第七节

斯托克斯(Stokes)公式 环量与旋度

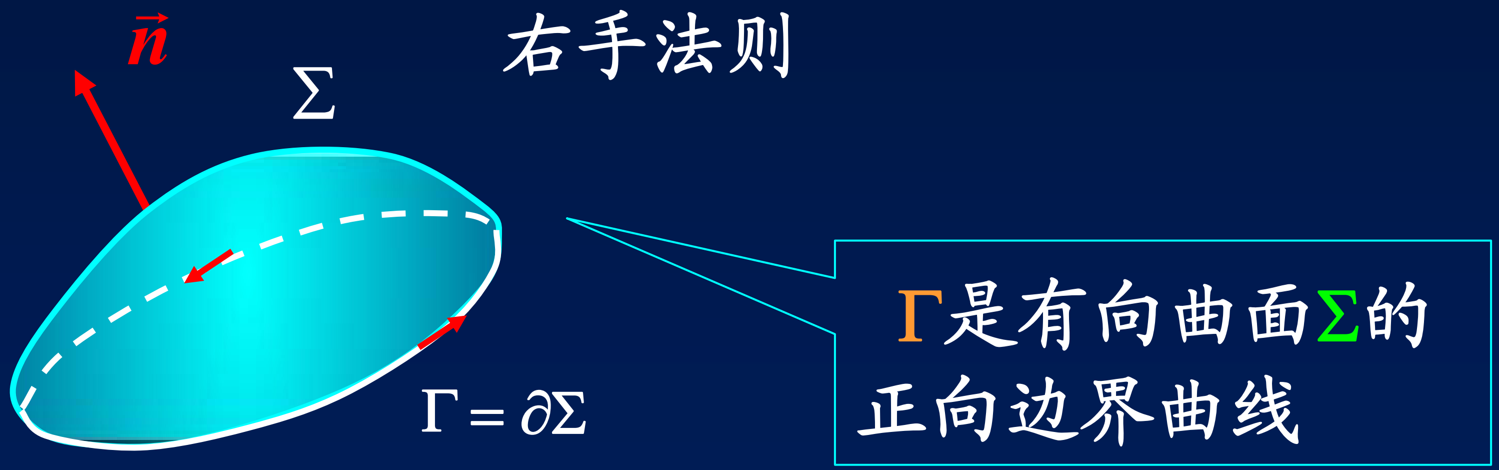
- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 斯托克斯公式

有向曲面Σ的正向边界曲线Γ:

Γ的正向与Σ的侧符合右手法则，如图.



定理10.8 设Σ是光滑或分片光滑的有向曲面, Σ的正向边界Γ为光滑的或分段光滑的闭曲线. 如果函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$在Σ及其边界Γ上具有一阶连续偏导数, 则

斯托克斯公式

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

或

$$= \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

将斯托克斯公式分为三式

$$(1)\ \iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma}P(x,y,z)\mathrm{d}x$$

$$(2)\ \iint_{\Sigma}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma}Q(x,y,z)\mathrm{d}y$$

$$(3)\ \iint_{\Sigma}\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\oint_{\Gamma}R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

证明思路: 第二类曲面积分 → 第一类曲面积分 →

第二类曲面积分 → 二重积分 → 第二类曲线积分

首先证明第一式.

注 1° 斯托克斯公式的实质:

表达了有向曲面上的曲面积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系.

2° 斯托克斯公式便于记忆的形式:

$$\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \overset{\text{或}}{=} \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

其中 $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$为$\Sigma$指定侧的单位法向量.

3° 斯托克斯公式是格林公式的推广

斯托克斯公式 $\xrightarrow{\text{特殊情形}}$ 格林公式

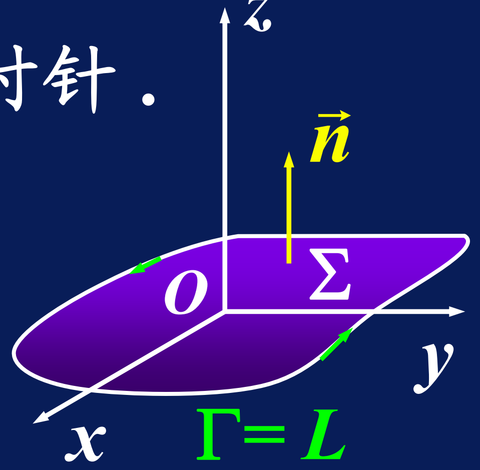
Σ是xOy面上的有向闭区域时

事实上，设 Σ：xOy面上的区域 D，上侧；

Γ：xOy面上的区域 D的边界L，逆时针．

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{L} P(x,y,0)\,\mathrm{d}\,x + Q(x,y,0)\,\mathrm{d}\,y$$

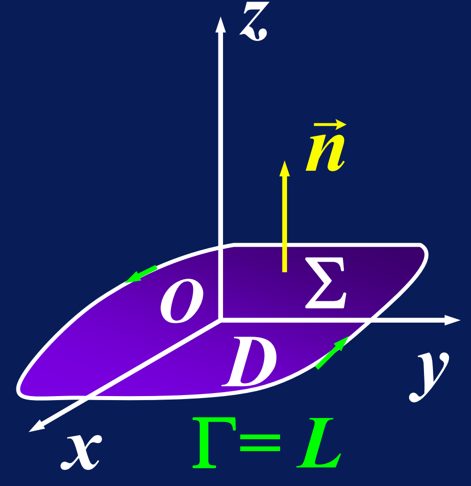


$\because\quad \Sigma$在yOz面, zOx面上的投影为零

$$\therefore\quad \iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0+0+\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=+\iint_{D}\left(\frac{\partial Q(x,y,0)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y,0)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$\therefore \oint_L P(x,y,0)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,0)\,\mathrm{d}y$$

这正是格林公式.

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y,0)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y,0)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

4° 何时采用斯托克斯公式?

当对坐标的曲线积分: $\oint_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$

的积分曲线Γ的参数方程不易写出，或用直接法计算较繁时，可考虑用斯托克斯公式.

5° 如何选取Σ？

在斯托克斯公式中，Σ是以Γ为边界的任意分片光滑曲面(只要P，Q，R在包含Σ的一个空间区域内具有一阶连续的偏导数即可).

通常，取Σ为平面或球面等法向量的方向余弦易求的曲面.

(二) 环量与旋度

1. 环量

定义 向量场

$$\vec{F} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$

沿有向闭曲线 Γ的第二类曲线积分

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

称为向量场$\vec{F}$沿曲线 Γ的环量.

注 改变Γ的环行方向时, 环量要变号.

2. 旋度

定义 当函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$具有一阶连续偏导数时，称向量

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

为 向量场$\vec{F}$的旋度，记为$\operatorname{rot}\vec{F}$，即

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\nabla\times\vec{F}$$

由哈密尔顿算符的定义

注 1° 向量场 $\vec{F}$ 总伴随着另一个向量场 $\operatorname{rot}\vec{F}$.

2° 若 $\operatorname{rot}\vec{F}\equiv 0$, 称向量场 $\vec{F}$ 为无旋场。

3° 利用旋度, 可将斯托克斯公式写为

$$\boxed{\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}=\boxed{\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

4° 斯托克斯公式的物理解释:

向量场 $\vec{F}$ 沿有向闭曲线 Γ 的环流量等于向量场 $\vec{F}$ 的旋度场通过 Γ 所张的曲面的通量.

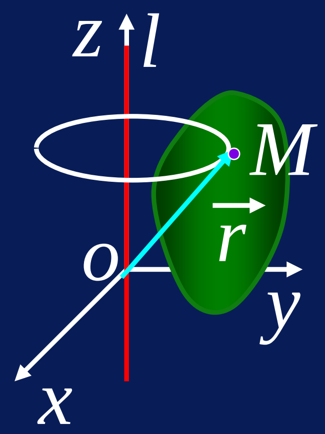
(Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手法则).

5° 旋度的力学意义

设某刚体绕定轴 l 转动，角速度为 $\vec{\omega}$，

M 为刚体上任一点，建立坐标系如图，则

$$\vec{\omega}=(0,0,\omega),\quad \vec{r}=(x,y,z)$$



点 M 的线速度为

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix}=(-\omega y,\omega x,0)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2\omega)$$

$$= 2\vec{\omega}$$

除去一个常数因子2外，恰好等于物体旋转的角速度.

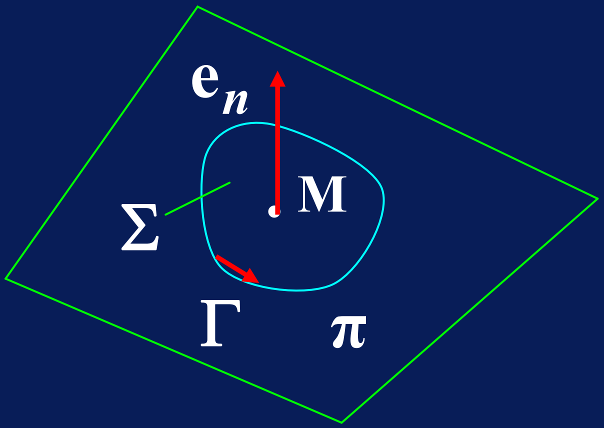
线速度场中任一点处的旋度等于刚体旋转角速度的2倍，这就是“旋度”一词的由来.

向量场$\vec{F}$定义在区域Ω内，M为Ω内一点，$\vec{e}_n$为Ω内单位向量. 过M以$\vec{e}_n$为法向量做平面 π,

在π上任取包围M的闭曲线 Γ,

Γ所围部分为 Σ，满足右手法则.

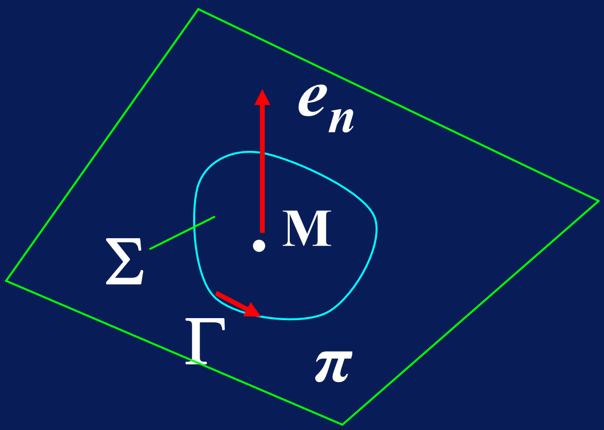
Σ面积为A.



根据斯托克斯公式和积分中值定理

$$\frac{1}{A}\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{A}\iint_{\Sigma}\mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\frac{1}{A}\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{A}\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$



$$= \frac{1}{A}\iint_{\Sigma}(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{e}}_n)\mathrm{d}S$$

$$= [\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{e}}_n]_{M^*},\quad M^*\in\Sigma.$$ 当Σ向点M收缩

$$\lim_{\Sigma\to M}\frac{1}{A}\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \lim_{\Sigma\to M}[\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{e}}_n]_{M^*} = [\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{e}}_n]_M$$

$$\lim_{\Sigma\to M}\frac{1}{A}\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=[\mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{e}_n]_M$$

称环量对面积的变化率为向量场$\vec{F}$在点M处沿方向$\vec{e}_n$的$\boxed{\text{方向旋量}}$（或环量面密度）。

方向旋量是一个与方向$\vec{e}_n$有关的量，当$\vec{e}_n$与该点的旋度$\mathrm{rot}\,\vec{F}(M)$方向相同时，方向旋量取最大值.

向量场的旋度是一个向量，此向量的方向是使方向旋量取最大值的方向，此方向的模是该点处最大方向旋量的值.

★ (三) 空间曲线积分与路径无关的条件

定理10.9 设空间闭区域G是一个一维单连通域，函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$G$内具有一阶连续偏导数

$$\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

则$\vec{F}(x,y,z)$沿G内有向曲线的积分与路 径无关的充要条件是 $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$

即 $$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

注 当 $\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 成立时

表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$在$G$内成为某一函数$u(x,y,z)$的全微分,这函数（不计一常数之差）可用下式求出:

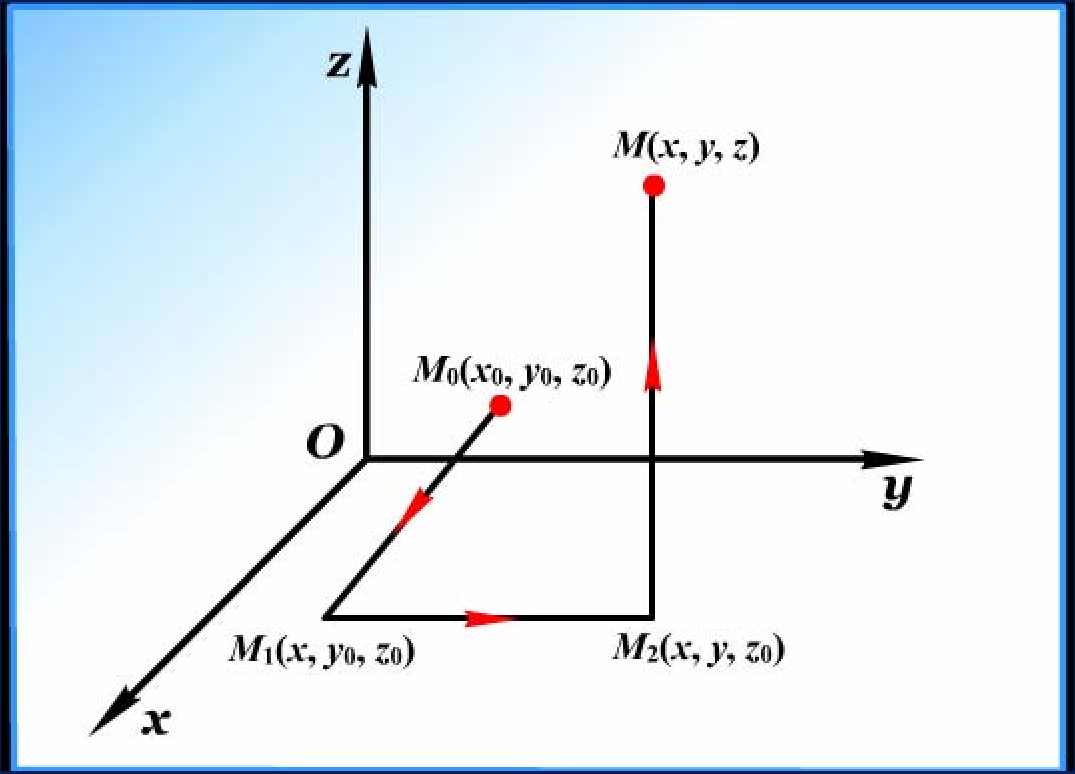
$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

或用定积分表示为

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)\mathrm{d}y$$

$$+\int_{z_0}^{z} R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

其中$M_0(x_0,y_0,z_0)$为G内某一定点，点$M(x,y,z)\in G$.



z
M(x, y, z)
M0(x0, y0, z0)
O
y
M1(x, y0, z0)
M2(x, y, z0)
x

保守场:

向量场$\vec{F}$在区域G内沿任意曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的积分$\int_{\overset{\frown}{AB}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$只与$A$、$B$两点的位置有关，而与从 A 到 B 的路径无关.

$\Rightarrow$ 若$\vec{F}$在G内是无旋场，即$\mathrm{rot}\,\vec{F}=\vec{0}$，

则$\vec{F}$在G内是保守场.

本章小结

1. 场论中的三个重要概念

设 $u = u(x, y, z)$, $\vec{A} = (P, Q, R)$, 则

梯度: $\mathrm{grad}\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \nabla u$

散度: $\mathrm{div}\, \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{A}$

旋度: $\mathrm{rot}\, \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{A}$

场论中的三个重要定理

（1）格林公式 $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = \oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

（2）斯托克斯公式 $$\iint_\Sigma rot\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial D^+} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

（3）高斯公式 $$\iiint_\Omega \mathrm{div}\,\vec{F}\mathrm{d}v = \oiint_{\partial\Omega^+} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

本章知识结构图

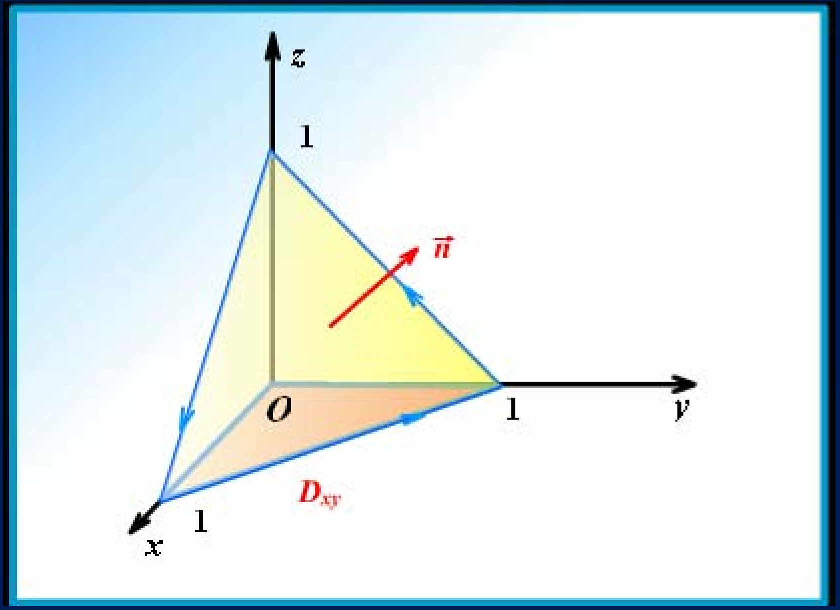
- 曲线积分
  - 第一类曲线积分
    - 定义
    - 性质（可积性、线性性 、可加性）
    - 计算方法（用参数方程化为定积分）
    - 物理应用（质量、重心、引力）
  - 第二类曲线积分
    - 定义
    - 性质（可积性、线性性、可加性、方向性）
    - 计算方法（化为定积分）
    - 格林公式（平面曲线积 分）
      - 积分与路径无关
      - 全微分求积
    - 斯托克斯公式（空间曲 线）
    - 物理应用
      - 力沿曲线运动做功
      - 场沿曲线的环流量

- 曲面积分
  - 第一类曲面积分
    - 定义
    - 性质（可积性、线性性 、可加性）
    - 计算方法（用投影法化 为二重积分）
    - 物理应用（质量、重心 、引力）
  - 第二类曲面积分
    - 定义
    - 性质（可积性、线性性 、可加性、方向性）
    - 计算方法（用投影法化 为二重积分）
    - 高斯公式
    - 物理应用（场穿过曲面 指定侧的通量）

二、典型例题

例1 利用斯托克斯公式计算 $\oint_{\Gamma} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$

其中Γ为平面 $x+y+z=1$ 被三坐标面所截三角形的整个边界,它的正方向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手规则.



解 记三角形域为Σ,

取上侧,

$$\oint_{\Gamma} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$$

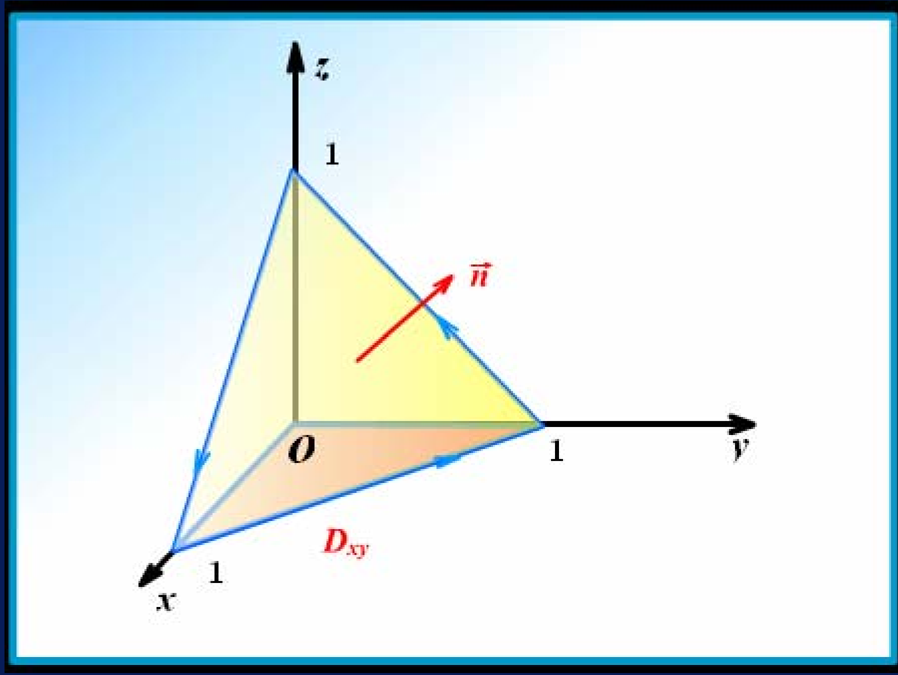
$$\oint_{\Gamma} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

利用轮换对称性

$$= 3\iint_{\Sigma} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 3\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}.$$



西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

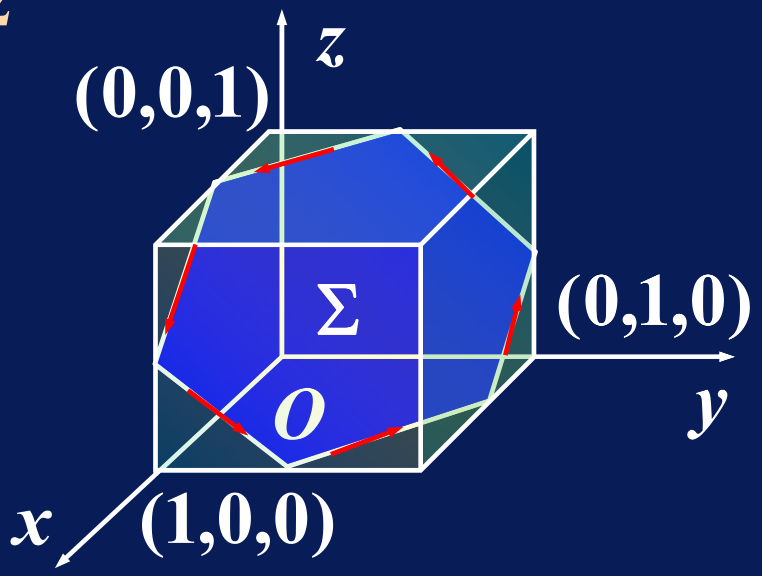
例2 利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$I=\oint_{\Gamma}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

其中Γ是用平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$截立方体：

$0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 1$

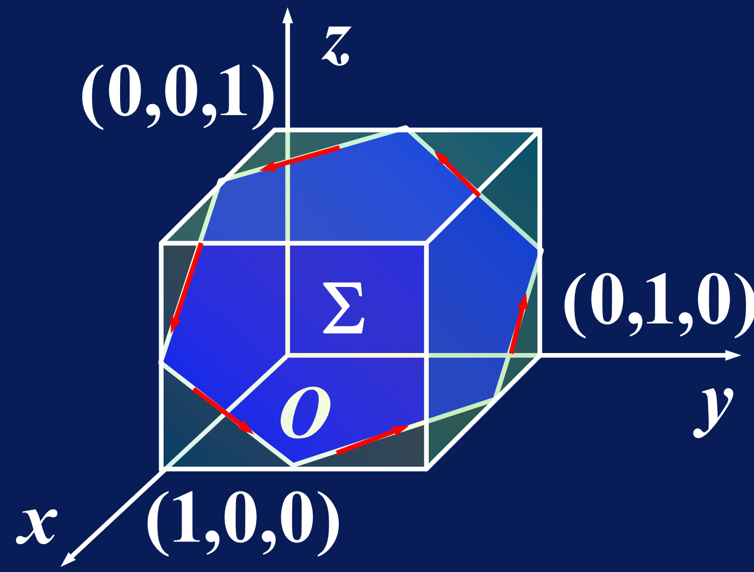
的表面所得的截痕,若从Ox轴的正向看去,取逆时针方向.



解 取Σ为平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$的上侧被Γ所围的部分,

Σ的单位法向量 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\}$,

即 $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$

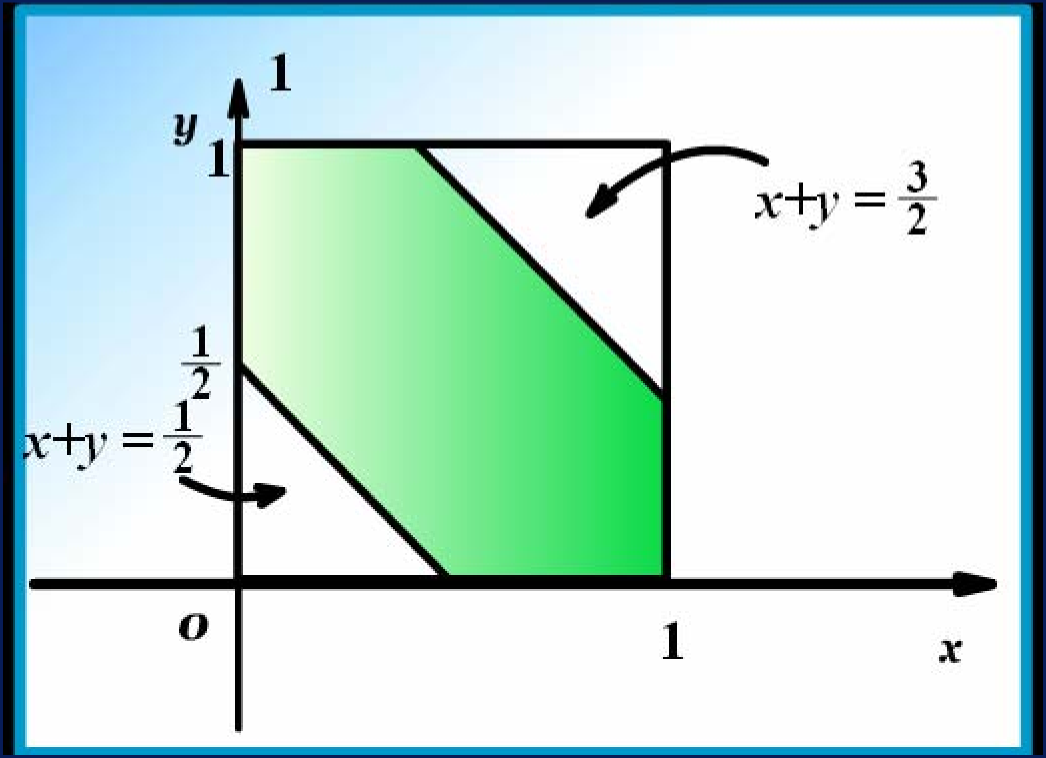


$$I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x+y+z)\mathrm{d}S$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S = -2\sqrt{3} \iint_{D_{xy}} \sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -6\sigma_{xy}$$

$$I = -6\sigma_{xy}$$

其中D_{xy}为Σ在xOy平面上的投影区域，σ_{xy}为D_{xy}的面积.

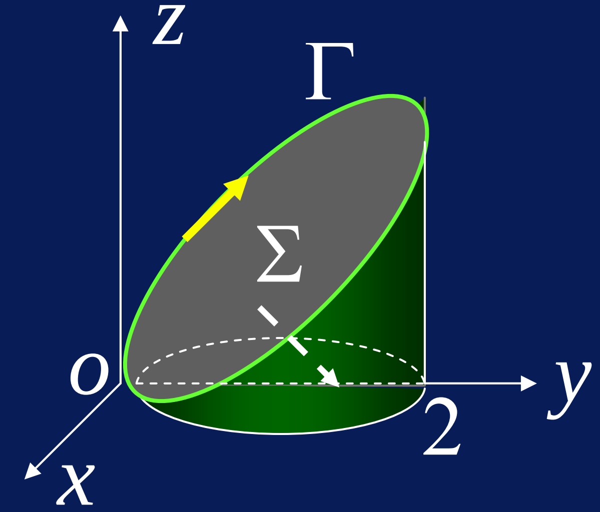


$$\because \sigma_{xy} = 1 - 2\times\frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad I = -\frac{9}{2}.$$

例3 Γ为柱面$x^2+y^2=2y$与平面$y=z$的交线从z轴正向看为顺时针, 计算 $I=\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y+xz\,\mathrm{d}z.$

解(方法1) 设Σ为平面$z=y$上被Γ所围椭圆域且取下侧，则其法线方向余弦

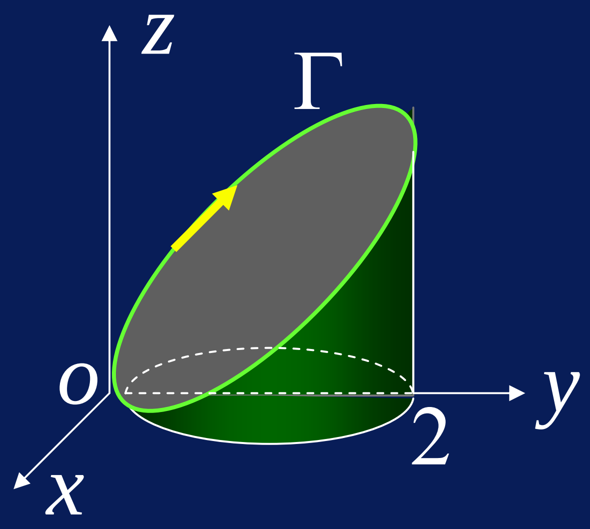


$$\cos\alpha=0\,,\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$I=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & xy & xz\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma(y-z)\,\mathrm{d}S=0.$$

(方法2) 将Γ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ y = z \end{cases}$$



参数化: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \\ z = 1 + \sin t \end{cases}$ $\quad t : 2\pi \mapsto 0$

$$I = \oint_\Gamma y^2 \mathrm{d}x + xy \mathrm{d}y + xz \mathrm{d}z$$

$$= \int_{2\pi}^{0} [(1+\sin t)^2 \cdot (-\sin t) + 2\cos t(1+\sin t) \cdot \cos t] \mathrm{d}t$$

$$=\int_{2\pi}^{0}[(1+\sin t)^2\cdot(-\sin t)+2\cos t(1+\sin t)\cdot\cos t]\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{2\pi}(3\sin^3 t+4\sin^2 t-\sin t-2)\,\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{令u=\pi-t}\int_{\pi}^{-\pi}[3\sin^3(\pi-u)+4\sin^2(\pi-u)-\sin(\pi-u)-2](-\mathrm{d}u)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(3\sin^3 u+4\sin^2 u-\sin u-2]\,\mathrm{d}u$$

$$=2\int_{0}^{\pi}(4\sin^2 u-2)\,\mathrm{d}u\ =8\cdot 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\,\mathrm{d}u-4\pi$$

$$=8\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-4\pi=0.$$

例4 验证曲线积分 $\int_{\Gamma}(y+z)\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$

与路径无关，并求函数

$$u(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$$

解 令 $P=y+z\,,\ Q=z+x\,,\ R=x+y$

$$\because\quad \frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=1=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial y}$$

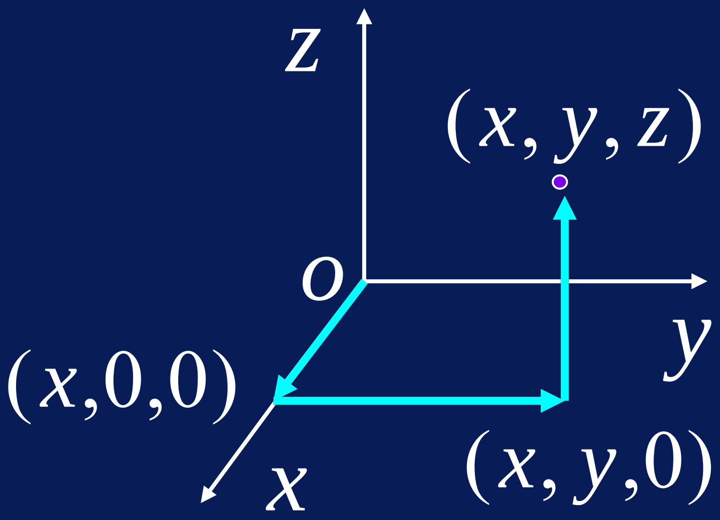
$\therefore$ 积分与路径无关，因此选择特殊路径

$$u(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(y+z)\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}y+(x+y)\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y x\,\mathrm{d}y+\int_0^z (x+y)\,\mathrm{d}z$$

$$=xy+(x+y)z$$

$$=xy+yz+zx$$



例5 求电场强度 $\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}$ 的旋度 .

解 $$\operatorname{rot}\vec{E}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{qx}{r^3} & \frac{qy}{r^3} & \frac{qz}{r^3} \end{vmatrix}=(0,0,0)\quad(\text{除原点外})$$

这说明，在除点电荷所在原点外，整个电场无旋.

三、同步练习

1. 计算 $\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$, 其中$\Gamma$是球面$\Sigma$ $x^2+y^2+z^2=a^2$在第一卦限与坐标平面相交的圆弧连接而成的闭曲线. 从x轴正向

2. 计算$I=\oint\limits_{L}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中$L$是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线，从$z$轴正方向看去，$L$为逆时针方向.

3. 判断 $ye^{xy}\mathrm{d}x+y\sin z\mathrm{d}z+(xe^{xy}-\cos z)\mathrm{d}y$ 是否是全微分，若是全微分，试求出其原函数 $u(x,y,z)$.

四、同步练习解答

1. 计算 $\oint_{\Gamma} \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中$\Gamma$是球面$\Sigma$ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$在第一卦限与坐标平面相交的圆弧连接而成的闭曲线. 从x轴正向看 Γ 为逆时针方向.

解 Γ 在球面上，所以

$$\oint_{\Gamma} \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{a^2} \oint_{\Gamma} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$$

$$\frac{1}{a^2}\oint_{\Gamma} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{a^2}\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Σ取上侧

$$= \frac{1}{a^2}\iint_{\Sigma} 0\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 0\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$$\therefore \oint_{\Gamma} \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

2. 计算$I=\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$,

其中L是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线，

从z轴正方向看去，L为逆时针方向.

解 Σ:平面$x+y+z=2$上L所围部分上侧,

法线方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}[(-2y-4z)+(-2z-6x)+(-2x-2y)]\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(4x+2y+3z)\,\mathrm{d}S$$

$$\boxed{\begin{aligned}&z=2-x-y,\\ &\mathrm{d}S=\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}[(4x+2y+3(2-x-y)]\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -2\iint\limits_{D_{xy}} (x - y + 6)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\boxed{D_{xy} : |x| + |y| \le 1}$$

$$= -2\Big(\cancel{\iint\limits_{D_{xy}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y} - \cancel{\iint\limits_{D_{xy}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y} + \iint\limits_{D_{xy}} 6\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)$$

$\downarrow$ 轮换由对称性

$$= -12\iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -24.$$

3. 判断 $ye^{xy}\mathrm{d}x + y\sin z\mathrm{d}z + (xe^{xy} - \cos z)\mathrm{d}y$ 是否是全微分，若是全微分，试求出其原函数 $u(x,y,z)$.

解 $P = ye^{xy}, Q = xe^{xy} - \cos z, R = y\sin z.$

$$P_y = Q_z = \sin z,\ \ P_z = R_x = 0,\ \ Q_x = P_y = e^{xy}(1 + xy).$$

原式为全微分，其原函数是$u(x,y,z)$

$$= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} ye^{xy}\mathrm{d}x + (xe^{xy} - \cos z)\mathrm{d}y + y\sin z\mathrm{d}z + C$$

$$= \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} + C$$

$$u(x,y,z)$$

$$= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} ye^{xy}\mathrm{d}x + (xe^{xy} - \cos z)\mathrm{d}y + y\sin z\mathrm{d}z + C$$

$$= \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} + C$$

$$= 0 + \int_0^y (e^{xy}x - 1)\mathrm{d}y + \int_0^z y\sin z\mathrm{d}z + C$$

$$= e^{xy} - y\cos z + C_1 \quad (\text{其中} C_1 = C - 1).$$