第六章　定积分的应用

第二节　定积分的几何应用

1.求下列曲线所围成图形的面积：

(1) $y=x^2-2x, y=0, x=1$；

(2) $x=5y^2, x=1+y^2$；

(3) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$.

解　(1) $A=\int_1^2(2x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left(x^2-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\dfrac{2}{3}$.

(2) $A=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1+y^2-5y^2)\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{1}{2}}(1-4y^2)\,\mathrm{d}y=2\left(y-\dfrac{4}{3}y^3\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$.

(3)由对称性,

$$A=4\int_0^a y\,\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\,\mathrm{d}t$$

$$=12a^2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

2.求曲线 $y=|\lg x|$ 和直线 $y=0, x=0.1, x=10$ 所围成图形的面积（画出草图）.

解　如图 6. 1.

$$\mathrm{A}=\int_{0.1}^1|\lg x|\,\mathrm{d}x=\int_{0.1}^1(-\lg x)\,\mathrm{d}x+\int_1^{10}\lg x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{\ln 10}(x\ln x-x)\Bigg|_{0.1}^1+\frac{1}{\ln 10}(x\ln x-x)\Bigg|_1^{10}$$

$$=9.9-\frac{8.1}{\ln 10}.$$

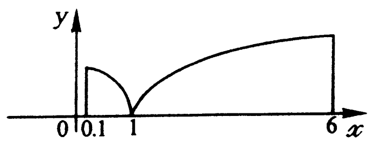

图 6.1

3.求位于曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 下方,该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间图形的面积（画出草图）.

解　如图 6. 2. 设 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线方程为 $y=kx$，切点为 (x_0,y_0),则 $k=y'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}$,切线 $y=\mathrm{e}^{x_0}x$ 代入 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\mathrm{e}^{x_0}x$ 有：

$x_0=1, k=\mathrm{e}$ 所求面积

$$A=\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}\,x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^1-\frac{\mathrm{e}}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

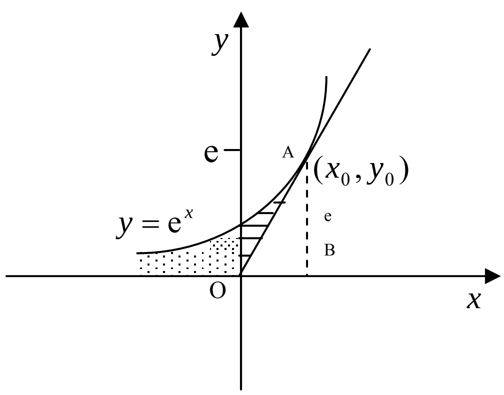

图 6.2

4.求双纽线 $\rho^2=\cos 2\theta$ 所围图形的面积.

解　双纽线所围成的图形如图 6.3 所示.利用对称性,只需求它在第一象限内的面积 A_1.

令 $\rho=0$, 得 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, 知 θ 的取值范围为 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$,于是,依极坐标下曲边扇形的面积公式,得

$$A=4A_1=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\,\mathrm{d}\theta.$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1.$$

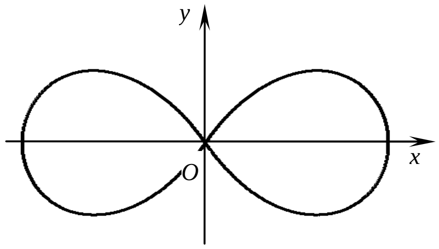

图 6.3

5.求曲线 $y=\ln x$ 在区间 $[2,6]$ 内一条切线,使得该切线与直线 $x=2,x=6$ 和曲线 $y=\ln x$ 所围成图形的面积最小.

解　设切点为 $(x_0,\ln x_0)$,(图 6.4)由 $y'=\dfrac{1}{x}$ 知,

切线方程为:

$$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0),\ y=\ln x_0+\frac{x}{x_0}-1.$$

$$A(x_0)=\int_2^6\left(\ln x_0+\frac{x}{x_0}-1-\ln x\right)\mathrm{d}x$$

$$=4(\ln x_0-1)+\frac{16}{x_0}-\int_2^6\ln x\,\mathrm{d}x.$$

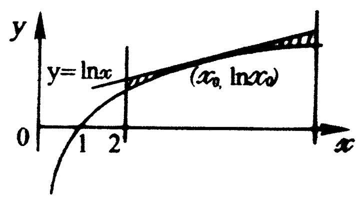

图 6.4

由 $A'(x_0)=\dfrac{4}{x_0}-\dfrac{16}{{x_0}^2}=0$,得 $x_0=4$.由实际问题的性质知, 所求切线的方程为

$$y=\frac{x}{4}+\ln 4-1.$$

6.由曲线 $y=x^2,y=\dfrac{1}{x}$ 及 $x=2$ 所围图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积 $V=\underline{(A)}$.

$(A)\displaystyle\int_1^2\pi\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$;　$(B)\displaystyle\int_0^1\pi x^4\,\mathrm{d}x+\int_1^2\pi\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$;　$(C)\displaystyle\int_0^1\pi\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$;

解　取 x 为积分变量, $x\in[1,2]$.

所求体积为两个旋转体体积之差,故体积元素为:

$$\mathrm{d}v=\pi\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x,$$

$V=\displaystyle\int_1^2\pi\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$,所以选 (A).

注意　常见的错误是选 (C).

7.函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)\ge g(x)\ge 0$,则由曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 及直线 $x=a,x=b$ 所围图形绕 x 轴旋转的体积是 $\underline{\displaystyle\int_a^b\pi[f^2(x)-g^2(x)]\,\mathrm{d}x}$.

解　取 x 为积分变量, $x\in[a,b]$,由上题知体积元素 $\mathrm{d}V=\pi[f^2(x)-g^2(x)]\,\mathrm{d}x$,故旋转

体体积为：

$$V=\int_a^b \pi[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x.$$

8.求曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 与直线 $y=0, x=1$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 $V=\int_0^1 \pi\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\right)^2 \mathrm{d}x=\pi\int_0^1 \dfrac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{\pi}{4}$.

9.已知曲线段 $y=\ln x(1\le x\le \mathrm{e})$ 与 $\dfrac{x-2}{\mathrm{e}-2}=y^2(2\le x\le \mathrm{e})$ 的交点为 $(\mathrm{e},1)$,求上述两条曲线段及 x 轴所围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

解 如图 6.5,取 x 为积分变量.

$$V=\int_1^{\mathrm{e}}\pi\ln^2 x\,\mathrm{d}x-\int_2^{\mathrm{e}}\pi\frac{x-2}{\mathrm{e}-2}\mathrm{d}x$$

$$=\pi x\ln^2 x\Big|_1^{\mathrm{e}}-2\pi\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{\mathrm{e}-2}\frac{1}{2}(x-2)^2\Big|_2^{\mathrm{e}}$$

$$=\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}-2).$$

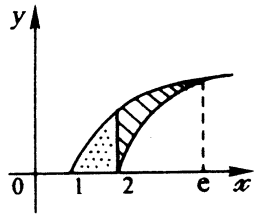

图 6.5

10.设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 S_1,他们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2 ,并且 $0<a<1$.

(1)试确定 a 的值,使 S_1+S_2 达到最小,并求出最小值;

(2)求 S_1+S_2 取最小值时所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 (1)当 $0<a<1$ 时,如图 6.6

$$S=S_1+S_2=\int_0^a(ax-x^2)\mathrm{d}x+\int_0^1(x^2-ax)\mathrm{d}x=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}.$$

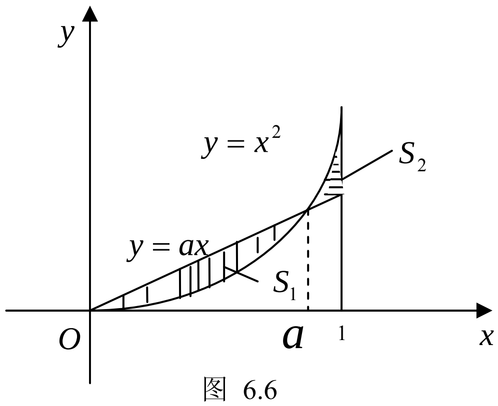

图 6.6

令 $S'=a^2-\dfrac{1}{2}=0$,得 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.又 $S''(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}>0$,

则 $S(\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ 是极小值,即最小值,其值为

$$S(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{6\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}.$$

综上所述,当 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $S(\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ 为所求最小值,最小值为 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$.

(2) $V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\dfrac{1}{2}x^2-x^4)\mathrm{d}x+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1(x^4-\dfrac{1}{2}x^2)\mathrm{d}x$

$$=\pi(\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{5})\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\pi(\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{6})\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi.$$

11.求圆 $(x-a)^2+y^2=b^2\ (0<b<a)$ 绕 y 轴旋转一周所成立体的体积.

解　法1　取 x 为积分变量, $x\in[a-b,a+b]$,体积元素为圆柱壳，有

$$\mathrm{d}V=2\pi x\cdot 2\sqrt{b^2-(x-a)^2}\,\mathrm{d}x=4\pi x\sqrt{b^2-(x-a)^2}\,\mathrm{d}x.$$

故

$$V=\int_{a-b}^{a+b}4\pi x\sqrt{b^2-(x-a)^2}\,\mathrm{d}x\overset{令t=a-x}{=}4\pi\int_{-b}^{b}(a-t)\sqrt{b^2-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=4\pi a\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2-t^2}\,\mathrm{d}t=8\pi a\int_{0}^{b}\sqrt{b^2-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=8\pi a\left[\frac{t}{2}\sqrt{b^2-t^2}+\frac{b^2}{2}\arcsin\frac{t}{b}\right]\Bigg|_0^b=2\pi^2ab^2.$$

法2　取 y 为积分变量, $y\in[-b,b]$,体积元素为带孔的薄圆板，有

$$\mathrm{d}V=\pi[(a+\sqrt{b^2-y^2})^2-(a-\sqrt{b^2-y^2})^2]\mathrm{d}y=4\pi a\sqrt{b^2-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

故

$$V=\int_{-b}^{b}4\pi a\sqrt{b^2-y^2}\,\mathrm{d}y=2a\pi^2b^2.$$

12.已知函数 $y(x)=\int_{\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,\mathrm{d}t$.其定义域是 $\underline{[-\sqrt{3},\sqrt{3}]}$; $y'(x)=\underline{\sqrt{3-x^2}}$, $y(x)$ 所表示的曲线全长 $L=\underline{\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}}$,并写出求解过程.

解　$y(x)$ 的定义域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$, $y'(x)=\sqrt{3-x^2}$.

$$L=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+(3-x^2)}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{x=2\sin t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\cos t\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t=8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}.$$

13.求悬链线 $y=\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\ (-1\le x\le 1)$ 的长度.

解　法1　$y'=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$,

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+\frac{1}{4}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x,$$

$$s=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^1=\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}=2\operatorname{sh}1.$$

法2　$y=\operatorname{ch}x$, $y'=\operatorname{sh}x$,

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}\,\mathrm{d}x=\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x,$$

$$s=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x=2\operatorname{sh}x\Big|_0^1=2\operatorname{sh}1.$$

14.求心脏线 $\rho=a(1-\cos\theta)$ 的全长 $(a>0)$.

解　由对称性知, $s=2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\theta$.

$$\because\ \sqrt{\rho^2+\rho'^2}=a\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=a\sqrt{2(1-\cos\theta)}=2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|,$$

$$\therefore \quad s = 2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\theta = 4a\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta = 4a\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= -8a\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a\,.$$

15.求曲线$\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2). \end{cases}$自$t=0$至$t=1$的一段弧长.

解 $\mathrm{d}s = \sqrt{x_t' + y_t'}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{2t}{1+t^2}\right)}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t\,,$

$$s = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = \ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})\,.$$

第三节　定积分的物理应用

1.一弹簧原长 $100\,\mathrm{cm}$,已知弹簧在受压时的压缩力与它被压短的距离成正比(服从虎克定律).又知将弹簧由$90\,\mathrm{cm}$压缩到 $75\,\mathrm{cm}$时的压缩力增加 $15\,\mathrm{kg}$,试问此过程中压缩力所作的功为多少?

解　由题意可知弹簧被压缩长度δ时,所受压缩力$F = k\delta$.又由题意可知,当δ由$\delta_1 = 100\,\mathrm{cm} - 90\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{cm}$增加到$\delta_2 = 100\,\mathrm{cm} - 75\,\mathrm{cm} = 25\,\mathrm{cm}$时,压缩力由$F_1$变化为$F_2$,增加的压缩力$F_2 - F_1 = 15\,\mathrm{kg}$,于是可求出弹簧的弹性系数$k$如下:

$$k = \frac{F_2 - F_1}{\delta_2 - \delta_1} = \frac{15\,\mathrm{kg}}{15\,\mathrm{cm}} = 1(\mathrm{kg/cm}).$$

为了用定积分计算压缩力作功,首先应建立坐标系,不妨将坐标原点O设在弹簧原长处,弹簧被压端的位置坐标为x,当弹簧由$90\mathrm{cm}$压到$75\mathrm{cm}$时,x由$x_1 = 10\,\mathrm{cm}$变为$x_2 = 25\,\mathrm{cm}$,故

$$W = \int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x = \int_{10}^{25} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_{10}^{25} = 265.5\,\mathrm{kg\cdot cm} = 25.725\,\mathrm{J}\,.$$

2.设半径为R的半球形水池装满水,将水从池中抽出,当抽水所作的功为将全部水抽完所作功的一半时,问水面下降的高度h为多少?

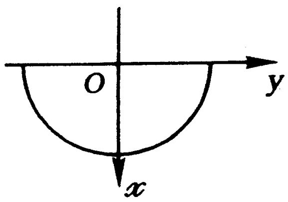

图 6.7

解　如图 6.7 建立坐标系, $x \in [0, R]$. 功元素

$$\mathrm{d}W = \rho g\,\pi\,y^2 \cdot x\,\mathrm{d}x = \rho g\,\pi(R^2 - x^2)x\,\mathrm{d}x$$

由题设

$$\int_0^R \rho g\,\pi(R^2 - x^2)x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^h \rho g\,\pi(R^2 - x^2)x\,\mathrm{d}x\,,$$

即 $$\frac{\pi}{2}(2R^2h^2 - h^4) = \frac{\pi}{4}R^4\,.$$

从而

$$2h^4 - 4R^2h^2 + R^4 = 0,\text{所以}\, h = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}R}\ (\text{负值舍去}).$$

3.水坝中有一直立的矩形闸门,宽$10\,\mathrm{m}$,深$6\,\mathrm{m}$,闸门上边缘平行于水面,试求:

(1)水面在闸门顶上$8\,\mathrm{m}$时闸门所受的压力;

(2)欲求使所受压力加倍,则水面应升高多少米?

解　法1　如图 6.8 取坐标系, $x\in[0,6]$.

(1)压力元素

$$\mathrm{d}F = 10\,\mathrm{d}x\cdot\rho g(8+x) = 9.8\times10^4(8+x)\,\mathrm{d}x,$$

压力

$$F=\int_0^6 9.8\times10^4(8+x)\,\mathrm{d}x = 6468\times10^3\ \mathrm{KN}\quad (2)$$

$$\int_0^6 9.8\times10^4(h+x)\,\mathrm{d}x = 2F = 6468\times2\times10^3,$$

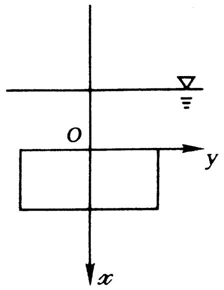

图 6.8

解得 $h=19, 19-8=11$,故欲使压力加倍,则水面应升高 $11\mathrm{m}$.

法2　若以水面所在直线为 y 轴, $x\in[8,14]$.

(1)压力元素　$\mathrm{d}F = 100\,\mathrm{d}x\cdot\rho g x = 9.8\times10^4 x\,\mathrm{d}x$,

压力　$F=\int_8^{14} 9.8\times10^4 x\,\mathrm{d}x$.

(2)类似于解法 1.

4.如图 6.9,设有一长度为 l,线密度为 ρ 的均匀细直棒,在与棒的一端垂直距离为 a 单位处一质量为 m 的质点 M,设求细棒对质点的引力.

解　在棒上取子区间 $[y, y+\mathrm{d}y]$,把它近似看作一个质点,引力元素

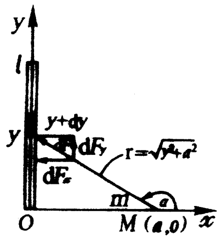

图 6.9

$$\mathrm{d}F = K\cdot\frac{m\rho\,\mathrm{d}y}{a^2+y^2}\qquad (K\text{ 为引力常数}).$$

$\mathrm{d}F$ 在 x 轴与 y 轴上的分力:

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cdot\cos\alpha = -\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}\cdot\frac{Km\rho\,\mathrm{d}y}{a^2+y^2},$$

$$\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\cdot\sin\alpha = -\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}\cdot\frac{Km\rho\,\mathrm{d}y}{a^2+y^2}$$

故

$$F_x = -\int_0^l Km\rho a\frac{\mathrm{d}y}{(a^2+y^2)^{3/2}} \overset{y=a\tan u}{=} -Km\rho a\int_0^{\arctan\frac{l}{a}}(a^2\sec^2 u)^{-\frac{3}{2}}a\sec^2 u\,\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{Km\rho}{a}\int_0^{\arctan\frac{l}{a}}\cos u\,\mathrm{d}u = -\frac{Km\rho l}{a\sqrt{a^2+l^2}}.$$

$$F_y = \int_0^l Km\rho\frac{y\,\mathrm{d}y}{(a^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}Km\rho\int_0^l (a^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}(a^2+y^2)$$

$$= Km\rho\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}\right),$$

所求引力 $\vec{F}=(\mathrm{F}_x-\mathrm{F}_y)$.

第六章　定积分的应用（总习题）

1. 曲线 $y^2=2x$ 在点 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 的法线方程是 $\underline{x+y-\frac{3}{2}=0}$，该法线与曲线的交点为 $\underline{\left(\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{9}{2},-3\right)}$，它们所围成图形的面积是 $\underline{\frac{16}{3}}$.

解　$2yy'=2, y'=\frac{1}{y}$. 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 处切线斜率 $K=\left.\frac{1}{y}\right|_{\substack{x=\frac{1}{2}\\ y=1}}=1$，所以法线斜率为 -1，故法线方程为 $y-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即：$x+y-\frac{3}{2}=0$.

联立 $\begin{cases} y^2=2x, \\ x+y-\frac{3}{2}=0. \end{cases}$ 解得交点为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$，$\left(\frac{9}{2},-3\right)$ 法线与切线所围面积

$$A=\int_{-3}^{1}\left(\frac{3}{2}-y-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}\,y=\frac{16}{3}.$$

2. 曲线 $\rho=1-\cos\theta$ 与 $\rho=\cos\theta$ 的交点坐标 $(\rho_0,\theta_0)=$ ______，它们所围图形的公共部分面积的积分表达式为 ______，面积值为 ______.

解　如图 6.10 所示，图形对称于 x 轴，故只需求它在第一象限内的面积 A_1. 先求交点，由`

$$\begin{cases} \rho=\cos\theta, \\ \rho=1-\cos\theta \end{cases}$$

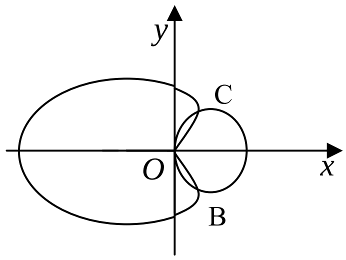

图 6.10

得交点 C 的极坐标 $\theta=\frac{\pi}{3}$，于是所求面积

$$A=2A_1=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\,\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta\right]$$

$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}-\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{4}\right)\mathrm{d}\,\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{4}\,\mathrm{d}\,\theta\right]$$

$$=\left[\frac{3}{2}-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{7}{12}\pi-\sqrt{3}.$$

3. 在曲线族 $y=a(1-x^2)$（a 为大于零的任意常数）中，求一条曲线，使这条曲线和它在 $(-1,0)$ 及 $(1,0)$ 两点处的法线所围成的面积最小.

解　利用对称性简化计算 $y'=-2ax, y'(1)=-2a$，故曲线在点 $(1,0)$ 处的法线为

$y=\dfrac{x-1}{2a}$, 从而

$$S=2\int_0^1[a(1-x^2)-\frac{x-1}{2a}]\,\mathrm{d}\,x=\frac{4}{3}a+\frac{1}{2a}.$$

令 $S'(a)=0$, 得 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, 由题意知面积的最小值存在, 所以所求曲线为

$$y=\frac{\sqrt{6}}{4}(1-x^2).$$

4. 求由曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 分别绕 x 轴及直线 $y=b$ 旋转所得旋转体的体积 $(a>0,b>0)$.

解　法 1　$V_x=\int_{-a}^{a}\pi y^2\,\mathrm{d}\,x=\int_{-a}^{a}\pi b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}\,x=\dfrac{4}{3}\pi b^2 a$.

$$V_{y=b}=\int_{-a}^{a}\left[\pi\left(b+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2-\pi\left(b-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2\right]\mathrm{d}\,x$$

$$=8\int_0^a\pi b^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}\,x=2\pi^2ab^2.$$

法 2　椭圆的参数方程为 $x=a\sin t, y=b\cos t$.

$$V_x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(b\cos t)^2\,\mathrm{d}\,a\sin t=2\pi b^2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,\mathrm{d}\,t=\frac{4}{3}\pi b^2a.$$

$$V_{y=b}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi[(b+b\cos t)^2-(b-b\cos t)^2]\,\mathrm{d}\,a\sin t$$

$$=8\pi b^2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t=2\pi^2ab^2.$$

5. 设曲线 $y=ax^2\,(a>0,x\ge 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A, 过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形. 问 a 为何值时, 该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大? 最大体积是多少?

解　当 $x\ge 0$ 时, 由 $\begin{cases}y=ax^2,\\ y=1-x^2.\end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$, $y=\dfrac{a}{1+a}$, 故直线 OA 的方程为

$$y=\frac{ax}{\sqrt{1+a}}.$$

旋转体的体积

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left(\frac{a^2x^2}{1+a}-a^2x^4\right)\mathrm{d}\,x=\pi\left[\frac{a^2}{3(1+a)}x^3-\frac{a^2}{5}x^5\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^{5/2}}.$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\,a}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{2a(1+a)^{\frac{5}{2}}-a^2\cdot\frac{5}{2}(1+a)^{\frac{3}{2}}}{(1+a)^5}=\frac{\pi(4a-a^2)}{15(1+a)^{\frac{7}{2}}}\qquad(a>0).$$

令 $\dfrac{\mathrm{dV}}{\mathrm{da}}=0$, 并且 $a>0$, 得惟一驻点 $a=4$. 由题意知此旋转体体积在 $a=4$ 时取最大值,

其最大体积为

$$V = \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{16}{5^{\frac{5}{2}}} = \frac{32\sqrt{5}}{1875}\pi .$$

6. 用铁锤将铁钉子击入木板，设木板过铁钉的阻力与铁钉击入木板之深度成正比，每次打击铁钉所作的功相等，第一锤将钉子击入木板1cm，问第二锤将把钉子又击入若干.

解　第一次铁锤所作功：$W_1 = \int_0^1 kx\,\mathrm{d}\,x = \frac{k}{2}$；第二次铁锤击钉作功：

$$W_2 = \int_1^h kx\,\mathrm{d}\,x = \frac{k}{2}(h^2-1) .$$

依题意，$W_1 = W_2$，有 $\frac{k}{2} = \frac{k}{2}(h^2-1)$，解得 $h=\sqrt{2}$．因此，第二次击钉时，铁钉进入木板 $\sqrt{2}-1 \approx 0.414\text{cm}$.

7. 设某潜水艇的观察窗形状为长、短半轴为a, b的半椭圆，短轴为其上沿，上沿与水平面平行，且位于水下c处，试求观察窗所受的水压力.

解　取坐标系如图 6.11 所示.

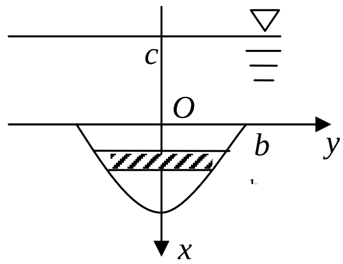

图 6.11

椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则

$$P = \rho g\int_0^a (c+x)2y\,\mathrm{d}\,x = 2\rho g\int_0^a (c+x)\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

令 $x = a\sin t$，则

$$P = 2\rho gab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (c+a\sin t)\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t = 2\rho gab\left(\frac{\pi}{4}c+\frac{1}{3}a\right).$$

其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度.

8. 如图半径为 R（单位：m）的球沉入水中，球的上部与水面相切，球的比重与水相同，现将球从水中取出，需作多少功？

解　水下提升不作功，在$[x, x+\mathrm{d}\,x]$上对应(图 6. 12)

$$\mathrm{d}V = \pi y^2\,\mathrm{d}\,x = \pi(R^2-x^2)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\mathrm{d}W = \rho(R-x)\pi g(R^2-x^2)\,\mathrm{d}\,x$$

故

$$W = \int_{-R}^{R} \pi g\rho(R-x)(R^2-x^2)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \pi gR\rho\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,\mathrm{d}\,x \ \left(\int_{-R}^{R} x(R^2-x^2)\,\mathrm{d}\,x = 0\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi gR^4\,\text{KJ} .$$

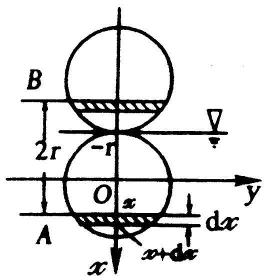

图 6.12