第三节　泰勒公式

习题　3-3

1. 按 $(x+1)$ 的乘幂展开多项式 $f(x)=1+3x+5x^2-2x^3$.

解　$f'(x)=3+10x-6x^2$, $f''(x)=10-12x$, $f'''(x)=-12$, 且当 $n\geq 4$ 时, $f^{(n)}(x)=0$, 于是 $f(-1)=5$, $f'(-1)=-13$, $f''(-1)=22$, $f'''(-1)=-12$, 故

$$f(x)=1+3x+5x^2-2x^3=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3.$$

注意　由于本题所给的函数为多项式, 所以本题也可用初等数学的方法求解:

$$f(x)=1+3x+5x^2-2x^3=-2(x+1)^3+11x^2+9x+3$$

$$=-2(x+1)^3+11(x+1)^2-13(x+1)+5.$$

2. 写出下列函数在指定点 x_0 处的带皮亚诺型余项的 3 阶泰勒公式:

(1)　$f(x)=\sqrt{x}, x_0=4$;　　(2)　$f(x)=\ln x, x_0=2$;

(3)　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}, x_0=0$;　　(4)　$f(x)=x\cos 2x, x_0=0$.

解　(1)　$f(x)=\sqrt{x}$, $f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x)=\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$, 于是 $f(4)=2$, $f'(4)=\dfrac{1}{4}$, $f''(4)=-\dfrac{1}{32}$, $f'''(4)=\dfrac{3}{256}$, 故有

$$f(x)=\sqrt{x}=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3+o((x-4)^3).$$

(2)　$f(x)=\ln x$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $f'''(x)=\dfrac{2}{x^3}$, 于是 $f(2)=\ln 2$, $f'(2)=\dfrac{1}{2}$, $f''(2)=-\dfrac{1}{4}$, $f'''(2)=\dfrac{1}{4}$, 故有

$$f(x)=\ln x=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{8}(x-2)^2+\frac{1}{24}(x-2)^3+o((x-2)^3).$$

(3) $f(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$，$f'(x)=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$，$f''(x)=\frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}}$，$f'''(x)=\frac{15}{8}(1-x)^{-\frac{7}{2}}$，

于是 $f(0)=1$，$f'(0)=\frac{1}{2}$，$f''(0)=\frac{3}{4}$，$f'''(0)=\frac{15}{8}$，故有

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+o(x^3).$$

(4) $f(x)=x\cos 2x$，$f'(x)=\cos 2x-2x\sin 2x$，$f''(x)=-4\sin 2x-4x\cos 2x$，$f'''(x)=-12\cos 2x+8x\sin 2x$，于是 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=-12$，故有

$$f(x)=x\cos 2x=x-2x^2+o(x^3).$$

3. 写出下列函数的带拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林展开式:

(1) $f(x)=\ln(1-x)$; (2) $f(x)=\sin 2x$;

(3) $f(x)=x\mathrm{e}^x$; (4) $f(x)=\frac{1}{x-1}$.

解 (1) $f(x)=\ln(1-x)$，$f^{(n)}(x)=(\frac{1}{x-1})^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}$，$n\geq 1$. 于是

$f(0)=0$，$f^{(n)}(0)=-(n-1)!$，$n\geq 1$，故有

$$f(x)=\ln(1-x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(-\frac{x^k}{k})-\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+1}(n+1)},$$

$$=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+1}(n+1)},\ 0<\theta<1.$$

(2) $f(x)=\sin 2x$，$f^{(n)}(x)=2^n\sin(2x+n\cdot\frac{\pi}{2})$，$n\geq 1$，于是 $f^{(2m)}(0)=0$，

$f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m 2^{2m+1}$. 令 $n=2m$，可得函数 $f(x)=\sin 2x$ 的带拉格朗日型余项的 $2m$ 阶麦克劳林展开式为

$$f(x)=\sin 2x=2x-\frac{2^3x^3}{3!}+\frac{2^3x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{2^{2m-1}x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$+\frac{2^{2m+1}\sin(2\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2})}{(2m+1)!}x^{2m+1},\ 0<\theta<1.$$

令 $n=2m+1$，可得函数 $f(x)=\sin 2x$ 的带拉格朗日型余项的 $2m+1$ 阶麦克劳林展开

式为

$$f(x)=\sin 2x=2x-\frac{2^3x^3}{3!}+\frac{2^3x^5}{5!}-\cdots+(-1)^m\frac{2^{2m+1}x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$+\frac{2^{2m+2}\sin(2\theta x+(2m+2)\frac{\pi}{2})}{(2m+2)!}x^{2m+2},\ 0<\theta<1.$$

(3) $f(x)=xe^x$, $f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$, $n\ge 1$. 于是 $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=n$, $n\ge 1$, 故有

$$f(x)=xe^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{(k-1)!}+\frac{(n+1+\theta x)e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$$=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{(n+1+\theta x)e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

(4) $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$, $n\ge 1$. 于是 $f^{(n)}(0)=-n!$, $n\ge 0$, 故有

$$f(x)=\frac{1}{x-1}=-1-x-x^2-\cdots-x^n-\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},\ 0<\theta<1.$$

4. 设 $f(x)$ 二阶可微, 将 $f(x+2h)$ 及 $f(x+h)$ 在点 x 处展开成2阶泰勒公式, 并证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=f''(x).$$

解 $f(x+2h)$ 及 $f(x+h)$ 在点 x 处的带皮亚诺型余项的 2 阶泰勒公式分别为

$$f(x+2h)=f(x)+f'(x)2h+\frac{f''(x)}{2!}(2h)^2+o(h^2)$$

$$=f(x)+2f'(x)h+2f''(x)h^2+o(h^2),$$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+o(h^2).$$

利用以上两式, 可得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x)h^2+o(h^2)}{h^2}=f''(x).$$

5. 利用三阶泰勒公式求下列各数的近似值, 并估计误差:

(1) $\ln 1.2$;　　(2) $\sin 18^{\circ}$.

解 (1) 选用$\ln(1+x)$在点$x=0$处的带拉格朗日型余项的3阶泰勒公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4(1+\theta x)^4},\ 0<\theta<1$$

来计算近似值. 取$x=0.2$, 保留四位有效数字, 有

$$\ln 1.2\approx 0.2-\frac{0.2^2}{2}+\frac{0.2^3}{3}=\frac{0.548}{3}\approx 0.1827.$$

误差为

$$|R_3|=\left|-\frac{x^4}{4(1+\theta x)^4}\right|_{x=0.2}<\frac{0.2^4}{4}=4\times 10^{-4}.$$

(2) 选用$\sin x$在点$x=0$处的带拉格朗日型余项的$2m$＋1阶泰勒公式(令m=1)

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{\sin(\theta x+4\cdot\frac{\pi}{2})}{4!}x^4=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{\sin(\theta x)}{4!}x^4, 0<\theta<1$$

来计算近似值. 取$x=18^\circ=\frac{\pi}{10}$, 保留四位有效数字, 有

$$\sin 18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{10})^3\approx 0.3090.$$

误差为

$$|R_3|=\left|\frac{\sin(\theta x)}{4!}x^4\right|_{x=\frac{\pi}{10}}<\frac{1}{4!}(\frac{\pi}{10})^4\approx 4\times 10^{-4}.$$

6. 利用带皮亚诺型余项的麦克劳林公式求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)]-x[1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)]}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})]=\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{1}{2}-x^2\cdot o(\frac{1}{x^2})]=\frac{1}{2}$.