第八节

最值问题模型

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、 主要内容

(一) 函数在闭区间上的最值

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，除有限个点外可导，且至多在有限个点处导数为零，则

- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定存在着最大值和最小值;
- 最大（最小）值可能在端点处取得;
- 最大（最小）值可能在开区间 (a,b) 内取得，此时最大（最小）值必是 $f(x)$ 的一个极大（极小）值，而且相应的点必是 $f(x)$ 的驻点或不可导点;

因此，求函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上最值的步骤如下：

(1) 求$f(x)$在（a, b）内的全部驻点和不可导点；

(2) 计算区间端点及驻点和不可导点的函数值；

(3) 比较这些函数值的大小，最大者(最小者)即为 $f(x)$ 在 $[a, b]$上的最大值(最小值).

特别地，若$f(x)$在$[a, b]$上是单调函数，那么最大值和最小值分别在区间$[a, b]$的两个端点处取得.

(二) 函数在开区间上的最值问题

在开区间上求连续函数$f(x)$的最值问题较为复杂,甚至有的时候开区间上的连续函数可以没有最大值和最小值.

通常可利用$f'(x)$的符号,即函数的单调性,对$f(x)$的全局性态作大致分析,进而利用$f(x)$的极值(即局部范围的最值)的充分条件来确定函数在这个区间上的最大值或最小值.

定理3.14 设 $f(x)$在(a, b)内连续且可导(或至多在点x_0处不可导)，且点 x_0为 $f(x)$在(a, b)内的唯一驻点(或不可导点)，则

(1) 若对 $\forall x \in (a,b)$, 当$x < x_0$时, $f'(x) > 0$, 当$x > x_0$时, $f'(x) < 0$, 则$f(x_0)$为$f(x)$在(a, b)内的最大值；

(2) 若对 $\forall x \in (a,b)$, 当$x < x_0$时, $f'(x) < 0$, 当$x > x_0$时, $f'(x) > 0$, 则$f(x_0)$为$f(x)$在(a, b)内的最小值 .

定理3.15 设$f(x)$在(a,b)具有连续导数, 在点x_0处具有二阶导数, 且点x_0为$f(x)$在(a,b)内的唯一驻点, 则

(1) 若$f''(x_0)<0$, 则$f(x_0)$为$f(x)$在(a,b)内的最大值;

(2) 若$f''(x_0)>0$, 则$f(x_0)$为$f(x)$在(a,b)内的最小值.

在实际问题中，如果根据问题的性质可以判断目标函数 $f(x)$ 在其定义区间 I 的内部确有最大值或最小值，而 $f(x)$在 I 内可导且只有唯一的驻点 x_0，则可以断言 $f(x_0)$必是 $f(x)$在区间 I 上的最大值或最小值，不再需要另行判定.

二、典型例题

例1 设 $f(x)=nx(1-x)^n, n\in N$,试求$f(x)$在$[0,1]$上的最小值 $m(n)$,最大值$M(n)$及$\lim\limits_{n\to\infty} M(n)$.

解 $f'(x)= n(1-x)^n - nx\cdot n(1-x)^{n-1}$

$$= n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x].$$

令 $f'(x)=0$, 得$(0,1)$内的唯一驻点 $x=\dfrac{1}{n+1}$.

又 $f(0)=0$, $f(\dfrac{1}{n+1})=(\dfrac{n}{n+1})^{n+1}$, $f(1)=0$,

故所求的最小值为

$$m(n)=f(0)=f(1)=0,$$

最大值为

$$M(n)=f(\frac{1}{n+1})=(\frac{n}{n+1})^{n+1}.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}M(n)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}=\mathrm{e}^{-1}.$$

例2 设$1 < a < b$, $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, 求证:

$$0 < f(b) - f(a) \le \frac{1}{4}(b-a).$$

解 由微分中值定理知存在 $\xi \in (a,b)$,使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

$$= \frac{\xi - 1}{\xi^2}(b-a) > 0.$$

记$g(x) = \frac{x-1}{x^2}$,只需证$g(x) \le \frac{1}{4} \quad (x > 1)$.

$$g'(x)=\frac{2-x}{x^3}\begin{cases}>0 & 1<x<2\\ =0 & x=2\\ <0 & x>2\end{cases}$$

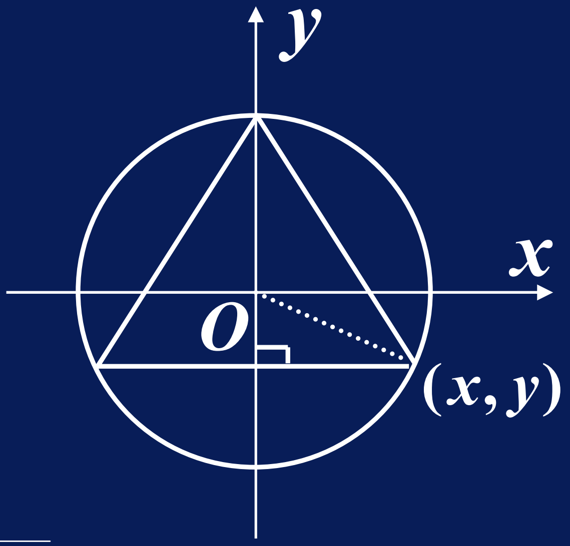
因此点 $x=2$ 是函数 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内的最大值点，

且 $g(x)\le g(2)=\frac{1}{4}$，于是 $f(b)-f(a)\le\frac{1}{4}(b-a)$.

$$g(x)=\frac{x-1}{x^2}(x>1).$$

要证 $\quad g(x)\le\frac{1}{4}\quad(x>1)$.

例3 试求内接于半径为 a 的圆的等腰三角形的面积的最大值．



解 $A=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(a+\sqrt{a^2-x^2})$

$$=ax+x\sqrt{a^2-x^2},$$

$$0<x\le a.$$

$$A'=a+\sqrt{a^2-x^2}+\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2-x^2}+a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$A' = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

令$A' = 0$, 得$x = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$

由实际问题的性质知，最大值存在，且驻点唯一，

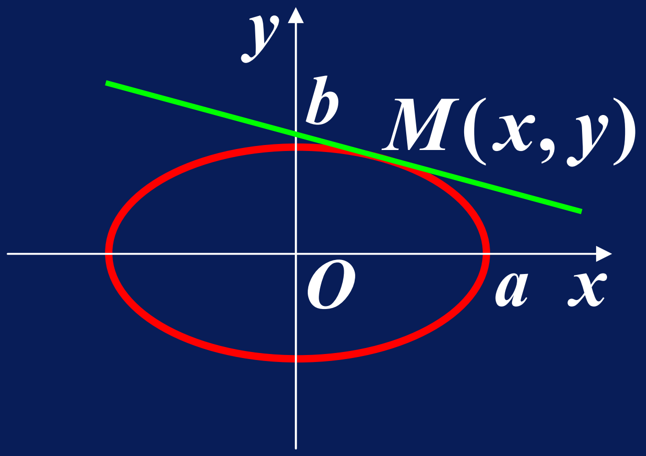
故面积的最大值为

$A(a) = a^2$

$$A(\frac{\sqrt{3}}{2}a) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

例4 过椭圆上 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 位于第一象限的点 $M(x_0,y_0)$ 引切线,使切线与坐标轴围成的面积最小，求 $M(x_0,y_0)$(其中 $a>0,b>0$).

解 (方法1) 先求切线斜率:



$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0,$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

切线方程为: $Y-y=-\dfrac{b^2x}{a^2y}(X-x).$

切线在两坐标轴上的截距为

$$X = x + \frac{a^2y^2}{b^2x} = \frac{a^2y^2 + b^2x}{b^2x} = \frac{a^2b^2}{b^2x} = \frac{a^2}{x},$$

$$Y = \frac{b^2}{y}.$$

于是所围三角形面积为

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{x} \cdot \frac{b^2}{y}. = \frac{a^3b}{2x\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$y = \frac{b}{a}.\sqrt{a^2 - x^2}$$

观察这个目标函数，只要求出分母的最大值，

但这个函数有根号，计算不方便.

转化为求它的平方的最大值.

令 $B(x)=x^2(a^2-x^2)$,

$B'(x)=2a^2x-4x^3\ (0<x<a)$.

令 $B'(x)=0$, 得唯一合理驻点 $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

此时 $y=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$. 由实际问题的性质知点 $M(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$

即为所求.

$$\boxed{A=\frac{a^3b}{2x\sqrt{a^2-x^2}}}$$

(方法2) 椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases} (0 < t < \frac{\pi}{2})$.

故三角形面积为

$$A = \frac{a^2b^2}{2xy} = \frac{a^2b^2}{2a(\cos t)(b\sin t)} = \frac{ab}{\sin 2t}.$$

显然，当 $\sin 2t$最大，即$t = \frac{\pi}{4}$时，面积A最小，

故点$(a\cos\frac{\pi}{4}, b\sin\frac{\pi}{4}) = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$即为所求 .

例5 就k的不同取值情况，确定方程$x-\frac{\pi}{2}\sin x=k$在开区间$(0,\frac{\pi}{2})$内的根的个数，并证明你的结论。

解 设$f(x)=x-\frac{\pi}{2}\sin x$，显然$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续.

由$f'(x)=1-\frac{\pi}{2}\cos x=0$，得$x_0=\arccos\frac{2}{\pi}$.

当$0<x<x_0$时，$f'(x)<0$;

当$x_0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)>0$;

故$x_0=\arccos\frac{2}{\pi}$是$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$内的最小值点.

最小值为 $y_0=f(x_0)=x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0$.

又 $f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$，所以 $f(x)$ 的值域为 $[y_0,0]$.

从而，当 $k\notin[y_0,0]$ 时，原方程在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内无根;

当 $k=y_0$ 时，原方程在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内有唯一根 x_0;

当 $k\in(y_0,0)$ 时，原方程在 $(0,x_0)$ 和 $(x_0,\frac{\pi}{2})$

内各有一个根.

$x-\frac{\pi}{2}\sin x=k$

$f(x)=x-\frac{\pi}{2}\sin x,$

三、同步练习

1. 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在区间 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 上的最大值和最小值.

2. 在 $1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$ 中求出最大的一个数 .

3. 证明不等式: $x^{\alpha}-\alpha x\le 1-\alpha\,(x>0,0<\alpha<1)$.

4. 如果 $x>0$, $f(x)=5x^2+Ax^{-5}$, 其中 A 为一正数, 求最小的 A 值, 使得 $f(x)\ge 24$.

5. 设$f(x), g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义， $f'(x)$, $f''(x)$存在, 且满足$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$, 如果$f(a)=f(b)=0(a<b)$, 求证：在(a,b)内$f(x)=0$.

6. 设 A, D分别是曲线 $y=\mathrm{e}^{x}$ 与$y=\mathrm{e}^{-2x}$上的点，且AB, CD均与x轴垂直， $|AB|:|DC|=2:1, |AB|<1$, 求B, C两点的坐标，使梯形 $ABCD$面积最大 .

7. 一张 1.4 m 高的图片挂在墙上，它的底边高于观察者的眼睛1.8 m，问观察者在距墙多远处看图才最清楚?

8. 把一根直径为 d 的圆木锯成矩形梁， 问矩形截面的高 h 和 b 应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大?

9. 铁路上 AB 段的距离为100 km, 工厂 C 距 A 处20 km , $AC \perp AB$, 要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修一条 公路, 已知铁路与公路每公里货运价之比为 3:5, 为使货物从 B 运到工厂 C 的运费最省, 问 D 点应如何选取?

10. 曲线 $y = \frac{1}{3}x^6 (x > 0)$ 上哪一点处的法线在 y 轴上截距最小.

11. 过曲线$y = 1 - 2\sqrt{x}\,(x \geq 0)$ 上一点引切线，设切线夹在两坐标轴间的部分长为 l, 求 l 取最小值时，切点的坐标以及 l的最小值.

四、同步练习解答

1. 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在区间 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 上的最大值和最小值.

解 易知 $f(x)\in C[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$, 且 $f(x)=\left|x(2x^2-9x+12)\right|$.

$$\because \quad \Delta=(-9)^2-4\cdot 2\cdot 12=81-96<0,$$

$$\therefore \quad 2x^2-9x+12>0,$$

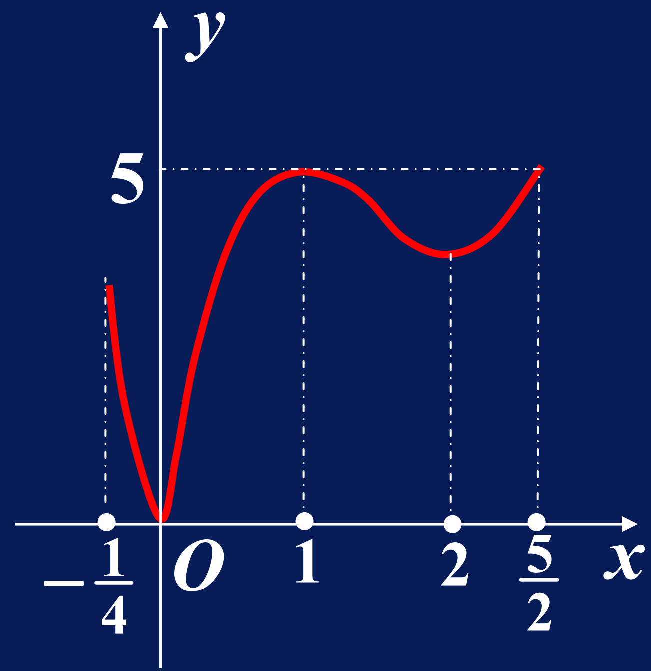
$$f(x)=\begin{cases}-(2x^3-9x^2+12x), & -\frac{1}{4}\le x\le 0,\\ 2x^3-9x^2+12x, & 0<x\le\frac{5}{2},\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2), & -\dfrac{1}{4}\le x<0,\\ 6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2), & 0<x\le\dfrac{5}{2},\end{cases}$$

故 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 内有极值可疑点 $x_1=0, x_2=1, x_3=2.$

又 $f(-\frac{1}{4})=3\frac{19}{32}$， $f(0)=0$,

$f(1)=5$， $f(2)=4$， $f(\frac{5}{2})=5$,



故函数在 $x=0$ 处取最小值 0；

在 $x=1$ 及 $\frac{5}{2}$ 处取最大值 5.

2. 在$1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$中求出最大的一个数 .

解 设$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，求$f(x)$的最大值.

$$f'(x)=(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x})'=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2};$$

令$f'(x)=0$,解得$x=\mathrm{e}$.

当$0 < x < \mathrm{e}$时, $f'(x) > 0$; 当$x > \mathrm{e}$时, $f'(x) < 0$,

所以$f(x)$在$x = \mathrm{e}$处取得极大值. 又因为$f(x)$可导,

且只有一个驻点，所以此极大值就是最大值.

又$2 < \mathrm{e} < 3$, 因此最大值在 $\sqrt{2}$与$\sqrt[3]{3}$之间，而

$$(\sqrt{2})^6 = 8, \quad (\sqrt[3]{3})^6 = 9,$$

可知$\sqrt[3]{3}$为数列中的最大数 .

3. 证明不等式: $x^{\alpha}-\alpha x\le 1-\alpha\,(x>0, 0<\alpha<1)$.

证 令$f(x)=x^{\alpha}-\alpha x-(1-\alpha)\quad (x>0)$.

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha$$

$$=\alpha(x^{\alpha-1}-1)\begin{cases} >0, & 0<x<1, \\ =0, & x=1, \\ <0, & x>1, \end{cases}$$

故$f(x)$在$x=1$处取得最大值,

即 当$x>0$时, $f(x)\le f(1)=0$,

亦即 $x^{\alpha}-\alpha x\le 1-\alpha$.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4. 如果$x>0, f(x)=5x^2+Ax^{-5}$, 其中A为一正数, 求最小的A值, 使得$f(x)\geq 24$.

解　本题即为求A的值, 使函数$f(x)$取得最小值24.

$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

$$f'(x)=10x-5Ax^{-6}=\frac{5(2x^7-A)}{x^6}.$$

令$f'(x)=0$, 得$x_0=\sqrt[7]{\frac{A}{2}}$, 这是开区间$(0,+\infty)$内唯一驻点.

$$f''(x) = 10 + 30Ax^{-7},$$

$$f''(x_0) = 10 + 30A \cdot \frac{2}{A} = 70 > 0.$$

所以, $f(x_0)$是$f(x)$在$(0,+\infty)$内的最小值.

令$f(x_0) = 24$, 即 $5\sqrt[7]{\frac{A^2}{2^2}} + A\sqrt[7]{\frac{2^5}{A^5}} = 24,$

从中解得$A = 2(\frac{24}{7})^{\frac{7}{2}}$, 此时$f(x) \geq 24$.

启发: 利用最值可以证明一些不等式.

5. 设$f(x), g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，$f'(x)$, $f''(x)$存在，且满足$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$, 如果$f(a)=f(b)=0(a<b)$, 求证：在(a,b)内$f(x)=0$.

证　用反证法. 若最大值 $M>0$, 设$f(x_M)=M$ $(x_M\in(a,b))$, 由费马定理得 $f'(x_M)=0$.

又$f(x_M)$为极大值，则$f''(x_M)\le 0$, 另由题设得

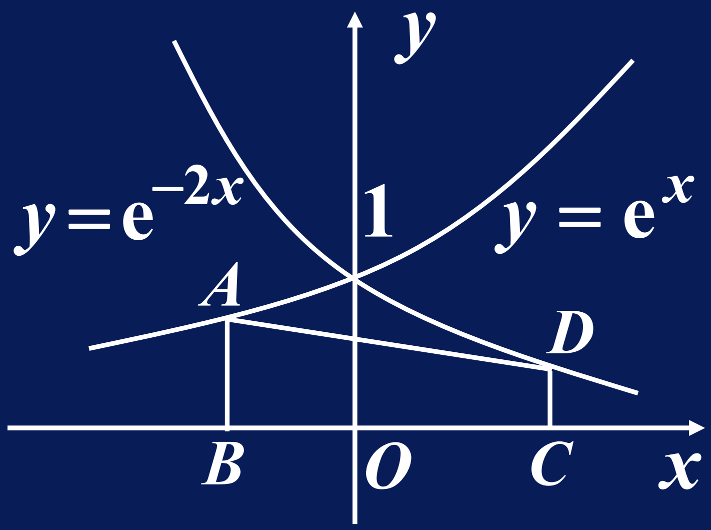
$$f''(x_M)=-f'(x_M)g(x_M)+f(x_M)=M>0,$$

从而推出矛盾，故最大值 $M \leq 0$.

同理可证得最小值 $m \geq 0$.

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 M 和最小值 m 都必需为零.

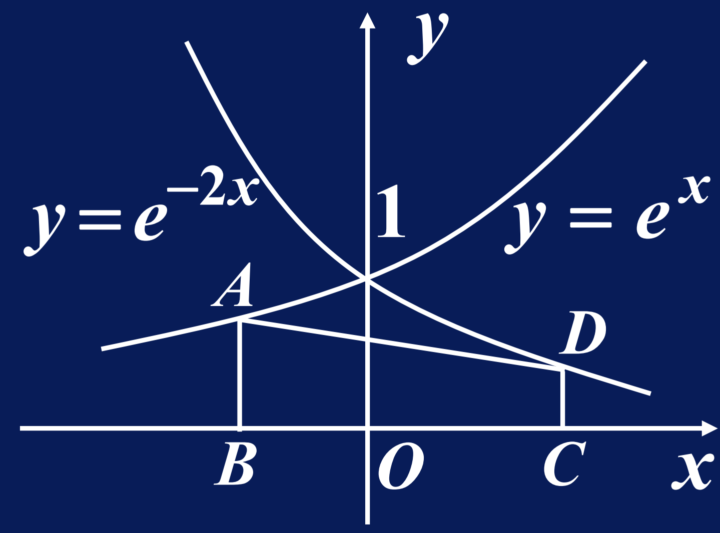
6. 设 A, D 分别是曲线 $y=\mathrm{e}^{x}$ 与 $y=\mathrm{e}^{-2x}$ 上的点，且 AB, CD 均与 x 轴垂直，$|AB|:|DC|=2:1$，$|AB|<1$，求 B, C 两点的坐标，使梯形 $ABCD$ 面积最大.



解 设 B, C 两点的横坐标为 x_1, x_2，则 A, D 两点的纵坐标为 e^{x_1}，e^{-2x_2}，由 $|AB|:|DC|=2:1$，知 $\mathrm{e}^{x_1}=2\mathrm{e}^{-2x_2}$，即 $x_1=\ln 2-2x_2$.

$$|BC| = x_2 - x_1 = 3x_2 - \ln 2.$$

梯形$ABCD$的面积为:



$$S = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)|BC|$$

$$= \frac{3}{2}(3x_2 - \ln 2)\mathrm{e}^{-2x_2},$$

$$S' = \frac{3}{2}(3 - 6x_2 + 2\ln 2)\mathrm{e}^{-2x_2}.$$

令$S' = 0$, 得 $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln 2$, $x_1 = \frac{1}{3}\ln 2 - 1.$

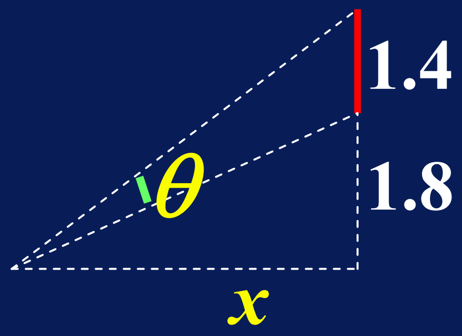
$$S'' = 6(3x_2 - 3 - \ln 2)\mathrm{e}^{-2x_2},$$

$$S''\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln 2\right) = -9\mathrm{e}^{-1-\frac{2}{3}\ln 2} < 0,$$

所以当B,C两点的横坐标分别为$\frac{1}{3}\ln 2 - 1$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln 2$时, 梯形$ABCD$面积最大.

$$S' = \frac{3}{2}(3 - 6x_2 + 2\ln 2)\mathrm{e}^{-2x_2}.$$

7. 一张 1.4 m 高的图片挂在墙上，它的底边高于观察者的眼睛1.8 m，问观察者在距墙多远处看图才最清楚?



分析 要看图最清楚，只要视角 θ 最大.

解 设观察者与墙的距离为 x m，则

$$\theta = \arctan\frac{1.4+1.8}{x} - \arctan\frac{1.8}{x},\quad x \in (0, +\infty).$$

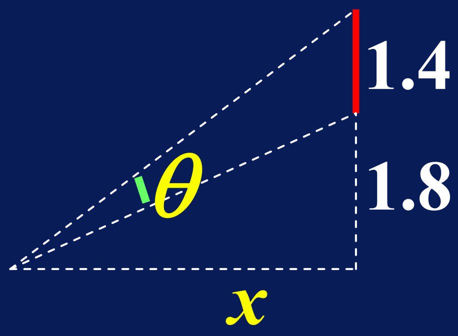
$$\theta' = \frac{-3.2}{x^2+3.2^2} + \frac{1.8}{x^2+1.8^2} = \frac{-1.4(x^2-5.76)}{(x^2+3.2^2)(x^2+1.8^2)}.$$

令 $\theta' = 0$, 得唯一驻点 $x = 2.4 \in (0, +\infty)$.

根据问题的实际意义，观察者最佳站位存在，

因此观察者站在距离墙 2.4 m 处视角 θ 最大,

从而看图最清楚.



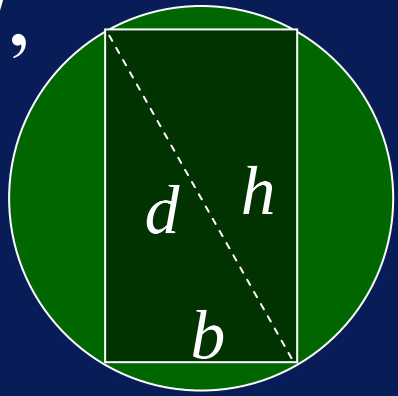
$$\theta' = \frac{-1.4(x^2 - 5.76)}{(x^2 + 3.2^2)(x^2 + 1.8^2)}$$

8. 把一根直径为 d 的圆木锯成矩形梁，问矩形截面的高 h 和 b 应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大?

解　由力学分析知矩形梁的抗弯截面模量为

$$w=\frac{1}{6}bh^2=\frac{1}{6}b(d^2-b^2),\quad b\in(0,d).$$

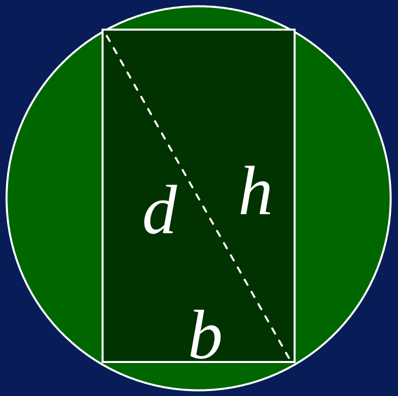
令 $w'=\frac{1}{6}(d^2-3b^2)=0$，得 $b=\sqrt{\frac{1}{3}}\,d$，



从而有　$h=\sqrt{d^2-b^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\,d$，

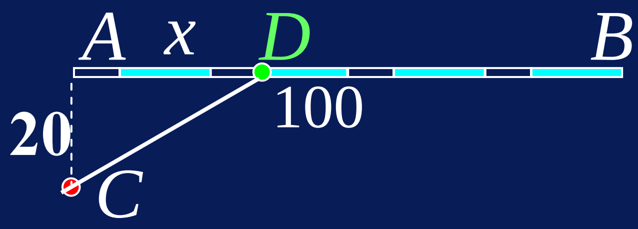
即　$d:h:b=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1.$

$$d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1.$$



由实际意义可知，所求最值存在，且驻点唯一，故所求结果就是最好的选择．

9. 铁路上 AB 段的距离为100 km, 工厂 C 距 A 处20 km , $AC\perp AB$, 要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修一条 公路, 已知铁路与公路每公里货运价之比为 3:5, 为使货物从 B 运到工厂 C 的运费最省, 问 D 点应如何选取?



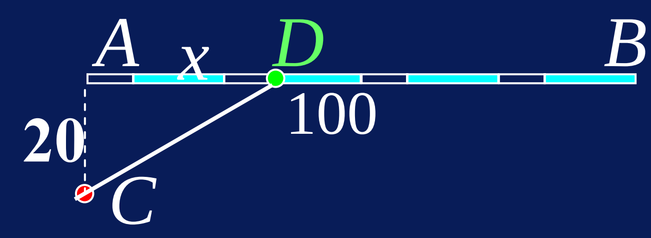
解 设 $AD = x$ (km),

则 $CD = \sqrt{20^2 + x^2}$, 总运费

$$y = 5k\sqrt{20^2 + x^2} + 3k(100 - x),\ (0 \le x \le 100).$$

$$y = 5k\sqrt{20^2 + x^2} + 3k(100 - x),$$

$$y' = k\left(\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3\right),$$



$$y'' = 5k\frac{400}{(400 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 15$, 又 $y''|_{x=15} > 0$, 所以 $x = 15$

为唯一的极小点，从而为最小点，故 $AD = 15$ km

时运费最省．

10. 曲线 $y=\frac{1}{3}x^6(x>0)$上哪一点处的法线在 y轴上截距最小.

解 设$y=\frac{1}{3}x^6(x>0)$,点(x,y)处的法线方程为:

$$Y-y=k(X-x),$$

因为$y'=2x^5$, 所以$k=-\frac{1}{2x^5}$, 法线方程为:

$$Y-y=-\frac{1}{2x^5}(X-x),$$

整理后为:

$$Y = y - \frac{X}{2x^5} + \frac{1}{2x^4} = -\frac{X}{2x^5} + \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3}x^6.$$

法线在y轴的截距为:

$$b = \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3}x^6.$$

求此函数极值: $b' = -\frac{2}{x^5} + 2x^5.$

令$b' = 0$, 解得$x_1 = 1, x_2 = -1$(舍去);

$$b'' = \frac{10}{x^6} + 10x^4, \quad b''(1) = 20 > 0,$$

故$b(1)$为极小值．由于驻点唯一，知它也是最小值,

因此曲线在点$(1, \frac{1}{3})$处的法线在y轴上的截距最小．

11. 过曲线$y=1-2\sqrt{x}(x\geq 0)$上一点引切线，设切线夹在两坐标轴间的部分长为 l，求 l 取最小值时，切点的坐标以及 l的最小值.

解 设切点为 (x_0, y_0)，则切线的斜率为

$$f'(x_0)=-\frac{1}{\sqrt{x_0}}.$$

可得切线方程为：

$$Y-y_0=-\frac{1}{\sqrt{x_0}}(X-x_0).$$

又(x_0, y_0)在曲线上，所以$y_0 = 1 - 2\sqrt{x_0}$,

故 $$Y - (1 - 2\sqrt{x_0}) = -\frac{1}{\sqrt{x_0}}X + \sqrt{x_0},$$

从而 $$Y = -\frac{1}{\sqrt{x_0}}X - \sqrt{x_0} + 1.$$

此切线与 y轴的交点为 $(0,1 - \sqrt{x_0})$,

与x轴的交点为$(\sqrt{x_0} - x_0, 0)$.

令$L = l^2 = (1 - \sqrt{x_0})^2 + (\sqrt{x_0} - x_0)^2$,

当L取最小值时，l也取最小值.

而$L' = 2 - 3\sqrt{x_0} + 2x_0 - \frac{1}{\sqrt{x_0}}$, 当$x_0 = 1$时,$L' = 0$,

$L'' = 2 - \frac{3}{2}x_0^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x_0^{-\frac{3}{2}}$, 当$x_0 = 1$时,$L'' > 0$,

故当$x_0 = 1$时, $L = l^2$取最小值, l也取最小值,

此时$l = 0$, $y_0 = -1$, 从而切点为$(1,-1)$.

$$L = l^2 = (1 - \sqrt{x_0})^2 + (\sqrt{x_0} - x_0)^2$$