# 第十章　曲线积分与曲面积分

## 本章基本要求

1. 理解两类曲线积分的概念，知道两类曲线积分的性质.

2. 掌握两类曲线积分的计算方法.

3. 熟悉格林公式(Green)，会用平面曲线积分与路径无关的条件.

4. 知道两类曲面积分的概念及高斯公式(Gauss)、斯托克斯公式(Stokes)，并会计算两类曲面积分.

5. 知道散度、旋度的概念.

6. 能用曲线积分及曲面积分来表达一些几何量与物理量 (如：体积、质量、重心等).

# 第一节

# 第一类曲线积分

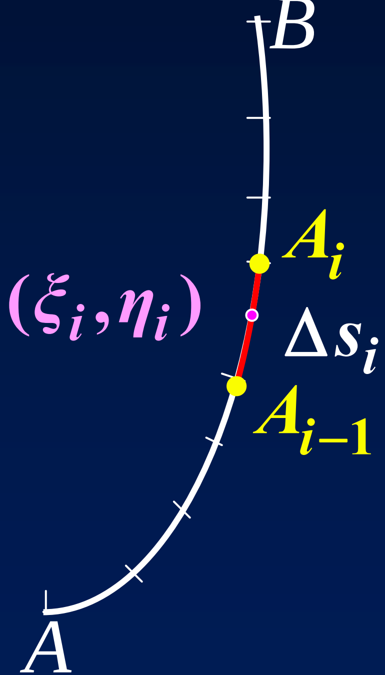
- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

# 一、主要内容

## (一) 第一类曲线积分的概念与性质

**1. 问题的提出** 曲线形构件的质量

设有一位于 $xOy$ 平面上的曲线形状的构件(如图),构件分布是非均匀的，其线密度为 $\mu(x,y)$, 求构件的质量.




采用分割，近似，求和，取极限的方法来求曲线形构件的质量

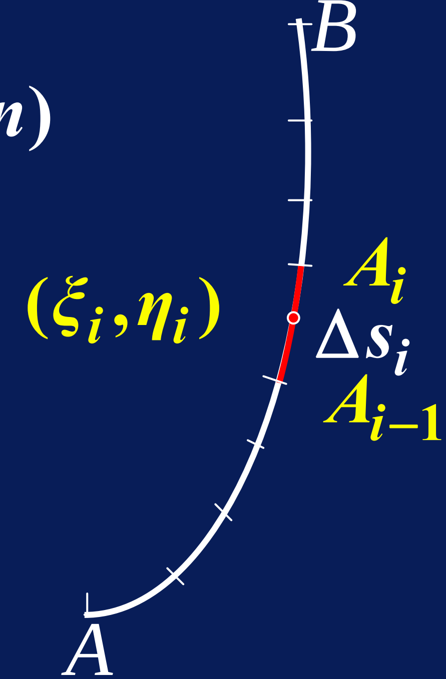
$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

$1^\circ$ **分割** 用曲线$\overset{\frown}{AB}$上的**任意点** $A_0, A_1, \cdots, A_n$，将$\overset{\frown}{AB}$分割成$n$小段，小弧段的弧长为$\Delta s_i$，$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$.

$2^\circ$ **近似** 在小弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 上任取一点$M_i(\xi_i, \eta_i)$，

该弧段 的质量可近似表示为

$$\Delta M_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$




$3^\circ$ **求和** 整个构件质量的近似值

$$M = \sum_{i=1}^{n}\Delta M_i \approx \sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

$4^\circ$ **取极限** 构件的质量

$$M = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

## 2. 定义 10.1

设函数 $f(x, y)$ 在 $xOy$ 面内的分段光滑曲线弧 $L$ 上有界. 将 $L$ 任意分成 $n$ 个小弧段, 设分点为 $A_0, A_1, \cdots, A_n$. 记第 $i$ 个小弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 的长度为 $\Delta s_i\ (i=1,2,\cdots,n)$, 记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$. 在小弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$, 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i\ (i=1,2,\cdots,n)$, 并作黎曼和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$.

令 $\lambda \to 0$, 若此和的极限总存在, 即极限值与曲线 $L$ 的分法及点 $M_i$ 的取法无关,

则称该极限值为函数 $f(x,y)$在曲线$L$上的**第一类曲线积分**或**对弧长的曲线积分**，记作

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i}$$

被积函数

弧微分

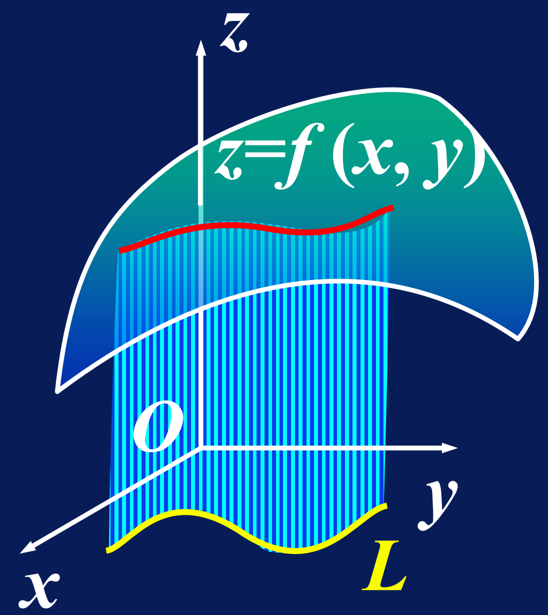
积分和式

积分弧段

被积表达式

注 1° 当函数 $f(x, y)$在曲线$L$上连续时，曲线积分

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$$ 存在(充分条件).




2° 曲线形构件的质量可以表示为

$$M = \int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s$$

3° 当 $f(x,y)\equiv 1$ 时, $L_{弧长} = \int_L \mathrm{d}s$ ;

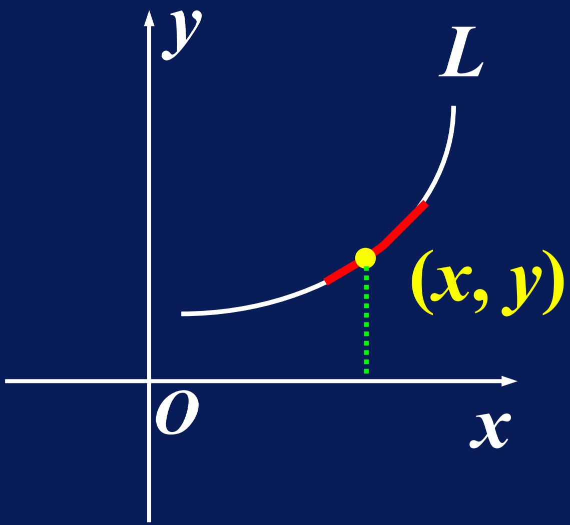
4° 当$f(x,y)$表示立于$L$上的柱面在点$(x,y)$

处的高时, $S_{柱面面积} = \int_L f(x,y)\mathrm{d}s.$

5° 曲线弧对 $x$ 轴及 $y$ 轴的转动惯量，

$$I_x = \int_L y^2 \mu \, \mathrm{d}s,$$

$$I_y = \int_L x^2 \mu \, \mathrm{d}s.$$

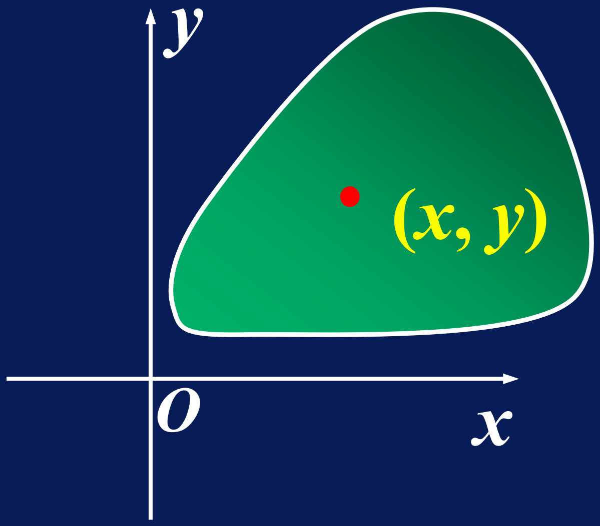



6° 曲线弧的质心坐标

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\mu \, \mathrm{d}s}{\int_L \mu \, \mathrm{d}s}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_L y\mu \, \mathrm{d}s}{\int_L \mu \, \mathrm{d}s}.$$

$7^{\circ}$ $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 与 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的区别:

$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ : 点 $(x,y)\in L$




$x$ 与 $y$ 不独立.

$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ : 点 $(x,y)\in D$

在 $D$ 内, $x$ 与 $y$ 彼此独立.

**推广 1°** 若积分弧段为**空间曲线弧** $\Gamma$, 则函数

$f(x, y, z)$在曲线弧 $\Gamma$ 上对弧长的曲线积分为

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

**2°** 对空间曲线弧 $\Gamma$ 有与平面曲线弧类似的重心公式和转动惯量公式.

**3°** 如果$L$ 是**闭曲线**，则记为

$$\oint_{L} f(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

思考： 定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$


是否可看作对弧长曲线积分的特例？

否！ 对弧长的曲线积分

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

要求 $\mathrm{d}s \geq 0$, 但定积分中 $\mathrm{d}x$ 可能为负.

## 3. 性质

**1° 线性性质：** $\forall \alpha，\beta \in R^1$

$$\int_L [\alpha \cdot f(x,y) + \beta \cdot g(x,y)] \mathrm{d}s = \alpha \cdot \int_L f(x,y) \mathrm{d}s + \beta \cdot \int_L g(x,y) \mathrm{d}s$$

**2° 可加性：** $L$由$L_1$和$L_2$组成

$$\int_L f(x,y) \mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y) \mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y) \mathrm{d}s$$

**3° 保序性：** 在 $L$上 $f(x,y) \le g(x,y)$,

$$\int_L f(x,y) \mathrm{d}s \le \int_L g(x,y) \mathrm{d}s$$

特别的有 $\left| \int_L f(x,y) \mathrm{d}s \right| \le \int_L |f(x,y)| \mathrm{d}s$

## (二) 第一类曲线积分的计算法

### 1. 直接法

**基本思路:** 求曲线积分 $\xrightarrow{\text{转 化}}$ 计算定积分

**定理10.1** 设 $f(x,y)$ 是定义在光滑曲线弧

$$L: x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ \ (\alpha\le t\le\beta)$$

上的连续函数, 则曲线积分 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 存在, 且

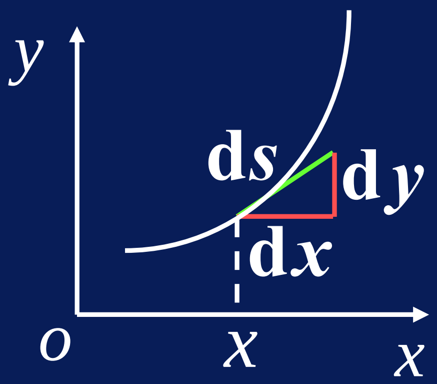
$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

**注** $1^{\circ}$ $\because \Delta s_k > 0, \quad \therefore \Delta t_k > 0,$

因此积分限必须满足下限小于上限:

$$\alpha < \beta \ !$$

$2^{\circ}$ 注意到




$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

因此上述计算公式相当于“换元法”.

**推广** **1°** 如果曲线 $L$ 的方程为

$$y=\psi(x)\ (a\le x\le b),$$

则 $$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\psi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

**2°** 如果$L$为极坐标形式

$$\rho=\rho(\theta)\ (\alpha\le\theta\le\beta),$$

则 $$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$$

$$=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$3^{\circ}$ 设空间曲线弧的参数方程为

$$\Gamma: x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \omega(t)\ (\alpha \le t \le \beta\ )$$

则 $$\int_{\Gamma} f(x, y, z)\mathrm{d}s$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)\ ,\psi(t),\omega(t)\ )\ \sqrt{\varphi'^{2}(t)+\psi'^{2}(t)+\omega'^{2}(t)}\ \mathrm{d}\,t$$

## 2. 利用对称性

设 $f(x,y)$在曲线 $L$上连续，

### (1) 轴对称性

若$L$关于 $x$轴对称，则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 0, & f(x,-y) = -f(x,y) \\ 2\int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s, & f(x,-y) = f(x,y) \end{cases}$$

$L_1 : L$在 $y \geq 0$的部分 .

当$L$关于$y$轴对称时，有类似的结 论.

## (2) 轮换对称性

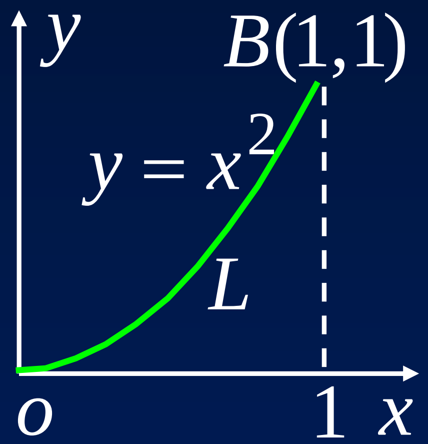
若在曲线 $L$ 的方程中，将 $x$ 与 $y$ 进行交换，$L$ 的方程不变，则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_L f(y,x)\,\mathrm{d}s$$

## 二、典型例题

**例1** 计算 $\int_L x\,\mathrm{d}s$, 其中 $L$ 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O\,(0,0)$ 与点 $B\,(1,1)$ 之间的一段弧 .

**解** $\because L: y=x^2 \quad (0\le x\le 1)$



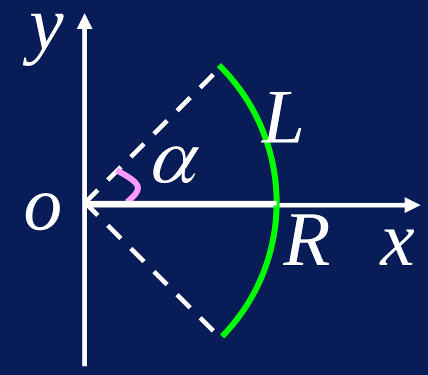

$$\therefore \int_L x\,\mathrm{d}s = \int_0^1 x\cdot\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

**例2** 计算半径为 $R$ ,中心角为 $2\alpha$ 的圆弧 $L$ 对于它的对称轴的转动惯量$I$ (设线密度$\mu=1$).

**解** 建立坐标系如图,则




$$I=\int_L y^2\,\mathrm{d}s$$

$$L:\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta \end{cases} \quad (-\alpha\le\theta\le\alpha\ )$$

$$=\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2\sin^2\theta\sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=R^3\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \;=2R^3\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\alpha}$$

$$=R^3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha\ )$$

**例3** 计算曲线积分 $\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$, 其中$\Gamma$为螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=kt\ (0\le t\le 2\pi)$ 的一段弧.

**解** $\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2]\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+k^2}\mathrm{d}t$$

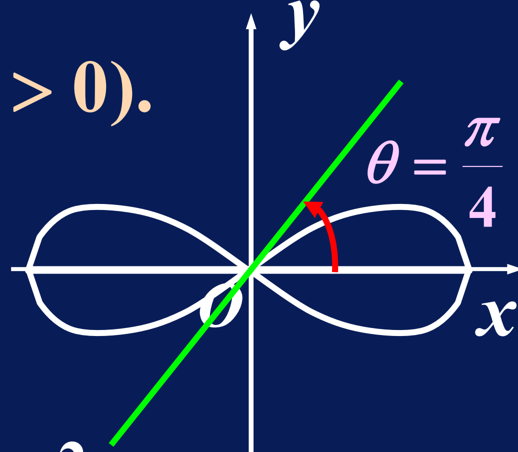
$$=\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}[a^2+k^2t^2]\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\left[a^2t+\frac{k^2}{3}t^3\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)$$

**例4** 计算 $\oint_L |x|\,\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为双纽线：

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)\ (\text{常数}\ a>0).$$




**解** $L$ 的极坐标方程为：

$$\rho^2 = a^2\cos 2\theta$$

$1^\circ$ 求 $\mathrm{d}s$

$$2\rho(\theta)\rho'(\theta) = -2a^2\sin 2\theta,\quad \rho'(\theta) = -\frac{a^2\sin 2\theta}{\rho(\theta)}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\sqrt{\rho^4(\theta)+(-a^2\sin 2\theta)^2}}{\rho(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{\rho(\theta)}\,d\theta$$

$2^\circ$ 由轴对称性，

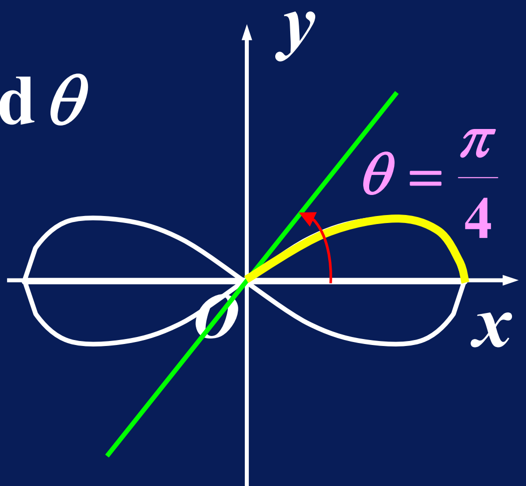
$\because L$关于$x$轴对称，$f(x,-y)=|x|=f(x,y)$

$L$关于$y$轴对称，$f(-x,y)=|-x|=f(x,y)$

$$\therefore \oint_L |x|\,\mathrm{d}s = 4\int_{L_1} |x|\,\mathrm{d}s \quad (L_1 : L\text{在第一象限部分})$$

$$= 4\int_{L_1} x\,\mathrm{d}s = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cancel{\rho(\theta)}\cos\theta\cdot\frac{a^2}{\cancel{\rho(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\,a^2$$




西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

**例5** 求$I=\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y+z=0.\end{cases}$

**解** 由轮换对称性，知

$$\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s=\int_\Gamma y^2\mathrm{d}s=\int_\Gamma z^2\mathrm{d}s.$$

故 $I=\dfrac{1}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$

点$(x,y,z)$的坐标满足曲线的方程

$$=\frac{a^2}{3}\int_\Gamma \mathrm{d}s=\frac{2\pi a^3}{3}$$

$(2\pi a=\int_\Gamma \mathrm{d}s$, 球面大圆周长$)$

**例6** 求圆柱面$x^2+y^2=2ax$被球面$x^2+y^2+z^2=4a^2$所截部分面积$A$.

**解** 曲面对称于$xoy$面，截取的柱面面积A是第一卦限部分面积 $A_1$的4倍。圆柱面的准线L的参数方程:

$$x=a(1+\cos t),\ \ y=a\sin t,\ \ 0\le t\le \pi,\ \ \mathrm{d}s=a\mathrm{d}t.$$

$$A_1=\int_L |z|\mathrm{d}s=\int_L \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}s$$

$$=a^2\int_0^{\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t=2a^2\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4a^2.$$

柱面面积 $A=4A_1=16a^2.$

## 三、同步练习

1. 计算$\oint_L (x+y)\,\mathrm{d}s$, $L$是以$A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$为顶点的三角形的边界.

2. 设$L$是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为$a$,求

$$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s.$$

3. 有一半圆弧 $y=R\sin\theta$，$x=R\cos\theta$ $(0\le\theta\le\pi)$，其线密度$\mu=2\theta$,求它对原点处单位质量质点的引力.

4. 计算$\int_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$，其中

$L$是点$(1,-1,2)$到点$(2,1,3)$的直线段.

5. 计算 $I=\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为球面

$x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$ 与平面$x+z=1$的交线.

6. 计算$\oint_L \frac{|y|}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$， 其中L是:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4a^2, \\ x^2+y^2=2ax, \end{cases} \quad z\ge 0,\ a>0.$$

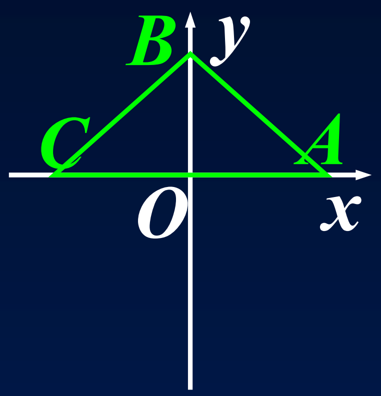
7. $L$为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一卦限与三个坐标面的交线，求其形心.

8. 计算$\int_L x^2 \mathrm{d}s$，$L$为圆周：$x^2+y^2+z^2=4, z=\sqrt{3}.$

9. 求柱面$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi$被马鞍面 $z=xy$及平面 $z=0$截取部分的面积 $A$。

# 四、同步练习解答

1. 计算$\oint_L (x+y)\,\mathrm{d}s$, $L$是以$A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$为顶点的三角形的边界.




解 $\oint_L (x+y)\,\mathrm{d}s = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{AC}$

直线$AB$: $y = 1 - x,\ 0 \le x \le 1,\ \mathrm{d}s = \sqrt{2}\mathrm{d}x$

$$\int_{AB} = \int_0^1 [x + (1 - x)]\sqrt{2}\mathrm{d}x = \sqrt{2}$$

直线$BC$: $y = 1 + x,\ -1 \le x \le 0,\ \mathrm{d}s = \sqrt{2}\mathrm{d}x$

$$\int_{BC} = \int_{-1}^0 [x + (1 + x)]\sqrt{2}\mathrm{d}x = 0$$

直线$AB$:　$y=1-x,\ 0\le x\le 1,\ \mathrm{d}s=\sqrt{2}\mathrm{d}x$

$$\int_{AB} = \int_0^1 [x+(1-x)]\sqrt{2}\mathrm{d}x = \sqrt{2}$$

直线$BC$:　$y=1+x,\ -1\le x\le 0,\ \mathrm{d}s=\sqrt{2}\mathrm{d}x$

$$\int_{BC} = \int_{-1}^0 [x+(1+x)]\sqrt{2}\mathrm{d}x = 0$$

直线$AC$:　$y=0,\ -1\le x\le 1,\ \mathrm{d}s=\mathrm{d}x$

$$\int_{AC} = \int_{-1}^1 [x+0]\mathrm{d}x = 0$$

$$\oint_L (x+y)\mathrm{d}s = \sqrt{2}.$$

**2.** 设$L$是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为$a$,求

$$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s.$$

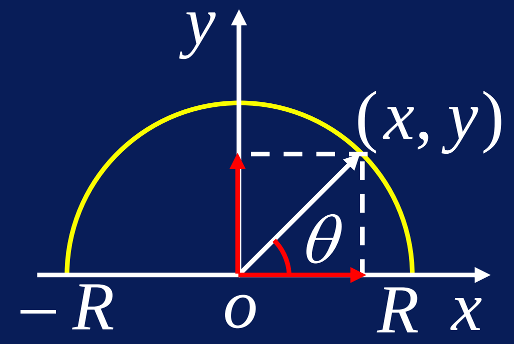
**解** 当$(x,y)\in L$时$3x^2+4y^2=12$,故

$$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\oint_L (2xy+12)\mathrm{d}s$$

$$=2\oint_L xy\mathrm{d}s+12\oint_L \mathrm{d}s$$

$$=12a \qquad (\text{对称性}).$$

**3.** 有一半圆弧 $y = R\sin\theta,\ x = R\cos\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$，其线密度 $\mu = 2\theta$，求它对原点处单位质量质点的引力.




**解**

$$\mathrm{d}F_x = k\frac{\mu\,\mathrm{d}s}{R^2}\cos\theta = \frac{2k}{R}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}F_y = k\frac{\mu\,\mathrm{d}s}{R^2}\sin\theta = \frac{2k}{R}\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$F_x = \frac{2k}{R}\int_0^{\pi}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2k}{R}\Big[\theta\sin\theta + \cos\theta\Big]_0^{\pi} = -\frac{4k}{R}$$

$$F_y = \frac{2k}{R}\int_0^{\pi}\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2k}{R}\Big[-\theta\cos\theta + \sin\theta\Big]_0^{\pi} = \frac{2k\pi}{R}$$

故所求引力为 $\vec{F} = \left(-\frac{4k}{R},\ \frac{2k\pi}{R}\right)$

**4.** 计算$\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$,其中$L$是点$(1,-1,2)$到点$(2,1,3)$的直线段.

**解** 直线$L$的方向向量 $\vec{s}=(1,2,1)$,

故 $L$的参数方程: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \quad 0\le t\le 1 \\ z=2+t \end{cases}$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{1^2+2^2+1^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{6}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int_0^1\left[(1+t)^2+(-1+2t)^2+(2+t)^2\right]\sqrt{6}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{6}\int_0^1 (6+2t+6t^2)\mathrm{d}t=9\sqrt{6}$$

**5.** 计算 $I=\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为球面 $x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$ 与平面$x+z=1$的交线.

**解** $\Gamma:\begin{cases}\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}y^2=1\\ x+z=1\end{cases}$，化为参数方程

$$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\\ y=2\sin\theta\\ z=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta\end{cases}\qquad(0\le\theta\le 2\pi)$$

则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2+(\sqrt{2}\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\qquad I=\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}2\mathrm{d}\theta=18\pi$$

6. 计算$\oint_L \frac{|y|}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中L是:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4a^2, \\ x^2+y^2=2ax, \end{cases} \quad z\ge 0, a>0.$$

解 曲线L的参数方程是:

$$x=a(1+\cos t),\ y=a\sin t$$

$$z=2a\sin\frac{t}{2}, 0\le t\le 2\pi.$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t=a\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$$

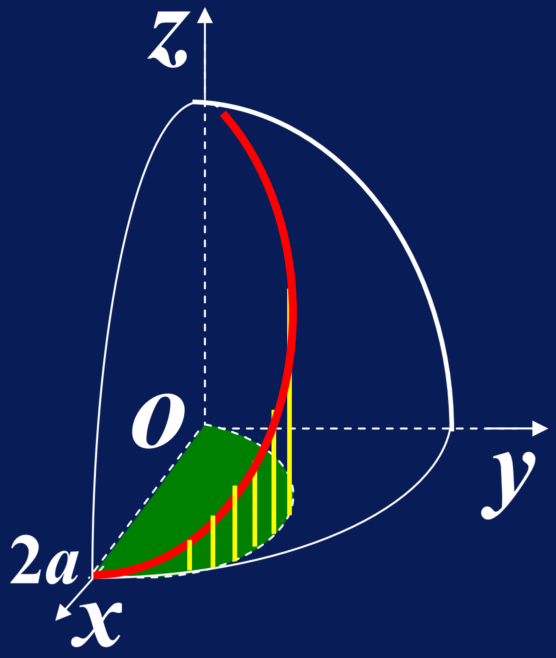
$$\oint_L \frac{|y|}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{|a\sin t|}{4a^2}a\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$$

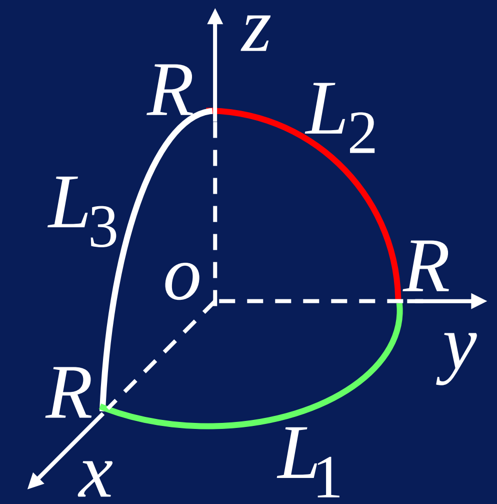
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}\,\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\cos^2\frac{t}{2}$$

$$=-\frac{2}{3}\left(1+\cos^2\frac{t}{2}\right)^{3/2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$



**7.** $L$为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$在第一卦限与三个坐标面的交线，求其形心.




**解** 如图所示，交线长度为

$$l=3\int_{L_1}\mathrm{d}s=3\cdot\frac{2\pi R}{4}=\frac{3\pi R}{2}$$

由对称性，形心坐标为

$$\bar{z}=\bar{y}=\bar{x}=\frac{1}{l}\int_{L_1+L_2+L_3}x\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{l}\left[\int_{L_1}x\,\mathrm{d}s+\cancel{\int_{L_2}x\,\mathrm{d}s}+\int_{L_3}x\,\mathrm{d}s\right]=\frac{2}{l}\int_{L_1}x\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\cos\theta\cdot R\,\mathrm{d}\theta=\frac{4R}{3\pi}$$

8. 计算$\int_L x^2 \mathrm{d}s$, $L$为圆周：$x^2+y^2+z^2=4, z=\sqrt{3}.$

**解** 因为$L$为圆周：$x^2+y^2=1, z=\sqrt{3},$ 且$L$关于

$x, y$有轮换对称性， $\int_L x^2 \mathrm{d}s = \int_L y^2 \mathrm{d}s.$

$$\int_L x^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_L (x^2+y^2)\ \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_L \mathrm{d}s.$$

又知圆周长为$2\pi$, 即$\int_L \mathrm{d}s = 2\pi,$

$$\int_L x^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\bullet 2\pi = \pi.$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

9. 求柱面$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi$

被马鞍面 $z=xy$及平面 $z=0$截取部分的面积 $A$。

**解** 柱面的准线$L$的参数方程是:

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t$$

面积 $A=\int_L |z|\,\mathrm{d}s=\int_L xy\,\mathrm{d}s=2a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$

$$=4a^3\int_0^{2\pi}[t\sin^3\frac{t}{2}-2\sin^4\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}]\mathrm{d}t$$

$$\text{面积}\,A=\int_L |z|\,\mathrm{d}s=\int_L xy\,\mathrm{d}s=2a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$=4a^3\int_0^{2\pi}[t\sin^3\frac{t}{2}-2\sin^4\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}]\,\mathrm{d}t$$

$$=4a^3\int_0^{2\pi}\left[t(1-\cos^2\frac{t}{2})\sin\frac{t}{2}-2\sin^4\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=16a^3\int_0^{\pi}\left[u(1-\cos^2 u)\sin u-2\sin^4 u\cos u\right]\mathrm{d}u$$

$$=16a^3\left[u\left(\frac{\cos^3 u}{3}-\cos u\right)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos^3 u}{3}-\cos u\right)\mathrm{d}u-\frac{1}{5}\sin^5 u\,\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$=\frac{32}{3}\pi a^3$$