第五节

广义积分

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 广义积分简介

定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ $\begin{cases} \text{积分区间有限} \\ \text{被积函数有界} \end{cases}$

(常义积分)

↓ 推广

广义积分 $\begin{cases} \text{积分区间无限} \\ \text{被积函数无界} \end{cases}$

(二) 无穷积分定义

1.设 $f(x)\in C[a,+\infty)$， 取 $b>a$， 若

$$I=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在，则称 I 为 $f(x)$ 的无穷限广义积分，记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

这时称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；

若上述极限不存在，称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

2. 若 $f(x)\in C(-\infty,b]$, 则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

3. 若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 若

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x \text{ 及 } \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

均收敛(c 为任意取定的常数), 则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

并称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 收敛. 若

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}\,x \text{及} \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

中有一个发散，则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

注 上述定义中若出现 $\infty-\infty$，并非不定型，

它表明该广义积分发散 .

记号引进

记 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$; $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$

设 $F(x)$: $f(x)$的原函数 ,则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b)-F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty)-F(-\infty)$$

—— 广义牛 —— 莱公式

(三) 瑕积分定义

1. 设 $f(x)\in C(a,b]$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$, 取 $\varepsilon>0$,

若 $I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称I为$f(x)$ 在 $(a,b]$上的广义积分，记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

称$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；若极限I不存在，称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散．

2. 若 $f(x)\in C[a,b)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$, 则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

3. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续（除点 $c(a<c<b)$ 外），

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$, 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

无界点常称为瑕点(奇点)．

注 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有有限个第一类间断点，

则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是常义积分,不是广义积分.

如 $\int_{-2}^2 \dfrac{x^2-4}{x-2}\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^2 (x+2)\,\mathrm{d}x$

记号引进　　　　（$F(x)$: $f(x)$的原函数）

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$$　（ b： 瑕点 ）

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a^+)$$　（ a： 瑕点 ）

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^+)$$　（ a, b： 瑕点 ）

—— 广义牛 — 莱公式

注　若瑕点 $c \in (a,b)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - \underline{F(c^+) + F(c^-)} - F(a)$$

问题：$F(c^-)$与$F(c^+)$相等吗？

二、典型例题

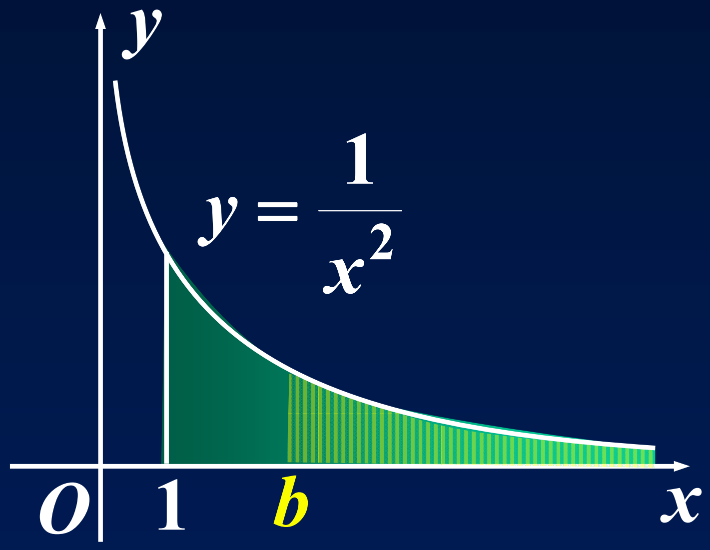
例1 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的开口曲边梯形的面积, 可记作

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

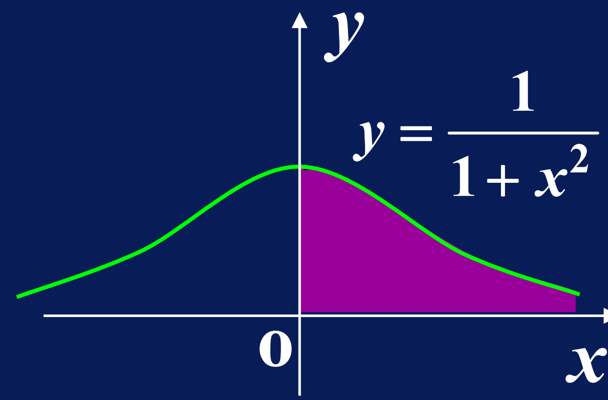
其含义为

$$A=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$



例2 求广义积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.



解 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

$=\lim_{b\to+\infty}\arctan x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}(\arctan b-0)=\frac{\pi}{2}$

几何意义 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 表示位于曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$

之下，x轴之上，Y轴之右的向右延伸至无穷

的图形的面积.

例3 证明 p 积分 $I(p)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛于 $\frac{1}{p-1}$；$p\leqslant 1$ 时发散 .

证 $I(p)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-p}\,\mathrm{d}x \underline{\underline{p\neq 1}} \lim\limits_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}[b^{1-p}-1]=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \frac{1}{p-1}, & p>1\end{cases}$$

当 $p=1$ 时，$I(p)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\left[\ln|x|\right]_1^{+\infty}=+\infty$

故 $\boxed{I(p)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\begin{cases}\text{收敛于}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ \text{发散} & p\leqslant 1\end{cases}}$

例4 $I=\int_0^{+\infty} te^{-pt}\,\mathrm{d}t\,(p>0).$

解 $I=-\dfrac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}+\dfrac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\mathrm{d}t$

$=-\dfrac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{1}{p^2}$

例5 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

解 因 $\int_0^{+\infty}\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

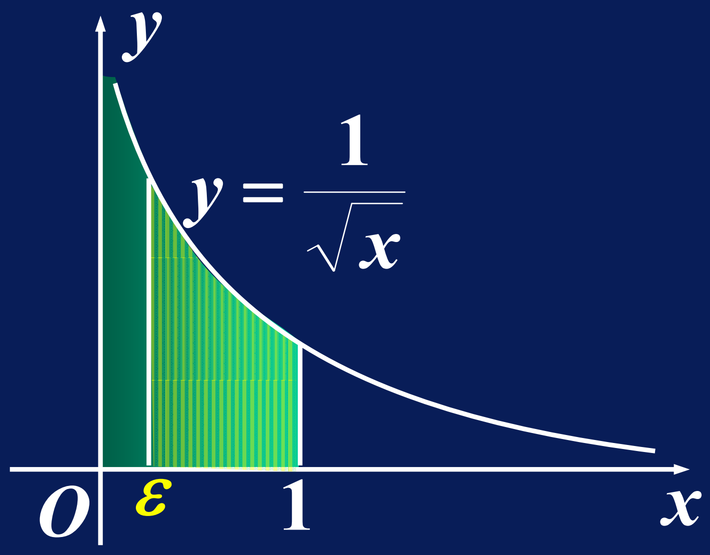
$$=\lim_{b\to+\infty}\ln(1+x^2)\Big|_0^b=+\infty$$

故 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$发散.

思考题 “设$f(x)$是连续的奇函数，则必有 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0$.” 对吗?

例6 (引例) 曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 与 x 轴, y 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$



其含义为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$

例7 证明广义积分$I(q)=\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$

当 $q<1$ 时收敛；$q\geqslant 1$时发散.

证 当 $q=1$ 时，$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\left[\ln|x-a|\right]_{a^+}^{b}=+\infty$

当 $q\neq 1$ 时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_{a^+}^{b}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1\\ +\infty, & q>1\end{cases}$$

故 $\boxed{I(q)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}\begin{cases}\text{收敛于 }\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1\\ \text{发散}, & q\geqslant 1\end{cases}}$

三、同步练习

1. 计算$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

2. 证明$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

3. 计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$

4. 计算$\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

四、同步练习解答

1. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

解 令 $\sqrt{x}=t$, 则有 $x=t^2, \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t.$

原式 $= \int_0^{+\infty} \frac{2t}{t+t^3}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$= 2\operatorname{arctg} t\Big|_0^{+\infty} = \pi.$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. 证明$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 并求其值.

解　令$t=\frac{1}{x}$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^4}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2} \mathrm{d}x$$

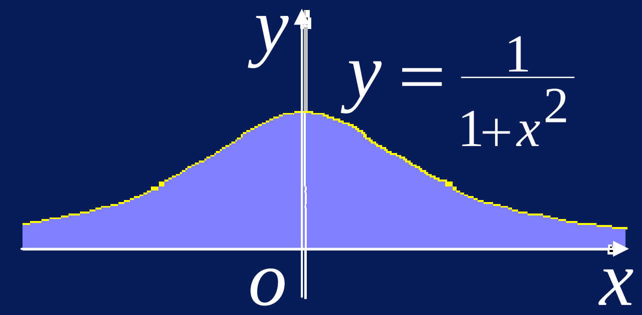
$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2} \mathrm{d}(x-\frac{1}{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \Bigg|_{0^+}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

3. 计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$



$\boxed{\text{问题}}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\cancel{=}0$ 对吗?

分析 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 原积分发散!

注 广义积分在收敛时才能用“偶倍奇零”的性质.

4. 计算 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 当 $x \to 1$ 时, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to \infty$, 积分为广义积分,

$$\text{原式} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$