第九节　方程的近似解

习题　3-9

1. 试证明方程 $x^3+1.1x^2+0.9x-1.4=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一实根，并用二分法求此根的近似值，使误差不超过10^{-3}.

解　令 $f(x)=x^3+1.1x^2+0.9x-1.4$，则在$[0,1]$上有

$$f(0)=-1.4<0,\ \ f(1)=1.6>0,\ \ f'(x)=3x^2+2.2x+0.9>0,$$

由零点定理及函数的单调性可知，方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一实根 ξ.

用二分法求此根近似值的过程如下：

$$\xi_1=0.5,\ \ f(\xi_1)=-0.55,\ \ a_1=0.5,\ \ b_1=1;$$

$$\xi_2=0.75,\ \ f(\xi_2)=0.3156,\ \ a_2=0.5,\ \ b_2=0.75;$$

$$\xi_3=0.625,\ \ f(\xi_3)=-0.1637,\ \ a_3=0.625,\ \ b_3=0.75;$$

$$\xi_4=0.6875,\ \ f(\xi_4)=0.0636,\ \ a_4=0.625,\ \ b_4=0.6875;$$

$$\xi_5=0.6563,\ \ f(\xi_5)=-0.0528,\ \ a_5=0.6563,\ \ b_5=0.6875;$$

$$\xi_6=0.6719,\ \ f(\xi_6)=0.0046,\ \ a_6=0.6563,\ \ b_6=0.6719;$$

$$\xi_7=0.6641,\ \ f(\xi_7)=-0.0243,\ \ a_7=0.6641,\ \ b_7=0.6719;$$

$$\xi_8=0.6680,\ \ f(\xi_8)=-0.0099,\ \ a_8=0.6680,\ \ b_8=0.6719;$$

$$\xi_9=0.6700,\ \ f(\xi_9)=-0.0024,\ \ a_9=0.6700,\ \ b_9=0.6719;$$

$$\xi_{10}=0.6710,\ \ f(\xi_{10})=0.0013,\ \ a_{10}=0.6700,\ \ b_{10}=0.6710.$$

于是 $0.670<\xi<0.671$. 若以 a_{10} 或 b_{10} 作为 ξ 的近似值，其误差必小于

$$\frac{1}{2^{10}}(1-0)=\frac{1}{1024}<10^{-3}.$$

2. 试证明方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有唯一实根，并用切线法求此根的近似值，使误差不超过 0.01.

解　令 $f(x)=x^5+5x+1$, $f(-1)=-5<0$, $f(0)=1>0$, 且在 $(-1,0)$ 上有

$$f'(x)=5x^4+5>0,\quad f''(x)=20x^3<0,$$

由零点定理及函数的单调性可知，方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有唯一实根 ξ.

用切线法求此根近似值时，由于 $f(-1)$ 与二阶导数同号，所以取 $x_0=-1$, 迭代过程如下：

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=-0.5,$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=-0.2118,$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=-0.1999,$$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=-0.1999.$$

可见，$x_4=x_3=-0.1999$, 停止迭代. 经计算得 $f(-0.1999)>0$, $f(-0.2)<0$, 从而方程的根 ξ 满足 $-0.2<\xi<-0.1999$. 若以 -0.2 或 -0.1999 作为 ξ 的近似值，其误差都不超过 0.01.

3. 求方程 $x\ln x=1$ 的近似根，使误差不超过 0.01.

解　令 $f(x)=x\ln x-1$, 则在 $[1,\mathrm{e}]$ 上有

$$f(1)=-1<0,\quad f(\mathrm{e})=\mathrm{e}-1>0,\quad f'(x)=\ln x+1>0,$$

由零点定理及函数的单调性可知，方程 $f(x)=0$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 内有唯一实根 ξ.

用二分法求此根近似值的过程如下：

$$\xi_1=1.8591,\quad f(\xi_1)=0.1529,\quad a_1=1,\quad b_1=1.8591;$$

$$\xi_2=1.4295,\quad f(\xi_2)=-0.4891,\quad a_2=1.4295,\quad b_2=1.8591;$$

$$\xi_3=1.6443,\quad f(\xi_3)=-0.1823,\quad a_3=1.6443,\quad b_3=1.8591;$$

$$\xi_4=1.7517,\quad f(\xi_4)=-0.0180,\quad a_4=1.7517,\quad b_4=1.8591;$$

$$\xi_5=1.8054,\quad f(\xi_5)=0.0666,\quad a_5=1.7517,\quad b_5=1.8054;$$

$$\xi_6=1.7786,\quad f(\xi_6)=0.0241,\quad a_6=1.7517,\quad b_6=1.7786;$$

$$\xi_7 = 1.7652,\ \ f(\xi_7) = 0.0030,\ \ a_7 = 1.7517,\ \ b_7 = 1.7652;$$

$$\xi_8 = 1.7585,\ \ f(\xi_8) = -0.0075,\ \ a_8 = 1.7585,\ \ b_8 = 1.7652.$$

于是$1.7585 < \xi < 1.7652$. 若以a_8或b_8作为ξ的近似值, 其误差必小于

$$\frac{1}{2^8}(\mathrm{e}-1) \approx 0.0067 < 0.01.$$