总复习(三)

等式与不等式的证明

- 一、主要内容
- 二、典型例题

一、主要内容

导数与定积分的应用 (续)

综合应用

等式与不等式的证明方法：

(1) 利用中值定理　　(4) 曲线的凹凸性

(2) 函数的单调性　　(5) 定积分的性质；

(3) 最大、最小值　　(6) 积分法.

二、典型例题

3. 等式与不等式的证明

例1 选择题

(1) 设在 $[0,1]$ 上，$f''(x) > 0$，则(B)成立 .

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$

(B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$

(C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$

(D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

解 在[0,1]上，$f''(x)>0$，令 $g(x)=f'(x)$

则由 $g'(x)=f''(x)>0, x\in[0,1]$

知 $g(x)=f'(x)$在[0,1]上单调增加

又由拉格朗日中值定理，知 $\exists\xi\in(0,1)$

使 $f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi)$

$\therefore$ 对$0<\xi<1$，有

$$g(0)<g(\xi)<g(1)$$

即 $f'(0)<f'(\xi)<f'(1)$ 故选 (B).

(2) 设函数 $f(x)$连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得(C)

(A) $f(x)$在$(0,\delta)$内单调增加；

(B) $f(x)$在$(-\delta,0)$内单调减少；

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$有 $f(x)>f(0)$；

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$有 $f(x)>f(0)$.

解 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}>0$$

由极限的保号性，知 $\exists\,\delta>0$，使得

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}>0,\quad x\in\mathring{U}(0,\delta)$$

$\therefore$ 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(3) 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$(A).

(A) 为正常数;

(C) 恒为零;

若 $f(x)$连续, $f(x+T)=f(x)$,

则 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

解法1 令 $f(t)=e^{\sin t}\sin t$, 则

$$f(t+2\pi)=f(t)$$

$$F(x)=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$$ 为常数

$$=\int_0^{\pi}(e^{\sin t}\sin t-e^{-\sin t}\sin t)\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\\=&\int_0^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x\end{aligned}}$$

$$=\int_0^{\pi}(e^{\sin t}-e^{-\sin t})\sin t\,\mathrm{d}t$$

$\because$ 当 $t\in(0,\pi)$ 时，$\sin t>0$

$\therefore$ $e^{\sin t}-e^{-\sin t}>0,\quad (e^{\sin t}-e^{-\sin t})\sin t>0,$

$\therefore$ $F(x)>0$ 且 $F(x)$ 为常数. 选 (A)

解法2 $F(x)=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$

$$=-\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\,\mathrm{d}(\cos t)$$

$$=-[e^{\sin t}\cos t\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\cos^2 t\,\mathrm{d}t]$$

$$=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\cos^2 t\,\mathrm{d}t>0$$

类似题 证明： $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \,\mathrm{d}x > 0.$

提示： $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \,\mathrm{d}x \overset{t=x^2}{=} \int_0^{2\pi} (\sin t)\cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t$

$$\overset{u=\pi-t}{=} \frac{1}{2}\int_{\pi}^{-\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{\pi-u}}(-\mathrm{d}u) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{\pi-u}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin u}{\sqrt{\pi-u}} - \frac{\sin u}{\sqrt{\pi+u}}\right)\mathrm{d}u$$

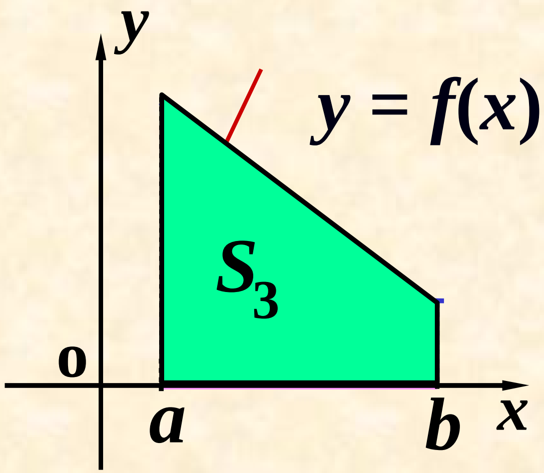
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi-u}} - \frac{1}{\sqrt{\pi+u}}\right)\sin u \,\mathrm{d}u > 0$$

(4) 设在$[a,b]$上，$f(x)>0,\ f'(x)<0,\ f''(x)>0,$

令 $S_1=\int_a^b f(x)dx,$

$S_2=f(b)(b-a)$

$S_3=\frac{1}{2}[f(b)+f(a)](b-a)$



则 (B).

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(C) $S_3<S_1<S_2$

(B) $S_2<S_1<S_3$　　(D) $S_2<S_3<S_1$

例2 证明：当$x \geq 0$时，$\ln(1+x) \geq \dfrac{\arctan x}{1+x}$.

证 $\ln(1+x) \geq \dfrac{\arctan x}{1+x}$

$\Leftrightarrow (1+x)\ln(1+x) \geq \arctan x \quad (x \geq 0)$

$\Leftrightarrow (1+x)\ln(1+x) - \arctan x \geq 0, \quad (x \geq 0)$

令 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x, \quad (x \geq 0)$

则 $f'(x) = 1 + \ln(1+x) - \dfrac{1}{1+x^2}$

$$= \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x^2} > 0, \quad (x > 0)$$

$\therefore \quad f(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加

故当 $x \geq 0$ 时，$f(x) \geq f(0) = 0,$

即 $\quad (1+x)\ln(1+x) - \arctan x \geq 0$

亦即当$x \geq 0$时，$\quad \ln(1+x) \geq \dfrac{\arctan x}{1+x}.$

2012考研

例3 证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2}\quad(-1<x<1)$

证 需证：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-(1+\dfrac{x^2}{2})\ge 0\quad(-1<x<1)$

令 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-(1+\dfrac{x^2}{2}),\quad x\in(-1,1)$

则 $f(0)=0$

需证：$f(x)\ge f(0)=0,\ x\in(-1,1)$

即$f(x)$在$(-1,1)$上取得最小值 $f(0)$

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,\quad f'(0)=0$$

$$f''(x)=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\ge 4-2=2>0,\ x\in(-1,1)$$

$\therefore \quad f'(x)$在$(-1,1)$上单调增加

故 $f'(x)$在$(-1,1)$上有唯一零点 $x=0$ $(f'(0)=0)$

即 $f(x)$在$(-1,1)$上有唯一驻点 $x=0.$

又$\because \quad f''(0)=2>0$

$\therefore \quad x=0$是$f(x)$的极小值点，

从而是 $f(x)$在$(-1,1)$上的最小值点,

即$f(x)$在$(-1,1)$上取得最小值 $f(0)=0.$

$\therefore \quad f(x)\geq f(0)=0, \quad x\in(-1,1)$

从而所给不等式得证.

(1) 需证：当$x>-1$时，

$f(x)\le f(0)=0$

类似题 设$x>-1$,证明：

(1) 当$0<\alpha<1$时， $(1+x)^{\alpha}\le 1+\alpha x$;

(2) 当$\alpha<0$或$\alpha>1$时， $(1+x)^{\alpha}\ge 1+\alpha x$.

证法1 (最值法) 令 $f(x)=(1+x)^{\alpha}-(1+\alpha x)$, 则 $f(0)=0$

$$f'(x)=\alpha\,[(1+x)^{\alpha-1}-1],$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=0$

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)\,(1+x)^{\alpha-2}$$

(1) 当 $0<\alpha<1$, $x>-1$时， $f''(x)<0$

目录 上页 下页 返回 结束

$f'(x)$在$(-1,+\infty)$上单调减少

$\therefore$ $f(x)$在$(-1,+\infty)$上有唯一驻点 $x=0$, 且为$f(x)$的极大值点，从而为 $f(x)$的最大值点.

$\therefore$ 当$0<\alpha<1$, $x>-1$时， $f(x)\le f(0)=0$

即 $(1+x)^{\alpha}\le 1+\alpha x.$

(2) 当$\alpha<0$或$\alpha>1$, $x>-1$时， $f''(x)>0$

$f'(x)$在$(-1,+\infty)$上单调增加

$\therefore$ $f(x)$在$(-1,+\infty)$上有唯一驻点 $x=0$, 且为$f(x)$的极小值点，从而为 $f(x)$的最小值点.

$\therefore$ 当 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$，$x > -1$ 时， $f(x) \geq f(0) = 0$

即 $(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x.$

证法2 (用泰勒公式)

令 $g(x) = (1+x)^{\alpha}$， 则 $g(0) = 1$

$$g'(x) = \alpha\,(1+x)^{\alpha-1}, \quad g'(0) = \alpha$$

$$g''(x) = \alpha(\alpha-1)\,(1+x)^{\alpha-2}$$

由 $g(x)$ 的一阶麦克劳林公式，得

$$g(x) = (1+x)^{\alpha} = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(\theta x)}{2!}x^2$$

$$g(x)=(1+x)^{\alpha}=g(0)+g'(0)x+\frac{g''(\theta x)}{2!}x^{2}$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(\theta x+1)x^{2}\quad(0<\theta<1)$$

$\because$ 当 $x>-1$时， $\theta x>-\theta>-1,\ \theta x+1>0,$

$\therefore$ (1) 当 $0<\alpha<1,\ x>-1$时， $g(x)<1+\alpha x$

即 $(1+x)^{\alpha}\leq 1+\alpha x.$

(2) 当 $\alpha<0$或$\alpha>1,\ x>-1$时， $g(x)>1+\alpha x$

即 $(1+x)^{\alpha}\geq 1+\alpha x.$

例4 证明：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

证法1 $\sin x > \frac{2}{\pi}x \Leftrightarrow$ si

需证：$f(x) > f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$

令 $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$,

$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上可导，且 $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0.$

由罗尔定理知，$\exists\, x_0 \in (0,\frac{\pi}{2})$，使 $f'(x_0) = 0.$

$\because \quad f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi},$

$$f''(x) = -\sin x < 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$\therefore \quad f'(x)$在$[0, \frac{\pi}{2}]$上单调减少，故

(1) 当 $0 < x < x_0$时， $f'(x) > f'(x_0) = 0$

$f(x)$在$[0,\ x_0]$上单调增加，

$\therefore \quad \forall\ x \in (0, x_0],\ f(x) > f(0) = 0$

(2) 当 $x_0 < x < \frac{\pi}{2}$时， $f'(x) < f'(x_0) = 0$

$f(x)$在$[x_0, \frac{\pi}{2}]$上单调减少，

$$\therefore \quad \forall\ x \in [x_0, \frac{\pi}{2}),\ \ f(x) > f(\frac{\pi}{2}) = 0$$

综上所述：$\forall\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$，有 $f(x) > 0$

即 $\sin x - \frac{2}{\pi} x > 0, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$

亦即当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$时，$\sin x > \frac{2}{\pi} x.$

证法2 $\sin x > \frac{2}{\pi} x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$

令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x=0\end{cases}$ 则

$g(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上连续，在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内可导，且

当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时，

$$g'(x)=(\frac{\sin x}{x})'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$=\frac{\cos x}{x^2}\cdot(x-\tan x)$$

而令 $h(x)=x-\tan x$

$h(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2})$上可导，且 $h(0)=0$,

$$h'(x)=1-\sec^2 x=-\tan^2 x<0, x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$h(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2})$上单调减少

$\therefore \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$, 有 $h(x)<h(0)=0$.

$\therefore \quad g'(x)<0, \quad x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\therefore \quad g(x)$ 在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上单调减少

故当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$时，

$$g(\frac{\pi}{2}) < g(x) < g(0)$$

即 $\dfrac{2}{\pi} < \dfrac{\sin x}{x} < 1$, 亦即 $\dfrac{2}{\pi} x < \sin x < x$.

相关题 证明: $1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}\, x < \frac{\pi}{2}$.

证 $\because \quad \frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \mathrm{d}\, x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}\, x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\, x$

即 $1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}\, x < \frac{\pi}{2}$.

例5 设 $e < a < b < e^2$，证明：

$$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a).$$

分析1 $\ln^2 b - \ln^2 a > \dfrac{4}{e^2}(b-a) \Leftrightarrow \dfrac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b-a} > \dfrac{4}{e^2}$

证法1 令 $f(x) = \ln^2 x,\quad x \in [a,b] \subset [e,e^2]$

则 $f(x)$在$[a,b]$上可导， 由拉格朗日中值定理知

$\exists\, \xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b-a} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi) = \frac{2\ln \xi}{\xi}$$

令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$， 则

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{2\ln\xi}{\xi} \overset{?}{>} \frac{4}{e^2} \\ \xi\in(a,b)\subset(e,e^2)\end{gathered}}$$

$$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0,\quad x>e$$

$\therefore$ $g(x)$在$[e,+\infty)$上单调减少

从而 $g(\xi)>g(e^2)$， 即

$$\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2}\quad \text{亦即}\quad \frac{2\ln\xi}{\xi}>\frac{4}{e^2}$$

$$\therefore\quad \ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

分析2 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$

$$\Leftrightarrow (\ln^2 b - \frac{4}{e^2}b) - (\ln^2 a - \frac{4}{e^2}a) > 0$$

证法1 令 $\varphi(x) = \ln^2 x - \frac{4}{e^2}x, \quad x \in [a,b] \subset [e,e^2]$

则 $\varphi(x)$在$[a,b]$上可导，且

$$\varphi'(x) = 2\frac{\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}$$

$$\varphi''(x) = 2\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\varphi''(x) = 2\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$\therefore$ 当$x > e$时，$\varphi''(x) < 0$，故$\varphi'(x)$单调减少

从而当 $e < x < e^2$ 时，有

$$\boxed{\varphi'(x) = 2\frac{\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}}$$

$$\varphi'(x) > \varphi'(e^2) = 0$$

即当 $e < x < e^2$ 时，$\varphi(x)$单调增加

$\therefore$ 当 $e < a < b < e^2$ 时，$\varphi(b) > \varphi(a)$

即 $\ln^2 b - \dfrac{4}{e^2}b > \ln^2 a - \dfrac{4}{e^2}a$，故所证不等式成立.

类似题 证明：$\pi^e < e^\pi$.

分析 $\pi^e < e^\pi \Leftrightarrow \ln \pi^e < \ln e^\pi$

$\Leftrightarrow e \ln \pi < \pi$

$\Leftrightarrow \pi - e \ln \pi > 0$

需证：当 $x > e$时

$f(x) > 0 = f(e)$

证 令 $f(x) = x - e \ln x$

则$f(x)$在$[e, +\infty)$上可导，

且 $f'(x) = 1 - \dfrac{e}{x} = \dfrac{x - e}{x}$

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点： $x=e$

$\because$ 当 $x>e$ 时，$f'(x)>0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调增加

故当 $x>e$ 时，$f(x)>f(e)=0$

$\because \pi>e$，$\therefore f(\pi)>0$

即 $\pi-e\ln\pi>0$, 亦即 $\pi^e<e^\pi$

一般地，设 $\alpha > \beta \geq e$, 证明：

$$\alpha^{\beta} < \beta^{\alpha}$$

提示：令 $f(x) = x\ln\beta - \beta\ln x$

例6 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f'(x)\le M, f(a)=0,$

证明：$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \le \frac{M}{2}(b-a)^2.$

证法1 (单调性)

$$\boxed{\text{需证：}\int_a^b f(x)dx-\frac{M}{2}(b-a)^2\le 0}$$

令 $\displaystyle F(x)=\int_a^x f(t)dt-\frac{M}{2}(x-a)^2,\quad F(a)=0$

则由题设条件，知 $F(x)$在$[a,b]$上可导，且

$$F'(x)=f(x)-M(x-a),\quad x\in[a,b]$$

$$F'(a)=f(a)=0$$

$$F''(x) = f'(x) - M \leq 0, \quad x \in [a,b]$$

$\therefore \quad F'(x)$在$[a,b]$上单调不增，

$\forall\ x \in [a,b],\quad$ 有$F'(x) \leq F'(a) = 0$

从而 $F(x)$在$[a,b]$上单调不增，

$\forall\ x \in [a,b],\quad$ 有 $F(x) \leq F(a) = 0$

特别地， 有 $F(b) \leq F(a) = 0$

即 $F(b) = \int_a^b f(t)dt - \frac{M}{2}(b-a)^2 \leq 0.$

$$\therefore \quad \int_a^b f(t)dt \leq \frac{M}{2}(b-a)^2.$$

证法2 (分部积分+定积分性质)

$$\because \quad f(a)=0, \quad f'(x)\le M \quad (x\in[a,b])$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)d(b-x)$$

$$= -[\,f(x)(b-x)\big|_a^b - \int_a^b (b-x)\,f'(x)dx]$$

$$= \int_a^b (b-x)\,f'(x)dx$$

$$\le \int_a^b (b-x)Mdx = M[-\frac{(b-x)^2}{2}]\Big|_a^b = \frac{M}{2}(b-a)^2.$$

证法3 (拉格朗日中值定理+定积分性质)

$\because$ $f(x)$在$[a,b]$上可导,

$\forall\ x\in(a,b],\quad [a,x]\subseteq[a,b]$

$\therefore$ 可在$[a,x]$上对 $f(x)$用拉格朗日中值定理,

$\exists\,\xi\in(a,x),$ 使

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$$

$\because$ $f(a)=0,\quad f'(x)\le M\quad (x\in[a,b])$

$\therefore$ $f(x)=f'(\xi)(x-a)\le M(x-a),\ \ x\in(a,b]$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M(x-a)dx$$

$$= M\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]\Big|_a^b$$

$$= \frac{M}{2}(b-a)^2.$$

类似于证法1的题：

例7 设 $f(x)$在[0,1]上有连续导数，且

$0 < f'(x) \le 1,\ \ f(0) = 0,$ 证明：

$$[\int_0^1 f(x)dx]^2 \ge \int_0^1 [f(x)]^3 dx.$$

证 令 $F(x) = [\int_0^x f(t)dt]^2 - \int_0^x [f(t)]^3 dt,\ F(0) = 0$

则 $F'(x) = 2[\int_0^x f(t)dt]\cdot f(x) - [f(x)]^3$

$$= \{\underline{2[\int_0^x f(t)dt] - [f(x)]^2}\}\cdot f(x)$$

令 $g(x)=2\left[\int_0^x f(t)dt\right]-[f(x)]^2$,则 $g(0)=0$,

$\because\quad 0<f'(x)\le 1\ \ (x\in[0,1]),\quad f(0)=0$,

$\therefore\quad f(x)$在$[0,1]$上单调增加,

$\forall\ x\in(0,1]$, 有 $f(x)>f(0)=0$

$$g'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)$$

$$=2f(x)\cdot[1-f'(x)]\ge 0,\quad x\in[0,1]$$

$\therefore\quad g(x)$在$[0,1]$上单调不减,

$\forall\ x\in[0,1]$, 有 $g(x)\ge g(0)=0$

即 $g(x)=2[\int_0^x f(t)dt]-[f(x)]^2\geq 0$， $x\in[0,1]$

$\therefore$ $F'(x)=\{2[\int_0^x f(t)dt]-[f(x)]^2\}\cdot f(x)$

≥ 0， $x\in[0,1]$

即 $F(x)$在$[0,1]$上单调不减，从而

$F(1)\geq F(0)=0$

即 $[\int_0^1 f(t)dt]^2-\int_0^1[f(t)]^3dt\geq 0$

亦即 $[\int_0^1 f(t)dt]^2\geq\int_0^1[f(t)]^3dt.$

类似于证法2 的题

例8 设 $f(x)$在$[0,1]$上有连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$,

证明：$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|. \quad M$$

分析 $$\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx$$

$$= -\int_0^1 xf'(x)dx$$

太大，得不到希望的结果！

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \int_0^1 x|f'(x)|dx \le M\int_0^1 xdx = \frac{M}{2}$$

证 $\because\ f'(x)$在$[0,1]$上连续,

$\therefore\ f'(x)$在$[0,1]$上必有最大值,

设 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|.$

$\because\ f(0)=f(1)=0$

$\therefore\ \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)d(x-c)$ $(c\in(0,1)$, 待定$)$

$=(x-c)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-c)f'(x)dx$

$=-\int_0^1(x-c)f'(x)dx$

于是 $$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \int_0^1 |x-c|\cdot|f'(x)|dx$$

$$\le \int_0^1 |x-c|\cdot M dx = M\int_0^1 |x-c|dx$$

$$= M\left(\int_0^c |x-c|dx + \int_c^1 |x-c|dx\right)$$

$$= M\left[\int_0^c (c-x)dx + \int_c^1 (x-c)dx\right]$$

$$= M\left[-\frac{(c-x)^2}{2}\Bigg|_0^c + \frac{(x-c)^2}{2}\Bigg|_c^1\right]$$

$$= \frac{M}{2}\cdot[c^2+(1-c)^2] \qquad (\forall c\in(0,1))$$

令 $g(c)=c^2+(1-c)^2$

可验证： $g(\frac{1}{2})=\min\limits_{c\in(0,1)} g(c)=\frac{1}{2}$

特别地，取 $c=\frac{1}{2}$， 有

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{M}{2}\cdot[(\frac{1}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2]$$

$$=\frac{M}{4}=\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]} f'(x).$$

例9 设函数 $S(x)=\int_0^x |\cos t| dt$

(1) 当n为正整数且 $n\pi \le x < (n+1)\pi$ 时，证明：

$$2n \le S(x) \le 2(n+1)$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(x)}{x}$.

证 $\because$ $|\cos t|$ 连续， $\therefore$ $S(x)$可导， 且

$$S'(x)=|\cos x| \ge 0$$

$\therefore$ $S(x)$ 单调不减

从而

(1) 当n为正整数且 $n\pi \le x < (n+1)\pi$时，有

$$S(n\pi) \le S(x) \le S[(n+1)\pi]$$

即 $$\int_0^{n\pi} |\cos t|\, dt \le S(x) \le \int_0^{(n+1)\pi} |\cos t|\, dt$$

又 $\because$ $|\cos t|$以π为周期

$$\therefore \quad \int_0^{n\pi} |\cos t|\, dt = n\int_0^{\pi} |\cos t|\, dt$$

$$= n[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos t)\, dt] = 2n$$

$$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\,dt=(n+1)\int_0^{\pi}|\cos t|\,dt=2(n+1)$$

$\therefore$ 当 $n\pi\le x<(n+1)\pi$ 时，有

$$2n\le S(x)\le 2(n+1).$$

(2) $\because x\to+\infty$， $\therefore$ 不妨设 $x>4.$

令 $n=\left[\dfrac{x}{\pi}\right]$， 则 $n\le\dfrac{x}{\pi}<n+1$, 即

$$n\pi\le x<(n+1)\pi$$

于是 $2n\le S(x)\le 2(n+1).$

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} \le \frac{S(x)}{x} \le \frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

令　$x \to +\infty$，　则 $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{(n+1)\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n\pi} = \frac{2}{\pi}$$

由夹逼准则，得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

例10 设 $p>0$， 证明： $$\frac{p}{p+1}<\int_0^1\frac{dx}{1+x^p}<1.$$

证 $\because$ $\frac{1}{1+x^p}$在[0,1]上连续，且

当$x\in(0,1),\ p>0$时，有

$$1-x^p<\frac{1}{1+x^p}=1-\frac{x^p}{1+x^p}<1$$

而 $$\int_0^1(1-x^p)dx=1-\left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_0^1=\frac{p}{p+1}$$

$$\therefore \quad \int_0^1 (1 - x^p)dx < \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^p} < \int_0^1 dx$$

即 $$\frac{p}{p+1} < \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^p} < 1.$$

类似题

(1) 比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \,\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| \,\mathrm{d}t$ $(n=1,2,\cdots)$的大小，说明理由．

2010年考研

(2) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \,\mathrm{d}t \ (n=1,2,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

解 (1) 当 $0<t<1$时, $0<\ln(1+t)<t$

$$[\ln(1+t)]^n < t^n$$

当 $0<t<1$时，$|\ln t|[\ln(1+t)]^n < t^n |\ln t|$

$$\therefore \quad \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \,\mathrm{d}t < \int_0^1 t^n |\ln t| \,\mathrm{d}t \quad (n=1,2,\cdots)$$

(2) $\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t = \int_0^1 t^n(-\ln t)\mathrm{d}t$

$$= -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t^{n+1}$$

$$= -\frac{1}{n+1}(\underbrace{t^{n+1}\ln t\Big|_0^1}_{0} - \int_0^1 t^n \quad \mathrm{d}t)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{t\to 0^+} t^{n+1}\ln t \quad (0\cdot\infty)\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{t^{-n-1}} \quad (\frac{\infty}{\infty})\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{(-n-1)t^{-n-2}}\\ &= -\frac{1}{n+1}\lim_{t\to 0^+} t^{n+1} = 0\end{aligned}}$$

$\because \quad 0 < u_n < \int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2} \to 0 \quad$ (当$n\to\infty$时)

$\therefore$ 由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$