# 第四章　不定积分

## 本章基本要求

1. 理解原函数和不定积分的概念。

2. 掌握不定积分的基本公式以及求不定积分的换元积分法与分部积分法。

# 第一节

# 不定积分的概念

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

## 一、主要内容

（一）定义 (原函数) 若函数 $F(x)$ 及 $f(x)$在区间

$I$ 上满足: $$F'(x)=f(x)$$

则称 $F(x)$ 为$f(x)$ 在区间 $I$ 上的原函数 .

(二) 原函数的个数及原函数之间的关系

（1）若 $F(x)$ 为$f(x)$ 的原函数,则 $F(x)+C$亦然;

（2）若 $F(x)$、$G(x)$ 均为$f(x)$ 的原函数,则

$$G(x)=F(x)+C$$

**结论** 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 原函数的一般表达式（$C$：任意常数）.

问题：原函数存在的条件?

## (三) 定理 (原函数存在定理)

若函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $I$ 上存在原函数.

(下章证明)

初等函数在定义区间上连续则必有原函数

## (四)定义 (不定积分)

在区间 $I$ 上，$f(x)$ 的含有任意常数项的原函数 $F(x)+C$ 称为$f(x)$在 $I$ 上的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$， 即

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

积分号

积分常数

积分变量

被积表达式

被积函数

( $C$ 为任意常数 ).

**注** 求$\int f(x)\mathrm{d}x$, 只需求$f(x)$的一个原函数$F(x)$,

即若 $F'(x)=f(x)$, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$$

不可丢！

所求不定积分的结果是 否正确，只需检验:

$$(F(x)+C)' \overset{?}{=} f(x)$$

如 $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

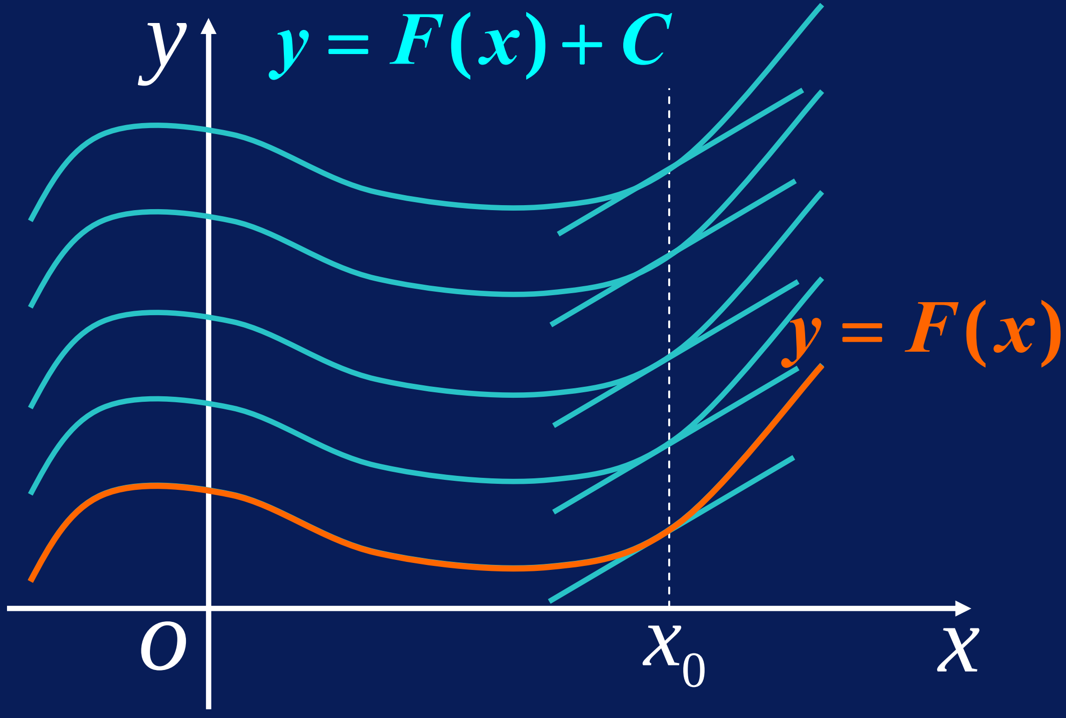
$$(-\cos x + C)' = \sin x$$

## (五) 不定积分的几何意义 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

$f(x)$原函数的图形 $y = F(x)$: $f(x)$的积分曲线.

$y = F(x) + C$的图形: $f(x)$的积分曲线族.

注 $f(x)$ 的积分曲线族是 $f(x)$ 的所有积分曲线组成的平行曲线族.



## (六)不定积分的性质 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$

**性质1** （导数与积分互逆运算）

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)$

d 与 $\int$ 抵消

即 $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C,$

$\int$ 与 d 抵消，

相差一个常数

$\int \underline{\mathrm{d}F(x)} = \underline{F(x) + C}.$

性质2 （线性运算性质）

（1）$\int k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$

（2）$\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x$

$= \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$

线性运算推论 若 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)$，则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)\,\mathrm{d}x$$

## (七) 基本积分表（Ⅰ）

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ ($k$ 为常数)

(2) $$\begin{cases} \int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C & (\mu \neq -1) \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C \end{cases}$$

$$x^{\mu} = \left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)'$$

$x<0$时

$$(\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$$

## 积分表（Ⅰ）续1

(3)
$$\begin{cases} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C & (\text{或} -\operatorname{arccot} x + C) \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C & (\text{或} -\arccos x + C) \end{cases}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

(4)
$$\begin{cases} \int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C \\ \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C \end{cases}$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

(5)
$$\begin{cases} \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C \end{cases}$$

## 积分表（Ⅰ）续2

(6) $\begin{cases} \int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C \\ \int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \int e^x \mathrm{d}x = e^x + C \\ \int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \end{cases}$

(8) $\begin{cases} \int \mathrm{sh}\, x \mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, x + C \\ \int \mathrm{ch}\, x \mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, x + C \end{cases}$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$

$\mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

## (八)定理(基本积分表的推广)

若 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, 则

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C,$$

其中 $u = \varphi(x)$ 是 $x$ 的任一导数连续的函数.

如 $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C \Rightarrow \int \cos u\,\mathrm{d}u = \sin u + C$

$$\xrightarrow{u=x^2} \int \cos x^2\,\mathrm{d}x^2 = \sin x^2 + C$$

$$\xrightarrow{u=e^x} \int \cos e^x\,\mathrm{d}e^x = \sin e^x + C$$

验证:

$(\sin x^2)' = 2x\cos x^2$

$\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$

$$\xrightarrow{u=\varphi(x)} \int \cos\varphi(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \sin\varphi(x) + C$$

## 二、典型例题

**例1** 一质点(质量为 $m$) 在变力$F = A\sin t$ 的作用下，

沿直线运动，求质点运动速度$v(t)$.

由牛顿第二定律，加速度 $a(t) = \dfrac{F}{m} = \dfrac{A}{m}\sin t$

问题： 已知 $v'(t) = \dfrac{A}{m}\sin t$，求 $v(t) = ?$

$(\sin x + C)' = \cos x$，$\left(\dfrac{e^{2x}}{2} + C\right)' = e^{2x}$

**例2** 设曲线通过点( 1 , 2 ) , 且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍, 求此曲线的方程 $y = f(x)$.

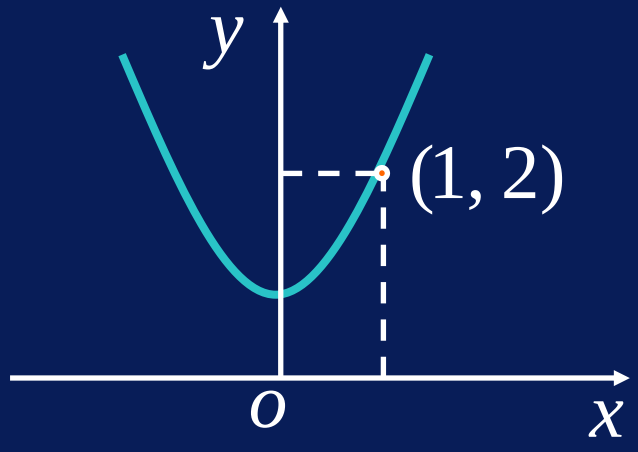
**解** $\because \quad y' = 2x$

$\therefore \quad y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$

所求曲线过点 ( 1 , 2 ) , 故有

$2 = 1^2 + C \qquad \therefore \quad C = 1$

因此所求曲线为 $y = x^2 + 1$



**例3** 质点在距地面 $x_0$ 处以初速 $v_0$ 垂直上抛，不计阻力，求它的运动规律.

**解** (1) 建坐标系. 取 $x$轴（向上）：运动轨迹处，

初时刻：$t = 0$，初位移：$x_0$，初速：$v_0$ .

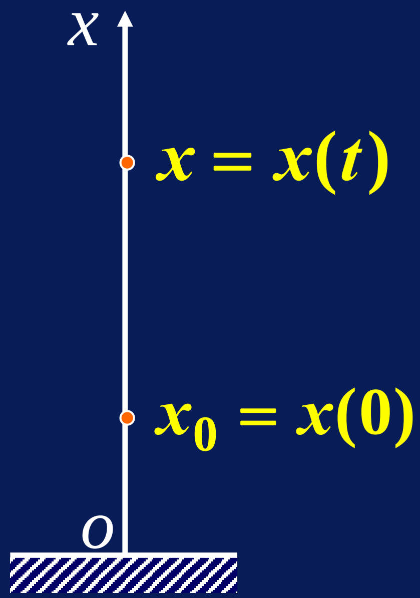
设时刻 $t$ 质点位置：$x = x(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(t)$$ (运动速度)

再由此求 $x(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g$$ (加速度)

先由此求 $v(t)$

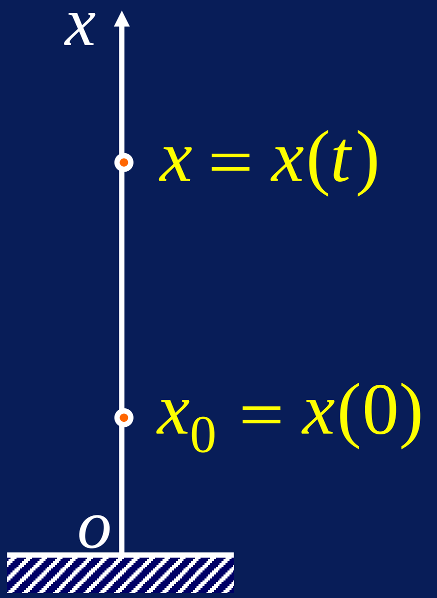


(2) 求$v(t)$. 由 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g$, 知

$$v(t)=\int(-g)\,\mathrm{d}t=-gt+C_1$$

由 $v(0)=v_0$, 得 $C_1=v_0$, 故

$$\boxed{v(t)=-gt+v_0}$$




由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v(t)=-gt+v_0$ ,知

$$x(t)=\int(-gt+v_0)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+C_2$$

由 $x(0)=x_0$, 得 $C_2=x_0$,

故运动规律为 $$\boxed{x(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0}$$

**例4** 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数， $F(x)>0$, $F(0)=1$,

当 $x>0$ 时，有 $f(x)F(x)=\dfrac{1}{2}\cos x$, 求 $f(x)$.

**解** 依题设，知 $F'(x)=f(x)$

代入 $f(x)F(x)=\dfrac{1}{2}\cos x$, 得

$2F'(x)F(x)=\cos x$ 即 $[F^2(x)]'=\cos x$,

$\therefore \quad F^2(x)=\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$

由 $F(0)=1$, 得 $C=1$, 又 $\because \quad F(x)>0$

$\therefore \quad F(x)=\sqrt{\sin x+1}$ 故 $f(x)=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x+1}}$.

例5 (1) $\int (\frac{2}{x} - 3\cos x + \frac{1}{x^2})\,\mathrm{d}x$

由线性性

$$= 2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - 3\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln|x| - 3\sin x - \frac{1}{x} + C$$

(2) $\int 2^x(\mathrm{e}^x - 5)\,\mathrm{d}x$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$= \int [(2e)^x - 5\cdot 2^x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} - 5\frac{2^x}{\ln 2} + C$$

例6 (1) $\int\sqrt{x}(x+2)\,\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x+2\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

$$\int x^{\mu}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$$

(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}}=\int x^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}+C=-3x^{-\frac{1}{3}}+C$

小结

（基本积分法）

1° 拆项、整理（用分配律、线性性）

2° 套用基本积分公式

例7 (1) $\int \cot^2 x \,\mathrm{d}x = \int (\csc^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$

$= -\cot x - x + C$

$(-\cot x)' = \csc^2 x$

(2) $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\,\mathrm{d}x$

$= \int \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}\,\mathrm{d}x$

用三角公式变形

分子迎合分母

$= \int (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x$

$= \sin x + \cos x + C$

例8　已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x\,,\ x\ge 0,\\ x^2\quad\ ,\ x<0,\end{cases}$ 求 $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

分析　为求 $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$，可先求 $f(x)$的一个原函数 $F(x)$，则有 $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x=F(x)+C$.

解　$\because\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0,$

$\therefore\ f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，从而$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的原函数一定存在，而且是可导函数 .

有 $$F(x)=\begin{cases}-\cos x, & x\ge 0\\ \dfrac{x^3}{3}+c, & x<0\end{cases}$$ ($c$为待定常数)

因 $F(x)$在 $x=0$处连续，

$$\lim_{x\to 0^-}F(x)=\lim_{x\to 0^+}F(x)=F(0),$$

得 $c=-1$,从而

$$F(x)=\begin{cases}-\cos x, & x\ge 0\\ \dfrac{x^3}{3}-1, & x<0\end{cases}$$

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}-\sin x, & x\ge 0\\ x, & x<0\end{cases}}$$

$$\because \quad F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\frac{x^3}{3}-1)+1}{x-0} = 0$$

$$F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cos x+1}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{1} = 0$$

$$\therefore \quad F'(0) = 0 = f(0)$$

故 $F'(x) = f(x),\ x \in R$

$$F(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2}+1, & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}-\cos x, & x\ge 0\\ \dfrac{x^3}{3}-1, & x<0\end{cases}$$

$$\therefore\quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$$

$$=\begin{cases}-\cos x + C, & x\ge 0\\ \dfrac{x^3}{3}-1+C, & x<0\end{cases}$$

## 三、同步练习

1.火车进站时,需要逐渐减速,设火车减速行驶的速度随时间的变化规律为 $V(t)=1-\frac{1}{3}t$ (公里/分) 问火车应在距离站台多远的地方开始减速?

2. 若 $f(x)$的导函数为 $\sin x$, 则 $f(x)$ 原函数是 (　　) .

$(A)$ $1+\sin x$;　　$(B)$ $1-\sin x$;

$(C)$ $1+\cos x$;　　$(D)$ $1-\cos x$ .

3. 若$f(x)$是$e^{-x}$的原函数，则

$$\int \frac{f(\ln x)}{x}\,dx = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

4. 求$\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x}\,dx$

5. 设$f(x)=e^{|x|}$，求原函数 $F(x)$和

$$\int e^{|x|}\,dx.$$

## 四、同步练习解答

1.火车进站时,需要逐渐减速,设火车减速行驶的速度随时间的变化规律为 $V(t)=1-\frac{1}{3}t$ (公里/分) 问火车应在距离站台多远的地方开始减速?

**解** 火车从开始减速到停车,共行驶时间 $t_0$,

令 $V(t)=(1-\frac{1}{3}t)=0$, $\Rightarrow t_0=3$分,

减速后时刻$t$时行驶的路程: $s(t)$

减速后行驶的总路程 $s(3)$

$$v(t)=1-\frac{1}{3}t=\left[t-\frac{t^2}{6}+c\right]'$$

$$\Rightarrow\ s(t)=t-\frac{t^2}{6}+c,$$

由 $s(0)=0$, $c=0$, 便可以得到:

$$\Rightarrow\ s(t)=t-\frac{t^2}{6}$$

$$\Rightarrow\ s(3)=1.5(\text{公里})$$

2. 若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是( $B$ ).

(A) $1+\sin x$;　　(B) $1-\sin x$;

(C) $1+\cos x$;　　(D) $1-\cos x$.

解　已知 $f'(x)=\sin x$

求 $(\ ?\ )'=f(x)$

即 $(\ ?\ )''=\sin x$

或由题意 $f(x)=-\cos x+C_1$, 其原函数为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\sin x+C_1x+C_2$$

3. 若$f(x)$是$\mathrm{e}^{-x}$的原函数，则

$$\int \frac{f(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}\,x = \underline{\quad \frac{1}{x} + C_0 \ln|x| + C \quad}$$

解　已知$f'(x) = e^{-x}$,

$$\therefore \quad f(x) = -e^{-x} + C_0$$

$$f(\ln x) = -\frac{1}{x} + C_0,$$

$$\frac{f(\ln x)}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_0}{x}$$

4. 求 $\int \frac{x^3}{1+x} \mathrm{d}x$

解 $$\int \frac{x^3}{1+x} \mathrm{d}x = \int \frac{(x^3+1)-1}{1+x} \mathrm{d}x$$

$$= \int \left[ \left( x^2 - x + 1 \right) - \frac{1}{x+1} \right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|1+x| + C$$

5. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}$,求原函数 $F(x)$和 $\int \mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{d}x$

**分析** 为求 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$，可先求 $f(x)$的一个原函数 $F(x)$，则有 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C.$

**解** $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x<0\\ \mathrm{e}^{x}, & x\ge 0\end{cases}$

在$(-\infty,+\infty)$上连续，从而原函数 $F(x)$存在，

$$F(x)=\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+1, & x<0\\ \mathrm{e}^{x}+c, & x\ge 0\end{cases}\quad (c\text{为待定常数})$$

$$F(x)=\begin{cases}-e^{-x}+1, & x<0\\ e^{x}+c, & x\geq 0\end{cases}\quad (c\text{为待定常数})$$

因 $F(x)$在 $x=0$处连续,

$$\lim_{x\to 0^-}F(x)=\lim_{x\to 0^+}F(x)=F(0),$$

得 $0=1+c$ 即 $c=-1.$

$$\therefore\quad F(x)=\begin{cases}-e^{-x}+1, & x<0\\ e^{x}-1, & x\geq 0\end{cases}$$

可验证：$F'(0)$存在，且

$$F'(0) = f(0) = 1$$

从而 $F'(x) = f(x),\ x \in R$

$$\therefore \quad \int e^{|x|}\,dx = \int f(x)\,dx$$

$$= F(x) + C$$

$$= \begin{cases} -e^{-x} + 1 + C, & x < 0 \\ e^{x} - 1 + C, & x \ge 0 \end{cases}$$