第二章总习题

1. 填空题

(1) 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3-x)-f(3)}{2x}=$ __-1__ .

(2) 设 $f(x)=\ln x$，则 $f'(1)=$ _1_ ，$[f(1)]'=$ __0__ .

(3) 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $y'''\big|_{x=\sqrt{3}}=$ __$\dfrac{5}{32}$__ .

(4) $f(x)$ 在 x_0 处可导是 $f(x)$ 在 x_0 处连续的__充分__条件，是 $f(x)$ 在 x_0 处可微的__充要__条件.

(5) 设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数，则 $\mathrm{d}y=$ __$\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln y)}$__ .

(6) 曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点 $(\dfrac{\pi}{2},1+\dfrac{\pi}{2})$ 处的切线方程是 __$y=x+1$__ .

(7) 曲线 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\sin 2t, \\ y=\mathrm{e}^t\cos t \end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为 __$2x+y-1=0$__ .

(8) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3, & x\le 0, \\ ax+b, & x>0, \end{cases}$ 在定义域内处处可微，则 $a=$ _2_ ，$b=$ _3_ .

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3-x)-f(3)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{1}{2}\dfrac{f(3-x)-f(3)}{-x}=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-1$.

(2) $f'(1)=f'(x)\big|_{x=1}=\dfrac{1}{x}\Big|_{x=1}=1$，$[f(1)]'=0$.

(3) $f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$,

$f''(x)=-\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}2x=-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$,

$$f'''(x)=-(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}2x=-(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(1+x^2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$f'''(x)\big|_{x=\sqrt{3}}=-(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}\Big|_{x=\sqrt{3}}=\frac{5}{32}.$$

(4) 根据有关概念可知.

(5) 对方程 $x=y^y=\mathrm{e}^{y\ln y}$ 两边求微分，得

$$\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{y\ln y}(\ln y+1)\mathrm{d}y=x(\ln y+1)\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln y)}.$$

(6) $y'=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x,\quad y'\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$. 故而曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点 $(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2})$ 处的切线方程是

$$y-1-\frac{\pi}{2}=x-\frac{\pi}{2}，\text{即 } y=x+1.$$

(7) 点 $(0,1)$ 对应的参数为 $t=0$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=\frac{\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t}{\mathrm{e}^t\sin 2t+2\mathrm{e}^t\cos 2t}\Big|_{t=0}=\frac{1}{2}$，曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin 2t,\\ y=\mathrm{e}^t\cos 2t\end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为

$$y-1=-2x，\text{即 } 2x+y-1=0.$$

(8) 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微，可知

$$f(0+0)=b=f(0)=3,$$

$$f_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+2x}{x}=2,$$

$$f_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{ax+3-3}{x}=a,$$

$$f_+(0)=a=f_-(0)=2.$$

2. 单项选择题

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的左导数与右导数存在且相等，是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的 (B).

(A) 必要非充分条件; (B) 充分非必要条件;

(C) 充分必要条件; (D) 既非充分条件, 又非必要条件.

(2) 设 $f(x)$ 对于任意 x 的都有 $f(-x)=-f(x)$, 且 $f'(-x_0)=-k$, 则 $f'(x_0)=$ (B).

(A) k; (B) $-k$; (C) $-\dfrac{1}{k}$; (D) $\dfrac{1}{k}$.

(3) 曲线 $y=x^3-3x$ 上切线平行于 x 轴的点是 (C).

(A) $(0,0)$; (B) $(1,2)$; (C) $(-1,2)$; (D) $(0,2)$.

(4) 设 $f(x)$ 为可导函数, 且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 (D).

(A) 2; (B) -1; (C) $\dfrac{1}{2}$; (D) -2.

(5) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义, 若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时, 恒有 $|f(x)|\le x^2$, 则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的 (C).

(A) 间断点; (B) 连续而不可导点;
(C) 可导, 且 $f'(0)=0$; (D) 可导点, 且 $f'(0)\ne 0$.

(6) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\ne 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 则函数在 $x=1$ 处 (A).

(A) 不连续; (B) 连续但不可导;
(C) 可导, 但导函数不连续; (D) 可导且导函数连续.

(7) 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x<0,\\ ax^2+bx+c, & x\ge 0,\end{cases}$ 且 $f''(0)$ 存在, 则 (C).

(A) $a=\dfrac{1}{2},b=1,c=-1$; (B) $a=-\dfrac{1}{2},b=c=1$;

(C) $a=\dfrac{1}{2},b=c=1$; (D) $a=-\dfrac{1}{2},b=-1,c=1$.

(8) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是 (D).

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}h[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)]$ 存在; (B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在;

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在; (D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

解 (1) 根据有关概念与定理，应选 B.

(2) 方程 $f(-x)=-f(x)$ 两边对 x 求导，得

$$-f'(-x)=-f'(x)\text{，即 } f'(-x)=f'(x),$$

所以 $f'(x_0)=f'(-x_0)=-k$，故应选 B.

(3) 由题意知，在切点处 $y'=3x^2-3=0$，从而 $x=\pm 1$，切点为 $(1,-2)$ 或 $(-1,2)$，故应选 C.

(4) $f'(1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-2$，故应选 D.

(5) $0\le |f(x)|\le x^2$，所以 $f(0)=0$，由夹逼准则知，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，故而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 由于

$$0\le\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\frac{x^2}{|x|}=|x|,$$

由夹逼准则知，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$，故应选 C.

(6) $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x^2-1)}{x-1}=-2$，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，故应选 A.

(7) 由题意知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，有

$$c=f(0)=f(0-0)=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2+bx+1-1}{x}=b,$$

由于 $f''(0)$ 存在，所以 $f'_+(0)=f'_-(0)$，从而 $b=1$.

$$f'(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\le 0,\\ 2ax+1, & x>0,\end{cases}$$

$$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1,$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2ax+1-1}{x}=2a,$$

由于 $f''(0)$ 存在，因而 $f''_+(0)=f''_-(0)$，得 $a=\dfrac{1}{2}$，故应选 C.

(8) 由于 $f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$， 故应选 D.

3. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义的函数，且具有如下性质:

(1) $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$;

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且已知 $f(0)=0,\ g(0)=1$.

证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导.

证 对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)g(h)+f(h)g(x)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)\left[g(h)-g(0)\right]+f(h)g(x)-f(0)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}f(x)g'(0)+g(x)f'(0).$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导.

4. 设 $f(x)=2^{|a-x|}$，求 $f'(x)$.

解 (1) $x>a$ 时，$f'(x)=(2^{x-a})'=2^{x-a}\ln2$.

(2) $x<a$ 时，$f'(x)=(2^{a-x})'=-2^{a-x}\ln2$.

(3) $x=a$ 时，

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{2^{x-a}-1}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{e^{(x-a)\ln2}-1}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{1+(x-a)\ln2-1}{x-a}=\ln2,$$

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{2^{a-x}-1}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{e^{(a-x)\ln2}-1}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{1+(a-x)\ln2-1}{x-a}=-\ln2.$$

所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导.

5. 求下列函数的导数:

(1) $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\sin\dfrac{1}{x}$; (2) $y=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$;

(3) $y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$; (4) $y=(1+x^3)^{\cos x^2}$;

解 (1) $y'=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\sec^2\dfrac{1}{x}(-\dfrac{1}{x^2})\sin\dfrac{1}{x}+\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\cos\dfrac{1}{x}(-\dfrac{1}{x^2})$

$$=-\frac{1}{x^2}\sec\frac{1}{x}\tan\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x^2}(\sec\frac{1}{x}\tan\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}.$$

(2) $y'=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}(\mathrm{e}^x+\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}})=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$.

(3) 两边取绝对值后取对数，得

$$\ln|y|=2\ln|x+5|+\frac{1}{3}\ln|x-4|-5\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x+4|,$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)},$$

$$y'=\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}\right].$$

(4) $y'=\left[\mathrm{e}^{\cos x^2\ln(1+x^3)}\right]'$

$$=\mathrm{e}^{\cos x^2\ln(1+x^3)}\left[-2x\sin x^2\ln(1+x^3)+\cos x^2\frac{3x^2}{1+x^3}\right]$$

$$=(1+x^3)^{\cos x^2}\left[\frac{3x^2\cos x^2}{1+x^3}-2x\ln(1+x^3)\sin x^2\right].$$

6. 设函数 $\varphi(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，且 $\varphi(x)\not\equiv 0$，又设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，$F(x)=|x-a|\varphi(x)$．试讨论 $f(x)$ 与 $F(x)$ 在点 $x=a$ 处的可导性.

解 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\varphi(a)$,

$$F'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\varphi(a),$$

$$F'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{(a-x)\varphi(x)}{x-a}=-\varphi(a).$$

若 $\varphi(a)=0$，$F(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $F'(a)=0$；若 $\varphi(a)\neq 0$，$F(x)$ 在 $x=a$ 处不可导.

7. 设函数 $y=[f(x^2)]^{\frac{1}{x}}$，其中 f 为可微的正值函数，求 $\mathrm{d}y$.

解 由于 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln f(x^2)}$,

$$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln f(x^2)}\left[-\frac{1}{x^2}\ln f(x^2)+\frac{1}{x}\frac{f'(x^2)}{f(x^2)}\cdot 2x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left[f(x^2)\right]^{\frac{1}{x}}\left[\frac{2f'(x^2)}{f(x^2)}-\frac{\ln f(x^2)}{x^2}\right]\mathrm{d}x.$$

8. 求下列函数的n阶导数:

(1) $y=x^2\ln(1+x)$，在$x=0$处;　　　　(2) $\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$.

解 (1) $y'=2x\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{1+x}$,

$$y''=2\ln(1+x)+\frac{2x}{1+x}+\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=2\ln(1+x)+\frac{4x}{1+x}-\frac{x^2}{(1+x)^2},$$

$$y^{(n)}=x^2\left[\ln(1+x)\right]^{(n)}+n(x^2)'\left[\ln(1+x)\right]^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}(x^2)''\left[\ln(1+x)\right]^{(n-2)}$$

$$=x^2(\frac{1}{1+x})^{(n-1)}+2nx(\frac{1}{1+x})^{(n-2)}+n(n-1)(\frac{1}{1+x})^{(n-3)}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!x^2}{(1+x)^n}+\frac{(-1)^{n-2}2n(n-2)!x}{(1+x)^{n-1}}+\frac{(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}.$$

$$y^{(n)}\Big|_{x=0}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n-2},n\ge 3,\\ 0, \qquad n=1,2.\end{cases}$$

(2) $$y=\frac{x(x^2-3x+2)+3(x^2-3x+2)+7(x-1)+1}{(x-1)(x-2)}=x+3+\frac{8}{x-2}-\frac{1}{x-1},$$

$$y'=1-\frac{8}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2},$$

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n 8n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}=(-1)^n n!\left[\frac{8}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right],\ (n\ge 2).$$

9. 设函数$y=y(x)$是由方程$\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$所确定，求$y''(0)$.

解 由方程$\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$知，$y\big|_{x=0}=1$， 方程两边对$x$求导，得

$$\mathrm{e}^y y'+y+xy'=0,$$

将 $y|_{x=0}=1$ 代入，得 $y'|_{x=0}=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 继续对上式两边对 x 求导，得

$$\mathrm{e}^y(y')^2+\mathrm{e}^y y''+2y'+xy''=0,$$

将 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 代入，得 $y''|_{x=0}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

10. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0,\end{cases}$ 所确定的隐函数，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

解 $t=0$ 时，$x=3$，$y=1$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t+2,\qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=6,$$

从而 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=2$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}=6$，方程 $\mathrm{e}^y\sin t-y+1=0$ 两边对 t 求导，得

$$\mathrm{e}^y\sin t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^y\cos t-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0,$$

从而 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\mathrm{e}$，继续对上式两边对 t 求导，得

$$(\mathrm{e}^y\sin t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^y\cos t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^y\sin t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cos t-\mathrm{e}^y\sin t-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=0,$$

从而 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}=2\mathrm{e}^2$ ，

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\bullet\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\bullet\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^3}=\frac{2\mathrm{e}^2\cdot 2-6\mathrm{e}}{2^3}=\frac{2\mathrm{e}^2-3\mathrm{e}}{4}.$$

11. 设某商品平均单位成本 $\overline{C}$/公斤为月产量 x 公斤的函数

$$\overline{C}=\overline{C}(x)=\frac{100}{x}+2.$$

如果每公斤售价 p (单位为元)与需求量 x 满足

$$x=800-100p,$$

求需求量为 250 公斤时的边际成本及边际收益.

解 设需求量为 x 时，成本为 y，收益为 z，则有

$$y=(\frac{100}{x}+2)x=100+2x,$$

$$z = px = \frac{800 - x}{100} x = 8x - \frac{x^2}{100},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=250} = 2, \quad \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=250} = 8 - \left.\frac{x}{50}\right|_{x=250} = 3.$$

所以需求量为 250 公斤时的边际成本为 2 元/公斤, 边际收益为 3 元/公斤.

12. 甲船以 6km/h 的速率向东行驶, 乙船以 8km/h 的速率向南行驶. 在中午十二点正, 乙船位于甲船之北 16km 处, 问下午一点正两船相离的速率为多少?

解 以中午十二点正, 甲船所在位置为坐标原点, 向东方向为 x 轴正方向, 向南的方向为 y 轴的正方向, 建立平面直角坐标系. 同时以正午十二点作为计量时间的起点, t 时刻甲船位置为 $(6t, 0)$, 乙船的位置为 $(0, -16 + 8t)$, 此时甲乙两船的距离为

$$s = \sqrt{(6t)^2 + (8t - 16)^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{2(6t)6 + 2(8t - 16)8}{2\sqrt{(6t)^2 + (8t - 16)^2}} = \frac{100t - 128}{\sqrt{(6t)^2 + (8t - 16)^2}},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} = -2.8(\mathrm{km/h}).$$

13. 求 $\sqrt[10]{1000}$ 的近似值.

解 函数 $\sqrt[10]{x}$ 的增量为

$$\Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{1}{10}} - x^{\frac{1}{10}} \approx \mathrm{d}y = (x^{\frac{1}{10}})' \Delta x = \frac{1}{10} x^{-\frac{9}{10}} \Delta x,$$

$$(x + \Delta x)^{\frac{1}{10}} \approx x^{\frac{1}{10}} + \frac{1}{10} x^{-\frac{9}{10}} \Delta x,$$

在上式中, 取 $x = 2^{10}$, $\Delta x = -24$, 得

$$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10} - 24} \approx 2 - \frac{24}{10\sqrt[10]{(2^{10})^9}} \approx 1.9953.$$

14. 已知单摆的振动周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 其中 $g = 980\mathrm{cm/s^2}$, l 为摆长(单位为 cm). 设原摆长 20cm, 为使周期 T 增大 0.05s, 摆长约需加长多少?

解 $l=\dfrac{gT^2}{4\pi^2}$，方程两边求微分得 $\mathrm{d}l=\dfrac{gT}{2\pi^2}\mathrm{d}T=\dfrac{\sqrt{gl}}{\pi}\mathrm{d}T$，$l=20,\ \mathrm{d}T=0.05$ 时，$\mathrm{d}l\approx 2.23(\mathrm{cm})$.