第十二章 微分方程

(本章题解中的C，C_1，C_2仅代表任意常数，每次出现未必相同.)

第一节 微分方程的基本概念

习题 12-1

1. 指出下列微分方程中哪些是常微分方程？哪些是偏微分方程？并指明常微分方程的阶.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}+a^2\sin x=0$； (2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$；

(3) $(x^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$； (4) $y^{(3)}+3y''-2y=0$；

(5) $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{C}=0$； (6) $(y')^2+y=0$.

解 (1) 三阶；(3) 一阶；(4) 三阶；(5) 二阶；(6) 一阶. 其中(2)为偏微分方程，其余为常微分方程.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解，若为解，则指明是否为通解.

(1) $xy'=y(1+\ln\dfrac{y}{x}),\ y=x$；

(2) $(x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0,\ y=\dfrac{C^2-x^2}{2x}$；

(5) $y''-2y'+y=0,\ y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$；

(3) $y''-4y'+3y=0,\ y=\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{3x}$；

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=0,\ y=\sin x$；

(6) $y''+4y=0,\ y=C_1\sin 2x+C_2\sin x\cos x$.

解　(1)　$y=x$，$y'=1$，将其代入方程 $xy'=y(1+\ln\frac{y}{x})$，得

$$xy'=y(1+\ln\frac{y}{x})=x,$$

故而 $y=x$ 是微分方程的解，解里不含任意常数，所以 $y=x$ 是解，非通解.

(2)　由 $y=\frac{C^2-x^2}{2x}$，得 $2xy=C^2-x^2$，对此式的两边求微分，有

$$2x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}x=-2x\mathrm{d}x,\ \text{即}\ (x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0.$$

所以 $y=\frac{C^2-x^2}{2x}$ 是解，该微分方程为一阶微分方程，解中含有一个任意常数，因此 $y=\frac{C^2-x^2}{2x}$ 也是通解.

(3)　$y=\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{3x}$，$y'=\mathrm{e}^x+3C\mathrm{e}^{3x}$，$y''=\mathrm{e}^x+9C\mathrm{e}^{3x}$，将其代入方程左边，得

$$y''-4y'+3y=\mathrm{e}^x+9C\mathrm{e}^{3x}-4(\mathrm{e}^x+3C\mathrm{e}^{3x})+3(\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{3x})=0.$$

所以 $y=\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{3x}$ 是解，而微分方程为二阶，解里仅含一个任意常数，因此 $y=\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{3x}$ 非通解.

(4)　$y=\sin x$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$，从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=\cos x-2\sin x\not\equiv 0.$$

所以 $y=\sin x$ 不是解，更不是通解.

(5)　$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$,

$$y'=(C_1+C_2+C_2x)\mathrm{e}^x,\quad y''=(C_1+2C_2+C_2x)\mathrm{e}^x,$$

因此

$$y''-2y'+y=[C_1+2C_2+C_2x-2(C_1+C_2+C_2x)+C_1+C_2x]\mathrm{e}^x=0,$$

即 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$ 是微分方程的解，微分方程是二阶的，解中含有两个任意常数，

所以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$ 是解，也是通解.

(6) $y=C_1\sin 2x+C_2\sin x\cos x=(C_1+\dfrac{C_2}{2})\sin 2x=C\sin 2x$,

$$y'=2C\cos 2x,\quad y''=-4C\sin 2x,$$

$$y''+4y=-4C\sin 2x+4C\sin 2x\equiv 0,$$

所以 $y=C_1\sin 2x+C_2\sin x\cos x$ 是解，微分方程为二阶的，解中形式上有两个任意常数，但实质上仅有一个，因此该解非通解.

3. 验证 $y=Cx+\dfrac{1}{C}$ 是微分方程 $x(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2-y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=0$ 的通解（其中任意常数 $C\neq 0$），并求满足初始条件 $y\big|_{x=0}=2$ 的特解.

解 $y=Cx+\dfrac{1}{C}$，$y'=C$ ，

$$x(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2-y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=xC^2-(Cx+\frac{1}{C})C+1=0,$$

所以 $y=Cx+\dfrac{1}{C}$ 是微分方程的解，由于微分方程是一阶的，解中有一个任意常数，因此该解也是通解. 将初始条件 $y\big|_{x=0}=2$ 代入通解中，解得 $C=\dfrac{1}{2}$ ，特解为 $y=\dfrac{1}{2}x+2$.

4. 验证 $y=\mathrm{e}^{Cx}$ 是微分方程 $xy'-y\ln y=0$ 的通解，并求过下列各点的积分曲线.

(1) $(1,\mathrm{e})$; (2) $(\dfrac{1}{2},\mathrm{e})$; (3) $(2,\mathrm{e})$.

解 $y=\mathrm{e}^{Cx}$，$y'=C\mathrm{e}^{Cx}$,

$$xy'-y\ln y=xC\mathrm{e}^{Cx}-\mathrm{e}^{Cx}\ln\mathrm{e}^{Cx}=0,$$

该微分方程为一阶的，该解中有一个任意常数，因而 $y=\mathrm{e}^{Cx}$ 为微分方程的通解.

(1) 将 $x=1$, $y=\mathrm{e}$ 代入 $y=\mathrm{e}^{Cx}$，得 $C=1$，特解为 $y=\mathrm{e}^x$.

(2)　将 $x=\frac{1}{2}$，$y=\mathrm{e}$ 代入 $y=\mathrm{e}^{Cx}$，得 $C=2$，特解为 $y=\mathrm{e}^{2x}$.

(3)　将 $x=2$，$y=\mathrm{e}$ 代入 $y=\mathrm{e}^{Cx}$，得 $C=\frac{1}{2}$，特解为 $y=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

5.　已知曲线上点 $P(x,\ y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 y 轴平分，试建立曲线所满足的微分方程.

解　$P(x,\ y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

它与 x 轴的交点为 $Q\ (x+yy',\ 0)$，由题意线段 PQ 被 y 轴平分可知,

$$\frac{x+x+yy'}{2}=0\text{，即 } yy'+2x=0.$$