第二节

定积分的几何应用(2)

—— 空间立体的体积

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 已知平行截面面积的空间立体体积

设所给立体垂直于x轴的截面面积为$A(x)$,

$A(x)$在$[a,b]$上连续，则对应于小区间

$[x, x+\mathrm{d}x]$的体积元素为

$$\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$$

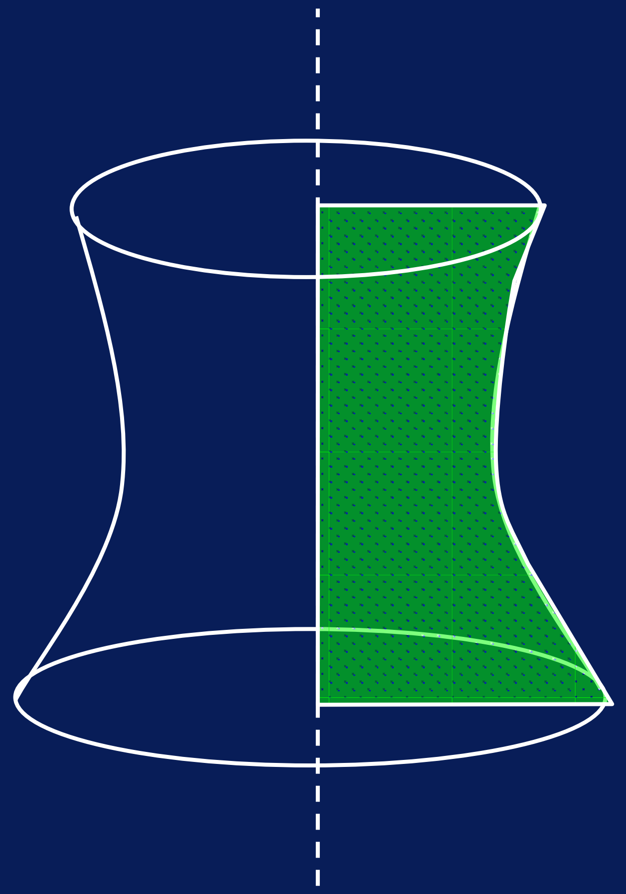
因此所求立体体积为

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

$$(a < b)$$

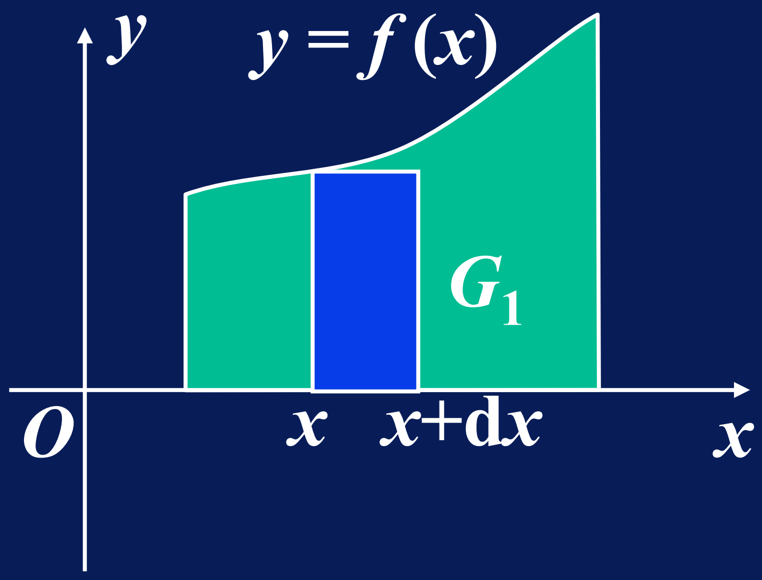
(二) 旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这直线称为旋转轴.



情形1 平面图形G_1：由连续曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$, $x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形.

- G_1 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积



取积分变量为 x，

$$x\in[a,b]$$

在$[a,b]$上任取小区间

$$[x,x+\mathrm{d}x],$$

则以 $f(x)$ 为高，

以$\mathrm{d}x$ 为底的窄边矩形绕 x 轴旋转而成的圆柱体

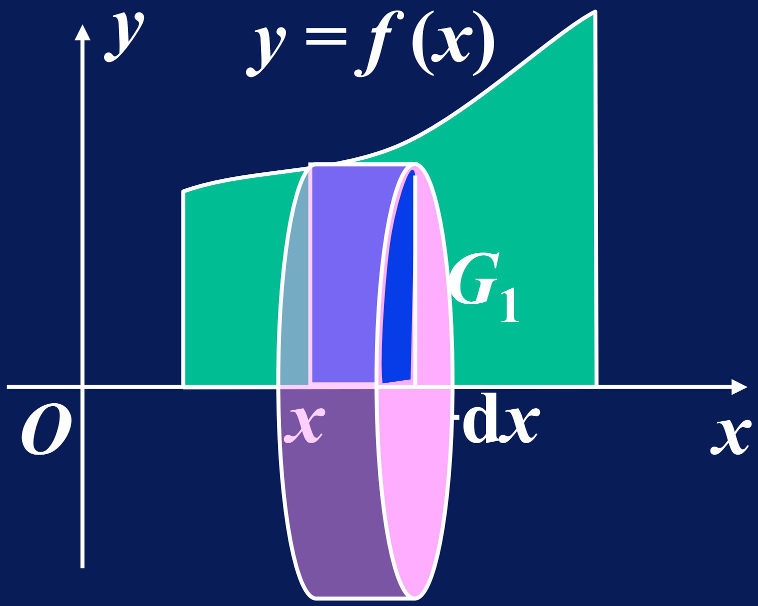
的体积便是**体积元素**:

$$\mathrm{d}V_x = \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

(截面积 $A(x)=\pi[f(x)]^2$)

G_1 绕 x 轴旋转

的旋转体的体积:

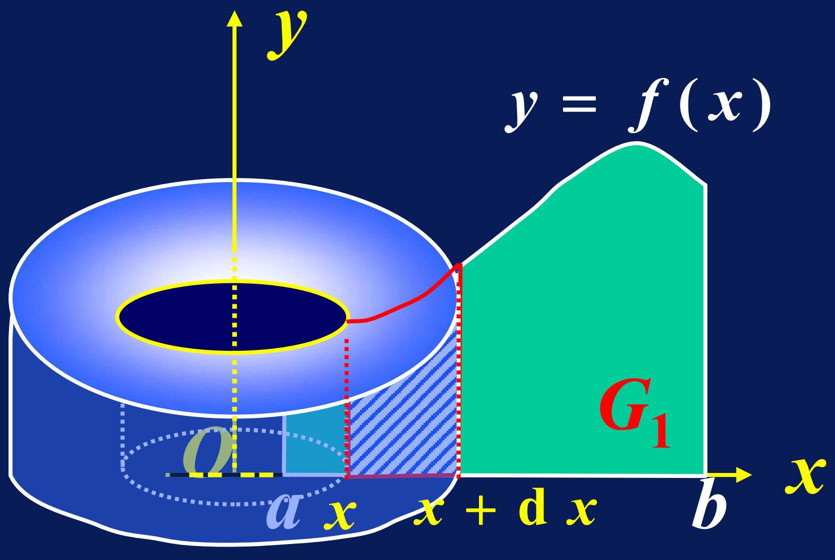


$$V_x = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x \qquad (2.1)$$

G_1 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积

用"柱壳法":

将旋转体分割成一系列以y轴为中心轴的曲顶环柱体.



$\forall \ [x, x+\mathrm{d}x] \subset [a,b],$

设相应于 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的曲顶环柱体的体积为 ΔV_y，则当 $\mathrm{d}x$很小时,

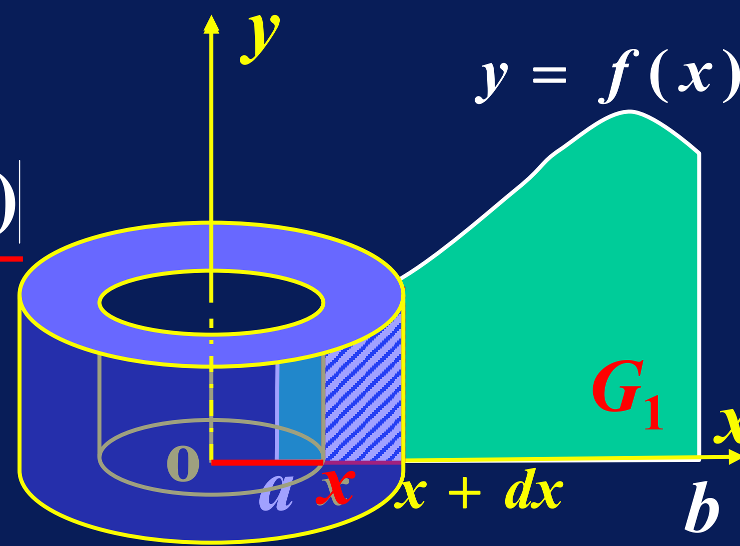
$$\Delta V_y \approx \Delta V_{\text{圆环柱体}}$$

$$\Delta V_y \approx \Delta V_{圆环柱体}$$

$$= [\pi(x+\mathrm{d}\,x)^2 - \pi x^2]\cdot|f(x)|$$

$$= 2\pi x\cdot|f(x)|\mathrm{d}\,x + \underbrace{\pi(\mathrm{d}\,x)^2|f(x)|}_{\mathrm{o(dx)}}$$

$$\approx 2\pi x\cdot|f(x)|\mathrm{d}\,x.$$



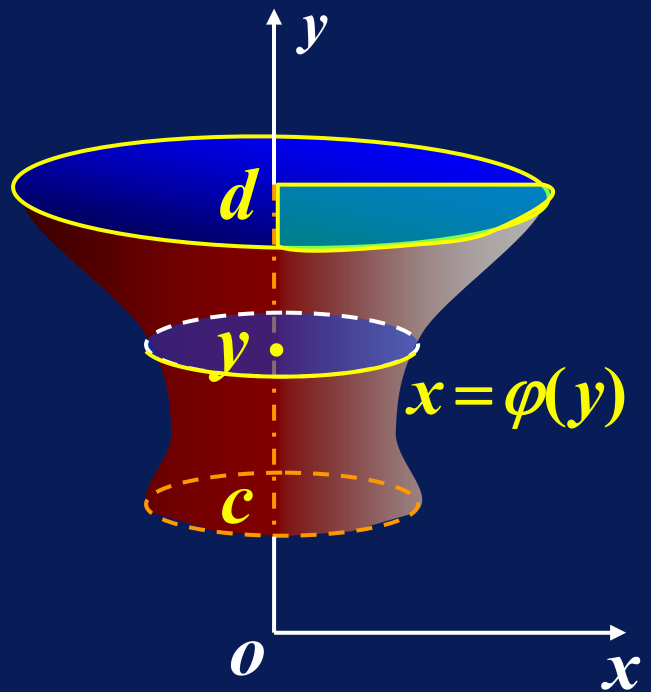
可以证明：体积元素

$$\mathrm{d}V_y = 2\pi x|f(x)|\mathrm{d}\,x$$

$\therefore$ G_1 绕 y 轴旋转的旋转体的体积:

$$V_y = \int_a^b 2\pi x|f(x)|\mathrm{d}\,x \qquad (2.2)$$

情形2 平面图形 G_2：由连续曲线 $x=\varphi(y)$、直线 $y=c$、$y=d$ 及 y 轴所围成的曲边梯形.



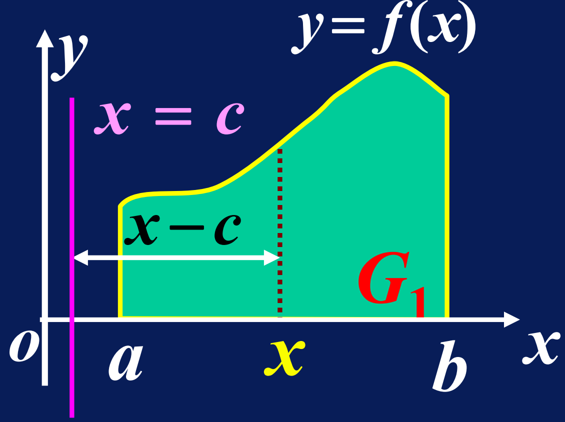
- G_2 绕 y 轴旋转

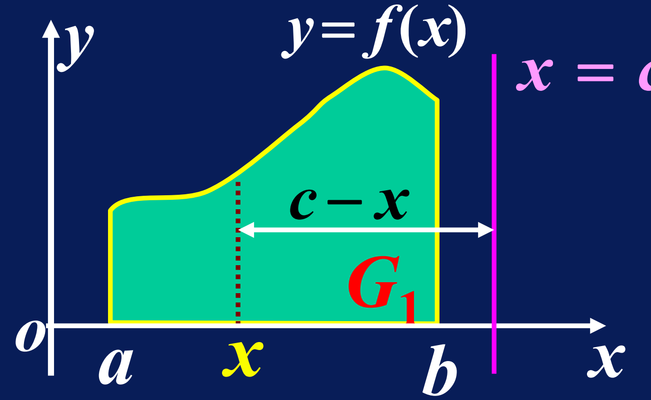
$$V_y=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2\,\mathrm{d}\,y$$

- G_2 绕 x 轴旋转

$$V_x=\int_c^d 2\pi\,y\,|\varphi(y)|\,\mathrm{d}\,y$$

注 1° G_1 绕 直线 $x=c$ 旋转一周所得旋转体的体积：$V_{x=c}=?$

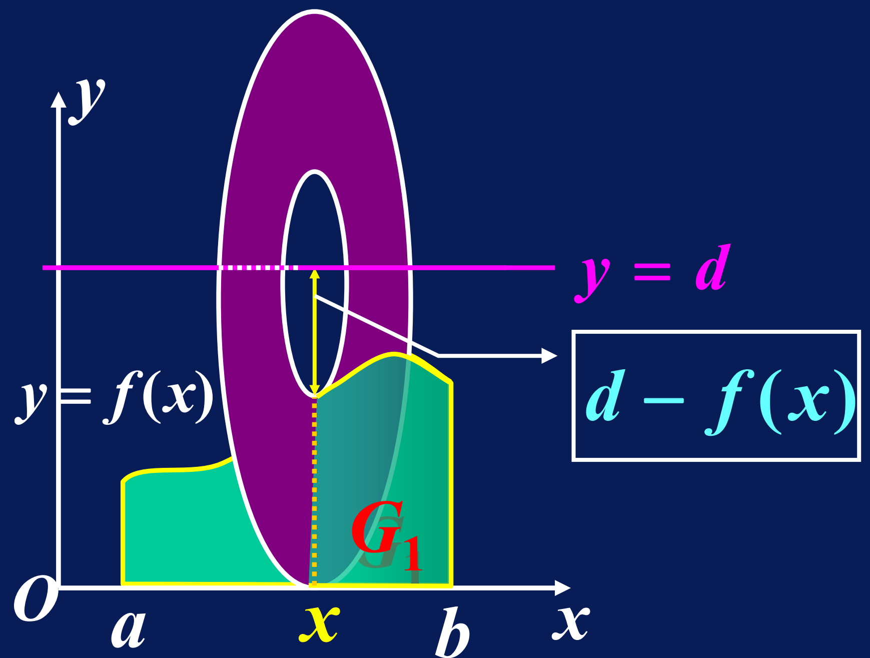




$$V_{x=c}=\int_a^b 2\pi|x-c|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}\,x$$

2° G_1 绕 直线 $y = d$ 旋转一周所得旋转体的体积:

$$V_{y=d} = ?$$



$$V_{y=b} = \int_a^b \pi\{d^2 - [d - f(x)]^2\}\mathrm{d}\,x$$

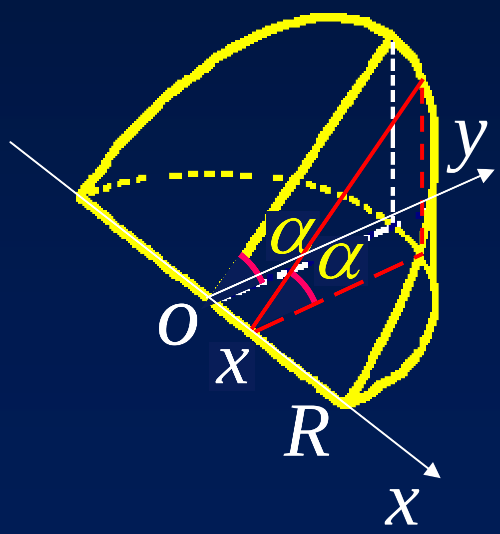
二、典型例题

例1 一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心，并与底面交成α角，计算该平面截圆柱体所得立体的体积.

解 如图所示取坐标系，则圆的方程为

$$x^2+y^2=R^2$$

垂直于x轴的截面是直角三角形，其面积为



$$A(x)=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$$

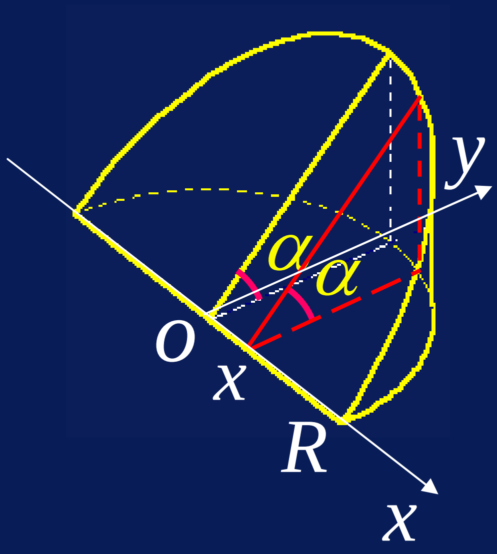
$$(-R\le x\le R)$$

利用对称性

$$V = 2\int_0^R \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha \,\mathrm{d}x$$

$$= 2\tan\alpha\left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^R$$

$$= \frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$



思考 可否选择 y 作积分变量？

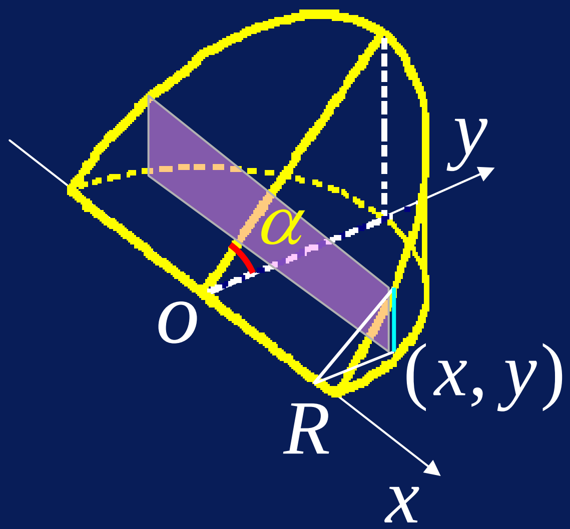
此时截面面积函数是什么？

如何用定积分表示体积？

提示:

$$A(y) = 2x\cdot \underline{y\tan\alpha}$$

$$= 2\tan\alpha\cdot y\sqrt{R^2-y^2}$$



$$V = 2\tan\alpha\cdot\int_0^R y\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \tan\alpha\cdot\left[-\frac{2}{3}(R^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^R$$

$$= \frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

例2 求摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 的一拱与 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转构成旋转体的体积.

解 (1) 绕 x 轴旋转的旋转体体积

$$V_x=\int_0^{2\pi a}\pi y^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,\mathrm{d}t$$

$$=5\pi^2 a^3.$$

(2) 绕y轴旋转的旋转体体积

（方法1） $V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)\,\mathrm{d}y$

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t \,\mathrm{d}t$$

$$- \pi \int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t \,\mathrm{d}t$$

$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t \,\mathrm{d}t$$

$$= 6\pi^3 a^3 .$$

(方法2) 柱壳法

$$V_y=\int_0^{2\pi a}2\pi x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{2\pi a}x\,|y|\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}[a(t-\sin t)]$$

$$=2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$\underline{\underline{u=\pi-t}}\;2\pi a^3\int_{\pi}^{-\pi}(\pi-u-\sin u)(1+\cos u)^2(-\mathrm{d}u)$$

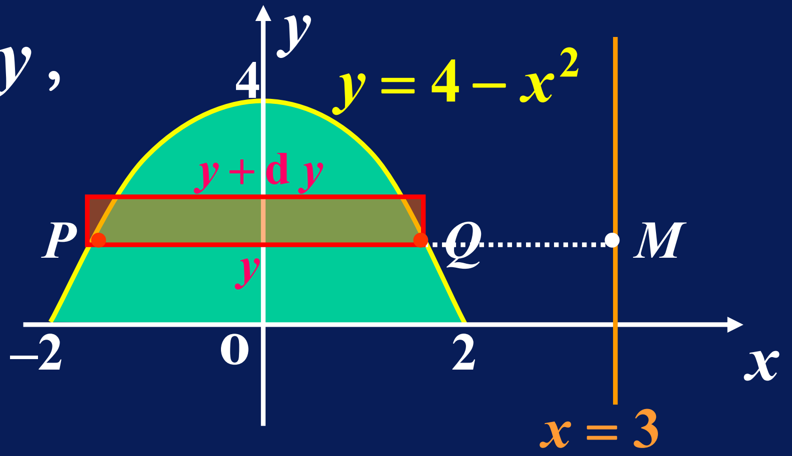
$$=2\pi a^3\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-u-\sin u)(1+\cos u)^2\,\mathrm{d}u$$

$$=2\pi a^3\cdot 2\int_0^{\pi}\pi(1+\cos u)^2\,\mathrm{d}u=6\pi^3a^3.$$

例3 求由曲线 $y=4-x^2$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕直线 $x=3$ 旋转构成旋转体的体积.

解 (方法1) 取积分变量为 y,

$y\in[0,4]$



体积元素为:

$$\mathrm{d}V=[\pi\overline{PM}^2-\pi\overline{QM}^2]\mathrm{d}y$$

$$=[\pi(3+\sqrt{4-y})^2-\pi(3-\sqrt{4-y})^2]\mathrm{d}y$$

$$=12\pi\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y,$$

$$\therefore\quad V=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y=64\pi.$$

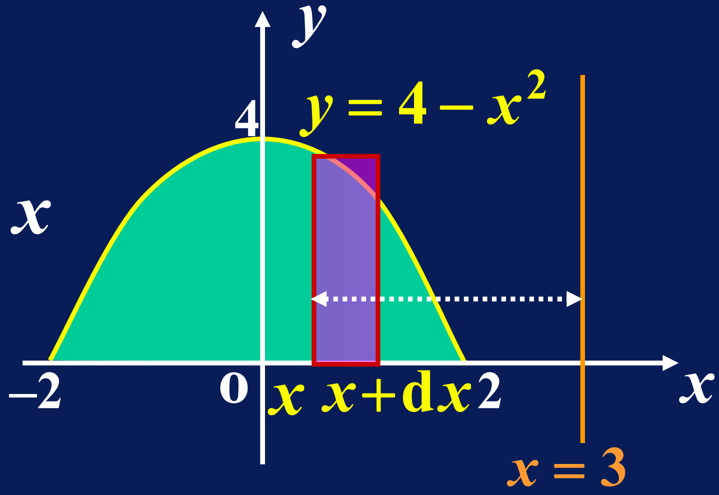
(方法2) 取积分变量为 x, $x \in [-2,2]$.

$$V_{x=3} = \int_{-2}^{2} 2\pi |x-3| \cdot |f(x)| \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{2} 2\pi(3-x)\cdot(4-x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{2} 2\pi \cdot 3 \cdot (4-x^2)\mathrm{d}x$$

$$= 12\pi \int_{0}^{2} (4-x^2)\mathrm{d}x = 64\pi.$$



例4 (综合题)

设 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点，当 $0 \le x \le 1$ 时，$y \ge 0$，又已知该抛物线与直 线 $x = 1$ 及 x 轴所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$，求 a, b, c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体 积 V 最小.

解 由于曲线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点，所以 $c = 0$，又由题设，知

$$S = \int_0^1 (ax^2 + bx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3}$$

$$S=\int_0^1 (ax^2+bx)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{3}$$

即 $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$, 从而 $b=\frac{2}{3}(1-a)$,

于是 $V=\pi\int_0^1 (ax^2+bx)^2\,\mathrm{d}\,x$

$$=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{1}{2}ab+\frac{b^2}{3}\right)$$

$$=\pi\left[\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2\right]$$

$$V(a)=\pi[\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2]$$

由 $V'(a)=\pi[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)]=0,$

得唯一驻点： $a=-\frac{5}{4},\quad b=\frac{3}{2},$

又 $V''(a)=\frac{4}{135}\pi>0$

故当 $a=-\frac{5}{4},\ b=\frac{3}{2},\ c=0$时，旋转体的体积最小．

三、同步练习

1. 试用定积分求圆 $x^2+(y-b)^2=R^2\ (R<b)$ 绕 x 轴旋转而成的环体体积 V.

2. 设平面图形 A 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

3. 设 $y=f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时为连续的非负函数，且 $f(0)=0$， $V(t)$ 表示 $y=f(x), x=t\,(>0)$ 及 x 轴所围图形绕直线 $x=t$ 旋转一周所成旋转体体积，证明: $V''(t)=2\pi f(t)$.

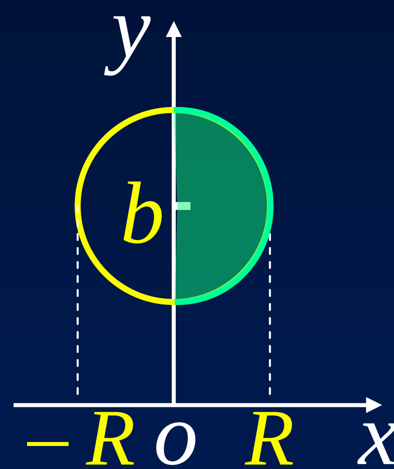
4. (2003年考研) 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴所围成的平面图形为D

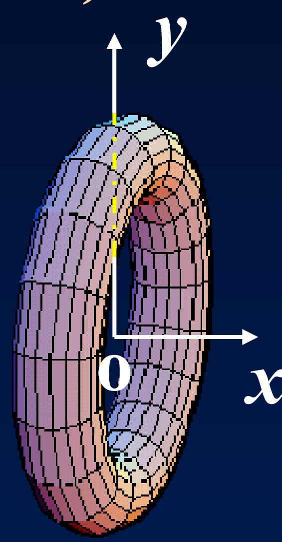
(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积V.

四、同步练习解答

1. 试用定积分求圆 $x^2+(y-b)^2=R^2\ (R<b)$ 绕 x 轴旋转而成的环体体积 V.





解 上 半圆为:
下

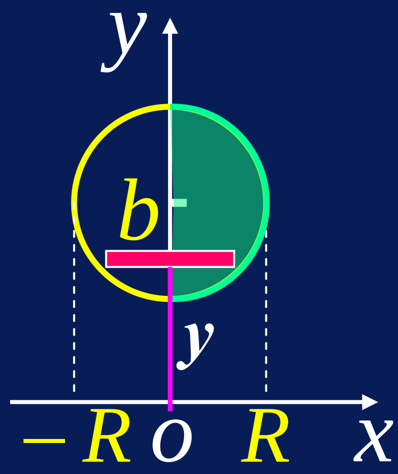
$$y=b\pm\sqrt{R^2-x^2}$$

(方法1) 利用对称性

$$V=2\int_0^R \pi\left[(b+\sqrt{R^2-x^2})^2-(b-\sqrt{R^2-x^2})^2\right]\mathrm{d}x$$

$$=2\pi^2R^2b$$

右(左)半圆为 $x=\pm\sqrt{R^2-(y-b)^2}$，



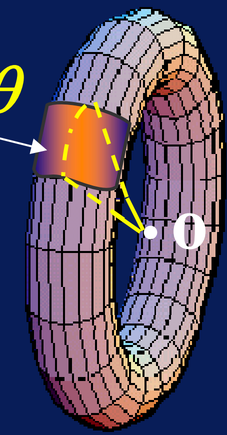
(方法2) 用柱壳法

$$\mathrm{d}V = 2\pi y\cdot 2x\cdot \mathrm{d}y$$

$$V = 4\pi\int_{b-R}^{b+R} y\sqrt{R^2-(y-b)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi^2 R^2 b$$

$\mathrm{d}V = \pi R^2\cdot b\,\mathrm{d}\theta$

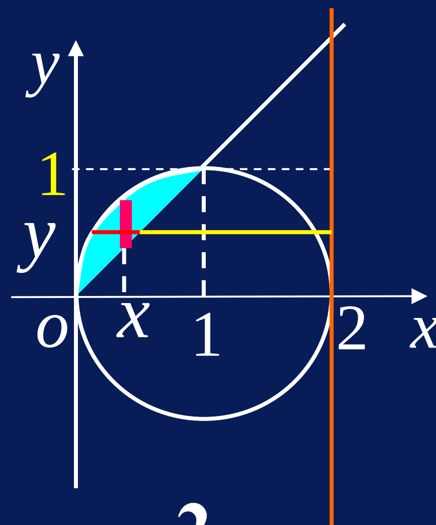


注 上式可变形为

$$V = \pi R^2\cdot 2\pi b = \int_0^{2\pi}\pi R^2\cdot b\,\mathrm{d}\theta$$

此式反映了环体微元的另一种取法(如图所示).

2. 设平面图形 A 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.



解　若选 x 为积分变量，则

旋转体的体积为

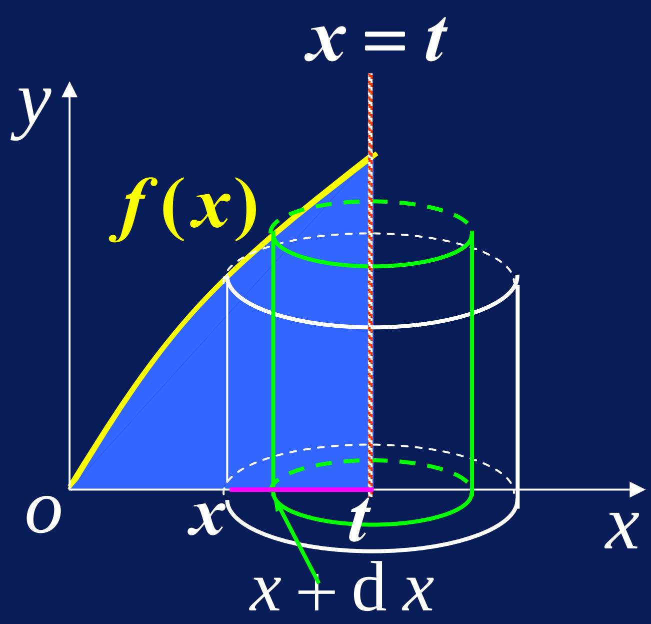
$$V=2\pi\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi^2-\frac{2}{3}\pi$$

若选 y 为积分变量，则

$$V=\pi\int_0^1\left[2-(1-\sqrt{1-y^2})\right]^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^1(2-y)^2\,\mathrm{d}y$$

3. 设 $y=f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时为连续的非负函数, 且 $f(0)=0$, $V(t)$ 表示 $y=f(x), x=t\,(>0)$ 及 x 轴所围图形 绕直线 $x=t$ 旋转一周所成旋转体体积，证明:

$$V''(t)=2\pi f(t).$$



证 利用柱壳法

$$\mathrm{d}V=2\pi\underline{(t-x)}f(x)\,\mathrm{d}x$$

则 $$V(t)=\int_0^t 2\pi(t-x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V(t)=\int_0^t 2\pi(t-x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi t\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-2\pi\int_0^t x\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V'(t)=2\pi\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+\cancel{2\pi t\,f(t)}-\cancel{2\pi t\,f(t)}$$

故 $V''(t)=2\pi\,f(t).$

4. (2003年考研) 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴所围成的平面图形为 D

(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 绕直线 $x = \mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

解 (1) 设切点的横坐标为 x_0，

则曲线 $y = \ln x$ 在点 $(x_0, \ln x_0)$ 处的切线方程为

$$y = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

$$y = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

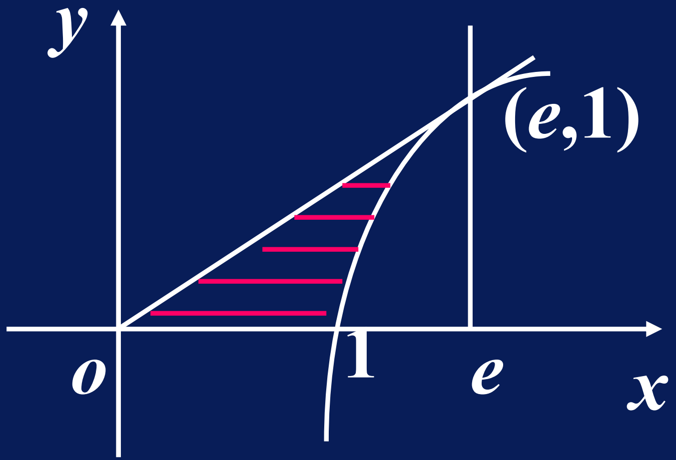
由于该切线过原点,得

$\ln x_0 - 1 = 0$ 即 $x_0 = e$

从而切线方程为 $y = \frac{1}{e}x$

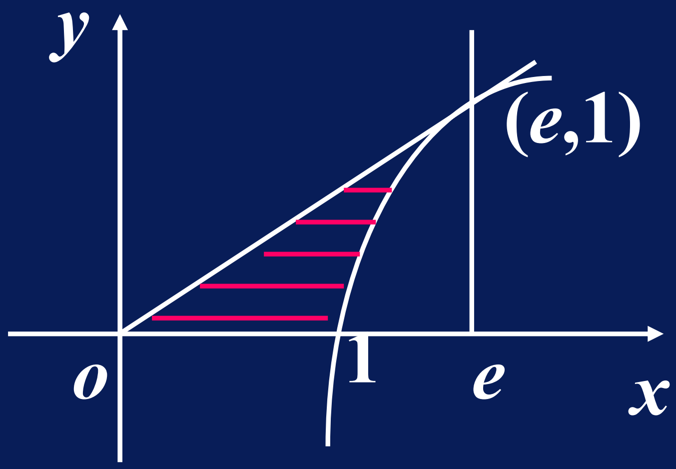
所以平面图形 D 的面积

$$A = \int_0^1 (e^y - ey)\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}e - 1$$



(2) 切线 $y=\frac{1}{e}x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 围成的三角形绕直线 x=e 旋转一周所得圆锥体的体积为

$$V_1=\frac{1}{3}\pi e^2$$

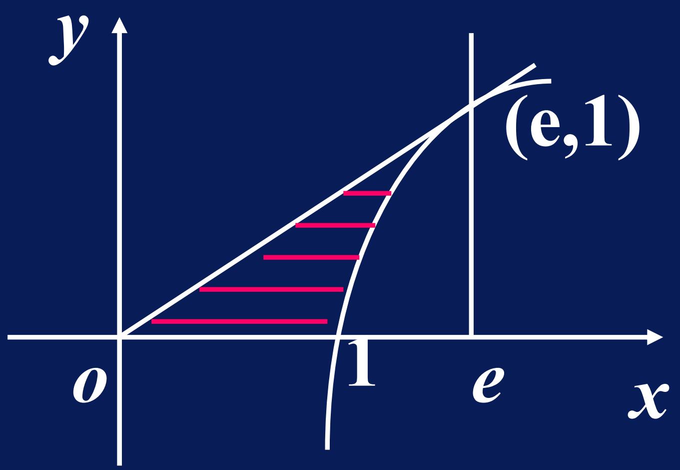


曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 围成的图形绕直线 x=e 旋转所得旋转体的体积为

$$V_2 = \int_0^1 \pi(\mathrm{e} - \mathrm{e}^y)^2 \,\mathrm{d}\,y$$

$$= \pi(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e} - \frac{1}{2})$$

于是所得旋转体的体积为



$$V = V_1 - V_2$$

$$= \frac{\pi}{6}(5\mathrm{e}^2 - 12\mathrm{e} + 3)$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi e^2$$