

### 第三节 极限的概念

#### 习题 1-3

1. 观察下列数列的变化趋势, 指出它们是否有极限, 若有极限, 请写出其极限:

$$(1) \quad x_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n};$$

$$(2) \quad x_n = (-1)^n - \frac{1}{n};$$

$$(3) \quad x_n = \frac{n-1}{n+1};$$

$$(4) \quad x_n = \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$(5) \quad x_n = \cos \frac{1}{n\pi};$$

$$(6) \quad x_n = \ln \frac{1}{n};$$

$$(7) \quad 0.1, 0.11, 0.111, \dots, \underbrace{0.\underbrace{11\dots1}_n}, \dots.$$

解 (1) 有极限, 极限为 0.

(2) 不存在极限.

(3) 有极限, 极限为 1.

(4) 不存在极限.

(5) 有极限, 极限为 1.

(6) 不存在极限 ( $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ).

(7) 有极限, 极限为  $\frac{1}{9}$ .

2. 用数列极限的定义证明

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{n} = 1;$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 (\alpha > 0).$$

$$\text{解 (1)} \quad \left| \frac{\sqrt{n^2+4}}{n} - 1 \right| = \frac{\sqrt{n^2+4} - n}{n} = \frac{4}{n(\sqrt{n^2+4} + n)} < \frac{4}{n}.$$

$$\text{要使 } \left| \frac{\sqrt{n^2+4}}{n} - 1 \right| < \varepsilon, \text{ 只要 } \frac{4}{n} < \varepsilon, \text{ 即 } n > \frac{4}{\varepsilon}.$$

于是,  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = [\frac{4}{\varepsilon}]$ , 只要  $n > N$ , 就有  $\left| \frac{\sqrt{n^2+4}}{n} - 1 \right| < \varepsilon$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{n} = 1.$$

$$(2) \quad \left| \frac{1}{n^\alpha} - 0 \right| = \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon, \text{ 只要 } n > \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\varepsilon}} (\alpha > 0).$$

于是,  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \lceil \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\varepsilon}} \rceil$ , 只要  $n > N$ , 就有  $\left| \frac{1}{n^\alpha} - 0 \right| < \varepsilon$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$  ( $\alpha > 0$ ).

3. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ , 并举例说明反之未必成立.

证  $\because |x_n| - |a| \leq |x_n - a|$ , 故  $\forall \varepsilon > 0$ , 欲使  $||x_n| - |a|| < \varepsilon$ , 只要  $|x_n - a| < \varepsilon$ ,

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  知, 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N$ , 当  $n > N$  时,  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 从而  $||x_n| - |a|| < \varepsilon$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ .

反之未必成立, 例如:  $x_n = (-1)^n$ , 显然有  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 1$ , 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在.

4. 设数列  $\{x_n\}$  有界, 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .

证 由数列  $\{x_n\}$  有界, 故存在  $M > 0$ , 使  $|x_n| \leq M$ , 对一切  $n$  都成立.

$\forall \varepsilon > 0$ , 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , 所以对于  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ ,  $\exists N$ , 当  $n > N$  时, 就有

$$|y_n| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}, \text{ 于是 } |x_n y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0.$$

5. 用函数极限的定义证明

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x+1} = 2; \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}} = 0.$$

$$\text{证 (1)} \quad \left| \frac{1-4x^2}{2x+1} - 2 \right| = |2x+1| = 2 \left| x - \left(-\frac{1}{2}\right) \right|.$$

$$\text{要使 } \left| \frac{1-4x^2}{2x+1} - 2 \right| < \varepsilon, \text{ 只要 } 2 \left| x - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| < \varepsilon, \text{ 即 } \left| x - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , 当  $0 < \left| x - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$  时, 就有  $\left| \frac{1-4x^2}{2x+1} - 2 \right| < \varepsilon$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x+1} = 2.$$

$$(2) \quad \left| \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}} - 0 \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

要使  $\frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$ , 只要  $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$ ,

于是,  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X = \frac{1}{\varepsilon^2}$ , 当  $x > X$  时, 就有  $\left| \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}} = 0.$$

6. 证明: 若  $x \rightarrow +\infty$  及  $x \rightarrow -\infty$  时, 函数  $f(x)$  的极限都存在且都等于  $A$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

证 由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 得  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists X_1 > 0$ , 当  $x > X_1$  时, 就有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ;

再由  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ , 得对上述  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists X_2 > 0$ , 当  $x < -X_2$  时, 就有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

取  $X = \max\{X_1, X_2\}$ , 则当  $|x| > X$  时, 有  $x > X$  或  $x < -X$ , 故  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ,

即  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ .

7. 证明:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的充分必要条件是  $f(x)$  在  $x_0$  处的左、右极限均存在且相等.

证 必要性:

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 不妨设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 只要  $0 <$

$|x - x_0| < \delta$ , 就有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 特别的:

当  $0 < x - x_0 < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ ;

当  $-\delta < x - x_0 < 0$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ .

充分性:

若  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1 > 0$ , 只要  $0 < x - x_0 < \delta_1$ , 就有

$|f(x) - A| < \varepsilon$ ,  $\exists \delta_2 > 0$ , 只要  $-\delta_2 < x - x_0 < 0$ , 就有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ,

---

只要  $0 < |x - x_0| < \delta$ , 就有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 故  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .