第十二章总习题

1. 填空题

(1) $x(y''')^2+(y'')^2=1$ 是 三 阶微分方程.

(2) 在“通解”、“特解”和“解, 但既不是通解, 也不是特解”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(i) $y=C\mathrm{e}^{-3x}+\dfrac{2}{3}$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3y=2$ 的 通解 ;

(ii) $y=C\sin x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的 解, 但既不是通解, 也不是特解 ;

(iii) $y=1-\dfrac{5}{4}x$ 是微分方程 $y''-4y'=5$ 的 特解 .

(3) 若 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 是全微分方程, 则函数 P 、Q 应满足条件 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

(4) 设 y_1,y_2 是一阶非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的两个解, 且 $\dfrac{y_2}{y_1}\neq$ 常数, 则这方程的通解为 $y=C(y_2-y_1)+y_1$.

(5) 以 $y=3\mathrm{e}^x\sin 2x$ 为一个特解的二阶常系数齐次线性微分方程为 $y''-2y'+5y=0$.

解 (1) 因为方程中函数 y 的最高阶导数的阶数为三，所以方程是三阶微分方程.

(2) (i) 方程是一阶微分方程, $y=C\mathrm{e}^{-3x}+\dfrac{2}{3}$ 是该微分方程的解, 且解中含有一个任意常数, 所以 $y=C\mathrm{e}^{-3x}+\dfrac{2}{3}$ 是该微分方程的通解.

(ii) 方程是二阶微分方程, $y=C\sin x$ 是该微分方程的解, 但解中仅含有一个任意常数, 所以 $y=C\sin x$ 既不是通解, 也不是特解.

(iii) 方程是二阶微分方程, $y=1-\dfrac{5}{4}x$ 是该微分方程的解, 但解中不含有任意常数, 所以 $y=1-\dfrac{5}{4}x$ 是该微分方程的特解.

(3) 略.

(4) $y_2 - y_1$是相应的齐次方程的特解，由齐次线性微分方程解的结构可知，方程的通解为 $y = C(y_2 - y_1) + y_1$.

(5) 二阶常系数非齐次线性微分方程的特征方程的根为$1 \pm 2i$，特征方程必为$r^2 - 2r + 5 = 0$，从而相应的微分方程为 $y'' - 2y' + 5y = 0$.

2. 单项选择题

(1) 微分方程 $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \cos x$ 的一特解应具有形式(C).

(A) $ax^2\mathrm{e}^x \cos x + bx^2\mathrm{e}^x \sin x$; (B) $ax\mathrm{e}^x \cos x$;

(C) $ax\mathrm{e}^x \cos x + bx\mathrm{e}^x \sin x$; (D) $a\mathrm{e}^x \cos x$.

(2) 已知 $y = 1$，$y = x$，$y = x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为(B).

(A) $y = C_1 x + C_2 x^2 + 1$; (B) $y = C_1(x-1) + C_2(x^2 - 1) + 1$;

(C) $y = C_1(x^2 - x) + C_2(x-1)$; (D) $y = C_1 + C_2 x + x^2$.

解 (1) $\lambda = 1, \omega = 1$，$\lambda + \omega i = 1 + i$ 是该微分方程的特征方程的根，故而该微分方程特解的形式为 $ax\mathrm{e}^x \cos x + bx\mathrm{e}^x \sin x$，故应选C.

(2) $y = x - 1$，$y = x^2 - 1$ 是相应的齐次方程的线性无关的特解，由非齐次方程的解的结构可知，$y = C_1(x-1) + C_2(x^2 - 1) + 1$ 是该二阶非齐次线性微分方程的通解，故应选B.

3. 指出下列一阶微分方程的类型:

(1) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\ln\dfrac{y}{x}$; (2) $(\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 0$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1+y^2}{y + x^2 y}$; (4) $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = \sin x\mathrm{d}x$;

(5) $(y^2 - 6x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0$; (6) $\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = x^5 y\mathrm{d}y$.

解 (1) 方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x},$$

所以方程为一阶齐次方程.

(2) 方程可化为

$$\frac{\mathrm{e}^y\mathrm{d}y}{1-\mathrm{e}^y}=\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1},$$

所以方程为可分离变量的微分方程.

令 $P(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x$， $Q(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y$，则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^{x+y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以方程也为全微分方程.

(3) 方程可化为

$$\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

所以方程为可分离变量的微分方程.

方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{1+x^2}=\frac{y^{-1}}{1+x^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(y^2)}{\mathrm{d}x}-\frac{y^2}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

所以方程也为伯努利方程.

(4) 方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x},$$

所以方程为一阶线性微分方程.

令 $P(x,y)=y-\sin x$， $Q(x,y)=x$，则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以方程也为全微分方程.

(5) 方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{3}{y}x=-\frac{y}{2},$$

所以方程为 x 的一阶线性微分方程.

(6) 方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=yx^5,$$

所以方程为 x 的伯努利方程.

4. 求下列微分方程的通解:

(1) $(x-y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+y$; (2) $y'-y\tan x+y^2\cos x=0$;

(3) $xy'\ln x+y=x(1+\ln x)$; (4) $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$;

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2x-y^2}$; (6) $(y'')^2-y'=0$;

(7) $(xy+x^2y^3)\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$; (8) $y''+a^2y=\sin x(a>0)$;

(9) $y''+2y'+ay=0$.

解 (1) 方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}},$$

令 $\dfrac{y}{x}=u$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 方程化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u}{1-u},$$

$$\frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

解此方程, 得

$$\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|+C,$$

$$\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=C.$$

(2) 方程化为

$$y^{-2}y'-y^{-1}\tan x=-\cos x,$$

$$(y^{-1})'+y^{-1}\tan x=\cos x,$$

求解此线性方程, 得

$$\frac{1}{y}=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}[\int\cos x\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=\cos x(x+C).$$

(3) 方程化为

$$(y)'+\frac{1}{x\ln x}y=\frac{1+\ln x}{\ln x},$$

求解此线性方程, 得

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}[\int\frac{1+\ln x}{\ln x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=x+\frac{C}{\ln x}.$$

(4) 方程化为

$$\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})+\mathrm{d}(\frac{y^2}{2})+\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=0,$$

$$\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})+\mathrm{d}(\frac{y^2}{2})+\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\mathrm{d}(\frac{x}{y})=0,$$

求解此方程，得

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\arctan\frac{x}{y}=C,$$

$$x^2+y^2+2\arctan\frac{x}{y}=C.$$

(5) 方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-2x=-y^2,$$

求解此线性方程，得

$$x=\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}y}(\int -y^2\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C)=C\mathrm{e}^{2y}+\frac{1}{4}(2y^2+2y+1).$$

(6) 令 $p=y'$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$，原方程化为

$$(p')^2=p,$$

$$p'=\pm\sqrt{p},$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{p}}=\pm\mathrm{d}x,$$

解此微分方程，得

$$p=y'=\frac{(x+C_1)^2}{4},$$

$$y=\frac{1}{12}(x+C_1)^3+C_2.$$

(7) 方程化为

$$x^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x^{-1}y=y^3,$$

$$\frac{\mathrm{d}x^{-1}}{\mathrm{d}y}+x^{-1}y=-y^3,$$

求解此线性方程，得

$$\frac{1}{x}=\mathrm{e}^{-\int y\mathrm{d}y}[\int -y^3\mathrm{e}^{\int y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C]=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}+2-y^2.$$

(8) 特征方程为

$$r^2+a^2=0,$$

其根为 $r_{1,2}=\pm ai$，所以齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax.$$

当 $a\neq 1$ 时，非齐次方程的特解的形式为

$$y^*=(A\cos x+B\sin x),$$

将此解代入微分方程中，得 $A=0,\quad B=\dfrac{1}{a^2-1}$. 该非齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{1}{a^2-1}\sin x.$$

当 $a=1$ 时，非齐次方程的特解的形式为

$$y^*=x(A\cos x+B\sin x),$$

将此解代入微分方程中，得 $A=-\dfrac{1}{2},\quad B=0$. 该非齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{x}{2}\cos x.$$

(9) 特征方程为

$$r^2+2r+a=0,$$

其根为 $r_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-a}$.

当 $a<1$ 时，方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{(-1+\sqrt{1-a})x}+C_2\mathrm{e}^{(-1-\sqrt{1-a})x};$$

当 $a=1$ 时，方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x};$$

当 $a>1$ 时，方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos\sqrt{a-1}x+C_2\sin\sqrt{a-1}x).$$

5. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $y''-2yy'=0,\quad y\big|_{x=0}=1,\quad y'\big|_{x=0}=1$;

(2) $y''+y=x+\cos x,\quad y\big|_{x=0}=1,\quad y'\big|_{x=0}=1$;

(3) $y^3\mathrm{d}x+2(x^2-xy^2)\mathrm{d}y=0,\quad y\big|_{x=1}=1$.

解 (1) 令 $p=y'$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程化为

$$\mathrm{d}p=2y\mathrm{d}y,$$

解此微分方程，得

$$p=y^2+C_1,$$

将初始条件代入，得 $C_1=0$，从而

$$p=y'=y^2,$$

解此微分方程，得

$$-\frac{1}{y}=x+C_2,$$

将初始条件代入，得 $C_2=-1$，从而

$$y=\frac{1}{1-x}.$$

(2) 特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为 $r_{1,2}=\pm i$，所以齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

非齐次的特解的形式为

$$y^*=Ax+B+x(D\cos x+E\sin x),$$

将此解代入微分方程中，得 $A=1,\quad B=0,\quad D=0,\quad E=\dfrac{1}{2}$，非齐次特解为

$$y^*=x+\frac{x\sin x}{2}.$$

该非齐次微分方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{x\sin x}{2},$$

将初始条件代入，得 $C_1 = 1,\quad C_2 = 0$，非齐次微分方程的特解为

$$y = \cos x + x + \frac{x}{2}\sin x .$$

(3) 方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{2}{y}x = -\frac{2x^2}{y^3},$$

$$\frac{\mathrm{d}x^{-1}}{\mathrm{d}y} + \frac{2}{y}x^{-1} = \frac{2}{y^3}.$$

求解此线性方程，得

$$\frac{1}{x} = \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{y}\mathrm{d}y}[\int \frac{2}{y^3}\mathrm{e}^{\int \frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C] = \frac{1}{y^2}(\ln y^2 + C),$$

将初始条件代入，得 $C = 1$，微分方程的特解为

$$x(1 + \ln y^2) - y^2 = 0 .$$

6. 设函数 $f(x)$ 连续，且满足

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t - x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

求 $f(x)$.

解 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$G(x) = \int_0^x F(t)\mathrm{d}t$，则有

$$G'(x) = F(x),\ G''(x) = f(x),\ G(0) = 0,\ G'(0) = 0 .$$

原方程化为

$$G''(x) = \mathrm{e}^x + tF(t)\Big|_0^x - \int_0^x F(t)\mathrm{d}t - xF(x) = \mathrm{e}^x - G(x),$$

$$G''(x) + G(x) = \mathrm{e}^x,$$

此微分方程的初始条件为 $G(0) = 0,\quad G'(0) = 0$.

此微分方程的特征方程为

$$r^2 + 1 = 0,$$

其根为 $r_{1,2} = \pm i$，该非齐次微分方程的特解形式为

$$y^* = A\mathrm{e}^x,$$

将其代入微分方程中，得 $A=\frac{1}{2}$，微分方程的通解为

$$G(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x,$$

有初始条件可知，$C_1=C_2=-\frac{1}{2}$，从而

$$f(x)=G''(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+\mathrm{e}^x)\,.$$

7\. 设函数 $u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $r>0$ 内满足拉普拉斯（Laplace）方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

其中 $f(r)$ 二阶可导，且 $f(1)=f'(1)=1$．将拉普拉斯方程化为以 r 为自变量的常微分方程，并求 $f(r)$．

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\frac{x}{r},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)(\frac{x}{r})^2+f'(r)\frac{1}{r}-f'(r)\frac{x}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+\frac{f'(r)}{r}-f'(r)\frac{x^2}{r^3},$$

同理可知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\frac{y^2}{r^2}+\frac{f'(r)}{r}-f'(r)\frac{y^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)\frac{z^2}{r^2}+\frac{f'(r)}{r}-f'(r)\frac{z^2}{r^3}.$$

因此由已知条件，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0,$$

即

$$r^2f''(r)+2rf'(r)=0,$$

此方程为欧拉方程，令 $r=\mathrm{e}^t$，有

$$(\mathrm{D}^2+\mathrm{D})u=0,$$

其特征方程的根为 0，-1，故而

$$u=C_1+C_2\mathrm{e}^{-t},$$

即
$$f(r)=C_1+\frac{C_2}{r}.$$
将初始条件代入，得 $C_1=2,\quad C_2=-1$，因此
$$f(r)=2-\frac{1}{r}.$$

8. 设 $y=f(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x$，且图形在 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点处的切线重合，求 $y=f(x)$.

解 由题设知，微分方程
$$y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x$$
的初始条件为 $y\big|_{x=0}=1,\quad y'\big|_{x=0}=-1$.

微分方程的特征方程的根为 $r_1=1,\quad r_2=2$，所以齐次微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

$r=1$ 是特征方程的根，所以非齐次的特解的形式为
$$y^*=Ax\mathrm{e}^x,$$
将此解代入微分方程中，得 $A=-2$， 该非齐次微分方程的通解为
$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-2x\mathrm{e}^x.$$
将初始条件代入，得 $C_1=1,\quad C_2=0$，非齐次微分方程的特解为
$$y=(1-2x)\mathrm{e}^x.$$

9. 设曲线上任一点处切线的斜率等于原点与该切点的连线斜率的 3 倍，且曲线过点 $(-1,1)$，试求此曲线的方程.

解 $M(x,y)$ 为曲线上任意一点，由题意知
$$y'=3\frac{y-0}{x-0}=\frac{3y}{x},$$
即
$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{3\mathrm{d}x}{x},$$
其初始条件为 $y\big|_{x=-1}=1$.

解此微分方程，得

$$y = Cx^3,$$

将初始条件代入，得 $C = -1$，从而所求曲线的方程为

$$y = -x^3.$$

10. 假定空气的阻力与速度的平方成正比，且当 $t \to +\infty$ 时速度以 75m/s 为极限，求初速度为 0 的落体的运动规律.

解　设物体质量为 m，比例系数为 k，t 时刻物体速度为 $v(t)$，位移为 $h(t)$. 由题意知 $mg = k \cdot 75^2$，即 $k = \dfrac{mg}{75^2}$，由牛顿第二运动定律，得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \frac{mg}{75^2}v^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{1-(\frac{v}{75})^2} = g\mathrm{d}t,$$

初始条件为 $v\big|_{t=0} = 0,\quad h(t)\big|_{t=0} = 0$.

解此微分方程，得

$$\ln\frac{1+\frac{v}{75}}{1-\frac{v}{75}} = \frac{2}{75}gt + C_1$$

将初始条件代入，得 $C_1 = 0$，从而

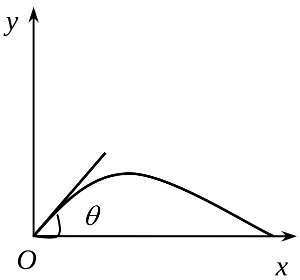
$$v = h'(t) = 75\frac{\operatorname{sh}\frac{gt}{75}}{\operatorname{ch}\frac{gt}{75}},$$

$$h = \frac{(75)^2}{g}\ln\operatorname{ch}\frac{g}{75}t + C_2\quad,$$

将初始条件代入，得 $C_2 = 0$，从而

$$h = \frac{(75)^2}{g}\ln\operatorname{ch}\frac{g}{75}t.$$

11. 一炮弹以初速度 v_0 且与水平面成 θ 角射出. 若它在运动中所受阻力只与运动速度成正比, 求弹道方程（如右图所示）.



解 取炮口为坐标原点, 炮弹前进的水平方向为 x 轴, 铅直向上为 y 轴, 建立坐标系. 设比例系数为 k, t 时刻炮弹的位置为 $(x(t), y(t))$. 由牛顿第二运动定律, 有

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad x(0)=0,\quad x'(0)=v_0\cos\theta;$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-mg,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=v_0\sin\theta.$$

以上两微分方程的特征方程均为

$$mr^2+kr=0,$$

其根为 $r_1=0,\quad r_2=-\dfrac{k}{m}$.

对于具有初值问题的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=v_0\cos\theta,$$

其通解为

$$x=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t},$$

将初始条件代入, 得 $C_1=-C_2=\dfrac{mv_0\cos\theta}{k}$, 从而

$$x=\frac{mv_0}{k}\cos\theta(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}).$$

对于具有初值问题的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=v_0\sin\theta,$$

其齐次的通解为

$$y=C_3+C_4\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t},$$

非齐次的特解的形式为

$$y^*=At,$$

将此特解代入方程中, 得 $A=-\dfrac{mg}{k}$, 从而非齐次的通解为

$$y = C_3 + C_4 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t,$$

将初始条件代入，得 $C_3 = -C_4 = \frac{m}{k}(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{k})$，从而

$$y = \frac{m}{k}(v_0 \sin\theta + \frac{m}{k}g)(1 - \mathrm{e}^{\frac{-k}{m}t}) - \frac{m}{k}gt.$$

12. 有一盛满水的圆锥形漏斗，高为$10\mathrm{cm}$，顶角 $a = 60^\circ$，漏斗下端处有一面积为$0.5\mathrm{cm}^2$的小孔，打开小孔阀门，让水流出漏斗，求漏斗内水面高度的变化规律，并求水流完所需的时间.

解　设 S 为小孔的面积，t 时刻漏斗内水的体积为V，水面的高度为 $h(t)$，此时的水面半径为 $r = h \cdot \tan\frac{\pi}{6} = \frac{h}{\sqrt{3}}$，$V = \frac{1}{3}\pi(\frac{h}{\sqrt{3}})^2 h = \frac{1}{9}\pi h^3$，$\mathrm{d}V = -\frac{1}{3}\pi h^2 \mathrm{d}h$．由水力学知

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0.62S\sqrt{2gh} = 0.31\sqrt{2gh},$$

从而

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{0.31\sqrt{2gh}}\mathrm{d}V = -\frac{\pi}{0.93\sqrt{2g}}h^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}h,$$

积分得

$$t = -\frac{\pi}{0.93\sqrt{2g}} \cdot \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} + C,$$

将 $h\big|_{t=0} = 10$ 代入，得 $C = \frac{\pi}{0.93\sqrt{2g}}\frac{2}{5}10^{\frac{5}{2}}$，所以高度的变化规律为

$$t = -\frac{\pi}{0.93\sqrt{2g}} \cdot \frac{2}{5}(h^{\frac{5}{2}} - 10^{\frac{5}{2}}).$$

取 $h = 0$，得 $t \approx 9.65$，所以水流完大约需9.65秒.