第四节

定积分的经济应用举例

- 一、主要内容
- 二、典型例题

一、主要内容

总量函数在某个范围内的改变量

问题： 已知某边际经济量，求该总经济量.

1. 已知某产品的总产量 $x(t)$ 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t} = f(t),$$

则该产品在时间$[a, b]$内的产量为

$$x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = x(t)\Big|_a^b = x(b) - x(a).$$

2. 已知某产品的总成本 $C(x)$ 的边际成本为

$$M_C(x)=\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x},$$

则该产品从生产产量为a到产量为b增加的成本为

$$C=\int_a^b M_C(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=C(x)\Big|_a^b=C(b)-C(a).$$

3. 已知某产品的总收益 $R(x)$ 的边际收益为

$$M_R(x)=\frac{\mathrm{d}R(x)}{\mathrm{d}x},$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

则该产品的销售量从a个单位上升到b个单位时，增加的收益为

$$R=\int_a^b M_R(x)\,\mathrm{d}x=R(x)\Big|_a^b=R(b)-R(a).$$

4. 已知某产品的总利润$P(x)$ 的边际利润为

$$M_P(x)=\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x},$$

则该产品的销售量从a个单位上升到b个单位时，增加的利润为

$$P=\int_a^b M_P(x)\,\mathrm{d}x=P(x)\Big|_a^b=P(b)-P(a).$$

二、典型例题

例1 已知某产品总产量的变化率为

$$f(t)=40+12t-\frac{3}{2}t^2\ (\text{件}/\text{天}),$$

求从第2天到第10天生产产品的总量.

解 所求的总产量为

$$x=\int_2^{10} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_2^{10}(40+12t-\frac{3}{2}t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$=[40t+6t^2-\frac{1}{2}t^3]_2^{10}=400\ (\text{件})$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例2 某产品的边际收益为 $M_R = 75(20-\sqrt{x})$,

(1)求当该产品的生产从225个单位上升到400个单位时增加的收益.

解 (1) 增加的收益为

$$R=\int_{225}^{400} M_R \,\mathrm{d}x=\int_{225}^{400} 75(20-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$$

$$=75\left[20x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{225}^{400}=31250.$$

(2) 从利润最大时再生产一百台，总利润增加多少？

解　从 $x=4$ 百台增加到 $x=5$ 百台时，

总利润的增加量为

$$P=\int_4^5 M_P(x)\,\mathrm{d}x=\int_4^5 P'(x)\,\mathrm{d}x=\int_4^5 (4-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{(4-x)^2}{2}\bigg|_4^5=-0.5(\text{万元})$$

即从利润最大时的产量又多生产100台，总利润减少了 0.5 万元.

例3 某产品的总成本 $C(x)$(单位：万元)的边际成本为$M_C(x)=1$ (单位：万元/百台)，总收益 $R(x)$(单位：万元)的边际收益

$$M_R(x)=5-x \quad (\text{单位：万元}),$$

其中x 为产量，固定成本为1万元，问：

产量等于多少时总利润 $P(x)$最大;

解 依题设，有

总成本函数：$C(x)=\int_0^x M_C(x)\,\mathrm{d}x+1$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$C(x)=\int_0^x M_C(x)\,\mathrm{d}x+1$$

$$=\int_0^x \mathrm{d}x+1=x+1$$

总收益函数:

$$R(x)=\int_0^x M_R(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x (5-x)\,\mathrm{d}x=5x-\frac{x^2}{2}.$$

总利润函数:

$$P(x)=R(x)-C(x)=4x-\frac{x^2}{2}-1.$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$P(x)=4x-\frac{x^2}{2}-1$$

$\because\quad P'(x)=4-x=0$，得唯一驻点：$x=4$

而 $\quad P''(x)=-1<0$

$\therefore\quad$ 唯一驻点 $x=4$ 是 $P(x)$ 的极大值点，

从而是 $P(x)$ 的最大值点，即

当 $x=4$(百台)时，利润 $P(x)$ 最大，其值为

$$P(4)=4\times 4-\frac{4^2}{2}-1=7\ (\text{万元})$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY