第二节　可分离变量的微分方程和一阶线性微分方程

习题　12-2

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $(1+x^2)y\mathrm{d}y - x(1+y^2)\mathrm{d}x = 0$;　　(2) $y' = ax(y^2+y')\ (a\neq 0)$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathrm{e}^{y^2+3x}}{y} = 0$;　　(4) $\cos x\sin y\mathrm{d}x + \sin x\cos y\mathrm{d}y = 0$;

(5) $(\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 0$;　(6) $y^2\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = x^2y\mathrm{d}y - \mathrm{d}x$;

(7) $x\sec y\mathrm{d}x + (x+1)\mathrm{d}y = 0$;　　(8) $y' = \dfrac{1+y^2}{xy+x^3y}$.

解　(1)　分离变量, 得

$$\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y = \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

两边求不定积分, 得

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1\ ,\ 即\ 1+y^2 = C(1+x^2).$$

(2)　整理并分离变量, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{ax-1+1}{1-ax}\mathrm{d}x = (-1-\frac{1}{ax-1})\mathrm{d}x,$$

两边求不定积分, 得

$$-\frac{1}{y} = -x - \frac{1}{a}\ln|ax-1| + C_1,\quad 即\ y = \frac{a}{ax+\ln|1-ax|+C}.$$

(3)　分离变量, 得

$$\frac{y}{\mathrm{e}^{y^2}}\mathrm{d}y = -\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x,$$

两边求不定积分, 得

$$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2} = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C_1\ ,\ 即\ 3\mathrm{e}^{-y^2} - 2\mathrm{e}^{3x} = C.$$

(4)　分离变量, 得

$$\cot y\mathrm{d}y = -\cot x\mathrm{d}x,$$

两边求不定积分，得

$$\ln|\sin y| = -\ln|\sin x| + C_1 \text{ ，即 } \sin x \sin y = C.$$

(5) 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^y - 1}\mathrm{d}y = -\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x,$$

两边求不定积分，得

$$\ln\left|\mathrm{e}^y - 1\right| = -\ln\left|\mathrm{e}^x + 1\right| + C_1 \text{，即 } (\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^y - 1) = C.$$

(6) 分离变量，得

$$\frac{y\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 1},$$

两边求不定积分，得

$$\frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C_1 \text{ ，即 } y^2 + 1 = C(\frac{x-1}{x+1}).$$

(7) 分离变量，得

$$\cos y\mathrm{d}y = -\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = (-1 + \frac{1}{x+1})\mathrm{d}x,$$

两边求不定积分，得

$$\sin y = -x + \ln|x+1| + C_1 \text{，即 } \sin y = \ln|x+1| - x + C.$$

(8) 分离变量，得

$$\frac{y}{1 + y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{x + x^3}\mathrm{d}x = (\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1})\mathrm{d}x,$$

两边求不定积分，得

$$\frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C_1 \text{，即 } (1 + y^2)(1 + x^2) = Cx^2.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $y'(x^2 - 4) = 2xy$，$y\big|_{x=1} = 1$；

(2) $(x+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1 = 2\mathrm{e}^{-y}$，$y\big|_{x=1} = 0$；

(3) $\cos y\mathrm{d}x + (1 + \mathrm{e}^{-x})\sin y\mathrm{d}y = 0$，$y\big|_{x=0} = \dfrac{\pi}{4}$；

(4) $(1 + x^2)y' = \arctan x$，$y\big|_{x=0} = 0$.

解 (1) 分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=\frac{2x}{x^2-4}dx,$$

两边求不定积分，得

$$\ln|y|=\ln|x^2-4|+C_1\text{，即 }y=C(x^2-4).$$

将初始条件 $y|_{x=1}=1$ 代入，得 $C=-\frac{1}{3}$，特解为 $y=-\frac{1}{3}(x^2-4)$.

(2) 分离变量，得

$$\frac{e^y dy}{2-e^y}=\frac{dx}{x+1},$$

两边求不定积分，得

$$-\ln|e^y-2|=\ln|x+1|+C_1\text{，即 }(e^y-2)(x+1)=C.$$

将初始条件 $y|_{x=1}=0$ 代入，得 $C=-2$， 特解为 $(x+1)(2-e^y)=2$.

(3) 分离变量，得

$$\tan y dy=-\frac{e^x}{e^x+1}dx,$$

两边求不定积分，得

$$-\ln|\cos y|=-\ln|e^x+1|+C_1\text{，即 }\cos y=C(e^x+1).$$

将初始条件 $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$ 代入，得 $C=\frac{\sqrt{2}}{4}$ ，特解为 $e^x=2\sqrt{2}\cos y-1$.

(4) 分离变量，得

$$dy=\frac{\arctan x}{1+x^2}dx,$$

两边求不定积分，得

$$y=\frac{1}{2}\arctan^2 x+C.$$

将初始条件 $y|_{x=0}=0$ 代入，得 $C=0$，特解为 $y=\frac{1}{2}(\arctan x)^2$.

3. 判断下列方程哪些是线性微分方程:

(1) $xy'+y\sin x=0$; (2) $yy'+y=e^x$;

(3) $t^2\frac{dx}{dt}+x=1$; (4) $y'+y^2=x$;

(5) $u'+u\cos x=x$; (6) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y^3}$;

(7) $(y')^2+x=1$; (8) $ydx+(xy-3)dy=0$.

解 (1) 是，因为原方程可化为线性微分方程的标准形式

$$y'+\frac{\sin x}{x}y=0.$$

(2) 不是，因为原方程不能化为线性微分方程的标准形式.

(3) 是，因为原方程可化为线性微分方程的标准形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{t^2}x=\frac{1}{t^2}.$$

(4) 不是，因为原方程不能化为线性微分方程的标准形式.

(5) 是，因为原方程为线性微分方程的标准形式.

(6) 是关于 $x=x(y)$ 的线性微分方程，因为原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=y^3.$$

(7) 不是，因为原方程不能化为线性微分方程的标准形式.

(8) 是关于 $x=x(y)$ 的线性微分方程，因为原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x=\frac{3}{y}.$$

4. 求下列微分方程的通解:

(1) $3y'+2y=6x$;

(2) $xy'+y=\mathrm{e}^x$;

(3) $xy'-y=\dfrac{x}{\ln x}$;

(4) $y'+2xy=2x\mathrm{e}^{-x^2}$;

(5) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-x=\sin t$;

(6) $y'-y\tan x=\sec x$;

(7) $(y^2-6x)y'+2y=0$;

(8) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2x-y^2}$.

解 (1) 该方程为一阶线性微分方程，其解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{3}\mathrm{d}x}(\int 2x\mathrm{e}^{\int\frac{2}{3}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}(3x\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}-\frac{9}{2}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}+C)=3x-\frac{9}{2}+C\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}.$$

(2) 该方程为一阶线性微分方程，其解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int\frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\frac{1}{x}(\mathrm{e}^x+C)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}+\frac{C}{x}.$$

(3) 该方程为一阶线性微分方程，其解为

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=x(\ln|\ln x|+C)=Cx+x\ln|\ln x|.$$

(4) 该方程为一阶线性微分方程，其解为

$$y=\mathrm{e}^{\int -2x\mathrm{d}x}(\int 2x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^{-x^2}(x^2+C).$$

(5) 该方程为一阶线性微分方程，其解为

$$x=\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}t}(\int \sin t e^{-\int \mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C)=\mathrm{e}^{t}(-\frac{\cos t+\sin t}{2}\mathrm{e}^{-t}+C)=C\mathrm{e}^{t}-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t).$$

(6) 该方程为一阶线性微分方程，其解为

$$y=\mathrm{e}^{\int \tan x\mathrm{d}x}(\int \sec x\mathrm{e}^{-\int \tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=(x+C)\sec x.$$

(7) 该方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{3}{y}x=-\frac{y}{2},$$

为一阶线性微分方程，其解为

$$x=\mathrm{e}^{\int \frac{3}{y}\mathrm{d}y}(\int -\frac{y}{2}\mathrm{e}^{-\int \frac{3}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C)=y^{3}(\frac{1}{2y}+C)=Cy^{3}+\frac{1}{2}y^{2}.$$

(8) 该方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-2x=-y^{2},$$

为一阶线性微分方程，其解为

$$x=\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}y}(\int -y^{2}\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C)$$

$$=\mathrm{e}^{2y}[(\frac{1}{2}y^{2}+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4})\mathrm{e}^{-2y}+C]=C\mathrm{e}^{2y}+\frac{1}{4}(2y^{2}+2y+1).$$

5. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $y'-2xy=\mathrm{e}^{x^{2}}\cos x$, $y|_{x=0}=1$;

(2) $y'+y\cos x=\sin x\cos x$, $y|_{x=0}=1$;

(3) $xy'+y=\dfrac{\ln x}{x}$, $y|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$;

(4) $y'-y=2x\mathrm{e}^{2x}$, $y|_{x=0}=1$.

解 (1) 该方程为一阶线性微分方程，其解为

$$y=\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}(\int \mathrm{e}^{x^{2}}\cos x\mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^{x^{2}}(\sin x+C),$$

将初始条件 $y|_{x=0}=1$ 代入，得 $C=1$，特解为 $y=\mathrm{e}^{x^{2}}(\sin x+1)$.

(2) 该方程为一阶线性微分方程，其解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int \cos x\mathrm{d}x}(\int \sin x\cos x\mathrm{e}^{\int \cos x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)$$

$$=\mathrm{e}^{-\sin x}[\mathrm{e}^{\sin x}(\sin x-1)+C)=C\mathrm{e}^{-\sin x}+\sin x-1,$$

将初始条件 $y|_{x=0}=1$ 代入，得 $C=2$，特解为 $y=2\mathrm{e}^{-\sin x}+\sin x-1$.

(3) 该方程为一阶线性微分方程，其解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}\ln^2 x+C\right)=\frac{\ln^2 x}{2x}+\frac{C}{x},$$

将初始条件 $y|_{x=1}=\frac{1}{2}$ 代入，得 $C=\frac{1}{2}$，特解为 $y=\frac{1}{2x}(1+\ln^2 x)$.

(4) 该方程为一阶线性微分方程，其解为

$$y=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(\int 2x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^x[2(x-1)\mathrm{e}^x+C]=2(x-1)\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^x,$$

将初始条件 $y|_{x=0}=1$ 代入，得 $C=3$，特解为 $y=3\mathrm{e}^x+2(x-1)\mathrm{e}^{2x}$.

6. 一平面曲线经过点 $(2,3)$，它在两坐标轴间的任意切线线段均被切点所平分，求曲线方程.

解 点 (x,y) 为曲线上的任意一点，过此点的的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

切线与两坐标轴交点分别为 $P(x-\frac{y}{y'},0),\ Q(0,y-xy')$，由题意知

$$\frac{x-\frac{y}{y'}}{2}=x,\quad \frac{y-xy'}{2}=y,$$

即得微分方程

$$xy'+y=0,\ \text{即}\ \frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

其初始条件为 $y|_{x=2}=3$. 解此微分方程，得通解为 $xy=C$. 将初始条件代入，得 $C=6$，所求曲线方程为 $xy=6$.

7. 一个物体在冷却过程中，其温度变化速度与它本身的温度和环境的温度之差成正比，今有一温度为 50℃的物体，放入温度为 20℃的房间里（房间的温度看作不变），试求物体温度随时间变化的规律.

解 温度 T 与时间 t 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-20),$$

其初始条件为 $T|_{t=0}=50$. 解此微分方程，得通解为 $T=20+C\mathrm{e}^{kt}$，将初始条件代入，得 $C=30$，所求物体温度随时间变化的规律为 $T=20+30\mathrm{e}^{kt}$.

8. 求解积分方程

$$\int_0^t \left[\varphi(t) - te^t\right] dt = -\varphi(t),$$

其中 $\varphi(t)$ 为可导的未知函数.

解 由方程可知, $\varphi(0)=0$, 方程两边对 t 求导, 得

$$\varphi(t) - te^t = -\varphi'(t)，即 \varphi'(t) + \varphi(t) = te^t,$$

$$\varphi(t) = e^{-\int dt}\left(\int te^t e^{\int dt} dt + C\right) = \frac{2t-1}{4}e^t + Ce^{-t},$$

将初始条件 $\varphi(0)=0$ 代入, 得 $C=\frac{1}{4}$, 故

$$\varphi(t) = \frac{2t-1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t}.$$