第四节　幂级数

习题　11-4

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n+n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^n$;　　(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n+1}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}x^n$;

(7) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$;

(8) $x+2^2x^2+3^3x^3+\cdots+n^nx^n+\cdots$;

(9) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{8}x^6+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}x^{2n}+\cdots$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot n}$;　　(11) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}(x-3)^{2n}$;

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^p}\ (p>0)$.

解　(1)　设 $a_n=\frac{2^n}{n^2+1}$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}\frac{n^2+1}{2^n}=2$, 所以收敛半径 $R=\frac{1}{2}$. 当 $x=\frac{1}{2}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 收敛; 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ 收敛, 所以原级数的收敛域为 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

(2)　设 $a_n=\frac{1}{3^n+n}$, 而 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+n}{3^{n+1}+n+1}=\frac{1}{3}$, 所以收敛半径 $R=3$. 当

$x=3$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+n}$，而$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{n}{3^n}}=1$，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+n}$发散；同理当

$x=-3$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n+n}$发散，所以原级数的收敛域为$(-3,3)$.

(3)　设$a_n=\frac{\ln n}{n}$，而$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}\frac{n}{\ln n}=1$，所以收敛半径$R=1$．当

$x=1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$，而$\frac{\ln n}{n}\geq\frac{1}{n}\,(n\geq 4)$，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$发散；当$x=-1$时，级数为

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$，设$a_n=\frac{\ln n}{n}\geq 0$，则$a_n\geq a_{n+1}(n\geq 4)$且$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$收敛，所以原级数的收敛域为$[-1,1)$.

(4)　设$u_n=\frac{2n+1}{n!}x^{2n+1}$，而$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)+1}{(n+1)!}\frac{n!}{2n+1}x^2=0$，所以收敛半径$R=\infty$，收敛域$(-\infty,+\infty)$.

(5)　设$u_n=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，而$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}x^2=x^2$，所以当$|x|<1$时原级数收敛，当$|x|>1$时原级数发散，收敛半径$R=1$．当$x=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$收敛，而当$x=-1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$收敛，所以原级数的收敛域$[-1,1]$.

注意　对缺项幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$不能直接套用系数公式$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$求收敛半径. 一般地，应该对该幂级数的绝对值级数直接应用比值审敛法或根值审敛法去求出原幂级数的收敛半径.

(6)　设$a_n=\frac{2^n+3^n}{n}$，而$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\frac{2}{3})^n+3}{(\frac{2}{3})^n+1}=3$，所以收敛半径$R=\frac{1}{3}$．当

$x=-\frac{1}{3}$时，对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}(-\frac{1}{3})^n$，令$u_n=\frac{2^n+3^n}{n}(-\frac{1}{3})^n=(-1)^n\frac{1}{n}+(-1)^n\frac{1}{n}(\frac{2}{3})^n$，

因为$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}(\frac{2}{3})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{2}{3}<1$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}(\frac{2}{3})^n$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$显然收敛，故$x=-\frac{1}{3}$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n+3^n}{n}(\frac{1}{3})^n$收敛；当$x=\frac{1}{3}$时，对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}(\frac{1}{3})^n$，令$u_n=\frac{2^n+3^n}{n}(\frac{1}{3})^n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}(\frac{2}{3})^n$，由上知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{2}{3})^n$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$显然发散，故当$x=\frac{1}{3}$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}(\frac{1}{3})^n$发散，所以原级数的收敛域$[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

(7) 设$a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，而$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，所以收敛半径$R=1$. 当$x=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛；当$x=-1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})$发散，所以原级数的收敛域$(-1,1]$.

(8) 设$a_n=n^n$，而$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+1)^n(n+1)=\infty$，所以收敛半径$R=0$，因此原级数仅在$x=0$处收敛.

(9) 设$u_n=\frac{2n-1}{2^n}x^{2n}$，而$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{2n-1}|x|^2=\frac{1}{2}|x|^2$，所以当$|x|<\sqrt{2}$时原级数收敛，当$|x|>\sqrt{2}$时原级数发散，收敛半径$R=\sqrt{2}$. 当$x=\pm\sqrt{2}$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)$发散，所以原级数的收敛域$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(10) 设$t=x-1$，则级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\cdot n}$. 设$a_n=\frac{1}{2^n\cdot n}$，而$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{1}{2}$，所以当$|t|<2$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\cdot n}$收敛，当$|t|>2$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\cdot n}$发散，收敛半径$R=2$. 而当

$t=2$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，当 $t=-2$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛，所以原级数的收敛域 $[-1,3)$.

(11) 设 $u_n=\frac{(x-3)^{2n}}{4^n}$ ，而 $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^{n+1}}(x-3)^2=\frac{1}{4}(x-3)^2$ ，所以

当 $|x-3|<2$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}(x-3)^{2n}$ 收敛， $|x-3|>2$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}(x-3)^{2n}$ 发散，故收敛半径 $R=2$. 当 $x-3=\pm 2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1$ 发散，所以原级数的收敛域 $(1,5)$.

(12) 设 $u_n=\frac{(x-1)^n}{n^p}$ ，而 $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}|x-1|=|x-1|$ ，所以当 $|x-1|<1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^p}$ $(p>0)$ 收敛，当 $|x-1|>1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^p}$ $(p>0)$ 发散. 当 $x-1=1且p>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ 收敛； $x-1=1且p\le 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ 发散； $x-1=-1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ $(p>0)$ 收敛. 综上，当 $p>1$ 时，原级数的收敛域 $[0,2]$，当 $0<p\le 1$ 时，原级数的收敛域 $[0,2)$.

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n-1}$ 的收敛半径.

解 设 $u_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n-1}$ ，而 $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^2=4x^2$ ，所以当 $4x^2<1$ 时，即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n-1}$ 收敛，当 $4x^2>1$ 时，即 $|x|>\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n-1}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=\frac{1}{2}$.

3. 利用逐项求导或逐项积分运算求下列级数的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$; (4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$.

解 (1) 设 $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，而 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，当 $x=1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛，当 $x=-1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})$ 发散，所以级数的收敛域 $(-1,1]$.

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，则 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\frac{1}{1+x}$，从而

$$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx+S(0)=\ln(1+x),\quad x\in(-1,1].$$

(2) 设 $a_n=n$，而 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，当 $x=1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n$ 发散，当 $x=-1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 发散，所以级数的收敛区间 $(-1,1)$.

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n$，$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$，则

$$\int_0^x S_1(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x},$$

故

$$S(x)=(\frac{x^2}{1-x})'-\frac{x}{1-x}=\frac{x}{(x-1)^2},\quad x\in(-1,1).$$

注意 一些常见幂级数的和函数是由其的初始项决定的，如 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}$ 的和函数为 $\frac{x^2}{1-x}$，而 $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$ 的和函数为 $\frac{x}{1-x}$.

(3) 设 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1$，故当 $x=1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}$ 发散，当 $x=-1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$ 发散，所以级数的收敛区间 $(-1,1)$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$，则由上题知

$$\int_0^x S(x)dx=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{2}[-1+\frac{1}{(x-1)^2}],$$

故
$$S(x)=\frac{1}{2}(-1+\frac{1}{(x-1)^2})'=\frac{1}{(1-x)^3},\quad x\in(-1,1).$$

(4) 设 $a_n=\frac{1}{n(n-1)}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n(n+1)}=1$，当 $x=1$ 时级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ 收敛，当 $x=-1$ 时级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ 收敛，所以级数的收敛区间 $[-1,1]$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$，则 $S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x}$，从而

$$S'(x)=\int_0^x S''(x)dx+S'(0)=-\ln(1-x),$$

故 $S(x)=\int_0^x S'(x)dx+S(0)=(1-x)\ln(1-x)+x$，因此

$$S(x)=\begin{cases}x+(1-x)\ln(1-x), & -1\le x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$ 的和.

解 设 $u_n=\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2(n+1)-1}x^2=x^2$，当 $x=1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散，当 $x=-1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2n-1})$ 发散，所以级数的收敛区间 $(-1,1)$.

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，则 $S^{'}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x}$，从而

$$S(x)=\int_0^x S^{'}(x)dx+S(0)=-\ln(1-x),\quad x\in(-1,1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2n-1}}{(2n-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}S(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(2+\sqrt{2}).$$

5. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

解　构造幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$，易得其的收敛区间为 $(-1,1)$.

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$，则由第 3 题的(3)知 $S(x)=-\frac{2}{(x-1)^3},\quad x\in(-1,1)$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{2}S(\frac{1}{2})=8.$$

注意　本题中幂级数的构造：因为数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$ 含有 2^n，所以构造幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$，从而使得构造出的幂级数和函数较易求出.