第七节　斯托克斯公式　环量与旋度

习题　10-7

1.　利用斯托克斯公式计算下列曲线积分:

(1)　$\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$,　其中 Γ 为椭圆 $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1\,(a,b>0)$, 从 z 轴的正向看去 Γ 是逆时针方向;

(2)　$\oint_{\Gamma}xy\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y+zx\mathrm{d}z$, 其中 Γ 是以点 $(1,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,3)$ 为顶点的三角形的周界, 从 x 轴的正向看去 Γ 是顺时针方向;

(3)　$\oint_{\Gamma}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中 Γ 是用 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 截立方体 $\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 1,\,0\le z\le 1\}$ 的表面所得的截痕, 从 x 轴的正向看去 Γ 是逆时针方向;

(4)　$\oint_{\Gamma}3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z$, 其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2=2z$, $z=2$, 从 z 轴的正向看去 Γ 是顺时针方向;

(5)　$\oint_{\Gamma}z^3\mathrm{d}x+x^3\mathrm{d}y+y^3\mathrm{d}z$, 其中 Γ 为圆周 $z=2(x^2+y^2)$, $z=3-x^2-y^2$, 从 z 轴的正向看去 Γ 是逆时针方向.

解　(1)　如图 10.50 所示, 取 Σ 为平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$ 上被 Γ 所围的部分, 取上侧, 则 Γ 是 Σ 的正向边界. Σ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(\frac{1}{a},0,\frac{1}{b})$, 利用斯托克斯公式, 可得

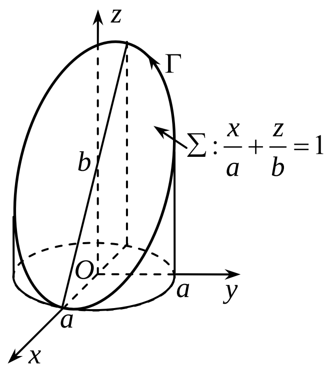

图 10.50

$$\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}$$

$$=\iint_{\Sigma}-2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\qquad\text{(化为非组合曲面积分)}$$

$$=-2\iint\limits_{\Sigma}(\frac{b}{a}+0+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2(a+b)}{a}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2(a+b)}{a}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2(a+b)}{a}\cdot\pi a^2=-2\pi a(a+b).$$

(2) 如图 10.51 所示，取 Σ 为平面 $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$ 上被 Γ 所围的部分，取下侧，则 Γ 是 Σ 的正向边界. Σ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$，利用斯托克斯公式，可得

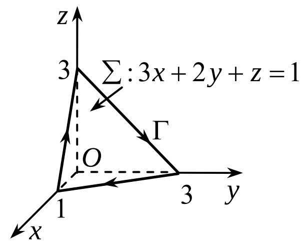

图 10.51

$$\oint_{\Gamma}xy\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y+zx\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy & yz & zx\end{vmatrix}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}-y\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{\Sigma}(3y+z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}(2y-2x+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{3(1-x)}(2y-2x+3)\mathrm{d}y=\int_0^1(15x^2-33x+18)\mathrm{d}x=\frac{13}{2}.$$

(3) 如图 10.52 所示，取 Σ 为平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 上被 Γ 所围的部分，取上侧，则 Γ 是 Σ 的正向边界. Σ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，利用斯托克斯公式，可得

$$\oint_{\Gamma}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

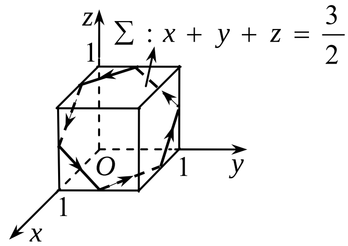

图 10.52

$$=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(-2y-2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-2z-2x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-4\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\times\frac{3}{2}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-6\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-6(1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})=-\frac{9}{2}.$$

(4) 如图 10.53 所示，取 Σ 为平面 $z=2$ 上被 Γ 所围的部分，取下侧，则 Γ 是 Σ 的正向边界. Σ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,-1)$，利用斯托克斯公式，可得

$$\oint_\Gamma 3y\mathrm{d}x - xz\mathrm{d}y + yz^2\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \iint_\Sigma (z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - (z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_\Sigma -5\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 5\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 20\pi.$$

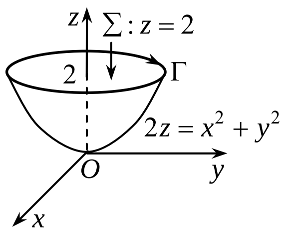

图 10.53

(5) 如图 10.54 所示, 取 Σ 为平面 $z=2$ 上被 Γ 所围的部分, 取上侧, 则 Γ 是 Σ 的正向边界. 利用斯托克斯公式, 可得

$$\oint_\Gamma z^3\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y + y^3\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^3 & x^3 & y^3 \end{vmatrix}$$

$$= \iint_\Sigma 3y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 3z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_\Sigma 3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} 3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^3\mathrm{d}\rho = \frac{3}{4}\pi.$$

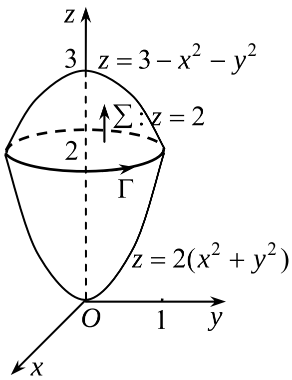

图 10.54

2. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 穿沿闭曲线 Γ 的环流量:

(1) $\boldsymbol{A} = (x-z)\boldsymbol{i} + (x^3+yz)\boldsymbol{j} - 3xy^2\boldsymbol{k}$, Γ 为圆周 $z = 2-\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, 从 z 轴的正向看去 Γ 是逆时针方向;

(2) $\boldsymbol{A} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ (c 为常数), Γ 为圆周 $(x-2)^2+y^2=R^2$, $z=0$, 从 z 轴的正向看去 Γ 是逆时针方向;

(3) $\boldsymbol{A} = 3y\boldsymbol{i} - xz\boldsymbol{j} + yz^2\boldsymbol{k}$, Γ 为圆周 $y^2+z^2=4$, $x=1$, 从 x 轴的正向看去 Γ 是逆时针方向.

解 (1) 向量场 $\boldsymbol{A}$ 穿沿闭曲线 Γ 的环流量为

$$\oint_\Gamma (x-z)\mathrm{d}x + (x^3+yz)\mathrm{d}y - 3xy^2\mathrm{d}z.$$

如图 10.55 所示, 取 Σ 为平面 $z=0$ 上被 Γ 所围的部分, 取上侧, 则 Γ 是 Σ 的正向边界. 利用斯托克斯公式, 可得

$$\oint_{\Gamma}(x-z)\mathrm{d}x+(x^3+yz)\mathrm{d}y-3xy^2\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x-z & x^3+yz & -3xy^2\end{vmatrix}$$

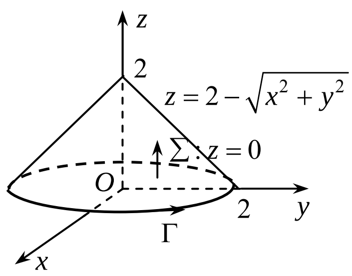

图 10.55

$$=\iint_{\Sigma}(-6xy-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+6xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho=12\pi.$$

(2) 向量场 $\boldsymbol{A}$ 穿沿闭曲线 Γ 的环流量为

$$\oint_{\Gamma}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z.$$

如图 10.56 所示，取 Σ 为平面 $z=0$ 上被 Γ 所围的部分，取上侧，则 Γ 是 Σ 的正向边界. 利用斯托克斯公式，可得

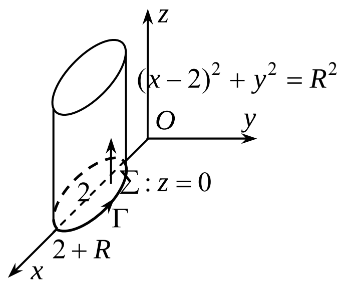

图 10.56

$$\oint_{\Gamma}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & c\end{vmatrix}$$

$$=\iint_{\Sigma}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R^2.$$

(3) 向量场 $\boldsymbol{A}$ 穿沿闭曲线 Γ 的环流量为

$$\oint_{\Gamma}3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z.$$

如图 10.57 所示，取 Σ 为平面 $x=1$ 上被 Γ 所围的部分，取前侧，则 Γ 是 Σ 的正向边界. 利用斯托克斯公式，可得

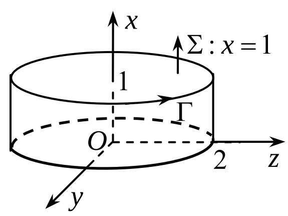

图 10.57

$$\oint_{\Gamma}3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3y & -xz & yz^2\end{vmatrix}$$

$$=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-z-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}}(z^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(\rho^2\sin^2\theta+1)\rho\mathrm{d}\rho=4\pi+4\pi=8\pi.$$

注 本题中的曲线积分也可化为关于参数的定积分直接计算.

3. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度:

(1) $\boldsymbol{A}=P(x)\boldsymbol{i}+Q(y)\boldsymbol{j}+R(z)\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{A}=(z+\sin y)\boldsymbol{i}-(z-x\cos y)\boldsymbol{j}$;

(3) $\boldsymbol{A}=\nabla u, u=u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数.

解 (1) 向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度为

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P(x) & Q(y) & R(z)\end{vmatrix}=(0,\ 0,\ 0)=\mathbf{0}.$$

(2) 向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度为

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z+\sin y & -(z-x\cos y) & 0\end{vmatrix}=(1,1,0)=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}.$$

(3) 向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度为

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix}=(u_{zy}-u_{yz},\ u_{xz}-u_{zx},\ u_{yx}-u_{xy})=\mathbf{0}.$$

4. 设函数 $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ 具有连续的二阶偏导数，$\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，证明

(1) $\mathrm{div}(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A})=0$，即旋度场一定是无源场;

(2) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}P)=\mathbf{0}$，即梯度场是无旋场.

解 (1) $$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z)\end{vmatrix}$$

$$=(R_y-Q_z,\ P_z-R_x,\ Q_x-P_y),$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A})=R_{yx}-Q_{zx}+P_{zy}-R_{xy}+Q_{xz}-P_{yz}=0.$$

(2) $\mathbf{grad}P=(P_x,P_y,P_z)$,

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}P)=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P_x & P_y & P_z\end{vmatrix}=(P_{zy}-P_{yz},\ P_{xz}-P_{zx},\ P_{yx}-P_{xy})=\mathbf{0}.$$

5. 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，$f$ 为可微函数，求

(1) $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{r}$； (2) $\mathbf{rot}[f(r)\ \boldsymbol{r}]$.

解 (1) $$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{r}=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=(0,0,0)=\mathbf{0}.$$

(2) $$\mathbf{rot}[f(r)\ \boldsymbol{r}]=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xf(r) & yf(r) & zf(r)\end{vmatrix}.$$

$$=(zf'(r)\frac{y}{r}-yf'(r)\frac{z}{r},\ xf'(r)\frac{z}{r}-zf'(r)\frac{x}{r},\ yf'(r)\frac{x}{r}-xf'(r)\frac{y}{r})=\mathbf{0}.$$

6. 利用斯托克斯公式把第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 化为曲线积分，并计算积分值，其中 $\boldsymbol{A}$ 与 Σ 分别为

(1) $\boldsymbol{A}=xyz\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+\mathrm{e}^{xy}\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧；

(2) $\boldsymbol{A}=(y-z)\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为立方体 $\{(x,y,z)|0\le x\le 2, 0\le y\le 2, 0\le z\le 2\}$ 的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面.

解 (1) $$\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_{\partial\Sigma^+}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_{\Gamma}xyz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}z,$$

其中 $\Gamma: z=0,\ x^2+y^2=1$(取逆时针方向)为 Σ 的正向边界，如图 10.58 所示，则

$$\oint_{\Gamma}xyz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\pi.$$

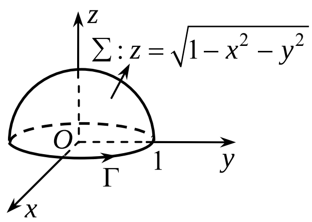

图 10.58

(2) $\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\partial\Sigma^{+}}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}y - xz\mathrm{d}z$,

其中Γ为平面$z=0$上的正方形(取逆时针方向), 为Σ的正向边界, 如图 10.59 所示, 则

$$\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}y - xz\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x$$

$$=\int_{OA} y\mathrm{d}x + \int_{AB} y\mathrm{d}x + \int_{BC} y\mathrm{d}x + \int_{CO} y\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2 0\mathrm{d}x + 0 + \int_2^0 2\mathrm{d}x + 0 = -4.$$

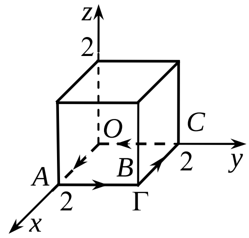

图 10.59

*7. 验证下列空间曲线积分与路径无关, 并计算积分值:

(1) $\int_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} x^2\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z$;

(2) $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,1)} (y+z)\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$;

(3) $\int_{(1,-1,1)}^{(1,1,-1)} y^2 z\mathrm{d}x + 2xyz\mathrm{d}y + xy^2\mathrm{d}z$.

解 设向量$\boldsymbol{A}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$, G为一个一维单连通区域, 则$\boldsymbol{A}$沿G内空间有向曲线Γ的积分

$$\int_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\Gamma} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z))\mathrm{d}z$$

与路径无关的充要条件是 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$.

(1) $\boldsymbol{A}=(x^2,\ y^2,\ z^2)$, $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A} = \iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix} = \mathbf{0}$, 故空间曲线积分 $\int_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} x^2\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z$与路径无关.

取Γ为从点$(0,0,0)$到点(a,b,c)的直线段路径, 即Γ: $\begin{cases} x=at,\\ y=bt,\\ z=ct,\end{cases}$ t从0变到1, 则

$$\int_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} x^2\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z = \int_0^1 (a^3+b^3+c^3)t^2\mathrm{d}t = \frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$$

(2) $\boldsymbol{A}=(y+z, z+x, x+y)$, 易知 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$, 故空间曲线积分 $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,1)} (y+z)\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$与路径无关.

取Γ为从点$(0,0,0)$到点$(1,2,1)$的直线段路径，即$\Gamma:\begin{cases}x=t,\\ y=2t,\\ z=t,\end{cases}$ t从0变到1，则

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,1)}(y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z=\int_0^1 10t\mathrm{d}t=5.$$

(3) $\boldsymbol{A}=(y^2,\ 2xyz,\ xy^2)$，易知 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，故空间曲线积分 $\int_{(1,-1,1)}^{(1,1,-1)}y^2z\mathrm{d}x+2xyz\mathrm{d}y+xy^2\mathrm{d}z$ 与路径无关.

取Γ为从点$(1,-1,1)$到点$(1,1,-1)$的直线段路径，即$\Gamma:\begin{cases}x=1,\\ y=-1+t,\\ z=1-t,\end{cases}$ t从0变到2，

则

$$\int_{(1,-1,1)}^{(1,1,-1)}y^2z\mathrm{d}x+2xyz\mathrm{d}y+xy^2\mathrm{d}z=\int_0^2-3(t-1)^2\mathrm{d}t=-2.$$