第五节

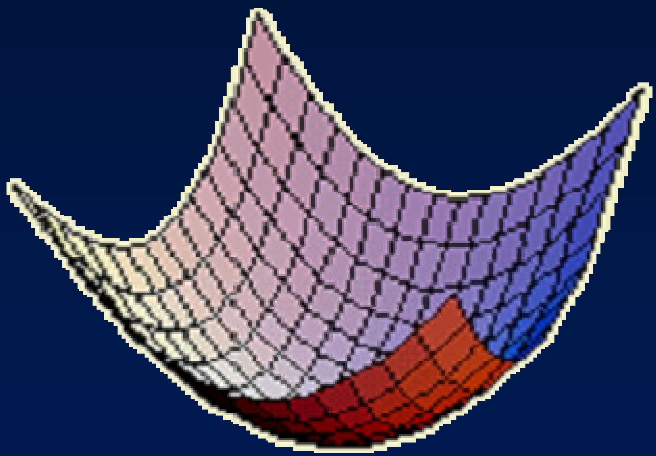
第二类曲面积分

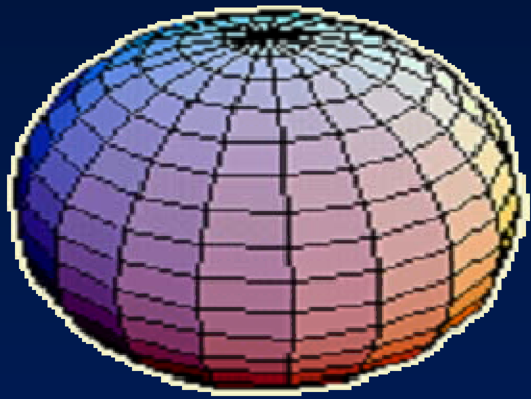
- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 第二类曲面积分的概念及性质

观察以下曲面的侧 (假设曲面是光滑的)



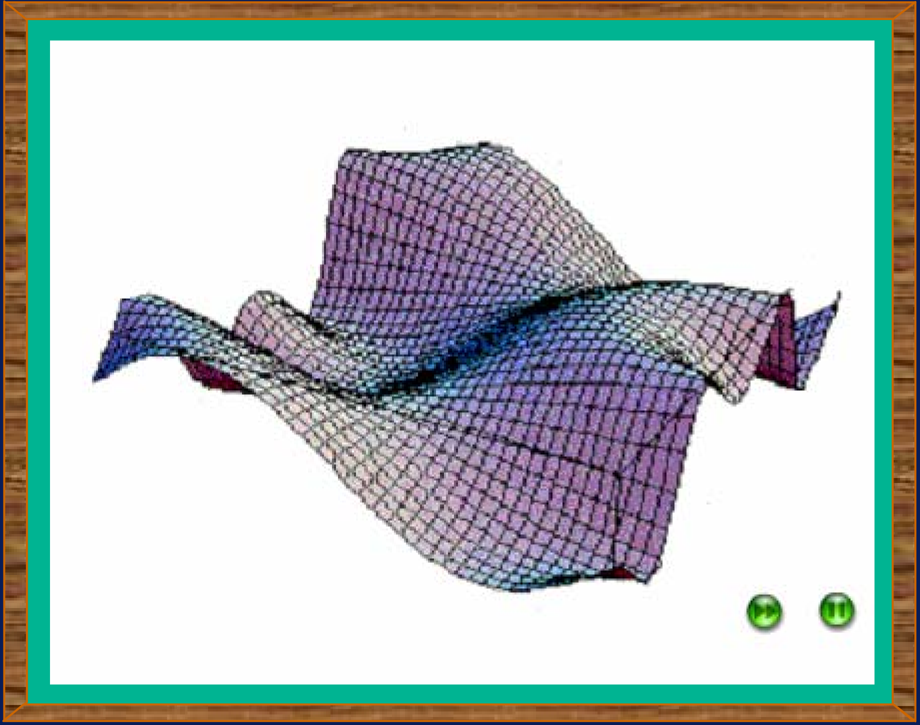


曲面分上侧和下侧　　曲面分内侧和外侧

1. 曲面的分类

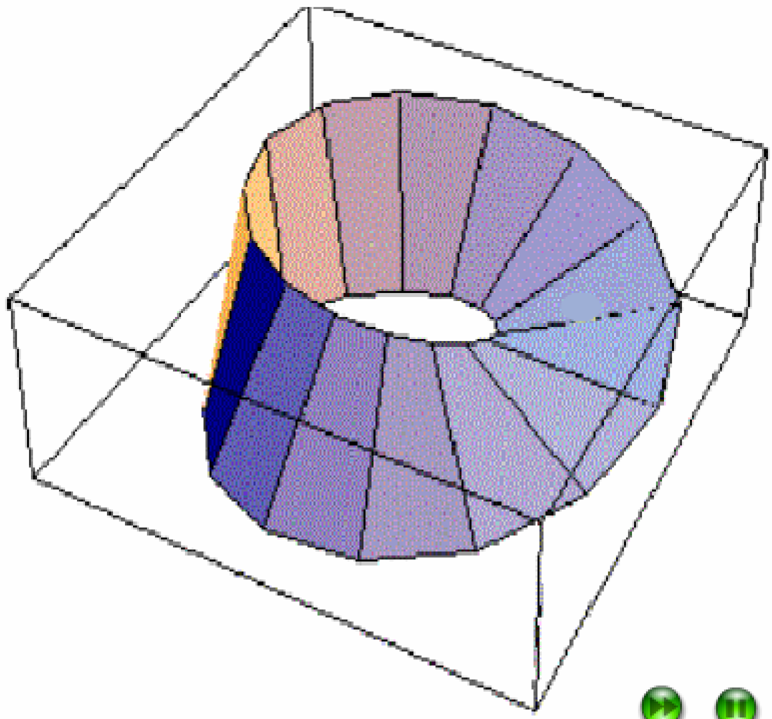
双侧曲面： $\forall$点$P \in \Sigma$，取定 P处的法向量的一个指向$\vec{n}^\circ$,则当点P在Σ上连续移动时，$\vec{n}^\circ$也随之连续改变方向.

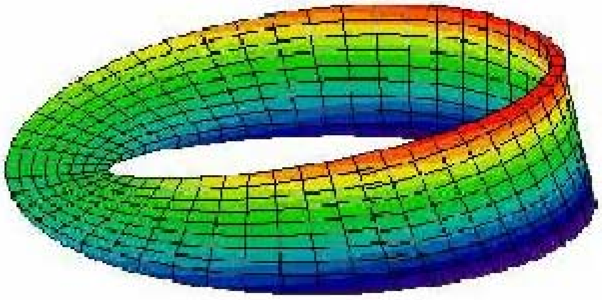
若当点P不越过 Σ的边界回到出发的位置时，$\vec{n}^\circ$的指向不变，则称Σ是双侧曲面. 否则，称Σ为单侧曲面.



典型双侧曲面

典型单侧曲面：莫比乌斯带





2. 曲面的侧与有向曲面

对于双侧曲面，其侧可用曲面法向量的指向来确定.

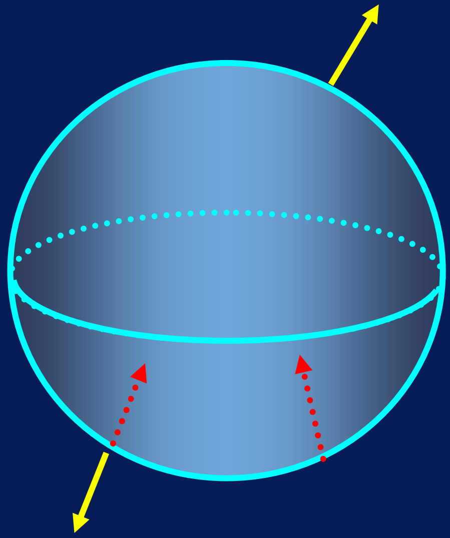
决定了侧的曲面称为有向曲面.

(1) 闭曲面的侧

设 Σ 为闭曲面

内侧：法向量 $\vec{n}$ 指向 Σ 的里面;

外侧：法向量 $\vec{n}$ 指向 Σ 的外面.



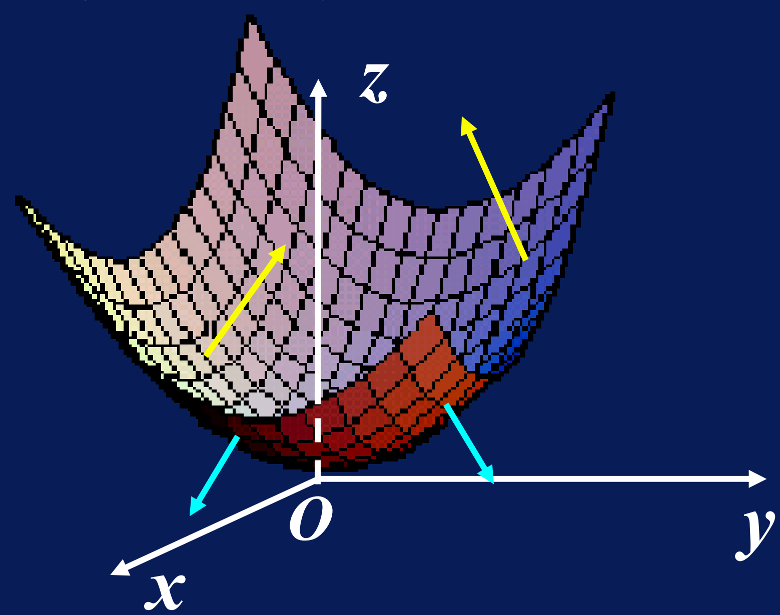
(2) 非闭曲面的侧

1) 上、下侧

若Σ: $z = z(x, y)$

上侧 : $\gamma = (\widehat{\vec{n}, 轴\, z})$ 为锐角, $\cos\gamma > 0 \quad (\forall P \in \Sigma)$;

下侧 : $\gamma = (\widehat{\vec{n}, 轴\, z})$ 为钝角, $\cos\gamma < 0 \quad (\forall P \in \Sigma)$.

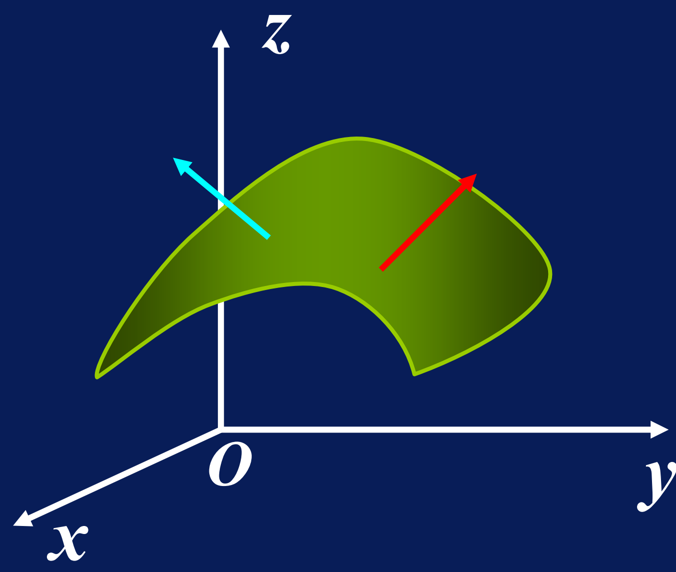


2) 左、右侧

若 Σ: $y = y(x,z)$

右侧 : $\beta = (\hat{\vec{n}, \text{轴}\ y})$ 为锐角, $\cos\beta > 0 \quad (\forall P \in \Sigma)$;

左侧 : $\beta = (\hat{\vec{n}, \text{轴}\ y})$ 为钝角, $\cos\beta < 0 \quad (\forall P \in \Sigma)$.



3) 前、后侧

若 Σ: $x = x(y,z)$

前侧 : $\alpha = (\hat{\vec{n}, \text{轴}\ x})$ 为锐角, $\cos\alpha > 0 \quad (\forall P \in \Sigma)$;

(后) (钝) (<)

3. 有向曲面的投影

在有向曲面 Σ 上取一小块曲面 ΔS, ΔS在xOy面上的的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 为

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy} & \text{当}\cos\gamma>0\text{时}\\ -(\Delta\sigma)_{xy} & \text{当}\cos\gamma<0\text{时}\\ 0 & \text{当}\cos\gamma=0\text{时}\end{cases}$$

其中$(\Delta\sigma)_{xy}$表示投影区域的面积，γ为法向量与 z轴正向的夹角. 注意: 投影有正负之分.

类似可以给出有向曲面在其它坐标面上的投影.

4. 引例 流向曲面一侧的流量

设稳定流动的不可压缩流体的速度场为

$$\vec{v} = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

求单位时间流过有向曲面 Σ 的流量Φ.

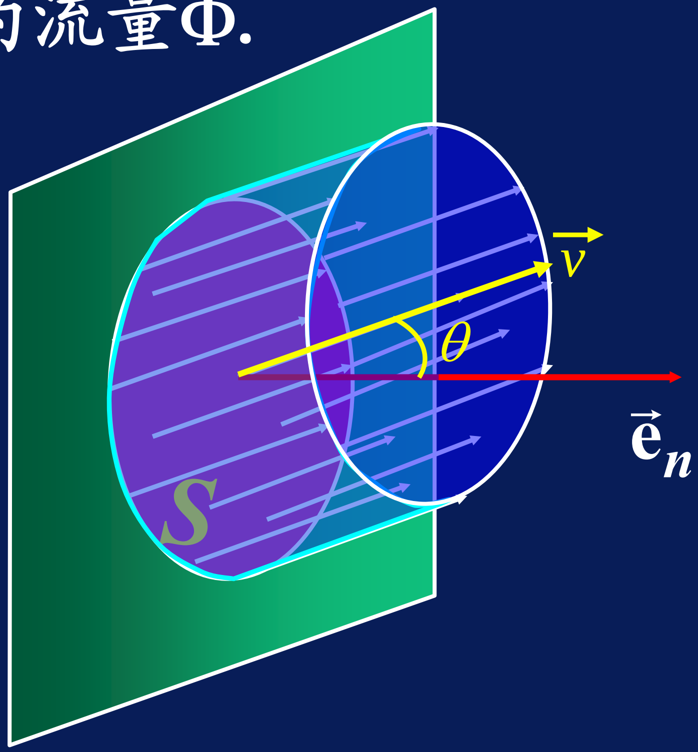
(假定密度为1)

(1) 若 Σ 是面积为S 的平面域,

单位法向量: $\vec{e}_n$

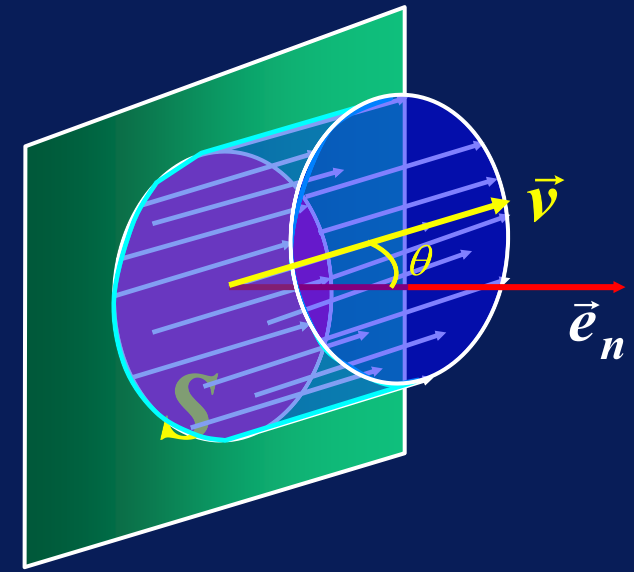
流速为常向量 $\vec{v}$

则单位时间内流量为



斜柱体的体积:

$$\Phi = S\cdot|\vec{v}|\cos\theta = S\,\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{e}}_n$$



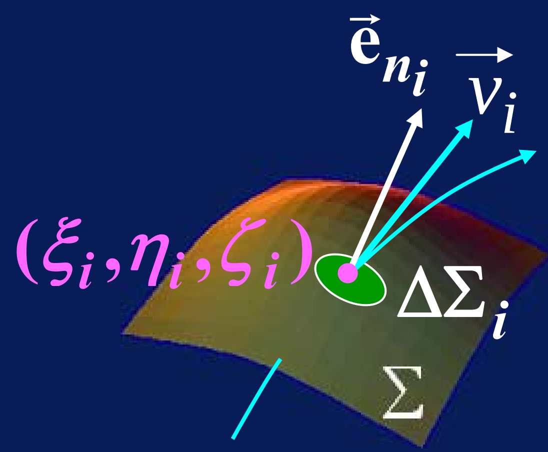
(2) 若Σ为有向曲面Σ,

流速: $\vec{v} = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

"分割, 近似, 求和, 取极限"

$$\Phi = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i\cdot\vec{\mathrm{e}}_{n_i}\Delta S_i$$

$$= \iint_{\Sigma}\vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{\mathrm{e}}_n(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$



5. 定义 10.5

设 Σ 是分片光滑的有向曲面，向量值函数

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$$

在 Σ 上有界，$\vec{\mathrm{e}}_n(x,y,z)$是有向曲面Σ上点$(x,y,z)$处的单位法向量，如果积分

$$\iint_{\Sigma}[\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{\mathrm{e}}_n(x,y,z)]\mathrm{d}S$$

存在，则称此积分为向量值函数 $\vec{F}(x,y,z)$在有向曲面上沿指定侧的第二类曲面积分，记为

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\Sigma} [\vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{\mathrm{e}}_n(x,y,z)]\mathrm{d}S$$

注　1° 第二类曲面积分的其他表达形式

(1) 若记 $\vec{\mathrm{e}}_n(x,y,z) = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$，则

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \iint_{\Sigma} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta\,\mathrm{d}S$$

$$+ \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

通常把上式三项分别记作

$R(x,y,z)$在Σ上对坐标 x, y 的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta\,\mathrm{d}S$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

因此第二类曲面积分又记为

(2) $\iint_{\Sigma} \vec{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

$$= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2° 投影转换关系

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}(x,y,z)\cdot \underline{\mathrm{d}\vec{S}} = \iint_{\Sigma} [\vec{F}(x,y,z)\cdot \underline{\vec{e}_n(x,y,z)]\mathrm{d}S}$$

与$\vec{\mathrm{e}}_n$同方向

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{S} = \vec{\mathrm{e}}_n(x,y,z)\mathrm{d}S$$ —— 有向曲面元

$$= (\cos\alpha\,\mathrm{d}S,\ \cos\beta\,\mathrm{d}S,\ \cos\gamma\,\mathrm{d}S\ )$$

于是
$$\begin{cases} \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \cos\alpha\,\mathrm{d}S = \left|\mathrm{d}\vec{S}\right|\cos\alpha \\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x = \cos\beta\,\mathrm{d}S = \left|\mathrm{d}\vec{S}\right|\cos\beta \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cos\gamma\,\mathrm{d}S = \left|\mathrm{d}\vec{S}\right|\cos\gamma \end{cases}$$

有向曲面元$\mathrm{d}\vec{S}$分别在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影

在二重积分应用，求曲面面积时曾证明:

$$\mathrm{d}S \cdot \cos\gamma = \mathrm{d}\sigma \quad (\cos\gamma > 0)$$

去掉限制: $\cos\gamma > 0$

可得到: $\mathrm{d}S \cdot \cos\gamma = (\mathrm{d}S)_{xy}$

$$\therefore \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cos\gamma\,\mathrm{d}S = (\mathrm{d}S)_{xy}$$

同理可得

$$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \cos\alpha\,\mathrm{d}S = (\mathrm{d}S)_{yz}$$

$$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \cos\beta\,\mathrm{d}S = (\mathrm{d}S)_{zx}$$

3° 若Σ为母线平行于 z轴的柱面时， 则

$\cos\gamma \equiv 0$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y \equiv \mathrm{d}S\cos\gamma = 0$, 从而必有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

如： $\Sigma : x^2 + y^2 = a^2 \quad (h \le z \le a)$

$$\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

但注意： $\displaystyle\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S \neq 0$

4^{o} 存在性: 若 $\vec{F}(x,y,z)$在分片光滑的有向曲面Σ上连续，则 $\iint_{\Sigma} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 存在.

5^{o} 记号 $\oiint_{\Sigma}$ 表示封闭曲面上的积分；

6° 以流速 $\vec{v}=(P,Q,R)$, 通过Σ流向 $\vec{n}$ 指定侧流体的流量为:

$$\Phi=\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

6. 性质

(1) 线性性质: $\forall \alpha,\ \beta \in R^1$

$$\iint_\Sigma [\alpha \vec{F}_1 + \beta \vec{F}_2] \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \alpha \iint_\Sigma \vec{F}_1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \beta \iint_\Sigma \vec{F}_2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

(2) 可加性: Σ由Σ_1和Σ_2拼接而成，并且 Σ, Σ_1和Σ_2的侧一致，则

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

(3) 有向性: 用 Σ^- 表示 与 Σ 取相反侧的 有向曲面，

则 $$\iint_{\Sigma^-} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

研究第二类曲面积分，必须注意曲面所取的侧.

(二) 两类曲面积分之间的联系

由第二类曲面积分的定义可知，

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

即 $$\iint_{\Sigma} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\Sigma} [\vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{e}_n(x,y,z)]\mathrm{d}S$$

其中 $\vec{e}_n(x,y,z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是有向曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的单位法向量．

(三) 第二类曲面积分的计算法

基本思路：求曲面积分 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 计算二重积分

情形1 需求：$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$

若 Σ：$z = z(x,y)$，上侧，Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}，$z = z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数，$R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续.

曲面 $z = z(x,y)$ 的单位法向量为

$$\vec{\mathrm{e}}_n = \pm\left(\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)$$

$$\vec{e}_n = \pm\left(\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right)$$

$$\cos\gamma = 1\Big/\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$$ 取曲面的上侧

根据第一类曲面积分的计算方法，有

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\cdot \cancel{\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}}\cdot \cancel{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

若有向曲面Σ取下侧时，类似可得

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)] \cdot \frac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \cdot \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\boxed{\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

上侧为正，下侧为负.

情形2 $\Sigma:\quad x = x(y,z),\ (y,z)\in D_{yz}$, 前侧 (后)

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \underline{\pm}\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

情形3 $\Sigma:\quad y = y(z,x),\ (z,x)\in D_{zx}$, 右侧 (左)

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \underline{\pm}\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

注 1° 对坐标的曲面积分, 必须注意曲面所取的侧.

2° 二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 与对坐标的

曲面积分 $\iint\limits_\Sigma f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的区别及联系

区别: $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$: 与方向无关， D是xoy面上的有界闭区域，面积元素: $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\sigma > 0$

二、典型例题

例1 计算

$$I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$
$$+[f(x,y,z)+z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 f为连续函数，Σ是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧 .

解 Σ的法向量：$\vec{n}=(1,-1,1)$ $+$ 上侧

单位法向量：$\vec{\mathrm{e}}_n=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\therefore\quad \cos\alpha=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

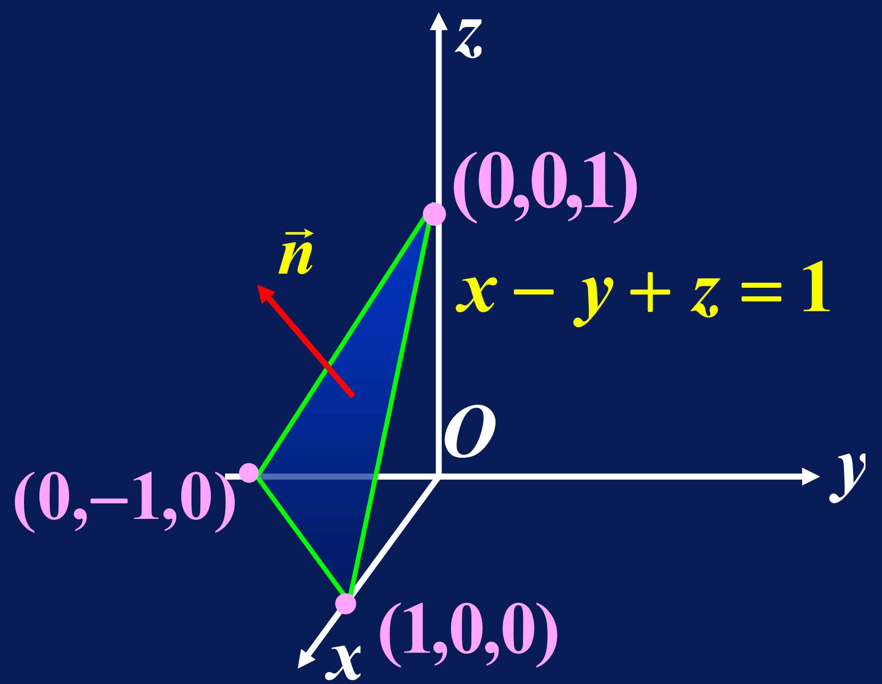
$$I = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma} [(f+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + (2f+y)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + (f+z)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}]\,\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma} 1\,\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}$$



$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$：与Σ的方向有关，Σ是空间有向曲面，投影：

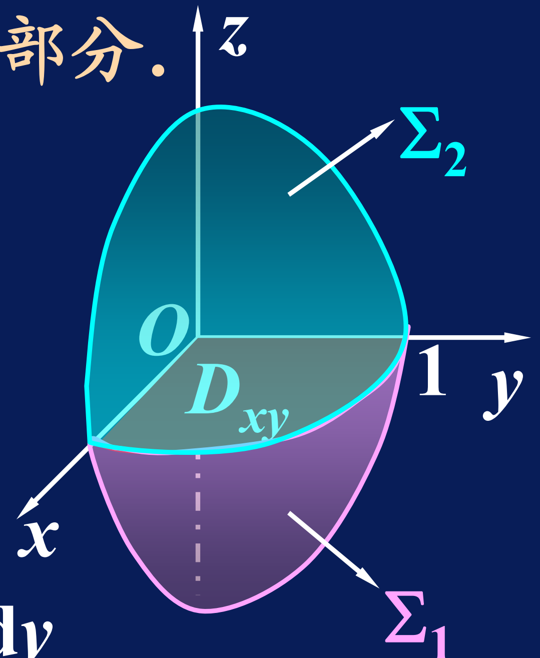
$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\mathrm{d}\sigma, & \text{当}\cos\gamma>0\text{时}\\ -\mathrm{d}\sigma, & \text{当}\cos\gamma<0\text{时}.\\ 0 & \text{当}\cos\gamma=0\text{时}\end{cases}$$

联系： 当Σ为上侧时，由计算法知
（下）

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\underline{\pm}\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

D：Σ在xoy面上的投影区域.

例2 计算$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， 其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧在$x\ge 0, y\ge 0$的部分.



解 把Σ分成Σ_1和Σ_2两部分

$$\Sigma_1: \quad z=-\sqrt{1-x^2-y^2};$$

$$\Sigma_2: \quad z=\sqrt{1-x^2-y^2},$$

$$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^2 \sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{2}{15}.$$

思考: 下述解法是否正确:

根据对称性 $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cancel{=} 0$

对第二类曲面积分如何利用积分区域及被积函数的对称性?

注 设Σ是光滑的有向曲面， $R(x,y,z)$ 在Σ上连续. 若Σ及其侧关于 xOy面对称，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & R(x,y,-z) = R(x,y,z) \\ 2\iint_{\Sigma_1} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & R(x,y,-z) = -R(x,y,z) \end{cases}$$

$\Sigma_1 : \Sigma$在 $z \geq 0$部分 .

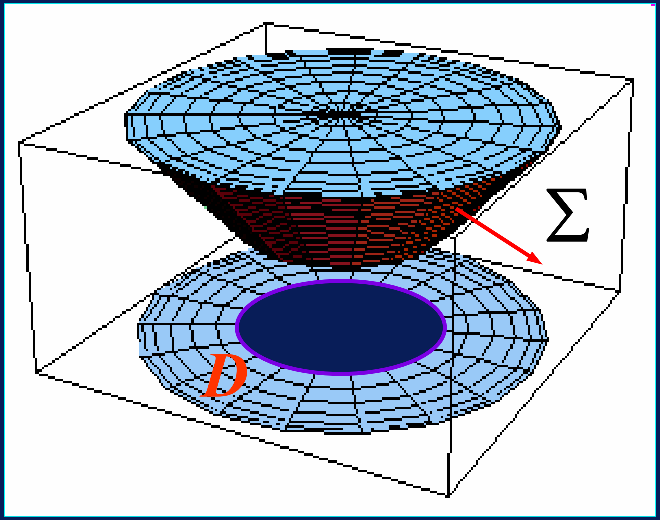
例3 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$为

锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1, z=2$ 所截部分的外侧.

解(方法1) Σ分为前后两片曲面,

在yOz 坐标面上的投影均为

$$D_{yz}: |z| \ge y, 1 \le z \le 2,$$



$$\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

被积函数对变量x是偶函数

同理 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$

$$D_{xy}:\quad 1 \le x^2 + y^2 \le 4,$$

$$I = -\iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^2 \rho^2 \cdot \rho \,\mathrm{d}\rho$$

$$= -\frac{15}{2}\pi.$$

(方法2) 投影转换法

$$\begin{cases} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \cos\alpha\,\mathrm{d}S = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -f_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \cos\beta\,\mathrm{d}S = \dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -f_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cos\gamma\,\mathrm{d}S \end{cases}$$

Σ 的法向量: $\vec{n} = \pm(f_x, f_y, -1)$

$$\cos\alpha = \frac{\pm f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}},\quad \cos\beta = \frac{\pm f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\mp 1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}.$$

$$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}\ (1\le z\le 2)$$

$$I=\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma} P\cdot(-f_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+Q\cdot(-f_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}[P\cdot(-f_x)+Q\cdot(-f_y)+R]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}\{P,Q,R\}\cdot\{-f_x,-f_y,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ 向量点积法

$$=\iint_{\Sigma}\{\,y,-x,z^2\,\}\cdot\left\{\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\{y,-x,z^2\}\cdot\left\{\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}\ (1\le z\le 2)$，下侧

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$D_{xy}:\quad 1\le x^2+y^2\le 4$

$$=-\frac{15}{2}\pi.$$

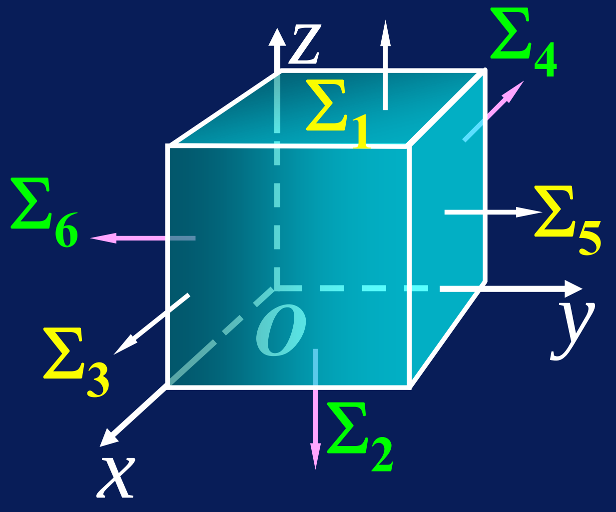
例4 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中Σ是正方体

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le a,0\le y\le a,0\le z\le a\}$$

的表面外侧.

解 (方法1) Σ的六个面为:



$\Sigma_1: z=a$, 上侧;　$\Sigma_2: z=0$, 下侧;

$\Sigma_3: x=a$, 前侧;　$\Sigma_4: x=0$, 后侧;

$\Sigma_5: y=a$, 右侧;　$\Sigma_6: y=0$, 左侧.

$$I=\left(\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\cdots+\iint_{\Sigma_6}\right)[(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]$$

$$\iint_{\Sigma_1}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma_1}(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$\Sigma_1: z=a$，上侧

$$=\iint_{D_{xy}}(a+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$D_{xy}:\ 0\le x\le a, 0\le y\le a$

$$=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a (a+x)\mathrm{d}y=\frac{3}{2}a^3.$$

同理可得，

$$\iint_{\Sigma_3}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}a^3.$$

$$\iint_{\Sigma_5}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}a^3.$$

$$\iint_{\Sigma_2}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma_2}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$\Sigma_2: z=0$，下侧

$$=-\iint_{D_{xy}}(0+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}(0+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a x\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}a^3.$$

$D_{xy}:\ 0\le x\le a, 0\le y\le a$

同理可得，

$$\iint\limits_{\Sigma_4}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}a^3.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_6}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}a^3.$$

$$\therefore\ I=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\cdots+\iint\limits_{\Sigma_6}=3\times\frac{3}{2}a^3-3\times\frac{1}{2}a^3=3a^3.$$

例5 位于原点电量为 q 的点电荷产生的电场为

$$\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}=\frac{q}{r^3}(x,y,z)\quad\left(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

求 $\vec{E}$ 通过球面 $\Sigma: r=R$ 外侧的电通量 Φ.

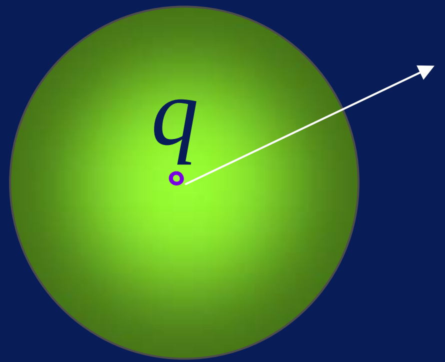
解

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\frac{q}{r^3}\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}S=\frac{q}{R^2}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=4\pi q$$



三、同步练习

1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2 y^2 z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的下半部分的下侧。

2. 计算积分 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$，$\Sigma$ 是椭球面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧.

3. 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中Σ是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面 $z=0$及$z=2$之间的部分的下侧．

4. 计算$I=\iint_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$在xOy面上方的部分的上侧．

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

四、同步练习解答

1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是球面

$x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧。

解 $\Sigma: = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $D_{xy}: = \left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\le R^2\right\}$

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \boxed{-}\iint\limits_{D_{xy}}[-x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

可用极坐标计算

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^4\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^4\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^4\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

令 $\rho=\mathrm{Rsint}$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^4\sin^4 tR\cos tR\sin tR\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^7\sin^5 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\left(1-\sin^2 t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{105}\pi R^7$$

2. 计算积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$，$\Sigma$是椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的外侧.

解 $$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}$$

Σ_1和Σ_2在yOz的投影均为$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$，而方向相反

而两个椭球面的方程为 $x=\pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$ 异号

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}=\iint_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\iint_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}$$

$$\boxed{x=\pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}}$$

$$=\frac{2}{a}\iint_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}},$$

$$=4\cdot\frac{2}{a}\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^{c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{8}{a}\int_0^b \mathrm{d}y\left(c\cdot \arcsin \frac{z}{c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \Bigg|_0^{c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \right) = \frac{4\pi bc}{a}.$$

故 $\displaystyle\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x} = \frac{4\pi abc}{a^2}.$

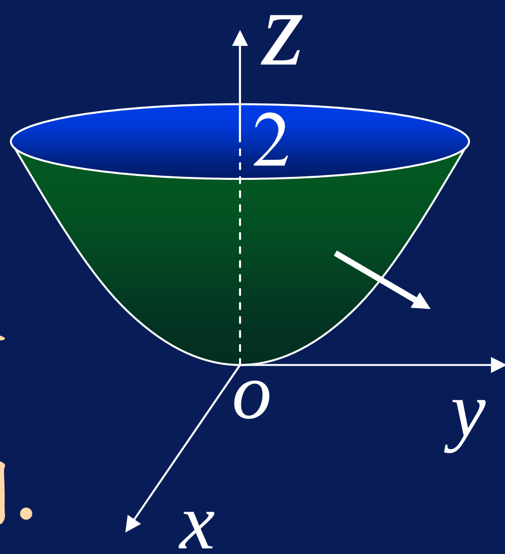
同理 $\displaystyle\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y} = \frac{4\pi abc}{b^2}, \quad \iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z} = \frac{4\pi abc}{c^2}.$

于是 $\displaystyle\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z} = 4\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$

3. 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中Σ是旋转抛物面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面$z=0$及$z=2$之间的部分的下侧.



解 将原式分为二式 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

讨论第一式 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$

将 $\mathrm{d}S=\dfrac{1}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 代入上式

$$\iint_\Sigma (z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_\Sigma (z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将yz型积分转化为xy型积分

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = -x$$

$$\iint_\Sigma (z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Sigma [(z^2+x)(-x)-z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D_{xy}} \left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right]\cdot(-x) - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称知 $\displaystyle\iint_{D_{xy}} \frac{1}{4}x(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$

$$= -\iint_{D_{xy}} \left\{ \left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 + x \right] \cdot (-x) - \frac{1}{2}(x^2+y^2) \right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称性知 $$\iint_{D_{xy}} \frac{1}{4} x(x^2+y^2)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

原式 $$= \iint_{D_{xy}} [x^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2)] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 (\rho^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2}\rho^2)\rho \,\mathrm{d}\rho = 8\pi$$

4. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧 .

解(方法1)

$$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\mathrm{d}S=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cdot\cos\gamma\mathrm{d}S=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

法线向量 $\vec{n}=\{2x,2y,1\}$，所以

$$\cos\beta=\frac{2y}{\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}}=\frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

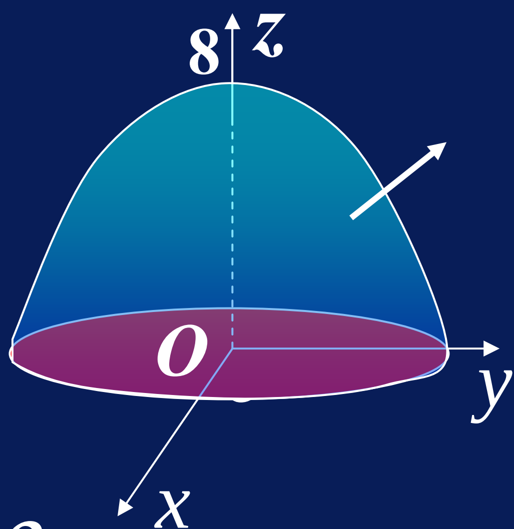
$$\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\therefore \quad I = \iint_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{\Sigma}\left(y^2+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}}\left(y^2+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$D_{xy}: \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 8\},$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\rho^2\sin^2\theta + 1\right)\rho d\rho$$



$$=2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\rho^2 \sin^2\theta + 1\right)\rho d\rho$$

$$=2\times\frac{64}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta \mathrm{d}\theta + 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\times 8\mathrm{d}\theta$$

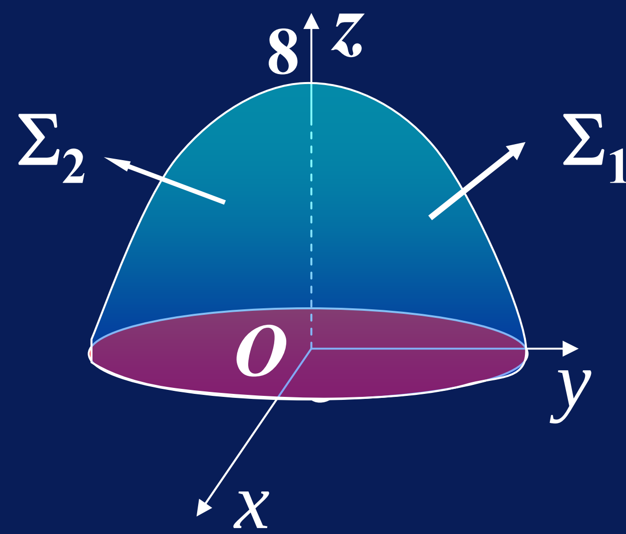
$$=32\pi+16\pi$$

$$=48\pi$$

(方法2) 令 $I_1 = \iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,

Σ_1：$y = \sqrt{8 - x^2 - z}$ (右侧),

Σ_2：$y = -\sqrt{8 - x^2 - z}$, (左侧),



$$D_{zx} = \{(x, z) \mid 0 \le z \le 8 - x^2, -2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{2}\},$$

$$\therefore \quad I_1 = \iint\limits_{\Sigma_1 + \Sigma_2} y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$= \iint\limits_{D_{zx}} \sqrt{8 - x^2 - z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint\limits_{D_{zx}} \sqrt{8 - x^2 - z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$= 2\iint\limits_{D_{zx}} \sqrt{8 - x^2 - z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=2\iint_{D_{zx}}\sqrt{8-x^2-z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{8-x^2}\sqrt{8-x^2-z}\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4}{3}\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{8-x^2}\right)^3\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\int_0^{2\sqrt{2}}\left(8-x^2\right)^3\mathrm{d}x$$

令$x=2\sqrt{2}\sin t,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sqrt{2}\right)^3\cos^3 t\times 2\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{8}{3}\times 64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt=\frac{8}{3}\times 64\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$$

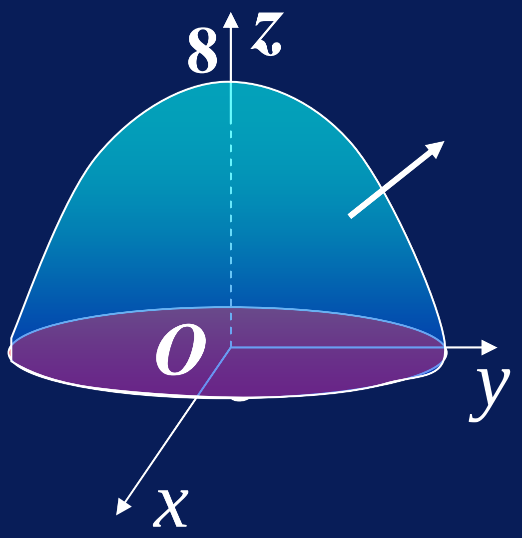
$$=32\pi$$

$$I_2 = 2\iint_{\Sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 8\},$$

$$= 2\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2$$

$$= 16\pi$$



$$\iint_{\Sigma} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_1 + I_2$$

$$= 32\pi + 16\pi = 48\pi$$