第二节 定积分的几何应用(3)

——平面曲线的弧长

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

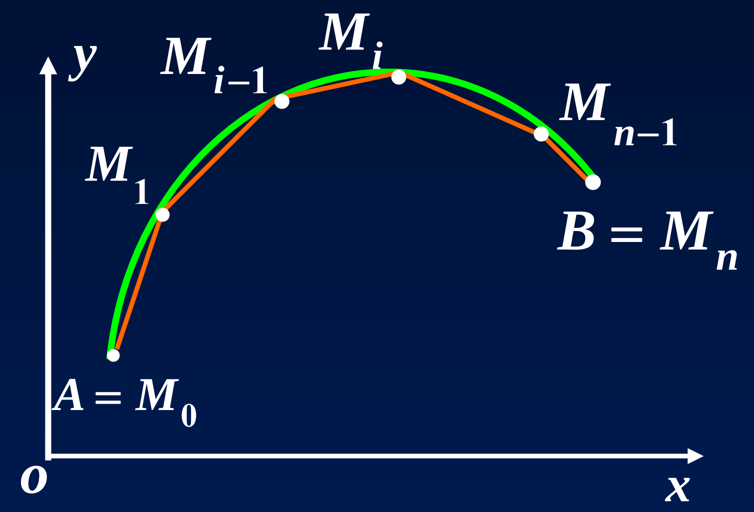
一、主要内容

(一)、平面曲线的弧长

1. 平面曲线弧长的概念

定义. 设A、B是曲线弧上的两个端点，在弧上插入分点：

$$A = M_0, M_1, \cdots M_i, \cdots, M_{n-1}, M_n = B$$

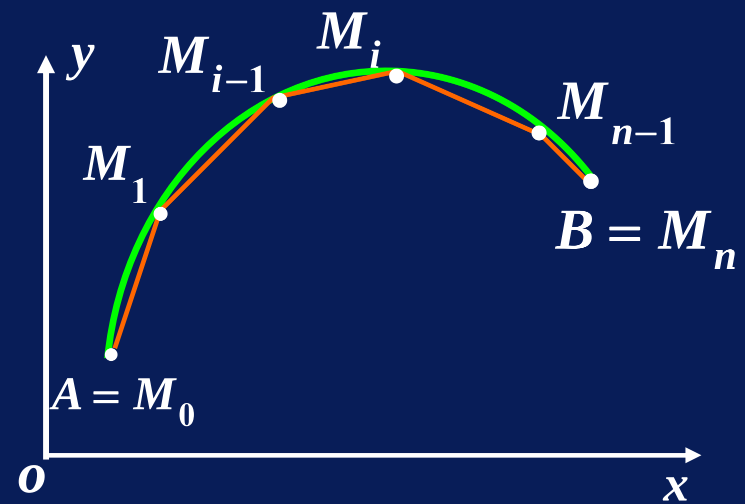


并依次连接相邻分点得一内接折线，当分点的数目无限增加且每个小弧段都缩向一

一点时，此折线的长

$$\sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$$ 的极限存在，

则称此极限为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长，且称弧 $\overset{\frown}{AB}$ 是可求长的.



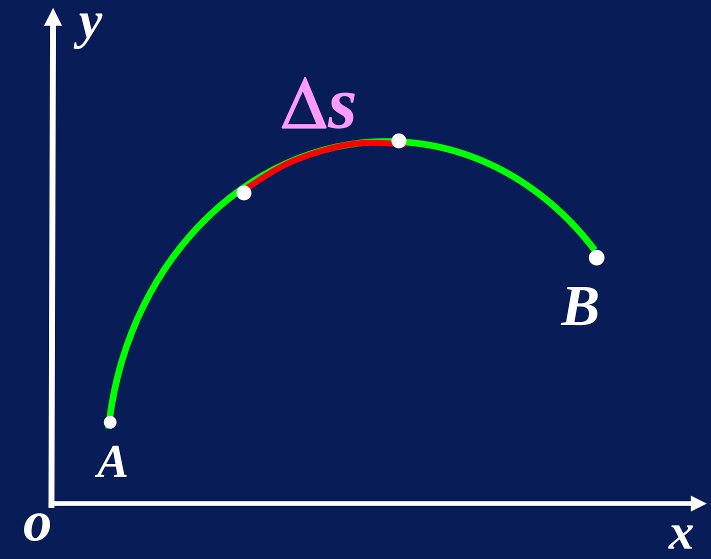
可以证明：

定理 光滑曲线弧必可求长.

曲线上每一点均有切线，且切线随切点的移动而连续转动.

2. 弧长的计算公式

(1) 参数方程情形



曲线弧由参数方程给出:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

其中$\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有连续导数.

取参数t为积分变量, 则 $t \in [\alpha, \ \beta]$.

$\forall \quad [t, t+\mathrm{d}t] \subset [\alpha, \beta]$,

对应该小区间的弧段的长度Δs, 有

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

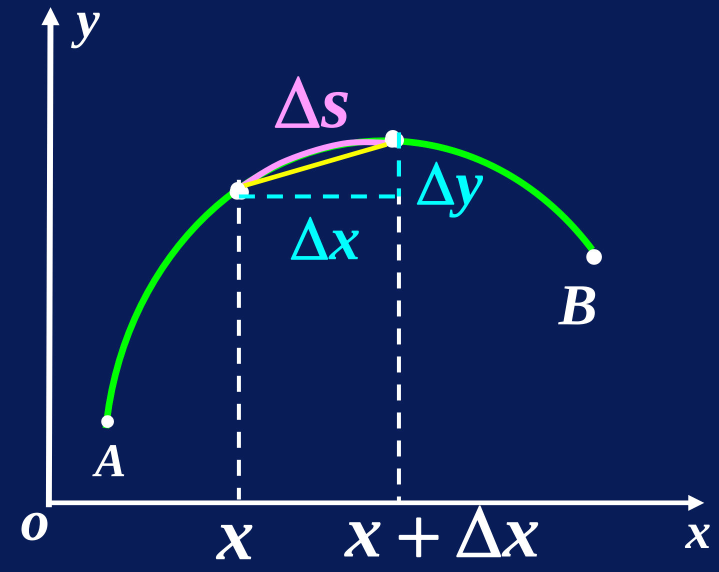
$\because$ 当$|\Delta t|$很小时,

$$\Delta x = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$$

$$\approx \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta y = \psi(t+\Delta t) - \psi(t)$$

$$\approx \mathrm{d}y = \psi'(t)\,\mathrm{d}t$$



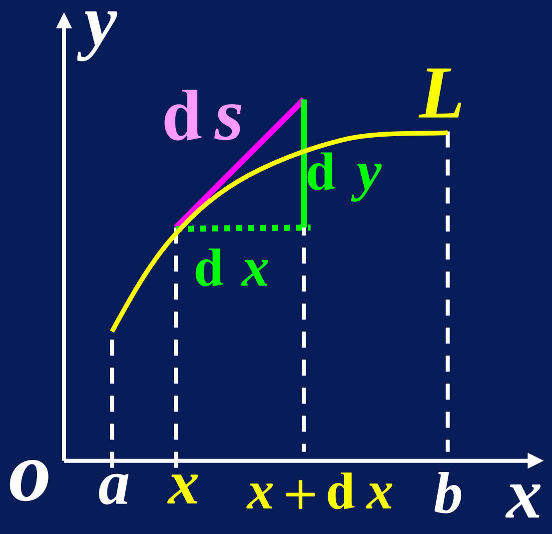
$$\therefore \quad \Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\approx \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

可以证明：弧长元素(弧微分)

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$$=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$



因此所求弧长

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt\quad(\alpha\le\beta)$$

(2) 直角坐标情形

设曲线弧 L 由直角坐标方程给出:

$$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数.

L 的参数方程: $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \quad (a \le x \le b) \end{cases}$

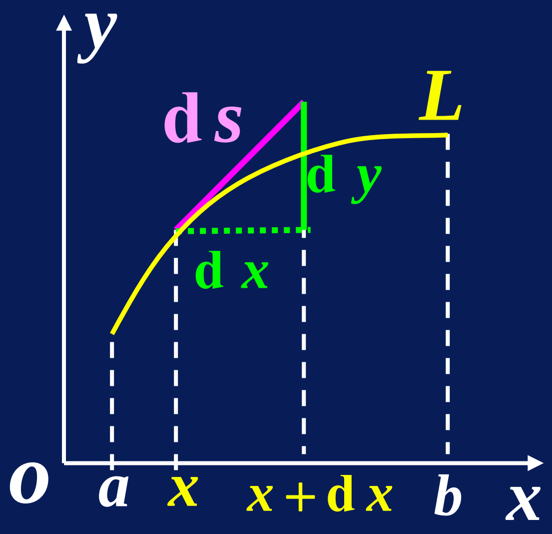
弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

弧长:

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \qquad (a \le b)$$

$$=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$



(3) 极坐标情形

曲线弧由极坐标方程给出:

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

其中$\varphi(\theta)$在$[\alpha, \beta]$上具有连续导数.

$$\because \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

弧长元素(弧微分):

$$\therefore \quad \mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{[\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta]^2 + [\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta,$$

因此所求弧长

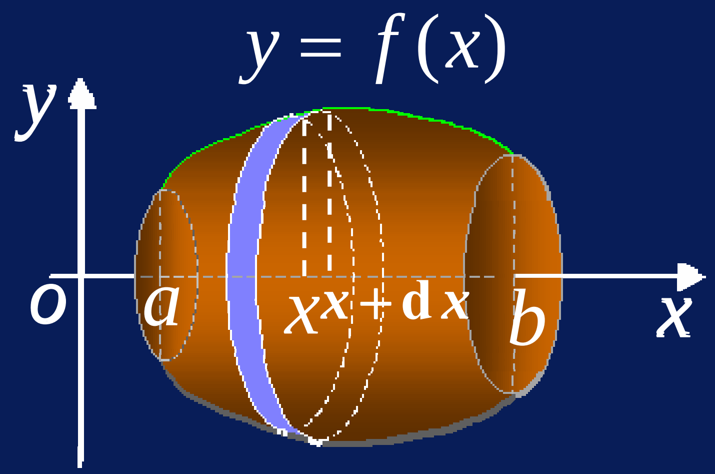
$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \quad (\alpha \le \beta)$$

★ (二) 旋转体的侧面积

设平面光滑曲线

$$y = f(x) \in C^1[a,b],$$

且 $f(x) \geq 0$, 求它绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的侧面积.



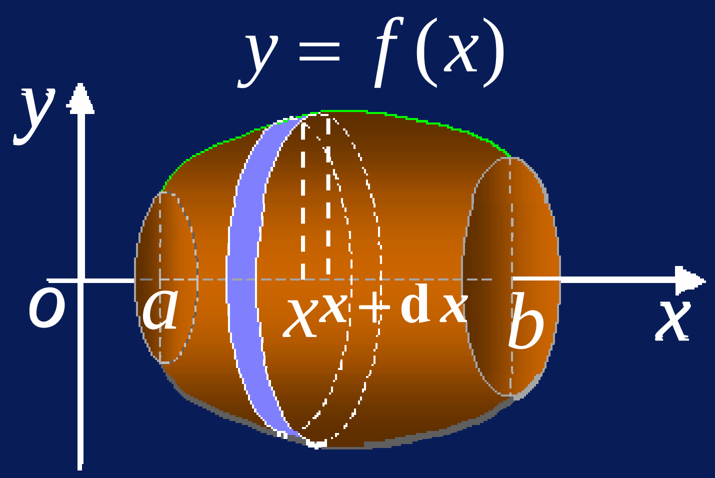
位于 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的圆台的侧面积

$$\Delta A = \pi[y + (y + \mathrm{d}\, y)]\mathrm{d}\, s$$

$$= 2\pi y\,\mathrm{d}s + \pi\,\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}s$$

$$= 2\pi y\,\mathrm{d}s + \pi y'\,\mathrm{d}x \cdot \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{2\pi y\,\mathrm{d}s} + o(\mathrm{d}x)$$



可以证明：侧面积元素恰为

$$\mathrm{d}S = 2\pi y\,\mathrm{d}s$$

$$= 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

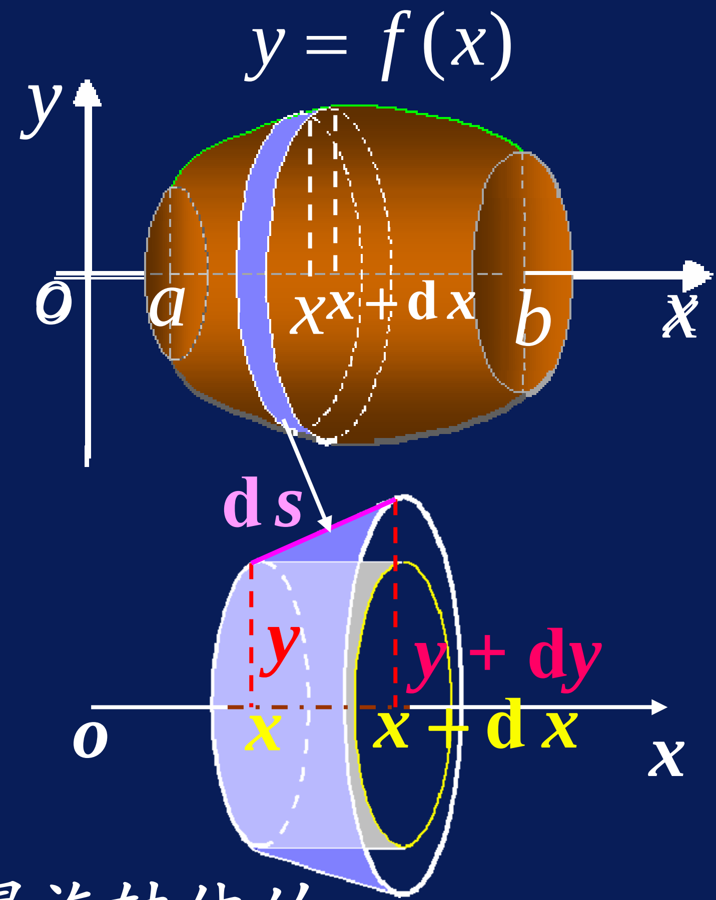
积分后得旋转体的侧面积

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

注 侧面积元素

$$\mathrm{d}S = 2\pi y\,\mathrm{d}s \neq 2\pi y\,\mathrm{d}x$$

因为$2\pi y\,\mathrm{d}x$ 不是薄片侧面积 ΔS 的线性主部.



若光滑曲线由参数方程

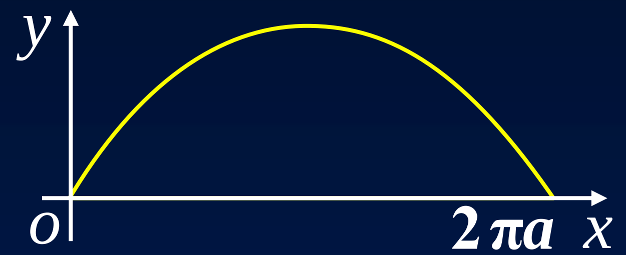
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

给出, 则它绕 x 轴旋转一周所得旋转体的

侧面积为 $S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$

二、典型例题

例1 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长.



解 $$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\;\mathrm{d}t$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t = 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$$

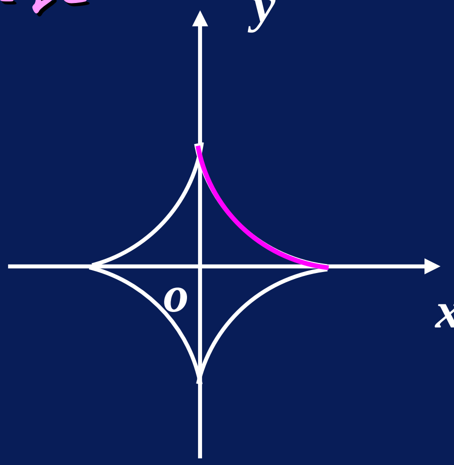
例2 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$ 的全长.

解 星形线的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

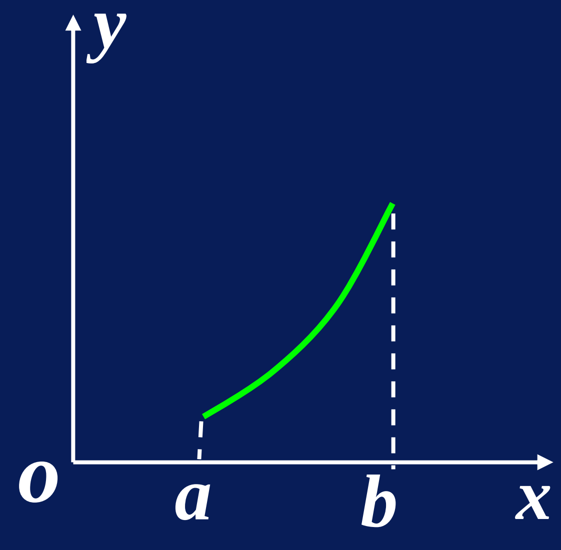
根据对称性 ⟶ 第一象限部分的弧长

$$s = 4s_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = 6a.$$



例3 计算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 x 从 a 到 b 的一段弧的长度.



解 $\because \quad y' = x^{\frac{1}{2}},$

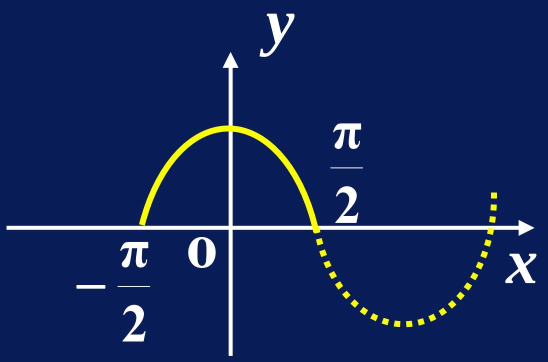
$$\therefore \quad ds = \sqrt{1+(x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx$$

$$= \sqrt{1+x}\,dx,$$

所求弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}[(1+b)^{\frac{3}{2}} - (1+a)^{\frac{3}{2}}].$$

例4 求连续曲线段 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$ 的弧长.



解 $\because \quad \cos t \ge 0,\quad t\in[-\frac{\pi}{2}, x]$

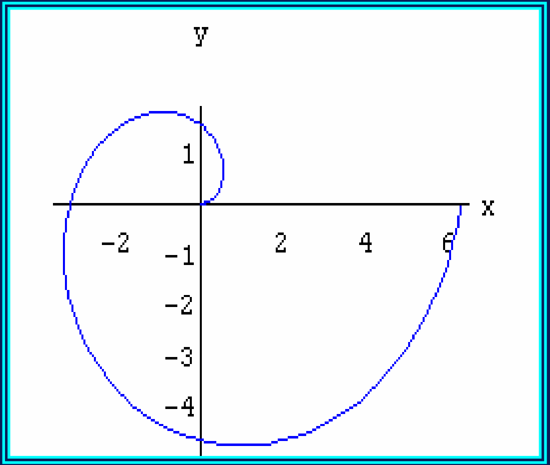
$\therefore \quad x=\frac{\pi}{2},$

又 $\because \quad y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\cos x}$

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(\sqrt{\cos x})^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=4$$

例5 求阿基米德螺线$\rho = a\theta \ (a>0)$上相应于θ从0到2π的弧长.



解 $\because \quad \rho' = a,$

$$\therefore \ s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\,\mathrm{d}\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})\right].$$

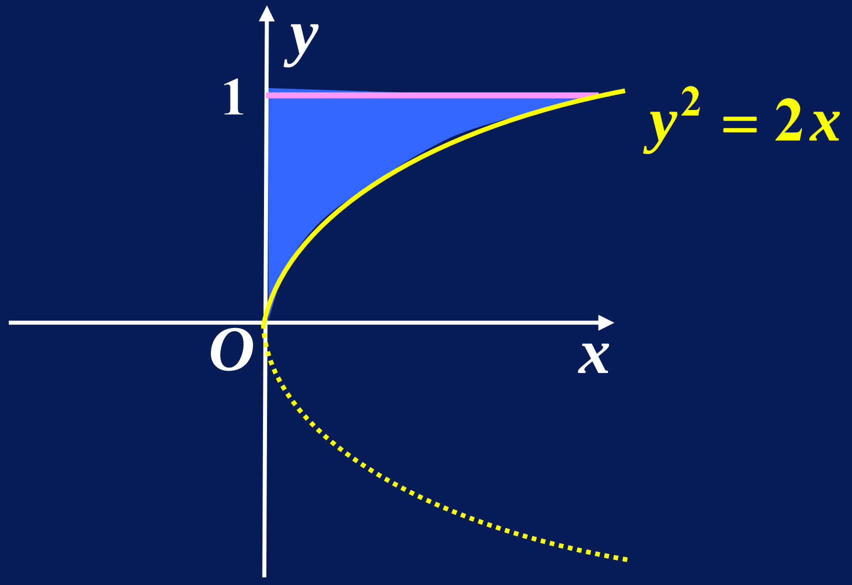
例6(综合题)

已知曲边三角形由抛物 线 $y^2=2x$及直线 $x=0,\ y=1$所围成，求

(1) 曲边三角形的面积;

(2) 曲边三角形绕 $y=1$旋转所成旋转体的体积；

(3) 曲边三角形的周长．

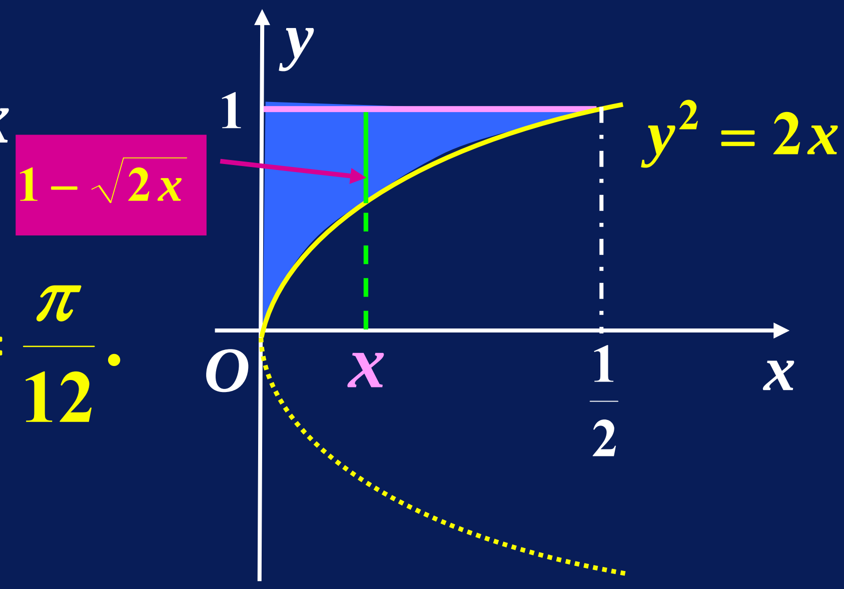


解 (1) $A=\int_0^1 \frac{y^2}{2}\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{6}y^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

$$(2)\ V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\sqrt{2x})^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2\sqrt{2x}+2x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{12}.$$



$$(3)\quad x'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=y,$$

$$\mathrm{d}s_1=\sqrt{1+x'^2}\,\mathrm{d}y=\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$s_1=\int_0^1\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y \xlongequal{y=\tan t} \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sec^2 t}\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\because \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t\,\mathrm{d}(\tan t)$$

$$= \sec t \cdot \tan t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t \tan^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t(\sec^2 t - 1)\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t\,\mathrm{d}t$$

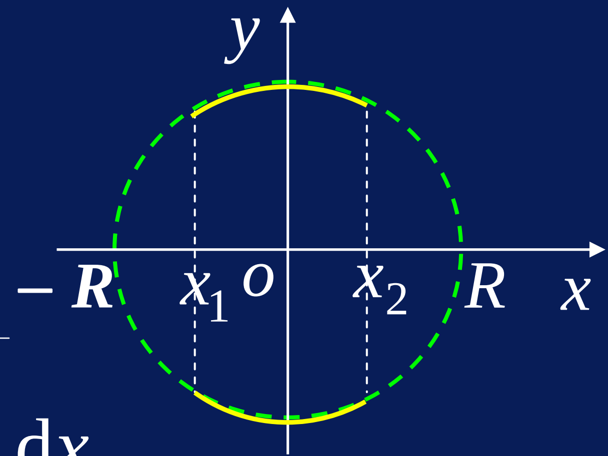
$$= \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 t\,\mathrm{d}t + \ln(\sec t + \tan t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 t \, \mathrm{d} t = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{2}.$$

从而周长: $$s = s_1 + 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3+\sqrt{2}}{2} - \frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{2}.$$

例7 计算圆 $x^2+y^2=R^2$ 上 $x\in[x_1,x_2]\subset[-R,R]$ 的一段弧绕 x 轴旋转一周所得的球台的侧面积 S.

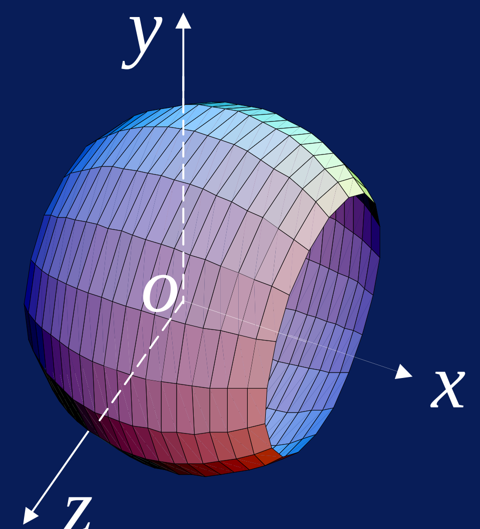


解 对曲线弧

$$y=\sqrt{R^2-x^2},\ x\in[x_1,x_2]$$

$$S=2\pi\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_{x_1}^{x_2}R\,\mathrm{d}x=2\pi R(x_2-x_1)$$



当球台高 $h=2R$ 时, 得球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

三、同步练习

1. 两根电线杆之间的电线, 由于其本身的重量, 下垂成悬链线. 悬链线方程为

$$y = c\,\mathrm{ch}\frac{x}{c} \quad (-b \le x \le b)$$

求这一段弧长 .

2. 计算曲线 $y = \int_0^{\frac{x}{n}} n\sqrt{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$ 的弧长$(0 \le x \le n\pi)$.

3. 求极坐标系下曲线$r = a(\sin\frac{\theta}{3})^3$的长. 其中$a > 0$, $0 \le \theta \le 3\pi$.

4. 证明: 正弦线 $y = a\sin x\ \ (0 \le x \le 2\pi)$ 的弧长等于椭圆 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sqrt{1+a^2}\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 的周长.

5. 试用定积分求圆 $x^2 + (y-b)^2 = R^2\ \ (R < b)$ 绕 x 轴旋转而成的环体的表面积 S.

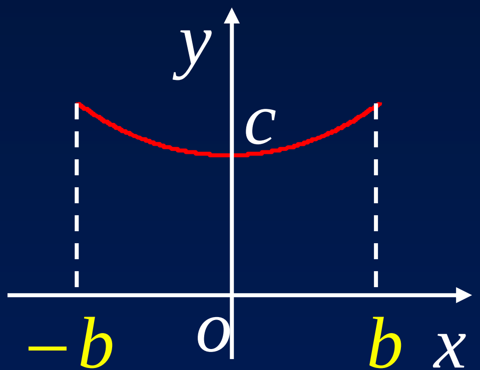
四、同步练习解答

1. 两根电线杆之间的电线, 由于其本身的重量, 下垂成悬链线. 悬链线方程为

$$(c\,\mathrm{ch}\frac{x}{c})' = c\cdot\frac{1}{c}\mathrm{sh}\frac{x}{c}$$

$$y = c\,\mathrm{ch}\frac{x}{c} \quad (-b \le x \le b)$$

求这一段弧长.



解 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{c}}\,\mathrm{d}x$

$= \mathrm{ch}\frac{x}{c}\mathrm{d}x$

$\therefore \quad s = 2\int_0^b \mathrm{ch}\frac{x}{c}\mathrm{d}x = 2c\left[\mathrm{sh}\frac{x}{c}\right]_0^b = 2c\,\mathrm{sh}\frac{b}{c}$

2. 计算曲线 $y=\int_0^{\frac{x}{n}} n\sqrt{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$ 的弧长$(0\le x\le n\pi)$.

解 $y' = n\sqrt{\sin\frac{x}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \sqrt{\sin\frac{x}{n}}$,

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{x=nt}}\ \int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin t}\cdot n\,\mathrm{d}t$$

$$=n\int_0^{\pi}\sqrt{(\sin\frac{t}{2})^2+(\cos\frac{t}{2})^2+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=n\int_0^{\pi}(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2})\mathrm{d}t=4n.$$

3. 求极坐标系下曲线$r=a(\sin\frac{\theta}{3})^3$的长.

$(a>0)\quad (0\le\theta\le 3\pi)$

解 $\because\ \rho'=3a(\sin\frac{\theta}{3})^2\cdot\cos\frac{\theta}{3}\cdot\frac{1}{3}=a(\sin\frac{\theta}{3})^2\cdot\cos\frac{\theta}{3}$,

$$\therefore\quad s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2(\sin\frac{\theta}{3})^6+a^2(\sin\frac{\theta}{3})^4(\cos\frac{\theta}{3})^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=a\int_0^{3\pi}(\sin\frac{\theta}{3})^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi a.$$

4. 证明：正弦线 $y = a\sin x \quad (0 \le x \le 2\pi)$ 的弧长

等于椭圆 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sqrt{1+a^2}\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$ 的周长.

证 设正弦线的弧长等于 s_1

$$s_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+a^2\cos^2 x}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{1+a^2\cos^2 x}\,dx,$$

设椭圆的周长为s_2,

$$s_2=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,\mathrm{d}t,$$

根据椭圆的对称性知

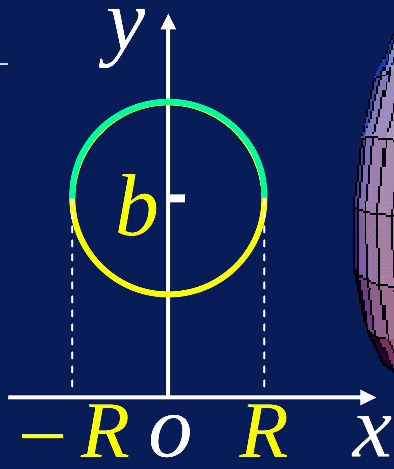
$$s_2=2\int_0^{\pi}\sqrt{(\sin t)^2+\left(1+a^2\right)(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

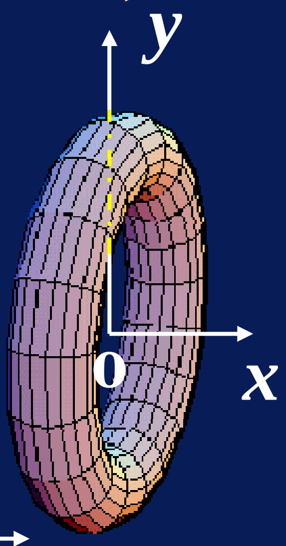
$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{1+a^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{1+a^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=s_1,$$

故原结论成立.

5. 试用定积分求圆 $x^2+(y-b)^2=R^2\ (R<b)$ 绕 x 轴旋转而成的环体的表面积 S .





解 上/下半圆为: $y=b\pm\sqrt{R^2-x^2}$

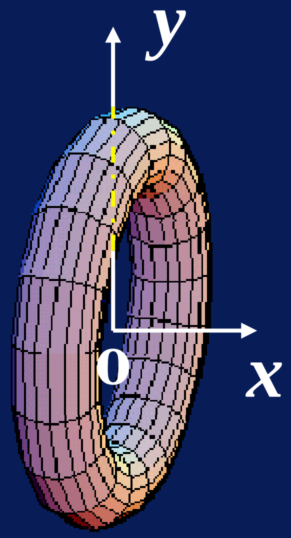
$$y'=\mp\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$S=2\int_0^R 2\pi\left(b+\sqrt{R^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{利用对称性}$$

$$+2\int_0^R 2\pi\left(b-\sqrt{R^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

二者 y'^2 相同

$$= 8\pi b\int_0^R \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi^2 bR$$



上式也可写成

$$S = 2\pi R\cdot 2\pi b = \int_0^{2\pi} 2\pi R\cdot b\,\mathrm{d}\theta$$

它也反映了环面微元的另一种取法.