第五章　定积分

第一节　定积分的概念及性质

1.　用定义计算 $\int_0^1 a^x \mathrm{d}x \ (a>1)$ 时，将 $[0,1]$ 分成 $\underline{n}$ 等分，取子区间的左端点为

$\xi_i = \underline{\dfrac{i-1}{n}}$，则 $f(\xi_i)\Delta x_i = \underline{a^{\frac{i-1}{n}} \cdot \dfrac{1}{n}}$，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \underline{\sum_{i=1}^{n} a^{\frac{i-1}{n}} \cdot \dfrac{1}{n}}$，

于是

$$\int_0^1 a^x \mathrm{d}x = \underline{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a^{\frac{i-1}{n}} \cdot \frac{1}{n}} = \underline{\frac{1}{\ln a}}(a-1)$$

2.函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在下列区间上是否可积？为什么？

在 $[-1,1]$ 上<u>否</u>；在 $[2,3]$ 上<u>可以</u>.

解　否，因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上无界.

可以，因为在 $[2,3]$ 上连续.

注意　第一个空常错填为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.产生错误的原因是误认为函数不连续就不可积.

3.试用定积分表示：

(1)曲线 $y=\sin x, x\in[0,\pi]$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $\underline{\int_0^{\pi}\sin x \,\mathrm{d}x}$；

(2)曲线 $y=\cos x, x\in[0,\pi], x=0, x=\pi$ 及 x 轴所围成图形的面积 $\underline{\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x}$.

解　(1)由定积分的几何意义，因当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\sin x\ge 0$，所以所求面积为 $\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$.

(2)当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时，$\cos x\ge 0$，当 $x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi]$ 时，$\cos x\le 0$，故所求面积可表示

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x$$

或者 $\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$.

4.估计下列各式积分的值：

(1) $\int_0^{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}x}{10+3\cos x}$；　　　　(2) $\int_1^0 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$；

解　(1)令 $f(x)=\dfrac{1}{10+3\cos x}$.由于 $\cos x$ 的周期性，可知 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的最大值 $M=f(\pi)=\dfrac{1}{7}$，最小值 $m=f(0)=\dfrac{1}{13}$，从而根据估值定理，有

$$\frac{2}{13}\pi\le\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{10+3\cos x}\le\frac{2}{7}\pi.$$

(2)令 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$. $f'(x)=2x\mathrm{e}^{x^2}>0, x\in(0,1)$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最大值 $M=f(1)$

$=\mathrm{e}$, 最小值 $m=f(0)=1$, 从而有 $1\le\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\le \mathrm{e}$, 故

$$-\mathrm{e}\le\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\le -1.$$

第二节　微积分基本定理

1.填空.

(1)若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, x_0 为 (a,b) 内任一固定点,则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t=\underline{0}$.

(2)设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$,则 $f(x)$ 的一个原函数 $\underline{F(x)=\int_a^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}$.

(3)若函数 $f(x)$ 具有连续的导数,则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x (x-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=\underline{f(x)-f(0)}$.

(4)设函数 $\Phi(x)=\int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, 则 $\Phi'(x)=\underline{x\,\mathrm{e}^{-x}}$; $\Phi(x)$ 的驻点为 $x=\underline{0}$,极值点为 $\underline{0}$,极值为 $\underline{0}$.

(5)设由 $\int_0^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t=0$ 确定 y 是 x 的函数,则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\underline{\dfrac{\cos x}{\sin x-1}}$.

解 (1)因为 x_0 为 (a,b) 内的固定点,所以 $\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$ 为定积分.从而 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t=0$.
常见的错误是 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t=f(x_0)$.原因误认为 x_0 为变量 x ,从而按积分上限函数求导.

(2)由原函数的存在定理知 $F(x)=\int_a^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

(3)令 $F(x)=\int_0^x (x-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t$ ，则

$$F'(x)=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t+xf'(x)-xf'(x)=f(x)\big|_0^x=f(x)-f(0).$$

注意　常见错解为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x (x-t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right)=(x-x)f'(x)=0.$$

产生错误的原因是不清楚 $\int_0^x (x-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ 中变量 x 和 t 的区别,在 $\int_0^x (x-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ 中, x 对积分过程而言是常数,而积分结果 $\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 x 的函数; t 为积分变量,其取值范围为 $[0,x]$,故对 x 求导时,不能直接用替换积分变量的办法.

(4) $\Phi'(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}$,令 $\Phi'(x)=0$,则得驻点为 $x=0$,当 $x<0$ 时, $\Phi'(x)<0$,当 $x>0$ 时, $\Phi'(x)>0$,则极值点为 $x=0$;又 $\Phi'(0)=\int_0^0 te^{-t}\,\mathrm{d}t=0$,故极值为 0.

(5) $\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos x=0$,则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\cos x}{\mathrm{e}^y}$.

另一方面 $\int_0^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^y-1+\sin x=0$,得 $\mathrm{e}^y=1-\sin x$,故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\cos x}{\sin x-1}$.

2.将下列极限表示为定积分,并求其值:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi\right).$$

解　由定积分的定义知,若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则可对 $[a,b]$ 用某种特定的分法,并取特殊的点,所得积分和的极限就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分.因此,遇到求一些和式的极限时,若能将其化为某个可积函数的积分和,就可用定积分求此极限.分析和式

$$\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

的特点,若将其化为积分和,可视被积函数为 $\sin\pi x$,而分点 $\frac{1}{n}$ 和 $\frac{n-1}{n}$ 其极限分别为 0 和 1,即知积分区间为 $[0,1]$.将区间 $[0,1]$ 作 n 等分,取 ξ_i 为 $[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$ 的左端点,于是 $\sin\pi x$ 相应的积分和就是本题的和式.由于 $\sin\pi x$ 在 $[0,1]$ 上连续,从而可积,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

用定积分求此类和式极限的关键是仔细分析所求和式,选择适当的函数与积分区间,把和式极限转化为定积分,在利用牛顿—莱布尼茨公式计算出结果.

3.计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{\ln(1+x)}$;　　　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin^{3/2}t\,\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\,\mathrm{d}t}$.

解　(1)原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x^2}{1}=1$.

(2)原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin^{3/2}(x^2)}{x(x-\sin x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cdot3x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x^2}{(1/2)x^2}=12$.

4.利用牛顿—莱布尼茨公式计算下列的定积分:

(1) $\int_{-1}^1(1-|x|)\,\mathrm{d}x$;　(2)设 $f(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x^2}, & x\ge0,\\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0.\end{cases}$

计算 $\int_1^4 f(x-2)\,\mathrm{d}x$.

解　**法 1**　原式 $=2\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x=2(1-\frac{1}{2})=1$.

法 2　原式 $=\int_{-1}^0[1-(-x)]\,\mathrm{d}x+\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x=1$.

(2)设 $x-2=t$,则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$,且当 $x=1$ 时, $t=-1$;当 $x=4$ 时, $t=2$.于是

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x-2)\,\mathrm{d}x&=\int_{-1}^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t}+\int_0^2 t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^0\sec^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}(-t^2)\\&=\tan\frac{t}{2}\Big|_{-1}^0-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\Big|_0^2=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5. 计算下列各定积分：

(1) $\int_{-e-1}^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$;　　(2) $\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt{2+x}}\mathrm{d}x$;　　(3) $\int_{1}^{4}\left|t^2-3t+2\right|\mathrm{d}t$.

解　(1)原式 $=\ln|1+x|\Big|_{-e-1}^{-2}=\ln 1-\ln e=-1$.

(2)**法 1**　原式 $=\int_{-1}^{0}\frac{x+2-2}{\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(\sqrt{2+x}-\frac{2}{\sqrt{2+x}}\right)\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{2}{3}(2+x)^{\frac{3}{2}}-4\sqrt{2+x}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{10}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

法 2　先求 $\int\frac{x}{\sqrt{2+x}}\mathrm{d}x=2x\sqrt{2+x}-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+C$.

故　原式 $=\left[2x\sqrt{2+x}-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0}=\frac{10}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

(3)因为 $t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$, 所以

原式 $=\int_{1}^{2}-(t^2-3t+2)\mathrm{d}t+\int_{2}^{4}(t^2-3t+2)\mathrm{d}t=\frac{29}{6}$.

6. 已知 $\varphi(x)$ 为连续函数, 令

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)\mathrm{d}u]\mathrm{d}t}{\ln(1+x^2)}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

试讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　利用 $\ln(1+x^2)\sim x^2$ 及洛必达法则,可得

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)\int_0^{x^2}\varphi(u)\mathrm{d}u}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\varphi(u)\mathrm{d}u}{2x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{2x\varphi(x^2)}{2}=0=f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

7.设 $f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x\le 0,\\ e^{-x}, & x>0.\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[-1,+\infty)$ 内的表达式.

解　当 $-1\le x\le 0$ 时, $F(x)=\int_{-1}^{x}\mathrm{d}t=x+1$;

当 $x>0$ 时,

$$F(x)=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}e^{-t}\mathrm{d}t=1-e^{-t}\Big|_0^x=1-e^{-x}+1=2-e^{-x}.$$

所以
$$F(x)=\begin{cases}x+1, & -1\le x\le 0,\\ 2-e^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

8.设 $F(x)=\int_0^{x^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t$,试求

(1) $F(x)$ 的极值;　　(2)曲线 $y=F(x)$ 的拐点的横坐标.

解　(1) $F'(x)=2x\mathrm{e}^{-x^4}$,

$$F''(x)=2x\mathrm{e}^{-x^4}-8x^4\mathrm{e}^{-x^4}=2(1-4x^4)\mathrm{e}^{-x^4}.$$

令 $F'(x)=0$,得驻点 $x=0$,又

$$F''(0)=2>0,$$

故 $x=0$ 是 $F(x)$ 的极小值点,其极小值为 $F(0)=0$.

(2)由上述（1）,令 $F''(x)=0$,得 $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,则

当 $-\infty<x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $F''(x)<0$;

当 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $F''(x)>0$;

当 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<+\infty$ 时, $F''(x)<0$.

所以曲线 $y=F(x)$ 的拐点的横坐标为 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

第三节　定积分的换元积分法与分部积分法

1.填空.

(1)已知 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$,则 $\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x=\underline{2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x}=\underline{\dfrac{2}{3}}$.

(2) $\int_{-2}^2 x^3\cos x\,\mathrm{d}x=\underline{0}$.

(3)设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, $g(x)=f(x)-f(-x)$,则 $\int_{-a}^a g(x)\,\mathrm{d}x=\underline{0}$.

(4)设 $f(x)$ 具有二阶连续导数且 $f(0)=2,\ f(2)=3,\ f'(2)=5$,计算 $I=\int_0^1 xf''(2x)\,\mathrm{d}x=\underline{\dfrac{9}{4}}$.

(5)若 $f(x)$ 具有连续的导数,且 $\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=k$,则 $\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x=$ $\underline{-[f(\pi)+f(0)]+k}$.

解　(1)因为 $f(x)=x^2$ 在 $[-1,1]$ 上是偶函数,所以 $\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}$.

(2)因为 $f(x)=x^3\cos x$ 满足 $f(-x)=(-x)^3\cos(-x)=-f(x)$,所以 $\int_{-2}^2 x^3\cos x\,\mathrm{d}x$ =0.

(3)因为 $g(-x)=f(-x)-f(x)=-g(x)$,故 $\int_{-a}^a g(x)\,\mathrm{d}x=0$.

(4) $I=\int_0^1 x\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\,f'(2x)=\dfrac{x}{2}f'(2x)\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}[f(2)-f(0)]=\frac{9}{4}.$$

(5) $\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}f(x) = f(x)\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$

$$= -[f(\pi)+f(0)]+k.$$

2.若 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的偶函数,$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t$,证明 $F(x)$ 为偶函数.

证 $F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t$.令 $u=-t$,则 $t=0$ 时,$u=0$; $t=-x$ 时,$u=x$.从而

$$F(-x)=\int_0^x(-x+2u)f(-u)\,\mathrm{d}(-u)=\int_0^x(x-2u)f(u)\,\mathrm{d}u=F(x).$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

3.计算下列各定积分:

(1) $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$; (2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{1-\mathrm{e}^x}$; (4) $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{x^2+4})^3}$.

解 (1)原式$=-\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2 x}=-\arctan\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$.

(2)原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sqrt{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x=-2\cdot\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}$.

(3)**法 1** 原式$=\int_2^3\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}-1}\mathrm{d}x=-\ln\left|\mathrm{e}^{-x}-1\right|\Big|_2^3=\ln\left|\frac{\mathrm{e}^{-2}-1}{\mathrm{e}^{-3}-1}\right|$.

法 2 令 $t=\mathrm{e}^x$,

$$\text{原式}=\int_{\mathrm{e}^2}^{\mathrm{e}^3}\frac{\mathrm{d}t}{t(1-t)}=\int_{\mathrm{e}^2}^{\mathrm{e}^3}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=(-\ln|1-t|+\ln|t|)\Big|_{\mathrm{e}^2}^{\mathrm{e}^3}=\ln\left|\frac{\mathrm{e}(1-\mathrm{e}^2)}{1-\mathrm{e}^3}\right|.$$

(4)令 $x=2\tan t$,则 $\mathrm{d}x=2\sec^2 t\,\mathrm{d}t$,当 $x=0$ 时,$t=0$, $x=2$ 时,$t=\frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^2\frac{1}{(\sqrt{x^2+4})^3}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{(2\sec t)^3}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sec t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

4.设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,证明 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关.

证 1 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x+\int_T^{T+a} f(x)\,\mathrm{d}x$.而

$$\int_T^{T+a} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{令t=x-T}{=} \int_0^a f(T+t)\,\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

所以 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$,即 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$ 是与 a 无关的常数,其值为 $\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.

证 2 令 $F(a)=\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$,$a$ 为变量,则

$$F'(a)=f(a+T)-f(a)=f(a)-f(a)=0,$$

所以,$F(a)\equiv C$ 与 a 无关.

注意 常见的错误解法是设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $F(x)$ 也是以 T 为周期的连

续函数,所以

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^{a+T} = F(a+T)-F(a) = F(a)-F(a) = 0 .$$

大家知道：可导的周期函数的导数为周期函数,但其原函数不一定是周期函数.如 $f(x)=\cos x+1$ 是以 2π 为周期的,但其原函数 $F(x)=\sin x+x$ 不是周期函数.

5.设 $f(x)$ 连续,求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t$.

解　先对 $\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t$ 应用定积分的换元法.

令 $x^2-t^2=u$,则 $-2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$,$t\,\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$.又 $t=0$ 时,$u=x^2$,$t=x$ 时,$u=0$,故

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t = \int_{x^2}^0 f(u)(-\frac{1}{2}\mathrm{d}u) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,\mathrm{d}u ,$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x = xf(x^2) .$$

6.设 $I=\int_0^b x\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$,分别计算(1) $b>0$ 时; (2) $b<0$ 时 I 的值.

解　(1)当 $b>0$ 时,

$$I=\int_0^b x\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=\int_0^b x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x}\big|_0^b + \int_0^b \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1-\mathrm{e}^{-b}(1+b) .$$

(2) 当 $b<0$ 时,

$$I=\int_0^b x\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=\int_0^b x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{x}\big|_0^b - \int_0^b \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^b(b-1)+1 .$$

7.计算下列各定积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin 2t\,\mathrm{d}t$;　　(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$;

(3) $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

解　(1)原式 $=-\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\mathrm{d}\cos 2t = -\dfrac{1}{2}(t\cos 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} .$$

(2)原式 $= -x\cot x\big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot x\,\mathrm{d}x$

$$= -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi}{4}+\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} .$$

(3)令 $\sqrt{1-x}=t$,即 $x=1-t^2$,当 $x=0$ 时,$t=1$, 当 $x=1$ 时,$t=0$.

原式 $=\int_1^0 \mathrm{e}^t(-2t\,\mathrm{d}t) = 2\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2(t\,\mathrm{e}^t)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$

$$= 2\mathrm{e}-2\mathrm{e}^t\Big|_0^1 = 2\mathrm{e}-2(\mathrm{e}-1) = 2 .$$

(4) **法 1** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$

$$= \mathrm{e}^{\pi} + 2\mathrm{e}^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x,$$

移项整理得原式$=\frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi}-2)$.

法 2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{2}\cos x\,\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin x\,\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x,$$

移项整理得原式$=\frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi}-2)$.

8.设 $f''(x)$ 连续,且 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x = 5$,及 $f(\pi)=0$,求 $f(0)$ 的值.

解 法 1 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x$.而

$$\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x = f'(x)\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= -f(x)\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x)(-\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$= f(0) + f(\pi) - \int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x,$$

故$5 = f(0) + f(\pi)$,则 $f(0) = 5$.

法 2 原式$=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x$

$$= -\cos x f(x)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x + f'(x)\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= f(\pi) + f(0) = f(0) = 5,$$

故 $f(0) = 5$.

第五节 广义积分

1.证明:$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2}$.

证 法 1 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{\frac{1}{t}\ln^2\frac{1}{t}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t}$.而

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to+\infty}\int_2^{b}\frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}\ln x = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_2^{b} = \frac{1}{\ln 2}.$$

证　法2 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x\ln^2 x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln^2 x}=\frac{1}{\ln 2}$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}\,x}{x\ln^2 x}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}\ln x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_\varepsilon^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\ln 2}.$$

故 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x\ln^2 x}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}\,x}{x\ln^2 x}=\frac{1}{\ln 2}$.

2.将下列广义积分与其收敛时 k 的取值范围用线连接起来.

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x(\ln x)^k}$　　　　$a.0<k<1$

(2) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,x}{x^k}$　　　　b. $k>1$

(3) $\int_2^{+\infty}\mathrm{e}^{(k-1)x}\,\mathrm{d}\,x$

并写出第(1)题的解题过程.

解 (1)当 $k=1$ 时, $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x(\ln x)^k}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}\,x=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln\ln x\Big|_2^b=+\infty$.

当 $k\neq1$ 时,

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^k}\mathrm{d}\,x=\lim_{b\to+\infty}\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^k}\mathrm{d}\ln x$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-k}(\ln x)^{1-k}\Bigg|_2^b=\begin{cases}+\infty, & 0<k<1,\\ \dfrac{1}{(1-k)(\ln 2)^{k-1}}, & k>1.\end{cases}$$

所以 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x(\ln x)^k}\mathrm{d}\,x$ 当 $k>1$ 时收敛, $0<k\le1$ 时发散.

3.计算下列广义积分：

(1) $\int_1^2\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$;　(2) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;　(3) $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+4x+9}$.

解 (1) $x=1$ 为瑕点,故

$$\int_1^2\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{-x^2+4x-3}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-(x-2)^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin(x-2)\Big|_{1+\varepsilon}^2=\frac{\pi}{2}.$$

(2) $x=1$ 为瑕点,故

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\,x}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

而

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\mathrm{d}\,x\overset{\sqrt{1-x}=t}{=}\int_1^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{-2t\,\mathrm{d}\,t}{(1+t^2)t}=-2\int_1^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\mathrm{d}\,t}{1+t^2}$$

$$=-2\arctan t\Big|_1^{\sqrt{\varepsilon}}=2(\arctan1-\arctan\sqrt{\varepsilon}).$$

故 $$原式=\lim_{\varepsilon\to0^+}2\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\sqrt{\varepsilon}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

(3) $I=\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+4x+9}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+4x+9}$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+5}+\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+5}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Bigg|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\arctan\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

第五章　定积分（总习题）

1.设 $g(x)$ 处处连续,且 $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=2$, $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)\,\mathrm{d}t$,则 $f'(x)=$ $\underline{x\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t}$, $f''(x)=\underline{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}$, $f''(1)=\underline{2}$.

解 $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x^2-2xt+t^2)g(t)\,\mathrm{d}t$

$$=\frac{x^2}{2}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t-x\int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^x t^2 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

故 $f'(x)=x\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t+\frac{x^2}{2}g(x)-\int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t-x^2 g(x)+\frac{1}{2}x^2 g(x)$

$$=x\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t.$$

$f''(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t+xg(x)-xg(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$;

$f''(1)=\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t=2$.

注意 常见错误 $f'(x)=(x-x)^2 g(x)=0$.产生错误的原因混淆了 x 与 t 的区别,在

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)\,\mathrm{d}t$$

中,x 对积分过程而言是常数,而积分结果是 x 的函数,故对 x 求导时,应将被积函数中的 x 分离出来,使被积表达式中仅含积分变量 t.

2.设 $F(x)=\int_0^x \sin^n t\,\mathrm{d}t$（$n$ 为奇数）,证明 $F(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数.

证 只需证 $F(x+2\pi)=F(x)$ 即可.

$$F(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi}\sin^n t\,\mathrm{d}t=\int_0^x \sin^n t\,\mathrm{d}t+\int_x^{x+2\pi}\sin^n t\,\mathrm{d}t$$

$$=F(x)+\int_0^{2\pi}\sin^n t\,\mathrm{d}t.$$

下面说明 $\int_0^{2\pi}\sin^n t\,\mathrm{d}t=0$.

令 $t-\pi=u$ 换元,有

$$\int_0^{2\pi}\sin^n t\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n(u+\pi)\,\mathrm{d}u=\int_{-\pi}^{\pi}(-\sin u)^n\,\mathrm{d}u,$$

由于 n 为奇数,所以 $(-\sin u)^n=-\sin^n u$ 为奇函数,从而

$$\int_0^{2\pi}\sin^n t\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}(-\sin u)^n\,\mathrm{d}u=0,$$

因此$F(x+2\pi)=F(x)$.得证.

3.计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$.

解 (1)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{p+1}$.

(2)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4-(\frac{i}{n})^2}}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x=\arcsin\dfrac{x}{2}\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{6}$.

4.设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=f(0)$,证明在$(0,1)$内存在一点$C$,使$f'(C)=0$.

证 由定积分中值定理知,在$[\dfrac{2}{3},1]$上存在一点C_1,使

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}f(C_1),$$

从而有 $f(C_1)=f(0)$,

故$f(x)$在区间$[0,C_1]$上满足罗尔定理的条件,因此在$(0,C_1)$内存在一点C,使

$$f'(C)=0,\ C\in(0,C_1)\subset(0,1).$$

5.计算下列定积分:

(1) $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^1 x(\arctan x)^2\,\mathrm{d}x$.

解 (1)原式=$\int_0^{100\pi}\sqrt{2}|\sin x|\,\mathrm{d}x$,因$|\sin x|$是以$\pi$为周期的,故

原式=$100\int_0^{\pi}\sqrt{2}|\sin x|\,\mathrm{d}x=100\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=200\sqrt{2}$.

(2)原式$=(\arctan x)^2\cdot\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1-\int_0^1 x^2\arctan x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi^2}{32}-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^2}{32}-\int_0^1\arctan x\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^2}{32}-x\arctan x\Big|_0^1+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}(\arctan x)^2\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

6.设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,且$f(x)>0, F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^x\dfrac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t, x\in[a,b]$,

证明：(1) $F'(x)\ge 2$；(2)方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一根.

证 (1) $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\ge 2\sqrt{f(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}}=2$.

(2)由 $F'(x)\ge 2$ 知, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调.故 $F(x)$=0 在 (a,b) 内至多有一根.

另一方面, $F(a)=\int_b^a\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$, $F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$,又 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,由零点定理知, $F(x)$=0 在 (a,b) 内至少有一根.综上所述, $F(x)$=0 在 (a,b) 内有且仅有一根.

7.确定常数 a,b,c 的值,使

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\qquad (c\ne 0).$$

分析 当 $x\to 0$ 时, $ax-\sin x\to 0$,且

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}$$

存在而不为零,故

$$\lim_{x\to 0}\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0.\qquad (*)$$

因此 b 必为 0 .因若 $b>0$,则在 $(0,b]$ 内 $\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}>0$;若 $b<0$,则在 $[b,0)$ 内

$$\frac{\ln(1+t^3)}{t}>0,$$

式 $(*)$ 均不成立.确定了 b 之后,可再用罗必达法则确定 a 与 c .

解 由于 $x\to 0$ 时, $ax-\sin x\to 0$,且

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\ne 0,$$

故 $b=0$,再由罗必达法则,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}.$$

若 $a\ne 1$,则上式为 ∞ ,与条件不符,故 $a=1$,从而再用罗必达法则（或用等价无穷小代换）,得 $c=\dfrac{1}{2}$.

8.已知 $\int_0^{\pi}\dfrac{\cos x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=A$,求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x}{x+1}\mathrm{d}x$.

解 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{x+1}\mathrm{d}x\overset{令u=2x}{=}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos u}{u+2}\bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\cos u}{(u+2)^2}\mathrm{d}u\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi+2}-A\right).$$

9.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续、可导,不恒为零, $f^2(x)=\int_0^x f(t)\dfrac{\sin t}{2+\cos t}\mathrm{d}t$,求 $f(x)$.

解 **法 1** 方程式对两端对 x 求导,得

$$2f(x)f'(x)=f(x)\cdot\frac{\sin x}{2+\cos x},$$

因 $f(x)$ 不恒为零,故 $f'(x)=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{2+\cos x}$.

$$f(x)=\int\frac{1}{2}\frac{\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln(2+\cos x)+C.$$

又因 $f(0)=0$,故 $C=\frac{1}{2}\ln 3$.所以 $f(x)=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln(2+\cos x)$.

解 法2 由 $2f(x)f'(x)=f(x)\cdot\frac{\sin x}{2+\cos x}$,得 $f'(x)=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{2+\cos x}$,则

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln(2+\cos x)\Big|_0^x\\&=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln(2+\cos x).\end{aligned}$$

注意 要善于在方程式中挖掘条件 $f(0)=0$,否则会得出 $f(x)=-\frac{1}{2}(2+\cos x)+C$ 不完善的解.

10.设函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$,

(1)证明 $F(x)$ 为偶函数;

(2)求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,并说明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

解 (1) $f(-x)=(-x)\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^{-x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=f(x)$,

所以 $f(x)$ 是偶函数.因此只需要在 $[0,+\infty)$ 上证明 $f(x)$ 有界即可.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{x}\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2\mathrm{e}^{x^2}-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2-\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.

因此 $\exists X>0$,当 $x>X$ 时,$|f(x)|<1$.

又 $f(x)\in C[0,X]$,$\exists M_1>0$,当 $x\in[0,X]$ 时,$|f(x)|\le M_1$,取 $M=\max\{1,M_1\}$,则 $\forall x\in[0,+\infty]$,有 $|f(x)|\le M$,实际上 $f(x)\ge 0$.由(1)知,

$$0\le f(x)\le M.$$

11.设 $\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$,求 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

解 应用分部积分法和变上限积分函数的性质进行计算.

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 x\left(\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)\\&=\left[\frac{x^2}{2}\left(\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\right]\Bigg|_0^1-\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x\\&=0-\frac{1}{4}\left(\int_0^1\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x^4\right)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x^4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-1}-1).\end{aligned}$$

12.计算$\int_0^{+\infty}\dfrac{x^{\frac{n}{2}}}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}\,x \quad (n>-2)$.

解 $$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{n}{2}}}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}\,x=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{2}{n+2}\frac{\mathrm{d}\,x^{\frac{n+2}{2}}}{1+x^{n+2}}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{2}{n+2}\arctan x^{\frac{n+2}{2}}\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{2}{n+2}\arctan b^{\frac{n+2}{2}}$$

$$=\frac{2}{n+2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{n+2}$$ （因$n>-2$故$n+2>0$）.

13.求$I=\int_1^3\dfrac{x}{2-x^3}\,\mathrm{d}\,x$.

解 $x=\sqrt{2}$为无穷间断点,则

$$I=\int_1^3\frac{x}{2-x^2}\,\mathrm{d}\,x=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{x}{2-x^2}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\sqrt{2}}^3\frac{x}{2-x^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

而

$$\int_1^{\sqrt{2}}\frac{x}{2-x^2}\,\mathrm{d}\,x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{\sqrt{2}-\varepsilon}\frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\,x^2}{2-x^2}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{2}\ln\left|2-x^2\right|\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}-\varepsilon}=+\infty.$$

所以原广义积分发散.

注意 常见的错误有,一是忽视了$x=\sqrt{2}$为无穷间断点,把广义积分与常义积分混为一谈而得出$\int_1^3\dfrac{x}{2-x^2}\,\mathrm{d}\,x=-\dfrac{1}{2}\ln\left|2-x^2\right|\Big|_1^3=-\dfrac{1}{2}\ln 7$;二是知$x=\sqrt{2}$为无穷间断点而将

$$I=\int_1^3\frac{x}{2-x^2}\,\mathrm{d}\,x=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{x}{2-x^2}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\sqrt{2}}^3\frac{x}{2-x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_1^{\sqrt{2}-\varepsilon_1}\frac{x}{2-x^2}\,\mathrm{d}\,x+\lim_{\varepsilon_2\to0}\int_{\sqrt{2}+\varepsilon_2}^3\frac{x}{2-x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

中ε_1与ε_2看作一个,而得出$-\dfrac{1}{2}\ln 7$的错误结果.