第七节

曲线的曲率

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

（一）弧微分

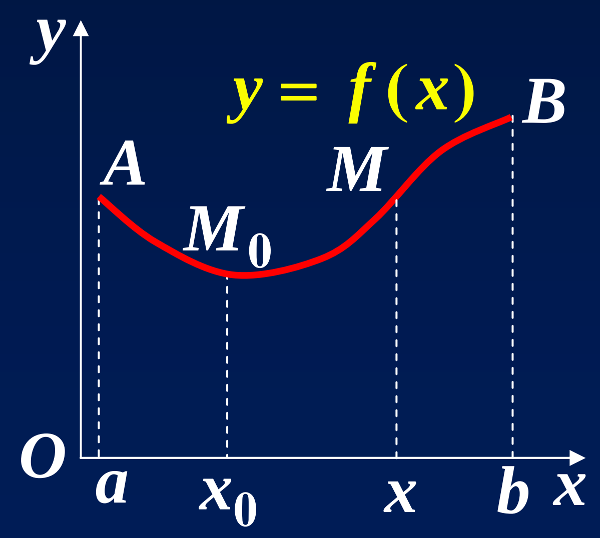
1. 弧的概念

设 $y = f(x)$ 在(a, b)内有连续导数, 其图形为 $\overset{\frown}{AB}$,

设曲线的正向为x增大的方向.

若M_0为选定的基点, M是有向弧段上任意一点，则可定义

有向弧段$\overset{\frown}{M_0M}$的值 s.



弧的定义

有向弧段$\overset{\frown}{M_0M}$的值 s (简称弧 s)

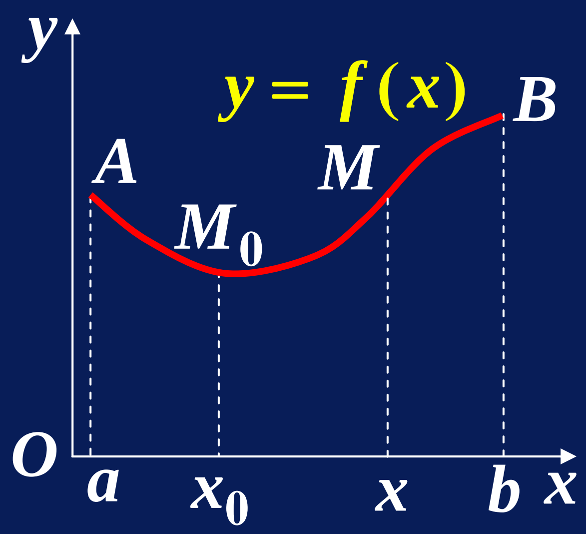
规定为:

s 的大小等于弧$\overset{\frown}{M_0M}$的长度,

当弧$\overset{\frown}{M_0M}$的方向与曲线的正方向一致时, $s>0$,

相反时, $s<0$.

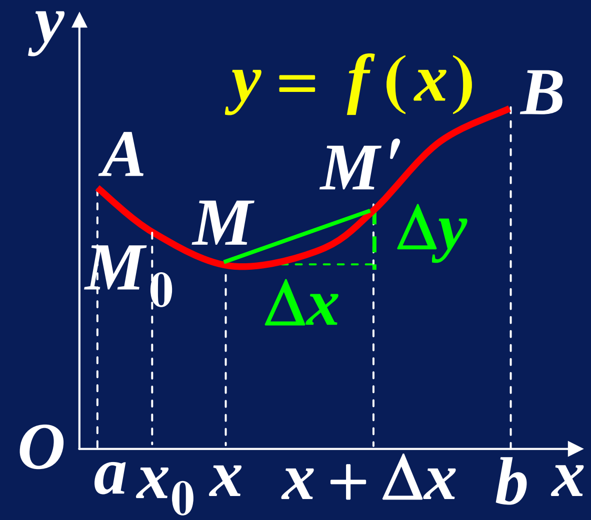
显然, s 是个代数量, 且是x的单调增函数 $s(x)$.



2. 弧 $s(x)$的微分

设弧 $s = \overset{\frown}{M_0M} = s(x)$,

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \frac{\overset{\frown}{MM'}^2}{(\Delta x)^2} = \frac{\overset{\frown}{MM'}^2}{|MM'|^2} \cdot \frac{|MM'|^2}{(\Delta x)^2}.$$



又 $s(x)$单增,

$$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{\frac{\overset{\frown}{MM'}^2}{|MM'|^2} \cdot \frac{|MM'|^2}{(\Delta x)^2}}$$

$$|MM'|^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$s'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{\frown}{|MM'|}}{|MM'|} = 1$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + (y')^2},$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$$

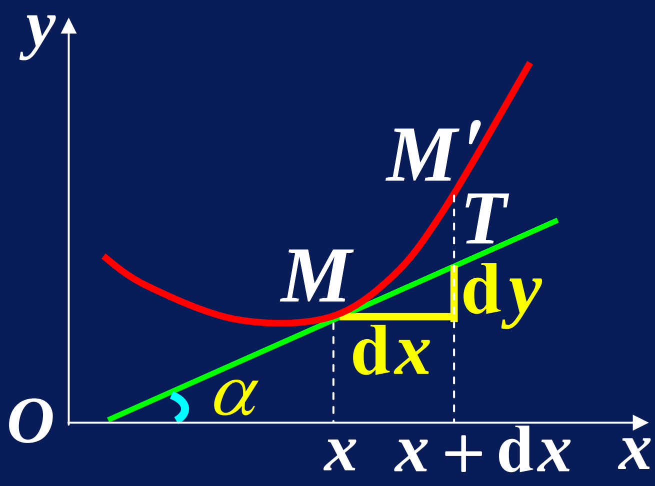
或 $$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}.$$

几何意义:

$$\mathrm{d}s = |MT|$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha\,.$$



注 1° 若曲线由参数方程表示:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

则弧微分公式为 $\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$

2° 若曲线由极坐标方程表示:

$$\rho = \rho(\theta),$$

则通过计算可得

$$\mathrm{d}s = \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

(二) 平面曲线曲率的概念

曲率的定义

在光滑弧上自点 M 开始取弧段 $\overset{\frown}{MM'}$，其长为 Δs，对应切线转角为 $\Delta\alpha$，定义弧段 Δs 上的平均曲率

$$\overline{K} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|,$$

点 M 处的曲率：

$$K = \lim_{M'\to M}\overline{K} = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|.$$

显然，直线上任意点处的曲率为 0.

(三) 曲率的计算公式

设曲线 $y = f(x)$ 二阶可导, 设 α 为切线的倾角，则有 $\tan\alpha = y'$, 故 $\alpha = \arctan y'$, 从而

$$\mathrm{d}\alpha = (\arctan y')'\,\mathrm{d}x = \frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

又 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$,

故曲率计算公式为

$$K = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

注 1° 当 $|y'| << 1$ 时，有曲率近似计算公式 $K \approx |y''|$.

2° 若曲线由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 给出，则通过

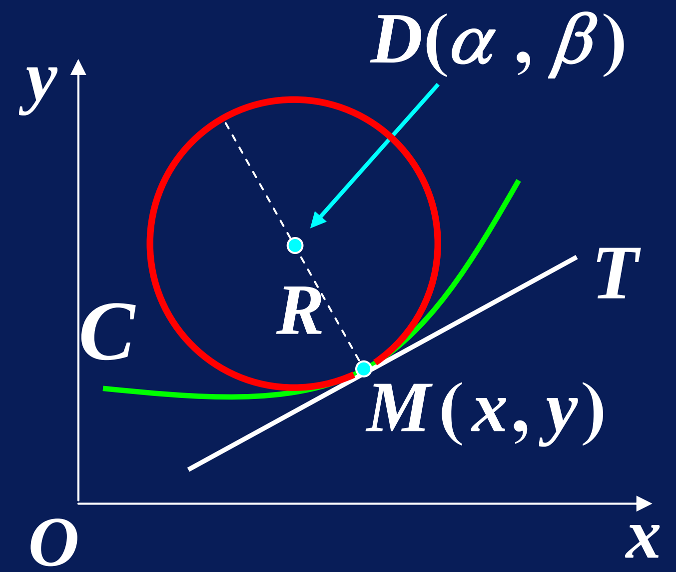
计算可得 $K = \dfrac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. $\boxed{K = \dfrac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}}$

3° 若曲线方程为 $x = \varphi(y)$, 则

$$K = \frac{|x''|}{(1 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(四) 曲率圆与曲率半径

设 M 为曲线 C 上任一点，在点M 处作曲线的切线和法线，在曲线的凹向一侧法线上取点 D 使



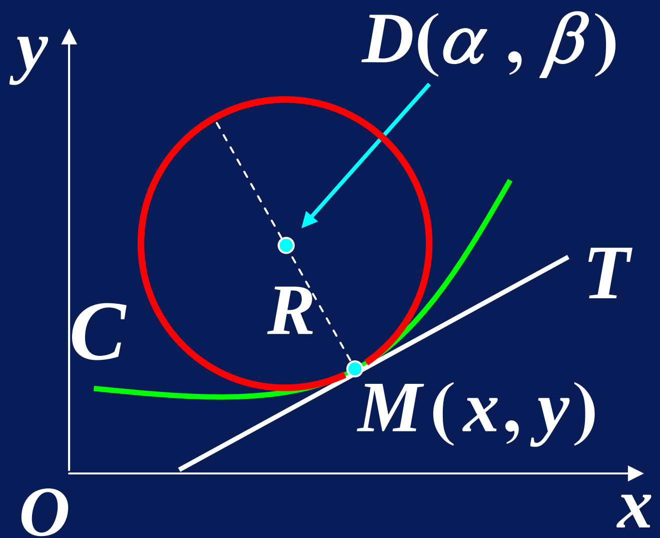
$$|DM| = R = \frac{1}{K},$$

把以 D 为中心, R 为半径的圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆(密切圆), R 叫做曲率半径, D 叫做曲率中心.

在点M处曲率圆与曲线有下列密切关系:

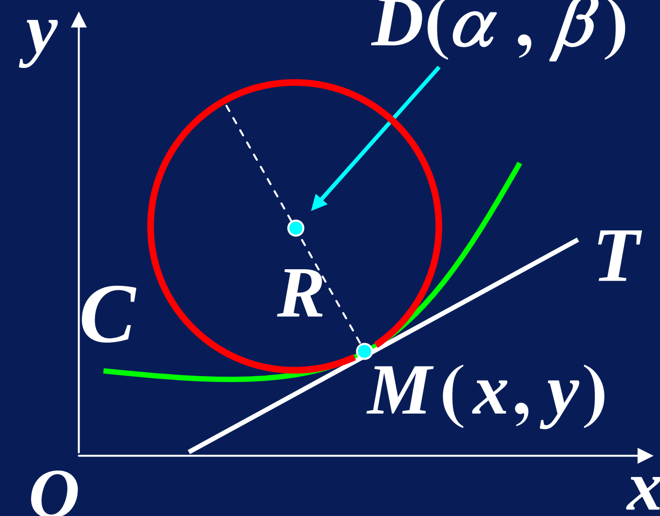
(1) 有公切线;　(2) 凹向一致;　(3) 曲率相同 .

设曲线方程为 $y = f(x)$, 且 $y'' \neq 0$, 曲线上点M处的曲率半径为



$$R = \frac{1}{K} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\,y''\,|}.$$

下面求曲线上点M处的曲率中心$D(\alpha,\beta)$的坐标公式.



设点M处的曲率圆方程为

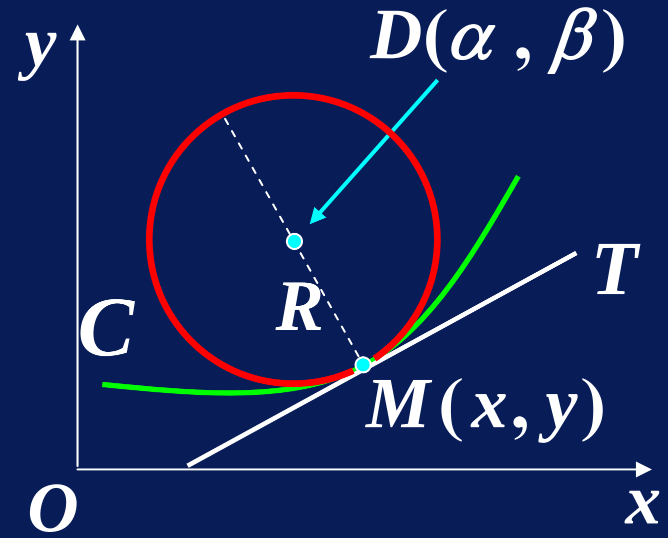
$$(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2=R^2,$$

其中α,β满足方程组

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 & (M(x,y)\text{在曲率圆上}) \\ y'=-\dfrac{x-\alpha}{y-\beta} & (DM\perp MT)\end{cases}$$

由此可得曲率中心公式

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''}. \end{cases}$$

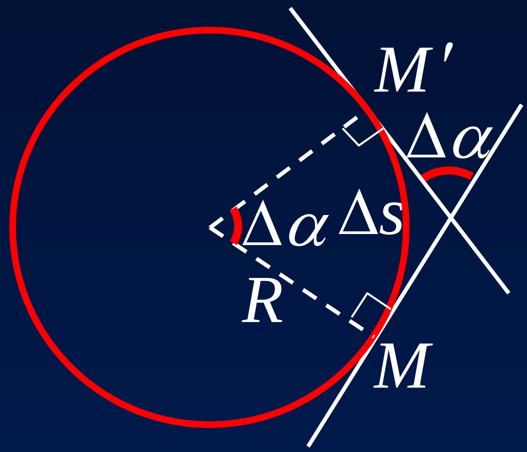


当点 $M(x, y)$ 沿曲线 $C: y = f(x)$ 移动时, 相应的曲率中心的轨迹 G 称为曲线 C 的渐屈线, 曲线 C 称为曲线 G 的渐伸线 .

二、典型例题

例1 求半径为R的圆上任意点处的曲率.

解 如图所示,



$$\Delta s = R\,\Delta\alpha$$

$$\therefore \quad K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \frac{1}{R}.$$

可见: 圆的弯曲程度处处相同;

圆的半径越小, 圆弯曲得愈厉害.

例2 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上哪一点的曲率最大？

解 $y' = 2ax + b, \qquad y'' = 2a,$

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

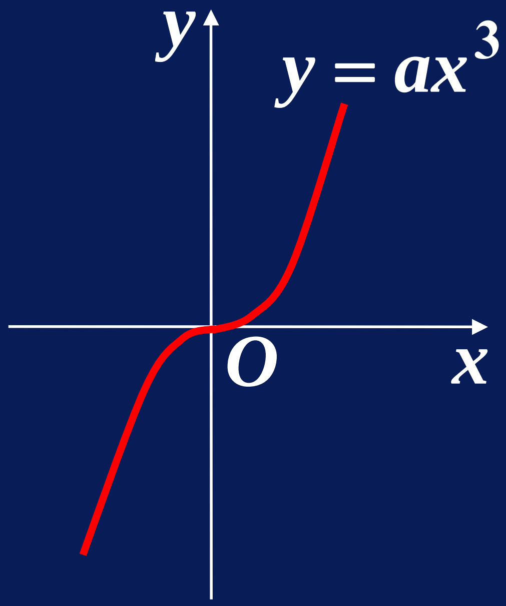
显然，当 $x = -\dfrac{b}{2a}$ 时，K 最大.

又 $\because \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ 为抛物线的顶点，

$\therefore$ 抛物线在顶点处的曲率最大.

例3 求 $y = ax^3$ 上任一点的曲率半径．

解 $y' = 3ax^2$，$y'' = 6ax$,



$$R = \frac{1}{K} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

$$= \frac{(1+9a^2x^4)^{3/2}}{|6ax|} \quad (x \neq 0)$$

在该曲线的拐点 (0,0)处，$\lim\limits_{x\to 0} R = +\infty.$

例4 问：火车轨道由直轨转入弯道时，为什么不立即接上圆弧轨道？

答： 直轨$\overline{AB}$的曲率：$k_{直}=0$, $\therefore$ 曲率半径：$R_{直}=\infty$.

而圆弧的曲率半径：$R_{圆}=R_0$(常数).

由于向心力：$F_{向心力}=\dfrac{mv^2}{R}$，所以若在拐弯点B接上圆弧，则向心力 $F_{向心力}$在B点不连续，从而产生剧烈震动．为了行驶平稳，往往在直道和弯道之间接入一段缓冲段，使曲率连续地由零过渡到$\dfrac{1}{R_0}$.

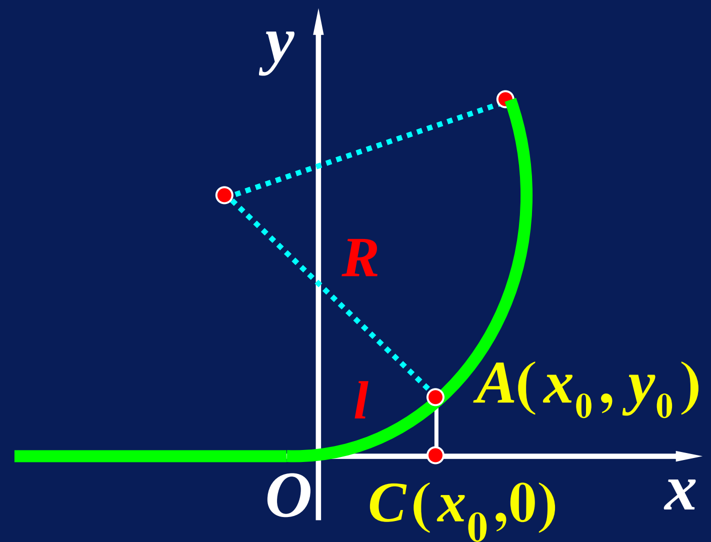
通常用三次抛物线 $y=\dfrac{1}{6Rl}x^3$，$x\in[0,x_0]$作为

缓冲段$\overset{\frown}{OA}$，其中l为$\overset{\frown}{OA}$的长度.

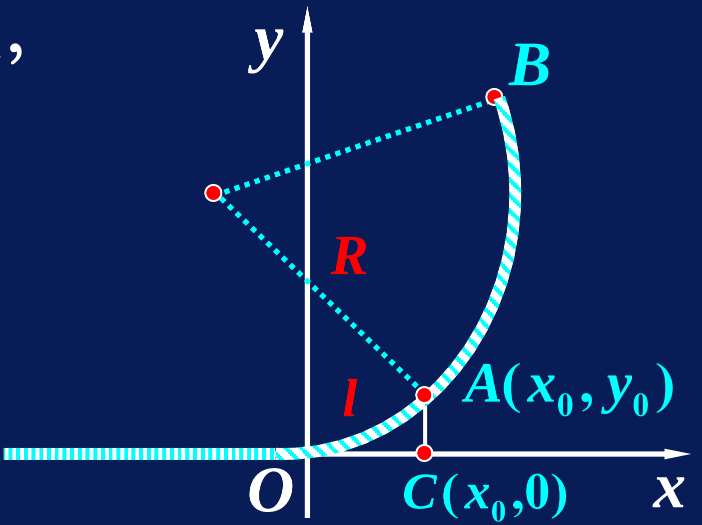
验证缓冲段$\overset{\frown}{OA}$在始端O的曲率为零，

并且当$\dfrac{l}{R}$很小$\left(\dfrac{l}{R}\ll 1\right)$时，

在终端A的曲率近似为$\dfrac{1}{R}$.



证 如图, x的负半轴表示直道, $\overset{\frown}{OA}$是缓冲段, $\overset{\frown}{AB}$是圆弧轨道.



实际要求 $l \approx x_0$. 在缓冲段上,

$x \in [0, l]$,

$$\because \quad y' = \frac{1}{2Rl}x^2 \le \frac{l}{2R} \approx 0, \quad y'' = \frac{1}{Rl}x,$$

$$\boxed{y = \frac{1}{6Rl}x^3}$$

$$\boxed{\frac{l}{R} << 1}$$

$$\therefore \quad K \approx |y''| = \frac{1}{Rl}x,$$

故缓冲始点的曲率 $K_O = 0$,

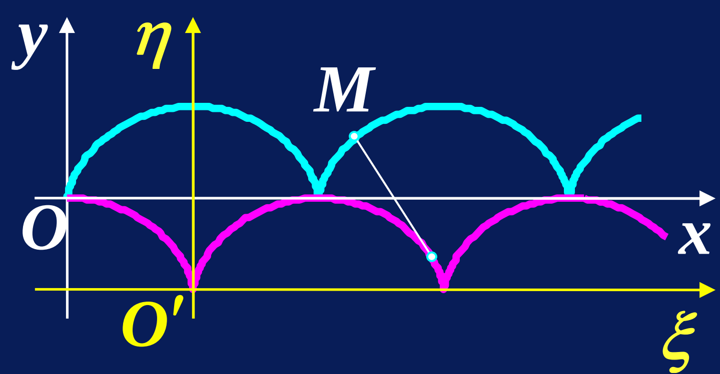
缓冲终点的曲率 $K_A = K\big|_{x=l} \approx \frac{1}{R}$.

例5 求摆线$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$的渐屈线方程.

解 $y' = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$, $y'' = \dfrac{1}{x'}\dfrac{\mathrm{d}(y')}{\mathrm{d}\,t} = \dfrac{-1}{a(1-\cos t)^2}$,

代入曲率中心公式，得

$$\begin{cases} \alpha = a(t+\sin t), \\ \beta = a(\cos t - 1). \end{cases}$$



令$t = \pi + \tau$, $\begin{cases} \xi = \alpha - \pi a, \\ \eta = \beta + 2a, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} \xi = a(\tau - \sin\tau), \\ \eta = a(1-\cos\tau). \end{cases}$

（仍为摆线）

三、同步练习

1. 求双曲线 $xy=1$ 的曲率半径 R, 并分析何处 R 最小?

2. 求椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0<b<a, 0\le t<2\pi)$

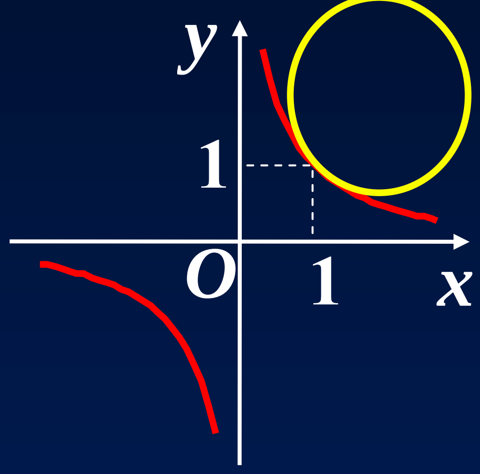
上点的曲率最大值与最小值.

3. 设一工件内表面的截痕为一椭圆, 现要用砂轮磨削其内表面以达到要求的光洁度, 问选择多大的砂轮比较合适?

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

四、同步练习解答

1. 求双曲线 $xy = 1$ 的曲率半径 R, 并分析何处 R 最小?



解 $y' = -\dfrac{1}{x^2}$, $y'' = \dfrac{2}{x^3}$, 则

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{(1+\frac{1}{x^4})^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}} \geq \sqrt{2},$$

$\boxed{a^2 + b^2 \geq 2ab}$

显然 $R\big|_{x=\pm 1} = \sqrt{2}$ 为最小值.

2. 求椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0 < b < a, 0 \le t < 2\pi)$

上点的曲率最大值与最小值.

解 $x' = -a\sin t$, $x'' = -a\cos t, y' = b\cos t, y'' = -b\sin t,$

故曲率为

$$K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{ab}{[b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t]^{\frac{3}{2}}}.$$

K 最大(小) $\rightleftarrows$ $f(t)=b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t$ 最小(大)

因此当 $t=0$ 或 π 时, $f(t)$ 取最小值，从而 K 取最大值

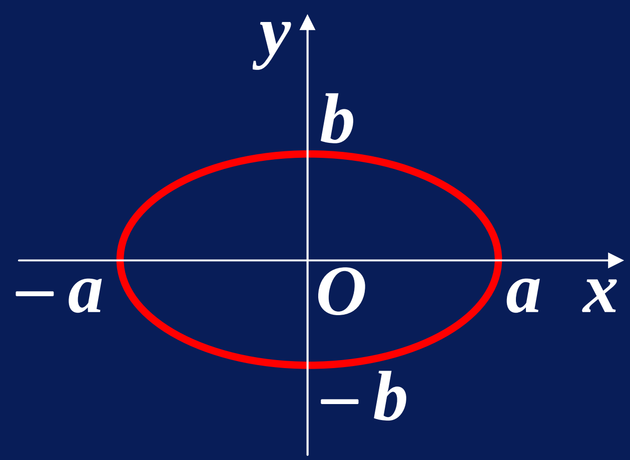
$K_{\max}=\dfrac{a}{b^2}$， 这说明椭圆在点 $(\pm a, 0)$ 处曲率最大.

$$K=\frac{ab}{[b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t]^{\frac{3}{2}}}$$

类似地, 当 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$ 时,

K 取最小值 $K_{\min}=\dfrac{b}{a^2}$,

即椭圆在点 $(0, \pm b)$ 处曲率最小.

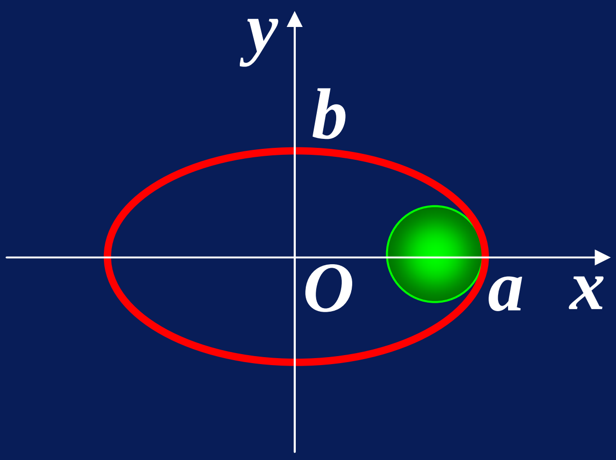


3. 设一工件内表面的截痕为一椭圆, 现要用砂轮磨削其内表面以达到要求的光洁度, 问选择多大的砂轮比较合适?

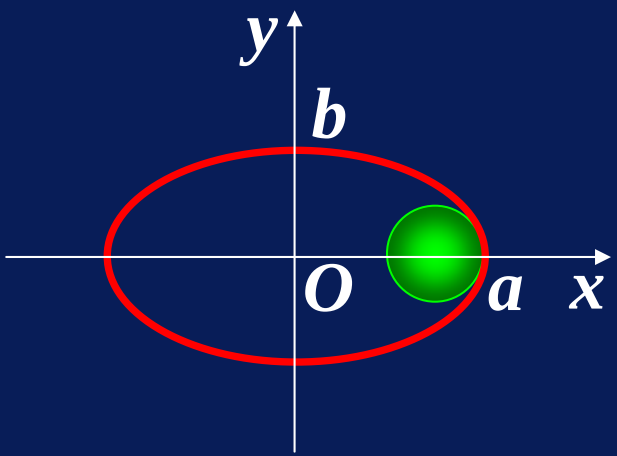
解 设椭圆方程为 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0 \le x \le 2\pi, b \le a)$,

由例2可知, 椭圆在点 $(\pm a, 0)$ 处曲率最大, 即曲率半径最小, 为

$$R = \frac{1}{K} = \frac{b^2}{a}.$$



$$R = \frac{1}{K} = \frac{b^2}{a}.$$



显然，砂轮半径不超过$\frac{b^2}{a}$时，

才不会产生过量磨损，或有的地方磨不到的问题.