第十一章总习题

1. 填空题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的<u> 必要 </u>条件，而不是<u> 充分 </u>条件;

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定<u> 收敛 </u>；若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 必定<u> 发散 </u>;

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 按某一方式经添加括号后所得的级数收敛是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的<u>必要 </u>条件.

解 (1) 略.

(2) 略.

(3) 略.

2. 单项选择题.

(1) 下列命题中正确的是(C);

(A) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {u_n}^2$ 必收敛;

(B) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 均发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 必发散;

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(u_{2n-1} + u_{2n}\right)$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散;

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 但 u_n 非单调数列，则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 必发散.

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此幂级数在 $x=2$ 处(B);

(A) 条件收敛; (B) 绝对收敛;

(C) 发散; (D) 收敛性不能确定.

(3) 设$u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$的收敛性依次为(A).

(A) 收敛，发散; (B) 发散，收敛;
(C) 收敛，收敛; (D) 发散，发散.

解 (1) 选 C.

A 错. 如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散;

B 错. 如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$均发散，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}0$收敛;

D 错. 如取$u_n=(-1)^n\frac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$，显然$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，$u_n$非单调数列，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.

(2) 选 B. 令$t=x-1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$. 由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处收敛，知当$|t|<2$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$绝对收敛，即当$-1<x<3$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$绝对收敛. 而$2\in(-1,3)$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=2$处绝对收敛.

(3) 选 A. 因为$u_n{}^2=[\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})]^2$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n{}^2}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}})^2=1$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$发散. 设$a_n=\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$，则$a_n\geq0$，且显然有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\ a_n\geq a_{n+1}$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

3. 判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+(-1)^n)n^2}{5^n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n\sin\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+a^n}{1+b^n}\quad (a>0,b>0)$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}\quad (a>0,s>0)$.

解 (1) 设$u_n=\frac{(2+(-1)^n)n^2}{5^n}\le\frac{3n^2}{5^n}=v_n$，则$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)^2}{5^{n+1}}\frac{5^n}{3n^2}=\frac{1}{5}$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，从而原级数收敛.

(2) 设$u_n=(2n\sin\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}$，则$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}(2n\sin\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，所以原级数发散.

(3) 设$u_n=\frac{1+a^n}{1+b^n}$，则当$a>b>0$且$a>1$时，$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^n}+(\frac{b}{a})^n}=\infty$；当$a>b>0$且$a\le1$时，$\lim_{n\to\infty}u_n\ne0$；当$b>a>0$且$b>1$时，$u_n<\frac{1}{b^n}+(\frac{a}{b})^n$；当$b>a>0$且$b\le1$时，$\lim_{n\to\infty}u_n\ne0$. 综上当$b>a>0$且$b>1$时，原级数收敛，其它情况原级数发散.

(4) 设$u_n=\frac{a^n}{n^s}$，则$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{(1+n)^s}\frac{n^s}{a^n}=a$，所以当$a<1$时，原级数收敛；当$a>1$时，原级数发散；当$a=1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$，故当$s>1$收敛，当$s\le1$时，原级数发散.

4. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\frac{n^2}{2}}{\pi^n}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{n}{n+1})^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{3^n}]$.

解 (1) 设 $u_n=(-1)^n\dfrac{\cos\frac{n^2}{2}}{\pi^n}$，则 $|u_n|=\left|\dfrac{\cos\frac{n^2}{2}}{\pi^n}\right|\le\dfrac{1}{\pi^n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\pi^n}$ 收敛，从而原级数绝对收敛.

(2) $u_n=(-1)^n(\dfrac{n}{n+1})^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n+1})^n=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\neq 0$，所以原级数发散.

(3) $u_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}$，则当 $p<0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\infty$，原级数发散；当 $p=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1$，原级数发散；当 $1\ge p>0$ 时，原级数条件收敛；当 $p>1$ 时，原级数绝对收敛.

(4) 设 $u_n=(-1)^n\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+2)}{(\frac{1}{n}+1)^n}\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，所以原级数绝对收敛.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(-1)^n\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{3^n}]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n^2+1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$. 设 $a_n=\dfrac{n}{n^2+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 且 $a_n\ge a_{n+1}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n^2+1}$ 收敛. 设 $v_n=\dfrac{n}{3^n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|v_{n+1}|}{|v_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3^{n+1}}\dfrac{3^n}{n}=\dfrac{1}{3}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$ 收敛，从而原级数收敛. 设 $u_n=(-1)^n\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{3^n}$，则 $|u_n|=\dfrac{n}{n^2+1}+(-1)^n\dfrac{n}{3^n}$，而易证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，从而原级数条件收敛.

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{3^n}}]$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}}=2^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}}=2^{\frac{3}{4}}$，其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{3^n}\Bigg|_{x=1}$. 因为令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{3^n}$，则 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n}=\dfrac{\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{3}}=\dfrac{x}{3-x}$，$S(x)=(\dfrac{x}{3-x})'=\dfrac{3}{(3-x)^2}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}=S(1)=\dfrac{3}{4}$.

6. (1) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$，问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是否一定收敛？试说明理由.

(2) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 是否一定收敛？试说明理由.

解 (1) 不一定. 如取 $u_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$，$v_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}[1+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}]=1,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

(2) 不一定. 如取 $u_n=v_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 均收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内二阶导数连续，且 $f(0)=0,\ f'(0)=0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

证 由题知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内一阶泰勒展式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2!}x^2 \quad (0<\theta<1),$$

再由 $f''(x)$ 在属于该领域内包含原点的一小闭区域上连续，故必存在 $M>0$，使 $|f''(x)|\le M$，于是 $|f(x)|\le\frac{M}{2}x^2$. 令 $x=\frac{1}{n}$，当 n 充分大时，有 $\left|f(\frac{1}{n})\right|\le\frac{M}{2}\frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

8. 求下列幂级数的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$；

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n n!}x^n$； (4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+2)!}$.

解 (1) 设 $u_n=\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{2n-1}x^2=\frac{x^2}{2}$，当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$ 发散，所以级数的收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$．设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$，显然 $S(0)=\frac{1}{2}$，而当 $x\neq 0$ 时,

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^n=\frac{1}{x}\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2},$$

从而 $S(x)=(\frac{x}{2-x^2})'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$， 所以 $S(x)=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$， $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(2) 设 $a_n=\frac{1}{n+1}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$．当 $x=1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，当 $x=-1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛，所以级数的收敛区间 $[-1,1)$．设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$，显然 $S(0)=0$，而 $x\neq 0$ 时

$$S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x=-1-\frac{1}{x}\ln(1-x),$$

所以
$$S(x)=\begin{cases}-\frac{x+\ln(1-x)}{x}, & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(3) 设 $a_n=\frac{n^2+1}{3^n n!}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}(n+1)!}\frac{3^n n!}{n^2+1}=0$，所以级数的收敛区

间 $(-\infty,+\infty)$. 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}(\frac{x}{3})^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x}{3})^n$, 令 $t=\frac{x}{3}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}(\frac{x}{3})^n=t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}t^{n-1}=t(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!})'=t(te^t)'=(t^2+t)e^t=(\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3})e^{\frac{x}{3}}.$$

所以
$$S(x)=(\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}+1)e^{\frac{x}{3}},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) 令 $t=x+1$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n+2)!}$.

设 $a_n=\frac{1}{(n+2)!}$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+3)!}=0$, 故原级数的收敛区间 $(-\infty,+\infty)$.

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n+2)!}$, 显然 $S(-1)=\frac{1}{2}$, 而当 $t=x+1\neq 0$ 时,

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n+2)!}=\frac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+2}}{(n+2)!}=\frac{1}{t^2}(e^t-1-t),$$

所以
$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x+1)^2}(e^{x+1}-x-2), & x\neq -1,\\ \frac{1}{2}\quad , & x=-1.\end{cases}$$

9. 求下列数项级数的和:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n!}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}$.

解 (1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

构造幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}$ 与 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, 并设 $S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}$, $S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, 则

$$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{x^n}{(n-1)!})'=(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!})'=(x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!})'=(1+x)\mathrm{e}^x-1,$$

故
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n!}=S_1(1)-S_2(1)=\mathrm{e}+1.$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^n}$.

构造幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$与$\sum_{n=1}^{\infty}5x^n$，并设$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}5x^n$，则

$$S_1(x)==\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=(\frac{x}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad S_2(x)=\frac{5x}{1-x},$$

从而
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}=S_1(\frac{1}{3})+S_2(\frac{1}{3})=\frac{19}{4}.$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}$.

构造幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+2)x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，并设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+2)x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}]'=[x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}]'=(x\sin x)'=\sin x+x\cos x,$$

从而
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}S(1)=\frac{1}{2}(\sin 1+\cos 1).$$

10. 将下列函数展开成x的幂级数:

(1) $\ln(1+x+x^2)$;　　(2) $\arctan\frac{1+x}{1-x}$.

解 (1) $\ln(1+x+x^2)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x^3)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n},\quad(-1\le x<1).$$

(2) 设 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$，则 $f^{'}(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，故

$$f(x)=\int_0^x f^{'}(x)\mathrm{d}x+f(0)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in(-1,1).$$

11. 设 $f(x)=x-1\left(0\le x\le 2\right)$，

(1) 将 $f(x)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数;

(2) 将 $f(x)$ 展开成以 4 为周期的余弦级数, 并求该级数的和函数 $S(x)$ 在 $x=\dfrac{7}{2}$ 处的值.

解 (1) 对 $f(x)$ 进行周期为 2 的周期延拓, 则 $a_0=\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=[\dfrac{x^2}{2}-x]_0^2=0$,

$$a_n=\int_0^2(x-1)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\int_0^2 x\cos n\pi x\mathrm{d}x-\int_0^2\cos n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=[x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}]_0^2-\int_0^2\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\mathrm{d}x-[\frac{\sin n\pi x}{n\pi}]_0^2=0,$$

$$b_n=\int_0^2(x-1)\sin n\pi x\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sin n\pi x\mathrm{d}x-\int_0^2\sin n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=[-x\frac{\cos n\pi x}{n\pi}]_0^2+\int_0^2\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\mathrm{d}x+[\frac{\cos n\pi x}{n\pi}]_0^2=-\frac{2}{n\pi},$$

故
$$f(x)=\frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi x,\quad x\in(0,2).$$

(2) 对 $f(x)$ 进行偶延拓, 因为 $f(x)$ 为偶函数, 故 $b_n=0(n=1,2,3,\cdots)$,

$$a_0=\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=[\frac{x^2}{2}-x]_0^2=0,$$

$$a_n=\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x-\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=[\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}]_0^2-\int_0^2\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x-[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}]_0^2$$

$$=-\int_0^2\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=(\frac{2}{n\pi})^2[\cos\frac{n\pi x}{2}]_0^2=\frac{4[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots,$$

故 $$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2},\quad x\in[0,2].$$

由题知 $f(x)$ 在 $x=\frac{7}{2}$ 处连续，故由收敛定理知 $S(\frac{7}{2})=f(\frac{7}{2})=f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$.

12. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2-3x^2}{12}\quad(-\pi\le x\le\pi)$.

证 设 $f(x)=\frac{\pi^2-3x^2}{12}$，并对 $f(x)$ 进行周期延拓. 因为 $f(x)$ 为偶函数，故 $b_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi^2-3x^2}{12}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=0,$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi^2-3x^2}{12}\cdot\cos nx\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\pi}\{[\frac{x^2\sin nx}{n}]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{2x}{n}\sin nx\mathrm{d}x\}\\&=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\{-[\frac{x\cos nx}{n}]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\mathrm{d}x\}=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2},\end{aligned}$$

因此 $$\frac{\pi^2-3x^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2}\quad(-\pi\le x\le\pi).$$