第十二章　微分方程

本章基本要求

1. 了解微分方程、解、通解、初始条件和特解等概念.

2. 会识别下列几种一阶微分方程：变量可分离的方程、齐次方程、一阶线性方程、伯努利方程和全微分方程.

3. 熟悉掌握变量可分离的方程及一阶线性方程的解法.

4. 会解齐次方程和伯努利方程，从中领会用变量代换求解方程的思想.

5. 会解较简单的全微分方程.

6. 知道下列几种特殊的高阶方程

$y^{(n)}=f(x),\ y''=f(x,y'),\ y''=f(y,y')$的降阶法.

7. 了解二阶线性微分方程解的结构.

8. 熟练掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并知道高阶常系数齐次线性微分方程的解法.

9. 掌握非齐次项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与乘积的二阶常系数非齐次线性微分方程的解法.

10. 会用微分方程解一些简单的几何和物理问题.

第一节

微分方程的基本概念

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 问题的提出

什么是微分方程？ 先来看几个引例：

引例1 已知 $\varphi(\pi)=1, \varphi'(x)$连续. 试确定续 $\varphi(x)$使

曲线积分 $\int_L \underbrace{[\sin x-\varphi(x)]\frac{y}{x}}_{P}\,\mathrm{d}x+\underbrace{\varphi(x)}_{Q}\,\mathrm{d}y$与路径无关．

解 依题设，知 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即 $[\sin x-\varphi(x)]\dfrac{1}{x}=\varphi'(x)$

得 $$\boxed{\varphi'(x)+\frac{1}{x}\varphi(x)=\frac{\sin x}{x},\ \varphi(\pi)=1,\quad \varphi(x)=?}$$

引例2 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数 .

$$s''+s'+s=e^{x}$$
$$s(0)=1,\ s'(0)=0.$$
$$s=?$$

解 $s=s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!},\qquad x\in(-\infty,+\infty)$

$$=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$$

$$s'=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots$$

$$s''=\frac{x}{1!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots$$

(二) 基本概念

1.微分方程: 凡含有一个或几个自变量、未知函数以及未知函数的导数或微分的方程叫**微分方程.** 若自变量只有一个，则称为**常微分方程;** 若自变量的个数不止一个，则称为**偏微分方程.**

常微分方程的一般形式:

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0 \qquad (12.1)$$

如:

$$\left.\begin{aligned} & y' = xy, \\ & y'' + 2y' - 3y = e^{x}, \\ & (t^{2} + x)dt + xdx = 0, \end{aligned}\right\}\text{常微分方程}$$

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial x} = x + yz, \\ & \frac{\partial u}{\partial t} = a^{2}\frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}} \end{aligned}\right\}\text{偏微分方程}$$

实质: 联系自变量,未知函数以及未知函数的某些导数(或微分)之间的关系式.

2. 微分方程的阶: 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称之.

一阶微分方程 $F(x, y, y') = 0,$ 隐式方程

$$y' = f(x, y)$$ 显式方程

高阶$(n \geqslant 2)$微分方程

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}).$$

3. 线性与非线性微分方程:

若(12.1)式的左端 F 为 y 及其各阶导数的一次有理整式，则称 (12.1)为线性方程；否则，称它为非线性方程 .

如：$y' + P(x)y = Q(x)$; (关于 y 线性)

$x(y')^2 - 2yy' + x = 0$; (非线性)

$2y\,\mathrm{d}x - (4x + y^2)\,\mathrm{d}y = 0$, (关于 y 非线性)

变形 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2y}{4x + y^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{4x + y^2}{2y}$ (关于x 线性)

4. 微分方程的解

设$y=\varphi(x)$在区间 I 上有 n 阶导数， 若

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0,\quad (\forall x\in I)$$

则称 $y=\varphi(x)\ (x\in I)$为方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n})=0\qquad(12.1)$$

的解; 若方程(12.1)的解 $y=\varphi(x)$由方程:

$$\Phi(x,y)=0$$

所确定，则称 $\Phi(x,y)=0$为(12.1)式的隐式解 .

5. 微分方程的解的分类

(1) 通解: 若 n 阶微分方程 (12.1)的解 $y=\varphi(x;c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 中含 n 个相互独立的任意常数 c_1, $c_2,\cdots,c_n$, 即

$$J=\frac{\partial(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(c_1,c_2,\cdots,c_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial c_n}\\ \frac{\partial\varphi'}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_n}\end{vmatrix}\neq 0$$

则称此解为 (12.1)的通解 .

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

通俗地说，微分方程的通解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这些常数之间没有任何关系.

如： $y' = y,$ 通解 $y = ce^x;$

$y'' + y = 0,$ 通解 $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x;$

(2) 特解：不含有任意常数的解.

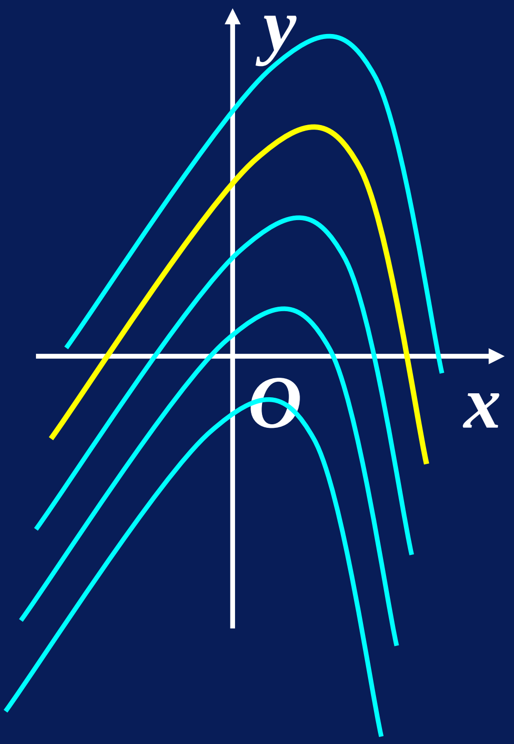
思考 通解是否一定包含了此方程的所有解?

不一定.

如：对于 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2$，

可以验证：$y=-\dfrac{1}{x+c}$ 是其通解，

但不包含特解：$y\equiv 0$.



解的图象： 微分方程的积分曲线.

通解的图象： 积分曲线族.

初始条件： 用来确定 n 阶微分方程

$$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)=0 \qquad (12.1)$$

特解的条件：

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

6. 初值问题: 求微分方程满足初始条件的解的问题.

一阶: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 过定点的积分曲线;

二阶: $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$ 过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

n阶: $\begin{cases} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$ (12.2)

二、典型例题

例1 一条平面曲线通过坐标原点，且该曲线上任意一点$M(x, y)$处切线的斜率等于该点横坐标的平方，求该曲线的方程.

解 根据导数的几何意义，所求曲线 $y = y(x)$ 应满足方程

一阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 \qquad (12.3)$$

此外，未知函数 $y = y(x)$ 还应满足条件

$$x = 0\text{时，} y = 0 \qquad (12.4)$$

将方程(12.3)两端积分得

$$y=\int x^2\,\mathrm{d}x \quad 即 \quad y=\frac{x^3}{3}+C \qquad (12.5)$$

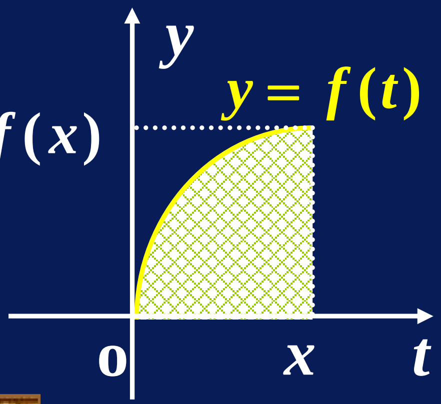
其中C为任意常数.

把条件(12.4)代入(12.5)式得 $C=0$.

将$C=0$代入(12.5)式，即得所求曲线方程

$$y=\frac{x^3}{3}$$

例2 若以连续曲线 $y=f(t)(f(t)\geq 0)$为曲边，以$[0,x]$为底的曲边梯形的面积 与纵坐标 y的$n+1$次幂成正比，且已知 $f(0)=0, f(1)=1$，求$y=f(x)$所满足的微分方程 .



解 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = k[f(x)]^{n+1}$

$$f(x)=k(n+1)[f(x)]^n f'(x)$$

$$k(n+1)[f(x)]^{n-1} f'(x)=1,$$

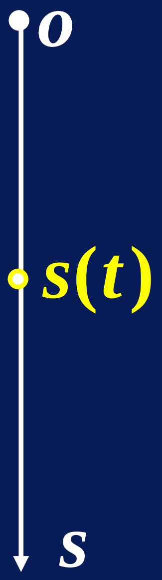
$$f(0)=0,\ f(1)=1. \quad f(x)=?$$

例3 质量为m的物体,只受重量作用,从静止开始做自由落体运动,求物体的运动规律.

解 首先建立坐标系,

设物体在 t 时刻的位置为 $s(t)$.

则当 $t=0$时, $s=0$, $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0$.



由二阶导数的物理意义 知,

$\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$是物体在时刻 t 的加速度,

根据牛顿第二定律得 $m\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=mg$,

即 $$\frac{d^2 s}{d t^2} = g \qquad (12.4)$$

两端积分得 $$\frac{ds}{dt} = gt + C_1,$$

再积分一次得 $$s = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2,$$

其中C_1, C_2都是任意常数，

将条件$t = 0$时，$s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 0$代入上面两式

得$C_1 = C_2 = 0.$

故物体的运动规律为 $$s = \frac{gt^2}{2}.$$

例4 验证:函数 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + k^2x = 0$ 的解. 并求满足初始条件

$$x\big|_{t=0} = A,\ \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$$ 的特解.

解 $\because \quad \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt,$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k^2C_1\cos kt - k^2C_2\sin kt,$$

将 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ 和 x 的表达式代入原方程 ,

$$-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)+k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)\equiv 0.$$

故 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 是原方程的解.

$$\because\ x\big|_{t=0}=A,\quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0,$$

$$\therefore\ C_1=A,\quad C_2=0.$$

所求特解为 $x=A\cos kt.$

例5 求以双参数函数族 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$ 为通解的微分方程(C_1, C_2为任意常数).

解 $y' = -C_1 e^{-x} - 4C_2 e^{-4x}$

$$y'' = C_1 e^{-x} + 16C_2 e^{-4x} \qquad (1)$$

$$\because \quad J = \frac{D(y, y')}{D(C_1, C_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial C_1} & \dfrac{\partial y}{\partial C_2} \\ \dfrac{\partial y'}{\partial C_1} & \dfrac{\partial y'}{\partial C_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-4x} \\ -e^{-x} & -4e^{-4x} \end{vmatrix}$$

$$= -3e^{-5x} \neq 0$$

$\therefore$ 两个任意常数C_1, C_2相互独立

故所求方程必是一个二阶微分方程

由 $\begin{cases} y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} \\ y' = -C_1 e^{-x} - 4C_2 e^{-4x} \end{cases}$ 解得

$$C_1 = \frac{1}{3} e^{x} (4y + y'), \quad C_2 = -\frac{1}{3} e^{4x} (y + y')$$

代入(1)式, 整理得

$$y'' + 5y' + 4y = 0.$$

三、同步练习

函数 $y = 3e^{2x}$ 是微分方程 $y'' - 4y = 0$ 的什么解?

四、同步练习解答

$\because\ y' = 6e^{2x}, \qquad y'' = 12e^{2x},$

$y'' - 4y = 12e^{2x} - 4\cdot 3e^{2x} = 0,$

$\because\ y = 3e^{2x}$ 中不含任意常数,

故为微分方程的特解.