第七节

一般周期函数的傅里叶级数

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 周期 $T=2l$ 的函数展开成傅里叶级数

思路：$\underset{x\in[-l,l]}{\overset{T=2l}{f(x)}} \xlongequal{x=\frac{l}{\pi}t} \underset{t\in[-\pi,\pi]}{\overset{T=2\pi}{f(\frac{l}{\pi}t)=\varphi(t)}}$ 展开

$$f(x)=\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\quad\left(t=\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\overset{t=\frac{\pi x}{l}}{=\!=\!=}\ \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\frac{\pi}{l}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

定理11.16 (展开定理)

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$满足收敛定理的条件，则它的傅 里叶级数处处收敛，且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$=\begin{cases} f(x), & \text{当}x\text{为}f(x)\text{的连续点时;} \\ \dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}, & \text{当}x\text{为}f(x)\text{的间断点时,} \end{cases}$$

其中系数 a_n, b_n为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

结论 (1) 若以 $2l$ 为周期的周期函数 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 上为奇函数，则

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad \text{(连续点处)}$$

其中 $b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots)$

(2) 若以2l 为周期的周期函数 $f(x)$ 在$(-l, l)$

上为偶函数，则

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$ (连续点处)

其中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots)$

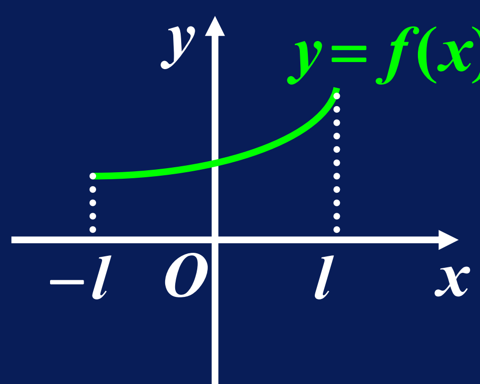
注 傅里叶级数总收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

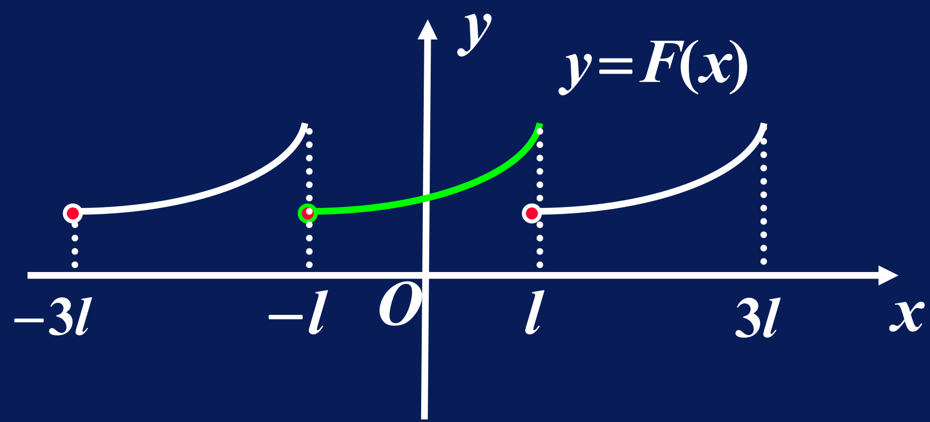
(在 $f(x)$ 的间断点 x 处)

(二) 定义在 $[-l, l]$和$[0, l]$区间上的函数展成傅里叶级数

1. 将$[-l, l]$上的函数展成傅里叶级数

思想　$\begin{array}{c} f(x) \\ x \in [-l, l] \end{array} \xrightarrow{\text{周期延拓}} \begin{array}{c} F(x) \\ T = 2l \end{array} \xrightarrow{\text{傅里叶展开}}$



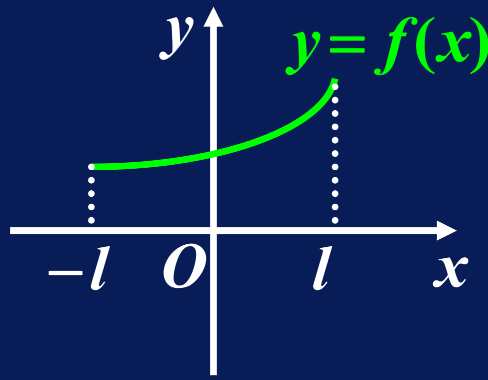


1° 对 $f(x)$ 进行周期延拓 ：

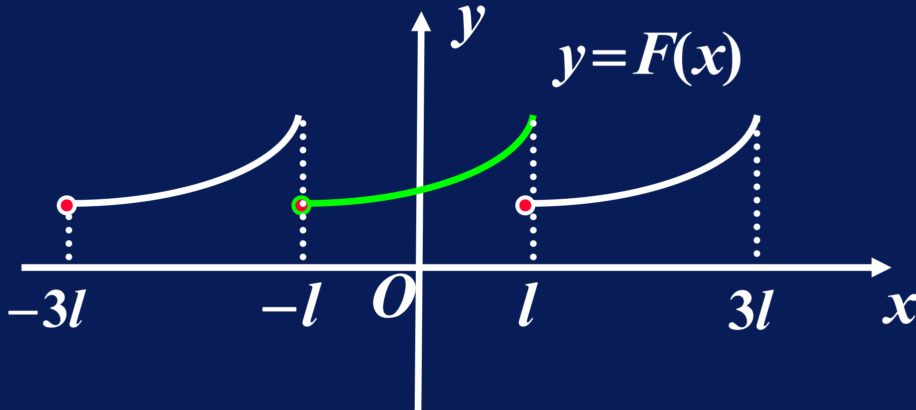
考虑 $y = F(x)$ $(T = 2l)$

满足： $F(x) = f(x),\ x \in (-l, l]$

且 $F(x+2l) = F(x)$



2° 将 $F(x)$ 展开成周期为 $2l$ 的傅里叶级数



$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

($x \in (-\infty, +\infty)$， x 为 $F(x)$ 的连续点)

3° 限制 $x \in [-l, l]$,

$\because \quad F(x) = f(x),\ x \in (-l, l]$

$\therefore$ 当 $x \in (-l, l)$，且x为$f(x)$的连续点时，

$$f(x) = F(x) = S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$$

当 $x_0 \in (-l, l)$，且x_0为$f(x)$的间断点时，

$$S(x_0) = \frac{F(x_0^-) + F(x_0^+)}{2} = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

当 $x_0 = \pm l$ 时，$S(x_0) = \dfrac{F(l^-) + F(-l^+)}{2} = \dfrac{f(l^-) + f(-l^+)}{2}$

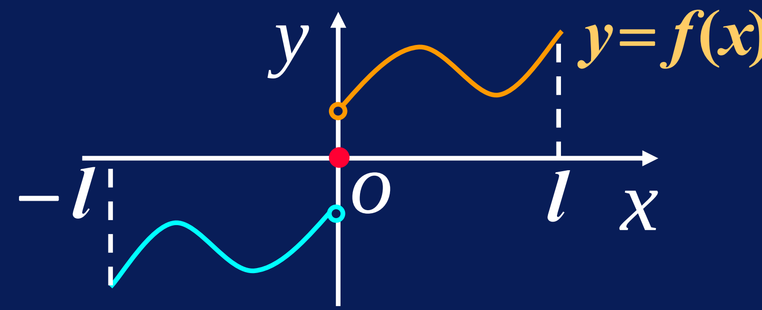
其中傅里叶系数

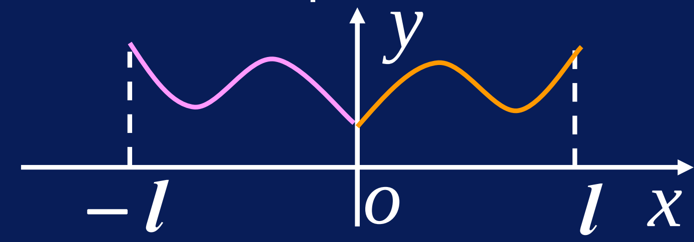
$$
\begin{cases}
a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} F(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad (n = 0,1,2,\cdots) \\
\quad = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \\
\\
b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} F(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad (n = 1,2,\cdots) \\
\quad = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x.
\end{cases}
$$

2. 将$[0, l]$上的函数展成正弦级数与余弦级数

$f(x)$

$x \in [0, l]$ $\Longrightarrow$ 奇延拓 / 偶延拓





周期延拓

$\Longrightarrow$ $F(x)$ (展开)

限制

$\Longrightarrow$ $f(x)$展成正弦级数

(余)

$x \in [0, l]$

*3.将[a,b]上的函数展成傅里叶级数（周期T=b-a）

思路： $f(x),\ \ x\in[a,b]$

$$\underline{\underline{x=t+\frac{b+a}{2}}}\quad f(t+\frac{b+a}{2})=F(t),\ \ t\in[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}]$$

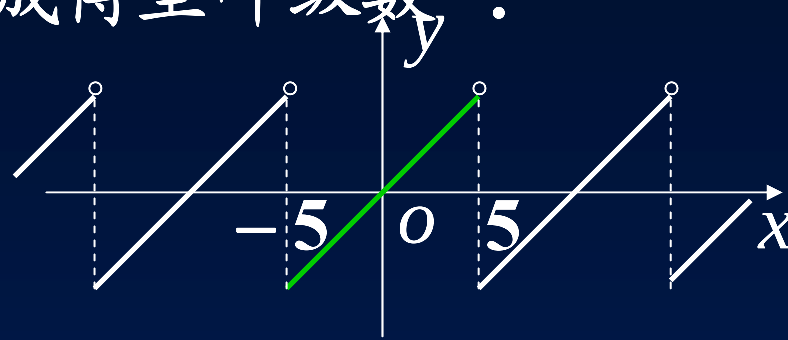
傅里叶展开

$\Longrightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的傅里叶展开式．

代入$t=x-\dfrac{b+a}{2}$

二、典型例题

例1 设$f(x)$的周期 $T=10$，且当 $-5\le x<5$时，$f(x)=x$，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数 .



解 $l=5$，$f(x)$:奇函数，

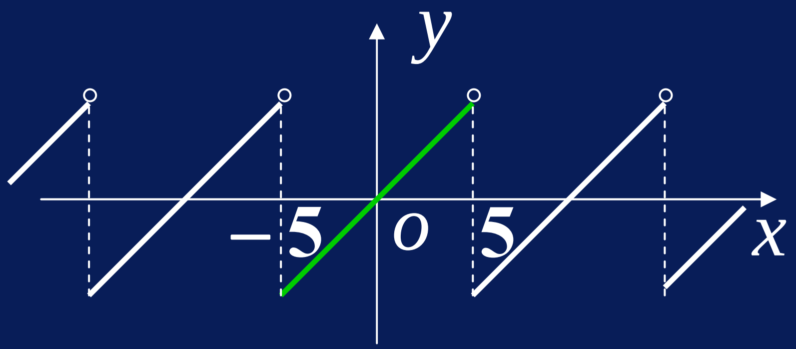
$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\int_0^5 x\sin\frac{n\pi x}{5}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{5}-\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right]_0^5$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{10}{n\pi}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$a_n = 0,\ b_n = (-1)^{n+1}\frac{10}{n\pi}$$



因 $f(x)$ 满足狄利克雷条件， 故有傅里叶展开式：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{5} = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq 10k + 5, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

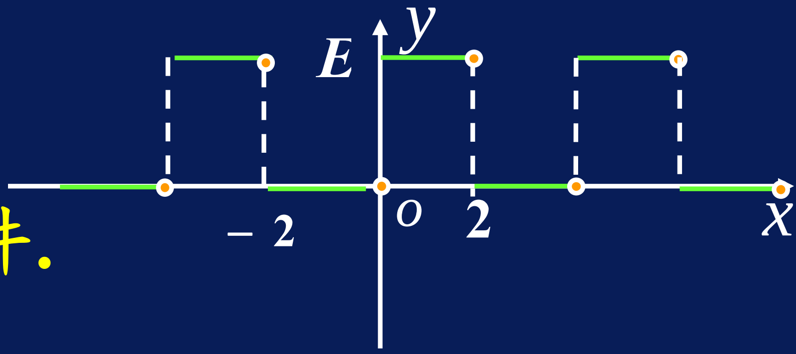
当 $x = 10k + 5$ 时，傅里叶级数收敛到

$$S(10k + 5) = \frac{5 + (-5)}{2} = 0.$$

例2 设 $f(x)$ 周期 $T=4$，$[-2,2)$ 上表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x<0\\ E, & 0\le x<2\ (E\ne 0,\text{为常数})\end{cases}$$

试将$f(x)$展成傅里叶级数.



解 1° $f(x)$满足收敛定理条件.

$f(x)$的间断点： $x_m=2m\ \ (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

傅里叶级数之和函数:

$$S(x_m)=\frac{f(x_m^-)+f(x_m^+)}{2}=\frac{E}{2}.$$

$l=2$,

当 $x \neq x_m$ 时，$f(x)$连续

$$f(x)=S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$(x \neq 2m,\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

2° 确定傅里叶系数：a_n, b_n

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x<0\\ E, & 0\le x<2\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}E\,\mathrm{d}x\right]=E$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} E\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x\right]$$

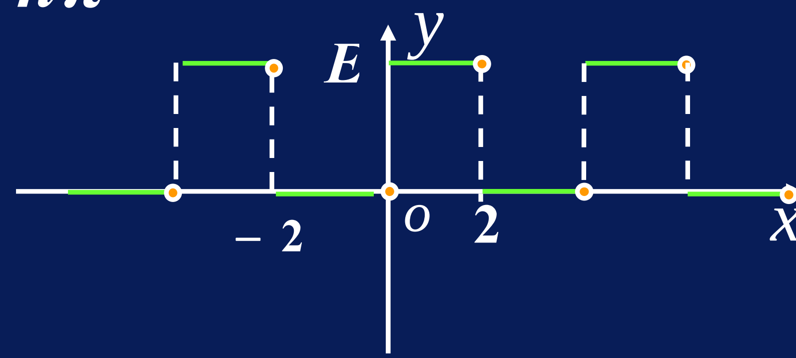
$$= \left.\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right|_0^2 = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x < 0 \\ E, & 0 \le x < 2 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} E\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2 E\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{E}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}0, & n=2,4,\cdots\\ \dfrac{2E}{n\pi}, & n=1,3,\cdots\end{cases}$$



3° 所求函数的傅里叶展开式为:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$=\frac{E}{2}+\frac{2E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}x$$

$$(x\in R,\ \ x\neq 2m,\ \ m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&a_0=E,\\&a_n=0\\&(n=1,2,\cdots)\end{aligned}}$$

例3 将$f(x)=e^x$在$[-\pi,\pi]$上展成傅里叶级数

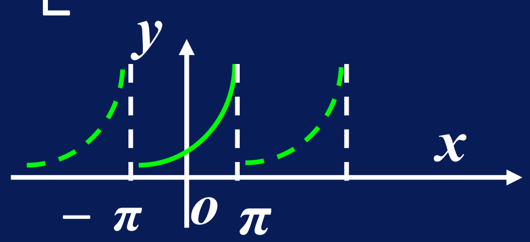
解 (周期延拓 $\Longrightarrow$ 傅里叶展开 $\Longrightarrow$ 限制)

$f(x)$在$(-\pi,\pi)$上连续，周期延拓后的函数的傅里叶级数在$(-\pi,\pi)$内收敛到$f(x)$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}e^x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}[e^{\pi}-e^{-\pi}],$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x}{1+n^2}(n\sin nx+\cos nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{(-1)^n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{\pi(1+n^2)},$$



$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x}{1+n^2}(\sin nx - n\cos nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} n}{\pi(1+n^2)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right).$$

傅里叶展式

$$f(x) = \frac{1}{\pi}[e^{\pi} - e^{-\pi}]\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)\right]$$

$$(-\pi < x < \pi)$$

注 在 $x = \pm\pi$ 处，傅立叶级数收敛到

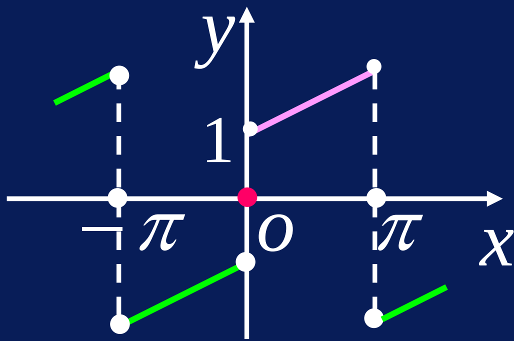
$$\frac{1}{2}[f(-\pi^{+}) + f(\pi^{-})] = \frac{1}{2}[e^{-\pi} + e^{\pi}].$$

例4 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le \pi)$ 分别展成正弦级数与余弦级数.

解 (1)展成正弦级数. 将 $f(x)$ 作奇延拓及周期延拓.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$



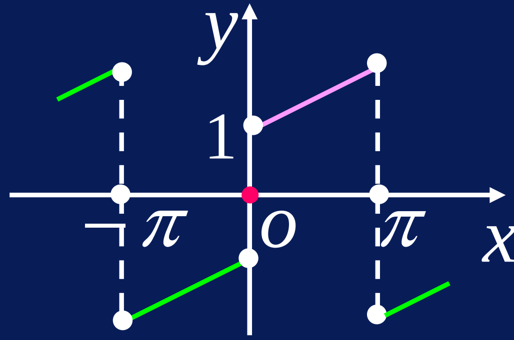
$$=\frac{2}{n\pi}(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\[2ex] -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n = 2k-1 \\ -\dfrac{1}{k}, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

故

$$x+1 = \frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x\right.$$



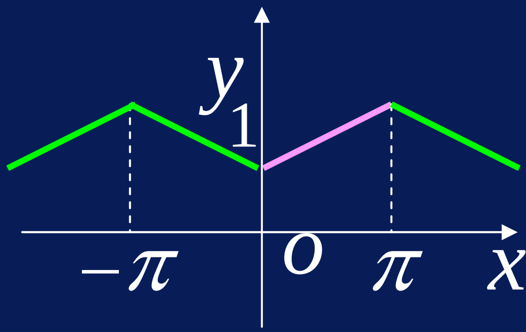
$$\left. + \frac{\pi+2}{3}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \cdots\right] \qquad (0 < x < \pi)$$

注　在端点 $x = 0, \pi$，级数的和为 0 .

（与 $f(x) = x+1$ 的对应值不同）

(2)展成余弦级数. 将 $f(x)$ 作偶周期延拓.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^\pi = \pi + 2$$



$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^\pi$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

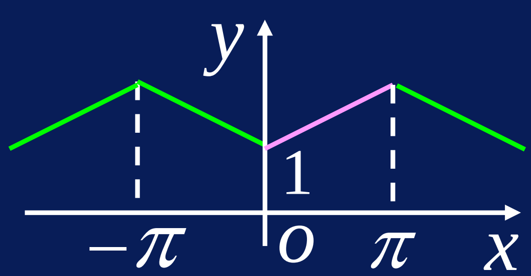
$$=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]$$

$(0\le x\le\pi)$

注 令 $x=0$ 可得

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

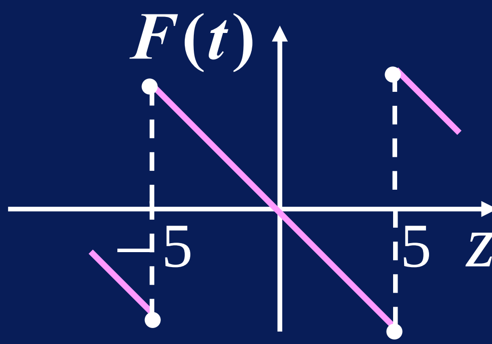
即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$



*例5 将 $f(x)=10-x\ (5<x<15)$ 展成傅里叶级数.

解 令 $t=x-10$， $F(t)=f(x)=f(t+10)=-t$

$(-5<t<5)$, 对奇函数 $F(t)$ 作周期延拓(周期 $T=10$).



$$a_n=0\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{5}\int_0^5 -t\quad \sin\frac{n\pi t}{5}\mathrm{d}t=(-1)^n\frac{10}{n\pi}$$

$$F(t)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi t}{5}\qquad (-5<t<5)$$

故 $$10-x=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}\qquad (5<x<15)$$

三、同步练习

1． 将 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 展成周期为2的傅立叶级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和. (91 考研)

2. 若 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 满足狄氏条件， 且 $\varphi(-x)=\psi(x)$, 求 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n, 及 a_n', b_n' 的关系 .

3. 交流电压 $E(t)=E\sin\omega t$ 经半波整流后负压消失, 试求半波整流函数 $f(t)$ 的傅里叶级数.

4. $f(x)=\pi x+x^2 \quad (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展式为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则系数 $b_3=$ ______ . (93 考研)

5. 写出 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上傅氏级数的和函数 .

6. 将 $f(x)=x \ \ (0<x<2)$展开成

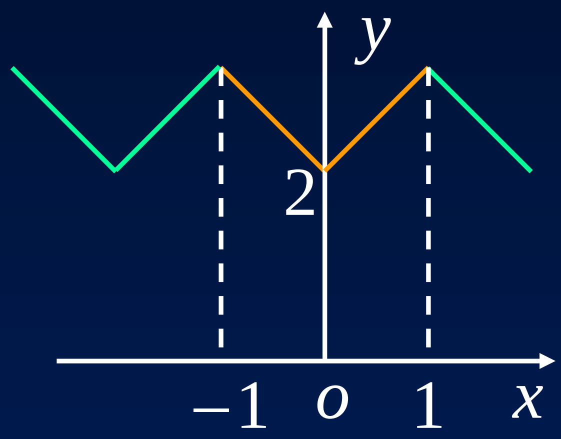
(1) 正弦级数; (2) 余弦级数.

7. 设 $f(x)=\pi x-x^2 \,(0<x<\pi)$, 又 $S(x)$是 $f(x)$的周期为2π的正弦级数展式的和函数, 求当 $x\in(\pi,2\pi)$时 $S(x)$的表达式 .

四、同步练习解答

1．将 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 展成周期为2的傅立叶级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和. (91 考研)

解 $f(x)$为偶函数, $b_n=0$



$$a_0=2\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}x=5$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

因 $f(x)$ 偶延拓后在$(-\infty,+\infty)$上连续, 故

$$2+|x|=\frac{5}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi,\quad x\in[-1,1]$$

$$2+|x|=\frac{5}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi \qquad x\in[-1,1]$$

注 (1) 令 $x=0$, 得 $2=\frac{5}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$

故 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}}$

$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$

2. 若 $\varphi(x)$、$\psi(x)$满足狄氏条件， 且 $\varphi(-x)=\psi(x)$,求 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$的傅里叶系数 a_n, b_n,及 a_n', b_n' 的关系 .

解 (1)先证 $\varphi(x),\psi(x)$周期相同 .

设 $\varphi(x)$周期为 $2l \Rightarrow \varphi(x+2l)=\varphi(x) \quad (*)$

$$\psi(x+2l)=\varphi(-x-2l)\overset{(*)}{=}\varphi(-x)=\psi(x)$$

$\Rightarrow \psi(x)$周期为 $2l$.

(2)取基本周期 $[-l,l]$，$\varphi(x)$的傅里叶系数 ：

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x$$

$$\underline{\underline{x=-t}}\;\frac{1}{l}\int_{l}^{-l}\varphi(-t)\cos\frac{n\pi t}{l}(-\,\mathrm{d}\,t)$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\psi(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,\mathrm{d}\,t = a_n'$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}\,x$$

$$\underline{\underline{x=-t}}\;\frac{1}{l}\int_{l}^{-l}\varphi(-t)\left(-\sin\frac{n\pi t}{l}\right)(-\,\mathrm{d}\,t)$$

$$=-\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\psi(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,\mathrm{d}\,t = -b_n'$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= a_n' \\ b_n &= -b_n' \end{aligned}}$$

方法2 (2) 取基本周期 $[0,2l]$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}\varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$\underline{\underline{x=2l-t}}\ \frac{1}{l}\int_{2l}^{0}\underline{\varphi(2l-t)}\cos\frac{n\pi}{l}(2l-t)(-\mathrm{d}t)$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^{2l}\underline{\psi(t)}\cos\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t=a_n'$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{x=2l-t}}\ \frac{1}{l}\int_{2l}^{0}\varphi(2l-t)\sin\frac{n\pi}{l}(2l-t)(-\mathrm{d}t)$$

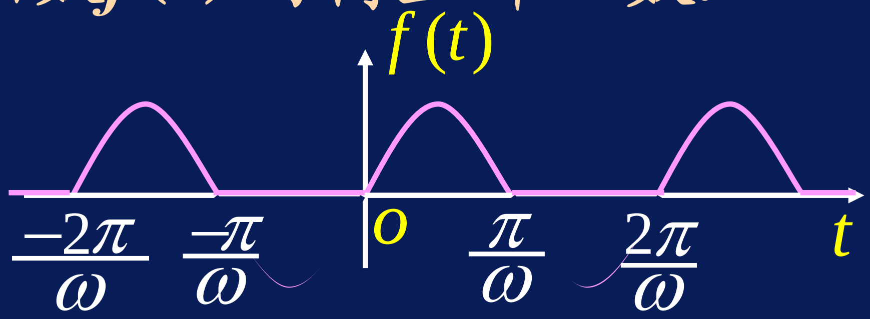
$$=\frac{1}{l}\int_0^{2l}\psi(t)\left(-\sin\frac{n\pi t}{l}\right)\mathrm{d}t=-b_n'$$

$$\varphi(2l-t)=\varphi(-t)=\psi(t)$$

$$a_n=a_n',\quad b_n=-b_n'$$

3. 交流电压 $E(t)=E\sin\omega t$ 经半波整流后负压消失, 试求半波整流函数 $f(t)$ 的傅里叶级数.

解 $f(t)$ 周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$



$[\frac{-\pi}{\omega},\frac{\pi}{\omega}]$ 上的表达式为

$$f(t)=\begin{cases} 0, & \dfrac{-\pi}{\omega}\le t<0 \\ E\sin\omega t, & 0\le t<\dfrac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

故 $a_n=\dfrac{\pi}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin\omega t\cos n\omega t\,\mathrm{d}t$

$$=\frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}[\sin(n+1)\omega t-\sin(n-1)\omega t]\mathrm{d}t$$

$$a_1=\frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}\sin 2\omega\ t\,\mathrm{d}\,t=\frac{E\omega}{2\pi}\left[-\frac{1}{2\omega}\cos 2\omega\ \right]_0^{\pi/\omega}=0$$

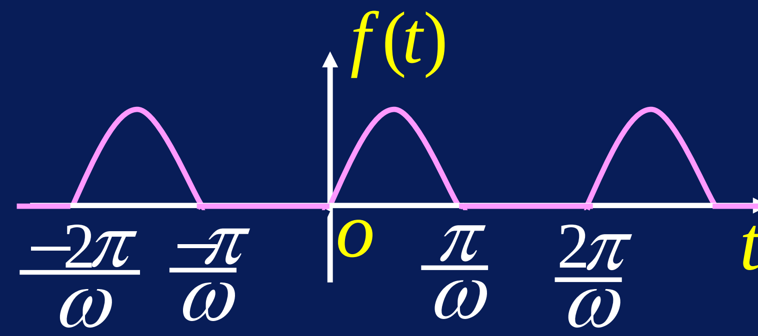
$n\neq 1$时， $$a_n=\frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\left[\sin(n+1)\omega\,t-\sin(n-1)\omega\,t\right]\mathrm{d}\,t$$

$$=\frac{E\omega}{2\pi}\left[-\frac{1}{(n+1)\omega}\cos(n+1)\omega t+\frac{1}{(n-1)\omega}\cos(n-1)\omega t\ \right]_0^{\pi/\omega}$$

$$=\frac{E}{2\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{n-1}\right]$$

$$=\frac{\left[(-1)^{n-1}-1\right]E}{(n^2-1)\pi}=\begin{cases}0\,, & n=2k+3\\ \dfrac{2E}{(1-4k^2)\pi}\,, & n=2k\end{cases}\qquad (k=0,1,\cdots)$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\sin\omega t\cdot\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$



$$= \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}\left[\cos(n-1)\omega t - \cos(n+1)\omega t\right]\mathrm{d}t$$

$$b_1 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\sin\omega t\cdot\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}(1-\cos 2\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{E\omega}{2\pi}\left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^{\pi/\omega} = \frac{E}{2}$$

$n > 1$ 时

$$b_n = \frac{E\omega}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)\omega t}{(n-1)\omega} - \frac{\sin(n+1)\omega t}{(n+1)\omega}\right]_0^{\pi/\omega} = 0$$

因半波整流函数 $f(t)$ 处处连续，

$$f(t) = \frac{E}{\pi} + \underbrace{\frac{E}{2}\sin\omega t + \frac{2E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-4k^2}\cos 2k\omega t}_{\text{交流部分}}$$

直流部分　　　交流部分　　$(-\infty < t < +\infty)$

注　$2k$ 次谐波振幅： $A_k = \frac{2E}{\pi}\frac{1}{4k^2-1}$，

k 越大振幅越小.

(实际应用中取前几项足以逼近 $f(x)$)

4. $f(x)=\pi x+x^2 \quad (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展式为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则系数 $b_3=$ <u>$2\pi/3$</u> . (93 考研)

解 $b_3=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,\mathrm{d}x$$

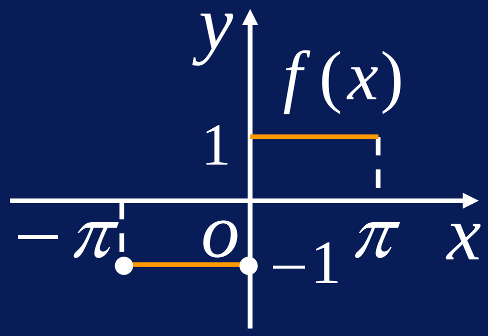
利用奇偶性

$$=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin 3x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi x}{3}\cos 3x+\frac{\pi}{9}\sin 3x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi$$

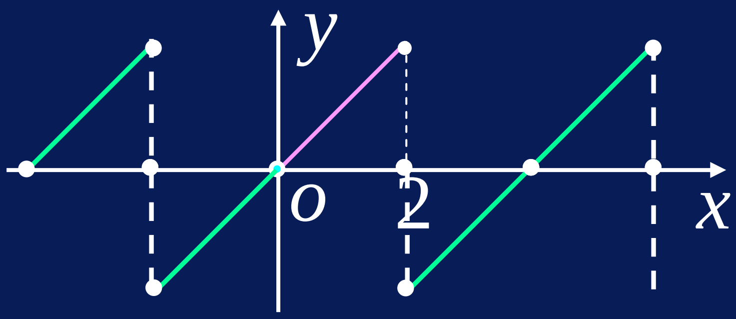
5. 写出 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上傅氏级数的和函数.

答案 $S(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ 0, & x=\pm\pi\end{cases}$



6. 将 $f(x)=x \quad (0<x<2)$展开成

(1) 正弦级数; (2) 余弦级数.



解 (1) 将 $f(x)$ 作奇周期延拓,

$$a_n = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x \cdot \sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

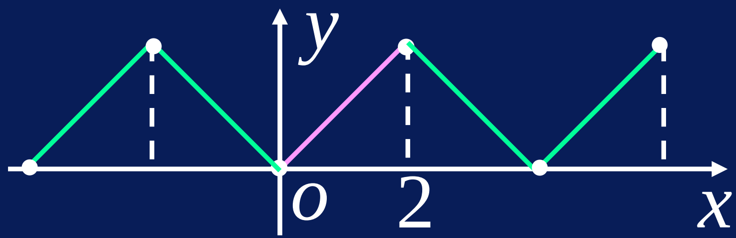
$$= \left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

$x=2k$ 处级数收敛于何值?

故 $$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2} \qquad (0<x<2)$$

(2) 将 $f(x)$ 作偶周期延拓,



$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2,4,\cdots \\ \dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 1,3,\cdots \end{cases}$$

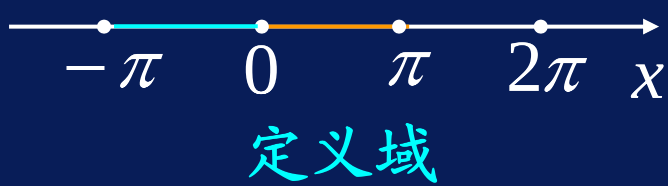
$$故\ f(x) = x = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2} \quad (0 < x < 2)$$

7. 设 $f(x)=\pi x-x^2\ (0<x<\pi)$， 又 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的周期为2π 的正弦级数展式的和函数,求当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $S(x)$ 的表达式 .

解　奇延拓： $F(x)=\begin{cases}\pi x-x^2, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ \pi x+x^2, & -\pi<x<0\end{cases}$

则 $S(x)=F(x)$， $x\in(-\pi,\pi)$;

由周期性, $x\in(\pi,2\pi)$ 时,



$S(x)=S(x-2\pi)$

$x-2\pi\in(-\pi,0)$

$=\pi(x-2\pi)+(x-2\pi)^2=x^2-3\pi x+2\pi^2$