第三节　隐函数和由参数方程所确定的函数的导数

习题　2-3

1. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $y=1-xe^y$；　　(2) $x^y=y^x$；

(3) $e^{xy}+\sin(x^2y)=y^2$；　　(4) $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解 (1) 方程两边对 x 求导，得

$$y'=-e^y-xe^yy',$$

从而 $y'=-\dfrac{e^y}{1+xe^y}$.

(2) 方程两边对 x 求导，得

$$(e^{y\ln x})'=e^{y\ln x}(y'\ln x+\frac{y}{x})=(e^{x\ln y})'=e^{x\ln y}(\ln y+\frac{x}{y}y'),$$

从而 $y'=\dfrac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$.

(3) 方程两边对 x 求导，得

$$e^{xy}(y+xy')+\cos(x^2y)(2xy+x^2y')=2yy',$$

$$y'=-\frac{ye^{xy}+2xy\cos(x^2y)}{xe^{xy}+x^2\cos(x^2y)-2y}.$$

(4) 方程两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$y'=\frac{y-x}{y+x}.$$

2. 用对数求导法求下列函数的导数:

(1) $y=(\frac{x}{1+x})^x$;　　(2) $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$;

(3) $y=\frac{\sqrt{x}\cos x}{(x^2+1)\sqrt[3]{x+2}}$.

解 (1) 方程两边取对数, 得

$$\ln y=x[\ln x-\ln(1+x)],$$

方程两边对 x 求导, 得

$$\frac{y'}{y}=\ln x-\ln(1+x)+x(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}),$$

$$y'=(\frac{x}{1+x})^x(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}).$$

(2) 方程两边 5 次方后取对数, 得

$$5\ln y=\ln(x-5)-\frac{1}{5}\ln(x^2+2),$$

方程两边对 x 求导, 得

$$\frac{5y'}{y}=\frac{1}{x-5}-\frac{2x}{5(x^2+2)},$$

$$y'=y=\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}[\frac{1}{x-5}-\frac{2x}{5(x^2+2)}].$$

(3) 方程两边取对数, 得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\ln\cos x-\ln(x^2+1)-\frac{1}{3}\ln(x+2),$$

方程两边对 x 求导, 得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2x}-\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x+2)},$$

$$y'=\frac{\sqrt{x}\cos x}{(x^2+1)\sqrt[3]{x+2}}[\frac{1}{2x}-\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x+2)}-\tan x].$$

3. 设 $\sin(ts)+\ln(s-t)=t$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 的值.

解 由方程知 $s|_{t=0}=1$, 方程两边对 t 求导, 得

$$\cos(ts)(s+ts')+\frac{s'-1}{s-t}=1,$$

将 $s\big|_{t=0}=1$ 代入，得 $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=1$.

4. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

(1) $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=1-\arctan t. \end{cases}$

解 (1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\cos t-t\sin t}{1-\sin t-t\cos t}$.

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1}{2t}$.

5. 求曲线 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\sin t, \\ y=\mathrm{e}^t\cos t, \end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{3}$ 对应点处的切线的斜率.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)}{\mathrm{e}^t(\cos t+\sin t)}=\frac{(\cos t-\sin t)}{(\cos t+\sin t)}$，将 $t=\frac{\pi}{3}$ 代入，得曲线在 $t=\frac{\pi}{3}$ 对应点处的切线的斜率为 $\sqrt{3}-2$.