第八章　　多元函数微分法及其应用

第一节　　多元函数的极限与连续

1. 填空

（1）设 $f\left(x,y\right)=3x+2y$，则 $f\left(xy,f\left(x,y\right)\right)=\underline{3xy+6x+4y}$.

（2）设 $f\left(y,\dfrac{x+y}{x}\right)=x+y^2$，则 $f\left(x,y\right)=\underline{x^2+\dfrac{x}{y-1}\left(x\neq 0\right)}$.

（3）设 $z=\sqrt{y}+f\left(\sqrt{x}-1\right)$，若当 $y=1$ 时 $z=x$，则函数 $f\left(x\right)=\underline{x^2+2x}$，$z=\underline{\sqrt{y}+x-1}$.

（4）函数 $u=\arccos\dfrac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的定义域是 $\underline{\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2-z^2\geq 0,x^2+y^2\neq 0\}}$.

（5）函数 $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域是 $\underline{\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2<1,x\geq\dfrac{y^2}{4}\}}$，此定义域可用平面图形表示为（图 8.1）

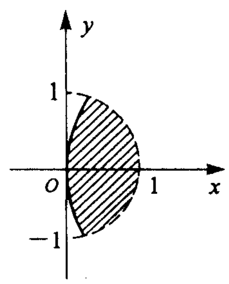

图　8.1

（6）函数 $z=\ln\left(1-x^2-y^2\right)$ 在 $\underline{x^2+y^2=1}$ 是间断的.

解　（1）$f(xy,f(x,y))=3(xy)+2f(x,y)$
$=3xy+2(3x+2y)=3xy+6x+4y$.

（2）　令 $y=u,\dfrac{x+y}{x}=v$，可解得 $x=\dfrac{u}{v-1},y=u$，于是

$$f(u,v)=\frac{u}{v-1}+u^2,\quad f(x,y)=x^2+\frac{x}{y-1}.$$

（3）于式　$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$ 中令 $y=1$ 得 $x=1+f(\sqrt{x}-1)$.

再令　$\sqrt{x}-1=t$，即 $x=(t+1)^2$，于是

$$f(t)=(t+1)^2-1=t^2+2t$$

故

$$f(x)=x^2+2x\ .$$

从而

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)=\sqrt{y}+x-1.$$

（4）、（5）的解略去.

（6）函数的间断点是函数的定义域的聚点中那些函数不连续的点，而函数 $u=\ln(1-x^2-y^2)$ 的定义域是开区域 $x^2+y^2<1$，因此其间断点为 $x^2+y^2=1$，而不是 $x^2+y^2\geq 1$.

2. 求极限

（1）　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{e^{x^2y^2}(x^2+y^2)}$；　　（2）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,a)}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解 （1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{\mathrm{e}^{x^2y^2}(x^2+y^2)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sin\dfrac{x^2+y^2}{2}.\dfrac{\sin\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ =0×1=0.

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}[(1+\dfrac{1}{x})^x]^{\frac{x}{x+y}}$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}\dfrac{x}{x+y}$=1，故原极限=$\mathrm{e}$.

3. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0$.

证 $0\le\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\le\dfrac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2})$，而 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2})=0$，故原极限=$0$.

4. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

证 由于 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{x^4}$=1,

而 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^4}{4x^4+x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{4x^2+1}$=0.

故极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

5. 讨论函数 $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^4+y^2\ne0\\ 0, & x^4+y^2=0\end{cases}$ 的连续性.

解 因为

$$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}}\frac{xy}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k^2}{1+k^2}.$$

此值随 k 值不同而不同，故极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}z$ 不存在，从而函数 z 在（0, 0）点不连续.

在除（0, 0）点外的区域上，函数 $z=\dfrac{xy}{x^4+y^2}$ 是初等函数，故在其定义区域上连续.

注意 常犯的错误一是只讨论了函数在（0, 0）点的连续性，没讨论函数在定义域内其它点处的连续性；二是求（0, 0）点的极限时，出现了如下：

$$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^4+y^2}=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^4+y^2}\qquad\text{（错误的式子）}$$

事实上，记号“$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$”表示点$(x,y)$以任意的方式无限接近（0, 0）点，而记号

“$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}$”表示点$(x, y)$只能沿直线$y=kx$无限接近点（0, 0）点, 这两者意义显然是不同的.

第二节　　多元函数的偏导数

1. 填空

（1） $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$， 则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{\dfrac{2}{y}\csc\dfrac{2x}{y}}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\underline{-\dfrac{2x}{y^2}\csc\dfrac{2x}{y}}$.

（2） $z=(1+xy)^y$, 则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{y^2(1+xy)^{y-1}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\underline{(1+xy)^y[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}]}$.

（3） $u=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$, 则$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\underline{\dfrac{1}{yz}(\dfrac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\underline{-\dfrac{1}{yz}(\dfrac{x}{y})^{\frac{1}{z}}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\underline{-\dfrac{1}{z^2}(\dfrac{x}{y})^{\frac{1}{z}}\ln\dfrac{x}{y}}$.

（4） $u=x^{y^z}$, 则$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\underline{y^z x^{y^z}\ln x\ln y}$.

（5） $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$, 则$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=\underline{2\ln 2+1}$.

（6）设 $f(x,t)=\int_{x-at}^{x+at}\varphi(u)du$，（$\varphi$是连续函数）, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\underline{\varphi(x+at)-\varphi(x-at)},\ \frac{\partial f}{\partial t}=\underline{a[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]}.$$

（7）设$u=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\underline{\frac{\sin 2y}{2\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}}},\ u_y(0,\frac{\pi}{4},0)=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

解　（1）　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{y}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}\csc\dfrac{2x}{y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\tan\dfrac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot(-\frac{x}{y^2})=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}.$$

（2） 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$时, 应当用幂函数的导数公式, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}.$$

求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 时, 把 x 暂时看做常数, 这时, z 是关于 y 的幂指函数, 所以

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}]=\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}]$$

$$=(1+xy)^y[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}].$$

（3） $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}]=\frac{1}{z}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{yz}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}]=\frac{1}{z}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}\cdot(-\frac{x}{y^2})=-\frac{x}{y^2z}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}=-\frac{1}{yz}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}[(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}]=(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}\ln\frac{x}{y}\cdot(-\frac{1}{z^2})=-\frac{1}{z^2}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}\ln\frac{x}{y}.$$

（4） $$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}[x^{y^z}]=x^{y^z}\ln x\cdot y^z\ln y=y^zx^{y^z}\ln x\ln y.$$

注意 常见的错误是遗漏了步骤：$\frac{\partial}{\partial z}(y^z)$, 而得到错误结果：$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}\ln x$.

（5） **法 1** 因为 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$, 则 $\ln z=x\ln(x+\mathrm{e}^y)$,

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z}=\ln(x+\mathrm{e}^y)+x\cdot\frac{1}{x+\mathrm{e}^y},$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=(x+\mathrm{e}^y)^x\,[\ln(x+\mathrm{e}^y)+\frac{x}{x+\mathrm{e}^y}].$$

从而 $$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=2\ln 2+1$$

法 2 因为 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$, 所以 $z(x,0)=(x+\mathrm{e}^0)^x=(x+1)^x$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=[(x+1)^x]'=[\mathrm{e}^{\ln(x+1)^x}]'=[\mathrm{e}^{x\ln(x+1)}]'=\mathrm{e}^{x\ln(x+1)}[\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}]$$

$$=(x+1)^x[\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}],$$

从而 $$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=2\ln 2+1.$$

（6）求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 时, 暂时将 t 看做常量, 因而 f 是积分上限、下限的函数, 由公式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

可得 $$\frac{\partial f}{\partial x}=\varphi(x+at)-\varphi(x-at)$$

同理 $$\frac{\partial f}{\partial t}=\varphi(x+at)\cdot a-\varphi(x-at)\cdot(-a)$$

$$=a[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)].$$

（7） 求解过程略.

2. 证明函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 在（0, 0）处连续, $f_y(0,0)=0$, 而 $f_x(0,0)$ 不存在.

证 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}=\mathrm{e}^0=1,$$

而 $f(0,0)=\mathrm{e}^0=1$, 故 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 在（0, 0）处连续.

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{(\Delta y)^2}-1}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta y)^2}{\Delta y}=0.$$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{(\Delta x)^2}}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{|\Delta x|}-1}{\Delta x},$$

而 $$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{|\Delta x|}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{|\Delta x|}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{-\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

所以 $f_x(0,0)$ 不存在.

3. 设 $z=\mathrm{e}^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$, 求证: $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{z}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}\cdot\frac{1}{y^2}=\frac{z}{y^2}$,

所以 $$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cdot\frac{z}{x^2}+y^2\cdot\frac{z}{y^2}=2z\,.$$

4. 求下列函数的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

（1） $z=x^4+y^3-4x^2y$； （2） $z=\arctan\dfrac{y}{x}$.

解（1） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-8x$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2-4x^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y$.

（2） $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

第三节 多元函数的全微分

1. 填空

（1）设 $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 $\mathrm{d}z=\underline{\dfrac{-xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}}$，$\mathrm{d}z\big|_{(1,0)}=\underline{\mathrm{d}y}$.

（2）设 $u=\dfrac{s+t}{s-t}$，则 $\mathrm{d}u=\underline{\dfrac{-2t\mathrm{d}s+2s\mathrm{d}t}{(s-t)^2}}$.

（3）设 $u=(xy)^z$，则 $\mathrm{d}u=\underline{yz(xy)^{z-1}\mathrm{d}x+xz(xy)^{z-1}\mathrm{d}y+(xy)^z\ln(xy)\mathrm{d}z}$.

解　（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-y\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}=\dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

故　$\mathrm{d}z=\dfrac{-xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,　$\mathrm{d}z\Big|_{(1,0)}=\mathrm{d}y$.

（2）$\dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{(s-t)-(s+t)}{(s-t)^2}=\dfrac{-2t}{(s-t)^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{(s-t)-(s+t)\cdot(-1)}{(s-t)^2}=\frac{2s}{(s-t)^2},$$

故　$\mathrm{d}u=\dfrac{-2t\mathrm{d}s+2s\mathrm{d}t}{(s-t)^2}$.

（3）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=z(xy)^{z-1}\cdot y=yz(xy)^{z-1}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z(xy)^{z-1}\cdot x=xz(xy)^{z-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy),$$

故　$\mathrm{d}u=yz(xy)^{z-1}\mathrm{d}x+xz(xy)^{z-1}\mathrm{d}y+(xy)^z\ln(xy)\mathrm{d}z$.

2. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解　全增量 $\Delta z=\dfrac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{x\Delta y-y\Delta x}{x(x+\Delta x)}$,

全微分　$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{y}{x})\Delta x+\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{y}{x})\Delta y=-\dfrac{y}{x^2}\Delta x+\dfrac{1}{x}\Delta y$,

当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$ 时,

$$\Delta z=\frac{-0.4-0.1}{2\times 2.1}=-\frac{5}{42}\approx -0.119.$$

$$\mathrm{d}z=-\frac{1}{4}\times 0.1+\frac{1}{2}\times(-0.2)=-0.125.$$

3. 求$u(x,y,z)=x^y y^z$的全微分.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}y^z$，$\frac{\partial u}{\partial y}=y^z x^y\ln x+zx^y y^{z-1}$， $\frac{\partial u}{\partial z}=x^y y^z\ln y$，

故 $$\mathrm{d}u=yx^{y-1}y^z\mathrm{d}x+(y^z x^y\ln x+zx^y y^{z-1})\mathrm{d}y+x^y y^z\ln y\mathrm{d}z$$

$$=x^y y^z[\frac{y}{x}\mathrm{d}x+(\frac{z}{y}+\ln x)\mathrm{d}y+\ln y\mathrm{d}z].$$

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，问在$(0,0)$点处：

（1）偏导数是否存在？（2）偏导数是否连续？（3）是否可微？均说明理由.

解 （1） $$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta y)^2\sin\frac{1}{(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=0$$

故$f(x,y)$在$(0,0)$处偏导数存在.

（2） $$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

因为$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}$与$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}$不存在，故偏导数在$(0,0)$处不连续.

（3） $\Delta z=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$， $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$,

从而 $$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}}{\rho}=0,$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 且 $dz=0$.

此题说明二元函数的偏导数在一点不连续时, 函数在该点仍可能可微, 偏导数连续是可微的充分条件, 而非充分必要条件.

第四节　多元复合函数的求导法则

1. $z=f(x^y,y^x)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}f_1'+y^x\ln yf_2'$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln xf_1'+xy^{x-1}f_2'$.

2. 设 $z=u^2+v^2$, 而 $u=2x+y$, $v=3x-2y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\cdot 2+2v\cdot 3=4u+6v=26x-8y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\cdot 1+2v\cdot(-2)=2u-4v=10y-8x.$$

3. 设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$, 其中 $f(u)$ 为可导函数, 验证: $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

证 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-yf'(x^2-y^2)\cdot 2x}{f^2(x^2-y^2)}=-\frac{2xyf'}{f^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(x^2-y^2)-yf'(x^2-y^2)\cdot(-2y)}{f^2(x^2-y^2)}=\frac{f+2y^2f'}{f^2},$$

故

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf'}{f^2}+\frac{f+2y^2f'}{yf^2}=\frac{-2y^2f'+f+2y^2f'}{yf^2}=\frac{1}{yf}$$

$$=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y}{f}=\frac{z}{y^2}.$$

注意 求偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$时, 常常会丢掉因子 $f'(x^2-y^2)$, 而得到错误结果:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2xy}{f^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f+2y^2}{f^2}.$$

4. 设$u=x^y$, 而$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$都是可微函数, 求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yx^{y-1}\cdot\varphi'(t)+x^y\ln x\cdot\psi'(t)$

$=\psi(t)\varphi(t)^{\psi(t)-1}\varphi'(t)+\varphi(t)^{\psi'(t)}\ln\varphi(t)\psi'(t)$

$=\varphi'(t)\psi(t)\varphi(t)^{\psi(t)-1}+\psi'(t)\varphi(t)^{\psi(t)}\ln\varphi(t)$.

注意 常见错误是遗漏了复合步骤, 因而丢失了$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varphi'(t)$与$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\psi'(t)$, 得到$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\psi(t)\varphi(t)^{\psi(t)-1}+\varphi(t)^{\psi(t)}\ln\varphi(t)$.

5. 设$z=xy+xF(u)$, 而$u=\dfrac{y}{x}$, $F(u)$为可导函数, 证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

证 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+F(u)+xF'(u)\cdot(-\dfrac{y}{x^2})=y+F(u)-\dfrac{y}{x}F'(u)$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+xF'(u)\cdot\dfrac{1}{x}=x+F'(u)$.

于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+xF(u)-yF'(u)+xy+yF'(u)$$

$$=xy+xF(u)+xy=z+xy.$$

6. 设$z=f(\sin x,\cos y,\mathrm{e}^{x+y})$, 其中$f$具有二阶连续偏导数, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cos x+f_3'\mathrm{e}^{x+y}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(f_{11}''\cos x+f_{13}''\mathrm{e}^{x+y})\cos x-f_1'\sin x+(f_{31}''\cos x+f_{33}''\mathrm{e}^{x+y})e^{x+y}+f_3'\mathrm{e}^{x+y}$

$$=\mathrm{e}^{x+y}f_3'-f_1'\sin x+f_{11}''\cos^2 x+2\mathrm{e}^{x+y}f_{13}''\cos x+\mathrm{e}^{2(x+y)}f_{33}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos x(f_{12}''(-\sin y)+f_{13}''\mathrm{e}^{x+y})+\mathrm{e}^{x+y}(f_{32}''(-\sin y)+f_{33}''\mathrm{e}^{x+y})+f_3'\mathrm{e}^{x+y}$$

$$=\mathrm{e}^{x+y}f_3'-f_{12}''\cos x\sin y+f_{13}''\mathrm{e}^{x+y}\cos x-\mathrm{e}^{x+y}f_{32}''\sin y+\mathrm{e}^{2(x+y)}f_{33}''.$$

7. 设 $z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $g(\frac{y}{x})$ 为由一个中间变量构成的二元复合函数，对中间变量所求的应是导数，而不是偏导数.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y(xf_{11}''-\frac{x}{y^2}f_{12}'')-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}(xf_{21}''-\frac{x}{y^2}f_{22}'')-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^2}g''\frac{1}{x}$$

$$=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$

8. 设 $u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$，其中 f 具有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{1}{y}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot(-\frac{x}{y^2})+f_2'\cdot\frac{1}{z}=-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2'.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_2'\cdot(-\frac{y}{z^2})=-\frac{y}{z^2}f_2'.$$

9. 如果 $F(x,y)=y\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求 F_{xy},F_{yy}.

解 $F_x=y\mathrm{e}^{-x^2}$，$F_{xy}=\mathrm{e}^{-x^2}$.

$$F_y=\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-y\cdot\mathrm{e}^{-y^2},\ F_{yy}=-\mathrm{e}^{-y^2}-\mathrm{e}^{-y^2}-y\mathrm{e}^{-y^2}\cdot(-2y)=2(y^2-1)\mathrm{e}^{-y^2}$$

第五节　隐函数的微分法

1. 设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　方程两端同时关于 x 求偏导数,

$$\frac{1}{z}-\frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$. 方程两端同时关于 y 求偏导数得

$$-\frac{x}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z}\left(-\frac{z}{y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$.

2. 设 $\mathrm{e}^z-xyz=0$.（1）用隐函数求导公式求 $\frac{\partial z}{\partial x}$；（2）用复合函数求偏导数的方法求 $\frac{\partial z}{\partial x}$（3）利用全微分形式不变性求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　（1）令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z-xyz$.

$$F_x=-yz,\ F_z=\mathrm{e}^z-xy,$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{\mathrm{e}^z-xy}.$$

（2）　方程 $\mathrm{e}^z-xyz=0$ 两端同时关于 x 求偏导数, 此时, 将 z 看做 x,y 的函数：$z=z(x,y)$, 于是

$$\mathrm{e}^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-yz-xy\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{\mathrm{e}^z-xy}.$$

（3）先将 x,y,z 均看作自变量, 方程 $\mathrm{e}^z-xyz=0$ 两端同时取全微分得

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-xyz)=0,\ 即\ \mathrm{d}\mathrm{e}^z-\mathrm{d}(xyz)=0,$$

$$\mathrm{e}^z\mathrm{d}z - yz\mathrm{d}x - xz\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}z = 0 .$$

这时, 再将 z 看作 x, y 的函数, 解出 z 的全微分 $\mathrm{d}z$:

$$\mathrm{d}z = \frac{yz}{\mathrm{e}^z - xy}\mathrm{d}x + \frac{xz}{\mathrm{e}^z - xy}\mathrm{d}y ,$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{\mathrm{e}^z - xy} , \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{\mathrm{e}^z - xy} .$$

3. 设 $\Phi(u,v)$ 具有连续偏导数, 证明由方程 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 满足 $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = c$.

证 $\Phi_x = \Phi_u \cdot c = c\Phi_u$, $\Phi_y = c\Phi_v$,

$$\Phi_z = \Phi_u \cdot (-a) + \Phi_v \cdot (-b) = -a\Phi_u - b\Phi_v ,$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_z} = \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v} , \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Phi_y}{\Phi_z} = \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v} ,$$

从而

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ac\Phi_u + bc\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v} = c .$$

4. 设 $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

解 对每一个方程的两端分别对 z 求导, 注意变量 x 与 y 均为 z 的函数, 移项后得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = -1, \\ x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = -z, \end{cases}$$

用克莱姆法则解得 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x \neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -z & y \end{vmatrix}}{y - x} = \frac{-y + z}{y - x} = \frac{z - y}{y - x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ x & -z\end{vmatrix}}{y-x}=\frac{-z+x}{y-x}=\frac{x-z}{y-x}$$

5. 设$\begin{cases}x=\mathrm{e}^u+u\sin v,\\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v,\end{cases}$, 求$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$

解 这里变量x与y是自变量, 而变量u与v均为x与y的函数, 对每一个方程的两端分别对x求偏导数, 移项得：

$$\begin{cases}(\mathrm{e}^u+\sin v)\frac{\partial u}{\partial x}+u\cos v\frac{\partial v}{\partial x}=1,\\ (\mathrm{e}^u-\cos v)\frac{\partial u}{\partial x}+u\sin v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^u+\sin v & u\cos v\\ \mathrm{e}^u-\cos v & u\sin v\end{vmatrix}=u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & u\cos v\\ 0 & u\sin v\end{vmatrix}}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}=\frac{\sin v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^u+\sin v & 1\\ \mathrm{e}^u-\cos v & 0\end{vmatrix}}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}=\frac{\cos v-\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

6. 设$F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$, 求$\mathrm{d}z$.

解 用全微分形式不变性求dz, 方程两端同时取全微分, 得

$$F_1'\cdot\mathrm{d}(\frac{x}{z})+F_2'\cdot\mathrm{d}(\frac{y}{z})=0,$$

$$F_1'\cdot(\frac{1}{z}\mathrm{d}x-\frac{x}{z^2}\mathrm{d}z)+F_2'(\frac{1}{z}\mathrm{d}y-\frac{y}{z^2}\mathrm{d}z)=0,$$

从而解出$\mathrm{d}z$, 即得

$$\mathrm{d}z=z\frac{F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y}{xF_1'+yF_2'}.$$

第六节　多元函数微分学的应用

1. 求螺旋线 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=b\theta$ 在点 $(a,0,0)$ 处的切线及法平面方程.

解　$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-a\sin\theta$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=a\cos\theta$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}=b$, 与点 $(a,0,0)$ 对应的参数 $\theta=0$, 故曲线上 $(a,0,0)$ 点的切向量为

$$\boldsymbol{T}=\{0,a,b\}.$$

于是, 切线方程为

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{a}=\frac{z}{b}, \text{ 即}\begin{cases} x=a, \\ by-az=0. \end{cases}$$

法平面方程为　　　　$ay+bz=0$.

2. 求曲线 $y^2=2mx, z^2=m-x$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

解　因为 $(1,-2,1)$ 是曲线上的点, 将 $x=1, y=-2$ 代入方程 $y^2=2mx$ 可得 $m=2$, 所给曲线为 $y^2=4x, z^2=2-x$. 求点 $(1,-2,1)$ 处的切向量有两种方法:

法 1　每一个方程两端均关于 x 求导数, 得

$$\begin{cases} 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4, \\ 2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1. \end{cases}$$

在点 $(1,-2,1)$ 处, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-1$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{2}$, 故切向量为

$$\boldsymbol{T}=\{1,-1,-\frac{1}{2}\},$$

法 2　曲面 $y^2=4x$, 即 $4x-y^2=0$ 上点 $(1,-2,1)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\{4,-2y,0\}\Big|_{(1,-2,1)}=\{4,4,0\},$$

同理, 曲面 $z^2=2-x$ 上点 $(1,-2,1)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,2)$. 于是曲线上点 $(1,-2,1)$ 处的切向量

$$T = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} = 8\{1, -1, -\frac{1}{2}\}$$

于是所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-\frac{1}{2}}, \quad 即 \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-1},$$

法平面方程为 $(x-1)-(y+2)-\frac{1}{2}(z-1)=0$, 即 $2x-2y-z-5=0$.

注意 常见错误是没有利用已知条件将 m 的值确定出来.

3. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

解 法 1 把 x 看作参数, 则 y 和 z 是由方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 所确定的 x 的函数, 曲线的切向量为 $\boldsymbol{T} = \{1, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\}$.

方程组对 x 求导得

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-3=0 \\ 2-3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases}$$

将点 $(1,1,1)$ 代入得

$$\begin{cases} 2+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-3=0 \\ 2-3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases}$$

解得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{9}{16}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{16}$, 于是曲线在点 $(1,1,1)$ 处的切向量为

$$\boldsymbol{T} = \{1, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16}\} = \frac{1}{16}\{16, 9, -1\},$$

所求切线与法平面分别为

$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1},$$

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0\text{, 即}\quad 16x+9y-z-24=0.$$

法 2 构成曲线的曲面 $x^2+y^2+z^2-3x=0$ 与 $2x-3y+5z-4=0$ 上点 $(1,1,1)$ 处的法向量分别为

$$\boldsymbol{n_1}=\{2x-3,2y,2z\}\Big|_{(1,1,1)}=(-1,2,2)$$

$$\boldsymbol{n}_2=\{2,-3,5\},$$

曲线上点 $(1,1,1)$ 处的切向量为 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\{16,9,-1\}$. 下面解法同法 1.

4. 在椭球面 $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$ 上求一点, 使该点处的法线与三条坐标轴正方向成等角.

解 依题意法线发现与三条坐标轴正向成等角, 故有所求点处法向量的三个坐标应相等, 又点在椭球面上, 应满足椭球面方程, 上述条件联立, 即可得所求点, 令

$$F(x,y,z)=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}-1$$

设所求点为 $M(x_0,y_0,z_0)$, 则在点 M 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left\{F_x,F_y,F_z\right\}_M=\left\{2x_0,\frac{y_0}{2},\frac{z_0}{2}\right\}$$

因为法线与三条坐标轴正向成等角, 故有

$$2x_0=\frac{y_0}{2}=\frac{z_0}{2} \tag{1}$$

又点 M 在椭球面上, 满足

$$x_0{}^2+\frac{y_0{}^2}{4}+\frac{z_0{}^2}{4}=1 \tag{2}$$

将方程（1），（2）联立, 得两组解为：$(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ 及 $(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$

上述两点处的法线与三条坐标轴正向成等角.

5. 在曲面 $z=xy$ 上求一点, 使该点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$, 并写出该法线方程.

解 设点 (x,y,z) 为曲面 $z=xy$ 上任一点, 该点处的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left\{y,x,-1\right\}$. 平面

$x+3y+z+9=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\{1,3,1\}$. 欲使法线垂直于平面, 应有 $\boldsymbol{n}//\boldsymbol{n}_1$,

故
$$\frac{y}{1}=\frac{x}{3}=\frac{-1}{1}\quad ,$$

由此可得 $x=-3, y=-1$, 将 $x=-3, y=-1$ 代入曲面方程 $z=xy$, 可得 $z=3$, 故所求点为 $(-3,-1,3)$.

6. 证明：曲面 $z=xe^{\frac{y}{x}}$ 上任一点处的切平面均过坐标原点.

证 欲证一平面过原点, 只须证该平面的一般式方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中的 $D=0$ 即可. 令 $F(x,y,z)=x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}-z$, 则

$$F_x=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}},\ F_y=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}},\ F_z=-1,$$

曲面上任一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$(\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}-\frac{y_0}{x_0}\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}})(x-x_0)+\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}(y-y_0)-(z-z_0)=0\quad ,$$

化为一般式为

$$(\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}-\frac{y_0}{x_0}\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}})x+\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}y-z+[-x_0\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}+y_0\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}-y_0\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}+z_0]=0\quad ,$$

即
$$(\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}-\frac{y_0}{x_0}\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}})x+\mathrm{e}^{\frac{y_0}{x_0}}y-z=0.$$

所以曲面上任一点处的切平面均过坐标原点.

7. 证明曲面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=4$ 上任一点处的切平面在各坐标轴上的截距的平方和为一常数.

证 设点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上任一点, 则 $x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}}=4$

该点处的法向量为
$$\boldsymbol{n}=\left\{x_0^{-\frac{1}{3}},y_0^{-\frac{1}{3}},z_0^{-\frac{1}{3}}\right\},$$

该点处的切平面方程为

$$x_0^{-\frac{1}{3}}(x-x_0)+y_0^{-\frac{1}{3}}(y-y_0)+z_0^{-\frac{1}{3}}(z-z_0)=0$$

$$x_0^{-\frac{1}{3}}x+y_0^{-\frac{1}{3}}y+z_0^{-\frac{1}{3}}z=x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}}=4$$

截距式方程为

$$\frac{x}{4\sqrt[3]{x_0}}+\frac{y}{4\sqrt[3]{y_0}}+\frac{z}{4\sqrt[3]{z_0}}=1$$

截距的平方和为

$$16x_0^{\frac{2}{3}}+16y_0^{\frac{2}{3}}+16z_0^{\frac{2}{3}}=16(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})=64.$$

第七节　　方向导数与梯度

1. 求函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处沿从点 $(5,1,2)$ 到点 $(9,4,14)$ 的方向导数.

解　函数 $u=xyz$ 在平面上处处可微, 故

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos a+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{yz},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xz,\ \frac{\partial u}{\partial z}=xy,$$

在点 $(5,1,2)$ 处, $\frac{\partial u}{\partial x}$=2, $\frac{\partial u}{\partial y}$=10, $\frac{\partial u}{\partial z}$=5.

又 $\boldsymbol{l}=\{9-5,4-1,14-2\}=\{4,3,12\}$, $|\boldsymbol{l}|=\sqrt{4^2+3^2+12^2}=13$,

故　　$$\cos\alpha=\frac{4}{13},\ \cos\beta=\frac{3}{13},\ \cos\gamma=\frac{12}{13},$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=2\times\frac{4}{13}+10\times\frac{3}{13}+5\times\frac{12}{13}=\frac{98}{13}.$$

2. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 上点 $M_0(1,1,1)$ 处沿球面在这点的外法线方向的方向导数.

解　令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3$, 则 $F_x=2x$, $F_y=2y$, $F_z=2z$. 在点 (1, 1, 1) 处, 法线方向为

$$\boldsymbol{n}=\{2,2,2\}.$$

对于封闭曲面来讲, 其法线方向有内外之分, 由里指向外的方向叫外法线方向。点 M_0 为

第一卦限的点, 由图 8.2 可知, 该点处的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 与三个坐标轴的夹角均为锐角, 故 $\boldsymbol{n}$ 的三个方向数均应为正数：$\boldsymbol{n}=\{2,2,2\}$. 于是

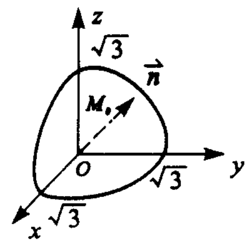

图 8.2

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

又 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=1,$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial n}=1\times\frac{1}{\sqrt{3}}+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

3. 设 x 轴正向到方向 L 的转角为 φ, 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点（1, 1）沿方向 L 的方向导数, 并分别确定转角 φ, 使该导数有：（1）最大值;（2）最小值;（3）等于 0.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y-x$, 在点（1, 1）处, $\frac{\partial f}{\partial x}=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}=1$. 又函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点（1, 1）处可微,

$$\frac{\partial f}{\partial L}=1\times\cos\varphi+1\times\sin\varphi=\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4}),$$

于是, 当 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 时, 方向导数有最大值 $\sqrt{2}$; 当 $\varphi=\frac{5\pi}{4}$ 时, 方向导数有最小值 $-\sqrt{2}$; 当 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\varphi=\frac{7\pi}{4}$ 时, 方向导数等于 0.

4. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^2$ 上点（1, 1, 1）处, 沿曲线在该点的切线正方向（对应于 t 增大的方向）的方向导数.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2z$, 在点（1, 1, 1）处, $\frac{\partial u}{\partial x}=2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2$.

曲线上点（1, 1, 1）对应的参数值为 $t=1$, 该点的切线正方向为

$$\boldsymbol{l}=\{1,2t,3t^2\}\big|_{t=1}=\{1,2,3\},$$

于是 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$, 所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=2\times\frac{1}{\sqrt{14}}+2\times\frac{2}{\sqrt{14}}+2\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{12}{\sqrt{14}}=\frac{6}{7}\sqrt{14}.$$

5. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求 $\mathbf{grad}f(0,0,0)$ 及 $\mathbf{grad}f(1,1,1)$，并求函数在 $(0,0,0)$ 点处的方向导数的最大值.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y+3$，$\frac{\partial f}{\partial y}=4y+x-2$，$\frac{\partial f}{\partial z}=6z-6$，在点 $(0,0,0)$ 处，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2,\ \frac{\partial f}{\partial z}=-6,$$

故 $\mathbf{grad}f(0,0,0)=\{3,-2,-6\}$，在点 $(1,1,1)$ 处

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=3,\ \frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

故 $$\mathbf{grad}f(1,1,1)=\{6,3,0\}$$

又函数在某点的方向导数的最大值，等于函数在该点的梯度的模，故函数在 $(0,0,0)$ 点处的方向导数的最大值为

$$\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}=7.$$

第八节　多元函数的极值与最优化问题

1. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，证明：

（1）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的连续点；（2）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

证 （1）先复习一个结论："如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，则这函数在该点必定连续."本题中已知 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，它说明 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，从而在点 $(0,0)$ 也可微分，所以 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 必连续，也就是点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的连续点.

（2） 因为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=y$，

从而 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$$

在点 $(0,0)$ 处：$A=1, B=0, C=1$，$\Delta=AC-B^2=1>0$，又 $A>0$，所以点 $(0,0)$ 是 $z=f(x,y)$ 的一个极小值点.

2. 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

解 令 $$\begin{cases} f_x(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0 \\ f_y(x,y)=2\mathrm{e}^{2x}(y+1)=0 \end{cases},$$

可得驻点 $(\frac{1}{2},-1)$.

$$f_{xx}(x,y)=4\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y+1).\quad f_{xy}(x,y)=4\mathrm{e}^{2x}(y+1).$$

$$f_{yy}(x,y)=2\mathrm{e}^{2x}.$$

在点 $(\frac{1}{2},-1)$ 处, $AC-B^2=2\mathrm{e}\cdot 2\mathrm{e}-0=4\mathrm{e}^2>0$, 又 $A=2\mathrm{e}>0$, 故函数在点 $(\frac{1}{2},-1)$ 处取得极小值

$$f(\frac{1}{2},-1)=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

3. 求平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

解 1 设 (x,y,z) 为交线上任意一点, 则它到 xOy 平面的距离为 $d=|z|$. 为运算简单起见, 我们转化为求 $D=d^2=z^2$ 的最小值. 显然, 约束条件有两个: $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和 $x^2+y^2=1$. 故令

$$F(x,y,z)=z^2+\lambda(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1)+\mu(x^2+y^2-1).$$

令 $$\begin{cases} \frac{\lambda}{3}+2\mu x=0 \\ \frac{\lambda}{4}+2\mu y=0 \\ \frac{\lambda}{5}+2z=0 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

由前两式推得 $y=\frac{3}{4}x$, 代入 $x^2+y^2=1$ 得 $x=\pm\frac{4}{5}$.

因平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 在三坐标轴上的截距分别为 3, 4, 5, 所以在第一卦限内的点 P 到 xOy 平面的距离较短, 故取 $x=\frac{4}{5}$, 于是 $y=\frac{3}{4}x=\frac{3}{5}$, 再代入第三个式子可得 $z=\frac{35}{12}$, 所以

交线上与 xOy 面距离最短的点为 $(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$.

解 2 设 (x,y,z) 为交线上任意一点, 则它到 xOy 平面的距离为 $d=|z|$. 由于点在平面上 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$, 故 $z=5(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})$, 于是 $d=5\left|1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right|$, 为运算简单起见, 我们转化为求 $D=(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})^2$ 在约束条件 $x^2+y^2=1$ 下的极值问题, 令

$$F(x,y)=(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})^2+\lambda(x^2+y^2-1)$$

令
$$\begin{cases}-\frac{2}{3}(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})+2\lambda x=0\\ -\frac{1}{2}(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4})+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

由前两式得 $y=\frac{3}{4}x$, 代入最后一式得到 $x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{3}{5}$, 于是 $z=\frac{35}{12}$, 交线上到 xOy 面距离最短的点为 $(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$.

4. 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 位于第一卦限的部分求一点 P, 使该点处的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和最小.

解 设 $P(x,y,z)$ $(x>0,y>0,z>0)$ 为球面上第一卦限内的一点, 则该点处的法向量为 $n=2\{x,y,z\}$, 该点处的切平面为

$$2x(X-x)+2y(Y-y)+2z(Z-z)=0$$

即
$$xX+yY+zZ=x^2+y^2+z^2$$

由点 $P(x,y,z)$ 为球面上的点, 故 $x^2+y^2+z^2=R^2$, 切平面方程可化间为

$$xX+yY+zZ=R^2,\text{ 即 }\quad \frac{X}{\frac{R^2}{x}}+\frac{Y}{\frac{R^2}{y}}+\frac{Z}{\frac{R^2}{z}}=1.$$

切平面在三个坐标轴上截距的平方和为

$$D=R^4(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}).$$

问题是求函数 $D=R^4(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2})$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 下的最小值, 作拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)\ (x>0,y>0,z>0)$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{x^3}+2\lambda x=0 \\ -\frac{2}{y^3}+2\lambda y=0 \\ -\frac{2}{z^3}+2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2=R^2 \end{cases}$$

由前三式可推得 $x^2=y^2=z^2$, 代入最后一式可得 $x=\frac{R}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{R}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{R}{\sqrt{3}}$. 由问题的实际意义知点 $P(\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}})$ 即为所求.

注意 常出现的问题是有的同学没有利用 P 点在球面上这一条件将切平面方程化简, 再写出截距的平方和, 从而导致目标函数表达式过于复杂, 给后边的计算带来困难.

5. 在上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a>0,b>0,c>0,z\geq 0)$ 及 $z=0$ 所围成的封闭曲面内作一底面平行于 xOy 面的体积最大的内接长方体, 问这长方体的长、宽、高的尺寸怎样?

解 显然长方体的底面应当在 xOy 面上, 设它的一个位于第一卦限的顶点为 $P(x,y,z)\ (x>0,y>0,z>0)$, 于是长方体的体积为

$$V=2x\cdot 2y\cdot z=4xyz$$

所求问题为求函数 $V=4xyz(x>0,y>0,z>0)$ 在约束条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的最大值. 作拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)\ (x>0,y>0,z>0).$$

$$\begin{cases} yz+\dfrac{2\lambda}{a^2}x=0 \\ xz+\dfrac{2\lambda}{b^2}y=0 \\ xy+\dfrac{2\lambda}{c^2}z=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

进一步可得到

$$\begin{cases} xyz+2\lambda\cdot\dfrac{x^2}{a^2}=0 \\ xyz+2\lambda\cdot\dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ xyz+2\lambda\cdot\dfrac{z^2}{c^2}=0 \end{cases}$$

由此可得 $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$, 代入椭球面方程可得 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$, $z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

由实际问题的性质可知, 最大的内接长方体的长为 $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, 宽为 $\dfrac{2b}{\sqrt{3}}$, 高为 $\dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

第八章　多元函数微分法及其应用（总习题）

1. 设 $\omega=f(x-y,y-z,t-z)$, 求 $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}+\dfrac{\partial\omega}{\partial y}+\dfrac{\partial\omega}{\partial z}+\dfrac{\partial\omega}{\partial t}$, 其中 f 具有一阶连续偏导数.

解　$\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=f_1'$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=f_1'\cdot(-1)+f_2'=-f_1'+f_2'$,

$\dfrac{\partial\omega}{\partial z}=f_2'\cdot(-1)+f_3'\cdot(-1)=-f_2'-f_3'$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial t}=f_3'$,

故　$\dfrac{\partial\omega}{\partial x}+\dfrac{\partial\omega}{\partial y}+\dfrac{\partial\omega}{\partial z}+\dfrac{\partial\omega}{\partial t}=f_1'-f_1'+f_2'-f_2'-f_3'+f_3'=0$.

2. 设 $u=\ln(x^x y^y z^z)$, 求 $du\big|_{(1,1,1)}$.

解　本题可利用对数性质先将函数 u 化简, 否则会很烦

$$u=\ln(x^x y^y z^z)=x\ln x+y\ln y+z\ln z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1+\ln x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=1+\ln y,\ \frac{\partial u}{\partial z}=1+\ln z$$

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z=(1+\ln x)\mathrm{d}x+(1+\ln y)\mathrm{d}y+(1+\ln z)\mathrm{d}z,$$

从而 $$\mathrm{d}u\Big|_{(1,1,1)}=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z.$$

3. 设 $z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+y}$，又 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$，求常数 a，使 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{e}^{ax+y}+u\cdot\mathrm{e}^{ax+y}\cdot a=\mathrm{e}^{ax+y}(\frac{\partial u}{\partial x}+au)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{e}^{ax+y}+u\cdot\mathrm{e}^{ax+y}=\mathrm{e}^{ax+y}(\frac{\partial u}{\partial y}+u),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{ax+y}(\frac{\partial u}{\partial x}+au)+\mathrm{e}^{ax+y}(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial y})$$

由 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{ax+y}(\frac{\partial u}{\partial x}+au+a\frac{\partial u}{\partial y})$$

将 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, z 的表达式代入式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$ 可得

$$\mathrm{e}^{ax+y}[\frac{\partial u}{\partial x}+au+a\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}-au-\frac{\partial u}{\partial y}-u+u]=0$$

由 $\mathrm{e}^{ax+y}>0$，可得

$$(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

故当 $a=1$ 时, 等式成立.

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 求 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$,

解 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时

$$f_x(x,y)=\frac{2xy(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^2(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $x^2+y^2=0$ 时,

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

故 $$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

注意 常见的错误是没用偏导数的定义求函数 $f(x,y)$ 在分段点 $(0,0)$ 的偏导数.

5. 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 问:（1） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是否连续, 为什么?（2） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 是否存在?（3） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是否可微, 为什么?

解 （1） $0\leq\sqrt{|xy|}\leq\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$,

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}=0$, 故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{|xy|}=0=f(0,0)$

函数在点 $(0,0)$ 连续.

（2）考虑极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}},\quad (8.24)$$

由于沿直线 $y=x$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$$

故前式极限不等于 0, 从而函数在 $(0,0)$ 点不可微.

注意 常见错误之一是：

因为, 故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|kx^2|}=0$, 故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

关于这种错误, 前边已讲过, 记号“$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}$”表示点 (x,y) 以任意的方式趋于 $(0,0)$. 而记号“$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}$”表示点 (x,y) 以一种特殊的方式：沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$. 显然若 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 存在为 a, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)$ 存在也为 a ;但反之未必成立.

常见错误之二是有人将讨论函数在点 $(0,0)$ 是否可微的式子写成

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\mathrm{d}z(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

式中出现了 $dz(0,0)$ 是不对的, 因为我们正在讨论函数在 $(0,0)$ 点是否可微, 即 $\mathrm{d}z(0,0)$ 是否存在.

6. 设 $u=\varphi(\mathrm{e}^x,xy)+xf(\frac{y}{x})$, 其中 φ 有二阶偏导数, f 二阶可导, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi_1'\cdot\mathrm{e}^x+\varphi_2'\cdot y+f(\frac{y}{x})+xf'(\frac{y}{x})\cdot(-\frac{y}{x^2})$

$$=\mathrm{e}^x\varphi_1'+y\varphi_2'+f-\frac{y}{x}f'.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\mathrm{e}^x\varphi_1'+\mathrm{e}^x[\varphi_{11}''\cdot\mathrm{e}^x+\varphi_{12}''.y]+y[\varphi_{21}''\cdot\mathrm{e}^x+\varphi_{22}''.y]+f'(-\frac{y}{x^2})+\frac{y}{x^2}f'-\frac{y}{x}f''\cdot(-\frac{y}{x^2})$$

$$=\mathrm{e}^x\varphi_1'+\mathrm{e}^{2x}\varphi_{11}''+y\mathrm{e}^x(\varphi_{12}''+\varphi_{21}'')+y^2\varphi_{22}''+\frac{y^2}{x^3}f''.$$

注意 易发生的错误是将结果中 $y\mathrm{e}^x(\varphi_{12}''+\varphi_{21}'')$ 合并为 $2y\mathrm{e}^x\varphi_{12}''$.

由于题目中仅告知 φ 有二阶偏导数, 并未告知 φ 的二阶偏导数连续, 故未必有 $\varphi_{12}''=\varphi_{21}''$, 因此不能将 $\varphi_{12}''+\varphi_{21}''$ 合并为 $2\varphi_{12}''$.

7. 设 $z=(\frac{y}{x})^{\frac{x}{y}}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}$.

解 $\quad \ln z=\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}=\frac{x}{y}(\ln y-\ln x)$

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z}=\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}+\frac{x}{y}(-\frac{1}{x})=\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}-\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{y}\ln\frac{y}{x}-\frac{z}{y},$$

当 $x=1, y=2$ 时, $z=(2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, 从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1).$$

8. 设 $z=x^3 f(xy,\frac{y}{x})$, f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\quad z$ 为 x^3 与 f 的乘积, 而 f 为由两个中间变量构成的二元复合函数,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3(f_1'x+f_2'\frac{1}{x})=x^4 f_1'+x^2 f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4(f_{11}''x+f_{12}''\frac{1}{x})+x^2(f_{21}''x+f_{22}''\frac{1}{x})=x^5 f_{11}''+2x^3 f_{12}''+xf_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^4 f_1'+x^2 f_2')$$

$$=4x^3 f_1'+x^4(yf_{11}''-\frac{y}{x^2}f_{12}'')+2xf_2'+x^2(yf_{21}''-\frac{y}{x^2}f_{22}'')$$

$$=4x^3 f_1'+2xf_2'+x^4 yf_{11}''-yf_{22}''$$

应注意充分利用条件 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, 在求出 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的基础上进而求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, 即得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 不必先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 再求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 这就增加了工作量.

9. 设 $z=f(xz,z-y)$, 其中 f 具有一阶连续偏导数, 利用全微分形式不变性求隐函数

$z=z(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z$, 并由此求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 方程 $z=f(xz,z-y)$ 两端同时求全微分得

$$\mathrm{d}z=f_1'\mathrm{d}(xz)+f_2'\mathrm{d}(z-y),$$

即
$$\mathrm{d}z=f_1'(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z)+f_2'(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y).$$

从中解出 $\mathrm{d}z$, 得

$$\mathrm{d}z=\frac{zf_1'\mathrm{d}x-f_2'\mathrm{d}y}{1-xf_1'-f_2'},$$

由此得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zf_1'}{1-xf_1'-f_2'},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-f_2'}{1-xf_1'-f_2'}.$$

10. 求曲线 $\begin{cases} x^2-z=0 \\ 3x+2y+1=0 \end{cases}$ 上点 $M_0(1,-2,1)$ 处的法平面与直线 $\begin{cases} 9x-7y-21z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 间的夹角.

解 只须求出曲线上 M_0 点的切向量, 即可求出法平面与已知直线的夹角.

由一般式给出的曲线求切向量有两种方法.

法 1 将 x 看做参数, 由方程组 $\begin{cases} x^2-z=0 \\ 3x+2y+1=0 \end{cases}$ 求出 y',z' , 则切向量 $\boldsymbol{T}=\{1,y',z'\}$,

$$\begin{cases} 2x-z'=0 \\ 3+2y'=0 \end{cases}$$

在点 $M_0(1,-2,1)$ 处, $\begin{cases} 2-z'=0 \\ 3+2y'=0 \end{cases}$ 解得, $y'=-\dfrac{3}{2},z'=2$.

故切向量 $\boldsymbol{T}=\{1,-\dfrac{3}{2},2\}=\dfrac{1}{2}\{2,-3,4\}$.

法 2 求出构成曲线的两个曲面 $x^2-z=0$ 和 $3x+2y+1=0$ 在点 M_0 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 及 $\boldsymbol{n}_2$, 曲线在点 M_0 的切向量 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$.

$$\boldsymbol{n}_1\Big|_{M_0}=\{2x,0,-1\}\Big|_{M_0}=\{2,0,-1\},\quad \boldsymbol{n}_2\Big|_{M_0}=\{3,2,0\}.$$

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$$

而直线的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 9 & -7 & -21\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-14\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}\,,$$

故法平面与直线的夹角

$$\theta=\arcsin\frac{|\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{T}||\boldsymbol{s}|}=\arcsin 0=0\,.$$

11. 过直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\ x+y-z=0\end{cases}$作曲面$3x^2+y^2-z^2=27$的切平面, 求此切平面方程.

分析 要写切平面方程, 一要求切点, 二要求法向量. 首先, 切点应在曲面上, 在切平面上其次, 曲面上切点处的法向量应当与切平面的法向量平行.

解 设切点为$M_0(x_0,y_0,z_0)$, 则曲面上点M_0处的法向量为$\boldsymbol{n}=\{6x_0,2y_0,-2z_0\}$.

设过直线的平面束方程为

$$10x+2y-2z-27+\lambda(x+y-z)=0\,,$$

即
$$(10+\lambda)x+(2+\lambda)y-(2+\lambda)z-27=0\,,$$

其法向量为$\boldsymbol{n}_1=(10+\lambda,2+\lambda,-(2+\lambda))$. 由$\boldsymbol{n}\,//\,\boldsymbol{n}_1$可得

$$\frac{10+\lambda}{6x_0}=\frac{2+\lambda}{2y_0}=\frac{-(2+\lambda)}{-2z_0}\,,$$

又由切点M_0既在曲面上, 又在切平面上可得

$$3{x_0}^2+{y_0}^2-{z_0}^2=27\,,\ (10+\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0-27=0\,.$$

解此关于x_0,y_0,z_0,λ的方程组可得切点$(3,1,1)$及$(-3,-17,-17)$, 于是法向量为$\{18,2,-2\}$及$\{-18,-34,34\}$, 所求切平面为

$$18(x-3)+2(y-1)-2(z-1)=0\,,\quad 9x+y-z-27=0$$

及
$$-18(x+3)-34(y+17)+34(z+17)=0\,,\ 9x+17y-17z+27=0\,,$$

易知平面 $x+y-z=0$ 不满足条件.

12. 求函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度.

解 因为 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 所以

$$f_x=\frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2}=\frac{y}{x^2+y^2}\text{，}\quad f_y=\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2}=\frac{-x}{x^2+y^2}$$

从而 $$\mathbf{grad}f(0,1)=\{f_x,f_y\}_{\substack{x=0\\y=1}}=\{\frac{y}{x^2+y^2},\frac{-x}{x^2+y^2}\}_{\substack{x=0\\y=1}}=\{1,0\}.$$

13. 在球面 $2x^2+2y^2+2z^2=1$ 上求一点 C 使得函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在点 C 沿着点 $A(1,1,1)$ 到点 $B(2,0,1)$ 的方向的方向导数具有最大值.

解 方向 $\boldsymbol{l}=\overline{AB}=(1,-1,0)$，故 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\gamma=0$

设点 $M(x,y,z)$ 为球面上任意一点, 在该点

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y\,,\ \frac{\partial f}{\partial z}=2z$$

又函数 $f(x,y,z)$ 处处可微, 故 M 点的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=\sqrt{2}(x-y)$$

问题实质是求函数 $\sqrt{2}(x-y)$ 在约束条件 $2x^2+2y^2+2z^2=1$ 下的最大值问题, 作函数

$$F(x,y,z)=x-y+\lambda(2x^2+2y^2+2z^2-1)$$

求解 $$\begin{cases}1+4\lambda x=0\\-1+4\lambda y=0\\4\lambda z=0\\2x^2+2y^2+2z^2=1\end{cases},$$

得到 $x=\pm\frac{1}{2},y=\mp\frac{1}{2},z=0$，在点 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$ 处, $\frac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{2}$，在点 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，$\frac{\partial f}{\partial l}=-\sqrt{2}$，故点 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$ 即为所求.

14. 已知曲线 L：$\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$，求曲线 L 距离 xoy 面最远的点和最近的点.

解　令 (x,y,z) 为曲线 L 上任一点, 它在 xoy 面上的投影点为 $(x,y,0)$ 则 $d^2=z^2$ ，令

$$F(x,y,z)=z^2+\lambda_1(x^2+y^2-2z^2)+\lambda_2(x+y+3z-5)$$

$$\begin{cases} F_x=2\lambda_1 x+\lambda_2=0 \\ F_y=2\lambda_1 y+\lambda_2=0 \\ F_z=2z-4\lambda_1 z+3\lambda_2=0, \\ x^2+y^2=2z^2 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$$

由前两式得 $x=y$, 代入第四个式子推出 $x=\pm z$, 代入第五个式子推出　$2x+3z=5$.

当 $x=z$ 时, 解得 $x=1$; 当 $x=-z$ 时, 解得 $x=-5$.

点（1, 1, 1）时, d_1=1 ; 点（-5, -5, 5）时, $d_2=5$ ，从而 $(1,1,1)$ 为最近点, $(-5,-5,5)$ 为最远点.