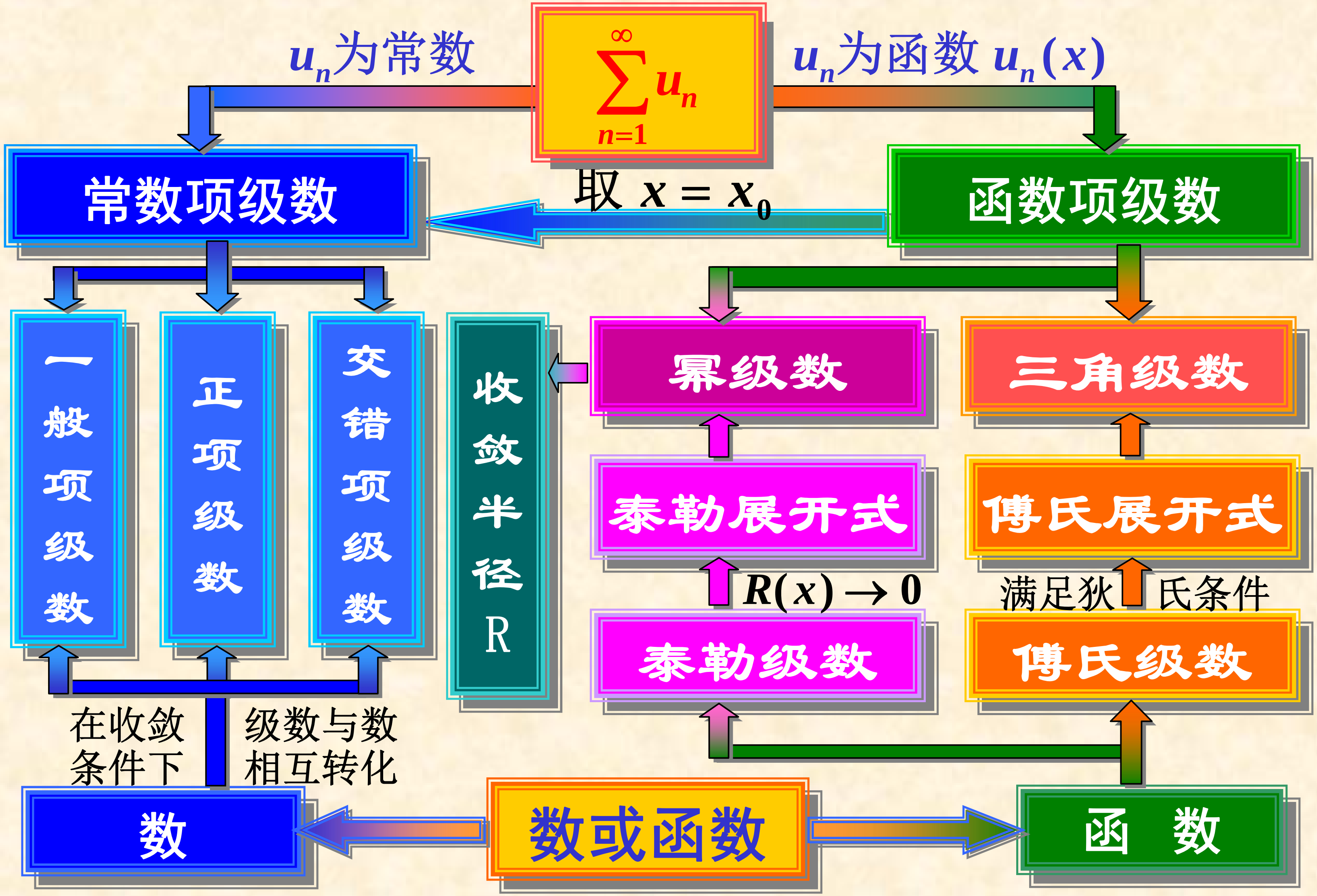
# 第十一节　无穷级数

## 习题课

- 一、主要内容
- 二、典型例题

# 一、主要内容



$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$
$u_n$为常数
$u_n$为函数 $u_n(x)$
常数项级数
函数项级数
取 $x = x_0$
一般项级数
正项级数
交错项级数
收敛半径R
幂级数
三角级数
泰勒展开式
傅氏展开式
$R(x) \to 0$
满足狄氏条件
泰勒级数
傅氏级数
在收敛条件下
级数与数相互转化
数
数或函数
函 数

## 1、常数项级数

定义 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$

级数的部分和 $\displaystyle s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$

级数的收敛与发散

常数项级数收敛(发散)$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n$存在(不存在).

## 收敛级数的基本性质

**性质1**：级数的每一项同乘一个不为零的常数，敛散性不变.

**性质2**:收敛级数可以逐项相加与逐项相减.

**性质3**:在级数前面加上有限项不影响级数的敛散性.

**性质4**:收敛级数加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和.

级数收敛的必要条件：$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

# 常数项级数审敛法

<table>
<tr><th>一般项级数</th><th>正 项 级 数</th><th>任意项级数</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. 若 $S_n \to S$ ,则级数收敛;<br>2. 当 $n \to \infty$ , $u_n \to 0$, 则级数发散;<br>3.按基本性质;</td></tr>
<tr><td>4.绝对收敛</td><td>4.充要条件<br>5.比较法<br>6.比值法<br>7.根值法</td><td>4.绝对收敛<br>5.交错级数<br>(莱布尼茨定理)</td></tr>
</table>

## 2、正项级数及其审敛法

**定义** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\quad u_n \geq 0$

**审敛法** 正项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和所成的数列 $s_n$有界.

### (1) 比较审敛法

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛(发散)且$v_n \leq u_n (u_n \leq v_n)$,

则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛(发散).

## (2) 比较审敛法的极限形式

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数,如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$,

则(1) 当$0<l<+\infty$时,二级数有相同的敛散性;

(2) 当$l=0$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

(3) 当$l=+\infty$时, 若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散;

## (3)　极限审敛法

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数,

如果$\lim_{n\to\infty} nu_n = l > 0$ (或$\lim_{n\to\infty} nu_n = \infty$),

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散;

如果有$p > 1$, 使得$\lim_{n\to\infty} n^p u_n$存在,

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

## (4) 比值审敛法(达朗贝尔 D'Alembert 判别法)

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数,如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ ($\rho$数或$+\infty$)

则$\rho<1$时级数收敛;$\rho>1$时级数发散; $\rho=1$时失效.

## (5) 根值审敛法 (柯西判别法)

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数,

如果$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$ ($\rho$为数或$+\infty$),

则$\rho<1$时级数收敛; $\rho>1$时级数发散;$\rho=1$时失效.

## 3、交错级数及其审敛法

**定义** 正 、负项相间的级数称为交错级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{或} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \quad (\text{其中} u_n > 0)$$

**莱布尼茨定理** 如果交错级数满足条件:

( i ) $u_n \geq u_{n+1}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$；( ii ) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, 则

级数收敛，且其和 $s \leq u_1$, 其余项 $r_n$ 的绝对值

$|r_n| \leq u_{n+1}$.

## 4、任意项级数及其审敛法

**定义** 正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

**定理** 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

**定义**:若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,则称$\sum_{n=0}^{\infty}u_n$为绝对收敛;

若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散,而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为条件收敛.

## 5、函数项级数

### (1) 定义

设$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$是定义在$I \subseteq R$上

的函数，则$\sum_{n=1}^{\infty} = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$

称为定义在区间$I$上的**(函数项)无穷级数**.

### (2) 收敛点与收敛域

如果$x_0 \in I$，数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛，

则称$x_0$为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的**收敛点**,否则称为**发散点**.

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的所有收敛点的全体称为**收敛域**,

所有发散点的全体称为**发散域**.

## (3) 和函数

在收敛域上, 函数项级数的和是$x$的函数$s(x)$,

称$s(x)$为函数项级数的**和函数**.

## 6、幂级数

### (1) 定义

形如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$的级数称为**幂级数**.

当$x_0 = 0$时, $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$

其中$a_n$为幂级数系数.

## (2) 收敛性

**定理 1 (Abel 定理)**

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0 (x_0 \neq 0)$处收敛, 则

它在满足不等式$|x| < |x_0|$的一切$x$处绝对收敛;

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处发散, 则它在满足

不等式$|x| > |x_0|$的一切$x$处发散.

**推论**

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$不是仅在$x=0$一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个完全确定的正数$R$存在，它具有下列性质：

当$|x| < R$时，幂级数绝对收敛；

当$|x| > R$时，幂级数发散；

当$x = R$与$x = -R$时，幂级数可能收敛也可能发散.

**定义：** 正数R称为幂级数的**收敛半径**.

幂级数的收敛域称为幂级数的**收敛区间**.

**定理 2** 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的所有系数$a_n \neq 0$,

设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ (或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$)

(1) 则当$\rho \neq 0$时，$R = \frac{1}{\rho}$; (2) 当$\rho = 0$时，$R = +\infty$;

(3) 当$\rho = +\infty$时，$R = 0$.

目录 上页 下页 返回 结束

## (3) 幂级数的运算

a. 代数运算性质:

设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径各为$R_1$和$R_2$,

$R=\min\{R_1, R_2\}$

**加减法**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \qquad x \in (-R, R)$$

(其中 $c_n = a_n \pm b_n$)

**乘法**

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \qquad x\in(-R,R)$$

$$(\text{其中 } c_n = a_0\cdot b_n + a_1\cdot b_{n-1}+\cdots+a_n\cdot b_0)$$

**除法** $\qquad\qquad$ (收敛域内 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0$)

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

b. 和函数的分析运算性质:

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内连续,在端点收敛,则在端点单侧连续.

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可积,且对$\forall x \in (-R,R)$可逐项积分.

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可导, 并可逐项求导任意次.

## 7、幂级数展开式

### (1) 定义

如果$f(x)$在点$x_0$处任意阶可导,则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$称为$f(x)$在点$x_0$的**泰勒级数**.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$称为$f(x)$在点$x_0$的**麦克劳林级数**.

**(2) 充要条件**

定理　$f(x)$在点$x_0$的泰勒级数，在$U_\delta(x_0)$内收敛于$f(x) \Leftrightarrow$在$U_\delta(x_0)$内$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

**(3) 唯一性**

定理　如果函数$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内能展开成$(x-x_0)$的幂级数，即　$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$,

则其系数　$a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\qquad (n=0,1,2,\cdots)$

且展开式是唯一的.

## (3) 展开方法

a. 直接法(泰勒级数法)

步骤: (1) 求$a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$;

(2) 讨论 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ 或$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$,

则级数在收敛区间内收 敛于 $f(x)$.

b. 间接法　根据唯一性, 利用常见展开式, 通过变量代换, 四则运算, 恒等变形, 逐项求导, 逐项积分等方法,求展开式.

## (4) 常见函数展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

$$x\in(-1,1]$$

$$(1+x)^\alpha$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$x\in(-1,1)$$

## (5) 应用

a. 近似计算

b. 欧拉公式

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x,}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin t &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \\ \cos t &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \end{aligned}}$$

## 8、傅里叶级数

### （1） 三角函数系

三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots$$

正交性

任意两个不同函数在$[-\pi, \pi]$上的积分等于零.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \qquad (\text{其中} m, n = 1, 2, \cdots)$$

## (2) 傅里叶级数

**定义** $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中 $$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx, & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

称为傅里叶级数.

## (3) 狄利克雷(Dirichlet)充分条件(收敛定理)

设 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数.如果它满足条件:在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点,并且至多只有有限个极值点,则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛,并且

(1) 当 $x$ 是 $f(x)$ 的连续点时,级数收敛于 $f(x)$;

(2) 当 $x$ 是 $f(x)$ 的间断点时, 收敛于 $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$;

(3) 当 $x$ 为端点 $x=\pm\pi$ 时,收敛于 $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

## (4) 正弦级数与余弦级数

如果 $f(x)$ 为奇函数，傅氏级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 称为**正弦级数**.

当周期为 $2\pi$ 的奇函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数时,它的傅里叶系数为

$$a_n = 0 \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

如果 $f(x)$ 为偶函数，傅氏级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

称为**余弦级数.**

当周期为 $2\pi$ 的偶函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数时,它的傅里叶系数为

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=0\qquad\qquad(n=1,2,\cdots)$$

## (5) 周期的延拓

**奇延拓:**

令 $F(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x\le\pi \\ 0 & x=0 \\ -f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases}$

$f(x)$的傅氏正弦级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \qquad (0\le x\le\pi)$$

## 偶延拓:

令 $F(x)=\begin{cases} f(x) & 0\le x\le \pi \\ f(-x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$

$f(x)$的傅氏余弦级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (0\le x\le \pi)$$

## (6) 周期为 $2l$ 的周期函数的傅氏展开 式

设周期为$2l$的周期函数 $f(x)$满足收敛定理的条件,则它的傅里叶级数展开 式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=1,2,\cdots)$$

# 二、典型例题

**例1 选择题**

1. 设有一任意项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$，若 $|a_n| > |a_{n+1}|$，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，则该级数（ D ）.

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛

(C) 发散　　(D) 可能收敛，也可能发散

如：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，但 $a_n = \frac{1}{n}$ 满足上述条件.

2. 设数列 $|a_n|$ 单调减, $(-1)^n a_n > 0(n = 1,2,\cdots)$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 必定( C ).

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛

(C) 收敛　　(D) 可能收敛，也可能发散

解 令 $u_n = (-1)^n a_n$, 则 $u_n > 0(n=1,2,\cdots)$,

且 $(-1)^n u_n = a_n$, $|a_n| = u_n$

$\because$ $\{u_n\}$单调减，且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$(已知条件)

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{收敛}.$$

3. 设 $a_n > 0, n = 1,2,\cdots$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛，则下列结论正确的是( *D* )

(*A*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散. ×

(*B*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛. ×

(*C*) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛. ×

(*D*) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛. √

反例：

取 $a_n = \dfrac{1}{n}$.

理由：利用加括号性质.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + \cdots$$

收敛

加括号级数:

$$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} - a_{2n})$$ 必收敛.

4. 设$u_n \neq 0 (n=1,2,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{u_n} = 1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) \quad ( \ C \ ).$$

(*A*) 发散　　　　(*B*) 绝对收敛

(*C*) 条件收敛　　(*D*) 可能收敛，也可能发散

解　由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{u_n} = 1$,知

$\exists N$,使得当$n \geq N$时，$u_n > 0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

对于正项级数 $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \left( \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$,

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{u_n}+\frac{n}{u_{n+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{u_{n+1}}\quad =1+1=2$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\therefore\ \sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$发散

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\right|$发散

又 $\because\ S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} (\frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{k+1}})$

$$= (\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}) - (\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}) + \cdots + (-1)^{n+1} (\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}})$$

$$= \frac{1}{u_1} + (-1)^{n+1} \frac{1}{u_{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{u_1}$$

$\therefore$ 原级数收敛且条件收敛 .

6. 下列级数(常数$\alpha > 0$)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha + n}{n^2}$ 是( $B$ );

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin\alpha}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}})$ 是( $C$ );

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1 - \cos\frac{\alpha}{n})$ 是( $A$ );

(4) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \alpha}}$ 是( $A$ ).

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛

(C) 发散　　(D) 敛散性与$\alpha$有关

目录 上页 下页 返回 结束

7. 设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$, 则级数( C ).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛

解　$u_n^2=\ln^2(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\sim(\frac{1}{\sqrt{n}})^2=\frac{1}{n}\quad(n\to\infty)$

**例2 问答题** 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \text{ 发散,试问级数 } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$$

是否收敛，并说明理由.

**解** $\because \quad a_n > 0 \quad (n = 1,2,\cdots)$, $\{a_n\}$单调减少

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在， 记 $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

则 $a \geq 0.$

进一步可以断定：$a > 0.$

否则，若 $a=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = 0$

又 $\{a_n\}$单调减少， 由莱布尼茨判别法知

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，这与条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散矛盾！

令 $u_n = (\dfrac{1}{1+a_n})^n$， 则 $u_n > 0$

$\because \quad \rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+a_n} = \dfrac{1}{1+a} < 1$

$\therefore \quad \sum\limits_{n=1\infty}^{\infty}(\dfrac{1}{1+a_n})^n$ 收敛.

**例3** 判断级数敛散性：

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n};$$

**解** $$u_n = \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n},$$

$$\because \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}]^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \exp\{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x\}$$

$$= \exp\{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\} = e^0 = 1;$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0,$$

根据级数收敛的必要条件， 原级数发散.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$;

解 $u_n = \frac{n\cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n} \le \frac{n}{2^n}$, 令 $v_n = \frac{n}{2^n}$,

$\because \lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1,$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛，根据比较判别法，原级数收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}$ $(a>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\ln(n+2)}}{a+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{a} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln(n+2)}$,

$\because \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n+2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{\ln(x+2)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(\ln(x+2))}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x+2))}{x}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}}{1}} = e^0 = 1$

$$\therefore \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{a}.$$

当 $a>0$ 即 $0<\frac{1}{a}<1$ 时，原级数收敛；

当 $0<a<1$ 即 $\frac{1}{a}>1$ 时，原级数发散；

当 $a=1$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(1+\frac{1}{n})^n}$,

$$\because \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+2)}{(1+\frac{1}{n})^n}=+\infty,$$ 原级数也发散.

**例4** 判断下列级数的敛散性：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2};$$

**解** (1) 先考虑绝对收敛性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$$

$$\because\ \rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{2} = \frac{e}{2} > 1$$

$$\because \sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$$ 发散，且

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| \neq 0$$

从而 $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2} \neq 0$$

$\therefore$ 原级数发散.

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n+(-1)^n}$.

解 (2) $u_n=\dfrac{1}{n+(-1)^n}>0,\quad v_n=(-1)^n u_n \quad (n\geq 2),$

1° 绝对收敛性

$\because \quad |v_n|=u_n=\dfrac{1}{n+(-1)^n}\geq\dfrac{1}{n+1} \quad (n\geq 2)$

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$ 发散

$$u_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$$

## 2° 条件收敛性

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = 0,$$

但 $u_2 = \frac{1}{3} < u_3 = \frac{1}{2}$

$u_3 = \frac{1}{2} > u_4 = \frac{1}{5}$

$u_4 = \frac{1}{5} < u_5 = \frac{1}{4} \quad \cdots$

$u_{2k} < u_{2k+1} < u_{2k-1}$

$\{u_n\}$无单调性

不单调减

故对于原级数，莱布尼茨判别法失效.

由于 $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n[n-(-1)^n]}{[n+(-1)^n][n-(-1)^n]}$

$$= \frac{(-1)^n n}{n^2-1} - \frac{1}{n^2-1} \quad (n \geq 2),$$

而对于 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2-1}$： $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2-1} = 0$

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1},$$

$$f'(x) = -\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} < 0,$$

$$w_{n+1} = f(n+1) < f(n) = w_n \quad (n \geq 2)$$

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2-1}$收敛，  又$\because \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$收敛，

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} v_n = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+(-1)^n}$$收敛，

且为条件收敛.

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})\quad(\text{常数}k\neq 0)$$

**解** $a_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}-n\pi)$

$$=(-1)^n\sin\left(\frac{k^2\pi}{\sqrt{n^2+k^2}+n}\right)$$

$$u_n=\sin\left(\frac{k^2\pi}{\sqrt{n^2+k^2}+n}\right)>0\quad(n>>1)$$

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{k^2\pi}{\sqrt{n^2+k^2}+n}}{\frac{1}{n}}=\frac{k^2\pi}{2}>0$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ 发散}$$

$$\text{又} \because \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0, \text{且 } u_{n+1} < u_n \quad (n >> 1)$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n \quad \text{收敛}$$

即原级数条件收敛.

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots$

$+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$ 发散

解 $\because$ 加括号级数

$$(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1})+(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1})+\cdots$$

$$+(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1})+\cdots$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1})=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n-1}$$ 发散

**练习** 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 是否收敛？如果收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

**解** $\because \quad \frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n-\ln n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n} \text{ 发散，}$$

即原级数非绝对收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$是交错级数， 由莱布尼茨定理：

$$\because \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{\ln n}{n}}=0,$$

$$\because \quad f(x)=x-\ln x \quad (x>0),$$

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}>0 \quad (x>1),$$

$\therefore$ 在 $(1,+\infty)$ 上单增，即 $\dfrac{1}{x-\ln x}$ 单减，

故 $\dfrac{1}{n-\ln n}$ 当 $n>1$ 时单减，

$$\therefore \quad u_n = \frac{1}{n-\ln n} > \frac{1}{(n+1)-\ln(n+1)} = u_{n+1} \ (n>1),$$

所以此交错级数收敛，故原级数是条件收敛.

**例5** 设$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}(n=1,2,\cdots)$，其中

$a_n > 0, b_n > 0$，证明：

(1) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

(2)若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散.

证 由条件$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}(n=1,2,\cdots)$，得

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \frac{a_n}{b_n}.$$ 由此可知

$$\frac{a_n}{b_n} \le \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \le \cdots \le \frac{a_1}{b_1},$$

$$\therefore \quad a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

由比较审敛法，知命题 (1), (2)成立.

**例6** 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$ 收敛域及和函数.

**解** $\because \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$ 的收敛半径为 $R=1$,

收敛域为 $-1<x-1<1$, 即 $0<x<2$,

设此级数的和函数为 $s(x)$, 则有

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n.$$

两边逐项积分

$$\int_1^x s(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_1^x (n+1)(x-1)^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{n+1}\Big|_1^x = \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{n+1}$$

$$= \frac{x-1}{1-(x-1)} = \frac{x-1}{2-x},$$

两边再对 $x$ 求导，得

$$s(x) = \left(\frac{x-1}{2-x}\right)' = \frac{1}{(2-x)^2}.$$

**例7** 将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开成麦克劳林级数 .

**解** $\because\ \ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots,\ x\in(-1,1]$

$$\therefore\ \ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+\cdots,$$

$$(-1\le x\le 1)$$

又 $\arctan x=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=\int_0^x[1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots]dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$(-1 \le x \le 1)$$

故 $x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}. \qquad (-1 \le x \le 1)$$

**例8** 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 的和函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

**解** 分析 $\because \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 是 $\sin x$ 的展开式,

设法用已知展开式来解.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}$$

$$=\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\sin\frac{x-1+1}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x-1}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$$

$$+\sqrt{2}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}$$

$$=\sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot(2n)!}(x-1)^{2n}$$

$$+\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(2n+1)!}(x-1)^{2n+1}\qquad(-\infty,+\infty)$$

**例9** 将 $\cos x$ 在 $0 < x < \pi$ 内展开成以 $2\pi$ 为周期的正弦级数并在 $-2\pi \le x \le 2\pi$ 写出该级数的和函数，同时画出它的图 形.

**解** 要将 $f(x) = \cos x$ 在 $(0, \pi)$ 内展开成以 $2\pi$ 为周期的正弦级数 $\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$，必须在 $(-\pi, \pi)$ 内对 $\cos x$ 进行奇开拓，

令 $$F(x) = \begin{cases} \cos x & x \in (0, \pi), \\ 0 & x = 0, \\ -\cos x & x \in (-\pi, 0), \end{cases}$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(n+1)x + \sin(n-1)x] dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1}\right] \qquad (n \neq 1)$$

$$= \begin{cases} o, & n = 2m-1 \\ \dfrac{4n}{\pi(n^2-1)}, & n = 2m \end{cases}$$

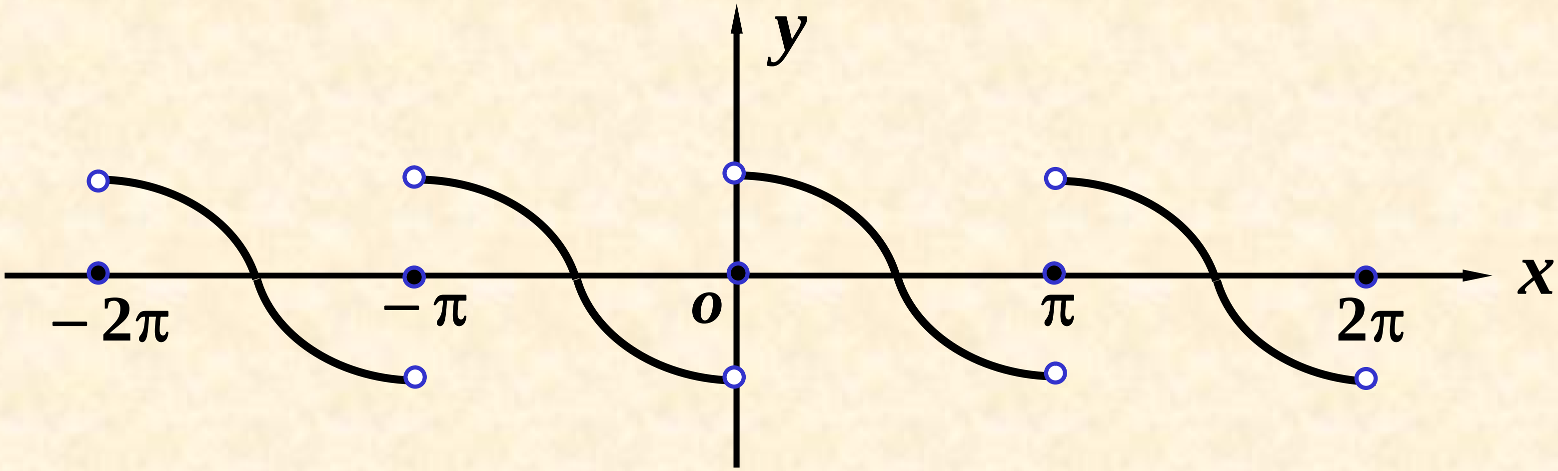
$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0,$$

$$\therefore \quad \cos x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8m}{\pi(4m^2-1)} \sin 2mx. \quad (0 < x < \pi)$$

在 $-2\pi \le x \le 2\pi$ 上级数的和函数为

$$s(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (0,\pi) \cup (-2\pi,-\pi) \\ 0 & x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi \\ -\cos x & x \in (-\pi,0) \cup (\pi,2\pi), \end{cases}$$

和函数的图形为



**例10** 将函数 $f(x)=2+|x|\quad(-1\le x\le 1)$ 内展开成以 2 为周期的傅氏级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

**解** 将 $f(x)$ 进行周期为 2的周期延拓

$\because\quad f(x)=2+|x|\quad(-1\le x\le 1)$ 是偶函数,

$$\therefore\quad a_0=\frac{2}{1}\int_0^1(2+x)dx=5,$$

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1(2+x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^1 xd\sin n\pi x=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases} 0, & n=2k \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n=2k-1 \end{cases} \qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$b_n = 0,$$

故 $$2+|x| = \frac{5}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}. \qquad (-1\le x\le 1)$$

取 $x=0$, 由上式得 $2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$,

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{4}{3}=\frac{\pi^2}{6}.$$

**例11** 证明：当$0 \le x \le \pi$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}.$$

**解** 设 $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\pi x}{2}$,

将 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上展开成余弦级数：

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^3}{4}\right) = -\frac{\pi^3}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}\right) \cos nx dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}[(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2})\sin nx\Big|_0^\pi-\int_0^\pi(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})\sin nx dx]$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\int_0^\pi(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})d\cos nx=\frac{2}{n^2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{n^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}=-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.\qquad (0\le x\le\pi)$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}.$$

**例12** 求下列常数项级数的和：

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\alpha^n}{(1+\alpha)^{n+1}} \quad (\text{常数}\alpha>0)$$

**解** $$\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\alpha^n}{(1+\alpha)^{n+1}} = \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-1}$$

考虑：$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \quad x\in(-1,1)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\alpha^n}{(1+\alpha)^{n+1}} = \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} s\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$$

$$= \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2} = \alpha$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}$

解　考虑　$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

$x\in(-\infty,+\infty)$

$\because \quad \int_0^x s(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}\int_0^x x^{2n+1}dx$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+2}}{2}$

$$= \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{2}\sin x$$

$$\therefore \quad s(x) = (\frac{x}{2}\sin x)' = \frac{1}{2}(\sin x + x\cos x)$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} = s(1) \quad = \frac{1}{2}(\sin 1 + \cos 1)$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$

解 $e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$, $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n}}{n!}$ $x\in(-\infty,+\infty)$

$$e^{x}+e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[1+(-1)^{n}]x^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n)!}x^{2n}$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

$$\therefore\quad s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=s(1)=\frac{1}{2}(e+e^{-1})$$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$, 其中 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos x dx \quad (n = 0,1,2,\cdots)$

解 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos x dx \quad (n = 0,1,2,\cdots)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x d \sin x$$

$$= \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$$

考虑: $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad x \in [-1,1)$

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n dx=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)dx \quad x\in(-1,1)$$

$$=\int_0^x \frac{1}{1-x}dx$$

$$=-\ln(1-x)\Big|_0^x=-\ln(1-x)$$

$$\therefore \quad \sum_{n=0}^{\infty}I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}=s(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$=-\ln(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

例13 求极限： $I=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{3^n}}$.

解 $I=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}}=2^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}}=2^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}}$

考虑： $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\qquad x\in(-1,1)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=(\frac{1}{1-x}-1)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{1}{3}s(\frac{1}{3})=\frac{3}{4}$ 故 $I=2^{\frac{3}{4}}$

例14 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

(1) 将$f(x)$展开成$x$的幂级数；

(2) 求和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$； (3) 求 $f^{(n)}(0)$.

解(1) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad x\in(-1,1)$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},$$

$x\in[-1,1]$

$\therefore$ 当 $x \neq 0$ 且 $x \in [-1,1]$ 时，有

$$f(x) = \frac{1+x^2}{x} \arctan x$$

$$= \frac{1+x^2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = (1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}$$

$$\because\quad s(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n},\quad x\in[-1,1]$$

$$s(0)=1=f(0)$$

$$\therefore\quad f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n},\quad x\in[-1,1]$$

(2) 求和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$;

在 $f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}$，$x\in[-1,1]$中，令$x=1$

得 $f(1)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1-4n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{1}{2}(2\arctan 1-1)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

(3) 求 $f^{(n)}(0)$.

$$\because \quad f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

由展开式的唯一性，对比 $x$ 同次幂的系数 ，

得 $$\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}=\frac{2(-1)^n}{1-4n^2} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$f^{(2n)}(0)=\frac{2(2n)!(-1)^n}{1-4n^2} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$f^{(2n+1)}(0)=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$