第八节

级数的应用

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 近似计算

1. 函数值的近似计算

2. 定积分的近似计算

(二) 欧拉(Euler)公式

1. 复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + i v_n)$ ①

① 收敛： 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v$ 均收敛;

① 绝对收敛:

$$若\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n+iv_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n^2+v_n^2}收敛.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)\text{绝对收敛}$$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}v_n\ \text{绝对收敛}$$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)\ \text{收敛}.$$

$$\left|u_n\right|\le\sqrt{u_n^{\ 2}+v_n^{\ 2}}$$

$$\left|v_n\right|\le\sqrt{u_n^{\ 2}+v_n^{\ 2}}$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

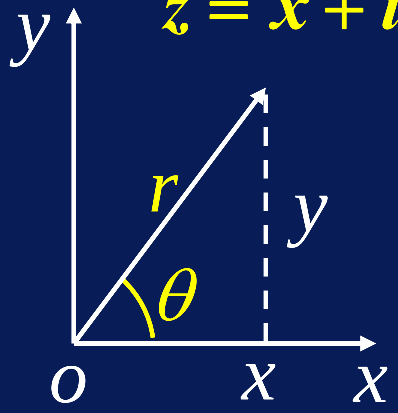
（也称欧拉公式）

- **复数的指数形式**

$z = x + i\,y = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = r\,e^{i\theta}$

$z = x + i\,y$



西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

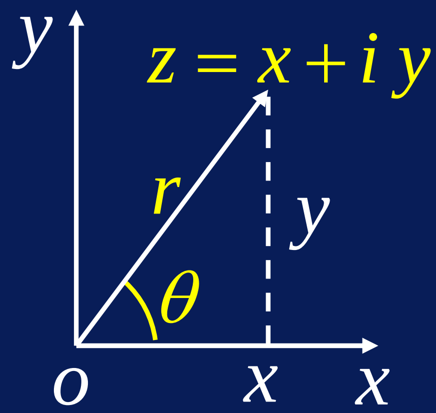
- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(德莫弗公式)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$



特别

$$e^{x+i\,y} = e^{x}\cdot e^{i\,y} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

$$\left|e^{x+i\,y}\right| = \left|e^{x}(\cos y + i\sin y)\right| = e^{x}$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

二、典型例题

例1 计算 $\sqrt[3]{130}$ 的近似值，精确到 10^{-4}.

$$m=\frac{1}{3}$$

$$x=\frac{1}{25}$$

解 $\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{125+5}=5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}$

二项展开式

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k+\cdots$$

$$\sqrt[3]{130}=5\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25}-\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{2!}\left(\frac{1}{25}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{3!}\left(\frac{1}{25}\right)^3-\cdots\right]$$

$$\sqrt[3]{130} = 5\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25} - \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{2!}\left(\frac{1}{25}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{3!}\left(\frac{1}{25}\right)^3 + \cdots\right]$$

属莱布尼茨交错级数　$\left(因\ u_n \geq u_{n+1} \to 0\right)$

n 项余和满足　: $|r_n| < u_{n+1}$

取 $n = 2$ (前三项), $\quad |r_2| < u_3$

$$= 5\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{3\,!}\left(\frac{1}{25}\right)^3 = \frac{1}{81\cdot 625} < \frac{1}{80600} < 10^{-4}$$

$$故\ \sqrt[3]{130} \approx 5[1 + \frac{1}{3}.\frac{1}{5} - \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{2!}\left(\frac{1}{25}\right)$$

$$= 5 + \frac{24}{1125} \approx 5.0658$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例2 求 $\ln 2$ 的近似值，准确到 10^{-4}.

解 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \quad (-1<x\le 1)$

$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots \quad (-1\le x<1)$

故 $\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

$=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right) \quad (-1<x<1)$

令 $\frac{1+x}{1-x}=2$ 得 $x=\frac{1}{3}$，有

$$\ln 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\cdots\right]$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

取前四项,

$$|r_4| = 2\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}} + \cdots\right)$$

$$< \frac{2}{3^{11}}\left(1 + \frac{1}{9} + (\frac{1}{9})^2 + \cdots\right) = \frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4\cdot 3^9}$$

$$= \frac{1}{78732} < 0.2\times 10^{-4}$$

故 $\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right) \approx 0.6931$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例3 求积分$\int_0^{0.2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的近似值，精确到 10^{-6}.

解 $$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

逐项积分，得

$$\int_0^{0.2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{0.2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{0.2}x^{2n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^{0.2}$$

$$=0.2-\frac{1}{3}(0.2)^3+\frac{1}{2!\cdot 5}(0.2)^5-\frac{1}{3!\cdot 7}(0.2)^7+\cdots$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\int_0^{0.2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$$
$$= 0.2 - \frac{1}{3}(0.2)^3 + \frac{1}{2!\cdot 5}(0.2)^5 - \frac{1}{3!\cdot 7}(0.2)^7 + \cdots$$

莱布尼茨交错级数　，取前三项 ，则误差为

$$|r_3| < \frac{1}{3!\cdot 7}(0.2)^7 = \frac{1}{3281250} < 10^{-6}$$

故 $\int_0^{0.2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x \approx 0.2 - \frac{1}{3}(0.2)^3 + \frac{1}{2!\cdot 5}(0.2)^5$

$$\approx 0.2 - 0.0026667 + 0.0000320$$

于是　$\int_0^{0.2} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x \approx 0.197365$.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例4 计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

解 因 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 非广义积分, 定义 $f(0)=1$, 则连续.

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

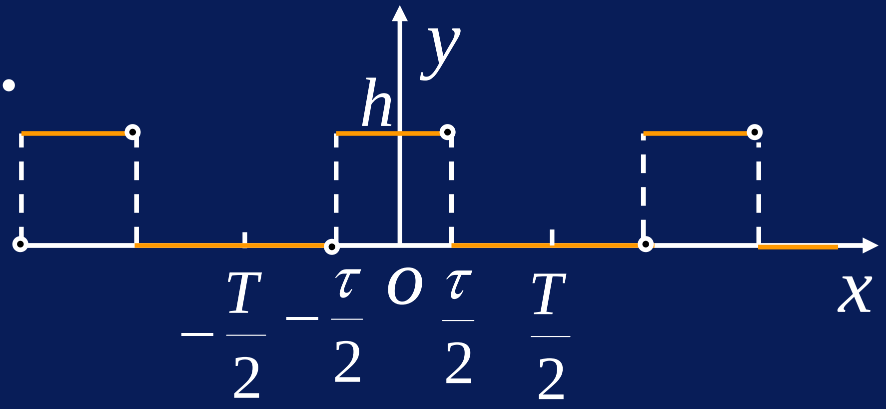
$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\underline{1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}+\cdots$$

$$\approx 1-0.05556+0.00167\quad\approx 0.9461$$

$$|r_3|<\frac{1}{7\cdot 7!}=\frac{1}{35280}<0.3\times 10^{-4}$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

*例5 把宽为 τ ,高为 h ,周期为 T 的矩形波展成复数形式的傅里叶级数.



解 一个周期 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 内的函数表达式

$$u(t)=\begin{cases} h, & -\frac{\tau}{2}\le t<\frac{\tau}{2} \\ 0, & -\frac{T}{2}\le t<-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\le t<\frac{T}{2} \end{cases}$$

傅里叶系数（复数形式）:

$$c_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} h\,\mathrm{d}t=\frac{h\tau}{T}$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}u(t)e^{-i\frac{2n\pi t}{T}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}h\,e^{-i\frac{2n\pi t}{T}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{h}{T}\left[-\frac{T}{2n\pi i}e^{-i\frac{2n\pi t}{T}}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}=\frac{h}{n\pi}\cdot\frac{-1}{2i}\left[e^{-i\frac{n\pi\tau}{T}}-e^{i\frac{n\pi\tau}{T}}\right]$$

$$=\frac{h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\qquad(n=\pm1,\pm2,\cdots)$$

故 $$u(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{h}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}e^{i\frac{2n\pi t}{T}}$$

$$\left(t\neq\pm\frac{\tau}{2}+kT,\ k=0,\pm1,\cdots\right)$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

三、同步练习

1. 计算 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

2. 利用 $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$,求 $\sin 9°$ 的近似值 , 并估计误差.

3. 计算积分 $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 精确到 10^{-4}. (取 $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0.56419$)

*4. 将 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2h}, & |x|<h \\ 0, & h\le |x|\le l \end{cases}$

展开成复数形式的傅里 叶级数.

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

四、同步练习解答

1. 计算 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

解 $\sqrt[5]{240}=\sqrt[5]{243-3}=3(1-\frac{1}{3^4})^{1/5}$

$$=3\left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}-\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}-\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}-\cdots\right)$$

$$|r_2|=3\left(\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}+\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5^4\cdot 4!}\cdot\frac{1}{3^{16}}+\cdots\right)$$

$$<3\cdot\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}\left[1+\frac{1}{81}+\left(\frac{1}{81}\right)^2+\cdots\right]<0.5\times 10^{-4}$$

故 $\sqrt[5]{240}\approx 3(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4})\approx 3-0.00741\approx 2.9926$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. 利用 $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$,求 $\sin 9°$ 的近似值，并估计误差.

解 角度化弧度 $9° = \dfrac{\pi}{180} \times 9 = \dfrac{\pi}{20}$ (弧度)

因 $$\sin\frac{\pi}{20} = \underline{\frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3} + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^7 + \cdots$$

$$\left|r_2\right| < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 < \frac{1}{120}(0.2)^5 < \frac{1}{3} \times 10^{-5}$$

故 $$\sin\frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3 \approx 0.157080 - 0.000646$$

$$\approx 0.15643$$

误差不超过 10^{-5}

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

3. 计算积分 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 精确到 10^{-4}. (取 $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0.56419$)

解 $$e^{-x^2} = 1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}}$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!} + \cdots\right)$$

欲使截断误差 $|r_n| < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n!(2n+1)\cdot 2^{2n}} < 10^{-4}$

则 n 应满足 $\sqrt{\pi}\cdot n!(2n+1)\cdot 2^{2n} > 10^4 \Longrightarrow n \geq 4$

取 $n = 4$, 得近似值

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}\right)$$

$$\approx 0.5205$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

*4. 将 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2h}, & |x|<h\\ 0, & h\le |x|\le l\end{cases}$

展开成复数形式的傅里 叶级数.

解 周期延拓 ,傅里叶系数 :

$$c_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2l}\int_{-h}^{h}\frac{1}{2h}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2l}$$

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-h}^{h}\frac{1}{2h}e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4lh}\,\frac{e^{-i\frac{n\pi}{l}x}}{-i\frac{n\pi}{l}}\Big|_{-h}^{h}$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$= \frac{1}{2n\pi h}\frac{e^{i\frac{n\pi h}{l}} - e^{-i\frac{n\pi h}{l}}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2n\pi h}\sin\frac{n\pi h}{l} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$f(x)$的(复数形式)傅里叶级数：

$$\frac{1}{2l} + \frac{1}{2\pi h}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi h}{l}\cdot e^{i\frac{n\pi x}{l}}$$

$$= \begin{cases} f(x) & -l \le x \le l, x \ne \pm h \\ \dfrac{1}{4h} & x = \pm h \end{cases}$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY