第八节　函数的连续性

习题　1-8

1. 讨论下列函数的连续性. 并画出函数的图形:

(1) $f(x)=\begin{cases} x^3+1, & 0\le x<1, \\ 3-x, & 1\le x\le 2; \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ \sqrt{1-x^2}, & x\ge 0. \end{cases}$

解 (1) 易知 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 和 $(1,2]$ 上连续, 在 $x=1$ 点处,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3-x)=2=f(1)\,;\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^3+1)=2=f(1)\,,$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处也连续, 即函数在定义域 $[1,2]$ 上连续. 如图 1.5.

(2) 函数定义域为 $[-1,1]$，易知函数在 $[-1,0)$ 和 $(0,1]$ 上连续, 在 $x=0$ 点处,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1-x^2}=1=f(0)\,;\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1\ne f(0)\,,$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点. 如图 1.6.

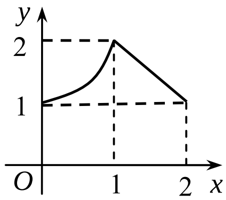

图 1.5

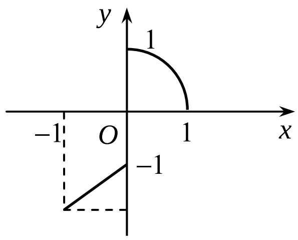

图 1.6

2. 指出下列函数的间断点及其类型, 如果是可去间断点, 则补充或改变函数的定义使之连续：

(1) $y=\sin\dfrac{1}{x}$;　　(2) $y=\dfrac{\arcsin x}{x}$;

(3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$;　　(4) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>0, \\ 2-x, & x\le 0. \end{cases}$

解 (1) 函数在 $x=0$ 处无定义, 且当 $x\to 0$ 时, 函数值在 -1 和 1 之间无限次的变动, 称 $x=0$ 是函数的振荡间断点;

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$，所以 $x=0$ 是可去间断点, 补充定义 $y(0)=1$，则函数连续;

(3) 函数在 $x=1$ 和 $x=2$ 处无定义.

因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$，所以 $x=1$ 是函数的可去间断点，补充定义 $y(1)=-2$，则函数连续；

因为 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$，所以 $x=2$ 是无穷间断点；

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+1)=1$； $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(2-x)=2$，所以 $x=0$ 是函数的跳跃间断点.

3. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，证明它的绝对值 $|f(x)|$ 亦在点 x_0 处连续.

证 由 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，故

$$\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\le|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 $|f(x)|$ 在 x_0 也连续.

4. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判断其类型.

解 易知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x & 当|x|>1,\\ 0 & 当|x|=1,\\ x & 当|x|<1,\end{cases}$

在 $x=-1$ 处，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=-1$，$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(-x)=1$，所以 $x=-1$ 为跳跃间断点；

在 $x=1$ 处，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-x)=-1$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$，所以 $x=1$ 为跳跃间断点.

5. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\sin(2x-1)$；

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln(\tan x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-x})$；

(4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin2x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to1}\sin(2x-1)=\sin1$；

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln(\tan x)=\ln(\tan\frac{\pi}{4})=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+x}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$

$=\frac{1}{2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2}\sin\frac{1}{x}=0$;

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$.

6. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{2x+1}{x^2}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}(1+2\tan^2x)^{\cot^2x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2+1})^{x^2}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(1+n)-\ln n]$;　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x})^{\cot\frac{1}{x}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}=2$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{2x+1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}}=e^0=1$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}(1+2\tan^2x)^{\cot^2x}=[\lim\limits_{x\to0}(1+2\tan^2x)^{\frac{1}{2\tan^2x}}]^2=e^2$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2+1})^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x^2+1})^{-\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{-2x^2}{x^2+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{x^2+1}}=e^{-2}$;

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(1+x)-\ln x]=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+\frac{1}{x})^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty} n[\ln(1+n)-\ln n]=1;$$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x})^{\cot\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{(-x)(-\frac{\cot\frac{1}{x}}{x})}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}(-\frac{\frac{1}{x}}{\tan\frac{1}{x}})}=\mathrm{e}^{-1}$.

7. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x>0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{\arcsin ax}{2x}, & x<0.\end{cases}$$

试求 a、b，使 $f(x)$ 处处连续.

解 $f(x)$ 处处连续，则必在 $x=0$ 处连续，故

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{x}=\dfrac{1}{2}=f(0)=b$，即 $b=\dfrac{1}{2}$；

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\arcsin ax}{2x}=\dfrac{a}{2}=f(0)=b$，故 $a=2b=1$.