第三章　微分中值定理与导数的应用

本章基本要求

1. 理解罗尔定理和拉格朗日定理，了解柯西定理, 会用洛必达法则求不定式的极限.

2. 了解泰勒（Taylor）定理以及用多项式逼近函数的思想.

3. 理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求极值的方法. 会求解较简单的最大值与最小值的应用问题.

4. 会用导数判断函数图形的凹凸性和求拐点，会描绘一些简单函数的图形(包括水平和铅直渐近线).

5. 了解曲率和曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径.

6. 了解求方程近似解的二分法和切线法的思想.

第一节

微分中值定理

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 问题的提出

两个现象:

(1) 曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上至少有一点处的切线是水平的, 即

$$f'(\xi)=0.$$

(2) 变速直线运动在折返点处的瞬时速度为0, 即

$$s'(\xi)=0.$$

不同背景的两个现象，从数学的观点看，有一个共同点：

结论：　$\exists\, \xi \in (a,b)$，使

$$f'(\xi) = 0.$$

那么，在什么条件下此结论一定成立？

猜

(1) 在 $[a\,,b]$ 上连续；

(2) 在 $(a\,,b)$ 内可导；

(3) $f(a) = f(b)$.

(二) 罗尔中值定理

费马（Fermat）引理

如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有

$$f(x) \le f(x_0) \text{（或 } f(x) \ge f(x_0)\text{）}$$

则 $f'(x_0) = 0.$

定理3.1（罗尔中值定理）

若 $y = f(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导;

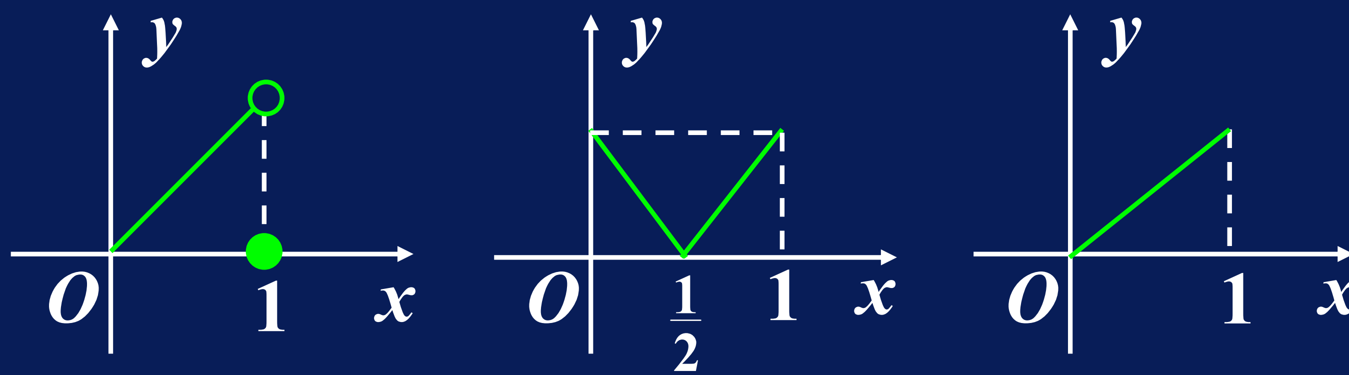
(3) $f(a) = f(b)$,

$\Longrightarrow$ 在(a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得

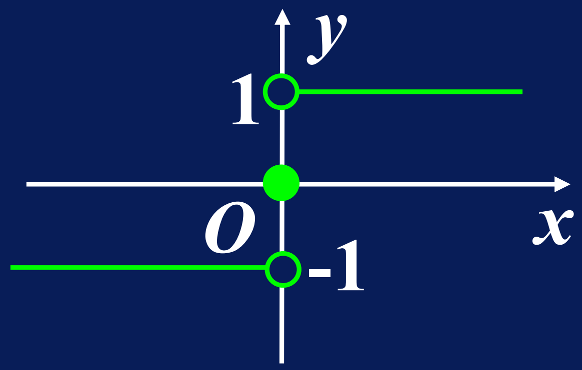
$$f'(\xi) = 0. \qquad (1.1)$$

注 1° 定理的条件是充分条件. 若定理的条件不全具备， 结论不一定成立.

条件不满足，结论不成立的例子:



2° 定理条件只是充分的，并非必要条件.



$f(x)=\operatorname{sgn} x$

$\forall \xi \in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$f'(\xi)=0.$

3° 使 $f'(\xi)=0$的点ξ不一定是$f(x)$的最值点.

4° 罗尔定理未指明ξ在(a,b)内的具体位置 .

(三) 拉格朗日中值定理

定理3.2（拉格朗日中值定理）

若 $y = f(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导;

$\longrightarrow$ 在(a, b)内至少存在一点ξ，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (1.2)$$

注 1° 与罗尔定理相比，去掉了条件(3):

$$f(a)=f(b)$$

2° 结论(1.2)亦可写成:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

3° 结论(1.2)的几何意义

设 $A(a,f(a))$，$B(b,f(b))$

$\overline{AB}$弦的斜率: $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

注 1° $\boxed{R} \xleftarrow[f(a)=f(b)]{\text{特例}} \boxed{L}$

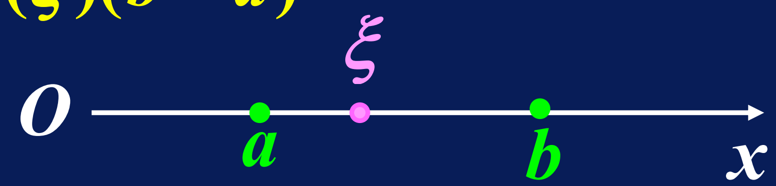
2° $b < a$, (1.2)也成立 .

3° (1.2)的其他形式:

(1) $\exists\, \xi \in (a, b)$, 使

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

(2) $\exists\, \theta \in (0, 1)$, 使



$$f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b-a)](b-a)$$

其中 $\theta = \dfrac{\xi - a}{b - a}$, $\xi = a + \theta(b-a)$.

拉格朗日中值定理的**有限增量形式:**

令 $a = x_0, b = x_0 + \Delta x$,

设 $f(x)$ 在$[x_0, x_0 + \Delta x]$上连续,

在$(x_0, x_0 + \Delta x)$内可导, 则有

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$= f'(\underbrace{x_0 + \theta\Delta x}_{\xi})\Delta x \quad (0 < \theta < 1)$$

拉氏公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

增量 Δy 的精确表达式

对比:

$$\Delta y \approx \mathrm{d}\, y = f'(x_0)\Delta x$$

$$(f'(x_0) \neq 0,\ |\Delta x| << 1)$$

推论 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且在 (a,b)内，恒有 $f'(x)=0$, 则 $f(x)$ 在$[a,b]$上是一个常数 .

注 推论中的闭区间 $[a,b]$可换成:

$$(a,b),$$

$$[a,b),$$

$$(a,+\infty),$$

$$(-\infty,+\infty)$$

等任何区间.

(四) 柯西中值定理

定理3.3（柯西中值定理）

若 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导;

(3) 在开区间 (a, b) 内 $F'(x) \neq 0$;

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \qquad (1.3)$$

几何解释:

设 $A(F(a),\ f(a)), B(F(b),\ f(b))$

$\overline{AB}$ 弦的斜率: $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$

$\overset{\frown}{AB}$上对应于 $x=\xi$的点 C处的切线斜率:

$$\left.\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\right|_{x=\xi}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}}\right|_{x=\xi}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

在曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$上至少有一点$C(F(\xi), f(\xi))$, 在该点处的切线平行于弦$\overline{AB}$

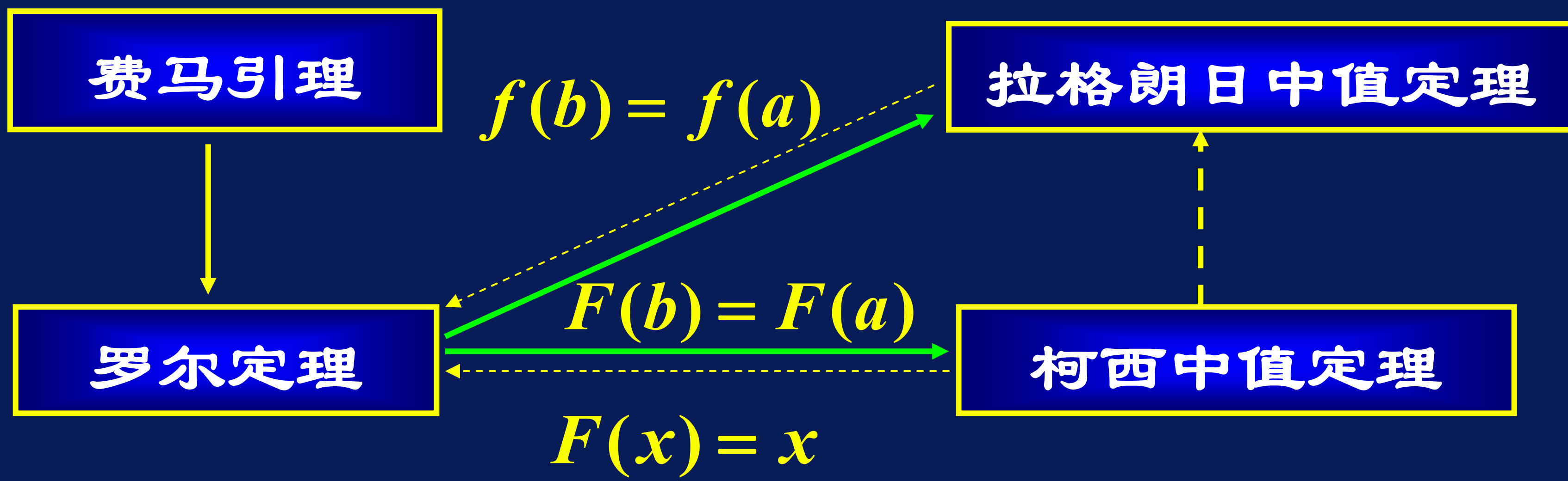
注 1° 当 $F(x)=x$ 时，$F(b)-F(a)=b-a,\ F'(x)=1,$

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

$$\Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

$$\boxed{R} \xleftarrow[f(a)=f(b)]{\text{特例}} \boxed{L} \xleftarrow[F(x)=x]{\text{特例}} \boxed{C}$$

2° 微分中值定理的条件、结论及关系



3° 微分中值定理的应用

(1) 证明恒等式

(2) 证明不等式

(3) 确定方程根的存在性

(4) 证明有关中值问题的结论

关键: 利用逆向思维构造辅助函数

二、典型例题

例1 证明方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 有且仅有一个小于1的正实根.

证 (1) 存在性 设 $f(x) = x^5 - 5x + 1$,

则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 且 $f(0) = 1,\ f(1) = -3.$

$f(0) \cdot f(1) < 0$ 由零点定理知, 存在

$x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0) = 0$,

即方程有小于 1 的正根 x_0.

(2) 唯一性

假设：另有 $x_1 \in (0,1)$，$x_1 \neq x_0$，使 $f(x_1)=0$，

不妨设 $x_0 < x_1$，则 $[x_0, x_1] \subset (0,1)$

$\because$ $f(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上可导，且 $f(x_0)=0=f(x_1)$

$\therefore$ 由罗尔定理，知 $\exists \xi \in (x_0, x_1) \subset (0,1)$，

使 $f'(\xi)=0$.

但当 $x \in (0,1)$ 时，$f'(x)=5(x^4-1)<0$，矛盾，

故假设不真！

综上所述，方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1的正实根.

例2 设$a_0, a_1, \cdots, a_n$为满足

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

的实数，证明方程：

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

在(0,1)内至少有一个实根 .

分析 令$F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$,

显然, $F(x)$在$[0, 1]$上连续，$F(0) = a_0$,

$F(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$， $F(0)F(1) \overset{?}{<} 0$,

由题设条件无法确定，故对$F(x)$不能用零点定理.

转换思路：

$$f'(x)=F(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

$$f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

若$f(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理的条件，则

$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$，即$F(\xi)=0$.

$$f(0)=0=f(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}$$

证　令$f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$,

显然, $f(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 且

$$\underline{f(0)=0}=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=\underline{f(1)},$$

由罗尔定理，可知$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$,

即　$a_0+a_1\xi+\cdots+a_n\xi^n=0$,

亦即方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$

在$(0,1)$内至少有一个实根 ξ.

例3 证明等式 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \quad (|x| \le 1).$

证 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$,

则 $f(x)$在[-1, 1] 上连续，在(-1, 1)内可导，且

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0$$

由推论可知

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x \equiv C \quad (|x| \le 1).$$

令 $x = 0$, 得 $C = \dfrac{\pi}{2}$. 故

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \ x \in [-1, 1].$$

例4 证明不等式 $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x>0).$

证 设 $f(t)=\ln(1+t)$，则 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉氏中值定理条件，因此应有

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0), \quad 0<\xi<x$$

即 $$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}, \qquad 0<\xi<x$$

因为 $$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x,$$

故 $$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x \qquad (x>0).$$

例5 若$f(x)$是$[a,b]$上的正值可微函数，求证存在$\xi\in(a,b)$，使得$\ln\dfrac{f(b)}{f(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a)$.

分析 将结论变形为 $\dfrac{\ln f(b)-\ln f(a)}{b-a}=\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}$

证 令$\varphi(x)=\ln f(x)$，则$\varphi(x)$在$[a,b]$上满足拉氏中值定理的条件，因此应有

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(b-a),$$

即

$$\ln\frac{f(b)}{f(a)}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a).$$

例6 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，证明：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

分析 结论可变形为：$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = \dfrac{f'(\xi)}{2\xi} = \left.\dfrac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}$.

证 设 $F(x) = x^2$,

则$f(x), F(x)$在$[0,1]$上满足柯西中值定理的条件

$\therefore \exists \xi \in (0, 1)$, 使

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f(1)-f(0)}{F(1)-F(0)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

思考: 1° 将结论变形成: $f'(\xi)-2\xi[f(1)-f(0)]=0$

如何构造辅助函数?

$$F(x)=f(x)-f(0)-x^2[f(1)-f(0)]$$

2° 将区间$[0,1]$换成$[a,b]$,结论变成:

$$(b^2-a^2)f'(\xi)=2\xi[f(b)-f(a)]$$

能否用柯西中值定理证明?

不能.因为(a,b)内可能包含 0, 不能保证:

$$F'(x)=2x\neq 0, x\in(a,b)$$

三、同步练习

1. 设 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$，证明方程 $f'(x)=0$有且仅有三个实根，并指出它们所在的区间.

2. 设$f(x)$在$[0,1]$上可导，且 $0<f(x)<1$, 又对于 $(0,1)$内的一切 x, $f'(x)\neq 1$, 证明方程 $f(x)=x$在$(0,1)$内有唯一的实根 .

3. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导， 且

$f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1,$ 证明存在$\xi\in(0,1)$,使

$f'(\xi)=1.$

4. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，其中

$a>0,b>0.$ 求证：方程$f(b)-f(a)=x\ln(\frac{b}{a})f'(x)$

在(a,b)内至少存在一个根 .

5. 若$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}.$$

6. 证明对$\forall x\in \mathrm{R}$，有$\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

7. 用中值定理证明：

当$x>0$,时，$x<\mathrm{e}^x-1<x\mathrm{e}^x$.

8.　用拉格朗日公式证明：当$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$时，

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.$$

9.　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，连接点$(a,f(a)),(b,f(b))$的直线和曲线$y=f(x)$交于$(c,f(c)),a<c<b$，证明：在(a,b)内至少存在一点ξ，使$f''(\xi)=0$.

10. 设$x_1 < x_2$且$x_1 x_2 > 0$, $f(x)$在$[x_1, x_2]$上连续，在(x_1, x_2)内可导, 证明存在$\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

11. 证明：当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$时, $\tan x > x + \dfrac{1}{3}x^3$.

四、同步练习解答

1. 设 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$，证明方程 $f'(x)=0$有且仅有三个实根，并指出它们所在的区间.

证 显然 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$内可导，且 $f(-1)=f(1)$，因此由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi_1\in(-1,1)$，使得 $f'(\xi_1)=0$.

同理，至少存在一点 $\xi_2\in(1,2)$，使得 $f'(\xi_2)=0$;

至少存在一点$\xi_3 \in (2, 3)$，使得$f'(\xi_3) = 0$.

由于$f'(x)$是三次函数，方程$f'(x) = 0$是x的三次代数方程，所以它最多有三个实根.

综上，方程$f'(x) = 0$恰有三个实根，分别在区间$(-1,1)$，$(1,2)$，$(2,3)$内.

2. 设$f(x)$在$[0,1]$上可导，且 $0 < f(x) < 1$，又对于 $(0,1)$内的一切 x, $f'(x) \neq 1$, 证明方程 $f(x) = x$在$(0,1)$内有唯一的实根 .

证　令$\varphi(x) = f(x) - x$, 则 $\varphi(x)$在$[0,1]$上连续，

又由 $0 < f(x) < 1$可知，

$$\varphi(0) = f(0) > 0, \varphi(1) = f(1) - 1 < 0,$$

根据零点定理可知，至少有一点$\xi \in (0,1)$，使得

$$\varphi(\xi) = 0.$$

再证零点的唯一性．

假设在$(0,1)$内还有一点ξ_1，使得$\varphi(\xi_1)=0.$

不妨设$\xi<\xi_1$，则$\varphi(x)$在$[\xi,\xi_1]$上满足罗尔定理

的条件，于是存在 $\eta\in(\xi,\xi_1)$，使得

$$\varphi'(\eta)=f'(\eta)-1=0,$$

这与$f'(x)\neq 1$矛盾．于是$\varphi(x)$在$(0,1)$内有唯一的

零点，即方程 $f(x)=x$在$(0,1)$内有唯一的实根．

3. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导， 且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$, 证明存在$\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=1$.

证 作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$, 易知$F(0)=0$.

因为$F(x)$在$[0,1]$上连续，又

$$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,$$

$$F(1)=f(1)-1=0-1=-1<0,$$

由连续函数介值定理知，存在$x_0 \in (\frac{1}{2},1)$, 使得

$$F(x_0)=0.$$

又 $F(0)=0$, 因此$F(x)$在$[0,x_0]$上满足罗尔

定理的条件，故存在$\xi \in (0,x_0) \subset (0,1)$,使得

$$F'(\xi)=0,$$

从而有 $f'(\xi)=1.$

4. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，其中$a>0,b>0$. 求证：方程$f(b)-f(a)=x\ln(\frac{b}{a})f'(x)$在$(a,b)$内至少存在一个根.

分析 方程等价于 $\ln\frac{b}{a}f'(x)-\frac{1}{x}[f(b)-f(a)]=0$,

令 $F(x)=\ln\frac{b}{a}[f(x)-f(a)]-[f(b)-f(a)]\ln\frac{x}{a}$,

问题转化为证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使$F'(\xi)=0$.

证 作辅助函数

$$F(x)=\ln\frac{b}{a}[f(x)-f(a)]-[f(b)-f(a)]\ln\frac{x}{a},$$

则$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$F(a)=$

$F(b)=0$，由罗尔定理，存在点$\xi\in(a,b)$，使

$$F'(\xi)=0,$$

即 $$\ln\frac{b}{a}f'(\xi)-[f(b)-f(a)]\frac{1}{\xi}=0,$$

亦即 $$\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi)=f(b)-f(a),$$

因此原方程在(a,b)内必有根，为ξ.

5. 若$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}.$$

分析　即要证$(b-\xi)f'(\xi)-[f(\xi)-f(a)]=0$,

令　$\varphi(x)=(b-x)[f(x)-f(a)]$,

问题转化为证明存在 $\xi\in(a,b)$，使$\varphi'(\xi)=0$.

证 令$\varphi(x)=(b-x)[f(x)-f(a)]$，则

$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续， 在(a,b)内可导，且

$$\varphi(a)=\varphi(b)=0,$$

由罗尔定理，可知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,

使$\varphi'(\xi)=0$, 即$(b-\xi)f'(\xi)-[f(\xi)-f(a)]=0$,

也即$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$.

6. 证明对$\forall x\in \mathrm{R}$, 有$\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

证 令$f(x)=\arctan x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0,\ \ x\in(-\infty,+\infty)$$

故 $f(x)\equiv$常数. 又因为 $f(0)=0$, 因此 $f(x)\equiv 0$,

即等式成立.

7. 用中值定理证明：

$$\text{当} x > 0, \text{时，} x < e^x - 1 < xe^x.$$

证　函数$y = e^x$在$[0, x]$上连续，在$(0, x)$上可导，由拉氏中值定理得

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^{\xi}, \quad 0 < \xi < x$$

而e^x是增函数，故$e^0 < e^{\xi} < e^x$，从而

$$e^0 < \frac{e^x - e^0}{x - 0} < e^x,$$

即$x < e^x - 1 < xe^x$.

8. 用拉格朗日公式证明：当$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$时，

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.$$

证 制造改变量的商，即将结论变形为：

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}<\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\cos^2\beta}$$

函数$y=\tan x$在$[\alpha,\beta]$上连续，在(α,β)上可导，

由拉氏中值定理得

$$\frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\beta - \alpha} = \sec^2\xi, \quad \alpha < \xi < \beta$$

由于 $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ 是在（$0, \dfrac{\pi}{2}$）上单调递增的，

故原不等式成立．

9. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，连接点$(a,f(a)),(b,f(b))$的直线和曲线$y=f(x)$交于$(c,f(c)),a<c<b$，证明：在(a,b)内至少存在一点ξ，使$f''(\xi)=0$.

证 因$f(x)$在$[a,c]$和$[c,b]$上满足拉格朗日中值定理条件，故存在$\xi_1\in(a,c)$和$\xi_2\in(c,b)$,

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a},$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

又因三点$(a,f(a)),(b,f(b)),(c,f(c))$在一条直线上

故有 $$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(b)-f(c)}{b-c},$$

即 $$f'(\xi_1)=f'(\xi_2).$$

于是,由$f(x)$在(a,b)内二阶可导知，$f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$

上满足罗尔定理，因而存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使

$$f''(\xi)=0.$$

10. 设$x_1 < x_2$且$x_1x_2 > 0$, $f(x)$在$[x_1, x_2]$上连续，在(x_1, x_2)内可导，证明存在$\xi \in (x_1, x_2)$，使得

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

分析 行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$左端 = \frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 x_2} = \frac{\dfrac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 x_2}}{\dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}} = \frac{\dfrac{f(x_2)}{x_2} - \dfrac{f(x_1)}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}}$$

制造改变量的商

猜

对 $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $\psi(x) = \dfrac{1}{x}$ 在$[x_1, x_2]$上用柯西中值定理.

$$右端=f(\xi)-\xi f'(\xi)=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=\frac{\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'\Bigg|_{x=\xi}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'\Bigg|_{x=\xi}}$$

$$结论 \Longleftrightarrow \frac{\dfrac{f(x_2)}{x_2}-\dfrac{f(x_1)}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}$$

证 令 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x},\quad \psi(x)=\dfrac{1}{x}$

$\because \quad x_1x_2>0,\ f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续,

在(x_1,x_2)内可导,

$\therefore \varphi(x),\psi(x)$在$[x_1,x_2]$上满足柯西中值定理的 条件

故 $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得 $\dfrac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{\psi(x_2)-\psi(x_1)}=\dfrac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$

即 $$\frac{\dfrac{f(x_2)}{x_2}-\dfrac{f(x_1)}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

11. 证明：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$.

证 用柯西中值定理证．

令 $f(x) = \tan x, F(x) = x + \frac{1}{3}x^3$,

在[0,1]区间上用柯西中值定理 得

$$\frac{\tan x - \tan 0}{x + \frac{1}{3}x^3 - 0} = \frac{\sec^2 \xi}{1 + \xi^2} = \frac{1 + \tan^2 \xi}{1 + \xi^2} > 1, \xi \in (0, x)$$

故原不等式成立．