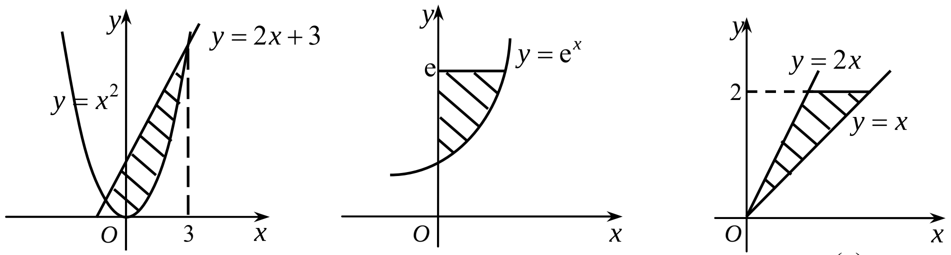
第六章　定积分的应用

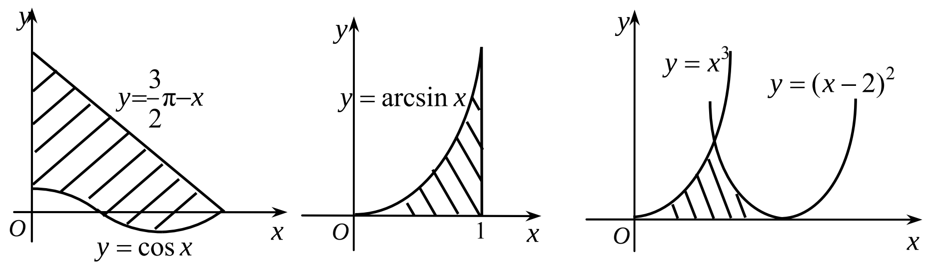
第二节　定积分的几何应用

习题　6-2

1. 写出下图中各画斜线部分的面积的积分表达式:



(a)　　(b)　　(c)



(d)　　(e)　　(f)

解　(a)　$A=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\mathrm{d}x$.

(b)　$A=\int_{0}^{1}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$.

(c)　$A=\int_{0}^{1}(2x-x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(2-x)\mathrm{d}x$ 或 $A=\int_{0}^{2}(y-\frac{y}{2})\mathrm{d}y$.

(d)　$A=\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}(\frac{3}{2}\pi-x-\cos x)\mathrm{d}x$.

(e)　$A=\int_{0}^{1}\arcsin x\mathrm{d}x$ 或 $A=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin y)\mathrm{d}y$.

(f) $A=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2 (x-2)^2\,\mathrm{d}x$ 或 $A=\int_0^1 (2-\sqrt{y}-\sqrt[3]{y})\mathrm{d}y$.

2. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

(1) $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$;

(2) $y^2=x$ 与 $y=x^2$;

(3) $y=6-x^2$ 与直线 $y=3-2x$;

(4) $2y^2=x+4$ 与 $y^2=x$;

(5) $y=\mathrm{e}^x$ ， $y=\mathrm{e}^{-x}$ 与直线 $x=1$;

(6) $y=\ln x$ ， y 轴与直线 $y=\ln a$ ， $y=\ln b(b>a>0)$.

解 (1) $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$ 所围图形见图 6.1 阴影.

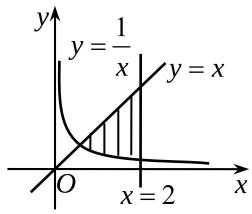


图 6.1

由 $\begin{cases} y=x, \\ y=\dfrac{1}{x} \end{cases}$ 得两曲线的交点 $(1,1)$ ，故所求面积为

$$A=\int_1^2 (x-\frac{1}{x})dx=[\frac{x^2}{2}-\ln x]_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

(2) $y^2=x$ 与 $y=x^2$ 所围图形见图 6.2 阴影.

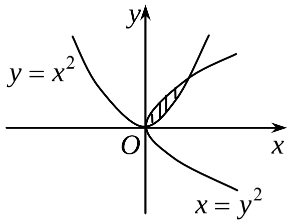


图 6.2

由 $\begin{cases} y=x^2, \\ y^2=x \end{cases}$ 得两曲线的交点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$ ，故所求面积为

$$A=\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{1}{3}.$$

(3) $y=6-x^2$ 与直线 $y=3-2x$ 所围图形见图 6.3 阴影.

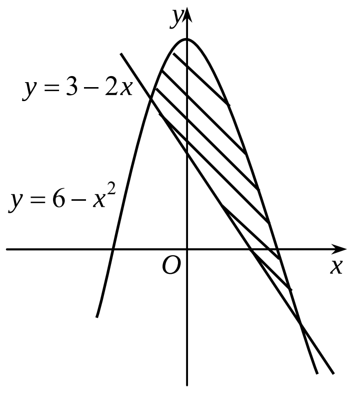


图 6.3

由 $\begin{cases} y=6-x^2, \\ y=3-2x \end{cases}$ 得两曲线的交点 $(3,-3)$ 和 $(-1,5)$ ，故所求面积为

$$A=\int_{-1}^3 [(6-x^2)-(3-2x)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+3+2x)\mathrm{d}x=[3x-\frac{1}{3}x^3+x^2]_{-1}^{3}=\frac{32}{3}.$$

(4) $2y^2=x+4$ 与 $y^2=x$ 所围图形见图 6.4.

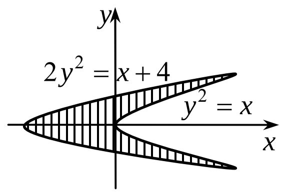


图 6.4

由 $\begin{cases}2y^2=x+4,\\ y^2=x\end{cases}$ 得两曲线的交点 $(4,-2)$ 和 $(4,2)$，故所求面积为

$$A=\int_{-2}^{2}[y^2-(2y^2-4)]\mathrm{d}y=\int_{-2}^{2}(4-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=2\int_{0}^{2}(4-y^2)\mathrm{d}y=2[4y-\frac{1}{3}y^3]_0^2=\frac{32}{3}.$$

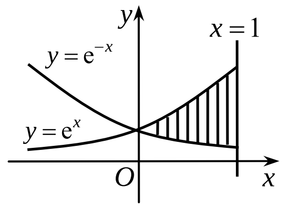


图 6.5

(5) $y=\mathrm{e}^x$，$y=\mathrm{e}^{-x}$ 与直线 $x=1$ 所围图形见图 6.5, 故所求面积为

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}]_0^1=\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-2.$$

(6) $y=\ln x$，y 轴与直线 $y=\ln a$，$y=\ln b(b>a>0)$ 所围图形见图 6.6, 故所求面积为

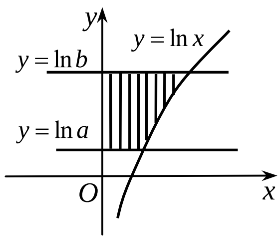


图 6.6

$$A=\int_{\ln a}^{\ln b}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=[\mathrm{e}^y]_{\ln a}^{\ln b}=b-a.$$

3. 求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 和 $(3,0)$ 处的切线所围成的图形的面积.

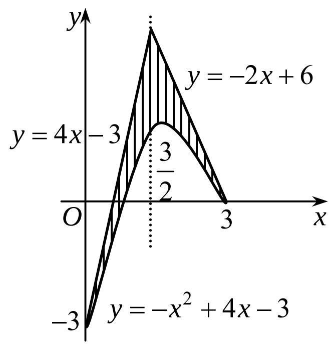


图 6.7

解 因为 $y'=-2x+4$, 所以 $y'(0)=4$, $y'(3)=-2$, 故抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 在点 $(0,-3)$ 处的切线方程为 $y=4x-3$；在点 $(3,0)$ 处的切线方程为 $y=-2x+6$. 所围图形见图 6.7.

由 $\begin{cases}y=-2x+6,\\ y=4x-3\end{cases}$ 得两曲线的交点 $(\frac{3}{2},3)$，故所求面积为

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}[(4x-3)-(-x^2+4x-3)]\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}[(-2x+6)-(-x^2+4x-3)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}(x-3)^2\mathrm{d}x=\frac{9}{4}.$$

4. 求下列各曲线所围成的图形的面积:

(1) $\rho = 2a\cos\theta$;

(2) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;

(3) $\rho = 2a(2+\cos\theta)$.

解 (1) 由图 6.8 知所求面积为

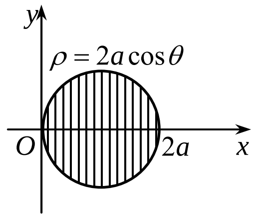


图 6.8

$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\rho^2\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2a^2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\mathrm{d}\theta=a^2[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi a^2 .$$

(2) 参考图 6.9 知所求面积为

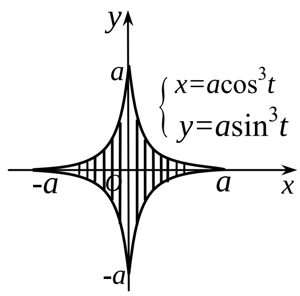


图 6.9

$$A=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a\sin^3 t\mathrm{d}(a\cos^3 t)=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=12a^2(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\mathrm{d}t)=\frac{3}{8}\pi a^2 .$$

(3) 由 $\rho\ge0$ 求得 $\rho=2a(2+\cos\theta)$ 的定义域为 $2\pi\ge\theta\ge0$，故所求面积为

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\rho^2\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}2a^2(2+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=2a^2\int_0^{2\pi}(4+4\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=2a^2\int_0^{2\pi}(4+4\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2})\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^{2\pi}(9+8\cos\theta+\cos2\theta)\mathrm{d}\theta=18\pi a^2 .$$

5. 求由摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 的一拱 $(0\le t\le2\pi)$ 与横轴所围成的图形的面积.

解 所求图形(见图 6.10)的面积为

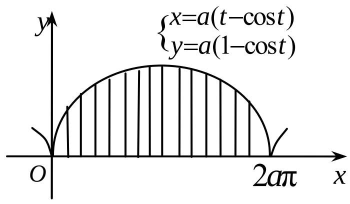


图 6.10

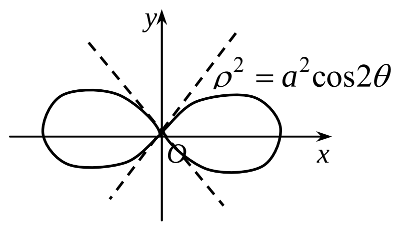
$$A=\int_0^{2\pi a}y\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\mathrm{d}[a(t-\sin t)]$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\frac{1+\cos2t}{2})\mathrm{d}t$$

$$=a^2[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin2t]_0^{2\pi}=3\pi a^2 .$$

6. 求双纽线 $\rho^2=a^2\cos2\theta$ (见右图)所围成的平面图形的面积.



解 根据图形的对称性知所求面积为

$$A=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\rho^2\mathrm{d}\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\mathrm{d}\theta=a^2[\sin2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2.$$

7. 计算阿基米德螺线 $\rho=a\theta(a>0)$ 上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积.

解 所围图形见图 6.11, 故所求面积为

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(a\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\theta^2\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{1}{2}a^2[\frac{1}{3}\theta^3]_0^{2\pi}=\frac{4}{3}a^2\pi^3.$$

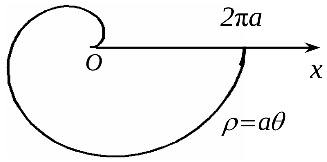


图 6.11

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积:

(1) $\rho=2$ 与 $\rho=4\cos\theta$;

(2) $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 与 $\rho^2=\cos2\theta$.

解 (1) 由 $\begin{cases}\rho=2,\\ \rho=4\cos\theta\end{cases}$ 得两曲线交点的极坐标为 $(2,\frac{\pi}{3})$ 和 $(2,-\frac{\pi}{3})$, 故由对称性并参考图 6.12 知所求面积为

$$A=2[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}2^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(4\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta]$$

$$=\frac{4}{3}\pi+16\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}\pi+8\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{3}\pi+8[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=2(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}).$$

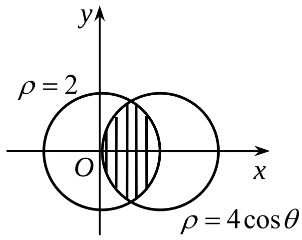


图 6.12

(2) 由 $\begin{cases}\rho=\sqrt{2}\sin\theta,\\ \rho^2=\cos2\theta\end{cases}$ 得两曲线交点 M 的极坐标为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{6})$, 由 $\rho^2=\cos2\theta=0$ 求得 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 为其在第一象限的根, 参考图 6.13 知所求面积为

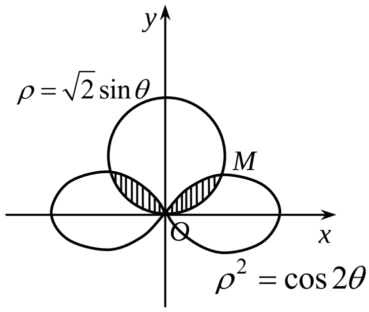


图 6.13

$$A=2(A_1+A_2)=2[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sqrt{2}\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\mathrm{d}\theta]$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{6}}+[\frac{1}{2}\sin 2\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

9. 求位于曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 下方，该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形面积.

解 设切线方程为 $y=kx$，它与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 相切于点 $M(x_0,y_0)$，则有

$$\begin{cases}y_0=kx_0,\\ y_0=\mathrm{e}^{x_0},\\ y'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}=k,\end{cases}\text{，求得}\begin{cases}x_0=1,\\ y_0=\mathrm{e},\\ k=\mathrm{e}.\end{cases}$$

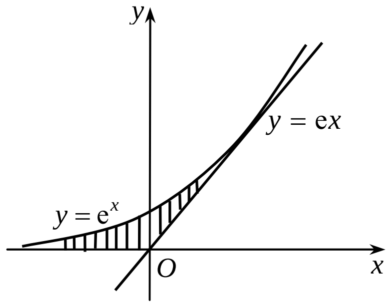


图 6.14

取 x 为积分变量，用 y 轴将指定的图形分成左右两部分(见图 6.14)来计算面积，故所求面积为

$$A=\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x)\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^x]_{-\infty}^0+[\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\mathrm{e}x^2]_0^1=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

10. 求由曲线 $y=\frac{1}{x}$，直线 $y=4x$ 及 $x=2$ 所围成的平面图形的面积以及该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 在第一象限内，由 $\begin{cases}y=\frac{1}{x},\\ y=4x\end{cases}$ 得两曲线的交点 $(\frac{1}{2},2)$，参考图 6.15 知所求面积为

$$A=\int_{\frac{1}{2}}^2(4x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x=[2x^2-\ln x]_{\frac{1}{2}}^2=\frac{15}{2}-2\ln 2,$$

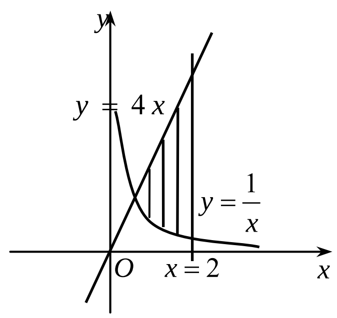


图 6.15

所求体积为

$$V=\int_{\frac{1}{2}}^2\pi(4x)^2\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^2\pi(\frac{1}{x})^2\mathrm{d}x=\pi[\frac{16}{3}x^3]_{\frac{1}{2}}^2+[\frac{\pi}{x}]_{\frac{1}{2}}^2=\frac{81}{2}\pi.$$

11. 求由曲线 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$，直线 $y=\frac{1}{2}$ 及 x 轴所围平面图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 所围平面图形见图 6.16. 取 x 为积分变量，则绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\pi\sin^2 x\mathrm{d}x+\pi(\frac{1}{2})^2(\pi-2\cdot\frac{\pi}{6})=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 x\mathrm{d}x+\frac{\pi^2}{6}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x+\frac{\pi^2}{6}$$

$$=\pi[x-\frac{\sin 2x}{2}]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi.$$

取 y 为积分变量, 则绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

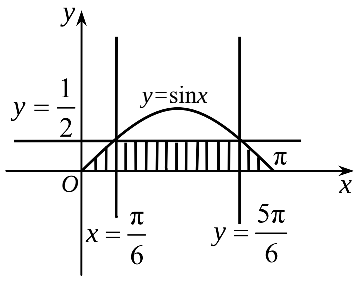


图 6.16

$$V=\int_0^{\frac{1}{2}}\pi(\pi-\arcsin y)^2\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{1}{2}}\pi(\arcsin y)^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\pi(\pi^2-2\pi\arcsin y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\pi^3-2\pi^2\{[y\mathrm{acsin}y]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\}$$

$$=\frac{1}{3}\pi^3+2\pi^2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\pi^3-2\pi^2[\sqrt{1-y^2}]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\pi^3+(2-\sqrt{3})\pi^2.$$

12. 求由星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

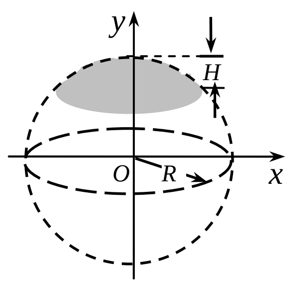
解 该旋转体的体积等于图形位于第一象限的部分绕 x 轴旋转所得旋转体的体积的 2 倍, 星形线的方程可写成 $y^2=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3$, 所求旋转体的体积为

$$V=2\int_0^a\pi y^2(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3\mathrm{d}x=2\pi\int_0^a(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi[a^2x-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}a^{\frac{2}{3}}-\frac{x^3}{3}]_0^a=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

13. 用积分方法证明右图中球缺的体积为

$$V=\pi H^2(R-\frac{H}{3}).$$



证 该球缺可看成是由圆 $x^2+y^2=R^2$ 所围成的位于 $R-H\le y\le R$ 的部分绕 y 轴旋转而成的旋转体, 其体积为

$$V=\int_{R-H}^R\pi x^2(y)\mathrm{d}y=\int_{R-H}^R(R^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\pi[R^2y-\frac{1}{3}y^3]_{R-H}^R=\pi[R^3-\frac{1}{3}R^3-R^2(R-H)+\frac{1}{3}(R-H)^3]$$

$$=\pi H^2(R-\frac{H}{3}).$$

14. 求圆盘 $x^2+y^2\le a^2$ 绕 $x=-b(b>a>0)$ 旋转一周所成旋转体的体积.

解 如图 6.17 所示，所求旋转体的体积等于平面图形 $ABCDE$ 和 $ABFDE$ 分别绕 $x=-b$ 旋转所成的旋转体的体积之差，左、右半圆的方程分别为 $x=-\sqrt{a^2-y^2}$ 和 $x=\sqrt{a^2-y^2}$，其上各点距 $x=-b$ 的距离分别为 $b-\sqrt{a^2-y^2}$ 和 $b+\sqrt{a^2-y^2}$，于是所求旋转体的体积为

$$V=\int_{-a}^{a}\pi(b+\sqrt{a^2-y^2})^2\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}\pi(b-\sqrt{a^2-y^2})^2\mathrm{d}y$$

$$=4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\mathrm{d}y.$$

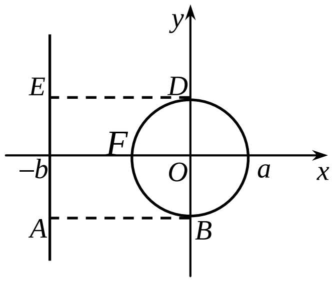


图 6.17

由于 $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\mathrm{d}y$ 表示半径为 a 的右半圆\的面积，所以

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\pi a^2,\quad V=2\pi^2a^2b.$$

15. 证明：由平面图形 $0\le a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)$ 绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

证 参考图 6.18，在 $[a,b]$ 上任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，相应于这个小区间的曲边梯形为 $ABCD$，由于 $\mathrm{d}x$ 很小，该曲边梯形可近似看成高为 $f(x)$ 的矩形，它绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积可看成底面半径分别为 $x+\mathrm{d}x$ 和 x，高均为 $f(x)$ 的两个圆柱体的体积之差，其值为

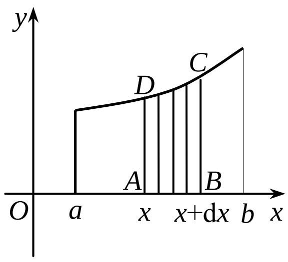


图 6.18

$$\pi(x+\mathrm{d}x)^2f(x)-\pi x^2f(x)=2\pi xf(x)+\pi f(x)(\mathrm{d}x)^2,$$

舍去高阶无穷小 $\mathrm{d}x^2$，求得体积元素 $\mathrm{d}V=2\pi xf(x)\mathrm{d}x$，故旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

16. 利用两种方法计算由 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$ 和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 法 1 由上题结论知所求旋转体的体积为

$$V=\int_0^{\pi}2\pi x\sin x\mathrm{d}x=[-2\pi x\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2\pi\cos x\mathrm{d}x$$

$$=2\pi^2+[2\pi\sin x]_0^{\pi}=2\pi^2.$$

法 2 参考图 6.19, 取 y 为积分变量, 则绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=\int_0^1\pi(\pi-\arcsin y)^2\mathrm{d}y-\int_0^1\pi(\arcsin y)^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\pi(\pi^2-2\pi\arcsin y)\mathrm{d}y=\pi^3\int_0^1\mathrm{d}y-2\pi^2\int_0^1\arcsin y\mathrm{d}y$$

$$=\pi^3-2\pi^2\{[y\arcsin y]_0^1-\int_0^1\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\}=2\pi^2.$$

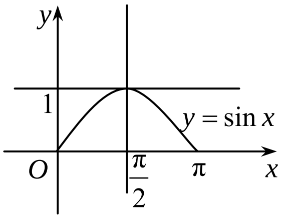
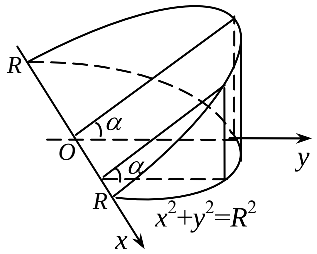


图 6.19

17. 一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心, 并与地面交成角 α (见下图), 计算该平面截圆柱体所得立体的体积.

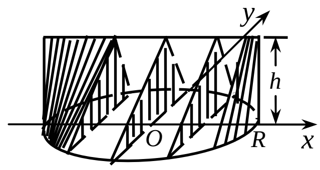
解 取这平面与圆柱体的底面的交线为 x 轴, 底面上过圆中心、且垂直于 x 轴的直线为 y 轴. 那么, 底圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$. 立体中过点 x 且垂直于 x 轴的截面为一个直角三角形. 它的两条直角边的长分别为 y 及 $y\tan\alpha$, 即 $\sqrt{R^2-x^2}$ 及 $\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha$. 因而截面积为 $A(x)=\dfrac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$, 于是所求立体体积为



$$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan\alpha[R^3-\frac{1}{3}x^3]_{-R}^{R}=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$$

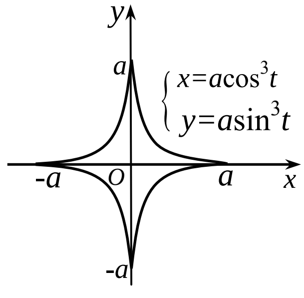
18. 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体(见下图)的体积.

解 取底圆所在的平面为 xOy 平面, 圆心 O 为原点, 并使 x 轴与正劈锥体的顶平行(见图), 底圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$. 过 x 轴上的点 x $(-R\le x\le R)$ 作垂直于 x 轴的平面, 截正劈锥体得等腰三角形. 这截面的面积为 $A(x)=h\cdot y=h\sqrt{R^2-x^2}$, 于是所求正劈锥体的体积为



$$V=h\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x=2R^2h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi R^2h}{2}.$$

19. 计算星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$



(见右图)的全长.

解 由对称性, 所求弧长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[3a\cos^2t\cdot(-\sin t)]^2+[3a\sin^2t\cdot\cos t]^2}\mathrm{d}t$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\mathrm{d}t=6a[\sin^2t]_0^{\frac{\pi}{2}}=6a.$$

20. 在摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 上求分摆线第一拱成 $1:3$ 的点的坐标.

解 第一拱摆线如图 6.20 所示. 设 t 从 0 变化到 t_0 $(0\le t_0\le 2\pi)$ 摆线的弧长为 $s(t_0)$, 则

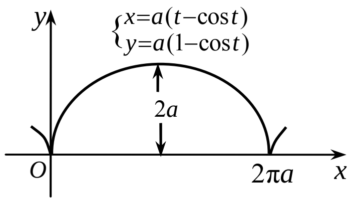


图 6.20

$$s(t_0)=\int_0^{t_0}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{t_0}\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+[a\sin t]^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{t_0}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\mathrm{d}t=\int_0^{t_0}2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=4a[-\cos\frac{t}{2}]_0^{t_0}=4a(1-cos\frac{t_0}{2}).$$

当 $t_0=2\pi$ 时, 第一拱的弧长为 $s(2\pi)=8a$.

由于所求的点分第一拱成 $1:3$, 所以摆线上从 0 到 t_0 的弧长为第一拱长的 $\frac{1}{4}$. 由 $s(t_0)=\frac{1}{4}s(2\pi)$, 即 $4a(1-\cos\frac{t_0}{2})=\frac{1}{4}\cdot 8a$, 求得 $t_0=\frac{2}{3}$, 故所求点的直角坐标为 $((\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2})a,\frac{3}{2}a)$.

21. 求对数曲线 $y=\ln x$ 从 $x=1$ 到 $x=2$ 间一段弧的弧长.

解 参考图 6.21 知所求弧长为

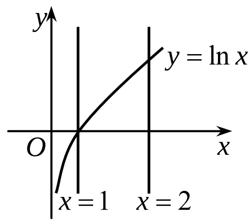


图 6.21

$$s=\int_1^2\sqrt{1+(\ln x)'^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\mathrm{d}x^2.$$

令 $u=\sqrt{1+x^2}$, 则

$$s=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{2u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{u^2-1+1}{u^2-1}\mathrm{d}u=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\mathrm{d}u+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u$$

$$=\sqrt{5}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}[\ln\frac{u-1}{u+1}]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}-\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\ln(1+\sqrt{2}).$$

22. 求对数螺线 $\rho = \mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}}$ 从 $\theta = 1$到$\theta = 2$ 的弧长.

解 $s = \int_1^2 \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta = \int_1^2 \sqrt{(\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}})^2 + (\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}})^2}\,\mathrm{d}\theta$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\int_1^2 \mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}}\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}[2\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}}]_1^2 = \sqrt{5}(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}).$$

23. 计算曲线 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 x 从 a 到 b 的一段弧的长度.

解 参考图 6.22 知

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})'^2}\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1+x}\mathrm{d}x$$

$$= [\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}]_a^b = \frac{2}{3}(1+b)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+a)^{\frac{3}{2}}.$$

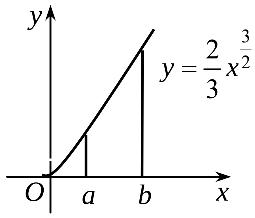


图 6.22

24. 两根电线杆之间的电线, 由于其本身的重量, 下垂成曲线形, 此曲线叫悬链线(见下图), 悬链线的方程为 $y = a\mathrm{ch}\frac{x}{a}(a为常数)$. 计算悬链线上介于 $x = -b$ 和 $x = b$ 之间一段弧的长度.

解 由于对称性, 要计算的弧长为相应于 x 从 0 到 b 的一段曲线弧长的两倍, 而弧长元素 $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x$, 因此所求弧长为

$$s = 2\int_a^b \mathrm{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x = 2a[\mathrm{sh}\frac{x}{a}]_0^b = 2a\mathrm{sh}\frac{b}{a}.$$