# 第五节　广义积分

## 习题　5-5

1. 判定下列各广义积分的收敛性, 如果收敛, 计算广义积分:

(1) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{-\infty}^{0} \cos x\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_1^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$;

(7) $\int_0^{1} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(8) $\int_0^{2} \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$;

(9) $\int_0^{2} \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$;　　(10) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)^3}}$;

(11) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$;　　(12) $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

**解**　(1)　收敛. 令 $t=\sqrt{x}$, 则 $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t\mathrm{d}t = 2\lim_{b\to+\infty}[-t\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^b + \int_0^b \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t]$$

$$= 2\lim_{b\to+\infty}(-\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^b) = 2.$$

(2)　$\int_{-\infty}^{0} \cos x\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^0 \cos x\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to-\infty}(-\sin x\Big|_b^0) = \lim\limits_{b\to-\infty}\sin b$ 不存在, 故原积分发散.

(3)　$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\ln(1+x^2)\Big|_0^a = \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\ln(1+a^2) = +\infty,$$

故原积分发散.

(4)　收敛.　令 $I_2 = \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, 则

$$I_2=-\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-x^2\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cdot x\mathrm{d}x$$

$$=0+2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2I_1,$$

而 $$I_1=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$$

$$=-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=0-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1,$$

故 $\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2$ .

(5) 收敛. $\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$ ( $x=1$ 为间断点)

$$=\int_1^2\frac{(x-1)+1}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\int_1^2(\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}})\mathrm{d}(x-1)$$

$$=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2+2(x-1)^{\frac{1}{2}}\Big|_1^2=2\frac{2}{3}.$$

(6) 收敛. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi.$

(7) 收敛. $\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ ( $x=1$ 为间断点)

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}(-\frac{1}{2})\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0^+}2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{1-\varepsilon}$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to0^+}\{[1-(1-\varepsilon^2)]^{\frac{1}{2}}-1\}=1.$$

(8) $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$ . 由于

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}=-\frac{1}{1-x}\Big|_0^1=\infty,$$

故原积分发散.

(9) 收敛. $\int_0^2\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$ ( $x=2$ 为瑕点)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$\underline{\underline{令 x = 2\sin t}} \lim_{\varepsilon \to 0^+} 8\int_0^{\arcsin(1-\frac{\varepsilon}{2})} \sin^3 t dt$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}.$$

(10)　收敛. 令 $x = \tan^2\theta$，则 $dx = 2\tan\theta \sec^2\theta d\theta$，

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sec^3\theta \tan\theta} \cdot 2\tan\theta \sec^2\theta d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = 2\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

(11)　收敛.　$\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$　　　　($x = e$ 为间断点)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_1^{e-\varepsilon} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_1^{e-\varepsilon} \frac{d\ln x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin(\ln x)\Big|_1^{e-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \{\arcsin[\ln(e-\varepsilon)] - \arcsin(\ln 1)\} = \frac{\pi}{2}.$$

(12)　收敛.　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$　　　($x = 0$，$x = 1$ 为间断点)

$$= \int_0^b \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx + \int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = I_1 + I_2, \qquad (0 < b < 1),$$

而 $$I_1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^b \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^b \frac{-d(\frac{1}{2}-x)}{\sqrt{\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [-\arcsin(1-2x)]\Big|_\varepsilon^b$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arcsin(1-2b),$$

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_b^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [-\arcsin(1-2x)]\Big|_b^{1-\varepsilon}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\arcsin(1-2b),$$

故$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x = I_1 + I_2 = \pi$.

2. 当$k$为何值时，广义积分$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$收敛？又$k$为何值时，此广义积分发散？又$k$为何值时，这广义积分取得最小值？

**解** $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\int\frac{\mathrm{d}\ln x}{(\ln x)^k}=\begin{cases}\ln(\ln x)+C, & \text{当}k\text{为}1\text{时},\\ \frac{1}{-k+1}(\ln x)^{-k+1}+C, & \text{当}k\neq 1\text{时}.\end{cases}$$

当$k=1$时，

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}$$，此广义积分发散.

当$k\neq 1$时，

1° 若$k<1$时，$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{(\ln x)^k}$$

$$=\frac{1}{1-k}(\ln x)^{1-k}\Big|_2^{+\infty}$$，此广义积分发散;

2° 若$k>1$时，$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{(\ln x)^k}$$

$$=\frac{1}{1-k}(\ln x)^{-(k-1)}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{1-k}[0-(\ln 2)^{-(k-1)}$$

$$=\frac{1}{k-1}\frac{1}{(\ln 2)^{k-1}},$$

故当$k>1$时，广义积分$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$收敛.

令 $$f(k)=\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{(\ln 2)^{k-1}}=\frac{1}{k-1}\frac{1}{a^{k-1}}(a=\ln 2),$$

$$f'(k)=\frac{-1}{(k-1)^2}\cdot\frac{1}{a^{k-1}}+\frac{1}{k-1}\cdot\frac{-a^{k-1}\cdot\ln a}{a^{2(k-1)}}$$

$$=-\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{a^{k-1}}\left(\frac{1}{k-1}+\ln a\right).$$

令$f'(k)=0$，得 $-\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{a^{k-1}}\left(\frac{1}{k-1}+\ln a\right)=0$，因为$k>1$，所以

$$-\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{a^{k-1}}\neq 0,\ \frac{1}{k-1}+\ln a=0,$$

解得驻点 $k=1-\frac{1}{\ln a}=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$.

$$f''(k)=\frac{-[a^{k-1}+(k-1)a^{k-1}\ln a]}{(k-1)^2a^{2(k-1)}}(\frac{1}{k-1}+\ln a)-\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{a^{k-1}}[-\frac{1}{(k-1)^2}]$$

$$=\frac{1+[1+(k-1)\ln a]^2}{(k-1)^3a^{k-1}},$$

$$f''(1-\frac{1}{\ln a})=\frac{1}{-(\ln a)^3a^{-\frac{1}{\ln a}}}=-(\ln a)^3a^{\frac{1}{\ln a}},$$

因为 $0<a=\ln 2<1$，所以 $\ln a<0$，故

$$f''(1-\frac{1}{\ln\ln 2})>0.$$

因而 $f(k)$ 在 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时取得最小值. 又由于 $k>1$ 时 $f(k)$ 只有一个驻点，并且对任意的 $k>1$，$f(k)$ 均存在，即 $f(k)$ 没有边界值，故 $f(k)$ 的极小值也是它的最小值，所以当 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 取得最小值.

3. 利用递推公式计算广义积分 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

**解** $I_n=-\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-x^n\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}nx^{n-1}\mathrm{d}x$

$$=0+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=nI_{n-1}$$

$$\overset{\text{递推}}{=\!=}n(n-1)I_{n-2}=\cdots=n(n-1)(n-2)\cdots 2I_1=n!I_1,$$

而
$$I_1=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}e^{-x}$$

$$=-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=0-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1,$$

故 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=n!$.

4. 证明广义积分 $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$ 当 $p<1$ 时收敛；当 $p\geq 1$ 时发散.

**证** 易知 $x=a$ 为间断点，而

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p} = \int \frac{\mathrm{d}(x-a)}{(x-a)^p} = \begin{cases} \ln(x-a)+C, & \text{当} p=1 \text{时}, \\ \dfrac{1}{-p+1}(x-a)^{-p+1}+C, & \text{当} p \neq 1 \text{时}. \end{cases}$$

当 $p=1$ 时,

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln(x-a)\Big|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\ln(b-a)-\ln\varepsilon],$$

故原广义积分发散.

当 $p\neq 1$ 时,

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{\mathrm{d}(x-a)}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{(x-a)^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_{a+\varepsilon}^b$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{-p+1}[(b-a)^{1-p}-\varepsilon^{1-p}].$$

$1^\circ$ 若 $p>1$，则 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{1-p}$ 不存在, 所以 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$ 发散.

$2^\circ$ 若 $p<1$，则 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{1-k}=0$， $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p} = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$，即 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$ 收敛.

总之当 $p\geq 1$ 时，$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$ 发散；当 $p<1$ 时，$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$ 收敛且收敛于 $\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$.