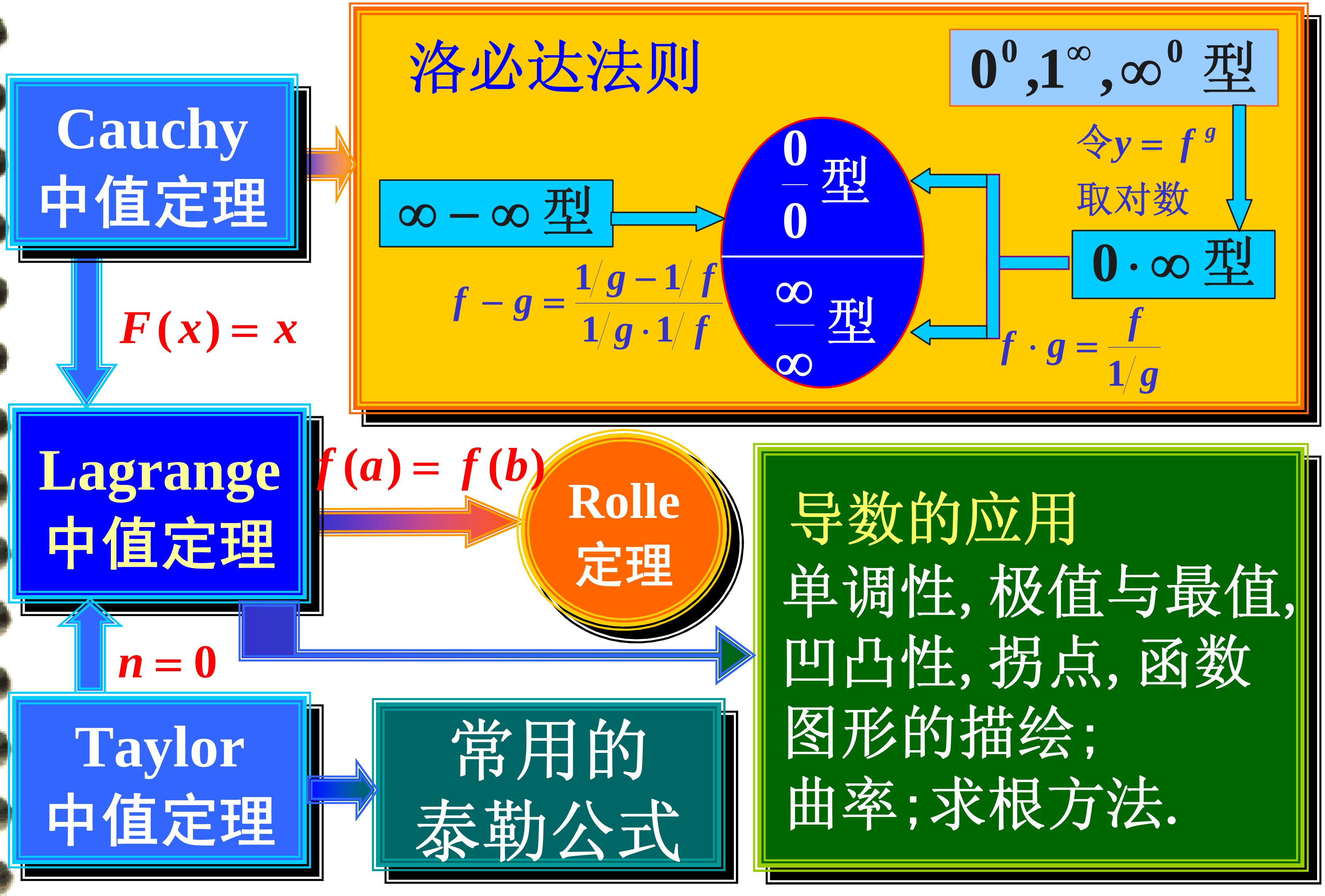
第三章　习题课

中值定理
与导数的应用

- 一、主要内容
- 二、典型例题

下页　返回

一、主要内容



洛必达法则
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型
令$y = f^g$
取对数
$0 \cdot \infty$ 型
$\infty - \infty$ 型
$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/g \cdot 1/f}$
$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$
Cauchy 中值定理
$F(x) = x$
Lagrange 中值定理
$f(a) = f(b)$
Rolle 定理
$n = 0$
Taylor 中值定理
常用的泰勒公式
导数的应用
单调性, 极值与最值,
凹凸性, 拐点, 函数
图形的描绘;
曲率;求根方法.

1、罗尔中值定理

罗尔（Rolle）定理　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 且在区间端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$, 那末在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$, 使得函数 $f(x)$ 在该点的导数等于零,

$$即\ f'(\xi)=0$$

2、拉格朗日中值定理

拉格朗日（Lagrange）中值定理　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 那末在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$ 成立.

有限增量公式.

$$\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

增量 Δy 的精确表达式.

推论 如果函数$f(x)$在区间I上的导数恒为零，那末$f(x)$在区间I上是一个常数.

3、柯西中值定理

柯西（Cauchy）中值定理 如果函数$f(x)$及$F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且$F'(x)$在(a,b)内每一点处均不为零，那末在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使等式

$$\frac{f(a)-f(b)}{F(a)-F(b)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$成立.

4、洛必达法则

$1^0.$ $\frac{0}{0}$型及$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

定义 这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则.

$2^0.$ $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$型未定式

关键:将其它类型未定式化为洛必达法则可解决的类型 $(\frac{0}{0}), (\frac{\infty}{\infty})$.

注意:洛必达法则的使用条件.

5、泰勒中值定理

泰勒(Taylor)中值定理　如果函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a,b)内具有直到$(n+1)$阶的导数, 则当x在(a,b)内时，$f(x)$可以表示为$(x-x_0)$的一个n次多项式与一个余项$R_n(x)$之和:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

常用函数的麦克劳林公式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

二、典型例题

(一) 微分中值命题的证明思路

1° 将欲证明的结论适当地**变形**成某一中值定理结论的形式.

(1) $f'(\xi)=0$ (R)

(2) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ (L)

(3) $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ (C)

2° 构造辅助函数

需要熟悉一些常见函数的导数形式，如：

$$(1)\quad f(\xi)g'(\xi)+f'(\xi)g(\xi)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad [f(x)g(x)]'\big|_{x=\xi}=0$$

特例： ① $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0 \Leftrightarrow [xf(x)]'\big|_{x=\xi}=0$

② $mf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

$$\Leftrightarrow\quad m\xi^{m-1}f(\xi)+\xi^{m}f'(\xi)=0\quad(\xi\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow\quad [x^{m}f(x)]'\big|_{x=\xi}=0$$

③ $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

$$\Leftrightarrow e^{g(\xi)}f'(\xi)+f(\xi)\cdot e^{g(\xi)}g'(\xi)=0$$

$$\Leftrightarrow [e^{g(x)}f(x)]'\Big|_{x=\xi}=0$$

$$f'(\xi)+kf(\xi)=0 \overset{?}{\Leftrightarrow} [e^{kx}f(x)]'\Big|_{x=\xi}=0$$

(2) $f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$

$$\Leftrightarrow \quad [\frac{f(x)}{g(x)}]'\Big|_{x=\xi}=0 \quad (g(x)\neq 0)$$

$$(3)\quad f''(\xi)g(\xi)-f(\xi)g''(\xi)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad [f'(x)g(x)-f(x)g'(x)]'\Big|_{x=\xi}=0$$

事实上，令 $F(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$

则 $F'(x)=[f''(x)g(x)+\cancel{f'(x)g'(x)}]$

$$-[\cancel{f'(x)g'(x)}+f(x)g''(x)]$$

$$=f''(x)g(x)-f(x)g''(x)$$

举例：**1. 含有一个中值的命题**

例1 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$0<a<b$，且在(a,b)上$f'(x)\neq 0$，$af(b)-bf(a)=0$.

证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(\xi)}{f'(\xi)}=\xi$. ①

分析 ① $\Leftrightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0 \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]'\Big|_{x=\xi}=0.$$

注意：$\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}\overset{?}{\cancel{=}}\left[\dfrac{f(\xi)}{\xi}\right]'$.

证 令 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

$\because b>a>0,\ f(x)$在$[a,b]$上连续，在 (a,b)内可导

$$af(b)-bf(a)=0 \Leftrightarrow \frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}$$

$$\varphi(a)=\frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}=\varphi(b)$$

$\therefore\ \varphi(x)$在$[a,b]$上满足罗尔定理的条件

故$\exists\xi\in(a,b)$,使 $\varphi'(\xi)=\left[\dfrac{xf'(x)-f'(x)}{x^2}\right]\Big|_{x=\xi}=0$

即 $\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0$. 又$\because f'(x)\neq 0,\ \ x\in(a,b)$

$\therefore$命题成立 .

思考: 下列构造辅助函数的方法是否正确?

$$\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}=\xi \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{1}{\xi}$$

$$\Leftrightarrow [\ln f(x)]'\Big|_{x=\xi}=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}$$

$$\Leftrightarrow [\ln f(x)-\ln x]'\Big|_{x=\xi}=0$$

故作辅助函数: $\varphi(x)=[\ln f(x)-\ln x]$.

不正确. 因为题设中无 $f(x)>0$的条件.

类似题： 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在 (a,b)内可导，

证明：① $\exists\xi\in(a,b)$，使

$$\xi^{n-1}[nf(\xi)+\xi f'(\xi)]=\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^n & a^n \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}$$

$(\varphi(x)=x^n f(x))$

② 若 $b^2 f(a)-a^2 f(b)=0$，且$0<a<b$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$.

$(\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x^2})$

③ 若$g(x)$在$[a,b]$上连续，在 (a,b)内可导，且$g'(x)\neq 0$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

$(\varphi(x)=[f(x)-f(a)][g(x)-g(b)])$

④ 若 $f(x)$可导，试证在其两个零点间一定有

$f(x)+f'(x)$ 的零点.

提示: 设 $f(x_1)=f(x_2)=0,\ x_1<x_2,$

欲证：$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$

只要证 $e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$

亦即 $[e^x f(x)]'\big|_{x=\xi}=0$

作辅助函数 $\varphi(x)=e^x f(x)$

验证 $\varphi(x)$在$[x_1,x_2]$上满足 罗尔定理条件.

例2 设 $f(x)$在[0,1]上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$.

证明： $\exists\xi\in(0,1)$, 使 $2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$

分析 结论 $\Leftrightarrow 2\xi f'(\xi)+\xi^2 f''(\xi)=0$

$$\Leftrightarrow [2xf'(x)+x^2 f''(x)]_{x=\xi}=0$$

$$\Leftrightarrow [x^2 f'(x)]'_{x=\xi}=0$$

证 令 $F(x)=x^2 f'(x)$

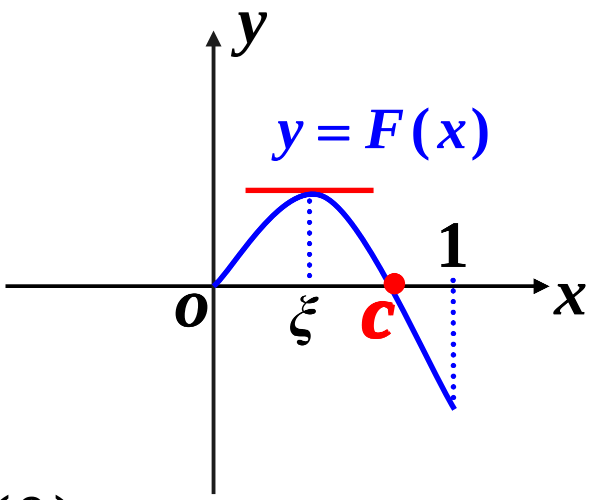
则 $F(x)$在[0,1]上可导，且 $F'(x)=2xf'(x)+x^2 f''(x)$

$F(0)=0$, $\boxed{F(1)=f'(1)\overset{?}{=}0 \text{ 未知}}$

目 回 上 下 停

$\because\ f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，

且 $f(0)=f(1)=0.$



$\therefore$ 由罗尔定理，知 $\exists c\in(0,1)$

使 $f'(c)=0$

从而 $F(c)=c^2 f'(c)=0=F(0)$

$\because\ F(x)$在$[0,\ c](\subset[0,1])$上满足罗尔定理条件

$\therefore\ \exists\ \xi\in(0,c)\subset(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$

即 $2\xi f'(\xi)+\xi^2 f''(\xi)=0$

$\therefore\ 2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$

目 回 上 下 停

类似题:

设 $f(x)$在[0,1]上连续，在(0,1)内可导，且

$$f(0)=f(1)=0,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=1,$$ 证明:

(1) $\exists\ \xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=1$;

(2) $\forall\ \lambda\in\mathbf{R}$, $\exists\ \eta\in(0,1)$，使

$$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1.$$

证 (1) 令 $\varphi(x)=f(x)-x$，则

$\varphi(x)$在[0,1]上连续，在(0,1)内可导.

$$\varphi(0)=f(0)-0=0$$

$$\varphi(1)=f(1)-1=-1<0$$

$$\varphi(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$$

由零点定理，$\exists\, c\in(\frac{1}{2},1)$，使 $\varphi(c)=0$

$\because\quad [0,c]\subset[0,1],\quad \varphi(0)=\varphi(c)=0$

$\therefore$ 由罗尔定理，$\exists\,\xi\in(0,c)\subset(0,1)$

使 $\varphi'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)-1=0$，亦即 $f'(\xi)=1.$

(2) 提示：令 $\psi(x)=e^{-\lambda x}\varphi(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$

$f(0)=f(1)=0,$

$f(\frac{1}{2})=1,$

$\varphi(x)=f(x)-x$

2. 含有两个中值的命题

例3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(0<a<b)$, 在 (a,b) 内可导, 证明： $\exists \xi, \ \eta \in (a,b)$, 使

$$f'(\xi)=\frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}.$$

分析 结论 $\Leftrightarrow -ab\cdot f'(\xi)=\dfrac{f'(\eta)}{-\dfrac{1}{\eta^2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(\xi)(b-a)}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{f'(\eta)}{-\dfrac{1}{\eta^2}}$$

$$\text{原结论} \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{f'(\eta)}{-\frac{1}{\eta^2}}$$

证 令 $F(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f(x), F(x)$在$[a,b]$上连续，

在(a,b)内可导，且 $F'(x)=\dfrac{1}{x^2}\neq 0(\forall x\in(a,b))$

$\therefore$ 由柯西中值定理，知 $\exists\eta\in(a,b)$

使
$$\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\eta)}{F'(\eta)}$$

$$= \frac{f'(\eta)}{-\frac{1}{\eta^2}} \quad \cdots\cdots(1) \ .$$

再由拉格朗日中值定理，知$\exists \xi \in (a,b)$

使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

代入(1),得

$$\frac{f'(\xi)(b-a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{f'(\eta)}{-\frac{1}{\eta^2}}$$

即命题成立.

类似题:

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在 (a,b)内可导，

证明: $\exists\, \xi,\eta \in (a,b)$,使

① $f'(\xi) = \dfrac{a+b}{2\eta} f'(\eta)$. $F(x) = x^2$

② $f'(\xi) = (b^2 + ab + a^2)\dfrac{f'(\eta)}{3\eta^2}$. $F(x) = x^3$

③ $f'(\xi) = \dfrac{e^b - e^a}{b-a} e^{-\eta} f'(\eta)$. $F(x) = e^x$

例4 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)\neq 0,\ f(0)=0,\ f(1)=1$，试证：$\forall\ a>0, b>0$ 在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ,η，使

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$$

分析 需对 $f(x)$在两个不同区间 $[0,c]$和$[c,1]$上用中值定理（c待定）.

在$[0,c]$上，$f(c)-\underbrace{f(0)}_{0}=f'(\xi)\cdot(c-0)\cdots\cdots(1)$

在$[c,1]$上，$\underbrace{f(1)}_{1}-f(c)=f'(\eta)\cdot(1-c)\cdots\cdots(2)$

即 $\dfrac{1}{f'(\xi)}=\dfrac{c}{f(c)}$，$\dfrac{1}{f'(\eta)}=\dfrac{1-c}{1-f(c)}$

即 $$\frac{1}{f'(\xi)}=\frac{c}{f(c)},\quad \frac{1}{f'(\eta)}=\frac{1-c}{1-f(c)}$$

$$\because\quad \frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=\frac{c}{\frac{f(c)}{a}}+\frac{1-c}{\frac{1-f(c)}{b}}.$$

要使 $$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

即 $$\frac{c}{\frac{f(c)}{a}}+\frac{1-c}{\frac{1-f(c)}{b}}=\frac{1}{\frac{1}{a+b}}.$$

只要 $\dfrac{f(c)}{a}=\dfrac{1-f(c)}{b}=\dfrac{1}{a+b}$，解得 $f(c)=\dfrac{a}{a+b}$.

证 令 $\mu = \dfrac{a}{a+b}$

$\because a$ 与 b 均为正数，$\therefore f(0) = 0 < \mu < 1 = f(1)$

又 $\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由介值定理，

存在 $c \in (0,1)$，使得 $f(c) = \mu = \dfrac{a}{a+b}$，

$f(x)$ 在 $[0,c],[c,1]$ 上分别用拉氏中值定理，有

$\exists\, \xi \in (0,c),\ \eta \in (c,1)$，使得

$$f(c)-f(0)=(c-0)f'(\xi)$$

$$f(1)-f(c)=(1-c)f'(\eta)$$

注意到: $f(0)=0, f(1)=1,$

$$c=\frac{f(c)}{f'(\xi)}=\frac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)} \qquad 1-c=\frac{1-f(c)}{f'(\eta)}=\frac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)}$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)}+\frac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)}=c+(1-c)=1$$

$$\therefore \quad \frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

3. 有关泰勒公式的证明题

问题： 何时用泰勒公式进行证明?

答： 一般地，若已知 $f(x)$在某点x_0处足够多的信息，则可考虑用泰勒公式.

例5 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)f(b)<0$, $f'(c)=0$ $(a<c<b)$

证明：当 $f(c)>0$时，$\exists\,\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)<0$.

证法1 $\because\ f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

且 $f(a)f(b)<0,$

$\therefore$ 由零点定理知，$\exists\, x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=0.$

$\because\ f(c)>0,\quad \therefore\ x_0\neq c.$

由泰勒公式，$\exists\,\xi\in(x_0,c)\subset(a,b)$(或 $\xi\in(c,x_0)$)，使

$$\underbrace{\boxed{f(x_0)}}_{0}=f(c)+\underbrace{\boxed{f'(c)}}_{0}(x_0-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x_0-c)^2$$

$\therefore\ \exists\,\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=-\dfrac{2f(c)}{(x_0-c)^2}<0.$

证法2 (用反证法)

假设：不存在 $x \in (a,b)$，使 $f''(x) < 0$,

即 $\forall x \in (a,b)$，有 $f''(x) \geq 0$

则 $f'(x)$在(a,b)上单调不减，即

当 $x_1 < x_2 \quad (x_1, x_2 \in (a,b))$时，

$$f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

于是当 $a < x < c$时，$f'(x) \leq f'(c) = 0$

当 $c < x < b$时，$f'(x) \geq f'(c) = 0$

$$f'(x) \le 0\ (x \in [a,c]),\quad f'(x) \ge 0\ (x \in [c,b])$$

$\because$ $f(x)$在$[a,b]$上连续

$\therefore$ $f(x)$在$[a,c]$上单调不增,

在$[c,b]$上单调不减

故 $f(a) \ge f(c) > 0,\quad f(b) \ge f(c) > 0,$

这与 $f(a)f(b) < 0$ 矛盾!

$\therefore$ $\exists\, \xi \in (a,b)$, 使 $f''(\xi) < 0.$

思考题

1. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$, $f(c)>0$, 证明：$\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f''(\xi)<0$.

2. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$, 证明：$\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.

3. 设 $f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$, $f'_+(a)f'_-(b)>0$,证明：$\exists\xi$，$\eta\in(a,b)$, 使 (1) $f(\xi)=0$; (2) $f''(\eta)=0$.

1\. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$f(c)>0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)<0$.

分析 无 $f(x)$在某一点足够多的信息，故不考虑用泰勒公式.

证法1 对 $f(x)$分别在$[a,c]$和$[c,b]$上，用拉格朗日中值定理，知 $\exists\,\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-\boxed{f(a)}}{c-a}\overset{0}{=}\frac{f(c)}{c-a}>0$$

$$f'(\xi_2)=\frac{\overset{0}{\boxed{f(b)}}-f(c)}{b-c}=\frac{-f(c)}{b-c}<0$$

$\because\ [\xi_1,\xi_2]\subset(a,b)$ 而 $f(x)$在(a,b)内二阶可导

$\therefore\ f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上可导

对 $f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上，用拉格朗日中值定理知

$\exists\,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

证法2 (用反证法) 略

2. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$,

证明：$\exists\,\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.

证 $\because$ $f'_+(a)f'_-(b)<0$,

$\therefore$ 不妨设 $f'_+(a)>0$, $f'_-(b)<0$,

$$\because\quad f'_+(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

$\therefore$ $\exists\,\delta_1>0$, 使得当 $x\in(a,a+\delta_1)$时，

有 $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

从而 $f(x)-f(a)>0,\quad x\in(a,a+\delta_1)$

即 $f(x)>f(a),\quad x\in(a,a+\delta_1)$

同理，由 $f'_-(b)<0,$

可知 $\exists\,\delta_2>0,$ 使得当 $x\in(b-\delta_2,b)$时，

有 $$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$$

$\because\ x<b,\quad\therefore\ f(x)-f(b)>0$

$\therefore\ f(x)>f(b),\ x\in(b-\delta_2,b)$

$\because \quad f(x)$在$[a，b]$上可导，必连续

$\therefore \quad f(x)$在$[a，b]$上必有最大值

由以上推导，又知最大值点ξ必在(a,b)内，

即 $\exists \xi \in (a,b)$， 使

$$f(\xi)=\max_{x\in[a,b]} f(x)$$

$\therefore \quad f'(\xi)=0.$ (费马定理)

3. 设 $f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数， 且 $f(a)=f(b)=0$,

$f'_+(a)f'_-(b)>0$,证明：$\exists\,\xi$， $\eta\in(a,b)$, 使

(1) $f(\xi)=0$; (2) $f''(\eta)=0$.

证 (1) 用反证法

若不存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$,

则由 $f(x)$在$[a,b]$上的连续性，可知

必恒有 $f(x)>0$, （$\forall\ x\in(a,b)$）

(或恒有 $f(x)<0$, $\forall x\in(a,b)$)

不妨设 $f(x)>0$, （$\forall\ x\in(a,b)$）

$\because\quad f(a)=f(b)=0$

$$\therefore\quad f'_+(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{x-a}\geqslant 0$$

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{x-b}\leqslant 0$$

从而 $f'_+(a)\,f'_-(b)\le 0$,

这与 $f'_+(a)\,f'_-(b)>0$ 矛盾, $\therefore$ 命题(1)成立.

目录 上页 下页 返回 结束

(2) 需证: $\exists \eta \in (a, b)$, 使 $f''(\eta) = 0$.

证 $\because$ $f(a) = f(\xi) = f(b) = 0$

$f(x)$在$[a, b]$上可导

$\therefore$ 在$[a, \xi]$和$[\xi, b]$上, 对$f(x)$分别用罗尔定理,

$\exists$ $\xi_1 \in (a, \xi)$, $\xi_2 \in (\xi, b)$, 使

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$$

又 $\because$ $[\xi_1, \xi_2] \subset (a, b)$, 而$f'(x)$在$[a, b]$上可导

$\exists$ $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$, 使 $f''(\eta) = 0$.

例6 设 $f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且 $|f''(x)|\le 1$,

$\max\limits_{x\in(0,1)} f(x)=\dfrac{1}{4}$, 证明:

(1) $|f'(0)|+|f'(1)|\le 1$;

(2) $|f(0)|+|f(1)|<1$.

分析 (1) 虽然 $|f'(1)-f'(0)|=|f''(\xi)(1-0)|\le 1$,

但 $|f'(1)-f'(0)|\le|f'(1)|+|f'(0)|$

此路不通！

证 (1) $\because \max\limits_{x\in(0,1)} f(x)=\frac{1}{4}$,

$\therefore \exists\, x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=\frac{1}{4}$

又 $\because$ $f(x)$在[0,1]上可导,

$\therefore$ 由费马定理，知 $f'(x_0)=0.$

$\because$ $f'(x)$在[0,1]上可导, $|f''(x)|\le 1, x\in[0,1]$

$\therefore$ 分别在$[0，x_0]$和$[x_0,1]$上，对$f'(x)$

用拉格朗日定理,

$$\exists\, \xi_1 \in (0, x_0), \quad \xi_2 \in (x_0, 1)$$

使 $\quad |f'(0)| + |f'(1)|$

$$= |f'(x_0) - f'(0)| + |f'(1) - f'(x_0)|$$

$$= |f''(\xi_1)(x_0 - 0)| + |f''(\xi_2)(1 - x_0)|$$

$$= |f''(\xi_1)| \cdot x_0 + |f''(\xi_2)| \cdot (1 - x_0)$$

$$\le 1 \cdot x_0 + 1 \cdot (1 - x_0) = 1$$

(2) 需证： $|f(0)|+|f(1)|<1.$

由 $f(x)$在$x=x_0$处的一阶泰勒公式，得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

$(\forall x\in[0,1],\ \exists\,\xi\in(x_0,x)$或$\xi\in(x,x_0))$

令 $x=0$，得

$$f(0)=f(x_0)+\boxed{\overset{0}{f'(x_0)}}(0-x_0)+\frac{f''(\eta_1)}{2!}(0-x_0)^2$$

$$=f(x_0)+\frac{f''(\eta_1)}{2!}\cdot x_0^{\ 2},\quad(\exists\,\eta_1\in(0,x_0))$$

令 $x=1$, 得

$$f(1)=f(x_0)+\boxed{f'(x_0)}^{\,0}(1-x_0)+\frac{f''(\eta_2)}{2!}(1-x_0)^2$$

$$=f(x_0)+\frac{f''(\eta_2)}{2!}\cdot(1-x_0)^2,\ (\exists\,\eta_2\in(x_0,1))$$

于是 $$|f(0)|\le|f(x_0)|+\frac{|f''(\eta_1)|}{2!}\cdot x_0^{\ 2}$$

$$\le\frac{1}{4}+\frac{1}{2!}\cdot x_0^{\ 2}$$

$$\left|f(1)\right| \le \left|f(x_0)\right| + \frac{\left|f''(\eta_2)\right|}{2!}\cdot(1-x_0)^2$$

$$\le \frac{1}{4} + \frac{1}{2!}\cdot(1-x_0)^2$$

$$\therefore \quad \left|f(0)\right| + \left|f(1)\right| \le (\frac{1}{4} + \frac{1}{2!}\cdot x_0{}^2) + [\frac{1}{4} + \frac{1}{2!}\cdot(1-x_0)^2]$$

$$\le \frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\cdot[x_0^2 + (1-x_0)^2]$$

$$= 1 + \underbrace{x_0(x_0-1)}_{(<0)} < 1. \quad (0 < x_0 < 1)$$

例7 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有三阶连续导数，

且 $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'(\frac{1}{2})=0$,

证明 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使 $|f'''(\xi)|\geq 24$.

证 由题设对 $x\in[0,1]$, 有

$$f(x)=f(\frac{1}{2})+\overset{0}{\boxed{f'(\frac{1}{2})}}(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})^2$$

$$+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\frac{1}{2})^3 \quad (\text{其中 } \zeta \text{ 在 } x \text{ 与 } \tfrac{1}{2} \text{ 之间})$$

$$f(x)=f(\frac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\frac{1}{2})^3$$

(其中ζ在 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间)

$$1=f(0)=f(\tfrac{1}{2})+\frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(-\tfrac{1}{2})^2+\frac{f'''(\zeta_1)}{3!}(-\tfrac{1}{2})^3\quad(\zeta_1\in(0,\tfrac{1}{2}))$$

$$2=f(1)=f(\tfrac{1}{2})+\frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(\tfrac{1}{2})^2+\frac{f'''(\zeta_2)}{3!}(\tfrac{1}{2})^3\quad(\zeta_2\in(\tfrac{1}{2},1))$$

下式减上式，得

$$1=\frac{1}{48}\left[\,f'''(\zeta_2)+f'''(\zeta_1)\,\right]\le\frac{1}{48}\left[\,\left|f'''(\zeta_2)\right|+\left|f'''(\zeta_1)\right|\,\right]$$

$$1=\frac{1}{48}[\ f'''(\zeta_2)-f'''(\zeta_1)\ ]\le\frac{1}{48}[\ |f'''(\zeta_2)|+|f'''(\zeta_1)|\ ]$$

令 $|f'''(\xi)|=\max(|f'''(\zeta_2)|,|f'''(\zeta_1)|)$

$$1\leqslant \frac{1}{48}[\ |f'''(\zeta_2)|+|f'''(\zeta_1)|\ ]\le\frac{1}{24}|f'''(\xi)|$$

$(0<\xi<1)$

$\longrightarrow$ $|f'''(\xi)|\ge 24 \quad (\exists\xi\in(0,1))$

(二) 导数的应用

1. 求极限

例1 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0,$

求 (1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x);$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6 + f(x)}{x^2}.$

下列推导是否正确？

推导1　$\because \quad \sin x \sim x \quad (x \to 0)$

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}$$

$$\cancel{=} \lim_{x\to 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}[6 + f(x)] = 0, \text{ 故 } \lim_{x\to 0} f(x) = -6.$$

错误原因：遇无穷小“+”, “–”时，　一般不能用各项等价无穷小进行代换；须对分子或分母“整体”代换！

推导2

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}$$

$$\cancel{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to 0}[6+f(x)]=0$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-6.$

错误原因： 和的极限运算法则使用的前提：
各项极限都要存在.

推导3 依题设，知

$$\lim_{x\to 0}[\sin 6x + xf(x)] = 0$$

即 $$\lim_{x\to 0} x\cdot[\frac{\sin 6x}{x} + f(x)] = 0$$

$\cancel{\therefore}$ $$\lim_{x\to 0}[\frac{\sin 6x}{x} + f(x)] = 0$$

故 $$\lim_{x\to 0} f(x) = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x} = -6$$

错误原因： 由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$

$$\not\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$

正确解答:

方法1 (1) $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{[\sin 6x + xf(x)] - \sin 6x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\cdot x^2 - 6\cdot\frac{\sin 6x}{6x}\right]$$

$$= 0\times 0 - 6\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x} = -6.$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{6 + f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{6x + xf(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6x - \sin 6x + [\sin 6x + xf(x)]}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\frac{6x - \sin 6x}{x^3} + \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right]$$

$$\because \quad \lim_{x \to 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{6 - 6\cos 6x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{36 \sin 6x}{6x} = 36$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 36 + 0 = 36$$

方法2 (1)

$$\because \quad 0 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 6x}{x} + f(x)}{x^2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 6x}{x} + f(x)\right] = 0$$

故 $$\lim_{x\to 0} f(x) = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{x} = -6$$

方法3 (1) 依题设，知

$$\sin 6x + xf(x) = o(x^3) \quad (\text{当 } x \to 0 \text{ 时})$$

$$\therefore \quad xf(x) = o(x^3) - \sin 6x,$$

即 $$f(x) = \frac{o(x^3)}{x} - \frac{\sin 6x}{x}$$

从而 $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{o(x^3)}{x} - \frac{\sin 6x}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{o(x^3)}{x^3}\cdot x^2 - \frac{\sin 6x}{6x}\cdot 6\right]$$

$$= 0\times 0 - 6 = -6.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$

$$\boxed{xf(x)=o(x^3)-\sin 6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+o(x^3)-\sin 6x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}=36.$$

类似题:

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\ln(1+2x)}{x^2}=0,$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+f(x)}{x}=$ __2__.

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=2,$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x).$

(答案: 12)

例2 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$, 其中$g(x)$有

二阶导数， $g(0)=1.$

(1) 确定a的值，使 $f(x)$在 $x=0$处连续;

(2) 在(1)成立的情形下，求 $f'(x)$.

解 1. $f(x)$在$x=0$处连续 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$

$$\because \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x} \qquad (\frac{0}{0})$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x}{1} = g'(0)$$

$$\therefore \qquad a = g'(0)$$

2. 当 $x \neq 0$时， $f'(x) = [\dfrac{g(x)-\cos x}{x}]'$

$$= \frac{x[g(x)-\cos x]' - [g(x)-\cos x]}{x^2}$$

$$= \frac{x[g'(x)+\sin x] - [g(x)-\cos x]}{x^2}$$

当 $x=0$时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{g(x)-\cos x}{x}-g'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-g'(0)x}{x^2} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}+\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{1}{2}[g''(0)+1]$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}, & x\neq 0\\[2ex] \dfrac{1}{2}[g''(0)+1], & x=0\end{cases}$$