总复习(四)

导数、定积分的应用
中值命题的证明

- 一、主要内容
- 二、典型例题

一、主要内容

1. 导数与定积分的应用

基本应用

(1) 切线；

(2) 函数的单调性；

(3) 极值；

(4) 最大、最小值；

(5) 曲线的凹凸；

(6) 拐点；

(7) 曲率：$k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(8) 面积；

(9) 旋转体体积；
已知平行截面
面积的立体的 体积；

(10) 弧长.

综合应用

(1) 方程根的确定:

① 闭区间上连续函数的零点定理;

② 罗尔定理;

③ 函数的单调性.

(2) 等式与不等式的证明;

(3) 函数的最大、最小值.

2. 中值命题

二、典型例题

1. 面积、体积与函数的最大、最小值

例1 已知曲线 $L:\begin{cases} x = f(t) \\ y = \cos t \end{cases} \ (0 \le t < \dfrac{\pi}{2})$，其中 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0) = 0$，$f'(t) > 0 \ (0 < t < \dfrac{\pi}{2})$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为1, 求 $f(t)$ 的表达式，并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积 .

2012考研

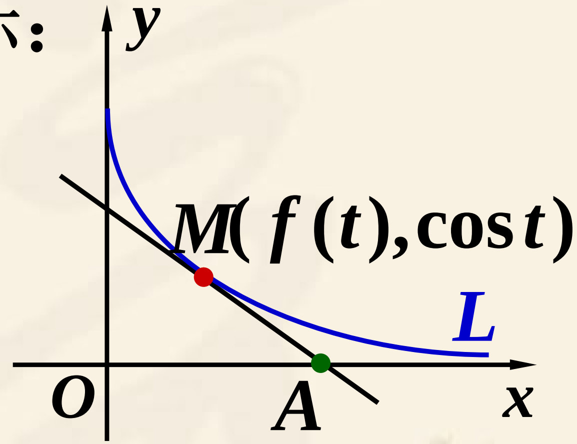
解 1° 求 $f(t)$ 的表达式

曲线 L 的切线斜率：$k = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{-\sin t}{f'(t)}$

曲线L的切线方程：

$$y-\cos t=\frac{-\sin t}{f'(t)}(x-f(t))$$

令 $y=0$, 得切线与 x 轴交点A的横坐标：



$$x_0=f'(t)\frac{\cos t}{\sin t}+f(t)$$

依题设， $|AM|\equiv 1$

$$\left[f'(t)\frac{\cos t}{\sin t}\right]^2+\cos^2 t=1,\quad t\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$\because\ f'(t)>0,\qquad \therefore\ f'(t)=\dfrac{\sin^2 t}{\cos t},\quad t\in(0,\dfrac{\pi}{2})$

$$\therefore \quad f'(t) = \frac{\sin^2 t}{\cos t}, \quad t \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$f(t) = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} \mathrm{d}t = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} \mathrm{d}t$$

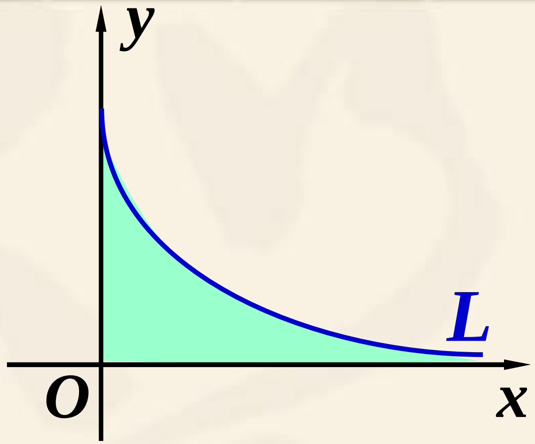
$$= \int (\frac{1}{\cos t} - \cos t) \mathrm{d}t = \int (\sec t - \cos t) \mathrm{d}t$$

$$= \ln(\sec t + \tan t) - \sin t + C, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2})$$

$$\because \quad f(0) = 0 \qquad \therefore \quad C = 0$$

$$\therefore \quad f(t) = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2})$$

2^o 求面积



$\because \quad f(0)=0, \quad \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}-0} f(t)=+\infty$

$\therefore$ 曲线L及x轴和y轴为边界的区域是无界 区域，

其面积为

$$S=\int_0^{+\infty} y\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

$$f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t, \quad t\in[0,\frac{\pi}{2})$$

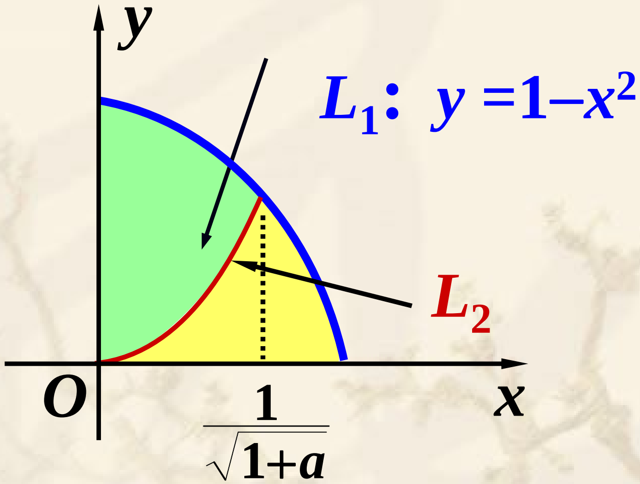
$$f'(t)=\frac{\sin^2 t}{\cos t}, \quad t\in(0,\frac{\pi}{2})$$

目录 上页 下页 返回 结束

例2 设曲线 L_1： $y=1-x^2\ (0\le x\le 1)$, x轴和y轴所围区域被曲线 L_2： $y=ax^2$分成面积相等的两部分，其中常数 $a>0$, 试确定a的值.

解 求两曲线交点坐标:

$$\begin{cases} y=1-x^2 \\ y=ax^2 \end{cases} \quad (0\le x\le 1)$$



解得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$, $y=\dfrac{a}{1+a}$.

目录 上页 下页 返回 结束

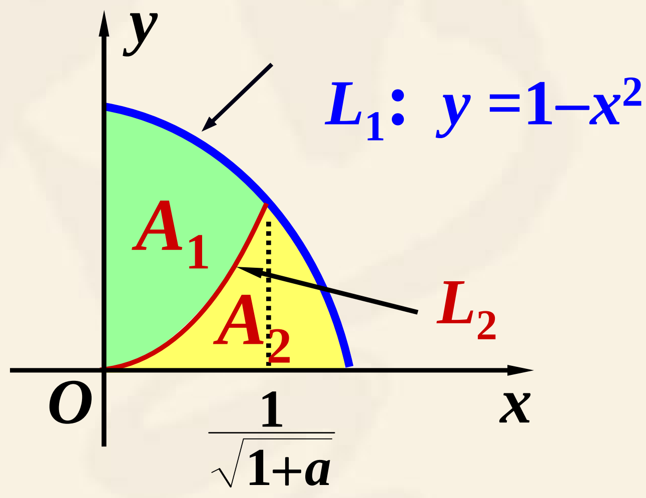
一方面，

$$A_1=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}[(1-x^2)-ax^2]\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}[1-(1+a)x^2]\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+a}}-[\frac{1+a}{3}x^3]\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}$$

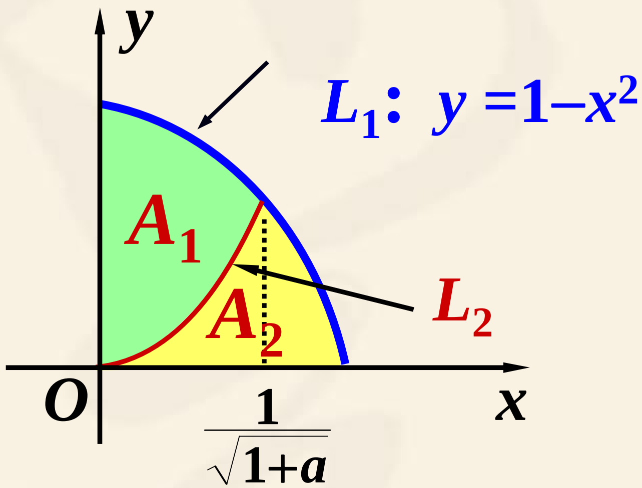
$$=\frac{2}{3\sqrt{1+a}}$$



$$\boxed{A=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx \quad (a<b)}$$

另一方面，

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = \frac{2}{3}$$



又依题设， $A_1 = A_2$,

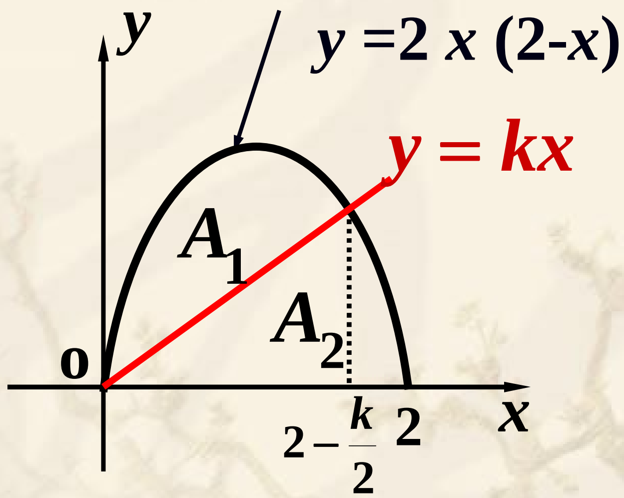
$$\therefore \quad A_1 = \frac{1}{3}$$

从而 $\dfrac{2}{3\sqrt{1+a}} = \dfrac{1}{3}$, 解得 $a = 3.$

类似题

设 D是由抛物线 $y=2x(2-x)$与x轴所围成的区域，直线 $y=kx$将区域D分为面积相等的两部分，求 k的值.

解 求交点：$\begin{cases} y=2x(2-x) \\ y=kx \end{cases}$



解得 $x=2-\dfrac{k}{2}$,

$$y=(2-\frac{k}{2})k.$$

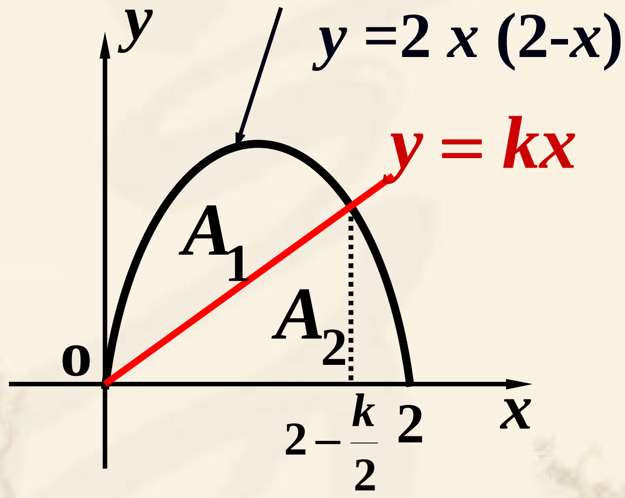
一方面，

$$A_1=\int_0^{2-\frac{k}{2}}[2x(2-x)-kx]\,dx$$

$$=\int_0^{2-\frac{k}{2}}[(4-k)x-2x^2]\,dx$$

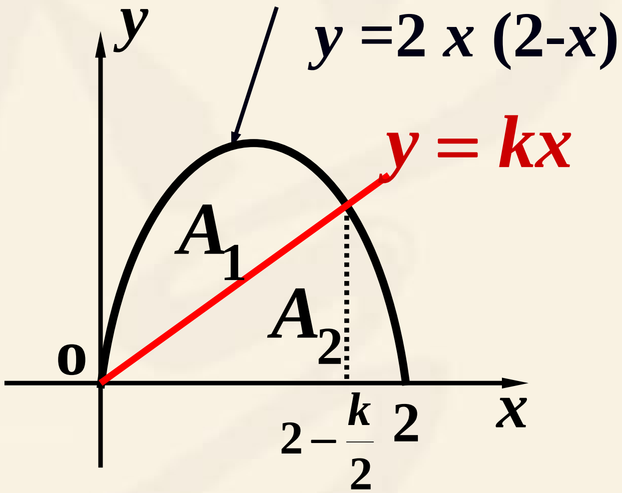
$$=(4-k)\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2-\frac{k}{2}}-\frac{2}{3}x^3\Big|_0^{2-\frac{k}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}(2-\frac{k}{2})^3$$



另一方面，

$$A_1 + A_2 = \int_0^2 2x(2-x)\,dx = \frac{8}{3}$$

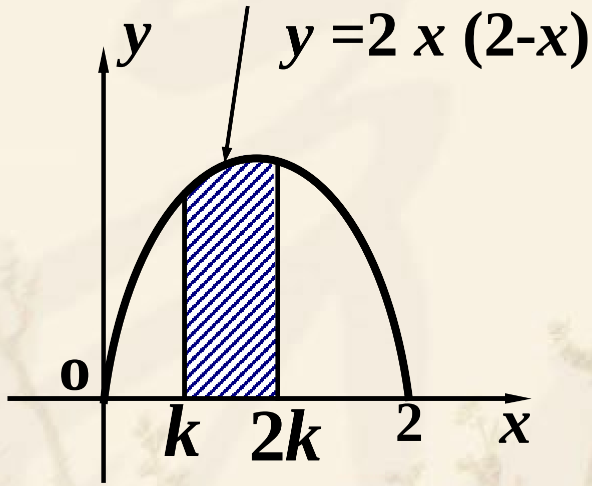


又依题设， $A_1 = A_2$,

$$\therefore \quad A_1 = \frac{4}{3}$$

从而 $\frac{1}{3}(2-\frac{k}{2})^3 = \frac{4}{3}$， 解得 $k = 4 - 2\sqrt[3]{4}.$

例3 设 $0 < k < 1$. 试确定 k, 使由抛物线 $y = 2x(2-x)$ 与直线 $x = k, x = 2k$ 及 $y = 0$ 所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积最大.



解 $$V = 2\pi\int_k^{2k} x\cdot 2x(2-x)\,dx$$

$$= 4\pi\int_k^{2k} x^2(2-x)\,dx$$

$$(0 < k < 1)$$

$$V_y = 2\pi\int_a^b x\,f(x)\,dx$$

$$(a < b)$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$V(k)=4\pi\int_k^{2k} x^2(2-x)\,dx,\quad (0<k<1)$$

$$V'=4\pi[(2k)^2(2-2k)\cdot 2-k^2(2-k)]$$

$$=4\pi k^2(14-15k)=-60\pi k^2(k-\frac{14}{15})$$

令 $V'=0$，得唯一驻点：$k=\dfrac{14}{15}$

当 $0<k<\dfrac{14}{15}$ 时， $V'>0$; 当 $\dfrac{14}{15}<k<1$ 时， $V'<0.$

$\therefore\quad k=\dfrac{14}{15}$ 是V的极大值点，从而是 V的最大值点.

例4 设 D是位于曲线 $y=\sqrt{x}\,a^{-\frac{x}{2a}}\ (a>1,\ 0\le x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域.

(1) 求区域D绕x轴旋转一周所成旋转体 的体积$V(a)$.

(2) 当a为何值时，$V(a)$最小? 并求此最小值.

解 (1) 所求旋转体的体积为

$$V(a)=\pi\int_0^{+\infty} x a^{-\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x=-\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{d}a^{-\frac{x}{a}}$$

$$=-\frac{a}{\ln a}\pi\left[xa^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}a^{-\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x\right]=\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2.$$

(2) $V(a)=\pi(\frac{a}{\ln a})^2 \qquad (a>1)$

$$V'(a)=2\pi\frac{a(\ln a-1)}{\ln^3 a},$$

令 $V(a)=0$, 得 $\ln a=1$, 从而 $a=\mathrm{e}$,

当 $1<a<\mathrm{e}$ 时, $V'(a)<0$, $V(a)$单调减少;

当 $a>\mathrm{e}$ 时, $V'(a)>0$, $V(a)$单调增加,

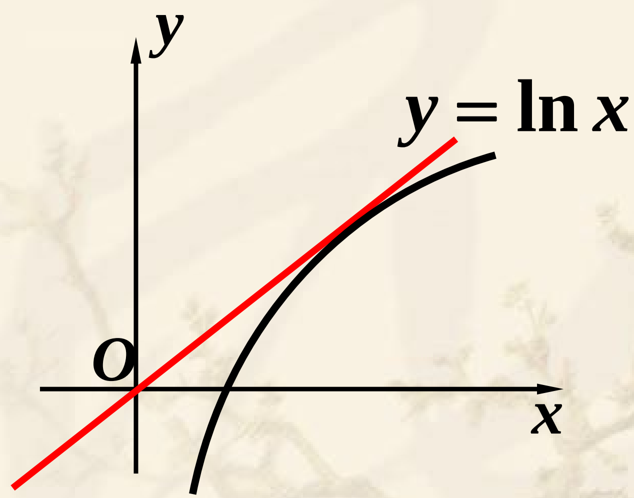
所以 $a=e$ 时 $V(a)$最小, 最小体积为:

$$V(\mathrm{e})=\pi(\frac{\mathrm{e}}{\ln \mathrm{e}})^2=\pi\mathrm{e}^2.$$

类似题 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积；

(2) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.



解 $\because$ 切线过原点

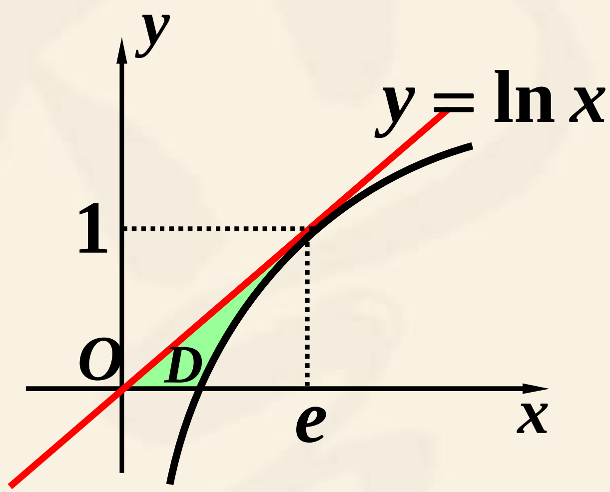
$\therefore$ 可设切线方程为： $y = kx$

再设切点为：$(x_0, \ln x_0)$，则

两曲线 $y = f(x)$与$y = g(x)$
在点 (x_0, y_0)相切

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = g(x_0) & \text{(在切点相交)} \\ f'(x_0) = g'(x_0) & \text{(切线斜率相同)} \end{cases}$$

解得 $x_0 = e.$



$\therefore$ 该切线方程为 $y = \dfrac{1}{e}x.$

(1) 平面图形 D的面积:

$$A = \int_0^1 (e^y - ey)\,dy = \frac{1}{2}e - 1$$

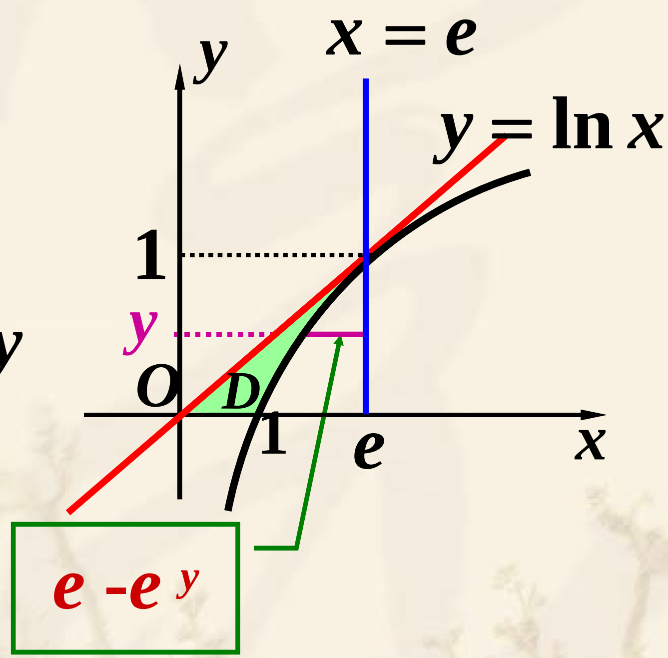
(2) D绕直线 $x = e$的旋转体的体积：

$$V = V_{锥} - V_1$$

$$= \frac{1}{3}\pi e^2 - \int_0^1 \pi (e - e^y)^2 dy$$

$$= \frac{1}{3}\pi e^2 - \int_0^1 \pi (e^2 - 2ee^y + e^{2y}) dy$$

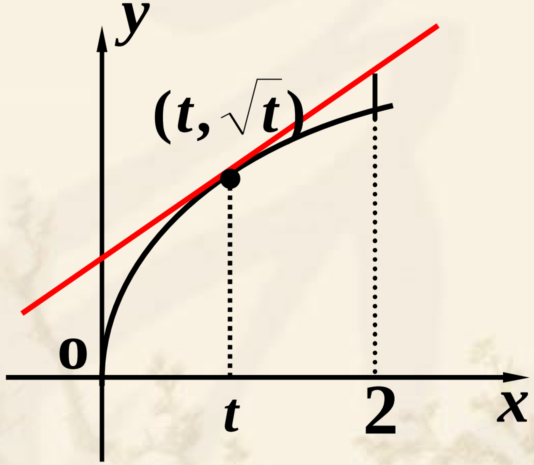
$$= \frac{\pi}{6}(5e^2 - 12e + 3).$$



例5 求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线，使该曲线与切线 l 及直线 $x=0,\ x=2$ 所围成的平面图形的面积最小.

解 设切点为 $(t,\sqrt{t})$

则切线方程为：



$$y-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$$

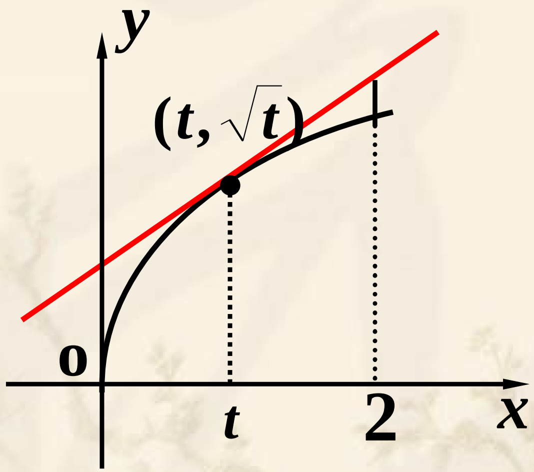
即 $$y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}.$$

所围图形的面积:

$$A=\int_0^2[(\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2})-\sqrt{x}]dx$$

$$=t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}\sqrt{2}\quad(0<t\le 2)$$

$$A'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t}{t^{3/2}}$$



令 $A'=0$, 得唯一驻点:

$$t=1.$$

目录 上页 下页 返回 结束

$$A' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-t}{t^{3/2}}$$

当$0 < t < 1$时， $A' < 0$;

当$1 < t < 2$时， $A' > 0$,

$\therefore$ 当$t = 1$时，A有极小值，从而有最小 值.

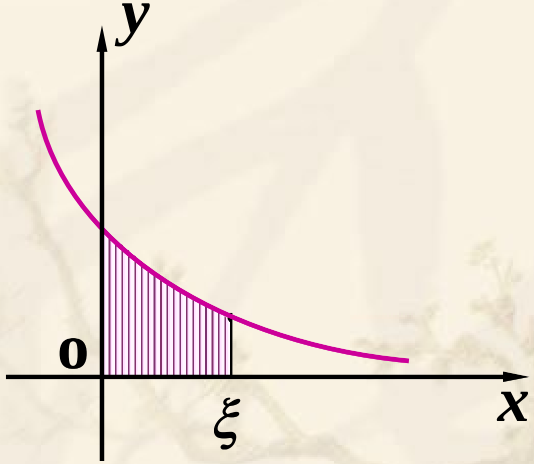
所求切线方程为： $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

目录 上页 下页 返回 结束

类似题 设曲线 $y = e^{-x}\ (x \geq 0)$.

(1) 把曲线 $y = e^{-x}$, x轴，y轴和直线 $x = \xi(\xi > 0)$ 所围平面图形绕 x轴旋转一周，得一旋转 体，求此旋转体体积 $V(\xi)$; 并求满足:

$$V(a) = \frac{1}{2}\lim_{\xi \to +\infty} V(\xi) \text{ 的} a.$$



解 $V(\xi) = \int_0^{\xi} \pi\, y^2 dx$

$$= \int_0^{\xi} \pi\, e^{-2x} dx$$

$$= \int_0^{\xi} \pi e^{-2x} dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2\xi})$$

$$\therefore \quad \lim_{\xi \to +\infty} V(\xi) = \lim_{\xi \to +\infty} \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2\xi}) = \frac{\pi}{2}$$

由 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \to +\infty} V(\xi)$, 得

$$\frac{\pi}{2}(1 - e^{-2a}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad e^{-2a} = \frac{1}{2},$$

解得 $a = \frac{1}{2}\ln 2.$

(2) 在曲线 $y = e^{-x}$ $(x \geq 0)$上找一点，使过该点的切线与两个坐标轴所 夹的平面图形的面积最大，并求出该面积 .

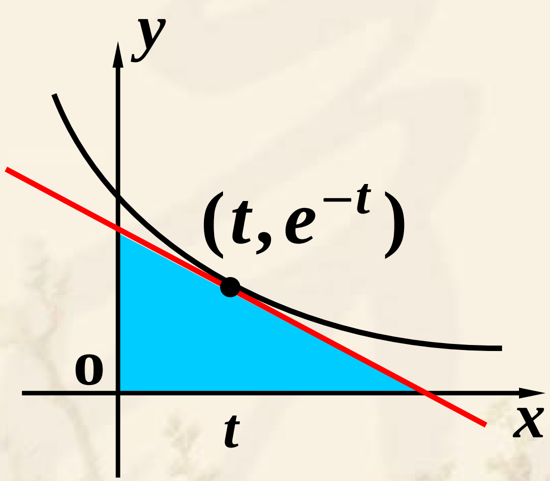
解 设切点为 (t, e^{-t})

则切线方程为:

$$y - e^{-t} = -e^{-t}(x - t).$$

令 $x = 0$， 得 y截距:

$$Y = (1 + t)e^{-t}$$



令 $y=0$，得 x 截距：$X=1+t$

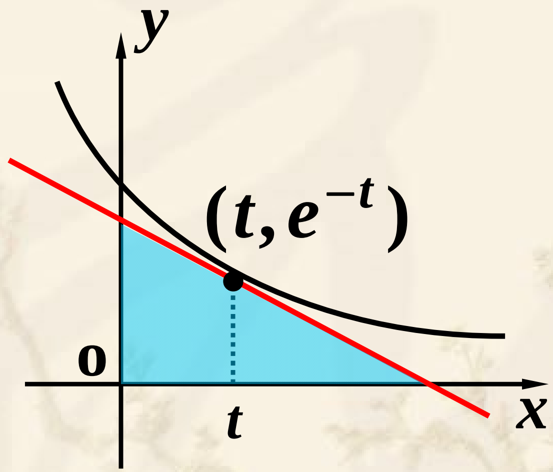
面积：$A=\frac{1}{2}XY=\frac{1}{2}(1+t)^2e^{-t}\quad(t\ge 0)$

$$A'=\frac{1}{2}[2(1+t)e^{-t}-(1+t)^2e^{-t}]$$

$$=\frac{1}{2}(1-t^2)e^{-t}$$

令 $A'=0$，得唯一驻点：

$t=1.\quad(t=-1$舍去$)$



又 $\because \quad A'' = \dfrac{1}{2}(t^2 - 2t - 1)e^{-t},$

$$A''(1) = -e^{-1} < 0$$

$\therefore$ 当$t = 1$时，A有极大值，从而有最大 值.

所求切点为： $(1, e^{-1})$;

最大面积为： $A_{\max} = \dfrac{1}{2}(1+1)^2 e^{-1} = 2e^{-1}.$

2. 函数的极值及曲线的切线与拐点

例6 设 $f(x)$有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|}=1,$$ 判断 $f(0)$是否为 $f(x)$的极值 .

解 $\because \quad \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|}=1>0$

由极限的保号性，知

$$\frac{f''(x)}{|x|}>0,\quad x\in \overset{\circ}{U}(0)$$

$$f''(x) > 0, \quad x \in \overset{\circ}{U}(0)$$

$\therefore \quad f'(x)$在$U(0)$上单调增加

当 $x < 0, x \in U(0)$时，有

$$f'(x) < f'(0) = 0$$

当 $x > 0, x \in U(0)$时，有

$$f'(x) > f'(0) = 0$$

$\therefore \quad f(0)$为 $f(x)$的极小值 .

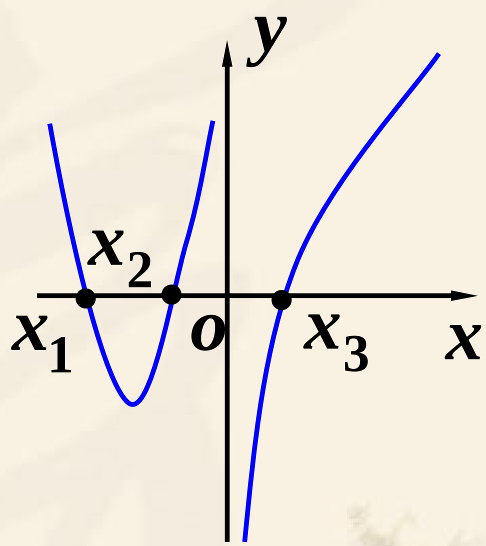
例7 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$有(C)

(A) 一个极小值点和两个极 大值点；

(B) 两个极小值点和一个极 大值点；

(C) 两个极小值点和两个极 大值点；

(D) 三个极小值点和一个极 大值点.

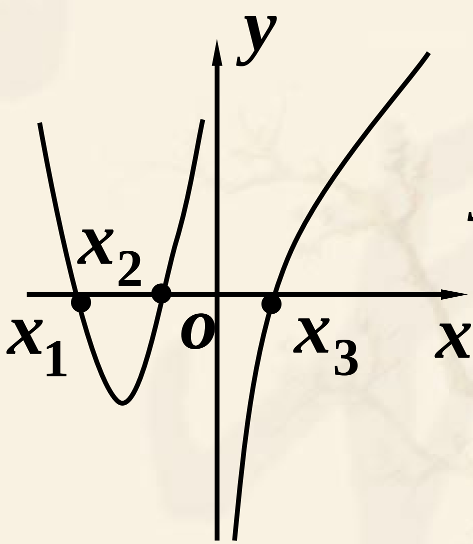


$y = f'(x)$

解 $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$

$f'(0)$不存在

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, 0)$	0	$(0, x_3)$	x_3	$(x_3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



$y = f'(x)$

例8 设函数 $f(x)$满足 $f''(x)+[f'(x)]^2 = x$,

且 $f'(0)=0$, 问:

(1) $f(0)$是否是 $f(x)$的极值?

(2) $(0, f(0))$是否是曲线$y = f(x)$的拐点?

解 (1) $\because \quad f'(0)=0$,

在 $f''(x)+[f'(x)]^2 = x$ 中, 令 $x=0$

得 $f''(0)+[f'(0)]^2 = 0$

$\therefore \quad f''(0)=0$

能否用极值第一判定法?

极值第二充分判定法失效!

目录 上页 下页 返回 结束

关键：在$\mathring{U}(0)$内，判断 $f'(x)$的符号.

$$f''(x)+[f'(x)]^2 = x$$

两边求导，得

$$f'''(x)+2f'(x)f''(x)=1,$$

直接由此式不易判断$f'(x)$的符号

令 $x=0$，得 $f'''(0)=1>0$

（方法1） 对 $f'(x)$ 用麦克劳林公式，得

$$f'(x)=\underbrace{\boxed{f'(0)+f''(0)x}}_{0}+\frac{\overset{1}{\boxed{f'''(0)}}}{2!}x^2+o(x^2)>0,$$

$$x\in\mathring{U}(0)$$

$\because$ $f'(x)$在某$\mathring{U}(0)$内不变号

$\therefore$ $f(0)$不是$f(x)$的极值 .

（方法2） $f'''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x) - 0}{x} = 1 > 0$

$\therefore$ 当 $x \in \overset{\circ}{U}(0)$ 时， $\frac{f''(x)}{x} > 0$

从而当 $x < 0$ 时， $f''(x) < 0$

当 $x > 0$ 时， $f''(x) > 0$

由此可知， $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值

即当 $x \in \overset{\circ}{U}(0)$ 时， $f'(x) > f'(0) = 0$

由于 $f'(x)$ 在某 $\overset{\circ}{U}(0)$ 内不变号

$\therefore f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值 .

(方法3)　由 $f''(0)=0$

$$f'''(0)=1>0$$

对 $f'(x)$ 用极值第二判定法，可知 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，即当 $x\in\mathring{U}(0)$ 时，

$$f'(x)>f'(0)=0$$

由于 $f'(x)$ 在某 $\mathring{U}(0)$ 内不变号

$\therefore\ f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.

(2) 对 $f''(x)$ 用麦克劳林公式，得

$$f''(x)+[f'(x)]^2 = x,$$
$$f'(0)=0,\quad f''(0)=0$$
$$f'''(0)=1$$

$$f''(x) = f''(0) + f'''(0)x + o(x)$$

$$= x + o(x),\quad x \in \mathring{U}(0,\delta)\quad (\delta > 0\text{充分小})$$

$\because$ 当$x<0,\ x\in\mathring{U}(0,\delta)$ ($\delta>0$充分小)时，$f''(x)<0$;

当$x>0,\ x\in\mathring{U}(0,\delta)$, $f''(x)>0$,

$\therefore$ $(0, f(0))$是曲线$y = f(x)$的拐点.

目录 上页 下页 返回 结束

例9 如图，曲线C的方程为$y = f(x)$，点(3, 2)是它的一个拐点，直线L_1与L_2分别是曲线C在点(0, 0)与(3, 2)处的切线，其交点为(2, 4). 设函数$f(x)$具有三阶连续导数，计算$\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x)\,\mathrm{d}x$.

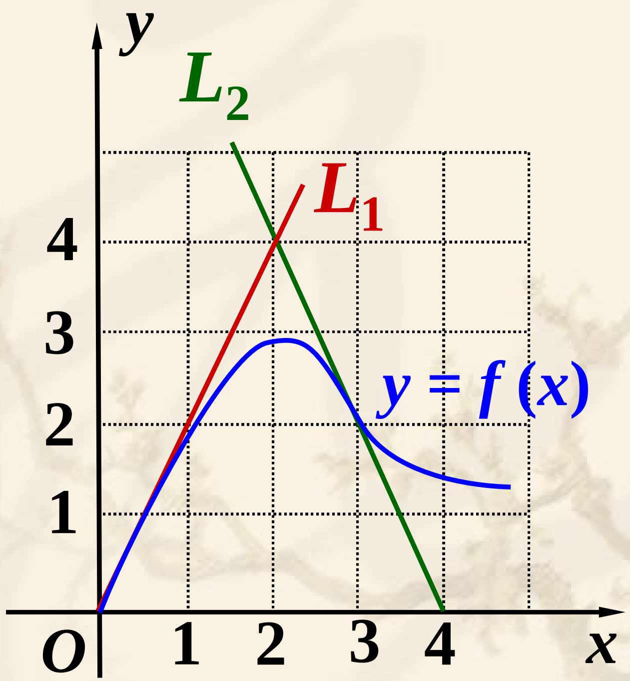
解 由点(3, 2)是曲线$y = f(x)$的一个拐点，知

$$f(3) = 2, \quad f''(3) = 0$$

L_1的斜率：$k_1 = 2$, $\quad \therefore f'(0) = 2$,

$$f(0) = 0$$

L_2的斜率：$k_1 = -2$, $\therefore f'(3) = -2$.



$$\therefore \quad \int_0^3 (x^2+x) f'''(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^3 (x^2+x)\,\mathrm{d} f''(x)$$

$$= \underbrace{(x^2+x) f''(x)\Big|_0^3}_{0} - \int_0^3 (2x+1) f''(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^3 (2x+1)\,\mathrm{d} f'(x)$$

$$= -\left[(2x+1) f'(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 2 f'(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= -\left[7 f'(3) - f'(0)\right] + 2 f(x)\Big|_0^3$$

$$= -\left[7\times(-2) - 2\right] + 2\times 2 = 20.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(0)=0,\quad f'(0)=2 \\ f(3)=2,\quad f''(3)=0 \\ f'(3)=-2. \end{array}}$$

例10 求 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

2010考研

解 $f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$

$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$ 令 $f'(x)=0$，得 $x=0, x=\pm 1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$f(x)$的单调减少区间：$(-\infty,-1]$, $[0,1]$

$f(x)$的单调增加区间： $[-1,0]$, $[1,+\infty)$.

极大值：$f(0)=-\int_1^0 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}(-t^2)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\Big|_0^1$

$$=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x)&=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \\ f'(x)&=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

极小值：$f(\pm 1)=0.$

另法：$f''(x)=2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+4x^2\mathrm{e}^{-x^4}$

$\because \quad f''(0)=2\int_1^0 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<0$

$\therefore \quad f(0)=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$ 是 $f(x)$的极大值；

$\because \quad f''(\pm 1)=4\mathrm{e}^{-1}>0$

$\therefore \quad f(\pm 1)=0$是 $f(x)$的极小值.

3. 中值命题

例11 设 $f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$,

$\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = 0$, 证明: ∃不同两点$\xi_1$, $\xi_2 \in (0,\pi)$,

使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

证 令 $F(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$,

$\because$ $f(x)$在$[0,\pi]$上连续,

$\therefore$ $F(x)$在$[0,\pi]$上可导.

且 $F(0) = \int_0^{0} f(t)dt = 0 = \int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = F(\pi)$

$$F'(x) = f(x)$$

又 $\because \quad 0 = \int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}F(x)$

$$= \underbrace{F(x)\cos x\Big|_0^{\pi}}_{0} + \int_0^{\pi} F(x)\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi} F(x)\sin x\,\mathrm{d}x$$

而 $F(x)\sin x$在$[0,\pi]$上连续

$\therefore$ 由定积分的保号性，知 $\exists \xi \in (0,\pi)$,

使 $F(\xi)\sin\xi = 0.$

目录 上页 下页 返回 结束

若不然，　则由 $F(x)\sin x$在$[0,\pi]$上连续

可推知：必恒有　$F(x)\sin x > 0$，（$\forall\ x \in (0,\pi)$）

或　　　$F(x)\sin x < 0$，（$\forall\ x \in (0,\pi)$）

而由定积分的保号性，　知

$$\int_0^{\pi} F(x)\sin x\,\mathrm{d}x > 0\ (或 < 0)$$

均与$\int_0^{\pi} F(x)\sin x\,\mathrm{d}x = 0$矛盾！

又 $\because \quad \sin\xi > 0, \quad \xi \in (0,\pi),$

$\therefore \quad \exists\, \xi \in (0,\pi),$ 使 $F(\xi) = 0$

于是 $F(0) = F(\xi) = F(\pi) = 0.$

在$[0,\xi]$和$[\xi,\pi]$上，对$F(x)$分别用罗尔定理,

$\exists\ \xi_1 \in (0,\xi), \quad \xi_2 \in (\xi,\pi),$ 使

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$$

即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0.$

例12 设 $\varphi(x)$具有二阶导数，且满足 $\varphi(2)>\varphi(1)$, $\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, 证明：至少存在一点$\xi\in(1,3)$, 使得 $\varphi''(\xi)<0$. $\boxed{\text{2008考研}}$

证 由积分中值定理，知 $\exists\,\eta\in[2,3]$, 使

$$\int_2^3\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\varphi(\eta)(3-2)=\varphi(\eta)$$

又由 $\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 知，$2<\eta\le 3$.

(方法1)

对$\varphi(x)$在$[1,2]$和$[2,\eta]$上分别用拉格朗日中值 定理，

$\exists\, \xi_1 \in (1,2),\ \xi_2 \in (2,\eta)$，使得

$$\varphi'(\xi_1) = \frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1} > 0$$

$$\varphi'(\xi_2) = \frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2} < 0$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\varphi(2) > \varphi(1),\\ &\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x)\,\mathrm{d}\,x = \varphi(\eta)\end{aligned}}$$

再在$[\xi_1,\ \xi_2]$上对$\varphi'(x)$用拉格朗日中值定理，知

$\exists\, \xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (1,3)$，使

$$\varphi''(\xi) = \frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} < 0.$$

(方法2) 用反证法

假设： $\varphi''(x)\ge 0,\quad \forall x\in(1,3)$

则 $\varphi'(x)$在[1, 3]上单调不减，即

当$x_1 < x_2 \quad (x_1, x_2\in[1,3])$时，$\varphi'(x_1)\le\varphi'(x_2)$

依题设，有 $\varphi(2)>\varphi(1)$,

$$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x=\varphi(\eta)\quad(2<\eta\le 3)$$

$\therefore\quad \varphi(x)$在$[1,\eta]$上的最大值必在$(1,\eta)$内取得,

设 $\max\limits_{x\in[1,\eta]}\varphi(x)=\varphi(x_0)$, 则 $x_0\in(1,\eta)$,

$$\varphi'(x_0)=0,\quad \varphi(x_0)\geq\varphi(2)$$

于是当 $x\in(1,x_0)$ 时，有

$$\varphi'(x)\leq\varphi'(x_0)=0$$

依题设

从而 $\varphi(x)$在$[1,x_0]$上单调不增，

$$\varphi(1)\geq\varphi(x_0)\geq\varphi(2)>\varphi(1)$$ 矛盾！

$\therefore\quad \exists\,\xi\in(1,3)$，使 $\varphi''(\xi)<0.$

类似题 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$f(c)>0\,(a<c<b)$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)<0$.

分析 无 $f(x)$在某一点足够多的信息，故不考虑用泰勒公式.

证(方法1) 对 $f(x)$分别在$[a,c]$和$[c,b]$上,用拉格朗日中值定理，知 $\exists\,\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-\boxed{f(a)}^{\,0}}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}>0$$

$$f'(\xi_2) = \frac{\overset{0}{\boxed{f(b)}} - f(c)}{b-c} = \frac{-f(c)}{b-c} < 0$$

$\because \quad [\xi_1, \xi_2] \subset (a,b)$ 而 $f(x)$在(a,b)内二阶可导

$\therefore \quad f'(x)$在$[\xi_1, \xi_2]$上可导

对 $f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上，用拉格朗日中值定理知

$\exists\, \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a,b)$，使得

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0.$$

(方法2)用反证法　　略

目录 上页 下页 返回 结束

例13 设函数$f(x)$在$[0, 1]$上连续，在$(0, 1)$可导，且

$f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

2005考研

(1) 存在$\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(2) 存在两个不同的点η，$\zeta \in (0,1)$，使得

$$f'(\eta)f'(\zeta)=1.$$

证(1) 令 $g(x)=f(x)+x-1$，则$g(x)$在$[0,1]$上连续，

且 $g(0)=f(0)-1=-1<0$， $g(1)=f(1)=1>0$

$\therefore$ 由零点定理，存在$\xi \in (0,1)$，使得 $g(\xi)=0$，

即 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 存在两个不同的点η，$\zeta \in (0,1)$，使得

$$f'(\eta)f'(\zeta)=1.$$

证(2) 在$[0,\xi]$和$[\xi,1]$上分别

对$f(x)$用拉格朗日中值定理，

$\exists\ \eta \in (0,\xi)$，$\zeta \in (\xi,1)$，使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{1-\xi}{\xi}$$

$$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}$$

$\therefore\quad f'(\eta)f'(\zeta)=1.$

$f(0)=0$，$f(1)=1$

(1) 存在$\xi \in (0,1)$，

使得 $f(\xi)=1-\xi$.

例14设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)\neq 0,\ f(0)=0,\ f(1)=1$，试证：$\forall\ a>0, b>0$ 在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ,η，使

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$$

分析 需对 $f(x)$在两个不同区间 $[0,c]$和$[c,1]$上用中值定理 (c待定).

在$[0,\ c]$上，$f(c)-\underbrace{f(0)}_{0}=f'(\xi)\cdot(c-0)\cdots\cdots(1)$

在$[c,1]$上，$\underbrace{f(1)}_{1}-f(c)=f'(\eta)\cdot(1-c)\cdots\cdots(2)$

即 $$\frac{1}{f'(\xi)}=\frac{c}{f(c)},\quad \frac{1}{f'(\eta)}=\frac{1-c}{1-f(c)}$$

即 $$\frac{1}{f'(\xi)}=\frac{c}{f(c)},\quad \frac{1}{f'(\eta)}=\frac{1-c}{1-f(c)}$$

$$\because\quad \frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=\frac{c}{\frac{f(c)}{a}}+\frac{1-c}{\frac{1-f(c)}{b}}.$$

要使 $$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

即 $$\frac{c}{\frac{f(c)}{a}}+\frac{1-c}{\frac{1-f(c)}{b}}=\frac{1}{\frac{1}{a+b}}.$$

只要 $\dfrac{f(c)}{a}=\dfrac{1-f(c)}{b}=\dfrac{1}{a+b}$,解得 $f(c)=\dfrac{a}{a+b}.$

目录 上页 下页 返回 结束

证 令 $\mu = \dfrac{a}{a+b}$

$\because a$ 与 b 均为正数，$\therefore f(0) = 0 < \mu < 1 = f(1)$

又 $\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 由介值定理,

存在 $c \in (0,1)$, 使得 $f(c) = \mu = \dfrac{a}{a+b}$,

$f(x)$ 在 $[0,c],[c,1]$ 上分别用拉氏中值定理 ，有

$\exists\, \xi \in (0,c),\ \eta \in (c,1)$, 使得

目录 上页 下页 返回 结束

$$f(c) - f(0) = (c-0) f'(\xi)$$

$$f(1) - f(c) = (1-c) f'(\eta)$$

注意到: $f(0)=0, f(1)=1,$

$$c = \frac{f(c)}{f'(\xi)} = \frac{\dfrac{a}{a+b}}{f'(\xi)}, \quad 1-c = \frac{1-f(c)}{f'(\eta)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}}{f'(\eta)}$$

$$\therefore \quad \frac{\dfrac{a}{a+b}}{f'(\xi)} + \frac{\dfrac{b}{a+b}}{f'(\eta)} = c + (1-c) = 1$$

$$\therefore \quad \frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a+b.$$

例15 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$,

证明：$\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.

证 $\because$ $f'_+(a)f'_-(b)<0$,

$\therefore$ 不妨设 $f'_+(a)>0$, $f'_-(b)<0$,

$\because$ $$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

$\therefore$ $\exists\delta_1>0$, 使得当 $x\in(a,a+\delta_1)$时,

有 $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

从而 $f(x)-f(a)>0,\quad x\in(a,a+\delta_1)$

即 $f(x)>f(a),\quad x\in(a,a+\delta_1)$

同理，由 $f'_-(b)<0$,

可知 $\exists\,\delta_2>0$, 使得当 $x\in(b-\delta_2,b)$时，

有 $$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$$

$\because\ x<b,\quad \therefore\ f(x)-f(b)>0$

$\therefore\ f(x)>f(b),\ x\in(b-\delta_2,b)$

$\because$　$f(x)$在$[a，b]$上可导，必连续

$\therefore$　$f(x)$在$[a，b]$上必有最大值

由以上推导，又知最大值点 ξ 必在(a,b)内，

即 $\exists \xi \in (a,b)$，　使

$$f(\xi) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

$\therefore$　$f'(\xi) = 0$．　(费尔马定理)

注　下列推导**不正确**：

$\because \quad f'_{+}(a)\, f'_{-}(b) < 0,$

$\therefore$　对 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上用零点定理，

命题成立．

错误原因：

题设中，无 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续的条件．

类似题 设 $f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且

$$f(a)=f(b)=0,\quad f'_{+}(a)f'_{-}(b)>0,$$

证明：$\exists\,\xi,\ \eta\in(a,b)$，使

(1) $f(\xi)=0$; (2) $f''(\eta)=0$.

证 (1) 用反证法

若不存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$,

则由 $f(x)$在$[a,b]$上的连续性，可知

必恒有 $f(x)>0$,（$\forall\ x\in(a,b)$）

或 $(<)$

不妨设 $f(x)>0$, （$\forall\ x\in(a,b)$）

$\because\quad f(a)=f(b)=0$

$$\therefore\quad f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geqslant 0$$

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leqslant 0$$

从而 $f'_+(a)\,f'_-(b)\leq 0$,

这与 $f'_+(a)\,f'_-(b)>0$ 矛盾, $\therefore$ 命题(1)成立.

(2) 需证: $\exists \eta \in (a,b)$, 使 $f''(\eta)=0$.

证 $\because \quad f(a)=f(\xi)=f(b)=0$

$f(x)$在$[a,b]$上可导

$\therefore$ 在$[a,\xi]$和$[\xi,b]$上, 对$f(x)$分别用罗尔定理,

$\exists\ \xi_1 \in (a,\xi)$, $\xi_2 \in (\xi, b)$, 使

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$$

又 $\because\ [\xi_1,\xi_2] \subset (a,b)$, 而$f'(x)$在$[a,b]$上可导

$\exists\ \eta \in (\xi_1, \xi_2)$, 使 $f''(\eta)=0$.

例16 设 $f(x)$在[0,1]上二阶可导，且 $|f''(x)| \le 1$,

$\max\limits_{x\in(0,1)} f(x) = \dfrac{1}{4}$, 证明:

(1) $|f'(0)| + |f'(1)| \le 1$;

(2) $|f(0)| + |f(1)| < 1$.

分析 (1) 虽然 $|f'(1) - f'(0)| = |f''(\xi)(1-0)| \le 1$,

但 $|f'(1) - f'(0)| \le |f'(1)| + |f'(0)|$

此路不通！

证 (1) $\because \max\limits_{x\in(0,1)} f(x)=\dfrac{1}{4}$,

$\therefore \exists\, x_0 \in (0,1)$, 使 $f(x_0)=\dfrac{1}{4}$

又 $\because$ $f(x)$在$[0,1]$上可导,

$\therefore$ 由费尔马定理，知 $f'(x_0)=0.$

$\because$ $f'(x)$在$[0,1]$上可导， $|f''(x)|\le 1, x\in[0,1]$

$\therefore$ 分别在$[0, x_0]$和$[x_0,1]$上，对$f'(x)$

用拉格朗日定理，

目录 上页 下页 返回 结束

$\exists\, \xi_1 \in (0, x_0), \quad \xi_2 \in (x_0, 1)$

使 $\quad |f'(0)| + |f'(1)|$

$$= |f'(x_0) - f'(0)| + |f'(1) - f'(x_0)|$$

$$= |f''(\xi_1)(x_0 - 0)| + |f''(\xi_2)(1 - x_0)|$$

$$= |f''(\xi_1)| \cdot x_0 + |f''(\xi_2)| \cdot (1 - x_0)$$

$$\le 1 \cdot x_0 + 1 \cdot (1 - x_0) = 1$$

(2) 需证： $|f(0)|+|f(1)|<1.$

由 $f(x)$在$x=x_0$处的一阶泰勒公式，得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

$(\forall x\in[0,1],\ \exists\xi\in(x_0,x)$或$\xi\in(x,x_0))$

令 $x=0$，得

$$f(0)=f(x_0)+\underbrace{\boxed{f'(x_0)}}_{=0}(0-x_0)+\frac{f''(\eta_1)}{2!}(0-x_0)^2$$

$$=f(x_0)+\frac{f''(\eta_1)}{2!}\cdot x_0^{\ 2},\ (\exists\eta_1\in(0,x_0))$$

令 $x=1$, 得

$$f(1)=f(x_0)+\underbrace{\boxed{f'(x_0)}}_{}^{}(1-x_0)+\frac{f''(\eta_2)}{2!}(1-x_0)^2$$

$$=f(x_0)+\frac{f''(\eta_2)}{2!}\cdot(1-x_0)^2,\ (\exists\,\eta_2\in(x_0,1))$$

于是 $\quad |f(0)|\le|f(x_0)|+\dfrac{|f''(\eta_1)|}{2!}\cdot x_0{}^2$

$$\le\frac{1}{4}+\frac{1}{2!}\cdot x_0{}^2$$

$$\left|f(1)\right| \le \left|f(x_0)\right| + \frac{\left|f''(\eta_2)\right|}{2!}\cdot(1-x_0)^2$$

$$\le \frac{1}{4} + \frac{1}{2!}\cdot(1-x_0)^2$$

$$\therefore \quad \left|f(0)\right| + \left|f(1)\right| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\cdot[x_0^2 + (1-x_0)^2]$$

$$= 1 + \underbrace{x_0(x_0-1)}_{(<0)} < 1. \quad (0 < x_0 < 1)$$

目录 上页 下页 返回 结束