第九节

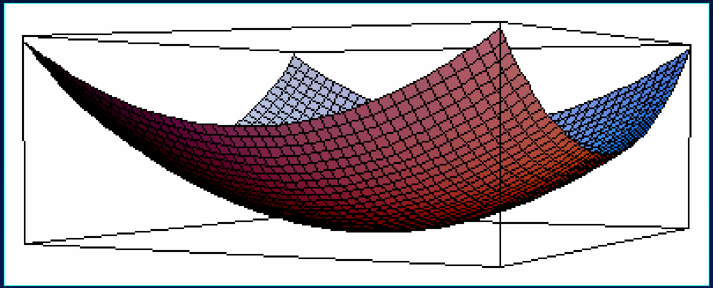
多元函数的极值与最优化问题

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

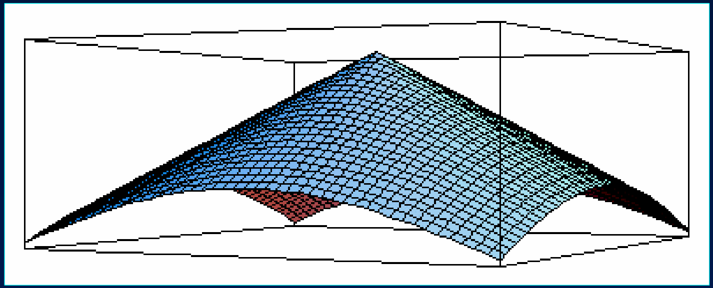
一、 主要内容

（一） 多元函数的无条件极值

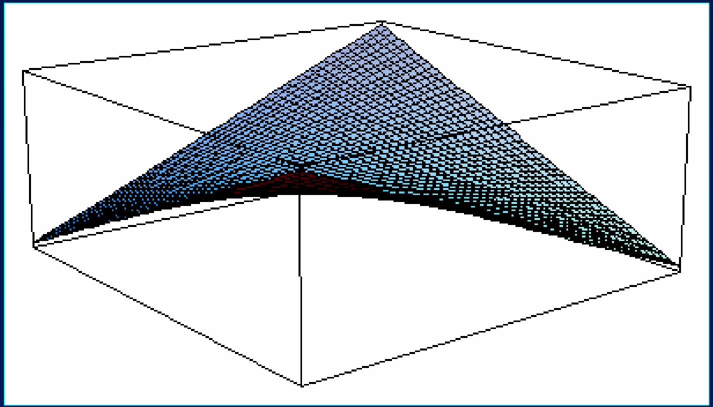
观察二元函数 $z = 3x^2 + 4y^2$， $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$，$z = xy$的图形



(1)



(2)



(3)

1. 极值定义

定义8.10 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0)的某邻域内有定义且满足

$$f(x, y) < f(x_0, y_0)$$

$$(\, f(x, y) > f(x_0, y_0))$$

则称函数在点(x_0, y_0)取得极大值 (极小值) $f(x_0, y_0)$.

极大值和极小值统称为极值，使函数取得极值的点称为极值点.

推广： n 元函数 $f(P)$， 极小值 $f(P_0)$: $f(P_0) < f(P)$

$$(\forall\, P \in \mathring{U}(P_0), P_0, P \in R^n)$$

2. 多元函数取得极值的条件

定理8.10 (必要条件)

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数，

且在该点取得极值，则有

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0, \\ f_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

注 1° 推广：如果三元函数$u=f(x,y,z)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$具有偏导数，则它在点$P(x_0,y_0,z_0)$处有极值的必要条件为：

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0,z_0)=0, \\ f_y(x_0,y_0,z_0)=0, \\ f_z(x_0,y_0,z_0)=0. \end{cases}$$

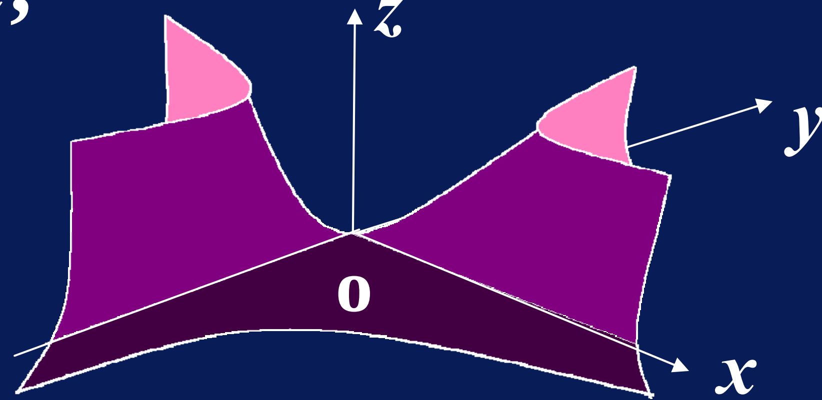
2° 仿照一元函数，凡能使一阶偏导数同时为零的点，均称为多元函数的驻点.

驻点 $\underset{\not\Longrightarrow}{\Longleftarrow}$ 可导函数的极值点

例如： 点$(0,0)$是函数 $z = xy$ 的驻点，但不是极值点.

事实上， $z_x = y,\ z_y = x,$

$$\begin{cases} z_x(0,0) = 0 \\ z_y(0,0) = 0 \end{cases}$$



$\therefore$ $(0,0)$是 $z = xy$ 的驻点.

但当$xy > 0$（一、三象限的点）时， $z(x,y) > z(0,0) = 0$

当$xy < 0$（二、四象限的点）时， $z(x,y) < z(0,0) = 0$

$\therefore$ $(0,0)$不是 $z = xy$ 的极值点.

问题： 如何判定一个驻点是否为极值点？

定理8.11(充分条件)

若函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内具有二阶连续偏导数，且

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) = 0$$

记 $A = f_{xx}(x_0, y_0),\ B = f_{xy}(x_0, y_0),\ C = f_{yy}(x_0, y_0)$

则 1)当 $AC - B^2 > 0$ 时，$f(x_0, y_0)$是极值，

$$\begin{cases} A<0 \text{ 时是极大值;} \\ A>0 \text{ 时是极小值.} \end{cases}$$

2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时，$f(x_0, y_0)$不是极值.

3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时，不能判定，需另行讨论.

即有

<table>
<tr><td>Δ</td><td colspan="2">$f(x_0, y_0)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">>0</td><td>$A>0$, 极小值</td><td rowspan="2">是极值</td></tr>
<tr><td>$A<0$, 极大值</td></tr>
<tr><td><0</td><td colspan="2">非极值</td></tr>
<tr><td>$=0$</td><td colspan="2">不定(需用其他方法确定)</td></tr>
</table>

$(\Delta = AC - B^2)$

求函数$z = f(x, y)$极值的一般步骤：

1° 求极值可疑点：驻点、偏导数不存在的点;

2° 判断

(1) 利用极值的充分条件判定,

(2) 若充分条件不满足，则利用极值的定义 .

（二）多元函数的最值

假设：目标函数可微且只有有限个驻点.

求最值的一般方法：

情形1 D是有界闭区域，$z=f(x,y)$在D上连续 .

1° 求出 $f(x,y)$在D内部的极值可疑点，

$$(x_i, y_i) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

计算：$f(x_i, y_i) \quad (i=1,2,\cdots,n)$;

2° 求 $f(x,y)$在D的边界上的最值 m_0, M_0;

(这实际上是条件极值问题，边界方程即为条件方程)

3° 比较函数值 $f(x_i, y_i)\,(i = 1,2,\cdots,n)$

与 m_0, M_0 的大小，则最大者为最 大值 M，最小者为最小值 m.

情形2 $z = f(x,y)$ 是实际问题中的目标函数.

若 $f(x,y)$ 的最值客观上存在，且 $f(x,y)$ 在 D 内有唯一的驻点，则认为该驻点即为 $f(x,y)$ 的最值点. 不必求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最值.

也无须判别该驻点是否 为极值点.

（三）条件极值、拉格朗日乘数法

实例 小王有200元钱，他决定用来购买两种急需物品：计算机磁盘和录音磁带，设他购买 x 张磁盘，y 盒录音磁带达到最佳效果，效果函数为：

$$U(x, y) = \ln x + \ln y$$

设每张磁盘 8 元，每盒磁带 10 元，问他如何分配这 200 元以达到最佳效果.

问题的实质：求 $U(x,y)=\ln x+\ln y$

在条件： $8x+10y=200$

下的极值点．

一般地，所谓条件极值，就是求 $z=f(x,y)$

在附加条件:$\varphi(x,y)=0$ 下的极值，即求

$$\begin{cases} z=f(x,y) \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

所确定的函数 $z=z(x)$的极值．

求条件极值的方法主要有两种:

1. 将条件极值转化为无条件极值

即由 $\varphi(x,y)=0$, 解出 $y=y(x)$,

再代入 $f(x,y)$中，转化成求

$$z=f[x,y(x)]$$

的无条件极值.

2. 拉格朗日乘数法

找函数 $z=f(x,y)$在条件 $\varphi(x,y)=0$

下的可能极值点.

步骤： 1° 构造函数

拉格朗日乘子

$$\boxed{F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)}$$

其中λ为某一常数.

拉格朗日函数

2° 解方程组

$$\begin{cases} F_x=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0 \\ F_y=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0 \\ F_\lambda=\varphi(x,y)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

条件极值的必要条件

解出 x_0, y_0, λ，得极值可疑点:(x_0,y_0)

3° 判断 (x_0,y_0)是否为极值点 .

注 拉格朗日乘数法可推广到自变量多于两个的情形:

如: 目标函数 $u = f(x, y, z, t)$

条件: $\varphi(x, y, z, t) = 0 \quad \psi(x, y, z, t) = 0$

1° 构造拉格朗日函数

$$F(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) + \lambda_1 \varphi(x, y, z, t) + \lambda_2 \psi(x, y, z, t)$$

其中 λ_1, λ_2为常数.

2° 解方程组

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda_1\varphi_x + \lambda_2\psi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda_1\varphi_y + \lambda_2\psi_y = 0 \\ F_z = f_z + \lambda_1\varphi_z + \lambda_2\psi_z = 0 \\ F_t = f_t + \lambda_1\varphi_t + \lambda_2\psi_t = 0 \\ F_{\lambda_1} = \varphi(x, y, z, t) = 0 \\ F_{\lambda_2} = \psi(x, y, z, t) = 0 \end{cases}$$

得极值可疑点: (x_0, y_0, z_0, t_0).

3° 判断.

二、 典型例题

例1 函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点(0,0)的两个偏导数

$z_x(0,0)$, $z_y(0,0)$均不存在，

但 $z=\sqrt{x^2+y^2}$在(0,0)处取得极小值 $z(0,0)=0$.

例2 求 $z=x^3+y^3-3axy$ (a为常数)的极值.

解 1° 求驻点

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3ay = 0 & ① \\ z_y = 3y^2 - 3ax = 0 & ② \end{cases}$$

当 $a=0$ 时，有唯一驻点：$(0,0)$

当 $a\neq 0$ 时，

①－②：$(x^2-y^2)+a(x-y)=0$

$$(x-y)(x+y+a)=0$$

$$\because\ x+y+a\neq 0$$

否则 $x+y+a=0$

$$z_x=3[x^2+a(x+a)]$$

$$=3(x^2+ax+a^2)>0$$

$\therefore\ x=y$ 代入①，

得 $x^2-ax=0,\quad x=0,\quad x=a$

有驻点：$(0,0),\ (a,a)$

2° 判断 $z_x = 3x^2 - 3ay$, $z_y = 3y^2 - 3ax$

$$A = z_{xx} = 6x,\quad B = z_{xy} = -3a,$$

$$C = z_{yy} = 6y,\ \Delta = AC - B^2 = 36xy - 9a^2$$

(1) 当$a \neq 0$ 时，

<table>
<tr><td>驻点</td><td>$(0,0)$</td><td colspan="2">(a,a)</td></tr>
<tr><td>Δ</td><td>$-9a^2 < 0$</td><td colspan="2">$27a^2 > 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A</td><td rowspan="2"></td><td colspan="2">$6a$</td></tr>
<tr><td>$+$
$(a > 0)$</td><td>$-$
$(a < 0)$</td></tr>
<tr><td>$z(x,y)$</td><td>非极值</td><td>极小值</td><td>极大值</td></tr>
</table>

即当$a\neq 0$时， $z=x^3+y^3-3axy$ 在(0,0)不取得极值.

当$a>0$时，$z=x^3+y^3-3axy$ 在(a,a)取得极小值： $z(a,a)=-a^3$;

当$a<0$时， $z=x^3+y^3-3axy$ 在(a,a)取得极大值: $z(a,a)=-a^3$.

(2) 当a =0 时，在唯一驻点(0,0)处，

$$\Delta=AC-B^2=(36xy-9a^2)\Big|_{(0,0)}=0$$

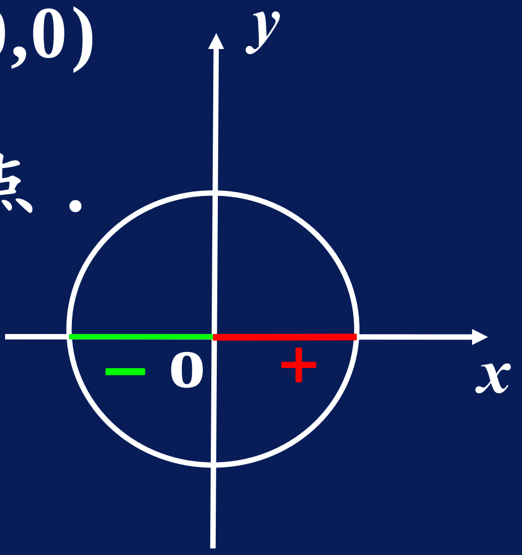
充分判别法失效!

此时， $z = x^3 + y^3$， $z(0,0) = 0$

当 $x > 0$时， $z(x,0) = x^3 > 0 = z(0,0)$

当 $x < 0$时， $z(x,0) = x^3 < 0 = z(0,0)$

$\therefore$ $(0,0)$不是$z = x^3 + y^3$的极值点．



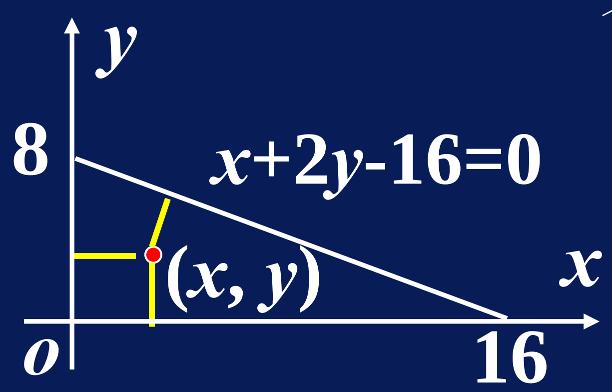
当a=0 时，

$z = x^3 + y^3 - 3axy$ 无极值.

例3 在xOy平面上求一点，使它到$x=0, y=0$及$x+2y-16=0$三直线的 距离平方之和最小．

解 所求点一定在 $x=0, y=0, x+2y-16=0$ 三直线所围三角形的内部．设(x,y)为该三角形内任一点，则它到三直线的距离平方和为：

$$D = x^2 + y^2 + \left(\frac{|x+2y-16|}{\sqrt{1+2^2}}\right)^2$$



目标函数

$$D=\frac{6}{5}x^2+\frac{9}{5}y^2+\frac{4}{5}xy-\frac{32}{5}x-\frac{64}{5}y+\frac{16^2}{5}.$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial D}{\partial x}=\dfrac{12}{5}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{32}{5}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial D}{\partial y}=\dfrac{18}{5}y+\dfrac{4}{5}x-\dfrac{64}{5}=0.\end{cases}\quad \text{解得}\quad x=\frac{8}{5},y=\frac{16}{5}.$$

$\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$为唯一驻点,

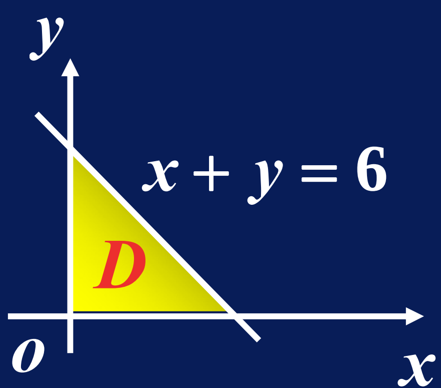
由问题性质知存在最小值, 而驻点唯一,

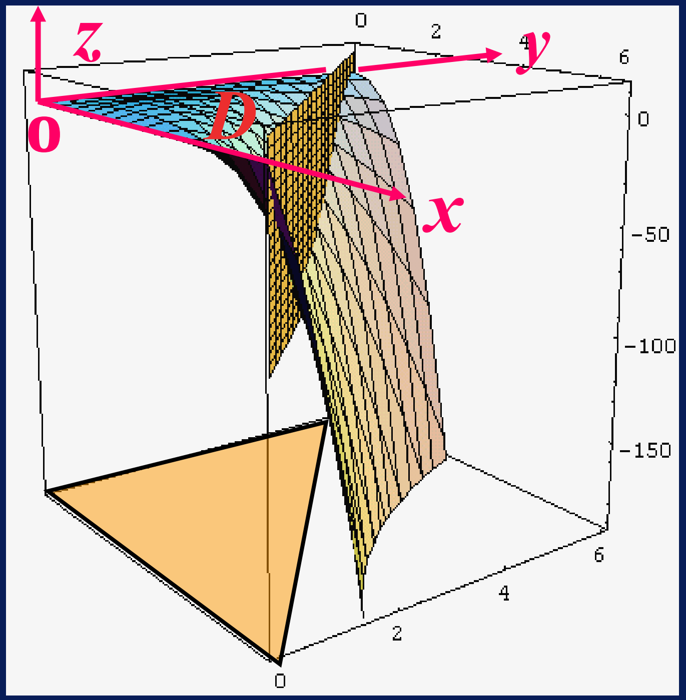
所以点$\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$即为所求.

例4 求二元函数 $z = f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$ 在直线 $x + y = 6$，x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值.

解 如图,

1° 先求函数在 D 内的驻点,





解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy(4-x-y) - x^2 y \\ \qquad\qquad = xy(8-3x-2y) = 0 \\ f_y(x,y) = x^2(4-x-y) - x^2 y \\ \qquad\qquad = x^2(4-x-2y) = 0 \end{cases}$$

得区域 D 内部唯一驻点 $(2,1)$ 且 $f(2,1) = 4$,

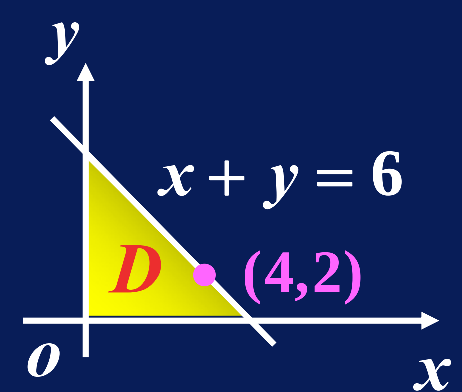
2° 再求 $f(x,y)$ 在 D 边界上的最值,

在边界 $x = 0$ 和 $y = 0$ 上, $f(x,y) = 0$

在边界 $x + y = 6$ 上，即 $y = 6 - x$

于是 $h(x)=f(x,6-x)=x^2(6-x)(-2)$

由 $h'(x)=4x(x-6)+2x^2=0$



得 $x_1=0, x_2=4$

$$\Rightarrow y=6-x\,|_{x=4}=2,$$

$$f(4,2)=-64,$$

比较后可知 $f(2,1)=4$ 为最大值,

$f(4,2)=-64$ 为最小值.

注 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$

$$A=f_{xx}(2,1)=[y(8-3x-2y)-3xy]_{(2,1)}$$
$$=-6,$$

$$B=f_{xy}(2,1)=[x(8-3x-2y)-2xy]_{(2,1)}$$
$$=-4,$$

$$C=f_{yy}(2,1)=(-2x^2)_{(2,1)}=-8$$

$\because \quad \Delta=AC-B^2=32>0$

$A<0$

$\therefore f(2,1)$为$f(x,y)$的极大值.

思考：

若 $f(x,y)$在区域D上可微,(x_0,y_0)是 $f(x,y)$

在D内唯一的驻点，且是极 值点，

问：$f(x_0,y_0)$是否一定是 $f(x,y)$在D上的最值?

答： 不一定.

反例： $f(x,y)=x^3-4x^2-y^2+2xy,$

$D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 4,-1\le y\le 1\}$

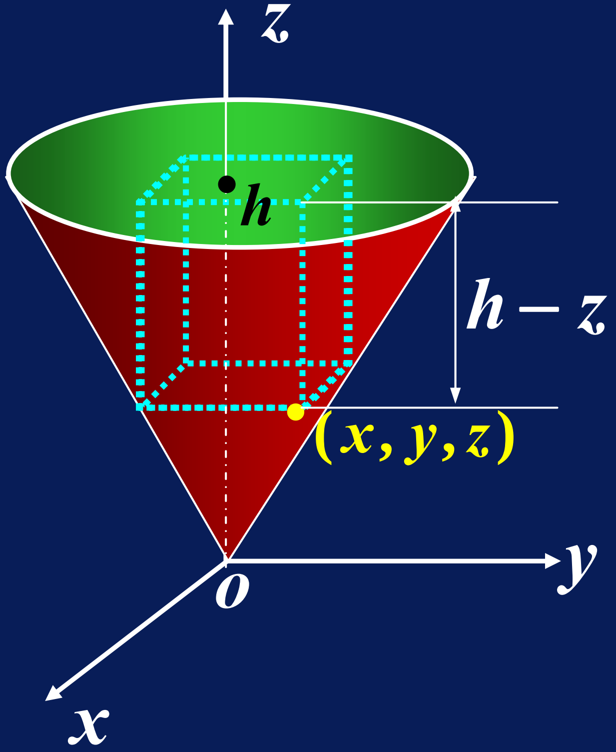
$f(x,y)$在D内有唯一驻点： $(0,0)$, 且$f(0,0)=0$

为 $f(x,y)$的极大值 ,但 $f(4,1)=7>f(0,0)$.

例5 试求在圆锥面 $Rz = h\sqrt{x^2 + y^2}$ 和平面 $z = h$ 所围锥体内作出的底面 平行于 xOy 面的最大长方体体积 $(R > 0, h > 0)$.

解 设长方体位于第一卦限内的一个顶点的坐标为(x, y, z), 则长方体的长，宽，高分别为 $2x$, $2y$, $h - z$.

故长方体的体积



$$V = 2x \cdot 2y \cdot (h - z) = 4xy\,(h - z), \quad \begin{pmatrix} 0 < x, y < R \\ 0 < z < h \end{pmatrix}$$

目标函数

约束条件：$h\sqrt{x^2 + y^2} - Rz = 0.$

令 $F(x, y, z) = xy(h - z) + \lambda(h\sqrt{x^2 + y^2} - Rz),$

解方程组

$$\begin{cases} F_x = y(h - z) + \lambda \dfrac{hx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, & ① \\ F_y = x(h - z) + \lambda \dfrac{hy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, & ② \\ F_z = -xy - \lambda R = 0, & ③ \\ F_\lambda = h\sqrt{x^2 + y^2} - Rz = 0. & ④ \end{cases}$$

①$\cdot y$ - ②$\cdot x$，得 $y = x$，

这种解法具有一般性

代入④得 $z = \dfrac{\sqrt{2}h}{R}x$，代入③得 $\lambda = -\dfrac{x^2}{R}$.

进一步可解得 $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}R, z = \dfrac{2}{3}h$.

由实际问题存在最大值，及可疑的极值点唯一，有

$$V_{\max} = 4xy(h - z) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3}R\right)^2 \cdot \frac{1}{3}h = \frac{8}{27}R^2 h.$$

例6 在曲面 $\dfrac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ 上求距平面

$3x+4y+12z=288$ 的最近点和最远点 .

解 在曲面 $\dfrac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ 上任取一点 (x,y,z),

此点到所给平面的距离 :

$$d=\frac{|3x+4y+12z-288|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}.$$

目标函数

$$\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$$

约束条件

注 转化为求函数 $B=(3x+4y+12z-288)^2$ 在相同约束条件下的极 值可使求解简单． 令

$$F(x,y,z)=(3x+4y+12z-288)^2+\lambda\left(\frac{x^2}{96}+y^2+z^2-1\right)$$

解方程组

$$\begin{cases} F_x=6(3x+4y+12z-288)+2\lambda\cdot\frac{x}{96}=0 & (1)\\ F_y=8(3x+4y+12z-288)+2\lambda y=0 & (2)\\ F_z=24(3x+4y+12z-288)+2\lambda z=0 & (3)\\ F_\lambda=\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1. & (4)\end{cases}$$

将(1),(2)移项,并以(2′)除以(1′),得 $x = 72y$ (5)

将(3)移项,并将(3′)除以(2′), 得 $z = 3y$ (6)

将(5),(6)代入(4)可解得 $y = \pm\dfrac{1}{8}$,

于是 $x = \pm 9, z = \pm\dfrac{3}{8}$.

从而得到点 $\left(9, \dfrac{1}{8}, \dfrac{3}{8}\right)$ 及 $\left(-9, -\dfrac{1}{8}, -\dfrac{3}{8}\right)$

代入 d 中可知, $\left(9, \dfrac{1}{8}, \dfrac{3}{8}\right)$ 是距平面最近的点,

$\left(-9, -\dfrac{1}{8}, -\dfrac{3}{8}\right)$ 是距平面最远的点.

注意常用解题技巧

例7 在球面 $2x^2+2y^2+2z^2=1$ 上求一点，使得函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 沿着点 $A(1,1,1)$ 到点 $B(2,0,1)$ 的方向导数具有最大值.

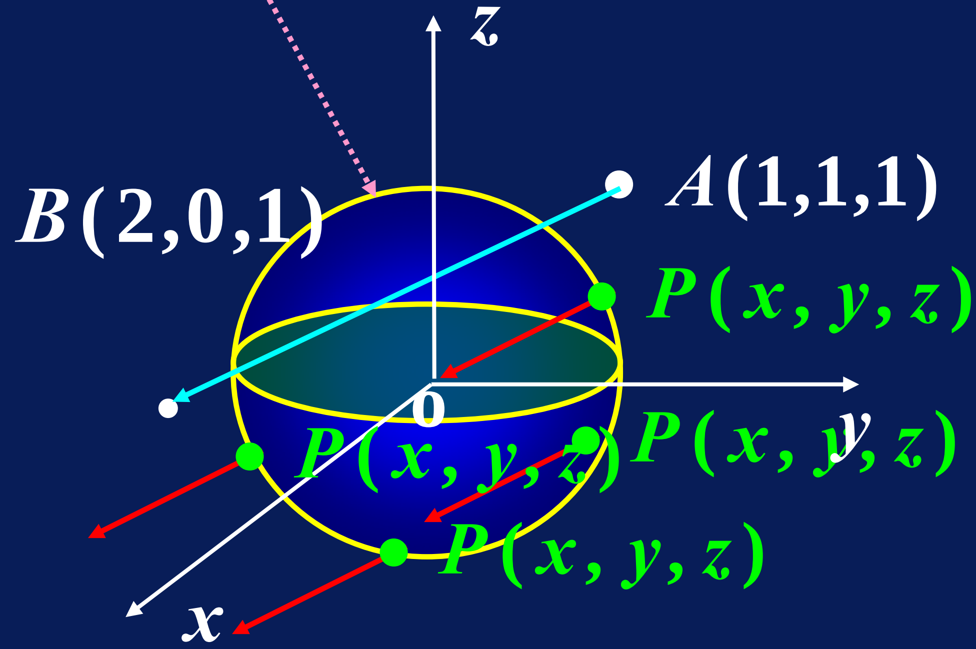
解 $\vec{l}=\overrightarrow{AB}=(1,-1,0)$,

$$\vec{e}_l=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),$$

$$\text{grad}\ f=(f_x,f_y,f_z)=(2x,2y,2z)$$

目标函数: $u = \dfrac{\partial f}{\partial l} = (\mathrm{grad}\ f)\cdot \vec{\mathrm{e}}_l = \sqrt{2}\cdot(x-y)$

条件: $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$



令 $F(x,y,z,\lambda)=\dfrac{u}{\sqrt{2}}+\lambda(2x^2+2y^2+2z^2-1)$

$$=(x-y)+\lambda(2x^2+2y^2+2z^2-1)$$

解方程组:

$$\begin{cases} F_x=1+4x\lambda=0 & (1)\\ F_y=-1+4y\lambda=0 & (2)\\ F_z=4\lambda z=0 & (3)\\ F_\lambda=2x^2+2y^2+2z^2-1=0 & (4)\end{cases}$$

由(1) $\times y-$ (2) $\times x$, 得 $y+x=0$, $y=-x$.

由(3)，得 $z=0.$

代入(4)，得 $4x^2-1=0,\quad x=\pm\frac{1}{2},\quad y=\mp\frac{1}{2},$

极值可疑点： $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0),\ (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

$$\because\ u(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)=\sqrt{2}\cdot(x-y)\Big|_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)}=\sqrt{2}$$

$$>u(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)=-\sqrt{2}$$

$\therefore$ 所求点为： $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0).$

三、同步练习

1. 讨论函数 $z = x^3 + y^3$ 及 $z = (x^2 + y^2)^2$

在 (0,0)点是否取得极值.

2. 已知平面上两定点 $A(1, 3)$, $B(4, 2)$,

试在椭圆周 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \ (x > 0, y > 0)$ 上求一点 C, 使

$\triangle ABC$ 面积 $S_\triangle$ 最大.

3. 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4. 求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$

确定的函数$z=f(x,y)$的极值.

5. 有一宽为 24cm 的长方形铁板， 把它折起来做成一个断面为等腰梯形的水槽,问怎样折法才能使断面面积最大.

6. 求$z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$的最大值和最小值.

7. 在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

的切平面，使切平面与三个坐标面所围成的四面

体体积最小，求切点坐标.

8. 求半径为R的圆的内接三角形中面积最大者.

9. 求平面上以 a,b,c,d 为边的面积最大的四边形,试列出其目标函数和约束条件.

10. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱,试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省?

11. 将正数 12 分成三个正数x,y,z之和 使得 $u=x^3y^2z$为最大.

12. 求两曲面 $x^2+y^2=z, x+y+z=1$ 交线上的点到坐标原点的最长与最 短距离.

13. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离.

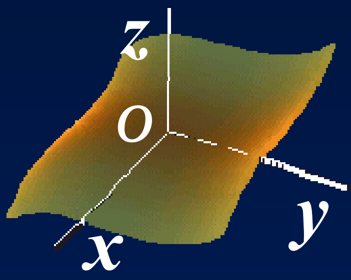
四、同步练习解答

1. 讨论函数 $z = x^3 + y^3$ 及 $z = (x^2 + y^2)^2$ 在 $(0,0)$ 点是否取得极值.

解 显然 $(0,0)$ 都是它们的驻点，并且在 $(0,0)$ 都有

$$AC - B^2 = 0$$

① $z = x^3 + y^3$ 在$(0,0)$点邻域内的取值

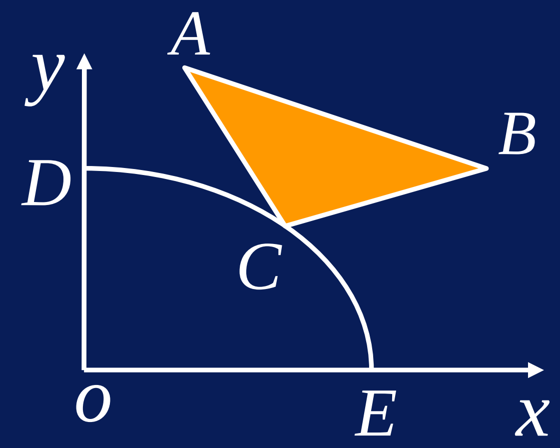


可能为 $\begin{cases} 正 \\ 负 \\ 0 \end{cases}$，因此 $z(0,0)$ 不是极值.

② 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时， $z = (x^2 + y^2)^2 > z\big|_{(0,0)} = 0$

因此 $z(0,0) = (x^2 + y^2)^2\big|_{(0,0)} = 0$ 为极小值.

2. 已知平面上两定点 $A(1,3)$, $B(4,2)$, 试在椭圆周 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (x>0,\ y>0)$ 上求一点 C, 使 $\triangle ABC$ 面积 $S_\triangle$ 最大.



解 设 C 点坐标为 (x, y),

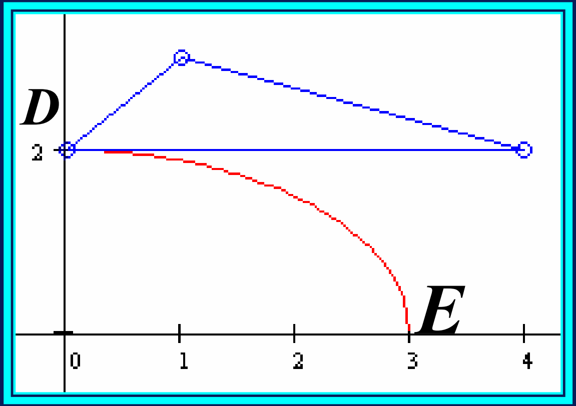
则 $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(0,0,x+3y-10)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x+3y-10\right|$$

作拉格朗日函数 $F=(x+3y-10)^2+\lambda(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4})$

解方程组 $\begin{cases} 2(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{9}x=0 \\ 6(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{4}y=0 \\ 1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0 \end{cases}$



点击图中任意点
动画开始或暂停

得驻点 $x=\frac{3}{\sqrt{5}}, y=\frac{4}{\sqrt{5}}$, 对应面积 $S\approx 1.646$

而 $S_D=2, S_E=3.5$, 比较可知, 点 C 与 E 重合时,

三角形面积最大.

3. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解　第一步 求驻点.

$$\text{解方程组}\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$$

得驻点: (1, 0) , (1, 2) , (–3, 0) , (–3, 2) .

第二步 求A、B、C的值，并列表判别

$$\underbrace{f_{xx}(x,y)=6x+6}_{A},\quad \underbrace{f_{xy}(x,y)=0}_{B},\quad \underbrace{f_{yy}(x,y)=-6y+6}_{C}$$

	(1,0)	(1,2)	(-3,0)	(-3,2)
A	12	12	-12	-12
B	0	0	0	0
C	6	-6	6	-6
$AC-B^2$	72	-72	-72	72
极值	极小, -5	无极值	无极值	极大, 31

$$f_{xx}(x,y)=6x+6,\ f_{xy}(x,y)=0,\ f_{yy}(x,y)=-6y+6$$

A B C

$$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$$

4. 求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 确定的函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

隐函数求极值问题

解 将方程两边分别对 x,y 求偏导

$$\begin{cases} 2x+2z\cdot z_x-2-4z_x=0 \\ 2y+2z\cdot z_y+2-4z_y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_x=\dfrac{1-x}{z-2} \\ z_y=\dfrac{-1-y}{z-2} \end{cases} \qquad (z\neq 2)$$

令 $z_x = 0, z_y = 0$, 得 $x = 1, y = -1$,

即驻点为 $P(1, -1)$,

将上方程组再分别对 x, y 求偏导数,

$$A = z_{xx}|_P = \frac{1}{2-z},$$

$$B = z_{xy}|_P = 0,$$

$$C = z_{yy}|_P = \frac{1}{2-z},$$

故 $\Delta = AC - B^2 = \dfrac{1}{(2-z)^2} > 0 \quad (z \neq 2)$,

函数在P有极值.

将$P(1,-1)$代入原方程, 有 $z_1 = -2, \quad z_2 = 6$,

当$z_1 = -2$时, $A = z_{xx}\Big|_{(1,-1,-2)} = \dfrac{1}{2-z}\Big|_{z=-2} = \dfrac{1}{4} > 0$

所以$z = f(1,-1) = -2$为极小值;

当$z_2 = 6$时, $A = -\dfrac{1}{4} < 0$,

所以$z = f(1,-1) = 6$为极大值.

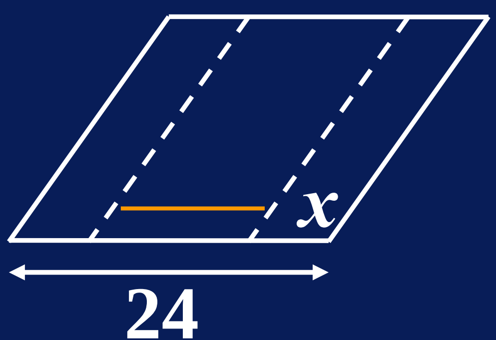
5. 有一宽为 24cm 的长方形铁板， 把它折起来做成一个断面为等腰梯形的水槽, 问怎样折法才能使断面面积最大.

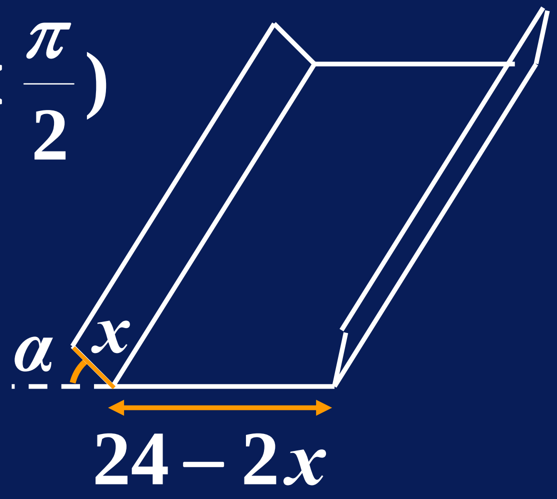
解 设折起来的边长为 x cm, 倾角为 α, 则断面面积为

$$A=\frac{1}{2}(24-2x+2x\cos\alpha+24-2x)\cdot x\sin\alpha$$

$$=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\left(D:\ 0<x<12,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$





$$A = 24x\sin\alpha - 2x^2\sin\alpha + x^2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$(D: 0 < x < 12, 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2})$$

令 $\begin{cases} A_x = 24\sin\alpha - 4x\sin\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha = 0 \\ A_\alpha = 24x\cos\alpha - 2x^2\cos\alpha + x^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \end{cases}$

$$\Big\downarrow \sin\alpha \neq 0,\ x \neq 0$$

$$\begin{cases} 12 - 2x + x\cos\alpha = 0 \\ 24\cos\alpha - 2x\cos\alpha + x(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \end{cases}$$

解得 $\alpha = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ,\ x = 8\,(\mathrm{cm})$

由题意知，最大值在定义域D 内达到，而在域D 内只有一个驻点，故此点即为所求.

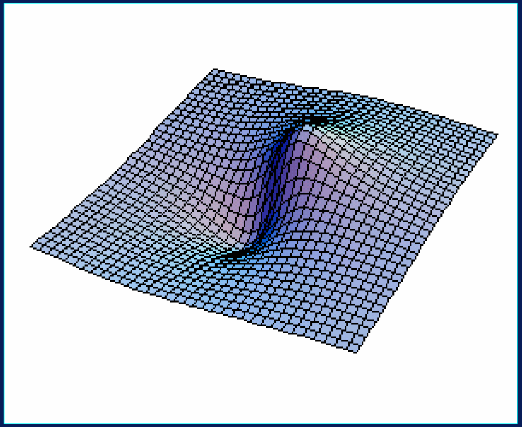
6. 求$z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$的最大值和最小值.

解　由 $z_x=\dfrac{(x^2+y^2+1)-2x(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=0,$

$$z_y=\frac{(x^2+y^2+1)-2y(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=0,$$

得驻点$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$和$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}=0$



即边界上的值为零.

$z(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

所以最大值为$\frac{1}{\sqrt{2}}$，最小值为$-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

无条件极值: 对自变量除了限制在定义域内外，并无其他条件.

7. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使切平面与三个坐标面所围成的四面体体积最小，求切点坐标.

解 设$P(x_0, y_0, z_0)$为椭球面上一点,

令$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$,

则 $F_x|_P=\frac{2x_0}{a^2}$, $F_y|_P=\frac{2y_0}{b^2}$, $F_z|_P=\frac{2z_0}{c^2}$

过$P(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

化简为 $\dfrac{x\cdot x_0}{a^2}+\dfrac{y\cdot y_0}{b^2}+\dfrac{z\cdot z_0}{c^2}=1,$

该切平面在三个轴上的截距各为

$$x=\frac{a^2}{x_0},\quad y=\frac{b^2}{y_0},\quad z=\frac{c^2}{z_0},$$

所围四面体的体积 $V=\dfrac{1}{6}xyz=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$

在条件$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$下求 V 的最小值,

$$V=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}\text{最小}$$

$$\Leftrightarrow \ln V=\ln\frac{a^2b^2c^2}{6}-u\ \text{最小}$$

$$\Leftrightarrow u\text{最大}$$

令 $u=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0,$

$$G(x_0,y_0,z_0)$$

$$=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right),$$

由 $$\begin{cases} G'_{x_0}=0, \quad G'_{y_0}=0, \quad G'_{z_0}=0 \\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{y_0^2}{c^2}-1=0 \end{cases},$$

即 $$\begin{cases} \dfrac{1}{x_0}+\dfrac{2\lambda x_0}{a^2}=0 \\ \dfrac{1}{y_0}+\dfrac{2\lambda y_0}{b^2}=0 \\ \dfrac{1}{z_0}+\dfrac{2\lambda z_0}{c^2}=0 \\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

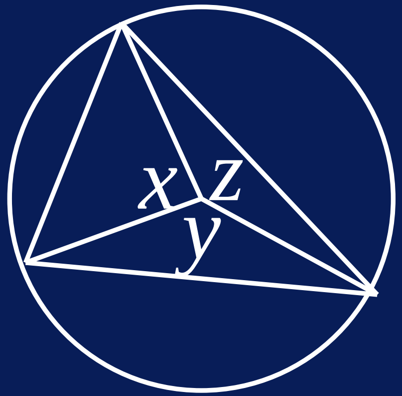
可得 $$\begin{cases} x_0=\dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ y_0=\dfrac{b}{\sqrt{3}}, \\ z_0=\dfrac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

当切点坐标为 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$时，

四面体的体积最小 $V_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc.$

8. 求半径为 R 的圆的内接三角形中面积最大者.

解 设内接三角形各边所对的圆心角为 x, y, z,



则 $x + y + z = 2\pi$,

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

这三个角所对应的三角形的面积分别为

$$S_1 = \frac{1}{2}R^2 \sin x,\ S_2 = \frac{1}{2}R^2 \sin y,\ S_3 = \frac{1}{2}R^2 \sin z$$

作拉格朗日函数

$$F = \sin x + \sin y + \sin z + \lambda(x + y + z - 2\pi)$$

解方程组 $\begin{cases} \cos x + \lambda = 0 \\ \cos y + \lambda = 0 \\ \cos z + \lambda = 0 \\ x + y + z - 2\pi = 0 \end{cases}$ ，得 $x = y = z = \dfrac{2\pi}{3}$

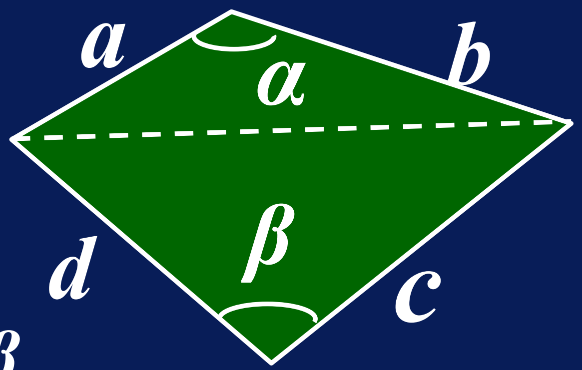
故圆内接正三角形面积最大，最大面积为

$$S_{\max} = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 .$$

$$F = \sin x + \sin y + \sin z + \lambda(x + y + z - 2\pi)$$

9. 求平面上以 a,b,c,d 为边的面积最大的四边形，试列出其目标函数和约束条件.

提示:



设四边形的一对内角分别为 α, β

目标函数： $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin\beta$

$$(0<\alpha<\pi,0<\beta<\pi)$$

约束条件： $a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\beta$

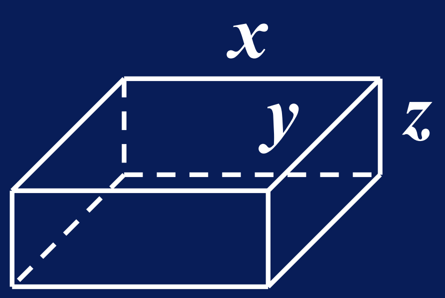
答案: $\alpha+\beta=\pi$, 即四边形内接于圆时面积最大.

10. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱，试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省？

解 设 x, y, z 分别表示长、宽、高，则问题为求 x, y, z 使在条件 $xyz = V_0$ 下水箱表面积最小.

$$S = 2(xz + yz) + xy$$

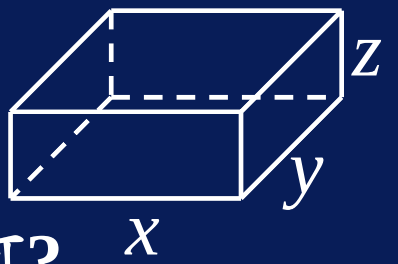
令 $F = 2(xz + yz) + xy + \lambda(xyz - V_0)$



解方程组 $\begin{cases} F_x = 2z + y + \lambda yz = 0 \\ F_y = 2z + x + \lambda xz = 0 \\ F_z = 2(x + y) + \lambda xy = 0 \\ F_\lambda = xyz - V_0 = 0 \end{cases}$

得唯一驻点 $x = y = 2z = \sqrt[3]{2V_0}$, $\lambda = \dfrac{-4}{\sqrt[3]{2V_0}}$

由题意可知合理的设计是存在的, 因此, 当高为 $\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{4}}$, 长、宽为高的 2 倍时，所用材料最省.



思考:

1) 当水箱封闭时, 长、宽、高的尺寸如何?

提示: 利用对称性可知, $x = y = z = \sqrt[3]{V_0}$

2) 当开口水箱底部的造价为侧面的二倍时, 欲使造价最省, 应如何设拉格朗日函数? 长、宽、高尺寸如何?

提示: $F = 2(xz + yz) + 2\,xy + \lambda(xyz - V_0)$

长、宽、高尺寸相等 .

11. 将正数 12 分成三个正数x,y,z之和 使得 $u=x^3y^2z$为最大.

解 令 $F(x,y,z)=x^3y^2z+\lambda(x+y+z-12)$,

则 $$\begin{cases} F_x = 3x^2y^2z+\lambda=0 & ① \\ F_y = 2x^3yz+\lambda=0 & ② \\ F_z = x^3y^2+\lambda=0 & ③ \\ x+y+z=12 & ④ \end{cases}$$

$2x\times$① $-3y\times$②, 得 $(2x-3y)\lambda=0,\quad y=\dfrac{2}{3}x$

$x\times$① $-3z\times$ ③, 得

$$(x-3z)\lambda=0,\quad z=\frac{1}{3}x$$

代入④，得 $x=6$, 从而 $y=4$, $z=2$

故解得唯一驻点 $(6,4,2)$,

依题意，最大值必存在

故最大值为 $u_{\max}=6^3\cdot 4^2\cdot 2=6912.$

12. 求两曲面$x^2+y^2=z, x+y+z=1$交线上的点到坐标原点的最长与最 短距离.

解 设(x,y,z)为交线上任一点，该点到原点的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

作拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)$$

解方程组

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \\ 2z - \lambda + \mu = 0\ , \\ x^2 + y^2 - z = 0, \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases} x_1 = y_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \\ z_1 = 2-\sqrt{3}; \\ x_2 = y_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 = 2+\sqrt{3}. \end{cases}$$

代入d可知，

最长距离为$d(x_2, y_2, z_2) = \sqrt{9+5\sqrt{3}}$,

最短距离为 $d(x_1, y_1, z_1) = \sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

13. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y - 2z = 2$ 之间的最短距离.

解 设 $P(x, y, z)$ 为抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上任一点,则 P 到平面 $x + y - 2z - 2 = 0$ 的距离为 d,

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|x + y - 2z - 2\right|.$$

分析 本题变为求一点 $P(x, y, z)$,使得 x, y, z 满足 $x^2 + y^2 - z = 0$ 且使 $d = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|x + y - 2z - 2\right|$

(即 $d^2 = \frac{1}{6}(x + y - 2z - 2)^2$) 最小.

令 $F(x,y,z)=\frac{1}{6}(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$,得

$$\begin{cases} F_x=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda x=0, & (1) \\ F_y=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda y=0, & (2) \\ F_z=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)(-2)+z=0, & (3) \\ z=x^2+y^2, & (4) \end{cases}$$

解此方程组得 $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{8}.$

即得唯一驻点 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$,

根据题意距离的最小值一定存在，且有唯一驻点，故必在 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ 处取得最小值.

$$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2\right| = \frac{7}{4\sqrt{6}}.$$