# 第三节

# 格林(Green)公式

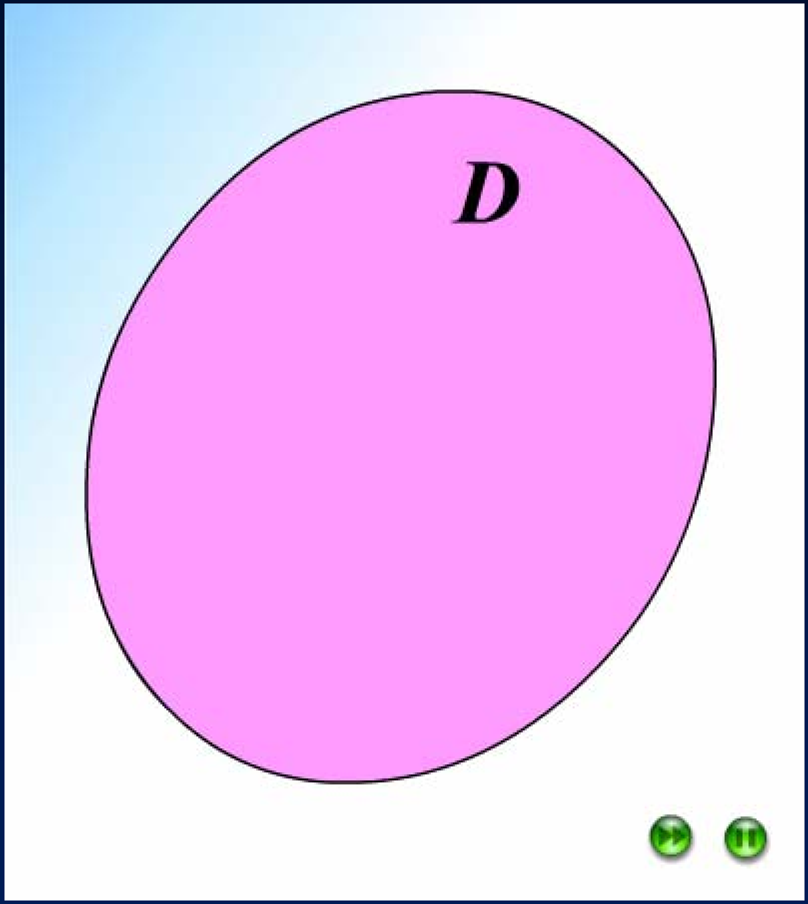
- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

# 一、主要内容

## (一) 格林公式

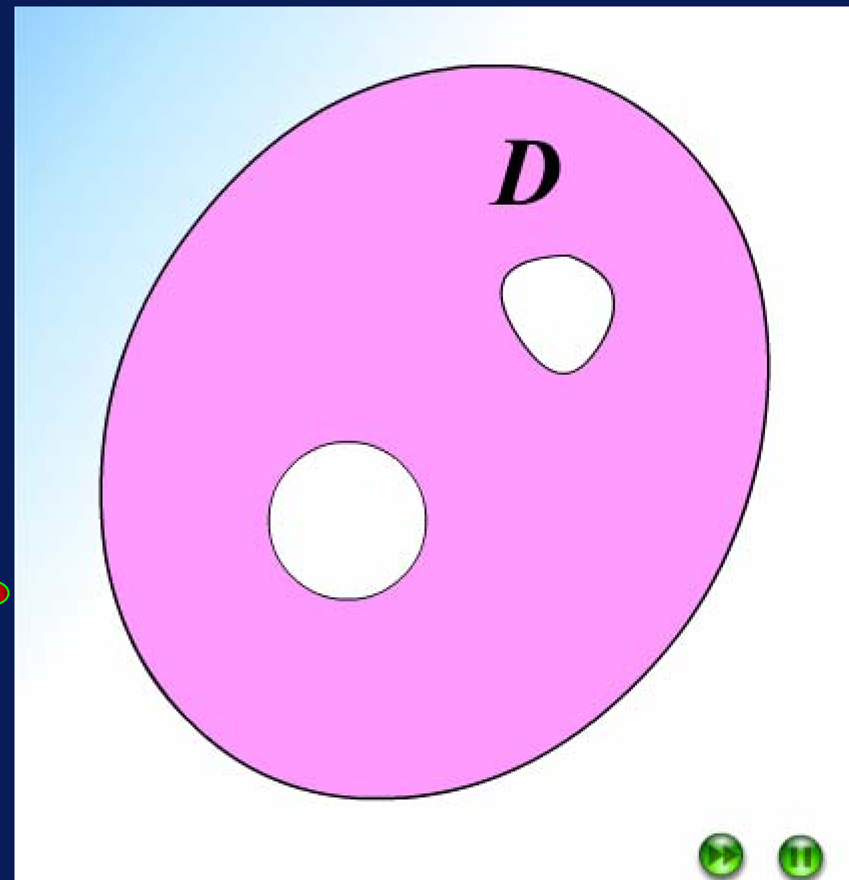
### 1. 区域连通性分类

设$D$为平面区域，如果$D$内任一闭曲线所围成的部分都属于$D$，则称$D$为平面**单连通区域**；




平面单连通区域就是没有“洞”的区域

否则，如果$D$内存在闭曲线$l$，它所围成的部分不完全属于$D$，则称$D$为**复连通区域**.




平面复连通区域就是有“洞”的区域

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

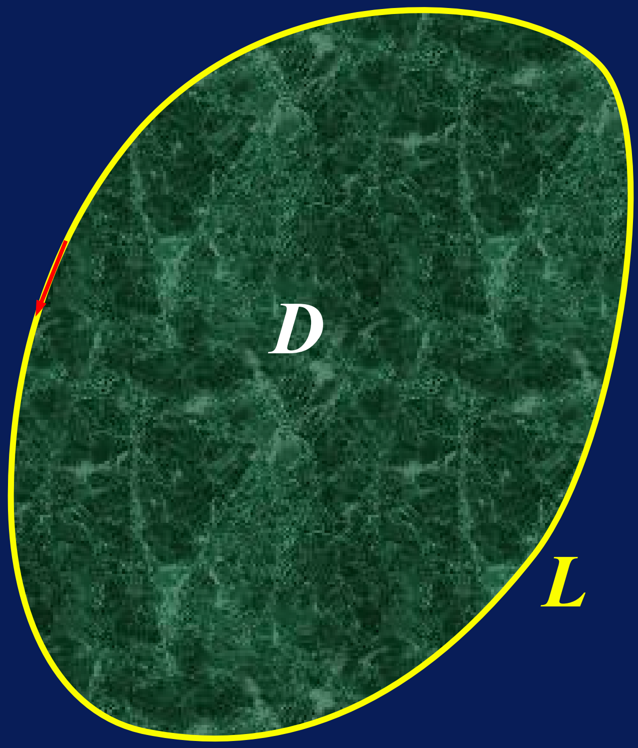
## 2. 边界曲线L的正向

边界曲线L的正向:

当观察者沿$L$的这个方向行走时,$D$内在他近处的部分总在他的左边.

单连通区域的边界曲线$L$的正向:

逆时针方向.




西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

设复连通区域 $D$ 的边界曲线为

$$\Gamma = L + l_1 + l_2 + \cdots + l_n \quad (\text{如图})$$

复合闭路

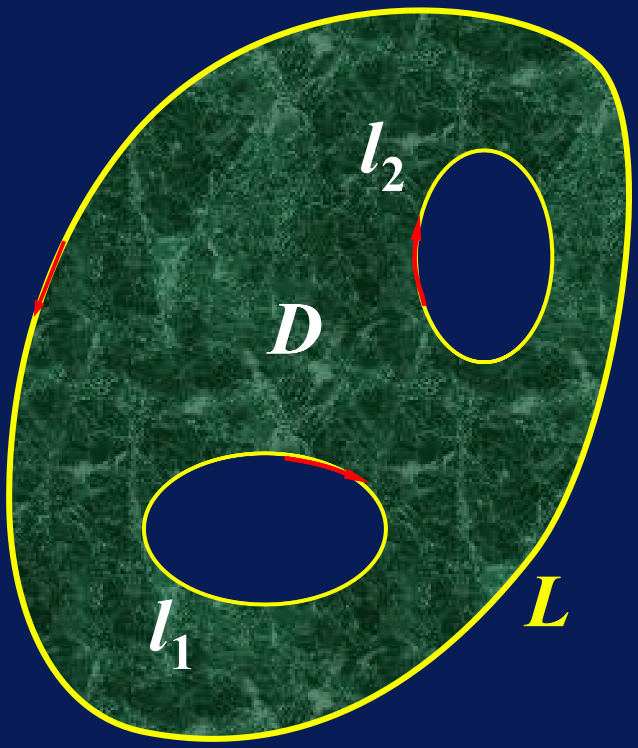
$\Gamma$ 的正向:

外边界$L$ 为逆时针方向;

内边界

$$l_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

为顺时针方向.




西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

## 3. 格林公式

**定理10.3（Green公式）**设平面区域 $D$ 是由分段光滑闭曲线围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 $D$上具有连续一阶偏导数, 则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

—— 格林公式

其中$\partial D^+$是$D$的边界曲线正向.

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

注 1° 格林公式的实质　沟通了沿闭曲线的曲线积分与二重积分之间的联系.

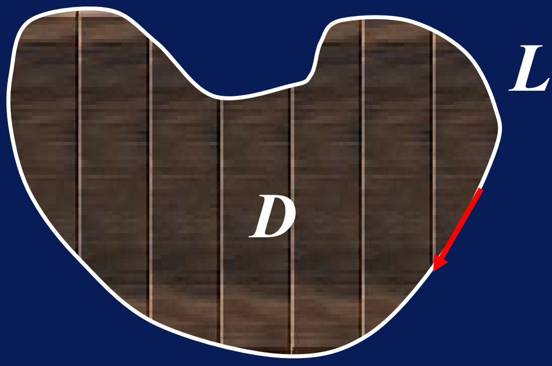
便于记忆形式:

$$\pm\iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

2° 格林公式的条件:

① $L$封闭，取正向;
(负)

② $P$，$Q$在$L$所围区域$D$上有一阶连续偏导数.



3° 对复连通区域 $D$ 应用格林公式,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

公式右端的 $\partial D^+$ 应包括沿区域 $D$ 的全部边界,

且边界的方向对 $D$ 来说都是正向.

**4° 利用曲线积分求面积的一种新方法.**

**推论** 正向闭曲线 $L$ 所围区域 $D$ 的面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_{\partial D^+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

需证：$A=\frac{1}{2}\oint_{\partial D^{+}} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x.$

证　令$P=-y,\quad Q=x,$ 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1+1=2$$

由格林公式

$$\frac{1}{2}\oint_{\partial D^{+}} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\iint_{D} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

## (二) 平面曲线积分与路径无关的条件

**定理10.4** 设$G$是单连通域，$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))\in C^{(1)}(G)$，则以下四个命题等价:

(1) $\forall$分段光滑闭曲线 $C\subset G$，$\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$;

(2) $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$G$内与路径无关;

(3) $\exists\, u=u(x,y)$，使$\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\ \ (\forall(x,y)\in G)$;

(4) 在$G$内，$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

注 1° 定理中关于区域的单连通性和函数$P$、$Q$的一阶偏导数的连续性两个条件缺一不可.

缺少一个，定理结论不一定成立.

反例1 $I=\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=2\pi\neq 0$

$L$ : 包围(0,0)的任一条正向闭曲线 .

$$P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x,y)\neq(0,0)$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x,y)\neq(0,0)$$

若取 $G=R^2$, 则 $G$是单连通域,

但 $P$，$Q$在$(0,0)$处无定义，故在 $G$内不是处处具有一阶连续偏导数 .

若取 $G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$, 则

$P,Q$在$G$内有一阶连续偏导数 ,但 $G$不是单连通区域.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

**反例2** $$I=\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$L$:包围(0,0)的任一条正向闭曲线 .

若取 $G=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\neq 0\}$, 则

$P,Q$在$G$内有一阶连续偏导数 ，且

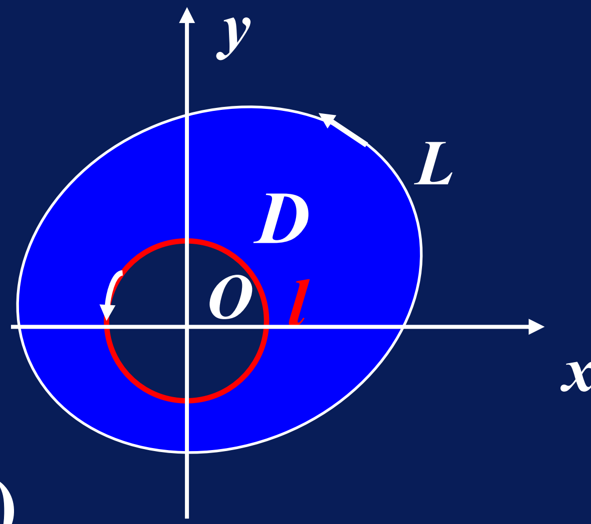
$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x,y)\in G$$

虽然$G$不是单连通域 ，但

$$I=\oint_C \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

事实上,作$l$: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$




$\theta : 0 \mapsto 2\pi$

则 $I = (\oint_{L+(-l)} - \oint_{-l})(\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2})$

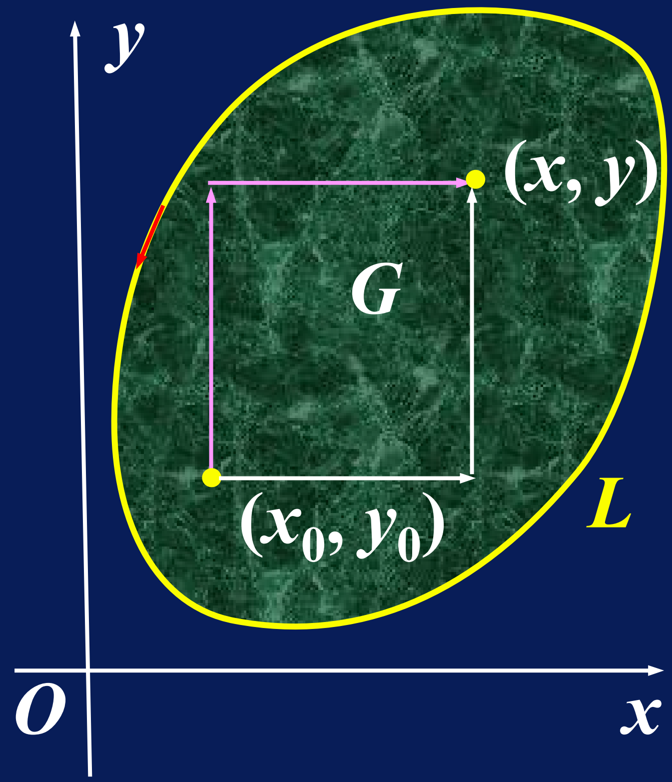
$= (\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \oint_l \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$

$= 0 + \int_0^{2\pi} \frac{0}{r^2}\mathrm{d}\theta = 0$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$2^{\circ}$ 当 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $(x, y)\in G$ 时, 由定理知:

计算曲线积分时, 可选择方便的积分路径(但要完全位于$G$内), 通常选择平行于坐标轴的折线为积分路径.



## (三) 平面曲线积分基本定理

设$P(x,y), Q(x,y)$在平面单连通域$G$内有一阶连续的偏导数，如果存在可微函数 $u(x,y)$, 使

$$\mathrm{d}u(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$\forall (x,y) \in G$$

则称 $u(x,y)$ 是 $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在$G$内的一个原函数.

如: $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}[\frac{1}{2}(x^2+y^2)]$

$\therefore$ $u = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 是$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$的一个原函数.

**定理10.5**

若$u(x,y)$是$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$在单连通域$G$上的一个原函数，则第二类曲线积分

$$\int_{A(x_1,y_1)}^{B(x_2,y_2)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$$ ——推广的牛顿-莱布尼茨公式

$$=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1)$$

其中$A$，$B\in G$，且$\overset{\frown}{AB}\subset G$.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

**注**　**求原函数 $u(x,y)$的常见方法：**

(1) 分项组合法；

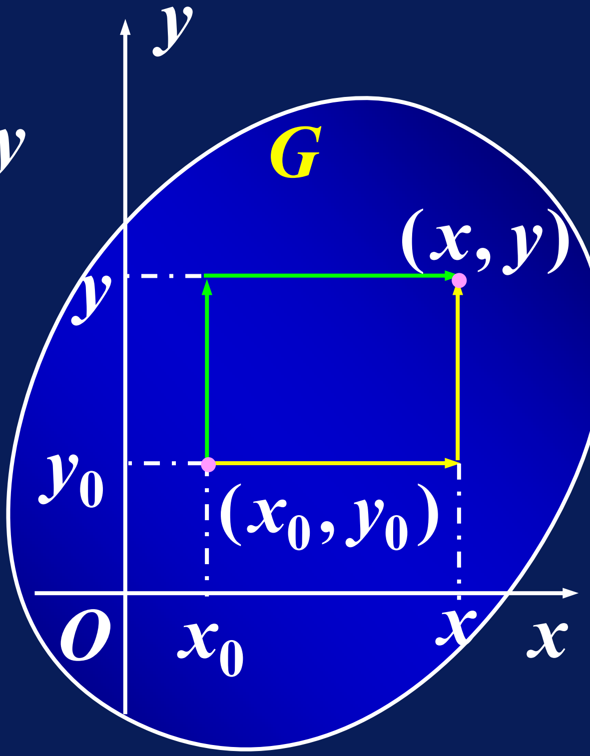
(2) 特殊路径法，如：折线 法；

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

或

$$=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x$$




(3) 偏积分法.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

## 二、典型例题

**例1** $L$为任意一条分段光滑的闭曲线，证明：

$$\oint_L 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0$$

**证** $\because \quad P = 2xy, \quad Q = x^2$

$$\therefore \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

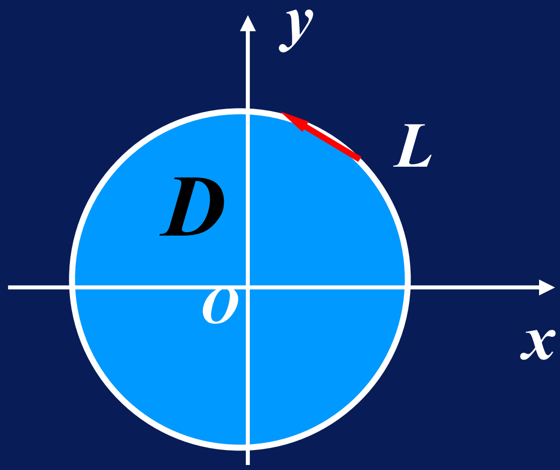
$$\therefore \quad \oint_L 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \pm\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

将曲线积分转化为二重积分

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例2 计算 $I=\oint_L y^3\,\mathrm{d}x+(3x-x^3)\,\mathrm{d}y$,

其中$L$为圆周$x^2+y^2=R^2$的正向.




解 $P=y^3, Q=3x-x^3$

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D[(3-3x^2)-3y^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=3\iint_D[1-(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R (1-\rho^2)\rho \,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{3\pi}{2}(2R^2 - R^4)$$

注 $$I = 3\iint_D [1-(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

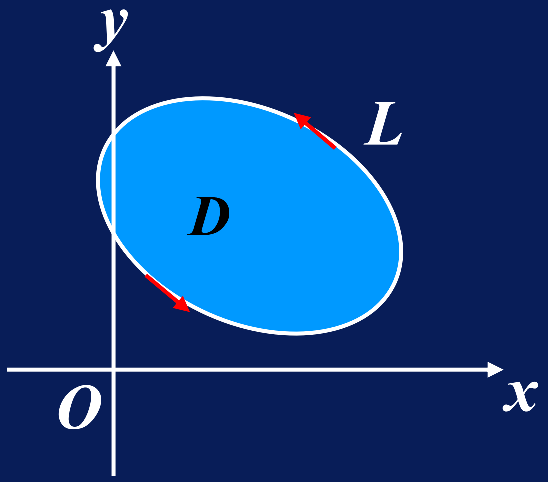
$$\overset{?}{\cancel{=}} 3\iint_D (1-R^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

**例3** 计算 $\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

**解** 记 $L$ 所围成的闭区域为$D$

令 $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$




则当$x^2+y^2 \neq 0$时,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

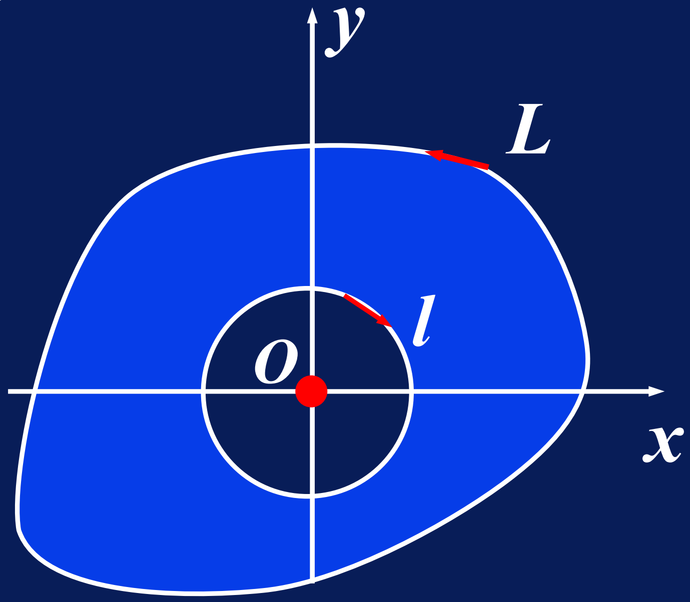
西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(1) 当$(0,0)\notin D$时，由格林公式知

$$\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

(2) 当$(0,0)\in D$时，




作位于$D$内圆周

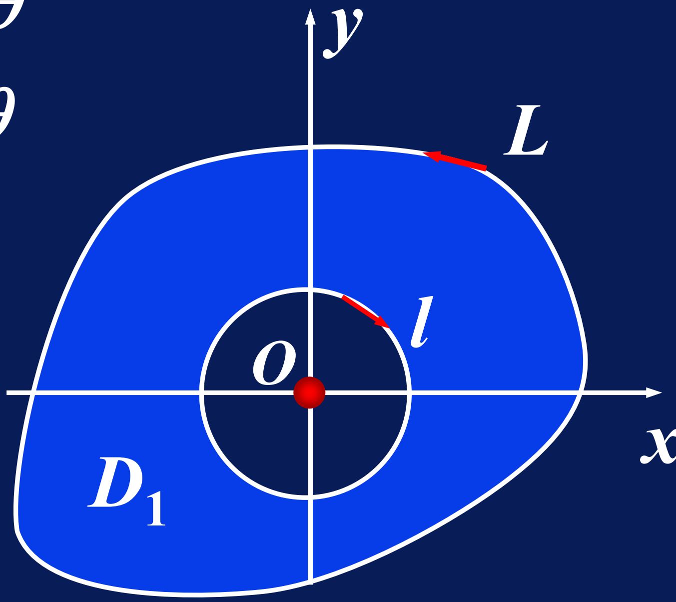
$l:\ x^2+y^2=r^2$，

顺时针.

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$l$的参数方程为: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\theta : 2\pi \mapsto 0$




记$D_1$由$L$和 $l$所围成的区域,

$L + l$ 封闭，正向 .

应用格林公式,得

$$\oint_{L+l} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

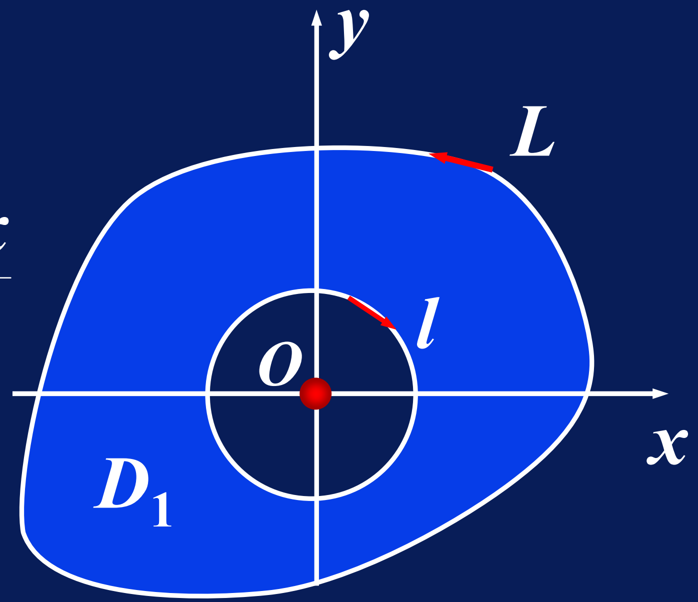
西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= \oint_{L+l} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} - \oint_{l} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= 0 + \oint_{l^-} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2}\,\mathrm{d}\theta$$




(其中 $l^-$ 的方向取逆时针方向)

$$= 2\pi.$$

(注意格林公式的条件)

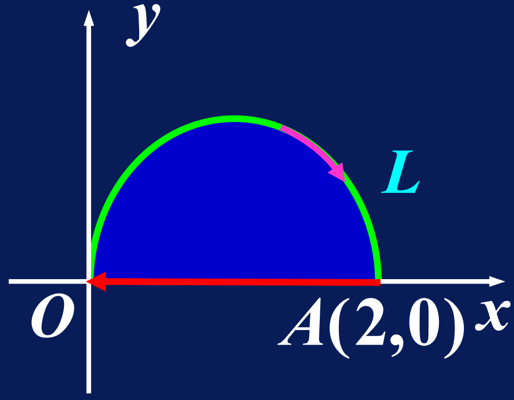
西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

**例4** 求一质点在力：$\vec{F}=(e^x\sin y-2y+1,\ e^x\cos y-x)$

的作用下，沿 $L: y=\sqrt{2x-x^2}$

从点 $O(0,0)$ 运动到 $A(2,0)$,

力所作的功.




**解** 需求：$W=\int_L (e^x\sin y-2y+1)\,dx+(e^x\cos y-x)\,dy$

$L$不封闭，引入辅助线 $\overline{AO}: y=0$

$x: 2\mapsto 0$

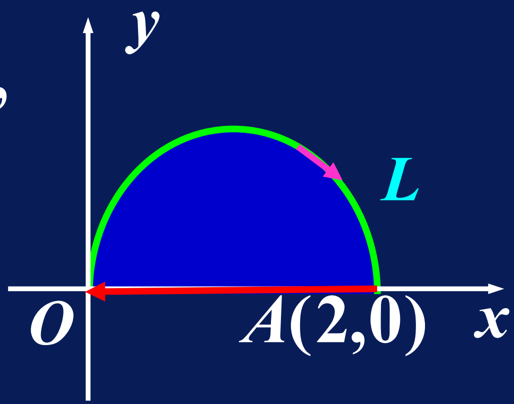
$L+\overline{AO}$ 封闭，负向

$P_y=e^x\cos y-2,\quad Q_x=e^x\cos y-1,$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$P_y = \mathrm{e}^x \cos y - 2,\quad Q_x = \mathrm{e}^x \cos y - 1,$$

$$Q_x - P_y = 1$$




应用格林公式，有

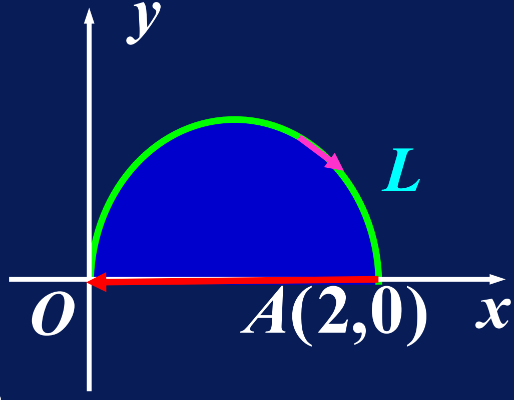
$$W = \int_L (\mathrm{e}^x \sin y - 2y + 1)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - x)\,\mathrm{d}y$$

$$= \Big(\oint_{L+\overline{AO}} - \int_{\overline{AO}}\Big)(\mathrm{e}^x \sin y - 2y + 1)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - x)\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{\overline{AO}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$= -\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{\overline{AO}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$




$$= -\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \left[\int_2^0 P(x,0)\,\mathrm{d}x + 0\right]$$

$$= -\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_2^0 (\mathrm{e}^x \sin 0 - 2\times 0 + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\pi}{2} + 2$$

小结：利用格林公式计算第二类曲线积分时，要注意定理使用的两个前提条件.

1. 当$L$是闭曲线时，

(1) 若$P,Q$在$L$所围区域$D$上有一阶连续偏导数，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \pm\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

"+"： $L$ 取正向； "−"： $L$ 取负向.

(2) 若$P, Q$在$L$所围区域 $D$上有奇点，则"挖洞".

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

**2. 当$L$不封闭时,**

可添加辅助线: $L_1$, $L_2, \cdots, L_n$ ,使

$$L+L_1+L_2+\cdots+L_n$$

封闭,且构成所围区域的正向或负向边界.

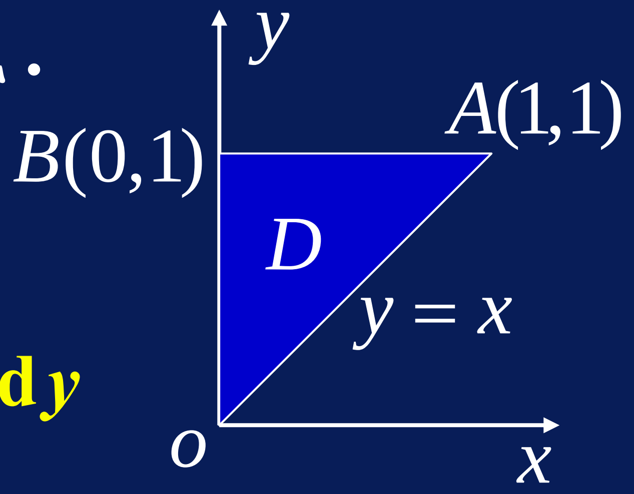
添加辅助线的原则:

(1) $P, Q$ 在$L+L_1+L_2+\cdots+L_n$所围区域$D$上有一阶连续的偏导数;

(2) $\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\int_{L_i} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$易于计算.

$(i=1,2,\cdots,n)$

**例5** 计算 $\iint_D e^{-y^2}\,dxdy$，其中 $D$ 是以 $O(0,0)$，$A(1,1)$，$B(0,1)$ 为顶点的三角形闭域.




**分析** 利用格林公式，

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\partial D^+} P\,dx+Q\,dy$$

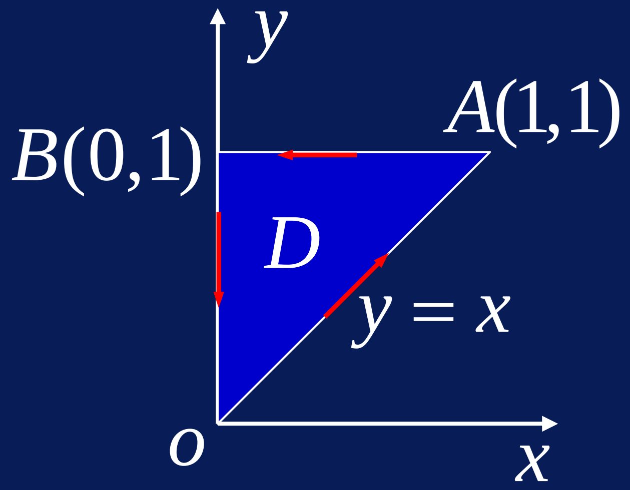
将二重积分转化为曲线积分

$$\iint_D e^{-y^2}\,dxdy=\oint_{\partial D^+} P\,dx+Q\,dy,\quad P=0,\ Q=xe^{-y^2}$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

解　令 $P = 0,\ Q = x\mathrm{e}^{-y^2}$

利用格林公式，有




$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \mathrm{e}^{-y^2}$$

$$\iint_D \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D^+} x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\overline{OA}} x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y + \int_{\overline{BO}} x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\overline{OA}} x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y + 0 + 0 = \int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-1}).$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

**例6** 求椭圆 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 所围成图形的面积 $A$.

**解** $x = a\cos\theta,\quad \mathrm{d}x = -a\sin\theta\mathrm{d}\theta$ $\qquad \theta : 0 \to 2\pi$

$y = b\sin\theta,\quad \mathrm{d}y = b\cos\theta\mathrm{d}\theta$

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \pi ab$$

**例7** 已知平面区域

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\},$$

$L$为$D$的正向边界，试证：

$$\oint_L x e^{\sin y} \,\mathrm{d}y - y e^{-\sin x} \,\mathrm{d}x \ge 2\pi^2$$

**证(方法1)** 由格林公式，得

$$I = \oint_L \underbrace{x e^{\sin y}}_{Q} \,\mathrm{d}y - \underbrace{y e^{-\sin x}}_{P} \,\mathrm{d}x$$

$$= \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

西北工业大学

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$\because \quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$

关于$x,y$有轮换对称性，即关于$y=x$对称

$$\therefore \quad \iint_D e^{\sin y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D e^{\sin x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

故 $$I=\iint_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D (e^{\sin x}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ge \iint_D 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi^2.$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

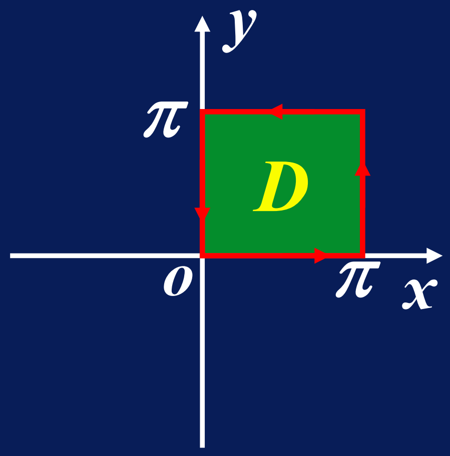
(方法2) $I=\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x$

$$=0+\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}\,\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{0}\pi e^{-\sin x}\,\mathrm{d}x+0$$

$$=\int_0^{\pi}\pi e^{\sin x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}x$$

$$\geq\pi\int_0^{\pi}2\,\mathrm{d}x=2\pi^2.$$

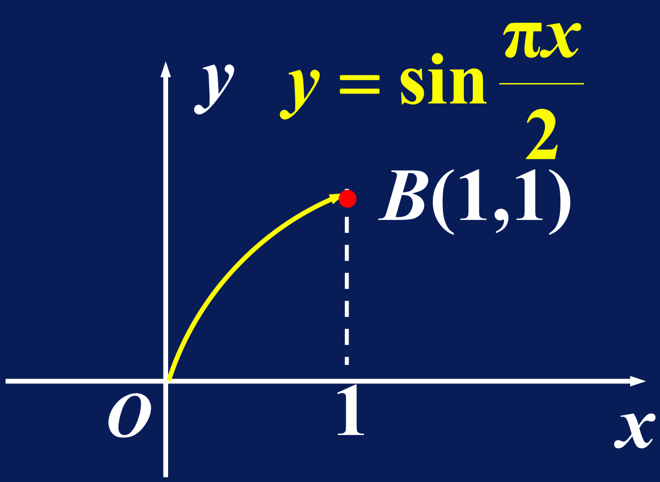



西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

**例8** 计算 $\int_L (x^2+2xy)\,\mathrm{d}\,x+(x^2+y^4)\,\mathrm{d}\,y$，其中$L$为由点 $O(0,0)$到点$B(1,1)$的曲线弧 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

**解** $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy)=2x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^4)=2x$$



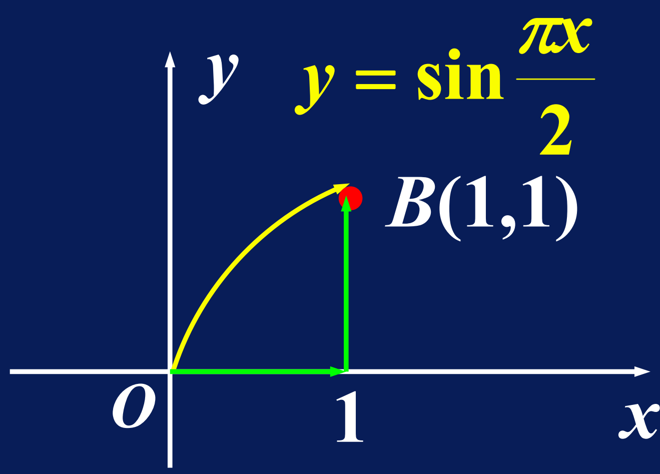

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ 原积分与路径无关

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

故 $\displaystyle\int_L (x^2+2xy)\,\mathrm{d}x+(x^2+y^4)\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1 (x^2+2x\cdot 0)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 (1+y^4)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{23}{15}.$$



**例9** 设曲线积分 $\int_L xy^2\,\mathrm{d}x + y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，

其中 $\varphi$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$. 计算

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,\mathrm{d}x + y\varphi(x)\,\mathrm{d}y.$$

**解** $P(x,y)=xy^2,\quad Q(x,y)=y\varphi(x),$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)=2xy,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[y\varphi(x)]=y\varphi'(x),$$

积分与路径无关 $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(方法1)

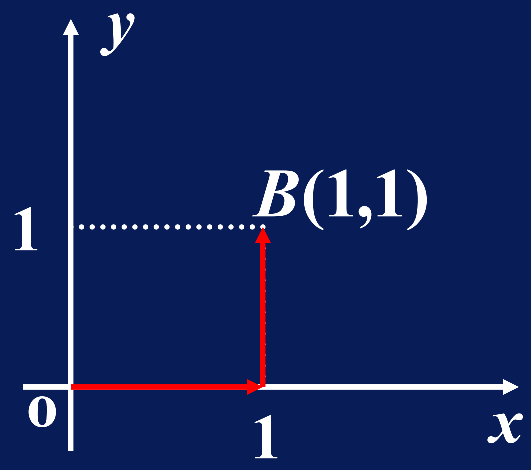
$$\because\ y\varphi'(x)=2xy \quad \Rightarrow \varphi(x)=x^2+c,$$

$$\text{由}\,\varphi(0)=0,\quad \Rightarrow c=0,\quad \Rightarrow \varphi(x)=x^2.$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x\cdot 0\,\mathrm{d}x+\int_0^1 y\varphi(1)\,\mathrm{d}y$$

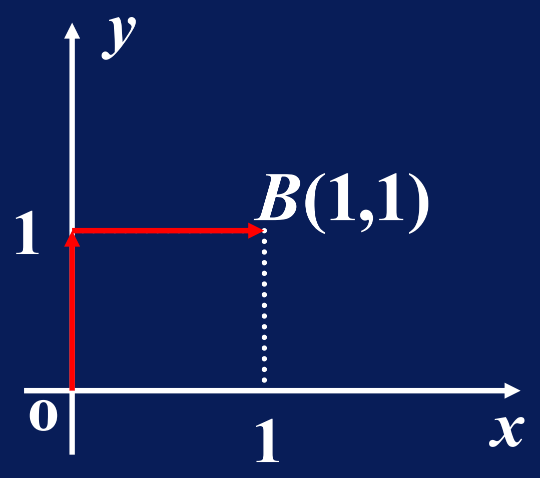
$$=0+\int_0^1 y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$




西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(方法2)

$\because$ 积分与路径无关




$$\therefore \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,\mathrm{d}x + y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 y\varphi(0)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 x\cdot 1^2\,\mathrm{d}x \qquad (\varphi(0)=0)$$

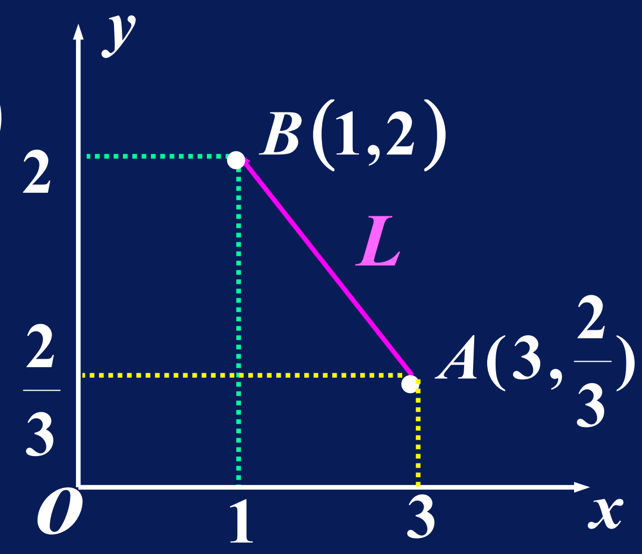
$$= \int_0^1 y\cdot 0\,\mathrm{d}y + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

**例10** 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有连续导数，求

$$I=\int_L \underbrace{\frac{1+y^2 f(xy)}{y}}_{P}\mathrm{d}x+\underbrace{\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]}_{Q}\mathrm{d}y$$

其中$L$是从点$A(3,\frac{2}{3})$到点$B(1,2)$的直线段.




**解** $$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xy\,f'(xy)$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad (y\neq 0)$$

积分与路径无关,

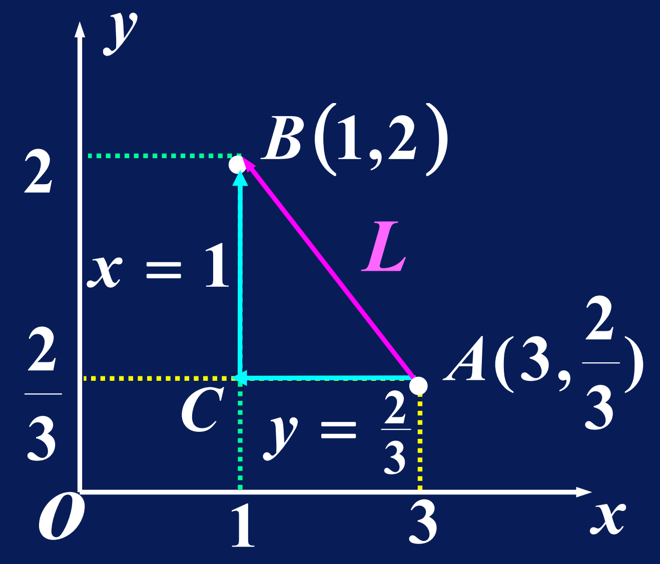
(方法1) 选折线路径 $ACB$.

$$I=\int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]\mathrm{d}y$$

$$=(\int_{\overline{AC}}+\int_{\overline{CB}})(P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y)$$

$$=\int_3^1 \frac{3}{2}[1+\frac{4}{9}f(\frac{2}{3}x)]\mathrm{d}x$$

$$+\int_{\frac{2}{3}}^{2}[f(y)-\frac{1}{y^2}]\mathrm{d}y$$




西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$= \int_3^1 \frac{3}{2}[1+\frac{4}{9}f(\frac{2}{3}x)]\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{2}[f(y)-\frac{1}{y^2}]\mathrm{d}y$$

$$= [-3+\int_3^1 \frac{2}{3}f(\frac{2}{3}x)\mathrm{d}x] + [\int_{\frac{2}{3}}^{2} f(y)\mathrm{d}y - 1]$$

$$= \int_3^1 \frac{2}{3}f(\frac{2}{3}x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{2} f(y)\mathrm{d}y - 4$$

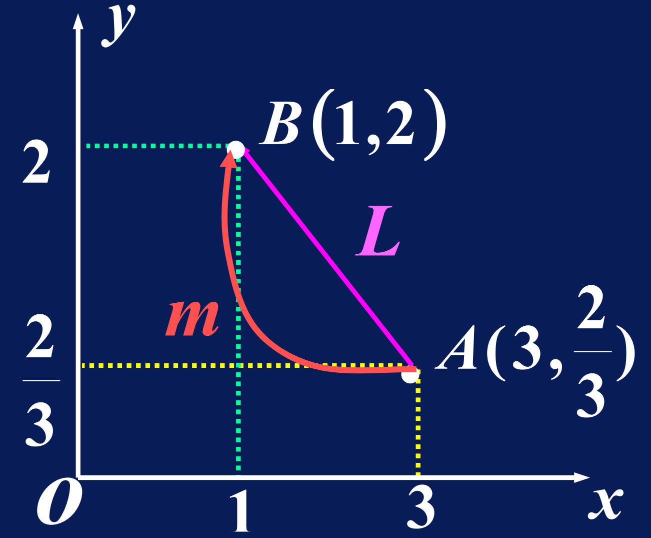
$$\xlongequal{\text{令}\frac{2}{3}x=t} \cancel{\int_2^{\frac{2}{3}} f(t)\mathrm{d}t} + \cancel{\int_{\frac{2}{3}}^{2} f(y)\mathrm{d}y} - 4$$

$$= -4$$

(方法2) 选路径 $\overset{\frown}{AmB}$:

$$xy = k \quad (k = 2)$$

$$x: 3 \mapsto 1$$




$$I = \int_{\overset{\frown}{AmB}} \frac{1+y^2 f(xy)}{y}\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy) - 1\right]\mathrm{d}y$$

$$= \int_3^1 \{[\frac{x}{2} + \frac{2}{x} f(2)] + [xf(2) - \frac{x^3}{4}]\cdot(-\frac{2}{x^2})\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_3^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_3^1 = -4.$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

**例11** 计算

$$I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\,\mathrm{d}y,$$

其中$L$为由点$(a,0)$到点$(0,0)$的上半圆周

$x^2+y^2=ax, y\geq 0$，常数 $m\neq 0.$

**解** $\because\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^x\sin y-my)=\mathrm{e}^x\cos y-m$

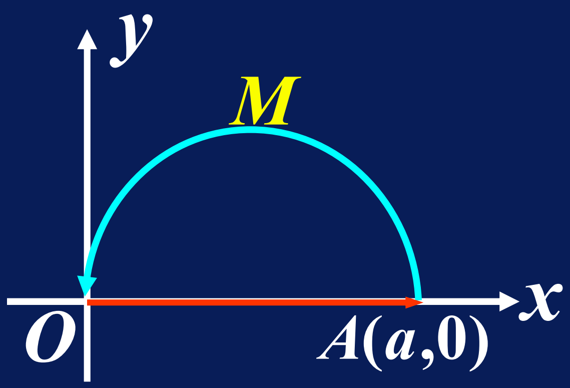
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^x\cos y-m)=\mathrm{e}^x\cos y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad\therefore\quad \text{积分与路径有关.}$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

**(方法1)**

$$I=\int_{L+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}=\oint_{\overset{\frown}{AMOA}}-\int_{\overline{OA}}$$




$$\oint_{\overset{\frown}{AMOA}}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=m\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{m}{8}\pi a^2,$$

$$\int_{\overline{OA}}=\int_0^a 0\cdot\mathrm{d}x=0,$$

$$\therefore\quad I=\oint_{AMOA}-\int_{\overline{OA}}=\frac{m}{8}\pi a^2-0=\frac{m}{8}\pi a^2.$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

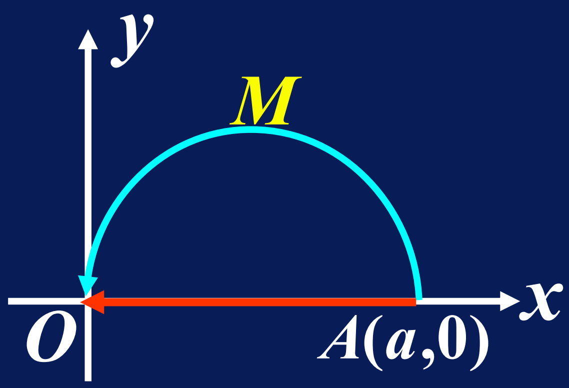
(方法2)

$$I=\int_L (\mathrm{e}^x \sin y - my)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m)\,\mathrm{d}y$$

$$=\left[\int_L \mathrm{e}^x \sin y\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m)\,\mathrm{d}y\right] - \underline{\int_L my\,\mathrm{d}x}$$

$$I_1=\int_L \mathrm{e}^x \sin y\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m)\,\mathrm{d}y$$ 与路径无关

$$=\int_{\overline{AO}} \mathrm{e}^x \sin y\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m)\,\mathrm{d}y$$




$$=\int_a^0 \mathrm{e}^x \sin 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

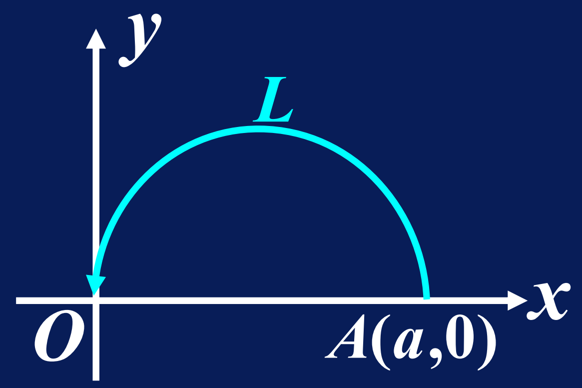
$$I_2 = \int_L m y \, \mathrm{d} x$$

$$= \int_0^{\pi} m \cdot \frac{a}{2} \sin t \cdot \left(-\frac{a}{2} \sin t\right) \mathrm{d} t$$

$$= -\frac{m a^2}{4} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, \mathrm{d} t$$

$$= -\frac{m a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{m a^2 \pi}{8}$$

从而 $\quad I = I_1 - I_2 = \dfrac{m}{8} \pi a^2 .$

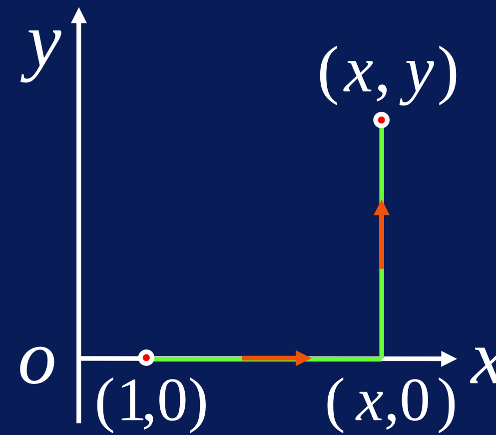



$$L: \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} \cos t, \\ y = \dfrac{a}{2} \sin t \end{cases}$$

$$t: \quad 0 \mapsto \pi$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

**例12** 验证 $\dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在右半平面$(x>0)$内存在原函数，并求出一个这样的函数.




**证** 令 $P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

则 $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (x>0)$$

$u(x,y)$唯一吗?

在右半平面上取点 (1, 0)

$$u(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = -\int_1^x 0\cdot \mathrm{d}x + x\int_0^y \frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$= \arctan\frac{y}{x} \quad (x>0)$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

## 三、同步练习

1. 计算$\oint_L (y-e^x)dx+(3x+e^y)dy$,

(1) $L$是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的正方向;

(2) $L$是心脏线 $x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}-x$的正向.

2. 计算$\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{|x|+|y|}$,其中$L$是依次以$A(a,0)$, $B(0,a)$, $E(-a,0)$, $F(0,-a)$为顶点的逆时针方向的 正方形$(a>0)$.

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

3. 计算 $\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从$O$ (0, 0)到$A$ (4, 0).

4. 计算抛物线 $(x+y)^2=ax(a>0)$, 与$x$ 轴围成的面积.

5. 设函数$u(x,y)$与$v(x,y)$在闭域$D$及其周界$L$上具有一阶连续偏导数。证明:

$$\iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L uv\,\mathrm{d}y-\iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

6. 试确定$\lambda$值,使$\int_L \frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}y$

的值与路径无关，其中 路径$L$与$x$轴不相交(或不相接触）；并计算

$$\int_{(1,1)}^{(0,2)} \frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}y$$

7. 证明：$(2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)$,

并求原函数 $u(x,y)$.

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

## 四、同步练习解答

1. 计算 $\oint\limits_L (y-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(3x+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$,

(1) $L$是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的正方向;

(2) $L$是心脏线 $x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}-x$的正向.

**解** $P=y-\mathrm{e}^x$, $Q=3x+\mathrm{e}^y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=2.$

$L$所围成的区域为$D$, 由格林公式得:

$$\oint\limits_L (y-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(3x+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=2\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

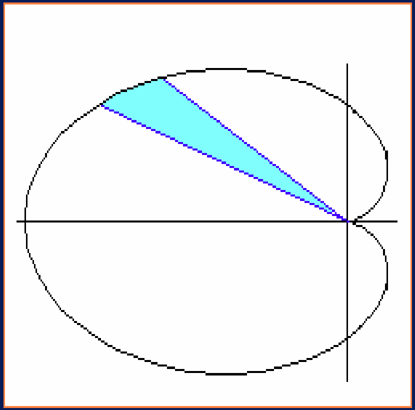
西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\oint_L (y-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(3x+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(1) $D$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$的面积为$\pi ab$，故

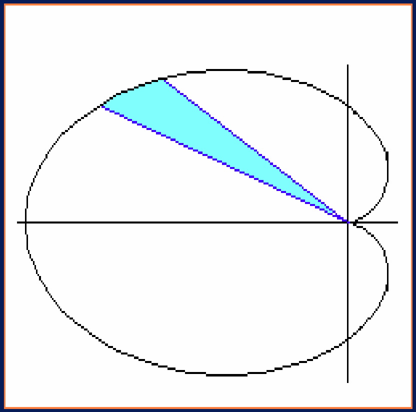
$$\oint_L (y-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(3x+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 2\pi ab.$$

(2) $L$的极坐标方程为$\rho = 1-\cos\theta$,



$D$为 $0\le\rho\le 1-\cos\theta(0\le\theta\le 2\pi)$

$$\oint_L (y-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(3x+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1-\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(1+\cos^2\theta-2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

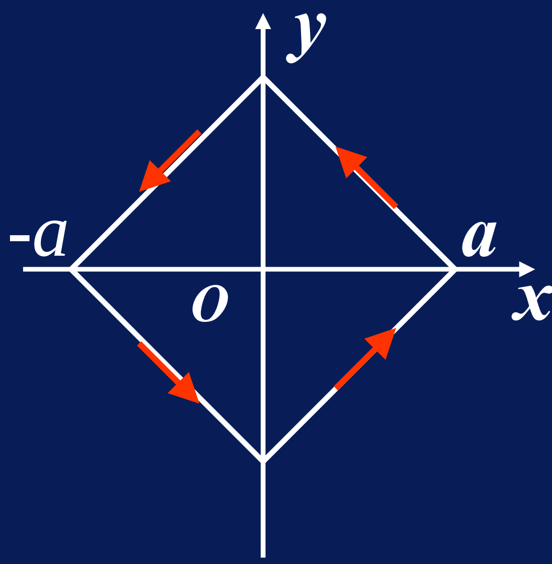
$$= 2\pi+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta+0 \quad = 3\pi.$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. 计算$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{|x|+|y|}$,其中$L$是依次以$A(a,0)$, $B(0,a)$, $E(-a,0)$, $F(0,-a)$为顶点的逆时针方向的 正方形$(a>0)$.

**解** 闭路径$L$的方程式为$|x|+|y|=a$, $L$所围区域为$D$,

则$D$的边长为$\sqrt{2}a$, 面积为$2a^2$.




$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{|x|+|y|} = \frac{1}{a}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x,$$

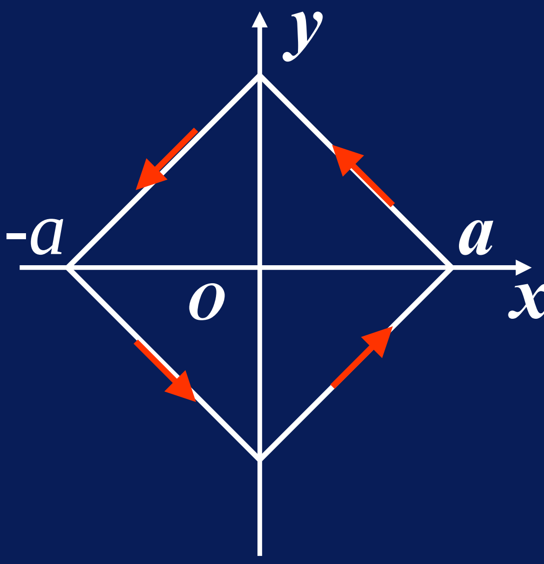
西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{|x|+|y|}$$

$$= \frac{1}{a}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x,$$

格林公式

$$= \frac{2}{a}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4a.$$




西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

3. 计算 $\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$， 其中$L$为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从$O\,(0,0)$到$A\,(4,0)$.

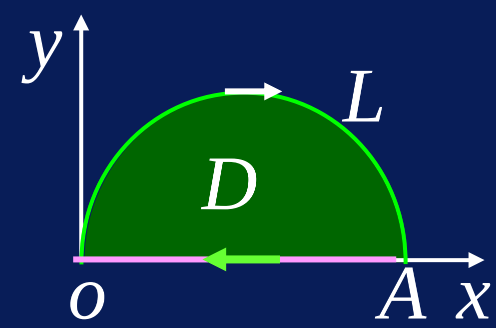
**解** 添加辅助线段 $\overline{AO}$，它与$L$ 所围区域为$D$，则

$$原式=\oint_{L+\overline{AO}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\overline{OA}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D(-4)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x$$

$$=8\pi+\frac{64}{3}$$

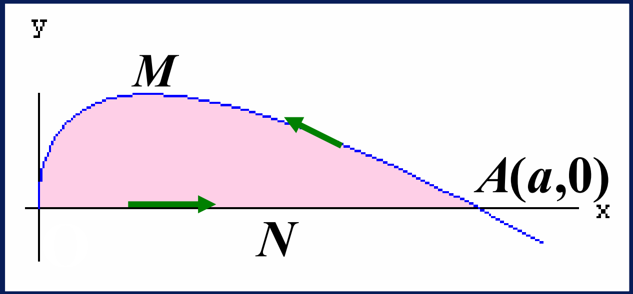



西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4. 计算抛物线 $(x+y)^2 = ax(a>0)$, 与 $x$ 轴围成的面积.

解 $ONA: y=0;$

$\overset{\frown}{AMO}: y=\sqrt{ax}-x,\ x\in[0,a].$




$$\therefore A=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{ONA} xdy-ydx+\frac{1}{2}\int_{AMO} xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^0 x(\frac{a}{2\sqrt{ax}}-1)dx-(\sqrt{ax}-x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{AMO} xdy-ydx \quad =\frac{\sqrt{a}}{4}\int_0^a \sqrt{x}dx=\frac{1}{6}a^2.$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

5. 设函数$u(x,y)$与$v(x,y)$在闭域$D$及其周界$L$上具有一阶连续偏导数。证明：

$$\iint\limits_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_L uv\,\mathrm{d}y-\iint\limits_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 $P=0,\ Q=uv,$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}.$$

因$P$、$Q$、$\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$连续，故由格林公式得：

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$P=0,\ Q=uv,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}.$$

因$P$、$Q$、$\dfrac{\partial P}{\partial y}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$连续，故由格林公式得：

$$\oint_L uv\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

从而 $$\iint_D v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L uv\,\mathrm{d}y-\iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**6.** 试确定$\lambda$值,使$\int_L \frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}y$的值与路径无关，其中 路径$L$与$x$轴不相交(或不相接触）；并计算

$$\int_{(1,1)}^{(0,2)} \frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}y$$

**解** $P=\frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda,\quad Q=\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda,$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}[2\lambda y^2-(x^2+y^2)],$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}[2\lambda y^2-(x^2+y^2)],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}[-2\lambda x^2-(x^2+y^2)]$$

$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的值与路径无关的充要条件是

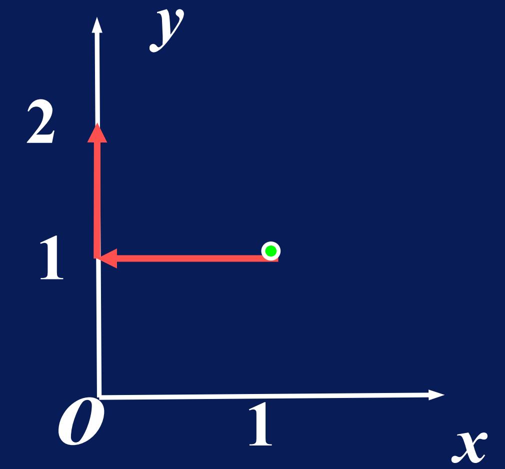
$P$、$Q$、$\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$连续，且$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,

即 $2\lambda y^2-(x^2+y^2)=-2\lambda x^2-2(x^2+y^2)$,

解得 $\lambda=-\frac{1}{2}$.

当 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 时, $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关,

其中 $L$ 与 $x$ 轴无公共点,




$$\int_{(1,1)}^{(0,2)} \frac{x}{y}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{(1,1)}^{(0,1)}+\int_{(0,1)}^{(0,2)}=\int_1^0 x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int_1^2 0\cdot\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{1+x^2}\Big|_1^0=1-\sqrt{2}.$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

7. 证明：$(2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)$，并求原函数 $u(x,y)$.

解 $\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy-y^2)\equiv\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2-2xy-y^2)=2(x-y)$,

所以 $(2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$

为某函数$u(x,y)$的全微分.

令 $O(0,0)$, $M(x,y)$, $E(0,y)$,

则 $u(x,y)=\int_O^M(2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y+C$

其中$C$是任意常数。

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

令 $O(0,0),\ M(x,y),\ E(0,y),$

$$u(x,y)=\int_{O}^{M}(2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{\overline{OE}}+\int_{\overline{EM}}(2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_0^x(2xy-y^2)\mathrm{d}x+\int_0^y(-y^2)\mathrm{d}y+C$$

$$=x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C.$$