第二章　导数与微分

第一节　导数的概念

习题　2-1

1.　当物体的温度高于周围介质的温度时，物体就不断冷却. 若物体的温度T与时间t的函数关系为$T=T(t)$，应怎样确定该物体在时刻t的冷却速度?

解　该物体在时刻t的冷却速度为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}.$$

2.　设对 1 g 质量的物体加热，使他的温度从 0℃升高到t℃，这物体吸收的热量为$q=q(t)$，求物体在温度t_0℃时的比热(比热是1 g 物体温度升高1℃所需的热量).

解　物体在温度t_0℃时的比热为

$$\left.\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t_0+\Delta t)-q(t_0)}{\Delta t}.$$

3.　自由落体的运动规律为$s=\dfrac{1}{2}gt^2$，其中g是重力加速度，求

(1)　物体在$3s$到$4s$这一时段的平均速度;

(2)　物体在$3s$时的瞬时速度.

解　(1)　物体在$3s$到$4s$这一时段的平均速度为

$$\overline{v}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g4^2-\frac{1}{2}g3^2}{4-3}=\frac{7}{2}g\ (\mathrm{m/s}).$$

(2)　物体在$3s$时的瞬时速度为

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g(3+\Delta t)^2-\frac{1}{2}g3^2}{\Delta t}=3g\ (\mathrm{m/s}).$$

4.　证明　$(\cos x)'=-\sin x$.

证 $(\cos x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-2\sin(\dfrac{2x+\Delta x}{2})\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} -\sin(\frac{2x+\Delta x}{2})\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x .$$

5. 假设 $f'(x_0)$ 存在，按照导数的定义求下列极限:

(1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$; (2) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + 3h) - f(x_0)}{h}$;

(3) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$; (4) $\lim\limits_{n \to \infty} n[f(x_0 + \dfrac{1}{2n}) - f(x_0)]$.

解 (1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} = -f'(x_0)$.

(2) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + 3h) - f(x_0)}{h} = 3\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + 3h) - f(x_0)}{3h} = 3f'(x_0)$.

(3) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = 2f'(x_0) .$$

(4) $\lim\limits_{n \to \infty} n[f(x_0 + \dfrac{1}{2n}) - f(x_0)] = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_0 + \frac{1}{2n}) - f(x_0)}{\frac{1}{2n}} = \dfrac{1}{2} f'(x_0)$.

6. 设 $f(0) = 0$，且 $f'(0)$ 存在，求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$.

7. 求下列函数的导数:

(1) $y = \sqrt[3]{x^2}$; (2) $y = x^3 \cdot \sqrt[5]{x}$; (3) $y = \dfrac{x^2 \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5}}$; (4) $y = \mathrm{e}^{2x}$.

解 (1) $y' = (x^{\frac{2}{3}})' = \dfrac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$; (2) $y' = (x^{\frac{16}{5}})' = \dfrac{16}{5} x^{\frac{11}{5}}$;

(3) $y' = (x^{-\frac{1}{6}})' = -\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}$;　　(4) $y' = [(e^2)^x]' = (e^2)^x \ln e^2 = 2e^{2x}$.

8. 如果 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明 $f'(0)=0$.

证　因为

$$f'(0) = f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x},$$

$$f'(0) = f'_-(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x},$$

所以 $f'(0) = -f'(0)$，即 $f'(0)=0$.

9. 求曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

解　曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的斜率为 $y'\big|_{x=0} = e^x\big|_{x=0} = 1$，切线的方程为 $y-1=(x-0)$，即 $x-y+1=0$.

10. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点，作过这两点的割线，问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线?

解　割线的斜率为 $k=\frac{3^2-1^2}{3-1}=4$，设所求的点为 (x_0, x_0^2)，由题意知 $y'\big|_{x=x_0} = 2x_0 = 4$，故而所求的点为 $(2,4)$.

11. 讨论下列函数在点 $x=0$ 处的连续性与可导性:

(1) $y=|\sin x|$;　　(2) $y=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

解　(1) $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处连续，因为

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin x}{x} = -1 \neq f'_+(0),$$

所以 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0$，所以函数在 $x=0$ 处连续. 另外

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0,$$

故而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

12. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1, \\ ax+b, & x>1. \end{cases}$$

为了使函数在点 $x=1$ 处连续且可导，常数 a,b 应取什么值?

解 因为

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+} ax+b=a+b\,,\quad f(1-0)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1\,,$$

所以由函数在点 $x=1$ 处连续条件知，$a+b=1$，即 $b-1=-a$．另外

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax-a}{x-1}=a\,,\quad f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2\,,$$

所以由函数在点 $x=1$ 处可导的条件知，$a=2,\ b=-1$.

13. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 求 $f'_+(0)$ 及 $f'_-(0)$，又 $f'(0)$ 是否存在?

解 由于 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-0}{x-0}=0,\quad f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x-0}=-1$，所以 $f'(0)$ 不存在.

14. 已知 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ x, & x\ge 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解 当 $x<0$ 时，$f'(x)=(\sin x)'=\cos x$；当 $x>0$ 时，$f'(x)=(x)'=1$；当 $x=0$ 时，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x-0}=1,\ \ f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x-0}{x-0}=1$，从而 $f'(0)=1$.

故而 $f'(x)=\begin{cases} \cos x, & x<0, \\ 1, & x\ge 0. \end{cases}$