第五章　定积分

本章基本要求

1. 理解定积分概念和定积分的几何意义，了解定积分的性质和积分中值定理.

2. 理解变上限的积分作为其上限的函数及其求导定理。掌握牛顿（Newton）—莱布尼茨(Leibniz)公式.

3. 掌握定积分的换元法与分部积分法.

4. 了解两类反常积分及其收敛性的概念.

5. 了解定积分的近似计算法（梯形法和抛物线法）的思想.

第一节

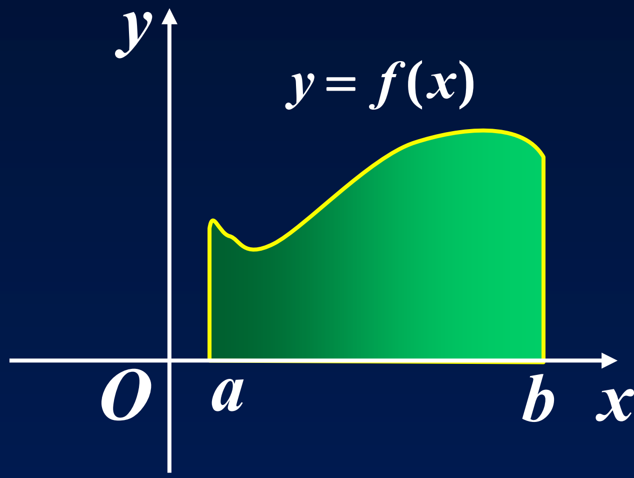
定积分的概念

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 定义(曲边梯形)

由曲线 $y=f(x) \quad (\geq 0)$, x轴, 及直线 $x=a$, $x=b$ 围成的图形.



(二) 求曲边梯形面积的步骤

1) 分割

$[a, b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

用直线 $x=x_i$ 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形;

2) 取近似 任取$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 第i个窄曲边梯形

面积 $\Delta A_i \approx \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{高}}\underbrace{\Delta x_i}_{\text{底}}$ $(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$

3) 求和

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

4) 取极限 令 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$,

则曲边梯形面积

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(三) 变速直线运动的路程

某物体作直线运动，速度 $v = v(t) \in C[T_1, T_2], v(t) \geq 0,$ 求在运动时间内经过的路程 $s.$

初等公式 $s = v_0 t$

v变化，公式失效

解决的步骤

1) 分割　　任意插入 $n-1$ 个分点，将 $[T_1, T_2]$ 分成 n 小段 $[t_{i-1}, t_i]\,(i = 1, \cdots, n)$,

第 i 段上物体经过的路程为 $\Delta s_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

2) 取近似　任取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$，以 $v(\xi_i)$ 代替变速，

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

3) 求和

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

4) 取极限

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i \quad (\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta t_i)$$

两问题的共性

方法步骤相同：

"分割、 取近似、 求和、 取极限 "

极限结构式相同：特殊乘积和式的极限

(四)定义 (定积分)

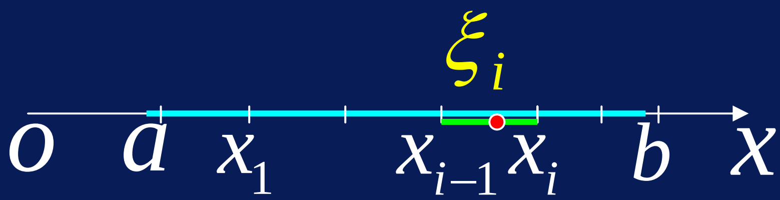
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 任意划分 $[a,b]$,

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 任取

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 当 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \to 0$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

总趋于数 I, 则称 I 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分,

记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

符号说明

$[a,b]$: 积分区间

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分上限

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和

几点说明

(1) 划分的稠密性:

用 "$n\to\infty$" 换 "$\lambda\to 0$"? 不行!

(2) 两个任意性:

$$\begin{cases}\text{划分}[a,b]\text{任意}\\ \text{选点}\xi_i\text{任意}\end{cases}$$

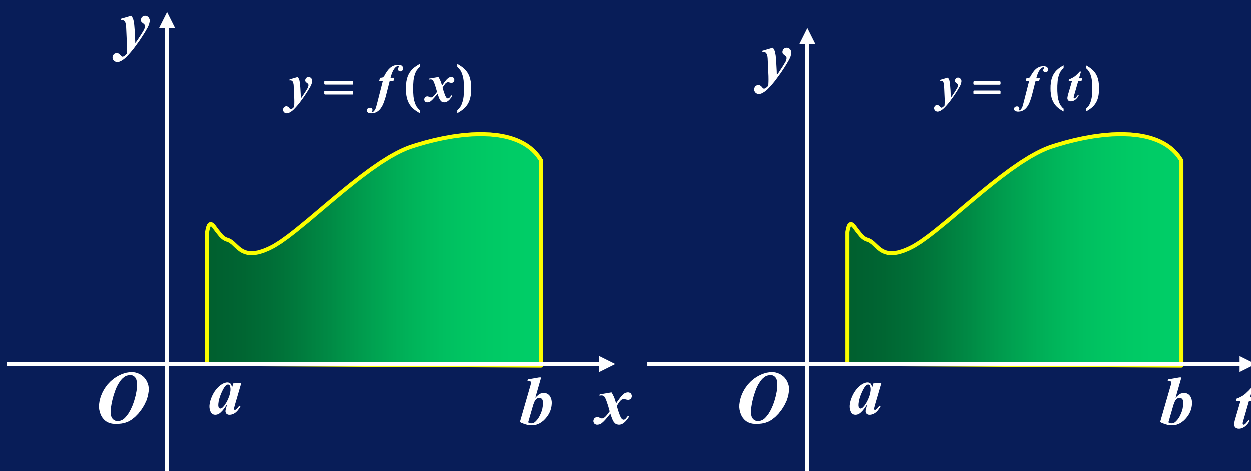
(3) 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分存在时，称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

(4) 确定定积分的两个要素

定积分与被积函数、积分区间有关

$$\text{定积分}\begin{cases}\text{与}\begin{cases}\text{被积函数}\\\text{积分区间}\end{cases}\text{有关}\\\text{与积分变量用什么字母表示无关:}\end{cases}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}$$

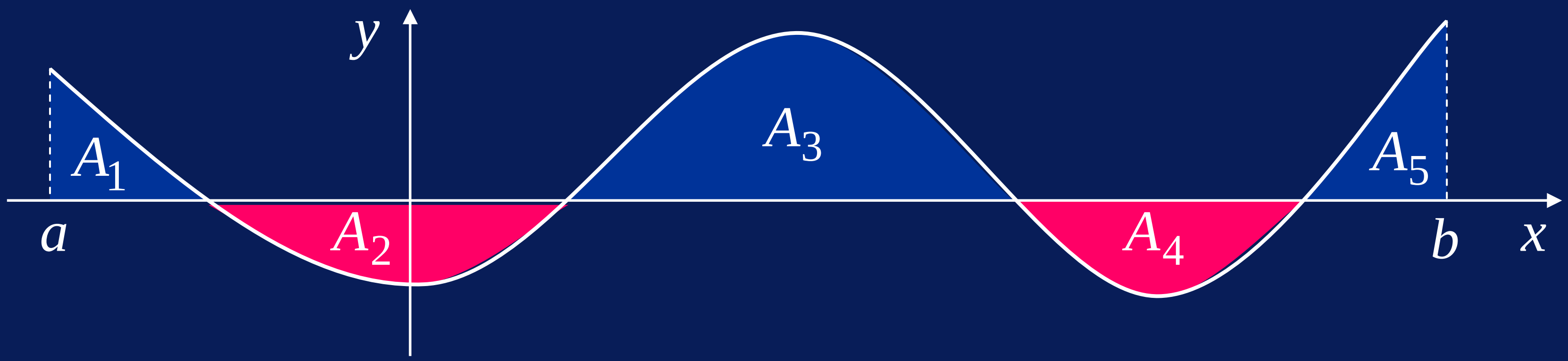


“面积相同”

(五) 定积分的几何意义

$f(x) > 0, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$ （曲边梯形面积）

$f(x) < 0, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$ （曲边梯形面积的负值）



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

（各小面积的代数和）

(六)可积的条件

(1)可积的必要条件 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界

$$f(x)\text{在}[a,b]\text{上可积} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} f(x)\text{在}[a,b]\text{上有界}$$

(2) 可积的充分条件

定理1 $f(x)$在$[a,b]$上连续，

则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

定理2 $f(x)$在$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，

则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

(七)定积分的性质

性质1（线性性质）

$$1^\circ \int_a^b k f(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (k\text{ 为常数})$$

$$2^\circ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

性质2（可加性）

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

其中 a,b,c 为 $f(x)$ 的可积区间 I 中的任意三个数.

性质3(可度量性) $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$ (区间长度)

性质4 (保序性)

1° 若 $f(x) \ge 0,\ x \in [a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0.$

2° 若 $f(x) \le g(x),\ x \in [a,b]$, 则

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

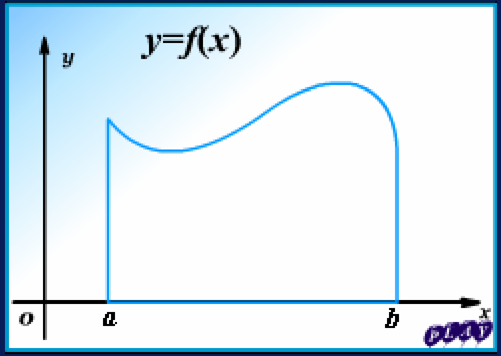
推论 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a < b)$

性质5（估值定理）

设 $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

$$(a < b)$$



性质6（定积分中值定理）

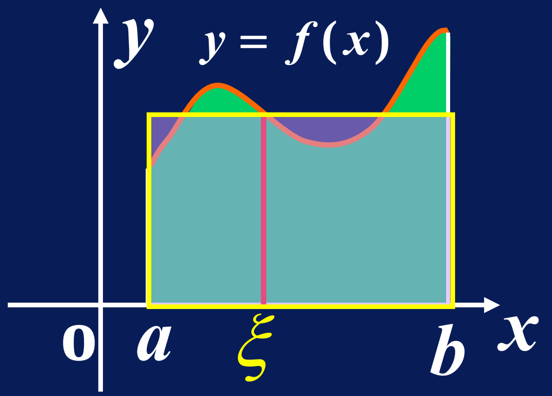
若 $f(x) \in C[a,b]$, 则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

- **定积分中值定理的几何意义:**

($f(\xi)$:平均高度)

曲边梯形面积 = 某矩形面积



- **定积分中值定理的数学意义:**

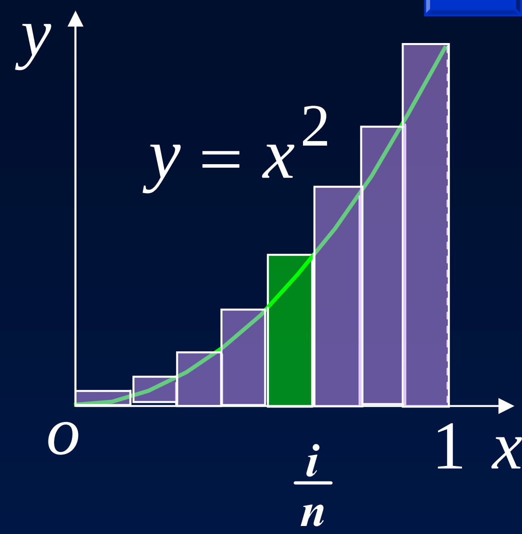
函数可达到其$[a, b]$上函数值的平均值.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$$

二、典型例题

注

例1 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.



解 $f(x)$在$[0,1]$上连续，必可积分.

将 $[0,1]$ n 等分, 分点为 $x_i=\frac{i}{n}$

$\Delta x_i=\frac{1}{n}$ 取 $\xi_i=\frac{i}{n}$, $(i=1,2,\cdots,n)$

则 $f(\xi_i)\Delta x_i=\xi_i^2\Delta x_i=\dfrac{i^2}{n^3}$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

$$\therefore\quad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=\frac{1}{3}$$

注 1° 利用 $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, 得

$$\begin{cases} (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \\ n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \end{cases}$$

两端分别相加, 得

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n$$

即 $$n^3 + 3n^2 + 3n = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

2° 若$f(x)$在$[a,b]$上可积， 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$与$[a,b]$的分法及 ξ_i 的取法无关．此时，将$[a,b]$ n等分，

则 分点： $x_i = a + \frac{b-a}{n} i \quad (i = 0,1,\cdots,n)$

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

取 $\xi_i = x_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$

(小区间右端点)

有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

可利用定积分求一些“和式数列”的极限.

例2　求极限:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)$$

解　$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sqrt{n^2-i^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$\xi_i=\frac{i}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$b-a=1,\ \frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$$

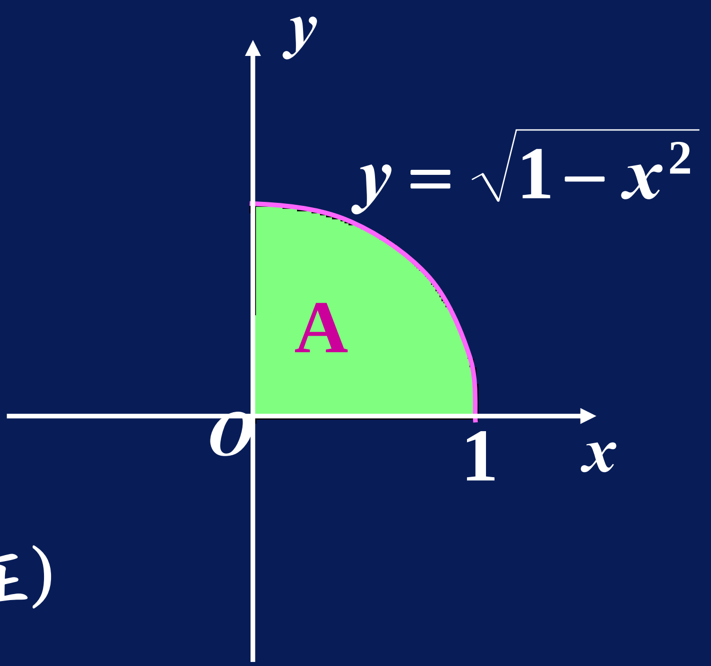
$$x\in[0,1]$$

$$I = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = A$$ (存在)

$$= \frac{1}{4}\cdot 1^2\pi = \frac{\pi}{4}.$$



例3 比较积分大小:

(1) $I_1 = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ 与 $I_2 = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$;

(2) $I_3 = \int_1^2 x\,\mathrm{d}x$ 与 $I_4 = \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$;

解 (1) 因 $x \ge x^2, x \in [0,1]$,

故 $I_1 \ge I_2$.

(2) 因 $x \le x^2, x \in [1,2]$,

故 $I_3 \le I_4$.

例4 估计 $I=\int_1^2 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ 的值.

解 由 $e^1 \le e^{x^2} \le e^4$,

得 $1\cdot e \le \int_1^2 e^{x^2}\,\mathrm{d}x \le e^4$

例5 试证: $1 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}$.

证 设

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

寻找最值

则 $f(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上连续，从而可积

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)<0$$

$$\therefore\quad f(\frac{\pi}{2})<f(x)<f(0)\quad x\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1, & x=0\end{cases}$$

即 $\dfrac{2}{\pi}<f(x)<1,\quad x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

故 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\mathrm{d}x\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x$

即 $\displaystyle 1\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\le\frac{\pi}{2}$

例6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x.$

解 $\because \quad 0\le\frac{x^n}{1+x}\le\frac{(\frac{1}{2})^n}{1+0} \quad x\in[0,\frac{1}{2}]$

$\therefore \quad 0\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x\le\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^n\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{n+1}}$

又 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=0, \quad \lim\limits_{n\to\infty}0=0$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=0.$

例7　设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

解　由积分中值定理知，有 $\xi\in[x,x+2]$,

使 $\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)\,\mathrm{d}t=\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)(\cancel{x}+2-\cancel{x})$,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)\,\mathrm{d}t=2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)$$

$$=6\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\sin\frac{3}{\xi}}{\frac{3}{\xi}}f(\xi)=6\times1\times1=6$$

例8 设$f(x)$在$[0,1]$上可微，且

$$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}} x f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

证明：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使

$$f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}.$$

分析 $f'(\xi) = -\dfrac{f(\xi)}{\xi} \Leftrightarrow \xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$

$$\Leftrightarrow [xf(x)]'_{x=\xi} = 0$$

证　令 $F(x)=xf(x)$

则 $F(x)$在$[0,1]$上可导，且

$$F(1)=f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,\mathrm{d}x$$

由定积分中值定理，知　$\exists\eta\in[0,\frac{1}{2}]$

使　$$2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,\mathrm{d}x=2\cdot\eta f(\eta)\cdot(\frac{1}{2}-0)$$

$$=\eta f(\eta)=F(\eta)$$

$\therefore\ F(1)=F(\eta)$　$\because\ [\eta,1]\subset[0,1]$

在$[\eta,1]$上，对于 $F(x)$用罗尔定理，知

$\exists \xi \in (\eta,1) \subset (0,1)$，使

$$F'(\xi) = (xf(x))'\big|_{x=\xi} = 0$$

即 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

也即 $f'(\xi) = -\dfrac{f(\xi)}{\xi}.$

例9 求时间段[0，T]内自由落体的平均速度.

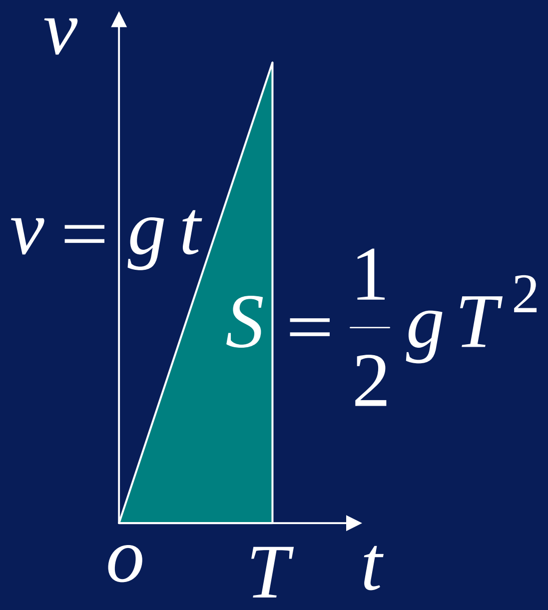
解 已知自由落体速度为

$$v = gt$$

故所求平均速度

$$\bar{v} = \frac{1}{T-0}\int_0^T gt\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}gT^2 = \frac{gT}{2}$$



三、同步练习

1. 利用定义计算定积分 $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且取正值.

试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})} = e^{\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x}$.

3. 用定积分表示下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$

四、同步练习解答

1. 利用定义计算定积分 $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$

解 $f(x)$在$[1,2]$上连续，必可积分.

将$[1,2]$分为n份，分点为 $q, q^2, \cdots, q^{n-1}$

代表小区间为 $[q^{i-1}, q^i]$, $(i = 1,2,\cdots,n)$

其长度 $\Delta x_i = q^i - q^{i-1} = q^{i-1}(q-1)$

取 $\xi_i = q^{i-1}, (i = 1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}} q^{i-1}(q-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(q-1) = n(q-1) = n(2^{\frac{1}{n}} - 1),$$

取 $q = 2^{\frac{1}{n}}$

$$\because \quad \lim_{x\to+\infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \ln 2,$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln 2,$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i}\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln 2.$$

2. 设函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上连续，且取正值.

试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}=e^{\int_0^1 \ln f(x)\,dx}$.

证 利用对数的性质得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}=e^{\ln(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})})}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f(\frac{i}{n})}$$

极限运算与
对数运算换序

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

为 $\ln f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上的积分和：

将 $[0,1]$ n 等分，分点为 $x_i = \dfrac{i}{n}$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$

$\ln f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x$$

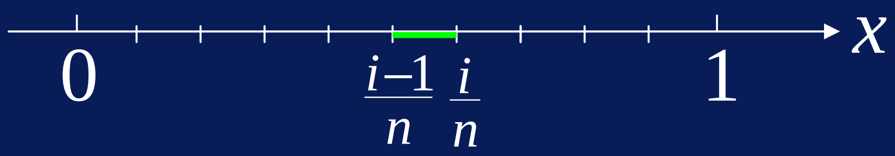
故 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \mathrm{e}^{\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

3. 用定积分表示下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$

$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$



(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}\Big)^p\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$

$=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$