第五节　　曲面及其方程

习题　7-5

1. 建立以点 $(1,3,-2)$ 为球心, 且通过坐标原点的球面方程.

解　球的半径 $R=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$, 球面方程为

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14,$$

即 $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0$.

2. 求与坐标原点 O 及点 $(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的点的全体所组成的曲面方程, 它表示怎样的曲面?

解　设点 (x,y,z) 满足题意, 依题意有

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

化简整理得 $(x+\frac{2}{3})^2+(y+1)^2+(z+\frac{4}{3})^2=(\frac{2}{3}\sqrt{29})^2$, 它表示以点 $(-\frac{2}{3},-1,-\frac{4}{3})$ 为球心, 以 $\frac{2}{3}\sqrt{29}$ 为半径的球面.

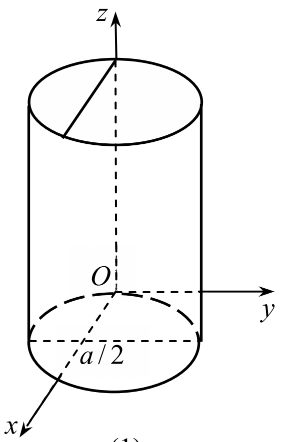
3. 画出下列方程所表示的曲面:

(1)　$x^2-ax+y^2=0$;　　　　(2)　$x^2-y^2=1$;

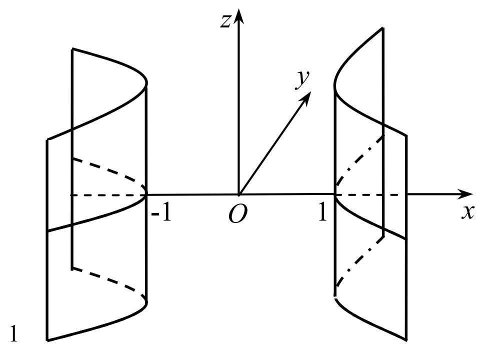
(3)　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$;　　　　(4)　$z=-y^2+1$;

(5)　$x-y=0$.

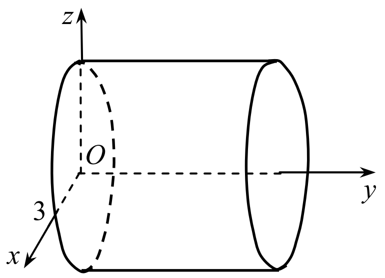
解　各曲面的图形如图 7.7 所示



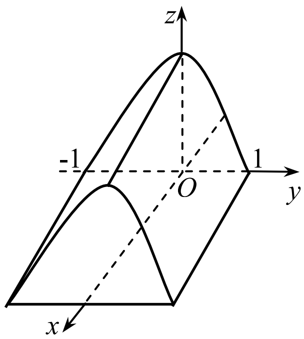
(1)



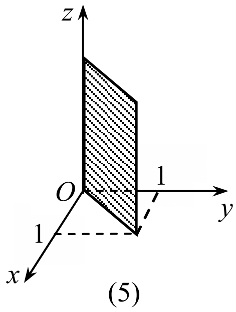
(2)



(3)



(4)



(5)

图 7. 7

4. 指出下列方程在平面解析几何和空间解析几何中分别表示什么图形:

(1) $y=2$; (2) $y=3x+1$;

(3) $2x^2+y^2=1$; (4) $x^2=2y$.

解

方程	在平面解析几何中 表 示	在空间解析几何中 表 示
(1) $y=2$	平行于 x 轴的一直线	与 zOx 坐标面平行的平面
(2) $y=3x+1$	斜率为 3,截距为 1 的一直线	平行于 z 轴的一平面
(3) $2x^2+y^2=1$	椭圆	椭圆柱面
(4) $x^2=2y$	抛物线	抛物柱面

5. 写出下列曲线绕指定轴旋转所生成的旋转曲面的方程, 并指出是什么曲面:

(1) xOy 面上的圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 绕 x 轴;

(2) xOy 面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 y 轴;

(3) yOz 面上的抛物线 $y=z^2$ 绕 y 轴;

(4) xOz 面上的直线 $z=\sqrt{3}x$ 绕 z 轴.

解 (1) $(x-a)^2+y^2+z^2=a^2$，球面;

(2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$，旋转单叶双曲面;

(3) $y=x^2+z^2$，旋转抛物面;

(4) $z^2=3(x^2+y^2)$，圆锥面.

6. 说明下列旋转曲面是怎样形成的:

(1) $\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$; (2) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$;

(3) $x^2-y^2-z^2=1$; (4) $(z-a)^2=x^2+y^2$.

解 (1) 是 xOy 坐标面上的椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 绕 x 轴旋转一周所得; 或是 xOz 坐标面上的椭圆 $\frac{x^2}{4}+z^2=1$ 绕 x 轴旋转一周形成.

(2) 是 xOy 坐标面上的双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转一周所得; 或是 yOz 坐标面上的双曲线 $-\frac{y^2}{4}+z^2=1$ 绕 y 轴旋转一周形成.

(3) 是 xOy 坐标面上的双曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转一周所得; 或是 xOz 坐标面上的双曲线 $x^2-z^2=1$ 绕 y 轴旋转一周形成.

(4) 是 yOz 坐标面上关于 z 轴对称的一对相交直线 $(z-a)^2=y^2$，即 $z=y+a$和$z=-y+a$ 中之一条绕 z 轴旋转一周所得; 或是 xOz 坐标面上关于 z 轴对称的一对相交直线 $(z-a)^2=x^2$，即 $z=x+a$和$z=-x+a$ 中之一条绕 z 轴旋转一周形成.

7. 画出下列方程所表示的曲面:

(1) $x^2+y^2+2z^2=1$; (2) $\frac{z}{2}=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}$;

(3) $x^2+y^2-\frac{z^2}{3}=1$; (4) $1-z=\sqrt{x^2+y^2}$.

解　各曲面的图形如图 7.8 所示

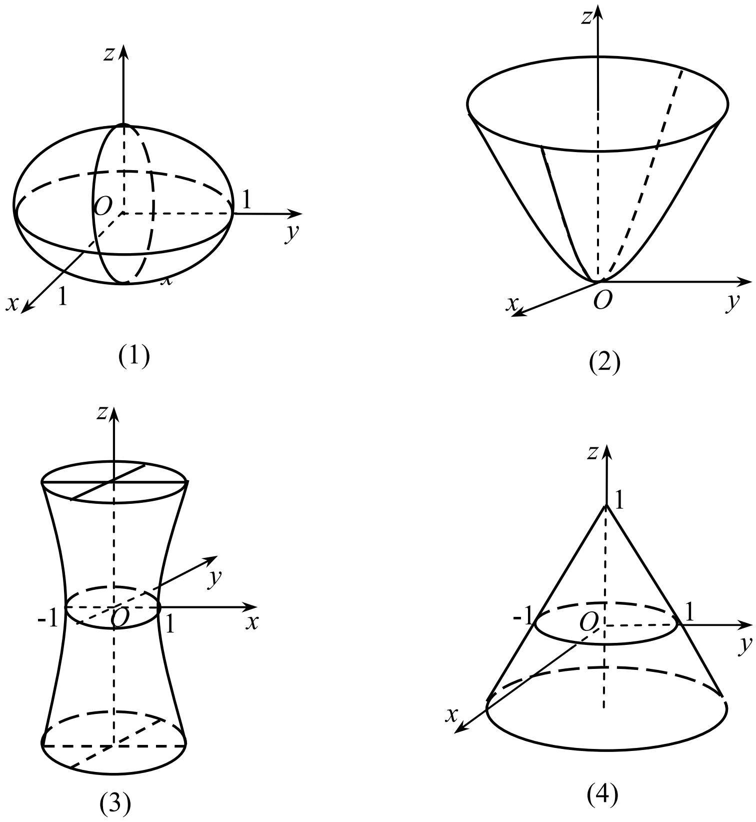


图 7.8

*8.　试写出下列曲面的参数方程:

(1)　$x^2+y^2=ax(a>0)$;　　　　(2)　$x^2+y^2=z^2$;

(3)　$\dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$.

解　(1)　$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cos u, \\ y=\dfrac{a}{2}\sin u, \\ z=v, \end{cases}$　　$u\in[0,2\pi],\ v\in(-\infty,+\infty)$.

(2)　$\begin{cases} x=v\cos u, \\ y=v\sin u, \\ z=v, \end{cases}$　　$u\in[0,2\pi],\ v\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $\begin{cases} x = 2\sin u \cos v, \\ y = \sin u \sin v, \\ z = \cos u, \end{cases}$ $u \in [0, \pi],\ \ v \in [0, 2\pi].$