第六节

高斯(Gauss)公式、通量与散度

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 高斯公式

平面闭曲线
Green 公式

推广 →

空间闭曲面
Gauss 公式

定理10.7 设 Ω 是一空间闭区域, 其边界曲面 $\partial\Omega$ 由分片光滑的曲面组成, 如果函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$在 Ω 上具有一阶连续的偏导数, 那么

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v = \oiint_{\partial\Omega^{+}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

$$=\oiint\limits_{\partial\Omega^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

高斯公式

或

$$=\oiint\limits_{\partial\Omega^+}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

其中 $\partial\Omega^+$ 表示 Ω 的边界曲面的外侧.

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是 $\partial\Omega^+$ 上点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦.

注 1° 高斯公式表达了空间区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系.

2° 高斯公式使用的条件:

① Σ封闭，外侧 (内)

② P，Q，R 在Σ所围闭区域Ω上有一阶连续偏导数.

奇点：Σ所围闭区域Ω上，使P, Q, R 没有一阶连续偏导数的点.

$$\oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

3° 令 $P = x, Q = y, R = z$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3$$

由高斯公式可得空间立体的体积：

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}v = \frac{1}{3}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{3}\oiint_{\partial\Omega^{+}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

★ (二) 哈密尔顿算符与拉普拉斯算符

哈密尔顿算符 $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

向量微分算子

算符既可作用到数量值函数上，也可以象通常的向量一样进行运算.

读作“纳普拉”(*Nabla*)
或“台尔”(*del*)

1. 设$u = u(x, y, z)$, 则

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$\therefore \quad \nabla u = \mathrm{grad}\, u$$

2. 设$\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$,则

$$\nabla\cdot\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k})$$

$$=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

3. 三维拉普拉斯算符

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

它作用于数量值 u 可得

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot grad\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= \Delta u$$

(三) 通量与散度

1. 通量

(1)定义 设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$$

P, Q, R具有连续一阶偏导数，Σ是有向曲面片，其单位法向量为$\vec{n}$，称

$$\Phi=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

为向量场$\vec{A}$通过有向曲面Σ的通量.

(2) 背景

1° 流量

流速: $\vec{A} = \vec{v} = \{P, Q, R\}$

2° 电通量

电位移: $\vec{A} = \vec{D} = \{P, Q, R\}$

3° 磁通量

磁场强度: $\vec{A} = \vec{B} = \{P, Q, R\}$

(3) 通量$\Phi > 0$ (<0, $=0$)的物理意义

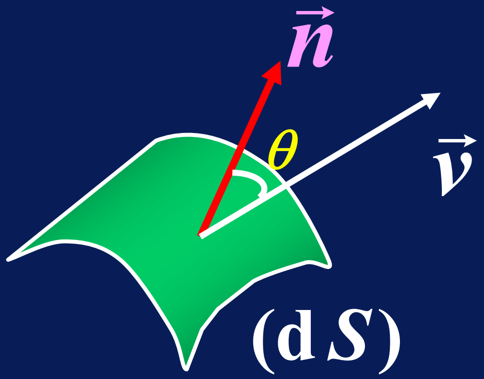
以流速场为例.

穿过曲面$(\mathrm{d}S)$流向$\vec{n}$指定侧的流量元素:

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{v}\cdot\vec{n}^{\circ}\,\mathrm{d}S = |\vec{v}|\cos\theta\,\mathrm{d}S$$

$\because\ \mathrm{d}\Phi > 0\left(0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$(<)$ $\quad\left(\theta > \dfrac{\pi}{2}\right)$:



流体的实际流动方向是$\vec{n}$指定的一侧

$(-\vec{n})$

$\therefore \quad \Phi = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n}^{\circ} \mathrm{d} S$: 流体穿过 Σ，流向 $\vec{n}$ 指定侧的流体质量的代数和 (简称流量).

$\therefore \quad \Phi > 0$: 流体从 Σ的负侧 ($-\vec{n}$ 指定侧)流

$(<)$

$(=)$

向正侧 ($\vec{n}$ 指定侧)的流体质量

多于 从正侧流向负侧的流体 质量。

(少) (等)

若Σ为闭曲面外侧，则 $\Phi > 0$: 流出 > 流入，

$(<)$ $(<)$

Σ内有正源 .

(负)

即对于稳定的不可压缩的流体，单位时间通过 Σ （Σ为取外侧的闭曲面）的流量为

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

1. $\Phi > 0$ 时，流入Σ的流体质量少于流出的，Σ内有泉；以产生同样多的流体进行补充.

2. $\Phi < 0$ 时，流入Σ的流体质量多于流出的，Σ内有洞；以吸收同样多的流体进行抵消.

3. $\Phi = 0$ 时，流入与流出Σ的流体质量相等，Σ内无源.

2. 散度

(1) 定义 设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

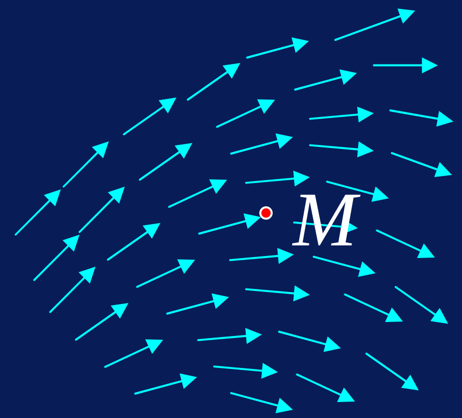
在点 $M(x,y,z)$ 处

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\ \underline{\underline{\text{记作}}}\ \operatorname{div}\vec{A}$$

称为向量场 $\vec{A}$ 在点 M 的散度.

根据高斯公式，流量也可表为

$$\Phi=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$



设Σ是包含点M且方向向外的任一闭曲面，所围区域Ω的体积为V，

令Ω 以任意方式缩小至点 M，

$$\lim_{\Omega\to M}\frac{\Phi}{V}=\lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

积分中值定理

$$=\lim_{\Omega\to M}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{(\xi,\eta,\zeta)}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_M$$

$$\lim_{\Omega \to M} \frac{\Phi}{V} > 0$$ 表明该点处有正源,

$$\lim_{\Omega \to M} \frac{\Phi}{V} < 0$$ 表明该点处有负源,

$$\lim_{\Omega \to M} \frac{\Phi}{V} = 0$$ 表明该点处无源,

上述极限绝对值的大小反映了源的强度.

可以将通量对体积的变化率定义为散度.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma} A_n \,\mathrm{d}S = \lim_{\Omega\to M}\frac{\Phi}{V}$$

(2) $\operatorname{div}\vec{A}$的意义：通量密度，即在单位时间内，单位体积所产生或吸收的通量.
可用于检验“源”的分布，度量“源”的强度.

$\operatorname{div}\vec{A} > 0$：该点有产生通量的正源.
$(<)$ (吸收) (负)

$\operatorname{div}\vec{A} \equiv 0\ (\forall M \in \Omega)$：$\vec{A}$是无源场.

$|\operatorname{div}\vec{A}|$：源的强度.

(3) 高斯公式得的另一种形式:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A}\, dV = \oiint_{\Sigma} A_n \,\mathrm{d}S$$

其中Σ是空间闭区域Ω的边界曲面, A_n是向量 $\vec{A}$在曲面Σ的外侧法向量上的投影.

$$(A_n = \vec{A}\cdot\vec{n}^{\circ} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)$$

意义: 分布在Ω内的源头所产生的流体总质量等于离开Ω的流体总质量.

或分布在Ω内的源头所吸收的流体总质量等于进入Ω的流体总质量.

二、典型例题

例1 计算曲面积分

$$I = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中Σ是正方体

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a\}$$

的表面外侧.

解 原式 $= \iiint_{\Omega} (1+1+1)\mathrm{d}v = 3\iiint_{\Omega} \mathrm{d}v$

$$= 3a^3.$$

例 2 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的内侧.

注意积分曲面的方向

解 $I=-\iiint\limits_{\Omega} 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$

球面坐标

$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

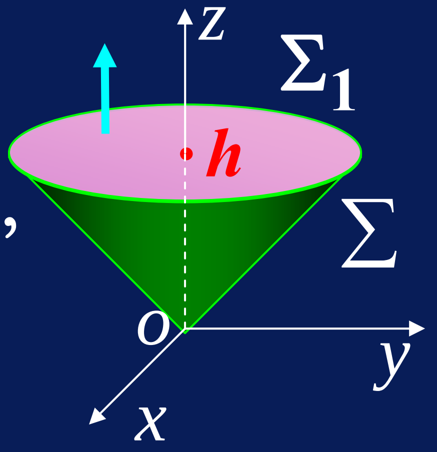
$$=-3\times\frac{a^5}{5}\times2\times2\pi=-\frac{12}{5}\pi a^5$$

例3 利用高斯公式计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

其中Σ为锥面 $x^2+y^2=z^2$介于平面 $z=0$ 及 $z=h(h>0)$之间的部分的下侧，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是Σ在点(x,y,z)处的法向量的方向余弦.

解(方法1) 补 $\Sigma_1: z=h$，上侧



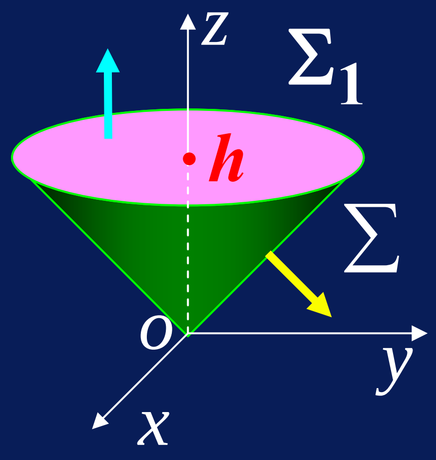
$(x,y)\in D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\le h^2\}$,

则$\Sigma+\Sigma_1$封闭，外侧

Ω：$\Sigma+\Sigma_1$围成的空间闭区域.

$$P = x^2, \qquad Q = y^2, \qquad R = z^2;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2z.$$



$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

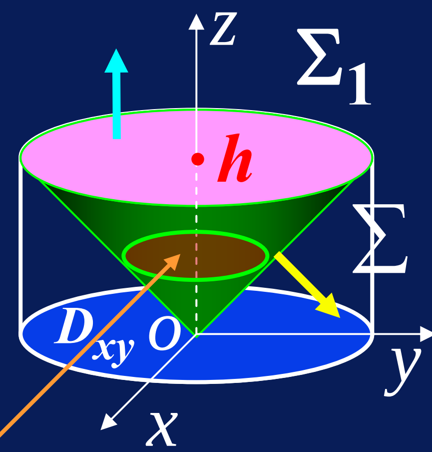
$$= \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v = 2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v$$

$$= 2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v$$

关于y奇函数

$$= 2\Big[\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}v + \iiint\limits_{\boxed{\Omega}} y\mathrm{d}v + \iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v\Big]$$

关于zOx面对称



D_z: $\sqrt{x^2+y^2} \le z$

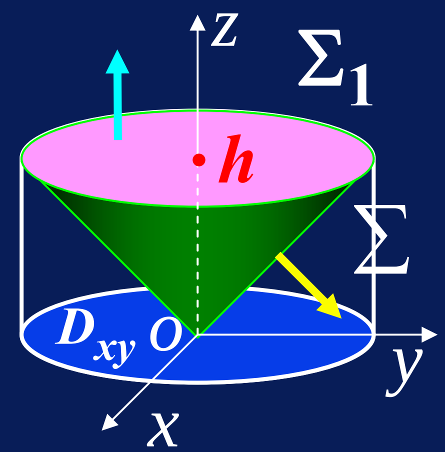
$$= 2\Big[0 + 0 + \iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v\Big]$$

方法2

$$\equiv 2\int_0^h z\,\mathrm{d}z \iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^h z\cdot\pi z^2\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\pi h^4$$

Σ_1： $z = h$，$(x, y) \in D_{xy}$， 上侧



$D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le h^2\}$

$$\iint_{\Sigma_1} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) \mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma_1} x^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 0 + 0 + \iint_{\Sigma_1} z^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} h^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi h^4$$

Σ_1在 yOz 面及 zOx 面的投影为 0

$$\because \quad \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\pi h^4$$

$$\iint_{\Sigma_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S = \pi h^4$$

$$\therefore \quad I = \iint_{\Sigma} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \oiint_{\Sigma_1} = \frac{1}{2}\pi h^4 - \pi h^4 = -\frac{1}{2}\pi h^4.$$

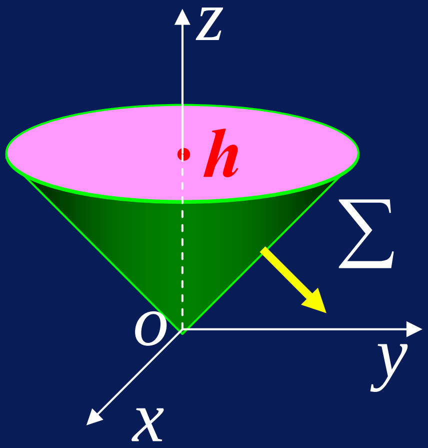
(方法2)

由对称性知 $\iint\limits_{\Sigma} x^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma} y^2 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0,$

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma} z^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= - \iint\limits_{x^2+y^2 \le h^2} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^h \rho^3 \mathrm{d}\rho = -\frac{\pi}{2} h^4.$$



例4 求以速度 $\vec{v}=(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3})$ $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

穿过球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$流向其外侧的流量．

分析 流量:

$$\Phi=\oiint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

虽然Σ封闭，但 P，Q，R在Σ内有奇点$(0,0,0)$,

所以不能直接用高斯公式.

解(方法1) 变形后，用高斯公式.

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

$$= \oiint_{\Sigma} \frac{x}{a^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{a^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{a^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{a^3}\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{高斯公式}}{=\!=\!=} \frac{1}{a^3}\iiint_{\Omega}(1+1+1)\mathrm{d}v = \frac{3}{a^3}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi.$$

(方法2)利用两类曲面积分的关系.

$$\because \quad \vec{e}_n = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$\therefore \quad \Phi = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \left(\frac{x}{r^3}\cos\alpha + \frac{y}{r^3}\cos\beta + \frac{z}{r^3}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

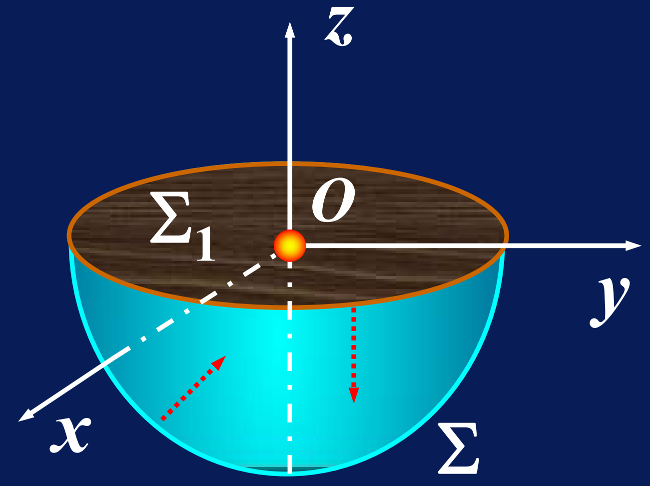
$$= \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \left(\frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2}{r^4} + \frac{z^2}{r^4}\right)\mathrm{d}S = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \frac{1}{r^2}\mathrm{d}S = \frac{1}{a^2}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot 4\pi a^2 = 4\pi.$$

例 5 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

其中Σ为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧,

a为大于零的常数.



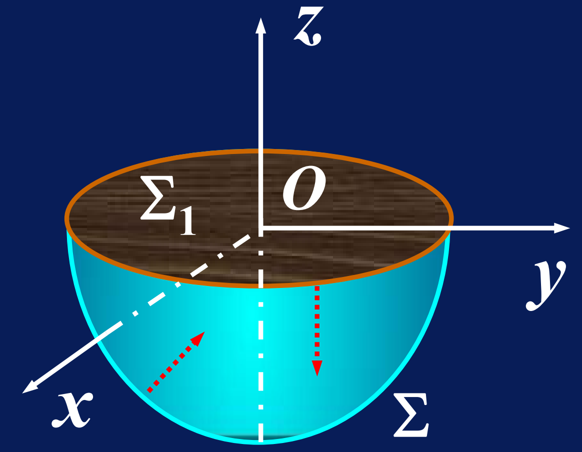
解 Σ 不封闭, 补

Σ_1: $z=0\ (x^2+y^2\le a^2)$, 下侧

$\Sigma+\Sigma_1$ 封闭, 内侧.

能否直接用高斯公式? 否!

变形:



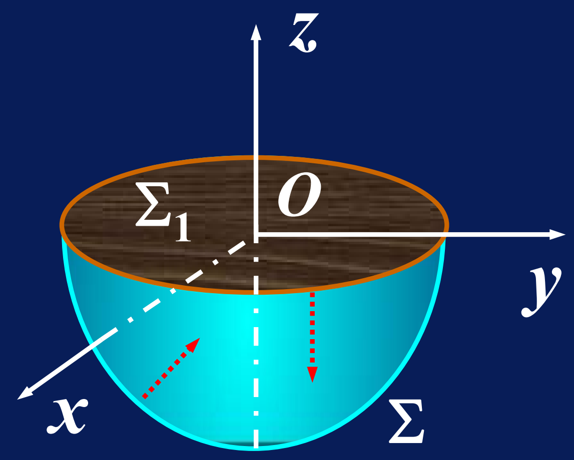
$$I=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma} ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a}\Big(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\Big)\big[ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\big]$$

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint_{\Omega}\big[a+2(z+a)\big]\mathrm{d}v=-\iiint_{\Omega}\big[3a+2z\big]\mathrm{d}v$$

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$=-\iiint\limits_{\Omega}[3a+2z]\mathrm{d}v$$

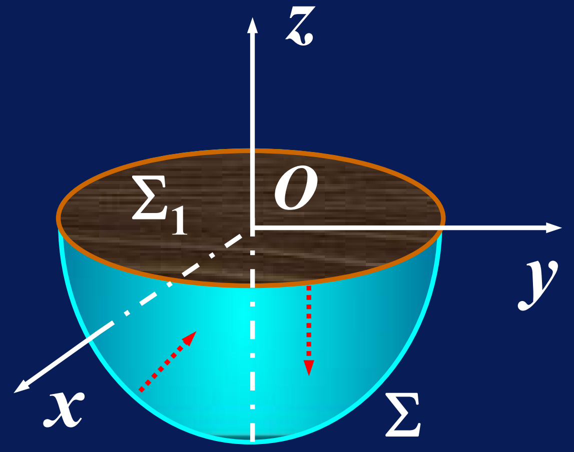
$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a(3a+2r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=-[\,3a\cdot\frac{a^3}{3}\cdot 2\pi+\frac{2}{4}a^4(-\frac{2\pi}{2})\,]=-\frac{3}{2}\pi a^4$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+\iint\limits_{\Sigma_1}(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma_1} ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma_1} (z+a)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} a^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$= -\pi a^4$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{a}\Big[\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}\Big] = \frac{1}{a}\Big[-\frac{3}{2}\pi a^4 + \pi a^4\Big]$$

$$= -\frac{\pi}{2}a^3$$

例6 设函数$u(x,y,z)$和$v(x,y,z)$在闭区域Ω上具有一阶及二阶连续偏导数, 证明

$$\iiint_{\Omega} u\Delta v \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中Σ是Ω的整个边界曲面, $\frac{\partial v}{\partial n}$为函数$v(x,y,z)$沿$\Sigma$的外法线方向导数, 这个公式叫做**格林第一公式**.

$$\iiint_{\Omega} u\Delta v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S - \iiint_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

证 $$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$是点$(x, y, z)$处的外法线方向余弦。

$$\oiint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$= \oiint_{\Sigma}\left[\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha + \left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\beta + \left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

高斯公式

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S} = \oiint_{\Sigma}\left[\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha + \left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\beta + \left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

高斯公式

$$= \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+ \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \boxed{\iiint_{\Omega} u\Delta v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z} + \boxed{\iiint_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,}$$

移项整理可得

例 7 设向量场 $\vec{A}(x,y,z)=xy\,\vec{i}+yz\,\vec{k}$，求穿过球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分Σ的外侧的通量.

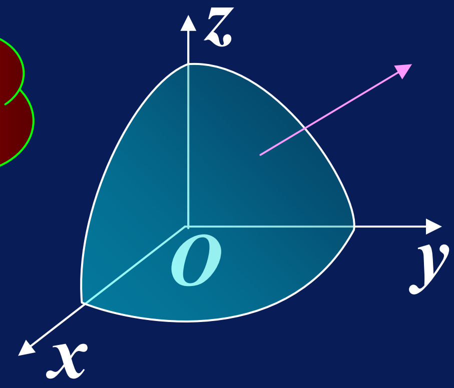
解 $$\Phi=\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

轮换对称性

$$=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2-z^2}\cdot z\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+\iint_{D_{xy}}y\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$= 2\iint\limits_{D_{xy}} y\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho\sin\theta\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho \qquad (\text{令}\rho=\sin\theta)$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

三、同步练习

1. 计算积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

Σ是立体 $0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2};\ x^2+y^2\le b^2$ $(a>b>0)$表面的外侧.

2. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中Σ为曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$法向量指向与z轴正向夹角为锐角的一 侧.

3. 计算积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3\cos\alpha + y^2\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S$,

$\sum$是柱面$x^2 + y^2 = a^2$在$0 \le z \le h$部分，$\cos\alpha, \cos\beta$,

$\cos\gamma$ 是$\sum$的外法线的方向余弦.

4. 设 Σ 是光滑的闭曲面，V是 Σ 所围的立体 Ω

的体积. r 是点 (x, y, z) 的矢径, $r = |\vec{r}|$.

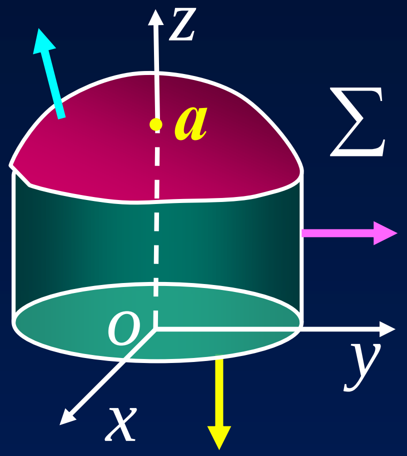
θ是Σ的外法向与$\vec{r}$的夹角. 试证明:

$$V = \frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} |\vec{r}|\cos\theta\,\mathrm{d}S$$

四、同步练习解答

1. 计算积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

Σ是立体 $0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2};\ x^2+y^2\le b^2$ $(a>b>0)$表面的外侧.



解(方法1)　由高斯公式

$$I=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

由对称性知 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

$$=2\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

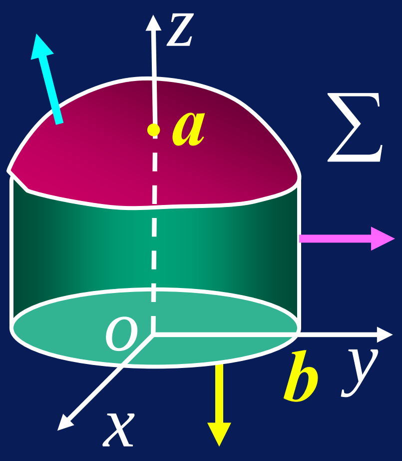
$$= 2\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 2\iint_{x^2+y^2\le b^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le b^2} (a^2 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

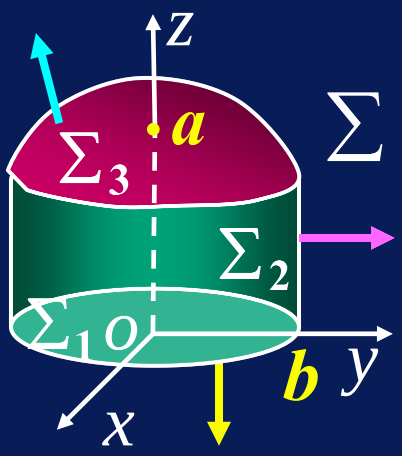
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{b}(a^2-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho = \pi a^2 b^2 - \frac{\pi}{2}b^4$$

$$= \frac{\pi}{2}b^2(2a^2 - b^2)$$



(方法2) 直接计算

由对称性知: $\iint\limits_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma} y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$



$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$

$\Sigma_1 : z = 0,\ x^2 + y^2 \le b^2$, 下侧;

$\Sigma_2 :\ x^2 + y^2 = b^2,\ 0 \le z \le \sqrt{a^2 - b^2}$, 外侧;

$\Sigma_3 :\ \ z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\ \sqrt{a^2 - b^2} \le z \le a$, 上侧;

$$\iint\limits_{\Sigma_1} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_2} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

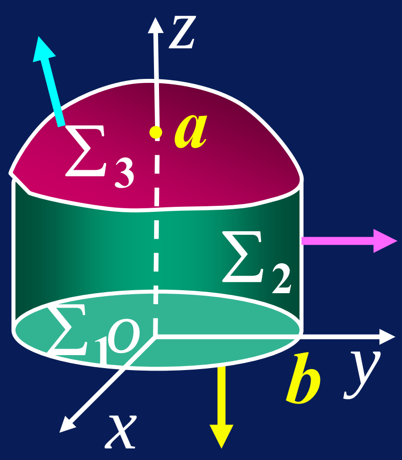
$$I=\iint_{\Sigma_3} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le b^2}(a^2-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^b(a^2-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\pi a^2b^2-\frac{\pi}{2}b^4$$

$$=\frac{\pi}{2}b^2(2a^2-b^2)$$



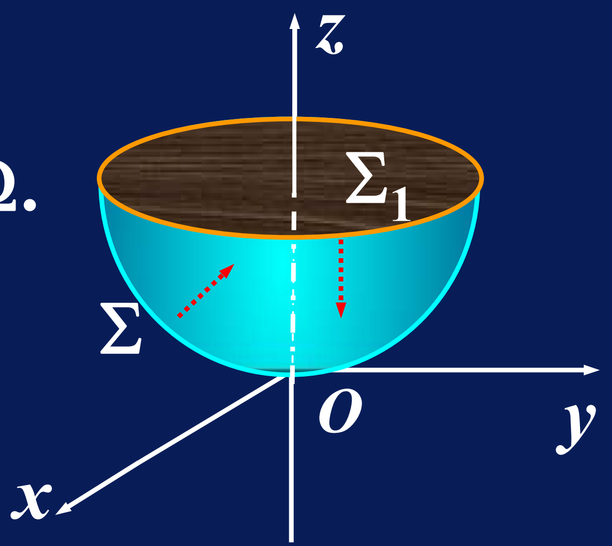
2. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中Σ为曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$法向量指向与z轴正向夹角为锐角的一 侧.

解 作辅助曲面 Σ_1: $z=1\ (x^2+y^2\le 1)$，下侧

$\Sigma+\Sigma_1$封闭，内侧.

$\Sigma+\Sigma_1$围成的空间闭区域为Ω.

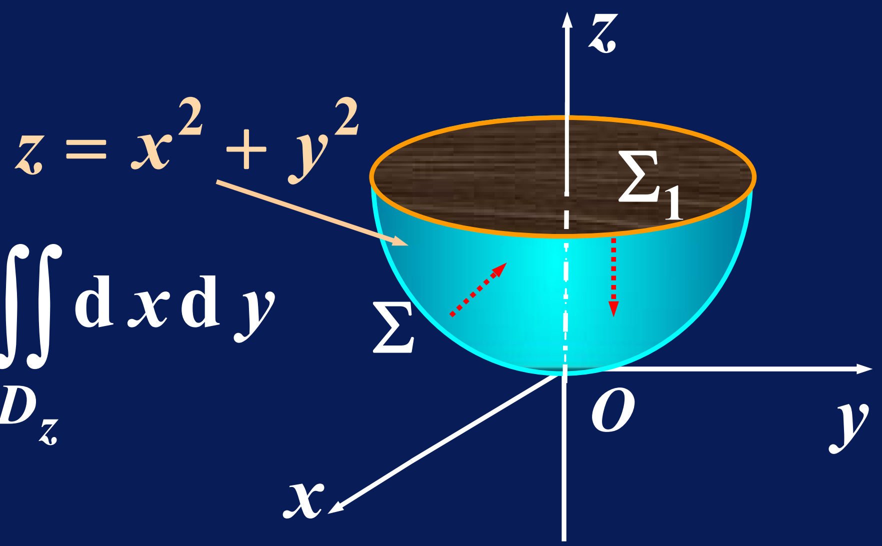


$$I=\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$$

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(2+1)\mathrm{d}v=-3\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-3\int_0^1\pi(\sqrt{z})^2\mathrm{d}z=-\frac{3\pi}{2}$$



$$\iint\limits_{\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-1\times\pi=-\pi$$

$$\therefore\quad I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{3}{2}\pi+\pi=-\frac{\pi}{2}$$

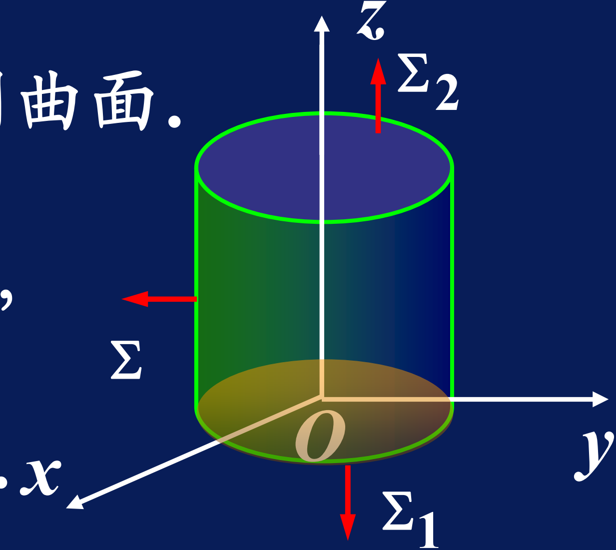
3. 计算积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3\cos\alpha + y^2\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S$,

Σ是柱面$x^2+y^2=a^2$在$0\le z\le h$部分，$\cos\alpha, \cos\beta$, $\cos\gamma$ 是Σ的外法线的方向余弦.

解 补曲面Σ_1与Σ_2，使其为封闭曲面.

Σ_1： $z=0, x^2+y^2\le a^2$,方向向下，

Σ_2： $z=h, x^2+y^2\le a^2$,方向向上.



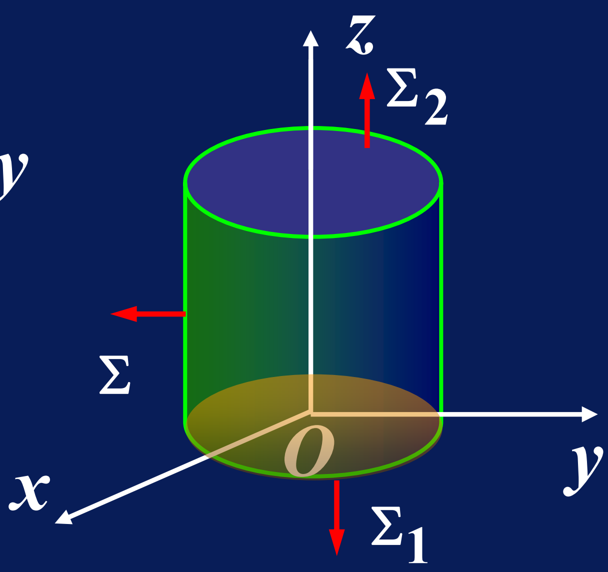
$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\left(x^3\cos\alpha+y^2\cos\beta+z\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}(3x^2+2y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\iint_{x^2+y^2\le a^2} x^2\,\mathrm{d}\,x\mathrm{d}y\int_0^h\mathrm{d}z+\pi a^2 h$$

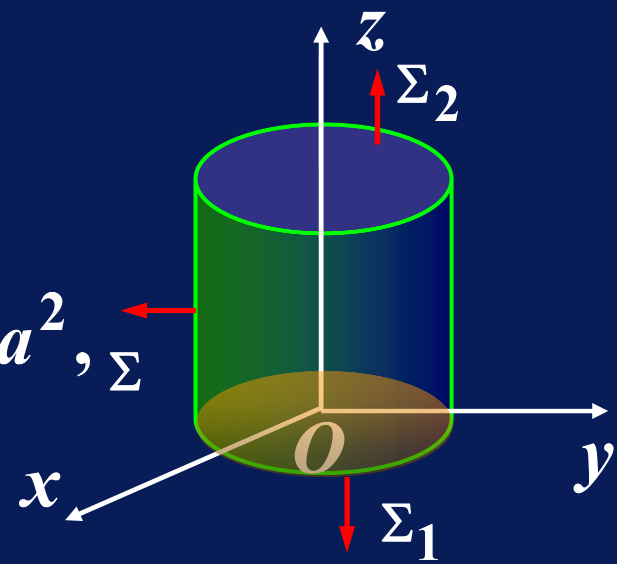
$$=3h\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho+\pi a^2h=\frac{3h}{4}\pi a^4+\pi a^2 h.$$



$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\left(x^3\cos\alpha+y^2\cos\beta+z\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\frac{3h}{4}\pi a^4+\pi a^2 h.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^3\cos\alpha+y^2\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=0,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}(x^3\cos\alpha+y^2\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\pi h a^2,$$



则 $$\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}$$

$$=\left(\frac{3h}{4}\pi a^4+\pi a^2 h\right)-\pi a^2 h=\frac{3h}{4}\pi a^4.$$

4. 设Σ是光滑的闭曲面，V是Σ所围的立体Ω的体积. r 是点 (x, y, z) 的矢径，$r = |\vec{r}|$.

θ是Σ的外法向与$\vec{r}$的夹角. 试证明:

$$V = \frac{1}{3}\oiint_{\Sigma} |\vec{r}| \cos\theta \, \mathrm{d}S$$

证 设 $\vec{n}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$为Σ的单位外法向量，

$$\vec{r} = (x, y, z).$$

$$\cos\theta = \vec{r} \cdot \vec{n}^0 / |\vec{r}| = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) / |\vec{r}|$$

$$\cos\theta = \vec{r}\cdot\vec{n}^{0}/|\vec{r}| = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)/|\vec{r}|$$

$$\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}|\vec{r}|\cos\theta\,\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

高斯公式

$$=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \;= V.$$