第四节　极限的基本性质

习题　1-4

1.　证明数列$1, 0, 1, 0, \cdots$的极限不存在.

证　用$\{u_n\}$表示此数列, 则易知该数列的子数列$\{u_{2n+1}\}$收敛于0，$\{u_{2n}\}$收敛于1, 由收敛数列与其子数列之间的关系知, 该数列的极限不存在.

2.　试证明$x \to x_0$时函数极限的局部有界性定理.

证　设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 则由极限定义, $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$, 使得当$0 < |x - x_0| < \delta$, 有$|f(x) - A| < \varepsilon$, 即$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, 即$f(x)$在$\mathring{U}(x_0, \delta)$内有界.

3.　证明$x \to \infty$时函数极限的局部保号性: 若$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, 且$A > 0$ (或$A < 0$), 则存在$X > 0$，当$|x| > X$时, $f(x) > 0$ (或$f(x) < 0$).

证　以$A > 0$为例证之, $A < 0$时亦然.

由$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$，则由极限定义，对$\varepsilon = \dfrac{A}{2} > 0$，$\exists X > 0$，当$|x| > X$时，就有$|f(x) - A| < \varepsilon = \dfrac{A}{2}$, 即$0 < \dfrac{A}{2} < f(x) < \dfrac{3}{2}A$, 得证.

4.　对于数列$\{x_n\}$，若$x_{2k-1} \to a (k \to \infty)$，$x_{2k} \to a (k \to \infty)$, 证明: $x_n \to a$ $(n \to \infty)$.

证　由$x_{2k-1} \to a (k \to \infty)$, 故$\forall \varepsilon > 0$，$\exists K_1 > 0$, 使得当$k > K_1$时, 有

$|x_{2k-1} - a| < \varepsilon$;

$x_{2k} \to a (k \to \infty)$, 故对上述$\varepsilon > 0$, $\exists K_2 > 0$, 使得当$k > K_2$时, 有

$|x_{2k} - a| < \varepsilon$.

取$N = \max\{2K_1 - 1, 2K_2\}$, 当$n > N$时, 有$|x_n - a| < \varepsilon$. 即$x_n \to a$ $(n \to \infty)$.

5. 证明: 当 $x \to 0$ 时, $\sin\dfrac{\pi}{x}$ 没有极限.

证 令 $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{2}{4n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 但

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{x_n} = 0 \neq \lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{y_n} = 1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{x}$ 不存在.

6. 证明: 当 $x \to +\infty$ 时, $\sin\sqrt{x}$ 没有极限.

证 令 $x_n = (2n\pi)^2$, $y_n = [(2n+\dfrac{1}{2})\pi]^2$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 但

$$\lim_{n\to\infty}\sin\sqrt{x_n} = 0 \neq \lim_{n\to\infty}\sin\sqrt{y_n} = 1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{x}$ 不存在.