2017-2018 高等数学（上）模拟试题 1 解答

一、 $(4'\times 7=28')$　1. $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{x-1}+3;$　　2. $-\sin 2(1-x)\cdot e^{\sin^2(1-x)}$;

3. 第一类，可去型;

4. $xe^x=x+x^2+\dfrac{x^3}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{(n-1)!}+\dfrac{e^{\theta x}(\theta x+n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$(0<\theta<1)$

5. $F(t)+C;$　　6. $\dfrac{\pi^2}{8};$　　7. $\dfrac{a^2-b^2}{2}.$

二、$(5'\times 10=50')$

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\alpha x^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{\alpha x^2}{4}}{x\sin x}$　　$(\because \sqrt[n]{1+x}-1 \sim \dfrac{x}{n})$　　$(3')$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{4}=1$，　故　$\alpha=-4.$　　$(5')$

2. $e^x-e^y y'=\cos xy\cdot(y+xy'),$　　$(2')$

$y'=\dfrac{e^x-y\cos xy}{e^y+x\cos xy}$;　$(4')$　　$y'\big|_{x=0}=y'\big|_{\substack{x=0\\y=0}}=1.$　　$(5')$

3. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{2e^{2t}}{6t^2}=\dfrac{e^{2t}}{3t^2}$,　　$(2')$

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}(\dfrac{e^{2t}}{3t^2})}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dfrac{e^{2t}}{3t^2})}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\dfrac{2e^{2t}t^2-e^{2t}2t}{3t^4}}{6t^2}=\dfrac{e^{2t}(t-1)}{9t^5};$　　$(5')$

4. 由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^4}=k(k>0)$，根据极限的局部保号性定理，

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^4}>0,$　$(0<|x-x_0|<\delta)$，　　$(4')$

$f(x)-f(x_0)>0,$ 故 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.　　$(5')$

5.令$\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}=t$,则$\frac{x}{x+1}=\sin^2 t,\ x=\tan^2 t,$ (2′)

原式=$\int t\,\mathrm{d}\tan^2 t = t\tan^2 t-\int \tan^2 t\,\mathrm{d}t = t\tan^2 t-\int(\sec^2 t-1)\,\mathrm{d}t$ (4′)

$= t\tan^2 t-\tan t+t+C = x\cdot\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+C$

$=(1+x)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+C$. (5′)

6. 已知 $f'(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^{-x}$，令$u=e^x$,则 $f'(u)=\frac{\ln u}{u},$ (2′)

$f(x)=\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$， (4′)

又 $f(1)=0$，$C=0$，故 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$; (5′)

7. $\varphi(x)$在$[0,1]$上连续，$\varphi'(x)=\frac{3x}{x^2-x+1}=\frac{3x}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}>0,\ x\in(0,1)$， (3′)

故$\varphi(x)$在$[0,1]$上单调增加，其最小值为$\varphi(0)=0$; (5′)

8. 令 $x=\sec t$， (1′) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec t|\tan t|}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$. (5′)

9. $V=\pi\int_0^2 x^6\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{7}x^7\Big|_0^2=\frac{128\pi}{7}$ (5′)

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x 2t^4\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^4}{x(x-\sin x)}$ (2′)

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x^2}{1-\cos x}$ (4′)

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x^2}{\frac{x^2}{2}}=12$. (5′)

三、(1) $V=\int a\,\mathrm{d}t=\int(12t^2-3\sin t)\,\mathrm{d}t=4t^3+3\cos t+C_1,$ (2′)

由 $V(0)=5, C_1=2, V=4t^3+3\cos t+2$； (4′)

（2） $S=\int V\,\mathrm{d}t=\int(4t^3+3\cos t+2)\,\mathrm{d}t=t^4+3\sin t+2t+C_2,$ (6′)

由 $S(0)=-3, C_2=-3, S=t^4+3\sin t+2t-3.$ (8′)

四、设所求抛物线 L 的方程为： $y=ax^2+bx+c(a<0),$
由 L 通过点（0，0）、（1，2），有 $c=0, b=2-a,$

故 L 的方程为： $y=ax^2+(2-a)x,$ (2′)

又∵ $y=0$ 时， $x=0, x=\dfrac{a-2}{a}>0$， L 与 x 轴所围的面积.

$$S=\int_0^{\frac{a-2}{a}}[ax^2+(2-a)x]\,\mathrm{d}x=\frac{(2-a)^3}{6a^2},$$ (4′)

$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}a}=\dfrac{(2-a)^2(-a-4)}{6a^2}$，由 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}a}=0$，得 $a=2$（舍）， $a=-4$， (6′)

故所求抛物线 L 的方程为： $y=-4x^2+6x.$ (8′)

五、证 （1）因极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，故 $\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=0$.由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，得 $f(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=0$.由 $f'(x)>0$ 知 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加，故

$$f(x)>f(a)=0,\quad x\in(a,b);$$ (3′)

（2）设 $F(x)=x^2, g(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ （$a\le x\le b$），则 $g'(x)=f(x)>0$

由柯西中值定理，在 (a,b) 内存在点 ξ，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{(x^2)'}{(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t)'}\Big|_{x=\xi}$$

即
$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}.$$ (6′)