第八节　级数的应用

习题　11-8

1. 利用函数的幂级数展开式, 求以下各数的近似值:

(1)　$\ln 3$ (误差不超过 10^{-4});

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt[5]{36}}$ (误差不超过 10^{-5});

(3)　$\sin 3^{\circ}$ (误差不超过 10^{-5});

(4)　$\sqrt{\mathrm{e}}$ (误差不超过 10^{-3}).

解　(1)
$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1],$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in[-1,1),$$

两式相减得 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad x\in(-1,1)$. 令 $\dfrac{1+x}{1-x}=3$, 得 $x=\dfrac{1}{2}\in(-1,1)$, 故

$$\ln 3=\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}+\cdots\right),$$

$$|r_n|=2\left[\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)2^{2n+3}}+\cdots\right]=2\cdot\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}\left[1+\frac{2n-1}{(2n+3)}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots\right]$$
$$<\frac{1}{(2n+1)2^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)=\frac{1}{(2n+1)2^{2n}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3(2n+1)2^{2n-2}}.$$

试算 $|r_6|<\dfrac{1}{3\times 13\times 2^{10}}\approx 0.000\,025$, 故取 $n=6$, 有 $|r_n|<10^{-4}$, 从而

$$\ln 3\approx 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{9\cdot 2^9}+\frac{1}{11\cdot 2^{11}}\right)=1.09858\approx 1.0986.$$

(2)　利用 $(1+x)^m$ 的幂级数展开式得

$$\frac{1}{\sqrt[5]{36}}=(2^5+4)^{-\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}(1+\frac{4}{2^5})^{-\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{8})^{-\frac{1}{5}}$$

$$=\frac{1}{2}[1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2!}\frac{1\cdot 6}{5^2}\frac{1}{8^2}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdots(5n-4)}{5^n}\frac{1}{8^n}+\cdots],$$

而$|r_n|\le\frac{1}{2}\frac{1}{n!}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdots(5n-4)}{5^n}\frac{1}{8^n}[1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\cdots]\le\frac{1}{14}\frac{1}{n!}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdots(5n-4)}{5^n}\frac{1}{8^{n-1}}$，取$n=5$，

则
$$|r_5|=\frac{1}{14}\frac{1}{5!}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot 16\cdot 21}{5^5}\frac{1}{8^4}\le 0.1\times 10^{-5},$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{36}}\approx\frac{1}{2}[1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1\cdot 6}{2!\cdot 5^2}\cdot\frac{1}{8^2}-\frac{1\cdot 6\cdot 11}{3!\cdot 5^3}\cdot\frac{1}{8^3}+\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot 16}{4!\cdot 5^4}\cdot\frac{1}{8^4}]\approx 0.48836.$$

(3) $3^0=\frac{\pi}{60}$(弧度)，利用$\sin x$的幂级数展式得

$$\sin\frac{\pi}{60}=\frac{\pi}{60}-\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{60})^3+\frac{1}{5!}(\frac{\pi}{60})^5-\cdots.$$

取$n=2$，则$|r_2|\le\frac{1}{5!}(\frac{\pi}{60})^5<10^{-6}$， $\sin\frac{\pi}{60}\approx\frac{\pi}{60}-\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{60})^3\approx 0.05234$.

(4) 由$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$得

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!2^2}+\cdots+\frac{1}{n!2^n}+\cdots,$$

$$|r_n|=\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)!2^{n+2}}+\cdots$$
$$=\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}[1+\frac{1}{(n+2)}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots]$$
$$<\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots)=\frac{1}{3(n+1)!2^{n-1}}.$$

取$n=4$，有$|r_4|<\frac{1}{3\times 5!\times 2^3}\approx 0.0003<10^{-3}$，从而

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!2^2}+\frac{1}{3!2^3}+\frac{1}{4!2^4}\approx 1.648.$$

2. 利用函数的幂级数展开式，求以下定积分的近似值:

(1) $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ (误差不超过10^{-4});

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+x^4}dx$ (误差不超过10^{-4}).

解　(1)　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，因此所给积分不是广义积分. 如果定义被积函数在 $x=0$ 处的值为 1，则它在积分区间 $[0,1]$ 上连续.

由于 $\dfrac{\sin x}{x}=1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}-\dfrac{x^6}{7!}+\cdots$，　$(-\infty<x<+\infty)$，故

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\cdots.$$

因为第四项 $\dfrac{1}{7\cdot 7!}<\dfrac{1}{30000}$，所以前三项的和作为积分的近似值:

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}\approx 0.9461.$$

(2)

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^4+x^8-\cdots+(-1)^n x^{4n}+\cdots)\mathrm{d}x$$

$$=[x-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{9}x^9-\cdots+(-1)^n\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}+\cdots]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}(\frac{1}{2})^5+\frac{1}{9}(\frac{1}{2})^9-\cdots+(-1)^n\frac{1}{4n+1}(\frac{1}{2})^{4n+1}+\cdots.$$

因 $|r_n|<u_{n+1}$，而 $\dfrac{1}{13}\times(\dfrac{1}{2})^{13}\approx 0.000\,009$，所以

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2}-0.00625+0.00028\approx 0.49403.$$

＊ 3.　设 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数，它在 $(-1,1]$ 上的表达式为 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$. 试将 $f(x)$ 展开成复数形式的傅里叶级数.

解　$a_0=\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-[\mathrm{e}^{-x}]_{-1}^1=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}$，对 $a_n=\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-x}\cos n\pi x\mathrm{d}x$ 两次利用分部积分法得

$$a_n=\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-x}\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})-\frac{1}{n^2\pi^2}\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-x}\cos n\pi x\mathrm{d}x,$$

从而 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})$. 对 $b_n=\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-x}\sin n\pi x\mathrm{d}x$ 两次利用分部积分法得

$$b_n=\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-x}\cos n\pi x\mathrm{d}x=n\pi(-1)^n(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})-n^2\pi^2\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-x}\sin n\pi x\mathrm{d}x,$$

从而 $b_n=\dfrac{n\pi(-1)^n}{1+n^2\pi^2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})$，故 $c_0=\dfrac{a_0}{2}=\mathrm{sh}(1)$，

$$c_n=\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}=\frac{1}{2}[\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})-\mathrm{i}\frac{n\pi(-1)^n}{1+n^2\pi^2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})]=\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})(1-\mathrm{i}n\pi),$$

所以 $$\mathrm{e}^{-x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\mathrm{sh}(1)(1-\mathrm{i}n\pi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x}\quad (x\neq 2k+1,k=0,1,2\cdots).$$