2017-2018 第二学期高数期中试题答案

一、1.　0；　　2. 1；　　3. $\sqrt{6}$；　　4. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$；

5. $(-1,1,2)$；　6. -1；　　7. $\dfrac{\ln 2}{4}$；　　8. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi-1$；　　9. $9\sqrt{6}$；

10. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$.

二、1. C；　2. D；　3.C;　4.B;　5. C;　6.B;　7. B;　8. A.

三、曲线 $\begin{cases} y=\sqrt{1+z^2} \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的旋转面的方程为

$x^2+y^2=1+z^2\quad(0\le z\le 1)$　　--------- 2 分

$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$　　--------- 4 分

$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1+z^2}}\rho^3\,\mathrm{d}\rho$　　--------- 7 分

$=\dfrac{14}{15}\pi$　　--------- 9 分

四、令 $P=\dfrac{1+y^2f(xy)}{y}$，　$Q=\dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=f(xy)-\dfrac{1}{y^2}+xyf'(xy)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故在单连通区域内曲线积分与路径无关 ----2 分

方法一：选取积分路径：从 $A(3,\dfrac{2}{3})$ 到 $E(1,\dfrac{2}{3})$，再从 E 到 $B(1,2)$ 的折线段　----4 分

$$I=\int_{AE}+\int_{EB}=\int_3^1\frac{1+\frac{4}{9}f(\frac{2}{3}x)}{\frac{2}{3}}dx+\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{1}{y^2}[y^2f(y)-1]dy$$　　----6　分

$=\dfrac{3}{2}(1-3)+\int_2^{\frac{2}{3}}f(y)dy+\int_{\frac{2}{3}}^{2}f(y)dy+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}$　　---------　8 分

$=-4$　　--------- 9 分

方法二：可取曲线 L：$xy=2$，从 A 到 B 则　　--------- 4 分

$$I=\int_3^1 \frac{1+y^2 f(2)}{y}dx+\frac{x(y^2 f(2)-1)}{y^2}\cdot(-\frac{2}{x^2})dx$$ --------- 6 分

$$=\int_3^1 (\frac{1}{y}+\frac{2}{xy^2})dx$$ --------- 8 分

$$=\int_3^1 xdx=-4$$ --------- 9 分

五、设切点为(x_0,y_0,z_0)，该点的法矢为：$\boldsymbol{n}=(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2})$

所以切平面为：$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$

即 $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1$ -----------------2 分

切平面在三个坐标轴上的截距为$\frac{a^2}{x_0}$，$\frac{b^2}{y_0}$和$\frac{c^2}{z_0}$

所以，所求的四面体体积为：$V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$ -----------------3 分

引入辅助函数：$F(x_0,y_0,z_0,\lambda)=\boldsymbol{x_0y_0z_0}+\lambda(\frac{\boldsymbol{x_0^2}}{\boldsymbol{a^2}}+\frac{\boldsymbol{y_0^2}}{\boldsymbol{b^2}}+\frac{\boldsymbol{z_0^2}}{\boldsymbol{c^2}}-\boldsymbol{1})$ --------------- 5 分

解
$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x_0}=y_0z_0+\frac{2x_0}{a^2}\lambda=0 & (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y_0}=x_0z_0+\frac{2y_0}{b^2}\lambda=0 & (2)\\ \frac{\partial F}{\partial z_0}=x_0y_0+\frac{2z_0}{c^2}\lambda=0 & (3)\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1=0 & (4)\end{cases}$$ ----------------- 7 分

得：$x_0=\frac{a}{b}y_0$，$z_0=\frac{c}{b}y_0$，且$x_0>0,y_0>0,z_0>0$

代入(4)得：$x_0=\frac{a}{\sqrt{3}}$，$y_0=\frac{b}{\sqrt{3}}$，$z_0=\frac{c}{\sqrt{3}}$ ----------------- 9 分

因为驻点唯一，且根据实际情况，最值一定在区域的内部取得，所以点$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$就是所求的切点。 ----------------- 10 分