第四节 幂级数

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 函数项级数的一般概念

区间 I 上的函数

- 函数项级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$
- 收敛点（发散点）x_0：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛（发散）
- 收敛域（发散域）U：收敛点（发散点）的全体.
- 和函数：$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in U$（收敛域）
- 部分和：$S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$，余项：$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

(二) 幂级数及其收敛性

1. 定义 $(x-x_0)$的幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

x的幂级数 $(x_0=0)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

例如, 等比级数为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$,

收敛域$(-1,1)$为区间.

问题 一般幂级数的收敛域是否为区间?

2. 幂级数收敛域的结构

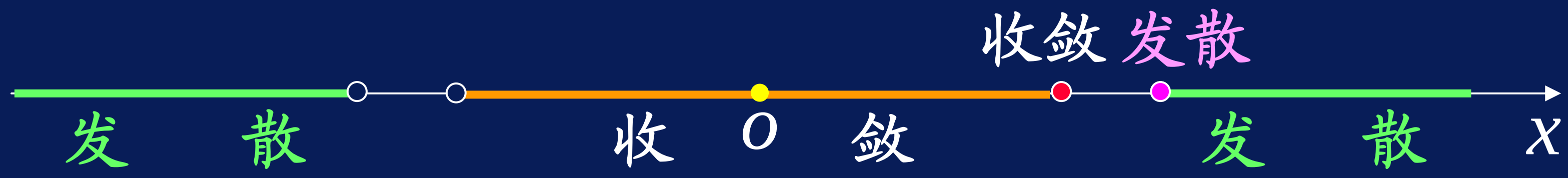
定理 11.10 (Abel定理)

(1) 若当 $x = x_0 \neq 0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，

则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x| < |x_0|)$ 绝对收敛.

(2) 若当 $x = x_0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散，

则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x| > |x_0|)$ 发散.



结论: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域：以原点为中心的区间.

幂级数收敛与发散的**分界点**：$\pm R$

(1) $R = 0$ 时，幂级数仅在 $x = 0$ 收敛；

(2) $R = +\infty$ 时，幂级数在 $(-\infty, +\infty)$ 收敛；

(3) $0 < R < +\infty$ 时，幂级数在 $(-R, R)$ 收敛；

在 $[-R, R]$ 外发散；在 $x = \pm R$ 可能收敛(发散)．

R：收敛半径；　$(-R, R)$：收敛区间.

$(-R, R)$ 加上收敛区间的收敛端点：收敛域.

3. 收敛半径 R 的求法

定理11.11 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 且 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$

（或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$）

则收敛半径 $R = \begin{cases} 1/\rho, & \text{当 } 0<\rho<+\infty \text{ 时}, \\ +\infty, & \text{当 } \rho = 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } \rho = +\infty \text{ 时}, \end{cases}$

结论： $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径：$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

(三) 幂级数的运算与性质

两幂级数可在公共收敛域上相加减,相乘

1. 幂级数的四则运算性质

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 收敛半径分别为 R_1, R_2, 令 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 则

(1)加减法: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \ |x| < R$

(2)乘法: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \ |x| < R$

其中 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

注 两幂级数相除所得幂级数的收敛半径R可能比原两幂级数的收敛半径R_1, R_2小得多.

例如, 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 \quad (a_0 = 1, a_n = 0, n = 1, 2, \cdots)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 - x \quad \begin{pmatrix} b_0 = 1, b_1 = -1, \\ b_n = 0,\ n = 2, 3, \cdots \end{pmatrix}$$

收敛半径均为 $R = +\infty$, 但是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

其收敛半径只是 $R = 1$.

2. 幂级数的分析运算性质

性质 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$, 则其和函数 $S(x)$

(1) 在收敛域 I 上连续;

收敛半径不变

(2) 在收敛区间内可逐项求导、逐项积分:

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad x\in(-R,R)$$

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\quad x\in(-R,R)$$

二、典型例题

例1 确定下列函数项级数的收敛域，并求其和函数:

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{nx}}=1+\frac{1}{2^{x}}+\frac{1}{2^{2x}}+\cdots+\frac{1}{2^{nx}}+\cdots$

等比级数

公比: $\dfrac{1}{2^{x}}$

解 和函数: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{nx}}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{2^{x}}}\quad\left(\left|\frac{1}{2^{x}}\right|<1\right)$

收敛域: $(0,+\infty)$,

发散域: $(-\infty,0]$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + x^{-n}}{n^2} \quad (x \neq 0)$,

解 当$|x|=1$时收敛，该级数收敛;

当$0<|x|\neq 1$时,

$\because \quad \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \infty$,

$\therefore$ 该级数发散， 故级数的收敛域:

$$U = \{\, x \mid |x| = 1 \,\} = \{-1, 1\}.$$

收敛域一般不一定为区间!

例2 求 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{(2n+1)!}$ 的收敛域.

解 (1) 收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2^n}{n}}{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}=\dfrac{1}{2}$,

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散;

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

$\therefore$ 收敛域为 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!}$

解 (2) $\because$ $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}}$

$$= \lim_{n\to\infty}(2n+1)\cdot 2n$$

$$= +\infty$$

收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例3 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n n^2}$ 的收敛域.

x-1的幂级数

解 记 $y=x-1$, 级数化为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{3^n n^2},$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3^{n+1}(n+1)^2}}{\dfrac{1}{3^n n^2}}=\frac{1}{3},$$

∴ 收敛半径 $R=3$.

当 $y=3$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛;

当 $y=-3$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{3^n n^2},$$

$$y=x-1.$$

故收敛域为: $-3\le y=x-1\le 3$,

即 $-2\le x\le 4$.

例4 求 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n x^{2n}$ 的收敛域.

缺项幂级数，直接用比值法

解 由比值法，

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})2^{n+1}x^{2n+2}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})2^n x^{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}2x^2=2x^2$$

$$\rho = 2x^2 \begin{cases} < 1, \text{级数收敛}, & |x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ > 1, \text{级数发散}, & |x| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时，原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \quad \text{发散}$$

$\therefore$ 所给级数的收敛域：$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

例5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 的和函数 $S(x)$.

解 1° 先求收敛域

$$\because \quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

$x=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$, 收敛;

$x=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，

$\therefore$ 该幂级数的收敛域: $[-1,1)$.

2° 再求和函数 $S(x)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=x+\frac{1}{2}x+\cdots+\frac{1}{n}x^n+\cdots,\quad x\in[-1,1)$$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)',\qquad x\in(-1,1)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$$

由和函数的连续性

$$S(x)=S(x)-\underbrace{S(0)}_{0}=\int_0^x S'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\ln(1-x)\Big|_0^x=-\ln(1-x),\qquad x\in[-1,1).$$

注

1^{o} 幂级数逐项求导，逐项积分收敛半径不变，但区间端点的敛散性可能变化，即收敛域可能发生变化.

2^{o} 求幂级数和函数的方法:

① 求导 (去分母) → 求和 → 积分（如例5）

② 积分 (去分子) → 求和 → 求导（如例6（1））

例6 求下列幂级数的收敛域及和函数:

(1) $1-2x+3x^2+\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\cdots$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

解 已知等比级数

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad (|x|<1)$$

公比: - x

$$\therefore \quad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (|x|<1)$$

(1) (方法1)

$$s(x) = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n x^{n-1} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\int_0^x s(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x \Big[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}\Big]\mathrm{d}x \quad (|x| < 1)$$

$$= \Big[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \int_0^x x^{n-1}\,\mathrm{d}x\Big] \quad (\text{逐项积分})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$= -\Big[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - 1\Big]$$

$$\int_0^x s(x)\,\mathrm{d}x = -\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n - 1\right] \qquad (|x|<1)$$

$$= -\left[\frac{1}{1+x} - 1\right]$$

两边对x求导:

$$s(x) = -\left[\frac{1}{1+x} - 1\right]' \qquad (|x|<1)$$

$$= \frac{1}{(1+x)^2}$$

(方法2)

$$1-2x+3x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\boxed{nx^{n-1}}+\cdots \qquad (\,|x|<1\,)$$

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(x^n)'$$

$$=[\sum_{n=0}^{\infty}\underline{(-1)^{n-1}x^n}]' \qquad (\text{逐项求导})$$

$$=-[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n]'$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\underline{(-1)^n x^n} \qquad (\,|x|<1\,)$$

$$=-(\frac{1}{1+x})'=\frac{1}{(1+x)^2} \qquad (\,|x|<1\,).$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\underline{(-1)^n x^n} \qquad (\,|x|<1\,)}$$

$$(2)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\underline{(-1)^n x^n}\Big]\mathrm{d}x \quad (\,|x|<1\,) \qquad (\text{逐项积分})$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln(1+x)\quad(-1<x\le 1)$$ (由和函数的连续性)

$x=1$处，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$收敛；$x=-1$处，$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散.

例7 求数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

解 设 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2-1}$, $x\in(-1,1)$, 则

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad (\,x\neq 0,\ \ x\in(-1,1)\,)$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2x}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\quad(x\neq 0)$$

而 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=-\ln(1-x)$$

于是 $$S(x)=\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x)+\frac{2+x}{4}\quad(x\neq 0,\ \ x\in(-1,1))$$

故 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$$

注 求常数项级数$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$的和，可利用幂级数及其和函数.具体步骤如下:

1° 找一个幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，使 $a_n x_0^n = u_n$;

2° 求$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛区间;

若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$发散，则$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$发散;

若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$收敛，则转下一步：

3° 求出$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$;

4° $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = S(x_0)$.

例8 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数$S(x)$.

解 易知收敛半径 $R=+\infty$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

则 $$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

$$=S(x)\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

$\therefore\quad S'(x)-S(x)=0\qquad(-\infty<x<+\infty)$

即 $[\mathrm{e}^{-x}S(x)]'=0,\quad x\in\mathrm{R}$

即 $[\mathrm{e}^{-x}S(x)]' = 0,\quad x\in\mathbf{R}$

因此 $\mathrm{e}^{-x}S(x) = C,$

即 $S(x) = C\,\mathrm{e}^{x}$，$x\in\mathbf{R}$

由 $S(0)=1$ 得，$S(x)=e^{x},$

故得 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^{x}，\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

三、同步练习

1. $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots$

求收敛半径及收敛域.

2. 求收敛域： (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$.

3. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^n n}$ 的收敛域.

4. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径 .

5. 求(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数 $S(x)$.

6. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n n}$ 的和函数.

7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)$, 其中 $a>1$.

四、同步练习解答

1. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$

求收敛半径及收敛域.

解 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$

当 $x=1$时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛;

当 $x=-1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$ 发散. 故收敛域为 $(-1,1]$.

2. 求收敛域：(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$.

规定: $0!=1$

解 (1)

$$\because\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

所以收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) $$\because\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

所以级数仅在 $x=0$ 处收敛.

3. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$ 的收敛域.

解 令 $t=x-1$, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^n$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n n}\Big/\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}=2$$

当 $t=2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散;

当 $t=-2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛;

收敛域为 $-2\le t=x-1<2$, 即 $-1\le x<3$.

4\. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径.

分析 级数缺奇次项, 故直接用比值审敛法求收敛半径.

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}}{\frac{[2n]!}{[n!]^2}x^{2n}}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}x^2 = 4x^2$

$\left.\begin{array}{l}\text{当 } 4x^2<1 \text{ 即 } |x|<\frac{1}{2} \text{ 时级数收敛} \\ \text{当 } 4x^2>1 \text{ 即 } |x|>\frac{1}{2} \text{ 时级数发散}\end{array}\right\}$ 故收敛半径: $R=\frac{1}{2}$.

5. 求(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$;　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数 $S(x)$.

解　(1) 联想 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}, x\in(-1,1)$　（需去分母）

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1)$$

$$S(x)=\int_0^x S'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=\ln(1-x),\quad x\in[-1,1)$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

$$xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$$[xS(x)]'=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1})'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

故 $xS(x)=\int_0^x (xS(x))'\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^x\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=-\ln(1-x)$$

$$S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x), \quad (0<|x|<1 \text{ 及 } x=-1)$$

而 $S(0)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\ln(1-x)}{x}\right)=1$,

由和函数的连续性:

$$S(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1) \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

6. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n n}$ 的和函数.

解　1° 先求收敛域

$$\because \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n} = 2$$

在 $x = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散

在 $x = -2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$ 收敛

$\therefore$ 所给级数的收敛域为: $[-2, 2)$.

2° 再求和函数 $S(x)$

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n n},\ x\in[-2,2)$

则 $S(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x}{2})^{n-1}$ (令 $t=\frac{x}{2}$)

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}=\frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\quad (\,t\neq 0,\ t\in(-1,1)\,)$$

$$=\frac{1}{2t}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t t^{n-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2t}\int_0^t[\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}]\,\mathrm{d}t$$

$$S(x)=\frac{1}{2t}\int_0^t \frac{1}{1-t}\mathrm{d}\,t=-\frac{1}{2t}\ln(1-t)\quad (\,t\neq 0,\ t\in(-1,1)\,)$$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1-\frac{x}{2}),\quad x\in(-2,0)\cup(0,2)$$ (变量代回)

$$S(0)=[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n n}]_{x=0}=[\frac{1}{2}+\frac{x}{2^2\cdot 2}+\frac{x^2}{2^3\cdot 3}+\cdots]_{x=0}=\frac{1}{2}$$

再由和函数的连续性， $S(x)$在$x=-2$处右连续

$$\therefore\quad S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(1-\dfrac{x}{2}), & x\in[-2,0)\cup(0,2)\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n})$, 其中 $a>1$.

解 令 $S_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{a^k}$

构造 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^n$, 易知其收敛半径为 1, 设其和为 $S(x)$,

则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}=x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n)'$

$$=x\cdot(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S(\frac{1}{a})=\frac{a}{(a-1)^2}$