第七章总习题

1. 填空

(1) 点 $M(-1,3,-3)$ 位于第__6__卦限， 关于 x 轴对称点的坐标为 $\underline{(-1,-3,3)}$.

(2) 设 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$, $\boldsymbol{b}=(4,-1,10)$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, 则 $\lambda=\underline{\ 3\ }$.

(3) 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 都是单位向量, 且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\underline{-\frac{3}{2}}$.

(4) 设数 λ_1、λ_2、λ_3 不全为 0, 使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=0$, 则 $[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]=\underline{\ 0\ }$, 从而三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是__共面__的.

(5) 设 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=-1$, 则 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\underline{\frac{2\pi}{3}}$.

(6) 设平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 通过原点，且与平面 $6x-2z+5=0$ 平行，则 $A=\underline{\ -3\ }$, $B=\underline{\ 0\ }$, $D=\underline{\ 0\ }$.

(7) 设直线 $\dfrac{x-1}{m}=\dfrac{y+2}{2}=\lambda(z-1)$ 与平面 $-3x+6y+3z+25=0$ 垂，则 $m=\underline{\ -1\ }$, $\lambda=\underline{\ 1\ }$.

(8) 直线 $\begin{cases}x=1,\\ y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程为 $\underline{x^2+y^2=1}$.

解 (1) 略.

(2) $\because \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\lambda|\boldsymbol{a}|^2=27-9\lambda=0$,

$\therefore \lambda=3$.

(3) 由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$, 得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$,

而
$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\ \underline{\underline{\text{交换律}}}\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(-\boldsymbol{c})=-|\boldsymbol{c}|^2=-1.$$

同样可得 $$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-1.$$

于是 $$2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=-3,$$

故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{3}{2}$.

(4) 设 $\lambda_3\neq 0$, 则由 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 有 $\boldsymbol{c}=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\boldsymbol{a}-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}\boldsymbol{b}$, 所以

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\times(-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\boldsymbol{a}-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\boldsymbol{b})=-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}=0,$$

从而$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$共面.

(5) 由$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=-1$有$|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=-1$，所以

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=-\frac{1}{2},$$

故$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{2\pi}{3}$.

(6) 由平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$过原点知，$D=0$．由平面π与平面$6x-2z+5=0$平行，可得

$$(A,B,1)=\lambda(6,0,-2),$$

即

$$A=6\lambda,\ B=0,\ -2\lambda=1,$$

于是$\lambda=-\frac{1}{2}$，$A=-3$.

(7) 直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(m,2,\frac{1}{\lambda}),$$

平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(-3,6,3),$$

则由题设有，$\boldsymbol{s}//\boldsymbol{n}$，即

$$\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ m & 2 & \frac{1}{\lambda}\\ -3 & 6 & 3\end{vmatrix}=(6-\frac{6}{\lambda},-3m-\frac{3}{\lambda},6m+6)=0,$$

于是有$\begin{cases}6-\frac{6}{\lambda}=0,\\ 6m+6=0,\end{cases}$ 解之得$\lambda=1$，$m=-1$.

(8) 略.

2. 单项选择题

(1) 下列各组角中，可以作为向量的方向角的是(A).

(A) $\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{2\pi}{3}$； (B) $-\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}$；

(C) $\frac{\pi}{6}$，π，$\frac{\pi}{6}$； (D) $\frac{2\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}$.

(2) 若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为共线的单位向量，则它们的数量积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$(D).

(A) 1； (B) -1；

(C) 0； (D) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

(3) 设向量$\boldsymbol{a}(-1,1,2)$, $\boldsymbol{b}=(3,0,4)$，则$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=$(C).

(A) $\dfrac{5}{\sqrt{6}}$; (B) $-\dfrac{5}{\sqrt{6}}$;

(C) 1; (D) -1.

(4) 设三个非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，则(B).

(A) $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$; (B) $\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$;

(C) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$; (D) $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$;

(5) 设平面$Ax+By+Cz+D=0$过x轴，则(C).

(A) $A=0$; (B) $B=0,\ C=0$;

(C) $A=0,\ D=0$; (D) $D=0$.

(6) 直线$\begin{cases}x+2y=1,\\2y+z=1\end{cases}$与直线$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$的关系是(C).

(A) 平行; (B) 重合;

(C) 垂直; (D) 既不平行也不垂直.

(7) 曲面$z=2x+4y^2$称为(D).

(A) 椭球面; (B) 圆锥面;

(C) 旋转抛物面; (D) 椭圆抛物面.

(8) 方程$4x^2-y^2+4z^2=-3$表示(D).

(A) 球面; (B) 双曲抛物面;

(C) 单叶双曲面; (D) 双叶双曲面.

解 (1) 主要是验证三个角余弦的平方和是否为 1，经验证 A 正确.

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,

由$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$共线，知$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$或$\pi$.

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm1$,

故此题选 D.

(3) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}|\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=1$,

故此题选 C.

(4) 由$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$可知$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，故$\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，从而选 B.

(5) 平面过x轴，其必过原点，故$D=0$，且$(A,B,C)\perp(1,0,0)$，故$A=0$.

故此题选 C.

(6)　直线 L_1 的方向向量为

$$s_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,2),$$

直线 L_2 的方向向量为

$$s_2 = (1,0,-1).$$

$\because s_1 \cdot s_2 = (2,-1,2)\cdot(1,0,-1) = 0$,

$\therefore s_1 \perp s_2$, 从而　$L_1 \perp L_2$.

故此题选 C.

(7)　此题选 D.

(8)　此题选 D.

3.　设有平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 O, $\overrightarrow{AB} = (2,-2,1)$, $\overrightarrow{AD} = (2,2,5)$, 求 ΔOBC 的面积.

解　如图 7.15,

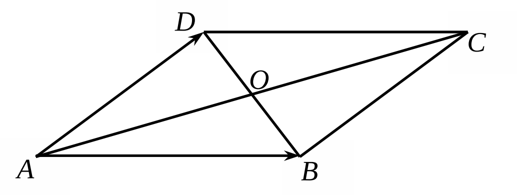

图 7.15

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{4} S_{\square ABCD} = \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$$

$$= \frac{1}{4}\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{4}\left|(-12,-8,8)\right|$$

$$= \sqrt{17}.$$

4.　已知 ΔABC 的顶点依次为 $A(3,2,-1)$、$B(5,-4,7)$、$C(-1,1,2)$, 求从点 C 向 AB 边所引中线的长度.

解　设 AB 的中点为 D, 则 D 的坐标为 $(4,-1,3)$. 中线 CD 的长

$$|CD| = \sqrt{(4+1)^2 + (-1-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{30}.$$

5.　以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边作三角形试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 边上的高向量.

解　如图 7.16, 以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边作 ΔABC, CD 边 AB 上的高, 则有

$$\overrightarrow{AD} = \mathrm{Pr}\, j_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|},$$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AD}\right| \boldsymbol{a}^{\circ} = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|} \cdot \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$.

$\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$, 即 $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$,

$\therefore \overrightarrow{CD} = \boldsymbol{b} - \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$.

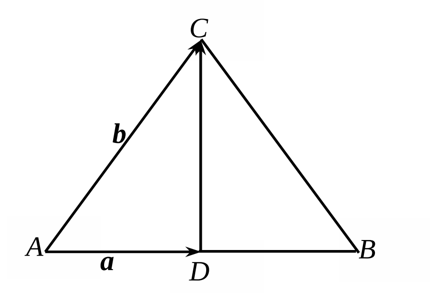

图 7.16

故 $\boldsymbol{a}$ 边上的高向量为 $\overrightarrow{CD}$ 或 $\overrightarrow{DC}$, 即 $\pm(\boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a})$.

注意 易犯的错误是, $\boldsymbol{a}$ 边上的高向量为 $\boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$.

产生错误的原因是, 没有注意到与向量 $\boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$ 方向相反的向量 $-(\boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a})$ 也是 $\boldsymbol{a}$ 边上的高向量.

6. 试用向量的方法证明: 任意三角形的三条中线可以构成一个三角形.

证 如图 7.17, 设 ΔABC 的三条边 $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c}$, 三边中点依次为 D, E, F, 则

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c},$$

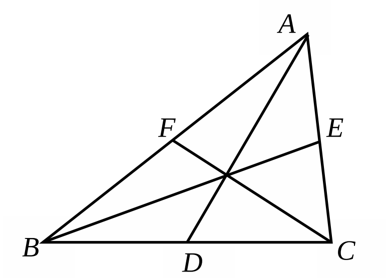

图 7.17

于是 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \dfrac{3}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \dfrac{3}{2}(-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}) = 0$,

从而可知 ΔABC 的三条中线 AD、BE、CF 可以构成一个三角形, 原命题得证.

7. 设向量 $\boldsymbol{a} = (2,-3,1)$, $\boldsymbol{b} = (1,-2,3)$, $\boldsymbol{c} = (2,1,2)$, 求同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 且在向量 $\boldsymbol{c}$ 上的投影为 14 的向量 $\boldsymbol{d}$.

解 设 $\boldsymbol{d} = (d_x, d_y, d_z)$,

$\because \boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{a}$, $\therefore \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a} = 0$, 即 $2d_x - 3d_y + d_z = 0$, (1)

$\because \boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{b}$, $\therefore \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b} = 0$, 即 $d_x - 2d_y + 3d_z = 0$, (2)

$\because \mathrm{Pr}\, j_c \boldsymbol{d}=14,\quad \therefore \dfrac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=14,\quad$ 即 $2d_x+d_y+2d_z=42,\qquad (3)$

将(1), (2), (3)联立，解得 $d_x=14,\ d_y=10,\ d_z=2$，所以 $\boldsymbol{d}=(14,10,2)$.

8. 已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$，其中 $\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}$ 是单位向量，且 $(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=\dfrac{\pi}{3}$，求 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 及 $\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

解 $|\boldsymbol{a}|^2=(3\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\cdot(3\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})=9|\boldsymbol{m}|^2-6\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+|\boldsymbol{n}|^2=10-6\cos\dfrac{\pi}{3}=7$,

故 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{7}$.

$$|\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n})=|\boldsymbol{m}|^2-4\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+4|\boldsymbol{n}|^2=5-4\cos\frac{\pi}{3}=3,$$

故 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.

$\because \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(3\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})(\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n})=3\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}-6\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}=-5\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$,

$\therefore |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|-5\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}|=5|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$,

即 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$，$\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{7}\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

9. 证明向量 $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 垂直.

证 因 $[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$
$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=0$,

所以 $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 垂直.

10. 设 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3},\ |\boldsymbol{b}|=1,\ (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{6}$，计算:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的之间的夹角;

(2) $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 邻边的平行四边形的面积.

解 (1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=3+1-2\sqrt{3}\cos(\pi-\dfrac{\pi}{6})=4+2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}=7,$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=3+1-2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}=1.$$

设向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则有

$$|\boldsymbol{a}|^2=\left(\frac{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}{2}\right)^2+\left(\frac{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}{2}\right)^2-2\frac{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}{4}\cos\theta,$$

即
$$3=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}-\frac{\sqrt{7}}{2}\cos\theta,\qquad \cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{7}},$$

故 $\theta = \arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

(2) 设 S 为所求的面积，则

$$S = |(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})| = 5|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = 5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= 5\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

11. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2),\ \boldsymbol{b}=(1,1,z)$，问 z 为何值时 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 最小？并求出此最小值.

解 $\cos((\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})) = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{1-2z}{3\cdot\sqrt{2+z^2}}$，由于 $0<(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})<\dfrac{\pi}{2}$时，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为减函数，求 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 的最小值也就是求 $f(z)=\dfrac{1-2z}{3\cdot\sqrt{2+z^2}}$ 的最大值.

令 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\dfrac{1-2z}{3\cdot\sqrt{2+z^2}}) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{-4-z}{(2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$，得 $z=-4$. 当 $z=-4$ 时，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故

$$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})_{\min} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

12. 设 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

解 $\because \boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，

$$\therefore (\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}) = 7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0; \qquad (1)$$

$\because \boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，

$$\therefore (\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}) = 7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0; \qquad (2)$$

由(1), (2)解得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}},\ |\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$，于是由 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$ 得

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\ \theta=\frac{\pi}{3},$$

即 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{3}$.

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=(-1,3,2),\ \boldsymbol{b}=(2,-3,-4),\ \boldsymbol{c}=(-3,12,6)$，证明三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，并用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

证 $\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -4\\ -3 & 12 & 6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-3 & -4\\ 12 & 6\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & -4\\ -3 & 6\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 12\end{vmatrix}=0$，即 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0,$

故 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三个向量共面.

设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则 $(-3,12,6)=(-\lambda,3\lambda,2\lambda)+(2\mu,-3\mu,-4\mu)$，即

$$\begin{cases}-\lambda+2\mu=-3,\\ 3\lambda-3\mu=12,\\ 2\lambda-4\mu=6,\end{cases}$$

解得 $\lambda=5,\ \mu=1$，代入得 $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

14. 求过点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$，且与平面 $\pi: x-2y+3z-1=0$ 垂直的平面方程.

解 设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则所求平面的方程为

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0.$$

$\because \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2},\qquad \therefore (A,B,C)\cdot(-1,0,-2)=0$，即

$$-A-2C=0,$$

故 $A=-2C$;

又 $\because \boldsymbol{n}$ 垂直于平面 π 的法向量 $(1,-2,3)$，$\therefore (A,B,C)\cdot(1,-2,3)=0$，即

$$A-2B+3C=0,$$

故 $B=\dfrac{1}{2}(A+3C)=\dfrac{1}{2}C$;

将 $A,\ B$ 代入平面的方程，有

$$-2C(x-1)+\frac{1}{2}C(y-1)+C(z-1)=0,\qquad (C\neq 0),$$

约去 C，得 $\qquad -4(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0$，

即 $4x-y-2z-1=0$.

15. 求一平面，使它平分由两个相交平面 $x-3y+2z-5=0$ 和 $3x-2y-z+3=0$ 构成的二面角.

解 设点 $P(x,y,z)$ 为所求平面上任一点，则点 P 到两相交平面的距离相等，即

$$\frac{|x-3y+2z-5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}}=\frac{|3x-2y-z+3|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-1)^2}},$$

即 $$x-3y+2z-5=\pm(3x-2y-z+3),$$

解之得 $$2x+y-3z-8=0 \text{或} 4x-5y+z+3=0.$$

16. 求过点 $A(-1,0,4)$，且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线的方程.

解 设所求的直线方程为 $\frac{x+1}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z-4}{p}$，因为该直线与已知直线相交，所以向量 (m,n,p)、$(1,1,2)$ 和 $(0,-3,4)$ 共面，故

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0, \qquad \text{即} \quad 10m-4n-p=0; \tag{1}$$

因为所求的直线与平面 $3x-4y+z-10=0$ 平行，所以

$$3m-4n+p=0; \tag{2}$$

由(1)，(2)解得 $m=\frac{4}{7}p$，$n=\frac{19}{28}p$，故直线的方向向量为 $(16,19,28)$，所求直线为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$

17. 已知动点 $M(x,y,z)$ 到 xOy 面的距离与点 M 到点 $(1,-1,2)$ 的距离相等，求点 M 的轨迹的方程，它表示什么曲面？

解 $$|z|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2},$$

$$z^2=(x-1)^2+(y+1)^2+z^2-4z+4,$$

即 $(x-1)^2+(y+1)^2=4(z-1)$ 为点 M 的轨迹，其表示旋转抛物面.

18. 指出下列方程所表示的曲面名称，如果是旋转曲面，说明它们是怎样形成的:

(1) $x^2+2y^2+3z^2=9$； (2) $x^2+y^2+z^2=2z$；

(3) $2z=3x^2+y^2$； (4) $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$；

(5) $x^2-2y^2=1-z^2$； (6) $z=2x^2$.

解 (1) 椭球面;

(2) 球面，可以看作是由圆 $\begin{cases} x^2+(z-1)^2=1, \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y^2+(z-1)^2=1, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成;

(3) 椭圆抛物面;

(4) 顶点在 $(0,0,1)$ 的下半圆锥面，可以看作是由 $\begin{cases} z=1-x, \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} z=1-y, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成;

(5) 旋转单叶双曲面，可以看作是由双曲线 $\begin{cases} x^2-2y^2=1, \\ z=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} z^2-2y^2=1, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周而成;

(6) 母线平行于 y 轴的抛物柱面.

19. 求曲线 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线的方程.

解 在 xOy 面上的投影曲线的方程为

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=2-x^2-y^2, \\ z=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x^2+y^2=x+y, \\ z=0. \end{cases}$$

20. 求由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=4$ 所围的立体在三个坐标面上的投影.

解 立体如图 7.18 所示,

1° 求在 xOy 面上的投影，从 $z=x^2+y^2$ 与 $z=4$ 消去 z，得

$$x^2+y^2=4,$$

故旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=4$ 所围的立体在 xOy 面上的投影为

$$x^2+y^2\le 4.$$

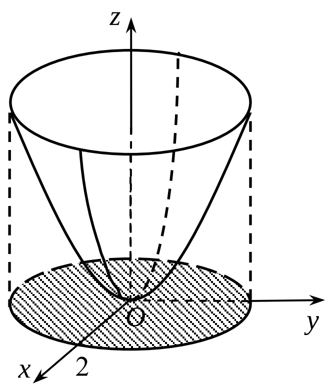

图 7.18

2° 求在 yOz 面上的投影：从 $z=x^2+y^2$ 与 $z=4$ 不可能消去 x，为此求 $z=x^2+y^2$ 与 $x=0$ 的交线 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x=0, \end{cases}$ 此交线在 yOz 平面上的方程为 $z=y^2$，它与 $z=4$ 所围的部分

$$y^2 \le z \le 4$$

就是所求的投影.

3° 同理可得旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 4$ 所围的立体在 xOz 面上的投影为

$$x^2 \le z \le 4.$$

21. 画出下列各曲面所围成的立体的图形:

(1) 旋转抛物面 $z = 6 - x^2 - y^2$ 及圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(2) 抛物柱面 $2y^2 = x$，平面 $z = 0$ 及 $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} = 1$;

(3) 旋转抛物面 $x^2 + y^2 = z$，柱面 $y^2 = x$，平面 $z = 0$ 及 $x = 1$;

(4) 上半球面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$.

解 各立体的图形如图 7.19 所示

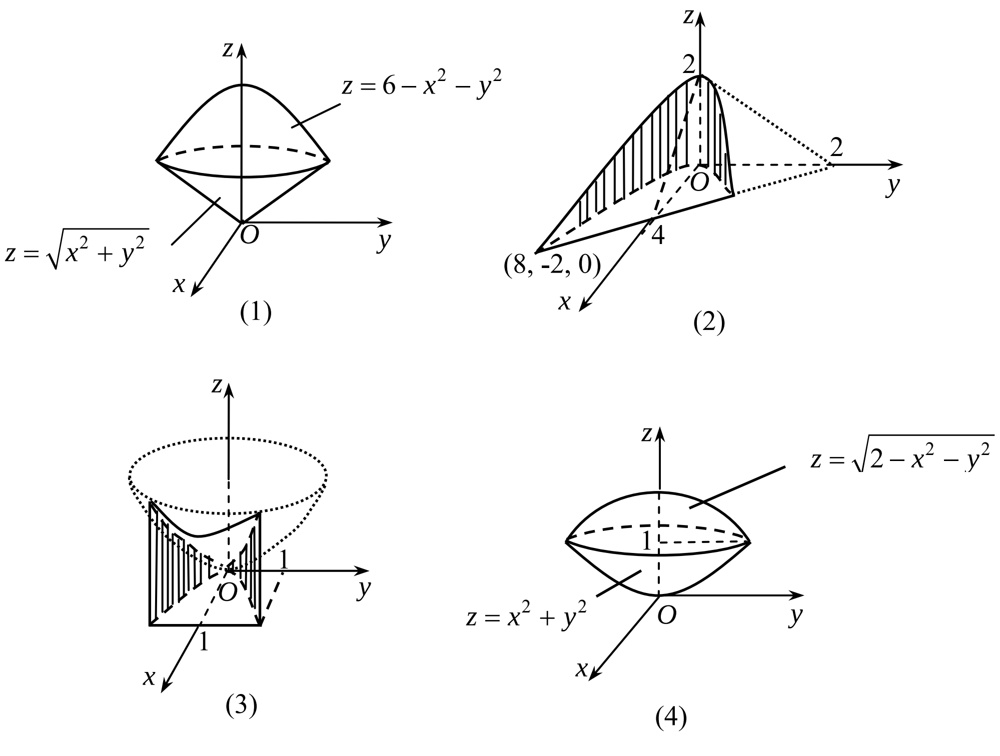

图 7.19