第一节 一元函数

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

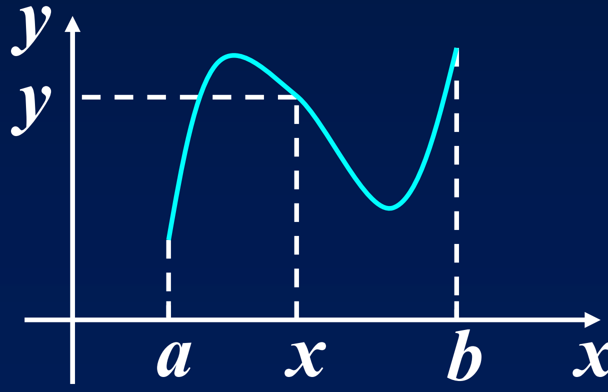
一、主要内容

（一）函数的概念及图形

1. 函数的概念

定义1 设数集 $D \subseteq R$，则称映射 $f: D \to R$ 为定义在 D 上的一元函数，记为 $y = f(x), x \in D.$

x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，$f(D)$ 称为值域.



$(D=[a,b])$

函数图形：称点集

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

$$\subset D \times f(D)$$

为函数 f 的图形.

$$\forall x \in D \xmapsto{\ f\ } y \in f(D) = \{ y \mid y = f(x), x \in D \}$$

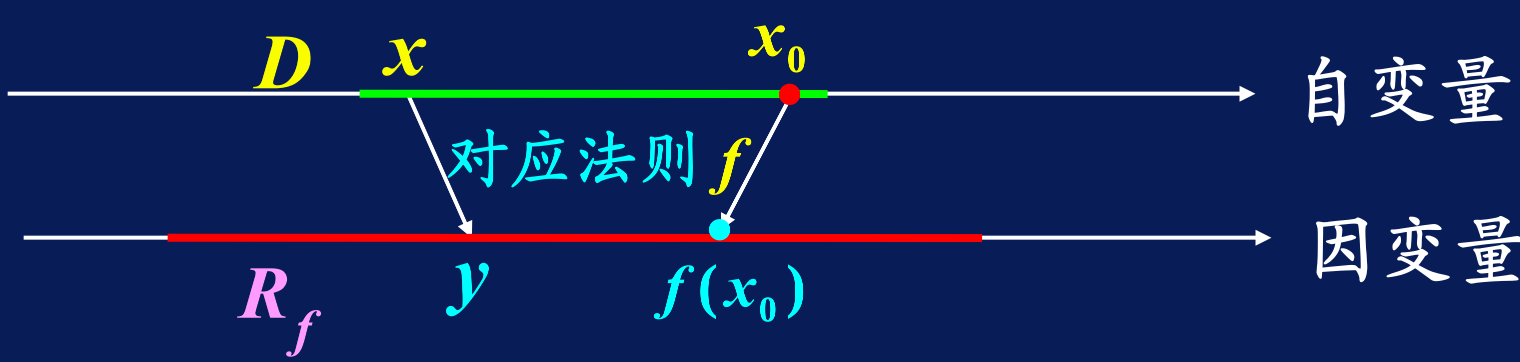
定义域　　对应法则　　值域

注 1° 函数的二要素

定义域 D

对应法则 f

$\longrightarrow R_f$



2° 定义域: 使表达式及实际问题都有意义的一切实数所组成的集合.

3° 函数的表示方法:

解析法、图像法、列表法.

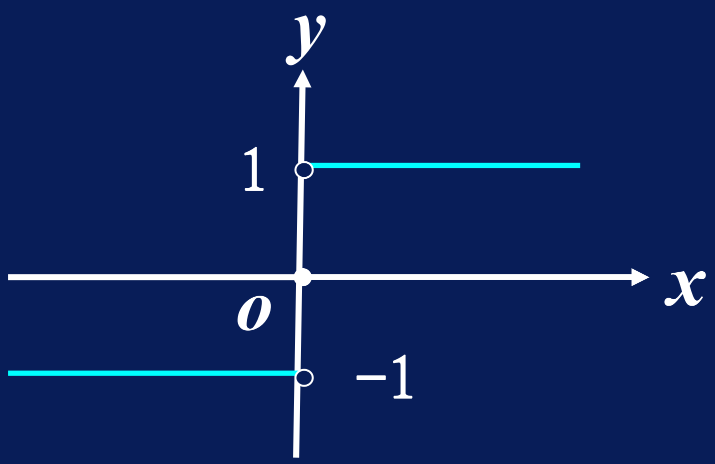
4° 分段函数

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同的式子来表示的一个函数，称为分段函数.

2. 几个特殊的函数举例

(1) 符号函数

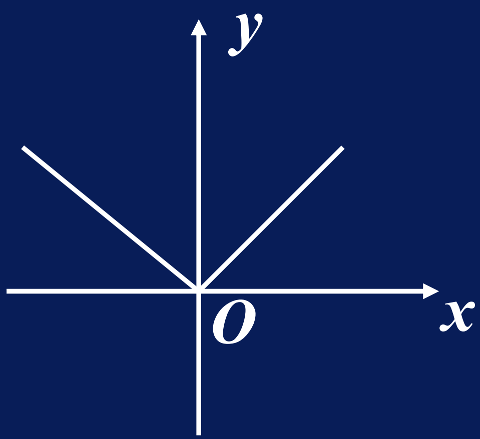
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

(2) 绝对值函数

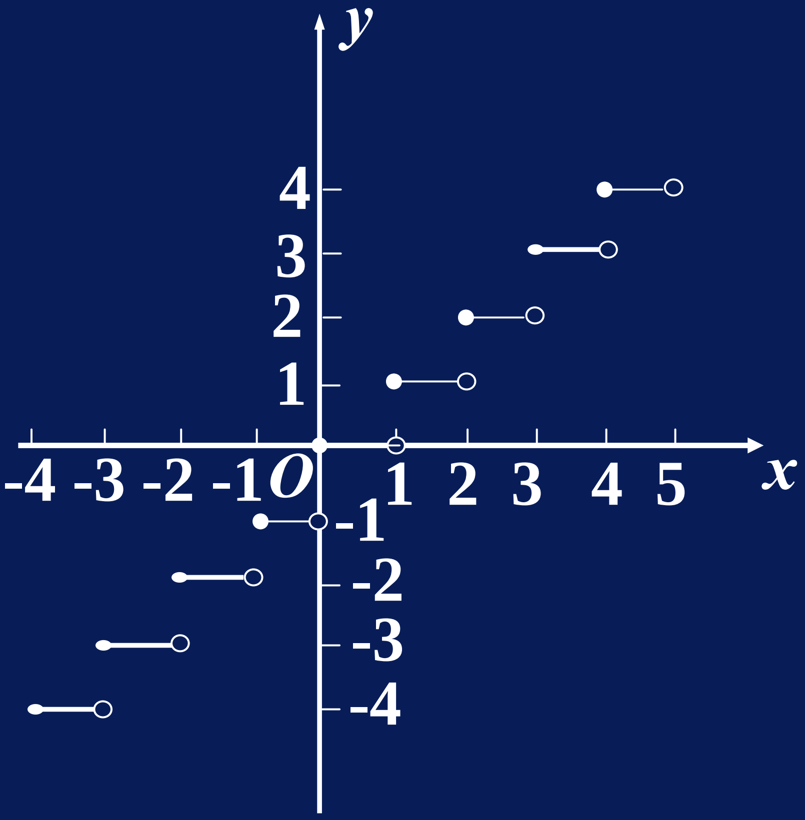
$$y = |x| = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$



(3) 取整函数 $y=[x]$, $x\in R$

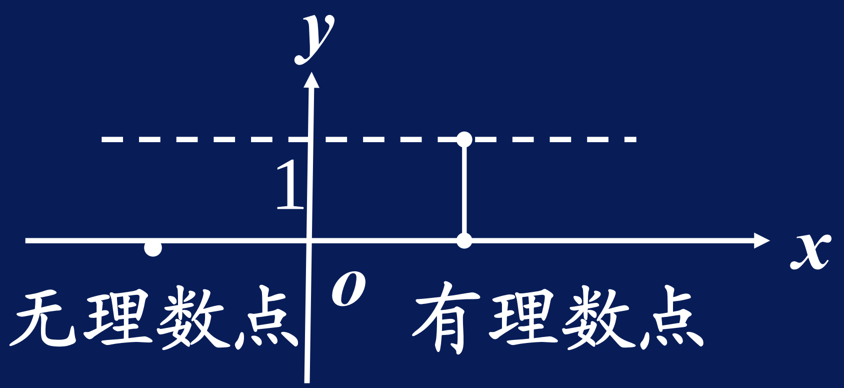
$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

阶梯曲线



(4) 狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当}x\text{是有理数时} \\ 0 & \text{当}x\text{是无理数时} \end{cases}$$



(5) 数列

数列也是一类函数, 它的定义域是全体正整数构成的集合 N^+, 它的图形是平面上的一些孤立点的集合.

（二）函数可能具有的几种特性

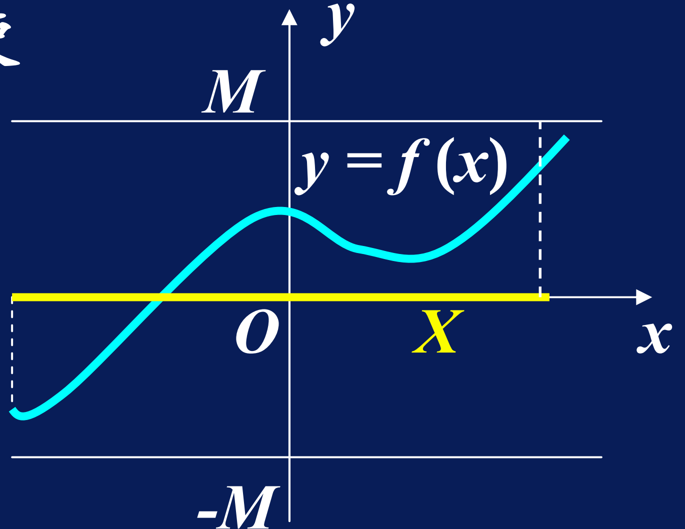
设函数 $y = f(x), x \in D$，又数集 $X \subseteq D$.

1. 有界性

若 $\forall x \in X$, $\exists$常数 $M > 0$，使

$$|f(x)| \le M,$$

则称 $f(x)$在X上有界.



若 $\forall x \in D$, $\exists$常数$M > 0$，使

$$|f(x)| \le M,$$

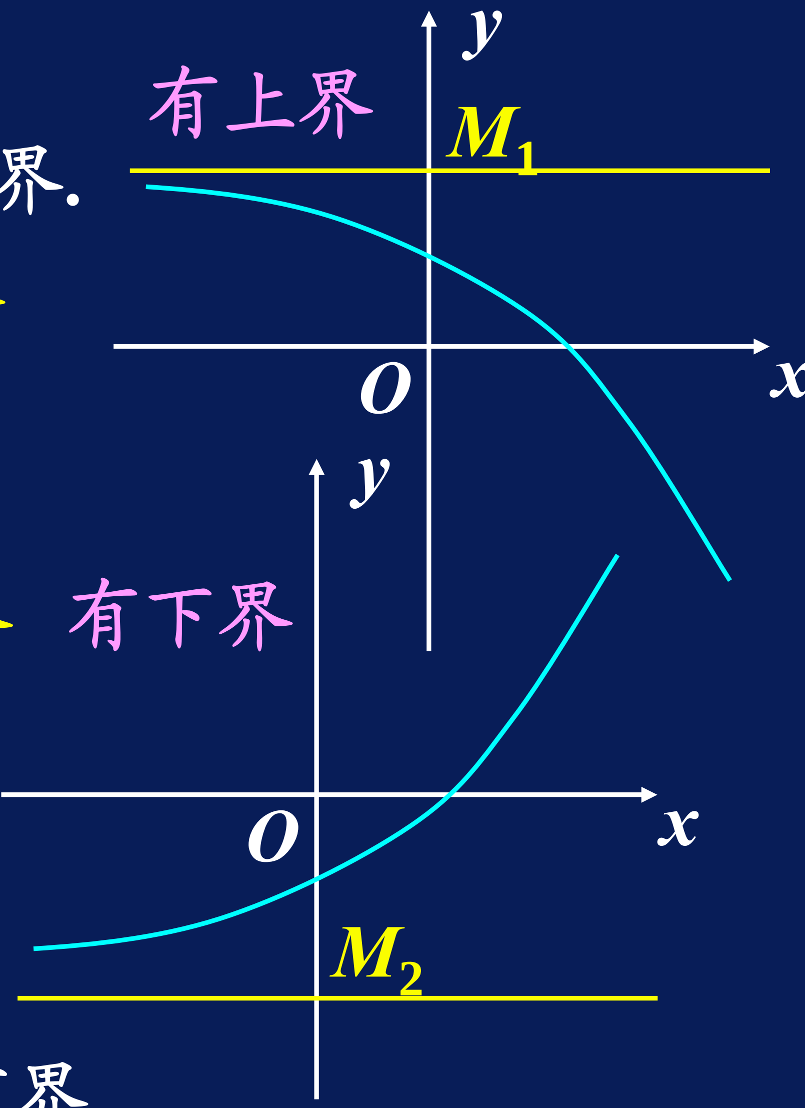
则称 $f(x)$为有界函数.

注

1° 还可定义有上界、有下界.

$\cdots, f(x) \le M_1$, 称为有上界

$\cdots, f(x) \ge M_2$, 称为有下界



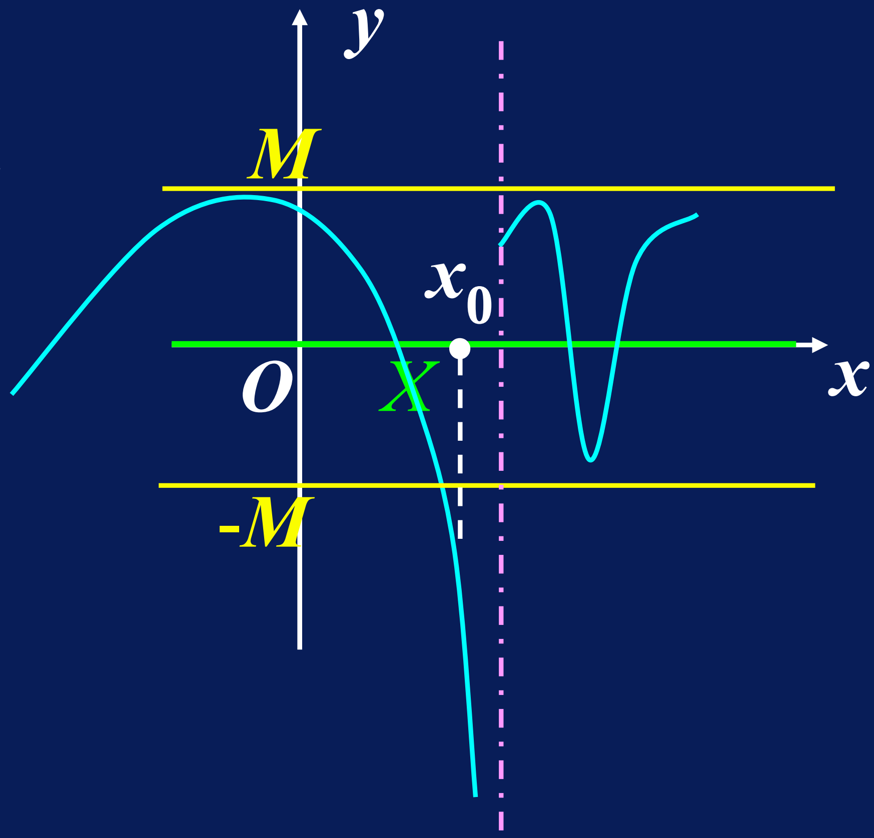
函数有界 $\Leftrightarrow$ 既有上界又有下界

2° $f(x)$ 在数集 X上无界:

若$\forall M>0$, $\exists x_0 \in X$,

使得 $\left|f(x_0)\right| > M$

则称$f(x)$在 X 上无界.

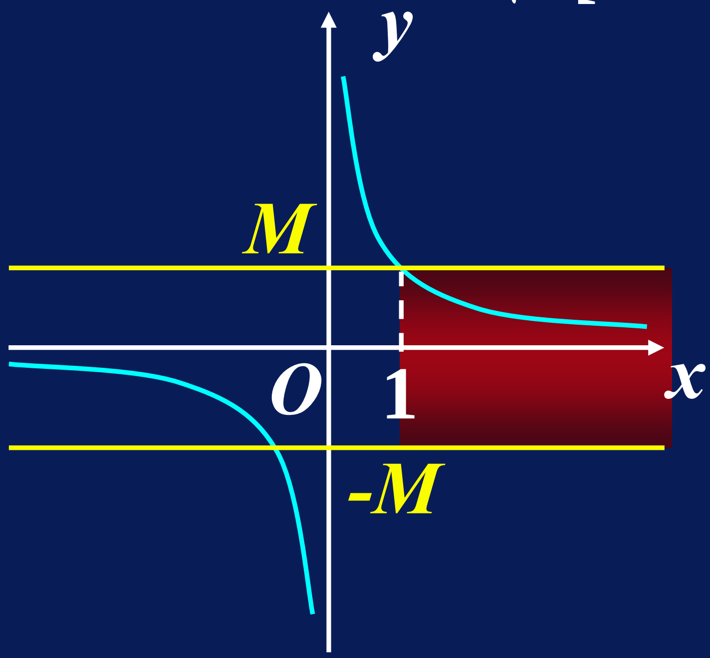


3° M, M_1, M_2 不惟一;

4° 函数有界与否与数集 X 密切相关;

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界, 但

在 $[1, +\infty)$ 上有界.

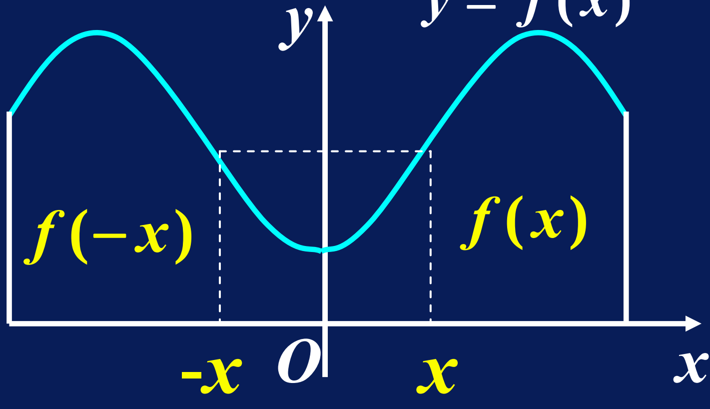


2. 奇偶性

设D关于原点对称，即 $\forall x \in D$, 有$-x \in D$.

若 $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$

则称$f(x)$为**偶函数**;

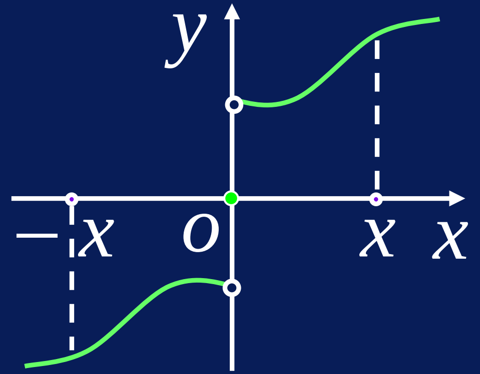


若 $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$

则称$f(x)$为**奇函数**.

说明: 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 有定义，

则当 $f(x)$ 为奇函数时，$f(0)=0$.

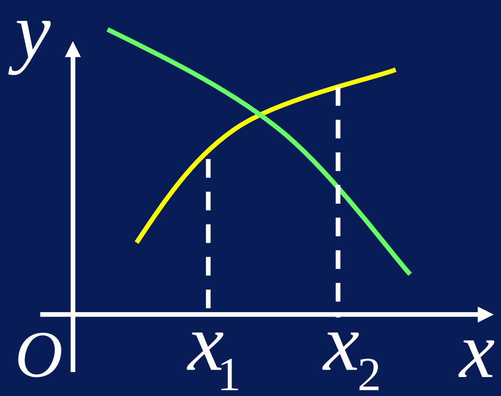


3. 单调性

设区间 $I \subseteq D$. $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时,

若 $f(x_1) < f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在 I 上单调增加;

若 $f(x_1) > f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在 I 上单调减少.



单调增加或单调减少的函数 统称为单调函数.

注 函数单调与否同所论区间有关.

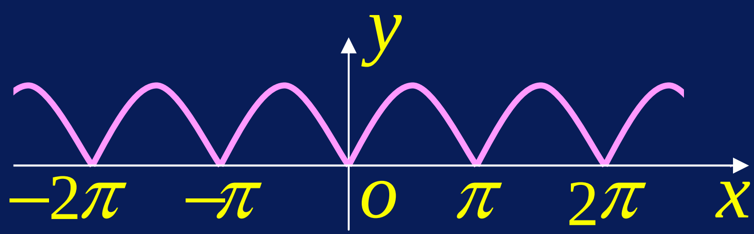
4. 周期性

$\forall x \in D, \exists$ 常数 $T > 0$, 且 $x \pm T \in D$, 若

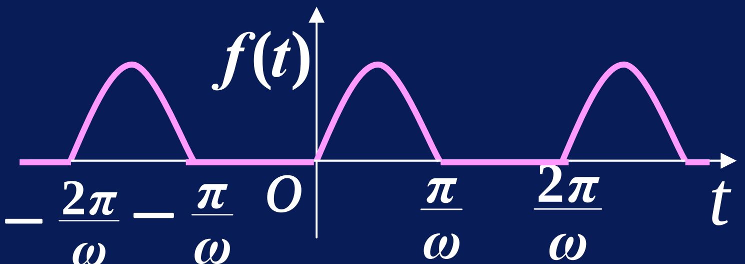
$$f(x \pm T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，称 T 为**周期**.

(通常说周期函数的周期是指其**最小正周期**).



周期为 π



周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$

注 1° 周期函数的定义域既无上界也无下界.

思考：$f(x)=\sin\sqrt{x}$ 是周期函数吗?

答：不是.

2° 并非任何一个周期函数都有最小正周期.

例如：①常量函数 $f(x)=C$, 每一个正数都是其周期.

② 狄里克雷函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数};\end{cases}$$

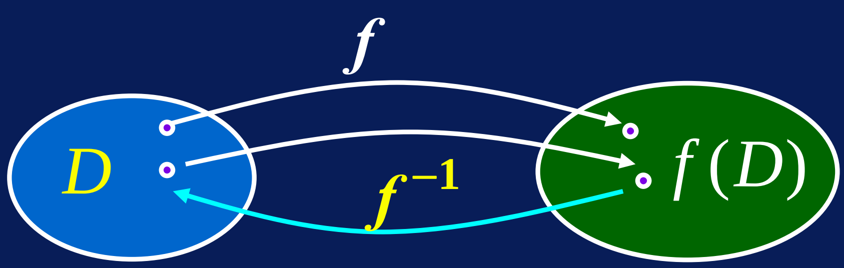
每一个正有理数都是其周期.

这两个函数均无最小正周期!

（三）反函数与复合函数

1. 反函数的定义及性质

定义 若函数 $f: D \to f(D)$ 是一一映射，则存在其逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$，使 $\forall y \in f(D), f^{-1}(y) = x$，其中 $f(x) = y$，称此映射 f^{-1} 为 f 的反函数 .



习惯上，$y=f(x),\ x\in D$ 的反函数记成

$$y=f^{-1}(x)\ ,\ x\in f(D)$$

例如，函数 $y=x^2,\ x\in(-\infty,0]$，其反函数为

$$y=-\sqrt{x},\quad x\in[\,0,+\infty\,)$$

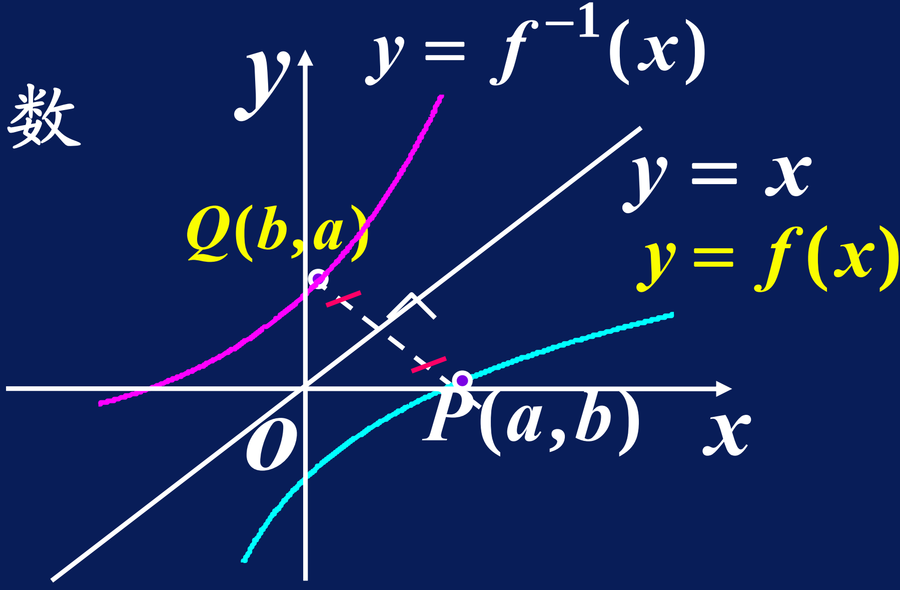
性质:

(1) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数

$$y=f^{-1}(x)$$

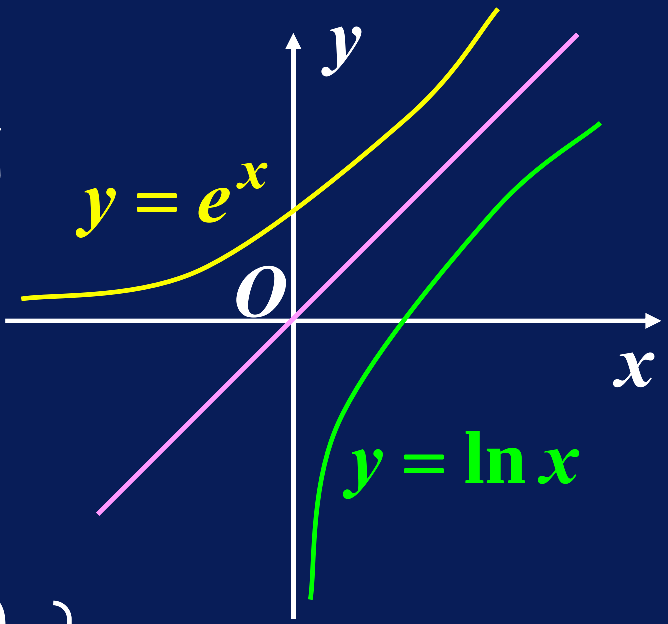
的图形关于

直线 $y=x$ 对称 .



(2) $y = f(x)$ 单调递增 (减)

其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 也单调递增 (减).

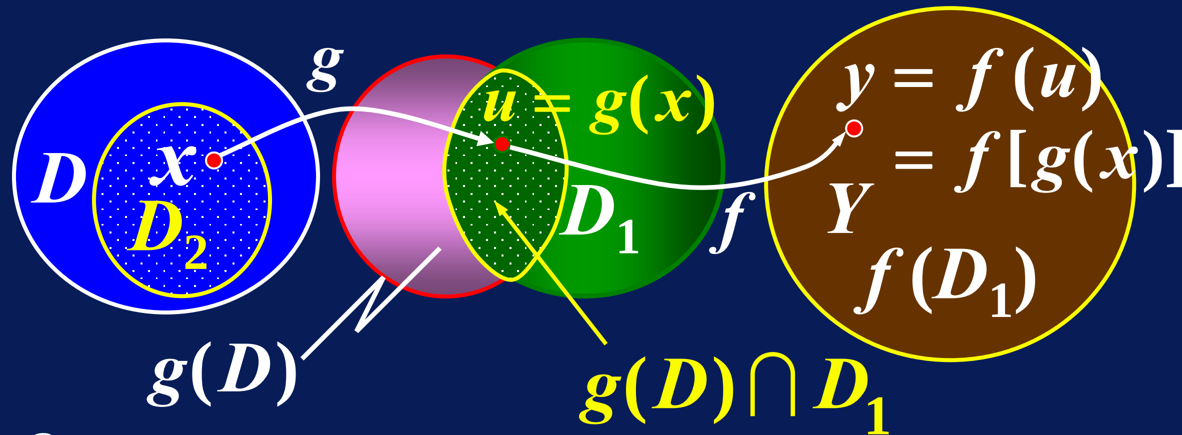


例如,

$$\left.\begin{array}{l} \text{指数函数 } y = e^x, x \in (-\infty, +\infty) \\ \text{对数函数 } y = \ln x, x \in (0, +\infty) \end{array}\right\} \text{互为反函数,}$$

它们都单调递增, 其图形关于直线 $y = x$ 对称.

2. 复合函数



设有函数链

$$\forall x \in D \xmapsto{\;g\;} u = g(x) \in g(D)$$

$$\forall u \in D_1 \xmapsto{\;f\;} y = f(u) \in Y = f(D_1)$$

则当 $g(D) \cap D_1 \neq \varnothing$ 时，由上述函数链可定义

由 D 到 Y 的复合函数，记作

$$y = f[g(x)],\quad x \in D_2 = \{x \mid x \in D \text{且} g(x) \in D_1\}$$

或 $\quad (f \circ g)(x) = f[g(x)],\ x \in D_2.$

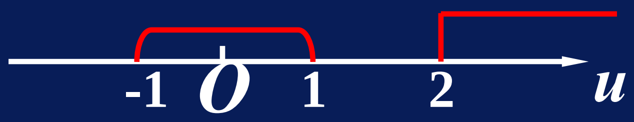
注 1° 并非任何两个函数都能构成复合函数，函数的复合是有条件的.

条件：$D_f \cap R_g \neq \varnothing$

如： $y = f(u) = \arcsin u$ 与 $u = g(x) = 2 + x^2$ 不能构成复合函数 $y = \arcsin(2 + x^2)$.

因 $D_f = [-1, 1]$， $R_g = [2, +\infty)$， 而

$D_f \cap R_g = \varnothing$



2° 求复合函数定义域的方法：由外向内，要求内层函数的函数值落在外层函数的定义域中.

（四）函数的运算

设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域分别为 D_1, D_2, $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$ α, β 为实数. 则定义两个函数的运算如下:

和: $(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in D;$

差: $(f-g)(x) = f(x) - g(x),\ x \in D;$

积: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ x \in D;$

商: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in D,$ 且 $g(x) \neq 0;$

线性组合: $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x),\ x \in D;$

（五）基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数 统称为 基本初等函数.

（六）初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数. 否则称为非初等函数.

例如， $y=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 可表为 $y=\sqrt{x^2}$,

故为初等函数.

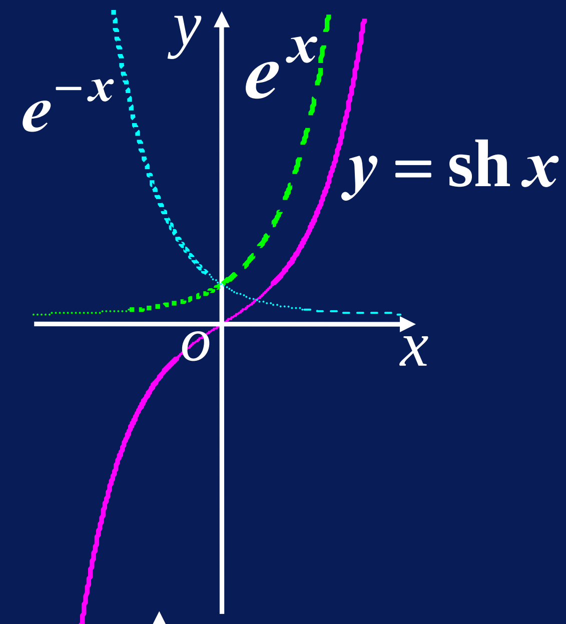
工程中常用的一类初等函数:

1. 双曲函数

(1) 双曲正弦

$$y = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ 为奇函数}$$

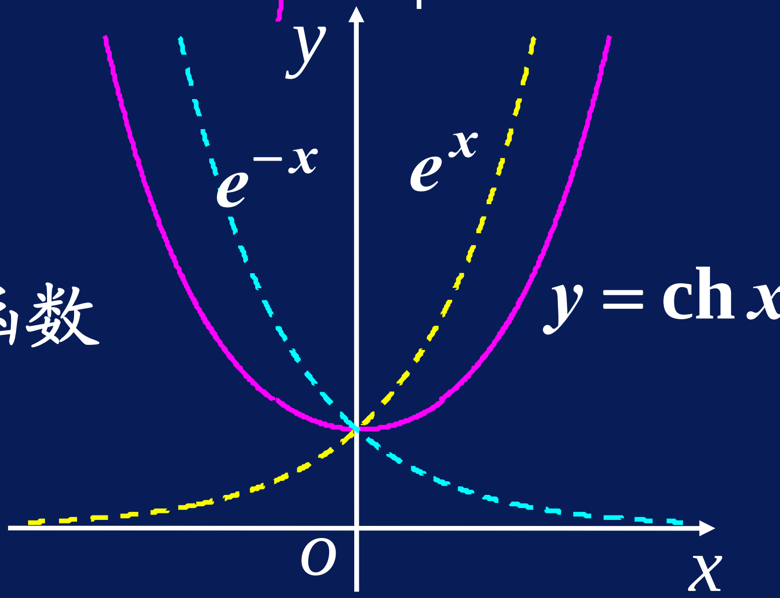
$$\overset{\text{记}}{=} \operatorname{sh} x$$



(2) 双曲余弦

$$y = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ 为偶函数}$$

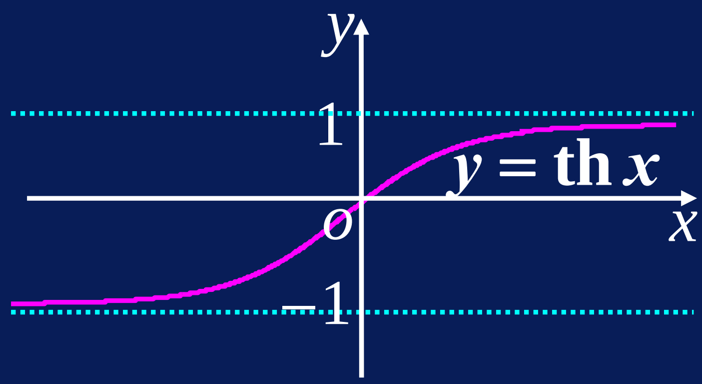
$$\overset{\text{记}}{=} \operatorname{ch} x$$



(3) 双曲正切

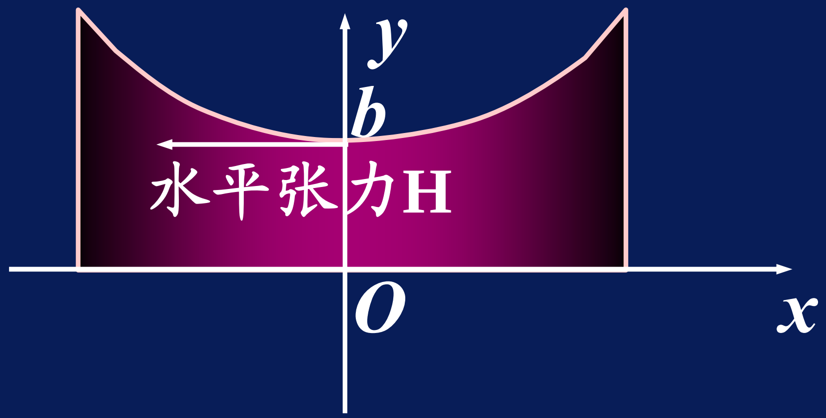
$$y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$ 为奇函数

$\overset{\text{记}}{=} \operatorname{th} x$



背景

要在一个舞台上用绳索悬吊一幕布，问：幕布的上沿应该剪成怎样的曲线，才能使它底边上的各点正好都接触地平面？



答案：$y = b\,\mathrm{ch}\sqrt{\dfrac{\mu}{H}}x$ （ μ为幕布的面密度）

双曲函数常用公式

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

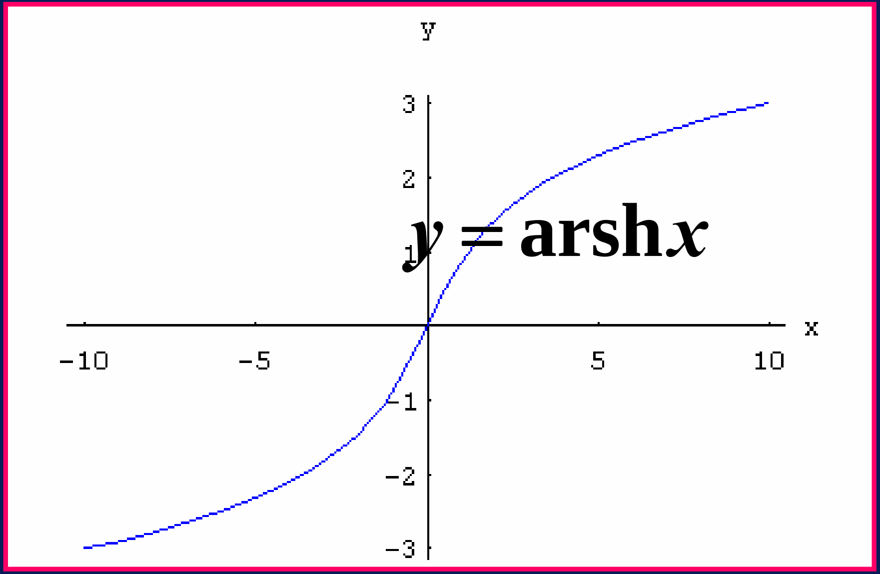
2. 反双曲函数

(1) 反双曲正弦：

$$y = \operatorname{arsh} x$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$D = (-\infty, +\infty)$$



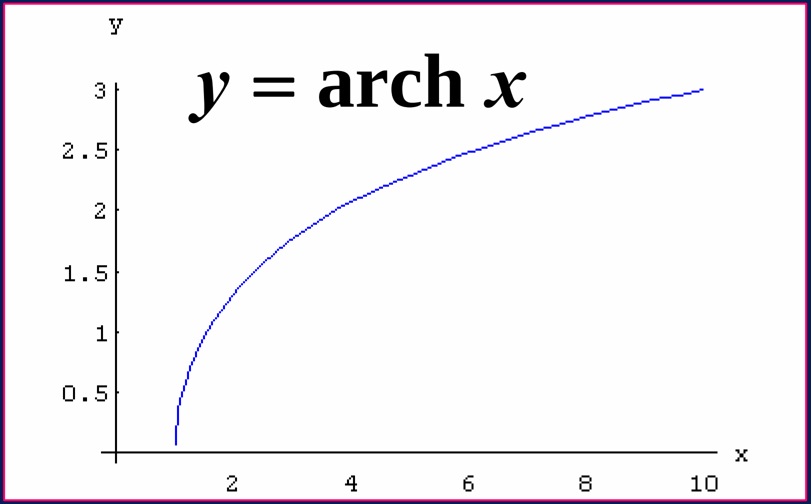
奇函数，在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加．

(2) 反双曲余弦：

$$y = \operatorname{arch} x$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$D = [1, +\infty)$$



在 $[1,+\infty)$ 内单调增加.

(3) 反双曲正切函数:

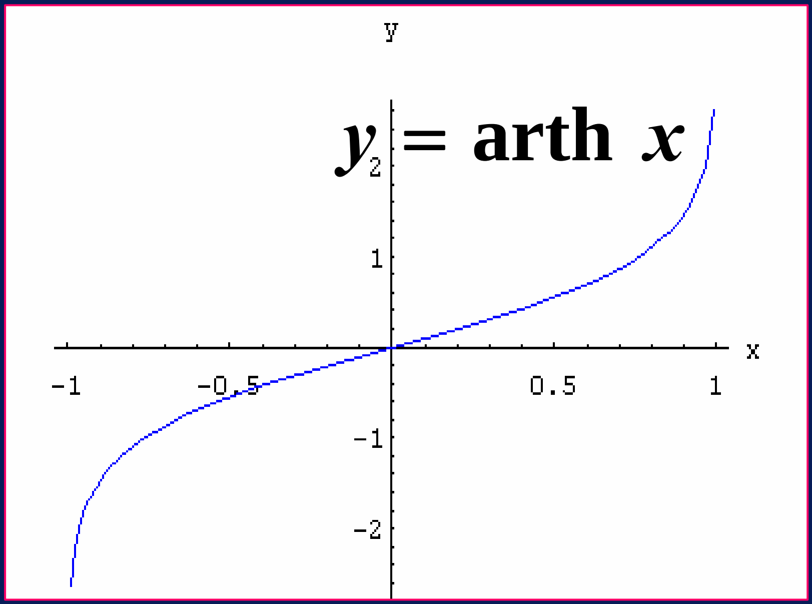
$$y = \operatorname{arth} x$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$D = (-1,1)$

奇函数,

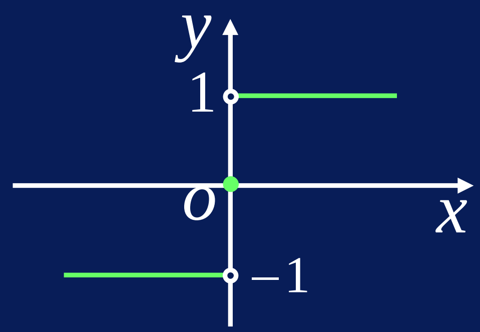
在 $(-1,1)$ 内单调增加.



非初等函数举例:

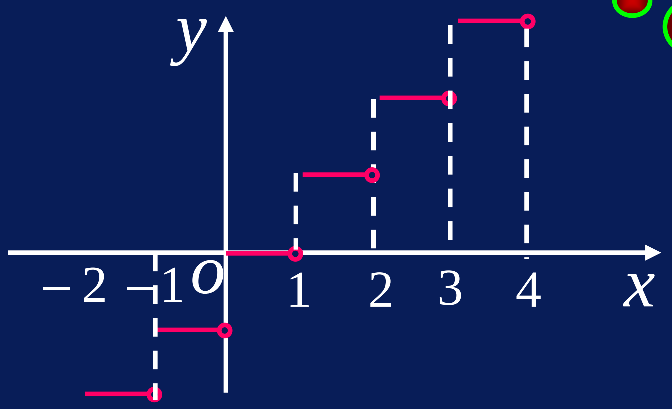
符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$



取整函数

$$y = [x] = n, \text{当 } n \le x < n+1, n \in \mathrm{Z}$$



一般地，不能用一个式子表示的分段函数不是初等函数.

二、典型例题

例1 下列各组函数是否相同?

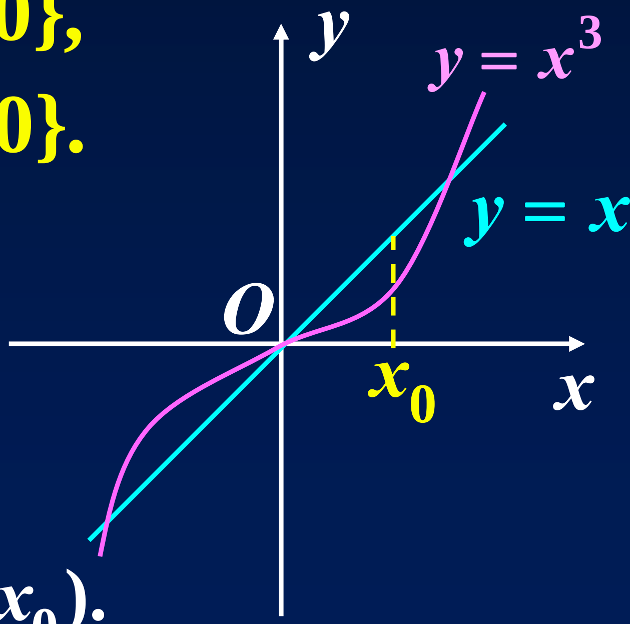
(1) $y = \lg x^2$ 与 $y = 2\lg x$

答: 不同, 因为二者定义域不同.

前者的定义域为 $D_1 = \{x \mid x \neq 0\}$,

而后者的定义域为 $D_2 = \{x \mid x > 0\}$.

(2) $y = x$ 与 $y = x^3$



答: 不同, 因为二者的对应法则不同.

注 $f = g \Leftrightarrow \forall x_0 \in D,\ f(x_0) = g(x_0).$

(3) $y=1$与$u=\sin^2 v+\cos^2 v$

答：相同.

两个函数是否相同，仅取决与D和f，而与f的表达形式无关，也与变量的记号无关！

例2 求函数$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$的定义域.

解 $\begin{cases} x^2\neq 1, \\ x+2\geq 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x\neq \pm 1, \\ x\geq -2, \end{cases}$

$$D=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

例3 设 $f(0)=0$ 且 $x\neq 0$ 时 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$, 其中 a,b,c为常数, 且$|a|\neq|b|$, 证明 $f(x)$为奇函数.

证 令$t=\frac{1}{x}$, 则 $x=\frac{1}{t}$, $af(\frac{1}{t})+bf(t)=ct$

由
$$\begin{cases} af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x} \\ af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx \end{cases}$$

消去$f(\frac{1}{x})$,得

$$f(x)=\frac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\frac{a}{x}\right) \quad (x\neq 0)$$

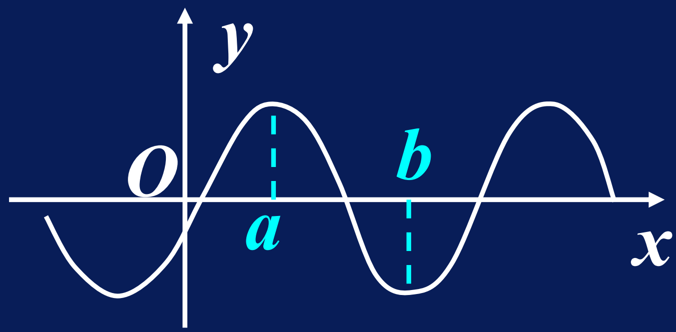
显然 $f(-x)=-f(x)$, 又 $f(0)=0$, 故 $f(x)$为奇函数.

例4 设函数 $y=f(x),\ x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于 $x=a$，$x=b\ (a\neq b)$ 均对称，求证 $y=f(x)$ 是周期函数.

证 由 $f(x)$ 的对称性知

$$f(a+x)=f(a-x),$$

$$f(b+x)=f(b-x)$$



于是

$$f(x)=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]$$

$$=f(2a-x)=f[b+(2a-x-b)]$$

$$=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)]$$

故 $f(x)$ 是周期函数，周期为 $T=2(b-a)$

例5 求$y=\begin{cases} x, & x<1, \\ x^3, & 1\le x\le 2, \\ 3^x, & 2<x, \end{cases}$的反函数.

解 分段函数的反函数应当逐段求:

当$x<1$时，$y=x$，解得 $x=y$,

反函数为 $y=x$, $x\in(-\infty,1)$;

当$1\le x\le 2$时, $y=x^3$，解得 $x=\sqrt[3]{y}$,

反函数为 $y=\sqrt[3]{x}$, $x\in[1,8]$;

又对于直接函数$y=x^3$来说其值域为$[1,8]$,

故反函数 的定义域为$[1,8]$;

当 $x > 2$ 时， $y = 3^x$，解得 $x = \log_3 y$,

反函数为

$$y = \log_3 x, \quad x \in (9, +\infty).$$

综上所述，所求反函数为

$$y = \begin{cases} x, & x < 1, \\ \sqrt[3]{x}, & 1 \le x \le 8, \\ \log_3 x, & x > 9. \end{cases}$$

例6 设 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ -2 & 1<x\le 2\end{cases}$，求函数 $f(x+3)$ 的定义域.

解 $\because\ f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ -2 & 1<x\le 2\end{cases}$

$$\therefore\quad f(x+3)=\begin{cases}1 & 0\le x+3\le 1\\ -2 & 1<x+3\le 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & -3\le x\le -2\\ -2 & -2<x\le -1\end{cases}$$

故 $D_f:[-3,-1]$

三、同步练习

1．已知函数 $y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x \le 1 \\ 1 + x, & x > 1 \end{cases}$

求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{t})$, 并写出定义域及值域．

2. 求 $y = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ \ln x, & 0 < x \le 1 \\ 2e^{x-1}, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ 的反函数及其定义域.

3. 设 $\forall x > 0$，有 $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1 + x^2}$，求函数

$y = f(x)\ (x > 0)$的解析表达式.

4. 设$f(x)=x^2, g(x)=2^x$,求$f[f(x)]$, $g[f(x)]$.

5. 设$f(x)=\begin{cases}1, & \frac{1}{e}<x<1, \\ x, & 1\le x<e,\end{cases}$ $g(x)=e^x$,求$f[g(x)]$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<1 \\ \sin x, & x\ge 1\end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & x<0 \\ 1, & x\ge 0\end{cases}$

求 $f(\varphi(x))$.

7. 已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2, |\varphi(x)|\le\frac{\pi}{2}$

求$\varphi(x)$及其定义域 .

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

四、同步练习解答

1．已知函数 $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$

求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{t})$，并写出定义域及值域．

$t\le 0$ 时
函数无定义

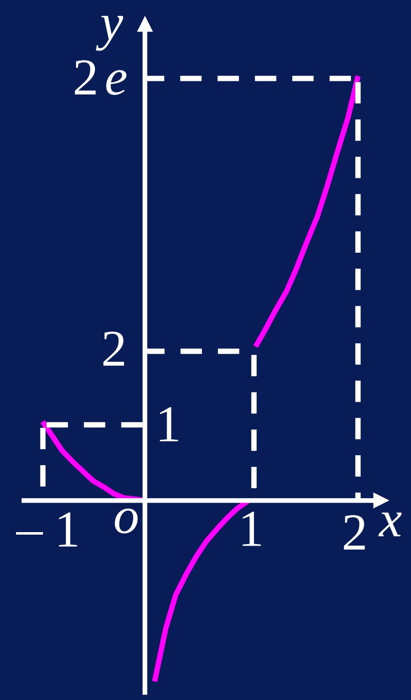
解 $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$$f(\frac{1}{t})=\begin{cases}2\sqrt{\frac{1}{t}}, & 0\le\frac{1}{t}\le 1,\\ 1+\frac{1}{t}, & \frac{1}{t}>1\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{t}}, & t\ge 1\\ 1+\frac{1}{t}, & 0<t<1\end{cases}$$

定义域 $D=[0,+\infty)$

值　域 $f(D)=[0,+\infty)$.

2. 求 $y=\begin{cases} x^2, & -1\le x<0 \\ \ln x, & 0<x\le 1 \\ 2e^{x-1}, & 1<x\le 2 \end{cases}$ 的反函数及其定义域.



解 当 $-1\le x<0$ 时, $y=x^2\in(0,1]$,

则 $x=-\sqrt{y}$, $y\in(0,1]$

当 $0<x\le 1$ 时, $y=\ln x\in(-\infty,0]$,

则 $x=e^y$, $y\in(-\infty,0]$

当 $1<x\le 2$ 时, $y=2e^{x-1}\in(2,2e]$,

则 $x=1+\ln\frac{y}{2}$, $y\in(2,2e]$

反函数 $y=\begin{cases} e^x, & x\in(-\infty,0] \\ -\sqrt{x}, & x\in(0,1] \\ 1+\ln\frac{x}{2}, & x\in(2,2e] \end{cases}$

定义域为

$(-\infty,1]\cup(2,2e]$

3. 设$\forall x>0$，有$f(\dfrac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$，求函数 $y=f(x)\ (x>0)$的解析表达式.

解 令 $\dfrac{1}{x}=u$

则 $f(u)=\dfrac{1}{u}+\sqrt{1+\dfrac{1}{u^2}}=\dfrac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}$,

故 $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. $(x>0)$

4. 设$f(x)=x^2, g(x)=2^x$，求$f[f(x)]$, $g[f(x)]$.

解 $f(u)=u^2$,

$$f[f(x)]=[f(x)]^2=[x^2]^2=x^4,$$

$$g(u)=2^u,$$

$$g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}.$$

5. 设$f(x)=\begin{cases}1, & \frac{1}{e}<x<1, \\ x, & 1\le x<e,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求$f[g(x)]$.

解 $$f[g(x)]=\begin{cases}1, & \frac{1}{e}<g(x)<1 \\ g(x), & 1\le g(x)<e\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & \frac{1}{e}<e^x<1 \\ e^x, & 1\le e^x<e\end{cases}=\begin{cases}1, & -1<x<0, \\ e^x, & 0\le x<1.\end{cases}$$

6. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<1 \\ \sin x, & x\ge 1\end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & x<0 \\ 1, & x\ge 0\end{cases}$

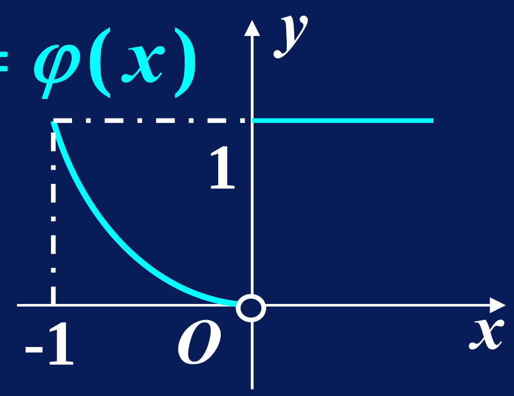
求 $f(\varphi(x))$.

解 $$f(\varphi(x)) \xlongequal{u=\varphi(x)} f(u)=\begin{cases}0, & u<1 \\ \sin u, & u\ge 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & \varphi(x)<1 \quad (\Leftrightarrow -1<x<0) \\ \sin\varphi(x), & \varphi(x)\ge 1 \quad (\Leftrightarrow \underline{x\le -1 \text{或} x\ge 0})\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & -1<x<0 \\ \sin x^2, & x\le -1 \\ \sin 1, & x\ge 0\end{cases}$$

$y=\varphi(x)$



7. 已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2, |\varphi(x)|\le\dfrac{\pi}{2}$

求 $\varphi(x)$及其定义域．

解 令 $u=\varphi(x)$, 则 $f[\varphi(x)]=f(u)=\sin u$

故 $\sin u=1-x^2$ 又因 $|u|=|\varphi(x)|\le\dfrac{\pi}{2}$

所以 $u=\arcsin(1-x^2)$, 即 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$

$$-1\le 1-x^2\le 1,\quad 0\le x^2\le 2$$

即 $|x|\le\sqrt{2}$

从而 $\varphi(x)$ 的定义域为 $D=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.