第八章总习题

1. 填空题:

(1) 设 $z = x + y^2 + f(x+y)$，且当 $y=0$ 时，$z = x^2$，则函数 $f(x) = \underline{x^2 - x}$，$z = \underline{x^2 + 2y^2 + 2xy - y}$；

(2) 由方程 $xyz + \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z = \underline{\mathrm{d}x - \sqrt{2}\mathrm{d}y}$；

(3) 由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12, \\ z = 0, \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为 $\underline{\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0,\sqrt{2},\sqrt{3})}$.

解 (1) 把 $y=0,\ z=x^2$ 代入等式 $z = x + y^2 + f(x+y)$ 两边，得

$$x^2 = x + f(x),$$

于是

$$f(x) = x^2 - x,$$

$$z = x + y^2 + f(x+y) = x + y^2 + (x+y)^2 - (x+y)$$

$$= x^2 + 2y^2 + 2xy - y.$$

(2) 令 $F(x,y,z) = xyz + \sqrt{x^2+y^2+z^2} - \sqrt{2}$，则

$$F_x = yz + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

由对称性可得

$$F_y = xz + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad F_z = xy + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

于是

$$F_x(1,0,-1)=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad F_y(1,0,-1)=-1,\qquad F_z(1,0,-1)=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0,-1)}=-\frac{F_x(1,0,-1)}{F_z(1,0,-1)}=1,\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0,-1)}=-\frac{F_y(1,0,-1)}{F_z(1,0,-1)}=-\sqrt{2}.$$

故 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分为

$$\mathrm{d}z=1\cdot\mathrm{d}x+(-\sqrt{2})\cdot\mathrm{d}y=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y.$$

(3) 曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0,\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面方程为

$$3(x^2+z^2)+2y^2=12,\ 即\ 3x^2+2y^2+3z^2=12.$$

令 $F(x,y,z)=3x^2+2y^2+3z^2-12$，则

$$F_x=6x,\qquad F_y=4y,\qquad F_z=6z,$$

所以旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2})$，单位法向量为

$$\boldsymbol{n}^0=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=(0,\sqrt{\frac{2}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}})=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,\sqrt{2},\sqrt{3}).$$

2. 单项选择题:

(1) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质:

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;

② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续;

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;

④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有(A) .

(A) ②⇒③⇒①;　　(B) ③⇒②⇒①;

(C) ③⇒④⇒①;　　(D) ③⇒①⇒④.

(2) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=-1$，

则有(C)　.

(A)　$\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$;

(B)　曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个法向量为 $(3,-1,1)$;

(C)　曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0, \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(1,0,3)$;

(D)　曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0, \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(3,0,1)$.

解　(1)　二元函数 $f(x,y)$ 的 4 条性质之间的关系如下图所示:

因此选项 A 正确.

(2)　A 不正确. 因为对于多元函数来说, 偏导数存在, 并不能保证函数在该点连续, 从而不一定可微, 因此选项 A 不正确.

B 不正确. 因为 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为

$$(f_x(0,0),f_y(0,0),-1)=(3,-1,-1),$$

因此选项 B 不正确.

C 正确.　D 不正确. 因为曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0, \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为

$(1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x})$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x(x,y)=f_x(0,0)=3$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$, 故切向量为 $(1,0,3)$, 因此选项 C 正确, 选项 D 不正确.

3.　设

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0, \\ 0 & , x^2+y^2\neq 0. \end{cases}$$

问　(1)　$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续?

(2)　$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微?

解　(1)　因为函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内有定义, 且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}(x^2+y^2)$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{|xy|}=0=f(0,0),$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

(2) 因为 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$,

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0,$$

于是

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{[\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}]^3}\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]$$

让点 $(\Delta x,\Delta y)$ 沿直线 $\Delta y=\Delta x$ 趋于点 $(0,0)$，即 $\Delta y=\Delta x\to 0$，得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{[\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}]^3}\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{2\sqrt{2}\sqrt{(\Delta x)^2}(\Delta x)^2}\sin[2(\Delta x)^2]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x)^2}{2\sqrt{2}(\Delta x)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0,$$

即 $\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$ 不是比 ρ 高阶的无穷小，所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

4. 验证函数 $z=\sin(x-ay)$ 满足波动方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

证 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos(x-ay)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos(x-ay)\cdot(-a)=-a\cos(x-ay),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}[\cos(x-ay)]=-\sin(x-ay),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial y}[-a\cos(x-ay)]=(-a)\cdot(-1)\sin(x-ay)\cdot(-a)$$

$$=-a^2\sin(x-ay),$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2[-\sin(x-ay)]=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

5. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}, & 当(x,y)\neq 0,\\ 0, & 当(x,y)=0,\end{cases}$$

求 $f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$.

解 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$f_x(x,y)=\frac{3x^2y(x^2+y^2)-x^3y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^3(x^2+y^2)-x^3y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5-x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时,

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0.$$

所以

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & 当(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 当(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5-x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & 当(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 当(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

故

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0,$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^5}{(\Delta x)^4}-0}{\Delta x}=1.$$

注意 常见的错误是没有用偏导数的定义求函数 $f(x,y)$ 在分段点 $(0,0)$ 处的偏导数 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$. 其次，本例中 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$，这说明混合偏导数与求导次序有关.

6. 设 $f(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数，且 $f(x,x^2)=1,\ f_x(x,x^2)=x$，求 $f_y(x,x^2)$.

解 **法 1** 由 $f(x,x^2)=1$ 及全微分公式有

$$\mathrm{d}f(x,x^2)=f_x(x,x^2)\mathrm{d}x+f_y(x,x^2)\mathrm{d}y,$$

得

$$\mathrm{d}1=x\mathrm{d}x+f_y(x,x^2)\mathrm{d}x^2,\ 即\ 0=x\mathrm{d}x+2xf_y(x,x^2)\mathrm{d}x,$$

从而

$$f_y(x,x^2)=-\frac{1}{2}.$$

法 2 由求偏导数的公式有,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,x^2)=f_x(x,x^2)+f_y(x,x^2)\cdot 2x\ 即\ 0=x+f_y(x,x^2)\cdot 2x,$$

从而

$$f_y(x,x^2)=-\frac{1}{2}.$$

法 3 由 $f(x,x^2)=1$，令 $y=x^2$，则 $f(\pm\sqrt{y},y)=1$.

两边求导数得

$$f_1'(\pm\sqrt{y},y)\cdot(\pm\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}})+f_2'(\pm\sqrt{y},y)=0,$$

即

$$f_x(x,x^2)\cdot\frac{1}{2x}+f_y(x,x^2)=0,\qquad x\cdot\frac{1}{2x}+f_y(x,x^2)=0,$$

从而

$$f_y(x,x^2)=-\frac{1}{2}.$$

注意 这是抽象函数求偏导数的问题, 不可能套用求导公式计算, 应灵活运用所学知识求解.

7. 若可微函数 $z=f(x,y)$ 满足方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 证明 $f(x,y)$ 在极坐标系里只是 θ 的函数.

证 直角坐标系与极坐标系的关系如下:

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \ \theta=\arctan\frac{y}{x}. \tag{1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{x}{\rho}-\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{y}{\rho^2}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\rho}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\cdot\frac{y}{\rho}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{x}{\rho^2}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{\rho}. \tag{3}$$

将式(1), (2), (3)代入方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 得

$$\rho\cos\theta(\frac{\partial z}{\partial\rho}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\rho})+\rho\sin\theta(\frac{\partial z}{\partial\rho}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{\rho})=0,$$

于是化简整理, 得

$$\frac{\partial z}{\partial\rho}=0$$

这即说明 $z=f(x,y)$ 在极坐标系里只是 θ 的函数.

8. 可微函数 $f(x,y,z)$ 又是 n 次齐次函数, 即它满足关系式:

$$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z).$$

试证 $f(x,y,z)$ 满足方程

$$xf_x(x,y,z)+yf_y(x,y,z)+zf_z(x,y,z)=nf(x,y,z).$$

证 等式 $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$ 两边对 t 求导, 得

$$xf_{tx}(tx,ty,tz)+yf_{ty}(tx,ty,tz)+zf_{tz}(tx,ty,tz)=nt^{n-1}f(x,y,z),$$

令 $tx=u,\ ty=v,\ tz=w$, 上式成为

$$\frac{u}{t}f_u(u,v,w)+\frac{v}{t}f_v(u,v,w)+\frac{w}{t}f_w(u,v,w)=nt^{n-1}f(\frac{u}{t},\frac{v}{t},\frac{w}{t}),$$

即

$$\frac{x}{t}f_x(x,y,z)+\frac{y}{t}f_y(x,y,z)+\frac{z}{t}f_z(x,y,z)=nt^{n-1}f(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\frac{z}{t}),$$

于是

$$xf_x(x,y,z)+yf_y(x,y,z)+zf_z(x,y,z)=nt^n f(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\frac{z}{t}),$$

又因为 $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$，从而

$$f(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\frac{z}{t})=\frac{1}{t^n}f(x,y,z),$$

所以

$$xf_x(x,y,z)+yf_y(x,y,z)+zf_z(x,y,z)=nt^n\cdot\frac{1}{t^n}f(x,y,z)=nf(x,y,z).$$

9. 设 $z=f(u,x,y)$, $u=xe^y$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}=f_1'e^y+f_2'$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(f_1'e^y+f_2')=\frac{\partial}{\partial y}(f_1')\cdot e^y+f_1'\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(e^y)+\frac{\partial}{\partial y}(f_2')$$

$$=[\frac{\partial}{\partial u}(f_1')\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(f_u')]e^y+e^y f_1'+\frac{\partial}{\partial u}(f_2')\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(f_2')$$

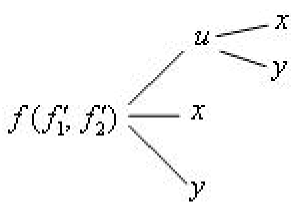
$$=[f_{11}''\cdot(xe^y)+f_{13}'']e^y+e^y f_1'+f_{21}''\cdot(xe^y)+f_{23}''$$

$$=xe^{2y}f_{11}''+e^y f_{13}''+xe^y f_{12}''+f_{23}''+e^y f_1'.$$

注意 二阶偏导数常错求为:

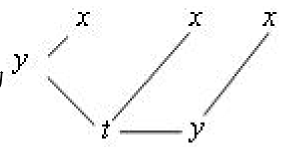
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^y f_1'+f_2')=f_1'e^y.$$

产生错误的原因是没有认识到 f_1' 与 f_2' 均与 y 有关. 事实上，f_1', f_2' 与 f 有一样的复合关系:



10. 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x, y 的函数，其中 f, F 都具有一阶连续偏导数. 试证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{f_tF_y+F_t}.$$

证 法 1 用复合函数求导法. 复合关系为 

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\cdot(\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot(\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) \tag{4}$$

因为 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 确定的 x, y 的函数, 故

$$\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_t},\ \frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_t},$$

将 $\frac{\partial t}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial t}{\partial y}$ 的表达式代入式(4), 并将 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 解出来, 即得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot F_t-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot F_x}{\frac{\partial f}{\partial t}\cdot F_y+F_t}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{f_tF_y+F_t}.$$

法 2 隐函数求导法.

由方程组 $\begin{cases} y=f(x,t), \\ F(x,y,t)=0, \end{cases}$ 可确定两个一元隐函数 $y=y(x),\ t=t(x)$.

分别在两个方程两边对 x 求导, 可得

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}, \\ \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0, \end{cases}$$

移项得

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial F}{\partial x}, \end{cases}$$

在 $D=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ 的条件下, 解方程组求得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ -\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

法 3 全微分法. 分别在 $y=f(x,t)$ 及 $F(x,y,t)=0$ 两边求全微分, 得

$$\begin{cases} \mathrm{d}y = f_x \mathrm{d}x + f_t \mathrm{d}t \ , & (5) \\ F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_t \mathrm{d}t = 0, & (6) \end{cases}$$

由式(6)得

$$F_t \mathrm{d}t = -(F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y), \tag{7}$$

将 F_t 乘以式(5)两边，并以式(7)代入，得

$$F_t \mathrm{d}y = f_x F_t \mathrm{d}x - f_t (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y),$$

即

$$(F_t + f_t F_y)\mathrm{d}y = (f_x F_t - f_t F_x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f_x F_t - f_t F_x}{F_t + f_t F_y}.$$

11． 设 $f(x,y) = \int_0^{xy} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$，求 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解 因为 $\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{-(xy)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y\mathrm{e}^{-(xy)^2}$，由对称性知

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\mathrm{e}^{-(xy)^2},$$

于是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}[y\mathrm{e}^{-(xy)^2}] = y \cdot \mathrm{e}^{-(xy)^2} \cdot (-2xy^2) = -2xy^3\mathrm{e}^{-(xy)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[y\mathrm{e}^{-(xy)^2}] = 1 \cdot \mathrm{e}^{-(xy)^2} + y \cdot \mathrm{e}^{-(xy)^2} \cdot (-2xy^2)$$

$$= \mathrm{e}^{-(xy)^2} - 2x^2y^2\mathrm{e}^{-(xy)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}[x\mathrm{e}^{-(xy)^2}] = x \cdot \mathrm{e}^{-(xy)^2} \cdot (-2x^2y) = -2x^3y\mathrm{e}^{-(xy)^2},$$

所以

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$=\frac{x}{y}[-2xy^3\mathrm{e}^{-(xy)^2}]-2[\mathrm{e}^{-(xy)^2}-2x^2y^2\mathrm{e}^{-(xy)^2}]+\frac{y}{x}[-2x^3y\mathrm{e}^{-(xy)^2}]$$

$$=(-2x^2y^2-2+4x^2y^2-2x^2y^2)\mathrm{e}^{-x^2y^2}=-2\mathrm{e}^{-x^2y^2}.$$

12. 证明: 在锥面 $z^2=x^2+y^2$ 上的曲线 L: $x=a\mathrm{e}^t\cos t,\ y=a\mathrm{e}^t\sin t,\ z=a\mathrm{e}^t$ 上任一点处的切线与锥面的母线的夹角为一常数.

证 因为 $x'(t)=a(\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t)=a(\cos t-\sin t)\mathrm{e}^t$,

$$y'(t)=a(\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t)=a(\sin t+\cos t)\mathrm{e}^t,$$

$$z'(t)=a\mathrm{e}^t,$$

故曲线 L 上任一点 t_0 处的切线的方向向量为

$$\boldsymbol{T}=(a(\cos t_0-\sin t_0)\mathrm{e}^{t_0},\ a(\sin t_0+\cos t_0)\mathrm{e}^{t_0},\ a\mathrm{e}^{t_0}).$$

又因为 OZ 轴的方向向量为 $\boldsymbol{S}=(0,0,1)$, 则切线与 OZ 轴的夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}}{|\boldsymbol{T}|\cdot|\boldsymbol{S}|}$$

$$=\frac{0\cdot[a(\cos t_0-\sin t_0)\mathrm{e}^{t_0}]+0\cdot[a(\sin t_0+\cos t_0)\mathrm{e}^{t_0}]+1\cdot a\mathrm{e}^{t_0}}{\sqrt{[a(\cos t_0-\sin t_0)\mathrm{e}^{t_0}]^2+[a(\sin t_0+\cos t_0)\mathrm{e}^{t_0}]^2+(a\mathrm{e}^{t_0})^2}}$$

$$=\frac{a\mathrm{e}^{t_0}}{a\mathrm{e}^{t_0}\sqrt{\cos^2 t_0-2\sin t_0\cos t_0+\sin^2 t_0+\sin^2 t_0+2\sin t_0\cos t_0+\cos^2 t_0+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

与点 t_0 及 a 无关, 故曲线 L 上任一点的切线与 OZ 轴的夹角为常数, 而圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 上任一点的母线与 OZ 轴的夹角为常数 $\frac{\pi}{4}$, 所以可以证明曲线 L 任一点处的切线与锥面的母线的夹角为一常数.

13. 证明: 曲面 $xyz=a^3$ 上任一点的切平面与坐标平面围成的四面体的体积一定.

证 曲面方程 $xyz=a^3$ 可写出 $z=\frac{a^3}{xy}$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{a^3}{x^2y}=-\frac{xyz}{x^2y}=-\frac{z}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{a^3}{xy^2}=-\frac{xyz}{xy^2}=-\frac{z}{y},$$

曲面上任一点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程为

$$z-z_0=-\frac{z_0}{x_0}(x-x_0)-\frac{z_0}{x_0}(y-y_0),$$

化简为 $y_0z_0x+z_0x_0y+x_0y_0z=3x_0y_0z_0$，即 $\frac{x}{3x_0}+\frac{y}{3y_0}+\frac{z}{3z_0}=1$，

所以切平面在 x 轴, y 轴, z 轴上的截距分别为 $3x_0$，$3y_0$，$3z_0$．故切平面与坐标平面围成的四面体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\cdot 3x_0\cdot 3y_0\cdot 3z_0=\frac{9}{2}x_0y_0z_0=\frac{9}{2}a^3$$

是常数.

14. 求函数 $z=1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$ 在点 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{b}{\sqrt{2}})$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

解 先求曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在点 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{b}{\sqrt{2}})$ 处的切线斜率.

在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边分别对 x 求导，得 $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{b^2x}{a^2y}, \quad k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{b}{\sqrt{2}})}=-\frac{b}{a},$$

法线斜率为

$$k'=-\frac{1}{k}=\frac{a}{b},$$

内法线方向为 $\boldsymbol{l}=(-b,-a)$，与 $\boldsymbol{l}$ 同向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_l=(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}),$$

又因为
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{b}{\sqrt{2}})}=-\frac{\sqrt{2}}{a}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{b}{\sqrt{2}})}=-\frac{\sqrt{2}}{b},$$

所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{\sqrt{2}}{a}\cdot(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}) - \frac{\sqrt{2}}{b}\cdot(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}) = \frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}\ .$$

15. 设某金属板上的电压分布为$V = 50 - 2x^2 - 4y^2$, 在点$(1,\ -2)$处,

(1) 沿哪个方向电压升高得最快?

(2) 沿哪个方向电压下降得最快?

(3) 最快的上升或下降的速率各为多少?

(4) 沿哪个方向电压变化得最慢?

解 $V_x = -4x,\ V_y = -8y$, 则$\mathbf{grad}V_{(1,-2)} = -4\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j} = 4(-\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})$,

又$V = 50 - 2x^2 - 4y^2$在点$(1,\ -2)$可微, $\boldsymbol{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$是与方向$\boldsymbol{l}$同向的单位向量, 则

$$\left.\frac{\partial V}{\partial l}\right|_{(1,\ -2)} = V_x(1,-2)\cos\alpha + V_y(1,-2)\cos\beta$$

$$= \mathbf{grad}V(1,-2)\cdot\boldsymbol{e}_l = \left|\mathbf{grad}V(1,-2)\right|\cos\theta\ ,$$

其中$\theta = (\mathbf{grad}f(1,-2), \boldsymbol{e}_l)$.

(1) 当$\theta = 0$时, $\left.\frac{\partial V}{\partial l}\right|_{(1,\ -2)}$取得最大值, 即沿梯度方向$\boldsymbol{l} = -\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$, 电压$V$升高最快.

(2) 当$\theta = \pi$时, $\left.\frac{\partial V}{\partial l}\right|_{(1,\ -2)}$取得最小值, 即沿方向$-\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$, 电压$V$下降最快.

(3) 最快的上升速率为$\left|\mathbf{grad}V(1,-2)\right| = \left|-4\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j}\right| = \sqrt{272}$, 最快的下降速率为$-\left|\mathbf{grad}V(1,-2)\right| = -\sqrt{272}$.

(4) 当$\theta = \frac{\pi}{2}$时, $\left.\frac{\partial V}{\partial l}\right|_{(1,\ -2)} = 0$, 即沿与$\boldsymbol{l} = -\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$或$-\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$垂直的方向, 即方向$4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$或$-4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, 电压变化得最慢.

16. 设$P(x_1, y_1)$是椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$外的一点, 若$Q(x_2, y_2)$是椭圆上离$P$最近的一点, 证明: PQ是椭圆的法线.

证 设 (x,y) 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任一点，则该点到点 $P(x_1,y_1)$ 的距离为

$$d=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\ .$$

作拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1)\,,$$

令

$$\begin{cases} F_x=2(x-x_1)+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0\ , & (8) \\ F_y=2(y-y_1)+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0, & (9) \end{cases}$$

由式(8), (9)可得

$$\frac{x-x_1}{y-y_1}=\frac{b^2x}{a^2y}, \tag{10}$$

由于 $Q(x_2,y_2)$ 是椭圆上离 P 最近的点，从而它满足式(10)，于是有

$$\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}=\frac{b^2x_2}{a^2y_2}\,. \tag{11}$$

再求椭圆在 $Q(x_2,y_2)$ 处的切线的斜率 k_1.

方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边对 x 求导得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y^2}{b^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\,,$$

所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{b^2x}{a^2y^2}$，于是

$$k_1=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_2,y_2)}=-\frac{b^2x_2}{a^2{y_2}^2}\,,$$

而直线 PQ 的斜率为

$$k_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\,,$$

从而

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2 x_2}{a^2 {y_2}^2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{12}$$

把式(11)代入式(12)，于是有

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1,$$

即证明了 PQ 是椭圆的法线.

17. 将一椭圆抛物形木块

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le \frac{z}{h} \quad (0 \le z \le h),$$

截成一个具有最大体积的长方体，求此长方体的体积.

解 显然长方体的顶面应在 $z = h$ 面上，设它的位于第一卦限的两个顶点坐标分别为 $P_1(x, y, h)$ 和 $P_2(x, y, z)$ $\quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ z < h)$，

于是长方体的体积为

$$V = 2x \cdot 2y \cdot (h - z) = 4xy(h - z),$$

所求问题为，求 $V = 4xy(h - z)$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{h}$ 下的最大值.

作拉格朗日函数

$$F(x, y, z) = xy(h - z) + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{h}\right),$$

令

$$\begin{cases} F_x = y(h - z) + \dfrac{2\lambda x}{a^2} = 0, & (13) \\ F_y = x(h - z) + \dfrac{2\lambda x}{b^2} = 0, & (14) \\ F_z = -xy - \dfrac{\lambda}{h} = 0, & (15) \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{h}, & (16) \end{cases}$$

由式(13), (14)得

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \ , \tag{17}$$

由式(15) 得 $\lambda = -hxy$，代入式(13)得

$$z = h - \frac{2hx^2}{a^2}, \tag{18}$$

把式(17)，(18)代入式(16)有 $\frac{2x^2}{a^2} = 1 - \frac{2x^2}{a^2}$，得 $x^2 = \frac{a^2}{4}$，$x = \frac{a}{2}$，代入式(17)，(18)可解得

$$y=\frac{b}{2},\ \ z=\frac{h}{2}.$$

由实际问题的性质可知，当长方体的长、宽、高分别为 a, b, $\frac{h}{2}$ 时，长方体的体积最大，最大体积为 $V=4\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot(h-\frac{h}{2})=\frac{abh}{2}$.