第二节

微积分基本定理

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 引例

变速直线运动中位置函数 $s(t)$ 与速度$v(t)$的联系

设 $s = s(t)\quad t \in [T_1, T_2]$

一方面， $s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_{T_1}^{T_2} s'(t)\,\mathrm{d}t$

路程 $(s'(t) = v(t))$

另一方面，$s = s(T_2) - s(T_1)$

$$\therefore \int_{T_1}^{T_2} s'(t)\,\mathrm{d}t = s(T_2) - s(T_1).$$

猜想：(1) 一般地，若 $F'(x)=f(x),\ x\in[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{?}{=}F(b)-F(a)$$

(2) 考虑 $[T_1,T]$: $\int_{T_1}^{T} v(t)\,\mathrm{d}t=s(T)-s(T_1)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\int_{T_1}^{T} v(t)\,\mathrm{d}t\right)=s'(T)=v(T)$$

一般地，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\overset{?}{=}f(x)$

(二) 积分上限的函数及其导数

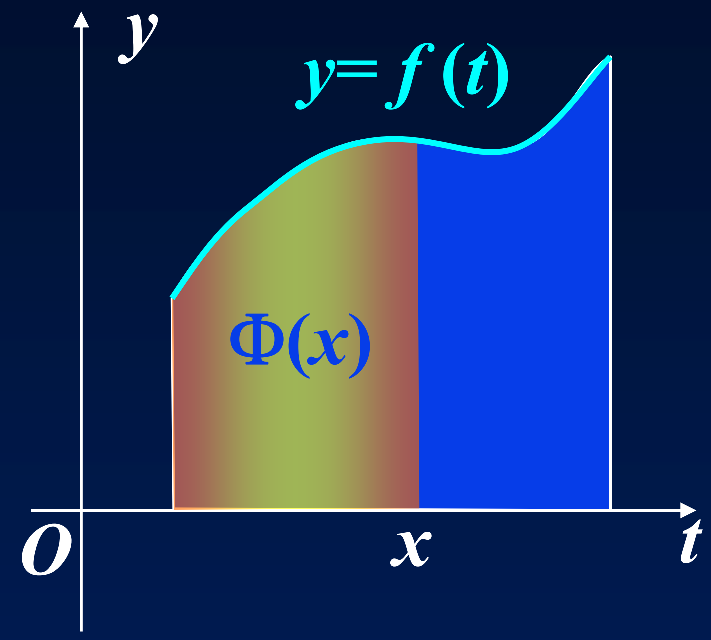
1. 概念引入

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad \forall x\in[a,b]$$

积分上限函数(或变上限积分)



$$\Phi(x)\overset{\text{记作}}{=}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]$$

几何意义 $f(x)\geq 0$, 图中阴影部分面积.

2. 积分上限函数的性质

定理5.1 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续， 则

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上可导，且

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=f(x)\quad(\forall x\in[a,b])$$

注 定理5.1 有十分重要的意义:

1° 肯定了区间上的连续函数的原函数一定存在.

定理5. 2 (原函数存在定理)

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

2° 积分上限函数如何求导数.

3° 初步揭示了定积分与原函数之间的关系.

事实上,

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad f(x)\in C[a,b]$$

$$\Phi'(x)=f(x)$$

$$\Phi(a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\Phi(b)-\Phi(a).$$

猜想:

若 $F'(x)=f(x),$

$x\in[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} F(b)-F(a)$$

3. 积分上(下)限函数求导法

一般地，若 $f(x)$连续，$u(x),v(x)$可导，

则 $F(x)=\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ 可导，且

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=f[u(x)]u'(x)-f[v(x)]v'(x)$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(三) 牛顿—莱布尼茨公式

定理5.3（微积分基本公式）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$

牛顿 - 莱布尼茨公式

微积分基本公式表明:

一个连续函数在区间 $[a, b]$ 上的定积分等于它的任意一个原函数在区间 $[a, b]$ 上的增量,

故求定积分问题转化为求原函数的问题.

注 当 $a > b$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ 仍成立.

二、典型例题

例1 求下列函数的导数:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]=f(x)$$

(1) $y=\int_0^x \sin 2t^2\,\mathrm{d}t$

解 $y'=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x \sin 2t^2\,\mathrm{d}t\right)=\sin 2x^2.$

(2) $y=\int_x^2 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

解 $y'=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^2 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\int_2^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$

$=-\mathrm{e}^{-x^2}.$

(3) $y=\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$，其中$f(t)$连续.

解 $y'=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t\right]$ $\quad (u=x^2)$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\int_0^{u} f(t)\mathrm{d}t\right]\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$=f(u)\cdot 2x$$

$$=2xf(x^2).$$

(4) $y=y(x)$由方程 $\int_0^y e^{t^2}\,dt=\int_0^{\ln x}\cos t\,dt$ 所确定.

解 方程 两边对 x 求导数:

$$\frac{d}{dx}\int_0^y e^{t^2}\,dt=\frac{d}{dx}\int_0^{\ln x}\cos t\,dt$$

$$\frac{d}{dy}\left[\int_0^y e^{t^2}\,dt\right]\cdot\frac{dy}{dx}=\cos(\ln x)\cdot(\ln x)'$$

$$e^{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{e^{-y^2}\cos(\ln x)}{x}.$$

(5) $y=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)\,\mathrm{d}t$，其中$g(t)$连续.

分析 被积函数不是仅与积分变量t有关的函数，

故不能直接用求导公式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]=f(x).$$

解 先恒等变形:

$$y=\frac{1}{2}\int_0^x (x^2-2xt+t^2)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^x x^2 g(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^x x\,t\,g(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x t^2 g(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$y=\frac{1}{2}\left[\int_0^x x^2 g(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^x x\,t\,g(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x t^2 g(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\underline{x^2\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}-\underline{2x\int_0^x t\,g(t)\,\mathrm{d}t}+\underline{\int_0^x t^2 g(t)\,\mathrm{d}t}\right]$$

再求导:

$$y'=\frac{1}{2}\Big\{\Big[2x\cdot\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t+x^2\cdot g(x)\Big]-$$

$$2\Big[1\cdot\int_0^x t\,g(t)\,\mathrm{d}t+x\cdot x g(x)\Big]+x^2 g(x)\Big\}$$

$$=x\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x t\,g(t)\,\mathrm{d}t.$$

例2　求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}.$$

分析　这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，应用洛必达法则.

解　原式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{\cos x}^{1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)}{(x^2)'}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\mathrm{e}^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

例3 设 $f(x)$ 在$[0, +\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明

$$F(x)=\frac{\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

在$(0, +\infty)$上单调增加.

需证:
$F'(x)>0$
$x\in(0, +\infty)$

证

$$F'(x)=\frac{x\,f(x)\cdot\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\cdot f(x)}{\left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2}$$

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\boxed{\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2},$$

连续

$\because\ \underline{f(x)}>0,\quad (x>0),\qquad \underline{(x-t)f(t)}>0,\ t\in[0,x)$

$\therefore\quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t>0,\ \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t>0,$

$\therefore\quad F'(x)>0\quad (x>0)$

所以 $F(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调增加．

例4 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $f(x)<1$. 证明

$$2x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=1\text{在}(0,1)\text{内只有一个实根.}$$

证 令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-1$,

(存在性) $\because f(x)$在$[0,1]$上连续, $\therefore F(x)$在$[0,1]$上可导

又$\because$ $F(0)=-1<0$,

$$F(1)=1-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (f(x)<1,x\in[0,1])$$

$$=\int_0^1[1-f(t)]\,\mathrm{d}t>0,$$

零点定理

$\therefore$ $F(x)$在$(0,1)$内至少有一个零点 .

(惟一性)

$$F(x)=2x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-1$$

又 $\because \quad f(x)<1, \quad x\in[0,1]$

$\therefore \quad F'(x)=\ 2-f(x)>0, \quad x\in[0,1]$

故 $F(x)$ 在$[0, 1]$上单调增加，

从而$F(x)$在$(0,1)$内至多有一个零点.

综上所述：$F(x)$在$(0,1)$内只有一个零点，即方程

$F(x)=0$, 亦即原方程在 $(0,1)$内只有一个实根 .

例5 设 $f(x)>0$, 且在$[a,b]$上连续，证明:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\ge(b-a)^2$$

需证:
$F'(x)>0$
$x\in[a,b]$

证 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\cdot\int_a^x\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t-(x-a)^2$

则 $F(x)$在$[a,b]$上可导，$F(a)=0$,

$$F'(x)=f(x)\cdot\int_a^x\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t+\left[\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]\cdot\frac{1}{f(x)}-2(x-a)$$

$$=\int_a^x\frac{f(x)}{f(t)}\,\mathrm{d}t+\int_a^x\frac{f(t)}{f(x)}\,\mathrm{d}t-\int_a^x 2\,\mathrm{d}t$$

$$F'(x) = \int_a^x \frac{f(x)}{f(t)} \mathrm{d}t + \int_a^x \frac{f(t)}{f(x)} \mathrm{d}t - \int_a^x 2 \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^x \left[\frac{f(x)}{f(t)} - 2 + \frac{f(t)}{f(x)} \right] \mathrm{d}t$$

$$= \int_a^x \left[\sqrt{\frac{f(x)}{f(t)}} - \sqrt{\frac{f(t)}{f(x)}} \right]^2 \mathrm{d}t \geq 0, \quad x \in [a,b]$$

$\therefore$ $F(x)$在$[a,b]$上单调不减.

当 $x \in [a,b]$时，总有 $F(x) \geq F(a) = 0$, $\therefore$ $F(b) \geq 0$

即 $F(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \cdot \int_a^b \frac{1}{f(t)} \mathrm{d}t - (b-a)^2 \geq 0,$

亦即原不等式成立.

例6 (1) 计算 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 由于$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

所以 $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数,

从而 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x \Big|_0^1$

$$= \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

(2) $\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}$

$\because \quad 0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$

$(n\to\infty$时$)$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0.$

例7 求 $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\,\mathrm{d}x\right]$$

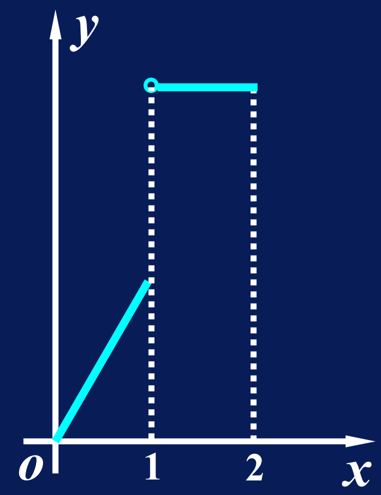
$$=\sqrt{2}\left(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=2\sqrt{2}.$$

$$|\cos x|=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ -\cos x, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$$

分段点：$x=\frac{\pi}{2}$

定积分关于积分区间的可加性

例8 设 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 5 & 1<x\le 2\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.



解 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x+\int_1^2 5\,\mathrm{d}x=6.$$

注 1° 有界函数 $f(x)$ 的定积分是否存在以及定积分的值为多少与 $f(x)$ 在积分区间上有限个点处的值无关;

2° 对于绝对值函数及分段函数的积分，应分段积分.

例9　设$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1,\\ 2, & 1<x\le 2.\end{cases}$

$$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (0\le x\le 2)$$

(1) 求$\Phi(2)$;

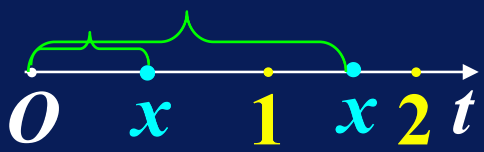
(2) 求$\Phi(x)$;

(3) 讨论 $\Phi(x)$的连续性 .

解　(1) $\Phi(2)=\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 2t\,\mathrm{d}t+\int_1^2 2\,\mathrm{d}t$

$$=t^2\Big|_0^1+2t\Big|_1^2=3.$$

(2) 求$\Phi(x)$



当$x\in[0,1]$时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

$$=\int_0^x 2t\,\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^x=x^2$$

当$x\in(1,2]$时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 2t\,\mathrm{d}t+\int_1^x 2\,\mathrm{d}t$

$$=t^2\Big|_0^1+2t\Big|_1^x=2x-1$$

故 $\Phi(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1,\\ 2x-1, & 1<x\le 2.\end{cases}$

(3) 由$f(x)$的连续性得,$\Phi(x)$可导，故$\Phi(x)$连续.

例10 下列运算是否正确？为什么？若不正确，请给出正确解答.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+n}$$

$$=0+0+\cdots+0=0.$$

答： 不正确.

错误分析：“有限个无穷小的和仍是无穷小”，其中“有限个”的含义是：在自变量的极限过程中个数是确定的. 而在此处，随着$n\to\infty$，个数也趋于无穷.

正确解答:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$$

$$=0+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\Delta x_i=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

$$f\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{1}{1+\frac{i}{n}},$$

$$f(x)=\frac{1}{1+x}\in C[0,1]$$

$$\xi_i=\frac{i}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\Delta x_i=\frac{1}{n},\quad x\in[0,1]$$

三、同步练习

1. 求下列函数的导数:

(1) $\Phi(x)=\int_a^x \cos 2t^2\,\mathrm{d}t$; (2) $\Phi(x)=\int_x^b \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,\mathrm{d}t$;

(3) $\Phi(x)=\int_a^x x\sin t^2\,\mathrm{d}t$; (4) $\Phi(x)=\int_a^{x^2} e^{3t^2}\,\mathrm{d}t$;

(5) $\Phi(x)=\int_{x^2}^{x^3} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$;

(6) 设$y=y(x)$由方程$\int_1^y \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t+\int_x^0 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=0$

所确定，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. 确定常数 a, b, c 的值, 使

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{a\,x-\sin x}{\int_b^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}\,t}=c\quad (c\neq 0).$$

3. 计算 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$.

4. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1)\,\mathrm{d}\,t}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;求 $f'(0)$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$.

证明在 (a,b) 内有且仅有一点 ξ，使得

$$\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\xi}^{b}\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

6. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+\sin x-1)\,\mathrm{d}x$;　(2) $I=\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

7. 计算定积分 $\int_{-1}^{3}|x|\,\mathrm{d}x$.

8. $I=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

9. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, x\geq 0,\\ \dfrac{1}{1+e^{x}}, x<0.\end{cases}$,求$\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$的值.

10. 求 $\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}\,\mathrm{d}x$.

11. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, & 0\leq x\leq \pi,\\ 0 & ,x<0\text{或}x>\pi.\end{cases}$

求$\Phi(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$在$(-\infty,+\infty)$内的表达式 .

12. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\dfrac{n-1}{n}\pi\right)$.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

四、同步练习解答

1. 求下列函数的导数:

(1) $\Phi(x)=\int_a^x \cos 2t^2 \,\mathrm{d}t;$

解 (1) $\Phi'(x)=\cos 2t^2\Big|_{t=x}=\cos 2x^2$

(2) $\Phi(x)=\int_x^b \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,\mathrm{d}t;$

解 (2) $\Phi'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\Bigg|_{t=x}=-\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$

(3) $\Phi(x)=\int_a^x x\sin t^2\,\mathrm{d}t$;

解 (3) $\Phi'(x)=(x\int_a^x \sin t^2\,\mathrm{d}t)'_x$

$$=\int_a^x \sin t^2\,\mathrm{d}t + x\sin x^2$$

(4) $\Phi(x)=\int_a^{x^2} e^{3t^2}\,\mathrm{d}t$;

解 (4) $\Phi'(x)=e^{3x^4}\cdot 2x$

(5) $\Phi(x)=\int_{x^2}^{x^3} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$;

解 (5) $\Phi'(x)=\ln(1+x^6)3x^2-\ln(1+x^4)2x$

(6) 设$y = y(x)$由方程$\int_1^y \frac{\sin t}{t} \mathrm{d} t + \int_x^0 e^{-t^2} \mathrm{d} t = 0$所确定，求$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}$.

解 (6) 将方程两边对 x求导，得

$$\frac{\sin y}{y} \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} - e^{-x^2} = 0,$$

即
$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = \frac{y}{e^{x^2} \sin y}.$$

2. 确定常数 a, b, c 的值, 使

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{a\,x-\sin x}{\int_b^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}\,t}=c\quad (c\neq 0).\qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

解　因 $x\to 0$时, $a\,x-\sin x\to 0$, $c\neq 0$, 得$b=0$.

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}=c\,(c\neq 0)$$

故 $a=1$.

又由 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, 得 $c=\frac{1}{2}$.

3. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$. $(\frac{\infty}{\infty}型)$

分析 当 $x>\tan 1$时, $\arctan x>1$.

记 $c=\int_0^{\tan 1}(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t$,

因 $c>0$,则当 $x>\tan 1$时，有

$$\int_0^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t=\int_0^{\tan 1}(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t+\int_{\tan 1}^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$=c+\int_{\tan 1}^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$>c+\int_{\tan 1}^x\mathrm{d}t=c+x-\tan 1\longrightarrow+\infty\quad(x\to+\infty)$$

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}\qquad (\frac{\infty}{\infty}型)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot(\arctan x)^2$$

$$=1\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}.$$

4. 若$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;求$f'(0)$.

解 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt}{x^3}$$

$$\underline{\underline{(\frac{0}{0})}}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

5. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0.$

证明在(a,b)内有且仅有一点 ξ，使得

$$\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\xi}^{b}\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

证 (存在性) 令$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t,$

则$F(x)$在$[a,b]$上连续,可导. 因为

$$F(a)=-\int_a^b\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t<0,\quad F(b)=-\int_a^b\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t>0,$$

所以在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得 $F(\xi)=0,$

即 $\displaystyle\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\xi}^{b}\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x.$

(惟一性) 设还有一点 $\eta\in(a,b)$，使得$F(\eta)=0.$

且$\xi\neq\eta$. 由罗尔定理知，必存在一点 $\zeta\in(\xi,\eta)$，

使得$F'(\zeta)=0$，即 $F'(\zeta)=f(\zeta)+\dfrac{1}{f(\zeta)}=0$

但 $f(\zeta)+\dfrac{1}{f(\zeta)}>0$

题设 $f(x)>0$

与题设矛盾，从而唯一性得证.

6. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+\sin x-1)\,\mathrm{d}x.$

解 原式 $=\left[2\sin\ x-\cos\ x-x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=3-\dfrac{\pi}{2}.$

(2) $I=\int_{-1}^{\sqrt{3}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

解 原式 $=\arctan x\Big|_{-1}^{\sqrt{3}}$

$$=\arctan\sqrt{3}-\arctan(-1)$$

$$=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7}{12}\pi$$

7. 计算定积分 $\int_{-1}^{3}|x|\,\mathrm{d}x$.

解 由于 $|x|=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$

所以 $\int_{-1}^{3}|x|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(-x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}x\,\mathrm{d}x$

$$=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{3}$$

$$=-\frac{1}{2}(0-1)+\frac{1}{2}(9-0)=5$$

8. $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$

解 原式$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{2}\left[\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(-\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}.$$

9. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, x\geq 0,\\ \dfrac{1}{1+e^{x}}, x<0.\end{cases}$,求$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$的值.

解 $x=0$: 第一类间断点，分段积分，

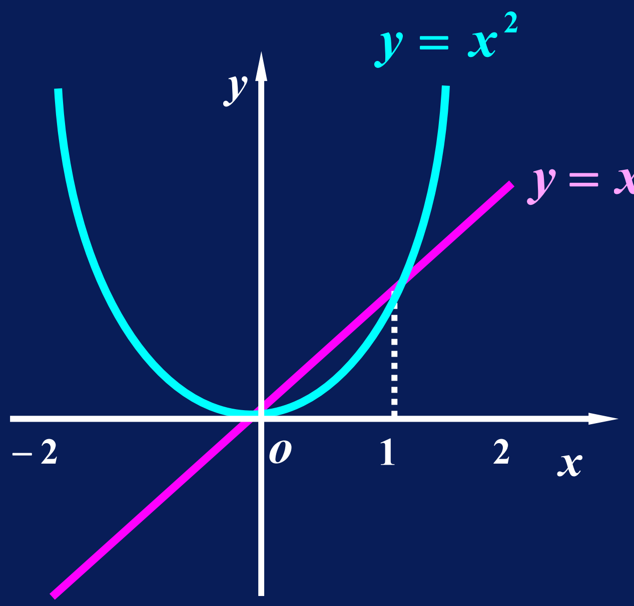
$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^{x}}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=-\ln(1+e^{-x})\Big|_{-1}^{0}+\ln(1+x)\Big|_{0}^{1}$$

$$=\ln(1+e).$$

10. 求 $\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}\mathrm{d}x.$



解　由图形可知

$$f(x)=\max\{x,x^2\}$$

$$=\begin{cases} x^2 & -2\le x\le 0 \\ x & 0\le x\le 1 \\ x^2 & 1\le x\le 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{原式}=\int_{-2}^{0}x^2\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{11}{2}.$$

11. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le \pi,\\ 0 & ,x<0或x>\pi.\end{cases}$

求$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$在$(-\infty,+\infty)$内的表达式 .

解 当$x<0$时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x 0\,\mathrm{d}t=0;$

当$0\le x\le \pi$时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

$$=\int_0^x \frac{1}{2}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1-\cos x);$$

当$x > \pi$时， $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin t\,\mathrm{d}t+\int_{\pi}^{x}0\,\mathrm{d}t$$

$$=1$$

综上所述得 $\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0\le x\le \pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

12. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

分析 这是一个和式的极限问题，可以利用定积分的定义化为定积分来进行计算。

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{0\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_o^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}.$$