第四节

全微分方程

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 全微分方程及其求法

1. 类型5 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \quad (5.1)$

若$\exists\, u=u(x,y)$，使

$$\mathrm{d}u(x,y)\equiv P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y \quad (x,y)\in G$$

其中G为一单连通区域，则称(5.1)为全微分方程.

如：$x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=0$ 是全微分方程

$$\because u(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\ \therefore \mathrm{d}u(x,y)=x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y,$$

注　全微分方程(5.1)的通解为：　$u(x,y)=C$

(C为任意常数).

2. 判别法

(5.1)是全微分方程 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\quad (x,y)\in G$

其中 P，Q在单连通域G内有一阶连续偏导数 .

3. 求解法

关键：求 $u(x,y)$.

常用的方法有三种:

1° 特殊路径法：

$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ 全微分方程

由曲线积分与路径无关的四个等价命题，知

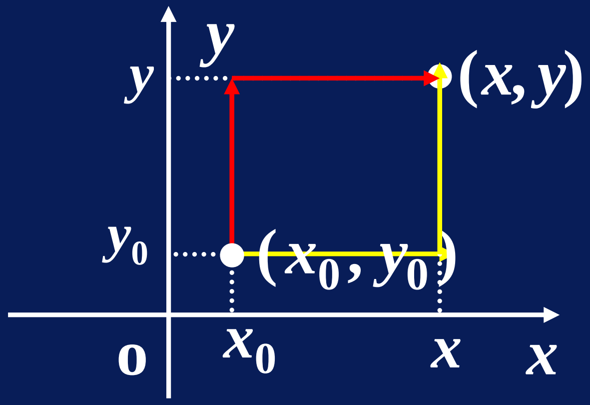
$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,\mathrm{d}x$$

(5.1)的通解为:

$$u(x,y)=C\,.$$



2° 分项组合法(凑微分法)：

思路：将 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 重新进行适当的组合，使得每一组合式的原函数易求．

3° 偏积分法：

$$\mathrm{d}u(x,y)=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q$$

$$u(x,y)=\int P\,\mathrm{d}x+C(y)$$

$$u(x,y)=\int P\,\mathrm{d}x+C(y) \quad (5.2)$$

$$Q=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P\,\mathrm{d}x\right)+C'(y)$$

$$C'(y)=Q-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P\,\mathrm{d}x\right)=\varphi(y)$$

$$C(y)=\int \varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

代入(5.2),即可求得 $u(x,y)$.

★ (二) 积分因子法

引例：求 $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

可变量分离方程

解 $\because \quad P = y, \quad Q = -x$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial y} = -1$$

$\therefore$ 此方程不是全微分方程 . 如何求解?

$\frac{1}{y^2} \times$原方程，得 $\frac{1}{y}\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}(\frac{1}{y}) = 0$

全微分方程

原方程的通解为 $\frac{x}{y} = C.$

1.定义 若 $\mu(x,y)\neq 0$是连续可微函数，使方程

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

成为全微分方程.则称$\mu(x,y)$为方程

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \quad (5.1)$$

的**积分因子**.

注 (5.1)的积分因子不惟一 .

如：对于引例，$\dfrac{1}{x^2},\dfrac{1}{y^2},\dfrac{1}{xy},\dfrac{1}{x^2\pm y^2}$均是该方程的积分因子.

2. 求积分因子 $\mu(x, y)$ 的方法

1° 分项组合法(观察法):

利用微分四则运算法则，一阶全微分形式不变性，凭观察凑微分得到 $\mu(x, y)$.

如：$y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(xy)$

$$\boxed{u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}(uv)}$$

$$\frac{x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x}{xy} = \frac{\mathrm{d}(xy)}{xy}$$

$$\boxed{f'(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}[f(u)]}$$

$$= \mathrm{d}(\ln xy)$$

$$\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \mathrm{d}[\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)]$$

2° 公式法

$\mu=\mu(x,y)$是(5.1)的积分因子

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x},$$

即 $$\mu\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

求解不容易

$$\frac{1}{\mu}\left(Q\frac{\partial \mu}{\partial x}-P\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (5.2)$$

特别地,

情形1 方程(5.1)有只与x有关的积分因子：

$$\mu=\mu(x)\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\varphi(x),\text{ 且}$$

$$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}.$$

情形2 方程(5.1)有只与y有关的积分因子：

$$\mu=\mu(y)\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{-P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\psi(y),\text{ 且}$$

$$\mu(y)=\mathrm{e}^{\int\psi(y)\mathrm{d}y}$$

(三) 一阶微分方程小结

用初等积分法求解一阶微分方程的思路有两条:

$$\text{变量分离方程} \xleftarrow{\text{变量变换法}} \text{一阶微分方程} \xrightarrow{\text{积分因子法}} \text{全微分方程}$$

二、典型例题

例1 求方程 $(\underbrace{x^3-3xy^2}_{P})\mathrm{d}x+(\underbrace{y^3-3x^2y}_{Q})\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-6xy=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

原方程是全微分方程

$$u(x,y)=\int_0^x (x^3-3xy^2)\mathrm{d}x+\int_0^y y^3\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4},$$

原方程的通解为 $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3}{2}x^2y^2+\dfrac{y^4}{4}=C.$

例2 求微分方程：

$$\underbrace{(3xy+y^2)}_{P}\,\mathrm{d}x+\underbrace{(x^2+xy)}_{Q}\,\mathrm{d}y=0\text{的通解.}$$

的通解.

解 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=3x+2y\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x+y$ 此方程不是全微分方程

(方法1) 分项组合法

想：$u\,\mathrm{d}v+v\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}(uv)$

$$(3xy+y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+xy)\,\mathrm{d}y$$

$$=(3xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y)+\ y\,\mathrm{d}(xy)$$

$$=\frac{1}{x}[(y\cdot 3x^2\,\mathrm{d}x+x^3\,\mathrm{d}y)+(xy)\,\mathrm{d}(xy)]$$

$$=\frac{1}{x}[(y\cdot 3x^2\,\mathrm{d}\,x+x^3\,\mathrm{d}\,y)+\frac{1}{2}\mathrm{d}(xy)^2]$$

$$=\frac{1}{x}[(y\,\mathrm{d}\,x^3+x^3\,\mathrm{d}\,y)+\frac{1}{2}\mathrm{d}(xy)^2]$$

$$=\frac{1}{x}[\mathrm{d}(x^3y)+\frac{1}{2}\mathrm{d}(xy)^2]$$

$$=\frac{1}{x}\mathrm{d}[x^3y+\frac{1}{2}(xy)^2]$$

$\therefore$ 积分因子为 $\mu(x)=x.$

全微分方程

$$x\cdot[(3xy+y^2)\mathrm{d}\,x+(x^2+xy)\mathrm{d}\,y\,]=0$$

原方程的通解为: $x^3y+\frac{1}{2}(xy)^2=C.$

(方法2) 公式法

$$(\underbrace{3xy+y^2}_{P})\,\mathrm{d}x+(\underbrace{x^2+xy}_{Q})\,\mathrm{d}y=0$$

$$\because\ \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{x^2+xy}[(3x+2y)-(2x+y)]=\frac{1}{x},$$

$$\therefore\quad \mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}=x.$$

全微分方程

$$x\cdot[(3xy+y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+xy)\,\mathrm{d}y]=0$$

即 $\mathrm{d}[x^3y+\frac{1}{2}(xy)^2]=0$

原方程的通解为: $x^3y+\frac{1}{2}(xy)^2=C.$

例3 求 $\underbrace{[x+(x^2+y^2)x^2]}_{P}\mathrm{d}x+\underbrace{y}_{Q}\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解 $\because\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=2x^2y\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$

$\therefore$ 此方程不是全微分方程

(方法1) 分项组合法

将原方程左端重新组合：

$$(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)+(x^2+y^2)x^2\,\mathrm{d}x=0$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)+(x^2+y^2)x^2\,\mathrm{d}x=0 \qquad (1)$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)+(x^2+y^2)x^2\,\mathrm{d}x=0 \qquad (1)$$

$(1)\times\dfrac{1}{x^2+y^2}$， 得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+x^2\,\mathrm{d}x=0$$

$\therefore$ 所求方程的通解为:

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\frac{1}{3}x^3=C.$$

$$[x+(x^2+y^2)x^2]\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=0$$

P Q

(方法2) 公式法

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x^2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

$$\because \quad \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=2x^2$$

$\therefore$ 该方程有积分因子：$\mu(x)=e^{\int 2x^2\,\mathrm{d}x}=e^{\frac{2}{3}x^3}$

$e^{\frac{2}{3}x^3}\{[x+(x^2+y^2)x^2]\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y\}=0$ 全微分方程

$$(xe^{\frac{2}{3}x^3}+x^4e^{\frac{2}{3}x^3})\mathrm{d}x+(y^2\cdot x^2e^{\frac{2}{3}x^3}\,\mathrm{d}x+e^{\frac{2}{3}x^3}\,y\,\mathrm{d}y)=0$$

$$(xe^{\frac{2}{3}x^3}+x^4e^{\frac{2}{3}x^3})\mathrm{d}x+(y^2\cdot x^2e^{\frac{2}{3}x^3}\mathrm{d}x+e^{\frac{2}{3}x^3}y\mathrm{d}y)=0$$

$$[e^{\frac{2}{3}x^3}\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})+\frac{x^2}{2}\mathrm{d}(e^{\frac{2}{3}x^3})]+[\frac{y^2}{2}\mathrm{d}(e^{\frac{2}{3}x^3})+e^{\frac{2}{3}x^3}\mathrm{d}(\frac{y^2}{2})]=0$$

$$\mathrm{d}(\frac{x^2}{2}e^{\frac{2}{3}x^3}+\frac{y^2}{2}e^{\frac{2}{3}x^3})=0$$

太繁!

$\therefore$ 所求方程的通解为:

$$(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})e^{\frac{2}{3}x^3}=C.$$

(方法3)

原方程变形为:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x+(x^2+y^2)x^2}{y}=-(x+x^4)y^{-1}-x^2y$$

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^2y=-(x+x^4)y^{-1}$$ —— 这是α = -1时的伯努利方程

令 $z=y^2$,

则可将此方程化为关于z的线性方程. ⋯ ⋯

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例4 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x^2+x^3+y}{1+x}$ 的通解.

解法1 整理得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{1+x}y=-x^2$,

(方法1)常数变易法: 对应齐次线性方通解 $y=\frac{C}{1+x}$.

$$C(x)=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+C.$$

原方程的通解为: $y=\frac{1}{(1+x)}\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+C\right)$.

(C为任意常数)

(方法2)常数变易公式法:

原方程的通解为

$$y = e^{-\int \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x} [\int - x^2 e^{\int \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C],$$

$$= \frac{1}{1+x} [\int - x^2 (1+x) \mathrm{d}x + C]$$

$$= \frac{1}{(1+x)} (-\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + C).$$

解法2 将 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2+x^3+y}{1+x}$ 恒等变形为

$$(x^2+x^3+y)\,dx+(1+x)\,dy=0,$$

$\because \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=1=\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \therefore$ 此方程是全微分方程.

(方法1) 特殊路径法:

$$u(x,y)=\int_0^x (x^2+x^3)\,dx+\int_0^y (1+x)\,dy,$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+(1+x)y,$$

$\therefore$ 原方程的通解为: $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+(1+x)y=C.$

(方法2) 凑微分法:

$$\mathrm{d}y+(x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x)+x^2\,\mathrm{d}x+x^3\,\mathrm{d}x=0,$$

$$\mathrm{d}y+\mathrm{d}(xy)+\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right)+\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right)=0,$$

$$\mathrm{d}\left(y+xy+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)=0.$$

$\therefore$ 原方程的通解为: $y+xy+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}=C.$

(方法3) 偏积分法: $\because \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = x^2 + x^3 + y,$

$$\therefore \quad u(x, y) = \int (x^2 + x^3 + y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + xy + C(y),$$

$\therefore \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + C'(y),$ 又 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 + x,$

$\therefore \quad x + C'(y) = 1 + x, \quad C'(y) = 1, \quad C(y) = y,$

原方程的通解为 $y + xy + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} = C.$

三、同步练习

求下列微分方程的通解:

1. $(\cos x - y)\,\mathrm{d}x - (x - 4y^3)\,\mathrm{d}y = 0.$

2. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x - y + 1}{x + y^2 + 3}.$

3. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})\,\mathrm{d}x - \sqrt{x^2 - y}\,\mathrm{d}y = 0.$

4. $2xy\ln y\,\mathrm{d}x + (x^2 + y^2\sqrt{1 + y^2})\,\mathrm{d}y = 0.$

5. $\dfrac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}x + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,\mathrm{d}y = 0.$

6. $x\,\mathrm{d}y = y(xy - 1)\,\mathrm{d}x.$

7. $(2y - 3xy^2)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0.$

四、同步练习解答

求下列微分方程的通解:

1. $(\cos x - y)\mathrm{d}x - (x - 4y^3)\mathrm{d}y = 0.$

解 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1 = \dfrac{\partial Q}{\partial x},$ 此方程是全微分方程

将方程左端重新分项组合,

$$\cos x\,\mathrm{d}x + 4y^3\,\mathrm{d}y - (x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x) = 0$$

即 $$\mathrm{d}(\sin x) + \mathrm{d}(y^4) - \mathrm{d}(xy) = 0,$$

$$\mathrm{d}(\sin x + y^4 - xy) = 0,$$

故方程的通解为 $\sin x + y^4 - xy = C.$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y+1}{x+y^2+3}$.

解 原方程恒等变形为

$$\underbrace{(x-y+1)}_{P}\mathrm{d}x-\underbrace{(x+y^2+3)}_{Q}\mathrm{d}y=0$$

$\because \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=-1=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$\therefore$ 这是一个全微分方程

$\because \quad (x-y+1)\,\mathrm{d}x-(x+y^2+3)\,\mathrm{d}y$

$=(x+1)\,\mathrm{d}x-(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)-(y^2+3)\,\mathrm{d}y$

$=\mathrm{d}[\dfrac{(x+1)^2}{2}-xy-(\dfrac{y^3}{3}+3y)]$

$\therefore$ 所求通解为

$$\frac{(x+1)^2}{2}-xy-(\frac{y^3}{3}+3y)=c.$$

3. $2x(1+\sqrt{x^2-y})\,\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y=0.$

解 $2x\,\mathrm{d}x+2x\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y$

$=\mathrm{d}(x^2)+\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}(x^2)-\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y$

$=\mathrm{d}(x^2)+\sqrt{x^2-y}[\mathrm{d}(x^2)-\mathrm{d}y]$

$=\mathrm{d}(x^2)+\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}(x^2-y)=\mathrm{d}[x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}]$

原方程的通解为 $x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}=C.$

4. $2xy\ln y\,\mathrm{d}x+(x^2+y^2\sqrt{1+y^2})\,\mathrm{d}y=0.$

解 将方程左端重新组合,有

$$(2xy\ln y\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y)+y^2\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y=0,$$

$$(y\cdot\ln y\,\mathrm{d}x^2+x^2\,\mathrm{d}y)+y^2\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y=0 \quad ①$$

易知 $\mu(x,y)=\dfrac{1}{y}$, ① $\times\ \dfrac{1}{y}$, 得

全微分方程

$$(\ln y\,\mathrm{d}x^2+x^2\cdot\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y)+y\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y=0,$$

$$(\ln y \, \mathrm{d} x^2 + x^2 \cdot \frac{1}{y} \mathrm{d} y) + y\sqrt{1+y^2} \, \mathrm{d} y = 0,$$

全微分方程

$$(\ln y \, \mathrm{d} x^2 + x^2 \, \mathrm{d} \ln y) + y\sqrt{1+y^2} \, \mathrm{d} y = 0,$$

即 $$\mathrm{d}(x^2 \ln y) + \frac{1}{3} \mathrm{d}(1+y^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

原方程的通解为

$$x^2 \ln y + \frac{1}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}} = C.$$

5. $\dfrac{2x}{y^3}\mathrm{d}x+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}\mathrm{d}y=0.$

解法1 $\because \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2x}{y^3}\right)=-\dfrac{6x}{y^4},$

$$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}\right)=-\dfrac{6x}{y^4},$$

$$\therefore \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x} \quad (y>0\text{或}y<0)$$

原方程是全微分方程.

(方法1) 分项组合法

$$\frac{2x}{y^3}\mathrm{d}x+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\mathrm{d}y=0$$

将左端重新组合:

$$\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y+\left(\frac{2x}{y^3}\mathrm{d}x-\frac{3x^2}{y^4}\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y+\left[\frac{1}{y^3}\mathrm{d}x^2+x^2\mathrm{d}\left(\frac{1}{y^3}\right)\right]$$

$$=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{y}\right)+\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{y^3}\right)=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}\right),$$

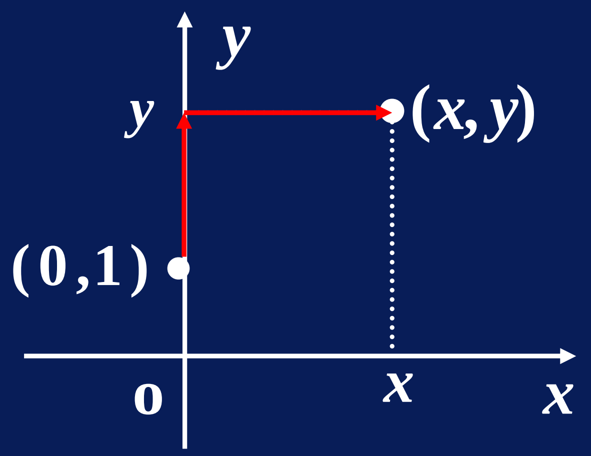
原方程的通解为: $-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}=C.$

(方法2) 特殊路径法

$$u(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,y)}\frac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}x+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^y\frac{y^2-0}{y^4}\,\mathrm{d}y+\int_0^x\frac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{y}\Big|_1^y+\frac{1}{y^3}\cdot x^2\Big|_0^x$$

$$=1-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}$$



通解: $1-\dfrac{1}{y}+\dfrac{x^2}{y^3}=C_1$

即 $-\dfrac{1}{y}+\dfrac{x^2}{y^3}=C.$

解法2

(方法1) $$\frac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}x+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\,\mathrm{d}y=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2xy}{3x^2-y^2}$$ 齐次方程　令 $u=\frac{y}{x}$.

(方法2) 原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{3}{2y}x-\frac{y}{2}x^{-1}$$ 关于x的$\alpha=-1$的伯努利方程

令 $z=x^2$.

6. $x\,\mathrm{d}\,y = y(xy-1)\,\mathrm{d}\,x.$ (1)

分析 (1) $\Leftrightarrow \underbrace{y(xy-1)}_{P}\,\mathrm{d}\,x - \underbrace{x}_{Q}\,\mathrm{d}\,y = 0$ (2)

$$P_y = 2xy - 1, \quad Q_x = -1$$

$\because \quad \dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{2xy}{-x} = -2y$ 不是只与 x 有关

$\therefore$ (2)无只与x有关的积分因子

$$\because \quad \frac{P_y - Q_x}{-P} = \frac{2x}{xy-1} \neq \psi(y)$$

$\therefore$ (2)也无只与y有关的积分因子

解 (方法1) 积分因子法

$$x\,\mathrm{d}\,y = y(xy-1)\mathrm{d}\,x \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow y(xy-1)\mathrm{d}\,x - x\,\mathrm{d}\,y = 0$$

$$\Leftrightarrow xy^2\,\mathrm{d}\,x - (y\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,y) = 0$$ (分项组合)

$$\Leftrightarrow xy^2\,\mathrm{d}\,x - \mathrm{d}(xy) = 0 \qquad (2)$$

积分因子: $\mu = \dfrac{1}{(xy)^2}$

$$xy^2\,\mathrm{d}x-\mathrm{d}(xy)=0 \quad (2)$$

$(2)\times\dfrac{1}{(xy)^2}$， 得 $\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x-\dfrac{\mathrm{d}(xy)}{(xy)^2}=0$

即 $\mathrm{d}(\ln|x|+\dfrac{1}{xy})=0$

$\therefore$ 所求方程的通解为： $\ln|x|+\dfrac{1}{xy}=C$

另解： $y=0.$

(方法2) $x\,\mathrm{d}y = y(xy-1)\,\mathrm{d}x$ (1)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x} + y^2$$ ($\alpha = 2$ 伯努利方程)

$$y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x}y^{-1} + 1$$

令 $z = y^{-1}$，得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{x}z = -1$

原方程的通解:

$$y^{-1} = z = e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int (-1)e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right] = x(-\ln|x| + C)$$

7. $(2y-3xy^2)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$.

解(方法1) $\because \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2y-3xy^2\right) = 2-6xy$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-x) = -1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\therefore$ 原方程不是全微分方程.

$$(2y-3xy^2)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=3-6xy$$

经判断：原方程无只与 x(或 y)有关的积分因子．

(1)$\times x$, 得

$$y\cdot 2x\,\mathrm{d}x - y^2\cdot 3x^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

$$y\,\mathrm{d}x^2 - y^2\,\mathrm{d}x^3 - x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

$$y\,\mathrm{d}x^2 - x^2\,\mathrm{d}y = y^2\,\mathrm{d}x^3 \qquad (2)$$

(2)$\times \dfrac{1}{y^2}$, 得 $\dfrac{y\,\mathrm{d}x^2 - x^2\,\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}x^3, \mathrm{d}\left(\dfrac{x^2}{y}\right) = \mathrm{d}x^3$

原方程的通解: $\dfrac{x^2}{y} - x^3 = C.$

(方法2) $(2y-3xy^2)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x}y - 3y^2$$

关于y的$\alpha = 2$的伯努利方程

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x}y = -3y^2$$

令 $z = y^{-1}$,得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x}z = 3$ 关于z的线性方程

通解: $y^{-1} = z = e^{-\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[\int 3e^{\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$

$$= \frac{1}{x^2}(x^3 + C)$$