

第六节 函数的微分

习题 2-6

1. 已知 $y = x^3 - x$, 计算在 $x = 2$ 处当 Δx 分别等于 1、0.1、0.01 时的 Δy 及 dy .

解 $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x) - x^3 - x = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \Delta x,$

$$dy = 3x^2\Delta x - \Delta x,$$

$$\Delta y|_{x=2, \Delta x=1} = 18, \quad dy|_{x=2, \Delta x=1} = 11,$$

$$\Delta y|_{x=2, \Delta x=0.1} = 1.161, \quad dy|_{x=2, \Delta x=0.1} = 1.1,$$

$$\Delta y|_{x=2, \Delta x=0.01} = 0.110601, \quad dy|_{x=2, \Delta x=0.01} = 0.11.$$

2. 设函数 $y = f(x)$ 的图形如下图所示, 试在下面的图(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点 x_0 处的 dy , Δy 及 $\Delta y - dy$, 并说明其正负.

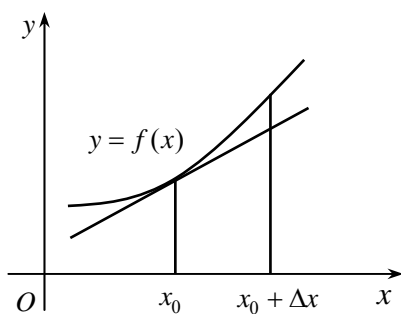


图 2.1 (a)

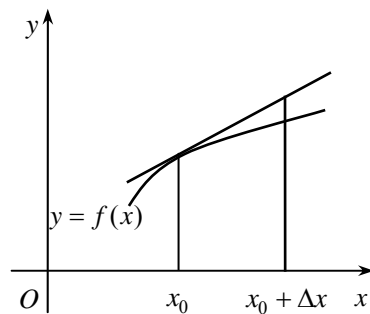


图 2.1 (b)

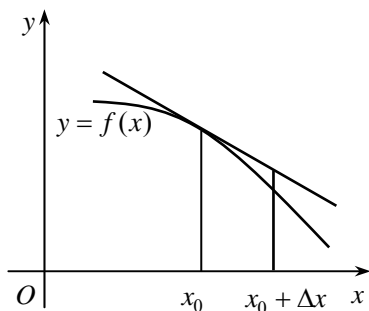


图 2.1 (c)

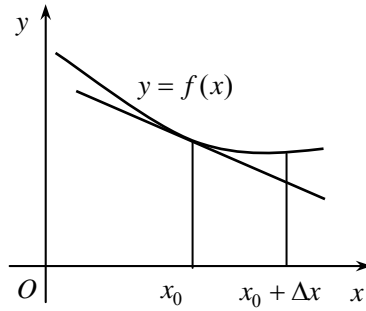


图 2.1 (d)

解 (a) 如下图所示, $dy > 0$, $\Delta y > 0$, $\Delta y - dy > 0$.

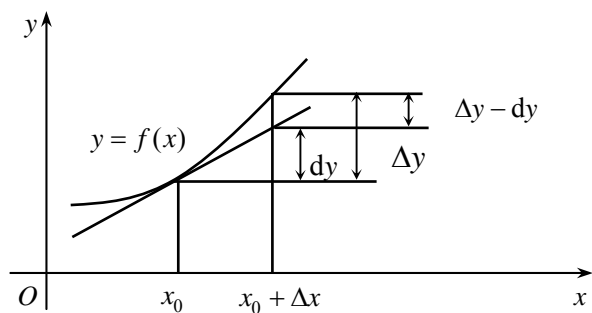


图 2.2 (a)

(b) 如下图所示, $dy > 0$, $\Delta y > 0$, $\Delta y - dy < 0$.

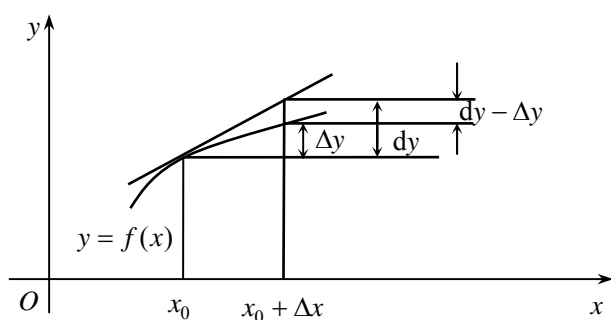


图 2.2 (b)

(c) 如下图所示, $dy < 0$, $\Delta y < 0$, $\Delta y - dy < 0$.

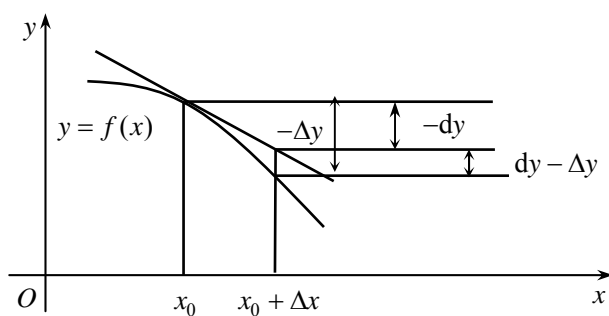


图 2.2 (c)

(d) 如图所示, $dy < 0$, $\Delta y < 0$, $\Delta y - dy > 0$.

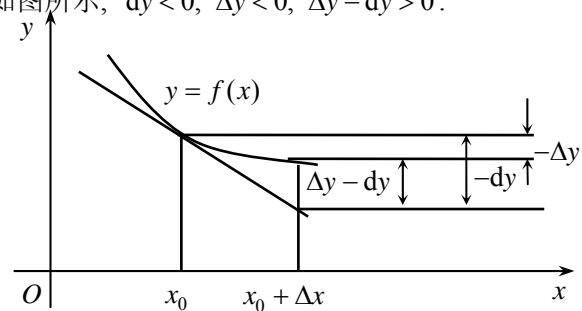


图 2.2 (d)

3. 求下列函数的微分:

$$(1) \quad y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$(2) \quad y = e^{-x} \cos(3-x);$$

$$(3) \quad y = \arctan \frac{1+x}{1-x};$$

$$(4) \quad s = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (A, \omega, \varphi \text{ 是常数}).$$

解 (1) $dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} + x d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$$= \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2} x \frac{2x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx.$$

$$(2) \quad dy = [-e^{-x} \cos(3-x) + e^{-x} \sin(3-x)] dx = e^{-x} [\sin(3-x) - \cos(3-x)] dx.$$

$$(3) \quad dy = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} dx = \frac{1}{1+x^2} dx.$$

$$(4) \quad ds = A\omega \cos(\omega t + \varphi) dt.$$

4. 求下列函数在指定点的微分:

$$(1) \quad y = \frac{\ln x}{x^2}, \quad x=1;$$

$$(2) \quad y = \frac{1 + \sin^2 x}{\sin 2x}, \quad x = \frac{\pi}{6}.$$

解 (1) $dy = \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2 \ln x}{x^3}\right) dx, \quad dy|_{x=1} = dx.$

$$(2) \quad dy|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{2 \sin x \cos x \sin 2x - 2(1 + \sin^2 x) \cos 2x}{\sin^2 2x} \bigg|_{x=\frac{\pi}{6}} dx$$
$$= \frac{\sin^2 2x - 2(1 + \sin^2 x) \cos 2x}{\sin^2 2x} \bigg|_{x=\frac{\pi}{6}} dx = -\frac{2}{3} dx.$$

5. 求方程 $\sin(xy) - \ln \frac{x+1}{y} = 1$ 所确定的隐函数 y 在点 $x=0$ 处的微分 dy .

解 $x=0$ 时, $y=e$. 方程两边求微分, 有

$$\cos(xy)(x dy + y dx) - \frac{y}{x+1} \frac{y dx - (x+1) dy}{y^2} = 0,$$

将 $x=0, y=e$ 代入上式得 $dy|_{x=0} = e(1-e) dx.$

6. 利用一阶微分的形式不变性, 求下列函数的微分:

$$(1) \quad y = \ln(\cos \sqrt{x});$$

$$(2) \quad y = f\left(\arctan \frac{1}{x}\right), \text{ 其中 } f(x) \text{ 可导}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 (1)} \quad dy &= \frac{1}{\cos \sqrt{x}} d(\cos \sqrt{x}) = \frac{1}{\cos \sqrt{x}} (-\sin \sqrt{x}) d\sqrt{x} \\ &= -\tan \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = -\frac{\tan \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad dy &= f'(\arctan \frac{1}{x}) d(\arctan \frac{1}{x}) = f'(\arctan \frac{1}{x}) \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} d(\frac{1}{x}) \\ &= f'(\arctan \frac{1}{x}) \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} (-\frac{1}{x^2}) dx = -\frac{1}{x^2+1} f'(\arctan \frac{1}{x}) dx.\end{aligned}$$

7. 将适当的函数填入下列括号内, 使等式成立:

$$(1) \quad d(\quad) = e^{-2x} dx; \quad (2) \quad d(\quad) = \sec^2 3x dx.$$

$$\text{解 (1)} \quad d(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C) = e^{-2x} dx.$$

$$(2) \quad d(\frac{1}{3}\tan 3x + C) = \sec^2 3x dx.$$

8. 求下列导数:

$$(1) \quad \frac{d(x^6 - x^4 + x^2)}{d(x^2)}; \quad (2) \quad \frac{d \sin x}{d \cos x}.$$

$$\text{解 (1)} \quad \frac{d(x^6 - x^4 + x^2)}{d(x^2)} = \frac{d(x^6 - x^4 + x^2)}{dx} \frac{1}{\frac{d(x^2)}{dx}} = \frac{6x^5 - 4x^3 + 2x}{2x} = 3x^4 - 2x^2 + 1.$$

$$(2) \quad \frac{d \sin x}{d \cos x} = \frac{d \sin x}{dx} \frac{1}{\frac{d \cos x}{dx}} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x.$$

9. 证明当 $|x|$ 很小时, 下列近似式成立:

$$(1) \quad \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}; \quad (2) \quad \ln(1+x) \approx x.$$

证 若 $y = f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数 $f'(0) \neq 0$, 则当 $|x|$ 很小时,

$$\Delta y = f(x) - f(0) \approx dy = f'(0)\Delta x = f'(0)x,$$

从而

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x.$$

(1) 取 $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$, 当 $|x|$ 很小时, 由式子 $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$ 可知,

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}.$$

(2) 取 $f(x) = \ln(1+x)$, 当 $|x|$ 很小时, 由式子 $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$ 知,

$$\ln(1+x) \approx x.$$

10. 设圆扇形的圆心角 $\alpha = 60^\circ$, 半径 $R = 100\text{cm}$. 如果 R 不变, α 减少 $30'$, 问扇形面积大约改变了多少? 又如果 α 不变, R 增加 1cm , 问扇形面积大约改变了多少?

解 扇形面积公式为 $S = \frac{\alpha}{360}\pi R^2$. 如果 R 不变, 则 $dS = \frac{\pi R^2}{360}d\alpha$, 所以 $\alpha = 60$,

$$R = 100\text{cm}, d\alpha = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \text{ 时, 相应的 } dS = \frac{1}{720}\pi 100^2 \approx 43.63\text{cm}^2.$$

如果 α 不变, 则 $dS = \frac{2\pi \alpha R}{360}dR$, 所以 $\alpha = 60$, $R = 100\text{cm}$, $dR = 1$ 时, 相应的

$$dS = \frac{100\pi}{3} \approx 104.72\text{cm}^2.$$

11. 计算下列函数值的近似值:

$$(1) \tan 136^\circ; \quad (2) \sqrt{1.05}.$$

解 (1) $\tan 136^\circ = \tan(135^\circ + 1^\circ) \approx \tan 135^\circ + \sec^2 135^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 1 \approx -0.96509.$

$$(2) \sqrt{1.05} = \sqrt{1+0.05} \approx 1 + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot 0.05 = 1.025.$$

12. 计算球体积时, 要求精确度在 2% 以内, 问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少?

解 球体积公式为 $V = \frac{1}{6}\pi D^3$, 所以

$$dV = \frac{1}{2}\pi D^2 dD, \quad \frac{dV}{V} = 3 \frac{dD}{D},$$

从而 $\frac{dV}{V} = 2\%$ 时, $\frac{dD}{D} = \frac{2}{3}\%$.

13. 某厂生产如图 2.4 所示的扇形板, 半径 $R = 200\text{mm}$, 要求中心角 α 为 55° . 产品检验时, 一般用测量弦长 l 的方法来间接测量中心角 α , 如果测量弦长 l 时的误差 $\delta_l = 0.1\text{mm}$, 问由此而引起的中心角测量误差 δ_α 是多少?

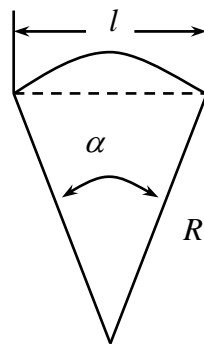


图 2.4

解 中心角 α 与弦长 l 之间的关系为: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2R}$, 方程两边求微分, 得

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha = \frac{dl}{2R}, \text{ 即 } d\alpha = \frac{dl}{R \cos \frac{\alpha}{2}},$$

将 $R = 200$, $\alpha = \frac{55}{180} \cdot \pi$, $dl = \delta_l = 0.1$ 代入, 得 $\delta_\alpha = d\alpha \approx 0.00056(\text{rad})$.