第七节　方向导数与梯度

习题　8-7

1. 求下列函数在指定点 M_0 处沿指定方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数:

(1)　$z=\cos(x+y)$，$M_0(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\boldsymbol{l}=(3,-4)$；

(2)　$u=xyz$，$M_0(1,1,1)$，$\boldsymbol{l}=(1,1,1)$.

解　(1)　由方向 $\boldsymbol{l}=(3,-4)$ 可求出与 $\boldsymbol{l}$ 同向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_l=(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}),$$

因为函数可微分, 且

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\frac{\pi}{2})}=-\sin(x+y)\Big|_{(0,\frac{\pi}{2})}=-1,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\frac{\pi}{2})}=-\sin(x+y)\Big|_{(0,\frac{\pi}{2})}=-1,$$

故所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,\frac{\pi}{2})}=(-1)\cdot\frac{3}{5}+(-1)\cdot(-\frac{4}{5})=\frac{1}{5}.$$

(2)　函数 $u=xyz$ 在平面上处处可微, 则

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yz$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=xz$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=xy$，所以在点 $(1,1,1)$ 处有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial z}=1$.

由 $\boldsymbol{l}=(1,1,1)$ 得 $|\boldsymbol{l}|=\sqrt{3}$，于是

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

故所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,1)}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

2. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处, 沿着这抛物线在该点处与 x 轴正向夹角为锐角的切线方向的方向导数.

解　先求切线斜率: 在 $y^2=4x$ 两边分别求导，得 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4$,

于是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2}{y}$，斜率 $k=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{(1,2)}=1$.

切线方向为 $\boldsymbol{l}=(1,1)$，与 $\boldsymbol{l}$ 同向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_l=(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，又因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{x+y}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{3},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{x+y}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{3},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. 设 $f(x,y)$ 具有一阶连续的偏导数，已给四点 $A(1,3),\ B(3,3),\ C(1,7),\ D(6,15)$，若 $f(x,y)$ 在点 A 处沿 $\overline{AB}$ 方向的方向导数等于 3，而沿 $\overline{AC}$ 方向的方向导数等于 26，求 $f(x,y)$ 在点 A 处沿 $\overline{AD}$ 方向的方向导数.

解 根据题意可求得方向 $\overline{AB}=(2,0)$，与 $\overline{AB}$ 同向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_{\overline{AB}}=(1,0)$，则有

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \overline{AB}}\Big|_{(1,3)}=f'_x(1,3)\cdot 1+f'_y(1,3)\cdot 0=f'_x(1,3)=3,$$

又因为方向 $\overline{AC}=(0,4)$，与 $\overline{AC}$ 同向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_{\overline{AC}}=(0,1)$，

则有

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \overline{AC}}\Big|_{(1,3)}=f'_x(1,3)\cdot 0+f'_y(1,3)\cdot 1=f'_y(1,3)=26,$$

而方向 $\overline{AD}=(5,12)$，与 $\overline{AD}$ 同向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_{\overline{AD}}=(\frac{5}{\sqrt{5^2+12^2}},\frac{12}{\sqrt{5^2+12^2}})=(\frac{5}{13},\frac{12}{13}),$$

所以

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \overline{AD}}\Big|_{(1,3)}=f'_x(1,3)\cdot\frac{5}{13}+f'_y(1,3)\cdot\frac{12}{13}=3\cdot\frac{5}{13}+26\cdot\frac{12}{13}=\frac{327}{13}.$$

4. 设 $z=f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$，证明函数 f 在原点 $O(0,0)$ 连续，且 $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$ 都存在，但 f 在原点沿着向量 $\boldsymbol{l}=(a,b)$ 方向的方向导数不存在(其中 a,b 为任意非零常数).

证 函数 $z=f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ 在点 $(0,0)$ 的邻域有定义，且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt[3]{xy} = 0 = f(0,0),$$

故函数 f 在原点 $O(0,0)$ 处连续. 又

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0,$$

同理

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0,$$

所以 $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$ 都存在.

而函数 f 在原点 $O(0,0)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)} = \lim_{\rho\to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}},$$

让点 $(\Delta x, \Delta y)$ 沿直线 $\Delta y = \Delta x$ 趋于点 $(0,0)$，即 $\Delta y = \Delta x \to 0$，得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x\to 0}} \frac{\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{2}\cdot\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}(\Delta x)^{\frac{1}{3}}} \text{ 不存在.}$$

即 f 在点 $(0,0)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数不存在.

注意 方向导数是沿任意指定方向的变化率，偏导数是沿坐标轴方向的变化率，故可将方向导数看作偏导数的推广. 函数在某点处的偏导数都存在，并不意味着函数在该点处沿任一方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数也存在，但是如果函数在该点处是可微的，则函数在该点沿任一方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在.

5. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在曲线 $x = t$, $y = t^2, z = t^3$ 上点 $(1,1,1)$ 处，沿曲线在该点的切线正方向（对应于 t 增大的方向）的方向导数.

解 先求曲线在给定点的切线方向. 因为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 3t^2,$$

所以曲线在点 $(1,1,1)$ 处的切线的方向向量为 $\boldsymbol{T} = (1,2,3)$，与 $\boldsymbol{T}$ 同向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_T = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right),$$

又因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)} = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,1,1)} = 2,$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial T}\Big|_{(1,1,1)} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{6}{7}\sqrt{14}.$$

6. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处, 沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$, 则

$$F_x=2x, F_y=2y, F_z=2z,$$

于是球面在 (x_0,y_0,z_0) 处的外法线方向向量可取为

$$\boldsymbol{l}=(F_x,F_y,F_z)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=(2x_0,2y_0,2z_0),$$

$\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\ \cos\beta=\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},$$

又因为 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=1,$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

$$=1\cdot\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+1\cdot\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+1\cdot\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$$

$$=\frac{x_0+y_0+z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}.$$

注意到点 (x_0,y_0,z_0) 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上，有 ${x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2=1$, 故

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=x_0+y_0+z_0.$$

7. 求函数 $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的梯度, 并问在何点处其梯度:

(1) 垂直于 z 轴; (2) 平行于 z 轴; (3) 等于零向量.

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3yz$, $\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3xz$, $\frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-3xy$,

所以

$$\mathbf{grad}u=(3x^2-3yz,3y^2-3xz,3z^2-3xy).$$

取 z 轴的方向向量为 $\boldsymbol{l}=(0,0,1)$,

(1) 由于梯度垂直于 z 轴, 则

$$\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{grad}u=0\text{，即 }(0,0,1)\cdot(3x^2-3yz,3y^2-3xz,3z^2-3xy)=0,$$

于是有

$$3z^2-3xy=0\text{，即 }z^2=xy,$$

所以曲面 $z^2=xy$ 上的点梯度垂直于 z 轴.

(2) 由于梯度平行于 z 轴, 则

$\boldsymbol{l}\,/\!/\,\mathbf{grad}u$，可得 $\dfrac{3x^2-3yz}{0}=\dfrac{3y^2-3xz}{0}=\dfrac{3z^2-3xy}{1}$，于是有

$$\begin{cases}3x^2-3yz=0,\\3y^2-3xz=0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x^2=yz,\\y^2=xz,\end{cases}$$

所以曲线 $\begin{cases}x^2=yz,\\y^2=xz,\end{cases}$ 上的点梯度平行于 z 轴.

(3) 由 $\mathbf{grad}u=(3x^2-3yz,3y^2-3xz,3z^2-3xy)=0$，有

$$3x^2-3yz=3y^2-3xz=3z^2-3xy=0,$$

即

$$x=y=z,$$

所以直线 $x=y=z$ 上的点梯度等于零向量.

8. 已知 $u=x^2+y^2+z^2-xy+yz$，点 $P_0=(1,1,1)$. 求 u 在点 P_0 处的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ 的最大、最小值, 并指出相应的方向 $\boldsymbol{l}$，再指出沿什么方向, 其方向导数为零.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x-y,\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y-x+z,\dfrac{\partial u}{\partial z}=2z+y$，于是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=3,$$

所以

$$\mathrm{grad}u_{(1,1,1)}=(1,2,3).$$

因为函数 $u=x^2+y^2+z^2-xy+yz$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 处可微分,

$$\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

是与方向 $\boldsymbol{l}$ 同向的单位向量, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,1,1)}&=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,1,1)}\cos\gamma\\&=1\cdot\cos\alpha+2\cdot\cos\beta+3\cdot\cos\gamma\\&=\mathbf{grad}u(1,1,1)\cdot\boldsymbol{e}_l=\left|\mathbf{grad}u(1,1,1)\right|\cos\theta,\end{aligned}$$

其中 $\theta=(\mathbf{grad}u(1,1,1),\boldsymbol{e}_l)$.

由此可知

当向量 $\boldsymbol{e}_l$ 与 $\mathbf{grad}u(1,1,1)$ 的夹角 $\theta=0$, 即沿梯度方向

$$\boldsymbol{l}=\mathbf{grad}u(1,1,1)=(1,2,3),$$

方向导数最大, 这个最大值为 $\left|\mathbf{grad}u(1,1,1)\right|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$;

当向量 $\boldsymbol{e}_l$ 与 $\mathbf{grad}u(1,1,1)$ 的夹角 $\theta=\pi$, 即沿方向

$$-\boldsymbol{l}=-\mathbf{grad}u(1,1,1)=(-1,-2,-3),$$

方向导数最小，这个最小值为 $-\left|\mathbf{grad}u(1,1,1)\right|=-\sqrt{14}$;

当向量 $\boldsymbol{e}_l$ 与 $\mathbf{grad}u(1,1,1)$ 的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, 即沿垂直于 $\boldsymbol{l}=(1,2,3)$ 的方向, 方向导数为零.

9. 设一金属球体内各点处的温度与该点离球心的距离成反比, 证明: 球体内任意(异于球心的)一点处沿着指向球心的方向温度上升得最快.

证 设 $p(x,y,z)$ 为球体内任意一点, $p_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心坐标, T 为球体内该点的温度, 则

$$T=\frac{k}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\ (k\text{ 为常数}),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{-k(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{-k(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{-k(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

温度T在p点处的梯度方向，就是温度上升得最快的方向，

$$\begin{aligned}
&\mathbf{grad}T\Big|_p\\
&=(\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_p,\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_p,\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_p)\\
&=(\frac{-k(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}},\frac{-k(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}},\\
&\quad\frac{-k(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}))\\
&=\frac{-k}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}(x-x_0,y-y_0,z-z_0),
\end{aligned}$$

即球体内任意（异于球心的）点$p(x,y,z)$处沿着指向球心$p_0(x_0,y_0,z_0)$的方向温度上升得最快.

10. 设$u(x,y)$, $v(x,y)$都具有一阶连续偏导数，证明:

(1) $\mathbf{grad}(u+v)=\mathbf{grad}u+\mathbf{grad}v$;

(2) $\mathbf{grad}(uv)=v\mathbf{grad}u+u\mathbf{grad}v$;

(3) $\mathbf{grad}(\frac{u}{v})=\frac{v\mathbf{grad}u-u\mathbf{grad}v}{v^2}$;

(4) $\mathbf{grad}f(u)=f'(u)\mathbf{grad}u$ (设$f'(u)$连续).

证 (1)
$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}(u+v)&=(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z})\\
&=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})+(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z})\\
&=\mathbf{grad}u+\mathbf{grad}v.
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}(uv)&=(\frac{\partial}{\partial x}(uv),\frac{\partial}{\partial y}(uv),\frac{\partial}{\partial z}(uv))\\
&=(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}v+u\frac{\partial v}{\partial z})\\
&=v(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})+u(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z})\\
&=v\mathbf{grad}u+u\mathbf{grad}v
\end{aligned}$$

(3) $$\mathbf{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right),\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{v}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2},\frac{v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2},\frac{v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}}{v^2}\right)$$

$$=\frac{v\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)-u\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{v^2}$$

$$=\frac{v\,\mathbf{grad}u-u\,\mathbf{grad}v}{v^2}.$$

(4) $$\mathbf{grad}f(u)=\left(\frac{\partial}{\partial x}f(u),\frac{\partial}{\partial y}f(u),\frac{\partial}{\partial z}f(u)\right)$$

$$=\left(f'(u)\frac{\partial u}{\partial x},f'(u)\frac{\partial u}{\partial y},f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=f'(u)\,\mathbf{grad}u.$$