第三节

极限的概念

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

（一）数列的极限

1. 实例分析

引例 设有半径为 R 的圆，用其内接正 n 边形的面积 A_n 逼近圆面积 S .

—— 刘徽割圆术

(公元三世纪)

设圆内接正n边形的面积为 A_n ($n \geq 3$)

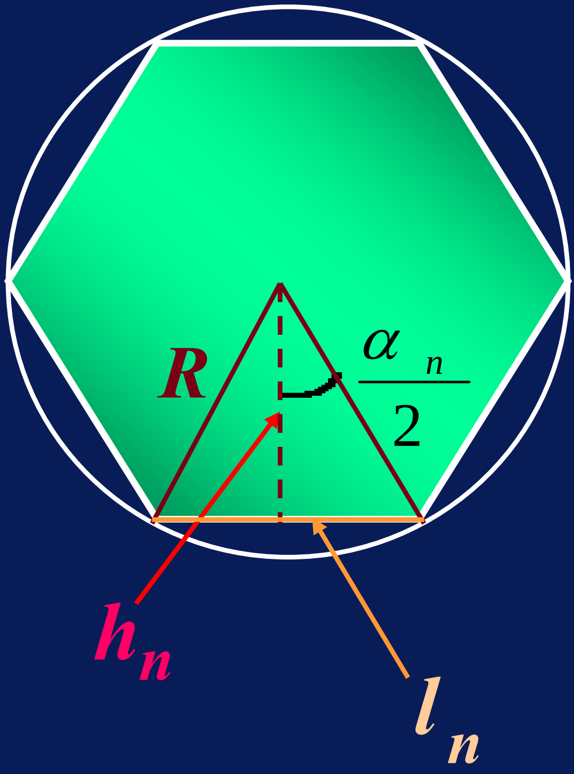
$$\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$$

$$h_n = R\cos\frac{\alpha_n}{2},\quad l_n = 2R\sin\frac{\alpha_n}{2}$$

$$A_n = n\cdot\frac{1}{2}l_n h_n$$

$$= n\cdot\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{\alpha_n}{2}\cdot R\cos\frac{\alpha_n}{2}$$

$$= \frac{nR^2}{2}\sin\alpha_n = \frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$



$A_n \longrightarrow S \quad (n\to\infty)$ （学了第六节可证）

观察下述数列 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势:

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots \qquad x_n=\frac{n}{n+1}\to 1\quad (n\to\infty)$$

$$2,4,8,\cdots,2^n,\cdots \qquad x_n=2^n\to\infty\quad (n\to\infty)$$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots \qquad x_n=(-1)^{n+1}$$ 趋势不定

可以看到, 随着 n 趋于无穷, 数列的通项有以下两种变化趋势:

(1) 通项无限趋近于一个确定的常数;

(2) 通项不趋近于任何确定的常数.

(2) 数列极限的定义

定义1.1 设有数列$\{x_n\}$，如果当n无限增大时，x_n无限趋近于某个确定的常数a，则称a为数列$\{x_n\}$的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ 或 } x_n \to a \ (n \to \infty).$$

这时,也称数列$\{x_n\}$收敛于a. 否则，称数列$\{x_n\}$发散.

例如,

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots & x_n=\dfrac{n}{n+1}\to 1\quad (n\to\infty) \\[2ex]
2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots & \\[2ex]
 & x_n=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\to 1\quad (n\to\infty)
\end{array}\right\}\text{收敛}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
2,4,8,\cdots,2^n,\cdots & x_n=2^n\to\infty\quad (n\to\infty) \\[2ex]
1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots & x_n=(-1)^{n+1}\text{趋势不定}
\end{array}\right\}\text{发散}$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

当 n 无限增大时，$x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1.

问题：

"无限增大"，"无限接近"意味着什么？

如何用数学语言定量地刻划它？

a接近b的程度用绝对值：$|a - b|$ 表示.

“当 n 无限增大时, $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1”.

$\Longleftrightarrow$ “当n变得任意大时,

$|x_n - 1|$ 变得任意小”

$\Longleftrightarrow$ “要使 $|x_n - 1|$ 任意小，只要n充分大”

“充分大”与“任意小”并非彼此无关.

$$\because \quad |x_n - 1| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

任给常数$\dfrac{1}{100}$，要使$|x_n - 1| = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100}$，只要$n > 100$

任给常数$\dfrac{1}{1000}$，要使$|x_n - 1| = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1000}$，只要$n > 1000$

$\vdots$

任给常数$\dfrac{1}{10^{99}}$，要使$|x_n - 1| = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{10^{99}}$，只要$n > 10^{99}$

由此可见："充分大"由"任意小"所确定.

如何描述"任意小"？

可以用抽象记号 ε 表示"任意小"的正数.

注意：任何固定的很小的正数都不能表示"任意小".

如何刻划 n "充分大"？

$\forall\, \varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 1| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ 成立

只要 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$

$\frac{1}{\varepsilon}$ 不一定是正整数，注意到: $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \le \frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

而当 $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$时，$n \ge \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

从而有 $|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

"充分大"

于是

$\forall \varepsilon > 0$, $\boxed{\exists\ N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]}$

使得当 $n > N$时，有

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

定义1.2 (数列极限的$\varepsilon - N$定义):

若数列$\{x_n\}$及常数a有下列关系：

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$正整数N, 当$n > N$时, 总有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

则称该数列$\{x_n\}$的极限为a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \to a\ (n\to\infty)$$

此时也称数列**收敛**, 否则称数列**发散**.

注 1° 不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 刻划了 x_n 与 a 可无限接近;

2° $\varepsilon > 0$ 是任意的，但是在确定 N 时又看成给定的;

3° N 由 ε 所确定，故记 $N = N(\varepsilon)$，但不唯一.

一般来说， ε 越小， N 越大;

4° $N = N(\varepsilon)$，不能与 n 有关.

5° 数列极限的定义未给出求极限的方法.

3. 几何解释

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$\forall \varepsilon > 0$,$\exists$正整数 N,使 $n > N$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow$ $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ 即 $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

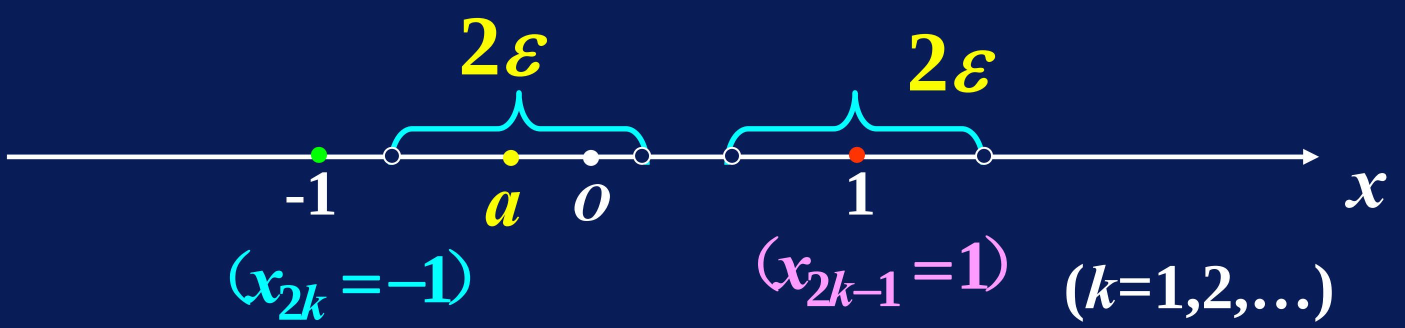
$\Longleftrightarrow$ $x_n \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 即 $x_n \in U(a,\varepsilon)$

在$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$外至多只有有限项: $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

由此易知:

$\{x_n\}$是否收敛与$\{x_n\}$的前有限项无关 .

例如: $x_n = (-1)^{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在.



当$\varepsilon > 0$很小时, 在$U(a,\varepsilon)$外, 总有$\{x_n\}$中的无穷多项.

（二）函数的极限

对 $y=f(x)$，自变量的变化过程有六种形式:

(1) $x \to x_0$ (2) $x \to x_0^+$

(3) $x \to x_0^-$ (4) $x \to \infty$

(5) $x \to +\infty$ (6) $x \to -\infty$

1. $x \to \infty$时函数$f(x)$的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.

(1) 定义1.3 设函数 $f(x)$当$|x|>M$ (M为某一正数）时有定义， 如果存在常数 A,

$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$时的极限, 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

或 $f(x)\to A$ (当$x\to\infty$)

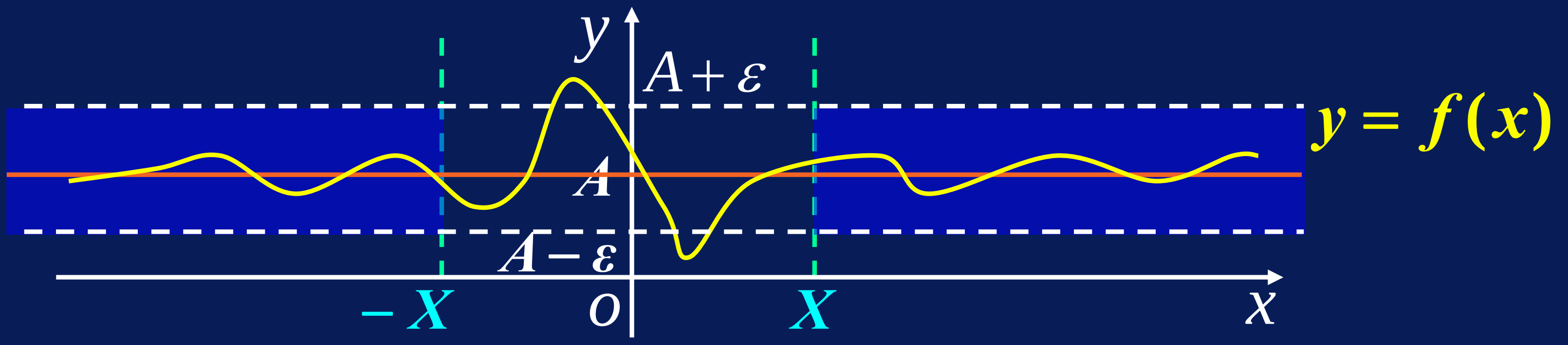
(2) 几何解释

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有

$|f(x) - A| < \varepsilon$

$\boxed{x < -X \text{ 或 } x > X}$

$\boxed{A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon}$



注 1° $x \to +\infty$ 及 $x \to -\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \rightleftarrows \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } x > X \text{ 时, 有}$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \rightleftarrows \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } x < -X \text{ 时, 有}$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

定理 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A.$

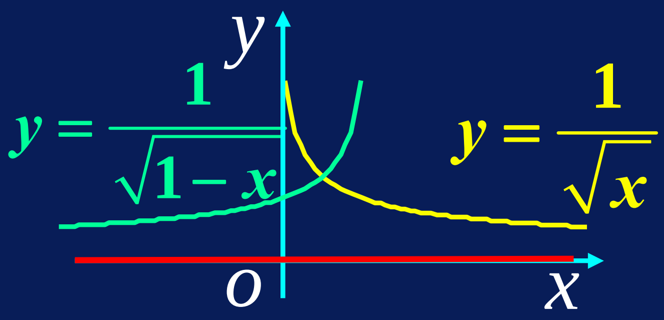
2° 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty} f(x) = A\right)$$

则称直线 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

例如，$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$，

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

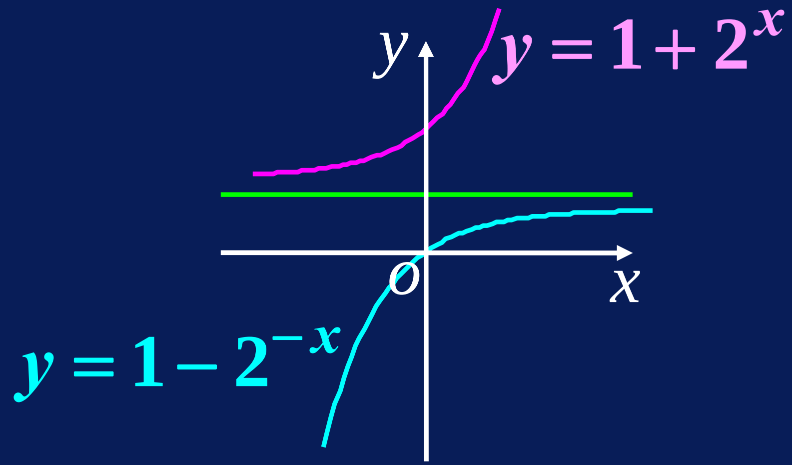


都有水平渐近线 $y = 0$;

又如， $f(x)=1-2^{-x}$

$g(x)=1+2^{x}$

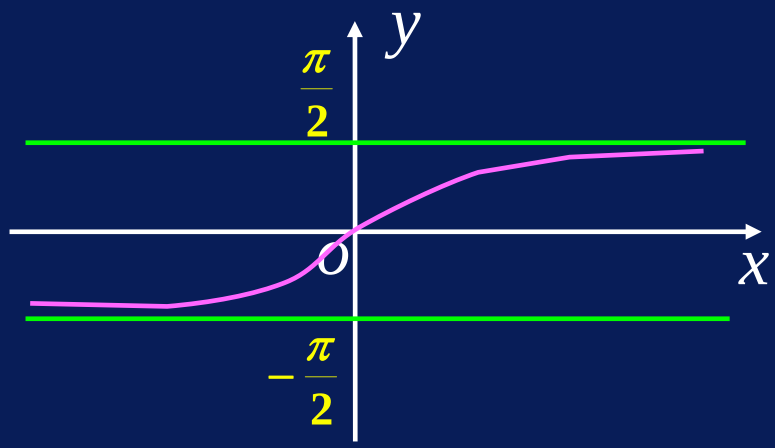
都有水平渐近线 $y=1.$



再如， $f(x)=\arctan x$

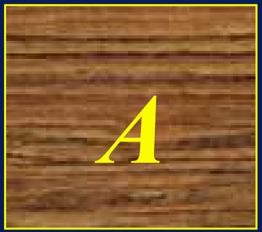
有水平渐近线

$$y=\pm\frac{\pi}{2}.$$



2. $x \to x_0$时函数 $f(x)$的极限

(1) $x \to x_0$ 时函数极限的定义



x_0

引例 测量正方形面积. (真值: 边长为 x_0;面积为 A)

直接观测值	确定直接观测值精度 δ:
边长 x ⬇	$\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ ⬆
间接观测值 面积 x^2	任给精度 ε, 要求 $\lvert x^2 - A \rvert < \varepsilon$

定义1.4 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, r)$ 内有定义. 如果存在常数 A,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0,$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 或 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限,

记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

或 $f(x) \to A$ (当 $x \to x_0$).

注 1° $\varepsilon>0$是可以任意给的，在确定δ的过程中又看成是个定数;

2° δ与ε有关，但与x无关，并且不唯一;

3° 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$是否存在，与 $f(x)$在点 x_0是否有定义以及 $f(x_0)$的值为多少无关;

4° $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$的前提：$f(x)$在某$\mathring{U}(x_0,r)$内有定义．

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

如: $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}$

它的定义域是$\{x \mid x=0,$或$x>1\}$, $f(x)$在点$x=0$的去心邻域 $\mathring{U}(0,\delta)$ $(\delta<1)$内无定义，所以

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

(2) 单侧极限

左极限：$f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \rightleftarrows \forall\varepsilon>0,$

$\exists\delta>0$, 当 $x\in(x_0-\delta,\, x_0)$时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon.$

右极限：$f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \rightleftarrows \forall\varepsilon>0,$

$\exists\delta>0$, 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon.$

极限存在的充要条件:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

二、典型例题

例1　设$x_n \equiv C$(C为常数), 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证　$\forall \varepsilon > 0$,　对于一切自然数n,

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon \quad \text{成立},$$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

结论: 常数数列的极限等于同一常数.

例2 已知 $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限为1.

证 $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 1| < \varepsilon$, 即 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 只要 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$

因此, 取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

N是正整数,
所以要取整

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n} = 1.$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例3 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0$

证 $x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$

$$\left|x_n-0\right|=\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}-0\right|=\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right|\le\frac{1}{n}$$

$\forall\varepsilon>0,$ 要使 $\left|x_n-0\right|<\varepsilon$

只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$, 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$

取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n>N$ 时, 有 $\frac{1}{n}<\varepsilon$,

从而 $\left|x_n-0\right|\le\frac{1}{n}<\varepsilon$ $\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=0.$

思考: 对于例3, 下列推导是否正确:

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right|$$

$\forall \varepsilon > 0$, 要使

$$|x_n - 0| < \varepsilon$$

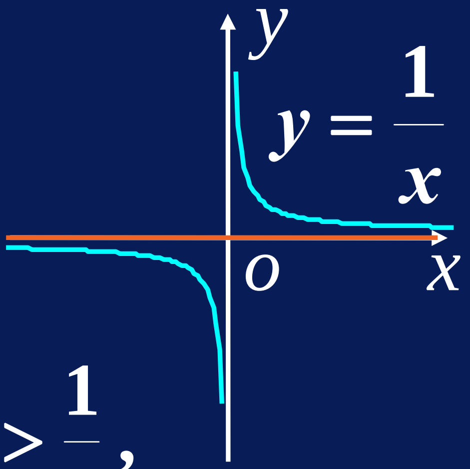
只要 $\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right| < \varepsilon$ 即 $n > \dfrac{\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|}{\varepsilon}$

故取 $\cancel{N = \left[\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\varepsilon}\right]}$,

……

N 不能与 n 有关!

例4 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$



证 $\left|f(x)-0\right|=\left|\dfrac{1}{x}-0\right|=\dfrac{1}{|x|}$

故 $\forall\varepsilon>0,$ 欲使 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon,$ 即 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon},$

取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon},$ 当 $|x|>X$ 时，就有 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

注 $y=0$ 为 $y=\dfrac{1}{x}$ 的水平渐近线.

例5 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$ (C为常数)

证 $|f(x) - A| = |C - C| = 0$

故 $\forall \varepsilon > 0$, 对任意的 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

总有 $|C - C| = 0 < \varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$

例6 证明: $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

分析 要使 $|f(x)-A| = |x-x_0| < \varepsilon$, 只要取 $\delta \le \varepsilon$.

证 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $0 < \delta \le \varepsilon$,, 则当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时,

便有 $|f(x)-A| = |x-x_0| < \delta \le \varepsilon$,

即 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

例7 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

证 $\left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|x+1-2\right|=\left|x-1\right|$ $(x\neq 1)$

$\forall\varepsilon>0,$ 要使 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$

只要 $\left|x-1\right|<\varepsilon$ 且 $x\neq 1$

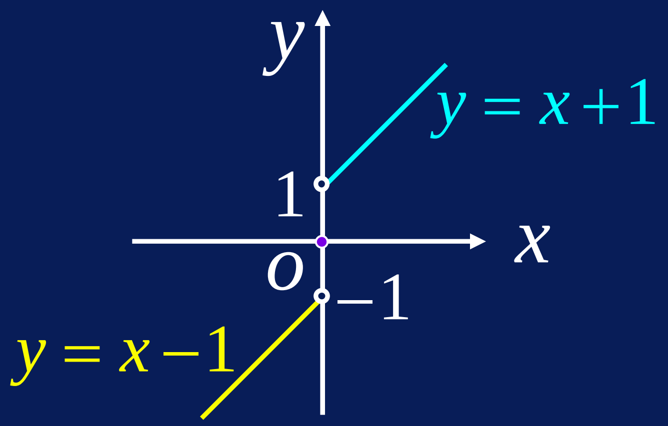
故取 $\delta=\varepsilon,$ 当 $0<\left|x-1\right|<\delta$ 时，必有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

例8 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0\quad, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$



讨论 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在．

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x-1) = -1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$$

$f(0^-) \neq f(0^+)$， 所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

三、同步练习

1. 设 $x_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,

求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

2. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

3. 用定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x^3}{2x^3} = \dfrac{1}{2}$.

4. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$

5. 验证极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

6. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, \\ 1, & 1<x\le 2, \end{cases}$

求出函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的左极限及右极限,

并说明函数在点 $x=1$ 处的极限存在与否.

四、同步练习解答

1. 设 $x_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,

   求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

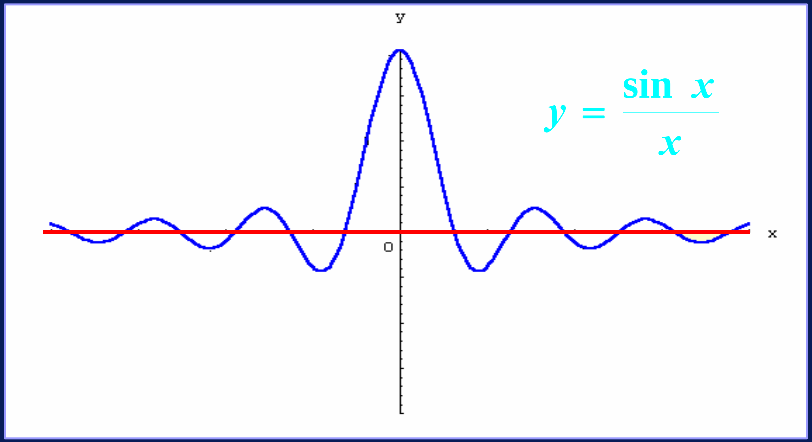
证 任给 $\varepsilon > 0$, $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

$\therefore \exists N$ 使得当 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1 = \sqrt{a}\varepsilon$

从而有 $\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}} = \varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

2. 证明 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$



证 $\because \left| \dfrac{\sin x}{x} - 0 \right| = \left| \dfrac{\sin x}{x} \right|$

$< \dfrac{1}{|x|} < \varepsilon,$ 解得 $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon},$

$\forall \varepsilon > 0,$ 取 $X = \dfrac{1}{\varepsilon},$ 则当 $|x| > X$ 时恒有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| < \varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$

3. 用定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}.$

证 $\forall\varepsilon>0,$ 要使 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon,$

只要 $|x|>\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\varepsilon}}$

故取 $X=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\varepsilon}},$ 则当 $|x|>X$ 时,

便有 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon,$ 即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}.$

4. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$

证 $\quad |f(x)-A| = |(2x-1)-1| = 2|x-1|$

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|f(x)-A| < \varepsilon$, 只要 $|x-1| < \varepsilon/2$,

取 $\delta = \varepsilon/2$, 则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 必有

$$|f(x)-A| = |(2x-1)-1| < \varepsilon$$

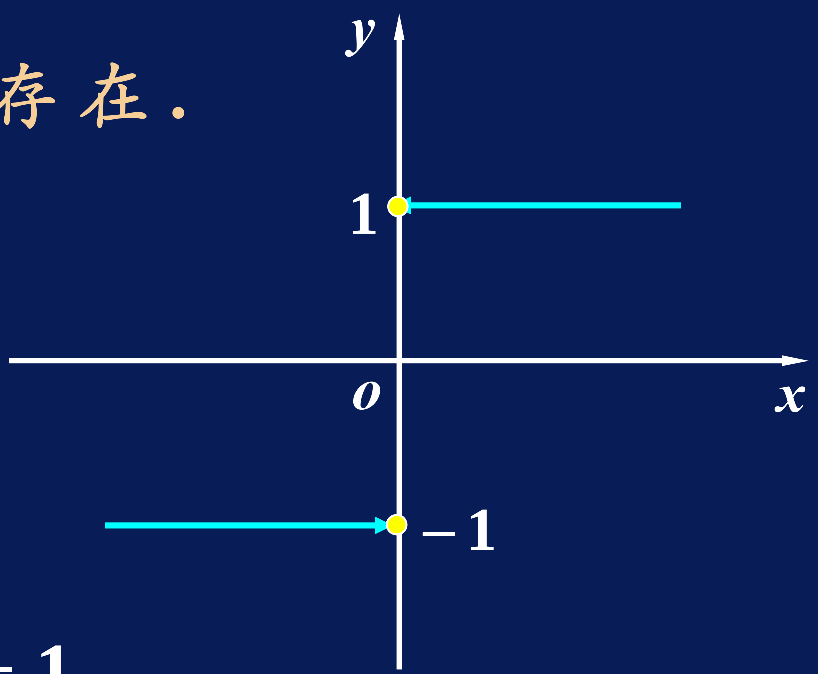
因此 $\quad \lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$

5. 验证极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

证 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$



左右极限存在，但不相等，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

6. 设$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, \\ 1, & 1<x\le 2, \end{cases}$

求出函数$f(x)$在点$x=1$处的左极限及右极限，

并说明函数在点$x=1$处的极限存在与否.

解 $$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} f(x)=1,$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0} f(x)=1,$$

故函数在点$x=1$处的极限存在，且

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1.$$