第二章

导数与微分

本章基本要求

1. 理解导数的概念及其几何意义（不要求学生做利用导数的定义研究抽象函数可导性的习题），了解函数的可导性与连续性之间的关系。

2. 了解导数作为函数变化率的实际意义，会用

导数表达科学技术中一些量的变化率。

3. 掌握导数的有理运算法则和复合函数的求导法，掌握基本初等函数的导数公式。

4. 理解微分的概念，了解微分概念中所包含的局部线性化思想，了解微分的有理运算法则和一阶微分形式不变性。

5. 了解高阶导数的概念，掌握初等函数一阶、二阶导数的求法（不要求学生求函数的n阶导数的一般

表达式）。

6. 会求隐函数和由参数方程所确定的函数的一阶导数以及这两类函数中比较简单的二阶导数，会解一些简单实际问题中的相关变化率问题。

第一节

导数的概念

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

导数思想最早由法国数学家 **Fermat** 在研究极值问题中提出.

微积分学的创始人是:

英国数学家 **Newton**

德国数学家 **Leibniz**

微分学
- **导数** —— 描述函数变化快慢
- **微分** —— 描述函数变化程度

都是描述物质运动的工具 (从微观上研究函数)

（一） 实例分析

1. 变速直线运动中某时刻的瞬时速度问题

设描述质点运动的位移函数为 $s = f(t)$

则 t_0 到 t 的平均速度为 $\bar{v} = \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

而在 t_0 时刻的瞬时速度为

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

2. 曲线的切线问题

曲线 $y=f(x)$ 在 M 点处的切线

—— 割线 $M\,N$ 的极限位置 $M\,T$

(当 $\varphi\to\alpha$ 时)

割线 $M\,N$ 的斜率

$$\tan\varphi=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

切线 MT 的斜率

$$k=\tan\alpha=\lim_{\varphi\to\alpha}\tan\varphi=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

瞬时速度

$$v=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

切线斜率

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

两个问题的共性：

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限 .

类似问题还有：

加速度 是速度增量与时间增量之比的极限

角速度 是转角增量与时间增量之比的极限

线密度 是质量增量与长度增量之比的极限

电流强度 是电量增量与时间增量之比的极限

……….

$\boxed{\text{变化率问题}}$

（二）导数的概念

1. 定义2.1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$内有定义.
$$x_0+\Delta x\in U(x_0)$$

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

若
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称此极限为 函数$y=f(x)$在点 x_0 处的导数, 记作

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

也可记作:

$$y'\big|_{x=x_0}\ ;\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\ ;\quad \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

注 1° 若极限(1)不存在，则称 $f(x)$在点 x_0 处不可导.

特别地，当 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty$时，则称 $f(x)$

在点 x_0 处的导数为无穷大．此时，导数不存在;

但若此时 $f(x)$在x_0处连续，则有几何意义:

曲线上对应点有垂直于x 轴的切线.

2° 导数定义的其它表达形式

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\xlongequal{\Delta x = h}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\xlongequal{x=x_0+\Delta x}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

$$\xlongequal[x-x_0=\Delta x]{f(x)-f(x_0)=\Delta y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

3° 函数在一点的导数是因 变量在点 x_0处的变化率，它反映了因变量随自变量的变化 而变化的快慢程度．

运动质点的位移函数 $s = f(t)$ 在 t_0 时刻的瞬时速度

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线斜率

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

此外在经济学中，边际成本率，边际劳动生产率

和边际税率等，从数学角度看就是导数.

2. 单侧导数

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 及 x_0 的某个右 邻域内有定义,
(左)

若极限

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数.
(左)

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

3. 可导的充要条件

定理 $f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$
$(A\in\mathrm{R})$

4. 区间上可导

若函数 $f(x)$ 在开区间 I 内每点都可导，则称函数 $f(x)$ 在 I 内可导. 此时，对于任一 $x\in I$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值，所构成的新函数称为 $f(x)$ 的导函数. 记作

$$y' ;\ f'(x) ;\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} ;\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} .$$

即 $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

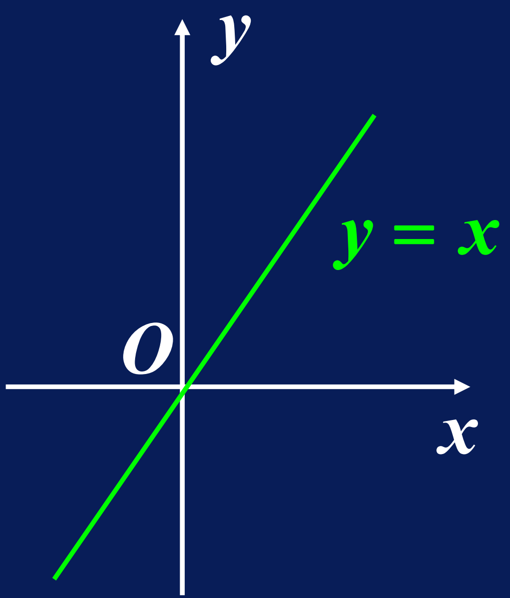
若 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导，且 $f'_{+}(a)$ 及 $f'_{-}(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导.

注 $$f'(x_0)=f'(x)\Big|_{x=x_0} .$$

一般地，$f'(x_0) \neq [f(x_0)]' = \dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$

如：$f(x)=x$， 因为 $f'(x)\equiv 1$

所以 $f'(2)=1 \neq [f(2)]'=2'=0.$



（三）导数的几何意义

$f'(x_0)=\tan\alpha$ ——— 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$处的切线斜率.

若 $f'(x_0)=0$,切线与 x 轴平行，x_0 称为**驻点**；

若 $f'(x_0)=\infty$, 切线与 x 轴垂直 .

$f'(x_0) \neq \infty$时，曲线在点(x_0, y_0)处的

$y_0 = f(x_0)$

切线方程:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

法线方程:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$(f'(x_0) \neq 0)$$

（四）可导与连续的关系

定理 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 必在 x_0 处连续.

可导 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 连续

二、典型例题

例1 已知 $f'(3)=2$, 求:

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}$

解 原式 $=\lim\limits_{h\to 0}(-\dfrac{1}{2})\cdot\dfrac{f[3+(-h)]-f(3)}{(-h)}$

$$\overset{-h=\Delta x}{=\!=\!=}(-\frac{1}{2})\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$

$$=-\frac{1}{2}f'(3)=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$$

$$(2)\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3+h)}{2h}$$

解 原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{f(3-h)-f(3)-f(3+h)+f(3)}{h}$

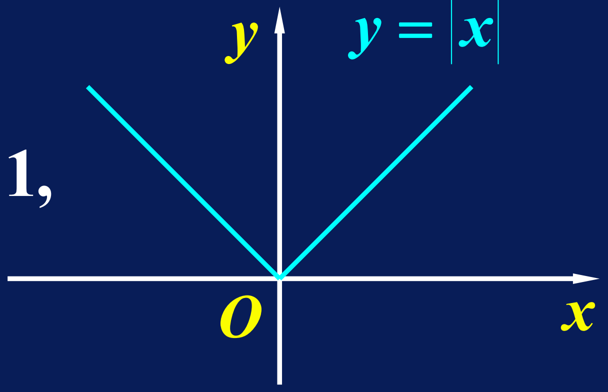
$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{[f(3-h)-f(3)]-[f(3+h)-f(3)]}{h}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}+\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}[f'(3)+f'(3)]=-f'(3)=-2.$$

例2 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在点$x=0$处的可导性.

解 $\because \quad \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h},$



$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

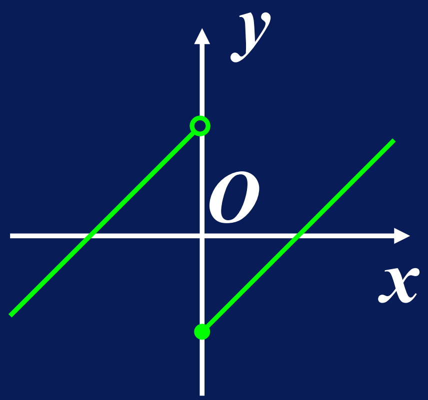
即 $\quad f'_+(0)\neq f'_-(0),$

$\therefore \quad y=f(x)$在$x=0$点不可导.

例3 讨论 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ x-1, & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性.

解 $\because \quad f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$



$f(0^-)\neq f(0^+)$

$\therefore \quad f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，从而不可导．

注 1° 问：对于例3, 下面推导是否正确？为什么？

$\because$ 当 $x<0$ 时，$f'(x)=1$，$f'_-(0)=1$,

当 $x>0$ 时，$f'(x)=1$，$f'_+(0)=1=f'_-(0)$

$$\therefore \quad f'(0)=1$$

答： 不正确.

错误原因：上述方法求得的实际上是 $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$，而不是 $f'_-(0)$ 与 $f'_+(0)$

$$\lim_{x\to x_0} f'(x)\text{存在} \not\Rightarrow f'(x_0)\text{存在}.$$

2° 讨论分段函数在分段点的可导之步骤：

(1) 先查分段点处的连续性. 若不连续，必不可导.

(2) 若在分段点处连续，则需从导数定义出发，讨论分段点处的可导性.

例4 已知 $f(x)=\begin{cases} g(x)\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

且 $g(0)=g'(0)=0$, 求 $f'(0)$.

解 $\because$ $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)\cos\frac{1}{x}-0}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-0}{x}\cdot\cos\frac{1}{x} \qquad (g(0)=0)$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} \cdot \cos\frac{1}{x}$$

而 $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \le 1,$

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(0) = 0$$

$\therefore \quad f'(0) = 0.$

例5 求曲线 $y = e^x$ 在横坐标 $x = 1$ 的点处的切线方程和法线方程.

解 易求得切点为 $(1, e)$.

一求切点

又因为 $y' = e^x$， 故 $k_{切} = e^x\big|_{x=1} = e$，$k_{法} = -\dfrac{1}{e}$，

切线方程 ： $y - e = e(x - 1)$，

即 $y = ex$.

二求斜率

法线方程 ： $y - e = -\dfrac{1}{e}(x - 1)$，

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

三、同步练习

1. 下面的关系式对否？若对，则给出证明；若不对，请举出反例.

$$f'(x_0)=A \;\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=A$$

$$(A\in R)$$

2. 函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系？

3. 若 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, 恒有 $|f(x)| \le x^2$，问 $f(x)$ 是否在点 $x=0$ 处可导?

4. 若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$,问 A 表示什么?

5. 设 $f'(x)$ 存在, 且

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1, \text{ 求 } f'(1).$$

6. 设 $F(x) = \lim\limits_{t \to \infty} t^2 [f(x + \dfrac{\pi}{t}) - f(x)] \sin \dfrac{x}{t}$, $f(x)$可导，求 $F(x)$.

7\. 问曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 上哪一点处的切线与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$ 平行？写出其切线方程.

8\. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

9\. 设 $f(x)=2^{|x|}$, 求 $f'(x)$.

10\. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 证明: $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

四、同步练习解答

1. 下面的关系式对否？若对，则给出证明；若不对，请举出反例.

$$f'(x_0)=A \;\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \cancel{\longleftarrow}\end{array}\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=A$$

$$(A\in R)$$

解 $(\rightarrow)$ $$I=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{2(-h)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)=f'(x_0)=A$$

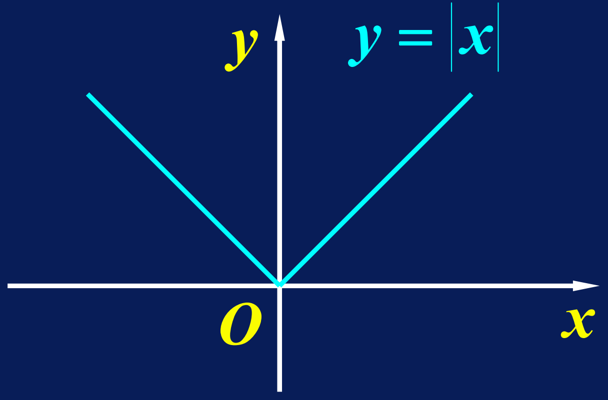
下述方法是否正确？令$t = x_0 - h$，则

$$I = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+2h) - f(t)}{2h} \cancel{=} \lim_{h \to 0} f'(t) \cancel{=} f'(x_0)$$

(⟵) 反例见例2: $f(x) = |x|$

虽然 $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0$$



但$f(x) = |x|$在$x = 0$点不可导.

2. 函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系 ?

区别: $f'(x)$ 是函数， $f'(x_0)$ 是数值;

联系: $f'(x)\big|_{x=x_0} = f'(x_0)$

注意: $f'(x_0) \neq [f(x_0)]'$

3. 若 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, 恒有 $|f(x)| \le x^2$, 问 $f(x)$ 是否在点 $x=0$ 处可导?

解 由题设 $f(0)=0$

$$0 \le \left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \right| \le |x| \xrightarrow{\text{当}x \to 0\text{时}} 0$$

由夹逼准则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且

$$f'(0)=0.$$

4. 若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$,问 A 表示什么?

解 $A \overset{-\Delta x = h}{=\!=\!=\!=} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x_0)}{-h}$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= -f'(x_0)$$

5. 设 $f'(x)$ 存在, 且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1,\ 求\ f'(1).$$

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f[1+(-x)]-f(1)}{(-x)}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=-1$$

所以 $f'(1)=-2.$

6. 设 $F(x)=\lim\limits_{t\to\infty} t^2[f(x+\frac{\pi}{t})-f(x)]\sin\frac{x}{t}$,

$f(x)$可导，求 $F(x)$.

解 $F(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \lim\limits_{t\to\infty}[\dfrac{f(x+\frac{\pi}{t})-f(x)}{\frac{\pi}{t}}]\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}\cdot\pi x, & x\neq 0\end{cases}$

$=\begin{cases}0, & x=0\\ f'(x)\cdot 1\cdot\pi x, & x\neq 0\end{cases}$

$\therefore\quad F(x)=\pi x f'(x).$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

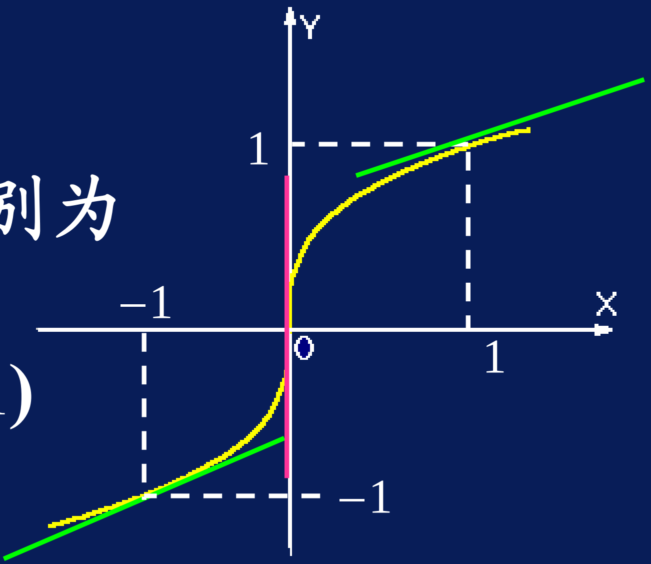
7. 问曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 上哪一点处的切线与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$ 平行？写出其切线方程.

解 $\because\ y'=(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$，要与 $y=\frac{1}{3}x-1$ 平行.

应有 $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}$，解得 $x=\pm1$，

对应点:(1,1),(-1,-1), 所求方程分别为

$$y-1=\frac{1}{3}(x-1),\ y+1=\frac{1}{3}(x+1)$$



即 $x-3y\pm2=0.$

8. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq 1,\quad \lim\limits_{x\to 0} x=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$$

$\therefore\quad f(x)$在$x=0$处连续.

$$\because\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\text{不存在}$$

$\therefore\quad f(x)$在点 $x=0$处不可导.

9. 设 $f(x)=2^{|x|}$， 求 $f'(x)$.

解 $f(x)=2^{|x|}=\begin{cases}2^{-x}, & x<0\\ 2^{x}, & x\geq 0\end{cases}$

$$\boxed{(a^{x})'=a^{x}\ln a}$$

易知，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且

$$f'(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^{x}\ln\frac{1}{2}, & x<0\\ 2^{x}\ln 2, & x>0\end{cases}=\begin{cases}-2^{-x}\ln 2, & x<0\\ 2^{x}\ln 2, & x>0\end{cases}$$

在$x=0$处，

$$\because \quad f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{2^{-x}-1}{x-0}$$

$$\because \quad f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2^{-x}-1}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-x\ln 2}-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\ln 2}{x} = -\ln 2$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^{x}-1}{x-0} = \ln 2$$

$f'_-(0) \neq f'_+(0)$, $\therefore$ $f(x)$在 $x=0$ 处不可导.

10. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

证 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，故有

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0$$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，

所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，存在

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.