第六节　多元函数微分学的应用

习题　8-6

1.　求下列曲线在给定点的切线和法平面方程:

(1)　$x=a\sin^2 t$，$y=b\sin t\cos t$，$z=c\cos^2 t$，$t=\dfrac{\pi}{4}$ 处;

(2)　$y=x,\ z=x^2$，点 $(1,1,1)$ 处;

(3)　$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=0, \end{cases}$ 点 $(1,-2,1)$ 处.

解　(1)　因为　$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a\cdot 2\sin t\cos t=a\sin 2t$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b(\cos^2 t-\sin^2 t)=b\cos 2t\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=c\cdot 2\cos t\cdot(-\sin t)=-c\sin 2t\ ,$$

而参数 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 对应的曲线上点为 $(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2},\dfrac{c}{2})$，于是曲线在该点的切向量为

$$\boldsymbol{T}=(a,0,-c)\ ,$$

所以，所求切线方程为

$$\frac{x-\dfrac{a}{2}}{a}=\frac{y-\dfrac{b}{2}}{0}=\frac{z-\dfrac{c}{2}}{-c}\ ,$$

法平面方程为

$$a(x-\frac{a}{2})-c(z-\frac{c}{2})=0，即\ ax-cz-\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{2}=0\ .$$

(2)　令 $x=t$，则所给曲线方程为 $x=t$，$y=t$, $z=t^2$.

因为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=2t$，而点 $(1,1,1)$ 所对应的参数 $t=1$，于是曲线上点 $(1,1,1)$ 处的切向量为

$$\boldsymbol{T}=(1,1,2)\ ,$$

所以, 所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}\ ,$$

法平面方程为

$$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0，即 x+y+2z-4=0 .$$

(3) **法 1** 将所给方程的两边对 x 求导，得

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0, \\ 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0, \end{cases}$$

移项整理，得

$$\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1. \end{cases}$$

在 $D=\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=y-z\neq 0$ 的条件下，解方程组求得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{D}=\frac{z-x}{y-z}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{y-z}=\frac{x-y}{y-z},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right|_{(1,-2,1)}=0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,-2,,1)}=-1,$$

从而曲线上点 $(1,-2,1)$ 处的切向量为

$$\boldsymbol{T}=(1,0,-1),$$

故所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1},$$

法平面方程为

$$(x-1)+0\cdot(y+2)-(z-1)=0，即 x-z=0 .$$

法 2 曲面 $x^2+y^2+z^2=6$，即 $x^2+y^2+z^2-6=0$ 上点 $(1,-2,1)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\left.(2x,2y,2z)\right|_{(1,-2,1)}=(2,-4,2).$$

同理，曲面 $x+y+z=0$ 上点 $(1,-2,1)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_2=(1,1,1),$$

于是曲线上点 $(1,-2,1)$ 处的切向量为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{k}=-6(1,0,-1),$$

故所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-1}{-1},$$

法平面方程为

$$(x-1)+0\cdot(y+2)-(z-1)=0\text{，即 } x-z=0.$$

2. 求下列曲面在给定点处的切平面和法线方程:

(1) $z=8x+xy-x^2-5$，点 $(2,-3,1)$ 处;

(2) $xy=z^2$，点（x_0,y_0,z_0) 处.

解 (1) 令 $F(x,y,z)=z-8x-xy+x^2+5$，则

$$F_x=-8-y+2x\text{，}\ F_y=-x\text{，}F_Z=1.$$

于是点 $(2,-3,1)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(-8-y+2x,\ -x,\ 1)\Big|_{(2,-3,1)}=(-1,-2,1)=-(1,2,-1),$$

所以在点 $(2,-3,1)$ 处此曲面的切平面方程为

$$(x-2)+2(y+3)-(z-1)=0\text{，即 } x+2y-z+5=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-1}.$$

(2) 令 $F(x,y,z)=xy-z^2$，则

$$F_x=y,\ F_y=x,\ F_z=-2z,$$

于是点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(y,x,-2z)_{(x_0,y_0,z_0)}=(y_0,x_0,-2z_0),$$

所以在点 (x_0,y_0,z_0) 处此曲面的切平面方程为

$$y_0(x-x_0)+x_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0)=0,$$

即

$$y_0x+x_0y-z_0z=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{y_0}=\frac{y-y_0}{x_0}=\frac{z-z_0}{-2z_0}.$$

3. 求曲线 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ 上的点 M_0，使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 因为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t,\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=3t^2$，设所求点 M_0 对应的参数为 t_0，于是曲线在该点处的切向量可取为

$$\boldsymbol{T}=(1,\ 2t_0,\ 3t_0^2),$$

已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$，由切线与平面平行，有

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}=0,\ 即\ (1,\ 2t_0,\ 3t_0^2)\cdot(1,2,1)=1+4t_0+3t_0^2=0,$$

得由上式可解得

$$t_0=-1\ 和\ t_0=-\frac{1}{3},$$

于是所求点 M_0 为 $(-1,1,-1)$ 或 $(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27})$.

4. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切平面.

解 设点 (x,y,z) 为椭球面上任一点，则该点处切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(2x,4y,6z),$$

已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,4,6)$. 因为所求切平面与已知平面 $x-y+2z=0$ 平行，

可知 $\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{n}_1$，于是有

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{4}=\frac{6z}{6}, \tag{1}$$

又因为点 (x,y,z) 在椭球面上，应满足椭球面方程

$$x^2+2y^2+3z^2=21, \tag{2}$$

由式(1)及式(2)可求得两点 $(1,2,2)$ 和 $(-1,-2,-2)$，上述两点即为所求切点，它们所对应的切平面的法向量分别为 $(2,8,12)$ 和 $(-2,-8,-12)$，所以所求的切平面方程为

$$2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0\ 和\ -2(x+1)-8(y+2)-12(z+2)=0,$$

即

$$x+4y+6z=21\ 和\ x+4y+6z=-21.$$

注意 常见的错误是由 $\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{n}_1$，得到 $2x=1,\ 4y=4,\ 6z=6$，于是切点为 $(\frac{1}{2},1,1)$. 必须注意，上述解法错在混淆了向量相等与向量平行这两个概念. 两平面平行，则

两平面的法向量平行，从而法向量的对应坐标成比例，而不是相等.

5. 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上求点 ，使该点的法线与坐标轴成等角.

解 设点 M_0 的坐标为 $(x_0, y_{,0}, z_0)$，椭球面在该点的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2})=2(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}),$$

法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{\frac{x_0}{a^2}}{\sqrt{(\frac{x_0}{a^2})^2+(\frac{y_0}{b^2})^2+(\frac{z_0}{c^2})^2}},\quad \cos\beta=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{\sqrt{(\frac{x_0}{a^2})^2+(\frac{y_0}{b^2})^2+(\frac{z_0}{c^2})^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\frac{z_0}{c^2}}{\sqrt{(\frac{x_0}{a^2})^2+(\frac{y_0}{b^2})^2+(\frac{z_0}{c^2})^2}},$$

由于 M_0 点的法线与坐标轴成等角，所以 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$，即有

$$\frac{x_0}{a^2}=\frac{y_0}{b^2}=\frac{z_0}{c^2}, \tag{3}$$

又因为点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 在椭球面上，应满足椭球面方程

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1, \tag{4}$$

由式(3)及式(4)可求得

$$x_0=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad y_0=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad z_0=\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

所以所求点 M_0 的坐标为

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a^2,b^2,c^2)\text{ 和 }-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a^2,b^2,c^2).$$

6. 证明：与锥面 $z^2=x^2+y^2$ 相切的平面通过坐标原点.

证　法 1 设 (x, y, z) 为锥面上任一点，则该点处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(2x,2y,-2z)=2(x,y,-z),$$

该点处的切平面为

$$x(X-x)+y(Y-y)-z(Z-z)=0 \text{ 即 } xX+yY-zZ=0,$$

显然这切平面通过原点.

法 2 要证曲面的任一切平面通过坐标原点, 只须证明任一点的切平面的法向量与该点的向径垂直.

锥面上任一点 (x,y,z) 处的切平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,-z)$, 该点的向径为 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 因 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=x^2+y^2-z^2=0$, 从而切平面经过坐标原点.

7. 证明: 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\quad(a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和为常数.

证 设点 (x,y,z) 为曲面上任意一点, 则该点处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}}),$$

该点处的切平面为

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(X-x)+\frac{1}{2\sqrt{y}}(Y-y)+\frac{1}{2\sqrt{z}}(Z-z)=0,$$

即

$$\frac{X}{\sqrt{x}}+\frac{Y}{\sqrt{y}}+\frac{Z}{\sqrt{z}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

由于点 (x,y,z) 是曲面上的点,故 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$, 切平面方程又可写成

$$\frac{X}{\sqrt{x}}+\frac{Y}{\sqrt{y}}+\frac{Z}{\sqrt{z}}=\sqrt{a},\quad \text{化成截距式}\quad \frac{X}{\sqrt{ax}}+\frac{Y}{\sqrt{ay}}+\frac{Z}{\sqrt{az}}=1,$$

所以截距之和为

$$\sqrt{ax}+\sqrt{ay}+\sqrt{az}=\sqrt{a}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})=(\sqrt{a})^2=a.$$

注意 容易出现的问题是, 在写出切平面方程

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(X-x)+\frac{1}{2\sqrt{y}}(Y-y)+\frac{1}{2\sqrt{z}}(Z-z)=0,$$

后, 没有利用点 (x,y,z) 在曲面上, 将切平面方程化简为 $\frac{X}{\sqrt{x}}+\frac{Y}{\sqrt{y}}+\frac{Z}{\sqrt{z}}=\sqrt{a}$,

致使后面的运算过于繁杂.

*8. 利用全微分求下述各数的近似值:

(1) $(1.04)^{2.02}$; (2) $\sin 29^\circ \tan 46^\circ$.

解 (1) 设 $f(x,y)=x^y$，显然，要计算的值就是函数在 $x=1.04,\ y=2.02$ 时的函数值 $f(1.04,2.02)$.

取 $x=1, y=2, \Delta x=0.04, \Delta y=0.02$，由于

$$f(1,2)=1,\quad f_x(x,y)=yx^{y-1},\quad f_y(x,y)=x^y\ln x,\quad f_x(1,2)=2,\quad f_y(1,2)=0,$$

应用公式 $f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$，

便有

$$(1.04)^{2.02}\approx 1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08.$$

(2) 设 $f(x,y)=\sin x\tan y$，显然，要计算的值就是函数在

$x=29^\circ=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{180}$，$y=46^\circ=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{180}$ 时的函数值 $f(29^\circ,46^\circ)$.

取 $x=\dfrac{\pi}{6}, y=\dfrac{\pi}{4}, \Delta x=-\dfrac{\pi}{180}, \Delta y=\dfrac{\pi}{180}$，由于

$$f(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot 1=0.5,$$

$$f_x(x,y)=\cos x\tan y,\qquad f_y(x,y)=\sin x\sec^2 y,\qquad f_x(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f_y(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{6}\sec^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot 2=1,$$

应用公式 $f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$，

便有

$$\begin{aligned}\sin 29^\circ\tan 46^\circ &\approx 0.5+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\frac{\pi}{180})+1\cdot\frac{\pi}{180}\\ &\approx 0.5-0.0151+0.0174=0.523.\end{aligned}$$

*9. 设圆锥体的底半径 R 由 30cm 增加到 30.1cm，高 H 由 60cm 减少到 59.5cm，试求圆锥体体积变化的近似值.

解 设圆锥体的体积为 V，则有

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

记 R,H 和 V 的增量依次为 $\Delta R,\Delta H$ 和 ，则

$$\Delta V\approx \mathrm{d}V=V'_R\Delta R+V'_H\Delta H=\frac{2}{3}\pi RH\Delta R+\frac{1}{3}\pi R^2\Delta H,$$

把 $R=30,\ H=60$，$\Delta R=0.1$，$\Delta H=-0.5$ 代入上式，得

$$\Delta V\approx\frac{2}{3}\pi\times 30\times 60\times 0.1+\frac{1}{3}\pi\times 30^2\times(-0.5)\approx -94.25\ \ (\text{cm}^3),$$

即圆锥体体积约减少了94.25cm^3.

*10. 一扇形的中心角为60°，半径为20m，如果将中心角增加1°，为了使扇形面积保持不变, 应将扇形半径减少多少m（计算到小数点后面三位）?

解 扇形的中心角, 半径和面积依次为θ, r和s，则有

$$s=\frac{1}{2}\theta r^2,$$

记θ, r和s的增量依次为$\Delta\theta, \Delta r$和Δs，则

$$\Delta s \approx \mathrm{d}s = s'_\theta\Delta\theta + s'_r\Delta r = \frac{1}{2}r^2\Delta\theta + \theta r\Delta r,$$

把$\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3},\ r=20,\ \Delta\theta = 1^\circ = \frac{\pi}{180},\ \Delta s = 0$代入上式, 有

$$0 \approx \frac{1}{2}\times 20^2 \times \frac{\pi}{180} + \frac{\pi}{3}\times 20\Delta r,$$

所以

$$\Delta r \approx -\frac{1}{6} \approx -0.167\ \ (\text{m}),$$

即扇形半径约减少了0.167m.

*11. 设有直角三角形, 测得其两直角边的长分别为$7\pm 0.1\text{cm}$和$24\pm 0.1\text{cm}$，试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边的长度分别为x和y，则斜边长度为$z=\sqrt{x^2+y^2}$，

$$|\Delta z| \approx |\mathrm{d}z| = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right| \le \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right||\Delta x| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right||\Delta y|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x|\Delta x| + y|\Delta y|) \le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x + y\delta_y),$$

便得

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x + y\delta_y).$$

当$x=7,\ y=24,\ \delta_x=0.1,\ \delta_y=0.1$时

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{7^2+24^2}}(7\times 0.1 + 24\times 0.1) = 0.124\ \ (\text{cm}),$$

所以计算斜边长度z的绝对值误差约为0.124cm.