第二节　正项级数及其审敛法

习题　11-2

1. 利用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2-n+3}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{(n+1)(n+2)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\frac{\pi}{2^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{n}}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot\sqrt[n]{n}}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3})$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}\ (a>0)$.

解　(1) 设 $u_n=\frac{5}{n^2-n+3}$, $v_n=\frac{1}{n^2}$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2}{n^2-n+3}=5$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 所以原级数收敛.

(2) 设 $u_n=\frac{4n}{(n+1)(n+2)}$, $v_n=\frac{1}{n}$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2}{(n+1)(n+2)}=4$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, 所以原级数发散.

(3) 设 $u_n=\tan\frac{\pi}{2^n}$, $v_n=\frac{\pi}{2^n}$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=1$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 所以原级数收敛.

(4) 因为所给级数为 $p-$级数, 且 $p=\frac{1}{3}<1$, 故原级数发散.

(5) 设 $u_n=\frac{1}{n^2\cdot\sqrt[n]{n}}$, $v_n=\frac{1}{n^2}$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 所以原级数收敛.

(6) 因为$u_n=\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3}=\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}\le\dfrac{1}{2\sqrt{n^3}}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n^3}}$收敛，所以原级数收敛.

(7) 设 $u_n=\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$，$v_n=a^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^{2n}}=\begin{cases}1,\ 0<a<1,\\ \dfrac{1}{2},a=1,\\ 0,\ a>1.\end{cases}$. 因为 $0<a<1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，所以原级数收敛；$a=1$时，级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}$ 发散，所以原级数发散；$a>1$时，$u_n\le\dfrac{1}{a^n}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n}$ 收敛，所以原级数收敛.

2. 利用比值审敛法判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{2^n}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(2n+1)!}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{\pi}{3^{n+1}}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot5\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdots(4n-3)}$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n^2}\ (x>0)$.

解 (1) 设$u_n=\dfrac{n^3}{2^n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3}{2^{n+1}}\dfrac{2^n}{n^3}=\dfrac{1}{2}<1$，所以原级数收敛.

(2) 设$u_n=\dfrac{2^n n!}{n^n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\dfrac{n^n}{2^n n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1$，所以原级数收敛.

(3) 设$u_n=\dfrac{3^n}{(2n+1)!}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{(2n+3)(2n+2)}=0<1$，所以原级数收敛.

(4) 设$u_n=n\sin\dfrac{\pi}{3^{n+1}}\le\dfrac{n\pi}{3^{n+1}}$，$v_n=\dfrac{n\pi}{3^{n+1}}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\pi}{3^{n+2}}\dfrac{3^{n+1}}{n\pi}=\dfrac{1}{3}<1$，

故$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，所以原级数收敛.

注意　当直接用比值审敛法去判断级数的敛散性但求极限问题较复杂时，应考虑先将级数通项变形，再用比值审敛法.

(5)　设$u_n = \frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdots(4n-3)}$，则$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)-1}{4(n+1)-3} = \frac{3}{4} < 1$，所以原级数收敛.

(6)　设$u_n = \frac{x^{2n}}{n^2}$，则$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{x^{2n}} = x^2$，所以当$x>1$时原级数发散；

$0<x<1$时原级数收敛；$x=1$时原级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $(x>0)$收敛.

注意　当用比值审敛法去判断级数的敛散性时，极限$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$的具体值必须求出．不求出极限$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$的具体值，仅通过观察确定$\frac{u_{n+1}}{u_n}$与1的关系，进而确定$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$与1的关系，从而得出级数敛散性的结论一般是错误的.

3.　利用根值审敛法判定下列级数的敛散性:

(1)　$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{2}-1)^n$；　　(2)　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n^n}}$；

(3)　$\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4^2}{2\cdot 3^2}+\frac{4^3}{3\cdot 3^3}+\cdots$；

(4)　$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{b}{a_n})^n$，其中$\lim_{n\to\infty}a_n = a$，两正数$a\neq b$.

解　(1)　设$u_n = (\sqrt[n]{2}-1)^n$，则$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2}-1) = 0 < 1$，所以原级数收敛.

(2)　设$u_n = \frac{2^n}{\sqrt{n^n}}$，则$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}} = 0 < 1$，所以原级数收敛.

(3)　设$u_n = \frac{4^n}{n\cdot 3^n}$，则$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3\cdot\sqrt[n]{n}} = \frac{4}{3} > 1$，所以原级数发散.

(4)　设$u_n = (\frac{b}{a_n})^n$，则$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{a_n} = \frac{b}{a}$，所以当$b>a$时原级数发散；而

$b<a$ 时原级数收敛.

4. 利用适当方法判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{n!}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(1-\cos\frac{\pi}{n^2})$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin\frac{\pi}{b^n}$ (a,b均为正数); (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\ (a>0)$.

解 (1) $u_n=\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{1}{n}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\le\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，所以原级数收敛.

(2) 设 $u_n=\frac{n^p}{n!}$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)!}\frac{n!}{n^p}=0<1$，所以原级数收敛.

(3) $u_n=n^2(1-\cos\frac{\pi}{n^2})=2n^2\sin^2\frac{\pi}{2n^2}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(\frac{\sin\frac{\pi}{2n^2}}{\frac{1}{2n^2}})^2=\frac{1}{2}\pi^2$，所以原级数收敛.

(4) 因为 $u_n=\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}\le\frac{n}{2^n}=v_n$，而 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，从而原级数收敛.

(5) 设 $u_n=a^n\sin\frac{\pi}{b^n}$，当 $0<a<b$ 时，$u_n\le(\frac{a}{b})^n\pi$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a}{b})^n$ 收敛，所以原级数收敛；当 $0<b\le a<1$ 时，$a^n\sin\frac{\pi}{b^n}\le a^n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}a^n$ 收敛，所以原级数收敛；$a=b=1$ 时原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}0$ 收敛；$a=b>1$ 时 $\lim_{n\to\infty}a^n\sin\frac{\pi}{a^n}=\pi$，当 $a>b>1$ 时 $\lim_{n\to\infty}a^n\sin\frac{\pi}{b^n}=\infty$，所以原级数发散；$a>1>b$ 时，原级数发散.

(6) 因为 $\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$，当 $a>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 收敛，所以原级数收敛；而

$0<a<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^n}=1$，原级数发散；$a=1$时，原级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}$ 发散.

5. 利用收敛级数的性质证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}=0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\ (a>1)$.

证 (1) 设$u_n=\dfrac{n^n}{(2n)!}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{[2(n+1)]!}\dfrac{(2n)!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{1}{n}+1)^n}{2(2n+1)}=0<1$，

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，因此$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(2) 设$u_n=\dfrac{a^n}{n!}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n+1}=0<1$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

收敛，因此$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

注意 级数收敛必要条件是证明数列极限的一种方法.

6. (1) 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$ 收敛，并说明反之不成立;

(2) 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n v_n}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{v_n}}{n}$ 均收敛.

证 (1) 由题知$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，故存在正整数$N>0$，使得当$n>N$时有$0<u_n<1$，

从而${u_n}^2<u_n$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$ 收敛. 但反之不成立，如对$u_n=\dfrac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$ 收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

发散.

(2) 因为$\sqrt{u_n v_n}\le\dfrac{u_n+v_n}{2}$，$\dfrac{\sqrt{v_n}}{n}\le\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n^2}+v_n)$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n v_n}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{v_n}}{n}$ 均收敛.

注意 比值审敛法或根值审敛法定理的逆命题一般不成立，所以下述证明思路

是错误的：由正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ 或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$，进一步运算得

欲证结论.

7. 下列命题是否正确？若正确，给予证明，若不正确，试举出反例.

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，且 $u_n \le v_n (n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必有 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$，且 $l < 1$.

解 (1) 不正确. 如设 $u_n = -\frac{1}{n}$，$v_n = \frac{1}{n^2}$，显然 $u_n \le v_n (n=1,2,\cdots)$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n})$ 发散.

(2) 不正确. 如对于 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$，当 $p > 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，但

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{1}{n}+1)^p} = 1 .$$