第一章总习题

1. 填空题:

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\le 0, \\ \cos x, & x>0, \end{cases}$ 则 $f(-1)=$ __e__ ,

$f(1-x^2)=$ $\underline{\begin{cases} e^{x^2-1}, & |x|\ge 1, \\ \cos(1-x^2), & |x|<1; \end{cases}}$

(2) 设函数 $f(x)=\lg\dfrac{x}{x-2}+\arcsin\dfrac{x}{3}$, 则它的定义域是 __$[-3,0)\cup(2,3]$__ ;

(3) 若 $f(x)<g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$, 则 A 和 B 的关系是

__$A\le B$__ ;

(4) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的充分必要条件是 __$f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x_0)$__ .

解 (1) 略;

(2) 由 $\dfrac{x}{x-2}>0$, 且 $-1\le\dfrac{x}{3}\le 1$ 得, 函数定义域为 $[-3,0)\cup(2,3]$;

(3) 略;

(4) 略.

2. 下列四个命题中正确的是(B).

(A) 有界数列必定收敛; (B) 无界数列必定发散;

(C) 发散数列必定无界; (D) 单调数列必有极限.

解 略.

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y(y\ne 0)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\sin\dfrac{y_n}{x_n}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\sin\dfrac{y_n}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{y_n}{x_n}}{\dfrac{y_n}{x_n}}\cdot y_n=y$.

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-2x+3})$;

(3) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1-x}{1-x^2})^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\mathrm{e}^{x^2}-1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}(c>0)$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n}), |a|<1$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!})$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\cdot\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$

$$=\cos\frac{a+a}{2}\cdot1=\cos a;$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-2x+3})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-2x+3}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{3}{2};$$

(3) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1-x}{1-x^2})^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1+x})^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\mathrm{e}^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\frac{1}{2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}=[\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2 x)^{\frac{1}{3\tan^2 x}}]^3=\mathrm{e}^3$;

(6) 设 k 为任一个大于 $2c$ 的自然数，则当 $n>k$ 时，

$$0<\frac{c^n}{n!}=(\frac{c}{1}\cdot\frac{c}{2}\cdots\frac{c}{k})(\frac{c}{k+1}\cdot\frac{c}{k+2}\cdots\frac{c}{n})<c^k\cdot(\frac{1}{2})^{n-k}=\frac{(2c)^k}{2^n},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2c)^k}{2^n}=0$，由夹逼准则，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-a}(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$

$$=\frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a^{2^{n+1}})=\frac{1}{1-a};$$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!})=\lim\limits_{n\to\infty}[(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!})+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})\cdots+(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!})]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1!}-\frac{1}{(n+1)!})=1$.

5. 已知当 $x\to 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 为等价无穷小, 求数 a.

解 由已知, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a=1$, 故 $a=-\frac{3}{2}$.

6. 确定常数 a 及 b 的值, 使下列极限等式成立.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2a}{x-a})^x=8$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2a}{x-a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3a}{x-a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3a}{x-a})^{\frac{x-a}{3a}\cdot\frac{3ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{3a}=8$,

所以 $a=\ln 2$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2-x+1)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=0$, 故必有 $a^2=1$, 且

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-(1+2ab)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=\frac{-(1+2ab)}{1+a}=0$,

故 $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$.

7. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{2^x-1}=3$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(2^x-1)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{2^x-1}=3$, 故必有 $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})=0$,

因为 $2^x-1\sim\ln 2\cdot x$, $\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})\sim\frac{f(x)}{\sin x}$, 所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{2^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{\sin x}}{\ln 2\cdot x}=\frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x\sin x}=\frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=3,$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=3\ln 2$.

8. 写出下列函数的连续区间与间断点，并指出间断点的类型:

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$;

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n}\ (x>0)$.

解 (1) 易知连续区间为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，因为

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}(x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,\quad \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}(x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

故 $x=1$ 是第二类间断点;

(2) 当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln[\mathrm{e}^n(1+(\frac{x}{\mathrm{e}})^n]}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}[1+\frac{\ln(1+(\frac{x}{\mathrm{e}})^n)}{n}]=\lim_{n\to\infty}[1+\frac{(\frac{x}{\mathrm{e}})^n}{n}]=1;$$

当 $x=\mathrm{e}$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2\mathrm{e}^n)}{n}=1$;

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln[x^n(1+(\frac{\mathrm{e}}{x})^n]}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}[\ln x+\dfrac{\ln(1+(\frac{\mathrm{e}}{x})^n)}{n}]$

$$=\lim_{n\to\infty}[\ln x+\frac{(\frac{\mathrm{e}}{x})^n}{n}]=\ln x.$$

即 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le\mathrm{e},\\ \ln x, & x>\mathrm{e},\end{cases}$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处，$\lim\limits_{x\to e^+}f(x)=\ln\mathrm{e}=1$，$\lim\limits_{x\to e^-}f(x)=1$ ，

故 $f(x)$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处连续，故函数连续区间为 $(0,+\infty)$.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\ge0,\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0,\end{cases}$ 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，应如何选择数 a?

解　易知函数在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上连续，要是函数在 $x=0$ 处也连续，则

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}=f(0)=\frac{1}{2},$$

故 $a=1$.

10.　设常数 $a>0$, $b>0$ ，证明方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

证　令函数 $f(x)=(x-b)-a\sin x$ ，$f(0)=(0-b)-a\sin 0=-b<0$ ，
$f(a+b)=(a+b-b)-a\sin(a+b)=a-a\sin(a+b)$ ，

当 $\sin(a+b)<1$ 时，$f(a+b)>0$ ，由零点定理，至少存在一点 $\xi\in(0,a+b)$ ，使得 $f(\xi)=0$ ，即 ξ 为原方程的根，它是正根且不超过 $a+b$ ；

当 $\sin(a+b)=1$ 时，$f(a+b)=0$ ，则 $a+b$ 是原方程的正根，且不超过 $a+b$.

11.　设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$ ，证明：在 $[0,2a]$ 上至少存在一点 ξ ，使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

证　构造函数 $F(x)=f(x)-f(x+a)$ ，则 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且

$$F(0)=f(0)-f(a),\quad F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0),$$

若 $f(0)=f(a)$ ，则 $\xi=0$ 即是满足 $f(\xi)=f(\xi+a)$ 的点；

若 $f(0)\neq f(a)$ ，则必有 $F(0)$ 与 $F(a)$ 异号，故由零点定理，至少存在一点 $\xi\in(0,a)$ ，使得 $F(\xi)=0$ ，即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

综上，至少存在一点 $\xi\in[0,a]\subset[0,2a]$ ，使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

12.　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 个正数，并且它们的和等于 1 ，证明：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么对于区间 $[a,b]$ 上的任意 n 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ，至少有一点 $\xi\in[a,b]$ ，使得

$$f(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k).$$

证　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故存在最大最小值，不妨设

$$M=\max\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\},\quad m=\min\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\},$$

则

$$m=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k m\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k M=M,$$

由介值定理，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$ ，使得 $f(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)$.