第七节

二次曲面

- 一、主要内容
- 二、典型例题

一、主要内容

(一) 二次曲面简介

三元二次方程

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyx+Fzx$$
$$+Gx+Hy+Iz+J=0$$

(二次项系数不全为 0)

的图形通常为二次曲面. 其基本类型有:

椭球面、抛物面、双曲面、锥面

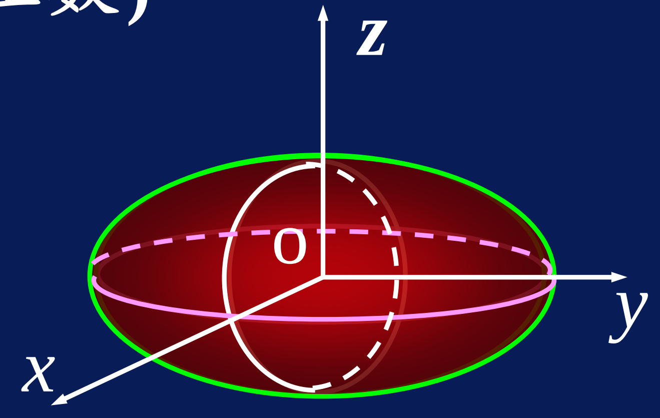
适当选取直角坐标系可得它们的标准方程,

下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍 .

研究二次曲面特性的基本方法: 截痕法

(二) 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$



(1)范围:

$$|x|\le a,\quad |y|\le b,\quad |z|\le c$$

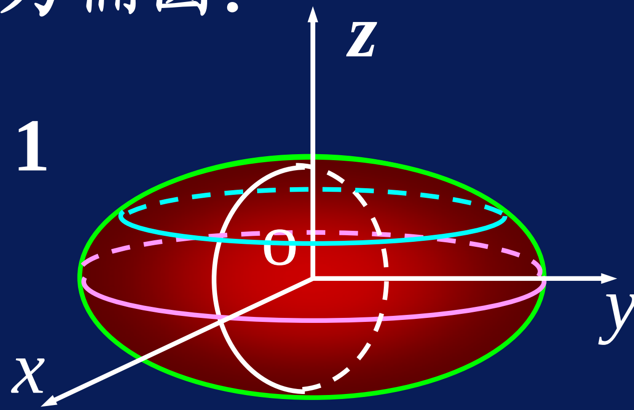
(2)与坐标面的交线：椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{ 为正数})$$

(3) 截痕: 与 $z = z_1 \ (|z_1| < c)$ 的交线为椭圆:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-z_1^{\ 2})}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-z_1^{\ 2})}=1 \\ z = z_1 \end{cases}$$



同样 $y = y_1 \ (|y_1| \le b)$ 及 $x = x_1 \ (|x_1| \le a)$ 的截痕

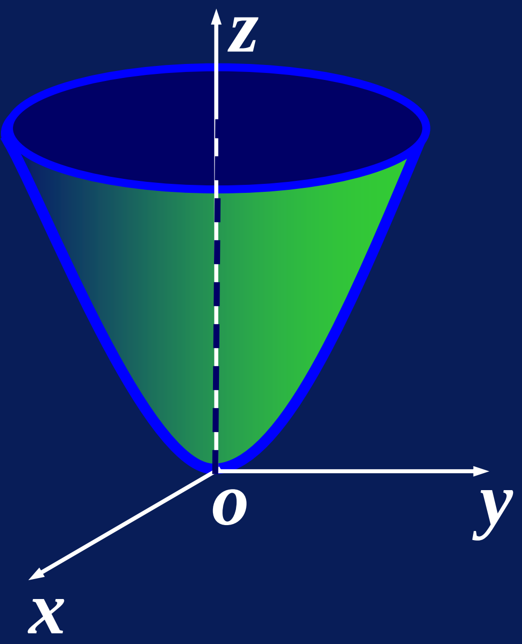
也为椭圆.

(4) 当 $a = b$ 时为旋转椭球面; 当 $a = b = c$ 时为球面.

(三) 抛物面

1. 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p, q \text{ 同号})$$



$(p>0, q>0)$

特别, 当 $p=q$ 时为绕 z 轴的旋转抛物面.

2. 双曲抛物面（鞍形曲面）

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p, q \text{ 异号})$$

用截痕法讨论： 设 $p<0,\ q>0$

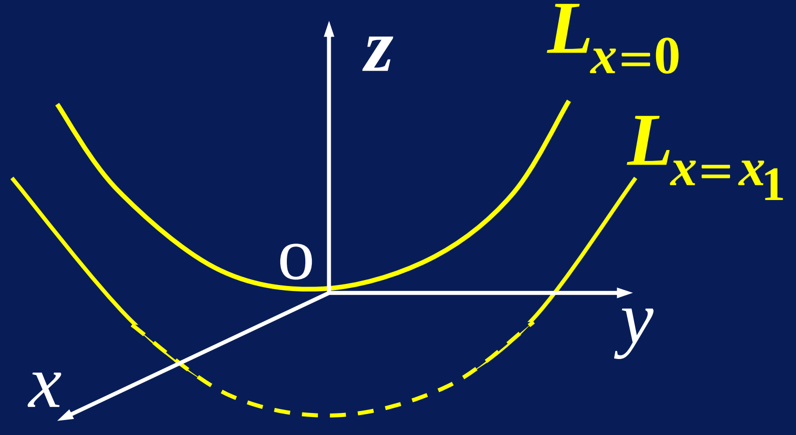
1) 用坐标面

$yOz\ \ (x=0),$

$x=x_1$

与曲面相截

均可得抛物线.



$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$$
$$(p < 0, q > 0)$$

2) 用坐标面 $zox\ (y=0)$,

平面 $y = y_1$ 与曲面相截

均可得抛物线.

3) 用 平面 $z = z_1$

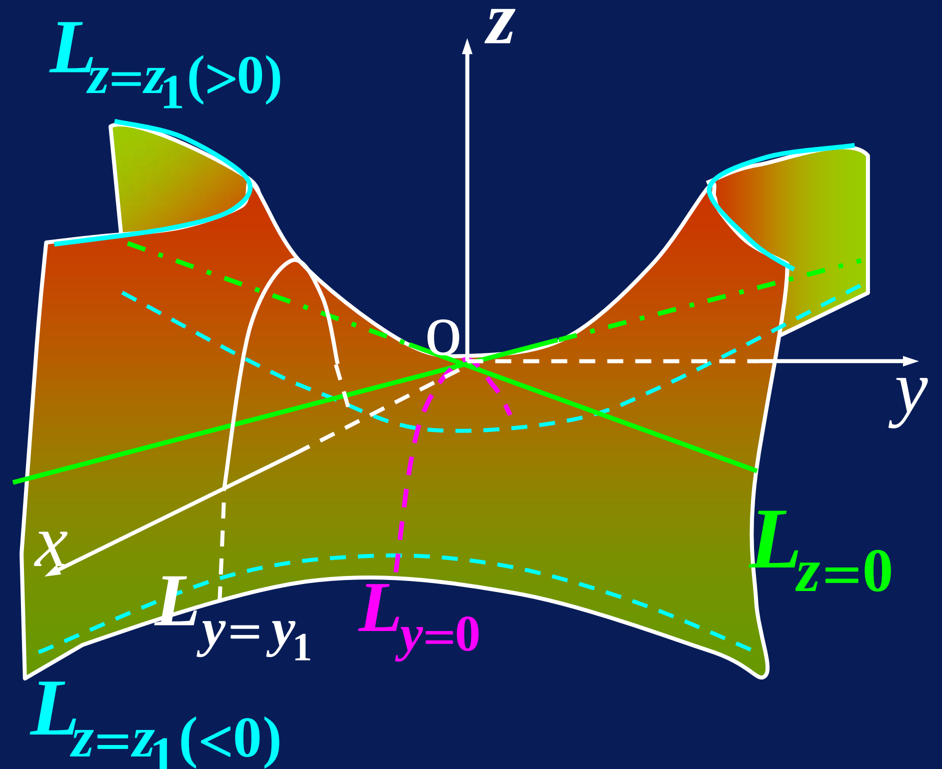
与曲面相截

可得双曲线.

用坐标面 $xoy\ (z=0)$

与曲面相截可得

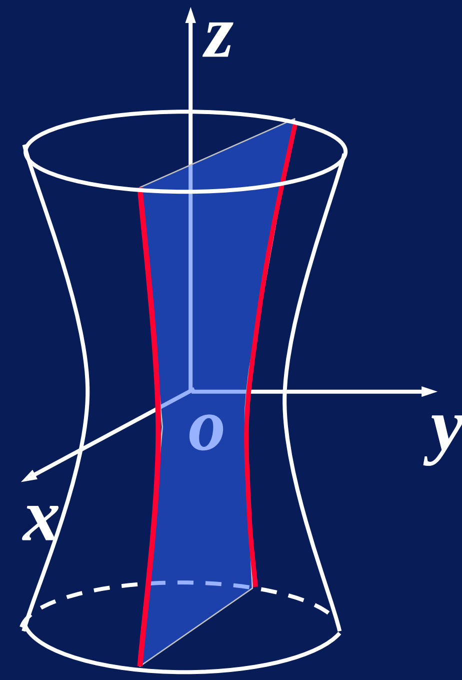
两条直线.



(四) 双曲面

1. 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c \text{ 为正数})$$



平面 $z=z_1$ 上的截痕为 椭圆.

平面 $y=y_1$ 上的截痕情况:

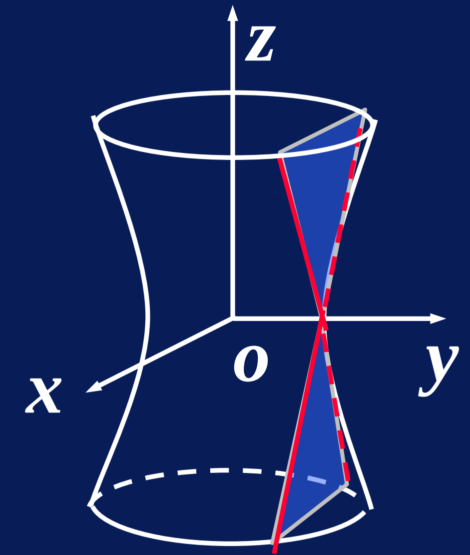
1) $|y_1|<b$ 时, 截痕为双曲线:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1^{\,2}}{b^2} \\ y=y_1 \end{cases}$$

(实轴平行于 x 轴;
虚轴平行于 z 轴)

2) $|y_1| = b$ 时, 截痕为**相交直线**:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} \pm \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = b\,(\text{或}\ -b) \end{cases}$$

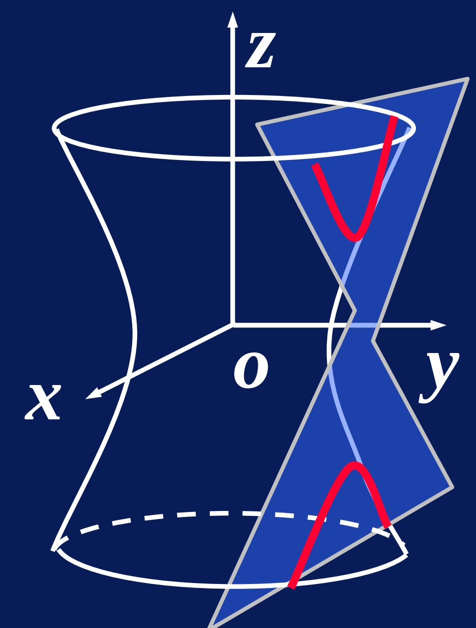


3) $|y_1| > b$时, 截痕为**双曲线**:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{y_1^{\,2}}{b^2} \quad < 0 \\ y = y_1 \end{cases}$$

(实轴平行于z 轴;

虚轴平行于x 轴)



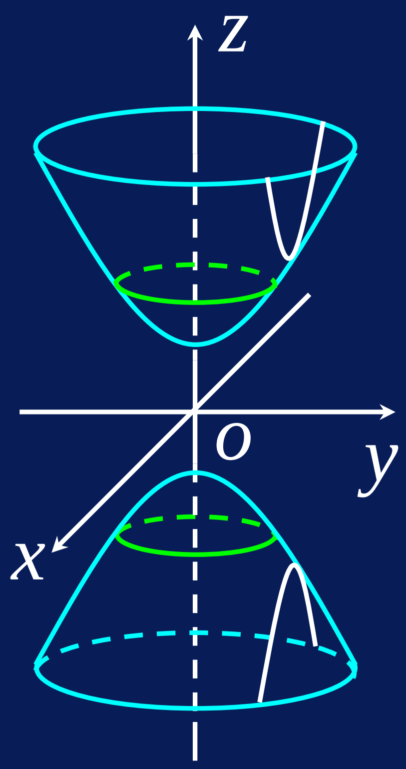
2. 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a,b,c\text{ 为正数})$$

平面 $y=y_1$ 上的截痕为 双曲线

平面 $x=x_1$ 上的截痕为 双曲线

平面 $z=z_1\ (|z_1|>c)$上的截痕为 椭圆

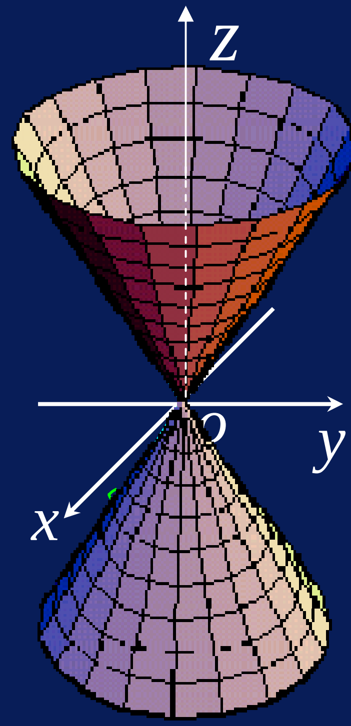


注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\begin{cases} 1 & \text{单叶双曲面} \\ -1 & \text{双叶双曲面} \end{cases}$$

(五) 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \quad (a, b\text{ 为正数})$$



在平面 $z=t$ 上的截痕为 椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1,\ z=t \qquad ①$$

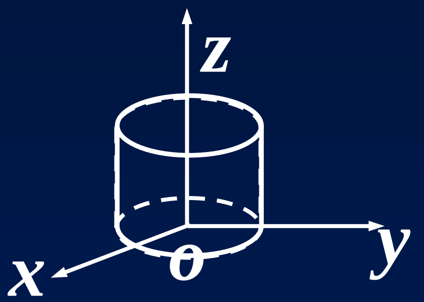
在平面 $x=0$ 或 $y=0$ 上的截痕为过原点的两直线.

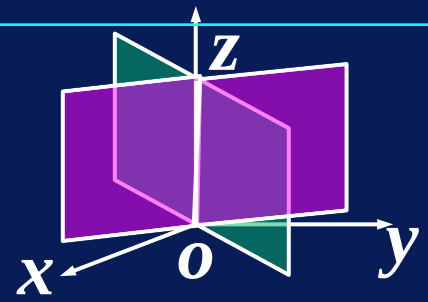
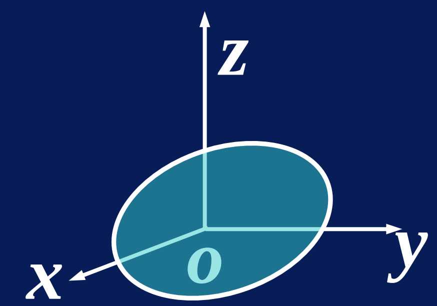
可以证明, 椭圆①上任一点与原点的连线均在曲面上.

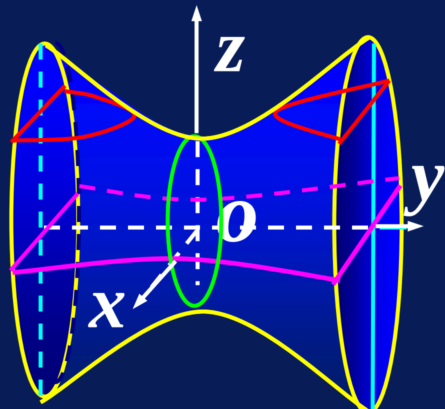
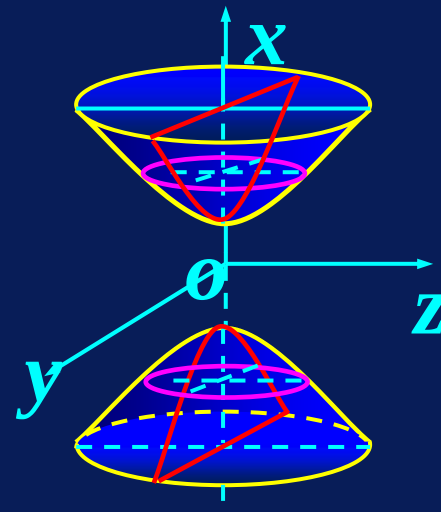
(椭圆锥面也可由圆锥面经 x 或 y 方向的伸缩变换得到)

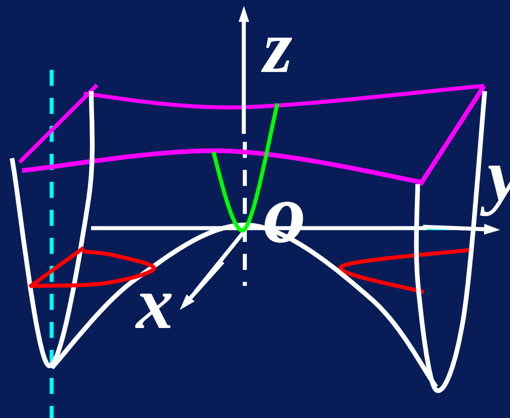
二、典型例题

下列方程在空间各表示何种图形？

方　程	空间解析几何中	图形
$x^2+y^2=1$	以 z 轴为中心轴的圆柱面	
$x^2+y^2=0$	z 轴	

方　程	空间解析几何中	图形
$x^2 - y^2 = 0$	两个过 z 轴且相交的平面	
$xyz = 0$	三个坐标面: $x = 0, y = 0, z = 0$	
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$	$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转而成的旋转椭球面	

方 程	空间解析几何中	图形
$x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$	$\begin{cases} x^2-\frac{y^2}{4}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕y轴旋转而成的单叶旋转双曲面	
$x^2-y^2-z^2=1$	$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕x轴旋转而成的双叶旋转双曲面	

方　程	空间解析几何中	图形
$x^2 - y^2 = 4z$	双曲抛物面面	
$x^2 + y^2 = 4z$	$\begin{cases} y^2 = 4z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕z 轴旋转而成的旋转抛物面