第八章 多元函数微分法及其应用

本章基本要求

1. 理解二元函数的概念，了解多元函数的概念。

2. 了解二元函数的极限与连续性的概念，了解有界闭区域上连续函数的性质。

3. 理解二元函数偏导数与全微分的概念，了解全微分存在的必要条件与充分条件。

4. 了解一元向量值函数及其导数的概念与计算方法。

5. 了解方向导数与梯度的概念及其计算方法。

6. 掌握复合函数一阶偏导数的求法，会求复合函数的二阶偏导数（对于求抽象复合函数的二阶导数，只要求作简单训练）。

7. 会求隐函数（包括由两个方程构成的方程组确定的隐函数）的一阶偏导数（对求二阶偏导数不作要求）。

8. 了解曲线的切线和法平面以及曲面的切平面与法线，并会求出它们的方程。

9. 理解二元函数极值与条件极值的概念，会求二元函数的极值，了解求条件极值的拉格朗日乘数法，会求解一些比较简单的最大值与最小值的应用问题。

第一节

多元函数的极限与连续

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、 主要内容

（一）平面点集 n 维空间

1. 平面点集

坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合，

称为平面点集，记作

$$E=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x,y)\text{所具有的性质 } P\right\}.$$

(1) 邻域 在平面上，点集

$$U(P_0,\delta)=\left\{P\,\middle|\,|PP_0|<\delta\right\},$$ 称为点 P_0 的δ邻域.

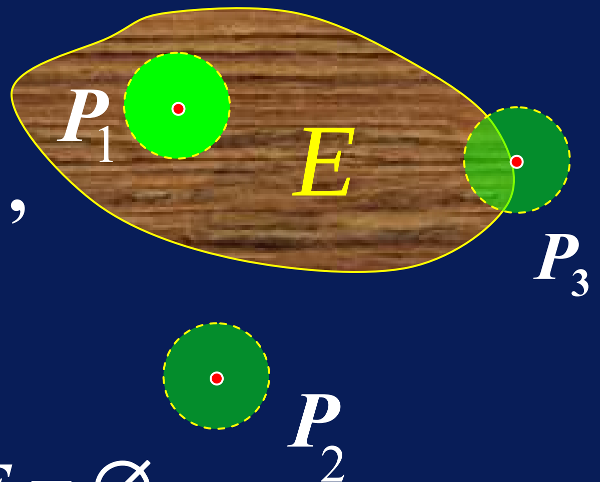
$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

说明 若不需要强调邻域半径δ，也可写成 $U(P_0)$.

点 P_0 的**去心邻域**记为 $\overset{\circ}{U}(P_0)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}$

(2) 内点、外点、边界点

设有点集 E 及一点 P：



- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\subset E$，

  则称 P 为 E 的**内点**，例如 P_1；

- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\cap E=\varnothing$，

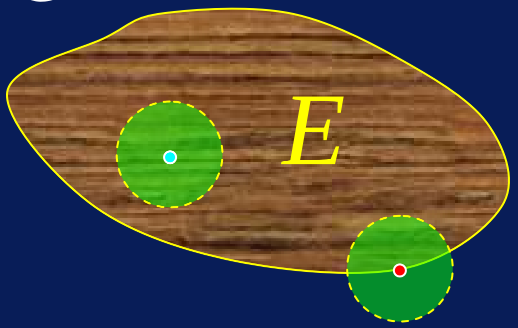
  则称 P 为 E 的**外点**，例如 P_2；

- 若点 P 的任一邻域 $U(P)$ 中既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的**边界点**，例如 P_3 .

显然，E 的内点必属于 E，E 的外点必不属于 E，E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E .

（3）聚点

若对任意给定的正数 δ，点 P 的去心邻域 $\overset{\circ}{U}(P,\delta)$ 内总有 E 中的点，则称 P 是 E 的**聚点**.



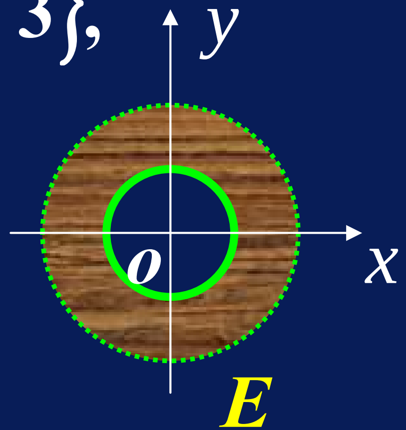
注 聚点可以属于 E，也可以不属于 E.

聚点可以为 E 的内点 或E的边界点

1° 内点一定是聚点;

2° 边界点可能是聚点，也可能不是聚点;

例如: 设点集 $E=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\le x^2+y^2<3\right\}$,



则点集 $E_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,1< x^2+y^2<3\right\}$

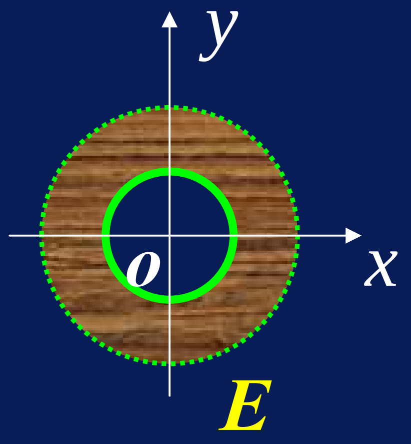
中的点都是E的内点;

点集 $E_2=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$

和 $E_3=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=3\}$

中的点都是E的聚点，

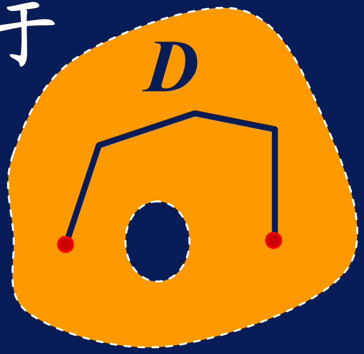
但E_2的点属于 E，E_3的点不属于 E.



（4）开区域及闭区域

- 若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集;
- E 的边界点的全体称为 E 的边界，记作∂E；

- 若点集 $\partial E \subseteq E$，则称 E 为闭集；
- 若点集E中任意两点 都可用一完全属于 E的折线相连，则称 E 是连通集；
- 连通的开集称为开区域，简称区域；
- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.



如，$E_3=\left\{(x,y)\middle|1<x^2+y^2<3\right\}$ 是开集、连通集、是区域；

$E_4=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 3\right\}$ 是闭集、连通集、闭区域.

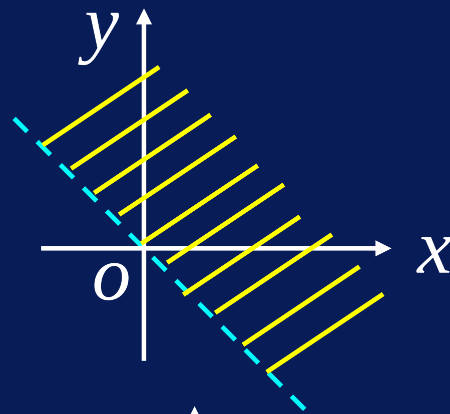
例如，在平面上

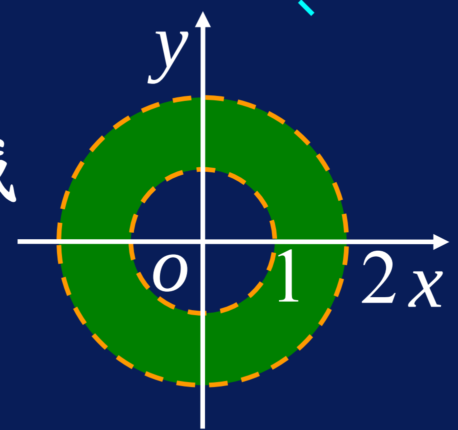
- $\{(x,y) \mid x+y>0\}$
- $\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$

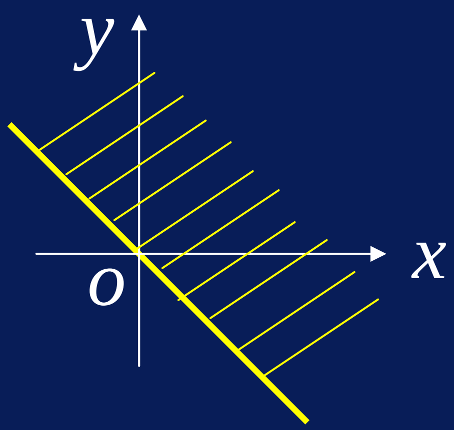
开区域

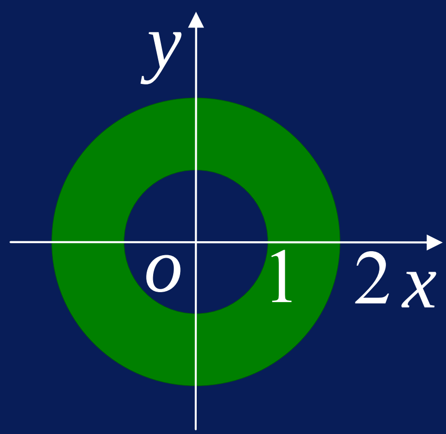
- $\{(x,y) \mid x+y\geq 0\}$
- $\{(x,y) \mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

闭区域



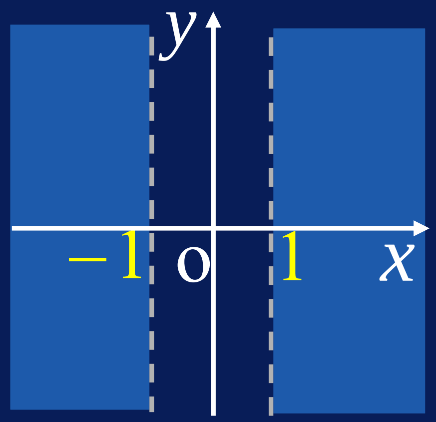






♣ 整个平面是最大的开域，也是最大的闭域;

♣ 点集 $\{(x,y)\,|\,|x|>1\}$ 是开集，但非区域.



● 对点集 E，若存在正数 K，使对一切点 $P\in E$，P 与原点 O 的距离 $|OP|\le K$，则称 E 为**有界点集**；否则，称为**无界点集**.

2. n 维空间

n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体所构成的集合,记作 $\mathbf{R}^n$, 即

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}$$
$$= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \cdots, n\}$$

$\mathbf{R}^n$ 中的每一个元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点或一个n维向量, 数 x_k 称为该点或该n维向量的第 k 个坐标.

当所有坐标 $x_k = 0$时, 称该点为 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标原点, 或n维零向量, 记作0.

对于R^n中的向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

以及实数λ， 规定

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n),$$

称引入了上述线性运算的集合R^n为n维(实)空间.

R^n中的点$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与点$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

的距离记作$P(x,y)$或$\|x-y\|$,规定为

$$P(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

R^n中的点$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与零元 0 的距离为

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

并称 $\|x\|$ 为向量x的模. 当 $n = 1,2,3$ 时, $\|x\|$ 通常记作 $|x|$.

于是，对于$\mathbf{R}^n$ 中的向量x与y,它们的差为

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

$$= P(x, y)$$

设$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$为一定点，

若 $\|x-a\| \to 0$,则称点x 在$\mathbf{R}^n$中趋于点a,记作 $x \to a$.

显然，$x \to a \iff x_1 \to a_1, x_2 \to a_2, \cdots x_n \to a_n$.

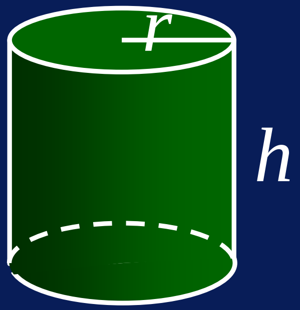
$\mathbb{R}^n$中点 a 的 δ邻域为

$$U(a,\delta)=\left\{ x \,\middle|\, x\in \mathbb{R}^n, P(x,a)<\delta \right\}$$

（二） n元函数 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$的映射

1. n元函数

引例: • 圆柱体的体积



$$V=\pi r^2 h\,,$$

$$\left\{(r,h) \,\middle|\, r>0, h>0 \right\}$$

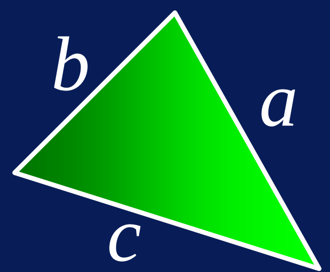
- 一定量理想气体的压强

$$p=\frac{RT}{V}\ (R\text{为常数}),\ \left\{(V,T)\,\middle|\,V>0,T>T_0\right\}$$

- 三角形面积的海伦公式 $\left(p=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\left\{(a,b,c)\,\middle|\,a>0,b>0,c>0,a+b>c\right\}$$



定义8.1 设非空点集 $D\subset \mathrm{R}^n$,映射 $f:D\mapsto \mathrm{R}$

称为定义在 D 上的 n **元函数**，记作 $f:D\in \mathrm{R}^n\to \mathrm{R}$,

或 $y=f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad x\in D.$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$称为自变量, 点集 D 称为函数的**定义域**;

数集 $f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$称为函数的**值域**.

R^{n+1}的子集 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)\mid y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),$
$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D_f\}$

称为函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的图形.

特别地, 当 $n=2$ 时, 有二元函数

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D\subset\mathrm{R}^2$$

当 $n=3$ 时，有三元函数

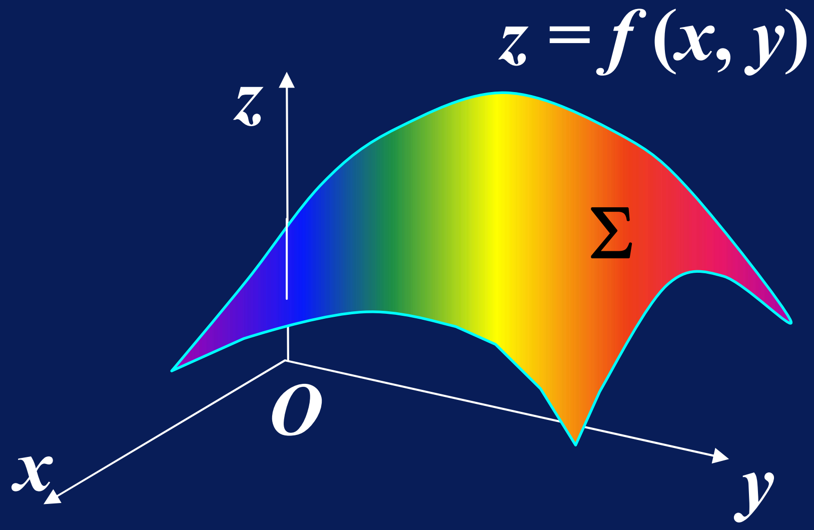
$$u=f(x,y,z),$$

$$(x,y,z)\in D\subset \mathrm{R}^3$$

一般地，二元函数

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in D$$

的图形为空间曲面 Σ.

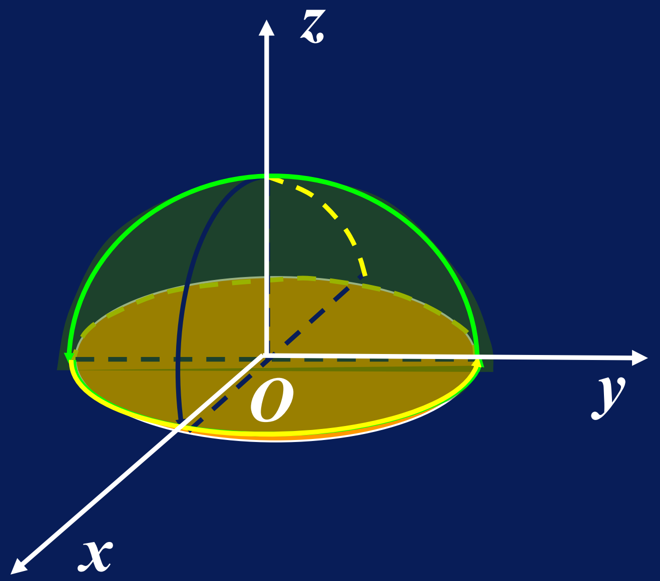


二元函数的定义域是平面点集.

例如，二元函数

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

的图形为中心在原点的上半球面.



定义域为圆域

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$$

又如， $z=\sin(xy)$， $z=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$， $z=-\dfrac{xy}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}}$，

$(x,y)\in \mathrm{R}^2$

三元函数 的定义域是三维空间的点集.

如，三元函数

$$u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2)$$

的定义域为 单位闭球

$$\left\{(x, y, z) \middle| x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}$$

图形为 $\mathbf{R}^4$ 空间中的超曲面.

2. $R^n \to R^m$的映射

引例 设$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$，质量为$m_0$的质点 M_0，对位于Ω内质量为m的质点M的引力为

$$F(x, y, z) = G\frac{m_0 m}{|\overrightarrow{MM_0}|^2}\frac{\overrightarrow{MM_0}}{|\overrightarrow{MM_0}|}$$

$$= G\frac{m_0 m}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

$$= (F_x, F_y, F_z)$$

这里的函数 $F(x, y, z)$是一个定义在 $\Omega \subset R^3$上的向量值函数，从R^3到R^3的映射.

定义8.2 设非空点集 $D\subset \mathrm{R}^n$, 映射 $f: D\mapsto \mathrm{R}^m$ 称为定义在 D 上的一个**n 元向量值函数**，记作

$$f: D\in R^n \to R^m,$$

或 $(y_1, y_2, \cdots, y_m) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

当 $m=1$ 时,就是定义8.1中的**n 元函数**，当 $n=1$ 时,就是第七章讲的**一元向量值函数**.

向量值函数的几何或物理意义举例

$$R^1 \to R^2: \begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$\boxed{\text{平面曲线的方程或平面质点随时间运动的轨迹.}}$

$$R^1 \to R^3 : \begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \\ w = w(t), \end{cases} \Longleftrightarrow$$

空间曲线的方程或空间质点随时间运动的轨迹.

$$R^2 \to R^2 : \begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \Longleftrightarrow$$

平面到平面的坐标变换.

（三）多元函数的极限

定义8.3 设二元函数 $f(P)=f(x,y), P\in D\subseteq \mathrm{R}^2$，

$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，若存在常数 A，使得 $\forall\ \varepsilon>0$，

$\exists\ \delta>0$，对于一切 $P(x,y)\in \mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$，总有

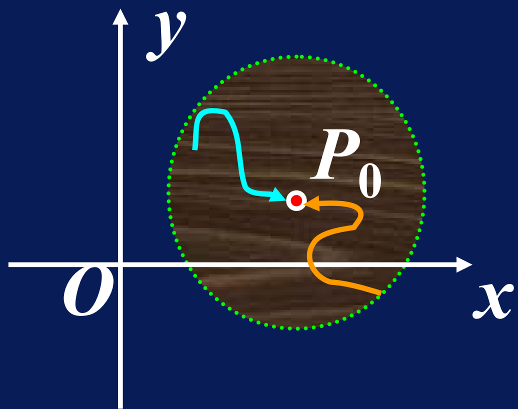
$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{P\to P_0} f(P)=A,$$

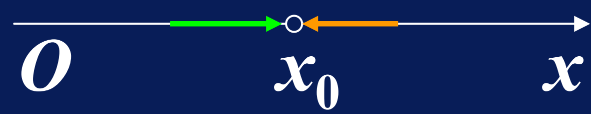
或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$

注 1° 在二元函数极限定义中，$P \to P_0$ 是指在平面上位于D内以任意方式趋于P_0；



对比：一元函数极限

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$



2° 二元函数的极限又称为二重极限;

3° 关于二元函数的极限概念，可相应地推广到n元函数 $u = f(P)$, $P \in D \subseteq \mathbf{R}^n$上去;

4° 二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

（四）多元函数的连续性

定义8.4 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 定义在 D 上，P_0 为 D 的聚点，且 $P_0\in D$，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

如果函数在 D 上各点处都连续，则称此函数在 D 上连续. 记作 $f(x,y)\in C(D)$.

定义8.5 设函数 $f(x,y)$ 定义在 D 上，P_0 为 D 的聚点，

如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续. 则称

$P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点 .

例如, 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在 (0 , 0)点极限不存在, 故 (0, 0)为其间断点.

又如, 函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$上间断.

结论: 一切多元初等函数在其定义区域内连续.

闭区域上的多元连续函数有与一元函数类似的性质:

性质1 (有界性与最大最小值定理)

在**有界闭**区域 D 上**连续**的多元函数必定在D上有界,

且能取得它在 D 上的最大值 M 及最小值 m ;

性质2 (介值定理)

在**有界闭**区域 D 上**连续**的多元函数必取得介于它在

D 上的最大值 和最小值之间的一切值.

二、典型例题

1. 求二重极限的常用方法

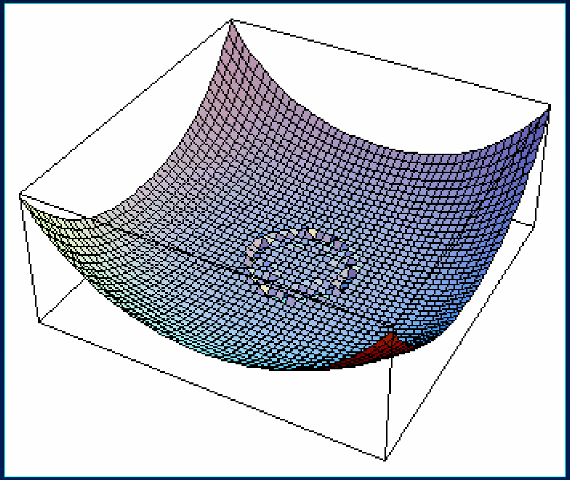
(1) 利用定义

例1 求证: $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$

证 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

$$|f(x,y)-0|$$

$$=|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le x^2+y^2$$



$\forall\, \varepsilon > 0$, 要使 $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right| < \varepsilon$

只要 $0 < x^2+y^2 < \varepsilon$ 故取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, 则

当 $0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$ 时，

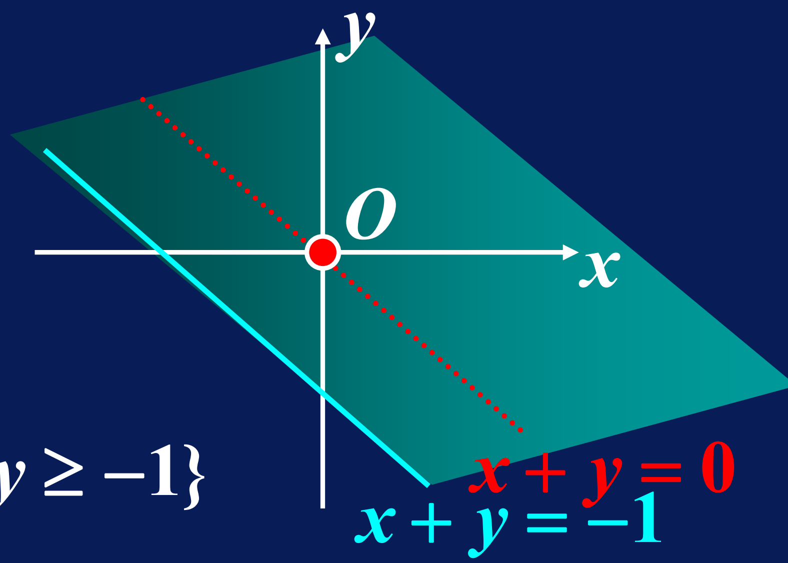
$\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right| < \varepsilon$ 原结论成立.

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right| \le x^2+y^2$$

(2) 用变量代换

化二重极限为一元函数的极限.

例2 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}$.



解 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}$,

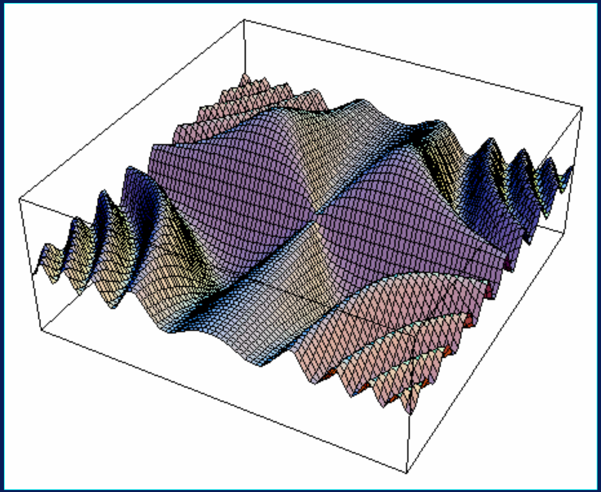
$$D=\{(x,y)\,|\,x+y\neq 0,\ x+y\geq -1\}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1} \overset{\text{令}t=x+y}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sqrt{t+1}-1}$$

$$=\lim_{t\to 0}(\sqrt{t+1}+1)=2.$$

(3) 利用夹逼准则，重要极限

例3 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$.



解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot\frac{x^2y}{x^2+y^2},$$

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y} \overset{u=x^2y}{=\!=} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 1,$

$$\because 2|x||y| \le x^2 + y^2$$

$$0 < \left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| \le \frac{1}{2}|x| \xrightarrow[y \to 0]{x \to 0} 0, \quad (x^2 + y^2 \ne 0)$$

$\therefore$ 由夹逼准则，可知 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

从而 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \cdot \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

$$= 1 \times 0 = 0.$$

(4) 利用极坐标变换，将二重极限化成 $\rho \to 0(\theta$ 任意变化$)$ 时的极限

例4 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\because \lim\limits_{\rho\to 0} \rho = 0$

$|(\sin\theta - \cos\theta)\cos\theta| < 2$

解 令 $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\quad (\rho = \sqrt{x^2+y^2} > 0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ (\theta\text{任意})}} \frac{\rho(\sin\theta - \cos\theta)\cdot\rho\cos\theta}{\rho}$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0\\ (\theta\text{任意})}} \rho\cdot(\sin\theta - \cos\theta)\cos\theta = 0.$$

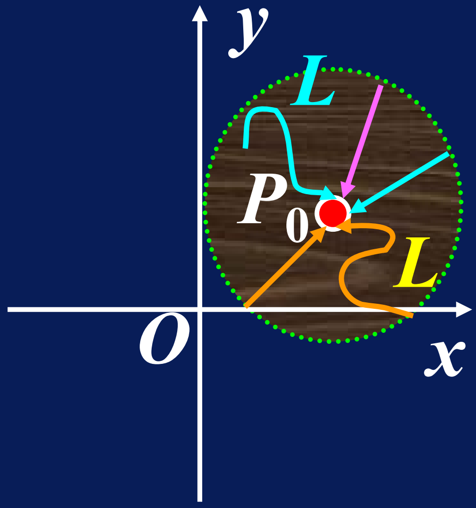
3. 确定极限不存在的方法：

(1) 令 $P(x,y)$ 沿与 k 有关的曲线 L

趋向于 $P_0(x_0,y_0)$，若 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\(P\in L\cap D)}} f(P)$ 的值

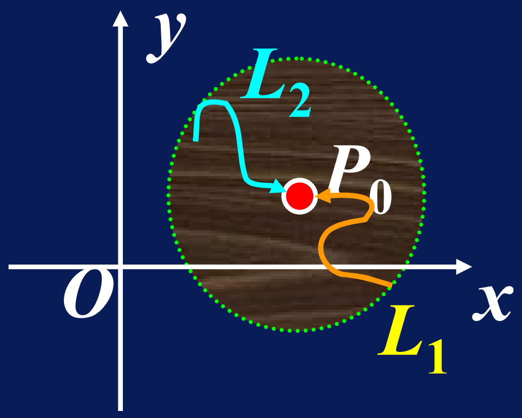
与 k 有关，则可断言：二重极限

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在 .



(2) 找两条特殊路径L_1，L_2，若

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\(P\in L_1\cap D)}} f(P) \neq \lim_{\substack{P\to P_0\\(P\in L_2\cap D)}} f(P)$$



则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在 .

小结

1. 求二重极限的常用方法

1) 利用定义

2) 用变量代换化二重极限为一元函数的极限.

3) 利用夹逼准则，重要极限

4) 利用极坐标变换，将二重极限化成

$\rho \to 0$(θ 任意变化)时的极限

2. 确定极限不存在的两种常用方法.

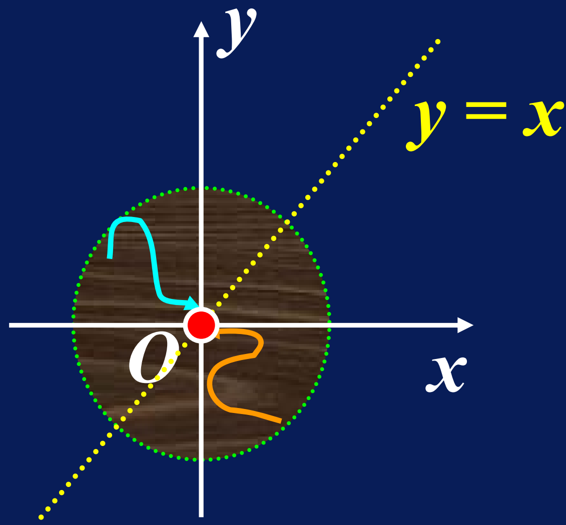
1）找与k有关的路径，说明极限趋于与k有关的值

2）找两条不同的路径，说明极限趋于不同的值

例5 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$.



证 (1) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$

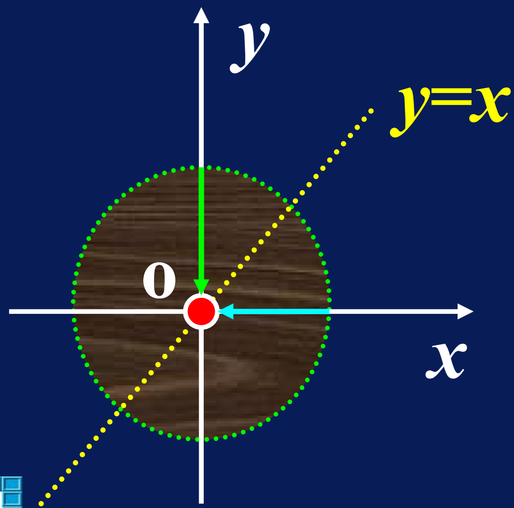
定义域 $D=\{(x,y)\,|\,x\neq y\}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x+0}{x-0} = 1$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0}\frac{0+y}{0-y} = -1$$

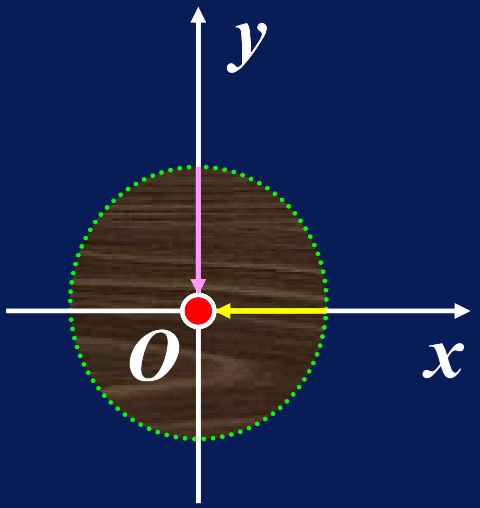
$$\because \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} f(x,y)$$

$$\therefore \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y}\text{不存在}.$$



$$\boxed{f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}}$$

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$



分析 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = 0}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0$$

$$= \lim_{\substack{y \to 0 \\ x = 0}} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0$$

能否说 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ 存在？ 不能！

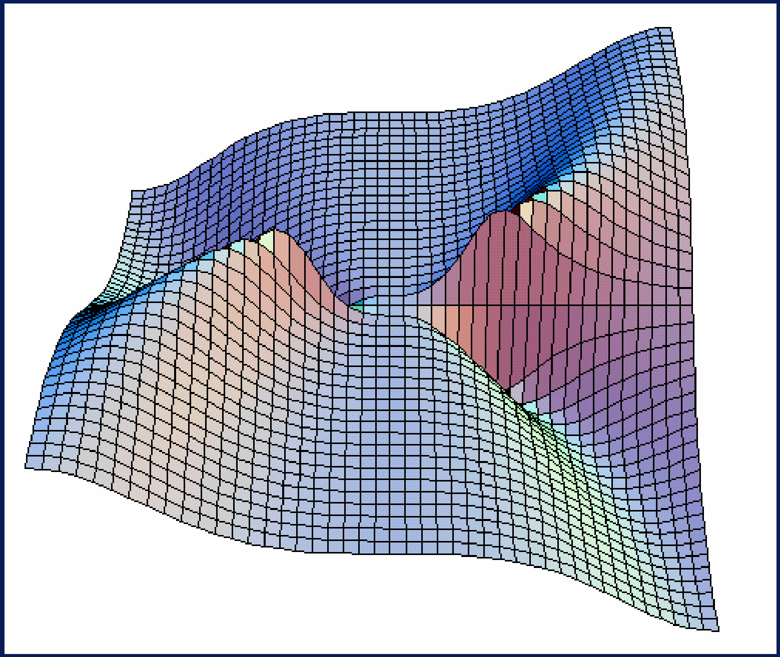
证 $\because \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

其值随 k 的不同而变化，

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$

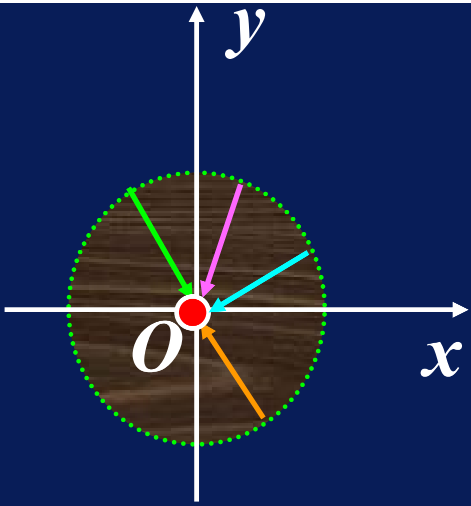


分析 $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot kx}{x^6+(kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^4+k^2}=0.$$

能否说 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$ 存在？不能！



证　取 $y = kx^3$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3\to 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot kx^3}{x^6 + k^2 x^6} = \frac{k}{1+k^2},$$

其值随k的不同而变化,

故该极限不存在.

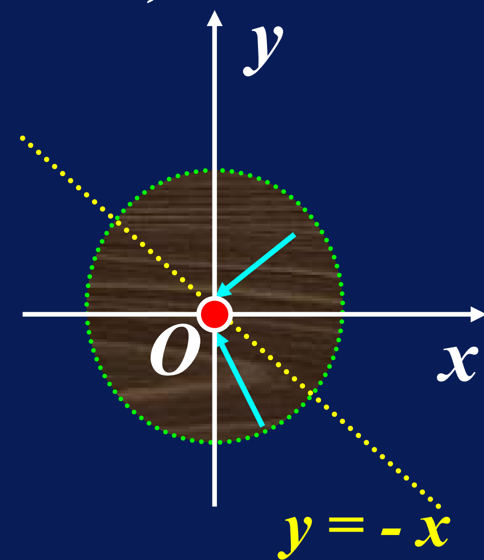
$$\boxed{f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}}$$

例6 问: 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$ 是否存在?

分析 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x+kx} \quad (k\neq -1)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{kx}{1+k} = 0.$$



能否说 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$ 存在? **不能!**

证 取 $x+y=x^2$，即 $y=x^2-x$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x\to 0}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(x^2-x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}(x-1) = -1$$

$$\neq \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{xy}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x+0} = 0$$

$\therefore$ 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$ 不存在.

$$f(x,y)=\frac{xy}{x+y}$$

问：下列推导是否正确？

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta+\rho\sin\theta} \quad \left(\theta \neq \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho\cdot\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} \cancel{=} 0$$

答：不正确.

错误原因：　　对于确定的 θ,

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=0 \not\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$$

只有当 $\lim\limits_{\substack{\rho\to 0 \\ (\theta\text{任意变化})}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = 0$时

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x, y) = 0$$

事实上，当 $y = x^2 - x$时，

$$\rho\sin\theta = \rho^2\cos^2\theta - \rho\cos\theta$$

即 $$\rho = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ (\rho=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos^2\theta})}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to 0\\ (\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos^2\theta}=\rho)}} \rho\cdot\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos^2\theta}=\rho}} \rho\cdot\frac{\sin\theta}{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos\theta}=\lim_{\rho\to 0}\tan\theta=\tan\theta.$$

此值与 θ有关，$\therefore$ 原极限不存在.

例7 证明 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在全平面连续.

证 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处，$f(x,y)$ 为初等函数，故连续.

又 $0\le\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

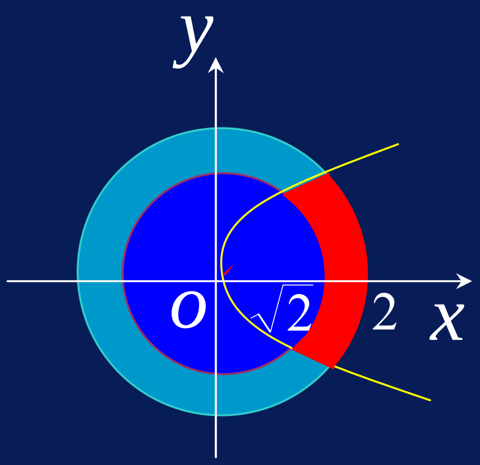
由夹逼准则得 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$

故函数在全平面连续.

例8 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的连续域.

解 初等函数的连续域就是其定义域.

$$\begin{cases} |3-x^2-y^2|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$$

例9 利用函数的连续性求极限

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

解 函数 $z=\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是初等函数，

(1,0)点是它的定义区域内的点，

故函数在(1,0)点连续.

于是 $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(1+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2.$$

三、同步练习

1.已知$f(x, y)=x^2+y^2+xy\tan\frac{x}{y}$,试求$f(tx, ty)$.

2.求下列函数的定义域：(1) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;

(2) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$.

$(R>r>0)$.

3.求函数 $f(x,y)=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$的定义域.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4. 设 $f(xy, \frac{y^2}{x}) = x^2 + y^2$，求 $f(\frac{y^2}{x}, xy)$.

5. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$.

6. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2y^2}$

7. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{x}$.

8. 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 处的极限.

9. 说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$ 不存在 .

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\dfrac{\ln(1+xy)}{x+y}$ 是否存在?

四、同步练习解答

1.已知$f(x,\ y)=x^2+y^2+xy\tan\dfrac{x}{y}$,试求$f(tx,\ ty)$.

解 $$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2+txty\tan\frac{tx}{ty}$$

$$=t^2(x^2+y^2+xy\tan\frac{x}{y})=t^2f(x,y).$$

(满足关系式：$f(tx,ty)=t^n f(x,\ y)$ 的函数 $f(x,y)$，

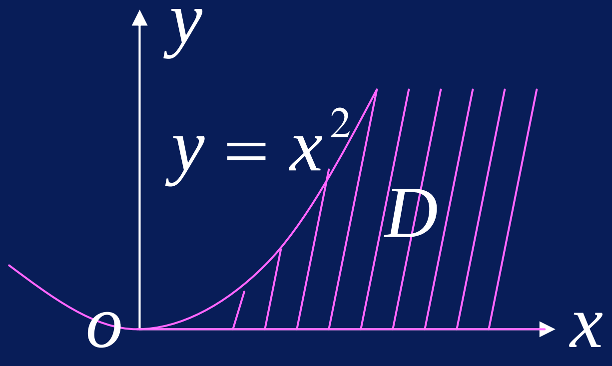
称为n次齐次函数)

2.求下列函数的定义域：(1) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;

(2) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$

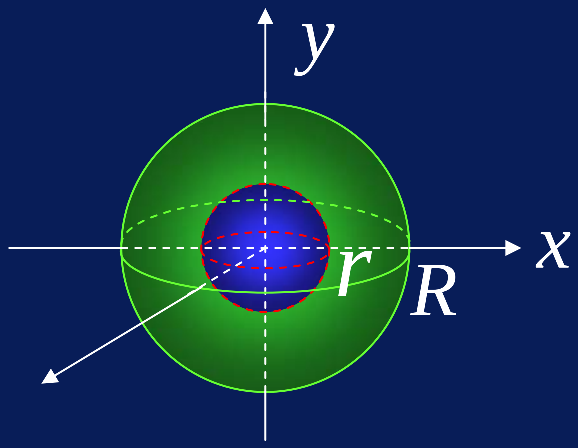
$(R>r>0)$.

解 (1)定义域



$$D:\begin{cases} x\ge\sqrt{y} \\ y\ge 0 \end{cases}$$

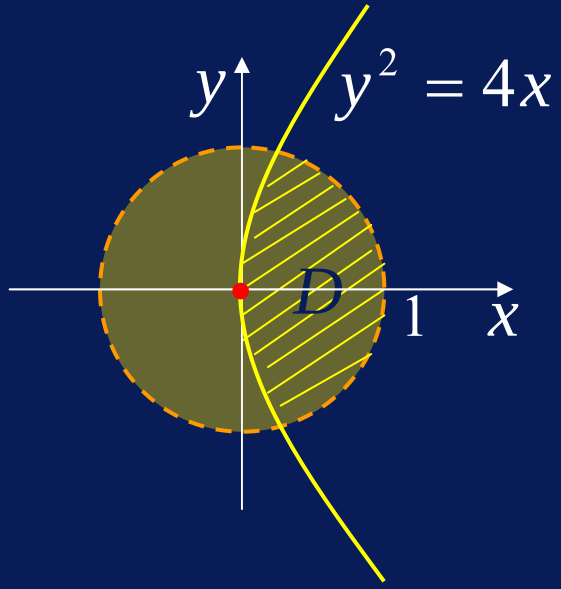
(2)定义域



$$D: r^2<x^2+y^2+z^2\le R^2$$

3.求函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域，

并求 $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{1}{2},0)} f(x,y)$.



解 定义域 $D:\begin{cases} y^2\le 4x \\ 0<x^2+y^2<1 \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{1}{2},0)} f(x,y)=f(\frac{1}{2},0)=\frac{\sqrt{2}}{\ln 3/4}$$

4\. 设 $f(xy,\frac{y^2}{x})=x^2+y^2$，求 $f(\frac{y^2}{x},xy)$.

解(方法1) 令 $\begin{cases} xy=u \\ \dfrac{y^2}{x}=v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u}{\sqrt[3]{uv}} \\ y=\sqrt[3]{uv} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad f(u,v)=\frac{u^2}{(uv)^{2/3}}+(uv)^{2/3}$$

$$\Big\downarrow\ u=\frac{y^2}{x},\ v=xy$$

$$f(\frac{y^2}{x},xy)=\frac{(\frac{y^2}{x})^2}{y^2}+y^2=\frac{y^2}{x^2}+y^2$$

设 $f(xy, \frac{y^2}{x}) = x^2 + y^2$，求 $f(\frac{y^2}{x}, xy)$.

$\boxed{f(\frac{v^2}{u}, uv)}$

(方法2) 令 $\begin{cases} xy = \dfrac{v^2}{u} \\ \dfrac{y^2}{x} = uv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = v \\ x = \dfrac{v}{u} \end{cases}$

$$\Rightarrow f(\frac{v^2}{u}, uv) = f(xy, \frac{y^2}{x}) = (\frac{v}{u})^2 + v^2$$

即 $f(\frac{y^2}{x}, xy) = \frac{y^2}{x^2} + y^2$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

5. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

解　原式 $\overset{t=xy}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2-\sqrt{t+4}}{t}$

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{1}{2+\sqrt{t+4}}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

6. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

此函数定义域不包括 x，y 轴

解 $\because \quad x^2y^2 \le \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$， 令 $r^2 = x^2+y^2$，则

$$\left| \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} \right| \ge \frac{4(1-\cos r^2)}{r^6}$$

化为一元函数极限

而 $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{4(1-\cos r^2)}{r^6} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{2r^4}{r^6}$

$1-\cos r^2 \sim \dfrac{r^4}{2}$
$(r \to 0)$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \infty$.

7. 求 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

解 $D = \{(x, y) \mid x \neq 0\}$

即函数在y轴之外的一切点处有定义.

当 $y \neq 0$时，$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy} y$

$= 1 \cdot 0 = 0,$

当 $y = 0$ 时，即点 P 沿 x 轴趋于 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = 0}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{x \to 0} 0 = 0.$$

综上所述，$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{x} = 0.$

8. 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 处的极限.

解 当 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于 (0, 0)点, 则有

$$\lim_{(x,kx)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}+k^2\cancel{x^2}}$$

$$=\frac{k}{1+k^2}$$

此结果随k值不同而不同！

故 $f(x,y)$在 (0,0) 点极限不存在 .

9. 说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$ 不存在．

解 $\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} = \dfrac{xy+1-1}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)}$

$= \dfrac{xy}{x+y} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$

沿 $y = kx^2 - x,\ k \neq 0,\ x \to 0,$

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{x\cdot(kx^2-x)}{x+kx^2-x} = \frac{kx^3-x^2}{kx^2} = \frac{kx-1}{k} \to -\frac{1}{k}.$$

所以原极限不存在．

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\dfrac{\ln(1+xy)}{x+y}$ 是否存在?

解 利用 $\ln(1+xy)\sim xy$, 沿 $y=x^{\alpha}-x$, $x\to 0$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^{a}-x}} x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^{a}-x}}\frac{x^{2}y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha+2}-x^{3}}{x^{\alpha}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^{2}-x^{3-\alpha})=\begin{cases}-1, & \alpha=3\\ 0, & \alpha<3\\ \infty, & \alpha>3\end{cases}$$

所以极限不存在.