

第六节 多元函数微分学的应用

习题 8-6

1. 求下列曲线在给定点的切线和法平面方程:

(1) $x = a \sin^2 t$, $y = b \sin t \cos t$, $z = c \cos^2 t$, $t = \frac{\pi}{4}$ 处;

(2) $y = x$, $z = x^2$, 点 $(1, 1, 1)$ 处;

(3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$ 点 $(1, -2, 1)$ 处.

解 (1) 因为 $\frac{dx}{dt} = a \cdot 2 \sin t \cos t = a \sin 2t$,
 $\frac{dy}{dt} = b(\cos^2 t - \sin^2 t) = b \cos 2t$,
 $\frac{dz}{dt} = c \cdot 2 \cos t \cdot (-\sin t) = -c \sin 2t$,

而参数 $t = \frac{\pi}{4}$ 对应的曲线上点为 $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2})$, 于是曲线在该点的切向量为

$$\boldsymbol{T} = (a, 0, -c),$$

所以, 所求切线方程为

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{y - \frac{b}{2}}{0} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c},$$

法平面方程为

$$a(x - \frac{a}{2}) - c(z - \frac{c}{2}) = 0, \text{ 即 } ax - cz - \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} = 0.$$

(2) 令 $x = t$, 则所给曲线方程为 $x = t$, $y = t$, $z = t^2$.

因为 $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 1$, $\frac{dz}{dt} = 2t$, 而点 $(1, 1, 1)$ 所对应的参数 $t = 1$, 于是曲线上点 $(1, 1, 1)$

处的切向量为

$$\boldsymbol{T} = (1, 1, 2),$$

所以, 所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2},$$

法平面方程为

$$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0, \text{ 即 } x+y+2z-4=0.$$

(3) 法 1 将所给方程的两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0, \\ 1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0, \end{cases}$$

移项整理, 得

$$\begin{cases} y\frac{dy}{dx}+z\frac{dz}{dx}=-x, \\ \frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=-1. \end{cases}$$

在 $D=\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=y-z \neq 0$ 的条件下, 解方程组求得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{z-x}{y-z}, & \frac{dz}{dx} &= \frac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{y-z} = \frac{x-y}{y-z}, \\ \frac{dy}{dz} \Big|_{(1,-2,1)} &= 0, & \frac{dz}{dx} \Big|_{(1,-2,1)} &= -1, \end{aligned}$$

从而曲线上点 $(1,-2,1)$ 处的切向量为

$$\boldsymbol{T} = (1, 0, -1),$$

故所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1},$$

法平面方程为

$$(x-1)+0 \cdot (y+2)-(z-1)=0, \text{ 即 } x-z=0.$$

法 2 曲面 $x^2+y^2+z^2=6$, 即 $x^2+y^2+z^2-6=0$ 上点 $(1,-2,1)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1 = (2x, 2y, 2z) \Big|_{(1,-2,1)} = (2, -4, 2).$$

同理, 曲面 $x+y+z=0$ 上点 $(1,-2,1)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_2 = (1, 1, 1),$$

于是曲线上点 $(1,-2,1)$ 处的切向量为

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{k} = -6(1, 0, -1),$$

故所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-1}{-1},$$

法平面方程为

$$(x-1)+0 \cdot (y+2)-(z-1)=0, \text{ 即 } x-z=0.$$

2. 求下列曲面在给定点处的切平面和法线方程:

(1) $z=8x+xy-x^2-5$, 点 $(2,-3,1)$ 处;

(2) $xy=z^2$, 点 (x_0, y_0, z_0) 处.

解 (1) 令 $F(x, y, z) = z - 8x - xy + x^2 + 5$, 则

$$F_x = -8 - y + 2x, \quad F_y = -x, \quad F_z = 1.$$

于是点 $(2, -3, 1)$ 处的法向量为

$$\mathbf{n} = (-8 - y + 2x, -x, 1) \Big|_{(2, -3, 1)} = (-1, -2, 1) = -(1, 2, -1),$$

所以在点 $(2, -3, 1)$ 处此曲面的切平面方程为

$$(x-2) + 2(y+3) - (z-1) = 0, \text{ 即 } x + 2y - z + 5 = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

(2) 令 $F(x, y, z) = xy - z^2$, 则

$$F_x = y, \quad F_y = x, \quad F_z = -2z,$$

于是点 (x_0, y_0, z_0) 处的法向量为

$$\mathbf{n} = (y, x, -2z)_{(x_0, y_0, z_0)} = (y_0, x_0, -2z_0),$$

所以在点 (x_0, y_0, z_0) 处此曲面的切平面方程为

$$y_0(x-x_0) + x_0(y-y_0) - 2z_0(z-z_0) = 0,$$

即

$$y_0x + x_0y - 2z_0z = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{y_0} = \frac{y-y_0}{x_0} = \frac{z-z_0}{-2z_0}.$$

3. 求曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上的点 M_0 , 使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 因为 $\frac{dx}{dt}=1, \frac{dy}{dt}=2t, \frac{dz}{dt}=3t^2$, 设所求点 M_0 对应的参数为 t_0 , 于是曲线在该点处的切向量可取为

$$\boldsymbol{T} = (1, 2t_0, 3t_0^2),$$

已知平面的法向量 $\boldsymbol{n} = (1, 2, 1)$, 由切线与平面平行, 有

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \text{ 即 } (1, 2t_0, 3t_0^2) \cdot (1, 2, 1) = 1 + 4t_0 + 3t_0^2 = 0,$$

得由上式可解得

$$t_0 = -1 \text{ 和 } t_0 = -\frac{1}{3},$$

于是所求点 M_0 为 $(-1, 1, -1)$ 或 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$.

4. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 的平行于平面 $x + 4y + 6z = 0$ 的切平面.

解 设点 (x, y, z) 为椭球面上任一点, 则该点处切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n} = (2x, 4y, 6z),$$

已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1 = (1, 4, 6)$. 因为所求切平面与已知平面 $x - y + 2z = 0$ 平行,

可知 $\boldsymbol{n} // \boldsymbol{n}_1$, 于是有

$$\frac{2x}{1} = \frac{4y}{4} = \frac{6z}{6}, \quad (1)$$

又因为点 (x, y, z) 在椭球面上, 应满足椭球面方程

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21, \quad (2)$$

由式(1)及式(2)可求得两点 $(1, 2, 2)$ 和 $(-1, -2, -2)$, 上述两点即为所求切点, 它们所对应的切平面的法向量分别为 $(2, 8, 12)$ 和 $(-2, -8, -12)$, 所以所求的切平面方程为

$$2(x-1) + 8(y-2) + 12(z-2) = 0 \text{ 和 } -2(x+1) - 8(y+2) - 12(z+2) = 0,$$

即

$$x + 4y + 6z = 21 \text{ 和 } x + 4y + 6z = -21.$$

注意 常见的错误是由 $\boldsymbol{n} // \boldsymbol{n}_1$, 得到 $2x=1, 4y=4, 6z=6$, 于是切点为 $(\frac{1}{2}, 1, 1)$.

必须注意, 上述解法错在混淆了向量相等与向量平行这两个概念. 两平面平行, 则

两平面的法向量平行, 从而法向量的对应坐标成比例, 而不是相等.

5. 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上求点 M_0 , 使该点的法线与坐标轴成等角.

解 设点 M_0 的坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 椭球面在该点的法向量为

$$\mathbf{n} = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2} \right) = 2 \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2} \right),$$

法向量 \mathbf{n} 的方向余弦为

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\frac{x_0}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}}, & \cos \beta &= \frac{\frac{y_0}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{\frac{z_0}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}}, \end{aligned}$$

由于 M_0 点的法线与坐标轴成等角, 所以 $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma$, 即有

$$\frac{x_0}{a^2} = \frac{y_0}{b^2} = \frac{z_0}{c^2}, \quad (3)$$

又因为点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 在椭球面上, 应满足椭球面方程

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1, \quad (4)$$

由式(3)及式(4)可求得

$$x_0 = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad y_0 = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad z_0 = \pm \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

所以所求点 M_0 的坐标为

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a^2, b^2, c^2) \text{ 和 } -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a^2, b^2, c^2).$$

6. 证明: 与锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 相切的平面通过坐标原点.

证 法 1 设 (x, y, z) 为锥面上任一点, 则该点处的法向量为

$$\mathbf{n} = (2x, 2y, -2z) = 2(x, y, -z),$$

该点处的切平面为

$$x(X - x) + y(Y - y) - z(Z - z) = 0 \text{ 即 } xX + yY - zZ = 0,$$

显然这切平面通过原点.

法 2 要证曲面的任一切平面通过坐标原点, 只须证明任一点的切平面的法向量与该点的向径垂直.

锥面上任一点 (x, y, z) 处的切平面的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, -z)$, 该点的向径为 $\mathbf{r} = (x, y, z)$. 因 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = x^2 + y^2 - z^2 = 0$, 从而切平面经过坐标原点.

7. 证明: 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和为常数.

证 设点 (x, y, z) 为曲面上任意一点, 则该点处的法向量为

$$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}} \right),$$

该点处的切平面为

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(X - x) + \frac{1}{2\sqrt{y}}(Y - y) + \frac{1}{2\sqrt{z}}(Z - z) = 0,$$

即

$$\frac{X}{\sqrt{x}} + \frac{Y}{\sqrt{y}} + \frac{Z}{\sqrt{z}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

由于点 (x, y, z) 是曲线上的点, 故 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$, 切平面方程又可写成

$$\frac{X}{\sqrt{x}} + \frac{Y}{\sqrt{y}} + \frac{Z}{\sqrt{z}} = \sqrt{a}, \quad \text{化成截距式} \quad \frac{X}{\sqrt{ax}} + \frac{Y}{\sqrt{ay}} + \frac{Z}{\sqrt{az}} = 1,$$

所以截距之和为

$$\sqrt{ax} + \sqrt{ay} + \sqrt{az} = \sqrt{a}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) = (\sqrt{a})^2 = a.$$

注意 容易出现的问题是, 在写出切平面方程

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(X - x) + \frac{1}{2\sqrt{y}}(Y - y) + \frac{1}{2\sqrt{z}}(Z - z) = 0$$

后, 没有利用点 (x, y, z) 在曲面上, 将切平面方程化简为 $\frac{X}{\sqrt{x}} + \frac{Y}{\sqrt{y}} + \frac{Z}{\sqrt{z}} = \sqrt{a}$,

致使后面的运算过于繁杂.

*8. 利用全微分求下述各数的近似值:

(1) $(1.04)^{2.02}$;

(2) $\sin 29^\circ \tan 46^\circ$.

解 (1) 设 $f(x, y) = x^y$, 显然, 要计算的值就是函数在 $x = 1.04$, $y = 2.02$ 时的函数值 $f(1.04, 2.02)$.

取 $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0.04$, $\Delta y = 0.02$, 由于

$$f(1, 2) = 1, \quad f_x(x, y) = yx^{y-1}, \quad f_y(x, y) = x^y \ln x, \quad f_x(1, 2) = 2, \quad f_y(1, 2) = 0,$$

应用公式 $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$,

便有

$$(1.04)^{2.02} \approx 1 + 2 \times 0.04 + 0 \times 0.02 = 1.08.$$

(2) 设 $f(x, y) = \sin x \tan y$, 显然, 要计算的值就是函数在 $x = 29^\circ = \frac{\pi}{6}$, $y = 46^\circ = \frac{\pi}{4}$ 时的函数值 $f(29^\circ, 46^\circ)$.

取 $x = \frac{\pi}{6}$, $y = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{180}$, $\Delta y = \frac{\pi}{180}$, 由于

$$f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.5,$$

$$f_x(x, y) = \cos x \tan y, \quad f_y(x, y) = \sin x \sec^2 y,$$

$$f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \sec^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

应用公式 $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$,

便有

$$\begin{aligned} \sin 29^\circ \tan 46^\circ &\approx 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) + 1 \cdot \frac{\pi}{180} \\ &\approx 0.5 - 0.0151 + 0.0174 = 0.5023. \end{aligned}$$

*9. 设圆锥体的底半径 R 由 30cm 增加到 30.1cm, 高 H 由 60cm 减少到 59.5cm, 试求圆锥体体积变化的近似值.

解 设圆锥体的体积为 V , 则有

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

记 R, H 和 V 的增量依次为 $\Delta R, \Delta H$ 和 ΔV , 则

$$\Delta V \approx dV = V'_R \Delta R + V'_H \Delta H = \frac{2}{3} \pi R H \Delta R + \frac{1}{3} \pi R^2 \Delta H,$$

把 $R = 30$, $H = 60$, $\Delta R = 0.1$, $\Delta H = -0.5$ 代入上式, 得

$$\Delta V \approx \frac{2}{3}\pi \times 30 \times 60 \times 0.1 + \frac{1}{3}\pi \times 30^2 \times (-0.5) \approx -94.25 \text{ (cm}^3\text{)},$$

即圆锥体体积约减少了 94.25cm^3 .

*10. 一扇形的中心角为 60° , 半径为 20m , 如果将中心角增加 1° , 为了使扇形面积保持不变, 应将扇形半径减少多少 m (计算到小数点后面三位)?

解 扇形的中心角, 半径和面积依次为 θ, r 和 s , 则有

$$s = \frac{1}{2}\theta r^2,$$

记 θ, r 和 s 的增量依次为 $\Delta\theta, \Delta r$ 和 Δs , 则

$$\Delta s \approx ds = s'_\theta \Delta\theta + s'_r \Delta r = \frac{1}{2}r^2 \Delta\theta + \theta r \Delta r,$$

把 $\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $r = 20$, $\Delta\theta = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$, $\Delta s = 0$ 代入上式, 有

$$0 \approx \frac{1}{2} \times 20^2 \times \frac{\pi}{180} + \frac{\pi}{3} \times 20 \Delta r,$$

所以

$$\Delta r \approx -\frac{1}{6} \approx -0.167 \text{ (m)},$$

即扇形半径约减少了 0.167m .

*11. 设有直角三角形, 测得其两直角边的长分别为 $7 \pm 0.1\text{cm}$ 和 $24 \pm 0.1\text{cm}$, 试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边的长度分别为 x 和 y , 则斜边长度为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\begin{aligned} |\Delta z| \approx |dz| &= \left| \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right| \leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| |\Delta y| \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x|\Delta x| + y|\Delta y|) \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x\delta_x + y\delta_y), \end{aligned}$$

便得

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x\delta_x + y\delta_y).$$

当 $x = 7$, $y = 24$, $\delta_x = 0.1$, $\delta_y = 0.1$ 时

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 24^2}} (7 \times 0.1 + 24 \times 0.1) = 0.124 \text{ (cm)},$$

所以计算斜边长度 z 的绝对值误差约为 0.124cm .