第六节 极限存在准则与两个重要极限

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

（一） 极限存在的两个准则

准则1 (夹逼准则) 如果数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$满足

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ (2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

注 1° 利用夹逼准则求数列极限的关键：构造y_n, z_n.

要求： ① y_n, z_n的极限易求；

② $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

2° 数列极限的夹逼准则可以推广到函数的极限:

准则 Ⅰ′ 设函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 满足:

(1) 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, $g(x) \le f(x) \le h(x)$,
$(|x| > X > 0)$

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$

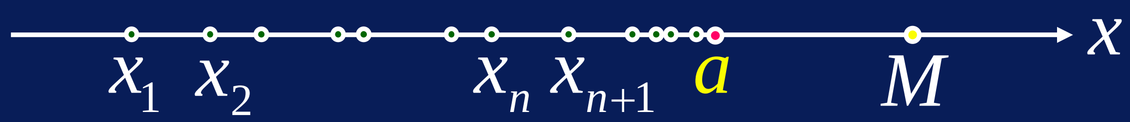
$$\Longrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A.$$

准则 II (单调有界准则) 单调有界数列必有极限.

如果数列 $\{x_n\}$ 满足

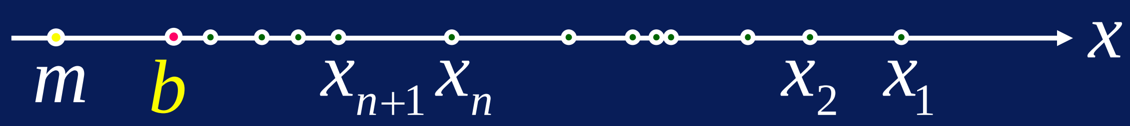
$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots \le M$$ (单调增加有上界)

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \quad (\le M)$$



$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots \ge m$$ (单调减少有下界)

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = b \quad (\ge m)$$



注 函数极限与数列极限关系的应用

——利用数列极限说明函数极限不存在

法1 找一个数列 $\{x_n\}: x_n \neq x_0$, 且 $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$

说明 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在 .

法2 找两个趋于 x_0 的不同数列 $\{x_n\}$ 及 $\{x_n'\}$, 说明

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n')$$

（二） 两个重要极限

$$1.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\sin x < x < \tan x \qquad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

$$2.\quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}$$

e 为无理数，其值为 $\mathrm{e}=2.7182818284\,59045\cdots$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$$ 的证明思路：（分四步）

1° $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e}$ （单调有界准则）

2° $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$ (利用1° 及夹逼准则)

3° $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$ （作变换：$t = -x$）

4° $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$ （极限存在的充要条件）.

注　1°

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

2°

若 $\lim\limits_{x\to \blacksquare}\varphi(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to \blacksquare}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.

或

若 $\lim\limits_{x\to \blacksquare}\psi(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to \blacksquare}\left[1+\dfrac{1}{\psi(x)}\right]^{\psi(x)}=\mathrm{e}$.

3° (1) $\lim\limits_{\blacksquare\to 0}\dfrac{\sin\blacksquare}{\blacksquare}=1$

(2) $\lim\limits_{\blacksquare\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\blacksquare}\right)^{\blacksquare}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{\blacksquare\to 0}(1+\blacksquare)^{\frac{1}{\blacksquare}}=\mathrm{e}$

注 $\blacksquare$ 代表相同的表达式

4° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0,\ \lim\limits_{x\to x_0}v(x)=v_0$

$(u_0>0, v_0$均为实常数 $)$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}=u_0^{v_0}.$

二、典型例题

例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$

证 因为

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}<n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)<\frac{n^2}{n^2+\pi}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1$

由夹逼准则，得

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{2}{x}\right]$，其中 $[x]$是不超过 x的最大整数．

解 $\because \quad \left[\dfrac{2}{x}\right] \le \dfrac{2}{x} < \left[\dfrac{2}{x}\right] + 1 \quad (x \ne 0)$

$$\therefore \quad \frac{2}{x} - 1 < \left[\frac{2}{x}\right] \le \frac{2}{x} \quad (x \ne 0)$$

1° 当$x > 0$时， $2 - x < x\left[\dfrac{2}{x}\right] \le 2 \quad (x > 0)$

$$\because \quad \lim_{x\to 0^+} (2 - x) = 2 = \lim_{x\to 0^+} 2$$

$\therefore$ 由夹逼准则，得 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{2}{x}\right] = 2.$

2° 由不等式 $\dfrac{2}{x} - 1 < \left[\dfrac{2}{x}\right] \le \dfrac{2}{x} \quad (x \ne 0)$ 可得

当 $x < 0$ 时，$2 - x > x\left[\dfrac{2}{x}\right] \ge 2 \quad (x < 0)$

于是，由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to 0^-} x\left[\dfrac{2}{x}\right] = 2$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = A$ 故 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{2}{x}\right] = 2.$

例3 证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ （n重根式）的极限存在.

学会用数学归纳法证明$\{x_n\}$的单调性和有界性.

证 1° 证单调性

$$x_2=\sqrt{3+\sqrt{3}}>\sqrt{3}=x_1$$

假设：$x_k > x_{k-1}$， 则 $x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}>\sqrt{3+x_{k-1}}=x_k$

$\therefore$ $x_{n+1}>x_n$， 即数列$\{x_n\}$单调增加.

2° 证有界性 $\because$ $x_1=\sqrt{3}<3$,

假设：$x_k<3$, 则 $x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3$

$\therefore$ 数列$\{x_n\}$有上界.

$\because \quad \{x_n\}$单调增加且有上界

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

3° 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A.$ $\because \quad x_{n+1} = \sqrt{3+x_n},$

$$x_{n+1}^2 = 3 + x_n, \qquad \lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty}(3+x_n),$$

$A^2 = 3 + A,$ 即 $A^2 - A - 3 = 0$

解得 $A = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, \; A = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)

$\because \quad x_n \geq x_1 = \sqrt{3} > 0$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A > 0$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$. $\dfrac{0}{0}$型

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2.$$

注 由复合函数求极限法则，可知

若 $\lim\limits_{x\to \blacksquare}\varphi(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to \blacksquare}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1.$

例5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$. 1^∞型

解 令 $t=-x$, 则

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{t})^t}=\frac{1}{e}.$$

注 若利用 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}(1+\frac{1}{\varphi(x)})^{\varphi(x)}=e$, 则

$$原式=\lim_{-x\to\infty}\left[1+(\frac{1}{-x})^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$ （1^{∞}型）

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right]^{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}$$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore$ 原式 $=e^{\frac{1}{2}}$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=v_0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}=u_0^{v_0}$.

$(u_0>0, u_0, v_0\in R)$

三、同步练习

1. 设 $x_1 = 1,\ x_{n+1} = -x_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$时的下列推导是否正确?

解 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = -\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

故 $a = -a$ 即 $a = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

2. 在证明数列 $\{x_n\}$有界时，如何找界?

3. 如何证明数列 $\{x_n\}$单调?

4. 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$;

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(3^n+9^n)^{\frac{1}{n}}$.

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

7. 设 $a_i\geq 0\ (i=1,2,\cdots)$, 证明下述数列有极限.

$$x_n=\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

$(n=1,2,\cdots)$

8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

9. 已知圆内接正 n 边形面积为 $A_n = nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \pi R^2$.

10. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$($x$为非零常数).

11. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{x}=6$, 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

12. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x}$.

13. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{2x}$.

14. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x^2}\right)^{x}$.

15. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

16. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

四、同步练习解答

1\. 设 $x_1 = 1,\ x_{n+1} = -x_n\ \ (n = 1, 2, \cdots)$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 时的下列推导是否正确?

解 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = -\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

故 $a = -a$

即 $a = 0,$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

答: 不正确.

事实上,

$$x_n = (-1)^{n+1}$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在!

注意: 在求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$之前, 一定要先证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在。

2. 在证明数列$\{x_n\}$有界时，如何找界?

答 根据命题:

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a(a \in \mathrm{R})$ 且$\{x_n\}$单调增加(单调减少)则必有

$$x_n \le a(n \ge 1);\ (x_n \ge a(n \ge 1);$$

可在证明$\{x_n\}$有界之前，推测$\{x_n\}$的界，再证之.

如，对于数列 $x_1 = \sqrt{a}\quad a > 0,$

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}\quad (n = 1,2,\cdots),$$

易证，$\{x_n\}$单调增加，$x_1 = \sqrt{a} < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$，

$\{x_n\}$的上界？

用倒推法：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则$A > 0$，且

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a + x_n}$$

即$A = \sqrt{a + A}$ 　　亦即 　$A^2 - A - a = 0 \ (A > 0)$

$$A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} < \frac{1 + (1 + 2\sqrt{a})}{2} = 1 + \sqrt{a}$$

推测： $x_n < 1 + \sqrt{a} \quad (n = 1, 2, \cdots)$. 但需证之.

再如：对于数列 $x_1=2$，$x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}(n=1,2,\cdots)$，

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，则在形式上，有

$$A=2-\frac{1}{A}$$

即 $A^2-2A+1=0$，

$$A=1.$$

推测： $\{x_n\}$ 有下界 1，即 $x_n \ge 1$.

但需证之.

3. 如何证明数列 $\{x_n\}$单调?

答: 到目前为止，有以下方法:

数列 $\{x_n\}$单调增

$$\Leftrightarrow x_n \le x_{n+1} \quad (n \ge N) \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} - x_n \ge 0 \quad (n \ge N) \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \ge 1 \quad (x_n > 0, n \ge N) \qquad (3)$$

如，对于数列:$x_1=2$ ，$x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$,

要证明其单调递减，可以用数学归纳法:

$\because$ $x_2=2-\dfrac{1}{x_1}=2-\dfrac{1}{2}<x_1$

假设: $x_n<x_{n-1}$

则 $x_{n+1}-x_n=(2-\dfrac{1}{x_n})-(2-\dfrac{1}{x_{n-1}})=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\underset{+}{x_{n-1}x_n}}<0$

$\therefore x_n$单调递减。

4. 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$；

解 （1）$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{-n})^{-n}]^{-1}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{-n})^{-n}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{t})^t} = e^{-1}$$

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(3^n+9^n)^{\frac{1}{n}}$. ($\infty^0$ 型)

解 $9^n<3^n+9^n<2\cdot 9^n$, 即 $9<\left(3^n+9^n\right)^{\frac{1}{n}}<9\cdot\sqrt[n]{2}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}9=9$, $\lim\limits_{n\to\infty}9\cdot\sqrt[n]{2}=9\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=9\cdot 1=9$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(3^n+9^n)^{\frac{1}{n}}=9$. 一般地，有

$$\lim_{n\to\infty}(a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\},$$

其中 $a_i>0(i=1,2,\cdots,m)$.

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

解 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+n}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+n}=\frac{1}{n^2+n+n}\cdot(1+2+3+\cdots n)$$

$$=\frac{1}{n^2+n+n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2n^2+4n}\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+1}=\frac{1}{n^2+n+1}\cdot(1+2+3+\cdots n)$$

$$=\frac{1}{n^2+n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2n^2+2n+2}\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$$

$\therefore$ 原极限 $=\frac{1}{2}$.

7. 设 $a_i \geq 0\ (i=1,2,\cdots)$, 证明下述数列有极限.

$$x_n = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

证 显然 $x_n \leq x_{n+1}$, 即 $\{x_n\}$ 单调增, 又

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+a_k)-1}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)} = 1 - \frac{1}{1+a_1} +$$

"拆项相消" 法

$$+ \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{k-1})} - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)} \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} < 1$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

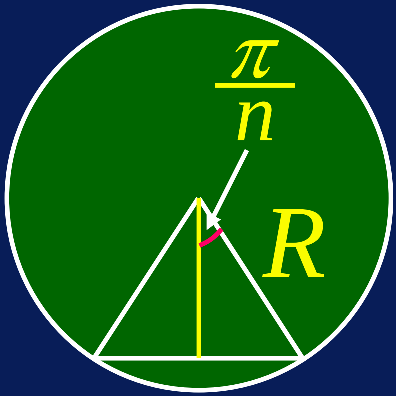
解 令 $t=\arcsin x$, 则 $x=\sin t$,因此

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=1$$

9. 已知圆内接正 n 边形面积为 $A_n=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\pi R^2$.

证 $$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\pi R^2\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cos\frac{\pi}{n}=\pi R^2$$



注 注意利用 $$\boxed{\lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1}$$

10. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$($x$为非零常数).

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}\right)\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

使用n次倍角公式后

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{x}{2^n}}=\sin x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\sin x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\sin x}{x}.$$

11. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{x}=6$, 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 $\because\ \lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{x}\cdot x=6\times 0=0$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+f(x)\sin 2x}=1$

$$\lim_{x\to 0}[1+f(x)\sin 2x]=\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+f(x)\sin 2x})^2=1$$

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\sin 2x=0$

$$\therefore \quad 6 = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + f(x)\sin 2x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{[\cancel{1} + f(x)\sin 2x] \cancel{- 1}}{[\sqrt{1 + f(x)\sin 2x} + 1]} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{[\sqrt{1 + f(x)\sin 2x} + 1]} \cdot 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot f(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x)$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 6.$$

12. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x}$.

1^{∞}型

解 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{3}$$

$$=\mathrm{e}^{3}.$$

13. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{2x}$.

解(方法1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left[\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^2}{\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^4}=\mathrm{e}^2$.

(方法2) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{3+x}{2+x}-1\right)\right]^{2x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2+x}\right)^{2+x}\right]^{\frac{2x}{2+x}}$

$=\mathrm{e}^2$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$,

$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=v_0$,

$(u_0>0, u_0, v_0\in \mathrm{R})$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}=u_0^{v_0}$.

14. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x^2})^x$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{\sin x}{x^2})^{\frac{x^2}{\sin x}}]^{\frac{\sin x}{x^2}\cdot x}$

$$=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{\sin x}{x^2})^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x^2}}}]^{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\because \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x^2})^x=\mathrm{e}^0=1.$$

15. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$ (1^{∞})

$$= \lim_{x\to 0}\{\underbrace{[1+(\cos x + x\sin x - 1)]^{\frac{1}{\cos x + x\sin x - 1}}}_{u(x)}\}^{\overbrace{\frac{\cos x + x\sin x - 1}{x^2}}^{v(x)}}$$

$\because \lim\limits_{x\to 0} u(x) = \lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x + x\sin x - 1)]^{\frac{1}{\cos x + x\sin x - 1}} = \mathrm{e}$

若 $\lim\limits_{x\to \blacksquare} \varphi(x) = 0$, 则 $\lim\limits_{x\to \blacksquare} [1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = \mathrm{e}$.

$$\lim_{x\to 0} v(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + x\sin x - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} (\cos x + x\sin x)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$$

16. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{2}\right]^{\frac{x}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

$\xlongequal{\text{令}t=\frac{2}{x}}\lim\limits_{t\to 0}(1+\sin t)^{\frac{1}{t}}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\left[(1+\sin t)^{\frac{1}{\sin t}}\right]^{\frac{\sin t}{t}}=\mathrm{e}.$

变成形式

$\lim\limits_{\blacksquare\to 0}(1+\blacksquare)^{\frac{1}{\blacksquare}}$