第八节 最值问题模型

习题 3-8

1. 求下列函数在指定区间上的最大值及最小值:

(1) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1,\ x \in [0,2]$;

(2) $y = \sqrt{x(10-x)},\ x \in [0,10]$;

(3) $y = x + \sqrt{1-x},\ x \in [-5,1]$;

(4) $y = |x-2|e^x,\ x \in [0,3]$.

解 (1) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1,\ y' = 3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(3x-1)$.

令 $y' = 0$, 可得 $x = \frac{1}{3},\ x = 1$.

比较 $y(0) = -1,\ y(\frac{1}{3}) = -\frac{23}{27},\ y(1) = -1$ 及 $y(2) = 1$ 可知, 函数的最大值为 $y(2) = 1$, 最小值为 $y(0) = y(1) = -1$.

(2) $y = \sqrt{x(10-x)},\ y' = \frac{5-x}{\sqrt{x(10-x)}}$.

令 $y' = 0$, 可得 $x = 5$.

比较 $y(0) = 0,\ y(5) = 5$ 及 $y(10) = 0$ 可知, 函数的最大值为 $y(5) = 5$, 最小值为 $y(0) = y(10) = 0$.

(3) $y = x + \sqrt{1-x},\ y' = \frac{2\sqrt{1-x} - 1}{2\sqrt{1-x}}$.

令 $y' = 0$, 可得 $x = \frac{3}{4}$.

比较 $y(-5) = -5 + \sqrt{6},\ y(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$ 及 $y(1) = 1$ 可知, 函数的最大值为 $y(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$, 最小值为 $y(-5) = -5 + \sqrt{6}$.

(4) $y=\begin{cases}(2-x)\mathrm{e}^x, & 0\le x<2,\\ (x-2)\mathrm{e}^x, & 2\le x\le 3,\end{cases}$ $y'=\begin{cases}(1-x)\mathrm{e}^x, & 0\le x<2,\\ (x-1)\mathrm{e}^x, & 2<x\le 3.\end{cases}$

令 $y'=0$, 可得 $x=1$.

比较 $y(0)=2$, $y(1)=\mathrm{e}$, $y(2)=0$ 及 $y(3)=\mathrm{e}^3$ 可知, 函数的最大值为 $y(3)=\mathrm{e}^3$, 最小值为 $y(2)=0$.

2. 下列函数在指定区间上是否有最大值和最小值? 如有, 求出它的值, 并说明是最大值还是最小值.

(1) $y=x+\dfrac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$;

(2) $y=\dfrac{x}{(x+1)^2}$, $x\in(-\infty,-1)$.

解 (1) $y=x+\dfrac{1}{x^2}$, $y'=1-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{x^3-2}{x^3}$, $y''=\dfrac{6}{x^4}$.

令 $y'=0$, 可得 $x=\sqrt[3]{2}$. 由于 y'' 恒大于零, 所以 $x=\sqrt[3]{2}$ 是函数的极小值点, 也是最小值点, 故函数 $y=x+\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值 $y(\sqrt[3]{2})=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, 无最大值.

(2) $y=\dfrac{x}{(x+1)^2}$, $y'=\dfrac{1-x}{(x+1)^3}$.

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时, y' 恒小于零, 所以函数单调减少, 故函数 $y=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ 在 $(-\infty,-1)$ 上无最小值, 也无最大值.

3. 设正数 x 和 y 满足 $x+y=100$, n 是一个正整数, 试证: 当 $x=y$ 时, x^n+y^n 达最小值, x^ny^n 达最大值.

解 (1) 令 $f(x)=x^n+y^n=x^n+(100-x)^n$, $g(x)=x^ny^n=x^n(100-x)^n$, 则

$$f'(x)=n[x^{n-1}-(100-x)^{n-1}],\ g'(x)=nx^{n-1}(100-x)^{n-1}(100-2x).$$

令 $f'(x)=0$, 可得 $x=50$. 当 $x\in(0,50)$ 时, $f'(x)<0$, 当 $x\in(50,100)$ 时, $f'(x)>0$, 故 $f(50)$ 为函数 $f(x)$ 在 $(0,100)$ 上的极小值, 也是最小值, 此时 $x=y=50$.

同理, 令 $g'(x)=0$, 可得 $x=50$. 当 $x\in(0,50)$ 时, $g'(x)>0$, 当 $x\in(50,100)$ 时, $g'(x)<0$, 故 $g(50)$ 为函数 $g(x)$ 在 $(0,100)$ 上的极大值, 也是最大值, 此时 $x=y=50$.

4. 试求内接于半径为 R 的球, 且体积最大的圆锥体的高.

解 设圆锥体的高为 h($h>0$), 底半径为 r(如图 3.6 所示), 则有

$$(h-R)^2+r^2=R^2,$$

即 $r^2 = 2hR - h^2$，圆锥体的体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h(2hR - h^2).$$

令 $V_h' = \frac{\pi}{3}(4hR - 3h^2) = 0$，得唯一驻点 $h = \frac{4}{3}R$. 由实际问题的性质知，圆锥体体积的最大值存在，故体积最大的圆锥体的高为 $h = \frac{4}{3}R$.

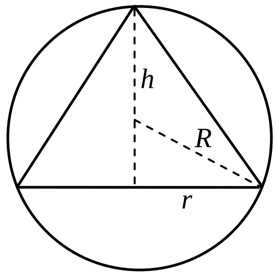


图 3.6

5. 把一根直径为 d 的原木锯成截面为矩形的梁，问矩形截面的高 h 和宽 b 应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大? (矩形梁的抗弯模量为 $\omega = \frac{1}{6}bh^2$).

解 由力学知识知道矩形梁的抗弯模量 $\omega = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}b(d^2 - b^2)$ (如图 3.7 所示).

令 $\omega_b' = \frac{1}{6}(d^2 - 3b^2) = 0$，得唯一驻点 $b = \sqrt{\frac{1}{3}}d$. 由实际问题的性质知，梁的抗弯截面模量的最大值存在，且在 $b = \sqrt{\frac{1}{3}}d$ 处达到，故应取

$$b = \sqrt{\frac{1}{3}}d,\ h = \sqrt{\frac{2}{3}}d,$$

才能使梁的抗弯截面模量最大(此时 $d:h:b = \sqrt{3}:\sqrt{2}:1$).

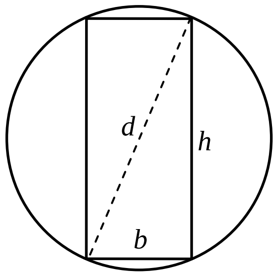


图 3.7

6. 从圆上截取一个中心角为 α 的圆扇形，把它卷成一个圆锥，试问: 要使圆锥的容积最大，中心角应如何选取?

解 设圆的半径为 R，圆锥的底半径为 r，高为 h(如图 3.8 所示)，体积为 V，则有 $2\pi r = R\alpha$，即 $r = \frac{R\alpha}{2\pi}$，且

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2},$$

从而圆锥体的体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R\alpha}{2\pi}\right)^2 \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$$
$$= \frac{R^3\alpha^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}.$$

其中 $0 < \alpha < 2\pi$.

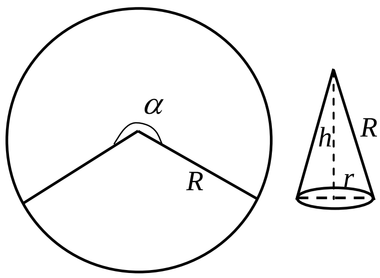
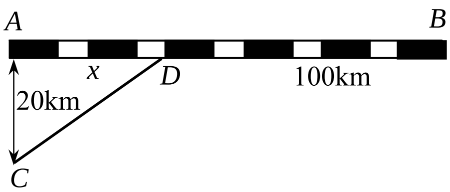


图 3.8

令 $V_\alpha' = \frac{R^3\alpha}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}(8\pi^2 - 3\alpha^2) = 0$，得唯一驻点 $\alpha = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi = \frac{2}{3}\sqrt{6}\pi \in (0, 2\pi)$.

由实际问题的性质知，圆锥容积的最大值存在，且在 $\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{6}\pi$ 处达到. 因此要使圆锥的容积最大，应选取中心角 $\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{6}\pi$.

7. 铁路线上有 A, B 两城，相距 100km，工厂 C 距 A 城 20km，且 AC 垂直 AB(见右图). 为运输需要，欲在 AB 线上选一点 D 向工厂 C 修一条公路. 已知铁路与公路每 km 货运的运费之比 $3:5$，为使货物从 B 城运到工厂 C 的运费最省，问 D 应选在何处?



解 设 $AD=x$，则 $DB=100-x$，$CD=\sqrt{400+x^2}$. 货物从 B 城运到工厂 C 的运费为

$$y=5k\sqrt{400+x^2}+3k(100-x),$$

其中 $0\le x\le 100$，k 为某正常数.

令 $y'=5k\frac{x}{\sqrt{400+x^2}}-3k=0$，得唯一驻点 $x=15\in(0,100)$. 又 $y(0)=400k$，$y(15)=380k$，$y(100)=500\sqrt{\frac{26}{25}}k$，因此当 $AD=x=15$ km 时，总运费最省.

8. 公园中有一高为 am 的塑像，其底座高为 bm，为了观赏时视角最大(即看得最清楚)，应该站在离底座多远的地方?

解 如图 3.9 所示，设游人水平视线距地面 c 米 $(c<b)$，塑像底座比 c 高出 $h=b-c$ 米，并设游人站在离底座脚 x 米的地方，观赏的视角为 θ，则有

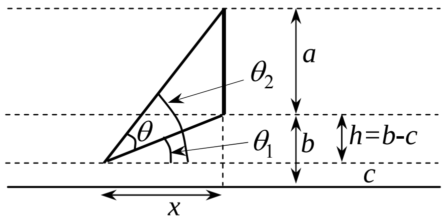


图 3.9

$$\tan\theta_2=\frac{a+h}{x},\quad \tan\theta_1=\frac{h}{x},$$

$$\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$$

$$=\frac{\frac{a+h}{x}-\frac{h}{x}}{1+\frac{a+h}{x}\cdot\frac{h}{x}}=\frac{ax}{x^2+(a+h)h}.$$

$$(\tan\theta)'_x=a\frac{(a+h)h-x^2}{[x^2+(a+h)h]^2}=0\ \Rightarrow\ x=\sqrt{(a+h)h}.$$

为了使观赏的视角 θ 最大，只需 $\tan\theta$ 最大，根据实际问题的性质知，应使

$x=\sqrt{(a+h)h}$，即游人应站在离底座脚 $\sqrt{(a+h)h}$ 米的地方.

9. 一盏灯挂在一米见方的方桌的正上方，问此灯离桌面多高时，才能使

(1) 桌子四边的中点处照明度最大?

(2) 桌子四个角的照明度最大?

(注：受光面上的照明度与光线入射角的余弦值成正比，与到光源距离的平方成反比)

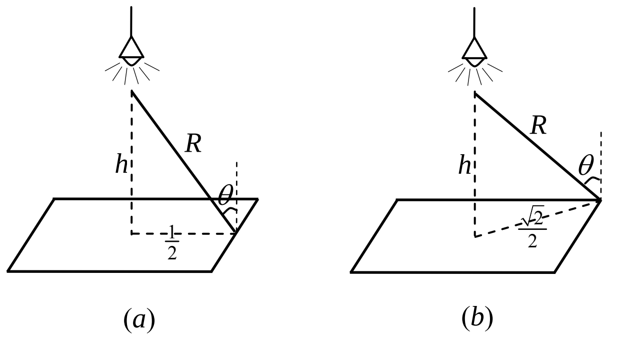


图 3.10

解 (1) 如图 3.10(a)所示，设光线的入射角为 θ，光线与被照处的距离为 R，并设光源到桌子的距离为 h 时，光源对桌子四边的中点处的照明度为 $I(h)$，则有

$$I(h)=k\frac{\cos\theta}{R^2}=k\frac{h}{R^3}=k\frac{h}{(h^2+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}},$$

其中 $h>0$，k 为某常数.

令 $I'(h)=k\dfrac{\frac{1}{4}-2h^2}{(h^2+\frac{1}{4})^{\frac{5}{2}}}=0$，得唯一驻点 $h=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. 由实际问题的性质知，当灯离桌面的高度为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ m 时，光源对桌子四边的中点处的照明度最大.

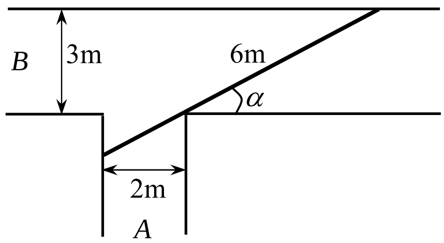
(2) 如图 3.10(b)所示，设光源到桌子的距离为 h 时，光源对桌子四个角处照明度为 $I(h)$，则有

$$I(h)=k\frac{\cos\theta}{R^2}=k\frac{h}{R^3}=k\frac{h}{(h^2+\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $I'(h)=k\dfrac{\frac{1}{2}-2h^2}{(h^2+\frac{1}{2})^{\frac{5}{2}}}=0$，得唯一驻点 $h=\dfrac{1}{2}$. 由实际问题的性质知，当灯离桌

面的高度为$\frac{1}{2}$m时, 光源对桌子四个角处的照明度最大.

10. 设有一个T形通道(如右图所示), 现在拟将一批6米的管子由A处移到B处, 移动时, 要求管子与地面保持平行, 若A, B处通道的宽度分别为2米和3米, 试问这批管子能否按要求移位?



解 构造辅助函数$f(\alpha)=6\sin\alpha-2\tan\alpha=\sin\alpha(6-\frac{2}{\cos\alpha})$, 其中$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$. 若$f(\alpha)$在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上的最大值不超过3米, 则这批管子能按要求移位, 否则不能.

$$f'(\alpha)=\cos\alpha(6-\frac{2}{\cos\alpha})+\sin\alpha(-\frac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha})=\frac{6\cos^3\alpha-2}{\cos^2\alpha}.$$

由$f'(\alpha)=0$, 可得$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{9}-1}}{\sqrt[3]{3}}$. 由实际问题的性质知, 此时$f(\alpha)$在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上取得最大值, 其值为

$$\frac{\sqrt{\sqrt[3]{9}-1}}{\sqrt[3]{3}}(6-2\sqrt[3]{3})\approx 2.245<3,$$

因此这批管子能按要求移位.

11. 某出版社出版一种书, 印刷x册所需成本为

$$y=25000+5x\,(\text{元}).$$

又每册售价P与x之间满足经验公式

$$\frac{x}{1000}=6(1-\frac{P}{30}),$$

假设该书全部售出, 问价格P定为多少时, 出版社获利最大?

解 利润函数为

$$g=Px-(2500+5x)=6000(P-5)(1-\frac{P}{30})-2500.$$

令$g_P'=6000(\frac{7}{6}-\frac{P}{15})=0$, 可得唯一驻点$P=\frac{35}{2}=17.5$. 由实际问题的性质知, 当价格$P$定为17.5元时, 出版社获利最大.

12. 货车以每小时$x$km的常速行驶130km, 按交通法规限制$50\le x\le 100$. 假设汽油的价格是2元/L, 而汽车耗油的速率是$(2+\frac{x^2}{360})$ L/h, 司机的工资是14元/h, 试问最经济的车速是多少? 这次行车的总费用是多少?

解 设车速为 $x\,\text{km/h}$，则这次行车的总费用为

$$y=\frac{130}{x}\times 14+\frac{130}{x}(2+\frac{x^2}{360})\times 2=\frac{130}{x}(18+\frac{x^2}{180}).$$

令 $y'=\frac{13}{18x^2}(x^2-18\times 180)=0$，可得唯一驻点 $x=18\sqrt{10}\approx 57$. 由实际问题的性质知，最经济的车速约为 $57\,\text{km/h}$，这次行车的总费用为

$$y(18\sqrt{10})=\frac{260}{\sqrt{10}}\approx 82.2\text{ 元}.$$

13. 蜂窝的每个单元是一个直六面柱，入口的一端是正六边形，另一端(底部)则由三个相等的菱形围成一个三角面. 设入口处六边形的边长为 a，直六面柱的高为 h，三角面的顶角为 θ，直六面柱的表面积为 S (入口处的六边形面积不计在内)，则利用几何知识可求得

$$S=6ah-\frac{3}{2}a^2\cot\theta+\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\csc\theta.$$

试确定 θ 为何值时，表面积 S 最小，并用 a 和 h 表示出 S 的最小面积.

(注：实际测量的结果表明，蜜蜂营造的蜂房的 θ 角与上述计算所得的值非常接近，误差极少超过 2°)

解 $\because\ S=6ah-\frac{3}{2}a^2\cot\theta+\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\csc\theta,$

$\therefore\ S'_\theta=\frac{3}{2}a^2\csc^2\theta-\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\csc\theta\cot\theta=\frac{3}{2}a^2\frac{1-\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta}.$

令 $S'_\theta=0$，可得唯一驻点 $\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. 由实际问题的性质知，当 $\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，表面积 S 最小. 此时 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\sin\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}$，从而最小面积为

$$S_{\min}=6ah-\frac{3}{2}a^2\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\sqrt{\frac{3}{2}}=6ah+\frac{6}{2\sqrt{2}}a^2=6a(h+\frac{a}{2\sqrt{2}}).$$