第十章　曲线积分与曲面积分

第一节　第一类曲线积分

1.设 xOy 平面内有一分布着质量的曲线弧 L ,在点 (x,y) 处它的线密度为 $\rho(x,y)$,用对弧长的曲线积分表示：

（1）这曲线弧 L 的长度 $S=$ ________ ;

（2）这曲线弧 L 的质量 $M=$ ________ ;

（3）这曲线弧 L 的重心坐标：$\bar{x}=$ ___ ; $\bar{y}=$ ___ ;

（4）这曲线弧 L 对 x 轴, y 轴及原点的转动惯量 $I_x=$ _____ ; $I_y=$ _____ ; $I_0=$ _____ .

解　（1） $S=\int_L \mathrm{ds}$;

（2） $M=\int_L \mu(x,y)\mathrm{ds}$;

（3） $\bar{x}=\dfrac{\int_L x\mu(x,y)\mathrm{ds}}{\int_L \mu(x,y)\mathrm{ds}}$,　　$\bar{y}=\dfrac{\int_L y\mu(x,y)\mathrm{ds}}{\int_L \mu(x,y)\mathrm{ds}}$,

（4） $I_x=\int_L y^2\mu(x,y)\mathrm{ds}$, $I_y=\int_L x^2\mu(x,y)\mathrm{ds}$, $I_0=\int_L (x^2+y^2)\mu(x,y)\mathrm{ds}$

2.（1）设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,其周长为 a ,求 $\oint_L (3x^2+4y^2)\mathrm{ds}$.

（2）设 L 为圆周 $x^2+y^2=64$,求 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{ds}$.

解　（1） L ： $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,即 $3x^2+4y^2=12$,

从而 $\oint_L (3x^2+4y^2)\mathrm{ds}=\oint_L 12\mathrm{ds}=12\oint_L \mathrm{ds}=12a$.

（2） L ： $x^2+y^2=64$,

从而 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{ds}=\oint_L 8\mathrm{ds}=8\oint_L \mathrm{ds}=8\cdot 2\pi\cdot 8=128\pi$.

3.计算 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{ds}$,其中 L 是以 $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$ 为顶点的三角形.

解　如图 10.1 所示,

L_1 ： $y=0$, x 从 $0\to 2$,

L_2 ： $x=0$, y 从 $0\to 1$,

L_3 ： $x=2-2y$, y 从 $0\to 1$,

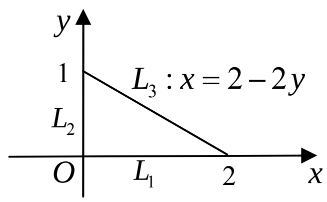


图　10.1

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2}\mathrm{d}y=\sqrt{5}\mathrm{d}y.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s&=\int_{L_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}s+\int_{L_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}s+\int_{L_3}(x^2+y^2)\mathrm{d}s\\&=\int_0^2x^2\mathrm{d}x+\int_0^1y^2\mathrm{d}y+\sqrt{5}\int_0^1[(2-2y^2)+y^2]\mathrm{d}y\\&=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}+\sqrt{5}\int_0^1(4-8y+5y^2)\mathrm{d}y=3+\frac{5}{3}\sqrt{5}.\end{aligned}$$

4.计算$\int_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$,其中$L$为曲线$x^2+y^2=2x$.

解 1 L的参数方程为 L：$\begin{cases}x=1+\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$ $0\le\theta\le 2\pi$. 计算出$\mathrm{d}s=\mathrm{d}\theta$,于是

$$\int_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{\frac{\theta}{2}=u}4\int_0^{\pi}|\cos u|\mathrm{d}u=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\mathrm{d}u=8.$$

解 2 在极坐标系下,$L:r=2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.计算出$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta$,于是$\int_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2|\cos\theta|\cdot2\mathrm{d}\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta=8.$

5.求空间曲线$x=\mathrm{e}^{-t}\cos t$, $y=\mathrm{e}^{-t}\sin t$, $z=\mathrm{e}^{-t}(0<t<+\infty)$的弧长.

解 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t$

$$=\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}(-\cos t-\sin t)^2+\mathrm{e}^{-2t}(\cos t-\sin t)^2+\mathrm{e}^{-2t}}\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{3}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,$$

从而 $s=\sqrt{3}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\sqrt{3}$.

6.有一铁丝成半圆形$x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\le t\le\pi$,其上每一点处的密度等于该点的纵坐标,求铁丝的质量.

解 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}\mathrm{d}t=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t=a\mathrm{d}t$.

$$m=\int_L\rho\mathrm{d}s=\int_Ly\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}a\sin t\cdot a\mathrm{d}t=a^2\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=2a^2.$$

7.计算$\int_L(x^2+y^2-z)\mathrm{d}s$,其中$L$为球面$x^2+y^2+z=a^2$与平面$x+y+z=0$的交线.

解 由于 $x^2+y^2+z=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 对 x, y, z 都具有轮换对称性,故

$$\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s,\int_L x\mathrm{d}s=\int_L y\mathrm{d}s=\int_L z\mathrm{d}s.$$

于是

$$\int_L x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}(\int_L x^2\mathrm{d}s+\int_L y^2\mathrm{d}s+\int_L z^2\mathrm{d}s)$$

$$=\frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\int_L \mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

其中 $\int_L \mathrm{d}s$ 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$ 的周长,显然平面 $x+y+z=0$ 过球面

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

的球心 $O(0,0,0)$,所以 L 为该球面上的大圆,即半径为 a,故周长为 $2\pi a$.又因为

$$\int_L (y-z)\mathrm{d}s=\int_L y\mathrm{d}s-\int_L z\mathrm{d}s=0,$$

所以

$$\int_L (x^2+y^2-z)\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

第二节　第二类曲线积分

1.计算 $\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$（按逆时针方向绕行）.

解 $L: x=a\cos t, y=a\sin t$, t 由 0 到 2π,

从而

$$I=\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}[(\cos t+\sin t)(-\sin t)-(\cos t-\sin t)\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=-2\pi.$$

2.计算 $\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x$,其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧.

解 $I=\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x=\int_0^2 (x^2-x^4)\mathrm{d}x=-\frac{56}{15}$.

3.计算 $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$,其中 L 为摆线

$$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$$

上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧（图 10.2）.

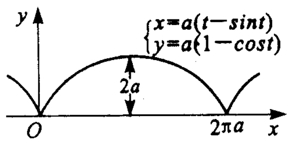


图　10.2

解 $I=\int_L (2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\{[2a-a(1-\cos t)]a(1-\cos t)+a(t-\sin t)a\sin t\}\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_0^{2\pi} t\sin t\mathrm{d}t=-2\pi a^2 .$$

4.计算$\int_L [1+(xy+y^2)\sin x]\mathrm{d}x+[(x^2+xy)\sin y]\mathrm{d}y$,其中$L$为上半椭圆

$$x^2+xy+y^2=1(y\geq 0),$$

从点$(-1,0)$到点$(1,0)$的一段弧.

解 由$x^2+xy+y^2=1$可得$xy+y^2=1-x^2$, $x^2+xy=1-y^2$,代入积分式,得

$$\int_L [1+(xy+y^2)\sin x]\mathrm{d}x+[(x^2+xy)\sin y]\mathrm{d}y$$

$$=\int_L [1+(1-x^2)\sin x]\mathrm{d}x+(1-y^2)\sin y\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^1 [1+(1-x^2)\sin x]\mathrm{d}x+\int_0^0 (1-y^2)\sin y\mathrm{d}y=2.$$

5.计算$\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y+z^2\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$是从点$(1,1,1)$到点$(2,3,4)$的直线段.

解 Γ的点向式方程为:$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$,从而$\Gamma$得参数方程为

$x=1+t$, $y=1+2t$, $z=1+3t$, t由0到1.

$$I=\int_0^1 [(1+t)^2+2(1+2t)^2+3(1+3t)^2]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3}(1+t)^3\Big|_0^1+\frac{1}{3}(1+2t)^3\Big|_0^1+\frac{1}{3}(1+3t)^3\Big|_0^1=32.$$

6.计算$\oint_\Gamma \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$为有向闭折线$ABCA$,这里的$A$, B, C依次为点$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

解 如图10.3, $AB: x=1-y$, $z=0$, y由0到1.

$$\int_{AB} \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1 -2\mathrm{d}y=-2;$$

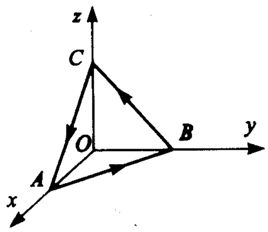


图 10.3

$BC: y=1-z$, $x=0$, z由0到1;

$$\int_{BC} \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1 (2-z)\mathrm{d}z=\frac{3}{2};$$

$CA: z=1-x$, $y=0$, x由0到1;

$$\int_{CA} \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1 \mathrm{d}x=1,$$

故 $$I=(\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA})\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=-2+\frac{3}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

7.有一质量为 m 的质点,除受重力的作用外,还受到一个大小等于该质点到原点的距离,方向指向原点的力 $\mathbf{f}$ 的作用,设该质点沿螺旋线 $L: x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ 从点 $A(0,1,\frac{\pi}{2})$ 移动到点 $B(1,0,0)$ 移动到点,求重力与力 $\mathbf{f}$ 的合力所作的功.

解 依据题意,力 $\mathbf{f}=-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-z\mathbf{k}$,故质点所受的合力

$$\mathbf{F}=\mathbf{f}-mg\mathbf{k}=-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-(z+mg)\mathbf{k}$$

在螺旋线 L 上,起点 A 对应于 $t=\frac{\pi}{2}$,终点 B 对应于 $t=0$,即 $t:\frac{\pi}{2}\to 0$.

因此,力 $\mathbf{F}$ 所作的功

$$\begin{aligned}W&=\int_L -x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y-(z+mg)\mathrm{d}z\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}[-\cos t(-\sin t)-\sin t\cos t-(t+mg)]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t+mg)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}mg.\end{aligned}$$

第三节 格林公式

1.设 xOy 平面上闭曲线 L 所围成的闭区域为 D ,将给定的二重积分与其相应的曲线积分用线连接起来.

(1) $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (a) $\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

(2) $2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (b) $\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$

(3) $-\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (c) $\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

2.利用曲线积分计算星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 所围成图形的面积.

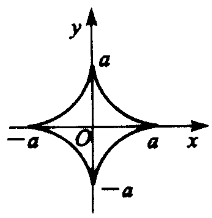


图 10.4

解 如图 10.4，因为 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ x=a\sin^3 t\end{cases}$ t 由 0 到 2π .

从而

$$S=\iint_D \mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t-a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2 .$$

3.证明$\int_L(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$只与$L$的起始点有关,而与所取路径无关,并计算积分$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$.

解 $P=6xy^2-y^3$, $Q=6x^2y-3xy^2$, $\frac{\partial P}{\partial y}=12xy-3y^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$,所以积分与路径无关,故

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^3(24x-8)\mathrm{d}x+\int_2^4(54y-9y^2)\mathrm{d}y=[12x^2-8x]_1^3+[27y^2-3y^3]_2^4$$

$$=80+156=236 .$$

或者

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2\mathrm{d}x+6x^2y\mathrm{d}y)-(y^3\mathrm{d}x+3xy^2\mathrm{d}y)$$

$$=\int_{(1,2)}^{(3,4)}\mathrm{d}(3x^2y^2-xy^3)=[3x^2y^2-xy^3]_{(1,2)}^{(3,4)}=236 .$$

4.计算$I=\int_L \mathrm{e}^x(1-\cos y)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x(\sin y-y)\mathrm{d}y$,

其中L为从$O(0,0)$到$A(\pi,0)$的正弦曲线$y=\sin x$.

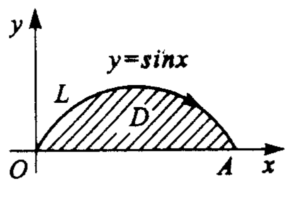


图 10.5

解 如图 10.5 所示,由格林公式

$$I=\int_L \mathrm{e}^x(1-\cos y)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x(\sin y-y)\mathrm{d}y$$

$$=\left(\oint_{L+\overline{AO}}-\oint_{\overline{AO}}\right)\mathrm{e}^x(1-\cos y)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x(\sin y-y)\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D(-y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\pi}-1)-\frac{1}{20}(\mathrm{e}^{\pi}-1)=\frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi}-1) .$$

其中

$$\int_0^{\pi}e^x\cos 2x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}e^x=e^x\cos 2x|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\mathrm{d}\cos 2x$$

$$=e^{\pi}-1+2\int_0^{\pi}e^x\sin 2x\mathrm{d}x=e^{\pi}-1+2\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}e^x$$

$$=e^{\pi}-1+2e^x\sin 2x|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}e^x\mathrm{d}\sin 2x$$

$$=e^{\pi}-1-4\int_0^{\pi}e^x\cos 2x\mathrm{d}x.$$

移项解之,得 $\int_0^{\pi}e^x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$.

注意 本题易犯两个错误:

(1) $I=(\oint_{L+\overline{AO}}-\oint_{\overline{AO}})e^x(1-\cos y)\mathrm{d}x+e^x(\sin y-y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D(-ye^x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

产生错误的原因是,没有注意格林公式使用时的条件:

$$\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

其中C是D的取正向的边界曲线.而本题的闭曲线$L+\overline{AO}$是D的取负向的边界曲线,所以二重积分$\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$前面必须添加负号.

(2)计算定积分$\int_0^{\pi}e^x\cos 2x\mathrm{d}x$是连续两次使用部分积分法后移项解出来的.对此积分有些同学束手无策,有些则在连续使用分布积分法$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$时,每次选取函数$u(x)$,不注意必须是同类函数(如选三角函数作为$u(x)$就一直选三角函数,如选$e^x$作为$u(x)$就一直选$e^x$),结果就出现了恒等式$\int u\mathrm{d}v=\int u\mathrm{d}v$,即前进一步又倒退一步,致使积不出来.

5. 已知$\varphi'(x)$连续,且$\varphi(0)=\varphi(1)=0$, $A(0,0)$, $B(1,1)$,计算

$$I=\int_{\overline{AMB}}[\varphi(y)e^x-y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)e^x-1]\mathrm{d}y$$

其中$\overline{AMB}$是以$\overline{AB}$线段为直径的上半圆周.

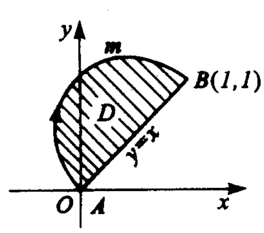


图 10.6

解 如图 10.6 所示

$$I=\int_{\overline{AMB}}[\varphi(y)e^x-y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)e^x-1]\mathrm{d}y$$

$$=[\oint_{\overline{AMB}+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}][\varphi(y)e^x-y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)e^x-1]\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\overline{AB}}[\varphi(y)e^x-y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)e^x-1]\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{\pi}{4}+\int_0^1[(\varphi(x)+\varphi'(x))\mathrm{e}^x-(x+1)]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{4}+\int_0^1\varphi(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1\varphi'(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\int_0^1(x+1)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{4}+\int_0^1\varphi(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\,\varphi(x)-\frac{3}{2}$$

$$=-\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}+\int_0^1\varphi(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\varphi(x)\big|_0^1-\int_0^1\varphi(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}=-(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}).$$

本题需注意两点：

（1）同上题一样,使用格林公式时要注意边界曲线的方向,本题因是负向,故二重积分前必须添上负号;

（2）因$\varphi(x)$是抽象函数,不可能直接将$\int_0^1\varphi(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1\varphi'(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$积出来,请不要先急于积分,先用分布积分法将$\int_0^1\varphi'(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$表示为$\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}\varphi(x)=\mathrm{e}^x\varphi(x)\big|_0^1-\int_0^1\varphi(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$,则两项抽象函数的定积分就抵消了,问题就可得到解决,因此在解题过程中一定要善于思考,从中发现解题技巧.

6.证明$\dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$在右半平面$(x>0)$内为某一函数$u(x,y)$的全微分,并求出一个这样的函数$u(x,y)$.

解 $P=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$,$Q=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$,由于$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,所以

$$\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

为某一函数$u(x,y)$的全微分.取定点$M_0(1,0)$,对于右半平面上任一点$M(x,y)$,令

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_1^x\frac{x-0}{x^2+0}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^x\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y+\int_0^y\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\ln|x|+\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\ln|x|$$

$$=\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

7.已知曲线积分$\oint\limits_{L}(1+y^3)\mathrm{d}x+(9x-x^3)\mathrm{d}y$,其中$L$为圆周$(x-a)^2+y^2=a^2 \quad (a>0)$,取逆时针方向,求$a$的值,使得对应曲线积分的值最大.

解 显然$P=1+y^3$,$Q=9x-x^3$在区域$D:(x-a)^2+y^2\le a^2$内有一阶连续的偏导数,由格林公式

$$I(a)=\oint\limits_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}(9-3x^2-3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=9\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-3\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=9\pi a^2-3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2a\cos\theta}r^3\mathrm{d}r$$

$$=9\pi a^2-3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4a^4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=9\pi a^2-24a^4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=9\pi a^2-24a^4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=9\pi a^2-\frac{9}{2}\pi a^4.$$

$I'(a)=18\pi a(1-a^2)$,令$I'(a)=0$,解得$a=1$(依题意设$a>0$,故将$a=0$和$a=-1$舍去),因为$a=1$是$I(a)$在$(0,+\infty)$内唯一的驻点,且

$$I''(a)=18\pi-54\pi=-36\pi<0,$$

故$I(a)$在$a=1$处取得最大值,因此$a=1$,即当积分路径为$(x-1)^2+y^2=1$时,对应曲线积分的值最大.

8.求$\oint_L\dfrac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$,其中

(1)L为圆周$x^2+y^2-2y=0$的正向;(2)L为椭圆$4x^2+y^2-8x=0$的正向.

解 令$P(x,y)=\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}$,$Q(x,y)=\dfrac{-(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$,则当$(x-1)^2+y^2\ne 0$时,有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

记L所围成的闭区域为D,

(1)$L:x^2+y^2-2y=0$,即$x^2+(y-1)^2=1$,此时$(1,0)\notin D$,(如图 10.7(a)所示).

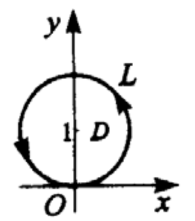


图 10.7(a)

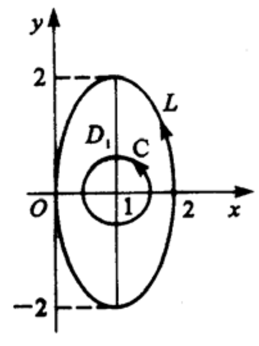


图 10.7(b)

由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,由格林公式, $\oint_L \dfrac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=0$.

（2）$L:4x^2+y^2-8x=0$,即 $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{4}=1$,此时 $(1,0)\in D$,以 $(1,0)$ 为圆心,以充分小的 $\varepsilon>0$ 为半径作圆周 $C:\begin{cases}x-1=\varepsilon\cos\theta\\ y=\varepsilon\sin\theta\end{cases}$,$\theta$ 由 0 到 2π,取逆时针方向（如图 10.7(b)所示）.

记 L 和 C 所围成的闭区域为 D_1,对复连通区域 D_1 应用格林公式,得

$$\oint_{L+C^-}\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=0,$$

从而

$$\begin{aligned}I&=\oint_L\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\oint_C\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon\sin\theta(-\varepsilon\sin\theta)-\varepsilon\cos\theta\cdot\varepsilon\cos\theta}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}-\mathrm{d}\theta=-2\pi.\end{aligned}$$

注意 （2）中由于点 $(1,0)$ 位于 L 所围成的闭区域 D 内,需用复连通域上的格林公式,以避开 $(1,0)$ 点,考虑到被积函数的分母为 $(x-1)^2+y^2$,故取圆周 $C:\begin{cases}x-1=\varepsilon\cos\theta\\ y=\varepsilon\sin\theta\end{cases}$,有同学不考虑“洞”,即点 $(1,0)$,直接用格林公式,得到 $\oint_L\dfrac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=0$ 是错误的.

9.求 $I=\int_L[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$,其中 a、b 为正常数,L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

解 添加从点 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A(2a,0)$ 的有向直线段 L_1,则

$$\begin{aligned}I&=\oint_{L+L_1}[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y-\oint_{L_1}[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y\\&=\iint_D[(\mathrm{e}^x\cos y-a)-(\mathrm{e}^x\cos y-b)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^{2a}-bx\mathrm{d}x\\&=\iint_D(b-a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+b\int_0^{2a}\mathrm{d}x=(b-a)\frac{\pi}{2}a^2+\frac{b}{2}(2a)^2\\&=(\frac{\pi}{2}+2)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3.\end{aligned}$$

第四节　第一类曲面积分

1.设有一分布着质量的曲面Σ,在点(x,y,z)处它的面密度为$\rho(x,y,z)$.用曲面积分表示：

（1）这曲面Σ的面积$A=$______;

（2）这曲面Σ的质量$M=$______;

（3）这曲面Σ的重心坐标为$\overline{x}=$______,$\overline{y}=$______,$\overline{z}=$______;

（4）这曲面Σ对于x轴,y轴,z轴及原点的转动惯量

$$I_x=\_\_,I_y=\_\_,I_z=\_\_\_\_\_\_,I_0=\_\_\_\_\_\_.$$

解　（1）$A=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$.

（2）$M=\iint\limits_{\Sigma}\mu(x,y,z)\mathrm{d}S$.

（3）$$\overline{x}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}x\mu(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\mu(x,y,z)\mathrm{d}S},\overline{y}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}y\mu(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\mu(x,y,z)\mathrm{d}S},\overline{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}z\mu(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\mu(x,y,z)\mathrm{d}S}.$$

（4）$$I_x=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S,\quad I_y=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

$$I_z=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S,\quad I_0=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

2.计算$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$为平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$在第一卦限中的部分.

解　如图 10. 8 所示，$\Sigma:\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1,\frac{\partial z}{\partial x}=-2,\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4}{3}$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

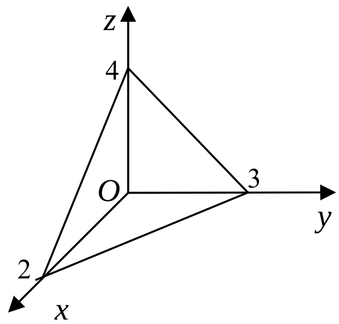


图 10.8

在积分曲面上,被积函数$z+2x+\frac{4}{3}y=4(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4})=4$,

$$D_{xy}:\begin{cases}0\le y\le 3-\frac{3}{2}x\\ 0\le x\le 2\end{cases},$$

从而

$$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\sqrt{61}\cdot 3=4\sqrt{61}.$$

3.计算$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$所围成的区域的整个边界曲面.

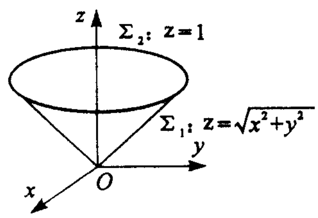


图 10.9

解 如图 10.9 所示,

$$\Sigma_1: z=\sqrt{x^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D_{xy}: x^2+y^2\le 1.$$

$$\Sigma_2: z=1,\ \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D_{xy}: x^2+y^2\le 1,$$

$$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\sqrt{2}\rho\mathrm{d}\rho+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\sqrt{2}\pi\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho+2\pi\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1).$$

4.计算$I=\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截成的部分$(a>0)$.

解 因为积分曲面Σ关于zOx坐标面（即$y=0$平面）对称,$xy+yz=y(x+z)$是关于y的奇函数,所以

$$I=\iint\limits_{\Sigma}y(x+z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma}zx\mathrm{d}S=0+\iint\limits_{\Sigma}zx\mathrm{d}S$$

此外,在Σ上,$z=\sqrt{x^2+y^2}$,$\mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,且$\Sigma$在$xOy$面上的投影为

$$D_{xy}: x^2+y^2\le 2ax,$$

因此

$$I=\iint\limits_{\Sigma}zx\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\cos\theta\mathrm{d}r=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

5.计算$\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S$,其中$\sum$为抛物面$z=2-(x^2+y^2)$在$xOy$面上方的部分.

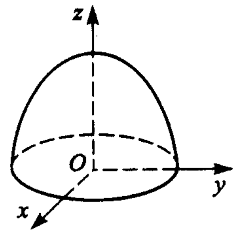


图 10.10

解　如图 10.10 所示,

$$z=2-(x^2+y^2),\frac{\partial z}{\partial x}=-2x,\frac{\partial z}{\partial y}=-2y,$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$D_{xy}:x^2+y^2\le 2,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(1+4\rho^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+4\rho^2)\cdot\frac{1}{8}$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+4\rho^2)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{3}\pi.$$

6.计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$,其中$\sum$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上$z\ge h(0<h<a)$的部分.

解　$\sum$在xOy面上的投影为圆域：$D_{xy}:x^2+y^2\le a^2-h^2$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2+(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故　$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由积分区域的对称性可得：$\iint\limits_{D_{xy}}x\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$\iint\limits_{D_{xy}}y\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,

又积分区域D_{xy}的面积为$\pi(a^2-h^2)$,故

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=a\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a(a^2-h^2).$$

7.求柱面$x^2+y^2-ax=0$在球面$x^2+y^2+z^2=a^2$内部的部分的表面积$(a>0)$.

解　由对称性,所求面积A为其位于第一卦限部分面积的 4 倍,即$A=4\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$,其中曲面$\sum$为$y=\sqrt{ax-x^2}$,求得面积元素

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,,$$

由$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$,消去$y$,得$z=\sqrt{a^2-ax}$,由此得$\sum$在$zOx$坐标面上的投影为:

$$D_{xz}:0\le z\le\sqrt{a^2-ax}\,,\ \ 0\le x\le a\,,$$

因此,曲面$\sum$的面积

$$A=4\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=4\iint\limits_{D_{xz}}\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$=2a\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-ax}}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{ax-x^2}}=2a\int_0^a\frac{\sqrt{a^2-ax}}{\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=2a\int_0^a\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4a^2\,.$$

8.设S为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分,点$P(x,y,z)\in S$,π为$S$在点$P$处的切平面,$f(x,y,z)$为点$O(0,0,0)$到平面$\pi$的距离,求$\iint\limits_S\frac{z}{f(x,y,z)}\mathrm{d}S$

解 设(X,Y,Z)为π上任意一点,则π的方程为$\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ=1$,从而知

$$f(x,y,z)=(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2)^{-\frac{1}{2}}\,,$$

由 $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}$,有$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

从而

$$\iint\limits_S\frac{z}{f(x,y,z)}\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\iint\limits_D(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{3}{2}\pi\,.$$

第五节　第二类曲面积分

1.当$\sum$是xOy面内的一个闭区域D时,$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$与二重积分的关系为

（1）$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}$_____ $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，（2）$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}$_____ $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　（1）$f(x,y,0)$，　（2）$\pm R(x,y,0)$.

注意　因第一类曲面积分与所给曲面的侧无关,所以(1)中应填$f(x,y,0)$;而第二类曲面积分与曲面的侧有关,所以(2)中应填$\pm R(x,y,0)$,有个别同学常疏忽这一点,只填$R(x,y,0)$,这是不对的.

2.计算$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\sum$为半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧.

解　记$\sum_1: x=\sqrt{a^2-y^2-z^2}$,取前侧,$\sum_2: x=-\sqrt{a^2-y^2-z^2}$取后侧,$\sum_1$与$\sum_2$在$yoz$面的投影区域相同,记为$D_{yz}$.

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_2} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}(a^2-y^2-z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_{yz}}(a^2-y^2-z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

同理　$\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0,$

而　$$\iint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(a^2-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(a^2-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi a^4}{2}.$$

从而

$$I=\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0+0+\frac{\pi a^4}{2}=\frac{\pi a^4}{2}.$$

注意　常见的错误是：

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_2} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint\limits_{D_{yz}}(a^2-y^2-z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

或　$\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\iint\limits_{D_{zx}}(a^2-x^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

产生错误的原因是忽视了将第二类曲面积分化为二重积分时,应根据积分曲面的侧选

择二重积分前的正、负号.

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{\Sigma} g(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} g[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} R[x,y(z,x),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x .$$

将第二类曲面积分化为二重积分时,究竟什么时候二重积分前面写正号,什么时候写负号,这与所给曲面的侧有关.切记:

上侧取正,下侧取负;

前侧取正,后侧取负;

右侧取正,左侧取负;

3.计算 $\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 如图 10.11 所示, $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$,其中 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4$ 各自对应于四面体的一个表面,可表示为

$\Sigma_1: z=0$ 下侧; $\Sigma_2: y=0$ 左侧;

$\Sigma_3: x=0$ 后侧; $\Sigma_4: x+y+z=1$ 上侧.

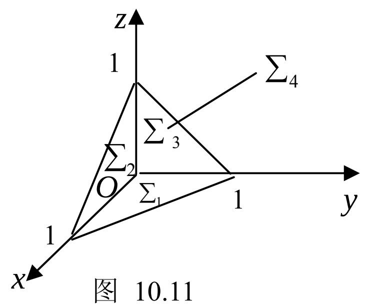


图 10.11

由于 Σ_1 在 $z=0$ 平面上,故在 Σ_1 上的曲面积分为 0;

同理,在 Σ_2, Σ_3 上的曲面积分也都为 0,所以,所求积分

$$\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_4} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由 Σ_4 得方程得 $z=1-x-y$, Σ_4 在 xoy 面上的投影域为

$$D_{xy}: 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1,$$

于是

$$\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_4} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_4} x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y = \frac{1}{24}.$$

4.计算 $\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

解 由题设, Σ 的单位法向量

$$\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}}(2x,2y,2z)=\frac{1}{R}(x,y,z).$$

由两类曲面积分的关系,可得

$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{R}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{1}{R}\iint_{\Sigma}R^2\mathrm{d}S$$

$$=R\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S\ \underline{\underline{\text{几何意义}}}\ R\cdot 4\pi R^2=4\pi R^3.$$

5.计算 $I=\oiint_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 f,g,h 为连续函数, Σ 为平行六面体 $\Omega: 0\le x\le a, 0\le y\le b, 0\le z\le c$ 表面的外侧.

解 $$\oiint_{\Sigma} h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}} h(c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}} h(0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=ab[h(c)-h(0)],$$

$$\oiint_{\Sigma} g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{xz}} g(b)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint_{D_{xz}} g(0)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=ac[g(b)-g(0)],$$

$$\oiint_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}} f(a)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{D_{yz}} f(0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=bc[f(a)-f(0)],$$

从而 $$I=abc\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right].$$

注意 本题易犯的错误是利用高斯公式来解,题目中仅告诉我们, f,g,h 为连续函数,又如何对 f,g,h 求导呢?

6.计算 $\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数, Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧.

解 平面 $x-y+z=1$ 的法线向量为 $\mathbf{n}=\{1,-1,1\}$,方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

则

$$I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}[(f+x)\cos\alpha+(2f+y)\cos\beta+(f+z)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}[(f+x)\frac{1}{\sqrt{3}}+(2f+y)(-\frac{1}{\sqrt{3}})+(f+z)\frac{1}{\sqrt{3}}]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(-1)^2+1^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

第六节　高斯公式　通量与散度

1.设计 $\oiint_{\Sigma}(x^2-yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-zx)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为平面

$$x=0\,,\,y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$$

所围成的立体的表面的外侧.

解　由高斯公式,

$$I=\oiint_{\Sigma}(x^2-yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-zx)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}(2x+2y+2z)\mathrm{d}v=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v$$

设该正方体的形心坐标为 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$,则 $\overline{x}=\overline{y}=\overline{z}=\dfrac{a}{2}$,

而　$$\overline{x}=\frac{\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}v}{\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v}=\frac{\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}v}{v},\ \overline{y}=\frac{\iiint_{\Omega}y\mathrm{d}v}{v},\ \overline{z}=\frac{\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v}{v},$$

所以　$$\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}v=\overline{x}v,\quad \iiint_{\Omega}y\mathrm{d}v=\overline{y}v,\quad \iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\overline{z}v,.$$

从而　$$I=2(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})v=2(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a)a^3=3a^4.$$

本题巧妙地利用了重心坐标公式,将利用高斯公式后得到的三重积分 $\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v$ 的计算转化为计算 $(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})v$,从而使问题得到解决.

2.计算 $\iint_{\Sigma}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 外侧的上半部分 $(a>0)$.

解　补充平面 $\Sigma_1: z=0(x^2+y^2\le a^2)$ 取下侧,

$$I=(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1})4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}(4z-2y+2y)\mathrm{d}v-0$$

$$=4\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}}z\mathrm{d}z=8\pi\int_{\rho}^{a}\rho\cdot\frac{a^2-\rho^2}{2}\mathrm{d}\rho=\pi a^4.$$

注意　易犯的错误是

（1） $I=\iint\limits_{\Sigma}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+2y)\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\cdots$

产生错误的原因是,没有注意到Σ仅是球面的上半部分,Σ并非封闭曲面,不能直接用高斯公式.尽管本题中沿曲面Σ_1的积分：$\iint\limits_{\Sigma_1}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,致使题目答案未受任何影响,但对不封闭的曲面直接用高斯公式,显然是不对的.

（2）有同学在补充平面$\Sigma_1: z=0(x^2+y^2\le a^2)$时,不写取什么侧,这也不妥.

3.计算$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$f(u)$具有一阶连续导数,$\Sigma$为柱面$(x-a)^2+(y-a)^2=(\frac{a}{2})^2$及平面$z=0, z=1(a>0)$所围成立体的表面外侧.

解　利用高斯公式,有

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}[\frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y})-\frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y})+1]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$=\pi\cdot(\frac{a}{2})^2\cdot 1=\frac{\pi}{4}a^2.$$

4.计算$\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的内侧.

解　$\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$

$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}\rho^4\mathrm{d}\rho=-\frac{12}{5}\pi a^5.$$

注意　易犯的错误是

$$\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}a^2\mathrm{d}v=3a^2\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi a^5.$$

这里有两个错误：

(1) 不注意高斯公式使用的条件：Σ应是空间闭区域Ω的整个边界曲面的外侧. 本题所给的闭曲面是球面的内侧. 因此在将闭曲面上的曲面积分

$$\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成三重积分$3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$时,前面必须写上负号.

(2) 将曲面积分与三重积分的计算法混为一谈. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$时,因为$\Omega$为球体：$x^2+y^2+z^2\le a^2$,因此不能将三重积分中的被积函数$x^2+y^2+z^2$用$a^2$代入,这种做法是常犯的错误. 只有计算曲面积分时,才能将曲面方程代入被积函数.

5.计算$I=\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中积分曲面$\Sigma$为抛物面

$$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$$

的上侧.

解 令$\Sigma_1: z=1(x^2+y^2\le 1)$,取下侧,则$\Sigma+\Sigma_1$构成封闭曲面,取内侧. 于是

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}v$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-3\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{1}r^2\mathrm{d}z=-6\pi\int_0^1 r^3(1-r^2)\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{2}.$$

由于Σ_1在平面$z=1$上,Σ_1在zOx, yOz坐标面上的投影为直线段,故$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$,$\Sigma_1$在$xOy$坐标面上的投影域为$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$,于是

$$\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\cdot\rho^2\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-3\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=-\frac{3\pi}{4}.$$

所以

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{\pi}{2}-(-\frac{3\pi}{4})=\frac{\pi}{4}.$$

6.计算$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$是由$x^2+y^2=z^2$及$z=h$ $(h>0)$所围成的闭曲面的外侧,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是此曲面的外法线的方向余弦.

解 Σ在xOy平面上的投影区域为：$x^2+y^2\le h^2$.

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\oiint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}(2x+2y+2z)\mathrm{d}v$$

$$=2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}(x+y+z)\mathrm{d}z$$

$$=2\iint_{D_{xy}}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}\mathrm{d}z + 2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}z\mathrm{d}z$$

$$=2\iint_{D_{xy}}(x+y)(h-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\iint_{D_{xy}}\frac{h^2-(x^2+y^2)}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{h}(h-\rho)\rho^2\mathrm{d}\rho + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{h}(h^2-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=0+2\pi\int_0^{h}(h^2\rho-\rho^3)\mathrm{d}\rho = 2\pi[\frac{h^4}{2}-\frac{h^4}{4}] = \frac{\pi}{2}h^4.$$

7.已知向量场 $\boldsymbol{A}=xz\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}+y^2z\mathbf{k}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的散度以及 $\boldsymbol{A}$ 穿过 $\sum$ 流向 $\sum$ 指定侧的通量,其中 $\sum$ 为 $z=x^2+y^2, x^2+y^2=1$ 以及三个坐标面在第一卦限所围立体全表面的外侧.

解 令 $P=xz, Q=x^2y, R=y^2z$,则 $\boldsymbol{A}$ 的散度

$$\mathrm{div}A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=z+x^2+y^2.$$

通量

$$\Phi=\oiint_{\Sigma} A\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}(z+x^2+y^2)\mathrm{d}v$$

$$=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}(z+x^2+y^2)\mathrm{d}z \quad (D_{xy}: x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0)$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{3}{2}r^4\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{8}.$$

第七节　斯托克斯公式　环量与旋度

1.利用斯托克斯公式计算 $\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$,这里 Γ 为曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

从 x 轴正向看去,Γ 为逆时针方向.

解 平面 $x+y+z=0$ 的上侧法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

设$\sum$为平面$x+y+z=0$上由圆周Γ所围成的面域,取上侧,相应的单位法向量

$$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

于是

$$\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\iint_{\Sigma}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=-\sqrt{3}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

2.求向量场$\boldsymbol{A}=(z+\sin y)\boldsymbol{i}-(z-x\cos y)\boldsymbol{j}$的旋度.

解 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z+\sin y & -z+x\cos y & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$.

3.求平面向量场$\boldsymbol{A}=(x^2-y^2)\boldsymbol{i}+2xy\boldsymbol{j}$沿闭曲线$L$的环流量,其中$L$是

$$x=0,x=a,y=0,y=b$$

所围成的正向回路.

解 环向量 $\oint_L(x^2-y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=4\iint_{D_{xy}}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b y\mathrm{d}y=2ab^2$.

4.利用斯托克斯公式计算$\oint_L xyz\mathrm{d}z$,其中Γ是用平面$y=z$截球面$x^2+y^2+z^2=1$所得的截痕,若逆z轴正向看去,取逆时针的方向.

解 由斯托克斯公式

$$\oint_L xyz\mathrm{d}z=\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & xyz\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

其中$\sum$是平面$y=z$上以圆Γ为边界的平面,其侧与Γ的正向符合右手规则.显然,$\sum$在yoz坐标面上的投影为一线段,所以$\iint_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

Σ 在 xoz 坐标面上的投影为一椭圆域 $D: x^2+2z^2\le 1$,且 Σ 的法向量与 y 轴成钝角,从而

$$-\iint_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_D z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z^2\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-2z^2}}^{\sqrt{1-2z^2}}\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z^2\sqrt{1-2z^2}\mathrm{d}z\,\underline{\underline{令\sqrt{2}z=\sin t}}\,\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t-\sin^4 t)\mathrm{d}t=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi\,.$$

第十章　曲线积分与曲面积分（总习题）

1.填空.

（1）设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$,则曲线积分 $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s$ 的值是 $\underline{\pi}$;

（2）向量场 $\mathbf{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+ye^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\mathbf{u}=\underline{2}$.

（3）设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$,则曲线积分 $\oint_L(2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y$ 的值是 $\underline{-18\pi}$.

解　（1）$\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_L\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 1=\pi$.

（2）$\mathrm{div}\mathbf{u}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=y^2+\mathrm{e}^Z+x\cdot\frac{2z}{1+z^2}$,

从而 $$\mathrm{div}\mathbf{u}\,|_P=y^2+\mathrm{e}^z+\frac{2xz}{1+z^2}\,|_{(1,1,0)}=2\,.$$

（3）$\oint_L(2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y$

$$=\iint_D(2x-4-2x+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\cdot\pi\cdot 3^2=-18\pi\,.$$

2.计算 $\oint_{ABCDA}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$, $ABCDA$ 是以点 $A(1,0),B(0,1),C(-1,0),D(0,-1)$ 位顶点的正方形正向边界.

解　法 1　$I=\oint_{ABCDA}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=\oint_{ABCDA}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=\iint_D(0-0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

此法是先将正方形的边界 $|x|+|y|=1$ 代入被积函数后,再用格林公式求解.

法 2　因　$AB: x+y=1,\quad BC: y-x=1,$

$$CD: -x-y=1,\ DA: x-y=1\,.$$

从而

$$I=(\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{CD}}+\int_{\overline{DA}})\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$$

$$=(\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{CD}}+\int_{\overline{DA}})\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$$

$$=\int_{1}^{0}(1-1)\mathrm{d}x+\int_{0}^{-1}(1+1)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}(1-1)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(1+1)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{-1}\mathrm{d}x+2\int_{0}^{1}\mathrm{d}x=0.$$

法 2 是分段分别计算,比较一下还是法 1 简便.但切记不可直接对$\oint_{ABCDA}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$用格林公式.请同学们动脑筋想一下,这是为什么?

3.计算$I=\int_{\overline{AB}}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$,$\overline{AB}$ 为螺线

$$x=\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ z=\varphi$$

由点$(1,0,0)$到点$(1,0,2\pi)$的弧段.

解 $I=\int_{\overline{AB}}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$

$$=\int_{0}^{2\pi}[(\cos^2\varphi-\varphi\sin\varphi)(-\sin\varphi)+(\sin^2\varphi-\varphi\cos\varphi)\cos\varphi+(\varphi^2-\sin\varphi\cos\varphi)]\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\mathrm{d}\cos\varphi-\int_0^{2\pi}\varphi\cos2\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\mathrm{d}\sin\varphi+\int_0^{2\pi}\varphi^2\mathrm{d}\varphi-\int_0^{2\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\sin\varphi$$

$$=\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{2\pi}-0+\frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_0^{2\pi}+\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi}-\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi}$$

$$=0-0+0+\frac{1}{3}(2\pi)^3-0=\frac{8}{3}\pi^3.$$

4.设$\widehat{AB}$为连接点$A(1,2)$与$B(2,3)$的某曲线弧,又设$\widehat{AB}$与直线段$\overline{AB}$所包围图形的面积等于k,计算曲线积分$\int_{\widehat{AB}}\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y$.(直线段$\overline{AB}$与曲线弧$\widehat{AB}$除点$A,B$外无其它交点,曲线弧$\widehat{AB}$不与$y$轴相交,且自身不相交).

解 $P(x,y)=\frac{y}{x^2}$, $Q(x,y)=x-\frac{1}{x}$,则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}=1,$$

直线段$\overline{BA}$:$y=x+1$,x由 2 到 1,记$\widehat{AB}$与$\overline{BA}$所围成的闭区域为D,由于要用到格林公式,所以要分两种情况讨论:

（1） $\overset{\frown}{AB}$ 取逆时针方向（如图 10.12(a)）

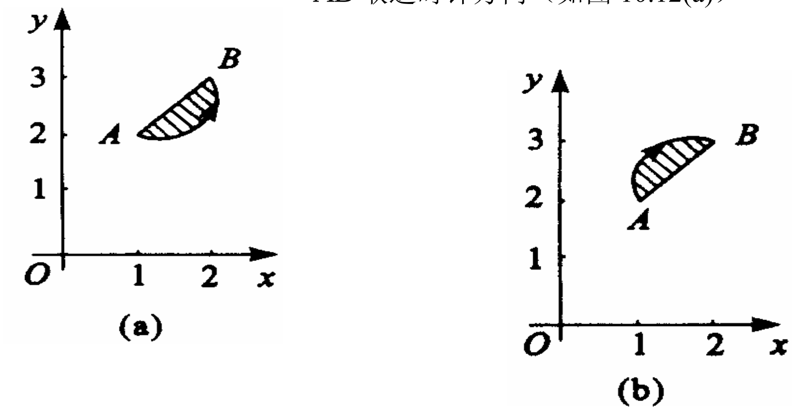


图 10.12

$$I=\int_{\overset{\frown}{AB}}\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y=(\oint_{\overline{AB}+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}})\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y=k-\int_2^1(\frac{x+1}{x^2}+x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x$$

$$=k-\int_2^1(x+\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x=k+2\,.$$

（2） $\overset{\frown}{AB}$ 取顺时针方向（如图 10.12（b）所示）.

$$I=\int_{\overset{\frown}{AB}}\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y=(\oint_{\overline{AB}+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}})\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}y$$

$$=-k-\int_2^1(x+\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x=-k+2\,.$$

注意 常见错误是不讨论 $\overset{\frown}{AB}$ 是取逆时针方向,还是取顺时针方向,就直接利用了格林公式,这是不对的.

5.计算曲线积分 $\oint_L\dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

（1） L 是圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的正向;

（2） L 是曲线 $|x|+|y|=1$ 的正向.

解 $P(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$， $Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$,当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\,,$$

记曲线 L 所围成的闭区域为 D.

（1） 如图 10.13（a）所示,此时 $(0,0)\notin D, P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 所围成的闭区域 D 内有一阶连续偏导数,由格林公式：

$$I=\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\,.$$

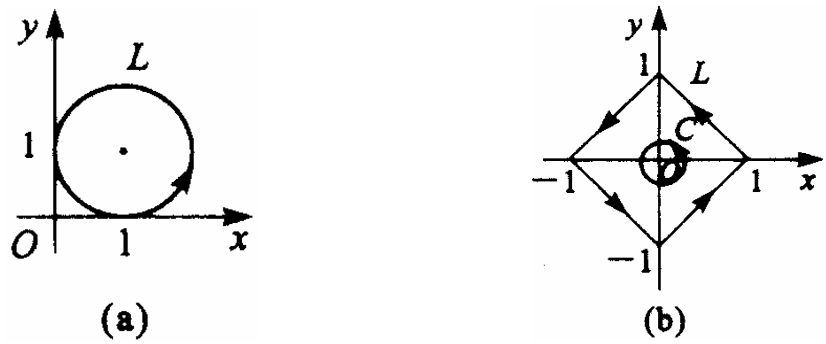


图 10.13

（2）如图 10.13（b）所示,此时 $(0,0)\in D, P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 所围成的闭区域 D 上有不连续点 $(0,0)$,以 $(0,0)$ 为圆心,以充分小 $\varepsilon>0$ 的为半径作圆周

$$C: x=\varepsilon\cos\theta, y=\varepsilon\sin\theta, 0\le\theta\le 2\pi\,,$$

C 取逆时针方向,记 L 和 C 所围成的闭区域为 D_1 ,对复连通域 D_1 应用格林公式,有

$$\oint_{L+C^-}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$$

从而

$$\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_C \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-\varepsilon\sin\theta(-\varepsilon\sin\theta)+\varepsilon\cos\theta\cdot\varepsilon\cos\theta}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi\,.$$

6.计算曲线积分 $\oint_C \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$,其中 C 是 $(1,0)$ 以为中心, $R(R\neq 1)$ 为半径的圆周,逆时针方向.

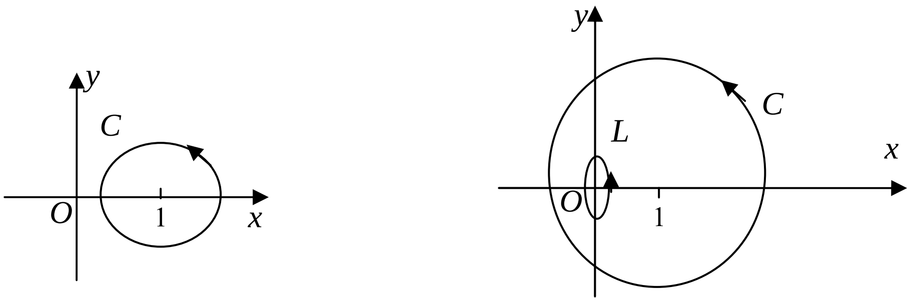
解　$P(x,y)=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}$，　$Q(x,y)=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$，

当 $4x^2+y^2\neq 0$ 时, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{4x^2+y^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, C 所围成的闭区域记为 D , $(0,0)$ 究竟在不在以为 $(1,0)$ 中心, R 为半径的圆内,要分两种情况讨论：

（1） $R<1$ 时, $(0,0)\notin D$（图 10-14(a)）,则 $\oint_C \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=0$;

（2） $R>1$ 时, $(0,0)\in D$,作足够小的椭圆 $L:\begin{cases} x=\varepsilon\cos\theta \\ y=2\varepsilon\sin\theta \end{cases}, 0\le\theta\le 2\pi$,

L 取逆时针方向（图 10.14(b)）



（a） $R<1$　　　　（b） $R>1$

图　10.14

于是由格林公式,有

$$\oint_{C+L^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=0,$$

从而 $\oint_C \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon\cos\theta 2\varepsilon\cos\theta)-2\varepsilon\sin\theta(-\varepsilon\sin\theta)}{4\varepsilon^2\cos^2\theta+4\varepsilon^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta=\pi.$$

注意　易犯错误是不分 $R<1, R>1$ 两种情况讨论,未注意闭曲线 L 所围成的闭区域 D 内有无“洞”,即 D 是否为“单连通域”？

7.设曲线积分 $\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关,其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,且 $\varphi(0)=0$,计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值.

解　$P(x,y)=xy^2, Q(x,y)=y\varphi(x)$,因曲线积分与路径无关, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

$$2xy=y\varphi'(x), \varphi'(x)=2x, \varphi(x)=x^2+C,$$

由 $\varphi(0)=0$,则 $C=0$,从而 $\varphi(x)=x^2$.

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

8.质点 P 沿着以 AB 为直径的圆周,从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\boldsymbol{F}$ 的作用, $\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 到原点 O 之间的距离,其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角

小于$\dfrac{\pi}{2}$,求变力$\boldsymbol{F}$对质点P所做的功.

解　圆弧AB的方程为$(x-2)^2+(y-3)^2=2$,其参数方程为

$$\begin{cases} x=2+\sqrt{2}\cos t \\ y=3+\sqrt{2}\sin t \end{cases},\ (-\frac{3}{4}\pi \le t \le \frac{\pi}{4})$$

$\boldsymbol{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$，所以

$$W=\int_L(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}[\sqrt{2}(3+\sqrt{2}\sin t)\sin t+\sqrt{2}(2+\sqrt{2}\cos t)\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=2(\pi-1).$$

9.计算$\displaystyle\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$.

解　$\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$对x,y,z具有轮换对称性,所以

$$\oiint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S,$$

于是

$$\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\frac{2}{3}\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{2}{3}a^2\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S \xlongequal{\text{几何意义}}\frac{2a^2}{3}\cdot 4\pi a^2=\frac{8}{3}a^4.$$

10.计算$I=\displaystyle\oiint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(yz)+y^3]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[-zf(yz)+z^3]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$f$有一阶连续导数,而$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=2Rz$的内侧($(R>0)$.

解　令$P=x^3,Q=yf(yz)+y^3,R=-zf(yz)+z^3$,则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\frac{\partial Q}{\partial y}=f(yz)+yzf'(yz)+3y^2,\frac{\partial R}{\partial z}=-f(yz)-yzf'(yz)+3z^2.$$

注意到Σ取内侧,运用高斯公式,得

$$I=-\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}v=-\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{6}{5}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot 32R^5\cos^5\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{6\pi}{5}\cdot 32R^5\cdot\frac{\cos^6\varphi}{6}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{32}{5}\pi R^5.$$

11.计算$I=\displaystyle\iint_S -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$S$是圆柱面$x^2+y^2=4$被平面$x+z=2$和$z=2$所截出部分的外侧.

解　法1　设S,S_1,S_2,Ω,D_1如图10.15所示,

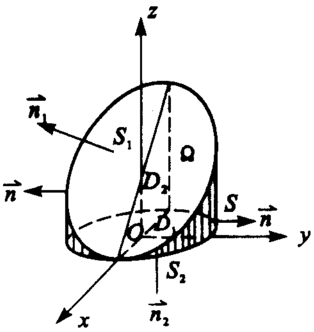


图 10.15

$$S_1: x+z=2; \qquad S_2: z=0$$

$$I=\iint_S -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=[\oiint_{S+S_1+S_2}-\iint_{S_1}-\iint_{S_2}]-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_\Omega(-1+1)\mathrm{d}V-\iint_{S_1}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint_{S_1}(z+1)dxdy-\iint_{S_2}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint_{S_2}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0-\iint_{S_1}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{S_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_1}(2-x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi\cdot 2^2+0=-8\pi\,.$$

法2　设S,D_2如上图所示, 则

$$I=\iint_S -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+0$$

$$=\iint_{D_2}-2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-2\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_0^{2-x}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}z$$

$$=-2\int_{-2}^{2}(2-x)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=-4\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=-8\pi\,.$$

12.计算$\iint_\Sigma(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧.

解　补充S为平面$z=0(x^2+y^2\le a^2)$的下侧.

$$I=\iint_\Sigma(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=(\oiint_{\Sigma+S}-\iint_S)(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V-\iint_{x^2+y^2\le a^2}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\mathrm{d}r+a\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r$$

$$=6\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{a^5}{5}+a\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\cdot\frac{a^4}{4}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{29}{20}\pi a^5\,.$$

13.设函数 $u = x^2 z + \frac{1}{2} y^2 z - \frac{1}{3} z^3$

（1）求梯度 $\mathbf{grad}u$；

（2）求向量场 $A = \mathbf{grad}u$ 的散度 $\mathrm{div}A$；

（3）计算向量场 $A = \mathbf{grad}u$ 穿过曲面 $\sum$ 流向外侧的通量,其中 $\sum$ 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围立体 Ω 的表面.

解 （1） $A = \mathbf{grad}u = 2xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + (x^2 + \frac{1}{2} y^2 - z^2)\boldsymbol{k}$，

（2） $\mathrm{div}A = 2z + z + (-2z) = z$，

（3）通量 $\oiint\limits_{\Sigma} A \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}A \mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho \mathrm{d}\rho \int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}} z\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}.$$

14.求 $\oint_L f(xy)(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)$，其中 L 为 xOy 面上任一分段光滑的闭曲线, f 为 xOy 面上具有连续导数的函数.

解 因为 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(yf(xy)) = f(xy) + xyf'(xy) = \frac{\partial}{\partial x}(xf(xy)) = \frac{\partial Q}{\partial x}$，

在 xOy 面上成立,故曲线积分 $\oint_L f(xy)(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)$ 与路径无关,也即沿 xOy 面上任一封闭曲线上的积分为零,故

$$\oint_L f(xy)(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x) = 0.$$

注意 被积函数中含有未知函数 f，并且积分曲线 L 的方程没有给出,所以不能化为定积分计算,只能用格林公式,或平面上曲线积分与路径无关的条件计算.

15.具有质量的曲面 $\sum$ 是半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 在圆锥 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 里面的部分,如 $\sum$ 上每点的密度等于该点到 xOy 平面的距离的倒数,试求 $\sum$ 的质量.

解 $\sum$ 在 xOy 面上的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \le \frac{a^2}{2}$，$\mathrm{d}S = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\mu = \frac{1}{z}$.

$$m = \iint\limits_{\Sigma} \mu \mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{z} \mathrm{d}S = \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = a\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{\rho}{a^2 - \rho^2} \mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi a(-\frac{1}{2})\ln(a^2-\rho^2)\Big|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}=\pi a\ln 2.$$

16.设$\sum$是有界闭区域Ω的光滑边界曲面,函数u在Ω上有二阶连续偏导数,记

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

试证明：$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ （$\mathbf{n}$是的外法线方向向量).

证 应用两种曲面积分的关系和高斯公式,得

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$