第三节

平面及其方程

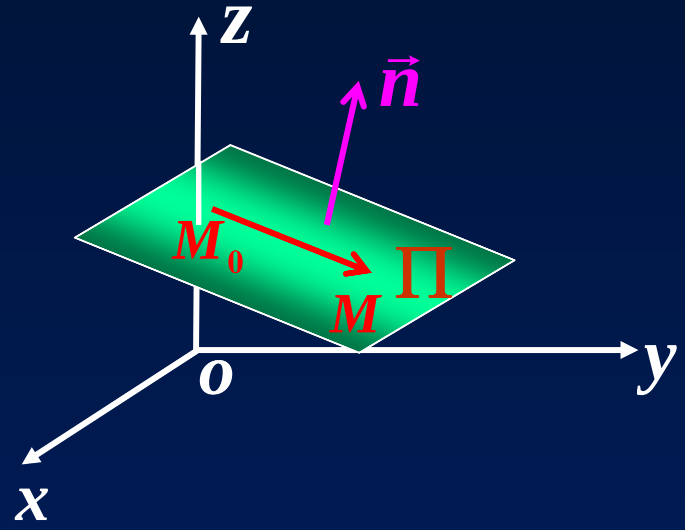
- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 平面方程

设有平面Π，点$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$

如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的法向量.



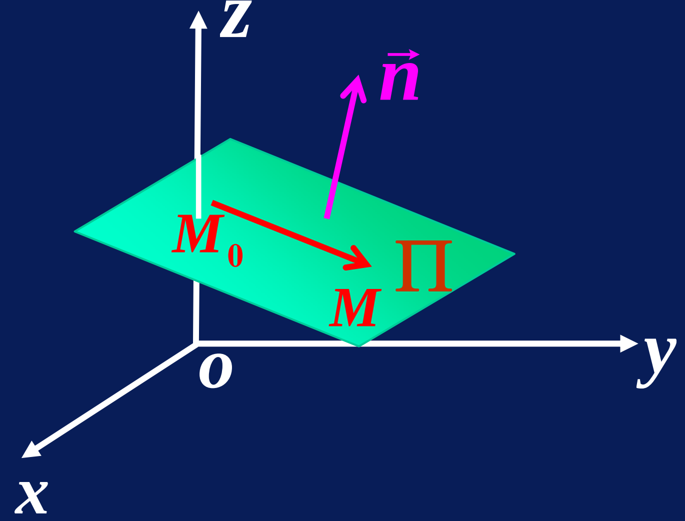
平面Π的法向量$\vec{n}$的特征:

① $\vec{n} \neq \vec{0}$

② $\vec{n} \perp \Pi$

设法向量：$\vec{n}=(A,B,C)$,

$(|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\neq 0)$



平面方程有三种表达形式:

1. 点法式

$\forall\ M(x,y,z)\in\Pi$

$\because\quad \overrightarrow{M_0M}$在平面$\Pi$上

$\therefore\quad \overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

$\because\quad \overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$

$$\therefore \quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad (3.1)$$

—— 平面的点法式方程

注　确定平面方程的二要素:

① 法向量: $\vec{n}=(A,B,C)$;　(可不唯一)

② 平面上的一定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2. 一般式

三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (A^2+B^2+C^2 \neq 0) \quad (3.2)$$

—— 平面的一般式方程

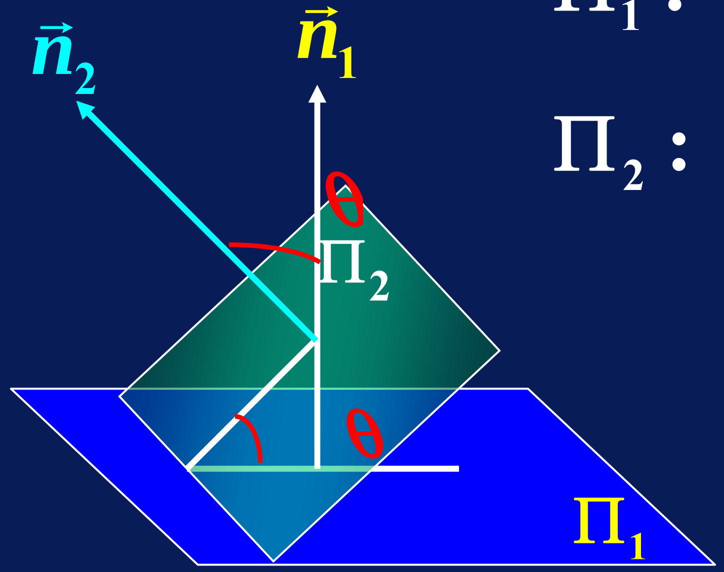
3. 截距式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

x轴上截距　　y轴上截距　　z轴上截距

(二) 两平面的夹角

定义 两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.（通常取锐角）



$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

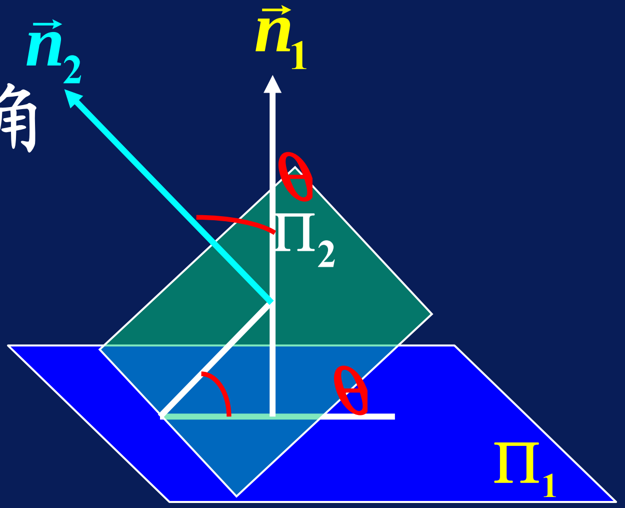
$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1),$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

$$\theta=\begin{cases}(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}), & (\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})\text{为锐角}\\ \pi-(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}), & (\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})\text{为钝角}\end{cases}$$

$$(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$$



按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta=\left|\cos(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})\right|$$

$$=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}+C_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{A_2^{\ 2}+B_2^{\ 2}+C_2^{\ 2}}}$$

——两平面夹角余弦公式

两平面位置特征：

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2$

$$\Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$$

(2) $\Pi_1 \ // \ \Pi_2$

$$\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

(3) Π_1 与 Π_2重合

$$\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

(三) 点到平面的距离

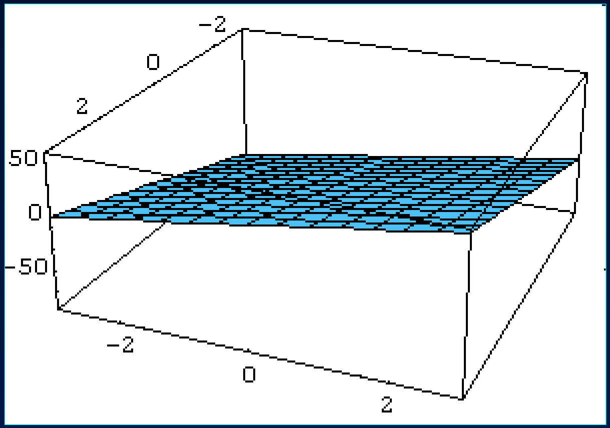
设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$Ax + By + Cz + D = 0$外的一点，点P_0到该平面的距离:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

—— 点到平面距离公式

二、典型例题

例1 求过三点 $A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$ 和 $C(0,2,3)$ 的平面方程.



解 (方法1) $\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6)$

$\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)$

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=(14,9,-1)$,

所求平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$,

化简得 $14x+9y-z-15=0$.

(方法2) 设$M(x,y,z)$是所求平面上的任意一点，

则 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6)$

$\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)$

$\overrightarrow{AM}=(x-2,y+1,z-4)$

共面，故所求平面方程为

$$[\overrightarrow{AM}\ \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

即 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$

亦即 $14x+9y-z-15=0.$

例2 一些特殊平面方程

(1) 平面Π通过坐标原点;

由 $O(0,0,0)$满足(3.2), 得$D=0$,

$\therefore \quad \Pi: Ax+By+Cz=0$

(2) 平面Π平行于坐标轴;

若平面Π // x轴， 则

法向量$\vec{n}=(A,B,C)\perp\vec{i}=(1,0,0)$

$\therefore \quad \vec{n}\cdot\vec{i}=0, \quad A=0$

$\therefore \quad \Pi: By+Cz+D=0$ (缺少x项)

即 $A=0,\ \begin{cases} D=0, & \text{平面通过}\,x\,\text{轴;} \\ D\neq 0, & \text{平面平行于}\,x\,\text{轴;} \end{cases}$

类似地，可讨论平面平行于y轴、z轴的情形.

(3) 平面Π平行于坐标面;

平面Π平行于xoy坐标面:

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)\,//\,\vec{k}=(0,0,1)$

$\therefore\quad A=B=0,\ \ \vec{n}=C\vec{k}=(0,0,C)\quad (C\neq 0)$

$\therefore\quad \Pi:\ Cz+D=0$, 或 $z=c$.

类似地，可讨论平面平行于其他坐标面的情形.

例3 设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

解 (方法1) 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0,$

法向量： $\vec{n}=(A,B,C)$

由平面过原点知 $D=0,$

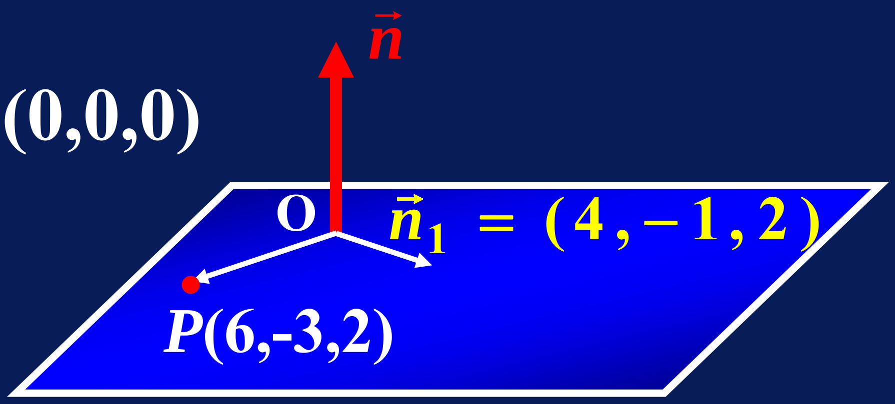
由平面过点$(6,-3,2)$知 $6A-3B+2C=0$

$\because \quad \vec{n}\perp\vec{n}_1=(4,-1,2) \quad \therefore \ 4A-B+2C=0$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

(方法2)　点$P(6,-3,2)$，$O(0,0,0)$



法向量:

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \overrightarrow{OP}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (4,4,-6) = 2(2,2,-3)$$

所求平面方程: $2\cdot(x-0)+2\cdot(y-0)-3\cdot(z-0)=0$

即　$2x+2y-3z=0$

例4 求过点(1,1,1)，且垂直于平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

解 设所求平面的法向量：$\vec{n}=(A,B,C)$;

依题设，知 $\vec{n}\perp\vec{n}_1=(1,-1,1)$, $\vec{n}\perp\vec{n}_2=(3,2,-12)$

故可取法向量:

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -12\end{vmatrix}=(10,15,5),$$

所求平面方程为:

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0,$$

化简得 $2x+3y+z-6=0.$

例5 设平面与 x, y, z 三轴分别交于 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$(其中 $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$), 求此平面方程.

解 设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

将三点坐标代入得
$$\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

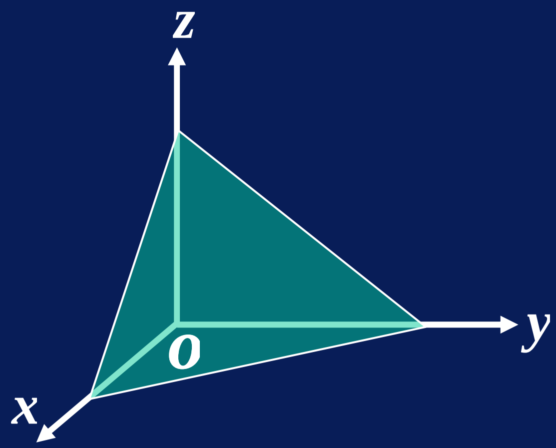
代入所设方程得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$ —— 平面的截距式方程

x轴上截距　y轴上截距　z轴上截距

例6 求平行于平面 $6x + y + 6z + 5 = 0$ 而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解 设平面为 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1,$



$$\because V = 1, \quad \therefore \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |abc| = 1,$$

由所求平面与已知平面平行得

（向量平行的充要条件） $\dfrac{1/a}{6} = \dfrac{1/b}{1} = \dfrac{1/c}{6},$

化简得 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}$，　令 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}=t$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{6t},\quad b=\frac{1}{t},\quad c=\frac{1}{6t},$$

代入体积式

$$\therefore 1=\frac{1}{6}\cdot\left|\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t}\right|\Rightarrow t=\pm\frac{1}{6},$$

$$\therefore a=\pm 1,\quad b=\pm 6,\quad c=\pm 1,$$

所求平面方程为 $6x+y+6z=\pm 6.$

例7 研究以下各组里两平面的位置关系:

(1) $-x+2y-z+1=0, \quad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0, \quad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0, \quad -4x+2y+2z-2=0$

解 (1) $$\cos\theta=\frac{|-1\times 0+2\times 1-1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{60}}$ 两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{60}}$.

(2) $2x - y + z - 1 = 0, \quad -4x + 2y - 2z - 1 = 0$

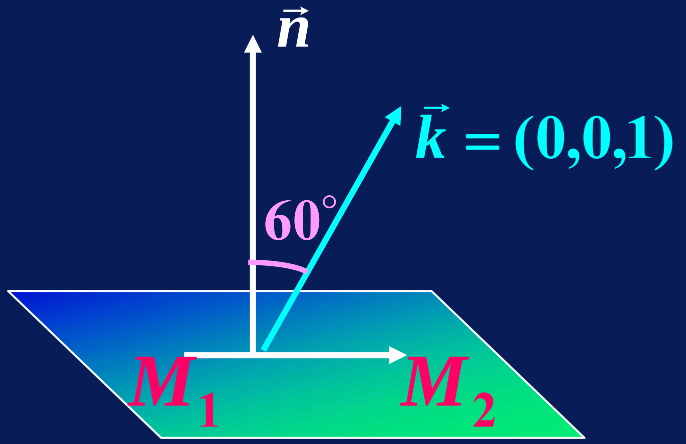
$$\because \quad \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2} \neq \frac{D_1}{D_2} = \frac{-1}{-1} = 1,$$

$\therefore$ 两平面平行但不重合.

(3) $2x - y - z + 1 = 0, \quad -4x + 2y + 2z - 2 = 0$

$$\because \quad \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2},$$ 两平面重合

例8 求过点 $M_1(0,-1,0)$, $M_2(0,0,1)$, 且与 xoy 面成 60° 角的平面.



解 所求平面的法向量为:

$$\vec{n}=(A,B,C),$$

$$\because \quad \vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}=(0,1,1)$$

$$\therefore \quad \vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0, \qquad B+C=0$$

$$\text{又}\because \quad (\widehat{\vec{n},\vec{k}})=60^\circ$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}=\cos 60^\circ=\frac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{|\vec{n}||\vec{k}|}=\frac{C}{|\vec{n}|}$$

即 $C=\frac{1}{2}|\vec{n}|$，从而 $B=-\frac{1}{2}|\vec{n}|$

再由 $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$，得 $A=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{n}|$

$\therefore$ 所求平面方程为：

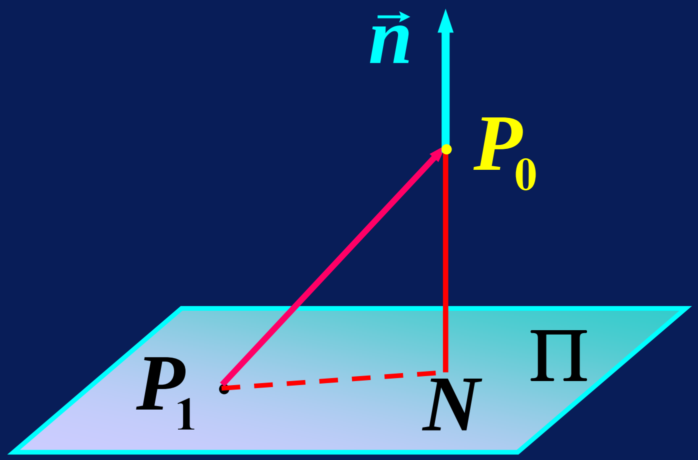
$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{n}|x-\frac{1}{2}|\vec{n}|y+\frac{1}{2}|\vec{n}|(z-1)=0 \quad (\because |\vec{n}|\neq 0)$$

即 $\sqrt{2}x-y+z-1=0$

或 $-\sqrt{2}x-y+z-1=0$

例9 设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$Ax+By+Cz+D=0$外的一点，求P_0到平面的距离.

解 $\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$



$$d = \left|\mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0}\right|$$

$$\mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

$$\mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\because Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad (P_1 \in \Pi)$$

$$\therefore \quad \mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$故 \quad d = \left| \mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0} \right|$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

—— 点到平面距离公式

例10 在z轴上求与两平面

$$\Pi_1: \quad 12x+9y+20z-19=0$$

$$\Pi_2: \quad 16x-12y+15z-9=0$$

等距离的点.

解 设所求点为$P(0,0,z)$，则

$$\frac{|12\cdot 0+9\cdot 0+20\cdot z-19|}{\cancel{\sqrt{12^2+9^2+20^2}}}=\frac{|16\cdot 0-12\cdot 0+15\cdot z-9|}{\cancel{\sqrt{16^2+(-12)^2+15^2}}}$$

$$\therefore \quad |20z-19|=|15z-9|, \quad 20z-19=\pm(15z-9)$$

$z=2$ 或 $z=\dfrac{4}{5}$，故所求点为：$(0,0,2)$或$(0,0,\dfrac{4}{5})$.

三、同步练习

1. 求过x轴和点$M(4,1,-2)$的平面方程 .

2. 求过点$A(6,3,0)$,且在三个坐标轴上的截距之比为$a:b:c=1:3:2$的平面方程.

3. 设平面 $x+\lambda y+2z-4=0$

和 $2x+y+z+3=0$

的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，试求常数 λ.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

四、同步练习解答

1. 求过x轴和点 $M(4,1,-2)$的平面方程 .

解 (方法1) 因为所求$\boxed{\text{平面过 } x \text{ 轴}}$,

故可设平面的一般式方程为

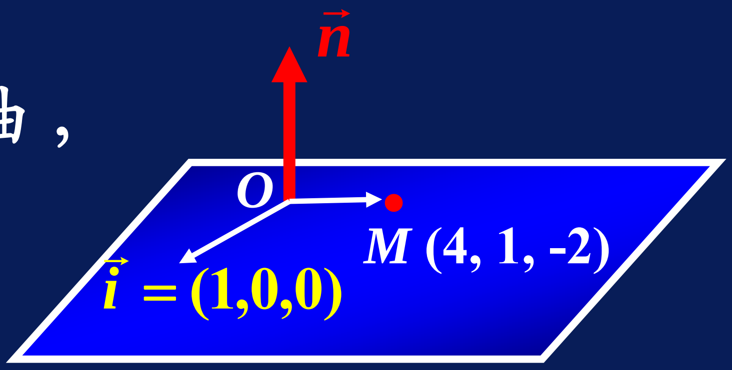
$$By + Cz = 0 \qquad (1)$$

又 $\because$ 点$M(4,1,-2)$在该平面上

$$\therefore \quad B \cdot 1 + C \cdot (-2) = 0, \qquad B = 2C$$

代入(1), 消去C 得所求平面方程 $2y + z = 0.$

(方法2) 因为所求平面过 x 轴，



$\therefore$ 所求平面的法向量 $\vec{n} \perp \vec{i}$

又 $\because$ 原点$O(0, 0, 0)$ 在该平面上.

$\therefore \quad \vec{n} \perp \overrightarrow{OM} = (4, 1, -2)$

故可取 $\vec{n} = \overrightarrow{OM} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -2, -1)$

所求平面的点法式为

$$0 \cdot (x-4) + (-2) \cdot (y-1) + (-1) \cdot (z+2) = 0$$

即 $\quad 2y + z = 0.$

2. 求过点$A(6,3,0)$,且在三个坐标轴上的截距之比为$a:b:c=1:3:2$的平面方程.

解 依题设，所求平面的截距式方程为

$$\frac{x}{k}+\frac{y}{3k}+\frac{z}{2k}=1$$

$\because$ 所求平面过点$A(6, 3, 0)$

$\therefore$ $\dfrac{6}{k}+\dfrac{3}{3k}+\dfrac{0}{2k}=1$, 即 $k=7$.

故所求平面方程为 $\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{21}+\dfrac{z}{14}=1$.

3. 设平面 $x+\lambda y+2z-4=0$

和 $2x+y+z+3=0$

的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，试求常数 λ.

解 由两平面夹角余弦公式，得

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|1\times 2+\lambda\times 1+2\times 1|}{\sqrt{1+\lambda^2+4}\cdot\sqrt{4+1+1}}$$

化简得 $\lambda^2-16\lambda-17=0$

$\therefore\ \lambda=-1$ 或 17.