第五节　导数的简单应用

习题　2-5

1. 问 a 为何值时，抛物线 $y = ax^2$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切（即两曲线有公共切线），并求出切点及切线的方程.

解　根据已知条件，在切点处，有

$$ax^2 = \ln x,$$

$$(ax^2)' = 2ax = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

解得切点为 $(\sqrt{\mathrm{e}}, \frac{1}{2})$，$a = \frac{1}{2\mathrm{e}}$，切线的斜率为 $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，所以切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}(x - \sqrt{\mathrm{e}}), \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}x - y - \frac{1}{2} = 0.$$

2. 证明：双曲线 $xy = a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

证　设 (x_0, y_0) 为双曲线上任一点，此点处的切线斜率为 $k = -\frac{a^2}{x_0^2}$，此点处切线的方程为

$$y - y_0 = -\frac{a^2}{x_0^2}(x - x_0),$$

即

$$y + \frac{a^2}{x_0^2}x = \frac{a^2}{x_0} + y_0 = \frac{2a^2}{x_0},$$

$$\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{\frac{2a^2}{x_0}} = 1,$$

故切线与两坐标轴构成的三角形的面积 $s = \frac{1}{2}\frac{2a^2}{x_0}2x_0 = 2a^2$.

3. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程及法线方程.

解 方程两边对 x 求导，得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$$

将 $x=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，$y=\frac{\sqrt{2}}{4}a$ 代入，得 $y'\big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{4}a}=-1$，从而点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=-(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a)\text{，即 } x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}a=0,$$

法线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a)\text{，即 } x-y=0.$$

4. 写出下列曲线在所给参数值对应的点处的切线方程和法线方程.

(1) $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\cos 2t,\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处；　　(2) $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=t^3,\end{cases}$ 在 $t=2$ 处.

解 (1) $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{-2\sin 2t}{\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-2\sqrt{2}$，$t=\frac{\pi}{4}$ 相对应的曲线上点为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，故而切线方程为

$$y=-2\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})\text{，即 } 2\sqrt{2}x+y-2=0,$$

法线方程为

$$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})\text{，即 } \sqrt{2}x-4y-1=0.$$

(2) $t=2$ 相对应的曲线上点为 $(5,8)$，

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}=\left.\frac{3t^2}{2t}\right|_{t=2}=\left.\frac{3}{2}t\right|_{t=2}=3,$$

从而切线方程为

$$y-8=3(x-5)\text{，即 } 3x-y-7=0,$$

法线方程为

$$y-8=-\frac{1}{3}(x-5)\text{，即 } x+3y-29=0.$$

5. 求对数螺线 $r=a\mathrm{e}^{\theta}$ 在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 对应的点处的切线方程和法线方程.

解 对数螺线参数方程为: $\begin{cases} x = a\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta, \\ y = a\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta, \end{cases}$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{a\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta + a\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta}{a\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta - a\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1,$$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 的对应点为 $(0, a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}})$，切线方程为

$$y - a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} = -(x-0)，即 x + y - a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} = 0,$$

法线方程为

$$y - a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} = x，即 x - y + a\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

6. 一球在斜面上向上而滚，在 t 秒之终和开始的距离为 $s = 3t - t^3\,(\mathrm{m})$，问其初速为多少？何时开始下滚？

解 $v(t)\big|_{t=0} = \left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 3 - 3t^2\big|_{t=0} = 3(\mathrm{m/s})$，令 $3 - 3t^2 = 0$，得 $t = 1$，所以初速为 $3(\mathrm{m/s})$，$t = 1$（秒）时，球开始下滚.

7. 将一物体从地面以初速度 $v_0\,(\mathrm{m/s})$ 铅直上抛，则物体开始上升，到达一高度又下降返回地面，如果忽略空气阻力的影响，试求：

(1) 物体运动过程的瞬时速度;

(2) 上升的最大高度;

(3) 从上升到返回地面所需得时间;

(4) 落到底面时的速度.

解 (1) 取地面上的起抛点为坐标原点，铅直向上方向为坐标轴 x 的正向，建立数轴. 上升过程，位置 x 关于时间 t 的函数，瞬时速度分别为

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 - gt,$$

到达最高点时，$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 - gt = 0$，从而 $t = \dfrac{v_0}{g}(\mathrm{s})$，上升的最大高度为

$$x = v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}(\mathrm{m}),$$

在下降阶段，位置 x 关于时间 t 的函数，瞬时速度分别为

$$x = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g (\frac{v_0}{g})^2 - \frac{1}{2} g (t - \frac{v_0}{g})^2 = \frac{{v_0}^2}{g} + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 - gt,$$

从而整个运动过程的瞬时速度为 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 - gt\,(\mathrm{m/s})$.

(2) 由(1)可知，上升的最大高度为

$$x = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g (\frac{v_0}{g})^2 = \frac{v_0^2}{2g}(\mathrm{m}).$$

(3) 整个运动过程仅受到重力加速度的作用，故而上升过程与下降过程用时必然相同，由(1)可知，从上升到返回地面所需得时间必为 $\frac{2v_0}{g}(\mathrm{s})$.

(4) 整个运动过程仅受到重力加速度的作用，上升过程速度从 v_0 变化到 0，下降过程必然从 0 变化到 v_0，由于下降过程速度方向与 x 轴正向相反，所以落到底面时的速度为 $-v_0\,(\mathrm{m/s})$.

8. 设有一细棒，取棒的一端作为原点，棒上任意点的坐标为 x，若分布在区间 $[0, x]$ 上细棒的质量为 $M = \frac{1}{3}(\pi \rho \tan^2 \frac{\theta}{2}) x^3$，其中 ρ, θ 为常数. 求它在 $x = 2$ 处的线密度（对于均匀细棒来说，单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度）.

解 细棒在 x 处的线密度为 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = (\pi \rho \tan^2 \frac{\theta}{2}) x^2$，细棒在 $x = 2$ 处的线密度为 $\left.\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2} = 4\pi \rho \tan^2 \frac{\theta}{2}$.

9. 某产品总成本 C 元为产量 x 的函数，

$$C = C(x) = 1000 + 40\sqrt{x},$$

求生产 100 单位产品时的边际成本.

解 边际成本函数为 $C'(x) = \frac{20}{\sqrt{x}}$，生产 100 单位产品时的边际成本为 $C'(100) = 2$.

10. 某产品的单价 P 元/件与需求量 Q 件的关系为

$$P = 10 - \frac{Q}{5},$$

求需求量为 15 件时的边际收益.

解 需求量Q件时，销售收入为

$$S = PQ = 10Q - \frac{Q^2}{5},$$

边际收益函数为$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}Q} = 10 - \frac{2Q}{5}$，需求量为 15 件时的边际收益为$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=15} = 4$（元／单位）.

11. 一气球从离开观察员 500m 处离地面铅直上升，其速率为140m/min. 当气球高度为 500m 时，观察员视线的仰角增加率是多少?

解 设气球高度为h时，观察员视线的仰角为α，则

$$\tan\alpha = \frac{h}{500},$$

上式两边关于时间t求导，得

$$\sec^2\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{500} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},$$

又当 $h = 500\text{m}$ 时，$\tan\alpha = 1,\ \sec^2\alpha = 2$，$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 140\text{m/min}$，代入上式得 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = 0.14(\text{rad/min})$，即观察员视线的仰角增加率是$0.14(\text{rad/min})$.

12. 溶液自深18cm顶直径为12cm的正圆锥形漏斗中漏入一直径为10cm的圆柱形筒中，开始时漏斗中盛满了溶液. 已知当溶液在漏斗中深为12cm时，其表面下降的速率为1cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少?

解 当溶液在漏斗中表面下降y cm 时，相应的圆柱形筒中溶液表面上升的高度为h，此时正圆锥形漏斗的溶液表面下降的体积等于圆柱形筒中溶液表面上升的体积，即

$$\frac{1}{3}\pi\, 6^2 \cdot 12 - \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{18-y}{3}\right)^2 \cdot (18-y) = \pi \cdot 5^2 \cdot h,$$

上式两边关于时间t求导，得

$$\frac{1}{9}(18-y)^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 25\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},$$

当溶液在漏斗中深为 12cm 时，$y = 6$. 将 $y = 6,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1$ 代入上式，得 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0.64(\text{cm/min})$.

13. 一梯子长10m，上端靠墙，下端着地，梯子顺墙下滑. 当梯子下端离墙 6m 时，假设梯子下端沿着地面离开墙的速率为2m/s，问此时梯子上端下降的速率是多

少?

解 从开始下滑到梯子下端离墙 6m，所用的时间为 $\frac{6}{2}=3\text{s}$．以开始下滑作为计时的起点，t 时刻梯子的上端距地面的距离为

$$h(t)=\sqrt{10^2-(2t)^2}\,,$$

$$h'(t)=\frac{-2(2t)2}{2\sqrt{10^2-(2t)^2}}=\frac{-4t}{\sqrt{10^2-(2t)^2}}\,,\quad h'(3)=\frac{3}{2}=-1.5\,,$$

故而梯子下端离墙 6m 时，梯子上端下降的速率是 $1.5(\text{m/s})$．