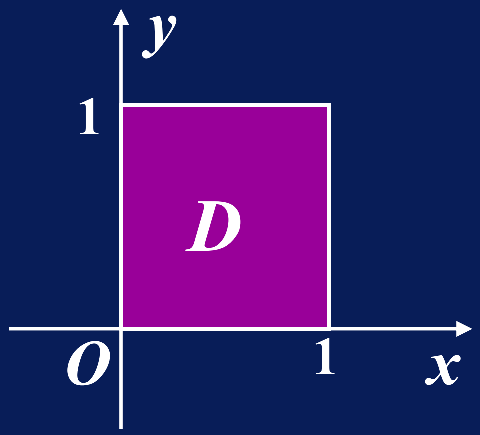
解

$$I=\iint\limits_D(\sqrt{(y-x^2)^2}+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

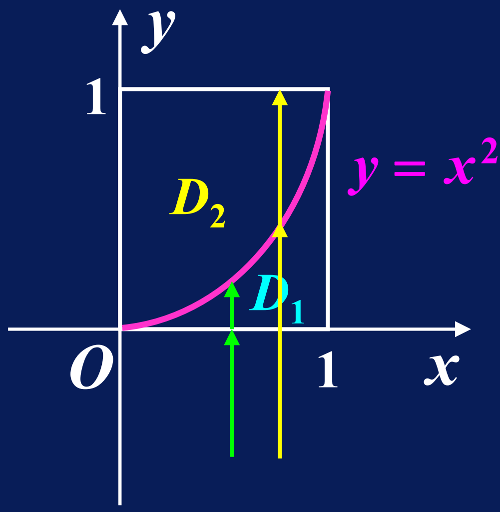
$$=\iint\limits_D(|y-x^2|+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D|y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D|y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+1$$



$$|y-x^2| = \begin{cases} x^2 - y, & y < x^2 \quad (D_1) \\ y - x^2, & y \ge x^2 \quad (D_2) \end{cases}$$



分界线： $y = x^2$， $D = D_1 \cup D_2$，

$$I = \iint_D |y - x^2| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + 1$$

$$= \iint_{D_1} (x^2 - y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_{D_2} (y - x^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + 1$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} (x^2 - y) \, \mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{1} (y - x^2) \, \mathrm{d}y + 1$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_0^{x^2}(x^2-y)\,\mathrm{d}\,y+\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_{x^2}^1(y-x^2)\,\mathrm{d}\,y+1$$

$$=\int_0^1 -\frac{1}{2}(x^2-y)^2\Big|_{y=0}^{y=x^2}\,\mathrm{d}\,x+\int_0^1\frac{1}{2}(y-x^2)^2\Big|_{y=x^2}^{y=1}\,\mathrm{d}\,x+1$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)^2\,\mathrm{d}\,x+1$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{4}{15}+1=\frac{41}{30}.$$

例6 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且都单调减少，

证明： $\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$

需证 $A \geq 0$

证 设 $A = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x,$

则 $A = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \mathrm{d}y$

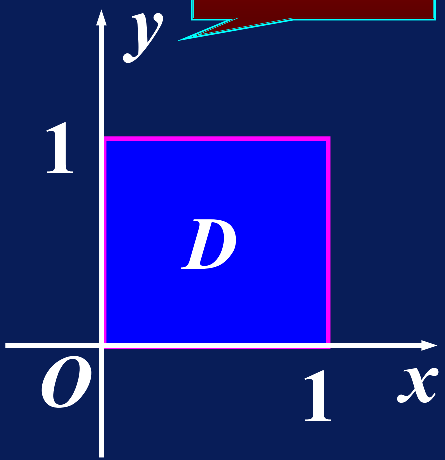
$- \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y$

定积分的值与积分变量记号无关

$$A = \iint\limits_D f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint\limits_D f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

需证 $A \ge 0$

$$= \iint\limits_D [f(x)g(x) - f(x)g(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



类似可得 (或利用 D 关于 $y=x$ 的对称性)

$$= \iint\limits_D [f(y)g(y) - f(y)g(x)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

右端相加

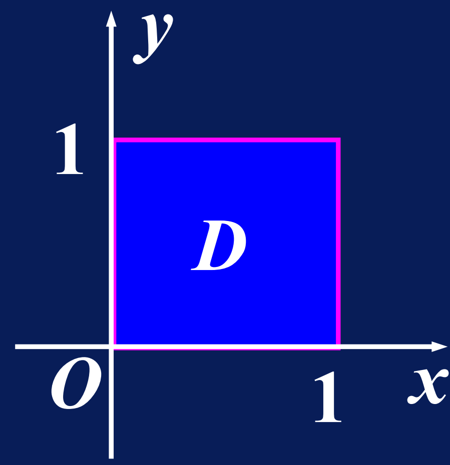
$$2A = \iint\limits_D [f(x) - f(y)][g(x) - g(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$2A = \iint_D [f(x) - f(y)][g(x) - g(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

由题设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为单调减少，

故不论 $x > y$ 或 $x < y$ 时，

$f(x) - f(y)$ 与 $g(x) - g(y)$ 同号，

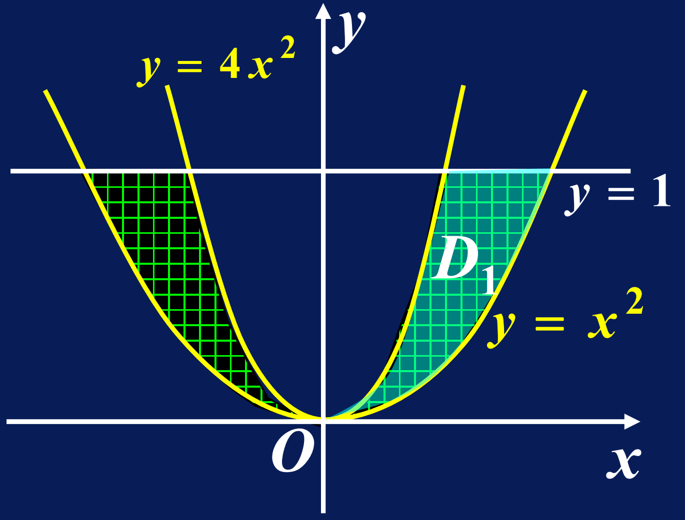


从而 $[f(x) - f(y)][g(x) - g(y)] \geq 0$，

$\therefore \quad 2A \geq 0$， 即 $A \geq 0$，

亦即 $$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

例7 计算 $\iint\limits_D (3x^3+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是两条抛物线 $y=x^2$ 与 $y=4x^2$，$y=1$ 所围．



解 D 关于 y 轴 $(x=0)$ 对称，

关于x是奇函数

$$\iint\limits_D (3x^3+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D 3x^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

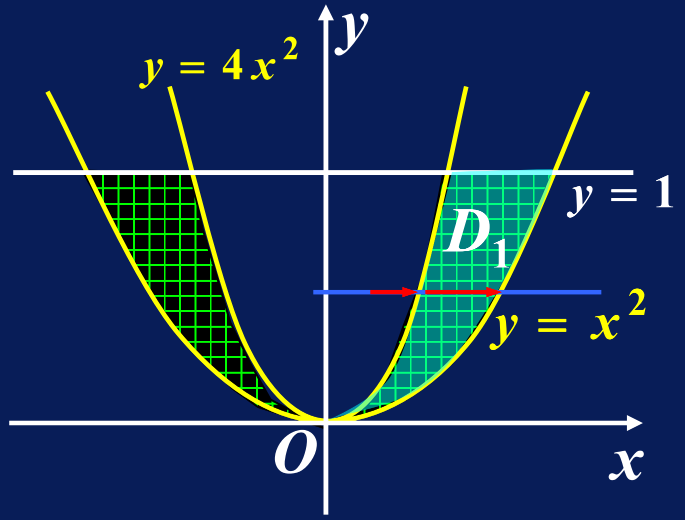
$$=0+\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_D (3x^3 + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^1 y\,\mathrm{d}y \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 y^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2}{5}.$$



三、同步练习

1. 改变 $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y\ (a>0)$

的积分次序.

2. 计算$I=\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}\sigma$, D由$y^2=\frac{\pi}{2}x$与$y=x$所围.

3. 计算 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1 \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$.

4. 用适当的积分次序计算 $I=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$,

其中D是由直线 $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a$ $(a>0)$ 所围成的闭区域.

5. 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $x=1$, $x=-1$, $y=2$ 和x轴所围区域 .

6. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，试证

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x \ge 1.$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

7. 设$f(x)$在区间 $[a,b]$上连续，证明

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}.$$

8. 设$f(t)$为连续函数，证明

$$\iint\limits_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $D:|x|\le\frac{A}{2},|y|\le\frac{A}{2},A$是常数 .

9. 计算$\iint\limits_D y\sin x\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D是以 $A(0,\pi)$, $B(0,-\pi),C(\pi,0)$为顶点的三角形区域 .

10. 求$I=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D: |x|+|y|\le 1$.

11. 求$I=\iint\limits_{D}x[1+yf(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$是

由$y=x^3$, $y=1, x=-1$ 围成, f是连续函数.

12. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=A$,求

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

13. 设D是平面上以$A(1,1)$, $B(-1,1)$和$C(-1,-1)$为顶点的三角形, D_1是它的第一象限部分,

设 $I=\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 则有 (　　).

(A) $I=4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(B) $I=2\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

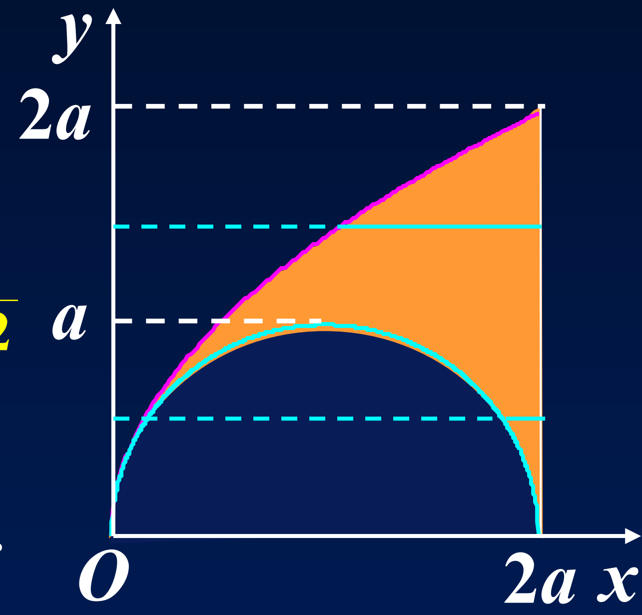
(C) $I=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(D) $I=4\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

14. 求椭圆柱面 $x^2+4y^2=1$与平面 $z=1-x$及 $z=0$所围成的空间体的体积 .

四、同步练习解答

1. 改变 $\int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\ (a>0)$ 的积分次序.



解 $y=\sqrt{2ax} \Rightarrow x=\dfrac{y^2}{2a}$

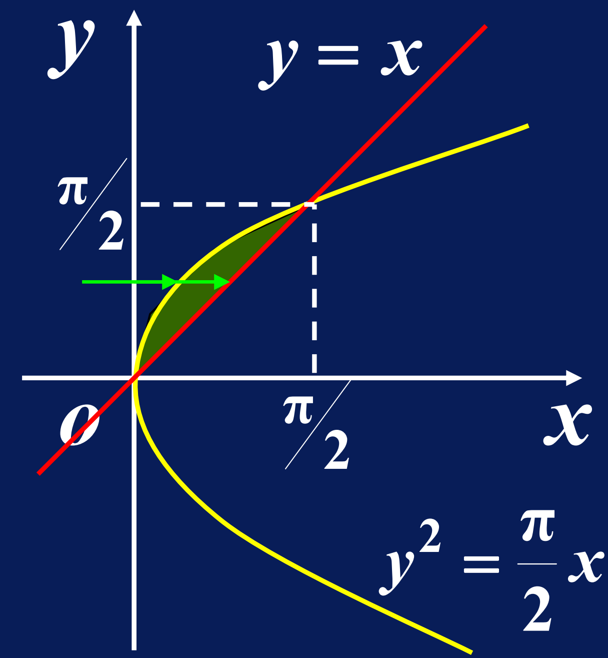
$y=\sqrt{2ax-x^2} \Rightarrow x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$

$$\text{原式}=\int_0^a \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^a \mathrm{d}y \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_a^{2a} \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

2. 计算$I=\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}\sigma$, D 由 $y^2=\frac{\pi}{2}x$ 与 $y=x$ 所围.

解 选取先 y 后 x 的次序无法计算，只能取先 x 后 y 的次序.



$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{2}{\pi}y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{y}\left(y-\frac{2}{\pi}y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=1-\frac{2}{\pi}.$$

3. 计算 $\int_0^1 \mathrm{d}\, y \int_{\sqrt{y}}^1 \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \mathrm{d}\, x$.

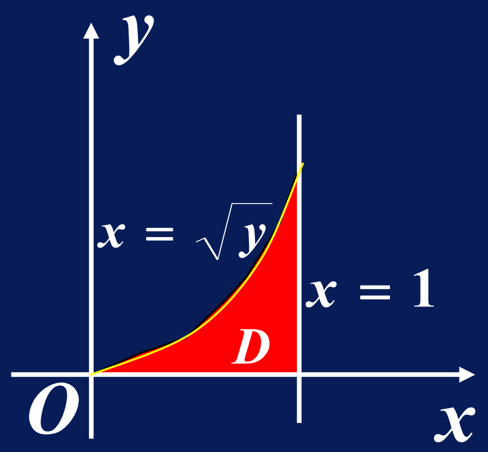
解 由于积分 $\int \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \mathrm{d}\, x$无法求出，故考虑交换积分次序.

$$D: \sqrt{y} \le x \le 1, 0 \le y \le 1$$

其边界区域为

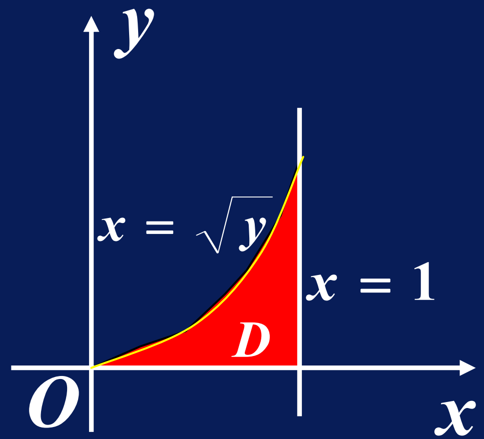
$$x = \sqrt{y}, x = 1, y = 0$$

于是可作出 D的图形如右



再将 D 按另一种次序表示

$$D: 0 \le y \le x^2, 0 \le x \le 1$$



于是

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 [x\mathrm{e}^{y/x}]_0^{x^2} \mathrm{d}x$$

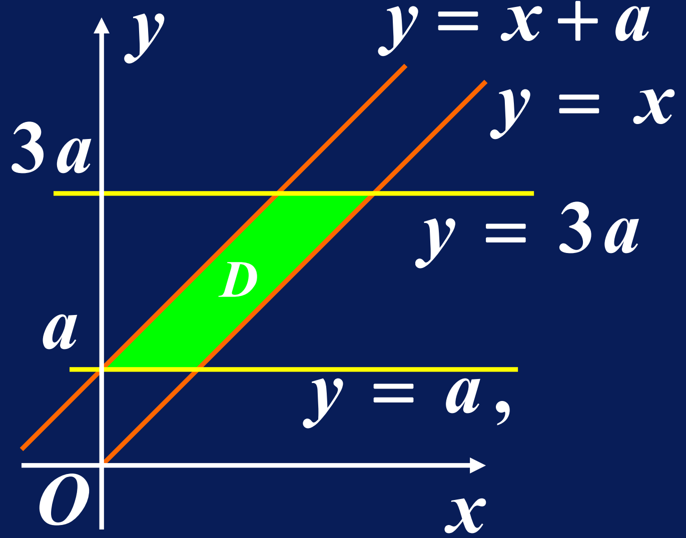
$$= \int_0^1 (x\mathrm{e}^x - x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

4. 用适当的积分次序计算 $I = \iint_D (x^2 + y^2) \mathrm{d}\sigma$，

其中D是由直线 $y = x$，$y = x + a$，$y = a$，$y = 3a$ $(a > 0)$ 所围成的 闭区域.

解 由被积函数及积分区域的特点知，

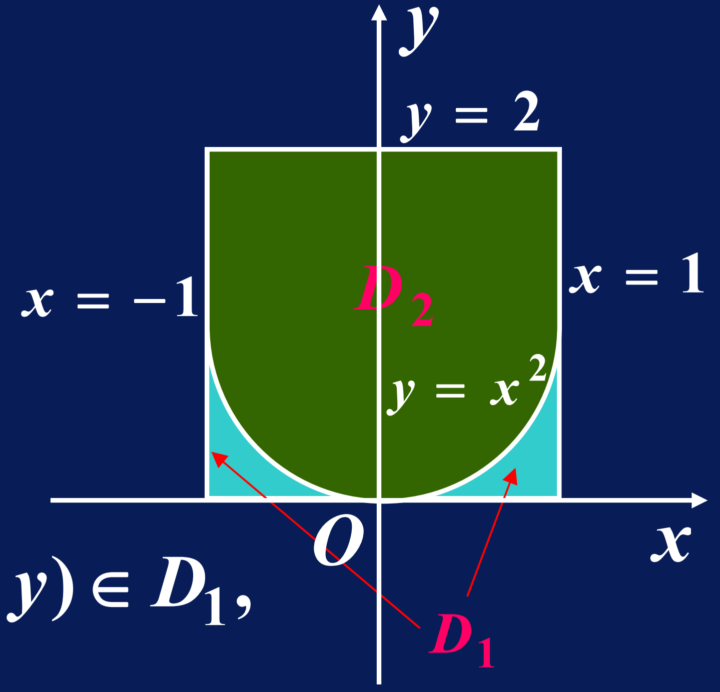
选先x后y的次序比较合适.



$$I = \int_a^{3a} \mathrm{d}y \int_{y-a}^{y} (x^2 + y^2) \mathrm{d}x$$

$$= 14a^4.$$

5. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $x=1,\ x=-1,\ y=2$ 和x轴所围区域．



解　为去掉绝对值符号,

用抛物线 $y=x^2$ 将 D

分为两个子区域 D_1, D_2,

$$\sqrt{|x^2-y|}=\begin{cases}\sqrt{x^2-y}, & (x,y)\in D_1,\\ \sqrt{y-x^2}, & (x,y)\in D_2.\end{cases}$$

$$\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

D_1、D_2关于y轴$(x=0)$对称，

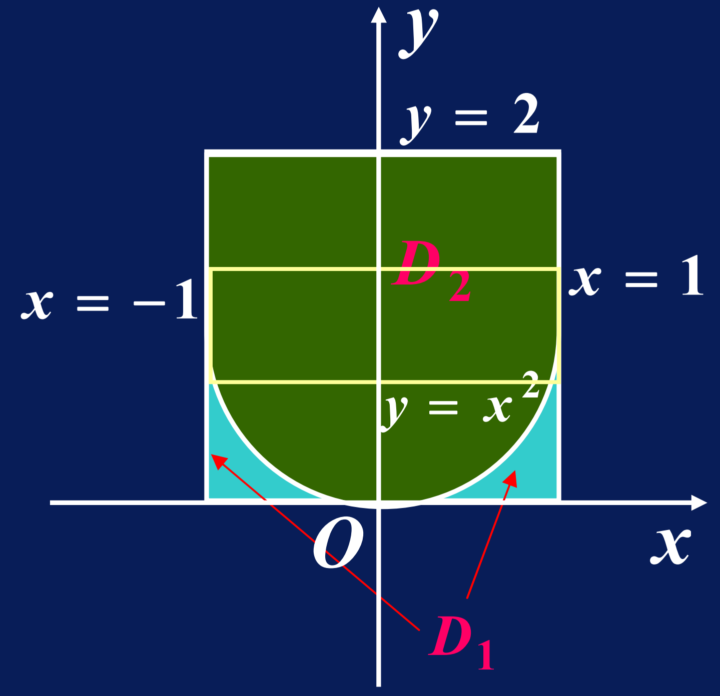
关于x 均为偶函数

$$= \iint_{D_1} \sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} \sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y$$

$$+ 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^2 \sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}.$$



6. 设 $f(x)$在[0,1]上连续，试证

$$\int_0^1 e^{f(x)}\,dx \int_0^1 e^{-f(x)}\,dx \ge 1.$$

证 设 $A=\int_0^1 e^{f(x)}\,dx \int_0^1 e^{-f(x)}\,dx$

则有 $A=\int_0^1 e^{f(x)}\,dx \int_0^1 e^{-f(y)}\,dy$

$$=\int_0^1\int_0^1 e^{f(x)-f(y)}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 e^{f(y)}\,dy \int_0^1 e^{-f(x)}\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^1 e^{f(y)-f(x)}\,dx\,dy$$

于是

$$2A=\int_0^1\int_0^1\left[\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}+\frac{1}{\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\geq\int_0^1\int_0^1 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\quad(\text{利用 } a^2+\frac{1}{a^2}\geq 2)$$

即

$$A=\int_0^1\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x\geq 1.$$

7. 设$f(x)$在区间 $[a,b]$上连续，证明

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}.$$

即要证函数在一个区间 上的平均值不大于均方 根.

证 (方法1) 用二重积分证明

$f(x)$在$[a,b]$上连续，故 $F(x,y)=[f(x)-f(y)]^2$

在矩形区域 D: $a\le x\le b, a\le y\le b$上连续，且

$$\iint_D [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge 0.$$

显然 $\displaystyle\iint_D [f(x)-f(y)]^2 \mathrm{d}\sigma$

$$= \iint_D f^2(x)\mathrm{d}\sigma - 2\iint_D f(x)f(y)\mathrm{d}\sigma + \iint_D f^2(y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= 2(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \geq 0,$$

$$\therefore \quad (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \geq \left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2,$$

两端同乘以 $\dfrac{1}{(b-a)^2}$ 并开方得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}.$$

(方法2) 用定积分证明

设 $f(x), g(x)$在区间 $[a, b]$上连续，有

$$0 \le \int_a^b [f(x) + t\, g(x)]^2 \,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2t\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + t^2\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

由于关于t的二次三项式恒大于零，故判别式

$$\Delta = [2\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x]^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \le 0,$$

即 $[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x]^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x,$

令$g(x)=1$,则有

$$[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

两端同乘以$\dfrac{1}{(b-a)^2}$并开方得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}.$$

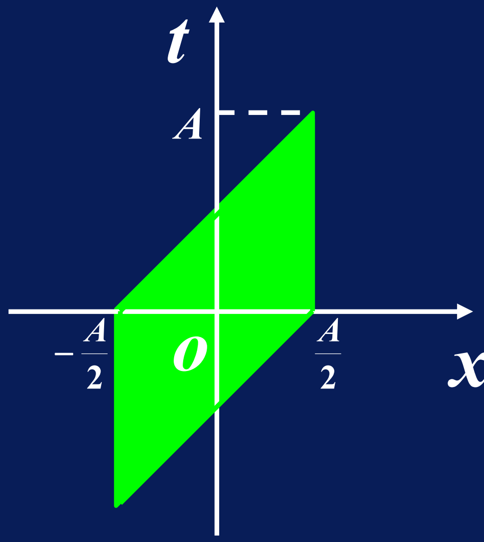
8. 设$f(t)$为连续函数，证明

$$\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $D: |x|\le \frac{A}{2}, |y|\le \frac{A}{2}$, A是常数 .

证 $$\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(x-y)\,\mathrm{d}y$$

$$\underline{\underline{\text{令}t=x-y}}\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}\mathrm{d}x\int_{x-\frac{A}{2}}^{x+\frac{A}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$



画出积分区域

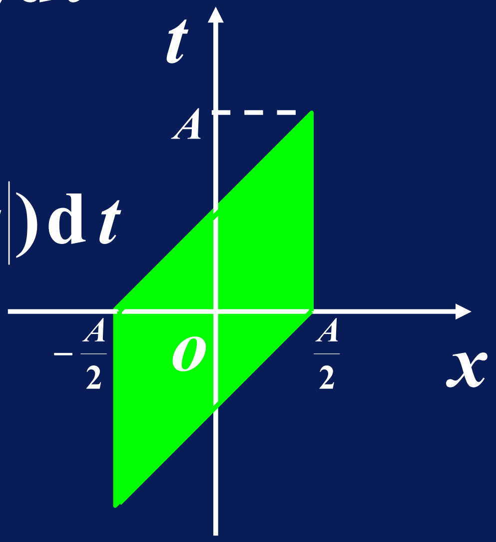
$\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \mathrm{d}x \int_{x-\frac{A}{2}}^{x+\frac{A}{2}} f(t)\mathrm{d}t$ 交换积分次序

$$= \int_{-A}^{0} f(t)\mathrm{d}t \int_{-\frac{A}{2}}^{t+\frac{A}{2}} \mathrm{d}x + \int_{0}^{A} f(t)\mathrm{d}t \int_{t-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-A}^{0} f(t)(A+t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{A} f(t)(A-t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-A}^{0} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t + \int_{0}^{A} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t.$$



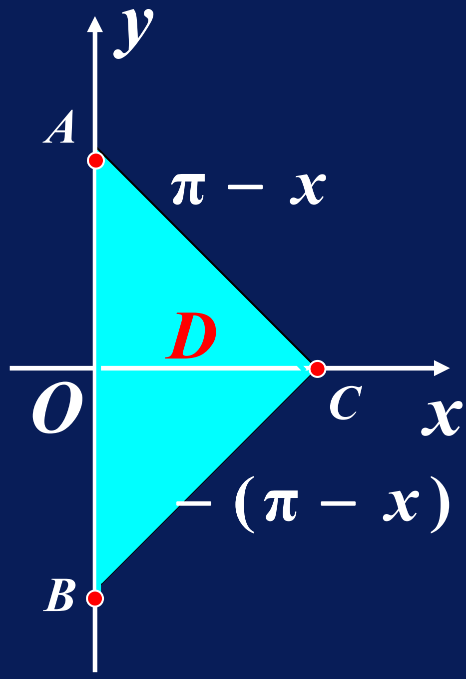
9. 计算 $\iint\limits_D y\sin x\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是以 $A(0,\pi)$, $B(0,-\pi)$, $C(\pi,0)$ 为顶点的三角形区域 .

解 D 关于 x 轴 $(y=0)$ 对称,

关于 y 是奇函数

$$\iint\limits_D y\sin x\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=0.$$

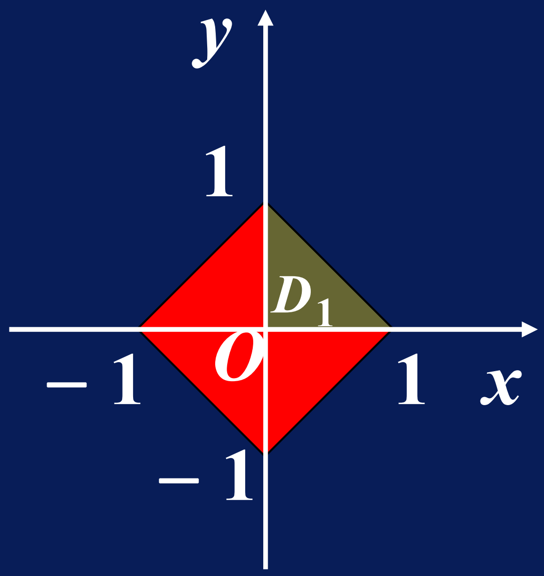


10. 求 $I=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D:|x|+|y|\le 1$.

关于x,y均为偶函数

解 D关于x,y轴对称,

$$I=4\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



再利用积分区域D_1和被积函数

关于变量x,y的轮换对称性, 得

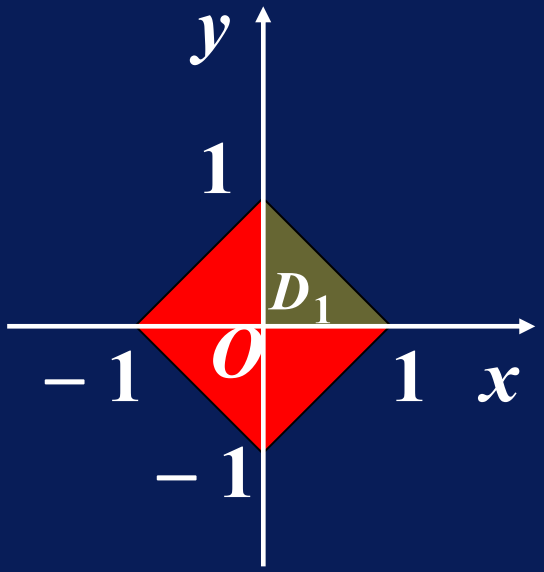
$$\iint\limits_{D_1}x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

故

$$I = 8\iint_{D_1} x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= 8\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} x^2 \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}.$$



11. 求$I=\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$是由$y=x^3$, $y=1, x=-1$ 围成, f是连续函数.

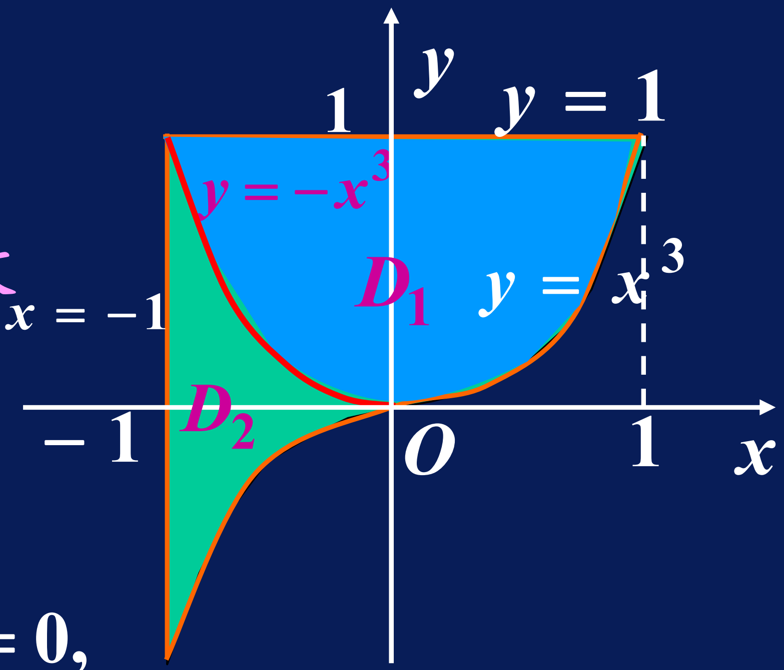
解 $I=\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D xyf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$\iint\limits_D xyf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

关于x, y均为奇函数

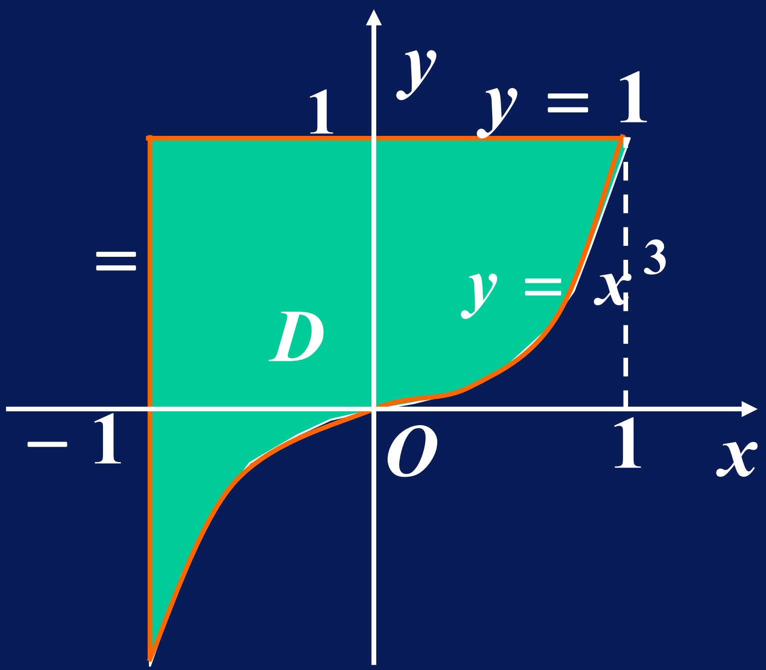
$=\iint\limits_{D_1} xyf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$+\iint\limits_{D_2} xyf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$



$$I = \iint_D x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 0$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^3}^{1} x \,\mathrm{d}y$$



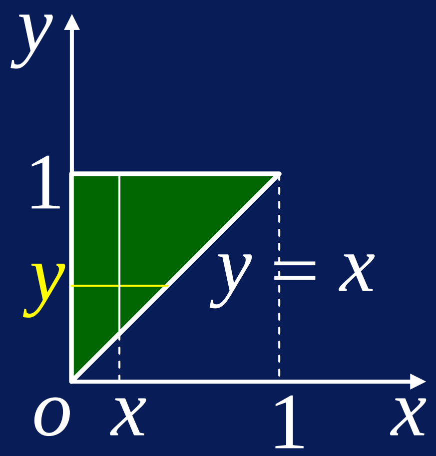
$$=$$

$$= \int_{-1}^{1} x(1 - x^3)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2}{5}.$$

12. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = A$,

求 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$.



提示 交换积分顺序后, x, y 互换

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$2I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y=A^2$$

13. 设D是平面上以$A(1,1)$, $B(-1,1)$和$C(-1,-1)$为顶点的三角形, D_1是它的第一象限部分,

设 $I=\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 则有 (　　).

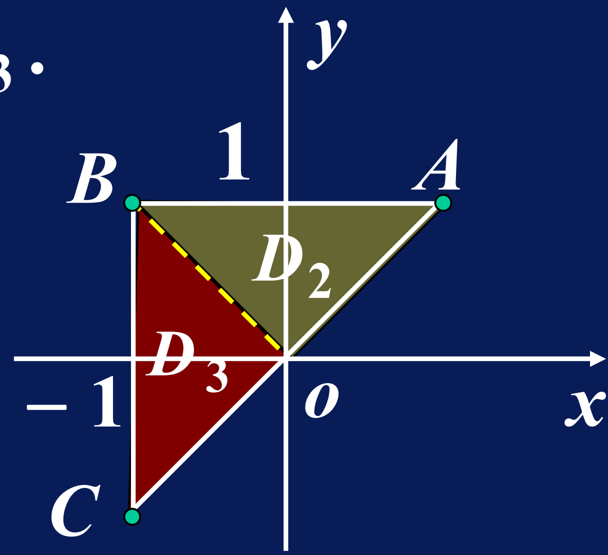
(A) $I=4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(B) $I=2\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(C) $I=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(D) $I=4\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

解 连 BO, 把 D 分成 $D_2 \cup D_3$.



因为 D_2 关于 y 轴对称,

D_3 关于 x 轴对称,

被积函数 xy 关于 x 为奇函数,

关于 y 也为奇函数 ,

$$\therefore \quad \iint\limits_{D} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_2} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_3} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 0.$$

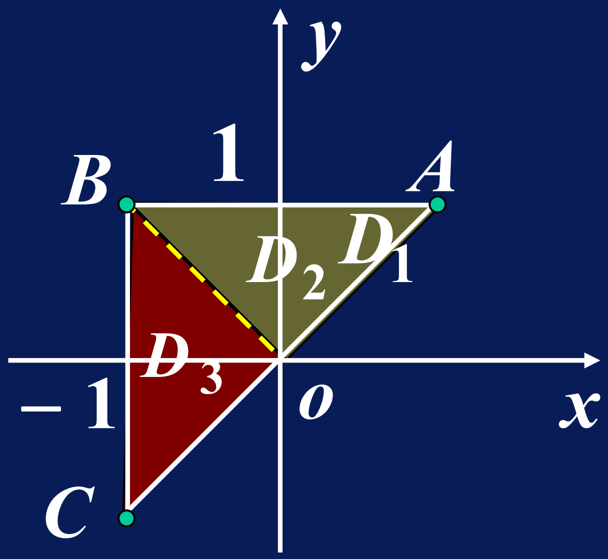
又被积函数 $\cos x \sin y$ 关于 x 为偶函数，

关于 y 为奇函数，

$$\therefore \quad \iint_{D} \cos x \sin y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_2} \cos x \sin y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_{D_3} \cos x \sin y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

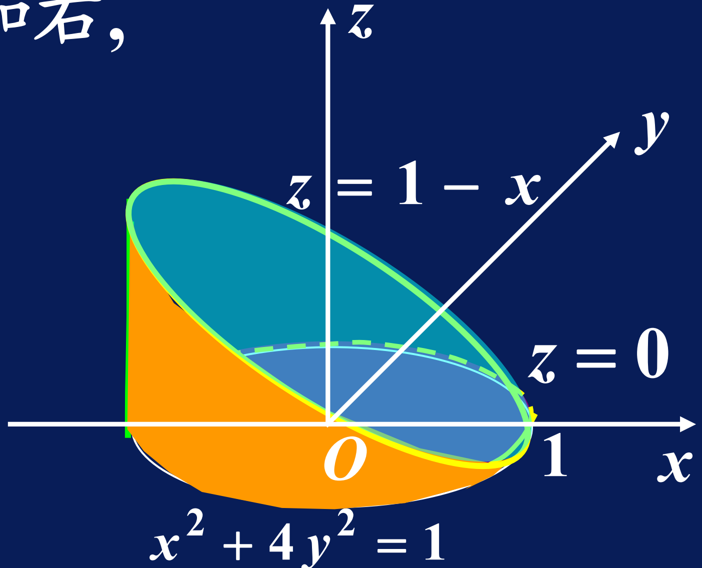


因此应选 B.

14. 求椭圆柱面 $x^2+4y^2=1$与平面 $z=1-x$及 $z=0$所围成的空间体的体积 .

解 画出该空间体的图形如右,

这是一个曲顶柱体，其顶为 $z=1-x$，底为



$$D:\{(x,y)\,|\,x^2+4y^2\le 1\}$$

$$=\{(x,y)\,|\,-\sqrt{1-4y^2}\le x\le\sqrt{1-4y^2},-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\}.$$

于是所求体积为

$$V=\iint_D(1-x)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D\mathrm{d}\sigma-\iint_D x\,\mathrm{d}\sigma$$

由对称性知

$$\iint_D x\,\mathrm{d}\sigma=0$$

而积分 $\iint_D \mathrm{d}\sigma$ 数值上等于区域 D 的面积 $\frac{\pi}{2}$，故

$$V=\frac{\pi}{2}.$$