第十章　曲线积分与曲面积分

第一节　第一类曲线积分

习题　10-1

1. 计算下列第一类曲线积分:

(1) $\int_L y\mathrm{d}s$, 其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ 的第一拱 $(0\le\theta\le 2\pi)$;

(2) $\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s$, 其中 L 为抛物线 $y=x^2$ 上由原点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 之间的一段弧;

(3) $\oint_L \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}s$, 其中 L 是以 $(0,0)$, $A(\pi,0)$ 和 $B(0,\pi)$ 为顶点的三角形的周界;

(4) $\int_L (x+y+1)\mathrm{d}s$, 其中 L 是半圆周 $x=\sqrt{4-y^2}$ 上由点 $A(0,2)$ 到点 $B(0,-2)$ 之间的一段弧;

(5) $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$, 其中 L 是圆周 $x^2+y^2=ax\ (a>0)$;

(6) $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$, 其中 Γ 是点 $A(1,-1,2)$ 到点 $B(2,1,3)$ 的直线段;

(7) $\int_\Gamma xyz\mathrm{d}s$, 其中曲线 Γ 的参数方程为

$$x=t,\ y=\frac{2}{3}\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}},\ z=\frac{1}{2}t^2\ (0\le t\le 1);$$

(8) $\int_L x\mathrm{d}s$, 其中 L 为对数螺线 $\rho=a\mathrm{e}^{k\theta}\ (k>0,a>0)$ 在圆 $\rho=a$ 内的部分.

解　(1) 如图 10.1 所示, $L:\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$

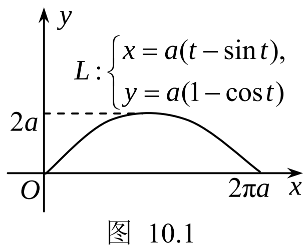

图 10.1

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+(a\sin t)^2}\mathrm{d}t=\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\mathrm{d}t.$$

$$\int_L y\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2}a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}t = 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} \mathrm{d}t = -8a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos^2 \frac{t}{2}) \mathrm{d}\cos\frac{t}{2}$$

$$= -8a^2 (\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = \frac{32}{3}a^2.$$

(2)　如图 10.2 所示，L：$y = x^2$，$\mathrm{d}s = \sqrt{1+(2x)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$.

$$\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

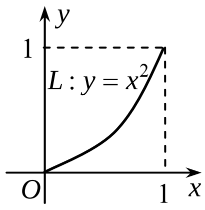

图 10.2

(3)　如图 10.3 所示，$L = OA + AB + BO$，其中

OA：$y = 0$，　AB：$x + y = \pi$，　BO：$x = 0$.

$$\oint_L \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}s = \int_{OA} \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}s + \int_{AB} \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}s + \int_{BO} \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\pi}\sqrt{2}\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\pi}\mathrm{d}y$$

$$= (\sqrt{2}\pi+2)\mathrm{e}^{\pi} - 2.$$

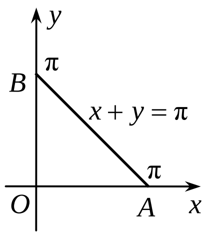

图 10.3

(4)　如图 10.4 所示，L：$x = \sqrt{4-y^2}$.

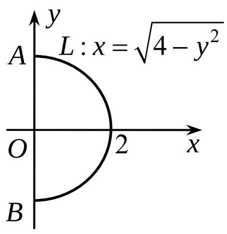

图 10.4

法 1:　L：$x = \sqrt{4-y^2}$,

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+(\frac{-y}{\sqrt{4-y^2}})^2}\mathrm{d}y = \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}y.$$

$$\int_L (x+y+1)\mathrm{d}s = \int_{-2}^{2} (\sqrt{4-y^2} + y + 1)\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-2}^{2} (2 + \frac{2}{\sqrt{4-y^2}})\mathrm{d}y = 2\times 4 + 2\arcsin\frac{y}{2}\Big|_{-2}^{2} = 2(\pi+4).$$

法 2:　L：$\begin{cases} x = 2\cos\theta, \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ $(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$, $\mathrm{d}s = 2\mathrm{d}\theta$.

$$\int_L (x+y+1)\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta + 2\sin\theta + 1)\mathrm{d}\theta = 2(\pi+4).$$

(5) 如图 10.5 所示，L: $\rho = 2\cos\theta$ $(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$, $\mathrm{d}s = a\mathrm{d}\theta$.

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \mathrm{d}s$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta \cdot a\mathrm{d}\theta = 2a^2.$$

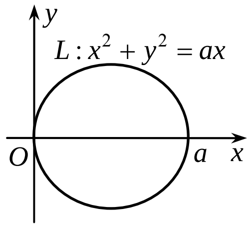

图 10.5

(6) $\Gamma: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$, $\Rightarrow \Gamma: \begin{cases} x = 1+t, \\ y = -1+2t, \\ z = 2+t \end{cases}$ $(0 \le t \le 1)$, $\mathrm{d}s = \sqrt{6}\mathrm{d}t$.

$$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s = \int_0^1 [(1+t)^2 + (-1+2t)^2 + (2+t)^2]\sqrt{6}\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{6}\int_0^1 (6+2t+6t^2)\mathrm{d}t = 9\sqrt{6}.$$

(7) $\Gamma: \begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}, \\ z = \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases}$ $(0 \le t \le 1)$,

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + (\sqrt{2}t^{\frac{1}{2}})^2 + t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t = |t+1|\mathrm{d}t.$$

$$\int_\Gamma xyz\mathrm{d}s = \int_0^1 t \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2}t^2 \cdot (t+1)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}(t+1)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 (t^{\frac{11}{2}} + t^{\frac{9}{2}})\mathrm{d}t = \frac{16}{143}\sqrt{2}.$$

(8) L: $\rho = a\mathrm{e}^{k\theta}$, $\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + \rho_\theta'^2}\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{(a\mathrm{e}^{k\theta})^2 + (ak\mathrm{e}^{k\theta})^2}\,\mathrm{d}\theta = a\mathrm{e}^{k\theta}\sqrt{1+k^2}\,\mathrm{d}\theta$.

$$\int_L x\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^0 a\mathrm{e}^{k\theta}\cos\theta \cdot a\mathrm{e}^{k\theta}\sqrt{1+k^2}\,\mathrm{d}\theta = a^2\sqrt{1+k^2}\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{2k\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\sqrt{1+k^2}\,\frac{\sin\theta+2k\cos\theta}{1+4k^2}\mathrm{e}^{2k\theta}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}.$$

2. 求下列空间曲线的弧长:

(1) 曲线 $x=3t,\ y=3t^2,\ z=2t^3$ 上从点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(3,3,2)$ 的一段弧;

(2) 曲线 $x=\mathrm{e}^{-t}\cos t,\ y=\mathrm{e}^{-t}\sin t,\ z=\mathrm{e}^{-t}\ (0\le t<+\infty)$.

解 (1) $\Gamma:\begin{cases}x=3t,\\ y=3t^2,\\ z=2t^3\end{cases}\ (0\le t\le 1),\ \mathrm{d}s=\sqrt{3^2+(6t)^2+(6t^2)^2}\,\mathrm{d}t=(3+6t^2)\mathrm{d}t.$

曲线 Γ 的弧长为

$$s=\int_\Gamma \mathrm{d}s=\int_0^1(3+6t^2)\mathrm{d}t=5.$$

(2) $\Gamma:\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-t}\cos t,\\ y=\mathrm{e}^{-t}\sin t,\\ z=\mathrm{e}^{-t}\end{cases}\quad(0\le t<+\infty),$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[\mathrm{e}^{-t}(-\cos t-\sin t)]^2+[\mathrm{e}^{-t}(-\sin t+\cos t)]^2+(-\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

曲线 Γ 的弧长为

$$s=\int_\Gamma \mathrm{d}s=\int_0^{+\infty}\sqrt{3}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=(-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{3}.$$

3. 曲线 $y=\ln x$ 的线密度 $\mu(x,y)=x^2$, 试求曲线在 $x=\sqrt{3}$ 到 $x=\sqrt{15}$ 之间的质量.

解 $L:\ y=\ln x\quad(\sqrt{3}\le x<\sqrt{15}),\quad \mathrm{d}s=\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}\mathrm{d}x.$

曲线 L 的质量为

$$M=\int_\Gamma\mu(x,y)\mathrm{d}s=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}x^2\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}=\frac{56}{3}.$$

4. 设 L 是星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 位于第一象限的部分, 求:

(1) L 的形心坐标;

(2) 当线密度 $\mu=1$ 时绕 x 轴和 y 轴的转动惯量.

解 (1) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 如图 10.6 所示, $L:\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}\ (0\le t\le\frac{\pi}{2}),$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[3a\cos^2 t(-\sin t)]^2+[3a\sin^2 t\cos t]^2}\,\mathrm{d}t=3a\sin t\cos t\mathrm{d}t.$$

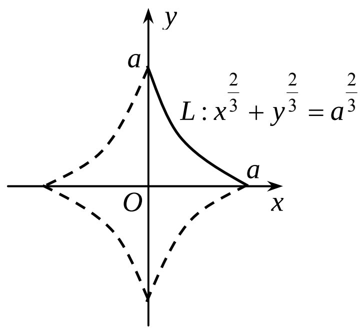

图 10.6

$\because\quad \int_L \mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\mathrm{d}t=\frac{3}{2}a\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}a,$

$$\int_L x\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a^2\sin t\cos^4 t\mathrm{d}t=-\frac{3}{5}a^2\cos^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{5}a^2,$$

$$\int_L y\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a^2\sin^4 t\cos t\mathrm{d}t=\frac{3}{5}a^2\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{5}a^2,$$

$\therefore\quad \overline{x}=\frac{\int_L x\mathrm{d}s}{\int_L \mathrm{d}s}=\frac{2}{5}a,\ \ \overline{y}=\frac{\int_L y\mathrm{d}s}{\int_L \mathrm{d}s}=\frac{2}{5}a,$

即 L 的形心坐标为 $(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a)$.

(2) L 绕 x 轴和 y 轴的转动惯量分别为

$$I_x=\int_L \mu(x,y)y^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a^3\sin^7 t\cos t\mathrm{d}t=\frac{3}{8}a^3\sin^8 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{8}a^3,$$

$$I_y=\int_L \mu(x,y)x^2\mathrm{d}s=\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a^3\cos^7 t\sin t\mathrm{d}t=-\frac{3}{8}a^3\cos^8 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{8}a^3.$$