第四章　不定积分

第一节　不定积分的概念

习题　4-1

1.　在下列函数中，找到其中 6 个函数是另外 6 个函数的原函数.

$\dfrac{1}{x^2}$，　$\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$，　$2\sqrt{1+x^2}$，　$1-\dfrac{1}{x}$，　$4x(1+x^2)$，　$3\sqrt[3]{x}$，

$4x^3$，　$x^{-\frac{2}{3}}$，　$\ln(1+x^2)$，　$\dfrac{2x}{1+x^2}$，　$1+x^4$，　$(1+x^2)^2$.

解　因 $(2\sqrt{1+x^2})'=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$，所以 $2\sqrt{1+x^2}$ 是 $\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ 的原函数;

因 $(1-\dfrac{1}{x})'=\dfrac{1}{x^2}$，所以 $1-\dfrac{1}{x}$ 是 $\dfrac{1}{x^2}$ 的原函数;

因 $[(1+x^2)^2]'=4x(1+x^2)$，所以 $(1+x^2)^2$ 是 $4x(1+x^2)$ 的原函数;

因 $(3\sqrt[3]{x})'=x^{-\frac{2}{3}}$，所以 $3\sqrt[3]{x}$ 是 $x^{-\frac{2}{3}}$ 的原函数;

因 $(1+x^4)'=4x^3$，所以 $1+x^4$ 是 $4x^3$ 的原函数;

因 $[\ln(1+x^2)]'=\dfrac{2x}{1+x^2}$，所以 $\ln(1+x^2)$ 是 $\dfrac{2x}{1+x^2}$ 的原函数.

2.　(1)　验证 $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$, $\mathrm{e}^x\mathrm{sh}x$ 和 $\mathrm{e}^x\mathrm{ch}x$ 都是 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$ 的原函数;

(2)　证明 $(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2$, $(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2$ 都是同一个函数的原函数，并指出这个函数来.

解　(1)　因为

$$(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x})'=\mathrm{e}^{2x},$$

$$(\mathrm{e}^x\mathrm{sh}x)'=(\mathrm{e}^x\cdot\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2})'=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}-1)'=\mathrm{e}^{2x},$$

$$(\mathrm{e}^x\mathrm{ch}x)'=(\mathrm{e}^x\cdot\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2})'=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}+1)'=\mathrm{e}^{2x}，而$$

$$\frac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}=\frac{e^x}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}}=\frac{e^x}{e^{-x}}=e^{2x}\text{，所以}$$

$$(\frac{1}{2}e^{2x})'=(e^x\mathrm{sh}x)'=(e^x\mathrm{ch}x)'=\frac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x},$$

因此 $\frac{1}{2}e^{2x}$, $e^x\mathrm{sh}x$ 和 $e^x\mathrm{ch}x$ 都是 $\frac{e^x}{\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}$ 的原函数.

(2) 因为 $[(e^x+e^{-x})^2]'=(e^{2x}+e^{-2x}+2)'=2(e^{2x}-e^{-2x})$,

$$[(e^x-e^{-x})^2]'=(e^{2x}+e^{-2x}-2)'=2(e^{2x}-e^{-2x}),$$

所以 $(e^x+e^{-x})^2$, $(e^x-e^{-x})^2$ 都是 $2(e^{2x}-e^{-2x})$ 的原函数.

3. 求下列不定积分:

(1) $\int 5x^4\mathrm{d}x$;

(2) $\int(\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4})\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{(x^2-3)(x+1)}{x^2}\mathrm{d}x$;

(4) $\int\frac{x-9}{\sqrt{x}+3}\mathrm{d}x$;

(5) $\int(\frac{1-x}{x})^2\mathrm{d}x$;

(6) $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(7) $\int\sqrt[m]{x^n}\mathrm{d}x$;

(8) $\int(3-x^2)^2\mathrm{d}x$;

(9) $\int\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2gh}}$ (g是常数);

(10) $\int(8^x+x^8)\mathrm{d}x$;

(11) $\int e^x(2^x+\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}})\mathrm{d}x$;

(12) $\int\frac{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}{2^x}\mathrm{d}x$;

(13) $\int\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\mathrm{d}x$;

(14) $\int(1+\sin x+\cos x)\mathrm{d}x$;

(15) $\int\sec x(\sec x-\tan x)\mathrm{d}x$;

(16) $\int\csc x(\csc x-\cot x)\mathrm{d}x$;

(17) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$;

(18) $\int 3^x e^x\mathrm{d}x$;

(19) $\int(\frac{3}{1+x^2}-\frac{8}{\sqrt{1-x^2}})\mathrm{d}x$;

(20) $\int(2e^x+\frac{5}{x})\mathrm{d}x$;

(21) $\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}})dx$;　　　(22) $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$;

(23) $\int (1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$;　　　(24) $\int (a^x+b^x)^2 dx$;

(25) $\int (a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x)dx$;　　　(26) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

解　(1) $\int 5x^4 dx = x^5+C$.

(2) $\int (\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4})dx = \int (4x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}})dx = 8x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{10}x^{\frac{5}{2}}+C$.

(3) $\int \frac{(x^2-3)(x+1)}{x^2}dx = \int \frac{x^3+x^2-3x-3}{x^2}dx = \int (x-\frac{3}{x}+1-3x^{-2})dx$

$$= \frac{x^2}{2}+x-3\ln|x|+\frac{3}{x}+C.$$

(4) $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3}dx = \int \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+3}dx = \int (\sqrt{x}-3)dx$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x+C.$$

(5) $\int (\frac{1-x}{x})^2 dx = \int (\frac{1}{x}-1)^2 dx = \int (\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1)dx$

$$= -\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C.$$

(6) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}+C$.

(7) $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx = \int x^{\frac{n}{m}}dx = \frac{1}{\frac{n}{m}+1}x^{\frac{n}{m}+1} = \frac{m}{m+n}x^{\frac{m+n}{m}}+C$.

(8) $\int (3-x^2)^2 dx = \int (9-6x^2+x^4)dx = 9x-2x^3+\frac{x^5}{5}+C$.

(9) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int h^{-\frac{1}{2}}dh = \frac{1}{\sqrt{2g}}\cdot 2\sqrt{h}+C = \sqrt{\frac{2h}{g}}+C$.

(10) $\int (8^x+x^8)dx = \frac{8^x}{\ln 8}+\frac{x^9}{9}+C$.

(11) $\int e^x(2^x+\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}})dx = \int[(2e)^x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}]dx$

$$= \frac{(2e)^x}{\ln(2e)}+\arcsin x + C$$

$$= \frac{2^x e^x}{1+\ln 2}+\arcsin x + C \ .$$

(12) $\int\frac{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}{2^x}dx = \int[3+4(\frac{3}{2})^x]dx = 3x+4\frac{(\frac{3}{2})^x}{\ln\frac{3}{2}}+C$

$$= 3x+\frac{4\cdot 3^x}{2^x(\ln 3-\ln 2)}+C \ .$$

(13) $\int\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx = \int\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x+1}dx = \int(e^x-1)dx = e^x-x+C$.

(14) $\int(1+\sin x+\cos x)dx = x-\cos x+\sin x+C$.

(15) $\int\sec x(\sec x-\tan x)dx = \int(\sec^2 x-\sec x\tan x)dx$

$$= \tan x-\sec x+C \ .$$

(16) $\int\csc x(\csc x-\cot x)dx = \int(\csc^2 x-\csc x\cot x)dx$

$$= \csc x-\cot x+C \ .$$

(17) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx = \int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx = \int(\cos x+\sin x)dx$

$$= \sin x-\cos x+C \ .$$

(18) $\int 3^x e^x dx = \int(3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln 3e} = \frac{3^x e^x}{1+\ln 3}+C$.

(19) $\int(\frac{3}{1+x^2}-\frac{8}{\sqrt{1-x^2}})dx = 3\int\frac{1}{1+x^2}dx-8\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= 3\arctan x-8\arcsin x+C \ .$$

(20) $\int(2e^x+\frac{5}{x})dx = 2e^x+5\ln|x|+C$.

(21) $\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}})dx = \int(e^x-x^{-\frac{1}{2}})dx = e^x-2\sqrt{x}+C$.

(22) $\int\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int\frac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x+\sin x)+C$.

(23) $\int(1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int(1-\frac{1}{x^2})x^{\frac{3}{4}}\mathrm{d}x = \int(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})\mathrm{d}x$

$$= \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C.$$

(24) $\int(a^x+b^x)^2\mathrm{d}x = \int(a^{2x}+2a^xb^x+b^{2x})\mathrm{d}x$

$$= \int[(a^2)^x+2(ab)^x+(b^2)^x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(a^2)^x}{\ln a^2}+\frac{(b^2)^x}{\ln b^2}+2\frac{(ab)^x}{\ln(ab)}+C$$

$$= \frac{a^{2x}}{2\ln a}+\frac{b^{2x}}{2\ln b}+2\frac{a^xb^x}{\ln a+\ln b}+C.$$

(25) $\int(a\mathrm{ch}x+b\mathrm{sh}x)\mathrm{d}x = a\mathrm{sh}x+b\mathrm{ch}x+C$.

(26) $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$
$= x-\arctan x+C$.

4. 一曲线通过点 $(\mathrm{e}^3,5)$，且在任一点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数，求此曲线方程.

解 设所求的曲线方程为 $y=f(x)$，按题设有

$$y' = f'(x)=\frac{1}{x}，所以$$

$$y=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C.$$

又因曲线过点 $(\mathrm{e}^3,5)$，故

$$5=f(\mathrm{e}^3)=\ln\mathrm{e}^3+C=3+C，即 C=2，$$

因此所求曲线方程为

$$y=\ln x+2.$$

5. 已知函数 $f(x)=2x+3$ 的一个原函数为 $F(x)$，且满足 $F(1)=2$，求 $F(x)$.

解 由题设知 $F'(x)=f(x)=2x+3$，则

$$F(x)=\int(2x+3)\mathrm{d}x=x^2+3x+C.$$

又因 $F(1)=2$，故 $2=1+3+C$，即 $C=-2$，因此

$$F(x)=x^2+3x-2.$$

6. 一个物体由静止开始运动，经 t 秒后的速度是 $3t^2(\mathrm{m/s})$，问

(1) 在 3 s 后物体离开出发点的距离是多少?

(2) 物体走完 360m 需要多少时间?

解 设该物体沿横轴正向从坐标原点由静止开始运动，位移函数为 $S=S(t)$，由题设及导数的物理意义知 $S'(t)=V(t)=3t^2$，于是

$$S(t)=\int 3t^2\mathrm{d}t=t^3+C.$$

又因为 $t=0$ 时, $S=0$ ，即 $0=0^2+C$，$C=0$，

所以可得位移函数为

$$S(t)=t^3.$$

(1) 3 秒后物体离开出发点的距离为 $S(3)=3^3=27(\mathrm{m})$.

(2) 由 $S(t)=t^3=360$，解得 $t=\sqrt[3]{360}\approx 7.11(\mathrm{s})$，

因此物体走完 360m 约需 7.11s.