第七节　一般周期函数的傅里叶级数

习题　11-7

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式):

(1) $f(x)=x^2\ (-1<x\le 1)$;　　(2) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3<x\le 0,\\ 1, & 0<x\le 3.\end{cases}$;

(3) $f(x)=|\sin x|\ (-\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2})$.

解　(1) $f(x)$ 为偶函数，故 $b_n=0(n=1,2,3,\cdots)$，$a_0=2\int_0^1 x^2dx=\dfrac{2}{3}$，

$$a_n=2\int_0^1 x^2\cdot\cos n\pi x\mathrm{d}x=2\{[x^2\frac{\sin n\pi x}{n\pi}]_0^1-\int_0^1 2x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\mathrm{d}x\}$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x\mathrm{d}x=-\frac{4}{n\pi}\{[\frac{-x\cos n\pi x}{n\pi}]_0^1+\int_0^1\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\mathrm{d}x\}=\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}.$$

$f(x)$ 满足收敛定理条件，在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故

$$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x,\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $a_0=\dfrac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\{\int_{-3}^{0}(2x+1)\mathrm{d}x+\int_0^3\mathrm{d}x\}=-1$，

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\{\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\}$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-3}^{0}x\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n],$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\{\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\int_0^3\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\}$$

$$=\frac{1}{3}\{\int_{-3}^{0}2x\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\int_{-3}^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\}=\frac{2}{3}\int_{-3}^{0}x\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x=\frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

$f(x)$ 满足收敛条件，在 $(-3,3)$ 内连续，$x=\pm 3$ 处间断，故级数在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x\neq 3(2k+1)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时收敛于 $f(x)$，即

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{3}\},$$

$x \in (-\infty, +\infty)$ 且 $x \neq 3(2k+1), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

(3) $f(x)$ 为偶函数，故 $b_n = 0 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$，$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}$，

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos\frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2nx \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x] \mathrm{d}x = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}.$$

$f(x)$ 满足收敛定理条件，在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 内连续，因此

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

2. 将下列函数展开成傅里叶级数:

(1) $f(x) = 2\sin\frac{x}{3}(-\pi \le x \le \pi)$;　　(2) $f(x) = 1 - x^2(-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2})$;

(3) $f(x) = \cos\frac{x}{2}(-\pi \le x \le \pi)$.

解 (1) 对 $f(x)$ 进行周期延拓. $f(x)$ 为奇函数，故 $a_n = 0(n = 0,1,2,3,\cdots)$，

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin\frac{x}{3}\sin nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(\frac{1}{3}-n)x - \cos(\frac{1}{3}+n)x]\mathrm{d}x = (-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\frac{18\sqrt{3}n}{9n^2-1},$$

因此
$$f(x) = \frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{9n^2-1}\sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

(2) 对 $f(x)$ 进行周期延拓. $f(x)$ 为偶函数，故 $b_n = 0(n = 1,2,3,\cdots)$，

$$a_0 = 4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)dx = \frac{11}{6},$$

$$a_n = 4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x = -4\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\cos 2n\pi x\mathrm{d}x$$

$$= -4[x^2\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}]_0^{\frac{1}{2}} + 4\int_0^{\frac{1}{2}}2x\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\mathrm{d}x = \frac{4}{n\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}x\sin 2n\pi x\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2},$$

因此
$$f(x) = \frac{11}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos 2n\pi x, \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

(3) 对 $f(x)$ 进行周期延拓. $f(x)$ 为偶函数，故 $b_n = 0(n = 1,2,3,\cdots)$，

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(\frac{1}{2}+n)x+\cos(\frac{1}{2}-n)x]\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n-1}4}{(4n^2-1)\pi},$$

因此
$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4}{(4n^2-1)\pi}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi].$$

3. 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(0\le x\le\pi)$ 展开成正弦级数.

解 对 $f(x)$ 进行奇延拓. 因为 $f(x)$ 为奇函数，故 $a_n=0(n=0,1,2,3,\cdots)$，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n},$$

因此
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\quad 0<x\le\pi.$$

4. 将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le\dfrac{l}{2},\\ -1, & \dfrac{l}{2}<x\le l.\end{cases}$ 展开为余弦级数.

解 对 $f(x)$ 进行偶延拓. 因为 $f(x)$ 为偶函数，故 $b_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$，

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\mathrm{d}x+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(-1)\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(-\cos\frac{n\pi x}{l})\mathrm{d}x=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{(-1)^{k-1}4}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots.$$

因此
$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi}{l}x\quad x\in[0,\frac{l}{2})\cup(\frac{l}{2},l].$$

5. 将函数 $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<\dfrac{l}{2}, \\ l-x & \dfrac{l}{2}\le x\le l. \end{cases}$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 为将函数展成正弦级数，对 $f(x)$ 进行奇延拓. 因为 $f(x)$ 为奇函数，故 $a_n=0 \quad (n=0,1,2,3,\cdots)$,

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^l (l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x-\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+2\int_{\frac{l}{2}}^l \sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases} 0, & n=2k, \\ \dfrac{(-1)^{k-1}4l}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1, \end{cases} \quad k=1,2,\cdots.$$

故
$$f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}, \quad x\in[0,l].$$

为将函数展成余弦级数，对 $f(x)$ 进行偶延拓. 因为 $f(x)$ 为偶函数，故 $b_n=0 \quad (n=1,2,3,\cdots)$,

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^l (l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x-\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^l x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+2\int_{\frac{l}{2}}^l \cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2l}{n^2\pi^2}(2\cos\frac{n\pi}{2}-(-1)^n-1),$$

故
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^2\pi^2}(2\cos\frac{n\pi}{2}-(-1)^{n+1}-1)\cos\frac{n\pi x}{l}, \quad x\in[0,l].$$