第六节　线性微分方程解的结构

习题　12-6

1. 判断下列函数组在其定义区间内是线性相关的还是线性无关的:

(1) $e^x,\ e^{x+1}$;　　(2) $e^{ax},\ e^{bx}(a\neq b)$;

(3) $\sin^2 x,\ \cos^2 x$;　　(4) $\sin 2x,\ \sin x\cos x$;

(5) $x,\ \ln x$;　　(6) $e^{x^2},\ x^2e^{x^2}$;

(7) $e^x\cos 2x,\ e^x\sin 2x$.

解　(1) 因为 $\dfrac{e^{x+1}}{e^x}=e$ 为常数, 所以 e^x 与 e^{x+1} 线性相关.

(2) 因为 $\dfrac{e^{ax}}{e^{bx}}=e^{(a-b)x}$ 不为常数, 所以 e^{ax} 与 e^{bx} 线性无关.

(3) 因为 $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x$ 不为常数, 所以 $\sin^2 x$ 与 $\cos^2 x$ 线性无关.

(4) 因为 $\dfrac{\sin 2x}{\sin x\cos x}=2$, 所以 $\sin 2x$ 与 $\sin x\cos x$ 线性相关.

(5) 因为 $\dfrac{x}{\ln x}$ 不为常数, 所以 x 与 $\ln x$ 线性无关.

(6) 因为 $\dfrac{x^2e^{x^2}}{e^{x^2}}=x^2$ 不为常数, 所以 e^{x^2} 与 $x^2e^{x^2}$ 线性无关.

(7) 因为 $\dfrac{e^x\sin 2x}{e^x\cos 2x}=\tan 2x$ 不为常数, 所以 $e^x\cos 2x$ 与 $e^x\sin 2x$ 线性无关.

2. 验证 $y_1=e^{x^2}$ 及 $y_2=xe^{x^2}$ 都是微分方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解, 并写出该方程的通解.

解　$y_1'=2xe^{x^2}$, $y_1''=2(1+2x^2)e^{x^2}$, 因而

$$y_1''-4xy_1'+(4x^2-2)y_1=2(1+2x^2)e^{x^2}-8x^2e^{x^2}+(4x^2-2)e^{x^2}=0,$$

所以 $y_1=e^{x^2}$ 是微分方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解.

$y_2' = (1+2x^2)e^{x^2}$，$y_2'' = 2(3x+2x^3)e^{x^2}$，因而

$$y_2'' - 4xy_2' + (4x^2-2)y_2 = 2(3x+2x^3)e^{x^2} - (4x+8x^3)e^{x^2} + (4x^3-2x)e^{x^2} = 0,$$

所以 $y_2 = xe^{x^2}$ 是微分方程 $y'' - 4xy' + (4x^2-2)y = 0$ 的解.

因为 $\dfrac{xe^{x^2}}{e^{x^2}} = x$ 不为常数，所以 e^{x^2} 与 $x^2e^{x^2}$ 为两线性无关的特解，微分方程的通解为

$$y = C_1e^{x^2} + C_2xe^{x^2}.$$

3. 验证下列函数都是所给方程的解，指出哪些是通解:

(1) $y'' + 5y' + 4y = 3-2x$, $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x} + \dfrac{11}{8} - \dfrac{x}{2}$;

(2) $y'' - 4y = 4$, $y = C_1e^{2x} + C_2e^{2x-1} - 1$;

(3) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y = x(C_1 + C_2x)$;

(4) $y'' + 16y = 0$, $y = C_1\sin 4x + C_2\sin 2x\cos 2x$;

(5) $xy'' + 2y' - xy = e^x$，$y = \dfrac{1}{x}(C_1e^x + C_2e^{-x}) + \dfrac{e^x}{2}$.

解 (1) 对于 $y = e^{-x}$,

$$y'' + 5y' + 4y = e^{-x} - 5e^{-x} + 4e^{-x} = 0,$$

对于 $y = e^{-4x}$,

$$y'' + 5y' + 4y = 16e^{-4x} - 20e^{-4x} + 4e^{-4x} = 0,$$

对于 $y = \dfrac{11}{8} - \dfrac{x}{2}$,

$$y'' + 5y' + 4y = 0 - \frac{5}{2} + 4\left(\frac{11}{8} - \frac{x}{2}\right) = 3-2x.$$

该方程为二阶非齐次线性微分方程，$y = e^{-x}$ 与 $y = e^{-4x}$ 为齐次的两线性无关的解，$y = \dfrac{11}{8} - \dfrac{x}{2}$ 为非齐次的特解，所以 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x} + \dfrac{11}{8} - \dfrac{x}{2}$ 为该方程的通解.

(2) 对于，$y=e^{2x}$，

$$y''-4y=4e^{2x}-4e^{2x}=0,$$

对于 $y=e^{2x-1}$，

$$y''-4y=4e^{2x-1}-4e^{2x-1}=0,$$

对于 $y=-1$，

$$y''-4y=4.$$

该方程为二阶非齐次线性微分方程，$y=e^{2x}$ 与 $y=e^{2x-1}$ 为齐次的两线性相关的解，$y=-1$ 为非齐次的特解，所以 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{2x-1}-1$ 是方程的解，但不是方程的通解.

(3) 对于 $y=x$，

$$x^2y''-2xy'+2y=0-2x+2x=0,$$

对于 $y=x^2$，

$$x^2y''-2xy'+2y=2x^2-4x^2+2x^2=0.$$

该方程为二阶齐次线性微分方程，$y=x$ 与 $y=x^2$ 为两线性无关的解，所以 $y=x(C_1+C_2x)$ 是方程的通解.

(4) 对于 $y=\sin 4x$，

$$y''+16y=-16\sin 4x+16\sin 4x=0,$$

对于 $y=\sin 2x\cos 2x=\dfrac{1}{2}\sin 4x$，

$$y''+16y=\frac{1}{2}(-16\sin 4x+16\sin 4x)=0,$$

该方程为二阶齐次线性微分方程，$y=\sin 4x$ 与 $y=\sin 2x\cos 2x$ 为两线性相关的解，所以 $y=C_1\sin 4x+C_2\sin 2x\cos 2x$ 是方程的解，但不是方程的通解.

(5) 对于 $y=\dfrac{e^x}{x}$，$y'=(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2})e^x, y''=(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3})e^x$，

$$xy''+2y'-xy=x(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3})e^x+2(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})e^x-x\frac{e^x}{x}=0,$$

对于 $y=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$，$y'=(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})\mathrm{e}^{-x}$，$y''=(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3})\mathrm{e}^{-x}$，

$$xy''+2y'-xy=x(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3})\mathrm{e}^{-x}+2(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})\mathrm{e}^{-x}-x\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}=0,$$

对于 $y=\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}$，

$$xy''+2y'-xy=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x}+2\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}-x\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}=\mathrm{e}^{x}.$$

该方程为二阶非齐次线性微分方程，$y=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$ 与 $y=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ 为齐次的两线性无关的解，$y=\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}$ 为非齐次的特解，所以 $y=\frac{1}{x}(C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x})+\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}$ 为该方程的通解.

4. 已知二阶非齐次线性微分方程的两个特解为:

$$y_1^*=1+x+x^3,\ y_2^*=2-x+x^3,$$

相应的齐次方程的一个特解为 $y_1=x$，求该方程满足初始条件 $y(0)=5,\ y'(0)=-2$ 的特解.

解 齐次线性微分方程的另一特解为 $y_2=y_1^*-y_2^*=2x-1$，它与 $y_1=x$ 线性无关，所以非齐次的通解为

$$y=C_1x+C_2(2x-1)+1+x+x^3,$$

将初始条件代入，得 $C_1=5,\ C_2=-4$，特解为

$$y=5-2x+x^3.$$

5. 设二阶齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$，其中 $p(x),\ q(x)$ 为连续函数，求证:

(1) 如果 $p(x)+xq(x)=0$，则 $y=x$ 为二阶齐次线性方程的特解;

(2) 如果存在常数 a，使 $a^2+ap(x)+q(x)=0$，则 $y=\mathrm{e}^{ax}$ 为二阶齐次线性方程的特解.

解 (1) 对于 $y=x$，

$$y''+p(x)y'+q(x)y=p(x)+xq(x)=0,$$

所以 $y=x$ 为此种情形下二阶齐次线性方程的特解.

(2) 对于 $y=\mathrm{e}^{ax}$，

$$y''+p(x)y'+q(x)y=[a^2+ap(x)+q(x)]\mathrm{e}^{ax}=0,$$

所以 $y=\mathrm{e}^{ax}$ 为此种情形下二阶齐次线性方程的特解.

6. 已知 $y_1(x)=x$ 是齐次线性微分方程

$$(x^2+4)y''-2xy'+2y=0$$

的一个解，求此方程的通解.

解 令 $y_2=u(x)y_1$ 为与 y_1 线性无关的解，代入方程，得

$$x(x^2+4)u''+8u'=0\,,$$

令 $v=u'$，得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=(\frac{2x}{x^2+4}-\frac{2}{x})\mathrm{d}x\,,$$

解得

$$v=u'=C_1(1+\frac{4}{x^2})\,,$$

$$u=C_1(x-\frac{4}{x})+C_2\,,$$

通解为

$$y=C_1(x^2-4)+C_2x\,.$$