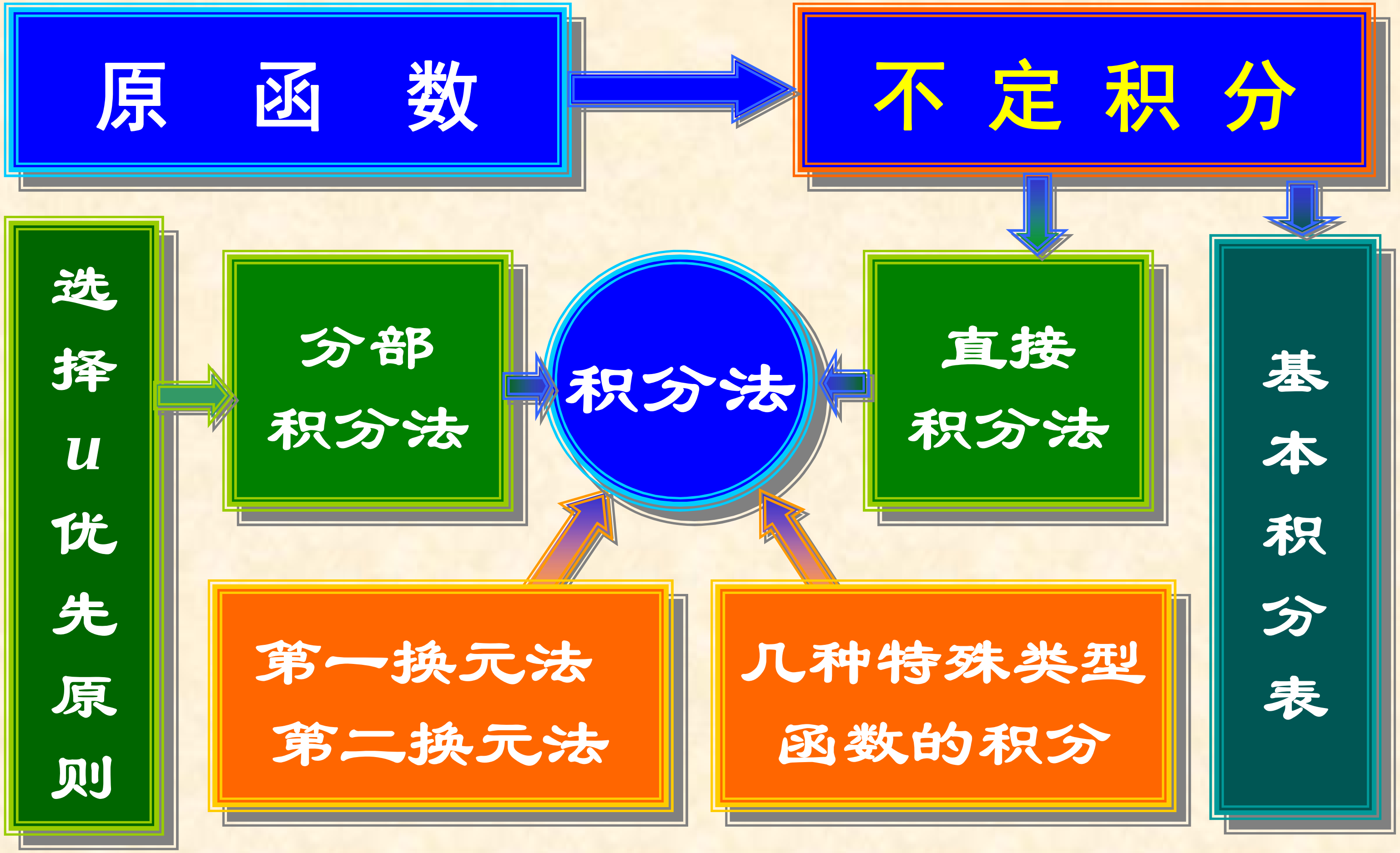
第四章　习题课

不定积分

- 一、主要内容
- 二、典型例题

一、主要内容



原 函 数
不 定 积 分
选择u优先原则
分部积分法
积分法
直接积分法
基本积分表
第一换元法
第二换元法
几种特殊类型函数的积分

1、原函数

定义 如果在区间I内，可导函数$F(x)$的导函数为$f(x)$，即$\forall x \in I$，都有$F'(x)=f(x)$或$dF(x)=f(x)dx$，那么函数$F(x)$就称为$f(x)$或$f(x)dx$在区间I内原函数.

原函数存在定理 如果函数$f(x)$在区间I内连续，那么在区间I内存在可导函数$F(x)$，使$\forall x \in I$，都有$F'(x)=f(x)$.

即：**连续函数一定有原函数.**

2、不定积分

(1) 定义

在区间I内，函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数称为$f(x)$在区间I内的不定积分，记为$\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

函数$f(x)$的原函数的图形称为$f(x)$的积分曲线.

(2) 微分运算与求不定积分的运算是互逆的.

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x) \qquad d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$$

$$\int F'(x)dx=F(x)+C \qquad \int dF(x)=F(x)+C$$

(3) 不定积分的性质

1^0 $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

2^0 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ （k是常数，$k\neq 0$)

3、基本积分表

(1) $\int k dx = kx + C \quad (k\text{是常数})$

(2) $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$

(3) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

(4) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

(12) $\int e^x dx = e^x + C$

(13) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

(14) $\int \mathrm{sh}x dx = \mathrm{ch}x + C$

(15) $\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}x + C$

(16) $\int \tan x dx = -\ln\cos x + C$

(17) $\int \cot x dx = \ln\sin x + C$

(18) $\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + C$

(19) $\int \csc x dx = \ln(\csc x - \cot x) + C$

(20) $\int \dfrac{1}{a^2 + x^2} dx = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$

(21) $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} dx = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{x-a}{x+a} + C$

(22) $\int \dfrac{1}{a^2 - x^2} dx = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{a+x}{a-x} + C$

(23) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

(24) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$

$= \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

4、直接积分法

由定义直接利用基本积分表与积分的性质求不定积分的方法.

5、第一类换元法

定理 1　设 $f(u)$ 具有原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，

则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$$

第一类换元公式（凑微分法）

常见类型

(1) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}[\int f(u)du]_{u=ax+b}$

(2) $\int f(x^{\mu+1})x^{\mu}dx$ $(u = x^{\mu+1}, \mu \neq -1)$

(3) $\int \frac{f(\ln x)}{x}dx$ $(u = \ln x)$

(4) $\int f(\cos x)\sin x dx$ $(u = \cos x)$

(5) $\int f(\sin x)\cos x dx$ $(u = \sin x)$

(6) $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\quad(u=\arcsin x)$

(7) $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx$ $\quad(u=\arctan x)$

(8) $\int f(\tan x)\sec^2 x dx$ $\quad(u=\tan x)$

(9) $\int f(\sec x)\sec x\tan x dx$ $\quad(u=\sec x)$

$\vdots$

6、第二类换元法

定理　设 $x=\psi(t)$ 是单调的、可导的函数，并且 $\psi'(t)\neq 0$，又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)dx = \left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\overline{\psi}(x)}$$

第二类换元公式

其中 $\overline{\psi}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数.

常见代换

有五种:

1° 三角代换 $\begin{cases} x = a\sin t, & t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ x = a\tan t, & t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ x = a\sec t, & t \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$

2° 双曲代换 $x = a\,sh\,t$, 或 $x = a\,ch\,t$ $(t > 0)$

3° 倒代换 $x = \frac{1}{t}$

4° 换根代换 $t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\delta x + \gamma}}$

5° 万能代换 $t = \tan\frac{x}{2}$ $(|x| < \pi)$

1° 三角代换

适用类型	代换
(1) $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$	$x=a\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 或 $x=a\cos t, t\in(0,\pi)$
(2) $\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})dx$	$x=a\tan t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
(3) $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$	$x=a\sec t, t\in(0,\frac{\pi}{2})$

其中$R(u,v)$为u,v的有理函数 .

2^{o} 双曲代换

$$ch^2 t - sh^2 t = 1$$

积分中为了化掉根式除采用三角代换外还可用双曲代换.

适用类型	代换
(2) $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx$	$x = asht$
(3) $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$	$x = acht\ (t > 0)$

3° 倒代换 当分母的次数较高时, 可采用

倒代换: $x=\frac{1}{t}$.

4° 换根代换 适用类型:

$$(4)\int R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\delta x+\gamma}},\sqrt[n_2]{\frac{\alpha x+\beta}{\delta x+\gamma}},\cdots,\sqrt[n_k]{\frac{\alpha x+\beta}{\delta x+\gamma}}\right)dx$$

其中α, β, δ, γ均为常数, $n_i\in N\ (i=1,2,\cdots,k)$

代换: $t=\sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\delta x+\gamma}}$

n为$n_1,n_2,\cdots,n_k$的最小公倍数.

5° 万能代换

适用类型： (5) $\int R(\sin x, \cos x)dx$

代换： $t = \tan\frac{x}{2}$ $(|x| < \pi)$ 或 $x = 2\arctan t$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\therefore \int R(\sin x, \cos x)dx = \underline{\int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \cdot \frac{2}{1+t^2}dt}$$

t 的有理函数

目录 上页 下页 返回 结束

7、分部积分法

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$ 分部积分公式

8.选择u的优先原则: *LIATE*法

L----对数函数;　　I----反三角函数;

A----代数函数;　　T----三角函数;

E----指数函数;　　哪个在前哪个选作u.

9、几种特殊类型函数的积分

（1）有理函数的积分

定义　两个多项式的商表示的函数称之.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

其中m、n都是非负整数；$a_0,a_1,\cdots,a_n$及$b_0,b_1,\cdots,b_m$都是实数，并且$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$.

真分式化为部分分式之和的待定系数法

四种类型分式的不定积分

$$1.\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C; \quad 2.\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C;$$

$$3.\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q|$$

$$+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C;$$

$$4.\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} + \int\frac{N-\frac{Mp}{2}}{(x^2+px+q)^n}dx$$

此两积分都可积,后者有递推公式

（2） 三角函数有理式的积分

定义 由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数称之．一般记为 $R(\sin x,\cos x)$

令 $u=\tan\frac{x}{2}$　　$x=2\arctan u$

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}\quad dx=\frac{2}{1+u^2}du$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du$$

（3） 简单无理函数的积分

讨论类型： $R(x,\sqrt[n]{ax+b})$　　$R(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}})$

解决方法：作代换去掉根号.

令$t=\sqrt[n]{ax+b}$;　　令$t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}}$;

二、典型例题

例1 求 $\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} \mathrm{d}x.$

解 原式 $= \int \frac{(\frac{3}{2})^x}{(\frac{3}{2})^{2x} - 1} \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln\frac{3}{2}} \int \frac{d(\frac{3}{2})^x}{(\frac{3}{2})^{2x} - 1} \xlongequal{\text{令}(\frac{3}{2})^x = t} \frac{1}{\ln\frac{3}{2}} \int \frac{dt}{t^2 - 1}$

$= \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}} \int (\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}) dt = \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$

$= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln\left|\frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}\right| + C.$

例2　求 $\int \frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解　$\because [\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]'$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

原式 $= \int \sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5} \cdot \mathrm{d}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]$

$$= \frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]^{\frac{3}{2}} + C.$$

练习 求下列不定积分：

(1) $\int [\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x) f''(x)}{f'^3(x)}] dx.$

解 原式 $= \int \boxed{\frac{f(x)}{f'(x)}} \cdot \frac{f'^2(x) - f(x) f''(x)}{f'^2(x)} dx$

$$= \int \frac{f(x)}{f'(x)} d[\frac{f(x)}{f'(x)}]$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{f(x)}{f'(x)}]^2 + C.$$

(2) 设当 $x \neq 0$ 时，$f'(x)$ 连续，求

$$\int \frac{xf'(x)-(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx.$$

$$\boxed{(xe^x)' = (x+1)e^x}$$

解 原式 $= \displaystyle\int \frac{xe^x \cdot f'(x)-(x+1)e^x \cdot f(x)}{(xe^x)^2}dx$

$$= \int \frac{xe^x \cdot f'(x)-(xe^x)' \cdot f(x)}{(xe^x)^2}dx$$

$$= \int [\frac{f(x)}{xe^x}]'dx \quad = \frac{f(x)}{xe^x}+C.$$

(3) $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx.$

解 $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx = \int \frac{1}{x+\sin x}\mathrm{d}(x+\sin x)$

$= \ln|x+\sin x| + C.$

(4) $\displaystyle\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx.$

解 原式$\displaystyle= \int \frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx + \int \tan\frac{x}{2}dx$

$$=\int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int \tan\frac{x}{2}dx$$

$$=x\tan\frac{x}{2}-\cancel{\int \tan\frac{x}{2}dx}+\cancel{\int \tan\frac{x}{2}dx}=x\tan\frac{x}{2}+C.$$

(5) $\int \frac{1+x\cot x}{x(1+x\sin x)}dx.$

$$\boxed{(x\sin x)'=\sin x+x\cos x}$$

解 原式$=\int \frac{\sin x+x\cos x}{x\sin x\cdot(1+x\sin x)}dx$

$$=\int \frac{1}{x\sin x\cdot(1+x\sin x)}d(x\sin x)\ \underline{\underline{u=x\sin x}}\int \frac{1}{u\cdot(1+u)}du=\cdots$$

例3 求 $\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x.$

解法1 令 $x=\frac{1}{t}$，(倒代换)

$$\text{原式}=\int \frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{(\frac{1}{t})^2-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t+\int \frac{\mathrm{d}(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

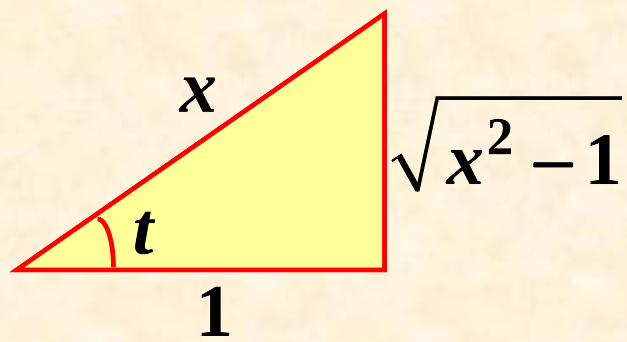
解法2 $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

$$\xlongequal[\text{(三角代换)}]{\text{令 } x=\sec t} \int \frac{\sec t+1}{\sec^2 t\cdot\tan t}\cdot\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{\sec t+1}{\sec t}\mathrm{d}t=\int(1+\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=t+\sin t+C$$

$$=\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$$



练习 (6) $\int \frac{(1+x^2)\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x.$

解 原式 $= \int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x$

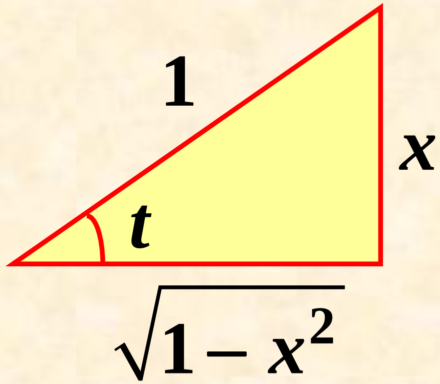
$$= \int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x + \int \arcsin x\,\mathrm{d}(\arcsin x)$$

$$= \boxed{\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x} + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \xlongequal[x=\sin t]{\text{令}\,t=\arcsin x} \int \frac{\overset{u}{t}}{\sin^2 t\cdot\cancel{\cos t}}\cdot\cancel{\cos t}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\int t\,\mathrm{d}\cot t \;=-\Big(t\cot t-\int \cot t\,\mathrm{d}t\Big)$$

$$=-t\cot t+\ln\left|\sin t\right|+C_1$$



$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln\left|x\right|+C_1$$

$$\therefore\quad \text{原式}=\boxed{\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln\left|x\right|+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C.$$

$$(7)\quad \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

选u的优先顺序		
↓	L	对数函数
	I	反三角函数
	A	代数函数
	T	三角函数
	E	指数函数

解法1 $\displaystyle\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

$$\underset{x=\cos t}{\underline{\underline{令 t=\arccos x}}} \int \frac{(\cos^3 t)\cdot t}{\cancel{\sin t}}\cdot(-\cancel{\sin t})\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int \overset{u}{t}\cdot \cos^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int t\,\mathrm{d}(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t) = \cdots$$

$$= -\frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x - \frac{1}{9}x(x^2+6)+C.$$

$$\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int (1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}\sin t$$

$$= \underbrace{\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t}_{v} + C$$

目录 上页 下页 返回 结束

解法2 $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}\,x$

u

选u的优先顺序

L	对数函数
I	反三角函数
A	代数函数
T	三角函数
E	指数函数

$$\because \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}\,x = -\int x^2 \mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$= -(x^2\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \cdot 2x\,\mathrm{d}\,x)$$

$$= -[x^2\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} \cdot \mathrm{d}(1-x^2)]$$

v

$$= -\frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + C_1$$

$$\therefore \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}\,x = -\int \arccos x\,\mathrm{d}(\frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}) = \cdots$$

例4 求 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

解法1. $\because \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4} = \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2 \cdot (x-1)^2$.

令 $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, (换根代换)

则有 $t^3 = 1 + \frac{2}{x-1}$, $x = \frac{2}{t^3-1} + 1$,

$$\text{原式} = \int \frac{1}{\cancel{t^2}} \cdot \frac{\cancel{(t^3-1)^2}}{4} \cdot \left[-\frac{6\cancel{t^2}}{\cancel{(t^3-1)^2}}\right] dt = -\frac{3}{2}\int dt$$

$$= -\frac{3}{2}t + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

解法2. $\because \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}=\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4}\cdot(x+1)^2.$

令 $t=\frac{x-1}{x+1}$, 则有 $dt=\frac{2}{(x+1)^2}dx$,

$$原式=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4}\cdot(x+1)^2}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{4}{3}}dt$$

$$=-\frac{3}{2}t^{-\frac{1}{3}}+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

练习 (8) $\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx.$

$$\int f(x^{\mu+1})x^{\mu}dx \quad (\mu\neq -1)$$

解 $$\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx=\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}}dx$$

$$=-\frac{2}{3}\int(1-x^{\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{2}}d(1-x^{\frac{3}{2}})$$

$$=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}+C.$$

(9) 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+\sin x}}\mathrm{d}x.$

解法1. $\int \frac{1}{\sqrt{1+\sin x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}\sqrt{1+\sin x}}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{(1+\sin x)\sqrt{1-\sin x}}\mathrm{d}\sin x$$

$$\overset{令t=\sin x}{=} \int \frac{1}{(1+t)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t \underset{t=1-u^2}{\overset{令u=\sqrt{1-t}}{=}} \int \frac{1}{(2-u^2)\cancel{u}}\cdot(-2\cancel{u})\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{u-\sqrt{2}} - \frac{1}{u+\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{2}}\right| + C.$$

解法2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\sin x}} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}} \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})} \mathrm{d}x$$

$$= -\sqrt{2} \ln\left|\csc(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + \cot(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\right| + C.$$

(10) 求 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{3x-2}}\mathrm{d}x$.

选u的优先顺序

L 对数函数

I 反三角函数

A 代数函数

T 三角函数

E 指数函数

解 原式 $= \int \underset{u}{\ln x} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3x-2}}\mathrm{d}x}_{dv}$

$$= \frac{2}{3}\int \ln x \,\mathrm{d}(\sqrt{3x-2})$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{3x-2}\ln x - \boxed{\int \frac{\sqrt{3x-2}}{x}\mathrm{d}x}\right)$$

$$\because \quad \int \frac{\sqrt{3x-2}}{x}\,\mathrm{d}\,x \xlongequal[x=\frac{t^2+2}{3}]{\text{令}\, t=\sqrt{3x-2}} \int \frac{3t}{t^2+2}\cdot\frac{2}{3}\,t\,\mathrm{d}\,t$$

$$= 2\int \frac{(t^2+2)-2}{t^2+2}\,\mathrm{d}\,t = 2\left(t-\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C_1$$

$$= 2\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2}}\right)+C_1$$

$$\therefore \quad \text{原式} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3x-2}\ln x-\int\frac{\sqrt{3x-2}}{x}\,\mathrm{d}\,x\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{3x-2}(\ln x-2)+2\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2}}\right]+C.$$

例5 求 $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x} dx.$

解 原式 $= \int \frac{e^x(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})}{2\cos^2\frac{x}{2}} dx$

$$= \int (e^x \cdot \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + e^x \tan\frac{x}{2}) dx$$

$$= \int e^x \, d(\tan\frac{x}{2}) + \int e^x \tan\frac{x}{2} dx$$

$$= e^x \tan\frac{x}{2} - \cancel{\int e^x \tan\frac{x}{2} dx} + \cancel{\int e^x \tan\frac{x}{2} dx} = e^x \tan\frac{x}{2} + C.$$

练习 (11) $\int e^{\sin x}\cdot\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

解 原式$=\int(x\cdot e^{\sin x}\cos x-e^{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x})\mathrm{d}x$

$$=\int x\,\mathrm{d}e^{\sin x}-\int e^{\sin x}\,\mathrm{d}(\frac{1}{\cos x})$$

$$=(xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}\mathrm{d}x)-(e^{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}-\int\frac{1}{\cos x}\cdot e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x)$$

$$=(x-\frac{1}{\cos x})e^{\sin x}-\int \cancel{e^{\sin x}}\mathrm{d}x+\int \cancel{e^{\sin x}}\mathrm{d}x=(x-\frac{1}{\cos x})e^{\sin x}+C.$$

目录 上页 下页 返回 结束

例6　求 $\int \frac{e^{3x}+e^{x}}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx.$

解　原式 $\xlongequal{令 t=e^{x}} \int \frac{t^3+t}{t^4-t^2+1}\cdot\frac{1}{t}dt$

$$= \int \frac{t^2+1}{t^4-t^2+1}dt = \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2-1+\frac{1}{t^2}}dt$$

$$= \int \frac{1}{(t-\frac{1}{t})^2+1}d(t-\frac{1}{t}) = \arctan(t-\frac{1}{t})+C = \cdots$$

练习 (12) $\int \frac{x-1}{x(xe^{-x}+1)} \mathrm{d}x.$ $\boxed{(xe^{-x})' = (1-x)e^{-x}}$

解 原式 $= -\int \frac{(1-x)e^{-x}}{xe^{-x}(xe^{-x}+1)} dx$

$$= -\int \frac{1}{xe^{-x}(xe^{-x}+1)} d(xe^{-x})$$

$$\overset{u=xe^{-x}}{=} -\int \frac{1}{u(u+1)} du = -\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \cdots$$

(13) $\int \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}\mathrm{d}x.$

解　原式$=\int xe^{-x}d\frac{1}{1-x}$

$$=\frac{x}{1-x}e^{-x}-\int\frac{1}{1-x}\cdot d(xe^{-x})$$

$$=\frac{x}{1-x}e^{-x}-\int\frac{1}{1-x}\cdot(1-x)e^{-x}dx$$

$$=\frac{x}{1-x}e^{-x}-\int e^{-x}dx=\frac{x}{1-x}e^{-x}+e^{-x}+C.$$

例7 $I_n = \int \sin^{n-1} x \sin(n+1)x\,dx$

解 原式 $= \int (\sin^{n-1} x)(\sin nx \cos x + \sin x \cos nx)\,dx$

$$= \int \sin nx \cdot \sin^{n-1} x \cos x\,dx + \int \sin^n x \cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\int \sin nx\,d(\sin^n x) + \int \sin^n x \cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\sin nx \sin^n x - \cancel{\frac{1}{\cancel{n}}\int \sin^n x \cdot \cancel{n}\cos nx\,dx} + \cancel{\int \sin^n x \cos nx\,dx}$$

$$= \frac{1}{n}\sin nx \sin^n x + C.$$

目录 上页 下页 返回 结束

练习 (14) 求出 $I_n=\int \sec^n x\,\mathrm{d}\,x$ 的递推公式.

解 $I_n=\int \sec^{n-2} x\cdot\sec^2 x\,\mathrm{d}\,x$

$$=\int \sec^{n-2} x\,\mathrm{d}\tan x$$

$$=\sec^{n-2} x\tan x-\int \tan x\cdot(n-2)\sec^{n-3} x\cdot\sec x\tan x\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\sec^{n-2} x\tan x-(n-2)\int \sec^{n-2} x\cdot\tan^2 x\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\sec^{n-2} x\tan x-(n-2)\int \sec^{n-2} x\cdot(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}\,x$$

$$I_n = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^{n-2} x \cdot (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)(I_n - I_{n-2})$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

例8 求 $\int \max\{1,|x|\}dx.$

解 设 $f(x)=\max\{1,|x|\}$,

则 $f(x)=\begin{cases} -x, & x<-1 \\ 1, & -1\le x\le 1, \\ x, & x>1 \end{cases}$

$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续, 则必存在原函数 $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+C_1, & x<-1 \\ x+C_2, & -1\le x\le 1. \\ \frac{1}{2}x^2+C_3, & x>1 \end{cases}$$

又 $\because F(x)$须处处连续，

由 $F(-1^-)=F(-1^+)=F(-1)$，得

$$-1+C_2=\lim_{x\to -1^+}(x+C_2)=\lim_{x\to -1^-}(-\frac{1}{2}x^2+C_1)$$

即 $$-1+C_2=-\frac{1}{2}+C_1 \qquad (1)$$

由 $F(1^-)=F(1^+)=F(1)$，得

$$\lim_{x\to 1^-}(x+C_2)=\lim_{x\to 1^+}(\frac{1}{2}x^2+C_3)=1+C_2$$

即 $$\frac{1}{2}+C_3=1+C_2 \qquad (2)$$

联立(1)、(2)，并令 $C_1 = C$,

可得 $C_2 = \frac{1}{2} + C$, $C_3 = 1 + C$.

故 $$\int \max\{1, |x|\} dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + C, & x < -1 \\ x + \frac{1}{2} + C, & -1 \le x \le 1. \\ \frac{1}{2}x^2 + 1 + C, & x > 1 \end{cases}$$