第三节　多元函数的全微分

习题　8-3

1. 求下列函数的全微分:

(1)　$z=\dfrac{x-y}{x+y}$;　　　　(2)　$z=\arctan e^{xy}$;

(3)　$u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;　　　　(4)　$u=x^{yz}$;

解　(1)　因为　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=\dfrac{2y}{(x+y)^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=\frac{-2x}{(x+y)^2},$$

所以

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{2y}{(x+y)^2}\mathrm{d}x-\frac{2x}{(x+y)^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{(x+y)^2}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y).$$

(2)　因为　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+(e^{xy})^2}\cdot e^{xy}\cdot y=\dfrac{e^{xy}y}{1+e^{2xy}}$,

由所给函数关于自变量是 x,y 的对称性, 可知

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{xy}x}{1+e^{2xy}},$$

所以

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{e^{xy}y}{1+e^{2xy}}\mathrm{d}x+\frac{e^{xy}x}{1+e^{2xy}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{e^{xy}}{1+e^{2xy}}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y).$$

(3)　因为　$u=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$,

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}.$$

由所给出函数关于自变量是 x,y,z 的对称性, 可知

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2},$$

故

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u&=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z\\
&=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x+\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y+\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z).
\end{aligned}$$

(4) 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=yzx^{yz-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x$,

所以

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z=yzx^{yz-1}\mathrm{d}x+zx^{yz}\ln x\mathrm{d}y+yx^{yz}\ln x\mathrm{d}z.$$

2. 求下列函数在给定点的全微分:

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$, $(0,0)$, $(1,1)$;

(2) $z=x\sin(x+y)$, $(0,0)$, $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$.

解 (1) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=-4, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=-4,$$

所以

$$\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,0)}=0,$$

$$\left.\mathrm{d}z\right|_{(1,1)}=-4\mathrm{d}x-4\mathrm{d}y=-4(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y).$$

(2) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(x+y)$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}=1, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}=0,$$

所以

$$\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,0)}=0, \quad \left.\mathrm{d}z\right|_{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}=\mathrm{d}x.$$

3. 求函数 $z=\frac{y}{x}$, 当 $x=2,\ y=1,\ \Delta x=0.1,\ \Delta y=-0.2$ 时的全增量与全微分.

解　全增量　　$$\Delta z=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x}=\frac{x\Delta y-y\Delta x}{x(x+\Delta x)},$$

全微分　　$$\mathrm{d}z=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{x})\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x})\Delta y=-\frac{y}{x^2}\Delta x+\frac{1}{x}\Delta y.$$

当 $x=2,\ y=1,\ \Delta x=0.1,\ \Delta y=-0.2$ 时,

$$\Delta z=\frac{-0.4-0.1}{2\times 2.1}=-\frac{5}{42}\approx -0.119,$$

$$\mathrm{d}z=-\frac{1}{4}\cdot 0.1+\frac{1}{2}\cdot(-0.2)=-0.125.$$

4.　证明函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 点连续，$f_x(0,0)$ 及 $f_y(0,0)$ 存在，但函数在 $(0,0)$ 点不可微.

证　因为 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 的邻域有定义，且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{|xy|}=0=f(0,0),$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续. 又因为

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0,$$

所以 $f_x(0,0)=0$ 及 $f_y(0,0)=0$ 存在. 而

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

让点 $(\Delta x,\Delta y)$ 沿着直线 $\Delta y=\Delta x$ 趋于点 $(0,0)$，即 $\Delta y=\Delta x\to 0$，得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0,$$

即 $\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$ 不是比 ρ 高阶的无穷小，故函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

注意　在一元函数中，函数在某点的可导性与可微性是等价的，但对于多元函数，它在某点的偏导数均存在也不能保证它的可微性，这是多元函数与一元函数的不同处之一.

常见的错误是，在讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否可微时，写成

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

式中出现了 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}$ 是不对的，因为 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}$ 是否存在尚不知道，这正是我们要讨论的问题.

5. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & 当(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 当(x,y)=(0,0),\end{cases}$ 试问 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微?

解 因为 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$,

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0.$$

而

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

让点 $(\Delta x,\Delta y)$ 沿直线 $\Delta y=\Delta x$ 趋于点 $(0,0)$，即 $\Delta y=\Delta x\to 0$，得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x\to 0}}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{2^{\frac{3}{2}}(\Delta x)^3}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\Delta x}\ 不存在,$$

即 $\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$ 不是比 ρ 高阶的无穷小，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.