第四节

第一类曲面积分

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

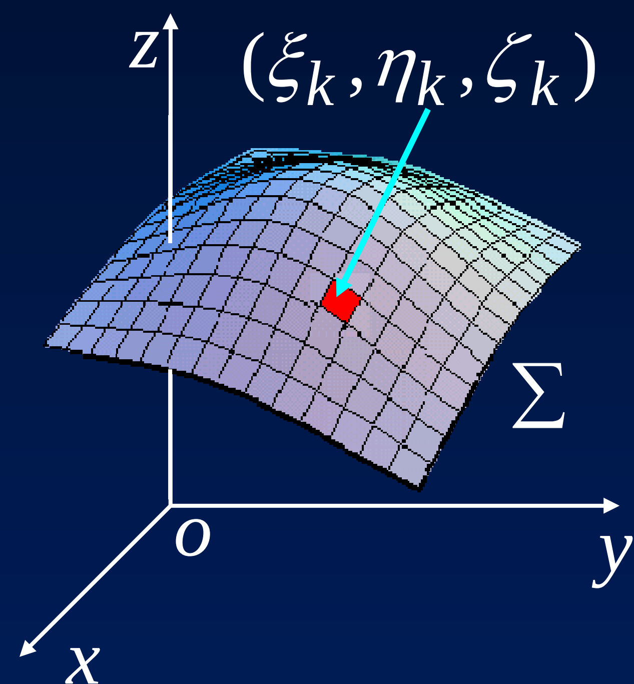
一、主要内容

(一) 第一类曲面积分的概念与性质

1. 问题引入　非均匀曲面形构件的质量

采用 “分割，近似，求和，取极限”的方法，可得

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$



其中$\rho(x,y,z)$表示连续的面密度，

λ 表示 n 小块曲面的直径的最大值 (曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者).

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. 定义 10.3 设函数 $f(x, y, z)$ 在分片光滑的曲面 $\sum$ 上有界. 将$\sum$ 任意分成 n 小块 $\Delta\Sigma_i$，记第i小块的面积为ΔS_i，

在第i小块曲面$\Delta\Sigma_i$上任取一点 $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，

作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot \Delta S_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$，

并作黎曼和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$.

如果当各小块曲面直径的最大值$\lambda\to 0$时，和的极限总存在，即极限值和曲面$\sum$的分法及点

M_i的取法无关，则称该极限值为函数 $f(x, y, z)$

在曲面Σ上的第一类曲面积分或对面积的曲面

积分，记作 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$， 即

被积函数

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i}.$$

积分曲面

被积表达式

面积元

积分和式

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

注　1° 当函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上连续时，

曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 存在.

2° 曲面形构件的质量可以表示为

$$\iint\limits_{\Sigma} \mu(x,y,z)\mathrm{d}S$$

3° 曲面形构件的质心坐标可以表示为

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma} x\mu(x,y,z)\mathrm{d}S,\quad \bar{y}=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma} y\mu(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma} z\mu(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4° 当被积函数为常数 1 时, 曲面积分

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S = \text{曲面}\Sigma\text{的面积}$$

5° 当积分曲面为封闭曲面时, 曲面积分可表示为

$$\oiint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

3. 性质

(1) 线性性质： $\forall \alpha，\beta \in R^1$

$$\iint_{\Sigma}[\alpha f(x,y,z) \pm \beta g(x,y,z)]\mathrm{d}S$$

$$= \alpha\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S \pm \beta\iint_{\Sigma} g(x,y,z)\mathrm{d}S$$

(2) 可加性： 曲面Σ由Σ_1和Σ_2组成

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(3) 对称性:

对面积的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$,

对称性的利用类似于三 重积分.

如: 若 $f(x,y,z)$在Σ上连续, Σ关于 yoz 面对称,

则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & f(-x,y,z)=-f(x,y,z)\\ 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S, & f(-x,y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

$\Sigma_1:\Sigma$在$x\geq 0$的部分.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(二) 第一类曲面积分的计算法

基本思路: 求曲面积分 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 计算二重积分

定理10.6 设 $f(x,y,z)$ 是定义在光滑曲面 Σ 上的连续函数. $\Sigma: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$, 函数 $z=z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有连续的偏导数, 则有下面的计算公式

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+z_x{}^2(x,y)+z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

注 1° 若曲面 Σ: $x = x(y,z)$ $(y,z) \in D_{yz}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z) \cdot \sqrt{1 + x_y{}^2(y,z) + x_z{}^2(y,z)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

2° 若曲面 Σ: $y = y(x,z)$ $(x,z) \in D_{xz}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xz}} f[x, y(x,z), z]\sqrt{1 + y_x{}^2 + y_z{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(三) 五类积分的统一表述及其共性

		背景
定积分:	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	直杆构件质量
二重积分:	$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$	平面薄板质量
三重积分:	$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$	空间物体质量
第一类曲线积分:	$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$	曲线构件质量
第一类曲面积分:	$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$	曲面构件质量

当被积函数非负时

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

这五类积分的共性:

（1）对数量值函数的积分;

（2）数量值函数均定义在有界的几何形体上;

（3）定义积分步骤相同:
分割、近似、求和、取极限;

（4）均为黎曼和的极限.

因此可以给出上述五种积分定义的统一表述式.

定义10.4 设 I 是$\mathbf{R}^n$中的一个有界的几何形体(直线段、平面闭区域、空间闭区域、曲线段或曲面)，$f(x)$是在在I上有定义并且有界的数量值函数。将 I 任意划分为 n 个“子块”：$\Delta I_1,\Delta I_2,\cdots,\Delta I_n$，并将$\Delta I_i$的度量(长度,面积,体积)记作$\Delta v_i$($i=1,2,\cdots,n$)，记$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta I_i$的直径$\}$。几何形体的直径可统一定义为该几何形体中两点之间距离的最大值)．在每个ΔI_i上任取一点x_i，作乘积 $f(x_i)\cdot\Delta v_i$ ($i=1,2,\cdots,n$)，并作黎曼和

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta v_i$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

如果当$\lambda \to 0$时，黎曼和的极限总存在，即极限值与I的划分方法及点x_i的取法无关，则称此极限为**函数$f(x)$在几何形体I上的积分**，记作$\int_I f(x)\mathrm{d}v$，即

被积函数

$$\int_I f(x)\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta v_i$$

积分区域

被积表达式

当被积函数为密度函数时，五种积分表示几何形体I的质量.

被积函数为常数1时的几何含义

I是闭区间$[a, b]$ → $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ → $[a, b]$的长度

I是平面闭区域D → $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ → D的面积

I是空间闭区域Ω → $\iiint\limits_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}v$ → Ω的体积

I是曲线 Γ → $\int\limits_\Gamma f(x, y, z)\mathrm{d}s$ → Γ的弧长

I是曲线 Σ → $\iint\limits_\Sigma f(x, y, z)\mathrm{d}S$ → Σ的面积

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

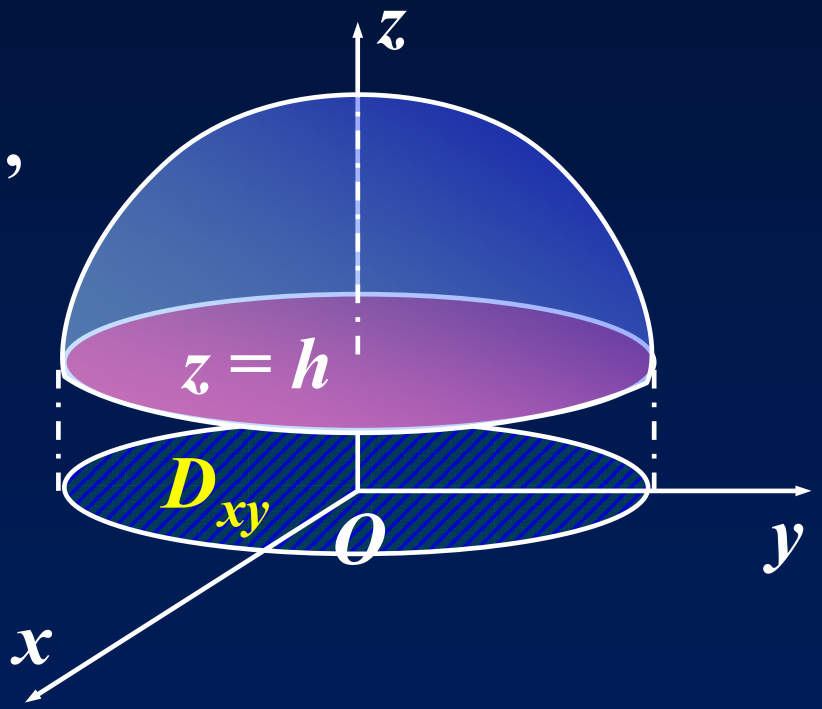
二、典型例题

例1 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$，其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 截出的顶部.

解 $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，

$$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$



西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{z} = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$= a\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{\rho\,\mathrm{d}\,\rho}{a^2 - \rho^2}$$

$$= 2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2 - \rho^2)\right]_0^{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$= 2\pi a \ln\frac{a}{h}.$$

$$\Sigma: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

$$D_{xy}: x^2 + y^2 \le a^2 - h^2$$

$$\mathrm{d}S = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例2 计算 $\iint\limits_{\Sigma} |xyz| \mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为抛物面

$z = x^2 + y^2 (0 \le z \le 1)$.

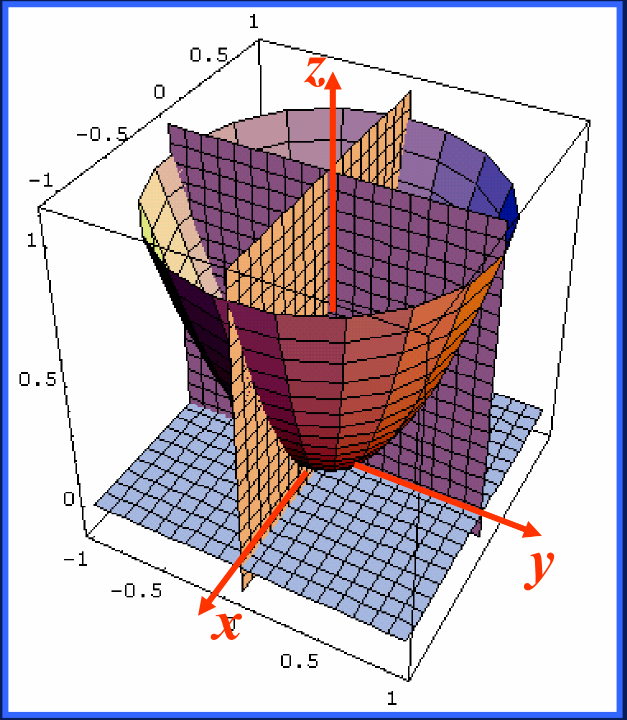
解 依对称性知:

抛物面$z = x^2 + y^2$关于z轴对称,

$|xyz|$关于变量x和y为偶函数,

$$\therefore \quad \iint\limits_{\Sigma} |xyz| \mathrm{d}S = 4 \iint\limits_{\Sigma_1} |xyz| \mathrm{d}S,$$

(其中Σ_1为第一卦限部分曲面)



西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\Sigma:\quad z = x^2 + y^2$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} |xyz|\,\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} |xyz|\,\mathrm{d}S \quad = 4\iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$= 4\iint_{D_1} xy(x^2 + y^2)\sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\iint_{\Sigma}|xyz|\,\mathrm{d}S = 4\iint_{D_1} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho^2\cos\theta\sin\theta\cdot\rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^5\sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$

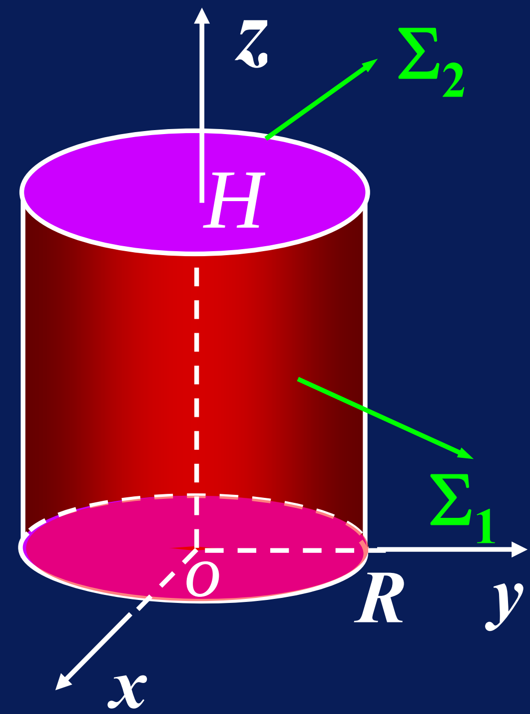
令$u = 1+4\rho^2$

$$= \frac{1}{4}\int_1^5\sqrt{u}\left(\frac{u-1}{4}\right)^2\mathrm{d}u = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例3 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ是介于平面 $z=0, z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

解 (方法1) $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$



Σ_1 : $x=\sqrt{R^2-y^2}$, $(y,z)\in D_{yz}$

Σ_2 : $x=-\sqrt{R^2-y^2}$, $(y,z)\in D_{yz}$

$D_{yz}=\{(y,z)\,\big|\,|y|\le R, 0\le z\le H\}$.

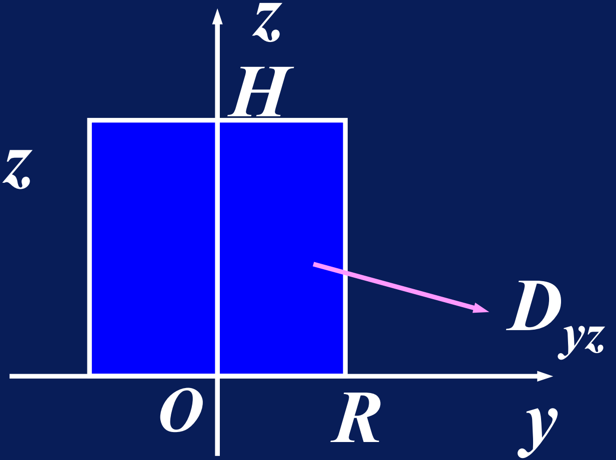
$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{R^2+z^2}=2\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{R^2+z^2}$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}}\right)^2+0}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$



$\Sigma_1:\ x=\sqrt{R^2-y^2},$

$(y,z)\in D_{yz}$

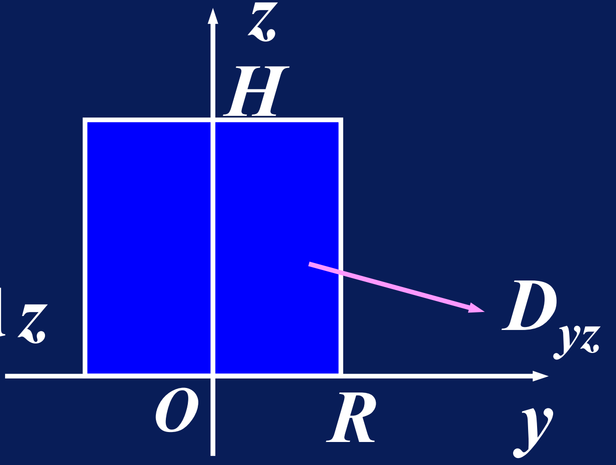
$$\therefore\quad I=2\iint_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{R^2+z^2}$$

$$=2\iint_{D_{yz}}\frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$= 2\iint\limits_{D_{yz}} \frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\cdot 2\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\int_0^H \frac{1}{R^2+z^2}\,\mathrm{d}z$$



$$= 4R\arcsin\frac{y}{R}\Big|_0^R \cdot \frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\Big|_0^H$$

$$= 2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

注 如果积分曲面Σ的参数方程为:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in D_{uv}$$

则 $$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{uv}} f[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \cdot$$

$$\sqrt{[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}]^2 + [\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}]^2 + [\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}]^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(方法2) $\Sigma: \; x^2 + y^2 = R^2 \quad (0 \le z \le H)$

其参数方程为:

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$(\theta, z) \in D_{\theta z} = \{(\theta, z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le H\}$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{[\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,z)}]^2 + [\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,z)}]^2 + [\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,z)}]^2}\, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$

$$= R\,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$

$$\therefore \quad I = \iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{R^2 + z^2}$$

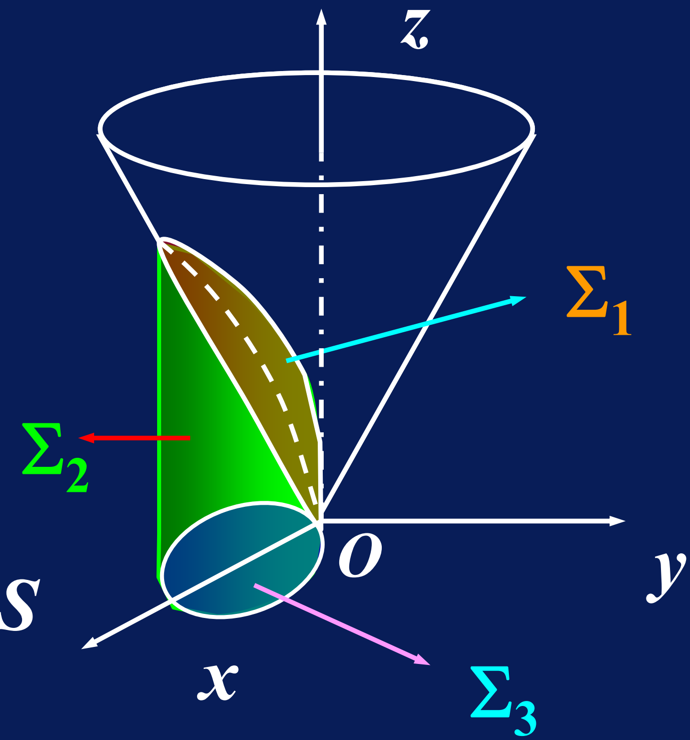
$$= \iint_{D_{\theta z}} \frac{R}{R^2 + z^2} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$

$$= R\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^H \frac{1}{R^2 + z^2} \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi R \cdot \frac{1}{R} \arctan \left. \frac{z}{R} \right|_0^H = 2\pi \arctan \frac{H}{R}.$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例4 $I=\oint\!\!\oint_{\Sigma}(xyz+1)\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，圆柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$及xOy面所围空间立体的整个表面.



解 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$

$$I=\underline{\oint\!\!\oint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S}+\oint\!\!\oint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

关于y奇函数

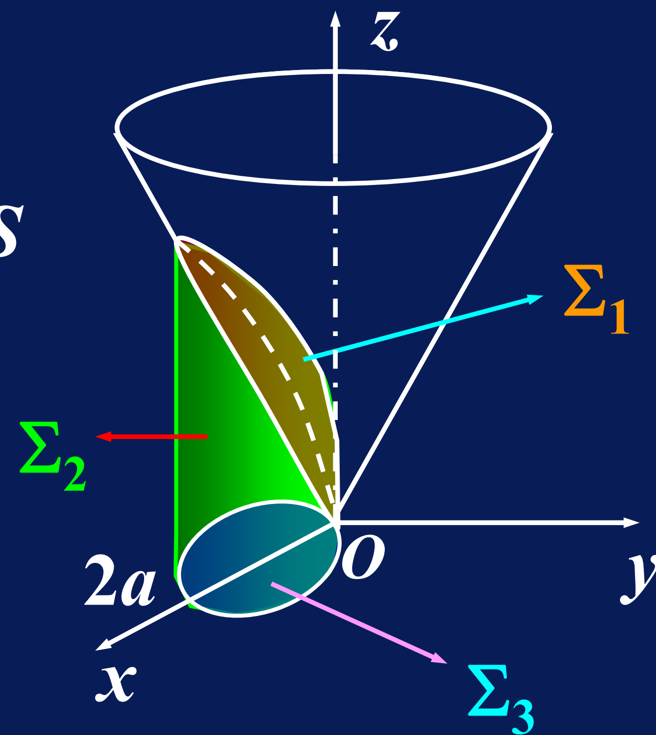
$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S=\iint_{\boxed{\Sigma_1+\Sigma_2}} xyz\,\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_3} xyz\,\mathrm{d}S$$

关于 zOx 面对称

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\oiint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S = 0 + \iint_{\Sigma_3} xy\cdot 0\,\mathrm{d}S = 0.$$

$$I = \oiint_{\Sigma} \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} \mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} \mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_3} \mathrm{d}S$$



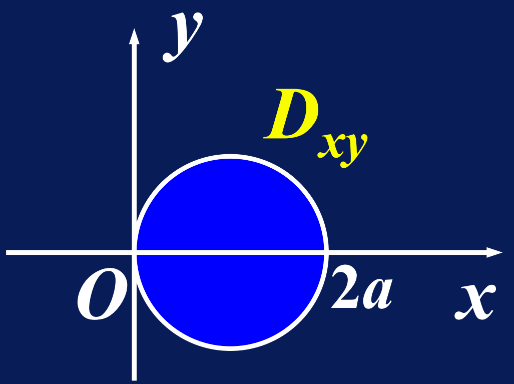
(1) $\Sigma_1:\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\quad (x, y) \in D_{xy}$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

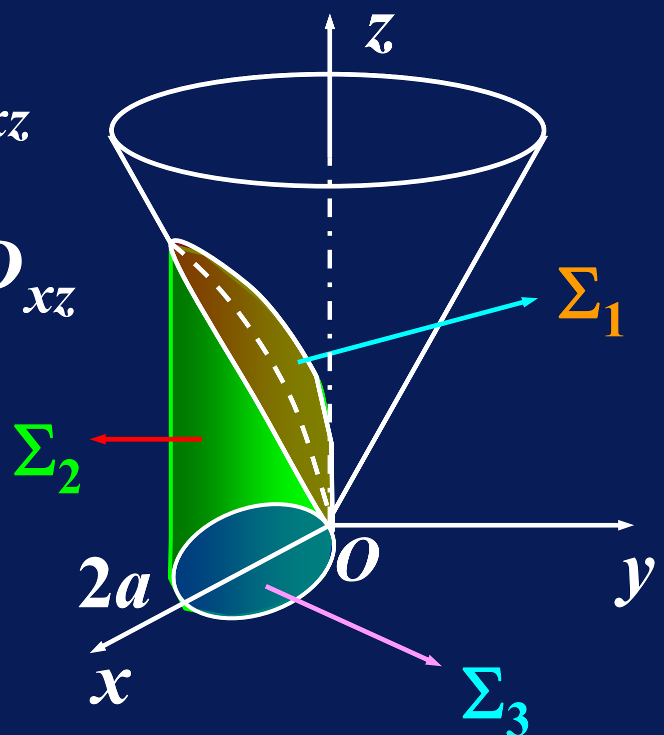
$$\therefore \iint\limits_{\Sigma_1} \mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\pi a^2$$



(2) $\Sigma_2 = \Sigma_2' + \Sigma_2''$,

$$\Sigma_2' : \ y = \sqrt{2ax - x^2}, \quad (x, z) \in D_{xz}$$

$$\Sigma_2'' : \ y = -\sqrt{2ax - x^2}, \quad (x, z) \in D_{xz}$$



(方法1) 由对称性，得

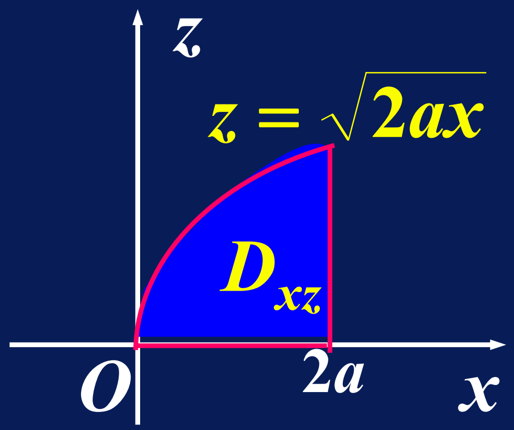
$$\iint\limits_{\Sigma_2} \mathrm{d}S = 2\iint\limits_{\Sigma_2'} \mathrm{d}S$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 = 2ax \end{cases}$$

消去y

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z^2 = 2ax \quad (z \geq 0) \\ x^2 + y^2 = 2ax \end{cases}$$



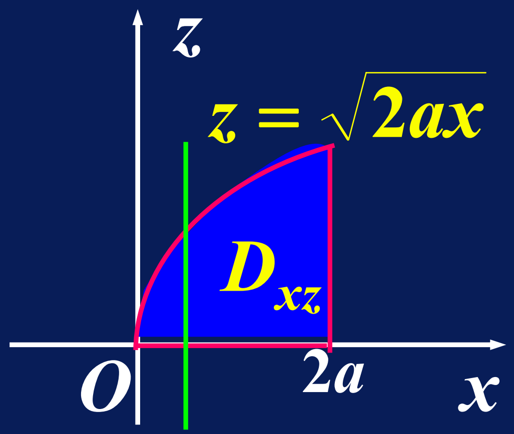
$$\Sigma_2' : \; y = \sqrt{2ax - x^2}, \quad (x, z) \in D_{xz}$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma_2} \mathrm{d}S = 2 \iint\limits_{\Sigma_2'} \mathrm{d}S = 2 \iint\limits_{D_{xz}} \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\iint_{\Sigma_2} \mathrm{d}S = 2\iint_{D_{xz}} \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$



$$= 2\int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2ax}} \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}} \mathrm{d}z$$

$$= 2a\int_0^{2a} \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{2ax - x^2}} \mathrm{d}x = (2a)^2 \int_0^{2a} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{2a}}} \mathrm{d}\left(\frac{x}{2a}\right)$$

$$= 4a^2 \cdot \left(-2\sqrt{1 - \frac{x}{2a}}\,\Bigg|_0^{2a}\right) = 8a^2$$

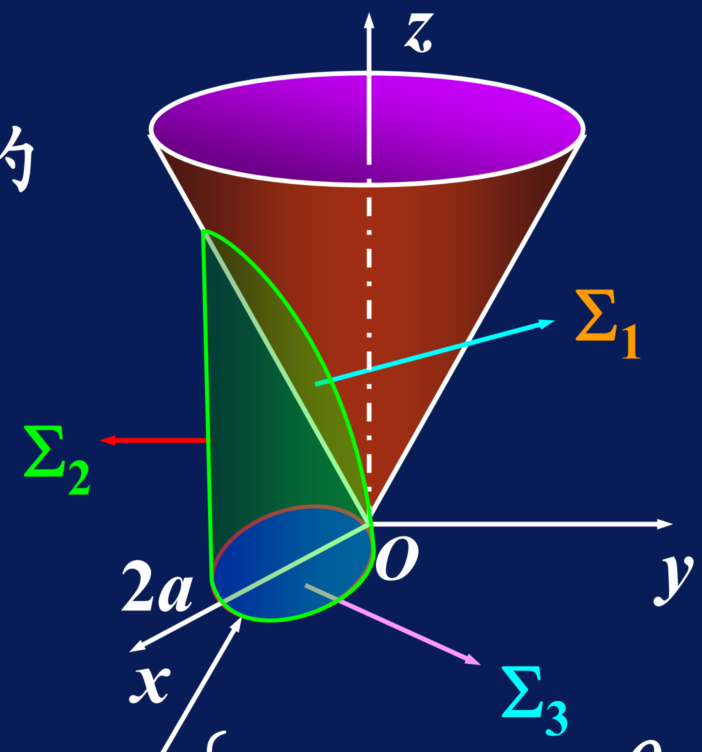
西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(方法2) 由第一类曲线积分的几何意义，知

$$\iint_{\Sigma_2} \mathrm{d}S = \oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\theta}\cdot a\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta = 8a^2$$



$$L:\begin{cases} x-a=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases},\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\therefore I = \iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2}\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_3}\mathrm{d}S = \sqrt{2}\pi a^2 + 8a^2 + \pi a^2.$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

三、同步练习

1. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为平面$y+z=5$被柱面$x^2+y^2=25$所截得的部分.

2. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$, Σ是曲面$z=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$在xOy面上方部分.

3. 设一半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,其上一点的面密度与该点到Oz轴的距离平方成正比. 求其质心和绕Oz轴的转动惯量.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$, 其中 Σ为内接于球面

$x^2+y^2+z^2=a^2$的八面体$|x|+|y|+|z|=a$表面.

5. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2)\,\mathrm{d}S$,

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

6. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$,

Σ是柱面$x^2+y^2=4$介于$0\le z\le 6$的部分.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

7. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是由平面 $x+y+z=1$

与坐标面所围成的四面体的表面.

8. 计算$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S$，其中 Σ是圆柱面 $x^2+y^2=1$,

平面$z=x+2$及$z=0$所围成的空间立体的表面.

9. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$,

Σ是曲面$z^2=x^2+y^2$介于$-1\le z\le 2$的部分.

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

10. 求$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$,其中

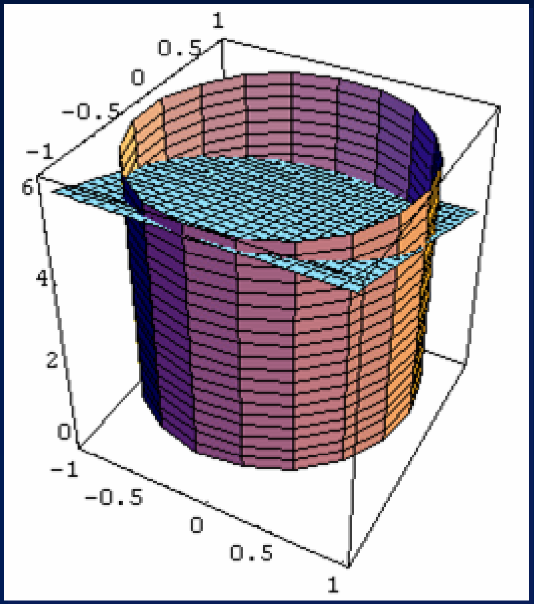
$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{当 } z\geq\sqrt{x^2+y^2}, \\ 0, & \text{当 } z<\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

四、同步练习解答

1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分.

解 积分曲面 Σ: $z=5-y$,



投影域: $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 25\}$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{1+0+(-1)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

故 $$\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$$

$$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}(x+y+5-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

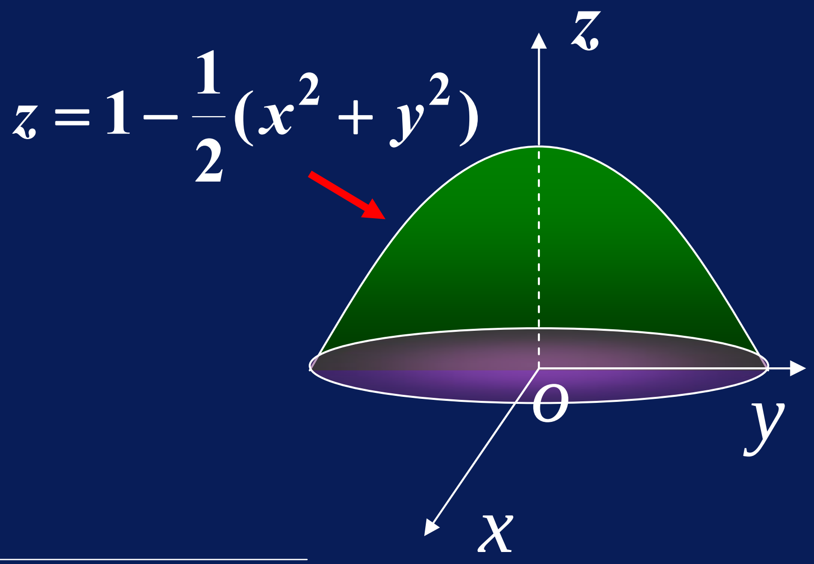
$$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}(5+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5(5+\rho\cos\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=125\sqrt{2}\pi.$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S$，$\Sigma$是曲面 $z=1-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 在xOy面上方部分.



解 Σ在xOy面上投影是

圆域$D: x^2+y^2\le 2$;

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故 $$\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}\left(1-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = \iint_{D} \left(1 - \frac{x^2+y^2}{2}\right)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho\left[1-\frac{1}{2}\rho^2\right]\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{2}} (2\rho-\rho^3)\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{2}{5}(3\sqrt{3}-2)\pi.$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

3. 设一半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,其上一点的面密度与该点到Oz轴的距离平方成正比. 求其质心和绕Oz轴的转动惯量.

解 设比例常数为k，则$\mu=k(x^2+y^2)$.

$$m=k\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=ka\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\frac{\rho^3}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4}{3}\pi ka^4.$$

由对称性知， $\bar{x}=\bar{y}=0.$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

对xOy面的静矩

$$M_{xy}=k\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=ka\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\pi ka^5,$$

故 $\bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{M}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\pi ka^5}{\frac{4}{3}\cdot\pi ka^4}=\dfrac{3}{8}a,$ 质心为$(0,0,\dfrac{3}{8}a)$.

转动惯量:

$$I_z=k\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}S=k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{a\rho^5}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi ka^6\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{15}\pi ka^6.$$

4. 计算$\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$, 其中 Σ为内接于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$的八面体$|x|+|y|+|z|=a$表面.

解 被积函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 关于坐标面和原点均对称，积分曲面 Σ 也具有对称性，

故原积分 $\oiint_{\Sigma} = 8\iint_{\Sigma_1}$ ，(其中Σ_1表示第一卦限部分曲面)

Σ_1： $x+y+z=a$, 即$z=a-x-y$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$=8\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$=8\iint_{D_{xy}}[x^2+y^2+(a-x-y)^2]\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\sqrt{3}a^4.$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

5. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2)\,\mathrm{d}S$,

其中Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

解 由对称性知: $\iint\limits_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}y^2\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}S$,

故 $$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2)\,\mathrm{d}S=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\frac{4}{3}\pi a^4=\frac{7}{3}\pi a^4$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

6. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S$,

Σ是柱面$x^2+y^2=4$介于$0\le z\le 6$的部分.

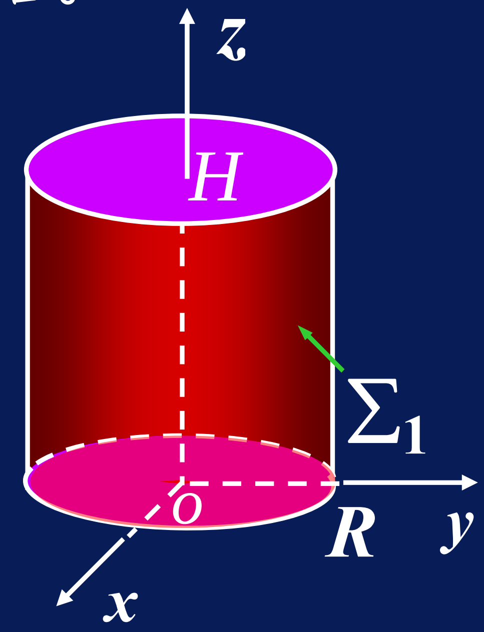
解 应当将柱面Σ投影到yOz或xOz平面上。由对称性，只需算柱面在第一卦限部分Σ_1的4倍。

Σ_1在yOz面上的投影

$D: 0\le y\le 2, 0\le z\le 6.$

Σ_1方程$x=\sqrt{4-y^2}$,

则$x_y=\dfrac{-y}{\sqrt{4-y^2}}$，$x_x=0$得



西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$x_y = \frac{-y}{\sqrt{4-y^2}}, \quad x_x = 0$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{2\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{4-y^2}},$$

故 $$\iint_{\Sigma} z^2 \mathrm{d}S = 4\iint_{D} \frac{2z^2}{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

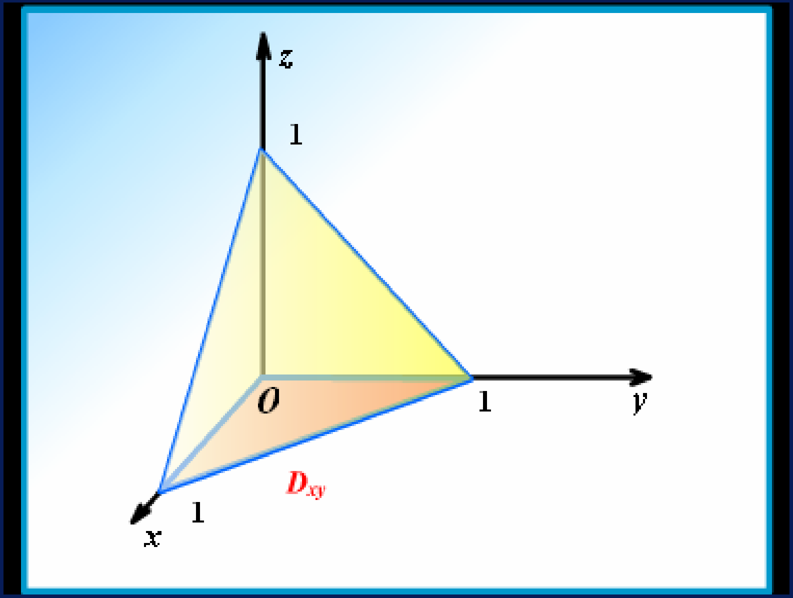
$$= 8\int_0^6 z^2 \mathrm{d}z \int_0^2 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{4-y^2}}$$

$$= 288\pi.$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

7. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.

解 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 分别表示Σ在平面 $x=0, y=0, z=0,$ $x+y+z=1$ 上的部分, 则



$$原式=\left(\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3}+\iint\limits_{\Sigma_4}\right)xyz\,\mathrm{d}S$$

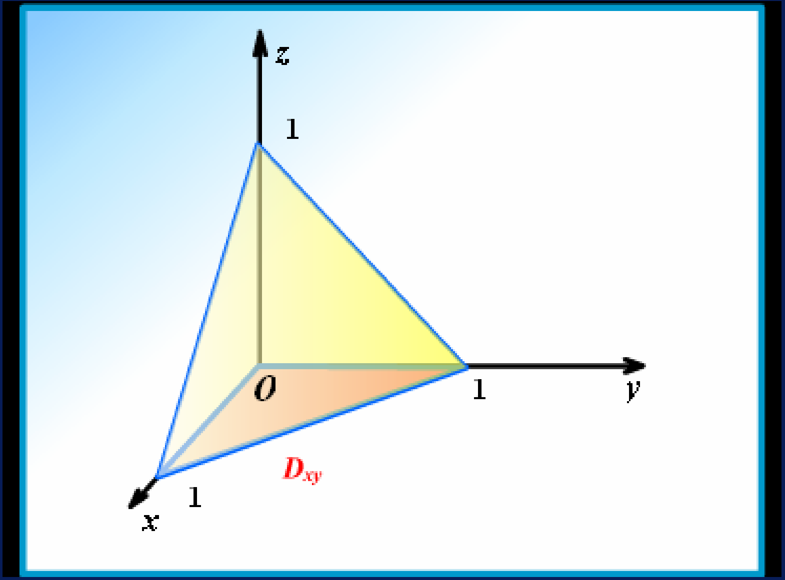
$$\Sigma_4: z=1-x-y,$$

$$D_{xy}:\begin{cases}0\le y\le 1-x\\ 0\le x\le 1\end{cases}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

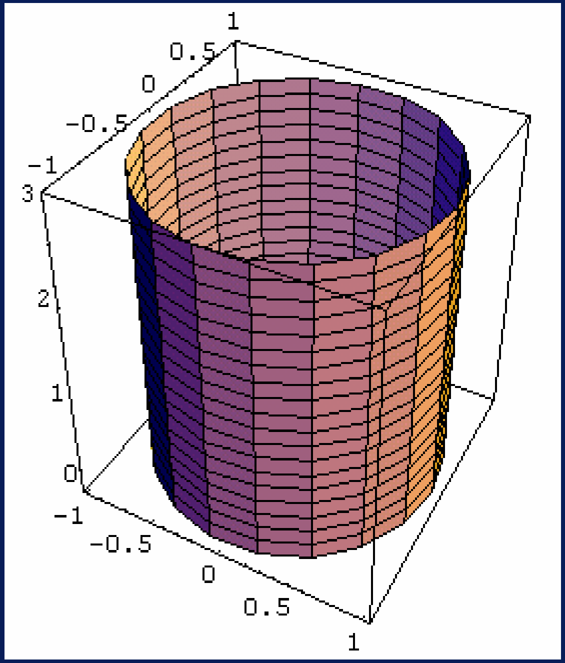
$$=\sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y$$

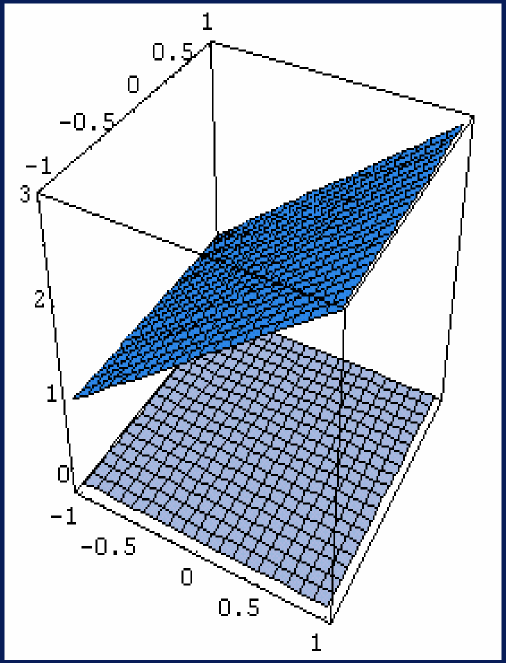
$$=\sqrt{3}/120$$

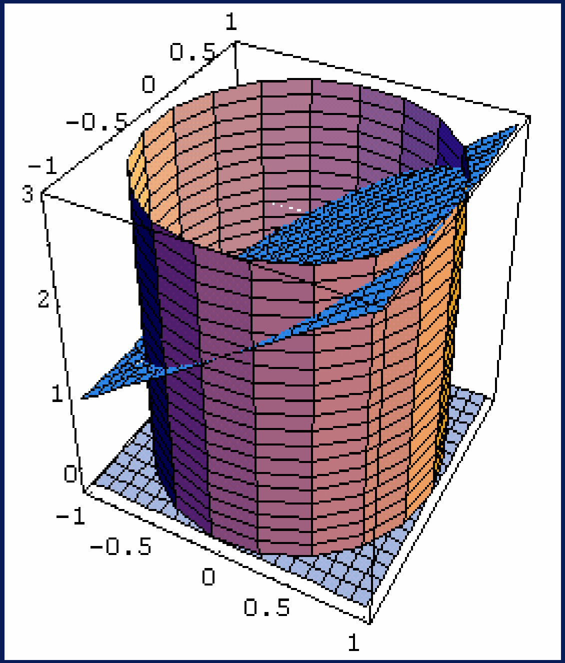


西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

8. 计算$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S$，其中 Σ是圆柱面 $x^2+y^2=1$
平面$z=x+2$及$z=0$所围成的空间立体的表面.







解 $$\oiint\limits_{\Sigma} = \iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_2} + \iint\limits_{\Sigma_3}$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

其中Σ_1：$z=0$, Σ_2：$z=x+2$，Σ_3：$x^2+y^2=1$.

投影域D_1：$x^2+y^2\le 1$

显然 $$\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S=\iint_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\iint_{\Sigma_2} x\mathrm{d}S=\iint_{D_1} x\sqrt{1+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

将Σ_3投影域选在xoz面上.

（注意：$y=\pm\sqrt{1-x^2}$分为左、右两片）

$$\iint_{\Sigma_3} x\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_{31}} x\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_{32}} x\mathrm{d}S$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3} x\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_{31}} x\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_{32}} x\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xz}} x\sqrt{1+{y'_x}^2+{y'_z}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xz}} x\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$= 2\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\int_0^{x+2}\mathrm{d}z$$

$$= \pi,$$

$$\therefore \quad \oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S = 0+0+\pi = \pi.$$

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

9. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$,

Σ是曲面$z^2=x^2+y^2$介于$-1\le z\le 2$的部分.

解 设Σ位于xOy平面下面部分为Σ_1, 即$-1\le z\le 0$。

Σ_1在xOy面上投影是圆域D_1

$D_1:\ x^2+y^2\le 1,\ z=-\sqrt{x^2+y^2}$,

$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

位于xOy平面上面部分为Σ_2, 即 $0\le z\le 2$.

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

Σ_2 在 xOy 面上投影是圆域 D_2

$$D_2:\quad x^2+y^2\le 4,\ z=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_1}2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$=\iint\limits_{D_1} 2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} 2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho+2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho$$

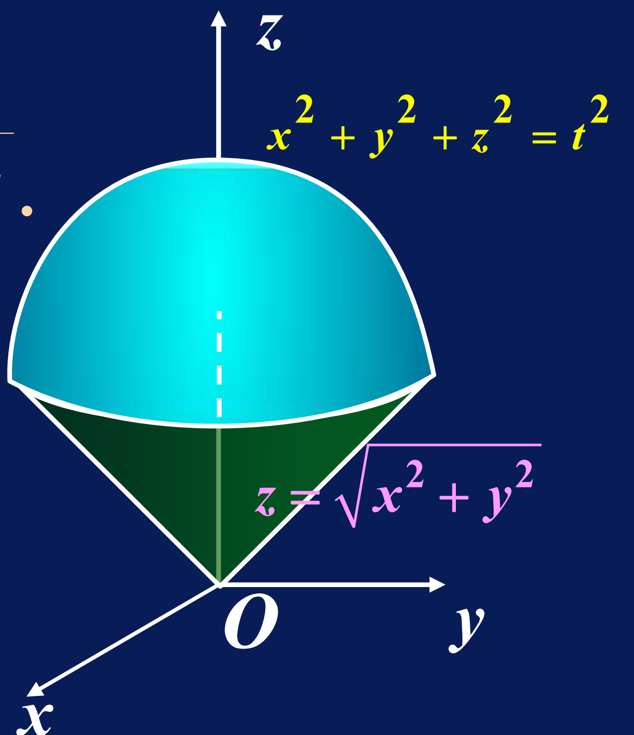
$$=4\pi\cdot\frac{1}{4}+4\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot 16$$

$$=17\pi.$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

10. 求$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$,其中

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{当 } z\ge\sqrt{x^2+y^2}, \\ 0, & \text{当 } z<\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$



解 将$x^2+y^2+z^2=t^2$分成

$\Sigma_1:\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}$和

$\Sigma_2:\ z<\sqrt{x^2+y^2}$.

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S=0.$$

Σ_1在xOy面上的投影区域D为$x^2+y^2\le\dfrac{t^2}{2}$;

$$z=\sqrt{t^2-x^2-y^2},\quad z_x=\frac{-x}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}},z_y=\frac{-y}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}},$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{t}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此 $$F(t)=\iint_D(x^2+y^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=t\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\frac{\rho^3}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\left(\frac{4}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{6}\right)\pi t^4.$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY