第二节

洛必达法则

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) $\frac{0}{0}$ 型未定式的洛比达法则

定理 3.4

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} F(x) = 0$

(2) $f(x)$与$F(x)$在$\mathring{U}(a)$内可导，且$F'(x) \neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在 (或为$\infty$)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$ (洛必达法则)

(二) $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的洛比达法则

定理 3.5

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=\infty$

(2) $f(x)$与$F(x)$在$\overset{\circ}{U}(a)$内可导，且$F'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为∞)

$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ (洛必达法则)

注

1° 洛必达法则适合于任一自变量极限过程，

如:

$$x \to a^+, \quad x \to a^-,$$

以及 $x \to \infty$， $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 的情形，

只要函数 $f(x), F(x)$ 满足相应于定理3.4及3.5

的条件即可.

2^{o} 在连续使用罗比达法则时， 每次使用前都要检验极限是否为未定式，否则可能导致错误.

3^{o} 应用洛比达法则时，是通过分子与分母分别求导数来确定未定式的极限，而不是求商的导数.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)} \neq \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]'$$

4° 在 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$中， $f'(x), F'(x)$

是对极限变量 x 求导的结果.

5° 应用洛必达法则时，应注意化简.

6° 当 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$不存在,且$\neq\infty$时，洛必达法则

失效.

7° 注意洛比达法则与其它求极限方法的灵活交叉使用.

例如, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$　　$\dfrac{\infty}{\infty}$　　用洛必达法则

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$ 不定

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$

(恒等变形)

8° 对数列极限不能直接用洛必达法则.

如: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} \cancel{=} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{1}=0$

数列极限与函数极限关 系:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow$

$\forall\{x_n\}: x_n\to a(n\to\infty),$

$x_n\neq a,$有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A.$

正确解:

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0.$

(三) 其他未定式的极限

洛必达法则 是针对 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的， 对于其他未定式，不能直接使用.

其他类型的常见未定式 有5 种:

$$0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0 .$$

关键: 将其它类型未定式转化为洛必达法则可以解决的类型: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

解决方法:

$0^0, 1^\infty, \infty^0$

令 $y = f^g$

取对数

$0 \cdot \infty$

$f \cdot g = \dfrac{f}{1/g}$

$\infty - \infty$

$f - g = \dfrac{1/g - 1/f}{1/g \cdot 1/f}$

$\dfrac{0}{0}$

$\dfrac{\infty}{\infty}$

二、典型例题

例1 求下列极限:

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}};\quad (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln\cos x}.$$

解 (1) 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

(2) 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{-\sin x}{\cos x}}=-\lim\limits_{x\to 0}\cot x=\infty.$

例2 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. $\dfrac{0}{0}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$ $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{6x-2}\neq\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6}{6}=1$

不是未定式
不能用洛必
达法则！

$=\dfrac{3}{2}$.

例3 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\ln x}\ (n>0).$ $\qquad \dfrac{\infty}{\infty}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\frac{1}{x}}$

是否能再用洛必达法则?

不能!

$=\lim\limits_{x\to+\infty} nx^n$

$=+\infty.$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\tan x}$.

解 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}$ $\quad(\dfrac{0}{0})\quad$ $(\tan x \sim x, x\to 0)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2} = \frac{1}{3}.$$

例5　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{x^2\sin x}$.

等价无穷小量代换

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)-(1+x)}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+x})x^3}$　恒等变形

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-x}{x^3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+x}}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x - x}{x^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}\cdot\frac{1}{2}$$

非零因子单独求极限

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

洛必达法则

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2} = \frac{1}{6}.$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$，下列推导是否正确？

解 $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2\sin\frac{1}{x})'}{(\sin x)'}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{\cos x}$$ 不存在

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{F(x)}$$ 也不存在.

错!

正确解: $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{0}{1}=0$$

例7 设 $f''(x)$存在，求

$$I=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}. \qquad \frac{0}{0}$$

分析 $f''(x)$存在$\Longrightarrow f'(t)$在$t=x$处可导，必连续

$\Longrightarrow f'(t)$在某$U(x)$内有定义(存在)

$\Longrightarrow f(t)$在某$U(x)$内可导

$\Longrightarrow f(t)$在某$U(x)$内连续

解 $I=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(x+h)+f(x-h)-2f(x)]'_h}{(h^2)'}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)+f'(x-h)\cdot(-1)-0}{2h}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x-h)}{h}$ $\qquad \dfrac{0}{0}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}[\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\dfrac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}]$

$=\dfrac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).$

思考 ① 下列推导是否正确?

$$I = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)+f(x-h)-2f(x)]'}{(h^2)'}$$

$$\cancel{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)+f'(x-h)-2f'(x)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} - \frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[f''(x)-f''(x)] = 0$$

不正确. 极限变量为**h**,分子也应对**h**求导 .

② $$I=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)+f''(x-h)}{1}$$

$$\cancel{=}\ \frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).$$

不正确. 题目未给 $f''(x)$连续的条件.

例8 求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\alpha}\ln x \ (\alpha>0).$ $0\cdot\infty$

解 $\text{原式}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}$ $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\right)=0.$$

例9 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$. $\infty-\infty$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

例10　求 $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}$.　　　1^{∞}

解 (方法1)　令 $y=(\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}$,

$$\because\quad \lim_{x\to e}\ln y=\lim_{x\to e}\frac{\ln(\ln x)}{1-\ln x}\qquad \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{-\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to e}\frac{1}{\ln x}=-1,$$

$$\therefore\quad 原式=\lim_{x\to e}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to e}\ln y}=e^{-1}.$$

(方法2)

$$\lim_{x\to e}(\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}$$

$$=\lim_{x\to e}\{[1+(\ln x-1)]^{\frac{1}{\ln x-1}}\}^{-1}$$

$$\overline{\overline{u=\ln x-1}}\lim_{u\to 0}[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{-1}$$

$$=e^{-1}.$$

例11 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x$. $\quad 0^0$

解 $\because \quad \lim\limits_{x\to 0} x\ln(1-\cos x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\dfrac{1}{x}} \qquad \dfrac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(1-\cos x)(-x^{-2})} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^3}{\frac{1}{2}x^2} = 0,$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}(1-\cos x)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln(1-\cos x)} = e^0 = 1.$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例12 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$. ∞^0

解 用洛必达法则时, 必须先求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

$$\because \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1+x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{1+x}=0,$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\mathrm{e}^0=1, \qquad \text{故原式}=1.$$

三、同步练习

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{a}{x}-(\frac{1}{x^2}-a^2)\ln(1+ax)]\ (a\neq 0)$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\sin x}$.

4. 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}\ (n\in \mathrm{N}^+,\lambda>0)$.

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$.

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

7. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^m}{(\sin x)^n}$ $(m,n$为整数$)$.

8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$.

9. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{x\sin^2 x}$.

10. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sqrt{3-x^2}\sin^3 x}$.

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(1-x\sin\dfrac{1}{x})$.

12. 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n^2}})$, 其中常数 $a>0$, $a\neq 1$.

13. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$.

14. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x)$.

15. 设函数 $f(x)$有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,

$f''(0)=4$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}$.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

16. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}, & 当 x>0, \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, & 当 x\le 0\end{cases}$

在$x=0$处的连续性 .

17. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

18. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\sin\frac{1}{n}}{n}$.

19. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$.

20. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$.

四、同步练习解答

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{a}{x}-(\frac{1}{x^2}-a^2)\ln(1+ax)]$ $(a\neq 0)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{a}{x}-\frac{\ln(1+ax)}{x^2}]+a^2\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+ax)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax-\ln(1+ax)}{x^2}+0 \qquad \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a-\dfrac{a}{1+ax}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2x}{2x(1+ax)}=\frac{a^2}{2}.$$

本题也可以对原式直接通分，两次运用洛必达法则，但计算量稍大.

2\. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

解 本例为$\dfrac{0}{0}$型不等式，可利用洛必 达法则求

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+2x+\cdots+nx^{n-1}}{1}$$

$$=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\sin x}$. $\dfrac{0}{0}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}+2e^{-2x}-4}{1-\cos x}$ $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-4e^{-2x}}{\sin x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8e^{2x}+8e^{-2x}}{\cos x}$$

$$=16.$$

4\. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^{\lambda x}}\quad(n\in\mathrm{N}^+,\lambda>0).$ $\quad\dfrac{\infty}{\infty}$

解 原式

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}}\qquad\frac{\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}}\qquad\frac{\infty}{\infty}$$

$$=\cdots$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda x}}$$

$$=0.$$

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$. $\dfrac{0}{0}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sec x-\cos x}$

等价无穷小代换

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sec x\tan x-(-\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sec x\dfrac{\tan x}{x}+\dfrac{\sin x}{x}}$$

恒等变形

$$=\frac{2}{1+1}=1.$$

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

解 令 $y=\dfrac{1}{x^2}$, 则

$$\text{原式}=\lim_{y\to+\infty} y^{50}e^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^{50}}{e^{y}} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{50\,y^{49}}{e^{y}}$$

$$=\cdots=\lim_{y\to+\infty}\frac{50\,!}{e^{y}}=0.$$

7. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x^m}{(\sin x)^n}$ (m,n为整数).

解 这是$\dfrac{0}{0}$型不等式，选用“等价 无穷小代换”法比较简单.

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x^m}{x^n}=\lim_{x\to0}x^{m-n}$$

$$=\begin{cases}0, 当 m>n;\\1, 当 m=n;\\\infty, 当 m<n.\end{cases}$$

8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$.

$\dfrac{0}{0}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$ 等价无穷小代换

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^4}$ 恒等变形

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x + x\cos x)(\sin x - x\cos x)}{x^4}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x + x\cos x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$$

非零因子单独求极限

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$$

洛必达法则

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2}$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}.$$

9. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{x\sin^2 x}$. $\dfrac{0}{0}$

等价无穷小量代换

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{x}+x-2e^{x}+2}{x^3}$ $\dfrac{0}{0}$

非零因子单独求极限

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x}+e^{x}+1-2e^{x}}{3x^2}$$ 洛必达法则

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x}+2e^{x}-2e^{x}}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{6}=\frac{1}{6}.$$

10. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sqrt{3-x^2}\sin^3 x}$.　　$\dfrac{0}{0}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$

非零因子单独求极限

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}$　　$\dfrac{0}{0}$

等价无穷小量代换

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$　　$\dfrac{0}{0}$

洛必达法则

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{\cancel{x}}{(1-x^2)^{3/2}}}{6\cancel{x}}$$

$$=-\frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(1-x\sin\frac{1}{x})$.　　$0\cdot\infty$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$　（令 $x=\frac{1}{t}$，倒代换）

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{t}\sin t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}\qquad\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{6t}=\frac{1}{6}.$$

12. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n^2}})$，其中常数 $a>0$，$a\neq 1$.

解 $\because \lim\limits_{x\to+\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x^2}}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}$ $\quad \dfrac{0}{0}$

$$\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to+0} \frac{a^t - a^{t^2}}{t} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to+0} \frac{a^t \ln a - a^{t^2}(\ln a)\cdot 2t}{1}$$

$= \ln a$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n^2}}) = \ln a.$

13\. 求 $\lim_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$. $\infty - \infty$

解 (方法1) 原式 $\overset{1+\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=\!=} \lim_{t\to 1}[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{(t-1)^2}\ln t]$

$$= \lim_{t\to 1}\frac{t-1-\ln t}{(t-1)^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{t\to 1}\frac{1-\frac{1}{t}}{2(t-1)} = \lim_{t\to 1}\frac{\frac{1}{t^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

(方法2) $\lim_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$ $\infty-\infty$

$$\xlongequal{\frac{1}{x}=t} \lim_{t\to 0}[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\ln(1+t)]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)^2} = \frac{1}{2}.$$

14. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x)$.　　$\infty-\infty$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}-1\right)$　　令 $t=\dfrac{1}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}-1}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[3]{1+t+t^2+t^3}-1}{t}\quad \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\dfrac{1}{3}(1+t+t^2+t^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1+2t+3t^2)}{1}=\frac{1}{3}.$$

15. 设函数 $f(x)$有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $f''(0)=4$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\dfrac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}$. 1^{∞}

解 $$\lim_{x\to 0}[1+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+\frac{f(x)}{x})}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{x})}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}.$$

由于函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，从而

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=0=f(0).$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=2,$$

$$\boxed{f''(0)=4}$$

故原式 $=e^2$.

16. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}, & 当x>0,\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, & 当x\le 0\end{cases}$

在$x=0$处的连续性．

解 $\because f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]}$

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}$ $\quad\dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad f(0^+) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad f(0^+) = f(0^-) = f(0) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

$\therefore \quad f(x)$在$x=0$处连续.

17. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.　　0^0

解　由于原式$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \ln x}$,

$\frac{\infty}{\infty}$

而 $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = 0,$　　等价无穷小量代换

因此，原式 $= e^0 = 1.$

18. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\sin\frac{1}{n}}{n}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}=0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\sin\frac{1}{n}}{n}=0.$

19. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})$.

解 记 $f(x)=[\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{x})]^x$，则 $f(n)=\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})$.

$$\because \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln[\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{x})]}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln[\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{x})]}{\frac{1}{x}}}=e^4,$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})=\lim_{x\to+\infty} f(x)=e^4.$$

20. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$.　$\infty\cdot 0$

解 (方法1)　洛必达法则

但用洛必达法则时, 必须改求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{x}}-1)$.

本题用此法计算较繁!

(方法2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}(n^{\frac{1}{n}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{n^{-\frac{1}{2}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln n}{n^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}$$　$e^u-1\sim u\ (u\to 0)$

$=0.$