第十二章　微分方程

第一节　微分方程的基本概念

1. 将下列方程与其名称用线连接起来

（1）$y''+3y'+2y=0$　　（a）1阶微分方程

（2）$\mathrm{d}y-2x\mathrm{d}x=0$　　（b）2阶微分方程

（3）$\left(y'''\right)^3+5\left(y'\right)^5-y^5+x^7=0$　　（c）代数方程

（4）$x^2+y^2=2x$　　（d）偏微分方程

（5）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$　　（e）3阶微分方程

2. 设微分方程为 $y'=y$

（1）验证 $y=C\mathrm{e}^x$（C 为任意常数）是方程的通解；

（2）由通解求满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解；

（3）说明上述通解和特解的几何意义.

解　（1）因为 $y'=Ce^x$，所以 $y'=y$，故 $y=C\mathrm{e}^x$ 是微分方程的解. 又因为含有一个任意常数，故 $y=C\mathrm{e}^x$ 是方程的通解.

（2）将 $y(0)=1$ 代入 $y=C\mathrm{e}^x$ 中，得 $C=1$，所求特解为 $y=\mathrm{e}^x$.

（3）通解是满足方程（1）的一簇曲线，特解是满足初始条件的一条曲线.

注意　易犯的错误是

在（1）中只验证了 $y=C\mathrm{e}^x$ 是方程的解，而没有强调此解中包含一个任意常数 C. 产生错误的原因是对通解的定义理解不清楚. 一般的，n 阶微分方程的通解中应包含 n 个相互独立的任意常数.

3. 设一阶微分方程的通解为 $(x+C)^2+y^2=1$，其中 C 为任意常数，求此微分方程.

解　将方程 $(x+C)^2+y^2=1$ 两边对 x 求导得 $2(x+C)+2yy'=0$，即 $x+C=-yy'$，将其代入 $(x+C)^2+y^2=1$ 得

$$(yy')^2+y^2=1 \qquad 即 \qquad (y'^2+1)y^2=1.$$

注意 易犯错误是

$$y=\sqrt{1-(x+C)^2}\quad,\quad y'=\frac{-(x+C)}{\sqrt{1-(x+C)^2}}.$$

产生错误的原因，一是丢失了函数 $y=-\sqrt{1-(x+C)^2}$ ，二是微分方程中没有消去常数 C .

第二节 可分离变量的微分方程和一阶线性微分方程

1．求下列微分方程的通解.

（1） $(xy^2+x)\mathrm{d}x+(y-x^2y)\mathrm{d}y=0$

解 将方程分离变量得

$$\frac{x\mathrm{d}x}{x^2-1}=\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y$$

两边积分得：$\frac{1}{2}\ln(x^2-1)=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\frac{1}{2}\ln|C|$.

故所求通解为 $\frac{x^2-1}{y^2+1}=C$ 或 $\frac{y^2+1}{x^2-1}=C$.

（2） $y'=\sin^2(x-y+1)$

解 令 $u=x-y+1$，则

$$u'=1-y'$$

故 $1-u'=\sin^2 u$. 即 $\sec^2 u\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$. 解得 $\tan u=x+C$. 所求通解：

$$\tan(x-y+1)=x+C.$$

（3） $x\mathrm{d}y-y(1-x)\mathrm{d}x=0$

解 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{1-x}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分得：$\ln|y|=\ln|x|-x+\ln|C|$，故所求通解为 $y=Cx\mathrm{e}^{-x}$.

（4） $3\mathrm{e}^x\tan y\mathrm{d}x+(1-\mathrm{e}^x)\sec^2 y\mathrm{d}y=0$

解　分离变量得$-\dfrac{3\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\dfrac{\sec^2 y}{\tan y}\mathrm{d}y$

积分得　$\ln\left|\left(1-\mathrm{e}^x\right)^3\right|=\ln|\tan y|+\ln|C|$，即所求通解为　$\left(1-\mathrm{e}^x\right)^3=C\tan y$.

2．求下列微分方程满足所给初始条件的特解．

（1）$y'\cot x+y=2$　，　$y(0)=1$

解　分离变量得　$\dfrac{1}{2-y}\mathrm{d}y=\tan x\mathrm{d}y$，两边积分得　$-\ln|2-y|=-\ln|\cos x|-\ln|C|$

通解为　$2-y=C\cos x$，将$x=0,y=1$代入得：$C=1$．故所求特解为　$y=2-\cos x$.

（2）$y'=\mathrm{e}^{2x-y}$　，　$y(0)=0$

解　分离变量再积分$\int\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$，$\mathrm{e}^y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$，因为$x=0$时，$y=0$，所以$C=-\dfrac{1}{2}$. 则$\mathrm{e}^y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{2}$为所求特解．

（3）$\left(x+xy^2\right)\mathrm{d}x-\left(x^2y+y\right)\mathrm{d}y=0$　，　$y(0)=1$

解　分离变量得　$\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y$，两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)=\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)+\frac{1}{2}\ln|C|$$

通解为$1+x^2=C\left(1+y^2\right)$将$x=0,y=1$代入得$C=\dfrac{1}{2}$，所求特解为

$$1+x^2=\frac{1}{2}\left(1+y^2\right),\quad y^2=2x^2+1.$$

（4）$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=r$　，　$r(0)=2$

解　分离变量得　$\dfrac{\mathrm{d}r}{r}=\mathrm{d}\theta$，两边积分得

$$\ln|r|=\theta+\ln|C|\qquad\text{即}\qquad r=C\mathrm{e}^{\theta}$$

将$\theta=0,r=2$代入得　$C=2$，所求特解为

$$r=2\mathrm{e}^{\theta}.$$

3．已知曲线$y=f(x)$过点$\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$，且其上任意一点处的切线斜率为$x\ln\left(1+x^2\right)$，求曲线方程．

解 由题意得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\ln\left(1+x^2\right)$$

故 $y=\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)\left[\ln\left(1+x^2\right)-1\right]+C$．又 $y=f\left(x\right)$ 过点 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$，故 $C=0$，即所求曲线方程为

$$y=\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)\left[\ln\left(1+x^2\right)-1\right].$$

4．若以曲线 $y=f\left(t\right)\left(f\left(t\right)\geq 0\right)$ 为曲边，以 $\left[0,x\right]$ 为底的曲边梯形的面积与纵坐标 y 的 $n+1$ 次幂成正比，且已知 $f\left(0\right)=0,f\left(1\right)=1$，求此曲线的方程.

解 曲线所满足的积分方程是

$$\begin{cases}\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t=ky^{n+1},\\ y\left(0\right)=0,\\ y\left(1\right)=1.\end{cases}$$

将积分方程两边分别对 x 求导，得曲线 $y=f\left(x\right)$ 所满足的微分方程为

$$f\left(x\right)=k\left(n+1\right)y^n\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}，\text{即}\quad k\left(n+1\right)y^{n-1}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x，$$

两边积分得 $k\frac{n+1}{n}y^n=x+C$．

将 $f\left(0\right)=0,f\left(1\right)=1$ 代入上式，解得 $C=0,k=\frac{n}{n+1}$，

所求曲线方程为 $x=y^n$．

注意 易犯错误是 $ky^{n+1}=\int_0^x y\mathrm{d}t=yx+C$．产生错误的原因是把函数 $y=y\left(t\right)$ 看作与 t 无关的量，由

$$\int_0^x y\mathrm{d}t=y\int_0^x\mathrm{d}t=yx+C.$$

实际上，函数 y 是 t 的函数，由于还没有求出其具体表达式，不能直接积分.

5．求下列微分方程的通解.

（1）$\left(1-x\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=x$

解 （1）方程变形为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{1-x}y=\frac{x}{1-x}$，由公式法

$$y=e^{-\int\frac{1}{1-x}dx}\left[\int\frac{x}{1-x}e^{\int\frac{1}{1-x}dx}dx+C\right]=e^{\ln(1-x)}\left[\int\frac{x}{1-x}e^{-\ln(1-x)}dx+C\right]$$

$$=(1-x)\left[\int\frac{x}{(1-x)^2}dx+C\right]=(1-x)\left[\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}+C\right]$$

（2）$\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y=e^x x^n$（$n$为常数）

解 $y=e^{\int\frac{n}{x}dx}\left[\int e^x x^n e^{\int-\frac{n}{x}dx}dx+C\right]=e^{n\ln x}\left[\int e^x x^n e^{-n\ln x}dx+C\right]$

$$=x^n\left[\int e^x dx+C\right]=x^n\left[e^x+C\right].$$

（3）$(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$

解 方程变形为$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1}$，由公式法

$$y=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1}e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1}\cdot(x^2-1)dx+C\right]$$

$$=\frac{\sin x+C}{x^2-1}$$

（4）$xydx+(x^2+1)dy=0$

解 分离变量得 $\frac{dy}{y}=-\frac{x}{1+x^2}dx$

两边积分得 $\ln|y|=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln|C|$

即 $y\sqrt{x^2+1}=C$.

6.求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

（1）$y^2dx-(y^2+2xy-x)dy=0, y(0)=1$

解 $\frac{dx}{dy}+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}\right)x=1$，

$$x=\mathrm{e}^{-\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}\right)\mathrm{d}y}\left(\int\mathrm{e}^{\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}\right)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{y}+2\ln y}\left[\int\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}-2\ln y}\mathrm{d}y+C\right]=y^2\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}\left[\int\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{y}\right)+C\right]$$

$$=y^2\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}+C\right)$$

代入 $y(0)=1$，得 $C=-\frac{1}{\mathrm{e}}$，所求特解为

$$x=y^2-\frac{1}{\mathrm{e}}y^2\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}.$$

（2） $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\sin x, y(\pi)=1$

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$，

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot x\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}\left[-\cos x+C\right]$$

将 $y(\pi)=1$ 代入，得 $C=\pi-1$，所求特解为

$$y=\frac{1}{x}(-\cos x+\pi-1).$$

（3） $\left(y^3+xy\right)y'=1, y(0)=0$

解 法 1 方程变形为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-yx=y^3$，由公式

$$x=\mathrm{e}^{-\int-y\mathrm{d}y}\left[\int y^3\mathrm{e}^{-\int y\mathrm{d}y}+C\right]=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}y^2}\left[\int y^3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\left[-\int y^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}+C\right]=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\left[-y^2\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}-2\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}+C\right]$$

即 $x=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}-y^2-2$ 代入 $y(0)=0$ 得 $C=0$，所求特解为

$$x=20\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}}-y^2-2.$$

解 法 2 $y'=\frac{1}{y\left(x+y^2\right)}$，设 $u=y^2+x$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2y}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1\right]$，

代入方程得分离变量得 $\dfrac{u}{u+2}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，积分得 $u-2\ln(2+u)=x+C$.

将 $x=0, y=0, u=0$ 代入得 $C=-2\ln 2$，所求特解为

$$x+y^2+2=2\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}}.$$

（4）$y=\mathrm{e}^x+\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$

解 方程两端对 x 求导得

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x+y$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=\mathrm{e}^x$，由公式得

$$y=\mathrm{e}^{-\int -\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^x\cdot \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^x(x+C)$$

由方程 $y=\mathrm{e}^x+\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$ 得初值条件 $x=0, y=1$，代入得 $C=1$.

所求特解为 $y=\mathrm{e}^x(x+1)$.

7. 设 $y=\mathrm{e}^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

解 把 $y=\mathrm{e}^x$ 代入方程得 $p(x)=x\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)$，故方程可化为

$$y'+\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)y=1$$

故

$$y=\mathrm{e}^{\int\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int\left(e^{-x}-1\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{-x}}$$

由 $y|_{x=\ln 2}=0$ 得 $C=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，故所求特解为

$$y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}}.$$

8. 已知 $\int_l\left[\varphi(x)-\dfrac{x^2}{2}\right]y\mathrm{d}y+\dfrac{3}{2}y^2\varphi(x)\mathrm{d}x$ 在全平面上与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有一阶连续导数，并且 L 是起点为 $(0,0)$ 终点为 $(1,1)$ 的有向曲线时，该曲线积分值等于 $\dfrac{1}{4}$，试求函数 $\varphi(x)$.

解 由于积分与路径无关，则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即

$$\left(\varphi'(x)-x\right)y=3y\varphi(x), \varphi'(x)-3\varphi(x)=x,$$

所以

$$\varphi(x)=\mathrm{e}^{-\int -3\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int -3\mathrm{d}x}x\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{3x}\left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\left(x+\frac{1}{3}\right)+C\right]=C\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

由 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left[\varphi(x)-\frac{x^2}{2}\right]y\mathrm{d}y+\frac{3}{2}y^2\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$，得

$$\int_0^1 0\mathrm{d}x+\int_0^1\left[C\mathrm{e}^3-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\right]y\mathrm{d}y=\left(C\mathrm{e}^3-\frac{17}{18}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

所以 $C=\frac{13}{9}\mathrm{e}^{-3}$，则 $\varphi(x)=\frac{13}{9}\mathrm{e}^{3(x-1)}-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

第三节　可利用变量代换法求解的一阶微分方程

1．求下列齐次方程的通解.

（1） $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(\ln y-\ln x)$

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$，令 $u=\frac{y}{x},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，则 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\ln u$，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

积分得　　$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|C|$

所以　　$u=\mathrm{e}^{Cx+1}$.

所求通解为　　$y=x\mathrm{e}^{Cx+1}$.

（2） $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=2\sqrt{xy}$

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=2\sqrt{\frac{y}{x}}$，令 $u=\frac{y}{x}$，代入方程得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=2\sqrt{u},$$

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}-u}=\frac{2}{x}\mathrm{d}x$，积分得：$-\ln\left|1-\sqrt{u}\right|=\ln|x|+\ln|C|$，所以 $\frac{1}{1-\sqrt{u}}=Cx$，

将$u=\dfrac{y}{x}$代入得所求通解为

$$C=x-\sqrt{xy}\ .$$

（3）$x^2y'+xy=y^2$

解 令$z=y^{-1}$，则方程变为：

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{x^2}$$

故
$$y^{-1}=z=x\left(\frac{x^{-2}}{2}+C_1\right).$$

所以通解为
$$\frac{y-2x}{y}=Cx^2\ .$$

（4）$\left(y^2-2xy\right)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$

解 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$. 令 $u=\dfrac{y}{x}$，则

$$u+xu'=2u-u^2$$

分离变量$\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2-u}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得

$$\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|=-\ln|x|+\ln|C|，即 \quad \frac{x(u-1)}{u}=C\ .$$

代入原变量得通解 $x(y-x)=Cy$.

2．求下列齐次方程满足所给初始条件的特解．

（1）$\left(x+y\cos\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x-x\cos\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y=0, y(1)=0$

解 方程两边同时除以x得

$$\left(1+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)-\cos\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

令$u=\dfrac{y}{x}$，代入得

$$(1+u\cos u)-\cos u\left(u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=0,$$

分离变量得$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\cos u\mathrm{d}u$，积分得

$$\ln|x|+\ln|C|=\sin u,$$

将$u=\frac{y}{x}$代回得$\ln|Cx|=\sin\frac{y}{x}$，由于$y(1)=0$，所以$C=1$.

所求特解为　$x=\mathrm{e}^{\sin\frac{y}{x}}$.

（2）$xy'=y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right), y(1)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

解　$y'=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$，令$u=\frac{y}{x}$，代入得$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u(1+\ln u)$，化简得

$$\frac{1}{u\ln u}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分得　$\ln|\ln u|=\ln|x|+\ln|C|$，所以$\ln u=Cx$，

$$u=\mathrm{e}^{Cx}，即\quad\frac{y}{x}=\mathrm{e}^{Cx}$$

将初始条件　$x=1, y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$代入得　$C=-\frac{1}{2}$.

所求特解为　$y=x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

3．用适当变量替换，求解下列方程.

（1）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$

解　令$x+y=u$，则　$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以　$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^2+1$，分离变量得　$\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\mathrm{d}x$.

积分得　$\arctan u=x+C$，$u=\tan(x+C)$.

将　$u=x+y$回代得　$y=\tan(x+C)-x$.

（2）$xy'-y[\ln(xy)-1]=0$

解　令$xy=u$，则　$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入方程得

$$x\left(\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-y}{x}\right)-y[\ln u-1]=0, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=y+y(\ln u-1)=\frac{u}{x}(\ln u)$$

分离变量得　$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，方程两边积分得

$$\ln(\ln u)=\ln x+\ln C=\ln Cx\text{，故}\quad \ln u=Cx.$$

则 $u=\mathrm{e}^{Cx}$，即 $xy=\mathrm{e}^{Cx}$ 为所求通解.

4．求下列伯努利方程的通解.

（1） $xy'+y=y^2\ln x$

解 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x}\ln x\cdot y^2$，这是 $n=2$ 的伯努利方程. 令 $z=\dfrac{1}{y}$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{x}\ln x,$$

所以 $z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int-\dfrac{1}{x}\ln x\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x\left[\int-\dfrac{1}{x^2}\ln x\mathrm{d}x+C\right]=\ln x+1+Cx$.

所求通解为 $y=\dfrac{1}{\ln x+1+Cx}$.

（2） $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=a(\ln x)y^2$

解 令 $z=y^{-1}$，则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ln x.$$

其通解 $z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x\left[C-\dfrac{a}{2}(\ln x)^2\right]$.

故原方程通解为 $yx\left[C-\dfrac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$.

（3） $xy'=4y+x^2\sqrt{y}$

解 方程变形为 $y'-\dfrac{4}{x}y=xy^{\frac{1}{2}}$，令 $z=y^{\frac{1}{2}}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2}{x}z=\dfrac{1}{2}x$. 故

$$z=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x^2\left(\frac{1}{2}\ln x+C\right)$$

所以原方程通解为 $y=x^4\left(\dfrac{1}{2}\ln x+C\right)^2$.

第四节　全微分方程

1．验证下列各方程为全微分方程，并求出方程的通解．

（1）$\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$

解　$P(x,y)=\cos x+\frac{1}{y}, Q(x,y)=\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}$，由于$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以方程为全微分方程．

$$
\begin{aligned}
u(x,y)&=\int_{(0,1)}^{(x,y)}\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y\\
&=\int_0^x(\cos x+1)\mathrm{d}x+\int_1^y\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y\\
&=\sin x+x+\left[\ln y+\frac{x}{y}\right]_1^y=\sin x+\ln y+\frac{x}{y},
\end{aligned}
$$

所求通解为　$\sin x+\ln y+\frac{x}{y}=C$．

注意　常犯错误是

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y,$$

产生错误的原因是忽视了$P(x,y)$与$Q(x,y)$在$y=0$处无定义，积分下限不能取$y=0$，即不能在x轴上取起点．

（2）$(x-3y)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y^2}-3x\right)\mathrm{d}y=0$

解　$P(x,y)=x-3y, Q(x,y)=\frac{1}{y^2}-3x$，由于$\frac{\partial P}{\partial y}=-3=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故方程为全微分方程．

方程可变形为　$x\mathrm{d}x+\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y-3(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0$．

即　　$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2-y^{-1}-3xy\right)=0$．

故通解为　　$\frac{1}{2}x^2-y^{-1}-3xy=C$．

（3）$\left(\ln y-\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{y}-\ln x\right)\mathrm{d}y=0$

解 $P(x,y)=\ln y-\dfrac{y}{x},Q(x,y)=\dfrac{x}{y}-\ln x$，由于 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故方程为全微分方程.

$$
\begin{aligned}
u(x,y)&=\int_{(1,1,)}^{(x,y)}\left(\ln y-\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{y}-\ln x\right)\mathrm{d}y\\
&=\int_1^x\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_1^y\left(\frac{x}{y}-\ln x\right)\mathrm{d}y\\
&=-\ln x+x\ln y-\ln x(y-1)\\
&=x\ln y-y\ln x,
\end{aligned}
$$

故通解为 $x\ln y-y\ln x=C$.

2. 已知 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，试确定 $f(x)$，使 $\left[\mathrm{e}^x+f(x)\right]y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y=0$ 为全微分方程，并求出全微分方程的解.

解 $P(x,y)=\left[\mathrm{e}^x+f(x)\right]y$，$Q(x,y)=f(x)$，令 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，有

$$\mathrm{e}^x+f(x)=f'(x)$$

即 $$f'(x)-f(x)=\mathrm{e}^x, f(x)=\mathrm{e}^{-\int -1\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^x\cdot e^{\int -\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^x(x+C),$$

又因为 $f(0)=\dfrac{1}{2}$ 得 $C=\dfrac{1}{2}$. 故 $f(x)=\mathrm{e}^x\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$. 由于

$$u(x,y)=\int_{(0,0,)}^{(x,y)}\left(\mathrm{e}^x+f(x)\right)y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y=0+\int_0^y\mathrm{e}^x\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y=y\mathrm{e}^x\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

故全微分方程的通解为 $y\mathrm{e}^x\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=C$.

3. 利用观察法求下列方程的积分因子，并求其通解.

（1）$y\left(2xy+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x-\mathrm{e}^x\mathrm{d}y=0$

解 **法** 1 方程两边同时除以 y^2 得 $\left(2x+\dfrac{\mathrm{e}^x}{y}\right)\mathrm{d}x-\dfrac{\mathrm{e}^x}{y^2}\mathrm{d}y=0$，

即 $2x\mathrm{d}x+\dfrac{y\mathrm{d}\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(x^2+\dfrac{\mathrm{e}^x}{y}\right)=0$，

通解为 $x^2+\frac{e^x}{y}=C$，积分因子为 $\mu=\frac{1}{y^2}$.

解　法2　用 $\mu=\frac{1}{y^2}$ 同时乘以方程两边得，

$$\left(2x+\frac{e^x}{y}\right)dx-\frac{e^x}{y^2}dy=0,$$

由于 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{e^x}{y^2}$，方程为全微分方程．由于 $P(x,y)$ ，$Q(x,y)$ 在 $y=0$ 处无定义，所以

$$u(x,y)=\int_1^y\left(-\frac{1}{y^2}dy\right)+\int_0^x\left(2x+\frac{e^x}{y}\right)dx=x^2+\frac{e^x}{y}-1$$

通解为 $x^2+\frac{e^x}{y}-1=C_1$，即 $x^2+\frac{e^x}{y}=C\left(C=C_1+1\right)$

注意　易犯错误是

$$u(x,y)=\int_0^y\left(-\frac{1}{y^2}dy\right)+\int_0^x\left(2x+\frac{e^x}{y}\right)dx.$$

产生错误的原因是 (x_0,y_0) 不能在 x 轴上取，因为 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在 $y=0$ 处无定义.

（2） $x dx+y dy=\left(x^2+y^2\right)dx$

解　取 $\mu(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$，则有 $\frac{x dx+y dy}{x^2+y^2}=dx$，即

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=x+\ln C,$$

通解为 $x^2+y^2=Ce^{2x}$.

第五节　可降阶的高阶微分方程

1．求下列微分方程的通解.

（1） $y'''+x=0$

解 $y'' = -\frac{1}{2}x^2 + \tilde{C}_1$，$y' = -\frac{1}{6}x^3 + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$，$y = -\frac{1}{24}x^4 + \frac{\tilde{C}_1}{2}x^2 + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3$

即 $y = -\frac{1}{24}x^4 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

（2）$yy'' = (y')^2$

解 令 $y' = P$，则 $y'' = P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，原方程变为 $yP\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = P^2$. 即 $\frac{\mathrm{d}P}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$，所以

$P = y' = \tilde{C}_1 y$. 故 $y = \mathrm{e}^{C_1 x + C_2}$.

（3）$xy'' = xy' + y'$

解 $y' = P$ ，$y'' = P'$，所以 $x\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = (x+1)P$，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}P}{P} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$，积分得 $\ln P = x + \ln x + \ln C_1$，所以 $P_1 = C_1 x\mathrm{e}^x$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 x\mathrm{e}^x$，

$$y = \int C_1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = C_1\mathrm{e}^x(x-1) + C_2,$$

所求通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^x(x-1) + C_2.$$

（4）$\frac{\mathrm{d}^5 x}{\mathrm{d}t^5} - \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}t^4} = 0$

解 令 $\frac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}t^4} = u$ ，$\frac{\mathrm{d}^5 x}{\mathrm{d}t^5} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，微分方程变形为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{t}u = 0$，分离变量积分得 $u = C_1 t$，

即 $\frac{\mathrm{d}^{(4)}x}{\mathrm{d}t^4} = \tilde{C}_1 t$，直接积分得 $x^{(3)} = \frac{\tilde{C}_1}{2}t^2 + \tilde{C}_2$ ，$x'' = \frac{\tilde{C}_1}{6}t^3 + \tilde{C}_2 t + \tilde{C}_3$，

$$x' = \frac{\tilde{C}_1}{18}t^4 + \frac{\tilde{C}_2}{2}t^2 + \tilde{C}_3 t + C_4,\ x = \frac{\tilde{C}_1}{72}t^5 + \frac{\tilde{C}_2}{6}t^3 + \frac{\tilde{C}_3}{2}t^2 + C_4 t + C_5,$$

所求通解为

$$x = C_1 t^5 + C_2 t^3 + C_3 t^2 + C_4 t + C_5 \text{（其中} C_1 = \frac{\tilde{C}_1}{72}, C_2 = \frac{\tilde{C}_2}{6}, C_3 = \frac{\tilde{C}_3}{2}\text{）}.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

（1）$(1-x^2)y'' - xy' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

解 令 $P = y', y'' = P'$，即 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{1-x^2}P$，分离变量积分得

$$\ln P=-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)+\ln C,$$

所以 $y'=P=\frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}$，代入初值 $y'(0)=1$，得 $C_1=1$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，积分得 $y=\arcsin x+C_2$，代入初值 $y(0)=0$，得 $C_2=0$．所求特解为 $y=\arcsin x$．

（2）$y^3y''+2y'=0$ ，$y(0)=y'(0)=1$

解 令 $P=y'$，则 $y''=P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，即 $\mathrm{d}P=-\frac{2}{y^3}\mathrm{d}y$，

积分得 $P=y^{-2}+C_1$，代入 $y'(0)=1$ 得 $C_1=0$．所以 $y'=y^{-2}$，积分得 $\frac{y^3}{3}=x+C_2$.

代入 $y(0)=1$ 得，$y=\sqrt[3]{3x+1}$.

（3）$2yy''=y'^2+y^2$ ，$y(0)=1$ ，$y'(0)=-1$

解 法1 令 $P=y'$，$y''=P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，有 $2yP\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=P^2+y^2$，即 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{2y}P=\frac{y}{2}P^{-1}$，

这是 $n=-1$ 的伯努利方程，令 $z=P^2$ 得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}P}-\frac{1}{y}z=y$，

$$z=\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int y\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{y}\mathrm{d}y}+C_1\right]=y\left(y+C_1\right),$$

即 $z=y\left(y+C_1\right)$，由初值条件 $y(0)=1,y'(0)=-1$，有 $z(0)=1$，求得 $C_1=0$，则 $P^2=z=y^2$，$P=\pm y$ 即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm y$，由初值条件 $y(0)=1,y'(0)=-1$，只取 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-y$，再分离变量积分得 $y=C_2\mathrm{e}^{-x}$，由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$，所求特解为 $y=\mathrm{e}^{-x}$.

解 法2 令 $P'=y$，$y''=P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，方程变形为 $2\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=\frac{P}{y}+\frac{y}{P}$，令 $P=uy$，则

$$2\left(u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)=u+\frac{1}{u},$$

分离变量得 $\int\frac{1}{2y}\mathrm{d}y=\int\frac{u}{1-u^2}\mathrm{d}u$，积分得 $\ln y+\ln C_1=-\ln\left(1-u^2\right)$ 即 $\frac{1}{1-u^2}=C_1y$，亦即

$P^2=y^2-C_1y$，代入

$$y(0)=1, P(0)=y'(0)=-1,$$

得 $C_1=0$，所以 $P^2=y^2, P=\pm y$，又因为 $y'(0)=-y(0)=-1$，所以 $P=y'=-y$，分离变量积分得

$$\ln y=-x+\ln C_2, y=C_2\,\mathrm{e}^{-x},$$

由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$，所求特解为 $y=\mathrm{e}^{-x}$.

注意 易犯的错误是

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\pm y$，分离变量积分得 $y=C_1\mathrm{e}^{\pm x}$，由 $y(0)=1$ 得 $C_1=1$，所求特解为 $y=\mathrm{e}^{\pm x}$.

产生错误的原因是没有考虑 $y'(0)=-1$ 这个条件．当 $y=\mathrm{e}^x$ 时，$y'=\mathrm{e}^x, y(0)=1$，不满足初值条件，故应将其舍掉，得特解为 $y=\mathrm{e}^{-x}$.

对于可降阶的微分方程求特解，边求解边确定任意常数，会给后面的计算带来方便．若求出通解后再定义常数，不仅在积分过程中计算繁琐，而且确定常数时容易出错．

3．设一物体质量为M，以初速度 V_0 从斜面上推下，若斜面的倾角为 α，摩擦系数为 μ，试求物体在斜面上移动的距离与时间的函数关系．

解 重力沿斜面的分力大小为 $f_1=mg\sin\alpha$，沿斜面法线方向的分力为 $f_2=mg\cos\alpha$，故摩擦阻力 $R=\mu f_2=\mu mg\cos\alpha$．设位移函数 $s=s(t)$，则有

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha) \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=V_0 \\ s(0)=0 \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)t+C_1,$$

代入初值 $s'(0)=V_0$，得 $C_1=V_0$，$s=\dfrac{1}{2}g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)t^2+V_0t+C_2$，代入 $s(0)=0$ 得 $C_2=0$，所以位移函数为

$$s(t)=\frac{1}{2}g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)t^2+V_0t.$$

第六节　线性微分方程通解的结构

1 . 已知方程 $y''-4xy'+\left(4x^2-2\right)y=0$ 的两个特解为 $y_1=\mathrm{e}^{x^2}, y_2=x\mathrm{e}^{x^2}$，试求该方程满足初始条件 $y\left(0\right)=0, y'\left(0\right)=2$ 的特解.

解 由于 $\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{1}{x}$，所以 y_1, y_2 是二阶齐次线性微分方程的两个线性无关的解，因此方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{x^2}+C_2x\mathrm{e}^{x^2}=C_2\mathrm{e}^{x^2}\left(1+2x^2\right)$，将 $y\left(0\right)=0$ 代入得 $C_1=0$，而

$$y'=2xC_1\mathrm{e}^{x^2}+C_2\mathrm{e}^{x^2}+2C_2x^2\mathrm{e}^{x^2},$$

将 $y'\left(0\right)=2$ 代入得 $C_2=2$，所求特解为 $y=2x\mathrm{e}^{x^2}$.

注意 易犯的错误是没有判别 y_1 与 y_2 的线性无关性. y_1 与 y_2 线性相关, 则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 就不是通解, 也无法定出特解.

2. 设函数 $y_1\left(x\right), y_2\left(x\right)$ 都是二阶非齐次线性微分方程 $y''+P\left(x\right)y'+Q\left(x\right)y=f\left(x\right)$ 的解, 证明函数 $y=y_1\left(x\right)-y_2\left(x\right)$ 必为对应齐次方程 $y''+P\left(x\right)y'+Q\left(x\right)y=0$ 的解.

证 由于 $y_1\left(x\right), y_2\left(x\right)$ 是 $y''+P\left(x\right)y'+Q\left(x\right)y=f\left(x\right)$ 的解, 所以

$$\begin{aligned}y_1''+P\left(x\right)y_1'+Q\left(x\right)y_1&=f\left(x\right)\quad, \quad (1)\\ y_2''+P\left(x\right)y_2'+Q\left(x\right)y_2&=f\left(x\right)\quad, \quad (2)\end{aligned}$$

(1)-(2) 并整理得 $\left(y_1-y_2\right)''+P\left(x\right)\left(y_1-y_2\right)'=Q\left(x\right)\left(y_1-y_2\right)=0$，

即 $y=y_1\left(x\right)-y_2\left(x\right)$ 必为 $y''+P\left(x\right)y'+Q\left(x\right)y=0$ 的解.

3. 已知函数 x 和 x^2 是二阶线性非齐次微分方程所对应的齐次方程的两个特解, 而该非齐次线性微分方程本身的一个特解为 e^x, 求此二阶线性非齐次微分方程的通解, 并写出这个方程.

解 法1 由解的结构定理知非齐次微分方程的通解为 $y=C_1x+C_2x^2+\mathrm{e}^x$, 设微分方程为 $y''+P\left(x\right)y'+Q\left(x\right)y=f\left(x\right)$, 则有

$$\begin{cases}\mathrm{e}^x+P\left(x\right)\mathrm{e}^x+Q\left(x\right)\mathrm{e}^x=f\left(x\right)\\ 0+P\left(x\right)+Q\left(x\right)x=0\\ 2+2xP\left(x\right)+Q\left(x\right)x^2=0\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} P(x)=-\dfrac{2}{x} \\ Q(x)=\dfrac{2}{x^2} \\ f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}\left(x^2-2x+2\right) \end{cases}$$

故有
$$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=\frac{e^x}{x^2}\left(x^2-2x+2\right).$$

解　法 2　通解为　$y=C_1x+C_2x^2+e^x\cdots(1)$

$y'=C_1+2C_2x+e^x\cdots(2)$，$y''=2C_2+e^x\cdots(3)$

$(1)-(2)x$ 得　$y-xy'=-C_2x^2+(2-x)e^x, C_2=\dfrac{1}{x^2}\left[(1-x)e^x+xy'-y\right]$,

将 C_2 代入(3)，整理得所求微分方程为　$y''-\dfrac{2}{x}y'+\dfrac{2}{x^2}y=\dfrac{e^x}{x^2}\left(x^2-2x+2\right)$.

注意　易犯的错误是无法消去通解中的任意常数 C_1, C_2，此时要通过 y', y'' 的表达式消元.

第七节　二阶常系数齐次线性微分方程

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $y''+2y'-4y=0$

解　特征方程为　$r^2+2r-4=0$，

特征根为　$r_{1,2}=-1\pm\sqrt{5}$，

通解为　$y=C_1e^{\left(-1+\sqrt{5}x\right)}+C_2e^{\left(-1-\sqrt{5}x\right)}$.

(2) $y''+y'+6y=0$

解　特征方程为　$r^2+r+6=0$，

特征根为
$$r_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{2},$$

通解为 $$y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{23}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{23}}{2}x\right).$$

(3) $y''+y=0$

解 特征方程为 $r^2+1=0$，

特征根为 $r_{1,2}=\pm i$，

通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

(4) $y''-4y'+4y=0$

解 特征方程为 $r^2-4r+4=0$，

特征根为 $r_{1,2}=2$，

通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$.

(5) $y^{(4)}+y'''+y'+y=0$

解 特征方程为 $r^4+r^3+r+1=0$ ，$(r^3+1)(r+1)=0$，

特征根为 $r_{1,2}=-1$ ，$r_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$，

通解为 $$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

2. 求以 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$ 为通解的微分方程(其中 C_1,C_2 为任意常数).

解 法1 $y'=C_1\mathrm{e}^x+2C_2\mathrm{e}^{2x}, y''=C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{2x}$，消去常数 C_1,C_2，得所求微分方程为

$$y''-3y'+2y=0.$$

解 法 2 因为特征值 $r_1=1,r_2=2$，特征方程为 $(r-1)(r-2)=0, r^2-3r+2=0$，因此所求微分方程为 $y''-3y'+2y=0$.

3. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-8\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+25x=0, x(0)=1, x'(0)=4$

解 特征方程 $r^2-8r+25=0$ ，$r=4\pm3i$，

$$x=\mathrm{e}^{4t}\left(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t\right),$$

由 $x(0)=1$ 得 $C_1=1$, 又

$$x'=4\mathrm{e}^{4t}\left(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t\right)+\mathrm{e}^{4t}\left(-3C_1\sin 3t+3C_2\cos 3t\right),$$

由 $x'(0)=4$ 得 $C_2=0$, 所求特解为 $x=\mathrm{e}^{4t}\cos 3t$.

(2) $y''+4y'+29y=0$ ， $y(0)=0$ ， $y'(0)=15$

解 特征方程 $r^2+4r+29=0$，

特征根 $r_{1,2}=-2\pm 5i$，

故通解为 $y=\mathrm{e}^{-2x}\left(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x\right)$

由 $y(0)=0$ ， $y'(0)=15$ 得 $C_1=0, C_2=3$

故所求通解为 $y=3\mathrm{e}^{-2x}\sin 5x$.

4. 若函数 $f(x), g(x)$ 满足条件 $f'(x)=g(x), f(x)=-g'(x), f(0)=0, g(x)\neq 0$，求由曲线 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 与 $y=0, x=\dfrac{1}{4}$ 所围成图形的面积.

解 由题设对 $f(x)=-g'(x)$ 两边求导, 得 $f'(x)=-g''(x)$, 则有 $g(x)=-g''(x)$, 即

$$g''(x)+g(x)=0,$$

特征方程为 $r^2+1=0, r=\pm i, g(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$, 由 $g'(0)=f(0)=0$ 得 $C_2=0$，

所以 $g(x)=C_1\cos x, f(x)=-g'(x)=-C_1\sin x$, 从而

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=-\frac{\sin x}{\cos x},$$

故
$$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|-\frac{\sin x}{\cos x}\right|\mathrm{d}x=\ln\left|\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

第八节 二阶常系数非齐次线性微分方程

1. 设 $y''-5y'+6y=f(x)$, 当 $f(x)$ 为下列情形时, 写出非齐次方程特解的形式(不具

体计算).

$f(x)=(2x+3)e^{2x}$ $\qquad$ $y^*=$ $\underline{x(ax+b)e^{2x}}$

$f(x)=3e^x$ $\qquad$ $y^*=\underline{be^x}$

$f(x)=x\sin x$ $\qquad$ $y^*=\underline{(a_1+a_2x)\cos x+(b_1+b_2x)\sin x}$

$f(x)=5e^{3x}+\sin 2x+\cos 3x$ $\qquad$ $y^*=\underline{axe^{3x}+a_1\cos 2x+a_2\sin 2x+b_1\cos 3x+b_2\sin 3x}$

$y''-5y'+6y=0$ 的特征方程为 $r^2-5r+6=0$, 特征根 $r_1=2, r_2=3$

(1) 当 $f(x)=(2x+3)e^{2x}$ 时, 由于 $r=2$ 为单特征根, 故设特解 $y^*=x(ax+b)e^{2x}$.

(2) 当 $f(x)=3e^x$ 时, 由于 $r=1$ 不是特征根, 故设特解 $y^*=be^x$.

(3) 当 $f(x)=x\sin x$ 时, 由于 $r=\pm i$ 不是特征根, 而 x 为一次多项式, 故设特解

$$y^*=(a_1+a_2x)\cos x+(b_1+b_2x)\sin x$$

(4) 当 $f(x)=5e^{3x}+\sin 2x+\cos 3x$ 时, $f(x)$ 为三项组合, 由于 $r=3$ 为单特征根, $r=2i, r=3i$ 均不是特征根, 所以设特解

$$y^*=axe^{3x}+a_1\cos 2x+a_2\sin 2x+b_1\cos 3x+b_2\sin 3x.$$

注意 易犯错误是

(1) 设 $y^*=(ax+b)e^{2x}$, 错误原因是忘记了 $r=2$ 是单特征根.

(3) 设 $y^*=ax\cos x+bx\sin x$, 或者设 $y^*=(ax+b)\sin x$, 错误的原因是对特解的结构不清楚. 由于 $P(x)=x$ 是一次多项式, 虽然 $P(x)$ 中不含常数项, 也要设

$$\varphi_1(x)=a_1+a_2x, \varphi_2(x)=b_1+b_2x;$$

虽然 $f(x)$ 中的三角函数只出现一项 $x\sin x$, 也必须设

$$y^*=(a_1+a_2x)\cos x+(b_1+b_2x)\sin x,$$

否则会出现错误.

(4) 设 $y^*=axe^{3x}$, 或 $y^*=axe^{3x}+b\sin 2x+C\cos 3x$, 第二种错误的原因类似于(3), 而设 $y^*=axe^{3x}$, 丢了两项.

2. 求下列微分方程的通解

（1） $y''-3y'+2y=x\mathrm{e}^x$

解 由$r^2-3r+2=(r-1)(r-2)=0$，得齐次方程的通解为$\bar{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$，设$y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^x$，将$y^{*\prime},y^{*\prime\prime},y^*$代入方程，由待定系数法得$a=-\dfrac{1}{2},b=-1,$所以

$$y^*=-x\left(\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{e}^x,$$

所求通解为
$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-x\left(\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{e}^x.$$

（2） $y''-3y'+2y=\cos x$

解 由特征方程为$r^2-3r+2=(r-1)(r-2)=0$得$r_1=1,r_2=2$，齐次方程的通解为$\bar{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$，设$y^*=a\cos x+b\sin x$代入原方程解得$a=\dfrac{1}{10},b=-\dfrac{3}{10}$，所以

$$y^*=\frac{1}{10}\cos x-\frac{3}{10}\sin x,$$

所求通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{10}\cos x-\dfrac{3}{10}\sin x.$

3．求微分方程$2f''(x)+f'(x)=\mathrm{e}^x+2$，满足条件$f(0)=1,f'(0)=\dfrac{1}{2}$的特解.

解 特征方程 $2r^2+r=0$，特征根 $r_1=0,r_2=-\dfrac{1}{2}$，故设特解 $y^*=a\mathrm{e}^x+bx$，代入方程得 $a=\dfrac{1}{3},b=2$.

故方程通解为
$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x+2x.$$

由$f(0)=1,f'(0)=\dfrac{1}{2}$得特解为

$$y=-3+\frac{11}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x+2x$$

4．试求函数$f(x)$，使曲线积分 $\int_P^Q\left[f'(x)+6f(x)+\mathrm{e}^{-2x}\right]y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$与积分路径无关.

解 由题设有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$得 $f'(x)+6f(x)+\mathrm{e}^{-2x}=f''(x)$即

$$f''(x)-f'(x)-6f(x)=\mathrm{e}^{-2x}.$$

由特征方程$r^2-r-6=0$得，$r_1=-2,r_2=3$，所以$\bar{y}=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$，设$y^*=ax\mathrm{e}^{-2x}$．代入原方程求得$a=-\dfrac{1}{5}$，所以$f^*(x)=-\dfrac{1}{5}ax\mathrm{e}^{-2x}$，所求

$$f(x)=-\frac{x}{5}\mathrm{e}^{-2x}+C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}.$$

注意　将积分问题转换为微分方程是常用的一种技巧，否则此题无法求解．

5．设$f(x)$连续，且$f(x)=(x-1)^2+\int_0^{x-1}tf(x-t)\mathrm{d}t$，求$f(x)$．

解　令$x-t=u$，则$\int_0^{x-1}tf(x-t)\mathrm{d}t=\int_1^x(x-u)f(u)\mathrm{d}u$．

故　$f(x)=(x-1)^2+\int_1^x(x-u)f(u)\mathrm{d}u$，$f(1)=0$．

两边对x求导得　$f'(x)=2(x-1)+\int_1^x f(u)\mathrm{d}u$，$f'(1)=0$．

再对x求导得　$f''(x)=2+f(x)$．

即　$f''(x)-f(x)=2$．

特征方程　$r^2-1=0$，特征根　$r_{1,2}=\pm1$．所以齐次方程通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$$

设非齐次方程的一个特解为　$y^*=a$，代入方程得　$a=-2$．

故方程通解为　$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}-2$．

由$f(1)=0,f'(1)=0,$得$C_1=\mathrm{e}^{-1},C_2=\mathrm{e}$．

故　$f(x)=\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-(x-1)}-2$．

6*．求微分方程$x^2y''-xy'+y=x\ln x$满足初始条件$y(1)=1,y'(1)=1$的解．

解　令$x=\mathrm{e}^t$，则原方程变形为$D(D-1)y-Dy+y=t\mathrm{e}^t$，即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=t\mathrm{e}^t,$$

由特征方程$r^2-2r+1=0$得$r_{1,2}=1$，齐次方程的通解为$\bar{y}=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t$，设

$$y^*=t^2(at+b)\mathrm{e}^t,$$

由待定系数法得$a=\dfrac{1}{6},b=0$，所以$y^*=\dfrac{t^3}{6}\mathrm{e}^t$，通解为

$$y=\left(C_1+C_2 t\right)\mathrm{e}^t+\frac{t^3}{6}\mathrm{e}^t,$$

将$t=\ln x$代入得所求通解为$y=\left(C_1+C_2\ln x\right)x+\frac{x}{6}\cdot\ln^3 x$，将初值$y(1)=1, y'(1)=1$代入得$C_1=1, C_2=0$，所求特解为$y=x+\frac{1}{6}x(\ln x)^3$.

注意 易犯错误是

将初值条件$y(1)=1, y'(1)=1$代入$y=\left(C_1+C_2 t\right)\mathrm{e}^t+\frac{t^3}{6}\mathrm{e}^t$去求$C_1, C_2$.

产生错误的原因是把初值$y(1)=1, y'(1)=1$误认为是$t=1$时$y=1, y'=1$．事实上初值条件是$x=1$时$y=1, y'=1$，应该代入$y=\left(C_1+C_2\ln x\right)x+\frac{x}{6}\cdot\ln^3 x$来确定$C_1, C_2$，或者转换成$t=0$时，$y=1, y'=1$而代入$y=\left(C_1+C_2 t\right)\mathrm{e}^t+\frac{t^3}{6}\mathrm{e}^t$确定$C_1, C_2$.

7[*]．设$\varphi(x)$二次可微，且对任意封闭曲线 C 有$\oint_C 2y\varphi(x)\mathrm{d}x+x^2\varphi'(x)\mathrm{d}y=0$，又$\varphi(1)=2, \varphi'(1)=1$，求$\varphi(x)$.

解 由题设有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$得$2x\varphi'(x)+x^2\varphi''(x)=2\varphi(x)$，即

$$x^2\varphi''(x)+2x\varphi'(x)=2\varphi(x).$$

令$x=\mathrm{e}^t$得$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}-2\varphi=0$，由$r^2+r-2=0$得$r_1=-2, r_2=1$，齐次方程的通解为

$$\Phi=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-2t}=C_1 x+\frac{C_2}{x^2},$$

将初值$\varphi(1)=2, \varphi'(1)=1$代入得$C_1=\frac{5}{3}, C_2=\frac{1}{3}$，所求

$$\varphi(x)=\frac{5}{3}x+\frac{1}{3x^2}.$$

第十二章　微分方程（总习题）

1．将下列所给方程的类型及求解方法用线连接起来.

（1）$y'=xy\mathrm{e}^{x^2}\ln y$　　　　（a）伯努利方程，作代换$z=y^{-2}$.

（2）$(x+y)\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=0$　　　　（b）可分离变量的微分方程，分离变

量，两边积分.

（3）$y'=\dfrac{3x^6-2xy^3}{3x^2y^2}$ （c）以变量 x 为函数，一阶线性非齐次微分方程，常数变易法.

（4）$\left(\ln y-\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{x}{y}-\ln x\right)\mathrm{d}y=0$ （d）齐次微分方程，令 $u=\dfrac{y}{x}$.

（5）$\left(x-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\right)\arctan\dfrac{y}{x}=x$ （e）全微分方程，代公式.

解 （1）方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$，与（b）连线.

（2）方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=y$，与（c）连线.

（3）方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2}{3x}y=x^4y^{-2}$，与（a）连线.

（4）$P(x,y)=\ln y-\dfrac{y}{x},Q(x,y)=\dfrac{x}{y}-\ln x$，因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$，与（e）连线.

（5）方程变形为 $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{y}{x}\right)\arctan\dfrac{y}{x}=1$，与（d）连线.

2．设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的解，讨论极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 是否存在？

解 将 $y(0)=y'(0)=0$ 代入微分方程 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{3x}$ 有 $y''(0)=1$.
使用两次洛必达法则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{y'(x)}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{y''(x)}=2.$$

3．求 $y'+xy=(1+x)\mathrm{e}^{-x}y^2$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

解 令 $z=y^{-1}$，方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-xz=-(1+x)\mathrm{e}^{-x}$，故

$$z=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left[\int -(1+x)\mathrm{e}^{-x}\cdot \mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}-x}+C\right)$$

所以$\dfrac{1}{y}=\mathrm{e}^{-x}+C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$，代入$y(0)=1$，得$C=0$.

故所求特解为 $$y=\mathrm{e}^{x}.$$

4．设可导函数$\varphi(x)$满足$\varphi(x)\cos x+2\int_0^x\varphi(t)\sin t\mathrm{d}t=x+1$，求$\varphi(x)$.

解 方程两边分别对x求导得

$$\varphi'(x)\cos x-\varphi(x)\sin x+2\varphi(x)\sin x=1$$

即 $$\varphi'(x)+\tan x\cdot\varphi(x)=\frac{1}{\cos x}.$$

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{\ln\cos x}\left[\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{e}^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\cos x(\tan x+C)=\sin x+C\cos x\end{aligned}$$

由题设，当$x=0$时，有$\varphi(0)=1$，代入$\varphi(x)=\sin x+C\cos x$，得$C=1$，所以

$$\varphi(x)=\sin x+\cos x.$$

注意 易犯的错误是 $\varphi(x)=\sin x+C\cos x$.

错误原因是不会寻求初值条件$\varphi(0)=1$．事实上积分方程

$$\varphi(x)\cos x+2\int_0^x\varphi(t)\sin t\mathrm{d}t=x+1$$

中隐含着初值条件，只要将$x=0$代入该方程，即可求得$\varphi(0)=1$，进而求得$C=1$，得出特解 $\varphi(x)=\sin x+\cos x$.

5．求微分方程$2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y=0$的通解.

解 $P(x,y)=2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right),Q(x,y)=-\sqrt{x^2-y}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y}}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故为全微分方程.

$$\begin{aligned}u&=\int_{(1,0)}^{(x,y)}2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y\\&=\int_1^x 2x(1+x)\mathrm{d}x+\int_0^y-\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y\\&=x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{3}\end{aligned}$$

所以通解为 $x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}}=C$.

6 . 设曲线积分 $\int_L\left[f'(x)+2f(x)+\mathrm{e}^x\right]y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，且 $f(0)=0,$ $f'(0)=1$，试计算积分 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left[f'(x)+2f(x)+\mathrm{e}^x\right]y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$.

解 积分与路径无关，故 $f'(x)+2f(x)+\mathrm{e}^x=f''(x)$，

即 $$f''(x)-f'(x)-2f(x)=\mathrm{e}^x,$$

特征方程 $r^2-r-2=0$，特征根 $r_1=2,r_2=-1$，

所以齐次方程通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

设特解 $y^*=a\mathrm{e}^x$，代入方程得 $a=-\frac{1}{2}$. 所以通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$，

由 $f(0)=0,f'(0)=1$ 得 $C_1=-\frac{1}{6},C_2=\frac{2}{3}$，所以

$$f(x)=y=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x,$$

所以积分 $$I=\int_0^1 f'(1)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\mathrm{e}^2+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{2}\mathrm{e}.$$

7 . 一曲线过点 $(0,0)$，且位于第一象限内，在其上任取一点，过该点作两坐标轴的平行线，其中一条平行线与 x 轴和曲线所围成图形与另一条平行线与 y 轴和曲线所围成的图形绕 x 轴旋转所成立体体积相等，求此曲线方程.

解 设曲线方程为 $y=y(x),(x,y)$ 为曲线上任意一点，由题设得

$$\int_0^x \pi y^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\pi y^2 x\quad,$$

方程两边求导得 $\pi y^2(x)=\pi yxy'+\frac{1}{2}\pi y^2$，整理得 $2\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得

$$2\ln y=\ln x+\ln C_1.$$

所求曲线为 $$y=C\sqrt{x}\ .$$

8. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$G(x)$ 是 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的一个原函数，$F(x)G(x)=-1$, $f(0)=1$，求 $f(x)$.

解 由 $F(x)G(x)=-1$，得 $G(x)=\dfrac{-1}{F(x)}$，所以 $G'(x)=\dfrac{F'(x)}{F^2(x)}$，由题设有

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{F'(x)}{F^2(x)}=\frac{f(x)}{F^2(x)},$$

则 $F^2(x)=f^2(x)$. 即 $F(x)=\pm f(x)=\pm F'(x)$ ，$\dfrac{\mathrm{d}F(x)}{F(x)}=\pm\mathrm{d}x$，积分得

$\ln\left(F(x)\right)=\pm x+\ln C$，$F(x)=C\mathrm{e}^{\pm x}$，由 $f(0)=1$ 得 C＝1，所以 $f(x)=\mathrm{e}^{\pm x}$.

9. 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=r\mathrm{e}^x$ 的一个特解为 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$ 试确定常数 α,β,γ，并求该方程的通解.

解 法1 由特解知原方程的特征根为 1 和 2．因此特征方程为 $(r-1)(r-2)=0$，$r^2-3r+2=0$，于是 $\alpha=-3,\beta=2$，为确定 γ，将 $y_1=x\mathrm{e}^x$ 代入原方程

$$(x+2)\mathrm{e}^x-3(x+1)\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x=r\mathrm{e}^x,$$

得 $r=-1$.

原方程通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^x$.

解 法2 将 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$ 代入原方程得

$$(4+2\alpha+\beta)\mathrm{e}^{2x}+(3+2\alpha+\beta)\mathrm{e}^x+(1+\alpha+\beta)x\mathrm{e}^x=r\mathrm{e}^x,$$

比较同类项系数得

$$\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\3+2\alpha+\beta=\gamma\\1+\alpha+\beta=0\end{cases}$$

解得 $\alpha=-3,\beta=2,\gamma=-1.$

故原方程为 $y''-3y'+2y=-\mathrm{e}^x$.

易求得对应齐次方程通解 $y=\bar{C}_1\mathrm{e}^x+\bar{C}_2\mathrm{e}^{2x}$，又已知一个特解，故原方程的通解为

$$y=\bar{C}_1\mathrm{e}^x+\bar{C}_2\mathrm{e}^{2x}+\left[\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x\right]$$

即 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^x$，其中 $C_1=\bar{C}_1+1,C_2=\bar{C}_2+1$.

10. 已知 y_1,y_2,y_3 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个线性无关的解，求该方程的通解；又若 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x},y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x},y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$，写出微分方程.

解 由于 y_1,y_2,y_3 是方程的三个线性无关的解，则 y_2-y_1,y_3-y_1 为对应齐次微分方程的两个线性无关的解，则该方程的通解为

$$y=y_1+C_1(y_2-y_1)+C_2(y_3-y_1)$$

令 $z_1=y_2-y_1=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{2x},z_2=y_3-y_1=\mathrm{e}^{-x}$，则 z_1,z_2 线性无关，所以 $r=-1,r=2$ 为对应齐次微分方程的特征根，故 $(r+1)(r-2)=0$，即 $r^2-r-2=0$，故微分方程为

$$y''-y'-2y=f(x),$$

由于 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$ 是其解，将 y_1,y_1',y_1'' 代入求得 $f(x)=(1-2x)\mathrm{e}^x$，得微分方程

$$y''-y'-2y=(1-2x)\mathrm{e}^x.$$

11. 火车沿水平轨道运动，火车的重量为 P，机车的牵引力为 F，运动的阻力为 $W=a+bv$（a,b 为正常数），v 是火车的速度，假定 $t=0$ 时，$s=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0$，求火车的运动规律.

解 由题意知 $F-a-b\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{P}{g}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$，即 $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{bg}{P}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{g(F-a)}{P}$，

特征方程 $r^2+\frac{bg}{P}r=0$，特征根 $r_1=0$ ，$r_2=-\frac{bg}{P}$，

所以齐次方程通解为 $Y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{bg}{P}t}$.

设特解 $y^*=ct$，代入方程得 $c=\frac{F-a}{b}$. 所以方程通解 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{bg}{P}t}+\frac{F-a}{b}t$.

由 $s(0)=0$，$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}|_{t=0}=0$，得 $C_1=-\frac{(F-a)P}{b^2g}=-C_2$，

故 $$s=\frac{P(F-a)}{b^2g}\left(\mathrm{e}^{-\frac{bg}{P}t}-1\right)+\frac{F-a}{b}t.$$