第六节　函数图形的描绘

习题　3-6

1. 描绘函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 为偶函数, 只需考虑它在 $[0,+\infty)$ 上的图形.

$$y'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x)e^{-\frac{x^2}{2}},\ y''=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

令 $y'=0$, 可得驻点为 $x=0$; 令 $y''=0$, 可得 $x=\pm1$. 这些关键点将 $[0,+\infty)$ 分为两个子区间, 每个子区间上 y' 和 y'' 的符号及曲线的变化性态可列表如下:

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	−	−	−
y''	−	−	0	+
$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形	极大值 $f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	↘ 凸	拐点 $(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$	↘ 凹

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$, 所以曲线有水平渐近线 $y=0$. 添加辅助点 $(\pm2,\frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}})$, 于是可绘出函数的图形如图 3.1 所示.

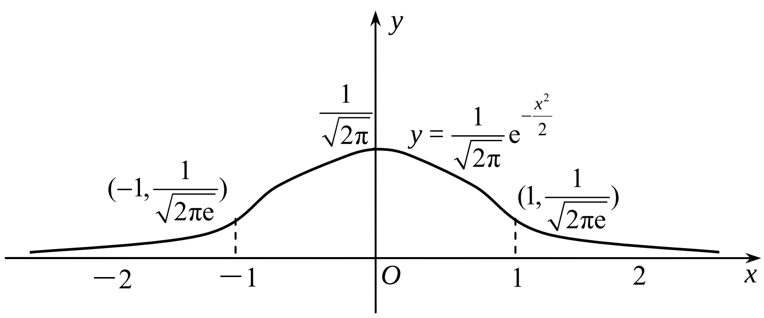

图 3.1

2. 描绘函数 $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$ 的图形.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，为偶函数，只需考虑它在 $[0,+\infty)$ 上的图形.

$$y' = 2x - 2x^3 = 2x(1-x^2),\quad y'' = 2(1-3x^2).$$

令 $y'=0$，可得驻点为 $x=0$，$x=\pm 1$；令 $y''=0$，可得 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 这些关键点将 $[0,+\infty)$ 分为三个子区间，每个子区间上 y' 和 y'' 的符号及曲线的变化性态可列表如下：

x	0	$(0,\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}},1)$	1	$(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$
y'	0	＋	＋	＋	0	－
y''	＋	＋	0	－	－	－
$y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$ 的图形	极小值 $f(0)=1$	↗ 凹	拐点 $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{23}{18})$	↗ 凸	极大值 $f(1)=\frac{3}{2}$	↘ 凸

曲线无渐近线. 添加辅助点 $(\pm\sqrt{1+\sqrt{3}},0)$，于是可绘出函数的图形如图 3.2 所示.

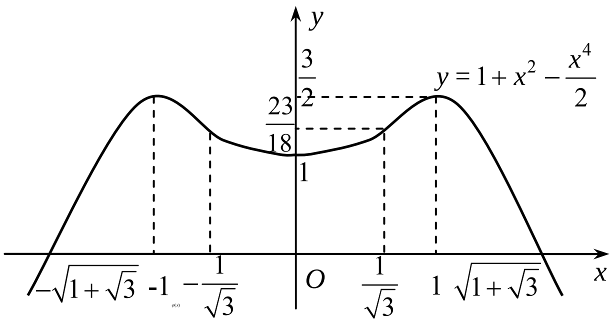

图 3.2

3. 描绘函数 $y=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形.

解 函数的定义域为 $(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$.

$$y'=\frac{36(3-x)}{(x+3)^3},\quad y''=\frac{72(x-6)}{(x+3)^4}.$$

令 $y'=0$，可得驻点为 $x=3$；令 $y''=0$，可得 $x=6$. 这些关键点将定义域分为四个子区间，每个子区间上 y' 和 y'' 的符号及曲线的变化性态可列表如下：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,3)$	3	$(3,6)$	6	$(6,+\infty)$
y'	$-$	无定义	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	无定义	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$y=1+\frac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形	↘ 凸	无定义	↗ 凸	极大值 $f(3)=4$	↘ 凸	拐点 $(6,\frac{11}{3})$	↘ 凹

因为 $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$, 所以曲线有水平渐近线 $y=1$. 又因为 $\lim\limits_{x\to-3} y=-\infty$, 所以曲线有铅直渐近线 $x=-3$. 添加辅助点 $(0,1)$, 于是可绘出函数的图形如图 3.3 所示.

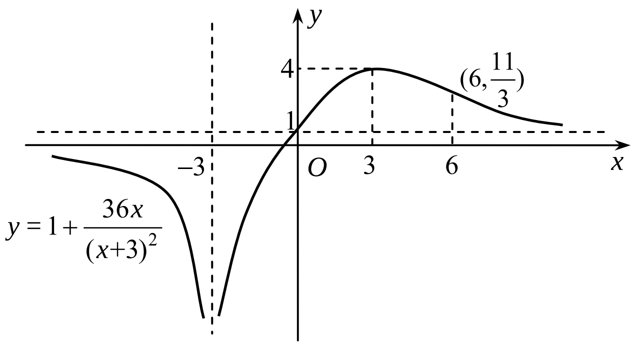

图 3.3

4. 描绘函数 $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$ 的图形.

解 函数的定义域为 $D=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}, x\neq\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}]$, 是周期为 2π 的周期函数, 且为偶函数, 只需考虑它在半个周期, 如 $[0,\pi]$ 上的图形.

$$y'=\frac{-\sin x\cos 2x+2\cos x\sin 2x}{\cos^2 2x}=\frac{\sin x(3+\tan^2 x)}{\cos 2x(1-\tan^2 x)},$$

$$y''=\frac{3\cos x\cos^2 2x-4\sin x\sin 2x\cos 2x+8\cos x\sin^2 2x}{\cos^3 2x}$$

$$=\frac{\cos x(3-4\tan x\tan 2x+8\tan^2 2x)}{\cos 2x}=\frac{\cos x(3+18\tan^2 x+11\tan^4 x)}{\cos 2x(1-\tan^2 x)^2}.$$

令 $y'=0$，可得驻点为 $x=0,\pi$；令 $y''=0$，可得 $x=\frac{\pi}{2}$. 当 $x=\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$ 时，y，y' 及 y'' 不存在. 这些关键点将区间 $[0,\pi]$ 分为四个子区间，每个子区间上 y' 和 y'' 的符号及曲线的变化性态可列表如下:

x	0	$(0,\frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$	$\frac{3\pi}{4}$	$(\frac{3\pi}{4},\pi)$	π
y'	0	$+$	无定义	$+$	$+$	$+$	无定义	$+$	0
y''	$+$	$+$	无定义	$-$	0	$+$	无定义	$-$	$-$
$y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$ 的图形	极小值	↗ 凹	无定义	↗ 凸	拐点 $(\frac{\pi}{2},0)$	↗ 凹	无定义	↗ 凸	极大值

因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} y=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} y=-\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} y=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^+} y=-\infty$，所以曲线有铅直渐近线 $x=\frac{\pi}{4}$ 及 $x=\frac{3\pi}{4}$，于是可绘出函数的图形如图 3.4 所示.

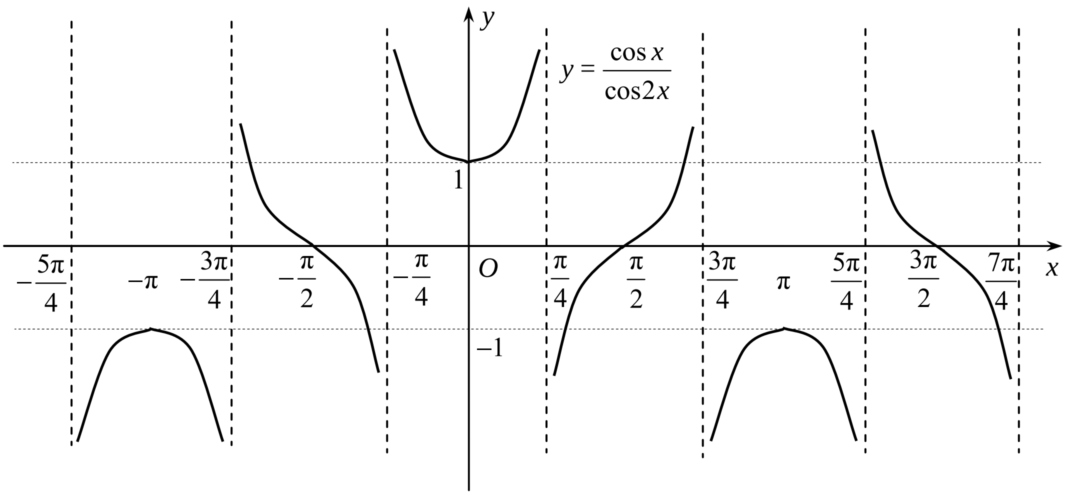

图 3.4

*5. 描绘函数 $y=\frac{x^2}{1+x}$ 的图形.

解 函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

$$y' = \frac{x^2+2x}{(1+x)^2} = \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}, \quad y'' = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

令 $y'=0$，可得驻点为 $x=-2$，$x=0$；且 $y''\neq 0$. 当 $x=-1$ 时，y，y' 及 y'' 不存在. 这些关键点将定义域分为四个子区间，每个子区间上 y' 和 y'' 的符号及曲线的变化性态可列表如下:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	−	0	−	无定义	−	0	+
y''	−	−	−	无定义	+	+	+
$y=\frac{x^2}{1+x}$ 的图形	↗ 凸	极大值 $f(-2)=-4$	↘ 凸	无定义	↘ 凹	极小值 $f(0)=0$	↗ 凹

因为 $\lim\limits_{x\to -1} y=\infty$，所以曲线有铅直渐近线 $x=-1$. 又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1+x}=1$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2}{1+x}-x)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x}=-1$，所以曲线有斜渐近线 $y=x-1$. 添加辅助点 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，于是可绘出函数的图形如图 3.5 所示.

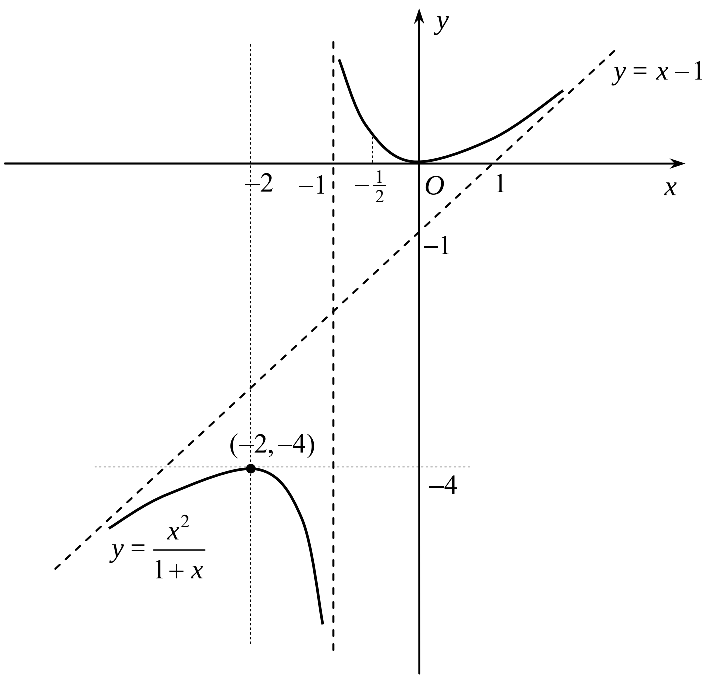

图 3.5

*6. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{x^3}{x^2+x-1}-(ax+b)]=0$,

(1) 求常数 a 和 b;

(2) 说明曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+x-1}$ 与直线 $y=ax+b$ 有何关系.

解 (1) 依题有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-(ax+b)(x^2+x-1)}{x^2+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^3-(a+b)x^2+ax+b}{x^2+x-1}=0,$$

故应有 $\begin{cases}1-a=0,\\ a+b=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1.\end{cases}$

(2) 直线 $y=x-1$ 是曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+x-1}$ 的斜渐近线.