第九章总习题

1. 用重积分的几何意义计算下列积分并填空.

(1) 设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le R^2\right\}$，则 $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=$ $\underline{\quad \frac{2}{3}\pi R^3 \quad}$；

(2) 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\sqrt{x^2+y^2}\le z\le H\right\}$，则 $\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v=$ $\underline{\quad \frac{1}{3}\pi H^3 \quad}$；

(3) $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|0\le z\le 1-x-y, 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\right\}$，则 $\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v=$ $\underline{\quad \frac{1}{6} \quad}$.

解 (1) 略.

(2) 易知 $\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v$ 表示的是高为 H，底面半径为 H 的圆锥体的体积，故

$$\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v=\frac{1}{3}\pi H^3.$$

(3) 如图 9.75，$\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v$ 表示的是图示四面体的体积，易知

$$\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v=\frac{1}{6}.$$

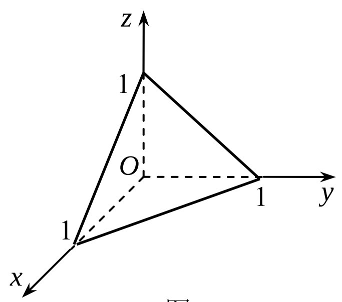

图 9.75

2. 利用“对称性”完成下列单项选择题

(1) 设 D 是圆域 $x^2+y^2\le a^2(a>0)$，D_1 是 D 在第一象限部分区域，则积分 $\iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma$ 等于(C).

(A) $4\iint\limits_{D_1}(x+y+1)\mathrm{d}\sigma$; (B) $\iint\limits_{D_1}(x+y+1)\mathrm{d}\sigma$;

(C) πa^2; (D) 0.

(2) 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$，$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限部分，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于(A).

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; (B) $2\iint\limits_{D_1}xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　(D) 0.

(3) 设有空间区域$\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0$；及$\Omega_2: x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$，则(C).

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v$;　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}v$;

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$;　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}v$.

解 (1) $\iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+1)\rho\mathrm{d}\rho = \pi a^2$.

(2) 如图 9.76,

$$\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D \cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由对称性, $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$,

$$\iint\limits_D \cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D_1+D_2}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_3+D_4}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D_1+D_2}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

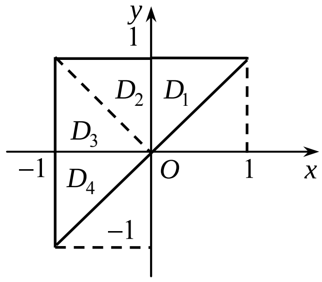

图 9.76

(3) 略.

3. 把下列二次积分化为极坐标系下二次积分形式

(1) $I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{2x-x^2}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_2^4\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(2) $I=\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y + \int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 (1) 如图 9.77,

$$I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{2x-x^2}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_2^4\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{2\cos\theta-\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{4\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(2) 如图 9.78,

$$I=\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y + \int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

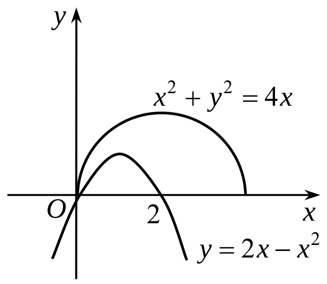

图 9.77

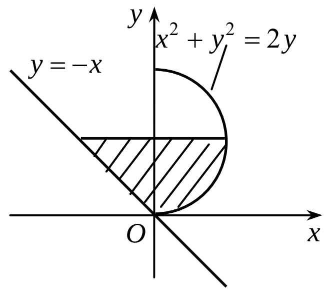

图 9.78

4. 计算下列二重积分

(1) $\iint\limits_D (x^2-2x+5y+9)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le R^2\right\}$；

(2) $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=-2$，$y=0$，$y=2$ 及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的闭区域.

解 (1) $\iint\limits_D (x^2-2x+5y+9)\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R(\rho^2\cos^2\theta-2\rho\cos\theta+5\rho\sin\theta+9)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{R^4}{4}\cos^2\theta-\frac{2R^3}{3}\cos\theta+\frac{5R^3}{3}\sin\theta+\frac{9R^2}{2})\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}R^4+9\pi R^2.$$

(2) 如图 9.79,

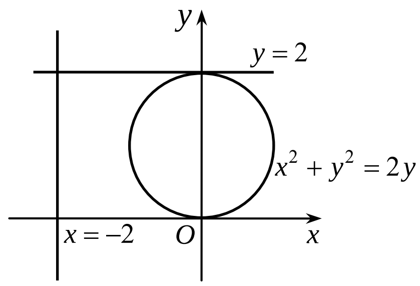

图 9.79

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 y\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2(2-\sqrt{2y-y^2})y\mathrm{d}y=4-\frac{\pi}{2}.$$

5. 设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le t^2\right\}$，$F(t)=\iint\limits_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 f 为可微函数，$t>0$，试求 $F'(t)$.

解 $F(t)=\iint\limits_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$，

故 $$F'(t)=\frac{\mathrm{d}(2\pi\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho)}{\mathrm{d}t}=2\pi t f(t^2).$$

6. 设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le x\right\}$，$f$ 是连续函数，试证:

$$\iint_D f(\frac{y}{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\cdot f(\tan\theta)\mathrm{d}\theta .$$

证 $\iint_D f(\frac{y}{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(\tan\theta)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\cdot f(\tan\theta)\mathrm{d}\theta$. 得证.

7. 设 $f(x)>0$ 且连续, 利用二重积分证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\ge(b-a)^2 .$$

证 这里设 $D=\{(x,y)|a\le x\le b,\ a\le y\le b\}$,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D\frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge\frac{1}{2}\iint_D\frac{2f(x)f(y)}{f(x)f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(b-a)^2 .$$

8. 设 $D=\left\{(x,y)\middle|t^2\le x^2+y^2\le 1\right\}$, 求极限

$$\lim_{t\to 0^+}\iint_D\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

解 $\iint_D\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_t^1\ln(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=\pi(t^2-1-t^2\ln t^2)$,

故 $\lim\limits_{t\to 0^+}\iint_D\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim\limits_{t\to 0^+}\pi(t^2-1-t^2\ln t^2)=-\pi$.

9. 计算下列三重积分

(1) $\iiint_\Omega\frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由 $z=x^2+y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint_\Omega\frac{x\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint_\Omega(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成旋转面

与平面 $z=4$ 所围成的闭区域;

解 (1) 如图 9.80, 利用柱面坐标计算,

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\rho}\frac{\ln(1+\rho)}{\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-\rho)\ln(1+\rho)\mathrm{d}\rho=\pi(4\ln 2-\frac{5}{2}).$$

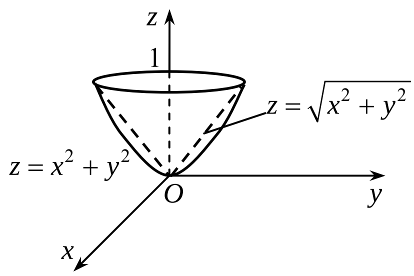

图 9.80

(2) 利用球面坐标计算,

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{x\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\frac{r\sin\varphi\cos\theta\cdot\ln(r^2+1)}{r^2+1}\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{r^3\cdot\ln(r^2+1)}{r^2+1}\mathrm{d}r=0.$$

(3) 如图 9.81, $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周得

旋转体 $x^2+y^2=2z$, 利用柱面坐标计算,

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{4}(\rho^2+z)\rho\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}}(8\rho+4\rho^3-\frac{5}{8}\rho^5)\mathrm{d}\rho=\frac{256}{3}\pi.$$

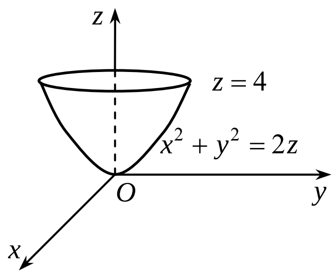

图 9.81

10. 求椭圆抛物面 $z=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}$ 与平面 $z=2$ 所围立体的体积.

解 如图 9.82, 利用先二后一法, $D_z=\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{3z}+\frac{y^2}{4z}\le 1\right.\}$, 故

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\pi\sqrt{3z}\cdot\sqrt{4z}\mathrm{d}z=4\sqrt{3}\pi.$$

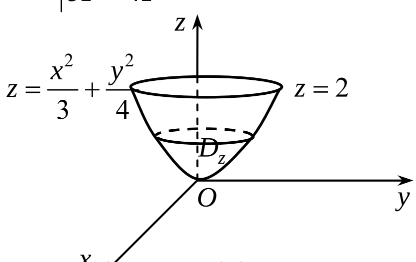

图 9.82

11. 在底半径为 R，高为 H 的圆柱体上面，拼加一个相同半径的半球体，使整个立体的重心位于球心处，求 R 与 H 的关系(设立体的密度 $\mu=1$).

解 如图 9.83，以半球体的中心为坐标原点，建立直角坐标系，由立体质量均匀，且关于 z 轴对称，故质心坐标为 $(0,0,\overline{z})$，

立体质量

$$M=\iiint_{\Omega}1\cdot \mathrm{d}v=\frac{2}{3}\pi R^3+\pi R^2 H,$$

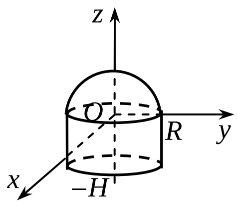

图 9.83

故 $$\overline{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_{-H}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{1}{2}(R^2-H^2-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{M}(\frac{1}{4}(R^2-H^2)R^2-\frac{1}{8}R^4)=0$$

故 $R=\sqrt{2}H$.

12. 设有一半径为 R 的球体, P_0 是此球表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例系数 $k>0$)，求球体的质心位置.

解 如图 9.84，以 P_0 为坐标原点建立直角坐标系，球心在 $(0,0,R)$，则球体为 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$，在球面坐标系下为 $r\le 2R\cos\varphi$，球体密度 $\mu=kr^2$，由对称性可知质心在 z 轴上，即 $\overline{x}=\overline{y}=0$，

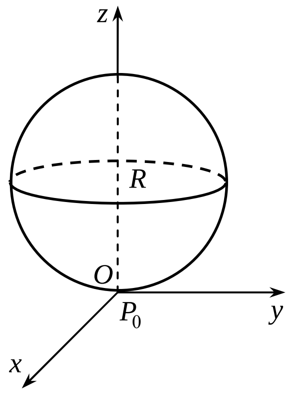

图 9.84

$$M=\iiint_{\Omega}\mu\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}kr^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}kR^5\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{32}{15}k\pi R^5,$$

$$\overline{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega}\mu z\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}kr^2\cdot r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{64}{6}kR^6\cos^7\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\frac{8}{3}k\pi R^6}{\frac{32}{15}k\pi R^5} = \frac{5}{4}R ,$$

所以球体质心为 $(0, 0, \frac{5}{4}R)$.

注 若建立坐标系使球心在原点, P_0 在 $(0, 0, R)$ ，则质心为 $(0, 0, -\frac{1}{4}R)$ ，这里从略.