第五节

极限的运算法则

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

（一）极限的四则运算法则

定理 1.5 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$， 则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=AB$

(3) 若 $B\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B}$$

注　对于数列极限及 $x\to\infty$ 时函数极限的四则运算法则，有相应的结论．例如，对于数列极限，有以下结论:

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = AB$

(3) 当 $B\neq 0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$

数列是一种特殊的函数，故此结论可由定理1.5直接得出．

推论 **(极限运算的线性性质)**

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, λ 和 μ 是常数， 则

$$\lim_{x\to x_0}[\lambda f(x)\pm\mu g(x)]=\lambda A\pm\mu B$$

$$=\lambda\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\mu\lim_{x\to x_0} g(x)$$

以上运算法则对有限个函数成立. 于是有

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim_{x\to x_0} f(x)]^n$$

—— 幂的极限等于极限的幂

一般地，设有分式函数

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

其中$P(x),Q(x)$都是多项式，若$Q(x_0)\neq 0$，则

结论： $$\lim_{x\to x_0} R(x)=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=R(x_0)$$

注 若 $Q(x_0)=0$，不能直接用商的运算法则 .

结论:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当}\, n=m\\ 0\;, & \text{当}\, n>m\\ \infty, & \text{当}\, n<m\end{cases}$$

$(a_0b_0\neq 0, m, n$ 为非负常数$)$

对于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 的极限，可以先给分子、分母同除以分母中自变量的最高次幂（抓大头），然后再求极限.

（二） 复合函数的极限运算法则

定理1.6 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，

$u=\varphi(x)\neq a$，又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A$$

注 1° 定理1.6中的条件: $\varphi(x)\neq a, x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$

不可少. 否则，定理1.6 的结论不一定成立.

2° 定理1.6的其他形式

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$), 且 $\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$,

则有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A.$

由定理1.6知, 在求复合函数极限时, 可以作变量代换:

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]\overset{\varphi(x)=u}{=\!=\!=}\lim_{u\to a}f(u)$$

且代换是双向的,即 $\lim\limits_{u\to a}f(u)\overset{u=\varphi(x)}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)].$

二、 典型例题

例1 求 $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+x-5)$.

极限运算的线性性质

解 $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+x-5) = 2\lim\limits_{x\to 2}(x^2)+\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}5$

幂的极限等于极限的幂

$= 2(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+2-5$

$= 2\cdot 2^2-3=5$

结论: $\lim\limits_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)$
$= a_0x_0^{\;n}+a_1x_0^{\;n-1}+\cdots+a_n$

例2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$=(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-3\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$=2^2-3\cdot 2+5\ =3\neq 0,$

商的极限等于极限的商

$$\therefore\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}.$$

例3 求 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$. $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

解 $\because \lim\limits_{x \to 1}(x^2+2x-3)=0$, 商的极限法则不能直接用

又 $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)=0$

称 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$ 为 $\dfrac{0}{0}$型极限.

由极限定义

$x \to 1$, $x \neq 1$,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{x-1}}{(x+3)\cancel{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4}.$$

约去零因子法

例4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$. $\quad(\dfrac{\infty}{\infty}$ 型$)$

分析 $\quad x\to\infty$时, 分子, 分母都趋于无穷.

可以先用 x^3 同时去除分子和分母, 然后再取极限.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}$ “抓大头”

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3})}=\frac{2}{7}.$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$. $(\infty-\infty$型$)$

分析 $\infty-\infty$ 型，先通分，再用极限法则.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x^2-2x+4)-12}{x^3+8}$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^3+8}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -2}\frac{(x-4)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x-4}{x^2-2x+4}=-\frac{1}{2}.$$

例6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots\frac{n^2}{n^3}\right)$.

无穷多项和的极限

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n\cdot(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{6}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$

$=\frac{1}{3}$.

公式求和变为有限项

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例7 求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$.

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u\to a} f(u) = A \quad ①$$

解 令 $u=\varphi(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ $\quad f(u)=\sqrt{u}$

于是 $\lim\limits_{x\to 3} u = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \dfrac{1}{6}$

从而 原式 $= \lim\limits_{u\to \frac{1}{6}} f(u) = \lim\limits_{u\to \frac{1}{6}} \sqrt{u} = \sqrt{\dfrac{1}{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

从左向右
用①式

三、同步练习

1.在自变量的某个极限过程中，若 $\lim f(x)$存在，$\lim g(x)$不存在，那么

(1) $\lim[f(x)+g(x)]$是否一定不存在？为什么？

(2)若 $\lim f(x)=A\neq 0$, $\lim f(x)g(x)$是否一定不存在？

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right]=?$

3. 求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-[A+B(x-1)]}{x-1}=0,$

试求常数 A，B的值.

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{n^4-3n^2+1}$.

6. 设 $f(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}=2,$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3，求 f(x).$$

7. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-(\alpha x+\beta)\right)=0$ 试确定常数 α,β.

8. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

9. 求 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

四、同步练习解答

1.在自变量的某个极限过程中，若 $\lim f(x)$存在，$\lim g(x)$ 不存在，那么

(1) $\lim[f(x)+g(x)]$是否一定不存在？为什么？

答： 一定不存在.

假设 $\lim[f(x)+g(x)]$ 存在，$\because \lim f(x)$ 存在

由极限运算法则可知:

$$\lim g(x) = \lim\{[f(x)+g(x)] - f(x)\}$$

必存在，这与已知矛盾，故假设错误.

1.在自变量的某个极限过程中，若 $\lim f(x)$ 存在，$\lim g(x)$不存在，那么

(2)若 $\lim f(x) = A \neq 0$，$\lim f(x)g(x)$是否一定不存在？

答：一定不存在.（可用反证法证明）

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right]=?$

解 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{2}.$

3．求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$． $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

解 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{4-x}}{\cancel{(x-4)}(2+\sqrt{x})}$$

先有理化

$$=-\lim_{x\to 4}\frac{1}{2+\sqrt{x}}$$

再约去无穷小

$$=-\frac{1}{4}.$$

4．已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-[A+B(x-1)]}{x-1}=0,$

试求常数 A，B的值.

解 $\because \lim\limits_{x\to1}\{\sqrt{x^2+3}-[A+B(x-1)]\}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-[A+B(x-1)]}{x-1}\cdot(x-1)=0\cdot0=0$$

而 $\lim\limits_{x\to1}\{\sqrt{x^2+3}-[A+B(x-1)]\}=2-(A+B\cdot0)$

$\therefore \quad 2-(A+B\cdot0)=0,$ 从而 $A=2.$

于是 $0=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-[A+B(x-1)]}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-[2+B(x-1)]}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}-B\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x^2+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}-B\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}-B\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}-B\right]=\frac{1}{2}-B,\qquad \therefore\ B=\frac{1}{2}.$$

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{n^4-3n^2+1}$.　　($\dfrac{\infty}{\infty}$型)

解　$n\to\infty$时，分子，分母都趋于无穷.

可以先用 n^4 同时去除分子和分母，然后再取极限.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^4-3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{1-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^4})}=0.$$

6. 设 $f(x)$ 是多项式，且

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}=2$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，求 $f(x)$.

解 根据前一极限式可令

$$f(x)=2x^3+2x^2+ax+b$$

再利用后一极限式，得

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(2x^2+2x+a+\frac{b}{x})=\lim_{x\to 0}(a+\frac{b}{x})$$

可见 $a=3,\ b=0$

故 $f(x)=2x^3+2x^2+3x$

7. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-(\alpha x+\beta)\right)=0$ $(\infty-\infty\text{型})$

试确定常数 $\alpha,\beta.$

解 $f(x)=\left(\frac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta\right)$

$$=\frac{(1-\alpha)x^2-(\alpha+\beta)x+(1-\beta)}{x+1}$$

$\because \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

$\therefore$ 分子的次数必比分母的次数低

故 $1-\alpha=0,\alpha+\beta=0$ 即 $\alpha=1,\quad \beta=-1.$

8. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$

无穷多个因子的积的极限

解 原式 $=$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

变为有限项再求极限

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

9. 求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$. ($\dfrac{0}{0}$型)

分子分母同乘以各自的有理化因式

解 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})}{(3-\sqrt{2x+1})(3+\sqrt{2x+1})(2+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(8-2x)(2+\sqrt{x})}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 4}\frac{3+\sqrt{2x+1}}{2+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{3}{4}.$$

约去无穷小