第六节　空间曲线及其方程

习题　7-6

1. 画出下列曲线的图形:

(1) $\begin{cases} z=\sqrt{5-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2=4; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ y=3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ y=x. \end{cases}$

解　各曲线的图形如图 7.9 所示

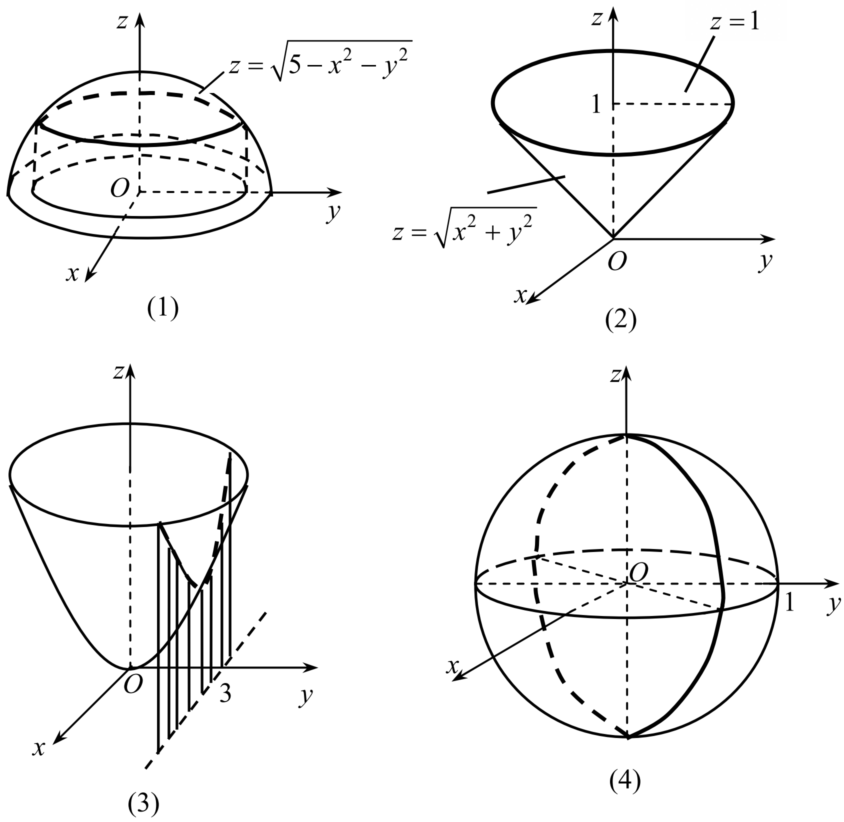

图 7.9

2. 指出下列方程组在平面解析几何和空间解析几何中分别表示什么图形:

(1) $\begin{cases} y=x+1, \\ y=2x-1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+2y^2=1, \\ x=1. \end{cases}$

解 (1) 平面解析几何中表示两直线的交点; 在空间解析几何中表示两平面的交线(即直线);

(2) 在平面解析几何中表示椭圆与其一切线的交点; 在空间解析几何中表示椭圆柱面 $x^2+2y^2=1$ 与其切平面 $x=1$ 的交线(即直线).

3. 求通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+2z^2=12, \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases}$ 且母线分别平行于 x 轴及 z 轴的柱面方程.

解 要求母线平行于 x 轴且通过曲线

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+2z^2=12, & (1) \\ z^2=x^2+y^2, & (2) \end{cases}$$

的柱面方程, 只需从方程组中消去 x. 为此 $(1)-(2)\times 2$, 得

$$4z^2-y^2=12,$$

即为所求.

$(1)-(2)\times 2$, 得

$$4x^2+3y^2=12,$$

即是母线平行于 z 轴且通过已知曲线的柱面方程.

4. 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ y-x=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ 2x-4y-z=0. \end{cases}$

解 (1) **法 1** 将 $y=x$ 代入方程 $x^2+y^2+z^2=4$ 中, 得

$$z^2+2y^2=4.$$

令 $z=2\sin t$, 则 $y=\sqrt{2}\cos t$, 可得曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=\sqrt{2}\cos t, \\ z=2\sin t, \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi.$$

法 2 $z^2+2y^2=4.$

令 $z=2\cos t$, $y=\sqrt{2}\sin t$, 可得曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\sin t, \\ y = \sqrt{2}\sin t, \\ z = 2\cos t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

(2) 将 $z = 2x - 4y$ 代入方程 $z = x^2 + y^2$ 中，得

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0,$$

即 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$.

令 $x = 1 + \sqrt{5}\cos t$, $y = -2 + \sqrt{5}\sin t$, 可得曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{5}\cos t, \\ y = -2 + \sqrt{5}\sin t, \\ z = 10 + 2\sqrt{5}\cos t - 4\sqrt{5}\sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

5. 求两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$和$x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

解 在
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, & (1) \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1, & (2) \end{cases}$$

(1)-(2), 消去 z 得: $y + z = 1$, 即 $z = 1 - y$, 代入(1), 得曲线在 xOy 面上的投影柱面的方程为

$$x^2 + 2y^2 - 2y = 0,$$

故交线在 xOy 面上的投影曲线的方程为

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

6. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 64, \\ x^2 + y^2 = 8y, \end{cases}$ 在 xOy 面及 yOz 面上的投影的方程.

解 1° 如图 7.10, 易知, 曲线在 xOy 面上的投影柱面的方程为

$$x^2 + y^2 - 8y = 0,$$

故曲线在 xOy 面的投影曲线的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2-8y=0, \\ z=0. \end{cases}$$

2° 从两立体的界面方程

$x^2+y^2+z^2=64,\ x^2+y^2=8y$ 中消去 x，得到曲线在 yOz 面的投影柱面的方程为

$$z^2=64-8y, \qquad (0 \le y \le 8),$$

再与平面 $x=0$ 联立，得投影曲线的方程为

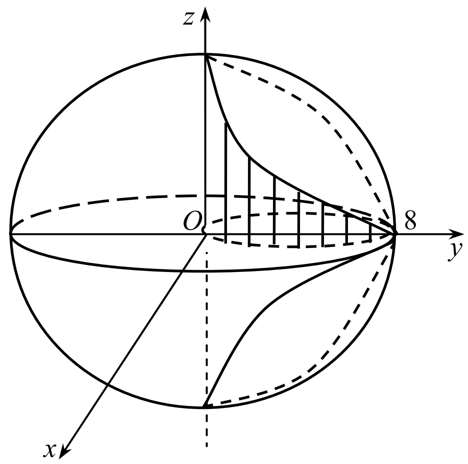

图 7.10

$$\begin{cases} z^2=64-8y, \qquad (0 \le y \le 8), \\ x=0. \end{cases}$$

7. 求上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 、圆柱面 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 及平面 $z=0$ 所围成的立体在 xOy 面和在 zOx 面上的投影.

解 该立体的图形如图 7.11 表示，它在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为曲线 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与 $x^2+y^2-ax=0$ 的交线在 xoy 坐标面上的投影所围区域，即 D_{xy} 为

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le ax, \\ z=0. \end{cases}$$

由立体的空间位置知，立体在 xOz 面上的投影区域 D_{xz} 应为 xOz 面上的曲线 $z=\sqrt{a^2-x^2}$ 与 x 轴、z 轴所围的 $\frac{1}{4}$ 圆域，即 D_{xz} 为

$$\begin{cases} 0 \le z \le \sqrt{a^2-x^2}, \\ x \ge 0, \\ y=0. \end{cases}$$

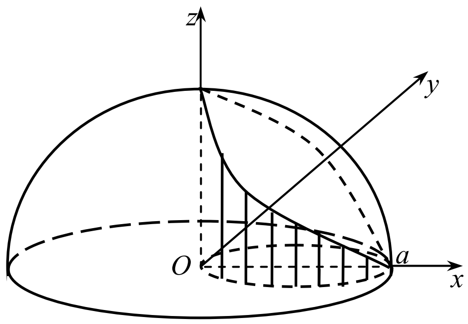

图 7.11

注意 易犯的错误是

由$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$消去 y，得 $z=\sqrt{a^2-ax}$，因此立体在在 xOz 面上的投影区域 D_{xz} 为

$$\begin{cases} 0 \le z \le \sqrt{a^2-ax}, \\ x \ge 0, \\ y=0. \end{cases}$$

产生错误的原因是，没有根据立体的空间位置确定立体在 xOz 面上的投影区域，而是教条地用常规的方法来求立体在 xOz 面上的投影区域.

8. 求两曲面 $3(x^2+y^2)=16z$ 和 $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线的方程，并画出两曲面所围的立体的图形.

解 在$\begin{cases} 3(x^2+y^2)=16z, \\ z=\sqrt{25-x^2-y^2} \end{cases}$中消去 z，得曲线在 xOy 面的投影柱面的方程为

$$x^2+y^2=16,$$

故曲线在 xOy 面的投影曲线的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2-16=0, \\ z=0. \end{cases}$$

两曲面所围的立体的图形如图 7.12 所示

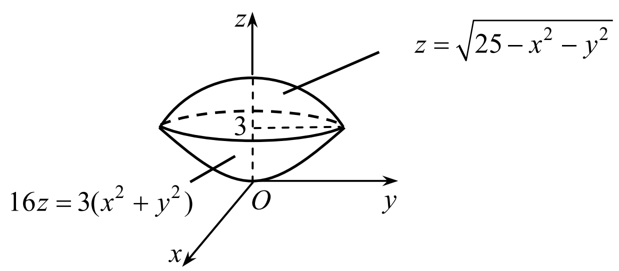

图 7.12