第四节　第一类曲面积分

习题　10-4

1. 当Σ是 xOy 平面内的一个有界闭区域时，曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$与二重积分有什么关系?

解　$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

2. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为旋转抛物面$z=2-(x^2+y^2)$位于$xOy$平面上方的部分，$f(x,y,z)$分别为

(1)　$f(x,y,z)=1$;

(2)　$f(x,y,z)=x^2+y^2$;

(3)　$f(x,y,z)=3z$.

解　如图 10.25 所示，Σ: $z=2-(x^2+y^2)$，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Σ在xOy面上的投影域为

$$D_{xy}:\ x^2+y^2\le 2.$$

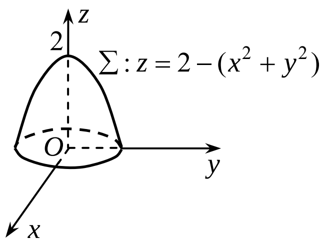

图 10.25

(1)　$\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$

$$=\frac{\pi}{6}(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{3}\pi.$$

(2)　$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\rho^3\mathrm{d}\rho$

$$=\frac{\pi}{16}\left[\frac{2}{5}(1+4\rho^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{149}{30}\pi.$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma} 3z\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} 3(2-x^2-y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= 6\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 3\iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 6\times\frac{13}{3}\pi - 3\times\frac{149}{30}\pi = \frac{111}{10}\pi. \qquad \text{(根据(1)及(2)的结果)}$$

3. 计算下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(2x+\frac{4}{3}y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 位于第一卦限的部分;

(2) $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S$，其中 Σ 为四面体 $x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 的整个边界曲面;

(3) $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=9$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围成的区域的整个边界曲面;

(4) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $0\le z\le 1$ 的部分;

(5) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\ge h\ (0<h<a)$ 的部分;

(6) $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 为双曲抛物面 $z=xy$ 被柱面 $x^2+y^2=R^2$ 所截得的第一卦限的部分;

(7) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 夹在平面 $z=1$ 及 $z=2$ 之间的部分.

解 (1) 如图 10.26 所示，Σ: $z=4[1-(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})]$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(-2)^2+(-\frac{4}{3})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Σ 在 xOy 面上的投影域为

$$D_{xy}:\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$$

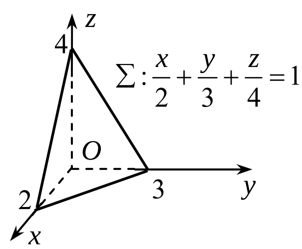

图 10.26

$$\iint\limits_{\Sigma}(2x+\frac{4}{3}y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}4\mathrm{d}S==4\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\sqrt{61}.$$

(2) 如图 10.27 所示，$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$，其中

Σ_1： $z=0$,

Σ_2： $x=0$,

Σ_3： $y=0$,

Σ_4： $z=1-x-y$.

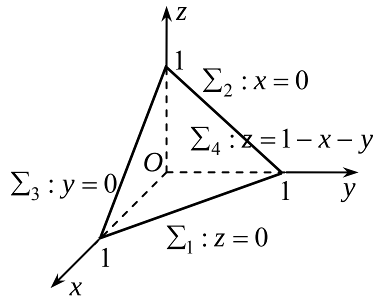

图 10.27

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_4}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}+\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+y)^2}+\iint\limits_{D_{xz}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{(1+x)^2}+\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{(1+x+y)^2}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=(\sqrt{3}+1)\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}+\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+y)^2}+\iint\limits_{D_{xz}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{(1+x)^2}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+y)^2}+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2.$$

(3) 如图 10.28 所示，$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$，其中

Σ_1： $z=0$,

Σ_2： $z=3$,

Σ_3： $x^2+y^2=9$.

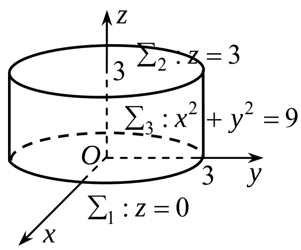

图 10.28

$$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_3}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_3}9\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 9 \times 2\pi \times 3 \times 3$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^3 \rho^3 \mathrm{d}\rho + 162\pi = 243\pi.$$

(4) 如图 10.29 所示，Σ：$z = \sqrt{x^2 + y^2}$，$\mathrm{d}S = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Σ 在 xOy 面上的投影域为

$$D_{xy}:\ x^2 + y^2 \le 1.$$

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 (\rho^2 + \rho)\rho \mathrm{d}\rho = \frac{7}{6}\sqrt{2}\pi.$$

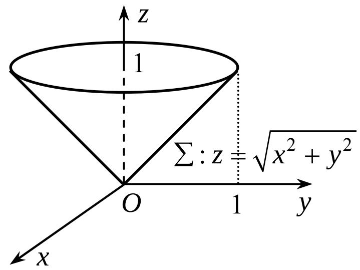

图 10.29

(5) 如图 10.30 所示，Σ：$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，$\mathrm{d}S = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Σ 在 xOy 面上的投影域为

$$D_{xy}:\ x^2 + y^2 \le a^2 - h^2.$$

$$\iint_{\Sigma} (x + y + z)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} (x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= a\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = a\pi(a^2 - h^2).$$

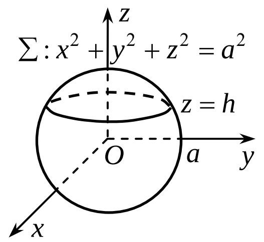

图 10.30

(6) Σ：$z = xy$，$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Σ 在 xOy 面上的投影域为

$$D_{xy}:\ x^2 + y^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

$$\iint_{\Sigma} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} (1 + x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^R (1 + \rho^2)\rho \mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{8}R^2(2 + R^2).$$

(7) 如图 10.31 所示，Σ：$z = x^2 + y^2$，$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$\sum$ 在 xOy 面上的投影域为

$$D_{xy}: 1 \le x^2 + y^2 \le 2.$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pi(2-1) = \pi.$$

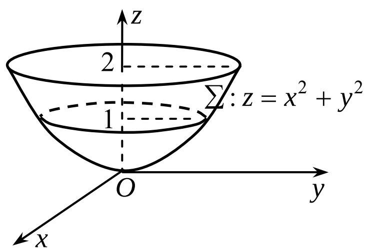

图 10.31

4. 求曲面 Σ 的面积，其中 Σ 为锥面 $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 - 2ax = 0\ (a > 0)$ 截下的有限曲面.

解 Σ: $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathrm{d}S = \sqrt{5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Σ 在 xOy 面上的投影域为

$$D_{xy}: x^2 + y^2 \le 2ax.$$

曲面 Σ 的面积为

$$A = \iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{5}\pi a^2.$$

5. 求抛物面壳 $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}\ (0 \le z \le 1)$ 的质量, 此壳面密度 $\mu(x,y,z) = z$.

解 如图 10.32 所示, 令 Σ: $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$, $\mathrm{d}S = \sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Σ 在 xOy 面上的投影域为

$$D_{xy}: x^2 + y^2 \le 2.$$

抛物面壳的质量为

$$M = \iint\limits_{\Sigma} \mu(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \frac{x^2+y^2}{2}\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^2}{2}\sqrt{1+\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho = \frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1).$$

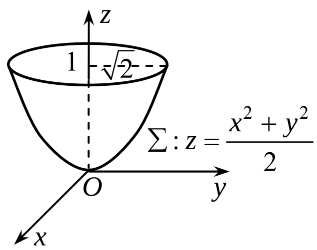

图 10.32

6. 求密度为常数 μ 的均匀半球壳 $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心坐标.

解 如图 10.33 所示. 令 Σ: $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $\mathrm{d}S = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Σ 在 xOy 面上的投影域为

$$D_{xy}: \ x^2 + y^2 \le a^2.$$

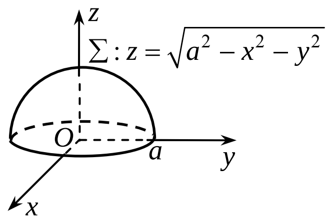

图 10.33

设均匀半球壳的质心坐标为 $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$，则根据对称性知，$\overline{x} = 0$，$\overline{y} = 0$.

因为半球壳的面积为

$$A = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S = 2\pi a^2,$$

所以

$$\overline{z} = \frac{1}{A}\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = \frac{1}{A}\iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a}{A}\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi a^3}{2\pi a^2} = \frac{a}{2},$$

故均匀半球壳的质心坐标为 $(0, 0, \dfrac{a}{2})$.