第四节　高阶导数

习题　2-4

1. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=3x^2+\mathrm{e}^{2x}+\ln x$;　　(2) $y=x\cos x$;

(3) $y=\mathrm{e}^{-t}\sin t$;　　(4) $y=(1+x^2)\arctan x$.

解 (1) $y'=6x+2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{x}$, $y''=6+4\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{x^2}$.

(2) $y'=\cos x-x\sin x$, $y''=-\sin x-\sin x-x\cos x=-2\sin x-x\cos x$.

(3) $y'=-\mathrm{e}^{-t}\sin t+\mathrm{e}^{-t}\cos t$,

$$y''=\mathrm{e}^{-t}\sin t-\mathrm{e}^{-t}\cos t-\mathrm{e}^{-t}\cos t-\mathrm{e}^{-t}\sin t=-2\mathrm{e}^{-t}\cos t.$$

(4) $y'=2x\arctan x+1$, $y''=2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$.

2. 设 $f(x)=(x+10)^6$, 求 $f'''(2)$.

解 由于 $f'(x)=6(x+10)^5$, $f''(x)=30(x+10)^4$, $f'''(x)=120(x+10)^3$, 所以

$$f'''(2)=12^3\cdot 120=207360.$$

3. 设 $f''(x)$ 存在, 求下列函数 y 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$:

(1) $y=f(\mathrm{e}^{-x})$;　　(2) $y=\ln f(x)$.

解 (1) $y'=-f'(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-x}$, $y''=\mathrm{e}^{-2x}f''(\mathrm{e}^{-x})+\mathrm{e}^{-x}f'(\mathrm{e}^{-x})$.

(2) $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $y''=\dfrac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$.

4. 试从 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$ 导出:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = -\dfrac{y''}{(y')^3}$;　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}y^3} = \dfrac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$.

证 (1) $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\dfrac{1}{y'}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\dfrac{1}{y'})\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\dfrac{y''}{(y')^2}\dfrac{1}{y'} = -\dfrac{y''}{(y')^3}$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}y^3} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\dfrac{y''}{(y')^3})\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{3(y')^2(y'')^2 - y'''(y')^3}{(y')^6}\dfrac{1}{y'} = \dfrac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$.

5. 验证函数 $y = \mathrm{e}^x \sin x$ 满足关系式

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

解 因为

$$y' = \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x = \mathrm{e}^x (\sin x + \cos x),$$

$$y'' = \mathrm{e}^x (\sin x + \cos x) + \mathrm{e}^x (\cos x - \sin x) = 2\mathrm{e}^x \cos x,$$

故而

$$y'' - 2y' + 2y = 2\mathrm{e}^x \cos x - 2\mathrm{e}^x (\sin x + \cos x) + 2\mathrm{e}^x \sin x = 0.$$

6. 求下列函数的 n 阶导数的表达式:

(1) $y = \sin^2 x$;　　(2) $y = x\ln x$;

(3) $y = x\mathrm{e}^x$;　　(4) $y = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$;

(5) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

解 (1) $y = \sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

$$y^{(n)} = -\frac{2^n}{2}\cos(2x + n\frac{\pi}{2}) = -2^{n-1}\cos(2x + n\frac{\pi}{2}) = 2^{n-1}\sin[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}].$$

(2) $y' = \ln x + 1,\ y'' = \dfrac{1}{x}$,

$$y^{(n)} = (\frac{1}{x})^{(n-2)} = (-1)^{n-2}(n-2)!\frac{1}{x^{n-1}} = (-1)^n (n-2)!\frac{1}{x^{n-1}} (n \ge 2).$$

(3) $y' = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$, $y'' = \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$, $y^{(n)} = (x+n)\mathrm{e}^x$.

(4) $y = \dfrac{1}{2a}(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a})$,

$$y^{(n)}=\frac{1}{2a}[(\frac{1}{x-a})^{(n)}-(\frac{1}{x+a})^{(n)}]=\frac{1}{2a}[\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}]$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2a}[\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a)^{n+1}}].$$

(5) $y'=[\ln(1+x)-\ln(1-x)]'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$,

$$y^{(n)}=(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1})^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}-\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)![\frac{1}{(x+1)^n}-\frac{1}{(x-1)^n}].$$

7. 求下列函数的指定阶的导数:

(1) $y=\mathrm{e}^x\cos x$，求 $y^{(4)}$;　　(2) $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$.

解 (1) $y'=\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\sin x=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$,

$$y''=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)-\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)=-2\mathrm{e}^x\sin x,$$

$$y'''=-2\mathrm{e}^x\cos x-2\mathrm{e}^x\sin x=-2\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x),$$

$$y^{(4)}=-2\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)-2\mathrm{e}^x(-\sin x+\cos x)=-4\mathrm{e}^x\cos x.$$

(2) $y^{(50)}=(x^2\sin 2x)^{(50)}=x^2(\sin 2x)^{(50)}+50\cdot 2x(\sin 2x)^{(49)}+\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2(\sin 2x)^{(48)}$

$$=x^2 2^{50}\sin(2x+25\pi)+100x2^{49}\sin(2x+\frac{49}{2}\pi)+2450\cdot 2^{48}\sin(2x+24\pi)$$

$$=2^{50}(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x).$$

8. 求下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$:

(1) $y=\tan(x+y)$;　　(2) $xy=\mathrm{e}^{x+y}$.

解 (1) 对方程两边对 x 求导，得

$$y'=\sec^2(x+y)(1+y'),\quad y'=-\csc^2(x+y),$$

对 $y'=-\csc^2(x+y)$ 两边对 x 求导， 得

$$y''=2\csc^2(x+y)\cot(x+y)(1+y')=-2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y).$$

(2) 对方程两边对 x 求导，得

$$y+xy'=\mathrm{e}^{x+y}(1+y'),\ \ y'=\frac{\mathrm{e}^{x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{x+y}}=\frac{xy-y}{x-xy},$$

对 $y+xy'=\mathrm{e}^{x+y}(1+y')$ 两边对 x 继续求导,

$$2y'+xy''=\mathrm{e}^{x+y}(1+y')^2+\mathrm{e}^{x+y}y'',$$

$$y''=\frac{\mathrm{e}^{x+y}(1+y')^2-2y'}{x-\mathrm{e}^{x+y}}=\frac{xy(1+y')^2-2y'}{x-xy}=\frac{y[(x-1)^2+(y-1)^2]}{x^2(1-y)^3}.$$

9. 求下列参数方程所确定的函数 y 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$:

(1) $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=f'(t),\\ y=tf'(t)-f(t).\end{cases}$ 其中 $f''(t)$ 存在且不为零.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\cot t$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\frac{b}{a}\cot t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\frac{b}{a}\cot t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{b}{a}\csc^2t\frac{1}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2\sin^3t}.$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{tf''(t)}{f''(t)}=t,\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{f''(t)}.$