

总复习(二)

求导法、方程根的确定

- 一、主要内容
- 二、典型例题

一、主要内容

1. 求导法

- (1) 导数定义;
- (2) 导数存在的充要条件;
- (3) 基本求导公式;
- (4) 四则运算;
- (5) 反函数求导法;
- (6) 复合函数求导法;
- (7) 参数方程确定的函数的求导法;
- (8) 隐函数求导法, 对数求导法;
- (9) 高阶导数求导法.
- (10) 积分上限函数求导法.

2. 导数与定积分的应用

基本应用

- (1) 切线;
- (2) 函数的单调性;
- (3) 极值;
- (4) 最大、最小值;
- (5) 曲线的凹凸;
- (6) 拐点;

- (7) 曲率: $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$
- (8) 面积;
- (9) 旋转体体积;
已知平行截面
面积的立体的 体积;
- (10) 弧长.

综合应用

(1) 方程根的确定:

- ① 闭区间上连续函数的零点定理;
- ② 罗尔定理;
- ③ 函数的单调性.

(2) 等式与不等式的证明;

(3) 函数的最大、最小值.

二、典型例题

1. 求导法

例1 设 $f(x) = (x^{100} - 1)g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 且 $g(1) = 1$, 求 $f'(1)$.

解 由导数定义, 得

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{100} - 1)g(x) - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^{99} + x^{98} + \cdots + 1)g(x) = 100 g(1) = 100. \end{aligned}$$

类似题 设 $f(x) = (x^2 - a^2)g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内有定义, 求 $f'(a)$ 存在的充分必要条件.

答案: (1) 当 $a = 0$ 时, $f'(a)$ 存在充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow 0} xg(x) \text{ 存在;}$$

(2) 当 $a \neq 0$ 时, $f'(a)$ 存在充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ 存在;}$$

例2 设 $f(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 求 $f'(0)$.

解法1

$$f'(x) = 1 \cdot (x+2) \cdots (x+n) + (x+1) \cdot (x+3) \cdots (x+n) + \cdots + (x+1)(x+2) \cdots (x+n-1) \cdot 1$$

$$f'(0) = n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \cdots + \frac{n!}{n} = n! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right).$$

解法2 (用对数求导法)

$$\ln f(x) = \ln(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$$

$$= \ln(x+1) + \ln(x+2) + \cdots + \ln(x+n)$$

两边对 x 求导: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+n}$

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+n} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(0) &= f(0) \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\ &= n! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

例3 设函数 $y = y(x)$ 由方程

$$y = \int_0^{2x+y} \sin t^2 dt - \int_0^{x^2} e^{-\sqrt{t}} dt$$

(其中 $x > 0$) 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$\begin{aligned} y' &= \sin(2x+y)^2 \cdot (2x+y)' - e^{-\sqrt{x^2}} \cdot (x^2)' \\ &= \sin(2x+y)^2 \cdot (2+y') - e^{-x} \cdot 2x \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y' = \frac{2\sin(2x+y)^2 - 2xe^{-x}}{1 - \sin(2x+y)^2}.$$

类似题 $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\arctan \frac{y}{x}}$, 求 y'' .

解 两边取对数

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln a + \arctan \frac{y}{x}$$

两边对 x 求导数

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot (\frac{y}{x})'$$

$$x + yy' = x^2 \cdot \frac{xy' - y}{x^2}, \quad y' = \frac{x + y}{x - y}$$

$$y' = \frac{x + y}{x - y}$$

$$y'' = \left(\frac{x + y}{x - y} \right)'$$

$$= \frac{(1 + y')(x - y) - (x + y)(1 - y')}{(x - y)^2}$$

$$= \frac{2(xy' - y)}{(x - y)^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^2} \quad (x \neq y, x \neq 0)$$

例4 $y = \lim_{t \rightarrow +\infty} x \left(\frac{t+x}{t-x} \right)^t$, 求 y' .

解 $y = \lim_{t \rightarrow +\infty} x \left(\frac{t+x}{t-x} \right)^t = x \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(\frac{t+x}{t-x} - 1 \right) \right]^t$

$$= x \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{2x}{t-x} \right)^{\frac{t-x}{2x}} \right]^{\frac{2x}{t-x} \cdot t} = x e^{2x}$$

$$\begin{aligned} \therefore y' &= (x e^{2x})' = e^{2x} + x e^{2x} \cdot 2 \\ &= e^{2x} (1 + 2x) \end{aligned}$$

类似题

1. 设 $f(x)$ 在 $x = e$ 处具有连续的一阶导数, 且

$$f'(e) = -2e^{-1}, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{d}{dx} f(e^{\cos \sqrt{x}}).$$

解 $\frac{d}{dx} f(e^{\cos \sqrt{x}}) = f'(e^{\cos \sqrt{x}})(e^{\cos \sqrt{x}})'$

$$= f'(e^{\cos \sqrt{x}}) e^{\cos \sqrt{x}} (\cos \sqrt{x})'$$

$$= f'(e^{\cos \sqrt{x}}) e^{\cos \sqrt{x}} (-\sin \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{d}{dx} f(e^{\cos \sqrt{x}})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(e^{\cos \sqrt{x}}) e^{\cos \sqrt{x}} \left(-\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= f'(e) \cdot e \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$f'(e) = -2e^{-1}$$

$$= 1.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left\{ \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt \right\} = f(x) - f(a),$$

$$x \in (a, b)$$

证 $\because \int_a^x f(t+h) dt \stackrel{u=t+h}{=} \int_{a+h}^{x+h} f(u) du$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left\{ \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\int_{a+h}^{x+h} f(u) du - \int_a^x f(u) du}{h} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\int_{a+h}^{x+h} f(u) du - \int_a^x f(u) du}{h} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(a+h)}{1}$$

$$= f(x) - f(a).$$

3. 设 $0 < |x| < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1})$.

解 $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$

$$\begin{aligned} &= (x)' + (x^2)' + (x^3)' + \cdots + (x^n)' \\ &= (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)' \\ &= [(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) - 1]' = \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 1 \right)' \\ &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1}) \cdot (-1)}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

$$= \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1}) \cdot (-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{(n+1)x^n}{x-1} + \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)x^n}{x-1} + \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} \right] = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

当 $0 < |x| < 1$ 时,
可以证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)x^n = 0$$

例5 设 $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du \end{cases}$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\quad 0 \quad} .$

2010年考研

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}} = -e^t \ln(1+t^2)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{-[e^t \ln(1+t^2) + \frac{2te^t}{1+t^2}]}{-e^{-t}} \end{aligned}$$

类似题

1. 求对数螺线 $\rho = e^\theta$ 在点 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线方程.

解 此曲线的参数方程为
$$\begin{cases} x = e^\theta \cos \theta \\ y = e^\theta \sin \theta \end{cases}$$

点 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 对应的直角坐标为: $(0, e^{\frac{\pi}{2}})$.

$$\therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\cancel{e}^\theta (\cos \theta + \sin \theta)}{\cancel{e}^\theta (-\sin \theta + \cos \theta)} \bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$$

\therefore 所求切线方程为: $y - e^{\frac{\pi}{2}} = -(x - 0)$, 即

$$x + y - e^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

2. 求曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ 2y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$ 在点(0,2)处的切线方程.

解 $2\frac{dy}{dt} - (1 \cdot y^2 + t \cdot 2y\frac{dy}{dt}) + e^t = 0$

$$2(1 - ty)\frac{dy}{dt} = y^2 - e^t,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - e^t}{2(1 - ty)}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + t^2}$$

$$x = 0, y = 2 \leftrightarrow t = 0$$

$$\therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right|_{t=0} = \left. \frac{\frac{y^2 - e^t}{2(1-ty)}}{1+t^2} \right|_{t=0} = \frac{3}{2}.$$

\therefore 所给曲线在点 $(0,2)$ 处的切线方程为:

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 0),$$

即

$$y = \frac{3}{2}x + 2.$$

3. 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的法线

2013考研

方程为 $y - \frac{1}{2} \ln 2 = -x + \frac{\pi}{4}$.

解 对应于 $t = 1$ 的点: $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2} \ln 2)$

$$y = \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{1+t^2}}{1} = t$$

在该点处法线的斜率:

$$k = -\frac{1}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1}} = -1$$

在该点处法线方程:

$$y - \frac{1}{2} \ln 2 = -(x - \frac{\pi}{4}).$$

例6 设 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$, 求 $f^{(n)}(0)$ ($n \geq 3$).

解法1 由莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' \\ + \cdots + uv^{(n)}$$

取 $u = \ln(1+x)$, $v = x^2$

$$u^{(k)} = [\ln(1+x)]^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

$$\begin{aligned} \text{得 } f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \cdot x^2 + n \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} \cdot 2x \\ &\quad + \frac{n(n-1)(-1)^{n-3}(n-3)!}{2!} \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-3} n(n-1)(n-3)! \\ &= (-1)^{n-3} \frac{n!}{n-2}, \quad (n \geq 3). \end{aligned}$$

解法2 由麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

及 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$

$$= x^2 \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-3}}{n-2}x^{n-2} + o(x^{n-2}) \right]$$

$$= x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-3}}{n-2}x^n + o(x^n)$$

比较 x^n 的系数, 得 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-3}}{n-2}$

$$\therefore f^{(n)}(0) = (-1)^{n-3} \frac{n!}{n-2}.$$

类似题

1. 设 $y = \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 1}$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y = \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{4x^2 - 4 + 3}{x^2 - 1} = 4 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$

$$\because \left(\frac{1}{x-1} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}, \quad \left(\frac{1}{x+1} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

$$\therefore y^{(n)} = \frac{3}{2} (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right].$$

2. 设 $y = \sin^6 x + \cos^6 x$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$

$$= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{8} \cdot 4^n \cos(4x + n\frac{\pi}{2})$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

例7 设 $g(x)$ 处处连续, 且 $g(1)=5$, $\int_0^1 g(x)dx = 2$

及 $f(x) = \frac{1}{2} \int_{-x}^0 t^2 g(x+t)dt$, 求 $f''(1)$ 与 $f'''(1)$.

解
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \int_{-x}^0 t^2 g(x+t)dt \stackrel{u=x+t}{=} \frac{1}{2} \int_0^x (u-x)^2 g(u)du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x (x^2 - 2xu + u^2) g(u)du \\ &= \frac{1}{2} \left[x^2 \int_0^x g(u)du - 2x \int_0^x u g(u)du + \int_0^x u^2 g(u)du \right] \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} [x^2 \int_0^x g(u) du - 2x \int_0^x u g(u) du + \int_0^x u^2 g(u) du]'$$

$$= \frac{1}{2} \{ [2x \int_0^x g(u) du + \cancel{x^2 g(x)}] -$$

$$2[\int_0^x u g(u) du + \cancel{x \cdot x g(x)}] + \cancel{x^2 g(x)} \}$$

$$= x \int_0^x g(u) du - \int_0^x u g(u) du$$

$$f'(x) = x \int_0^x g(u) du - \int_0^x u g(u) du$$

$$f''(x) = [1 \cdot \int_0^x g(u) du + \cancel{xg(x)}] - \cancel{xg(x)}$$

$$\therefore f''(1) = \int_0^1 g(u) du = 2$$

$$f'''(x) = [\int_0^x g(u) du]' = g(x)$$

$$\therefore f'''(1) = g(1) = 5.$$

例8 设 $f(x)$ 是区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调、可导函数,

且满足
$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt,$$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数, 求 $f(x)$.

2007年考研

解 在 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$ 两边对 x 求导,

得
$$f^{-1}[f(x)] \cdot f'(x) = x \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

即
$$x \cdot f'(x) = x \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

亦即 $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{4}]$

故
$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int \frac{1}{\sin x + \cos x} d(\sin x + \cos x) \\ &= \ln(\sin x + \cos x) + C, \end{aligned}$$

由题设 $\int_0^{f(0)} f^{-1}(t) dt = 0,$

由定积分的保号性知 $f(0)=0$, 于是 $C=0$,

因此 $f(x) = \ln(\sin x + \cos x), \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}].$

$f'(x) > 0, x \in (0, \frac{\pi}{4})$
 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上 ↗
故 $f^{-1}(x)$ 单调增
 $0 \leq f^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{4}$

思路: $f(x) = 0$

1° 确定 $f(x)$ 的单调区间;

2° 在各单调区间的端点处查 $f(x)$ 的值或极限是否异号 .

2. 方程根的确定

例9 证明: 方程

$$\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$$

在 $(0, +\infty)$ 内有且只有两个不同的实根.

证

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 x} dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \sqrt{2} \left[\int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx \right] \\ &= 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

原方程恒等变形为: $\ln x - \frac{x}{e} + 4\sqrt{2} = 0$

令 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 4\sqrt{2}$, 则

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 且 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = -\frac{x-e}{ex}$,

令 $f'(x) = 0$, 得驻点: $x = e$.

当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调增

$$f(e) = 4\sqrt{2} > 0, \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, e)$ 内只有一个零点;

当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$,

$f(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调减少,

$$f(e) = 4\sqrt{2} > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{e} + \frac{4\sqrt{2}}{x} \right) = -\infty,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 内只有一个零点 .

综上所述: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有两个不同的零点, 即命题成立 .

例10 设函数 $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t) dt$, 则

$f'(x)$ 的零点个数为 (**B**).

2008考研

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

解 $g(x) = f'(x) = \ln(2+x^2) \cdot 2x$

$x=0$ 是 $g(x)$ 的零点,

又 $\because g'(x) = 2[\ln(2+x^2) + \frac{2x^2}{2+x^2}] > 0$

$g(x) = f'(x)$ 单调增加

$\therefore g(x) = f'(x)$ 仅有一个零点.

例11 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且当 $x > a$ 时,
 $f'(x) > k > 0$, 其中 k 为常数, 证明:
若 $f(a) < 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 $(a, +\infty)$ 内
有且仅有一个实根.

证 1° 至多性 $\because f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且
$$f'(x) > k > 0, x \in (a, +\infty)$$

$\therefore f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调增加,

故 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内至多有一个零点 .

2° 存在性

需证: $\exists x_0 \in (a, +\infty)$,
使 $f(x_0) > 0$

$$\because f(a) < 0,$$

而由 $f'(x) > k > 0, x \in (a, +\infty)$, 两边积分得

$$\int_a^x f'(x) dx > \int_a^x k dx > 0, \quad x \in (a, +\infty)$$

$$\text{即 } f(x) - f(a) > k(x - a), \quad x \in (a, +\infty)$$

$$\text{亦即 } f(x) > f(a) + k(x - a), \quad x \in (a, +\infty)$$

$$\because \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(a) + k(x - a)] = +\infty$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

从而必存在 $x_0 \in (a, +\infty)$, 使 $f(x_0) > 0$

(事实上, 只要取 x_0 满足: $f(a) + k(x_0 - a) > 0$,

$x_0 > a - \frac{f(a)}{K}$ 即可).

由零点定理, $\exists \xi \in (a, x_0)$, 使 $f(\xi) = 0$,

故 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内有且只有一个零点 ,

即方程 $f(x) = 0$ 在 $(a, +\infty)$ 内有且只有一个实根 .

例12 讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点的个数 .

解 等价问题是: $(4x + \ln^4 x) - (4\ln x + k) = 0$ 有几个不同的实根.

令 $f(x) = \ln^4 x - 4\ln x + 4x - k$, 则

$$f'(x) = \frac{4\ln^3 x}{x} - \frac{4}{x} + 4 = \frac{4(\ln^3 x - 1 + x)}{x}, \quad (x > 0)$$

驻点: $x = 1$

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) = \frac{4[\ln^3 x - (1-x)]}{x} < 0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调减少;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) = \frac{4[\ln^3 x + (x-1)]}{x} > 0$

$\therefore f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加.

于是 $f(1) = \min_{x \in (0,+\infty)} f(x) = 4-k$

(1) 当 $k < 4$, 即 $4-k > 0$ 时, $f(x) \geq f(1) > 0$,

此时, $f(x)$ 无零点, 从而两曲线无交点;

(2) 当 $k = 4$, 即 $4 - k = 0$ 时, $f(x)$ 有唯一零点,

$f(1) = 0$, 从而两曲线只有一个交点;

(3) 当 $k > 4$, 即 $4 - k < 0$ 时, $f(1) < 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} [(\ln x)(\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\ln x)(\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

此时, $f(x)$ 有两个零点, 从而曲线有两个交点.

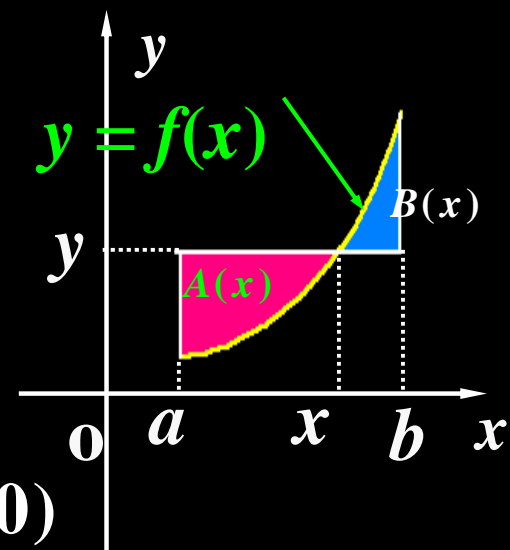
例13 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) > 0, f(a) \geq 0$,
证明: 对图示的两个面积函数 $A(x)$ 和 $B(x)$
存在唯一的 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{A(\xi)}{B(\xi)} = 2017.$$

分析 $\frac{A(\xi)}{B(\xi)} = 2017$

$$\Leftrightarrow A(\xi) - 2017 B(\xi) = 0 \quad (B(\xi) \neq 0)$$

令 $F(x) = A(x) - 2017 B(x)$



则问题转化为证明： $F(x)$ 在 (a,b) 内有
唯一的零点。

证 令 $F(x) = A(x) - 2017B(x)$

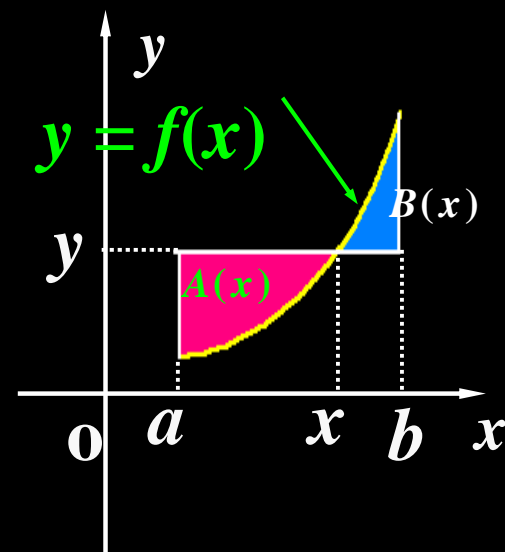
$$\because f'(x) > 0, \quad x \in [a, b]$$

$\therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加,

$$\text{又} \because f(a) \geq 0,$$

$$\therefore \forall x \in (a, b]$$

$$\text{有 } f(x) > f(a) \geq 0$$



于是 $A(x) = \boxed{f(x)(x-a)} - \int_a^x f(t)dt$

矩形面积

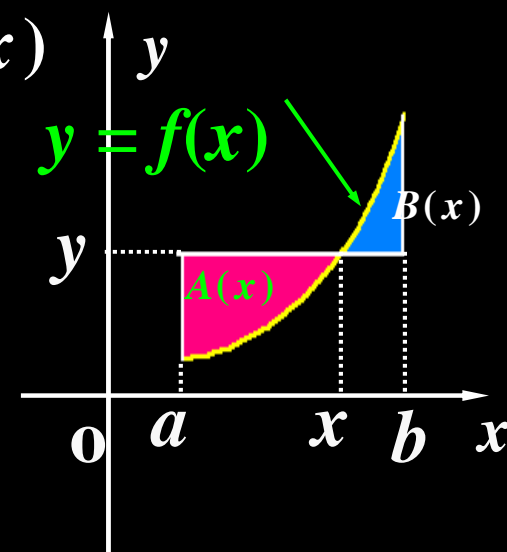
$$B(x) = \int_x^b f(t)dt - f(x)(b-x)$$

$$A(a) = 0, \quad B(b) = 0.$$

1° 零点的存在性

$\because f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导

$\therefore A(x), B(x), F(x)$ 均在 $[a, b]$ 上可导, 且



$$\begin{aligned}
 A'(x) &= [f'(x)(x-a) + \cancel{f(x)}] - \cancel{f(x)} \\
 &= f'(x)(x-a) > 0 \quad (\forall x \in (a, b])
 \end{aligned}$$

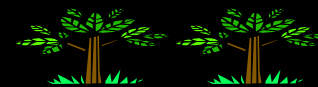
$\therefore A(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加

故 $\forall x \in (a, b]$, 有 $A(x) > A(a) = 0$

$$A(b) > A(a) = 0$$

$$\begin{aligned}
 B'(x) &= -\cancel{f(x)} - [f'(x)(b-x) - \cancel{f(x)}] \\
 &= -f'(x)(b-x) < 0 \quad (\forall x \in [a, b))
 \end{aligned}$$

$\therefore B(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少



故 $\forall x \in [a, b)$, 有 $B(x) > B(b) = 0$

$$B(a) > B(b) = 0$$

$$\begin{aligned}\therefore F(a) &= A(a) - 2017 B(a) \\ &= 0 - 2017 B(a) < 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(b) &= A(b) - 2017 B(b) \\ &= A(b) - 2017 \cdot 0 > 0\end{aligned}$$

由零点定理知, $F(x)$ 在 (a, b) 内至少有一个零点 .

2° 零点的至多性



依题设, $f'(x) > 0, x \in [a, b]$

$$\begin{aligned}\therefore F'(x) &= A'(x) - 2017 B'(x) \\ &= f'(x)(x - a) + 2017 f'(x)(b - x) > 0 \\ &\quad (\forall x \in (a, b))\end{aligned}$$

$\therefore F(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加,

从而 $F(x)$ 在 (a, b) 内至多有一个零点.

综上所述: $F(x)$ 在 (a, b) 内有唯一零点 ξ , 使

$$F(\xi) = 0. \text{ 又因 } B(x) > 0 \text{ } (x \in (a, b))$$

所以命题成立.



例14 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) > 0$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}, \quad \text{证明:}$$

- (1) $F'(x) \geq 2$;
- (2) 方程 $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内有且仅有一个根 .

证 (1) $\because f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续

$\therefore F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且

$$F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2\sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = 2.$$

(2) 由 $F'(x) \geq 2 > 0$, $x \in [a, b]$

可知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加,

$\therefore F(x)$ 在 (a, b) 内至多有一个零点 .

$\because f(x) > 0$, $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned}\therefore F(a) &= \int_a^a f(t)dt + \int_b^a \frac{1}{f(t)}dt \\ &= 0 - \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt < 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_a^b f(t)dt + \int_b^b \frac{1}{f(t)}dt \\ &= \int_a^b f(t)dt + 0 > 0 \end{aligned}$$

由零点定理, $F(x)$ 在 (a, b) 内至少有一个零点 .

综上所述: $F(x)$ 在 (a, b) 内有且只有一个零点,
即方程 $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内有且只有一个实根 .

例15 设 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, 且 $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$, 证明: 方程 $f(x) = 0$ 的两个相邻的根之间必有方程 $g(x) = 0$ 的一个根.

证 (用反证法) 设 x_1, x_2 为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的两个相邻的实零点 (不妨设 $x_1 < x_2$), 即

$$f(x_1) = f(x_2) = 0 \quad (x_1 < x_2).$$

假设：在 x_1 与 x_2 之间不存在 ξ ，使 $g(\xi) = 0$ ，

即 $g(x) \neq 0, (\forall x \in (x_1, x_2))$

由 $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ ，知

$g(x_1) \neq 0, g(x_2) \neq 0$

令 $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ，则 $\varphi(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上可导，

且 $\varphi(x_1) = \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = 0 = \varphi(x_2) = \frac{f(x_2)}{g(x_2)}$

由罗尔定理知， $\exists \eta \in (x_1, x_2)$ 使 $\varphi'(\eta) = 0$ 。

$$\begin{aligned}\text{又 } \because \quad \varphi'(x) &= \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)', \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

$\therefore \exists \eta \in (x_1, x_2),$ 使

$$f(\eta)g'(\eta) - f'(\eta)g(\eta) = 0$$

这与已知条件矛盾！

$\therefore \exists \xi \in (x_1, x_2),$ 使 $g(\xi) = 0.$

例16 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上以 $2T$ 为周期的连续函数,

证明: 在每个长度为 T 的闭区间上, 方程

$$f(x) - f(x - T) = 0$$

至少有一个实根.

证 $\forall x_0 \in R, [x_0, x_0 + T]$

令 $F(x) = f(x) - f(x - T), x \in [x_0, x_0 + T]$

则 $F(x)$ 在 $[x_0, x_0 + T]$ 上连续, 且

$$F(x_0 + T) = f(x_0 + T) - f(x_0)$$

$$F(x_0 + T) = f(x_0 + T) - f(x_0) \stackrel{\text{周期性}}{=} f(x_0 - T) - f(x_0)$$

$$F(x_0) = f(x_0) - f(x_0 - T)$$

(1) 若 $f(x_0) - f(x_0 - T) = 0$, 则

$x_0, x_0 + T$ 均是所给方程在 $[x_0, x_0 + T]$ 上的实根.

(2) 若 $f(x_0) - f(x_0 - T) \neq 0$, 则

$$F(x_0 + T)F(x_0) = -[f(x_0) - f(x_0 - T)]^2 < 0$$

由零点定理, $\exists \xi \in (x_0, x_0 + T)$, 使

$$F(\xi) = 0$$

即所给方程在 $(x_0, x_0 + T)$ 上有的实根 ξ .