第五节

函数展开成幂级数

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 函数的幂级数展开式

——泰勒 (Taylor) 展开式

1. 函数展开成幂级数

定义 若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，$x\in I$($I$为区间)，

则称 $f(x)$ 在 I 上可以展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数.

问题: (1) 如果能展开，a_n 是什么?

(2) 展开式是否唯一?

(3) 在什么条件下才能展开成幂级数?

2.定理 (展开式的唯一性)

若在邻域$U(x_0,R)$ 内任意阶可导的函数

$f(x)$ 能展成幂级数:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad x\in U(x_0,R)$$

则其系数

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\ (n=0,1,2,\cdots),$$

且展开式是唯一的.

3.定义 (泰勒级数)

设$f(x)$在x_0处具有任意阶导数，则称

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \boxed{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}(x-x_0)^n + \cdots$$

泰勒系数

为$f(x)$在x_0处的 泰勒级数.

麦克劳林级数 ($x_0 = 0$):

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

4. 泰勒级数基本问题

(1) 构造 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$;

(2) 收敛域?

(3) 在收敛域 I 内，级数是否一定收敛到 $f(x)$?

即 $$f(x)\overset{?}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad x\in I$$

答：不一定.

(二) 函数展开成幂级数的充分必要条件

定理11.14 设 $f(x)$ 在区间 I上具有各阶导数,

则 $f(x)$ 在 I 上能展开成泰勒级数，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad x\in I$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0 \quad (\forall\ x\in I)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ在x，x_0之间）

—— $f(x)$的泰勒公式中的余项

(三) 函数展开成幂级数的方法

展开方法 $\begin{cases} \text{直接展开法 — 用泰勒公式} \\ \text{间接展开法 — 用已有展开式} \end{cases}$

(1) 直接展开法

$f(x)$展开成x的幂级数的 步骤:

1° 求 $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$;

2° 写出幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, 并求收敛半径 R;

3° 判断 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$? $x \in (-R, R)$

(2) 间接展开法

根据展开式的唯一性, 利用常见展开式, 通过变量代换, 四则运算, 恒等变形, 逐项求导, 逐项积分等方法, 求展开式.

二、典型例题

例1 将 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 1° $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1\ (n=0,1,\cdots)$,

2° 写出 e^x 的麦克劳林级数

$$e^x \sim f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

即 $$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\Big/\frac{1}{(n+1)!}=+\infty$

收敛区间:

$(-\infty,+\infty)$

3° $e^{x} \overset{?}{=} S(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$

$x \in (-\infty, +\infty)$

$\because$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 余项满足

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \quad (\xi\text{介于}x\text{与}0\text{之间})$$

$$< e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

收敛级数的通项 $u_n \to 0$ (当 $n \to \infty$ 时)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

例2 将 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 1° $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$, $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$,

$$\therefore\quad f^{(2k)}(0)=0,\qquad f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k,\qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n=2k+1\end{cases}\qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

2° $\sin x\sim\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, 收敛半径 $R=+\infty$.

3° $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，余项满足

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \left|\frac{\sin[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}]}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$$

$$< \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

例3 将 $f(x)=(1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数

(m: 任意常数) .

解 1° $f(0)=1,\ f'(0)=m,\quad f''(0)=m(m-1)$,

$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$, $\cdots$

2° 麦克劳林级数

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$x\in(-1,1)$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1$$

3° 设和函数为 $F(x)$, $-1<x<1$

下证: $F(x)=(1+x)^m$.

$$\boxed{\frac{(m-1)\cdots(m-n)}{n!}+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}}$$

$$F'(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots\right]$$

$$xF'(x)=m\left[x+\frac{m-1}{1}x^2+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n+\cdots\right]$$

$$(1+x)F'(x)=m\left[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\right]=mF(x)$$

$$(1+x)F'(x)=mF(x),\qquad x\in(-1,1)$$

$$F(0)=1$$

$$\int_0^x \frac{F'(x)}{F(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^x \frac{m}{1+x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\ln F(x)-\ln F(0)=m\ln(1+x),$$

$$\therefore\quad F(x)=(1+x)^m,\qquad x\in(-1,1)$$

二项展开式:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

注 1° 在 $x = \pm 1$ 处收敛性与 m 的取值有关 .

2° m 为正整数时, 得二项式定理:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^m$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

3° $m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 时二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots$$

$$(-1 \le x \le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots$$

$$(-1 < x \le 1)$$

例4 将$\cos x$展开成 x 的幂级数.

解 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

逐项求导:

$$\cos x = (\sin x)'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

例5 将 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解 $[\ln(1+x)]'=\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x,\ |x|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\quad -1<x\le 1.$$

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\quad -1<x\le 1}$$

注 取$x=1$得, $\ln 2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{n+1}+\cdots$

例6 将 $\sin x$ 展成 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解 $\sin x = \sin\left[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})\right]$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots+(-1)^k\frac{(x-\frac{\pi}{4})^{2k}}{(2k)!}+\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left((x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots+(-1)^k\frac{(x-\frac{\pi}{4})^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots\right)$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

例7 将 $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数．

解 $\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

$=-\dfrac{1}{3(1-\frac{x+4}{3})}+\dfrac{1}{2(1-\frac{x+4}{2})}$

$=-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x+4}{3}\right)^n+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x+4}{2}\right)^n \qquad |x+4|<2$

$\therefore \quad \dfrac{1}{x^2+3x+2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$

$(-6<x<-2)$

例8 将 arcsin x 展开成 x 的幂级数

解 $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left[1+(-x^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

取二项展开式中 $m=-\dfrac{1}{2}$,得

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{x}{2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2\,!}x^2-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3\,!}x^3+\cdots$$

$$=1-\frac{x}{2}+\frac{3!!}{4!!}x^2-\frac{5!!}{6!!}x^3+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n x^n+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \qquad (-1,1)$$

$-x^2$ 代替 x 得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{3!!}{4!!}x^4$$

$$+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$\boxed{(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \quad (-1,1)}$$

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)},\quad x\in(-1,1)$$

若 $0 < a < b$,

则 $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+1}{b+1}$

又因当$x=1$时，$1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{1}{2n+1}$

$$u_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

令 $v_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 则

$$v_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{v_n}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$v_n^2 < \frac{1}{2n+1},\quad v_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$\because \quad u_n = v_n \cdot \dfrac{1}{2n+1} < \dfrac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}} < \dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}}}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛

$\therefore \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛， 故 $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \dfrac{1}{2n+1}$ 收敛

当 $x = -1$ 时， $-[1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \dfrac{1}{2n+1}]$ 收敛

$\therefore$ 展开式成立的范围是 $x \in [-1,1]$， 即

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \quad x \in [-1,1]$$

例9 将$f(x)=\ln\frac{x}{3-2x}$展成 $x-1$的幂级数 .

解 $f(x)=\underline{\ln x-\ln(3-2x)}$

$$=\ln[1+(x-1)]-\ln[1-2(x-1)]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[-2(x-1)]^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+2^n}{n}(x-1)^n \quad \left(|x-1|<\frac{1}{2}\right)$$

$x=\frac{1}{2}$时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$收敛 , $x=\frac{3}{2}$时发散 .

$$x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$$

拆

配

化一

展

范围

三、同步练习

1. 将$f(x)=\ln(2+x-3x^2)$在$x=0$处展为幂级数.

2. 将 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

3. 将函数展开成 x 的幂级数:

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$$

4. 将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$

展成 x 的幂级数 .

西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

四、同步练习解答

1. 将 $f(x)=\ln(2+x-3x^2)$ 在 $x=0$ 处展为幂级数.

解 $f(x)=\ln(1-x)+\ln 2+\ln(1+\frac{3}{2}x)$

$$2+x-3x^2=(1-x)(2+3x)$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\qquad(-1\le x<1)$$

$$\ln(1+\tfrac{3}{2}x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\tfrac{3}{2}x)^n\qquad(-\tfrac{2}{3}<x\le\tfrac{2}{3})$$

故 $f(x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n$

$$f(x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1+(-\tfrac{3}{2})^n]x^n\quad(-\tfrac{2}{3}<x\le\tfrac{2}{3})$$

2. 将 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解 $$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(3+x)}$$

$$=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)} \qquad (\,|x-1|<2\,)$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}+\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{8}\left[1-\frac{x-1}{4}+\frac{(x-1)^2}{4^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \qquad (\,-1<x<3\,)$$

3. 将函数展开成 x 的幂级数:

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$$

问题: $f(x)$ 的 导数 积分 $\Big\}$ 易展?

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\qquad x\in(-1,1)$

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$x=\pm 1$ 时, 级数条件收敛, $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$, 故

$$\boxed{f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\qquad x\in[-1,1]}$$

4. 将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展成 x 的幂级数 .

不易积分,
试求导数,
再展开.

解 $f'(x)=(\arctan x+\cancel{\dfrac{x}{1+x^2}})$

$$-\cancel{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\arctan x$$

导函数仍
不易展,再
求导.

$$f''(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\qquad(\,|x|<1\,)$$

$$f'(x) = f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(x)\,\mathrm{d}x$$

$f'(0)$

$= \arctan 0$

$= 0$

$$= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\right] \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} \qquad (-1 \le x \le 1)$$

$x = \pm 1$ 处, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ 收敛 .