第五节　第二类曲面积分

习题　10-5

1. 当 Σ 与 xOy 平面内的有界闭区域 D 重合时，第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与二重积分有什么关系?

解　$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中右端的正负号分别对应于左端 Σ 的上侧与下侧.

2. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ 的外侧，计算:

(1) $\oiint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　(2 $\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　(3) $\oiint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中 Σ_1 是上半球面的上侧，Σ_2 是下半球面的下侧，Σ_1，Σ_2 在 xOy 面上的投影域都为

$$D_{xy}:\ x^2+y^2\le a^2.$$

(1) $\oiint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$

(2) $\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint\limits_{D_{xy}}(a+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_{xy}}(a-\sqrt{a^2-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

(3) $\oiint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_1} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_2} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint\limits_{D_{xy}}(a+\sqrt{a^2-x^2-y^2})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_{xy}}(a-\sqrt{a^2-x^2-y^2})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4a\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho = \frac{8}{3}\pi a^4.$$

3. 设Σ是由平面$x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$所围四面体的表面外侧，计算:

(1) $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; (2 $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; (3) $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma} y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

解 如图 10.34 所示，$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$，其中

Σ_1: $z=0$，取下侧;

Σ_2: $z=1-x-y$，取上侧;

Σ_3: $x=0$，取后侧;

Σ_4: $y=0$，取左侧.

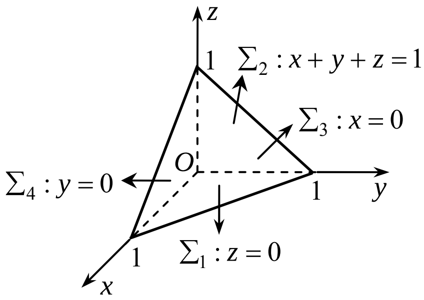

图 10.34

(1) Σ_3和 Σ_4在xOy面上的投影都为 0，Σ_1和Σ_2在xOy面上的投影都为

$$D_{xy}:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x.$$

$$\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_3} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_4} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{xy}}(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{6}.$$

(2) Σ_1和 Σ_4在yOz面上的投影都为 0，Σ_2和 Σ_3在yOz面上的投影都为

$$D_{yz}:\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1-y.$$

$$\oiint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_2} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_3} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_4} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_2} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_3} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}(1-y-z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{yz}} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}(1-y-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{12}.$$

(3) Σ_1和 Σ_3在zOx面上的投影都为 0，Σ_2和 Σ_4在zOx面上的投影都为

$$D_{zx}:\ 0\le x\le 1,\ 0\le z\le 1-x.$$

$$\oiint\limits_{\Sigma} y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Sigma_1} y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma_2} y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma_3} y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma_4} y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Sigma_2} y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma_4} y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\iint_{D_{zx}}(1-x-z)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{D_{zx}}0\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-z)^3\mathrm{d}z=\frac{1}{20}.$$

4. 计算下列第二类曲面积分:

(1) $\iint_\Sigma xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$位于第一卦限的部分，取下侧;

(2) $\oiint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Sigma$为旋转抛物面$z=x^2+y^2$与平面$z=1$所围空间立体的曲面外侧;

(3) $\iint_\Sigma (x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$上满足$x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\le 1$的那一部分的下侧;

(4) $\iint_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中$\Sigma$为柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$及$z=3$所截得的在第一卦限内的部分的前侧;

(5) $\iint_\Sigma [f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$f(x,y,z)$为连续函数，$\Sigma$为平面$x-y+z=1$在第一卦限部分的上侧.

解 (1) 如图 10.35 所示，Σ: $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$，取后侧，Σ在yOz面上的投影域为

$$D_{yz}: y^2+z^2\le R^2,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$$

$$\iint_\Sigma xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iint_{D_{yz}}yz\sqrt{R^2-y^2-z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\rho^3\mathrm{d}\rho=-\frac{1}{15}R^5.$$

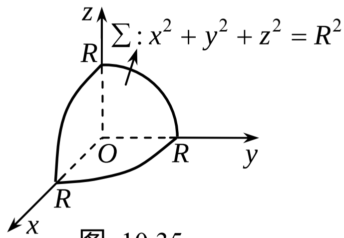

图 10.35

(2) 如图 10.36 所示，$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$，其中

Σ_1: $x=\sqrt{z-y^2}$，取前侧,

Σ_2: $x=-\sqrt{z-y^2}$，取后侧,

Σ_3: $z=1$，取上侧.

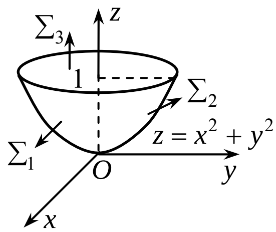

图 10.36

Σ_1和 Σ_2在yOz面上的投影都为

$$D_{yz}: -1\le y\le 1,\ y^2\le z\le 1.$$

$\sum_3$ 在 yOz 面上的投影为 0.

$$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{\Sigma_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{\Sigma_3} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint\limits_{D_{yz}} -\sqrt{z-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 0$$

$$= 2\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 4\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^1 \sqrt{z-y^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}.$$

(3) 如图 10.37 所示，$\sum$: $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\sum$ 在 zOx 面及 xOy 面上的投影域分别为

$$D_{zx}: 0 \le z \le 1,\ 0 \le x \le z,$$

$$D_{xy}: x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

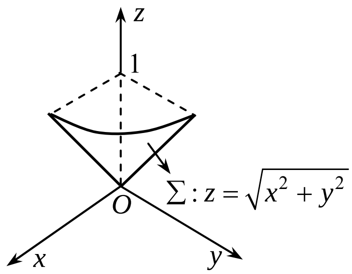

图 10.37

$$\iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \int\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D_{zx}} z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 z^2\mathrm{d}z \int_0^z \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^2 \mathrm{d}\rho = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{6}.$$

(4) 如图 10.38 所示，$\sum$ 在 xOy 面上的投影为 0，$\sum$ 在 zOx 面及 yOz 面上的投影域分别为

$$D_{zx}: 0 \le z \le 3,\ 0 \le x \le 1,$$

$$D_{yz}: 0 \le z \le 3,\ 0 \le y \le 1.$$

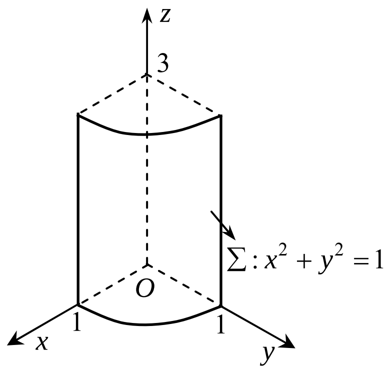

图 10.38

$$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{D_{zx}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^3 \mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y-\int_0^3 \mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\pi.$$

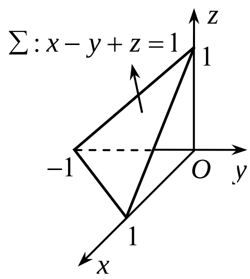

图 10.39

(5) 如图 10.39 所示，$\sum$: $x-y+z=1$，位于第四卦限，取上侧，其上任一点的法向量为 $(1,-1,1)$，单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1),$$

根据两类曲面积分的关系，可得

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z-[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\{[f(x,y,z)+x]+[2f(x,y,z)+y]+[f(x,y,z)+z]\}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2=\frac{1}{2}.$$

5. 把第二类曲面积分

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化为第一类曲面积分，其中

(1) $\sum$ 为平面 $3x+2y+z=1$ 位于第一卦限的部分，并取上侧;

(2) $\sum$ 为抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

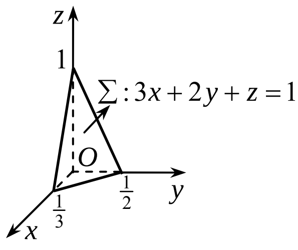

图 10.40

解 (1) 如图 10.40 所示，$\sum$: $3x+2y+z=1$，取上侧. $\sum$ 上任一点 (x,y,z) 处的法向量为 $(3,2,1)$，单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,2,1),$$

从而根据两类曲面积分的关系，有

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{14}}\iint_{\Sigma}[3P(x,y,z)+2Q(x,y,z)+R(x,y,z)]\mathrm{d}S.$$

(2) 如图 10.41 所示，Σ: $z=8-(x^2+y^2)$ $(0\le z\le 8)$，取上侧．Σ 上任一点 (x,y,z) 处的法向量为 $(2x,2y,1)$，单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x,2y,1),$$

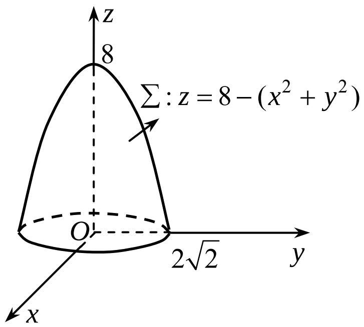

图 10.41

从而根据两类曲面积分的关系，有

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{2xP(x,y,z)+2yQ(x,y,z)+R(x,y,z)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S.$$

6. 已知流体速度 $\boldsymbol{v}=xy\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$，封闭曲面 Σ 是由平面 $x=0$，$y=0$，$z=1$ 及锥面 $z^2=x^2+y^2$ 所围立体在第一卦限部分的表面，试求由 Σ 的内部流向其外部的流量．

解 如图 10.42 所示，$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$，其中

Σ_1：$z=\sqrt{x^2+y^2}$，取下侧；

Σ_2：$x=0$，取后侧；

Σ_3：$y=0$，取左侧；

Σ_4：$z=1$，取上侧．

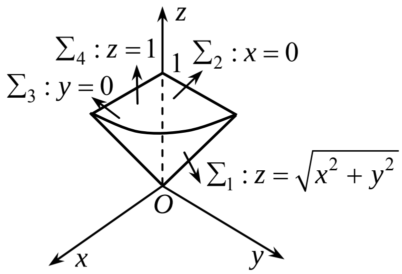

图 10.42

由 Σ 的内部流向其外部的流量为

$$\oiint_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+\iint_{\Sigma_3}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_4}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

易知

$$\iint_{\Sigma_2}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_3}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\iint_{\Sigma_4}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_4}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{1}{3}.$$

Σ_1：$z=\sqrt{x^2+y^2}$，Σ_1 在 xOy 面上的投影域为

$$D_{xy}: x^2+y^2 \le 1,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0.$$

$\sum_1$ 上任一点 (x,y,z) 处的法向量为 $(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1)$，将组合曲面积分化为关于坐标 x,y 的非组合曲面积分，可得

$$\iint_{\Sigma_1} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} [xy\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} + yz\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} + xz]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D_{xy}} [xy\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\sqrt{x^2+y^2}\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\sqrt{x^2+y^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} (\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2 - x\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta\sin\theta + \sin^2\theta + \cos\theta)\mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^3 \mathrm{d}\rho = -\frac{1}{6} + \frac{\pi}{16}.$$

综上所述，可知所求的流量为

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{16} = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{16}.$$