参考答案

一、1．$\dfrac{e-1}{e^2+1}\mathrm{d}x$； 2. $n=3$； 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\cos x}{3x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x}\cdot\cos x}{3+\frac{1}{x}\cdot\sin x}=\dfrac{2}{3}$；

4. 4； 5. 2个； 6. $a=-\dfrac{3}{2},\ b=\dfrac{9}{2}$； 7. $\dfrac{1}{4}e^{2x^2}+C$；

8. $A=\dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\theta)\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{\pi}{12}$

9. $V=2\pi\int_0^2 xf(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x=\dfrac{64}{5}\pi$； 10. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$； 11. 4;

12. 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos^2\dfrac{k\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos^2\dfrac{k\pi}{n}\cdot\dfrac{\pi}{n}=\int_0^{\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}.$

二、1. 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{n}}=(\ln\dfrac{1}{2})\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{2}}=-\ln 2$

2. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x,$ ……………………3分

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f''(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{2x}+f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x$ ……………………6分

3. $2(y'e^x+ye^x)+\dfrac{e^x}{1+x}=0,\ y'=-\dfrac{1}{2(1+x)}-y;$ ……………………3分

$y''=\dfrac{1}{2(1+x)^2}-y'=\dfrac{1}{2(1+x)^2}+\dfrac{1}{2(1+x)}+y,\quad \because\ y(0)=\dfrac{1}{2},\quad \therefore\ y''(0)=\dfrac{3}{2}$………6分

4. $-\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C$; 提示：用代换$x=\dfrac{1}{t}$,或$x=\tan t$.

5. $f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x},\quad f(1)=0$ ……………………2分

$\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\sqrt{x}=2[f(x)\sqrt{x}\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{x}f'(x)\,\mathrm{d}x]$…………………3分

$$=-2\int_0^1\sqrt{x}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x}\,\mathrm{d}\,x=-2\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$$ ……………… 4 分

$$=-4\int_0^1\ln(x+1)\,\mathrm{d}\sqrt{x}=-4[\ln(x+1)\sqrt{x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}\,x]$$

$$\overset{t=\sqrt{x}}{=}-4(\ln 2-2\int_0^1\frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}\,t)=-4\ln 2+8(1-\arctan t\Big|_0^1)$$ ……………… 6 分

$$=8-4\ln 2-2\pi.$$

6. 由极限与无穷小的关系，$\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1+\alpha$， …………………… 2 分

所以：$f(x)=x^4-x+\sin x+\alpha x^4$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}(x+\frac{\sin x-x}{x^3}+\alpha x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$ …… 5 分

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}=-6$ …………………… 6 分

7. 令 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$，则 $f(x)$ 是偶函数.

若 $x=x_0$ 是所给方程的根，则

$|x_0|^{\frac{1}{4}}+|x_0|^{\frac{1}{2}}=\cos x_0$， $\therefore$ $|x_0|^{\frac{1}{2}}\le|x_0|^{\frac{1}{4}}+|x_0|^{\frac{1}{2}}=\cos x_0\le 1$， $x_0\in[-1,1]$. …………… 2 分

当$x\in[0,1]$时，$f(x)=x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}-\cos x$连续； $f'(x)=\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\sin x>0, x\in(0,1)$,

$f(x)$在$[0,1]$上单调增加 …………………… 4 分

又$f(0)=-1<0$, $f(1)=2-\cos 1>0$，所以$f(x)$在$(0,1)$内有惟一零点，$(-\infty,+\infty)$内有两个零点

从而方程有两个实根 …………………… 6 分

8. 对等式两的边求导，得 $g[f(x)]f'(x)=2x$， …………………… 2 分

由$g[f(x)]=x$ 得 $xf'(x)=2x$, $f'(x)=2$, $\therefore f(x)=2x+C$， …………… 4 分

再由 $f(0)=0$，得 $f(x)=2x$. …………………… 8 分

三、(1) $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$, 令 $f'(x)=0$，解得$f(x)$的唯一驻点：$x=1$.

又 $f''(x)=\left.\dfrac{2-x}{x^3}\right|_{x=1}=1>0$, $x=1$是$f(x)$的极小值点，故是$f(x)$的最小值点。

最小值$f(1)=1$. ....4 分

(2) 由(1)的结果知, $f(x)\ge f(1)=1$，即$\ln x+\dfrac{1}{x}\ge 1$，从而有

$$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1\le \ln x_n+\frac{1}{x_n}$$

于是 $x_n<x_{n+1}$，即数列$\{x_n\}$单调增加.

又由 $\ln x_n<\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，知$0<x_n<\mathrm{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在................6 分

记 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，可知 $a\ge x_1>0$.

在$\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$两边取极限，得$\ln a+\dfrac{1}{a}\le 1$, $f(a)=\ln a+\dfrac{1}{a}\ge 1$，故$\ln a+\dfrac{1}{a}=1$,

可得 $a=1$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. ....8 分

四、证明 (1) 令 $\varphi(x)=f(x)-1$，则$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$上可导.................2 分

由$f(0)=0$, 知$\varphi(0)=f(0)-1=-1<0$,

又由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$, 知$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$，从而必存在$x_0>0$，使$\varphi(x_0)>0$

故由零点定理可知，存在$a\in(0,x_0)\subset(0,+\infty)$，使$\varphi(x_0)=0$，即$f(x_0)=1$..........4 分

(2) $\because$ $f(x)$在$[0,a]$上可导, $\therefore$由拉格朗日中值定理,在$(0,a)$内至少存在一点ξ，使得

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\xi),$$ .... 6 分

由题设条件 $f(0)=0$及(1)中结论$f(a)=1$，可知$f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$. .... 8 分