

第四节 幂级数

习题 11-4

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} x^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n+n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n; \quad (4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n+1};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{n} x^n;$$

$$(7) x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots;$$

$$(8) x + 2^2 x^2 + 3^3 x^3 + \cdots + n^n x^n + \cdots;$$

$$(9) \frac{1}{2} + \frac{3}{4} x^2 + \frac{5}{8} x^6 + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} x^{2n} + \cdots;$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot n}; \quad (11) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} (x-3)^{2n};$$

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^p} \quad (p > 0).$$

解 (1) 设 $a_n = \frac{2^n}{n^2+1}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{2^n} = 2$, 所以收敛半径

$R = \frac{1}{2}$. 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ 收敛; 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ 收敛,

所以原级数的收敛域为 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(2) 设 $a_n = \frac{1}{3^n+n}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+n}{3^{n+1}+n+1} = \frac{1}{3}$, 所以收敛半径 $R = 3$. 当

$x=3$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n+n}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{n}{3^n}} = 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n+n}$ 发散; 同理当

$x=-3$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n+n}$ 发散, 所以原级数的收敛域为 $(-3,3)$.

(3) 设 $a_n = \frac{\ln n}{n}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} \cdot \frac{n}{\ln n} = 1$, 所以收敛半径 $R=1$. 当

$x=1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$, 而 $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} (n \geq 4)$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 发散; 当 $x=-1$ 时, 级数为

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$, 设 $a_n = \frac{\ln n}{n} \geq 0$, 则 $a_n \geq a_{n+1} (n \geq 4)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

收敛, 所以原级数的收敛域为 $[-1,1)$.

(4) 设 $u_n = \frac{2n+1}{n!} x^{2n+1}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)+1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2n+1} x^2 = 0$, 所以收敛半

径 $R = \infty$, 收敛域 $(-\infty, +\infty)$.

(5) 设 $u_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} x^2 = x^2$, 所以当 $|x| < 1$ 时原级

数收敛, 当 $|x| > 1$ 时原级数发散, 收敛半径 $R=1$. 当 $x=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ 收

敛, 而当 $x=-1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$ 收敛, 所以原级数的收敛域 $[-1,1]$.

注意 对缺项幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 不能直接套用系数公式 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ 求收敛半径.

一般地, 应该对该幂级数的绝对值级数直接应用比值审敛法或根值审敛法去求出原幂级数的收敛半径.

(6) 设 $a_n = \frac{2^n + 3^n}{n}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\frac{2}{3})^n + 3}{(\frac{2}{3})^n + 1} = 3$, 所以收敛半径 $R = \frac{1}{3}$. 当

$x = -\frac{1}{3}$ 时, 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n} (-\frac{1}{3})^n$, 令 $u_n = \frac{2^n + 3^n}{n} (-\frac{1}{3})^n = (-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{n} (\frac{2}{3})^n$,

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} (\frac{2}{3})^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{2}{3} < 1$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} (\frac{2}{3})^n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 显然收

敛, 故 $x = -\frac{1}{3}$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n + 3^n}{n} (\frac{1}{3})^n$ 收敛; 当 $x = \frac{1}{3}$ 时, 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n} (\frac{1}{3})^n$,

令 $u_n = \frac{2^n + 3^n}{n} (\frac{1}{3})^n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} (\frac{2}{3})^n$, 由上知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\frac{2}{3})^n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 显然发散, 故当

$x = \frac{1}{3}$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n} (\frac{1}{3})^n$ 发散, 所以原级数的收敛域 $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

(7) 设 $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 所以收敛半径 $R = 1$. 当 $x = 1$

时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 收敛; 当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n})$ 发散, 所以原级数的收敛域

$(-1, 1]$.

(8) 设 $a_n = n^n$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} + 1)^n (n+1) = \infty$, 所以收敛

半径 $R = 0$, 因此原级数仅在 $x = 0$ 处收敛.

(9) 设 $u_n = \frac{2n-1}{2^n} x^{2n}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{2n-1} |x|^2 = \frac{1}{2} |x|^2$, 所以当

$|x| < \sqrt{2}$ 时原级数收敛, 当 $|x| > \sqrt{2}$ 时原级数发散, 收敛半径 $R = \sqrt{2}$. 当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$ 发散, 所以原级数的收敛域 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(10) 设 $t = x - 1$, 则级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n \cdot n}$. 设 $a_n = \frac{1}{2^n \cdot n}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{2}$, 所以当

$|t| < 2$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n \cdot n}$ 收敛, 当 $|t| > 2$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n \cdot n}$ 发散, 收敛半径 $R = 2$. 而当

$t=2$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 当 $t=-2$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛, 所以原级数的收敛域 $[-1, 3)$.

(11) 设 $u_n = \frac{(x-3)^{2n}}{4^n}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{4^{n+1}} (x-3)^2 = \frac{1}{4} (x-3)^2$, 所以

当 $|x-3| < 2$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} (x-3)^{2n}$ 收敛, $|x-3| > 2$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} (x-3)^{2n}$ 发散, 故收

敛半径 $R=2$. 当 $x-3=\pm 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 发散, 所以原级数的收敛域 $(1, 5)$.

(12) 设 $u_n = \frac{(x-1)^n}{n^p}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} |x-1| = |x-1|$, 所以当 $|x-1| < 1$

时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^p}$ ($p > 0$) 收敛, 当 $|x-1| > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^p}$ ($p > 0$) 发散. 当

$x-1=1$ 且 $p > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p > 0$) 收敛; $x-1=1$ 且 $p \leq 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p > 0$) 发散;

$x-1=-1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ ($p > 0$) 收敛. 综上, 当 $p > 1$ 时, 原级数的收敛域 $[0, 2]$, 当

$0 < p \leq 1$ 时, 原级数的收敛域 $[0, 2)$.

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n-1}$ 的收敛半径.

解 设 $u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n-1}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[2(n+1)]! (n!)^2}{[(n+1)!]^2 (2n)!} x^2 = 4x^2$, 所以当

$4x^2 < 1$ 时, 即 $|x| < \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n-1}$ 收敛, 当 $4x^2 > 1$ 时, 即 $|x| > \frac{1}{2}$ 时, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n-1}$ 发散, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{2}$.

3. 利用逐项求导或逐项积分运算求下列级数的和函数:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n};$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n;$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1};$$

$$(4) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

解 (1) 设 $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 当 $x=1$ 时级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 收敛, 当 $x=-1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n})$ 发散, 所以级数的收敛域 $(-1, 1]$.

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, 则 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}]' = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x}$, 从而

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1+x} dx + S(0) = \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1].$$

(2) 设 $a_n = n$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 当 $x=1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散, 当 $x=-1$

时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ 发散, 所以级数的收敛区间 $(-1, 1)$.

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$, 则

$$\int_0^x S_1(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x},$$

故 $S(x) = (\frac{x^2}{1-x})' - \frac{x}{1-x} = \frac{x}{(x-1)^2}, \quad x \in (-1, 1).$

注意 一些常见幂级数的和函数是由其的初始项决定的, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}$ 的和函数为

$\frac{x^2}{1-x}$, 而 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$ 的和函数为 $\frac{x}{1-x}$.

(3) 设 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1$, 故当 $x=1$ 时

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}$ 发散, 当 $x=-1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$ 发散, 所以级数的收敛区间 $(-1,1)$.

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$, 则由上题知

$$\int_0^x S(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{2} \left[-1 + \frac{1}{(x-1)^2} \right],$$

故 $S(x) = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{(x-1)^2} \right)' = \frac{1}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1,1).$

(4) 设 $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{n(n+1)} = 1$, 当 $x=1$ 时级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

收敛, 当 $x=-1$ 时级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ 收敛, 所以级数的收敛区间 $[-1,1]$.

设 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$, 则 $S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \frac{1}{1-x}$, 从而

$$S'(x) = \int_0^x S''(x) dx + S'(0) = -\ln(1-x),$$

故 $S(x) = \int_0^x S'(x) dx + S(0) = (1-x) \ln(1-x) + x$, 因此

$$S(x) = \begin{cases} x + (1-x) \ln(1-x), & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n}$ 的和.

解 设 $u_n = \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2(n+1)-1} x^2 = x^2$, 当 $x=1$ 时级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散, 当 $x=-1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2n-1}\right)$ 发散, 所以级数的收敛区间 $(-1,1)$.

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, 则 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2}$, 从而

$$S(x) = \int_0^x S'(x)dx + S(0) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}}{(2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(1+\sqrt{2}).$$

5. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

解 构造幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$, 易得其收敛区间为 $(-1, 1)$.

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$, 则由第 3 题的(3)知 $S(x) = -\frac{2}{(x-1)^3}$, $x \in (-1, 1)$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} S\left(\frac{1}{2}\right) = 8.$$

注意 本题中幂级数的构造: 因为数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 含有 2^n , 所以构造幂级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$, 从而使得构造出的幂级数和函数较易求出.