第八节　二阶常系数非齐次线性微分方程

习题　12-8

1. 写出微分方程 $y''-y'-2y=f(x)$ 的特定特解形式 y^*，其中非齐次项 $f(x)$ 为:

(1) $f(x)=x^2$;　　　　(2) $f(x)=e^{2x}$;

(3) $f(x)=\sin x$;　　　　(4) $f(x)=1+xe^{-x}$;

解　特征方程为

$$r^2-r-2=0,$$

其根为 $r_1=-1,\quad r_1=2$.

(1) 此种情形下，$\lambda=0$ 不是特征方程得根，所以特解的形式为

$$y^*=Ax^2+Bx+C.$$

(2) 此种情形下，$\lambda=2$ 是特征方程得根，所以特解的形式为

$$y^*=x\cdot A\cdot e^{2x}.$$

(3) 此种情形下，$\lambda=0,\quad \omega=1$，而 $\lambda+i\omega=i$ 不是特征方程得根，所以特解的形式为

$$y^*=A\cos x+B\sin x.$$

(4) 此种情形下，令 $f_1(x)=1$，$f_2(x)=xe^{-x}$.

对于 $f_1(x)=1$，$\lambda=0$ 不是特征方程得根，所以特解的形式为

$$y^*=A.$$

对于 $f_2(x)=xe^{-x}$，$\lambda=-1$ 是特征方程得根，所以特解的形式为

$$y^*=x(Bx+C)e^{-x}.$$

所以对于 $f(x)=1+xe^{-x}$，特解的形式为

$$y^*=A+x(Bx+C)e^{-x}.$$

2. 求下列微分方程的特解:

(1) $y''+2y'=4e^{3x}$；

(2) $y''-3y'=-6x+2$；

(3) $y''-4y=\cos^2 x$；

(4) $2y''-3y'-2y=e^x+e^{-x}$.

解 (1) 特征方程为

$$r^2+2r=0,$$

其根为 $r_1=0,\quad r_2=-2$．$\lambda=3$ 不是特征方程的根，所以特解的形式为

$$y^*=Ae^{3x},$$

将此解代入微分方程中，得 $A=\dfrac{4}{15}$，特解为

$$y^*=\frac{4}{15}e^{3x}.$$

(2) 特征方程为

$$r^2-3r=0,$$

其根为 $r_1=0,\quad r_2=3$．$\lambda=0$ 是特征方程的根，所以特解的形式为

$$y^*=x(Ax+B)=Ax^2+Bx,$$

将此解代入微分方程中，得 $A=1,\quad B=0$，特解为

$$y^*=x^2.$$

(3) 特征方程为

$$r^2-4=0,$$

其根为 $r_1=-2,\quad r_2=2$．而 $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\cos 2x}{2}$，0 和 $\pm 2i$ 都不是特征方程的根，所以特解的形式为

$$y^*=A+B\cos 2x+C\sin 2x,$$

将此解代入微分方程中，得 $A=-\dfrac{1}{8}$， $B=-\dfrac{1}{16}$，$C=0$，特解为

$$y^*=-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\cos 2x.$$

(4) 特征方程为

$$2r^2-3r-2=0,$$

其根为 $r_1=-\dfrac{1}{2}$， $r_2=2$．-1 和 1 都不是特征方程的根，所以特解的形式为

$$y=Ae^x+Be^{-x},$$

将此解代入微分方程中，得 $A=-\dfrac{1}{3}$， $B=\dfrac{1}{3}$，特解为

$$y^*=-\frac{1}{3}e^x+\frac{1}{3}e^{-x}$$

3. 求下列微分方程的通解:

(1) $2y''+y'-y=2e^x$； (2) $y''+4y=2\sin 2x$；

(3) $y''+5y'+4y=3-2x$； (4) $y''-2y'+y=2xe^x$；

(5) $y''+y=e^x+\cos x$.

解 (1) 特征方程为

$$2r^2+r-1=0,$$

其根为 $r_1=-1$， $r_2=\dfrac{1}{2}$，所以齐次微分方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}.$$

$\lambda=1$ 不是特征方程的根，所以非齐次的特解的形式为

$$y^*=Ae^x,$$

将此解代入微分方程中，得 $A=1$，非齐次特解为

$$y^*=e^x.$$

该非齐次微分方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x.$$

(2) 特征方程为

$$r^2+4=0,$$

其根为 $r_{1,2}=\pm 2i$，所以齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

$\pm 2i$ 是特征方程的根，所以非齐次的特解的形式为

$$y^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x),$$

将此解代入微分方程中，得 $A=-\dfrac{1}{2},\quad B=0$，非齐次特解为

$$y^*=-\frac{x}{2}\cos 2x.$$

该非齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{x}{2}\cos 2x.$$

(3) 特征方程为

$$r^2+5r+4=0,$$

其根为 $r_1=-1,\quad r_2=-4$，所以齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-4x}.$$

$\lambda=0$ 不是特征方程的根，所以非齐次的特解的形式为

$$y^*=Ax+B,$$

将此解代入微分方程中，得 $A=-\dfrac{1}{2},\quad B=\dfrac{11}{8}$，非齐次特解为

$$y^*=\frac{11}{8}-\frac{1}{2}x.$$

该非齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-4x}+\frac{11}{8}-\frac{1}{2}x.$$

(4) 特征方程为

$$r^2-2r+1=0,$$

其根为 $r_{1,2}=1$，所以齐次微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{x}.$$

$\lambda=1$是特征方程的二重根，所以非齐次的特解的形式为

$$y^*=x^2(Ax+B)\mathrm{e}^x,$$

将此解代入微分方程中，得 $A=\dfrac{1}{3},\quad B=0$，非齐次特解为

$$y^*=\frac{x^3}{3}\mathrm{e}^x.$$

该非齐次微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+\frac{x^3}{3}\mathrm{e}^x.$$

(5)　特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为 $r_{1,2}=\pm i$，所以齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

1不是特征方程的根，$\pm i$ 是特征方程的根，所以非齐次的特解的形式为

$$y^*=A\mathrm{e}^x+x(B\cos x+C\sin x),$$

将此解代入微分方程中，得 $A=\dfrac{1}{2},\quad B=0,\quad C=\dfrac{1}{2}$，非齐次特解为

$$y^*=\frac{\mathrm{e}^x}{2}+\frac{x}{2}\sin x.$$

该非齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{\mathrm{e}^x}{2}+\frac{x}{2}\sin x.$$

4.　求下列微分方程初值问题的解:

(1)　$y''+y=\dfrac{1}{2}\cos 2x,\ \ y\big|_{x=0}=1,\ \ y'\big|_{x=0}=1$;

(2)　$y''+y'-2y=6\mathrm{e}^{-2x},\ \ y\big|_{x=0}=0,\ \ y'(0)=1$;

(3)　$y''-3y'+2y=5,\ \ y\big|_{x=0}=1,\ \ y'\big|_{x=0}=2$.

解　(1)　特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为 $r_{1,2}=\pm i$，所以齐次微分方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

$\pm 2i$ 不是特征方程的根，所以非齐次的特解的形式为

$$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x ,$$

将此解代入微分方程中，得 $A = -\dfrac{1}{6}$，$B = 0$，非齐次特解为

$$y^* = -\frac{1}{6}\cos 2x .$$

该非齐次微分方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{6}\cos 2x .$$

将初始条件代入，得 $C_1 = \dfrac{7}{6}$，$C_2 = 1$，非齐次微分方程的特解为

$$y = \frac{7}{6}\cos x + \sin x - \frac{1}{6}\cos 2x .$$

(2)　特征方程为

$$r^2 + r - 2 = 0 ,$$

其根为 $r_1 = 1$，$r_2 = -2$，所以齐次微分方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} .$$

$\lambda = -2$ 是特征方程的根，所以非齐次的特解的形式为

$$y^* = Axe^{-2x} ,$$

将此解代入微分方程中，得 $A = -2$，非齐次特解为

$$y^* = -2xe^{-2x} .$$

该非齐次微分方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 2xe^{-2x} .$$

将初始条件代入，得 $C_1 = 1$，$C_2 = -1$，非齐次微分方程的特解为

$$y = e^x - (1 + 2x)e^{-2x} .$$

(3)　特征方程为

$$r^2 - 3r + 2 = 0 ,$$

其根为 $r_1=1,\quad r_2=2$，所以齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

$\lambda=0$ 不是特征方程的根，所以非齐次的特解的形式为

$$y^*=A,$$

将此解代入微分方程中，得 $A=\dfrac{5}{2}$，非齐次特解为

$$y^*=\frac{5}{2}.$$

该非齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{5}{2}.$$

将初始条件代入，得 $C_1=-5,\quad C_2=\dfrac{7}{2}$，非齐次微分方程的特解为

$$y=-5\mathrm{e}^x+\frac{7}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{5}{2}.$$

5.　一根弹簧上端固定，悬挂 5kg 的物体时弹簧伸长了 50cm，若把该物体拉到平衡位置以下 20cm 处，然后松手，求物体的运动规律.

解　以平衡位置作为坐标原点，铅直向下的方向作为 x 轴的正方向，设物体在时刻 t 的位置为 $x(t)$，物体的质量为 m，弹簧的弹性系数为 k，由题意知，$50k=mg$，即 $k=\dfrac{mg}{50}$. 由牛顿第二运动定律，

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{50}x=0\quad,$$

其初始条件为 $x(t)\big|_{t=0}=20,\quad \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0$. 此微分方程的特征方程为

$$r^2+\frac{g}{50}=0,$$

其根为 $r_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{g}{50}}i$，微分方程的通解为

$$x(t)=C_1\cos\sqrt{\frac{g}{50}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{50}}t,$$

将初始条件代入，得 $C_1=20,\quad C_2=0$，

$$x(t)=20\cos\sqrt{\frac{g}{50}}t\ .$$

6. 设函数 $y(x)$ 具有二阶连续的导数，$y'(0)=\frac{3}{2}$. 试求由方程

$$y(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x(y''(t)+y(t)-\cos t)dt\ ,$$

确定的函数 $y(x)$.

解 由方程知 $y(0)=0$，方程的两边对 x 求导，整理得微分方程

$$y''+2y'+y=\cos x\ ,$$

此微分方程的特征方程为

$$r^2+2r+1=0\ ,$$

其根为 $r_{1,2}=-1$，齐次微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}\ ,$$

非齐次微分方程的特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x\ ,$$

将它代入非齐次方程中，得 $A=0,\quad B=\frac{1}{2}$，非齐次的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\sin x\ .$$

将初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$ 代入得 $C_1=0,\quad C_2=1$，所以

$$y=x\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\sin x..$$

7. 求下列微分方程的通解:

(1) $x^2y''-xy'=x^3$; (2) $x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$;

(3) $x^3y'''+3x^2y''+xy'=24x^2$; (4) $xy''+2y'=12\ln x$.

解 (1) 此方程为欧拉方程，令 $x=\mathrm{e}^t$，原方程化为

$$(\mathrm{D}^2-2\mathrm{D})y=\mathrm{e}^{3t}\ ,$$

其特征方程为

$$r^2-2r=0\ ,$$

其根为 $r_1=0,\quad r_2=2$，所以齐次微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{2t}.$$

$\lambda=3$ 不是特征方程的根，所以非齐次的特解的形式为

$$y^*=A\mathrm{e}^{3t},$$

将此解代入微分方程中，得 $A=\dfrac{1}{3}$.

该非齐次微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}.$$

$$y=C_1+C_2x^2+\frac{1}{3}x^3.$$

(2) 此方程为欧拉方程，令 $x=\mathrm{e}^t$，原方程化为

$$(\mathrm{D}^3-2\mathrm{D}^2-3\mathrm{D})y=3\mathrm{e}^{2t},$$

其特征方程为

$$r^3-2r^2-3r=0,$$

其根为 $r_1=0,\quad r_2=3,\quad r_3=-1$，所以齐次微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\mathrm{e}^{3t}.$$

$\lambda=2$ 不是特征方程的根，所以非齐次的特解的形式为

$$y^*=A\mathrm{e}^{2t},$$

将此解代入微分方程中，得 $A=-\dfrac{1}{2}$.

该非齐次微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\mathrm{e}^{3t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}.$$

即

$$y=C_1+\frac{C_2}{x}+C_3x^3-\frac{1}{2}x^2.$$

(3) 此方程为欧拉方程，令 $x=\mathrm{e}^t$，原方程化为

$$\mathrm{D}^3y=24e^{2t},$$

所以齐次微分方程的通解为

$$y = C_1 t^2 + C_2 t + C_3.$$

$\lambda = 2$ 不是特征方程的根，所以非齐次的特解的形式为

$$y^* = A\mathrm{e}^{2t},$$

将此解代入微分方程中，得 $A = 3$.

该非齐次微分方程的通解为

$$y = C_1 t^2 + C_2 t + C_3 + 3\mathrm{e}^{2t},$$

$$y = 3x^2 + C_1 \ln^2 x + C_2 \ln x + C_3.$$

(4) 此方程两边同乘以 x 得一欧拉方程，令 $x = \mathrm{e}^t$，欧拉方程化为

$$(\mathrm{D}^2 + \mathrm{D})y = 12t\mathrm{e}^t,$$

其特征方程为

$$r^2 + r = 0,$$

其根为 $r_1 = 0, \quad r_2 = -1$，所以齐次微分方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-t}.$$

$\lambda = 1$ 不是特征方程的根，所以非齐次的特解的形式为

$$y^* = (At + B)\mathrm{e}^t,$$

将此解代入微分方程中，得 $A = 6, \quad B = -9$.

该非齐次微分方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-t} + (6t - 9)\mathrm{e}^t.$$

$$y = C_1 + \frac{C_2}{x} + 3x(2\ln x - 3).$$