第七节　无穷小与无穷大

习题　1-7

1. 利用等价无穷小替换定理求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{2x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}(m,n\in\mathbf{N}^*)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{\sin^3 x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sin 2x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}x\arctan\dfrac{1}{x}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0 & 当n>m,\\ 1 & 当n=m,\\ \infty & 当n<m;\end{cases}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}x\arctan\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\dfrac{2}{3}$.

2. 当 $x\to 0$ 时, 试确定下列无穷小关于 x 的阶数：

(1) $x+\sin x$;　　(2) x^3+10x^2;

(3) $1-\cos 2x^2$;　　(4) $\tan 2x^2$.

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$，所以阶数为 1;

(2) 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+10x^2}{x^2}=10$，所以阶数为 2;

(3) 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(2x^2)^2}{x^4}=2$，所以阶数为 4;

(4) 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$，所以阶数为 2.

3. 当$x\to0$时，x^k与$\tan^2(2x^3)$是同阶无穷小，则k等于多少?

解 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2(2x^3)}{x^6}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^6}{x^6}=2$，即$\tan^2(2x^3)$与$x^6$是同阶无穷小，故$k=6$.

4. 当$m,n\in\mathbf{N}^*$，证明：当$x\to0$时，

(1) $o(x^m)+o(x^n)=o(x^l), l=\min\{m,n\}$;

(2) $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$;

(3) 若α是$x\to0$时的无穷小，则$\alpha x^m=o(x^m)$;

(4) $o(kx^n)=o(x^n)(k\neq0)$.

证 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x^m)+o(x^n)}{x^l}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x^m)}{x^l}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x^n)}{x^l}=0$，故

$$o(x^m)+o(x^n)=o(x^l);$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x^m)o(x^n)}{x^{m+n}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x^m)}{x^m}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(x^n)}{x^n}=0$，故$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha x^m}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\alpha=0$，故$\alpha x^m=o(x^m)$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(kx^n)}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o(kx^n)}{kx^n}\cdot k=0$，故$o(kx^n)=o(x^n)(k\neq0)$.

5. 函数$y=x\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是否有界？这个函数是否为$x\to+\infty$时的无穷大?

解 $y=x\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内无界．因为$\forall M>0$ (无论它多么大)，总能找到

$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{N})$，使得当 $k>\frac{M-\frac{\pi}{2}}{2\pi}$ 时，$|y|=2k\pi+\frac{\pi}{2}>M$.

但当 $x\to+\infty$ 时，$y=x\sin x$ 不是无穷大，例如，取 $x=2k\pi(k\in N)$，当 $k\to+\infty$ 时，$x\to+\infty$，但 $y=0$.