第三章　微分中值定理与导数的应用

第一节　微分中值定理

1. 填空

(1) 曲线 $y = x^2$ 在点 $\underline{(1, 1)}$ 处的切线与连接曲线上两点 $(0, 0)$，$(2, 4)$ 的弦平行.

(2) 对函数 $f(x) = px^2 + qx + r$ 在区间 $[0, 2]$ 上应用拉格朗日中值定理时所求得的 $\xi = \underline{1}$.

解 (1) 设所求点为 (x_0, x_0^2)，因为 $y' = 2x$，则曲线在点 (x_0, x_0^2) 处的切线斜率为 $2x_0 = \dfrac{4-0}{2-0}$，从中解得 $x_0 = 1$，从而所求点为 $(1, 1)$.

(2) 因 $f(x) = px^2 + qx + r$，则 $f'(x) = 2px + q$，$f(2) = 4p + 2q + r$，$f(0) = r$，由拉格朗日中值定理 $f(2) - f(0) = f'(\xi)(2-0)$. 得 $4p + 2q + r - r = 2(2p\xi + q)$，从而 $\xi = 1$.

2. 证明恒等式 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$，($-1 \le x \le 1$).

证 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$，则

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

在 $(-1, 1)$ 内恒成立，因此，在 $(-1, 1)$ 内 $f(x)$ 为常数，又 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为常数. 因 $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$，故在 $[-1, 1]$ 上，

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

注意 易犯的错误是既不指出 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续，又不指出

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

只在 $(-1, 1)$ 内成立.

3. 若方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x = 0$ 有一个正根 $x = x_0$，证明方程

$$a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

必有一个小于 x_0 的正根（$n \ge 2$）.

证 令 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x$，则

$$f'(x) = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1},$$

$f(x)$ 在 $[0, x_0]$ 上连续，在 $(0, x_0)$ 内可导，且 $f(0) = f(x_0) = 0$，由罗尔定理，至少有一点 $\xi \in (0, x_0)$，使 $f'(\xi) = 0$，即

$$a_0n\xi^{n-1} + a_1(n-1)\xi^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0,$$

即方程

$$a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

必有一个小于 x_0 的正根.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导，且 $f(a) = f(b) = 0$，令 $F(x) = (x-a)f(x)$，证

明存在$\xi(a<\xi<b)$使$F''(\xi)=0$.

证 $F(x)=(x-a)f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导, 且$F(a)=F(b)=0$, 由罗尔定理, 至少存在一点$\eta\in(a,b)$, 使$F'(\eta)=0$, 又

$$F'(x)=f(x)+(x-a)f'(x),$$

则$F'(a)=0$.

$F'(x)$在$[a,\eta]$上连续, 在(a,η)内可导, 且$F'(a)=F'(\eta)=0$, 由罗尔定理, 至少存在一点$\xi\in(a,\eta)\subset(a,b)$, 使$F''(\xi)=0$.

5. 若$y=f(x)$的导数$f'(x)$在$[a,b]$上连续, 则必存在常数$L>0$, 使

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le L\left|x_1-x_2\right|,\qquad x_1,x_2\in(a,b).$$

证 因为$f'(x)$在$[a,b]$上连续, 所以$f'(x)$必在$[a,b]$上有界, 则存在常数$L>0$, 使$\left|f'(x)\right|\le L$. $f(x)$在$[x_1,x_2]$上满足拉格朗日中值定理条件, 至少存在一点$\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$, 使

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)f'(\xi),$$

因$\left|f'(\xi)\right|\le L$, 从而

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|x_1-x_2\right|\left|f'(\xi)\right|\le L\left|x_1-x_2\right|.$$

6. 证明多项式$f(x)=x^3-3x+a$在$[0,1]$内不可能有两个零点.

证 用反证法. 设$x_1,x_2\in[0,1]$, 使$f(x_1)=f(x_2)=0$, 由罗尔定理知, 存在$\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$, 使$f'(\xi)=0$, 而

$$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1),$$

在$(0,1)$内$f'(x)<0$, 与$f'(\xi)=0$矛盾, 故$f(x)$在$[0,1]$内不可能有两个零点

7. 设$0<x_1<x_2$, 证明:在(x_1,x_2)内至少存在一点ξ, 使得

$$x_1\mathrm{e}^{x_2}-x_2\mathrm{e}^{x_1}=(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi}(x_2-x_1)$$

证 将要证明的等式变形为$\dfrac{x_1\mathrm{e}^{x_2}-x_2\mathrm{e}^{x_1}}{x_2-x_1}=(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi}$, 即证

$$\frac{\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}-\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=(\xi-1)\mathrm{e}^{\xi}.$$

令$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$, 易验证$f(x)$和$g(x)$在$[x_1,x_2]$上满足柯西中值定理的条件, 于是存在$\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

$$\frac{\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}-\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=\left.\frac{\dfrac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{x^2}}{\dfrac{1}{-x^2}}\right|_{x=\xi}=(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi}$$

故

$$x_1\mathrm{e}^{x_2}-x_2\mathrm{e}^{x_1}=(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi}(x_2-x_1).$$

第二节　洛必达法则

1. 用洛必达法则求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\mathrm{e}^x-\cos x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}$　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$　　(6) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$　　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\mathrm{e}^x-\cos x}$

解 1　原式$=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-\cos x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=\!=}\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\sin x}=\dfrac{1}{2}$

解 2　原式$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\mathrm{e}^x+\sin x}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{\tan x\sec x+\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{2}{1+x^2}}{\sin x(\sec^2x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{2}{1+x^2}}{\sec^2x+1}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\mathrm{e}^{x^2}\cdot2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x^2}}=0$

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^x(1+\ln x)}{-1+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x[1-x^x(1+\ln x)]}{1-x}$

$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^x(1+\ln x)+x\left[-x^x(1+\ln x)^2-x^x\cdot\frac{1}{x}\right]}{-1}=2$

注意　易犯的错误是$\left(x^x\right)'=x\cdot x^{x-1}$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-1}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

(6) 令 $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$, 则 $\ln y=\tan x\ln\dfrac{1}{x}=-\tan x\ln x$,

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=-\lim_{x\to 0^+}\tan x\ln x=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\csc^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\sin x=0$$

从而原极限 $=\mathrm{e}^0=1$.

(7) 令 $y=(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$, 则 $\ln y=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln\cos x$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\cos x}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=\!=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2\cdot\frac{2}{(\pi-2x)^2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-(\pi-2x)^2\cdot\tan x}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x\cdot(\pi-2x)^2}{\cos x}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(\pi-2x)^2}{\cos x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\pi-2x}{-\sin x}=0,$$

从而原极限 $=\mathrm{e}^0=1$.

(8) 令 $y=\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$, 则 $\ln y=x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)$,

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{x^{-1}}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arctan x}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{-x^{-2}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)\arctan x}=-\frac{2}{\pi}$$

从而原极限 $=\mathrm{e}^{\frac{-2}{\pi}}$.

2. 若 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 存在, 求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$.

解
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[f''(x)+f''(x)\right]=f''(x).$$

注意 易犯的错误是两次利用洛必达法则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=}$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)+f''(x+h)}{2}=\frac{f''(x)+f''(x)}{2}=f''(x).$$

产生的错误是第三步计算极限时无形中附加了 $f(x)$ 的二阶导数连续, 这与题设不符. 还有个别同学对此题无从下手, 使用洛必达法则时, 不知道是对变量 h 求导.

3. 若 $a>0,b>0$ 均为常数, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$.

解 令 $y=\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$, 则 $\ln y=\dfrac{3}{x}\ln\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\ln y=3\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}$$

$$=\frac{3}{2}(\ln a+\ln b)=\ln(ab)^{\frac{3}{2}}$$

从而原极限$=(ab)^{\frac{3}{2}}$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(a+x^2), & x>1\\ x+b, & x\le 1\end{cases}$, 在 $x=1$ 处可导, 求 a 和 b.

解 因 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处必连续, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\ln(a+1)$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)=1+b$, 所以 $\ln(a+1)=1+b$. 又

$$f_-'(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+b-(1+b)}{x-1}=1,$$

$$f_+'(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(a+x^2)-(1+b)}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=}\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{2x}{a+x^2}}{1}=\frac{2}{a+1},$$

从而有 $\begin{cases}\ln(a+1)=1+b\\ \dfrac{2}{a+1}=1\end{cases}$, 从中解得 $\begin{cases}a=1\\ b=\ln 2-1\end{cases}$.

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)^{\frac{1}{n}}$.

解 令 $y=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$, 则 $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln\ln x$,

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{1}=0,$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^0=1$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, 进而 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)^{\frac{1}{n}}=1$.

从本题可以看出, 求两个整标函数 $f(n)$, $g(n)$ 之比的极限时可借助于洛必达法则, 但要注意, 首先应将离散变量 n 换成连续变量 x, 其次检验当 $x\to+\infty$ 时 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是否是 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型, 若是, 再考虑用洛必达法则. 也就是将离散变量 n 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}$ 作为连续变量 x 的极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的特殊情况来考虑.

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

易犯的错误是, 令 $y=(\ln n)^{\frac{1}{n}}$, 则 $\ln y=\frac{1}{n}\ln\ln n$,

$$\lim_{n\to\infty}\ln y=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\ln n}}{1}=0,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)^{\frac{1}{n}}=1$.

等式 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\ln n}}{1}$ 是不成立的, 因为数列是整标函数, 整标函数不连续, 不存在导数, 所以不能直接运用洛必达法则对 n 求导, 应先转换为函数的极限再使用洛必达法则.

第三节　泰勒公式

1. 填空

(1) $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的二阶麦克劳林公式是 $\underline{x\mathrm{e}^x=x+x^2+\frac{1}{3!}(3+\theta x)\mathrm{e}^{\theta x}x^3(0<\theta<1)}$;

(2) $f(x)=\frac{1}{x}$ 在点 $x=-1$ 处的二阶泰勒公式是

$$\frac{1}{x}=\underline{-[1+(x+1)+(x+1)^2]-}\ \underline{\frac{(x+1)^3}{[-1+\theta(x+1)]^4}\ (0<\theta<1)};$$

(3) $p(x)=1+3x+5x^2$ 在点 $x=-1$ 处的二阶泰勒公式是

$$\underline{p(x)=3-7(x+1)+5(x+1)^2};$$

解　(1) $f(x)=x\mathrm{e}^x$, $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$, $f''(x)=(x+2)\mathrm{e}^x$, $f'''(x)=(x+3)\mathrm{e}^x$, 且

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=2,\ f'''(\theta x)=(3+\theta x)\mathrm{e}^{\theta x},$$

从而 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的二阶麦克劳林公式为:

$$f(x)=x\mathrm{e}^x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3=x+x^2+\frac{1}{3!}(3+\theta x)\mathrm{e}^{\theta x}x^3,(0<\theta<1)$$

(2) $f(x)=\frac{1}{x}$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f''(x)=\frac{2}{x^3}$, $f'''(x)=\frac{-6}{x^4}$, 且

$$f(-1)=-1,\ f'(-1)=-1,\ f''(-1)=-2,$$

$$f'''(-1+\theta(x+1))=\frac{-6}{[-1+\theta(x+1)]^4},$$

从而 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在点 $x=-1$ 处的二阶泰勒公式为

$$f(x)=\frac{1}{x}=-[1+(x+1)+(x+1)^2]-\frac{(x+1)^3}{[-1+\theta(x+1)]^4},\ (0<\theta<1).$$

(3) $p(x)=1+3x+5x^2$, $p'(x)=3+10x$, $p''(x)=10$, $p'''(x)=0$ 且 $p(-1)=3$, $p'(-1)=-7$, $p''(-1)=10$. 从而 $p(x)=1+3x+5x^2$ 在点 $x=-1$ 处的二阶泰勒公式是:

$$p(x)=1+3x+5x^2=3-7(x+1)+5(x+1)^2.$$

因本题所给函数 $p(x)$ 为多项式, 所以本题亦可以用初等数学方法求解:

$$p(x)=5x^2+3x+1=5(x+1)^2-7x-4=3-7(x+1)+5(x+1)^2.$$

2. 求 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}$ 的二阶麦克劳林公式.

解　$f'(x)=\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$，$f''(x)=\mathrm{e}^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)$，

$$f'''(x)=\mathrm{e}^{\sin x}(\cos^3 x-3\sin x\cos x-\cos x)=-\frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{e}^{\sin x}(3+\sin x),$$

且 $f(0)=1$，$f'(0)=1$，$f''(0)=1$. 从而 $f(x)$ 的二阶麦克劳林公式为:

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\mathrm{e}^{\sin\theta x}\sin 2\theta x(3+\sin\theta x),\ (0<\theta<1).$$

3. 利用泰勒公式计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2\sin x}$.

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

第四节　函数的单调性与极值

1. 填空

(1) $y=2x+\dfrac{8}{x}(x>0)$ 在区间 $\underline{(0,2]}$ 上单调减少, 在区间 $\underline{[2,+\infty)}$ 上单调增加.

(2) $y=x^n\mathrm{e}^{-x}(n>0,x\ge 0)$ 在区间 $\underline{[n,+\infty)}$ 上单调减少, 在区间 $\underline{[0,n]}$ 上单调增加.

(3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在区间 $\underline{(-\infty,+\infty)}$ 上单调增加.

解　(1) 因 $y=2x+\dfrac{8}{x},x>0$ 时，$y'=2-\dfrac{8}{x^2}=\dfrac{2(x^2-4)}{x^2}$，当 $0<x\le 2$ 时，$y=2x+\dfrac{8}{x}$ 连续, 且 $0<x<2$ 时，$y'<0$，所以 y 在区间 $(0,2]$ 上单调减少; 当 $x\ge 2$ 时，$y=2x+\dfrac{8}{x}$ 连续, 且 $x>2$ 时，$y'>0$，所以 y 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调增加.

(2) 因 $y=x^n\mathrm{e}^{-x}$，$y'=nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x}-x^n\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}x^{n-1}(n-x)$

当 $x>n$ 时，$y'<0$，所以 $y=x^n\mathrm{e}^{-x}$，在区间 $[n,+\infty)$ 上单调减少;

当 $x<n$ 时，$y'>0$，所以 $y=x^n\mathrm{e}^{-x}$，在区间 $[0,n]$ 上单调增加;

(3) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$，故 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上处处单调增加.

2. 证明下列不等式

(1) $1+\dfrac{1}{2}x>\sqrt{1+x}\quad(x>0)$；　　(2) $\sin x+\tan x>2x\quad\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

证　(1) 令 $f(x)=1+\dfrac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$，则 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}>0$，所以 $f(x)$ 在 $x\ge 0$ 时单调增, 又 $f(0)=0$，从而当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，即 $1+\dfrac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>0$，亦即

$$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}.$$

（2）设 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$ $(0\le x<\dfrac{\pi}{2}$，则 $f(0)=0$，$f(x)$ 连续，

$$f'(x)=\cos x\ \ -\sec^2 x-2,\ f'(0)=0.$$

$$f''(x)=-\sin x+2\sec^2 x\tan x=\sin x(2\sec^2 x-1)>0\ \ (0<x<\frac{\pi}{2}).$$

于是 $f'(x)$ 单调增加，$f'(x)>f'(0)=0\ \ (0<x<\dfrac{\pi}{2})$，从而 $f(x)$ $(0\le x<\dfrac{\pi}{2})$ 单调增加，由此可得

$$f(x)>f(0)=0,$$

即
$$\sin x+\tan x>2x\ \ (0<x<\frac{\pi}{2}).$$

3. 设对一切 x 有 $f'(x)>g'(x)$，并且 $f(a)=g(a)$，证明：当 $x>a$ 时，$f(x)>g(x)$，而当 $x<a$ 时，$f(x)<g(x)$.

证 令 $\phi(x)=f(x)-g(x)$，则 $\phi(a)=0$，且对一切 x，有

$$\phi'(x)=f'(x)-g'(x)>0,$$

所以对一切 x，$\phi(x)$ 单调增加，$x>a$ 时，$\phi(x)>\phi(a)=0$，即 $f(x)-g(x)>0$. 从而 $f(x)>g(x)$；$x<a$ 时，$\phi(x)<\phi(a)=0$，即 $f(x)-g(x)<0$，从而 $f(x)<g(x)$.

4. 证明：函数 $y=(x-1)(x+1)^3$ 在区间 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调增加.

证 $y'=(x+1)^3+3(x-1)(x+1)^2=2(x+1)^2(2x-1)$.

当 $x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 时，$y'>0$，故 y 在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调增加.

5. 试证方程 $\sin x=x$ 只有一个实根.

证 设 $f(x)=x-\sin x$，则 $f(0)=0$，所以 $x=0$ 即为方程 $\sin x=x$ 的一个根. 又因为 $f'(x)=1-\cos x>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$x\ne 2k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，故导数为零的点是孤立点，根据连续性，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内至多有一个零点，所以 $f(x)=x-\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内仅有一个零点，即方程 $\sin x=x$ 只有一个实根.

注意 在证根的唯一性时易犯的错误是：

因 $f'(x)=1-\cos x\ge 0$，从而 $f(x)$ 单调增加.

这里必须指出，$f'(x)=1-\cos x\ge 0$，但使

$$f'(x)=1-\cos x=0$$

的点 $x_k=2k\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是孤立点，即在任一有限区间 (a,b) 内只有有限个，因此，$f(x)$ 在整个定义区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

6. 填空

（1）$f(x)=\begin{cases}2x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的导数 $f'(0)$ <u>不存在</u>，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极<u>小</u>值 $f(0)=0$.

（2）若 $x=\pm1$ 时，函数 $y=x^3+3px+1$ 取极值，则 $p=\underline{-1}$.

（3）$y=\begin{cases}x, & x\ne 3,5,7,9\\ 5, & x=3\\ -5, & x=5\\ 9, & x=7\\ 7, & x=9\end{cases}$ 的极大值是 $\underline{y(3)=5, y(7)=9}$，极小值是 $\underline{y(5)=-5, y(9)=7}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0=f(0)$, 从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1$$

所以 $f'(0)$ 不存在.

$$f'(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases},$$

当 $x<0$ 时 $f'(x)<0$; $x>0$ 时 $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极小值 $f(0)=0$.

(2) 因 $y=x^3+3px+1$, $f'(x)=3x^2+3p$, 由于 $y(\pm1)$ 为极值, 故 $y'(\pm1)=0$, 即 $3+3p=0$, 从而 $p=-1$.

(3)

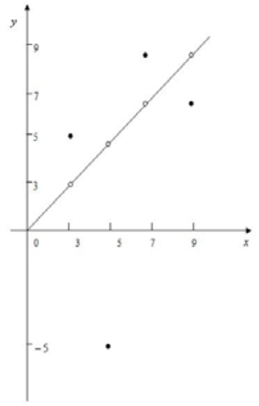

图 3. 1

(图 3.1)根据函数的图像,由极大值定义,可得函数 y 的极大值为: $y(3)=5, y(7)=9$;极小值为 $y(5)=-5, y(9)=7$

7. 求下列函数的极值

(1) $y=x+\dfrac{a^2}{x}(a>0)$; (2) $y=2-(x-1)^{\frac{2}{3}}$; (3) $y=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 (1) 所给函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0),(0,+\infty)$, 而

$$f'(x)=1-\frac{a^2}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2a^2}{x^3},$$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=\pm a$.

因 $f''(a)=\dfrac{2}{a}>0$, 从而 $f(a)=2a$ 为极小值;

因 $f''(-a)=-\dfrac{2}{a}<0$, 从而 $f(-a)=-2a$ 为极大值.

(2) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 它在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

$$y'=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}\neq0\quad(x\neq1)$$

所以函数没有驻点.

当 $x=1$ 时, y' 不存在, 当 $x<1$ 时, $y'>0$; 当 $x>1$ 时, $y'<0$. 所以函数在 $x=1$ 处取得极大值 $y(1)=2$.

(3) 当 $x\neq0$ 时, $y=e^{-\frac{1}{x^2}}>0$, 而当 $x=0$ 时, $y(0)=0$, 由极值定义, 则 $y(0)=0$ 为极

小值.

8. 求函数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 的极值.

解 $y=x^{\frac{1}{x}}$, 取对数, $\ln y=\frac{1}{x}\ln x$, 两边对 x 求导,

$$\frac{y'}{y}=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

得

$$y'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}(1-\ln x),$$

令 $y'=0$, 在 $x>0$ 内有唯一驻点 $x=\mathrm{e}$. 当 $0<x<\mathrm{e}$ 时, $y'>0$; 当 $\mathrm{e}<x<+\infty$ 时, $y'<0$, 故 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处取得极大值 $y(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

9. 当 a 为何值时, 函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处有极值?是极大值还是极小值?并求此极值.

解 $f'(x)=a\cos x+\cos 3x$, $f''(x)=-a\sin x-3\sin 3x$, 因 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处有极值, 则

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\cos\frac{\pi}{3}+\cos\pi=0,$$

从中解得 $a=2$, 又 $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}<0$, 从而 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ 为极大值.

10. 试证明: 如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足 $b^2-3ac<0$, 那么该函数没有极值.

证 因为 $b^2-3ac<0$, 所以 $a\neq 0$, 否则 $b^2<0$, 矛盾. 又因为 $y'=3ax^2+2bx+c$, 而判别式

$$\Delta=(2b)^2-12ac=4(b^2-3ac)<0,$$

所以 $y'=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无实根, 即在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $y'>0$ 或 $y'<0$ 恒成立. 因此 $y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调, 无极值.

11. 设函数 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解, 且 $f(x_0)>0$, $f'(x_0)=0$. 试讨论函数在点 x_0 处是否取得极值. 若取得极值, 是极大值还是极小值?

解 由题设有 $f''(x)-2f'(x)+4f(x)\equiv 0$, 令 $x=x_0$, 得

$$f''(x_0)-2f'(x_0)+4f(x_0)=0$$

又 $f'(x_0)=0$, $f(x_0)>0$, 则 $f''(x_0)=-4f(x_0)<0$. 由此可知 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

12. 方程 $\ln x=ax(a>0)$ 有几个实根?

解 设 $f(x)=\ln x-ax,\ x\in(0,+\infty)$. $f'(x)=\frac{1}{x}-a=0$, 解得 $x=\frac{1}{a}$.

当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时, $f'(x)>0$, 故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right]$ 内单调增加;

当 $\frac{1}{a}<x<+\infty$ 时, $f'(x)<0$, 故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{a},\ +\infty\right)$ 内单调减小.

下面分几种情况讨论:

（1）当 $f\left(\frac{1}{a}\right)>0$，即 $\ln\frac{1}{a}-1>0$，或 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\ln x-ax)=-\infty,$$

故存在 $0<x_1<\frac{1}{a}$，使得 $f(x_1)<0$，根据闭区间上连续函数的零点定理，存在 $\xi_1\in\left(x_1,\frac{1}{a}\right)$，使 $f(\xi_1)=0$，又由于 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 内单调增加，故 $f(x)=0$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 内只有唯一的实根 $x=\xi_1$；又因为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln x-ax)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x}-a\right)=-\infty,$$

故存在 $x_2\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，使 $f(x_2)<0$，根据闭区间上连续函数的零点定理，存在

$$\xi_2\in\left(\frac{1}{a},\ x_2\right),$$

使 $f(\xi_2)=0$，又因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)$ 单调减小，故 $f(x)=0$ 在 $\left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)$ 内只有唯一实根 $x=\xi_2$，故当 $f\left(\frac{1}{a}\right)>0$，即当 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)=0$ 有两个零点，即方程 $\ln x=ax$ 有两个实根.

（2）当 $f\left(\frac{1}{a}\right)=0$，即 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$x=\frac{1}{a}$ 为方程 $\ln x=ax$ 的一个根.

又因为 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 内单调增加，在 $\left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)$ 单调减小，故 $x=\frac{1}{a}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内唯一零点，于是方程 $\ln x=ax$ 有唯一实根.

（3）当 $f\left(\frac{1}{a}\right)<0$，即 $a>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，由于 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 内单调增加，在 $\left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)$ 单调减小，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内无零点，即方程 $\ln x=ax$ 无实根.

第五节　函数的凹凸性与拐点

1. 填空

（1）曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x}$ 在区间 $\underline{(-\infty,\ 2]}$ 上是凸的，在区间 $\underline{[2,+\infty)}$ 上是凹的，拐点为 $\underline{(2,2\mathrm{e}^{-2})}$.

（2）曲线 $x=t^2,\ y=3t+t^3$ 的拐点为 $\underline{(1,4),(1,-4)}$.

解　（1）$y'=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$，$y''=\mathrm{e}^{-x}(x-2)$.

令 $y''=0$，得 $x=2$. 当 $x<2$ 时，$y''<0$；当 $x>2$ 时，$y''>0$.

所以曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x}$ 在区间 $(-\infty,\ 2]$ 上是凸的，在区间 $[2,+\infty)$ 上是凹的，拐点为 $(2,2\mathrm{e}^{-2})$.

(2) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=3t+t^3 \end{cases}$, $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{3+3t^2}{2t}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}=\dfrac{3(t^2-1)}{4t^3}$. 令 $\dfrac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}=0$, 得 $t=\pm1$.

$\dfrac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}$ 在 $t=\pm1$ 两侧变号, 所以 $(1, 4), (1, -4)$ 为拐点

$\dfrac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}$ 在 $t=0$ 处不存在, 又当 $t=0$ 时, 曲线上相应的点为 $(0, 0)$, 因曲线上的任一点 (x, y) 满足 $x\ge 0$, 所以 $(0, 0)$ 是曲线的顶点, 所以 $(0, 0)$ 不是拐点.

2. 利用函数图形的凹凸性, 证明下列不等式:

(1) $\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$, $(x>0, y>0, x\ne y, n>1)$

(2) $\dfrac{\ln x+\ln y}{2}<\ln\dfrac{x+y}{2}$, $(x>0, y>0, x\ne y)$

证 (1) 令 $f(t)=t^n$, 则 $f'(t)=nt^{n-1}$, $f''(t)=n(n-1)t^{n-2}$, 当 $n>1$ 时, 在 $(0,+\infty)$ 内, $f''(t)>0$, 故 $f(t)$ 的图形曲线是凹的, 因此对于任意的 $x, y\in(0,+\infty)$, 当 $x\ne y$ 时, 有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

即
$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(2) 令 $f(t)=\ln t$, 则 $f'(t)=\dfrac{1}{t}$, $f''(t)=-\dfrac{1}{t^2}$.

在 $(0,+\infty)$ 内, $f''(t)<0$, 故 $f(t)$ 的图形曲线是凸的, 因此, 对于任意的 $x, y\in(0, +\infty)$, 当 $x\ne y$ 时, 有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)>\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

即
$$\frac{\ln x+\ln y}{2}<\ln\frac{x+y}{2}.$$

3. 已知点 $(1, 3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点, 求 a, b 的值.

解 $y'=3ax^2+2bx$, $y''=6ax+2b$, 因 $(1, 3)$ 为拐点, 则有

$$\begin{cases} y(1)=3 \\ y''(1)=0, \end{cases} \begin{cases} a+b=3 \\ 6a+2b=0 \end{cases},$$

解之得 $\begin{cases} a=-\dfrac{3}{2} \\ b=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

第六节　函数图像的描绘

作出下列函数的图形

1. $y=(x+1)(x-2)^2$.

2. $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

解　1. 所给函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而

$$f'(x)=3x(x-2),\quad f''(x)=6(x-1).$$

$f'(x)=0$ 的根为 $x=0$ 和 2；$f''(x)=0$ 的根为 $x=1$.

将点 $x=0,1,2$ 由小到大排列，依次把定义域 $(-\infty,+\infty)$ 分成以下四个区间：$(-\infty,0]$，$[0,1]$，$[1,2]$，$[2,+\infty)$，并列表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$y=f(x)$ 的图形		极大值 $f(0)=4$		拐点 $(1,2)$		极小值 $f(2)=0$	

$f(x)$ 的图形如(图 3.2)：

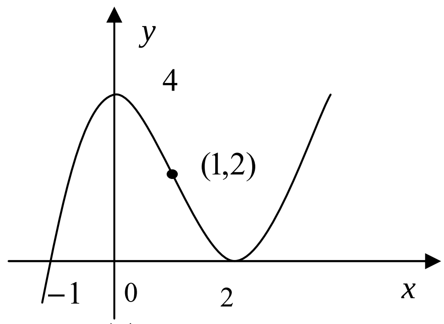

图 3.2

2. 函数 $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ 的定义域为 $(-\infty,-2),(-2,2),(2,+\infty)$，且为偶函数，故只须讨论 $x\geq 0$ 的情形，而 $f'(x)=\dfrac{-8x}{(x^2-4)^2}$，$f'(x)=0$ 的根为 $x=0$.

$$f''(x)=8\cdot\frac{4+3x^2}{(x^2-4)^3}\neq 0,\ (-\infty<x<-2,-2<x\leq 0).$$

用点 $x=0,\ 2$ 将定义域分为下列两个部分区间，并列表：

x	0	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	0	−	−
$f''(x)$	−	−	+
$y=f(x)$ 的图形	极大值 $f(0)=0$		

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$，所以曲线有水平渐近线 $y=1$ 和铅直渐近线 $x=2$.

$f(x)$ 的图形如图 3.3：

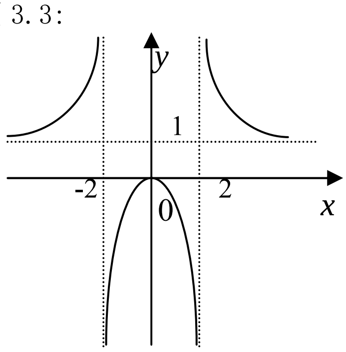

图 3.3

第七节 曲线的曲率

1. 求曲线 $y=\ln(\sec x)$ 在点 (x, y) 处的曲率及曲率半径.

解 因 $y'=\dfrac{\sec x\tan x}{\sec x}=\tan x$, $y''=\sec^2 x$, 从而

曲率 $$K=\frac{|y''|}{[1+y'^2]^{3/2}}=\frac{\sec^2 x}{[1+\tan^2 x]^{3/2}}=\frac{\sec^2 x}{|\sec^3 x|}=|\cos x|.$$

曲率半径 $$\rho=\frac{1}{K}=|\sec x|.$$

2. 求圆周 $x^2+y^2=R^2$ 上任一点的曲率, 并作几何解释.

解 将圆周方程的两边对 x 求导数,

$$2x+2yy'=0$$

上式两边对 x 求导数得

$$2+2yy''+2y'^2=0$$

解得 $y'=-\dfrac{x}{y}$, $y''=-\dfrac{1+y'^2}{y}$

曲率

$$K=\left|\frac{y''}{[1+y'^2]^{3/2}}\right|=\left|\frac{-(1+y'^2)/y}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|=\left|\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{R}.$$

这表明, 圆周上任一点处的曲率都等于圆半径的倒数, 半径越大, 曲率越小.

3. 求曲线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 在 $t=t_0$ 处的曲率.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-\sec^2 t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

$$k=\frac{|y''|}{[1+y'^2]^{3/2}}=\frac{\left|\dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t}\right|}{[1+\tan^2 x]^{3/2}}=\frac{\left|\dfrac{1}{3a\cos^4 t\sin t}\right|}{\left|\dfrac{1}{\cos^3 t}\right|}=\frac{2}{|3a\sin 2t|}.$$

从而有曲线在点 $t=t_0$ 处的曲率 $k|_{t=t_0}=\dfrac{2}{|3a\sin 2t_0|}$.

第八节 最值问题模型

1. 填空

(1) 函数 $f(x)=2x^3-3x^2$ 在区间 $[-1, 4]$ 上的最大值为 $\underline{f(4)=80}$, 最小值为 $\underline{f(1)=-5}$.

(2) $y=|x^2-3x+2|$ 在区间 $[-10, 10]$ 上的最大值为 $\underline{132}$，最小值为 $\underline{0}$.

解 (1) $y'=6x^2-6x=6x(x-1)$.

令 $y'=0$ 得 $x_1=0$, $x_2=1$. 因

$$y(0)=0, y(1)=-1, y(-1)=-5, y(4)=80$$

从而函数 $y=f(x)$ 区间 $[-1,4]$ 上的最大值为 $f(4)=80$, 最小值为 $f(1)=-5$.

(2) 由于 $y=f(x)\geq 0$, 故在 $[-10,10]$ 上, 使 $f(x)=0$ 的点处取得最小值 0, 由 $x^2-3x+2=0$, 得 $x=1,2$, 即 $f(1)=f(2)=0$ 为最小值.

又 $f'(x)=(2x-3)\mathrm{sgn}(x^2-3x+2)$, 当 $1<x<\dfrac{3}{2}$ 时, $f'(x)>0$, 当 $\dfrac{3}{2}<x<2$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$ 为极大值, 从而 $f(x)$ 在 $[-10,10]$ 上的最大值为:

$$\max\left\{f\left(\frac{3}{2}\right), f(-10), f(10)\right\}=\max\left\{\frac{1}{4},132,72\right\}=132.$$

2. 证明下列不等式

(1) 若 $0\leq x\leq 1$ 及 $p>1$, 则 $\dfrac{1}{2^{p-1}}\leq x^p+(1-x)^p\leq 1$;

(2) 当 $x<1$ 时, $\mathrm{e}^x\leq\dfrac{1}{1-x}$.

证 (1) 令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$, 则 $f'(x)=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]$, 令 $f'(x)=0$, 得

$$x=\frac{1}{2}.\ f(0)=1,\ f(1)=1,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{p-1}},$$

$f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 故有最大值 1, 最小值 $\dfrac{1}{2^{p-1}}$, 从而当 $0\leq x\leq 1$ 及 $p>1$ 时,

$$\frac{1}{2^{p-1}}\leq x^p+(1-x)^p\leq 1.$$

(2) 令 $f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x$, 则 $f'(x)=-x\mathrm{e}^x$, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=0$,

$$f''(x)=-(x+1)\mathrm{e}^x,\quad f''(0)=-1<0,$$

从而 $f(0)=1$ 为极大值. 函数在 $(-\infty,1)$ 有唯一极大值, 无极小值, 故 $f(0)=1$ 为最大值, 即当 $x<1$ 时 $f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x\leq 1$, 从而 $\mathrm{e}^x\leq\dfrac{1}{1-x}$.

3. 给定曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$, (1) 求曲线在横坐标为 x_0 的点处的切线方程; (2) 求曲线的切线被两坐标轴所截的最短长度.

解 (1) 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 上横坐标为 x_0 的点是 $\left(x_0,\dfrac{1}{{x_0}^2}\right)$, 曲线在该点的切线斜率为 $y'|_{x=x_0}=-\dfrac{2}{{x_0}^3}$, 于是曲线过此点的切线方程为

$$y-\frac{1}{x_0^2}=-\frac{2}{x_0^3}(x-x_0).$$

(2) 在切线方程中分别令 $y=0$ 和 $x=0$, 得切线在 x 轴和 y 轴上的截距为 $a=\dfrac{3}{2}x_0$, $b=\dfrac{3}{x_0^2}$. 设切线被坐标轴所截线段的长度为 L, 则 $L=\sqrt{a^2+b^2}$, 令 $z=L^2$, 则

$$z=a^2+b^2=9\left(\frac{x_0^2}{4}+\frac{1}{x_0^4}\right).$$

令

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x_0}=9\left(\frac{x_0}{2}-\frac{4}{x_0^5}\right)=0,$$

得驻点 $x_0=\pm\sqrt{2}$，再由 $\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x_0^2}=\ 9\left(\frac{1}{2}+\frac{20}{x_0^6}\right)>0$，知 z 在驻点 $x_0=\pm\sqrt{2}$ 处取极小值，也即最小值，因此所求最短长度为 $\sqrt{9\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限部分求一点 $M\left(x_0,y_0\right)$，使过此点的切线与两坐标轴所构成的三角形面积最小（其中 $a>0,b>0$）.

解 椭圆在点 $M\left(x_0,y_0\right)$ 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，它在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 $\frac{a^2}{x_0}$ 和 $\frac{b^2}{y_0}$，所以三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}\frac{a^2}{x_0}\cdot\frac{b^2}{y_0}=\frac{a^3b}{2x_0\sqrt{a^2-x_0^2}},\ (0<x_0<a)$$

为计算方便，把求 S 的最小值问题转化为求 $B=x_0^2(a^2-x_0^2)$ 的最大值问题.

令 $B'=2a^2x_0-4x_0^3=0$. 解得区间 $(0,a)$ 内的唯一驻点 $x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$. 不难看出 B' 在点 $x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 的左侧为正，右侧为负，故 $x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 是 B 的极大值点，即 S 的极小值点. 此时 $y_0=\frac{b}{\sqrt{2}}$，从而点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 即为所求之点.

注 由以上两道题目可以看出在求最值问题中，为计算简便，常把目标函数进行简化. 第 3 题是将求

$$L=\sqrt{9\left(\frac{x_0^2}{4}+\frac{1}{x_0^4}\right)}$$

的最小值问题转化为求 $L^2=9\left(\frac{x_0^2}{4}+\frac{1}{x_0^4}\right)$ 的最小值问题，而第 4 题则是将求 $S=\frac{a^2b^2}{2x_0y_0}$ 的最小值问题转化为求 $B=x_0^2(a^2-x_0^2)$ 的最大值问题，$(0<x_0<a)$. 请注意转化后的函数必须与原目标函数同解. 将目标函数转化也是求最值问题的解题技巧.

而以往同学们在求解最值问题时常拘泥于原目标函数，不知道且不善于简化目标函数，常使计算过程繁琐且易出错.

5. 已知炮弹的弹道方程（不计空气阻力）为 $y=kx-\frac{k^2+1}{800}x^2$，其中取炮弹的发射点为原点，$k$ 为弹道曲线在原点的切线斜率，问：(1) k 为多少时，水平射程最远？(2) 在离发射点 300 m 处有一直立墙壁，则 k 为多少时炮弹击中墙的高度最大？

解　(1) 由于 $y = kx - \frac{k^2+1}{800}x^2$, 当 $y=0$ 时, 得 $800k = (k^2+1)x$, 两边对 k 求导,

$$800 = 2kx + (k^2+1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}k},$$

则 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}k} = \frac{800-2kx}{k^2+1}$, 令 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}k}=0$, 得 $800 = 2kx$.

由 $\begin{cases} 800 = 2kx \\ 800k = (k^2+1)x \end{cases}$, 解得 $k=1$, 由实际问题知当 $k=1$ 时, 水平射程 $x(1)$ 最大.

(2)　　$y = 300k - \frac{k^2+1}{800}90000$,　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}k} = 300 - \frac{900}{4}k = 0$,

得 $k=\frac{4}{3}$, 由实际问题知当 $k=\frac{4}{3}$ 时, 炮弹击中墙的高度 $y\left(\frac{4}{3}\right)$ 最大.

答　(1) 当 $k=1$ 时, 水平射程最远. (2) $k=\frac{4}{3}$ 时, 炮弹击中墙的高度最大.

6. 过曲线 $y = 1-2\sqrt{x}(x\ge 0)$ 上一点引切线. 设切线夹在两坐标轴间的部分长为 l, 求使 l 取得最小值时切点的坐标以及 l 的最小值.

解　设切点为 (x_0, y_0), 则切线斜率为 $f'(x_0) = -\frac{1}{\sqrt{x_0}}$, 切线方程为:

$$y - y_0 = -\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)$$

又 (x_0, y_0) 在曲线上, 所以 $y_0 = 1-2\sqrt{x_0}$, 故

$$y-(1-2\sqrt{x_0}) = -\frac{1}{\sqrt{x_0}}x + \sqrt{x_0}$$

即 $y = -\frac{1}{\sqrt{x_0}}x - \sqrt{x_0} + 1$.

此切线与 y 轴的交点为 $x=0, y=1-\sqrt{x_0}$, 与 x 轴的交点为 $x=\sqrt{x_0}-x_0, y=0$. 作

$$L = l^2 = (1-\sqrt{x_0})^2 + (\sqrt{x_0}-x_0)^2,$$

当 l 最小时, L 也最小,

$$L' = 2 - 3\sqrt{x_0} + 2x_0 - \frac{1}{\sqrt{x_0}} = 2(\sqrt{x_0}-1)^2 + \frac{x_0-1}{\sqrt{x_0}}$$

令 $L'=0$, 得 $x_0=1$. 当 $x_0=1$ 时, $L=l^2$ 达最小值, l 也达最小值, 此时最小值 $l=0$, $y=-1$, 从而切点为 $(1,-1)$.

7. 一火车锅炉每小时耗煤的费用与火车行驶速度的立方成正比, 已知当车速为 20km/h 时, 耗煤 40 元/h, 其它费用为 200 元/h, 甲乙两地相距 s km, 问火车行驶速度如何, 才能使火车由甲地开往乙地的总费用最省.

解　设火车每小时耗煤费用为 y, 则 $y = kv^3$, 已知当 $v=20$ 时, $y=40$, 则 $40 = k\cdot 20^3$, 从中得 $k=\frac{1}{200}$, 又设总费用为 z, 则

$$z = \frac{s}{v}y + \frac{s}{v}200 = \frac{s}{v}\cdot\frac{1}{200}v^3 + \frac{s}{v}200 = \frac{s}{200}v^2 + \frac{200s}{v}$$

$z'(v)=\frac{s}{100}v-\frac{200s}{v^2}=0$, 得 $v=10\sqrt[3]{20}$

实际问题有最小值, 函数有唯一驻点, 故 $v=10\sqrt[3]{20}$ 就是最小值点.

答　当火车速度为 $10\sqrt[3]{20}$ km/h 时, 总费用最省.

第三章　微分中值定理与导数的应用(总习题)

1. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值可微函数, 证明: 有点 $\xi(a<\xi<b)$, 使

$$\ln\frac{f(b)}{f(a)}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a).$$

证　$y=\ln f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 由拉格朗日中值定理, 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\ln f(b)-\ln f(a)=(b-a)[\ln f(x)]'|_{x=\xi}$$

因
$$[\ln f(x)]'|_{x=\xi}=\left.\frac{f'(x)}{f(x)}\right|_{x=\xi}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)},$$

从而 $\ln f(b)-\ln f(a)=(b-a)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$, 即

$$\ln\frac{f(b)}{f(a)}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a).$$

注意 易犯的错误是用拉格朗日中值定理时常写为

$$\ln f(b)-\ln f(a)=(b-a)[\ln f(\xi)]',\ a<\xi<b.$$

这种写法是不对的, 请同学们想一下, $\ln f(\xi)$ 为常数从而 $[\ln f(\xi)]'=0$, 岂不是证不出原结论了.

产生错误的原因是, 在求函数的某一点处的导数时, 先代了值再求导, 正确的解法应是先求导再代值,

$$[\ln f(x)]'|_{x=\xi}=\left.\frac{f'(x)}{f(x)}\right|_{x=\xi}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, 证明, 一定存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证　令 $F(x)=x^2$, 则 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $F'(x)\neq 0$, 由柯西中值定理, 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$\frac{f(1)-f(0)}{F(1)-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},\ \text{即}\ \frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

从而得

$$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)].$$

3. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$$

求 c 的值.

解
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}=\mathrm{e}^{2c},$$

由拉格朗日中值定理知

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)\times 1,\ (\xi\text{介于}x-1\text{与}x\text{之间})$$

那么
$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}.$$

于是 $\mathrm{e}^{2c}=\mathrm{e}$, 故 $c=\dfrac{1}{2}$.

4. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)$； (3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right]^{nx}$， （其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$）.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2}=-\frac{1}{6}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln(1-x)}{\dfrac{1}{\ln x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{\ln^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x\ln^2 x}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln^2 x}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{-1}=0$$

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^{\frac{\mathrm{e}^x}{x}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^x}}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^0=\mathrm{e}$$

或令 $y=(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$, 则 $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln(x+\mathrm{e}^x)$

$$\lim_{x\to +\infty}\ln y=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+\mathrm{e}^x)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=\!=\!=}\lim_{x\to +\infty}\frac{\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^x}}{1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=\!=\!=}\lim_{x\to +\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=1$$

从而得原极限 $=\mathrm{e}$.

(4) 令 $y=\left[\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right]^{nx}$, 则

$$\ln y=nx\ln\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y = n\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=\!=\!=\!=} n\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= n\cdot\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}=\ln(a_1a_2\cdots a_n)$$

从而原极限$=a_1a_2\cdots a_n$.

5.设函数 $f(x), g(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内具有二阶导数,且存在相等的最大值, $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$,证明:存在$\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

证 令$h(x)=f(x)-g(x)$,则$h(a)=h(b)=0$,下证有$\eta\in(a,b)$,使$h(\eta)=0$.

设 $f(x), g(x)$ 在(a,b)内的最大值M 分别在$\alpha\in(a,b), \beta\in(a,b)$取得.

当$\alpha=\beta$时,取$\eta=\alpha$,则$h(\eta)=0$.

当$\alpha\neq\beta$时,

$$h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=M-g(\alpha)>0;$$
$$h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=f(\beta)-M<0;$$

由零点定理,存在介于α与β之间的点η,使得$h(\eta)=0$.

综上,存在$\eta\in(a,b)$,使$h(\eta)=0$.

由罗尔定理,存在$\xi_1\in(a,\eta)$, $\xi_2\in(\eta,b)$,使得$h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$.再由罗尔定理,存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使得$h''(\xi)=0$,即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

6. 证明不等式: $a^b>b^a$ $(\mathrm{e}<a<b)$

证 1 要证$a^b>b^a$,即证$b\ln a>a\ln b$,亦即证

$$\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b},(\mathrm{e}<a<b)$$

只要证 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ($x>\mathrm{e}$)为单调减函数.

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0,(x>\mathrm{e})$$

于是 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ($x>\mathrm{e}$)为单调减小函数,就有 $f(a)>f(b)$,从而

$$a^b>b^a\ (\mathrm{e}<a<b).$$

证 2 要证$b\ln a>a\ln b$,作 $f(x)=x\ln a-a\ln x$ $(\mathrm{e}<a\le x)$.

$f(a)=0$, $f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}>\ln\mathrm{e}-\dfrac{a}{a}=0$,于是

$$f(x)=x\ln a-a\ln x\ (\mathrm{e}<a\le x)$$

单调增加,故 $f(b)>f(a)$,即$b\ln a-a\ln b>0$.

7. 函数 $y=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x_1=1, x_2=2$ 处有极值,试求a和b的值,证明已给函数对于a和b这两个值在点x_1处为极小值,在点x_2处为极大值.

解 $y'=\frac{a}{x}+2bx+1$，因为 $y(1)$，$y(2)$ 为极值，所以有 $y'(1)=0$，$y'(2)=0$，即 $\begin{cases} a+2b+1=0 \\ \frac{a}{2}+4b+1=0 \end{cases}$，解之得 $\begin{cases} a=-\frac{2}{3} \\ b=-\frac{1}{6} \end{cases}$，从而

$$y'=-\frac{2}{3x}-\frac{x}{3}+1,\ y''=\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}=\frac{2-x^2}{3x^2},$$

因 $y''(1)>0$，$y''(2)<0$，从而 $y(1)$ 为极小值，$y(2)$ 为极大值.

8. 设点 $(1,-1)$ 是曲线 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 的拐点，$x=0$ 是函数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 的极值点，求常数 a,b,c.

解 $y'=3x^2+2ax+b$，$y''=6x+2a$，因点 $(1,-1)$ 是曲线的拐点，$x=0$ 是函数的极值点，则有 $\begin{cases} y(1)=-1 \\ y'(0)=0 \\ y''(1)=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 1+a+b+c=-1 \\ b=0 \\ 6+2a=0 \end{cases}$，解之得 $\begin{cases} a=-3 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$.

9. 曲线弧 $y=\sin x(0<x<\pi)$ 上哪点处的曲率半径最小?求出该点处的曲率半径.

解 $y'=\cos x$，$y''=-\sin x$. 曲率半径:

$$\rho=\frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(1+\cos^2 x)^{3/2}}{\sin x}$$

$$\rho'=\frac{1}{\sin^2 x}\left[\frac{3}{2}(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\cos x(-\sin x)\sin x-(1+\cos^2 x)^{3/2}\cos x\right]$$

$$=\frac{-2\cos x(1+\sin^2 x)\sqrt{1+\cos^2 x}}{\sin^2 x}$$

令 $\rho'=0$，得唯一驻点 $x=\frac{\pi}{2}$.

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\rho'<0$；当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$\rho'>0$. 故在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处曲率半径达到最小值，最小值为 $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

10. 求数列 $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ 的最大项.

解 将数列 $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ 看做函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 当 x 取自然数 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 时的值，用对数求导法，得

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x),$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$. 当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$. 所以 $x=\mathrm{e}$ 是 $f(x)$ 的唯一极大值点，也是最大值点. 从而 $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ 的最大项可能在 $n=2$ 处取得，也可能在 $n=3$ 处取得，因

$$\left(\sqrt{2}\right)^6=8<9=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6,$$

即 $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$，故 $\sqrt[n]{n}$ 的最大项为 $\sqrt[3]{3}$.

11. 要造一圆柱形油罐，体积为 V，问底半径 r 和高等于多少时，才能使表面积最小?

解 $V=\pi r^2h$, $s(r)=2\pi rh+2\pi r^2=\dfrac{2V}{r}+2\pi r^2,(r>0)$.

$$s'(r)=-\frac{2V}{r^2}+4\pi r,$$

令 $s'(r)=0$ 得 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, 因驻点唯一, 而实际问题表面积最小值存在, 因而当 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 时, 表面积 s 最小, 此时高 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$.

12. 有一 Y 形屋撑, 高为 $\dfrac{16}{3}$m, 顶端阔 4m, 问杆长和臂长为多少时, 杆长和臂长之和最小? (图见作业集)

解 令杆长为 x m, 臂长 y m, 则有 $\left(\dfrac{16}{3}-x\right)^2+2^2=y^2$.

$$y=\sqrt{\left(\frac{16}{3}-x\right)^2+4},\ L=x+2y=x+2\sqrt{\left(\frac{16}{3}-x\right)^2+4}.$$

令 $L'=0$, 得 $x=\dfrac{16-2\sqrt{3}}{3}$, 从而 $y=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. 由于杆长和臂长之和 L 的最小值一定存在, 且在定义域内仅有一个驻点, 所以当杆长 $x=\dfrac{16-2\sqrt{3}}{3}$m, 臂长 $y=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$m 时, 它们的和最小.

13. 试确定 $y=k(x^2-3)^2$ 中的 k 值, 使曲线的拐点处的法线通过原点.

解 $y'=2k(x^2-3)\cdot 2x=4k(x^3-3x)$, $y''=12k(x^2-1)$.

令 $y''=0$, 得 $x_1=-1$, $x_2=1$. 显然 y'' 在 $x=\pm1$ 邻域的两侧变号, 故 $(-1,4k)$ 和 $(1,4k)$ 为曲线的拐点. $y'(1)=-8k$, $y'(-1)=8k$, 所以过拐点 $(1,4k)$ 的法线方程为: $y-4k=\dfrac{1}{8k}(x-1)$, 过拐点 $(-1,4k)$ 处的法线方程为: $y-4k=-\dfrac{1}{8k}(x+1)$.

要使曲线的拐点处的法线通过原点, 将 $(0,0)$ 依次代入两法线方程, 均得 $k^2=\dfrac{1}{32}$, 从而 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

14. 求内接于半径为 R 的球而体积最大的圆锥体的高, 并求出此最大体积.

解 设球的内接圆锥体的高为 H, 则圆锥体的底面半径

$$r=\sqrt{R^2-(H-R)^2}=\sqrt{2RH-H^2},$$

体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi(2RH-H^2)\cdot H,\quad (0<H<2R)$$

$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H}=\dfrac{1}{3}\pi H(4R-3H)$, 故函数 $V(H)$ 在 $(0,2R)$ 内的驻点为 $H=\dfrac{4}{3}R$, 当 H 渐增地经过此驻点时, $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H}$ 由正变负, 所以 V 在 $H=\dfrac{4}{3}R$ 处取得最大值, 内接于此球的体积最大的圆锥体的高为 $\dfrac{4}{3}R$, 此时最大体积为 $V=\dfrac{32}{81}\pi R^3$.