第五章　定积分

第一节　定积分的概念及性质

习题　5-1

1. 利用定积分的定义计算由曲线 $y = x^2 + 1$ 和直线 $x = 1$、$x = 3$ 及 x 轴所围成的图形的面积.

解　所求的面积为

$$S = \int_1^3 (x^2 + 1)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + 1) \qquad (\lambda = \max\{\Delta x_1,\ \Delta x_2 \cdots \Delta x_n\})$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [(1 + \frac{2}{n} i)^2 + 1] \cdot \frac{2}{n} \qquad (\text{其中 } \xi_i = 1 + \frac{3-1}{n} i,\ \Delta x_i = \frac{3-1}{n})$$

$$= 2 \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \{[(1 + \frac{2}{n})^2 + 1] + [(1 + \frac{2}{n} \cdot 2)^2 + 1] + \cdots + [(1 + \frac{2}{n} \cdot n)^2 + 1]\}$$

$$= 2 \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} [n + \frac{4}{n}(1 + 2 + \cdots n) + \frac{4}{n^2}(1^2 + 2^2 + \cdots n^2) + n]$$

$$= 2 \lim_{n \to \infty} [2 + \frac{2(n+1)}{n} + \frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^2}]$$

$$= 2(2 + 2 + \frac{4}{3}) = \frac{32}{3}.$$

2. 利用定积分的定义计算下列定积分:

(1) $\int_0^2 x^2 \mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

解　(1) $\int_0^2 x^2 \mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} \qquad (\text{其中 } \xi_i = \frac{i}{n},\ \Delta x_i = \frac{1}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=\frac{1}{3}.$$

(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\xi_i}\Delta x_i$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\qquad (其中\ \xi_i=\frac{i}{n},\ \Delta x_i=\frac{1}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\cdots+\mathrm{e}^{\frac{n}{n}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}[1-(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^n]}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(1-\mathrm{e})}{n(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})}.$$

因为分子: $\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(1-\mathrm{e})=\mathrm{e}^0(1-\mathrm{e})=1-\mathrm{e},$

分母: $\lim_{n\to\infty}n(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$

$$\overset{\text{罗必塔法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}(-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})=-1,$$

所以 $\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(1-\mathrm{e})}{n(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})}=\frac{1-\mathrm{e}}{-1}=\mathrm{e}-1.$

3. 利用定积分的几何意义求下列定积分的值:

(1) $\int_0^1 2x\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$; (4) $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$; (6) $\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$.

解　(1)　$\int_0^1 2x\mathrm{d}x$ 表示直线 $y=2x$、横轴及直线 $x=1$ 所围的面积，显然为 1(如图 5.1 所示)，因此

$$\int_0^1 2x\mathrm{d}x=1$$

(2)　$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$ 表示曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 、 x 轴及 y 轴所围的面积，显然是圆 $x^2+y^2=a^2$ 的面积的 $\frac{1}{4}$ (图 5.2)，因此

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi\cdot a^2=\frac{\pi a^2}{4}.$$

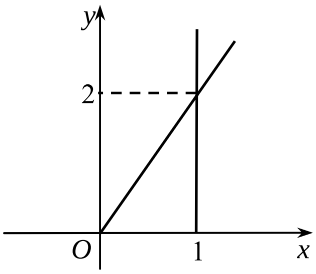

图 5.1

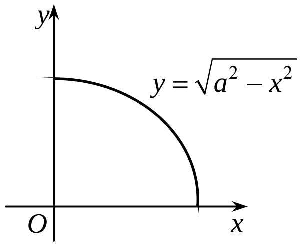

图 5.2

(3)　$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x=0$.

显然由于 $\sin x$ 为奇函数，在关于原点的对称区间 $[-\pi,\pi]$ 上的与横轴区间所夹的面积为零(图 5.3).

(4)　$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x.$

由于 $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$ 表示曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 与 x 轴在 $[-a,a]$ 内围成的面积，又由于 $\sqrt{a^2-x^2}$ 为偶函数，因而 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$ 所围的面积为总面积的一半(图 5.4)，所以

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{2}.$$

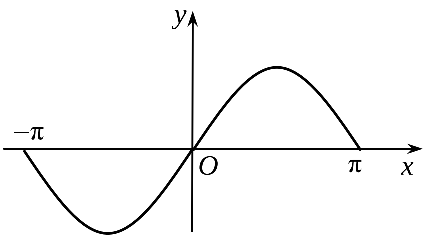

图 5.3

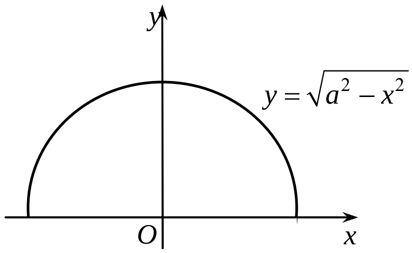

图 5.4

(5) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$ 表示曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 、 x 轴及 $x=1$ 所围的面积，显然是圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的面积的 $\frac{1}{4}$ (图 5.5)，因此

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

(6) $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$ 表示曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与 x 轴所围的面积，显然是圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的面积的 $\frac{1}{2}$ (图 5.6)，因此

$$\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

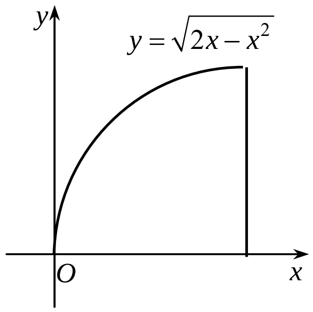

图 5.5

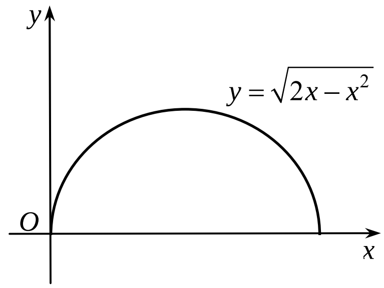

图 5.6

4. 估计下列各定积分的值:

(1) $\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (2+\sin^2 x)\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$.

解 (1) $2\le x^2+1\le 17$ 两边积分

$$2\cdot(4-1)\le\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x\le 17\cdot(4-1),$$

即

$$6\le\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x\le 51.$$

(2) 设 $f(x)=x\arctan x$，则 $f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}$. $f'(x)$ 在 $\left[\frac{1}{3},\sqrt{3}\right]$ 上值为正，所以 $f(x)$ 在该区间上单调递增. 因此最值在两端点取得. 最小值 $m=f(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$，最大值 $M=f(\sqrt{3})=\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$，故

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}})\le\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x\le\frac{\pi}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

即
$$\frac{\pi}{9}\le\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x\le\frac{2\pi}{3}.$$

(3) $2\le 2+\sin^2 x\le 3$ 两边积分

$$2\cdot(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4})\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(2+\sin^2 x)\mathrm{d}x\le 3\cdot(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}),$$

即
$$2\pi\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(2+\sin^2 x)\mathrm{d}x\le 3\pi.$$

(4) $\int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x=-\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$.

设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}(2x-1)$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时 $f'(x)=0$；当 $0\le x<\frac{1}{2}$ 时 $f'(x)<0$；当 $\frac{1}{2}<x\le 2$ 时 $f'(x)>0$，所以最小值 $m=f(\frac{1}{2})=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$. 因为 $f(0)=1<f(2)=\mathrm{e}^2$，所以最大值 $M=\mathrm{e}^2$，故

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\cdot(2-0)\le\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\le\mathrm{e}^2\cdot(2-0),$$

$$-2\mathrm{e}^2\le-\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\le-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}},$$

即
$$-2\mathrm{e}^2\le\int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\le-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}.$$

5. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明

(1) 若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\ge 0$ 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$；

(2) 若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\ge 0$ 且 $f(x)\ne 0$，则在 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$；

(3) 若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\le g(x)$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，则在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv g(x)$.

证 (1) 在 $[a,b]$ 上已知 $f(x)\ge 0$，且要证 $f(x)\equiv 0$ 只需证 $f(x)>0$ 不成立. 用

反证法.

设$\exists \xi \in [a,b]$使 $f(\xi)>0$，因为 $f(x)$ 在$\left[a,b\right]$连续，所以由极限的局部保号性定理，必有含有 ξ 的区间$[c_1,c_2]$存在，使得$[c_1,c_2]$上 $f(x)>0$，从而$\int_{c_1}^{c_2} f(x)\mathrm{d}x>0$.
因为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{c_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，已知

$$\int_a^{c_1} f(x)\mathrm{d}x\ge 0,\ \int_{c_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x\ge 0,$$

所以$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{c_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x\ge\int_{c_1}^{c_2} f(x)\mathrm{d}x>0$，这与$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$矛盾，于是 $f(\xi)>0$不成立，得证.

(2)　因为在$\left[a,b\right]$上，$f(x)\ge 0$，所以$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge 0$，亦即或者$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$，或者$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则由(1)的证明知 $f(x)\equiv 0$，但这与条件 $f(x)\ne 0$相矛盾，故只有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0.$$

(3)　构造函数$F(x)=g(x)-f(x)$，则在$\left[a,b\right]$上$F(x)\ge 0$且

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=0,$$

由(1)的证明知在$\left[a,b\right]$上$F(x)\equiv 0$，即

$$f(x)\equiv g(x).$$

6.　比较下列各对积分的大小:

(1)　$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\mathrm{d}x$与$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\mathrm{d}x$；　　(2)　$\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x$与$\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^2\mathrm{d}x$；

(3)　$\int_0^1 x\mathrm{d}x$与$\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$；　　(4)　$\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x$与$\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}}(\ln x)^2\mathrm{d}x$；

(5)　$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$与$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；　　(6)　$\int_1^3 x^2\mathrm{d}x$与$\int_1^3 x^3\mathrm{d}x$.

解　(1)　由于$x\in[0,\frac{\pi}{4}]$，而当$x\in(0,\frac{\pi}{4})$时，$0<\sin x<1$，则$\sin^4 x<\sin^2 x$.

当$x=0$时，$\sin^4 x=\sin^2 x$，故

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\mathrm{d}x.$$

(2) 由于当 $x\in[1,\mathrm{e}]$，$0<\ln x<1$，因此

$$\ln x>\ln^2 x,$$

故
$$\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x>\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^2\mathrm{d}x.$$

(3) 令 $f(x)=\ln(1+x)-x,\ x\in(0,1)$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0.$$

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 从而 $f(x)=\ln(1+x)-x<f(0)=0$，即

$$\ln(1+x)<x,$$

故
$$\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x<\int_0^1 x\mathrm{d}x.$$

(4) 由于当 $x\in[\mathrm{e},2\mathrm{e}]$，$\ln x\geq\ln\mathrm{e}=1$，因此

$$\ln x<\ln^2 x,$$

故
$$\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x<\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}}(\ln x)^2\mathrm{d}x.$$

(5) 由于当 $x\in[0,1]$，$x^3\leq x^2$，因此

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\geq\int_0^1 x^3\mathrm{d}x,$$

又在 $(0,1)$ 区间上 $x^2>x^3$，故

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x>\int_0^1 x^3\mathrm{d}x.$$

(6) 由于 $x>1$，因此 $x^2<x^3$，故

$$\int_1^3 x^2\mathrm{d}x<\int_1^3 x^3\mathrm{d}x.$$

7. 证明下列不等式:

(1) $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<\sqrt{2}$;　　(2) $\dfrac{1}{2}<\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

(3) $3\mathrm{e}^{-4}<\int_{-1}^{2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<3$;　　(4) $\dfrac{2}{5}<\int_1^2\dfrac{x}{1+x}\mathrm{d}x<\dfrac{1}{2}$.

证 (1) 令 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$，$f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$，$x\in[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

令 $f'(x)=0$得$x=0$ 且 $f(0)=1$, $f(-\frac{1}{\sqrt{2}})=f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，所以 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$

上的最大值$M=f(0)=1$，最小值$m=f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，从而有

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})<\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<1\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}),$$

即
$$\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<\sqrt{2}\,.$$

(2) 令$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，则$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}$.

令$g(x)=x-\tan x,\ g'(x)=1-\sec^2 x=-\tan^2 x<0$，所以$g(x)$在$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上单调减，从而$g(x)=x-\mathrm{tg}x<g(\frac{\pi}{4})-1<0$，故$f'(x)<0$．从而有$f(x)=\frac{\sin x}{x}$在$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上单调减，所以$f(x)=\frac{\sin x}{x}$在$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上的最大值$M=f(\frac{\pi}{4})=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$，最小值$m=f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$，故

$$\frac{1}{2}<\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(3) $f(-1)=\mathrm{e}^{-1},\ f(2)=\mathrm{e}^{-4}$，由(1)可知$f(x)$在$[-1,2]$上的最大值$M=f(0)=1$，最小值$m=f(2)=\mathrm{e}^{-4}$，从而有

$$\mathrm{e}^{-4}(2+1)<\int_{-1}^{2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<1\cdot(2+1),$$

即
$$3\mathrm{e}^{-4}<\int_{-1}^{2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<3.$$

(4) 令$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$，则$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

因为当$x\in[1,2]$时$f'(x)<0$，故$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$在$[1,2]$上单调减．所以，$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$在$[1,2]$上的最大值$M=f(1)=\frac{1}{2}$，最小值$m=f(2)=\frac{2}{5}$，故

$$\frac{2}{5}<\int_{1}^{2}\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x<\frac{1}{2}.$$