第九章　重积分

本章基本要求

1. 理解二重积分的概念，了解三重积分概念，了解重积分的性质.

2. 掌握二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标），会计算简单的三重积分（直角坐标、柱面坐标，*球面坐标）.

第一节

重积分的概念与性质

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

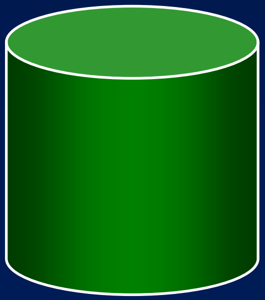
(一) 问题的提出

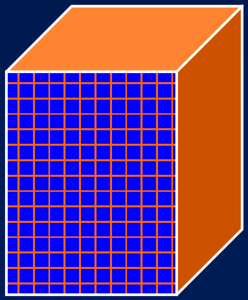
1. 曲顶柱体的体积

回顾　平顶柱体体积的计算公式:

柱体体积 = 底面积 × 高.

特点: 平顶.



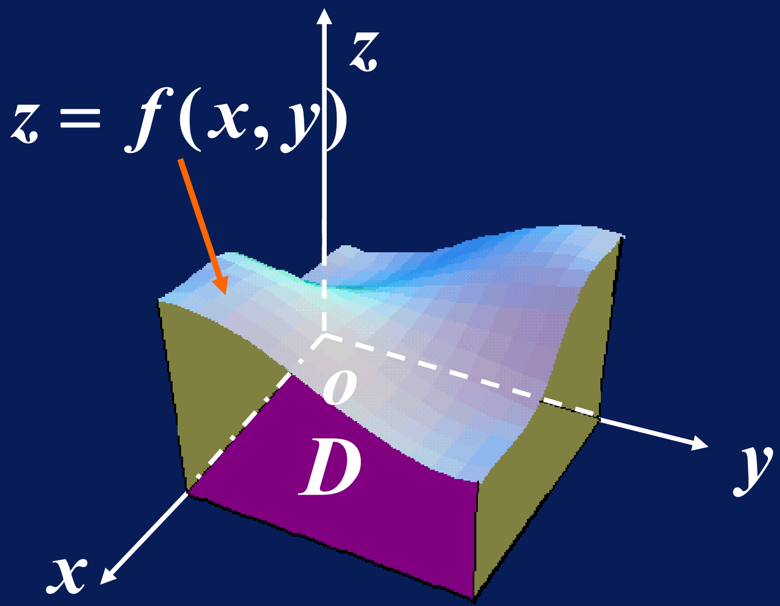


曲顶柱体:

底为 xOy 面上的闭区域 D，

曲顶为 连续曲面$z = f(x, y) \geq 0$,

侧面为以D的边界为准线, 母线平行于z轴的柱面.



曲顶柱体的体积 = ？

特点：曲顶 ⟶ 变高

解决方法：类似于定积分

解决问题的思想

步骤如下：

1° 分划

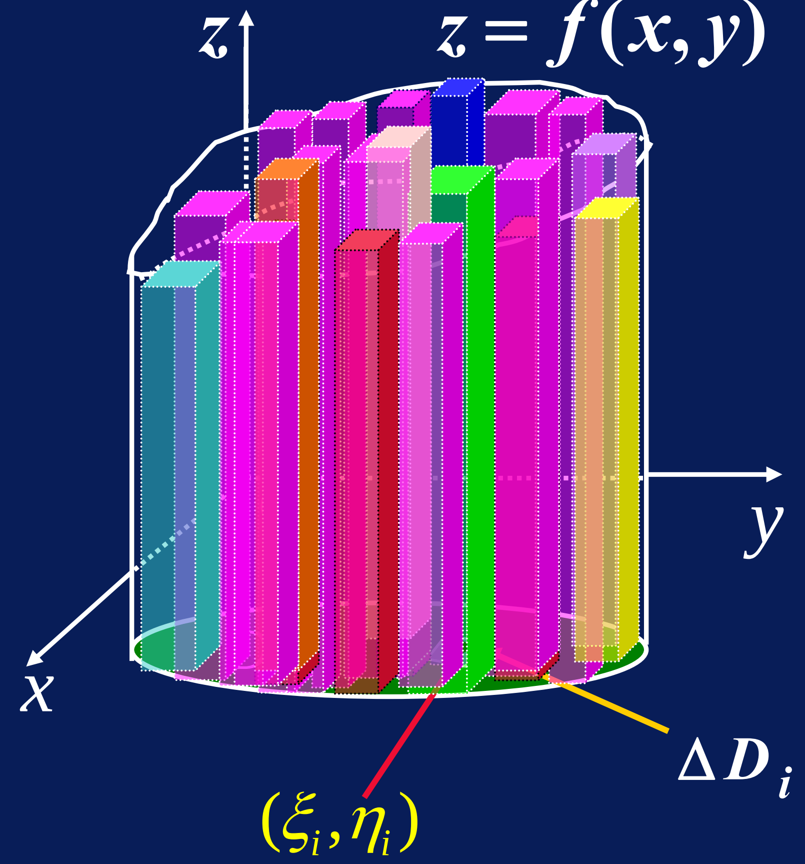
划分D为 n 个小区域:

$\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n,$

以它们为底把曲顶柱体

分为 n 个小曲顶柱体,

$\Delta V_i,\ i = 1, \cdots, n.$



2° 近似

$$\forall\, (\xi_i, \eta_i) \in \Delta D_i,\quad \Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

3° 求和

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\ .$$

4° 取极限

定义 ΔD_i 的直径为

$$d_i=\max\{|P_1P_2|\ |\ P_1,P_2\in\Delta D_i\},$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$, 则有

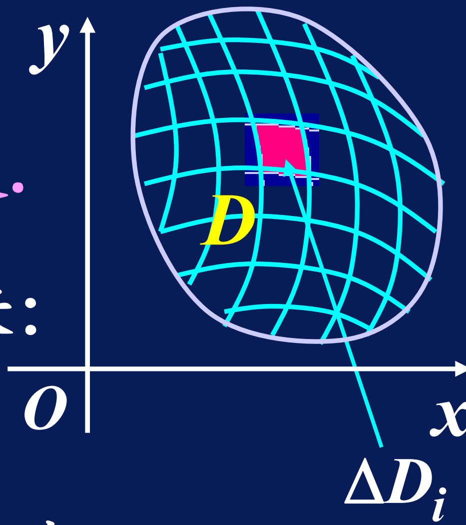
$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\ .$$

2. 平面薄板的质量

设有一质量分布不均匀的平面薄板, 其面密度为非负连续函数 $\mu(x,y)$, 计算该薄片的质量 M.

回顾 若 $\mu(x,y)=$ 常数，则

薄板的质量 = 薄板的面积 × 面密度.



现在 $\mu(x,y)\neq$ 常数, 采用类似方法解决:

1° 分划

设平面薄板在 xOy 平面上占有区域 D，将 D 任意划分成 n 个小区域 $\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$,

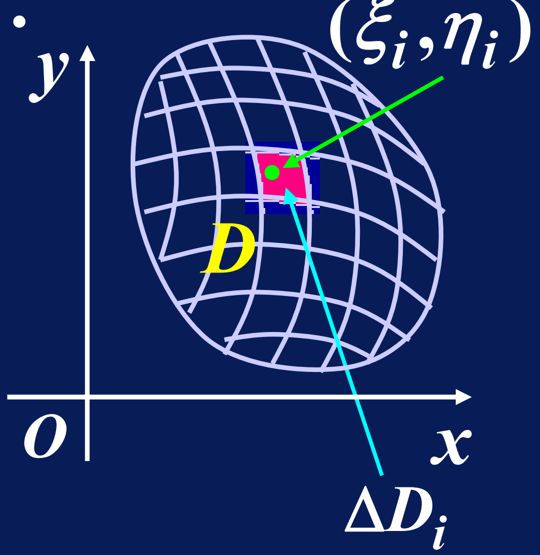
2° 近似

在每个ΔD_i 中任取一点(ξ_i,η_i), 则第 i 小块的质量

$$\Delta M_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

3° 求和

$$M=\sum_{i=1}^{n}\Delta M_i \approx \sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\,.$$



4° 取极限

令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$, 则有

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\,.$$

两个问题的共性:

(1) 解决问题的步骤相同

"分划, 近似, 求和, 取极限".

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积:

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\,;$$

平面薄片的质量:

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\,.$$

(二) 重积分的有关概念

定义9.1 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，

将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 ΔD_1, $\Delta D_2, \ldots, \Delta D_n$，设 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域 ΔD_i 的面积，在每个 ΔD_i 上任取一点

$$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta D_i,$$

作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$,

并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

如果当各小闭区域的直径中的最大值λ趋于零时，这和式的极限存在，则称此极限为函数$f(x,y)$在闭区域D上的二重积分，记为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

积分区域

被积函数

积分变量

被积表达式

面积元素

积分和

注

1° 各小闭区域的直径中的最大值λ是指:

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n}\{d_i\},$$

$$d_i = \max_{P,Q \in D} \rho(P,Q),$$ 其中ρ是欧氏距离.

2° 在二重积分的定义中,对闭区域的划分是任意的.

3° 二重积分存在性定理:

命题1 若函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续,则 $f(x,y)$在D上可积.

命题2 若有界函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上除去有限个点或有限条光滑曲线外都连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

4° 二重积分的几何意义

若 $f(x,y)\geq 0,(x,y)\in D$, 则

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$：以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶,以 D 为底的曲顶柱体的体积 .

一般地, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$：曲顶柱体体积的代数和 .

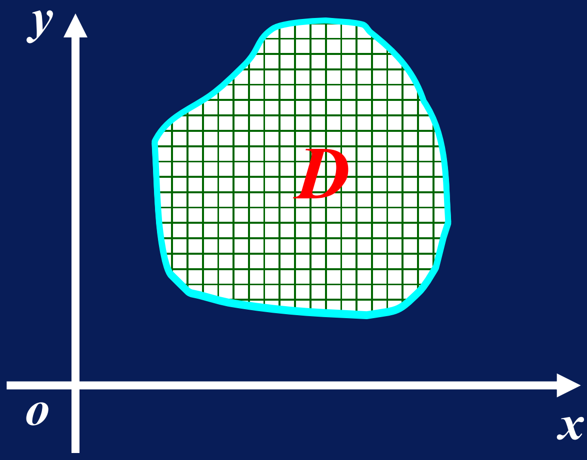
特例 当 $f(x,y)\equiv 1,(x,y)\in D$, 则

$$\sigma=\iint_D 1\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D \mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i$$ D的面积

在直角坐标系下用平行坐标轴的直线来划分区域 D,

则面积元素为

$$\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



故二重积分可写为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

定义9.2 (三重积分的定义)

设 $f(x,y,z)$是定义在有界闭区域 Ω 上的有界函数，将区域Ω任意分成 n 个小区域

$$\Delta\Omega_i \ \ (i=1,2,\cdots,n),$$

用 Δv_i 表示第i 个小闭域 $\Delta\Omega_i$ 的体积，并用λ表示各小闭域直径的最大者. 任取一点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta\Omega_i$,

作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i \ (i=1,2,\cdots,n).$

若存在一个常数 I , 使

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i,$$

则称函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上可积, 并称 I 为 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的三重积分. 记作

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

即

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i.$$

x, y, z 称为积分变量, $f(x, y, z)$ 称为被积函数,

$\mathrm{d}v$ 称为体积元素, 在直角坐标系下常写作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

注

定积分，二重积及三重积分可推广为多重积分:

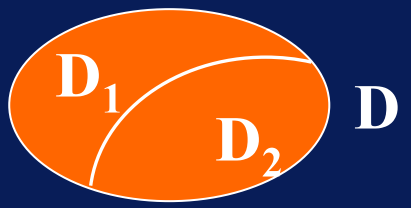
$$\int\int_{I}\cdots\int f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

其中 I 表示积分区域, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示定义在

I 上的有界 n 元函数，n 可取 $1,2,3,\cdots$.

(三) 重积分的性质 (以二重积分为例)

性质1（线性性质）



$$\iint\limits_D (\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))\mathrm{d}\sigma$$

$$=\alpha\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\beta\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$ 其中α,β为常数.

性质2（关于积分区域的可加性）

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $D=D_1\cup D_2$, D_1 , D_2 无公共内点.

性质3（保序性）

若在 D 上 $f(x,y)\geq 0$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \geq 0$

推论1 若在 D 上 $f(x,y)\geq g(x,y)$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \geq \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

推论2 特别地, 由于 $-|f(x,y)|\leq f(x,y)\leq |f(x,y)|$

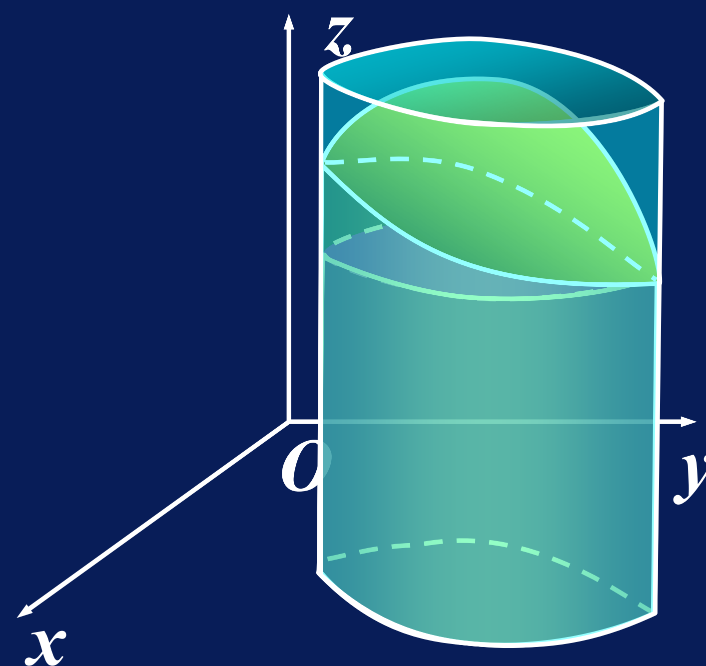
$$\therefore\quad \left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma.$$

性质4（估值性质）

设 $M = \max\limits_{D} f(x,y)$, $m = \min\limits_{D} f(x,y)$, D 的面积为 σ,

则有 $\quad m\sigma \le \iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\sigma.$

二重积分估值不等式的几何意义:

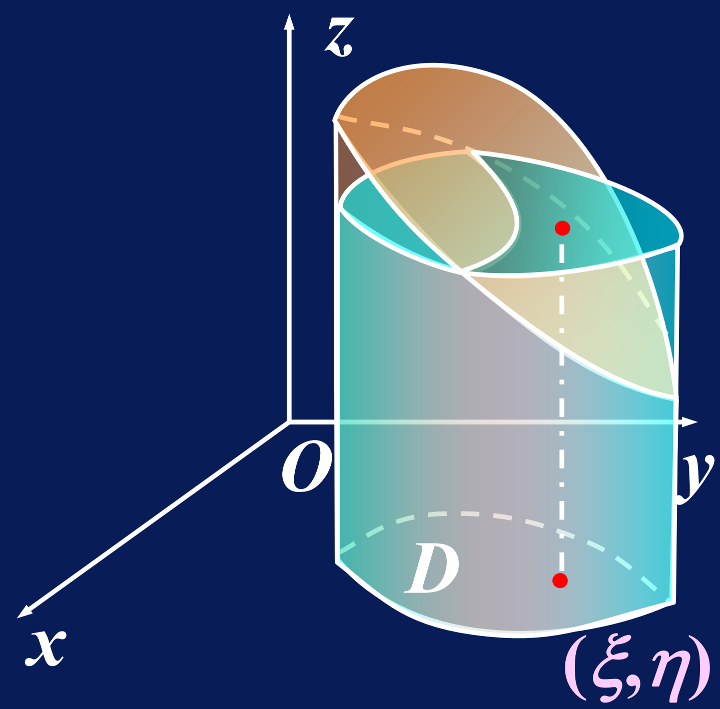


性质5（中值性质）

设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 为 D 的面积，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\,\sigma.$$

二重积分中值定理的几何意义



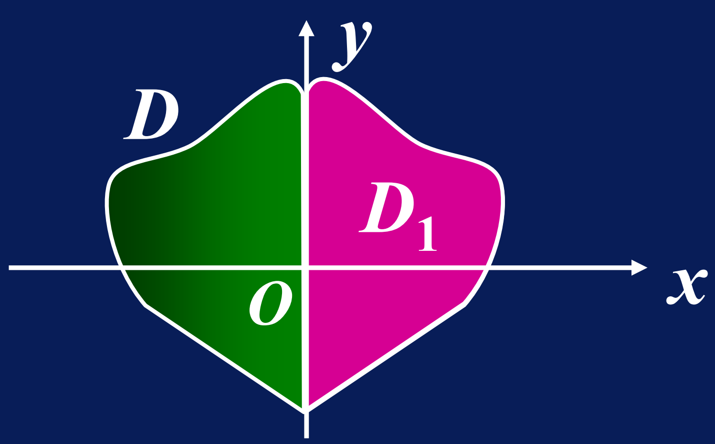
性质6（对称性）

设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，

(1) 若 D 关于 y 轴 $(x=0)$ 对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f(-x,y) = -f(x,y) \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(-x,y) = f(x,y) \end{cases}$$

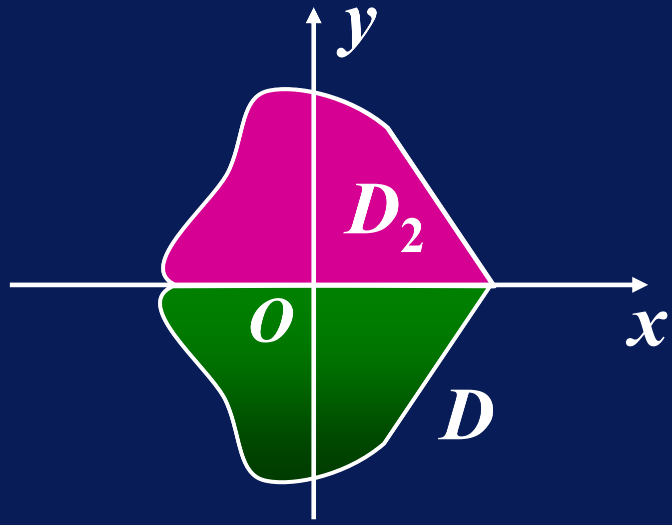
其中 $D_1 = \{(x,y) \mid (x,y) \in D, x \geq 0\}$.



(2) 若 D关于x轴($y=0$)对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f(x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

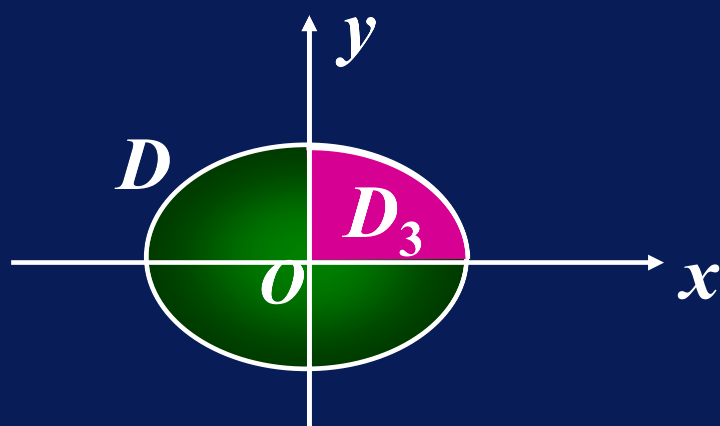
其中 $D_2=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in D, y\geq 0\}$.



(3) 若 D关于 x 轴$(y=0)$和 y 轴$(x=0)$对称，则

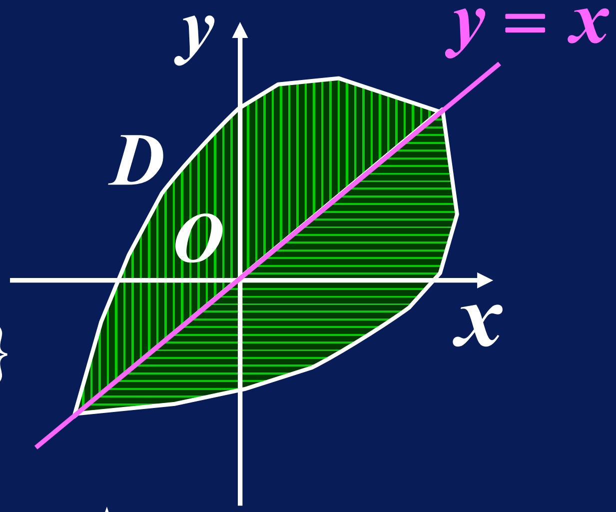
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f(-x,y)=-f(x,y) \\ & \text{或} f(x,-y)=-f(x,y) \\ 4\iint\limits_{D_3} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(-x,y)=f(x,y) \\ & \text{且} f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

其中 $D_3=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in D, x\geq 0, y\geq 0\}$.



(4) 若 D关于直线 $y=x$对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y,x)\,\mathrm{d}\sigma$$

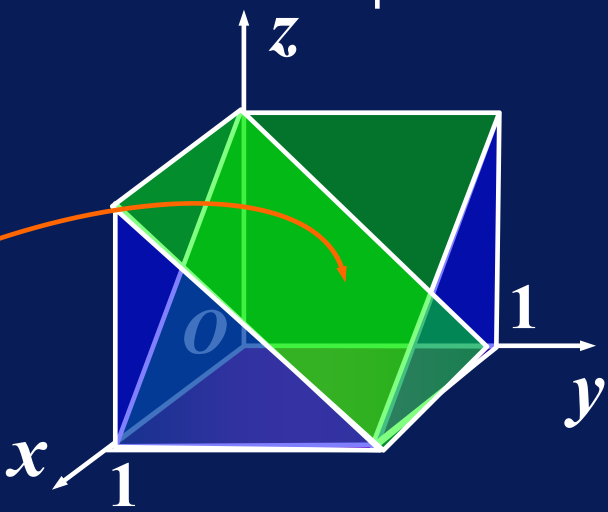


如：$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$

关于直线 $y=x$对称，则

$$\iint_D (1-x)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D (1-y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$z=f(y,x)=1-y$



二、典型例题

例1 比较下列积分的大小：

$$\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma,\quad \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 2.$

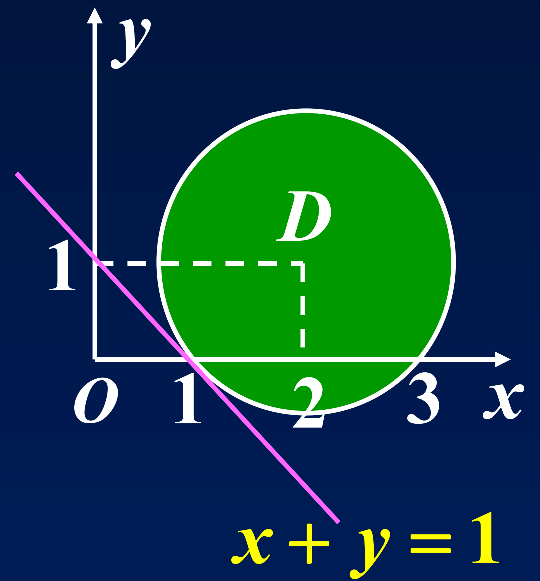
解（方法1） D 的边界为圆周：

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2,$$

与x 轴的交点：$(1,0)$, $(3,0)$.

$$2(x-2)+2(y-1)y'=0,$$

$$y'\big|_{x=1}=-\left.\frac{x-2}{y-1}\right|_{(1,0)}=-1$$



$$(x-2)^2+(y-1)^2=1$$

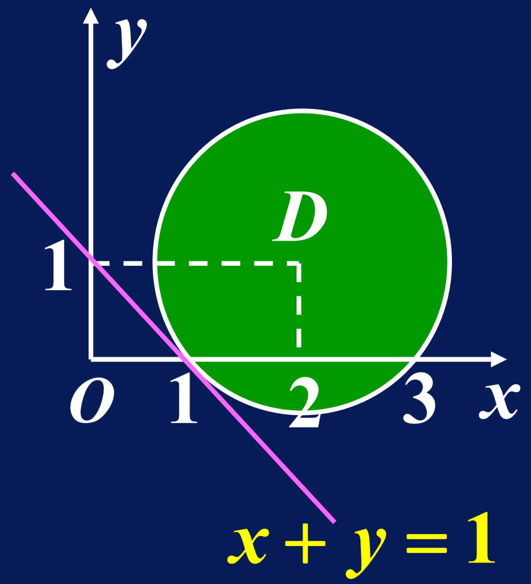
与直线 $x+y=1$ 相切.

而域 D 位于直线的上方,

故在 D 上, $x+y\geq 1,$

从而 $(x+y)^2\leq (x+y)^3,$

$$\therefore \quad \iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \leq \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma.$$



（方法2） $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 2.$

$$\because\quad (x-2)^2+(y-1)^2\le 2$$

$$(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1)\le 2,$$

$$(x-1)^2+y^2-2(x+y-1)\le 0,$$

$$2(x+y-1)\ge (x-1)^2+y^2\ge 0$$

$$\therefore\quad x+y\ge 1$$

$\therefore$ 当 $(x,y)\in D$时， 有 $(x+y)^3\ge (x+y)^2$

$$\therefore\quad \iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma.$$

例2 判断 $\iint\limits_{r\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的符号.

解 当 $r\le|x|+|y|\le 1$ 时,

$$0<x^2+y^2\le(|x|+|y|)^2\le 1,$$

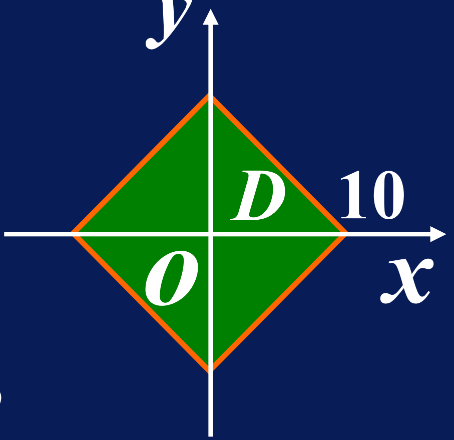
故 $\ln(x^2+y^2)\le 0$;

又当 $|x|+|y|<1$ 时 $\ln(x^2+y^2)<0$,

于是 $\iint\limits_{r\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0.$

例3 估计下列积分之值

$$\mathrm{I}=\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y},\qquad D:\ |x|+|y|\le 10.$$



解 D 的面积为 $\sigma=(10\sqrt{2})^2=200$

由于

$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100},$$

$$\Big\downarrow\ \boxed{\text{积分性质4}}$$

$$\frac{200}{102}\le \mathrm{I}\le\frac{200}{100},\qquad \text{即}\quad 1.96\le \mathrm{I}\le 2.$$

例4 计算 $I=\iint\limits_{D}(3x-6y+9)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

其中 $D: x^2+y^2\le R^2$.

解 $I=3\iint\limits_{D}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-6\iint\limits_{D}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+9\boxed{\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$

D的面积

关于$x=0$对称

关于x为奇函数

关于$y=0$对称

关于y为奇函数

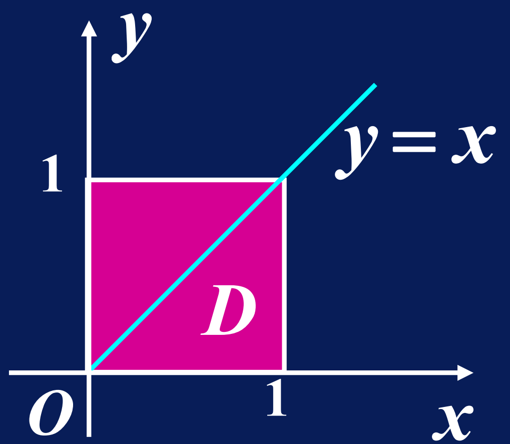
$=0-0+9\cdot\pi R^2=9\pi R^2.$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例5 利用二重积分的性质估计二重积分

$$I=\iint\limits_{D}(\cos y^2+\sin x^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

的值,其中D是正方形区域: $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1.$



解 因为积分区域D关于直线

$y=x$对称，故有

$$\iint\limits_{D}\cos y^2\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}\cos x^2\,\mathrm{d}\sigma.$$

从而 $$\iint\limits_{D}(\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}(\cos x^2+\sin x^2)\mathrm{d}\sigma.$$

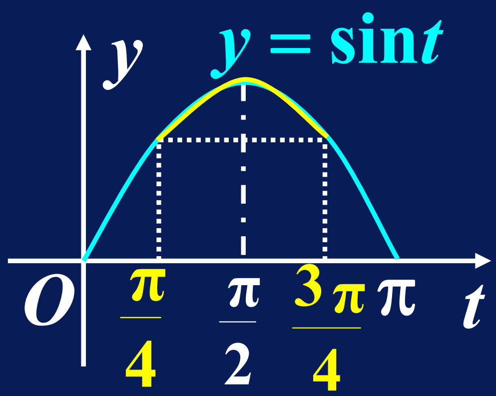
由于

$$\cos x^2 + \sin x^2 = \sqrt{2}\sin(x^2 + \frac{\pi}{4}),$$

而 $0 \le x^2 \le 1$，故

$$\frac{\pi}{4} \le x^2 + \frac{\pi}{4} \le 1 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

从而 $1 \le \sqrt{2}\sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) \le \sqrt{2}$



而正方形的面积为 1，所以

$$1 \le \iint_D (\cos y^2 + \sin x^2)\mathrm{d}\sigma \le \sqrt{2}\iint_D \mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}.$$

三、同步练习

1. 比较下列积分值的大小关系：

$$I_1 = \iint_{x^2+y^2\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad I_2 = \iint_{|x|+|y|\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 比较积分 $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$ 的大小，其中 D 是三角形闭区域，三顶点各为 (1,0),(1,1), (2,0).

3. 设D是第二象限的一个有界闭域，且 $0<y<1$, 则

$$I_1=\iint_D yx^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2=\iint_D y^2x^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3=\iint_D y^{\frac{1}{2}}x^3\,\mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为 (　　).

(A) $I_1\le I_2\le I_3$　　(B) $I_2\le I_1\le I_3$

(C) $I_3\le I_2\le I_1$　　(D) $I_3\le I_1\le I_2$

4. 判断 $I=\iint_D \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的符号，

其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$.

5. 不作计算，估计 $I=\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 D 是椭圆闭区域：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\ \ (0<b<a)$.

6. 估计 $I=\iint\limits_{D}\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$ 的值，其中

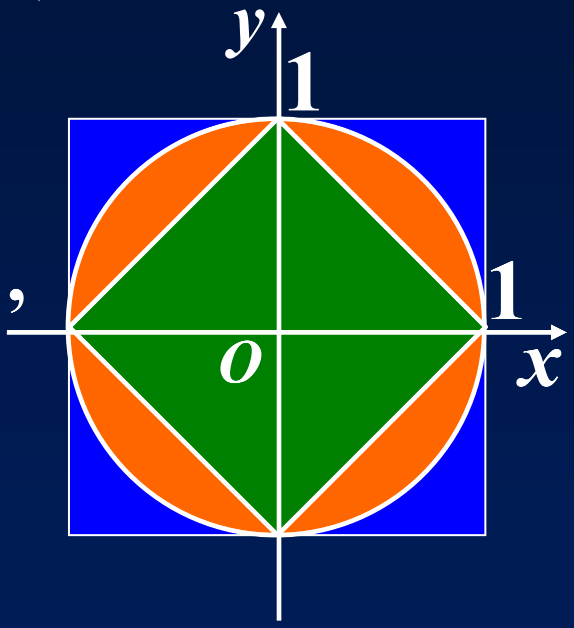
$$D:\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2.$$

四、同步练习解答

1. 比较下列积分值的大小关系：

$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\qquad I_2 = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



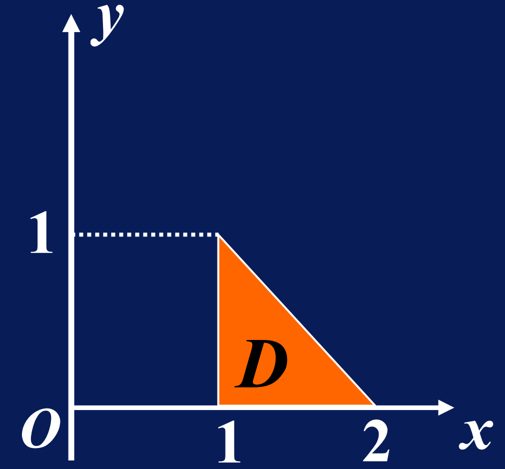
解 I_1, I_2, I_3 被积函数相同，且非负，

由它们的积分域范围可知

$$I_2 < I_1 < I_3.$$

2. 比较积分 $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$ 的大小，其中 D 是三角形闭区域，三顶点各为 (1,0),(1,1), (2,0).

解 三角形斜边方程：$x+y=2$



在 D 内，有 $1 \le x+y \le 2 < \mathrm{e}$,

故 $0 < \ln(x+y) < 1$,

于是 $\ln(x+y) > [\ln(x+y)]^2$,

因此 $$\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma > \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma.$$

3. 设D是第二象限的一个有界闭域，且 $0<y<1$，则

$$I_1=\iint\limits_D yx^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2=\iint\limits_D y^2x^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3=\iint\limits_D y^{\frac{1}{2}}x^3\,\mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为 (D).

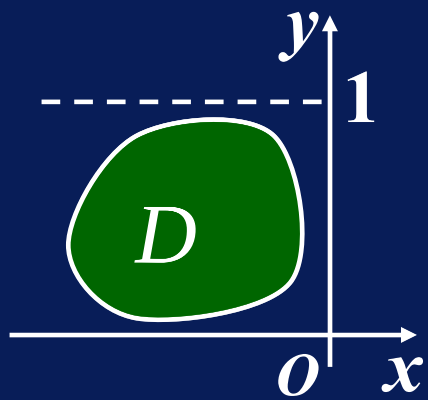
(A) $I_1\le I_2\le I_3$　　(B) $I_2\le I_1\le I_3$

(C) $I_3\le I_2\le I_1$　　(D) $I_3\le I_1\le I_2$

提示　因 $0<y<1$，故 $y^2\le y\le y^{\frac{1}{2}}$；

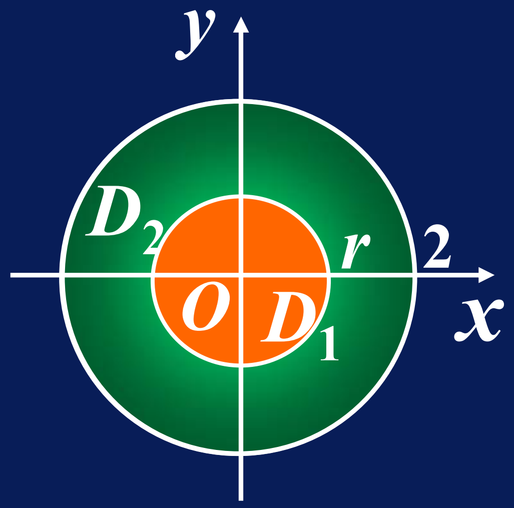
又因 $x^3<0$，故在D上有

$$y^{\frac{1}{2}}x^3\le yx^3\le y^2x^3.$$



4. 判断 $I=\iint\limits_{D}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的符号，

其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$.



解（方法1）将 D 分成两部分:

$$D=D_1\cup D_2,$$

其中 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le r^2\}$,

$$D_2=\{(x,y)\mid r^2\le x^2+y^2\le 4\},$$

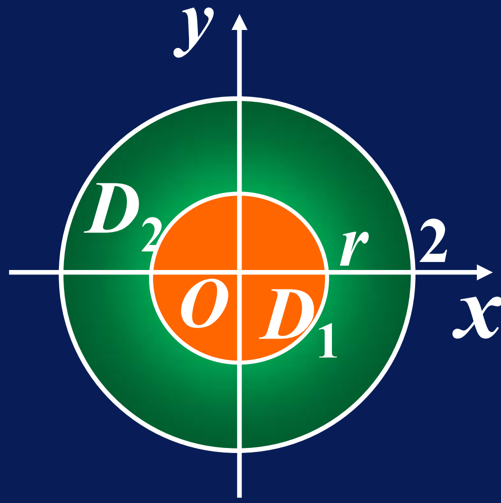
而 $1<r<2$ 待定．易知 D_1 的面积为 πr^2,

D_2 的面积为 $\pi(4-r^2)$.

令 $f(x,y)=\sqrt[3]{1-x^2-y^2}$

因为 $M_1=\max\limits_{D_1} f(x,y)=1,$

$M_2=\max\limits_{D_2} f(x,y)=-\sqrt[3]{r^2-1}$



于是 $\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$<M_1\cdot\pi r^2+M_2\cdot\pi(4-r^2)$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < M_1 \cdot \pi r^2 + M_2 \cdot \pi(4 - r^2)$$

$$= \pi r^2 - \pi(4 - r^2)\sqrt[3]{r^2 - 1}.$$

$M_1 = 1,\ M_2 = -\sqrt[3]{r^2 - 1}$

取 $r^2 = 2$，得

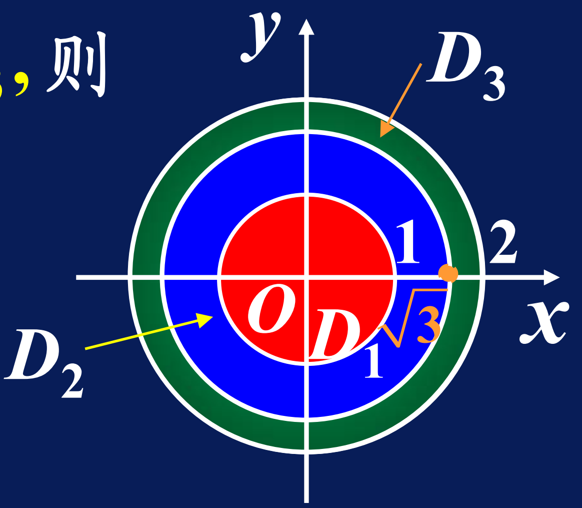
$$I = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$< \left(\pi r^2 - \pi(4 - r^2)\sqrt[3]{r^2 - 1}\right)\Big|_{r^2=2}$$

$$= 0.$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(方法2)　分积分域为 D_1, D_2, D_3, 则



$$原式 = \iint_{D_1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$-\iint_{D_2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_3} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

舍去此项

$$< \iint_{D_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_3} \sqrt[3]{3-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \pi - \sqrt[3]{2}\pi(4-3) = \pi(1-\sqrt[3]{2}) < 0.$$

5. 不作计算，估计 $I=\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma$ 的值，其中 D 是椭圆闭区域: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\ \ (0<b<a)$.

解　区域 D 的面积 $\sigma = ab\pi$

在 D 上, $\because\ \ 0\le x^2+y^2\le a^2,$

$$\therefore\ \ 1=e^0\le e^{x^2+y^2}\le e^{a^2},$$

由性质 6 知 $\sigma\le\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma\le\sigma\cdot e^{a^2},$

$$ab\pi\le\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma\le ab\pi e^{a^2}.$$

6. 估计$I=\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$的值，其中

$$D:\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2.$$

解 $\because f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$， 区域面积$\sigma=2$,

在D上$f(x,y)$的最大值$M=\dfrac{1}{4}\quad (x=y=0)$

$f(x,y)$的最小值 $m=\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{1}{5}\ (x=1,y=2)$

故 $\dfrac{2}{5}\le I\le\dfrac{2}{4}$，即 $0.4\le I\le 0.5.$