第四节　函数的单调性与极值

习题　3-4

1. 判断下列命题是否正确:

(1) 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且单调增加, 则在 (a,b) 内必有 $f'(x)>0$;

(2) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)>g'(x)$, 则在 (a,b) 内必有 $f(x)>g(x)$;

(3) 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值, 则必有 $f'(x_0)=0$;

(4) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)>0$, $f(a)=0$, 则在 (a,b) 内必有 $f(x)>0$.

解 (1) 不正确. 反例: $f(x)=x^3$. 易知该函数在 $(-1,1)$ 内可导, 且单调增加, 但在 $(-1,1)$ 内函数不满足 $f'(x)>0$ (由于 $f'(0)=0$).

(2) 不正确. 反例: $f(x)=2x$, $g(x)=x+1$, $x\in(0,\frac{1}{2})$. 易知此二函数在 $(0,\frac{1}{2})$ 内可导, 且 $f'(x)>g'(x)$, 但在 $(0,\frac{1}{2})$ 内却有 $f(x)<g(x)$.

(3) 不正确. 反例: $f(x)=-|x|$. 易知此函数在点 $x_0=0$ 处取得极大值, 但显然函数在该点处不可导.

(4) 正确. 依题知, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加, 故对 $\forall x\in(a,b)$, $f(x)>f(a)=0$.

2. 判断下列函数的单调性:

(1) $f(x)=\arctan x-x$;　　(2) $f(x)=x-\ln(1+x^2)$.

解 (1) $f(x)=\arctan x-x$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-1=\dfrac{-x^2}{1+x^2}\le 0$, 且仅在点 $x=0$ 处有 $f'(0)=0$, 故 $f(x)$ 在整个定义域上单调减少.

(2) $f(x)=x-\ln(1+x^2)$, $f'(x)=1-\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}\ge 0$, 且仅在点 $x=1$ 处有 $f'(1)=0$, 故 $f(x)$ 在整个定义域上单调增加.

3. 确定下列函数的单调区间:

(1) $y=x^3-6x^2-15x+2$;　　(2) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

(3) $y=(x-1)(x+1)^3$;　　(4) $y=x+\dfrac{5}{2x}\ (x>0)$;

(5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　　　　(6) $y=x+|\sin 2x|$.

解 (1) $y=x^3-6x^2-15x+2,\ y'=3x^2-12x-15=3(x-5)(x+1)$, 驻点为 $x=-1$ 及 $x=5$.

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时, $y'>0$, 当 $x\in(-1,5)$ 时, $y'<0$, 当 $x\in(5,+\infty)$ 时, $y'>0$, 故函数的单增区间为 $(-\infty,-1]\bigcup[5,+\infty)$, 单减区间为 $[-1,5]$.

(2) $y=\dfrac{\ln x}{x},\ y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, 驻点为 $x=\mathrm{e}$.

当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时, $y'>0$, 当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时, $y'<0$, 故函数的单增区间为 $(0,\mathrm{e}]$, 单减区间为 $[\mathrm{e},+\infty)$.

(3) $y=(x-1)(x+1)^3,\ y'=(x+1)^3+3(x-1)(x+1)^2=2(x+1)^2(2x-1)$, 驻点为 $x=\dfrac{1}{2}$.

当 $x\in(-\infty,\dfrac{1}{2})$ 时, $y'<0$, 当 $x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 时, $y'>0$, 故函数的单增区间为 $[\dfrac{1}{2},+\infty)$, 单减区间为 $(-\infty,\dfrac{1}{2}]$.

(4) $y=x+\dfrac{5}{2x},\ y'=1-\dfrac{5}{2x^2}=\dfrac{(\sqrt{2}x-\sqrt{5})(\sqrt{2}x+\sqrt{5})}{2x^2}$, 当 $x>0$ 时, 驻点为 $x=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

当 $x\in(0,\sqrt{\dfrac{5}{2}})$ 时, $y'<0$, 当 $x\in(\sqrt{\dfrac{5}{2}},+\infty)$ 时, $y'>0$, 故函数 $y=x+\dfrac{5}{2x}\ (x>0)$ 的单增区间为 $[\sqrt{\dfrac{5}{2}},+\infty)$, 单减区间为 $(0,\sqrt{\dfrac{5}{2}}]$.

(5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\ y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}})=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$, 故函数的单增区间为 $(-\infty,+\infty)$, 无单减区间.

(6) $y=x+|\sin 2x|$, 对 $\forall k\in\mathbf{Z}$, 有

$$y=\begin{cases}x+\sin 2x, & k\pi\le x\le k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ x-\sin 2x, & k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi.\end{cases}$$

当 $k\pi<x<k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时, $y'=1+2\cos 2x$. 令 $y'=0$, 可得 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{3}$, 且当

$k\pi < x < k\pi+\dfrac{\pi}{3}$ 时， $y' > 0$, 当 $k\pi+\dfrac{\pi}{3} < x < k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时， $y' < 0$.

当 $k\pi+\dfrac{\pi}{2} < x < k\pi+\pi$ 时， 即 $2k\pi+\pi < 2x < 2k\pi+2\pi$ 时， $y' = 1-2\cos 2x$. 令 $y'=0$, 可得 $2x = 2k\pi+\pi+\dfrac{2\pi}{3}$, 即 $x = k\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}$, 且当 $k\pi+\dfrac{\pi}{2} < x < k\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}$ 时， $y' > 0$, 当 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3} < x < k\pi+\pi$ 时， $y' < 0$.

综上所述，可知函数的单增区间为 $[k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{3}]\cup[k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}]$, 可统一写成 $[\dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}]\ (k\in\mathbf{Z})$; 单减区间为 $[k\pi+\dfrac{\pi}{3}, k\pi+\dfrac{\pi}{2}]\cup[k\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}, k\pi+\pi]$, 可统一写成 $[\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}]\ (k\in\mathbf{Z})$.

4. 利用函数的单调性证明下列不等式:

(1) $\cos x > 1-\dfrac{x^2}{2}\ (x\neq 0)$;

(2) 当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$;

(3) 当 $x>0$ 时，$x-\dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$;

(4) 当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$2x < \sin x + \tan x$.

解 (1) 令 $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$，则当 $x>0$ 时，$f'(x) = x-\sin x > 0$, 故 $f(x)$ 单调增加，所以当 $x>0$ 时，$f(x) > f(0) = 0$; 又当 $x<0$ 时，$f'(x) = x-\sin x < 0$, 故 $f(x)$ 单调减少，所以当 $x<0$ 时，$f(x) > f(0) = 0$, 因此当 $x\neq 0$ 时，总有 $f(x) > f(0) = 0$, 即 $\cos x > 1-\dfrac{x^2}{2}$.

(2) 令 $f(x) = 1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$，则当 $x>0$ 时，

$$f'(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) > 0,$$

故 $f(x)$ 单调增加，又 $f(0)=0$, 所以当 $x>0$ 时，$f(x) > f(0) = 0$, 即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}.$$

(3) 令 $f_1(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$，$f_2(x) = \ln(1+x) - x$, 则当 $x>0$ 时，

$$f_1'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0,\quad f_2'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0,$$

所以当 $x>0$ 时，$f_1(x)>f_1(0)=0$，$f_2(x)<f_2(0)=0$，即当 $x>0$ 时，

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x.$$

(4) 令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$，则 $f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2$，且当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，

$$f''(x)=-\sin x+2\sec^2 x\tan x=\sin x(2\sec^3 x-1)>0,$$

故 $f'(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内单调增加，所以当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，从而 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内单调增加，所以当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $2x<\sin x+\tan x$.

5. 判别 e^{π} 和 π^{e} 的大小.

解 令 $f(x)=x\ln a-a\ln x$，其中 a 为大于 1 的正常数，则有

$$f'(x)=\ln a-\frac{a}{x},$$

显然当 $x>a\ge e$ 时，$f'(x)>0$，故当 $x>a\ge e$ 时，$f(x)>f(a)=0$，即 $x\ln a>a\ln x$，从而 $a^x>x^a$.

现在令 $a=e, x=\pi$，上面的不等式仍成立，即有 $e^{\pi}>\pi^{e}$.

6. 求下列函数的极值：

(1) $f(x)=x^3-4x^2-3x$;　　(2) $f(x)=e^x\cos x,\ x\in[0,2\pi]$;

(3) $f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}$;　　(4) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(5) $f(x)=\frac{1}{x}\ln^2 x$;　　(6) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

解 (1) $f(x)=x^3-4x^2-3x$，$f'(x)=3x^3-8x-3=(x-3)(3x+1)$，驻点为 $x=-\frac{1}{3}$ 及 $x=3$.

当 $x\in(-\infty,-\frac{1}{3})$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(-\frac{1}{3},3)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(3,+\infty)$ 时，

$f'(x)>0$, 故函数在 $x=-\frac{1}{3}$ 处取得极大值 $f(-\frac{1}{3})=\frac{14}{27}$, 在 $x=3$ 处取得极小值 $f(3)=-18$.

(2) 当 $x\in[0,2\pi]$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$, $f'(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$, 驻点为 $x_1=\frac{\pi}{4}$ 及 $x_2=\frac{5}{4}\pi$. 又 $f''(x)=-2\mathrm{e}^x\sin x$, $f''(x_1)<0$, $f''(x_2)>0$, 所以函数在 $x_1=\frac{\pi}{4}$ 处取得极大值 $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$, 在 $x_2=\frac{5}{4}\pi$ 处取得极小值 $f(\frac{5}{4}\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{4}\pi}$.

(3) $f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}$, $f'(x)=2+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x}+1)$. 令 $f'(x)=0$, 可得 $x=-1$. 当 $x=0$ 时, $f'(x)$ 不存在.

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x\in(-1,0)$ 时, $f'(x)<0$, 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, 故函数在 $x=-1$ 处取得极大值 $f(-1)=1$, 在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$.

(4) 当 $x\neq 0$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}>0$, 而 $f(0)=0$, 由极值的定义知, 函数在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$.

(5) $f(x)=\frac{1}{x}\ln^2 x$, $f'(x)=\frac{1}{x^2}\ln x(2-\ln x)$, 驻点为 $x=1$ 及 $x=\mathrm{e}^2$.

当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)<0$, 当 $x\in(1,\mathrm{e}^2)$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x\in(\mathrm{e}^2,+\infty)$ 时, $f'(x)<0$, 故函数在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=0$, 在 $x=\mathrm{e}^2$ 处取得极大值 $f(\mathrm{e}^2)=4\mathrm{e}^{-2}$.

(6) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{-x}$, 易知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 令 $f'(x)=x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{-x}(\frac{2}{3}-x)=0$, 可得驻点为 $x=\frac{2}{3}$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $f'(x)<0$, 当 $x\in(0,\frac{2}{3})$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x\in(\frac{2}{3},+\infty)$ 时, $f'(x)<0$, 故函数在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$, 在 $x=\frac{2}{3}$ 处取得极大值 $f(\frac{2}{3})=(\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}$.

7. 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某邻域内有定义, 且有

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = 1,$$

那么，$f(x)$ 在 $x = a$ 处是否有极值？若有极值，是极大值还是极小值？

解 依题，由极限的保号性知，存在正数 δ，当 $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ 时，$f(x) > f(a)$，由极值的定义知，函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处取得极小值 $f(a)$.

8. 证明方程 $x^3 + x - 1 = 0$ 有且仅有一个正实根.

证 令 $f(x) = x^3 + x - 1$，则有 $f(0) = -1 < 0$，$f(1) = 1 > 0$，由零点定理知，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个零点. 又 $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$，所以 $f(x)$ 是单调增加的，从而函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点(在区间 $(0,1)$ 内)，即方程 $x^3 + x - 1 = 0$ 有且仅有一个正实根.

9. 讨论方程 $\ln x = ax\,(a > 0)$ 有几个实根.

解 令 $f(x) = \ln x - ax$，则有 $f'(x) = \dfrac{1}{x} - a$. 令 $f'(x) = 0$，可得驻点为 $x = \dfrac{1}{a}$.

当 $x \in (0,\dfrac{1}{a})$ 时，$f'(x) > 0$，当 $x \in (\dfrac{1}{a},+\infty)$ 时，$f'(x) < 0$，故函数在 $x = \dfrac{1}{a}$ 处取得极大值 $f(\dfrac{1}{a}) = \ln\dfrac{1}{a} - 1 = -\ln a - 1$.

又 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$，所以 $f(\dfrac{1}{a}) = -\ln a - 1$ 是函数的最大值，即点 $(\dfrac{1}{a},-\ln a - 1)$ 为曲线 $f(x)$ 的最高点，因此

当 $f(\dfrac{1}{a}) = -\ln a - 1 < 0$，即 $a > \mathrm{e}^{-1}$ 时，方程 $\ln x = ax\,(a > 0)$ 无实根；

当 $f(\dfrac{1}{a}) = -\ln a - 1 = 0$，即 $a = \mathrm{e}^{-1}$ 时，方程 $\ln x = ax\,(a > 0)$ 有且仅有一个实根；

当 $f(\dfrac{1}{a}) = -\ln a - 1 > 0$，即 $0 < a < \mathrm{e}^{-1}$ 时，方程 $\ln x = ax\,(a > 0)$ 有两个实根.

10. 函数 $f(x)$ 对于一切实数 x 满足下列方程:

$$xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

若 $f(x)$ 在点 $x = C(C \neq 0)$ 处有极值，试证它是极小值.

解 依题 $f(x)$ 二阶可导，故当 $f(x)$ 在点 $x = C(C \neq 0)$ 处取得极值时，应有 $f'(C) = 0$. 在已知方程两端令 $x = C$，可得

$$f''(C)=\frac{1-\mathrm{e}^{-C}}{C}.$$

当 $C<0$ 时，可得 $f''(C)>0$，当 $C>0$ 时，同样可得 $f''(C)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $x=C(C\neq 0)$ 处取得极小值.