第八章　多元函数微分法及其应用

第一节　多元函数的极限与连续

习题　8-1

1. 判别下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集? 并分别指出它们的聚点所成的点集(称为导集)和边界.

(1)　$\{(x,y)\big|x\neq 0, y\neq 0\}$;　　　　(2)　$\{(x,y)\big|x>y^2-1\}$;

(3)　$\{(x,y)\big|1\le x^2+y^2<5\}$;

(4)　$\{(x,y)\big|(x-1)^2+y^2\ge 1\}\cap\{(x,y)\big|(x-2)^2+y^2\le 4\}$.

解　(1)　集合是开集, 无界集; 导集为$\mathbf{R}^2$, 边界为$\{(x,y)\big|x=0 \text{ 或 } y=0\}$.

(2)　集合是开集, 区域, 无界集; 导集为$\{(x,y)\big|x\ge y^2-1\}$, 边界为

$\{(x,y)\big|x=y^2-1\}$.

(3)　集合既非开集, 又非闭集, 是有界集; 导集为$\{(x,y)\big|1\le x^2+y^2\le 5\}$, 边界为

$\{(x,y)\big|x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\big|x^2+y^2=5\}$.

(4)　集合是闭集, 有界集; 导集为集合本身, 边界为

$\{(x,y)\big|(x-1)^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\big|(x-2)^2+y^2=4\}$.

2. 写出下列函数表达式:

(1)　将圆锥体的体积V表示为圆锥体斜高l和高h的函数;

(2)　长、宽、高为x, y, z, 内接于半径为 1 的球面的长方体, 将其体积V表示为x, y的函数;

(3)　内接于椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$且长、宽、高分别为$2x$, $2y$, $2z$的长方体, 将其体积V表示为x, y的函数.

解　(1)　设圆锥体的底圆半径为r, 则$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

而 $r^2 = l^2 - h^2$，故

$$V = \frac{\pi}{3} h(l^2 - h^2).$$

(2) 由题意， $(\frac{1}{2}x)^2 + (\frac{1}{2}y)^2 + (\frac{1}{2}z)^2 = 1$，

$$z^2 = 4 - x^2 - y^2，即 \ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}，$$

故

$$V = xyz = xy\sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

(3) 因为 $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

所以

$$z^2 = c^2(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}),\ z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

故

$$V = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz = 8cxy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

3. 求下列函数的定义域, 并画出定义域的图形.

(1) $z = \ln(1 - |x| - |y|)$； (2) $z = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x - y}$；

(3) $z = \sqrt{1 - y^2}$； (4) $u = \arcsin \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

解 (1) 函数的定义域为 $\{(x,y) \mid |x| + |y| < 1\}$. 此定义域的图形如图 8.1 阴影部分所示.

(2) 函数的定义域为 $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4, \\ x \ne y, \end{cases}$ 或 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4 \text{ 且 } x \ne y\}$. 此定义域的图形如图 8.2 阴影部分所示.

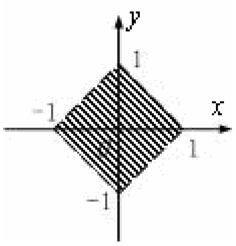

图 8.1

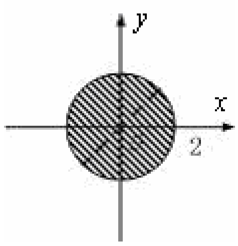

图 8.2

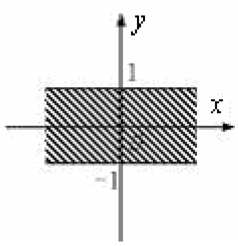

图 8.3

(3) 函数的定义域为$1-y^2\geq 0$即$|y|\leq 1$或$\{(x,y)\,\big|\,x\in\mathbf{R},|y|\leq 1\}$. 此定义域的图形如图 8.3 阴影部分所示.

(4) 函数的定义域为$\begin{cases}-1\leq \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 1,\\ x^2+y^2\neq 0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}|z|\leq\sqrt{x^2+y^2},\\ x^2+y^2\neq 0,\end{cases}$

或

$$\{(x,y,z)\,\big|\,|z|\leq\sqrt{x^2+y^2}\ \text{且}\ x^2+y^2\neq 0\}.$$

此定义域的图形如图 8.4 阴影部分所示.

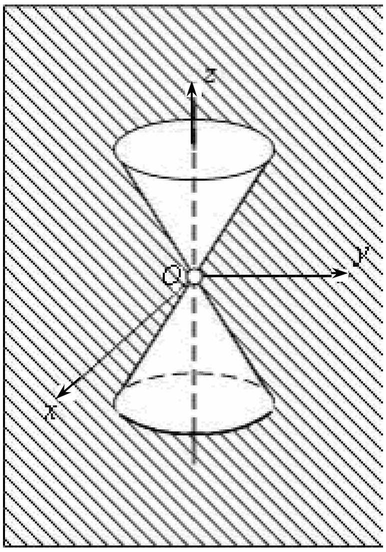

图 8.4

4. 已知 $f(x,y)=x^y+y^x$，求 $f(xy,x+y)$.

解 $f(xy,x+y)=(xy)^{(x+y)}+(x+y)^{xy}$.

5. 已知 $f(x+y,\dfrac{y}{x})=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

解 令 $x+y=u,\ \dfrac{y}{x}=v$.

当 $v\neq -1$ 时可解得 $x=\dfrac{u}{1+v}, y=\dfrac{uv}{1+v}$，于是

$$f(u,v)=(\frac{u}{1+v})^2-(\frac{uv}{1+v})^2=\frac{1-v^2}{(1+v)^2}u^2=\frac{1-v}{1+v}u^2,$$

所以

$$f(x,y)=\frac{1-y}{1+y}x^2 \quad (y\neq -1).$$

当 $v=-1$ 时，$u=0$，此时 $y=-x$，所以 $f(u,v)=0$，故

$$f(x,y)=0 \quad (y=-1).$$

因此

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-y}{1+y}x^2, & y\neq -1,\\ 0, & y=-1.\end{cases}$$

6. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

证
$$\begin{aligned}F(xy,uv)&=\ln(xy)\cdot\ln(uv)=(\ln x+\ln y)\cdot(\ln u+\ln v)\\&=\ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v\\&=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).\end{aligned}$$

7. 如果 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,对任何实数 t 满足

$$f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^k f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

就称 f 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 k 次齐次函数. 下列函数是否是 k 次齐次函数，$k=?$

(1) $f(x,y,z)=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$;

(2) $f(x,y,z)=\sqrt{x^3+y^3+z^3}+xyz$.

解 (1) $f(tx,ty,tz)=\dfrac{(tx)^3+(ty)^3+(tz)^3}{(tx)(ty)(tz)}=\dfrac{t^3(x^3+y^3+z^3)}{t^3(xyz)}$

$$=t^0 f(x,y,z),$$

所以此函数是 k 次齐次函数，$k=0$.

(2) $f(tx,ty,tz)=\sqrt{(tx)^3+(ty)^3+(tz)^3}+(tx)(ty)(tz)$

$$=t^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^3+y^3+z^3}+t^3(xyz)\neq t^k f(x,y,z),$$

所以此函数不是 k 次齐次函数.

8. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$; (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\arcsin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$; (4) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$; (6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) 因 $\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$ 在点(1,0)处连续, 所以可利用连续函数定义

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

(2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\arcsin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1.$$

(3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

(4) $$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x]=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{x)\to 2}x=1\cdot 2=2.$$

(5) 令 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta\ (\rho>0)$, 得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^3\theta-\rho^3\sin^3\theta}{\rho^2}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \rho(\cos^3\theta - \sin^3\theta) = 0 .$$

(6) 当 $x \to 0, y \to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界，而 $x^2+y^2 \to 0$，故由“有界函数与无穷小之积仍为无穷小” 即可得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 .$$

注意 一元函数中有关利用极限四则运算法则、两个重要极限、无穷小量的性质及连续函数性质求极限的各种方法，在多元函数中均可使用. 另外引入极坐标，利用 $(x,y)\to(0,0)$ 与 $\rho \to 0$ 等价的事实求二元函数当 $x \to 0, y \to 0$ 时的极限是常用的一种方法.

9. 证明下列极限不存在:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$； (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$；

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证 (1) 当 (x,y) 沿曲线 $y = kx^2 - x$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2-x\to 0}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x(kx^2-x)}{x+(kx^2-x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{kx-1}{k} = -\frac{1}{k} \quad (k \neq 0) ,$$

显然，此值随 k 值不同而不同，故所求极限不存在.

(2) 当 (x,y) 沿直线 $y = kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-k)x}{(1+k)x} = \frac{1-k}{1+k} \quad (k \neq -1) ,$$

显然，此值随 k 值不同而不同，故所求极限不存在.

(3) 依次取 $(x,y)\to(0,0)$ 的两种方式: $y = x,\ y = -x$，分别求极限:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4} = 1 ,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+4x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+4} = 0 ,$$

两种方式求得的极限值不同，故所求极限不存在.

注意 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 存在，是指 $P(x,y)$ 以任意方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 总趋于一个常数 A，因此，要想证明 $f(x,y)$ 的二重极限不存在，只要取点 P 按照某一个特殊方式趋于 P_0 时，$f(x,y)$ 不趋于常数，或取 P 按照两个特殊方式趋于 P_0 时，$f(x,y)$ 趋于两个不同的常数值即可.

10. 下列函数在何处是间断的?

(1) $f(x,y)=\dfrac{x-y^2}{x^3+y^3}$；　　　　(2) $f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)$.

解 (1) 此函数的定义域为 $D=\{(x,y)\big|x^3+y^3\neq 0\}$，曲线 $x^3+y^3=0$ 上各点均为 D 的聚点，且函数在这些点处没有定义，因此函数在 $\{(x,y)\big|x^3+y^3=0\}$ 处间断.

(2) 此函数的定义域为 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2<1\}$，曲线 $x^2+y^2=1$ 上各点均为 D 的聚点，且函数在这些点处没有定义，因此函数在 $\{(x,y)\big|x^2+y^2=1\}$ 处间断.

11. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续,且 $f(x_0,y_0)>0$ (或 $f(x_0,y_0)<0$)，证明：在点 P 的某个邻域内，$f(x,y)>0$ (或 $f(x,y)<0$).

证 因为 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，且 $f(x_0,y_0)>0$ (或 $f(x_0,y_0)<0$)，则对于 $f(x_0,y_0)>0$ (或 $-f(x_0,y_0)>0$)，总存在 $\delta>0$，使得当点

$(x,y)\in \overset{0}{U}(P_0(x_0,y_0),\delta)$ 时，都有

$$\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<f(x_0,y_0)\quad(\text{或}\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<-f(x_0,y_0)),$$

从而有 $f(x,y)>0$ (或 $f(x,y)<0$).