

# 第五节

## 曲面及其方程

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

# 一、主要内容

## (一) 曲面方程的概念

**引例** 求到两定点  $A(1,2,3)$  和  $B(2,-1,4)$  等距离的点的轨迹方程.

**解** 设轨迹上的动点为  $M(x,y,z)$ , 则  $|AM| = |BM|$ ,

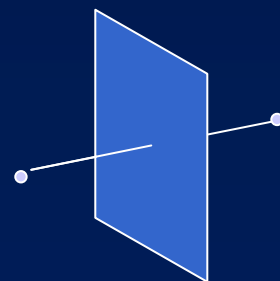
$$\begin{aligned} \text{即 } \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} \\ = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2} \end{aligned}$$

化简得  $2x - 6y + 2z - 7 = 0$ .

**说明:** 动点轨迹为线段  $AB$  的垂直平分面.

显然在此平面上的点的坐标都满足此方程,

不在此平面上的点的坐标不满足此方程.



# 1. 定义

如果曲面  $S$  与方程  $F(x, y, z) = 0$  有下述关系:

(1) 曲面  $S$  上的任意点的坐标都满足此方程;

(2) 不在曲面  $S$  上的点的坐标不满足此方程,

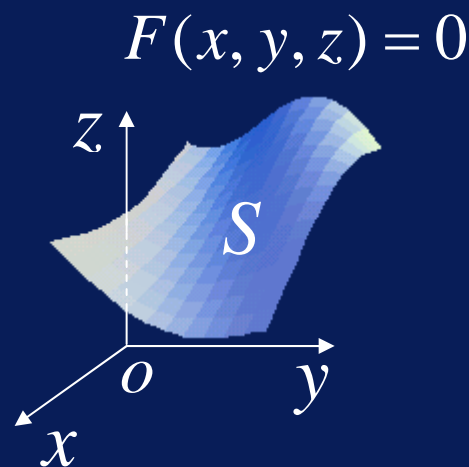
则  $F(x, y, z) = 0$  叫做曲面  $S$  的方程,

曲面  $S$  叫做方程  $F(x, y, z) = 0$  的图形.

曲面的实例:

水桶的表面、台灯的罩子面等.

曲面在空间解析几何中被看成是点的几何轨迹.



以上几例表明研究空间曲面有两个基本问题:

## 2. 两个基本问题

- (1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时,  
求曲面方程.
- (2) 已知方程时, 研究它所表示的几何形状  
(必要时需作图).



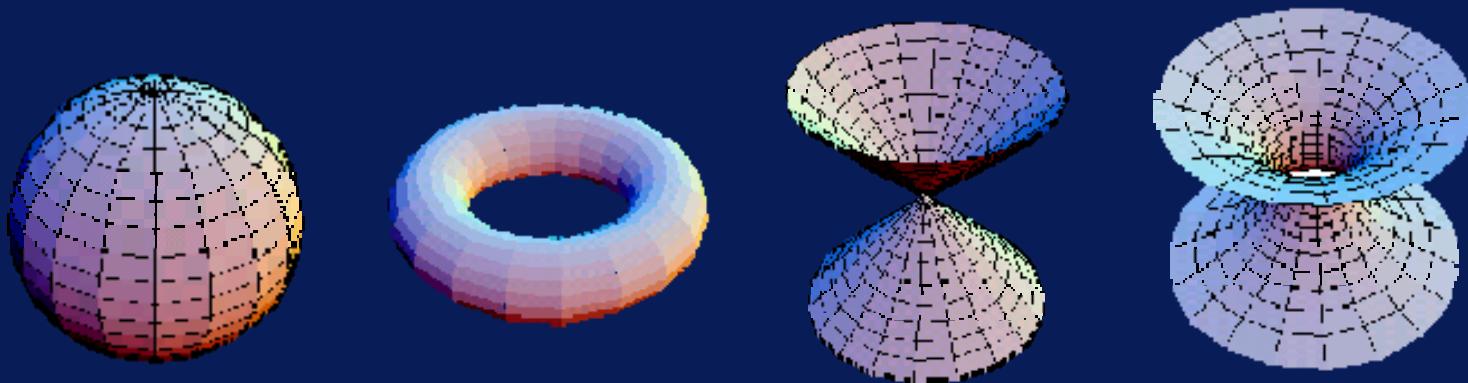
## (二) 几种特殊的曲面及其方程

1. 平面  $Ax + By + Cz + D = 0$

2. 球面 以  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  为球心,  $R$  为半径的  
球面方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

3. 旋转曲面

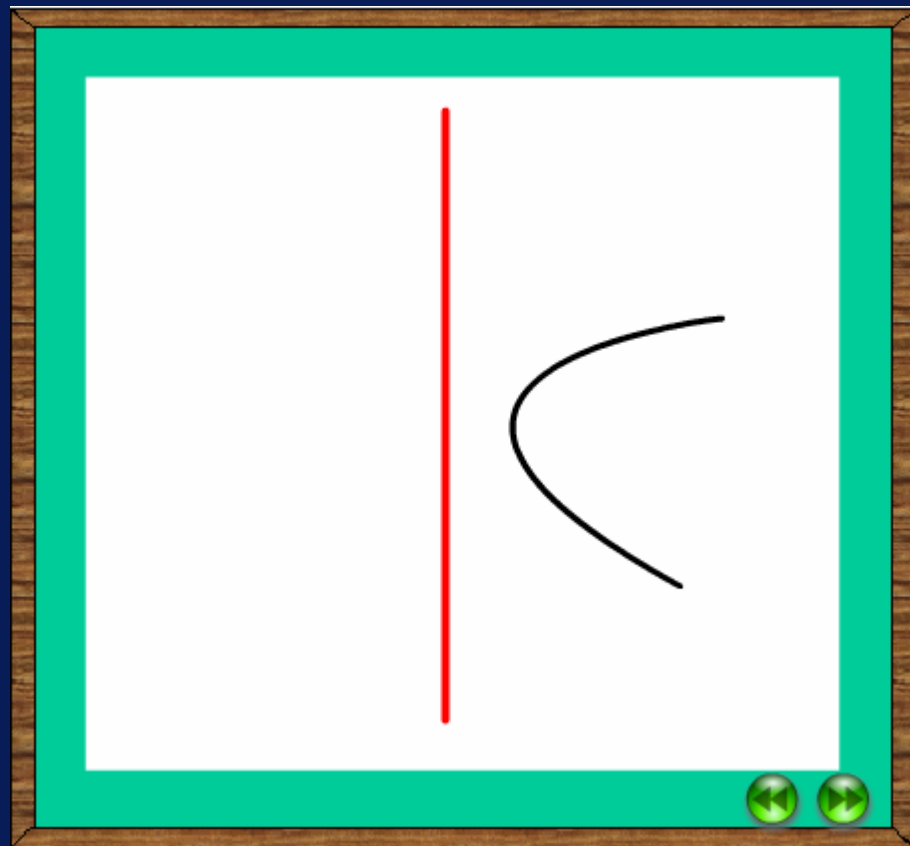


### 3. 旋转曲面

#### (1) 定义

一条平面曲线绕其平面上的一条**定直线**旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**。

这条定直线叫旋转曲面的**轴**。



## (2) 转轴为坐标轴的旋转曲面 $\Sigma$ 方程的特征:

如图,  $\forall M(x, y, z) \in \Sigma$ ,

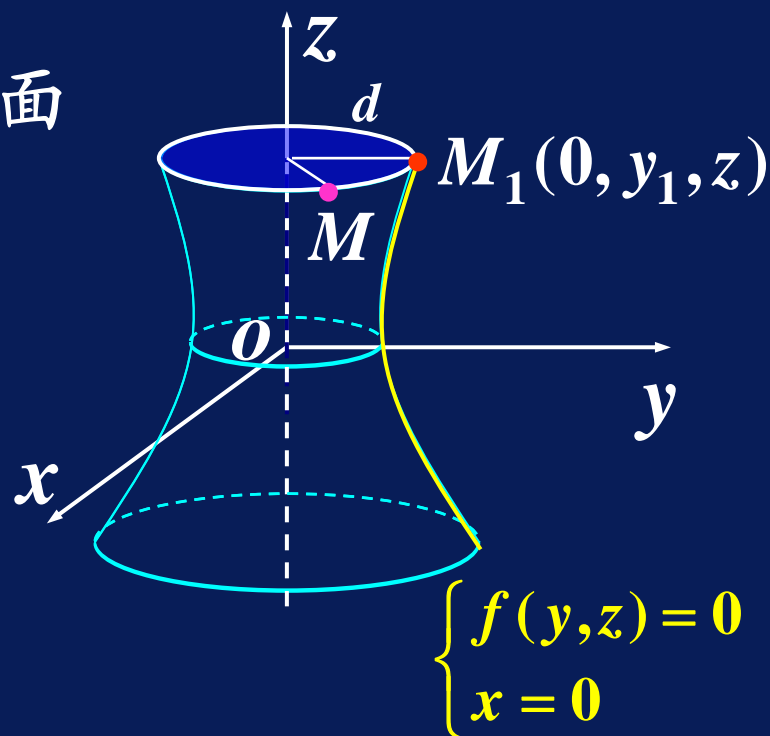
1° 过点  $M$  作垂直于  $z$  轴的平面

2° 点  $M$  到  $z$  轴的距离

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|$$

将  $z = z, y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

代入  $f(y_1, z) = 0$



得旋转曲面  $\Sigma$  的方程:

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

即为  $yo z$  坐标面上的已知曲线  $f(y, z) = 0$  绕  $z$  轴  
旋转一周的旋转曲面方程.

由此可见: 绕  $z$  轴旋转,  $z$  坐标不动, 将

$$y \text{ 换成 } \pm\sqrt{x^2 + y^2}.$$





同理:  $yo z$  坐标面上的已知曲线  $f(y, z) = 0$  绕  $y$  轴旋转一周的旋转曲面方程为

$$f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

绕坐标轴旋转的旋转曲面方程的特点:

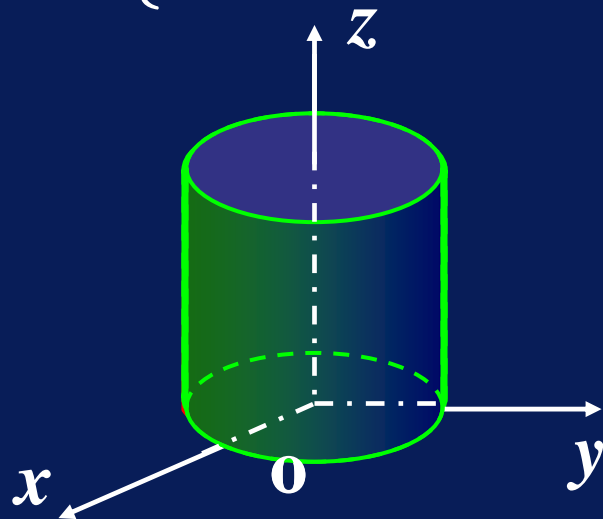
出现某两变量的平方和.



### (3) 常见的旋转曲面

① 圆柱面:  $x^2 + y^2 = a^2$

直线C:  $\begin{cases} y = a \\ x = 0 \end{cases}$  绕z轴旋转而成.



## ② 圆锥面

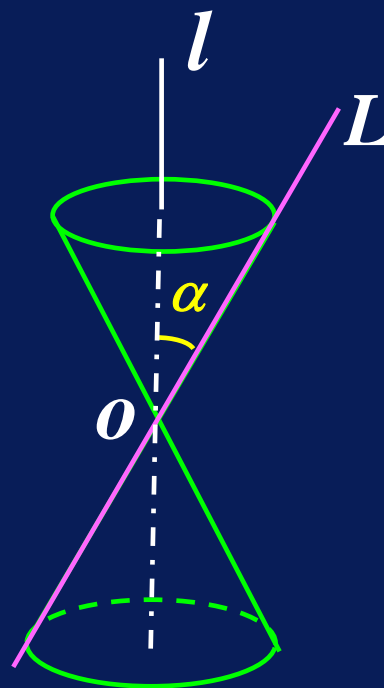
直线  $L$  绕另一条与其相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫圆锥面。

两直线的交点叫圆锥面的

顶点，两直线的夹角  $\alpha$

$(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$  叫圆锥面的半顶角。

试建立顶点在坐标原点，旋转轴为  $z$  轴，半顶角为  $\alpha$  的圆锥面方程。



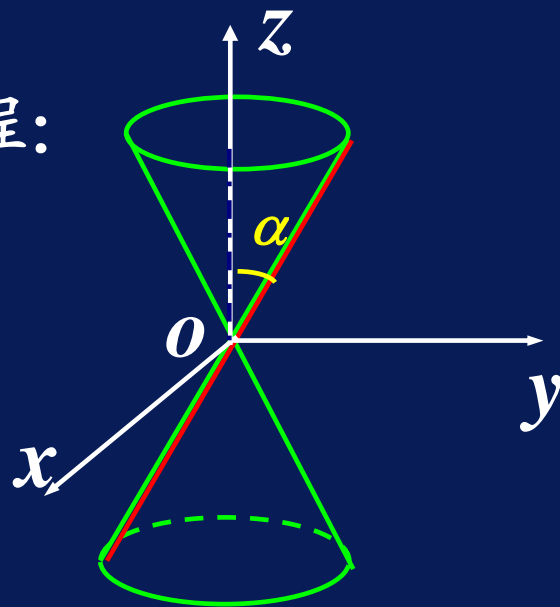
$yo z$ 面上直线: 
$$\begin{cases} z = y \cot \alpha \\ x = 0 \end{cases}$$

绕 $z$ 轴旋转一周所得的圆锥面方程:

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha$$

令  $b = \pm \cot \alpha$ , 则

$$z = b \sqrt{x^2 + y^2}.$$



### ③ 旋转双曲面

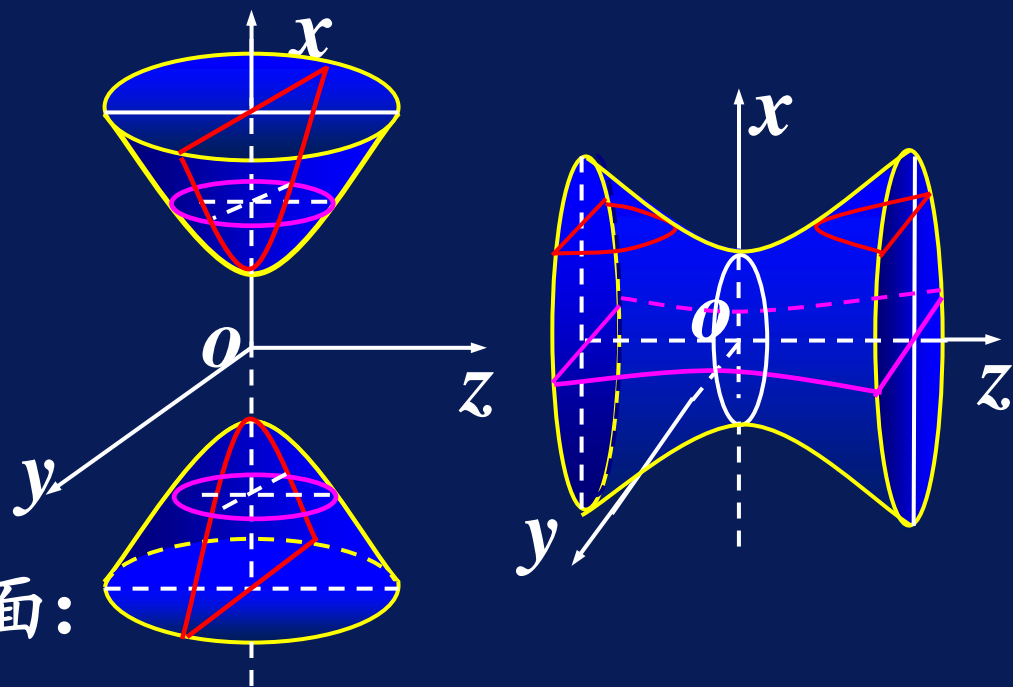
双曲线 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

绕  $x$  轴旋转而成的曲面：

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

双叶双曲面

绕  $z$  轴旋转而成的曲面： 
$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
 单叶双曲面



**注** 一般地，旋转单叶双曲面

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

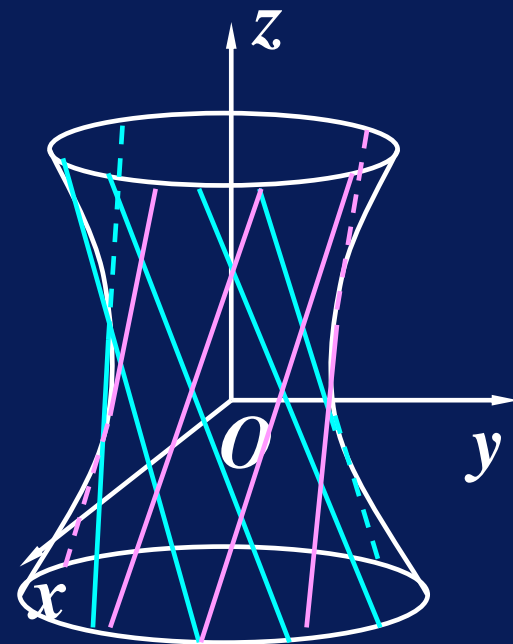
还可成是由直线

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y}{a} = \frac{z}{c}$$

$$\text{或 } \frac{x+a}{0} = \frac{y}{a} = \frac{z}{c}$$

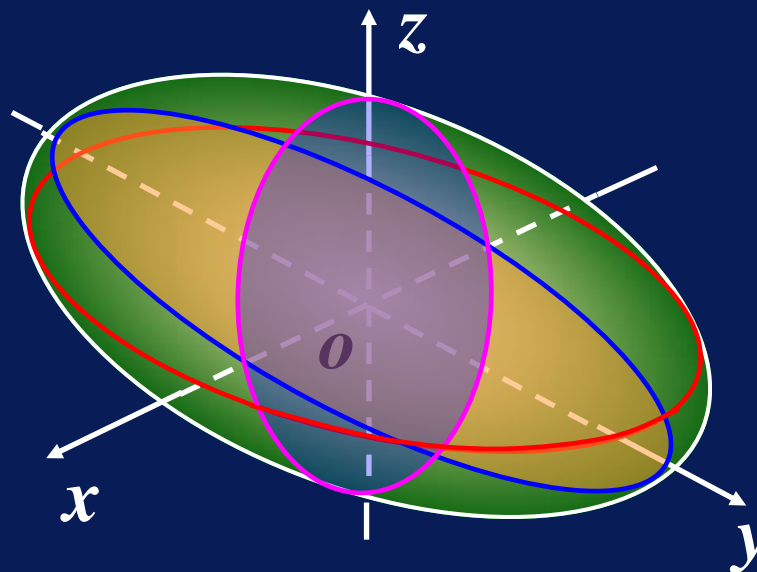
绕 $z$ 轴旋转而成。

因而旋转单叶双曲面又称为直纹面。



#### ④ 旋转椭球面

椭圆  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$



绕  $y$  轴旋转而成的曲面:  $\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



$$\text{椭圆} \begin{cases} \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{绕 } y \text{ 轴和 } z \text{ 轴};$$

$$\text{绕 } y \text{ 轴旋转} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{绕 } z \text{ 轴旋转} \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

旋转  
椭球  
面





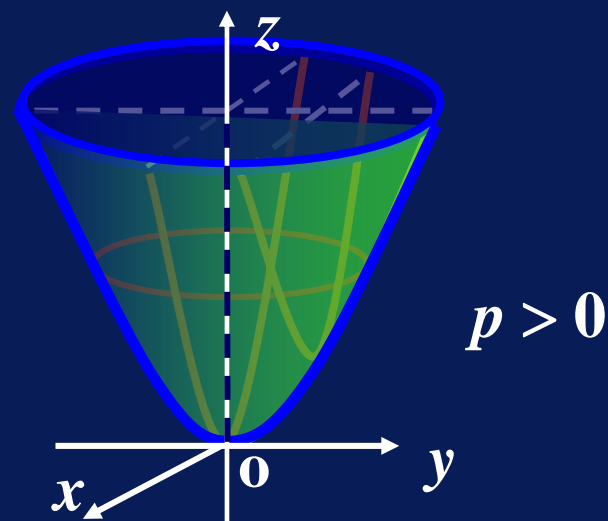
## ⑤ 旋转抛物面

抛物线  $\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$

绕  $z$  轴旋转而成的曲面：

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

—— 旋转抛物面



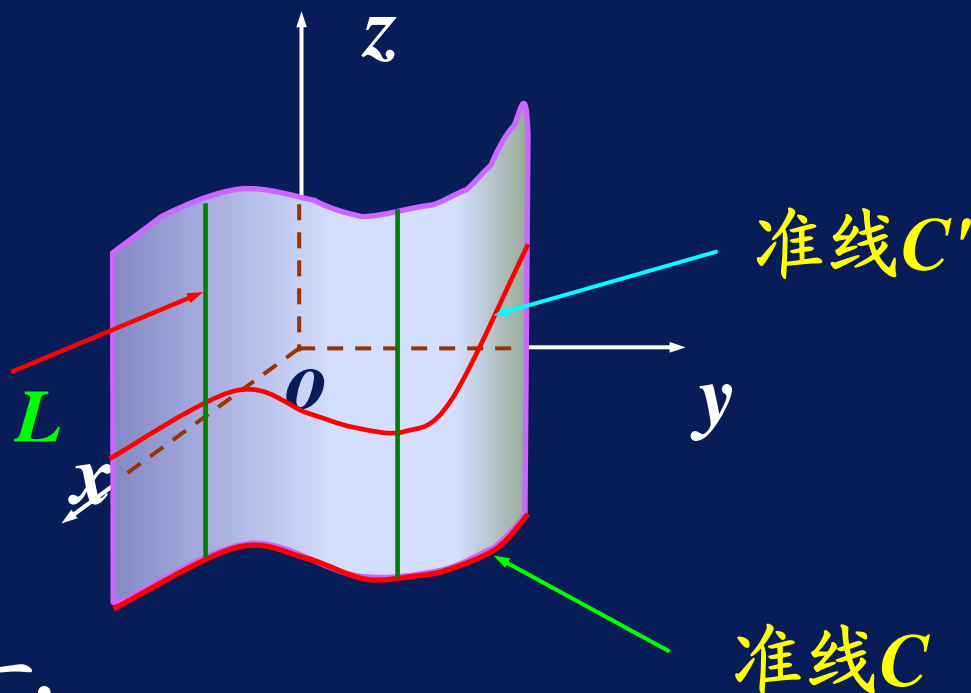
## 4. 柱面

(1) **定义** 平行于定直线并沿定曲线  $C$  移动的直线  $L$  所形成的曲面称为柱面.

这条定曲线  $C$  叫柱面的**准线**, 动直线  $L$  叫柱面的**母线**.

观察柱面的形成过程:

母线  $L$



**注** 柱面的准线不惟一.

## (2) 母线平行于坐标轴的柱面方程的特征

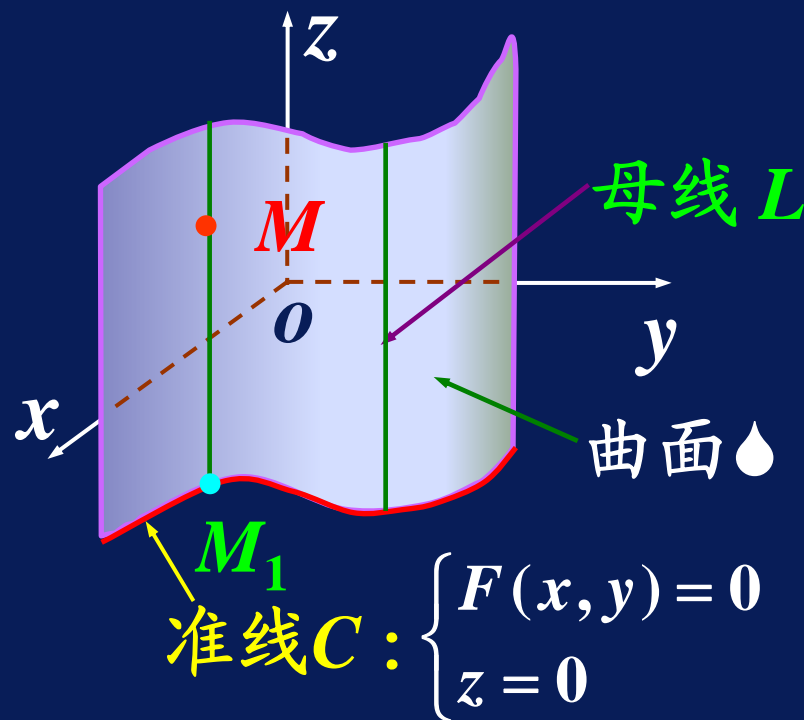
方程中缺少一个变量 (该坐标轴的变量)

如:  $F(x, y) = 0$

表示母线 //  $z$  轴的柱面.

事实上,  $\forall M(x, y, z) \in \Sigma$   
过点  $M$  作垂直于  $xoy$  面的垂线, 则此垂线与  $C$   
的交点  $M_1(x, y, 0)$  的坐标  
必满足:  $F(x, y) = 0$ .

反之, 不在  $\text{曲面}$  上的点  $M$ , 其在  $xoy$  面上的投影点  $M_1$   
不在  $C$  上, 从而其坐标不满足该方程.



类似地,

$G(y,z)=0$ : 表示母线 //  $x$  轴的柱面.

$H(z,x)=0$ : 表示母线 //  $y$  轴的柱面.

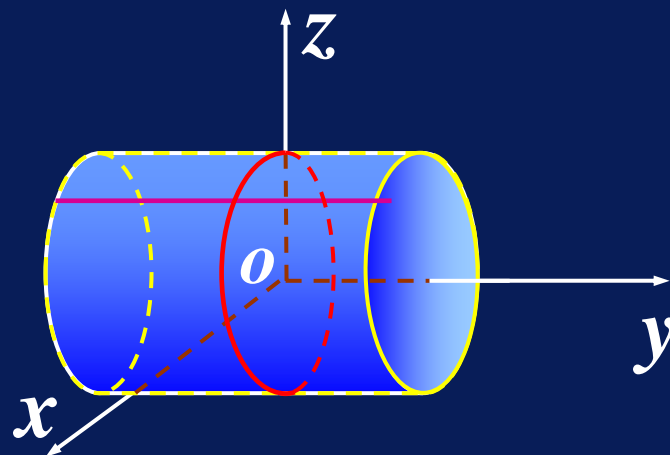
**小结:** 只含  $x, y$  而缺  $z$  的方程  $F(x, y)=0$ , 在空间直角坐标系中表示母线平行于  $z$  轴的柱面, 其准线为  $xoy$  面上曲线  $C$ . (其他类推)



### (3) 常见的二次柱面

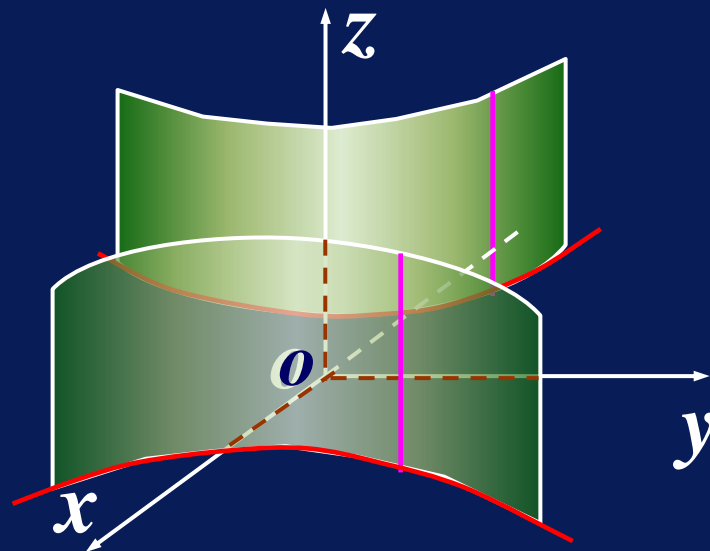
#### ① 椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{母线} // y \text{ 轴}$$



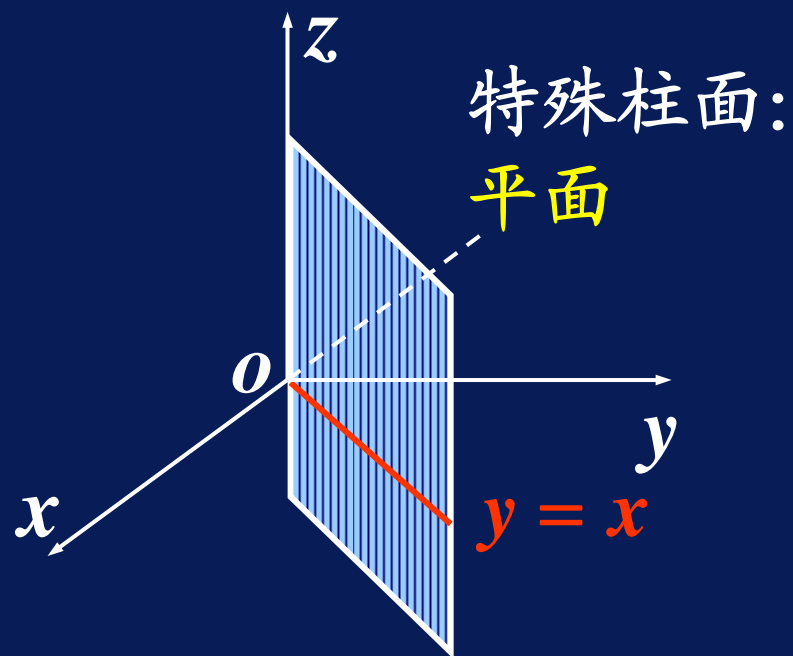
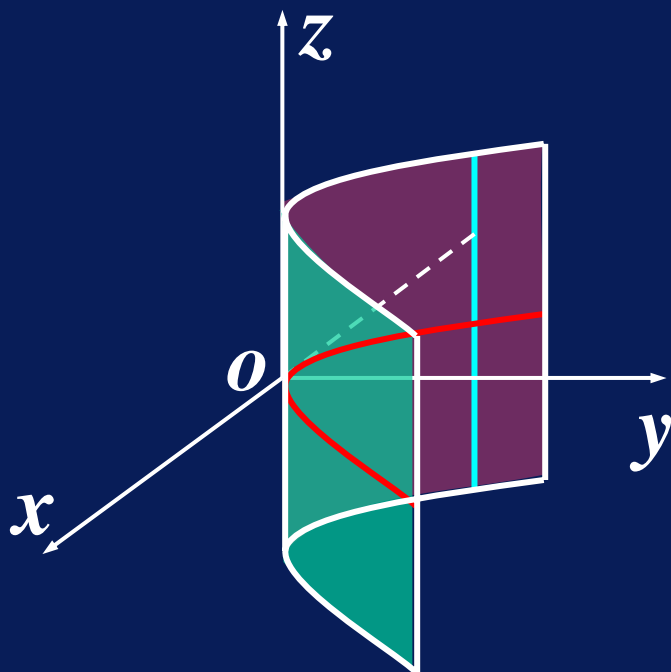
#### ② 双曲柱面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{母线} // z \text{ 轴}$$



### ③ 抛物柱面

$$x^2 = 2py \quad (p > 0) \quad \text{母线} \parallel z \text{ 轴}$$



## 二、典型例题

**例1** 求动点到定点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  距离为  $R$  的轨迹方程.

**解** 设轨迹上动点为  $M(x, y, z)$  依题意  $|M_0M| = R$

即 
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

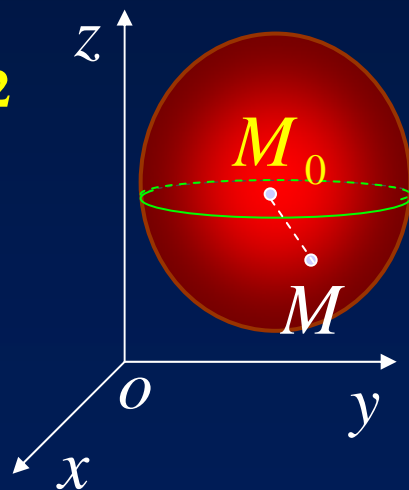
故所求方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

特别, 当  $M_0$  在原点时, 球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  表示上(下)球面.



**例2** 研究方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$  表示怎样的曲面.

**解** 配方得  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5$

此方程表示: 球心为  $M_0(1, -2, 0)$ ,  
半径为  $\sqrt{5}$  的球面.

**说明:** 如下形式的三元二次方程 ( $A \neq 0$ )

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

都可通过配方研究它的图形. 其图形可能是一个球面, 或点, 或虚轨迹.





**例3** 求直线  $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$  绕  $z$  轴旋转而成的  
旋转曲面方程 .

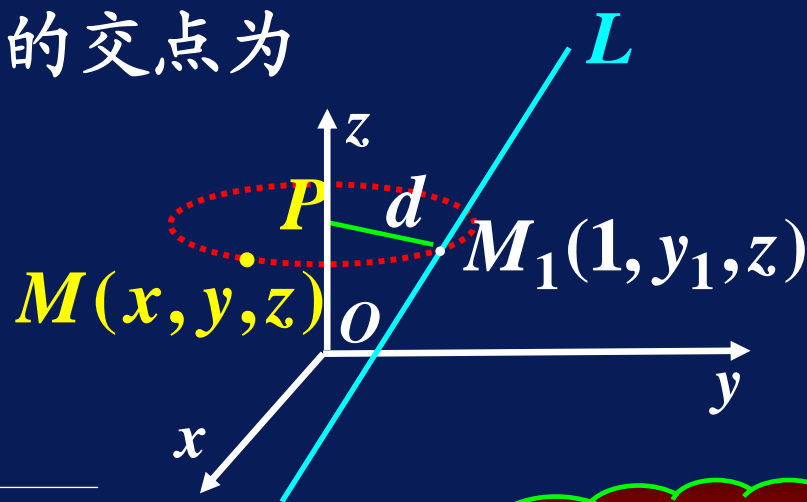
**解**  $\forall M(x, y, z) \in \Sigma$ , 过点  $M$  作垂直于  $z$  轴  
的平面  $\Pi$ , 它与所给直线  $L$  的交点为

$M_1(1, y_1, z)$ , 则  $y_1 = \frac{1}{2}z$ .

$$\therefore |MP| = d = |M_1P|$$

$$\text{即 } \sqrt{x^2 + y^2 + 0} = \sqrt{1 + y_1^2 + 0}$$

故所求旋转曲面方程为:  $x^2 + y^2 - \frac{1}{4}z^2 = 1$ .



旋转单叶  
双曲面



### 三、同步练习

1. 求与原点 $O$ 及 $M_0(2,3,4)$ 的距离之比为  $1:2$  的点的全体所组成的曲面方程.

2. 方程  $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$  的图形是怎样的?

3. 指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形?

(1)  $x = 2;$

(2)  $x^2 + y^2 = 4;$

(3)  $y = x + 1.$



## 四、同步练习解答

1. 求与原点 $O$ 及 $M_0(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的点的全体所组成的曲面方程.

**解** 设 $M(x,y,z)$ 是曲面上任一点,

根据题意有 
$$\frac{|MO|}{|MM_0|} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2}} = \frac{1}{2},$$

所求方程为 
$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{116}{9}.$$



2. 方程  $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$  的图形是怎样的?

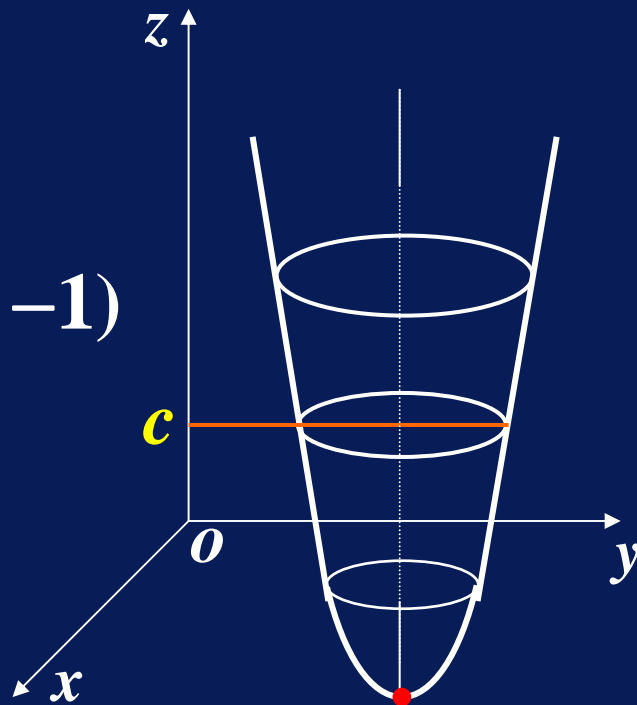
解 根据题意有  $z \geq -1$

用平面  $z = c$  去截图形得圆:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1+c \quad (c \geq -1)$$

当平面  $z = c$  上下移动时, 得到一系列圆.

圆心在  $(1, 2, c)$ , 半径为  $\sqrt{1+c}$



半径随  $c$  的增大而增大. 图形上不封顶, 下封底.

3. 指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形？

(1)  $x = 2$ ;    (2)  $x^2 + y^2 = 4$ ;    (3)  $y = x + 1$ .

解

方程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x = 2$	平行于 $y$ 轴的直线	平行于 $yOz$ 面的平面
$x^2 + y^2 = 4$	圆心在 $(0,0)$ , 半径为 2 的圆	以 $z$ 轴为中心轴的圆柱面
$y = x + 1$	斜率为 1 的直线	平行于 $z$ 轴的平面

