第六节

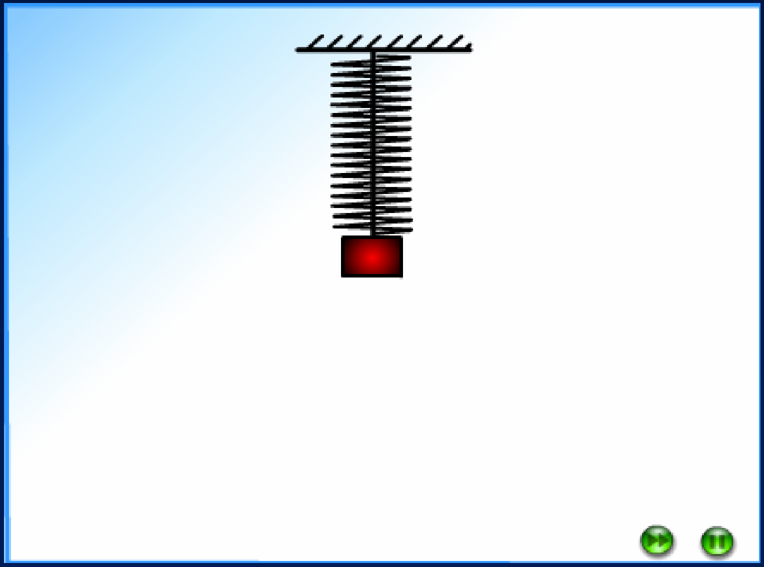
线性微分方程通解的结构

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 二阶线性微分方程举例

引例 设有一弹簧下挂一重物,如果使物体具有一初始速度$v_0 \neq 0$,物体便离开平衡位置,并在平衡位置附近作上下振动.试确定物体的振动规律$x = x(t)$.



解 受力分析

$$f_0 = P, \quad kl = mg$$

1. 恢复力 $f = -kx$,

2. 阻力 $R = -\mu \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$;

$$\because F = ma, \quad \therefore m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0$$

有阻尼自由振动微分方程

若受到铅直干扰力 $F = H\sin pt$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = \frac{H}{m}\sin pt$$

有阻尼强迫振动的方程

$$Lc\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \omega_0{}^2 u_c = \frac{E_m}{LC}\sin\omega t$$

串联电路的振荡方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}+P(x)\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}+Q(x)y=f(x)$$

—— 二阶线性微分方程

当 $f(x)\equiv 0$时，二阶齐次线性微分方程

当 $f(x)\not\equiv 0$时，二阶非齐次线性微分方程

n 阶线性微分方程：

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x).$$

(二) 二阶线性微分方程解的性质

二阶线性微分方程解的性质

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (6.1)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (6.2)$$

性质 1（齐次线性方程解的叠加原理)

若函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(6.1)的两个解,则 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 也是(6.1)的解.

(C_1，C_2是任意常数）

性质2 若 $y(x)$是方程(6.1)的解， $y^*(x)$是方程(6.2)的解，则 $y(x)+y^*(x)$必是方程(6.2)的解.

性质3 若 $y_1(x), y_2(x)$均是非齐次线性方程 (6.2)的解，则 $y_1(x)-y_2(x)$必是齐次线性方程 (6.1)的解.

性质4 (非齐次线性方程解的叠加原理)

若 $y_i(x)$ 是方程：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

的解，则 $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ 是方程:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$$

的解，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 均为常数 .

注 性质1 ~ 性质4可推广到 n 阶线性微分方程的情形.

(三) 二阶线性微分方程解的结构

回顾: $y' + p(x)y = 0 \qquad (6.3)$

$y' + p(x)y = q(x) \qquad (6.4)$

若 Y 为(6.3)的通解， y^* 是(6.4)的一个特解，则 $Y + y^*$ 是(6.4)的通解.

问题1 对于方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (6.2)$$

是否有类似的结论?

问题2 若 $y_1(x), y_2(x)$均是二阶齐次线性方程 **(6.1)**

的解，$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$一定是(6.1)的通解吗?

答: 不一定.

例如: $y_1(x)$ 是某二阶齐次线性方程的解, 则

$y_2(x) = 2\,y_1(x)$ 也是齐次线性方程的解

但是 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = (C_1 + 2C_2) y_1(x)$

并不是通解. 为解决通解的判别问题, 还需引入

函数的线性相关与线性无关概念.

定义12.1 设 $y_1(x), y_2(x),\cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的n 个函数，若存在不全为 0 的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) \equiv 0,\ \ x \in I$$

则称这 n个函数在 I 上线性相关；否则称为线性无关.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

特别地,对于两个函数的情形:

定理 设 $y_1(x), y_2(x)$在 $\mathrm{I}=[a,b]$ 上连续，若

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{常数或} \ \frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq \text{常数}$$

则函数$y_1(x)$ 与 $y_2(x)$在 I 上线性无关.

例如: $\because \quad \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x \neq$ 常数

$\therefore \quad \sin x, \cos x$在任何区间上线性无关 .

注　可以证明:

设 $y_1(x), y_2(x)$是二阶齐次线性方程 (6.1) 在 $\mathrm{I}=[a,b]$的两个解，则

$y_1(x), y_2(x)$在 $\mathrm{I}=[a,b]$上线性无关

$$\Leftrightarrow \ w(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad x\in I.$$

1.齐线性微分方程解的结构

定理 12.1 (齐次线性方程(6.1)的通解结构)

如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(6.1)的两个线性无关的特解, 那么 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 就是方程(6.1)的通解.

推论 设 $y_i(x)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$是$n$阶齐次线性微分方程: $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0$

n个线性无关的特解, 则此方程的通解为

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$为任意常数.

2. 非齐线性微分方程解的结构

定理12.2 (二阶非齐次线性方程(6.2)的解的结构)

设y^*是二阶非齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (6.2)$$

的一个特解，Y是与(6.2)对应的齐次线性方程(6.1)的通解，那么$y = Y + y^*$是二阶非齐次线性微分方程(6.2)的通解.

注 求二阶非齐次线性微分方程(6.2) 的通解的关键:

1° 确定与其相对应的二阶齐次线性方程(6.1) 的两个线性无关的解;

2° 求(6.2) 的一个特解.

★ (四) 降阶法与常数变易法

1.齐次线性方程求线性无关特解 —— 降阶法

已知 y_1 是方程(6.1)的一个非零特解,

令 $y_2 = u(x) y_1$ 代入(6.1)式, 得

$$y_1 u'' + [2y_1' + p(x) y_1] u' + \underbrace{[y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1]}_{0} u = 0,$$

即 $y_1 u'' + [2y_1' + p(x) y_1] u' = 0$ —— 可降阶方程

令 $v = u'$, 则有 $y_1 v' + [2y_1' + p(x) y_1] v = 0,$

$$y_1 v' + [2y_1' + p(x) y_1] v = 0$$ v的一阶方程

可分离变量方程

解得 $$v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x},$$

$$\therefore \quad u = \int v\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

故可求得方程 (6.1)的另一特解:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \qquad (6.5)$$

刘维尔公式

$$\because \quad \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} > 0 \qquad \therefore \quad \frac{y_2}{y_1} \neq \text{常数}$$

即 y_1 与 y_2 线性无关

故齐次线性方程(6.1)的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$= C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

(C_1,C_2为任意常数)

2.非齐次线性方程特解求法——常数变易法

设对应齐次方程通解为 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ (6.6)

设非齐次方程通解为 $y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$

$$y' = \underline{c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2} + c_1(x) y_1' + c_2(x) y_2'$$

要求： $c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0$ (6.7)

则 $y'' = \underline{c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2'} + c_1(x) y_1'' + c_2(x) y_2''$

将 y, y', y'' 代入方程 (6.2), 得

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + c_1(x)\underline{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}$$
$$+ c_2(x)\underline{(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)} = f(x)$$

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \qquad (6.8)$$

(6.7), (6.8)联立方程组 $\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$

$\because y_1, y_2$ 线性无关, $\therefore \quad w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0,$

$$\therefore \quad c_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{w(x)}, \qquad c_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{w(x)},$$

积分可得 $c_1(x) = C_1 + \int -\frac{y_2 f(x)}{w(x)}\,\mathrm{d}\,x,$

$$c_2(x) = C_2 + \int \frac{y_1 f(x)}{w(x)}\,\mathrm{d}\,x,$$

取$C_1 = C_2 = 0$, 则求得非齐次线性方程(6.2)特解:

$$y^* = -y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{w(x)}\,\mathrm{d}\,x + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{w(x)}\,\mathrm{d}\,x.$$

二、典型例题

例1 已知 $y_1=\frac{x}{2}\sin x$ 和 $y_2=-\frac{1}{8}\cos 3x$ 分别是方程: $y''+y=\cos x$, $y''+y=\cos 3x$ 的解，试求 $y''+y=\cos x\cos 2x$ 的一个特解.

解 $$\cos x\cos 2x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 3x)$$

$\because$ y_1 满足: $y''+y=\cos x$,

y_2 满足: $y''+y=\cos 3x$,

$\therefore$ $y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{x}{4}\sin x-\frac{1}{16}\cos 3x$ 为所求特解.

例2 下列各函数组在给定区间上是线性相关还是线性无关?

(1) $e^{x}, e^{-x}, e^{2x} \quad (x \in (-\infty,+\infty))$; 线性无关

解 若 $k_1 e^{x} + k_2 e^{-x} + k_3 e^{2x} \equiv 0,$

则 $k_1 e^{x} - k_2 e^{-x} + 2k_3 e^{2x} \equiv 0,$

$k_1 e^{x} + k_2 e^{-x} + 4k_3 e^{2x} \equiv 0,$

$\boxed{\text{“}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\text{”}}$

令 $x = 0$, 得 $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + 4k_3 = 0 \end{cases}$

求解得 $k_1 = k_2 = k_3 = 0.$

(2) $1, \cos^2 x, \sin^2 x, \ (x \in (-\infty, +\infty));$

解 $\because$ $\exists$不全为零的常数 $C_1 = 1,\ C_2 = C_3 = -1,$

使 $1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0 \quad , x \in I \subseteq (-\infty, +\infty)$

故该函数组在任何区间 I 上都线性相关;

例3 证明：函数组 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 在任何区间 I 上线性无关.

证 (用反证法)

假设：$1, x, x^2, \cdots, x^n$ 在区间 I 上线性相关

则 $\exists$不全为零的常数 $C_0, C_1, \cdots, C_n,$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

使得 $C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n\equiv 0,\quad x\in I$

令 $p_n(x)=C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n$

则 $p_n(x)$至多是x的n次多项式，从而至多有n个零点，故

$$p_n(x)=C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n\not\equiv 0,\quad x\in I$$

(否则，$p_n(x)$在I上有无穷多个零点)，这与

$$p_n(x)=C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n\equiv 0,\quad x\in I$$

矛盾！

$\therefore\quad 1, x, x^2,\cdots,x^n$在任何区间 I上线性无关 .

例4 验证：$y_1 = \cos x$，$y_2 = \sin x$ 均是方程 $y'' + y = 0$ 的解，并求此方程的通 解.

验证： $(\cos x)'' + \cos x = -\cos x + \cos x \equiv 0$

$(\sin x)'' + \sin x = -\sin x + \sin x \equiv 0$

$\therefore\ y_1 = \cos x$，$y_2 = \sin x$ 均是所给方程的解 .

又 $\because\ \dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \neq$ 常数,

$\therefore\ y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$是所给方程的通解 .

例5 设 y_1, y_2, y_3 是微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的三个不同解，且 $\dfrac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} \neq$ 常数，

则该微分方程的通解为 (**D**).

(A) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$;

(B) $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_2 - y_3)$;

(C) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$;

(D) $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$.

例6 已知 $y_1 = x^2, y_2 = x + x^2, y_3 = e^x + x^2$

都是方程

$$(x-1)y'' - x y' + y = -x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

的解，求此方程的通解 .

解 由性质3，知 $\tilde{y}_1 = y_2 - y_1 = x, \quad \tilde{y}_2 = y_3 - y_1 = e^x$

均是对应齐次线性方程 :

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0 \qquad (2)$$

的解.

又 $\because \quad \dfrac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \dfrac{x}{e^x} \neq$ 常数,

$\therefore \quad \tilde{y}_1$ 与 $\tilde{y}_2$线性无关

齐次线性方程(2)的通解为:

$$Y = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = C_1 x + C_2 e^x$$

由定理12.2，知

原方程(1)的通解为:

$$y = Y + y_1 = C_1 x + C_2 e^x + x^2.$$

例7 已知微分方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$

的一个特解 $y_1=e^{x^2}$,求此方程的通解．

解 令 $y_2=y_1u$, 若 $y_2''-4xy_2'+(4x^2-2)y_2=0$

则 $y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ $\boxed{p(x)=-4x}$

$$=e^{x^2}\int e^{-2x^2}\cdot e^{-\int(-4x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$=e^{x^2}\int e^{-2x^2}\cdot e^{2x^2}\mathrm{d}x=e^{x^2}\int\mathrm{d}x=e^{x^2}\cdot x$$

$\therefore$ 此方程的通解为 $y=C_1e^{x^2}+C_2xe^{x^2}$.

例8 求方程 $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=x-1$ 的通解.

解 $\because 1+\frac{x}{1-x}-\frac{1}{1-x}=0,$

对应齐线性方程一特解为 $y_1=e^x$, 由刘维尔公式

$$y_2=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{-\int\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=x,$$

对应齐线性方程通解为 $Y=C_1x+C_2e^x$.

设原方程的通解为 $y = c_1(x)x + c_2(x)e^x$,

$c_1'(x)$，$c_2'(x)$ 应满足方程组

$$\begin{cases} xc_1'(x) + e^x c_2'(x) = 0 \\ c_1'(x) + e^x c_2'(x) = x - 1 \end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases} c_1'(x) = -1 \\ c_2'(x) = xe^{-x} \end{cases}$$

$c_1(x) = -x,\quad c_2(x) = -xe^{-x} - e^{-x}$

原方程的特解为 $y^* = -x^2 - x - 1.$

故原方程的通解为

$$y^* = Y + y^* = C_1 x + C_2 e^x - x^2 - x - 1.$$

三、同步练习

1. 设$y'' + P(x)y' = f(x)$有一特解 $\frac{1}{x}$,对应

齐次线性方程有一特解 为x^2,试求：

(1) $P(x), f(x)$的表达式;

(2) 此方程的通解 .

2. 设 $y_1(x), y_2(x)$是微分方程

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

的两个不同特解，则此 微分

方程的通解是 ________________.

四、同步练习解答

1. 设$y'' + P(x)y' = f(x)$有一特解 $\frac{1}{x}$,对应齐次线性方程有一特解 为x^2,试求：

(1) $P(x), f(x)$的表达式;

(2) 此方程的通解 .

解 (1) 由条件可得

$$\begin{cases} 2 + P(x)2x = 0 \\ \frac{2}{x^3} + P(x)(-\frac{1}{x^2}) = f(x) \end{cases}$$

解得 $P(x) = -\frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{3}{x^3}$

代入原方程，得 $y'' - \frac{1}{x}y' = \frac{3}{x^3}$

(2) 显见 $y'' - \frac{1}{x}y' = 0$ 有一特解 $y = 1$,

故齐次线性方程的通解 $Y = C_1 + C_2 x^2$

由解的结构定理知,

原方程的通解为 $y = C_1 + C_2 x^2 + \frac{1}{x}$

2. 设 $y_1(x), y_2(x)$是微分方程

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

的两个不同特解，则此 微分方程的通解是 $\underline{y = C(y_1 - y_2) + y_1}$.

解 $\because$ $y_1 - y_2 \neq 0$ 是 $y' + P(x)y = 0$ 的解

$\therefore$ $C(y_1 - y_2)$ 也是该方程 的解，且是通解 .

$\therefore$ 所给非齐次线性方程的 通解为：

$$y = C(y_1 - y_2) + y_1$$