# 第六节　高斯公式　通量与散度

## 习题　10-6

1. 利用高斯公式计算下列曲面积分:

(1) $\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的内侧;

(2) $\oiint\limits_{\Sigma}(4xz+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x+z)y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $\Sigma$ 是平面 $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=1$ 所围成的正方体的表面外侧;

(3) $\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (y-z)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $\Sigma$ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0,\ z=3$ 所围成的空间闭区域 $\Omega$ 的整个边界表面的外侧;

(4) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $\Sigma$ 为抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 在 $z\geq 0$ 部分的上侧;

(5) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$, 其中 $\Sigma$ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=h\,(h>0)$ 之间的部分的上侧, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 $\Sigma$ 在点 $(x,y,z)$ 处的法向量的方向余弦;

(6) $\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $\Sigma$ 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 截下的有限部分, 法向量与 $z$ 轴正向成钝角.

**解**　(1)　$\Sigma$ 如图 10.43 所示, 设 $\Omega$ 为 $\Sigma$ 所围的空间闭区域($\Sigma$ 为 $\Omega$ 的负向边界), 则利用高斯公式, 有

$$\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= -\iiint\limits_{\Omega} 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$
$$= -3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\mathrm{d}r = -\frac{12}{3}\pi R^5.$$

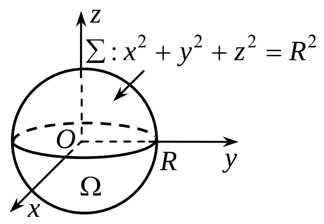

图 10.43

(2)　$\Sigma$ 如图 10.44 所示, 设 $\Omega$ 为 $\Sigma$ 所围的空间闭区域($\Sigma$ 为 $\Omega$ 的正向边界), 则有

$$\oiint\limits_{\Sigma}(4xz+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x+z)y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega}(4z-y)\mathrm{d}v$$

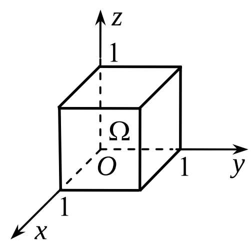

图 10.44

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 (4z-y)\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 (2-y)\mathrm{d}y = \frac{3}{2}.$$

(3)　$\sum$ 如图 10.45 所示，则有

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (y-z)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega} (0+y-z)\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \mathrm{d}\rho\int_0^3 (\rho\sin\theta - z)\rho\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 (3\rho^2\sin\theta - \frac{9}{2}\rho)\mathrm{d}\rho = -\frac{9}{2}\pi.$$

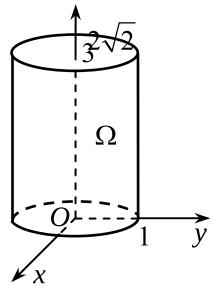

图 10.45

(4)　$\sum$ 如图 10.46 所示．$\sum$ 不封闭，添加有向圆盘面

$$\Sigma_1:\ z=0,\ x^2+y^2\le 1,\ \text{取下侧}.$$

记 $\sum$ 和 $\sum_1$ 所围的空间闭区域为 $\Omega$ ( $\sum$ 和 $\sum_1$ 为 $\Omega$ 的正向边界)，则有

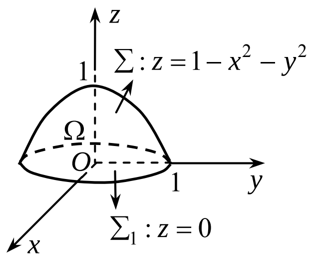

图 10.46

$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega} 3\mathrm{d}v - 0 = 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}\mathrm{d}z = \frac{3}{2}\pi.$$

(5)　$\sum$ 如图 10.47 所示，$\sum$ 不封闭，添加有向圆盘面

$$\Sigma_1:\ z=h,\ x^2+y^2\le h^2,\ \text{取下侧}.$$

设 $\Omega$ 为 $\sum$ 和 $\sum_1$ 所围成的空间闭区域( $\sum$ 和 $\sum_1$ 为 $\Omega$ 的负向边界)，$D$ 为 $\sum_1$ 在 $xOy$ 面上的投影区域，则有

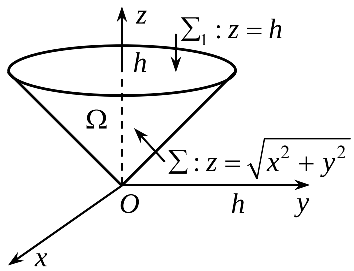

图 10.47

$$\iint_{\Sigma} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S - \iint_{\Sigma_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=-\iiint_{\Omega} 2(x+y+z)\mathrm{d}v - \iint_{\Sigma_1} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v + \iint_{D} h^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\rho\mathrm{d}\rho\int_\rho^h z\mathrm{d}z+h^2\cdot\pi h^2=\frac{1}{2}\pi h^4.$$

(6) $\sum$ 如图 10.48 所示, $\sum$ 不封闭, 添加有向圆盘面

$$\sum\nolimits_1:\ z=1,\ x^2+y^2\le 1,\ \text{取上侧}.$$

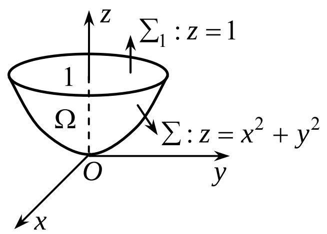

图 10.48

设 $\Omega$ 为 $\sum$ 和 $\sum_1$ 所围成的空间闭区域( $\sum$ 和 $\sum_1$ 为 $\Omega$ 的正向边界), $D$ 为 $\sum_1$ 在 $xOy$ 面上的投影区域, 则有

$$\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\mathrm{d}v-\iint\limits_{\Sigma_1}(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v-\iint\limits_{D}(1-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1\mathrm{d}z-\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.$$

2. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 $\sum$ 流向指定侧的通量:

(1) $\boldsymbol{A}=(2x+3z)\boldsymbol{i}-(xz+y)\boldsymbol{j}+(y^2+2z)\boldsymbol{k}$, $\sum$ 是以点 $(3,-1,2)$ 为球心, 半径 $R=3$ 的球面, 流向外侧;

(2) $\boldsymbol{A}=x(y-z)\boldsymbol{i}+y(z-x)\boldsymbol{j}+z(x-y)\boldsymbol{k}$, $\sum$ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, 流向内侧;

(3) $\boldsymbol{A}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$, $\sum$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 位于第一卦限的部分, 流向凸的一侧.

**解** (1) 设 $\Omega$ 为 $\sum$ 所围的空间闭区域( $\sum$ 为 $\Omega$ 的正向边界), 则利用高斯公式, 向量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 $\sum$ 流向指定侧的通量为

$$\oiint\limits_{\Sigma}(2x+3z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(xz+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2-1+2)\mathrm{d}v=3\times\frac{4}{3}\pi\times 3^3=108\pi.$$

(2) 设 $\Omega$ 为 $\sum$ 所围的空间闭区域( $\sum$ 为 $\Omega$ 的负向边界), 则利用高斯公式, 向量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 $\sum$ 流向指定侧的通量为

$$\oiint_{\Sigma} x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= -\iiint_{\Omega}(y-z+z-x+x-y)\mathrm{d}v = -\iiint_{\Omega} 0\mathrm{d}v = 0.$$

(3) 向量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 $\Sigma$ 流向指定侧的通量为
$$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$\Sigma$ 不封闭, 添加三个有向圆盘面(如图 10.49 所示):

$\Sigma_1$: $z=0$, $x^2+y^2 \le a^2$, 取下侧;

$\Sigma_2$: $x=0$, $y^2+z^2 \le a^2$, 取后侧;

$\Sigma_3$: $y=0$, $x^2+z^2 \le a^2$, 取左侧.

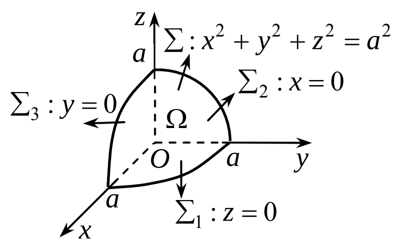


图 10.49

设 $\Omega$ 为 $\Sigma$ 和 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ 所围成的空间闭区域( $\Sigma$ 和 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ 构成 $\Omega$ 的正向边界), 则有
$$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Sigma_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$-\iint_{\Sigma_2} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Sigma_3} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iiint_{\Omega} 2(x+y+z)\mathrm{d}v - 0 - 0 - 0$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a (r\sin\varphi\cos\theta + r\sin\varphi\sin\theta + r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}a^4(\sin^2\varphi\cos\theta + \sin^2\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{1}{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{\pi}{4}(\cos\theta+\sin\theta) + \frac{1}{2}]\mathrm{d}\theta = \frac{3}{8}\pi a^4.$$

3. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度:

(1) $\boldsymbol{A} = \mathrm{e}^{xy}\boldsymbol{i} + \cos(xy)\boldsymbol{j} + \cos(xz^2)\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{A} = \mathbf{grad}r$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

**解** (1) 向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial \mathrm{e}^{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \cos(xy)}{\partial y}+\frac{\partial \cos(xz^2)}{\partial z}=y\mathrm{e}^{xy}-x\sin(xy)-2xz\sin(xz^2).$$

(2) $\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}r=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$，通过计算可知向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{2}{r}.$$

4. 求向量场 $\boldsymbol{A}=xyz\boldsymbol{r}$ 在点 $P(1,3,2)$ 处的散度，其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

**解** $\boldsymbol{A}=(x^2yz,xy^2z,xyz^2)$，从而所求的散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=(2xyz+2xyz+2xyz)\Big|_{\substack{x=1\\y=3\\z=2}}=6xyz\Big|_{\substack{x=1\\y=3\\z=2}}=36.$$

5. 证明:

$$\mathrm{div}(u\boldsymbol{A})=u\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{grad}u,$$

其中 $u=u(x,y,z)$ 为数值函数.

**证** 设 $\boldsymbol{A}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(u\mathbf{A})&=\frac{\partial[u(x,y,z)P(x,y,z)]}{\partial x}+\frac{\partial[u(x,y,z)Q(x,y,z)]}{\partial y}+\frac{\partial[u(x,y,z)R(x,y,z)]}{\partial z}\\&=u(x,y,z)\left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\right)\\&\quad+P(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\\&=u\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{grad}u.\end{aligned}$$

6. 设 $u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$ 为数值函数，求

(1) $\mathrm{div}(u\mathbf{grad}u)$;

(2) $\mathrm{div}(u\mathbf{grad}v)$.

**解** (1) $\mathrm{div}(u\mathbf{grad}u)=\mathrm{div}(uu_x,uu_y,uu_z)$

$$=(u_x)^2+(u_y)^2+(u_z)^2+u(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$$

$$=\nabla u\cdot\nabla u+u\Delta u.$$

(2) $\mathrm{div}(u\mathbf{grad}v)=\mathrm{div}(uv_x,uv_y,uv_z)$

$$=u_xv_x+u_yv_y+u_yv_y+u(v_{xx}+v_{yy}+v_{zz})$$

$$=\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v.$$

7. 设 $\boldsymbol{a}$ 是常向量，$\partial\Omega^+$ 为任意的分片光滑闭曲面的外侧, 证明

$$\iint_{\partial\Omega^+} (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{e}_n)\mathrm{d}S = 0,$$

这里 $\boldsymbol{e}_n$ 是闭曲面 $\partial\Omega^+$ 上任一点处的单位法向量.

**解** 设 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{e}_n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 则有

$$\iint_{\partial\Omega^+} (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{e}_n)\mathrm{d}S = \iint_{\partial\Omega^+} (a_1\cos\alpha + a_2\cos\beta + a_3\cos\gamma)\mathrm{d}S \qquad \text{(利用高斯公式)}$$

$$= \iiint_{\Omega} (\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z})\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} 0\mathrm{d}v = 0.$$

8. 计算 $\oiint_{\Sigma} \cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_n})\mathrm{d}S$, 其中 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{e}_n$ 为球面 $\Sigma$: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 外侧单位法向量.

**解** 设 $\boldsymbol{e}_n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 则有

$$\oiint_{\Sigma} \cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_n})\mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathrm{d}S \qquad \text{(利用高斯公式)}$$

$$= \iiint_{\Omega} \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \frac{2}{r} r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r = 4\pi R^2.$$