第七节　　二次曲面

习题　7-7

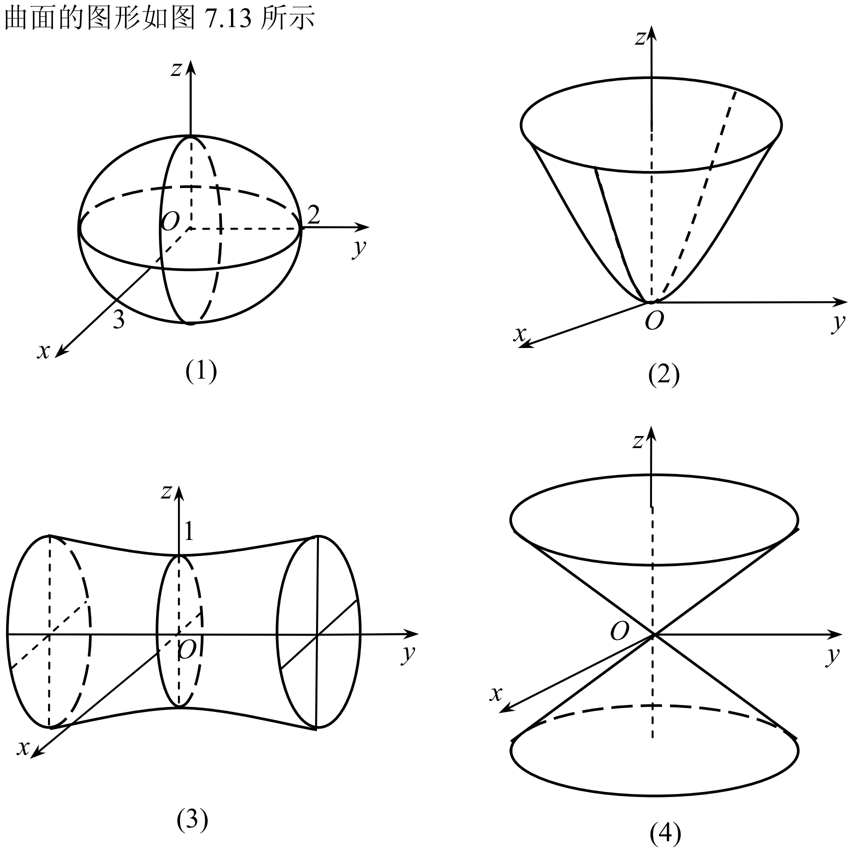
1. 指出下列曲面的名称, 并作图:

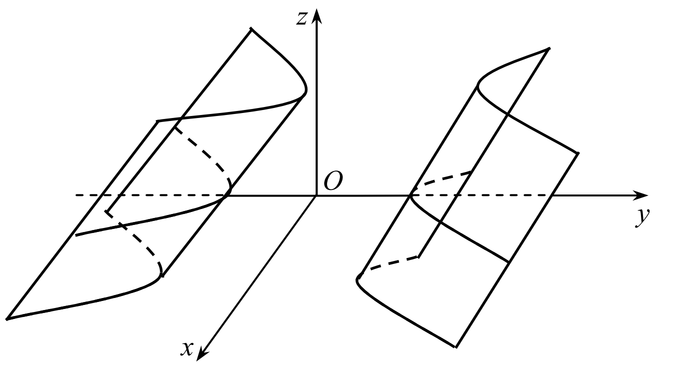
(1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$;　　(2) $\frac{z}{3}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$;

(3) $4x^2-4y^2+z^2=1$;　　(4) $z^2=16x^2+y^2$;

(5) $y^2-4z^2=9$.

解 (1) 此方程表示椭球面;
(2) 此方程表示椭圆抛物面;
(3) 此方程表示单叶双曲面;
(4) 此方程表示椭圆锥面;
(5) 此方程表示双曲柱面.
各曲面的图形如图 7.13 所示





(5)

图 7.13

2. 求曲线$\begin{cases} y^2+z^2-2x=0, \\ z=3 \end{cases}$在 xOy 面上的投影曲线的方程，并指出原曲线是什么样曲线.

解 消去 z，将 $z=3$ 代入第一方程得 $y^2+z^2-2x=0$，则投影曲线的方程为

$$\begin{cases} y^2=2(x-\dfrac{9}{2}), \\ z=0. \end{cases}$$

原曲线是 $z=3$ 平面上，以平行于 x 轴的直线为轴的抛物线.

3. 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的中心到从中心按单位向量 $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 所确定的方向引出的直线与椭球面的交点的距离为 p，试证明：

$$\frac{\cos\alpha^2}{a^2}+\frac{\cos\beta^2}{b^2}+\frac{\cos\gamma^2}{c^2}=\frac{1}{p^2}.$$

证 从椭球面的中心 $(0,0,0)$ 到从中心按单位向量 $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 所确定的方向引出的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\cos\alpha\cdot t, \\ y=\cos\beta\cdot t, \qquad t\in(-\infty,+\infty), \\ z=\cos\gamma\cdot t, \end{cases}$$

由此可设椭球面与该直线的交点坐标为 $M(\cos\alpha\cdot t_0,\cos\beta\cdot t_0,\cos\gamma\cdot t_0)$，则有

$$p^2=(\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2)\cdot t_0^2=t_0^2.$$

又交点 M 也在椭球面上，故

$$\left(\frac{\cos\alpha^2}{a^2}+\frac{\cos\beta^2}{b^2}+\frac{\cos\gamma^2}{c^2}\right)\cdot t_0^2=1,$$

从而有

$$\left(\frac{\cos\alpha^2}{a^2}+\frac{\cos\beta^2}{b^2}+\frac{\cos\gamma^2}{c^2}\right)\cdot p^2=1,$$

即 $\dfrac{\cos\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\cos\beta^2}{b^2}+\dfrac{\cos\gamma^2}{c^2}=\dfrac{1}{p^2}$.

4. 画出下列各曲面所围成的立体的图形:

(1) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=2,\ y=1,\ 3x+4y+2z-12=0$;

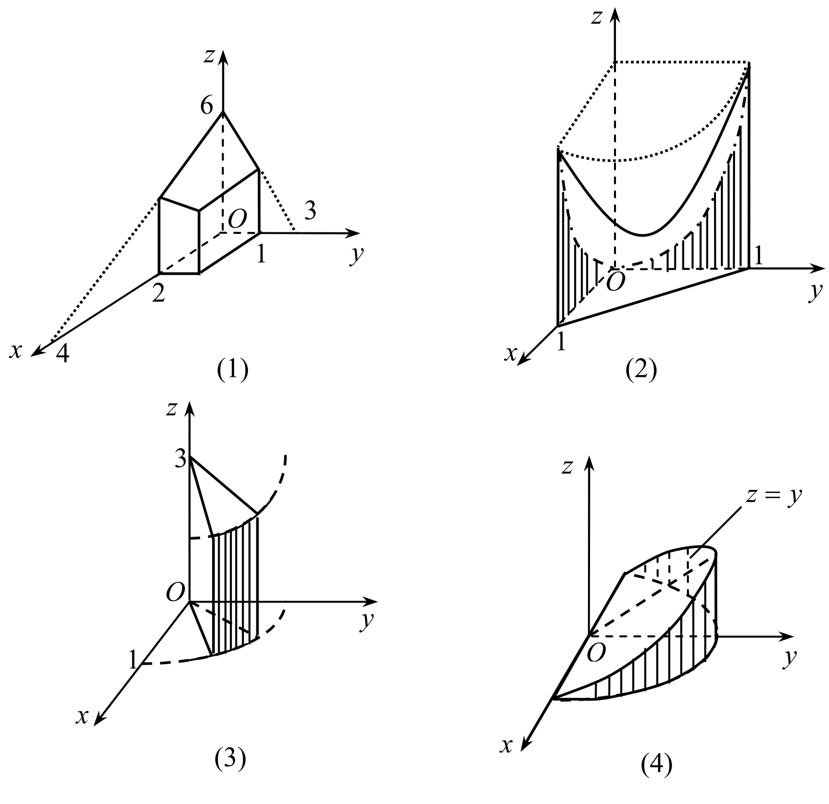
(2) $z=x^2+y^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=1$;

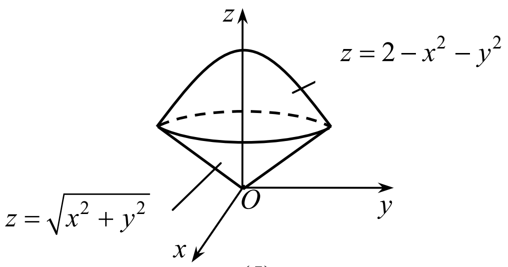
(3) $z=0,\ z=3,\ x-y=0,\ x-\sqrt{3}y=0,\ x^2+y^2=1$(在第一卦限内);

(4) $y=\sqrt{1-x^2},\ z=y,\ z=0$;

(5) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=2-x^2-y^2$.

解 各立体的图形如图 7.14 所示





(5)

图 7.14