第四节

函数的单调性与极值

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 函数单调性的判定法

1. 单调区间的判定法

定理3.8 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，

(1) 若对于任意的 $x\in(a,b)$，$f'(x)>0$，

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

(2) 若对于任意的 $x\in(a,b)$，$f'(x)<0$，

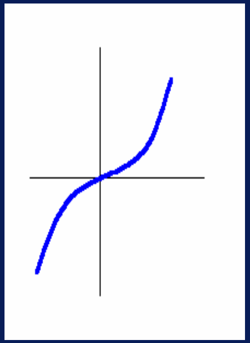
则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

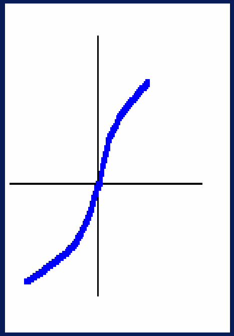
西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

注 1° $[a,b]$可换成任何区间．

2° $f'(x) \underset{(<)}{>} 0 \quad (\forall x \in (a,b))$

$\Longrightarrow$ $f(x)$在(a,b)上单调增加
$\not\Longleftarrow$ (减少)





例如，① $f(x) = x^3$在$(-\infty,+\infty)$上单调增加，

但 $f'(0) = 0$.

② $f(x) = \sqrt[3]{x}$在$(-\infty,+\infty)$上单调增加，

但 $f'(0) = \infty$，不存在．

3° 事实上，定理3.8可推广为：

定理3.8′ 设 $y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内除去有限个点外，$f'(x)>0$，则$y=f(x)$在

(<)

$[a,b]$上单调增加.

(减少)

2. 单调性的确定法

讨论 $f(x)$ 单调性的步骤:

1° 确 定 $f(x)$ 的 定 义 区 间;

2° 求使 $f'(x)=0$ 及 $f'(x)$ 不存在的点 ;

若这些点只有有限个 : $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$

3° 划分区间

$$(a,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_n,b)$$

4° 列表

判断各子区间内 $f'(x)$ 的符号,并指出 $f(x)$ 的单调性及单调区间.

3. 应用

(1) 证明不等式

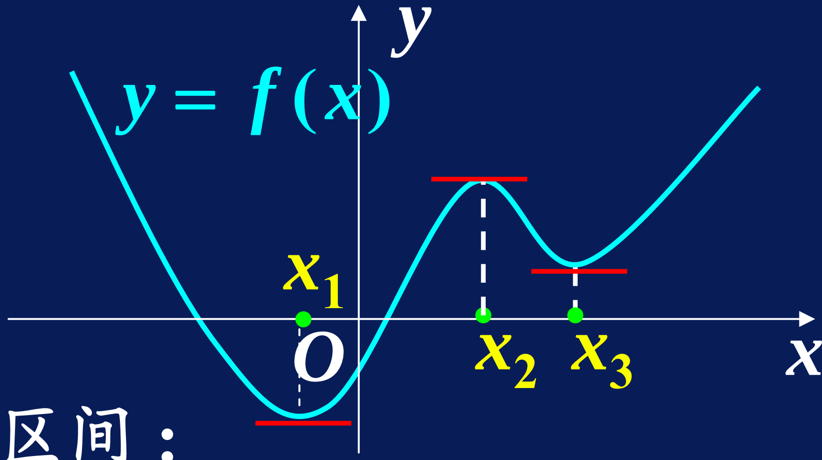
推论 设函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，

(1) 若 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) > g'(x)$, 且 $f(a) = g(a)$, 则在 (a, b) 内 $f(x) > g(x)$;

(2) 若 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) < g'(x)$, 且 $f(b) = g(b)$, 则在 (a, b) 内 $f(x) > g(x)$.

此推论可用来证明函数不等式.

(2) 方程根的确定



方程: $f(x)=0$

思路: 1° 确定 $f(x)$的单调区间 :

(x_{i-1}, x_i), $(i=1,2,\cdots,n)$;

2°查 $f(x_{i-1}), f(x_i)$ 或 $f(x_{i-1}^+)$, $f(x_i^-)$的符号;

3°利用零点定理查 $f(x)$在(x_{i-1}, x_i)内零点的存在性,

利用 $f(x)$的单调性可知 $f(x)$在(x_{i-1}, x_i)内零点

的唯一性.

(二) 函数的极值及其求法

1. 定义3.1 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，若当 $x \in \mathring{U}(x_0)$ 时，总有

(1) $f(x) < f(x_0)$,

则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点，

称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值；

(2) $f(x) > f(x_0)$,

则称 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点，

称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值.

极大值点与极小值点统称为极值点.

注　1° 极值 $\overset{\nrightarrow}{\nleftarrow}$ 最值

2° 区间端点一定不是极值点.

2. 极值的判定法

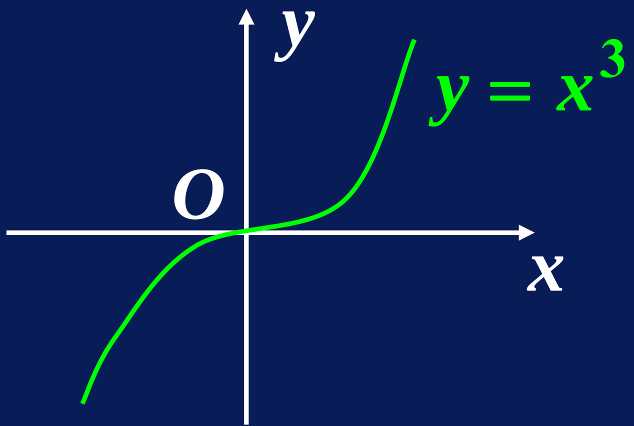
定理3.9 (必要条件)　若 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值，且在 x_0 处可导，则必有 $f'(x_0)=0$.

注 1° 若 $f'(x_0)=0$, 则称 x_0 为 $f(x)$的驻点.

2° 可导函数的极值点 $\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{array}$ 驻点

例如， $y=x^3$, $y'(0)=0$,

但 $x=0$ 不是极值点.



3° 极值点 $\not\longrightarrow$ 驻点

(见例6中的 $x=-1$)

极值可疑点: 驻点、

导数不存在(但函数有定义) 的点.

问题:如何判定极值可疑点是否是函数的极值点 ?

定理3.10 (第一充分条件)

设函数 $f(x)$在$U(x_0)$内连续，在$\mathring{U}(x_0)$内可导，

对$\forall x \in U(x_0)$,

(1) 若当 $x < x_0$时，$f'(x) > 0$, 当$x > x_0$时，$f'(x) < 0$,

则$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2) 若当 $x < x_0$时，$f'(x) < 0$, 当$x > x_0$时，$f'(x) > 0$,

则$f(x)$在x_0处取得极小值;

(3) 若 $f'(x)$的符号保持不变，则$f(x)$在x_0处没有极值.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

求极值的步骤:

1° 确定 $f(x)$ 的定义域，并求导数 $f'(x)$;

2° 求极值可疑点：驻点，导数不存在(但有定义)的点.

3° 列表，检查 $f'(x)$ 在极值可疑点左右的正 负号，判断极值点;

4° 求极值.

注　极值的判定法1 (定理3.10)是 **充分条件,**
不是必要的.

例如函数

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2(2+\sin\frac{1}{x}), & x\neq 0,\\ 2, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处取得极大值 $f(0)=2$, 但在$\forall \overset{\circ}{U}(0)$内

$$f'(x)=-2x(2+\sin\frac{1}{x})+\cos\frac{1}{x},$$

有正有负, 从而$f(x)$在$x=0$的左右两侧都不单调　.

定理3.11 (第二充分条件)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且

$$f'(x_0)=0,\quad f''(x_0)\neq 0,$$

(1) 若 $f''(x_0)<0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值；

(2) 若 $f''(x_0)>0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值 .

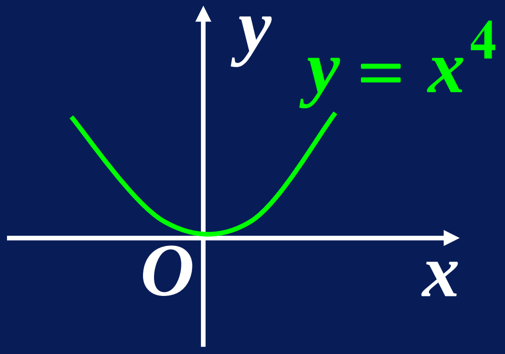
记忆方法: $y=x^2$

在 $x=0$ 处取得极小值

$$y''(0)=2>0$$

注 1° 当$f''(x_0)=0$时，定理3.11失效，此时需用极值第一判定法或极值定义等其他方法，判定 x_0 是否为极值点.

例如，(1) $f(x)=x^4$,



$$f'(x)=4x^3，\ f''(x)=12x^2$$

$$f'(0)=f''(0)=0$$

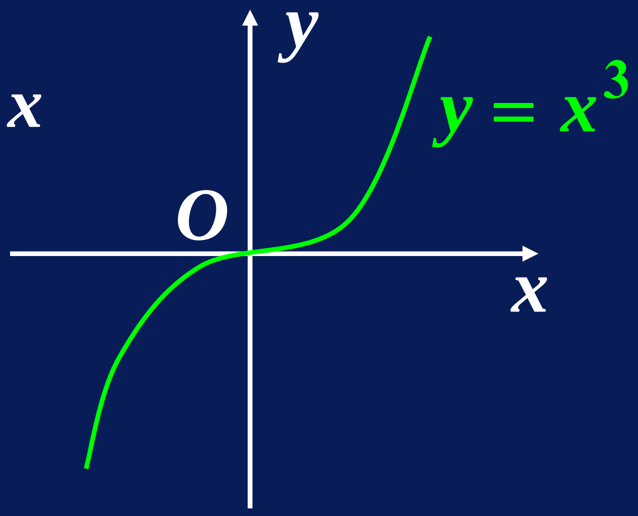
$\because$ 当 $x<0$时，$f'(x)<0$, 当 $x>0$时，$f'(x)>0$

$\therefore$ $x=0$是$f(x)$的极小值点 .

(2) $f(x)=x^3$

$$f'(x)=3x^2,\quad f''(x)=6x$$

$$f'(0)=f''(0)=0$$



$\because$ 当 $x\neq 0$时， $f'(x)>0$,

$\therefore$ $x=0$不是 $f(x)$的极值点 .

2° 极值的判别法2 (定理3.11) 也是充分条件，

不是必要的.

定理(第三充分条件)

设 $f(x)$在 x_0处有 n阶导数，若

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$$

且 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则

(1) 当n为奇数时， $f(x)$在x_0处不取得极值;

(2) 当n为偶数时， 若 $f^{(n)}(x_0)>0$,

(<)

则 $f(x)$在x_0处取得极小值.

(极大值)

二、典型例题

例1 讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性．

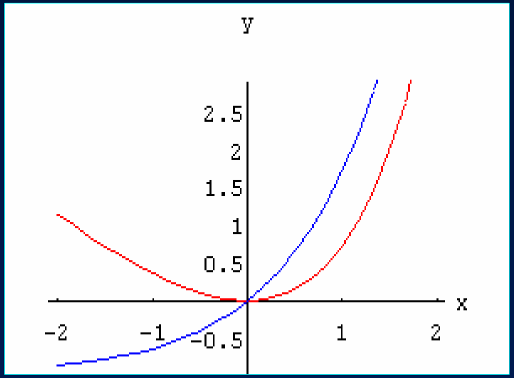
解 $\because\ y' = e^x - 1,\ x \in (-\infty, +\infty).$

在 $(-\infty, 0)$ 内， $y' < 0$,

$\therefore$ 函数 y 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少；

在 $(0, +\infty)$ 内， $y' > 0$,

$\therefore$ 函数 y 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加．



例2 讨论 $f(x) = x + \cos x$ 在$[0, 2\pi]$上的单调性.

解 当$x \in [0,2\pi]$时，$f'(x) = 1 - \sin x \geq 0,$

且只在一点 $x = \dfrac{\pi}{2}$处 $f'(x) = 0,$故函数在 $[0,2\pi]$内

单调递增.

例3 确定函数 $f(x)=(1-x)x^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间.

解 1° 确定定义区间

$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义

2° 求驻点及导数不存在的点

$$f'(x)=-x^{\frac{2}{3}}+(1-x)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}},\ \ x\neq 0,$$

令$f'(x)=0$, 得驻点: $x=\frac{2}{5}$;

导数不存在的点: $x=0$.

3° 列表判别

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	不存在	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

故 $f(x)$ 的单调增区间为 $[0, \frac{2}{5}]$,

$f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty, 0]$ 和 $[\frac{2}{5}, +\infty)$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0}$$

例4 证明：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$时，$\tan x > x + \frac{x^3}{3}$.

证 令$f(x) = \tan x - (x + \frac{x^3}{3})$，则 $f(x)$在$[0, \frac{\pi}{2})$上连续.

$$f'(x) = \sec^2 x - (1 + x^2)$$

$$= \tan^2 x - x^2 > 0 \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

故$f(x)$在$[0, \frac{\pi}{2})$ 单调增， 从而

当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时， $f(x) > f(0) = 0,$

即$\tan x > x + \frac{x^3}{3}$.

例5 方程 $\ln x = ax\ (a > 0)$有几个实根?

解 令$f(x) = \ln x - ax,\ D = (0, +\infty).$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - a,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

令$f'(x) = 0$, 得$x = \dfrac{1}{a}$,

且当$0 < x < \dfrac{1}{a}$时, $f'(x) > 0$, $f(x)$单调增加,

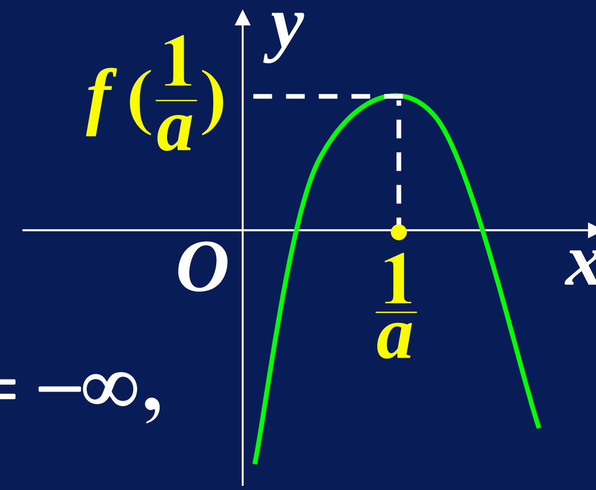
当$x > \dfrac{1}{a}$时, $f'(x) < 0$, $f(x)$单调减少,

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

又 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$,

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = -(\ln a + 1)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - a\right) = -\infty,$$



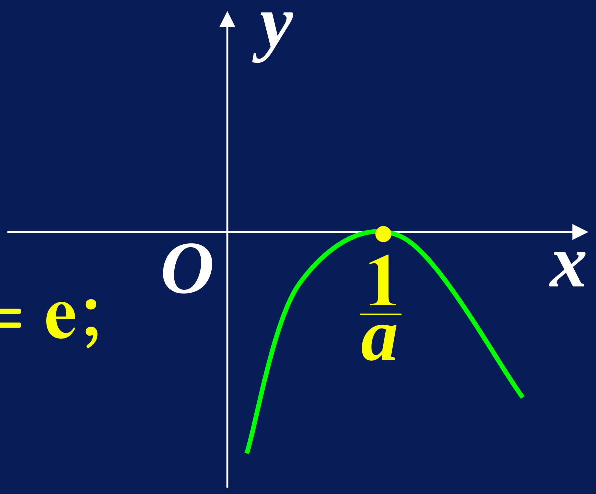
(1) 当 $f\left(\frac{1}{a}\right) = -(\ln a + 1) > 0$, 即 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时,

$f(x) = 0$ 有两个不同的实根;

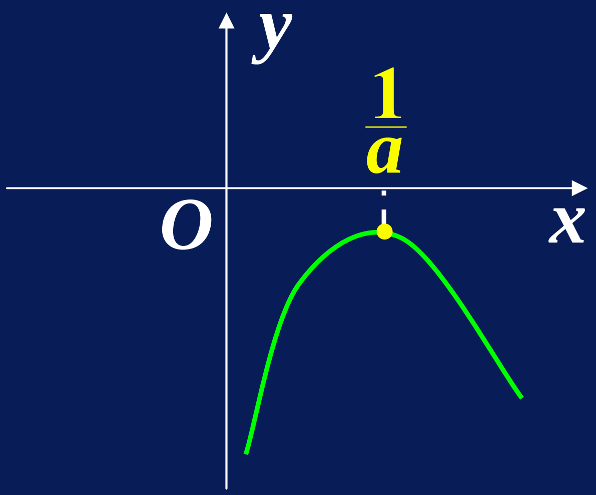
$$\boxed{f(x) = \ln x - ax}$$

(2) 当$a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时,

$f(x)=0$有且仅有一个实根 $x=\mathrm{e}$;



(3) 当$a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时, $f(x)=0$无实根.



例6 求 $f(x)=(x+1)^3(x-1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

1° 找极值可疑点

$$f'(x)=3(x+1)^2(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x+1)^3\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{(x+1)^2[9(x-1)+2(x+1)]}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}=\frac{(x+1)^2(11x-7)}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

令$f'(x)=0$,得 驻点: $x=-1, x=\dfrac{7}{11}$

导数不存在的点: $x=1.$

$$f'(x)=\frac{(x+1)^2(11x-7)}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

2° 列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\frac{7}{11})$	$\frac{7}{11}$	$(\frac{7}{11},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	不存在	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	非极值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

3° 求极值. 极大值 $f(\frac{7}{11})\approx 2.2$, 极小值 $f(1)=0$.

例7 设 $y = y(x)$由方程:

$$y' - y^2 - x = 0$$

所确定，且 $y'(x_0) = 0$. 问$y(x)$在x_0处是否取得极值？若取得极值，是极大值还是极小值？

分析 由 $y' = y^2 + x$， y可导，知 y'' 存在

$$0 = y'(x_0) = y^2(x_0) + x_0,\ x_0 = -y^2(x_0) \le 0$$

由 $y' = y^2 + x$,在$x = x_0$的两侧,不能判定y'的符号,

故不能用第一充分判定法,

考虑用第二充分判定法.

解 $$y'(x) - y^2(x) - x = 0$$

等式两端对x求导

$$y''(x) - 2y(x)y'(x) - 1 = 0$$

$$y''(x) = 2y(x)y'(x) + 1$$

$$\because \quad y''(x_0) = 2y(x_0)\underbrace{y'(x_0)}_{=0} + 1 = 1 > 0$$

$\therefore$ $y(x)$在 x_0 处取得极小值.

例8 设函数 $f(x)$满足 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$,

且 $f'(0)=0$, 问 $f(0)$是否是 $f(x)$的极值?

解 $\because \quad f'(0)=0,$

在 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$ 中, 令 $x=0$

得 $f''(0)+[f'(0)]^2=0$

$\therefore \quad f''(0)=0$

极值第二充分判定法失效!

能否用极值第一判定法?

关键：在$\mathring{U}(0)$内，判断 $f'(x)$的符号.

$$f''(x)+[f'(x)]^2 = x$$

两边求导，得

$$f'''(x)+2f'(x)f''(x)=1,$$

令$x=0$，得 $f'''(0)=1 > 0$

对$f'(x)$用麦克劳林公式，得

直接由此式
不易判断$f'(x)$
的符号

$$f'(x)=\underbrace{\boxed{f'(0)+f''(0)x}}_{0}+\frac{\overset{1}{\boxed{f'''(0)}}}{2!}x^2+o(x^2)>0,\quad x\in\mathring{U}(0)$$

$\because$ $f'(x)$在某$\mathring{U}(0)$内不变号

$\therefore$ $f(0)$不是$f(x)$的极值 .

例9 设 $f(x)$在某 $U(0)$内连续，且 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$. 问：$f(x)$在$x=0$处是否取得极值？

分析 依题设条件，只知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}=2\times 0=0$$

存在，但在 $\mathring{U}(0)$内不知 $f(x)$的可导性，

故不能用极值的充分判 定法.

解 $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2>0$

$\therefore$ 由极限的保号性知，存在$\overset{\circ}{U}(0)\subseteq\overset{\circ}{U}(0,\dfrac{\pi}{2})$,

当$x\in\overset{\circ}{U}(0)$时，

$$\frac{f(x)}{1-\cos x}>0.$$

又$\because$ $1-\cos x>0,\ x\in\overset{\circ}{U}(0)$

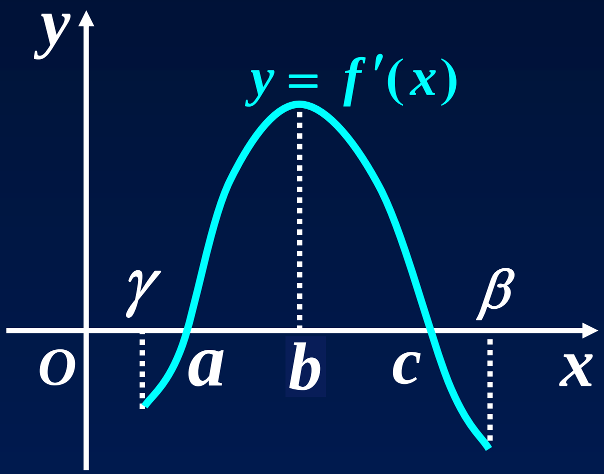
$\therefore$ $f(x)>0=f(0),\ x\in\overset{\circ}{U}(0)$

$\therefore$ $f(x)$在$x=0$处取得极小值 .

三、同步练习

1. $f'(x_0) > 0 \overset{?}{\not\longrightarrow} f(x)$在某$U(x_0)$上单调增加 .

2. 已知$y = f(x)$的导函数在区间$[\gamma, \beta]$上的图形 ,试写出:



(1) $y = f(x)$的单调增区间与单调减区间;

(2) $y = f(x)$的极值，是极大值还是极小值?

3. 讨论函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

4. 确定函数 $f(x)=|x-1|$的单调区间 .

5. 讨论函数 $f(x)=x^3+x^2-5x-5$的单调性.

6. 证明： 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$时, $\sin x+\tan x>2x$.

7. 证明： 当$x>0$时, $\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$.

8. 设$x\in(0,1)$, 证明$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$.

9. 设$b > a > \mathrm{e}$,证明$b^a < a^b$.

10. 求函数$y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$的极值.

11. 求由参数方程$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(t+1)^2 \\ y = \dfrac{1}{2}(t-1)^2 \end{cases} \quad (t \geq 0)$

所确定的函数 $y = f(x)$的极值.

12. 求函数$y = x^3 + 9(a-x)^3$的极值.

13. 由方程 $x^3+3y^3-3xy=0$所确定的函数在$x>0$且$x\neq y^2$范围内的极值点 .

14. 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$的极值.

四、同步练习解答

1. $f'(x_0) > 0 \overset{?}{\not\longrightarrow} f(x)$在某 $U(x_0)$上单调增加 .

解 反例:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

虽然 $f'(0) = 1 > 0$,但 $f(x)$在任何$U(0)$内不单调增.

事实上, $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$= \lim_{x\to 0}(1 + 2\cdot x\cdot \sin\frac{1}{x}) = 1 > 0$$

但 $f'(x)=1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x},\quad x\neq 0$

当 $x_k=\frac{1}{2k\pi}$ 时，$f'(x_k)=-1<0$

当 $k\to\infty$时，$x_k\to 0^+$，因此,在x=0 的任何邻域

$\overset{\circ}{U}(0)$内，$f(x)$不单调增加．

若不然,假设 $f(x)$ 在点 $x=0$的某一邻域 $(-\delta,\delta)$内

单调增加, 则 对于充分小的 $|\Delta x|\neq 0$, 使

$$x_k+\Delta x\in(-\delta,\delta),$$

则有

当 $\Delta x > 0$ 时，$f(x_k) < f(x_k + \Delta x)$,

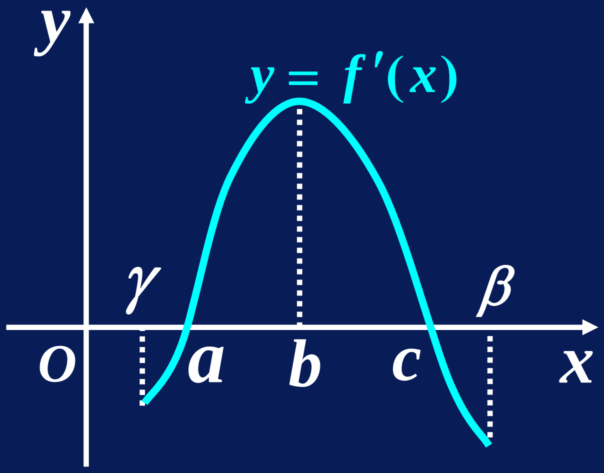
当 $\Delta x < 0$ 时，$f(x_k) > f(x_k + \Delta x)$,

于是 $$\frac{f(x_k + \Delta x) - f(x_k)}{\Delta x} > 0$$

故 $$f'(x_k) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_k + \Delta x) - f(x_k)}{\Delta x} \geqslant 0$$

这与 $f'(x_k) = -1 < 0$ 相矛盾！

2. 已知$y = f(x)$的导函数在区间 $[\gamma, \beta]$上的图形，试写出:



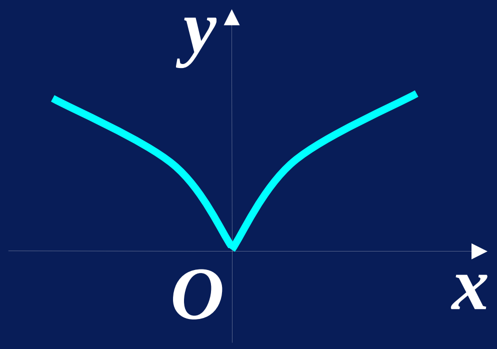
(1) $y = f(x)$的单调增区间与单调减区间;

(2) $y = f(x)$的极值，是极大值还是极小值?

解 单调增区间 $[a, c]$, 单调减区间$[\gamma, a]$和$[c, \beta]$,

极小值 $f(a)$， 极大值 $f(c)$.

3. 讨论函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.



解 $D=(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},\qquad x\neq 0.$$

当 $x=0$ 时, 导数不存在，且当 $x\in(-\infty,0)$ 时，

$f'(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 的

的单调增区间为 $[0,+\infty)$, 单调减区间为 $(-\infty,0]$.

4. 确定函数 $f(x)=|x-1|$ 的单调区间.

解 $$f(x)=\begin{cases} x-1, x\geq 1 \\ 1-x, x<1, \end{cases} \quad D=(-\infty,+\infty).$$

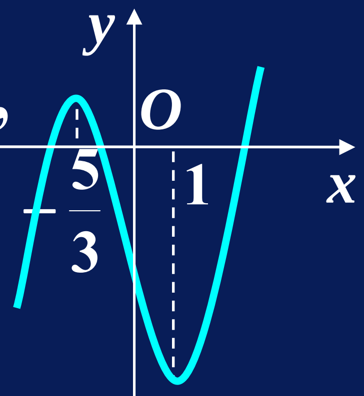
$$\because \quad f'_-(1)=-1, f'_+(1)=1,$$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导, 且

$$f'(x)=\begin{cases} 1, x>1, \\ -1, x<1. \end{cases}$$

故函数的单调递减区间为 $(-\infty, 1]$, 单调递增区间为 $[1,+\infty)$.

5. 讨论函数 $f(x)=x^3+x^2-5x-5$ 的单调性.



解 $f'(x)=3x^2+2x-5=(3x+5)(x-1)$,

令 $f'(x)=0$, 得 $x=-\frac{5}{3}$, $x=1$.

x	$(-\infty,-\frac{5}{3})$	$-\frac{5}{3}$	$(-\frac{5}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

故 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-\frac{5}{3}]$ 和 $[1,+\infty)$;

$f(x)$ 的单调减区间为 $[-\frac{5}{3},1]$.

6. 证明：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x + \tan x > 2x$.

证 令 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$，则

$$f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2,$$

$$f''(x) = 2\sec^2 x \tan x - \sin x \qquad \boxed{(0 < x < \frac{\pi}{2})}$$

$$= \sin x(2\sec^3 x - 1) > 0,$$

故 $f'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增，从而当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$f'(x) > f'(0) = 0.$$

$$f'(x) > f'(0) = 0.$$

于是$f(x)$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$单调递增，因此当$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$时，

$$f(x) > f(0) = 0,$$

即 $\sin x + \tan x > 2x.$

$$f(x) = \sin x + \tan x - 2x$$

7. 证明：当$x>0$时，$\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$.

证 令$f(x)=\arctan x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{2}$,

$$\because \quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}<0,$$

$\therefore f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减,

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 故当$x>0$时, $f(x)>0$,

即 $$\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}.$$

8. 设$x \in (0,1)$，证明$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.

证　令$f(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$，则

$$f'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x,$$

$$f''(x) = \frac{2}{1+x}[\ln(1+x) - x].$$

令$g(x) = \ln(1+x) - x$，则

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0\ (x \in (0,1)),$$

所以$g(x)$在$(0,1)$内单减，从而

$$g(x) < g(0) = 0,\ f''(x) < 0,$$

于是$f'(x)$在$(0,1)$内单减，从而$f'(x) < f'(0) = 0$,

因此$f(x)$在$(0,1)$内单减，$f(x) < f(0) = 0$,

即
$$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2.$$

$$f(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$$

9. 设 $b > a > \mathrm{e}$，证明 $b^a < a^b$.

分析 要证 $b\ln a - a\ln b > 0$

可设 $f(x) = x\ln a - a\ln x \quad (x \geq a)$

证 (方法1) 令 $f(x) = x\ln a - a\ln x,\ x \in [a, +\infty)$,

则 $f'(x) = \ln a - \dfrac{a}{x} > 0$,

故 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增. 故当 $b > a > \mathrm{e}$ 时，

$f(b) > f(a) = 0$, 即 $a\ln b < b\ln a$, 从而 $b^a < a^b$.

分析 $b^a < a^b$, 即$a\ln b < b\ln a$, 变形为$\dfrac{\ln b}{b} < \dfrac{\ln a}{a}$,

于是可令$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, 只要证$f(x)$在$[\mathrm{e}, +\infty)$上单减.

(方法2) 令$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x \in [\mathrm{e}, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

当$x > \mathrm{e}$时, $\ln x > 1$, $f'(x) < 0$,

故$f(x)$在$[\mathrm{e}, +\infty)$上单调递减, 而$b > a > \mathrm{e}$,

于是 $f(a) > f(b)$, 即$b^a < a^b$.

10. 求函数$y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$的极值.

解 $D = (-\infty, +\infty)$.

$$y' = \frac{1-3x}{3x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$$

令 $y' = 0$, 得 $x = \frac{1}{3}$, 导数不存在的点为 $x = 0$及$x = 1$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$+$		$+$	0	$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$		$+$	0	$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
				(极大)		(极小)	

$x=\dfrac{1}{3}$是极大值点，极大值为 $y(\dfrac{1}{3})=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$,

$x=1$是极小值点，极小值为 $y(1)=0$.

11. 求由参数方程 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(t+1)^2 \\ y = \dfrac{1}{2}(t-1)^2 \end{cases} \quad (t \geq 0)$

所确定的函数 $y = f(x)$的极值.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{t-1}{t+1}.$

令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, 解得驻点 $t = 1$,

对应的 $x = 2,\ y = 0.$

又当$0 \le t < 1$时， $x < 2$, $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} < 0$,

当$t > 1$时， $x > 2$, $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} > 0$,

根据函数取得极值的第 一充分条件可知，

$t = 1$对应的点$x = 2$为$y = f(x)$的极小值点，

此时，极小值 $y = 0$.

$$x = \frac{1}{2}(t+1)^2, y = \frac{1}{2}(t-1)^2, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{t-1}{t+1}$$

12. 求函数$y = x^3 + 9(a-x)^3$的极值.

解 $D = (-\infty, +\infty)$.

$$y' = 3x^2 - 27(a-x)^2 = 3(4x-3a)(3a-2x)$$

令$y' = 0$, 得$x_1 = \frac{3}{4}a, x_2 = \frac{3}{2}a.$

$$y'' = 6x + 54(a-x) = 6(9a-8x),$$

故$y''(\frac{3}{4}a) = 18a$, $y''(\frac{3}{2}a) = -18a.$

(1) $a>0$时，函数有极小值 $y(\frac{3}{4}a)=\frac{9}{16}a^3$,

极大值 $y(\frac{3}{2}a)=\frac{9}{4}a^3$.

(2) $a<0$时，函数有极小值$y(\frac{3}{2}a)=\frac{9}{4}a^3$.

极大值$y(\frac{3}{4}a)=\frac{9}{16}a^3$,

(3) $a=0$时，函数为 $y=-8x^3$, 无极值.

$y''(\frac{3}{4}a)=18a,\ y''(\frac{3}{2}a)=-18a.$

13. 由方程 $x^3+3y^3-3xy=0$所确定的函数在$x>0$且$x\neq y^2$范围内的极值点 .

解　方程两边关于x求导一次，有

$$3x^2+3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3y-3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

因此$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$.　令$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$, 可得 $y=x^2$,

代入原方程，便得 $x^6-2x^3=0$.

于是可求得$y=f(x)$的驻点为$x=\sqrt[3]{2}$. 又

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2x)(y^2-x)-(2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1)(y-x^2)}{(y^2-x)^2},$$

从而有$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=\sqrt[3]{2}}<0$, 所以$\sqrt[3]{2}$是函数 $y=f(x)$

的极大值点 .

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

14. 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$的极值.

解 1° 求导数

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2,$$

$$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1).$$

2° 求驻点

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1.$

3° 判别

因 $f''(0)=6>0$, 故 $f(0)=0$ 为极小值；

又 $f''(-1)=f''(1)=0$，故需用第一判别法判别.

由于 $f'(x)$ 在 $x=\pm1$ 的左右邻域内不变号，

故 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处没有取得极值 .

综上所述，函数 $f(x)$ 仅有极小值 $f(0)=0$，

无极大值.

$f'(x)=6x(x^2-1)^2,$

$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$