第九节

级数综合题

- 一、数项级数
- 二、幂级数
- 三、傅里叶级数

一、数项级数

例1 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 $s_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$，

试写出该级数，并求和．

解 $u_1 = s_1 = \dfrac{1}{2}$

$$u_n = s_n - s_{n-1} = \frac{2^n - 1}{2^n} - \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \qquad (n \geq 2)$$

所求级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$

所求级数的和为 $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n - 1}{2^n} = 1$

例2 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \ (u_n > 0)$ 的部分和为 $s_n, v_n = \dfrac{1}{s_n}$,

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，试讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

解　因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0.$ 于是

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \infty$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例3 设 $u_n = \sqrt{(n+1)^2+1} - \sqrt{n^2+1}$,

判别 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

解 因 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(1+n)^2+1} - \sqrt{n^2+1}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1} + \sqrt{n^2+1}} = 1$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例4 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，a为非零常数，

试判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + a)$的敛散性．

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

从而 $\lim_{n\to\infty}(u_n + a) = a \neq 0,$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + a)$发散．

例5 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 3\ln^n a\ (a>0)$ 的敛散性.

解 因 $\sum_{n=1}^{\infty} 3\ln^n a$ 是等比级数 (公比 $r=\ln a$), 故

当 $\frac{1}{e}<a<e$ 时, $|\ln a|<1$, 级数收敛.

当 $0<a\le e$ 或 $a\ge e$ 时, $|\ln a|\ge 1$,

此时, 级数发散.

例6 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{7^n-5^n}$ 的敛散性.

解 (方法1) 记 $u_n=\frac{6^n}{7^n-5^n}$, $v_n=\left(\frac{6}{7}\right)^n$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{7^n-5^n}\cdot\frac{7^n}{6^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{7}\right)^n}=1$$

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n$ 收敛,故原级数收敛.

(方法2)

因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}6\cdot\frac{7^n-5^n}{7^{n+1}-5^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}6\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{7}\right)^n}{7-5\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^n}=\frac{6}{7}<1.$$

由比值判别法知,原级数收敛.

例7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a^0)(1+a^1)(1+a^2)\cdots(1+a^{n-1})}$

$(a>0)$，判断级数 的敛散性.

解 $l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{(1+a^0)(1+a^1)\cdots(1+a^n)}\cdot$

$\frac{(1+a^0)(1+a^1)\cdots(1+a^{n-1})}{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1+a^n}$

$0<a<1$时， $l=0$,原级数收敛 .

$a>1$时,$l=a>1$,原级数发散.

$a=1$时， $l=\frac{1}{2}$,级数收敛.

例8 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)^n}{2n^{n+1}}$ 是否收敛？若收敛,是绝对收敛还是条件收 敛?

解 (1) 非绝对收敛. 因 $|u_n| = \dfrac{(n+1)^n}{2\cdot n^{n+1}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,由比较法知 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散.

(2)判原交错级数收敛.

$$\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} = \frac{(n+1)^n}{2\cdot n^{n+1}} \cdot \frac{2\cdot(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{(n^2+2n)^{n+1}} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} > 1$$

即 $|u_n| > |u_{n+1}|$,

且 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0$

由莱布尼茨判别法知, 原级数 (条件)收敛 .

例9 判别 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2^n+\ln n}$ 是否收敛，

如果收敛,是绝对收敛还是条件收敛?

解 因 $|u_n|=\frac{1}{2^n+\ln n}<\frac{1}{2^n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，

故由比较法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+\ln n}$ 收敛，

原级数为绝对收敛.

例10 判别 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^{2k}+1}}$ 是否收敛（k : 正实数）? 若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

解 记 $u_n=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n^{2k+1}}}$,

当 $k>1$ 时，$|u_n|=\dfrac{1}{\sqrt{n^{2k+1}}}<\dfrac{1}{n^k}$,

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^k}$ 收敛，由比较判别法知

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^{2k}+1}}$ 收敛，故原级数绝对收敛 .

当 $0<k\le 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\frac{1}{n^k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\sqrt{n^{2k}+1}}=1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，但 $\frac{1}{\sqrt{n^{2k}+1}}>\frac{1}{\sqrt{(n+1)^{2k}+1}},$

且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{2k}+1}}=0,$

由莱布尼茨判别法知：原级数收敛，

故原级数条件收敛．

例11 判别 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot n^3}{2^n-1}$ 是否收敛？

若收敛，是绝对收敛，还是条件收敛？

解 设 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot n^3}{2^n-1}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}-1}\cdot\frac{2^n-1}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{2-\dfrac{1}{2^n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=\frac{1}{2}<1,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，原级数绝对收敛。

例12 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 也收敛．

证 因 $|a_n b_n| \le \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，

故 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛．又因

$$(a_n + b_n)^2 \le (|a_n| + |b_n|)^2 = a_n^2 + 2|a_n b_n| + b_n^2,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 都收敛，

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 收敛．

二、幂级数

例13 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=2$，

试指出点 $-2,-1,0,1,2,3,4,5,e,\frac{1}{e}$ 中，哪些点

为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 收敛点（发散点）.

解 知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 当 $|x|<2$ 时收敛，$|x|>2$ 时发散.

故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 当 $|x-3|<2$ 时收敛，$|x-3|>2$ 时发散，

于是 $2,e,3,4 \in (1,5)$ 为收敛点，

$-2,-1,0,\frac{1}{e} \in (-\infty,1)\cup(5,+\infty)$ 为发散点.

例14 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x+a)^{2n}$ 的收敛域 .

解 缺项级数 ,用比值法判 $\sum_{n=1}^{\infty} |\, u_n(x) \,|$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(x+a)^{2n+2}}{2^n(x+a)^{2n}}\right| = 2(x+a)^2 < 1$$

时,即 $x \in (-a-\frac{\sqrt{2}}{2}, -a+\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时, 级数收敛;

当 $x = -a \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, 发散,

故所求收敛域为 $\left(-a-\frac{\sqrt{2}}{2}, -a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

例15 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \ (a \neq 0)$ 的收敛域．

解 $\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{a^{(n+1)^2}} \cdot \frac{a^{n^2}}{n!} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|a|^{2n+1}} = \begin{cases} 0, & |a| > 1; \\ +\infty, & |a| \le 1, \end{cases}$

故当 $|a| > 1$ 时，$R = +\infty$，收敛域为 $(-\infty, +\infty)$；

当 $|a| \le 1$ 时，$R = 0$，级数仅在 $x = 0$ 处收敛．

例16 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-4,4]$, 试写出 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 的收敛域, 并说明理由.

解 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 4^n$ 收敛. 当 $x=\pm 2$ 时,

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1} = \pm 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 4^n$ 收敛,

若 $|x_1| > 2$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 也收敛,

推得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1^2 > 4$ 处收敛, 矛盾,

故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 的收敛域为 $[-2,2]$.

例17 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x_1 = 3$ 处发散，在 $x_2 = -1$ 处收敛，指出其收敛半径，并证明之.

解 因 $x_1 = 3$ 处 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (3-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$ 发散，

故当 $\underline{|x-1| > 2}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 发散.

又当 $x_2 = -1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-2)^n$ 收敛，

故 $|x-1| < |-2| = 2$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 收敛.

收敛半径为 $R = 2$.

例18 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛，

试确定其收敛半径 R，并说明理由.

解 知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (3+1)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 4^n$ 条件收敛，

故有 $R \geq 4$.下证 R 不可能大于 4.

设 $R > 4$,则在 $x=3$ 处，

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (3+1)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 4^n$ 必绝对收敛，矛盾.

故 $R = 4$.

例19 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n \ (b \neq 0)$ 当 $x=0$ 时收敛，当 $x=2b$ 时发散，试指出其收敛半径 R，并证明之．

解 因 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，

故当 $|x-b| < |0-b| = |b|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ 绝对收敛。

又 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ 在 $x=2b$ 处发散，

故当 $|x-b| > |2b-b| = |b|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ 发散，

所求收敛半径 $R = |b|$.

例20 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 不存在，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 收敛半径 ？

求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}x^n$ 收敛半径 R？

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$

$$=\begin{cases}\dfrac{3}{2}, & n\text{ 为奇数} ;\\ \dfrac{1}{6}, & n\text{ 为偶数} .\end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 不存在，比值法失效 .

介绍几种求其收敛半径 的方法.

(方法1) 根值审敛法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}\cdot\frac{|x|}{2}=\frac{|x|}{2}$$

当$|x|<2$时,幂级数收敛 ;

当 $|x|>2$ 时, 幂级数发散,

故收敛半径为 $R=2.$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} x^n$$

(方法2)

$$\frac{1}{2^n}|x|^n \le \frac{2+(-1)^n}{2^n}|x|^n \le \frac{3}{2^n}|x|^n$$

由比较法知，当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} x^n$ 收敛时，原级数收敛；

当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ 发散时，原级数发散。

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} x^n$ 的收敛半径都为 2.

因此原级数的收敛半径也是2.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}x^n$$

(方法3)

因 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2^n}x^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n$ 在 $|x|<2$ 时收敛，

所以原级数在 $|x|<2$ 时收敛．

又当 $x=2$ 时，原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\left[2+(-1)^n\right]$ 发散．

因此，当 $|x|>2$ 时，原级数发散，

故其收敛半径为：$R=2$.

例21 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$,验证：$f'(x)=2xf(x)$.

解 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{n+1}=0$,故

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\text{ 在 }(-\infty,+\infty)\text{内收敛}.$$

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2n}}{n!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}2x\cdot\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}$$

$$=2x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{m!}=2xf(x).$$

例22 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0;\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0,\end{cases}$

将$f'(x)$展开为 x 的幂级数 .

解 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}[1-\cos x], \quad x\neq 0$

$$=\frac{1}{x^2}\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n)!},$$

$\because$ 和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$

在其收敛域(-∞,+ ∞)上连续，

$\therefore \quad \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} S(x)=S(0)$

$\therefore \quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$

故 $f'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-2}{(2n)!}x^{2n-3},\quad (-\infty,+\infty)$

例23 将 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$展成 x的幂级数,并求其收敛区间.

分析 求导,再展开,积分.

解 因 $f'(x)=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]' =\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,而

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots \qquad (-1<x\le 1)$$

积分得 $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$$= x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \cdots$$

当 $x=\pm 1$ 时,上式为交错级数 ,

$$0 < u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\cdot(2n+1)} < \frac{1}{2n+1}$$

$u_n > u_{n+1}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, 由莱布尼茨判别法知 ,

当 $x=\pm 1$ 时,级数收敛 , 因此收敛区间为 :$[-1,1]$.

三、傅里叶级数

例24 将 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0;\\ \pi-x & 0<x\le\pi\end{cases}$ 展开成以 2π 为周期的傅立叶级数.

解 $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi-x)dx=\dfrac{\pi}{2},$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\left[\frac{(\pi-x)\sin nx}{\pi n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right]$$

$$=-\frac{\cos nx}{n^2\pi}\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{n^2\pi}[1-\cos n\pi]$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1; \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx dx$$

$$= \left[-\frac{(\pi - x)\cos nx}{n\pi}\right]\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{n}$$

故 $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin nx$

$x \in [-\pi, 0] \cup [0, \pi]$

$$f(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

例25 将 $f(x)=\begin{cases}\pi-2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi,\end{cases}$ 展成以 2π 为周期的正弦级数.

解 奇延拓，$a_n=0,\cdots n=0,1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}(\pi-2x)\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n}-\frac{4}{n^2\pi}\sin n\cdot\frac{\pi}{2},\quad n=1,2,\cdots$$

故 $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx,\quad x\in(0,\pi].$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例26 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}(x+\pi)^2, & -\pi \le x < 0;\\ \dfrac{1}{\pi}x^2, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$

试写出 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅立叶级数的和函数 $s(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式.

解 在连续点处：$s(x)=f(x)$;

在间断点处： $s(x)=\dfrac{1}{2}\left[f(x^+)+f(x^-)\right]$,

故 $s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}(x+\pi)^2, & -\pi < x < 0;\\ \dfrac{1}{\pi}x^2, & 0 < x < \pi;\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0, x=\pm\pi.\end{cases}$

例27 设 $f(x)=\begin{cases}0, & 1\le |x|\le 4;\\ A, & |x|\le 1.\end{cases}$ 写出 $f(x)$

以8为周期的傅立叶级数的和函数 $s(x)$在$[-4,4]$

上的表达式 .

解

$$S(x)=\begin{cases}0, & 1<|x|\le 4;\\ A, & |x|<1;\\ \dfrac{A}{2}, & x=\pm 1.\end{cases}$$

例28　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和.

解　$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots\frac{n}{2^{n+1}}. \qquad (2)$$

(1) − (2)得

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}},$$

故　$s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=2.$

例29 (1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$; (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n!}$, 求级数的和 .

分析 分母含$n!$

联想公式:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}$$

解 (1)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+1+1$$

$$=\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}-1\Big)-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}+2=1$$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}$

$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}-1+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}-2=2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}-3.$

因为 $e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n},$

取 $x=1,$则 $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},$

故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}-3=2e-3.$

（3）$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(n+1)(n-1)}{n!}$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} + 1 = e + 1.$$

例30 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot 2^{\frac{n}{2}} x^{3n-1}$ 的和函数 $S(x)$.

解 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot 2^{\frac{n}{2}} x^{3n-1}=\sqrt{2}x^{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{2}x^{3}\right)^{n-1}$

其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{2}x^{3}\right)^{n-1}$

令 $y=\sqrt{2}x^{3}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1}=\left(\sum_{n=0}^{\infty} y^{n}\right)'=\left(\frac{1}{1-y}\right)' \quad (|y|<1)$$

$$=\left.\frac{1}{(1-y)^{2}}\right|_{y=\sqrt{2}x^{3}}=\frac{1}{\left(1-\sqrt{2}x^{3}\right)^{2}}$$

故 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 2^{\frac{n}{2}} x^{3n-1}$

$$=\sqrt{2}x^2\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{2}x^3\right)^{n-1}=\frac{\sqrt{2}x^2}{\left(1-\sqrt{2}x^3\right)^2}$$

即：当 $\left|\sqrt{2}x^3\right|<1$，$|x|<\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ 时，

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 2^{\frac{n}{2}} x^{3n-1}$ 的和函数为

$$s(x)=\sqrt{2}x^2\Big/\left(1-\sqrt{2}x^3\right)^2.$$

例31 求 $1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\cdots$

$+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}+\cdots$ 的和 s.

解 (1) 令 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, 则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$(|x|<1)$$

故 $s(x)=\arctan x \qquad (\because\ s(0)=0)$

即 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\arctan x$ （*）

（2）所求和 $s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$

$$=\sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{3}^{2n-1}}$$

在（*）式中令 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$，则所求和

$$s=\sqrt{3}s\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

例32 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$ 的和 s.

解(方法1) $s=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$=3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

由于 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (-\infty < x < +\infty)$,

令 $x = 1$, 得 $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$,

所以, 所求和 $s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} = 3e$

(方法2) 令 $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} (-\infty < x < +\infty)$,

则 $s(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1})' = (xe^{x^2})' = \left(1 + 2x^2\right) e^{x^2}$,

即 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$

$$=\left(1+2x^2\right)e^{x^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

令 $x=1$ 得：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}=3e.$

令 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1} \quad (-\infty < x < +\infty)$

$$s(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}=xe^{x^2},$$

即 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=xe^{x^2}$$

于是 $$\left(xe^{x^2}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}.$$

取 $x=1$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}=\left(xe^{x^2}\right)'\Big|_{x=1}$$

$$=\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\Big|_{x=1}=3e$$

例33 利用级数证明 :

当 $n \to \infty$ 时, $\dfrac{1}{n^n}$ 是比 $\dfrac{1}{n!}$ 更高阶的无穷小 .

证 考虑级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \Big/ \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (*)$

因为 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n!}{n^n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(1+n)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

故级数(*)收敛，从而有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^n}}{\dfrac{1}{n!}}=0$$

当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n^n}$ 是 $\dfrac{1}{n!}$ 的高阶无穷小 .