第五节

曲线的凸凹性与拐点

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 曲线凸凹性的概念

曲线弯曲的方向不同

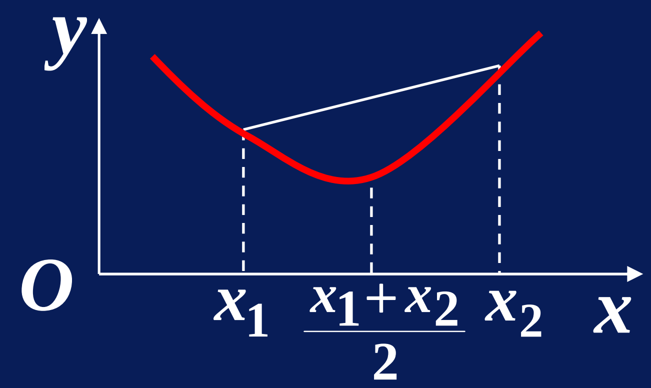
定义3.2 曲线的凹凸性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，$\forall x_1, x_2 \in I$,

(1) 若恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

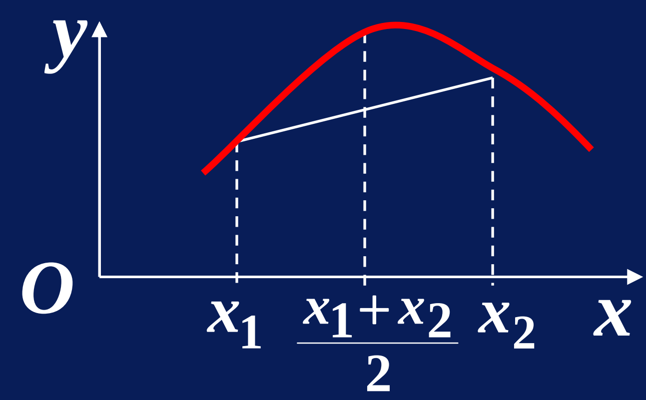
则称 $f(x)$ 的图形是凹的;



(2) 若恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 的图形是凸的.

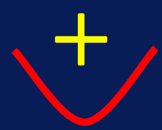


（二）曲线凸凹性的判定

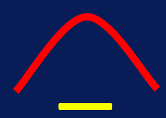
定理3.12(凹凸判定法)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，

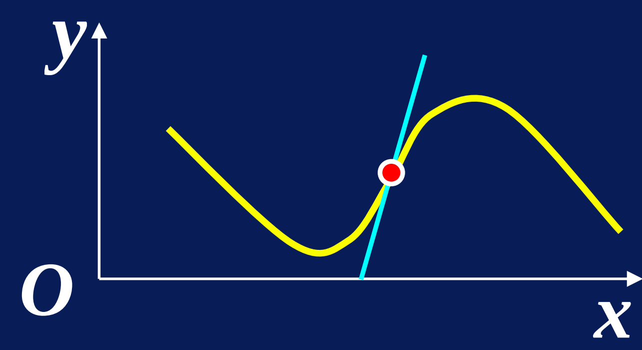
(1) 若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；



(2) 若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的；



定义3.3 连续曲线弧上凸弧与凹弧的分界点称为拐点．



(三) 拐点的判定

定理3.13 (拐点判定法)

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续，在 $\mathring{U}(x_0)$ 内二阶可导，

$f''(x_0) = 0$ 或不存在，

(1) 若 $f''(x)$ 在 x_0 两侧异号，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点.

(2) 若 $f''(x)$ 在 x_0 两侧同号，则点 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

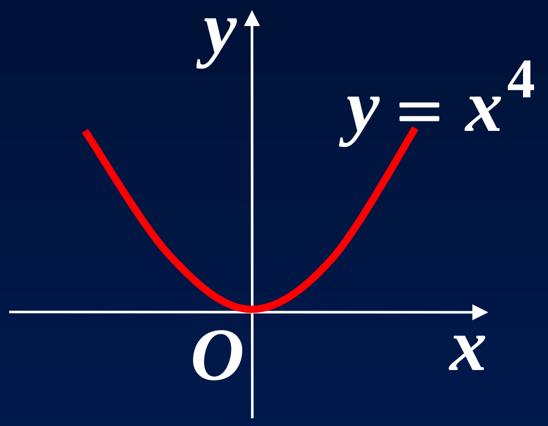
二、典型例题

例1 判断曲线 $y = x^4$ 的凹凸性.

解 $y' = 4x^3,\ y'' = 12x^2.$

当 $x = 0$ 时，$y'' = 0$,

当 $x \neq 0$ 时，$y'' > 0$,



故曲线 $y = x^4$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是凹的.

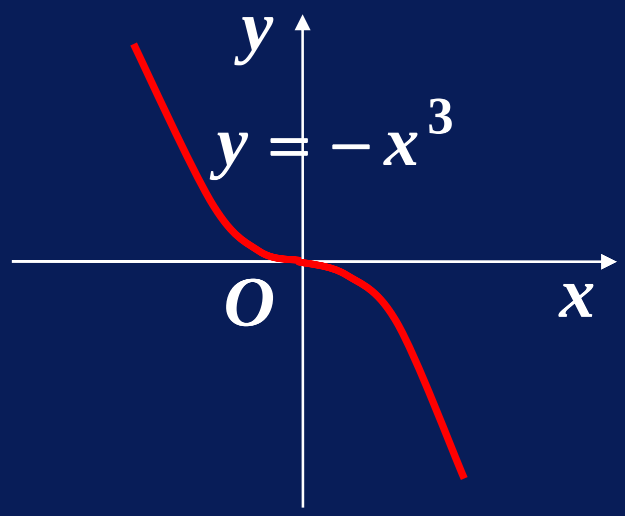
例2 判断曲线 $y=-x^3$ 的凹凸性.

解 $y'=-3x^2,\ y''=-6x.$

当 $x=0$ 时, $y''=0,$

当 $x<0$ 时, $y''>0,$

当 $x>0$ 时, $y''<0,$



故曲线 $y=x^3$ 在 $(-\infty,0]$ 上是凹的, 在 $[0,+\infty)$ 上是凸的.

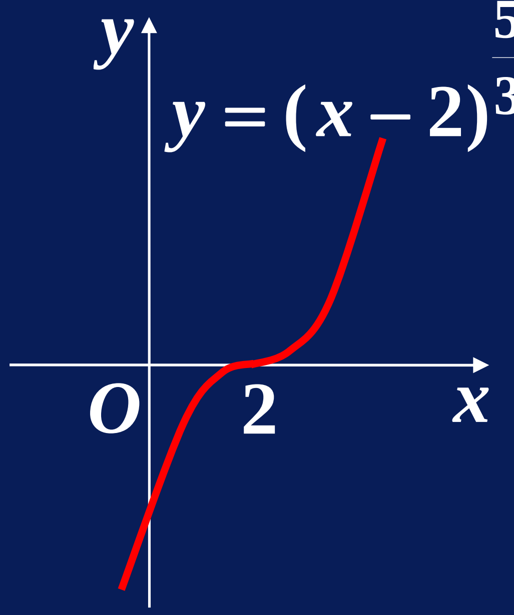
点 $(0,0)$ 是拐点.

例3 求曲线 $y=(x-2)^{\frac{5}{3}}$ 的拐点.

解 $y'=\frac{5}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}}$, $y''=\frac{10}{9}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$,

当$x=2$时, y''不存在.

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
y''	$-$	不存在	$+$
y	凸	0	凹



因此点 $(2,0)$ 为曲线 $y=(x-2)^{\frac{5}{3}}$ 的拐点 .

例4 求曲线$y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$的拐点.

解 当$x\neq 0$时，$y'=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$，$y''=\dfrac{2}{9}\dfrac{5x+1}{x\sqrt[3]{x}}$.

令$y''=0$, 得$x=-\dfrac{1}{5}$; 当$x=0$时, y''不存在.

x	$(-\infty,-\frac{1}{5})$	$-\frac{1}{5}$	$(-\frac{1}{5},0)$	0	$(2,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	不存在	$+$
y	凸	拐点	凹		凹

因此点$(-\dfrac{1}{5},-\dfrac{6\sqrt[3]{5}}{25})$是$y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$的拐点.

例5 利用函数图形的凹凸性，证明不等式:

$$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}, (x>0, y>0, x\neq y).$$

证 令 $f(t) = t\ln t,\ D = (0,+\infty).$

$$f'(t) = \ln t + 1,\ f''(t) = \frac{1}{t} > 0 \quad t\in(0,+\infty),$$

故曲线 $f(t)$ 的图形在 $(0,+\infty)$ 是凹的.于是对于

$\forall x>0, y>0, x\neq y$, 有 $\dfrac{f(x)+f(y)}{2} > f(\dfrac{x+y}{2}),$

即 $\dfrac{x\ln x + y\ln y}{2} > \dfrac{x+y}{2}\ln(\dfrac{x+y}{2}),$

$$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln(\frac{x+y}{2}).$$

三、同步练习

1. 讨论曲线 $y=\ln(x^2+1)$ 的凹凸性与拐点 .

2. 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

3. 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的凹凸区间及拐点.

4. 求证曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有位于一直线的三个拐点.

5. 设 $f(x)=K(x^2-3)^2$, 问当 K 为何值时, 曲线在拐点处的法线通过原点.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

6. 设$y=f(x)$在$x=x_0$的某邻域内具有三阶连 续导数,如果 $f''(x_0)=0$,而 $f'''(x_0)\neq 0$,试问$(x_0, f(x_0))$是否为曲线$y=f(x)$的拐点,为什么?

四、同步练习解答

1. 讨论曲线 $y=\ln(x^2+1)$的凹凸性与拐点．

解 $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$,

$$y''=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

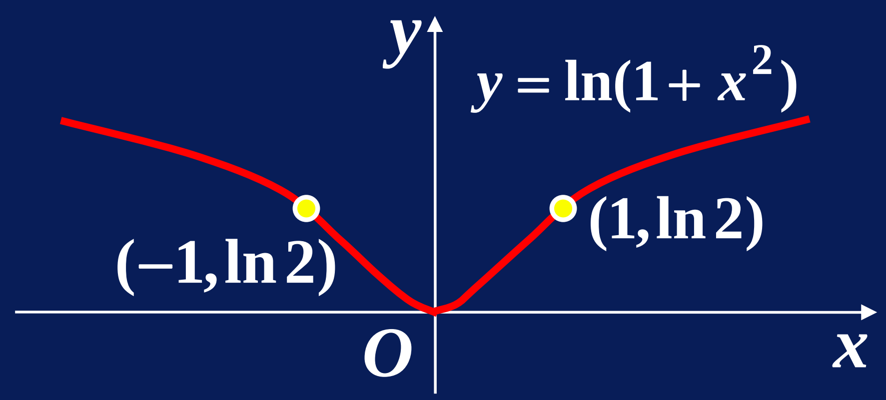
$$=\frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}.$$

令$y''=0$, 得$x_1=-1$, $x_2=1$, 对应$y_1=y_2=\ln 2$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	凸	拐点	凹	拐点	凸

由表可知，曲线在$(-\infty,-1]$及$[1,+\infty)$上是凸的，

在$[-1,1]$上是凹的，$(-1,\ln 2)$及$(1,\ln 2)$是曲线的拐点．

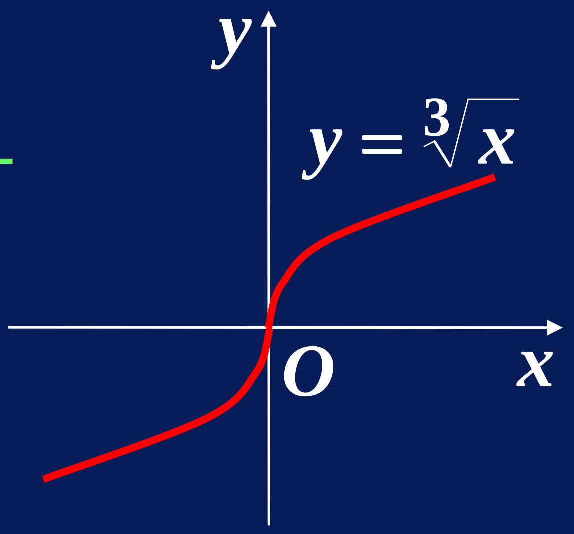


2. 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解 $y'=\frac{1}{3}x^{-2/3},\ y''=-\frac{2}{9}x^{-5/3}.$

当 $x=0$ 时, y'' 不存在.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	$+$	不存在	$-$
y	凹	0	凸



因此点 $(0, 0)$ 为曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

3. 求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的凹凸区间及拐点.

解 (1) 求 y''

$$y' = 12x^3 - 12x^2,$$

$$y'' = 36x^2 - 24x = 36x\left(x - \frac{2}{3}\right).$$

(2) 求拐点可疑点坐标

令 $y'' = 0$, 得 $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$,

对应 $y_1 = 1$, $y_2 = \dfrac{11}{27}$.

(3) 列表判别

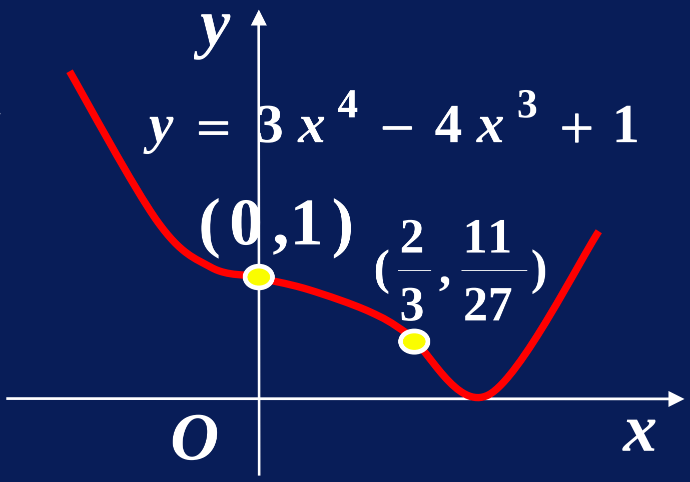
返回

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	凹	拐点	凸	拐点	凹

故该曲线在 $(-\infty,0]$ 及 $[\frac{2}{3},+\infty)$ 上是凹的,

在$[0,\frac{2}{3}]$上是凸的，点 $(0,1)$ 及

$(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$均为拐点.



4. 求证曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有位于一直线的三个拐点.

证 $$y'=\frac{(x^2+1)-(x+1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y''=\frac{(-2-2x)(x^2+1)^2-(1-2x-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{2(x-1)(x+2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

令 $y''=0$ 得

$$x_1=1,\quad x_2=-2-\sqrt{3},\quad x_3=-2+\sqrt{3},$$

从而三个拐点为

$$(1,1),\ \left(-2-\sqrt{3},\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}\right),\ \left(-2+\sqrt{3},\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}\right).$$

因为

$$\frac{\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}-1}{-2-\sqrt{3}-1}=\frac{\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}-1}{-2+\sqrt{3}-1}$$

所以三个拐点共线.

5. 设 $f(x)=K(x^2-3)^2$, 问当 K 为何值时, 曲线在拐点处的法线通过原点.

解 $f'(x)=4Kx(x^2-3)$,

$$f''(x)=4K(x^2-3)+8Kx^2=12K(x^2-1).$$

令 $f''(x)=0$, 解得 $x=\pm 1$.

而当 $x<-1$ 时, $f''(x)$ 与 K 符号相同,

当 $-1<x<1$ 时, $f''(x)$ 与 K 符号相反,

当 $x>1$ 时, $f''(x)$ 也与 K 符号相同.

因此 $x=\pm 1$为曲线的拐点，此时$y=4K$,

拐点为$(-1,4K)$和$(1,4K)$.

当$x=1$时，切线的斜率$f'(x)=-8K$，此时法线的

斜率为$\dfrac{1}{8K}$, 又法线经过原点，所以$\dfrac{y-0}{x-0}=\dfrac{1}{8K}$,

即$\dfrac{4K-0}{1-0}=\dfrac{1}{8K}$, 解得$K=\pm\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$时，原曲线在拐点

$(1,4K)$处的法线通过原点. 经验算可知,无论K取何值

拐点$(-1,4K)$处的法线均不通过原点.

6. 设$y=f(x)$在$x=x_0$的某邻域内具有三阶连 续导数，如果 $f''(x_0)=0$，而 $f'''(x_0)\neq 0$，试问$(x_0, f(x_0))$是否为曲线 $y=f(x)$的拐点，为什么？

解 不失一般性，设$f'''(x_0)>0.$

由三阶导数在 $x=x_0$的某邻域连续可知，

$$\lim_{x\to x_0} f'''(x)=f'''(x_0)>0.$$

由极限的局部保号性知，存在$U(x_0,\delta)$，

使得当$x\in U(x_0,\delta)$时，$f'''(x)>0$.

于是 $f''(x)$在该邻域内单调递增， 但

$$f''(x_0)=0,$$

故当$x\in(x_0-\delta,x_0)$时， $f''(x)<0$,

当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时， $f''(x)>0$,

从而$(x_0,f(x_0))$是拐点.