总复习(二)

求导法、方程根的确定

- 一、主要内容
- 二、典型例题

下页 返回

一、主要内容

1. 求导法

(1) 导数定义；

(2) 导数存在的充要条件；

(3) 基本求导公式；

(4) 四则运算；

(5) 反函数求导法；

(6) 复合函数求导法；

(7) 参数方程确定的函数的求导法；

(8) 隐函数求导法，对数求导法；

(9) 高阶导数求导法.

(10) 积分上限函数求导法.

2. 导数与定积分的应用

基本应用

(1) 切线；

(2) 函数的单调性；

(3) 极值；

(4) 最大、最小值；

(5) 曲线的凹凸；

(6) 拐点；

(7) 曲率：$k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(8) 面积；

(9) 旋转体体积；
已知平行截面
面积的立体的 体积；

(10) 弧长.

综合应用

(1) 方程根的确定:

① 闭区间上连续函数的零点定理;

② 罗尔定理;

③ 函数的单调性.

(2) 等式与不等式的证明;

(3) 函数的最大、最小值.

二、典型例题

1. 求导法

例1 设 $f(x)=(x^{100}-1)g(x)$, 其中 $g(x)$在 $x=1$处连续，且 $g(1)=1$, 求 $f'(1)$.

解 由导数定义，得

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{100}-1)g(x)-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x^{99}+x^{98}+\cdots+1)g(x)=100\,g(1)=100.$$

类似题 设 $f(x)=(x^2-a^2)g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义，求 $f'(a)$ 存在的充分必要条件.

答案： (1)当 $a=0$ 时, $f'(a)$ 存在充分必要条件是

$$\lim_{x\to 0} xg(x)\text{存在；}$$

(2)当 $a\neq 0$ 时, $f'(a)$ 存在充分必要条件是

$$\lim_{x\to a} g(x)\text{存在；}$$

例2 设 $f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 求 $f'(0)$.

解法1

$$f'(x)=1\cdot(x+2)\cdots(x+n)+(x+1)\cdot(x+3)\cdots(x+n)+$$
$$\cdots+(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)\cdot 1$$

$$f'(0)=n!+\frac{n!}{2}+\frac{n!}{3}+\cdots+\frac{n!}{n}=n!(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}).$$

解法2 (用对数求导法)

$$\ln f(x)=\ln(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$$

$$=\ln(x+1)+\ln(x+2)+\cdots+\ln(x+n)$$

两边对x求导： $$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\cdots+\frac{1}{x+n}$$

$$f'(x)=f(x)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\cdots+\frac{1}{x+n}\right)$$

$$\therefore\quad f'(0)=f(0)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=n!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

例3 设函数 $y=y(x)$由方程

$$y=\int_0^{2x+y}\sin t^2dt-\int_0^{x^2}e^{-\sqrt{t}}dt$$

$(其中\ x>0)$所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解
$$y'=\sin(2x+y)^2\cdot(2x+y)'-e^{-\sqrt{x^2}}\cdot(x^2)'$$
$$=\sin(2x+y)^2\cdot(2+y')-e^{-x}\cdot 2x$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=y'=\frac{2\sin(2x+y)^2-2xe^{-x}}{1-\sin(2x+y)^2}.$$

类似题 $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\arctan\frac{y}{x}}$，求 y''.

解 两边取对数

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln a+\arctan\frac{y}{x}$$

两边对x求导数

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(\frac{y}{x})'$$

$$x+yy'=x^2\cdot\frac{xy'-y}{x^2},\qquad y'=\frac{x+y}{x-y}$$

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$y'' = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)'$$

$$= \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{2(xy'-y)}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^2} \qquad (x \neq y, x \neq 0)$$

例4 $y=\lim\limits_{t\to+\infty}x(\frac{t+x}{t-x})^t$，求 y'.

解 $y=\lim\limits_{t\to+\infty}x(\frac{t+x}{t-x})^t=x\lim\limits_{t\to+\infty}[1+(\frac{t+x}{t-x}-1)]^t$

$$=x\lim_{t\to+\infty}[(1+\frac{2x}{t-x})^{\frac{t-x}{2x}}]^{\frac{2x}{t-x}\cdot t}=xe^{2x}$$

$$\therefore\quad y'=(xe^{2x})'=e^{2x}+xe^{2x}\cdot 2$$

$$=e^{2x}(1+2x)$$

类似题

1. 设 $f(x)$在$x=\mathrm{e}$处具有连续的一阶导数，且

$$f'(\mathrm{e})=-2\mathrm{e}^{-1}，\text{求} \lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}}).$$

解 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})=f'(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})'$$

$$=f'(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}}(\cos\sqrt{x})'$$

$$=f'(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})$$

$$= \lim_{x\to 0^+} f'(\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}})\mathrm{e}^{\cos\sqrt{x}}\left(-\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$= f'(\mathrm{e})\cdot \mathrm{e}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\boxed{f'(\mathrm{e}) = -2\mathrm{e}^{-1}}$$

$$= 1.$$

2. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，证明：

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{\int_a^x [f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t\right\}=f(x)-f(a),$$

$$x\in(a,b)$$

证 $\because\ \int_a^x f(t+h)\mathrm{d}t \overset{u=t+h}{=\!=\!=} \int_{a+h}^{x+h} f(u)\,\mathrm{d}u$

$$\therefore\ \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left\{\int_a^x [f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\int_{a+h}^{x+h} f(u)\mathrm{d}u-\int_a^x f(u)\mathrm{d}u}{h}\qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\int_{a+h}^{x+h} f(u)du - \int_a^x f(u)\,du}{h} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(a+h)}{1}$$

$$= f(x) - f(a).$$

3. 设 $0<|x|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})$.

解 $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$

$$=(x)'+(x^2)'+(x^3)'+\cdots+(x^n)'$$

$$=(x+x^2+x^3+\cdots+x^n)'$$

$$=[(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n)-1]' = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-1\right)'$$

$$=\frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})\cdot(-1)}{(1-x)^2}$$

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

$$=\frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})\cdot(-1)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{(n+1)x^n}{x-1}+\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

当$0<|x|<1$时，

可以证明：

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)x^n=0$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)x^n}{x-1}+\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}\right]=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

例5 设 $\begin{cases} x = \mathrm{e}^{-t} \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2)\,\mathrm{d}u \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0} =$ ___0___ .

2010年考研

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\ln(1+t^2)}{-\mathrm{e}^{-t}} = -\mathrm{e}^{t}\ln(1+t^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

$$= \frac{-[\mathrm{e}^{t}\ln(1+t^2) + \frac{2t\,\mathrm{e}^{t}}{1+t^2}]}{-\mathrm{e}^{-t}}$$

类似题

1. 求对数螺线 $\rho = e^{\theta}$ 在点 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线方程.

解 此曲线的参数方程为
$$\begin{cases} x = e^{\theta}\cos\theta \\ y = e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

点 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 对应的直角坐标为: $(0, e^{\frac{\pi}{2}})$.

$$\because \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{\cancel{e^{\theta}}(\cos\theta + \sin\theta)}{\cancel{e^{\theta}}(-\sin\theta + \cos\theta)}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$$

$\therefore$ 所求切线方程为: $y - e^{\frac{\pi}{2}} = -(x - 0)$, 即

$$x + y - e^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

2. 求曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ 2y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$ 在点(0,2)处的切线方程.

解 $$2\frac{dy}{dt} - (1\cdot y^2 + t\cdot 2y\frac{dy}{dt}) + e^t = 0$$

$$2(1-ty)\frac{dy}{dt} = y^2 - e^t,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - e^t}{2(1-ty)}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$x = 0, y = 2 \leftrightarrow t = 0$$

$$\because \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=0} = \left.\frac{\frac{y^2-e^t}{2(1-ty)}}{\frac{1}{1+t^2}}\right|_{t=0} = \frac{3}{2}.$$

$\therefore$ 所给曲线在点 $(0,2)$处的切线方程为:

$$y-2=\frac{3}{2}(x-0),$$

即 $$y=\frac{3}{2}x+2.$$

3. 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为 $\underline{y - \frac{1}{2}\ln 2 = -x + \frac{\pi}{4}}$.

2013考研

解 对应于 $t=1$ 的点：$(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\ln 2)$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = t$$

在该点处法线的斜率：

$$k = -\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}} = -1$$

在该点处法线方程：

$$y - \frac{1}{2}\ln 2 = -(x - \frac{\pi}{4}).$$

例6 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$, 求 $f^{(n)}(0)\quad(n\geq 3)$.

解法1 由莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''$$

$$+\cdots+uv^{(n)}$$

取 $u=\ln(1+x),\quad v=x^2$

$$u^{(k)}=[\ln(1+x)]^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

得 $$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\cdot x^2+n\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}\cdot 2x$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}\cdot 2+0$$

$$\therefore\quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!$$

$$=(-1)^{n-3}\frac{n!}{n-2},\quad (n\ge 3).$$

解法2 由麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

及 $f(x)=x^2\ln(1+x)$

$$=x^2[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-3}}{n-2}x^{n-2}+o(x^{n-2})]$$

$$=x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{n-3}}{n-2}x^n+o(x^n)$$

比较 x^n 的系数，得 $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(-1)^{n-3}}{n-2}$

$$\therefore\quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}\frac{n!}{n-2}.$$

类似题

1. 设$y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$,求 $y^{(n)}$.

解 $$y=\frac{4x^2-1}{x^2-1}=\frac{4x^2-4+3}{x^2-1}=4+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\because \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}},\quad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

$$\therefore y^{(n)}=\frac{3}{2}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

2. 设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$，求 $y^{(n)}$.

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2 \ -3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x \ =\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$\boxed{\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n \ \cos(4x+n\frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

例7　设 $g(x)$处处连续，且$g(1)=5$, $\int_0^1 g(x)dx=2$

及 $f(x)=\frac{1}{2}\int_{-x}^{0} t^2 g(x+t)dt$, 求 $f''(1)$与 $f'''(1)$.

解　$f(x)=\frac{1}{2}\int_{-x}^{0} t^2 g(x+t)dt \overset{u=x+t}{=\!=\!=} \frac{1}{2}\int_0^x (u-x)^2 g(u)du$

$=\frac{1}{2}\int_0^x (x^2-2xu+u^2)g(u)du$

$=\frac{1}{2}[x^2\int_0^x g(u)du-2x\int_0^x ug(u)du+\int_0^x u^2 g(u)du]$

$$f'(x)=\frac{1}{2}[x^2\int_0^x g(u)du-2x\int_0^x ug(u)du+\int_0^x u^2g(u)du]'$$

$$=\frac{1}{2}\{[2x\int_0^x g(u)du+\cancel{x^2g(x)}]-$$

$$2[\int_0^x ug(u)du+\cancel{x\cdot xg(x)}]+\cancel{x^2g(x)}\}$$

$$=x\int_0^x g(u)du-\int_0^x ug(u)du$$

$$f'(x) = x\int_0^x g(u)du - \int_0^x ug(u)du$$

$$f''(x) = [1\cdot\int_0^x g(u)du + \cancel{xg(x)}] - \cancel{xg(x)}$$

$$\therefore \quad f''(1) = \int_0^1 g(u)du = 2$$

$$f'''(x) = [\int_0^x g(u)du]' = g(x)$$

$$\therefore \quad f'''(1) = g(1) = 5.$$

例8 设 $f(x)$ 是区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上的单调、可导函数，

且满足 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$,

其中 f^{-1} 是 f 的反函数，求 $f(x)$.

2007年考研

解 在 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$ 两边对x求导，

得 $f^{-1}[f(x)]\cdot f'(x)=x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$

即 $$x\cdot f'(x)=x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$$

亦即 $f'(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$, $x\in(0,\dfrac{\pi}{4}]$

故 $f(x)=\displaystyle\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

$=\displaystyle\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}(\sin x+\cos x)$

$=\ln(\sin x+\cos x)+C,$

由题设 $\displaystyle\int_0^{f(0)}f^{-1}(t)\mathrm{d}t=0,$

由定积分的保号性知 $f(0)=0$，于是 $C=0,$

因此 $f(x)=\ln(\sin x+\cos x),\quad x\in[0,\dfrac{\pi}{4}].$

$f'(x)>0, x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$

$f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$上 ↗

故 $f^{-1}(x)$单调增

$0\le f^{-1}(x)\le\dfrac{\pi}{4}$

2. 方程根的确定

思路： $f(x)=0$

1° 确定$f(x)$的单调区间；

2° 在各单调区间的端点处

查$f(x)$的值或极限是否异号 .

例9 证明：方程

$$\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$$

在$(0,+\infty)$内有且只有两个不同的 实根.

证 $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2 x}\,dx$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\sqrt{2}[\int_0^{\pi}\sin x dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx]$$

$$=4\sqrt{2}.$$

原方程恒等变形为: $\ln x - \frac{x}{e} + 4\sqrt{2} = 0$

令 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 4\sqrt{2}$, 则

$f(x)$在$(0,+\infty)$内可导，且 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = -\frac{x-e}{ex}$,

令 $f'(x) = 0$, 得驻点: $x = e$.

当$0 < x < e$时， $f'(x) > 0$, $f(x)$在$(0, e]$上单调增

$f(e) = 4\sqrt{2} > 0$, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = -\infty$,

$\therefore$ $f(x)$在$(0, e)$内只有一个零点;

当 $x > e$时，$f'(x) < 0$,

$f(x)$在$[e, +\infty)$上单调减少,

$f(e) = 4\sqrt{2} > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{e} + \frac{4\sqrt{2}}{x}\right) = -\infty,$$

$\therefore f(x)$在$(e, +\infty)$内只有一个零点 .

综上所述：$f(x)$在$(0, +\infty)$内有且只有两个不同的零点，即命题成立 .

例10 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$, 则

$f'(x)$的零点个数为(**B**). **2008考研**

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

解 $g(x)=f'(x)=\ln(2+x^2)\cdot 2x$

$x=0$是 $g(x)$的零点,

又 $\because$ $g'(x)=2[\ln(2+x^2)+\dfrac{2x^2}{2+x^2}]>0$

$g(x)=f'(x)$单调增加

$\therefore g(x)=f'(x)$仅有一个零点.

例11 设 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且当 $x>a$时，

$f'(x)>k>0$，其中k为常数，证明：

若 $f(a)<0$，则方程 $f(x)=0$在$(a,+\infty)$内

有且仅有一个实根．

证 1° 至多性 $\because$ $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且

$$f'(x)>k>0,\ x\in(a,+\infty)$$

$\therefore$ $f(x)$在$[a,+\infty)$上单调增加，

故 $f(x)$在$(a,+\infty)$内至多有一个零点 ．

2° 存在性

需证： $\exists\, x_0 \in (a,+\infty)$,
使 $f(x_0) > 0$

$\because \quad f(a) < 0,$

而由 $f'(x) > k > 0, x \in (a,+\infty)$, 两边积分得

$$\int_a^x f'(x)dx > \int_a^x kdx > 0, \quad x \in (a,+\infty)$$

即 $f(x) - f(a) > k(x-a), \quad x \in (a,+\infty)$

亦即 $f(x) > f(a) + k(x-a), \quad x \in (a,+\infty)$

$$\because \quad \lim_{x\to+\infty} [f(a) + k(x-a)] = +\infty$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

从而必存在 $x_0 \in (a,+\infty)$, 使 $f(x_0) > 0$

(事实上，只要取 x_0满足：$f(a) + k(x_0 - a) > 0$,

$x_0 > a - \dfrac{f(a)}{K}$ 即可).

由零点定理, $\exists \xi \in (a, x_0)$, 使 $f(\xi) = 0$,

故 $f(x)$在$(a,+\infty)$内有且只有一个零点 ,

即方程 $f(x) = 0$在$(a,+\infty)$内有且只有一个实根 .

例12 讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点的个数.

解 等价问题是: $(4x + \ln^4 x) - (4\ln x + k) = 0$ 有几个不同的实根.

令 $f(x) = \ln^4 x - 4\ln x + 4x - k$, 则

$$f'(x) = \frac{4\ln^3 x}{x} - \frac{4}{x} + 4 = \frac{4(\ln^3 x - 1 + x)}{x}, \quad (x > 0)$$

驻点: $x = 1$

当$0<x<1$时， $f'(x)=\dfrac{4[\ln^3 x-(1-x)]}{x}<0$

$\therefore$ $f(x)$在$(0,1]$上单调减少；

当$x>1$时， $f'(x)=\dfrac{4[\ln^3 x+(x-1)]}{x}>0$

$\therefore$ $f(x)$在$[1,+\infty)$上单调增加.

于是 $f(1)=\min\limits_{x\in(0,+\infty)} f(x)=4-k$

(1) 当$k<4$, 即$4-k>0$时， $f(x)\geq f(1)>0$,

此时，$f(x)$无零点，从而两曲线无 交点；

(2) 当 $k = 4$, 即 $4 - k = 0$时， $f(x)$有唯一零点，

$f(1) = 0$, 从而两曲线只有一个交 点；

(3) 当 $k > 4$, 即 $4 - k < 0$时， $f(1) < 0$,

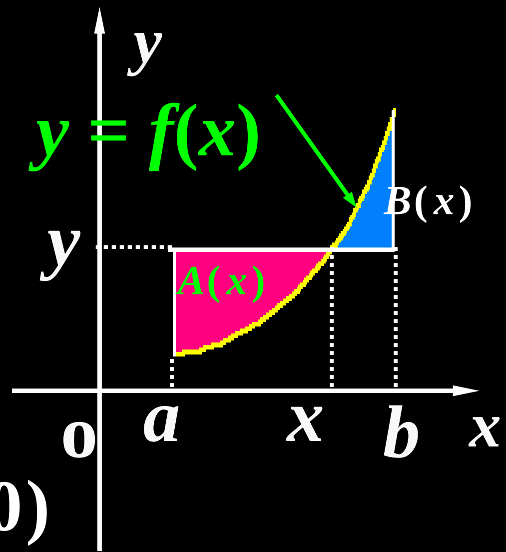
$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} [(\ln x)(\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [(\ln x)(\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

此时，$f(x)$有两个零点，从而曲线 有两个交点 .

例13 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f'(x)>0, f(a)\geq 0,$ 证明：对图示的两个面积函数 $A(x)$和$B(x)$存在唯一的 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\frac{A(\xi)}{B(\xi)}=2017.$$



分析 $\dfrac{A(\xi)}{B(\xi)}=2017$

$$\Leftrightarrow A(\xi)-2017B(\xi)=0 \quad (B(\xi)\neq 0)$$

令 $F(x)=A(x)-2017B(x)$

则问题转化为证明： $F(x)$在(a,b)内有唯一的零点 .

证 令 $F(x)=A(x)-2017B(x)$

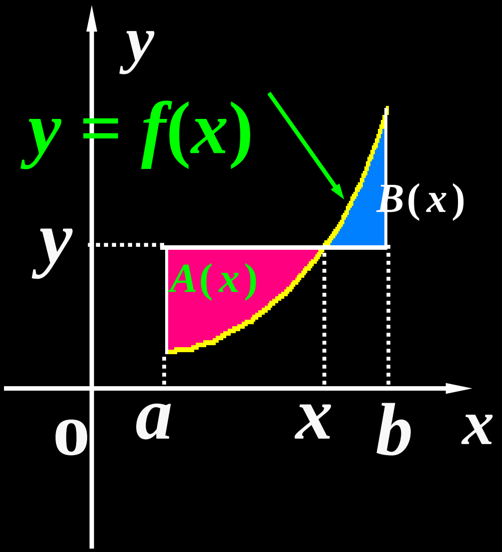
$\because \quad f'(x)>0, \quad x\in[a,b]$

$\therefore \quad f(x)$在$[a,b]$上单调增加,

又 $\because \quad f(a)\geq 0,$

$\therefore \quad \forall\ x\in(a,b]$

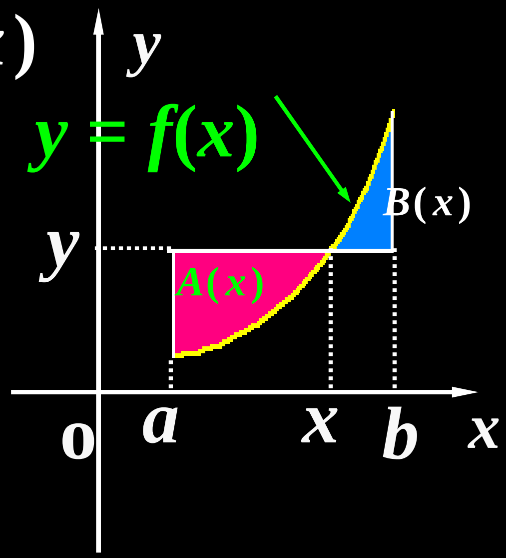
有 $\quad f(x)>f(a)\geq 0$



于是 $A(x)=\boxed{f(x)(x-a)}-\int_a^x f(t)dt$

矩形面积

$B(x)=\int_x^b f(t)dt-f(x)(b-x)$



$A(a)=0,\quad B(b)=0.$

1° 零点的存在性

$\because\quad f(x)$在$[a,b]$上可导

$\therefore\ A(x),B(x),F(x)$均在$[a,b]$上可导，且

$$A'(x)=[f'(x)(x-a)+\cancel{f(x)}]-\cancel{f(x)}$$

$$=f'(x)(x-a)>0\qquad(\forall\ x\in(a,b])$$

$\therefore\quad A(x)$在$[a,b]$上单调增加

故 $\forall\ x\in(a,b]$， 有 $A(x)>A(a)=0$

$$A(b)>A(a)=0$$

$$B'(x)=-\cancel{f(x)}-[f'(x)(b-x)-\cancel{f(x)}]$$

$$=-f'(x)(b-x)<0\qquad(\forall\ x\in[a,b))$$

$\therefore\quad B(x)$在$[a,b]$上单调减少

故 $\forall\, x \in [a,b]$， 有 $B(x) > B(b) = 0$

$$B(a) > B(b) = 0$$

$$\therefore \quad F(a) = A(a) - 2017\,B(a)$$

$$= 0 - 2017\,B(a) < 0$$

$$F(b) = A(b) - 2017\,B(b)$$

$$= A(b) - 2017 \cdot 0 > 0$$

由零点定理知，$F(x)$在(a,b)内至少有一个零点 .

2° 零点的至多性

依题设，$f'(x)>0,\quad x\in[a,b]$

$\therefore\ F'(x)=A'(x)-2017B'(x)$

$$=f'(x)(x-a)+2017f'(x)(b-x)>0$$

$$(\forall\ x\in(a,b))$$

$\therefore\quad F(x)$在$[a,b]$上单调增加，

从而 $\mathrm{F}(x)$在(a,b)内至多有一个零点 .

综上所述：$F(x)$在(a,b)内有唯一零点 ξ，使

$F(\xi)=0$. 又因 $B(x)>0\ \ (x\in(a,b))$

所以命题成立 .

例14 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续且 $f(x)>0$,

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{dt}{f(t)}\ ,$$ 证明:

(1) $F'(x)\ge 2$;

(2) 方程$F(x)=0$在(a,b)内有且仅有一个根 .

证 (1) $\because$ $f(x)$在$[a,b]$上连续

$\therefore$ $F(x)$在$[a,b]$上可导，且

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\ge 2\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}=2.$$

(2) 由 $F'(x) \geq 2 > 0, \quad x \in [a,b]$

可知 $F(x)$在$[a,b]$上单调增加，

$\therefore \quad F(x)$在(a,b)内至多有一个零点 .

$\because \quad f(x) > 0, \quad x \in [a,b]$

$$\therefore \quad F(a) = \int_a^a f(t)dt + \int_b^a \frac{1}{f(t)}dt$$

$$= 0 - \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt < 0$$

$$F(b)=\int_a^b f(t)dt+\int_b^b \frac{1}{f(t)}dt$$

$$=\int_a^b f(t)dt+0>0$$

由零点定理，$F(x)$在(a,b)内至少有一个零点 .

综上所述：$F(x)$在(a,b)内有且只有一个零点，

即方程 $F(x)=0$在(a,b)内有且只有

一个实根 .

例15 设 $f(x), g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数，且 $f(x)g'(x)-f'(x)g(x)\neq 0$, 证明：方程 $f(x)=0$的两个相邻的根之间必有方程 $g(x)=0$的一个根 .

证 **(用反证法)** 设 x_1, x_2为 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的两个相邻的实零点 (不妨设 $x_1<x_2$)，即

$$f(x_1)=f(x_2)=0 \quad (x_1<x_2).$$

假设： 在 x_1与x_2之间不存在 ξ，使 $g(\xi)=0,$

即 $g(x)\neq 0,\quad (\forall x\in(x_1,x_2))$

由 $f(x)g'(x)-f'(x)g(x)\neq 0,$ 知

$$g(x_1)\neq 0,\quad g(x_2)\neq 0$$

令 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},$ 则 $\varphi(x)$在$[x_1,x_2]$上可导，

且 $\varphi(x_1)=\dfrac{f(x_1)}{g(x_1)}=0=\varphi(x_2)=\dfrac{f(x_2)}{g(x_2)}$

由罗尔定理知， $\exists\,\eta\in(x_1,x_2)$ 使 $\varphi'(\eta)=0.$

又 $\because \quad \varphi'(x) = \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$\therefore \quad \exists \eta \in (x_1, x_2)$, 使

$$f(\eta)g'(\eta) - f'(\eta)g(\eta) = 0$$

这与已知条件矛盾！

$\therefore \quad \exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使 $\quad g(\xi) = 0.$

例16 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上以$2T$为周期的连续函数，证明：在每个长度为 T的闭区间上，方程

$$f(x)-f(x-T)=0$$

至少有一个实根.

证 $\forall\ x_0\in R,\ [x_0,x_0+T]$

令 $F(x)=f(x)-f(x-T),\ x\in[x_0,x_0+T]$

则 $F(x)$在$[x_0,x_0+T]$上连续，且

$$F(x_0+T)=f(x_0+T)-f(x_0)$$

$$F(x_0+T)=f(x_0+T)-f(x_0)\overset{\text{周期性}}{=}f(x_0-T)-f(x_0)$$

$$F(x_0)=f(x_0)-f(x_0-T)$$

(1) 若 $f(x_0)-f(x_0-T)=0$，则

x_0, x_0+T 均是所给方程在 $[x_0, x_0+T]$上的实根.

(2) 若 $f(x_0)-f(x_0-T)\neq 0$，则

$$F(x_0+T)F(x_0)=-[f(x_0)-f(x_0-T)]^2<0$$

由零点定理，$\exists\xi\in(x_0, x_0+T)$，使

$$F(\xi)=0$$

即所给方程在 (x_0, x_0+T)上有的实根 ξ.