第四节

极限的基本性质

- 一、主要内容
- 二、典型例题

一、主要内容

（一）唯一性

定理1.1 (极限的唯一性)

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$) 存在，

那么极限唯一.

（二）有界性

定义 对数列 x_n，若存在正数 M，使得对一切正整数 n，恒有 $|x_n| \le M$ 成立，则称数列 x_n 有界； 否则，称数列 $\{x_n\}$ 无界.

例如: 数列 $x_n = (-1)^{n+1}$ 有界

数列 $x_n = 2^n$ 无界

数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

定理1.2 (收敛数列的有界性)

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

注 关系: $\{x_n\}$收敛 $\begin{matrix}\longrightarrow \\ \not\longleftarrow\end{matrix}$ $\{x_n\}$有界

反之未必成立 . 例如, 数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 虽有界但不收敛 .

推论 无界数列必发散.

定理1.2'(函数极限的局部有界性)

如果极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在, 则必存在 $X>0$,

使得当 $x\in(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$时， 函数

$f(x)$是有界的.

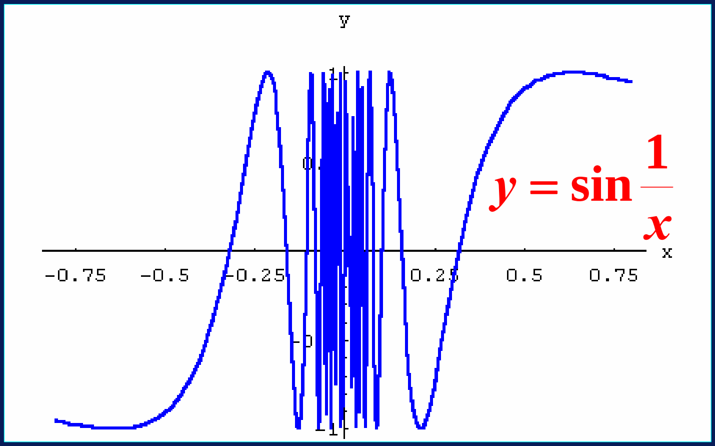
类似地，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, A\in\mathrm{R}$ 则 $\exists\delta>0$,

$f(x)$在$\mathring{U}(x_0,\delta)$上有界 .

但需注意，有界函数未必有极限. 如

$$f(x)=\sin\frac{1}{x},$$

可以证明：$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在。



（三） 保号性、保序性

定理1.3（收敛数列的保号性）

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $a > 0$ (<)，则

$\exists\, N\in \mathrm{N}^*$，使当$n>N$时，恒有 $x_n > 0$ (<).

据此，可由极限符号推得数列从某一项以后各项的符号

(2) 若 $x_n \geq 0\,(n \geq N_0)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$.

$(\leq)$ $(\leq)$

据此，可从数列某一项以后各项的符号推得极限的符号

注 由 $x_n > 0\,(n > N_0)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \not\longrightarrow a > 0$.

如: $x_n = \dfrac{1}{n} > 0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

推论1.3 (收敛数列的保序性)

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 且 $a < b$,

则 $\exists N\in\mathbf{N}^*$, 当 $n>N$ 时, 有 $x_n<y_n$.

(2) 若 $\exists N\in\mathbf{N}^*$，使当 $n>N$ 时，恒有

$$x_n\leqslant y_n$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$，则 $a\le b$.

定理1.3' (函数极限的局部保号性)

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$, ($A<0$) 则存在

$\delta>0$, 使当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,

$f(x)>0$. ($f(x)<0$)

据此，可由该点邻
域内函数的符号推
得极限的符号

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且存在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,

使当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时, $f(x)\geq 0$ $(f(x)\leq 0)$,

则 $A\geq 0$ $(A\leq 0)$.

据此，可由极限符号推得函数在该点邻域内的符号

问题 若 $f(x)<g(x)$,

能否推出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$?

不能!

例如：设 $f(x)=\dfrac{1}{2x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$,

当$x>0$时，有$f(x)<g(x)$，

但是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0.$

又如， $f(x)=|x|>0,\quad x\in\overset{\circ}{U}(0,\delta)$

但 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0.$

更强的结论

如果极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\ (A\neq 0)$，那么就存在着$x_0$的某去心邻域$\overset{\circ}{U}(x_0)$，当$x\in\overset{\circ}{U}(x_0)$时，就有

$$|f(x)|>\frac{|A|}{2}.$$

（四） 收敛数列与其子数列的关系

1. 子数列的概念

数列 $\{x_n\}$的子数列(或子列) $\{x_{n_k}\}$:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

$$1 \le n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

$$(n_k \in \mathrm{N}^*, \quad k \in \mathrm{N}^*)$$

在子数列$\{x_{n_k}\}$ 中, 一般项 x_{n_k} 是子数列的第k 项, x_{n_k} 在原数列$\{x_n\}$中则是第n_k 项.

例如，从数列 $\{\frac{1}{n}\}$ 中抽出所有的偶数项

组成的数列：$\left\{\frac{1}{2k}\right\}$ 是其子数列．它的第 k 项是

$$x_{n_k} = x_{2k} = \frac{1}{2k} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

而 $x_{n_k} = \frac{1}{2k}$ 在原数列中则是第 $2k$ 项．

2. 收敛数列与其子数列的关系

定理1.4 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\{x_n\}$ 的任意子数列

$\{x_{n_k}\}$ 也收敛，且 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

注 1° 某 $\{x_{n_k}\}$收敛 $\not\longrightarrow$ $\{x_n\}$收敛

例如， 数列 $x_n = (-1)^{n+1}$，虽然 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = -1$

但$\{x_n\}$ 发散.

2° 若数列有两个子数列收敛于不同的极限，

则原数列一定发散.

3° $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = a.$

（五） 函数极限与数列极限的关系

定理1.4'(函数极限与数列极限的关系)

如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足:

$$x_n \neq x_0 \ (n \in \mathrm{Z}^+),$$

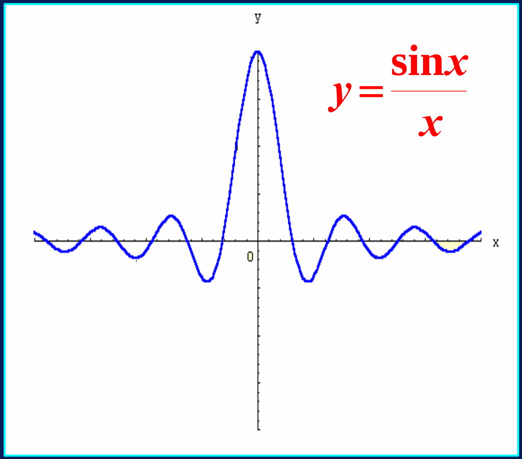
那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

注 1° 常常利用上述结果来求数列的极限:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

例如: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0.$



(2) 若已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, 则

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n} = 1 \quad \left(x_n = \frac{1}{n} \to 0\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}\sin\frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n} = 1 \quad \left(x_n = \frac{n+1}{n^2} \to 0\right)$$

2° 常利用此定理来说明函数极限不存在.

方法1 找一个数列$\{x_n\}$: $x_n \neq x_0$,

且$x_n \to x_0\ (n \to \infty)$,

说明$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$不存在.

方法2 找两个趋于x_0的不同数列$\{x_n\}$及$\{x'_n\}$,

说明 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$.

二、典型例题

例1 证明数列 $x_n=(-1)^{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$ 是发散的.

证法1 反证法.

假设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则有唯一极限 a 存在.

对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 则存在 N, 使当 $n>N$ 时, 有

$$|x_n-a|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow a-\frac{1}{2}<x_n<a+\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_n\in\left(a-\frac{1}{2},a+\frac{1}{2}\right)$$

区间长度为1

于是推得 $\left| x_{2N} - x_{2N+1} \right| < 1,$

这与 $\left| x_{2N} - x_{2N+1} \right| = \left| (-1) - 1 \right| = 2$ 矛盾！

因此该数列发散．

证法2 $x_n = (-1)^{n+1}\ (\ n = 1, 2, \cdots)$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = -1 \neq \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 1$$

$\therefore$ 发散！

例2 证明极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

证 取两个趋于 0 的数列

$$x_n=\frac{1}{2n\pi}\neq 0 \text{ 及 } x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\neq 0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=1$

二者不相等,

由定理1.5′, 知 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY