第四章总习题

1. 填空题:

(1) 设$\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则$\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$.

(2) 已知$f(x)$的一个原函数为$\ln^2 x$，则$\int xf'(x)\mathrm{d}x=2\ln x-\ln^2 x+C$.

(3) 设$f'(\ln x)=1+x$，则$f(x)=x+\mathrm{e}^x+C$.

(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C$.

(5) $\int\frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{x}+C$.

(6) $\int x^x(\ln x+1)\mathrm{d}x=x^x+C$.

解 (1) 由题设，$xf(x)=(\arcsin x+C)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$，

于是

$$\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C.$$

(2) 由题设，$\int f(x)dx=\ln^2 x+C_1$或$f(x)=(\ln^2 x)'=\frac{2\ln x}{x}$，于是

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=x\cdot\frac{2\ln x}{x}-(\ln^2 x+C_1)$$

$$=2\ln x-\ln^2 x+C.$$

(3) 令$\ln x=t,\ x=\mathrm{e}^t$，于是

$$f'(t)=1+\mathrm{e}^t,\quad f(t)=\int(1+\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t=t+\mathrm{e}^t+C,$$

所以

$$f(x)=x+\mathrm{e}^x+C.$$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\int \frac{\mathrm{d}(x-2)}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}}$

$$=\arcsin\frac{x-2}{2}+C.$$

(5) $\int \frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x=\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x-\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int \ln x\mathrm{d}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$

$$=-(\frac{\ln x}{x}-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}\ln x)+\frac{1}{x}=-\frac{\ln x}{x}+\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{x}$$

$$=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+C=-\frac{\ln x}{x}+C.$$

(6) 因为 $(x^x)'=(\mathrm{e}^{x\ln x})'=\mathrm{e}^{x\ln x}(x\ln x)'$

$$=\mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1),$$

所以

$$\int x^x(\ln x+1)\mathrm{d}x=x^x+C.$$

2. 单项选择题:

(1) 若函数 $f(x)$ 的导数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数为(B).

(A) $3+\sin x$; (B) $3x-\sin x+8$;

(C) $1+\cos x$; (D) $1-\cos x$.

(2) 设 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$，则 $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=$ (C).

(A) $-2(x-x^2)^2+C$; (B) $2(1-x^2)^2+C$;

(C) $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$; (D) $\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$.

(3) 函数 $\cos\frac{\pi}{2}x$ 的一个原函数是(A).

(A) $\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x$; (B) $\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$;

(C) $-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x$; (D) $-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$.

(4) 在下列等式中，正确的是(C).

(A) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$; (B) $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$;

(C) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$; (D) $\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x]=f(x)$.

(5) 若$\int \mathrm{d}f(x)=\int \mathrm{d}g(x)$，则下列结论中错误的是(D).

(A) $f'(x)=g'(x)$; (B) $\mathrm{d}f(x)=\mathrm{d}g(x)$;

(C) $\mathrm{d}\int f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}\int g'(x)\mathrm{d}x$; (D) $f(x)=g(x)$.

解 (1) 由题设，$f'(x)=\sin x$，则 $f(x)=\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C_1$，而

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(-\cos x+C_1)\mathrm{d}x=-\sin x+C_1x+C_2,$$

故应选 B .

(2) $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$,

故应选 C .

(3) $\int \cos\frac{\pi}{2}x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}(\frac{\pi}{2}x)=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x+C$,

故应选 A .

(4) 根据不定积分的定义与性质，应选 C .

(5) 根据微积分之间的关系及性质，应选 D .

3. 求下列不定积分:

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}$; (2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$;

(3) $\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$; (4) $\int\frac{x^3}{9+x^2}\mathrm{d}x$;

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x-2}$; (6) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$;

(7) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$; (8) $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\tan\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(9) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$; (10) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$;

(11) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$; (12) $\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\mathrm{d}x$;

(13) $\int\frac{x}{x^4+2x^2+5}\mathrm{d}x$; (14) $\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$;

(15) $\int x(\mathrm{e}^x+\ln^2 x)\mathrm{d}x$; (16) $\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$;

(17) $\int \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x$;　　(18) $\int \mathrm{e}^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x$;

(19) $\int \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$;　　(20) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$;

(21) $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$;　　(22) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{x}-\frac{x^5}{x^6+4})\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{24}\int\frac{\mathrm{d}(x^6+4)}{x^6+4}$

$$=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{24}\ln(x^6+4)+C.$$

(2) $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$，利用待定系数法可求得

$$A=1,\ B=-1,\ C=0,$$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1})\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

(3) $\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$,

利用待定系数法可求得 $A=-5,\ B=6$，所以

$$\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x=\int(\frac{6}{x-3}-\frac{5}{x-2})\mathrm{d}x=6\int\frac{\mathrm{d}(x-3)}{x-3}\mathrm{d}x-5\int\frac{\mathrm{d}(x-2)}{x-2}$$

$$=6\ln|x-3|-5\ln|x-2|+C.$$

(4) $\int\frac{x^3}{9+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{9+x^2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int\frac{(9+x^2)-9}{9+x^2}\mathrm{d}(x^2)$

$$=\frac{1}{2}\int(1-\frac{9}{9+x^2})\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}(x^2)-\frac{9}{2}\int\frac{1}{9+x^2}\mathrm{d}(9+x^2)$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{2}\ln(9+x^2)+C.$$

(5) 因为 $\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1})$，所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x-2}=\frac{1}{3}\int(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1})\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(\ln|x-2|-\ln|x+1|)+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.$$

(6) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^x}{(e^x)^2+e^x\cdot e^{-x}}dx=\int\frac{d(e^x)}{(e^x)^2+1}=\arctan e^x+C$.

(7) $\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int\frac{e^x}{(e^x)^2-e^x\cdot e^{-x}}dx=\int\frac{d(e^x)}{(e^x)^2-1}$

$$=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^x+1})d(e^x)=\frac{1}{2}[\int\frac{d(e^x-1)}{e^x-1}-\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}]$$

$$=\frac{1}{2}[\ln\left|e^x-1\right|-\ln(e^x+1)]+C=\frac{1}{2}\ln\frac{\left|e^x-1\right|}{e^x+1}+C.$$

注意 给被积函数的分子分母同乘以一个因式，以简化积分，是常用的一种手段.

(8) $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\tan\sqrt{1+x^2}dx=\int\tan\sqrt{1+x^2}d\sqrt{1+x^2}$

$$=-\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right|+C.$$

(9) 令 $x=\sin t\ \ (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}),\ dx=\cos tdt$.

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos tdt}{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int\frac{\cos tdt}{1+\cos t}=\int(1-\frac{1}{1+\cos t})dt$$

$$=t-\int\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dt=t-\int\sec^2\frac{t}{2}d\frac{t}{2}=t-\tan\frac{t}{2}+C$$

$$=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C=\arcsin x-\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$$

(10) 令 $x=\sin t\ \ (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}),\ dx=\cos tdt$.

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos tdt}{\sin t+\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int\frac{\cos tdt}{\sin t+\cos t}$$

$$=\frac{1}{2}\int(1+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t})dt=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t}$$

$$=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\sin t+\cos t\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}(\arcsin x+\ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|)+C.$$

(11) 令 $x=\tan t\ (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$, $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{(2\tan^2 t+1)\cdot\sec t}=\int\frac{\sec t\mathrm{d}t}{2\tan^2 t+1}$$

$$=\int\frac{\cos t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{1+\sin^2 t}=\arctan(\sin t)+C$$

$$=\arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

(12) 法 1 令 $x=\tan t\ (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$, $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$.

$$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^t\tan t}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t,$$

因为
$$\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t=-\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}\cos t=-(\mathrm{e}^t\cos t-\int\mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t)$$

$$=-\mathrm{e}^t\cos t+\mathrm{e}^t\sin t-\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t,$$

故

$$\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t-\cos t),$$

因此

$$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arctan x}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})+C$$

$$=\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

法 2 $\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\mathrm{d}x$

$$=-\int\mathrm{e}^{\arctan x}\mathrm{d}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=-\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\arctan x})$$

$$= -\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + \int e^{\arctan x} d\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + e^{\arctan x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= -\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx,$$

移项，解出

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$$

法 3 $$\int \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} d(e^{\arctan x}) = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$$

$$= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(e^{\arctan x})$$

$$= -\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx,$$

移项，解出

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$$

注意 如(11)，(12)题型，被积函数含有根号 $\sqrt{1+x^2}$，典型的做法是做代换: $x = \tan t$． 被积函数含有反三角函数 $\arctan x$，同样可考虑做变换: $\arctan x = t$,即 $x = \tan t$．本题也可用部分积分法.

(13) $$\int \frac{x}{x^4+2x^2+5} dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2+4} = \frac{1}{4}\arctan\frac{x^2+1}{2} + C.$$

(14) 令 $\sqrt{x-1} = t, x = t^2+1, dx = 2xdt$.

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = \int \frac{t}{t^2+1} \cdot 2tdt = 2\int \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2\int (1-\frac{1}{t^2+1}) dt$$

$$= 2(t - \arctan t) + C = 2\sqrt{x-1} - 2\arctan\sqrt{x-1} + C.$$

(15) $\int x(\mathrm{e}^x+\ln^2 x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int x\ln^2 x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)+\frac{1}{2}\int \ln^2 x\mathrm{d}(x^2)$

$$=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}\ln^2 x$$

$$=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\int x\ln x\mathrm{d}x$$

$$=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}\int \ln x\mathrm{d}(x^2)$$

$$=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C.$$

(16) 令 $\arctan x=t,\ x=\tan t,\ \mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t.$

$$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\frac{t}{\tan^2 t\cdot\sec^2 t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t=\int t\cot^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\int t(\csc^2 t-1)\mathrm{d}t=\int t\csc^2 t\mathrm{d}t-\int t\mathrm{d}t=-\int t\mathrm{d}\cot t-\frac{t^2}{2}$$

$$=-t\cot t+\int\cot t\mathrm{d}t-\frac{t^2}{2}=-t\cot t+\ln\left|\sin t\right|-\frac{t^2}{2}+C$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|-\frac{(\arctan x)^2}{2}+C$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{(\arctan x)^2}{2}+C.$$

(17) $\int\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int\frac{\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x=\ln|x|-\int\ln(1-x)\mathrm{d}\frac{1}{x}$

$$=\ln|x|-\frac{1}{x}\ln(1-x)+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}\ln(1-x)$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{x}\ln(1-x)-\int\frac{1}{x(1-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{x}\ln(1-x)-\int(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x})\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{x}\ln(1-x)-\ln|x|+\ln(1-x)+C$$

$$=(1-\frac{1}{x})\ln(1-x)+C.$$

(18) $\int\mathrm{e}^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{2x}(\tan^2 x+2\tan x+1)\mathrm{d}x$

$$=\int e^{2x}\sec^2 x\mathrm{d}x+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x$$

$$=\int e^{2x}\mathrm{d}\tan x+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x$$

$$=e^{2x}\tan x-\int \tan x\mathrm{d}e^{2x}+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x$$

$$=e^{2x}\tan x-2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x$$

$$=e^{2x}\tan x+C.$$

注意 如(15), (17), (18) 题型, 被积函数较为复杂, 直接凑微分或分部积分都比较困难, 将被积函数拆项, 把积分变为几个较为简单的积分, 这是求不定积分常用的技巧之一.

(19) **法 1** 令 $\tan\dfrac{x}{2}=u$, $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$.

$$\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}=2\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2+2u}=2\int\frac{\mathrm{d}(u+1)}{(u+1)^2}$$

$$=-\frac{2}{1+u}+C=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

法 2 $$\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\sec^2 x\mathrm{d}x-\int\tan x\cdot\sec x\mathrm{d}x=\tan x-\sec x+C.$$

注意 用不同方法求出的原函数其表达式可能不同, 它们之间可以相差一个常数. 其次, 三角函数有理式的积分, 在实际求解中往往不用“万能代换”, 而是具体分析被积函数的特点, 以选取尽可能简捷的方法.

(20) $$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)-1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

(21) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x-1) = 2\int xd\sqrt{e^x-1}$

$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 2\int \sqrt{e^x-1}dx .$$

令 $\sqrt{e^x-1}=t,\ e^x=t^2+1,\ x=\ln(t^2+1),\ dx=\frac{2t}{t^2+1}dt$.

$$\int \sqrt{e^x-1}dx = \int t\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt = 2\int\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt$$

$$= 2(\int dt - \int\frac{1}{t^2+1}dt) = 2(t-\arctan t)$$

$$= 2(\sqrt{e^x-1} - \arctan\sqrt{e^x-1}) + C_1 .$$

所以

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx = 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C .$$

注意 本题综合了换元法、分部积分法以及简单无理函数的积分, 为了避免出错, 不防分段作出积分, 最后综合给出答案.

(22) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx = \int \ln x d\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{x}dx$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C .$$

注意 因为 $(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})' = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, 所以可凑成微分

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx = d\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} .$$

4. 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx$.

解 法 1 令 $t=\sin^2 x,\ \sin x=\sqrt{t},\ x=\arcsin\sqrt{t},\ f(x)=\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x = -2\int \arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{1-x}$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\int \sqrt{1-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C\,.$$

法 2　令 $x=\sin^2 t$，则

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\sin t}{\cos t} f(\sin^2 t)\cdot 2\sin t\cos t\mathrm{d}t$$

$$= 2\int t\sin t\mathrm{d}t = -2\int t\mathrm{d}\cos t = -2t\cos t + 2\int \cos t\mathrm{d}t$$

$$= -2t\cos t + 2\sin t + C$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C\,.$$

5.　$f(x)$ 的原函数 $F(x)>0$，且 $F(0)=1$，当 $x>0$ 时有 $f(x)F(x)=\cos 2x$,求 $f(x)$.

解　因为 $F'(x)=f(x)$，所以 $F'(x)F(x)=\cos 2x$，又因为

$$\frac{1}{2}F^2(x) = \int F'(x)F(x)\mathrm{d}x = \int \cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}2x = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1,$$

所以

$$F^2(x) = \sin 2x + C\,.$$

由 $F(0)=1$，得 $C=1$，则

$$F(x) = \sqrt{1+\sin 2x}\,,$$

故

$$f(x) = F'(x) = (\sqrt{\sin 2x + 1})'$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}} = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\,.$$

6.　计算 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$，其中 a, b 是不全为 0 的非负常数.

解　(1)　当 $a\neq 0$, $b\neq 0$ 时,

$$I=\int\frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{a^2\tan^2 x+b^2}=\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{a^2\tan^2 x+b^2}=\frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x)+C;$$

(2) 当 $a=0,\ b\neq 0$ 时，

$$I=\frac{1}{b^2}\int\sec^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{b^2}\tan x+C;$$

(3) 当 $a\neq 0,\ b=0$ 时，

$$I=\frac{1}{a^2}\int\csc^2 x\mathrm{d}x=-\frac{1}{a^2}\cot x+C.$$

7. 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x$.

解 $\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x=\int x^3\mathrm{d}f(x)=x^3 f(x)-\int f(x)\mathrm{d}(x^3)$

$$=x^3 f(x)-3\int x^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

又因为 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$f(x)=(\frac{\sin x}{x})'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},$$

故

$$\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x=x^3\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-3\int(x\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=x^2\cos x-x\sin x-3\int x\mathrm{d}\sin x+3\int\sin x\mathrm{d}x$$

$$=x^2\cos x-x\sin x-3x\sin x+6\int\sin x\mathrm{d}x$$

$$=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$$

8. 设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$,且 $f[g(x)]=\ln x$,求 $\int g(x)\mathrm{d}x$.

解 因为 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，所以 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2-1+1}{x^2-1-1}$，于是

$$f(x)=\ln\frac{x+1}{x-2}.$$

又 $f[g(x)]=\ln x$，所以

$$f[g(x)]=\ln\frac{g(x)+1}{g(x)-1}=\ln x,$$

故 $\frac{g(x)+1}{g(x)-1}=x$，由此可解出 $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$，因此

$$\int g(x)\mathrm{d}x = \int \frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x = \int (1+\frac{2}{x-1})\mathrm{d}x = x + 2\ln|x-1| + C\ .$$