第三节

任意项级数的审敛法

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

1. 定义 交错级数：

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots \ (u_n > 0)$$

2.定理 (交错级数审敛法) 若交错级数满足:

1) $u_n \ge u_{n+1} \ (n = 1, 2, \cdots);$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$

称满足条件1), 2)的级数为莱布尼茨交错级数

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且其和$S \le u_1,$

其余项满足 $\left| r_n \right| \le u_{n+1}$.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

注　1° 莱布尼茨定理中的条件(1)可换成:

$$u_{n+1} \le u_n \quad (n \ge N)$$

2° $\{u_n\}$不单调 $\nRightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \ (u_n > 0)$ 发散;

反例: 对于 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$,

$$u_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n} > 0$$

虽然 $\{u_n\}$不单调, 事实上,

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$u_{2k-1}=\frac{1}{2^{2k-1}}=\frac{2}{2^{2k}}<u_{2k}=\frac{3}{2^{2k}},$$

$$\boxed{u_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}}$$

$$u_{2k}=\frac{3}{2^{2k}} > u_{2k+1}=\frac{1}{2^{2k+1}}$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2+(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}[(-\frac{1}{2})^{n-1}-\frac{1}{2^n}]$ 收敛

3° $\{u_n\}$单调增加

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \ (u_n>0)$ 发散; $(\because \lim_{n\to\infty}u_n\neq 0)$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4° 用莱布尼茨判别法判断交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \quad (u_n > 0)$$

是否收敛时，要考察$\{u_n\}$是否单调减少，通常有以下三种方法:

(1) 比值法: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \overset{?}{\leq} 1 \quad (n \geq N)$

(2) 差值法: $u_{n+1} - u_n \overset{?}{\leq} 0 \quad (n \geq N)$

(3) 函数法: 由u_n找一个可导函数$f(x)$,

使 $f(n) = u_n$，再考察 $f'(x) < 0$?

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

3. 定义

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛：若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散.

4. 定理 (绝对收敛与收敛的关系)

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则该级数必收敛.

2° 关系 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛 √

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散 $\not\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散 （一般地）

但特殊地，有

定理 设任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho > 1 \quad (\text{或} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho > 1)$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散．

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

二、典型例题

例1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n!}{n^2}$ 条件收敛、绝对收敛还是发散?

解 $\because \quad |u_n| = \left|\frac{\sin n!}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n!}{n^2}\right| \text{ 收敛}$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n!}{n^2}$ 绝对收敛 .

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例2 判定交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+10}$的敛散性.

解 $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n+10}$, $v_n=(-1)^n u_n$

1° 绝对收敛性

$$\because \quad |v_n|=u_n=\frac{\sqrt{n}}{n+10} \geq \frac{1}{n+10} \quad (n\geq 1)$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+10}$发散, $\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$发散

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2° 条件收敛性

分析 需判定$u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+10}$ 递减、趋于零

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n+10} \overset{\text{令}}{=} f(n),\quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+10} \quad (x>0)$$

$$\because \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x+10) - \sqrt{x}}{(x+10)^2} = \frac{10-x}{2\sqrt{x}(x+10)^2}$$

$$< 0 \quad (x > 10)$$

$\therefore$ 当$x > 10$时，$f(x)$单调减少，

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

故当 $n > 10$ 时， $f(n+1) < f(n)$

即 $u_{n+1} < u_n \quad (n > 10)$

又 $\because \quad \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+10} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n} + \dfrac{10}{\sqrt{n}}} = 0$

$\therefore$ 由莱尼布茨判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+10}$ 收敛.

综合1°, 2° 可知: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+10}$ 条件收敛.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

三、同步练习

1. 判定下列的敛散性:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\cdots$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}+\cdots$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛 .

3. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛 .

4. 设$u_n \neq 0\,(n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ ( ).

(*A*) 发散 ; (*B*) 绝对收敛;

(*C*) 条件收敛 ; (*D*) 收敛性根据条件不能确定.

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

四、同步练习解答

1. 判定下列的敛散性:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$ 收敛

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\cdots$ 收敛

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}+\cdots$ 收敛

问题 上述级数的绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$ 是否收敛？

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛.

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛 .

证 (1) 因 $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \le \frac{1}{n^4}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 收敛 ,

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right|$ 收敛,

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛 .

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

3. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛 .

证 令 $u_n = \frac{n^2}{e^n}$,

因 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 \big/ e^{n+1}}{n^2 \big/ e^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$

$= \frac{1}{e} < 1$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{n^2}{e^n}\right|$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛.

4. 设$u_n \neq 0\,(n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\quad(\ C\ ).$$

(*A*) 发散； (*B*) 绝对收敛;

(*C*) 条件收敛； (*D*) 收敛性根据条件不能确定.

分析 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$, 知 $\dfrac{1}{u_n}\sim\dfrac{1}{n}$, 选 (*B*) 错；

又 $S_n=-\left(\dfrac{1}{u_1}+\cancel{\dfrac{1}{u_2}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{u_2}}+\cancel{\dfrac{1}{u_3}}\right)-\left(\cancel{\dfrac{1}{u_3}}+\cancel{\dfrac{1}{u_4}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{u_4}}+\dfrac{1}{u_5}\right)$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\cancel{\frac{1}{u_n}}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=-\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY