第七节　无穷小与无穷大

习题　1-7

1. 利用等价无穷小替换定理求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{2x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}(m,n\in\mathbf{N}^*)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{\sin^3 x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sin 2x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} x\arctan\dfrac{1}{x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}$.

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0 & 当n>m,\\ 1 & 当n=m,\\ \infty & 当n<m.\end{cases}$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

(5) $$\lim_{x\to\infty} x\arctan\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1.$$

(6) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}.$$

2. 当 $x\to 0$ 时，试确定下列无穷小关于 x 的阶数：

(1) $x+\sin x$;

(2) x^3+10x^2;

(3) $1-\cos 2x^2$;

(4) $\tan 2x^2$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$，所以阶数为 1.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+10x^2}{x^2}=10$，所以阶数为 2.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(2x^2)^2}{x^4}=2$，所以阶数为 4.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$，所以阶数为 2.

3. 当 $x\to 0$ 时，x^k 与 $\tan^2(2x^3)$ 是同阶无穷小，则 k 等于多少?

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2(2x^3)}{x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^6}{x^6}=2$，即 $\tan^2(2x^3)$ 与 x^6 是同阶无穷小，故 $k=6$.

4. 当 $m,n\in\mathbf{N}^*$，证明：当 $x\to 0$ 时，

(1) $o(x^m)+o(x^n)=o(x^l), l=\min\{m,n\}$；

(2) $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$；

(3) 若 α 是 $x\to 0$ 时的无穷小，则 $\alpha x^m=o(x^m)$；

(4) $o(kx^n)=o(x^n)(k\neq 0)$.

证 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^m)+o(x^n)}{x^l}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^m)}{x^l}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^n)}{x^l}=0$，故

$$o(x^m)+o(x^n)=o(x^l).$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^m)o(x^n)}{x^{m+n}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^m)}{x^m}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^n)}{x^n}=0$，故 $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x^m}{x^m}=\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$，故 $\alpha x^m=o(x^m)$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(kx^n)}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(kx^n)}{kx^n}\cdot k=0$，故 $o(kx^n)=o(x^n)(k\neq 0)$.

5. 函数 $y=x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界? 这个函数是否为 $x\to+\infty$ 时的无穷大?

解 $y=x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界. 因为 $\forall M>0$ (无论它多么大), 总能找到

$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{N})$，使得当 $k>\dfrac{M-\frac{\pi}{2}}{2\pi}$ 时，$|y|=2k\pi+\frac{\pi}{2}>M$.

但当 $x\to+\infty$ 时，$y=x\sin x$ 不是无穷大，例如，取 $x=2k\pi(k\in N)$，当 $k\to+\infty$ 时，$x\to+\infty$，但 $y=0$.