第三节

隐函数和由参数方程所确定的函数的导数

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

（一）隐函数的导数

1. 定义　若由方程 $F(x,y)=0$ 可确定 y 是 x 的函数，则称 函数 y 为由此方程所确定的隐函数．

注 1° 若 $y=y(x)\ (x\in D)$ 是由 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，则　$F[x,y(x)]\equiv 0 \qquad (x\in D)$;

2° 若隐函数 $y=y(x)\ (x\in D)$ 可由 $F(x,y)=0$ 中解出，则称此隐函数可显化;

如： 方程$x-y^3-1=0$ 确定了一个隐函数：$y=y(x)$

可显化：$y=\sqrt[3]{x-1}$.

3° 有些隐函数不易显化，甚至不能显化.

例如，方程$e^y-xy=0$ 确定了一个隐函数：

$$y=y(x),\ x\in(-\infty,\ 0),$$

事实上，$\forall\ x_0\in(-\infty,0)$，总有唯一确定的$y_0$，

使 $$e^{y_0}=x_0y_0.$$

但不能显化.

问题：隐函数不易显化或不能显化时如何求其导数?

2. 隐函数求导法则

用复合函数求导法则，直接对方程两边求导，

隐函数求导步骤：

$$F(x, y) = 0$$

将方程中的 y 视为 x 的函数 $y(x)$（隐函数）

两边对 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x, y) = 0$$ （得到含导数 y' 的方程）

从中解出 y'

3. 隐函数求导法的应用 —— 对数求导法

(1) 方法 先在方程两边取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.

不易求导

设 $y = f(x)$ $\quad (f(x)$可导$, f(x) \neq 0)$.

$$\ln|y| = \ln|f(x)| \overset{令}{=} h(x)$$

易求导

$$\frac{\mathrm{d}(\ln|y|)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$\because \quad \frac{\mathrm{d}(\ln|y|)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\ln|y|)}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y} \cdot y'$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y} \cdot y' = h'(x), \quad \underline{y' = yh'(x) = f(x)h'(x).}$$

(2) 应用范围

1) 幂指函数 ： $y=[u(x)]^{v(x)}\ (u(x)>0)$ 的导数.

取对数得 $\ln|y| = v\ln u$

两边求导: $\dfrac{1}{y}y' = v'\ln u + \dfrac{u'v}{u}$,

$$y' = u^{v}\left(v'\ln u + \frac{u'v}{u}\right)$$

注意: $y' = \underbrace{u^{v}\ln u\cdot v'}_{\text{按指数函数求导公式}} + \underbrace{v\,u^{v-1}\cdot u'}_{\text{按幂函数求导公式}}$

（二）由参数方程所确定的函数的导数

若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定 y与x间的函数关系：

$y = y(x)$,则称此函数为由参数方 程所确定的函数．

例如， $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2, \end{cases} \Longrightarrow t = \dfrac{x}{2}$ 消去参数 t

$$\therefore \quad y = t^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$$ 故 $y' = \dfrac{1}{2}x.$

问题：消去参数困难或无法消去参数时，如何求函数的导数?

结论 (由参数方程所确定的函数的求导公式)

在 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 中，设 $x=\varphi(t)$在某个区间上具有单调且连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，且能构成复合函数：$y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$，再设函数 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则由参数方程所确定的函数 $y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$ 可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

二、典型例题

例1 方程 $x+y^3-1=0$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 y'.

解 (方法1) 此方程确定的函数： $y=\sqrt[3]{1-x}$

$$y'=[(1-x)^{\frac{1}{3}}]'=\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-x)'$$

$$=-\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}.$$

(方法2) 此方程确定了隐函数： $y=y(x)$.

$$h(x) \overset{令}{=} x + y^3(x) - 1 \equiv 0$$

一方面， $h'(x) \equiv 0$

另一方面， $h'(x) = [x + y^3(x) - 1]'$

$$= 1 + [y^3(x)]' - 0 \quad (想 u = y(x))$$

$$= 1 + 3y^2(x)y'(x)$$

$\therefore \quad 1 + 3y^2(x)y'(x) = 0$

从而 $y'(x) = -\dfrac{1}{3y^2(x)}.$

例2 求 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$ 的导数.

求幂指函数导数
用对数求导法

解 (方法1) 对数求导法

两边取对数, 化为隐式方程:

$$\ln|y| = \sin x \cdot \ln x$$

$$\Big\downarrow \text{两边对 } x \text{ 求导}$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore \quad y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

(方法2) 复合函数求导法

$$y = x^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln x}$$

$$y' = (x^{\sin x})' = (\mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln x})'$$

$$= (\mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln x})\cdot(\sin x\cdot\ln x)'$$

$$= x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x + \sin x\cdot\frac{1}{x})$$

注 $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$ (μ为常数)

$$(x^{\sin x})' \cancel{=} (\sin x)x^{\sin x-1}$$

$$(x^{x})' \cancel{=} x\cdot x^{x-1}$$

例3 设 $y=\ln|f(x)|$, 其中$f(x)\neq 0$且$f(x)$可导, 求 y'.

解 $$y=\ln|f(x)|=\begin{cases}\ln f(x), & f(x)>0\\ \ln[-f(x)], & f(x)<0\end{cases}$$

当 $f(x)>0$ 时, $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$\boxed{y'=(\ln|x|)'=\frac{1}{x}\quad (x\neq 0)}$$

当 $f(x)<0$ 时, $y'=\dfrac{1}{[-f(x)]}\cdot[-f'(x)]=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$\therefore\quad y'=(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}\quad (f(x)\neq 0)$$

例4 求阿基米德螺线 $\rho = a\theta(a>0)$上，直角坐标为$(0,\dfrac{\pi a}{2})$的点 处的切线方程 .

解 先写出曲线的参数方程:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = a\theta\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta = a\theta\sin\theta, \end{cases}$$

再求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}} = \frac{a\sin\theta + a\theta\cos\theta}{a\cos\theta - a\theta\sin\theta} = \frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}$$

直角坐标为 $(0,\dfrac{\pi a}{2})$的点对应的极角为 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

而 $$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

故所求切线方程为

$$y-\frac{a\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)$$

即 $$\frac{2}{\pi}x+y=\frac{a\pi}{2}.$$

例5 设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ \mathrm{e}^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

解 方程组两边同时对 t 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t + 2 \\ \mathrm{e}^y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \sin t + \mathrm{e}^y \cos t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{e}^y \cos t}{1 - \mathrm{e}^y \sin t}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{e}^y \cos t}{(1 - \mathrm{e}^y \sin t)(6t + 2)}$$

$$\therefore \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \left.\frac{e^y \cos t}{(1-e^y \sin t)(6t+2)}\right|_{t=0} = \frac{e^{y(0)}}{2} = \frac{e}{2}.$$

于方程$e^y \sin t - y + 1 = 0$中令 $t = 0$，得

$$e^{y(0)} \cdot 0 - y(0) + 1 = 0, \; y(0) = 1.$$

三、同步练习

1. $y=(\sin x)^{\tan x}+\frac{x}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\frac{2-x}{(2+x)^2}}$，求 y'.

2. 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在点 $(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$ 处的切线方程.

3. 求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的导数 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

4. 设 $y=x+\mathrm{e}^x$，求其反函数的导数.

5. 设 $y = x^{x^x} + x^{a^x} \ (x > 0)$. 求 y'.

6. 设 $y = \dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$, 求 y'.

7. 设 $\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 3t^2, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}$.

8. 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases} \quad (0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}x}$.

四、同步练习解答

1. $y = \underbrace{(\sin x)^{\tan x}}_{y_1} + \underbrace{\frac{x}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\frac{2-x}{(2+x)^2}}}_{y_2}$，求 y'.

解 分别用对数求导法求 y_1', y_2'.

$$y' = y_1' + y_2'$$

$$= (\sin x)^{\tan x}(\sec^2 x \cdot \ln\sin x + 1)$$

$$+\frac{1}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\frac{2-x}{(2+x)^2}}\left[1 - 2\ln x - \frac{x}{3(2-x)} - \frac{2x}{3(2+x)}\right]$$

2. 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$在点$(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$处的切线方程.

解　椭圆方程两边对 x 求导

$$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot y'=0$$

$$\therefore \quad y'\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{9}{16}\frac{x}{y}\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

故切线方程为　$y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$

即　$\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

3. 求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解　方程两边对 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^5+2y-x-3x^7)=0$$

得　$$5y^4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1-21x^6=0$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}$$

由原方程得 $x=0$ 时 $y=0$，故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$

4. 设 $y=x+\mathrm{e}^x$, 求其反函数的导数 .

解 (方法1) $\because \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+\mathrm{e}^x$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$$

(方法2) 等式两边同时对 y 求导

$$1=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\mathrm{e}^x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$$

5. 设 $y = x^{x^x} + x^{a^x}\ (x > 0)$. 求 y'.

解 令 $y_1 = x^{x^x}, y_2 = x^{a^x}$， 则 $y' = y_1' + y_2'$

$$\ln|y_1| = x^x \ln x,$$

$$\frac{1}{y_1} y_1' = (x^x)' \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x},$$

而 $(x^x)' = (\mathrm{e}^{x\ln x})' = \mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x + 1)$

$$= x^x(\ln x + 1)$$

故 $y_1' = [(x^x)(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}] \cdot x^{x^x}$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$y_2 = x^{a^x},$$

$$\ln|y_2| = a^x \ln x, \quad \frac{1}{y_2} y_2' = a^x \ln a \ln x + \frac{a^x}{x},$$

所以 $y_2' = x^{a^x}(a^x \ln a \ln x + \dfrac{a^x}{x})$

$$\therefore \quad y' = y_1' + y_2'$$

$$= [(x^x)(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}] \cdot x^{x^x}$$

$$+ x^{a^x}(a^x \ln a \ln x + \frac{a^x}{x}).$$

6\. 设$y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$，求 y'.

解 等式两边取对数得

$$\ln|y|=\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln|x-1|-2\ln|x+4|-x$$

上式两边对x求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1$$

$$\therefore y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right]$$

7. 设 $\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 3t^2, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}$$

$$= \frac{3 - 3t^2}{6t}$$

$$= \frac{1}{2t} - \frac{t}{2}$$

8. 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases}$ $(0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 方程组两边对 t 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 2 \\ 2t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \cos y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$$