

高等数学 16-17(上)阶段测验(2)解答

2016-12

一、填空题 4'×8 = 32

$$1. \sqrt{x} - 1 e^{\sqrt{x}} + C; 2. \frac{1}{2} f'(2x) + C; 3. \ln|x^2 - 3x + 8| + C; 4. \frac{1}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} + C;$$

$$5. 2x^{\frac{1}{2}} + C; 6. 2\sqrt{2}; 7. e^{-1} - e^{-2}; 8. \frac{\pi^2}{8}.$$

二、选择题 4'×3 = 12 1. B; 2. C; 3. B.

三、计算题 10'×3 = 30

1.解 令 $t = \sqrt{e^x - 1}$, $x = \ln(1+t^2)$,

$$I_1 = \int \frac{\ln(1+t^2)}{t} \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt = 2[t \ln(1+t^2) - \int \frac{2t^2}{1+t^2} dt]$$

$$= 2[t \ln(1+t^2) - 2t + 2 \arctan t + C]$$

2.解 $I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} x \cot x dx = \left[\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{4} - \ln|\sin x| \right]_{\pi/4}^{\pi/3}$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$

3.解 令 $t = \sqrt{x}$, $I_3 = \int_0^1 \frac{t''}{\sqrt{1-t^2}} dt$, 再令 $t = \sin y$,

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n y}{\cos y} \cdot \cos y dy = 2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} (m=1,2,\dots)$$

四、13 设 $f(x)$ 为连续的正值函数, 求证: 当 $x > 0$ 时, 函数

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt} \text{ 单调增加.}$$

解 $\varphi'(x) = [x f(x) \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_0^x t f(t) dt] / (\int_0^x f(t) dt)^2$

$$= [f(x) \int_0^x (x-t)f(t)dt] / (\int_0^x f(t)dt)^2$$

因 $(x-t)f(t) \geq 0$, 仅当 $t=x$ 时取等号, 故分子大于零, 从而 $\varphi(x)$ 单调增加.

五、13 已知曲线段 $y = \ln x (1 \leq x \leq e)$ 与 $y = \sqrt{\frac{x-2}{e-2}} (2 \leq x \leq e)$ 的交点为

$(e, 1)$, 求上述两条曲线及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转体的体积.

解 $V = \int_1^e \pi (\ln x)^2 dx + \int_2^e \pi \frac{x-e}{e-2} dx$

$$= \pi [x \ln^2 x - 2 \int_1^e \ln x dx] - \frac{\pi}{e-2} (\frac{x^2}{2} - 2x)_2^e = \frac{e-2}{2} \pi$$