第九章　重积分

第一节　重积分的概念与性质

习题　9-1

1. 设有一平面薄板(不计其厚度), 占有 xOy 面上的闭区域 D, 薄板上分布有面密度为 $\mu=\mu(x,y)$ 的电荷, 且 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续, 试用二重积分表达该板上的全部电荷 Q.

解　薄板上的全部电荷等于电荷的面密度 $\mu=\mu(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分, 即

$$Q=\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

2. 设平面闭区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le R^2\right\}$, 试利用二重积分的几何意义求

$$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma .$$

解　由二重积分的几何意义知, $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$ 表示以 D 为底, 顶为曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ (即以坐标原点为球心, R 为半径的球面位于 xOy 面上方的部分)的曲顶柱体的体积, 即以坐标原点为球心, R 为半径的球体积的 $\dfrac{1}{2}$, 故

$$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\frac{2}{3}\pi R^3 .$$

3. 比较下列各组积分的大小:

(1)　$\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1, 3\le y\le 5\right\}$;

(2)　$\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\mathrm{d}v$ 与 $\iiint\limits_\Omega (x+y+z)^2\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成的四面体.

解　(1)　因为积分区域 D 位于 $\{(x,y)|x+y\ge \mathrm{e}\}$ 内, 故在 D 上有 $\ln(x+y)\ge 1$, 从而 $[\ln(x+y)]^2\ge \ln(x+y)$, 因此 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma \ge \iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$.

(2) 积分区域$\Omega=\{(x,y,z)\big|x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$，故在$\Omega$内，$x+y+z \ge (x+y+z)^2$，故$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v\ge\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}v$.

4. 估计下列积分的值:

(1) $I=\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma$，其中$D$为矩形域: $D=\left\{(x,y)\big|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}$;

(2) $I=\iint\limits_{D}(4x^2+y^2+9)\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\left\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4\right\}$;

(3) $I=\iint\limits_{D}\dfrac{1}{\ln(4+x+y)}\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\left\{(x,y)\big|0\le x\le 4, 0\le y\le 8\right\}$;

(4) $I=\iint\limits_{D}\sqrt{4+xy}\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\left\{(x,y)\big|0\le x\le 2, 0\le y\le 2\right\}$.

解 (1) 因为$0\le x+y\le 2$，所以$1\le \mathrm{e}^{x+y}\le \mathrm{e}^2$，故

$$\iint\limits_{D}1\mathrm{d}\sigma\le\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma\le\iint\limits_{D}\mathrm{e}^2\mathrm{d}\sigma,$$

即

$$1\le I\le \mathrm{e}^2.$$

(2) 因为$0\le x^2+y^2\le 4$，所以$9\le 4x^2+y^2+9\le 4(x^2+y^2)+9\le 25$，故

$$\iint\limits_{D}9\mathrm{d}\sigma\le\iint\limits_{D}(4x^2+y^2+9)\mathrm{d}\sigma\le\iint\limits_{D}25\mathrm{d}\sigma,$$

即

$$9\pi\cdot 2^2\le\iint\limits_{D}(4x^2+y^2+9)\mathrm{d}\sigma\le 25\pi\cdot 2^2,$$

故

$$36\pi\le I\le 100\pi.$$

(3) 因为$4\le 4+x+y\le 16$，所以$\dfrac{1}{4\ln 2}\le\dfrac{1}{\ln(4+x+y)}\le\dfrac{1}{2\ln 2}$，故

$$\frac{1}{4\ln 2}\cdot 32\le\iint\limits_{D}\frac{1}{\ln(4+x+y)}\mathrm{d}\sigma\le\frac{1}{2\ln 2}\cdot 32,$$

即

$$\frac{8}{\ln 2}\le I\le\frac{16}{\ln 2}.$$

(4) 因为$2\le\sqrt{4+xy}\le 2\sqrt{2}$，所以

$$\iint\limits_{D}2\mathrm{d}\sigma\le\iint\limits_{D}\sqrt{4+xy}\mathrm{d}\sigma\le\iint\limits_{D}2\sqrt{2}\mathrm{d}\sigma,$$

即
$$2\cdot 2^2 \le \iint\limits_D \sqrt{4+xy}\,\mathrm{d}\sigma \le 2\sqrt{2}\cdot 2^2,$$
故
$$8 \le I \le 8\sqrt{2}.$$