第七节　二阶常系数齐次线性微分方程

习题　12-7

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $y''+2y'-3y=0$;　　(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}=0$;

(3) $y''+4y=0$;　　(3) $y''-6y'+9y=0$;

(5) $y''+2y'+5y=0$;　　(6) $y''+2ay'+b^2y=0\ \ (b>a>0)$;

(7) $y'''-3y''+9y'+13y=0$;　　(8) $y^{(4)}-y=0$;

(9) $y^{(5)}+3y^{(4)}+3y'''+y''=0$;　　(10) $y^{(4)}+2y''+y=0$.

解　(1)　特征方程为

$$r^2+2r-3=0,$$

其根为 $r_1=1,\ r_2=-3$，所以微分方程的通解为

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^x.$$

(2)　特征方程为

$$r^2+r=0,$$

其根为 $r_1=0,\quad r_2=-1$，所以微分方程的通解为

$$x=C_1+C_2e^{-t}.$$

(3)　特征方程为

$$r^2+4=0,$$

其根为 $r_1=2i,\quad r_2=-2i$，所以微分方程的通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

(4)　特征方程为

$$r^2-6r+9=0,$$

其根为 $r_{1,2}=3$，所以微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{3x}.$$

(5)　特征方程为

$$r^2+2r+5=0,$$

其根为 $r_1=-1+2i,\quad r_2=-1-2i$，所以微分方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

(6)　特征方程为

$$r^2+2ar+b^2=0,$$

其根为 $r_1=-a+\sqrt{b^2-a^2}i,\quad r_2=-a-\sqrt{b^2-a^2}i$，所以微分方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-ax}(C_1\cos\sqrt{b^2-a^2}x+C_2\sin\sqrt{b^2-a^2}x).$$

(7)　特征方程为

$$r^3-3r^2+9r+13=0,$$

其根为 $r_1=-1,\quad r_2=2+3i,\quad r_3=2-3i$ ，所以微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{2x}(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x).$$

(8)　特征方程为

$$r^4-1=0,$$

其根为 $r_1=-1,\quad r_2=1,\quad r_3=-i,\quad r_4=i$ ，所以微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

(9)　特征方程为

$$r^5+3r^4+3r^3+r^2=0,$$

其根为 $r_{1,2}=0,\quad r_{3,4,5}=-1$ ，所以微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2x+e^{-x}(C_3+C_4x+C_5x^2).$$

(10) 特征方程为

$$r^4+2r^2+1=0,$$

其根为 $r_{1,2}=i,\quad r_{3,4,}=-i$ 所以微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$

2. 求下列微分方程初值问题的解:

(1) $y''-y=0,\ y\big|_{x=0}=0,\ y'\big|_{x=0}=1$;

(2) $y''+4y'+13y=0,\ y\big|_{x=0}=0,\ y'\big|_{x=0}=3$;

(3) $y''+4y'+4y=0,\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=1$;

(4) $y'''+9y'=0,\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=0,\ y''\big|_{x=0}=0$;

(5) $y^{(4)}-a^4y=0\ (a>0),\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=0,\ y''\big|_{x=0}=-a^2,\ y'''\big|_{x=0}=0$.

解 (1) 特征方程为

$$r^2-1=0,$$

其根为 $r_1=1,\quad r_2=-1$，所以微分方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{x},$$

将初始条件代入，得 $C_1=-\frac{1}{2},\quad C_2=\frac{1}{2}$，初值问题的解为

$$y=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}).$$

(2) 特征方程为

$$r^2+4r+13=0,$$

其根为 $r_1=-2+3i,\quad r_2=-2-3i$ ，所以微分方程的通解为

$$y=(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)e^{-2x},$$

将初始条件代入，得 $C_1=0,\quad C_2=1$，初值问题的解为

$$y = e^{-2x}\sin 3x .$$

(3)　特征方程为

$$r^2 + 4r + 4 = 0 ,$$

其根为 $r_{1,2} = -2$，所以微分方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} ,$$

将初始条件代入，得 $C_1 = 1,\quad C_2 = 3$，初值问题的解为

$$y = (1 + 3x)e^{-2x} .$$

(4)　特征方程为

$$r^3 + 9r = 0 ,$$

其根为 $r_{1,2} = \pm 3i,\quad r_3 = 0$ ，所以微分方程的通解为

$$y = C_1 + C_2\cos 3x + C_3\sin 3x ,$$

将初始条件代入，得 $C_1 = 1,\quad C_2 = 0,\quad C_3 = 0$，初值问题的解为

$$y = 1 .$$

(5)　特征方程为

$$r^4 - a^4 = 0 ,$$

其根为 $r_{1,2} = \pm a,\quad r_{3,4} = \pm ai$，　所以微分方程的通解

$$y = C_1 e^{-ax} + C_2 e^{ax} + C_3\cos ax + C_4\sin ax ,$$

将初始条件代入，得 $C_1 = C_2 = C_4 = 0,\quad C_3 = 1$，初值问题的解为

$$y = \cos ax .$$