

第六节

空间曲线及其方程

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

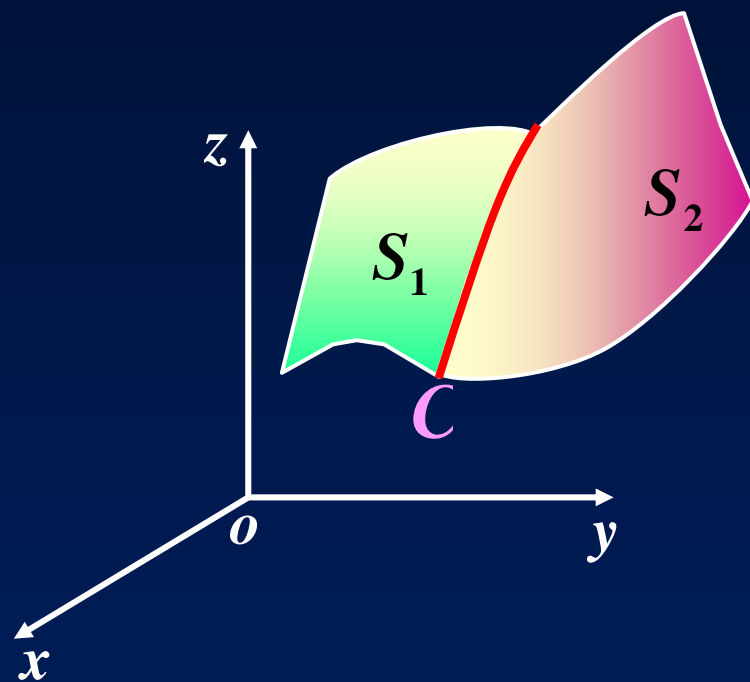
(一) 空间曲线的一般方程

空间曲线 C 可看作空间两曲面的交线.

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

空间曲线的一般方程

特点： 曲线上的点都满足方程，满足方程的点都在曲线上，不在曲线上的点不能同时满足两个方程.



(二) 空间曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I \text{ — 区间}$$

空间曲线的参数方程

当给定 $t = t_1$ 时，就得到曲线上的一个点 (x_1, y_1, z_1) ，随着参数的变化可得到曲线上的全部点。

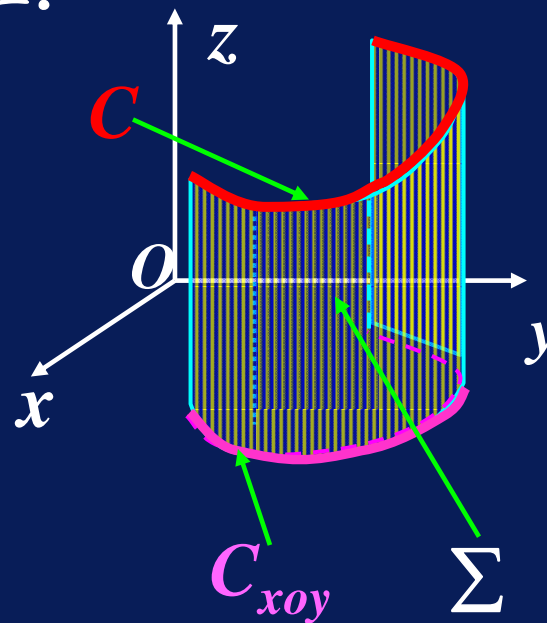


(三) 空间曲线在坐标面上的投影

1.定义 设空间曲线 C 的一般方程:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

以 C 为准线, 作母线平行于 z 轴的柱面 Σ , 则称 Σ 与 xOy 面的交线 C_{xoy} 为曲线 C 在 xOy 面上的投影(曲线), 且称 Σ 为曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面.

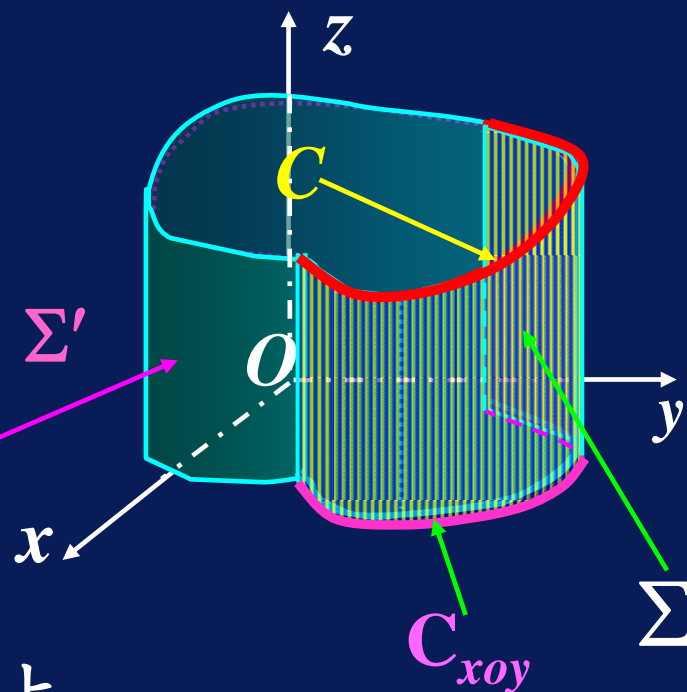


2. 确定投影曲线 C_{xoy} 的方法

$$C: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

消去 z

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ H(x, y) = 0 \end{cases}$$



曲线 C 在曲面 $\Sigma' : H(x, y) = 0$ 上,

而 Σ' 正是母线平行 z 轴的柱面

\therefore 曲线 C 关于 xOy 的投影柱面 $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

若设 $C'_{xoy} : \begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

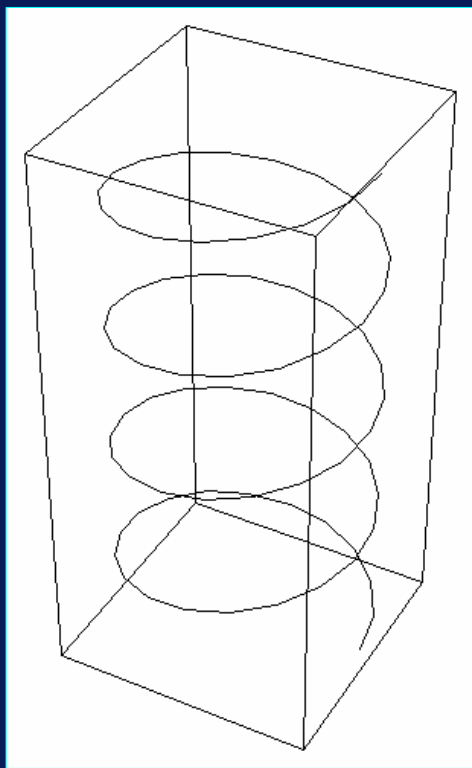
则有 $C_{xoy} \subseteq C'_{xoy}$.

特别地, 当 C_{xoy} 为闭曲线时,

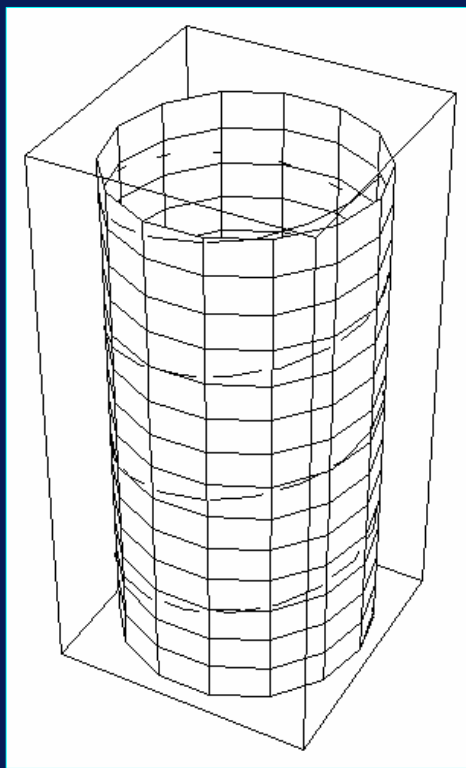
$$C_{xoy} = C'_{xoy}.$$



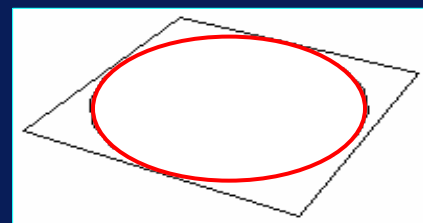
如图：投影曲线的研究过程。



空间曲线



投影柱面



投影曲线



类似地，可求 C 在 yOz 面上的投影 C_{yOz} ：

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{消去 } x} \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ R(y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } C_{yOz} \subseteq C'_{yOz} : \begin{cases} x = 0 \\ R(y, z) = 0 \end{cases}$$

C 在 zOx 面上的投影 C_{zOx} ：

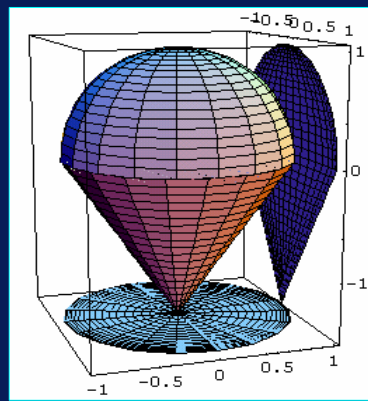
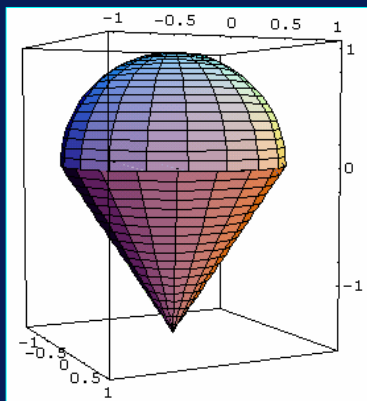
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{消去 } y} \begin{cases} T(x, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } C_{zOx} \subseteq C'_{zOx} : \begin{cases} T(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

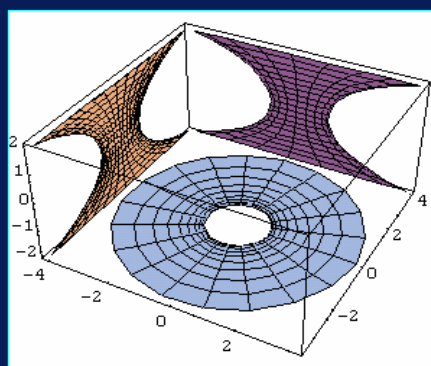
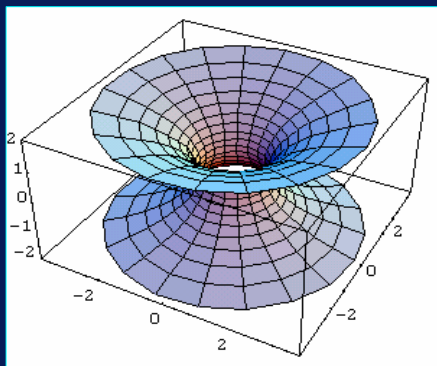


(四) 空间立体或曲面在坐标面上的投影

空间立体



曲面



1. 空间立体 Ω (或曲面 Σ) 在坐标面上

的投影(区域): Ω (或 Σ)上的所有点在该坐标面上的投影点的集合.

2. 简单曲面: 若过曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 内任一点, 作平行于 z 轴的直线, 该直线与 Σ 只有一个交点, 则称曲面 Σ 是关于 xOy 面的简单曲面.

如: 曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 关于 xOy 面是简单曲面, 但关于 yOz 面, zOx 面均不是简单曲面.



3. 确定空间立体 Ω 在坐标面上投影区域的方法:

以 xoy 面为例. 将 Ω 看成由一些关于 xOy 面的简单曲面及母线平行于 z 轴的柱面所围成的立体, 则这些简单曲面的交线在 xOy 面上的投影曲线与柱面和 xOy 面的交线所围成的区域, 便是所求的投影区域 D_{xy} .



(五) 一元向量值函数

1. 基本概念

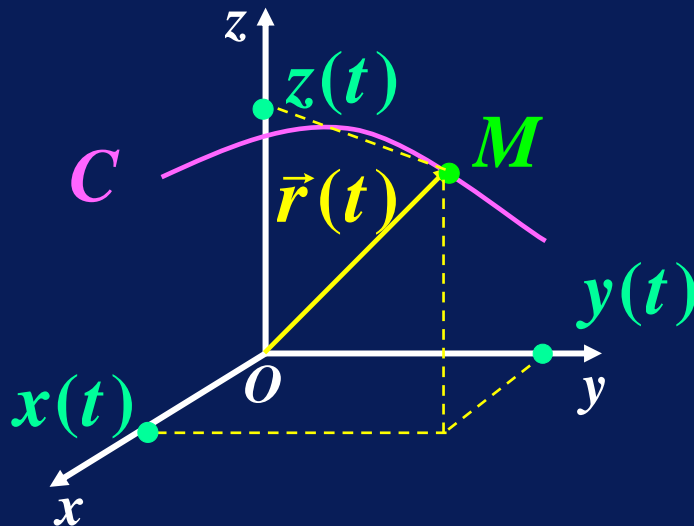
(1) 一元向量值函数

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in I \quad \text{空间曲线的向量形式}$$

其中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$,
 I 为区间.

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in I$$

确定了从 $I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
的一个映射, 称此映射为
一元向量值函数.

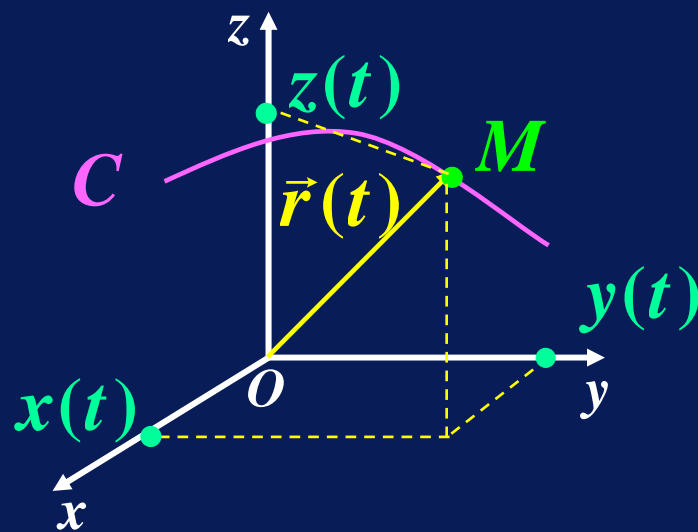


注 1° 又称曲线 C 为向量
值函数 $\vec{r}(t)$ 的**矢端曲线**.

2° 在平面坐标系中,
向量值函数

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t \in I$$

表示一条平面曲线.



(2) 向量值函数的极限

设向量值函数 $\vec{r}(t)$ 在点 t_0 的某邻域内有定义，
若存在常向量 \vec{r}_0 ，使

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0,$$

则称当 $t \rightarrow t_0$ 时，向量值函数 $\vec{r}(t)$ 的极限为 \vec{r}_0 ，

记作 $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ 。

(3) 向量值函数在一点连续

若 $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ ，则称向量值函数 $\vec{r}(t)$ 在 t_0 连续。



(4) 向量值函数在一点可导

$$\text{若 } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

存在，则称向量值函数 $\vec{r}(t)$ 在 t_0 可导，并称这个极限为 $\vec{r}(t)$ 在 t_0 的导向量，记作 $\vec{r}'(t_0)$ ，即

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$



2. 重要结论

$$\text{设 } \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

$$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}.$$

则 (1) 当 $t \rightarrow t_0$ 时, $\vec{r}(t)$ 的极限存在且为 \vec{r}_0

的充要条件是

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0 \end{array} \right.$$



(2) 向量值函数 $\vec{r}(t)$ 在 t_0 连续的充要条件是 $x(t), y(t), z(t)$ 均在 t_0 处连续.

(3) 向量值函数 $\vec{r}(t)$ 在 t_0 可导的充要条件是 $x(t), y(t), z(t)$ 均在 t_0 处可导, 且

$$\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}.$$

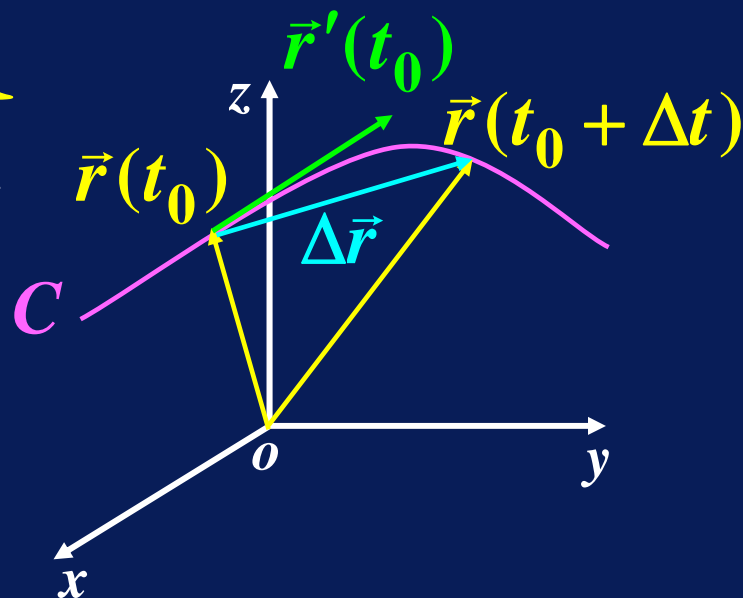
3. 导向量的几何意义

若向量值函数 $\vec{r}(t)$ 在 t_0 可导, 且 $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$, 则 $\vec{r}(t)$ 的矢端曲线 C 在 $\vec{r}(t_0)$ 的终点处存在切线.



$\vec{r}'(t_0)$: 曲线 C 在 $\vec{r}(t_0)$ 的终点处切线的方向向量,

其指向与参数 t 增大
时曲线 C 上的点移动
的方向一致.



4. 导向量的物理意义

设质点 M 的运动方程为 $\vec{r} = \vec{r}(t)$, 其中 t 为时间, 则

$$\vec{r}'(t_0) = \vec{v}(t_0)$$

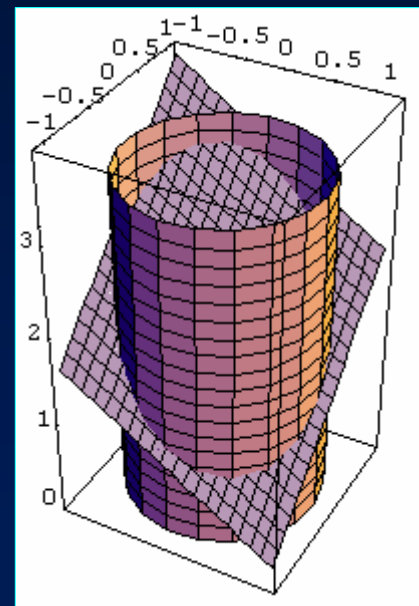
即为质点在 t_0 时刻运动的速度向量.



二、典型例题

例1 方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 $x^2 + y^2 = 1$ 表示圆柱面,
 $2x + 3y + 3z = 6$ 表示平面,
 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$
交线为椭圆.



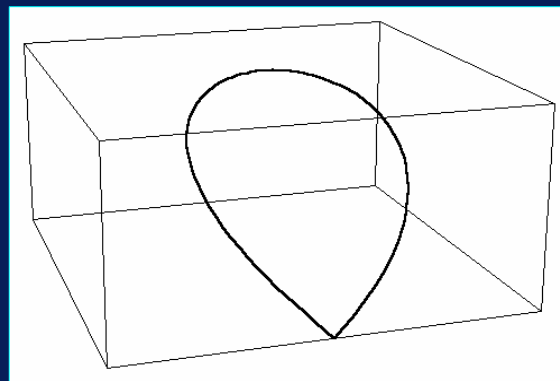
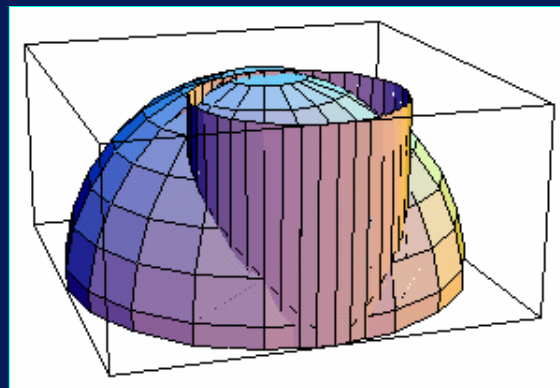
例2 方程组
$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \end{cases}$$
 表示怎样的曲线?

解 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

上半球面,

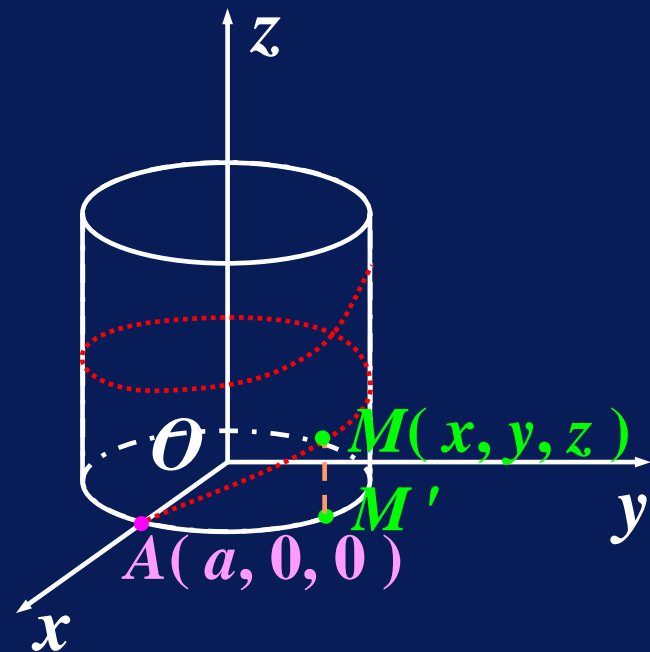
$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ 圆柱面,

交线如图.



例3 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转, 同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升(其中 ω , v 都是常数), 那么点 M 的几何轨迹称为**圆柱螺旋线**, 试建立其参数方程.

解 取时间 t 为参数,
动点从 A 点出发,
经过 t 时间, 运动到 M 点.
 M 在 xOy 面上的投影
为 $M'(x, y, 0)$.



螺旋线的参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t \\ z = vt \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \\ z = b \theta \end{cases}$$

$$(\theta = \omega t, \quad b = \frac{v}{\omega})$$

螺旋线的重要性质:

上升的高度与转过的角度成正比, 即

$$\theta: \theta_0 \rightarrow \theta_0 + \alpha, \quad z: b\theta_0 \rightarrow b\theta_0 + b\alpha,$$

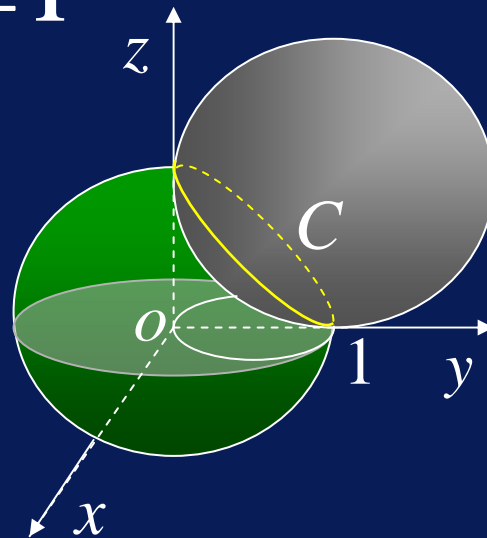
$$\alpha = 2\pi, \quad \text{上升的高度} \quad h = 2b\pi \quad \text{螺距}$$



例4 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$

在 xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



例5 求曲线
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

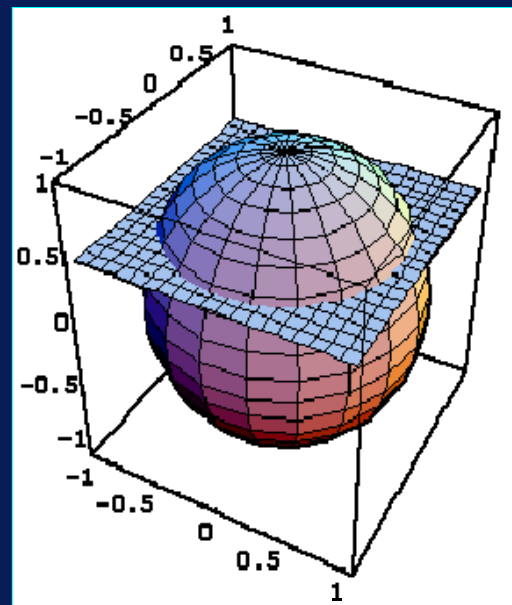
在坐标面上的投影.

解 (1) 在 xoy 面,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{消去 } z} \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$



(2) 在 zOx 面上

\therefore 在 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ 中, $z = \frac{1}{2}$ (不含 y)是母线
平行于 y 轴的柱面

投影柱面

$$\therefore C_{zOx} \subseteq C'_{zOx} : \begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

所以在 zOx 面上的投影 C_{zOx} 为线段:

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \quad |x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$



(3) 同理在 yOz 面上的投影 C_{yOz} 也为线段:

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}, \\ x = 0 \end{cases} \quad |y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



例6 求曲线 $C: \begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = 1 \end{cases}$

在各坐标面上的投影.

解 (1) 在 xoy 面,

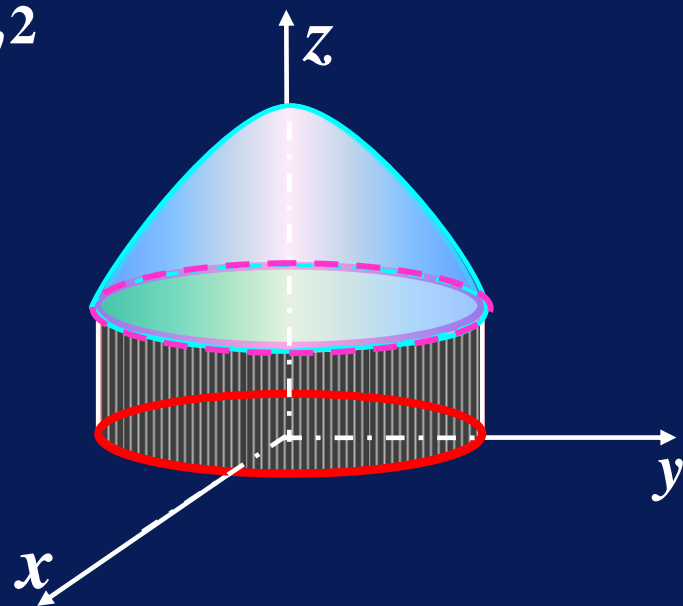
$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = 1 \end{cases}$$

消去 z

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$



(2) 在 yOz 面上

\therefore 在 $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = 1 \end{cases}$ 中, $z = 1$ (不含 x) 是母线

平行于 x 轴的柱面

投影柱面

$$\therefore C_{yOz} \subseteq C'_{yOz} : \begin{cases} z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

所以在 yOz 面上的投影 C_{yOz} 为线段:

$$\begin{cases} z = 1 \\ x = 0 \end{cases}, \quad |y| \leq 1$$

(3) 同理在 zOx 面上的投影 C_{zOx} 也为线段:

$$\begin{cases} z = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \quad |x| \leq 1.$$

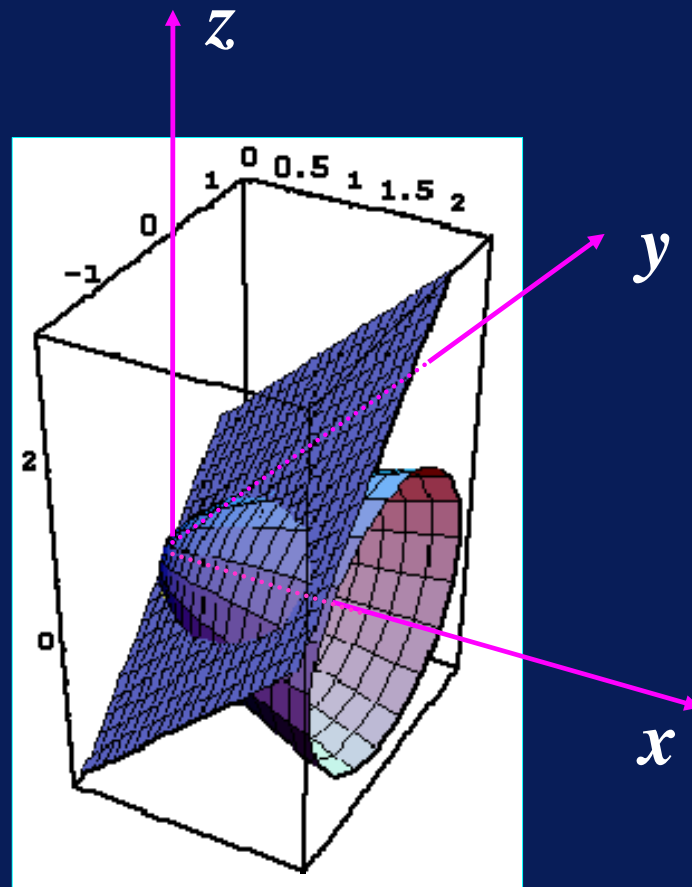


例7 求抛物面 $y^2 + z^2 = x$ 与平面 $x + 2y - z = 0$ 的截线在三个坐标面上的投影曲线方程。

解 截线 C 的方程为：

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

如图，



(1) 消去 z , 得 C 在 xOy 面上的投影:

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 + 4xy - x = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

(2) 消去 y , 得 C 在 zOx 面上的投影:

$$\begin{cases} x^2 + 5z^2 - 2xz - 4x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

(3) 消去 x , 得 C 在 yOz 面上的投影:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 + 2y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

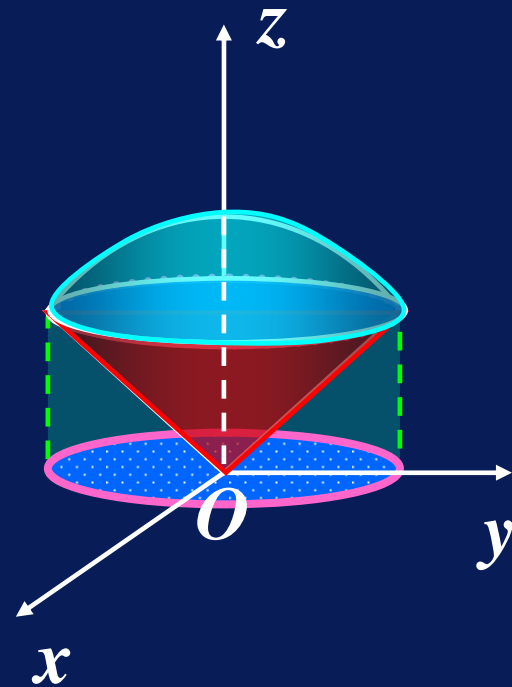


例8 设一个立体,由上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 和 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 锥面所围成,求它在 xoy 面上的投影.

解 半球面和锥面的交线为

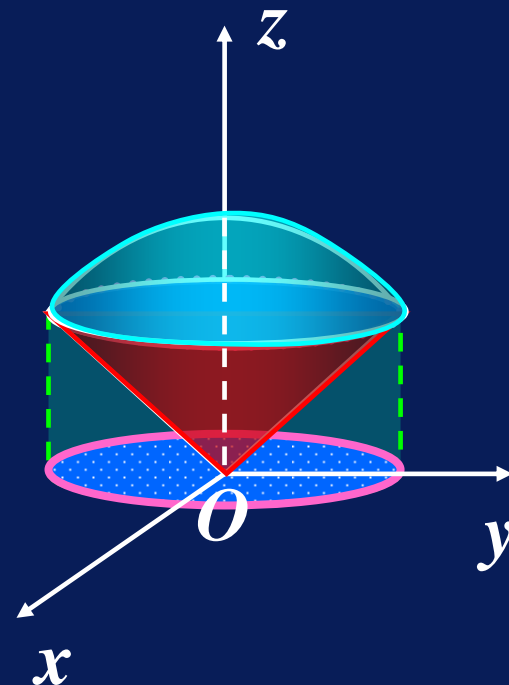
$$C: \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}, \end{cases}$$

消去 z 得投影柱面 $x^2 + y^2 = 1$,



则交线 C 在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases} \quad \text{一个圆,}$$



\therefore 所求立体在 xOy 面上的投影 D_{xy} 为：

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$



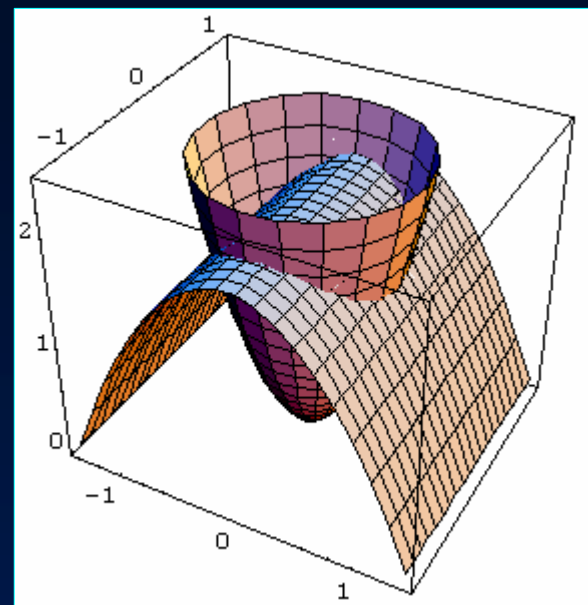
三、同步练习

求椭圆抛物面 $2y^2 + x^2 = z$ 与抛物柱面 $2 - x^2 = z$ 的交线关于 xoy 面的投影柱面和在 xoy 面上的投影曲线方程.



四、同步练习解答

交线方程为
$$\begin{cases} 2y^2 + x^2 = z \\ 2 - x^2 = z \end{cases},$$



消去 z 得投影柱面 $x^2 + y^2 = 1$,

在 xoy 面上的投影为
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

