第三节　格林公式

习题　10-3

1. 计算下列曲线积分，并验证格林公式的正确性.

(1) $\oint_L (1-x^2)y\mathrm{d}x + x(1+y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 是沿圆周 $x^2+y^2=R^2$，逆时针方向;

(2) $\oint_L (x^3-3y)\mathrm{d}x + (x+\sin y)\mathrm{d}y$，其中 L 是以点 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,2)$ 为顶点的三角形区域的正向边界.

解　(1)　$L:\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t, \end{cases}$ t 从 0 变到 2π.

$$\oint_L (1-x^2)y\mathrm{d}x + x(1+y^2)\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}(2R^4\sin^2 t\cos^2 t + R^2\cos^2 t - R^2\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(R^4\frac{1-\cos 4t}{4} + R^2\frac{1+\cos 2t}{2} - R^2\frac{1-\cos 2t}{2})\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}R^4.$$

若用格林公式计算此曲线积分，记 L 所围的区域为 D，则有

$$\oint_L (1-x^2)y\mathrm{d}x + x(1+y^2)\mathrm{d}y = \iint_D [1+y^2-(1-x^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \rho^3\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}R^4,$$

显然格林公式是正确的.

(2)　如图 10.15 所示，$L=OA+AB+BO$，其中

OA: $y=0$,　x 从 0 变动到1,

AB: $y=-2x+2$,　x 从1变动到 0,

BO: $x=0$,　y 从 2 变动到 0.

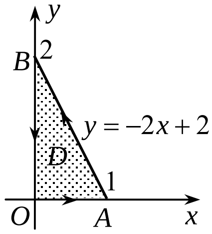

图 10.15

$$\oint_L (x^3-3y)\mathrm{d}x + (x+\sin y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{OA}(x^3-3y)\mathrm{d}x + (x+\sin y)\mathrm{d}y + \int_{AB}(x^3-3y)\mathrm{d}x + (x+\sin y)\mathrm{d}y$$

$$+\int_{BO}(x^3-3y)\mathrm{d}x + (x+\sin y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x + \int_1^0 [(x^3-3(-2x+2)+(x+\sin(-2x+2)(-2)]\mathrm{d}x + \int_2^0 \sin y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}+\cos 2 - 1 - \int_0^1 (x^3+4x-6)\mathrm{d}x + 2\int_0^1 \sin(2-2x)\mathrm{d}x = 4.$$

若用格林公式计算此曲线积分，则有

$$\oint_L (x^3-3y)\mathrm{d}x+(x+\sin y)\mathrm{d}y=\iint_D [1-(-3)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\times\frac{1}{2}\times 1\times 2=4,$$

显然格林公式是正确的. 且本题采用格林公式计算要简单些.

2. 利用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$，其中 L 是由方程 $|x|+|y|=1$ 所确定的正向闭路;

(2) $\oint_L (x^2+y)\mathrm{d}x-(x-y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的正向闭路;

(3) $\oint_L \mathrm{e}^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x-(y-\sin y)\mathrm{d}y]$，其中 L 是域

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \sin x\}$$

的正向边界;

(4) $\int_L (\mathrm{e}^x\sin y+8y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-7x)\mathrm{d}y$，其中 L 是从点 $O(0,0)$ 沿上半圆周 $x^2+y^2=6x\ (y\ge 0)$ 到点 $A(6,0)$ 的弧段;

(5) $\int_L (2x-4-y)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y$，其中 L 为自点 $O(0,0)$ 到点 $A(3,2)$，再到点 $B(4,0)$ 的折线段.

解 (1) 如图 10.16 所示，记 L 所围的区域为 D，则有

$$\oint_L (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y=\iint_D (1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

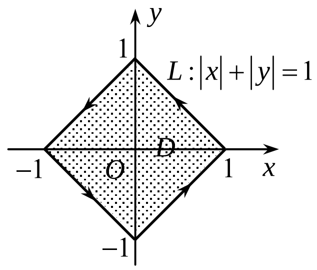

图 10.16

(2) $$\oint_L (x^2+y)\mathrm{d}x-(x-y^2)\mathrm{d}y=\iint_D (-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi ab.$$

(3) L 如图 10.17 所示，则有

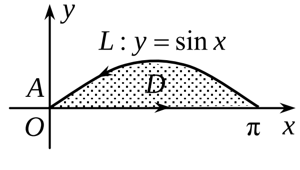

图 10.17

$$\oint_L \mathrm{e}^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x-(y-\sin y)\mathrm{d}y]$$
$$=\iint_D [\mathrm{e}^x(-y+\sin y)-\mathrm{e}^x\sin y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D -y\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_0^{\sin x} y\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\mathrm{e}^x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{e}^x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\mathrm{e}^x(\cos 2x+2\sin 2x)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi}-1).$$

(4)　L 如图 10.18 所示，L 不封闭，添加有向线段 AO：$y=0$，记 L 及 AO 所围的区域为 D (L 及 AO 构成 D 的负向边界)，则有

$$\int_L(\mathrm{e}^x\sin y+8y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-7x)\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{L+AO}(\mathrm{e}^x\sin y+8y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-7x)\mathrm{d}y$$

$$-\int_{AO}(\mathrm{e}^x\sin y+8y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-7x)\mathrm{d}y$$

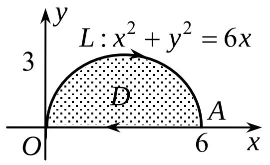

图 10.18

$$=-\iint_D[(\mathrm{e}^x\cos y)-7-(\mathrm{e}^x\cos y+8)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0=15\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{135}{2}\pi.$$

(5)　L 如图 10.19 所示，L 不封闭，添加有向线段 BO，记 L 及 BO 所围的区域为 D (L 及 BO 构成 D 的负向边界)，则有

$$\int_L(2x-4-y)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{L+BO}(2x-4-y)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y$$

$$-\int_{BO}(2x-4-y)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y$$

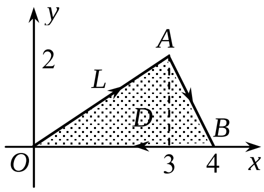

图 10.19

$$=-\iint_D(3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_4^0(2x-4)\mathrm{d}x=-4\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4(2x-4)\mathrm{d}x=-16.$$

3. 计算曲线积分 $\oint_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为

(1)　圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的正向;

(2)　椭圆 $x^2+4y^2=4$ 的正向.

解　(1)　L 为封闭曲线，如图 10.20 所示. 记 L 所围的区域为 D，则 D 不包含坐标原点，可以使用格林公式. 令

$$P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2},\ Q(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2},$$

易知 $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，应用格林公式，有

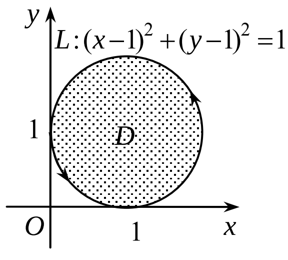

图 10.20

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

(2) L 为封闭曲线, 如图 10.21 所示, 所围区域包含坐标原点, 不能直接使用格林公式. 作圆周

$$l:\ x^2+y^2=r^2,$$

其中圆的半径 r 充分小, 使得圆所围的区域完全包含在 L 所围的区域中, 且取顺时针方向. 记 L 和 l 所围的区域为 D_1, 则有

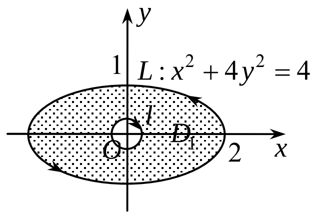

图 10.21

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \oint_{L+l} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} - \oint_l \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$= \iint_{D_1} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{r^2}\int_{2\pi}^{0} \frac{r\sin t(-r\sin t) - r\cos t\cdot r\cos t}{r^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{2\pi}^{0}\mathrm{d}t = -2\pi.$$

4. 利用第二类曲线积分, 求下列曲线所围成的图形的面积:

(1) 曲线 $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$;

(2) 双纽线 $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$;

(3) 椭圆 $9x^2+16y^2=144$.

解 (1) 如图 10.22 所示, 星形线

$$L:\ \begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t \end{cases}\ (0\le t\le 2\pi)$$

所围成的图形的面积为

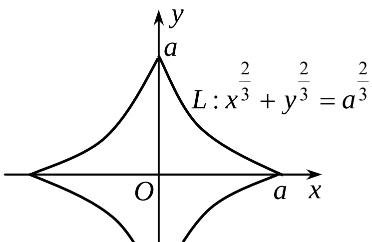

图 10.22

$$A = \frac{1}{2}\int_L -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi.$$

(2) 双纽线 L 如图 10.23 所示, 其右半部分的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta, \\ y = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta \end{cases} \quad (-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}).$$

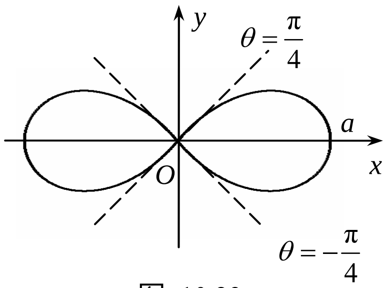

图 10.23

双纽线所围成的图形的面积为

$$A = \frac{1}{2}\int_L -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta \mathrm{d}\theta = a^2.$$

(3) 椭圆 L: $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 3\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 所围成的图形的面积为

$$A = \frac{1}{2}\int_L -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [-3\sin t \cdot (-4\sin t) + 4\cos t \cdot 3\cos t]\mathrm{d}t = 12\pi.$$

5. 证明下列曲线积分在整个 xOy 平面内与路径无关，并计算积分值:

(1) $\int_{(0,1)}^{(1,3)} (x^2 + 2xy^2)\mathrm{d}x - (y^3 - 2x^2 y)\mathrm{d}y$;

(2) $\int_{(0,0)}^{(2,2)} (1+x\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}x + (x^2\mathrm{e}^{2y} - y)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_{(0,0)}^{(a,b)} \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{1 + (x+y)^2}$.

解 (1) 令 $P(x,y) = x^2 + 2xy^2$，$Q(x,y) = -y^3 + 2x^2 y$，易知

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 4xy,$$

因此曲线积分在整个 xOy 平面内与路径无关．又

$$\because \quad (x^2 + 2xy^2)\mathrm{d}x - (y^3 - 2x^2 y)\mathrm{d}y = x^2\mathrm{d}x - y^4\mathrm{d}y + 2xy^2\mathrm{d}x + 2x^2 y\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{4} + x^2 y^2),$$

$$\therefore \quad \int_{(0,1)}^{(1,3)} (x^2 + 2xy^2)\mathrm{d}x - (y^3 - 2x^2 y)\mathrm{d}y = (\frac{x^3}{3} - \frac{y^4}{4} + x^2 y^2)\Big|_{(0,1)}^{(1,3)} = -\frac{32}{3}.$$

(2) 令 $P(x,y) = 1 + x\mathrm{e}^{2y}$，$Q(x,y) = x^2\mathrm{e}^{2y} - y$，易知

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2x\mathrm{e}^{2y},$$

因此曲线积分在整个 xOy 平面内与路径无关．又

$$\because \quad (1+x\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}x + (x^2\mathrm{e}^{2y} - y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}x - y\mathrm{d}y + x\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}x + x^2\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2y}),$$

$$\therefore \quad \int_{(0,0)}^{(2,2)} (1+x\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}x + (x^2\mathrm{e}^{2y} - y)\mathrm{d}y = (x - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2y})\Big|_{(0,1)}^{(2,2)} = 2\mathrm{e}^4.$$

(3)　令 $P(x,y)=\dfrac{1}{1+(x+y)^2}=Q(x,y)$，易知

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-\frac{2(x+y)}{[1+(x+y)^2]^2},$$

因此曲线积分在整个 xOy 平面内与路径无关．又

$$\because\quad \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{1+(x+y)^2}=\frac{\mathrm{d}(x+y)}{1+(x+y)^2}=\mathrm{d}\arctan(x+y),$$

$$\therefore\quad \int_{(0,0)}^{(2,2)}(1+x\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}x+(x^2\mathrm{e}^{2y}-y)\mathrm{d}y=\arctan(x+y)\Big|_{(0,0)}^{(a,b)}=\arctan(a+b).$$

6.　验证下列 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求一个这样的 $u(x,y)$：

(1)　$(6xy+2y^2)\mathrm{d}x+(3x^2+4xy)\mathrm{d}y$;

(2)　$(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$;

(3)　$\dfrac{2x(1-\mathrm{e}^y)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+\dfrac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}\mathrm{d}y.$

解　(1)　令 $P(x,y)=6xy+2y^2$，$Q(x,y)=3x^2+4xy$，易知

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=6x+4y,$$

因此 $(6xy+2y^2)\mathrm{d}x+(3x^2+4xy)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分．又因为

$$(6xy+2y^2)\mathrm{d}x+(3x^2+4xy)\mathrm{d}y=(6xy\mathrm{d}x+3x^2\mathrm{d}y)+(2y^2\mathrm{d}x+4xy\mathrm{d}y)=\mathrm{d}(3x^2y+2xy^2),$$

所以可取 $u(x,y)=3x^2y+2xy^2$.

(2)　令 $P(x,y)=2xy^3-y^2\cos x$，$Q(x,y)=1-2y\sin x+3x^2y^2$，易知

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=6xy^2-2y\cos x,$$

因此 $(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分．又因为

$$(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{d}y - (y^2\cos x\mathrm{d}x + 2y\sin x\mathrm{d}y) + (2xy^3\mathrm{d}x + 3x^2y^2\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(y - y^2\sin x + x^2y^3),$$

所以可取 $u(x,y) = y - y^2\sin x + x^2y^3$.

(3) 令 $P(x,y) = \dfrac{2x(1-\mathrm{e}^y)}{(1+x^2)^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}$, 易知

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -\frac{2x\mathrm{e}^y}{(1+x^2)^2},$$

因此 $\dfrac{2x(1-\mathrm{e}^y)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + \dfrac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 又因为

$$\frac{2x(1-\mathrm{e}^y)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}^y(1+x^2)\mathrm{d}y - (\mathrm{e}^y - 1)\cdot 2x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{e}^y - 1}{1+x^2}\right),$$

所以可取 $u(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^y - 1}{1+x^2}$.

7. 计算曲线积分:

$$I = \int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

其中为 L 曲线 $y = 2(1-x^2)$ 上从点 $(-1,0)$ 到点 $(1,0)$ 的一段弧.

解 曲线 L 如图 10.24 所示. 令

$$P(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

易知

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

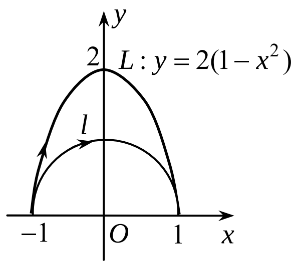

图 10.24

因此 $\dfrac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在不包括坐标原点的单连通区域内与路径无关.

作半圆周 l: $x^2+y^2=1\ (y\geq 0)$, 从点 $(-1,0)$ 到 $(1,0)$ (见图 10.24), 即

$$l: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}\quad t \text{ 从 } \pi \text{ 变到 } 0.$$

则曲线积分在 L 和 l 所围的区域内与路径无关, 从而有

$$I = \int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_l (x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_\pi^0 [(\cos t - \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t)\cos t]\mathrm{d}t = \int_\pi^0 \mathrm{d}t = -\pi.$$