第九节　微分方程应用模型举例

习题　12-9

1. 设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内，L 上任一点 M 处的切线与 y 轴相交，其交点记为 A，如果点 A 和点 O 与点 M 始终等距，且 L 通过点 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$，试求 L 的方程.

解　曲线上点 $M(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

切线与 y 轴的交点 $A(0,y-xy')$，由题意知 $|AO|=|MA|$，即得微分方程

$$(y-xy')^2=x^2+(xy')^2,$$

$$y'=\frac{(\frac{y}{x})^2-1}{2\frac{y}{x}},$$

初始条件为 $y|_{x=\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$.

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y'=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，微分方程化为

$$\frac{2u\mathrm{d}u}{1+u^2}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

解此微分方程，得

$$(1+u^2)x=C，即\ [1+(\frac{y}{x})^2]x=C,$$

将初始条件代入，得 $C=3$，从而所求的曲线为

$$y=\sqrt{3x-x^2}.$$

2. 质量为 $1\mathrm{g}$ 的质点受外力作用作直线运动，外力与时间成正比. 在 $t=10\mathrm{s}$ 时，速率为 $50\mathrm{cm/s}$，外力为 $4\mathrm{g\,cm/s^2}$. 问从运动开始经过一分钟后的速度是多少?

解　由题意知，外力与时间成正比的比例系数为 $k=0.4$. 设物体在 t 时刻位移为 $x(t)$，由牛顿第二运动定律，得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=0.4t,$$

初始条件为 $x\big|_{t=0}=0$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=10}=50$. 解该微分方程, 得

$$\frac{dx}{dt}=0.2t^2+C_1,$$

将初始条件代入, 得 $C_1=30$, 所以

$$\frac{dx}{dt}=0.2t^2+30.$$

从运动开始经过一分钟后的速度是 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=60}=750\text{cm/s}=7.5\text{m/s}$.

3. 一质点由原点开始 $(t=0)$ 沿直线运动, 已知在时刻 t 的加速度为 t^2-1, 而在 $t=1$ 时, 速度为 $1/3$, 求位移 x 与时间 t 的函数关系.

解 设物体在 t 时刻位移为 $x(t)$, 由题意得微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=t^2-1,$$

初始条件为 $x\big|_{t=0}=0$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=1}=\dfrac{1}{3}$. 解该微分方程

$$x=\frac{t^4}{12}-\frac{t^2}{2}+C_1t+C_2,$$

将初始条件代入, 得 $C_1=1$, $C_2=0$, 所以

$$x=\frac{t^4}{12}-\frac{t^2}{2}+t.$$

4. 一架重 $4.5T$ 的歼击机, 着陆速度为 $600\,\text{km/h}$, 在减速伞的作用下, 滑跑 500m 后, 速度减为 $100\,\text{km/h}$, 设减速伞阻力与飞机的速度成正比, 不计飞机所受其它外力, 求减速伞的阻力系数.

解 设减速伞的阻力系数为 k, 物体的质量为 m, 设物体在 t 时刻位移为 $x(t)$, 由牛顿第二运动定律, 得微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt},$$

初始条件为 $x\big|_{t=0}=0$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=6\times10^5$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=10}=1\times10^5$.

令 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，微分方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{k}{m}\mathrm{d}t,$$

解此方程，得

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=C_1\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t},$$

$$x=-\frac{m}{k}C_1\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+C_2,$$

将初始条件代入上面两式， 可得 $k=4.5\times10^6\mathrm{kg/h}$.

5. 容器内有100L 的盐水，含10kg 的盐．现在以 3L/min 的均匀速率往容器内注入净水（假定净水与盐水立即调和），又以 2L/min 的均匀速率从容器内抽出盐水，问 60 min 后容器内盐水中盐的含量是多少?

解 设 t 时刻盐的含量为 $y(t)$，在 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 时间段内，盐含量的改变量为

$$\mathrm{d}y=-\frac{y}{100+(3-2)t}2\mathrm{d}t,$$

解此微分方程，得

$$y=\frac{C}{(100+t)^2},$$

将初始条件 $y|_{t=0}=10$ 代入，得 $C=100000$，即 $y=\frac{100000}{(100+t)^2}$． $y|_{t=60}=3.90265\mathrm{kg}$.

6. 没有前进速度的潜水艇，在下沉力 P（包括重力）的作用力下向海底下沉，水的阻力与下沉速度 v 成正比（比例系数 $k>0$），如果时间 $t=0$ 时， $v=0$, 求 v 与 t 的关系.

解 设物体的质量为 m，设物体在 t 时刻下沉速度为 $v(t)$，由牛顿第二运动定律，得微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=P-kv,$$

初始条件为 $v|_{t=0}=0$．解该微分方程，得

$$v=\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\left(\int\frac{P}{m}\mathrm{e}^{\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t+C\right)=\frac{P}{k}+C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t},$$

将初始条件代入，得 $C=-\dfrac{P}{k}$，所以 v 与 t 的关系为

$$v=\frac{P}{k}(1-\mathrm{e}^{\frac{-k}{m}t}) \quad .$$

7. 设平面曲线上各点的法线都通过坐标原点，证明此曲线为圆心在圆点的圆.

解 曲线上点 $M(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

由于曲线上各点的法线都通过坐标原点，所以将 $(0,0)$ 代入上式，得微分方程

$$yy'=-x\text{，即 } y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x,$$

解此微分方程，得

$$x^2+y^2=C.$$

8. 设一平面曲线的曲率处处为 1，求曲线方程.

解 假设在平面直角坐标系下曲线的方程为 $y=y(x)$, 由题意知

$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=1,$$

即

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\pm 1,$$

令 $p=y'$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$，原方程化为

$$\frac{p'}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\pm 1,$$

解此微分方程，得

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\pm(x+C_1),$$

$$p=y'=\pm\frac{x+C_1}{\sqrt{1-(x+C_1)^2}},$$

$$y+C_2=\mp\sqrt{1-(x+C_1)^2},$$

$$(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=1.$$

9. 一链条悬挂在一钉子上, 起动时一端离开钉子 8m , 另一端离开钉子 12m, 分别在以下两种情况下求链条滑下来所需要的时间:

(1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力;

(2) 如摩擦力为链条 1m 长的重量.

解 (1) 设时刻 t 链条离开钉子较长的长度为 $s(t)$, 链条的线密度为 ρ , 则在时刻 t 使链条下滑的力为

$$f = s\rho g - (20 - s)\rho g = 2(s - 10)\rho g \text{ ,}$$

由牛顿第二运动定律

$$20\rho \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 2(s-10)\rho g \text{ , 即 } \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} - \frac{g}{10}s = -g \text{ ,}$$

初始条件为 $s(0) = 12, \quad s'(0) = 0$.

解此微分方程, 得

$$s = \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + 10 \text{ ,}$$

即

$$s = 10 + 2\mathrm{ch}\sqrt{\frac{g}{10}}t \text{ ,}$$

由 $20 = 10 + 2\mathrm{ch}\sqrt{\frac{g}{10}}t$, 得 $t = \sqrt{\frac{10}{g}}\ln(5 + 2\sqrt{6})$.

(2) 设时刻 t 链条离开钉子较长的长度为 $s(t)$, 链条的线密度为 ρ , 则在时刻 t 使链条下滑的力为

$$f = s\rho g - (20 - s)\rho g = 2(s - 10)\rho g \text{ ,}$$

由牛顿第二运动定律

$$20\rho \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 2(s-10)\rho g - \rho g \text{ , 即 } \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} - \frac{g}{10}s = -\frac{21}{20}g \text{ ,}$$

初始条件为 $s(0) = 12, \quad s'(0) = 0$.

解微分方程, 得

$$s = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + \frac{21}{2} \text{ ,}$$

即

$$s = \frac{21}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{ch}\sqrt{\frac{g}{10}}t \text{ ,}$$

由 $20 = \frac{21}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{ch}\sqrt{\frac{g}{10}}t$, 得 $t = \sqrt{\frac{10}{g}}\ln(\frac{19 + 4\sqrt{22}}{3})$.

10. 一根弹簧上端固定, 悬挂 5kg 的物体使该弹簧伸长了 50cm, 若把该物体拉到平衡位置以下 20cm 处, 然后松手, 求物体的运动规律.

解 以平衡位置作为坐标原点, 铅直向下的方向作为 x 轴的正方向, 设物体在时刻 t 的位置为 $x(t)$, 物体的质量为 m , 弹簧的弹性系数为 k , 由题意知, $50k = mg$,

即 $k=\dfrac{mg}{50}$. 由牛顿第二运动定律,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{50}x=0,$$

其初始条件为 $x(t)\big|_{t=0}=20,\quad \left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$. 此微分方程的特征方程为

$$r^2+\frac{g}{50}=0,$$

其根为 $r_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{g}{50}}i$, 微分方程的通解为

$$x(t)=C_1\cos\sqrt{\frac{g}{50}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{50}}t,$$

将初始条件代入, 得

$$x(t)=20\cos\sqrt{\frac{g}{50}}t.$$

11. 药丸的溶解　高血压病人服用的一种球形药丸在胃里溶解时, 直径的变化率与表面积成正比. 药丸最初的直径是 0.50cm , 在实验室里做实验时测得: 药丸进入人胃 2 min 后的直径是 0.36cm, 多长时间后药丸的直径小于 0.02cm ? （此时药丸已基本溶解）.

解　设在时刻 t 药丸的直径为 $l(t)$, 比例系数为 k, 由题意知

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=-k\pi\, l^2,$$

初始条件为 $l(0)=0.5,\quad l(2)=0.36$.

解此微分方程, 得

$$\frac{1}{l}=k\pi\, t+C,$$

将初始条件代入, 得 $k=\dfrac{7}{18\pi},\quad C=2$, $l=\dfrac{1}{\dfrac{7}{18}t+2}$.

由 $0.02=\dfrac{1}{\dfrac{7}{18}t+2}$, 得 $t\approx 123(\min)$.

12. 自由落体的速度与位移的关系　设质量为 m 的物体在某种介质内受重力 G 的作用自由下落, 物体还受到介质的浮力 B（常数）与阻力 R 的作用, 已知阻力 R 与下落的速度 v 成正比, 比例系数为 λ, 试求该落体的速度与位移的函数关系.

解 设t时刻物体的位移为$x(t)$，由牛顿第二运动定律

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=G-B-\lambda v,$$

初始条件为$v(0)=0$.

将$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$代入微分方程，得

$$\frac{v\mathrm{d}v}{G-B-\lambda v}=\frac{\mathrm{d}x}{m},$$

解此微分方程，得

$$\frac{x}{m}=-\frac{v}{\lambda}-\frac{G-B}{\lambda^2}\ln(G-B-\lambda v)+C$$

将初始条件代入，得 $C=\frac{G-B}{\lambda^2}\ln(G-B)$，所以微分方程的解为

$$\frac{x}{m}=-\frac{v}{\lambda}-\frac{G-B}{\lambda^2}\ln(\frac{G-B-\lambda v}{G-B}).$$