第四节　空间直线及其方程

习题　7-4

1. 求过点 $(1,-1,2)$ 且与平面 $x+2y-z=0$ 垂直的直线方程.

解　取已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$ 为所求直线的方向向量, 则直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

2. 求过点 $(-1,-3,2)$ 且平行两平面 $3x-y+5z+2=0$ 及 $x+2y-3z+4=0$ 的直线的方程.

解　因为两平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(3,-1,5)$ 与 $\boldsymbol{n}_2=(1,2,-3)$ 不平行, 所以两平面相交于一直线, 此直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -1 & 5\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=(-7,14,7)=7(-1,2,1),$$

故可取所求直线的方向向量为 $(-1,2,1)$, 由题设, 所求的直线方程为

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{1}.$$

3. 用点向式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases}x+y+z+1=0\\ 2x-y+3z+4=0\end{cases}.$$

解　先在直线上找一点.

令 $x=1$, 解方程组 $\begin{cases}y+z=-2,\\ y-3z=6,\end{cases}$ 得 $y=0,\ z=-2$, 故 $(1,0,-2)$ 是直线上一点.

再求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$.

交于已知直线的两平面的法向量为: $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1),\ \boldsymbol{n}_2=(2,-1,3)$,

$$\because \boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}_2,$$

$$\therefore \boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=(4,-1,-3),$$

故所给直线的点向式方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3},$$

参数方程为
$$\begin{cases}x=1+4t,\\ y=-t,\\ z=-2-3t.\end{cases}$$

4. 求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+4z-7=0,\\ 3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

解 要求所求平面垂直于直线, 所以直线的方向向量为所求平面的法向量, 取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & 5 & -2\end{vmatrix}=(-16,14,11),$$

由点法式可得

$$-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0,$$

即 $16x-14y-11z-65=0$ 为所求的平面方程.

5. 求过点 $(3,1,-2)$ 且通过直线 $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 的平面的方程.

解 法 **1**

所求平面过点 $M_0(3,1,-2)$ 及 $M_1(4,-3,0)$，设其法向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_0M_1}$, $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$，其中 $\boldsymbol{s}=(5,2,1)$.

取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{s}=(1,-4,2)\times(5,2,1)=(-8,9,22)$，则平面方程为

$$-8(x-3)+9(y-1)+22(z+2)=0,$$

即 $8x-9y-22z-59=0$.

法 **2** 直线 L 的交面式方程为 $\begin{cases}2x-5y-23=0,\\ y-2z+3=0,\end{cases}$ 过 L 的平面束方程为

$$(y-2z+3)+\lambda(2x-5y-23)=0.$$

点 $(3,1,-2)$ 在平面上，因此 $(1+4+3)+\lambda(6-5-23)=0$，解得 $\lambda=\frac{4}{11}$，因此平面的方程为

$$(y-2z+3)+\frac{4}{11}(2x-5y-23)=0,$$

即$8x-9y-22z-59=0$. 容易验证$2x-5y-23=0$不是所求的平面方程.

6. 确定下列直线与直线的位置关系:

(1) $\frac{x}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$与$\begin{cases}2x-y+2z-4=0,\\x-y+2z-3=0;\end{cases}$

(2) $\frac{x+14}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+21}{5}$与$\begin{cases}x=\frac{1}{3}-9t,\\y=1-3t,\\z=-\frac{1}{3}-15t;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3x+z-4=0,\\y+2z-9=0\end{cases}$与$\begin{cases}6x-y+1=0\\y+2z-9=0.\end{cases}$

解 (1) 直线$L_1:\frac{x}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_1=(-1,1,-1),$$

直线$L_2:\begin{cases}2x-y+2z-4=0,\\x-y+2z-3=0\end{cases}$的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&2\\1&-1&2\end{vmatrix}=(0,-2,2).$$

$$\because \boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=(-1,1,-1)\cdot(0,-2,2)=0,\qquad \therefore \boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2,$$

因此, 两直线垂直.

(2) 直线$L_1:\frac{x+14}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+21}{5}$的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_1=(3,1,5),$$

直线$L_2:\begin{cases}x=\frac{1}{3}-9t,\\y=1-3t,\\z=-\frac{1}{3}-15t\end{cases}$的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_2=(-9,-3,-15)=-3(3,1,5).$$

故$\mathbf{s}_2=-3\mathbf{s}_1$，$\mathbf{s}_1 // \mathbf{s}_2$.

又因点$(\frac{1}{3},1,-\frac{1}{3})\in L_2$，但$(\frac{1}{3},1,-\frac{1}{3})\notin L_1$，因此，两直线平行.

(3) 直线$L_1:\begin{cases}3x+z-4=0,\\ y+2z-9=0\end{cases}$的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=(-1,-6,3),$$

直线$L_2:\begin{cases}6x-y+1=0,\\ y+2z-9=0\end{cases}$的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 6 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=(-2,-12,6)=2(-1,-6,3).$$

故$\boldsymbol{s}_2=2\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_1 // \boldsymbol{s}_2$.

又因点$(0,1,4)\in L_1$，且$(0,1,4)\in L_2$，因此，两直线重合.

7. 下列直线与平面是否垂直？是否平行？若不平行，求出它们的夹角.

(1) $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$与$4x-2y-2z-3=0$；

(2) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$与$6x-4y+14z+1=0$；

(3) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{-4}$与$x+y+z-5=0$；

(4) $\begin{cases}x+y-z-1=0,\\ x-y+2z+1=0\end{cases}$与$3x-2y+z=0$.

解 (1) 直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(-2,-7,3),$$

平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(4,-2,-2).$$

$\because \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=-8+14-6=0,\qquad \therefore \boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n},$

从而直线平行于平面或直线在平面上.

又因为点$(-3,-4,0)$在直线上，但不在平面上，故此直线与平面平行.

(2) 直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(3,-2,7),$$

平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(6,-4,14)=2(3,-2,7).$$

故$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{s}$，从而$\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{s}$，故直线与平面垂直.

(3) 直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(3,1,-4),$$

平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(1,1,1).$$

$\because \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=3+1-4=0,\qquad \therefore \boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n},$

将直线上的点$(-2,3,4)$的坐标代入平面方程成立，故此直线在平面上.

(4) 直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=(1,-3,-2),$$

平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(3,-2,1).$$

$\because \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=3+6-2=7\neq 0$，$\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}\neq 0$，所以直线与平面相交.

$$\because \sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}=\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \varphi=\frac{\pi}{6}.$$

8. B和D为何值时，直线$\begin{cases}x+By-2z+D=0,\\ x+3y-6z-27=0\end{cases}$过点$(0,13,2)$且垂直于$x$轴？

解 直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & B & -2\\ 1 & 3 & -6\end{vmatrix}=(-6B+6,4,3-B).$$

因为直线垂直于x轴，故有$\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{i}$，即

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{i}=(-6B+6,4,3-B)\cdot(1,0,0)=-6B+6=0,$$

所以$B=1$.

因点$(0,13,2)$在直线上，所以有

$$0+13B-4+D=0,$$

即

$$13B+D=4,$$

所以$D=-9$.

9. 求直线$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$在平面$x+y+z=0$上的投影直线的方程.

解　过直线L的平面束方程为

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0,$$

即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0,$$

其法向量$\boldsymbol{n}=(1+\lambda,1-\lambda,-1+\lambda)$. 在平面束中找与已知平面$x+y+z=0$垂直的平面,

由$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_0=(1,1,1)$, 得

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_0=(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0,$$

得$\lambda=-1$, 代入平面束方程, 可得与已知平面$x+y+z=0$垂直的平面方程为

$$y-z-1=0.$$

因此投影直线的方程为

$$\begin{cases} y-z-1=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

10. 求点$(-1,2,0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影.

解　过点$(-1,2,0)$且垂直于已知平面的直线方程为$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}$, 该直线与平面的交点即为所求. 解联立方程组$\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}, \end{cases}$得所求的投影点为$(-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})$.

11. 求点$A(0,-1,1)$到直线$\begin{cases} y+1=0, \\ x+2z-7=0 \end{cases}$的距离.

解　已知直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(2,0,-1).$$

因为点$(7,-1,0)$在直线上, 于是直线的方程为

$$\frac{x-7}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{-1},$$

其参数方程为

$$\begin{cases} x=7+2t, \\ y=-1, \\ z=-t. \end{cases} \tag{1}$$

过点 $A(0,-1,1)$ 作已知直线的垂直平面，其方程为

$$2(x-0)+0(y+1)-(z-1)=0,$$

即
$$2x-z+1=0, \tag{2}$$

将(1)代入(2)，得：$2(7+2t)+t+1=0$，即 $t=-3$，于是得点 A 向已知直线所作垂线的垂足坐标为 $(1,-1,3)$. 由此得点 A 到已知直线的距离为

$$d=\sqrt{(1-0)^2+(-1+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}.$$

12. 设 M_0 是直线 L 外一点，M 是直线 L 上任意一点，且直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，试证:点 M_0 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

证 如图 7.6，设向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与直线 L 所夹的角为 θ，则

$$d=\overrightarrow{M_0M}\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{M_0M}||\boldsymbol{s}|\sin\theta}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

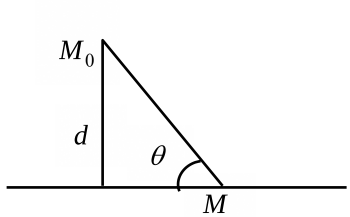

图 7.6

13. 过点 $(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

解 先求两直线的交点.

过点 $(2,1,3)$ 且与已知直线垂直的平面的法向量为 $(3,2,-1)$，故其方程为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0; \tag{1}$$

直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=1+2t, \\ z=-t; \end{cases} \tag{2}$$

将(2)代入(1)，得

$$3(-1+3t-2)+2(1+2t-1)-(-t-3)=0,$$

即 $14t=6$，亦即 $t=\dfrac{3}{7}$.

故两直线的交点坐标为 $(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7})$，由此得所求直线的方向向量为 $(-\dfrac{12}{7},\dfrac{6}{7},-\dfrac{24}{7})=-\dfrac{6}{7}(2,-1,4)$，于是所求的直线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

14. 在平面 $x+y+z=0$ 上求与两直线 $L_1:\begin{cases}x+y-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases}2x-y+z-1=0,\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 都相交的直线的方程.

解 将两直线分别化为参数方程为

$$L_1:\begin{cases}x=t,\\y=1-t,\\z=-2t,\end{cases}\qquad L_2:\begin{cases}x=0,\\y=t,\\z=1+t,\end{cases}$$

将 L_1 代入平面 $x+y+z=0$, 得

$$t+1-t-2t=0,\ t=\frac{1}{2},$$

可得 L_1 与平面 $x+y+z=0$ 的交点 $M_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$.

同理, 将 L_2 代入平面 $x+y+z=0$, 得 $t=-\frac{1}{2}$, 可得 L_2 与平面 $x+y+z=0$ 的交点 $M_2(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

于是有 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2})=-\frac{1}{2}(1,2,-3)$, 因此所求的直线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{2}=\frac{z+1}{-3}.$$