第六节

函数的微分

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

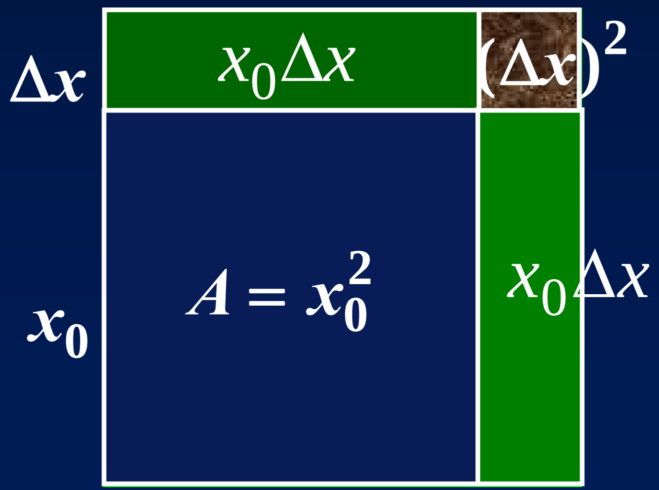
一、主要内容

（一）微分的概念

引例: 一块正方形金属薄片受温度变化的影响, 其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$, 问此薄片面积改变了多少?

设薄片边长为 x, 面积为 A, 则 $A=x^2$, 当 x 在 x_0 取得增量 Δx 时, 面积的增量为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$$



$$=\underbrace{2x_0\Delta x}+\underbrace{(\Delta x)^2}$$

关于Δx的线性函数

$\Delta x\to 0$时为Δx的高阶无穷小

故 $\Delta A\approx \underline{2x_0\Delta x}$

称为函数 x^2 在 x_0 的微分

再例如，求函数 $y=x^3$在点 x_0处当自变量的改变量为 Δx时，函数的改变量 Δy.

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3$$

$$=\underbrace{3x_0^2\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}_{(2)}.$$

当$|\Delta x|$很小时，(2)是Δx的高阶无穷小 $o(\Delta x)$,

$$\therefore \quad \Delta y \approx 3x_0^2 \cdot \Delta x \qquad (x_0 \neq 0)$$

问题： 是否所有函数的改变量都可以写成Δx的线性函数(改变量的主要部分)与比Δx高阶的无穷小两部分之和? 怎么称呼之？怎样求之？

定义2.2 若函数$y = f(x)$在点x_0的增量可表示为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

(A 为不依赖于 Δx 的常数)

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微, 而 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f$, 即

$$\mathrm{d}y = A\Delta x$$

定理2.4 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且当 $f(x)$ 在点 x_0 处可微时, 其微分一定是 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$.

注 1° $\mathrm{d}\,y$是自变量的改变量 Δx 的线性函数；

2° 当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，$\mathrm{d}\,y$与Δy是等价无穷小；

事实上，
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}$$
$$=\frac{1}{f'(x_0)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

即当 $\Delta x\to 0$ 时 Δy 与 $\mathrm{d}y$ 是等价无穷小，于是有

$$\Delta y=\mathrm{d}y+o(\mathrm{d}y),$$

这说明$\mathrm{d}y$是Δy的 主要部分；又由 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

知$\mathrm{d}y$是 Δx 的线性函数，因而称为线性主部.

当 $|\Delta x|$ 很小且 $f'(x_0) \neq 0$ 时,

$$\Delta y \approx \mathrm{d}\, y \quad （线性主部）.$$

3° 由定理2.4 知,

$$\mathrm{d}\, y\Big|_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

当函数$f(x)$在区间上可微时，$\mathrm{d}\, y = f'(x) \cdot \Delta x$

特别地，对于函数 $y = x$，有

$$\mathrm{d}\, x = \mathrm{d}\, y = (x)' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

即自变量x的增量Δx等于自变量的微分$\mathrm{d}\, x$:

$$\Delta x = \mathrm{d}\, x.$$

于是 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$

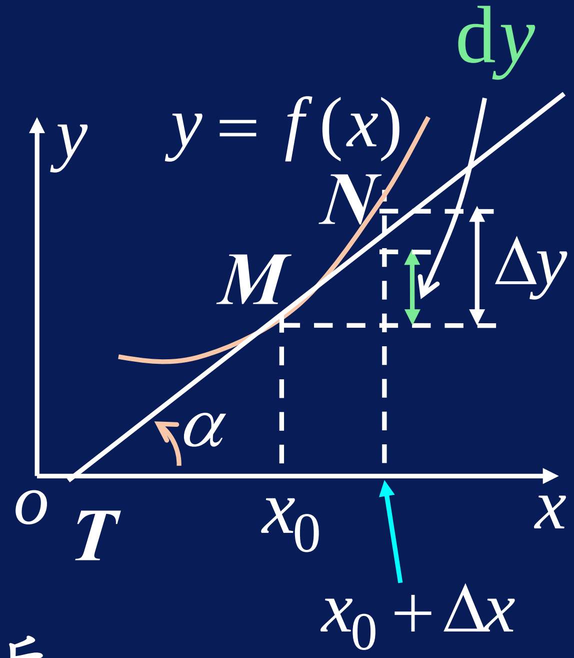
$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) = \mathrm{d}y \big/ \mathrm{d}x$$

即函数的微分 dy与自变量的微分 dx之商等于该函数的导数．导数也叫“微商”.

微分的几何意义 —— 切线纵坐标的增量

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x \quad = \tan\alpha \cdot \Delta x$$

当 Δx 很小时, $\Delta y \approx \mathrm{d}y$



当 Δy 是曲线的纵坐标增量时，$\mathrm{d}y$ 就是对应切线纵坐标的增量 .

当 $|\Delta x|$ 很小时，在点 M 的附近，

切线段 MP 可近似代替曲线段 MN .

（二） 微分的基本公式及运算法则

1. 基本初等函数的微分公式 (见 P120表)

$(1)\,\mathrm{d}(C)=0$ $\quad$ $(2)\,\mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$

$(3)\,\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\,\mathrm{d}x$ $\quad$ $(4)\,\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\,\mathrm{d}x$

$(5)\,\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\,\mathrm{d}x$ $\quad$ $(6)\,\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\,\mathrm{d}x$

$(7)\,\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\,\mathrm{d}x$ $\quad$ $(8)\,\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\,\mathrm{d}x$

$$(9)\ \mathrm{d}(a^x) = a^x \ln a \,\mathrm{d}x \qquad (10)\ \mathrm{d}(e^x) = e^x \mathrm{d}x$$

$$(11)\ \mathrm{d}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}\mathrm{d}x \qquad (12)\ \mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$(13)\ \mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \qquad (14)\ \mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$(15)\ \mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad (16)\ \mathrm{d}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

2. 函数的和、差、积、商的微分法则

设 $u(x)$, $v(x)$ 均可微，则

$$(1)\ \mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$$

$$(2)\ \mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$$ (C 为常数)

$$(3)\ \mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$$

$$(4)\ \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

3. 复合函数的微分法则

$y=f(u), u=\varphi(x)$ 分别可微， 则复合函数

$y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y = y'_x\,\mathrm{d}x = f'(u)\boxed{\varphi'(x)\mathrm{d}x} \longrightarrow \boxed{\mathrm{d}u}$$

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$$

结论： 无论 u 是自变量还是中间变量，函数

$y=f(u)$ 的微分形式总是

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$$

一阶微分形式的不变性

（三） 微分的应用

1. 微分在近似计算中的应用

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

当 $|\Delta x|$ 很小时, 得近似等式:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$\Big\downarrow \text{令 } x = x_0 + \Delta x$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

使用原则: 1) $f(x_0), f'(x_0)$ 好算; 2) x 与 x_0 靠近.

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

特别当 $x_0 = 0$, $|x|$ 很小时,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

常用近似公式: ($|x|$ 很小)

(1) $(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$

(2) $\sin x \approx x$

(3) $e^{x} \approx 1 + x$

(4) $\tan x \approx x$

(5) $\ln(1+x) \approx x$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. 微分在误差估计中的应用

某量的精确值为 A, 其近似值为 a,

$|A-a|$ 称为 a 的绝对误差

$\dfrac{|A-a|}{|a|}$ 称为 a 的相对误差

若 $|A-a| \le \delta_A$

δ_A 称为测量 A 的绝对误差限

$\dfrac{\delta_A}{|a|}$ 称为测量 A 的相对误差限

误差传递公式：

若直接测量某量得 x，已知测量误差限为 δ_x，按公式 $y=f(x)$ 计算 y 值时的误差

$$|\Delta y| \approx |\mathrm{d}y| = |f'(x)| \cdot |\Delta x|$$

$$\le |f'(x)| \cdot \delta_x$$

故 y 的绝对误差限约为 $\delta_y \approx |f'(x)| \cdot \delta_x$

相对误差限约为 $\dfrac{\delta_y}{|y|} \approx \left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \delta_x$

二、典型例题

例1　求函数 $y=\ln\left(1+e^{x^2}\right)$ 的微分。

解 (方法1) 用复合函数导数法则求 出导数 y' 后，再乘以 $\mathrm{d}x$

$$y'=\frac{1}{1+e^{x^2}}e^{x^2}\quad 2x,$$

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1+e^{x^2}}e^{x^2}2x\mathrm{d}x$$

(方法2)　利用微分形式不变性

$\because\ y=\ln u$，而 $u=1+\mathrm{e}^{v}$，$v=x^2$，

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{x^2})=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\cdot\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\cdot\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x\mathrm{d}x=\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}x.$$

例2 设 $y=\mathrm{e}^{-ax}\sin bx$, 求 $\mathrm{d}y$.

解 由积的微分法则及微分形式不变性,有

$$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-ax}\cdot\mathrm{d}(\sin bx)+\sin bx\cdot\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-ax})$$

$$=\mathrm{e}^{-ax}\cdot\cos bx\,\mathrm{d}(bx)+\sin bx\cdot\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}(-ax)$$

$$=\mathrm{e}^{-ax}\cdot\cos bx\cdot b\,\mathrm{d}x+\sin bx\cdot\mathrm{e}^{-ax}\cdot(-a)\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-ax}(b\cos bx-a\sin bx)\mathrm{d}x.$$

例3 设 $y\sin x-\cos(x-y)=0$, 求 $\mathrm{d}y$.

解 利用一阶微分形式不变性, 有

$$\mathrm{d}(y\sin x)-\mathrm{d}(\cos(x-y))=0$$

$$\sin x\,\mathrm{d}y+y\cos x\,\mathrm{d}x+\sin(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=0$$

由此解得

$$\mathrm{d}y=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}\mathrm{d}x$$

利用一阶微分形式不变性求隐函数的微分是好方法

例4 求 $\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{\mathrm{d}x^2}$.

方法1 由于 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 是偶函数，不妨设 $x>0$,

令 $t=x^2$, 则 $x=\sqrt{t}$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\cos\sqrt{t}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\sqrt{t}-\sin\sqrt{t}\,\dfrac{1}{2\sqrt{t}}}{t}$$

$$=\frac{\cos\sqrt{t}\cdot\sqrt{t}-\sin\sqrt{t}}{2t\sqrt{t}}=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$$

方法2 式子 $\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{\mathrm{d}x^2}$ 可看作两个函数：

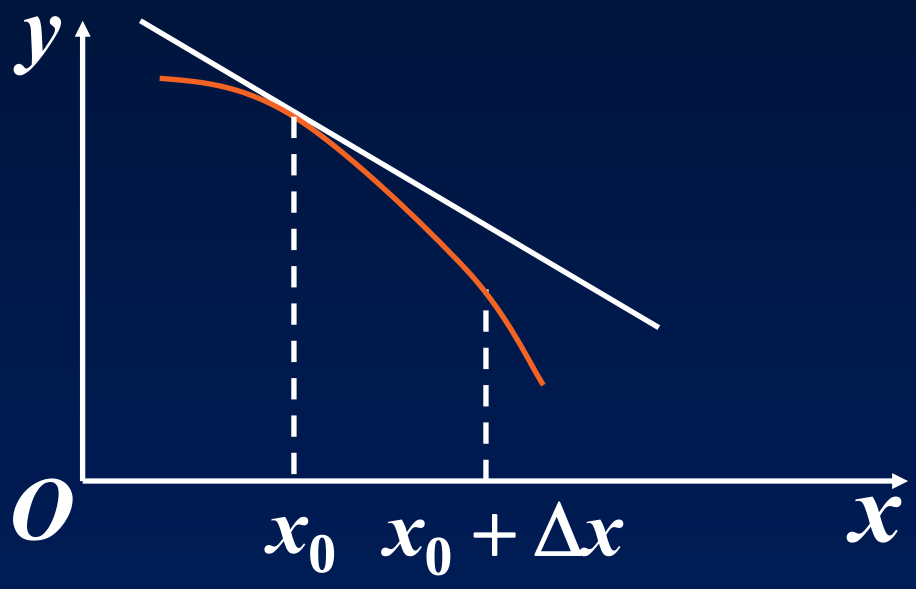
$\dfrac{\sin x}{x}$ 与 x^2 的微分之商，$\mathrm{d}x$ 可作为代数量进行计算，于是

$$\text{原式} = \frac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'\mathrm{d}x}{\left(x^2\right)'\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}$$

$$= \frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$$

三、同步练习

1. 设函数 $y = f(x)$ 的图形如下, 试在图中标出点 x_0 处的 $\mathrm{d}y, \Delta y$ 及 $\Delta y - \mathrm{d}y$, 并说明其正负 .



2. 在下列括号中填入适当的函数使等式成立:

(1) $\mathrm{d}(\qquad) = x\mathrm{d}x$

(2) $\mathrm{d}(\qquad) = \cos\omega t\,\mathrm{d}t$

(3) $\mathrm{d}(\sin x^2) = (\qquad)\mathrm{d}(\sqrt{x})$

3. 求 $\dfrac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}\sin x}$.

4. 设 $y = \mathrm{e}^{1-3x}\cos x$, 求 $\mathrm{d}y$.

5. 设 $y = \ln(x + \mathrm{e}^{x^2})$, 求 $\mathrm{d}y$.

6. 已知 $y = \arcsin(\sin^2 \dfrac{1}{x})$, 求$\mathrm{d}y$.

7. $y = y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - \sin 3x + 6y = 0$ 确定,

求 $\mathrm{d}\, y\big|_{x=0}$.

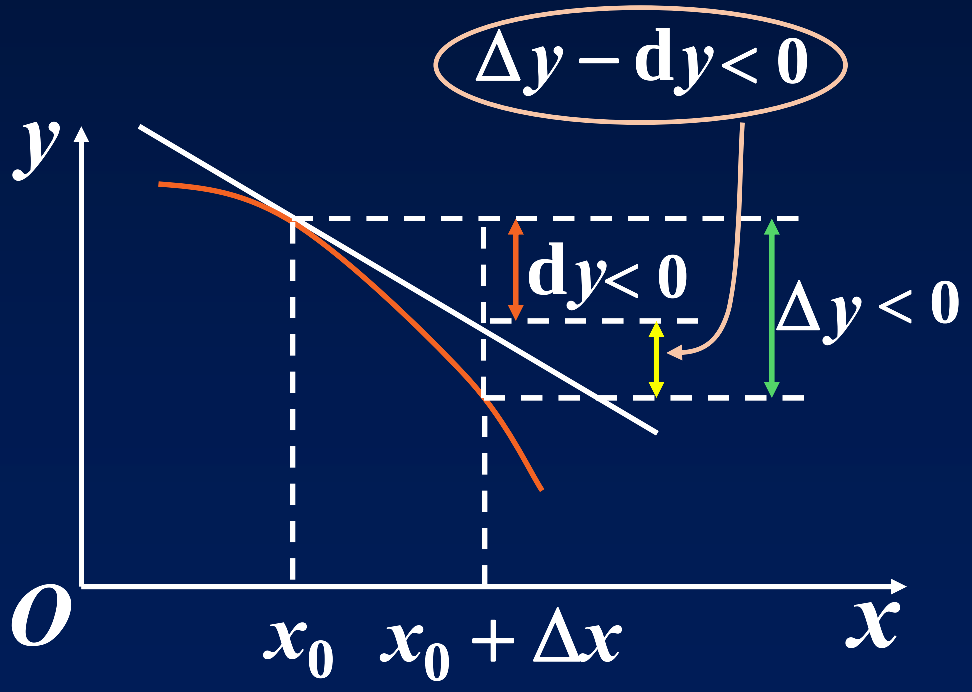
8. 已知 $xy = \mathrm{e}^{x+y}$, 求 $\mathrm{d}\, y$.

9. 设 $f(\arctan\dfrac{y}{x}) = xy$, $f(x)$可微, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}x}$

10. 计算 $\sqrt[5]{245}$ 的近似值 .

四、同步练习解答

1. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如下，试在图中标出点 x_0 处的 $\mathrm{d}y,\Delta y$ 及 $\Delta y-\mathrm{d}y$，并说明其正负．



2. 在下列括号中填入适当的函数使等式成立:

(1) $\mathrm{d}(\qquad) = x\mathrm{d}x$

(2) $\mathrm{d}(\qquad) = \cos\omega t\,\mathrm{d}t$

(3) $\mathrm{d}(\sin x^2) = (\qquad)\mathrm{d}(\sqrt{x})$

解 (1) $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2 + C) = x\mathrm{d}x$

(2) $\because \mathrm{d}(\sin\omega t) = \omega\cos\omega t\mathrm{d}t,$

$$\therefore \cos\omega t\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\mathrm{d}(\sin\omega t) = \mathrm{d}(\frac{1}{\omega}\sin\omega t);$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}(\frac{1}{\omega}\sin\omega t + C) = \cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

(3) $\because \dfrac{\mathrm{d}(\sin x^2)}{\mathrm{d}(\sqrt{x})} = \dfrac{2x\cos x^2 \mathrm{d}x}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x} = 4x\sqrt{x}\cos x^2,$

$\therefore \mathrm{d}(\sin x^2) = (\,4x\sqrt{x}\cos x^2\,)\mathrm{d}(\sqrt{x}).$

3. 求 $\dfrac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}\sin x}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}\sin x} = \dfrac{\sec^2 x \cdot \mathrm{d}x}{\cos x \cdot \mathrm{d}x} = \sec^3 x$

4. 设 $y=\mathrm{e}^{1-3x}\cos x$，求 $\mathrm{d}y$.

解 由积的微分法则，有

$$\mathrm{d}y=\cos x\cdot\mathrm{d}(\mathrm{e}^{1-3x})+\mathrm{e}^{1-3x}\cdot\mathrm{d}(\cos x)$$

而 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{1-3x})'=-3\mathrm{e}^{1-3x}\,\mathrm{d}x,$

$$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore\ \mathrm{d}y=\cos x\cdot(-3\mathrm{e}^{1-3x})\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{1-3x}\cdot(-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{1-3x}(3\cos x+\sin x)\mathrm{d}x.$$

5. 设 $y=\ln(x+e^{x^2})$, 求 dy.

解 $$dy = f'(x)dx.$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+e^{x^2}}\cdot(1+e^{x^2}\cdot 2x),$$

$$=\frac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}},$$

$$\therefore dy=\frac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx.$$

6. 已知 $y=\arcsin(\sin^2\frac{1}{x})$，求 $\mathrm{d}y$.

解 因为

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})$$

所以 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}\sin\dfrac{2}{x}\mathrm{d}x$

7. $y = y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - \sin 3x + 6y = 0$ 确定,

求 $\mathrm{d}\, y\big|_{x=0}$.

解　方程两边求微分, 得

$$3x^2 \mathrm{d}\, x + 3y^2 \mathrm{d}\, y - 3\cos 3x \mathrm{d}\, x + 6 \mathrm{d}\, y = 0$$

当 $x = 0$ 时 $y = 0$, 由上式得 $\mathrm{d}\, y\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2} \mathrm{d}\, x$

8. 已知 $xy=\mathrm{e}^{x+y}$，求 $\mathrm{d}\,y$.

解 方程两边求微分, 得

$$x\,\mathrm{d}\,y+y\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{d}\,x+\mathrm{d}\,y)$$

$$\therefore\quad \mathrm{d}\,y=\frac{y-\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^{x+y}-x}\mathrm{d}\,x$$

9. 设 $f(\arctan\frac{y}{x}) = xy$, $f(x)$可微, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解 (方法1) （利用一阶微分形式不变性）

$$\mathrm{d}[f(\arctan\frac{y}{x})] = \mathrm{d}(xy)$$

$$f'(\arctan\frac{y}{x})\mathrm{d}(\arctan\frac{y}{x}) = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

$$f'(u)\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\mathrm{d}(\frac{y}{x}) = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

记 $f' = f'(\arctan\frac{y}{x})$, 则

$$f' \cdot \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2} = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

$$f' \cdot \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

$$(\frac{xf'}{x^2+y^2} - x)\mathrm{d}y = (y + \frac{yf'}{x^2+y^2})\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} \cdot \frac{f' + x^2 + y^2}{f' - (x^2 + y^2)}.$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

解 **(方法2)** **(隐函数求导法)** $[f(\arctan\frac{y}{x})]' = (xy)'$

$$f'(\arctan\frac{y}{x})\cdot(\arctan\frac{y}{x})' = y + xy'$$

$$f'\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(\frac{y}{x})' = y + xy'$$

$$f'\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2} = y + xy'$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}\cdot\frac{f'+x^2+y^2}{f'-(x^2+y^2)}.$$

10. 计算 $\sqrt[5]{245}$ 的近似值.

$$3^5 = 243$$

解 $$\sqrt[5]{245} = (243+2)^{\frac{1}{5}}$$

$$= 3\left(1+\frac{2}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x}$$

$$\approx 3\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{243}\right)$$

$$= 3.0048$$