第十一章　无穷级数

第一节　常数项级数的基本概念和性质

1.如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则（1）级数$100+\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ <u>收敛</u>；（2）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}100u_n$ <u>收敛</u>；（3）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+100)$<u>发散</u>.

2.已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=S$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$的和是$\underline{2S-u_1}$.

解　因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}=S+\sum_{n=2}^{\infty}u_n=S+S-u_1=2S-u_1.$$

3.已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和$S_n=\dfrac{3n}{n+2}$，则$u_n=\underline{\dfrac{6}{(n+1)(n+2)}}$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的和是<u>3</u>.

解　$u_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{3n}{n+2}-\dfrac{3(n-1)}{n+1}=\dfrac{6}{(n+1)(n+2)}$，设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n=S$，

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+2}=3.$$

4.级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}\right)$是<u>发散</u>，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$收敛于$\underline{\dfrac{3}{4}}$. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+1}{9^n}$的和是$\underline{\dfrac{5}{8}}$.

解　（1）因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$收敛，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}\right)$收敛，由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n}$$

则根据收敛级数的性质，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{10n}$必定收敛，但已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{10n}$发散，矛盾. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}\right)$发散.

（2）因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n}$都收敛，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n=\frac{3}{4}$$

（3）因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{9^n}$都收敛，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{9^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n}=\frac{5}{8}.$$

5.级数$\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\cdots$的通项是$\underline{(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$，其和S＝$\underline{\frac{2}{5}}$.

解　通项$u_n=\frac{(-1)^{n+1}2^n}{3^n}=(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$，

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1+\frac{2}{3}}=\frac{2}{5}.$$

6.根据级数收敛与发散的定义判别下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

解　（1）$U_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$

$$S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$收敛.

（2）$S_n=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{n+1}-1$

$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$. 从而级数发散.

第二节　正项级数及其审敛法

1.用比较审敛法及其极限形式判别下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$

解　当$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$时，$\sin\theta\le\theta$，所以$\sin\frac{\pi}{2^n}\le\frac{\pi}{2^n}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$收敛.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\frac{10}{3}}{n^2-2n}$

解　当$n\ge3$时，原级数为正项级数，且$\frac{n+\frac{10}{3}}{n^2-2n}>\frac{1}{n-2}$，因前有限项不影响级数的敛散性．又级数$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}$发散，所以原级数发散.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

解 利用比较判别法的极限形式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}}{\frac{1}{n^3}}=2$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$收敛.

注意 P 级数是一类重要的级数，利用比较判别法时 P 级数常作为比较的级数．当通项比较复杂时，应选取 P 等于多少呢？可以选取 P 等于分子与分母的最高次幂之差.

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$

解 因为$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$，当$a>1$，时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$当$a>1$时敛.

当$a=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$发散.

当$0<a<1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$是正项级数，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1$，即级数的一般项不趋于零。

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$发散.

注意 常见错误是：不讨论a的取值范围，认为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$收敛，所以经常采用以下做法

（ⅰ）$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$收敛.

（ⅱ）$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}}=1$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$收敛.

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{10^n}(0\le p_i\le 9, i=0,1,2,3,\cdots)$

解 $\frac{p_n}{10^n}\le\frac{9}{10^n}$，因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{10^n}$收敛.

注意 常见错误为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p_n}{10^n}}{\frac{1}{10^n}}=p_n, p_n\le 9$，所以原级数收敛.

错在极限求错：$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p_n}{10^n}}{\frac{1}{10^n}}=p_n$，极限值应当是常数，与$n$无关.

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n^3-1}$

解 因为$u_n=\frac{\ln n}{2n^3-1}<\frac{n}{2n^3-1}=v_n$

利用比较审敛法的极限形式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n^3-1}\cdot\frac{n^2}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2n^3-1}=\frac{1}{2}>0$$

知级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$有相同的敛散性，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛．从而$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，故由比较审敛法知原级数收敛．

2.用比值审敛法判别下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n\tan\frac{\pi}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n+\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$，所以原级数收敛．

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)!}$

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(2n+3)!}\Big/\frac{3^n}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(2n+3)(2n+2)}=0<1$，所以原级数收敛．

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}3\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}3\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{e}>1$，所以原级数发散．

注意 常见错误为有的学生忘记重要极限：$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，而认为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\to 1(n\to\infty).$$

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\frac{1}{2}<1$，所以原级数收敛．

注意 用比值法判别时，有的同学根本不求$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$的具体值，认为只要$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$则$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，从而级数收敛．这是不对的，事实上，有时即使$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，仍有$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$或

者$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$不存在.

3.用根值审敛法判别下列级数的敛散性

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{4n^2}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{4n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}<1$，所以原级数收敛.

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^2}}{n+\dfrac{1}{n}}=0<1$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$收敛.

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\dfrac{(n+1)^{n^2}}{n}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3^n}\cdot\dfrac{(n+1)^{n^2}}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)^n}{\sqrt[n]{n}}=\infty$，所以原级数发散.

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3^{n-1}}\right)^{2n-1}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{n}{3^{n-1}}\right)^{2n-1}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3^{n-1}}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3^{2n-1}}\cdot\dfrac{3^{2-\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n}}=0$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3^{n-1}}\right)^{2n-1}$收敛.

4.判别下列级数的敛散性

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{3^n}$

解 因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3^n}$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n}$均收敛，所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$$

收敛.

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

解 因为$\arctan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，即原级数与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$同敛散．又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散，所以原级数发散.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a^n}\right)^n$，其中$\lim_{n\to\infty}a_n=a,a_n>0,a>0,b>0$且$a\neq b$

解 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{b}{a_n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}$．所以当$a>b$时级数收敛．当$a<b$时级数发散．

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$

解 $(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)$，$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdots2n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[2(n+1)-1]!!}{3^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{3^n n!}{(2n-1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3(n+1)}=\frac{2}{3}<1$$

所以原级数收敛．

第三节　任意项级数的审敛法

1．判别下列级数是否收敛，如果收敛是绝对收敛还是条件收敛

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{na^n}$　　$(0<a<1)$

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)a^{n+1}}\cdot\frac{na^n}{1}=\frac{1}{a}>1$

又因为$|u_1|=\frac{1}{a}>1$，所以$\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq0$，因此$\lim_{n\to\infty}u_n\neq0$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{na^n}$ $(0<a<1)$发散．

注意　一般项级数不绝对收敛时，不能保证原级数也不收敛，但用比值判别法判断出其绝对值级数发散，则原级数一定发散．

（2）$\frac{1}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi^3}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\pi^4}\sin\frac{\pi}{4}-\cdots$

解　原级数的一般项$u_n=(-1)^n\frac{1}{\pi^n}\sin\frac{\pi}{n},n=2,3,\cdots$

$$|u_n|=\frac{1}{\pi^n}\left|\sin\frac{\pi}{n}\right|<\frac{1}{\pi^{n-1}n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^{n-1}n}{\pi^n(n+1)}=\frac{1}{\pi}<1,$$

故原级数的绝对值级数收敛，从而原级数绝对收敛．

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$

解　设$u_n=\ln\frac{n+1}{n},u_{n+1}=\ln\frac{n+2}{n+1}$，

$$u_{n+1}-u_n=\ln\frac{n+2}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

又$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，因此交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\dfrac{n+1}{n}$收敛.

再判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}$的敛散性

$$S_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1) \to \infty, (n \to \infty)$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}$发散．从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\dfrac{n+1}{n}$条件收敛.

2. 设$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 u_n$存在，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛

证　因为$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 u_n$存在，所以数列$\{n^2 u_n\}$有界，即存在数M，使$|n^2 u_n| < M$．故

$$|u_n| = |n^2 u_n| \frac{1}{n^2} < \frac{M}{n^2},$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{M}{n^2}$收敛，所以原级数绝对收敛.

第四节　幂级数

1．求下列幂级数的收敛区间

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n\sqrt{n+1}}\cdot\dfrac{3^{n-1}\sqrt{n}}{(-1)^n}\right| = \dfrac{1}{3}$，所以$R=3$.

当$x=-3$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{3^{n-1}\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{\sqrt{n}}$发散;

当$x=3$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3}{\sqrt{n}}$收敛．所以原级数的收敛区间为$(-3,3]$.

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2x-3)^n}{2n-1}$

解　设$2x-3=t$，现在讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{2n-1}$的收敛区间.

$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{2n-1}{2n+1}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$，故$R=1$.

当$t=-1$时，级数成为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\dfrac{1}{2n-1}$，发散.

当$t=1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$收敛.

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{2n-1}$的收敛区间为$(-1,1]$，从而原级数的收敛区间为$(1,2]$.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}x^{2n+1}$

解 此级数缺少 x 的偶次幂项，必须直接用比值审敛法求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}\cdot 3^n(2n+1)}{3^{n+1}(2n+3)\cdot(-1)^n x^{2n+1}}\right|=\frac{|x|^2}{3},$$

令 $\frac{|x|^2}{3}<1$，得 $|x|<\sqrt{3}$，故收敛半径 $R=\sqrt{3}$.

当 $x=\sqrt{3}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{3}}{2n+1}$ 收敛；

当 $x=-\sqrt{3}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{3}}{2n+1}$ 收敛；故收敛区间为 $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$.

2．已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n\cdot x^n}{(n-1)!}$，问 $x=1, x=\frac{1}{3}$ 是否为此幂级数的收敛点.

解 $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(n+2)^{n+1}}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{(n+1)^n}\right|$$

$$=\left|\frac{n+2}{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right|=\frac{n+2}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}}$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\mathrm{e}, R=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

$x=1\bar{\in}\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，故 $x=1$ 不是此级数的收敛点；$x=\frac{1}{3}\in\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，故 $x=\frac{1}{3}$ 是此级数的收敛点.

3．求下列幂级数的收敛区间与和函数

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right|=|x|^2<1$，即 $|x|<1$，故 $R=1$，

当 $x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}$ 收敛；

当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$ 收敛．所以级数收敛区间为 $[-1,1]$.

当 $x\in[-1,1]$ 时，和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x$$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$，所以 $R=1$.

当 $x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$ 发散；

当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散．所以级数的收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时，设和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$，

$$S(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}$ ， $R=2.$

当 $x=-2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n}$ 收敛；

当 $x=2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散．所以原级数的收敛区间为 $[-2,2)$.

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$，则 $xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

$$(xS(x))'=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x},$$

$$xS(x)=\int_0^x\frac{1}{2-x}\mathrm{d}x=-\ln(2-x)+\ln 2$$

当 $x\neq 0$ 时，$S(x)=-\frac{1}{x}\left[\ln(2-x)-\ln 2\right]=-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$,

当 $x=0$ 时，$S(0)=\frac{1}{2}$.

所以 $S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & -2\le x<0, 0<x<2\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$

4．证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}$ 收敛，并求其和.

证 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^n}$ 收敛．而 $\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{3n}=\frac{1}{3}<1$，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3^n}$ 收敛.

从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^n}$收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\Big|_{x=\frac{1}{3}}=\left[\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x\right]'\Big|_{x=\frac{1}{3}}$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'\Big|_{x=\frac{1}{3}}=\left(\frac{x}{1-x}\right)'\Big|_{x=\frac{1}{3}}=\frac{x}{(1-x)^2}\Big|_{x=\frac{1}{3}}=\frac{9}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^n}=5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=5\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{5}{2},$$

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}=\frac{9}{4}+\frac{5}{2}=\frac{19}{4}.$$

注意　这道题难点在于有些同学想不到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\Big|_{x=\frac{1}{3}}$.

第五节　函数展开成幂级数

1．已知$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$，则

$$a^x=\mathrm{e}^{x\ln a}=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}\cdot x^n\quad x\in(-\infty,+\infty)}(a>0,x\neq1)$$

$$\mathrm{ch}x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\underline{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ,x\in(-\infty,+\infty)}.$$

2.将下列函数展开成x的幂级数，并求展开式成立的区间.

（1）$f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}$

解　$f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{1+x}\right)$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}x^{n-1},\quad x\in(-2,2)$$

$$\frac{-1}{1+x}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1},\quad x\in(-1,1)$$

所以$f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n-1}}\right]x^{n-1},\quad x\in(-1,1)$.

（2）$f(x)=\ln(1-x^2)$

解　$f(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n x^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}\qquad x\in[-1,1]$$

（3） $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

解 $f'(x)=\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\ ,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$\therefore\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$.

或 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$.

注意 级数展开时，一定要注意角标问题.

（4） $\ln(a+x)\quad(a>0)$

解 $\ln(a+x)=\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)+\ln a=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^n}{n}$

$$=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n\quad,\quad -a<x\le a.$$

或 $\ln(a+x)=\ln a+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}\quad,\quad -a<x\le a.$

（5） $f(x)=\cos^2 x$

解 法一

$f(x)=\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}\ ,\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

解 法二 $\left(\cos^2 x\right)'=-2\cos x\cdot\sin x=-\sin 2x$

利用 $\sin x$ 的展开式可得

$$\left(\cos^2 x\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

对上式两端分别以 0 到 x 积分得

$$\int_0^x\left(\cos^2 x\right)'\mathrm{d}x=\cos^2 x\Big|_0^x=\cos^2 x-1$$

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}\quad,(-\infty<x<+\infty)$$

所以$\cos^2 x=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}\qquad(-\infty<x<+\infty)$.

3. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开为 $x+4$ 的幂级数，并求展开式成立的区间.

解 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$$

由$\left|\frac{x+4}{3}\right|<1$及$\left|\frac{x+4}{2}\right|<1$得$-6<x<-2$.

4. 将函数 $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$ 展开成$(x-2)$的幂级数，并求展开式成立的区间.

解 $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}(x-2+2)=\sin\left(\frac{\pi}{4}(x-2)+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{4}(x-2)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left[\frac{\pi}{4}(x-2)\right]^{2n}$$

或 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2}(x-2)^{2n-2}\qquad x\in(-\infty,+\infty)$.

5. 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数，并写出展开式成立的区间.

解 因 $f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{1}{1-x^4}-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}$，$\quad(|x|<1)$

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{4n}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},$$

而 $f(0)=0$，故 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}$，$(|x|<1)$.

第六节　傅里叶级数

1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在$(-\pi,\pi]$上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}2,-\pi<x\le 0\\ x,0<x\le\pi\end{cases}$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于何值？

解 根据狄里克雷收敛定理的结论，求级数在$(-\pi,\pi]$内某点处的收敛值很方便，作 $f(x)$ 的简图 11.1.

$$S(\pi)=\frac{1}{2}\left[f(-\pi^+)+f(\pi^-)\right]=\frac{2+\pi}{2}=1+\frac{\pi}{2}$$

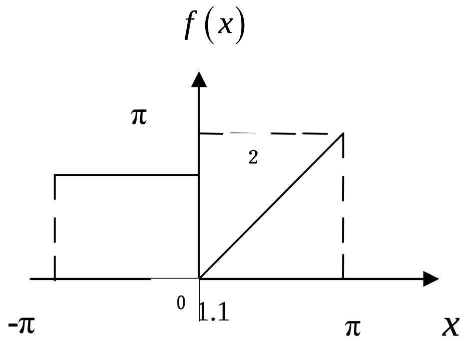

图 11. 1

2．设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\le x<-\dfrac{\pi}{2}\\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 $f(x)$ 为奇函数，故 $a_n=0$，$(n=0,1,2,\cdots)$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[0+\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}(-1)^{n+1}\right]$$

从而

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2n}\right]\sin nx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{\pi n^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]\sin nx,$$

$x\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x\neq(2n+1)\pi$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

3．设函数 $f(x)=x^2$，$0\le x\le1$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$，$(n=1,2,3,\cdots)$，求 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

解 由系数 $b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$ 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$ 为正弦级数，且为 $f(x)=x^2$，$0\le x\le 1$进行奇延拓后所展成的级数.

延拓后的奇函数为 $g(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ -x^2, & -1\le x<0 \end{cases}$，此函数在 $x=-\frac{1}{2}$ 处连续，故由狄里克雷收敛定理有

$$S\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}.$$

4. 若$\varphi(x),\psi(x)$满足狄氏条件，且$\varphi(-x)=-\psi(x)$，问$\varphi(x)$与$\psi(x)$的傅里叶系数a_n,b_n与α_n,β_n之间有何条件.

解 $\varphi(x),\psi(x)$的傅里叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad 和 \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad 和 \quad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

于是，

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0}\varphi(-x)\cos nx\mathrm{d}(-x)+\int_{0}^{-\pi}\varphi(-x)\cos nx\mathrm{d}(-x)\right]\\
&=-\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0}-\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{-\pi}-\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\
&=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x=-\alpha_n,(n=0,1,2,\cdots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0}\varphi(-x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{-\pi}\varphi(-x)\sin nx\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}-\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x=\beta_n,(n=1,2,3,\cdots)
\end{aligned}$$

5. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，证明：如果 $f(x-\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数$a_0=0,a_{2k}=0,b_{2k}=0.$

证
$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}-f(x-\pi)\cos nx\mathrm{d}x\underline{\underline{令y=x-\pi}}$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(y)\cos n(y+\pi)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(y)\cdot(-1)^{n}\cdot\cos ny\mathrm{d}y=(-1)^{n+1}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

从而 $$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\left[1+(-1)^{n+1}\right]\mathrm{d}x\right],$$

于是 $$a_0=0, a_{2k}=0,(k=1,2,\cdots).$$

同理

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\ =\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right],$$

其中

$$\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\int_{0}^{\pi} f(x-\pi)\sin nx\mathrm{d}x \underline{\underline{令 y=x-\pi}}$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(y)\sin n(y+\pi)\mathrm{d}y$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(y)\cdot(-1)^{n}\cdot\sin ny\mathrm{d}y$$

$$=(-1)^{n+1}\int_{-\pi}^{0} f(y)\cdot\sin y\mathrm{d}y$$

于是 $$b_{2k}=0,(k=1,2,\cdots).$$

第七节　一般周期函数的傅里叶级数

1．设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数，在 $(0,2l)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} A\ , & 0<x\le l \\ 0\ , & l<x<2l \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解 $$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\left[\int_{-l}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{l} A\mathrm{d}x\right]=A,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_{0}^{l} A\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{A}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l\cdot\frac{l}{n\pi}=0.$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ =\frac{1}{l}\int_{0}^{l} A\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{A}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l\cdot\frac{l}{n\pi}=-\frac{A}{n\pi}(\cos n\pi-\cos 0)$$

$$=-\frac{A}{n\pi}\left[(-1)^{n}-1\right]=\frac{A}{n\pi}\left[1-(-1)^{n}\right]$$

$$=\begin{cases} \dfrac{2A}{n\pi}\ , & n为奇数 \\ 0\ , & n为偶数 \end{cases}$$

从而

$$f(x)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi x}{l},(-\infty<x<+\infty, x\neq kl, k=0,\pm1,\cdots).$$

2．将函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}1+\dfrac{2x}{\pi},-\pi\le x<0\\ 1-\dfrac{2x}{\pi},0\le x\le\pi\end{cases}$ 展成傅里叶级数.

解 对 $f\left(x\right)$进行周期延拓.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{n^2\pi+2}\left(1-\cos nx\right)=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots\\ \dfrac{8}{n^2\pi^2}, & n=1,3,5\cdots\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\sin nx\mathrm{d}x=0$$

从而

$$f\left(x\right)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2n-1\right)x}{\left(2n-1\right)^2}\quad,\ x\in\left[-\pi,\pi\right].$$

3．将函数 $f\left(x\right)=x$ 在$\left[0,\pi\right]$展成余弦级数，并求$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}$的和.

解 对 $f\left(x\right)$进行偶延拓，$a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi$.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left[\left(-1\right)^n-1\right]=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi n^2}, & n\text{为奇数}\\ 0, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

从而 $f\left(x\right)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2n-1\right)x}{\left(2n-1\right)^2}$ ， $0\le x\le\pi.$

当 $x=0$ 时， $f\left(0\right)=0$，故$\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}$，于是$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

4．将函数 $f\left(x\right)=\cos x, x\in\left(0,\pi\right)$展成正弦级数.

解 将 $f\left(x\right)$作奇延拓

$a_n=0$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n+1}\cos(n+1)x-\frac{1}{n-1}\cos(n-1)x\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1+(-1)^n}{n+1}+\frac{1+(-1)^n}{n-1}\right]$$
$$=\frac{1+(-1)^n}{\pi}\left(\frac{2n}{n^2-1}\right)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{4n}{\pi\left(n^2-1\right)}, & n=2,4,\cdots\\ 0, & n=3,5,\cdots\end{cases}$$
$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin x\mathrm{d}x=0$$
故 $\cos x=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\left(\frac{2m}{4m^2-1}\right)\sin 2mx\quad,\quad(0<x<\pi).$

5．将函数 $f(x)=x-1(0\le x\le 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

解 $l=2$，将 $f(x)$ 作偶延拓.

$$b_n=0$$
$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{n\pi}\left[(x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2$$
$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi-1\right]$$
$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0, & n=2,4,\cdots\\ \dfrac{-8}{n^2\pi^2}, & n=1,3,\cdots\end{cases}$$
$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=0,$$
故
$$f(x)=\frac{-8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}\quad,\quad x\in[0,2]$$
或者
$$f(x)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\quad,\quad x\in[0,2].$$

第十一章　无穷级数（总习题）

1．判别下列级数的敛散性.

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+30}{4n^2+10}\right)^n$；

解 用根值法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+30}{4n^2+10}=\frac{1}{2}<1,$$

所以原级数收敛.

（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$；

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛.

注意 利用等价无穷小或同阶无穷小选择比较级数是很重要的方法，再例如 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{n},(n\to\infty)$，所以在判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 的敛散性时，可以选级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 作为比较级数.

（3） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$

解 $\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}\le\dfrac{n\cdot n!}{(2n)!}<\dfrac{(n+1)!}{(2n)!}<\dfrac{1}{2n(2n-1)}$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n(2n-1)}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$ 收敛.

（4） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}\quad(a>0)$

解
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{\mathrm{e}}\begin{cases}a<\mathrm{e}\text{时收敛，}\\ a>\mathrm{e}\text{时发散，}\\ a=\mathrm{e}\text{时发散，}\end{cases}$$

因为当 $a=\mathrm{e}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=1$，比值法失效. 又 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$，但由于数列 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 单调增加趋于 e，所以 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne 0$，故级数发散.

（5） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

解 $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}=\dfrac{1}{n+1}.$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散，故由比较审敛法知，原级数发散.

（6）$\sum_{n=2}^{\infty} n^{\lambda}\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}$（$\lambda$ 为常数）

解 利用比较审敛法的极限形式，因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\lambda}\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{n^{\lambda}\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}=1$，所以原级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda}\frac{\pi}{2\sqrt{n}}$ 同敛散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda}\frac{\pi}{2\sqrt{n}}=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\lambda}}$，

当 $\frac{1}{2}-\lambda>1$ 时，即 $\lambda<-\frac{1}{2}$ 时，原级数收敛，

当 $\frac{1}{2}-\lambda\le 1$ 时，即 $\lambda\ge-\frac{1}{2}$ 时，原级数发散.

2. 利用级数收敛的必要条件，证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n}}{(n!)^{2}}=0$

证 构造正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{(n!)^{2}}$，根据级数收敛的必要条件，只有证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{(n!)^{2}}$ 收敛即可.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{\left[(n+1)!\right]^{2}}\cdot\frac{(n!)^{2}}{n^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=0,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{(n!)^{2}}$ 收敛，从而 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n}}{(n!)^{2}}=0$.

3. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ 的敛散性，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

解 考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$. 由于 $\lim_{n\to\infty}nu_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{n(n+1)}=2>1$，所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ 即原级数的绝对值级数发散，又原级数为交错级数，因

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}=0$$

且
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+1)}{2n+1}=\frac{n(2n+3)}{(n+2)(2n+1)}=\frac{2n^{2}+3n}{2n^{2}+5n+2}<1,$$

即 $u_{n+1}<u_n$，故原级数收敛，且为条件收敛.

4. 设正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{2}$ 收敛，并说明反之不成立；又证明若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{2}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 绝对收敛.

证明 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，即对于 $\varepsilon=1$，$\exists N$，当 $n>N$ 时有 $\left|a_n-0\right|=0$，即 $0\le a_n<1$.

于是，$0 \le a_n^2 < a_n$，而级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛.

但反之不成立，如级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散.

注意 常见错误是由 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$，得出$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$收敛，但我们不能保证$a_n \ne 0$.

又$\left|\frac{a_n}{n}\right| < \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$均收敛，故绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right|$收敛，所以原级数绝对收敛.

5. 求下列幂级数的收敛区间.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$； （2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}(x-1)^{2n}$；

解 （1）由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}\sqrt{n}}{3^n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{3}$，得$R = 3$.

当$x = -3$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$发散；

当$x = 3$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3}{\sqrt{n}}$为收敛的交错级数．故原级数的收敛区间为$(-3,3]$.

（2）此级数为$(x-1)$的幂级数，且缺少奇次幂项，故直接用比值法求收敛区间.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{4^{n+1}}(x-1)^{2(n+1)}}{\frac{1}{4^n}(x-1)^{2n}}\right| = \frac{1}{4}|x-1|^2 = \frac{1}{4}(x-1)^2,$$

当$\frac{1}{4}(x-1)^2 < 1$时，$-2 < x-1 < 2$即$-1 < x < 3$时，级数收敛；

当$x = -1$或$x = 3$时，级数均为$\sum_{n=1}^{\infty} 1$，发散．故原级数的收敛区间为$(-1,3)$.

6. 求下列幂级数的收敛区间与和函数

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$

解 $\sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1}$的收敛区间为$-1 < y < 1$，即$-1 < x-1 < 1$，从而，$0 < x < 2$.

求和函数. 法 1 令$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$.

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n = \frac{x-1}{1-(x-1)} = \frac{x-1}{2-x},$$

所以

$$S(x) = \left(\frac{x-1}{2-x}\right)' = \frac{1}{(2-x)^2}, \quad x \in (0,2).$$

法 2 $$S_n(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \cdots + n(x-1)^{n-1}, \tag{1}$$

$$(x-1)S_n(x)=x-1+2(x-1)^2+3(x-1)^3+\cdots+n(x-1)^n \tag{2}$$

（1）－（2）得，$S_n(x)=\dfrac{1}{2-x}\left[1+(x-1)+(x-1)^2+\cdots+(x-1)^{n-1}+n(x-1)^n\right]$

$$=\frac{1}{2-x}\left[\frac{1}{2-x}-n(x-1)^n\right],$$

$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\dfrac{1}{(2-x)^2}$.

（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{3^n n!}x^n$;

解　原式$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n n!}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n n!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)+1}{(n-1)!}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{x}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

$$=\left(\frac{x}{3}\right)^2 e^{\frac{x}{3}}+\frac{x}{3}e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{3}}=\left(\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}+1\right)e^{\frac{x}{3}}\quad,\quad(-\infty,+\infty)$$

注意　求幂级数的和时，要注意下标. 下标不同，求出的表达式不同.

7. 求下列级数的和

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$

解　法1　令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$　，　$x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=\frac{1}{x}\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2},$$

所以

$$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{\left(2-x^2\right)^2}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=S(1)=3.$$

解　法2　定义法　$S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$　（1）

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}} \tag{2}$$

（1）－（2）得，$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots+\dfrac{2}{2^n}-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$

所以

$$S_n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-2}}-\frac{2n-1}{2^n},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 3,$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3.$$

（2）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(n^2-1\right)}$

解 原式$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$, 设

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1}\quad,\quad |x|<1$$

$$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^{n+1}=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=x^2\int_0^x\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}\mathrm{d}x=-x^2\ln(1-x)$$

$$S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\int_0^x\sum_{n=2}^{\infty}x^n\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{x^2}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)-x-\frac{1}{2}x^2$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(n^2-1\right)}=S_1\left(\frac{1}{2}\right)-S_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$$

8. 求极限$\lim_{n\to\infty}\left[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots\left(2^n\right)^{\frac{1}{3^n}}\right]$

解 原式$=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{n}{3^n}}=2^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}}=2^{\frac{3}{4}}$. 其中

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{3^n}\Big|_{x=1}.$$

令

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{3^n},$$

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}=\frac{\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{3}}=\frac{x}{3-x},$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{3-x}\right)'=\frac{(3-x)-x(-1)}{(3-x)^2}=\frac{3}{(3-x)^2},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=S(1)=\frac{3}{(3-1)^2}=\frac{3}{4}.$$

9. 将函数 $f(x)=x\cdot\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展成 x 的幂级数，并写出收敛区间.

解 $\arctan x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-t\right)^2\right)^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

$$\ln\left(1+x^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n}(-1)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{2n}.$$

$$f(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2n(2n-1)},$$
收敛域为$[-1,1]$.

10. 将函数 $f(x)=\ln x$ 展为$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$的幂级数，并写出收敛区间，（提示令$\frac{x-1}{x+1}=t$）

解 $f(x)=\ln x=\ln\frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}}=\ln\left(1+\frac{x-1}{x+1}\right)-\ln\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(-\frac{x-1}{x+1}\right)^n}{n}$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2n+1}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$$
令
$$\begin{cases}1+\frac{x-1}{x+1}>0,\\ 1-\frac{x-1}{x+1}>0,\end{cases}$$
解得$x>0$，即收敛区间为$(0,+\infty)$.　.

11．证明　$f(x)=x^2$ 在$[-\pi,\pi]$上能展成傅里叶级数：
$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$
并由此结果求下列级数的和：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$；　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

解　将 $f(x)=x^2$ 作周期为 2π 的周期延拓，在$(-\pi,\pi)$内为偶函数，故 $f(x)$ 的傅里叶级数为余弦级数.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2,$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}\left[2x\cos nx+\frac{1}{n}\left(n^2x^2-2\right)\sin nx\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{4}{n^2}(-1)^n\qquad(n=1,2,\cdots)$$

所以

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx \qquad (-\pi\le x\le\pi)$$

（1）当 $x=0$ 时，有

$$4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}+\frac{\pi^2}{3}=0\text{，即}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}\text{，}$$

（2）当 $x=\pi$ 时，有

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}(-1)^n\text{，即}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$