第五节　可降阶的高阶微分方程

习题　12-5

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $y''=\cos 2x$;　　(2) $y'''=x+\mathrm{e}^{2x}$;

(3) $(1+x^2)y''+(y')^2+1=0$;　　(4) $xy''=y'(\ln y'-\ln x)$;

(5) $y''(\mathrm{e}^x+1)+y'=0$;　　(6) $y''=\left[1+y'^2\right]^{\frac{3}{2}}$;

(7) $1+(y')^2=2yy''$;　　(8) $y''+y'^2=2\mathrm{e}^{-y}$.

解 (1) 连续积分两次, 得

$$y'=\frac{1}{2}\sin 2x+C_1,\ y=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1x+C_2.$$

(2) 连续积分三次, 得

$$y''=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C_1,\ y'=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+C_1x+C_2,$$

$$y=\frac{x^4}{24}+\frac{\mathrm{e}^{2x}}{8}+C_1x^2+C_2x+C_3.$$

(3) 令 $p=y'$, 则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$, 原方程化为

$$(1+x^2)p'=-(p^2+1),$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=-\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

解此微分方程, 得

$$\arctan p=-\arctan x+C_1,$$

$$p=y'=\frac{C_1-x}{1+C_1x}=\frac{C_1}{1+C_1x}-\frac{1}{C_1}\frac{1+C_1x-1}{1+C_1x}=\frac{C_1}{1+C_1x}-\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_1}\frac{1}{1+C_1x},$$

$$y=\frac{1+C_1^2}{C_1^2}\ln\left|1+C_1x\right|-\frac{x}{C_1}+C_2.$$

(4) 令 $p=y'$, 则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$, 原方程化为

$$p' = \frac{p}{x}\ln\frac{p}{x},$$

令 $u = \frac{p}{x}$，则 $p' = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，上面方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

解此微分方程，得

$$\ln\left|\ln u - 1\right| = \ln|x| + \ln|C_1|,$$

$$u = \mathrm{e}^{C_1 x + 1},\ p = y' = x\mathrm{e}^{C_1 x + 1},$$

$$y = \frac{1}{C_1}\mathrm{e}^{C_1 x + 1}(x - \frac{1}{C_1}) + C_2 .$$

(5)　令 $p = y'$，则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p'$，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x + 1)\mathrm{e}^x},$$

解此微分方程，得

$$\ln|p| = \ln\frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x} + \ln|C_1|,\ \ p = y' = C_1\frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x},$$

$$y = C_1(x - \mathrm{e}^{-x}) + C_2 .$$

(6)　令 $p = y'$，则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p'$，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{d}x,$$

解此微分方程，得

$$\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = x + C_1,\ \ p = y' = \frac{x + C_1}{\sqrt{1 - (x + C_1)^2}},$$

$$y = C_2 - \sqrt{1 - (x + C_1)^2} .$$

(7)　令 $p = y'$，则 $y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程化为

$$\frac{2p\mathrm{d}p}{1 + p^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y},$$

解此微分方程，得

$$\ln(1+p^2)=\ln|y|+\ln|C_1|,\ \ p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{C_1y-1}\,,$$

解此微分方程，得

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}=\pm x+C_2\,,$$

$$4(C_1y-1)=C_1^2(x+C_2)^2\,.$$

(8)　令 $p=y'$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程化为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=2\mathrm{e}^{-y}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}y}+2p^2=4\mathrm{e}^{-y}\,,$$

解此微分方程，得

$$p^2=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}y}\left(\int 4\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C_1\right)=4\mathrm{e}^{-y}+C_1\mathrm{e}^{-2y}\,,$$

$$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{4\mathrm{e}^{-y}+C_1\mathrm{e}^{-2y}}=\pm\frac{\sqrt{4\mathrm{e}^{y}+C_1}}{\mathrm{e}^{y}}\,,$$

解此微分方程，得

$$\frac{1}{2}\sqrt{4\mathrm{e}^{y}+C_1}=\pm x+C_2\,,$$

$$\mathrm{e}^{y}=x^2+C_1x+C_2\,.$$

2.　求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1)　$xy''-y'=x^2,\ \ y|_{x=1}=1,\ \ y'|_{x=1}=0$;

(2)　$2(y')^2=y''(y-1),\ \ y|_{x=1}=2,\ \ y'|_{x=1}=-1$;

(3)　$xy''+x(y')^2-y'=0,\ \ y|_{x=2}=2,\ \ y'|_{x=2}=1$;

(4)　$y^3y''+1=0,\ \ y|_{x=1}=1,\ \ y'|_{x=1}=0$;

(5)　$y''=\mathrm{e}^{2y},\ \ y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$.

解　(1)　令 $p=y'$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$，原方程化为

$$p'-\frac{1}{x}p=x,$$

解此微分方程，得

$$p=y'=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int x\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1)=x(x+C_1),$$

$$y=\frac{x^3}{3}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2,$$

将初始条件代入，得 $C_1=-1$，$C_2=\frac{7}{6}$，特解为

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{7}{6}.$$

(2)　令 $p=y'$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2\mathrm{d}y}{y-1},$$

解此微分方程，得

$$p=y'=C_1(y-1)^2,$$

将初始条件代入，得 $C_1=-1$，故有

$$\frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2}=-\mathrm{d}x,$$

$$(y-1)^{-1}=x+C_2,$$

将初始条件代入，得 $C_2=0$，特解为

$$x(y-1)=1.$$

(3)　令 $p=y'$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$，原方程化为

$$p'-\frac{1}{x}p=-p^2,$$

$$(p^{-1})'+\frac{1}{x}p^{-1}=1,$$

解此微分方程，得

$$p^{-1}=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1)=\frac{1}{x}(\frac{x^2}{2}+C_1)=\frac{x}{2}+\frac{C_1}{x},$$

由 $y'|_{x=2}=1$ 知 $C_1=0$，则

$$p = y' = \frac{2}{x},$$

$$y = 2\ln|x| + C_2 .$$

将初始条件代入，得 $C_2 = 2(1-\ln 2)$，特解为

$$y = 2 + 2\ln\left|\frac{x}{2}\right|.$$

(4) 令 $p = y'$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程化为

$$p\mathrm{d}p = -\frac{\mathrm{d}y}{y^3},$$

解此微分方程，得

$$p^2 = y^{-2} + C_1,$$

将初始条件代入，得 $C_1 = -1$，故有

$$p = y' = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y},$$

$$\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \pm\mathrm{d}x,$$

$$\sqrt{1-y^2} = \pm x + C_2,$$

将初始条件代入，得 $C_2 = \mp 1$，特解为

$$y = \sqrt{2x - x^2} .$$

(5) 令 $p = y'$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程化为

$$p\mathrm{d}p = \mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y,$$

解此微分方程，得

$$p^2 = \mathrm{e}^{2y} + C_1,$$

将初始条件代入，得 $C_1 = -1$，故有

$$p = y' = \pm\sqrt{\mathrm{e}^{2y} - 1},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{e}^{2y}-1}}=\pm\mathrm{d}x,$$

$$-\arcsin\mathrm{e}^{-y}=\pm x+C_2,$$

将初始条件代入，得 $C_2=-\dfrac{\pi}{2}$，特解为

$$y=\ln|\sec x|.$$

3. 已知某曲线 $y=f(x)$ 满足微分方程

$$yy''+(y')^2=1,$$

并且与另一曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 相切于点 $(0,1)$, 求此曲线的方程.

解 由题意知，微分方程初始条件为 $y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=-1$．令 $p=y'$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程化为

$$\frac{p\mathrm{d}p}{1-p^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

解此微分方程，得

$$y^2\left|1-p^2\right|=C_1,$$

将初始条件代入，得 $C_1=0$，由初始条件知

$$p=y'=-1,$$

$$y=-x+C_2,$$

将初始条件代入，得 $C_2=1$，所求的曲线的方程为

$$y=1-x.$$

4. 求曲率半径为 R 的曲线方程.

解 假设在平面直角坐标系下，曲线的方程为 $y=y(x)$．由题意知

$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{R},$$

即

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\pm\frac{1}{R},$$

令 $p = y'$，则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p'$，原方程化为

$$\frac{p'}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{1}{R},$$

解此微分方程，得

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \pm\frac{1}{R}x + C_1,$$

$$p = y' = \pm\frac{\frac{1}{R}x + C_1}{\sqrt{1-(\frac{1}{R}x + C_1)^2}},$$

$$\frac{y}{R} + C_2 = \mp\sqrt{1-(\frac{1}{R}x + C_1)^2},$$

$$(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2 = R^2.$$

5．在地面上以初速度 v_0 铅直向上射出一物体，设地球引力与物体到地心的距离平方成反比，求物体可能达到的最大高度（不计空气阻力，地球半径 R=6370km）．

解　取连结地球中心与该物体的直线为 y 轴，其方向铅直向上，取地球的中心为原点 O，设物体的质量为 m，物体可能达到的最大高度为 l，在时刻 t 物体所在的位置为 $y = y(t)$，速度为 $v = v(t)$．根据万有引力定律，有

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{kmM}{y^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{kM}{y^2},$$

初始条件为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} = -g$，由此可知，$k = \dfrac{gR^2}{M}$．令 $v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$，

原方程化为

$$v\mathrm{d}v = -\frac{gR^2\mathrm{d}y}{y^2},$$

解此微分方程，得

$$v^2 = \frac{2gR^2}{y} + C_1,$$

物体达到最大高度时速度为 0，得 $C_1 = -\frac{2gR^2}{l}$，故有

$$v^2 = \frac{2gR^2}{y} - \frac{2gR^2}{l},$$

将初始条件为 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0$ 代入上式，得最大高度为 $l = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}$.