第十章总习题

1. 填空题

(1) 设平面曲线 L 为下半圆 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ __π__；

(2) 设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$，则曲线积分 $\oint_L (2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y$ 的值是 __-18π__；

(3) 设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}u)=$ __$\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$__ .

解 (1) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_L \mathrm{d}s=\pi.$

(2) $\oint_L (2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=\iint\limits_D [(2x-4)-(2x-2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=-18\pi.$

(3) $\mathbf{grad}u=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\right),$

$$\mathrm{div}(\mathbf{grad}u)=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

2. 单项选择题

(1) 若 Σ 是 xOy 平面上方的抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$；且 $f(x,y,z)$ 等于 x^2+y^2，则曲面积分 $\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 的物理意义为(B).

(A) 表示面密度为 1 的曲面 Σ 的质量;

(B) 表示面密度为 1 的曲面 Σ 对 z 轴的转动惯量;

(C) 表示面密度为 x^2+y^2 的曲面 Σ 对 z 轴的转动惯量;

(D) 表示面密度为 1 的流体通过曲面 Σ 指定侧的流量.

(2) 设曲面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$，$S_1$ 为 S 在第一卦限的部分，则有(C).

(A) $\iint\limits_S x\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$;　　(B) $\iint\limits_S y\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1} y\mathrm{d}S$;

(C) $\iint\limits_S z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$;　　(D) $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1} xyz\mathrm{d}S$.

(3)　设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，S_1 为 S 在第一卦限部分的外侧，则积分 $\oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于(D).

(A)　$8\iint\limits_{S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　(B)　$4\iint\limits_{S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(C)　$2\iint\limits_{S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　(D)　0.

解　(1)　面密度为 1 的曲面 Σ 的质量为 $\iint\limits_\Sigma \mathrm{d}S$；面密度为 1 的曲面 Σ 对 z 轴的转动惯量为 $\iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)\mathrm{d}S$；面密度为 x^2+y^2 的曲面 Σ 对 z 轴的转动惯量为 $\iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)^2\mathrm{d}S$；若令流体的流速为 $\boldsymbol{A}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$，面密度为 1，则流体通过曲面 Σ 指定侧的流量为

$$\iint\limits_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

故应选 B.

(2)　S 及 S_1 如图 10.60 所示. 易知

$$\iint\limits_S x\mathrm{d}S=\iint\limits_S y\mathrm{d}S=\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S=0,$$

而 $\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S>0,\ \iint\limits_{S_1} y\mathrm{d}S>0,\ \iint\limits_{S_1} xyz\mathrm{d}S>0$，因此 A, B, D 均错.

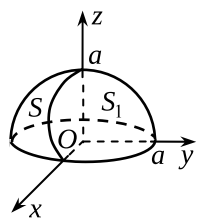

图 10.60

又

$$\iint\limits_S z\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^3,$$

$$\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} x\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=a\int_0^a\frac{\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho\qquad(\text{令 }\rho=a\sin t\,)$$

$$=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t}{a\cos t}\mathrm{d}t=a^3\,\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}\pi a^3,$$

故应选 C.

(3)　S 及 S_1 如图 10.61 所示. 由高斯公式，可得

$$\oiint_{S} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\Omega} (2x+2y+2z)\mathrm{d}v = 0. \qquad \text{(利用三重积分的对称性可得)}$$

而 S_1: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，取上侧，S_1 的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ 1\right),$$

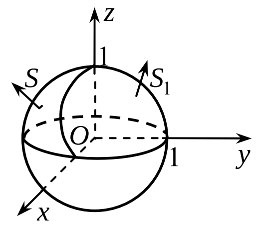

图 10.61

且 S_1 在 xOy 面上的投影域为

$$D_{xy}: x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

故

$$\iint_{S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_1} \left(x^2\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y^2\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{x^3+y^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 1 - x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0,$$

所以 A, B, C 均错，只能选 D.

3. 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L (x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta\ \ (0 \le \theta \le 2\pi),$$

n 为正整数;

(2) 计算 $\int_L (x^2-2y)\mathrm{d}x + (3x+y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$，其中 L 是由直线 $x+2y=2$ 上从 $A(2,0)$ 到 $B(0,1)$ 的一段及圆弧 $x=-\sqrt{1-y^2}$, 上从 $B(0,1)$ 到 $C(-1,0)$ 的一段连接而成的有向曲线;

(3) $\int_L (2xy+3x\sin x)\mathrm{d}x + (x^2-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$，其中 L 是从点 $O(0,0)$ 经摆线 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ 到 $A(\pi a, 2a)$ 的一段弧;

(4) $\oint_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 其中 $\boldsymbol{F}=(x+y, x-y)$，$L$ 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 沿逆时针一周.

解 (1) $L: \begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta \end{cases}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$，故

$$\oint_L (x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(a^2)^{\frac{n}{2}}a\,\mathrm{d}\theta=a^{n+1}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi a^{n+1}.$$

(2) 如图 10.62 所示，$L=AB+\widehat{BC}$，其中

AB：$x=2-2y$，y 从 0 变动到 1，

$\widehat{BC}$：$x=-\sqrt{1-y^2}$，y 从 1 变动到 0.

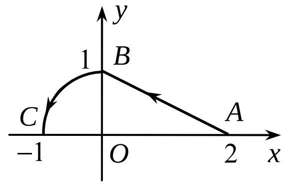

图 10.62

$$\int_L (x-2y)\mathrm{d}x+(3x+ye^y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{AB}(x^2-2y)\mathrm{d}x+(3x+ye^y)\mathrm{d}y+\int_{\widehat{BC}}(x^2-2y)\mathrm{d}x+(3x+ye^y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(-8y^2+14y-2+ye^y)\mathrm{d}y+\int_1^0\left(y\sqrt{1-y^2}+\frac{y^2-3}{\sqrt{1-y^2}}+ye^y\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(-8y^2+14y-2)\mathrm{d}y-\int_0^1\left(y\sqrt{1-y^2}+\frac{y^2-3}{\sqrt{1-y^2}}\right)\mathrm{d}y=2+\frac{5}{4}\pi.$$

(3) 令 $P(x,y)=2xy+3x\sin x$，$Q(x,y)=x^2-ye^y$，易知

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x,$$

因此曲线积分在整个 xOy 平面内与路径无关. 选取特殊路径 $L=OB+BA$ (如图 10.63 所示)，其中

OB：$y=0$，x 从 0 变动到 πa，

BA：$x=\pi a$，y 从 0 变动到 $2a$.

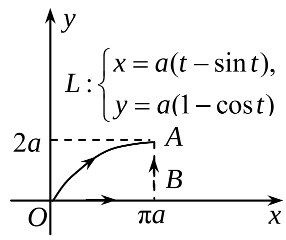

图 10.63

$$\int_L(2xy+3x\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-ye^y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{OB}(2xy+3x\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-ye^y)\mathrm{d}y+\int_{BA}(2xy+3x\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-ye^y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi a}3x\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{2a}(\pi^2a^2-ye^y)\mathrm{d}y$$

$$=-3\int_0^{\pi a}x\mathrm{d}\cos x+\pi^2a^2\cdot 2a-\int_0^{2a}y\mathrm{d}e^y$$

$$=-3(x\cos x-\sin x)\Big|_0^{\pi a}+2\pi^2a^3-(ye^y-e^y)\Big|_0^{2a}$$

$$=-3[\pi a\cos(\pi a)-\sin(\pi a)]+2\pi^2a^3-(2ae^{2a}-e^{2a}+1).$$

(4) 设 D 为 L 所围成的平面有界闭区域，根据格林公式，可得

$$\oint_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_L (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y = \iint_D (1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

4. 计算$\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中$L$为

(1) 域$D=\{(x,y)\,|\,a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$的正向边界$(a>0,b>0)$;

(2) 圆周$x^2+y^2=a^2$的正向$(a>0)$;

(3) 正方形$|x|+|y|=1$的正向;

(4) 曲线$y=\pi\cos x$上从点$A(-\pi,-\pi)$到$B(\pi,-\pi)$的一段弧.

解 令$P(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=-\frac{x-y}{x^2+y^2}$，易知

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad (x,y)\ne 0,$$

故曲线积分$\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$在不包含坐标原点的平面单连通区域上与路径无关.

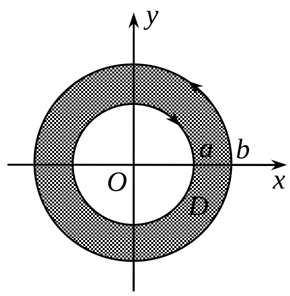

图 10.64

(1) L为封闭曲线, 如图 10.64 所示, 记L所围的区域为D, 则D不包含坐标原点, 故有

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0.$$

(2) L为封闭曲线, 如图 10.65 所示, 但L所围区域包含坐标原点, 不能直接使用格林公式. 作圆周

$$l:\ x^2+y^2=r^2,$$

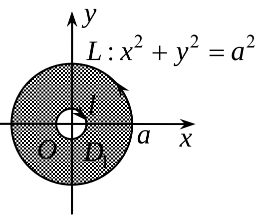

图 10.65

其中圆的半径r充分小, 使得圆所围的区域完全包含在L所围的区域中, 且取顺时针方向. 记L和l所围的区域为D_1，则有

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{L+l} \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-\oint_l \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\iint_{D_1} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{r^2}\int_{2\pi}^{0}[(r\cos t+r\sin t)\cdot(-r\sin t)-(r\cos t-r\sin t)\cdot r\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{2\pi}^{0}\mathrm{d}t=-2\pi.$$

(3) L为封闭曲线, 如图 10.66 所示, 但L所围区域包含坐标原点. 采用与(2)类

似的方法，作圆周

$$l:\ x^2+y^2=r^2,$$

取顺时针方向，则有

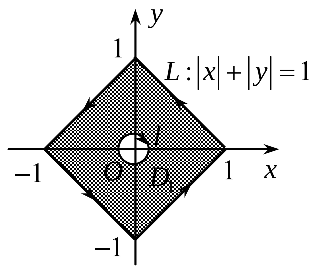

图 10.66

$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\oint_{L+l} \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-\oint_l \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=-2\pi.$$

(4) L 不封闭，如图 10.67 所示. 由于曲线积分 $\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在包含坐标原点的平面单连通区域上与路径无关，故取折线路径 $l=AC+CD+DB$，其中

$AC:\ x=-\pi,\quad y$ 从 $-\pi$ 变动到 π，

$CD:\ y=\pi,\quad x$ 从 $-\pi$ 变动到 π，

$DB:\ x=\pi,\quad y$ 从 π 变动到 $-\pi$.

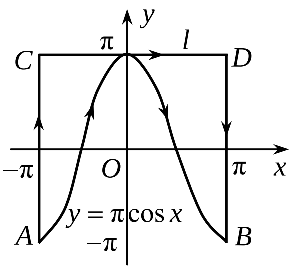

图 10.67

$$\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_l \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\int_{AC} \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\int_{CD} \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$+\int_{DB} \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-(-\pi-y)}{\pi^2+y^2}\mathrm{d}y+\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x+\pi}{x^2+\pi^2}\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{-\pi} \frac{-(\pi-y)}{\pi^2+y^2}\mathrm{d}y \qquad \text{(利用对称性)}$$

$$=6\pi\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi^2+y^2}\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\pi.$$

5. 计算下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是介于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$;

(2) $\oiint\limits_{\Sigma} 2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成的区域的边界曲面的外侧;

(3) $\iint\limits_{\Sigma} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由 xOy 平面上的弧段 $x=\mathrm{e}^y\,(0\le y\le a)$ 绕 x 轴所成的旋转曲面的凸的一侧;

(4) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，其中$\Sigma$为曲面$1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}\ (z\geq 0)$的上侧;

(5) $\oiint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为柱面$x^2+y^2=9$与平面$z=0,\ z=y-3$所围成的区域的边界曲面的外侧.

解 (1) 如图 10.68 所示，Σ在yOz面上的投影域为

$$D_{yz}:-R\leq y\leq R,\ 0\leq z\leq H.$$

$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中

$$\Sigma_1:\ x=\sqrt{R^2-y^2},\ \Sigma_2:\ x=-\sqrt{R^2-y^2},$$

$$\mathrm{d}S=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

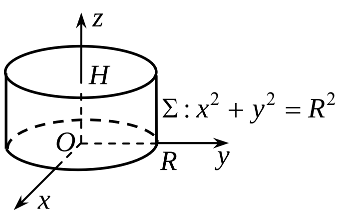

图 10.68

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=2\iint\limits_{Dyz}\frac{1}{R^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_{-R}^{R}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\int_0^H\frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}z=2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

(2) Σ如图 10.69 所示，设Ω为Σ所围的空间闭区域(Σ为Ω的正向边界)，则利用高斯公式，可得

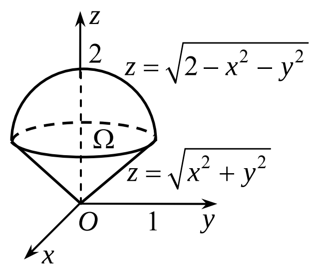

图 10.69

$$\oiint\limits_{\Sigma}2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2z+z-2z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^1(\rho-\rho^3)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}.$$

(3) Σ如图 10.70 所示，Σ不封闭，添加有向圆盘面

$$\Sigma_1:\ x=\mathrm{e}^a,\ y^2+z^2\leq a^2，取右侧.$$

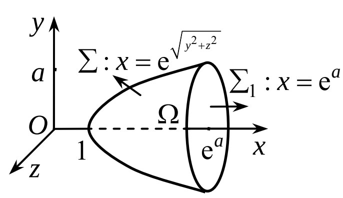

图 10.70

设 Ω 为 Σ 和 Σ_1 所围成的空间闭区域(Σ 和 Σ_1 构成 Ω 的正向边界), 则利用高斯公式, 可得

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Sigma_1} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iiint_{\Omega} (-4x + 8x - 4x)\mathrm{d}v - \iint_{\Sigma_1} 2(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 0 - 2(1-\mathrm{e}^{2a})\iint_{D_{yz}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\pi a^2(\mathrm{e}^{2a}-1).
\end{aligned}$$

(4) Σ 为椭圆抛物面, 如图 10.71 所示, 其顶点为 $(2,1,5)$. Σ 不封闭, 不能直接应用高斯公式.

另一方面, 若令

$$P(x,y,z) = \frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \quad Q(x,y,z) = \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},$$

$$R(x,y,z) = \frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},$$

易知 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在不包含原点的区域上具有一阶连续的偏导数, 且

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} = \frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} = \frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} = \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

从而 $\dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} = 0.$

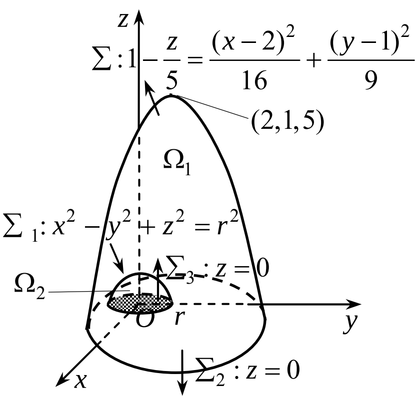

图 10.71

为使用高斯公式, 给 Σ 添加上半球面

$$\Sigma_1:\ x^2+y^2+z^2=r^2,\ z \ge 0,\ \text{取下侧},$$

及平面域

$$\Sigma_2:\ z=0,\ x^2+y^2 \ge r^2,\ \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} \le 1,\ \text{取下侧},$$

其中球面的半径 r 充分小, 使得球面在 xOy 面上的投影完全包含在椭圆抛物面 Σ 在

xOy 面上的投影中. 设 Ω_1 为 Σ, Σ_1 和 Σ_2 所围成的空间闭区域(Σ, Σ_1 和 Σ_2 构成 Ω_1 的正向边界). 应用高斯公式, 有

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}-\iint_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$-\iint_{\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$=\iiint_{\Omega_1}0\mathrm{d}v-\frac{1}{r^3}\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0$$

$$=-\frac{1}{r^3}\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意到 Σ_1 仍不封闭, 故添加圆盘面 Σ_3: $z=0$, $x^2+y^2\le r^2$, 取上侧(见图 10.71 中阴影部分). 设 Ω_2 为 Σ_1 和 Σ_3 所围成的空间闭区域(Σ_1 和 Σ_2 构成 Ω_2 的负向边界), 则根据高斯公式, 可得

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=-\frac{1}{r^3}\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{r^3}\Big(\oiint_{\Sigma_1+\Sigma_3}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_3}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)$$

$$=\frac{1}{r^3}\iiint_{\Omega_2}(1+1+1)\mathrm{d}v-0=\frac{1}{r^3}\times3\times\frac{2}{3}\pi r^3=2\pi.$$

(5) 如图 10.72 所示, 设 Ω 为 Σ 所围的空间闭区域(Σ 为 Ω 的正向边界), 则利用高斯公式, 可得

$$\oiint_{\Sigma}yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}(0+2y+0)\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}2y\mathrm{d}v$$

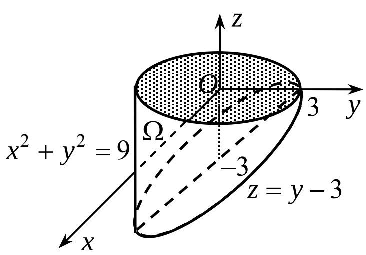

图 10.72

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3\mathrm{d}\rho\int_{\rho\sin\theta-3}^0\rho^2\sin\theta\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3\rho^2\sin\theta(3-\rho\sin\theta)\mathrm{d}\rho$$

$$=2\int_0^{2\pi}(27\sin\theta-\frac{81}{4}\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{81}{2}\pi.$$

6. 已知曲线L的方程为$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$，且曲线上任一点的线密度与该点到原点的一段曲线的弧长成正比(比例系数为k)，求曲线上位于原点O与点$P(3,2\sqrt{3})$之间的一段弧的质量.

解 曲线上任一点(x,y)的线密度为

$$\mu(x,y)=k\int_{(0,0)}^{(x,y)}\mathrm{d}s=k\int_0^x\sqrt{1+(x^{\frac{1}{2}})^2}\mathrm{d}x=k\int_0^x\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}k[(1+x)^{\frac{3}{2}}-1],$$

故所求的质量为

$$M=\int_{(0,0)}^{(3,2\sqrt{3})}\mu(x,y)\mathrm{d}s=\int_0^3\frac{2}{3}k[(1+x)^{\frac{3}{2}}-1]\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}k\int_0^3[(1+x)^2-(1+x)^{\frac{1}{2}}]\mathrm{d}x=\frac{98}{9}k.$$

7. 设D是以分段光滑L曲线为边界的平面有界闭区域，$P(x,y)$，$Q(x,y)$在D上有一阶连续的偏导数，则有关系式

$$\oint_{\partial D^+}[P\cos(n,x)+Q\cos(n,y)]\mathrm{d}s=\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})\mathrm{d}\sigma,$$

其中$\cos(n,x)$，$\cos(n,y)$为曲线L的外法线向量的方向余弦. 这个公式是格林公式的另一表达形式.

解 如图 10.73 所示，设曲线L上与L正方向一致的单位切向量为$\boldsymbol{T}=(\cos\alpha,\ \cos\beta)$，$L$的外法线单位向量为$\boldsymbol{n}=(\cos(n,x),\ \cos(n,y))$，则有

$$\cos(n,x)=\cos\beta,\ \cos(n,y)=-\cos\alpha,$$

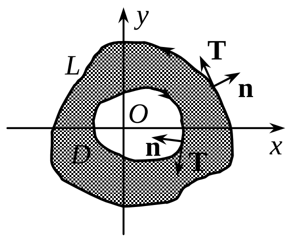

图 10.73

从而

$$\oint_{\partial D^+}[P\cos(n,x)+Q\cos(n,y)]\mathrm{d}s$$

$$=\oint_{\partial D^+}[P\cos\beta-Q\cos\alpha]\mathrm{d}s=\oint_{\partial D^+}-Q\mathrm{d}x+P\mathrm{d}y=\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})\mathrm{d}\sigma.$$

8. 设在半平面 $x>0$ 内有力 $\boldsymbol{F}=-\frac{k}{\rho^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$ 构成力场，其中 k 为常数，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 证明此力场 $\boldsymbol{F}$ 为保守力场, 即在此力场中场力所作的功与路径无关.

解　在此力场中场力所作的功为

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L -\frac{kx}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y).$$

令 $P(x,y)=-\frac{kx}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$, $Q(x,y)=-\frac{ky}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$, 易知

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{3kxy}{(\sqrt{x^2+y^2})^5},$$

因此在此力场中场力所作的功与路径无关, 即此力场为保守力场.

9. 求圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介于曲面 $z=a+\frac{x^2}{a}$ 与平面 $z=0$ 之间的面积 $(a>0)$.

解　将待求面积的曲面向 zOx 面投影, 得投影域(见图 10.74)为

$$D_{zx}:\ -a\le x\le a,\ 0\le z\le a+\frac{x^2}{a}.$$

$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中

$$\Sigma_1:\ y=\sqrt{a^2-x^2},\ \Sigma_2:\ y=-\sqrt{a^2-x^2},$$

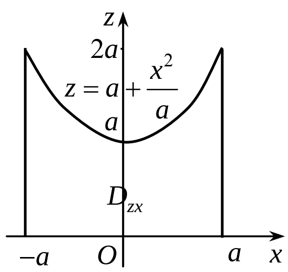

图 10.74

$\mathrm{d}S=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$. 所求的面积为

$$A=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}\mathrm{d}S=2\iint_{Dzx}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_0^{a+\frac{x^2}{a}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z=2\int_{-a}^{a}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}(a+\frac{x^2}{a})\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^a(\frac{2a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{d}x$$

$$=4[2a^2\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a-(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a})\Big|_0^a]=3\pi a^2.$$

10. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中 $\boldsymbol{A} = \dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$，$\Sigma$ 是上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的下侧.

解 Σ 如图 10.75 所示，Σ 不封闭，添加圆盘面

$$\Sigma_1: z = 0,\ x^2 + y^2 \le R^2，取上侧.$$

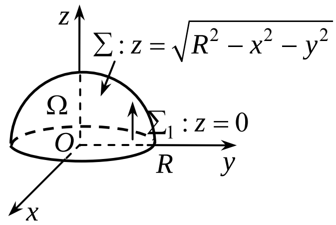

图 10.75

设 Ω 为 Σ 和 Σ_1 所围成的空间闭区域(Σ 和 Σ_1 构成 Ω 的负向边界)，则有

$$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{R} \iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{R}\left(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)$$

$$= \frac{1}{R}\left(-\iiint\limits_{\Omega} (1+1+1)\mathrm{d}v - 0\right) = -\frac{3}{R} \times \frac{2}{3}\pi R^3 = -2\pi R^2.$$

11. 求向量场 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 的通量:

(1) 穿过锥体 $\{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le h\}$ 的侧表面(由里向外);

(2) 穿过该锥体的底面(由里向外);

(3) 穿过该锥体的全表面(由里向外).

解 (1) 如图 10.76 所示，向量场穿过锥体的侧表面 Σ_1(由里向外)的通量为

$$\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

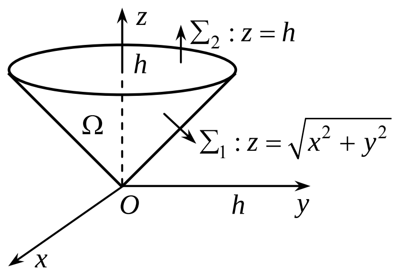

图 10.76

Σ_1: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$，Σ_1 上任一点 (x, y, z) 处的法向量为 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1\right)$，将组合曲面积分化为关于坐标 x, y 的非组合曲面积分，可得

$$\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_1} \left(x\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma_1}\left(-\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(2) 向量场穿过锥体的底面Σ_2(由里向外)的通量为

$$\iint_{\Sigma_2}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_2}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=h\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi h^3.$$

(3) 向量场穿过锥体全表面(由里向外)的通量为

$$\begin{aligned}&\oiint_{\Sigma_1+\Sigma_2}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=0+\pi h^3=\pi h^3.\end{aligned}$$

注: 本题(1)也可用高斯公式求解如下:

设Ω为锥体域(Σ_1和Σ_2构成Ω的正向边界), 则有

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\oiint_{\Sigma_1+\Sigma_2}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_2}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint_{\Omega}(1+1+1)\mathrm{d}v-\pi h^3=3\times\frac{1}{3}\pi h^3-\pi h^3=0.\end{aligned}$$

12. 设$f(u)$在$(-\infty,+\infty)$内有连续导数, L为xOy平面内任意一条光滑的闭曲线, 证明:

$$\oint_L f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0.$$

证 令$P(x,y)=yf(xy)$, $Q(x,y)=xf(xy)$, 易知

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=f(xy)+xyf'(xy),$$

因此曲线积分$\oint_L f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0$.

13. 计算$\oint_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中$L$是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线, 从正向看去, L为逆时针方向.

解 如图10.77所示, 取Σ为平面$x+y+z=2$上被Γ所围的部分, 取上侧, 则Γ是Σ的正向边界.

Σ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，利用斯托克斯公式，可得

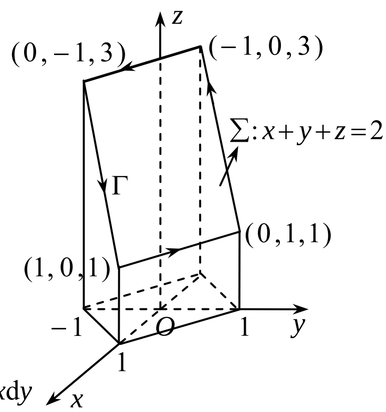

图 10.77

$$\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix}$$

$$=\iint_\Sigma (-2y-4z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-2z-6x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_\Sigma (-4y-6z-8x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}} (-4y-6(2-x-y)-8x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}} (2y-2x-12)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{(利用对称性)}$$

$$=-12\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=-12(\sqrt{2})^2=-24.$$