第一章　习题课

极限与连续

- 一、主要内容
- 二、典型例题

下页　返回

一、主要内容

- (一) 函数
- (二) 极限

目录 上页 下页 返回 结束

(一) 函数

函　数
的定义

有关函数
的一些术语

函　数
的性质

奇偶性

单调性

有界性

周期性

分段函数

基本初等函数

反函数

复合函数

初等函数

双曲函数与反双曲函数

1. 函数的定义

定义. 设 x 和y 是两个变量，D是一个给定的数集，如果对于每一个给定的数 x，变量 y 按照一定法则总有**唯一确定**的数值与它对应，则称y 是x 的函数，

记作 $$y = f(x),\ x \in D$$

因变量　自变量　函数的定义域

当$x_0 \in D$时，称$f(x_0)$为函数在点 x_0处的函数值．

目录 上页 下页 返回 结束

2. 有关函数的一些术语

(1) 分段函数

用几个式子表示出来的一个函数.

(2) 基本初等函数

共五类: ① 幂函数 $y = x^{\mu}$ (μ是常数)

② 指数函数 $y = a^{x}$ $(a > 0, a \neq 1)$

③ 对数函数 $y = \log_{a} x$ $(a > 0, a \neq 1)$

④ 三角函数

⑤ 反三角函数

(3) 反函数

定义1 设 $y=f(x), x\in D$，其值域为 R_f.
若对于每一个给定的 $y\in R_f$，通过
$y=f(x)$ 在 D 上总有唯一确定的
数 x 与之对应，则可以确定一个
定义在 R_f 上的函数，记作

$$x=f^{-1}(y) \qquad y\in R_f$$

称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，并
称 $y=f(x)$ 为直接函数.

(4) 复合函数定义

设函数 $y = f(u)$的定义域为 D_f，而函数 $u = \varphi(x)$的值域为 R_φ，若 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$，则函数 $y = f[\varphi(x)]$为x的复合函数.

x：自变量， u：中间变量， y：因变量.

(5) 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用**一个式子表示**的函数,称为**初等函数**.

(6) 双曲函数与反双曲函数

双曲正弦 $\mathrm{sh}\,x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

双曲余弦 $\mathrm{ch}\,x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

双曲正切 $\mathrm{th}\,x=\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

双曲函数常用公式

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

反双曲正弦 $y = \operatorname{arsh} x;$

反双曲余弦 $y = \operatorname{arch} x;$

反双曲正切 $y = \operatorname{arth} x;$

(二) 极限

1. 定义

"ε - N", "ε - X", "ε - δ":

$$\lim f(x) = A \quad (A \in R)$$

过程	$n \to \infty$	$x \to \infty$	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
时刻	N	X		
从此时刻以后	$n > N$	$\lvert x \rvert > X$	$x > X$	$x < -X$
$f(x)$	$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$			

过程	$x \to x_0$	$x \to x_0^+$	$x \to x_0^-$
时刻	δ		
从此时刻以后	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$0<x-x_0<\delta$	$-\delta<x-x_0<0$
$f(x)$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$		

"M - δ"，"M - X"： $\lim f(x)=\infty.$

过程	$x \to x_0$	$x \to \infty$
时刻	δ	X
从此时刻以后	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$\lvert x\rvert>X$
$f(x)$	$\lvert f(x)\rvert>M$	

2. 极限存在的充要条件

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = a$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A.$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = A$

$(a, A \in R)$

证(1) $(\Rightarrow)$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in N^+$，使得

当$n > N$时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$

取 $K_1=\left[\dfrac{N}{2}\right]$，则

当 $k>K_1$ 时，有 $k\ge K_1+1>\dfrac{N}{2}(\ge K_1)$

即 $2k>N$

$\therefore\quad \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,K_1=\left[\dfrac{N}{2}\right],$

当 $k>K_1$ 时，有 $\left|x_{2k}-a\right|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a.$

取 $K_2=\left[\dfrac{N+1}{2}\right]$，则

当 $k>K_2$ 时，有 $k\geq K_2+1>\dfrac{N+1}{2}(\geq K_2)$

即 $2k-1>N$

$\therefore\quad \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,K_2=\left[\dfrac{N+1}{2}\right],$

当 $k>K_2$ 时，有 $\left|x_{2k-1}-a\right|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a.$

$(\Leftarrow)$ 若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = a$, 则

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, K_1,\ K_2 \in N^+,$

当 $k > K_1$ 时，有 $|x_{2k} - a| < \varepsilon$

当 $k > K_2$ 时，有 $|x_{2k-1} - a| < \varepsilon$

取 $N = \max\{2K_1, 2K_2 - 1\}$，则

当 $n > N$时， 同时有 $n > N \geq 2K_1$及$n > N \geq 2K_2 - 1$

从而 $|x_n - a| < \varepsilon$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

3. 函数极限的性质

(1) 局部有界性

(2) 唯一性

(3) 不等式性质：保序性、保号性.

4. 几个重要关系

(1) $\{x_n\}$收敛 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ $\{x_n\}$有界

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} f(x)$在某$\overset{\circ}{U}(x_0)$内无界

(3) 函数极限与其子列极限的关系

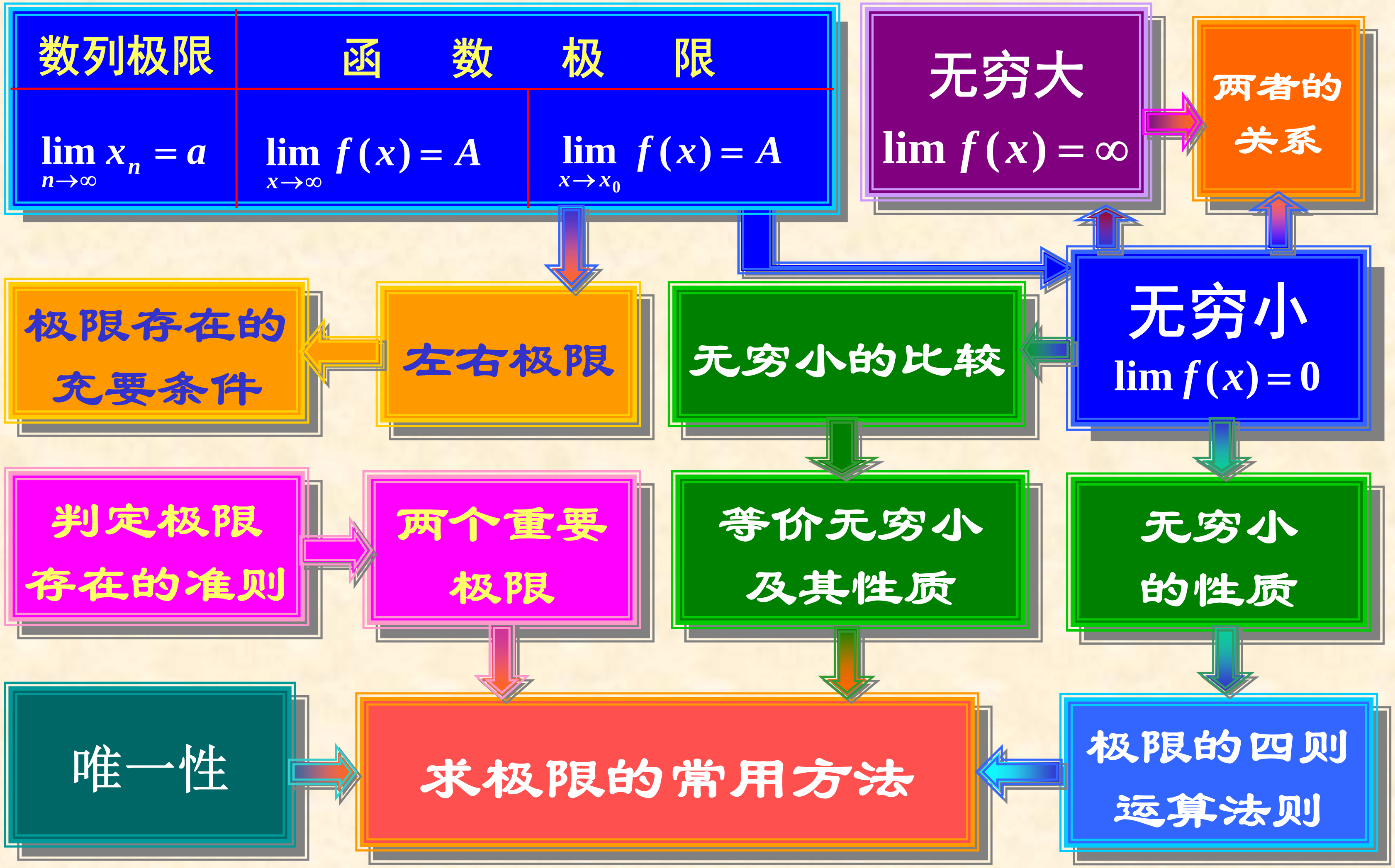
(4) 有极限的变量与无穷小的关系

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

其中$\alpha(x)$是当$x \to x_0$时的无穷小.

(5) 无穷小与无穷大的关系

关系图1



目录 上页 下页 返回 结束

左极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

记作 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ (x \to x_0^-)}} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A.$

右极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

记作 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ (x \to x_0^+)}} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = A.$

定理 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A.$

2、无穷小与无穷大

无穷小: 极限为零的变量称为无穷小.

记作 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad (\text{或} \lim_{x \to \infty} f(x) = 0).$

无穷大: 绝对值无限增大的变量称为无穷大.

记作 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或} \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty).$

无穷小与无穷大的关系

在同一过程中, 无穷大的倒数为无穷小; 恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

(三) 求极限的常用方法

1. 极限定义
2. 极限存在的充要条件
3. 极限运算法则

   四则运算法、复合函数极限运算法
4. 极限存在准则

   夹逼准则、单调有界准则
5. 两个重要极限
6. 有关无穷小的运算

   如：有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小;

   等价无穷小代换法
7. 函数的连续性

3. 有关无穷小的运算

定理1 在同一过程中, 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

定理2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论1 在同一过程中,有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

4. 极限运算法则

定理 设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 其中$B\neq 0$.

推论1 如果$\lim f(x)$存在,而c为常数,则

$$\lim[cf(x)]=c\lim f(x).$$

推论2 如果$\lim f(x)$存在,而n是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

5、判定极限存在的准则

准则 I′　如果当 $x \in U^0(x_0, r)$(或$|x| > M$)时,有

(1) $g(x) \le f(x) \le h(x)$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$,

那末 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$存在,且等于$A$.　(夹逼准则)

准则 II　单调有界数列必有极限.

6. 两个重要极限

(1) $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ $\lim\limits_{某过程} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1;$

(2) $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e}$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e}$ $\lim\limits_{某过程} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$

7. 等价无穷小代换

(1) 定理(等价无穷小代换定理)

设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$ 且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,

则 $$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

(2) 常用等价无穷小

当 $x \to 0$ 时,

$\sin x \sim x$,　　$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$

$\arcsin x \sim x$,　　$\ln(1+x) \sim x$,

$\tan x \sim x$,　　$e^x - 1 \sim x$,

$\arctan x \sim x$,　　$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$　($\alpha \neq 0$ 常数).

注意 不能滥用等价无穷小代换.在用等价无穷小代换时，要用与分子或分母**整体**等价的无穷小代换.

1° 对于代数和中各无穷小,一般不能分别代换. 即遇无穷小“+”,“–”时, 一般**不能**代换;

2° 遇无穷小乘积时，可用各无穷小的等价无穷小进行代换.

8. 函数的连续性

(1) 连续性的运算性质

定理 若函数$f(x), g(x)$在点x_0处连续,则

$$f(x) \pm g(x),\ f(x) \cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)} (g(x_0) \neq 0)$$

在点x_0处也连续.

(2) 初等函数的连续性

定理1 严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.

定理2 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,函数$f(u)$在点$a$连续,则有

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

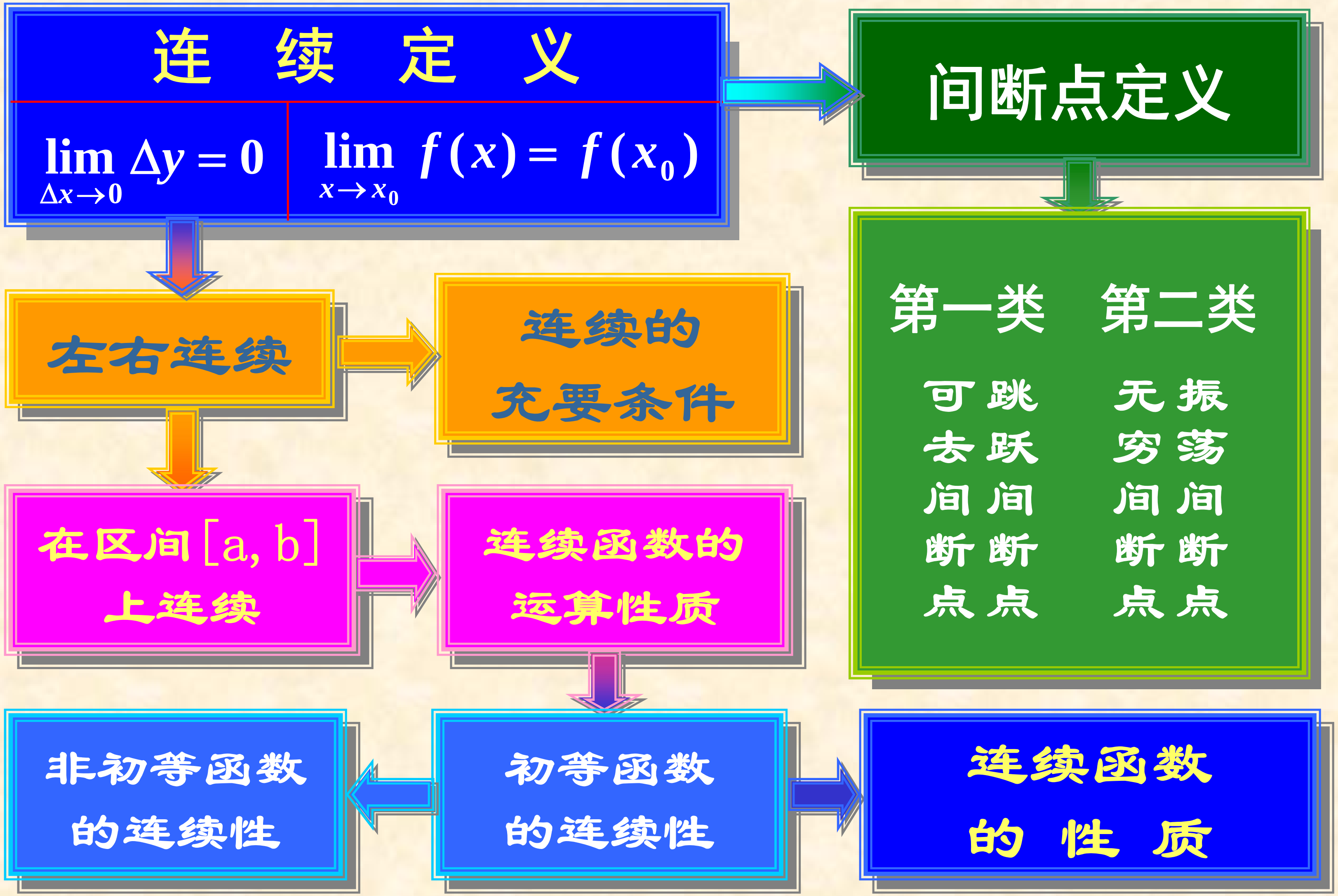
定理3 设函数$u=\varphi(x)$在点$x=x_0$连续,且$\varphi(x_0)=u_0$,而函数$y=f(u)$在点$u=u_0$连续,则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点$x=x_0$也连续.

定理4 基本初等函数在定义域内是连续的.

定理5 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

定义区间是指包含在定义域内的区间.

关系图2



连续定义
$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$
$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
间断点定义
第一类
第二类
可去间断点
跳跃间断点
无穷间断点
振荡间断点
左右连续
连续的充要条件
在区间[a, b]上连续
连续函数的运算性质
非初等函数的连续性
初等函数的连续性
连续函数的性质

1、连续的定义

定义1　设函数 $f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，如果当自变量的增量Δx趋向于零时，对应的函数的增量Δy也趋向于零，即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \quad 或 \quad \lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

那末就称函数 $f(x)$在点x_0连续，x_0称为$f(x)$的连续点.

定义2　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$

2、单侧连续

若函数$f(x)$在$(a, x_0]$内有定义，且$f(x_0 - 0) = f(x_0)$，则称$f(x)$在点x_0处<u>左连续</u>；

若函数$f(x)$在$[x_0, b)$内有定义，且$f(x_0 + 0) = f(x_0)$，则称$f(x)$在点x_0处<u>右连续</u>.

3、连续的充要条件

定理 函数$f(x)$在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 是函数$f(x)$在 x_0 处既左连续又右连续.

4、间断点的定义

函数$f(x)$在点x_0处连续必须满足的三个条件：

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

设 $f(x)$在x_0的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$内有定义，

如果上述三个条件中有　一个不满足，则称

函数 $f(x)$在点 x_0处不连续 (或间断)，并称

点 x_0为$f(x)$的不连续点 (或间断点).

5、间断点的分类

根据： $f(x_0^-)$与$f(x_0^+)$是否同时存在 .

间断点 x_0		$f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$	
第一类	可去	$f(x_0^-)=f(x_0^+)$，但 $f(x_0^-)=f(x_0^+)\neq f(x_0)$ 或$f(x_0)$无意义	同时存在
	跳跃	$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$	
第二类	无穷	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$	至少有一个不存在
	振荡	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在 $(\neq\infty)$ 当$x\to x_0$时，$y=f(x)$在某直线 $y=A$上下方来回摆动 .	
	其他		

6、 闭区间上连续函数的性质

定理1(最大值和最小值定理) 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

定理2(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

定理 3(零点定理) 设函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$)，那末在开区间(a,b)内至少有函数 $f(x)$的一个零点，即至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使 $f(\xi)=0$.

定理 4（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

那末，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=c \quad (a<\xi<b)$.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

二、典型例题

例1 用"$\varepsilon - N$"定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$$

证 令 $x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}$

则 $$|x_n-1|=\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}$$

$$=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n^2}$$

$\forall \varepsilon > 0,$ 要使 $\left| x_n - 1 \right| < \varepsilon,$

只要 $\dfrac{a^2}{n^2} < \varepsilon,$

即 $n > \dfrac{|a|}{\sqrt{\varepsilon}}$

故取 $N = \left[\dfrac{|a|}{\sqrt{\varepsilon}} \right]$, 则当$n > N$时，有

$$\left| x_n - 1 \right| < \varepsilon,$$

即 $$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1$$

例2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

证 令 $x_n=\sqrt[n]{n}-1$,则 $x_n>0 \quad (n\geq 2)$

$$\because \quad n=(x_n+1)^n$$

$$=1+nx_n+\frac{n(n-1)}{2}x_n^2+\ldots+x_n^n$$

$$>1+\frac{n(n-1)}{2}x_n^2 \quad (n\geq 2)$$

即 $x_n^2<\dfrac{2}{n}$, 亦即 $0<x_n<\sqrt{\dfrac{2}{n}}$

$\because \quad \forall \varepsilon > 0$, 要使

$$|x_n| = |\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$$

只要 $\sqrt{\dfrac{2}{n}} < \varepsilon$, 即 $n > \dfrac{2}{\varepsilon^2}$

故取 $N = \left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right]$, 则当 $n > N$ 时

恒有 $|x_n| = |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}-1\right)\right]^{\frac{1}{x^3}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{(1+\sin x)\cos x}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\sin x)\cos x}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 原式 $=e^{\frac{1}{2}}$.

例4 设$p(x)$是多项式,且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-x^3}{x^2}=2$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)}{x}=1$,求$p(x)$.

解 $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-x^3}{x^2}=2$,

$\therefore$ 可设$p(x)=x^3+2x^2+ax+b$(其中a,b为待定系数)

又$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)}{x}=1$,

$\therefore\ p(x)=x^3+2x^2+ax+b\sim x\quad (x\to 0)$

从而得 $b=0,a=1$. 故 $p(x)=x^3+2x^2+x$

例5 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}]}{2^x-1}=3$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解 依题设，知

$$\lim_{x\to 0}\ln[1+\frac{f(x)}{\sin x}]=0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}[1+\frac{f(x)}{\sin x}]=\lim_{x\to 0}e^{\ln[1+\frac{f(x)}{\sin x}]}=e^0=1$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=0,\quad \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0,$

于是当$x\to 0$时，$\ln[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}]\sim\dfrac{f(x)}{\sin x}$

又$\because \quad 2^x - 1 = e^{x\ln 2} - 1 \sim x\ln 2 \quad (x \to 0)$

$$\therefore \quad 3 = \lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}]}{2^x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{\sin x}}{x\ln 2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x\sin x} \quad (\frac{0}{0})$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 3\ln 2.$$

练习题

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + xf(x)}{x^3} = 0$, 求

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x + xf(x)}{x^3}$.

下列推导是否正确?

推导1 $\because \quad \sin x \sim x \quad (x \to 0)$

$$\therefore \quad 0 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + xf(x)}{x^3} \neq \lim_{x\to 0} \frac{x + xf(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + f(x)}{x^2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}[1 + f(x)] = 0 \quad 故 \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -1.$$

错误原因: 遇无穷小“+”, “−”时, 一般不能用各项等价无穷小进行代换; 须对分子或分母“整体”代换.

推导2 依题设，知

$$\lim_{x\to 0}[\sin x + xf(x)] = 0$$

即 $$\lim_{x\to 0} x\cdot\left[\frac{\sin x}{x} + f(x)\right] = 0$$

$$\cancel{\therefore}\quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x} + f(x)\right] = 0$$

故 $$\lim_{x\to 0} f(x) = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -1.$$

错误原因： 由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$

$$\nRightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

推导3

$$\because \quad 0 \neq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+f(x)}{x^2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}[1+f(x)]=0 \quad 故 \quad \lim_{x\to 0} f(x)=-1.$$

错误原因： 和的极限运算法则使用的前提：各项极限都要存在.

正确解答:

方法1. (1) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{[\sin x + xf(x)] - \sin x}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin x + xf(x)}{x^3} \cdot x^2 - \frac{\sin x}{x}\right]$$

$$= 0 \cdot 0 - \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = -1.$$

(2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x + xf(x)}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{[\sin x + xf(x)] + (\tan x - \sin x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{[\sin x + xf(x)] + (\tan x - \sin x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x + xf(x)}{x^3} + \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$= 0 + \lim_{x \to 0} \frac{\tan x \cdot (1 - \cos x)}{x^3}$$

$$= 0 + \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

方法2. (1)

$$\because \quad 0 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x + xf(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x} + f(x)}{x^2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}[\frac{\sin x}{x} + f(x)] = 0$$

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -1.$

方法3. (1) 依题设，知

$$\sin x + xf(x) = o(x^3)$$

$\therefore \quad xf(x) = o(x^3) - \sin x$, 即 $\quad f(x) = \dfrac{o(x^3)}{x} - \dfrac{\sin x}{x}$

从而 $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{o(x^3)}{x} - \dfrac{\sin x}{x}]$

$$= \lim_{x\to 0}[\frac{o(x^3)}{x^3}\cdot x^2 - \frac{\sin x}{x}]$$

$$= 0\cdot 0 - 1 = -1$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x + xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x + o(x^3) - \sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

类似题: 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=2$, 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(答案: 12)

例6 讨论 $f(x)=\begin{cases} |x-1|, & |x|>1 \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1 \end{cases}$ 的连续性．

解 将$f(x)$改写成

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<-1 \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & -1\le x\le 1 \\ x-1, & x>1 \end{cases}$$

由初等函数的连续性，知

$f(x)$在 $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$内连续.

当$x=-1$时,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(1-x) = 2. \because \lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \cos\frac{\pi x}{2} = 0.$$ 故$f(x)$在$x=-1$间断.

当$x=1$时, $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \cos\frac{\pi x}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0$$

$$\because \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

故 $f(x)$在 $x=1$连续.

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$连续.

练习题

2. $x=0$是 $f(x)=\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$的(**B**)间断点.

(*A*) 跳跃　　(*B*) 可去　　(*C*) 无穷　　(*D*) 振荡

解　$\because$　$f(0^-)=\dfrac{2}{1+0}-1=1,$ $=$　$f(0^+)=0+1=1$

而 $f(x)$在$x=0$处无定义

$\therefore$ $x=0$是$f(x)$的第一类可去间断点 .

例7 试确定常数 a 使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax)=0.$

解 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则

$$0=\lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{t^3}}-\frac{a}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}-a}{t}$$

$$\therefore\quad \lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{t^3-1}-a\right]=0$$

故 $$-1-a=0$$

因此 $$a=-1.$$

例8 当a取何值时,

函数 $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{3}{x}}, & x<0,\\ x+a, & x\geq 0,\end{cases}$ 在$x=0$处连续.

解 $\because\ f(0)=a,\ f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{3}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\{[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}}\}^{-3}=e^{-3}$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

$\because \quad f(x)$在点$x=0$处连续

$\Leftrightarrow \ f(0^-)=f(0^+)=f(0),$

即 $\quad e^{-3}=a,$

$\therefore$ 故当且仅当 $\quad a=e^{-3}$时,

函数 $f(x)$在$x=0$处连续.

例9 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}\sin\dfrac{\pi}{2}x+a+bx}{x^{2n}+1}$

求：1. $f(x)$ 的表达式；

2. 确定 a,b 的值，使得

$f(x)$在$x=-1$和$x=1$处连续.

解 1. **注意到:**

$$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\begin{cases}0, & |x|<1;\\ 1, & x=\pm1\\ +\infty, & |x|>1.\end{cases}$$

$$\therefore \quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}x}{x}, & |x|>1 \\ a+bx, & |x|<1 \\ \dfrac{1+a-b}{2}, & x=-1 \\ \dfrac{1+a+b}{2}, & x=1 \end{cases}$$

2. $$f(-1^-) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{x}$$

$$= \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{-1} = 1$$

$$f(-1^+) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (a+bx) = a-b$$

$$f(-1) = \frac{1+a-b}{2}$$

$$\because \quad \lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$$

$$\Leftrightarrow f(-1^-) = f(-1^+) = f(-1)$$

$$\therefore \quad 1 = a - b = \frac{1 + a - b}{2}$$

故 $a - b = 1$ ①

$$f(1^+) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x} = 1$$

$$f(1^-) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (a + bx) = a + b$$

$$f(1) = \frac{1 + a + b}{2}$$

$$\because \quad \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

$$\Leftrightarrow f(1^-) = f(1^+) = f(1)$$

$$\therefore \quad a+b=1=\frac{1+a+b}{2}$$

故 $\quad a+b=1 \qquad ②$

从而由 ①+②，知 当$a=1, b=0$时，

$f(x)$在$x=-1$和$x=1$处连续．

例10 设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且$f(0)=f(1)$，

证明必有一点$\xi\in[0,1]$使得$f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$.

证 令 $F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$,

则 $F(x)$在$[0,\frac{1}{2}]$上连续.

$\because F(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)$, $\quad F(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2})$,

讨论: 若$F(0)=0$, 则 $\xi=0$, $\quad f(0+\frac{1}{2})=f(0)$;

若$F(\frac{1}{2})=0$, 则 $\xi=\frac{1}{2}$, $\quad f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$;

若$F(0)\neq 0, F(\frac{1}{2})\neq 0$, 则

$$F(0)\cdot F(\frac{1}{2}) = -[f(\frac{1}{2}) - f(0)]^2 < 0.$$

由零点定理知, $\exists \xi \in (0,\frac{1}{2})$, 使$F(\xi)=0$.

即 $f(\xi+\frac{1}{2}) = f(\xi)$成立.

综上所述, 必有一点$\xi \in [0,\frac{1}{2}] \subset [0,1]$,

使 $f(\xi+\frac{1}{2}) = f(\xi)$ 成立.