第五章总习题

1. 填空题

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的 $\underline{\quad 必要 \quad}$ 条件，而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的 $\underline{\quad 充分 \quad}$ 条件.

(2) 设 $f(x)=\ln x-2x^2\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$，则 $f(x)=\underline{\quad \ln x-\frac{x^2}{\mathrm{e}^2} \quad}$.

(3) $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x$，则 $f(7)=\underline{\quad \frac{1}{12} \quad}$.

(4) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=\underline{\quad 发散 \quad}$.

(5) $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x$，$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x$，则 M，N，P 的大小顺序为 $\underline{\quad P<M<N \quad}$.

解 (1) 略.

(2) 设 $a=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$，则 $f(x)=\ln x-2ax^2$，所以

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x}{x}-2ax,$$

故

$$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{\ln x}{x}-2ax\right)\mathrm{d}x,$$

即

$$a=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{\ln x}{x}-2ax\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}\ln^2 x-ax^2\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}-a\mathrm{e}^2+a,$$

从而 $a=\frac{1}{2\mathrm{e}^2}$，于是

$$f(x)=\ln x-\frac{x^2}{\mathrm{e}^2}.$$

(3) 对 $\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x$ 两边关于 x 求导，有

$$f(x^3-1)\cdot 3x^2=1.$$

令 $x=2$，则有 $f(7)\cdot 12=1$，故 $f(7)=\frac{1}{12}$.

(4) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1})\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}(x^2+1)$

$$=\ln x\Big|_1^{+\infty}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^{+\infty},$$

故原积分发散.

(5) 应考虑定积分的对称性.

M 中的被积函数为奇函数，因此 $M=0$.

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x>0.$$

同理,

$$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin^3 x\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x<0.$$

因此有 $P<M<N$.

2. 单项选择题

(1) 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ (A).

(A) 为正常数; (B) 为负常数;

(C) 恒为零; (D) 不为常数.

(2) 设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$ (A).

(A) $xf(x^2)$; (B) $-xf(x^2)$;

(C) $2xf(x^2)$; (D) $-2xf(x^2)$.

(3) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上皆可导，且 $f(x)<g(x)$，则必有(C).

(A) $f(-x)>g(-x)$; (B) $f'(x)<g'(x)$;

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$; (D) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

(4) 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则(A).

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数;

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数;

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数;

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必为单调增函数.

(5) 下列广义积分中收敛的是(C).

(A) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$; (B) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$;

(C) $\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$;　　　　　　　（D）　$\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

(6)　设函数 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2 dt,\ g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ (B).

(A)　低阶无穷小;　　　　　　　　(B)　高阶无穷小;

(C)　等价无穷小;　　　　　　　　（D）　同阶但不等价无穷小.

解　(1)　$F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t dt=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t dt$　(这说明 $F(x)$ 为常数)

$$=\int_0^{\pi}e^{\sin t}\sin t dt+\int_{\pi}^{2\pi}e^{\sin t}\sin t dt.$$

在 $\int_{\pi}^{2\pi}e^{\sin t}\sin t dt$ 中令 $t=u+\pi$，则 $dt=du,\ t=\pi,\ u=0;\ t=2\pi,\ u=\pi$, 则有

$$\int_{\pi}^{2\pi}e^{\sin t}\sin t dt=\int_0^{\pi}e^{\sin(u+\pi)}\sin(u+\pi)du$$

$$=-\int_0^{\pi}e^{-\sin u}\sin u du=-\int_0^{\pi}e^{-\sin t}\sin t dt,$$

因此 $\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t dt=\int_0^{\pi}(e^{\sin t}-e^{-\sin t})\sin t dt$.

在 $(0,\pi)$ 内，$0<\sin t<1$，因此

$$e^{\sin t}-e^{-\sin t}=\frac{(e^{\sin t})^2-1}{e^{\sin t}}=\frac{e^{2\sin t}-e^0}{e^{\sin t}},$$

由于 e^x 为单调增加函数，可知 $e^{2\sin t}>e^0$，因此 $\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t dt>0$，即 $F(x)$ 恒为正常数.

故选 A.

(2)　设 $u=x^2-t^2$，则 $du=-2tdt,\ t=0,\ u=x^2;\ t=x,\ u=0$，因此

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^0(-\frac{1}{2})f(u)du$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}f(u)du=xf(x^2).$$

故选 A.

(3)　答案 A 错, 因为不知道 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的奇偶性; B 错, 因为有可能 $f'(x)$ 等于 $g'(x)$; C 对, 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可导, 故连续, 从而有 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\ \lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$, 由题设在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)<g(x)$ 知 $f(x_0)<g(x_0)$，即 $\lim_{x\to x_0}f(x)<\lim_{x\to x_0}g(x)$; D 错, 因为有可能 $\int_0^x f(t)dt$ 等于 $\int_0^x g(t)dt$.

(4)　因 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，所以有

$$F'(x)=f(x),$$

上式两边从 0 到 x 积分有

$$\int_0^x F'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

因此有

$$F(x)=F(0)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

从而有

$$F(-x)=F(0)+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t$$

$$\underline{\underline{\text{令}u=-t}}\ F(0)-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u,$$

故当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 为偶函数，即 A 对.

(5)　本题实际是考察 $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^k}\mathrm{d}x$ 的敛散性与 k 的关系.

当 $k=1$ 时，

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=+\infty,$$ 此广义积分发散;

当 $k\neq 1$ 时，

1°　若 $k<1$ 时，

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{(\ln x)^k}$$

$$=\frac{1}{1-k}(\ln x)^{1-k}\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty},$$ 此广义积分发散.

2°　若 $k>1$ 时，

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{(\ln x)^k}$$

$$=\frac{1}{1-k}(\ln x)^{-(k-1)}\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=\frac{1}{1-k}[0-(\ln \mathrm{e})^{-(k-1)}]$$

$$=\frac{1}{k-1},$$

故当 $k>1$ 时，此广义积分 $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 收敛.

综上应选 C .

(6)　由无穷小量阶的比较可知，只需考察

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t}{\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}}\ \underline{\underline{\text{罗必达法则}}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\cdot(1-\cos x)'}{x^4+x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\cdot\sin x}{x^4(1+x)}$$

注意　当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)^2\sim\frac{1}{4}x^4$，　$\sin(1-\cos x)^2\sim\frac{1}{4}x^4$，因此有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^4\cdot x}{x^4(1+x)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x}=0,$$

这表明，$x\to 0$ 时，$f(x)$是比$g(x)$高阶的无穷小，故选 B.

3.　已知 $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt(-\infty<x<+\infty)$，试求

(1)　$f'(x)$;　　(2)　$f(x)$ 的单调性;

(3)　$f(x)$ 的奇偶性;　　(4)　$y=f(x)$ 图形的拐点;

(5)　$y=f(x)$ 图形凹凸性.

解　(1)　$f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

(2)　显然对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调递增.

(3)　$\because f(-x)=\int_0^{-x}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\underline{\underline{令u=-t}}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2}(-du)=-\int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2}du$

$$=-\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=-f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

(4)　$f''(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot(-x)=-xe^{-\frac{1}{2}x^2}$.

令 $f''(x)=0$，得 $x=0$，故 $y=f(x)$的拐点为$(0,0)$.

(5)　当 $x<0$ 时，$f''(x)>0$；当 $x>0$ 时，$f''(x)<0$，故在$(-\infty,0)$内曲线为凹，

在$(0,+\infty)$内曲线为凸.

4.　计算下列极限:

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$;　　(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>0)$;

(3)　$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;　　(4)　$\lim_{x\to a}\frac{x\int_0^x f(t)dt}{x-a}$，其中 $f(x)$ 连续.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$

$$(\Delta x_i=\frac{1}{n}\ f(x)=\sqrt{1+x},\ \xi_i=\frac{i}{n},\ a=0,\ b=1)$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1^p}{n}+\frac{2^p}{n}+\cdots+\frac{n^p}{n})\cdot\frac{1}{n}$

$$=\int_0^1 x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)-\frac{1}{n}\cdot n\ln n]$

$$=\lim_{n\to\infty}[(\ln 1-\ln n)+(\ln 2-\ln n)+\cdots+(\ln n-\ln n)]\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$$

$$=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_0^1-x\Big|_0^1=-1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}=\lim\limits_{\xi\to a}xf(\xi)=af(a).$

5. 下列计算正确吗？请说明理由.

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{x})}{1+(\frac{1}{x})^2}=-\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{2}$;

(2) 因为 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\underset{\quad}{\overset{令 x=\frac{1}{t}}{=\!=}}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$，所以 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=0$;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{+A}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0.$

解 (1) 计算不正确，因 $\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义，故 $\frac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 上不连续，不能用牛顿—莱布尼茨公式.

(2) 计算不正确，因$\frac{1}{t}$在$t=0$处无定义，故$\frac{1}{t}$在$[-1,1]$上不连续.

(3) 计算不正确，因$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$\neq\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{+A}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

6. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-a}{x+a})^x=\int_a^{+\infty}4x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$，求非零常数$a$的值.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-a}{x+a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2a}{x+a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2a}{x+a})^{-\frac{x+a}{2a}\cdot x\cdot(-\frac{2a}{x+a})}$

$$=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x+a}}=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2a}{1+\frac{a}{x}}}=\mathrm{e}^{-2a},$$

而 $$\int_a^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\cdot x^2\Big|_a^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\cdot 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a^2}{2}\mathrm{e}^{-2a}+\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}x\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\mathrm{e}^{-2a}-\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x}$$

$$=\frac{a^2}{2}\mathrm{e}^{-2a}-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a^2}{2}\mathrm{e}^{-2a}+\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-2a}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_a^{+\infty}=\frac{a^2}{2}\mathrm{e}^{-2a}+\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-2a}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2a}$$

$$=\mathrm{e}^{-2a}(\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}+\frac{1}{4}),$$

从而有$\mathrm{e}^{-2a}=\mathrm{e}^{-2a}(2a^2+2a+1)$，即$2a(a+1)=0$，故

$$a=-1\text{或}a=0\ (\text{舍去}),$$

从而$a=-1$.

7. 设$f(x)$、$g(x)$在区间$[a,b]$上均连续，证明:

$(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$（柯西-施瓦茨不等式）.

证 $\because (f(x)-\lambda g(x))^2\ge 0$,

$\therefore \lambda^2 g^2(x) - 2\lambda f(x)g(x) + f^2(x) \geq 0,$

$\therefore \lambda^2 \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x - 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \geq 0,$

不等式的左端可视为关于 λ 的二次三项式

$\therefore$ 其判别式: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= 4(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \leq 0,$$

$\therefore (\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$

8. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \geq (b-a)^2 .$$

证 在第 7 题中, 将 $f(x)$ 换成 $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$, $g(x)$ 换成 $\sqrt{f(x)}$, 则有

$$\int_a^b (\sqrt{f(x)})^2 \mathrm{d}x \cdot \int_a^b (\frac{1}{\sqrt{f(x)}})^2 \mathrm{d}x \geq [\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \mathrm{d}x]^2,$$

即
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \geq (b-a)^2 .$$

9. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}, \ x \in [a,b]$$

证明: (1) $F'(x) \geq 2$;

(2) 方程 $F(x) = 0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

证 (1) $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2$.

(2) $F(a) = \int_b^a \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}, \ F(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$,

$\because f(x) > 0, \ a < b, \quad \therefore \int_b^a \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} < 0, \ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0,$

$\therefore F(x) = 0$ 在 (a,b) 内有根, 又 $F'(x) \geq 2$, $\therefore$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

10. 证明积分第一中值定理:

如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且不变号, 则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

证 若 $g(x) \equiv 0$, 则结论显然成立.

若 $g(x)\neq 0$，因为 $g(x)$ 不变号，不妨设 $g(x)>0$,（$g(x)<0$可类似得证）因$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以有最大值 M 和最小值 m，即

$$m\le f(x)\le M,\ mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x),$$

于是
$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

$$m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\le M\ .$$

$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\therefore$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=f(\xi)\,,$$

即
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\ .$$

11. 设 $f(x)$ 为连续函数，证明

$$\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x(\int_0^t f(u)du)\mathrm{d}t\ .$$

证　法 1
$$\int_0^x(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u)\mathrm{d}t=t\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\Big|_0^x-\int_0^x t\mathrm{d}(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u)$$

$$=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t\ .$$

法 2　设 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t-\int_0^x(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u)\mathrm{d}t$，则

$$\varphi'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=0,$$

所以
$$\varphi(x)\equiv C\text{，又 }\varphi(0)=0\text{，故 }\varphi(x)\equiv 0\,,$$

即
$$\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u)\mathrm{d}t.$$

注 意　　常见错误是因左端 $(\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t)'=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 与右端 $(\int_0^x(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u)\mathrm{d}t)'=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ 相等，则得出结论左端=右端). 事实上，两函数导数相等，说明它们之间仅相差一个常数，这里一定要说明此常数为零.

12. 设 $p>0$，证明

$$\frac{p}{1+p}<\int_0^1\frac{1}{1+x^p}\mathrm{d}x<1.$$

证　$1>\dfrac{1}{1+x^p}=\dfrac{1+x^p-x^p}{1+x^p}=1-\dfrac{x^p}{1+x^p}>1-x^p$，故

$$\int_0^1(1-x^p)\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{1}{1+x^p}\mathrm{d}x<\int_0^1\mathrm{d}x.$$

而 $\int_0^1\mathrm{d}x=1$，$\therefore\int_0^1(1-x^p)\mathrm{d}x=(x-\dfrac{x^{p+1}}{p+1})\Big|_0^1=\dfrac{p}{1+p}$，故

$$\frac{p}{1+p}<\int_0^1\frac{1}{1+x^p}\mathrm{d}x<1.$$

13.　已知 $f(\pi)=-3$，且 $\int_0^\pi[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=5$，求 $f(0)$.

解　$\int_0^\pi[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x+\int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x$

$$=\cos xf(x)\Big|_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)\cos x\mathrm{d}x+f'(x)\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\cos x\mathrm{d}x$$

$$=f(\pi)+f(0)=-3+f(0)=5,$$

故 $f(0)=8$.

14.　$f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，且满足 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$. 证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

证　由定积分中值定理知存在 $\xi_1\in[0,\frac{1}{3}]$，使得

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{1-\xi_1^2}f(\xi_1)\cdot(\frac{1}{3}-0)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{1-\xi_1^2}f(\xi_1),$$

因此 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{1-\xi_1^2}f(\xi_1)$.

令 $F(x)=\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)$，$F(x)$在$[0,1]$ 上连续可微，且 $F(1)=f(1)=F(\xi_1)$，则在 $(\xi_1,1)$ 上 $F(x)$ 满足罗尔定理条件，因此至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$，使得

$$F'(\xi)=0，即\ \mathrm{e}^{1-\xi^2}[f'(\xi)-2\xi f(\xi)]=0.$$

因 $\mathrm{e}^{1-\xi^2}>0$，故有 $f'(\xi)-2\xi f(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=2\xi f(\xi).$$

15. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$，试比较 I_1，I_2 与 1 三者之间的大小.

解　当 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时，$x<\tan x$，故

$$\frac{\tan x}{x}>1,\ \frac{x}{\tan x}<1,$$

所以
$$\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\tan x},$$

故
$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x>I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x;\qquad(1)$$

令 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$，$x\in(0,\frac{\pi}{4})$，则

$$f'(x)=\frac{\sec^2 x\cdot x-\tan x}{x^2}=\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{\cos^2 x\cdot x^2}=\frac{2x-\sin 2x}{2\cos^2 x\cdot x^2}>0,\qquad(\because x\in(0,\frac{\pi}{2}),\ \sin x<x)$$

故 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上单调递增，从而有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)<f(x)<f(\frac{\pi}{4})$，即

$$1<\frac{\tan x}{x}<\frac{4}{\pi},$$

所以
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4}{\pi}\mathrm{d}x,$$

即
$$\frac{\pi}{4}<I_1<1;\qquad(2)$$

由(1)、(2)　有　$1>I_1>I_2$.

16. 已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$，$f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

解　令 $u=2x-t$，则 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，$t=0$，$u=2x$；$t=x$，$u=x$，

$$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\int_{2x}^x(2x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_x^{2x}(2x-u)f(u)\mathrm{d}u$$

$$=2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\mathrm{d}u,$$

于是 $2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\arctan x^2.$

上式两边关于 x 求导，有

$$2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u+2x[f(2x)\cdot 2-f(x)]-2xf(2x)\cdot 2+xf(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^4}\cdot 2x,$$

即
$$2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-xf(x)=\frac{x}{1+x^4},$$

故 $\int_{x}^{2x} f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}[\frac{x}{1+x^4}+xf(x)].$

在上式中令 $x=1$，则有

$$\int_{1}^{2} f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}+f(1)]=\frac{3}{4},$$

即 $\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$.

17. 计算 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{1+x}+\mathrm{e}^{3-x}}$.

解 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{1+x}+\mathrm{e}^{3-x}}=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{1+2x}+\mathrm{e}^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}^3}\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}})^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{1+(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}})^2}\mathrm{d}(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}})=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\arctan\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}}\Big|_{1}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-2}.$$

18. 已知 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1,\\ 2-x, & 1\le x\le 2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

解 当 $x<0$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t=0;$$

当 $0\le x<1$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{x} t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2;$$

当 $1\le x<2$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t+\int_{1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{1} t\mathrm{d}t+\int_{1}^{x}(2-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t^2\Big|_{0}^{1}+(2t-\frac{1}{2}t^2)\Big|_{1}^{x}$$

$$=2x-\frac{1}{2}x^2-1;$$

当 $x\ge 2$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t+\int_{1}^{2} f(t)\mathrm{d}t+\int_{2}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{1} t\mathrm{d}t+\int_{1}^{2}(2-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1+(2t-\frac{1}{2}t^2)\Big|_1^2=1 \quad ;$$

所以
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}x^2, & 0\le x<1,\\ 2x-\frac{1}{2}x^2-1, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$