第九节

微分方程应用模型举例

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 利用微分方程解决实际问题的基本步骤与方法

1. 基本步骤

1° 建模 (常微分方程模型)

2° 求解 (精确解或近似解)或对解作定性分析(研究解的性态)

3° 解的实际意义(解释与预测)

注 数学模型： 对实际问题的简化而本质的数学描述.

2. 基本方法

建立常微分方程模型的主要方法:

(1) 根据规律列方程; (物理, 力学等)

(2) 微元分析法;

(3) 模拟近似法. (生物, 经济,医学等)

(二) 几何应用

1. 解微分方程几何应用题的方法和步骤:

(1) 根据几何关系列方程;

(2) 确定定解条件;

(3) 求通解, 并根据定解条件确定特解.

2. 常见的几何公式

(1) 平面曲线上一点的切线斜率: $y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$

(2) 平面曲线弧段 L 的弧长:

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x,\quad L:\ y=f(x),x\in[a,b]$$

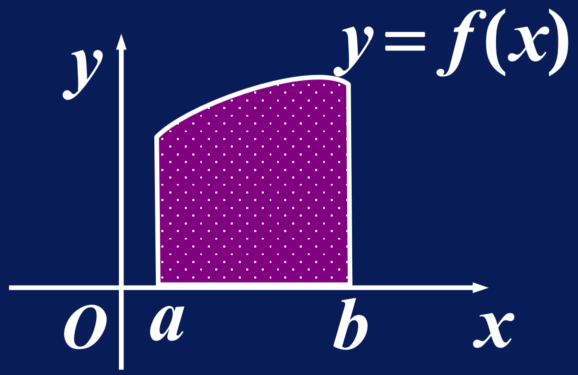
$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta,\quad L:r=r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]$$

(3) 平面曲线的曲率:

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

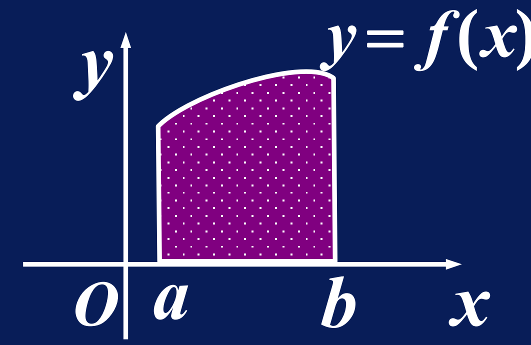
(4) 平面图形的面积:

$$A=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



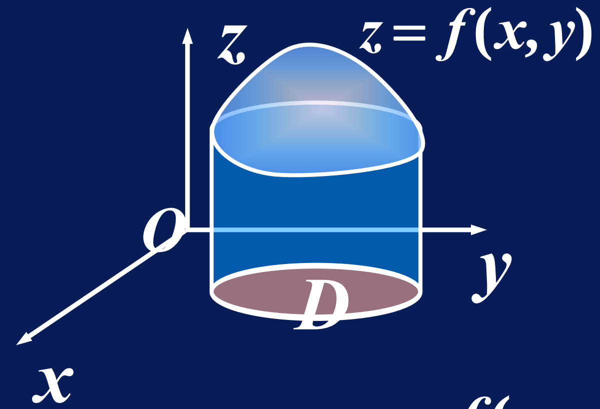
(3) 立体的体积

绕x轴旋转一周而成的旋转体体积:



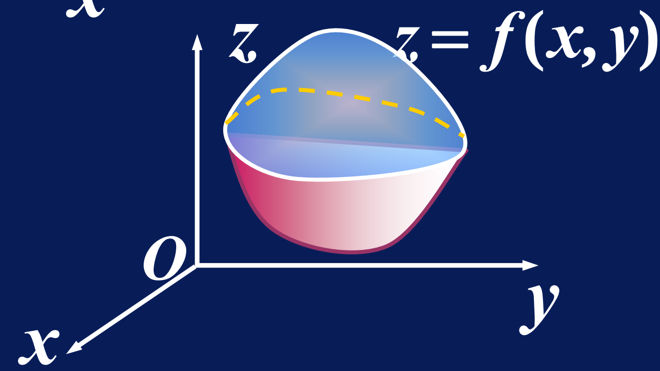
$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

曲顶柱体的体积:



$$V = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

一般立体的体积:



$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}v$$

(三) 物理应用

1. 解微分方程物理应用题的方法和步骤:

(1) 根据物理定律及实验规律列方程;

(2) 确定初始条件;

(3) 求通解, 并根据初始条件确定特解.

2. 常用的物理定律

(1) 牛顿运动定律; (3) 万有引力定律;

(2) 虎克定律; (4) 基尔霍夫电流及电压定律.

(三) 其他应用

二、典型例题

例1 假设:

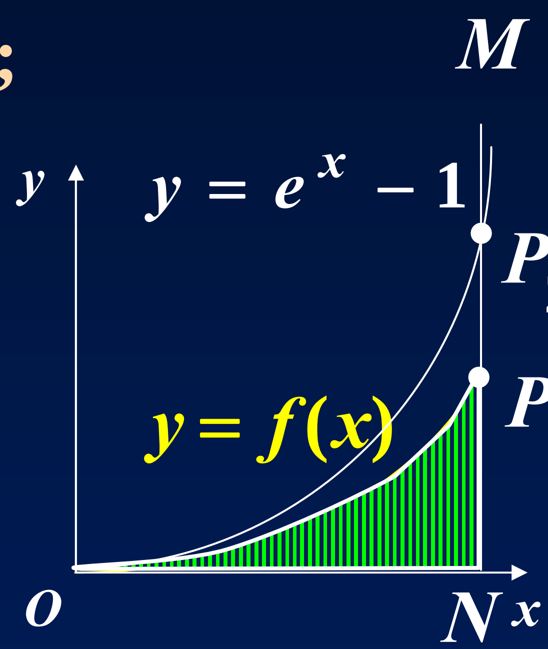
(1) 函数 $y=f(x)\ (0\le x\le +\infty)$满足条件

$f(0)=0$ 和 $0\le f(x)\le e^x-1$;

(2) 平行于 y轴的动直线 MN

与曲线 $y=f(x)$和$y=e^x-1$

分别相交与点 P_1和P_2;



(3) 曲线$y=f(x)$,直线MN与

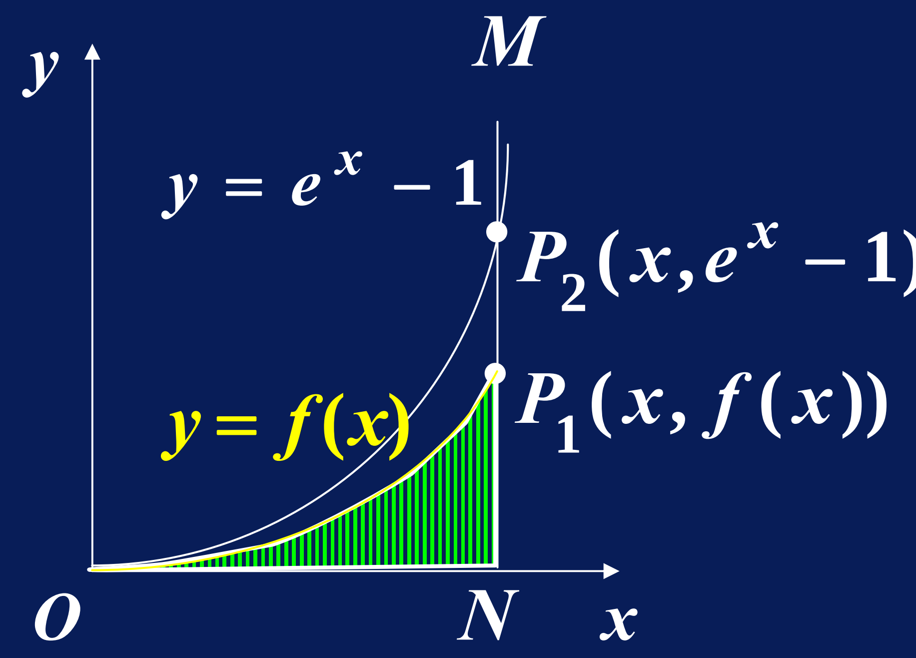
x轴所围封闭图形的面积 恒等于P_1P_2的

长度，求函数 $y=f(x)$的表达式.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

解 设动直线 MN 的方程为 $x = x$,由题设条件 (3) 封闭图形的面积:

$$S = \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}\,x$$



P_1, P_2点的坐标分别为

$P_1(x, f(x))$,

$P_2(x, e^x - 1)$,

故由题设，有 $\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}\,x = e^x - 1 - f(x)$

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = e^x - 1 - f(x)$$

两端求导，得 $f(x) = e^x - f'(x)$

即 $f'(x) + f(x) = e^x$ 一阶非齐次线性方程

它的通解为

$$f(x) = e^{-\int \mathrm{d}x}\left(\int e^x e^{\int \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= e^{-x}\left(\int e^x \cdot e^x\,\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{x}+Ce^{-x}$$

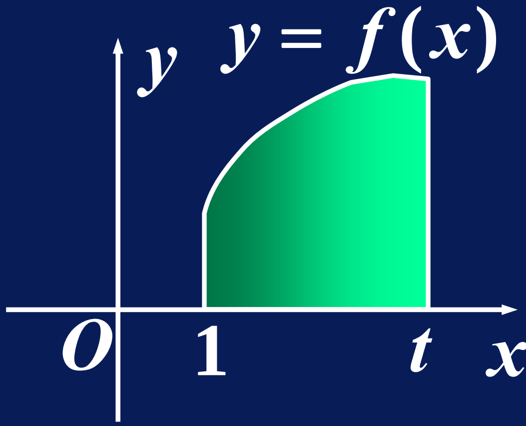
由 $f(0)=0$，得 $C=-\frac{1}{2}$,

因此所求函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$$

例2 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，若由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1, x=t\ (t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2 f(t)-f(1)]$$



试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y\big|_{x=2}=\dfrac{2}{9}$ 的解.

解 依题意及旋转体的体积 公式有

$$V(t)=\pi\int_1^t f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}[t^2 f(t)-f(1)]$$

即

$$3\int_1^t f^2(x)\,\mathrm{d}x=t^2 f(t)-f(1)$$

两边对 t 求导，得

$$3f^2(t)=2tf(t)+t^2 f'(t)$$

将上式改写为 $x^2 y'=3y^2-2xy$

两边同乘以 $\dfrac{1}{x^2}$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x}$$ 为齐次方程

令 $u = \dfrac{y}{x}$，则有 $u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3u^2 - 2u$

即 $$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3u(u-1)$$

分离变量 $$\frac{\mathrm{d}u}{u(u-1)} = 3\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分得 $\ln(u-1)-\ln u=3\ln x+\ln C$

即 $$\frac{u-1}{u}=Cx^3$$

将$u=\dfrac{y}{x}$代回有 $y-x=Cx^3y$

将条件 $y\big|_{x=2}=\dfrac{2}{9}$代入上式，得 $C=-1,$

从而所求解为 $y-x=-x^3y,\quad x>1$

或 $$y=\frac{x}{1+x^3},\quad x>1.$$

例3 设函数 $y=f(x)$满足微分方程

$$y''-3y'+2y=2xe^{x}\quad,$$

且其图形在点 $(0,1)$处的切线与曲线

$y=x^2-x+1$在该点的切线重合，求函数 $f(x)$.

分析 本题变相给出了初始条件，由于图形过点 $(0,1)$及在该点与 $y=x^2-x+1$有公共点，可得出初始条件 $y(0)=1, y'(0)=-1$

解 特征方程为 $r^2-3r+2=0$

特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$

特征根为 $r_1 = 1,\ \ r_2 = 2$

对应齐次线性方程的通 解

$$Y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

由于 $\lambda = 1$为特征根 ,故可设 $y* = Axe^{x}$

求$y*', y*''$ 代入原方程得 $A = -2$

故原方程的通解为

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} - 2xe^{x}$$

原方程通解: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} - 2xe^{x}$

由于曲线在点 $(0,1)$处与 $y = x^2 - x + 1$

有公共切线，

故有 $y(0) = 1, y'(0) = -1.$

由此得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 - 2 = -1 \end{cases}$

解得 $C_1 = 1,\quad C_2 = 0$

故所求曲线为 $y = (1 - 2x)e^{x}.$

例4 子弹一初速度 $v_0 = 200\,m/s$ 垂直打入厚 $10\,cm$ 的木板后，以 $v_1 = 80\,m/s$ 的速度穿出．设木板的阻力与子弹的速度平方成正比，求子弹穿过木板所需的时间．

分析 本题是讨论物体运动规律的，注意，在物体运动方向上子弹只受一个力，即木板的阻力 $-kv^2$（其中 k 为特定的比例系数）

解 由牛顿第二定律得

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = F = -kv^2$$

其初始条件为 $s\big|_{t=0}=0, v\big|_{t=0}=200.$

由导数的物理意义知 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$

代入方程得 $$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2$$

分离变量 $$\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

积分得 $$-\frac{1}{v}=-\frac{k}{m}t-C_1$$

即 $$v=\frac{1}{\frac{k}{m}t+C_1}$$

代入初始条件 $v\big|_{t=0}=200$， 得 $C_1=\frac{1}{200}$

对 $$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v=\frac{1}{\frac{k}{m}t+\frac{1}{200}} \qquad (1)$$

两边积分得 $$s=\frac{m}{k}\ln(\frac{k}{m}t+\frac{1}{200})+C_2 \qquad (2)$$

代入 $s\big|_{t=0}=0$，得 $C_2=\frac{m}{k}\ln 200$

为了求出子弹穿过木板　所需的时间，

不妨设子弹穿出木板的　时刻为 t_0,

由已知条件，当 $t = t_0$时，$v = v_1 = 80 m/s$,

故由式(1)有

$$80 = \frac{1}{\frac{k}{m}t_0 + \frac{1}{200}} \qquad (3)$$

另一方面，当 $t = t$时子弹在木板中走过的　路径为

$10 cm = \frac{1}{10} m$,

从而由(2)式有

$$\frac{1}{10}=\frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}t_0+\frac{1}{200}\right)+\frac{m}{k}\ln 200$$

$$=\frac{m}{k}\ln\frac{1}{80}+\frac{m}{k}\ln 200=\frac{m}{k}\ln\frac{200}{80}=\frac{m}{k}\ln\frac{5}{2}$$

所以 $$\frac{k}{m}=10\ln\frac{5}{2},$$

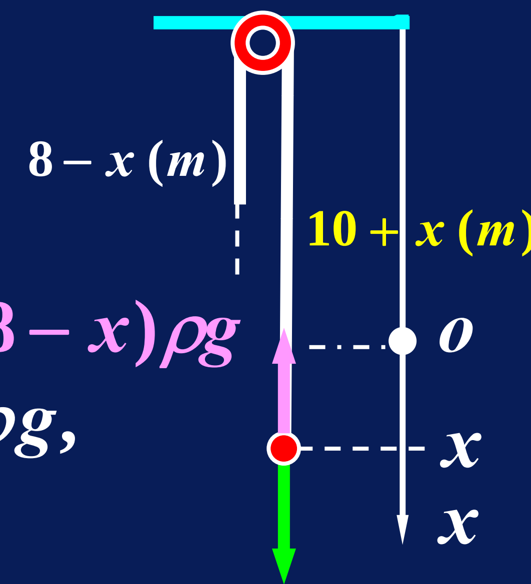
代入式(3)得 $$t_0=\frac{3}{400}\cdot\frac{1}{10\ln\frac{5}{2}}\approx\frac{1}{1200}\quad(s)$$

例5 一质量均匀的链条挂在一无摩擦的钉子上，运动开始时，链条的一边下垂8米，另一边下垂10米，试问整个链条滑过钉子需多少时间.

解 设链条的线密度为 ρ,

经过时间 t,链条下滑了 x 米,

则由牛顿第二定律得



$$18\rho\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=(10+x)\rho g-(8-x)\rho g,$$

即 $\quad x''-\frac{g}{9}x=\frac{g}{9},\quad x(0)=0,\, x'(0)=0.$

$$x'' - \frac{g}{9}x = \frac{g}{9}, \quad x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

特征方程 $\quad r^2 - \frac{g}{9} = 0$

特征根 $\quad r_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{g}}{3}$

$\therefore$ 对应的齐次线性方程的 通解为

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{1}{3}\sqrt{g}t} + C_2 e^{\frac{1}{3}\sqrt{g}t}$$

由观察可知：非齐次线性方程有特解 $x = -1$.

非齐次线性方程的通解为

$$x(t)=C_1e^{-\frac{1}{3}\sqrt{g}t}+C_2e^{\frac{1}{3}\sqrt{g}t}-1$$

由 $x(0)=0,\ x'(0)=0,$ 得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}.$

$$\therefore \quad x(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{3}\sqrt{g}t}+e^{\frac{1}{3}\sqrt{g}t}\right)-1,$$

整个链条滑过钉子 ,即 $x=8,$

代入上式得 $t=\dfrac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+\sqrt{80})$ (秒)

例6 **雪球融化问题** 假定一个雪球是半径为r的球, 其融化时体积的变化率与雪球的表面积成正比,比例常数为 $k>0$ (k 与空气温度等有关), 已知两小时内融化了其体积的四分之一, 问其余部分在多长时内融化完?

解 由于雪球体积的变化率正比与其表面积

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-k4\pi r^2$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k4\pi r^2$$

(等号右端加负号是因为 体积是单调减函数 ,$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < 0$)

将 $V = \frac{4}{3}\pi r^2$代入上式，得

$$4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -4k\pi r^2, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k,$$

解得$r = -kt + C$ 记$r|_{t=0} = r_0$

得雪球半径随时间变化 的规律 $r = r_0 - kt$

又 $t=2(h)$时，$r=r_0-2k.$

由题设: 两小时内雪球体积减少了四分之一

于是 $$\frac{4}{3}\pi(r_0-2k)^3=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi r_0^3$$

解得 $$k=\frac{1}{2}\left[1-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right]r_0 \qquad (12.67)$$

在 $r=r_0-kt$ 中，令 $r=0$, 并利用上式

得雪球全部融化所需要的时间为

$$t = \frac{r_0}{k} = \frac{2}{1 - \sqrt[3]{\frac{3}{4}}} \approx 22(h)$$

由于雪球全部融化约需22小时,

故余下部分约20小时才能融化完.

例7 某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的量为 $\frac{V}{6}$，流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$.已知1999年底湖泊中的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标 .为了治理污染，从2000年初起，限定排入湖泊 中 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$。问至多经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内？

（注：设湖水中 A 的浓度是均匀 .）

解 设从 2000 年初（此时 $t=0$）开始，第 t年湖泊中污染物 A的总量为 m，浓度为 $\frac{m}{V}$，则在时间间隔 $[t, t+\mathrm{d}t]$内，排入湖泊中 A的量为

$$\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}\mathrm{d}t=\frac{m_0}{6}\mathrm{d}t$$

流出湖泊的水中 A的量为

$$\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}\mathrm{d}t=\frac{m}{3}\mathrm{d}t$$

因而在此时间间隔内湖 泊中污染物 A 的改变量

$$\mathrm{d}m = \text{排入量} - \text{排出量}$$

$$= \frac{m_0}{6}\mathrm{d}t - \frac{m}{3}\mathrm{d}t = \left(\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3}\right)\mathrm{d}t$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}m}{m_0 - 2m} = \frac{1}{6}\mathrm{d}t$$

积分 $$\ln(m_0 - 2m) = -\frac{t}{3} + C$$

整理得 $$m = \frac{m_0}{2} - Ce^{-\frac{t}{3}}$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

代入初始条件 $m\big|_{t=0} = 5m_0$

得 $C = -\dfrac{9}{2}m_0$

于是 $m = \dfrac{m_0}{2}(1 + 9e^{-\frac{t}{3}})$

令 $m = m_0$

得 $t = 6\ln 3$

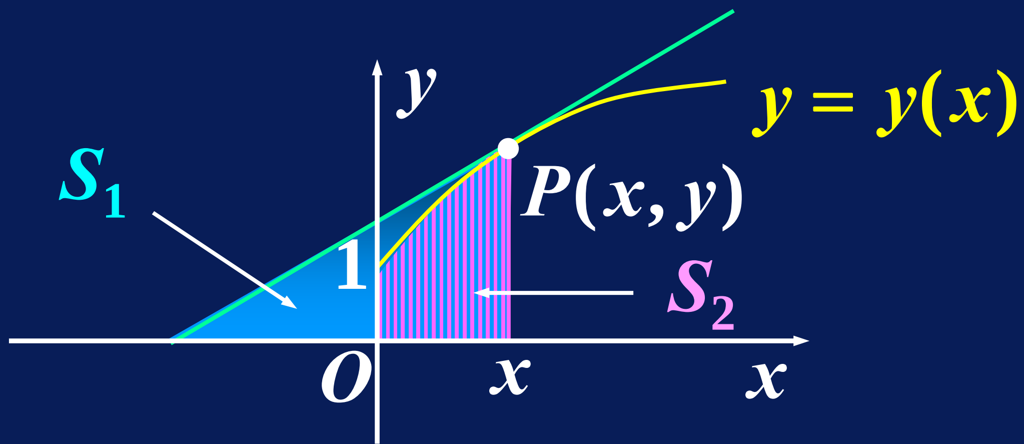
即至多需经过$6\ln 3$年，湖泊中A的含量降至m_0以内.

三、同步练习

1. 设曲线 L 的极坐标方程为 $r = r(\theta)$, $M(r,\theta)$ 为 L 上任意一点，$M_0(2,0)$ 为 L 上一定点，若极径 OM_0, OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0, M 两点间弧长值的一半，求曲线 L 的方程．

2. 设函数 $y(x)$ $(x > 0)$ 二阶可导，且 $y'(x) > 0$, $y(0) = 1$, 过曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 $P(x, y)$ 作曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围的三角形面积记为 S_1, 区间 $[0, x]$ 上以

$y=y(x)$为曲边的曲边梯形面积 记为S_2,并设$2S_1-S_2$恒为1,求此曲线$y=y(x)$的方程.



3. 设$y=y(x)$是一向上凸的连续曲线，其上任意一点处的曲率为$\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$,且在曲线上点$(0,1)$处的切线方程为$y=x+1$,求该曲线的方程,并求函数$y=y(x)$的极值.

4. 目标的跟踪 设位于坐标原点的甲舰向位于x轴上点$A(1, 0)$处的乙舰发射制导导弹，导弹头始终指向乙舰. 如果乙舰以最大速度v_0 (v_0是常数)沿平行于 y轴的直线航行，导弹的 速度为$5v_0$，求导弹运行的曲线方程 . 又问乙舰行驶多远时，它将被导弹击中?

5. 设弹簧上端固定,有两个相同的重物(质量为m)挂于弹簧下端,使弹簧伸长$2a$, 今突然取走了一个重物，使弹簧由静止开始振动，求所挂重物的运动规律.

6.　放射性元素铀由于不断地有原子放射出微粒子而变成其他元素，铀的含量就不断减少，这种现象叫做衰变.由原子物理学知道，见到的衰变速度与当时未衰变的原子的含量M成正比.已知$t=0$ 时铀的含量为M_0，求在衰变过程中铀含量$M(t)$ 随时间t 变化的规律.

7.　盐溶液的浓度　　一容器内盛有100L盐水,其中含盐10kg. 今用每分钟2L的速度把净水注入容器(假定净水与盐水立即调和), 又以同样速度使盐水流出.试求容器内盐量随时间变化的规律.

四、同步练习解答

1. 设曲线 L 的极坐标方程为 $r = r(\theta)$, $M(r,\theta)$ 为 L 上任意一点，$M_0(2,0)$ 为 L 上一定点，若极径 OM_0, OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0, M 两点间弧长值的一半，求曲线 L 的方程.

解 由极径 OM_0, OM_1 与 L 所围成的曲边扇形面积可用定积分

$$\frac{1}{2}\int_0^{\theta} r^2 \,\mathrm{d}r$$ 表示，

而曲线 L 上 M_0, M 两点间弧长

$$s=\int_{\overset{\frown}{M_0M}}\mathrm{d}s=\int_0^\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta$$

故有 $$\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta$$

两边对 θ 求导,得 $$r^2=\sqrt{r^2+r'^2},$$

即 $$r'=\pm r\sqrt{r^2-1}$$

分离变量 $$\frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^2-1}}=\pm\,\mathrm{d}\theta$$

两边积分

$$\int \frac{\mathrm{d}\,r}{r\sqrt{r^2-1}} = -\int \frac{\mathrm{d}\,\frac{1}{r}}{\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}} = -\arcsin\frac{1}{r} = \pm\theta + C$$

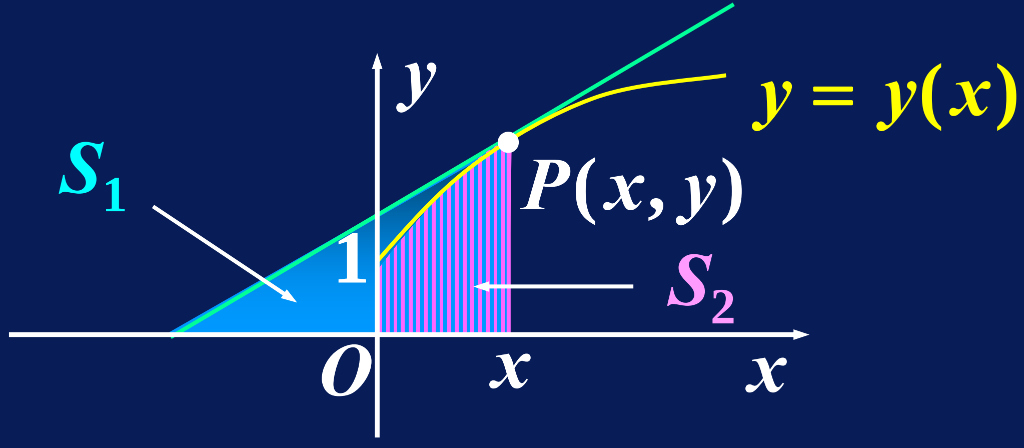
将条件 $r(0)=2$代入上式，得 $C=-\frac{\pi}{6}$,

故所求曲线 L的方程为

$$\sin(\frac{\pi}{6}\mp\theta) = \frac{1}{r}$$

即 $r=\csc(\frac{\pi}{6}\mp\theta).$

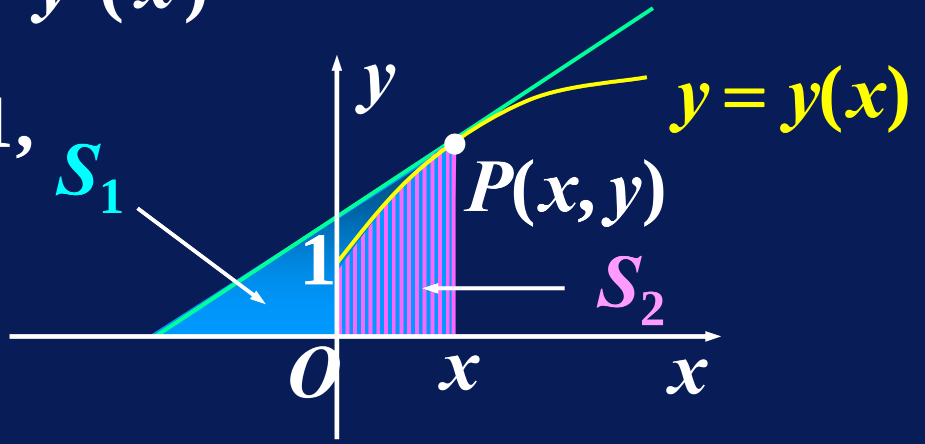
2. 设函数 $y(x)\ (x>0)$二阶可导，且 $y'(x)>0,\ y(0)=1$,过曲线$y=y(x)$上任意一点$P(x,y)$作曲线的切线及 x轴的垂线,上述两直线与x轴所围的三角形面积记为S_1,区间$[0,x]$上以$y=y(x)$为曲边的曲边梯形面积记为S_2,并设$2S_1-S_2$恒为1,求此曲线$y=y(x)$的方程.



解 曲线 $y = y(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的切线方程为

$$Y - y = y'(x)(X - x)$$

它与 x 轴的交点为 $\left(x - \dfrac{y}{y'(x)}, 0\right)$,



由于 $y'(x) > 0,\ y(0) = 1$,

即当 $x > 0$ 时,

$y(x)$ 为单调增加函数,

从而 $y(x) > 0$, 于是 $S_1 = \dfrac{1}{2} y \left| x - \left(x - \dfrac{y}{y'(x)}\right) \right| = \dfrac{y^2}{2y'}$

$$S_1 = \frac{y^2}{2y'}$$

又曲边梯形的面积

$$S_2 = \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$$

由条件 $2S_1 - S_2 = 1$知

$$\frac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

由 $y(0)=1$，得 $y'(0)=1.$

$$\frac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

上式两边对x求导，得

$$\frac{2y(y')^2 - y^2 y''}{(y')^2} - y = 0$$

整理，得　$yy'' = (y')^2$　属于 $y'' = f(y, y')$型

令 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，　代入上述方程

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p \qquad (\because\ y' = p > 0)$$

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p$$

分离变量、积分得

$$\ln p = \ln y + \ln C_1$$

即 $\quad y' = p = C_1 y$

由 $\quad y(0)=1,\ y'(0)=1,\ $ 得 $\ C_1 = 1.$

于是 $\quad y' = y$

分离变量、积分得 $\quad \ln y = x + C_2$

由 $\quad y(0)=1,\ $ 得 $\ C_2 = 0.\quad \therefore\quad y(x) = e^x.$

3. 设$y=y(x)$是一向上凸的连续曲线，

其上任意一点处的曲率为$\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$,且在曲线

上点$(0,1)$处的切线方程为$y=x+1$,求该曲线的

方程，并求函数$y=y(x)$的极值．

解 有曲率的定义知曲率 $K=\dfrac{|y''|}{\sqrt{1+y'^2}}$,

因曲线是上凸的，所以 $y''<0$,由体设得

$$\frac{-|y''|}{(\sqrt{1+y'^2})^3}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

则 $\dfrac{y''}{1+y'^2}=-1$, 即 $y''=-1-y'^2$

令 $y'=p,\ y''=p'$,

从而上方程化为 $p'=-(1+p^2)$

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}\,p}{(1+p^2)}=-\mathrm{d}\,x$

积分得 $\arctan\ p=C_1-x$

因为 $y=y(x)$在$(0,1)$处的切线方成为 $y=x+1$,

所以 $y'\big|_{x=0}=p\big|_{x=0}=1$

代入上式得 $C_1 = \frac{\pi}{4}$

故 $\arctan p = \frac{\pi}{4} - x$

所以 $y' = p = \tan(\frac{\pi}{4} - x)$

积分得 $y = \ln\left|\cos(\frac{\pi}{4} - x)\right| + C_2$

因为曲线过点 $(0,1)$, 所以 $y\big|_{x=0} = 1,$

代入上式得 $C_2 = 1 + \frac{1}{2}\ln 2$

故所求曲线方程为

$$y=\ln(\frac{\pi}{4}-x)+1+\frac{1}{2}\ln 2,\quad x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$$

下面求 $y=y(x)$的极值，

因为 $\cos(\frac{\pi}{4}-x)\le 1$，且当 $x=\frac{\pi}{4}$时，$\cos(\frac{\pi}{4}-x)=1$，

所以当 $x=\frac{\pi}{4}$时，函数取得极大值 $y=1+\frac{1}{2}\ln 2$

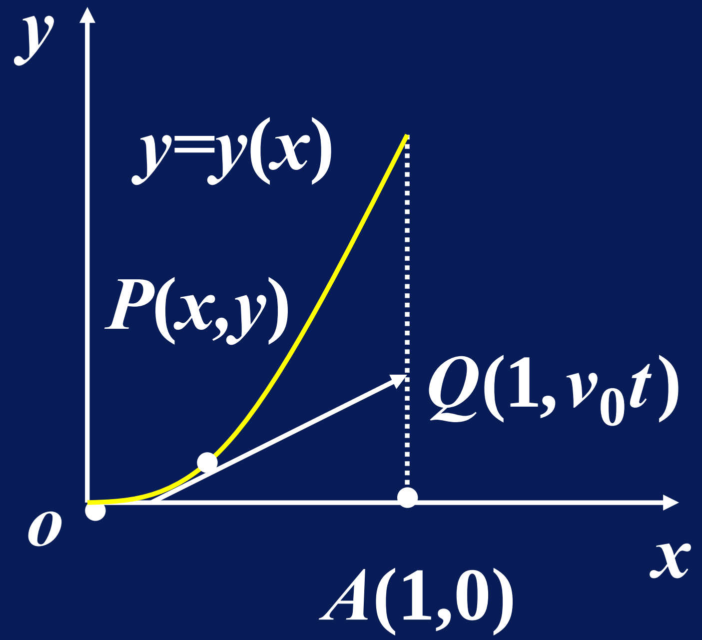
回顾求解过程，知当 $x=\frac{\pi}{4}$时，$y'(\frac{\pi}{4})=0$，

又$y''(\frac{\pi}{4})=-1<0$，故$x=\frac{\pi}{4}$时函数取得极大值

4. 目标的跟踪 设位于坐标原点的甲舰向位于x轴上点 $A(1, 0)$ 处的乙舰发射制导导弹，导弹头始终指向乙舰. 如果乙舰以最大速度v_0 (v_0是常数)沿平行于 y轴的直线航行，导弹的速度为$5v_0$，求导弹运行的曲线方程 . 又问乙舰行驶多远时，它将被导弹击中？

解 设导弹的轨迹曲线为 $y = y(x)$，经时间 t，导弹位于点$P(x, y)$，乙舰位于点$Q(1, v_0 t)$，如下图.

由于导弹头始终对准乙舰，故直线$\overline{PQ}$是导弹轨迹曲线弧$\overrightarrow{PQ}$在点P处的切线，其斜率相等，有



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v_0t-y}{1-x}$$

即 $$v_0t=(1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y \qquad (12.62)$$

又根据题意，弧$\overrightarrow{PQ}$的长度为$|AQ|$的5倍，

即 $$\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 5v_0 t \qquad (12.63)$$

由式（12.62），（12.63）消去$v_0 t$，得

$$(1-x)y' + y = \frac{1}{5}\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

这是一类含有未知函数以及变限积分的方程（称为积分方程），两端对x 求导，

得 $$\begin{cases} (1-x)y'' = \dfrac{1}{5}\sqrt{1+y'^2} \\ y\,|_{x=0} = 0, \qquad y'\,|_{x=0} = 0 \end{cases} \qquad (12.64)$$

方程(12.64)属于$y'' = f(x, y')$型,

令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$,

$$\boxed{(1-x)y'' = \frac{1}{5}\sqrt{1+y'^2}}$$

方程(12.64)化为可分离变量方程

$$(1-x)p' = \frac{1}{5}\sqrt{1+p^2}$$

解得 $\ln|p+\sqrt{1+p^2}| = -\frac{1}{5}\ln|1-x| + C_1$

由 $y'|_{x=0} = p|_{x=0} = 0$, 得 $C_1 = 0$

于是 $p+\sqrt{1+p^2} = (1-x)^{-\frac{1}{5}}$,

即 $y' + \sqrt{1 + y'^2} = (1 - x)^{-\frac{1}{5}}$,

由此得 $y' - \sqrt{1 + y'^2} = -(1 - x)^{\frac{1}{5}}$,

解得 $y' = \frac{1}{2}\left[(1 - x)^{-\frac{1}{5}} - (1 - x)^{\frac{1}{5}}\right]$

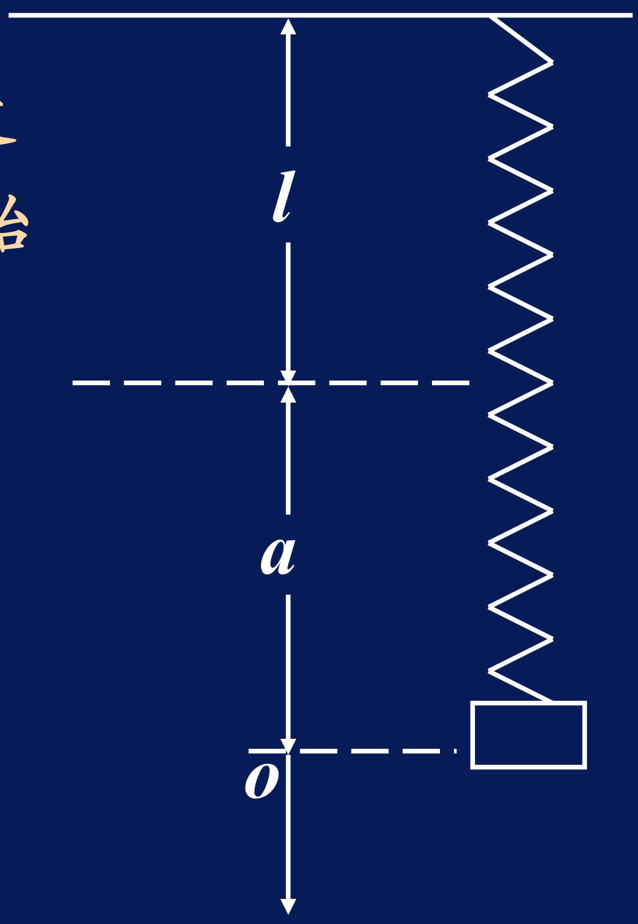
再积分,得 $y = -\frac{5}{8}(1 - x)^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{12}(1 - x)^{\frac{6}{5}} + C_2$

由 $y|_{x=0} = 0$ 得 $C_2 = \frac{5}{24}$.

故，导弹运行曲线方程为

$$y = -\frac{5}{8}(1 - x)^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{12}(1 - x)^{\frac{6}{5}} + \frac{5}{24}$$

5. 设弹簧上端固定,有两个相同的重物(质量为m)挂于弹簧下端,使弹簧伸长$2a$, 今突然取走了一个重物，使弹簧由静止开始振动，求所挂重物的运动规律.



解　由于振动时弹簧上只挂一个重物.此时弹簧伸长为a，故可取其平衡位置(即弹簧伸长为a的位置)作为重物位移的原点，并规定铅直向下为正向.

由虎克定律知 $mg = ka$ k为弹性系数

设重物在时刻 t的位移为 $x = x(t)$,

此时弹簧伸长为 $x + a$，弹簧作用力 (恢复力) 为 $-k(x + a)$,

所以在物体运动方向上 的合力为

$$F = mg - k(x + a) = -kx$$

又 $$k = \frac{mg}{a}$$

由牛顿第二定律，得 $$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{mg}{a}x$$

或 $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{a}x=0$$

其初始条件为 $x\big|_{t=0}=0,\quad v\big|_{t=0}=\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=0$

这是二阶常系数线性方程，

不难求得其满足初始条件的特解为

$$x=a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$$

6. 放射性元素铀由于不断地有原子放射出微粒子而变成其他元素，铀的含量就不断减少，这种现象叫做衰变.由原子物理学知道，见到的衰变速度与当时未衰变的原子的含量M成正比.已知$t=0$时铀的含量为M_0，求在衰变过程中铀含量$M(t)$ 随时间t变化的规律.

解 铀的衰变速度就是$M(t)$对时间t的导数$\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$.由于铀的衰变速度与其含量成正比，故得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-\lambda M,$$

其中$\lambda(\lambda>0)$是常数，叫做衰变系数.

$$M\big|_{t=0}=M_0.$$

分离变量后得 $\dfrac{\mathrm{d}M}{M}=-\lambda\mathrm{d}t.$ $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}M}{M}=\int-\lambda\mathrm{d}t.$

$M>0$,得 $\ln M=-\lambda t+\ln C,$

$$M=C\mathrm{e}^{-t\lambda}.$$

以初始条件代入上式，得

$$M_0=C\mathrm{e}^0=C,$$

$$M=M_0\mathrm{e}^{-t\lambda}.$$

7. 盐溶液的浓度　一容器内盛有100L盐水,其中含盐10kg. 今用每分钟2L的速度把净水注入容器(假定净水与盐水立即调和), 又以同样速度使盐水流出.试求容器内盐量随时间变化的规律.

解　设在 t 时刻溶液内的含盐量 $Q(t)$ 为，现利用微分元素法建立未知函数 $Q(t)$ 满足的微分方程

设在微小时间间隔 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 内,溶液内含盐量由 Q 降至 $Q+\mathrm{d}Q$ ($\mathrm{d}Q<0$).

在这一段时间内，从容器内流出的溶液量为

$2\mathrm{d}t$(单位 : L),

盐水浓度视为 t 时刻浓度 $\dfrac{Q(t)}{100}$ (单位 : kg/L)

因此,含盐量的改变量

$$\mathrm{d}Q = -\frac{Q}{100} 2\mathrm{d}t < 0 \qquad (12.61)$$

此即未知函数 $Q = Q(t)$ 应满足的微分方程

由于 t 时溶液内含盐量为 $10kg$,

那么,初始条件为 $Q|_{t=0} = 10$

方程(12.61)的通解为 $Q = Ce^{-\frac{t}{50}}$

由 $Q|_{t=0} = 10$ 得 $C = 10$

故容器内含盐量随时间变化规律为

$$Q(t) = 10e^{-\frac{t}{50}}$$