# 第四节 空间直线及其方程

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

# 一、主要内容

## (一) 空间直线的方程

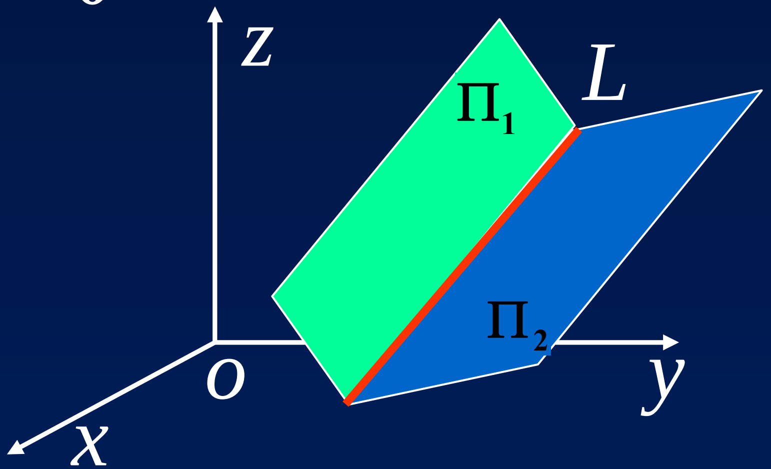
**定义** 空间直线可看成两平面的交线.

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

### 1. 空间直线的一般式方程

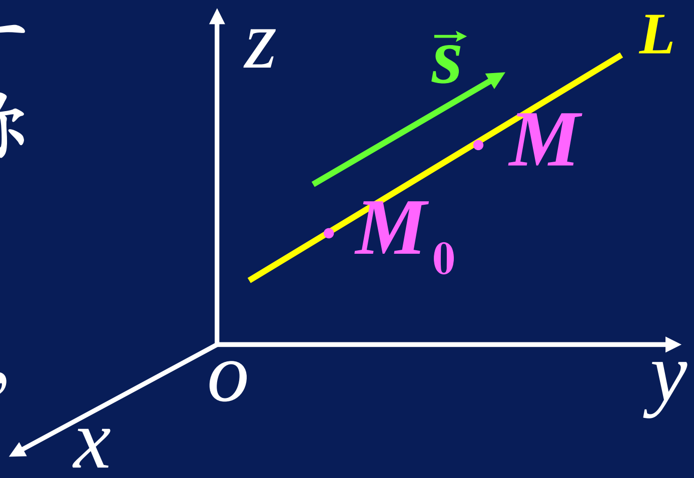
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



## 2. 空间直线的对称式方程

**方向向量的定义：**

如果一非零向量平行于一条已知直线，则这个向量称为这条直线的**方向向量**.




$M_0(x_0, y_0, z_0)$,  $M(x, y, z)$,

$\forall\ M \in L$,  $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$

$\vec{s} = (m, n, p)$,  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

## 直线的对称式方程:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

直线的一组**方向数**

方向向量的余弦称为直线的**方向余弦**.

**说明:** 某些分母为零时, 其分子也理解为零.

例如, 当 $m=n=0,\ p\neq 0$ 时, 直线方程为

$$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$$

令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

## 3. 空间直线的参数方程

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \qquad (参数\ t \in R)$$

**注** 化直线$L$方程的一般式

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \quad (1)$$

为对称式的**步骤**:

1° 由(1), 任意求出直线$L$上的一点

$$M_0(x_0,\ y_0, z_0)$$

(只要点$M_0$的坐标同时满足(1)中的两个方程即可)

2° 确定$L$ 的方向向量 $\vec{s}$.

$\because$ $L$在平面$\Pi_1$和$\Pi_2$上

$\therefore$ $L \perp \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $L \perp \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

又$\because$ $\vec{s} \,/\!/\, L$

$\therefore$ $\vec{s} \perp \vec{n}_1$, $\vec{s} \perp \vec{n}_2$

若$\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$，则可取

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

由此可确定方向数$m, n, p$，从而写出$L$的对称式.

## (二) 两直线的夹角

**定义** 两直线的方向向量的夹角称之.（锐角）

直线 $L_1$： $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$,

直线 $L_2$： $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$,

$$\cos(L_1\hat{,}L_2)=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

——两直线的夹角公式

## 两直线的位置关系

(1) $L_1 \perp L_2 \iff \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$

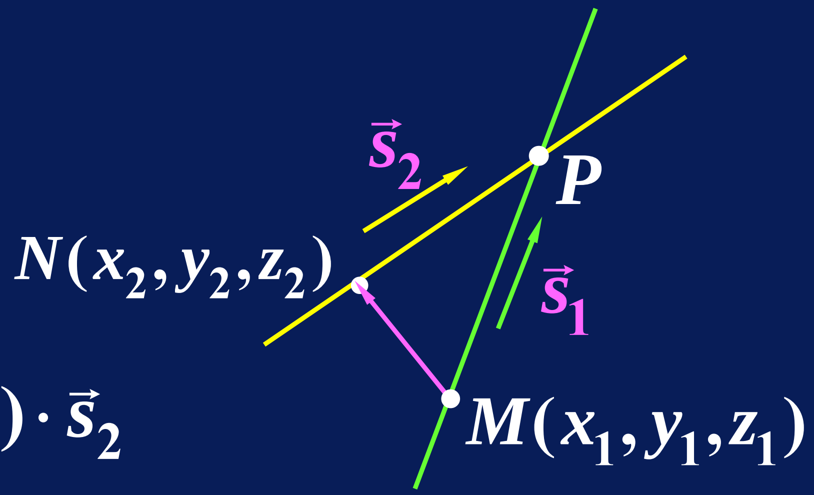
$$\iff m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$$

(2) $L_1 // L_2 \iff \vec{s}_1 // \vec{s}_2$

$$\iff \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

(3) $L_1$ 与 $L_2$ 相交

$\Longleftrightarrow \vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$, 且



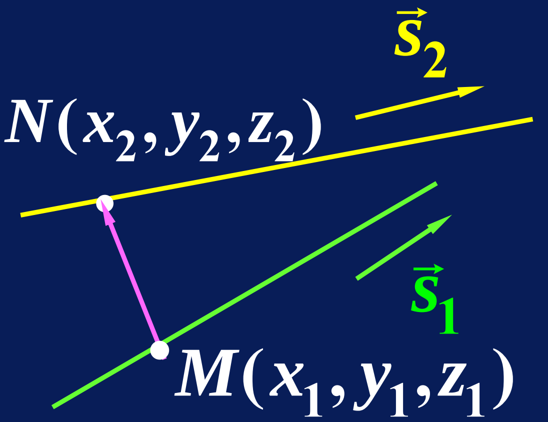

$$[\overrightarrow{MN}\ \vec{s}_1 \vec{s}_2] = (\overrightarrow{MN} \times \vec{s}_1) \cdot \vec{s}_2$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

(4) $L_1$ 与 $L_2$ 异面

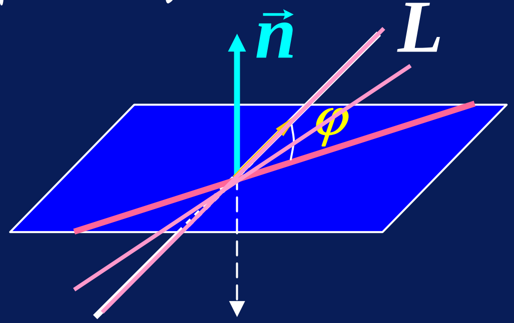
$$\Longleftrightarrow [\overrightarrow{MN}\,\vec{s}_1\vec{s}_2] = (\overrightarrow{MN}\times\vec{s}_1)\cdot\vec{s}_2$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$$



## (三) 直线与平面的夹角

**定义** 直线和它在平面上的投影直线的夹角 $\varphi$ $(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$ 称为直线与平面的夹角.




$$L: \quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

$\vec{s} = (m, n, p),$

$$\Pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

$\vec{n} = (A, B, C),$

$$(\vec{s}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad 或 \quad (\vec{s}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

$$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{s}\,\hat{,}\,\vec{n})\right| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}\,|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}$$

$$= \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

—— 直线与平面的夹角公式

## 直线与平面的位置关系

(1) $L \perp \Pi \iff \vec{s}\,//\,\vec{n} \iff \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}.$

(2) $L\,//\,\Pi \iff \vec{s} \perp \vec{n} \iff Am+Bn+Cp=0.$

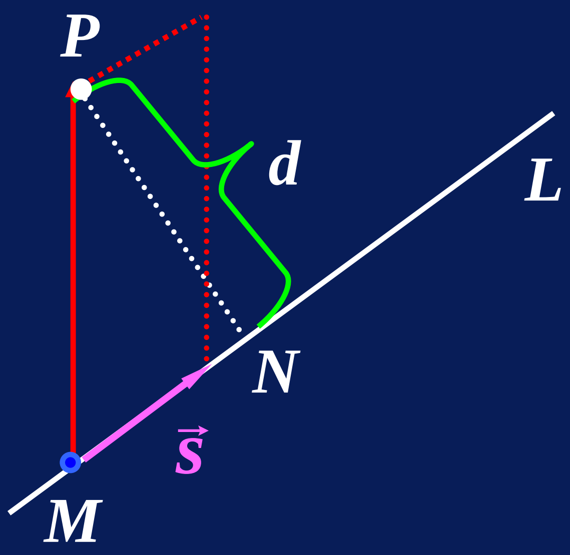
## (四) 点到直线的距离

$\because$ 面积 $S_{\square} = |\vec{s}| \cdot d$

$$= \left| \vec{s} \times \overrightarrow{MP} \right|$$

$\therefore$ 点$P$到直线 $L$的距离为:

$$d = \frac{\left| \vec{s} \times \overrightarrow{MP} \right|}{|\vec{s}|}$$



## (五) 平面束法

**1. 平面束**：设直线$L$的方程为：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

则称 $\Pi_\lambda$：

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0 \quad (2)$$

(参数$\lambda \in R$)

为通过直线$L$的平面束.

设$\Pi_1$： $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

可以证明：$\Pi_\lambda$ 是通过直线 $L$(除去$\Pi_1$)的所有平面.

## 二、典型例题

**例1** 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x-y+3z+6=0 \end{cases}$$

**解** 在直线上任取一点 $(x_0, y_0, z_0)$

取 $x_0=1 \Rightarrow \begin{cases} y_0+z_0=0 \\ -y_0+3z_0+8=0 \end{cases}$,

解得 $y_0=2$, $z_0=-2$

点坐标 $(1,2,-2)$,

再求直线的方向向量:

因所求直线与两平面的法向量都垂直

取 $$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=(4,-1,-3),$$

对称式方程 $$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{-3},$$

参数方程 $$\begin{cases}x=1+4t\\ y=2-t\\ z=-2-3t\end{cases}.$$

**例2** 一直线过点$A(2,-3,4)$，且和 $y$轴垂直相交，求其方程.

一般思路：作过$A$点且垂直于已知直线$L_1$的平面$\Pi$，再求$\Pi$与$L_1$的交点，进而求得所求直线的方向向量.
此处 $\Pi: y=-3$

**解** 因为直线和$y$轴垂直相交，

所以交点为 $B(0,-3,0)$,

取 $\vec{s}=\overrightarrow{BA}=(2,0,4)$,

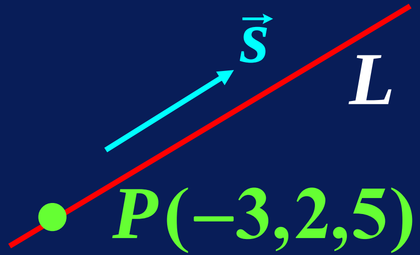
所求直线方程
$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{4}.$$

**例3** 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

**解** 设所求直线的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$,

根据题意知 $\vec{s}\perp\vec{n}_1=(1,0,-4)$,

$\vec{s}\perp\vec{n}_2=(2,-1,-5)$




取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}=(-4,-3,-1)$,

所求直线的方程 $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$.

**例4** 设有两直线 $L_1$: $x-1=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$和

$L_2$：$x+1=y-1=z$,试确定 $\lambda$的值，使

(1) 两直线异面;

(2) 两直线相交，并求它们 所在平面的方程.

**解** (1) 依题设，有

$$M(1,-1,1)\in L_1,\ N(-1,1,0)\in L_2,$$

$$\overrightarrow{MN}=(-2,2,-1),\ \vec{s}_1=(1,2,\lambda),\ \vec{s}_2=(1,1,1)$$

$$\overrightarrow{MN}=(-2,2,-1),\ \vec{s}_1=(1,2,\lambda),\quad \vec{s}_2=(1,1,1)$$

$$\because \quad [\overrightarrow{MN}\,\vec{s}_1\vec{s}_2]=(\overrightarrow{MN}\times\vec{s}_1)\cdot\vec{s}_2$$

$$=\begin{vmatrix}-2 & 2 & -1\\ 1 & 2 & \lambda\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-2)\cdot\begin{vmatrix}2 & \lambda\\ 1 & 1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ 1 & 1\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(-2)\cdot(2-\lambda)-2\cdot(1-\lambda)+1=4\lambda-5$$

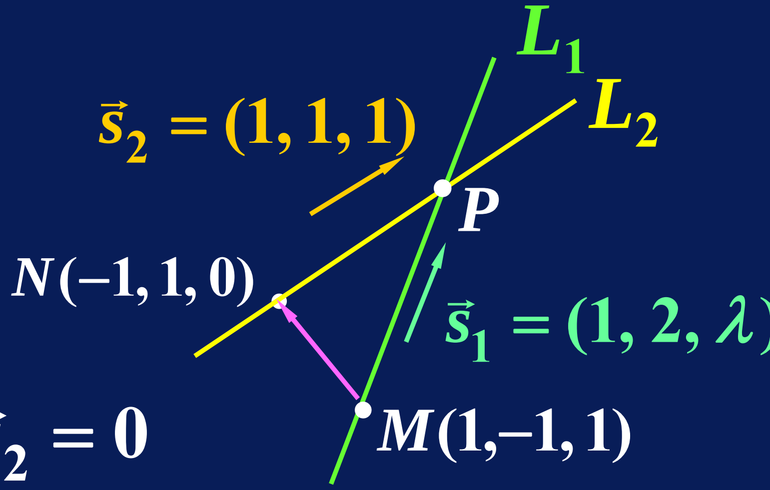
而$L_1$与$L_2$异面$\Leftrightarrow [\overrightarrow{MN}\,\vec{s}_1\vec{s}_2]\neq 0$

$\therefore$ 当$\lambda\neq\frac{5}{4}$时，所给两直线异面.

(2) 两直线相交，并求它们所在平面的方程.

$\because$ $\vec{s}_1$与$\vec{s}_2$不平行

$L_1$ 与 $L_2$ 相交




$$\Longleftrightarrow [\overrightarrow{MN}\ \vec{s}_1 \vec{s}_2] = (\overrightarrow{MN} \times \vec{s}_1) \cdot \vec{s}_2 = 0$$

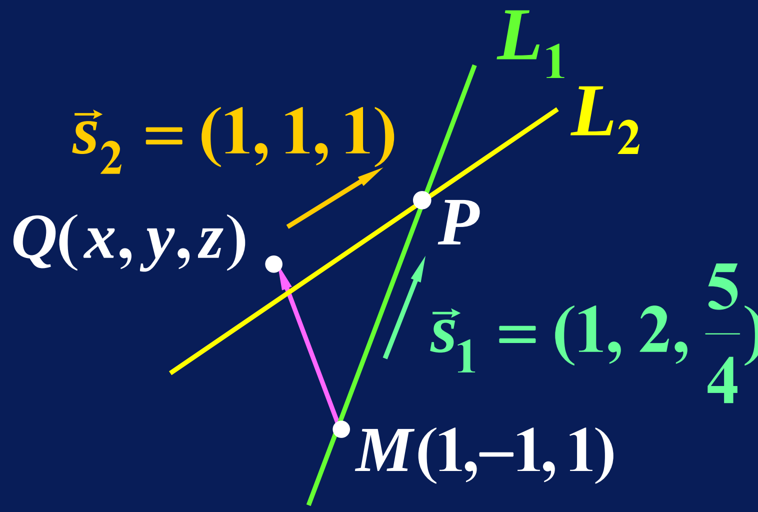
即 $$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\lambda - 5 = 0$$

$\therefore$ 当 $\lambda = \dfrac{5}{4}$ 时，所给两直线相交 .

当$\lambda=\dfrac{5}{4}$时，两直线相交.

$\forall\, Q(x,y,z)\in\Pi$，有 $[\overrightarrow{MQ}\,\vec{s}_1\vec{s}_2]=(\overrightarrow{MQ}\times\vec{s}_1)\cdot\vec{s}_2=0$

即 $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 2 & \dfrac{5}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$




故所求平面方程为

$$\frac{3}{4}(x-1)+\frac{1}{4}(y+1)-(z-1)=0,$$ 即 $3x+y-4z+2=0.$

**例5** 设直线$L$：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，

平面$\Pi$：$x-y+2z=3$，求直线与平面的夹角.

**解** $\vec{n}=(1,-1,2)$，$\vec{s}=(2,-1,2)$，

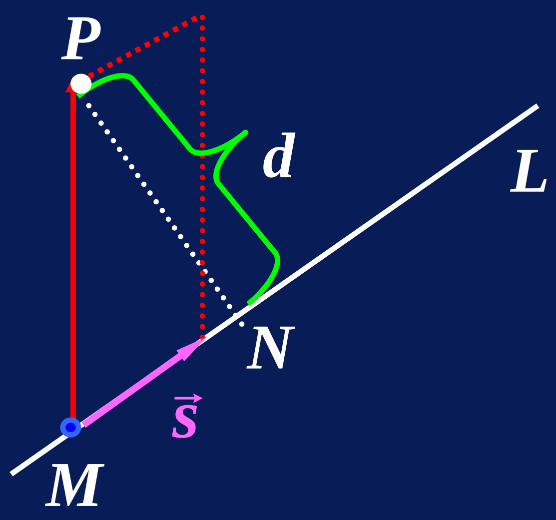
$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$=\frac{|1\times 2+(-1)\times(-1)+2\times 2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

$\therefore\quad \varphi=\arcsin\dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ 为所求夹角.

**例6** 求点$P(0,-1,1)$到直线$\begin{cases} y+1=0 \\ x+2z-7=0 \end{cases}$的距离.

**解** (方法1) 公式法




所给直线$L$的方向向量:

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, 0, -1),$$

取点 $M(5,-1,1) \in L$， $\overrightarrow{MP} = (5, 0, 0) \in L$

$$\vec{s} \times \overrightarrow{MP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -5, 0),$$

$$\vec{s} = (2, 0, -1),$$

$$\vec{s} \times \overrightarrow{MP} = (0, -5, 0),$$

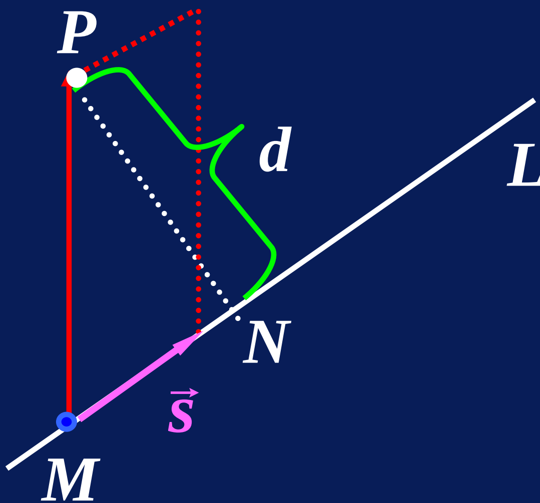
$\therefore$ 点 $P$ 到所给直线 的距离为:

$$d = \frac{\left|\vec{s} \times \overrightarrow{MP}\right|}{\left|\vec{s}\right|}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2^2 + 0 + (-1)^2}} = \sqrt{5}.$$

(方法2)

直线$L$的参数方程: $\begin{cases} x = -2t + 7 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$




点$N(-2t+7, -1, t) \in L$

要求: $\vec{s} \perp \overrightarrow{NP}$, 则有 $\vec{s} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$

$$\overrightarrow{NP} = (2t-7, 0, 1-t), \quad \vec{s} = (2, 0, -1),$$

$$\therefore \quad 2 \cdot (2t-7) + 0 + (-1) \cdot (1-t) = 0$$

$$t = 3$$

$\overrightarrow{NP} = (1, 0, 2)$, 从而 $d = \left|\overrightarrow{NP}\right| = \sqrt{5}.$

**例7** 求过点 $M(0,0,1)$, 且通过两平面

$$\Pi_1: \quad x+y+z+1=0$$

$$\Pi_2: \quad 4x-y+3z+1=0$$

交线的平面方程 .

**解** **(方法1)** $\because \Pi_1 \not\parallel \Pi_2$

$\therefore$ $\Pi_1$ 与 $\Pi_2$必相交成一直线 $L$:

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 4x-y+3z+1=0 \end{cases}$$

又$\because$ $M \notin \Pi_1$, $M \notin \Pi_2$

$\therefore$ 所求平面 $\Pi$一定不是 $\Pi_1$, $\Pi_2$

$\because$ 所求平面 $\Pi$ 通过直线 $L$

$\therefore$ $\Pi$一定在过直线 $L$的平面束 $\Pi_\lambda$中.

$\Pi_\lambda$ : $(4x - y + 3z + 1) + \lambda(x + y + z + 1) = 0$

即 $(4+\lambda)x+(\lambda-1)y+(3+\lambda)z+(1+\lambda)=0$

$\because$ $M(0,0,1)$在$\Pi$上, 将点$M$的坐标代入上式,

得 $(3+\lambda)\cdot 1+(1+\lambda)=0$

解得 $\lambda=-2$

$\therefore$ 所求平面 $\Pi$: $2x-3y+z-1=0$

(方法2) 在 $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 4x-y+3z+1=0 \end{cases}$

中令 $y=0$, 得

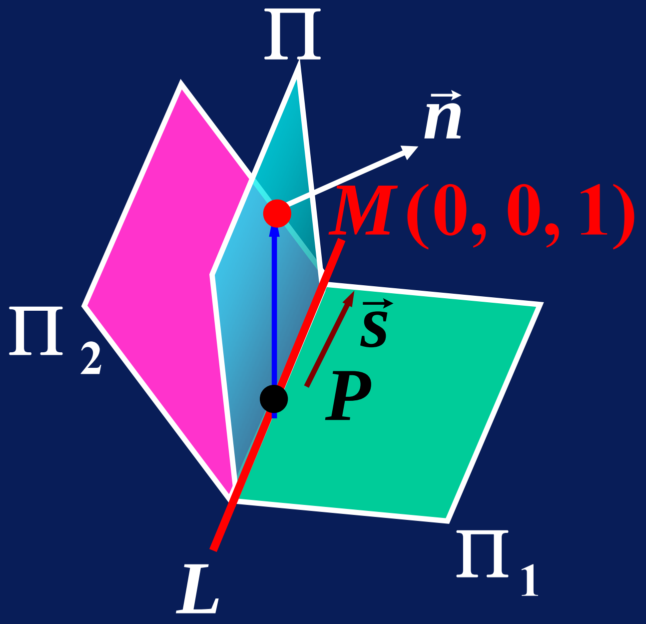
$$\begin{cases} x+z+1=0 \\ 4x+3z+1=0 \end{cases}$$

解得 $x=2,\ z=-3$

即得到点 $P(2,0,-3)\in L$.

$\because$ 所求平面的法向量 $\vec{n}\perp\overrightarrow{PM}$, $\vec{n}\perp\vec{s}$

而 $\overrightarrow{PM}=(2,0,-4)$



$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (4, 1, -5)$$

$$\therefore \quad 取 \quad \vec{n} = \overrightarrow{PM} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (4, -6, 2)$$

$$= 2(2, -3, 1)$$

$\therefore$ 所求平面$\Pi$的方程为

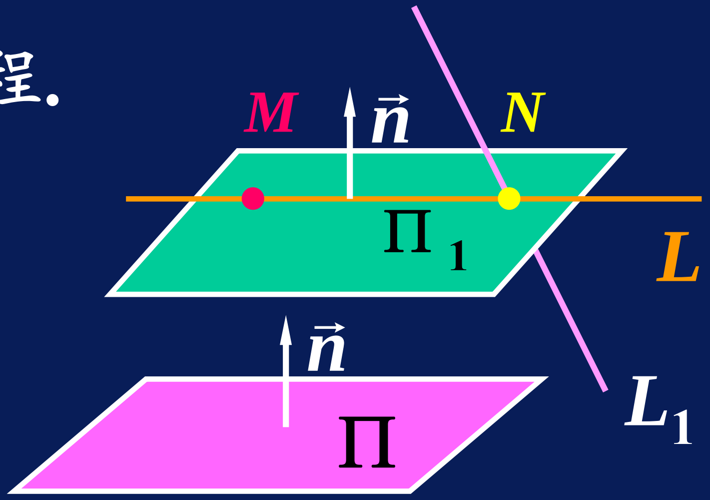
$$2(x-0) - 3(y-0) + 1 \cdot (z-1) = 0$$

即 $2x - 3y + z - 1 = 0.$

**例8 (综合)** 求过点$M(1,2,3)$与直线

$$L_1:\begin{cases}2x+z=3\\ x+y-z=1\end{cases}$$相交，且平行于平面

$\Pi$: $x+y+z+1=0$的直线方程.




**解** (方法1)

$1^\circ$ 过点$M$作平行于平面 $\Pi$ 的平面 $\Pi_1$.

$\because$ 平面$\Pi$的法向量：$\vec{n}=(1,1,1)$

$\therefore$ $\Pi_1$: $1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)+1\cdot(z-3)=0$

即 $x+y+z-6=0.$

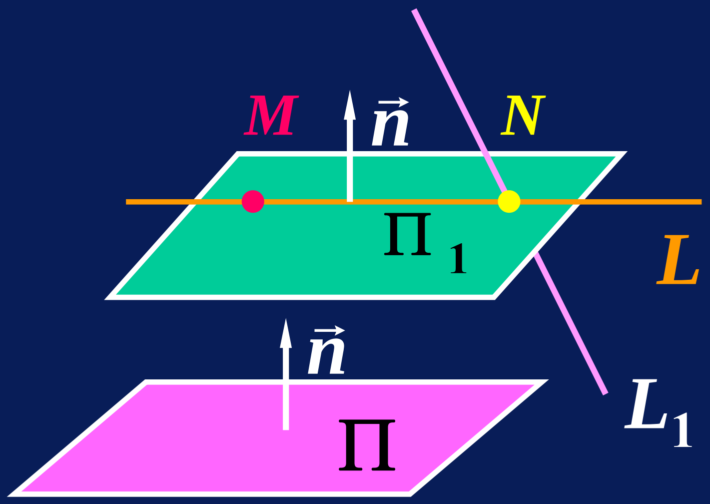
$\because$ 所求直线 $L$过点 $M$，

且平行于 $\Pi$

$\therefore$ $L$必在平面 $\Pi_1$上

故 $L_1$与$L$的交点$N$必在$\Pi_1$上，

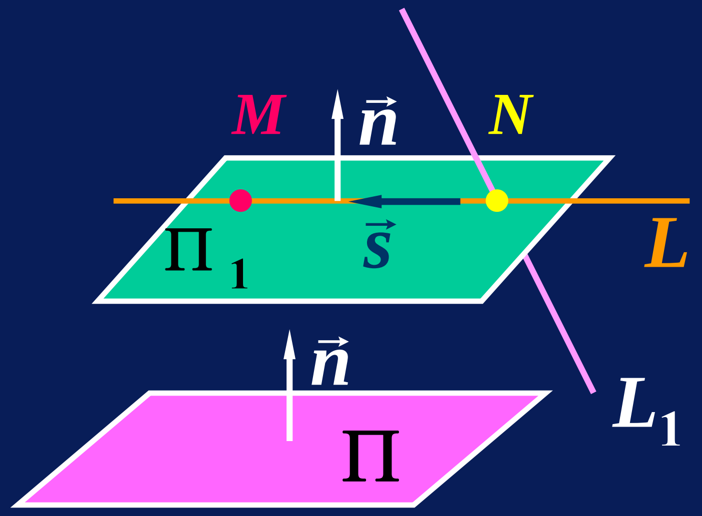
从而 $N$就是$L_1$与$\Pi_1$的交点.




$2^\circ$ 求 $L_1$与$\Pi_1$的交点$N$

解方程组: $\begin{cases} 2x+z=3 \\ x+y-z=1, \\ x+y+z=6 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{13}{4} \\ z=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

即 $N(\frac{1}{4},\frac{13}{4},\frac{5}{2}).$




3° 求 $L$的方向向量 $\vec{s}$

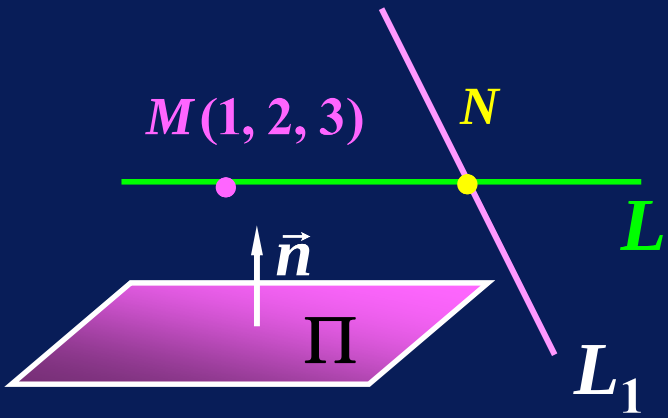
$$\overrightarrow{NM}=(\frac{3}{4},-\frac{5}{4},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(3,-5,2)$$

取 $\vec{s}=4\overrightarrow{NM}=(3,-5,2)$

故所求直线 $L$: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-3}{2}$

(方法2) $1^\circ$ 将 $L_1$的方程 $\begin{cases} 2x+z=3 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

化为参数式方程.




令 $x=0$, 得 $y=4$, $z=3$

$\therefore \quad P(0,4,3)\in L_1$

$\Pi$: $x+y+z+1=0$

$\vec{n}=(1,1,1)$

$L_1$的方向向量为

$$\vec{s}_1=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-1,3,2)$$

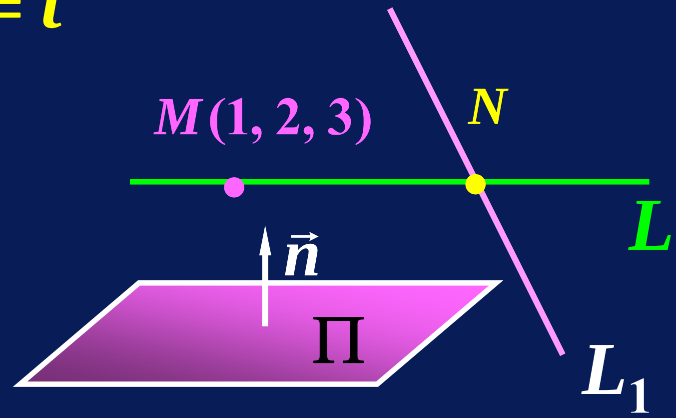
$$\boxed{\begin{array}{l} P(0,4,3)\in L_1 \\ \vec{s}_1=(-1,3,2) \end{array}}$$

故 $L_1$的对称式方程为

$$\frac{x-0}{-1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{2}=t$$

从而 $L_1$的参数式方程为

$$\begin{cases} x=-t \\ y=4+3t \\ z=3+2t \end{cases}$$




$\Pi$: $x+y+z+1=0$

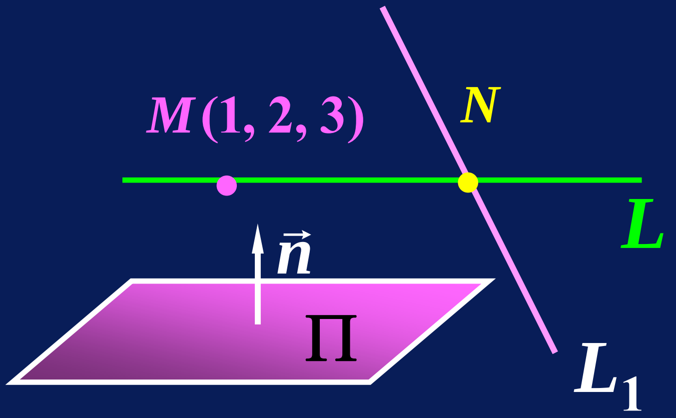
$\vec{n}=(1, 1, 1)$

$\therefore$ 可设所求直线 $L$与已知直线 $L_1$的交点为

$N(-t, 4+3t, 3+2t)$, 其中 $t$为待定参数 .

$N(-t,4+3t,3+2t)$,

$\overrightarrow{MN}=(-t-1,2+3t,2t)$




$\Pi$: $x+y+z+1=0$

$\vec{n}=(1,1,1)$

依题意， $L\,//\,\Pi$ $\quad\therefore\quad$ $\overrightarrow{MN}\,//\,\Pi$

故 $\overrightarrow{MN}\perp\vec{n}$ $\quad\therefore\quad$ $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}=0$

即 $(-t-1)\cdot1+(2+3t)\cdot1+2t\cdot1=0$ $\quad\therefore\quad$ $t=-\dfrac{1}{4}$.

从而$L_1$的方向向量为 $\overrightarrow{MN}=(-\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4},-\dfrac{1}{2})$.

故所求直线 $L$: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z-3}{2}$.

(方法3)　思路：设

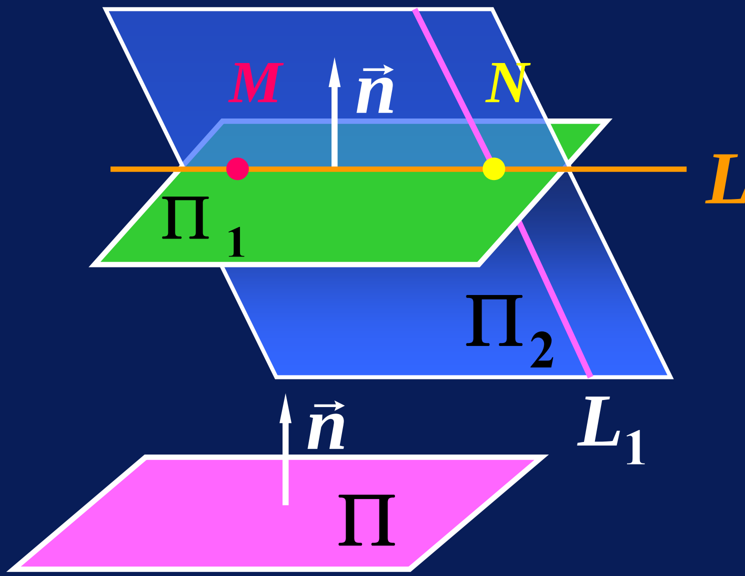
$\Pi_1$：过点 $M$，平行于平面 $\Pi$的平面.

$\Pi_2$：过点 $M$，且通过

已知直线 $L_1$的平面.

则所求直线 $L$ 正是上述

两平面的交线.



## 三、同步练习

1. 求过点$M(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

2. 求过直线：$\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0, \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 组成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

3. 求直线 $L:\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $\Pi:$ $x+2y-z=0$ 上的投影直线的方程 .

**4. (综合)**

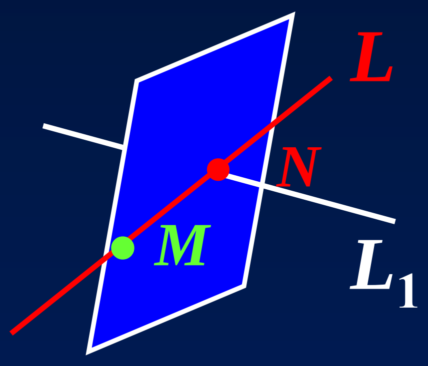
求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y = 2x \\ z = x - 1 \end{cases}$, $L_2:\begin{cases} y = 3x - 4 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$ 都相交的直线 $L$.

# 四、同步练习解答

1. 求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

**解** 先作一过点 $M$ 且与已知直线 $L_1$ 垂直的平面 $\Pi$

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$




再求已知直线与该平面的交点 $N$,

令 $$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}=t \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$$

代入平面方程得 $t=\frac{3}{7}$， 交点$N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=(\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3)=(-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}),$$

$$=-\frac{6}{7}(2,-1,4),$$

所求直线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$

2. 求过直线：$\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0, \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 组成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

**解** 过已知直线的平面束方程为

$$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0,$$

即 $(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0,$

其法向量 $\vec{n}=(1+\lambda,5,1-\lambda).$

又已知平面的法向量 $\vec{n}_1=(1,-4,-8).$

由题设知 $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}\right|}$

$$=\frac{\left|(1+\lambda)\cdot 1+5\cdot(-4)+(1-\lambda)\cdot(-8)\right|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}}$$

即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\left|\lambda-3\right|}{\sqrt{2\lambda^2+27}}$, 由此解得 $\lambda=-\dfrac{3}{4}$.

代回平面束方程, 得所求为平面方程:

$$x+20y+7z-12=0.$$

又 $\because \quad x-z+4=0$ 与 $x-4y-8z+12=0$

的夹角余弦:

$$\cos\varphi=\frac{\left|1\cdot 1+0\cdot(-4)+(-1)\cdot(-8)\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi=\frac{\pi}{4}$$

$\therefore \quad x-z+4=0$ 也是所求平面．

**注** 利用平面束:

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0$$

求平面方程时，应注意检验

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

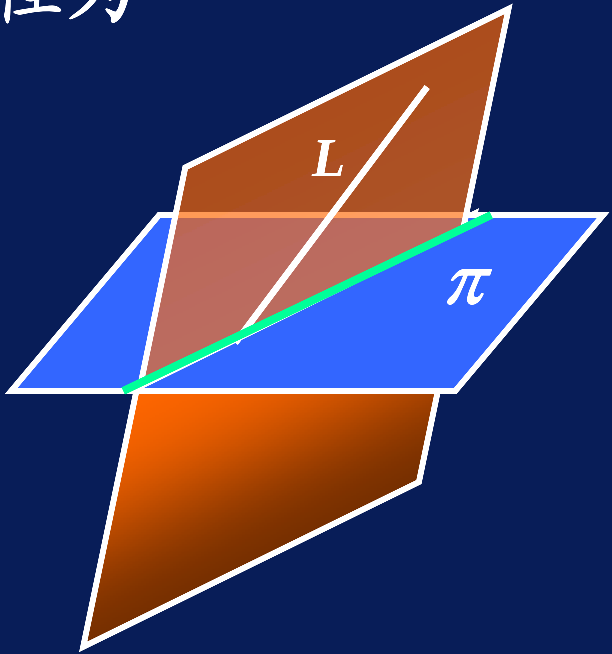
是否为满足题设条件的所求平面，以免丢失此解.

3. 求直线 $L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\ x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi$: $x+2y-z=0$ 上的投影直线的方程．

解　过直线 $L$ 的平面束方程为

$$(2x-y+z-1)$$
$$+\lambda(x+y-z+1)=0,$$

即 $(2+\lambda)x+(\lambda-1)y$
$$+(1-\lambda)z+(\lambda-1)=0.$$



又 $\because$ 垂直于平面 $\pi$,

$\therefore (2+\lambda)\cdot 1+(\lambda-1)\cdot 2+(1-\lambda)\cdot(-1)=0.$

即 $4\lambda-1=0$, 故 $\lambda=\dfrac{1}{4}$

将 $\lambda$ 代入平面束方程，得 $3x-y+z-1=0.$

所求投影直线方程为 $\begin{cases} 3x-y+z-1=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}.$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

**4. (综合)**

求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y = 2x \\ z = x - 1 \end{cases}$，

$L_2:\begin{cases} y = 3x - 4 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$ 都相交的直线 $L$.

**解** (方法1) 将两已知直线方程化为参数方程为

$$L_1:\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t - 1 \end{cases}, \quad L_2:\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 4 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

设所求直线 $L$ 与 $L_1, L_2$ 的交点分别为

$A(t_1, 2t_1, t_1 - 1)$ 和 $B(t_2, 3t_2 - 4, 2t_2 - 1)$.

$\because$ $M_0(1,1,1)$ 与 $A, B$ 三点共线,

故 $\overrightarrow{M_0A} = \lambda \overrightarrow{M_0B}$ ($\lambda$ 为实数).

$\because$ $\overrightarrow{M_0A} = (t_1 - 1, 2t_1 - 1, t_1 - 2)$

$\overrightarrow{M_0B} = (t_2 - 1, 3t_2 - 5, 2t_2 - 2)$

于是 $\overrightarrow{M_0A}, \overrightarrow{M_0B}$ 对应坐标成比例，即有

$$\frac{t_1 - 1}{t_2 - 1} = \frac{2t_1 - 1}{3t_2 - 5} = \frac{t_1 - 2}{2(t_2 - 1)},$$

由 $\dfrac{t_1-1}{\cancel{t_2-1}}=\dfrac{t_1-2}{2\cancel{(t_2-1)}}$, 得 $t_1=0$,

代入 $\dfrac{t_1-1}{t_2-1}=\dfrac{2t_1-1}{3t_2-5}$, 得 $t_2=2$.

$\therefore\ A(0,0,-1),\ B(2,2,3)$

$\because$ $L$的方向向量 $\vec{s}=\overrightarrow{M_0B}=(1,1,2)$

故 $L$ 的方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

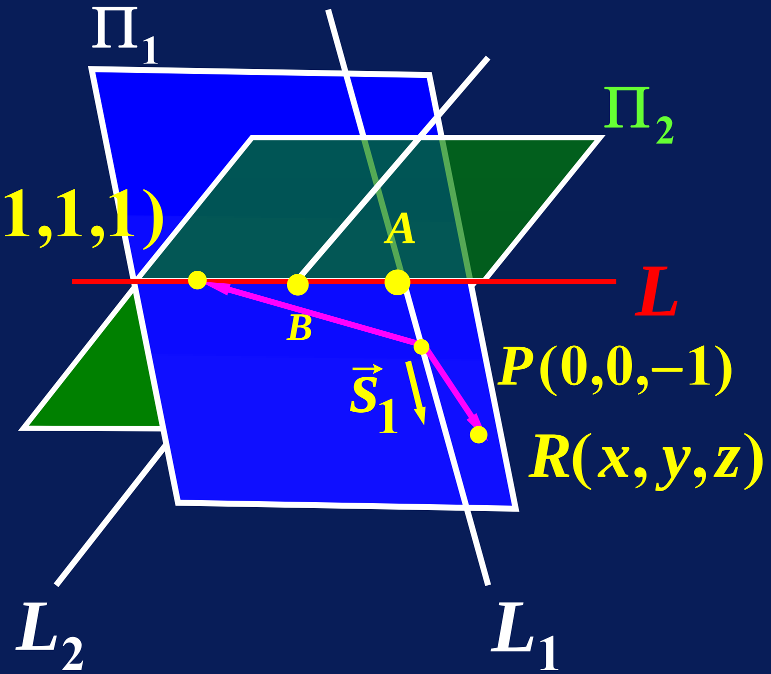
(方法2) $\vec{s}_1 = (1, 2, 1)$

$\Pi_1$： $[\,\overrightarrow{PR}\ \overrightarrow{PM}\ \vec{s}_1\,] = 0$

即 $\begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

亦即 $3x - y - (z+1) = 0,$

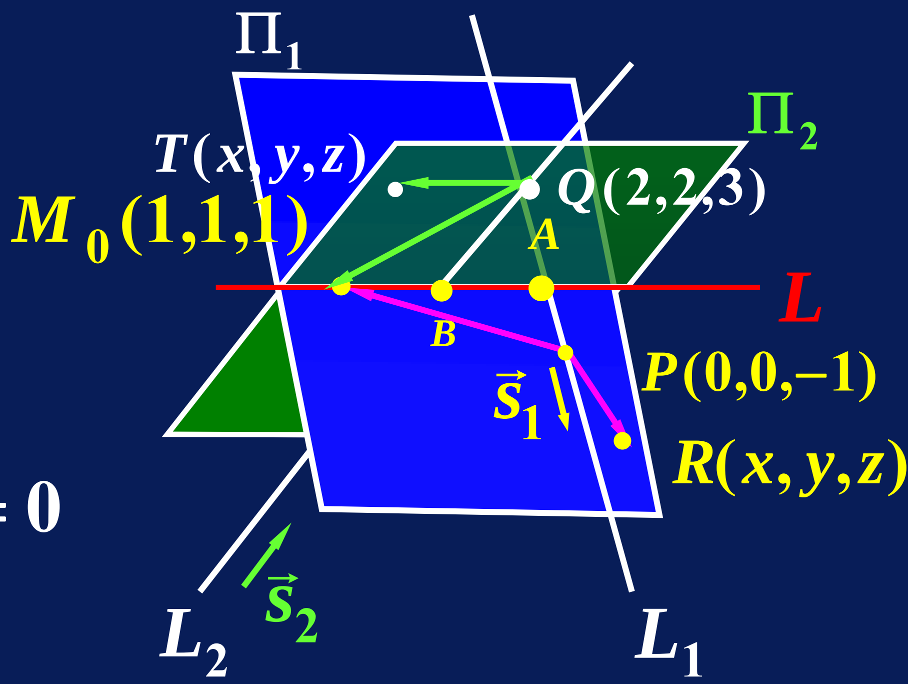
化简得 $3x - y - z - 1 = 0.$



$$\vec{s}_2 = (1, 3, 2)$$

$$\Pi_2: \quad [\overrightarrow{QT}\ \overrightarrow{QM_0}\ \vec{s}_2] = 0$$

即
$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$




亦即 $\quad -4(x-2)+2(z-3)=0,$

化简得 $\quad 2x-z-1=0.$

故所求直线 $L$ 的方程为: $\begin{cases} 3x-y-z-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}.$