# 第二节　向量的乘法运算

## 习题　7-2

1. 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$、$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 及 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

**解**　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,1,0)\cdot(1,0,1)=1\times1+1\times0+0\times1=1$,

$\because |\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,

$\therefore \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{2}$,

$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=2$ 及 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{3}$, 求向量 $\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 的模.

**解**　$|\boldsymbol{r}|^2=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$

$=4|\boldsymbol{a}|^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9|\boldsymbol{b}|^2$,

而　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=10\times\cos\dfrac{\pi}{3}=5$, 所以

$$|\boldsymbol{r}|^2=100-60+36=76,$$

故 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{76}$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$, 求证 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$

**证　法 1**　　$\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$,

所以　$\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times[-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

故　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

**法 2**　因 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times0$,

即　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=0$,

而 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$, 所以有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a};\qquad(1)$$

同理有 $\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=0$, 从而有

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b};\qquad(2)$$

综合(1)、(2)有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

4. 已知三点 $M(1,1,1)$、$A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

**解** $\because \overrightarrow{MA}=(2-1,2-1,1-1)=(1,1,0)$,

$\overrightarrow{MB}=(2-1,1-1,2-1)=(1,0,1)$,

$\therefore \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=1\times1+0\times1+1\times0=1$, $|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{2},\ |\overrightarrow{MB}|=\sqrt{2}$,

$\therefore \cos\angle AMB=\dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore \angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$.

5. 求与向量 $\boldsymbol{a}=(5,6,8)$及$\boldsymbol{b}=(-1,4,1)$同时垂直的单位向量.

**解** 设 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，则由向量积的定义有

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 5 & 6 & 8\\ -1 & 4 & 1\end{vmatrix}=(-26,-13,26).$$

与 $\boldsymbol{c}$ 平行的单位向量为

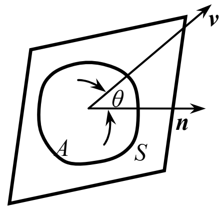
$$\boldsymbol{c}^{\circ}=\pm\frac{13(-2,-1,2)}{39}=\pm\frac{1}{3}(-2,-1,2),$$

即同时垂直于 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ 的单位向量为: $\pm\dfrac{1}{3}(-2,-1,2)$.

**注意** 易犯的错误是, 所求的向量为 $\dfrac{1}{3}(-2,-1,2)$.

产生错误的原因是, 未注意到与 $\dfrac{1}{3}(-2,-1,2)$ 方向相反的向量 $-\dfrac{1}{3}(-2,-1,2)$ 也为所求.

6. 设流体流过平面 $S$ 上面积为 $A$ 的一个区域, 液体在这区域上各点处的流速均为常向量 $\boldsymbol{v}$. 设 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于 $S$ 的单位向量(见下图)计算单位时间内经过这区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一方的液体的质量(已知液体的密度为常数 $\rho$).




**解** $P=\rho A|\boldsymbol{v}|\cos\theta$

$=\rho A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$.

7. 已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n},\ \ \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$，其中 $\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}$ 是两个互相垂直的单位向量, 求:
(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$; (2) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

**解**　(1)　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n})(3\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$

$$=6|\boldsymbol{m}|^2-2\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+9\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}-3|\boldsymbol{n}|^2,$$

因 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，故 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6-3=3$.

(2)　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n})\times(3\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})$

$$=6\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}+9\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$$

$$=-11\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n},$$

故 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|-11\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}|=11|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|\sin\dfrac{\pi}{2}=11$.

8.　设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-36$，求 $\boldsymbol{b}$.

**解**　设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=(2\lambda,-\lambda,2\lambda)$,　　$(\lambda\neq0)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\lambda+\lambda+4\lambda=-36,$$

故 $\lambda=-4$. 从而

$$\boldsymbol{b}=(-8,4,-8).$$

9.　已知 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{4}$，试求以向量 $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

**解**　设 $S$ 为所求的面积，则

$$S=|(5\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|=17|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$$

$$=17|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{4}=17\times2\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=102.$$

**注意**　易犯的错误是

(1)　$S=(5\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=17\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=102$.

产生错误的原因是，未搞清楚两向量进行向量积的结果仍是一个向量，而不是数.

(2)　$S=|(5\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|=13|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=78$.

产生错误的原因是，对向量运算的公式理解错误，误以为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

10.　在 $xOy$ 平面上求一个垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(5,-3,4)$ 且与 $\boldsymbol{a}$ 等长的向量 $\boldsymbol{b}$.

**解**　设向量 $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,0)$，则

$$\because\ \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b},\qquad\qquad \therefore\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,$$

即
$$5b_x-3b_y=0;\tag{1}$$

又
$$|\boldsymbol{b}|^2=b_x^2+b_y^2=|\boldsymbol{a}|^2=50;\tag{2}$$

联立(1)、(2), 解之得$\begin{cases} b_x = \pm\dfrac{15}{\sqrt{17}}, \\ b_y = \pm\dfrac{25}{\sqrt{17}}. \end{cases}$

所以$\boldsymbol{b} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{17}}(15,25,0)$.

11. 已知四面体$ABCD$的顶点坐标为$A(0,0,0)$、$B(0,1,3)$、$C(1,0,2)$、$D(2,2,0)$, 求它的体积.

**解** 已知四面体的体积等于以向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体体积的$\dfrac{1}{6}$, 故

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AC} \quad \overrightarrow{AD}]\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\times 10 = \frac{5}{3}.$$

12. 证明: $A(1,1,1)$、$B(4,5,6)$、$C(2,3,3)$和$D(10,15,17)$四点在一个平面上.

**证** 因

$$[\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AC} \quad \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0,$$

故$A$、$B$、$C$、$D$四点共面.

13. 试用向量的方法证明: 直径所对的圆周角是直角.

**证** 如图 7.4, 设$AB$是圆$O$的直径, $C$点在圆周上, 要证$\angle C = 90^\circ$, 只需证$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$. 而

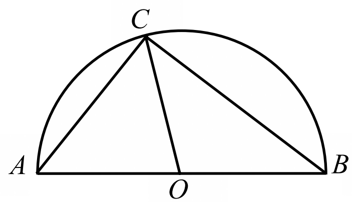


图 7.4

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})$$

$$= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$

$$= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{AO}^2$$

$$= \left|\overrightarrow{OC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AO}\right|^2 = 0$$

故$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$, $\angle C = 90^\circ$(直径所对的圆周角是直角).

14. 应用向量证明不等式

$$\left|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right| \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$$

其中 $a_i$，$b_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ 为任意实数，并指出等号成立的条件.

**证** 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 与 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),\ \text{即}\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|},$$

从而

$$\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\right|\le 1,$$

于是有

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|,$$

故

$$\left|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right| \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\ .$$

（$a_i$，$b_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ 为任意实数）

等号成立当且仅当 $\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\right|=1$，即 $\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}$，用分量表达即为 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.