第八节

二阶常系数非齐次线性微分方程

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 二阶常系数非齐次线性方程解法

二阶常系数非齐次线性方程:

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (8.1)$$

对应齐次线性方程:

$$L[y] = y'' + p\,y' + q\,y = 0 \qquad (8.2)$$

其中 p, q 均为实常数 .

(8.1)的通解结构: $y = Y + y^*$,

如何求(8.1)的特解? 方法: 待定系数法.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

类型1 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$

其中 $P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$,

$\lambda, a_i(i=1,2,\cdots,m)$均为常数，$a_0\neq 0.$

方程(8.1)必有如下形式的特解:

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$$

其中 $Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$,

$b_i(i=1,2,\cdots,m)$均为待定常数,

由方程 (8.1)所确定；k的取法如下:

λ	非特征根	特征单根	特征重根
k	0	1	2

注 上述结论可推广到n 阶常系数非齐次线性微分方程(k 是重根次数).

$y^* = Q(x)e^{\lambda x} = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}$是方程

$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_n y = P_m(x)e^{\lambda x}$的解

$$\Longleftrightarrow \quad Q^{(n)}(x) + \frac{F^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}Q^{(n-1)}(x) + \cdots + \frac{F'(\lambda)}{1!}Q'(x) + F(\lambda)Q(x) \equiv P_m(x)$$

类型2 $f(x)=e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$

其中 $P_l(x),P_n(x)$分别是 x的l次和 m次实系数多项式；α，β为实常数．

方程(8.1)必有如下形式的特解:

$$y^*=x^k[R_m^{(1)}(x)\cos\beta x+R_m^{(2)}(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$$

其中 k的取法如下:

$\lambda=\alpha+i\beta$	非特征根	特征根
k	0	1

$R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$为$x$的待定多项式，$m=\max\{l,n\}$.

引理 若 $y=\varphi(x)+i\psi(x)$ 是方程

$$y''+py'+qy=u(x)+iv(x) \quad (p,q\text{为实常数})$$

的解， $u(x),v(x),\varphi(x),\psi(x)$ 均为实函数，则

$\varphi(x),\psi(x)$ 分别是方程

$$y''+py'+qy=u(x)$$

和 $\quad y''+py'+qy=v(x)$ 的解.

推导类型 2结论的思路:

将类型 2 转化为类型 1 的情形.

★ (二) 欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x) \quad (8.5)$$

的方程(其中 $p_1, p_2 \cdots p_n$ 为实常数)叫欧拉方程.

特点：各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的方次数相同.

解法：欧拉方程是特殊的变系数方程，通过变量代换可化为常系数微分方程.

作变量变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$,

将自变量换为 t,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right), \cdots\cdots$$

用 D 表示对自变量 t 求导的运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,

上述结果可以记为

$$xy' = Dy,$$

$$x^2y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = D^2y - Dy = (D^2 - D)y = D(D-1)y,$$

$$x^3y''' = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$= (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y,$$

……

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

一般地，$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y.$

将上式代入欧拉方程，则化为以 t 为自变量的常系数线性微分方程：

$$D(D-1)\cdots(D-n+1)y + p_1 D(D-1)\cdots(D-n+2)y$$

$$+ p_{n-1}Dy + p_n y = f(e^t) \quad (8.6)$$

求出这个方程的解后，

把 t 换为 $\ln x$，即得到原方程的解.

注 与(8.6)对应的齐次线性方程的特征方程为：

$$r(r-1)\cdots(r-n+1) + p_1 r(r-1)\cdots(r-n+2) +$$

$$\cdots + p_{n-1}r + p_n = 0 \qquad (8.7)$$

二、典型例题

例1 设 $y'' - y' = f(x)$, 问 $f(x)$如下时，特解应如何设立？

解 特征方程：$r^2 - r = 0$

特征根： $r_1 = 0,\ r_2 = 1$

$f(x)$	设立特解 y^*	k
$3x^2\quad(\lambda = 0)$	$x(ax^2 + bx + c)$	1
$e^x\quad(\lambda = 1)$	$x \cdot ae^x$	1
$x2^x\quad(\lambda = \ln 2)$	$(ax + b)2^x$	0
$xe^{-x} + e^x$	$(ax + b)e^{-x} + x \cdot ce^x$	

$$f(x)=xe^{-x}+e^{x}=f_1(x)+f_2(x)$$

对于 $y''-y'=xe^{-x}$,

$\lambda=-1$ 不是特征根，$k=0$

$\therefore$ 可设立特解： $y_1^*=(ax+b)e^{-x}$,

对于 $y''-y'=e^{x}$,

$\lambda=1$ 是特征单根，$k=1$

$\therefore$ 可设立特解： $y_2^*=x\cdot ce^{x}$,

由解的叠加原理，对于 $y''-y'=xe^{-x}+e^{x}$,

$\therefore$ 可设立特解： $y^*=y_1^*+y_2^*$

例2　求方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解　1° 特征方程　$r^2-3r+2=0$,

特征根　$r_1=1,\ r_2=2$,

2° 对应齐次线性方程通解 $Y=c_1e^x+c_2e^{2x}$,

3° $\because \lambda=2$ 是单根, 设立特解: $y^*=x(Ax+B)e^{2x}$,

代入方程, 得 $2Ax+B+2A=x$　$\therefore \begin{cases} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=-1 \end{cases}$

于是　$y^*=x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$

4° 原方程的通解为:

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}.$$

例3 求方程 $y'' + a^2 y = x + 1$ (1)

的通解，其中常数 $a \geq 0.$

解 对应的齐次线性方程:

$$y'' + a^2 y = 0 \quad (2)$$

特征方程: $r^2 + a^2 = 0$

(1) 当 $a = 0$ 时，特征根: $r_{1,2} = 0$

(2)之通解: $y = C_1 + C_2 x$

$\because \quad f(x) = x + 1 = (x+1)e^{0 \cdot x},$

$\lambda = 0$是二重特征根， $k = 2$

$\therefore$ 可设立(1)的特解形为

$$y^* = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2$$

$$(y^*)' = 3Ax^2 + 2Bx, \quad (y^*)'' = 6Ax + 2B$$

代入(1)，得 $6Ax + 2B = x + 1$

$$\therefore \begin{cases} 6A = 1 \\ 2B = 1 \end{cases} \qquad A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{2}$$

故(1)有特解: $y^* = x^2(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2})$

$\therefore$ 当$a = 0$时，(1)的通解为:

$$y = C_1 + C_2 x + x^2(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}).$$

另法：当$a=0$时，方程(1)为：

$$y''=x+1$$

$$y'=\frac{1}{2}x^2+x+C_1$$

(1)之通解：$y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$

(2) 当 $a>0$ 时，特征根：　$r_{1,2}=\pm ai$

(2)之通解：　$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax$

$\lambda=0$不是特征根，　　$k=0$

$\therefore$　可设立(1)的特解形为　　$y^*=Ax+B$

$$(y^*)' = A, \quad (y^*)'' = 0$$

代入(1)，得 $a^2(Ax+B) = x+1$

$\therefore \quad A = B = \dfrac{1}{a^2}$

故(1)有特解：$y^* = \dfrac{1}{a^2}(x+1)$

$\therefore$ 当 $a > 0$ 时，(1)的通解为：

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{1}{a^2}(x+1).$$

例4 设 $y''' + y' = f(x)$, 问 $f(x)$ 如下时，特解应如何设立？

解 特征方程：$r^3 + r = 0$

特征根： $r_1 = 0,\ r_{2,3} = \pm i$

$f(x)$	设立特解 y^*	k
$xe^x \cos 2x$ $(\lambda = 1 + 2i)$	$e^x[(ax+b)\cos 2x$ $+ (cx+d)\sin 2x]$	0
$\cos^2 \frac{x}{2}$ $= \frac{1}{2}(\underline{\cos x} + \underline{1})$ $(\lambda_1 = i)$ $(\lambda_2 = 0)$	$x(a\cos x + b\sin x) + x \cdot c$	1

例5 求方程 $y'' + y = 4\sin x$ 的通解.

解 1° 特征方程: $r^2 + 1 = 0$

特征根: $r_{1,2} = \pm i$

2° 对应齐次线性方程的通解

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

3° 求非齐次线性方程的特解

(方法1) $\lambda = i$ 是特征单根, $k = 1$

$\therefore$ 可设立原方程的特解为

$$y^* = x \cdot (a\cos x + b\sin x)$$

$$y'' + y = 4\sin x$$

$$y^* = x\cdot(a\cos x + b\sin x)$$

$$(y^*)' = (a\cos x + b\sin x) + x\cdot(-a\sin x + b\cos x)$$

$$(y^*)'' = 2(-a\sin x + b\cos x) + x\cdot(-a\cos x - b\sin x)$$

代入原方程，得

$$2(-a\sin x + b\cos x) \equiv 4\sin x$$

比较同类项系数: $\begin{cases} -2a = 4 \\ 2b = 0 \end{cases}$ $\quad\therefore\quad a = -2,\quad b = 0$

从而原方程有特解:

$$y^* = -2x\cos x$$

故原方程通解为 $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x.$

$$y'' + y = 4\sin x,\ \text{特征根:}\ r_{1,2} = \pm i$$

(方法2) 注意到: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$$4e^{ix} = \underbrace{4\cos x}_{u(x)} + i\underbrace{(4\sin x)}_{v(x)},$$

$$\mathrm{Im}(4e^{ix}) = 4\sin x$$

作辅助方程 $y'' + y = 4e^{ix}$ ①

$\because$ $\lambda = i$ 是特征单根,

$\therefore$ 可设 ① 的特解形为: $y_1^* = x \cdot Ae^{ix}$

代入①式, 得 $(y_1^*)'' + y_1^* = A(2i - x)e^{ix} + Axe^{ix}$

$$= 2Ai\,e^{ix} \equiv 4e^{ix}$$

$$2Ai\,e^{ix} \equiv 4e^{ix}$$

$$2Ai = 4, \qquad \therefore \quad A = -2i,$$

从而 $\quad y_1^* = -2ixe^{ix}$

$$= -2ix(\cos x + i\sin x)$$

$$= 2x\sin x + (\underline{-2x\cos x})i,$$

$\because \quad f(x) = 4\sin x = \mathrm{Im}(4e^{ix}) \qquad$ ($4e^{ix}$的虚部)

$\therefore \quad$ 原方程有特解: $\qquad y^* = \mathrm{Im}(y_1^*) = -2x\cos x$

故原方程通解为 $\qquad y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x.$

例6(综合题)

求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数.

$$s'' + s' + s = e^{x}$$

$$s(0) = 1,\ s'(0) = 0.$$

$$s = ?$$

解 $s = s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}, \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

$$= 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots$$

$$s' = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \cdots$$

$$s'' = \frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \cdots$$

$$s'' + s' + s = e^{x} \qquad ①$$

对应的齐次线性方程:

$$s'' + s' + s = 0 \qquad ②$$

其特征方程为 $r^2 + r + 1 = 0$

特征根为 $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$\therefore$ ②的通解为

$$S = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$\because \quad \lambda = 1$不是特征根，$k = 0$

$\therefore$ 设非齐次线性方程 ①的特解为 $s^* = Ae^x$

代入①，得 $A = \dfrac{1}{3}$

故①有特解：$s^* = \dfrac{1}{3}e^x$

①的通解为：$s = S + s^*$

$$= e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{3}e^x$$

又 $\because$ 当 $x=0$时，有

$$\begin{cases} s(0)=1 = C_1 + \dfrac{1}{3} \\ s'(0)=0 = -\dfrac{1}{2}C_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}C_2 + \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \quad C_1 = \frac{2}{3}, \quad C_2 = 0$$

从而所求和函数为

$$s(x) = \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^{x}$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

例7 求欧拉方程

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2 \quad \text{的通解.}$$

解 作变量变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$,

原方程化为

$$D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y - 4Dy = 3e^{2t},$$

即 $D^3 y - 2D^2 y - 3Dy = 3e^{2t}$,

或 $$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3e^{2t} \quad (1)$$

或 $$\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=3e^{2t} \quad (1)$$

方程(1)所对应的齐次线性方程为

$$\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=0,$$

其特征方程

$$r^3-2r^2-3r=0,$$

特征方程的根为

$$r_1=0,\ r_2=-1,\ r_3=3.$$

所以齐次线性方程的通解为

$$Y = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t}$$

设方程(1)的特解为 $y^* = be^{2t}$

代入方程(1)，得 $b = -\frac{1}{2}$. 即 $y^* = -\frac{1}{2}e^{2t}$,

故方程(1)的通解为 $y = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t}$

变量代回，得所给欧拉方程的通解

$$y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

三、同步练习

1. 微分方程 $y'' - 4y' + 4y = f(x)$的特解 y^* 具有什么形式？其中非　其次项 $f(x)$为：

   (1) $f(x) = x$;

   (2) $f(x) = e^{2x}$;

   (3) $f(x) = x^2 e^x$;

2. 求微分方程 $y'' - y' = 2x + 1$的特解 y^*.

3. 设$\varphi(x) = e^x - \int_0^x (x - t)\varphi(t)\mathrm{d}t$,

其中 $\varphi(x)$为连续函数，求$\varphi(x)$.

4. 求微分方程 $y'' + a^2 y = e^x (a > 0)$的通解 .

5. 求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin x$的通解 .

6. 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的通解.

7. 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^{-x}$,

$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$是某二阶非齐次线性

方程的三个解 , 求此微分方程 .

8. 求欧拉方程

$$x^3 y''' + 2xy' - 2y = 3x$$

的通解 .

四、同步练习解答

1. 微分方程 $y'' - 4y' + 4y = f(x)$的特解 $y*$ 具有什么形式？其中非　其次项 $f(x)$为:

(1) $f(x) = x$;

(2) $f(x) = e^{2x}$;

(3) $f(x) = x^2 e^x$;

解 所给方程对应的齐次线性方程为

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

特征方程 $r^2 - 4r + 4 = 0$的根为 $r_1 = r_2 = 2.$

特征根: $r_1 = r_2 = 2.$

(1) $f(x) = x$ 属于 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型,

$m = 1$, $\lambda = 0$ 不是特征根, 故取 $k = 0$,

方程的特解 $y*$ 具有形式:

$$y* = x^0(Ax + B)e^{0x} = Ax + B.$$

(2) $f(x) = e^{2x}$ 属于 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型,

$m = 1$, $\lambda = 2$ 是特征方程的二重根, 故取 $k = 2$,

方程的特解 $y*$ 具有形式:

$$y* = x^2 A e^{2x}.$$

$(3)\ f(x) = x^2 e^x$

属于 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型，

$m = 2$， $\lambda = 1$ 不是特征根，故取 $k = 0$，

方程的特解 $y*$ 具有形式：

$$y* = x^0(Ax^2 + Bx + C)e^x$$

$$= (Ax^2 + Bx + C)e^x.$$

2. 求微分方程 $y'' - y' = 2x + 1$的特解 $y*$.

解 方程的非齐次项 $f(x) = 2x + 1,$

属于 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$型,

$m = 1, \quad \lambda = 0$

特征方程: $r^2 - r = 0$

特征根: $r_1 = 0, r_2 = 1.$

故设特解 $y* = x(Ax + B)$

(λ为单根，故取 $k = 1$),

求导数 $y*' = 2Ax + B, \quad y*'' = 2A$。

代入方程得

$$2A-(2Ax+B)=2x+1,$$

比较系数，得

$$\begin{cases} -2A=2 \\ 2A-B=1 \end{cases}$$

解得 $A=-1,\quad B=3.$

从而特解为

$$y^*=-x^2-3x.$$

3. 设 $\varphi(x) = e^x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$,

其中 $\varphi(x)$为连续函数，求 $\varphi(x)$.

分析 (1) 题中所给方程为积分方程,根据积分方程的特点，应先将方程两端对 x 求导.

把问题转化为求微分方程满足一定初始条件的解;

(2) 方程右端的积分中,被积函数出现 x,

相对与积分变量 t 而言, x 可看作常数.可以将它提到积分号外, 然后求导.

解 $$\varphi(x)=e^{x}-\int_{0}^{x}x\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}t\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=e^{x}-x\int_{0}^{x}\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}t\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

两边对 x 求导数

$$\varphi'(x)=e^{x}-\int_{0}^{x}\varphi(t)\,\mathrm{d}t-x\varphi(x)+x\varphi(x)$$

$$=e^{x}-\int_{0}^{x}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

再对 x 求导数，得 $\varphi''(x)=e^{x}-\varphi(x)$

即 $$\varphi''(x)+\varphi(x)=e^x$$

这是二阶常系数非齐次 线性微分方程，

对应齐次线性方程的特 征方程为

$$r^2+1=0, \quad r=\pm i$$

故齐次线性方程的通解 为

$$\Phi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$$

设原方程的一个特解为 $\varphi^*(x)=Ae^x$,

将$\varphi^{*\prime}(x),\varphi^{*\prime\prime}(x)$.代入原方程，　得　$A=\dfrac{1}{2}$

故方程的通解为

$$\varphi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$$

由原方程得初始条件

$$\varphi(0)=1,\ \varphi'(0)=1,$$

代入通解中，得　$C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$

故所求函数为　$\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$

4. 求微分方程 $y'' + a^2 y = e^x (a > 0)$的通解 .

解 先求对应方程 $y'' + a^2 y = 0$的通解 .

其特征方程 $r^2 + a^2 = 0$的根为

$$r_{1,2} = \pm ai .$$

故对应其次方程的特解 为

$$Y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax .$$

设非齐次线性方程的特 解为

$$y* = x^0 Ae^x = Ae^x$$

$(\lambda = 1$非特征根，故取 $k = 0)$,

那么， $y^{*\prime} = y^{*\prime\prime} = Ae^{x}$，

代入方程得 $Ae^{x} + a^{2}Ae^{x} = e^{x}$.

即 $A + a^{2}A = 1$. $A = \dfrac{1}{1+a^{2}}$.

于是，特解 $y^{*} = \dfrac{1}{1+a^{2}}e^{x}$.

非齐次线性方程的通解 为

$$y = C_{1}\cos ax + C_{2}\sin ax + \frac{1}{1+a^{2}}e^{x}.$$

5. 求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin x$的通解 .

解 对应齐次线性方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$

的特征方程为

$$r^2 - 2r + 5 = 0.$$

特征根为

$$r_{1,2} = 1 + 2i.$$

故对应齐次线性方程的 通解为

$$Y = e^x [C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x].$$

又$\lambda+i\omega=1+i$不是特征方程的根，故可设

$$y^*=x^0e^x[D_1\cos x+D_2\sin x]$$

为所给方程的特解 .求得

$$y^{*\prime}=e^x(D_1+D_2)\cos x+e^x(D_2-D_1)\sin x,$$

$$y^{*\prime\prime}=e^x2D_2\cos x-e^x2D_1\sin x,$$

代入所给方程， 消去e^x，并整理得，

$$3D_1\cos x+3D_2\sin x=\sin x,$$

比较系数，得

$$3D_1\cos x + 3D_2\sin x = \sin x,$$

$$\begin{cases} 3D_1 = 0 \\ 3D_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

于是，特解 $y^* = \dfrac{e^x}{3}\sin x.$

从而，所给方程的通解 为

$$y = e^x\left[C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right] + \frac{e^x}{3}\sin x.$$

6. 求方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的通解.

解 对应齐线性方程的通解

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

作辅助方程 $y''+y=xe^{2ix}$,

$\because \lambda=2i$ 不是特征方程的根,

设 $y_1^*=(Ax+B)e^{2ix}$,代入辅助方程

$$\begin{cases}4Ai-3B=0\\-3A=1\end{cases}\qquad \therefore A=-\frac{1}{3},\ B=-\frac{4}{9}i,$$

$\therefore$ 辅助方程的特解: $y_1^*=(-\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}i)e^{2ix}$,

$$= (-\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}i)(\cos 2x + i\sin 2x)$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x - (\frac{4}{9}\cos 2x + \frac{1}{3}x\sin 2x)i,$$

原方程的特解为： $y^* = \mathrm{Re}(y_1^*)$ （取实部）

$$= -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x,$$

原方程通解为：

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x.$$

注 $Ae^{\alpha x}\cos\beta x, Ae^{\alpha x}\sin\beta x$

分别是 $Ae^{(\alpha+i\beta)x}$ 的实部和虚部．

7. 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$，$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶非齐次线性方程的三个解，求此微分方程．

解(方法1) 由线性微分方程解的结构定理知，

e^{2x} 及 e^{-x} 是相应齐次方程的两个线性无关的解，

且 xe^x 是非齐次方程的一个特解，

故设此微分方程为

$$y'' - y' - 2y = f(x)$$

将$y=xe^x$代入，得

$$f(x)=(xe^x)''-(xe^x)'-2xe^x=e^x-2xe^x$$

因此所求方程为

$$y''-y'-2y=e^x-2xe^x$$

(方法2) 由题设知，e^{2x}及e^{-x}是相应齐次方程的两个线性无关的解，

且xe^x是齐次方程的一个特解，

故 $$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + xe^{x}$$

是非齐次方程的通解，

由 $$y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{x} + (x+1)e^{x}$$

$$y'' = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + (x+2)e^{x}$$

消去 C_1，C_2得所求方程为

$$y'' - y' - 2y = e^{x} - 2xe^{2x}$$

8. 求欧拉方程

$$x^3 y''' + 2xy' - 2y = 3x$$

的通解 .

解 作变换 $x = e^t$, 则 $t = \ln x$.

代入原方程可得

$$D(D-1)(D-2)y + 2Dy - 2y = 3e^t,$$

即

$$D^3 y - 3D^2 y + 4Dy - 2y = 3e^t,$$

或 $$\frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} - 2y = 3e^t.$$

此常系数线性微分方程 对应的齐次方程

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

其特征方程为

$$r^3 - 3r^2 + 4r - 2 = 0,$$

特征根为 $r_1 = 1,\quad r_{2,3} = 1 \pm i.$

于是，对应齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^t + e^t(C_2 \cos t + C_3 \sin t)$$

$$= C_1 x + x(C_2 \cos \ln x + C_3 \sin \ln x).$$

设特解 $y^* = tAe^t = Ax \ln x,$

代入所给方程，求得$A = 3,$

即 $y^* = 3x \ln x.$

于是，所给欧拉方程的通解为

$$y = C_1 x + x(C_2 \cos \ln x + C_3 \sin \ln x) + 3x \ln x.$$