第二章　　习题课

导数与微分

- 一、主要内容
- 二、典型例题

一、主要内容

关系 $\dfrac{dy}{dx} = y' \Leftrightarrow dy = y'dx \Leftrightarrow \Delta y = dy + o(\Delta x)$

导数

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

基本公式

高阶导数

高阶微分

微分

$dy = y'\Delta x$

求导法则

1、导数的定义

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义． $x_0+\Delta x\in U(x_0)$

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

如果 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，

记为 $$y'\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

单侧导数

1.左导数**:**

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

2.右导数**:**

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

$$f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$$

$$(A\in R)$$

2、基本导数公式

（常数和基本初等函数的导数公式）

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x tgx \qquad (\csc x)' = -\csc x ctgx$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

3、求导法则

(1) 函数的和、差、积、商的求导法则

设$u=u(x), v=v(x)$可导，则

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$，（2）$(cu)'=cu'$（c是常数），

（3）$(uv)'=u'v+uv'$，（4）$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$.

(2) 反函数的求导法则

如果函数$x=\varphi(y)$的反函数为$y=f(x)$，则有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(x)}.$$

(3) 复合函数的求导法则

设$y=f(u)$,而$u=\varphi(x)$则复合函数$y=f[\varphi(x)]$的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad 或 \quad y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

(4) 对数求导法

先在方程两边取对数,然后利用隐函数的求导方法求出导数.

适用范围:

多个函数相乘和幂指函数$u(x)^{v(x)}$的情形.

(5) 隐函数求导法则

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

(6) 参变量函数的求导法则

若参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定$y$与$x$间的函数关系,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)};\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

4、高阶导数

(二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**)

二阶导数 $(f'(x))' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$,

记作 $f''(x), y'', \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \dfrac{d^3 y}{dx^3}$.

一般地,函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数,记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} \text{或} \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

5、微分的定义

定义 设函数$y=f(x)$在某区间内有定义,x_0及$x_0+\Delta x$在这区间内,如果

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

成立(其中A是与Δx无关的常数),则称函数$y=f(x)$在点x_0可微,并且称$A\cdot\Delta x$为函数$y=f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分,记作$dy\big|_{x=x_0}$或$df(x_0)$,即

$$dy\big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x.$$

微分dy叫做函数增量Δy的线性主部.（微分的实质）

6、导数与微分的关系

定理 函数$f(x)$在点x_0可微的充要条件是函数$f(x)$在点x_0处可导,且 $A = f'(x_0)$.

7、 微分的求法

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

求法: 计算函数的导数,乘以自变量的微分.

基本初等函数的微分公式

$$d(C)=0 \qquad d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(\sin x)=\cos x dx \qquad d(\cos x)=-\sin x dx$$

$$d(\tan x)=\sec^2 x dx \qquad d(\cot x)=-\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x)=\sec x\tan x dx \qquad d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$$

$$d(a^x)=a^x\ln a dx \qquad d(e^x)=e^x dx$$

$$d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx \qquad d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

$$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx \qquad d(\operatorname{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$$

8、 微分的基本法则

函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

微分形式的不变性

无论x是自变量还是中间变量,函数$y = f(x)$

的微分形式总是 $\boxed{dy = f'(x)dx}$

二、典型例题

例1　设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$,

其中 $n\geq 2$, $n\in N$, 求 $f'(0)$.

解　$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

$$=(-1)^n\cdot n!$$

练习1

1. 设 $f(x)=(x^{100}-1)\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$在$x=1$处连续，且 $\varphi(1)=1$，求 $f'(1)$.

2. 设 $f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 其中 $n\in N^*$, 求 $f'(0)$.

1. 设 $f(x)=(x^{100}-1)\varphi(x)$， 其中 $\varphi(x)$在$x=1$处连续，且 $\varphi(1)=1$，求 $f'(1)$.

解 $$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^{100}-1)\varphi(x)-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x^{99}+x^{98}+\cdots+1)\varphi(x)$$

$$=100\cdot\varphi(1)=100.$$

2. 设 $f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 其中 $n\in N^*$, 求 $f'(0)$.

分析. $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)-n!}{x-0}$$

不易直接计算!

解 (用对数求导法)

$$\ln f(x)=\ln(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$$

$$=\ln(x+1)+\ln(x+2)+\cdots+\ln(x+n)$$

$$\ln f(x) = \ln(x+1) + \ln(x+2) + \cdots + \ln(x+n)$$

两边对于x求导：

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+n}$$

$$\therefore \quad f'(x) = f(x)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+n}\right)$$

令 $x = 0$，得

$$f'(0) = f(0)\cdot\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = n!\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

例2 设 $f(x)>0$, $f'(a)$存在，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$. (1^∞)

解法1 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}-1\right)\right]^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}\right)\right]^{\frac{f(a)}{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}}\right\}^{\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}\cdot n}$$

$$\because \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}\cdot n = \frac{1}{f(a)}\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{f'(a)}{f(a)}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

解法2 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n\ln[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}]}$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln f(a+\frac{1}{n})-\ln f(a)}{\frac{1}{n}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln f(a+\frac{1}{n})-\ln f(a)}{\frac{1}{n}}}$$

$$= e^{[\ln f(x)]'|_{x=a}} = e^{\left.\frac{f'(x)}{f(x)}\right|_{x=a}} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

注. $[\ln f(a)]' \neq \dfrac{f'(a)}{f(a)}$.

例3 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，在区间$[0, 2]$上

$$f(x)=x(x^2-4)$$

若对于任意x都满足：

$$f(x)=k\,f(x+2)$$

其中k为常数. 问：k为何值时，$f(x)$在$x=0$处可导？

解 1° 求 $f(x)$在$[-2, 0)$的表达式.

$$f(x)=k\,f(x+2) \qquad (-2\le x<0)$$

$$=k(x+2)[(x+2)^2-4] \qquad (0\le x+2<2)$$

$$=kx(x+2)(x+4)$$

于是当$x\in[-2,2]$时，有

$$f(x)=\begin{cases} kx(x+2)(x+4), & -2\le x<0 \\ x(x^2-4), & 0\le x\le 2 \end{cases}$$

2° 讨论 $f(x)$在$x=0$处的可导性

由题设知 $f(0)=0.$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{k\cancel{x}(x+2)(x+4)-0}{\cancel{x}}=8k$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}(x^2 - 4) - 0}{\cancel{x}} = -4$$

$\because \quad f(x)$在$x = 0$处可导$\Leftrightarrow f'_-(0) = f'_+(0)$

即 $8k = -4, \quad k = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad$ 当$k = -\dfrac{1}{2}$时，$f(x)$在$x = 0$处可导.

例4 设 $f(x) \neq 0$, 对于任意实数 x, y, 有

$$f(x+y) = f(x)f(y) \text{ 且 } f'(0) = 1.$$

证明: 对于任意 $x \in R$, $f'(x)$存在.

证 由导数定义，得

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h}$$

$\because\ f(x) \not\equiv 0,\quad \therefore\ \exists\, x_0 \in R,\quad$ 使 $f(x_0) \neq 0.$

在 $f(x+y) = f(x)f(y)$中，取 $x = x_0, y = 0,$

则 $\cancel{f(x_0)} = \cancel{f(x_0)}\, f(0),$ 得 $f(0) = 1.$

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$

$$= f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = f(x)f'(0) = f(x).$$

即 $f'(x)$存在，且 $f'(x) = f(x).$

目录 上页 下页 返回 结束

练习2

1. 设 $f(x)$可导，且 $F(x) = f(x)(1+|\sin x|)$，

则 $f(0)=0$是$F(x)$在$x=0$处可导的(A)条件.

(A) 充分必要；　(B) 充分非必要；

(C) 必要非充分；　(D) 非充分、非必要.

解　$F(0) = f(0)$

$$F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)(1+|\sin x|) - f(0)}{x-0}$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)(1+|\sin x|) - f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x-0} + f(x) \cdot \frac{|\sin x|}{x}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x-0} + f(x) \cdot \left(-\frac{\sin x}{x}\right)\right]$$

$$= f'_-(0) - f(0)$$

类似地，可推得 $F'_+(0) = f'_+(0) + f(0)$

$\because \quad f(x)$可导

$\therefore \quad f'(0) = f'_-(0) = f'_+(0)$

于是 $\quad F'_-(0) = f'(0) - f(0)$

$\qquad\quad F'_+(0) = f'(0) + f(0)$

又$\because \quad F(x)$在$x = 0$处可导

$\Leftrightarrow \quad F'_-(0) = F'_+(0)$

即 $\quad f'(0) - f(0) = f'(0) + f(0)$

$\therefore \quad f(0) = 0$是$F(x)$在$x = 0$处可导的充要条件.

2. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，在此定义域上

恒有 $f(x+y)=f(x)f(y)$,

且 $f(x)=1+xg(x)$,

其中 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$，证明：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上

处处可导.

证 由导数定义，得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}\cdot f(x)$$

$$=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{[1+hg(h)]-1}{h}$$

$$=f(x)\lim_{h\to 0}g(h)$$

$$=f(x)\cdot 1=f(x)$$

$\therefore\quad f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上处处可导，且 $f'(x)=f(x)$.

3. 已知 $f(x)$是周期为 5的连续函数，它在 $x=0$的某邻域内满足关系式 ：

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$$

其中$o(x)$是当$x\to 0$时比x高阶的无穷小，且$f(x)$在$x=1$处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点$(6, f(6))$处的切线方程 .

解 由 $f(x)$的连续性，及

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$$

得 $\lim\limits_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]$

$=\lim\limits_{x\to 0}[8x+o(x)]=0$

即 $f(1)-3f(1)=0,\quad f(1)=0.$

又 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{8x}{\sin x}+\frac{o(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right]=8$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}$

$\overset{t=\sin x}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}$ $\quad(\because \quad f(1)=0)$

$=\lim\limits_{t\to 0}[\dfrac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\cdot\dfrac{f(1-t)-f(1)}{-t}]$

$=f'(1)+3f'(1)=4f'(1)$

$\therefore \quad 4f'(1)=8, \quad f'(1)=2.$

由于 $f(x+5)=f(x)$,

$$f'(x)=f'(x+5)\cdot(x+5)'=f'(x+5)$$

所以令 $x=1$,

得 $f(6)=f(1)=0$

$$f'(6)=f'(1)=2$$

故所求切线方程为:

$$y-f(6)=f'(6)(x-6).$$

即 $y=2(x-6)$.

例5 设 $f(x)=\begin{cases} a\ln(1-x)+b, & x\le 0 \\ x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+3^n+x^n}, & x>0 \end{cases}$，

试确定常数 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+3^n+x^n}$

$$=\begin{cases} 3\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{3})^n+1+(\frac{x}{3})^n}, & 0<x\le 3 \quad (0<\frac{x}{3}<1) \\ x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{x})^n+(\frac{3}{x})^n+1}, & x>3 \quad (0<\frac{3}{x}<1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3, & 0 < x \le 3 \\ x, & x > 3 \end{cases}$$

$$\therefore \quad f(x) = \begin{cases} a\ln(1-x)+b, & x \le 0 \\ 3x, & 0 < x \le 3, \\ x^2, & x > 3 \end{cases}$$

由于 $f(x)$在$x=0$处可导，必连续 .

而 $f(x)$在$x=0$处连续 $\Longleftrightarrow$ $f(0^-) = f(0^+) = f(0)$

由 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}[a\ln(1-x)+b]=b$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 3x=0=f(0)$$

得 $b=0.$

又 $\because f(x)$在$x=0$处可导 $\Leftrightarrow f'_-(0)=f'_+(0)$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\ln(1-x)-0}{x}=-a.$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{3x - 0}{x} = 3$$

$\therefore \quad -a = 3, \qquad a = -3.$

即当$a = -3$，$b = 0$时，$f(x)$在$x = 0$处可导．

例6 设 $\alpha > 1$，且 $f(x)$满足：$\left|f(x)\right| \le |x|^{\alpha}$，

证明：$f(x)$在$x = 0$处可微.

分析 $f(x)$在$x = 0$处可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在$x = 0$处可导，

只需证明$f(x)$在$x = 0$处可导即可.

证 由题设知，$f(0) = 0$

$$0 \le \left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \le |x|^{\alpha - 1} \qquad (x \ne 0)$$

$$\because \quad \alpha > 1, \quad \lim_{x \to 0} |x|^{\alpha - 1} = 0 = \lim_{x \to 0} 0$$

$\therefore$ 由夹逼准则，知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$$

即 $f(x)$在$x=0$处可导，

从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微.

例7 设 $f(x) = x|x(x-2)|$, 求 $f'(x)$.

解 先去掉绝对值

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x-2), & x \le 0 \\ -x^2(x-2), & 0 < x < 2, \\ x^2(x-2), & x \ge 2 \end{cases}$$

当 $x > 2$ 或 $x < 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 4x$;

当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) = -3x^2 + 4x$;

当$x=0$时，$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2(x-2)-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}x(x-2)=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2(x-2)-0}{x}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}x(x-2)=0$$

$\therefore\ f'_-(0)=f'_+(0)=0,\quad \therefore\quad f'(0)=0;$

当$x=2$时，

$$f'_{-}(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2(x-2)}{x-2}=-4.$$

$$f'_{+}(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2(x-2)}{x-2}=4.$$

$f'_{-}(2)\neq f'_{+}(2)$, $\therefore$ $f(x)$在$x=2$处不可导.

综上所述:

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-4x, & x>2\text{或}x<0\\ 0, & x=0,\\ -3x^2+4x, & 0<x<2.\end{cases}$$

例8 设 $\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = 5t^2 + 4t|t| \end{cases}$, 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

分析 当$t = 0$时, $|t|$不可导,

$\therefore$ 当$t = 0$时, $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}$不存在,不能用公式求导.

解 $t = 0 \Rightarrow x = 0, \ y = 0$

$$\Delta x = x(0+\Delta t) - x(0) = 2\Delta t + |\Delta t|$$

$$\Delta y = y(0+\Delta t) - y(0) = 5(\Delta t)^2 + 4 \cdot \Delta t \cdot |\Delta t|$$

$$\Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta t \to 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t|\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|}$$

$$\boxed{\operatorname{sgn}(\Delta t) = \begin{cases} -1, & \Delta t < 0 \\ 1, & \Delta t > 0 \end{cases}}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5 + 4\operatorname{sgn}(\Delta t)}{2 + \operatorname{sgn}(\Delta t)} \cdot \Delta t$$

$$\because \quad \left| \frac{5 + 4\operatorname{sgn}(\Delta t)}{2 + \operatorname{sgn}(\Delta t)} \right| \le 3, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \quad 故 \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = 0.$$

练习3

1. $y=\lim\limits_{t\to+\infty} x\left(\dfrac{t+x}{t-x}\right)^{t}$，求 y'.

解 $y=\lim\limits_{t\to+\infty} x\left(\dfrac{t+x}{t-x}\right)^{t}=x\lim\limits_{t\to+\infty}\left[1+\left(\dfrac{t+x}{t-x}-1\right)\right]^{t}$

$$=x\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2x}{t-x}\right)^{\frac{t-x}{2x}}\right]^{\frac{2x}{t-x}\cdot t}=xe^{2x}$$

$\therefore\quad y'=(xe^{2x})'=e^{2x}+xe^{2x}\cdot 2$

$$=e^{2x}(1+2x)$$

2. 设 $f(x)$在$x=e$处具有连续得一阶导数，且

$$f'(e)=-2e^{-1},\text{ 求 } \lim_{x\to 0^+}\frac{d}{dx}f(e^{\cos\sqrt{x}}).$$

解 $$\frac{d}{dx}f(e^{\cos\sqrt{x}}) = f'(e^{\cos\sqrt{x}})(e^{\cos\sqrt{x}})'$$

$$= f'(e^{\cos\sqrt{x}})e^{\cos\sqrt{x}}(\cos\sqrt{x})'$$

$$= f'(e^{\cos\sqrt{x}})e^{\cos\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{d}{dx} f(e^{\cos\sqrt{x}})$$

$$= \lim_{x\to 0^+} f'(e^{\cos\sqrt{x}})e^{\cos\sqrt{x}}(-\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}})\cdot\frac{1}{2}$$

$$= f'(e)\cdot e\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\boxed{f'(e) = -2e^{-1}}$$

$$= 1.$$

3. 设 $0<|x|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})$.

解 $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$

$$=(x)'+(x^2)'+(x^3)'+\cdots+(x^n)'$$

$$=(x+x^2+x^3+\cdots+x^n)'$$

$$=[(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n)-1]' =(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-1)'$$

$$=\frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})\cdot(-1)}{(1-x)^2}$$

4. 已知 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

解 令 $t=0$，得 $e^{y(0)}\cdot 0 - y(0) + 1 = 0$，$y(0) = 1.$

$$[e^y y'(t)\cdot \sin t + e^y \cos t] - y'(t) = 0$$

$$\therefore \quad y'(t) = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}, \qquad x'(t) = 6t + 2$$

从而 $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \left.\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{t=0} = \left.\frac{\dfrac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}}{6t+2}\right|_{t=0} = \frac{e^{y(0)}}{2} = \frac{e}{2}.$$

5\. 设 $y=f(\frac{3x-2}{3x+2})$，$f'(x)=\arctan x^2$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 令 $u=\frac{3x-2}{3x+2}=1-\frac{4}{3x+2}$，则当 $x=0$ 时，$u=-1$.

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot\frac{12}{(3x+2)^2}$$

$$\therefore\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f'(-1)\cdot 3=\arctan(-1)^2\cdot 3=\frac{3\pi}{4}.$$

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

$$=\frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})\cdot(-1)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{(n+1)x^n}{x-1}+\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

当$0<|x|<1$时，

可以证明：

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)x^n=0$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)x^n}{x-1}+\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}\right]=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

6. 求下列函数的导数 y'：

(1) $y = a^{\arctan\frac{1}{x}} + \arcsin\frac{1}{3}$.

解 $y' = (a^{\arctan\frac{1}{x}})' + (\arcsin\frac{1}{3})' = a^{\arctan\frac{1}{x}} \ln a \cdot (\arctan\frac{1}{x})' + 0$

$$= a^{\arctan\frac{1}{x}} \ln a \cdot \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}(\frac{1}{x})'$$

$$= a^{\arctan\frac{1}{x}} \ln a \cdot \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}(-\frac{1}{x^2}) = -\frac{a^{\arctan\frac{1}{x}} \ln a}{x^2+1}$$

(2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

解 $y'=[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot(x+\sqrt{x^2+1})'$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot[1+(\sqrt{x^2+1})']$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot[1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)']$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(3) $y = f(x^2) + \sin[f(x)] + f[f(x)]$,其中$f(x)$可导.

解 $y' = [f(x^2)]' + \{\sin[f(x)]\}' + \{f[f(x)]\}'$

$= f'(x^2)(x^2)' + \cos[f(x)] \cdot f'(x) + f'[f(x)] \cdot f'(x)$

$= 2xf'(x^2) + \cos[f(x)] \cdot f'(x) + f'[f(x)] \cdot f'(x)$

(4) $y = x \cdot (\sin x)^{\cos x}$.

解 $y' = 1 \cdot (\sin x)^{\cos x} + x \cdot (e^{\cos x \cdot \ln \sin x})'$

$$= (\sin x)^{\cos x} + x \cdot (e^{\cos x \cdot \ln \sin x})(\cos x \cdot \ln \sin x)'$$

$$= (\sin x)^{\cos x} + x \cdot (\sin x)^{\cos x} \cdot [-\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x}]$$

$$= x(\sin x)^{\cos x}(\frac{1}{x} - \sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x})$$

(5) 设函数$y=f(x)$由方程$\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}\,(x>0, y>0)$所确定，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 两边取对数 $\dfrac{1}{x}\ln y=\dfrac{1}{y}\ln x$, 即$y\ln y=x\ln x$,

$\therefore$ $(1+\ln y)y'=\ln x+1$, $y'=\dfrac{\ln x+1}{1+\ln y}$,

$$y''=\frac{\dfrac{1}{x}(\ln y+1)-(\ln x+1)\dfrac{1}{y}\cdot y'}{(1+\ln y)^2}$$

$$=\frac{y(\ln y+1)^2-x(\ln x+1)^2}{xy(\ln y+1)^3}$$

(6) $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\arctan\frac{y}{x}}$，求 y''.

解 两边取对数

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln a+\arctan\frac{y}{x}$$

两边对x求导数

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'$$

$$x+yy'=x^2\cdot\frac{xy'-y}{x^2},\qquad y'=\frac{x+y}{x-y}$$

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$y'' = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)'$$

$$= \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{2(xy'-y)}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^2} \qquad (x \neq y, x \neq 0)$$

例8 设$y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$,求 $y^{(n)}$.

解 $$y=\frac{4x^2-1}{x^2-1}=\frac{4x^2-4+3}{x^2-1}=4+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\because \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}},\quad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

$$\therefore y^{(n)}=\frac{3}{2}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

练习4 设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$ 求 $y^{(n)}$.

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$\boxed{\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

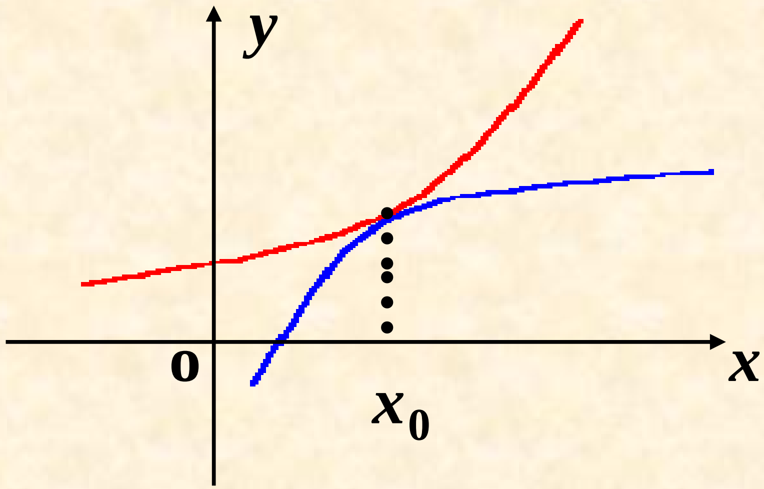
$$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cos(4x+n\frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

例9 对抛物线 $y = x^2 + ax + b$ 从原点可引几条切线?

分析 两曲线$y = f(x)$与$y = g(x)$在点(x_0, y_0)相切

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = g(x_0) & \text{(在切点相交)} \\ f'(x_0) = g'(x_0) & \text{(切线斜率相同)} \end{cases}$$



解 设切点为 (x_0, y_0), 则

$$\begin{cases} kx_0 = x_0^2 + ax_0 + b & ① \\ k = 2x_0 + a & ② \end{cases}$$

②$\times x_0$ - ① 得 $x_0^2 - b = 0$, $x_0^2 = b$

故 (1) $b > 0$时， $x_0 = \pm\sqrt{b}$, 引两条切线；

(2) $b = 0$时， $x_0 = 0$, 引一条切线；

(3) $b < 0$时， 无切线.

测 验 题

一、 选择题：

1、函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 定义为（　　）

(A) $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(B) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(D) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$；

2、若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)=0$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的法线（　　）

(A) 与 x 轴相平行；(B) 与 x 轴垂直；

(C) 与 y 轴相垂直；(D) 与 x 轴即不平行也不垂直：

3、若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则 $f(x)$ 在 x_0（　　）

（A）必不可导；　　　　（B）必定可导；

（C）不一定可导；　　　（D）必无定义.

4、如果 $f(x)$=（　　），那么 $f'(x)=0$.

(A) $\arcsin 2x+\arccos x$；

(B) $\sec^2 x+\tan^2 x$；

(C) $\sin^2 x+\cos^2(1-x)$；

(D) $\arctan x+\arccos x$.

5、如果 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, x\le 0 \\ b(1-x^2), x>0 \end{cases}$ 处处可导，那末（　　）

（A）$a=b=1$；　　　　（B）$a=-2, b=-1$；

（C）$a=1, b=0$；　　　（D）$a=0, b=1$.

6、已知函数 $f(x)$具有任意阶导数，且

$f'(x)=\left[f(x)\right]^2$, 则当$n$为大于 2 的正整数时，

$f(x)$的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$是（　　）

（A）$n![f(x)]^{n+1}$；　　（B）$n[f(x)]^{n+1}$；

（C）$[f(x)]^{2n}$；　　（D）$n![f(x)]^{2n}$.

7、若函数$x=x(t)$, $y=y(t)$对t可导且$x'(t)\neq 0$, 又

$x=x(t)$的反函数存在且可导，则$\dfrac{dy}{dx}=$（　　）

（A）$\dfrac{y'(t)}{x(t)}$；　　（B）$-\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$；

（C）$\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$；　　（D）$\dfrac{y(t)}{x'(t)}$.

8、若函数$f(x)$为可微函数，则dy（　）

（A）与Δx无关；

（B）为Δx的线性函数；

（C）当$\Delta x \to 0$时为Δx的高阶无穷小；

（D）与Δx为等价无穷小.

9、设函数$y = f(x)$在点x_0处可导，当自变量x由x_0增加到$x_0 + \Delta x$时，记Δy为$f(x)$的增量，dy为$f(x)$的微分，$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x}$等于（　）

（A）-1；　　（B）0；

（C）1；　　（D）∞.

二、求下列函数的导数：

1、$y=\sin x\ln x^2$；　　2、$y=a^{chx}$ $(a>0)$；

3、$y=(1+x^2)^{\sec x}$；

4、$y=\ln[\cos(10+3x^2)]$；

5、设y为x的函数是由方程$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$确定的；

6、设$x=y^2+y$，$u=(x^2+x)^{\frac{3}{2}}$，求$\dfrac{dy}{du}$.

四、设函数 $f(x)=\begin{cases} x^k \sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ 问 k 满足什么条件，$f(x)$ 在 $x=0$ 处（1）连续；（2）可导；（3）导数连续.

五、设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, x \leq 1 \\ ax+b, x>1 \end{cases}$，为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a, b 应取什么值.

六、已知 $f(x)=\begin{cases} \sin x, x<0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$，求 $f(x)$.

七、证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

五、证明$x=e^t\sin t$， $y=e^t\cos t$满足方程

$$(x+y)^2\frac{d^2y}{dx^2}=2(x\frac{dy}{dx}-y)\ .$$

六、已知$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$其中$g(x)$有二阶连续导数，且$g(0)=1$，

1、确定 a 的值，使$f(x)$在$x=0$点连续；

2、求$f'(x)$

七、设$y=x\ln x$,求$f^{(n)}(1)$.

八、计算$\sqrt[3]{9.02}$的近似值 .

七、一人走过一桥之速率为 4 公里/小时，同时一船在此人底下以 8 公里/小时之速率划过，此桥比船高 200 米，问 3 分钟后人与船相离之速率为多少？

测验题答案

一、1、D；　2、B；　3、A；　4、D；　5、D；

6、A；　7、C；　8、B；　9、B.

二、1、$\cos x \ln x^2 + \dfrac{2\sin x}{x}$；

2、$(a^{chx}\ln a)shx$；

3、$(1+x^2)^{\sec x}[\tan x \ln(1+x^2) + \dfrac{2x}{1+x^2}]\sec x$；

4、$6x\tan(10+3x^2)$；

5、$\dfrac{x+y}{x-y}$；

6、$\dfrac{1}{3(2y+1)(2x+1)\sqrt{x^2+x}}$.

四、1、$a = g'(0)$；

2、$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x[g'(x) + \sin x] - [g(x) - \cos x]}{x^2}, x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}(g''(0) + 1), x = 0 \end{cases}$.

五、$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-2}(n-2)!$.

六、2. 09.

七、$\dfrac{20}{\sqrt{6}} \approx 8.16$（公里/小时）.