第三节

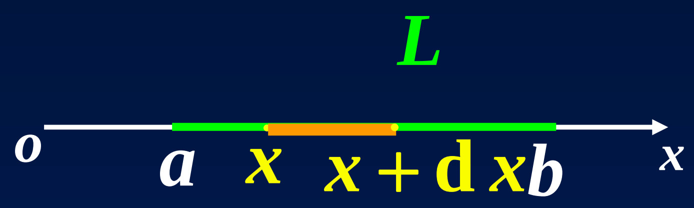
定积分的物理应用

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 平面物质线段的质量

已知在闭区间$[a, b]$上的物质直线段 L，线密度为$\mu(x)$，且 $\mu(x)$是连续函数，求线段 L 的质量.



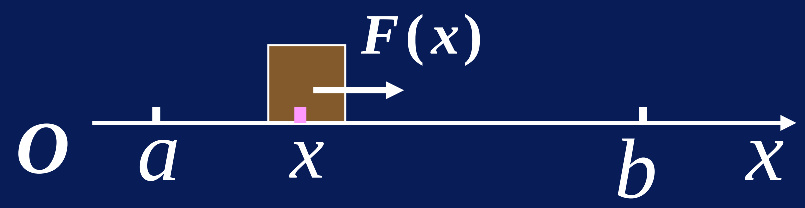
取积分变量为 x，$\forall\ [x, x + \mathrm{d}\,x] \subset [a, b]$，

质量元素：$\mathrm{d}M = \mu(x)\mathrm{d}\,x$

从而线段L 的质量为 $M = \int_a^b \mu(x)\mathrm{d}\,x.$

(二) 功

1. 变力沿直线所作的功



问题： 设物体在连续变力 $F(x)$ 作用下沿 x 轴从 $x=a$ 移动到 $x=b$，力的方向与运动方向平行，求变力所作的功 .

由物理学，已知常力 F_0 将质点从点 a 移至 b, 所作的功为：

$$W_0 = F_0 \cdot (b-a)$$

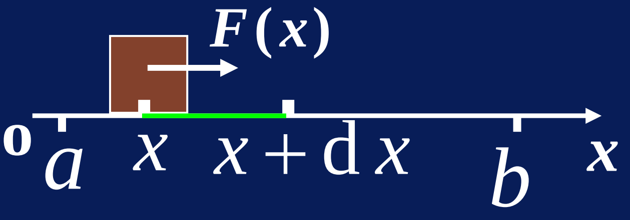
现在 $F(x)$ 是变力，如何求功 W ?

功W具有可用定积分计算的量的三个特征，故可考虑用定积分的“元素法”来计算.

1° $\forall\,[x, x+\mathrm{d}x] \subset [a, b]$

功元素：$\mathrm{d}W = F(x)\,\mathrm{d}x$

$(\Delta W \approx \mathrm{d}W)$



2° $W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$

注 当力的方向与质点的运动方向一致时，W为正；当力的方向与质点的运动方向相反时，W为负.

2. 从容器中抽出液体作的功

(三) 液体侧压力

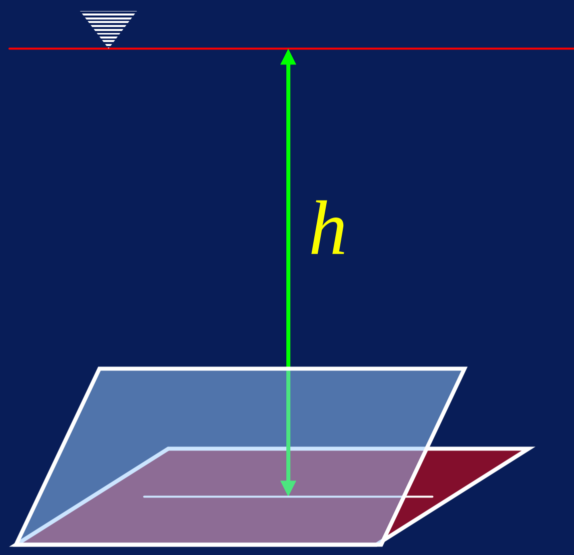
设液体密度为 ρ，

深为 h 处的压强：$p = g\rho h$

- 当平板与水面平行时，

平板一侧所受的压力为

$$P = pA$$



面积为 A 的平板

- 当平板不与水面平行时，

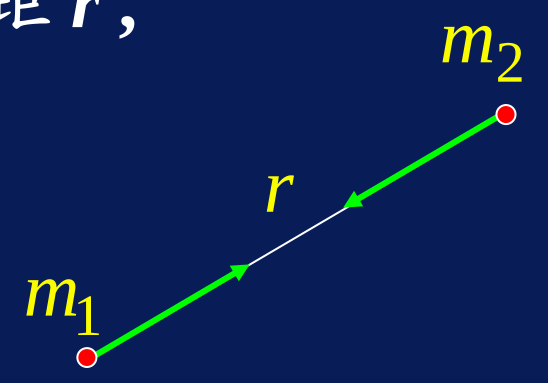
所受侧压力问题就需用定积分来解决 .

(四) 引力问题

回顾： 两质点的引力

质量分别为 m_1 , m_2 的质点，相距 $\boldsymbol{r}$,

二者间的引力：



大小： $F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

方向： 沿两质点的连线

若考虑物体对质点的引力，则需用积分解决 .

二、典型例题

例1 一金属棒长3(m)，离棒左端x(m)处的线密度为 $\mu(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}(kg/m)$，问：$x$为何值时，$[0, x]$一段的质量为全棒的一半？

解 $[0, x]$上一段的质量为

$$M(x)=\int_0^x \mu(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}\,x=2\sqrt{1+x}\,\Big|_0^x$$

$$=2(\sqrt{1+x}-1)$$

$$M(x) = 2(\sqrt{1+x} - 1)$$

而全棒的质量为 $M(3) = 2$,

故依题意有

$$M(x) = \frac{1}{2} M(3)$$

即 $2(\sqrt{1+x} - 1) = 1$

$$\therefore \quad x = \frac{5}{4} \ (\mathrm{m}).$$

例2 自地面垂直地向上发射火箭. 设火箭的质量为m, 求:

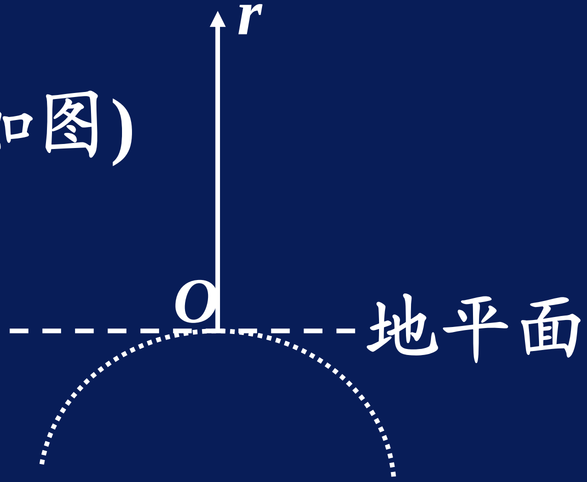
(1) 火箭离开地面距离为h时，克服地球引力所作的功W;

(2) 若要火箭飞离地球，火箭的初始速度v_0至少为多少?

解 (1) 1° 建立坐标系(如图)

设地球的质量为M,

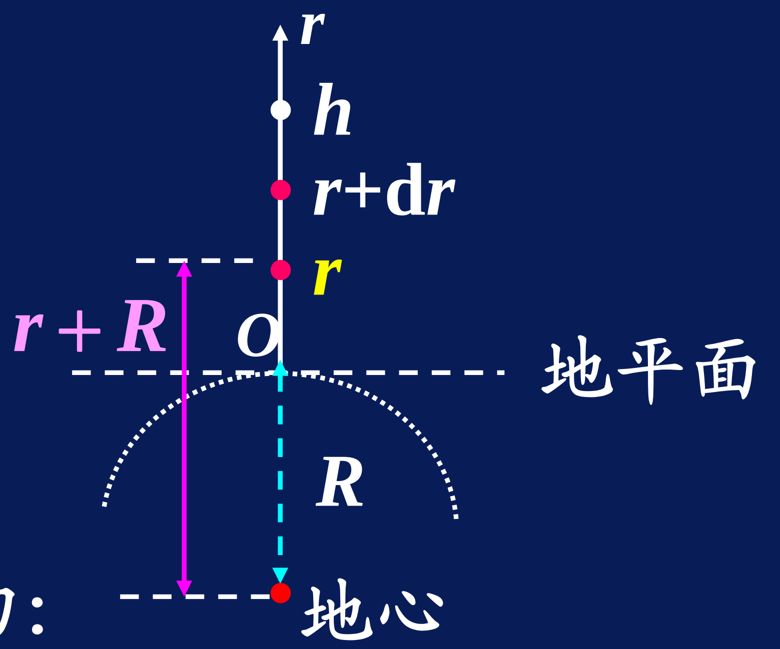
半径为R.



2° 由万有引力定律，

地球对位于点r处的火箭的引力：

$$F_1(r) = -k\frac{mM}{(r+R)^2}$$



$\therefore$ 用于克服地球引力的外力：

$$F(r) = -F_1(r) = k\frac{mM}{(r+R)^2}$$

3° $\forall\,[r, r+\mathrm{d}r] \subset [0, h]$

功元素：$\mathrm{d}W = F(r)\mathrm{d}r = k\dfrac{mM}{(r+R)^2}\mathrm{d}r$

4° $$W=\int_0^h F(r)\,\mathrm{d}r = k\int_0^h \frac{mM}{(r+R)^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= kmM\left(-\frac{1}{r+R}\right)\Big|_0^h$$

$$= kmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right) = mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)$$

$\because$ 在地球表面，即 $r=0$时，$F(0)=k\dfrac{mM}{R^2}=mg$

$$\therefore\quad k=\frac{R^2 g}{M}.$$

(2) 当火箭飞离地球时，即 $h \to +\infty$时，

$$W_{\infty} = \lim_{h \to +\infty} W = k\int_0^{+\infty} \frac{mM}{(r+R)^2} \mathrm{d}r = mgR$$

由 $\frac{1}{2}mv_0^2 \geq W_{\infty} = mgR$

得 $v_0 \geq \sqrt{2gR}$,

将$R = 6.371 \times 10^6 (m)$,

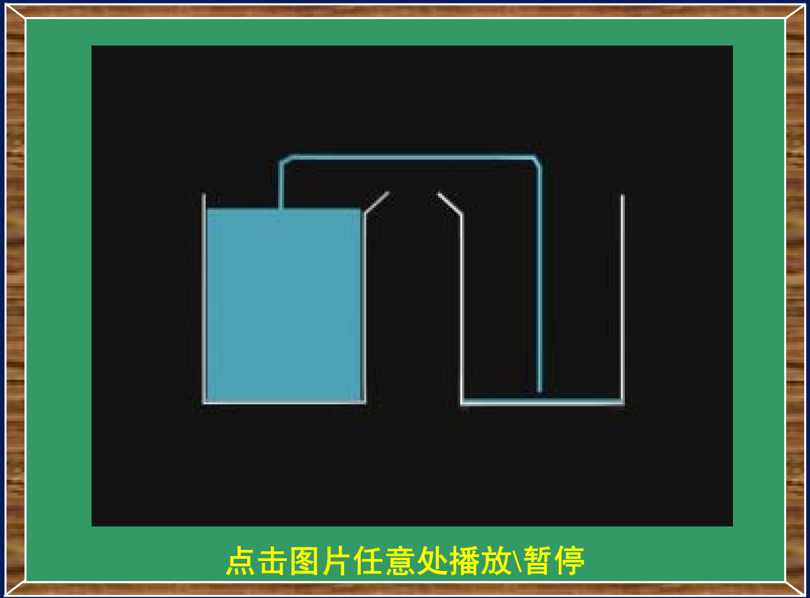
$g = 9.8\,(m/s^2)$

代入得 $v_0 \geq 11.2\,(km/s)$ 第二宇宙速度

若要火箭飞离地球，则火箭的初始动能至少要等于火箭飞离地球时克服地球引力所作的功(即由此功全部转化成的火箭的位能)

例3 一圆柱形蓄水池高为5米，底半径为3米，池内盛满了水.

问：要把池内的水全部吸出，需作多少功？



分析 把一桶重量为P的水(看成质点)，提到高度为h的地方，克服重力所作的功为：$W = P \cdot h$

然而，现在的情形是将池内的水连续不断地

抽出，而不是象提水桶那样，整体一下子提到某一高度。在水被抽出的过程中，液面到池口的距离是一个变量.

解决的方法：把池中的水分成若干层，则

“把池中的水抽空所作的功”

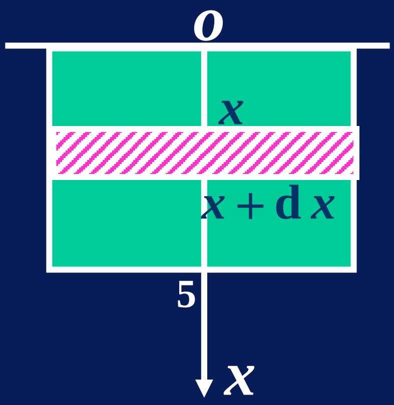
＝“分别把每层水从池中抽出所作的功的和”.

即
$$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i$$

而 “把每层水从池中抽出所作的功 ΔW_i”

≈“把这层水看成一个整体从池中提到池口所作的功”.

解 建立坐标系如图



取x为积分变量，$x \in [0,5]$

取任一小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$，

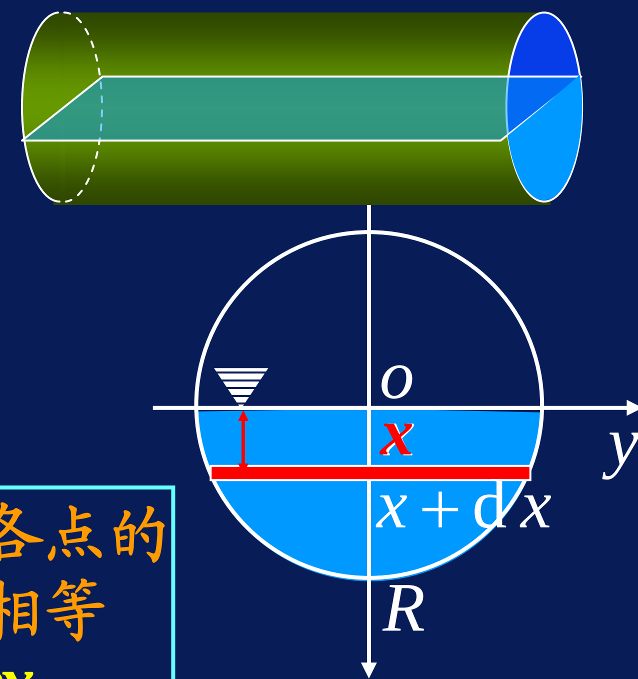
这一薄层水的重力元素为：$\mathrm{d}P = 9.8\pi \cdot 3^2 \mathrm{d}x$

功元素：$\mathrm{d}w = x \cdot \mathrm{d}P = 88.2\pi \cdot x \cdot \mathrm{d}x,$

$$w = \int_0^5 88.2\pi \cdot x \cdot \mathrm{d}x$$

$$= 88.2\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 \approx 3462$$ （千焦）.

例4 一水平横放的半径为R的圆桶,内盛半桶密度为ρ的液体,求桶的一个端面所受的侧压力.



解 建立坐标系如图. 所论半圆的方程为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$

$$(0\le x\le R)$$

利用对称性, 侧压力元素

$$\mathrm{d}P = p\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

小窄条上各点的压强近似相等

$$p = g\rho x$$

端面所受侧压力为

$$P=\int_0^R 2g\rho x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2g\rho}{3}R^3$$

注　1° 当桶内充满液体时, 小窄条上的压强

近似为为　　$g\rho(R+x)$,

侧压力元素 $\mathrm{d}P = 2g\rho(R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$,

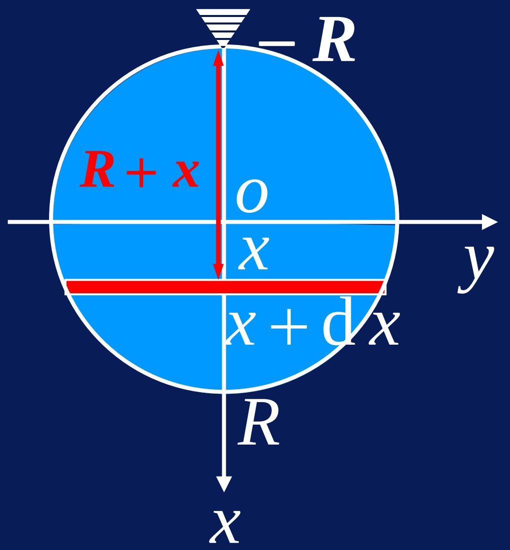
故端面所受侧压力为

$$P = \int_{-R}^{R} 2g\rho(R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

奇函数

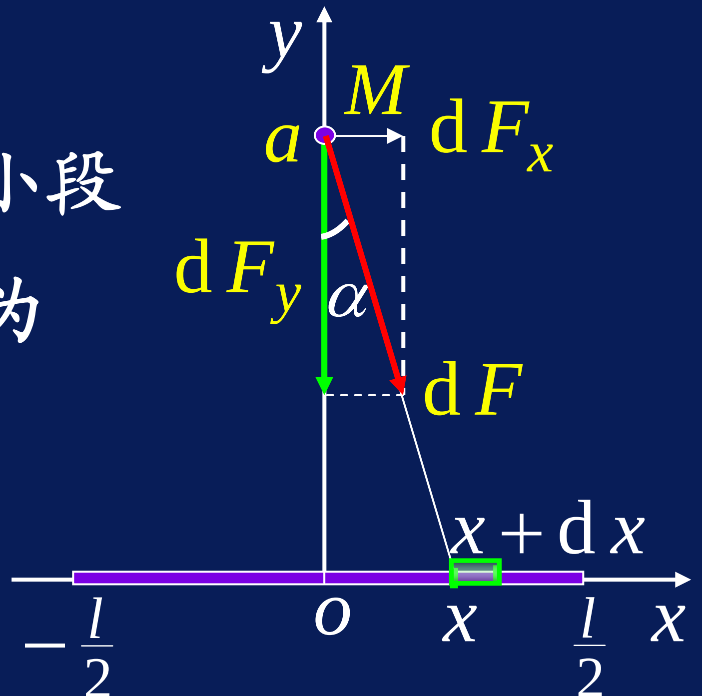
$$= 4Rg\rho\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 4Rg\rho\cdot\frac{\pi R^2}{4} = \pi g\rho R^3.$$



2° 对于选定的坐标系，平板边界曲线的方程，水深，积分区间一定要匹配!

例5 设有一长度为 l, 线密度为 μ 的均匀细直棒, 在其中垂线上距 a 单位处有一质量为 m 的质点 M, 试计算该棒对质点的引力.



解 建立坐标系如图. 细棒上小段 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 对质点的引力大小为

$$\mathrm{d}F = k\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$$

故垂直分力元素为

$$\mathrm{d}F_y = -\mathrm{d}F\cos\alpha$$

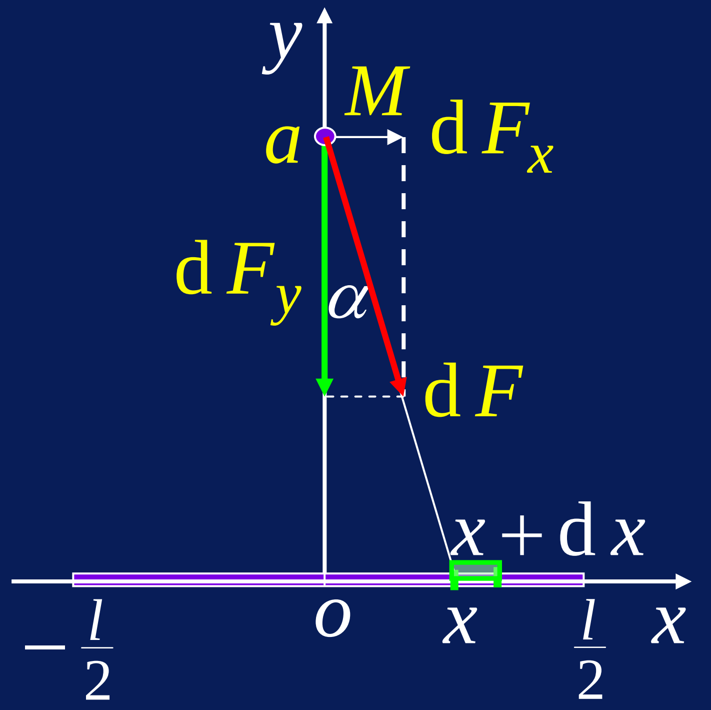
$$= -k\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} = -km\mu a\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

棒对质点的引力的垂直分力为

$$F_y = -2km\mu a\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= -km\mu a\left[\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$= -\frac{2km\mu l}{a}\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$$



利用对称性

棒对质点引力的水平分力 $F_x = 0.$

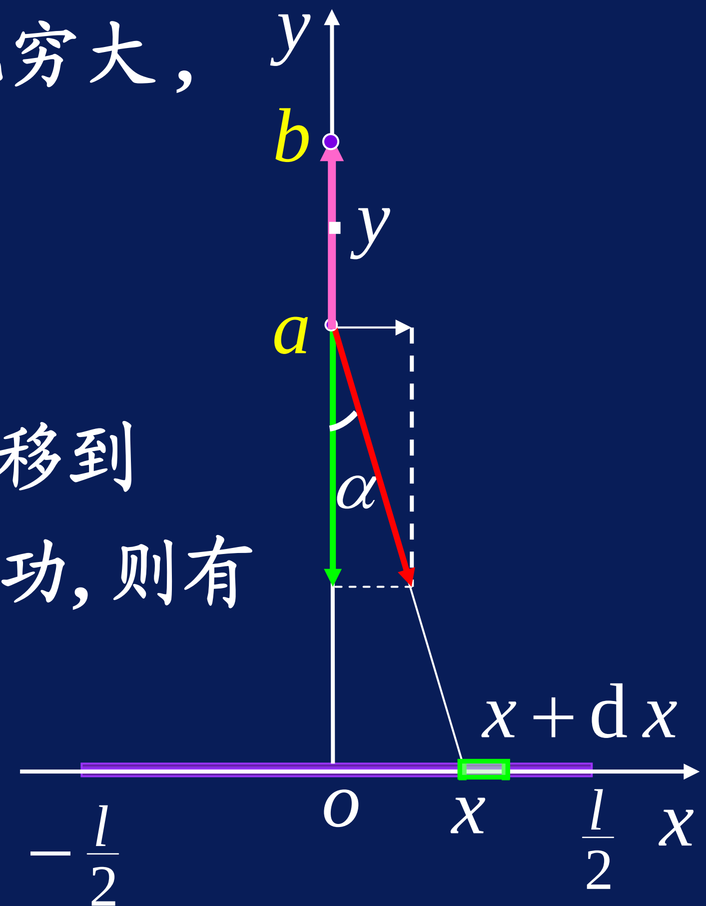
故棒对质点的引力大小为 $F = \dfrac{2km\mu l}{a}\dfrac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$

注 1° 当细棒很长时,可视 l 为无穷大，

此时引力大小为 $\dfrac{2km\mu}{a}$

方向与细棒垂直且指向细棒．

2° 若考虑质点沿 y 轴从 a 处移到 $b\ (a<b)$ 处时，克服引力作的功, 则有



$$\mathrm{d}W=-\frac{2km\mu l}{y}\frac{1}{\sqrt{4y^2+l^2}}\,\mathrm{d}y$$

$$W=-2km\mu l\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{4y^2+l^2}}$$

3° 当质点位于棒的左端点垂线上时，

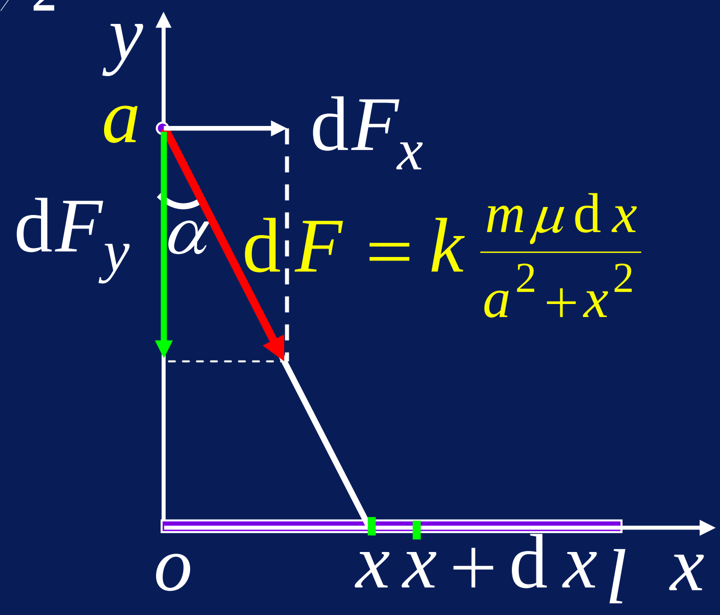
$$\mathrm{d}F_y = -\mathrm{d}F\cdot\cos\alpha = -km\mu a\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cdot\sin\alpha = km\mu\frac{x\,\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

注意正负号

$$\therefore\quad F_y = -km\mu a\int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$F_x = km\mu\int_0^l \frac{x\,\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

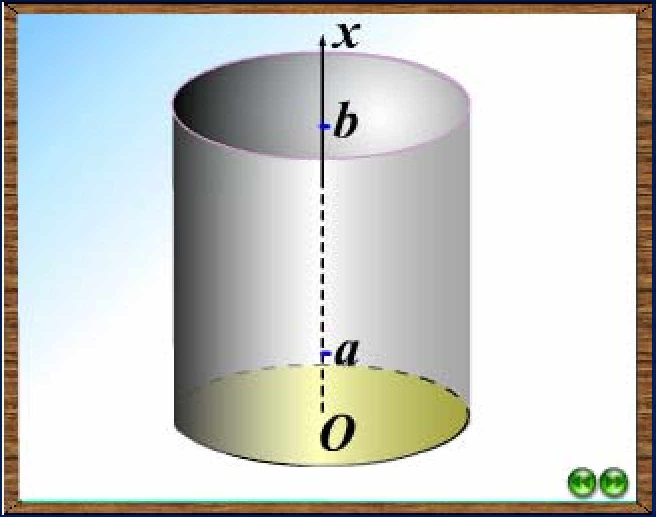


引力大小为 $F=\sqrt{F_x^{\,2}+F_y^{\,2}}$

三、同步练习

1. 在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量的气体，在等温条件下，由于气体的膨胀, 把容器中的一个面积为S 的活塞从点 a 处移动到点 b 处 (如图), 求移动过程中气体压力所作的功.

2. 在一个带 $+q$ 电荷所产生的电场作用下, 一个单位正电荷沿直线从距离点电荷 a 处移动到b 处 $(a < b)$, 求电场力所作的功.



3. 用铁锤把钉子钉入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板的深度成正比，铁锤在第一次锤击时将铁钉击入1厘米，若每次锤击所作的功相等，问第n次锤击时又将铁钉击入多少？

4. 以每秒 a 的流量往半径为 R 的半球形水池内注水.

(1) 求在池中水深 $h\,(0 < h < R)$时水面上升的速度；

(2) 若再将满池水全部抽出，至少需作功多少？

5. 将直角边各为a及$2a$的直角三角形薄板垂直地浸人水中，斜边朝下，直角边的边长与水面平行，且该边到水面的距离恰等于该边的边长，求薄板所受的侧压力.

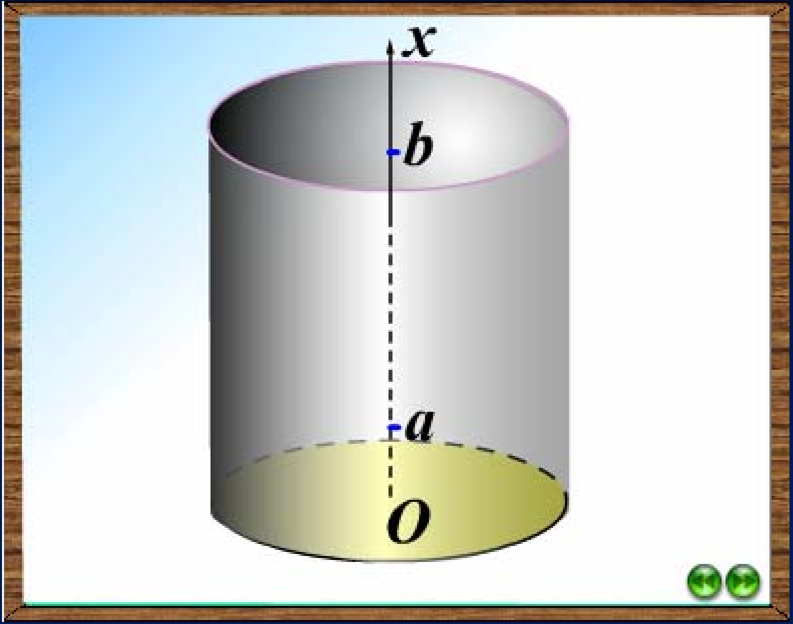
6. 斜边为定长的直角三角形薄板, 垂直放置于水中, 并使一直角边与水面相齐, 问斜边与水面交成锐角θ取多大时，薄板所受的压力P最大.

7. 设星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 上每一点处线密度的大小等于该点到原点距离的立方，在点O处有一单位质点，求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

四、同步练习解答

1. 在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量的气体，在等温条件下，由于气体的膨胀, 把容器中的一个面积为S 的活塞从点 a 处移动到点 b 处 (如图), 求移动过程中气体压力所作的功.

解 建立坐标系如图.



由波义耳—马略特定律知

压强p 与体积 V 成反比，

即 $p = \dfrac{k}{V} = \dfrac{k}{xS}$,

故作用在活塞上的力为

$$F(x) = p \cdot S = \frac{k}{x}$$

$$\forall\ [x, x+\mathrm{d}x] \subseteq [a,b]$$

功元素为 $\mathrm{d}W = F(x)\mathrm{d}x = \dfrac{k}{x}\mathrm{d}x$

所求功为 $W = \int_a^b \dfrac{k}{x}\mathrm{d}x$

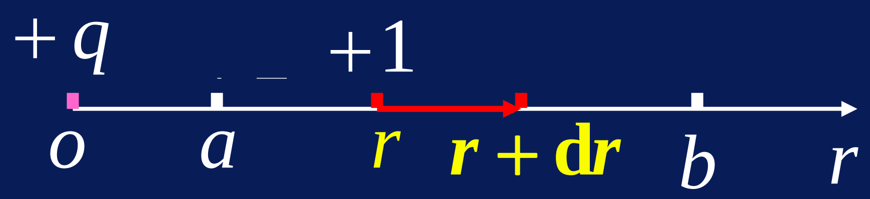
$$= k\left[\ln x\right]_a^b$$

$$= k\ln\frac{b}{a}.$$

2. 在一个带 $+q$ 电荷所产生的电场作用下，一个单位正电荷沿直线从距离点电荷 a 处移动到 b 处 $(a < b)$，求电场力所作的功.

解 当单位正电荷距离原点 r 时，由库仑定律电场力为

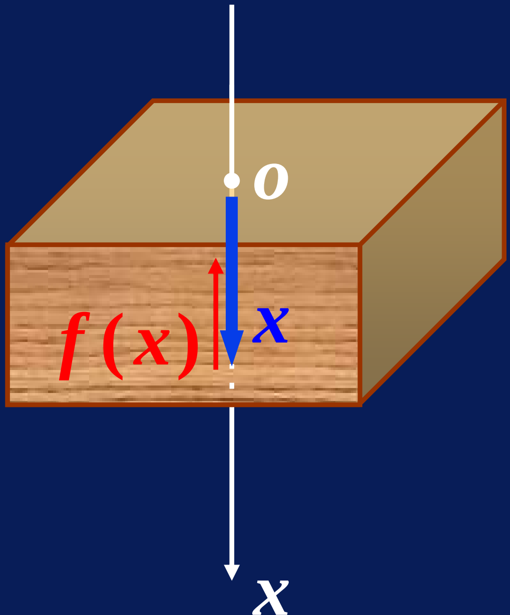
$$F = k\frac{q}{r^2}$$



则功的元素为 $\mathrm{d}W = \dfrac{kq}{r^2}\mathrm{d}r$,

所求功为 $W = \displaystyle\int_a^b \frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r = kq\left[-\frac{1}{r}\right]_0^a = kq\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

3. 用铁锤把钉子钉入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板的深度成正比，铁锤在第一次锤击时将铁钉击入1厘米，若每次锤击所作的功相等，问第n次锤击时又将铁钉击入多少？



解 建立坐标系如图，则

木板对铁钉的阻力为

$$f(x) = kx,$$

第一次锤击时所作的功为

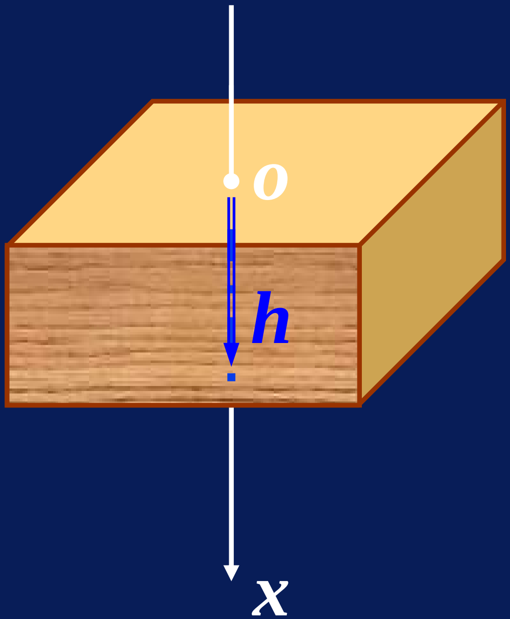
$$w_1 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{k}{2},$$

第一次锤击时所作的功为 $w_1=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{k}{2}$,

设n次击入的总深度为h 厘米

n次锤击所作的总功为

$$w_h=\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^h kx\,\mathrm{d}x=\frac{kh^2}{2},$$



依题意知，每次锤击所作的功相等.

$$\therefore\quad w_h=nw_1 \Rightarrow \frac{kh^2}{2}=n\cdot\frac{k}{2},$$

n次击入的总深度为 $h=\sqrt{n}$,

第n次击入的深度为 $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

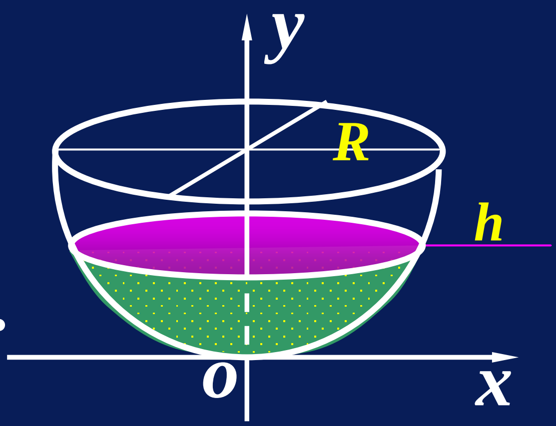
西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4. 以每秒 a 的流量往半径为 R 的半球形水池内注水.

(1) 求在池中水深 $h\,(0<h<R)$时水面上升的速度；

(2) 若再将满池水全部抽出，至少需作功多少？

解 如图所示建立坐标系.



半圆的方程为

$$x^2+(y-R)^2=R^2\quad(0\le y\le R).$$

于是对半圆上任一点，有

$$x^2=R^2-(y-R)^2=2Ry-y^2\;(0\le y\le R).$$

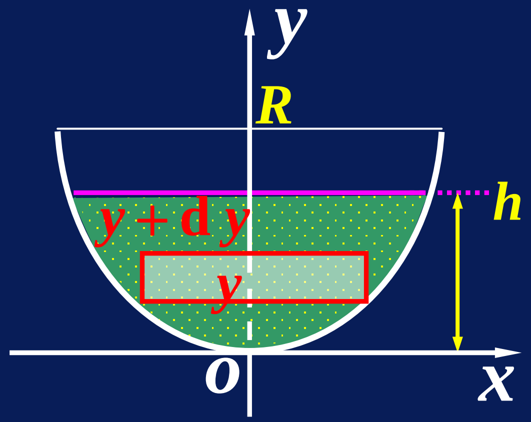
(1) 因已知半球可看作此半圆绕 y 轴旋转而成的立体,故半球内高为 h 的球缺的体积即水深为 h 时水池内水的体积为

$$V(h)=\int_0^h \pi x^2 \mathrm{d}y=\int_0^h \pi(2Ry-y^2)\mathrm{d}y$$

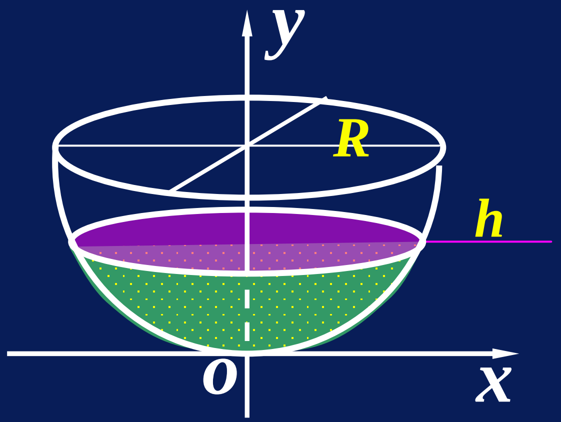
又设水深 h 时已注水的时间为 t,

则有 $V(h)=at$,

即 $\int_0^h \pi(2Ry-y^2)\mathrm{d}y=at$



即 $\int_0^h \pi(2Ry - y^2)\,\mathrm{d}y = at$



两边对 t 求导,得

$$\pi(2Rh - h^2)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = a,$$

故所求速度为 $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{a}{\pi(2Rh - h^2)}.$

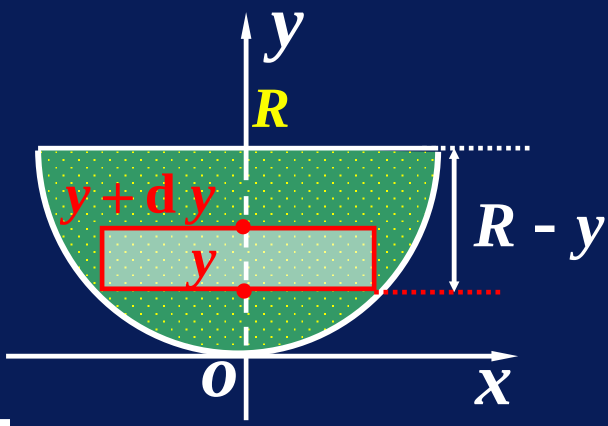
(2) 将满池的水全部抽出所 需的最小功即将池内水全部提升到池沿 高度所需的功 .

$\forall\,[y, y+\mathrm{d}\,y] \subset [0, R]$

相应于 $[y, y+\mathrm{d}\,y]$的那层水之

体积元素: $\mathrm{d}V = \pi x^2 \,\mathrm{d}\,y$

$= \pi(2Ry - y^2)\,\mathrm{d}\,y$



重力元素: $\mathrm{d}\,P = \rho\pi(2Ry - y^2)\,\mathrm{d}\,y$

位于位置 y, 相应于 $[y, y+\mathrm{d}\,y]$的那层水到

池口的距离: $R - y$

功元素:

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}\,P \cdot (R - y) = \rho\pi(2Ry - y^2)(R - y)\,\mathrm{d}\,y$$

($\rho = 1$ 吨/米^3 —水的比重).

故将满池水全部提升到池沿高度所需功为

$$W=\int_0^R \rho\pi(2Ry-y^2)(R-y)\,\mathrm{d}\,y$$

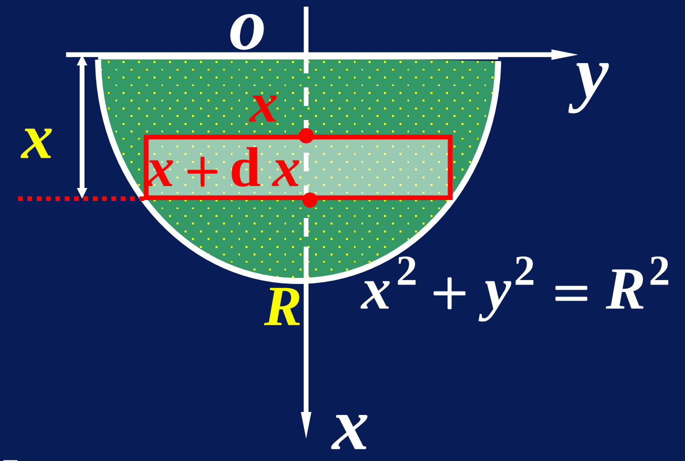
$$=\pi\int_0^R (2R^2y-3Ry^2+y^3)\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\frac{\pi}{4}R^4.$$

思考:

若建立坐标系（如图），又如何求功W?

解 $\forall [x, x+\mathrm{d}x] \subset [0, R]$



相应于 $[x, x+dx]$的那层水之

体积元素: $\mathrm{d}V = \pi y^2 \mathrm{d}x$

$$= \pi(R^2 - x^2)\mathrm{d}x$$

重力元素: $\mathrm{d}P = \rho\pi(R^2 - x^2)\mathrm{d}x$

位于位置 x, 相应于 $[x, x+\mathrm{d}x]$的那层水到池口的距离: x

功元素 $\mathrm{d}W = \mathrm{d}P \cdot x$

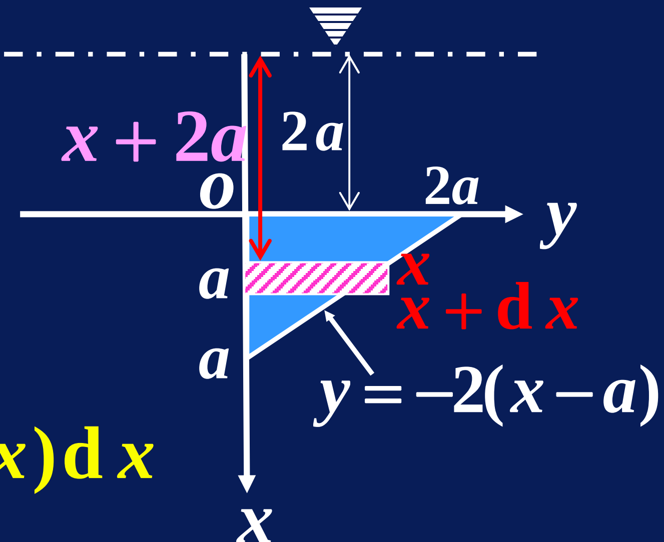
$$= \rho\pi(R^2 - x^2)x\,\mathrm{d}x$$

$$W = \int_0^R \rho\pi(R^2 - x^2)x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\rho\pi}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}(R^2 - x^2)$$

$$= -\frac{\rho\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}(R^2 - x^2)^2\Big|_0^R = \frac{\pi}{4}\rho R^4.$$

5. 将直角边各为a及$2a$的直角三角形薄板垂直地浸人水中，斜边朝下，直角边的边长与水面平行，且该边到水面的距离恰等于该边的边长，求薄板所受的侧压力.



解 建立坐标系如图

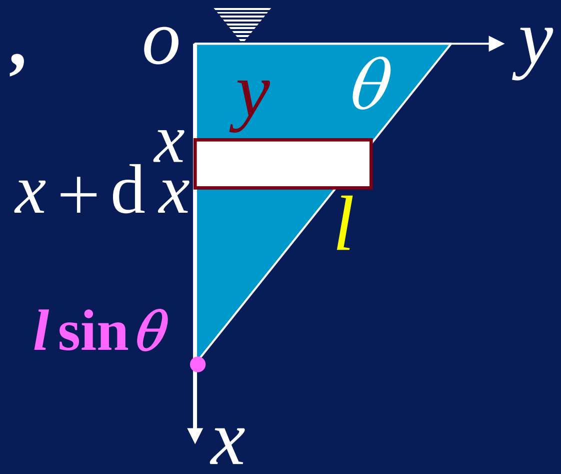
面积元素: $\mathrm{d}A = 2(a-x)\,\mathrm{d}x,$

压力元素: $\mathrm{d}P = (x+2a)\cdot\gamma\, 2(a-x)\,\mathrm{d}x$

压力: $P = \int_0^a 2(x+2a)(a-x)\gamma\,\mathrm{d}x = \dfrac{7}{3}\gamma a^3.$

6. 斜边为定长的直角三角形薄板, 垂直放置于水中, 并使一直角边与水面相齐, 问斜边与水面交成锐角 θ 取多大时, 薄板所受的压力 P 最大.

解 选取坐标系如图. 设斜边长为 l,



则其方程为 $y = -\cot\theta \cdot x + l\cos\theta$

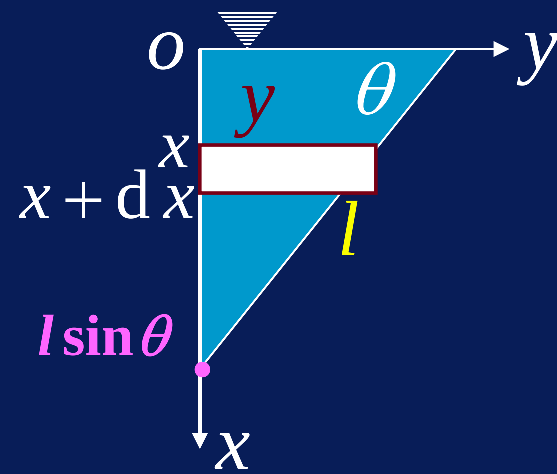
$$P = \int_0^{l\sin\theta} \rho g y x \,\mathrm{d}x$$

$$= \rho g \int_0^{l\sin\theta} (-x^2\cot\theta + l x\cos\theta)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\rho g l^3}{6}(\cos\theta - \cos^3\theta)$$

$$P=\frac{\rho g l^3}{6}(\cos\theta-\cos^3\theta)$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}=0$，即



$$-\sin\theta+3\cos^2\theta\sin\theta=0$$

$\because\ \theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，故得唯一驻点

$$\theta_0=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$$

由实际意义可知最大值存在，故此唯一驻点 θ_0 即为所求.

7. 设星形线 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ 上每一点处线密度的大小等于该点到原点距离的立方，在点 O 处有一单位质点，求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

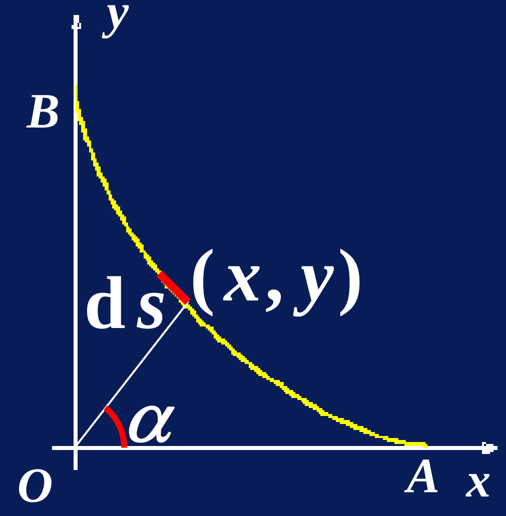
解 如图. $\mathrm{d}F=k\dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s}{x^2+y^2}=k(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s$

$$\mathrm{d}F_x=\mathrm{d}F\cdot\cos\alpha$$

$$=k(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$$

$$=k\,x\,\mathrm{d}s$$

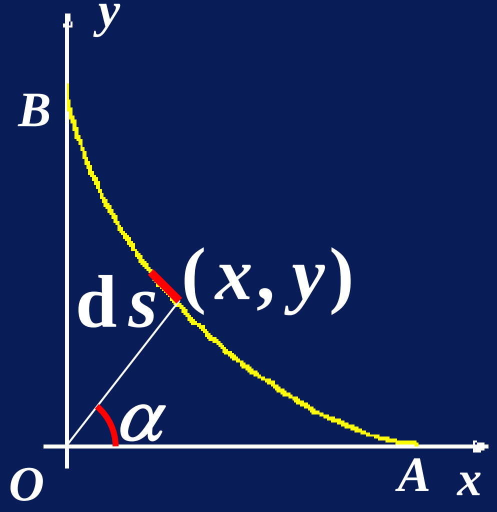
$$\mathrm{d}F_y=\mathrm{d}F\cdot\sin\alpha=k\,y\,\mathrm{d}s$$



$$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

$$F_x=k\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos^3t\cdot\sqrt{[3a\cos^2t\cdot(-\sin t)]^2+[3a\sin^2t\cdot\cos t]^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=3a^2k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\cdot\sin t\,\mathrm{d}\,t=\frac{3}{5}ka^2$$



同理 $F_y=\dfrac{3}{5}ka^2$

故星形线在第一象限的弧段对该质点

引力大小为 $F=\dfrac{3}{5}\sqrt{2}\,ka^2$