# 第六节

# 函数图形的描绘

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

# 一、主要内容

## (一) 渐近线

**定义** 当曲线 $y=f(x)$ 上的一动点 $P$ 沿着曲线移向无穷远时，若点 $P$ 到某定直线 $L$ 的距离趋向于零，则称此直线 $L$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线.

### 1. 铅直渐近线

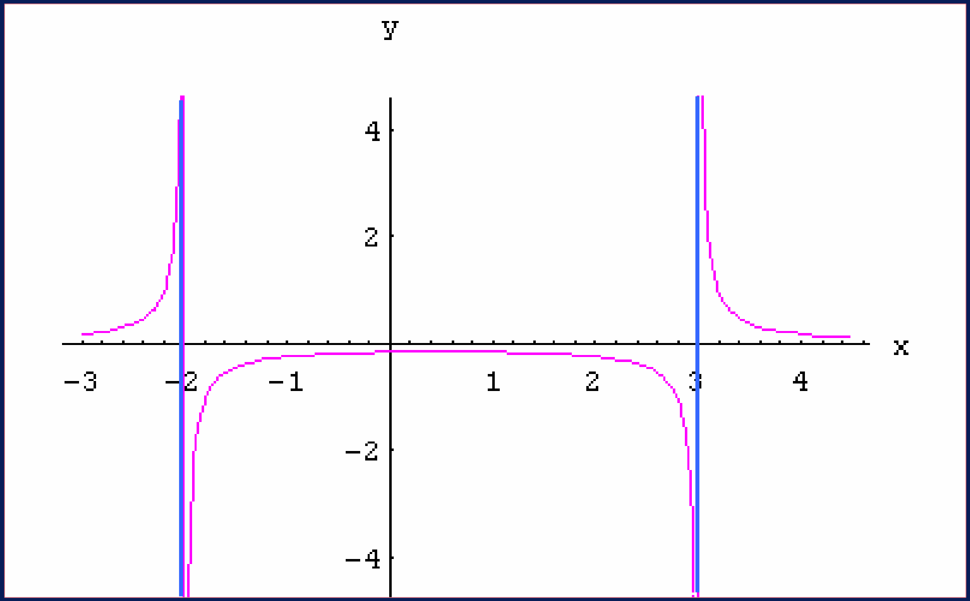
(垂直于 $x$ 轴的渐近线)：$x=x_0$

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$

那么 $x=x_0$ 就是 $y=f(x)$ 的一条铅直渐近线

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例如 $y=\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$,




有铅直渐近线两条: $x=-2,\quad x=3.$

## 2. 水平渐近线

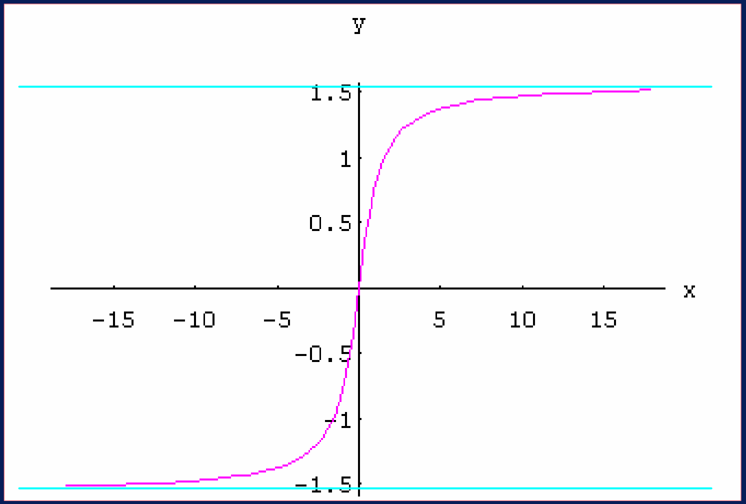
(平行于 $x$ 轴的渐近线)

$$y = b$$

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ ($b$ 为常数)

那么 $y = b$ 就是 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线

例如: $y = \arctan x$,




有水平渐近线两条:

$$y = \frac{\pi}{2}, \quad y = -\frac{\pi}{2}.$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

## 3. 斜渐近线 $y = ax + b$

其中 $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax]$.

$\begin{pmatrix} \text{或 } x \to -\infty, \\ \text{或 } x \to +\infty \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \text{或 } x \to -\infty, \\ \text{或 } x \to +\infty \end{pmatrix}$

**注** 下列三种情形之一，可 断定曲线 $y = f(x)$

不存在斜渐近线:

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ 不存在; (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a = 0$;

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ 存在,但 $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$ 不存在 .

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

## (二) 描绘函数图形的步骤

1. 确定函数 $y = f(x)$的定义域，并考察其奇偶性及周期性；

2. 求 $f'(x), f''(x)$，并求出 $f'(x)$及 $f''(x)$为 0 和不存在的点；

3. 列表判别增减及凹凸区间，求出极值和拐点；

4. 讨论函数的图形 有无渐近线;

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

5. 为了把图形描绘得更准确些，有时还需补充求出曲线上的一些点，如与坐标轴的交点等 .

6. 根据上面的讨论将曲线描绘出来.

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

## 二、典型例题

**例1** 求 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 的渐近线.

**解** $D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

$1^\circ$ 查水平渐近线

$\because \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\therefore$ $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 无水平渐近线.

$2^\circ$ 查铅直渐近线

$\because \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$,

$\therefore$ $x=-1$ 是曲线 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 的铅直渐近线.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

## 3° 查斜渐近线

$$\because \quad a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty} [f(x) - x]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{1+x} = -1,$$

$\therefore \quad y = x - 1$ 是该曲线的一条斜渐近 线.

**例2** 作函数 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$的图形.

**解** (1) 定义域为$(-\infty,+\infty)$, 无奇偶性及周期性.

(2) 求关键点

$$y'=x^2-2x,$$

$$y''=2x-2,$$

令 $y'=0$, 得 $x=0,\ 2,$

令 $y''=0$, 得 $x=1.$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

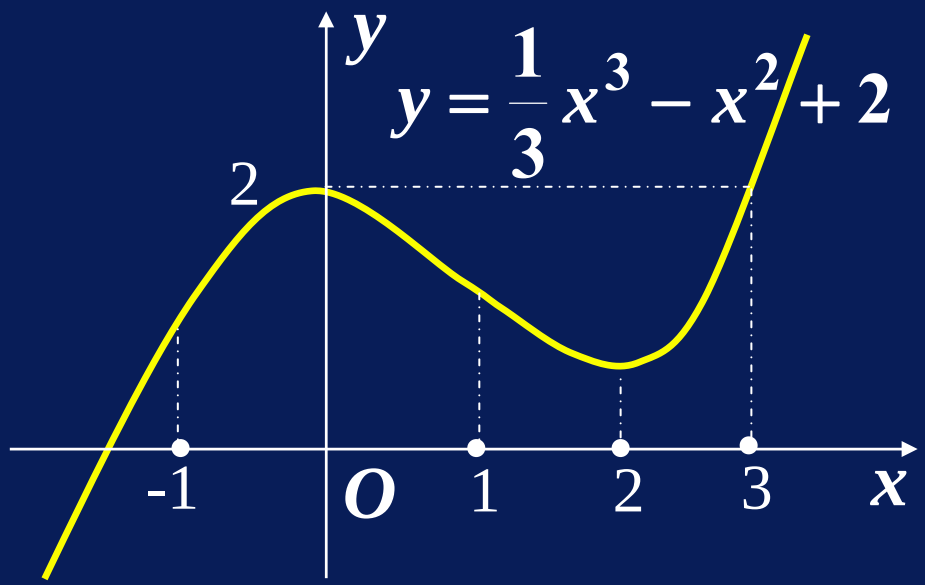
(3) 判别曲线形态

| $x$ | $(-\infty,0)$ | $0$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,2)$ | $2$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $y$ | | $2$ | | $\frac{4}{3}$ | | $\frac{2}{3}$ | |
| | | (极大) | | (拐点) | | (极小) | |

(4) 求特殊点

| $x$ | $-1$ | $3$ |
|---|---|---|
| $y$ | $\frac{2}{3}$ | $2$ |

(5) 作图




西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

**例3** 描绘函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

**解** (1) 定义域为$(-\infty,+\infty)$, 图形对称于 $y$ 轴.

(2) 求关键点

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad y''=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2),$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$; 令 $y''=0$ 得 $x=\pm1.$

(3) 判别曲线形态

只需讨论曲线对应于$[0,+\infty)$部分的图形 .

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

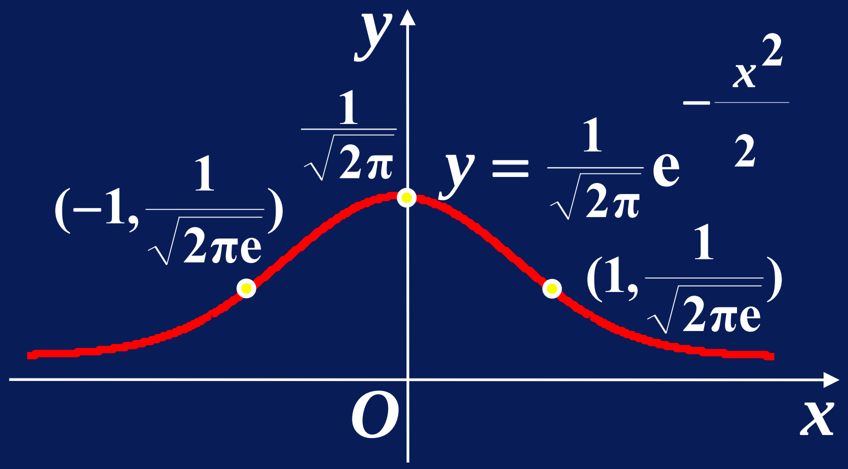
| $x$ | $0$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $y''$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$ | |
| | (极大) | | (拐点) | |

(4) 求渐近线

$\because \lim\limits_{x\to\infty} y = 0$

$\therefore y = 0$为水平渐近线

(5) 作图



**例4** 作函数 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 的图形.

**解** (1) $D=(-\infty,-1)\cup(-1+\infty), y(0)=0,$ 曲线过原点 .

无对称性及周期性.

(2) $y'=\dfrac{2x\cdot(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\dfrac{x(2+x)}{(1+x)^2}=1-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$y''=\dfrac{2}{(1+x)^3}\neq 0$

间断点： $x=-1;$

令 $y'=0,$ 得驻点： $x=-2, \quad x=0.$

(3) 列表判别

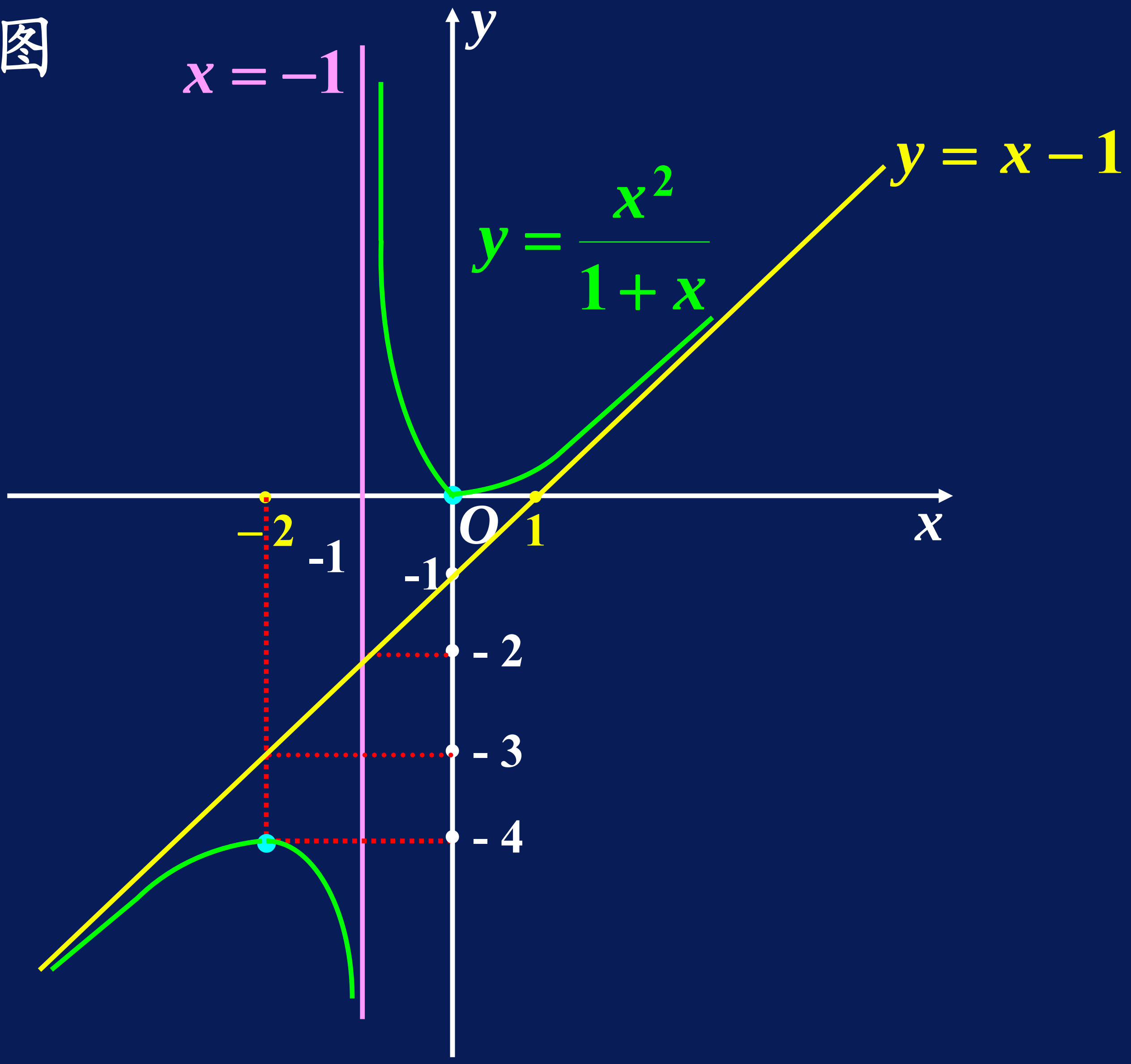
西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

| $x$ | $(-\infty,-2)$ | $-2$ | $(-2,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | | 极大值 $-4$ | | 无穷间断点 | | 极小值 $0$ | |

(4) 渐近线

(见例1)

(5) 作图



## 三、同步练习

1. 曲线 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{x^2}}{1-\mathrm{e}^{x^2}}$ 有(　　)条渐近线?

2. 描绘函数 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的图形.

3. 作函数 $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ 的图形.

4. 作函数 $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ 的图形.

5. 描绘方程 $(x-3)^2+4y-4xy=0$ 的图形.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

## 四、同步练习解答

1. 曲线 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{x^2}}{1-\mathrm{e}^{x^2}}$ 有(　　)条渐近线?

**解** $\because \quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\mathrm{e}^{x^2}}{1-\mathrm{e}^{x^2}}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\mathrm{e}^{x^2}}{1-\mathrm{e}^{x^2}}=\infty$,

$\therefore$ 曲线 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{x^2}}{1-\mathrm{e}^{x^2}}$ 有两条渐近线，

分别为水平渐近线 $y=-1$, 铅直渐近线 $x=0$.

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. 描绘函数 $y = \mathrm{e}^{-x^2}$ 的图形.

解 (1) 定义域为$(-\infty,+\infty)$, 图形对称于 $y$ 轴.

(2) 求关键点

$$y' = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}, \quad y'' = 2(2x^2-1)\,\mathrm{e}^{-x^2},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$; 令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(3) 判别曲线形态

只需讨论曲线对应于$[0,+\infty)$部分的图形.

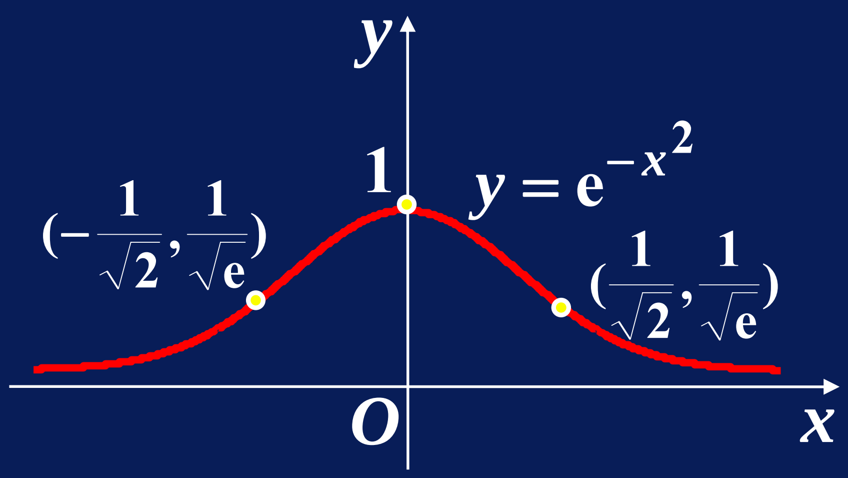
| $x$ | $0$ | $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $y'$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $y''$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $1$ | | $e^{-\frac{1}{2}}$ | |
| | (极大) | | (拐点) | |

(4) 求渐近线

$$\because \lim_{x\to\infty} y = 0$$

$\therefore y=0$ 为水平渐近线

(5) 作图




西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

3. 作函数$y=\dfrac{x}{x^2-1}$的图形.

解 (1) 定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 求关键点

$$y'=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2},\ y''=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3},$$

令 $y''=0$ 得 $x=0$.

(3) 判别曲线形态

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ |
| $y''$ | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ |
| $y$ | | | | $0$ | | | |
| | | (间断) | | (拐点) | | (间断) | |

(4) 求渐近线

$\because \lim\limits_{x\to\infty} y = 0, \ \therefore y = 0$ 为水平渐近线.

又 $\because \lim\limits_{x\to\pm 1} y = \infty, \therefore x = -1, x = 1$ 都为铅直渐近线.

$$y = \frac{x}{x^2-1}, \ y' = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}, \ y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3},$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

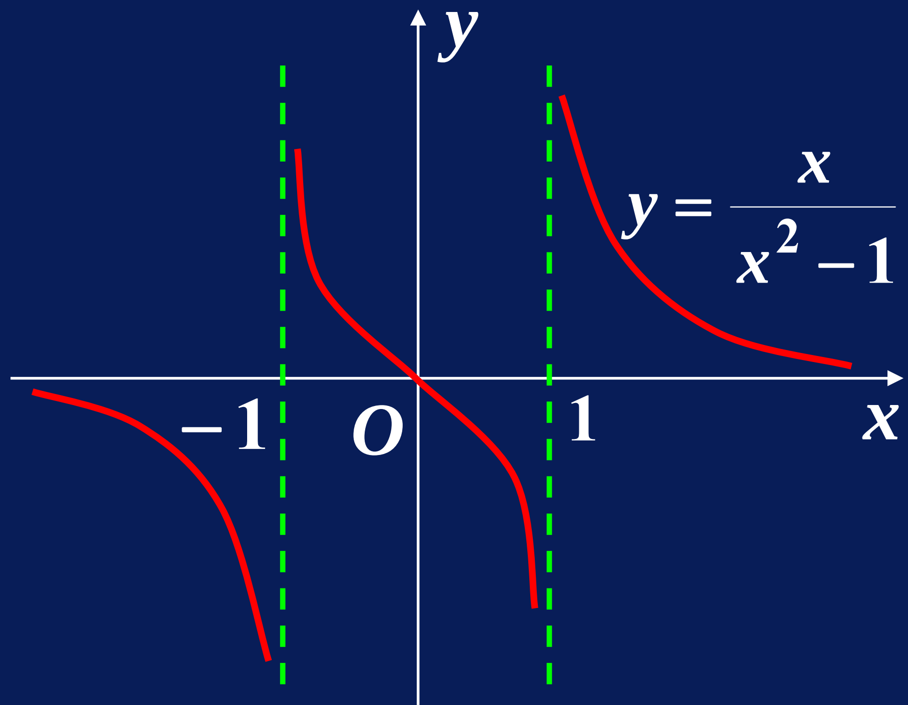
(5) 作图

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | $0$ | | | |
| | | (间断) | | (拐点) | | (间断) | |

水平渐近线: $y=0$,

铅直渐近线:

$$x=-1,\ \ x=1.$$




西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4. 作函数$y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$的图形.

解 (1) 定义域为 $x\geq 1, x<-1.$

(2) 求关键点

$$y'=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3(x-1)}},$$

求得函数的不可微点 $x=1$($x=-1$为间断点).

$$y''=\frac{-(2x-1)}{\sqrt{(x+1)^5(x-1)^3}}.$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

在函数定义域内没有使 $y''=0$ 的点.

(3) 判别曲线形态

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | | | | $+$ |
| $y''$ | $+$ | | | | $-$ |
| $y$ | | | | $0$ | |

$$\boxed{y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

(4) 求渐近线

$\because \lim\limits_{x\to\infty} y=1,\ \therefore y=1$ 为水平渐近线

又 $\because \lim\limits_{x\to -1} y=\infty,\ \therefore x=-1$ 为铅直渐近线.

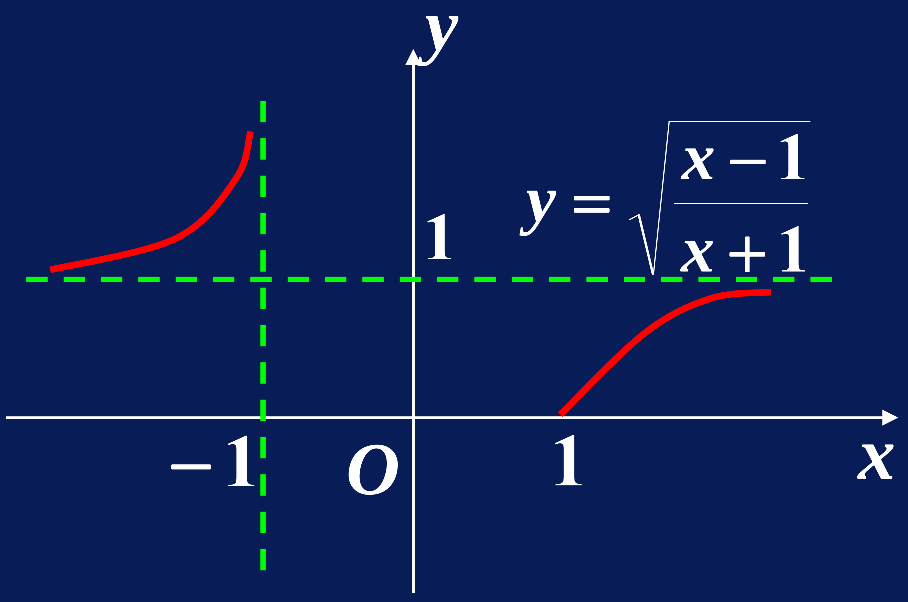
西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(5) 作图

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | $0$ | |

水平渐近线: $y=1$,

铅直渐近线: $x=-1$.




西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

5. 描绘方程$(x-3)^2+4y-4xy=0$ 的图形.

解 (1) $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$, 定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 求关键点

$\because \quad 2(x-3)+4y'-4y-4xy'=0$

$$\therefore \quad y'=\frac{x-3-2y}{2(x-1)}=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

令$y'=0$得 $x=-1, 3$ .

$\because \quad 2+4y''-8y'-4xy''=0$

$$\therefore \quad y''=\frac{1-4y'}{2(x-1)}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(3) 判别曲线形态

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,3)$ | $3$ | $(3,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | 无定义 | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| $y$ | | $-2$ | | | | $0$ | |
| | | (极大) | | | | (极小) | |

(4) 求渐近线 $\because \lim\limits_{x\to 1} y=\infty$, $\therefore x=1$ 为铅直渐近线

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)},\quad y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},\quad y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

又因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{4}$, 即 $a=\dfrac{1}{4}$,

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y-\frac{1}{4}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{1}{4}x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}=-\frac{5}{4},$$

$\therefore$ $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$ 为斜渐近线.

(5) 求特殊点

| $x$ | 0 | 2 |
| --- | --- | --- |
| $y$ | $-\dfrac{9}{4}$ | $\dfrac{1}{4}$ |

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$

$$y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

(6) 作图

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,3)$ | $3$ | $(3,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\nearrow$ | $-2$ (极大) | $\searrow$ | 无定义 | $\searrow$ | $0$ (极小) | $\nearrow$ |

铅直渐近线 $x=1$,

斜渐近线 $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$.

特殊点

| $x$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-\frac{9}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |