第九节　多元函数的极值与最优化问题

习题　8-9

1. 求下列函数的极值:

(1) $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$;　　(2) $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$.

解　(1) 先求函数的驻点.

解方程组$\begin{cases} f_x=(6-2x)(4y-y^2)=0, \\ f_y=(6x-x^2)(4-2y)=0, \end{cases}$求得五组解

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=4, \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ y=2, \end{cases} \begin{cases} x=6, \\ y=0, \end{cases} \begin{cases} x=6, \\ y=4, \end{cases}$$

于是得驻点 $(0,0),\ (0,4),\ (3,2),\ (6,0),\ (6,4)$.

因为　$f_{xx}(x,y)=-2(4y-y^2)$,　$f_{xy}(x,y)=4(3-x)(2-y)$,

$f_{yy}(x,y)=-2(6x-x^2)$,

由判定极值的充分条件知:

在点 $(0,0)$ 处, $A=f_{xx}(0,0)=0$, $B=f_{xy}(0,0)=24$, $C=f_{yy}(0,0)=0$,

$AC-B^2=-24^2<0$, 故 $f(0,0)$ 不是极值;

在点 $(0,4)$ 处, $A=f_{xx}(0,4)=0$, $B=f_{xy}(0,4)=-24$, $C=f_{yy}(0,4)=0$,

$AC-B=-24^2<0$, 故 $f(0,4)$ 不是极值;

在点 $(3,2)$ 处, $A=f_{xx}(3,2)=-8$, $B=f_{xy}(3,2)=0$, $C=f_{yy}(3,2)=-18$,

$AC-B^2=144>0$, 故函数在点 $(3,2)$ 处取得极大值, 极大值为 $f(3,2)=36$;

在点 $(6,0)$ 处 $A=f_{xx}(6,0)=0$, $B=f_{xy}(6,0)=-24$, $C=f_{yy}(6,0)=0$,

$AC-B^2=-24^2<0$, 故 $f(6,0)$ 不是极值;

在点 $(6,4)$ 处, $A=f_{xx}(6,4)=0$, $B=f_{xy}(6,4)=24$, $C=f_{yy}(6,4)=0$,

$AC-B^2=-24^2<0$，故 $f(6,4)$ 不是极值.

所以函数 $f(x,y)$ 仅有一个极大值点 $(3,2)$，极大值为 $f(3,2)=36$.

注意 本题常见错误之一是: 将多元函数取得极值的必要条件误认为充分条件, 即认为函数的驻点一定是极值点. 事实上, 仅当函数在驻点处满足 $AC-B^2>0$ 时, 才能肯定驻点一定是极值点. 错误之二是: 只求出一个驻点 $(3,2)$. 错误之三是: 把同一个方程的根凑成驻点, 例如, 由式 $(6-2x)(4y-y^2)=0$ 得 $x=3,\ y=0$ 或 $y=4$，于是函数有驻点 $(3,0)$ 及 $(3,4)$.

(2) 解方程组 $\begin{cases} f_x=\mathrm{e}^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0, \\ f_y=\mathrm{e}^{2x}(2y+2)=0, \end{cases}$ 求得驻点 $(\frac{1}{2},-1)$，

因为 $f_{xx}(x,y)=4\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y+1),\ f_{xy}(x,y)=4\mathrm{e}^{2x}(y+1),$

$$f_{yy}(x,y)=2\mathrm{e}^{2x},$$

于是有

$$A=f_{xx}(\frac{1}{2},-1)=2\mathrm{e}>0,\ \ B=f_{xy}(\frac{1}{2},-1)=0,\ C=f_{yy}(\frac{1}{2},-1)=2\mathrm{e},$$

$$AC-B^2=4\mathrm{e}^2>0,$$

由判定极值的充分条件知, 在点 $(\frac{1}{2},-1)$ 处函数取得极小值 $f(\frac{1}{2},-1)=-\frac{\mathrm{e}}{2}$.

2. 求下列函数在给定约束条件下的极值:

(1) $z=x^2+y^2,\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$;

(2) $u=x-2y+2z,x^2+y^2+z^2=1$;

(3) $u=x^2+y^2+z^2,x+y-z=1,x+y+z=0$.

解 (1) **法 1** 条件 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 可表示成 $y=b-\frac{b}{a}x$，代入 $z=x^2+y^2$，则问题化为求一元函数 $z=x^2+(b-\frac{b}{a}x)^2$ 的极值.

由 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+2(b-\frac{b}{a}x)\cdot(-\frac{b}{a})=2(1+\frac{b^2}{a^2})x-2\frac{b^2}{a}=0$，得

$$x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}.$$

又因为 $$\left.\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}}=2(1+\frac{b^2}{a^2})>0,$$

根据一元函数取得极值的充分条件知, $x=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$ 为极小值点, 由此得到点 $(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\dfrac{a^2b}{a^2+b^2})$ 是函数 $z=x^2+y^2$ 在条件 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 下的极小值点, 极小值为

$$z=(\frac{ab^2}{a^2+b^2})^2+(b-\frac{b}{a}\cdot\frac{ab^2}{a^2+b^2})^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

法 2 作拉格朗日函数

$$L(x,y)=x^2+y^2+\lambda(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1).$$

令

$$\begin{cases} L_x=2x+\dfrac{\lambda}{a}=0, & (1)\\ L_y=2y+\dfrac{\lambda}{b}=0, & (2)\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1. & (3)\end{cases}$$

由式(1)得 $2x=-\dfrac{\lambda}{a}$, 由式(2)得 $2y=-\dfrac{\lambda}{b}$, 将此两式两端相比得

$$y=\frac{a}{b}x, \tag{4}$$

将式(4)代入式(3), 得

$$x=\frac{ab^2}{a^2+b^2},$$

由此得到点 $(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\dfrac{a^2b}{a^2+b^2})$ 是函数 $z=x^2+y^2$ 在条件 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 下唯一可能的极值点. 把条件 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 代入函数 $z=x^2+y^2$,将目标函数看作 x 的一元函数, 再应用一元函数极值的充分条件可知, 点 $(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\dfrac{a^2b}{a^2+b^2})$ 是函数 $z=x^2+y^2$ 在条件 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 下的极小值点, 极小值为 $\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$.

(2) 作拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0, & (5) \\ L_y = -2 + 2\lambda y = 0, & (6) \\ L_z = 2 + 2\lambda z = 0, & (7) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. & (8) \end{cases}$$

由式(5), (6), (7)可得 $x = -\frac{1}{2\lambda}, y = \frac{1}{\lambda}, z = -\frac{1}{\lambda}$，代入式(8)解得

$$\lambda = \frac{3}{2} \text{或} \lambda = -\frac{3}{2},$$

当 $\lambda = \frac{3}{2}$ 时，可得 $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{2}{3}$，

当 $\lambda = -\frac{3}{2}$ 时，可得 $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = \frac{2}{3}$.

把条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 确定的隐函数记作 $z = z(x, y)$，将目标函数 $u = x - 2y + 2z(x, y) = F(x, y)$ 应用二元函数极值的充分条件判断可知，点 $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ 是函数 $u = x - 2y + 2z$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的极小值点，极小值为 -3；点 $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ 是函数 $u = x - 2y + 2z$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的极大值点，极大值为 3.

(3) 由条件 $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} y = \frac{1 - 2x}{2}, \\ z = -\frac{1}{2}, \end{cases}$ 代入 $u = x^2 + y^2 + z^2$，则问题化为求一元函数 $u = x^2 + \frac{(1 - 2x)^2}{4} + \frac{1}{4}$ 的极值.

由 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x + \frac{1}{4} \cdot 2(1 - 2x) \cdot (-2) = 4x - 1 = 0$，得 $x = \frac{1}{4}$，又因为

$$\left. \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} \right|_{x = \frac{1}{4}} = 4 > 0,$$

根据一元函数取得极值的充分条件可知 $x = \frac{1}{4}$ 为极小值点. 由此得到点 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ 是函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件 $x + y - z = 1$，$x + y + z = 0$ 下的极小值点，极小值为 $z = (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^2 + (-\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$.

3. 求下列函数在指定区域上的最值:

(1)　$f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$, D 是以点 $A(-1,1), B(2,1), C(-1,2)$ 为顶点的三角形闭区域;

(2)　$f(x,y)=x^2-y^2$, D 是椭圆 $x^2+4y^2=4$ 所围区域.

解　(1)　由方程组 $\begin{cases} f'_x(x,y)=2x+2y=0, \\ f'_y(x,y)=2x+6y=0, \end{cases}$

求得驻点 $(0,0)$, 显然 $(0,0)$ 不在 D 的内部, 因此函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最值只在 D 的边界上取得.

在边界 AB: $y=1\ \ (-1\le x\le 2)$ 上, 把 $y=1$ 代入 $f(x,y)$ 得

$$f(x,y)=x^2+2x+3\quad(-1\le x\le 2),$$

由 $f'(x,y)=2x+2=0$, 得 $x=-1$. $f(x,y)=x^2+2x+3$ 对应于 $x=-1, x=2$ 处的值分别为 2, 11.

在边界 BC: $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}\ \ (-1\le x\le 2)$ 上, 把 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$ 代入 $f(x,y)$ 得

$$f(x,y)=\frac{2}{3}x^2+\frac{25}{3}\quad(-1\le x\le 2),$$

由 $f'(x,y)=\dfrac{4}{3}x=0$, 得 $x=0$. $f(x,y)=\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{25}{3}$ 对 $x=-1, x=0,\ x=2$ 处的值分别为 $9, \dfrac{25}{3}, 11$.

在边界 AC: $x=-1\ \ (1\le y\le 2)$ 上, 把 $x=-1$ 代入 $f(x,y)$ 得

$$f(x,y)=1-2y+3y^2\quad(1\le y\le 2),$$

由 $f'(x,y)=-2+6y=0$, 得 $y=\dfrac{1}{3}$ (舍去).

$f(x,y)=1-2y+3y^2$ 对应于 $y=1, y=2$ 处的值分别为 2,9.

因此通过比较可知, $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值为 11, 最小值为 2.

注意　如果二元函数在有界闭区域 D 上连续, 在 D 内可微分, 且只有有限个驻点, 那么求二元函数在 D 上的最值的一般方法是, 先求函数在 D 内的所有驻点处的函数值, 再考虑函数在 D 的边界上的最大值和最小值, 把它们加以比较, 其中最大的就是最大值, 最小的就是最小值.

(2)　由方程组 $\begin{cases} f'_x(x,y)=2x=0, \\ f'_y(x,y)=-2y=0, \end{cases}$

求得驻点 $(0,0)$，显然 $(0,0)$ 在 D 的内部.

在点 $(0,0)$ 处，$f(0,0)=0$.

在边界 $x^2+4y^2=4$ 上, $x^2=4-4y^2$ 代入 $f(x,y)$ 得 $f(x,y)=4-5y^2\quad(-1\le y\le 1)$，由 $f'(x,y)=-10y=0$，得 $y=0$.

$f(x,y)=4-5y^2$ 对应于 $y=-1, y=0, y=1$ 处的值分别为 $-1,4,-1$，因此 $f(x,y)$ 在边界上的最大值为 4，最小值为 -1.

将边界上最大值和最小值与驻点 $(0,0)$ 处的值比较，得函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上最大值为 4，最小值为 -1.

4. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

解 设直角三角形的两直角边之长分别为 x, y，则周长为

$$S=x+y+l\qquad(0<x<l, 0<y<l),$$

本题是在 $x^2+y^2=l^2$ 条件下的条件极值问题.

作拉格朗日函数

$$L(x,y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2).$$

令

$$\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0, & (9)\\ L_y=1+2\lambda y=0, & (10)\\ x^2+y^2=l^2. & (11)\end{cases}$$

由式(9), (10)可得 $x=y=-\dfrac{1}{2\lambda}$，代入式(11)，解得 $\lambda=-\dfrac{1}{\sqrt{2}l}$，于是

$$x=y=\frac{l}{\sqrt{2}},$$

所以 $(\dfrac{l}{\sqrt{2}},\dfrac{l}{\sqrt{2}})$ 是唯一的驻点，根据问题本身可知，这种最大周长的直角三角形一定存在，因此在斜边之长为 l 的一切直角三角形中，周长最大的是等腰直角三角形，其直角边为 $\dfrac{l}{\sqrt{2}}$.

5. 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上求两点，使它们到直线 $x+y=4$ 的距离最短和最长.

解 设 $p(x,y)$ 为椭圆上任一点，则点 p 到直线的距离为 $d=\dfrac{|x+y-4|}{\sqrt{2}}$，本题是在 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 条件下的条件极值问题.

作拉格朗日函数

$$L(x,y)=(x+y-4)^2+\lambda(\frac{x^2}{4}+y^2-1).$$

令

$$\begin{cases} L_x=2(x+y-4)+\frac{1}{2}\lambda x=0, & (12) \\ L_y=2(x+y-4)+2\lambda y=0, & (13) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1. & (14) \end{cases}$$

由式(12), (13)可得 $x=4y$，代入式(14), 解得 $y=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 或 $y=-\frac{1}{\sqrt{5}}$，

于是 $x=\frac{4}{\sqrt{5}}$ 或 $x=-\frac{4}{\sqrt{5}}$，得两点驻点 $(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$ 和 $(-\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$.

由点 $(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$ 得

$$d_1=\frac{\left|\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}},$$

由点 $(-\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$ 得

$$d_2=\frac{\left|-\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{4+\sqrt{5}}{\sqrt{2}},$$

所以距离最短的点为 $(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$，距离最长的点为 $(-\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$.

6. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转得一圆柱体, 问矩形的边长各为多少时, 所得圆柱体的体积最大.

解 设矩形的一边长为 x，则另一边长为 $p-x$，假定矩形绕长为 $p-x$ 的一边旋转, 则旋转所成圆柱体的体积为

$$V=\pi x^2(p-x),$$

由 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=2\pi x(p-x)-\pi x^2=\pi x(2p-3x)=0$，求得驻点为 $x=\frac{2}{3}p$.

由于驻点唯一, 由题意又可知这种圆柱体一定有最大值, 所以当矩形的边长为 $\frac{2p}{3}$ 和 $\frac{p}{3}$ 时, 绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

7. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-z=1$ 之间的最短距离.

解 设 $p(x,y,z)$ 是旋转抛物面上任一点, 则点 p 到平面的距离为

$$d=\frac{|x+y-z-1|}{\sqrt{3}},$$

本题是在 $z=x^2+y^2$ 条件下的条件极值问题.

作拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=\frac{(x+y-z-1)^2}{3}+\lambda(x^2+y^2-z).$$

令

$$\begin{cases} L_x=\dfrac{2}{3}(x+y-z-1)+2\lambda x=0, & (15)\\ L_y=\dfrac{2}{3}(x+y-z-1)+2\lambda y=0, & (16)\\ L_z=-\dfrac{2}{3}(x+y-z-1)-\lambda=0, & (17)\\ z=x^2+y^2. & (18)\end{cases}$$

由式(15), (16)可得 $x=y$, 由式(15), (17)得 $x=\dfrac{1}{2}$, 代入式(18), 得 $z=\dfrac{1}{2}$, 于是 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ 是唯一的驻点, 根据问题本身可知, 旋转抛物面与平面之间的最短距离一定存在, 且在驻点处取得, 最短距离为 $d(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

8. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$, (x,y,z) 是它的内接长方体在第一卦限内的一个顶点, 则此长方体的长、宽、高分别为 $2x,2y,2z$, 体积为

$$V=2x\cdot 2y\cdot 2z=8xyz\quad(x>0,y>0,z>0).$$

作拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2).$$

令

$$\begin{cases} L_x=8yz+2\lambda x=0, & (19)\\ L_y=8xz+2\lambda y=0, & (20)\\ L_z=8xy+2\lambda z=0, & (21)\\ x^2+y^2+z^2=a^2. & (22)\end{cases}$$

由式(19), (20), (21)可看出 x,y,z 具有轮换对称性，可知 $x=y=z$，并解得 $x=y=z=-\frac{\lambda}{4}$，代入式(22), 得 $\lambda=-\frac{4}{\sqrt{3}a}$，故 $(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}})$ 为唯一驻点.

由题意可知, 满足题意的长方体必有最大体积, 所以当长方体的长、宽、高都为 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ 时, 其体积最大.

注意 用拉格朗日乘数法求解条件极值问题时, 方法是固定的, 难点常在于解联立方程组以求得驻点的坐标, 这时我们常从以下两方面入手:

① 从方程组中最简的方程出发, 逐步采用代入法或消去法求解.

② 注意方程组变量之间是否具有轮换对称性, 如果有, 则可由此设法寻找解方程组的捷径, 所谓轮换对称性, 即函数 $f(x,y,z)$ 满足

$$f(x,y,z)=f(y,z,x)=f(z,x,y).$$

9. 求原点到曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 的最短距离.

解 设 $p(x,y,z)$ 是曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 上任一点，则原点到 p 的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，为简化计算, 可将求上式距离 d 最短转化为求 $d^2=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $z^2=xy+x-y+4$ 下的最小值问题, 所得解与原问题同解.

作拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(xy+x-y+4-z^2).$$

令

$$\begin{cases} L_x=2x+\lambda y+\lambda=0, & (23)\\ L_y=2y+\lambda x-\lambda=0, & (24)\\ L_z=2z-2\lambda z=0, & (25)\\ z^2=xy+x-y+4. & (26)\end{cases}$$

由式(25)可知 $\lambda=1$, 代入式(23), (24)解得 $x=-1, y=1$，代入式(26)得 $z=1$ 或 $z=-1$，故 $(-1,1,1)$ 和 $(-1,1,-1)$ 为驻点，由题意可知，所求最短距离存在，且在驻点处取得，最短距离为 $d(-1,1,1)=d(-1,1,-1)=\sqrt{3}$.

注意 在解此类问题时一定要注意简化目标函数.

例如本例应求 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在条件 $z^2=xy+x-y+4$ 下的最小值, 若直接应用拉格朗日乘数法会增加许多计算量, 且有时方程组很难解.

10. 有一宽为 24cm 的长方形铁板, 把它两边折起来做成一断面为等腰梯形的水槽. 问怎样折法才能使断面的面积最大？

解 设折起来的边长为 x cm，倾角（即腰与底边所夹锐角）为 α，则梯形断面的下底长为 $24-2x$，上底长为 $24-2x+2x\cos\alpha$，高为 $x\sin\alpha$，所以断面面积为

$$A=\frac{1}{2}(24-2x+2x\cos\alpha+24-2x)\cdot x\sin\alpha,$$

即

$$A=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\sin\alpha\cos\alpha\ (0<x<12, 0<\alpha\le\frac{\pi}{2}).$$

可见断面面积 A 是 x 和 α 的二元函数，下面求使这个函数取得最大值的点 (x,α).

令

$$\begin{cases} A_x=24\sin\alpha-4x\sin\alpha+2x\sin\alpha\cos\alpha=0, \\ A_\alpha=24x\cos\alpha-2x^2\cos\alpha+x^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0, \end{cases}$$

由于 $\sin\alpha\neq 0, x\neq 0$，方程组可化为

$$\begin{cases} 12-2x+x\cos\alpha=0, \\ 24\cos\alpha-2x\cos\alpha+x(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0. \end{cases}$$

解方程组，得

$$\alpha=\frac{\pi}{3}=60^\circ,\quad x=8\ (\text{cm}).$$

根据题意可知，断面面积的最大值一定存在，并且在

$$D=\{(x,y)\,\Big|\,0<x<12,\ 0<\alpha\le\frac{\pi}{2}\}$$

内取得，通过计算得知 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时的函数值比 $\alpha=60^\circ, x=8\text{cm}$ 时的函数值小，又函数在 D 内只有一个驻点，因此，当 $x=8\text{cm}, \alpha=60^\circ$ 时，就能使断面的面积最大.

11. 某公司生产中使用 A, B 两种原料，已知 A 和 B 两种原料分别使用 x 单位和 y 单位可产出 z 单位产品，这里

$$z=8xy+32x+40y-4x^2-6y^2.$$

且 A 原料每单位价值 10 元, B 原料每单位价值 4 元，产品销售价每单位 40 元，求该公司最大利润.

解 总收入函数、总成本函数及总利润函数分别为

$$R=40z=40(8xy+32x+40y-4x^2-6y^2)$$

$$=320xy+1280x+1600y-160x^2-240y^2,$$

$$C=10x+4y,$$

$$L=R-C=320xy+1270x+1596y-160x^2-240y^2.$$

根据极值的必要条件，令

$$\begin{cases} L_x = 320y + 1270 - 320x = 0, \\ L_y = 320x + 1596 - 480y = 0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x \approx 22, \\ y \approx 18. \end{cases}$$

故(22,18)为唯一驻点，由题意可知，满足题意的最大利润存在，所以当 $x \approx 22, y \approx 18$ 时，利润最大，最大利润约为 $L(22,18) = 28188$ (元).