第五节

可降阶高阶微分方程

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

令 $z=y^{(n-1)}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y^{(n)}=f(x)$, 因此

$$z=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1$$

即
$$y^{(n-1)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C_1$$

同理可得
$$y^{(n-2)}=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{d}x+C_2$$

$$=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+C_1x+C_2$$

依次通过 n 次积分, 可得含 n 个任意常数的通解 .

(二) $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

设 $y' = p(x)$, 则 $y'' = p'$, 原方程化为一阶方程

$$p' = f(x, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$

则得 $y' = \varphi(x, C_1)$

再一次积分, 得原方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2$$

(三) $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故方程化为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$

设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

二、典型例题

例1 求微分方程 $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$ 满足初始条件

$$y\big|_{x=0} = 1,\ y'\big|_{x=0} = 2 \text{的特解}.$$

解 (方法1) 对方程两端积分，得

$$y' = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + C_1 = \arctan x + C_1,$$

由条件 $y'\big|_{x=0} = 2$ 得，$C_1 = 2.$

所以 $y' = \arctan x + 2.$ 两端再积分，得

$$y = \int [\arctan x + 2]\,\mathrm{d}x + C_2$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 2x + C_2,$$

将初始条件代入，得 $C_2 = 1.$

故所求特解为

$$y = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 2x + 1.$$

(方法2) 对方程两端在区间 $[0,\ x]$上取积分，

$$\int_0^x y''(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

得 $$y'(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+y'(0)$$

$$=\arctan x+2$$

再取积分，得所求特解

$$y(x)=\int_0^x[\arctan x+2]\mathrm{d}x+y(0)$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+2x+1.$$

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例2 求解 $(1-x^2)y''-xy'=0,$

$$y(0)=0,\ y'(0)=1;$$

解 方程中不出现 y， 属于 $y''=f(x,y')$型，

设 $y'=p$, 则 $y''=p'$,

可分离变量方程

代入方程有 $(1-x^2)p'=xp$

分离变量得 $$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

两边积分得 $$\ln p=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+\ln C_1$$

即 $p = \dfrac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}$

代入初始条件 $y'(0)=1$, 得 $C_1 = 1.$

所以 $y' = p = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

两边积分得 $y = \arcsin x + C_2$

代入初始条件 $y(0)=0$, 得 $C_2 = 0.$

故所求特解为 $y = \arcsin x.$

例3 设$u=u(\sqrt{x^2+y^2})$有连续的二阶偏导数,且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2,$$试求u.

解 令$r=\sqrt{x^2+y^2}$,则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

由x,y的轮换对称性得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

代入方程 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$$

得 $$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d} r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d} u}{\mathrm{d} r}=r^2$$

令 $p=\frac{\mathrm{d} u}{\mathrm{d} r}$, 则 $p'=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d} r^2}$,

上方程化为 $$\frac{\mathrm{d} p}{\mathrm{d} r}+\frac{1}{r}p=r^2$$

$$p=e^{-\int\frac{1}{r}\mathrm{d}r}[\int r^2 e^{\int\frac{1}{r}\mathrm{d}r}\mathrm{d}r+C_1]=\frac{1}{r}[\frac{1}{4}r^4+C_1]$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = p = \frac{1}{r}[\frac{1}{4}r^4 + C_1] = \frac{1}{4}r^3 + C_1\frac{1}{r}$$

积分得

$$u = \frac{1}{16}r^4 + C_1 \ln r + C_2$$

$$= \frac{1}{16}(x^2 + y^2)^2 + C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2$$

(C_1, C_2为任意常数)

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例4 求解 $yy'' - y'^2 = 0$.

解 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

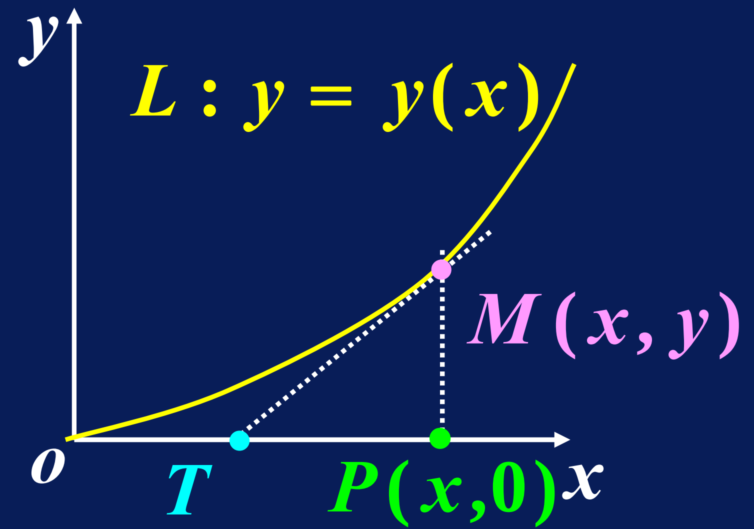
代入方程得 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$, 即 $\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$

两端积分得 $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$, 即 $p = C_1 y$,

$\therefore \quad y' = C_1 y$ 一阶齐次线性方程

故所求通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$.

例5 一平面曲线经过原点 O，其上任一点 M处的切线与横轴交于 T，由点M向横轴作垂线，垂足为 P,已知三角形 MTP 的面积与曲边三角形 OMP的面积成正比（比例系 数$k > \frac{1}{2}$)，求此曲线的方程.



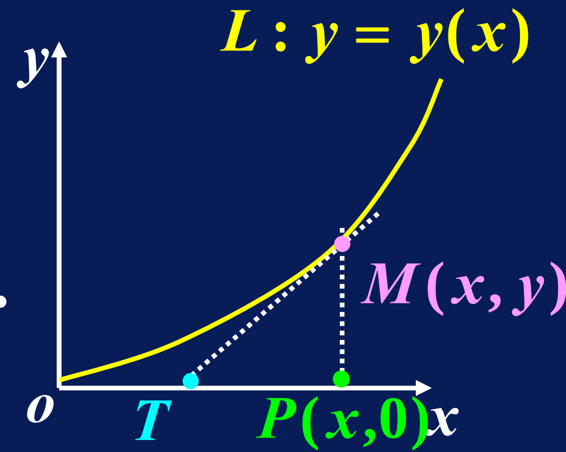
解 设所求曲线 L 的方程为 $y = y(x)$ (如图)

那么，$y(0) = 0$, 且 L 上任意点 $M(x, y)$处的切线 MT 的方程为 $Y - y = y'(x)(X - x)$.

$$Y - y = y'(x)(X - x)$$

令$Y = 0$，得到切线与 x 轴交点 T的横坐标

$$X = x - \frac{y}{y'}.$$



因此，点 T的坐标为 $\left(x - \dfrac{y}{y'}, 0\right)$.

依题意，三角形 MTP的面积是曲边三角形 OMP面积的k倍. 即

$$\frac{1}{2}\left[x - \left(x - \frac{y}{y'}\right)\right]y = k\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\frac{y^2}{2y'} = k\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$$

方程两端对 x 求导数，得 $\dfrac{2yy'^2 - y^2y''}{2(y')^2} = ky,$

消去 y（$y = 0$ 不合题意）

故所求曲线满足的微分方程

$$(2-2k)y'^2 = yy''$$

这是$y'' = f(y, y')$型的可降阶方程，

$$(2-2k)y'^2 = yy'' \qquad (1)$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,

代入方程(1), 得 $(2-2k)p^2 = yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,

消去p（$p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$不合题意），分离变量并积分

$$(2-2k)\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int\frac{\mathrm{d}p}{p},$$

得 $(2-2k)\ln|y| = \ln|p| - \ln|C|$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = Cy^{2-2k},$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

于是 $\quad y^{2k-2}\,\mathrm{d}y = C\,\mathrm{d}x,$

$$y^{2k-1} = C_1 x + C_2$$

$\left(\text{其中 } C_1 = (2k-1)C\right).$

由条件 $y(0)=0$，得 $C_2 = 0$，故所求曲线的方程为

$$y^{2k-1} = C_1 x \qquad \left(k > \frac{1}{2}\right).$$

三、同步练习

1. 求解 $y''' = e^{2x} - \cos x$.

2. 质量为 m 的质点受力F 的作用沿 ox 轴作直线运动，设力 F 仅是时间 t 的函数: $F = F(t)$. 在开始时刻 $t = 0$ 时 $F(0) = F_0$, 随着时间的增大，此力 F 均匀地减小，直到 $t = T$ 时 $F(T) = 0$. 如果开始时质点在原点，且初始速度为0，求质点的运动规律.

3. 求 $y'' \tan x = y' + 5$ 的通解 .

4. 求解 $\begin{cases} (1+x^2)y'' = 2xy' \\ y\big|_{x=0} = 1,\ y'\big|_{x=0} = 3 \end{cases}$

5. 求微分方程 $y'' + 2x(y')^2 = 0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 1, y'\big|_{x=0} = -\frac{1}{2}$ 的特解 .

6. 设物体 A 从点 $(0, 1)$ 出发, 以大小为常数 v 的速度沿 y 轴正向运动, 物体 B 从 $(-1, 0)$ 出发, 速度大小为 $2v$, 方向指向 A , 试建立物体 B 的运动轨迹应满足的微分方程及初始条件.

7. 求微分方程 $1+yy''+y'^2=0$的通解 .

8. 求微分方程 $y''=(y')^3+y'$的通解 .

9. 解初值问题 $\begin{cases} y''-e^{2y}=0 \\ y\big|_{x=0}=0,\ y'\big|_{x=0}=1 \end{cases}$

10. 求解 : $y''=\sin y\cos y,\ y(0)=\dfrac{\pi}{2},\ y'(0)=-1.$

11. (悬链线问题) 设有一质量均匀的柔软绳索, 两端固定, 绳索仅受重力作用而下垂, 求该绳索在平衡状态下所呈曲线 的方程.

12. 设函数 $y(x)\,(x\ge 0)$ 二阶可导, 且 $y'(x)>0$, $y(0)=1$, 过曲线 $y=y(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴围成的三角形面积记为 S_1, 区间$[\,0,x\,]$上以 $y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2, 且 $2S_1-S_2\equiv 1$, 求 $y=y(x)$ 满足的方程. (99 考研)

四、同步练习解答

1. 求解 $y''' = e^{2x} - \cos x$.

解 $y'' = \int \left(e^{2x} - \cos x\right) dx + C_1'$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} - \sin x + C_1'$$

$$y' = \frac{1}{4} e^{2x} + \cos x + C_1' x + C_2$$

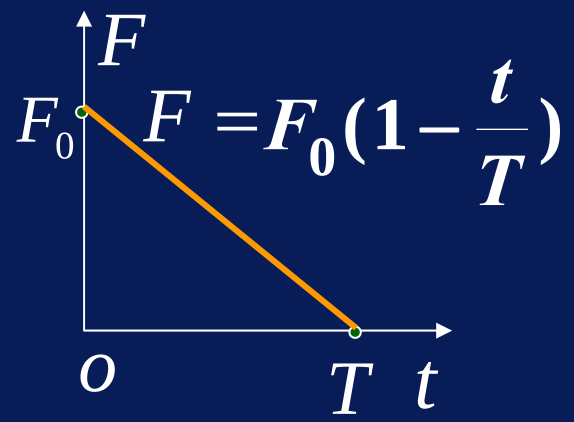
$$y = \frac{1}{8} e^{2x} + \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

(此处 $C_1 = \frac{1}{2} C_1'$)

2. 质量为 m 的质点受力F 的作用沿 ox 轴作直线运动，设力 F 仅是时间 t 的函数: $F = F(t)$. 在开始时刻 $t=0$ 时 $F(0)=F_0$, 随着时间的增大，此力 F 均匀地减小，直到 $t=T$ 时 $F(T)=0$. 如果开始时质点在原点，且初始速度为0，求质点的运动规律.

解 据题意有

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F(t) = \dfrac{F_0}{m}\left(1-\dfrac{t}{T}\right) \\ x\Big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$



对方程两边积分，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T})+C_1$$

利用初始条件 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$ 得 $C_1=0$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T})$$

两边再积分得 $x=\frac{F_0}{m}(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6T})+C_2$

再利用 $\left.x\right|_{t=0}=0$ 得 $C_2=0$, 故所求质点运动规律为

$$x=\frac{F_0}{2m}(t^2-\frac{t^3}{3T})$$

3. 求 $y''\tan x = y' + 5$ 的通解 .

解 方程不是含未知函数 y, 属于$y'' = f(x, y')$型.

令 $y' = p$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$.

代入方程得一阶线性方 程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot \tan x = p + 5,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \cot x \cdot p = 5\cot x.$$

那么 $$p = e^{\int \cot x \, \mathrm{d}x}\left[\int 5\cot x e^{-\int \cot x \, \mathrm{d}x} + C_1\right]$$

$$= C_1 \sin x - 5,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 \sin x - 5.$$

故所给方程的通解为

$$y = -C_1 \cos x - 5x + C_2.$$

4. 求解 $\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy' \\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=3\end{cases}$

解 设 $y'=p(x)$, 则 $y''=p'$, 代入方程得

$$(1+x^2)p'=2xp \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln|C_1|$,

即 $p=C_1(1+x^2)$

利用 $y'\big|_{x=0}=3$, 得 $C_1=3$,

于是有 $y'=3(1+x^2)$

$$y' = 3(1 + x^2)$$

两端再积分得

$$y = x^3 + 3x + C_2$$

利用 $y\Big|_{x=0} = 1$,得 $C_2 = 1$,

因此所求特解为

$$y = x^3 + 3x + 1$$

5. 求微分方程 $y'' + 2x(y')^2 = 0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 1, y'\big|_{x=0} = -\frac{1}{2}$ 的特解 .

解 方程不显含未知函数 y.

令 $y' = p$，则 $y'' = p'$，

代入方程，得 $p' + 2xp^2 = 0$.

分离变量并积分

$$-\int \frac{\mathrm{d}\,p}{p^2} = 2x\,\mathrm{d}\,x \qquad (p \neq 0),$$

得 $$\frac{1}{p} = x^2 + C_1.$$

由条件 $y'\Big|_{x=0}=-\dfrac{1}{2},$ 得 $C_1=-2.$

于是 $y'=\dfrac{1}{x^2-2},$

$$y=\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C_2.$$

再由条件 $y\big|_{x=0}=1,$ 得 $C_2=1.$

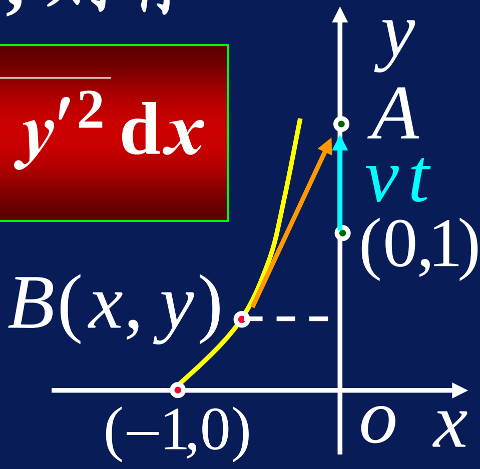
故所求特解为 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+1.$

6. 设物体 A 从点(0, 1)出发, 以大小为常数 v 的速度沿 y 轴正向运动, 物体 B 从 (–1, 0) 出发, 速度大小为 $2v$, 方向指向A , 试建立物体 B 的运动轨迹应满足的微分方程及初始条件.

解 设 t 时刻 B 位于 (x, y), 如图所示, 则有

$$y' = \frac{1 + vt - y}{-x}$$

$$\boxed{s = \int_{-1}^{x} \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x}$$

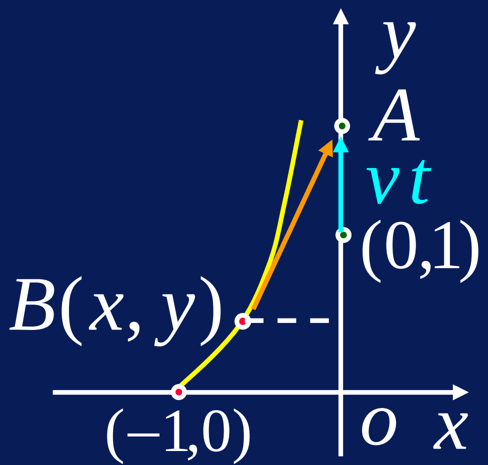


去分母后两边对 x 求导, 得

$$x \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -v \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \qquad ①$$

又由于 $2v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-1}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+y'^2}\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2v}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$



代入 ① 式得所求微分方程:

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+y'^2}=0$$

其初始条件为

$$y\big|_{x=-1}=0,\ \ y'\big|_{x=-1}=1$$

7. 求微分方程 $1+yy''+y'^2=0$的通解 .

解 此方程不显含变量 x. 令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$,

则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入方程得

$$1+yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0,$$

分离变量并积分

$$\int\frac{p\,\mathrm{d}p}{1+p^2}=-\int\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

得 $\frac{1}{2}\ln\left|1+p^2\right| = -\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|C_1|$, $(1+p^2)y^2 = C_1$,

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = \pm\frac{\sqrt{C_1 - y^2}}{y}.$$

分离变量 $$\pm\frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1 - y^2}} = \mathrm{d}x,$$

两边积分，得 $\mp\sqrt{C_1 - y^2} = x + C_2$.

故所给方程的通解为 $(x+C_2)^2 + y^2 = C_1$.

8. 求微分方程 $y'' = (y')^3 + y'$的通解 .

解 方程即不显含 x,也不显含 y

故既属于 $y'' = f(x, y')$型方程,

也属于 $y'' = f(y, y')$型方程 .

若看成 $y'' = f(y, y')$型方程,

则 设 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$, $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,

方程化为 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p^3 + p$.

方程即不显含 x, 也不显含 y

分离变量，并积分 $\int \frac{\mathrm{d}\,p}{p(p^2+1)} = \int \mathrm{d}\,x$得

$$\ln\left|\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\right| = x + \ln|C|,\quad \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = Ce^x,$$

即 $\frac{y'}{\sqrt{y'^2+1}} = Ce^x$，解此一阶方程较困难 .

若看成$y'' = f(y, y')$型方程,

则设 $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = p$, $\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2} = p\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y}$,

所给方程化为 $p\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y} = p^3 + p$,

$p = 0$时, $y = C$; $p \neq 0$时, $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2 + 1.$

分离变量并积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}p}{p^2+1} = \int \mathrm{d}y$得

$$\arctan p = y + C_1, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = \tan(y + C_1).$$

并分离变量 $\cot(y + C_1)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x,$

积分得所给方程的通解

$$\ln|\sin(y + C_1)| = x + \ln|C_2|,$$

即 $\sin(y + C_1) = C_2 e^x.$

9. 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0\,,\ y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解 令 $y' = p(y)$,

则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入方程得

$$p\,\mathrm{d}p = e^{2y}\,\mathrm{d}y$$

积分得 $\dfrac{1}{2}p^2 = \dfrac{1}{2}e^{2y} + C_1$

利用初始条件, 得 $C_1 = 0$,

$$\therefore \quad \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y}$$

根据 $p\big|_{y=0} = y'\big|_{x=0} = 1 > 0,$

得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = e^y$

积分得 $-e^{-y} = x + C_2,$

再由 $y\big|_{x=0} = 0,$ 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $1 - e^{-y} = x$

10. 求解 ：$y'' = \sin y \cos y,\ y(0) = \frac{\pi}{2}, y'(0) = -1.$

解 方程中不出现 x，属于 $y'' = f(y, y')$型，

故令 $y' = p$， 则 $y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，

代入方程得 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \sin y \cos y$

分离变量 $p\,\mathrm{d}p = \sin y \cos y\,\mathrm{d}y$

两边积分得 $\frac{1}{2}P^2 = \frac{1}{2}\sin^2 y + \frac{1}{2}C_1$

即 $$p^2 = \sin^2 y + C_1$$

代入初始条件 $p(0) = y'(0) = -1,$

得 $$C_1 = 0$$

所以 $$p^2 = \sin^2 y$$

即 $$p = \pm \sin y$$

又由初始条件 $y(0) = \dfrac{\pi}{2}, y'(0) = -1$知,

要使上式满足初始条件 ,

上式只能取负号, 故 $y' = p = -\sin y$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

分离变量得 $$\frac{\mathrm{d}\,y}{\sin\,y}=-\mathrm{d}\,x$$

两边积分得 $$\ln\left|\tan\frac{y}{2}\right|=-x+C_2$$

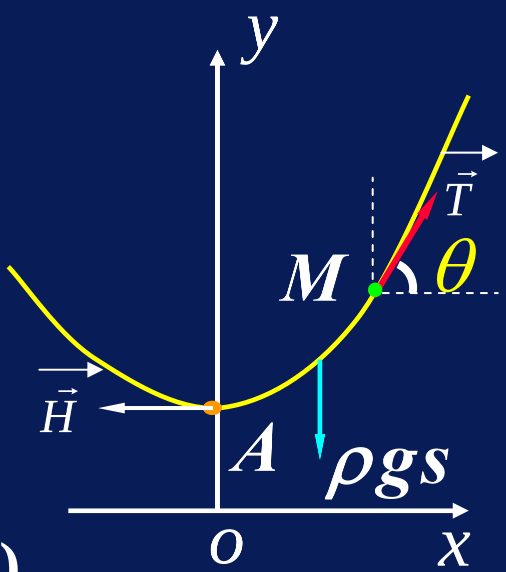
代入初始条件 $y(0)=\dfrac{\pi}{2}$，得 $C_2=0$

故所求特解为

$$x=-\ln\left|\tan\frac{y}{2}\right|=-\ln\left|\csc x-\cot x\right|$$

11. (悬链线问题) 设有一质量均匀的柔软绳索，两端固定，绳索仅受重力作用而下垂，求该绳索在平衡状态下所呈曲线 的方程.

解 取坐标系如图.考察最低点 A 到任意点$M(x, y)$ 弧段的受力情况:



A 点受水平张力 $\vec{H}$

M 点受切向张力$\vec{T}$

弧段重力大小 $\rho g s$ （ρ：密度，s：弧长）

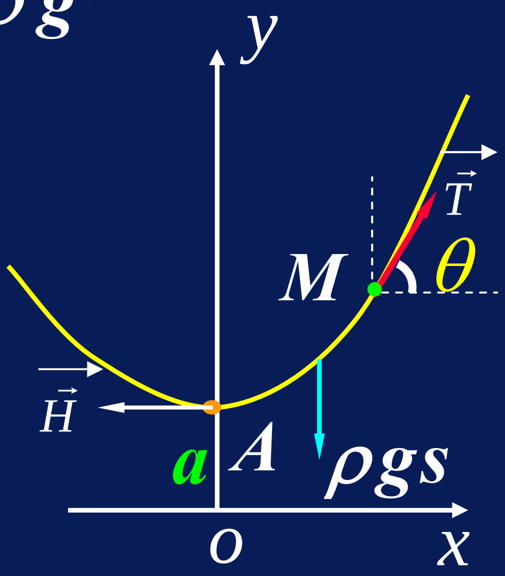
按静力平衡条件，有

$$T\cos\theta = H\ ,\ T\sin\theta = \rho g s$$

两式相除得 $\quad \tan\theta = \frac{1}{a}s \quad (a = H/\rho g)$

故有 $\quad y' = \frac{1}{a}\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

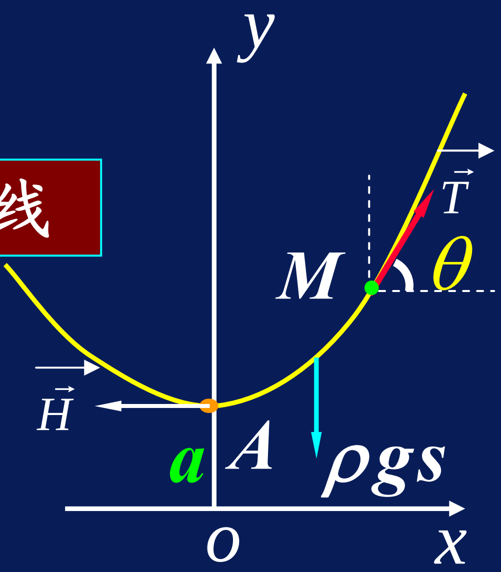
两边对x求导得 $\quad y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$



设 $|OA| = a$, 则得定解问题:

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2} \\ y\big|_{x=0} = a,\ \ y'\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

令 $y' = p(x)$，则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，



原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}} = \dfrac{1}{a}\mathrm{d}x$

两端积分得 $\mathrm{Arsh}\, p = \dfrac{x}{a} + C_1$，由 $y'\big|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = 0$，

则有 $y' = \mathrm{sh}\dfrac{x}{a}$

$\mathrm{Arsh}\, p = \ln(p + \sqrt{1+p^2})$

两端积分得 $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a} + C_2$，由 $y\big|_{x=0} = a$，得 $C_2 = 0$

故所求绳索的形状为 $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$

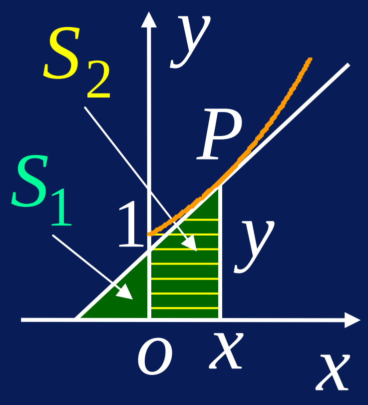
12. 设函数 $y(x)\,(x \ge 0)$ 二阶可导，且 $y'(x) > 0$, $y(0) = 1$, 过曲线 $y = y(x)$ 上任一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴围成的三角形面积记为 S_1，区间 $[0, x]$ 上以 $y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，且 $2S_1 - S_2 \equiv 1$, 求 $y = y(x)$ 满足的方程．（99 考研）

解 因为 $y(0) = 1$, $y'(x) > 0$, 所以 $y(x) > 0\ (x > 0)$.

设曲线 $y = y(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的切线倾角为 α,

于是 $S_1 = \frac{1}{2} y^2 \cot\alpha = \frac{y^2}{2y'}$

$$S_2 = \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$$



利用 $2S_1 - S_2 = 1$，得

$$\frac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

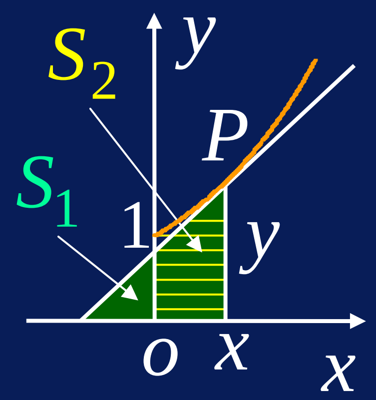
两边对 x 求导，得 $\frac{2yy' \cdot y' - y^2 y''}{y'} - y = 0$

即 $yy'' = (y')^2$

$$yy'' = (y')^2$$

定解条件为 $y(0)=1,\quad y'(0)=1$

令 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，方程化为



$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2,\quad 即\quad \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

解得 $p = C_1 y$, 利用定解条件得 $C_1 = 1$,

再解 $y' = y$，得 $y = C_2 e^x$,

再利用 $y(0) = 1$ 得 $C_2 = 1$,

故所求曲线方程为 $y = e^x$.