第三节　定积分的物理应用

习题　6-3

1. 一物体按规律 $x = ct^3$ 作直线运动, 媒质的阻力与速度的平方成正比. 计算该物体由 $x = 0$ 移至 $x = a$ 时克服媒质的阻力所作的功.

解　物体运动的速度为 $v = x'(t) = 3ct^2$, 于是物体所受阻力为 $F(x) = kv^2 = 9kc^2t^4$.

而 $t = (\frac{x}{c})^{\frac{1}{3}}$, 所以 $F(x) = 9kc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}$, 故当物体由 $x = 0$ 移至 $x = a$ 时, 克服阻力所作的功为

$$W = \int_0^a 9kc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x = \frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}[x^{\frac{7}{3}}]_0^a = \frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}.$$

2. 由实验知道, 弹簧在拉伸过程中, 需要的力 F (单位: N)与伸长量 S (单位: 厘米)成正比, 即 $F = KS$ (K 是比例常数). 计算将弹簧由原长拉伸 6cm 所作的功.

解　所求功为

$$W = \int_0^6 KS\mathrm{d}S = [\frac{1}{2}KS^2]_0^6 = 18K(\text{牛}\cdot\text{厘米}) = 0.18K(\text{焦耳}).$$

3. 用铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比, 在击第一次时, 将铁钉击入木板 1cm. 如果铁锤每次打击铁钉所作的功相等, 问锤击第二次时, 铁钉又击入多少?

解　设锤击第二次时铁钉又击入 h 厘米, 铁钉的整个击入过程可以看成一些微小移动的合成. 由于木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比, 所以当铁钉由深度 x 再前进微小位移 $\mathrm{d}x$ 时, 阻力可近似看作不变的. 因为 $F(x) = kx$, 克服阻力所作的功近似为 $\mathrm{d}W = F(x)\mathrm{d}x = kx\mathrm{d}x$.

锤击第一次所作的功为 $W_1 = \int_0^1 kx\mathrm{d}x = [\frac{1}{2}kx^2]_0^1 = \frac{1}{2}k$, 锤击第二次所作的功为 $W_2 = \int_1^{1+h} kx\mathrm{d}x = [\frac{1}{2}kx^2]_1^{1+h} = \frac{1}{2}k(h^2 + 2h)$. 因为 $W_1 = W_2$, 所以 $\frac{1}{2}k(h^2 + 2h) = \frac{1}{2}k$, 求得 $h = -1 \pm \sqrt{2}$, 舍去负值, 得 $h = \sqrt{2} - 1$.

4. 设一锥形贮水池, 深 15m, 口径 20m, 盛满水, 今以唧筒将水吸尽, 问要作多少功?

解 建立如图 6.23 所示的坐标系. A, B 两点的坐标分别为 $(15,0)$ 和 $(0,10)$，过 A, B 两点的直线方程为 $\frac{y}{10}=\frac{x-15}{0-15}$，即 $y=-\frac{2}{3}x+10$. 用唧筒吸水的过程可以想象成是将水一小层一小层往外吸出的. 当 $\mathrm{d}x$ 很小时，相应于 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的这一层水可近似看成圆柱形，其容积近似于

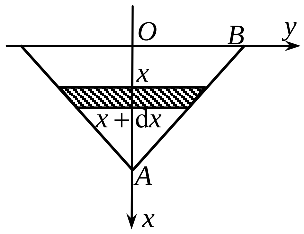

图 6.23

$$V=\pi y^2\mathrm{d}x=\pi(10-\frac{2}{3}x)^2\mathrm{d}x,$$

这薄层水的重量为 $9.8\pi(10-\frac{2}{3}x)^2\mathrm{d}x$ KN. 把这一层水吸出贮水池所作的功近似于 $dW=9.8\pi(10-\frac{2}{3}x)^2\mathrm{d}x\cdot x$. 将水吸尽所做的功为

$$W=\int_0^{15}\mathrm{d}W=\int_0^{15}9.8\pi(10-\frac{2}{3}x)^2x\mathrm{d}x=\int_0^{15}9.8\pi(100x-\frac{40}{3}x^2+\frac{4}{9}x^3)\mathrm{d}x$$

$$=9.8\pi[50x^2-\frac{40}{9}x^3+\frac{1}{9}x^4]_0^{15}=57697.5(\mathrm{kJ}).$$

5. 证明: 将质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处所作的功是

$$W=G\frac{mMh}{R\left(R+h\right)}.$$

其中 G 是引力常数，M 是地球的质量，R 是地球的半径.

证 当物体位于地球表面时，物体所受引为 $\frac{GmM}{R^2}$. 当物体离地面的高度为 x 时，物体所受的引力为 $F(x)=\frac{GmM}{(R+x)^2}$. $F(x)$ 随着 x 的变化而变化，但是，当物体从离地球表面的高度 x 处，再升高微小高度 $\mathrm{d}x$ 时，$F(x)$ 可近似看作不变的，在这个微小升高过程中克服地球引力所作的功近似为 $\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x=\frac{GmM}{(R+x)^2}\mathrm{d}x$. 把物体从地球表面升高到 h 处，克服地球引力所作的功为

$$W=\int_0^h\mathrm{d}W=\int_0^h\frac{GmM}{(R+x)^2}\mathrm{d}x=[-\frac{GmM}{R+x}]_0^h$$

$$=G\frac{mMh}{R\left(R+h\right)}.$$

6. 半径为 r 的球沉入水中，球的上部与水面相切，球的比重与水相同，现将球从水中取出，需作多少功?

解 建立如图 6.24 所示的坐标系. 这里的球可想象成是由一层一层极薄的柱形薄片摆在一起构成的，将球从水中取出需作的功可理解成将这些薄片都上提 $2r$ 的高度时需作的功之和当薄片的厚度趋于零时的极限. 现在考虑将图中对应于区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的薄片提升 $2r$ 的高度时需作的功. 因为球的比重与水相同，所以此薄片在水中所受的浮力与重力相等，因而此薄片在水中移动时外力不作功; 再将此薄片由

水面提升到 B 时, 提升的高度为 $r-x$, 该薄片可近似看作一个圆柱体, 其重量近似为

$$\pi[y(x)]^2\mathrm{d}x\cdot g=\pi g(r^2-x^2)\mathrm{d}x,$$

在这个过程中外力需作的功近似为

$$\pi[y(x)]^2\mathrm{d}x\cdot g=\pi g(r-x)(r^2-x^2)\mathrm{d}x,$$

这是功元素, 于是, 所求的功为

$$W=\int_{-r}^{r}\mathrm{d}W=\int_{-r}^{r}\pi g(r-x)(r^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\pi g[\int_{-r}^{r}(r^3-rx^2)\mathrm{d}x-\int_{-r}^{r}x(r^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\pi g([r^3x-\frac{1}{3}rx^3]_{-r}^{r}-0)=\frac{4}{3}\pi r^4 g\ .$$

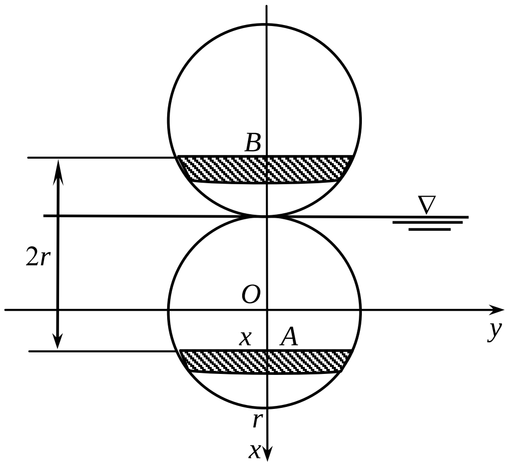

图 6.24

7. 一底为 8cm、高为 6cm 的等腰三角形片, 铅直地沉没在水中, 顶在上, 底在下且与水面平行, 而顶离水面 3cm, 试求它每面所受的压力.

解 建立如图 6.25 所示的坐标系.

考虑三角形片上相应于 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条上所受的水压力, 由于 $\mathrm{d}x$ 很小, 该窄条可近似看成矩形, 其宽为 $\mathrm{d}x$, 利用三角形相似可知其长为 $\frac{4}{3}x$, 因而其面积近似于 $\frac{4}{3}x\mathrm{d}x$. 同样, 由于 $\mathrm{d}x$ 很小, 该窄条上各点在水中的深度可近似看作一样, 都为 $(x+0.3)$, 因而该窄条上各点处的压强都为 $9.8(x+0.3)$, 该窄条所受的水压力的近似值为

$$\mathrm{d}P=9.8(x+0.3)\cdot\frac{4}{3}\mathrm{d}x\cdot x=\frac{39.2}{3}(x^2+0.3x)\mathrm{d}x\ ,$$

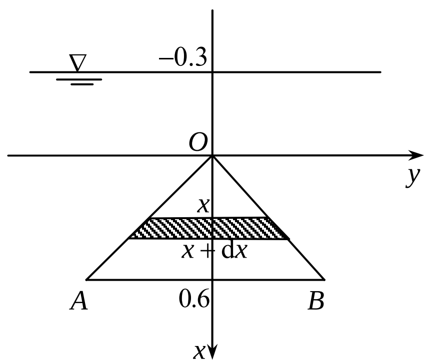

图 6.25

故三角形片每面所受的水压力为

$$P=\int_0^{0.6}\frac{39.2}{3}(x^2+0.3x)\mathrm{d}x=\frac{39.2}{3}[\frac{x^3}{3}+1.5x^2]_0^{0.6}\approx 1.65\mathrm{N}\ .$$

8. 设有一半经为 R, 中心角为 φ 的圆弧形细棒, 其线密度为常数 μ. 在圆心处有一质量为 m 的质点 M. 试求这细棒对质点 M 的引力.

解 建立如图6.26所示的坐标系, 圆心在原点, x 轴垂直平分圆弧形细棒. 由对称性知, 这细棒对质点 M 的引力在 y 轴上的分力为 $F_y=0$.

考虑细棒上相应于小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 的一段, 由于 $\mathrm{d}\theta$ 很小, 这一小段可近似看作一个质点, 其的长度为 $R\mathrm{d}\theta$, 其的质量为 $\mu R\mathrm{d}\theta$. 这一小段对质点 M 的引力大小

的近似值为

$$\mathrm{d}F = G\frac{m\mu R\mathrm{d}\theta}{R^2} = \frac{Gm\mu\mathrm{d}\theta}{R},$$

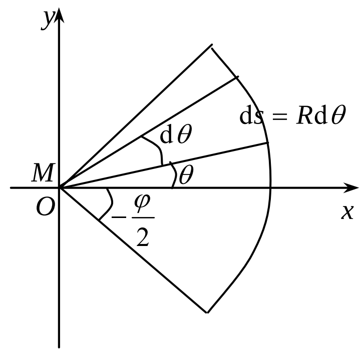

图 6.26

该引力在 x 轴上的分力为 $\mathrm{d}F_x = \dfrac{Gm\mu\cos\theta\mathrm{d}\theta}{R}$,

则细棒对质点 M 的引力在 x 轴上的分力为

$$F_x = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{Gm\mu\cos\theta}{R}\mathrm{d}\theta$$

$$= [\frac{Gm\mu\sin\theta}{R}]_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} = \frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

因此细棒对质点 M 的引力为

$$\boldsymbol{F} = (F_x, F_y) = (\frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}, 0).$$

9. 设有一长度为 L 线密度为 μ 的均匀细直棒, 在与棒的一端垂直距离为 a 单位处有一质量为 m 的质点 M, 试求这细棒对质点 M 的引力.

解 建立如图 6.27 所示的坐标系, 棒位于 y 轴上, 左端点在原点, 质点 M 在 x 轴上. 考虑棒上相应于小区间 $[y, y+\mathrm{d}y]$ 的一段的受力情况, 由于 $\mathrm{d}y$ 很小, 这一小段可近似看作一个质点, 它与质点 M 间的距离为 $r = \sqrt{a^2+y^2}$, 其的质量为 $\mu\mathrm{d}y$. 该小段对质点 M 的引力 $\Delta\boldsymbol{F}$ 的大小为 $\Delta F \approx G\dfrac{m\mu\mathrm{d}y}{a^2+y^2}$,

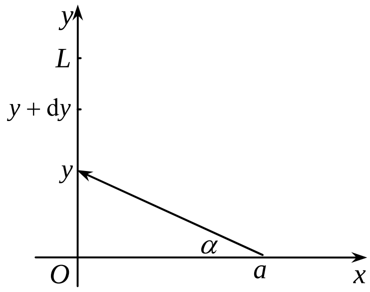

图 6.27

进一步可得 $\Delta\boldsymbol{F}$ 在 y 轴方向上的分力 ΔF_y 的近似值, 即细棒对质点 M 的引力在 y 轴方向上的分力元素为 $\mathrm{d}F_y = \Delta F\cdot\sin\alpha = \dfrac{Gm\mu\mathrm{d}y}{a^2+y^2}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} = \dfrac{Gm\mu y\mathrm{d}y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot$ 在 x 轴方向上的分力元素为 $\mathrm{d}F_x = -\Delta F\cdot\cos\alpha = -\dfrac{Gm\mu\mathrm{d}y}{a^2+y^2}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} = -\dfrac{Gm\mu a\mathrm{d}y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot$ 这细棒对质点 M 的引力在 y 轴方向上的分力为

$$F_y = \int_0^L \frac{Gm\mu y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}Gm\mu\int_0^L (a^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}(a^2+y^2)$$

$$=\frac{1}{2}Gm\mu[-2(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}]_0^L=Gm\mu(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}) .$$

这细棒对质点 M 的引力在 x 轴方向上的分力为

$$F_x=\int_0^L-\frac{Gm\mu a}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y=-\frac{Gm\mu L}{a\sqrt{a^2+L^2}} .$$

因此细棒对质点 M 的引力为

$$\boldsymbol{F}=(F_x,F_y)=(Gm\mu(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}),-\frac{Gm\mu L}{a\sqrt{a^2+L^2}}).$$