第一章　一元函数的极限与连续

本章基本要求

1. 在中学已有函数知识的基础上，加深对函数概念的理解和函数性质（奇偶性、单调性、周期性和有界性）的了解。

2. 理解复合函数的概念，了解反函数的概念。

3. 会建立简单实际问题中的函数关系式。

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4. 理解极限的概念，了解极限的定义（不要求学生做给出 ε 求 δ 或 N 的习题）。

5. 掌握极限的有理运算法则，会用变量代换求某些简单复合函数的极限。

6. 了解极限的性质(唯一性、有界性、保号性)和两个存在准则（夹逼准则与单调有界准则)，会用两个重要极限求极限。

7. 了解无穷小、无穷大、高阶无穷小和等价无穷小的概念，会用等价无穷小求极限。

8. 理解函数在一点连续和在一区间上连续的概念。

9. 了解函数间断点的概念，会判别间断点的类型。

10. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的介值定理与最大值、最小值定理。

预备知识

- 一、主要内容
- 二、典型例题

一、主要内容

(一) 平面点集

1. 集合的概念

定义 1

具有某种特定性质的事物所组成的总体称为**集合**.

集合中的每个事物称为该集合的**元素**.

不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$.

元素 a 属于集合 M, 记作 $a \in M$.

元素 a 不属于集合 M, 记作 $a \overline{\in} M$ （或 $a \notin M$ ）.

定义2 若集合A的每一个元素都是集合B的元素，则称A是B的**子集**，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$

$A \subset B$ 表示A是B的**真子集**.

如果集合A与集合B互为子集，即

$$A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A$$

就称A与B**相等**.记作 $A = B$或$B = A$.

2.集合的表示法

按某种方式列出集合中的全体元素.

(1) 列举法:

例: 有限集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}=\{a_i\}_{i=1}^{n}$

自然数集 $\mathrm{N}=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}=\{n\}$

(2) 描述法: $M=\{x \mid x\text{ 所具有的特征}\}$

注 设 M 为数集 ,则

$$\begin{cases} M^* \text{ 表示} M \text{中排除了 0 的集;} \\ M^+ \text{ 表示} M \text{中排除了 0 与负数的集.} \end{cases}$$

整数集合 $\mathrm{Z}=\left\{x \mid x\in\mathrm{N} \text{ 或 } -x\in\mathbf{N}^{*}\right\}$

有理数集合 $\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q} \,\middle|\, p\in\mathrm{N}, q\in\mathrm{Z}^{*}, p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$

实数集合 $\mathbf{R}=\{x \mid x \text{ 为有理数或无理数}\}$

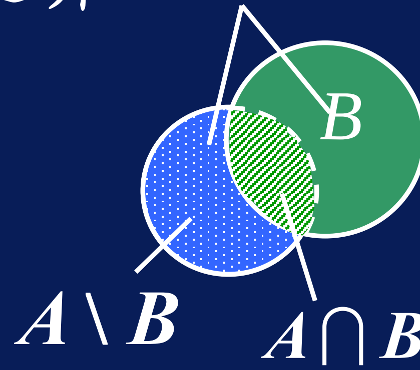
常用集合记号:

R: 实数集合;　**N**: 自然数集合;　**Z**: 整数集合;

Q: 有理数集合;　**C**: 复数集合.

3. 集合的运算

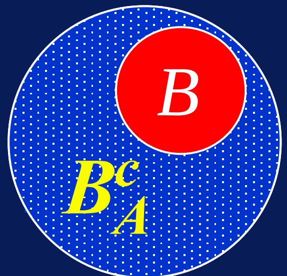
定义 3 给定两个集合 A, B, 定义下列运算



(1) 并集 $A\bigcup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$

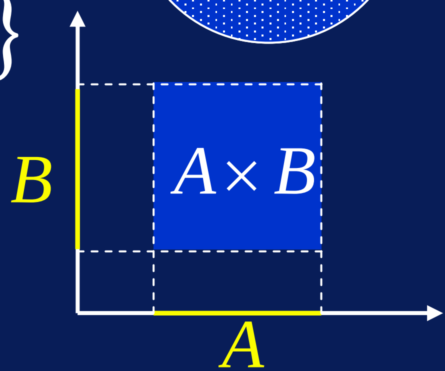
(2) 交集 $A\bigcap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$

(3) 差集 $A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$



(4) 余集 $B_A^c=A\setminus B$ (其中 $B\subset A$)

(5) 直积 $A\times B=\{(x, y) \mid x\in A, y\in B\}$



特例: $\mathbf{R}\times\mathbf{R} \overset{\text{记}}{=\!=} \mathbf{R}^2$

为平面上的全体点的集合

运算律

交换律: $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A;$

结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$

分配律: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$

对偶律: $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C,\ (A\cap B)^C=A^C\cup B^C.$

并之余等于余之交

交之余等于余之并

4. 区间和邻域

区间 是指介于某两个实数之间的全体实数.

这两个实数叫做区间的端点.

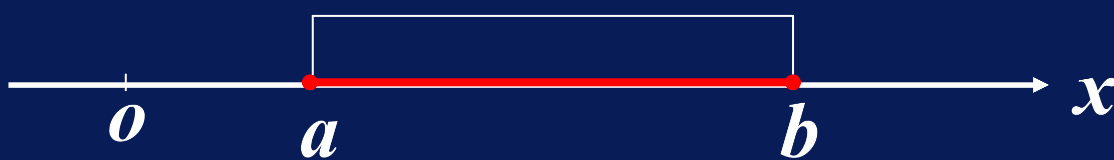
$\forall\, a,b \in R$, 且 $a < b$.

实数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为**开区间**, 记作 (a,b),

即 $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$

实数集 $\{x \mid a \le x \le b\}$ 称为**闭区间**, 记作 $[a,b]$,

即 $[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$



半开区间: $[a,b)=\{x \mid a\le x<b\}$

$$(a,b]=\{x \mid a<x\le b\}$$

以上这些区间统称为**有限区间**.

无穷区间: $[a,+\infty)=\{x \mid a\le x\}$

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x\}$$

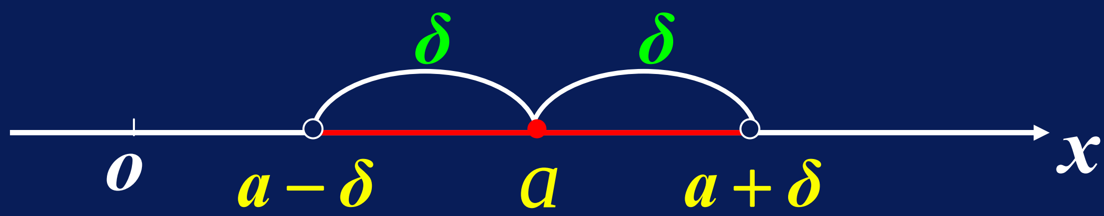
$$(-\infty,b]=\{x \mid x\le b\}$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\in \mathrm{R}\}$$

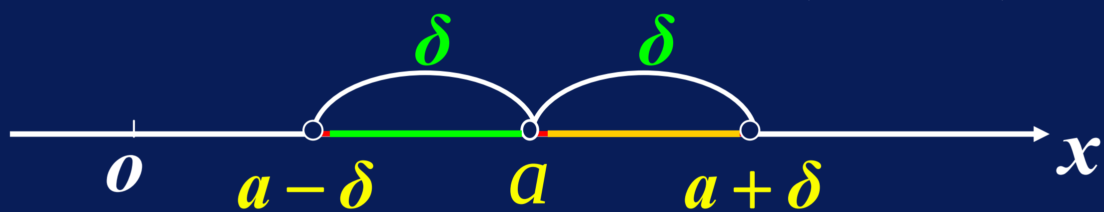
点a的 δ邻域: $U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$

$$=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$



其中点 a 称为邻域的中心，δ称为邻域的半径.

点a的去心 δ邻域: $\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$



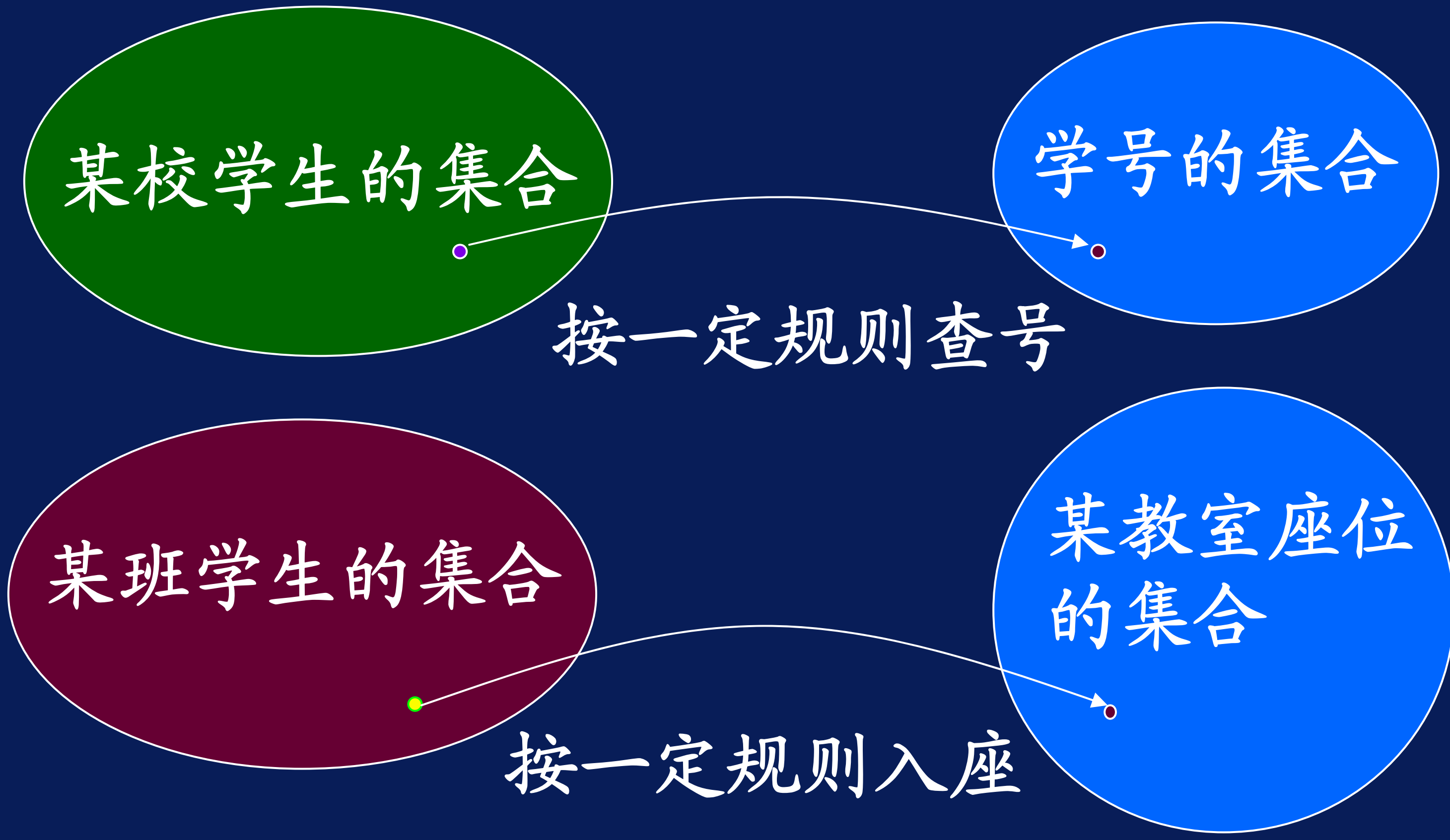
点a的左 δ邻域：$(a-\delta,a)$

点a的右 δ邻域：$(a,a+\delta)$

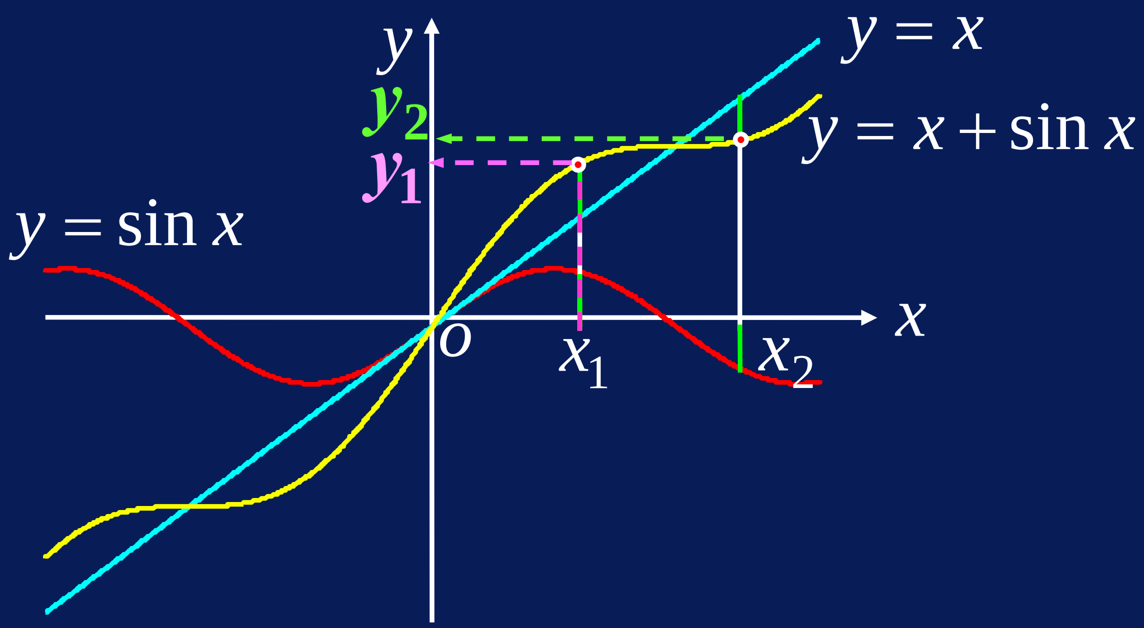
(二) 映射

1. 映射的概念

引例1



引例2 $\forall x \in \mathbf{R} \xrightarrow{f:\ y = x + \sin x} y \in \mathbf{R}$



定义4 设 X, Y 是两个非空集合，如果按照某种对应法则 f，使得 $\forall x \in X$，有唯一确定的 $y \in Y$ 和它对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作 $f: X \to Y$.

元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的像，记作

$$y = f(x).$$

元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的一个原像.

集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f.

Y 的子集

$$f(X)=\{\, f(x) \mid x\in X \,\}$$

称为映射 f 的值域，记作 R_f.

特别地，当 Y 是实数集合时，

称 f 为定义在 X 上的泛函 .

若 X, Y 均为实数集合，

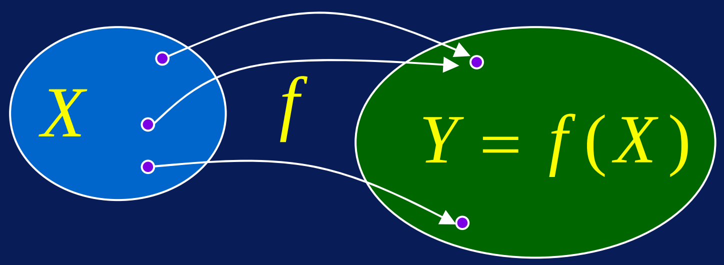
则称 f 为定义在 X 上的一元函数 .

注

1° 映射的三要素:定义域,对应规则,值域.

2° 在不同数学分支中,映射 f 又可称为**变换**或**算子**.

3° 元素 x 的像 y 是唯一的,但 y 的原像不一定唯一.

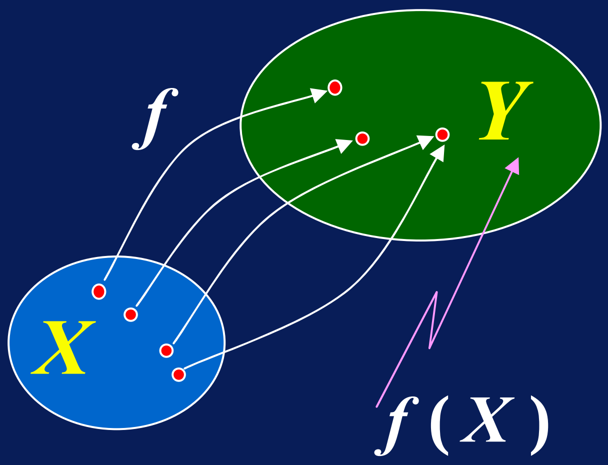


如: $y = f(x) = x^2,\ f(1) = f(-1) = 1$

2. 几类常见的映射

对映射 $f: X \to Y$

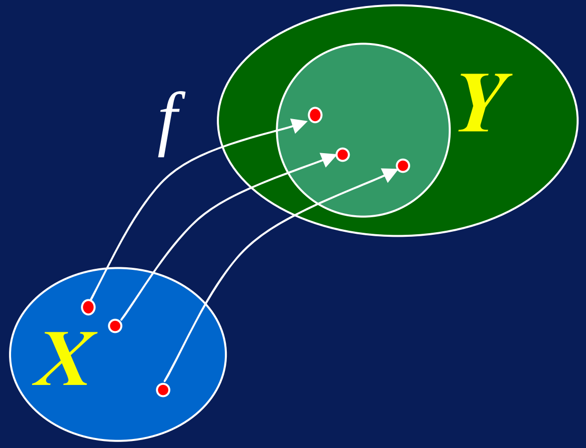
(1) 若 $f(X) = Y$, 则称 f 为**满射**;



(2) 若 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 有

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

则称 f 为**单射**;



(3) 若 f 既是满射又是单射,

则称 f 为**双射** 或**一一映射** (或写成**1-1 映射**).

3. 逆映射与复合映射

(1) 逆映射

设 $f: X \to Y$ 是一一映射,

$g: Y \to X$ 称为f 的逆映射,

是指:

$\forall\, y \in Y$,有唯一确定的 $x \in X$, $f(x) = y$

与之对应. 记作 f^{-1}, 即 $f^{-1}: Y \to X$.

其定义域 $D_{f^{-1}} = Y$,

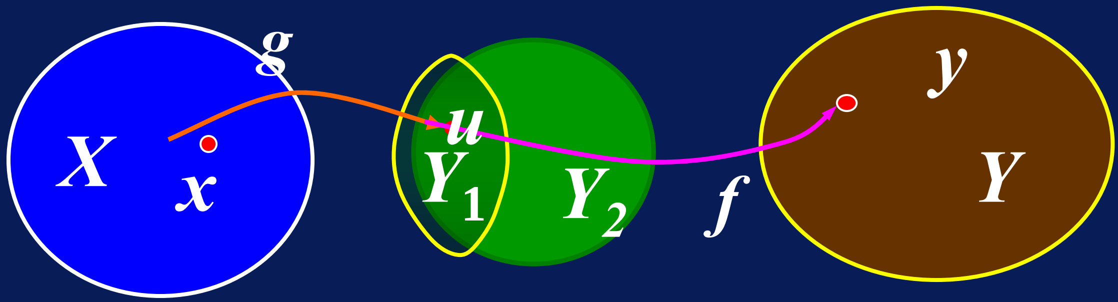
值域 $R_{f^{-1}} = X$.

只有一一映射才存在逆映射

(2)复合映射

设有两个映射 $g: X \to Y_1,\quad f: Y_2 \to Y$

其中 $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$.



若 $\forall x \in X,$

$\xrightarrow{g} u = g(x) \in Y_1 \cap Y_2$

$\xrightarrow{f} y = f(u) \in Y$

元素 y 可表示为 $y = f[g(x)], x \in X$

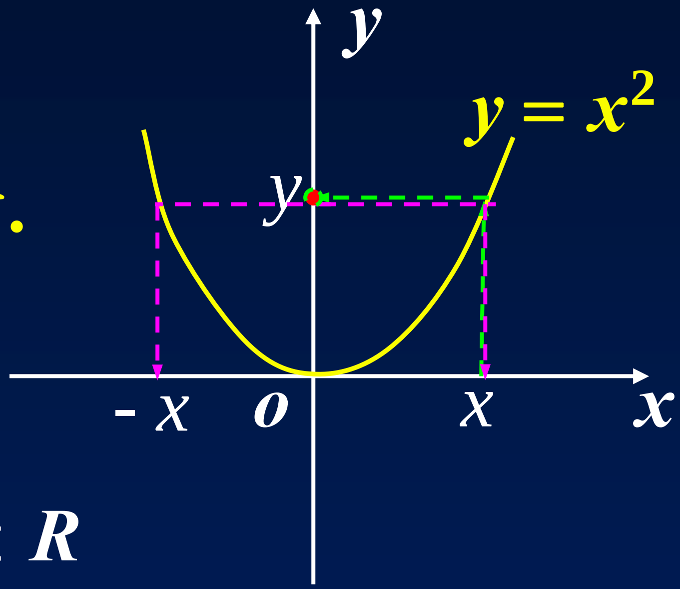
称由映射g和f构成的映射为复合映射，记作 $f \circ g,$

二、典型例题

例1 $f: R \to R_1 = \{ y \mid y \geq 0 \},\ f(x) = x^2.$

$\because \quad f(X) = R_f = R_1$

$\therefore$ 映射 f 是满射. 不是单射.



例2 $f: R \to R,\ f(x) = x^2.$

$\because \quad f(X) = R_f = \{ y \mid y \geq 0 \} \subset R$

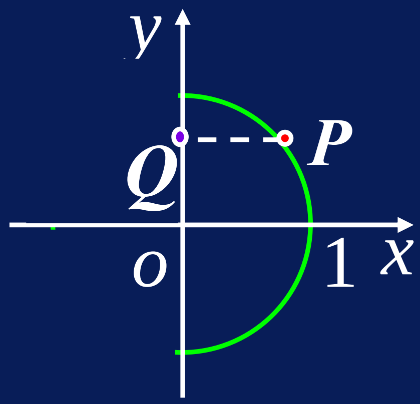
$f(X) \neq R$

$\therefore$ 映射 f 不是满射. 也不是单射.

例3 $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1, x\geq 0\}$ (点集)

$Y=\{(0,y)\mid -1\leq y\leq 1\}$ (点集)

$\forall$点 $P\in C \xrightarrow{f:\text{向}\,y\,\text{轴投影}}$ 投影点 $Q\in Y$



$f: C\to Y$,

满射，也是单射,

从而是一一映射.

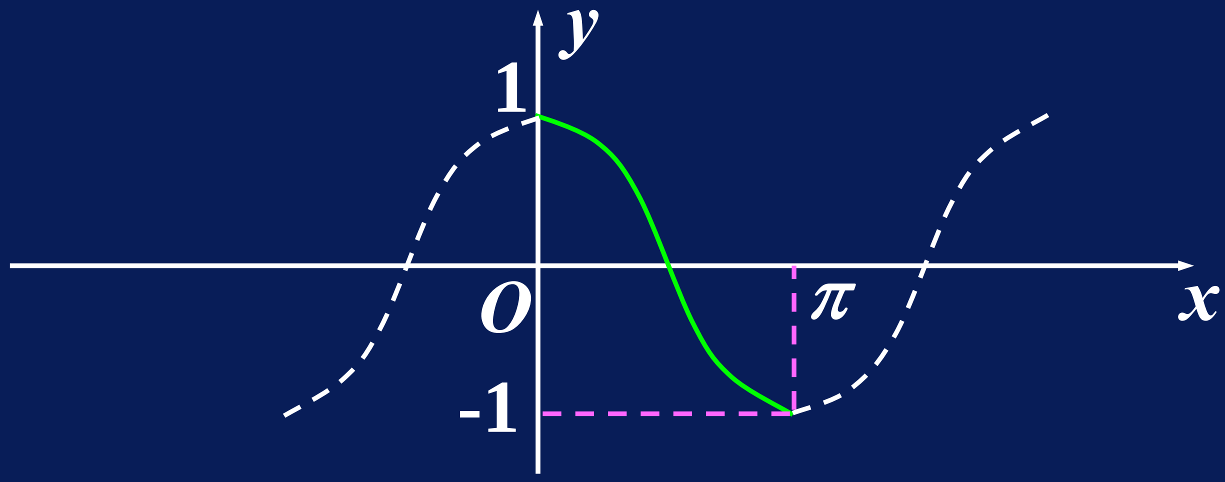
例4 映射

$$f:[0,\pi]\to[-1,1],\ x\in[0,\pi],\ f(x)=\cos x.$$

既是单射，又是满射，所以该映射是**一一映射**.

它的逆映射就是反余弦函数的主值:

$$f^{-1}(x)=\arccos x.$$



例5 设有两个映射:

$$g: R \to (0,+\infty),\ \ x \in R,\ g(x) = e^x,$$

$$f: (0,+\infty) \to R,\ \ u \in (0,+\infty),\ \ f(u) = \ln u,$$

则它们的复合映射为 $f \circ g: R \to R,$

对每个$x \in R$, 有

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(e^x) = \ln e^x = x.$$

此复合映射的定义域为: $D_{f\circ g} = R,$

值域为: $R_{f\circ g} = R.$