

## 第六节

# 傅里叶级数

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

# 一、主要内容

## (一) 三角级数 三角函数系的正交性

1. 三角级数  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$

其中  $u_n(x) = A_n \cos nx + B_n \sin nx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

令  $A_0 = \frac{a_0}{2},$

$$A_n = a_n, \quad B_n = b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

则  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{—— 三角级数}$



## 2. 研究意义

### (1) 物理背景

简单周期运动： $y = A \sin(\omega t + \varphi)$

( $A$ : 振幅,  $\omega$ : 角频率,  $\varphi$ : 初相)

复杂周期运动：

$$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

(谐波迭加)

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos \varphi_n \sin n\omega t)$$



(2) 回顾 
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R) \quad (6.1)$$

优点:  $f(x) \approx \underline{S_{n+1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}, \quad x \in (-R, R)$

缺点: 1° 对  $f(x)$  的要求过高

易于计算

若(6.1)成立, 则  $f(x)$  在  $(-R, R)$  内有任意阶导数.

2°  $S_{n+1}(x)$  非周期函数

若  $f(x)$  为周期函数, 则用  $S_{n+1}(x) \approx f(x)$

将失去  $f(x)$  的周期特性.



将  $f(x)$  展开成三角级数, 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (6.2)$$

$x \in I$

则可克服上述两个缺点.

### 3. 函数展开成三角级数的基本问题

(1) 若(6.2)成立,  $a_n = ?$ ,  $b_n = ?$

展开式是否唯一?

(2) 在什么条件下才能展开成三角级数?

(3) 三角级数的收敛域? 展开式成立的范围?



## 4. 三角函数系的正交性

### 定义 (正交函数系)

设有函数系:  $\{\varphi_n(x)\} (x \in [a, b], n = 1, 2, \dots)$

若 
$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0$$

$$(m, n = 1, 2, \dots, \text{ 且 } m \neq n)$$

则称  $\{\varphi_n(x)\} (n = 1, 2, \dots)$  为  $[a, b]$  上的  
正交函数系.



## 定理1 三角函数系

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots$

在区间  $[-\pi, \pi]$  上正交.

注 1° 三角函数系中任两相同函数的乘积在  $[-\pi, \pi]$  上的积分不等于 0.

2° 正交性:

(1) 向量正交:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  (内积为零);

(2) 函数正交:  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$  (乘积积分为零).



## (二) 以 $2\pi$ 为周期的函数的傅里叶级数

### 1. 函数展开成三角级数的形式

**定理2** 设 $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 若

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (6.3)$$

且(6.3)式可逐项积分, 则 展开式是**唯一**的, 且

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx & (n = 0, 1, \dots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

傅里叶系数





## 2. 傅里叶系数

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx & (n=0, 1, \dots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (6.4)$$

或

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx & (n=0, 1, \dots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx & (n=1, 2, \dots) \end{cases}$$



### 3. 傅里叶级数

#### 定义 (傅里叶级数)

设  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积分, 若三角级数 :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

中的系数  $a_n, b_n$  是傅里叶系数 (6.4), 则称此

三角级数是  $f(x)$  的周期为  $2\pi$  的傅里叶级数, 记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$



$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx & (n=0, 1, \dots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx & (n=1, 2, \dots) \end{cases}$$

问题：

$$f(x) \stackrel{\text{条件?}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$



## 4. 函数展开成傅里叶级数的充分条件

### 定理11.15 (收敛定理, 展开定理)

设以 $2\pi$ 为周期的函数 $f(x)$  满足狄利克雷条件:  
在一个周期内

- 1) 连续, 或最多只有有限个第一类间断点;
- 2) 最多只有有限个极值点,

则 $f(x)$  的傅里叶级数在 $(-\infty, +\infty)$ 处处收敛, 且



## 其和函数

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ (-\infty < x < +\infty)$$

与  $f(x)$  有如下关系:

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点} \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点} \end{cases}$$

**注** 函数展开成傅里叶级数的条件比展开成幂级数的条件低的多.



## 5. 展开步骤

- 1° 对于  $f(x)$  检验收敛定理的条件, 且找出  $f(x)$  的间断点, 写出  $f(x)$  的傅里叶级数的和函数  $S(x)$  在间断点处的值及展开式成立的范围;
- 2° 确定傅里叶系数  $a_n, b_n$ ;
- 3° 写出展开式 (包括展开式成立的范围 ).



### (三) 正弦级数和余弦级数

1. 定义 正(余)弦级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$  ( $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ )

2. 奇、偶函数(周期:  $2\pi$ )的傅里叶级数

定理3 周期为  $2\pi$  的奇(偶)函数  $f(x)$ , 其傅里叶级数为正(余)弦级数, 傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$
$$\left( \begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases} \right)$$



## 二、典型例题

**例1** 设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数，且

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & -\pi < x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 2, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

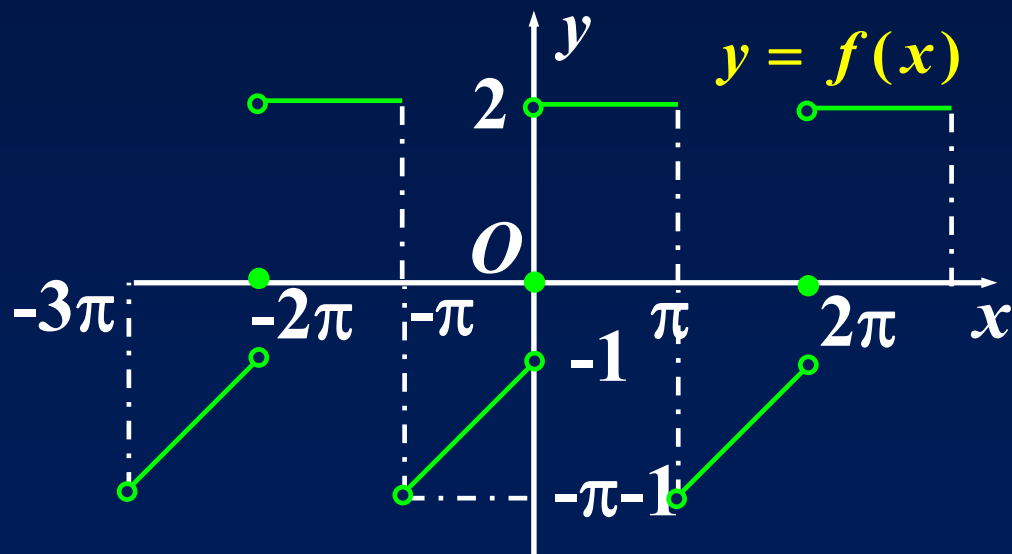
设  $S(x)$  为  $f(x)$  的傅里叶级数的和函数，求  $S(\pi)$ ,

$S(4\pi)$  及  $S(\frac{5\pi}{2})$ .

**解**  $f(x)$  的间断点:

$$x_k = k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

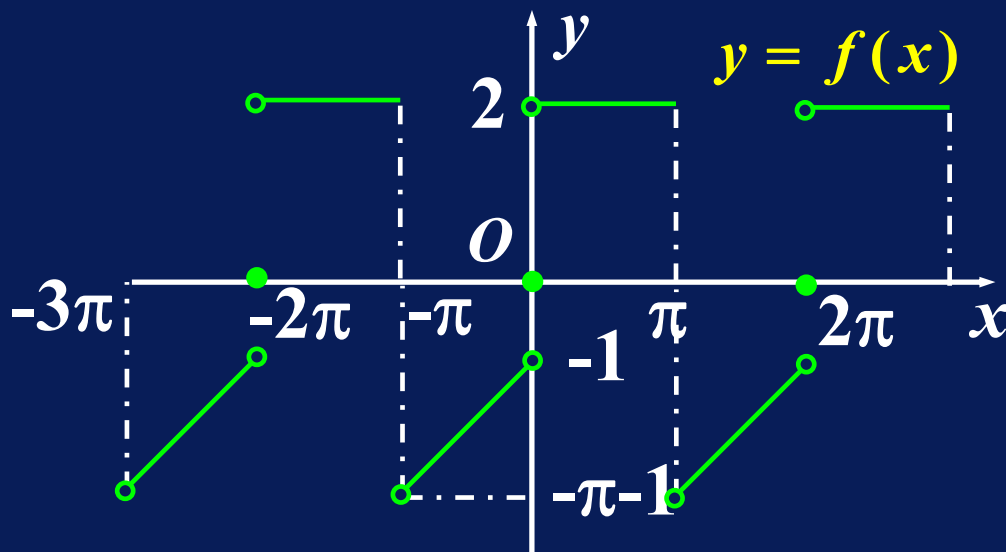




在端点  $x = \pi$  处,

$$\begin{aligned} S(\pi) &= \frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} \\ &= \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2 + (-\pi - 1)}{2} = \frac{1 - \pi}{2} \quad (\neq f(\pi) = 2)$$



在间断点  $x = 4\pi$  处,

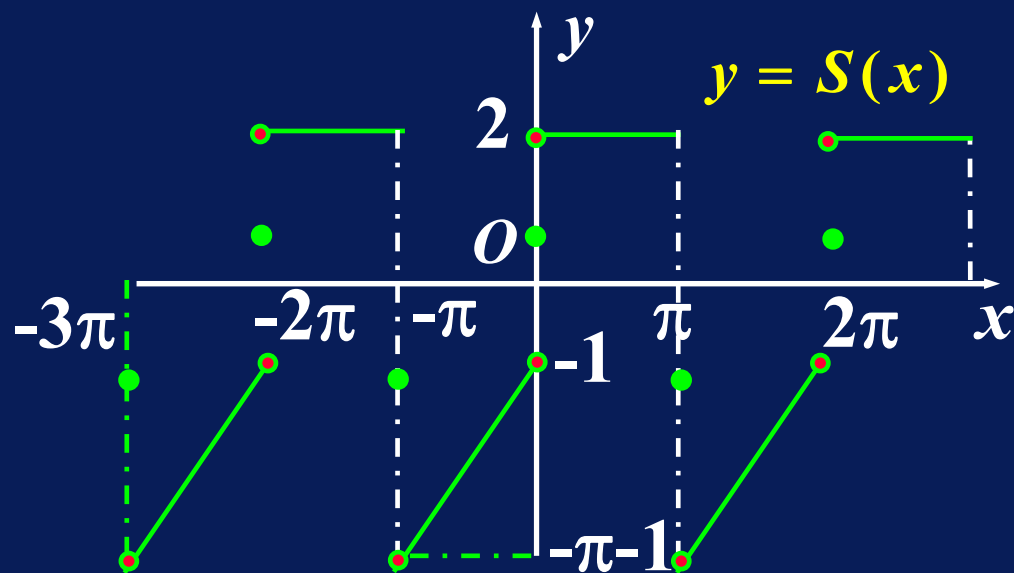
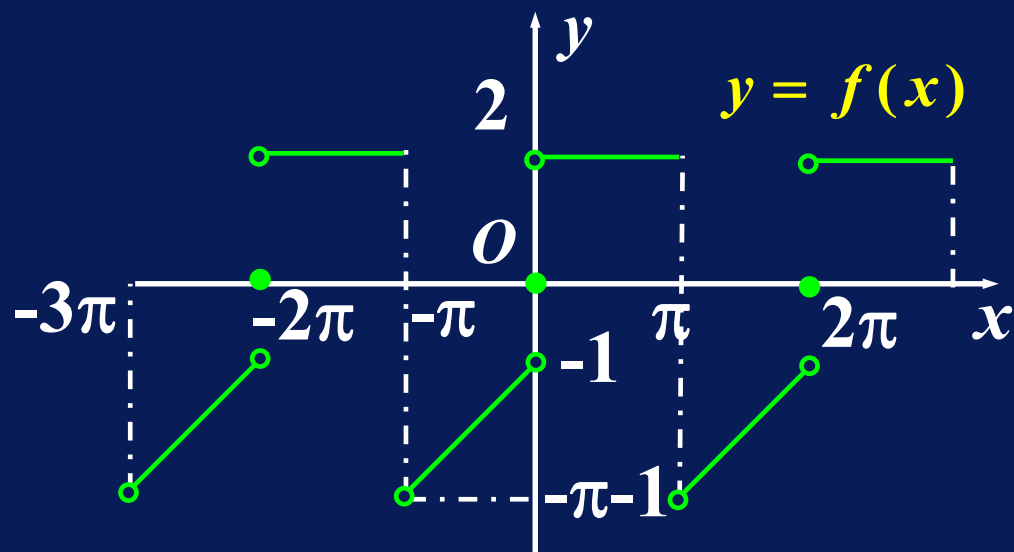
$$S(4\pi) = S(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{(-1) + 2}{2} = \frac{1}{2}$$

$S(x)$  是以  $2\pi$  为  
周期的周期函数

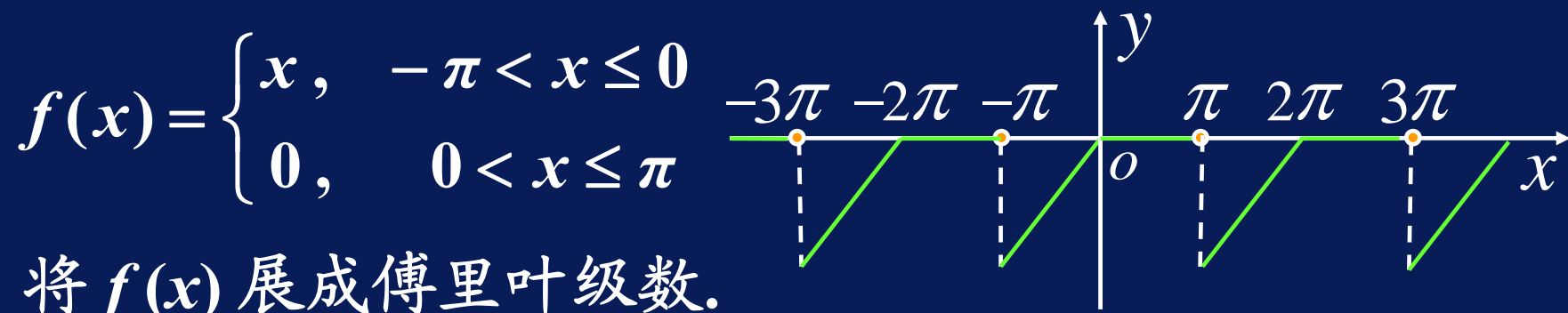


在连续点  $x = \frac{5\pi}{2}$  处,

$$\begin{aligned} S\left(\frac{5\pi}{2}\right) &= S\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \end{aligned}$$



**例2** 设  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期,  $(-\pi, \pi]$  上的表达式为



将  $f(x)$  展成傅里叶级数.

**解** 1°  $f(x)$  满足收敛定理的条件

间断点:  $x_k = (2k+1)\pi, (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$S(x_k) = \frac{f(x_k^-) + f(x_k^+)}{2} = \frac{0 + (-\pi)}{2} = -\frac{\pi}{2}$$
$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



当  $x \neq x_k$  时,  $f(x)$  连续

$$f(x) = S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$(x \neq (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

2° 确定傅里叶系数:  $a_n, b_n$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$



$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \cos nx dx$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{-\pi}^0 = \frac{1 - \cos n\pi}{n^2 \pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi}$$

( $n = 1, 2, \dots$ )

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \sin nx dx$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$



3° 所求函数的傅里叶展开式为:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{-\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right] \end{aligned}$$

$$(-\infty < x < +\infty, \quad x \neq (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



**例3** 设  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期,  $(-\pi, \pi]$  上的表达式为

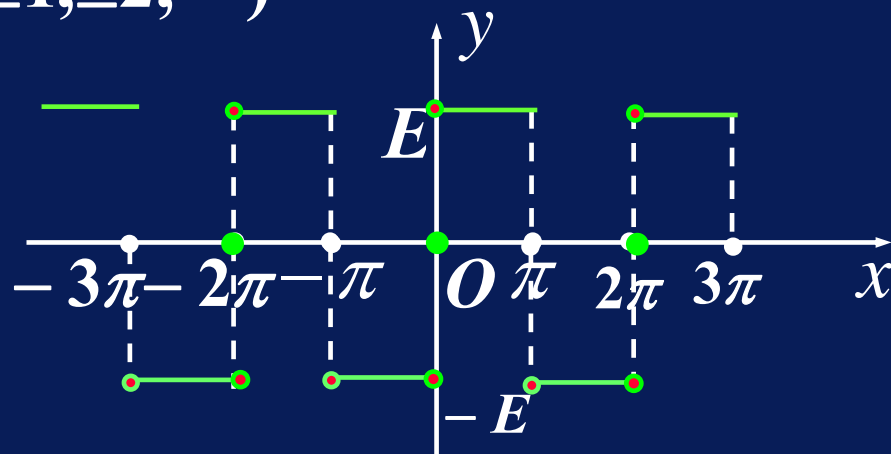
$$f(x) = \begin{cases} -E, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ E, & 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad (\text{常数 } E > 0)$$

将  $f(x)$  展成傅里叶级数.

**解** 1°  $f(x)$  满足收敛定理的条件

间断点:  $x_m = m\pi, (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

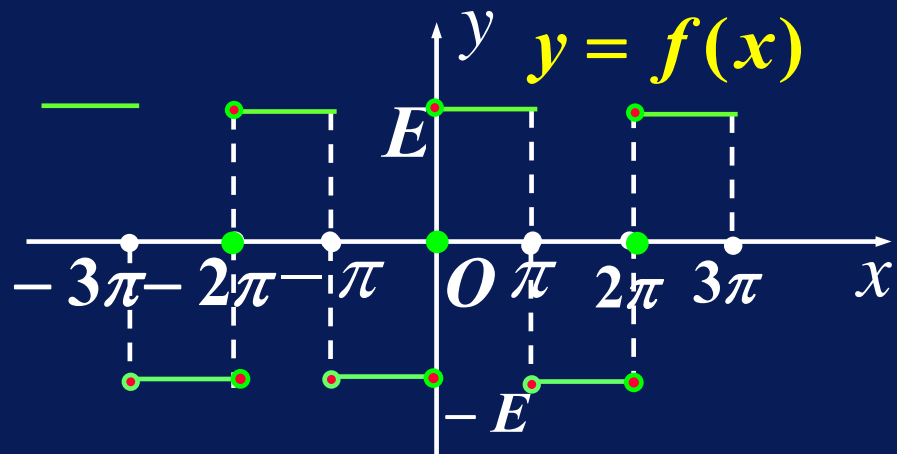
$$\begin{aligned} S(x_m) &= \frac{f(x_m^-) + f(x_m^+)}{2} \\ &= \frac{-E + E}{2} = 0 \end{aligned}$$



$$S(x_m) = 0 \begin{cases} = f(x_m), & m = 2k \\ \neq f(x_m) = E, & m = 2k - 1 \end{cases}$$

$$(k = 1, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

当  $x \neq x_m$  时,  $f(x)$  连续



$$f(x) = S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$(x \neq (2k - 1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$





## 2° 确定傅里叶系数: $a_n, b_n$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underline{f(x) \cos nx} dx$$

奇函数

$$= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underline{f(x) \sin nx} dx$$

偶函数

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} E \cdot \sin nx dx$$

$$= \frac{2E}{\pi} \left[ -\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2E}{n\pi} [1 - \cos n\pi]$$

$$f(x) = \begin{cases} -E, & -\pi < x \leq 0 \\ 0, & x = 0 \\ E, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$



$$b_n = \frac{2E}{\pi} \left[ -\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2E}{n\pi} [1 - \cos n\pi]$$

$$a_n = 0$$

$$= \frac{2E}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$= \begin{cases} \frac{4E}{n\pi}, & \text{当 } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & \text{当 } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$$

$$(-\infty < x < +\infty, x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \dots)$$

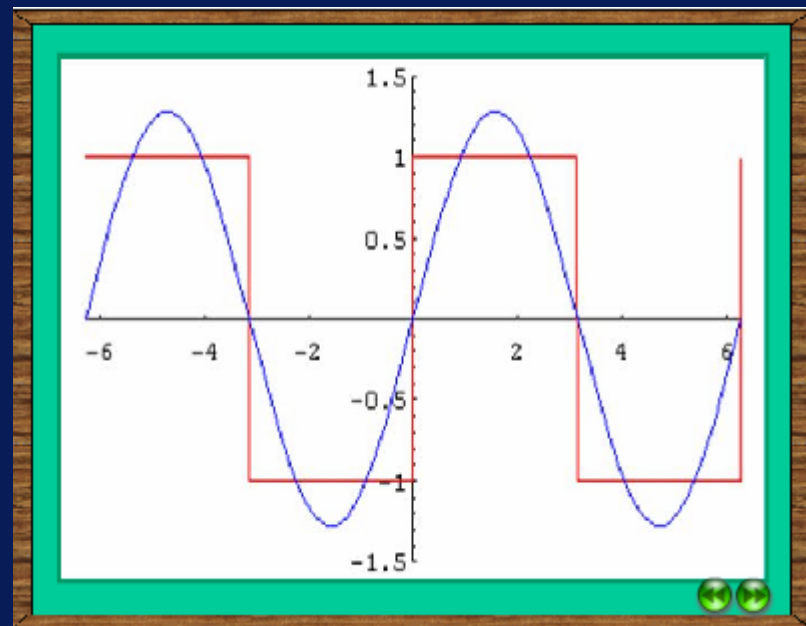


$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \dots \right]$$

$$(-\infty < x < +\infty, x \neq \pm\pi, \pm3\pi, \dots)$$

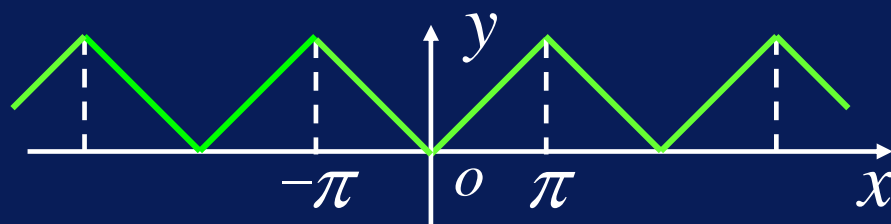
**注** 矩形波是无穷多

正弦波的叠加傅氏级数的部分和逼近  $f(x)$  的情况见**右图**。



**例4** 设  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期,  $(-\pi, \pi]$  上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$



将  $f(x)$  展成傅里叶级数.

**解**  $f(x)$  为偶函数(如图), 可展成余弦级数.  $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$



$$a_n = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \pi$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \right.$$

$$\left. \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \dots \right)$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$



**注** 函数展开成傅里叶级数的应用: **求数项级数的和.**

**例5** 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$  的和.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

**解** 
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \cdots \right)$$
  
$$(-\infty < x < +\infty)$$

当  $x = 0$  时,  $f(0) = 0$ , 得

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$$



设

$$\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots, \quad \sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots, \quad \sigma_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

已知  $\sigma_1 = \frac{\pi^2}{8}$

因  $\sigma_2 = \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4}$ , 故  $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{3} = \frac{\pi^2}{24}$ .

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}.$$



### 三、同步练习

1. 设  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期,  $[-\pi, \pi)$  上的表达式为  $f(x) = x$ , 将  $f(x)$  展成傅里叶级数.

2. 将周期函数  $u(t) = |E \sin t|$  (常数  $E > 0$ ) 展成傅里叶级数.





## 四、同步练习解答

1. 将设  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期,  $[-\pi, \pi)$  上的表达式为  $f(x) = x$ , 将  $f(x)$  展成傅里叶级数.

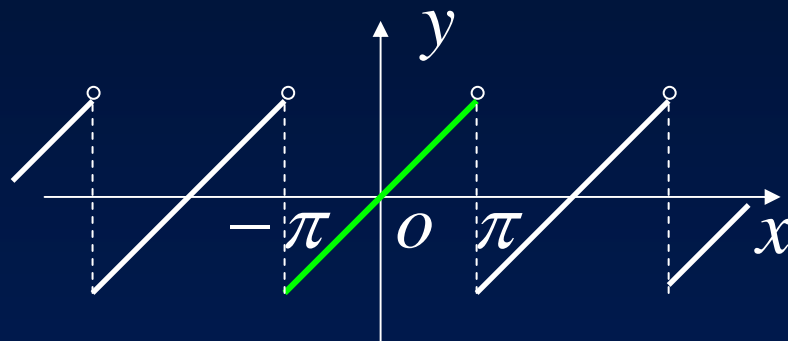
**解** 不计  $x = (2k+1)\pi$  处, 则  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的奇函数.

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$



由收敛定理得**正弦级数**:

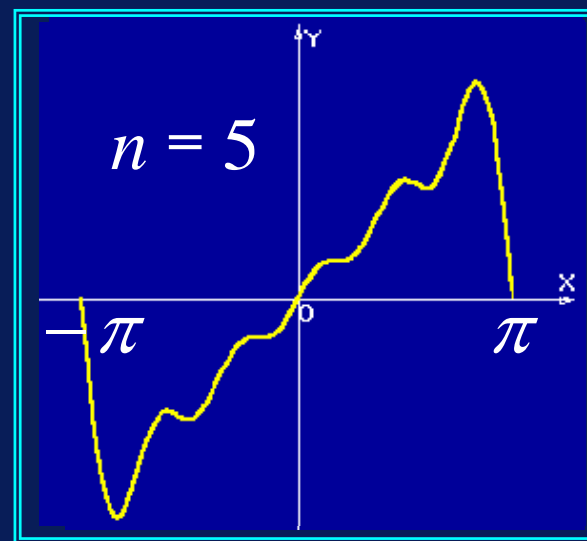
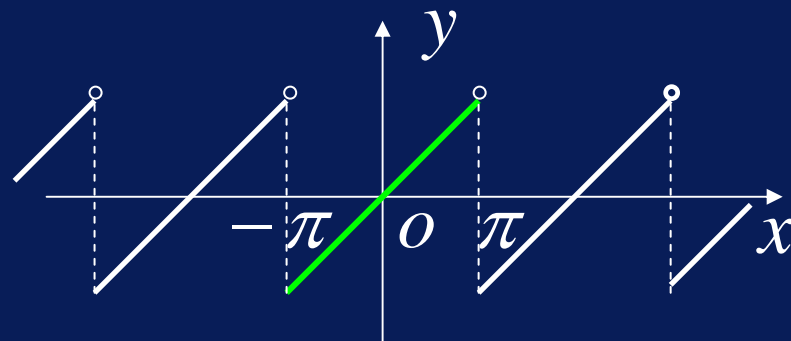
$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

$$= 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right)$$

$(-\infty < x < +\infty,$

$x \neq (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \cdots)$

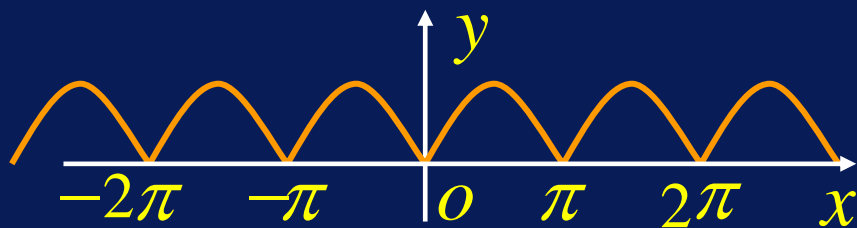
**注** 在 $[-\pi, \pi)$ 上级数的部分和逼近 $f(x)$ 的情况见**右图**.



2. 将周期函数  $u(t) = |E \sin t|$  (常数  $E > 0$ )

展成傅里叶级数.

解  $u(t)$  是以  $2\pi$  为  
周期的偶函数.



$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} E \sin t dt = \frac{4E}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} E \sin t \cos nt dt \\ &= \frac{E}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(n+1)t - \sin(n-1)t) dt \end{aligned}$$



$$a_n = \frac{E}{\pi} \int_0^\pi (\sin(n+1)t - \sin(n-1)t) dt$$

$$= \begin{cases} -\frac{4E}{(4k^2-1)\pi}, & n=2k \\ 0, & n=2k+1 \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$a_1 = \frac{E}{\pi} \int_0^\pi \sin 2t dt = 0$$

$$\text{故 } u(t) = \frac{2E}{\pi} - \frac{4E}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos 2kx$$

$$= \frac{4E}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cos 2t - \frac{1}{15} \cos 4t - \frac{1}{35} \cos 6t - \dots \right)$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$

