第二章 导数与微分

9. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$：

（1） $y=\tan(x+y)$；　　　　（2） $x^2-xy+y^2=1$.

解　（1）方程两端对 x 求导数,得

$$y'=\sec^2(x+y)(1+y'),$$

解得
$$y'=\frac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)}=-\csc^2(x+y),$$

因此

$$y''=-2\csc(x+y)(-1)\csc(x+y)\cot(x+y)(1+y')=-2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y).$$

（2）两边对 x 求导,得 $y'=\dfrac{2x-y}{x-2y}$， 两边再对 x 求导,得 $y''=\dfrac{6}{(x-2y)^3}$.

10. 设 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$,求 $y''(0)$.

解 1　对 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$ 两端关于 x 求导数,得

$$\mathrm{e}^y y'+(y+xy')=0.$$

解得 $y'=\dfrac{-y}{x+\mathrm{e}^y}$,于是

$$y''=-\frac{y'(x+\mathrm{e}^y)-y(1+\mathrm{e}^y y')}{(x+\mathrm{e}^y)^2}$$（注：不必将 y' 表达式代入）.

当 $x=0$ 时, $y=1$． $y'(0)=\left.\dfrac{-y}{x+\mathrm{e}^y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=\dfrac{-1}{\mathrm{e}}$, $y''(0)=\mathrm{e}^{-2}$.

解 2　由题设得

$$\mathrm{e}^y y'+(y+xy')=0, \tag{*}$$

上式两端关于 x 求导数,得

$$(\mathrm{e}^y y'^2+\mathrm{e}^y y'')+y'+(y'+xy'')=0. \tag{**}$$

当 $x=0$ 时, $y=1$．代入（*）式得 $y'(0)=\dfrac{-1}{\mathrm{e}}$,代入（**）式得 $y''(0)=\mathrm{e}^{-2}$.

解法 2 步骤相对简便.

11. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$：

（1）$\begin{cases}x=3\mathrm{e}^{-t},\\ y=2\mathrm{e}^t;\end{cases}$　　　（2）$\begin{cases}x=2t+t^2,\\ y=4t+t^4.\end{cases}$

解　（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{2\mathrm{e}^t}{-3\mathrm{e}^{-t}}=-\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{2t}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t}\right)=\frac{\mathrm{d}\left(-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t}\right)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{2t}\cdot\frac{1}{-3\mathrm{e}^{-t}}=\frac{4}{9}\mathrm{e}^{3t}$$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{4+4t^3}{2+2t}=2(1-t+t^2)$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{2t-1}{1+t}$.

第五节 导数的简单应用

1. 试求经过原点且与曲线 $y_1=\dfrac{x+9}{x+5}$ 相切的直线方程.

解 $y_1'=\left(\dfrac{x+9}{x+5}\right)'=\dfrac{(x+5)-(x+9)}{(x+5)^2}=\dfrac{-4}{(x+5)^2}$.

设经过原点的切线为 $y_2=kx$（k 为待定常数）. 由于曲线 $y_1=\dfrac{x+9}{x+5}$ 与切线 $y_2=kx$ 在切点处相交且相切, 因此在切点处

$$\begin{cases} y_1=y_2, \\ y_1'=y_2', \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x+9}{x+5}=kx, \\ \dfrac{-4}{(x+5)^2}=k, \end{cases}$$

因此得 $x^2+18x+45=0$，$x_1=-3$，$x_2=-15$.

$$k_1=\left.\frac{-4}{(x+5)^2}\right|_{x=-3}=-1,\ k_2=\left.\frac{-4}{(x+5)^2}\right|_{x=-15}=-\frac{1}{25}.$$

故所求直线（即切线）方程为 $y=-x$ 及 $y=-\dfrac{1}{25}x$.

注意 易犯的错误是:

所求直线经过 $(0,0)$ 点, 斜率为

$$k=y_1'|_{x=0}=\left.\frac{-4}{(x+5)^2}\right|_{x=0}=-\frac{4}{25},$$

故其方程为 $y=-\dfrac{4}{25}x$.

产生错误的原因是认为所求直线与已知曲线在原点处相切. 事实上, 原点不在已知曲线上, 故原点不可能是切点.

2. 写出曲线 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$ 在点 $M\ (6\ ,6.4)$ 处的切线方程和法线方程.

解 由于

$$y'=-\frac{64x}{100y}=-\frac{16x}{25y},$$

从而点 M 处的导数

$$y'|_M=-\frac{16\times 6}{25\times 6.4}=-\frac{3}{5},$$

此即曲线在 M 点的切线的斜率.

所以, 切线方程为

$$y-6.4=-\frac{3}{5}(x-6)\text{, 即 } 3x+5y-50=0\text{；}$$

法线方程为

$$y-6.4=\frac{5}{3}(x-6)\text{, 即 } 5x-3y-10.8=0\,.$$

3. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a\,,\frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线和法线方程.

解 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$, 故 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{4}a,y=\frac{\sqrt{2}}{4}a}=-1$.

故切线方程为 $x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}a=0$, 法线方程 $x-y=0$.

4. 求曲线 $x=\frac{2t+t^2}{1+t^3}$, $y=\frac{2t-t^2}{1+t^3}$ 在 $t=0$ 处的切线方程和法线方程.

解 $y'=\frac{(2-2t)(1+t^3)-(2t-t^2)3t^2}{(2+2t)(1+t^3)-(2t+t^2)3t^2}$, 故 $y'|_{t=0}=1$.

故切线方程 $y=x$, 法线方程 $y=-x$.

5. 求对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$ 在点 $(\rho_0\,,\theta_0)=(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\,,\frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程.

解 对数螺线的参数方程为 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta,\\ y=\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta.\end{cases}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{\mathrm{e}^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)}{\mathrm{e}^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta},$$

在点 $(\rho_0\,,\theta_0)=(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\,,\frac{\pi}{2})$ 处, $x_0=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}=0$, $y_0=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.切线斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{M_0}=\left.\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right)\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1\,.$$

故在指定点处切线的方程为

$$y-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}=-x\,.$$

6. 以初速度 v_0 上抛的物体, 其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$, 求(1)该物体的速度 $v(t)$；(2)该物体达到最高点的时刻.

解 (1)速度函数是高度函数对时间的导数,

$$v(t)=s'(t)=v_0-gt\,;$$

(2)当物体达到最高点时, 其速度为零, 即 $v(t)=v_0-gt=0$, 此时刻为 $t_0=\frac{v_0}{g}$.

7. 注水入深 8m 上顶直径 8m 的正圆锥形容器中, 其速率为 4m³/min. 当水深为 5m 时, 其表面上升的速率为多少?

解 设 t 时刻液面高度为 h, 液面半径为 r, 液体体积为 V, 则 $r=\frac{h}{2}$,

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{12}h^3\,,\ V'(t)=\frac{\pi}{12}\cdot 3h^2h'(t)=\frac{\pi}{4}h^2h'(t).$$

又知$V'(t)=4$，故

$$h'(t)|_{h=5}=\left.\frac{4V'(t)}{\pi h^2}\right|_{h=5}=\frac{16}{25\pi}\approx 0.204\ (\text{m/min}).$$

第六节 函数的微分

1. 已知 $y=x^3-x$，请将 $x=2$ 时，Δx 分别等于1和0.1时的全增量Δy与全微分$\mathrm{d}y$与它们相应的值用线连起来：

$\Delta y|_{\Delta x=1}^{x=2}$　　　11

$\mathrm{d}y|_{\Delta x=1}^{x=2}$　　　18

$\Delta y|_{\Delta x=0.1}^{x=2}$　　　1.161

$\mathrm{d}y|_{\Delta x=0.1}^{x=2}$　　　1.1

解　$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=(3x^2-1)\mathrm{d}x=(3x^2-1)\Delta x$

$$\mathrm{d}y|_{\substack{x=2\\ \Delta x=1}}=11,\qquad \mathrm{d}y|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}}=1.1.$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=[(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)]-(x^3-x),$$

当$x=2$时，

$$\Delta y|_{\Delta x=1}=[(2+1)^3-(2+1)]-(2^3-2)=18,$$

$$\Delta y|_{\Delta x=0.1}=[(2+0.1)^3-(2+0.1)]-(2^3-2)=1.161.$$

2. 求下列函数在指定点处的微分：

(1) $y=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}(a\neq 0), x_0=0$；　(2) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=\arctan t,\end{cases}\quad t=1$；

(3) $\mathrm{e}^{x+y}-xy=1, x_0=0$.

解　(1) $y'=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{a^2}}=\dfrac{1}{a^2+x^2}$，$\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2t}$，$\mathrm{d}y|_{t=1}=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x$.

(3)方程两边对x求导数，得

$$\mathrm{e}^{x+y}(1+y')-(y+xy')=0,$$

解得$y'=\dfrac{y-\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^{x+y}-x}$. 当$x=0$时，$y=0$

$$y'|_{x=0}=\left.\frac{y-\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^{x+y}-x}\right|_{\substack{x=0\\ y=0}}=-1.$$

故在$x=0$处微分$\mathrm{d}y|_{x=0}=y'|_{x=0}\ \mathrm{d}y=-\mathrm{d}x$.

3. 求下列复合函数的微分：

(1) $y=\ln(x^2+1), x=e^t+\sin t$；　　(2) $y=\ln\tan\dfrac{u}{2}, u=\cos 2x$

解 (1) $\mathrm{d}\,y=\dfrac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}\,x=\dfrac{2x}{x^2+1}\left(\mathrm{e}^t+\cos t\right)\mathrm{d}\,t=\dfrac{2\left(\mathrm{e}^t+\sin t\right)}{\left(\mathrm{e}^t+\sin t\right)^2+1}\left(\mathrm{e}^t+\cos t\right)\mathrm{d}\,t$;

(2) $\mathrm{d}\,y=\dfrac{\sec^2\dfrac{u}{2}}{2\tan\dfrac{u}{2}}\mathrm{d}\,u=\dfrac{1}{\sin u}\mathrm{d}\,u=\dfrac{-2\sin 2x}{\sin(\cos 2x)}\mathrm{d}\,x$.

4. 将适当的函数填入下列括号内, 使等式成立:

(1) $\mathrm{d}(x^3+C)=3x^2\,\mathrm{d}\,x$; (2) $\mathrm{d}\left(\sin t+C\right)=\cos t\,\mathrm{d}\,t$;

(3) $\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega x+C\right)=\sin\omega x\,\mathrm{d}\,x$; (4) $\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C\right)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}\,x$.

注意 易犯的错误是:

(2) $\mathrm{d}\left(\sin t\right)=\cos t\,\mathrm{d}\,t$.

错在只寻找了使等式成立的一个函数, 未求全部函数.

5. 用一阶微分形式不变性, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$, 这里 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln(x^2+y^2)$.

解 方程两边取微分,

$$\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\mathrm{d}\left(\ln(x^2+y^2)\right).$$

$$\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}(x^2+y^2),$$

$$\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\frac{x\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,x}{x^2}=\frac{1}{x^2+y^2}(2x\,\mathrm{d}\,x+2y\,\mathrm{d}\,y),$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{2x+y}{x-2y}$.

第二章 导数与微分(总习题)

1. 证明可导的周期函数的导函数仍为具有相同周期的周期函数.

证 设 $f\left(x\right)$ 为周期函数, 周期为 T, 则

$$f\left(x+T\right)=f\left(x\right).$$

两端求导, 得

$$f'\left(x+T\right)=f'\left(x\right),$$

这说明 $f'\left(x\right)$ 为具有周期 T 的周期函数.

2. 设 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义的函数, 且具有如下性质:

(1) $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)g\left(y\right)+f\left(y\right)g\left(x\right)$;

(2) $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 在点 $x=0$ 可导, 且已知 $f\left(0\right)=0$, $g\left(0\right)=1$.

证明: $f\left(x\right)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导.

证 利用条件(1),

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x)g(\Delta x)+f(\Delta x)g(x)]-f(x)}{\Delta x}$$
$$=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)-1}{\Delta x}+g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}.$$

因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 $x=0$ 可导, 且 $f(0)=0$, $g(0)=1$, 所以,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\text{存在.}$$

$$g'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)-1}{\Delta x}\text{存在.}$$

故 $f'(x)=f(x)g'(0)+g(x)f'(0)$.

由于 x 是 $(-\infty,+\infty)$ 内任意点, 因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导.

注意 易犯的错误: 由条件(1), 得

$$f'(x+y)=[f'(x)g(y)+f(x)g'(y)]+[f'(y)g(x)+f(y)g'(x)],$$

令 $y=0$, 得

$$f'(x)=[f'(x)g(0)+f(x)g'(0)]+[f'(0)g(x)+f(0)g'(x)],$$

将条件 $f(0)=0$, $g(0)=1$ 代入, 解得

$$f(x)=-\frac{f'(0)g(x)}{g'(0)},$$

因此 $f'(x)=-\dfrac{f'(0)}{g'(0)}g'(x)$.

此解错在将要证的结论($f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导)当条件使用了, 且求导运算概念混乱.

3. 设 $f(x)=2^{|a-x|}$, 讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的可导性, 并求 $f'(x)$.

解 $$f(x)=\begin{cases}2^{a-x}, & x<a,\\ 1, & x=a,\\ 2^{x-a}, & x>a.\end{cases}$$

因此在 $x\neq a$ 处,

$$f'(x)=\begin{cases}-2^{a-x}\cdot\ln 2, & x<a,\\ 2^{x-a}\cdot\ln 2, & x>a.\end{cases}$$

在 $x=a$ 处, 利用左右导数定义,

$$f_+'(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$
$$\xlongequal{\text{令}y=2^{\Delta x}-1}\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{\log_2(1+y)}=\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{\log_2(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\log_2 e}=\ln 2,$$

$$f_-'(a)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2^{-\Delta x}-1}{\Delta x}$$
$$=-\lim_{\Delta x\to 0^-}2^{-\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2^{\Delta x}-1}{\Delta x}=-\ln 2.$$

因为 $f_+'(a)\neq f_-'(a)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导.

注意 易犯以下两种错误:

(1) 因为 $f(x)=\begin{cases}2^{a-x}, & x<a,\\ 2^{x-a}, & x\ge a.\end{cases}$ 所以

$$f'(x)=\begin{cases}-2^{a-x}\cdot\ln 2, & x<a,\\ 2^{x-a}\cdot\ln 2, & x\ge a.\end{cases}$$

此解错在只由分段函数在分段点一侧的表达式就求得了分段点处的导数值. 事实上, 函数在一点的可导性与该点左, 右两侧邻近函数的性质都有关系.

(2) 因为 $f(x)=\begin{cases}2^{a-x}, & x<a,\\ 1, & x=a,\\ 2^{x-a}, & x>a.\end{cases}$

所以

$$f'(x)=\begin{cases}-2^{a-x}\cdot\ln 2, & x<a,\\ 0, & x=a,\\ 2^{x-a}\cdot\ln 2, & x>a.\end{cases}$$

此解错在认为 $f(a)=1$, 于是 $f'(a)=(f(a))'=1'=0$. 事实上, 一般地, $f'(a)\neq(f'(a))'$.

4. 设 $y=\arctan \mathrm{e}^x-\ln\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}}$, 求 y'

解 $y'=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}-\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{2\,\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\right)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

5. (1) 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\dfrac{1}{x})^{2tx}$, 则 $f'(t)=\underline{(1+2t)\mathrm{e}^{2t}}$;

(2) 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, 则 $f^{(n)}(x)=\underline{\dfrac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}}$.

6. 设 $y=x^2\sin 2x$, 求 $y^{(50)}$.

解 设 $u=\sin 2x$, $v=x^2$, 利用莱布尼茨公式, 得

$$\begin{aligned}y^{(50)}&=(\sin 2x)^{(50)}(x^2)^{(0)}+50(\sin 2x)^{(49)}(x^2)'+\frac{50\cdot 49}{2!}(\sin 2x)^{(48)}(x^2)''+0\\&=2^{50}\sin\left(2x+\frac{50\pi}{2}\right)x^2+50\cdot 2^{49}\sin\left(2x+\frac{49\pi}{2}\right)2x\\&\quad+\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2^{48}\sin\left(2x+\frac{48\pi}{2}\right)\cdot 2\\&=2^{50}\left[-\sin 2x\cdot x^2+50\cos 2x\cdot x+\frac{25\times 49}{2}\sin 2x\right].\end{aligned}$$

注意 若设 $u=x^2$, $v=\sin 2x$ 会有什么不同?

7. 设 $y=f(\tan x+x\ln x)$, f 具有二阶导数, 求 y' 及 y''.

解 $y'=f'(\tan x+x\ln x)(\sec^2 x+\ln x+1)$,

$$y''=f''(\tan x+x\ln x)(\sec^2 x+\ln x+1)^2+f'(\tan x+x\ln x)(2\sec^2 x\tan x+\frac{1}{x}).$$

8. 证明 $(\sin^4 x+\cos^4 x)^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

证法 1　设 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$, 则

$$y'=4\sin^2 x\cos x-4\cos^3 x\sin x=-\sin 4x.$$

$$y^{(n)}=(-\sin 4x)^{(n-1)}=-4^{n-1}\sin\left(4x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

证法 2　$y=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{1-\cos 4x}{4}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\cos 4x}{4}$,

$$y^{(n)}=\frac{1}{4}(\cos 4x)^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

证法 3　数学归纳法(略).

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ ax^2+bx+c, & x\ge 0,\end{cases}$ $f''(0)$ 存在, 确定常数 a,b,c 的值.

解　(1) $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1$, $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax^2+bx+c)=c$, $f(0)=c$, 由题设知, $f''(0)$ 存在, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 即有 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$, $c=1$.

(2) $f'(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ 2ax+b, & x>0,\end{cases}$ 由 $f''(0)$ 存在知 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续, 因此

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$, 即 $f'(0)=b=1$.

(3) $f_+''(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(2ax+b)-1}{x}=2a$,

$$f_-''(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=1$$

由于 $f''(0)$ 存在, 故 $f_-''(0)=f_+''(0)$, 即 $a=\dfrac{1}{2}$.

注意　易犯的错误是:

由 $e^0=a\cdot 0+b\cdot 0+c$, 得 $c=1$,

由 $e^0=2a\cdot 0+b$, 得 $b=1$,

由 $e^0=2a$, 得 $a=\dfrac{1}{2}$.

此解错在未体现根据什么概念条件建立的等式.

10. 设参数方程 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$, 求 $\dfrac{dx}{dy}$ 及 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

解　$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t}}=\dfrac{1+t}{1+t^2}$,

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{\frac{1-2t-t^2}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t}}=\frac{(1-2t-t^2)(1+t)}{(1+t^2)^2}.$$

11. 已知 $\sqrt{x^2+y^2}=a\,e^{\arctan\frac{y}{x}}$, 求 y''.

解 1　取对数, $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln a+\arctan\dfrac{y}{x}$, 两边对 x 求导数, 得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2},\ x+yy'=y'x-y, \tag{*}$$

解得 $\quad y'=\dfrac{x+y}{x-y}$,

因此

$$y''=\left(\frac{x+y}{x-y}\right)_x'=\frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2},$$

将 y' 的表达式代入,解得 $\quad y''=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

解 2 (*)式两端对 x 求导数,得

$$1+y'^2+y''y=y''x,$$

所以

$$y''=\frac{1+(y')^2}{x-y}\ \xlongequal{y'\text{代入}}\ \frac{2\left(x^2+y^2\right)}{(x-y)^3}.$$

12. $y=x+x^x+x^{x^x}$($x>0$),求 y'.

解 $\quad y'=1+x^x(1+\ln x)+x^{x^x}(x^x\ln x)'$

$$=1+x^x(1+\ln x)+x^x\cdot x^{x^x}\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right).$$

13. 液体从深为 18cm,顶部直径为 12cm 的正圆锥形漏斗,漏入直径为 10cm 的圆柱形桶中,开始时漏斗盛满液体.已知漏斗中液面深 12cm 时,液面下落速度为 1cm/min,问此时桶中液面上升速度是多少?

解 设锥形漏斗液高为 h,桶中液高为 h_1(图 2.1).由题设知,

$$\pi 5^2 h_1=\frac{\pi}{3}\cdot 6^2\cdot 18-\frac{\pi}{3}r^2h,$$

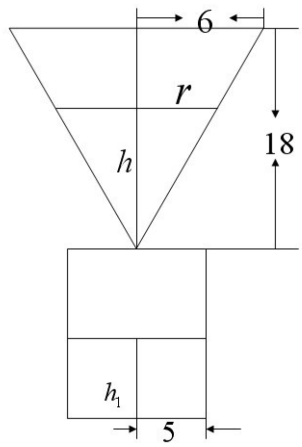

图 2.1

又 $\dfrac{r}{h}=\dfrac{6}{18}$, $r=\dfrac{h}{3}$,代入上式,得

$$25\pi h_1=\frac{\pi}{3}\cdot 6^2\cdot 18-\frac{\pi}{27}h^3,$$

对 t 求导数,得

$$25\pi\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{\pi}{27}\cdot 3h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},$$

已知 $\left.\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=12}=-1\,\text{cm/min}$, 因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}\right|_{h=12}=\frac{-1}{9}\ \frac{12^2}{25}(-1)=\frac{16}{25}=0.64\,\text{cm/min}.$$