第三节　三重积分的计算

习题　9-3

1. 化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为直角坐标系中的三次积分, 其中积分区域 Ω 分别是:

(1) $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 2,1\le y\le 3,0\le z\le 2\right\}$;

(2) 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 围成的闭区域;

(3) 由双曲抛物面 $z=xy$ 及平面 $x+y=1$, $z=0$ 围成的闭区域;

(4) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 围成的闭区域.

解 (1) 易知 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^2\mathrm{d}x\int_1^3\mathrm{d}y\int_0^2 f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

(2) 如图 9.40, 区域 Ω 在 xOy 面上的投影区域是圆域 $x^2+y^2\le 1$, 故

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

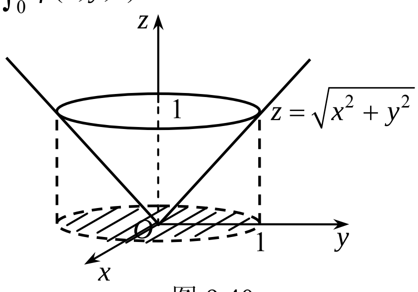

图 9.40

(3) Ω 的顶 $z=xy$ 和底面 $z=0$ 的交线为 x 轴和 y 轴, 故 Ω 在 xOy 面上的投影区域由 x 轴, y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成. 于是 Ω 可用不等式表示为: $0\le z\le xy$, $0\le y\le 1-x$, $0\le x\le 1$, 因此

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{xy} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(4) 如图 9.41, 由 $\begin{cases}z=x^2+2y^2,\\ z=2-x^2\end{cases}$ 消去 z, 得 $x^2+y^2=1$, 故区域 Ω 在 xOy 面上的投影区域是圆域 $x^2+y^2\le 1$, 于是 Ω 可用不等式表示为:

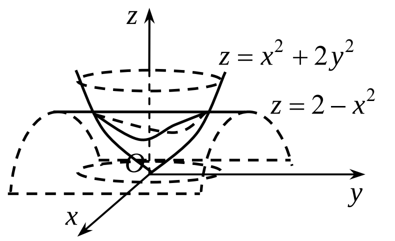

图 9.41

$$x^2+2y^2\le z\le 2-x^2,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2},\ -1\le x\le 1,$$

因此

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z .$$

2. 如果三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 的被积函数 $f(x,y,z)$ 是三个函数 $f_1(x)$ 、$f_2(y)$ 、$f_3(z)$ 的乘积,即 $f(x,y,z)=f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$,积分区域 Ω 是长方体: $\Omega=\{(x,y)|a\le x\le b, c\le y\le d, l\le z\le m\}$, 证明这个三重积分等于三个定积分的乘积, 即

$$\iiint\limits_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\cdot\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\cdot\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z .$$

证 $\iiint\limits_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\int_a^b[\int_c^d(\int_l^m f_1(x)f_2(y)f_3(z)\mathrm{d}z)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b[\int_c^d(f_1(x)f_2(y)\cdot\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b[(\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z)\cdot(\int_c^d f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}y)]\mathrm{d}x$$

$$=(\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z)\cdot\int_a^b[f_1(x)\cdot\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

$$=\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z\cdot\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\cdot\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\cdot\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\cdot\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z .$$

3. 计算下列三重积分

(1) $\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲面 $z=xy$, 平面 $z=0$, $x+y=1$ 围成的闭区域;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}v}{(1+x+y+z)^2}$, 其中 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 和三个坐标面所围成的四面体;

(3) $\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与三个坐标面所围成的第一卦限内的闭区域;

(4) $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由抛物柱面 $y=\sqrt{x}$ 及平面 $y=0$, $z=0$ 和 $x+z$

$=\dfrac{\pi}{2}$围成的闭区域;

(5) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由圆锥面$z^2=\dfrac{h^2}{a^2}(x^2+y^2)$与平面$z=h$围成的闭区域.

解 (1) 由 1.(3)知，$\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{xy}xy\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x^2y^2\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\frac{x^2(1-x)^3}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{180}.$$

(2) $\Omega=\{(x,y,z)\big|0\le z\le 1-x-y, 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$

(如图 9.42)，故

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}v}{(1+x+y+z)^2}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^2}$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{1+x+y}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(\ln 2-\frac{1}{2}(1-x)-\ln(1+x)\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{4}-\ln 2.$$

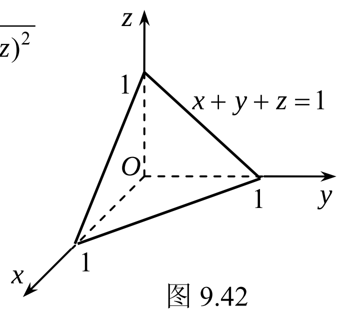

图 9.42

(3) 区域$\Omega=\{(x,y,z)\big|0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}, 0\le x\le 1\}$，

故 $$\iiint\limits_{\Omega}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\cdot\frac{1-x^2-y^2}{2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{48}.$$

(4) $\Omega=\{(x,y,z)\big|0\le z\le\dfrac{\pi}{2}-x, 0\le y\le\sqrt{x}, 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\}$，故

$$\iiint\limits_{\Omega}y\cos(x+z)\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}y\cos(x+z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}(y-y\sin x)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x(1-\sin x)}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

(5) **法 1** 不妨设 $h>0$，如图 9.43 所示. 由 $\begin{cases} z^2 = \dfrac{h^2}{a^2}(x^2+y^2), \\ z = h \end{cases}$ 消去 z，得

$x^2+y^2=a^2$，故 Ω 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy}=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le a^2\},$$

故 $\Omega=\{(x,y,z)\Big|\dfrac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le h,(x,y)\in D_{xy}\}$

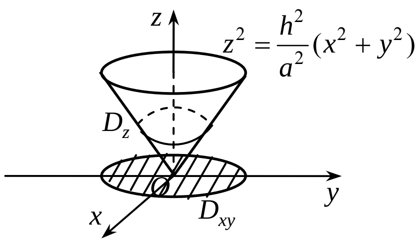

图 9.43

因此 $\displaystyle\iiint_\Omega z\mathrm{d}v=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{h}z\mathrm{d}z$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}[h^2-\frac{h^2}{a^2}(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}[h^2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{h^2}{a^2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y]=\frac{h^2}{2}\cdot\pi a^2-\frac{h^2}{2a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{1}{4}\pi a^2h^2.$$

法 2 用过点 $(0,0,z)$ 且平行于 xOy 面的平面截 Ω 得平面圆域 D_z，其半径为 $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{az}{h}$，面积为 $\dfrac{\pi a^2}{h^2}z^2$，$\Omega=\{(x,y,z)\big|(x,y)\in D_z,0\le z\le h\}$，于是

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}v=\int_0^h z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^h z\cdot\frac{\pi a^2}{h^2}z^2\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\pi a^2h^2.$$

4. 设积分区域 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $x=0$，$y=0$ 围成的位于第一卦限内的闭区域，试将三重积分 $\displaystyle\iiint_\Omega f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$ 分别表示为直角坐标，柱面坐标和球面坐标系中的三次积分.

解 如图 9.44,

在直角坐标系中，Ω 可表示为

$$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},$$

$$0\le y\le\sqrt{2-x^2},\ 0\le x\le\sqrt{2},$$

故 $\displaystyle\iiint_\Omega f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$

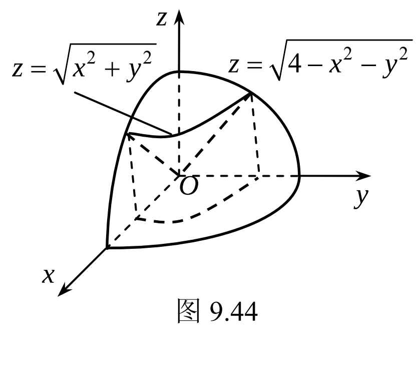

图 9.44

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z,$$

在柱面坐标系下,Ω 可表示为 $\rho\le z\le\sqrt{4-\rho^2}$，$0\le\rho\le\sqrt{2}$，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{\sqrt{4-\rho^2}} f(\rho^2+z^2)\rho\mathrm{d}z,$$

在球面坐标下,Ω 可表示为 $0\le r\le 2$，$0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$,于是

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r.$$

5. 利用柱面坐标计算下列三重积分

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由圆锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=0$ 围成的闭区域;

(2) $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由柱面 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与平面 $z=0$, $z=1$ 及 $y=0$ 围成的闭区域.

解 (1) Ω 可表示为 $0\le z\le 1-\rho$，$0\le\rho\le 1$，$0\le\theta\le 2\pi$，故

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho}(\rho(\sin\theta+\cos\theta)+z)\rho\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12}.$$

(2) 如图 9.45,Ω 可表示为 $0\le z\le 1$,

$0\le\rho\le 2\cos\theta$，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，故

$$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}v;$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\rho\int_0^1(z\rho)\rho\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{\rho^2}{2}\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{3}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}.$$

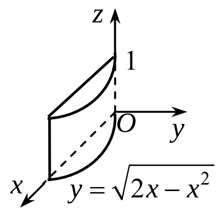

图 9.45

6. 利用球面坐标计算下列三重积分

(1) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}v}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2=2az$ 围成的闭区域 $(a>0)$;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$，$z=$

$\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 所围闭区域.

解 (1) 球面坐标系中, 球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 的方程为 $r=2a\cos\varphi$, 于是 Ω 可表示为: $0\le r\le 2a\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le\theta\le 2\pi$, 故

$$\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\frac{1}{r}\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}2a^2\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{2a^2}{3}\mathrm{d}\theta=\frac{4\pi a^2}{3}.$$

(2) 如图 9.46, 在球面坐标系中, Ω 可表示为:

$0\le r\le R$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{6}$, $0\le\theta\le 2\pi$,

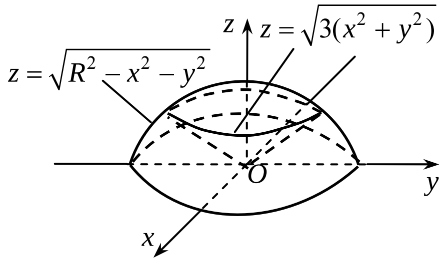

图 9.46

故 $$\iiint_\Omega \sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}\sin r^3\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3}\sin\varphi(1-\cos R^3)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})(1-\cos R^3)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{3})(1-\cos R^3).$$

7. 选用适当的坐标计算下列三重积分

(1) $\iiint\limits_\Omega xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲面 $z=xy$, 平面 $y=x$, $x=1$, $z=0$ 围成的闭区域;

(2) $\iiint\limits_\Omega \dfrac{\mathrm{d}v}{1+x^2+y^2}$, 其中 Ω 是由圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=1$ 围成的闭区域;

(3) $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}v$, 其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2, z\ge 0\right\}$;

(4) $\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ $(R>0)$ 围成的闭区域;

(5) $\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由曲面$z=3-x^2-y^2$与$z=-5+x^2+y^2$以及平面$x=0$，$y=0$围成的位于第一及第五卦限的闭区域;

(6) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le z,1\le z\le 4\right\}$.

解 (1) 如图 9.47，用直角坐标,

$$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y\int_0^{xy}z^3\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\int_0^1 x^5\mathrm{d}x\int_0^x y^6\mathrm{d}y=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\mathrm{d}x=\frac{1}{364}.$$

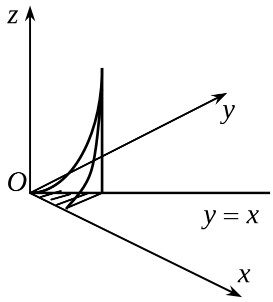

图 9.47

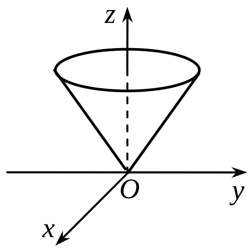

图 9.48

(2) 如图 9.48，利用柱面坐标计算，易知

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}v}{1+x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_\rho^1\frac{1}{1+\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(\frac{\rho}{1+\rho^2}+\frac{1}{1+\rho^2}-1\right)\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}-1\right)\mathrm{d}\theta=\pi\left(\ln 2-2+\frac{\pi}{2}\right).$$

(3) 如图 9.49，在球面坐标系下,Ω可表示为

$$a\le r\le b,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\theta\le 2\pi,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_a^b r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5}(b^5-a^5)\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi}{15}(b^5-a^5).$$

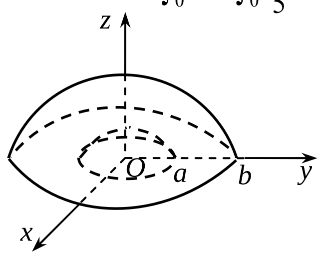

图 9.49

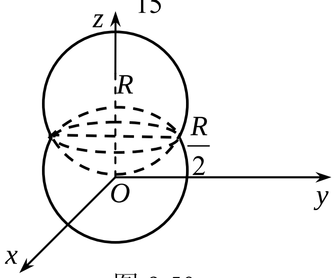

图 9.50

(4)　如图 9.50,当 $0 \le z \le \dfrac{R}{2}$ 时，平行圆域的半径是 $\sqrt{2Rz - z^2}$,面积是 $\pi(2Rz - z^2)$；

当 $\dfrac{R}{2} \le z \le R$ 时，平行圆域的半径是 $\sqrt{R^2 - z^2}$,面积是 $\pi(R^2 - z^2)$．故

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^R z^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pi \int_0^R z^2 (2Rz - z^2)\mathrm{d}z + \pi \int_{\frac{R}{2}}^{R} z^2 (R^2 - z^2)\mathrm{d}z$$

$$= \frac{59}{480}\pi R^5 .$$

(5)　如图 9.51，利用柱面坐标，故

$$\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \mathrm{d}\rho \int_{-1}^{3-\rho^2} \rho \sin\theta \cdot \rho \mathrm{d}z$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \mathrm{d}\rho \int_{-5+\rho^2}^{-1} \rho \sin\theta \cdot \rho \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \rho^2 (4 - \rho^2) \sin\theta \mathrm{d}\rho$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \rho^2 (4 - \rho^2) \sin\theta \mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{128}{15} .$$

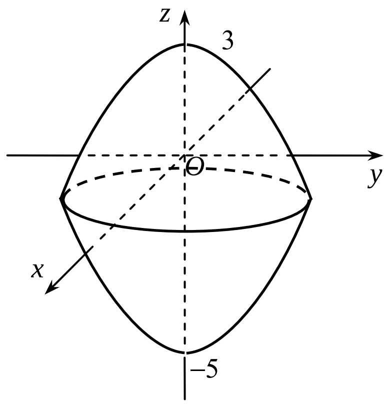

图 9.51

(6)　利用柱面坐标计算,

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_1^4 z \cdot \rho \mathrm{d}z + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^2 \mathrm{d}\rho \int_{\rho^2}^4 z \cdot \rho \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{15}{2} \rho \mathrm{d}\rho + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^2 \frac{1}{2}(16 - \rho^4) \rho \mathrm{d}\rho = 21\pi .$$