总复习(一)

基本概念、求极限的方法

- 一、主要内容
- 二、典型例题

下页 返回

一、主要内容

1. 微分学基本概念

函数、极限、无穷小、无穷大、无穷小的比较(高阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小)、连续、间断点、导数、微分.

2. 几个重要关系

(1) $\{x_n\}$收敛 $\begin{array}{c}\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow\end{array}$ $\{x_n\}$有界

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$ $\begin{array}{c}\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow\end{array}$ $f(x)$在某$\mathring{U}(x_0)$内无界

(3) 函数极限与其子列极限 的关系;

(4) 有极限的变量与无穷小 的关系;

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$

(5) 无穷大与无穷小的关系;

(6) 几个概念之间的关系

$$\text{可微} \Longleftrightarrow \text{可导} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \text{连续} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \text{极限存在}$$

3. 求极限的方法

(1) 极限定义;

(2) 极限存在的充分必要条件;

(3) 有关无穷小的运算;

(4) 极限运算法则;

(5) 极限存在准则;

(6) 两个重要极限;

(7) 函数的连续性;

(8) 导数定义;

(9) 利用微分中值公式;

(10) 洛必达法则;

(11) 定积分定义.

二、典型例题

例1 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$，问 a 为何值时，

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续； a 为何值时， $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

解 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}$ $\quad(\dfrac{0}{0})$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{6a\cancel{x}}{\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{-\cancel{2x}}{(1-x^2)^{3/2}}}=-6a$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x\sin\frac{x}{4}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x\cdot\frac{x}{4}} = 4\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2}$$

$$= 4\lim_{x\to 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} = 4\lim_{x\to 0^+} \frac{a^2e^{ax} + 2}{2} = 2a^2 + 4$$

$$f(0) = 6$$

$\because \quad \lim_{x\to 0} f(x)$存在 $\Longleftrightarrow$ $f(0^-) = f(0^+)$

即 $\quad -6a = 2a^2 + 4,\quad$ 得 $\quad a = -1,\quad$ 或 $\; a = -2.$

而 $f(x)$在$x = 0$处连续 $\Longleftrightarrow$ $f(0^-) = f(0^+) = f(0)$

即 $\quad -6a = 2a^2 + 4 = 6,$

$\therefore \quad$ 当$a = -1$时，$f(x)$在$x = 0$处连续；

当$a = -2$时，$\quad \lim_{x\to 0} f(x) = 12 \neq f(0) = 6,$

因而 $x = 0$是$f(x)$的可去间断点 .

例2 讨论
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sin x}, & x<0\\ 2, & x=0\\ \dfrac{\int_0^{2x}\ln(1+t)dt}{2x^2}, & x>0\end{cases}$$
的连续性,

并指出其间断点的类型.

解 1° 找 $f(x)$ 无定义的点

间断点：$x=n\pi\ (n=-1,-2,\cdots)$

$\because \quad \lim\limits_{x\to n\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to n\pi} \dfrac{x}{\sin x} = \infty \quad (n = -1, -2, \cdots)$

$\therefore \quad x = n\pi \ (n = -1, -2, \cdots)$是 $f(x)$的第二类无穷间断点.

2° 查分段点: $\quad x = 0$

$\because \quad f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{2x} \ln(1+t)dt}{2x^2}$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{\cancel{2} \cdot \ln(1+2x)}{\cancel{2} \cdot 2x} = 1$$

$$f(0^-) = f(0^+) = 1 \neq f(0) = 2$$

$\therefore \quad x = 0$是$f(x)$的第一类可去间断点 .

再由初等函数的连续性可知，$f(x)$的连续范围是

$$I = \{x \mid x \neq n\pi \ (n = 0, -1, -2, \cdots), x \in R\}$$

类似题

1. $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$的可去间断点的个数 $\underline{\quad 2 \quad}$.

2013考研

解 $f(x)$ 无定义的点: $x=0,\quad x=\pm 1.$

(1) $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x\ln|x|}$$

$$=1\times 1=1$$

$\therefore\quad x=0$是 $f(x)$的可去间断点 .

(2) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ (令 $u = x+1$)

$$= \lim_{u\to 0} \frac{(1-u)^{u-1}-1}{(u-1)u\ln|u-1|} = -\lim_{u\to 0} \frac{(1-u)^u-(1-u)}{(1-u)^2 u\ln(1-u)}$$

$$= -\lim_{u\to 0} \frac{1}{(1-u)^2} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{(1-u)^u-1+u}{u\ln(1-u)} = -\lim_{u\to 0} \frac{(1-u)^u-1+u}{u\ln(1-u)}$$

$$= -\lim_{u\to 0}\left[\frac{e^{u\ln(1-u)}-1}{u\ln(1-u)} + \frac{1}{\ln(1-u)}\right] = \infty$$

$\therefore\quad x = -1$是 $f(x)$的无穷间断点 .

$$(3)\quad \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{|x|^{x}-1}{x(x+1)\ln|x|}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{|u+1|^{u+1}-1}{(u+1)(u+2)\ln|u+1|} \qquad (令\ u = x-1)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{(u+1)^{u+1}-1}{\ln(u+1)} = \frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{e^{(u+1)\ln(u+1)}-1}{\ln(u+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{(u+1)\ln(u+1)}{\ln(u+1)} = \frac{1}{2}$$

$\therefore\quad x = 1$是 $f(x)$的可去间断点 .

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$有 (A)

(A) 1个可去间断点，1个跳跃间断点；

2008考研

(B) 1个可去间断点，1个无穷间断点；

(C) 2跳跃间断点；　(D) 2个无穷间断点.

解 $f(x)$ 无定义的点: $x=0,\ x=1.$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\ln|x|)\sin x \overset{(\infty\cdot 0)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\dfrac{1}{\sin x}} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=-1\times 0=0$$

$\therefore \quad x=0$是 $f(x)$的可去间断点.

$$f(x)=\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$$

$$f(1^-)=\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x}{1-x}\sin x$$

$$=(\sin 1)\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x}{1-x}\overset{(\frac{0}{0})}{=}(\sin 1)\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-\sin 1$$

$$f(1^+)=\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}\sin x=(\sin 1)\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}$$

$$=(\sin 1)\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\sin 1$$

$f(1^-)\neq f(1^+)$, $\therefore \quad x=1$是 $f(x)$的跳跃间断点.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在$[-\pi,\pi]$上的第一类间断点是 $x=($ *A* $)$.

(*A*) 0.　　(*B*) 1.　　(*C*) $-\dfrac{\pi}{2}$.　　(*D*) $\dfrac{\pi}{2}$.

解 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=-1$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=1$$

4. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$,

$$g(x)=\begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 0 & 0 \end{cases}$$

讨论$g(x)$在$x=0$处的连续性，若 $x=0$是间断点，请指出其类型.

解 $\because \quad \lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(\frac{1}{x})=a$

$\therefore$ 当$a=0$时，$g(x)$在$x=0$处的连续；

当$a\neq 0$时，$x=0$是$g(x)$的第一类可去间断点 .

例3 设 $f(x)=\begin{cases} a\ln(1-x)+b, & x\le 0 \\ x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+3^n+x^n}, & x>0 \end{cases}$,

试确定常数 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解 $\because \quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+3^n+x^n}$

$$=\begin{cases} 3\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{3})^n+1+(\frac{x}{3})^n}, & 0<x\le 3 \quad (0<\frac{x}{3}\le 1) \\ x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{x})^n+(\frac{3}{x})^n+1}, & x>3 \quad (0<\frac{3}{x}<1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3, & 0 < x \le 3 \\ x, & x > 3 \end{cases}$$

$$\therefore \quad f(x) = \begin{cases} a\ln(1-x)+b, & x \le 0 \\ 3x, & 0 < x \le 3, \\ x^2, & x > 3 \end{cases}$$

由于 $f(x)$在$x=0$处可导，必连续 .

而 $f(x)$在$x=0$处连续 $\Longleftrightarrow$ $f(0^-) = f(0^+) = f(0)$

由 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}[a\ln(1-x)+b]=b$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 3x=0=f(0)$

得 $b=0.$

又 $\because f(x)$在$x=0$处可导$\Longleftrightarrow f'_-(0)=f'_+(0)$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\ln(1-x)-0}{x}=-a.$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{3x-0}{x}=3$$

$$\therefore\quad -a=3,\qquad a=-3.$$

即当$a=-3$，$b=0$时，$f(x)$在$x=0$处可导.

例4 设 $f(x)$连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 且

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$, 其中$A$为常数，求$\varphi'(x)$,

并讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性.

解 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=A\cdot 0=0$

$$\varphi(0)=\int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 0\,\mathrm{d}t=0$$

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt \xlongequal{u\,=\,xt} \int_0^x f(u)\cdot\frac{du}{x} \qquad (x\neq 0)$$

$$=\frac{\int_0^x f(u)du}{x} \qquad (x\neq 0).$$

(1) 求$\varphi'(x)$.

当$x\neq 0$时， $\varphi'(x)=\left(\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}\right)'$

$$=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}.$$

当$x=0$时,

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

$$\therefore\quad \varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{2}, & x=0\\ \dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}, & x\neq 0\end{cases}.$$

(2) 讨论 $\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\varphi'(x)\overset{?}{=}\varphi'(0)}$$

$$\because \quad \lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0)$$

$\therefore \quad \varphi'(x)$在$x=0$处的连续.

例5 求下列极限：

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t}.\qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

解 原式 $$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin(\tan x)}\cdot\sec^2 x}{\sqrt{\tan(\sin x)}\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^3 x}\cdot\frac{\sqrt{\sin(\tan x)}}{\sqrt{\tan(\sin x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin(\tan x)}}{\sqrt{\tan(\sin x)}}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}}$$

$\because$ 当 $x \to 0$时， $\sin(\tan x) \sim \tan x$

$\tan(\sin x) \sim \sin x$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\sin x} = 1$$

从而 原式 $= \sqrt{1} = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$ $(\infty-\infty)$

当$u\to 0$时，
$\mathrm{e}^{u}-1\sim u.$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x(1-\mathrm{e}^{-x})}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\mathrm{e}^{-x}}{2x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{3}{2}.$$

注 下列做法是错误的：

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\cancel{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-x}{x^2}=1$

(3) $$I=\lim_{r\to 0}\frac{f(x+2r)+f(x-2r)-2f(x)}{r^2},\quad (\frac{0}{0})$$

其中 $$f(x)=\int_0^{x^2}\frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t.$$

解 $$I=\lim_{r\to 0}\frac{f'(x+2r)\cdot 2+f'(x-2r)\cdot(-2)}{2r}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{f'(x+2r)-f'(x-2r)}{r}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{2f''(x+2r)+2f''(x-2r)}{1}=4f''(x).$$

$$\because \quad f(x)=\int_0^{x^2}\frac{1}{1+t^3}\,dt$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+(x^2)^3}\cdot 2x=2\cdot\frac{x}{1+x^6}$$

$$f''(x)=2\cdot\left(\frac{x}{1+x^6}\right)'=2\cdot\frac{1-5x^6}{(1+x^6)^2}$$

$$\therefore \quad I=4f''(x)=\frac{8(1-5x^6)}{(1+x^6)^2}$$

(4) 设 $f(x)$可导，且$f(0)\neq 0$，求

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x[f(x)-f(0)]}{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}.$$

解 $$I=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\frac{x^2}{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}$$

$$=f'(0)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}f(x)}=\frac{2f'(0)}{f(0)}.$$

目录 上页 下页 返回 结束

设 $f(x)=\arctan x$，若 $f(x)=x\,f'(\xi)$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}$.

解 由 $f(x)=x\,f'(\xi)$，得

$$\arctan x = x\cdot\frac{1}{1+\xi^2}，\text{由此解得}\quad \xi^2=\frac{x-\arctan x}{\arctan x}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}\qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{3}.$$

例6　填空题

1. 设 $x \to 0$时，$e^{\tan x} - e^{x}$ 与x^{n}是同阶无穷小，

则 $n =$ __3__ .

解

$$c = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x} - e^{x}}{x^{n}} = \lim_{x\to 0} e^{x}\cdot\frac{e^{\tan x - x} - 1}{x^{n}}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x - x} - 1}{x^{n}} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^{n}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^{2} x - 1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{2} x}{x^{n-1}} \qquad (c \neq 0)$$

2. 设当 $x \to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是$x\sin x^n$

高阶无穷小，而 $x\sin x^n$是比$(e^{x^2}-1)$高阶

的无穷小，则正整数 $n =$ ___2___ .

解 当 $x \to 0$时，

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2) \sim \frac{x^2}{2}\cdot x^2 = \frac{x^4}{2},$$

$$x\sin x^n \sim x^{n+1}, \quad e^{x^2}-1 \sim x^2$$

依题设，$0 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{3-n}}{2}$

得 $n < 3$

又由 $0 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x^n}{e^{x^2} - 1} = \lim\limits_{x \to 0} x^{n-1}$

得 $n > 1$

$\therefore \quad n = 2.$

3. 设 $a_n = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$， 则极限

$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \underline{(1+\mathrm{e}^{-1})^{3/2}-1}$.

解 $a_n = \frac{3}{2n}\int_0^{\frac{n}{n+1}} \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}(1+x^n)$

$$= \frac{1}{n}(1+x^n)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n}\{[1+(\frac{n}{n+1})^n]^{\frac{3}{2}} - 1\}$$

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty}\{[1+\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}]^{\frac{3}{2}} - 1\} = (1+\mathrm{e}^{-1})^{3/2} - 1.$$

4. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\ln(1+2x)}{x^2}=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+f(x)}{x}=$ __2__.

解(方法1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+xf(x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{xf(x)+\ln(1+2x)}{x^2}-\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}\right]$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{1+2x}-2}{2x}=-(-2)=2$$

(方法2) 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\ln(1+2x)}{x^2}=0$，知

$$xf(x)+\ln(1+2x)=o(x^2)$$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{o(x^2)-\ln(1+2x)}{x}$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+o(x^2)-\ln(1+2x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\ln(1+2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\dfrac{2}{1+2x}}{2x}=2$$

错解 由等价无穷小代换，$\ln(1+2x) \sim 2x \quad (x \to 0)$

得 $$0 = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+\ln(1+2x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2}{x}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{2+f(x)}{x} = 0.$$

5. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n})$

$=$ __2__.

解　$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\{1+2[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[1+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1})]=2.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}=$ $\underline{\ \frac{1}{2}\ }$.

解 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}$

$\because\ \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}=\frac{1}{n^2+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\to\frac{1}{2}$ (当$n\to\infty$时)

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}=\frac{1}{n^2+n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n}=$ $\underline{\ \frac{\pi}{2}\ }$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n}$

$$=1\times\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n}=\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\pi\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\pi\int_0^1\cos^2\pi x\,\mathrm{d}x\ \overset{t=\pi x}{=\!=\!=}\ \int_0^\pi\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\pi\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

练习 求极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

解 $$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\boxed{\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{1}{i}}}$$

$$\frac{\sin\pi\frac{i}{n}}{n+\frac{1}{i}}\overset{?}{=}f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

不是

$$\frac{\sin\pi\frac{i}{n}}{n+1}<\frac{\sin\pi\frac{i}{n}}{n+\frac{1}{i}}<\frac{\sin\pi\frac{i}{n}}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\frac{\sin\pi\frac{i}{n}}{n+1} < \frac{\sin\pi\frac{i}{n}}{n+\frac{1}{i}} < \frac{\sin\pi\frac{i}{n}}{n} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\pi\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1 \sin\pi x\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\pi\frac{i}{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sin\pi\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin \pi\frac{i}{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sin \pi\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin \pi\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=1\cdot\int_0^1\sin \pi x\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}.$$

由夹逼准则，得

$$\therefore\quad I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{1}{i}}=\frac{2}{\pi}.$$

例7 已知 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

(1) 求a的值;

(2) 若当$x\to 0$时, $f(x)-a$与x^k是同阶无穷小,

求常数k的值.

解 (1) $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$ $(\infty-\infty)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x}{2}=1$$

(2) 若当 $x \to 0$时, $f(x)-a$与x^k是同阶无穷小,

求常数k的值.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

解 (2) 依题设,

$$c = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-a}{x^k} \qquad (\text{常数} c \neq 0)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x - x\sin x}{x^{k+2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)]-x[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)]}{x^{k+2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^{k+2}},$$ 可知 $k+2=3$, 所以 $k=1$.

例8 确定常数 a, b, c 的值，使

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c \quad (c\neq 0).$$

解 $\because \quad \lim_{x\to 0}\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}{ax-\sin x}\cdot(ax-\sin x)=\frac{1}{c}\cdot 0=0$$

$$\therefore \quad \int_b^0 \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = 0$$

利用定积分的保号性，可以断定：$b = 0$.

于是 $c = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt}$ $\quad (\frac{0}{0})$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a - \cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(a - \cos x)x}{\ln(1+x^3)} \quad (\frac{0}{0})$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(a-\cos x)x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}(a-\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}\cdot x^2 = c\cdot 0 = 0$$

$$a-1=0, \qquad a=1.$$

从而 $c = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$

例9 设曲线 $y=f(x)$与 $y=x^2-x$ 在点 (1,0)处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=$ <u>-2</u> .

2013考研

解 依题意，有

$$\begin{cases} f(1)=y(1)=0 \\ f'(1)=y'(1)=1 \end{cases}$$

$\boxed{y'=2x-1}$

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{-\frac{n+2}{2}}\cdot\frac{f\left(1-\frac{2}{n+2}\right)-f(1)}{-\frac{2}{n+2}}$$

$$=-2f'(1)=-2.$$

类似题

1. 设 $y = f(x)$由方程 $y - x = \mathrm{e}^{x(1-y)}$所确定，则

$$\lim_{n\to\infty} n[f(\frac{1}{n}) - 1] = \underline{\quad f'(0) = 1 \quad}.$$

2. 设 $y = f(x)$由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$所确定，则

$$\lim_{n\to\infty} n[f(\frac{2}{n}) - 1] = \underline{\quad 2 \quad}.$$

例10 已知 $f(x)$是周期为5的连续函数，它在 $x=0$的某邻域内满足关系式 ：

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$$

其中$o(x)$是当$x\to 0$时比x高阶的无穷小，且$f(x)$在$x=1$处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点$(6, f(6))$处的切线方程 .

解 由 $f(x)$的连续性，及

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$$

得 $$\lim_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]$$

$$=\lim_{x\to 0}[8x+o(x)]=0$$

即 $f(1)-3f(1)=0,\quad f(1)=0.$

又 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}[\frac{8x}{\sin x}+\frac{o(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}]=8$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}$

$$\overset{t=\sin x}{=}\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}\qquad (\because\quad f(1)=0)$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\cdot\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}\right]$$

$$=f'(1)+3f'(1)=4f'(1)$$

$$\therefore\quad 4f'(1)=8,\qquad f'(1)=2.$$

由于 $f(x+5)=f(x)$,

所以令 $x=1$,

得 $f(6)=f(1)=0$

又 $f'(1)=f'(x)\big|_{x=1}$

$=f'(x+5)\big|_{x=1}\cdot(x+5)'\big|_{x=1}=f'(6)\cdot 1=f'(6)$

$\therefore\quad f'(6)=f'(1)=2$

故所求切线方程为：$y=2(x-6)$.

例11 已知 $f(x)$在$(0,+\infty)$内可导， $f(x)>0,$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1,$ 且满足：

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}},$$ 求 $f(x)$.

解 $\because$ $$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0} e^{\frac{1}{h}\ln\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]}$$

而 $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]$$

$$= x\lim_{h\to 0}\frac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{hx} = x\cdot[\ln f(x)]'$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} e^{\frac{1}{h}\ln\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]}$$

$$= e^{x[\ln f(x)]'}$$

由已知条件得 $$e^{x[\ln f(x)]'} = e^{\frac{1}{x}},$$

故 $x[\ln f(x)]' = \frac{1}{x}$, 即 $[\ln f(x)]' = \frac{1}{x^2}$

$\therefore \ln f(x) = \int \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + \ln c$

即 $f(x) = c\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

由 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, 得 $c = 1$

$\therefore \quad f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

例12 已知 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_{x-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t}{x},$$

求 c 的值.

解 $\because \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}$

$$=\mathrm{e}^{2c}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\int_{x-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_{x-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t}{x}\cdot x = \infty$$

故 $$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_{x-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t}{x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(x-1)}{1}$$

又由拉格朗日中值定理，$\exists\quad \xi\in(x-1,x)$,

使 $$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)\cdot 1$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)] = \lim_{x\to\infty} f'(\xi)$$

$$= \lim_{\xi\to\infty} f'(\xi) = e$$

于是 $e^{2c} = e$, 故 $c = \frac{1}{2}$.