第二节

第二类曲线积分

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

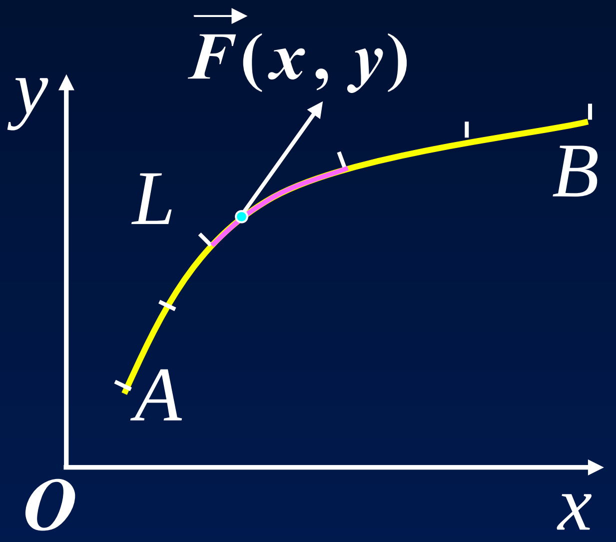
一、主要内容

(一) 第二类曲线积分的概念及性质

1. 问题引入 变力沿曲线所作的功.

设一质点受如下变力作用

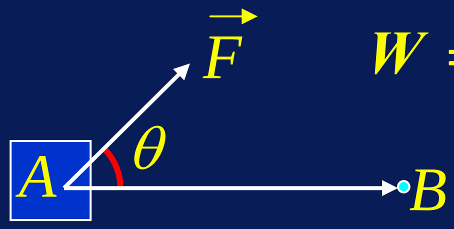
$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$



L：$A \to B$, 求移动过程中变力所作的功W. 解决办法:

"分割，近似，求和，取极限"

联想：恒力沿直线做功

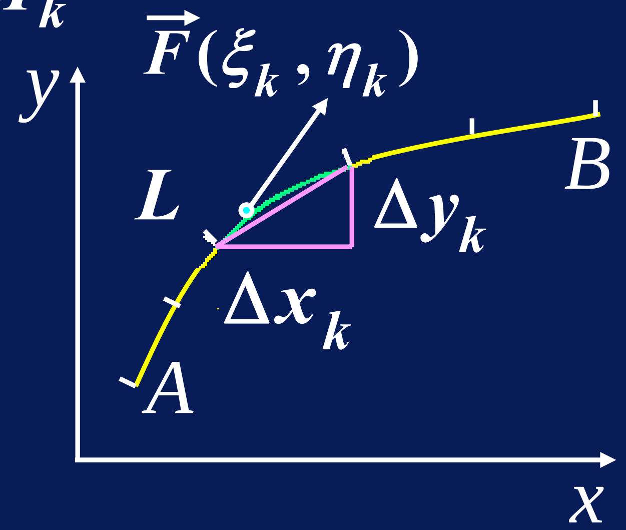


$$W=\vec{F}\,\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\theta$$

$$=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

1° 分割

把L分成 n 个小弧段, $\vec{F}$ 沿$\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$所做的功为$\Delta W_k$, 则



$$W=\sum_{k=1}^{n}\Delta W_k$$

2° 取近似

有向小弧段$\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 用有向线段 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}=(\Delta x_k,\Delta y_k)$ 近似代替, $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 在上任取一点 (ξ_k,η_k), 则有

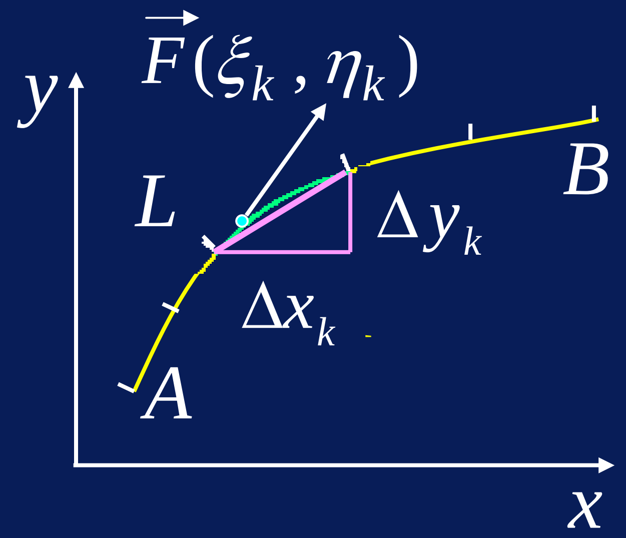
$$\Delta W_k\approx\vec{F}(\xi_k,\eta_k)\cdot\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$$
$$=P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$$

3° 求和

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k]$$

4° 取极限

变力沿曲线所作的功



$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k]$$

(其中λ 为 n 个小弧段的最大长度)

2. 定义10.2 设 L 为xOy 平面内从 A 到B 的一条**有向光滑弧**，在L 上定义了一个有界**向量函数**

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

若对 L 的任意分割和在局部弧段上任意取点，极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

都存在(**与分化和取点无关**)，其中$\Delta\vec{r}_i=\Delta x_i\,\vec{i}+\Delta y_i\,\vec{j}$，

$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{|\Delta \vec{r}_i|\}$, 则称此极限值为向量值函数

$\vec{F}(x,y)$在有向曲线弧 L 上第二类曲线积分,

或对坐标的曲线积分，记作

$$\int_L \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

积分曲线

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

注 1° 关于第二类曲线积分的几个术语

$$\int_L \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$ 第二类曲线积分的向量形式

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$ 第二类曲线积分的坐标形式

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$$ 对 x 的曲线积分;

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$$ 对 y 的曲线积分.

2° 若 Γ 为空间曲线弧，

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

$$\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{\Gamma}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

3° 如果L是闭曲线, 则对坐标的曲线积分记为

$$\oint_{L}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\oint_{L}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

4° 对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的方向！

5° 变力沿曲线所作的功

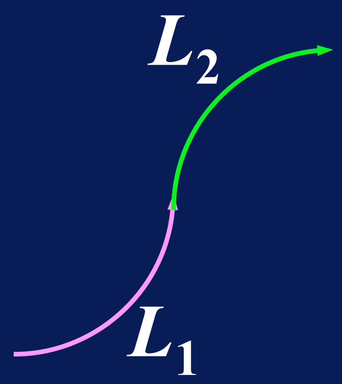
$$W=\int_{L}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

性质 (1) 线性性质： $\forall \alpha, \ \beta \in R^1$

$$\int_L [\alpha \vec{F}_1(x,y) + \beta \vec{F}_2(x,y)] \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \alpha \int_L \vec{F}_1(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \beta \int_L \vec{F}_2(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

(2) 可加性： L 由 L_1 和 L_2 组成



$$\int_L \vec{F}(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{L_1} \vec{F}(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{L_2} \vec{F}(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

(3) 有向性： 用 L^- 表示 L 的反向弧，则

$$\int_{L^-} \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = -\int_{L} \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\,\vec{r}$$

对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的方向.

这是第一类和第二类线积分的一个重要区别

(二) 两类曲线积分之间的联系

定理 设有向平面曲线弧 L: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$,

起点： $A \leftrightarrow a$, 终点： $B \leftrightarrow b$.

$\varphi'(t), \psi'(t)$在以a, b为端点的区间上连续，且

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0.$$

L上点(x, y)处与L同方向的切向量 的方向角

为α, β，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$$

注　$$\cos\alpha = \pm\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},$$

$$\cos\beta = \pm\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},$$

当$a<b$时，取“+”号;

当$a>b$时，取“−”号.

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha\,\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}y = \cos\beta\,\mathrm{d}s,$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,|\mathrm{d}t|$$

(三) 第二类曲线积分的计算法

定理10.2 设 L 是一条平面有向光滑曲线弧，

其参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t: a \to b,$

当 t: $a \xrightarrow{\text{单调}} b$时， 点$M(x,y)$: $A \xrightarrow{\text{沿}L} B.$

$P(x,y), Q(x,y)$在L上连续，$\varphi(t), \psi(t)$在以a和b为端点的区间上具有一阶连续的导数，且

$$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0,$$

则有 $\displaystyle\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\int_a^b\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

注 1° 计算$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$，可将

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

代入上式，且同时换限.

下限$a \longleftrightarrow L$的起点A

上限$b \longleftrightarrow L$的终点B

a不一定小于b!

即计算定积分:

$$\int_a^b \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$ 即可;

2° 如果 L 的方程为 $y=\psi(x),\ x:a\to b,$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\,\psi'(x)\}\mathrm{d}x$$

3° 对空间光滑曲线弧 Γ: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}\quad t:\alpha\to\beta$

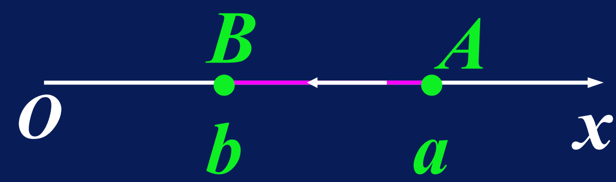
$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$

$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\,\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\,\}\mathrm{d}t$$

思考 定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



是否可看作第二类曲线积分的特例？

是！ 第二类曲线积分

$$\int_{\overline{AB}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

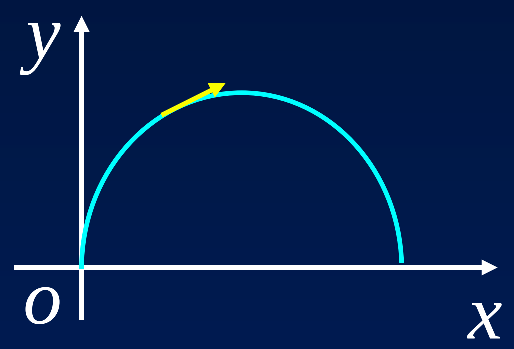
二、典型例题

例1 将积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化为对弧长的积分，其中L 沿上半圆周 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 从$O(0,0)$到$B(2,0)$.

解(方法1) L： $y = \sqrt{2x - x^2}$,

x： $0 \longrightarrow 2$ $(a < b)$

$$y' = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$$



切向量 $\vec{T} = \vec{r}'(x) = (1, y')$ 与L方向一致.

其方向余弦:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \sqrt{2x-x^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}$$

$$\cos\beta = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 1-x$$

$$\therefore \quad \int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

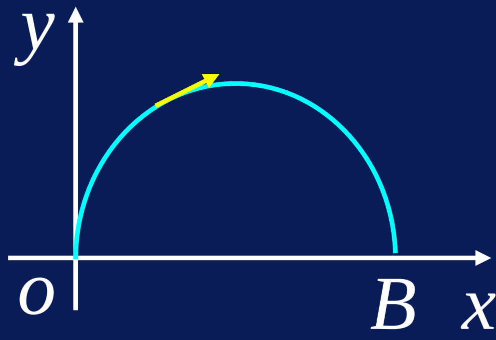
$$= \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_L [\sqrt{2x-x^2}\,P(x,y) + (1-x)Q(x,y)]\,\mathrm{d}s$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(方法2) $L:\begin{cases} x = 1+\cos t \\ y = \sin t \end{cases},$

$t: \quad \pi \longrightarrow 0 \qquad (a > b)$



切向量 $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

与L方向相反.

与L同方向的切向量: $\vec{T} = -\vec{r}'(t) = (\sin t, -\cos t)$

其方向余弦: $\cos\alpha = \sin t = y = \sqrt{2x - x^2},$

$\cos\beta = -\cos t = 1 - x$

… ….

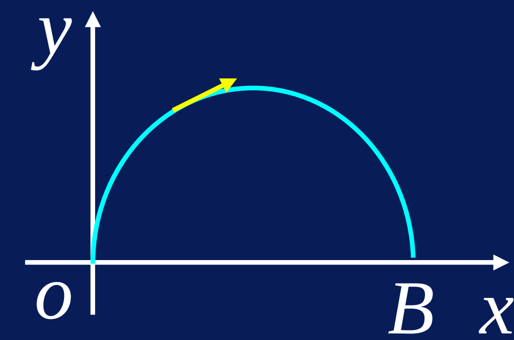
(方法3) $y=\sqrt{2x-x^2}$, $\mathrm{d}y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$$

$O\xrightarrow{L}B$

弧长s



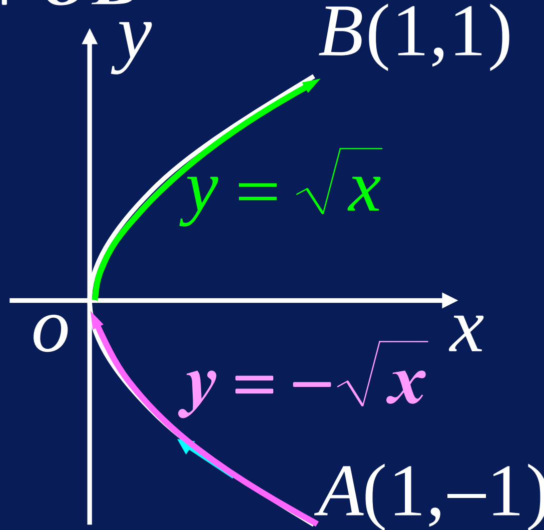
$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\sqrt{2x-x^2},\quad \cos\beta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=1-x$$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=$$

$$\int_L\left[P(x,y)\sqrt{2x-x^2}+Q(x,y)(1-x)\right]\mathrm{d}s$$

例2 计算 $\int_L xy\,\mathrm{d}x$, 其中L为沿抛物线 $y^2 = x$ 从点 $A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段.

解(方法1) 取 x 为参数, 则 $L: \overset{\frown}{AO} + \overset{\frown}{OB}$



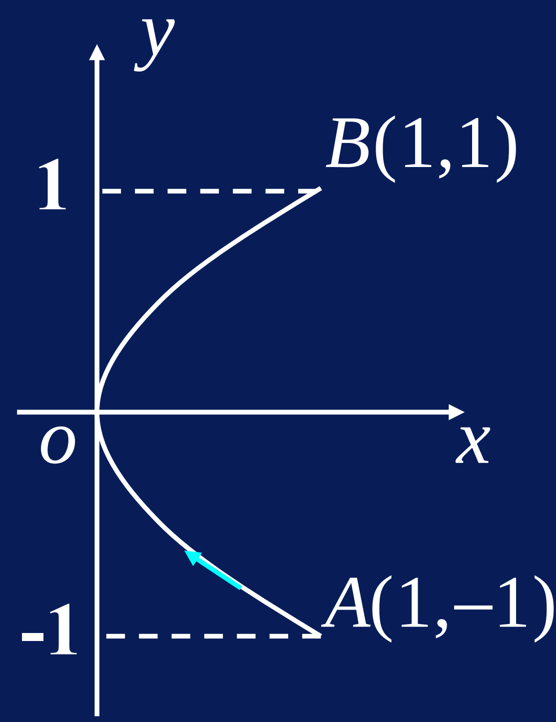
$$\overset{\frown}{AO}: \ y = -\sqrt{x}, \ x: 1 \to 0$$

$$\overset{\frown}{OB}: \ y = \sqrt{x}, \quad x: 0 \to 1$$

$$\therefore \int_L xy\,\mathrm{d}x = \int_{\overset{\frown}{AO}} xy\,\mathrm{d}x + \int_{\overset{\frown}{OB}} xy\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^0 x(-\sqrt{x})\mathrm{d}x + \int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}$$

(方法2) 取 y 为参数, 则



$$L: x = y^2\,,\ \ y: -1 \to 1$$

$$\therefore \int_L xy\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} y^2 y (y^2)'\,\mathrm{d}y$$

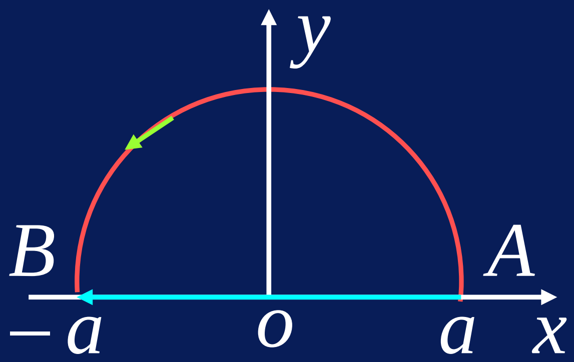
$$= 2\int_{-1}^{1} y^4\,\mathrm{d}y = \frac{4}{5}$$

注意积分
路径的
表示形式

例3 计算 $\int_L y^2 \mathrm{d}x$，其中 L 为

(1) 半径为 a 圆心在原点的上半圆周，方向为逆时针方向；

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$.



解 (1) L: $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t: 0 \to \pi$

则 $$\int_L y^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} a^2 \sin^2 t \cdot (-a\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -2a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\,\mathrm{d}t = -2a^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{4}{3}a^3$$

(2) L: $y = 0,\ x: a \to -a$,

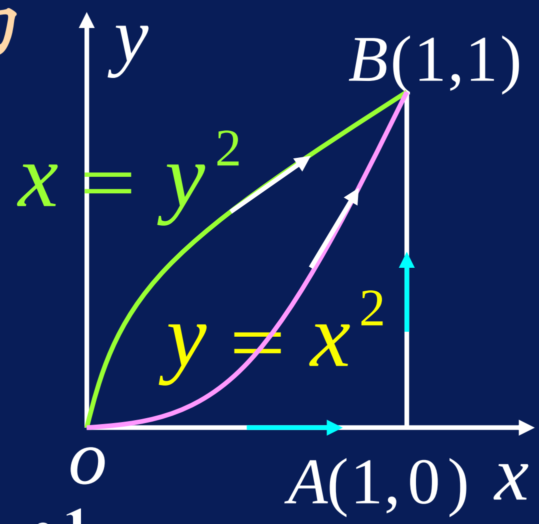
则 $$\int_L y^2 \mathrm{d}x = \int_a^{-a} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

例4 计算 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, 其中$L$为

(1) 抛物线 $L: y = x^2,\ x: 0 \to 1;$

(2) 抛物线 $L: x = y^2,\ y: 0 \to 1;$

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} + \overline{AB}.$



解 (1) 原式 $= \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = 1$

(2) 原式 $= \int_0^1 (2y^2 y \cdot 2y + y^4)\,\mathrm{d}y = 5\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}y = 1$

(3) 原式 $= \int_{\overline{OA}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (2y \cdot 0 + 1)\,\mathrm{d}y = 1$$

例5 计算$\int_{\Gamma} x^3 \mathrm{d}x + 3zy^2 \mathrm{d}y - x^2 y \mathrm{d}z$, 其中 Γ是从点 $A\ (3, 2, 1)$到点$B\ (0, 0, 0)$的直线段AB.

解 直线AB为:
$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 2t, \\ z = t, \end{cases} \qquad t: 1 \to 0.$$

$$\int_{\Gamma} x^3 \mathrm{d}x + 3zy^2 \mathrm{d}y - x^2 y \mathrm{d}z$$

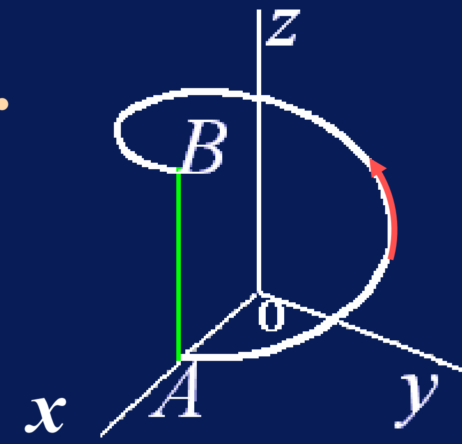
$$= \int_1^0 [(3t)^3 \cdot 3 + 3t(2t)^2 \cdot 2 - (3t)^2 \cdot 2t] \mathrm{d}t$$

$$= 87 \int_1^0 t^3 \mathrm{d}t = -\frac{87}{4}$$

例6 设在力场 $\overrightarrow{F}=(y,-x,z)$ 作用下，质点由 $A(R,0,0)$ 沿Γ移动到 $B(R,0,2\pi k)$,其中Γ为

(1) $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=kt;$

(2) $\overline{AB}$. 试求力场对质点所作的功.



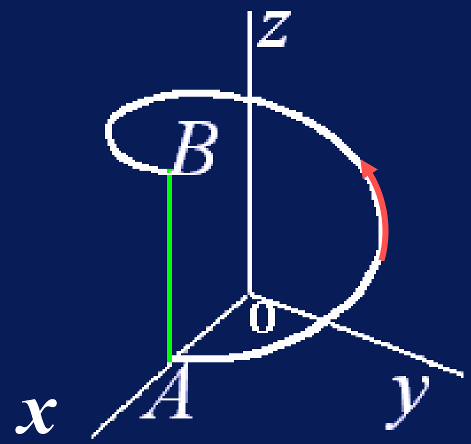
解 (1) $W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}(-R^2+k^2t)\,\mathrm{d}t=2\pi(\pi k^2-R^2)$$

(2) Γ 的参数方程:

$$x = R,\ y = 0,\ z = t,\ \ t : 0 \to 2\pi k$$



$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{\overline{AB}} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_{0}^{2\pi k} t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi^2 k^2$$

三、同步练习

1. 计算$\int_L (x+2y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$，其中$L$是从点(0,1)沿曲线$x^{2/3}+y^{2/3}=1 \quad (x\geq 0)$到点(1,0).

2. 把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$化为对弧长的曲线积分，其中$L$为：

(1) 在xOy面内沿直线从点(0,0)到点(1,1);

(2) 沿抛物线$y=x^2$从点(0,0)到点(1,1);

(3) 沿上半圆周$x^2+y^2=2x$从点(0,0)到点(1,1).

3. 计算$\int_L (x^2 - y^2)\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y$,其中$L$是:

(1) 由$O(0, 0)$、$A(1, 0)$、$B(1, 1)$ 三点连成的折线段;

(2) 由$O(0,0)$沿圆弧 $y = \sqrt{2x - x^2}$到$B(1,1)$;

(3) 由$O(0,0)$沿曲线 $y = x^n$(n是正的实数）到$B(1,1)$.

4. 求 $I = \int_\Gamma (z - y)\mathrm{d}x + (x - z)\mathrm{d}y + (x - y)\mathrm{d}z$,

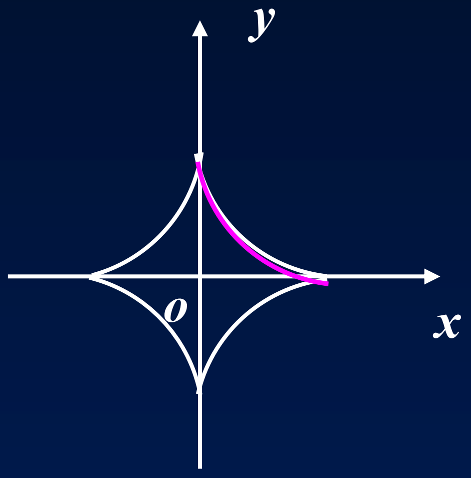
$\Gamma:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$，从 z 轴正向看为顺时针方向.

5. 计算$\oint_L xy(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)$, L是双纽线的右半支:

$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \geq 0$的逆时针方向.

四、同步练习解答

1. 计算$\int_L (x+2y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$，其中$L$是从点$(0,1)$沿曲线$x^{2/3}+y^{2/3}=1 \quad (x\ge 0)$到点$(1,0)$.



解 L的参数方程:

$$x=\cos^3 t, y=\sin^3 t, 0\le t\le \frac{\pi}{2},$$

$$\int_L (x+2y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} [(\cos^3 t + 2\sin^3 t)(-3\cos^2 t\sin t) + 3\sin^2 t\cos^4 t]\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} [(\cos^3 t + 2\sin^3 t)(-3\cos^2 t \sin t) + 3\sin^2 t \cos^4 t]\mathrm{d}t$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos^5 t \sin t + 2(1-\sin^2 t)\sin^4 t - (1-\cos^2 t)\cos^4 t]\mathrm{d}t$$

$$= 3\left[\frac{1}{6} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t)\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{2} + 3\left(\frac{3}{4\times 2} - \frac{5\times 3}{6\times 4\times 2}\right)\cdot\frac{\pi}{2} \quad = \frac{1}{2} + \frac{3}{32}\pi.$$

2. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化为对弧长的曲线积分，其中L为：

(1) 在xOy面内沿直线从点$(0,0)$到点$(1,1)$;

(2) 沿抛物线$y = x^2$从点$(0,0)$到点$(1,1)$;

(3) 沿上半圆周$x^2 + y^2 = 2x$从点$(0,0)$到点$(1,1)$.

解 (1) 过点 $(0,0)$, $(1,1)$ 的直线 $y = x$,

方向余弦： $\cos\alpha = \cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L [P(x,y) + Q(x,y)]\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}s$$

(2) 由 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y_x'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$,得

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},$$

$$\cos\beta=\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_L\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\left[P(x,y)+2xQ(x,y)\right]\mathrm{d}s$$

$$(3)\ \mathrm{d}s = \sqrt{1+y_x'^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x, \text{则}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{2x-x^2},$$

$$\cos\beta = \sin\alpha = \sqrt{1-(2x-x^2)} = 1-x$$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_L \left[P(x,y)\sqrt{2x-x^2} + Q(x,y)(1-x) \right] \mathrm{d}s$$

3. 计算$\int_L (x^2 - y^2)\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y$,其中$L$是:

(1) 由$O(0, 0)$、$A(1, 0)$、$B(1, 1)$ 三点连成的折线段;

(2) 由$O(0,0)$沿圆弧 $y = \sqrt{2x - x^2}$到$B(1,1)$;

(3) 由$O(0,0)$沿曲线 $y = x^n$(n是正的实数)到$B(1,1)$.

解 (1) $\int_L (x^2 - y^2)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = \int_{OA} + \int_{AB}$

$$= \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 y\mathrm{d}y = \frac{5}{6}$$

$$y=\sqrt{2x-x^2}$$

(2) 把L的方程化成参数式:

$$x=1+\cos t,\quad y=\sin t,\quad \frac{\pi}{2}\le t\le \pi.$$

$$\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}[(1+\cos t)^2(-\sin t)-\sin^2 t(-\sin t)$$

$$+(1+\cos t)\sin t\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos^2 t+\cos t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{1}{2}\cos^2 t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{6}.$$

(3) $\int_L (x^2 - y^2)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y$

曲线 $y = x^n$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^{2n} + nx^{2n})\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{n-1}{2n+1} x^{2n+1} \right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{n-1}{2n+1}.$$

4. 求 $I=\int_{\Gamma}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z,$

$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-y+z=2\end{cases}$，从 z 轴正向看为顺时针方向.

解 Γ 的参数方程:

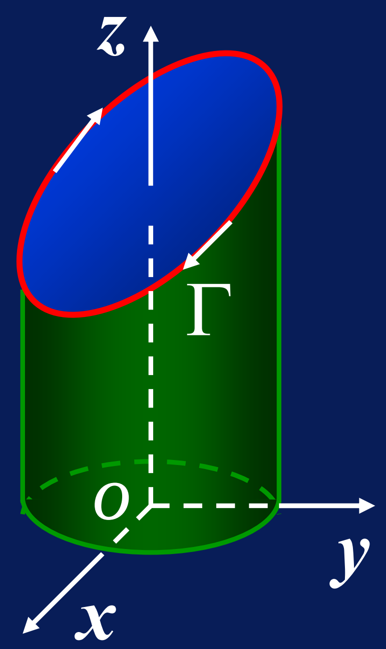
$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2-\cos t+\sin t\quad (t:2\pi\to 0)$

$$I=-\int_0^{2\pi}[\ (2-\cos t)(-\sin t)$$

$$+(-2+2\cos t-\sin t)\cos t$$

$$+(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)]\mathrm{d}t$$

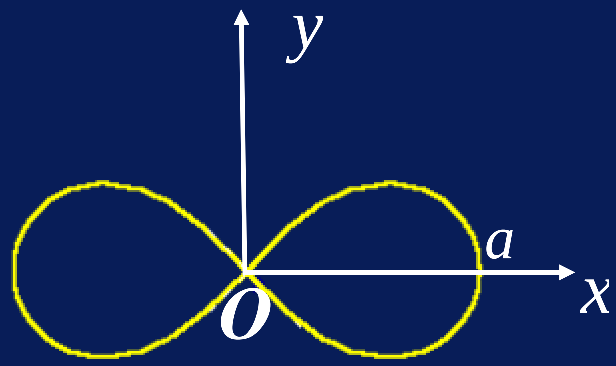
$$=\int_0^{2\pi}(1-4\cos^2 t)\mathrm{d}t=-2\pi$$



5. 计算 $\oint\limits_L xy(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)$, L是双纽线的右半支:

$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), x \geq 0$的逆时针方向。

解 L的参数方程是:



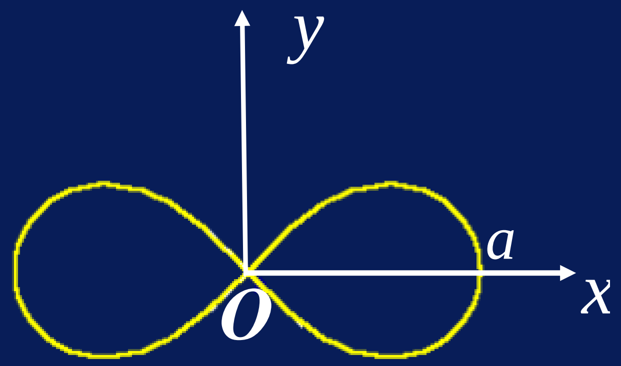
$$x = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta,$$

$$y = a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta,$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\sin 3\theta \,\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}y \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\cos 3\theta \,\mathrm{d}\theta,$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\sin 3\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}y\,\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\cos 3\theta\,\mathrm{d}\theta,$$



$$\oint_L xy(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^4 \cos 2\theta \sin\theta \cos\theta(-\sin\theta \sin 3\theta - \cos\theta \cos 3\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= -\frac{a^4}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \sin 2\theta \mathrm{d}\theta = 0.$$