第四节

高阶导数

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

（一）高阶导数的定义

1. 引例 变速直线运动 $s = s(t)$

速度 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，即 $v = s'$

加速度 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)$

即 $a = (s')'$

2. 定义

(1) 如果函数$f(x)$的导函数 $f'(x)$在点x_0处可导，即

$$f''(x_0)=[f'(x)]'\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称$[f'(x)]'\Big|_{x=x_0}$为函数 $f(x)$在点x_0处的二阶导数，并称函数$f(x)$在点x_0处二阶可导，记作

$$f''(x_0),\ y''\Big|_{x=x_0},\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=x_0} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=x_0}.$$

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y'=f'(x)$ 在区间 (a,b) 上可导，则称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的二阶导(函)数，记作 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$，即 $y''=(y')'$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$

类似地，二阶导数的导数称为三阶导数，依次类推，$n-1$ 阶导数的导数称为 n 阶导数，分别记作

$$y''',\quad y^{(4)},\quad \cdots,\quad y^{(n)}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3},\quad \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4},\quad \cdots,\quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$$

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数.

（二）高阶导数的运算法则

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都有 n 阶导数，则

1. $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$

2. $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$ （C为常数）

3. $$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+$$

$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$ $(u^{(0)}=u,\ v^{(0)}=v)$

—— 莱布尼茨(Leibniz) 公式

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + 2\,u'v' + uv''$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

用数学归纳法可证莱布尼茨公式成立 .

二、典型例题

1. 逐阶求导法: 按高阶导数的定义逐阶求导.

例1 设 $y = f(x) = \arctan x$, 求 $f''(0), f'''(0)$.

解 $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad y'' = \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$y''' = \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{-2\cdot(1+x^2)^2 + 2x\cdot 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$\therefore \quad f''(0) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\Big|_{x=0} = 0;$$

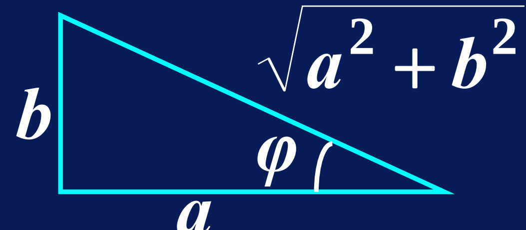
$$f'''(0) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\Big|_{x=0} = -2.$$

2. 归纳法: 逐阶求出若干阶导数后,再归纳出 n 阶导数的一般表达式.

例2 设 $y = \mathrm{e}^{ax}\sin bx$ $(a, b$ 为常数$)$, 求 $y^{(n)}$.

解

$$y' = a\mathrm{e}^{ax}\sin bx + b\mathrm{e}^{ax}\cos bx$$



$$= \mathrm{e}^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$$

$$= \mathrm{e}^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi) \quad (\varphi = \arctan\frac{b}{a})$$

$$a\sin bx + b\cos bx =$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin bx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos bx\right)$$

$$y'' = \sqrt{a^2+b^2}\,[a\mathrm{e}^{ax}\sin(bx+\varphi) + b\mathrm{e}^{ax}\cos(bx+\varphi)]$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+2\varphi)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{ax}\sin(bx+n\varphi) \qquad (\varphi = \arctan\frac{b}{a})$$

$$a\sin bx + b\cos bx =$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\,(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi}\sin bx + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi}\cos bx)$$

3. 利用已知高阶导数法

常用高阶导数公式:

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a>0)$ $\qquad (\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

例3 设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$，求 $y^{(n)}$.

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)\cdot(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cos\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

4. 隐函数求高阶导数举例

例4 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 确定，

求 $y'(0),\ y''(0)$.

解 方程两边对 x 求导，得

$$e^y y' + y + xy' = 0 \quad ①$$

再求导，得 $e^y y'^2 + (e^y + x)y'' + 2y' = 0 \quad ②$

当 $x = 0$ 时，$y = 1$，故由 ① 得 $y'(0) = -\dfrac{1}{e}$，

再代入 ② 得 $y''(0) = \dfrac{1}{e^2}$

5. 由参数方程所确定的函数求高阶导数举例

若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 中 $\varphi(t), \psi(t)$ 二阶可导, 且

$\varphi'(t) \neq 0$,则由它确定的函数 $y = y(x)$ 可求二阶导数.

利用新的参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \triangleq z(t) \end{cases}$, 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z(t)) \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\Big/\varphi'(t)$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

注意：已知 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cancel{=}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}$$

例5 设 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = t f'(t) - f(t) \end{cases}$，且 $f''(t) \neq 0$，求 $\dfrac{d^2 y}{d x^2}$.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f'(t) + t f''(t) - f'(t)}{f''(t)} = \frac{t f''(t)}{f''(t)} = t,$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{f''(t)}$$

例6 $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

解 设 $u = e^{2x}, v = x^2$, 则

$$u^{(k)} = 2^k e^{2x} \quad (k = 1, 2, \cdots, 20)$$

$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v^{(k)} = 0 \quad (k = 3, \cdots, 20)$$

代入莱布尼茨公式,得

$$y^{(20)} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^{k} u^{(20-k)} v^{(k)}$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x + \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95)$$

例7 设 $g'(x)$连续，且 $f(x)=(x-a)^2 g(x)$，求 $f''(a)$.

解 $\because\ g(x)$ 可导

$\therefore\quad f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2 g'(x)$，$\quad f'(a)=0$

$$f''(x)=2g(x)+4(x-a)g'(x)+(x-a)^2 g''(x)$$

$$f''(a)=2g(a)$$ 对吗？

错

$\because\quad g''(x)$ 不一定存在，只能用定义求 $f''(a)$

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}[2g(x)+(x-a)g'(x)]=2g(a)$$

三、同步练习

1. 设 $y = f(\ln x)$,其中 $f(x)$ 二阶可导， 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}$.

2. 求下列函数的 n 阶导数?

(1) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ (2) $y = \dfrac{x^3}{1-x}$

3. (1) 设 $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^n \cos\dfrac{\pi x^2}{16}$, 求 $f^{(n)}(2)$.

(2) 已知 $f(x)$ 任意阶可导, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, $n \ge 2$ 时 求 $f^{(n)}(x)$.

4. 设 $y = x^2 f(\sin x)$，求 y'', 其中 f 二阶可导.

5. 设 $f(x)$ 有 n 阶导数，证明:

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$$

(a,b 为常数）.

6. 设 $y = \sin^4 x - \cos^4 x$, 求 $y^{(n)}$.

7. 设 $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$，求 $y^{(5)}$.

8. 设 $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ 求 $y^{(n)}$.

9. 设 $y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$，求 $y^{(n)}$.

10. 试从 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$ 导出 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

11. 设 $\sqrt{x^2+y^2}=a\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}$ (常数$a>0$)，求 y''.

12. 设 $x^4-xy+y^4=1$, 求y''在点$(0,1)$处的值 .

13. 设 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

14. 设 $y = \arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

15. 设 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$, 求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数n.

四、同步练习解答

1. 设$y = f(\ln x)$,其中$f(x)$二阶可导，求$\dfrac{d^2 y}{d x^2}$.

解 $\dfrac{d y}{d x} = f'(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}$

$f'(\ln x)$与$f(\ln x)$的复合关系相同。

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = f''(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}f'(\ln x)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(f''(\ln x) - f'(\ln x) \right)$$

2. 求下列函数的 n 阶导数?

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 　　**解** $y=-1+\dfrac{2}{1+x}$

$$y^{(n)}=2(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

(2) $y=\dfrac{x^3}{1-x}$ 　　**解** $y=-x^2-x-1+\dfrac{1}{1-x}$

$$y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\ n\ge 3$$

3. (1) 设 $f(x)=(x^2-3x+2)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$，求 $f^{(n)}(2)$.

解 $f(x)=(x-2)^n(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$

各项均含因子 $(x-2)$

$$f^{(n)}(x)=n!\,(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}\boxed{+\cdots\cdots\cdots}$$

$$f^{(n)}(2)=n!\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}n!$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(2) 已知$f(x)$任意阶可导, 且 $f'(x)=[f(x)]^2$, $n\geq 2$ 时 求 $f^{(n)}(x)$.

解 $f''(x)=2f(x)f'(x)=2![f(x)]^3$

$f'''(x)=2!\cdot 3[f(x)]^2 f'(x)=3![f(x)]^4$

……

设$f^{(n-1)}=(n-1)![f(x)]^n$

则 $f^{(n)}(x)=(n-1)!n[f(x)]^{n-1}f'(x)$

$=n![f(x)]^{n+1}$

4. 设 $y = x^2 f(\sin x)$, 求 y'', 其中 f 二阶可导.

解 $$y' = 2x \cdot f(\sin x) + x^2 \cdot f'(\sin x) \cdot \cos x$$

$$y'' = (2x f(\sin x))' + (x^2 f'(\sin x) \cos x)'$$

$$= 2 f(\sin x) + 2x \cdot f'(\sin x) \cdot \cos x$$

$$+ 2x f'(\sin x) \cos x + x^2 f''(\sin x) \cos^2 x$$

$$+ x^2 f'(\sin x)(-\sin x)$$

$$= 2 f(\sin x) + (4x \cos x - x^2 \sin x) f'(\sin x)$$

$$+ x^2 \cos^2 x\, f''(\sin x)$$

5. 设 $f(x)$ 有 n 阶导数，证明：

$$[f(ax+b)]^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax+b)$$

$(a,b$ 为常数）.

证 $[f(ax+b)]'=f'(ax+b)\cdot(ax+b)'=af'(ax+b)$

假设：$[f(ax+b)]^{(n-1)}=a^{n-1}f^{(n-1)}(ax+b)$

则 $$[f(ax+b)]^{(n)}=\{[f(ax+b)]^{(n-1)}\}'$$

$$=[a^{n-1}f^{(n-1)}(ax+b)]'$$

$$=a^{n-1}[f^{(n-1)}(ax+b)]'$$

$$= a^{n-1}[f^{(n-1)}(ax+b)]'$$

$$= a^{n-1}\frac{\mathrm{d}[f^{(n-1)}(ax+b)]}{\mathrm{d}x} \qquad (u = ax+b)$$

$$= a^{n-1}f^{(n)}(ax+b)\cdot a$$

$$= a^{n}f^{(n)}(ax+b)$$ $\therefore$ 命题成立 .

6. 设$y=\sin^4 x-\cos^4 x$,求$y^{(n)}$.

解 $$y=(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

$$=-\cos 2x$$

$$\therefore \quad y^{(n)}=-(\cos 2x)^{(n)}$$

$$=-2^n\cos(2x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

7. 设 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$， 求 $y^{(5)}$.

解 $\because y=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1})$

$$\therefore y^{(5)}=\frac{1}{2}[\frac{(-1)^5 5!}{(x-1)^6}-\frac{(-1)^5 5!}{(x+1)^6}]=60[\frac{1}{(x+1)^6}-\frac{1}{(x-1)^6}]$$

类似地， $\ln(x^2-1)=\ln|x-1|+\ln|x+1|$

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

8. 设 $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 求 $y^{(n)}$.

解 令 $$\frac{1}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}$$

$$1=A(x-1)+B(x-2)$$

令$x=2$,可得$A=1$. 令$x=1$,可得$B=-1$.

$$\therefore \quad y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

9. 设 $y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$，求 $y^{(n)}$.

解 $$y=\frac{4x^2-1}{x^2-1}=\frac{4x^2-4+3}{x^2-1}=4+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\because \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}},\quad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

$$\therefore y^{(n)}=\frac{3}{2}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

10. 试从 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$ 导出 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

分析 已知 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)=-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$ （一致）

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{y'(x)}\right)$$ (令 $v(x)=y'(x)$)

$y'=y'(x)$ 是 x 的函数

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{v(x)}\right)$$ （不一致）

可视 x 为中间变量，用链式求 导法则.

解 $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} y}\left(\frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} y}\left(\frac{1}{y'(x)}\right) \quad (\text{令} v(x)=y'(x))$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} y}\left(\frac{1}{v(x)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x}\left(\frac{1}{v(x)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} y}$$

$$=-\frac{v'(x)}{v^2(x)}\cdot\frac{1}{y'(x)}$$

$$=-\frac{[y'(x)]'}{[y'(x)]^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

11. 设 $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\arctan\frac{y}{x}}$ (常数$a>0$)，求 y''.

解 两边取对数

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln a+\arctan\frac{y}{x}$$

两边对x求导数

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(\frac{y}{x})' \quad \frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}(\frac{y}{x})'$$

$$x+yy'=x^2\cdot\frac{xy'-y}{x^2}, \qquad y'=\frac{x+y}{x-y}$$

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$y'' = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' \qquad \text{(视 } y \text{ 为 } x \text{ 的函数)}$$

$$= \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{2(xy'-y)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^2} \qquad (x \neq y, x \neq 0)$$

12. 设 $x^4 - xy + y^4 = 1$, 求y''在点(0,1)处的值.

解 方程两边对x求导得

$$4x^3 - y - xy' + 4y^3 y' = 0 \qquad (1)$$

代入 $x=0,\ y=1$得 $y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = \frac{1}{4}$;

将方程(1)两边再对x求导得

$$12x^2 - 2y' - xy'' + 12y^2(y')^2 + 4y^3 y'' = 0$$

代入 $x=0,\ y=1, y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = \frac{1}{4}$ 得 $y''\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = -\frac{1}{16}$.

13. 设 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2 y}{d x^2}$.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{1 - \dfrac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{(t-1)^2}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{-\dfrac{2}{(t-1)^3}}{1 - \dfrac{2t}{1+t^2}} = -\frac{2(1+t^2)}{(t-1)^5}.$$

14. 设 $y=\arctan x$，求 $y^{(n)}(0)$.

解 (方法1) $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$，即 $(1+x^2)y'=1$

$$[(1+x^2)y']^{(n-1)}\equiv 0 \quad (n\geq 2)$$

由莱布尼茨公式，得

$$(y')^{(n-1)}\cdot(1+x^2)+(n-1)(y')^{(n-2)}(1+x^2)'+$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2!}(y')^{(n-3)}(1+x^2)''+0\equiv 0$$

$$(1+x^2)y^{(n)}+(n-1)\cdot 2x\,y^{(n-1)}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}\cdot 2\,y^{(n-2)}\equiv 0$$

亦即 $(1+x^2)y^{(n)}+2(n-1)x\,y^{(n-1)}+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}\equiv 0$

$(n\geq 2)$

令 $x=0$，得 $y^{(n)}(0)+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0)=0$

即 $y^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0)\quad (n\geq 2)$

$$(y')^{(n-1)}\cdot(1+x^2)+(n-1)(y')^{(n-2)}(1+x^2)'+$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2!}(y')^{(n-3)}(1+x^2)''+0\equiv 0$$

由 $y(0)=0$, 得 $y''(0)=0$, $y^{(4)}(0)=0,\cdots,$ $y^{(2m)}(0)=0$

由 $y'(0)=1$, 得

$$y^{(2m+1)}(0)=-2m(2m-1)y^{(2m-1)}(0)$$

$$=\cdots=(-1)^m(2m)!\,y'(0)=(-1)^m(2m)!\cdot 1=(-1)^m(2m)!$$

即 $$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2m\\ (-1)^m(2m)!, & n=2m+1\end{cases}\quad(m=0,1,2,\cdots)$$

$$y=\arctan x,\ y'=\frac{1}{1+x^2},$$

$$y^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0)$$

(方法2) 用数学归纳法

$$y = \arctan x,$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \cos^2 y$$

$$= \cos y \cdot \sin(y + \frac{\pi}{2})$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[\cos y \cdot \sin(y + \frac{\pi}{2})] \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$= [-\sin y \cdot \sin(y + \frac{\pi}{2}) + \cos y \cdot \cos(y + \frac{\pi}{2})] \cdot y'$$

$$= \cos[y + (y + \frac{\pi}{2})] \cdot y' = \cos^2 y \cdot \sin 2(y + \frac{\pi}{2})$$

即 $$y'' = \cos^2 y \cdot \sin 2(y + \frac{\pi}{2})$$

$$y''' = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[\cos^2 y \cdot \sin 2(y + \frac{\pi}{2})] \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$= [2\cos y \cdot (-\sin y) \cdot \sin 2(y + \frac{\pi}{2}) + \cos^2 y \cdot \cos 2(y + \frac{\pi}{2}) \cdot 2] \cdot y'$$

$$= 2\cos y \cdot [-\sin y \cdot \sin 2(y + \frac{\pi}{2}) + \cos y \cdot \cos 2(y + \frac{\pi}{2})] \cdot \cos^2 y$$

$$= 2 \cdot \cos^3 y \cdot \cos[y + 2(y + \frac{\pi}{2})]$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \cos^3 y \cdot \sin 3(y + \frac{\pi}{2})$$

假设: $y^{(k)}=(k-1)!\cos^k y\cdot\sin k(y+\frac{\pi}{2})$ 成立

则 $y^{(k+1)}=\dfrac{\mathrm{d}y^{(k)}}{\mathrm{d}x}$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(k-1)!\cos^k y\cdot\sin k(y+\frac{\pi}{2})]$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[(k-1)!\cos^k y\cdot\sin k(y+\frac{\pi}{2})]\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$=(k-1)![k\cos^{k-1}y\cdot(-\sin y)\cdot\sin k(y+\frac{\pi}{2})$$

$$+\cos^k y\cdot\cos k(y+\frac{\pi}{2})\cdot k]\cdot y'$$

$$y^{(k+1)} = (k-1)![k\cos^{k-1} y\cdot(-\sin y)\cdot\sin k(y+\frac{\pi}{2})$$

$$+\cos^{k} y\cdot\cos k(y+\frac{\pi}{2})\cdot k]\cdot y'$$

$$= k!\cos^{k-1} y\cdot[-\sin y\cdot\sin k(y+\frac{\pi}{2})+\cos y\cdot\cos k(y+\frac{\pi}{2})]\cdot\cos^{2} y$$

$$= k!\cos^{k+1} y\cdot\cos[y+k(y+\frac{\pi}{2})]$$

$$= k!\cos^{k+1} y\cdot\sin[(k+1)(y+\frac{\pi}{2})]$$

由数学归纳法，知

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^{n} y\cdot\sin n(y+\frac{\pi}{2}) \quad (\forall n\in N^{*})$$

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin n(y + \frac{\pi}{2}) \quad (\forall n \in N^*)$$

又当 $x = 0$ 时，$y = \arctan 0 = 0$

$$\therefore \quad y^{(n)}(0) = (n-1)!\cos^n 0 \cdot \sin n(0 + \frac{\pi}{2})$$

$$= (n-1)! \cdot \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2m \\ (2m)!\sin(m\pi + \frac{\pi}{2}), & n = 2m+1 \end{cases} \quad (m \in N)$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2m \\ (-1)^m (2m)!, & n = 2m+1 \end{cases} \quad (m \in \mathrm{N})$$

15. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$, 求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数n.

解 $$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\geq 0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}$$

$$\because\ f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^3-0}{x}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3-0}{x}=0$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}12x^2, & x\geq 0\\ 6x^2, & x<0\end{cases}$$

又 $f''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{6x^2-0}{x}=0$

$f''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{12x^2-0}{x}=0$

$\therefore\ f''(x)=\begin{cases}24x, & x\ge 0\\ 12x, & x<0\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}12x^2, & x\ge 0\\ 6x^2, & x<0\end{cases}$

但是 $f'''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{12x-0}{x}=12,$

$f'''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{24x-0}{x}=24,\ \therefore f'''(0)$ 不存在.

即函数在点$x=0$处存在导数的最高阶数是2.