第三节

三重积分的计算

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

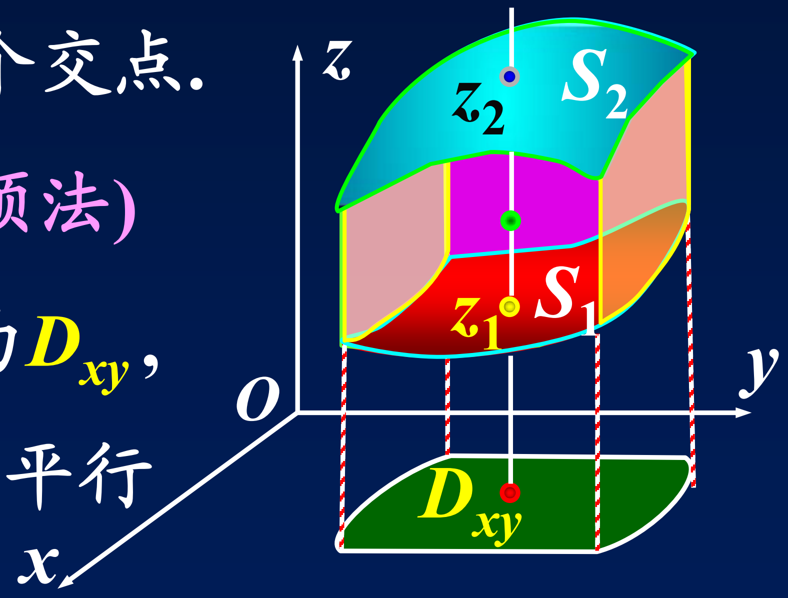
(一)直角坐标系下三重积分的计算

假设：1° $f(x,y,z)$在有界闭区域 Ω上连续；

2° 过Ω内任一点M且平行于z轴的直线与Ω 的边界曲面S 至多有两个交点.

1. “先一后二”法(求围定顶法)

Ω 在xOy面上的投影区域为D_{xy}，以D_{xy}的边界为准线作母线平行z 轴的柱面.

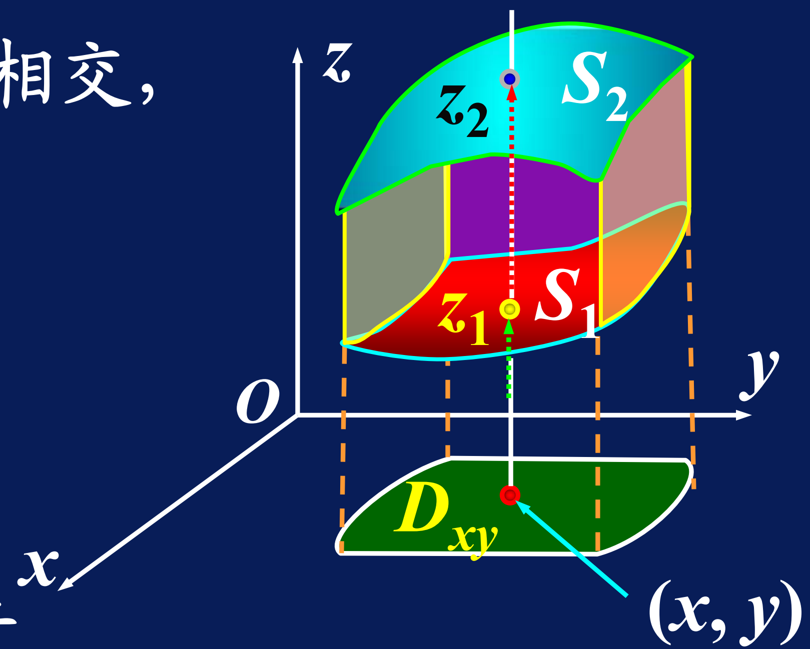


这柱面与 Ω 的边界曲面S 相交，

并将S分成上、下两部分：

$$S_1:\ \ z = z_1(x, y),$$

$$S_2:\ \ z = z_2(x, y).$$



过D_{xy}内任点(x, y)作平行于

z 轴的直线， 这直线通过曲面S_1穿入Ω 内，

通过曲面S_2穿出Ω 外，则Ω 可以表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}.$$

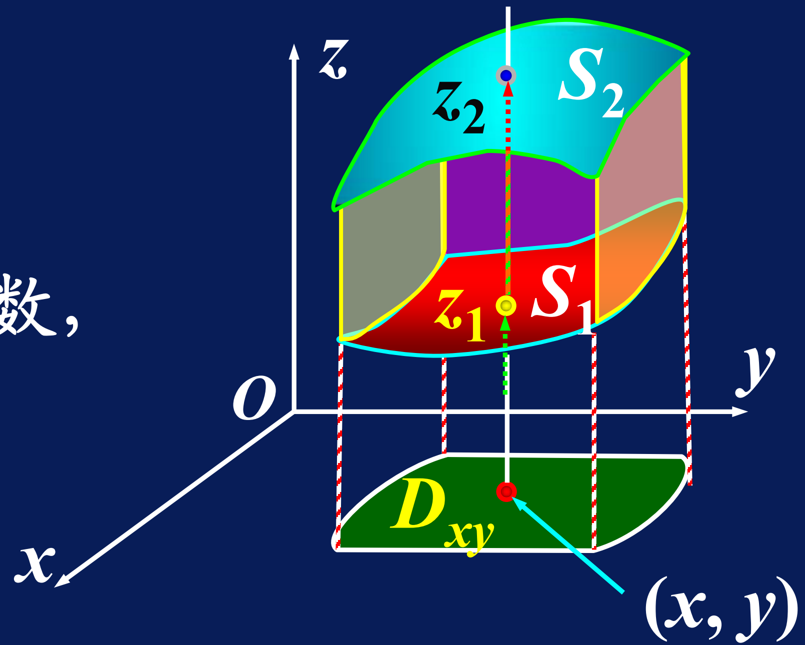
"先一后二"法描述:

先将 x, y 看作定值,

将 $f(x,y,z)$ 只看作 z 的函数,

在区间 $[z_1(x,y), z_2(x,y)]$

上对 z 积分,



$$F(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

再计算 $F(x,y)$ 在投影区域 D_{xy} 上的二重积分,即

$$\iint_{D_{xy}} F(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}\sigma.$$

从而原三重积分可表示为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iint_{D_{xy}} F(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma.$$

上式也常记作

先一后二

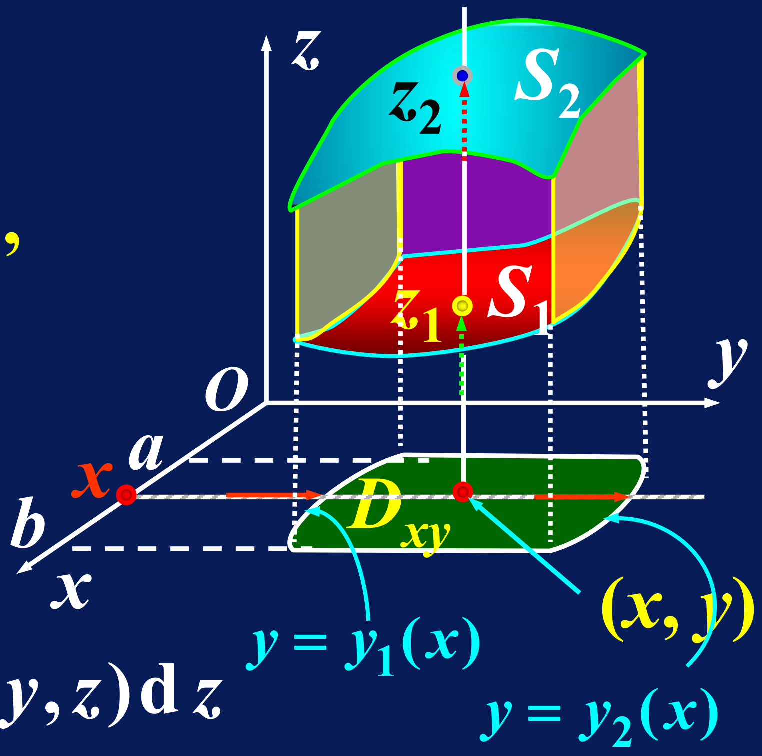
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

若 D_{xy} 可表示为:

$$y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b,$$

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

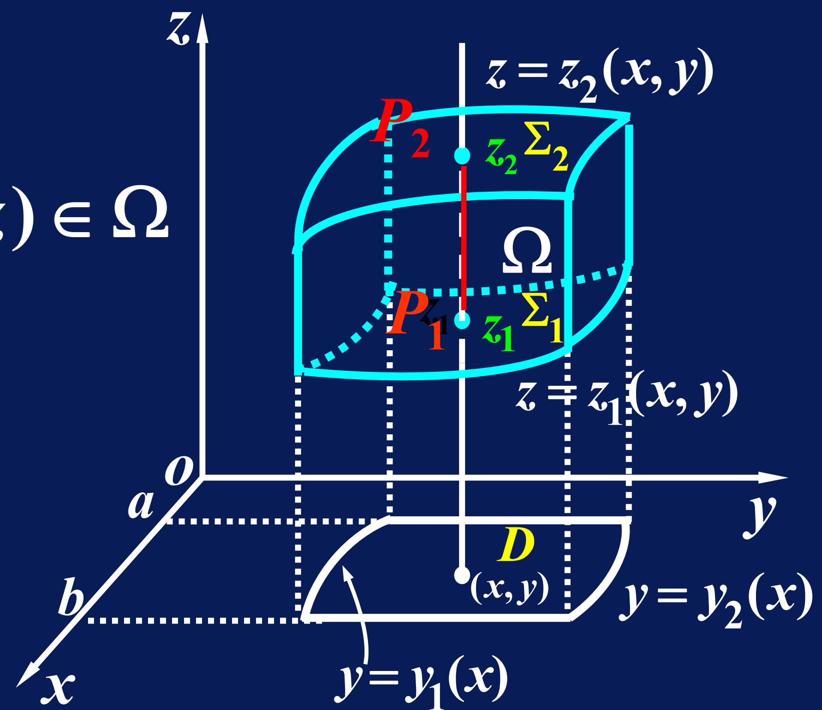


先对z，再对y, 最后对x的三次积分

注 1° 物理解释

设 $f(x,y,z)\geq 0,\quad (x,y,z)\in\Omega$

则 $M=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$



(1) 先算线质量

即先将 x, y 看作定值，

将 $f(x,y,z)$ 只看作 z 的函数，则

$$F(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

线密度为 $f(x,y,z)$ 的线状非均匀体 $\overline{P_1P_2}$ 的质量.

(2) 再算体质量

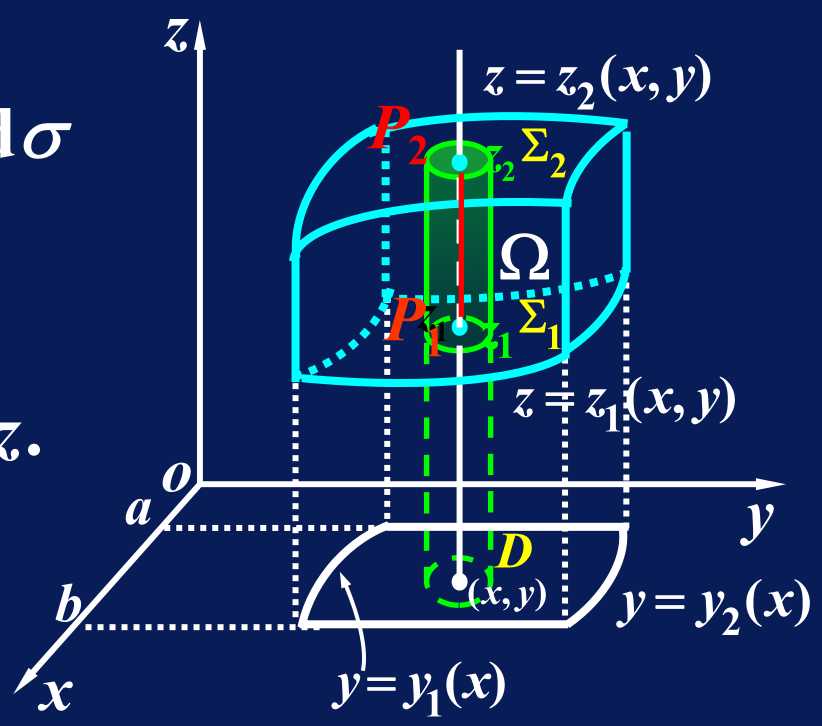
$\forall\,(\mathrm{d}\sigma)\subset D$,与之相应的位于$\Omega$内的小曲顶柱体的质量:

$$\Delta m \approx \mathrm{d}m = F(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$M = \iint\limits_D F(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint\limits_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$\overset{\Delta}{=} \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$



2^{o} 若将积分域 Ω 投影到 yOz 或 xOz面上，则可把三重积分化为按其它顺序的三次积分.

3^{o} 用“先一后二”法(求围定顶法)求三重积分的

步骤： **(1) 求围**

求积分域 Ω 在某坐标面，如：xOy 面上的投影区域 D_{xy};

(2) 定顶

下顶 S_1: $z = z_1(x, y)$;

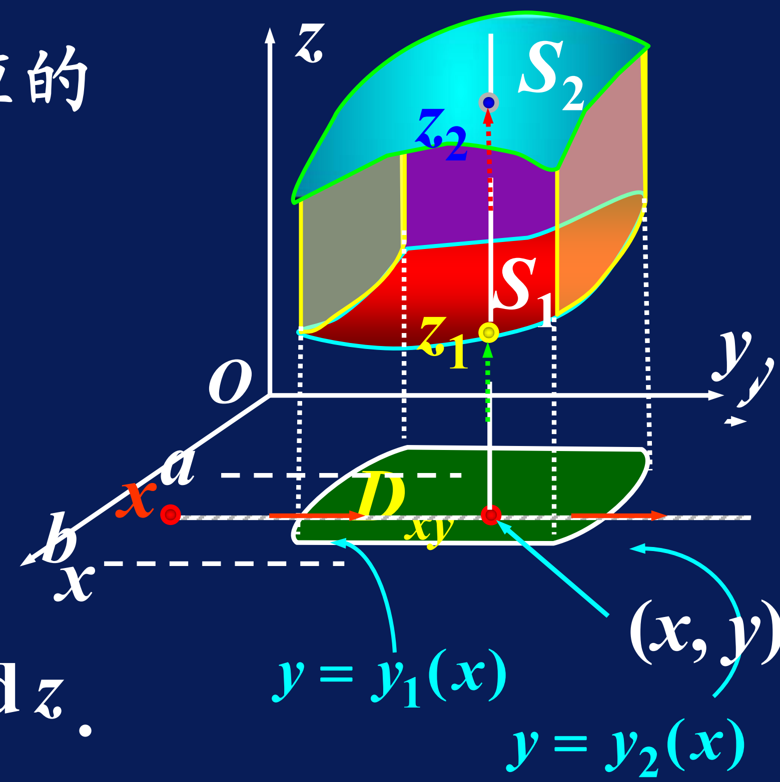
上顶 S_2: $z = z_2(x, y)$.

(3) 定限

过D_{xy}中任意一点(x,y)，作平行于z轴的直线，

由下至上穿Ω, 穿入点所对应的
(出)

竖坐标为最内层积分的下限.
(上)



$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

(4) 计算

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. “先二后一”法(截面法)

步骤:

1^o 把空间区域 Ω 向某坐标轴 (如: z 轴)投影,

得投影区间: $[c, d]$;

2^o 过区间$[c, d]$上任一点 z 作垂直于 z 轴的

平面$z = z$,

该平面截 Ω 得平面闭区域D_z, 即空间闭区域Ω

可表示为 $\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_z, c \le z \le d\}$;

3° 计算 $F(z) = \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$

4° 计算 $\int_c^d F(z)\,\mathrm{d}z$

即有 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_c^d F(z)\,\mathrm{d}z$

$$= \int_c^d \Big[\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}z,$$

先二后一

上式也常记作

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_c^d \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注 1° 何时采用"先二后一"法(截面法)?

一般地, 当 $\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 易求时,

如: $f(x,y,z)=F(z)$(或 $F(x)$ 或 $F(y)$),

且 D_z 的面积 $\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 易求时,

可采用截面法.

2° 使用截面法时, 可根据被积函数和积分区域的特点，将积分域向y轴或x轴投影来计算三重积分.

3° 注意利用对称性简化三重积分的计算

当 $f(x,y,z)$在 Ω 上连续时,

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v \text{存在.}$$

若 Ω 关于$z=0$ 对称, 且 $f(x,y,z)$关于 z 具有奇偶性, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

$$=\begin{cases} 0, & f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\text{时} \\ 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v, & f(x,y,-z)=f(x,y,z)\text{时} \end{cases}$$

其中$\Omega_1=\{(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\Omega, z\geq 0\}.$

注意:

(1) 上面的对称性原则中若将z分别换成 x 或 y,

命题仍成立.

(2) 使用对称性时应注意:

积分区域要有关于坐标面的对称性,

同时被积函数在积分区域上也要有关于

相应自变量的奇偶性.

小结：三重积分的直角坐标计算方法

方法1. “先一后二” 将积分域向坐标面投影

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

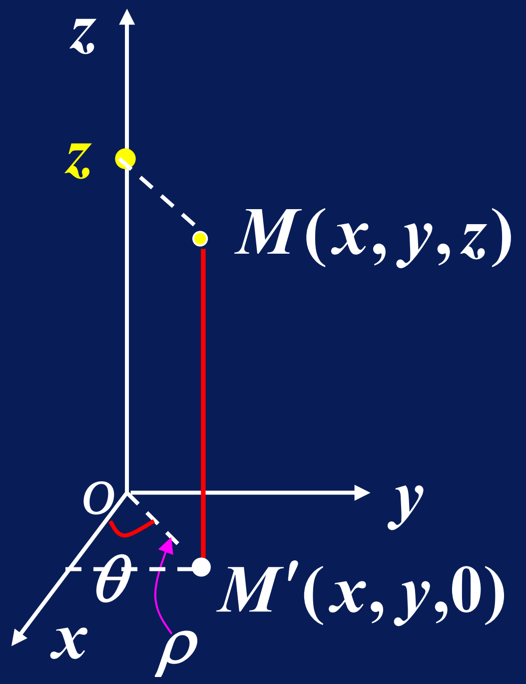
方法2. “先二后一” 将积分域向坐标轴投影

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(二) 柱面坐标系下三重积分的计算

设 $M(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$, 将x,y用极坐标 ρ,θ 代替,

则 (ρ,θ,z) 就称为点M 的柱面坐标.



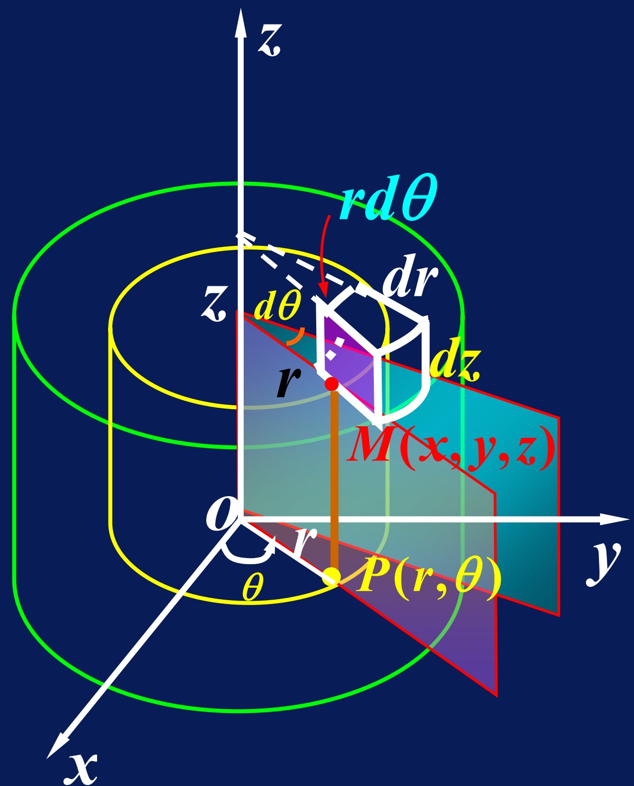
直角坐标与柱面坐标的关系:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

$(0\le\rho<+\infty,\ 0\le\theta\le 2\pi, -\infty<z<+\infty)$

如图所示，在柱面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$



因此

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} F(\rho,\theta,z)\ \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$

其中 $F(\rho,\theta,z) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$

注 三重积分的柱面坐标计算方法实际上是

三重积分的直角坐标**先一后二**计算方法

（先对z作定积分，再对x，y作二重积分）

与二重积分的**极坐标计算**方法的结合物.

何时采用柱面坐标?

适用范围:

1) 积分域表面用柱面坐标表示时方程简单；

具体来说,

√ Ω在坐标面(如: xOy面)上的投影区域D的边界易于用极坐标表示;

2) 被积函数用柱面坐标表示时变量互相分离.

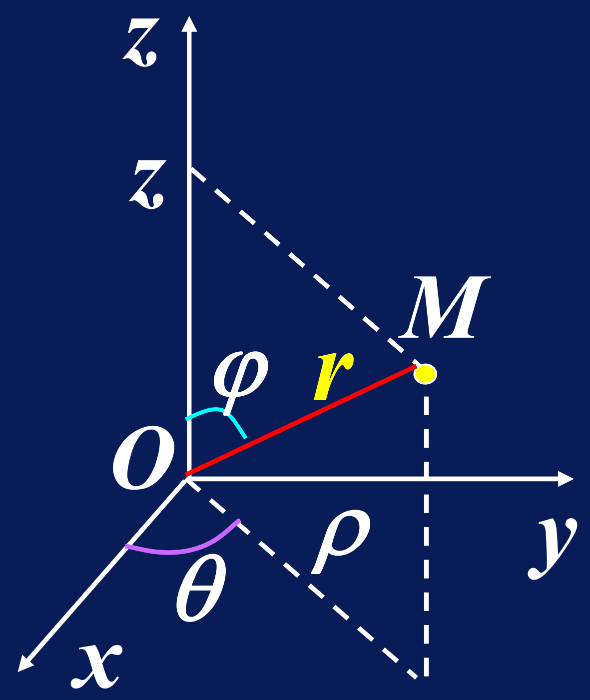
√ 如: $f(x,y,z)$呈现 $g(x^2+y^2), g(\frac{y}{x}), g(z)$等形式.

(三) 球面坐标系下三重积分的计算

设 $M(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$， 令 $|\overrightarrow{OM}| = r$,

正 z 轴与 $|\overrightarrow{OM}|$ 的夹角为 φ，则

(r, φ, θ) 称为点 M 的球坐标.



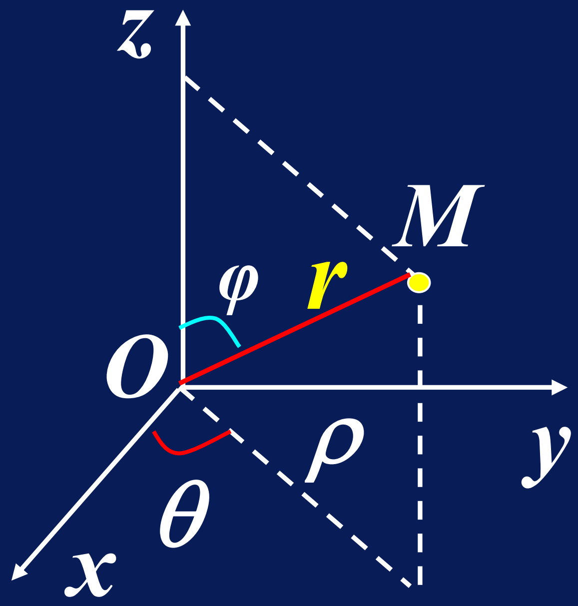
易知

$$\rho = r\sin\varphi,$$

$$z = r\cos\varphi.$$

直角坐标与球面坐标有如下关系:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le r < +\infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{pmatrix}$$

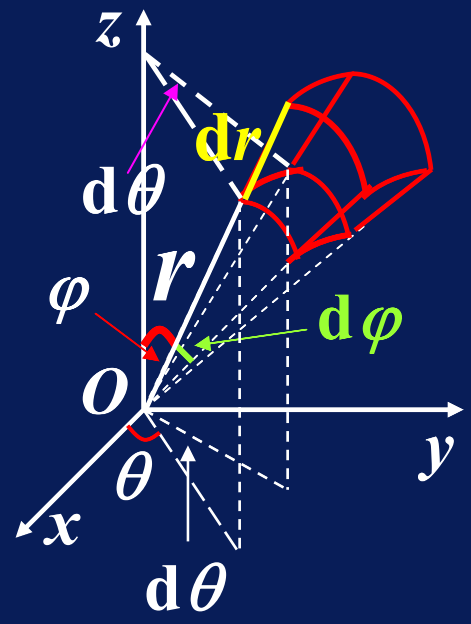


$$\rho = r\sin\varphi,$$

$$z = r\cos\varphi.$$

如图所示, 在球面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta,$$



因此

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} F(r,\theta,\varphi)\; r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta,$$

其中 $F(r,\theta,\varphi) = f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$.

何时采用球面坐标?

适用范围:

1) 积分域表面用球面坐标表示时方程简单;

如:中心在原点或轴上的球面, 由顶点在原点的圆锥面与中心在原点或轴上的球面所组成的边界曲面;

2) 被积函数用球面坐标表示时变量互相分离.

如: $f(x,y,z)$呈现$g(x^2+y^2+z^2), g(z)$等形式.

注

三重积分也有类似二重积分的**换元积分公式**:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega'} F(u,v,w)\left|J\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

对应雅可比行列式为

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}.$$

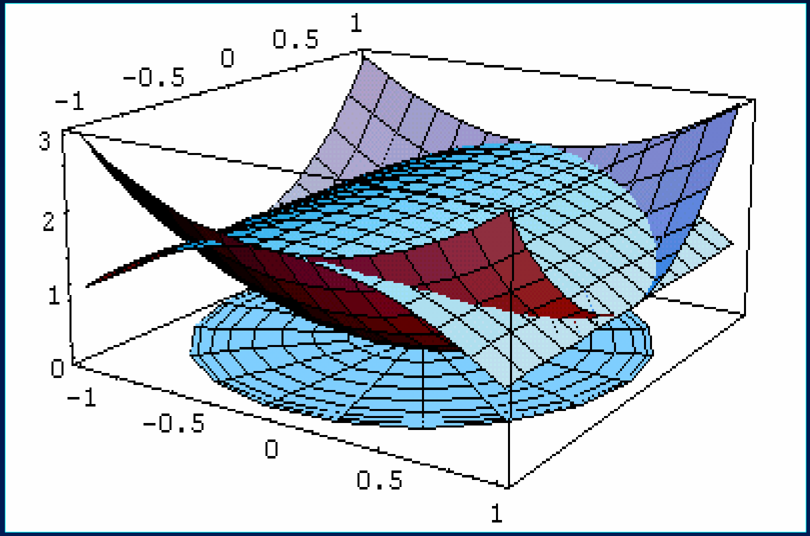
二、典型例题

例1 化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分，其中积分区域Ω为由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域.

解 1° 求围

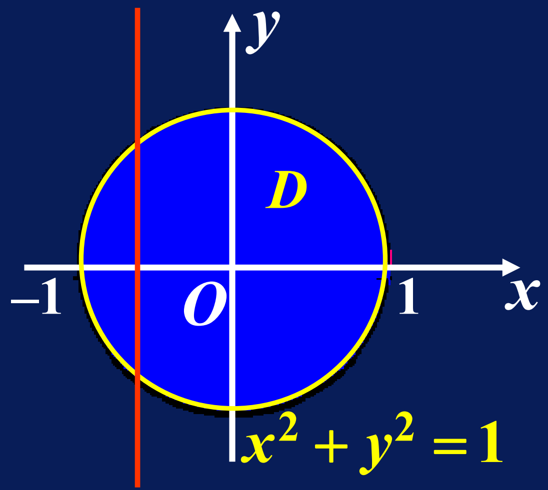
$$\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{消去}z} x^2+y^2=1$$



得Ω在 xOy 面上的投影区域 D: $x^2+y^2\le 1.$

2° 定顶



下顶：$z=x^2+2y^2=z_1(x,y)$

上顶：$z=2-x^2=z_2(x,y)$

$(\ z_2(0,0)=2>z_1(0,0)=0\ )$

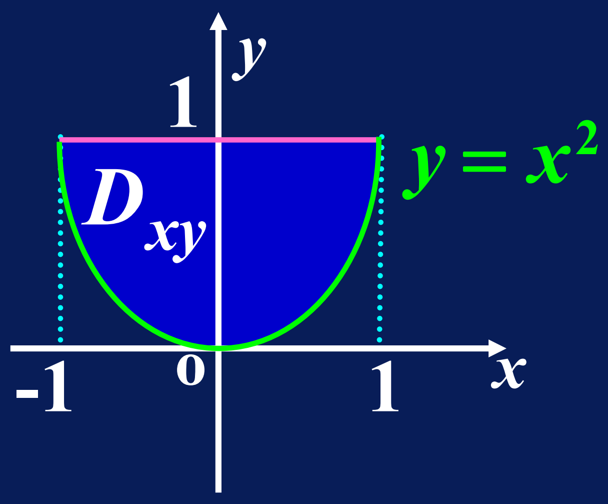
$$\therefore \quad I=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

例2 化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 为三次积分，其中Ω为由曲面 $z=x^2+y^2, y=x^2, y=1,$ $z=0$ 所围成的空间闭区域.

解 **1° 求围**

Ω在xOy面上的投影区域



$D_{xy}:\quad x^2\le y\le 1,\ -1\le x\le 1.$

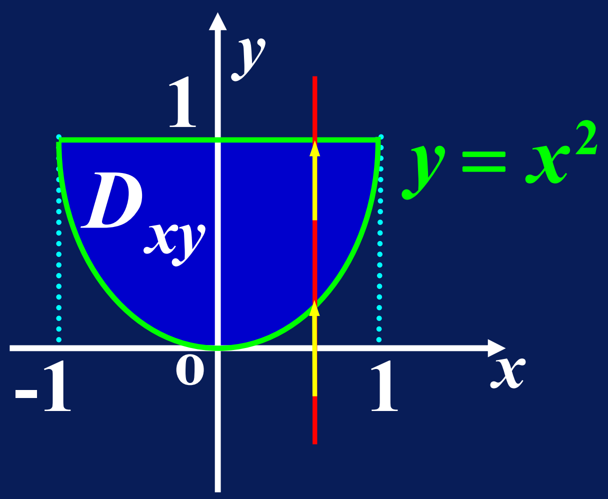
2° 定顶

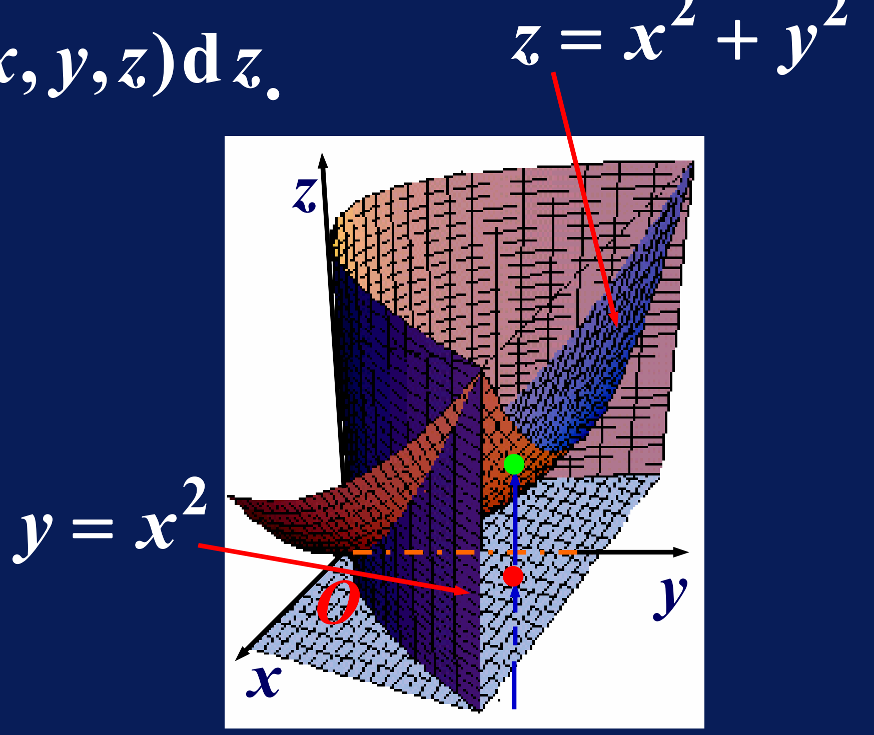
下顶： $z=0,$ 上顶： $z=x^2+y^2$

D_{xy} : $x^2 \le y \le 1,\ -1 \le x \le 1.$

下顶： $z = 0$， 上顶： $z = x^2 + y^2$

$$I = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{1} \mathrm{d}y \int_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$





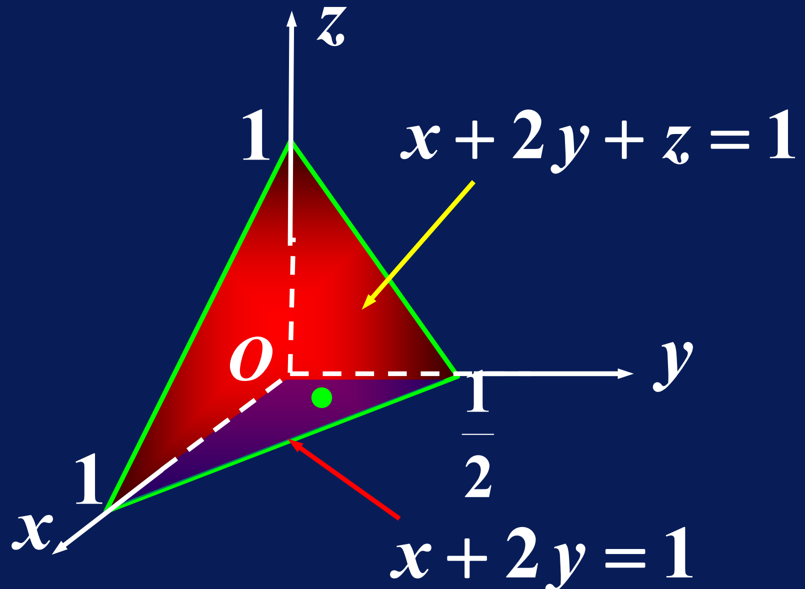
例3 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域．

解 (方法1) “先一后二法”

将 Ω 投影到 xOy 面上，

得投影区域为

$$D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \frac{1-x}{2}.$$



在投影域 D 内任取一点 (x, y)，

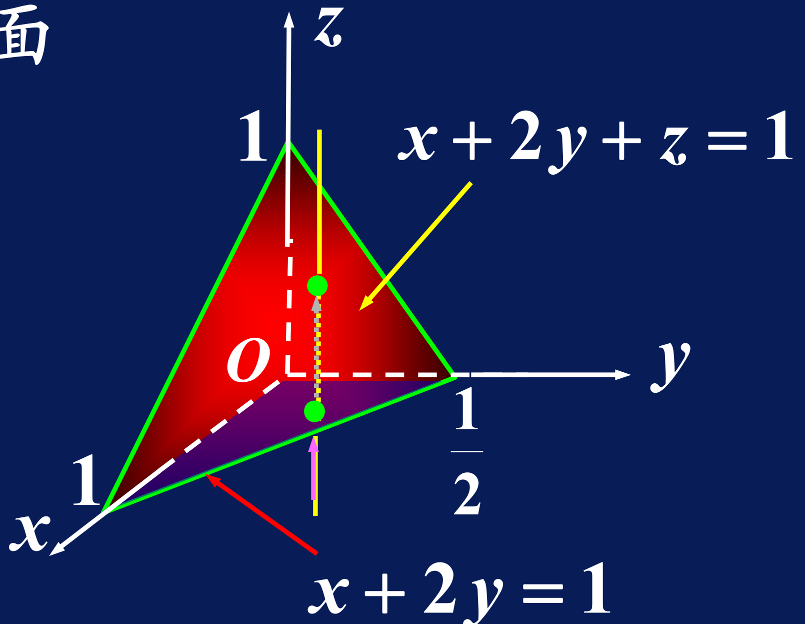
过该点作平行于 z 轴的直线，该直线先通过

$z=0$ 穿入Ω内，再通过平面

$x+2y+z=1$ 穿出Ω.

因此，Ω可表示为

$$\Omega:\begin{cases}0\le z\le 1-x-2y\\ 0\le y\le \frac{1}{2}(1-x)\\ 0\le x\le 1\end{cases}$$

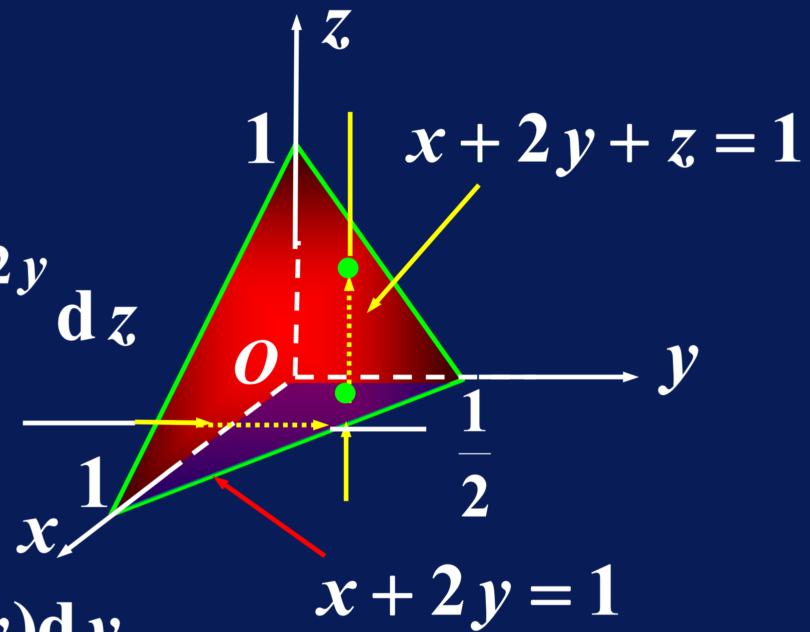


$$\therefore \iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-2y} \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} (1-x-2y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{48}.$$



(方法2) “先二后一”法

解 将积分域向 x 轴投影,

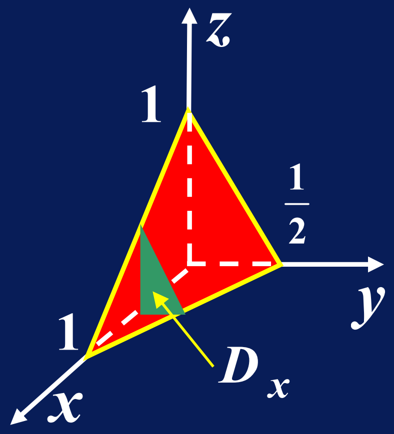
$$\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

得投影区间[0, 1].

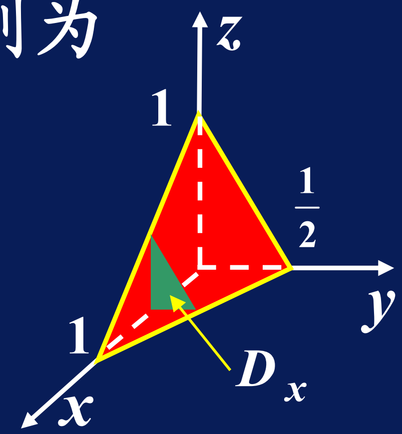
过区间[0, 1]上任一点 x 作垂直于 x 轴的平面$x = x$,

该平面截 Ω 得平面闭区域 D_x, 则

$$\Omega : 0 \le x \le 1, (y, z) \in D_x .$$



由于 D_x是直角三角形, 直角边长分别为



$$1-x \text{与} \frac{1}{2}(1-x),$$

因此D_x的面积为$\frac{1}{4}(1-x)^2$. 于是

$$\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \iint_{D_x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \iint_{D_x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\int_0^1 x(1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{48}.$$

例4 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(y+z)\,\mathrm{d}v$,其中

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1,\ z\ge 0\right.\right\}.$$

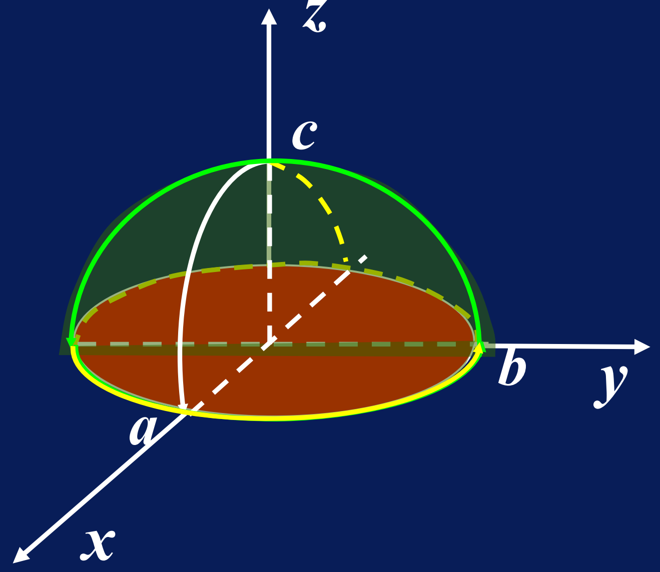
解 Ω 关于 $y=0$ 平面对称,

$$\iiint\limits_{\Omega}(y+z)\,\mathrm{d}v$$

关于y是奇函数

$$=\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v$$

$$=0+\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v.$$



空间区域 Ω 在 $z=0$ 与 $z=c$ 平面之间，过区间 $[0,c]$ 上任一点 z 作垂直于 z 轴的平面截 Ω 得区域 D_z:

$$D_z=\{(x,y,z)\,\Big|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2},z=z\}.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v=\int_0^c \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^c z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

D_z是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})}+\dfrac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})}\le 1$,其面积为

$$\pi\sqrt{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})}\sqrt{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})}=\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2}).$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v=\int_0^c z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^c z\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}abc^2.$$

例5 计算三重积分$\displaystyle\iiint_{\Omega}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}v$,其中$\Omega$由抛物面

$x^2+y^2=4z$与平面 $z=h\,(h>0)$ 所围成 .

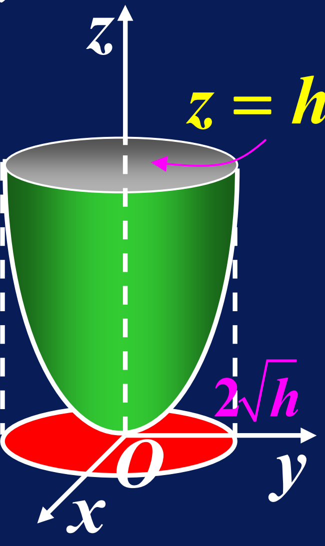
解 为求出 Ω在xOy面上的投影区域,

由方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=4z \\ z=h \end{cases}$$

消去z

$\Rightarrow\ x^2+y^2=4h,$



因此 Ω 在xOy面上的投影域是半径为 $2\sqrt{h}$的圆域.

因此在柱面坐标系下

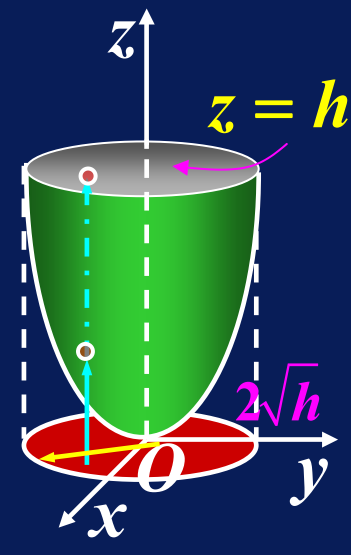
$$\Omega: \boxed{0 \le \theta \le 2\pi}, \boxed{0 \le \rho \le 2\sqrt{h}}, \boxed{\frac{\rho^2}{4} \le z \le h.}$$

$$\boxed{\mathrm{d}v = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z}$$

原式 $= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sqrt{h}} \frac{\rho}{1+\rho^2} \mathrm{d}\rho \int_{\frac{\rho^2}{4}}^{h} \mathrm{d}z$

$$= 2\pi \int_0^{2\sqrt{h}} \frac{\rho}{1+\rho^2}\left(h - \frac{\rho^2}{4}\right) \mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h) - 4h].$$



例6 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$和球面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$所围.

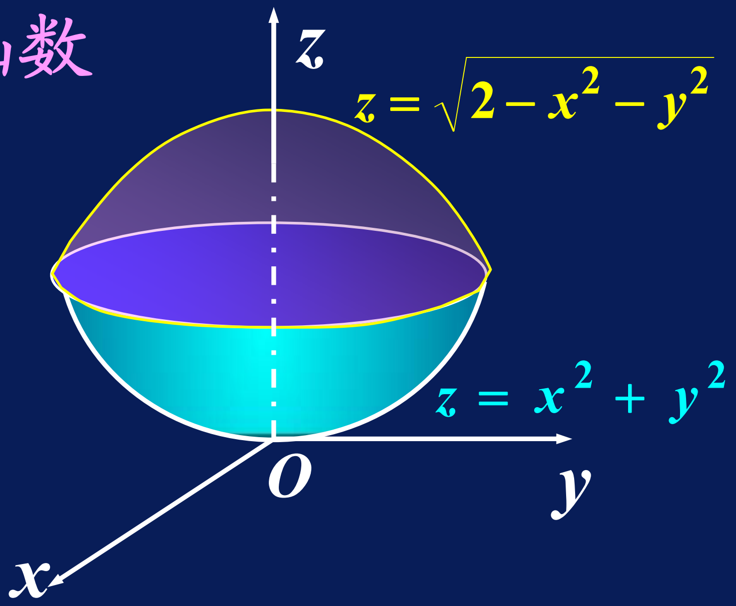
解 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$.

Ω关于$y=0$对称,

关于y是奇函数

$$\iiint\limits_{\Omega}(xy+yz)\,\mathrm{d}v=0.$$

类似可得$\iiint\limits_{\Omega}zx\,\mathrm{d}v=0.$



故 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v.$

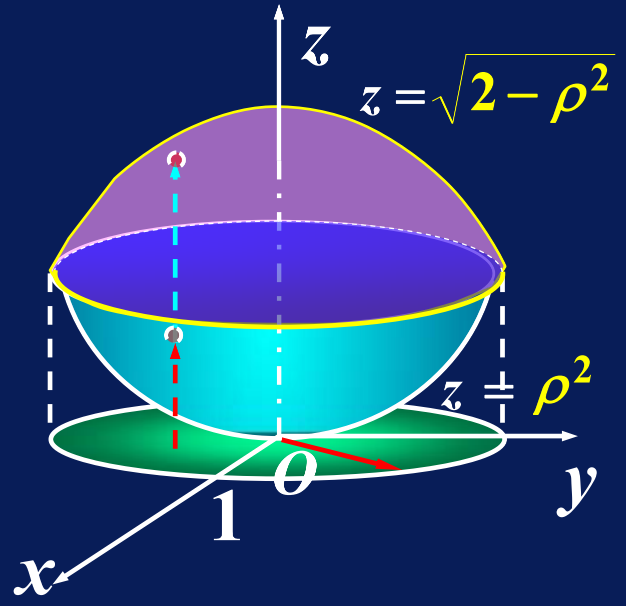
采用柱面坐标计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v.$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^1\rho^3(\sqrt{2-\rho^2}-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho$$

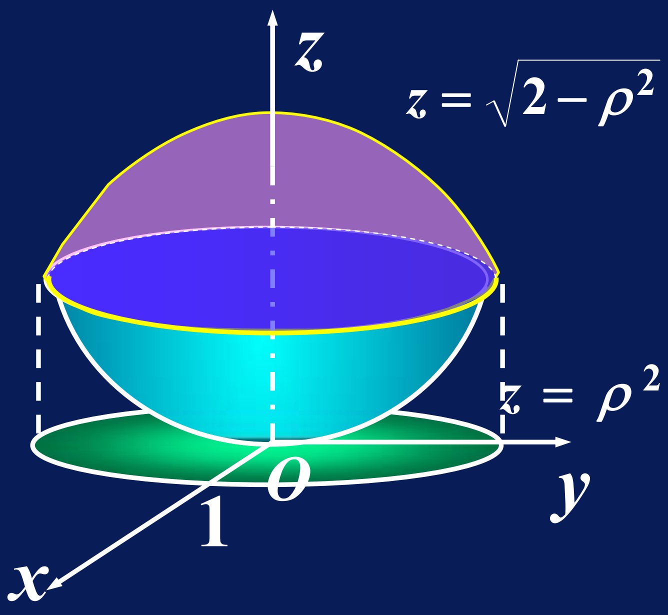
$$=\frac{\pi}{15}(16\sqrt{2}-19).$$



$$\iiint_{\Omega} z^2 \, \mathrm{d}v = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho \, \mathrm{d}\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z^2 \, \mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^1 \rho[(2-\rho^2)^{3/2} - \rho^6] \, \mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi}{60}(32\sqrt{2} - 13).$$



$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}v + \iiint_{\Omega} z^2 \, \mathrm{d}v$$

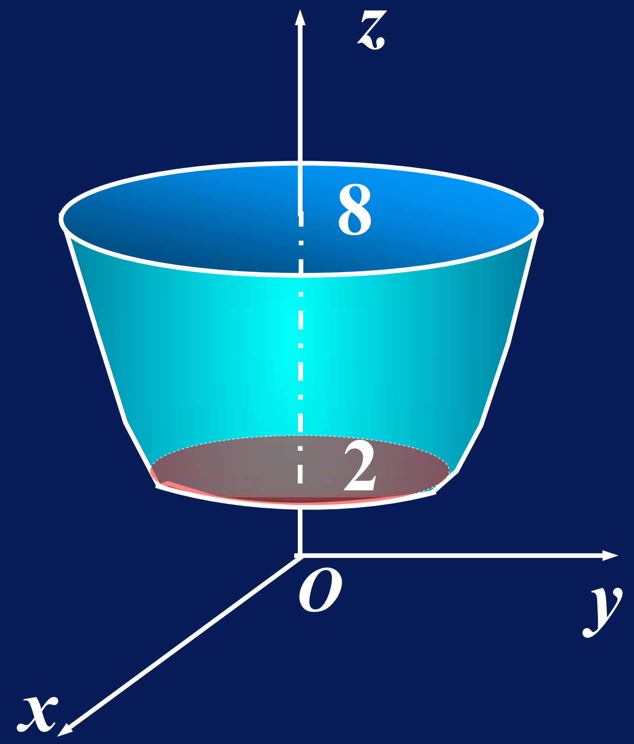
$$= \frac{\pi}{60}(96\sqrt{2} - 89).$$

例7 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$由曲线 $y^2=2z$，$x=0$ 绕 z轴旋转一周而成的曲面与两平面$z=2, z=8$所围.

解 旋转面方程为

$$x^2+y^2=2z,$$

所围成的立体如图.

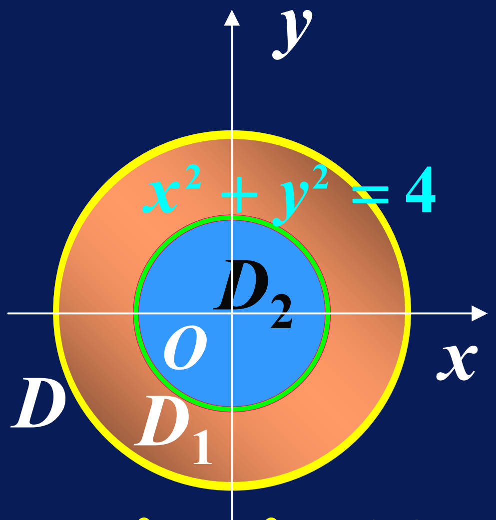


(方法1） 求围定顶法

1° 求所围立体Ω在xOy面上的投影区域D

$$\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ z=2 \end{cases} \overset{\text{消去}z}{\Rightarrow} x^2+y^2=4$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ z=8 \end{cases} \overset{\text{消去}z}{\Rightarrow} x^2+y^2=16$$



$$\therefore \quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 16\}$$

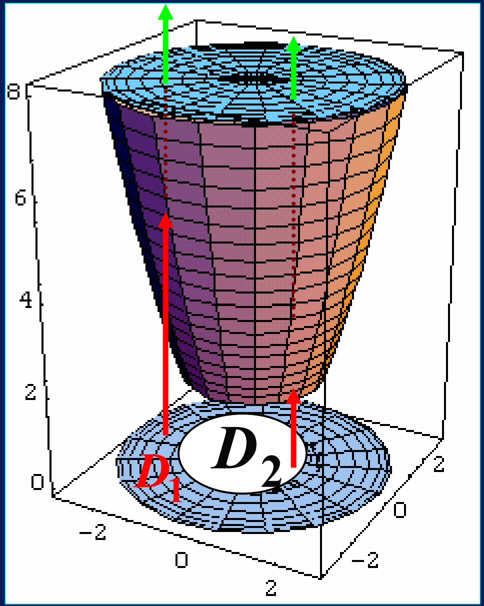
$$D=D_1\cup D_2$$

2° 定顶

在D_2上， 下顶: $z=2$

上顶: $z=8$

$$\Omega_1:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi,\\ 0\le\rho\le 2,\\ 2\le z\le 8.\end{cases}$$



在D_1上, 下顶: $z=\dfrac{\rho^2}{2}$

上顶: $z=8$

$$\Omega_2:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi,\\ 2\le\rho\le 4,\\ \dfrac{\rho^2}{2}\le z\le 8.\end{cases}$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$I = I_2 + I_1$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_2} (x^2 + y^2)\mathrm{d}v + \iiint\limits_{\Omega_1} (x^2 + y^2)\mathrm{d}v$$

$$= \iint\limits_{D_2} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \int_2^8 \rho^2 \mathrm{d}z + \iint\limits_{D_1} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 \rho^2 \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \rho \mathrm{d}\rho \int_2^8 \rho^2 \mathrm{d}z + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_2^4 \rho \mathrm{d}\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 \rho^2 \mathrm{d}z$$

$$= 48\pi + 288\pi = 336\pi.$$

(方法2)　截面法

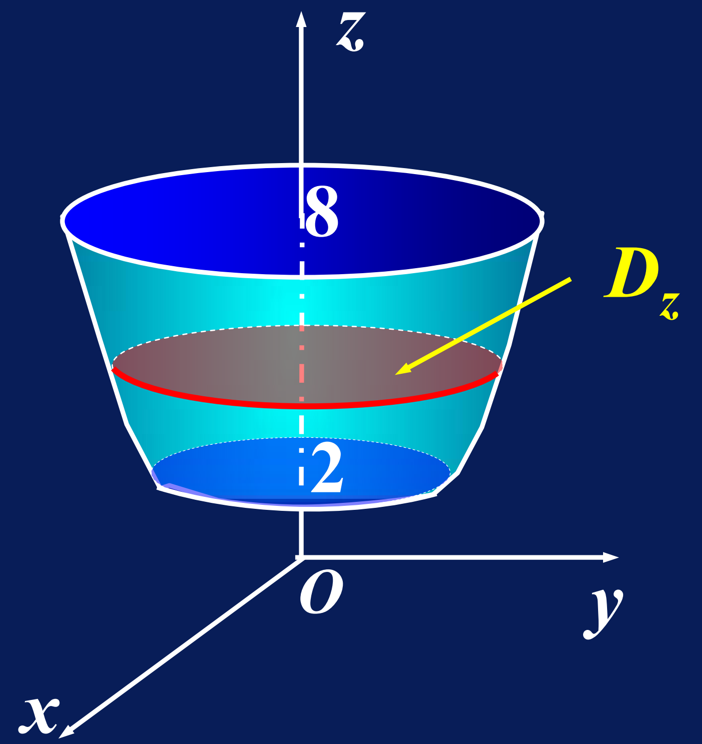
$$I=\int_2^8 \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$D_z: x^2+y^2\le 2z$$

$$=\int_2^8 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}$$

$$=2\pi\int_2^8 \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{\sqrt{2z}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_2^8 z^2\,\mathrm{d}z=336\pi.$$



例8 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $x^2+y^2+z^2=R^2\ (z\geq 0)$ 所围.

解 采用球面坐标计算.

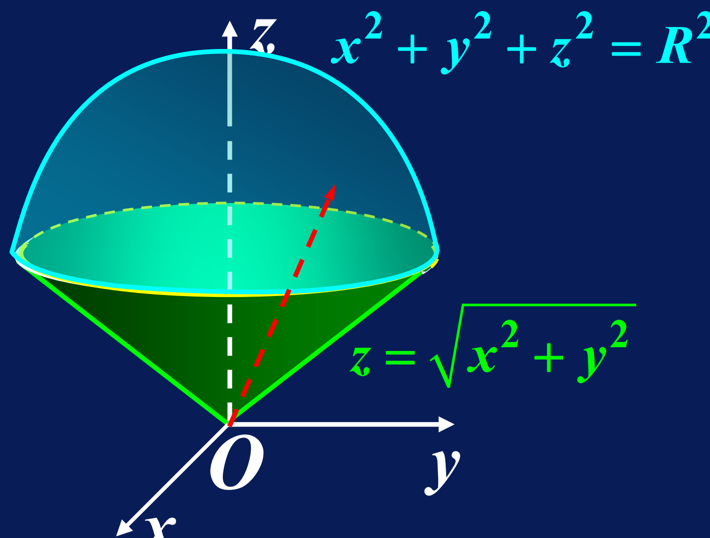
$$\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$\Omega:\ 0\leq r\leq R,\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4},\ 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^4\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{5}\pi R^5(2-\sqrt{2}).$$



例9 求$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v$,其中

Ω: $\pi^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\pi^2$.

解 采用球面坐标计算.

$\Omega: \pi \le r \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\cos r}{r}r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=8\pi.$$

三、同步练习

1. 化$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$为三次积分,其中$\Omega$是由

$x=1, z=0,\ x+y-z=0, x-y-z=0$围成.

2. 化三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$为三次积分:

(1) Ω由曲面$x^2+y^2=az$和$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\,(a>0)$所围;

(2) Ω由曲面 $z=\dfrac{1}{x}, y=z^2$,平面 $x=0, z=1, z=2$, $y=0$所围.

3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 - y}\,\mathrm{d}v$, 其中 Ω 由 $y = 0$, $z = 0, x + z = 1, x = \sqrt{y}$围成 .

4. 设Ω: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$,计算

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{z\ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}\mathrm{d}v.$$

5. 求 $\iiint\limits_{\Omega} (x^3 + y^3 + z^3)\,\mathrm{d}v$, Ω由半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z(z \ge 1)$与锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$围成.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

6. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}v$,

其中 Ω 由 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z=1$, $z=4$ 围成.

7. 设函数 $f(x)$连续，且 $f(0)=a$,若

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z+f(x^2+y^2+z^2)]\mathrm{d}v,$$

其中 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{t^2-x^2-y^2}$,

求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^3}$.

8. 采用多种方法计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 由锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=a\ (a>0)$ 所围.

9. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}v$,

其中 Ω 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 围成的闭区域.

四、同步练习解答

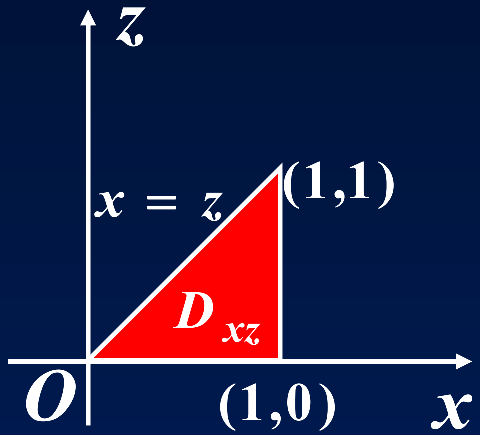
1. 化$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$为三次积分,其中$\Omega$是由

$x=1, z=0,\ x+y-z=0, x-y-z=0$围成.

解　Ω是四面体，其边界

曲面中含y的方程恰有两个,

含x或z的方程都有 3个,



故选择向 xOz平面投影,投影区域D_{xz}的边界为

$x=1, z=0$ 及由$y=z-x$与$y=x-z$消去y所得的

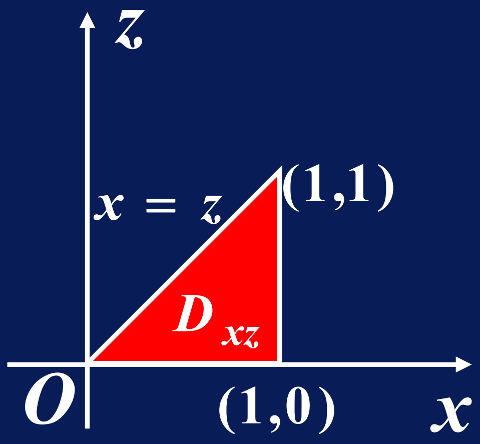
$x-z=0$.

在 D_{xz} 内显然有 $x-z\geq 0$,

即 $z-x\leq x-z$,

故 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$

$$=\iint\limits_{D_{xz}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\int_{z-x}^{x-z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y,$$



再把 D_{xz} 上的二重积分化为二次 积分,有

$$\iiint\limits_{\Omega} f\,\mathrm{d}v=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}z\int_{z-x}^{x-z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y.$$

2. 化三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$为三次积分：

(1) Ω由曲面$x^2+y^2=az$和$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\,(a>0)$所围;

(2) Ω由曲面 $z=\dfrac{1}{x}, y=z^2$,平面 $x=0, z=1, z=2, y=0$所围.

解 (1) 由 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\ (a>0)$

消去 z 得 $x^2+y^2=a^2$，即 D_{xy} 为圆域 $x^2+y^2\le a^2$，

且当 $(x,y)\in D_{xy}$ 时，显然有

$$-a\le x\le a,\ -\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\sqrt{a^2-x^2},$$

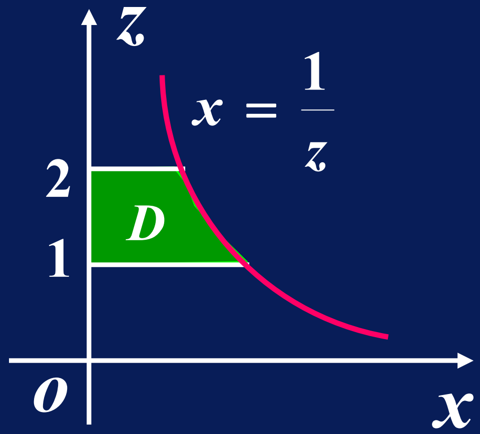
$$\frac{x^2+y^2}{a}\le 2a-\sqrt{x^2+y^2},$$

故 $I=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{2a-\sqrt{x^2+y^2}}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$

(2) 在围成Ω的曲面方程中，$y=0$和$y=z^2$中有变量y，此时可考虑先对 y积分，显然$z^2\geq 0$，

因此对y积分的下限为 0，

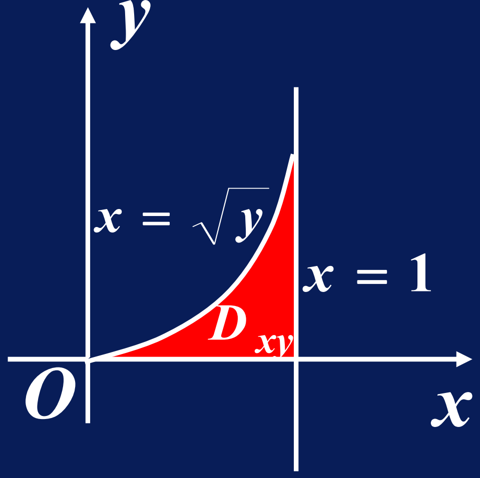
上限为 z^2，其它方程在 xOz 面上围成区域为D，故



$$I=\int_1^2 \mathrm{d}z\int_0^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}x\int_0^{z^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y.$$

3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}v$, 其中 Ω 由 $y=0$, $z=0, x+z=1, x=\sqrt{y}$围成 .

解 Ω边界的曲面的方程中含x,y,z的方程都恰有两个，因此向三个坐标面投影均可，但就被积函数的特点，先对z



次对y、后对x积分比较方便，故选择Ω向xOy平面投影，投影区域D_{xy}由$y=0, x=\sqrt{y}$及$x=1$围成.

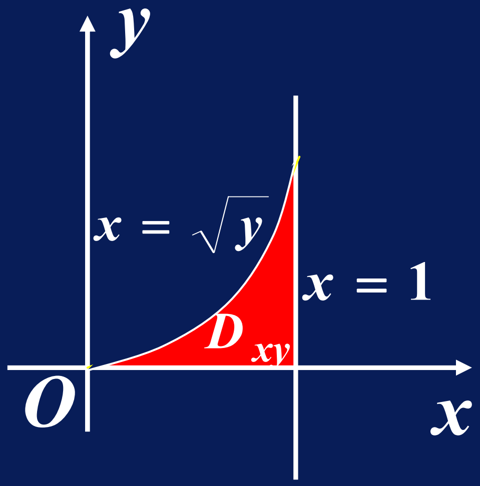
其中 $x=1$由 $z=0$和 $z=1-x$所得 .

故 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}v$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{1-x}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y\int_0^{1-x}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{30}.$$



4. 设Ω: $x^2+y^2+z^2\le 1$,计算

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}v.$$

解 将Ω投影到xOy面上，得投影区域为

$$D_{xy}: x^2+y^2\le 1.$$

$$\text{原式}=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}z$$

关于z是奇函数

$$=0.$$

5. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}v$,

其中 Ω 由 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z=1$, $z=4$ 围成.

解 易知Ω关于 $x=0$平面对称 .

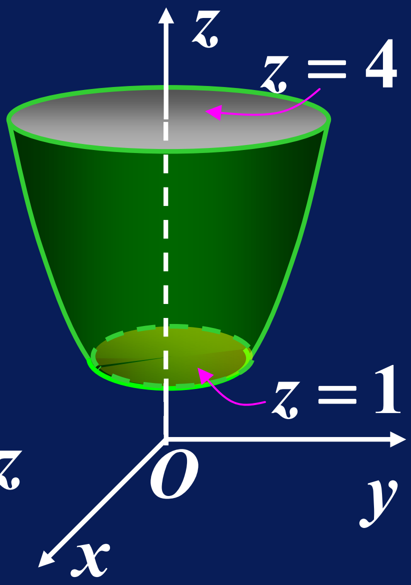
关于x 是偶函数

$$I=\iiint\limits_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+5\iiint\limits_{\Omega} xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

关于x是奇函数

$$=\iiint\limits_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$



$$I=\iiint_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

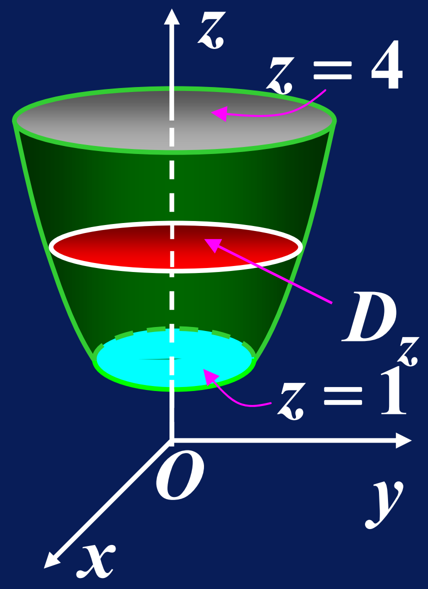
$$=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+0$$

“先二后一”法

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\iint_{D_z}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3\,\mathrm{d}\rho$$

$$=21\pi.$$



6. 设函数 $f(x)$连续，且 $f(0)=a$,若

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z+f(x^2+y^2+z^2)]\mathrm{d}v,$$

其中 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{t^2-x^2-y^2}$,

求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^3}$.

解 先将三重积分化为 t的函数,用球面坐标,可得

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t[r\cos\varphi+f(r^2)]r^2\mathrm{d}r,$$

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t[r\cos\varphi+f(r^2)]r^2\mathrm{d}r$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{2\pi}{t^3}\left[\frac{1}{16}t^4+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\right]\int_0^t r^2 f(r^2)\,\mathrm{d}\,r$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\left[\pi(2-\sqrt{2})\int_0^t r^2 f(r^2)\,\mathrm{d}\,r\right]$$

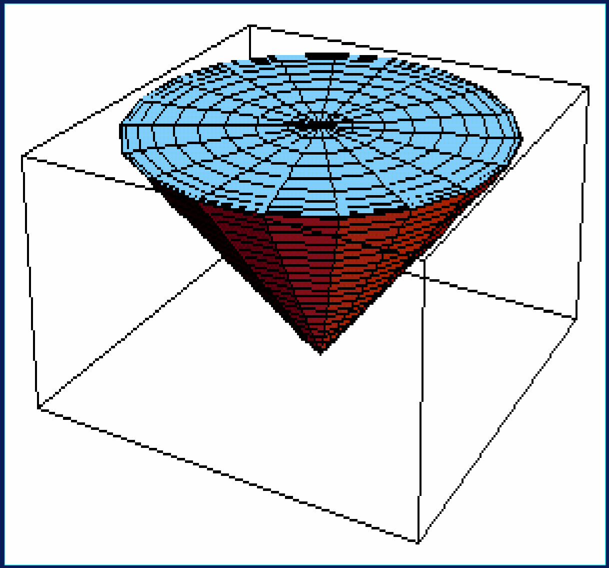
$$=\pi(2-\sqrt{2})\lim_{t\to 0}\frac{t^2 f(t^2)}{3t^2}$$

$$f(0)=a$$

$$=\pi(2-\sqrt{2})\lim_{t\to 0}\frac{f(t^2)}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi a.$$

7. 采用多种方法计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 由锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=a\ (a>0)$ 所围.

解 (方法1) 采用球面坐标



$$\because\quad z=a\Rightarrow r=\frac{a}{\cos\varphi},$$

$$x^2+y^2=z^2\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\Omega:\ 0\le r\le\frac{a}{\cos\varphi},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le\theta\le 2\pi,$$

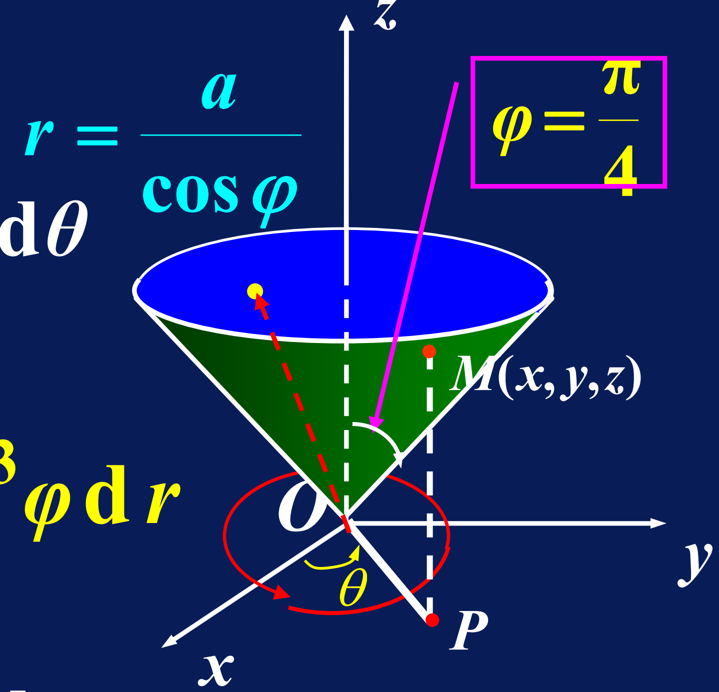
$$I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (r\sin\varphi)^2 \cdot r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}} r^4 \sin^3\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{a^5}{\cos^5\varphi} - 0\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\pi}{10} a^5 .$$



(方法2)　采用柱面坐标

1° 求所围成立体Ω在xOy面上的投影区域D

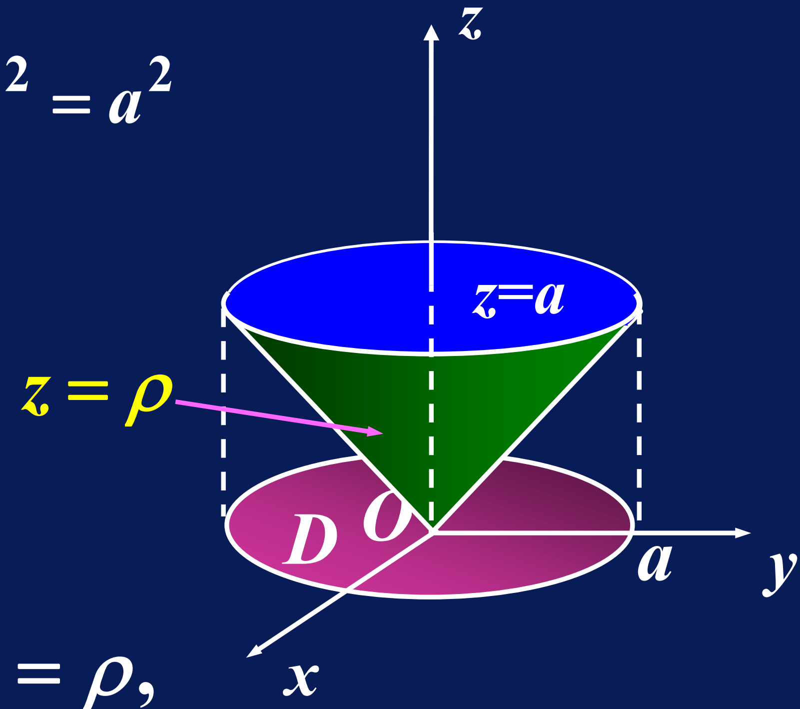
$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ z=a \end{cases} \xRightarrow{\text{消去}z} x^2+y^2=a^2$$

$$\therefore \quad D: \quad x^2+y^2 \le a^2,$$

2° 定顶

上顶: $z=a$

下顶: $x^2+y^2=z^2 \Rightarrow z=\rho,$



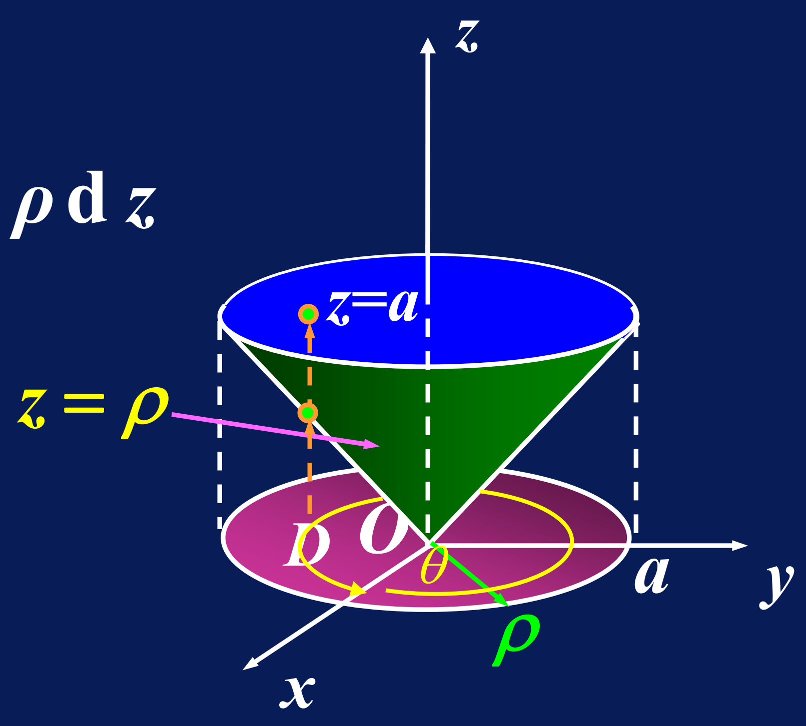
$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{a}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{a}\rho^3(a-\rho)\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi[a\cdot\frac{a^4}{4}-\frac{a^5}{5}]$$

$$=\frac{\pi}{10}a^5.$$



8. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})\,\mathrm{d}v$,

其中Ω是椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$围成的闭区域.

解 积分区域Ω由椭球面围成，被积函数

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},$$

此时若作广义球面坐标 转换：$x=ar\sin\varphi\cos\theta$,

$y=br\sin\varphi\sin\theta,\ z=cr\cos\varphi$,

则积分区域 Ω 由 $0 \le r \le 1, 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$ 给出，

体积元素

$$\mathrm{d}v = abcr^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta,$$

于是

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abcr^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi abc\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r = \frac{4}{5}\pi abc\,.$$