第三节　极限的概念

习题　1-3

1. 观察下列数列的变化趋势，指出它们是否有极限，若有极限，请写出其极限:

(1) $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$;　　(2) $x_n=(-1)^n-\frac{1}{n}$;

(3) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$;　　(4) $x_n=\sin\frac{n\pi}{2}$;

(5) $x_n=\cos\frac{1}{n\pi}$;　　(6) $x_n=\ln\frac{1}{n}$;

(7) $0.1, 0.11, 0.111, \cdots, 0.\underbrace{11\cdots1}_{n个}, \cdots$.

解 (1) 有极限，极限为 0;　　(2) 不存在极限;

(3) 有极限，极限为 1;　　(4) 不存在极限;

(5) 有极限，极限为 1;　　(6) 不存在极限($\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$);

(7) 有极限，极限为 $\frac{1}{9}$.

2. 用数列极限的定义证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}=1$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0(\alpha>0)$.

解 (1) $\left|\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+4}-n}{n}=\frac{4}{n(\sqrt{n^2+4}+n)}<\frac{4}{n}$.

要使 $\left|\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{4}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{4}{\varepsilon}$.

于是，$\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{4}{\varepsilon}]$，只要 $n>N$，就有 $\left|\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}-1\right|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}=1;$$

(2) $\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\varepsilon}}(\alpha>0)$.

于是，$\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\varepsilon}}]$，只要 $n>N$，就有 $\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$ $(\alpha>0)$.

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，并举例说明反之未必成立.

证 $\because \big||x_n|-|a|\big|\le|x_n-a|$，故 $\forall\varepsilon>0$，欲使 $\big||x_n|-|a|\big|<\varepsilon$，只要 $|x_n-a|<\varepsilon$，

由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 知，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$，从而 $\big||x_n|-|a|\big|$ $<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

反之未必成立，例如: $x_n=(-1)^n$，显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

4. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证 由数列 $\{x_n\}$ 有界，故存在 $M>0$，使 $|x_n|\le M$，对一切 n 都成立.

$\forall\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，所以对于 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}>0$，$\exists N$ ，当 $n>N$ 时，就有 $|y_n|<\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}$，于是 $|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

5. 用函数极限的定义证明

(1) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}=0$.

证 (1) $\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|2x+1|=2\left|x-(-\frac{1}{2})\right|$.

要使 $\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$，只要 $2\left|x-(-\frac{1}{2})\right|<\varepsilon$，即 $\left|x-(-\frac{1}{2})\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

于是，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，当 $0<\left|x-(-\frac{1}{2})\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ 时，就有 $\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$，故

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2.$$

(2) $\left|\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x}}-0\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

要使 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，只要 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，

于是，$\forall \varepsilon>0$, 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，当 $x>X$ 时，就有 $\left|\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}=0.$$

6. 证明：若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

证 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，得 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X_1>0$，当 $x>X_1$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；

再由 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，得对上述 $\varepsilon>0$, $\exists X_2>0$，当 $x<-X_2$ 时，就有 $|f(x)-A|$ $<\varepsilon$.

取 $X=\max\{X_1, X_2\}$，则当 $|x|>X$ 时，有 $x>X$ 或 $x<-X$，故 $|f(x)-A|<\varepsilon$，

即 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

7. 证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限均存在且相等.

证 必要性：

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，不妨设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $0<$ $|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，特别的：

当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$；

当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

充分性：

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，只要 $0<x-x_0<\delta_1$，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, $\exists\delta_2>0$，只要 $-\delta_2<x-x_0<0$，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，

只要$0<|x-x_0|<\delta$，就有$|f(x)-A|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.