第二节

正项级数及其审敛法

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 正项级数收敛的充分必要条件

1. 定义　正项级数: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ （$u_n \geq 0$）

2. 定理11.1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是:

部分和数列 S_n 有上界.

3. 定理11.2 (比较审敛法) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, $u_n \leq v_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, $u_n \geq v_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

(二) 比较审敛法

定理11.2 (比较审敛法)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 ,$u_n \le v_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 ;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 ,$u_n \ge v_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散 .

推论 (比较审敛法) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

(i) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, $u_n \le c\, v_n \ (n \ge N)$, $(c \ne 0)$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(ii) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, $u_n \ge c\, v_n \ (n \ge N)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

比较法的使用思路:

欲证收敛(发散), 则放大(缩小)

结论 p-级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{收敛，} & p>1\\ \text{发散．} & p\le 1\end{cases}$

注 常用的比较级数：等比级数，

调和级数 与 p-级数.

欲证 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散， 判 $u_n \ge \frac{1}{n^p}$？ （某 $p\le 1$）

欲证 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛， 判 $u_n \le \frac{1}{n^p}$ （某$p>1$）？

定理11.3　(极限形式的比较审敛法)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 \le l \le +\infty),$$

则有

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时，两级数同敛散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l = +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

极限形式的比较审敛法使用思路：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l \quad (0<l<+\infty)$$

寻找u_n的同阶无穷小

(三) 比值审敛法和根值审敛法

定理11.4 (比值审敛法)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足： $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho \quad (0\le\rho\le+\infty)$,

则 (1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛；

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=+\infty$ 时, 级数发散.

(3) 当 $\rho=1$ 时, 比值审敛法失效.

小结: 通项含 $n!$, a^n 的级数适合用比值法判敛散.

定理11.5 (根值审敛法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$,

$(0 \le \rho \le +\infty)$, 则

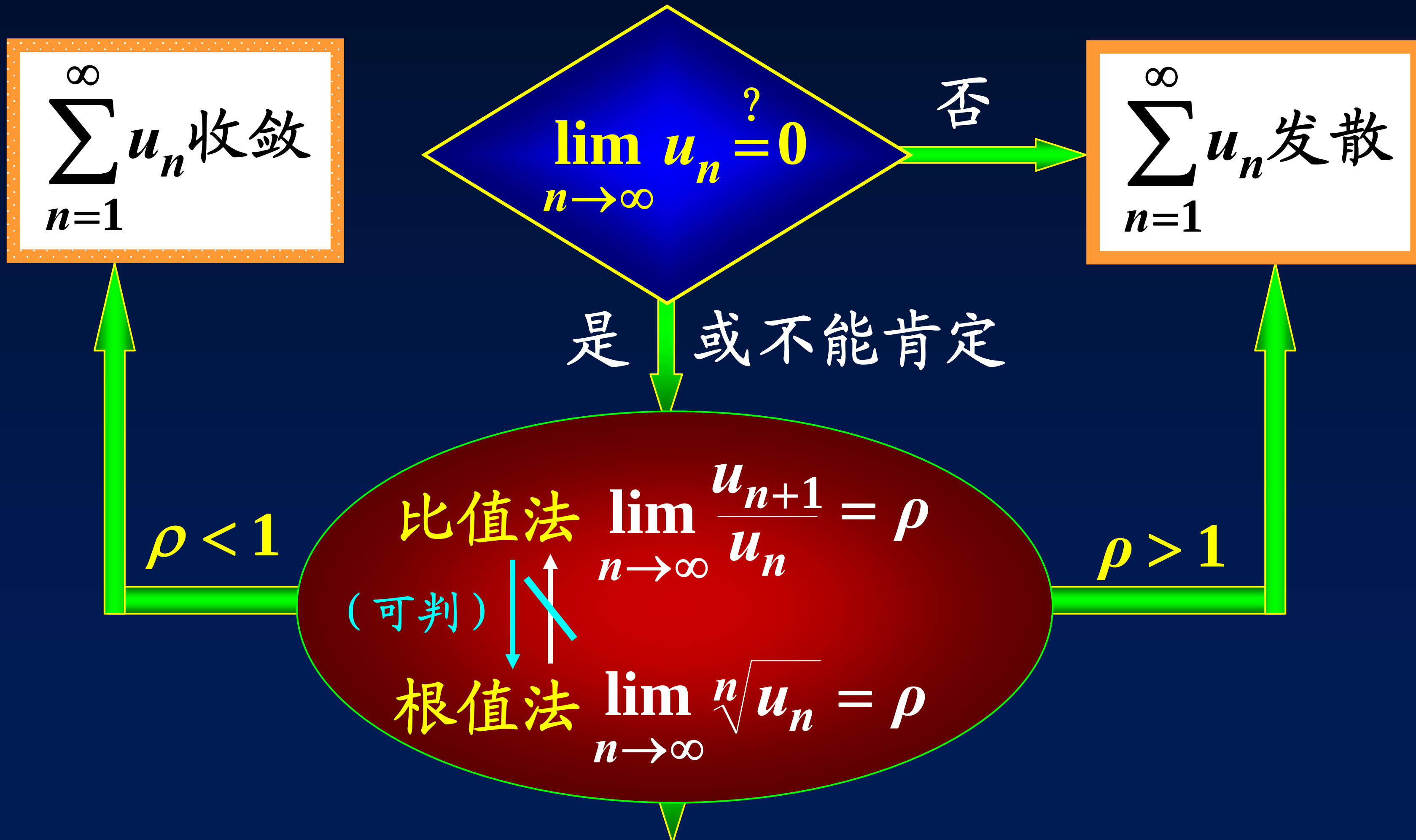
(1) 当 $\rho < 1$ 时,级数收敛;

(2) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = +\infty$ 时,级数发散 .

(3) 当 $\rho = 1$ 时, 根值审敛法失效.

小结:

1 .判断正项级数敛散性的一般程序:



比值法 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

（可判）

根值法 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$

$\rho=1$

比值法、根值法失效！

比较审敛法或部分和极限法

2. 级数发散与一般项极限不为零的关系

- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散 $\not\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$
  $(\Leftarrow)$

如：调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，但 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

- 特殊地，若用比值法或 根值法判定

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\text{发散} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$$

3. 比值法和根值法的关系：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho \underset{(\not\Leftarrow)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho \quad (0\le\rho\le+\infty)$$

这表明：(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则用比值法和根值法判断的结论一致；

(2)从理论上看，根值法较 比值法适用的范围更广．

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\ (u_n>0)$收敛 $\not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$

二、典型例题

例1 判定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+e}$ 的敛散性.

解 由于 $\frac{1}{3^n+e}<\frac{1}{3^n}$, 部分和

$$S_n=\frac{1}{3+e}+\frac{1}{3^2+e}+\cdots+\frac{1}{3^n+e}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\sigma_n$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{3}{2}$ 收敛 , 知 $\sigma_n<\sigma$ 有上界,

从而 $S_n<\sigma_n<\sigma$ 有上界, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+e}$ 收敛.

例2 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性.

解 $\because \quad \frac{2}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{2}{n+1}$,

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散

$\therefore$ 所给级数发散 .

例3 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)^2}}$的敛散性.

解 $\because \quad u_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)^2}}\le\frac{1}{n^{3/2}}=v_n$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛,

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)^2}}$ 收敛.

例4 判定级数的敛散性：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{2}{\sqrt[3]{n}})$.

分析 寻找 $u_n=\ln(1+\frac{2}{\sqrt[3]{n}})$的同阶无穷小.

解 当 $x\to 0$ 时 $\ln(1+x)\sim x$,于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{2}{\sqrt[3]{n}})}{\frac{2}{\sqrt[3]{n}}}=1,\qquad u_n=O(\frac{1}{n^{1/3}})$$

而 $p-$级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\,(p=\frac{1}{3}<1)$ 发散,

由定理 11.3知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{2}{\sqrt[3]{n}})$ 发散.

例5 判断级数 $\frac{1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\cdots$的敛散性．

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=e>1,$$

故级数发散．

例6 判定级数的敛散性：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$.

解 $\because\ u_n=\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$

$$\le\frac{n!+n!+\cdots+n!}{(2n)!}=\frac{n\cdot n!}{(2n)!}=v_n$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)(n+1)!}{[2(n+1)]!}}{\dfrac{nn!}{(2n)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2(2n+1)n}$

$$=0<1$$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛， 故原级数收敛.

例7 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}$ 的敛散性 $(x$为常数 $,x\neq 0,\pm 1)$.

解 因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x^{2(n+1)}}{(n+1)^2}}{\dfrac{x^{2n}}{n^2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}x^2=x^2$$

由比值法知 $,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}\begin{cases}收敛, 0<|x|<1\\ 发散, \quad |x|>1\end{cases}$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例8 判别下列级数的收敛性：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$.

解 (方法1) 根值法

$$\because \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} 2^{-1-\frac{(-1)^n}{n}} = 2^{-1} < 1 \quad \therefore \quad \text{原级数收敛.}$$

(方法2) 比较法 $u_n = 2^{-n-(-1)^n} = 2^{-n} \cdot 2^{(-1)^{n+1}}$

$$\leq 2^{-n} \cdot 2 = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n \geq 1)$$

$$\because \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \text{收敛}, \quad \therefore \quad \text{原级数收敛.}$$

注 对于 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$，比值法失效！

$$\because\quad a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^n}} = 2^{-1+2(-1)^n} = \begin{cases} 2, & n\text{偶数} \\ \frac{1}{8}, & n\text{奇数} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 2 \neq \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ 不存在(且} \neq +\infty)$$

故比值法失效.

三、同步练习

1. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性

2. 判别级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$.

3. 判定级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

4. 判定下列级数的敛散性 ：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+a^2}}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$.

5. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\ (x>0)$ 的敛散性 .

6. 判定级数的敛散性 ：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}\quad (\text{常数}\, a>0)$$

7. 判定级数的敛散性：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

8. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 收敛于S，并估计 $S \approx S_n$（部分和）所产生的误差 r_n.

四、同步练习解答

1. 判断正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性

解 由 $n(n+2) \le (n+2)^2$,

得 $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+2)}} > \dfrac{1}{n+2}$,

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n+2} + \cdots$ 发散,

由比较法知，原级数发散.

2. 判别级数的敛散性：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n^2}\right].$$

$$\boxed{\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{n^2}}$$

解 (1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(1/n)}{1/n}=1$

由比较法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$ 发散.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\text{In}[1+1/n^2]}{1/n^2}=1$

由比较法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\dfrac{1}{n^2}\right]$ 收敛.

$p-$级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

3. 判定级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. 不是 p–级数

解 (1) $\because \ln(n+1)<n$, $\therefore \frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散．

(2) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散．

4. 判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+a^2}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$.

解 (1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+a^2}}}{n^{-\frac{3}{2}}}=1$,

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛,

由定理 11.3知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+a^2}}$ 收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$

解 因 $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ 收敛 .

5. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}\;(x>0)$ 的敛散性 .

解　$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\,x^n}{n\,x^{n-1}}=x$

由定理11.4，当 $0<x<1$ 时, 级数收敛 ;

当 $x>1$ 时, 级数发散 ;

当 $x=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

6. 判定级数的敛散性 ：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n} \quad (\text{常数} a>0)$$

解 $\quad u_n=\dfrac{a^n n!}{n^n}$

$$\because \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n n!}=\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$\therefore \quad \rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{a}{e}$$

$$\therefore \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{e}$$

故当 $0 < a < e$ 时, $\rho < 1$, 原级数收敛;

当 $a > e$ 时, $\rho > 1$, 原级数发散;

当 $a = e$ 时, $\rho = 1$, 比值法失效,

此时，由 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1$

得 $u_n > u_{n-1} > \cdots > u_1 = e$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$

故原级数发散.

7. 判定级数的敛散性：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

解 (方法1) 比较法

$$\because \quad u_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}\le\frac{3}{2^n}=v_n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$ 收敛,

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$$ 收敛.

(方法2) 利用性质

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2}{2^n}+(-\frac{1}{2})^n],$$

(方法3) 根值法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[2+(-1)^n]^{\frac{1}{n}}}{2}=2^{-1}<1$$

$\therefore$ 原级数收敛 .

小结: 通项含 a^n 的级数，适合用**根值法**判敛散.

注 对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$，比值法失效！

$$\because \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2+(-1)^{n+1}}{2(2+(-1)^n)}=a_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\frac{1}{6},\qquad \lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\frac{3}{2},$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}a_n \text{ 不存在(且} \neq +\infty\text{).}$$

8. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}$ 收敛于S，并估计 $S \approx S_n$（部分和）所产生的误差 r_n.

解 $\because \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}} = \dfrac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$

由根值法知，级数收敛．所求误差

$$r_n = S - S_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)^{n+2}} + \cdots$$

$$< \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \frac{1}{(n+1)^{n+2}} + \cdots = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)^n}$$