第一章 一元函数的极限与连续

第一节 一元函数

1. 函数 $y=\begin{cases}x^2-1, & 0\le x\le 1\\ x^2, & -1\le x<0\end{cases}$ 的反函数 $x=\varphi(y)=\underline{\begin{cases}\sqrt{1+y}, & -1\le y\le 0,\\ -\sqrt{y}, & 0<y\le 1,\end{cases}}$ 即 $y=\varphi(x)=\underline{\begin{cases}\sqrt{1+x}, & -1\le x\le 0,\\ -\sqrt{x}, & 0<x\le 1.\end{cases}}$

2. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\ne -1$，则 $f(0)=\underline{\quad 1\quad}$，$f(-x)=\underline{\dfrac{1+x}{1-x}, x\ne 1}$，$f(x+1)=\underline{-\dfrac{x}{x+2}, x\ne -2}$，$f(\dfrac{1}{x})=\underline{\dfrac{x-1}{x+1}, x\ne 0, x\ne -1}$，$\dfrac{1}{f(x)}=\underline{\dfrac{1+x}{1-x}, x\ne \pm 1}$.

注意 复合函数在哪些点没有定义必须标明.

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$ 则下列函数<u>（c）、（d）</u>的定义域是 $(0,1)$.

（a） $f(x^2-1)$；（b） $[f(x)]^2$；（c） $f(-x)$；（d） $f(x-1)$.

解 （a） $-1<x^2-1<0$，$0<x^2<1$，$|x|<1$ 且 $x\ne 0$，即 $D=(-1,0)\cup(0,1)$.

（b）仍是 $(-1,0)$

（c） $-1<-x<0$，$1>x>0$，故 $D=(0,1)$

（d） $-1<x-1<0$，$0<x<1$，故 $D=(0,1)$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\}=\underline{\;1\;}$.

解 因 $f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\le 1\\ 0, & |f(x)|>1\end{cases}$，而由

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases} \text{可知} |f(x)|\le 1,$$

从而 $f[f(x)]=1$，因此 $f\{f[f(x)]\}=1$.

5. 设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 及 $f(x)$ 都是增函数，证明:若 $\varphi(x)<f(x)<\psi(x)$，则

$$\varphi[\varphi(x)]<f[f(x)]<\psi[\psi(x)].$$

证 由 $\varphi(x)<f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 是增函数，有

$$\varphi[\varphi(x)]<\varphi[f(x)].$$

又由 $\varphi(x)<f(x)$，有 $\varphi[f(x)]<f[f(x)]$，综上，可得

$$\varphi[\varphi(x)]<f[f(x)].$$

同理有 $f[f(x)]<\psi[\psi(x)]$，从而

$$\varphi[\varphi(x)]<f[f(x)]<\psi[\psi(x)].$$

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1,\\ 2-x & 1<x\le 2,\end{cases}$ 求 $f(x-1)$.

解 $f(x-1)=\begin{cases}(x-1)^2, & x-1\le 1,\\ 2-(x-1) & 1<x-1\le 2\end{cases}=\begin{cases}(x-1)^2, & x\le 2,\\ 3-x & 2<x\le 3.\end{cases}$

7. 设 $f(x)$ 为奇函数, $F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $F(x)$ 的奇偶性如何?

解 由 $f(x)$ 为奇函数有 $f(-x)=-f(x)$. 又

$$F(-x)=f(-x)\left(\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)=-f(x)\left(\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=f(x)\left(\frac{2^x}{2^x-1}-\frac{1}{2}\right)=f(x)\left(\frac{(2^x-1)+1}{2^x-1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=f(x)\left(1+\frac{1}{2^x-1}-\frac{1}{2}\right)=f(x)\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)=F(x)$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

8. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2 为周期的函数, 当 $-1\le x\le 1$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^x$. 设 $0<a<2$, 求 $f(a)$.

解 当 $0<a\le 1$ 时, $f(a)=\mathrm{e}^a$.

当 $1<a<2$ 时, $-1<a-2<0$. 依题设 $f(a)=f(a-2)=\mathrm{e}^{a-2}$, 所以

$$f(a)=\begin{cases}\mathrm{e}^a, & 0<a\le 1\\ \mathrm{e}^{a-2}, & 1<a<2\end{cases}.$$

第三节 极限的概念

1. 观察下列数列的变化趋势, 用线将其与相应结果连接起来.

(1) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$ (a) 极限为 1

(2) $x_n=1+(-1)^n$ (b) 极限为 0

(3) $x_n=n\cos\dfrac{n\pi}{2}$ (c) 极限不存在

(4) $x_n=\begin{cases}\dfrac{2^n-1}{2^n}, & n\text{为奇数}\\ \dfrac{2^n+1}{2^n}, & n\text{为偶数}\end{cases}$

2. 根据数列极限的定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$.

分析 要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n(\sqrt{n^2+1}+n)}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, 只须 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

证 对于任意给定的正数 ε, 取正整数 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n>N$ 时, 恒有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$.

3. 设数列 x_n 有界, 又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证 数列 x_n 有界, 故存在正数 M, 使对一切 n, $|x_n|\le M$.

又由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ 知, 对于任意给定的正数 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}$, 总存在正整数 N_1, 当 $n>N_1$ 时有 $|y_n|<\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}$.

于是, 对任意的正数 ε, 取正整数 $N=N_1$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$|x_ny_n|=|x_n||y_n|\le M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

注意 说因为 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 所以 $|y_n|<\varepsilon_1$ 是不对的, 事实上, 只有 $n>N_1$ 的 y_n 才满足 $|y_n|<\varepsilon_1$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x-1}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x, & 0<x<1,\\ 1, & 1\le x<2,\end{cases}$

则 $f(0^-)=\underline{\quad 1\quad}$, $f(0^+)=\underline{\quad 0\quad}$, $f(1^-)=\underline{\quad 1\quad}$, $f(1^+)\underline{\quad 1\quad}$, 问 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 是否存在?

解 因为 $f(0^-)=1\ne0=f(0^+)$, 所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

又 $f(1^-)=1=f(1^+)$, 所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在且等于 1.

5. 设 $f(x)=\frac{|x|}{x(x-1)}$, 则 $f(0^-)=\underline{\quad 1\quad}$, $f(0^+)=\underline{\quad -1\quad}$. 问 $f(x)$ 在 $x\to0$ 时极限是否存在?

解 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to0^-}1=1$,

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to0^-}(-1)=-1\ne f(0^-)$,

故极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

第五节 极限的运算法则

1. 计算下列极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n})$； （2） $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3})$；

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n})$；

（4） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n+5^n}{4^{n+1}+5^{n+1}}$；

（5） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{2}{n}\right)+\left(x+\frac{4}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{2n}{n}\right)\right]$；

解 （1） $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}$.

注意 错误之一是不先求和而直接求极限，错误之二是等比级数前 n 项和公式记错，因而和求错，尽管这并不一定影响计算结果.

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$.

注意 常发生的错误时：

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2}{n^3}+\lim_{n\to\infty}\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}=\cdots$$

必须说明的是: " 和的极限等于极限的和 " 这一运算法则只能对有限项的和成立．而这里，随着 $n\to\infty$，项数也无限增多.

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2\cdot(2+1)}{2}}+\frac{1}{\frac{3\cdot(3+1)}{2}}+\cdots+\frac{1}{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2\cdot3}+\frac{2}{3\cdot4}+\cdots+\frac{2}{n\cdot(n+1)}\right)$

$=2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)$

$=2\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$.

（4） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n+5^n}{4^{n+1}+5^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}{4\left(\frac{4}{5}\right)^n+5}=\frac{1}{5}$.

（5） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{2}{n}\right)+\left(x+\frac{4}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{2n}{n}\right)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[nx+\frac{(2+2n)n}{2n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[x+\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$=x+1$$

2．计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；

（5）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)\cdots(x^{15}+1)}{(2x^{15}+x^{12}+x+15)^8}$．

解　（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(1-x)}{(x-1)(x+1)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2}{(x+1)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$．

（3）$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)}$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2+2x+1}{3x-1}=6$$

（4）$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{-(x-1)(x^2+x+1)}=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=-1$$

（5）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{1}{2}$

（6）分子是关于 x 的$1+2+\cdots+15=8\times15$ 次多项式．因此分子分母用 x^{120} 去除可消去"∞"的因式得

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{x^{15}}\right)}{\left(2+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^{14}}+\dfrac{15}{x^{15}}\right)^8}=\frac{1}{2^8}.$$

第六节　极限存在准则与两个重要极限

1．计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos2x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan2x}{\sin5x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$；　　　　（4）$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{2\sin^2 x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{1}{2}$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos 2x}\cdot\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=\dfrac{2}{5}$.

（3）$\lim\limits_{x\to 0} x\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}\cdot\cos x\right)=1$.

（4）$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}\overset{\text{令} t=\pi-x}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(\pi-t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

2．计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；　　　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；　　　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(1+(-x))^{\frac{1}{-x}}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

（3）$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-3}=\dfrac{1}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{3}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3}}$.

3．已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，求$a,b$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-ax^2-ax-bx-b}{x+1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x-(a+b)-\dfrac{b}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}.$$

显然，要使此极限为零，只有$1-a=0$且$a+b=0$，由此可得$a=1,b=-1$.

4．利用极限存在准则证明数列极限或求数列极限.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+\pi}+\dfrac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n\pi}\right)=1$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n!}=0$．

证　（1）因为

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}\le\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\le\frac{n^2}{n^2+\pi},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n\pi}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+\pi}=1$，由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\right)=1.$$

（2）因为

$$0<\frac{3^n}{n!}=\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdot\frac{3}{n-1}\cdot\frac{3}{n}<\frac{3}{1}\cdot1\cdot1\cdot1\cdots1\cdot\frac{3}{n}=\frac{9}{n},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9}{n}=0$，由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0.$$

5．设数列$\{x_n\}$由下式给出：$x_0>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其值.

证　由已知得$x_n>0$．又

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\ge\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{x_n}\cdot\sqrt{\frac{1}{x_n}}=1,$$

即数列$\{x_n\}$有下界.

再证数列单调减，证单调减有两种方法：

法1　$x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)-x_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x_n}-x_n\right)=\dfrac{1-x_n^2}{2x_n}$

$=\dfrac{(1+x_n)(1-x_n)}{2x_n}\le0$　$(\because x_n\ge1)$，故$x_{n+1}\le x_n$．

法2　$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)}{x_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{x_n^2}\right)\le\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{1}\right)=1$ $(\because x_n\ge1)$，故$x_{n+1}\le x_n$．

数列单调递减有下界，由单调有界准则知数列极限存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对式$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)$两边同时取极限得

$$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right),\quad a=\pm1.$$

因为$x_n\ge1$，由极限保号性知$a=1$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$．

6．设$[x]$表示不超过x的最大整数，求$\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{2}{x}\right]$.

解 $\left[\frac{2}{x}\right] \le \frac{2}{x} < \left[\frac{2}{x}\right] + 1$，即

$$\frac{2}{x} - 1 < \left[\frac{2}{x}\right] \le \frac{2}{x},$$

所以，当 $x > 0$ 时，$2 - x < x\left[\frac{2}{x}\right] \le 2$，当 $x < 0$ 时，$2 \le x\left[\frac{2}{x}\right] < 2 - x$.

又 $\lim\limits_{x \to 0}(2 - x) = 2$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{x \to 0^+} x\left[\frac{2}{x}\right] = \lim\limits_{x \to 0^-} x\left[\frac{2}{x}\right] = 2$．所以 $\lim\limits_{x \to 0} x\left[\frac{2}{x}\right] = 2$.

第七节　无穷小与无穷大

1．下列变量在所给趋向下<u>（c）、（e）</u>是无穷小，<u>（a）、（b）</u>是无穷大，<u>（d）、（f）</u>既不是无穷小也不是无穷大.

（a）$x \to 0, \dfrac{1+2x}{x^2}$　　　（b）$x \to 0^+, \lg x$；

（c）$x \to 0, x^3 + \sin x$　　　（d）$x \to \pi, x^3 + \sin x$

（e）$x \to 0, 3^{-x} - 1$　　　（f）$x \to +\infty, 3^{-x} - 1$

2．根据定义证明：$y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x \to 0$ 时为无穷小.

分析　要使 $\left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| = |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| < \varepsilon$，只须 $|x| < \varepsilon$.

证　$\forall \varepsilon > 0$，取整数 $\delta \le \varepsilon$，则当 $0 < |x| < \delta$ 时，就有

$$\left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| \le |x| < \varepsilon,$$

即 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x \to 0$ 时为无穷小.

3．当 $x \to 0$ 时，将下列无穷小与跟其相应的结论用线连接起来.

（1）$x^4 + \sin 2x$　　　（a）是比 x 低阶的无穷小

（2）$1 - \cos 2x$　　　（b）是比 x 高阶的无穷小

（3）$\dfrac{2}{\pi}\left[\cos\dfrac{\pi}{2}(1-x)\right]$　　　（c）是 x 的同阶无穷小，但不等价

（4）$\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$　　　（d）是 x 的等价无穷小

解　（1）因为 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x^4 + \sin 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0}\left(x^3 + 2 \cdot \dfrac{\sin 2x}{2x}\right) = 2$.

（2）因为 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1 - \cos 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x} = 2\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \sin x\right) = 0$.

（3）因为 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\frac{2}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}{x} = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}x} = 1$.

（4）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}\right)=0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}=\infty .$$

4．当 $x\to 0$ 时，

（1）无穷小 x^2 与 $\sqrt{1-x^2}-1$ 是否同阶，是否等价？为什么？

（2）无穷小 x^2 与 $\tan x-\sin x$ 哪一个的阶高？为什么？

解（1）$x\to 0$ 时，$\sqrt{1-x^2}-1\sim\dfrac{-x^2}{2}$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

所以当 $x\to 0$ 时，x^2 与 $\sqrt{1-x^2}-1$ 是同阶无穷小，但不等价．

（2）$x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\tan x\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\tan x\cdot\frac{\dfrac{x^2}{2}}{x^2}=0$$

所以 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$ 是比 x^2 高阶的无穷小．

注意　有的同学这样做是不对的：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=0$$

这里第一个等号是错误的，因为差的极限等于极限的差要求每一项的极限都存在，而这里 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x^2}$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}$ 均不存在．

同时，由于极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)\neq\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}，\quad\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)\neq\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}.$$

运算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ 是没有意义的．

另外，在运算中出现以下情况都是不对的：

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}，（\because 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}）$$

或

$$\lim_{x\to 0}(\tan x-\sin x)=\lim_{x\to 0}\tan x(1-\cos x)$$

$$=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{x^2}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2}.（\because \tan x\sim x，1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}）$$

因无穷小代换只能在两个无穷小之比的极限运算中进行，这里没有无穷小之比．

5．利用等价无穷小的性质，求下列极限．

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-\cos x}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$．

解　（1）因为 $x\to0$ 时，$\ln(1+2x)\sim 2x$，$2^x-1=e^{x\ln2}-1\sim x\ln2$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln2}{2x}=\frac{\ln2}{2}.$$

（2）因为 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

（3）因为 $x\to0$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\dfrac{x^2}{3}$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{3}}{\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{3}.$$

（4）因为 $x\to0$ 时，$x\sin x\to0$，故 $\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\dfrac{x\sin x}{2}$，又 $e^{x^2}-1\sim x^2$，于是可得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x\sin x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

注意　有的同学虽然结果作对了，但没有按题目要求用等价无穷小代换的方法作，即方法不对．

下述代换是没有根据的：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$$

因为当 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$ 时，$\alpha+\beta$ 与 $\alpha'+\beta'$ 不一定等价．

例如　$x\to0$ 时，$\tan x\sim x$，$-\sin x\sim x$，但 $\tan x+(-\sin x)$ 却与 $x+(-x)=0$ 不等价．事实上

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\frac{x^3}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x(1-\cos x)}{\frac{x^3}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{\frac{x^3}{2}}=1.$$

即当 $x\to0$ 时，$\tan x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{2}$．

所以在作等价无穷小代换时，对于用＋、－连接起来的函数各自作等价无穷小代换是要另外说明的．

同样认为 $\sqrt{1+x\sin x}-1$ 与 $\sqrt{1+x^2}-1$ 等价也是没有现成的理论依据的，必须先给出证

明，再作代换．

总之，读者在作等价无穷小代换时必须严格按照教材的结论进行．

6．设 $x \to 0$ 时 $ax^2 + bx + c - \cos x$ 是比 x^2 高阶的无穷小，试确定常数 a, b, c．

解 依题意，

$$\lim_{x\to 0}\left(ax^2 + bx + c - \cos x\right) = 0$$

得 $c = 1$．

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2 + bx + c - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{1-\cos x}{x^2}\right) = 0$，所以

$$b = 0，\quad a = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2/2}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

7．试观察函数 $y = x\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界，又当 $x \to +\infty$ 时，这个函数是否为无穷大？

解 函数 $y = x\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无界，当 $x \to +\infty$ 时也不是无穷大．

8．函数 $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ 当 $x \to 0$ 时极限存在吗？为什么？何时是无穷大？何时是无穷小？

解 $f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0$，$f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$，所以函数 $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ 当 $x \to 0$ 时极限不存在．当 $x \to 0^+$ 时是无穷大，当 $x \to 0^-$ 时是无穷小．

第八节　函数连续性

1. 函数 $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6}$ 的连续区间是 $\underline{(-\infty, -3),\ ,(-3, 2)\ \ (2, +\infty)}$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \underline{\dfrac{1}{2}}$，$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \underline{-\dfrac{8}{5}}$，$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \underline{\infty}$.

解 $f(x)$ 是初等函数，故在其定义区间内均连续，易得函数的定义域是 $(-\infty, -3), (-3, 2), (2, +\infty)$，故在定义区间 $(-\infty, -3), (-3, 2), (2, +\infty)$ 连续.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}\frac{(x^2-1)(x+3)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to -3}\frac{(x^2-1)}{(x-2)} = -\frac{8}{5},$$

又

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x^2-1)(x+3)} = 0，\text{故} \lim_{x\to 2} f(x) = \infty.$$

2. 设函数 $f(x) = \dfrac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$，则 $f(0^-) = \underline{\quad -1 \quad}$，$f(0^+) = \underline{\quad 1 \quad}$，故 $x = 0$ 是函数的第$\underline{\quad 一 \quad}$类间断点.

解 注意到 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty$，于是 $\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}} = 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$ 于是 $\lim\limits_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{x}} = +\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{-x}} = 0$. 所以

$$f\left(0^{-}\right)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

$$f\left(0^{+}\right)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1-3^{\frac{1}{-x}}}{1+3^{\frac{1}{-x}}}=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

函数在点 $x=0$ 处的左极限及右极限均存在但不相等, 故 $x=0$ 是函数的第一类间断点.

3. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -x, & |x|>1.\end{cases}$$

在点 $x=-1$, $x=1$ 处的连续性, 若有间断, 判别其类型.

解 $f(x)=\begin{cases}x, & -1<x<1,\\ 0, & x=1, x=-1,\\ -x, & x<-1\text{或}x>1.\end{cases}$

$f\left(-1^{-}\right)=\lim\limits_{x\to -1^{-}}(-x)=1,\ f\left(-1^{+}\right)=\lim\limits_{x\to -1^{+}}x=-1,$

$f\left(1^{-}\right)=\lim\limits_{x\to 1^{-}}x=1,\ f\left(1^{+}\right)=\lim\limits_{x\to 1^{+}}(-x)=-1,$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 及 $x=1$ 均间断, 这两个点均为第一类(跳跃)间断点.

4. 在区间 $[0, 2]$ 上讨论函数 $f(x)=x+0.01[x]$ 的连续性.($[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.)

解 先将 $f(x)$ 的分段表示式写出来:

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1,\\ x+0.01, & 1\le x<2,\\ 2.02, & x=2.\end{cases}$$

显然当 $x\in[0,1)$ 及 $x\in[1,2)$ 时, $f(x)$ 都是初等函数, 且 $[0,1)$ 及 $[1,2)$ 是定义区间, 故 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 及 $[1,2)$ 上连续. 又

$f\left(1^{-}\right)=\lim\limits_{x\to 1^{-}}x=1,\ f\left(1^{+}\right)=\lim\limits_{x\to 1^{+}}(x+0.01)=1.01,$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有第一类间断点.

$$f\left(2^{-}\right)=\lim_{x\to 2^{-}}(x+0.01)=0.01\ne 2.02=f(2),$$

故 $x=2$ 也是 $f(x)$ 的间断点.

5. 指出下列函数的间断点, 并判断其类型.

(1) $y=\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$; (2) $y=\begin{cases}x-1, x\le 1,\\ 3-x, x>1,\end{cases}$

解 (1)所给函数在 $x=0$ 处没有定义, 故 $x=0$ 是该函数的间断点. 又因为

$$y(0^-)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

$$y(0^+)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$$

$y(0^-)=y(0^+)$，$\lim\limits_{x\to0}y(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to0}y(x)=1$．所以$x=0$是所给函数的第一类(可去)间断点.

（2） $y(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0\neq y(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}(3-x)=2$, 故$x=1$是第一类(跳跃)间断点.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0,\\ \ln(1+x), & -1<x\le0,\end{cases}$ 求$f(x)$的间断点, 并说明间断点所属类型.

解 函数在$x=1$处无定义, 且

$$f(1^-)=\lim_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0,\quad f(1^+)=\lim_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty.$$

故$x=1$是第二类间断点.

$$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}\ln(1+x)=0\neq f(0^+)=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1},$$

故$x=0$是第一类(跳跃)间断点.

注意 常见错误之一是没讨论$x=1$处的情况, 丢了这个间断点.

错误之二是有同学认为：因 $f(0)=\ln(1+0)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}$，故$x=0$是第一类间断点．必须注意间断点是根据左极限和右极限情况来分类的，判断间断点类型时必须将这两个极限都求出来才可以.

7. 用函数的连续性求下列极限

（1） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$；　　（2） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$；

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$;　　（4） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}$ $(a\neq0)$；

（5） $\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$；　　（6） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$；

（7） $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}$；　　（8） $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{1-\cos\alpha}}$.

解 （1） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{1-1-x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=1+\sqrt{1+0^2}=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{x}}{\sin x-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}\left(e^{\sin x-x}-1\right)}{\sin x-x}=e^{0}\cdot1=1.$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\right)$

$=\arcsin\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\right)=\arcsin\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}\right)$

$=\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=a\lim\limits_{x\to0}\ln(1+ax)^{\frac{1}{ax}}=a\cdot\ln\left(\lim\limits_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right)=a\cdot\ln e=a.$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\right)=\ln1=0.$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}}\right]^{\frac{-3(x-1)}{2(6+x)}}=e^{-\frac{3}{2}}.$

(7) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+3\tan^2x)^{\frac{1}{3\tan^2x}}\right]^3=\left[\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\frac{1}{3\tan^2x}}\right]^3=e^3.$

(8) $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{1-\cos\alpha}}=\lim\limits_{\alpha\to0^+}\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{2}\sqrt{\sin\dfrac{\alpha}{2}}}=\sqrt[4]{2}\lim\limits_{\alpha\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha/2}}}=\sqrt[4]{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\lim\limits_{\alpha\to0^+}\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha/2}}}=\sqrt[4]{2}$

注意 常见的错误是结果正确，但没有按题目要求用函数的连续性求极限，而是用其它方法.

例如 用等价无穷小代换. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax}{x}=a$ 等等

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}, & -\infty<x<-1,\\ b, & x=-1,\\ a+\arccos x, & -1<x\le1.\end{cases}$ 试确定 a，b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续.

解 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续的充要条件是 $f(-1^-)=f(-1^+)=f(-1)$.

由于 $f(-1^-)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\sqrt{x^2-1}\right)=0$，$f(-1)=b$，

$f(-1^+)=\lim\limits_{x\to-1^+}(a+\arccos x)=a+\arccos(-1)=a+\pi$

所以当 $a=-\pi$，$b=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续.

第九节 闭区间上连续函数的性质

1. 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证 令 $F(x)=x^5-5x+1$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=1$，$F(1)=-3$，$F(0)\cdot F(1)<0$，由零点定理即知函数 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个零点，即方程 $x^5-5x+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$，$f(b)>b$，试证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.

证 令 $\varphi(x)=f(x)-x$，则由 $f(x)$ 及 x 均在 $[a,b]$ 上连续知 $f(x)-x$ 在 $[a,b]$ 上连续. 又

$$\varphi(a)=f(a)-a<0,\ \varphi(b)=f(b)-b>0,\ \varphi(a)\varphi(b)<0,$$

故由零点定理知函数 $\varphi(x)$ 至少有一个零点位于区间 (a,b)，即至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\xi$.

注意 1、2 两题常见错误之一是没有说所作辅助函数在给出的闭区间上连续.

错误之二是将 ξ 所在区间写成闭的.

另外，函数有零点和方程有根是两个不同的概念，所以用零点定理证明了函数有零点后，还应回到主题：方程有根，即再多说一句话.

3. 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，证明：在 (a,b) 内存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证 由 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续及 $a<x_1<x_n<b$，知 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_n]$ 上连续. 从而 $f(x)$ 必在闭区间 $[x_1,x_n]$ 有最大值 M 和最小值 m. 于是

$$m\le f(x_1)\le M,\ m\le f(x_2)\le M,\cdots,m\le f(x_n)\le M.$$

$$m=\frac{nm}{n}\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le\frac{nM}{n}=M,$$

由介值定理知至少存在一点 $\xi\in[x_1,x_n]\subset(a,b)$，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

注意 最严重的错误是没有在“闭”区间 $[x_1,x_n]$ 上使用介值定理，而是直接在“开”区间 (a,b) 上运用介值定理. 因 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，故有最大值 M 和最小值 m，…….切记，最值定理和介值定理只对“闭”区间上的连续函数适用，另外，通过本题可知，要证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$，有时候在闭区间 $[a,b]$ 上对函数 $f(x)$ 适用介值定理，有时候是在一个子区间 $[c,d]\subset(a,b)$ 上对函数使用介值定理.

4. 证明方程 $x=a\sin x+b$（其中 $a>0,b>0$）至少有一个正根，且不超过 $a+b$.

证 设 $f(x)=x-a\sin x-b$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[0,a+b]$ 上连续，且

$$f(0)=-b<0,\quad f(a+b)=a(1-\sin(a+b))\ge 0.$$

若 $\sin(a+b)=1$，则 $f(a+b)=0$，即 $a+b$ 就是函数 $f(x)$ 的零点，也即方程 $x=a\sin x+b$ 有根 $a+b$.

若 $\sin(a+b)<1$，则 $f(a+b)>0$，于是由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,a+b)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一根 $\xi\in(0,a+b)$.

综上，方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根，且不超过 $a+b$.

注意 存在的问题是有同学不对 $f(a+b)=0$ 的情况进行讨论，甚至索性就写作 $f(a+b)>0$.

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对一切 $x\in[a,b]$，都有 $f(x)\neq 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上

恒为正或恒为负.

证 反证法. 设 $f(x)$ 不恒为正(负)，则必存在两点 $x_1, x_2 \in [a, b]$，

$$f(x_1) < 0, \quad f(x_2) > 0, \quad x_1 < x_2.$$

由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 自然也在 $[x_1, x_2]$ 连续，根据零点定理知，存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset [a, b]$，使

$$f(\xi) = 0.$$

这与已知条件：$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上处处不等于零矛盾. 因此 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为正(负).

第一章　一元函数的极限与连续（总习题）

1. 设 $f(x-1) = x^2 - 1$, 则 $f(\cos x) = \underline{\cos^2 x + 2\cos x}$.

解 令 $x - 1 = \cos u$，则 $x = \cos u + 1$，

$$f(\cos u) = (\cos u + 1)^2 - 1 = \cos^2 u + 2\cos u$$

$$f(\cos x) = \cos^2 x + 2\cos x.$$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \dfrac{1}{1+x^2}, & x \geq 0, \end{cases}$ $\varphi(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^x, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0, \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解 $f(\varphi(x)) = \begin{cases} 1, & \varphi(x) < 0, \\ \dfrac{1}{1+\varphi^2(x)}, & \varphi(x) \geq 0, \end{cases}$

而当 $x > 0$ 时，$\varphi(x) = 1 - \mathrm{e}^x < 0$；当 $x \leq 0$ 时，$\varphi(x) = x^2 \geq 0$

故

$$f(\varphi(x)) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ \dfrac{1}{1+x^4}, & x \leq 0 \end{cases}$$

3. 计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots\left(1+a^{2^n}\right)$ （$|a| < 1$）；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty} a^n \sin\dfrac{t}{a^n}$ （$a \neq 0, t \neq 0$）；

解 （1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-a}\cdot(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$

$$=\frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a^2)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$

$$=\frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a^{2^2})\cdots(1+a^{2^n})$$

$$=\frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a^{2^{n+1}})$$

注意到$|a|<1$，而$\lim\limits_{n\to\infty}2^{n+1}=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^{n+1}}=0$，从而

$$\text{原极限}=\frac{1}{1-a}.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}.$

(4) 当$|a|>1$时

$$\lim_{n\to\infty}a^n\sin\frac{t}{a^n}=t\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{t}{a^n}}{\frac{t}{a^n}}=t$$

当$|a|<1$时，由$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$及$\left|\sin\dfrac{t}{a^n}\right|\le 1$，有$\lim\limits_{n\to\infty}a^n\sin\dfrac{t}{a^n}=0$.

当$a=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}a^n\sin\dfrac{t}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin t=\sin t$.

当$a=-1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}a^n\sin\dfrac{t}{a^n}=(-1)^n\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{t}{(-1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin t=\sin t$.

综上，$\lim\limits_{n\to\infty}a^n\sin\dfrac{t}{a^n}=\begin{cases}t, & |a|>1,\\ 0, & |a|<1,\\ \sin t, & |a|=1.\end{cases}$

注意　常见错误是没有对参数a的取值进行讨论.

4. 计算下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{2^x+3^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{2^x+3^x-2}}\right]^{\frac{2^x+3^x-2}{2x}}$

因为当 $x\to 0$ 时，$2^x-1\sim x\ln 2$， $3^x-1\sim x\ln 3$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{2x}+\frac{3^x-1}{2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 2}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 3}{2x}$$

$$=\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{2}=\ln\sqrt{2}+\ln\sqrt{3}=\ln\sqrt{6}.$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{6}}=\sqrt{6}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+b+\dfrac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\left(1+\dfrac{b}{x}\right)}+1}=\frac{a+b}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\sin 2x}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 2x}{x^2}=4$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[1+\left(x^2+\cos x-1\right)\right]^{\frac{1}{x^2+\cos x-1}}\right\}^{\frac{x^2+\cos x-1}{x^2}}$，因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=1-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}}{x^2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2+\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$$

5. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+f(x)}{x^3}=0$，试求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+f(x)}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+f(x)+(\tan x-\sin x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+f(x)}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$=0+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

6. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-[A+B(x-1)]}{x-1}=0$，试求 A, B 之值.

解 由分母的极限是零：$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，知分子的极限一定是零：

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+8}-[A+B(x-1)]=3-A=0$$

（否则商的极限不会是 0！），由此可得 $A=3$.

将 $A=3$ 代入原极限中，得

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+8}-[3+B(x-1)]}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x-1}-B=0$$

故 $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+8-9}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\dfrac{1}{3}$.

于是，当 $A=3$，$B=\dfrac{1}{3}$ 时上述极限成立.

7．设 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，且 $a_k>0(k=1,2,\cdots,m)$，用夹逼准则证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A.$$

这里 n 是正整数.

证 因为

$$A=\sqrt[n]{A^n}\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\le\sqrt[n]{mA^n}=m^{\frac{1}{n}}A,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(m^{\frac{1}{n}}A)=A$，由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A.$$

8．已知 $x_1=\sqrt{3}$，$x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$（$n=1,2,\cdots$），证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证 先证数列单调增，用数学归纳法.

$$x_2=\sqrt{3+x_1}>\sqrt{3}=x_1，\text{设 } x_n>x_{n-1},$$

则 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}>\sqrt{3+x_{n-1}}=x_n$，故数列单调增.

再证数列有上界，用数学归纳法.

$$x_1=\sqrt{3}<3，\text{设 } x_n<3，x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}<\sqrt{3+3}<3$$

故数列有上界，由单调有界准则知数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对于式子 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$ 两边同时取极限得 $a=\sqrt{3+a}$. 解得

$$a=\frac{1+\sqrt{13}}{2},\ a=\frac{1-\sqrt{13}}{2},$$

因为 $x_n>0$，根据极限的保号性知 $a>0$，故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

9．设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\le x<0\end{cases}$$

试研究 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性.

解 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$.

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1=f(0^+)$$

但 $f(0)=0$，故函数在 $x=0$ 处间断.

10. 研究函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ （$-\infty<x<+\infty$， $n\in N^+$）的连续性.

解 先通过求极限得到 $f(x)$ 的分段表示式:

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|>1, x=-1\\ 1+x, & |x|<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

当 $|x|<1$ 及 $|x|>1$ 时， $f(x)$ 是初等函数，故在其定义区间 $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ 及 $(1,\ +\infty)$ 上连续. 又

$$f(-1^-)=\lim_{x\to -1^-}0=0=f(-1),\ f(-1^+)=\lim_{x\to -1^+}(1+x)=0.$$

所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续. 由于

$$f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}(1+x)=2,\ f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}0=0.\ f(1^-)\ne f(1^+),$$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类(跳跃)间断点.

综上所述， $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 及 $(1,\ +\infty)$ 上连续.