第三章总习题

1. 填空题

(1) 方程 $x^3+\sqrt{2}x^2+2x+1=0$ 在实数范围内实根的个数为 $\underline{\ 1\ }$;

(2) 平面曲线 $y=x\ln(1+x)$ 在区间 $\underline{\ (-1,+\infty)\ }$ 是凹的.

解 (1) 令 $f(x)=x^3+\sqrt{2}x^2+2x+1$, 则有

$$f(-1)=\sqrt{2}-2<0,\ f(0)=1>0,\ f'(x)=3x^2+2\sqrt{2}x+2>0,$$

由零点定理及函数的单调性可知, 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有唯一实根 $\xi\in(-1,0)$, 即原方程实根的个数为 1.

(2) 函数 $y=x\ln(1+x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$. $y'=\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$, $y''=\dfrac{2+x}{(1+x)^2}$. 易知当 $x\in(-1,+\infty)$ 时, $y''>0$, 因此曲线 $y=x\ln(1+x)$ 在整个定义域 $(-1,+\infty)$ 上是凹的.

2. 请在下列题中选择四个结论中正确的一个:

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 $f''(x)>0$, 且 $f'(0)=0$, 则 $f'(1),f'(0)$, $f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是(B).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$; (B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$;

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$; (D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

(2) 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极大值, 则(D) .

(A) $f'(x_0)=0$; (B) $f''(x_0)<0$;

(C) $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$; (D) $f'(x_0)=0$ 或不存在.

(3) 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 且 $f(x)$ 满足等式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$, 又 $f'(0)=0$, 则(C).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值; (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;

(C) 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点;

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解 (1) 对函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 应用拉氏中值定理, 可得

$$f(1)-f(0)=f'(\xi),\ \xi\in(0,1).$$

因为 $f''(x)>0$, 故 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加, 所以当 $x\in[0,1]$ 时, $f'(1)>f'(\xi)=f(1)-f(0)>f'(0)$, 即应选 B.

(2) 根据函数取得极值的必要条件可知，应选 D.

(3) 已知等式两端关于 x 求导一次，可得

$$f'''(x)+2f'(x)f''(x)=1.$$

在已知等式及上式中令 x=0，可得 $f''(0)=0$，$f'''(0)=1$，即

$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=1>0,$$

由极限的保号性知，$f''(x)$ 在 $x=0$ 两侧邻近处异号，所以 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 又根据泰勒公式，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f(0)+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,$$

其中 ξ 介于 x 与 0 之间. 由极值的定义知，$f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，故应选 C.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，试证至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=1$.

解 令 $F(x)=f(x)-x$，易知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$$F(0)=f(0)-0=0,\quad F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,\quad F(1)=f(1)-1=-1<0.$$

由零点定理知，在 $(\frac{1}{2},1)$ 内至少存在一点 η，使得 $F(\eta)=0$. 对 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上用一次罗尔中值定理，可知至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)$，使

$$F'(\xi)=f'(\xi)-1=0,$$

即 $f'(\xi)=1$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{b-a}[b^n f(b)-a^n f(a)]=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi).$$

解 令 $F(x)=x^n f(x)$，依题可知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由拉氏中值定理，可知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{(b-a)}=F'(\xi)=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi),$$

故命题成立.

5. 设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试利用柯西中值定理证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

解 令 $F(x)=\ln x$，依题可知 $f(x)$，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且当 $x\in(a,b)$ 时，$F'(x)=\frac{1}{x}>0$，由柯西中值定理，可知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}=\xi f'(\xi),$$

故命题成立.

6. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$; (2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}})\ (a>0,b>0)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$; (4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arc\,cot} x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}$, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\ln x-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}})=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}\ln a(-\frac{1}{x^2})-b^{\frac{1}{x}}\ln b(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to +\infty}(a^{\frac{1}{x}}\ln a-b^{\frac{1}{x}}\ln b)=\ln\frac{a}{b}.$$

(3) $\because$ $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\qquad(\frac{0}{0})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{2}{x}(-\frac{2}{x^2})-\sin\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2})}{(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cos\frac{2}{x}-\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}}=2,$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}^2$.

(4) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arc\,cot} x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{(x+1)x}=1.$$

(5) $$\because\quad \lim_{x\to\infty}nx\ln(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots a_n^{\frac{1}{x}}}{n})=n\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n}{\frac{1}{x}}\qquad(\frac{0}{0})$$

$$=n\lim_{x\to\infty}\frac{(a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n)(-\frac{1}{x^2})}{(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots a_n^{\frac{1}{x}})(-\frac{1}{x^2})}$$

$$=n\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}=\ln(a_1a_2\cdots a_n),$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}=a_1a_2\cdots a_n.$$

7. 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$ 有几个实根?

解 令 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且为偶函数, 只需考虑它在 $[0,+\infty)$ 上的零点情况.

当 $x>0$ 时, $f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\sin x.$

显然 $f(0)=-1<0$, $f(1)=2-\cos 1>0$, 且当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)>0$, 因此函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根. 当 $x\geq 1$ 时, $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}>1$, 而 $|\cos x|\leq 1$, 因此当 $x\geq 1$ 时, $f(x)>0$, 即 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上无实根.

综上所述, $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有且仅有一个实根. 因此原方程在 $(-\infty,+\infty)$ 上有且仅有两个实根.

8. 试讨论方程 $x\mathrm{e}^{-x}=a(a>0)$ 有几个实根.

解 令 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}-a$, 则有

$$f'(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x).$$

令 $f'(x)=0$, 可得唯一驻点为 $x=1$, 且当 $x\in(-\infty,1)$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)<0$, 因此 $f(1)=\mathrm{e}^{-1}-a$ 为函数的极大值.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a$, 所以 $f(1)=\mathrm{e}^{-1}-a$ 也是函数的最大值(即点 $(1,\mathrm{e}^{-1}-a)$ 为曲线 $f(x)$ 的最高点), 且曲线有水平渐近线 $y=-a$. 因此

当 $f(1)=\mathrm{e}^{-1}-a<0$, 即 $a>\mathrm{e}^{-1}$ 时, 方程 $x\mathrm{e}^{-x}=a(a>0)$ 无实根;

当 $f(1)=\mathrm{e}^{-1}-a=0$, 即 $a=\mathrm{e}^{-1}$ 时, 方程 $x\mathrm{e}^{-x}=a(a>0)$ 有且仅有一个实根;

当 $f(1)=\mathrm{e}^{-1}-a>0$, 即 $0<a<\mathrm{e}^{-1}$ 时, 方程 $x\mathrm{e}^{-x}=a(a>0)$ 有两个实根.

9. 试问 a 为何值时, 函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值? 它是极大值还是极小值? 并求此值.

解 若函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值, 则应有 $f'(\dfrac{\pi}{3})=(a\cos x+\cos 3x)\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=0$, 因此 $a=2$.

又 $f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$, $f''(\dfrac{\pi}{3})=-\sqrt{3}<0$, 故 $f(\dfrac{\pi}{3})$ 是极大值, 此值为 $\sqrt{3}$.

10. 单调函数的导数是否必为单调函数? 研究下面的例子:

$$f(x)=x+\sin x.$$

解 单调函数的导数未必为单调函数, 如函数 $f(x)=x+\sin x$, 由于 $f'(x)=1+\cos x\geq 0$, 因此函数 $f(x)$ 在整个定义域上是单调增加的. 但其导函数 $f'(x)$ 是周期函数, 显然不是单调函数.

11. 问 a,b 为何值时, 点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点?

解 若点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点, 则应有

$$\begin{cases} y\big|_{x=1}=(ax^3+bx^2)\big|_{x=1}=3, \\ y''\big|_{x=1}=(6ax+2b)\big|_{x=1}=0, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} a+b=3, \\ 6a+2b=0, \end{cases}$ 从而可得 $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{9}{2}$.

12. 求抛物线 $y=ax^2+bx+c$, 使它和 $y=\sin x$ 在点 $(\dfrac{\pi}{2},1)$ 处有共同的切线和相

等的曲率.

解 依题, 要使抛物线过点 $(\frac{\pi}{2},1)$, 则应有 $(ax^2+bx+c)\big|_{\frac{\pi}{2}}=1$, 要使抛物线和曲线 $y=\sin x$ 在点 $(\frac{\pi}{2},1)$ 处有共同的切线和相等的曲率, 则应有

$$\begin{cases}(2ax+b)\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{2}}, \\ \left.\dfrac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=\left.\dfrac{|-\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=\frac{\pi}{2}},\end{cases}$$

从而可得方程组 $\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{4}a+\dfrac{\pi}{2}b+c=1, \\ \pi a+b=0, \\ |2a|=1,\end{cases}$ 解得 $a=\pm\frac{1}{2}$, $b=\mp\frac{\pi}{2}$, $c=1\pm\frac{\pi^2}{8}$. 此时抛物线的方程为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{\pi}{2}x+1+\frac{\pi^2}{8}$ 或 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{\pi}{2}x+1-\frac{\pi^2}{8}$.

13. 试证明下列不等式:

(1) 当 $x<1$ 时, $e^x\le\frac{1}{1-x}$;

(2) 当 $x>1$ 时, $\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$.

解 (1) 作辅助函数 $f(x)=e^x(1-x)-1$, 考察 $x<1$ 时函数的性态.

令 $f'(x)=-xe^x=0$, 可得唯一驻点为 $x=0$, 且当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)<0$, 因此 $f(0)=0$ 为函数在 $(-\infty,1)$ 上的极大值, 也是最大值. 故当 $x<1$ 时, $f(x)<f(0)=0$, 即 $e^x(1-x)<1$, 因此 $e^x\le\frac{1}{1-x}$.

(2) 作辅助函数 $g(x)=x\ln x$, 考察 $x>1$ 时函数的性态.

易知当 $x>1$ 时, $g'(x)=\ln x+1>0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调增加的, 故当 $x>1$ 时, $g(1+x)>g(x)$, 即 $(x+1)\ln(x+1)>x\ln x$, 从而有

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}.$$

14. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导, 且 $f(a)>0$, $f'(a)<0$, 又当 $x>a$ 时 $f''(x)<0$, 证明方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内必有且仅有一个实根.

解 因为当 $x>a$ 时，$f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调减少，故当 $x>a$ 时，$f'(x)<f'(a)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调减少.

注意到 $f(a)>0$，根据零点定理，只需说明存在一点，使得该点处的函数值为负即可. 由图 3.11 可以看出，曲线 $f(x)$ 在点 $(a,f(a))$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标 b 处，应有 $f(b)<0$.

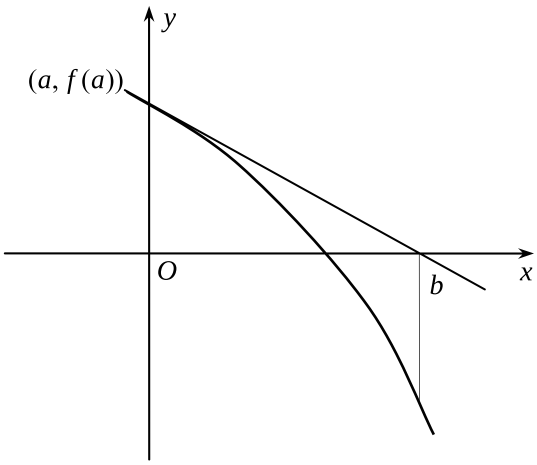

图 3.11

下面证明这一结论.

曲线在点 $(a,f(a))$ 处的切线方程为

$$y-f(a)=f'(a)(x-a).$$

上式中令 $y=0$，可得 $b=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

显然 $b>a$.

将函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处展成一阶泰勒公式，有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2,$$

其中 ξ 介于 x 与 a 之间. 在上式中令 $x=b$，则依题有

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(b-a)^2=f(a)+f'(a)(-\frac{f(a)}{f'(a)})+\frac{f''(\xi)}{2!}(b-a)^2$$

$$=\frac{f''(\xi)}{2!}(b-a)^2<0.$$

于是我们有 $f(a)>0$，$f(b)<0$，根据零点定理及函数的单调性可知，方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内必有且仅有一个实根.

15. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证明存在 ξ，$\eta\in(a,b)$，使得

$$\mathrm{e}^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1.$$

解 令 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，依题可知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由拉氏中值定理，可知至少存在一点 $\eta\in(a,b)$，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{(b-a)}=F'(\xi),$$

即
$$\frac{\mathrm{e}^b f(b)-\mathrm{e}^a f(a)}{b-a}=\frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}=\mathrm{e}^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)].$$

再对函数 $g(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $[a,b]$ 上应用一次拉氏中值定理，可知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{e^b - e^a}{b-a} = e^{\xi}.$$

以上两式相除，便得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.