第五节　函数展开成幂级数

习题　11-5

1. 将下列函数展开成 x 的幂级数:

(1) $a^x (a>0)$;　　(2) $\frac{1}{a-x}\ (a\neq 0)$;

(3) $\sin(x+\frac{\pi}{4})$;　　(4) $\ln(a+x)$;

(5) $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$;　　(6) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(7) $\frac{1}{x^2-3x+2}$;　　(8) $\sin^2 x$;

(9) $\frac{1}{(1+x)^2}$;　　(10) $\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx$.

解　(1) $a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) $\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{x}{a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}},\quad |x|<|a|$.

(3) $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}],\ -\infty<x<+\infty$.

(4) $\ln(a+x)=\ln[a(1+\frac{x}{a})]=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{x^n}{a^n},\quad x\in(-a,a]$.

(5) $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}[1-(-1)^n]\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

$x\in(-\infty,+\infty)$.

(6) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{4}x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}\{1+(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{4}x^2)+\frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{4}x^2)^2$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)(-\frac{1}{4}x^2)^n+\cdots\}$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^{n+1}}x^{2n},\quad x\in(-2,2).$$

(7) $$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n,\quad x\in(-1,1).$$

(8) $$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}[1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},$$

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

(9) $$\frac{1}{(1+x)^2}=(-\frac{1}{1+x})'=(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n,$$

$$x\in(-1,1).$$

(10) $$\int_0^x\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^x\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\int_0^x x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

2. 将 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x})$ 展开成 x 的幂级数，并推出 $1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1}{x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!})=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n!},\quad x\neq 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x})\Big|_{x=1}=1.$$

3. 将下列函数在指定点处展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数:

(1) $\ln x$, $x_0=1$;　　　　(2) $\frac{1}{x}$, $x_0=3$;

(3) $\cos x$， $x_0=-\dfrac{\pi}{3}$； (4) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$， $x_0=-1$；

(5) $\dfrac{1}{x^2}$， $x_0=1$； (6) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$， $x_0=0$．

解 (1) 令 $t=x-1$，则 $\ln x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$, $x\in(0,2]$．

(2) 令 $t=x-3$，则 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{t+3}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+\dfrac{t}{3}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^n}{3^{n+1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-3)^n}{3^{n+1}}$，

$x\in(0,6)$．

(3) 令 $t=x+\dfrac{\pi}{3}$，则

$$\cos x=\cos(t-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\cos t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{(2n)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}], \qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) 令 $t=x+1$，则

$$\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-3)(x-1)}=\frac{1}{(t-4)(t-2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{t-4}-\frac{1}{t-2}]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2-t}-\frac{1}{4-t}]=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{t}{2}}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{t}{4}}]=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{4^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}})t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}})(x+1)^n, \quad x\in(-3,1).$$

(5) 令 $t=x-1$，则

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(t+1)^2}=(-\frac{1}{t+1})'=(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nt^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(x-1)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n, \quad x\in(0,2).$$

注意 求函数的泰勒级数时，往往通过变量代换转为求函数的麦克劳林级数较方便.

(6) 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则

$f'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= 1 + (-\frac{1}{2})x^2 + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(x^2)^2 \quad + \cdots + \frac{1}{n!}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)(x^2)^n + \cdots\}$

$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$，从而

$$f(x) = \int_0^x f'(x)dx = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}, \quad x \in [-1,1].$$

4. 设函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-R < x < R)$，试证:

(1) 当 $f(x)$ 为奇函数时，必有 $a_{2k} = 0(k = 0,1,2,\cdots)$；

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时，必有 $a_{2k+1} = 0(k = 0,1,2,\cdots)$.

证 (1) 由题得 $-R < x < R$时，$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n x^n$，故 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^{n+1} x^n$，所以由函数幂级数展式的唯一性知 $a_n(-1)^{n+1} = a_n (n = 0,1,2,\cdots)$，因此当 $n = 2k(k = 0,1,2,\cdots)$ 时，$a_{2k} = 0(k = 0,1,2,\cdots)$.

(2) 由题知当 $-R < x < R$ 时，$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n x^n$，从而 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n x^n$，故由函数的幂级数展式的唯一性知 $a_n(-1)^n = a_n (n = 0,1,2,\cdots)$，因此当 $n = 2k+1(k = 0,1,2,\cdots)$ 时，$a_{2k+1} = 0(k = 0,1,2,\cdots)$.

5. 利用幂级数展开式的唯一性，求函数 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数.

解 显然当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时，$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$，故由幂级数展开式的唯一性知 $f^{(2n)}(0) = (2n)! a_{2n} = (2n)! \frac{(-1)^n}{n!}$，$f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)! a_{2n+1} = 0$，即

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases} 0, & n=1,3,5,\cdots, \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}n!}{(\frac{n}{2})!}, & n=0,2,4,\cdots. \end{cases}$$