第九节

闭区间上连续函数的性质

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

（一）最大值最小值定理

定义 对于在区间 I上有定义的函数 $f(x)$,如果有 $x_0 \in I$，使得对于任一 $x \in I$都有

$$f(x) \le f(x_0), \quad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间I上的最大(小)值

例如， $y = 1 + \sin x$，在$[0, 2\pi]$上， $y_{\max} = 2, y_{\min} = 0;$

$y = \operatorname{sgn} x$， 在$(-\infty, +\infty)$上， $y_{\max} = 1, \ y_{\min} = -1;$

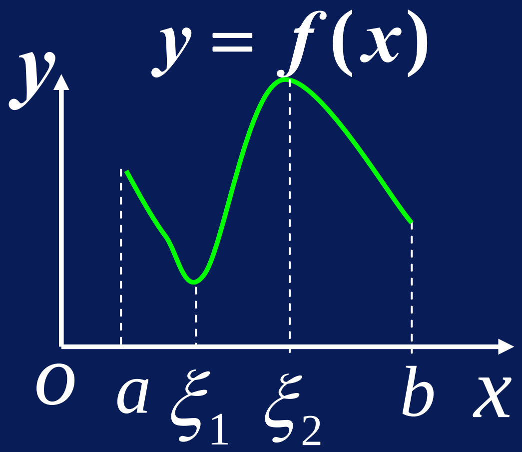
在$(0, +\infty)$上， $y_{\max} = y_{\min} = 1.$

定理1.18（最大值和最小值定理） 在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

即：设 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $\exists\,\xi_1,\xi_2\in[a,b]$,

使得 $\forall x\in[a,b]$, 有

$$f(\xi_1)\le f(x)\le f(\xi_2).$$

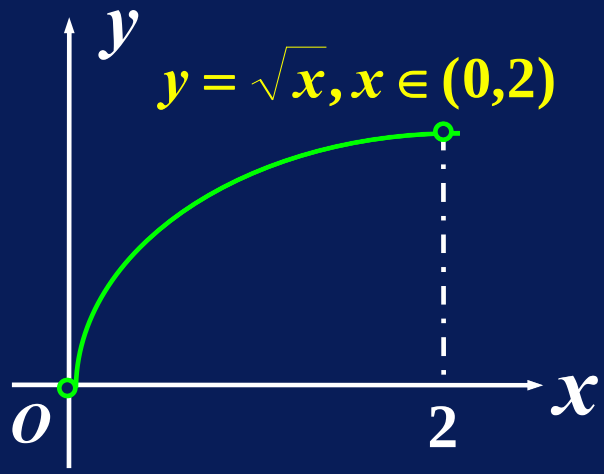


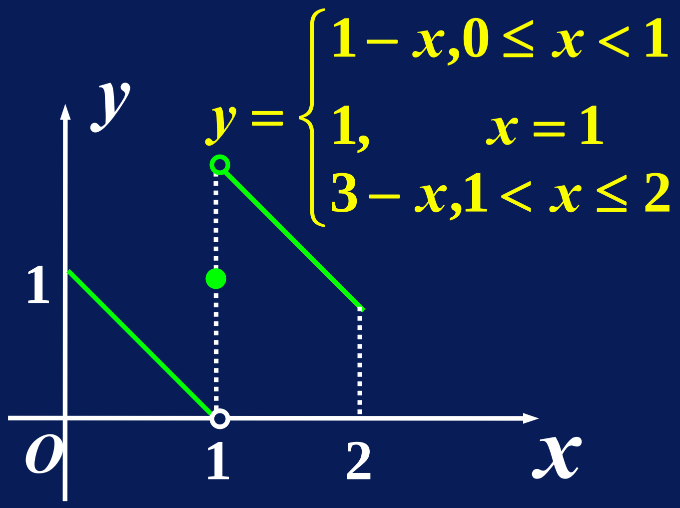
记 $$M=\max_{a\le x\le b} f(x)=f(\xi_2)$$

$$m=\min_{a\le x\le b} f(x)=f(\xi_1).$$

注　1° 若区间是开区间，定理不一定成立；

2° 若区间内有间断点，定理不一定成立.





$f(x)$在$[0, 2]$上无最大值和最小值

推论 (有界性定理)　在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界.

（二）零点定理与介值定理

定义 如果 $f(x_0)=0$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的零点.

定理1.19（零点定理）若 $f(x)\in C[a,b]$, 且 $f(a)f(b)<0$ 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$.

即方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根.

定理1.20（介值定理）设 $f(x)\in C[a,b]$, 且 $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$, 则对介于 A 与 B 之间的任一数 C, 至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=C$.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的一切值.

二、典型例题

例1　证明：若 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在，则 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

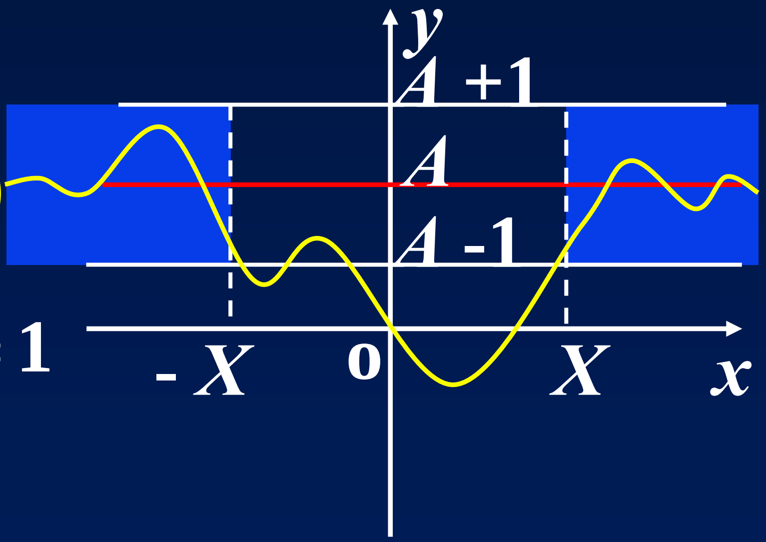
证　$\because$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在，设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，则

对于 $\varepsilon = 1$，$\exists\, X > 0$，使得

当 $|x| > X$ 时，有

$$\big|f(x)\big| - |A| \le \big|f(x) - A\big| < \varepsilon = 1$$

即　$\big|f(x)\big| \le 1 + |A|$



又$\because$ $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续

$\therefore$ $f(x)$在$[-X,X]$上连续，从而在$[-X,X]$上有界

故存在常数 $M_1>0$，使得

$$|f(x)|\le M_1,\quad x\in[-X,X]$$

取 $M=\max\{M_1,1+|A|\}$，则

$\forall\, x\in(-\infty,+\infty)$，均有

$$|f(x)|\le M.$$

即 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

例2 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且恒为正，证明：对任意的$x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，必存在一点$\xi\in[x_1,x_2]$，使 $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

分析 $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)} \Longleftrightarrow f^2(\xi)-f(x_1)f(x_2)=0$

证 令$F(x)=f^2(x)-f(x_1)f(x_2)$

一找函数

则 $F(x)\in C[x_1,x_2]$

二找区间

$$F(x_1) = f^2(x_1) - f(x_1)f(x_2) = f(x_1)[f(x_1) - f(x_2)]$$

$$F(x_2) = f^2(x_2) - f(x_1)f(x_2) = f(x_2)[f(x_2) - f(x_1)]$$

$$F(x_1)F(x_2) = -f(x_1)f(x_2)[f(x_1) - f(x_2)]^2 \le 0$$

当 $f(x_1) = f(x_2)$时,

取 $\xi = x_1$ 或 $\xi = x_2$， 则有 $F(\xi) = 0,$

即 $f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$;

$$\boxed{F(x) = f^2(x) - f(x_1)f(x_2)}$$

当 $f(x_1)\neq f(x_2)$时,

$\because\ f(x)>0,\ \therefore\ F(x_1)F(x_2)<0,$

故由零点定理知, $\exists\,\xi\in(x_1,x_2)$, 使 $F(\xi)=0,$

即 $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}\,.$

$$\boxed{F(x)=f^2(x)-f(x_1)f(x_2)}$$

方法2（用介值定理证）

$f(x)$在$[a,b]$上连续，从而在$[x_1,x_2]$上连续，

所以有最大值M，最小值 m, 即 $m \le f(x) \le M$

于是 $m \le f(x_1) \le M$ $m \le f(x_2) \le M$

$$\Longrightarrow m^2 \le f(x_1)f(x_2) \le M^2$$

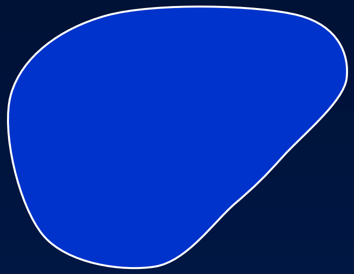
$$\Longrightarrow m \le \sqrt{f(x_1)f(x_2)} \le M$$

由介值定理推论知,

$\exists\ \xi \in [x_1,x_2]$, 使 $f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

三、同步练习

1. 任给一张面积为 A 的纸片(如图)，证明必可将它一刀剪为面积相等的两片.



2. 设 $f(x)\in C[0,2a]$, $f(0)=f(2a)$, 证明至少存在一点 $\xi\in[0,a]$, 使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

3. 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

4. 证明方程 $x = a\sin x + b$ ，其中 $a > 0, b > 0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a + b$.

5. 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a) < a$，$f(b) > b$. 证明$\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = \xi$.

6. 设 $n \in \mathrm{N}^{+}$，函数 $f(x)$在区间$[0,n]$上连续，且

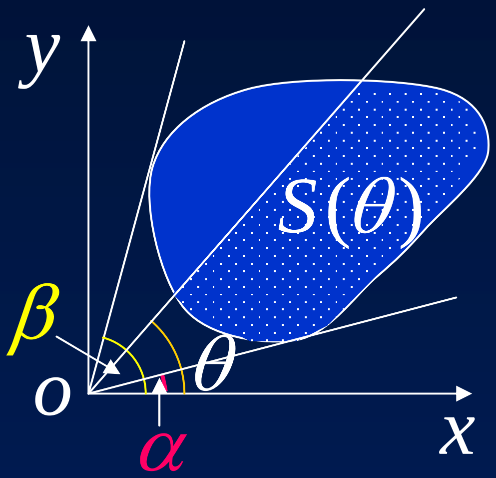
$$f(0) = f(n)$$

证明存在点 $x_0 \in [0,n]$，使 $f(x_0) = f(x_0 + 1)$.

四、同步练习解答

1. 任给一张面积为 A 的纸片(如图)，证明必可将它一刀剪为面积相等的两片.

解 建立坐标系如图.



则面积函数 $S(\theta)\in C[\alpha,\beta]$

因 $S(\alpha)=0,\ S(\beta)=A$

故由介值定理可知:

$$\exists\theta_0\in(\alpha,\beta),\ 使\ S(\theta_0)=\frac{A}{2}.$$

2. 设 $f(x)\in C[0,2a]$, $f(0)=f(2a)$, 证明至少存在一点 $\xi\in[0,a]$, 使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

解 令 $\varphi(x)=f(x+a)-f(x)$,

则 $\varphi(x)\in C[0,a]$, 由$f(0)=f(2a)$可得,

$$\varphi(0)\varphi(a)=(f(a)-f(0))\cdot(f(2a)-f(a))$$

$$=-(f(a)-f(0))^2\le 0$$

若$\varphi(0)\varphi(a)=0$ 则$\xi=0$, 或$\xi=a$.

若$\varphi(0)\varphi(a)<0$, 则由零点定理可知，存在$\xi\in(0,a)$,

使得$\varphi(\xi)=0$,即$f(\xi)=f(\xi+a)$.

3. 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证 显然 $f(x)=x^3-4x^2+1\in C[0,1]$, 又

$$f(0)=1>0,\quad f(1)=-2<0$$

故据零点定理, 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$f(\xi)=0.$$

即方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$内至少有一个根.

4. 证明方程 $x = a\sin x + b$，其中 $a>0, b>0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

证 令 $f(x) = x - (a\sin x + b), x \in [0, a+b]$

则 $f(x)$在 $[0, a+b]$ 上连续，且

$$f(0) = -b < 0, \quad f(a+b) = a[1-\sin(a+b)] \geq 0$$

1° 若 $\sin(a+b) = 1$, 则 $f(a+b) = 0$

$x = a+b$为所给方程的根 .

2° 若 $\sin(a+b) < 1$, 则 $f(a+b) > 0$,

$$f(0)f(a+b) < 0$$

由零点定理，知 $\exists\, \xi \in (0, a+b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

5. 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$，$f(b)>b$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证 令$F(x)=f(x)-x$， 则$F(x)$在$[a,b]$上连续，

而 $F(a)=f(a)-a<0$，

$F(b)=f(b)-b>0$，

由零点定理，

$\exists\xi\in(a,b)$， 使 $F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$，

即 $f(\xi)=\xi$.

6. 设 $n \in \mathrm{N}^+$，函数 $f(x)$在区间$[0,n]$上连续，且

$$f(0)=f(n)$$

证明存在点 $x_0 \in [0,n]$，使 $f(x_0)=f(x_0+1)$.

证　1° 当 $n=1$ 时，

由条件　$f(0)=f(1)=f(0+1)$

知 $\exists\, x_0 = 0 \in [0,n]$，使 $f(x_0)=f(x_0+1)$.

2° 当 $n \geq 2$ 时，令

$$F(x)=f(x)-f(x+1),\quad x\in[0,n-1]$$

则$F(x)$在$[\,0,n-1]$上连续.

方法1 (用反证法)

假设: $\forall\ x \in [0, n-1]$, 有 $F(x) = f(x) - f(x+1) \neq 0$,

则 $F(0) = f(0) - f(1) \neq 0$,

不妨设 $F(0) = f(0) - f(1) > 0$, $f(0) > f(1)$

$\because$ $F(x)$在$[0, n-1]$上连续,

$\therefore$ 可以断定: $F(x) > 0, x \in (0, n-1]$.

否则，若$\exists\, x^* \in (0, n-1]$, 使 $F(x^*) < 0$, 则在 $[0, x^*](\subseteq [0, n-1])$上对$F(x)$用零点定理，得知$\exists\, x_1 \in (0, x^*)$, 使 $F(x_1) = 0$, 这与假设矛盾.

从而 $F(1) > 0,$ $f(1) > f(2)$

$F(2) > 0,$ $f(2) > f(3)$

$\cdots\cdots$

$F(n-1) > 0,$ $f(n-1) > f(n)$

故 $f(1) > f(n)$, 这与题设条件 $f(0) = f(n)$ 矛盾!

方法2 $F(x) = f(x) - f(x+1),\quad x \in [0, n-1]$

$\because$ $F(0) = f(0) - f(1)$

$F(1) = f(1) - f(2)$

$\vdots$

$F(n-1) = f(n-1) - f(n)$

$\therefore \quad F(0)+F(1)+\cdots+F(n-1)=f(0)-f(n)=0$

从而要么 $F(0)=F(1)=\cdots=F(n-1)=0$

此时，命题成立;

要么 $F(0),F(1),\cdots,F(n-1)$中至少有两项异号，

不妨设 $F(i)F(j)<0$，其中 $0\le i<j\le n-1$，

则由零点定理，知 $\exists\, x_0\in[i,j]\subseteq[0,n-1]\subset[0,n]$，

使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=f(x_0+1)$.