第三节

可利用变量代换法求解的一阶微分方程

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

（一）齐次方程

类型3 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)=F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (3.1) ——齐次方程.

其中 $f(x,y)$满足：$\forall\lambda\in R$，$\lambda\neq 0$

有 $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$.

取 $\lambda=\dfrac{1}{x}$，则

$$f(x,y)=f\left(\frac{1}{x}\cdot x,\frac{1}{x}\cdot y\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

求解法：作变量代换：$u=\dfrac{y}{x}$，

即 $y = xu$, $\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$,

代入原式，得 $\quad u + x\dfrac{du}{dx} = F(u)$,

即 $\quad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{F(u) - u}{x} \quad (3.2)$ 可分离变量的方程

1° 当 $F(u) - u \neq 0$时, 得 $\displaystyle\int \frac{du}{F(u) - u} = \ln|C_1 x|$,

将 $u = \dfrac{y}{x}$ 代回,即可得到原方程的通解 .

2° 当 $\exists u_0$，使 $F(u_0) - u_0 = 0$时,则 $u = u_0$是(3.2)的解,

代回原方程，得齐次方程的解 $y = u_0 x$.

(二) 伯努利方程

伯努利(Bernoulli)方程的标准形式

类型4 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha} \qquad (4.1)$$

$$(\alpha \neq 0,1;\ \alpha \in R)$$

当 $\alpha = 0,1$时， 方程为线性微分方程.

当 $\alpha \neq 0,1$时，方程为非线性微分方程.

求解法：需经过变量代换化为线性微分方程.

1° $y \neq 0$, (4.5)式两端除以 y^{α}，得

$$y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-\alpha}=Q(x),$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(y^{1-\alpha})'\\&=(1-\alpha)y^{-\alpha}y'\end{aligned}}$$

令 $z=y^{1-\alpha}$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

代入上式，得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-\alpha)P(x)z=(1-\alpha)Q(x),$

—— 关于z 的线性方程

通解:

$$z=e^{-\int(1-\alpha)P(x)\mathrm{d}x}\left[\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-\alpha)P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right].$$

变量代回，得原方程 (4.1)的通解:

$$y^{1-\alpha}=e^{-\int(1-\alpha)P(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-\alpha)P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right].$$

2° 当 $\alpha>0$时，$y=0$也是(4.1)的解.

（三）可用变量代换求解的其他一阶方程

类型3' $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ ——— 准齐次方程

其中$a_i, b_i, c_i (i=1, 2)$均为常数，$c_1^2+c_2^2\neq 0$ 且

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0.$$

解 令$\begin{cases} x=X+h \\ y=Y+k \end{cases}$, 其中$h$和$k$是待定的常数，

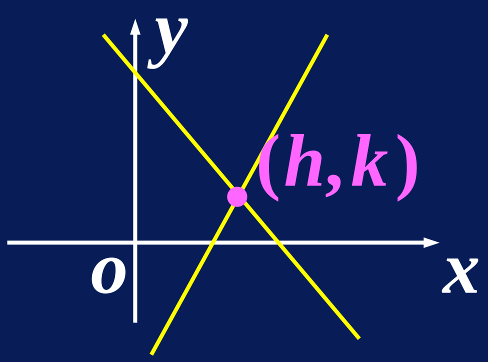
则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X$， $\mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y+\underline{a_1h+b_1k+c_1}}{a_2X+b_2Y+\underline{a_2h+b_2k+c_2}}\right)$$

考虑 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases}$ (1)

当 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$时,

(1)有唯一一组解: $\begin{cases} x=h, \\ y=k, \end{cases}$



于是 $\begin{cases} a_1h+b_1k+c_1=0, \\ a_2h+b_2k+c_2=0, \end{cases}$

从而 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)$ —— 齐次方程

令 $u=\dfrac{Y}{X}$,

则可将此方程化为可分离变量的方程.

求其通解，再变量代回 $\begin{cases} X=x-h, \\ Y=y-k, \end{cases}$

即可得到原方程的通解.

二、典型例题

例1 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{2y^2-xy}$ 的通解.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2},$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

$$u+xu'=\frac{2u^2-u}{1-u+u^2},\quad xu'=-\frac{u(u^2-3u+2)}{1-u+u^2},$$

$$\frac{-1+u-u^2}{u(u-1)(u-2)}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\left(\frac{-\frac{1}{2}}{u}+\frac{1}{u-1}+\frac{-\frac{3}{2}}{u-2}\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\frac{-1+u-u^2}{u(u-1)(u-2)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}+\frac{C}{u-2}$$

$$-1+u-u^2\equiv A(u-1)(u-2)+Bu(u-2)+Cu(u-1)$$

$$-\frac{1}{2}\ln u+\ln(u-1)-\frac{3}{2}\ln(u-2)=\ln x+\ln C,$$

$$\frac{u-1}{\sqrt{u}(u-2)^{\frac{3}{2}}}=C_1x,$$ 变量代回，得

原微分方程的通解为：$(y-x)^2=Cy(y-2x)^3.$

例2 求解微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+\sqrt{x^2-y^2}$. ①

解 ① $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{|x|}{x}\sqrt{1-(\dfrac{y}{x})^2}$

$x>0,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1-(\dfrac{y}{x})^2}$ ②

$x<0,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\sqrt{1-(\dfrac{y}{x})^2}$ ③

令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入②，得 $\cancel{u}+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cancel{u}+\sqrt{1-u^2}\quad (x>0)$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\quad (x>0,u\neq\pm1)$$

$$\arcsin u=\ln x+C,$$

代入③，得 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-\sqrt{1-u^2}\quad (x<0)$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\quad (x<0,u\neq\pm1)$$

$$\arcsin u=-\ln(-x)+C,$$

变量代回，得原方程的 通解:

$$\arcsin\frac{y}{x} = \pm\ln|x| + C,$$

(C为任意常数．$x<0$时，取“$-$”; $x>0$时，取“$+$”)

此外，$y=\pm x\ (u=\pm 1)$也是原方程的解．

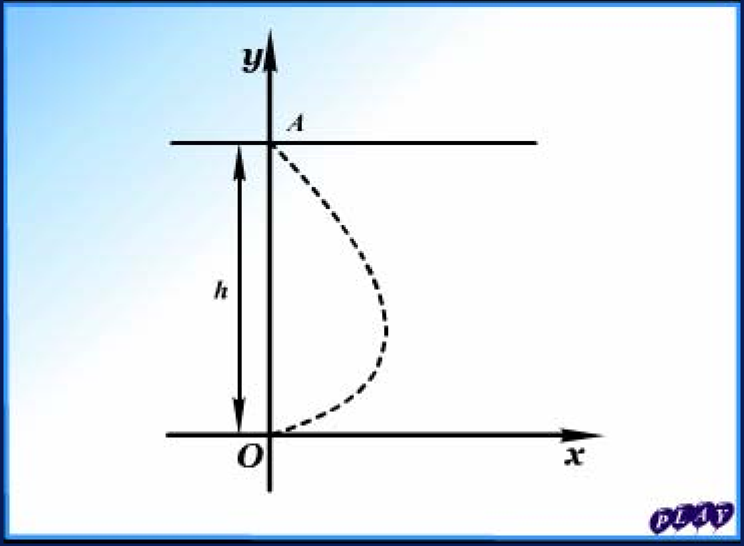
例3 设河边点O的下对岸为点A，河宽$OA=h$，两岸为平行直线，水流速度为a，有一鸭子从点A游向点O，设鸭子(在静水中)的游速为$b(b>a)$，且鸭子游动方向始终朝着点O. 求鸭子游过的迹线的方程.

解 设水流速度为$\vec{a}(|\vec{a}|=a)$，鸭子游速为$\vec{b}(|\vec{b}|=b)$

则鸭子实际运动速度为

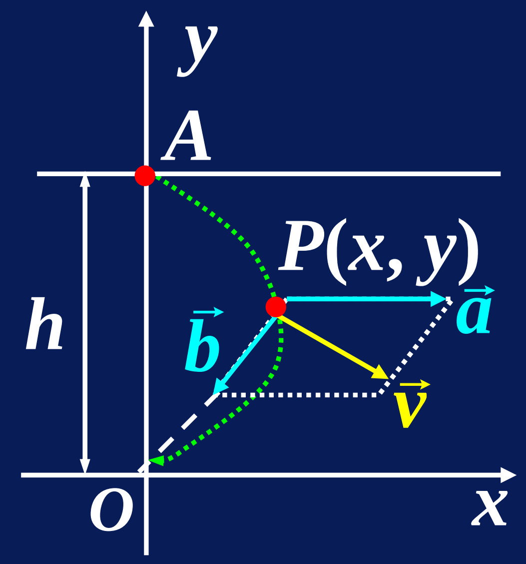
$$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}.$$

取O为坐标原点，河岸朝顺水方向为x轴，y轴指向对岸.



设在时刻 t 鸭子位于点$P(x, y)$，则鸭子运动速度

$$\vec{v}=(v_x, v_y)=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$



故一方面，有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{v_x}{v_y}$

另一方面，由 $\vec{a}=(a, 0)$，$\vec{b}=b\,\vec{\mathrm{e}}_{\overrightarrow{PO}}$

其中$\vec{\mathrm{e}}_{\overrightarrow{PO}}$ 为与 $\overrightarrow{PO}$ 同方向的单位向量.

而 $\overrightarrow{PO}=-(x, y)$ 得 $\vec{\mathrm{e}}_{\overrightarrow{PO}}=\dfrac{\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{PO}|}=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y)$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

于是 $\vec{b}=-\dfrac{b}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$

从而 $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}=(a-\dfrac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}},-\dfrac{by}{\sqrt{x^2+y^2}})$

由此得微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{v_x}{v_y}=-\dfrac{a}{b}\sqrt{(\dfrac{x}{y})^2+1}+\dfrac{x}{y},$

令 $\dfrac{x}{y}=u,$ 则 $x=yu,$ $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+u$

代入上面的方程，得 $y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=-\dfrac{a}{b}\sqrt{u^2+1}$

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}} = -\dfrac{a}{by}\mathrm{d}y$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

积分得 $\operatorname{arsh} u = -\dfrac{a}{b}(\ln y + \ln C)$

即 $u = \operatorname{sh}\ln (Cy)^{-\frac{a}{b}} = \dfrac{1}{2}[(Cy)^{-\frac{a}{b}} - (Cy)^{\frac{a}{b}}]$

于是 $x = \dfrac{y}{2}[(Cy)^{-\frac{a}{b}} - (Cy)^{\frac{a}{b}}] = \dfrac{1}{2C}[(Cy)^{1-\frac{a}{b}} - (Cy)^{1+\frac{a}{b}}]$

以 $y = h$ 时 $x = 0$ 代入上式，得 $C = \dfrac{1}{h}$,

故鸭子游过的迹线方程为

$$x = \frac{h}{2}\left[\left(\frac{y}{h}\right)^{1-\frac{a}{b}} - \left(\frac{y}{h}\right)^{1+\frac{a}{b}}\right], \quad 0 \le y \le h$$

例4 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{4}{x}y=x^2\sqrt{y}$ 的通解.

解 这是 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ 时的伯努利方程 .

两端除以 $\sqrt{y}$, 得 $\dfrac{1}{\sqrt{y}}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{4}{x}\sqrt{y}=x^2$,

令 $z=\sqrt{y}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2}{x}z=\dfrac{x^2}{2}$,

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

解得 $z = e^{\int \frac{2}{x} \mathrm{d}x} [\int \frac{x^2}{2} e^{-\int \frac{2}{x} \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C]$

$$= x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right),$$

即所求通解为：$y = x^4 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2.$

例5 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x^2y-x}$ 的通解.

解 将所给方程改写为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x^2y-x}{y}$

即 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y}x=x^2$ —— 这是关于 x, $\alpha=2$ 的伯努利方程.

令 $z=x^{-1}$, 得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}z=-1$

原方程的通解:

$$x^{-1}=z=e^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int(-1)e^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=y(-\ln|y|+C)$$

例6 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$ 的通解.

解 $\because \Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0,$

方程组 $\begin{cases}x-y+1=0\\ x+y-3=0,\end{cases}$ 解得 $x=1,\ y=2,$

令 $x=X+1, y=Y+2.$ 代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{X-Y}{X+Y},$$ 令 $u=\dfrac{Y}{X},$

方程变为 $u+X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\dfrac{1-u}{1+u}$, 分离变量法得

$X^2(u^2+2u-1)=C$, 即 $Y^2+2XY-X^2=C$,

将 $X=x-1, Y=y-2$ 代回,

得原方程的通解

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=C,$$

或 $x^2+2xy-y^2+2x+6y=C_1$.

例7 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x\sin^2(xy)}-\dfrac{y}{x}$;

解 令 $z=xy$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y+x\left(\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{\sin^2 z},$$

分离变量法得 $2z-\sin 2z=4x+C$,

将 $z=xy$ 代回，所求通解为

$$2xy-\sin(2xy)=4x+C.$$

例8 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}$;

解 (方法1) 令 $x+y=u$, 则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$,

代入原式 $\dfrac{du}{dx}-1=\dfrac{1}{u}$,

分离变量法得 $u-\ln(u+1)=x+C$,

将 $u=x+y$ 代回, 所求通解为

$y-\ln(x+y+1)=C$, 或 $x=C_1e^{y}-y-1$

(方法2) 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x + y$ —— 关于x是线性方程

解得 $$x = e^{\int \mathrm{d}y}[\int y e^{-\int \mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y + C]$$

$$= e^{y}[\int y e^{-y}\,\mathrm{d}y + C]$$

$$= e^{y}[-(y+1)e^{-y} + C]$$

$$= -(y+1) + Ce^{y}.$$

三、同步练习

1. 在制造探照灯的反射镜面时，总是要求将光源射出的光线平行地反射出去，以保证探照灯有良好的方向性，试求反射镜面的几何形状.

2. 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

3. $2yy'+2xy^2=xe^{-x^2}$

4. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{xy+x^3y}$ 的通解 .

5. 利用变量代换求下列微分方程的通解:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$ (2) $f(xy)y\,\mathrm{d}x+g(xy)x\,\mathrm{d}y=0$.

四、同步练习解答

1. 在制造探照灯的反射镜面时，总是要求将光源射出的光线平行地反射出去，以保证探照灯有良好的方向性，试求反射镜面的几何形状.

解 设光源在坐标原点(0,0),而x轴平行于光的反射方向，设所求曲面由曲线

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = 0 \end{cases}$$

绕x轴旋转而成，则求反射 镜面的问题归结为求xoy面上的曲线$y = f(x)$的问题.

过曲线$L: y = f(x)$上任一点$M(x,y)$

作切线MT, 斜率为 y',

作法线MS, 由光的反射定律:

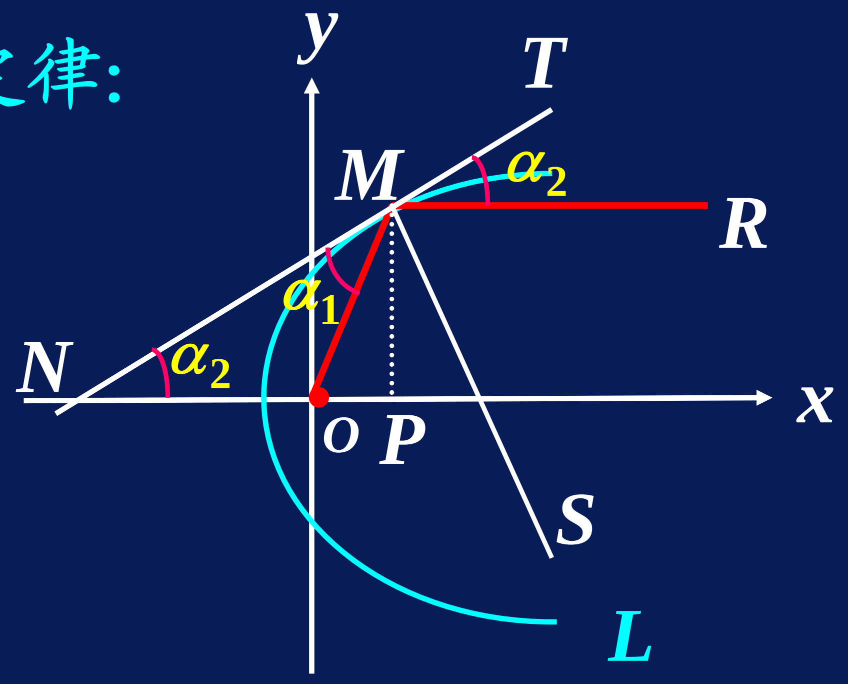
入射角 = 反射角

即 $\angle OMS = \angle SMR$,

故 $\alpha_1 = \alpha_2$,

$\therefore \quad \overline{OM} = \overline{ON}$

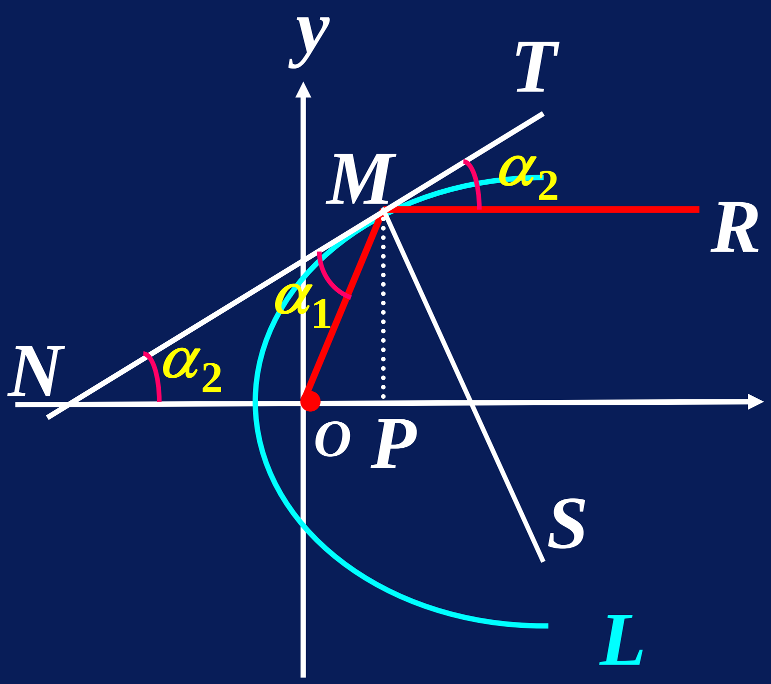
$\because \quad y' = \tan\alpha_2 = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{NP}}$



而 $\overline{OP}=x,\ \overline{MP}=y,\ \overline{OM}=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\overline{NP}=\overline{ON}+\overline{OP}\ =\overline{OM}+\overline{OP}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}+x$$



∴ 得微分方程

$$y'=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

或 $$\frac{dx}{dy}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

当 $y>0$时，有

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1} \qquad ①$$

令 $u=\frac{x}{y}$, 即 $x=yu$, 则 $\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$

① 式化为 $\cancel{u}+y\frac{du}{dy}=\cancel{u}+\sqrt{u^2+1}$

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\int\frac{dy}{y}, \quad \ln(u+\sqrt{u^2+1})=\ln y-\ln C$$

$$u+\sqrt{u^2+1}=\frac{y}{C}, \quad u^2+1=(\frac{y}{C}-u)^2,$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$(\frac{y}{C})^2 - 2u\frac{y}{C} = 1$$

变量代回，得 $(\frac{y}{C})^2 - 2\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{C} = 1$

即 $y^2 = C(C+2x)$ （C为任意常数）

$\therefore$ 反射镜面的形状为 旋转抛物面:

$$y^2 + z^2 = C(C+2x)$$

2. 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解 以y^2除方程的两端，得 $y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y^{-1}=a\ln x$

即 $$-\frac{\mathrm{d}(y^{-1})}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y^{-1}=a\ln x$$

令$z=y^{-1}$，则上述方程成为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}z=-a\ln x$

这是一个线性方程，它的通解为

$$z=x[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2]$$

以y^{-1}代z，得所求方程的通解为 $yx[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2]=1$

3. $2yy' + 2xy^2 = xe^{-x^2}$ (1)

解 $(1) \Leftrightarrow y' + xy = \frac{1}{2}xe^{-x^2}y^{-1}$ ($\alpha = -1$的伯努利方程)

令 $z = y^{1-(-1)} = y^2$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 2xz = xe^{-x^2},$$

$$z = e^{-\int 2x\,\mathrm{d}x}\left[\int xe^{-x^2}e^{\int 2x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$$

所求通解为 $y^2 = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$

4. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{xy + x^3 y}$ 的通解 .

解 (方法1) 将所给方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(x + x^3)y}$$

可分离变量方程

分离变量，积分

$$\int y\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{(x + x^3)}\,\mathrm{d}x$$

得原方程的通解 $\dfrac{1}{2}y^2 = \ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C.$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(方法2) 将所给方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = xy + x^3 y$$

或 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - yx = x^3 y$$ —— 这是关于 x，$\alpha = 3$ 的伯努利方程．

令 $z = x^{1-\alpha} = x^{-2}$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -2x^{-3}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

原方程化为 $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + 2yz = -2y,$$

原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+2yz=-2y,$

由常数变易公式，得其通解:

$$z=e^{-\int 2y\,\mathrm{d}y}\left[\int(-2y)e^{\int 2y\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=e^{-y^2}\left[\int(-2y)e^{y^2}\,\mathrm{d}y+C\right]=e^{-y^2}(-e^{y^2}+C)$$

$$=Ce^{-y^2}-1.$$

将变量代回，得原方程的通解: $x^{-2}=Ce^{-y^2}-1.$

5. 利用变量代换求下列微分方程的通解:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2.$

解 令 $x+y=u$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$ 代入原方程

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+u^2$ 解得 $\arctan u=x+C,$

代回 $u=x+y$,得 $\arctan(x+y)=x+C,$

原方程的通解为 $y=\tan(x+C)-x.$

(2) $f(xy)y\,\mathrm{d}x+g(xy)x\,\mathrm{d}y=0.$

解　令$u=xy,$　　则 $\mathrm{d}u=x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x,$

$$f(u)y\,\mathrm{d}x+g(u)x\cdot\frac{\mathrm{d}u-y\,\mathrm{d}x}{x}=0,$$

$$[f(u)-g(u)]\frac{u}{x}\mathrm{d}x+g(u)\,\mathrm{d}u=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{g(u)}{u[f(u)-g(u)]}\mathrm{d}u=0,$$

通解为　$\ln|x|+\int\frac{g(u)}{u[f(u)-g(u)]}\mathrm{d}u=C.$