第七节　曲线的曲率

习题　3-7

1. 求双曲线 $xy=4$ 在点 $(2,2)$ 处的曲率.

解　$y=\dfrac{4}{x}$，$y'=-\dfrac{4}{x^2}$，$y''=\dfrac{8}{x^3}$，

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{8|x|^3}{(x^4+16)^{\frac{3}{2}}}.$$

所求的曲率为

$$K\big|_{x=2}=\left.\frac{8|x|^3}{(x^4+16)^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=2}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2. 求曲线 $y=\ln(\sec x)$ 在点 (x,y) 处的曲率及曲率半径.

解　$y'=\dfrac{\sec x\tan x}{\sec x}=\tan x$，$y''=\sec^2 x$，所求的曲率及曲率半径为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sec^2 x}{(1+\tan^2 x)^{\frac{3}{2}}}=|\cos x|,$$

$$\rho=\frac{1}{K}=|\sec x|.$$

3. 求曲线 $y=\mathrm{ch}x$ 在点 $(0,1)$ 处的曲率.

解　$y'=\mathrm{sh}x$，$y''=\mathrm{ch}x$，$K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\mathrm{ch}x}{(1+\mathrm{sh}^2x)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$，所求的曲率为

$$K\big|_{x=0}=\left.\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}\right|_{x=0}=1.$$

4. 求摆线 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 在对应 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 的点处的曲率.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{1}{(1-\cos t)^2}$，所求的曲率为

$$K\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{|y_x''|}{(1+y_x'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}(1-\cos t)^{\frac{1}{2}}}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

5. 求抛物线 $y=ax^2+bx+c$, 使它与 $y=\cos x$ 在点 $(0,1)$ 处有相同切线和相同的曲率.

解 曲线 $y=\cos x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率和曲率分别为.

$$k_1=-\sin x\big|_{x=0}=0,\ K_1=\left.\frac{|\cos x|}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=0}=1.$$

要使抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $(0,1)$, 则应有 $c=1$. 抛物线在点 $(0,1)$ 处的切线斜率和曲率分别为.

$$k_2=(2ax+b)\big|_{x=0}=b,\ K_2=\left.\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=0}=\frac{|2a|}{(1+b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

依题有 $\begin{cases}k_1=k_2,\\K_1=K_2,\end{cases}$ 从而可得 $a=\pm\dfrac{1}{2}$, $b=0$, $c=1$.

若还要求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与曲线 $y=\cos x$ 在点 $(0,1)$ 处的凹向也相同, 则应有 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=0$, $c=1$.

6. 抛物线 $y=4x-x^2$ 上哪一点处的曲率最大? 求出该点处的曲率半径.

解 $y'=4-2x$, $y''=-2$, 抛物线在点 (x,y) 处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{[1+(4-2x)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

要使曲率 K 最大, 只需 $[1+(4-2x)^2]^{\frac{3}{2}}$ 最小, 即要 $x=2$ 即可, 曲线上对应的点为点 $(2,4)$, 恰为抛物线的顶点. 该点处的曲率半径为 $\rho=\dfrac{1}{2}$.

7. 一飞机沿抛物线路径 $y=\dfrac{x^2}{10000}$ (y 轴铅直向上, 单位为 m)作俯冲飞行. 在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v=200\text{m/s}$, 飞行员体重 $G=70\text{kg}$, 求飞机俯冲至最低点

即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

解 $y'=\dfrac{x}{5000}$, $y''=\dfrac{1}{5000}$, 抛物线在坐标原点 O 处的曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=\left.\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\right|_{x=0}=5000.$$

飞行员所受的向心力为

$$F=\frac{mv^2}{\rho}=\frac{70\times 200^2}{5000}=560\text{N},$$

从而座椅对飞行员的反力为 $560+70\times 9.8=1246\text{N}$.

8. 推导: 当曲线由极坐标 $\rho=\rho(\theta)$ 给出时, 弧微分公式为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

解 根据直角坐标与极坐标的转换关系, 可知

$$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta,\\ y=\rho(\theta)\sin\theta,\end{cases}$$

从而 $\mathrm{d}x=[\rho'(\theta)\cos\theta+\rho(\theta)(-\sin\theta)]\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}y=[\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta]\mathrm{d}\theta$, 弧微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$