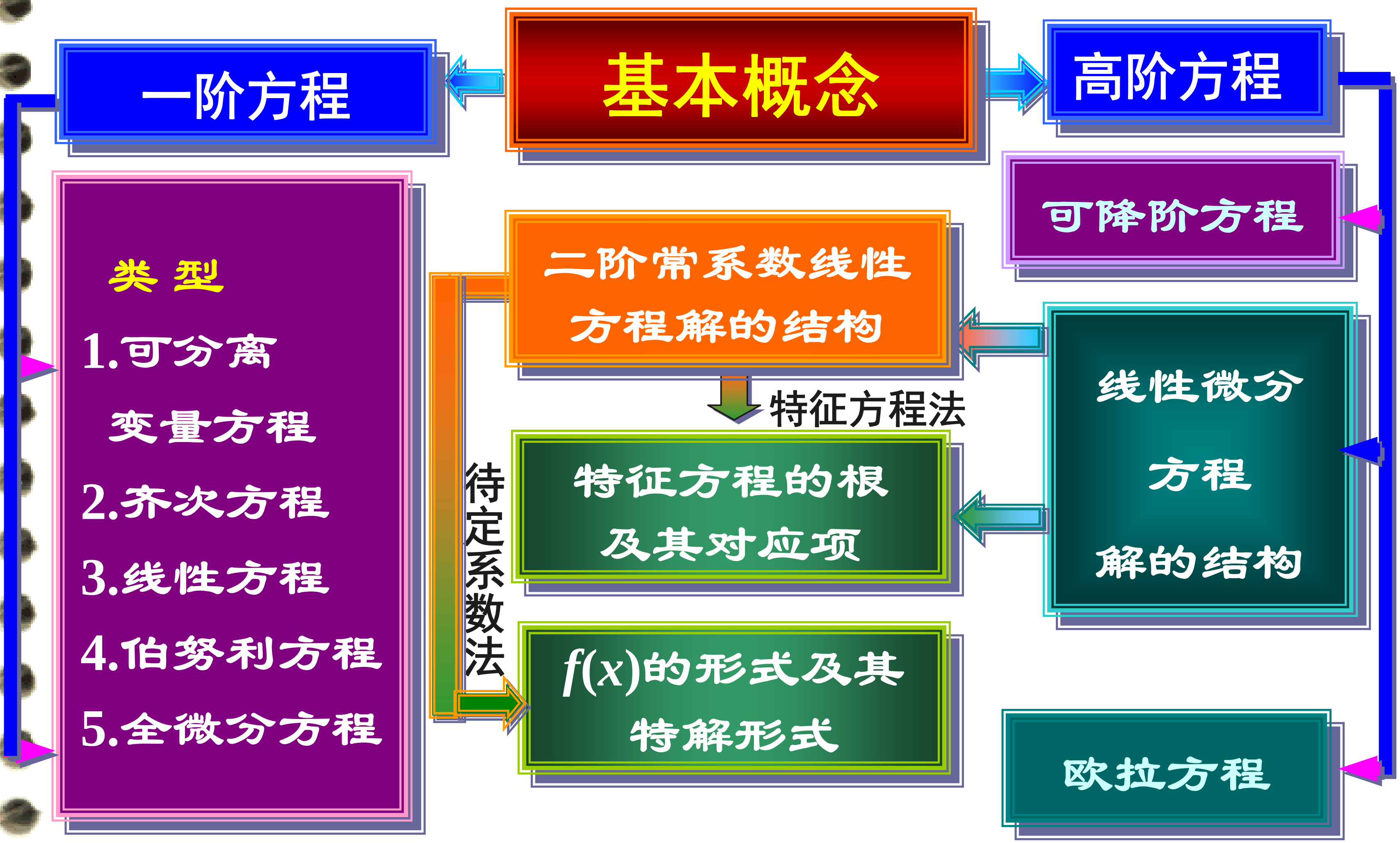
# 第十二章

## 微分方程

# 一、知识网络关系图



基本概念
一阶方程
高阶方程
类 型
1.可分离
变量方程
2.齐次方程
3.线性方程
4.伯努利方程
5.全微分方程
可降阶方程
二阶常系数线性
方程解的结构
特征方程法
特征方程的根
及其对应项
待定系数法
f(x)的形式及其
特解形式
线性微分
方程
解的结构
欧拉方程

# 一阶显示微分方程的初等积分法

**五种类型：**

1° 变量分离方程： $$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

2° 齐次方程： $$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (令\ u = \frac{y}{x})$$

准齐次方程： $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

其中 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$

**解法:** 先求交点: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \end{cases}$ $(\alpha, \beta)$

再作变换: $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$

可将该准齐次方程化为关于$Y, X$的齐次方程.

$3^{\circ}$ 线性方程: $\dfrac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$

通解: $y = e^{\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + C]$

—— 常数变易公式

满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的特解:

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt}[\int_{x_0}^{x} Q(t)e^{-\int_{x_0}^{t} P(s)ds}dt + y_0]$$

$4^{\circ}$ 伯努利方程： $\dfrac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n$

(令 $z = y^{1-n}$，化为$z$的线性方程)

黎卡提方程： $\dfrac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^2 + f(x)$

(若已知其一个特解 $y_1(x)$)

(令 $z = y - y_1(x)$，化为$z$的$n = 2$的伯努利方程)

$5^{o}$ 全微分方程： $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

( 恰当)

$\exists\, u=u(x,y)$, 使

$$du(x,y)\equiv M(x,y)dx+N(x,y)dy \quad (x,y)\in G$$

其中$G$为一单连通区域 .

(1) 判别法 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, $(x,y)\in G$

(2) 求解法 关键：求 $u(x,y)$.

常用的方法有三种：

① 特殊路径法

② 分项组合法

③ 偏积分法

小结 求解一阶微分方程的基本路径有两条：

目标

(1) 变量变换法 → 变量分离方程

(2) 积分因子法 → 全微分方程

**积分因子：** $\mu=\mu(x,y)\neq 0$, 使

$$\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$$

为恰当方程.

**找 $\mu$ 的方法：** ① 分项组合法

② 公式法

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 有积分因子 $\mu=\mu(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(x), \text{ 且 } \mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx}.$$

# 可降阶微分方程

## 1. $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

令 $z = y^{(n-1)}$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y^{(n)} = f(x)$, 因此

$$z = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1$$

即 $$y^{(n-1)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1$$

同理可得 $$y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)\mathrm{d}x + C_1\right]\mathrm{d}x + C_2$$

$$= \int\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x + C_1 x + C_2$$

依次通过 $n$ 次积分, 可得含 $n$ 个任意常数的通解 .

## 2. $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

设 $y' = p(x)$, 则 $y'' = p'$, 原方程化为一阶方程

$$p' = f(x, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$

则得 $y' = \varphi(x, C_1)$

再一次积分, 得原方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2$$

## 3. $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故方程化为 $$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

# 常系数线性微分方程(组)的解法

## 1. 常系数齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

特征方程： $r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$

| 特征方程的根 | 通解中的对应项 |
|---|---|
| 若是 $k$ 重根 $r$ | $(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) e^{rx}$ |
| 若是 $k$ 重共轭复根 $r = \alpha \pm i\beta$ | $[(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) \cos \beta x + (D_0 + D_1 x + \cdots + D_{k-1} x^{k-1}) \sin \beta x] e^{\alpha x}$ |

**注意:**

$n$次代数方程有$n$个根, 而特征方程的每一个根都对应着通解中的一项, 且每一项各一个任意常数.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

## 2. 常系数非齐线性方程

二阶常系数非齐次线性方程：

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

对应齐次线性方程：

$$L[y] = y'' + p\,y' + q\,y = 0 \qquad (2)$$

其中 $p,q$ 均为实常数 .

(1)的通解结构： $y = Y + y^*,$

如何求(1)的特解？ 方法：待定系数法.

## 类型1　$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$

其中 $P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$,

$\lambda, a_i(i=1,2,\cdots,m)$均为常数， $a_0\neq 0.$

方程(1)必有如下形式的特解：

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$$

其中 $Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$,

$b_i(i=1,2,\cdots,m)$均为待定常数,

由方程 (1)所确定；$k$的取法如下：

| λ | 非特征根 | 特征单根 | 特征重根 |
|---|---|---|---|
| $k$ | 0 | 1 | 2 |

推导如下：

设非齐次线性方程(1)的特解为

$$y^* = Q(x)e^{\lambda x}$$

$x$的待定多项式

则 $$(y^*)' = Q'(x)e^{\lambda x} + Q(x)\cdot\lambda e^{\lambda x}$$

$$= [Q'(x) + \lambda Q(x)]e^{\lambda x}$$

$$(y^*)'' = [Q''(x) + 2\lambda Q'(x) + \lambda^2 Q(x)]e^{\lambda x}$$

特征多项式

$$F(r) = r^2 + pr + q$$

$$F'(r) = 2r + p$$

代入方程(1)，得

$$L[y^*] = (y^*)'' + p(y^*)' + qy^*$$

$$= \cancel{e^{\lambda x}}[Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x)]$$

$$\equiv P_m(x)\cancel{e^{\lambda x}}$$

$\therefore$ $y^*$是方程(1)的解 $\Leftrightarrow$

$$Q''(x) + \underline{(2\lambda + p)}Q'(x) + \underline{(\lambda^2 + p\lambda + q)}Q(x) \equiv P_m(x)$$

即 $$Q''(x) + F'(\lambda)Q'(x) + F(\lambda)Q(x) \equiv P_m(x) \quad (3)$$

$$Q''(x) + F'(\lambda)Q'(x) + F(\lambda)Q(x) = P_m(x) \quad (3)$$

(1) 若 $\lambda$ 不是特征方程的根，

$$F(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q \neq 0,$$

可设 $Q(x) = Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m,$

代入(3)式,对比两端 $x$ 同次幂的系数：

$$\begin{cases} F(\lambda)b_0 = a_0 & (x^m) \\ F(\lambda)b_1 + F'(\lambda)\cdot b_0 m = a_1 & (x^{m-1}) \\ \quad\vdots & \\ F(\lambda)b_m + F'(\lambda)\cdot b_{m-1} + 2b_{m-2} = a_m & (x^0) \end{cases}$$

$\because \quad F(\lambda) \neq 0$

$\therefore \quad b_0, b_1, \cdots, b_m$ 可由此方程组唯一确定 ，

即可确定$Q_m(x)$. 此时，$k=0$,

方程(1)有特解： $y^* = Q_m(x)e^{\lambda x}$;

(2) 若$\lambda$是特征方程的单根，

$$F(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

$$F'(\lambda) = 2\lambda + p \neq 0,$$

$$Q''(x) + F'(\lambda)Q'(x) + 0 = P_m(x) \qquad (3)$$

取 $Q'(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_m \quad (B_0 \neq 0)$

则 $Q(x) = b_0 x^{m+1} + b_1 x^m + \cdots + b_m x + b_{m+1}$

为了求方程(1)的特解，可取 $b_{m+1} = 0$

可设 $Q(x) = x(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m) = xQ_m(x)$,

此时，$k = 1$. 方程(1)有如下形式的特解：

$$y^* = xQ_m(x)e^{\lambda x};$$

(3) 若 $\lambda$ 是特征方程的重根，

$$F(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad F'(\lambda) = 2\lambda + p = 0,$$

可设 $Q(x) = x^2 Q_m(x)$, $y^* = x^2 Q_m(x)e^{\lambda x}$.

综上所述：方程(1)的特解可设立为：

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}, \quad k = \begin{cases} 0, & \lambda\text{不是特征根} \\ 1, & \lambda\text{是特征单根}, \\ 2, & \lambda\text{是特征重根} \end{cases}$$

**注** 上述结论可推广到$n$阶常系数非齐次线性微分方程($k$是重根次数).

$y^* = Q(x)e^{\lambda x} = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$是方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = P_m(x) e^{\lambda x}\text{的解}$$

$$\Longleftrightarrow Q^{(n)}(x) + \frac{F^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} Q^{(n-1)}(x) + \cdots + \frac{F'(\lambda)}{1!} Q'(x)$$

$$+ F(\lambda) Q(x) \equiv P_m(x)$$

**类型2** $f(x)=e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$

其中 $P_l(x), P_n(x)$分别是 $x$的$l$次和$m$次实系数多项式；$\alpha$，$\beta$为实常数．

方程(1)必有如下形式的特解：

$$y^*=x^k[R_m^{(1)}(x)\cos\beta x+R_m^{(2)}(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$$

其中$k$的取法如下：

| $\lambda=\alpha+i\beta$ | 非特征根 | 特征根 |
|---|---|---|
| $k$ | 0 | 1 |

$R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$为$x$的待定多项式，$m=\max\{l,n\}$.

**引理** 若 $y=\varphi(x)+i\psi(x)$是方程

$$y''+py'+qy=u(x)+iv(x) \quad (p,q\text{为实常数})$$

的解， $u(x),v(x),\varphi(x),\psi(x)$均为实函数，则

$\varphi(x),\psi(x)$分别是方程

$$y''+py'+qy=u(x)$$

和 $y''+py'+qy=v(x)$ 的解.

**推导类型 2结论的思路:**

将类型2 转化为类型 1 的情形.

## ★ 欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x) \quad (8.5)$$

的方程(其中 $p_1, p_2 \cdots p_n$为实常数)叫欧拉方程.

特点：各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的方次数相同.

解法：欧拉方程是特殊的变系数方程，通过变量代换可化为常系数微分方程.

作变量变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$,

将自变量换为 $t$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right), \cdots\cdots$$

用 $D$ 表示对自变量 $t$ 求导的运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,

上述结果可以记为

$$xy' = Dy,$$

$$x^2y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = D^2y - Dy = (D^2 - D)y = D(D-1)y,$$

$$x^3y''' = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$= (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y,$$

$$\cdots\cdots$$

一般地，$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y.$

将上式代入欧拉方程，则化为以 $t$ 为自变量的常系数线性微分方程：

$$D(D-1)\cdots(D-n+1)y + p_1 D(D-1)\cdots(D-n+2)y + p_{n-1}Dy + p_n y = f(e^t) \quad (8.6)$$

求出这个方程的解后，

把 $t$ 换为 $\ln x$，即得到原方程的解.

**注** 与(8.6)对应的齐次线性方程的特征方程为：

$$r(r-1)\cdots(r-n+1) + p_1 r(r-1)\cdots(r-n+2) + \cdots + p_{n-1}r + p_n = 0 \qquad (8.7)$$

# 二、常考题型

## 题型1　基础题

### 例1　填空题

1. 已知 $y = y(x)$ 在任意点 $x$ 处的增量

$$\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$$

其中 $\alpha = o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0)$, $y(0) = \pi$, 则 $y(1) = \underline{\pi e^{\frac{\pi}{4}}}$.

**分析**　本题并不知 $\alpha$ 具体等于什么，故无法直接由上式算出 $y(1)$.

**解**　依题设，有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left( \dfrac{y}{1+x^2} + \dfrac{\alpha}{\Delta x} \right)$

可分离变量方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{1+x^2}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},\quad \ln y=\arctan x+c$$

由 $y(0)=\pi$，得 $c=\ln\pi$

$$\therefore\quad y=\pi\mathrm{e}^{\arctan x}$$

从而 $y(1)=\pi\mathrm{e}^{\arctan 1}=\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}.$

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{y}{x})^3$ 满足 $y|_{x=1}=1$的特解为

$y=\underline{\dfrac{x}{\sqrt{1+\ln x}}}$.

解　这是齐次方程.

令　$u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y'=u+xu'$

代入原方程，得 $\cancel{u}+xu'=\cancel{u}-\dfrac{1}{2}u^3$

$-2\int\dfrac{\mathrm{d}u}{u^3}=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, $\dfrac{1}{u^2}=\ln x+c$, $(\dfrac{x}{y})^2=\ln x+c$

由 $y|_{x=1}=1$,得$c=1$

3. 通解为 $y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}$的微分方程是 $\underline{\quad y''-4y'+3y=0 \quad}$.

**解** 特征根：$r_1=1,\ r_2=3$

特征方程： $(r-1)(r-3)=0,$

即 $r^2-4r+3=0.$

$\therefore$ 所求微分方程是：$y''-4y'+3y=0$

## 类似题

以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$

$(C_1, C_2, C_3$ 为任意常数 $)$ 为通解的微分方程是( $D$ ).

(A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0.$

(B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0.$

(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0.$

(D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$

4. 以 $y = 2e^{x}\cos 3x$为一个特解的二阶常系 数齐次线性微分方程为 $\underline{\ y'' - 2y' + 10y = 0\ }$.

解　特征根：$r_{1,2} = 1 \pm 3i$

特征方程：　$[r-(1+3i)][r-(1-3i)] = 0$

即　$(r-1)^2 + 9 = 0$

$$r^2 - 2r + 10 = 0$$

所求方程为：　$y'' - 2y' + 10y = 0$

5. 设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=c\,e^{x}$ 的一个特解，则 $a=\underline{-3}$，$b=\underline{\ 2\ }$，$c=\underline{-1}$.

**2015考研**

**解** 由题意可知，$\frac{1}{2}e^{2x}, -\frac{1}{3}e^{x}$ 为二阶常系数齐次线性微分方程

$$y''+ay'+by=0$$

的解，所以 $r_1=2, r_2=1$为特征方程

$$r^2+ar+b=0$$

的根，从而 $a=-(r_1+r_2)=-3,\ \ b=r_1r_2=2$

从而原方程变为

$$y'' - 3y' + 2y = c\,\mathrm{e}^{x}$$

再将特解 $y = xe^{x}$代入，得 $c = -1.$

目 回 上 下 停

**类似题** 已知 $y_1 = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$, $y_2 = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$,

$y_3 = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x}$ 是某二阶非齐次线性

方程的三个解, 求此微分方程.

**解**(方法1) 由线性微分方程解的结 构定理知,

$\mathrm{e}^{2x}$ 及 $\mathrm{e}^{-x}$ 是相应齐次线性方程的 两个线性无关的解,

且 $x\mathrm{e}^x$ 是非齐次线性方程的一 个特解,

故设此微分方程为

$$y'' - y' - 2y = f(x)$$

将$y = x\mathrm{e}^x$代入，得

$$f(x) = (x\mathrm{e}^x)'' - (x\mathrm{e}^x)' - 2x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x$$

因此所求方程为

$$y'' - y' - 2y = \mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x$$

(方法2) 由题设知，$\mathrm{e}^{2x}$ 及 $\mathrm{e}^{-x}$ 是相应齐次线性方程的两个线性无关的解，

且$x\mathrm{e}^x$是非齐次线性方程的一 个特解，

故 $$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x e^{x}$$

是非齐次方程的通解，

由 $$y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{x} + (x+1)e^{x}$$

$$y'' = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + (x+2)e^{x}$$

消去 $C_1$，$C_2$得所求方程为

$$y'' - y' - 2y = e^{x} - 2x e^{2x}$$

6. 微分方程 $y'' + y' = x + \sin x$的特解可设立为 $\underline{x(Ax+B)+(C\cos x + D\sin x)}$ .

解 特征方程： $r^2 + r = 0$

特征根： $r_1 = 0,\ r_2 = -1$

对应于 $f_1(x) = x,$

$\lambda_1 = 0$ 是特征单根， $k = 1;$

对应于 $f_2(x) = \sin x,$

$\lambda_2 = i$ 不是特征根， $k = 0.$

7. 已知 $y_1 = x^2, y_2 = x + x^2, y_3 = e^x + x^2$都是方程 $(x-1)y'' - xy' + y = -x^2 + 2x - 2$的解，则此方程的通解为 $\underline{y = C_1 x + C_2 e^x + x^2}$.

8. 三阶常系数微分方程 $y''' + ay'' + by' + cy = 0$ 有两个解 $e^x$和 $x$,则 $a = \underline{-1}$, $b = \underline{0}$, $c = \underline{0}$.

**解** 由$y = x$是该方程的解，得 $b + cx \equiv 0$

$\therefore \quad b = c = 0$

由$y = e^x$是该方程的解，得 $e^x + ae^x \equiv 0$

$\therefore \quad a = -1$

**例2** 已知 $f(x)$ 满足方程：

$$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0 \qquad (1)$$

及

$$f''(x)+f(x)=2e^{x}, \qquad (2)$$

则 $f(x)=$ ___$e^{x}$___ .

**解(方法1)** (1) – (2)，得 $f'(x)-3f(x)=-2e^{x}$

由常数变易公式，得

$$f(x)=e^{-\int(-3)\mathrm{d}x}\left[\int(-2e^{x})e^{-\int 3\mathrm{d}x}+C\right]=e^{x}+Ce^{3x}$$

代入(2)，得 $C=0$，所以 $f(x)=e^{x}$ .

(方法2) $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0 \qquad (1)$

的特征方程： $r^2+r-2=0$

特征根： $r_1=-2,\quad r_2=1$

所以(1)的通解为： $f(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x}$

代入 $\qquad f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^{x}$，得

$$5C_1\mathrm{e}^{-2x}+2C_2\mathrm{e}^{x}\equiv 2\mathrm{e}^{x}$$

$\therefore\quad C_1=0,\quad C_2=1$

从而 $\qquad f(x)=\mathrm{e}^{x}.$

## 例3（选择题）

1. 若连续函数 $f(x)$满足关系：

$$f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$$

则 $f(x)=($ ***B*** $)$.

$(A)\ \mathrm{e}^{x}\ln 2$　　$(B)\ \mathrm{e}^{2x}\ln 2$

$(C)\ \mathrm{e}^{x}+\ln 2$　　$(D)\ \mathrm{e}^{2x}+\ln 2$

**解** $f(0)=\ln 2,\quad f'(x)=f(x)\cdot 2$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}=\int_0^x 2\mathrm{d}x,\quad \ln f(x)-\ln f(0)=2x$$

$$\therefore\quad f(x)=\mathrm{e}^{2x}\ln 2$$

2. 已知曲线 $y = y(x)$ 上点 $M(0,4)$ 处的切线垂直于直线 $x-2y+5=0$ 且 $y(x)$ 满足微分方程 $y''+2y'+y=0$，则此曲线的方程是 $y=$ ( $A$ ).

(A) $2(2+x)e^{-x}$　　(B) $(4+\frac{9}{2}x)e^{-x}$

(C) $(C_1+C_2x)e^{-x}$　　(D) $\frac{9}{2}xe^{x}$

**解** 特征方程：$r^2+2r+1=0$，特征根：$r_{1,2}=-1$

通解：$y=(C_1+C_2x)e^{-x}$

由 $y(0)=4$，$y'(0)=-2$，知 $C_1=4$，$C_2=2$.

**题型2**　　与导数定义有关

**例4** 设定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数 $f(x)$, 对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 满足

$$f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x,$$

且 $f'(0)=a\ (a\neq 0)$,

(1) 证明：对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, $f'(x)$存在，并求出函数 $f(x)$;

(2) 将 $f(x)$展开成$(x-1)$的幂级数，并求 $f^{(2018)}(1)$.

**证(1)** 依题设，由 $f(0)=f(0)+f(0)$

知 $f(0)=0.$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x)e^{h}+f(h)e^{x}]-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{e^{h}-1}{h}\cdot f(x)+\frac{f(h)-f(0)}{h}\cdot e^{x}\right]$$

$$=1\cdot f(x)+f'(0)e^{x}$$

即 $f'(x) - f(x) = a\mathrm{e}^x$

—— 一阶非齐次线性方程

由常数变易公式，得

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\int_0^x (-1)\,\mathrm{d}x}\left[\int_0^x a\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\int_0^x (-1)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + 0\right]$$

$$= \mathrm{e}^x \left(a\int_0^x \mathrm{d}x\right) = ax\mathrm{e}^x .$$

解(2) $f(x) = axe^x$

$\boxed{令\ t = x - 1}$

$$= a(t+1)e^{t+1} = ae(t+1)e^t$$

$$= ae(t+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} = ae\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)$$

$$= ae\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right] = ae\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right]t^n\right]$$

$$= ae\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}t^n = ae\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}(x-1)^n,\ x \in (-\infty, +\infty).$$

$$f(x)=axe^{x}$$

$$=ae\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}(x-1)^{n},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^{n}$$

由展开式的唯一性，得 $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}=ae\cdot\dfrac{n+1}{n!}$

$(n=0,1,2,\cdots)$

$\therefore\quad f^{(2018)}(1)=2019ae.$

## 类似题

已知 $f(x)$在$(0,+\infty)$内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，且满足：

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$$

求 $f(x)$.

解 $\because \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}$ $(1^{\infty})$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{1+\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}-1\right]\right\}^{\frac{1}{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\left\{1+\left[\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)}\right]\right\}^{\frac{f(x)}{f(x+hx)-f(x)}}\right\}^{\frac{f(x+hx)-f(x)}{hx}\cdot\frac{x}{f(x)}}$$

$$=e^{f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}}$$

可分离变量方程

$$\therefore\quad e^{\frac{x f'(x)}{f(x)}}=e^{\frac{1}{x}}\quad 故\quad \frac{x f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}$$

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x,\quad \ln f(x)=-\frac{1}{x}+\ln c,$$

$$f(x)=ce^{-\frac{1}{x}},\ 由\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=1,得 c=1$$

$$\therefore\quad f(x)=e^{-\frac{1}{x}}.$$

**题型3** 与求导法有关

**例5** 设 $f(x)$满足：$\int_1^x \frac{f(t)}{t+f^2(t)}\mathrm{d}t = f(x)-1,$

且 $f(x)$可导，求 $f(x)$.

**解** 令 $x=1$,得 $f(1)=1,$

“$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$”：$\frac{f(x)}{x+f^2(x)} = f'(x)$

关于$y$非线性

令 $y=f(x)$，则 $\boxed{\frac{y}{x+y^2} = y',}$ $y(1)=1$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y}\cdot x + y$$ 关于$x$为线性方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}\cdot x=y$$

通解：$x=\mathrm{e}^{-\int(-\frac{1}{y})\mathrm{d}y}[\int y\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C]$

$$=\mathrm{e}^{\ln y}[\int y\mathrm{e}^{-\ln y}\mathrm{d}y+C]=y[\int y\cdot\frac{1}{y}\mathrm{d}y+C]$$

$$=y(y+C)$$

由 $y(1)=1$, 得 $C=0$ $\therefore$ $x=y^2$, 即 $y=\sqrt{x}$

故所求 $f(x)=\sqrt{x}.$

## 类似题

设 $f(x)$ 具有连续的一阶导数，　且满足

$$f(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f'(t)\,\mathrm{d}t+x^2,$$

求 $f(x)$ 的表达式.

**答案:** $f'(x)-2xf(x)=2x,\quad f(0)=0$

$$f(x)=e^{x^2}-1.$$

**例6** 设 $f(u,v)$具有连续偏导数，且满足

$$f'_u(u,v)+f'_v(u,v)=uv$$

求 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$所满足的一阶微分方程，并求其通解.

**解** $y'(x)=-2e^{-2x}f(x,x)+$

$$e^{-2x}\cdot[f'_u(u,v)\cdot 1+f'_v(u,v)\cdot 1]\Big|_{\substack{u=x\\ v=x}}$$

$$=-2y(x)+e^{-2x}\cdot x^2$$

即 $y'+2y=e^{-2x}\cdot x^2$ 一阶非齐次线性方程

$$y' + 2y = e^{-2x} \cdot x^2$$

由常数变易公式，得

$$y = e^{-\int 2\mathrm{d}x}\left(\int x^2 e^{-2x} e^{\int 2\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= e^{-2x}\left(\int x^2\,\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= e^{-2x}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) \quad (C\text{为任意常数}).$$

目 回 上 下 停

## 类似题

1. 设 $f$ 具有二阶连续偏导数，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

若 $div[gradf(r)]=0$, 求 $f(r)$.

解

$\because$

**知识点:**

① 梯度；② 散度；

③ 多元复合函数求导；

④ 可降阶微分方程.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=f'(r)\cdot\frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial z}=f'(r)\cdot\frac{z}{r}$$

$$\therefore \quad grad f(r) = \{\underbrace{f'(r)\cdot\frac{x}{r}}_{P},\ \underbrace{f'(r)\cdot\frac{y}{r}}_{Q},\ \underbrace{f'(r)\cdot\frac{z}{r}}_{R}\}$$

$$div[grad f(r)] = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\vec{A}=\{P,Q,R\}$$

$$div\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial[f'(r)\cdot\frac{x}{r}]}{\partial x}=\frac{\partial f'(r)}{\partial x}\cdot\frac{x}{r}+f'(r)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r})$$

$$=f''(r)(\frac{x}{r})^2+f'(r)\cdot\frac{r-x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}$$

$$=f''(r)(\frac{x}{r})^2+f'(r)(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3})$$

同理 $$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial[f'(r)\cdot\frac{y}{r}]}{\partial y}=f''(r)(\frac{y}{r})^2+f'(r)(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3})$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial[f'(r)\cdot\frac{z}{r}]}{\partial z}=f''(r)(\frac{z}{r})^2+f'(r)(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3})$$

$$div[gradf(r)]=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$$

若 $div[gradf(r)]=0$，则

$$\boxed{f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0}$$

$$\boxed{f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0}$$

令 $p=f'(r)$, 则 $\dfrac{dp}{dr}=-\dfrac{2}{r}p$

可分离变量方程

$$\int\frac{dp}{p}=\int-\frac{2}{r}dr,\quad \ln p=-2\ln r+\ln C_1$$

$$p=\frac{C_1}{r^2},\qquad f'(r)=\frac{C_1}{r^2}$$

$$\therefore\quad f(r)=\int\frac{C_1}{r^2}dr=-\frac{C_1}{r}+C_2.$$

2. 已知 $u=u(x^2-y^2)$ 有连续二阶偏导数，且

满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)u$, 试求 $u$.

答案：$u=C_1 e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)}+C_2 e^{-\frac{1}{2}(x^2-y^2)}$.

3. 已知 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 有连续二阶偏导数，且

满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$, 试求 $u$.

答案：$u''(r)+\dfrac{1}{r}u'(r)=r^2 \quad (r=\sqrt{x^2+y^2})$

$$u=C_1+C_2\ln(x^2+y^2)+\frac{(x^2+y^2)^2}{16}.$$

4\. 设 $f(u)$具有二阶连续导数，而 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$， 求 $f(u)$.

解

**知识点：**
**① 多元复合函数求偏导数**
**②二阶常系数齐次线性微分方程**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}[f'(u)u]=\frac{d}{du}[f'(u)u]\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$=[f'(u)+uf''(u)]\cdot u$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}[f'(u)e^x\cos y]$$

$$= \frac{\partial f'(u)}{\partial y}\cdot e^x\cos y + f'(u)\cdot(-e^x\sin y)$$

$$= f''(u)\cdot(e^x\cos y)^2 + f'(u)\cdot(-u)$$

$$= f''(u)(e^{2x} - u^2) - uf'(u)$$

$$= f''(u)e^{2x} - u^2 f''(u) - uf'(u)$$

将 $z = f(u)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = uf'(u) + u^2 f''(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x} - u^2 f''(u) - uf'(u)$$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} z$, 得 $f''(u)\cancel{e^{2x}} = \cancel{e^{2x}} f(u)$

$$f''(u) - f(u) = 0$$

解得 $f(u) = C_1 e^{-u} + C_2 e^{u}$.

5. 设 $f(u)$具有二阶连续导数，而 $z=f(e^x\cos y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x},$$

若$f(0)=0, f'(0)=0$， 求 $f(u)$.

2014考研

答案：$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y$$

$$f''(u)=4f(u)+u$$

通解：$f(u)=c_1e^{2u}+c_2e^{-2u}-\frac{u}{4}$

所求特解：$f(u)=\frac{1}{16}(e^{2u}-e^{-2u}-4u)$.

**例7** 设 $y=y(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$, $x=x(y)$是$y=y(x)$的反函数.

(1) 试将$x=x(y)$所满足的微分方程：

$$\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\frac{dx}{dy})^3=0$$

变换成$y=y(x)$满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满 足初始条件：

$y(0)=0,\ y'(0)=\dfrac{3}{2}$的解. (2003年考研)

**解**(1)

知识点：
① 反函数，复合函数求导法
② 二阶常系数非齐次线性方程

∴

$$= -\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{(y')^3}$$

代入方程 $$\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$$

得 $$-\frac{y''}{(y')^3} + (y + \sin x)\cdot\left(\frac{1}{y'}\right)^3 = 0$$

即 $y'' - y = \sin x$ ①

(2) $y'' - y = 0$ ②

特征方程：$r^2 - 1 = 0$，特征根：$r_{1,2} = \pm 1$

②的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

$\lambda = i$不是特征根， $k = 0$

可设立①的特解为 $y^* = A\cos x + B\sin x$

代入①，得 $A = 0, B = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad y^* = -\dfrac{1}{2}\sin x$

从而方程 ① 的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$$

由 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$, 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad \therefore \quad C_1 = 1, C_2 = -1$$

故所求初值问题的解为

$$y = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$$

## 类似题

用变量代换 $x=\cos t\ (0<t<\pi)$ 化简微分方程

$$(1-x^2)y''-xy'+y=0,\quad \text{(05年考研)}$$

并求其满足 $y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=2$ 的特解.

**解**

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sin t}\right)$$

$$= \left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\cdot\frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sin t}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}$$

将 $y, y', y''$代入原方程，得

$$\sin^2 t\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}\right)-\cos t\cdot\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right)+y=0$$

即 $$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

其特征方程为 $r^2+1=0$

特征根： $r=\pm i$

于是此方程的通解为 $y=C_1\cos t+C_2\sin t$

从而原方程的通解为 $y=C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}$

从而原方程的通解为

$$y = C_1 x + C_2 \sqrt{1 - x^2}$$

由 $y\big|_{x=0} = 1,\ y'\big|_{x=0} = 2$，得

$$C_1 = 2,\ C_2 = 1$$

故所求方程的特解为

$$y = 2x + \sqrt{1 - x^2}.$$

**题型4** 与积分法有关

**例8** 设 $f(t)$连续，且

$$f(t)=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dV+t^3,$$

$t\ge 0$，求 $f(t)$.

**解** $f(t)=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{t}f(r)\cdot r^2\sin\varphi\,dr+t^3$

$$=6\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{t}r^2 f(r)dr+t^3$$

$$=6\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\cdot\int_0^{t}r^2 f(r)dr+t^3$$

$$=12\pi\int_0^{t}r^2 f(r)dr+t^3$$

一阶线性方程

$$\boxed{f'(t)=12\pi t^2 f(t)+3t^2,\quad f(0)=0}$$

$$f(t)=e^{\int_0^t 12\pi t^2 dt}\left[\int_0^t 3t^2 e^{-\int_0^t 12\pi t^2 dt}dt+0\right]$$

$$=e^{4\pi t^3}\cdot\int_0^t 3t^2 e^{-4\pi t^3}dt$$

$$=e^{4\pi t^3}\cdot\left[-\frac{1}{4\pi}\int_0^t e^{-4\pi t^3}d(-4\pi t^3)\right]$$

$$=e^{4\pi t^3}\cdot\left[-\frac{1}{4\pi}e^{-4\pi t^3}\Big|_0^t\right]$$

$$=e^{4\pi t^3}\cdot\left[-\frac{1}{4\pi}e^{-4\pi t^3}+\frac{1}{4\pi}\right]=\frac{1}{4\pi}(e^{4\pi t^3}-1)$$

**例9** 设

$$\oint_L 2[x\varphi(y)+\psi(y)]dx+[x^2\psi(y)+2xy^2-2x\varphi(y)]dy=0$$

其中$L$为平面上任意一条封闭 曲线，$\varphi$，$\psi$ 有二阶导数，$\varphi(0)=0,\psi(0)=1,$试确定 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$.

**解**

> **知识点：**
> ① 曲线积分与路径无关的条件;
> ② 二阶常系数非齐次线性微分方程.

即 $x[\varphi'(y)-\psi(y)]+[\psi'(y)+\varphi(y)-y^2]\equiv 0$

$$\forall(x,y)\in R^2$$

$$\text{“}\frac{\partial\,\cdot}{\partial x}\text{”}:\ \begin{cases}\varphi'(y)-\psi(y)=0\\ \psi'(y)+\varphi(y)-y^2=0\end{cases}$$

$$\varphi''(y)=\psi'(y)=y^2-\varphi(y)$$

$$\varphi''(y)+\varphi(y)=y^2 \qquad (1)$$

**可求得 (1)之通解：**

$$\varphi(y)=C_1\cos y+C_2\sin y+y^2-2$$

由 $\varphi(0)=0$, 得 $C_1=2$

由$\psi(0)=1$,得 $\varphi'(0)=\psi(0)=1$

$\because \quad \varphi'(y)=-2\sin y+C_2\cos y+2y$

$\therefore \quad C_2=1$

$\therefore \quad \varphi(y)=2\cos y+\sin y+y^2-2$

$\psi(y)=\varphi'(y)=-2\sin y+\cos y+2y$

## 类似题

1.若对平面上的任何简单 封闭曲线 $L$，恒有

$$\oint_L 2xyf(x^2)dx + [f(x^2) - x^4]dy = 0$$

其中 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有连续的一阶导数，且 $f(0)=2$, 试确定 $f(x)$.

**解** 由 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 得 $2xf(x^2) = f'(x^2)\cdot 2x - 4x^3$

令 $u = x^2$, $f'(u) - f(u) = 2u$,

$$f(x) = 4e^x - 2(x+1)$$

2.设$Q(x,y)$具有连续的一阶偏导数，

$$\int_L 2xydx + Q(x,y)dy$$

与路径无关，对于任意 的$t$,恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Q(x,y)dy$$

求$Q(x,y)$.

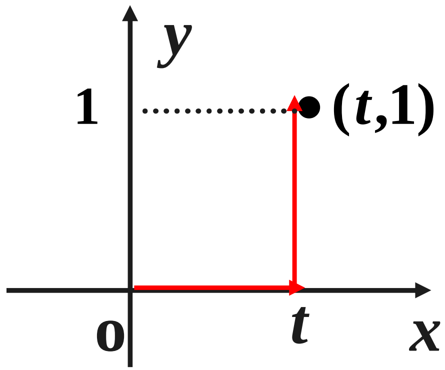
**解** 由 $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，得 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$

$$Q(x,y)=\int 2x\,dx+g(y)=x^2+g(y)$$

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\,dx+Q(x,y)\,dy$$

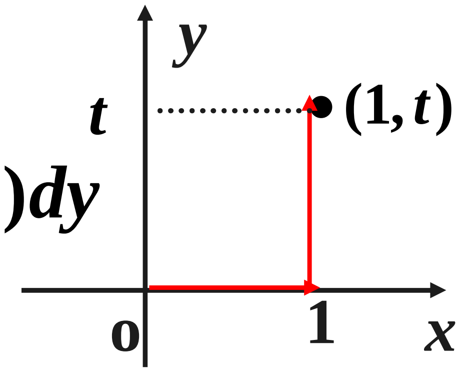
$$=\int_0^t 2x\cdot 0\,dx+\int_0^1 Q(t,y)\,dy$$

$$=\int_0^1 [t^2+g(y)]\,dy=t^2+\int_0^1 g(y)\,dy$$




$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_0^t Q(1,y)\,dy$$

$$=\int_0^t [1+g(y)]\,dy=t+\int_0^t g(y)\,dy$$



$$\therefore \quad t^2+\int_0^1 g(y)dy = t+\int_0^t g(y)dy$$

即 $\int_0^t g(y)dy = t^2 - t + \int_0^1 g(y)dy$

两边对$t$求导： $g(t)=2t-1$

$$\therefore \quad g(y)=2y-1$$

$$Q(x,y)=x^2+g(y)$$

$$=x^2+2y-1.$$

**例10** 试确定 $f(x)$,使

$$[e^{ax}-4f(x)]ydx+[f'(x)+4f(x)]dy=du(x,y),$$

其中$a$为常数.

**解**

知识点:
① 曲线积分与路径无关的四个等价命题;
② 含参数的二阶常系数非齐次线性微分方程.

(1)

$$f''(x)+4f'(x)+4f(x)=0 \qquad (2)$$

特征方程: $r^2+4r+4=0$

特征根：$r_{1,2}=-2$

$\therefore$ 方程(2)的通解为 $Y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$

$\lambda=a$

$1^\circ$ 当$a=-2$时，$\lambda=-2$是特征重根，$k=2$

设立方程(1)的特解为 $y*=x^2\cdot Ae^{-2x}$

代入(1),可得 $A=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore$ (1)之特解: $y^*=\dfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$

当$a=-2$时，

$$f(x)=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}x^2e^{-2x}$$

$2^\circ$ 当$a\neq-2$时，　$\lambda=a$不是特征根，$k=0$

设立方程(1)的特解为　$y^*=Ae^{ax}$

代入(1),可得 $A=\dfrac{1}{(a+2)^2}$,

$\therefore$　(1)之特解: $y^*=\dfrac{1}{(a+2)^2}e^{ax}$

当$a\neq-2$时，

$$f(x)=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{(a+2)^2}e^{ax}$$

## 类似题

设 $\varphi(1)=\frac{1}{2}$，$\varphi(x)$可导，试确定$\varphi(x)$，

使 $[\varphi^3(x)-\frac{\varphi(x)}{x}]ydx+\varphi(x)dy=du(x,y)$，

并求 $u(x,y)$.

答案：

知识点：
① 曲线积分与路径无关的四个等价命题；
② 伯努利方程.

$x)=\frac{1}{\sqrt{2(x+x^2)}}$

**例11** 设于半空间 $x>0$内任意的光滑有向封闭曲面Σ，都有

$$\oiint_{\Sigma} xf(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - xyf(x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - e^{2x}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

其中函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$,求$f(x)$.

**解** 由题设和高斯公式得

$$0=\oiint_{\Sigma} xf(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - xyf(x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - e^{2x}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$0=\oiint_{\Sigma} xf(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-xyf(x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-e^{2x}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iiint_{V}[xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中 $V$为封闭曲面 $\Sigma$围成的有界闭区域，

当有向曲面 $\Sigma$的法向量指向外侧时， 取"+"号，

当有向曲面 $\Sigma$的法向量指向内侧时， 取"−"号。

由$\Sigma$的任意性，知

$$xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0 \qquad (x>0)$$

即 $$f'(x)+(\frac{1}{x}-1)f(x)=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x} \qquad (x>0)$$

为一阶非齐次线性微分 方程，

由常数变易公式有

$$f(x)=e^{\int(1-\frac{1}{x})\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{x}e^{2x}e^{\int(\frac{1}{x}-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{e^{x}}{x}\left[\int\frac{1}{x}e^{2x}xe^{-x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{e^{x}}{x}(e^{x}+C)$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^{2x}+Ce^{x}}{x}\right) = 1,$

根据无穷小的比较知，

$$\lim_{x\to 0^+}\left(e^{2x}+Ce^{x}\right) = 0,$$

即 $C+1=0,$ 从而 $C=-1.$

于是 $f(x) = \dfrac{e^x}{x}(e^x - 1).$

**题型5** 与微积分的几何应用有关

**例12** 求微分方程 $x\,\mathrm{d}y + (x-2y)\,\mathrm{d}x = 0$ 的一个解 $y = y(x)$, 使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1$, $x = 2$ 以及 $x$ 轴所围成的平面图形绕 $x$ 轴旋转一周的旋转体体积最小 .

解

知识点：

① 一阶线性微分方程

② 定积分几何应用——旋转体体积

③ 一元函数的最值

方程

$y$ ... $= x + Cx^2$

$x$

$2^\circ$ 求 旋转体体积

$$V=\pi\int_1^2 y^2dx=\pi\int_1^2(x+Cx^2)^2dx$$

$$=\pi(\frac{31}{5}C^2+\frac{15}{2}C+\frac{7}{3})$$

$3^\circ$ 求 $y(x)$

令 $V'(C)=\pi(\frac{62}{5}C+\frac{15}{2})=0$, 得 $C=-\frac{75}{124}$

又 $\because V''(C)=\frac{62}{5}\pi>0$,

$\therefore$ $C=-\frac{75}{124}$是唯一极小值点，也是 最小值点,

$\therefore$ 所求 $y=y(x)=x-\frac{75}{124}x^2$.

**例13** 设有一高度为 $h(t)$($t$为时间)的雪堆在融化过程中，其侧面满足方 程:

**知识点:**

① 重积分的几何应用

——曲顶柱体的体积

——曲面片的面积

② 一阶可分离变量方程

(设长度 …… 小时),已

知体积 …… (比例系

数是0. …… 全部融化

需多少时间?

**解** 记$V$为雪堆体积， $S$为雪堆的侧面积，则

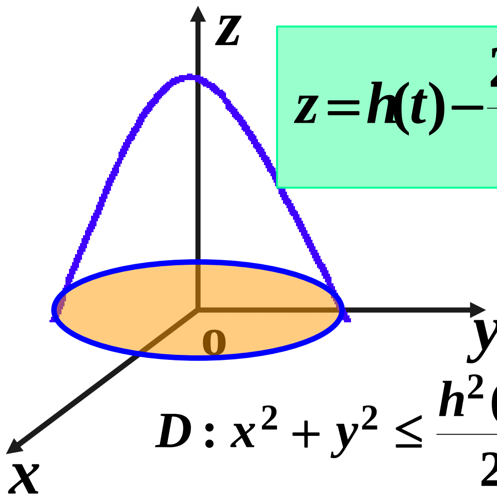
$$V=\iint_D z(x,y)dxdy$$

$$=\iint_D [h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} [h(t)-\frac{2r^2}{h(t)}]rdr$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\cdot\{-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} [h^2(t)-2r^2]d[h^2(t)-2r^2]\}$$

$$=-\frac{\pi}{2h(t)}\cdot\frac{1}{2}[h^2(t)-2r^2]^2\Big|_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi}{4}h^3(t)$$



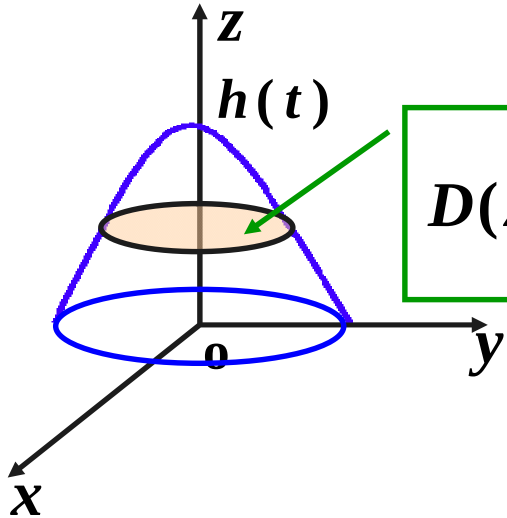

$$z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$$

$$D: x^2+y^2\le\frac{h^2(t)}{2}$$

或 $V=\int_0^{h(t)} dz \iint\limits_{D(z)} dxdy$ **(截面法)**

$$=\int_0^{h(t)} \pi\cdot\frac{h^2(t)-h(t)z}{2}dz$$

$$=-\frac{\pi}{4h(t)}\cdot[h^2(t)-h(t)z]^2\Big|_0^{h(t)}=\frac{\pi}{4}h^3(t)$$




$D(z):\ x^2+y^2\le\frac{h^2(t)-h(t)z}{2}$

$$S = \iint\limits_{\Sigma} dS$$

$$\boxed{z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}}$$

$$= \iint\limits_{D} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$$

$$= \iint\limits_{D} \sqrt{1 + (-\frac{4x}{h(t)})^2 + (-\frac{4y}{h(t)})^2}\, dxdy$$

$$= \frac{1}{h(t)} \iint\limits_{D} \sqrt{h^2(t) + 16(x^2 + y^2)}\, dxdy$$

$$= \frac{1}{h(t)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{h^2(t) + 16r^2} \cdot rdr = \frac{13}{12} \pi h^2(t)$$

依题意， $\dfrac{dV}{dt} = -0.9S$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\pi}{4} h^3(t)\right] = -0.9 \times \frac{13}{12} \pi h^2(t)$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot 3h^2(t) h'(t) = -0.3 \times \frac{13}{4} \pi h^2(t)$$

$h'(t) = -1.3 \quad \therefore \quad h(t) = 1.3t + C$

由 $h(0) = 130$, 得 $C = 130 \quad \therefore \; h(t) = 1.3t + 130$

令 $h(t) \to 0$, 得 $t = 100$(小时)

因此高度为130厘米的雪堆全部融化所 需时间为100小时.

## 题型6　两函数存在某种关系

**例14** 若函数 $f(x), g(x)$ 满足条件 $f'(x)=g(x)$, $f(x)=-g'(x)$, $f(0)=0$, $g(x)\neq 0$, 求由曲线 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 与 $y=0, x=\dfrac{1}{4}\pi$ 所围成的面积.

**解** $f(x)$

**知识点:**

① 原函数

② 定积分几何意义

③ 二阶常系数齐次线性微分方程

$= \pm i$

通解: $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$

由 $f(0)=0$, 得 $C_1=0$, $f(x)=C_2\sin x$

$$\therefore \quad g(x) = f'(x) = C_2 \cos x$$

$$\because \quad 当\, x \in [0, \frac{\pi}{4}]时, \cos x > 0,\ 而 g(x) \neq 0$$

$$\therefore \quad C_2 \neq 0 \quad , \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \tan x$$

故面积： $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

$$= -\ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

**类似题** 1. 设 $f(x), g(x)$满足 $f'(x)=g(x)$,

$g'(x)=2e^x-f(x)$,且 $f(0)=0$,

$g(0)=2$, 求 $f(x)$及 $I=\int_0^\pi\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$.

**答案:**
$$\begin{cases} f''(x)+f(x)=2e^x \\ f(0)=0,\ f'(0)=2 \end{cases}$$

$$f(x)=\sin x-\cos x+e^x,\quad I=\frac{1+e^\pi}{1+\pi}.$$

2. 设 $F(x)=f(x)g(x)$, 其中 $f(x),g(x)$在

$(-\infty,+\infty)$内满足条件: $f'(x)=g(x)$,

$$g'(x)=f(x)$$

且 $f(0)=0$, $f(x)+g(x)=2e^{x}$.

(1) 求$F(x)$所满足的一阶微分方程；

(2) 求出$F(x)$的表达式.

答案: (1) $F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$,

(2) $F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$.

## 题型7　与级数有关的问题

**例15** 求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

**解** $\displaystyle\sum^{\infty} x^{3n}$ $\infty)$

**知识点：**
① 一阶非齐次线性微分方程;
② 幂级数求和.

$$\cdots\ \frac{\ }{3!}\quad\frac{\ }{6!}\quad\frac{\ }{9!}\quad\cdots\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$$

$$s'=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots$$

$$s''=\frac{x}{1!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots$$

$$s''+s'+s=e^{x},\quad s(0)=1,\ s'(0)=0$$

$$s'' + s' + s = e^x \qquad ①$$

对应的齐次线性方程：

$$s'' + s' + s = 0 \qquad ②$$

其特征方程为 $r^2 + r + 1 = 0$

特征根为 $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$\therefore$ ②的通解为

$$S = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$\because \quad \lambda = 1$不是特征根，$k = 0$

$\therefore$ 设非齐次线性方程 ①的特解为 $s^* = Ae^x$

代入①，得 $A = \dfrac{1}{3}$

故①有特解：$s^* = \dfrac{1}{3}e^x$

①的通解为：$s = S + s^*$

$$= e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{3}e^x$$

又 $\because$ 当 $x=0$ 时，有

$$\begin{cases} s(0)=1 \ =C_1+\dfrac{1}{3} \\ s'(0)=0=-\dfrac{1}{2}C_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}C_2+\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \quad C_1=\frac{2}{3}, \quad C_2=0$$

从而所求和函数为

$$s(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^{x}$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

类似题 1. 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,当$n>1$时，有

$$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0,$$

且$a_0=4, a_1=1$, 求此幂级数的和函数.

解 设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,则 $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$,

$$s''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \overset{\text{依条件}}{=} \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2}=s(x),$$

$$\therefore \begin{cases} s''(x)-s(x)=0 \\ s(0)=a_0=4, s'(0)=a_1=1 \end{cases} \quad s(x)=\frac{3}{2}e^{-x}+\frac{5}{2}e^{x}.$$

2. 已知 $f_n(x)$满足：

$$f_n'(x) = f_n(x) + x^{n-1}e^x \quad (n\text{为正整数})$$

且 $f_n(1) = \frac{e}{n}$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的和.

解 $\quad f_n'(x) - f_n(x) = x^{n-1}e^x \quad$ 线性方程

通解：$f_n(x) = e^{\int dx}(\int x^{n-1}e^x e^{-\int dx}dx + C)$

$$= e^x(\int x^{n-1}dx + C) = e^x(\frac{x^n}{n} + C)$$

由 $f_n(1) = \frac{e}{n}$， 得 $\quad C = 0$

$$\therefore \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n} e^x$$

于是 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} e^x \qquad x \in [-1,1)$

$$= e^x \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x x^{n-1} dx = e^x \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\right) dx$$

$$= e^x \cdot \int_0^x \frac{1}{1-x} dx, \quad x \in (-1,1)$$

$$= e^x[-\ln(1-x)], \quad x \in [-1,1)$$

3. 求 $y''+9y=0$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=3$ 的特解，并将其展开成 $x$的幂级数.

解　特征方程：$r^2+9=0$

特征根：$r=\pm 3i$

所给方程的通解：$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$

由 $y(0)=0, y'(0)=3$，及

$$y'=-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x$$

得　$C_1=0,\quad C_2=1.$

∴　特解为：$y=\sin 3x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)}x^{2n+1}, x\in R$

**4.** 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$(-\infty,+\infty)$内收敛，其和函数

$y(x)$ 满足： $y'' - 2xy' - 4y = 0$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(1) 证明： $a_{n+1} = \dfrac{2}{n+1} a_n, \quad n = 1,2,\cdots;$

(2) 求$y(x)$的表达式. (07年考研)

**解**(1) 对 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 求一、二阶导数：

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

代入　$y'' - 2xy' - 4y = 0$，得

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

即 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n x^n = 0,$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n=0,$$

$$(2a_2-4a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+4)a_n]x^n=0$$

$$\therefore\quad \begin{cases} 2a_2-4a_0=0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+4)a_n=0 \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

从而 $\quad a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,\quad n=1,2\cdots.$

(2) 依题设，知

$$y(0)=a_0=0$$

$$y'(0)=a_1=1$$

从而 $a_{2n}=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n,$$

$$n=1,2\cdots.$$

$$a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\frac{2}{2n}\cdot\frac{2}{2n-2}a_{2n-3}$$

$$=\cdots=\frac{2^n}{2n\cdot(2n-2)\cdots\cdot 4\cdot 2}a_1$$

$$=\frac{1}{n!} \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\ y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^2)^n=x\mathrm{e}^{x^2},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$a_{2n}=0$

$(n=0,1,2,\cdots)$

$a_{2n+1}=\dfrac{1}{n!}$

$(n=1,2,\cdots)$

$$\mathrm{e}^u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$$

**例16** 函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上可导， $f(0)=1$,
且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 证明：当$x\geq 0$时，不等式： $e^{-x}\leq f(x)\leq 1$成立

**解** (1) 由题设知

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

上式两边对 $x$求导，得

$$(x+1)f''(x) = -(x+2)f'(x)$$

属可降阶的微分方程,

设 $p = f'(x)$, 则 $f''(x) = p'$,

代入上方程得 $(x+1)p' = -(x+2)p$

分离变量有 $$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{x+2}{x+1}\mathrm{d}x$$

两边积分 $\ln p = -x - \ln(1+x) + \ln C$

解之得 $$f'(x) = p = \frac{Ce^{-x}}{1+x}$$

由 $f(0)=1$,代入题设关系式有

$$f'(0)+f(0)=0,$$

知 $f'(0)=-1$. 从而 $C=-1$.

因此 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{1+x}$

证 (2) (方法1) 当 $x\geq 0$, $f'(x)<0$,

即 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调减少，又 $f(0)=1$,

所以 $f(x)\leq f(0)=1$

欲证 $f(x)\geq e^{-x}$，即证 $f(x)-e^{-x}\geq 0$.

为此设 $\varphi(x) = f(x) - e^{-x}$

则 $\varphi(0) = 0,\ \varphi'(x) = f'(x) + e^{-x} = \dfrac{x}{x+1}e^{-x}$

当$x \geq 0$时， $\varphi'(x) \geq 0,$

即 $\varphi(x)$在$[0, +\infty)$上单调增加,

因而 $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$

即有 $f(x) \geq e^{-x}$

综上所述，当 $x \geq 0,$成立不等式

$$e^{-x} \leq f(x) \leq 1$$

(方法2) 由于 $\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0) = f(x) - 1$

所以 $$f(x) = 1 - \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

注意到当 $x \ge 0$ 时

$$0 \le \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t \le \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-x}$$

因而有

$$1 \ge f(x) = 1 - \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t \ge 1 - \left(1 - e^{-x}\right) = e^{-x}$$

即有 $e^{-x} \le f(x) \le 1.$

**例17** 求欧拉方程

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2 \quad \text{的通解.}$$

**解** 作变量变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$,

原方程化为

$$D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y - 4Dy = 3e^{2t},$$

即 $D^3 y - 2D^2 y - 3Dy = 3e^{2t},$

或 $$\frac{d^3 y}{dt^3} - 2\frac{d^2 y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} = 3e^{2t} \quad (1)$$

或 $$\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=3e^{2t} \quad (1)$$

方程(1)所对应的齐次线性方程为

$$\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=0,$$

其特征方程

$$r^3-2r^2-3r=0,$$

特征方程的根为

$$r_1=0,\ r_2=-1,\ r_3=3.$$

所以齐次线性方程的通解为

$$Y = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t}$$

设方程(1)的特解为 $y^* = be^{2t}$

代入方程(1)，得 $b = -\frac{1}{2}$. 即 $y^* = -\frac{1}{2}e^{2t}$,

故方程(1)的通解为 $y = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t}$

变量代回，得所给欧拉方程的通解

$$y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$