第四节

重积分的应用

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一)几何应用

1. 立体体积的计算

(1) 曲顶柱体的体积

由二重积分的几何意义知，以曲面$z = f(x,y)$为顶，以xOy面上的闭区域D为底的曲顶柱体的体积为

$$V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 空间立体的体积

占有空间有界域Ω的立体的体积为 $V = \iiint_\Omega \mathrm{d}v.$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. 曲面的面积

设光滑曲面 $S: z = f(x, y), (x, y) \in D_{xy}$,

$$\mathrm{d}A = \sqrt{1 + f_x^{\ 2}(x, y) + f_y^{\ 2}(x, y)}\ \mathrm{d}\sigma,$$

称为面积元素

故有曲面面积公式

$$A = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + f_x^{\ 2}(x, y) + f_y^{\ 2}(x, y)}\ \mathrm{d}\sigma,$$

即

$$A = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

类似地，

若光滑曲面方程为 $x=g(y,z),\ (y,z)\in D_{yz}$，则有

$$A=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

若光滑曲面方程为 $y=h(z,x),\ (z,x)\in D_{zx}$，则有

$$A=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

若光滑曲面方程为隐式 $F(x,y,z)=0$，且$F_z \neq 0$，

则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z},(x,y)\in D_{xy},$$

因此

$$A=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2+F_z{}^2}}{|F_z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(二)物理应用

1. 质量的计算

由第一节的引例2知，占有xOy面上闭区域D，密度函数为$\mu(x,y)$的平面薄板的质量为

$$M=\iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

类似地，占有空间有界域Ω，密度函数为$\mu(x,y,z)$的空间物体的质量为

$$M=\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}v.$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. 质心坐标的计算

设物体占有空间域 Ω, 有连续密度函数 $\mu(x,y,z)$,

则该物体的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}.$$

$$\bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}.$$

当$\mu(x,y,z)\equiv$常数时，可得形心坐标:

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\quad \bar{y}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$为$\Omega$的体积.

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

若物体为占有xOy面上区域D的平面薄片，

其面密度为$\mu(x,y)$，则它的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_y}{M}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_x}{M}$$

M_x — 对x轴的静力矩

M_y — 对y轴的静力矩

$\mu=$常数时, 可得薄片 的形心坐标:

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中A 为 D 的面积.

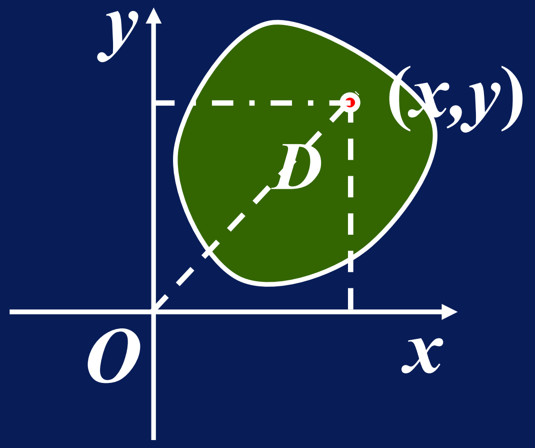
3. 转动惯量的计算

如果物体是平面薄片，面密度为

$$\mu(x,y),(x,y)\in D,$$

则转动惯量的表达式是二重积分:

$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$



$$I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_O=\iint_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

若物体占有空间区域Ω，有连续分布的密度函数

$\mu(x,y,z)$.

物体 对 z 轴 的转动惯量为

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

对 x 轴的转动惯量为

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

对 y 轴的转动惯量为

$$I_y = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + z^2)\mu(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

对原点的转动惯量为

$$I_O = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\mu(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

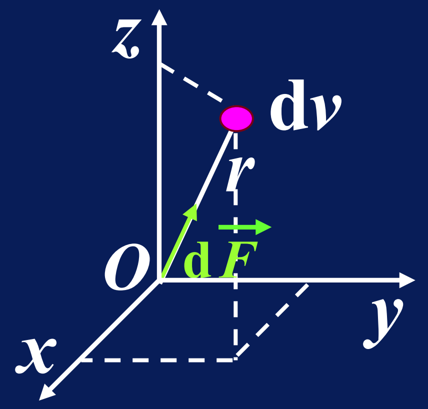
4. 引力的计算

设物体占有空间区域Ω，其密度函数 $\mu(x,y,z)$ 连续，求物体对位于原点的单位质量质点的引力 $\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$.

利用元素法，引力元素 $\mathrm{d}\vec{F}$ 在三坐标轴上的投影分别为

$$\mathrm{d}F_x = G\frac{\mu(x,y,z)x}{r^3}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}F_y = G\frac{\mu(x,y,z)y}{r^3}\mathrm{d}v,$$



$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

G 为引力常数

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\mathrm{d}F_z = G\frac{\mu(x,y,z)z}{r^3}\mathrm{d}v,$$

在Ω上积分即得各引力分量:

$$F_x = G\iiint_{\Omega}\frac{\mu(x,y,z)x}{r^3}\mathrm{d}v,$$

$$F_y = G\iiint_{\Omega}\frac{\mu(x,y,z)y}{r^3}\mathrm{d}v,$$

$$F_z = G\iiint_{\Omega}\frac{\mu(x,y,z)z}{r^3}\mathrm{d}v.$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

对 xOy 面上的平面薄片 D，设其密度函数 $\mu(x,y)$

连续，则它对原点处的单位质量质点的引力为

$\vec{F}=(F_x,F_{y_z})$，其中

$$F_x = G\iint_D \frac{\mu(x,y)x}{r^3}\mathrm{d}\sigma,$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

G 为引力常数

$$F_y = G\iint_D \frac{\mu(x,y)y}{r^3}\mathrm{d}\sigma.$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

用重积分解决问题的方法:

- 用微元分析法 (元素法)
- 从重积分定义出发 建立积分式

解题要点:

画出积分域、选择坐标系、确定积分序、

定出积分限、计算要简便

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

二、典型例题

例1 求两个底圆半径相等的直交圆柱面所围成的立体的体积.

解 设圆柱的底半径为R，两个圆柱面的方程为

$$x^2+y^2=R^2,\ x^2+z^2=R^2,$$

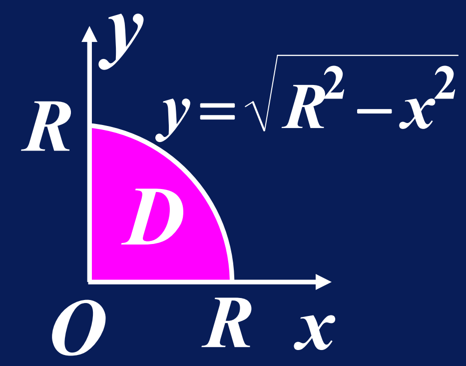
利用对称性，只要计算第一卦限部分的体积再八倍即可.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

立体在第一卦限的部分可看作是一个曲顶柱体.

它的底为

$$D: 0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}, 0 \le x \le R,$$



它的顶为柱面 $z = \sqrt{R^2 - x^2}$，于是

$$V = 8V_1 = 8\iint_D \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

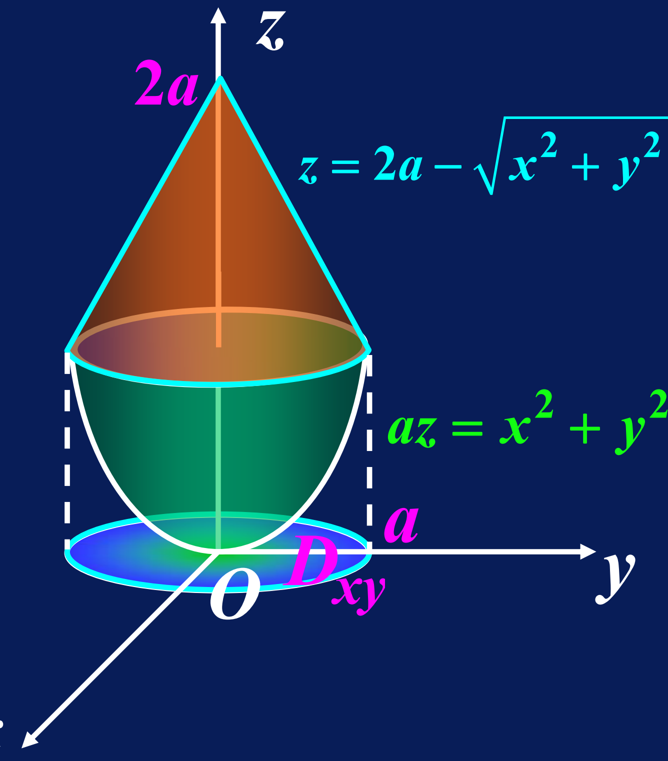
$$= 8\int_0^R \mathrm{d}\,x \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}\,y$$

$$= 8\int_0^R (R^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{16}{3}R^3.$$

考虑被积函数的特点，选取直角坐标计算，并适当选取积分次序

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例2 求曲面 $az = x^2 + y^2$ 被 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ 所截下部分的面积．



解 $\begin{cases} z = \dfrac{1}{a}(x^2 + y^2) \\ z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

由两曲面方程消去 z，得

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

故曲面在 xOy 面上的投影域为

$$D_{xy} : x^2 + y^2 \le a^2,$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

因此 $A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

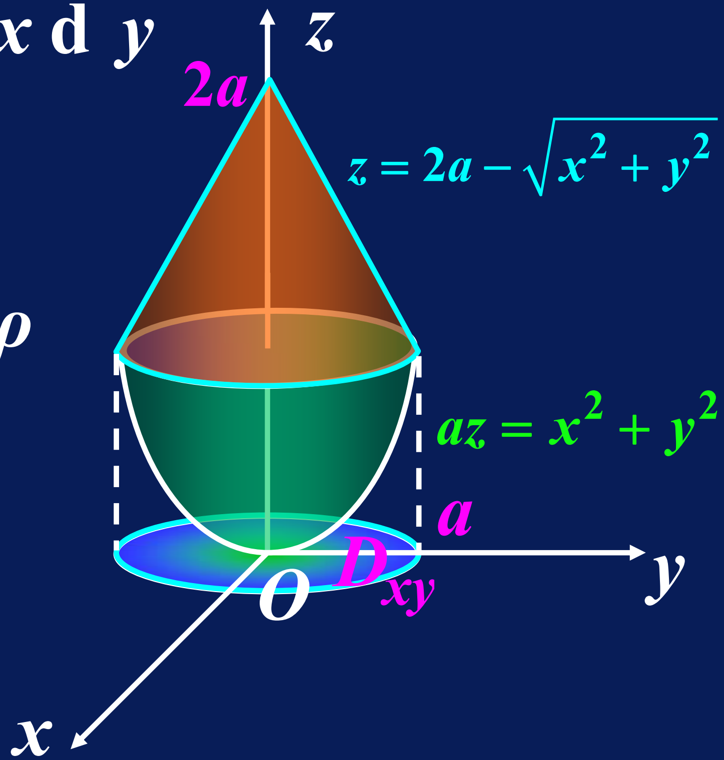
$\Sigma: z=\dfrac{1}{a}(x^2+y^2)$

采用极坐标计算

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{4}{a^2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

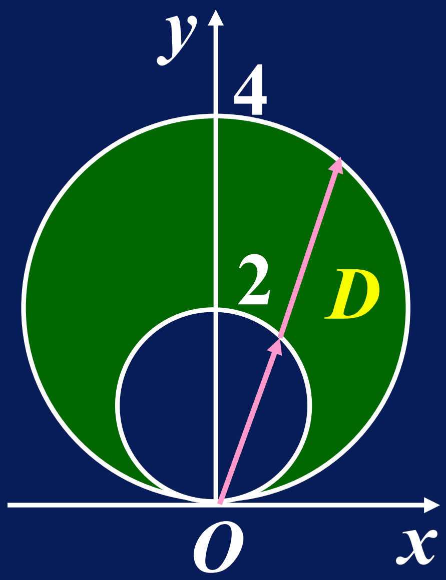
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\frac{\sqrt{a^2+4\rho^2}}{a}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)a^2.$$



例3 求位于两圆 $\rho = 2\sin\theta$ 和 $\rho = 4\sin\theta$ 之间均匀薄片的质心.

解 利用对称性可知 $\bar{x} = 0$, 而



$$\bar{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3\pi}\iint_D \rho^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} \rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

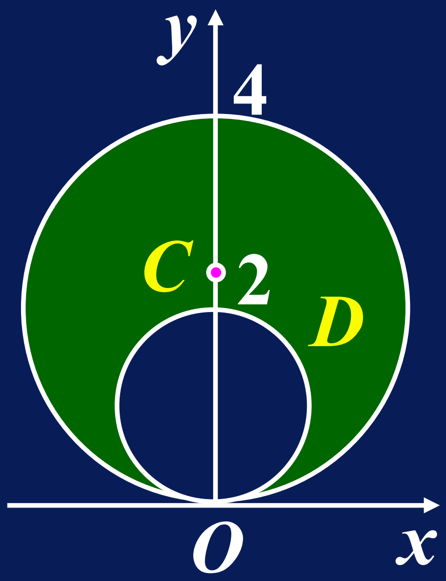
西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$= \frac{56}{9\pi}\int_0^{\pi} \sin^4\theta \, d\theta$$

$$= \frac{56}{9\pi}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \, d\theta$$

$$= \frac{56}{9\pi}\cdot 2\cdot \frac{3}{4}\cdot \frac{1}{2}\cdot \frac{\pi}{2}$$

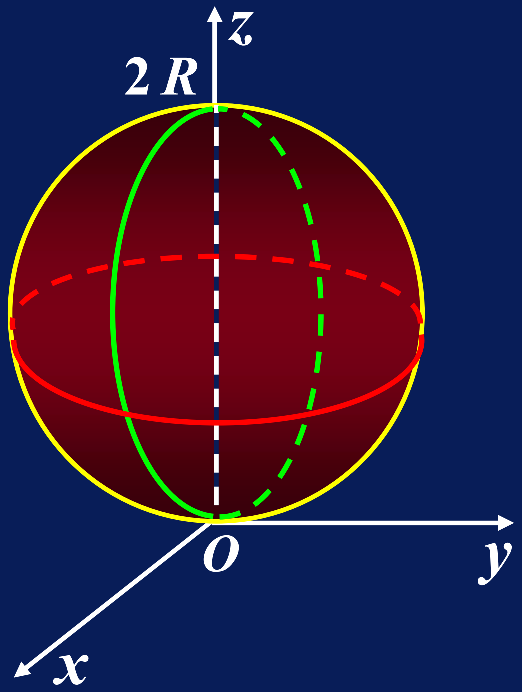
$$= \frac{7}{3},$$



故质心位于点$C(0, \frac{7}{3})$.

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例4 已知球体 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$,其上任一点的密度在数值上等于该点到原点的距离的平方.求球体的质心.



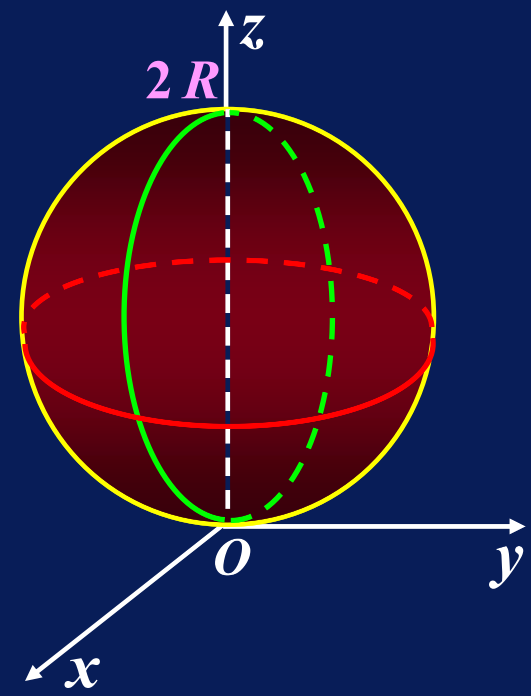
解 由题意,密度函数

$$\mu(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,$$

空间物体及密度函数都关于 z 轴对称，所以质心坐标为 $(0,\ 0,\ \bar{z})$.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

球体的质量



$$M=\iiint_{\Omega}\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5}(2R\cos\varphi)^5\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{32}{15}\pi R^5.$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega} z\,\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega} z(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{15}{32\pi R^5}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r\cos\varphi\cdot r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

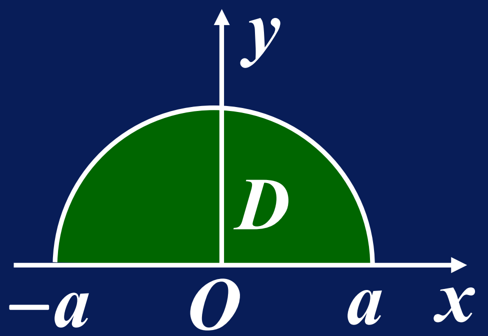
$$=\frac{15}{32\pi R^5}\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{6}(2R\cos\varphi)^6\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{15}{32\pi R^5}\cdot\frac{8\pi R^6}{3}=\frac{5}{4}R,$$

从而质心为$(0,0,\frac{5}{4}R)$.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例5 求半径为 a 的均匀半圆薄片(密度为常数 μ)对其直径的转动惯量.



解 建立坐标系如图,

$$D: x^2 + y^2 \le a^2, y \ge 0.$$

$$\therefore I_x = \iint_D \mu y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mu \iint_D \rho^3 \sin^2\theta \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \mu \int_0^{\pi} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^{a} \rho^3 \,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{4}\mu a^4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

半圆薄片的质量 $M = \frac{1}{2}\pi a^2 \mu$

$$= \frac{1}{4} M a^2.$$

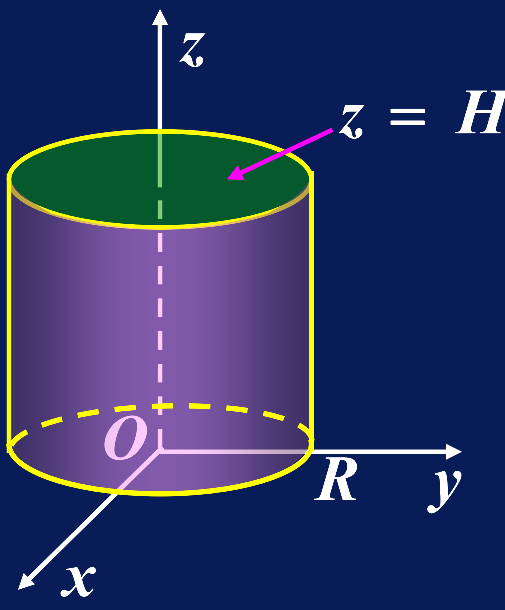
西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例6 设均匀圆柱体 (密度为常量 μ)的底半径为 R, 高为 H,求其对底的直径的转动 惯量.

解 如右图, 圆柱体所占区域为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le R^2,$$

$$0 \le z \le H\}.$$



所求转动惯量即为圆柱 体对于 x轴的转动惯量 I_x.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\mu \, \mathrm{d}v$$

$$= \mu \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \mathrm{d}\rho \int_0^H (\rho^2 \sin^2\theta + z^2)\rho \, \mathrm{d}z$$

$$= \mu \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R (H\rho^3 \sin^2\theta + \frac{H^3}{3}\rho)\mathrm{d}\rho$$

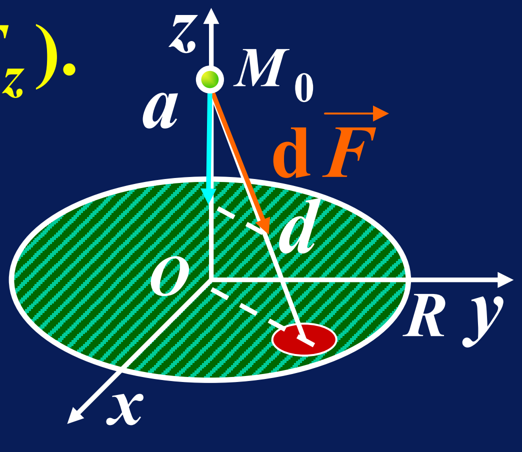
$$= \mu \int_0^{2\pi} (\frac{H}{4}R^4 \sin^2\theta + \frac{H^3}{6}R^2)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\mu\pi}{4}HR^4 + \frac{\mu\pi}{3}H^3R^2.$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例7 设有面密度为常数 μ，半径为R的圆形薄片 $x^2+y^2\le R^2, z=0$, 求它对位于点 $M_0(0,0,a)$ $(a>0)$ 处的单位质量质点的引力.

解 由对称性知, 引力 $\vec{F}=(0,0,F_z)$.



$$\mathrm{d}F_z=-G\frac{\mu\,\mathrm{d}\sigma}{d^2}\cdot\frac{a}{d}$$

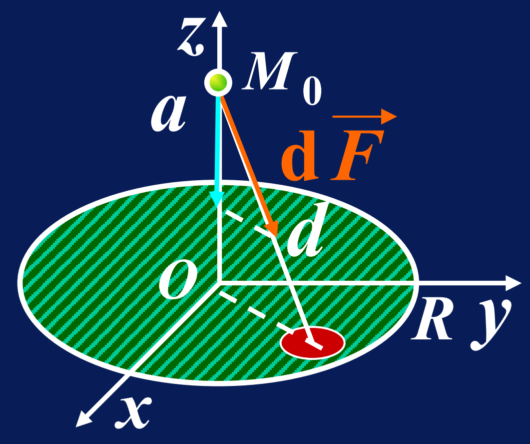
$$=-Ga\mu\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}},$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\therefore\ F_z = -Ga\mu \iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$= -Ga\mu \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}$$

$$= 2\pi Ga\mu\ \left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} - \frac{1}{a}\right).$$



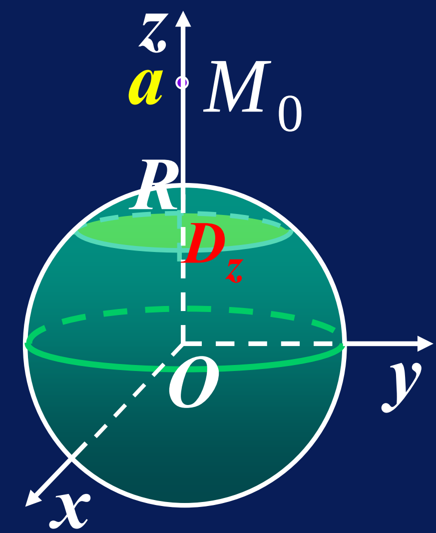
从而

$$\vec{F} = (0\,,0\,,F_z)$$

$$= (0\,,0\,,2\pi Ga\mu(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} - \frac{1}{a})).$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例8 求半径 R 的均匀球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 对位于点 $M_0(0,0,a)\ (a>R)$ 的单位质量质点的引力.



解 利用对称性知引力分量

$$F_x=F_y=0.$$

先二后一

$$F_z=\iiint\limits_{\Omega} G\mu\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}v$$

$$=G\mu\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$= G\mu\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\iint_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$= G\mu\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{[\rho^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$= 2\pi G\mu\int_{-R}^{R}\underline{(z-a)\left(\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right)}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi G\mu\left[-2R-\frac{1}{a}\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}\sqrt{R^2-2az+a^2}\right]$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

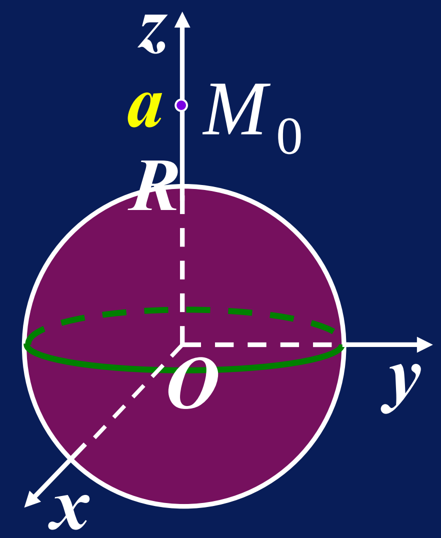
$$= -G\frac{M}{a^2},$$

其中$M = \dfrac{4\pi R^3}{3}\mu$为球的质量.

因此，所求的引力为

$$\vec{F} = (0, 0, F_z)$$

$$= (0, 0, -G\frac{M}{a^2}).$$



注 上述结果表明: 匀质球对球外一质点的引力如同球的质量集中于球心时两质点间的引力.

三、同步练习

1. 证明：半径R的球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

2. 求半径为a的球面与半顶为α的内接锥面所围成的立体的体积.

3. 求曲面$S_1: z=x^2+y^2+1$任一点的切平面与曲面$S_2: z=x^2+y^2$所围立体的体积V.

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4. 过曲面 $z = x^2 + y^2 + 1$上点 P作一切平面，使其与曲面$y = \sqrt{1 - x^2}$和三坐标面在第一卦限内围成的柱体的体积最大，求此点的坐标及最大柱体的体积之值.

5. 设有一高度为$h(t)$(t为时间) 的雪堆在融化过程中,其侧面满足方程

$$z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)},$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

设长度单位为厘米，时间单位为小时，若体积减少的速率与侧面积成正比(设比例系数为0.9)，问高度为130厘米的雪堆全部融化需多少小时？

6. 计算双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 A.

7. 设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上，问当 R 取什么值时，球面在定球面内部的那部分的面积最大？

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

8. 求由直线 $2x+y=6$ 与两坐标轴所围的三角形均匀薄片的质心 .

9. 设有一半径为 R 的球体, P_0 是此球的表面上的一个定点, 设球体上任一点的密度与该点到 P_0 的距离的平方成正比(比例常数 $k>0$), 求球体的重心位置.

10. 求由曲线 $y^2=x$ 与直线 $x=1$ 所围成的平面薄片对于通过坐标原点任一直线的转动惯量, 并

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

讨论那种情况下，转动惯量取得最大值或最小值.

11. 设由曲面 $z=2-x^2-y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成立体 Ω，其体密度为 1，求 Ω 绕直线 l: $x=y=z$ 旋转的转动惯量.

12. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的均质半圆形薄片，占有平面区域 $x^2+y^2\le R^2,\ y\ge 0$，过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P，$OP=a$，求薄片对质点 P 的引力.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

13. 设有底半径为 a，高为 h，密度均匀的圆锥体，其质量为 M，在圆锥顶点处有一单 位质量的质点，求圆锥体对此 质点的引力 .

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

四、同步练习解答

1. 证明：半径 R 的球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

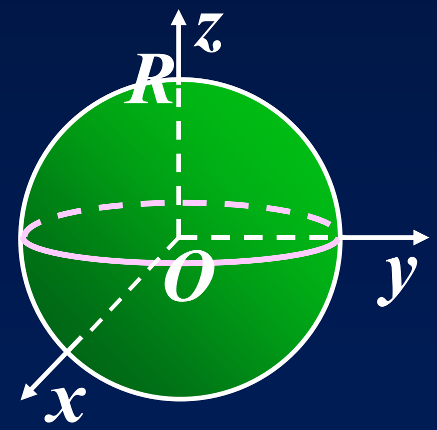
证 建立坐标系，使球心在原点，则在球面坐标系中，

$$\Omega: 0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi.$$

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

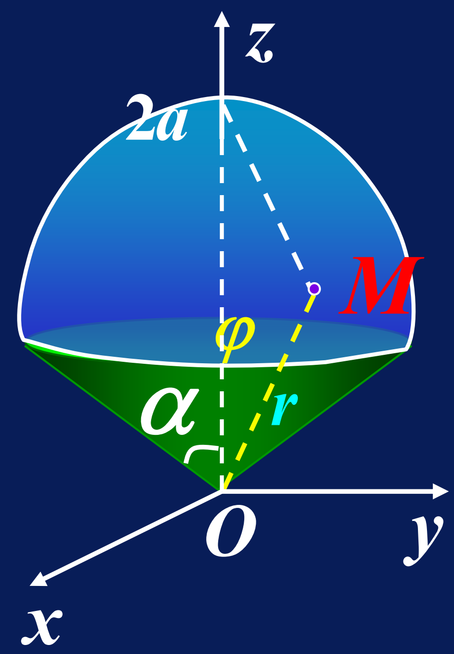


西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

2. 求半径为a的球面与半顶为α的内接锥面所围成的立体的体积.

解 在球坐标系下空间立体所占区域为

$$\Omega:\begin{cases}0\le r\le 2a\cos\varphi,\\ 0\le\varphi\le\alpha,\\ 0\le\theta\le 2\pi.\end{cases}$$



则立体体积为

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

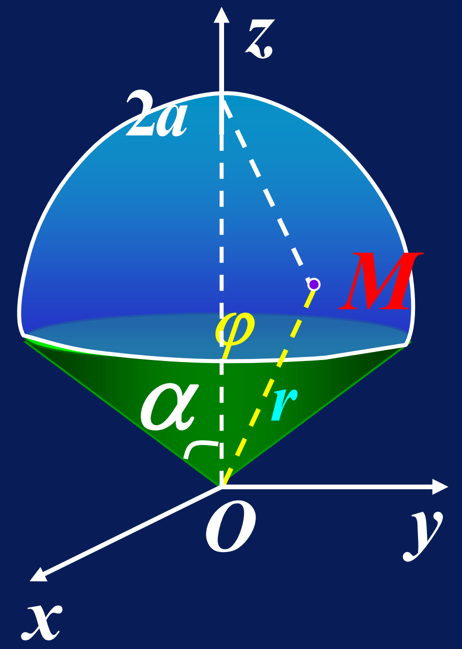
$$V=\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha).$$



3. 求曲面$S_1: z=x^2+y^2+1$任一点的切平面与曲面$S_2: z=x^2+y^2$所围立体的体积V.

解 曲面S_1在点(x_0, y_0, z_0)的切平面方程为

$$z=2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2,$$

它与曲面 $z=x^2+y^2$ 的交线在 xOy 面上的投影为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=1 \quad (\text{记所围域为}D).$$

因此

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$V=\iint_D[2x_0x+2y_0y+1-x_0{}^2-y_0{}^2-x^2-y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D[1-((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $x-x_0=\rho\cos\theta$， $y-y_0=\rho\sin\theta$

$$=\pi-\iint_D\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$=\pi-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\,\rho=\frac{\pi}{2}.$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4. 过曲面 $z=x^2+y^2+1$上点 P作一切平面，使其与曲面$y=\sqrt{1-x^2}$和三坐标面在第一卦限内围成的柱体的体积最大，求此点的坐标及最大柱体的体积之值.

解 设$P(x_0,y_0,z_0)$是曲面 $z=x^2+y^2+1$上任一点，

曲面在该点的法向量 $\vec{n}=(2x_0,2y_0,-1)$.

曲面 $z=x^2+y^2+1$在P点处的切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

由$z_0 = {x_0}^2 + {y_0}^2 + 1$代入此方程，切平面方程表示为

$$z = 2x_0 x + 2y_0 y + (1 - x_0^2 - y_0^2).$$

柱体的底为 $D\{(x, y) \mid 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}, 0 \le x \le 1\}$

切平面下的柱体的体积为

$$V(x_0, y_0) = \iint_D [2x_0 x + 2y_0 y + (1 - x_0^2 - y_0^2)] \mathrm{d}\sigma.$$

利用极坐标，有

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$V(x_0, y_0)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 [2x_0\rho\cos\theta + 2y_0\rho\sin\theta + (1 - x_0^2 - y_0^2)]\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{2}{3}(x_0 + y_0) + \frac{\pi}{4}(1 - x_0^2 - y_0^2).$$

求其偏导数并令其分别为零，得

$$V_{x_0} = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}x_0 = 0, V_{y_0} = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}y_0 = 0$$

得唯一驻点 $x_0 = y_0 = \dfrac{4}{3\pi}$,

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

此时 $z_0 = {x_0}^2 + {y_0}^2 + 1 = \dfrac{32}{9\pi^2} + 1,$

$$V(x_0, y_0) = \frac{8}{9\pi} + \frac{\pi}{4}.$$

下面考虑 $V(x_0, y_0)$在区域边界上的情形．

当$x_0 = 0$时，有

$$V(0, y_0) = \frac{2}{3} y_0 + \frac{\pi}{4}(1 - y_0^2)$$

$$= \frac{4}{9\pi} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\left(y_0 - \frac{4}{3\pi} \right)^2$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\le \frac{4}{9\pi} + \frac{\pi}{4} < \frac{8}{9\pi} + \frac{\pi}{4} = V(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}),$$

当$y_0 = 0$时，有$V(x_0, 0) < V(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}).$

当${x_0}^2 + {y_0}^2 = 1$时，

$$V(x_0, y_0) = \frac{2}{3}(x_0 + y_0)$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2 + 2x_0 y_0}$$

$$\le \frac{2}{3}\sqrt{(2{x_0}^2 + 2{y_0}^2)}$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} < \frac{8}{9\pi} + \frac{\pi}{4} = V\left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right),$$

综上所述，可知

$$V(x_0, y_0) = \frac{8}{9\pi} + \frac{\pi}{4}$$

即为所求最大体积，

$$P\left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}, \frac{32}{9\pi^2} + 1\right)$$

即为所求切点.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

5. 设有一高度为$h(t)$ (t为时间) 的雪堆在融化过程中,其侧面满足方程

$$z = h(t) - \frac{2(x^2+y^2)}{h(t)},$$

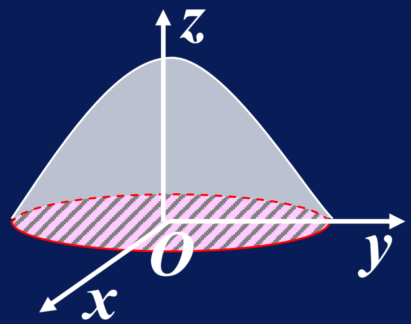
设长度单位为厘米，时间单位为小时，若体积减少的速率与侧面积成正比(设比例系数为0.9),问高度为130厘米的雪堆全部融化需多少小时?

解 依题意,首先应求出雪堆的体积 V与侧面积 S,

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

雪堆是曲顶柱体，上顶曲面的方程为

$$z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)},$$



令$z = 0$,可得曲顶柱体的底是 xOy面上的圆域:

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le \frac{h^2(t)}{2}\} = \{(\rho, \theta) \mid \rho \le \frac{h(t)}{\sqrt{2}}\}.$$

于是其体积

$$V = \iint_D [h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \left[h(t)-\frac{2\rho^2}{h(t)}\right]\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\left[h(t)-\frac{2\rho^2}{h(t)}\right]\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi h^3(t)}{4}.$$

雪堆的侧面积

$$S=\iint_D \sqrt{1+z_x^{\,2}+z_y^{\,2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

返回 北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$= \frac{1}{h(t)}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{h^2(t)+16\rho^2}\,\rho\, d\rho$$

$$= \frac{13\pi}{12} h^2(t).$$

据题意知 $\frac{dV}{dt} = -0.9S$, 即

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\pi}{4}h^3(t)\right] = -0.9\cdot\frac{13\pi}{12}h^2(t),$$

求导得 $\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{13}{10}$, 因此

$$h(t) = -\frac{13}{10}t + C.$$

返回 西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

由 $h(0)=130$,得 $C=130$,故 $h(t)=-\frac{13}{10}t+130$.

因为雪堆全部融化之时，也就是$h(t)=0$时,

令$h(t)=0$, 可得$t=100$(小时),

因此雪堆全部融化需100小时.

6. 计算双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 A.

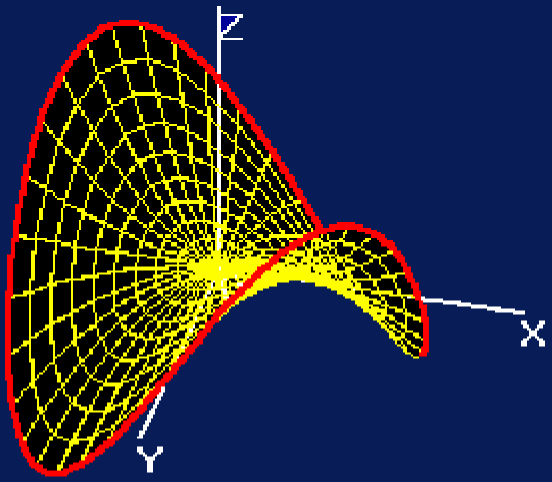
解 曲面在 xOy 面上投影为 $D: x^2 + y^2 \le R^2$, 则

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \sqrt{1 + \rho^2}\, \rho\, \mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{2}{3}\pi[(1 + R^2)^{3/2} - 1)].$$



7. 设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上, 问当 R 取什么值时, 球面在定球面内部的那部分的面积最大?

解 根据题意不妨设球面 Σ 的方程为

$$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2,$$

两球面的交线在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2), \\ z=0. \end{cases}$$

它所围成的平面区域为

$$D: x^2 + y^2 \le \frac{R^2}{4a^2}(4a^2 - R^2).$$

Σ在定球内的部分的方程为

$$z = a - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

其面积 $S(R) = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \iint\limits_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

利用极坐标 $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, 可得

$$D: 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le \frac{R^2}{4a^2}(4a^2 - R^2),$$

$$\therefore\quad S(R) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2 - R^2}} \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\,\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi R^2 - \frac{\pi R^3}{a}.$$

$$S'(R) = 4\pi R - \frac{3\pi R^2}{a},\quad S''(R) = 4\pi - \frac{6\pi R}{a}.$$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

令 $S'(R)=0$, 得驻点$R_1=\frac{4}{3}a$, $R_2=0$(舍去).

又 $S''(\frac{4}{3}a)=-4\pi<0$, 因此 $S(\frac{4}{3}a)$为极大值,

即为最大值. 所以当$R=\frac{4}{3}a$时, 球面Σ在定球

面部分面积最大.

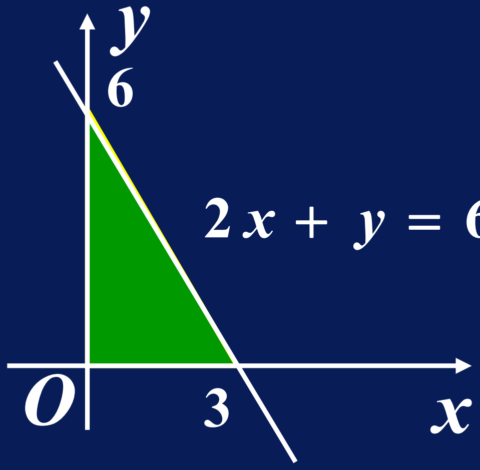
西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

8. 求由直线 $2x+y=6$ 与两坐标轴所围的三角形均匀薄片的质心 .

解 因薄片是均匀的，故质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint_D x\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}\sigma.$$

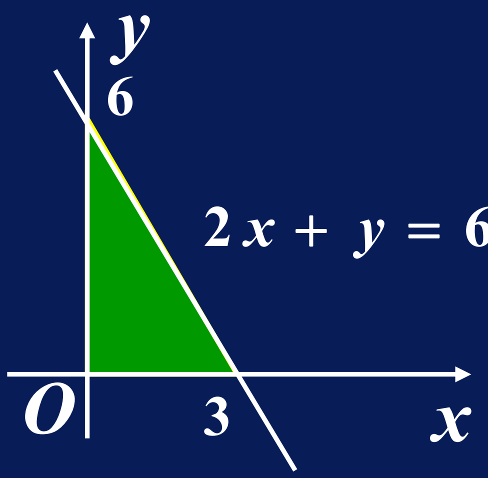


而三角形薄片的面积为 $A=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6=9$, 故

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\bar{x} = \frac{1}{9}\iint_D x \, \mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 \mathrm{d}x \int_0^{6-2x} x \, \mathrm{d}y = 1,$$



$$\bar{y} = \frac{1}{9}\iint_D y \, \mathrm{d}\sigma$$

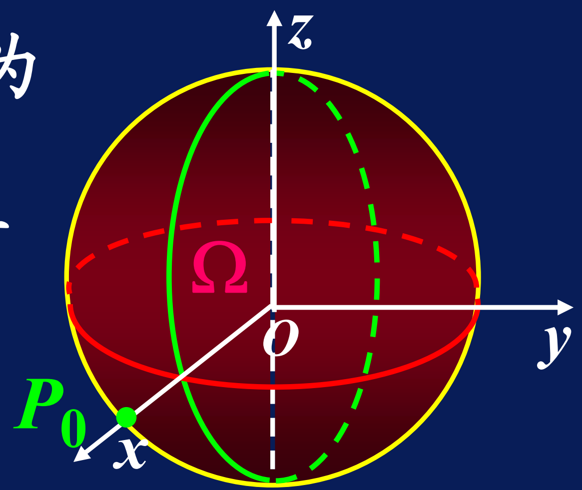
$$= \frac{1}{9}\int_0^3 \mathrm{d}x \int_0^{6-2x} y \, \mathrm{d}y = 2.$$

因此质心位于点 (1, 2).

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

9. 设有一半径为 R 的球体, P_0是此球的表面上的一个定点, 设球体上任一点的密度与该点到P_0的距离的平方成正比(比例常数 $k > 0$), 求球体的重心位置.

解 记球体为 Ω ,以Ω的球心为原点O, 以 $\overrightarrow{OP_0}$为正向x轴建立直角坐标系, 则点P_0的坐标为$(R, 0, 0)$.



西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

设Ω的重心位置为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 则

$$\bar{y}=\bar{z}=0,$$

$$\bar{x}=\frac{\displaystyle\iiint_{\Omega} x\cdot k[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v}{\displaystyle\iiint_{\Omega} k[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v}.$$

利用对称性知

$$\iiint_{\Omega}[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v$$

$$=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v+\iiint_{\Omega}R^2\,\mathrm{d}v$$

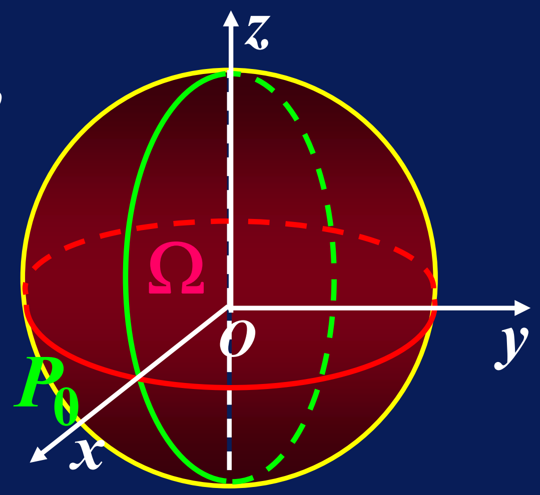
$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\,\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\,\varphi \int_0^{R} r^2 \cdot r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\,r + \frac{4}{3}\pi R^5$$

$$= \frac{32}{15}\pi R^5.$$

$$\iiint_{\Omega} x[(x - R)^2 + y^2 + z^2]\,\mathrm{d}\,v$$

$$= -2R\iiint_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}\,v$$

$$= -\frac{2}{3}R\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}\,v$$



$$= (-\frac{2}{3}R)\times 8\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R} r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{8}{15}\pi R^6,$$

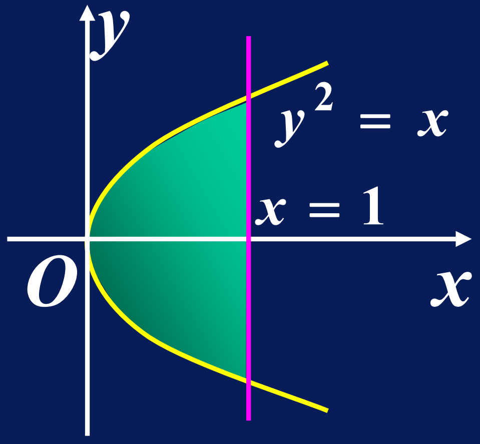
故 $\bar{x} = -\frac{R}{4}$. 因此, 所求的重心位置为

$(-\frac{R}{4}, 0, 0)$.

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

10. 求由曲线 $y^2 = x$与直线 $x = 1$所围成的平面薄片对于通过坐标原点任一直线的转动惯量, 并讨论那种情况下, 转动惯量取得最大值或最小值.

解 设通过原点的任一直线为 $y = ax$, 平面薄片上一点 (x, y) 到该直线的距离为



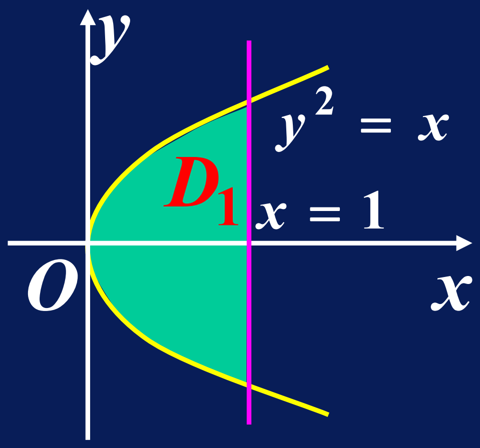
$$d = \frac{|y - ax|}{\sqrt{1 + a^2}},$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

则由转动惯量计算公式，可得

$$I(a)=\iint_D \mu d^2\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D \mu\left(\frac{|y-ax|}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{\mu}{1+a^2}\iint_D (y^2-2axy+a^2x^2)\,\mathrm{d}\sigma,$$



其中μ为均匀薄片的面密度．

积分区域关于x轴对称，记D在x轴上方的子区域为

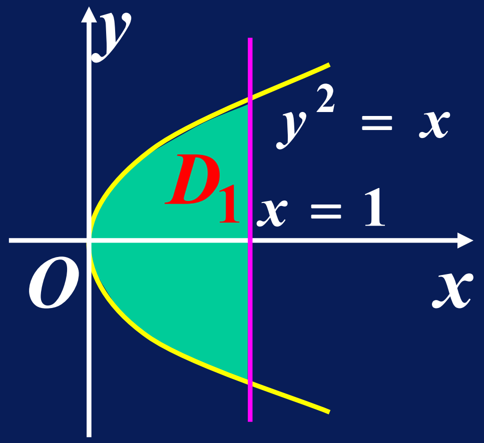
$$D_1: 0\le x\le 1, 0\le y\le \sqrt{x}.$$

由被积函数的奇偶性知

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$I(a)=\frac{2\mu}{1+a^2}\iint\limits_{D_1}(y^2+a^2x^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{2\mu}{1+a^2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}(y^2+a^2x^2)\mathrm{d}y$$



$$=\frac{4\mu}{1+a^2}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{7}a^2\right).$$

$$I'(a)=\frac{64\mu}{105}\frac{a}{(1+a^2)^2}.$$

由$I'(a)=0$, 可得$a=0$, $I(0)=\dfrac{4}{15}\mu.$

又 $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)=\frac{4}{7}\mu$, 因此

$$I_{\min}=I(0)=\frac{4}{15}\mu,$$

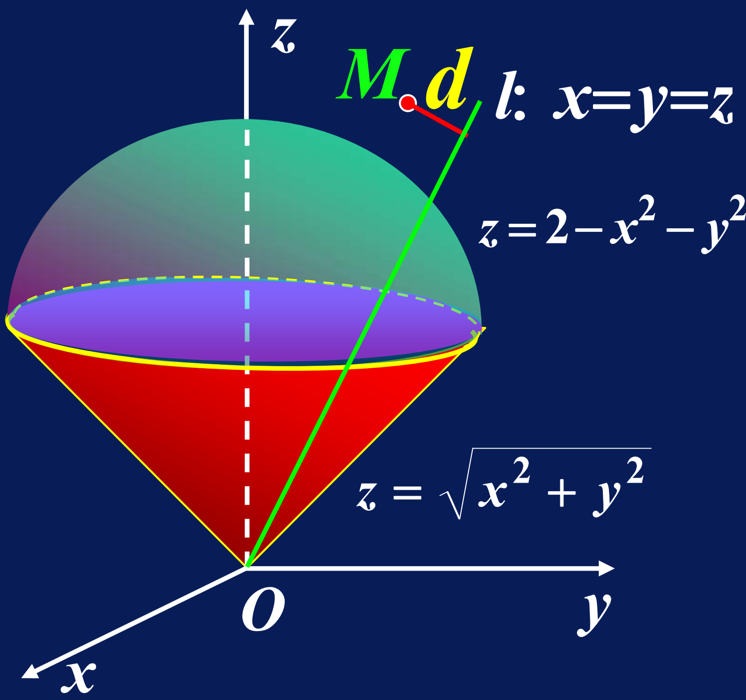
$$I_{\max}=\lim_{a\to\infty} I(a)=\frac{4}{7}\mu.$$

即平面薄片绕x轴的转动惯量最小，为$\frac{4}{15}\mu$,

绕y轴的转动惯量最大，为$\frac{4}{7}\mu$.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

11. 设由曲面$z=2-x^2-y^2$与$z=\sqrt{x^2+y^2}$围成立体Ω, 其体密度为 1, 求Ω绕直线l: $x=y=z$旋转的转动惯量.



解 要求Ω绕直线l的转动惯量, 必须先求得Ω内任一点$M(x,y,z)$到直线l的距离的平方d^2.

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

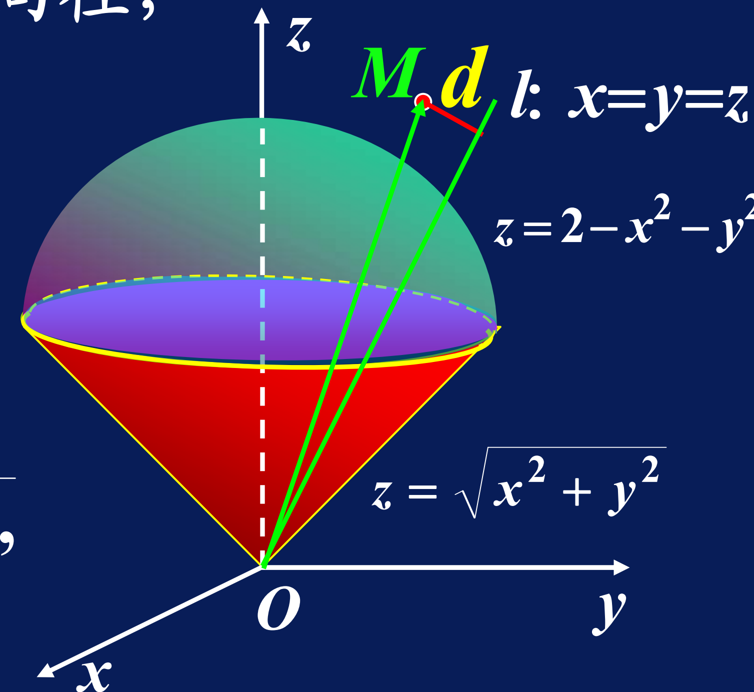
设$\overrightarrow{OM}$为坐标原点到点M的向径，

则 $d^2 = \left|\overrightarrow{OM}\right|^2 - (\mathrm{Prj}_l\, \overrightarrow{OM})^2$,

其中

$$\mathrm{Prj}_l\, \overrightarrow{OM}$$

$$= (1\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot z)/\sqrt{3},$$



所以

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{3}(x + y + z)^2$$

$$= \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz),$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

故 $$I_l=\iiint\limits_{\Omega}1\cdot d^2\,\mathrm{d}v$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)\,\mathrm{d}v.$$

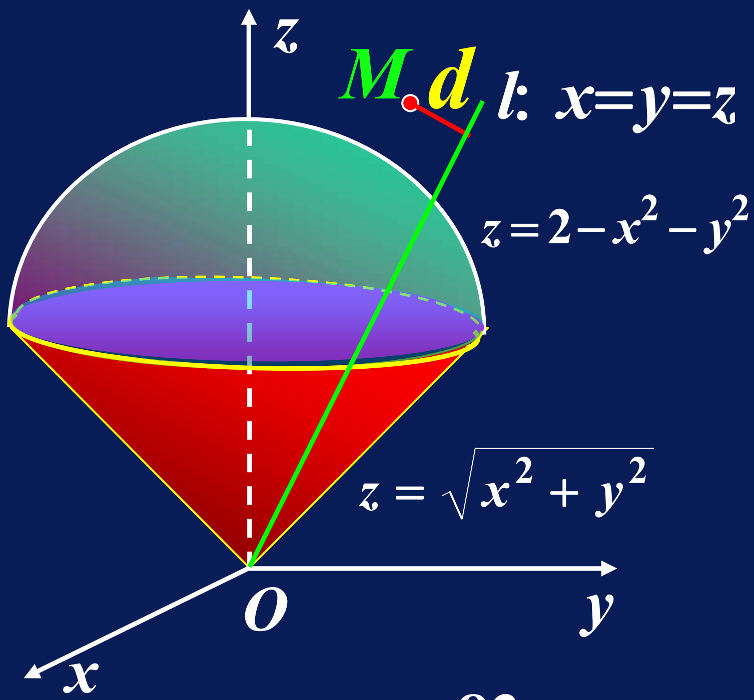
由对称性知

$$\iiint\limits_{\Omega}(xy+yz+xz)\,\mathrm{d}v=0,$$

因此

$$I_l=\iiint\limits_{\Omega}\frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{2-\rho^2}(\rho^2+z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{83}{90}\pi.$$



西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

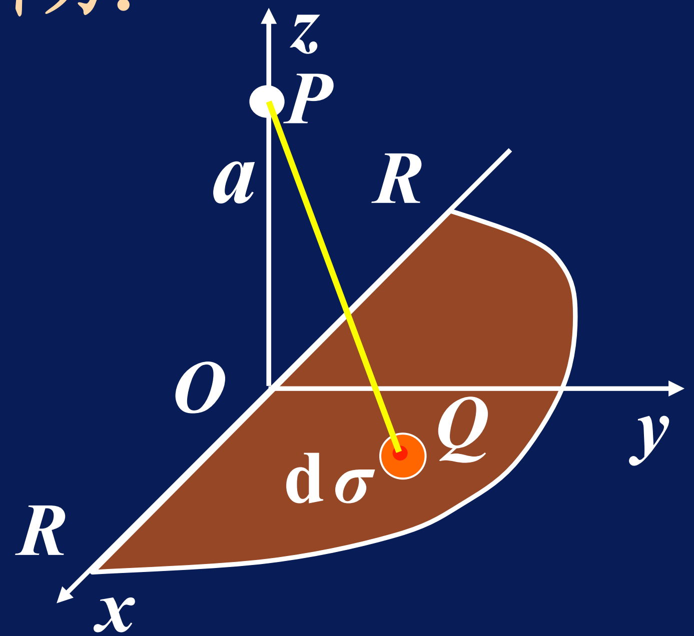
12. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的均质半圆形薄片, 占有平面区域 $x^2+y^2 \le R^2,\ y \ge 0$, 过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P, $OP = a$, 求薄片对质点 P 的引力.

解 记引力为

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z).$$

设 $\mathrm{d}\sigma$ 为半圆内的面积元素,

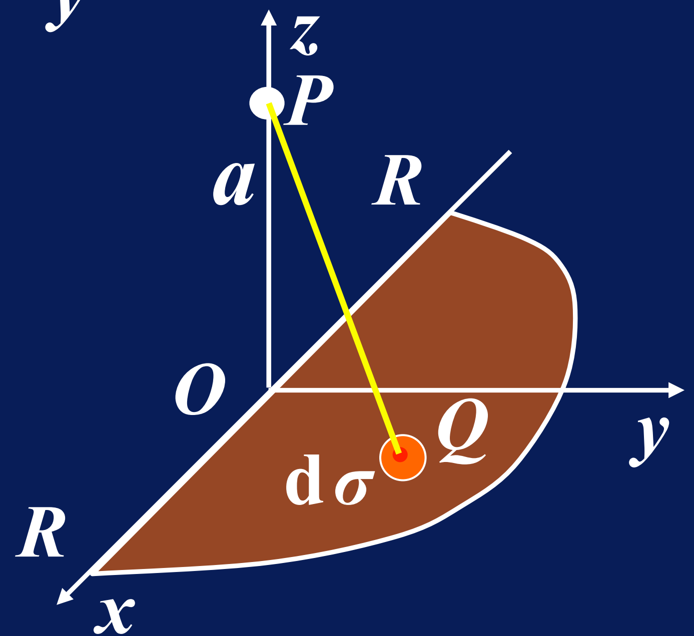
在 $\mathrm{d}\sigma$ 内任取一点 $Q(x, y, 0)$,



西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

则相应与dσ的部分对质点的引力大小为

$$\mathrm{d}F = G\cdot m\frac{M}{\frac{\pi R^2}{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma}{a^2+x^2+y^2}$$ (G为引力系数)



引力方向与$(x,y,-a)$一致，

于是dF在三个坐标轴上

的分量为

$$\mathrm{d}F_x = \frac{2GmM}{\pi R^2}\cdot\frac{x\,\mathrm{d}\sigma}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$\mathrm{d}F_y = \frac{2GmM}{\pi R^2} \cdot \frac{y\,\mathrm{d}\sigma}{(a^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}F_z = \frac{2GmM}{\pi R^2} \cdot \frac{-a\,\mathrm{d}\sigma}{(a^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

故 $$F_x = \frac{2GmM}{\pi R^2} \iint_D \frac{x\,\mathrm{d}\sigma}{(a^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

$$F_y = \frac{2GmM}{\pi R^2} \iint_D \frac{y\,\mathrm{d}\sigma}{(a^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{2GmM}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^R \frac{\rho}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho\,\mathrm{d}\sigma$$

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

$$= \frac{4GmM}{\pi R^2}\left[\ln \frac{R+\sqrt{R^2+a^2}}{a} - \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right]$$

$$F_z = -\frac{2GmMa}{\pi R^2}\iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{2GmM}{R^2}\left[1 - \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right]$$

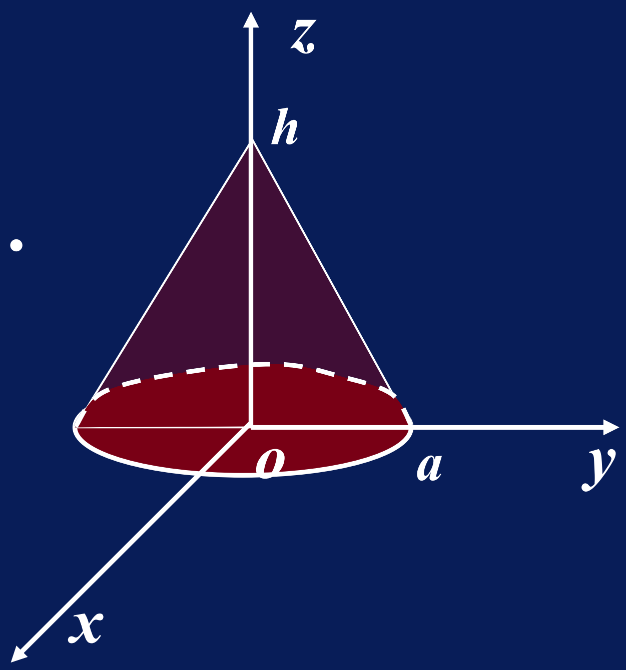
从而 $\vec{F} = (0, F_y, F_z)$ 即为所求的引力 .

13. 设有底半径为 a，高为 h，密度均匀的圆锥体，其质量为 M，在圆锥顶点处有一单位质量的质点，求圆锥体对此质点的引力．

解 设圆锥体的密度为 μ，

则 $\mu=\dfrac{M}{V}=\dfrac{M}{\frac{1}{3}\pi a^2 h}=\dfrac{3M}{\pi a^2 h}$.

记引力在三个坐标轴上的分力依次为 F_x、F_y、F_z．



又圆锥体关于任一过 z轴的平面对称，因此沿 x轴与y轴方向的分力互相抵消，故$F_x = F_y = 0$,而

$$\mathrm{d}F_z = -k\frac{1\cdot\mu\,\mathrm{d}v}{r^2}\cdot\frac{h-z}{r}$$

$$= -k\mu\frac{(h-z)\,\mathrm{d}v}{[x^2+y^2+(h-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

于是 $F_z = -k\mu\iiint\limits_{\Omega}\frac{(h-z)\,\mathrm{d}v}{[x^2+y^2+(h-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

计算三重积分 F_z 时可用截面法，作平行与 xOy 面的平面，截 Ω 得

$$D_z: x^2 + y^2 \le \frac{a^2}{h^2}(h-z)^2 \ (0 \le z \le h).$$

故 $F_z = -k\mu \int_0^h \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \frac{(h-z)\,\mathrm{d}\sigma}{[x^2 + y^2 + (h-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$

$$= k\mu \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{a}{h}(h-z)} \frac{(h-z)\rho\,\mathrm{d}\rho}{[\rho^2 + (h-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -2\pi k\mu \int_0^h \left[-(\rho^2 + (h-z)^2)^{-\frac{1}{2}} \right]\Bigg|_0^{\frac{a}{h}(h-z)} (h-z)\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi k\mu h\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} - 1\right)$$

将 $\mu = \frac{3M}{\pi a^2 h}$ 代入得 $F_z = \frac{6kM}{a^2}\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} - 1\right)$

即 $\vec{F} = \left(0, 0, \frac{6kM}{a^2}\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} - 1\right)\right).$

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY