第二节

定积分的几何应用(1)

——平面图形的面积

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

1. 直角坐标情形

(1) 面积元素

$$\mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x$$

曲边梯形的面积 $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(2) 面积元素

$$\mathrm{d}A = [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

曲边梯形的面积 $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$

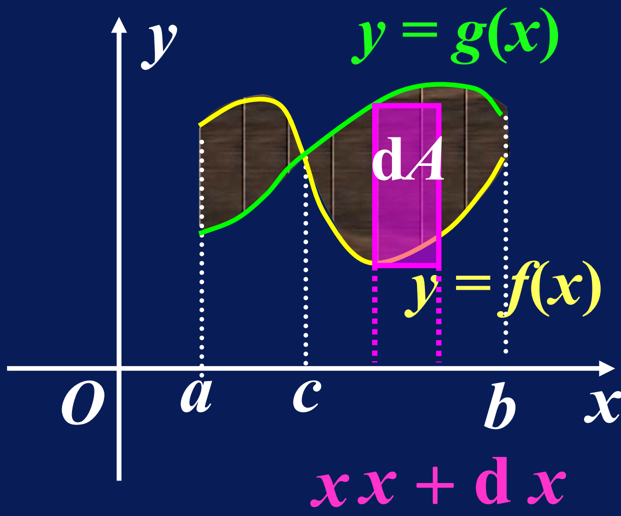
一般地，有

$$(3)\ A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^c [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$$

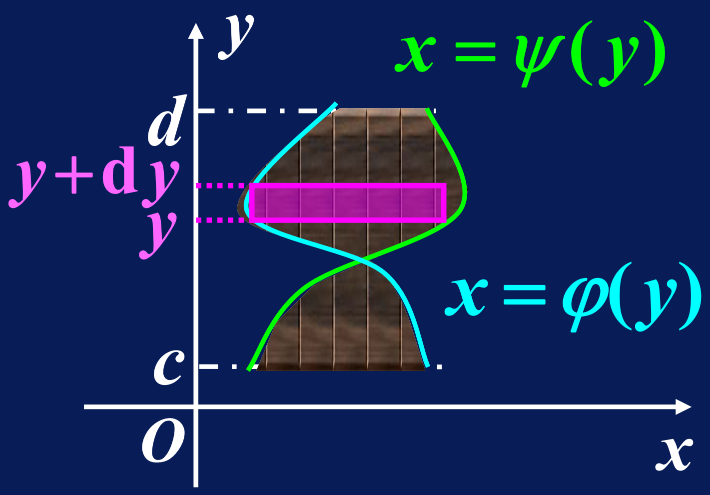
$$+\int_c^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$(a<b)$$



$$(4)\ A=\int_c^d |\psi(y)-\varphi(y)|\,\mathrm{d}y$$

$$(c<d)$$

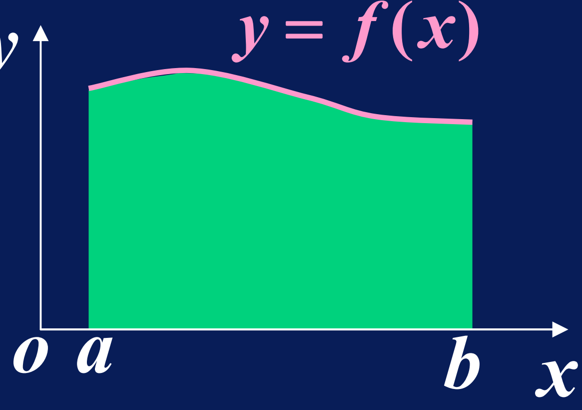


2. 参数方程情形

当曲边梯形的曲边

$$y = f(x) \quad (f(x) \ge 0,\ x \in [a,b])$$

由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 给出时，



且$\varphi(x),\psi(x)$满足:

(1) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b;$

(2) $\varphi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)上具有一阶连续导数;

(3) $y = \psi(t)$ 连续，则曲边梯形面积为

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad (a \le b)$$

3. 极坐标情形

设 $\varphi(\theta) \in C[\alpha,\beta]$, $\varphi(\theta) \geq 0$，求由曲线 $\rho=\varphi(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha, \theta=\beta$ 围成的曲边扇形的面积 .

在区间 $[\alpha,\beta]$ 上任取小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 则对应该小区间上曲边扇形面积的近似值为

面积元素：$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$

所求曲边扇形的面积为：

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$(\alpha<\beta)$$

问题: 如何画出极坐标方程所表示的曲线的草图?

方法: 设曲线 L 的极坐标方程为: $\rho = \varphi(\theta)$.

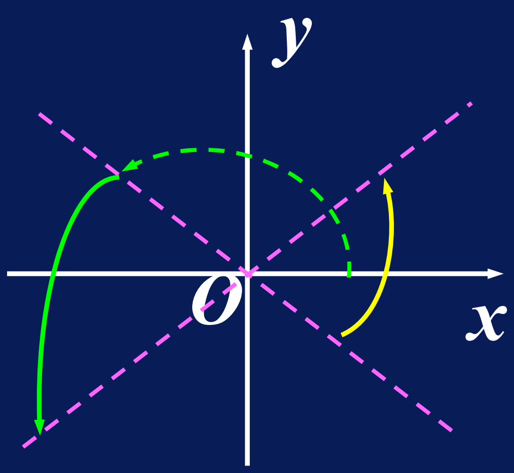
1° 由 $\rho \geq 0$, 即 $\varphi(\theta) \geq 0$, 可确定曲线 L 的 θ 的取值范围;

如: 对于双纽线 $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

由方程知 $\cos 2\theta \geq 0$,

令 $-\frac{\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2}$ 及 $\frac{3\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{5\pi}{2}$

得 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 及 $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$



2° 若 $\varphi(-\theta)=\varphi(\theta)$, 则$L$关于极轴对称;

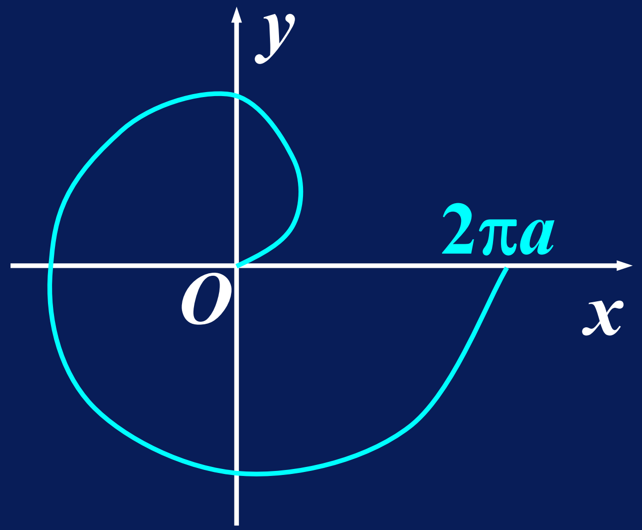
若 $\varphi(\pi-\theta)=\varphi(\theta)$, 则$L$关于$y$轴对称.

3° 利用 $\rho'=\varphi'(\theta)$ 的符号，判断 $\rho=\varphi(\theta)$的单调性;

如：对于 $\rho=a\theta\ \ (a>0, 0\le\theta\le 2\pi)$,

$\because\quad \rho'=a>0,$

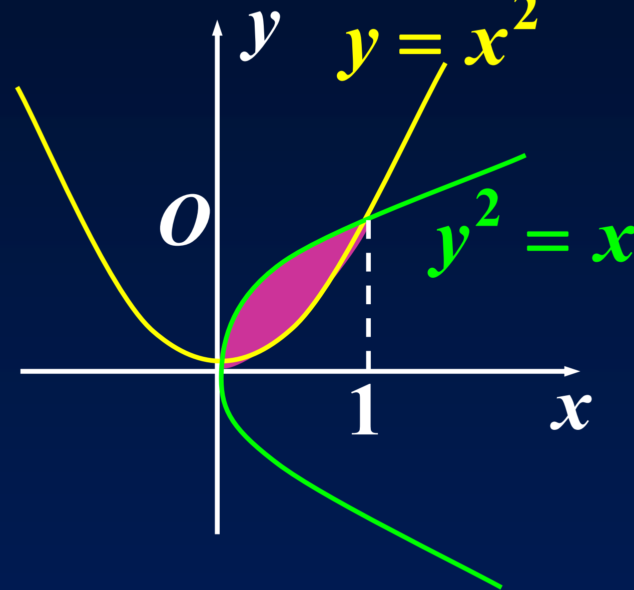
$\therefore\quad \rho=a\theta$随$\theta$的增加而增加.



4° 综合$1^\circ-3^\circ$的讨论画出图形.

二、典型例题

例1 计算由两条抛物线 $y^2 = x$ 和 $y = x^2$ 所围成的图形的面积.



解 1° 求两曲线 $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$

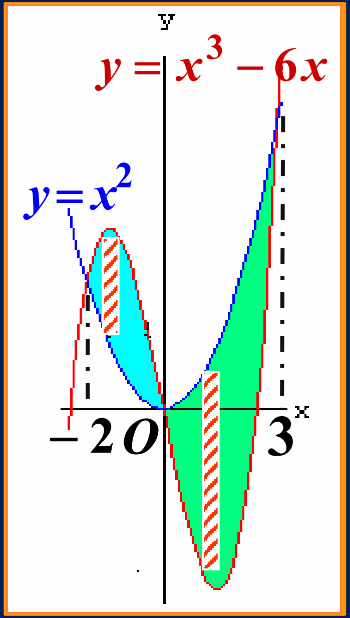
的交点: (0,0) (1,1)

2° 选 x 为积分变量 $x \in [0,1]$

面积元素: $\mathrm{d}A = (\sqrt{x} - x^2)\mathrm{d}x$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

例2 计算由曲线 $y = x^3 - 6x$ 和 $y = x^2$ 所围成的图形的面积.



解 (方法1) 1° 两曲线的交点

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (0,0),\quad (-2,4),\quad (3,9).$$

2° 选 x 为积分变量, $x \in [-2, 3]$

(1) $x \in [-2, 0]$, $\quad \mathrm{d}A_1 = [(x^3 - 6x) - x^2]\mathrm{d}x$

(2) $x \in [0,3]$, $\quad \mathrm{d}A_2 = [x^2 - (x^3 - 6x)]\mathrm{d}x$

于是所求面积 $A = A_1 + A_2$

$$A = \int_{-2}^{0}(x^3 - 6x - x^2)\,\mathrm{d}\,x + \int_{0}^{3}(x^2 - x^3 + 6x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{253}{12}.$$

(方法2) 代公式，得

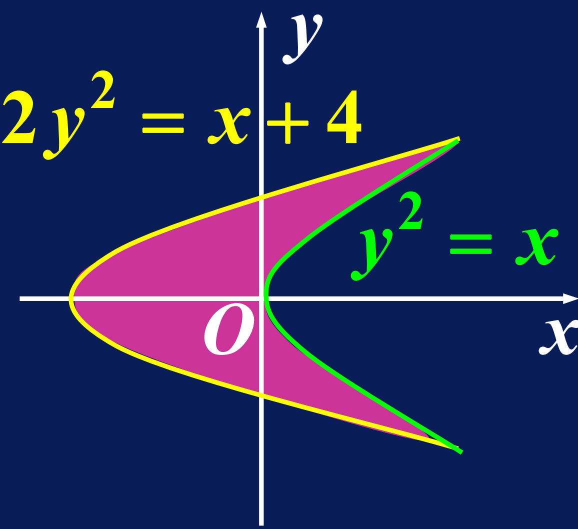
$$A = \int_{-2}^{3}\left|f(x) - g(x)\right|\mathrm{d}\,x = \int_{-2}^{3}\left|(x^3 - 6x) - x^2\right|\mathrm{d}\,x$$

$$= \int_{-2}^{0}(x^3 - 6x - x^2)\,\mathrm{d}\,x + \int_{0}^{3}(x^2 - x^3 + 6x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{253}{12}.$$

说明：注意各积分区间上被积函数的形式.

问题：积分变量能选 y 吗？ 太麻烦！

例3 求由曲线 $2y^2 = x+4$ 与 $y^2 = x$ 所围成图形的面积.



解 由 $\begin{cases} 2y^2 = x+4 \\ y^2 = x \end{cases}$，得

两曲线的交点 $(4,-2)$和$(4,2)$.

故所求面积为:

$$A = \int_{-2}^{2}[y^2 - (2y^2 - 4)]\,\mathrm{d}\,y = \int_{-2}^{2}(4 - y^2)\,\mathrm{d}\,y$$

$$= 2\int_{0}^{2}(4 - y^2)\,\mathrm{d}\,y = 2\left[4y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^2 = \frac{32}{3}.$$

例4 求由摆线 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$ 的一拱与 x 轴所围平面图形的面积 .

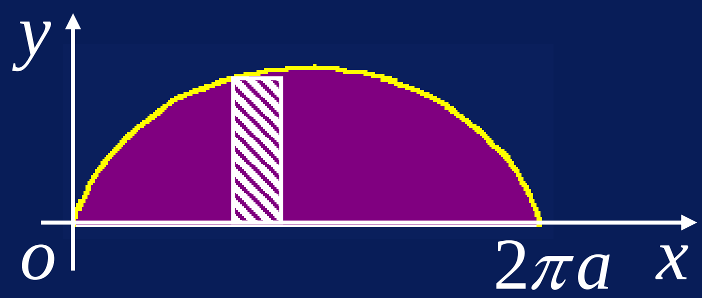
解 $A=\int_0^{2\pi a} y\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$=4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$=8a^2\int_0^{\pi}\sin^4 u\,\mathrm{d}u \quad (令\ u=\frac{t}{2})$$

$$=16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,\mathrm{d}u=16a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi a^2$$



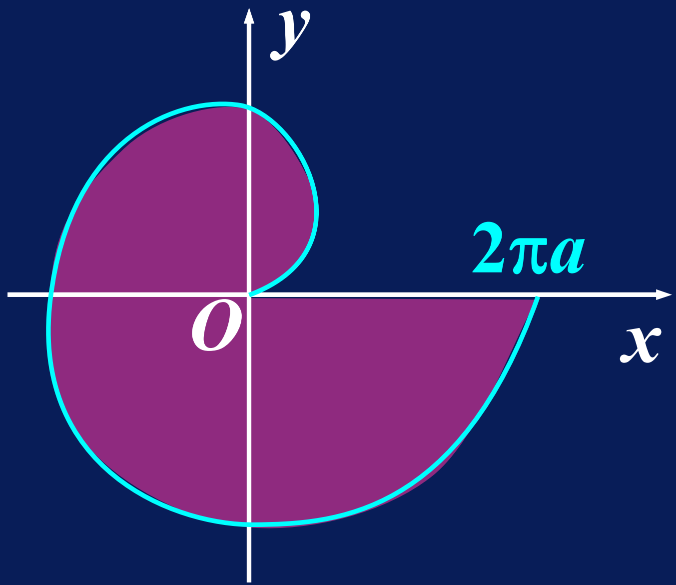
例5 计算阿基米德螺线 $\rho = a\theta \ (a > 0, 0 \le \theta \le 2\pi)$ 与射线 $\theta = 2\pi$ 所围图形面积.

解 $\mathrm{d}A = \dfrac{1}{2}(a\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$



例6 求双纽线$\rho^2 = a^2\cos 2\theta$所围平面图形的面积.

解 由对称性知,

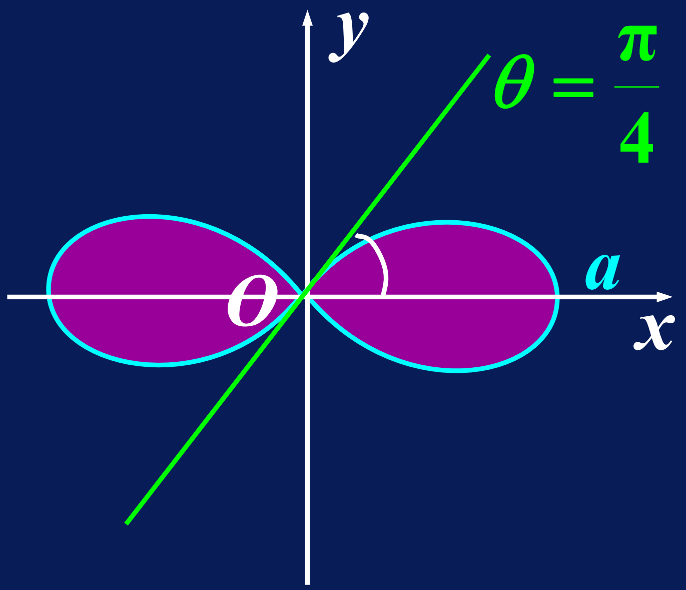
总面积 = 第一象限部分面积的4倍

$$A = 4A_1$$

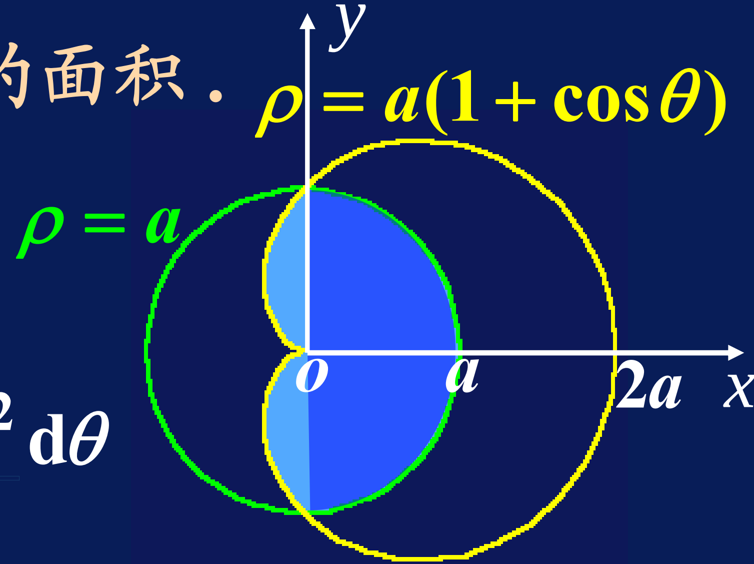
$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}a^2\cos 2\theta \, d\theta$$

$$= a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= a^2.$$



例7 计算心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 与圆 $\rho = a$ 所围图形公共部分的面积.



解 利用对称性, 所求面积

$$A = \frac{1}{2}\pi a^2 + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2 + a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2 + a^2\left(\frac{3}{4}\pi - 2\right) = \frac{5}{4}\pi a^2 - 2a^2.$$

三、同步练习

1. 抛物线 $x=\dfrac{1}{2}y^2$ 将圆 $x^2+y^2=8$ 所围成的图形分割成两部分，求较小部分的面积.

2. 求曲线 $|\ln x|+|\ln y|=1$ 所围图形的面积.

3. λ 为何值才能使 $y=x(x-1)$ 与 x 轴围成的面积等于 $y=x(x-1)$ 与 $x=\lambda$ 及 x 轴围成的面积.

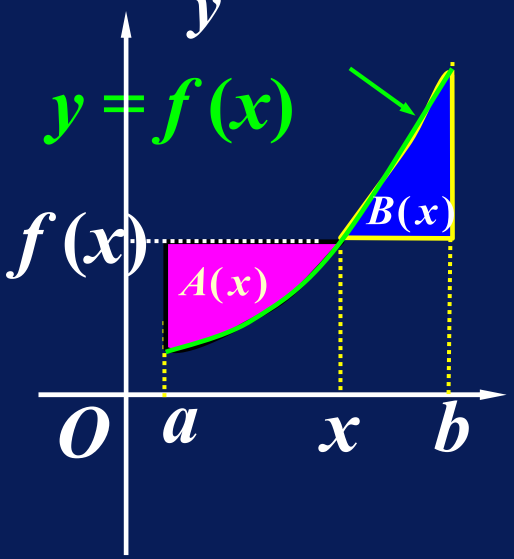
4. 已知星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(a>0)$,求所围成图形的面积.

5. 求双纽线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ 与圆 $\rho = \sqrt{2}a\sin\theta$ 所围公共部分的面积.

6. 常数 $a\ (a>0)$ 取何值时，由曲线 $y = a(1-x^2)$ 和该曲线上两点 $(-1,0),(1,0)$ 处的法线所围成的图形的面积最小?

7. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f'(x)>0, f(a)\ge 0,$ 证明：对图示的两个面积函数 $A(x)$和$B(x)$存在惟一的 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{A(\xi)}{B(\xi)} = 2008.$$



四、同步练习解答

1. 抛物线 $x=\frac{1}{2}y^2$ 将圆 $x^2+y^2=8$ 所围成的图形分割成两部分，求 较小部分的面积 .

解 由 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}y^2 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$，得

两曲线的交点 $(2,-2)$ 和 $(2,2)$.

故所求面积为:

$$A=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}\,y$$

$$= 2\int_0^2 \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{1}{2} y^2\right) \mathrm{d}\, y$$

$$\xlongequal{y=2\sqrt{2}\sin t} 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\cos^2 t\, \mathrm{d}\, t - \frac{1}{6} y^3 \Big|_0^2\right)$$

$$= 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4(1 + \cos 2t)\, \mathrm{d}\, t - \frac{4}{3}\right]$$

$$= 2\pi + \frac{4}{3}.$$

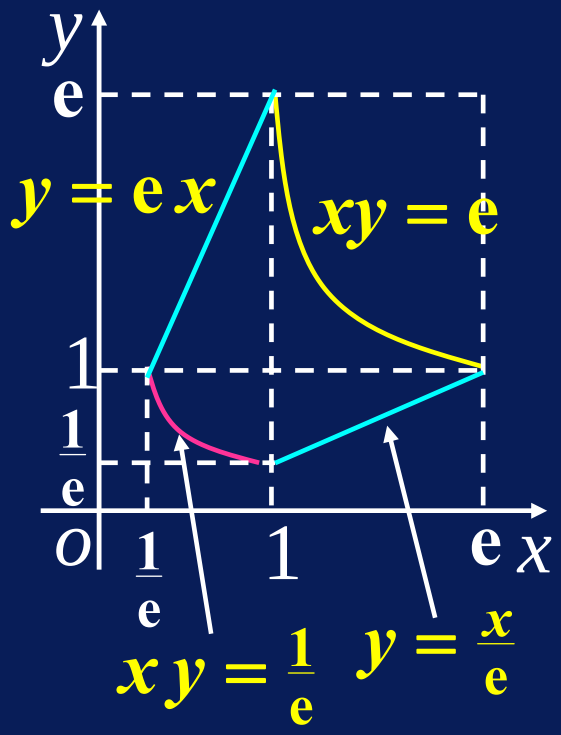
2. 求曲线 $|\ln x| + |\ln y| = 1$ 所围图形的面积.

解 依题设，有 $|\ln x| \le 1, |\ln y| \le 1$

$$\therefore \quad e^{-1} \le x \le e, \; e^{-1} \le y \le e$$

又 $$|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & 1 \le x \le e \\ -\ln x, & e^{-1} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$|\ln y| = \begin{cases} \ln y, & 1 \le y \le e \\ -\ln y, & e^{-1} \le y \le 1 \end{cases}$$



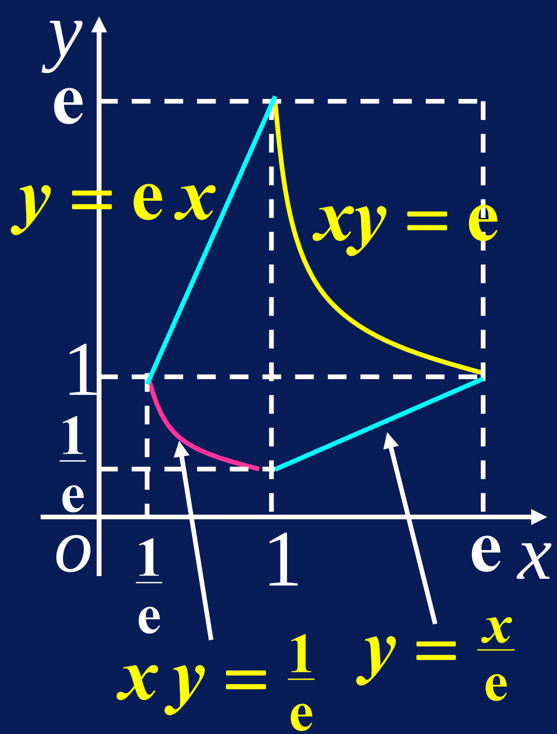
故在区域 $\begin{cases} e^{-1} \le x \le 1 \\ e^{-1} \le y \le 1 \end{cases}$ 中曲线为 $xy = \dfrac{1}{e}$,

同理其它.

面积为:

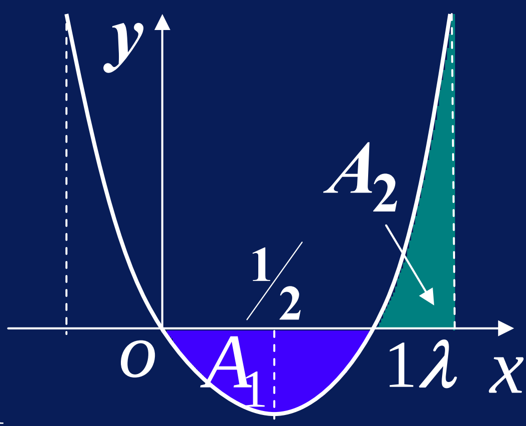
$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(e x - \frac{1}{e x}\right) dx + \int_{1}^{e} \left(\frac{e}{x} - \frac{x}{e}\right) dx$$

$$= e - \frac{1}{2e} - \frac{1}{2}.$$



3. λ 为何值才能使 $y=x(x-1)$ 与 x 轴围成的面积等于 $y=x(x-1)$ 与 $x=\lambda$ 及 x 轴围成的面积.

解 $y=x(x-1)$ 与 x 轴所围面积



$$A_1=\int_0^1 -x(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

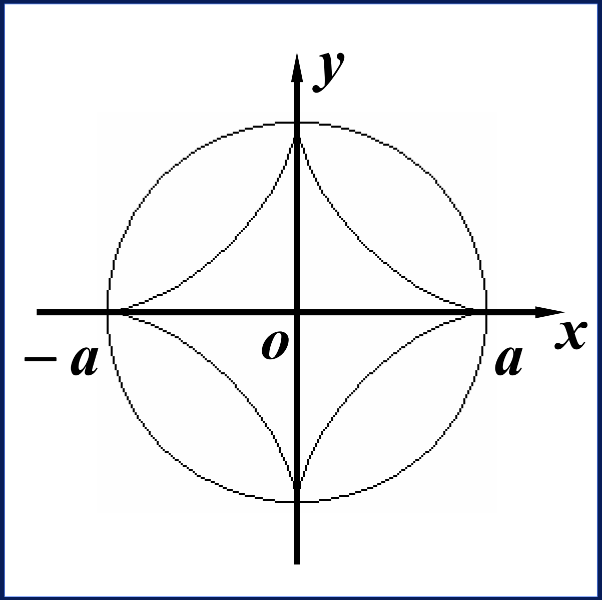
$\lambda \geq 0$时,

$$A_2=\int_1^\lambda x(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{6}$$

由 $A_1=A_2$，得 $\lambda^2(\frac{1}{3}\lambda-\frac{1}{2})=0$, 故 $\lambda_1=\frac{3}{2}$， $\lambda_2=0$

由图形的对称性，$\lambda_3=-\frac{1}{2}$, $\lambda_4=1$ 也符合条件.

求星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 4.$(a > 0)$所围成图形的面积.



解 由对称性,有

$$A = 4\int_0^a y\,\mathrm{d}x$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2[\sin^4 t - \sin^6 t]\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

5. 求双纽线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ 与圆 $\rho = \sqrt{2}a\sin\theta$ 所围公共部分的面积.

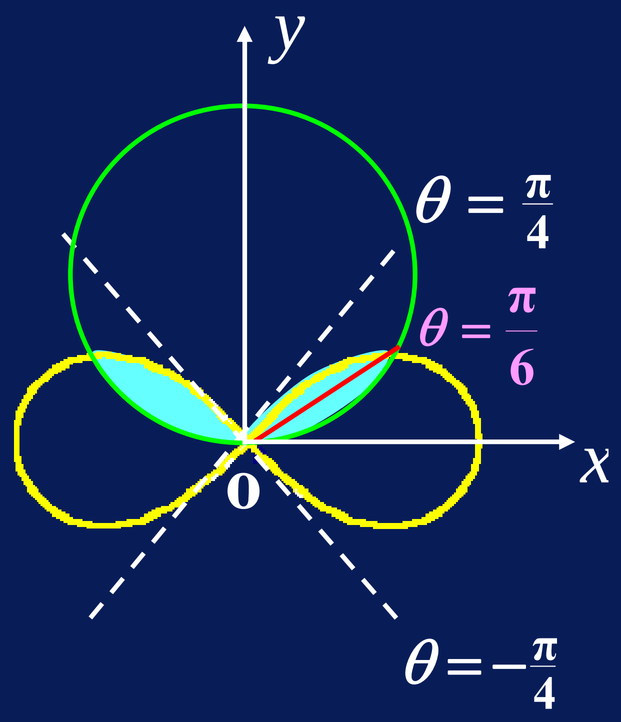
解 先画草图，并求交点对应的极角:

$$\begin{cases} \rho^2 = a^2\cos 2\theta \\ \rho = a\sqrt{2}\sin\theta \end{cases},$$

$$\cos 2\theta = 2\sin^2\theta,$$

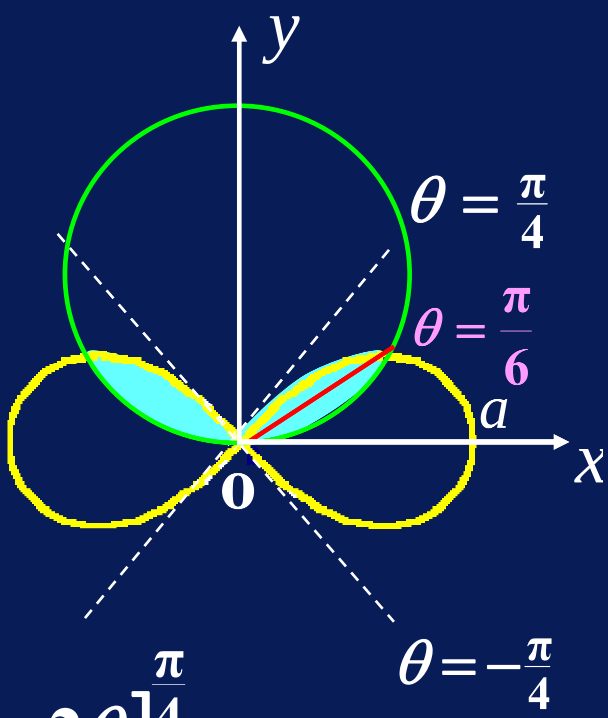
$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}$$

解得 $\theta = \frac{\pi}{6}$.



利用对称性得所求面积:

$$A = 2\left[\ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (a\sqrt{2}\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta\ \right]$$



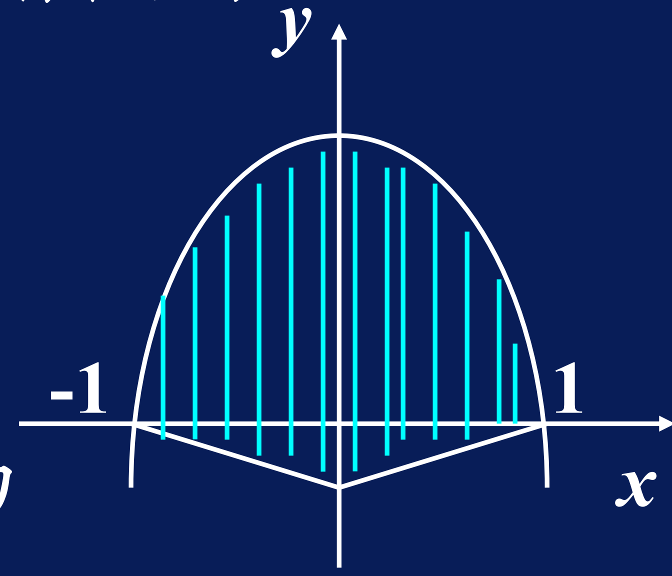
$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta + a^2\cdot\frac{1}{2}\left[\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)a^2.$$

6. 常数 $a\ (a>0)$ 取何值时，由曲线 $y=a(1-x^2)$ 和该曲线上两点 $(-1,0),(1,0)$ 处的法线所围成的图形的面积最小?

解 由曲线 $y=a(1-x^2)$ 的对称性知，

所求图形以 y 轴对称，



$$y'=-2ax$$

$$y'|_{x=1}=-2a$$

所以曲线上点 $(1,0)$ 处的法线为

$$y=\frac{1}{2a}(x-1)$$

于是所求图形面积为

$$S=2\int_0^1\left[a(1-x^2)-\frac{1}{2a}(x-1)\right]\mathrm{d}\,x=\frac{4}{3}a+\frac{1}{2a}$$

令 $S'=\frac{4}{3}-\frac{1}{2a^2}=0$, 并注意到 $a>0$,

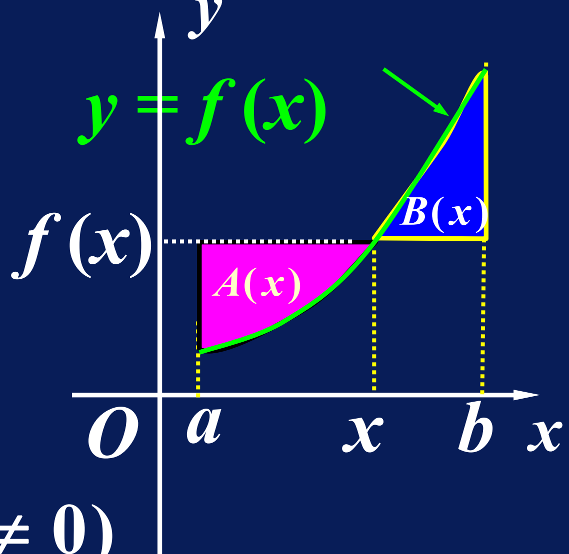
得解 $a=\frac{\sqrt{6}}{4}$,

而由题意知最小面积存在。

故当 $a=\frac{\sqrt{6}}{4}$ 时，该图形的面积最小

7. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f'(x)>0, f(a)\ge 0,$ 证明：对图示的两个面 积函数 $A(x)$和$B(x)$ 存在唯一的 $\xi\in(a,b)$， 使

$$\frac{A(\xi)}{B(\xi)}=2008.$$



分析 $\dfrac{A(\xi)}{B(\xi)}=2008$

$$\Leftrightarrow A(\xi)-2008B(\xi)=0 \quad (B(\xi)\ne 0)$$

令 $F(x)=A(x)-2008B(x)$

则问题转化为证明： $F(x)$在(a,b)内有唯一的零点 .

证 令 $F(x)=A(x)-2008B(x)$

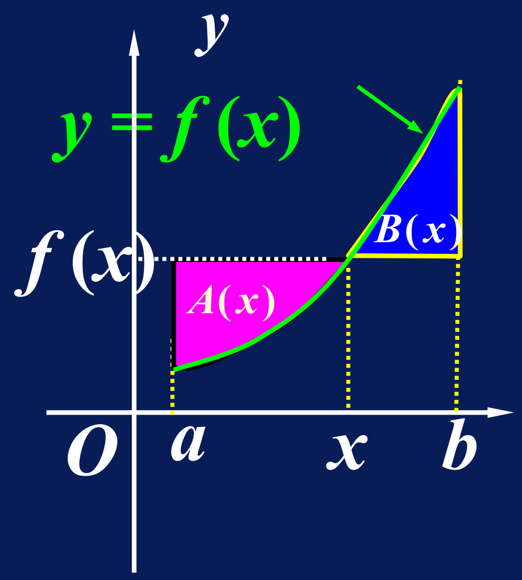
$\because \quad f'(x)>0, \quad x\in[a,b]$

$\therefore \quad f(x)$在$[a,b]$上单调增加,

又$\because \quad f(a)\ge 0,$

$\therefore \quad \forall\ x\in(a,b]$

有 $\quad f(x)>f(a)\ge 0$

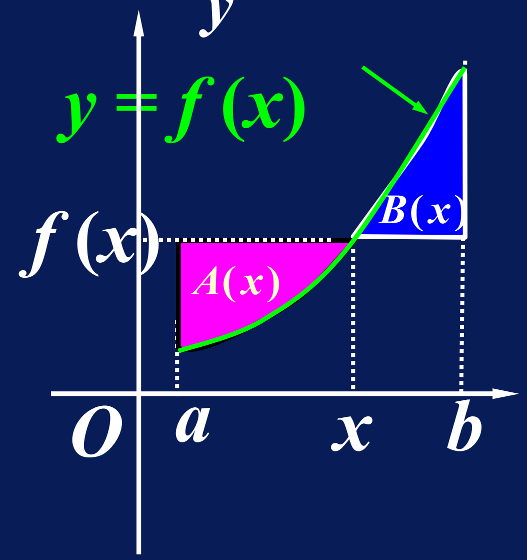


于是 $A(x)=\boxed{f(x)(x-a)}-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

矩形面积

$$B(x)=\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t-f(x)(b-x)$$

$$A(a)=0,\quad B(b)=0.$$



1° 零点的存在性

$\because$ $f(x)$在$[a,b]$上可导

$\therefore$ $A(x),B(x),F(x)$均在 $[a,b]$上可导，且

$$A'(x) = [f'(x)(x-a) + \cancel{f(x)}] - \cancel{f(x)}$$

$$= f'(x)(x-a) > 0 \quad (\forall\ x \in (a,b]\,)$$

$\therefore \quad A(x)$在$[a,b]$上单调增加

故 $\forall\ x \in (a,b]$， 有 $A(x) > A(a) = 0$

$$A(b) > A(a) = 0$$

$$B'(x) = -\cancel{f(x)} - [f'(x)(b-x) - \cancel{f(x)}]$$

$$= -f'(x)(b-x) < 0 \quad (\forall\ x \in [a,b)\,)$$

$\therefore \quad B(x)$在$[a,b]$上单调减少

故 $\forall\, x\in[a,b)$， 有 $B(x)>B(b)=0$

$$B(a)>B(b)=0$$

$$\therefore \quad F(a)=A(a)-2008B(a)$$

$$=0-2008B(a)<0$$

$$F(b)=A(b)-2008B(b)$$

$$=A(b)-2008\cdot 0>0$$

由零点定理知，$F(x)$在(a,b)内至少有一个零点 .

2° 零点的至多性

依题设， $f'(x) > 0, \quad x \in [a,b]$

$$\therefore\ F'(x) = A'(x) - 2008B'(x)$$

$$= f'(x)(x-a) + 2008 f'(x)(b-x) > 0$$

$$(\forall\ x \in (a,b)\ )$$

$\therefore$ $F(x)$在$[a,b]$上单调增加，

从而 $F(x)$在(a,b)内至多有一个零点 .

综上所述： $F(x)$在(a,b)内有惟一零点 ξ，使

$F(\xi) = 0$. 又因 $B(x) > 0\ \ (x \in (a,b))$

所以命题成立 .

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY