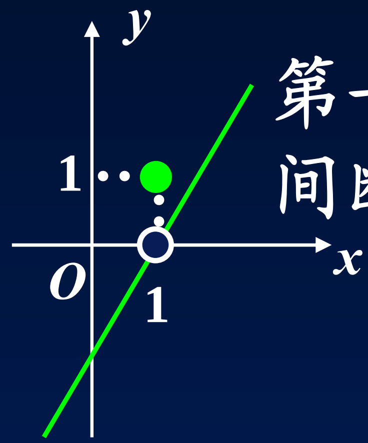
第八节

函数的连续性

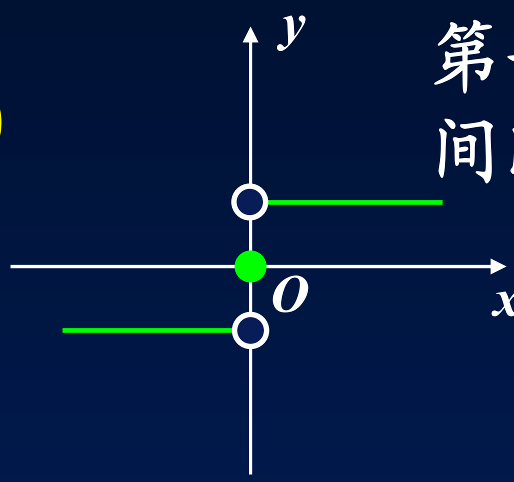
- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

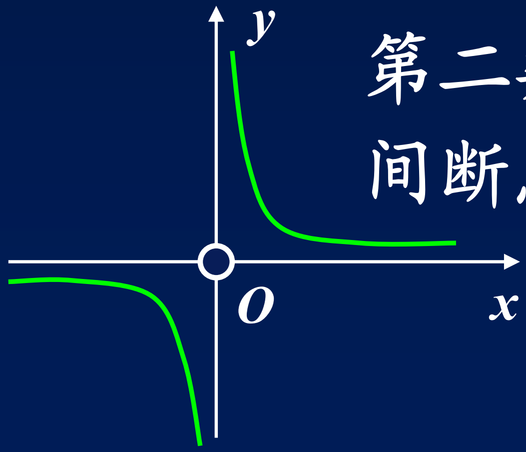
（一）函数连续性的概念



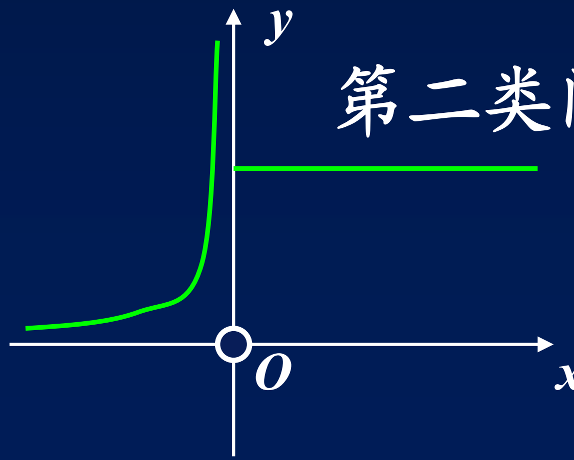
第一类(可去)间断点



第一类(跳跃)间断点



第二类(无穷)间断点



第二类间断点

1.函数在一点连续的定义

定义1.10 设 $f(x)$在点x_0的某邻域 $U(x_0)$内有定义.

若 (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

则称函数 $f(x)$在点x_0处连续.

注 1° 函数在一点连续的等价定义之一

增量概念: 设有函数 $y=f(x)$. 当自变量 x 从 x_0 变到

$x_0+\Delta x$, 则称 Δx 为自变量的增量(或改变量).

若相应地函数 y 从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$, 则称

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

为函数的增量(或改变量).

$x \to x_0$ 就是 $\Delta x \to 0$,

$f(x) \to f(x_0)$ 就是 $\Delta y \to 0$.

定义1.9（函数在一点连续的增量定义）

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义.

$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

2° 函数在一点连续的等价定义之二

定义1.11（函数在一点连续的 "$\varepsilon-\delta$" 定义）

$f(x)$在点x_0处连续 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$

使当$|x-x_0|<\delta$时,

恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$

3° $f(x)$在点 x_0处连续的三要素:

(1) $f(x_0)$有意义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$

2. 单侧连续

若函数 $f(x)$在$(a,x_0]$内有定义,且 $f(x_0^-)=f(x_0)$,
则称 $f(x)$在点 x_0处左连续;

若函数$f(x)$在$[x_0,b)$内有定义,且$f(x_0^+)=f(x_0)$,
则称$f(x)$在点x_0处右连续.

定理 函数 $f(x)$在点x_0 处连续

$\Leftrightarrow$ $f(x)$在点x_0 处既左连续又右连续

$$\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0).$$

3. 函数在区间上的连续性

在开区间上每一点都连续的函数, 叫做在该区间上连续的函数, 或者说函数在该区间上连续.

如果函数在开区间 (a,b)内连续, 并且在左端点 $x=a$处右连续, 在右端点 $x=b$处左连续, 则称函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续. 记作

$$f(x)\in C[a,b].$$

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

4. 已知的连续函数

$$y=\sqrt{x}, \qquad x\in[0,+\infty)$$

多项式：$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n, \qquad x\in R$

有理函数：$y=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \qquad x\in R$ 且 $Q_n(x)\neq 0$

$$y=\sin x, \qquad x\in R$$

$$y=\cos x, \qquad x\in R$$

（二）函数的间断点及其分类

在点 x_0 的去心邻域内有定义的函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足以下三个条件：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在； (3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

1. 定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，如果上述三个条件中有一个不满足，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续(或间断)，并称点 x_0 为 $f(x)$ 的不连续点 (或间断点).

2. 间断点的分类

根据： $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 是否同时存在 .

间断点 x_0		$f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$	
第一类	可去	$f(x_0^-)=f(x_0^+)$, 但 $f(x_0^-)=f(x_0^+)\neq f(x_0)$ 或 $f(x_0)$ 无意义	同时存在
	跳跃	$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$	
第二类	无穷	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$	至少有一个不存在
	振荡	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在 $(\neq\infty)$ 当 $x\to x_0$ 时， $y=f(x)$ 在某 直线 $y=A$ 上下方来回摆动 .	
	其他		

（三）连续函数的运算法则

1. 四则运算的连续性

定理1.14 在某点连续的有限个函数 经有限次和，差，积，商(分母$\neq 0$) 运算，结果仍是在该点连续的函数．

例如：$\sin x, \cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，

利用极限的四则运算法则可以证明：

$\tan x, \cot x$，$\sec x, \csc x$在各自定义域内连续．

结论： 三角函数在其定义域内连续．

推论 (连续函数的线性运算法则)

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续, α 和 β 是常数,

则函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的线性组合

$$\alpha f(x)+\beta g(x)$$

在点 x_0 连续. 此运算法则对有限个函数成立.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. 反函数的连续性

定理1.15 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I_x 单调增加(减少)且连续，则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在对应区间

$$I_y = \{ y \mid y = f(x), x \in I_x \}$$

上亦单调增加(减少)且连续. (证明略)

例如: $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上连续单调递增,

其反函数 $y = \arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 上也连续单调递增.

类似地, $y = \arccos x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上连续单调递减.

$y = \arctan x$ 及 $y = \operatorname{arccot} x$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

结论：反三角函数在其定义域内连续.

结论：指数函数，对数函数在其定义域内连续.

结论：幂函数在其定义域内连续.

3. 复合函数的连续性

定理1.16 设函数 $y=f[u(x)]$由函数 $y=f(u)$与函数 $u=u(x)$复合而成, 若 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$处连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f[u(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$$

定理1.16的结论可以写成:

$$\underline{\lim_{x\to x_0} f[u(x)]}=f(u_0)=\underline{f[\lim_{x\to x_0} u(x)]},$$

意义: 1. 函数记号f与极限记号可以交换次序;
2. 变量代换 $(u=u(x))$的理论依据.

定理1.17 设函数 $u=u(x)$在点$x=x_0$处连续，

而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0=u(x_0)$ 处连续，

则复合函数 $y=f[u(x)]$在点$x=x_0$处连续，

即
$$\lim_{x\to x_0} f[u(x)] = f[\lim_{x\to x_0} u(x)]$$
$$= f[u(x_0)].$$

定理1.17是 定理1.16 的特殊情形

（四）初等函数的连续性

定理 基本初等函数在定义域内连续.

基本初等函数在定义域内连续

连续函数的复合函数连续

连续函数经四则运算仍连续

结论： 一切初等函数在其定义区间内连续.

（定义区间是指包含在定义域内的区间.）

$y=\sqrt{1-x^2}$ 的连续区间为 $[-1,1]$ (端点为单侧连续)

$y=\ln\sin x$ 的连续区间为 $(2n\pi,(2n+1)\pi)$, $n\in \mathbf{Z}$.

注 1° 初等函数仅在其定义区间上连续，在其

定义域内不一定连续；

如：(1) $y=\sqrt{\cos x-1}$, $D=\{x \mid x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots\}$

定义域内的点全部是孤立点，即函数在定义域内每个点的去心邻域 (邻域半径小于2π)内均无定义，因此在每个点都不连续.

(2) $y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$, $D=\{x \mid x=0,\ 及 x\geq 1\}$

在点$x=0$的去心邻域(邻域半径小于1)内没有定义，因此它在 x=0 处不连续，从而在其定义域内不连续.

但此函数在其定义区间 [1,+∞)上连续.

$2°$ 初等函数求极限的方法<u>代入法.</u>

设 $f(x)$是初等函数, $x_0 \in$定义区间, 则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

二、典型例题

例1 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$

处连续.

证 $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

又 $f(0)=0,$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0),$

$\therefore$ 函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

例2 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1, \\ 2, & x = 1, \\ 2-x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$ 在点$x=1$处的连续性.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1,$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2-x) = 1,$$

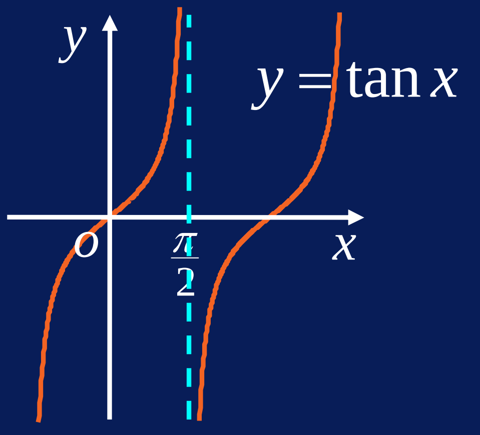
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \neq f(1) = 2,$$

所以 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

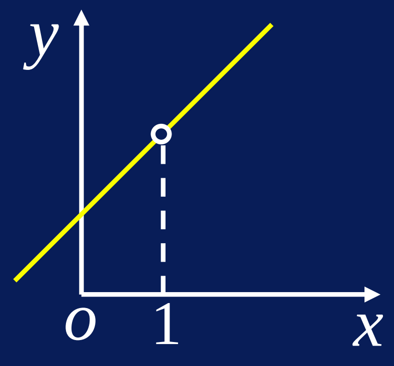
例3 求下列函数的间断点，并判断其类型

(1) $y = \tan x \quad x \in [o, \pi]$



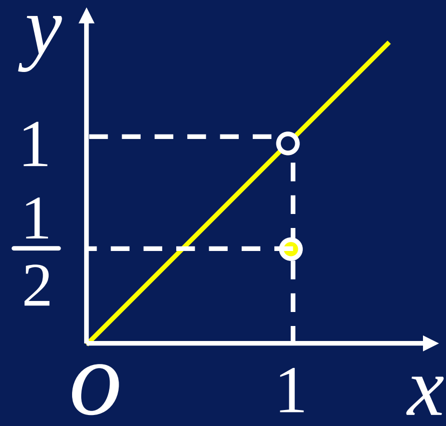
$x = \dfrac{\pi}{2}$ 为其第二类（无穷）间断点.

(2) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$



$x = 1$为其第一类（可去）间断点.

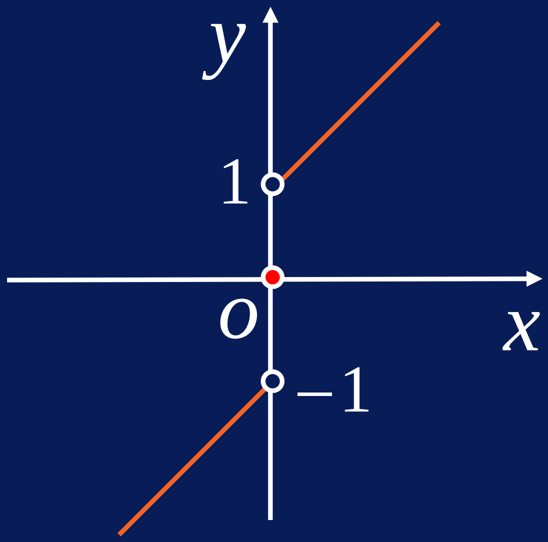
$$(3)\ y = f(x) = \begin{cases} x, x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}, x = 1 \end{cases}$$



显然 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 \neq f(1)$

$x = 1$为其第一类（可去）间断点.

$$(4)\ y = f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$



$$f(0^-) = -1 \neq f(0^+) = 1$$

$x = 0$ 为其第一类（跳跃）间断点.

例4 指出下列函数的间断点及其类型:

(1) $f(x)=\dfrac{10^{\frac{1}{x}}-5}{10^{\frac{1}{x}}+5}$

当 $a>1$ 时,

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$

解 1° 找 $f(x)$ 无定义的点

间断点: $x=0$

2° 判断间断点的类型

$\because \quad f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{10^{\frac{1}{x}}-5}{10^{\frac{1}{x}}+5}=\dfrac{0-5}{0+5}=-1$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{10^{\frac{1}{x}}-5}{10^{\frac{1}{x}}+5}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-5\cdot 10^{-\frac{1}{x}}}{1+5\cdot 10^{-\frac{1}{x}}}=1$$

当 $a>1$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=0$$

$f(0^-)$ 与 $f(0^+)$ 均存在，但 $f(0^-)\neq f(0^+)$

$\therefore\quad x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类（跳跃）间断 点.

(2) $f(x)=\begin{cases}2x-x^2, & x<0\\ \dfrac{1}{x-1}, & x\ge 0\end{cases}$

解　1° 找 $f(x)$ 无定义的点　间断点：$x=1$

$\because \quad \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$

$\therefore$ $x=1$是 $f(x)$的第二类（无穷）间断 点.

2° 查分段点：$x=0$

$\because \quad f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x-x^2)=0\neq f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x-1}=-1,$

$\therefore$ $x=0$是 $f(x)$的第一类（跳跃）间断 点.

(3) $f(x)=\dfrac{x-2}{\tan(x-2)}$

解　1° 找 $f(x)$ 无定义的点

间断点：① $x-2=n\pi$，　即

$$x=2+n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

② $x-2=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，　即

$$x=2+n\pi+\frac{\pi}{2}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

2° 判断类型

① $x = 2 + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

1) $x = 2 \quad (n = 0)$

$$\because \quad \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\tan(x-2)} \overset{u = x-2}{=\!=\!=} \lim_{u \to 0} \frac{u}{\tan u} = 1$$

而 $f(x)$在$x = 2$处无定义

$\therefore \quad x = 2$是$f(x)$的第一类（可去）间断 点.

2) $x = 2 + n\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$$\because \quad \lim_{x \to 2 + n\pi} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to 2 + n\pi} \frac{\tan(x-2)}{x-2} = \frac{\tan n\pi}{n\pi} = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 2+n\pi} f(x) = \infty$$

故 $x = 2 + n\pi \ (n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$是$f(x)$的第二类（无穷）间断点.

② $x = 2 + n\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$$\because \quad \lim_{x \to 2+n\pi+\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \to 2+n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{x-2}{\tan(x-2)} = 0$$

$\therefore \quad x = 2 + n\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$是 $f(x)$的第一类（可去）间断点.

例5 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续, 证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$

$$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

也在 $[a,b]$ 上连续.

证 $\because\ \varphi(x)=\frac{1}{2}\left[\,|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)\,\right]$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\left[\,f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\,\right]$$

根据连续函数运算法则，可知

$$\varphi(x),\ \psi(x)$$

也在 $[a,b]$ 上连续 .

例6 证明: $y=a^x \quad (a>0, a\neq 1)$在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

证 1° $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ (教材第三节例4已证)

2° 需证: $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1.$

$\because \quad x\to 0,$ 令 $n=\left[\dfrac{1}{|x|}\right]$ 则 $n\le\dfrac{1}{|x|},$ $0<|x|\le\dfrac{1}{n},$

当$a>1$时, $a^{-\frac{1}{n}}\le a^x\le a^{\frac{1}{n}}$ $-\dfrac{1}{n}\le x\le\dfrac{1}{n}$ $(x\neq 0)$

令 $x\to 0,$ 则有 $n\to\infty$

由夹逼准则及1°，可得 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1.$

当 $0 < a < 1$ 时， $\lim\limits_{x\to 0} a^x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(\frac{1}{a})^x} = \dfrac{1}{1} = 1.$

3° $\forall\ x_0 \in R,\quad f(x) = a^x$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}$$

$$= a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)$$

$\because\quad \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0} a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1) = a^{x_0} \cdot 0 = 0$

$\therefore\quad f(x) = a^x$ 在 x_0 处连续.

由定理1.15易知， $y = \log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

例7 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$,

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ x+4, & x>1 \end{cases}$$

讨论复合函数 $f[\varphi(x)]$的连续性.

解 $f[\varphi(x)]=\begin{cases} \varphi^2(x), & \varphi(x)\le 1 \\ 2-\varphi(x), & \varphi(x)>1 \end{cases}$

$$=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ -2-x, & x>1 \end{cases}$$

$x \neq 1$时 $f[\varphi(x)]$为初等函数，故此时连续；

而 $$\lim_{x\to 1^-} f[\varphi(x)] = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f[\varphi(x)] = \lim_{x\to 1^+} (-2-x) = -3$$

故 $f[\varphi(x)]$在点 $x=1$ 不连续，$x=1$为第一类间断点．

三、同步练习

1. 讨论函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$间断点的类型.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ a+x^2, & x\geq 0 \end{cases}$, a为何值时，$f(x)$ 为连续函数.

3. 若 $f(x)$在点 x_0 连续,问$f^2(x)$, $|f(x)|$ 在 x_0 是否连续？反之是否成立？

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4.试分别举出具有以下性质的函数 $f(x)$ 的例子:

(1) $x=0,\pm 1,\pm 2,\pm\frac{1}{2},\cdots,\pm n,\pm\frac{1}{n},\cdots$

是 $f(x)$ 的所有间断点, 且它们都是无穷间断点;

(2) $f(x)$在R上处处不连续，但$|f(x)|$在R上处处连续;

(3) $f(x)$在R上处处有定义，但仅在一点连续.

5. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

6 . 试确定常数 a 使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-a\,x)=0$.

7. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

8. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x<0 \\ 2, & x=0, \\ e^{x}, & x>0 \end{cases}$

在点 $x=0$ 处的连续性 .

9. 当a取何值时,

函数 $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{3}{x}}, & x<0, \\ x+a, & x\geq 0,\end{cases}$ 在$x=0$处连续.

10. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$ 间断点的类型.

11. 求函数$y=\dfrac{x}{\tan x}$的间断点，并判断类型 .

12. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$ (常数$\alpha\neq 0$).

13. 证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a>0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$

其中 a, b 均为实数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=a^b.$

14. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

15. 求 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，

并求极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x),\ \lim\limits_{x\to -3} f(x).$

四、同步练习解答

1. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 间断点的类型.

解 $\because f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$ $\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$

故 $x=1$ 是第一类(可去)间断点，

又 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\infty,$

故 $x=2$ 是第二类(无穷)间断点．

2. $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x<0 \\ a+x^2, & x\geq 0 \end{cases}$, a为何值时，$f(x)$ 为连续函数.

解 当$x\neq 0$时，$f(x)$为初等函数，在其定义区间连续。

在x=0处，$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x}=0$,

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+x^2)=a=f(0)$

故当$a=0$时, $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$

$f(x)$在$x=0$处连续，从而在其定义域内连续。

3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续,问 $f^2(x)$, $|f(x)|$ 在 x_0 是否连续? 反之是否成立?

解 $\because f(x)$ 在 x_0 连续, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

且 $0 \le \big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \le |f(x) - f(x_0)|$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x) = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] = f^2(x_0)$$

故 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 都在 x_0 连续.

“反之”不成立．

反例: $f(x)=\begin{cases} 1, & x\text{为有理数} \\ -1, & x\text{为无理数} \end{cases}$

$f^2(x), |f(x)|$ 处处连续，但 $f(x)$ 处处间断,

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4.试分别举出具有以下性质的函数 $f(x)$ 的例子:

(1) $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \cdots, \pm n, \pm \frac{1}{n}, \cdots$

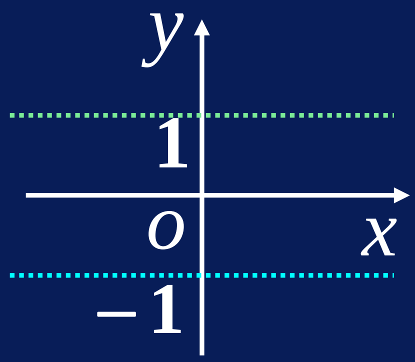
是 $f(x)$ 的所有间断点，且它们都是无穷间断点;

(2) $f(x)$在R上处处不连续，但$|f(x)|$在R上处处连续;

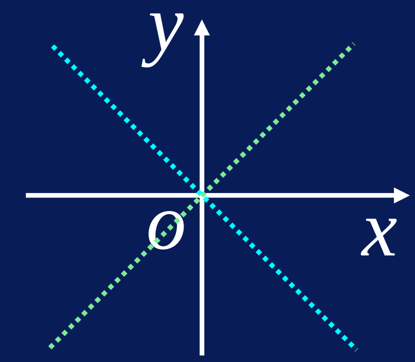
(3) $f(x)$在R上处处有定义，但仅在一点连续.

解 (1) $f(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x} + \dfrac{1}{\sin \dfrac{\pi}{x}}$

$$(2)\ f(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数}\\ -1, & x\text{是无理数}\end{cases}$$



$$(3)\ f(x)=\begin{cases}x, & x\text{是有理数}\\ -x, & x\text{是无理数}\end{cases}$$



5. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解 方法1 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

方法2 令 $t=\dfrac{1}{x}$,则 $x\to+\infty$ 时, $t\to 0^+$

原式 $=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{t}\left[\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+1}-\dfrac{1}{t}\right]=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sqrt{1+t^2}-1}{t^2}$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{(\sqrt{1+t^2}-1)(\sqrt{1+t^2}+1)}{t^2(\sqrt{1+t^2}+1)}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+1}=\frac{1}{2}$$

6 试确定常数 a 使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax)=0.$

解 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则

$$0=\lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{t^3}}-\frac{a}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}-a}{t}$$

$$\therefore\quad \lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{t^3-1}-a\right]=0$$

故 $\quad -1-a=0$

因此 $\quad a=-1$

7. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\ge 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2$

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2$

$\because \quad f(0^-)\ne f(0^+)$

$\therefore \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在

故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

8. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 2, & x=0,\\ e^{x}, & x>0\end{cases}$

在点 $x=0$ 处的连续性．

解 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x}=1$

$\because \quad f(0^-)=f(0^+)\neq f(0)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，但 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续．

9. 当a取何值时，

函数 $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{3}{x}}, & x<0,\\ x+a, & x\geq 0,\end{cases}$ 在$x=0$处连续.

解 $\because f(0)=a,\quad f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{3}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\{[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}}\}^{-3}=\mathrm{e}^{-3}$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

$\because \quad f(x)$在点 $x=0$处连续

$\Leftrightarrow f(0^-)=f(0^+)=f(0),$

即 $\quad \mathbf{e}^{-3}=a,$

故当且仅当 $\quad a=\mathrm{e}^{-3}$时,

函数 $f(x)$在 $x=0$处连续 .

10. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 间断点的类型.

解 间断点 $x=0,\ x=1$

$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, $\therefore\ x=0$ 为无穷间断点;

当 $x\to 1^-$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to+\infty$, $\therefore\ f(x)\to 0$

当 $x\to 1^+$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to-\infty$, $\therefore\ f(x)\to 1$

故 $x=1$ 为跳跃间断点. 在 $x\neq 0,1$ 处, $f(x)$ 连续.

11. 求函数 $y=\dfrac{x}{\tan x}$ 的间断点，并判断类型 .

解 令 $\tan x=0$, 得 $x=k\pi, k=0,\pm1,\cdots,$

又 $\tan x$ 在 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\cdots$ 无定义,

故函数在这些点处间断.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=1,$ 故 $x=0$ 是第一类间断点.

$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0,$ 故 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\cdots$

是第一类间断点.

又当$k=\pm1,\pm2,\cdots$时,

$$\lim_{x\to k\pi}\frac{x}{\tan x}=\infty,\quad \text{故}x=k\pi, k=\pm1,\pm2,\cdots$$

是第二类间断点.

12. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$ (常数$\alpha\neq 0$).

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha$

当$u\to 0$时，$e^{u}-1\sim u$

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x\quad(x\to 0)$$

13. 证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$

其中 a, b均为实数，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=a^b.$$

$$y=[f(x)]^{g(x)}$$

$$\ln y=g(x)\ln f(x)$$

$$y=\mathrm{e}^{\ln y}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$$

证 $y=[f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$

$\because \lim\limits_{x\to x_0} u(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)=b\ln a$

而 $y=f(u)=\mathrm{e}^u$ 在 $u=b\ln a$ $(\in \mathrm{R})$ 处连续

$$\therefore \lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$$

$$=\lim_{u\to b\ln a}\mathrm{e}^u=\mathrm{e}^{b\ln a}=a^b.$$

$x\to x_0$ 可换成 $x\to\infty$

14. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$. ($1^{\infty}$ 型)

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln(1+2x)}{\sin x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cdot 2x}{x}} = e^{6}$$

当 $u\to 0$ 时,

$\ln(1+u)\sim u$

$\sin u\sim u$

15. 求 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to -3} f(x)$.

解 $$f(x)=\frac{(x+3)(x^2-1)}{(x+3)(x-2)}.$$

故连续区间为 $(-\infty,-3),(-3,2),(2,+\infty)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-1}{x-2}=-\frac{8}{5}.$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY