第六节　函数的微分

习题　2-6

1. 已知 $y=x^3-x$，计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1、0. 1、0. 01 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$.

解　$\Delta y=(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)-x^3-x=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-\Delta x$,

$\mathrm{d}y=3x^2\Delta x-\Delta x$,

$\Delta y\big|_{x=2,\Delta x=1}=18,\quad \mathrm{d}y\big|_{x=2,\Delta x=1}=11$,

$\Delta y\big|_{x=2,\Delta x=0.1}=1.161,\quad \mathrm{d}y\big|_{x=2,\Delta x=0.1}=1.1$,

$\Delta y\big|_{x=2,\Delta x=0.01}=0.110601,\quad \mathrm{d}y\big|_{x=2,\Delta x=0.01}=0.11$.

2. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如下图所示，试在下面的图(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点 x_0 处的 $\mathrm{d}y$，Δy 及 $\Delta y-\mathrm{d}y$，并说明其正负.

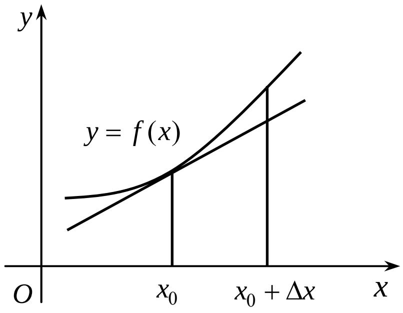

图 2.1 (a)

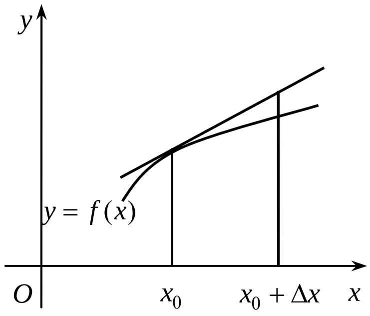

图 2.1 (b)

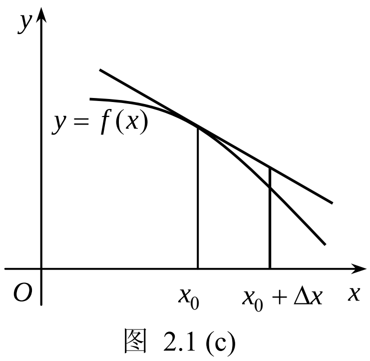

图 2.1 (c)

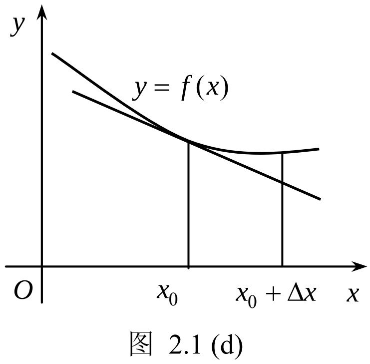

图 2.1 (d)

解 (a) 如下图所示，$\mathrm{d}y > 0$，$\Delta y > 0$，$\Delta y - \mathrm{d}y > 0$.

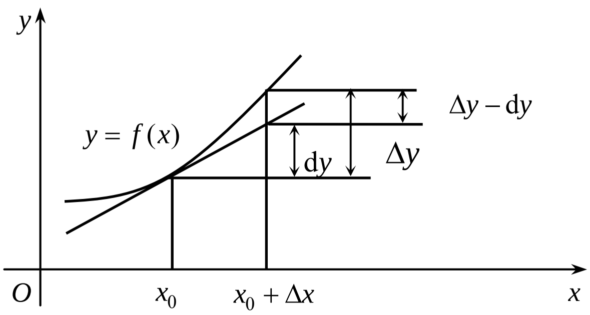

图 2.2 (a)

(b) 如下图所示，$\mathrm{d}y > 0$，$\Delta y > 0$，$\Delta y - \mathrm{d}y < 0$.

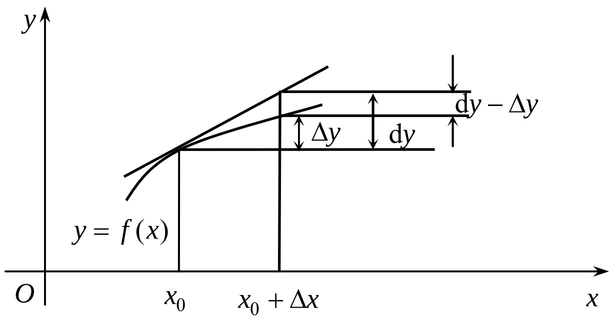

图 2.2 (b)

(c) 如下图所示，$\mathrm{d}y < 0$，$\Delta y < 0$，$\Delta y - \mathrm{d}y < 0$.

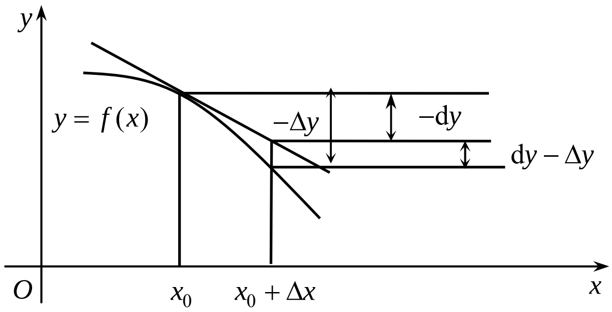

图 2.2 (c)

(d) 如图所示，$\mathrm{d}y < 0$，$\Delta y < 0$，$\Delta y - \mathrm{d}y > 0$.

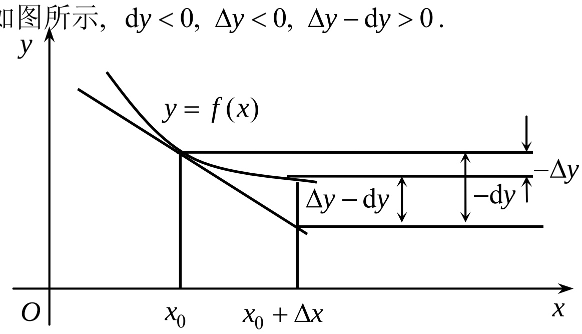

图 2.2 (d)

3. 求下列函数的微分:

(1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; (2) $y=\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$;

(3) $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$; (4) $s=A\sin(\omega t+\varphi)$ (A,ω,φ) 是常数.

解 (1) $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}+x\mathrm{d}(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}})$

$$=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2}x\frac{2x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\mathrm{d}x\,.$$

(2) $\mathrm{d}y=[-\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)+\mathrm{e}^{-x}\sin(3-x)]\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]\mathrm{d}x$.

(3) $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{1+(\dfrac{1+x}{1-x})^2}\dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(4) $\mathrm{d}s=A\omega\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$.

4. 求下列函数在指定点的微分:

(1) $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$, $x=1$; (2) $y=\dfrac{1+\sin^2 x}{\sin 2x}$, $x=\dfrac{\pi}{6}$.

解 (1) $\mathrm{d}y=(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2\ln x}{x^3})\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y\big|_{x=1}=\mathrm{d}x$.

(2) $\mathrm{d}y\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\left.\dfrac{2\sin x\cos x\sin 2x-2(1+\sin^2 x)\cos 2x}{\sin^2 2x}\right|_{x=\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}x$

$$=\left.\frac{\sin^2 2x-2(1+\sin^2 x)cos2x}{\sin^2 2x}\right|_{x=\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\mathrm{d}x\,.$$

5. 求方程 $\sin(xy)-\ln\dfrac{x+1}{y}=1$ 所确定的隐函数 y 在点 $x=0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$.

解 $x=0$ 时, $y=\mathrm{e}$. 方程两边求微分, 有

$$\cos(xy)(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)-\frac{y}{x+1}\frac{y\mathrm{d}x-(x+1)\mathrm{d}y}{y^2}=0\,,$$

将 $x=0$, $y=\mathrm{e}$ 代入上式得 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=\mathrm{e}(1-\mathrm{e})\mathrm{d}x$.

6. 利用一阶微分的形式不变性, 求下列函数的微分:

(1) $y=\ln(\cos\sqrt{x})$; (2) $y=f(\arctan\dfrac{1}{x})$, 其中 $f(x)$ 可导.

解 (1) $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\cos\sqrt{x}}\mathrm{d}(\cos\sqrt{x})=\dfrac{1}{\cos\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}$

$$=-\tan\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=-\frac{\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

(2) $\mathrm{d}y=f'(\arctan\dfrac{1}{x})\mathrm{d}(\arctan\dfrac{1}{x})=f'(\arctan\dfrac{1}{x})\dfrac{1}{1+(\dfrac{1}{x})^2}\mathrm{d}(\dfrac{1}{x})$

$$=f'(\arctan\frac{1}{x})\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}(-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x=-\frac{1}{x^2+1}f'(\arctan\frac{1}{x})\mathrm{d}x.$$

7. 将适当的函数填入下列括号内，使等式成立:

(1) $\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$; (2) $\mathrm{d}(\quad)=\sec^2 3x\mathrm{d}x$.

解 (1) $\mathrm{d}(-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$.

(2) $\mathrm{d}(\dfrac{1}{3}\tan 3x+C)=\sec^2 3x\mathrm{d}x$.

8. 求下列导数:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}(x^6-x^4+x^2)}{\mathrm{d}(x^2)}$; (2) $\dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}\cos x}$.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}(x^6-x^4+x^2)}{\mathrm{d}(x^2)}=\dfrac{\mathrm{d}(x^6-x^4+x^2)}{\mathrm{d}x}\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{6x^5-4x^3+2x}{2x}=3x^4-2x^2+1$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}\cos x}=\dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x}\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{\cos x}{-\sin x}=-\cot x$.

9. 证明当$|x|$很小时，下列近似式成立:

(1) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{n}$; (2) $\ln(1+x)\approx x$.

证 若 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数 $f'(0)\neq 0$，则当$|x|$很小时，

$$\Delta y=f(x)-f(0)\approx \mathrm{d}y=f'(0)\Delta x=f'(0)x,$$

从而

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x.$$

(1) 取 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$，当$|x|$很小时，由式子 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$ 可知,

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{x}{n}.$$

(2) 取 $f(x)=\ln(1+x)$，当 $|x|$ 很小时，由式子 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$ 知，

$$\ln(1+x)\approx x.$$

10. 设圆扇形的圆心角 $\alpha=60^\circ$，半径 $R=100\text{cm}$. 如果 R 不变，α 减少 $30'$，问扇形面积大约改变了多少？又如果 α 不变，R 增加 1cm，问扇形面积大约改变了多少？

解 扇形面积公式为 $S=\frac{\alpha}{360}\pi R^2$. 如果 R 不变，则 $\mathrm{d}S=\frac{\pi R^2}{360}\mathrm{d}\alpha$，所以 $\alpha=60$，$R=100\text{cm}$，$\mathrm{d}\alpha=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$ 时，相应的 $\mathrm{d}S=\frac{1}{720}\pi 100^2\approx 43.63\text{cm}^2$.

如果 α 不变，则 $\mathrm{d}S=\frac{2\pi\alpha R}{360}\mathrm{d}R$，所以 $\alpha=60$，$R=100\text{cm}$，$\mathrm{d}R=1$ 时，相应的 $\mathrm{d}S=\frac{100\pi}{3}\approx 104.72\text{cm}^2$.

11. 计算下列函数值的近似值:

(1) $\tan 136^\circ$； (2) $\sqrt{1.05}$.

解 (1) $\tan 136^\circ=\tan(135^\circ+1^\circ)\approx\tan 135^\circ+\sec^2 135^\circ\cdot\frac{\pi}{180}\cdot 1\approx -0.96509$.

(2) $\sqrt{1.05}=\sqrt{1+0.05}\approx 1+\frac{1}{2\sqrt{1}}0.05=1.025$.

12. 计算球形体积时，要求精确度在 2% 以内，问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少？

解 球体积公式为 $V=\frac{1}{6}\pi D^3$，所以

$$\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\pi D^2\mathrm{d}D,\quad \frac{\mathrm{d}V}{V}=3\frac{\mathrm{d}D}{D},$$

从而 $\frac{\mathrm{d}V}{V}=2\%$ 时，$\frac{\mathrm{d}D}{D}=\frac{2}{3}\%$.

13. 某厂生产如图 2.4 所示的扇形板，半径 $R=200\text{mm}$，要求中心角 α 为 55°. 产品检验时，一般用测量弦长 l 的方法来间接测量中心角 α，如果测量弦长 l 时的误差 $\delta_l=0.1\text{mm}$，问由此而引起的中心角测量误差 δ_a 是多少？

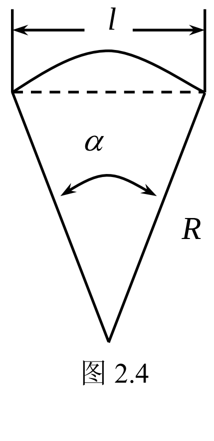

图 2.4

解　中心角α与弦长l之间的关系为：$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{l}{2R}$，方程两边求微分，得

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}\alpha=\frac{\mathrm{d}l}{2R}，即\ \mathrm{d}\alpha=\frac{\mathrm{d}l}{R\cos\frac{\alpha}{2}},$$

将$R=200$，$\alpha=\frac{55}{180}\cdot\pi$，$\mathrm{d}l=\delta_l=0.1$代入，得$\delta_\alpha=\mathrm{d}\alpha\approx 0.00056(\mathrm{rad})$.