第三节

泰勒公式

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

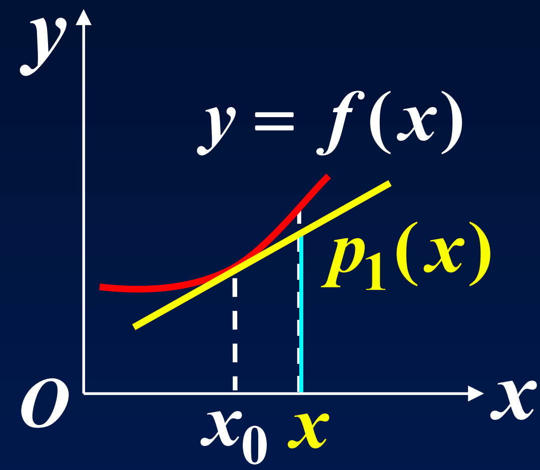
一、主要内容

(一) 泰勒(Taylor)公式

x 的一次多项式

1. 泰勒公式的建立

回顾：设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则



$$f(x)\approx \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{p_1(x)}$$

(当 $f'(x_0)\neq 0$, 且 $|x-x_0| << 1$时)

以直代曲

$$[f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)]$$

特点：
$$p_1(x_0)=f(x_0)$$
$$p_1'(x_0)=f'(x_0)$$

不足：1° 精确度不高

只适用于 $|x-x_0|$ 很小的 x,

当 $|x-x_0|$ 不是很小时, 误差较大.

2° 难以估计误差

只知道误差：$R_1(x)=o(x-x_0)$

不能具体估计出误差 $|R_1(x)|$ 的大小.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

需要解决的问题:

1° 寻找多项式 $p_n(x)$, 使得

$$f(x) \approx p_n(x),$$

且去掉对于 $|x - x_0|$ 很小的限制 .

2° 给出误差:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

的具体估计式.

$p_n(x)$ 的确定：

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

观察： $$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{p_1(x)} + o(x - x_0)$$

有 $p_1(x_0) = f(x_0)$ 相交

$p_1'(x_0) = f'(x_0)$ 相切

猜 $p_n(x)$ 与 $f(x)$ 在x_0处相同的导数的阶数越高，它们就有可能越接近？

寻求n次近似多项式:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

要求: $p_n(x_0) = f(x_0),$

$$p_n'(x_0) = f'(x_0),$$

$$\cdots,$$

$$p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

求系数 a_i: $a_0 = p_n(x_0) = f(x_0),$

$$p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + n a_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$a_1 = p_n'(x_0) = f'(x_0),$$

$$p_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + n\,a_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$p_n''(x) = 2\,!a_2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2!}p_n''(x_0) = \frac{1}{2!}f''(x_0), \cdots,$$

$$p_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

$$a_n = \frac{1}{n!}p_n^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),$$

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

——$f(x)$在x_0处的n阶泰勒多项式

$R_n(x)$ 的确定:

2. 带有皮亚诺型余项的n阶泰勒(Taylor)公式

定理3.6 若$f(x)$在包含x_0的某开区间(a,b)内具有直到n阶的导数，则对$\forall x \in (a,b)$，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

带有皮亚诺型余项的n阶泰勒公式

注 定理3.6的条件可以减弱:

定理3.6′ 若$f(x)$在$x = x_0$处n阶可导，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$$

$$(\, x \in U(x_0)\,)$$

提示: 证明同上，只需注意到:

$f^{(n)}(x_0)$存在 $\Longleftrightarrow$ $f^{(n-1)}(x)$在x_0处可导

$\Longrightarrow$ $f^{(n-1)}(x)$在某$U(x_0)$内有定义

$\Longrightarrow$ $f(x)$在某$U(x_0)$内$n-1$阶可导.

3. 带有拉格朗日型余项的n阶泰勒(Taylor)公式

定理3.7 若$f(x)$在包含x_0的某开区间(a,b)内具有直到$n+1$阶的导数，则对$\forall x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2\,!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}(x-x_0)^{n+1}$($\xi$在$x_0$与$x$之间).

带有拉格朗日型余项的n阶泰勒公式

注 1° 泰勒公式的余项估计

用$p_n(x)$代替$f(x)$的误差为 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \quad (\xi\text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

当在x_0的某邻域内$|f^{(n+1)}(x)|\le M$时，有

$$|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

显然 $R_n(x)=o((x-x_0)^n) \quad (x\to x_0).$

2° 泰勒公式的特例

(1) 当 $n = 0$ 时, 泰勒公式变为拉格朗日中值定理

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

(2) 当 $n = 1$ 时, 泰勒公式变为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

$(\xi$ 在 x_0 与 x 之间$)$

$$f(x) \approx f(x_0) + \underline{f'(x_0)(x - x_0)} \quad \boxed{\mathrm{d}f}$$

(3) 若在泰勒公式中 $x_0 = 0$, 称为麦克劳林公式

(二) 麦克劳林（Maclaurin）公式

在泰勒公式中取 $x_0 = 0, \xi = \theta x \ (0 < \theta < 1)$,

便可得到麦克劳林（ Maclaurin ）公式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

由此得近似公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

几个初等函数的麦克劳林公式:

(1) $f(x) = \mathrm{e}^x$

$\because \quad f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x, \quad f^{(k)}(0) = 1 \quad (k = 1, 2, \cdots)$

$$\therefore \mathrm{e}^x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

其中 $\quad R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}\,x^{n+1}$

$(0 < \theta < 1)$

(2) $f(x) = \sin x \quad \because \quad f^{(k)}(x) = \sin(x + k \cdot \frac{\pi}{2})$

$$f^{(k)}(0) = \sin k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ (-1)^{m-1}, & k = 2m-1 \end{cases} \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)\,!} + R_{2m}(x)$$

其中

$$R_{2m}(x) = \frac{\sin(\theta x + \frac{2m+1}{2}\pi)}{(2m+1)!} x^{2m+1} = \frac{(-1)^m \cos(\theta x)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

$$(0 < \theta < 1)$$

(3) $f(x) = \cos x$

类似可得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)\,!} + R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1}\cos(\theta\, x)}{(2m+2)\,!}\, x^{2m+2} \quad (0 < \theta < 1)$$

(4) $f(x)=(1+x)^{\alpha} \quad (x>-1)$

$\because \quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \qquad (k=1,2,\cdots)$

$$\therefore \quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

$(0<\theta<1)$

(5) $f(x)=\ln(1+x) \quad (x>-1)$

已知 $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k=1,2,\cdots)$

类似可得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{(n+1)}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0<\theta<1)$$

(三) 泰勒公式的应用

1. 在函数逼近中的应用

2. 在近似计算中的应用

3. 利用泰勒公式求极限

4. 利用泰勒公式进行证明

在近似计算中的应用

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

误差 $|R_n(x)| \le \dfrac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$,

其中 M 为 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ 在包含 $0, x$ 的某区间上的上界.

常见类型:

1) 已知 x 和误差限, 要求确定项数 n;

2) 已知项数 n 和 x, 计算近似值并估计误差;

3) 已知项数 n 和误差限, 确定公式中 x 的适用范围.

二、典型例题

例1 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开成带有拉格日型余项的 n 阶泰勒公式.

解 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2},\ f''(x)=\dfrac{(-1)^2 2!}{x^3},\ \cdots,$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},\ f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

$$f(-1)=-1,\quad f'(-1)=-1,\quad f''(-1)=-2!,$$

$$\cdots,\ f^{(n)}(-1)=-n!.$$

因此

$$f(x)=-1-(x+1)-(x+1)^2-\cdots-(x+1)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}$, ξ在 -1与x之间.

$$f(-1)=-1,\quad f'(-1)=-1,\quad f''(-1)=-2!,$$

$$\cdots,\quad f^{(n)}(-1)=-n!.$$

例2 计算$\sqrt{37}$的近似值，要求精确到小数点后的第5位.

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+R_2(x)$$

解 $\sqrt{37}=\sqrt{36+1}=6(1+\frac{1}{36})^{\frac{1}{2}}$,

选择$6(1+x)^{\frac{1}{2}}$的2阶麦克劳林公式来求其近似值.

$$6(1+x)^{\frac{1}{2}}=6(1+\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8}+R_2(x)),$$

其中$R_2(x)=\frac{(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}}{16}x^3 \quad (0<\theta<1)$.

取$x=\frac{1}{36}(x_0=0)$来计算，其误差为

$$6\left|R_2\left(\frac{1}{36}\right)\right|<6\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{36^3}<0.5\times10^{-5},$$

符合精度要求，因此

$$\sqrt{37}\approx6\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{36}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{36^2}\right)\approx6.08275.$$

$$R_2(x)=\frac{(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}}{16}x^3\quad(0<\theta<1).$$

例3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解 利用带皮亚诺余项的麦 克劳林公式.

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4),$$

$$\because \quad \mathrm{e}^t = 1+t+\frac{1}{2!}t^2+o(t^2)$$

当 $t=-\dfrac{x^2}{2}$ 时, $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2!}\dfrac{x^4}{4}+o(x^4),$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4} + o(x^4),$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - [1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4} + o(x^4)]}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{24} - \frac{1}{8})x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$.

解(方法1) 用洛必达法则，需换元. 令$x=\frac{1}{t}$, 可得

$$\lim_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$$

$$=\lim_{t\to0}[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)]=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

(方法2) 用泰勒公式

$$\lim_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\{x - x^2[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})]\}$$

$$= \lim_{x\to\infty}[\frac{1}{2} - x^2\cdot o(\frac{1}{x^2})] = \frac{1}{2}.$$

例5 证明$\sqrt{1+x} > 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}\ (x>0).$

证 $\because\ \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}\ (0<\theta<1)$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}} x^3 (0 < \theta < 1)$$

$$\therefore \ \sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} (x > 0).$$

例6 设函数$f(x)$在闭区间$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且$f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$, 证明在开区间$(-1,1)$内至少存在一点 ξ，使$f'''(\xi)=3$.

证 由麦克劳林公式有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(\eta)x^3}{3!}$$

$$=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(\eta)x^3$$

其中 η介于0和x之间，从而

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{1}{2} f''(0) - \frac{1}{6} f'''(\xi_1) \quad (-1 < \xi_1 < 0)$$

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{1}{2} f''(0) + \frac{1}{6} f'''(\xi_2) \quad (0 < \xi_2 < 1)$$

两式相减得 $\quad f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6$

又$f'''(x)$在$[\xi_1, \xi_2]$上必有最小值 m和最大值M,

从而 $\quad m \le \frac{1}{2}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] \le M,$

由介值定理，$\exists \xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (-1,1)$,使得

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] = 3.$$

三、同步练习

1. 试问函数 $\sin x - x$ 当 $x \to 0$ 时是 x 的几阶无穷小量?

2. 用近似公式 $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$ 计算 $\cos x$ 的近似值,使其精确到 0.005 , 试确定 x 的适用范围.

3. 计算无理数 e 的近似值 , 使误差不超过 10^{-6}.

4. 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4-3x} - 4}{x^2}$.

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

6. 利用泰勒公式求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

7. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

8. 设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，$|f(x)|\le a$，$|f''(x)|\le b$，其中a,b是非负数，求证：对一切$c\in(0,1)$有$|f'(c)|\le 2a+\dfrac{1}{2}b$.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，试证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\cdot|f(b)-f(a)|.$$

10. 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，$f(0)=f(1)=0$，且当 $x\in(0,1)$ 时，$|f''(x)|\leq A$，证明当 $0\leq x\leq 1$ 时，$|f'(x)|\leq\frac{A}{2}$.

11. 设$f(x)$在$[a,b]$上有n阶导数，$f(a)=0, f(b)=f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0$，则必存在 $\xi\in(a,b)$,使$f^{(n)}(\xi)=0.$

四、同步练习解答

1. 试问函数 $\sin x - x$ 当 $x \to 0$ 时是 x 的几阶无穷小量?

解 因为 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$, 故

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad (x \to 0),$$

所以当 $x \to 0$ 时, $\sin x - x$ 是 x 的三阶无穷小量 .

2. 用近似公式 $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$ 计算 $\cos x$ 的近似值，使其精确到 0.005，试确定 x 的适用范围.

解　近似公式的误差为

$$|R_3(x)| = \left| \frac{x^4}{4!} \cos(\theta x) \right| \le \frac{|x|^4}{24}.$$

令 $\frac{|x|^4}{24} \le 0.005$，解得 $|x| \le 0.588$,

即当 $|x| \le 0.588$ 时，由给定的近似公式计算的结果能准确到 0.005.

3. 计算无理数 e 的近似值，使误差不超过 10^{-6}.

解　在 e^x 的麦克劳林公式中令 $x=1$，得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1).$$

由于 $0 < e^{\theta} < e < 3$，欲使

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6},$$

由计算可知当 $n=9$ 时上式成立，因此

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 2.718281.$$

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

解 用洛必塔法则计算繁！

用泰勒公式将分子展到 x^2 项, 由于

$$\sqrt{3x+4}=2\sqrt{1+\tfrac{3}{4}x}=2(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2[1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{3}{4}x)^2+o(x^2)]$$

$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2),$$

类似地,

$$\sqrt{4-3x} = 2\left(1-\frac{3}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} = 2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}.$$

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解 $\because\quad e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2!}x^4+o(x^4),$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5),$$

$\therefore\quad e^{x^2}+2\cos x-3=(\dfrac{1}{2!}+2\cdot\dfrac{1}{4!})x^4+o(x^4),$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\dfrac{7}{12}.$

6. 利用泰勒公式求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

解 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$,

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - x(1+x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

7. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

解　　因为

$$\sqrt{1+x\sin x}=\sqrt{1+x^2+o(x^3)}=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$$

$$\sqrt{\cos x}=\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}=1-\frac{1}{4}x^2+o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}=\frac{3}{4}x^2+o(x^3),\quad (x\to 0)$$

$$\sin^2 x=(x+o(x^2))^2=x^2+o(x^3),\quad (x\to 0)$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^3)}{\frac{3}{4}x^2+o(x^3)}=\frac{4}{3}.$$

8. 设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，$|f(x)|\le a$，$|f''(x)|\le b$，其中a, b是非负数，求证：对一切$c\in(0,1)$有$|f'(c)|\le 2a+\frac{1}{2}b.$

证　对任意给定的$c\in(0,1)$，因$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，所以函数$f(x)$在点$x=c$处有二阶泰勒中值公式成立，即

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$$

其中 ξ在c与x之间，特别当 $x=0$和$x=1$时，

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_0)}{2!}(0-c)^2,$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(1-c)^2,$$

其中$0<\xi_0<c, c<\xi_1<1$．两式相减得

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)(1-c)^2-f''(\xi_0)c^2]$$

$$f'(c) = f(1) - f(0) - \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)(1-c)^2 - f''(\xi_0)c^2]$$

于是 $\boxed{|f(x)| \le a,\ |f''(x)| \le b,\ \ c \in (0,1)}$

$$\begin{aligned}
|f'(c)| &\le |f(1)| + |f(0)| \\
&\quad + \frac{1}{2!}[|f''(\xi_1)|(1-c)^2 + |f''(\xi_0)|c^2] \\
&\le a + a + \frac{b}{2}[(1-c)^2 + c^2] \\
&= 2a + \frac{b}{2}[2c^2 - 2c + 1] \\
&\le 2a + \frac{b}{2}[2c(c-1) + 1] \le 2a + \frac{b}{2}.
\end{aligned}$$

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，

且 $f'(a)=f'(b)=0$，试证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，

使得 $$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\cdot|f(b)-f(a)|.$$

证 分别在 a 点与 b 点应用泰勒公式，有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(x-a)^2$$

$$=f(a)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)\cdot(x-a)^2,\ (a<\xi_1<x)$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(x-b)^2$$

$$=f(b)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)\cdot(x-b)^2,\quad (x<\xi_2<b)$$

在上面两式中令 $x=\dfrac{a+b}{2}$, 可得

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{1}{8}f''(\xi_1)\cdot(b-a)^2 \qquad (1)$$

$$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{1}{8}f''(\xi_2)\cdot(b-a)^2 \qquad (2)$$

用$(2)-(1)$得

$$f(b)-f(a)+\frac{1}{8}(b-a)^2[f''(\xi_2)-f''(\xi_1)]=0$$

从而得

$$|f(b)-f(a)|=\frac{1}{8}(b-a)^2|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)|$$

$$\leq\frac{1}{8}(b-a)^2\cdot[|f''(\xi_2)|+|f''(\xi_1)|]$$

取$|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$, 则$\xi\in(a,b)$,

并有$|f(b)-f(a)|\leq\frac{1}{4}(b-a)^2\cdot|f''(\xi)|$,

即存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

10. 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，$f(0)=f(1)=0$，且当 $x\in(0,1)$ 时，$|f''(x)|\le A$，证明当 $0\le x\le 1$ 时，$|f'(x)|\le \dfrac{A}{2}$.

证 由泰勒公式，得

$$f(0)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(0-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-x)^2,$$

$$(0<\xi_1<x\le 1)$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$f(1)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x)^2,$$

$$(0<\xi_2<x\le 1)$$

两式相减，注意到 $f(0)=f(1)=0,$得

$$f'(x)=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

因为 $|f''(x)|\le A$，所以

$$|f'(x)|\le\frac{1}{2}[|f''(\xi_1)x^2|+|f''(\xi_2)(1-x)^2|]$$

$$|f'(x)| \le \frac{1}{2}[|f''(\xi_1)x^2| + |f''(\xi_2)(1-x)^2|]$$

$$\le \frac{1}{2}A[x^2 + (1-x)^2]$$

$$= \frac{1}{2}A(2x^2 - 2x + 1)$$

$$\le \frac{A}{2}.$$

11. 设$f(x)$在$[a,b]$上有n阶导数，$f(a)=0, f(b)=f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0$，则必存在 $\xi\in(a,b)$，使$f^{(n)}(\xi)=0$.

证　因为$f(x)$在$[a,b]$上有n阶导数，所以在$x=b$处可以利用 $f(x)$的$n-1$阶泰勒公式

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+\cdots$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$+\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(x-b)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-b)^n,$$

其中ξ在x与b之间.

因为 $f(b)=f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0,$

所以

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-b)^n,\ f(a)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(a-b)^n,$$

又$f(a)=0,\ (a-b)^n\neq 0,$ 故$f^{(n)}(\xi)=0, \xi\in(a,b).$