第二节

不定积分的换元积分法(2)

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 定理 设 $x=\psi(t)$ 单调可导，且 $\psi'(t)\neq 0$,

$$\int f[\psi(t)]\psi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t)+C,$$

则有换元公式

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=\psi(t)}{=\!=\!=\!=} \int f[\psi(t)]\psi'(t)\,\mathrm{d}t = G[\psi^{-1}(x)]+C$$

其中 $t=\psi^{-1}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数.

分析 需证：$\{G[\psi^{-1}(x)]+C\}'=f(x)$

注 第一换元法与第二换元法的比较:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u\Big|_{u=\varphi(x)}$$

第一类: 左 $\rightarrow$ 右

第二类: 左 $\leftarrow$ 右

第一类，放入

如: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \overset{a>0}{=\!=} \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

第二类，取出

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \xlongequal[t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})]{x=a\sin t} \int \frac{a\cos t}{a\cos t}\mathrm{d}t = t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

(二) 常见代换

有五种:

1° 三角代换

$$\begin{cases} x = a\sin t, \ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ x = a\tan t, \ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ x = a\sec t, \ t \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

2° 双曲代换 $x = a\,\mathrm{sh}\,t$, 或 $x = a\,\mathrm{ch}\,t \ (t > 0)$

3° 倒代换 $x = \dfrac{1}{t}$

4° 换根代换 $t = \sqrt[n]{\dfrac{\alpha x + \beta}{\delta x + \gamma}}$

5° 万能代换 $t = \tan\dfrac{x}{2} \quad (|x| < \pi)$

1° 三角代换

适用类型	代换
(1) $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$	$x=a\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 或 $x=a\cos t, t\in(0,\pi)$
(2) $\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x$	$x=a\tan t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
(3) $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$	$x=a\sec t, t\in(0,\frac{\pi}{2})$

其中 $R(u,v)$ 为 u,v 的有理函数 .

2° 双曲代换

$$\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$$

积分中为了化掉根式除采用三角代换外还可用双曲代换.

适用类型	代换
$\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a\,\mathrm{sh}\,t$
$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a\,\mathrm{ch}\,t\ (t>0)$

3° 倒代换

当分母的次数较高时，可采用倒代换:

$$x=\frac{1}{t}.$$

倒代换效果:
降低分母的幂次，提高分子的幂次.

4° 换根代换

适用类型:

$$\int R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\delta x+\gamma}},\sqrt[n_2]{\frac{\alpha x+\beta}{\delta x+\gamma}},\cdots,\sqrt[n_k]{\frac{\alpha x+\beta}{\delta x+\gamma}}\right)\mathrm{d}\,x$$

其中 α, β, δ, γ 均为常数, $n_i \in \mathrm{N}^{+}\ (i=1,2,\cdots,k)$

代换: $t=\sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\delta x+\gamma}}$

n 为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 的最小公倍数 .

5° 万能代换

适用类型: $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

代换: $t = \tan\frac{x}{2}\quad (|x| < \pi)$ 或 $x = 2\arctan t$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}(2\arctan t)=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}\,t$$

$$\therefore\ \int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}\,x=\int \underline{R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}\,t}$$

t 的有理函数

(三)基本积分表（ II ）

(9) $\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$, $\int \cot x \,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

(10) $\int \sec x \,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\int \csc x \,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(11) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

(12) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C$

(14) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \,\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

二、典型例题

例1 求 $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ \ (a>0).$

为去根式

解 令 $x=a\sin t,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$$

$$I=\int a\cos t\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t=a^2\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

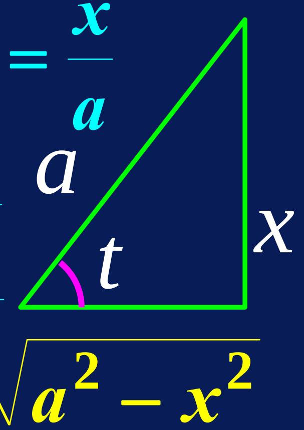
$$=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)+C$$

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

$$\sin t=\frac{x}{a}$$

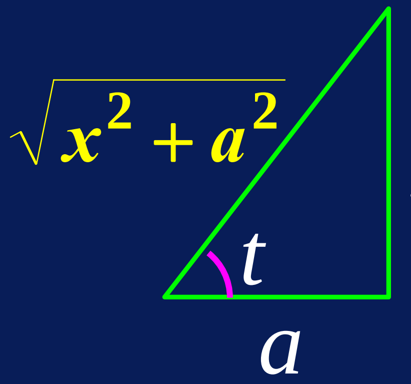
$$\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$



例2 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}\quad(a>0).$

为去根式

解 (方法1) 令 $x=a\tan t,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),$



则 $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$

$$\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}=a\sec t$$

$$I=\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t=\int\sec t\,\mathrm{d}t=\ln\left|\sec t+\tan t\right|+C_1$$

$$=\ln\left[\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right]+C_1$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C\quad(C=C_1-\ln a)$$

(方法2)　令 $x = a\,\mathrm{sh}\,t$

$$\mathrm{d}\,x = a\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}\,t$$

$\because \quad \mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{a\,\mathrm{ch}\,t}{a\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{d}\,t = \int \mathrm{d}\,t = t + C_1$$

$$= \mathrm{arsh}\,\frac{x}{a} + C_1 = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right) + C_1$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例3 求 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}\ (a>0).$

为去根式

解 当 $x>a$ 时，令 $x=a\sec t,\ t\in(0,\frac{\pi}{2})$，则

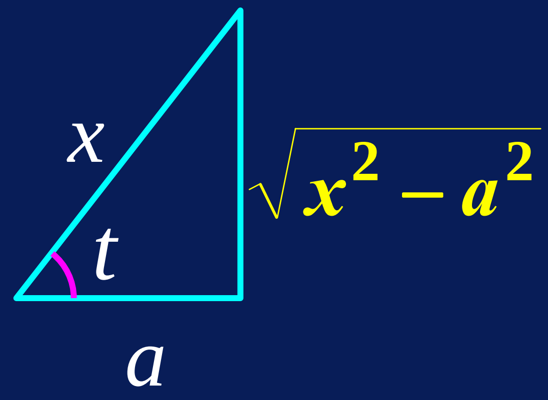
$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}=a\tan t,\quad \mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$I=\int\frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t=\int\sec t\,\mathrm{d}t$$

$$=\ln\left|\sec t+\tan t\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C\quad(C=C_1-\ln a)$$



当$x<-a$时，令 $x=-u$，

为利用$x>a$结果

则 $u>a$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}} = -\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C_1$$

$$= -\ln\left|-x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C_1 = -\ln\left|\frac{a^2}{-x-\sqrt{x^2-a^2}}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C \quad (C = C_1 - 2\ln a)$$

$$\text{当}|x|>a\text{时，}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

小结 以上几例所使用的均为三角代换.

三角代换的目的是化掉根式.

一般规律如下：当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ 可令 $x = a\sin t$;

(2) $\sqrt{a^2 + x^2}$ 可令 $x = a\tan t$;

(3) $\sqrt{x^2 - a^2}$ 可令 $x = a\sec t$.

注 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换（或双曲代换）并**不是绝对**的，需根据被积函数的情况来定.

例4 (1) 求 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.（三角代换较繁琐）

解 令 $t=\sqrt{1+x^2}$，则 $x^2=t^2-1$，$x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$，

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{(t^2-1)^2}{t}t\,\mathrm{d}t=\int (t^4-2t^2+1)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C=\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}+C.$$

(2) $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

解 $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1-x^2)$$ (凑微分)

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$ 此题不必用三角代换!

当分母的次数较高时, 可采用倒代换: $x=\frac{1}{t}$.

例5 求 $\int \frac{1}{x(x^7+2)}\mathrm{d}x$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{1}{x(x^7+2)}\mathrm{d}x=\int \frac{t}{(\frac{1}{t})^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\int \frac{t^6}{1+2t^7}\mathrm{d}t=-\frac{1}{14}\ln|1+2t^7|+C$$

$$=-\frac{1}{14}\ln|2+x^7|+\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

例6 已知 $\int x^5 f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-1}+C$，求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解 $x^5 f(x) = (\sqrt{x^2-1}+C)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$， 则

$$f(x) = \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-1}}$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x \overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=} \int \frac{t^4}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{-t^2\cdot|t|}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{-t^3}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t, & 0<t<1 \\ \displaystyle\int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t, & -1<t<0 \end{cases}$$

当$x>1$，即$0<t<1$时，

$$\boxed{t=\frac{1}{x}}$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{-t^3}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{(1-t^2)-1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t^2$$

$$=\frac{-1}{2}\int(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-t^2)+\frac{1}{2}\int(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-t^2)$$

$$=\frac{-1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}+(1-t^2)^{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}(2+t^2)+C$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}(2+\frac{1}{x^2})+C$$

当 $x<-1$，即 $-1<t<0$ 时，$\boxed{t=\frac{1}{x}}$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}\,t=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-t^2)-1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}\,t^2$$

$$=\frac{1}{2}\int(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-t^2)-\frac{1}{2}\int(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-t^2)$$

$$=\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}-(1-t^2)^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}(2+t^2)+C$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{-x}(2+\frac{1}{x^2})+C=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}(2+\frac{1}{x^2})+C.$$

例7 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x.$

解 令 $x=t^6$, $\mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x=\int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}\mathrm{d}t=\int \frac{6t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=6[t-\arctan t]+C=6[\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}]+C.$$

例8 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x.$

解 令 $t=\sqrt{1+\mathrm{e}^x},$ $\mathrm{e}^x=t^2-1,$

$$x=\ln(t^2-1),\quad \mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x=\int \frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t$$

$$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=2\ln(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1)-x+C.$$

例9 求 $I=\int\frac{1}{4+5\cos x}\mathrm{d}x.$

解 令 $t=\tan\frac{x}{2}$ $(|x|<\pi)$，则 $x=2\arctan t$

$$I=\int\frac{1}{4+5\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int\frac{2}{9-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{3-t}+\frac{1}{3+t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$$

例10 求下列不定积分:

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+9}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(2x)}{\sqrt{(2x)^2+3^2}}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\mathrm{d}u$$

$$=\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+9}\right|+C$$

例11 求 $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 (方法1) 用三角代换

令 $x = \sec t$,

则 $\mathrm{d}\,x = \sec t \cdot \tan t\,\mathrm{d}\,t$, 于是

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t \tan t\,\mathrm{d}\,t}{\sec t \tan t}$$

$$= \int \mathrm{d}\,t = t + C$$

$$= \arccos \frac{1}{x} + C$$

求 $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(方法2) 用双曲代换

$$\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{sh}^2 t=1$$

令 $x=\mathrm{ch}\,t$, 则 $\mathrm{d}\,x=\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{d}\,t$,

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{\cancel{\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{d}\,t}{\mathrm{ch}\,t\cdot\cancel{\mathrm{sh}\,t}}=\int \frac{1}{\mathrm{ch}\,t}\mathrm{d}\,t$$

$$=\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\cdot\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}\,t=\int \frac{1}{1+\mathrm{sh}^2 t}\mathrm{d}(\mathrm{sh}\,t)$$

$$=\arctan(\mathrm{sh}\,t)+C=\arctan(\sqrt{x^2-1})+C.$$

(方法3) 用凑微分法

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}(\frac{1}{x})}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}$$

$$= -\arcsin\frac{1}{x} + C.$$

(方法4) 用倒代换

求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}$$

$$=-\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t+C$$

$$=-\arcsin \frac{1}{x}+C.$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(方法5) 用换根代换

令 $t=\sqrt{x^2-1}$, 则

$$x^2=1+t^2,\quad x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)t}=\int \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\arctan t+C=\arctan\sqrt{x^2-1}+C.$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

三、同步练习

1. $I=\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

2. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

3. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x.$

4. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$

5. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^4+1)}.$

6. 求 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}.$

7. $I=\int \frac{2\sin x\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}{2+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

8. 求下列积分

(1) $\int x^2\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

四、同步练习解答

1. 求 $I=\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 令 $x=\sin t$, $1+x^2=1+\sin^2 t$, $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$

$$I=\int \frac{\cos t}{(1+\sin^2 t)\cos t}\mathrm{d}t=\int \frac{1}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

分子分母同除以 $\cos^2 t$

$$=\int \frac{\sec^2 t}{\sec^2 t+\tan^2 t}\mathrm{d}t=\int \frac{1}{1+2\tan^2 t}\mathrm{d}\tan t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+(\sqrt{2}\tan t)^2}\mathrm{d}\sqrt{2}\tan t=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan t)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}+C$$

2. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

解(方法1) 令 $x = \tan t$, 从而得到:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{\tan^2 t \sec t}$$

$$= \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sin t} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C$$

(方法2) 令$x=\frac{1}{t}$,从而得到 :

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\mathrm{d}t=-\int\frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t+C$$

(1) $x>0\Rightarrow t>0$

$$\text{原式}=-\frac{1}{2}\int\left(1+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(1+t^2\right)=-\sqrt{1+t^2}+C$$

$$=-\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}+C=\cdots$$

(2) $x<0\Rightarrow t<0$ (略)

3. 求 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x.$ （分母的次数较高）

解 令 $x=\frac{1}{t} \Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t,$

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(\frac{1}{t})^4\sqrt{(\frac{1}{t})^2+1}}\cdot(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t^2 \qquad u=t^2$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{1-1-u}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+u}} - \sqrt{1+u}\right)\mathrm{d}(1+u)$$

$$= -\frac{1}{3}(\sqrt{1+u})^3 + \sqrt{1+u} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

4. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

解　令 $x=\frac{1}{t}$,从而得到:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}=\int \frac{t\,|t|}{\sqrt{3-2t-t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

(1) $x>0 \Rightarrow t>0$

$$\text{原式}=-\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-(t+1)^2}}=-\arcsin\frac{t+1}{2}+C$$

$$= -\arcsin\frac{1+x}{2x} + C.$$

(2) $x < 0 \Rightarrow t < 0$

$$\text{原式} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-(t+1)^2}}$$

$$= \arcsin\frac{t+1}{2} + C \quad = \arcsin\frac{1+x}{2x} + C.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \int \frac{t\,|t|}{\sqrt{3-2t-t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

5. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^4+1)}$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$, 从而得到：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^4+1)} = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t}(\frac{1}{t^4}+1)}$$

$$= -\int \frac{t^3}{(1+t^4)}\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(1+t^4)}{1+t^4}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|1+t^4\right| + C = -\frac{1}{4}\ln\left|1+\frac{1}{x^4}\right| + C.$$

6. 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

难点：分母因子x^2

解 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$. 当 $x>0$时,

倒代换效果：

降低分母的幂次

$$=\int\frac{-1/t^2}{1/t^2\sqrt{(1/t^2)+a^2}}\mathrm{d}t=-\int\frac{t}{\sqrt{a^2t^2+1}}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2a^2}\int\frac{\mathrm{d}(a^2t^2+1)}{\sqrt{a^2t^2+1}}=-\frac{1}{a^2}\sqrt{a^2t^2+1}+C$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$$

$$7.\quad I=\int\frac{2\sin x\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}{2+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x$$

$$=\int\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{1+(1+\sin^2 x)}\,\mathrm{d}(1+\sin^2 x)$$

$$\mathrm{d}(1+\sin^2 x) = \mathrm{d}t^2$$

令 $t=\sqrt{1+\sin^2 x}$

$$=\int\frac{t}{1+t^2}\,2t\,\mathrm{d}t = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2t-2\arctan t+C$$

$$=2\left[\sqrt{1+\sin^2 x}-\arctan\sqrt{1+\sin^2 x}\right]+C$$

8. 求下列积分

(1) $$\int x^2 \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}(x^3+1)$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$$

(2) $$\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-(2-2x)+5}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}(1+2x-x^2)}{\sqrt{1+2x-x^2}} + 5\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}}$$

$$= -2\sqrt{1+2x-x^2} + 5\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$