第六章　定积分的应用

本章基本要求

1. 会运用定积分的元素法解决一些简单的几何应用题，包括掌握平面图形的面积、旋转体与已知截面面积的立体的体积，以及平面曲线弧长的求法.

2. 了解定积分在物理学中的应用，并会用元素法解决功、液体压力及引力等物理问题.

第一节

定积分的元素法

- 一、主要内容
- 二、典型例题

一、主要内容

(一) 问题的提出

1. 回顾　利用定积分可以求:

(1) 曲边梯形的面积

曲边梯形由连续曲线 $y=f(x)$ ($f(x) \ge 0$)，x轴与两条直线 $x=a$, $x=b$所围成.

$$A=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) 作变速直线运动的质点　从 $t=a$时刻到 $t=b$ 时刻移动的路程:

$$s = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}\,t$$

问题　一个量U具有什么特征时，才能考虑用定积分来计算?

回顾　面积 A 表示为定积分的步骤如下:

1° 分割 $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

2° 计算 ΔA_i 的近似值

$$\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

3° 求和，得A的近似值 $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

4° 求极限，得A的精确值

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

由此可以看出：A有下列三个特征:

(1) A与$[a,b]$有关;

(2) A关于$[a,b]$有可加性：$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$

(3) 能求出A的部分量ΔA_i的近似值：$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$

2. 用定积分表达的量U应具备的特征：

(1) U是与一个变量x的变化区间$[a, b]$有关的量;

(2) U对于区间$[a, b]$具有可加性，即如果把区间$[a, b]$分成许多部分区间，则U相应地分成许多部分量：ΔU_i，

$$U = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i$$

可考虑用定积分表达U

(3) 部分量ΔU_i的近似值可表示为

$$\Delta U_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

(二) 元素法

元素法的一般步骤:

1° 根据问题的具体情况，选取一个积分变量.

例如，取 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a, b]$;

2° 将 $[a, b]$ 分割为若干个子区间

$$\forall [x, x + \mathrm{d}x] \subset [a, b]$$

$$\Delta U \approx f(x)\mathrm{d}x$$

若 $\Delta U = f(x)\mathrm{d}x + o(\mathrm{d}x)$, 则

$$\mathrm{d}U = f(x)\mathrm{d}x$$ ——— U 的元素

3° 作定积分：$U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

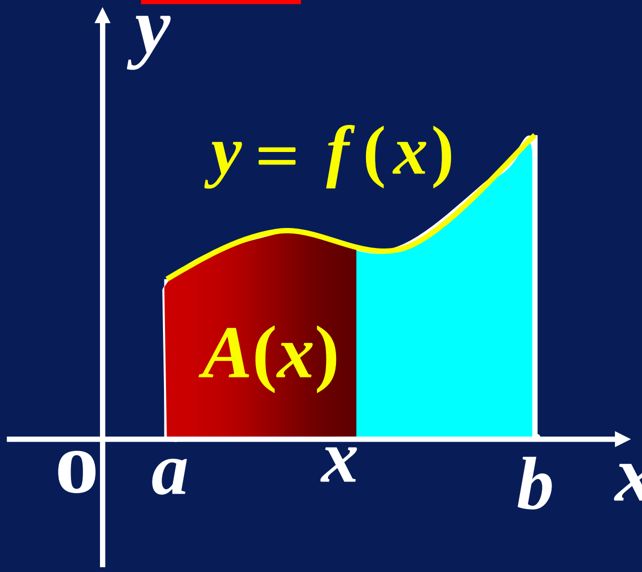
这个方法通常叫做**元素法**.

主要应用：平面图形的面积、体积、平面曲线的弧长、功、水压力、引力和平均值等等.

如：若$f(x) \geq 0$, $f(x)$在$[a,b]$上连续，

则以$[a,x]$为底边的曲边梯形的面积：

$$A(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$



$\mathrm{d}A = f(x)\mathrm{d}x$ —— 面积的元素

恰好是面积 $A(x)$ 的微分 $\mathrm{d}A$

$\Delta A = \mathrm{d}A + o(\mathrm{d}x)$ $\quad \Delta A \approx \mathrm{d}A = f(x)\mathrm{d}x$

利用元素法可将求面积 A

的四个步骤简化为两步:

1° $\forall [x, x+\mathrm{d}x] \subset [a,b]$

$$\mathrm{d}A = f(x)\mathrm{d}x$$

2° $A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

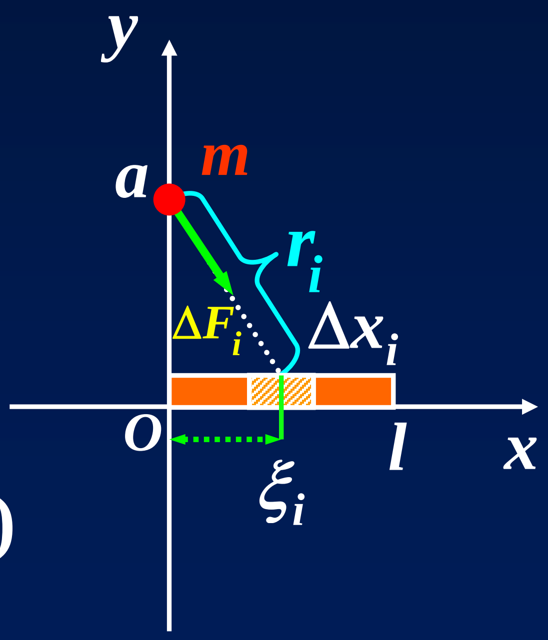
二、典型例题

例1 图示中的质量为M长度为l的细杆对于质点m的引力F是否符合U的特征?

解 第i小段细杆对质点m的引力大小:

$$\Delta F_i \approx k\frac{m\cdot(\frac{M}{l}\Delta x_i)}{r_i^2}$$

$$= k\frac{m\cdot(\frac{M}{l}\Delta x_i)}{a^2+\xi_i^2} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

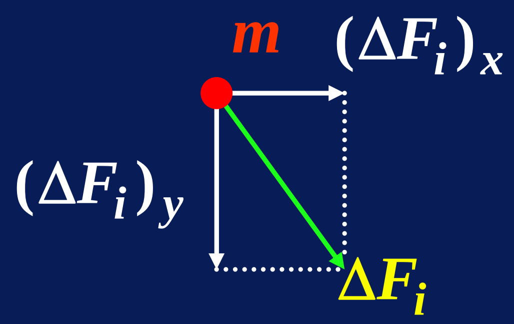


但ΔF_i的方向各不相同，所以 合力 $F \neq \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i$

即 F 在$[\,0, l\,]$上不具有可加性.

因此，不能直接用定积分来表达 F.

设合力F 沿水平方向和垂直方向的两个分力分别为F_x, F_y,则



$$F_x = \sum_{i=1}^{n} (\Delta F_i)_x, \quad F_y = \sum_{i=1}^{n} (\Delta F_i)_y$$

因此F_x，F_y具有U的特征.