# 第九节

## 方程的近似解

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

# 一、主要内容

## (一)根的隔离

求方程 $f(x)=0$ 的近似解，可分为两个步骤：

(1) 确定根的个数及每个根 所在的大致范围；

(2) 求实根的近似值 .

若方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 内只有一个根，

则称 $[a,b]$ 为根的隔离区间． 隔根区间

若函数 $f(x)\in C[a,b]$, $f(a)f(b)<0$,

且 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内严格单调，则 $[a,b]$ 为隔根区间 .

## 求隔根区间可采用作图法:

可由 $y = f(x)$ 的草图估计隔根区间；

也可将 $f(x) = 0$ 转化为等价方程 $\varphi(x) = \psi(x)$,

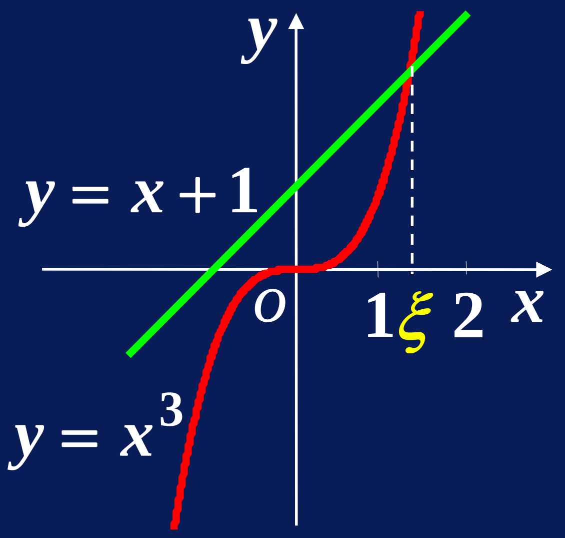
由 $y = \varphi(x), y = \psi(x)$ 的草图估计隔根区间 .

例如, 方程 $x^3 - x - 1 = 0$,

可转化为 $x^3 = x + 1$,

由图可见只有一个实根 $\xi$,

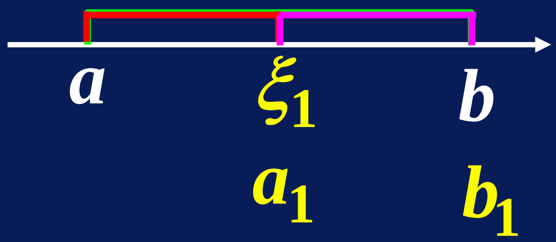
$[1, 2]$ 即为其隔根区间 .



## (二) 二分法

设 $f(x) \in C[a,b]$, $f(a)f(b) < 0$, 且方程 $f(x) = 0$ 只有一个根 $\xi \in (a, b)$, 取中点 $\xi_1 = \dfrac{a+b}{2}$,

若 $f(\xi_1) = 0$, 则 $\xi_1$ 即为所求根 $\xi$.




若 $f(a)f(\xi_1) < 0$, 则根 $\xi \in (a, \xi_1)$,

令 $a_1 = a$, $b_1 = \xi_1$; 否则 $\xi \in (\xi_1, b)$, 令 $a_1 = \xi_1$, $b_1 = b$,

对新的隔根区间 $[a_1, b_1]$ 重复以上步骤, 反复进行.

可得

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

若取 $[a_n,b_n]$ 的中点 $\xi_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$ 作为 $\xi$ 的近似值，则误差满足

$$|\xi_{n+1}-\xi|\le\frac{1}{2}(b_n-a_n)$$

$$\le\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

## (三) 切线法 (牛顿法)

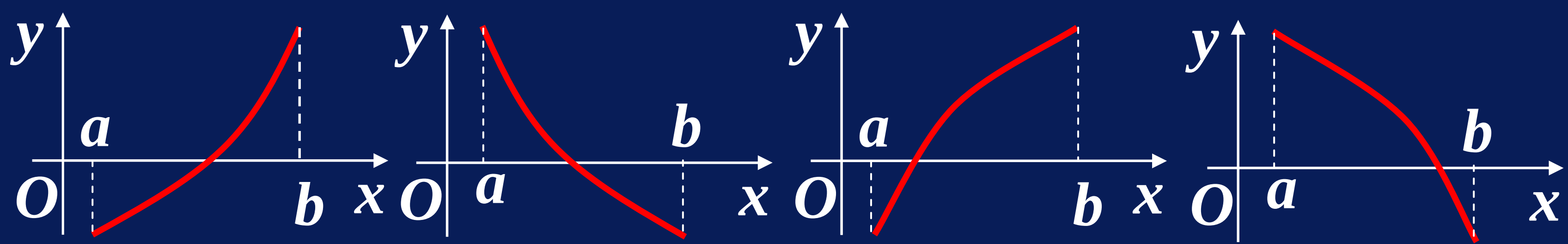
若$f(x)$满足

(1) 在$[a,b]$上连续, $f(a)f(b)<0$,

(2) 在$[a,b]$上 $f'(x)$及 $f''(x)$不变号,

则方程 $f(x)=0$ 在$(a,b)$内有唯一的实根$\xi$.

有如下四种情况:




$f'>0$ $f''>0$　　$f'<0$ $f''>0$　　$f'>0$ $f''<0$　　$f'<0$ $f''<0$

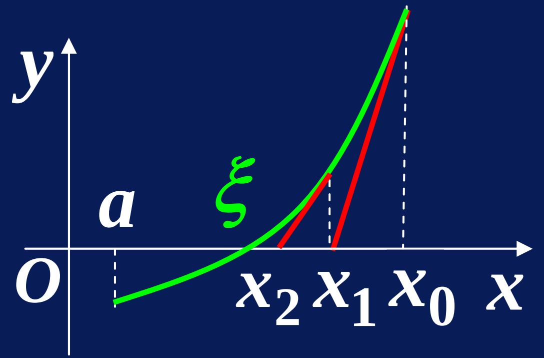
牛顿切线法的基本思想:

用切线近似代替曲线弧求方程的近似根.

记纵坐标与 $f''(x)$ 同号的端点为 $(x_0, f(x_0))$,

在此点作切线,其方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$




令 $y = 0$ 得它与 $x$ 轴的交点 $(x_1, 0)$,

其中

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

再在点 $(x_1, f(x_1))$ 作切线, 可得近似根 $x_2$.

如此继续下去, 可得求近似根的迭代公式：

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

牛顿迭代公式

牛顿法的误差估计:

由微分中值定理得

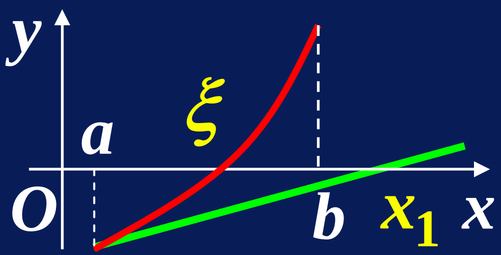
$$f(x_n) - f(\xi) = f'(\eta)(x_n - \xi),\ \eta\text{在}x_n\text{与}\xi\text{之间},$$

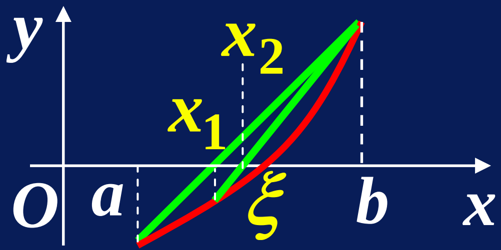
$$x_n - \xi = \frac{f(x_n)}{f'(\eta)}. \qquad f(\xi) = 0$$

记 $m = \min\limits_{[a,b]} |f'(x)| > 0$, 则得 $|x_n - \xi| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m}$.

**注**

1° 用牛顿法时, 应过纵坐标与 $f''(x)$同号的端点作切线; 否则, 切线与 $x$ 轴交点的横坐标 $x_1$未必在$[a,b]$内, 从而就不能保证 $x_1$ 比$a, b$更接近于根$\xi$.




2° 还可用曲线的弦与$x$ 轴交点的横坐标作为 $x_1$来建立逐步逼近根$\xi$的公式.

**弦位法**

## 二、典型例题

**例1** 用二分法求方程 $x^3-3x^2+6x-1=0$在$(0,1)$内的近似根, 使误差不超过0.01.

**解** 令 $f(x)=x^3-3x^2+6x-1$, 则 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$.

$$f(0)=-1<0,\quad f(1)=3>0,$$ 又

$$f'(x)=3x^2-3x+6=3(x^2-x+2)>0$$

故该方程在$(0,1)$只有唯一实根 $\xi$.

$$\xi_1 = 0.5, \quad f(\xi_1) = 1.38 > 0,$$

$$a_1 = 0, \ b_1 = 0.5,$$

$$\xi_2 = 0.25, \quad f(\xi_2) = 1.33 > 0,$$

$$a_2 = 0, \ b_2 = 0.25,$$

$$\xi_3 = 0.13, \quad f(\xi_3) = -0.27 < 0,$$

$$a_3 = 0.13, \ b_3 = 0.25,$$

$$\xi_4 = 0.19, \quad f(\xi_4) = 0.04 > 0,$$

$$a_4 = 0.13, \ b_4 = 0.19,$$

$$\xi_5 = 0.16, \quad f(\xi_5) = -0.11 < 0,$$

$$a_5 = 0.16, \; b_5 = 0.19,$$

$$\xi_6 = 0.18, \quad f(\xi_6) = -0.01 < 0,$$

$$a_6 = 0.18, \; b_8 = 0.19,$$

于是

$$0.18 < \xi < 0.19,$$

且以0.18或0.19作为$\xi$的近似值, 误差均不超过0.01.

例2 用切线法求方程 $x^3-2x^2-3x-5=0$ 在隔根区间[3,4]内的近似根, 使误差不超过 0.01 .

解 设 $f(x)=x^3-2x^2-3x-5$. 由于在[3,4]上,

$$f(3)=-5<0,\quad f(4)=15>0,$$

$$f'(x)=3x^2-4x-3$$

$$=\frac{1}{3}[3x-(2+\sqrt{13})][3x-(2-\sqrt{13})]>0,$$

$$f''(x)=6x-4=2(3x-2)>0,$$

故取 $x_0=4$. 连续使用牛顿迭代公式, 得

$$x_1 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{15}{29} = 3.483,$$

$$x_2 = 3.483 - \frac{f(3.483)}{f'(3.483)} = 3.483 - \frac{2.542}{19.462} = 3.352,$$

$$x_3 = 3.352 - \frac{f(3.352)}{f'(3.352)} = 3.352 - \frac{0.135}{17.3} = 3.344,$$

$$x_4 = 3.344 - \frac{f(3.344)}{f'(3.344)} = 3.344 - \frac{-0.003}{17.17} = 3.344,$$

于是 $x_4 = x_3 = 3.344$，迭代停止 .

经计算可知 $f(3.344) < 0$, $f(3.345) > 0$, 于是

$$3.344 < \xi < 3.345,$$

且以3.344或3.345作为$\xi$的近似值, 误差均不超过0.01.

# 三、同步练习

1. 用二分法求方程 $x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4 = 0$ 的近似实根时, 要使误差不超过 $10^{-3}$, 至少应对分区间多少次?

2. 用切线法求方程 $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$ 在隔根区间[3,4]内的近似根, 使误差不超过 0.01 .

## 四、同步练习解答

1. 用二分法求方程 $x^3+1.1x^2+0.9x-1.4=0$ 的近似实根时，要使误差不超过 $10^{-3}$，至少应对分区间多少次？

**解** 设 $f(x)=x^3+1.1x^2+0.9x-1.4$，则

$$f(x)\in C(-\infty,+\infty).$$

$$f'(x)=3x^2+2.2x+0.9>0, \qquad \Delta=-5.67<0$$

又 $\quad f(0)=-1.4<0,\ f(1)=1.6>0,$

故该方程只有一个实根 $\xi$, $[0,1]$ 为其一个隔根区间.

现采用二分法, 欲使

$$|\xi_{n+1}-\xi| \le \frac{1}{2^{n+1}}(1-0) < 10^{-3},$$

必需

$$2^{n+1} > 1000,$$

即 $$n > \log_2 1000 - 1 \approx 8.96.$$

可见只要对分区间9次，即可得到满足要求的实根近似值 $\xi_{10}$.

2. 用切线法求方程 $x^3-2x^2-4x-7=0$ 在隔根区间[3,4]内的近似根, 使误差不超过 0.01 .

解 设 $f(x)=x^3-2x^2-4x-7$. 由于在[3,4]上,

$$f(3)=-10<0,\quad f(4)=9>0,$$

$$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)>0,$$

$$f''(x)=6x-4=2(3x-2)>0,$$

故取 $x_0=4$. 又

$$m=\min_{[3,4]}\left|f'(x)\right|=f'(3)=11.$$

$$x_1 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{9}{28} = 3.68,$$

而

$$|x_1 - \xi| \le \frac{|f(x_1)|}{m} = \frac{1.03}{11} = 0.09,$$

故 $x_1$ 精度不够，再求

$$x_2 = 3.68 - \frac{f(3.68)}{f'(3.68)} = 3.68 - \frac{1.03}{21.9} = 3.63.$$

$$|x_2 - \xi| \le \frac{|f(x_2)|}{m} = \frac{0.042}{11} < 0.004 < 0.01,$$

因此得满足精度要求的近似解 $\xi \approx 3.63.$