第二节

导数的运算法则

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

（一）四则运算求导法则

定理2.1 函数$u=u(x)$及$v=v(x)$都在点x处可导，

$\Longrightarrow$ $u(x)$及$v(x)$的和、差、积、商(除分母为0的点外)也都在点x可导，且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ $(v(x)\neq 0)$

（二）反函数的求导法则

定理2.2 若函数 $x=\varphi(y)$在某区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$，则其反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)\Big|_{y=f(x)}}\qquad (x\in I_x)$$

反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

小结

$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\cot x)' = -\csc^2 x$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

（三）复合函数求导法则

引例 $(\sin 2x)' = ?$

已知 $(\sin x)' = \cos x$

问: $(\sin 2x)' \cancel{=} \cos 2x$

事实上, $\underline{(\sin 2x)'} = 2(\sin x \cos x)'$

$$= 2[(\sin x)'(\cos x) + (\sin x)(\cos x)']$$

$$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \underline{= 2\cos 2x}$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

从另一个角度看，

$$y = \sin 2x \rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sin u \\ u = 2x \end{array}\right.$$

$$(\sin u)' = \frac{\mathrm{d}\sin u}{\mathrm{d}u} = \cos u$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sin u}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos u \cdot 2 \qquad (u = 2x)$$

$$= 2\cos 2x$$

这是巧合吗？ 不是.

一般地，有

定理2.3 $u=\varphi(x)$在点x_0处可导，$y=f(u)$在对应点$u_0=\varphi(x_0)$处可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x_0处可导，且

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\varphi'(x_0)=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=u_0}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

即因变量对自变量求导,等于因变量对中间变量求导,乘以中间变量对自变量求导.

——复合函数的链式求导法则

注 1° 若 $\forall x_0 \in (a,b)$，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = f'(u_0)\varphi'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=u_0} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

则可将 x_0 换成 x：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(u)\big|_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)$$

$$= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

即 $\{f[\varphi(x)]\}' = f'(u)\big|_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)$

$2°$ 记 $f'(u)\Big|_{u=\varphi(x)} = f'[\varphi(x)]$

注意此记号的含义

一般地，

$$\{f[\varphi(x)]\}' \neq f'[\varphi(x)].$$

如： $f(u)=\sin u,\quad u=\varphi(x)=2x,$

$$f[\varphi(x)]=\sin 2x,$$

$$\{f[\varphi(x)]\}' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$$

$$\neq f'[\varphi(x)] = f'(u)\Big|_{u=2x} = \cos u\Big|_{u=2x} = \cos 2x$$

3° **推广:** 复合函数求导法则可推广到多个中间变量的情形.

例如, $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$

$$\begin{array}{c} y \\ \downarrow \\ u \\ \downarrow \\ v \\ \downarrow \\ x \end{array}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$= f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(x)$$

复合函数求导法则称为**链式求导法则**.

关键: 搞清复合函数结构, 由外向内逐层求导.

4° 对于复合函数，不能直接用基本初等函数求导公式.

如：$(\sin x)' = \cos x$ 即 $\dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x$ （一致）

但 $(\sin 2x)' \neq \cos 2x$， 事实上

$$(\sin 2x)' = \frac{\mathrm{d}\sin 2x}{\mathrm{d}x}$$ （不一致）

$$= \frac{\mathrm{d}\sin u}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$ （一致）

$$= \cos u \cdot 2 \quad (u = 2x)$$

$$= 2\cos 2x$$

(四) 导数基本公式、初等函数的导数

1. 常数和基本初等函数的导数公式

$(C)' = 0$	$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x$	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	

2. 双曲函数及反双曲函数的导数公式

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x\,; \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x\,;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,; \qquad (\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

3. 函数的和、差、积、商的求导法则

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (Cu)' = Cu' \quad (\, C\text{为常数}\,)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

4. 反函数的求导法则 $f'(x) = \dfrac{1}{[f^{-1}(y)]'}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$

5. 复合函数的求导法则

$$y = f(u),\ u = \varphi(x),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

又如, $y = f(u),\ u = \varphi(v),\ v = \psi(x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(x)$$

关键: 搞清复合函数结构, 由外向内逐层求导.

小结

二、典型例题

例1 $y=\sqrt{x}(x^3-4\cos x-\sin 1)$，求 y' 及 $y'|_{x=1}$.

解 $y'=(\sqrt{x})'(x^3-4\cos x-\sin 1)$

$$+\sqrt{x}(x^3-4\cos x-\sin 1)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3-4\cos x-\sin 1)+\sqrt{x}(3x^2+4\sin x)$$

$$y'|_{x=1}=\frac{1}{2}(1-4\cos 1-\sin 1)+(3+4\sin 1)$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\sin 1-2\cos 1$$

例2 设 $f(x)=\sqrt[3]{x}\sin x$，求 $f'(x)$.

解 当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=(x^{\frac{1}{3}})'\sin x+\sqrt[3]{x}\cdot(\sin x)'$

$$=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\sin x+\sqrt[3]{x}\cos x$$

当 $x=0$ 时， $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\sin x-0}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=0\times 1=0$$

$$\therefore \quad f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\sin x+\sqrt[3]{x}\cos x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

注 下列推导不正确:

$$f'(0)=f'(x)\big|_{x=0} \cancel{=} [(x^{\frac{1}{3}})'\sin x+\sqrt[3]{x}\cdot(\sin x)']\big|_{x=0}$$

错误原因: $\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处不可导,故不能用乘积的求导法则.

例3 求函数 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解 $\because \quad y=\ln u,\ u=\sin x.$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

熟练后，可不写出中间变量:

$$y'=(\ln\sin x)'$$

$$=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x$$

$$=\cot x$$

例4 求函数 $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}$ 的导数.

解 $\because\quad y=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{3}\ln|x-2|,$

$\therefore\quad y'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]'-\frac{1}{3}[\ln|x-2|]'$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}\cdot(x-2)'$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x-2)}.$

例5 设 $y=f(\frac{3x-2}{3x+2})$，$f'(x)=\arctan x^2$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解 令 $u=\frac{3x-2}{3x+2}=1-\frac{4}{3x+2}$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\frac{12}{(3x+2)^2}$$

又当 $x=0$ 时，$u=-1$.

$$\therefore\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f'(-1)\cdot 3=\arctan(-1)^2\cdot 3=\frac{3\pi}{4}.$$

三、同步练习

1. 若 $u(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导，$v(x)$在 $x=x_0$ 处可导，问：$u(x)v(x)$ 是否一定在 $x=x_0$ 处不可导?

2. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)'=[(\dfrac{1}{x})^{\frac{3}{4}}]'=\dfrac{3}{4}(\dfrac{1}{x})^{-\frac{1}{4}}$ 对吗?

3. 求下列函数的导数

$$(1)\quad y=\left(\frac{a}{x}\right)^{b},\qquad (2)\quad y=\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}.$$

4. 求 $y=x^3-2x^2+\sin x$ 的导数.

5. 求 $y=\sin 2x\cdot\ln x$ 的导数.

6. 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续. 在求 $f'(a)$ 时, 下列做法是否正确?

解 因 $f'(x)=(x-a)'\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$

$$=\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$$

故 $f'(a)=\varphi(a)$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{e^x-1}{x}, & x>0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

8. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$, 求 $f'(0)$.

9. 设 $y=\ln\cos(\mathrm{e}^{x})$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

10. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$, 求 y'.

11. 设 $y=x^{a^{a}}+a^{x^{a}}+a^{a^{x}}\ (a>0)$, 求 y'.

12. 设 $y=\cot\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\tan\dfrac{2}{\sqrt{x}}$, 求 y'.

13. 设 $f(x)=\arcsin x$，$\varphi(x)=x^2$，求

$$f[\varphi'(x)],\ f'[\varphi(x)],\ [f(\varphi(x))]'.$$

14. 设 $f'(u)$ 存在，求 $y=f[\ln\cos(\mathrm{e}^x)]$ 的导数.

15. 设 $y=f(f(f(x)))$，其中 $f(x)$ 可导，求 y'.

16. 设 $f(u)$ 可导，$y=f(e^x)e^{f(x)}$，求 y'.

17. 设 $f(x)$、$\varphi(x)$ 均可导，求函数

$$y=f^n[\varphi^n(\sin x^n)]$$ 的导数.

18. 设 $f(x)$在$x=\mathrm{e}$处具有连续的一阶导数，且

$$f'(\mathrm{e})=-2\mathrm{e}^{-1}，求 \lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}}).$$

19. 求函数 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 的导数.

20. $y=\frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$，求 y'.

21. $y=\mathrm{e}^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}$，求 y'.

四、同步练习解答

1. 若 $u(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导，$v(x)$在 $x=x_0$ 处可导，问：$u(x)v(x)$ 是否一定在 $x=x_0$ 处不可导？

答：不一定． 反例见例2.

2. $$(\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}})' = [(\frac{1}{x})^{\frac{3}{4}}]' \cancel{=} \frac{3}{4}(\frac{1}{x})^{-\frac{1}{4}}$$ 对吗?

答：不对.

正确解法：$$(\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}})' = [(\frac{1}{x})^{\frac{3}{4}}]' = \frac{3}{4}(\frac{1}{x})^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

3. 求下列函数的导数

$$(1)\ \ y=\left(\frac{a}{x}\right)^{b},\qquad (2)\ \ y=\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}.$$

解 $(1)\ y'=b\left(\frac{a}{x}\right)^{b-1}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)=-\frac{a^b b}{x^{b+1}}$

$$(2)\ \ y'=\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}\ln\frac{a}{b}\cdot(-x)'=-\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\ln\frac{a}{b}$$

或 $y'=\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\right)'=\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\ln\frac{b}{a}$

4. 求 $y=x^3-2x^2+\sin x$ 的导数.

解 $y'=3x^2-4x+\cos x.$

5. 求 $y=\sin 2x\cdot\ln x$ 的导数.

解 $y'=(\sin 2x)'\cdot\ln x+\sin 2x\cdot(\ln x)'$

$$=\cos 2x\cdot 2\cdot\ln x+\sin 2x\cdot\frac{1}{x}$$

$$=2\cos 2x\ln x+\frac{1}{x}\sin 2x.$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

6. 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续. 在求 $f'(a)$ 时, 下列做法是否正确?

解 因 $f'(x)\cancel{=}(x-a)'\varphi(x)+(x-a)\underline{\varphi'(x)}$

$$=\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$$

故 $f'(a)=\varphi(a)$.

题设中未告知$\varphi(x)$可导

正确解法: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$$

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{e^x-1}{x}, & x>0 \end{cases}$， 求 $f'(x)$.

解 当 $x<0$时， $f'(x)=(x)'=1$

当 $x>0$ 时， $f'(x)=\dfrac{(e^x-1)'\cdot x-(e^x-1)\cdot 1}{x^2}$

$$=\frac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}$$

当 $x=0$ 时， $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$\because \quad f(0^-) \neq f(0^+)$

$\therefore \quad f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，从而不可导．

$$\therefore \; f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \dfrac{e^x x - e^x + 1}{x^2}, & x > 0 \end{cases}.$$

8. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$, 求 $f'(0)$.

解 (方法1) 利用导数定义.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)=-99!$$

(方法2) 利用求导公式.

$$f'(x)=(x)'\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]$$

$$+x\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]'$$

$\therefore\quad f'(0)=-99!$

9. 设 $y=\ln\cos(\mathrm{e}^x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos(\mathrm{e}^x)}\cdot[\cos(\mathrm{e}^x)]'$$

$$=\frac{1}{\cos(\mathrm{e}^x)}\cdot[-\sin(\mathrm{e}^x)]\cdot(\mathrm{e}^x)'$$

$$=\frac{1}{\cos(\mathrm{e}^x)}\cdot[-\sin(\mathrm{e}^x)]\cdot\mathrm{e}^x$$

$$=-\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x).$$

10. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$，求 y'.

解 $\because\ y=\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{2}$

$$=\frac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}=x-\sqrt{x^2-1}$$

$$\therefore\quad y'=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(x^2-1)'$$

$$=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x=1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

11. 设 $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}\ (a>0)$，求 y'.

解 $y' = (x^{a^a})' + (a^{x^a})' + (a^{a^x})'$

$= a^a x^{a^a - 1} + a^{x^a}\ln a \cdot (x^a)' + a^{a^x}\ln a \cdot (a^x)'$

$= a^a x^{a^a - 1} + a^{x^a}\ln a \cdot a x^{a-1} + a^{a^x}\ln a \cdot a^x \ln a.$

$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$	$(a^x)' = a^x \ln a$

12. 设 $y=\cot\frac{\sqrt{x}}{2}+\tan\frac{2}{\sqrt{x}}$，求 y'.

解 $y'=-\csc^2\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)'+\sec^2\frac{2}{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)'$

$$=-\csc^2\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sec^2\frac{2}{\sqrt{x}}\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{x}}\csc^2\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\sec^2\frac{2}{\sqrt{x}}$$

13. 设 $f(x)=\arcsin x$，$\varphi(x)=x^2$，求

$$f[\varphi'(x)],\ f'[\varphi(x)],\ [f(\varphi(x))]'.$$

解 $$f'(x)=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \varphi'(x)=2x$$

$$f[\varphi'(x)]=f(2x)=\arcsin(2x) \qquad (u=\varphi(x)=x^2)$$

$$f'[\varphi(x)]=f'(u)\Big|_{u=\varphi(x)}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\Big|_{u=\varphi(x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$[f(\varphi(x))]'=f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\cdot 2x=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

14. 设 $f'(u)$存在， 求 $y=f[\ln\cos(\mathrm{e}^x)]$的导数.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\boxed{\{f[\ln\cos(\mathrm{e}^x)]\}'}$$

这两个记号含义不同

$$=\boxed{f'[\ln\cos(\mathrm{e}^x)]}\cdot[\ln\cos(\mathrm{e}^x)]'$$

$$f'(u)\Big|_{u=\ln\cos(e^x)}$$

$$=f'[\ln\cos(\mathrm{e}^x)]\cdot\frac{1}{\cos(\mathrm{e}^x)}\cdot[-\sin(\mathrm{e}^x)]\cdot\mathrm{e}^x$$

$$=-f'[\ln\cos(\mathrm{e}^x)]\cdot\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x).$$

15. 设 $y=f(f(f(x)))$,其中 $f(x)$ 可导,求 y'.

解 $y'=f'(f(f(x)))\cdot f'(f(x))\cdot f'(x)$

16. 设 $f(u)$可导，$y=f(e^x)e^{f(x)}$，求 y'.

解 $y'=[f(\mathrm{e}^x)]'\cdot\mathrm{e}^{f(x)}+f(\mathrm{e}^x)\cdot[\mathrm{e}^{f(x)}]'$

$=f'(\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x)'\cdot\mathrm{e}^{f(x)}+f(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x)$

$=[f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x+f(\mathrm{e}^x)f'(x)]\mathrm{e}^{f(x)}.$

17. 设 $f(x)$、$\varphi(x)$均可导，求函数

$y=f^n[\varphi^n(\sin x^n)]$的导数.

由外向内

解 $y'=nf^{n-1}[\varphi^n(\sin x^n)]\cdot\{f[\varphi^n(\sin x^n)]\}'$

$=nf^{n-1}[\varphi^n(\sin x^n)]\cdot f'[\varphi^n(\sin x^n)]\cdot[\varphi^n(\sin x^n)]'$

$=nf^{n-1}[\varphi^n(\sin x^n)]\cdot f'[\varphi^n(\sin x^n)]\cdot$

$n\varphi^{n-1}(\sin x^n)\cdot[\varphi(\sin x^n)]'$

$$y=f^n[\varphi^n(\sin x^n)]\rightarrow\begin{cases}y=u^n, u=f(v), v=\omega^n\\ \omega=\varphi(s), s=\sin t, t=x^n\end{cases}$$

$$= n f^{n-1}[\varphi^n(\sin x^n)] \cdot f'[\varphi^n(\sin x^n)] \cdot n\varphi^{n-1}(\sin x^n) \cdot$$

$$\varphi'(\sin x^n) \cdot (\cos x^n) \cdot nx^{n-1}.$$

$$= n^3 \cdot x^{n-1} \cos x^n \cdot f^{n-1}[\varphi^n(\sin x^n)] \cdot \varphi^{n-1}(\sin x^n)$$

$$\cdot f'[\varphi^n(\sin x^n)] \cdot \varphi'(\sin x^n).$$

18. 设 $f(x)$在$x=\mathrm{e}$处具有连续的一阶导数，且

$f'(\mathrm{e})=-2\mathrm{e}^{-1}$，求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})=f'(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})'$

$=f'(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}}(\cos\sqrt{x})'$

$=f'(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})$$

$$= \lim_{x\to 0^+} f'(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}}\left(-\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$= f'(\mathrm{e})\cdot \mathrm{e}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\boxed{f'(\mathrm{e}) = -2\mathrm{e}^{-1}}$$

$$= 1.$$

19. 求函数 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 的导数.

解 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}[1+(\sqrt{x+\sqrt{x}})']$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(x+\sqrt{x})']$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}))$$

$$=\frac{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}.$$

20. $y=\frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$，求 y'.

解 $y'=\frac{1}{2}\frac{1}{1+(\sqrt{1+x^2})^2}\cdot(\sqrt{1+x^2})'$

$+\frac{1}{4}[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\cdot(\sqrt{1+x^2}+1)'-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}\cdot(\sqrt{1+x^2}-1)']$

$=\frac{1}{2}\frac{1}{1+(\sqrt{1+x^2})^2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\ln(\sqrt{1+x^2}+1)-\ln(\sqrt{1+x^2}-1)$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{1}{2+x^2}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{-1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}.$$

21. $y=\mathrm{e}^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}$，求 y'.

解 $y'=(\mathrm{e}^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x)\arctan\sqrt{x^2-1}$

$$+\mathrm{e}^{\sin x^2}\left(\frac{1}{1+x^2-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)$$

$$=2x\cos x^2\,\mathrm{e}^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}$$

$$+\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{e}^{\sin x^2}$$

关键：搞清复合函数结构，由外向内逐层求导.