第三章　中值定理与导数的应用

第一节　微分中值定理

习题　3-1

1. 试就下列物理现象理解微分中值定理的意义:

(1) 从地面斜抛一物体, 经过一段时间后, 物体又回到地面上, 这过程中必有一点的运动方向是水平的;

(2) 汽车在行进中, 上午 9 时速度为 40km/h, 到 9 时 20 分其速度增至 50km/h, 在这二十分钟内的某时刻其加速度恰为 30km/h.

解 略.

2. 利用拉格朗日中值定理证明:

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的导数恒为零, 则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是一个常数;

(2) 导数为常数的函数必是线性函数.

证 (1) 在区间 (a,b) 上任取两点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$, 显然 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续, 在 (x_1,x_2) 内可导, 根据拉格朗日中值定理, 可得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad (x_1<\xi<x_2).$$

由已知条件知 $f'(\xi)=0$, 所以 $f(x_2)-f(x_1)=0$, 即 $f(x_2)=f(x_1)$. 由 x_1,x_2 的任意性知, $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是一个常数.

(2) 设 $f'(x)\equiv a$ (常数). 令 $g(x)=f(x)-ax$, 则 $g'(x)\equiv 0$. 由(1)知, $g(x)\equiv b$ (其中 b 为某个常数), 因此 $f(x)\equiv ax+b$, 即函数 $f(x)$ 为线性函数.

3. 不求出函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ 的导数, 说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根, 并指出它们所在的区间.

解 显然 $f(x)$ 在[0,3]上连续, 在(0,3)内可导, 且 $f(0)=f(1)=f(2)=f(3)$, 由罗尔定理知, 在(0,1)内至少存在一点 ξ_1, 使得 $f'(\xi_1)=0$; 在(1,2)内至少存在一点 ξ_2, 使得 $f'(\xi_2)=0$; 在(2,3)内至少存在一点 ξ_3, 使得 $f'(\xi_3)=0$, 即方程 $f'(x)=0$ 至少有三个实根. 又方程 $f'(x)=0$ 为三次方程, 最多有三个实根, 故方程 $f'(x)=0$ 有且恰有三个实根, 分别位于区间(0,1), (1,2)和(2,3)内.

4. 设 $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0$, 证明方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 在(0,1)内至少有一个实根.

证 令 $f(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+a_n x$，显然 $f(x)$ 在[0,1]上连续，在(0,1)内可导，且 $f(0)=0$．依题知 $f(1)=0$，由罗尔定理知，在(0,1)内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$，即方程 $f'(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 至少有一个小于 1 的正根 ξ．证毕.

5. 证明方程 $x^3+x-1=0$ 在开区间(0,1)内只有一个实根.

证 令 $f(x)=x^3+x-1$，显然 $f(x)$ 在[0,1]上连续，且

$$f(0)=-1<0,\ \ f(1)=1>0,$$

由零点定理知，在(0,1)内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $f(x)=x^3+x-1=0$ 至少有一个小于 1 的正根 ξ.

又设 ξ_1，ξ_2（$\xi_1<\xi_2$）均为方程 $f(x)=x^3+x-1=0$ 在开区间(0,1)内的正根，即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$ 由罗尔定理知，在 $(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$ 内至少存在一实根 η，使得 $f'(\eta)=0$，即 $3\eta^2+1=0$，而这是不可能的，因此方程 $x^3+x-1=0$ 在开区间(0,1)内有且只有一个实根.

6. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}=f'(\xi)\quad(a<\xi<b).$$

分析 原式可变形为

$$f'(\xi)(b-\xi)-(f(\xi)-f(a))=0,$$

即

$$[f'(x)(b-x)-(f(x)-f(a))]\big|_{x=\xi}=0,$$

考虑到

$$[(f(x)-f(a))(b-x)]'=f'(x)(b-x)-(f(x)-f(a)),$$

故可设 $\varphi(x)=(f(x)-f(a))(b-x)$，对其应用罗尔定理.

证 令 $\varphi(x)=(f(x)-f(a))(b-x)$，易知 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\varphi(a)=\varphi(b)=0.$ 由罗尔定理知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)(b-\xi)-(f(\xi)-f(a))=0,$$

因此命题成立.

7. 证明下列恒等式:

(1) $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\ \ (x>0)$;

(2) $\arctan x - \frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \ (x \ge 1)$.

证 (1) 令 $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$，易知当 $x > 0$ 时，

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}(-\frac{1}{x^2}) = 0,$$

因此当 $x > 0$ 时，$f(x) \equiv$ 某常数. 又 $f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$，故

$$f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x} \equiv \frac{\pi}{2} \ (x > 0).$$

(2) 令 $g(x) = \arctan x - \frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}$，易知当 $x \ge 1$ 时，

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\right)\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

因此当 $x \ge 1$ 时，$g(x) \equiv$ 某常数. 又 $g(1) = \arctan 1 - \frac{1}{2}\mathrm{arc}\cos 1 = \frac{\pi}{4}$，故

$$g(x) = \arctan x - \frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2} \equiv \frac{\pi}{4} \ (x \ge 1).$$

8. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$，其中 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$，证明：在 (x_1, x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi) = 0$.

证 依题，对 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 及 $[x_2, x_3]$ 上分别应用一次罗尔定理可知，存在 $\xi_1 \in (x_1, x_2)$，$\xi_2 \in (x_2, x_3)$，使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. 对 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用一次罗尔定理可知，在 $(\xi_1, \xi_2) \subset (x_1, x_3)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi) = 0$.

9. 证明下列不等式：

(1) 当 $a > b > 0$ 时，$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$;

(2) 当 $x > 1$ 时，$\mathrm{e}^x > \mathrm{e}x$;

(3) $|\arctan a - \arctan b| \le |a - b|$.

证 (1) 令 $f(x) = \ln x$，当 $a > b > 0$ 时，对 $f(x)$ 在区间 $[b, a]$ 上应用一次拉格朗

日中值定理，可得

$$\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b),\ \ \xi\in(b,a),$$

因为 $\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$，所以命题成立.

(2) 令 $g(x)=\mathrm{e}^x$, 当 $x>1$ 时，对 $g(x)$ 在区间 $[1,x]$ 上应用一次拉格朗日中值定理，可得

$$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{\xi}(x-1),\ \ \xi>1,$$

故

$$\mathrm{e}^x=\mathrm{e}+\mathrm{e}^{\xi}(x-1)>\mathrm{e}+\mathrm{e}(x-1)=\mathrm{e}x.$$

(3) 令 $h(x)=\arctan x$，任意给定两个常数 a,b，对 $h(x)$ 在 a,b 两点构成的区间上应用一次拉格朗日中值定理，可知存在介于 a,b 之间的点 ξ，使得

$$\arctan a-\arctan b=\frac{1}{1+\xi^2}(a-b),$$

故

$$\left|\arctan a-\arctan b\right|=\left|\frac{1}{1+\xi^2}(a-b)\right|\le\left|a-b\right|.$$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b](a>0)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，n 是自然数，那么至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$n\xi^{n-1}[f(b)-f(a)]=(b^n-a^n)f'(\xi).$$

证 令 $F(x)=x^n$，则 $f(x)$, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F'(x)=nx^{n-1}>0,\ x\in(a,b)$. 由柯西中值定理可知，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f(b)-f(a)}{b^n-a^n}=\frac{f'(\xi)}{n\xi^{n-1}},$$

故命题成立.

11. 证明广义罗尔定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内 n 阶可导，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有 $n+1$ 个零点，则 $f^{(n)}(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点.

证 由罗尔定理可知，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的任意两个零点之间必有其一阶导函数 $f'(x)$ 的至少一个零点，因此 $f'(x)$ 在 (a,b) 内至少有 n 个零点. 同理，$f''(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $n-1$ 个零点，$f'''(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $n-2$ 个零点. 依次类推可知，$f^{(n)}(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点.