第四节　重积分的应用

习题　9-4

1. 求由下列曲面所包围的空间体的体积

(1) $z = 6 - x^2 - y^2$，$z = \sqrt{x^2 + y^2}$；

(2) $z = \sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$；

(3) $x^2 + y^2 = a^2$，$x^2 + z^2 = a^2$，$(a > 0, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$.

解 (1) 如图 9.52, 用柱面坐标计算,

曲面 $z = 6 - x^2 - y^2$ 和 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的柱面坐标方程分别为 $z = 6 - \rho^2$ 和 $z = \rho$. 由 $\begin{cases} z = 6 - \rho^2, \\ z = \rho \end{cases}$ 解得 $\rho = 2$, 所以空间体在 xOy 面得投影区域为 $\rho \le 2$.

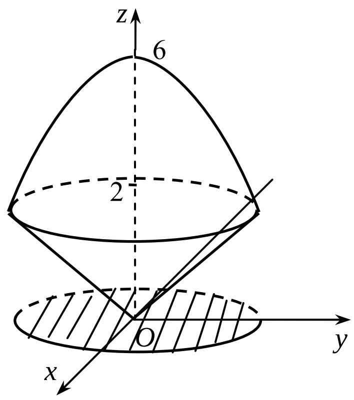

图 9.52

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \rho \mathrm{d}\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi \int_0^2 (6\rho - \rho^2 - \rho^3) \mathrm{d}\rho = \frac{32}{3}\pi.$$

(2) 如图 9.53, 积分区域在球面坐标中可表示为:

$0 \le r \le \sqrt{2}a$，$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$，$0 \le \theta \le 2\pi$，于是

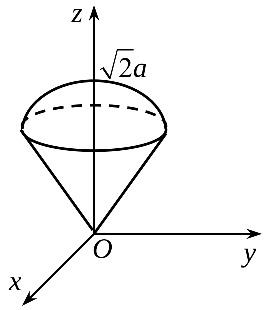

图 9.53

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2}a} r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{2}a^3}{3} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)\pi a^3.$$

(3) 如图 9.54, 积分区域可表示为:

$0 \le z \le \sqrt{a^2 - x^2}$，$0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}$，$0 \le x \le a$，

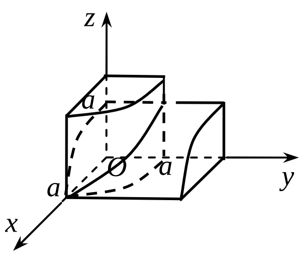

图 9.54

故　$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z$

$=\int_0^a (a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}a^3$.

2. 计算由四个平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解　如图 9.55, 此立体的底是 xOy 面上的闭区域:

$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，顶是曲面 $z=6-2x-3y$，

故　$V=\iint\limits_{D}(6-2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 (6-2x-3y)\mathrm{d}y$

$=\frac{7}{2}$.

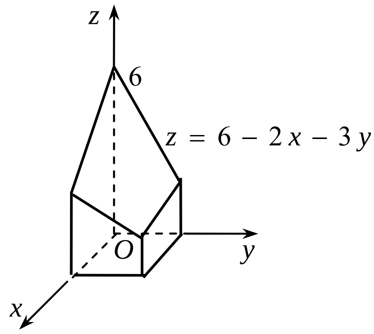

图 9.55

3．计算由平面 $x=0$，$y=0$，$3x+2y=6$ 所围柱体被平面 $z=0$ 及抛物柱面 $z=3-\frac{x^2}{2}$ 截得的立体的体积.

解　如图 9.56, 立体的底是 xOy 面上的闭区域:

$0\le x\le 2$，$0\le y\le 3-\frac{3}{2}x$，顶是曲面 $z=3-\frac{x^2}{2}$，

故　$V=\iint\limits_{D}(3-\frac{x^2}{2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{3-\frac{3}{2}x}(3-\frac{x^2}{2})\mathrm{d}y$

$=8$.

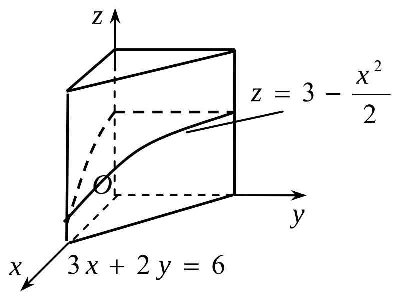

图 9.56

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=25$ 被平面 $z=3$ 截得的上半部分曲面的面积.

解　如图 9.57, 曲面在 xOy 面上的投影为

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 16\}$$

故　$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_{D}\frac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

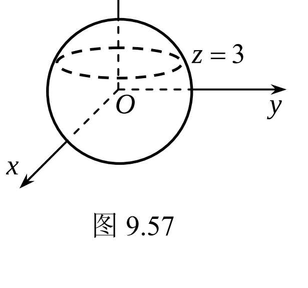

图 9.57

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4\frac{5\rho}{\sqrt{25-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=20\pi.$$

5. 求柱面 $x^2+z^2=a^2$ 含在柱面 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 内的部分的面积.

解 如图 9.54(见本节 1.(3)), 由对称性, 所求面积是第一卦限中位于圆柱 $x^2+z^2=a^2$ 上部分面积的 8 倍, 这部分曲面方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2}$, 故

$$S=8\iint_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=8\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y=8\int_0^a a\mathrm{d}x=8a^2.$$

6. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 截得的有限部分的曲面面积.

解 如图 9.58, 由 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\ z^2=2x\end{cases}$ 解得 $x^2+y^2=2x$, 故曲面在 xOy 面上的投影为

$$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 2x\}.$$

被截曲面方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, 由对称性, 所求面积为:

$$S=\iint_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}\rho\mathrm{d}\rho=\sqrt{2}\pi.$$

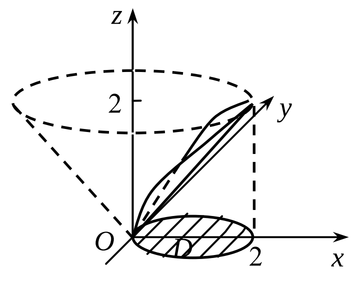

图 9.58

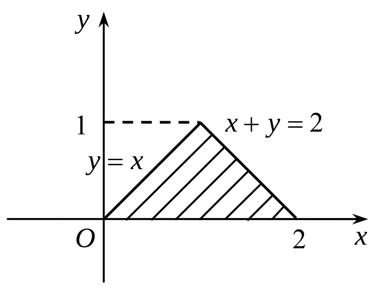

图 9.59

7. 设平面薄板所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度 $\mu(x,y)=x^2+y^2$, 求该薄板的质量.

解　闭区域 D 如图 9.59 所示，故

$$M=\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2-y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

8．设正方体

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 1\right\},$$

它的密度 $\mu(x,y,z)=x+y+z$，求它的质量.

解　$M=\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x+y+z)\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+y+\frac{1}{2})\mathrm{d}y=\frac{3}{2}.$$

9.　已知密度 $\mu(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求由曲面

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{x^2+y^2}$$

及 $z=4$ 所围立体的质量.

解　如图 9.60，用球面坐标，

$$M=\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^{\frac{4}{\cos\varphi}}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{5}(\frac{4^5}{\cos^5\varphi}-1)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=(\frac{1534}{5}+\frac{\sqrt{2}}{5})\pi.$$

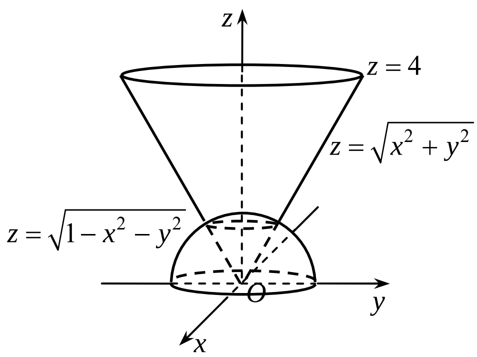

图 9.60

10.　求均匀薄板的质心，设薄板所占的闭区域 D 为：

(1)　D 由 $y^2=4ax$ 与 $y=2a$ 及 y 轴围成；

(2)　D 由 $y=1-x^2$ 与 $y=2x^2-5$ 围成；

(3)　D 是介于两圆 $r=a\cos\theta$，$r=b\cos\theta(0<a<b)$ 之间的闭区域.

解　(1)　如图 9.61，不妨设 $a>0$，

$$A=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2a}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{y^2}{4a}}\mathrm{d}x=\frac{2a^2}{3},$$

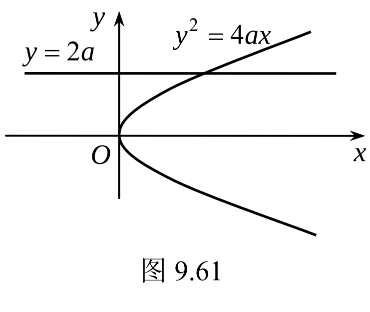

图 9.61

$$\overline{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_{D}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2a^2}\int_0^{2a}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{y^2}{4a}}x\mathrm{d}x=\frac{3}{10}a;$$

$$\overline{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_{D}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2a^2}\int_0^{2a}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{y^2}{4a}}y\mathrm{d}x=\frac{3}{2}a;$$

故所求质心为$(\frac{3}{10}a,\frac{3}{2}a)$.

(2) 如图 9.62,

$$A=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{2x^2-5}^{1-x^2}\mathrm{d}y=8\sqrt{2},$$

$$\overline{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_{D}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{8\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{2x^2-5}^{1-x^2}x\mathrm{d}y=0;$$

$$\overline{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_{D}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{8\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{2x^2-5}^{1-x^2}y\mathrm{d}y=-\frac{9}{5};$$

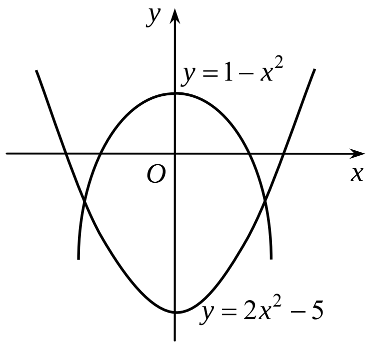

图 9.62

故所求质心为$(-0,-\frac{9}{5})$.

(3) 如图 9.63, 由对称性可知$\overline{y}=0$,

$$M=\iint\limits_{D}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}r\mathrm{d}r=\frac{\pi\rho}{4}(b^2-a^2),$$

$$M_y=\iint\limits_{D}\rho x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi\rho}{8}(b^3-a^3),$$

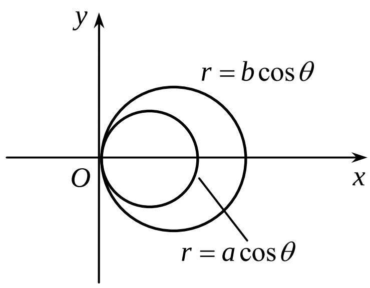

图 9.63

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\frac{\pi\rho}{8}(b^3-a^3)}{\frac{\pi\rho}{4}(b^2-a^2)}=\frac{(a^2+ab+b^2)}{2(a+b)},$$

故所求质心为$(\frac{(a^2+ab+b^2)}{2(a+b)},0)$.

11. 设有一块薄板, 它的周界为心脏线

$$x^2+y^2=a(x+\sqrt{x^2+y^2})(a>0),$$

薄板的面密度为 $\mu=\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2}$，求此薄板的质心坐标 $(\overline{x},\overline{y})$ 及它所占平面区域的形心坐标 (ξ,η) .

解 如图 9.64, 心脏线的极坐标方程为 $\rho=a(1+\cos\theta)$,

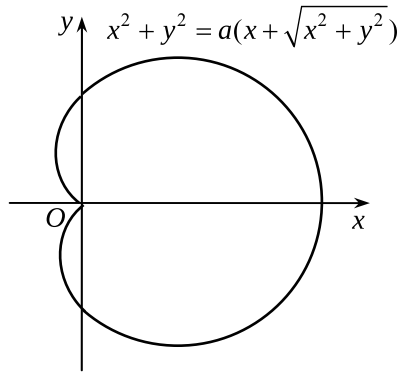

图 9.64

$$M=\iint_D \mu \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}\frac{1}{a}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{5a^2\pi}{3},$$

$$M_x=\iint_D y\mu \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \frac{y}{a}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}\frac{1}{a}\rho^2\sin\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho=0,$$

$$M_y=\iint_D x\mu \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \frac{x}{a}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}\frac{1}{a}\rho^2\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{7a^3\pi}{4},$$

故
$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\frac{7a^3\pi}{4}}{\frac{5a^2\pi}{3}}=\frac{21}{20}a,\qquad \overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{0}{\frac{5a^2\pi}{3}}=0,$$

即质心坐标为 $(\frac{21}{20}a,0)$.

由对称性，易知 $\eta=0$,

$$A=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{3a^2\pi}{2},$$

$$\xi=\frac{1}{A}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{3a^2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}\rho\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{2}{3a^2\pi}\cdot\frac{5a^3\pi}{4}=\frac{5}{6}a,$$

即形心坐标为 $(\frac{5}{6}a,0)$.

12. 利用三重积分求下列曲面所包围的匀质物体的质心(设密度 $\mu=1$).

(1) $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$, $z=0$;　　(2) $x^2+y^2=2z$, $z=2$;

(3) $x^2+y^2+z^2\ge 1$，$x^2+y^2+z^2\le 16$ 及 $z\ge\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$.

解 (1) 如图 9.65, 该匀质物体是由一个上半球面和 xOy 面围成, 关于 z 轴对称, 故其质心在 z 轴上, 即有 $\overline{x}=\overline{y}=0$, 物体体积为 $V=\dfrac{2}{3}\pi\cdot 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi$,

$$\overline{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{3}} r^3\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9}{4}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\frac{9}{8}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

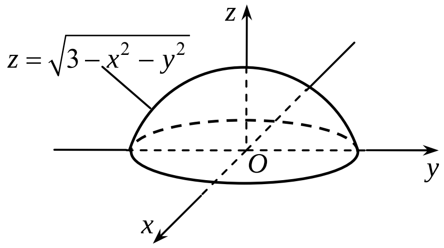

图 9.65

即质心为 $(0,0,\dfrac{3\sqrt{3}}{8})$.

(2) 如图 9.66, 该匀质物体关于 z 轴对称, 故其质心在 z 轴上, 即有 $\overline{x}=\overline{y}=0$,

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2}\rho\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho(2-\frac{\rho^2}{2})\mathrm{d}\rho=4\pi,$$

$$\overline{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2}\rho z\mathrm{d}z=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(2\rho-\frac{\rho^5}{8})\mathrm{d}\rho=\frac{4}{3},$$

即质心为 $(0,0,\dfrac{4}{3})$.

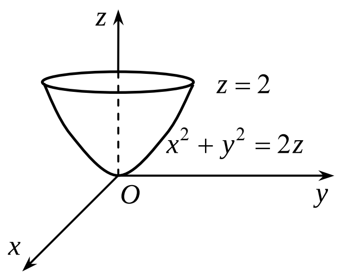

图 9.66

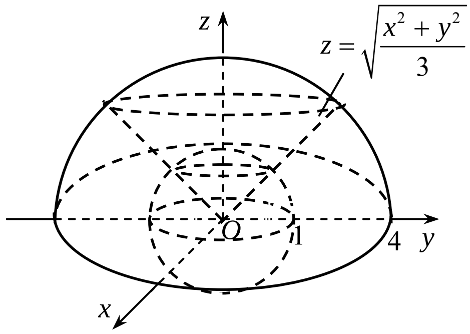

图 9.67

(3) 如图 9.67, 该匀质物体关于 z 轴对称,故其质心在 z 轴上, 即有 $\overline{x}=\overline{y}=0$,

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}\rho\int_{\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{16-\rho^2}}\rho\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{2\sqrt{3}}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{16-\rho^2}}\rho\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\rho(\sqrt{16-\rho^2}-\sqrt{1-\rho^2})\mathrm{d}\rho+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{2\sqrt{3}}\rho(\sqrt{16-\rho^2}-\frac{\rho}{\sqrt{3}})\mathrm{d}\rho=21\pi,$$

$$\overline{z}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\frac{1}{21\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}\rho\int_{\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{16-\rho^2}}\rho z\mathrm{d}z+\frac{1}{21\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{2\sqrt{3}}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{16-\rho^2}}\rho z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{21\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{15}{2}\rho\mathrm{d}\rho+\frac{1}{21\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{2\sqrt{3}}\rho(8-\frac{2\rho^2}{3})\mathrm{d}\rho=\frac{255}{112},$$

即质心为 $(0,0,\frac{255}{112})$.

13. 设球体占有闭区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 4z\right\}$，已知其内任一点处的密度与这点到坐标原点的距离成正比，比例系数为 $k(k>0)$，求这球体的质心.

解 在球面坐标系中, Ω 可表示为 $0\le r\le 4\cos\varphi$，$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$，$0\le\theta\le 2\pi$,

密度函数 $\rho(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}=kr$，由于球体的几何形状及质量分布均关于 z 轴对称，故可知质心位于 z 轴上，因此 $\overline{x}=\overline{y}=0$,

$$M=\iiint_{\Omega}\rho\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{4\cos\varphi}\rho\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}(64k\sin\varphi\cos^4\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{128}{5}k\pi,$$

$$\overline{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega}\rho z\mathrm{d}v=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1024k}{5}\sin\varphi\cos^6\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{16}{7},$$

即质心为 $(0,0,\frac{16}{7})$.

14. 设均匀薄板所占闭区域 D 如下，求指定的转动惯量.

(1) 边长为 a 与 b 的矩形薄板对两条边的转动惯量;

(2) D 由抛物线 $y=1-x^2$ 与 x 轴围成，求 I_x，I_y 和 I_0;

(3) $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$，求 I_y.

解 (1) 如图 9.68 建立坐标系，问题转化为求 I_x 和 I_y，不妨设薄板面密度为 μ，则

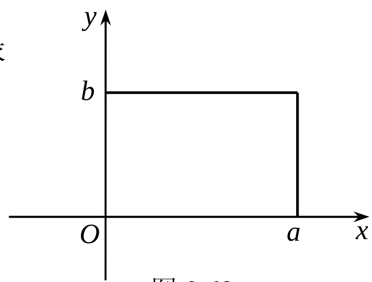

图 9.68

$$I_x=\iint_D \mu y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b y^2\mathrm{d}y=\frac{\mu ab^3}{3},$$

$$I_y=\iint_D \mu x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_0^a x^2\mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y=\frac{\mu a^3b}{3},$$

也即 $$I_a=\frac{\mu ab^3}{3},\quad I_b=\frac{\mu a^3b}{3}.$$

(2) 如图 9.69，不妨设薄板面密度为 μ，则

$$I_x=\iint_D \mu y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x^2} y^2\mathrm{d}y=\frac{32\mu}{105};$$

$$I_y=\iint_D \mu x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^{1-x^2} \mathrm{d}y=\frac{4\mu}{15};$$

$$I_0=\iint_D \mu(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\mu\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x^2} (x^2+y^2)\mathrm{d}y=\frac{4\mu}{7}.$$

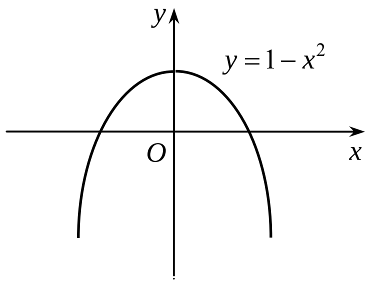

图 9.69

(3) 不妨设薄板面密度为 μ，则

$$I_y=\iint_D \mu x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_{-a}^a x^2\mathrm{d}x\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}y$$
$$=\frac{2b\mu}{a}\int_{-a}^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{4b\mu}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x,$$

令 $x=a\sin t$，则

$$I_y=\frac{4b\mu}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\sin^2 t\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t$$
$$=4a^3b\mu\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t\right)=\frac{\pi a^3b\mu}{4}.$$

15. 求由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的均匀薄片(面密度为常数 μ)对于直线 $y=-1$ 的转动惯量.

解 区域 $D=\{(x,y)\big|-\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y},0\le y\le 1\}$，故所求转动惯量为

$$I==\iint_D \mu(y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_0^1 (y+1)^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x=2\mu\int_0^1\sqrt{y}(y+1)^2\mathrm{d}y=\frac{368}{105}\mu.$$

16. 求半径为 a 的均匀球体(密度为 μ)对过球心的直线及对与球体相切的直线

的转动惯量.

解 如图 9.70(1), 球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 对 x 轴(或 y 轴、z 轴)的转动惯量即球体对过球心的直线的转动惯量,

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}\mu(y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}\mu r^2(\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{\mu a^5}{5}(\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{8}{15}\pi\mu a^5;$$

即球体对过球心的直线的转动惯量为 $\frac{8}{15}\pi\mu a^5$.

如图 9.70(2), 球 $x^2+(y-a)^2+z^2=a^2$ 对 x 轴(或 z 轴)的转动惯量即球体对与球体相切的直线的转动惯量,

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}\mu(y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\sin\varphi\sin\theta}\mu r^2(\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{\mu a^5}{5}(\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\varphi)\sin^6\varphi\sin^5\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{28}{15}\pi\mu a^5;$$

即球体对与球体相切的直线的转动惯量为 $\frac{28}{15}\pi\mu a^5$.

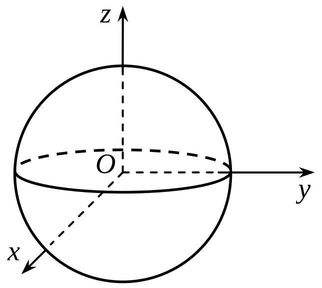

图 9.70(1)

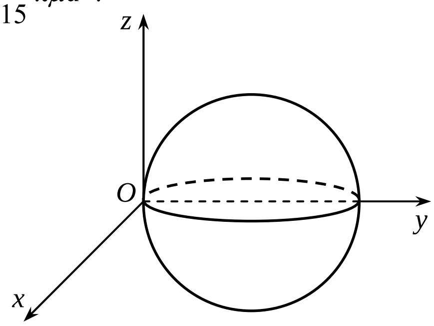

图 9.70(2)

17. yOz 面内的曲线 $z=y^2$ 绕 z 轴旋转得一旋转曲面, 这个曲面与平面 $z=2$ 所围立体上任一点处的密度为 $\mu(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$, 求该立体绕 z 轴转动的转动惯量 I_z.

解 曲线 $z=y^2$ 绕 z 轴旋转得一旋转曲面为 $z=x^2+y^2$ (如图 9.71), 则

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}\mu(x^2+y^2)\mathrm{d}v$$

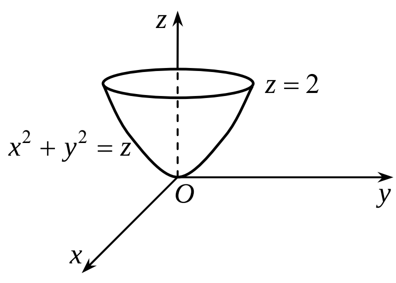

图 9.71

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{2}\rho\cdot\rho^2\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^4(2-\rho^2)\mathrm{d}\rho=\frac{32}{35}\sqrt{2}\pi.$$

即该立体绕 z 轴转动的转动惯量 $I_z=\frac{32}{35}\sqrt{2}\pi$.

18. 求半径为 a，高为 h 的均匀圆柱体(密度为 1)对过中心且分别平行于母线及垂直于母线的直线的转动惯量.

解 如图 9.72(1), 圆柱体对 z 轴的转动惯量即对过中心且平行于母线的直线的转动惯量,

$$I_z=\iiint_\Omega\mu(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint_\Omega\rho^3\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^{h}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\pi ha^4,$$

即圆柱体对过中心且平行于母线的直线的转动惯量为 $\frac{1}{2}\pi ha^4$;

如图 9.72(2), 圆柱体对 y 轴的转动惯量即对过中心且垂直于母线的直线的转动惯量,

$$I_y=2\iiint_\Omega\mu(x^2+z^2)\mathrm{d}v=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{h}{2}}(\rho^2\cos\theta+z^2)\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\rho(\frac{h}{2}\cdot\rho^2\cos^2\theta+\frac{h^3}{24})\mathrm{d}\rho=2\int_0^{2\pi}(\frac{h}{8}\cdot a^4\cos^2\theta+\frac{h^3}{48}a^2)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{12}ha^2(3a^2+h^2)$$

即圆柱体对过中心且垂直于母线的直线的转动惯量为 $\frac{\pi}{12}ha^2(3a^2+h^2)$.

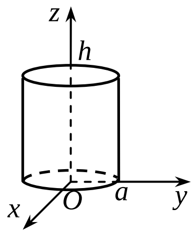

图 9.72(1)

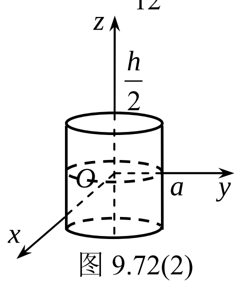

图 9.72(2)

19. 求面密度为 1 的均匀半圆形薄片 $0\le y\le\sqrt{a^2-x^2}$ 对位于点 $M_0(0,0,b)$ 处的单位质点的引力 $\boldsymbol{F}(b>0)$.

解 如图 9.73 建立直角坐标系，记引力 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$ ，设 $\mathrm{d}\sigma$ 为半圆内的面积元素，在 $\mathrm{d}\sigma$ 内任取一点 $Q(x,y,0)$ ，则相应于 $\mathrm{d}\sigma$ 的部分对质点 $M_0(0,0,b)$ 的引力大小为

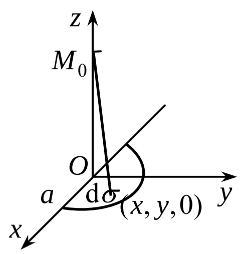

图 9.73

$$\mathrm{d}F = k\frac{\mathrm{d}\sigma}{b^2+x^2+y^2} \quad (k\text{ 为引力常数}),$$

引力方向与 $(x, y, -b)$ 一致，于是 $\mathrm{d}F$ 在三个坐标轴上分量

$$\mathrm{d}F_x = k\frac{x\mathrm{d}\sigma}{(b^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \mathrm{d}F_y = k\frac{y\mathrm{d}\sigma}{(b^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \mathrm{d}F_x = k\frac{-b\mathrm{d}\sigma}{(b^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

故

$$F_x = k\iint_D \frac{x\mathrm{d}\sigma}{(b^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0;$$

$$F_y = k\iint_D \frac{y\mathrm{d}\sigma}{(b^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = k\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a \frac{\rho}{(b^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= 2k(\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}});$$

$$F_z = -kb\iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{(b^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = -bk\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \frac{1}{(b^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \pi kb(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{b}).$$

即所求引力为 $\boldsymbol{F} = (0,\ 2k(\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}),\ \pi kb(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{b}))$.

20. 设有一柱壳，由柱面 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=9$ 和平面 $z=4$，$z=0$ 围成，密度均匀为 μ，求它对位于原点质量为 m 的质点的引力.

解 如图 9.74，由于柱壳关于 z 轴对称，且质量分布均匀，故柱壳对位于原点质量为 m 的质点的引力在 x 轴和 y 轴方向的分量 $F_x = F_y = 0$，只需计算引力在 z 轴方向的分量 F_z.

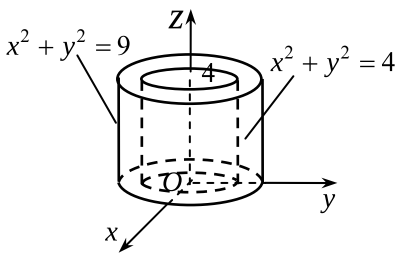

图 9.74

$$F_z = \iiint_\Omega k\mu m\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v$$

$$= k\mu m\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^3\rho\mathrm{d}\rho\int_0^4\frac{z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}z$$

$$= k\mu m\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_2^3 (1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 16}})\mathrm{d}\rho = 4\pi k\mu m(\sqrt{5} - 2) .$$

即柱壳对位于原点质量为 m 的质点的引力为 $(0, 0, 4\pi k\mu m(\sqrt{5} - 2))$.