第十一章　无穷级数

第一节　常数项级数的基本概念和性质

习题　11-1

1. 写出下列级数的一般项 u_n：

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots$;　　(2) $\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^3}{5}+\dfrac{a^4}{8}-\dfrac{a^5}{11}+\cdots$;

(3) $\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{x}{2\cdot 4}+\dfrac{x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{x^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$;

(4) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{9}+\dfrac{9}{27}-\dfrac{16}{81}+\cdots$.

解　(1) $u_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\ (n=1,2,\cdots)$.

(2) $u_n=(-1)^{n+1}\dfrac{a^{n+1}}{3n-1}\ (n=1,2,\cdots)$.

(3) $u_n=\dfrac{x^{\frac{n}{2}}}{2^n\cdot n!}\ (n=1,2,\cdots)$.

(4) $u_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3^n}\ (n=1,2,\cdots)$.

2. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性. 对收敛级数, 求出其和:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n-1}{n}$;

(3) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{13}{36}+\cdots+\dfrac{2^n+3^n}{6^n}+\cdots$;　　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

解　(1)　因为 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}[(1-\frac{1}{6})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+\cdots+(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1})]=\frac{1}{5}$，所以原级数收敛, 并收敛于 $\dfrac{1}{5}$.

(2)　因为

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}[(\ln 1-\ln 2)+(\ln 2-\ln 3)+\cdots+(\ln(n-1)-\ln n)] = \lim_{n\to\infty}[\ln 1-\ln n]=\infty,$$

所以原级数发散.

(3) 因为 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}[(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})+(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2})+\cdots+(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n})]=\frac{3}{2}$, 所以原级数收敛, 并收敛于 $\frac{3}{2}$.

(4) 因为

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} S_n\\ &=\lim_{n\to\infty}\{[(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})]+[(\sqrt{4}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})]+\cdots\\ &\quad+[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]\}\\ &=\lim_{n\to\infty}[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})]=\lim_{n\to\infty}[(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}})-(\sqrt{2}-1)]=1-\sqrt{2},\end{aligned}$$

所以原级数收敛, 并收敛于 $1-\sqrt{2}$.

3. 判别下列级数的敛散性, 并求出其中收敛级数的和:

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$;

(3) $-\frac{4}{5}+\frac{4^2}{5^2}-\frac{4^3}{5^3}+\cdots+(-1)^n\frac{4^n}{5^n}+\cdots$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$;

(5) $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\cdots$;

(6) $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})+\cdots+(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n})+\cdots$;

(7) $\frac{1}{1+1}-\frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{(1+\frac{1}{3})^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}+\cdots$;

(8) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}+\cdots$.

解 (1) 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$, 而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 所以原级数发散.

(2) 原级数的通项 $u_n=\cos\frac{\pi}{n}\to 1(n\to\infty)$, 所以原级数发散.

(3) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}[-\frac{4}{5}+\frac{4^2}{5^2}-\frac{4^3}{5^3}+\cdots+(-1)^n\frac{4^n}{5^n}] = \lim\limits_{n\to\infty}[\frac{-\frac{4}{5}(1-(-\frac{4}{5})^n)}{1+\frac{4}{5}}] = -\frac{4}{9}$,

所以原级数收敛，且其和为 $(-\frac{4}{9})$.

(4) 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$ 收敛，其和为 3，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$ 也收敛，其和为 $(-\frac{1}{3})$，所以原级数收敛，其和为 $\frac{8}{3}$.

(5) 原级数的通项 $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \to 1(n\to\infty)$，所以原级数发散.

(6) 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，其和为 1，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 也收敛，其和为 $\frac{1}{2}$，所以原级数收敛，其和为 $\frac{1}{2}$.

(7) 原级数的通项 $u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 不存在，所以原级数发散.

(8) 因为添加括号后原级数变为

$$(1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^3})+\cdots+(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n})+\cdots,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，所以原级数发散.

4. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 中有一个收敛，另一个发散，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 必发散. 如果所给两个级数均发散，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 是否必发散？

证 不妨设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，且假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则根据收敛级数的性质 3 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(u_n+v_n)-u_n] = \sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，从而与条件矛盾，故级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 必发散.

如果所给两个级数均发散，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 不一定发散．反例:

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 均发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}0$ 收敛.