第七章　向量代数与空间解析几何

第一节　向量及其线性运算

习题　7-1

1. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在哪个卦限?

$$A(2,-2,5);\ B(1,3,-7);\ C(2,-3,-1);\ D(-1,-2,-3).$$

解　A 点在第 4 卦限; B 点在第 5 卦限;
C 点在第 8 卦限; D 点在第 7 卦限.

2. 求出 (x,y,z) 关于(1)各坐标面;　(2)各坐标轴;　(3)坐标原点的对称点的坐标.

解　(1)　点 (x,y,z) 关于 xOy 面的对称点是 $(x,y,-z)$; 关于 yOz 面的对称点是 $(-x,y,z)$; 关于 zOx 面的对称点是 $(x,-y,z)$.

(2)　点 (x,y,z) 关于 x 轴的对称点是 $(x,-y,-z)$; 关于 y 轴的对称点是 $(-x,y,-z)$; 关于 z 轴的对称点是 $(-x,-y,z)$.

(3)　点 (x,y,z) 关于坐标原点的对称点是 $(-x,-y,-z)$.

3. 指出下列各点在空间直角坐标系中的位置:

$$A(0,3,4);\ B(6,0,-5);\ C(0,-2,0);\ D(0,0,1).$$

解　A 在 yOz 面上, B 在 zOx 面上, C 在 y 轴上, D 在 z 轴上.

4. 设长方体的各棱与坐标轴平行, 已知长方体的两个顶点的坐标为 $(0,0,0)$、$(1,1,0)$, 试写出余下六个顶点的坐标.

解　如图 7.1, 余下六个顶点的坐标为

$$(1,0,0)、(0,1,0)、(0,0,1)、(1,0,1)、(1,1,1)、(0,1,1),$$

或 $(1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,0,-1)$、$(1,0,-1)$、$(1,1,-1)$、$(0,1,-1)$.

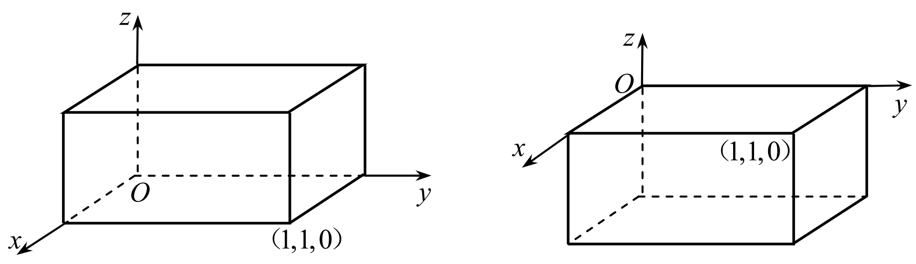

图 7.1

5. 在 yOz 面上, 求与点 $A(4,-2,-2)$、$B(3,1,2)$、$C(0,5,1)$ 等距离的点.

解　设点 $P(0,y,z)$ 与 A, B, C 三点等距, 则

$$|PA|^2=4^2+(y+2)^2+(z+2)^2,$$

$$|PB|^2=3^2+(y-1)^2+(z-2)^2,$$

$$|PC|^2=(y-5)^2+(z-1)^2.$$

因为 $|PA|^2=|PB|^2=|PC|^2$, 所以有

$$\begin{cases}4^2+(y+2)^2+(z+2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2,\\ 3^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2,\end{cases}$$

解方程组得 $\begin{cases}y=1,\\ z=-2.\end{cases}$ 故所求点坐标为 $(0,1,-2)$.

6. 证明: 三点 $A(1,0,-1)$, $B(3,4,5)$, $C(0,-2,-4)$ 共线.

证
$$\overrightarrow{AB}=(2,4,6)=2(1,2,3),$$

$$\overrightarrow{AC}=(-1,-2,-3)=-(1,2,3),$$

因为 $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AC}$, 且均过 A 点, 即 A、B、C 三点共线.

7. 试证明以三点 $A(4,3,1)$ 、 $B(7,1,2)$ 、 $C(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证
$$\because |AB|=\sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14},$$

$$|BC|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6},$$

$$|AC|=\sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6},$$

$$\therefore |BC|=|AC|,$$

即 ΔABC 为等腰三角形.

8. 设 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{r}_2=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, 试用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 表示 $4\boldsymbol{r}_1-3\boldsymbol{r}_2$.

解　$4\boldsymbol{r}_1-3\boldsymbol{r}_2=4(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}+11\boldsymbol{c}$.

9. 设有平行四边形 $ABCD$, M 是平行四边形对角线的交点. 若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, 用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$.

解 $\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MA}$,

$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}=-2\overrightarrow{MB}$,

$\therefore \overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\ \overrightarrow{MB}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$

$\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\ \overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$

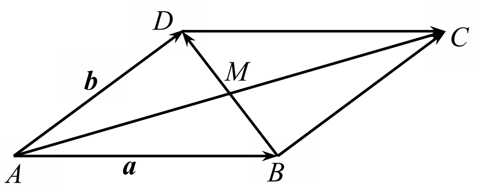

图 7.2

10. 用向量的方法证明: 连接三角形两边中点的线段(中位线)平行且等于第三边的一半.

证 如图 7.3, 设点 D、E 分别是 ΔABC 的边 AB 及 AC 的中点. 因为

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$.

所以, $\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, 因此 $DE /\!/ BC$, $|DE|=\dfrac{1}{2}|BC|$.

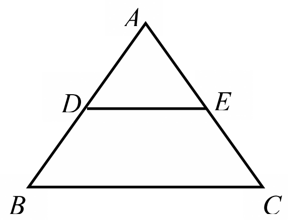

图 7.3

注意 易犯的错误是:

(1) 由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{DE}$.

产生错误的原因是, 本题是让你用向量的方法证明三角形中位线的性质, 而解题过程中用到了 $\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, 这正是要证明的.

(2) 设 $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{BC}=b$, $\overrightarrow{AC}=c$, 则 $a+b=c,\cdots$.

产生错误的原因是, 把向量和数混为一谈, 写向量却不带向量符号.

(3) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$, $\cdots$.

产生错误的原因是, 未搞清向量的起点与终点, 类似的错误将不再一一指出.

11. 已知点 $M_1(2,-1,3)$ 和 $M_2(3,0,1)$, 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦及与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向相同的单位向量.

解 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-2,0+1,1-3)=(1,1,-2)$, 模为

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(3-2)^2+(0+1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{6};$$

方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{6}};$$

与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{a}$ 为

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}^{\circ}=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}).$$

12. 设向量的方向余弦分别满足（1） $\cos\alpha=0$ ；（2） $\cos\beta=1$ ；(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$，问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

解 (1) 要求：$\cos\alpha=0$，可知向量与 x 轴垂直或平行于 yOz 面;

(2) 要求：$\cos\beta=1$，可知向量与 y 轴同向、垂直于 zOx 面;

注意 易犯的错误是, 向量平行于 y 轴.

产生错误的原因是, 未指明向量的方向是与 y 轴正向一致.

(3) 要求：$\cos\alpha=\cos\beta=0$，可知向量既垂直 x 轴, 又垂直于 y 轴, 即向量垂直于 xOy 面, 亦即与 z 轴平行.

13. 设向径 $\overline{OA}$ 与 x 轴、y 轴正向的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{4}$，且 $\left|\overline{OA}\right|=6$，求点 A 的坐标.

解 已知 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，则

$$\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\frac{1}{4},$$

因点 A 在第一卦限, 故 $\cos\gamma=\frac{1}{2}$，于是

$$\overline{OA}=\left|\overline{OA}\right|\cdot\overline{OA}^{\circ}=6(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})=(3,3\sqrt{2},3),$$

即点 A 的坐标是 $(3,3\sqrt{2},3)$.

14. 已知作用于一质点的三个力为 $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_2=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 求合力 $\boldsymbol{F}$ 的大小及方向余弦.

解 因力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 沿 x 轴方向的分向量分别为：$\boldsymbol{i}$，$2\boldsymbol{i}$，$0\boldsymbol{i}$；沿 y 轴方向的分向量分别为：$0\boldsymbol{j}$，$-3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{j}$；沿 z 轴方向的分向量分别为：$-2\boldsymbol{k}$，$4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{k}$，所以合力 $\boldsymbol{F}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=(1+2+0)\boldsymbol{i}+(0-3+1)\boldsymbol{j}+(-2+4+1)\boldsymbol{k}\\&=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

故 $\left|\boldsymbol{F}\right|=\sqrt{3^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{22}$.

力 $\boldsymbol{F}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{22}},\ \cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{22}},\ \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{22}}.$$

15. 设 $\boldsymbol{m}=8\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}+3\boldsymbol{p}$ 沿 x 轴及沿 y 轴方向的分向量.

解 因
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}+3\boldsymbol{p}&=(8\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})-2(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})+3(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\\&=7\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

故沿 x 轴方向的分向量为 $a_x\boldsymbol{i}=7\boldsymbol{i}$；沿 y 轴方向的分向量为 $a_y\boldsymbol{j}=16\boldsymbol{j}$.

16. 若线段 AB 被点 $C(2,0,2)$ 和 $D(5,-2,0)$ 三等分，试求向量 $\overrightarrow{AB}$、点 A 及点 B 的坐标.

解 设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，因

$$\lambda_C=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{1}{2},\ \lambda_D=\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}=2,$$

所以由定比分点公式有

$$\begin{cases}2=\dfrac{x_1+\frac{1}{2}x_2}{1+\frac{1}{2}},\\[2ex]5=\dfrac{x_1+2x_2}{1+2},\end{cases}$$

即 $\begin{cases}2x_1+x_2=6,\\x_1+2x_2=15\end{cases}$ 解此方程组得 $\begin{cases}x_1=-1,\\x_2=8.\end{cases}$

同理由 $\begin{cases}0=\dfrac{y_1+\frac{1}{2}y_2}{1+\frac{1}{2}},\\[2ex]-2=\dfrac{y_1+2y_2}{1+2}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y_1=2,\\y_2=-4.\end{cases}$ 由 $\begin{cases}2=\dfrac{z_1+\frac{1}{2}z_2}{1+\frac{1}{2}},\\[2ex]0=\dfrac{z_1+2z_2}{1+2}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}z_1=4,\\z_2=-2.\end{cases}$

从而点 A 的坐标是 $(-1,2,4)$，点 B 的坐标是 $(8,-4,-2)$，$\overrightarrow{AB}=(9,-6,-6)$.