第二节　数学建模简介与建立函数关系举例

习题　1-2

1.　设一正圆锥体高为 H，底半径为 R．现有一正圆柱体内接于该圆锥体，已知正圆柱体的底半径为 r．试将该圆柱体的高 h 与体积 V 表示成 r 的函数.

解　由 $\dfrac{H-h}{H}=\dfrac{r}{R}$ 得，$h=\dfrac{H}{R}(R-r)$；$V=\pi r^2 h=\pi\dfrac{H}{R}(R-r)r^2$．

2.　有一长 $1\,\text{m}$ 的细杆(记作 OAB)，OA 段长 $0.5\,\text{m}$，其线密度(单位长度细杆的质量)为 $2\,\text{kg}$　/m；AB 段长 $0.5\,\text{m}$，其线密度为 $3\,\text{kg}$　/m．设 P 是细杆上任意一点，OP 长为 x，质量为 m，求 $m=f(x)$ 的表达式.

解　当 $0\le x\le 0.5$ 时，$f(x)=2x$；当 $0.5<x\le 1$ 时，$f(x)=2\times 0.5+3(x-0.5)=1+3(x-0.5)$．

故 $m=f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 0.5,\\ 1+3(x-0.5), & 0.5<x\le 1.\end{cases}$

3.　邮局规定国内的平信，每 20g 付邮资 0.80 元，不足 20g 按 20g 计算，信件重量不得超过 2kg，试确定邮资 y 与重量 x 的关系.

解　由题意，易知：

当 $0<x\le 20$ 时，$y=0.80$；当 $20<x\le 40$ 时，$y=2\times 0.80=1.60$；当 $40<x\le 60$ 时，$y=3\times 0.80=2.40$；$\cdots$ 当 $1980<x\le 2000$ 时，$y=100\times 0.80=80.00$．

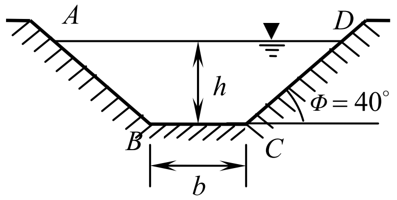
故 $y=\begin{cases}0.80, & 0<x\le 20,\\ 1.60, & 20<x\le 40,\\ 2.40, & 40<x\le 60,\\ \cdots, & \cdots\\ 80.00, & 1980<x\le 2000.\end{cases}$

4.　有一身高为 a(m) 的人在距路灯杆 b(m) 处沿直线以 c(m/s) 朝远离灯杆的方向匀速行走，假设路灯高为 h(m)$(h>a)$，求人影的影长 s 与时间 t 的关系.

解　由题意 $\dfrac{a}{h}=\dfrac{s}{s+(ct+b)}$，故 $s=\dfrac{a(ct+b)}{h-a}$．

5.　已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40^\circ$ (如下图)．当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 L ($L=AB+BC+CD$)与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域.

解　因为 $h = AB\sin 40^\circ = CD\sin 40^\circ$,



故
$$AB = CD = \frac{h}{\sin 40^\circ}.$$

由梯形面积公式可得:
$$S_0 = \frac{1}{2}h(BC + AD),$$

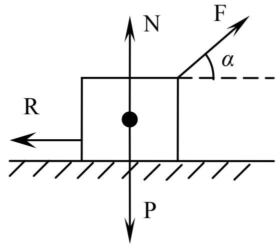
故
$$S_0 = \frac{1}{2}h(BC + (BC + 2\cot 40^\circ \cdot h),$$

可得
$$BC = \frac{S_0}{h} - \cot 40^\circ \cdot h.$$

所以
$$L = AB + BC + CD = \frac{2h}{\sin 40^\circ} + \frac{S_0}{h} - \cot 40^\circ \cdot h = \frac{S_0}{h} + \frac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h.$$

h 的取值范围由下述不等式组确定
$$\begin{cases} h > 0, \\ \dfrac{S_0}{h} - \cot 40^\circ \cdot h > 0, \end{cases}$$
解之得所求定义域为 $(0, \sqrt{S_0 \tan 40^\circ})$.

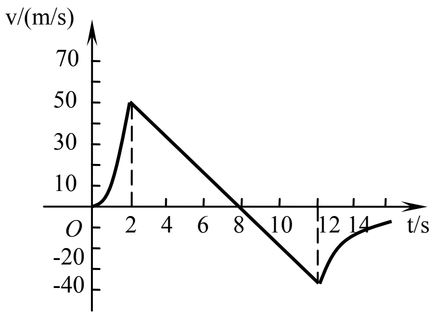
6.　已知一物体与地面的摩擦系数是 μ，重量是 P. 设有一与水平方向成 α 角的拉力 $\boldsymbol{F}$，使物体从静止开始移动(见右图)，求物体开始移动时拉力 $\boldsymbol{F}$ 与角 α 之间的函数关系式.



解　用 F 表示拉力 $\boldsymbol{F}$ 的大小，所以
$$F\cos\theta = \mu(P - F\sin\alpha),$$

故
$$F = \frac{\mu P}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

7.　当一模型火箭发射时，推进器燃烧数秒，使火箭向上加速，当燃烧结束后，火箭再向上升了一会，便向地面自由下落. 当火箭开始下降一段短时间后，火箭张开一个降落伞，降落伞使得火箭下降速度减慢，以免着陆破裂. 下图所示为此火箭飞行时的速度数据.



试利用此图回答下列问题:

(1)　当推进器停止燃烧时，火箭上升的速度是多少?

(2)　推进器燃烧了多久?

(3)　火箭什么时候达到最高点? 此时速度是多少?

(4)　降落伞何时张开? 当时火箭的下降速度是多少?

(5) 在张开降落伞之前，火箭下降了多长时间?

解 (1) 由图易知，推进器停止燃烧时,火箭速度最大，应为 50 m/s;

(2) 推进器燃烧了 2s;

(3) 火箭在 8s 时达到最高点，此时速度为 0 m/s;

(4) 降落伞在第 12s 张开，此时火箭的下降速度为 –40 m/s;

(5) 在张开降落伞之前，火箭下降了 $12-8=4\,(\mathrm{s})$.

8. 假设质点以初速度 $v_0=600\mathrm{m/s}$ 沿与水平面成 $\theta=45^\circ$ 角的方向射出，试画出质点运动轨迹的图形，并求质点的射程及最大升高的高度(设 $g\approx 10\mathrm{m/s}^2$，空气阻力忽略不计).

解 以质点起始位置为坐标原点，水平方向为 x 轴建立平面直角坐标系，设 t 时刻质点的横坐标为 x，纵坐标为 y，则有

$$x=(v_0\cos\frac{\pi}{4})t,\quad y=(v_0\sin\frac{\pi}{4})t-\frac{1}{2}gt^2,$$

消去 t，得 $y=x-\dfrac{gx^2}{v_0^2}$，即

$$y=x-\frac{x^2}{36000},$$

此即质点运动轨迹，图形如图 1.4.

易知质点射程为 36000 m，最大升高为 9000 m.

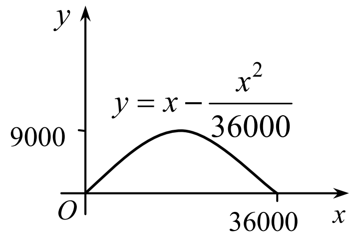


图 1.4