第二节　第二类曲线积分

习题　10-2

1. 计算下列对坐标的曲线积分:

(1) $\int_L \frac{x^2 \mathrm{d}y - y^2 \mathrm{d}x}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$，其中 L 为星形线 $x = a\cos^3 t$，$y = a\sin^3 t$ 的第一象限中自点 $A(a,0)$ 到点 $B(0,a)$ 的一段弧;

(2) $\int_L x\mathrm{e}^y \mathrm{d}x + \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y$，其中 L 为抛物线 $y = x^2$ 上从点 $A(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧;

(3) $\oint_L \cos y\mathrm{d}x + \cos x\mathrm{d}y$，其中 L 是由直线 $y = x$，$x = \pi$ 和 x 轴所围三角形的正向边界;

(4) $\int_L (1+2xy)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$，其中 L 为从点 $(1,0)$ 到点 $(-1,1)$ 的上半椭圆周 $x^2 + 2y^2 = 1\,(y \geq 0)$;

(5) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 为自点 $A(0,0)$ 到点 $B(1,1)$，再到点 $C(2,0)$ 的折线段;

(6) $\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x - (x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为依逆时针方向沿圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 绕行一周的路径;

(7) $\int_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + b\mathrm{d}z$，其中曲线 Γ 为螺旋线 $x = a\cos t$，$y = a\sin t$，$z = bt$ 上由参数 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段有向弧;

(8) $\oint_\Gamma (z-y)\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$，其中 Γ 为椭圆周 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 且从 z 轴的正方向看去，Γ 取顺时针方向.

解　(1)　如图 10.7 所示，$L: \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ t 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$.

$$\int_L \frac{x^2\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a^{\frac{4}{3}} \sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{8}a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\mathrm{d}t = \frac{3}{16}\pi a^{\frac{4}{3}}.$$

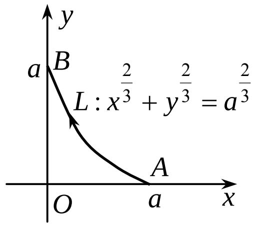

图 10.7

(2)　如图 10.8 所示，L: $y = x^2$，x 从 0 变到 1.

$$\int_L x\mathrm{e}^y \mathrm{d}x + \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y = \int_0^1 (x\mathrm{e}^{x^2} + \frac{\sin x}{x}\cdot 2x)\mathrm{d}x$$

$$= (\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} - 2\cos x)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1) + 2(1-\cos 1).$$

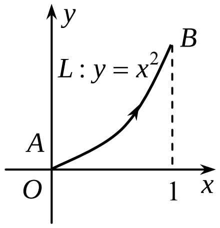

图 10.8

(3)　如图 10.9 所示，$L = OA + AB + BO$，其中

OA: $y = 0$,　x 从 0 变动到 π，

AB: $x = \pi$,　y 从 0 变动到 π，

BO: $y = x$,　x 从 π 变动到 0.

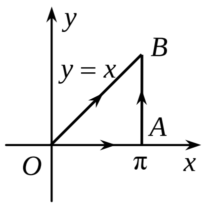

图 10.9

$$\oint_L \cos y\mathrm{d}x + \cos x\mathrm{d}y = \int_{OA} \cos y\mathrm{d}x + \cos x\mathrm{d}y + \int_{AB} \cos y\mathrm{d}x + \cos x\mathrm{d}y$$

$$+ \int_{BO} \cos y\mathrm{d}x + \cos x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} \cos 0\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \cos \pi\mathrm{d}y + \int_{\pi}^0 (\cos x + \cos x)\mathrm{d}x = \pi - \pi + 0 = 0.$$

(4)　如图 10.10 所示，$L: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \end{cases}$　t 从 0 变到 π.

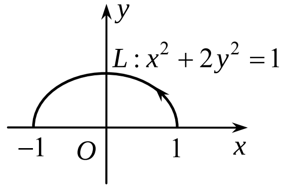

图 10.10

$$\int_L (1+2xy)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} [(1 + 2\cos t\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t)\cdot(-\sin t) + \cos^2 t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} (-\sin t - \sqrt{2}\sin^2 t\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^3 t)\mathrm{d}t = -2.$$

(5)　L 如图 10.11 所示，$L = AB + BC$，其中

AB: $y = x$,　x 从 0 变动到 1，

BC: $x + y = 2$,　x 从 1 变动到 2.

$$\int_L (x^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\mathrm{d}y$$

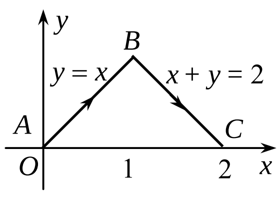

图 10.11

$$=\int_{AB}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y+\int_{BC}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(2x^2+0)\mathrm{d}x+\int_1^2[(x^2+(2-x)^2)-(x^2-(2-x)^2)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x+\int_1^2 2(2-x)^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1-\frac{2}{3}(2-x)^3\Big|_1^2=\frac{4}{3}.$$

(6) L 如图 10.12 所示，$L:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}$ t 从 0 变到 2π.

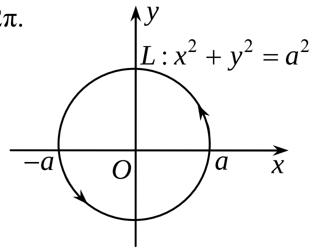

图 10.12

$$\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a(\cos t+\sin t)\cdot(-a\sin t)-a(\cos t-\sin t)\cdot a\cos t}{a^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=-2\pi.$$

(7) $\Gamma:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\\ z=bt,\end{cases}$ t 从 0 变到 2π.

$$\int_\Gamma\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+b\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}[\frac{a\cos t\cdot a\cos t-a\sin t\cdot(-a\sin t)}{a^2}+b^2]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(1+b^2)\mathrm{d}t=2\pi(1+b^2).$$

(8) $\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\\ z=2-\cos t+\sin t,\end{cases}$ t 从 2π 变到 0.

$$\oint_\Gamma(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{2\pi}^0[(2-\cos t)(-\sin t)+(2\cos t-\sin t-2)\cos t+(\cos t-\sin t)(\sin t+\cos t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(2\sin t+2\cos t-3+4\sin^2 t)\mathrm{d}t=-6\pi+4\pi=-2\pi.$$

2. 计算 $\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$，其中 L 是从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的下列四条不同路径:

(1) 直线 L_1：$y=x$;

(2) 抛物线 L_2：$y=x^2$;

(3)　抛物线 L_3：$x=y^2$;

(4)　立方抛物线 L_4：$y=x^3$;

解　(1)　$\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_0^1(x^2+0)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$

(2)　$\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_0^1[(x\cdot x^2+(x^2-x)\cdot 2x]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1(3x^3-2x^2)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}.$$

(3)　$\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_0^1[(y^3\cdot 2y+(y-y^2)]\mathrm{d}y=\int_0^1(2y^4-y^2+y)\mathrm{d}y$

$$=\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{17}{30}.$$

(4)　$\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_0^1[x\cdot x^3+(x^3-x)\cdot 3x^2]\mathrm{d}x=\int_0^1(3x^5+x^4-3x^3)\mathrm{d}x$

$$=\frac{3}{6}+\frac{1}{5}-\frac{3}{4}=\frac{1}{12}.$$

3.　计算 $\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，其中

(1)　$\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$，$L$ 是由为 $y=x$，$x=1$ 及 $y=0$ 围成的三角形闭路，逆时针方向;

(2)　$\boldsymbol{F}=\dfrac{y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$，$L$ 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，顺时针方向.

解　(1)　L 如图 10.13 所示，$L=OA+AB+BO$，其中

OA：$y=0$，x 从 0 变动到 1，

AB：$x=1$，y 从 0 变动到 1，

BO：$y=x$，x 从 1 变动到 0.

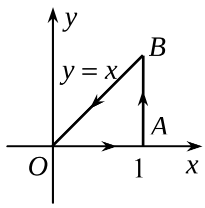

图 10.13

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{OA}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\int_{AB}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\int_{BO}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 0\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y+\int_1^0(-x+x)\mathrm{d}x=1.$$

(2)　L：$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}$ t 从 2π 变到 0.

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\int_{2\pi}^0[a\sin t\cdot(-a\sin t)-a\cos t\cdot a\cos t]\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

4. 今有一平面力场$\boldsymbol{F}$，大小等于点(x,y)到原点的距离，方向指向原点.

(1) 试计算单位质量的质点 P 沿椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$在第一象限中的弧段从点$(a,0)$移动到点$(0,b)$时，力$\boldsymbol{F}$所作的功;

(2) 试计算质点P沿上述椭圆逆时针绕行一圈时，$\boldsymbol{F}$所作的功.

解 $\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{e}_F=\sqrt{x^2+y^2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-x,-y)=(-x,-y).$

(1) 如图 10.14 所示，令$L:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}$ t从 0 变到$\dfrac{\pi}{2}$.

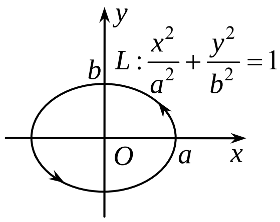

图 10.14

力$\boldsymbol{F}$所作的功为

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L -x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2-b^2)\sin t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2-b^2}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2-b^2}{2}.$$

(2) 令$L:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}$ t从 0 变到2π.

力$\boldsymbol{F}$所作的功为

$$W=\oint_L \boldsymbol{F}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_L -x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}(a^2-b^2)\sin t\cos t\mathrm{d}t.$$

$$=\frac{a^2-b^2}{2}\sin^2 t\Big|_0^{2\pi}=0.$$

5. 一力场其力的大小与作用点到z轴的距离成反比(比例系数为k)，方向垂直z轴且指向 z 轴. 一质点沿圆周$x=\cos t$，$y=1$，$z=\sin t$由点$M(1,1,0)$经四分之一圆弧至点$N(0,1,1)$，求该力场对质点所作的功.

解 力$\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{e}_F=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-x,-y,0)=(-\dfrac{kx}{x^2+y^2},-\dfrac{ky}{x^2+y^2},0).$

令$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=1,\\ z=\sin t,\end{cases}$ t从 0 变到$\dfrac{\pi}{2}$. 力场对质点所作的功为

$$W=\int_\Gamma \boldsymbol{F}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_\Gamma -\frac{kx}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\frac{ky}{x^2+y^2}\mathrm{d}y+0\mathrm{d}z=k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cos t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\sin^2 t}{2-\sin^2 t}=-\frac{k}{2}\ln(2-\sin^2 t)\Big|_0^1=\frac{k}{2}\ln 2.$$

6. 一力场其力的大小等于质点到坐标原点的距离，方向指向原点. 试求当质点沿圆柱螺旋线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=kt$ 从 $t=0$ 移动到 $t=2\pi$ 的一段弧时，该力场对质点所作的功.

解　力 $\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{e}_F=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(-x,-y,-z)=(-x,-y,-z).$

令 $\Gamma:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\\ z=kt,\end{cases}$ t 从 0 变到 2π. 力场对质点所作的功为

$$W=\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_\Gamma -x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y-z\mathrm{d}z=-k^2\int_0^{2\pi}t\mathrm{d}t=-2\pi^2k^2.$$

7. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化成对弧长的曲线积分，其中 L 为:

(1) 在 xOy 面内沿直线从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$;

(2) 在 xOy 面内沿抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$.

解 (1) L: $y=x$，x 从 0 变到 1.

L 上任一点 (x,y) 处的切向量为 $(1,1)$，单位切向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$，从而根据两类曲线积分的关系，有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s=\int_L\frac{1}{\sqrt{2}}[P(x,y)+Q(x,y)]\mathrm{d}s.$$

(2) L: $y=x^2$，x 从 0 变到 1.

L 上任一点 (x,y) 处的切向量为 $(1,2x)$，单位切向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}(1,2x)$，从而根据两类曲线积分的关系，有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$$

$$=\int_L\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}[P(x,y)+2xQ(x,y)]\mathrm{d}s.$$

8. 把对坐标的曲线积分 $\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 化成对弧长的

曲线积分，其中 Γ 为圆柱螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt\ \ (0\le t\le 2\pi)$ 从点 $A(a,0,0)$ 到点 $B(a,0,2\pi b)$ 的一段弧.

解　$\Gamma:\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt, \end{cases}$ t 从 0 变到 2π.

Γ 上任一点 (x,y,z) 处的切向量为 $(-a\sin t, a\cos t, b)$，单位切向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t,a\cos t,b)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-y,x,b)$，从而根据两类曲线积分的关系，有

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\Gamma [P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}s$$

$$=\int_\Gamma \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-yP(x,y,z)+xQ(x,y,z)+bR(x,y,z)]\mathrm{d}s.$$