第二节

二重积分的计算(2)

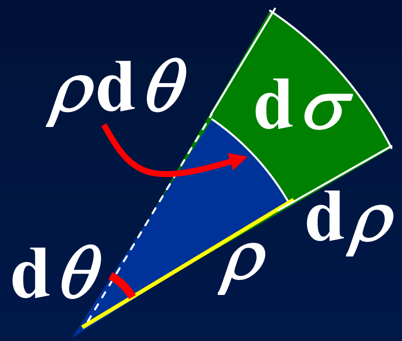
- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 极坐标系下二重积分的计算

利用直角坐标与极坐标的转换关系:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases}$$



有

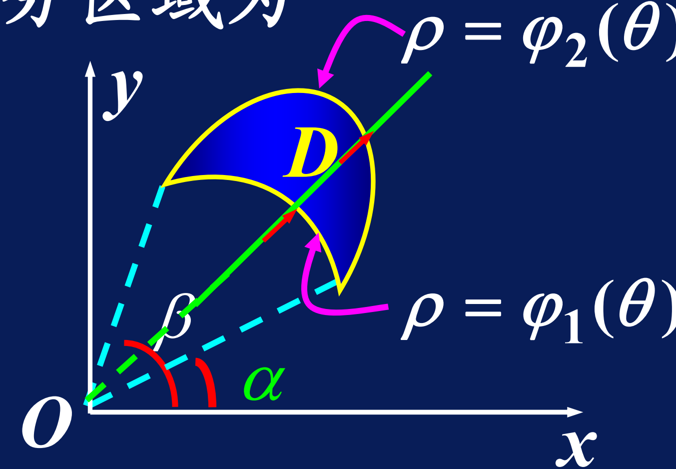
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta,$$

其中 $\mathrm{d}\sigma = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$ 称为极坐标系下的**面积元素**.

由极点与积分区域的位置，可分为四种情况讨论.

(1) 极点在积分区域之外，积分区域为

$$D:\begin{cases}\varphi_1(\theta)\le\rho\le\varphi_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{cases},$$



D的特点：从极点发出的射线

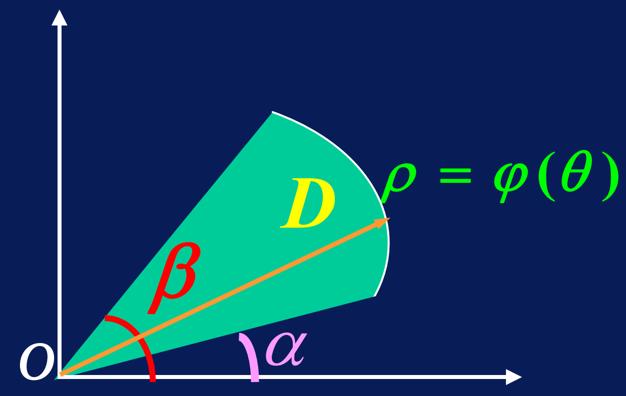
$\theta=\theta_0(\alpha<\theta_0<\beta)$与$D$的边界至多有两个交点，则

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

(2) 极点在积分区域边界，积分区域为D:

$$0 \le \rho \le \varphi(\theta),\quad \alpha \le \theta \le \beta$$



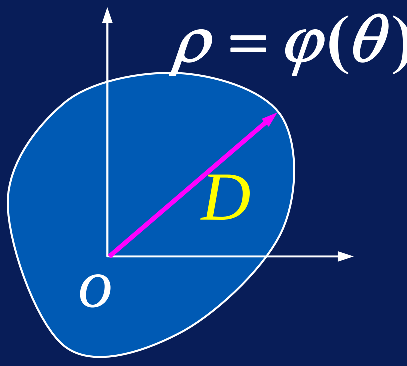
则

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

(3) 极点在积分区域内，积分区域为D:

$$0 \le \rho \le \varphi(\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$$



$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

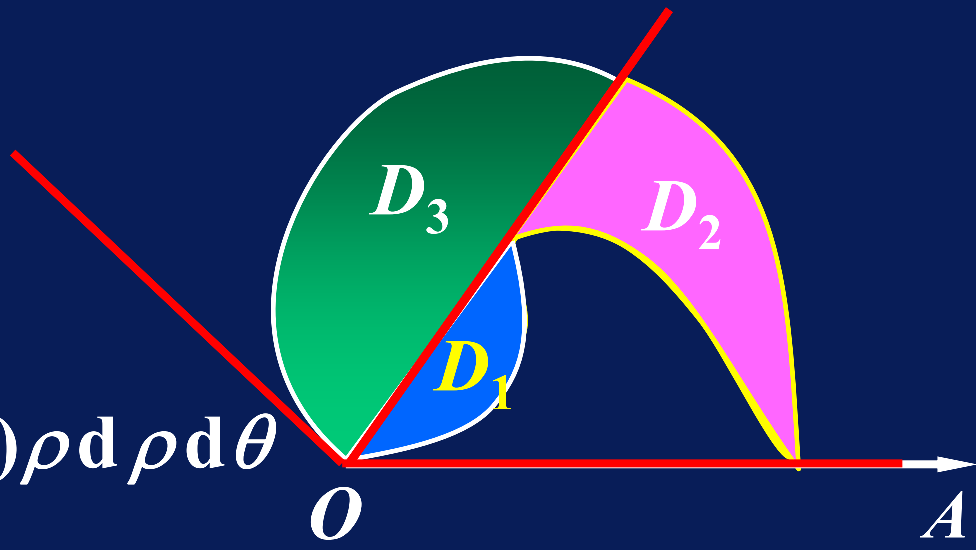
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho$$

若 $f \equiv 1$ 则可求得D 的面积

$$\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

(4) 其他情形

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3,$$



$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta$$

$$= \iint_{D_1} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta$$

$$+ \iint_{D_2} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta$$

$$+ \iint_{D_3} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta$$

何时使用极坐标计算二重积分？

D	$f(x,y)$
中心或边界过原点的圆域、圆环域、扇形域、环扇形域等等	$g(x^2+y^2)$ $g(\frac{y}{x})$

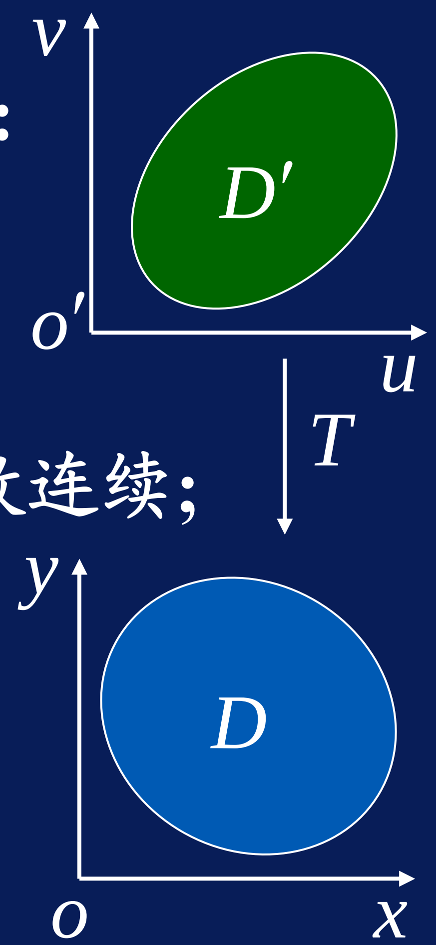
计算二重积分的步骤及注意事项

- 画出积分域
- 选择坐标系
- 确定积分序
  - 积分域分块要少
  - 累次积分好算为妙
- 写出积分限
  - 图示法
  - 不等式
- 计算累次积分（注意利用对称性）

★(二) 二重积分的换元法

定理 设 $f(x,y)$ 在闭域 D 上连续，变换：

$$T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D' \to D$$



满足 (1) $x(u,v),\ y(u,v)$ 在 D' 上一阶导数连续;

(2) 在 D' 上 雅可比行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0;$$

(3) 变换 $T: D' \to D$ 是一一对应的，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

例如, 直角坐标转化为极坐标时,

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & -\rho\cos\theta\end{vmatrix}=\rho,$$

从而

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

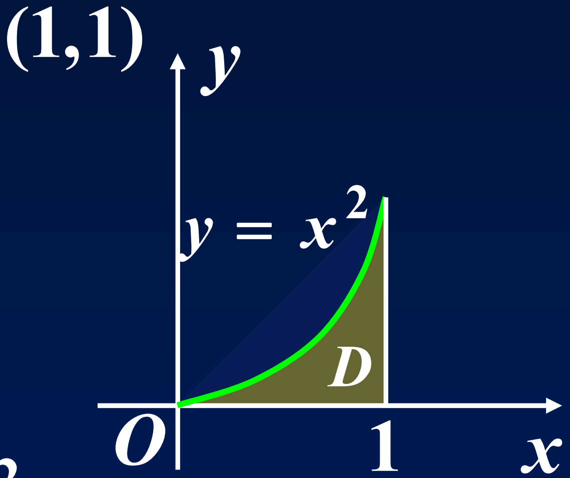
$$=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

二、典型例题

例1 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

解 在极坐标下直线 $x=1$ 变为



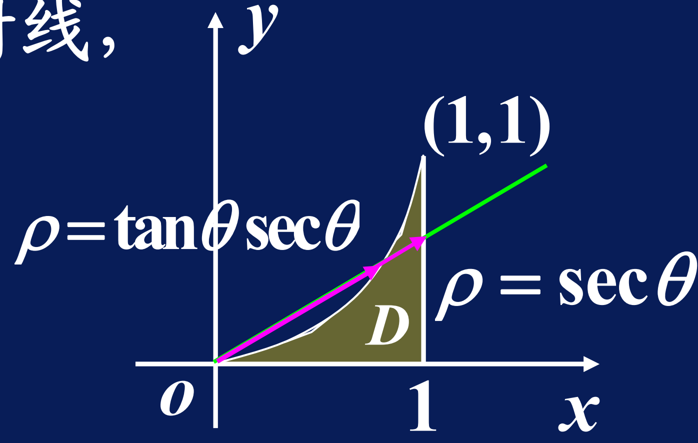
$$\rho\cos\theta = 1,$$

即 $\rho = \sec\theta,$

$y = x^2$ 变为 $\rho\sin\theta = (\rho\cos\theta)^2,$

即 $\rho = \tan\theta\sec\theta.$

作从极点出发穿过区域的射线，



因此

$$D:\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},$$

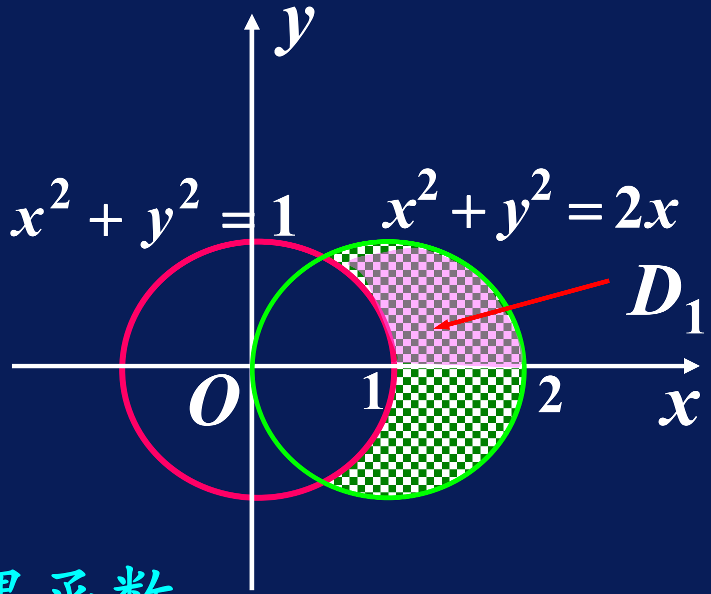
$$\tan\theta\sec\theta \le \rho \le \sec\theta,$$

原式$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_{\tan\theta\sec\theta}^{\sec\theta} \rho f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\rho.$

例2 计算$I=\iint\limits_D x(y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

其中D: $x^2+y^2\ge 1,\ x^2+y^2\le 2x$.

解 D关于x轴$(y=0)$对称.



$$I=\iint\limits_D x(y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

关于y是奇函数

$$=\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

关于y是偶函数

$$=0+2\iint\limits_{D_1} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

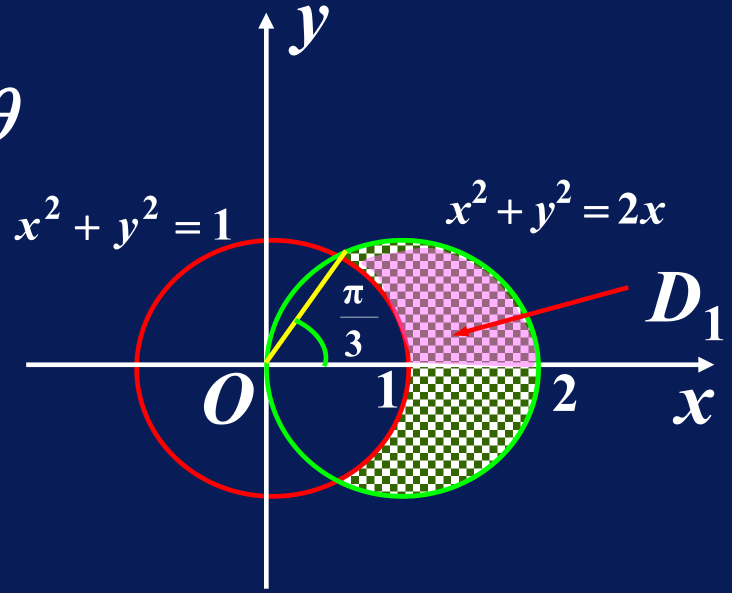
在极坐标系下，

$$x^2+y^2=1 \Longrightarrow \rho=1$$

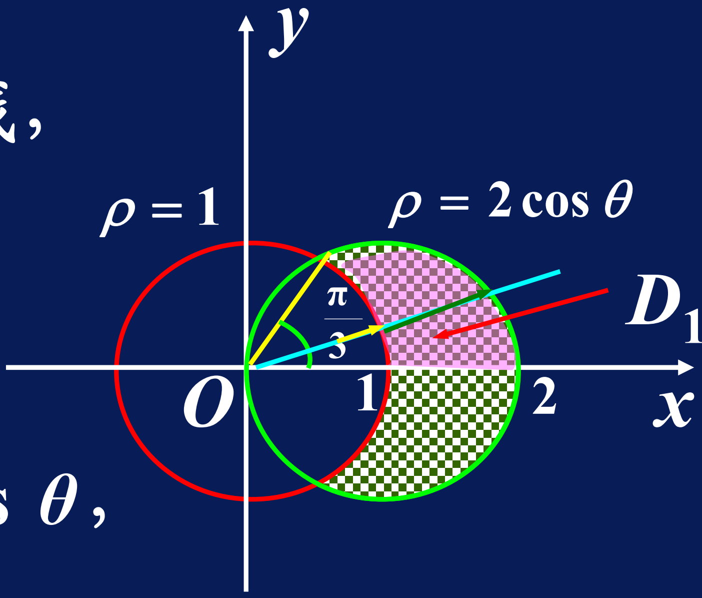
$$x^2+y^2=2x \Longrightarrow \rho=2\cos\theta$$

由 $\begin{cases}\rho=1,\\ \rho=2\cos\theta\end{cases}$ 得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$,

知两圆的交点对应的 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.



作从极点出发穿过区域的射线，



因此

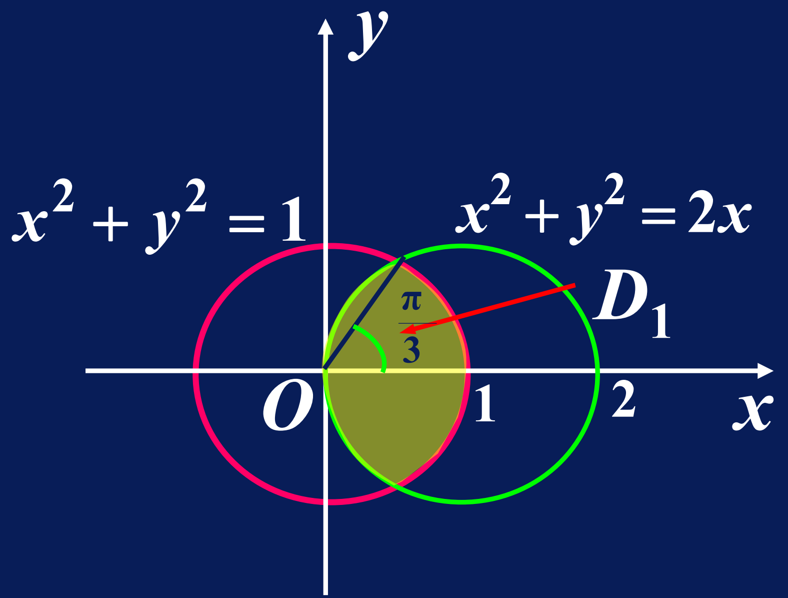
$$D_1: 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}, 1 \le \rho \le 2\cos\theta,$$

$$I = 2\iint_{D_1} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta \int_1^{2\cos\theta} \rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi}{3}.$$

注：本例若求两圆公共区域上的二重积分，

则应分块计算：

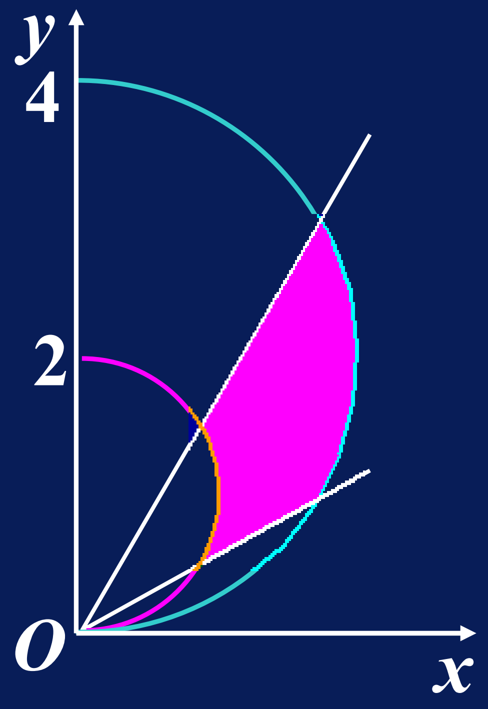


$$I=2\iint\limits_{D_1} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\,\mathrm{d}\rho\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)$$

例3 计算 $\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$为由圆 $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$, $y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.



解 $x^2+y^2=2y \Rightarrow \rho=2\sin\theta$

$x^2+y^2=4y \Rightarrow \rho=4\sin\theta$

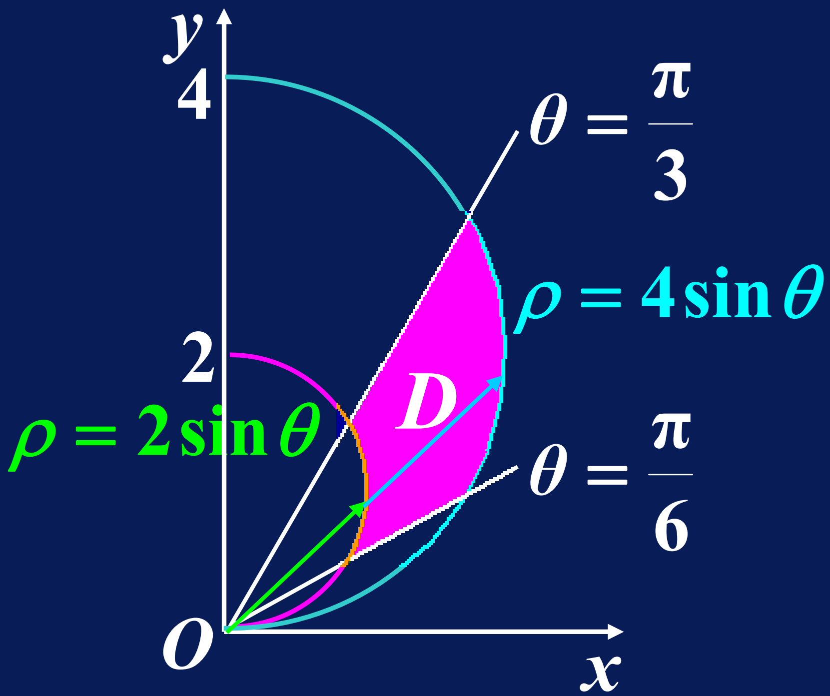
$y-\sqrt{3}x=0 \quad \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{3}$

$x-\sqrt{3}y=0 \quad \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{6}$

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} \rho^2 \cdot \rho \,\mathrm{d}\rho$$

$$= 15\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{3}\right).$$

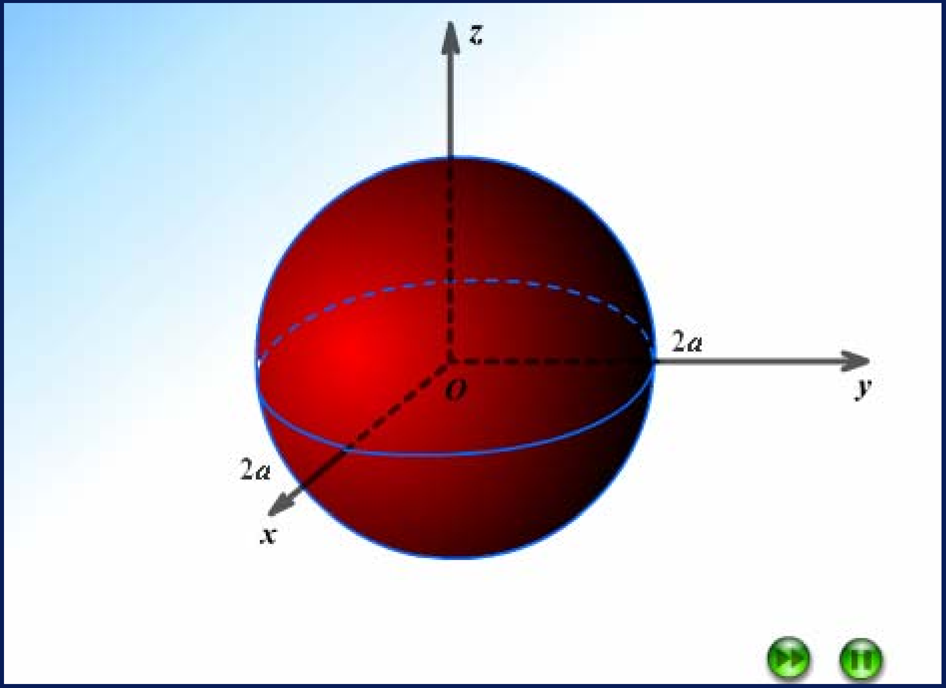


例4 求球体$x^2+y^2+z^2\le 4a^2$被圆柱面

$$x^2+y^2=2ax \quad (a>0)$$

所截得的含在柱面内的立体的体积.

解 立体关于xOy面和xOz面对称.



西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

立体位于第一卦限的部分在xOy面上的投影D为

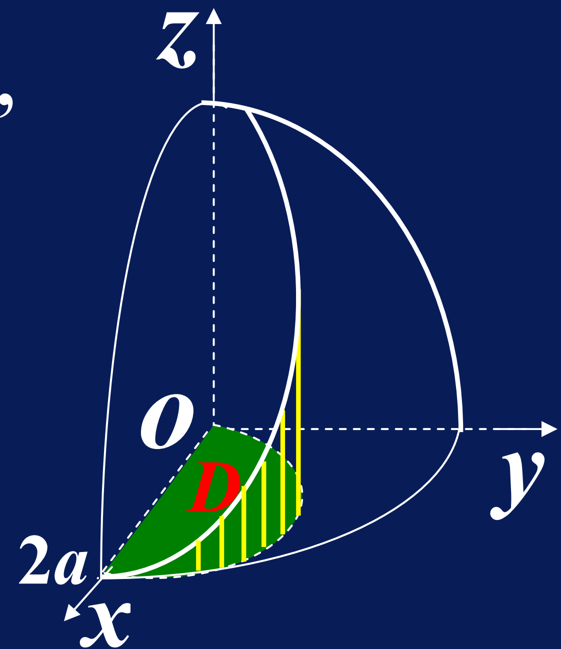
$$D: 0 \le \rho \le 2a\cos\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

$$V = 4\iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 4\iint_D \sqrt{4a^2 - \rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

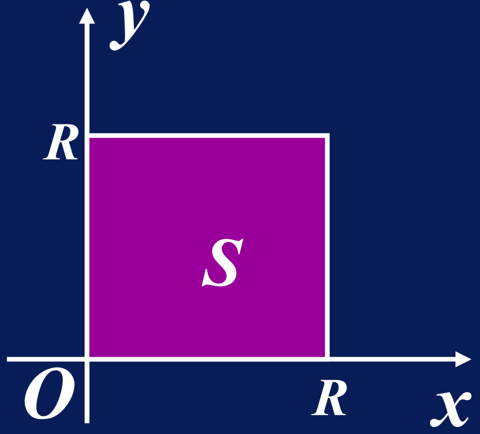
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{32}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$



例5 求广义积分$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

分析 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx$



令 $I = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2$,

则 $I = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)\cdot\left(\int_0^R e^{-y^2}\,dy\right)$

$$= \int_0^R e^{-x^2}\left(\int_0^R e^{-y^2}\,dy\right)dx = \int_0^R\left(\int_0^R e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dy\right)dx$$

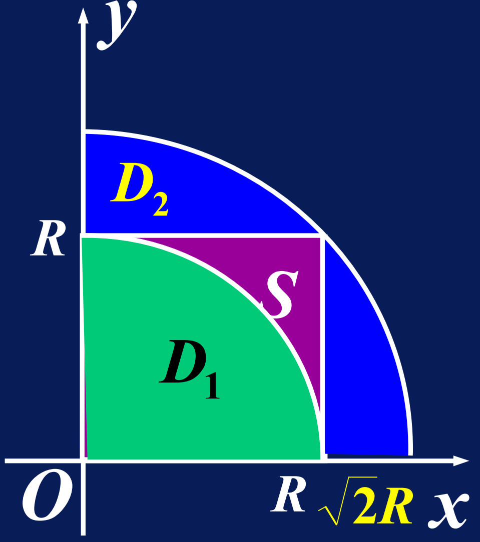
$$= \int_0^R dx\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}\,dy = \iint_S e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

解 $S=\{(x,y)\,|\,0\le x\le R, 0\le y\le R\}$,

$D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0\}$

$D_2=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2R^2, x\ge 0, y\ge 0\}$

则 $D_1\subset S\subset D_2$.



$\because\quad e^{-x^2-y^2}>0$,

$\therefore\quad \iint\limits_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

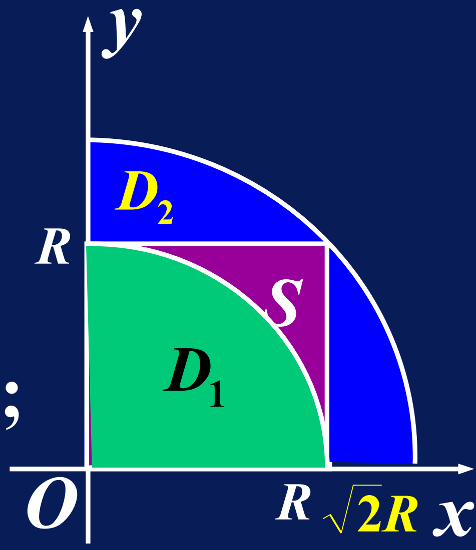
$\le \iint\limits_{S} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \iint\limits_{D_2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

又$\because$ $I=\iint\limits_{S} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$

$$=\int_0^R e^{-x^2}\,dx\int_0^R e^{-y^2}\,dy=\left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2;$$

$$I_1=\iint\limits_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho=\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2});$$



同理 $I_2=\iint\limits_{D_2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2});$

$\because I_1 < I < I_2,$

$$\therefore \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) < \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2});$$

当 $R \to +\infty$ 时， $I_1 \to \frac{\pi}{4}$， $I_2 \to \frac{\pi}{4}$，

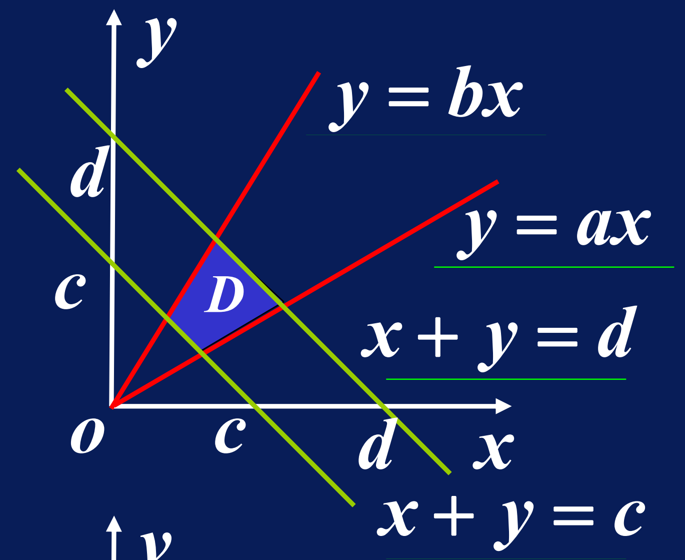
故当 $R \to +\infty$ 时, $I \to \frac{\pi}{4}$， 即 $\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$，

所求广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

例6 求由直线 $x+y=c,\ x+y=d,\ y=ax,$

$y=bx,\ (0\le c\le d,\ 0\le a\le b)$

所围成的闭区域 D 的面积.

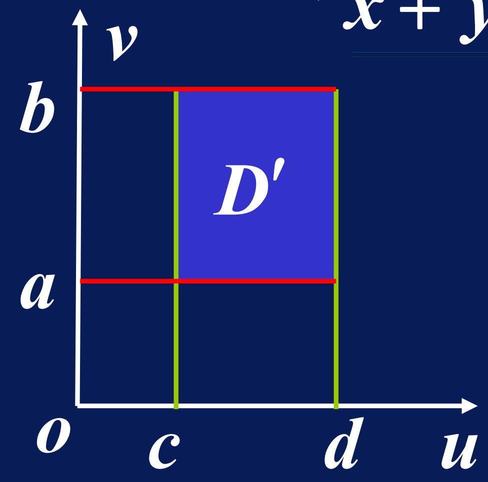


解 令 $u=x+y, v=\dfrac{y}{x}$, 则

$$x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}$$

从而

$$D\to D':\begin{cases} c\le u\le d \\ a\le v\le b \end{cases}$$



$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{u}{(1+v)^2}\neq 0,\quad (u,v)\in D'.$$

区域面积为

$$A=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'}\frac{u}{(1+v)^2}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

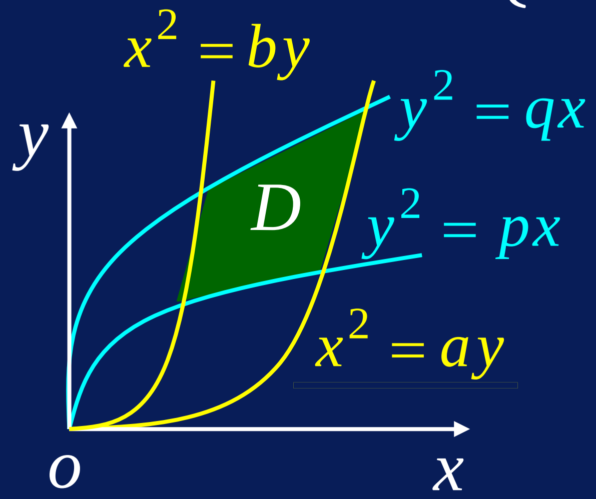
$$=\int_a^b\frac{1}{(1+v)^2}\mathrm{d}v\int_c^d u\,\mathrm{d}u$$

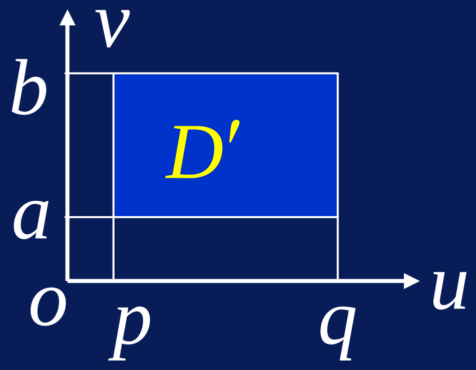
$$=\frac{(b-a)(d^2-c^2)}{2(1+a)(1+b)}.$$

例7 计算由 $y^2 = px, y^2 = qx, x^2 = ay, x^2 = by$ $(0 < p < q, 0 < a < b)$ 所围成的闭区域 D 的面积 S.

解 令 $u = \dfrac{y^2}{x}, v = \dfrac{x^2}{y}$, 则

$$D' : \begin{cases} p \le u \le q \\ a \le v \le b \end{cases} \longrightarrow D$$





$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=-\frac{1}{3},$$

$$\therefore S=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'}|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{3}\int_p^q \mathrm{d}u\int_a^b \mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{3}(q-p)(b-a).$$

例8 试计算椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积V.

解 取 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$, 由对称性

$$V=2\iint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

令 $x=a\rho\cos\theta,\ y=b\rho\sin\theta,$ 广义极坐标变换

则D 的原象为

$$D':\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi.$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\,\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\,\rho\cos\theta \end{vmatrix}=a\,b\,\rho$$

$$\therefore\quad V=2c\iint_D\sqrt{1-\rho^2}\,a\,b\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\,\rho$$

$$=\frac{4}{3}\pi abc.$$

三、同步练习

1. 求位于心脏线$\rho = a(1-\cos\theta)$内，圆$\rho = a$外的平面图形的面积 .

2. 计算$\iint\limits_{D} \ln(1+\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，

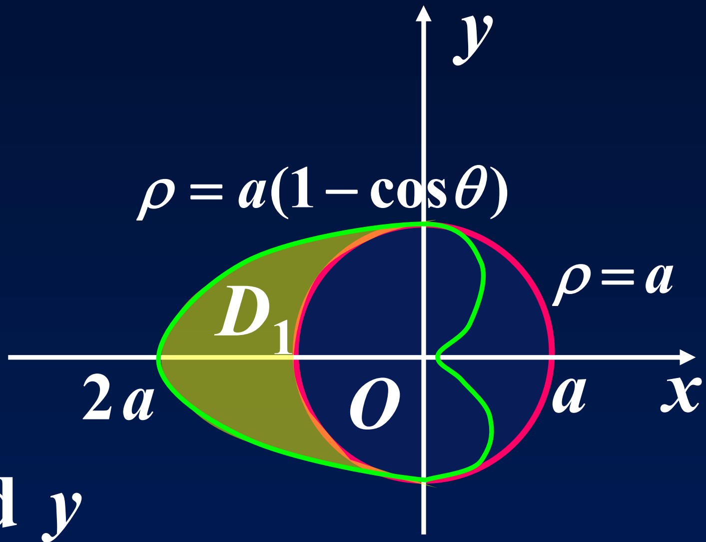
其中 D 为域$\{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$.

3. 计算$\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是 x 轴 y 轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭域.

4. 求由曲面 $z=8-x^2-y^2$和$z=x^2+3y^2$ 所围成的立体的体积.

四、同步练习解答

1. 求位于心脏线$\rho = a(1-\cos\theta)$内, 圆$\rho = a$外的平面图形的面积.



解 设平面图形占有区域D, 则D关于x轴($y=0$)对称.

$$I = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_a^{a(1-\cos\theta)} \rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{a}^{a(1-\cos\theta)} \rho \,\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} a^2 [(1-\cos\theta)^2 - 1] \mathrm{d}\theta$$

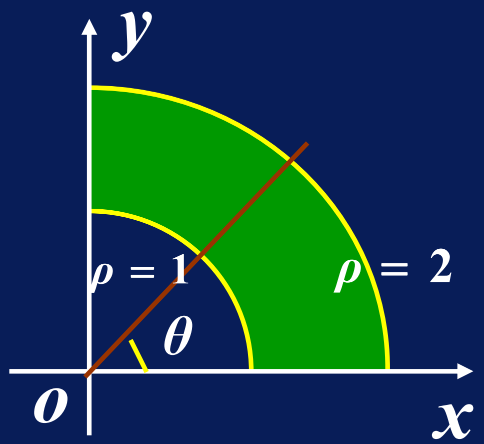
$$= a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) - 2\cos\theta] \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi + 8}{4} a^2.$$

2. 计算 $\iint\limits_D \ln(1+\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

其中 D 为域 $\{(x,y)\,|\,1 \le x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$.

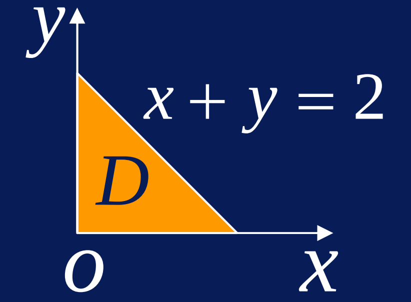
解 $D: \left|1 \le \rho \le 2, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right.$,



$$\iint\limits_D \ln(1+\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

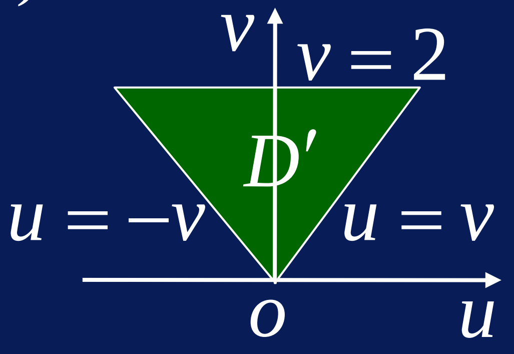
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_1^2 \ln(1+\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{4}\left(\ln 27 - \frac{1}{2}\right).$$

3. 计算$\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是 x 轴 y 轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭域.



解 令 $u=y-x,\ v=y+x$, 则

$$x=\frac{v-u}{2},\ y=\frac{v+u}{2}\quad (D'\to D)$$



$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{-1}{2},$$

因此

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\left|\frac{-1}{2}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

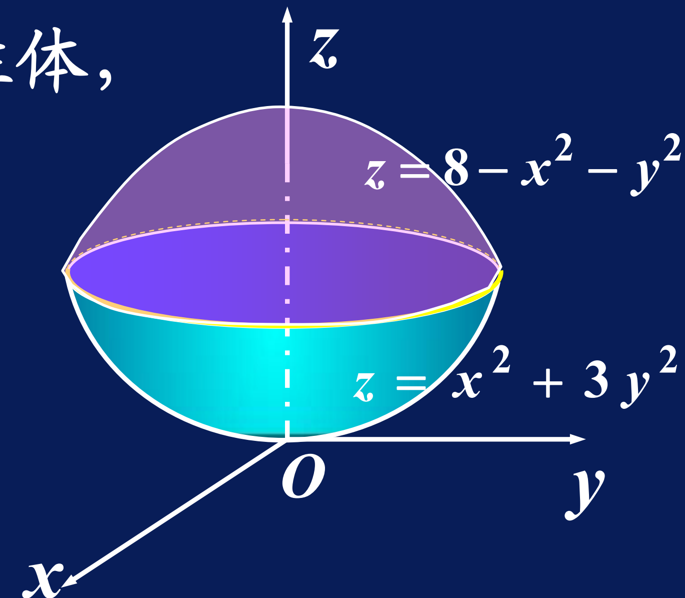
$$=\frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{d}v\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 (e-e^{-1})v\,\mathrm{d}v$$

$$=e-e^{-1}.$$

4. 求由曲面 $z = 8 - x^2 - y^2$ 和 $z = x^2 + 3y^2$ 所围成的立体的体积.

解 这是一个有曲顶、曲底的柱体,



立体在 xOy 面上的投影域为

$$x^2 + 2y^2 \le 4.$$

利用广义极坐标变换

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\theta & (0 \le \rho \le 1), \\ y = \sqrt{2}\rho\sin\theta & (0 \le \theta \le 2\pi), \end{cases}$$

可得所求体积为

$$V=\iint_D(8-x^2-y^2-x^2-3y^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_D(8-2x^2-4y^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$=8\iint_D\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=8\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 2\sqrt{2}\rho(1-\rho^2)\mathrm{d}\rho$$

$$=8\sqrt{2}\pi.$$