第四章　不定积分

第一节　不定积分的概念

1.填空

(1)若 $f'\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1$,则 $f'(x)=\underline{2(1-x^2)}$, $f(x)=\underline{2x-\dfrac{2}{3}x^3+C}$.

(2)设 $F'(x)=f(x)$, $f(x)$ 为可导函数,且 $f(0)=1$,又 $F(x)=xf(x)+x^2$,则 $f'(x)=\underline{-2}$, $f(x)=\underline{-2x+1}$.

(3)在积分曲线族 $y=\int 4x\,\mathrm{d}\,x$,与直线 $y=2x+1$ 相切的曲线过点$\underline{\left(\dfrac{1}{2},2\right)}$,其方程为

$\underline{y=2x^2+\dfrac{3}{2}}$.

(4)一物体由静止开始运动,经 t 秒后的速度是 $3t^2 m/s$,那么,

a)在 3 秒后物体离开出发点的距离是 $\underline{27\,\mathrm{m}}$;

b)物体走完 $360\,\mathrm{m}$ 所需时间为 $\underline{7.11\mathrm{s}}$.

解　(1) $f'\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=2\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$,所以 $f'(x)=2(1-x^2)$

$$f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}\,x=\int 2(1-x^2)\,\mathrm{d}\,x=2x-\frac{2}{3}x^3+C.$$

(2) $f(x)=F'(x)=f(x)+xf'(x)+2x$

$\therefore xf'(x)+2x=0$, $f'(x)=-2$

$$f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}\,x=-2x+C.$$

又　$f(0)=1, \therefore C=1$,故 $f(x)=-2x+1$.

(3) $y=\int 4x\,\mathrm{d}\,x=2x^2+C$,由 $y'=4x=2$,得 $x=\dfrac{1}{2}$.切点为$\left(\dfrac{1}{2},2\right)$,又

$$2=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+C,$$

得 $C=\dfrac{3}{2}$，所以,曲线方程为　$y=2x^2+\dfrac{3}{2}$.

(4)依题意　$v=s'(t)=3t^2$,且 $s(0)=0$.

$s(t)=\int v\,\mathrm{d}\,t=\int 3t^2\,\mathrm{d}\,t=t^3+C$,且 $C=0, s=t^3$,所以,3 秒后的距离是

$$s=3^3=27(\mathrm{m}).$$

$$360=t^3, t=\sqrt[3]{360}\approx 7.11(s).$$

2.把下列函数与它的原函数用线连接起来.

(1) $\sin^2 \dfrac{x}{2}$　　　　(a) $\dfrac{-1}{2}\cos^2 x$

(2) $\dfrac{x^2}{1+x^2}$　　　　(b) $e^x \operatorname{sh} x$

(3) $\sin x \cos x$　　　　(c) $-\dfrac{1}{4}\cos 2x + 3$

(4) $\dfrac{e^x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$　　　　(d) $\dfrac{1}{2}e^{2x}$

(e) $\dfrac{1}{2}(x - \sin x)$

(f) $x - \arctan x + 4$

3.计算下列不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$

解　原式$=\displaystyle\int (x^{\frac{1}{6}}+1)\,\mathrm{d}\,x = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + x + C$.

(2) $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}\,x$

解　原式$=\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}\,x = \arctan x - \frac{1}{x} + C$.

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}\,x$

解　原式$=\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{2} + C$.

(4) $\displaystyle\int \frac{2\times 3^x - 5\times 2^x}{3^x}\mathrm{d}x$

解　原式$=\displaystyle\int \left[2-5\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]\mathrm{d}\,x = 2x - \frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln 2 - \ln 3} + C$.

(5) $\displaystyle\int \sec x(\sec x - \tan x)\,\mathrm{d}\,x$

解　原式$=\displaystyle\int (\sec^2 x - \sec x \tan x)\,\mathrm{d}\,x = \tan x - \sec x + C$.

(6) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin^2 x \cos^2 x}$

解　原式$=\displaystyle\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C$.

第二节　不定积分的换元积分法

1.填入适当的系数,使下列等式成立

(1) $\cos\frac{2}{3}x\,\mathrm{d}x=\underline{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\left(\sin\frac{2}{3}x\right)$； (2) $\frac{\mathrm{d}x}{1+9x^2}=\underline{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(\arctan 3x)$

(3) $\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\underline{-1}\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$； (4) $\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=\underline{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(2+\sin^2 x)$

2. $\int[f(x)]^{\mu}f'(x)\,\mathrm{d}x=\int[f(x)]^{\mu}\,\mathrm{d}\,\underline{f(x)}=\begin{cases}\underline{\ln|f(x)|+C}, & \mu=-1,\\ \underline{\frac{1}{\mu+1}[f(x)]^{\mu+1}+C}, & \mu\neq-1.\end{cases}$

3. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$，则 $\underline{(3)}=F[g(x)]+C$.

(1) $\int f[g(x)]\,\mathrm{d}x$， (2) $\int f[g(x)]g(x)\,\mathrm{d}x$， (3) $\int f[g(x)]g'(x)\,\mathrm{d}x$.

4.计算下列不定积分

(1) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

解 原式 $=2\int\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x}=-2\cos\sqrt{x}+C$.

(2) $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x$

解 原式 $=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x^3}{\sqrt{1-x^6}}=\frac{1}{3}\arcsin x^3+C$.

(3) $\int\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}}\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

解 原式 $=\int\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}}\,\mathrm{d}(1+\tan x)=2\sqrt{1+\tan x}+C$.

(4) $\int\frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

解 原式 $=-\int 10^{2\arccos x}\,\mathrm{d}\arccos x=-\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10}+C$.

(5) $\int\frac{1}{\ln(\sin x)}\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

解 原式 $=\int\frac{1}{\ln(\sin x)}\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x}=\int\frac{1}{\ln(\sin x)}\,\mathrm{d}\ln(\sin x)=\ln|\ln(\sin x)|+C$.

(6) $\int\frac{x+1}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x$

解 原式 $=\int\frac{\mathrm{e}^x(x+1)}{x\mathrm{e}^x(1+x\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x\overset{令x\mathrm{e}^x=u}{=}\int\frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)}=\ln\left|\frac{u}{u+1}\right|+C=\ln\left|\frac{x\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x+1}\right|+C$.

注意 被积函数 $x(1+x\mathrm{e}^x)$ 形式较复杂,是同学积分时的困难之处,但易发现

$$(x\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x(x+1),$$

故若分子分母同乘 e^x ,就可利用代换 $x\mathrm{e}^x=u$,将其化为可积分的简单形式.

(7) $\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$

解 原式$=\int\frac{1}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}(x\ln x)=-\frac{1}{x\ln x}+C$.

注意 因$(x\ln x)'=1+\ln x$,所以可凑成微分$(1+\ln x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x\ln x)$.

(8)$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}$

解 原式$=\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}-\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^x-x+\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$.

5.计算下列不定积分

(1)$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\qquad(a>0)$

解 设$x=a\sin t$,$\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}原式&=\int\frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}a\cos t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C\\&=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right)+C.\end{aligned}$$

(2)$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x\qquad(x>a>0)$

解 设$x=a\sec t,\ \mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}原式&=\int\frac{a\tan t}{a\sec t}a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t\\&=a\int(\sec^2 t-1)\,\mathrm{d}t=a(\tan t-t)+C\\&=\sqrt{x^2-a^2}-\arccos\frac{a}{x}+C\end{aligned}$$

(3)$\int x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

解 设$x=2\sin t$,$\mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$

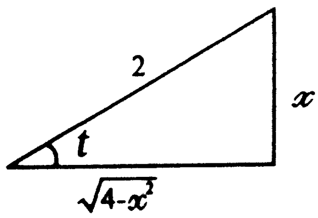

图 4.1

$$\begin{aligned}原式&=16\int\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=4\int\sin^2 2t\,\mathrm{d}t\\&=2\int(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t=2\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C\\&=\mathrm{t}-\sin 2\mathrm{t}\cos 2\mathrm{t}+\mathrm{C}\\&=\mathrm{t}-2\sin\mathrm{t}\cos\mathrm{t}(\cos^2\mathrm{t}-\sin^2\mathrm{t})+\mathrm{C}\ \text{(图 4.1)}\\&=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{x^3}{4}\sqrt{4-x^2}+C\end{aligned}$$

注意 将原函数还原为x的函数时,碰到较复杂的形式如$\frac{1}{4}\sin 4t$,就易出错,这时应:①将4倍角的形式化为单角形式;②利用直角三角形.

(4)$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

解 设 $x=\tan t$, $\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=\int\frac{\sec^2 t}{\tan^2 t\sec t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{\sin t}+C=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C.$$

第三节　不定积分的分部积分法

1.下列不定积分采用分部积分法时,$\underline{(2),(3)}$ 选 $u=x^2$,$\underline{(1),(4)}$ 选 $\mathrm{d}v=x^2\,\mathrm{d}x$.

(1)$\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x$;　　(2)$\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$;

(3)$\int x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$;　　(4)$\int x^2\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$;

2.已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $(1+\sin x)\ln x$,则 $\int xf'(x)\,\mathrm{d}x=$ ______ .

解 $\int xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\,\mathrm{d}x$

$=x[(1+\sin x)\ln x]'-(1+\sin x)\ln x$

$=x\cos x\ln x+(1+\sin x)(1-\ln x)+C$.

3.计算下列不定积分

(1)$\int x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

解 原式 $=-x^2\mathrm{e}^{-x}+2\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

$=-x^2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}+2\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

$=-\mathrm{e}^{-x}(x^2+2x+2)+C$.

(2)$\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$

解 原式 $=\int\ln x\,\mathrm{d}(\frac{x^3}{3})=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C$.

(3)$\int x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

解 原式 $=2\int x\,\mathrm{d}\sin\frac{x}{2}=2x\sin\frac{x}{2}-2\int\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

$=2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$.

(4)$\int\mathrm{e}^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x$

解 设 $u=\mathrm{e}^{-2x}$, $dv=\sin x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u=-2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$, $v=-\cos x$,

原式 $=-\mathrm{e}^{-2x}\cos x-2\int\mathrm{e}^{-2x}\cos x\,\mathrm{d}x$

再设 $u=\mathrm{e}^{-2x}$, $\mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u=-2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$, $v=\sin x$,

原式 $=-\mathrm{e}^{-2x}\cos x-2\mathrm{e}^{-2x}\sin x-4\int\mathrm{e}^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x$

故　　原式 $=-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2x}(\cos x+2\sin x)+C$.

注意　对被积函数是指数函数与三角函数乘积的形式,需两次使用分部积分法,但两次所设 u(或 $\mathrm{d}v$) 的函数类型应该一致.

(5) $\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

解 设 $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$

原式 $=\int 2t\sin t\,\mathrm{d}t=-2t\cos t+2\int\cos t\,\mathrm{d}t$

$=-2t\cos t+2\sin t+C$

$=2(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x})+C$.

注意 遇到此类题目,有人无从下手,其实注意把换元积分法与分部积分法结合使用,就会看到希望,以下题目也应如此考虑.

(6) $\int\cos\ln x\,\mathrm{d}x$

解 原式 $=x\cos\ln x-\int x\,\mathrm{d}(\cos\ln x)$

$=x\cos\ln x+\int\sin\ln x\,\mathrm{d}x$

$=x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int\cos\ln x\,\mathrm{d}x$

所以 $$\int\cos\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}[\cos\ln x+\sin\ln x]+C\,.$$

(7) $\int\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

解 令 $\mathrm{e}^x=t$, $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}$

原式 $=\int\frac{1}{t^2}\arctan t\,\mathrm{d}t$

$=-\frac{1}{t}\arctan t+\int\frac{1}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$

$=-\frac{1}{t}\arctan t+\int\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$

$=-\frac{1}{t}\arctan t+\ln t-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

$=-\frac{1}{\mathrm{e}^x}\arctan\mathrm{e}^x+x-\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x})+C$

注意 本题易采用下列做法.

令 $u=\arctan\mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ ，结果写成：

$$\text{原式}=-\mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x+\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$

而无法进行下去.此时,应赶快改变代换方式.

第四节 有理函数的积分

1.有理真分式 $\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}$ 可以分解成为 (3) 的形式,其中 A,B,C,D,E 为待定常数.

(1) $\frac{Ax+B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$;　　(2) $\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+2x+3}$;

(3) $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+3}$.

2.计算下列不定积分

(1) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)^2}$

解 $\dfrac{1}{x(1+x)^2}=\dfrac{1+x-x}{x(1+x)^2}=\dfrac{1+x-x}{x(1+x)}-\dfrac{1}{(1+x)^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$$\text{原式}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|+\frac{1}{1+x}+C.$$

注意 若按常规分解方法,令

$$\frac{1}{x(1+x)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(1+x)^2}+\frac{C}{1+x},$$

再求待定常数比较烦,常常可采用代数恒等变形来分解.

还有两种常见错误:

令 ① $\dfrac{1}{x(1+x)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{(1+x)^2}$,

或 ② $\dfrac{1}{x(1+x)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{(1+x)^2}+\dfrac{D}{1+x}$ 再求待定数.

错误在于,当有理真分式的分母出现因子 $(x-a)^k$ 时,应分解出 k 项,而不是一项,对应的分子应为常数,而不是一次式.

(2) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^7+1)}$

解 法 1 原式 $\displaystyle=\int\frac{x^6\,\mathrm{d}x}{x^7(x^7+1)}\overset{令x^7=t}{=}\frac{1}{7}\int\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=\frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^7}{x^7+1}\right|+C.$$

解 法 2 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^7+1)}=\int\frac{1+x^7-x^7}{x(x^7+1)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^6}{x^7+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^7}{x^7+1}\right|+C.$

解 法 3 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^7+1)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^8(1+x^{-7})}=-\frac{1}{7}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^{-7})}{1+x^{-7}}=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^7}{x^7+1}\right|+C.$

(3) $\displaystyle\int\frac{2x-3}{x^2+x+5}\mathrm{d}x$

解 原式 $\displaystyle=\int\frac{2x+1}{x^2+x+5}\mathrm{d}x-4\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+5}$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(x^2+x+5)}{x^2+x+5}-4\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{19}{4}}$$

$$=\ln\left|x^2+x+5\right|-\frac{8}{\sqrt{19}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{19}}+C.$$

注意 一般,对形如$\int \frac{mx+n}{x^2+ax+b}\mathrm{d}\,x$的积分,可将被积函数拆为两项,一项的分子为分母的导数,积分结果为对数形式,另一项的分子为常数,再将分母进行配方并积分,其结果为反三角正切或对数形式.

3.计算下列不定积分

(1)$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{2-\sin x}$

解 令$\tan\frac{x}{2}=u$,则$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $\mathrm{d}\,x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}\,u$.

$$\text{原式}=\int \frac{1}{2-\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}\,u=\int \frac{\mathrm{d}\,u}{1-u+u^2}=\int \frac{\mathrm{d}\left(u-\frac{1}{2}\right)}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}+C$$

(2)$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}\,x$

解 $\text{原式}=\int \frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}\,x=\int\left(\csc^2 x-\frac{2\cos x}{\sin^2 x}+\cot^2 x\right)\mathrm{d}\,x$

$$=-\cot x+\frac{2}{\sin x}-\cot x-x+C=\frac{2}{\sin x}-2\cot x-x+C.$$

注意 对三角函数有理式的积分,尽可能利用三角恒等变形,拆项积分,在万不得已时才用半角代换.

(3)$\int \frac{12\cos x-\sin x}{5\cos x+2\sin x}\mathrm{d}\,x$

解 $\frac{12\cos x-\sin x}{5\cos x+2\sin x}=\frac{A(5\cos x+2\sin x)+B(5\cos x+2\sin x)'}{5\cos x+2\sin x}$

即 $12\cos x-\sin x=A(5\cos x+2\sin x)+B(-5\sin x+2\cos x)$

解得$A=2,\ B=1$.

$$\text{原式}=\int \frac{2(5\cos x+2\sin x)}{5\cos x+2\sin x}\mathrm{d}\,x+\int \frac{\mathrm{d}(5\cos x+2\sin x)}{5\cos x+2\sin x}$$

$$=2x+\ln|5\cos x+2\sin x|+C.$$

注意 此类型的问题是根据正弦与余弦之和的导数仍是正弦与余弦之和的形式,而将被积函数拆为两项进行积分.

(4)$\int \frac{1+\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}\,x$

解 $\text{原式}=\int\left(\frac{1}{1+\sin^2 x}+\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right)\mathrm{d}\,x$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{2}\tan x}{1+2\tan^2 x}+\int \frac{\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+\arctan(\sin x)+C.$$

注意 对形如$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x},\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x},\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin^2 x+b\cos^2 x},\cdots\cdots$的积分,均可令$A\tan x=u$进行积分.

4.计算下列不定积分

(1)$\int\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\mathrm{d}x$

解 设$\sqrt{1+x}=u$, $x=u^2-1$, $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$

$$\text{原式}=2\int\frac{u^2-u}{u+1}\mathrm{d}u=2\int\left(u-2+\frac{2}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$=2\left(\frac{1}{2}u^2-2u+2\ln|u+1|\right)+C_1=x-4\sqrt{1+x}+4\ln(\sqrt{1+x}+1)+C.$$

(2)$\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$

解 设$\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=u$, $\mathrm{e}^x=u^2+1$, $\mathrm{d}x=\frac{2u}{u^2+1}\mathrm{d}u$.

$$\text{原式}=2\int(u^2+1)\,\mathrm{d}u=\frac{2}{3}u^3+2u+C=\frac{2}{3}\sqrt{(\mathrm{e}^x-1)^3}+2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.$$

(3)$\int\frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$

解 设$\sqrt[6]{x}=u$, $x=u^6$, $\mathrm{d}x=6u^5\,\mathrm{d}u$

$$\text{原式}=\int\frac{(1+u^3)^2}{u^2}\cdot 6u^5\,\mathrm{d}u=6\int(u^3+2u^6+u^9)\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{12}{7}\sqrt[6]{x^7}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C$$

(4)$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x$

解 **法 1** 原式$=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$=\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

解 **法 2** 令$x=a\sin t$,

$$\text{原式}=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=a\int(1+\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$=at-a\cos t+C=\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

注意 若令$\sqrt{a+x}$或$\sqrt{a-x}$将u将不易积分.

5.利用以前学过的方法计算下列不定积分

(1)$\int\frac{\ln\tan x}{\cos x\cdot\sin x}\mathrm{d}x$

解 原式$=\int\ln\tan x\,\mathrm{d}\ln\tan x=\frac{1}{2}(\ln\tan x)^2+C.$

注意 凑微分法较为灵活,常常可利用求导的方法来决定如何凑微分,如

$$(\ln\tan x)' = \frac{1}{\sin x\cos x},$$

从而有
$$\frac{1}{\cos x\sin x}\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\ln\tan x\,.$$

(2) $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x$

解 原式 $= \int \frac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}\sin x = -\int x\,\mathrm{d}\frac{1}{\sin x} = -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}\,x$

$= -x\csc x + \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C.$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{(a^2 - x^2)^{5/2}}\quad (a > 0)$

解 设 $x = a\sin t,\ \mathrm{d}\,x = a\cos t\,\mathrm{d}\,t$

原式 $= \int \frac{a\cos t}{(a\cos t)^5}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{a^4}\int \sec^4 t\,\mathrm{d}\,t$

$= \frac{1}{a^4}\int (\tan^2 t + 1)\,\mathrm{d}\tan t = \frac{1}{a^4}\left(\frac{1}{3}\tan^3 t + \tan t\right) + C$

$= \frac{1}{3a^4}\left[\frac{x^3}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} + \frac{3x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right] + C.$

(4) $\int \frac{\sin x\cos x}{1 + \sin^4 x}\,\mathrm{d}\,x$

解 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\sin^2 x}{1 + \sin^4 x} = \frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x) + C\,.$

(5) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{3x - 2}}\,\mathrm{d}\,x$

解 设 $u = \ln x,\ \mathrm{d}\,v = \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{3x - 2}}$,则 $\mathrm{d}\,u = \frac{\mathrm{d}\,x}{x}, v = \frac{2}{3}\sqrt{3x - 2}\,.$

原式 $= \frac{2}{3}\sqrt{3x - 2}\,\ln x - \frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{3x - 2}}{x}\,\mathrm{d}\,x$

再设 $\sqrt{3x - 2} = t,\ x = \frac{1}{3}(t^2 + 2),\ \mathrm{d}\,x = \frac{2}{3}t\,\mathrm{d}\,t\,.$

$\frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{3x - 2}}{x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{4}{3}\int \frac{t^2 + 2 - 2}{t^2 + 2}\,\mathrm{d}\,t$

$= \frac{4}{3}\left[t - \sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\right] + C$

$= \frac{4}{3}\left[\sqrt{3x - 2} - \sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{3x - 2}{2}}\right] + C.$

所以,

$$\text{原式} = \frac{2}{3}\sqrt{3x - 2}(\ln x - 2) + \frac{4\sqrt{2}}{3}\arctan\sqrt{\frac{3}{2}x - 1} + C.$$

(6) $\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}\,\mathrm{d}\,x$

解　原式$=\int \frac{x}{(e^x+1)^2}d(e^x+1)=\int x\,d\left(\frac{-1}{e^x+1}\right)=-\frac{x}{e^x+1}+\int\frac{1+e^x-e^x}{e^x+1}dx$

$$=-\frac{x}{e^x+1}+x-\ln(e^x+1)+C.$$

6.设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$,计算$\int f(x)\,dx$.

解　设$\ln x=t$,则$x=e^t$, $f(t)=\frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$.所以

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx=-\int\ln(1+e^x)\,de^{-x}$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\frac{dx}{1+e^x}=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int(1-\frac{e^x}{1+e^x})\,dx$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+x-\ln(1+e^x)+C=x-(1+e^x)\ln(1+e^x)+C.$$

第四章　不定积分(总习题)

1.计算下列不定积分

(1)$\int\frac{2+6\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

解　原式$=\int\frac{2+6\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+3\right)dx=\tan x+3x+C.$

注意　三角函数有理式中分母出现倍角形式$1+\cos 2x$或$1-\cos 2x$应考虑将其化为单角,拆项积分.

(2)$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{-\sqrt{1+x^2}}dx$

解　原式$=\int e^{-\sqrt{1+x^2}}\,d\sqrt{1+x^2}=-e^{-\sqrt{1+x^2}}+C$.

(3)$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

解　设$x=\tan t$,　$dx=\sec^2 t\,dt$

原式$=\int\frac{\sec^2 t}{\sec^3 t}dt=\int\cos t\,dt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$

(4)$\int\frac{dx}{\sin 2x\cos x}$

解　原式$=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sin x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2\sin x}\right)dx$

$$=\frac{1}{2\cos x}+\frac{1}{2}\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C.$$

注意　对形如$\int\frac{dx}{\sin^n x\cos^m x}$的积分,均可利用$\sin^2 x+\cos^2 x=1$来拆项积分,并可多次使用.

(5)$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$

解 原式$=\int \frac{x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)$

$$=2\int x\,\mathrm{d}\sqrt{1+\mathrm{e}^x}=2x\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-2\int\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

设$\sqrt{1+\mathrm{e}^x}=t$,$\mathrm{e}^x=t^2-1$,$\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$

$$\int\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t=2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2\left[t+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]+C$$

$$=2\left[\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}\right]+C.$$

所以 原式$=2(x-2)\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-2\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}+C.$

注意 本题综合了换元法、分部积分法以及简单无理函数的积分,为了避免出错,不妨分段作出积分,最后综合给出答案.

(6)$\int x\mathrm{e}^{x^2}(1+x^2)\mathrm{d}x$

解 令$x^2=t$,则$\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$,

原式$=\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^t(1+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int(1+t)\mathrm{d}\mathrm{e}^t=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^t(1+t)-\int\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(1+t)-\mathrm{e}^t+C$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}(1+x^2)-\mathrm{e}^{x^2}+C=\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C.$$

(7)$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$

解 原式$=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}\sqrt{x}=2\int\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}\arctan\sqrt{x}=(\arctan\sqrt{x})^2+C.$

(8)$\int\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$

解 法1 原式$=-\frac{1}{2}\int\arctan\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x}$

$$=-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x-\int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{2x})}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x-\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}+\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\arctan\mathrm{e}^x\right]+C.$$

解 法2 令$\mathrm{e}^x=t$,则$x=\ln t$,$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}$,

$$\text{原式}=\int\frac{\arctan t}{t^3}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int\arctan t\,\mathrm{d}(\frac{1}{t^2})$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t^2}\arctan t+\frac{1}{t}+\arctan t\right]+C$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\arctan\mathrm{e}^x\right]+C.$$

(9) $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

解　法 1　设 $\arcsin x=t,\ x=\sin t,\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{d}t.$

$$\text{原式}=\int t\sin t\,\mathrm{d}t=-t\cos t+\int\cos t\,\mathrm{d}t=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C.$$

解　法 2　设 $u=\arcsin x,\ \mathrm{d}v=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},\ v=-\sqrt{1-x^2}$$

$$\text{原式}=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C.$$

注意　实际还会有人用下列做法：

$$\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int x\arcsin x\,\mathrm{d}\arcsin x=\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}(\arcsin x)^2=\frac{1}{2}x(\arcsin x)^2,$$

$$-\frac{1}{2}\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x(\arcsin x)^2-\frac{1}{2}x(\arcsin x)^2+\int x\arcsin x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

这样题目又还原回去了,无法得到结果,这时应改变换元方式,或直接利用分部积分法,如解 1 解 2.

(10) $\int\frac{x}{\cos^2 x\tan^3 x}\mathrm{d}x$

解　法 1　$\text{原式}=\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sin^3 x}\mathrm{d}\sin x$

$$=\frac{-1}{2}\int x\,\mathrm{d}\frac{1}{\sin^2 x}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\cot x\right)+C.$$

解　法 2　$\text{原式}=\int\frac{x}{\tan^3 x}\mathrm{d}\tan x=-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}\frac{1}{\tan^2 x}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\tan^2 x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\tan^2 x}\right)$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\tan^2 x}-\int\left(\csc^2 x-1\right)\mathrm{d}x\right]=-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\tan^2 x}+\cot x+x\right)+C$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\cot x\right)+C.$$

2.设 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{1+x^2}}$,试建立递推公式.

解 $I_n=\int\frac{1+x^2-x^2}{x^n\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^n}\,\mathrm{d}\,x-I_{n-2}=\frac{1}{1-n}\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x^{1-n}-I_{n-2}$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{(1-n)x^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int x^{1-n}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,x-I_{n-2}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{(1-n)x^{n-1}}+\frac{2-n}{n-1}I_{n-2}.$$

3.已知函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0,\\ \sin x, & x>0,\end{cases}$,求函数 $f(x)$.

解 $f(x)=\begin{cases}\int x^2\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{3}x^3+C_1, & 当x<0,\\ \int\sin x\,\mathrm{d}\,x=-\cos x+C_2, & 当x>0.\end{cases}$

由于原函数 $f(x)$ 应在 $x=0$ 处可导,故必在该点处连续，令

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right)=\lim_{x\to 0^+}(-\cos x+C_2)$$

从而得

$$C_2=1+C_1=1+C,$$

故

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C, & x\le 0,\\ 1-\cos x+C, & x>0.\end{cases}$$

注意 此题易犯错误是直接得

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C, & x\le 0,\\ -\cos x+C, & x>0.\end{cases}\text{或}\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_1, & x\le 0,\\ -\cos x+C_2, & x>0.\end{cases}$$

其错误在于①不定积分中只需出现一个任意常数 C,而不能出现 C_1,C_2;②这两种错误结果都不能保证函数在 $x=0$ 处的连续性. $f'(x)$ 为在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的分段函数,它在 $(-\infty,+\infty)$ 内原函数存在,原函数亦为分段函数,且在分段点处连续、可导.为了保证这一点,可先分别求 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 内的原函数,然后由原函数在 $x=0$ 处的连续性确定两个不是互相独立的常数 C_1,C_2 之间的关系(这同时必然保证原函数在 $x=0$ 处可导,其原因从略),便可得到 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

4.计算不定积分 $\int\frac{x\,\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}\,x$

解 法 1 原式 $=\int\frac{x\,\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}\,x$

$$=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}\,x-\int\frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}\,x+\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+x}$$

$$=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}\,x+\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}-\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}+C.$$

解 法 2 原式 $=\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\left(\frac{-1}{1+x}\right)=-\frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x}+\int\frac{\mathrm{e}^x(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$

$$=-\frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x}+\mathrm{e}^x+C=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}+C.$$

注意 积分中有时也常用自消的方法.当所求积分可拆为两部分,其中一项的积分不是十

分简单,而另一项可采用分部积分法时,常将第一项暂缓积分,看第二项分部积分之后是否可以自消,这样可大大减小积分的工作量.如解法 1.若直接采用分部积分法,常有人如下划分 u, dv, ,

$$\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx = \int \frac{x}{(1+x)^2} de^x = \frac{x e^x}{(1+x)^2} - \int e^x d \frac{x}{(1+x)^2}$$

这将使得积分更为复杂,而解法 2 中 u, dv 的划分是恰当的.