第九章　　重积分

第一节　重积分的概念与性质

1. 选择

设 $I_1=\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma$, $I_2=\iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma$,

（1）若 D 由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 围成, 则在 D 上 $\underline{B}$.

A. $(x+y)^2 \le (x+y)^3$；　B. $(x+y)^2 \le (x+y)^3$；

由二重积分的性质可知, $\underline{A}$.

A. $I_1 \ge I_2$；　B. $I_1 \le I_2$；　C. $I_1 = I_2$；

（2）若 D 由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 围成, 则 $\underline{B}$.

A. $I_1 \ge I_2$；　B. $I_1 \le I_2$；　C. $I_1 = I_2$；

2. 填空

设 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,

（1）若 $f(x,y)=x+y+1$, 域 D 为 $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$, 则在 D 上, $f(x,y)$ 的最小值为 $\underline{1}$, 最大值为 $\underline{4}$；由二重积分的性质可知, $\underline{2}\le I\le \underline{8}$；

（2）若 $f(x,y)=x^2+4y^2+9$, 域 D 为 $x^2+y^2\le 4$, 则在 D 上, $f(x,y)$ 的最小值为 $\underline{9}$, 最大值为 $\underline{25}$, 因此 $\underline{36\pi}\le I\le \underline{100\pi}$.

3. 设 $I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$, 其中 D_1 是矩形闭区域：$-1\le x\le 1$, $-2\le y\le 2$；$I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$, 其中 D_2 是矩形闭区域：$0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$, 试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系.

解 设函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^3$, 则积分 $\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的几何意义是在矩形域 D_1 上以曲面 $z=f(x,y)$ 为曲顶的曲顶柱体体积. 由于域 D_1 关于 $x=0$（即 y 轴）对称, 而函数 $f(x,y)$ 是 x 的偶函数（即曲面 $z=f(x,y)$ 关于 yOz 面对称）, 因此

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad ,$$

其中域D^*为$0 \le x \le 1$, $|y| \le 2$. 同理, D^*关于$y=0$对称, $f(x,y)$是y的偶函数, 因此,

$$\iint\limits_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

于是$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 4\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 即$I_1 = 4I_2$.

第二节　　二重积分的计算

1. 填空

（1）改变积分次序

$$\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y = \underline{\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{e^y}^4 f(x,y)\mathrm{d}x}.$$

（2）改变积分次序

$$I = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_2^{2\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \underline{\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x}.$$

若$f(x,y) = xy$, 则$I = \underline{\frac{10}{3}}$.

（3）设D：$1 \le y \le 5$, $y \le x \le 5$, 则应把二重积分$I = \iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y \ln x}$化为先对$y$后对$x$的二次积分

$$I = \int_1^5 \mathrm{d}x \int_1^x \frac{1}{y \ln x}\mathrm{d}y = 4.$$

（4）二重积分$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y = \underline{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sec\theta} f(r) r \mathrm{d}r}$.

（5）二重积分

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} \frac{1}{r} \cdot r \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = \sqrt{2} - 1.$$

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分.

（1）$\iint\limits_D (x^2 - y^2)\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是闭区域$0 \le y \le \sin x$, $0 \le x \le \pi$.

解　原式$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}(x^2-y^2)\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}(x^2\sin x-\dfrac{\sin^3 x}{3})\mathrm{d}x$

$$=-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2x\sin x\Big|_0^{\pi}+2\cos x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{3}[\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x]_0^{\pi}=\pi^2-\frac{40}{9}.$$

（2）$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由直线$y=x$，$x=-1$，$y=1$所围成的闭区域.

解　将D视为$X-$型区域，则D：$x\le y\le 1$，$-1\le x\le 1$.

原式$=\int_1^{-1}\mathrm{d}x\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y$

$$=-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_x^1\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\int_0^1(x^3-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

（3）$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由不等式$|x|+|y|\le 1$，$x\ge 0$所确定的闭区域.

解　原式$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{-x+1}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}y=\int_0^1 e^{x+y}\Big|_{y=x-1}^{y=-x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{2x-1})\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}}{2}+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

易犯的错误是：认为积分区域D是关于x轴对称的，因此原积分等于在域D内第一象限部分域上积分的 2 倍，即

$$\text{原式}=2\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma\ ,\quad D_1=\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le y\le 1-x.\end{cases}$$

此解错在没有被积函数的奇偶性，只有积分区域的对称性，就乱用对称性简化计算.

（4）$\iint\limits_D \dfrac{\cos x}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由曲线$y=0$，$y=x$和$x=\dfrac{\pi}{6}$围成的闭区域.

解　$\iint\limits_D \dfrac{\cos x}{x}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{\cos x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

3. 计算积分$\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$的值.

解　由于函数e^{-y^2}的原函数不是初等函数，故需交换积分次序，积分区域D为由$x=0, y=2, y=x$所围成的区域，故

原式$=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_0^2=\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4})$.

4. 设D为以点$(1,1),(-1,1),(-1,-1)$为顶点的三角形，D_1为D在第一象限部分，试将$\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$化为$D_1$上的积分.

解　如图 9.1 所示，将积分区域分为D_1'与D_2'两部分，其中D_1'为三角形AOB，D_2'为三

角形 BOC.

显然 D_1' 关于 y 轴对称, D_2' 关于 x 轴对称, 又因为函数 xy 关于 x，y 均为奇函数, 所以

$$\iint\limits_{D_1'} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \quad \iint\limits_{D_2'} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

故
$$\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1'} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2'} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

又函数 $\cos x \sin y$ 关于 x 为偶函数, 关于 y 为奇函数，所以

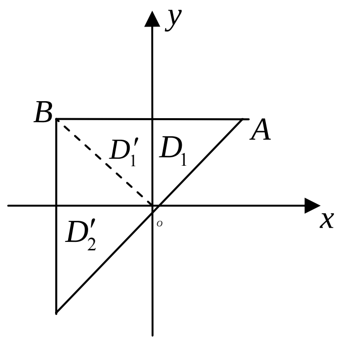

图 9.1

$$\iint\limits_{D_1'} \cos x \sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} \cos x \sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \iint\limits_{D_2'} \cos x \sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

综上所述,

$$\iint\limits_{D} (xy + \cos x \sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} \cos x \sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5. 证明：$\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x$.

分析　因为欲证等式的左端为累次积分, 等式右端为定积分, 因此, 应从左端出发证明，作一次积分, 化为定积分, 使之与右端定积分相等. 但原累次积分的被积函数含有抽象函数, 无法关于 x 先积分, 故考虑改变积分次序.

解　$\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x \int_x^a \mathrm{d}y = \int_0^a (a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x$.

6. 求下列空间域 Ω 的体积.

（1）由四个平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体.

解　曲顶柱体以 $D=\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ 为底, 以 $z=6-2x-3y$ 为顶面, 故所求立体体积

$$V = \iint\limits_{D} (6-2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (6-2x-3y)\mathrm{d}y = \int_0^1 (6-2x-\frac{3}{2})\mathrm{d}x = 6-1-\frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

（2）由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 围成的立体.

解　两曲面的交线满足方程组

$$\begin{cases} z = x^2+2y^2 \\ z = 6-2x^2-y^2 \end{cases}$$

消去 z, 得 $x^2+y^2=2$. 所求立体的体积

$$V=\iint_D(z_2-z_1)\mathrm{d}\sigma=\iint_D[(6-2x^2-y^2)-(x^2+2y^2)]\mathrm{d}\sigma$$

$$=3\iint_D(2-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=6\pi\cdot(\rho^2-\frac{\rho^4}{4})\Big|_0^{\sqrt{2}}=6\pi.$$

7. 画出积分区域, 并且把积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域 D 是:

（1） $0\le y\le x^2,\qquad 0\le x\le 1$;

解 积分区域如图 9.2(a)所示, 其边界曲线 $y=x^2$ 及 $x=1$ 在极坐标下的方程分别为 $\rho=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ 及 $\rho=\frac{1}{\cos\theta}$.

原积分 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{\frac{1}{\cos\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$

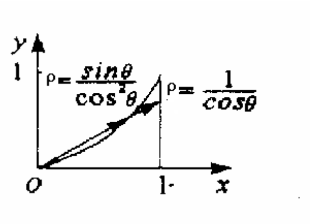

图 9.2（a）

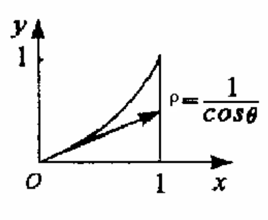

图 9.2（b）

易犯的错误是：积分区域如图 9.2(b)所示.

原积分 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$.

此错误是由作图不准确造成的.

（2）由曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $y=\sqrt{ax-x^2}$ 及 $y=-x$ 围成的闭区域（$a>0$）.

解 积分区域如图 9.3 所示, 曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 及 $y=\sqrt{ax-x^2}$ 在极坐标下的方程分别为 $r=a$ 及 $r=a\cos\theta$.

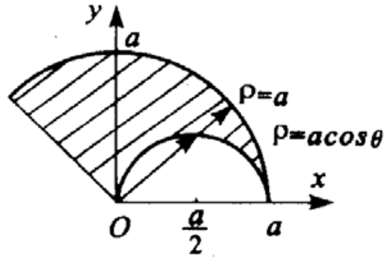

图 9.3

原积分=$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{a}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$

$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$.

易犯的错误是：原积分=$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{a}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$.

8. 计算 $I=\iint\limits_D(|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D： $x^2+y^2\le 4$.

解 积分区域关于 x 轴, y 轴均对称, 被积函数 $|x|+|y|$ 关于 x，y 均为偶函数, 故

I =4$\iint\limits_{D_1}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（$D_1$ 为 D 位于第一象限的部分）

=4$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2(\cos\theta+\sin\theta)\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{64}{3}$.

9. 选择适当的坐标计算下列各题.

（1）$\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是圆环形闭区域：$\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

解 原式=$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\pi}^{2\pi}\sin\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho=2\pi[-\rho\cos\rho+\sin\rho]_{\pi}^{2\pi}=-6\pi^2$.

（2）$\iint\limits_D xe^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由曲线 $y=4x^2$ 和 $y=9x^2$ 在第一象限所围成的区域.

解 $\iint\limits_D xe^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{\frac{\sqrt{y}}{3}}^{\frac{\sqrt{y}}{2}}xe^{-y^2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\frac{y}{4}-\frac{y}{9})e^{-y^2}\mathrm{d}y\quad=\frac{5}{72}\int_0^{+\infty}ye^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{5}{144}$.

（3）$\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 是由圆周 $x^2+y^2=4, x^2+y^2=1$, 及直线 $y=0, y=x$ 所围成的在第一象限内的区域.

解 $\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{3}{64}\pi^2$.

（4）$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=3a(a>0)$ 所围成的闭区域.

解 原式=$\int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x=\int_a^{3a}\mathrm{d}y[\frac{x^2}{3}+y^2x]_{y-a}^{a}$

$$=\int_a^{3a}[\frac{y^2}{3}-\frac{1}{3}(y-a)^3+y^2a]\mathrm{d}y$$

$$=[\frac{y^4}{12}-\frac{(y-a)^4}{12}+\frac{a}{3}y^3]_a^{3a}=14a^4.$$

易犯的错误时：认为积分区域如图 9.4 所示.

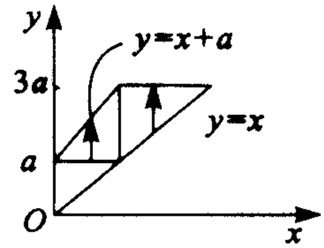

图 9.4

$$\text{原式}=\int_0^a \mathrm{d}x\int_a^{x+a}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$+\int_a^{3a}\mathrm{d}x\int_x^{3a}(x^2+y^2)\mathrm{d}y.$$

此错误是由画图不准确造成的.

（5） $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是直线 $x=-2$，$y=0$，$y=2$ 及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

解 1 区域 D 及 D_1 如图 9.5 所示，有

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D^1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho$$

$$=4-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=4-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2})\mathrm{d}\theta$$

$$=4-\frac{\pi}{2}.$$

解 2 如图 9.5 所示，

$D=\{(x,y)\,|\,-2\le x\le -\sqrt{2y-y^2},0\le y\le 2\}$，

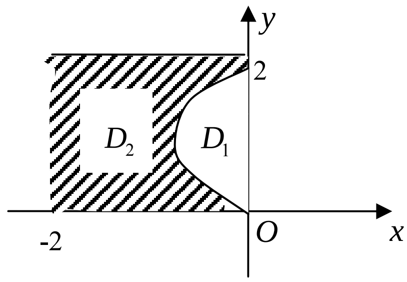

图 9.5

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 y\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^2 y\mathrm{d}y-\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=4-\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\mathrm{d}y$$

$$\underline{\underline{\text{令}y-1=\sin t}}\,4-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\mathrm{d}t=4-\frac{\pi}{2}.$$

10. 求由圆 $\rho=2$ 和心形线 $\rho=2(1+\cos\theta)$ 所围图形（在圆外部分）的面积.

解 由 $\begin{cases}\rho=2(1+\cos\theta)\\ \rho=2\end{cases}$ 得交点：$\theta_0=\pm\frac{\pi}{2}$，$\rho_0=2$. 面积

$$A=\iint\limits_D \rho d\rho d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}\rho d\rho$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\cos^2\theta+2\cos\theta]d\theta=4[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+2]=8+\pi.$$

11. 设平面薄片所占的闭区域 D 是由螺线 $\rho=2\theta$ 上一段弧 $(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$ 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成, 它的面密度 $\mu(x,y)=x^2+y^2$. 求此薄片的质量.

解 质量 $M=\iint\limits_D \mu(x,y)d\sigma=\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\theta}\rho^3 d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\theta^4 d\theta=\frac{\pi^5}{40}$.

第三节　三重积分的计算

1. 化 $I=\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分, 其中积分区域 Ω 分别是：

（1）由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0$，$z=0$ 所围成的闭区域.

（2）由曲面 $z=x^2+y^2$，$y=x^2$ 及平面 $y=1$，$z=0$ 所围成的闭区域.

解 （1）由 $\begin{cases} z=xy \\ z=0 \end{cases}$ 消去 z , 得 $xy=0$, 即 $x=0$ 或 $y=0$. 因此空间域是以 $z=0$ 为下曲面, $z=xy$ 为上曲面, 侧面是柱面 $x=0$，$y=0$，$x+y-1=0$. 因此

原式$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{xy}f(x,y,z)dz$.

（2）积分区域 Ω 可表示为

$$0\le z\le x^2+y^2,\ x^2\le y\le 1,\ -1\le x\le 1$$

所以

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz.$$

2. 计算 $\iiint\limits_\Omega y\cos(x+z)dxdydz$, 其中 Ω 由 $y=\sqrt{x}$，$y=0$，$z=0$ 和 $x+z=\frac{\pi}{2}$ 所围成的闭区域.

解 将积分区域 Ω 向 xOy 平面投影得 D_{xy}：$0\le x\le\frac{\pi}{2}$，$0\le y\le\sqrt{x}$, 则 Ω 可表示成 $0\le z\le\frac{\pi}{2}-x$, $(x,y)\in D_{xy}$, 故

$$\iiint_{\Omega} y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(x+z)\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}} y(1-\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}} y(1-\sin x)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

3. 计算 $\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h(R>0,h>0)$ 所围成的闭区域.

解 1 积分区域 Ω 如图 9.6 所示，用竖坐标为 z 的平面截域 Ω，得圆域

$$D(z): x^2+y^2 \le \frac{R^2z^2}{h^2},$$

其面积为 $\pi\frac{R^2z^2}{h^2}$，采用“先二后一法”计算.

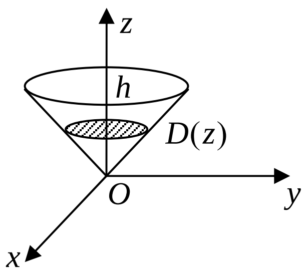

图 9.6

$$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h z\mathrm{d}z\iint_{D(z)}\mathrm{d}\sigma = \int_0^h z\cdot\pi\frac{R^2z^2}{h^2}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi R^2}{h^2}\cdot\frac{z^4}{4}\Big|_0^h = \frac{\pi R^2h^2}{4}.$$

解 2 积分域 Ω 的边界曲面在柱面坐标下的方程分别为 $z=h$ 及 $z=\frac{h}{R}\rho$.

利用柱面坐标计算.

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{h}{R}\rho}^{h} z\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^R\rho\frac{1}{2}[h^2-\frac{h^2}{R^2}\rho^2]\mathrm{d}\rho$$

$$=\pi[\frac{h^2}{2}\rho^2-\frac{h^2}{R^2}\cdot\frac{\rho^4}{4}]_0^R=\frac{R^2}{4}h^2\pi.$$

易犯的错误是：

（1）在柱面坐标下，原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{h}{R}\rho} z\mathrm{d}z$. 关于 z 的积分上、下限错误.

（2）采用“先二后一法”.

$$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h z\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi R^2\int_0^h z\mathrm{d}z = \frac{\pi R^2h^2}{2}.$$

关于 x，y 积分的积分域错误，积分域应为 $x^2+y^2\le\frac{R^2z^2}{h^2}$.

特别注意，将被积函数 z 用表达式 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 代入也是错误的.

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由平面 $z=0$， $z=y$， $y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解 1　按先 z 再 x 后 y 积分.

$$\text{原式}=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\mathrm{d}x\int_0^y z\mathrm{d}z=0$$

其中 $\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xdx$ 为奇函数再对称区间上的积分, 其值为 0.

解 2　按先 x 再 y 后 z 积分.

$$\text{原式}=\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_z^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\mathrm{d}x=0$$

其中 $\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\mathrm{d}x=0$.

解 3　按先 x 再 z 后 y 积分.

$$\text{原式}=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y z\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\mathrm{d}x=0$$

5 填空题.

设 Ω 由球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成, 则三重积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

在三种坐标系下分别可化为三次积分如下：

直角坐标系下：

$$I=\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} \underline{f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}\mathrm{d}z$$

柱面坐标系下：

$$I=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 \mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}} \underline{f(\sqrt{\rho^2+z^2})\rho}\mathrm{d}z$$

球面坐标系下：

$$I=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}} \underline{f(\sqrt{r})r^2\sin\varphi}\mathrm{d}r\ .$$

6. 利用柱面坐标计算下列三重积分.

（1） $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为由 $x^2+y^2\le 1$， $0\le z\le 1$ 所确定.

解　$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho\int_0^1 e^{-\rho^2}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1 \rho e^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho=\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho^2$

$$=-\pi e^{-\rho^2}\Big|_0^1=-\pi(e^{-1}-1)=\pi(1-\frac{1}{e}).$$

（2）$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$, 其中$\Omega$为由曲面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$及$x^2+y^2=3z$所围成的闭区域.

解 由$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=3z \end{cases}$消去$z$, 得$x^2+y^2=3$，

$$\iiint\limits_{\Omega} z dv=\iiint\limits_{\Omega} zr\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\cdot\frac{1}{2}(4-\rho^2-\frac{r^4}{9})\mathrm{d}\rho=\frac{13}{4}\pi.$$

（3）$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$， 其中$\Omega$为由曲面$y=\sqrt{2x-x^2}$，$z=0$，$z=a$ $(a>0)$，$y=0$所围成的闭区域.

解 原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho\int_0^a z\mathrm{d}z=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}a^2.$

7. 利用球面坐标计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是由球面$x^2+y^2+z^2=z$所围成的闭区域.

解 球面$x^2+y^2+z^2=z$在球面坐标下的方程为$r=\cos\varphi$.

原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi=-\frac{\pi}{10}\cos^5\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}.$

（2）$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是由不等式：$x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$, $x^2+y^2\le z^2(a>0)$所确定.

解 曲面$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$及$x^2+y^2=z^2(a>0)$在球面坐标下的方程分别为$r=2a\cos\varphi$及$\varphi=\frac{\pi}{4}$.

原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^3\cos\varphi\mathrm{d}r$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}4a^4\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=-8\pi\cdot\frac{\cos^6\varphi}{6}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{7}{6}\pi a^4.$$

8. 选择适当的坐标计算下列三重积分.

（1）$\iiint\limits_{\Omega}(1+x^2)\mathrm{d}v$, 其中$\Omega$是由曲面$x^2=z^2+y^2$，$x=2$，$x=4$所围成的闭区域.

解 采用“先二后一法”计算.

$$\iiint\limits_{\Omega}(1+x^2)\mathrm{d}v=\int_2^4\mathrm{d}x\iint\limits_{Dx}(1+x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_2^4(1+x^2)\mathrm{d}x\iint\limits_{Dx}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_2^4(1+x^2)(\pi x^2)\mathrm{d}x=\frac{3256}{15}\pi.$$

（2）$\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$由不等式：$x^2+y^2+z^2\le 1$，$z\ge\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$所确定.

解 1 曲面$x^2+y^2+z^2=1$及$z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$在球面坐标下的方程分别为$r=1$及$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

$$原式=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 \mathrm{r}\cos\varphi\cdot\mathrm{r}\cdot\mathrm{r}^2\mathrm{dr}=2\pi\cdot\frac{\sin^2\varphi}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{\rho^5}{5}\bigg|_0^1=\frac{\pi}{20}.$$

解 2 曲面$x^2+y^2+z^2=1$及$z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$在柱面坐标下的方程为$z=\sqrt{1-\mathrm{r}^2}$及$z=\sqrt{3}\mathrm{r}$.

$$原式=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{rdr}\int_{\sqrt{3-\mathrm{r}}}^{\sqrt{1-\mathrm{r}^2}}z\sqrt{\mathrm{r}^2+z^2}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{r}}{2}\cdot\frac{(\mathrm{r}^2+z^2)^{3/2}}{3/2}\bigg|_{\sqrt{3-\mathrm{r}}}^{\sqrt{1-\mathrm{r}^2}}\mathrm{dr}=\frac{\pi}{20}.$$

（3）$\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是$x^2+y^2+z^2\le R^2$和$x^2+y^2+z^2\le 2Rz(R>0)$的公共部分.

解 1 球面$x^2+y^2+z^2=R^2$及$x^2+y^2+z^2=2Rz$在球面坐标下的方程分别为$r=R$及$r=2R\cos\varphi$. 由$\begin{cases}r=2R\cos\varphi\\ r=R\end{cases}$解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

$$原式=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{2\pi}{5}R^5\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\varphi\mathrm{d}\cos\varphi-\frac{32}{5}R^5\cdot 2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\mathrm{d}\cos\varphi$$

$$=\frac{7\pi}{60}R^5+\frac{\pi R^5}{160}=\frac{59}{480}\pi R^5.$$

解 2 采用“先二后一法”计算.

$$原式=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 2Rz-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_0^{\frac{R}{2}} z^2(2Rz-z^2)\mathrm{d}z+\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R} z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{59}{480}\pi R^5 .$$

第四节　重积分的应用

1. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

解　由 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases}$ 消去 z，得 D 的边界：$x^2+y^2=2x$. 所求曲面面积

$$S=\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\iint_D \mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\pi .$$

2. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围成立体的表面积.

解 1　所求曲面在第一卦限内的图形如图 9.7 所示. 面积为

$$S=16S_1=16\iint_{D_{xy}} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=16\iint_{D_{xy}} \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}+0}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=16R\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-x^2}}=16R^2 .$$

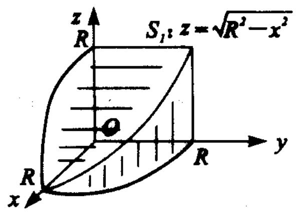

图　9.7

解 2　由 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+z^2=R^2 \end{cases}$ 消去 x，得 $z=\pm y$. 对于曲面 $x=\sqrt{R^2-y^2}$，$x_y=\dfrac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}}$，$x_z=0$，所求曲面的面积为

$$S=8S^*=8\iint_{D_{yz}} \sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\iint_{Dyz} \sqrt{1+\frac{y^2}{R^2-x^2}+0}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=8R\int_0^R \mathrm{d}y\int_{-y}^{y} \frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}z=8R\int_0^R \frac{2y}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y=-8R\cdot 2(R^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^R=16R^2 .$$

3. 设平面薄片所占的闭区域 D 由曲线 $y=x^2$，$x+y=2$ 围成，求该均匀薄片的重心.

解　$\overline{x}=\dfrac{M_y}{M}$，$\overline{y}=\dfrac{M_x}{M}$.

$$M=\rho_0\iint_D \mathrm{d}\sigma=\rho_0\int_{-2}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2-x}\mathrm{d}y=\rho_0\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\rho_0 ,$$

$$M_y=\rho_0\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma=\rho_0\int_{-2}^{1}x\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2-x}\mathrm{d}y=\rho_0\int_{-2}^{1}x(2-x-x^2)\mathrm{d}x=-\frac{9}{4}\rho_0,$$

$$M_x=\rho_0\int_{-2}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2-x}y\mathrm{d}y=\frac{\rho_0}{2}\int_{-2}^{1}[(2-x)^2-x^4]\mathrm{d}x=\frac{36}{5}\rho_0,$$

因此，$\overline{x}=\dfrac{M_y}{M}=-\dfrac{1}{2}$，$\overline{y}=\dfrac{M_x}{M}=\dfrac{8}{5}$，故重心坐标为$(\overline{x},\overline{y})=(-\dfrac{1}{2},\dfrac{8}{5})$.

4. 设平面薄片所占的闭区域D由直线$x+y=2$，$y=x$和x轴所围成，它的面密度$\rho(x,y)=x^2+y^2$，求该薄片的质量.

解 质量为$M=\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2-y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1\{\frac{1}{3}[(2-y)^3-y^3]+y^2(2-2y)\}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(\frac{8}{3}-4y+4y^2-\frac{8}{3}y^3)\mathrm{d}y=[\frac{8}{3}y-2y^2+\frac{4}{3}y^3-\frac{2}{3}y^4]_0^1=\frac{4}{3}.$$

5. 利用三重积分计算.

(1) 由曲面$z=\sqrt{5-x^2-y^2}$及$x^2+y^2=4z$所围成的立体体段.

解 采用柱面坐标计算

$$V=\iiint\limits_\Omega\mathrm{d}v=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{\sqrt{5-\rho^2}}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{\sqrt{5-\rho^2}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^2\rho(\sqrt{5-\rho^2}-\frac{\rho^2}{4})\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^2\frac{-1}{2}\sqrt{5-\rho^2}\mathrm{d}(5-\rho^2)-\frac{\pi}{2}\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=-\frac{2}{3}\pi(5-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2-\frac{\pi}{8}\rho^4\Big|_0^2=\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4).$$

(2) 由曲面$z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}$，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,(A>a>0)$，$z=0$所围匀质物体的重心.

解 匀质物体的重心即形心，且形心在对称轴−z 轴上，因此$\overline{x}=0$，$\overline{y}=0$，$\overline{z}=\dfrac{\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_\Omega\mathrm{d}v}$.

其中$\iiint\limits_\Omega\mathrm{d}v=\dfrac{2}{3}\pi(A^3-a^3)$.

$$\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_a^A r^3\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{A^4-a^4}{4}=\frac{\pi}{4}(A^4-a^4).$$

于是 $\overline{z}=\frac{3}{8}\frac{(A^4-a^4)}{(A^3-a^3)}$. 重心坐标为（$0,0,\frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)}$）.

6. 求半径为 R、高为 h 的均匀圆柱体绕过中心而垂直于母线的轴的转动惯量（设密度 $\rho=1$）.

解 建立坐标系, 使圆柱体的对称轴在 z 轴上, 且原点在其中心. 则所求转动惯量为

$$I_y=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\rho^2\cos^2\theta+z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho(\rho^2\cos^2\theta\cdot h-\frac{h^3}{12})\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}[\frac{hR^4}{4}\cos^2\theta+\frac{h^3R^2}{24}]\mathrm{d}\theta=\frac{\pi h}{4}R^4+\frac{\pi h^3}{12}R^2$$

$$=\frac{M}{4}(R^2+\frac{h^2}{3})\quad（其中 M=\pi R^2h 为圆柱体质量）$$

第九章　重积分（总习题）

1. 计算 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D: x^2+y^2\le a^2, x^2+y^2\ge ay$.

解 1 $I=(\iint\limits_{D_上}+\iint\limits_{D_下})\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{a\sin\theta}^{a}\rho^2\mathrm{d}\rho+\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^2\mathrm{d}\rho$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{a^3}{3}\pi=\frac{2}{3}a^3\pi+\frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}a^3(\pi-\frac{2}{3}).$$

解 2 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{x^2+y^2\le ay}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^2\mathrm{d}\rho-\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{2}{3}a^3\pi-\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}a^3(\pi-\frac{2}{3}).$$

2. 计算 $I=\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 由 $y=x^2$, $y=4x^2$ 及 $y=1$ 围成.

解 1 $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}}(x+y)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{-\frac{\sqrt{y}}{2}}(x+y)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1(\frac{3}{8}y+\frac{y^{3/2}}{2})\mathrm{d}y+\int_0^1(\frac{y^{3/2}}{2}-\frac{3}{8}y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 y^{3/2}\mathrm{d}y=\frac{2}{5}.$$

解 2 $I=(\iint\limits_{D_{大}}-\iint\limits_{D_{小}})(x+y)\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}(x+y)\mathrm{d}y-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{4x^2}^{1}(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}[x(1-x^2)+\frac{1-x^4}{2}]\mathrm{d}x-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[x(1-4x^2)+\frac{1-16x^2}{2}]\mathrm{d}x=\frac{2}{5}.$$

3. 计算 $I=\iint\limits_{\substack{|x|\le 1\\ 0\le y\le 1}}\left|y-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

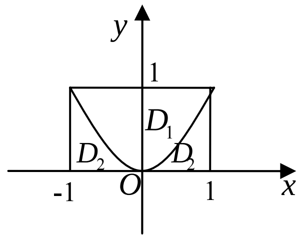

图 9.8

解 1 $I=\iint\limits_{D_1}(y-x^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2-y)\mathrm{d}\sigma$ （图 9. 8）

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}(y-x^2)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}[\frac{1-x^4}{2}-x^2(1-x^2)]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}[x^4-\frac{x^4}{2}]\mathrm{d}x=\frac{11}{15}.$$

亦可利用对称性简化计算. 由于 D_1、D_2 均关于 $x=0$（即 y 轴）对称, 又 $f(x,y)$ 关于 x 为偶函数（即 $f(-x,y)=f(x,y)$）, 因此

$$I=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}(y-x^2)\mathrm{d}y+2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y.$$

4. 计算 $\iint\limits_{D}(y^2+3x-6y+9)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是闭区域 $x^2+y^2\le R^2$.

解 原式$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho[\rho^2\sin^2\theta+3\rho\cos\theta-6\rho\sin\theta]\mathrm{d}\rho+9\pi R^2$

$$=9\pi R^2+\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+0+0=9\pi R^2+\frac{R^4}{4}\pi.$$

亦可利用对称性简化计算. 由于积分 $\iint\limits_{D}xd\sigma$ 及 $\iint\limits_{D}yd\sigma$ 均为零, 故原积分

$$I=\iint\limits_{D}y^2d\sigma+0+0+9\pi R^2$$

再利用极坐标计算.

5. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由 xOy 平面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

解 Ω 在 yOz 面投影域 D_{yz} 为：$y^2+z^2\le 10$, 所以

$$\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{r^2}{2}}^{5}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{10}}\rho^3(5-\frac{\rho^2}{2})\mathrm{d}\rho=2\pi[\frac{5}{4}\rho^4-\frac{\rho^6}{12}]_0^{\sqrt{10}}$$

$$=2\pi[\frac{5}{4}\times100-\frac{1}{12}\times1000]=2\pi\frac{1500-1000}{12}=\frac{250}{3}\pi\,.$$

6. 计算$\iiint_{\Omega}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为由$x^2+y^2+z^2\le1$，$z\ge2\sqrt{x^2+y^2}-1$所确定.

解 投影区域D：$x^2+y^2\le(\frac{4}{5})^2$，用柱面坐标得

$$\iiint_{\Omega}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{4}{5}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{2r-1}^{\sqrt{1-r^2}}\frac{2z}{\rho}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{4}{5}}[1-\rho^2-(2\rho-1)^2]\mathrm{d}\rho=\frac{64}{75}\pi\,.$$

7. 计算$\iiint_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$所围成的区域.

解 $\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$（因为被积函数是$x$的奇函数，积分区域$\Omega$关于$x=0$对称），所以有

$$\iiint_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,;$$

又由于$\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$的被积函数只是$z$的函数，用平面$z=z$去截$\Omega$所得闭区域$D(z)$的面积很容易求，因此可选用“先二后一”方法求解.

$$\iiint_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}z\mathrm{d}z\iint_{D_1(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}z\mathrm{d}z\iint_{D_2(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}z\pi z^2\mathrm{d}z+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}z\pi(1-z^2)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{8}\,.$$

8. 计算$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由$x^2+y^2=z^2$，$z=2$，$z=8$围成的闭区域.

解 1 $I=(\iiint_{\Omega_{柱}}+\iiint_{\Omega_{外}})(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2}\rho^3\mathrm{d}\rho\int_2^{8}\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^{4}\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{8}\mathrm{d}z$

$$=6\cdot2\pi\cdot4+2\pi\int_2^4\rho^3(8-\frac{\rho^2}{2})\mathrm{d}\rho=48\pi+288\pi=336\pi\,.$$

解 2 $I=(\iiint\limits_{\Omega_{大}}-\iiint\limits_{\Omega_{小}})(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^8\rho^2\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2\rho^2\mathrm{d}z$

$$=2\pi\int_0^4(8\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5)\mathrm{d}\rho-2\pi\int_0^2(2\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5)\mathrm{d}\rho=336\pi.$$

解 3 采用“先二后一法”计算.

$$I=\int_2^8\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_2^8\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_2^8 z^2\mathrm{d}z=336\pi.$$

易犯的错误是：将 $x^2+y^2=2z$ 代入被积表达式, 得

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}2z\mathrm{d}v\overset{先二后一}{=\!=\!=}2\int_2^8 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_2^8 z\cdot\pi\cdot 2z\mathrm{d}z=4\pi\frac{z^3}{3}\Big|_2^8=672\pi.$$

9. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\left|x^2+y^2+z^2-1\right|\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 4$.

解 被积函数含有绝对值 $\left|x^2+y^2+z^2-1\right|$, 用曲面 $x^2+y^2+z^2-1=0$ 将 Ω 分成 Ω_1 和 Ω_2, 其中

$$\Omega_1:\ x^2+y^2+z^2\le 1\ ,\ \Omega_2:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 4.$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}\left|x^2+y^2+z^2-1\right|dv=\iiint\limits_{\Omega_1}(1-x^2-y^2-z^2)\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega_2}(x^2+y^2+z^2-1)\mathrm{d}v$$

采用球面坐标计算

$$\iiint\limits_{\Omega_1}(1-x^2-y^2-z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(1-r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{8}{15}\pi,$$

$$\iiint\limits_{\Omega_2}(x^2+y^2+z^2-1)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_1^2(r^2-1)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{232}{15}\pi,$$

所以 $$\iiint\limits_{\Omega}\left|x^2+y^2+z^2-1\right|\mathrm{d}v=\frac{8}{15}\pi+\frac{232}{15}\pi=16\pi.$$

10. 半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 被两个圆柱面 $x^2+y^2-Ry=0$, $x^2+y^2+Ry=0(R>0)$ 割出两个窗口, 求在这半球面上剩下部分的面积.

解 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}\sigma=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$S=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}\sigma=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R\sin\theta}^{R}\frac{R\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=-4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-\rho^2}\Big|_{R\sin\theta}^{R}\mathrm{d}\theta=4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\cos\theta\mathrm{d}\theta=4R^2.$$

11. 在底半径为 R，高为 H 的圆柱体上面，拼加一个同半径的半球体，使整个立体的重心位于球心处，求 R 和 H 的关系（设体密度 $\mu=1$）.

解 建立坐标系如图 9. 9 所示，由题意知，物体重心的竖坐标 $Z=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}=0$，

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R}\rho\mathrm{d}\rho\int_{-H}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{R}\frac{\rho}{2}(R^2-\rho^2-H^2)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}R^2(R^2-2H^2)=0.$$

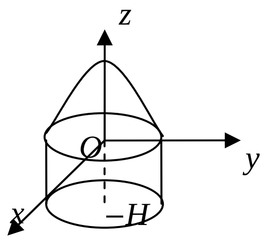

图 9.9

$R=\sqrt{2}H$.

12. 设一个上、下底半径各为 b、a，高为 H 的圆锥台，其体密度 $\mu=1$，试求其关于中心轴的转动惯量（$b<a$）.

解 1 建立坐标系下如图 9. 10

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=(\iiint\limits_{\Omega_1}+\iiint\limits_{\Omega_2})(x^2+y^2)\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{b}\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^{H}\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_b^{a}\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{H(a-\rho)}{a-b}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\cdot\frac{b^4}{4}\cdot H+2\pi\frac{H}{a-b}\int_b^{a}\rho^3(a-\rho)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi H(a^5-b^5)}{10(a-b)}.$$

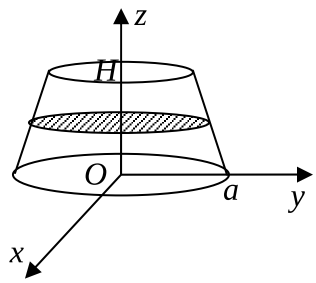

图 9.10

解 2 采用“先二后一法”．用竖坐标为 z 的平面截闭区域 Ω，得到圆域 $D(z)$，设其半径为 $\rho(z)$，则

$$\frac{\rho(z)-b}{a-b}=\frac{H-z}{H},\ \rho(z)=a-\frac{a-b}{H}z.$$

原式 $=\int_0^{H}\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{H}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a-\frac{a-b}{H}z}\rho^3\mathrm{d}\rho$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{H}\frac{1}{H^4}[aH-(a-b)z]^4\mathrm{d}z=\frac{\pi H}{10(a-b)}(a^5-b^5).$$