第十一章　无穷级数

本章基本要求

1. 理解无穷级数收敛、发散以及和的概念，了解无穷级数的基本性质和收敛的必要条件。

2. 了解正项级数的比较审敛法以及几何级数与 p—级数的敛散性，掌握正项级数的比值审敛法。

3. 了解交错级数的莱布尼茨定理，会估计交错级数的截断误差。了解绝对收敛与条件收敛的概念及二者的关系。

5. 会利用$e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x)$与$(1+x)^\alpha$的麦克劳林（Maclaurin）展开式将一些简单的函数展开成幂级数。

6. 了解利用将函数展开成幂级数进行近似计算的思想。

7. 了解用三角函数逼近周期函数的思想，了解函数展开为傅里叶（Fourier）级数的狄利克雷（Dirichlet）条件，会将定义在$(-\pi,\pi)$和$(-l,l)$上的函数展开为傅里叶级数，会将定义在上的函数展开为傅里叶正弦或余弦级数。

第一节

常数项级数的基本概念和性质

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 常数项级数的概念

1. 定义　给定数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$

无穷级数: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$, 一般项: u_n

部分和: $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

无穷级数收敛: 若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在, 记作 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

级数的和

无穷级数发散: 若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在,

级数的余项： $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$

级数收敛时， $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

2. 结论

等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a q^n \begin{cases} |q| < 1 \text{ 时收敛,} \\ |q| \geq 1 \text{ 时发散.} \end{cases}$

(二) 收敛级数的性质

性质1 若 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$ 收敛，

其和为 cS.

推论1 若 $c\neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$ 敛散性相同 .

性质2 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, 则

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

注 1° 收敛级数可逐项相加（减）.

2° $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的敛散性规律:

收收为收，收发为发，发发不一定发.

例如，取 $u_n = (-1)^{2n}$，$v_n = (-1)^{2n+1}$，而 $u_n + v_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛.

性质3 级数前面加上（去掉、或修改）有限项，不影响级数的敛散性.

性质4 收敛级数**加括弧**后所成的级数仍收敛于原级数的和.

推论2 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.

注 加括号后的级数收敛

$\not\Rightarrow$ 去掉括号后的级数收敛

收敛级数去括弧后所成的级数**不一定**收敛.

例如, $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, 收敛

但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散

性质5（级数收敛的必要条件）

设 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

注 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 非级数收敛的充分条件.

例如， 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散，

但 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

推论3 若 $u_n\not\to 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必发散.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

小结: $\begin{cases} u_n \to 0 \underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \\ u_n \not\to 0 \underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \end{cases}$

二、典型例题

例1 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$ 的敛散性.

解 部分和

拆项相消

$$S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

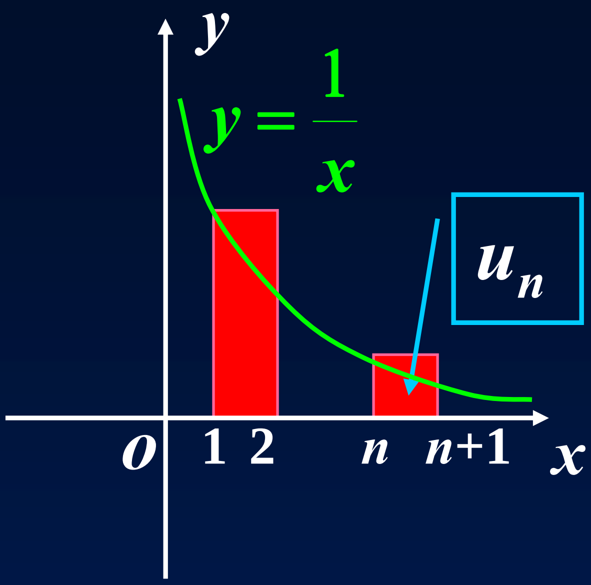
$$=(\cancel{\ln 2}-\underline{\ln 1})+(\cancel{\ln 3}-\cancel{\ln 2})+\cancel{\cdots}+(\ln(n+1)-\cancel{\ln n})$$

$$=\ln(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty)$$

所以级数发散.

(方法2) $u_n=\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}x$

$\because$ 当 $n\le x\le n+1$ 时，有 $\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{n}$



$$\therefore\quad u_n=\frac{1}{n}\ge\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\ln x\Big|_n^{n+1}=\ln(n+1)-\ln n$$

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\ge(\ln 2-\ln 1)-+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]$$

$$=\ln(n+1)\to+\infty\quad(n\to\infty)$$

$\because\quad \lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty\quad\therefore\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 .

(方法3) 用反证法

假设：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛，其部分和为 S_n.

则 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$

于是 $\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = S - S = 0$

但另一方面，

$$S_{2n} - S_n$$

$$= (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}) - (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$$

$$S_{2n}-S_n$$

$$=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\ge\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{项}}=\frac{1}{2}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)\neq 0$, 矛盾！

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 .

(方法4) 加括号级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = (1+\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) + (\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8})$$

$$+(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16})+\cdots$$

$$+(\frac{1}{1+2^{n-1}}+\frac{1}{2+2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}})+\cdots$$

$$v_1 = 1+\frac{1}{2} > \frac{1}{2}, \quad v_2 = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \cdots$$

$$v_3 = \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$v_4 = \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2^4} > \underbrace{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}}_{2^3 = 8\text{项}} = \frac{1}{2},$$

$$\vdots$$

$$v_n = \frac{1}{1+2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} > \underbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{项}} = \frac{1}{2}$$

$$S_n = v_1 + \cdots + v_n > \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \to \infty, \quad (n \to \infty)$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

从而加括号级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

例3 判断级数的敛散性

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}+\cdots$$

解 加括号级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=(1+1)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3})$$
$$+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n})+\cdots$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，

故加括号级数发散，从而原级数发散.

例4 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

$$(2)\ \frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$$

解 (1) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$, 故原级数发散.

(2) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1} \not\to 0$,

故所给级数发散.

例5　判断敛散性, 若收敛求其和: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$,

解　令　$u_n = \frac{e^n n!}{n^n}$, 则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

单增数列

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n < e$$

$$u_n > u_{n-1} > \cdots > u_1 = e$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 故级数发散.

例6 判断级数的敛散性：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

解 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

则 $\frac{1}{2}S_n=S_n-\frac{1}{2}S_n$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\rightarrow\frac{3}{2}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=3$, 原级数收敛, 其和为 3 .

三、同步练习

1. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性.

2 . 判断敛散性, 若收敛求其和: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n^2+2n}$.

3. 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性 .

4. 判断级数的敛散性

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

四、同步练习解答

1. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性.

解 $$S_n=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$$

“拆项相消”求和

所以级数收敛, 其和为1/2 .

2．判断敛散性，若收敛求其和：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n^2+2n}$．

解 $\frac{1}{n^3+3n^2+2n}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\quad(n=1,2,\cdots)$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3+3k^2+2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\to\frac{1}{4},$

拆项相消

原级数收敛，其和为$\frac{1}{4}$.

3. 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性.

解 $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\ln\frac{n^2-1}{n^2}=\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n$

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=[\ln 3+\ln 1-2\ln 2]$$

$$+[\ln 4+\ln 2-2\ln 3]+[\ln 5+\ln 3-2\ln 4]$$

$$+\cdots+[\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n]$$

$$=-\ln 2+\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 2\rightarrow-\ln 2,$$

故原级数收敛，其和为 $-\ln 2$.

4. 判断级数的敛散性

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解 加括号级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

一般项 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}=\dfrac{2}{n-1}$

因加括号级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故原级数发散．