第七节

无穷小与无穷大

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、 主要内容

（一） 无穷小的概念与性质

1. 无穷小的概念

定义1.5 若 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时，$f(x) \to 0$，

则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时的无穷小．

例如：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$, $\therefore$ 函数 $x-1$ 是 $x \to 1$ 时的无穷小;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\therefore$ 函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小;

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=0,$

$\therefore$ 函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 是当 $x\to-\infty$ 时的无穷小.

(4) 以零为极限的数列 $\{x_n\}$, 称为当 $n\to\infty$ 时的无穷小.

$\dfrac{1}{n},\ \dfrac{2}{3^n}$ 都是 $n\to\infty$ 时的无穷小.

注 1° 除 0 以外的任何常数都不是无穷小，无论它多么小！

因为 $\lim\limits_{x\to x_0} C = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|C - 0| < \varepsilon$

所以 C 只能是 0！

2° 不能笼统地说某函数是无穷小，而应当说函数是自变量趋向某个值时的无穷小。

例如，说“函数 $x-1$ 是无穷小”是不对的；

而应当说，函数 $x-1$ 当 $x\to 1$ 时为无穷小。

2. 无穷小与函数极限的关系

定理 1.7 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha$，

其中 α 为 $x\to x_0$ 时的无穷小 .

3. 无穷小的性质

定理1.8 有限个无穷小的和仍为无穷小.

注 1° 上述结论对于自变量的任一极限过程

(如: $x\to\infty$)均成立;

2° 无穷多个无穷小之和不一定是无穷小！

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+\pi}+\dfrac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n\pi}\right)=1$

定理1.9 无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小．

推论 1 无穷小与常量的乘积是无穷小．

推论 2 有限个无穷小的乘积仍是无穷小．

定理1.10 无穷小除以具有非零极限的函数所得的商仍为无穷小．

（二）无穷小的比较

1.引例 当$x \to 0$时，$x, x^2, \sin x, x^2 \sin\frac{1}{x}$都是无穷小，

观察各极限		
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x}=0,$	x^2比$3x$要快得多
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,$	$\sin x$与x大致相同
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=\infty,$	$\sin x$比x^2要慢得多
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.	不可比

极限不同，反映了无穷小趋于 0 的“速度”是不同的.

2.定义1.6 设 α, β 是自变量同一变化过程中的无穷小,

(1)若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$, 则称 α 是比 β 高阶的无穷小,

记作 $\alpha=o(\beta)$

(2)若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$, 则称 α 是比 β 低阶的无穷小;

(3)若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=C\neq 0$, 则称 α 与 β 是同阶无穷小,

记作 $\alpha=O(\beta)$

(4)若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$, 则称 α 是与 β 等价的无穷小, 记作

$\alpha\sim\beta$ 或 $\beta\sim\alpha$

(5)若 $\lim\frac{\alpha}{\beta^k}=C\neq 0$, 则称 α 是关于 β 的 k 阶无穷小.

例如，当 $x \to 0$ 时

$x^3 = o(6x^2)$； $\boxed{\sin x \sim x}$； $\boxed{\tan x \sim x}$

$\boxed{\arcsin x \sim x}$

又如，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}$$

故 $x \to 0$ 时 $1-\cos x$ 是关于 x 的二阶无穷小，且

$\boxed{1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2}$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

3. 常用的等价无穷小

当 $x \to 0$ 时，

$$\sin x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\tan x \sim x$$

$$\arctan x \sim x$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\left.\begin{aligned} &\ln(1+x) \sim x \\ &e^x - 1 \sim x \\ &(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \end{aligned}\right\} \boxed{\text{以后证明}}$$

(常数 $\alpha \neq 0$)

4. 等价无穷小代换法

定理1.11 设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$$

例如,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

定理1.12 $\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$

例如, $x \to 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, 故

$x \to 0$ 时, $\sin x = x + o(x)$, $\tan x = x + o(x)$

（三） 无穷大

1. 无穷大的概念

定义1.7 若$\forall M>0$，$\exists\ \delta>0$ (正数 X)，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ ($|x|>X$) 时，总有

$$|f(x)|>M \qquad ①$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$($x\to\infty$)时为无穷大, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty. \quad (\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty)$$

若在定义中将①式改为 $f(x)>M$ ($f(x)<-M$),

则记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty$ ($\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty$).

2. 几何意义

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$： $\forall M > 0$，$\exists \delta > 0$，使得

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有 $\boxed{|f(x)| > M}$.

总有 $f(x) > M$

或 $f(x) < -M$

注 1° 不可把无穷大与很大的常数混为一谈，

无穷大是变量，而再大的常数也是常量；

2° 不能笼统地说某函数是无穷大，而应当说函数是自变量趋向某个值时的无穷大；

3° 切勿将 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 认为极限存在.

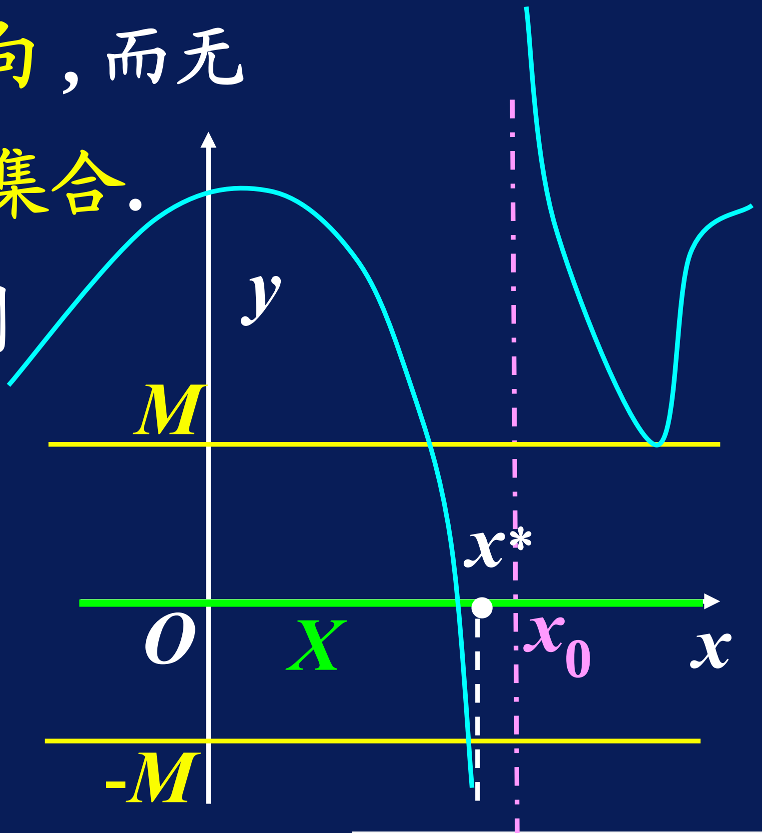
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$是一个记号，在“ $\varepsilon-\delta$”极限定义下，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在；

4° 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

5° 无穷大与无界函数的关系

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \quad \begin{array}{c}\longrightarrow \\ \not\longleftarrow\end{array} \quad f(x)\text{在某}\mathring{U}(x_0)\text{上无界}$$

无穷大强调自变量的趋向，而无界函数强调的是自变量所在集合.



证 (→) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$,则

$\forall M>0,\ \exists\delta>0,$ 使得

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

恒有 $|f(x)|>M$

故$\exists\, x^* \in \overset{\circ}{U}(x_0)$，使 $\left| f(x^*) \right| > M$

$\therefore$ $f(x)$在某$\overset{\circ}{U}(x_0)$内无界 .

反例($\not\longleftrightarrow$):

$f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在$\overset{\circ}{U}(0)$上无界, 但 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq \infty$.

(1) 证无界 $\forall M > 0$, $\overset{\circ}{U}(0) = (-1,0) \bigcup (0,1)$

取 $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 则 $x_n \in \overset{\circ}{U}(0)$, $n = 1,2,3\cdots$

而 $\left|f(x_n)\right| = \left|\frac{1}{x_n}\sin\frac{1}{x_n}\right| = \left|(2n\pi+\frac{\pi}{2})\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})\right|$

$= 2n\pi+\frac{\pi}{2} > M$,　　(只要 $n > \frac{M-\frac{\pi}{2}}{2\pi}$)

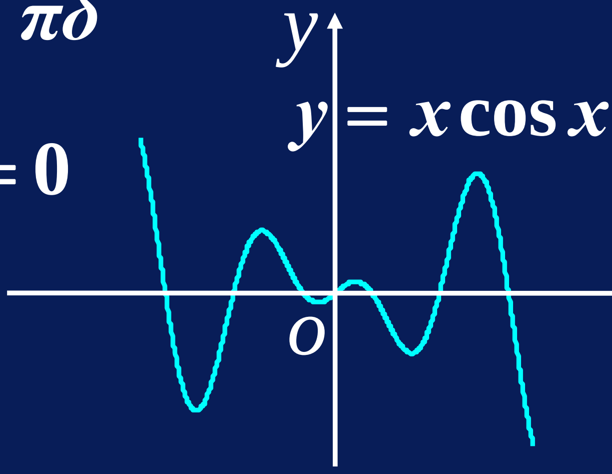
$\therefore$ $f(x)$在$\mathring{U}(0)$上无界．

(2)证 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq \infty$

对于给定的$M>0$,无论δ多么小

总有 $x_n' = \dfrac{1}{n\pi} \in \mathring{U}(0,\ \delta)$ 只要 $n > \dfrac{1}{\pi\delta}$,

但 $f(x_n') = \dfrac{1}{x_n'}\sin\dfrac{1}{x_n'} = n\pi\sin n\pi = 0$



故当 $x \to 0$ 时, $f(x)$ 不是无穷大.

反例2: 函数 $f(x) = x\cos x$, 在区间$(-\infty, +\infty)$上无界,

但当 $x \to \infty$ 时, $f(x)$ 不是无穷大!

因为 $\forall X > 0$, 总有 $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} > X$ (只要 $n > \dfrac{1}{\pi}(X - \dfrac{\pi}{2})$)

但 $f(x_n) = f(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 0$ 见右上图

3. 无穷小与无穷大的关系

定理1.13 在自变量的同一变化过程中,

若 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小 ;

若 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

例如当 $x\to 1$时，$f(x)=x-1$为无穷小， (自证)

$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x-1}$为无穷大

注 据此定理, 关于无穷大的问题都可转化为无穷小来讨论.

4. 无穷大的比较

定义1.8 设 y, z 是自变量同一变化过程中的无穷大,

(1)若 $\lim \frac{y}{z} = C \neq 0$, 则称 y 与 z 是同阶无穷大;

(2)若 $\lim \frac{y}{z} = \infty$,则称 y 是比 z 高阶的无穷大;

(3)若 $\lim \frac{y}{z^k} = C \neq 0$, $k > 0$为常数, 则称 y 是z 的 k 阶无穷大.

例如,当 $x \to \infty$ 时, $1 + x^2 - 2x^3$是x的三阶无穷大;

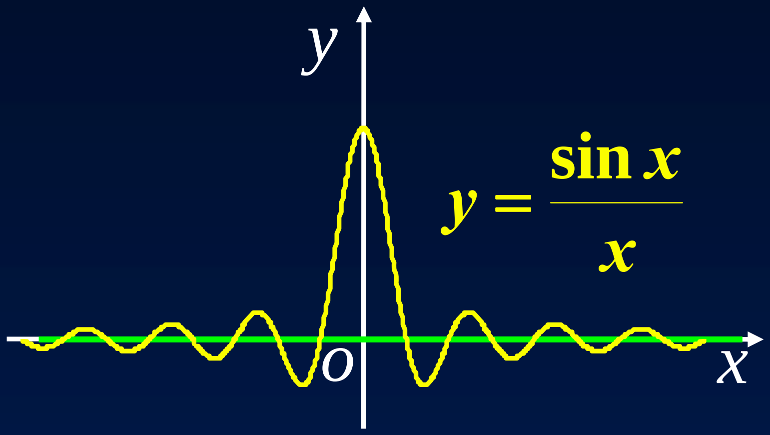
而多项式 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots a_{n-1} x + a_n (a_0 \neq 0)$

是与 $a_0 x^n$ 同阶的无穷大.

二、典型例题

例1 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 $\because \left|\sin x\right| \le 1,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$



利用定理 1.9, 可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

注 $y=0$ 是曲线 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的水平渐近线.

例2 $x \to 1$时，无穷小$1-x$和$1-x^3$是否同阶，是否等价？

解 $$\lim_{x\to1}\frac{1-x}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

通过比的极限说明阶的高低

故同阶但不等价.

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 $\because$ 当 $x\to 0$ 时, $\tan x \sim x$,

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},$$

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)$$

$$\therefore \text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

问：下列推导是否正确？

错解 $\because$ 当 $x \to 0$ 时，$\tan x \sim x, \quad \sin x \sim x.$

$$\therefore \text{原式} \cancel{=} \lim_{x \to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0.$$

错误原因：$\because \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0}{\tan x - \sin x} = 0 \neq 1$

$$\therefore \quad \tan x - \sin x \not\sim x - x = 0$$

注　不能滥用等价无穷小代换. 在用等价无穷小代换时，要用与分子或分母整体等价的无穷小代换.

1°　对于代数和中各无穷小，一般不能分别代换. 即遇无穷小 “+”, “−”时, 不能随便代换;

2°　遇无穷小乘积时，可用各无穷小的等价无穷小进行代换.

例4 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

解 $x\to1$ 时, 分母 $x^2-5x+4\to0$, 故不能直接使用商的极限法则, 但 $f(x)$ 的倒数的极限

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{2x-3}=\frac{1^2-5\cdot1+4}{2\cdot1-3}=0$$

由无穷大与无穷小的关系可得

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$$

三、同步练习

1. 当$x \to \pi$时,$\alpha = \tan x \sin x$与$\beta = \pi - x$,

   哪一个是高阶无穷小.

2. $x \to 0$时,$\cos x - \cos 2x$是x的几阶无穷小？

3. 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1}$.

4. 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^{3x} - e^{x})\ln(1 + 2x)}{1 - \cos x}$.

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x-\cos x+1}{\sin 3x}$.

6. 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x}{x^2-4}$.

四、同步练习解答

1. 当$x \to \pi$时,$\alpha = \tan x \sin x$与$\beta = \pi - x$,

哪一个是高阶无穷小.

通过比的极限说明阶的高低

解 $$\lim_{x \to \pi} \frac{\tan x \sin x}{\pi - x}$$

$$= \lim_{x \to \pi} \tan x \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} = 0,$$

故 α是比β 高阶的无穷小 .

2. $x \to 0$时，$\cos x - \cos 2x$是x的几阶无穷小？

解 $\cos x - \cos 2x = 2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}$，故将其与$x^2$作商，

则有 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2} \neq 0,$$

所以，$x \to 0$时，$\cos x - \cos 2x$是x的2阶无穷小.

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解 当 $x\to 0$ 时, $(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{1}{3}x^2$,

$$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2,$$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\dfrac{2}{3}$

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{x})\ln(1+2x)}{1-\cos x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{2x}-1)\ln(1+2x)}{\dfrac{x^2}{2}}$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+2x)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 2x}{x^2}=8.$$

非零因子的极限可先求出

当 $u\to 0$ 时，有

$\mathrm{e}^{u}-1\sim u$, $\ln(1+u)\sim u$

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x-\cos x+1}{\sin 3x}$.

解 (方法1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}+\dfrac{1-\cos x}{\sin 3x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{\sin 3x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin 3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x}=\frac{5}{3}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{6}$$

$$=\frac{5}{3}.$$

当 $u\to 0$ 时，有

$\sin u \sim u$

$\tan u \sim u$

$1-\cos u \sim \frac{1}{2}u^2$

解 (方法2) 当$x \to 0$时,

$$\tan 5x = 5x + o(x),$$

$$\sin 3x = 3x + o(x),$$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

定理1.12 $\beta \sim \alpha \Longleftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x - \cos x + 1}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x + o(x) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{3x + o(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{5 + \frac{o(x)}{x} + \frac{1}{2}x + \frac{o(x^2)}{x^2} \cdot x}{3 + \frac{o(x)}{x}} = \frac{5}{3}.$$

6. 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x}{x^2-4}$.

解　由于

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{5x}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 2}5x}=0.$$

根据 定理1.13 有

$$\lim_{x\to 2}\frac{5x}{x^2-4}=\infty.$$