第二章 导数与微分

第一节 导数的概念

1. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义, 则 $\underline{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ 叫做函数 $f(x)$ 从 x_0 到 x 的平均变化率, 而 $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ 叫做 $f(x)$ 在 x_0 的瞬时变化率或导数.

2. 假设下列极限存在, 则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\underline{f'(x_0)}$;

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\underline{f'(x_0)}$;

(3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\underline{-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)}$;

(4) 若 $f(0)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\underline{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\underline{0}=\underline{f(0)}$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处<u>连续</u>.

又 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\underline{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=0}$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处既<u>连续</u>又<u>可导</u>.

4. 设 $f(x)=\sqrt{x+1}\ (x>-1)$, 试按定义求 $f'(x)$, $f'(0)$.

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$,

故 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

5. 设 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 为连续函数,且 $\varphi(a)\neq 0$,证明 $f(x)$ 在 a 点没有导数. 又 $f(x)$ 在 a 点处的左导数及右导数各等于什么?

解 $f(x)=\begin{cases}(x-a)\varphi(x), & x\geq a,\\ (a-x)\varphi(x), & x<a.\end{cases}$ 由左, 右导数定义,

$$f_-'(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{(a-x)\varphi(x)-0}{x-a}=-\varphi(a),$$

$$f_+'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)\varphi(x)-0}{x-a}=\varphi(a).$$

由于 $\varphi(a)\neq 0$,于是 $f_-'(a)\neq f_+'(a)$,故 $f(x)$ 在 $x=a$ 处导数不存在.

注意 易犯的错误是:

$$f'(x)=|x-a|'\varphi(x)+|x-a|\varphi'(x)=\varphi(x)+|x-a|\varphi'(x),$$

于是 $f'(a)=\varphi(a)$.

产生错误的原因是,将分段函数在分段点处的可导性的讨论当成了普通初等函数的通过求导法则研究的导数问题.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 求 $f_-'(0)$ 及 $f_+'(0)$, 又 $f'(0)$ 是否存在?

解 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{h}}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{h}}}.$$

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{h}}}=0,\ f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{h}}}=1.$$

由于 $f_-'(0)\neq f_+'(0)$,故 $f'(0)$ 不存在.

注意 易犯的错误是:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{h}}}-0}{h}=0.$$

产生错误的原因是认为 $\lim\limits_{h\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{h}}=\infty$. 事实上 $\lim\limits_{h\to 0+0}\mathrm{e}^{\frac{1}{h}}=\infty$, $\lim\limits_{h\to 0-0}\mathrm{e}^{\frac{1}{h}}=0$.

7. 说明函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.

解 $f(0)=0$, $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}0=0$.

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=0,\ f(0^-)=f(0^+)=f(0),$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{0-0}{h}=0,$$

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{\sqrt{h}}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\left(\sqrt{1+h}+1\right)\sqrt{h}}=\infty$$

$f_-'(0)\neq f_+'(0)$,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

8. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<1,\\ ax+b, & x\geq 1\end{cases}$ 问 a, b 应各为何值时, $f(x)$ 处处连续、可导?

解 (1) $x\neq 1$ 处, $f(x)$ 为多项式, 故连续且可导.

(2) $x=1$ 处, $f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$, $f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1)=0$, $f(1)=a+b$.

当 $f(1^+)=f(1^-)=f(1)$, 即 $a+b=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. 又

$$f_-'(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{[(1+h)^2-1]-[1^2-1]}{h}=2,$$

$$f_+'(1)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{[a(1+h)+b]-[a+b]}{h}=a,$$

当 $f_-'(1)=f_+'(1)$,即 $a=2$ 时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

故 $a=2$, $b=-2$ 时, $f(x)$ 处处连续、可导.

注意 常见的错误是缺少解题过程(1). 产生错误的原因是将题目中的结论“ $f(x)$ 处处连续、可导”当成条件, 去确定 a 、b . 而没有回答对选定的 a 、b , $f(x)$ 是否在 $(-\infty,\ +\infty)$ 处处连续、可导, 特别是在 $x\neq1$ 处是否处处连续、可导.

9. 求曲线 $y=\ln(x+3)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程和法线方程.

解 曲线 $y=\ln(x+3)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线斜率为:

$$k=y'|_{x=1}=\frac{1}{x+3}|_{x=1}=\frac{1}{4}.$$

故在 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=\frac{1}{4}(x-1)$, 法线方程为 $y=-4(x-1)$.

第二节 导数的运算法则

1. 求下列函数的导数：

(1) 设 $y=\dfrac{x^5+2\sqrt{x}+1}{x^3}$, 则 $y'=\underline{\left(x^2+2x^{-\frac{5}{2}}+x^{-3}\right)'=2x-5x^{-\frac{7}{2}}-3x^{-4}}$;

(2) 设 $y=\sqrt{\varphi}\sin\varphi$, 则 $y'=\underline{\dfrac{1}{2\sqrt{\varphi}}\sin\varphi+\sqrt{\varphi}\cos\varphi}$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=x\tan x-2\sec x$;　　　(2) $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ （a,b,c 都是常数）

(3) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}(|x|\neq1)$;　　　(4) $y=\dfrac{10^x-1}{10^x+1}$;

(5) $y=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}(x>0)$;　　　(6) $y=\dfrac{e^x}{x^3}+a^x+(\ln3)\cot x$;

(7) $y=x^2a^x\sin x+e$.

解 (1) $y'=\tan x+x\sec^2x-2\sec x\tan x$;

(2) $y'=(x-a)'(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b)'(x-c)+(x-a)(x-b)(x-c)'$
$=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$;

(3) $y'=\dfrac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}=\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}\ (|x|\neq1)$;

(4) $$y'=\frac{(10^x-1)'(10^x+1)-(10^x-1)(10^x+1)'}{(10^x+1)^2}$$
$$=\frac{\ln10\cdot10^x(10^x+1)-(10^x-1)\ln10\cdot10^x}{(10^x+1)^2}=\frac{2\ln10\cdot10^x}{(10^x+1)^2};$$

(5) $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}(x>0)$;

(6) $y'=\left(\frac{e^x}{x^3}\right)'+(a^x)'+(\ln 3\cdot\cot x)'$

$=\frac{e^x x^3-3x^2e^x}{x^6}+\ln a\cdot a^x-\ln 3\cdot\csc^2 x$；

(7) $y'=(x^2)'a^x\sin x+x^2(a^x)'\sin x+x^2a^x(\sin x)'+(e)'$

$=2xa^x\sin x+\ln a\cdot a^x\cdot x^2\sin x+x^2a^x\cos x$.

注意 易犯的错误是：

(4) $y'=\left(\frac{10^x-1}{10^x+1}\right)'=\frac{x10^{x-1}(10^x+1)-(10^x-1)x10^{x-1}}{(10^x+1)^2}=\frac{2x10^{x-1}}{(10^x+1)^2}$.

产生错误的原因是, 将指数函数按幂函数求导公式求导：$(10^x)'=x10^{x-1}$.

(6) $y'=\left(\frac{e^x}{x^3}\right)'+(a^x)'+[\ln 3\cdot\cot x]'$

$=\frac{x^3e^x-3x^2e^x}{x^6}+\ln a\cdot a^x+\left[\frac{1}{3}\cot x+\ln 3(-\csc^2 x)\right]$.

此解错在认为 $(\ln 3)'=\frac{1}{3}$.

3. 求下列函数在给定点处的导数：

(1) $y=\sin x\bullet\cos x$, 求 $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

(2) $y=(1+x^3)\left(5-\frac{1}{x^2}\right)$, 求 $y'(1)$, $y'(a)$ （$a\neq 0$）.

(3) $f(t)=\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$, 求 $f'(4)$.

解 (1) $y'=\cos^2 x+\sin x(-\sin x)=\cos 2x$, 于是

$$y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0;$$

(2) $y'=3x^2\left(5-\frac{1}{x^2}\right)+(1+x^3)2x^{-3}=15x^2-1+2x^{-3}$, 于是

$$y'(1)=16,\ y'(a)=15a^2-1+2a^{-3};$$

(3) $f'(t)=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{t}}(1+\sqrt{t})-(1-\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}}}{(1+\sqrt{t})^2}=\frac{-1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^2}$, 于是

$$f'(4)=-\frac{1}{18}.$$

注意 易犯的错误是：

(1) 由于 $y\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 都是常数, 而常数的导数是零, 故

$$y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(y\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)'=0,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)'=0.$$

产生错误的原因是，错误的以为 $y'(x_0)=\left(y(x_0)\right)'$. 事实上，$y'(x_0)$ 是导函数 $y'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的值，而 $\left(y(x_0)\right)'$ 是函数在 $x=x_0$ 处的值(这是常数)对 x 求导数，其结果总是零.

4. 求下列函数的导数：

(1) 设 $y=(2x+5)^4$，则 $y'=\underline{8(2x+5)^3}$；

(2) 设 $y=\cos(4-3x)$，则 $y'=\underline{3\sin(4-3x)}$；

(3) 设 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$，则 $y'=\underline{-\dfrac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\bullet(-2x)=x\left(4-x^2\right)^{-3/2}}$.

5. 设 $y=f(x)$ 是 $x=\varphi(y)$ 的反函数，$f(10)=2,\ f'(10)=5$，求 $\varphi'(2)$.

解 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$，$\varphi'(2)=\dfrac{1}{f'(10)}=\dfrac{1}{5}$.

6. 将下列函数与其导数用线连起来：

$y=\arctan\left(\mathrm{e}^x\right)$	$y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
$y=\ln\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}}$	$y'=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$
$y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$	$y'=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$

解 (1) $y'=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\left(\mathrm{e}^x\right)^2}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$；

(2) $y'=\dfrac{1}{2}\left[\ln\mathrm{e}^{2x}-\ln\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)\right]'=\dfrac{1}{2}\left[2-\dfrac{2\,\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\right]=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$；

(3) $y'=\dfrac{\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)^2-\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)^2}{\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}=\dfrac{4}{\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$；

7. 求下列函数的导数：

(1) $y=\ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)$；　　(2) $y=x\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$；

(3) $y=\sin(\sin(\sin x))$；　　(4) $y=2^{\tan\frac{1}{x}}$；

(5) $y=\mathrm{e}^x\left(1+\cot\dfrac{x}{2}\right)$；　　(6) $y=\arcsin(\sin x)$；

(7) $y=\sin\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}$；　　(8) $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$；

解 (1) $y'=\dfrac{1}{\ln^2\left(\ln^3 x\right)}\cdot 2\ln\left(\ln^3 x\right)\dfrac{1}{\ln^3 x}\cdot 3\ln^2 x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{6}{x\ln x\cdot\ln\left(\ln^3 x\right)}\ (x>\mathrm{e})$；

(2) $y'=1\cdot\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+x\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$；

(3) $y'=\cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)]$；

(4) $y'=-\dfrac{1}{x^2}\sec^2\dfrac{1}{x}\cdot 2^{\tan\frac{1}{x}}\ln 2\ (x\neq 0)$；

(5) $y'=e^x\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}e^x\csc^2\frac{x}{2}=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$（$x\neq 2k\pi$；$k$ 为整数)；

(6) $y'=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\operatorname{sgn}(\cos x)$（$x\neq\frac{2k-1}{2}\pi$；$k$ 为整数)；

(7) $y'=\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}+\sin\frac{1}{x}e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sec^2\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$；

(8) $y'=\frac{1}{4}\left[\ln(x^2-1)-\ln(x^2+1)\right]'=\frac{1}{4}\left[\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2x}{x^2+1}\right]=\frac{x}{x^4-1}$ ($|x|>1$).

8．求下列函数的导数：

(1) $y=\ln(1+\sin^2 x)-2\sin x\arctan(\sin x)$；(2) $y=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

解　(1) $y'=\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}-2\cos x\cdot\arctan(\sin x)-\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}=-2\cos x\cdot\arctan(\sin x)$.

(2) $y'=\frac{-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

9．在下列各题中,设 $f(u)$ 为可导函数,求 $\frac{dy}{dx}$.

(1) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$；　(2) $y=f(e^x)e^{f(x)}$.

解　(1) $y'=f'(\sin^2 x)(\sin^2 x)'+f'(\cos^2 x)(\cos^2 x)'$

$=f'(\sin^2 x)2\sin x\cos x+f'(\cos^2 x)2\cos x(-\sin x)$

$=\sin 2x\left[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)\right]$；

(2) $y'=f'(e^x)e^x e^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x)$.

注意　易犯的错误是：

(1) $\frac{dy}{dx}=f'(\sin^2 x)+f'(\cos^2 x)$

$=f'(u)(\sin^2 x)'+f'(v)(\cos^2 x)'$　（$u=\sin^2 x,v=\cos^2 x$）

$=f'(\sin^2 x)\sin 2x+f'(\cos^2 x)(-\sin 2x)$.

此解错在第一个等式中将符号 $f'(\sin^2 x)$ 理解成 $\frac{d}{dx}f(\sin^2 x)$,将 $f'(\cos^2 x)$ 理解成 $\frac{d}{dx}f(\cos^2 x)$．事实上,

$$f'(\sin^2 x)=f'(u)|_{u=\sin^2 x}，f'(\cos^2 x)=f'(u)|_{u=\cos^2 x}$$

值得注意的是上述错解的最后运算结果是与正确解的结果相同. 对于有些习惯于对答案的同学来说, 常常认为这样的解是正确的.

10. 试确定 a 的值使两曲线 $y=ax^2$ 与 $y=\ln x$ 相切.

解　由于两曲线相切, 因此在切点处两曲线既相交又切线斜率相同, 即在切点处

$$\begin{cases}y_1=y_2,\\ y_1'=y_2',\end{cases}\quad\begin{cases}ax^2=\ln x,\\ 2ax=\frac{1}{x},\end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_0 = e^{\frac{1}{2}}, \\ a = \dfrac{1}{2e}. \end{cases}$ 故 $a = \dfrac{1}{2e}$ 时两曲线相切.

11. 求下列函数的导数：

(1) $y = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2x + 3\right)$； (2) $y = \ln\left(\mathrm{e}^x + \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)$；

(3) $y = \arctan\dfrac{1+x}{1-x}$； (4) $y = \dfrac{\ln x}{x^n}$.

解 (1) $y' = -\mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2x + 3\right) + \mathrm{e}^{-x}(2x-2) = \mathrm{e}^{-x}\left(-x^2 + 4x - 5\right)$；

(2) $y' = \dfrac{\mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}}{\mathrm{e}^x + \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$；

(3) $y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \dfrac{2}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{1+x^2}\ (x \neq 1)$；

(4) $y' = \dfrac{1}{x}x^{-n} + \ln x \cdot (-n)x^{-n-1} = \dfrac{1 - n\ln x}{x^{n+1}}$.

第三节 隐函数和由参数方程所确定的函数的导数

1. 求下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

(1) $\mathrm{e}^{x+y} + \cos(xy) = 0$； (2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

解 (1) 对 x 求导得

$$\mathrm{e}^{x+y}(1+y') - \sin(xy)(y + xy') = 0,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{e}^{x+y} - y\sin(xy)}{x\sin(xy) - \mathrm{e}^{x+y}};$$

(2) 对 x 求导得

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}y' = 0,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sqrt{\frac{y}{x}}\ (x > 0, y > 0).$$

2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $f\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right) = xy$ 所确定, 其中 $f(x)$ 可导, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 设 $u = \arctan\dfrac{y}{x}$, 则 $f(u) = xy$, 两端对 x 求导数, 得

$$f'(u)\frac{\frac{xy'-y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=y+xy',$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y[f'(u)+x^2+y^2]}{x[f'(u)-x^2-y^2]},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y\left[f'\left(\arctan\frac{y}{x}\right)+x^2+y^2\right]}{x\left[f'\left(\arctan\frac{y}{x}\right)-x^2-y^2\right]}.$$

注意 易犯的错误是:

由方程 $f\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=xy$ 得

$$f'(x)\left(\arctan\frac{y}{x}\right)'=y+xy',\ f'(x)\frac{\frac{xy'-y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=y+xy'.$$

此解错在将复合函数 $f\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$ 对中间变量 $u\left(u=\arctan\frac{y}{x}\right)$ 的导数 $f'(u)$ 写成了 $f'(x)$.

3. 用对数求导法求下列函数的导数:

(1) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$（$x>0$ 或 $x<-1$）;　　(2) $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$.

解 （1）取对数 $\ln|y|=x[\ln|x|-\ln|1+x|]$,
上式两端对 x 求导数, 得

$$\frac{y'}{y}=[\ln|x|-\ln|1+x|]+x\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right],$$

故 $y'=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left[\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|+\frac{1}{1+x}\right]$.

(2) 取对数 $\ln|y|=2\ln|x|-\ln|1-x|+\frac{1}{3}[\ln|3-x|-2\ln|3+x|]$, 上式两端对 x 求导数, 得

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3}\left[\frac{-1}{3-x}-\frac{2}{3+x}\right],$$

故 $y'=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}+\frac{-1}{3(3-x)}-\frac{2}{3(3+x)}\right]$.

注意 初学者应留意对数求导法, 求形如 6(2) 中函数的导数时, 可避免非常繁琐的计算.

4. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $\begin{cases} x = a\sin^2\varphi + b\cos\varphi \\ y = b\cos^2\varphi + a\sin\varphi \end{cases}$；　　(2) $\begin{cases} x = \ln t\sin t \\ y = \ln t\cos t. \end{cases}$

解　(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}} = \dfrac{-b\sin 2\varphi + a\cos\varphi}{a\sin 2\varphi - b\sin\varphi}$；

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{\cos t - t\ln t\sin t}{\sin t + t\ln t\cos t}$.

5. 已知函数 $y = f(x)$ 由方程 $\rho = a(1+\cos\varphi)$，$\varphi \in \left(0, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ 给定，其中 (ρ, φ) 是点 (x, y) 的极坐标，求 $y_x{}'$.

解 1　函数的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi, \\ y = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

利用参数方程求导公式，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}} = \frac{a[\cos\varphi + \cos 2\varphi]}{-a[\sin\varphi + \sin 2\varphi]} = -\frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{\sin\varphi + \sin 2\varphi}.$$

解 2　将函数的极坐标方程化为直角坐标方程，得

$$x^2 + y^2 = a\left(\sqrt{x^2+y^2} + x\right).$$

上式两端对 x 求导数，得

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a\left(\frac{x + y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1\right),$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(2x-a)\sqrt{x^2+y^2} - ax}{y - 2y\sqrt{x^2+y^2}}.$$

第四节　高阶导数

1. $(\sin ax)^{(n)} = \underline{a^n \sin\left(ax + \dfrac{n\pi}{2}\right)}$.

2. $(x^m)^{(n)} = \underline{m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}}$（$m$，$n$ 为自然数，且 $m \geq n$）.

3. $(a^x)^{(n)} = \underline{(\ln a)^n a^x}$.

4. $\left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \underline{(-1)^n n!(x+a)^{-n-1}}$.

解 1. $(\sin ax)' = a\cos ax = a\sin\left(ax+\frac{\pi}{2}\right)$,

$(\sin ax)'' = (a\cos ax)' = -a^2\sin ax = a^2\sin\left(ax+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$,

$(\sin ax)''' = (-a^2\sin ax)' = -a^3\cos ax = a^3\sin\left(ax+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$,

$(\sin ax)^{(4)} = (-a^3\cos ax)' = a^4\sin ax = a^4\sin\left(ax+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

注意到$\sin ax$的周期性可得

$$(\sin ax)^{(n)} = a^x\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right).$$

2. $(x^m)' = mx^{m-1}$, $(x^m)'' = (mx^{m-1})' = m(m-1)x^{m-2}$, $\cdots$,

$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$（或$(x^m)^{(n)} = C_m^n x^{m-n}$）.

3. $(a^x)' = \ln a\cdot a^x$, $(a^x)'' = [\ln a\cdot a^x]' = (\ln a)^2 a^x$, $\cdots$, $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$.

4. $\left(\frac{1}{x+a}\right)' = [(x+a)^{-1}]' = (-1)(x+a)^{-2}$,

$\left(\frac{1}{x+a}\right)'' = (-1)[(x+a)^{-2}]' = (-1)(-2)(x+a)^{-3}$, $\cdots$,

$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = (-1)^n n!(x+a)^{-n-1}$.

5. 设函数$y=f(x)$有任意阶导数, 则

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)\right]_{x=x_0} = \underline{\left.\frac{\mathrm{d}^{n+1}y}{\mathrm{d}x^{n+1}}\right|_{x=x_0}}.$$

6. 设$y=f(\mathrm{e}^x)$, f具有三阶导数, 求y'''.

解 $y' = \mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x)$,

$y'' = \mathrm{e}^{2x} f''(\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x)$,

$y''' = \mathrm{e}^{3x} f'''(\mathrm{e}^x) + 3\mathrm{e}^{2x} f''(\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x)$.

7. 设$y = x\ln x$, 求$y'(1)$, $y''(1)$

解 $y' = \ln x + 1$, $y'' = \frac{1}{x}$.

故$y'(1)=1$, $y''(1)=1$.

8. 求下列函数的n阶导数的一般表达式:

(1) $y=\sin^2 x$;　　(2) $y=(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}$;

(3) $y=\frac{1}{1-x^2}$.

解 (1) $y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$, 利用公式

$$(\sin ax)^{(n)} = a^x\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$y^{(n)}=(\sin 2x)^{(n-1)}=2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right).$$

另解: $y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$,

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\right)^{(n)}=\frac{-1}{2}(\cos 2x)^{(n)}$$

$$=-\frac{1}{2}\bullet 2^n\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)=-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

(2 $y^{(n)}=(-1)^n(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}+2(-1)^{n-1}(x+1)\mathrm{e}^{-x}\cdot n$

$$+(-1)^{n-2}n(n-1)\mathrm{e}^{-x}$$

$$=(-1)^n\mathrm{e}^{-x}[x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)].$$

(3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}\right]$,利用公式

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=(-1)^n n!(x+a)^{-n-1}, \tag{*}$$

得

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[n!(-1)^n(1+x)^{-n-1}+n!(-1)^n(1-x)^{-n-1}(-1)^n]$$

$$=\frac{n!}{2}\frac{(x+1)^{n+1}-(x-1)^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}}.$$

注意 易犯的错误是:

(3) $y^{(n)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}\right]^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{2}[(1+x)^{-n-1}+(1-x)^{-n-1}]$.

此解错在求$\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)}$时,直接看成求$\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)}$情况. 事实上,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}=-\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}=-(-1)^n n!(x-1)^{-n-1}=n!(1-x)^{-n-1}.$$

另外,初学者也常用以下方法求$\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^{(n)}$:

$$y'=\frac{2x}{(1-x^2)^2}=\frac{1!}{2}\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(1-x^2)^2},$$

$$y''=2\frac{(1-x^2)^2-x\cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{2(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}=\frac{2!}{2}\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(1-x^2)^3}.$$

所以

$$y^{(n)}=\frac{n!}{2}\cdot\frac{(x+1)^{n+1}-(x-1)^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}}.$$

这种解法中 $y^{(n)}$ 的表达式来得有些突然,有凑答案之嫌.