第四节　全微分方程

习题　12-4

1. 判断下列方程中哪些是全微分方程, 并求全微分方程的通解:

(1) $(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y=0$;

(2) $(\cos x-y^2)\mathrm{d}x+(2-2xy)\mathrm{d}y=0$;

(3) $\dfrac{2x}{y^3}\mathrm{d}x+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}\mathrm{d}y=0$;

(4) $(3x^2+2\mathrm{e}^{2x}y)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}y=0$;

(5) $\mathrm{d}x+(\dfrac{x}{y}-\sin y)\mathrm{d}y=0$;

(6) $(y\cos x+\dfrac{1}{y})\mathrm{d}x+(\sin x-\dfrac{x}{y^2})\mathrm{d}y=0$;

(7) $y\mathrm{d}x-(2x+\sin y)\mathrm{d}y=0$.

解　(1)　令 $P(x,y)=x+y+1,\ Q(x,y)=x-y^2+3$, 由于

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1,$$

所以该方程为全微分方程. 由于

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^x (x+1)\mathrm{d}x+\int_0^y (x-y^2+3)\mathrm{d}y\\&=\frac{x^2}{2}+x+(x+3)y-\frac{y^3}{3},\end{aligned}$$

所以全微分方程通解为

$$\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y=C.$$

(2)　令 $P(x,y)=\cos x-y^2$, $Q(x,y)=2-2xy$, 由于

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y,$$

所以该方程为全微分方程. 由于

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^x \cos x\mathrm{d}x+\int_0^y (2-2xy)\mathrm{d}y$$

$$=\sin x+2y-xy^2,$$

所以全微分方程通解为

$$\sin x+2y-xy^2=C.$$

(3) 令 $P(x,y)=\dfrac{2x}{y^3}$，$Q(x,y)=\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}$，由于

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4},$$

所以该方程为全微分方程. 由于

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,1)\mathrm{d}x+\int_1^y Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_1^y \frac{y^2-3x^2}{y^4}\mathrm{d}y$$

$$=x^2+1-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}-x^2,$$

所以全微分方程的通解为

$$-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}=C.$$

(4) 令 $P(x,y)=3x^2+2\mathrm{e}^{2x}y$，$Q(x,y)=\mathrm{e}^{2x}$，由于

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2\mathrm{e}^{2x},$$

所以该方程为全微分方程. 由于

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}y$$

$$=x^3+y\mathrm{e}^{2x},$$

所以全微分方程的通解为

$$x^3+\mathrm{e}^{2x}y=C.$$

(5) 令 $P(x,y)=1$，$Q(x,y)=\dfrac{x}{y}-\sin y$，由于

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{y},\ \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以该方程不为全微分方程.

(6) 令 $P(x,y)=y\cos x+\frac{1}{y}$, $Q(x,y)=\sin x-\frac{x}{y^2}$, 由于

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\cos x-\frac{1}{y^2},$$

所以该方程为全微分方程. 由于

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,1)\mathrm{d}x+\int_1^y Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^x(\cos x+1)\mathrm{d}x+\int_1^y(\sin x-\frac{x}{y^2})\mathrm{d}y$$

$$=\sin x+x+(y-1)\sin x+\frac{x}{y}-x,$$

所以全微分方程的通解为

$$y\sin x+\frac{x}{y}=C.$$

(7) 令 $P(x,y)=y$, $Q(x,y)=-(2x+\sin y)$, 由于

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-2,\ \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以该方程不为全微分方程.

2. 利用观察法求出下列微分方程的积分因子, 并求其通解:

(1) $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x-x^2\sin y\mathrm{d}y=0$;

(2) $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=(x-y)(\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y)$;

(3) $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y$;

(4) $(1+xy)y\mathrm{d}x+(1-xy)x\mathrm{d}y=0$;

(5) $(x^2+y^2+2x)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0$.

解 (1) 积分因子为 $\frac{1}{x^2}$, 方程两边同乘以积分因子,

$$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}-\sin y\mathrm{d}y=0,$$

$$\mathrm{d}(\frac{y}{x})+\mathrm{d}\cos y=0,$$

微分方程的解为

$$\frac{y}{x}+\cos y=C.$$

(2) 积分因子为 $\frac{1}{x-y}$, 方程两边同乘以积分因子,

$$\frac{\mathrm{d}(x-y)}{x-y}=\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}\ln|x-y| = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y^2,$$

微分方程的解为

$$\ln|x-y| - x - y^2 = C.$$

(3) 原方程化为

$$y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = y\mathrm{d}x^2 - x^2\mathrm{d}y,$$

积分因子为 $\frac{1}{y^2}$， 方程两边同乘以积分因子,

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{y\mathrm{d}x^2 - x^2\mathrm{d}y}{y^2},$$

$$\mathrm{d}(\frac{x}{y}) = \mathrm{d}(\frac{x^2}{y}),$$

微分方程的解为

$$\frac{x-x^2}{y} = C.$$

(4) 原方程化为

$$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + xy(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y) = 0,$$
$$\mathrm{d}(xy) + xy(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y) = 0,$$

积分因子为 $\frac{1}{x^2y^2}$ ，方程两边同乘以积分因子,

$$\frac{\mathrm{d}(xy)}{x^2y^2} + \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \frac{1}{y}\mathrm{d}y = 0,$$

$$\mathrm{d}(-\frac{1}{xy}) + \mathrm{d}\ln|x| - \mathrm{d}\ln|y| = 0,$$

微分方程的解为

$$\frac{-1}{xy} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = C.$$

(5) 原方程化为

$$(x^2+y^2)\mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = 0,$$

积分因子为 $\frac{1}{x^2+y^2}$，方程两边同乘以积分因子,

$$\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{x^2+y^2}=0,$$

$$\mathrm{d}x+\mathrm{d}\ln(x^2+y^2)=0,$$

微分方程的解为

$$x+\ln(x^2+y^2)=C.$$

3. 验证$\frac{1}{x^2}f(\frac{y}{x})$是微分方程$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$的一个积分因子.

证 方程两边同乘以积分因子，得

$$x[\frac{1}{x^2}f(\frac{y}{x})]\mathrm{d}y-y[\frac{1}{x^2}f(\frac{y}{x})]\mathrm{d}x=0,$$

令$P(x,y)=-y[\frac{1}{x^2}f(\frac{y}{x})], Q(x,y)=x[\frac{1}{x^2}f(\frac{y}{x})]$，则

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{1}{x^2}f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}f'(\frac{y}{x})\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^3}f'(\frac{y}{x}),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(\frac{y}{x})+\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})=-\frac{1}{x^2}f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^3}f'(\frac{y}{x}),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

因而$\frac{1}{x^2}f(\frac{y}{x})$是微分方程$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$的一个积分因子.