高等数学

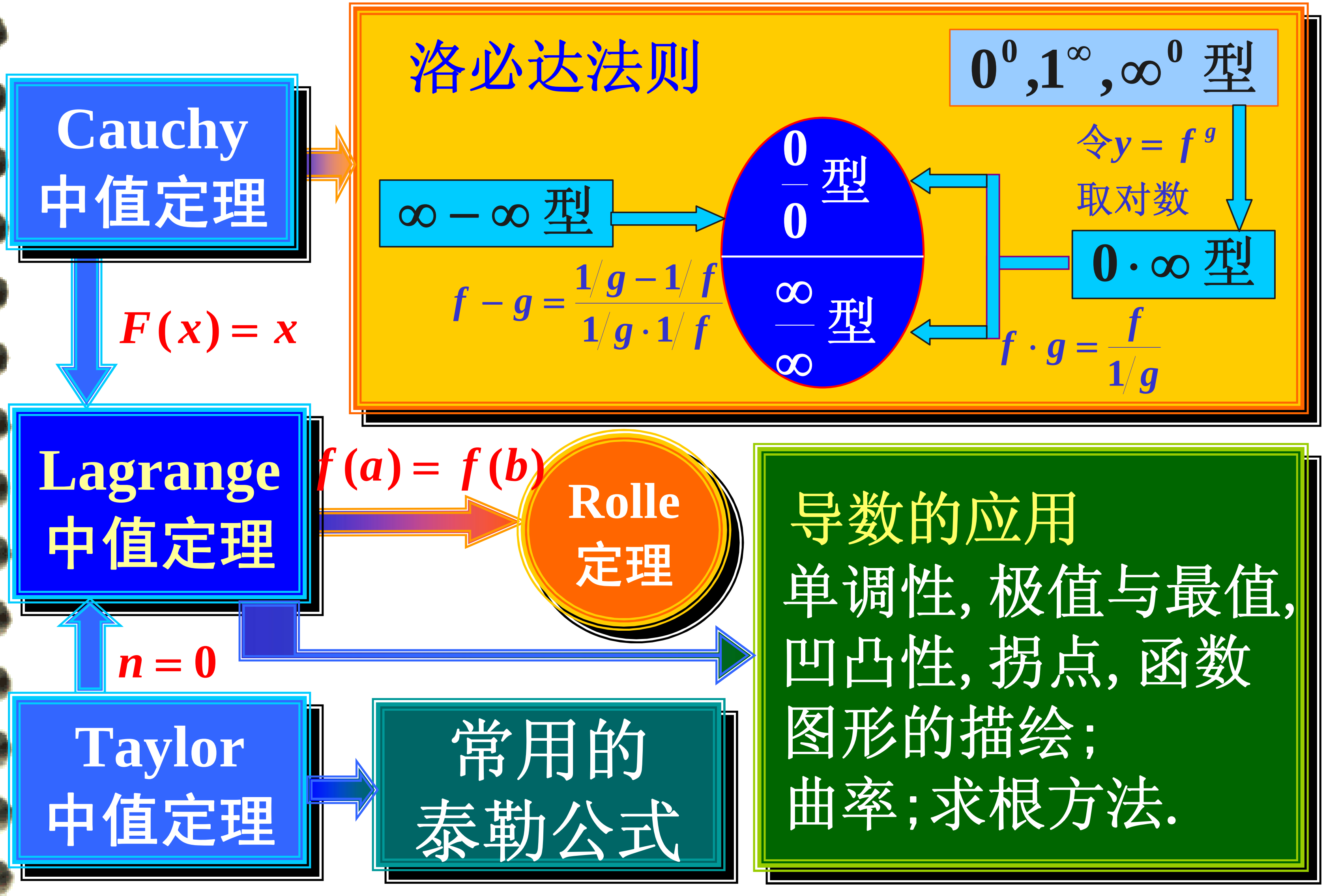
第三章 习题课

中值定理
与导数的应用

- 一、主要内容
- 二、典型例题

下页 返回

一、主要内容



洛必达法则
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型
令$y = f^g$
取对数
$0 \cdot \infty$ 型
$\infty - \infty$ 型
$f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/g \cdot 1/f}$
$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$
Cauchy 中值定理
$F(x) = x$
Lagrange 中值定理
$f(a) = f(b)$
Rolle 定理
$n = 0$
Taylor 中值定理
常用的泰勒公式
导数的应用
单调性, 极值与最值,
凹凸性, 拐点, 函数
图形的描绘;
曲率; 求根方法.

6、导数的应用

(1) 函数单调性的判定法

定理　设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导.

1^0如果在(a,b)内$f'(x)>0$，那末函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加；

2^0如果在(a,b)内$f'(x)<0$，那末函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

(2) 函数的极值及其求法

定义设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义,x_0是(a,b)内的一个点,

如果存在着点x_0的一个邻域,对于这邻域内的任何点x,除了点x_0外,$f(x) < f(x_0)$均成立,就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值;

如果存在着点x_0的一个邻域,对于这邻域内的任何点x,除了点x_0外,$f(x) > f(x_0)$均成立,就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极小值.

函数的极大值与极小值统称为极值,使函数取得极值的点称为极值点.

极值是函数的局部性概念:极大值可能小于极小值,极小值可能大于极大值.

定理(必要条件) 设 $f(x)$在点x_0处具有导数,且在x_0处取得极值,那末必定 $f'(x_0)=0$.

定义 使导数为零的点(即方程$f'(x)=0$的实根)叫做函数$f(x)$的驻点.

驻点和不可导点统称为临界点.

目录 上页 下页 返回 结束

定理(第一充分条件)

(1)如果 $x\in(x_0-\delta,x_0)$,有 $f'(x)>0$;而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$,

有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

(2)如果 $x\in(x_0-\delta,x_0)$,有 $f'(x)<0$;而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$

有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

(3)如果当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 及 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)$ 符号相同,则 $f(x)$ 在 x_0 处无极值.

定理(第二充分条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数,且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那末

(1)当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

(2)当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

求极值的步骤:

1° 确定 $f(x)$ 的定义域，并求导数 $f'(x)$;

2° 求极值可疑点：驻点，导数不存在(但连续)的点.

3° 列表，检查 $f'(x)$ 在极值可疑点左右的正 负号，或检查驻点处 $f''(x)$ 的符号，判断极值点；

4° 求极值.

(3) 最大值、最小值问题

步骤:

1.求驻点和不可导点;

2.求区间端点及驻点和不可导点的函数值,比较大小,那个大那个就是最大值,那个小那个就是最小值;

注意:如果区间内只有一个极值,则这个极值就是最值.(最大值或最小值)

实际问题求最值应注意:

1)建立目标函数;

2)求最值;若目标函数只有唯一驻 点，则该点的函数值即为所求的最大（或最小）值.

(4) 曲线的凹凸与拐点

定义 设$f(x)$在(a,b)内连续,如果对(a,b)内任意两点x_1,x_2,恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

那末称$f(x)$在(a,b)内的图形是凹的;

如果对(a,b)内任意两点x_1, x_2,恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那末称$f(x)$在(a,b)内的图形是凸的;

如果$f(x)$在$[a,b]$内连续,且在(a,b)内的图形是凹(或凸)的,那末称$f(x)$在$[a,b]$内的图形是凹(或凸)的;

定理1 如果$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内具有二阶导数,若在(a,b)内

(1) $f''(x)>0$,则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的;

(2) $f''(x)<0$,则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的;

连续曲线上凹凸的分界点称为**曲线的拐点.**

定理 2 如果 $f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内存在二阶导数，则 点 $(x_0,f(x_0))$ 是 拐 点 的 必 要 条 件 是 $f''(x_0)=0$.

方法1：设函数$f(x)$在x_0的邻域内二阶可导，

且$f''(x_0)=0$，

(1) x_0两近旁$f''(x)$变号，点$(x_0, f(x_0))$即为拐点；

(2) x_0两近旁$f''(x)$不变号，点$(x_0, f(x_0))$不是拐点.

方法2：设函数$f(x)$在x_0的邻域内三阶可导，

且$f''(x_0)=0$，而$f'''(x_0)\neq 0$，那末$(x_0, f(x_0))$是

曲线$y=f(x)$的拐点.

(5) 描绘函数图形的步骤

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域，并考察其对称性及周期性；

2. 求 $f'(x), f''(x)$，并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 0 和不存在的点；

3. 列表判别增减及凹凸区间，求出极值和拐点；

4. 讨论函数的图形有无渐近线;

5. 为了把图形描绘得更准确些，有时还需补充求出

曲线上的一些点，如与坐标轴的交点等 .

6. 根据上面的讨论将曲线描绘出来.

(6) 弧微分 曲率 曲率圆

1° 弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$

2° 曲率 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|.$

曲率的计算公式 $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$

3^0.曲率圆

定义 设曲线$y=f(x)$在点$M(x,y)$处的曲率为$k(k\neq 0)$.在点M处的曲线的法线上,在凹的一侧取一点D,使$|DM|=\dfrac{1}{k}=\rho$.以D为圆心,ρ为半径作圆(如图),称此圆为曲线在点M处的曲率圆.

$$\rho=\frac{1}{k},\quad k=\frac{1}{\rho}.$$

D是曲率中心, ρ是曲率半径.

二、典型例题

(二) 导数的应用

1. 求极限

例1 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0,$

求 (1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x);$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6 + f(x)}{x^2}.$

下列推导是否正确？

推导1 $\because \quad \sin x \sim x \quad (x \to 0)$

$$0 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}$$

$$\cancel{=} \lim_{x\to 0}\frac{6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{6 + f(x)}{x^2}$$

$\therefore \quad \lim\limits_{x\to 0}[6 + f(x)] = 0,$ 故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -6.$

错误原因：遇无穷小“+”, “–”时， 一般不能用各项等价无穷小进行代换；须对分子或分母“整体”代换！

推导2

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}$$

$$\cancel{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to 0}[6+f(x)]=0$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-6.$

错误原因： 和的极限运算法则使用的前提：各项极限都要存在.

推导3 依题设，知

$$\lim_{x\to 0}[\sin 6x + xf(x)] = 0$$

即 $$\lim_{x\to 0} x\cdot[\frac{\sin 6x}{x} + f(x)] = 0$$

$\cancel{\therefore}$ $$\lim_{x\to 0}[\frac{\sin 6x}{x} + f(x)] = 0$$

故 $$\lim_{x\to 0} f(x) = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x} = -6$$

错误原因： 由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$

$$\not\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$

正确解答:

方法1 (1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin 6x + xf(x)] - \sin 6x}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}[\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\cdot x^2 - 6\cdot\frac{\sin 6x}{6x}]$$

$$= 0\times 0 - 6\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x} = -6.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6 + f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x + xf(x)}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6x - \sin 6x + [\sin 6x + xf(x)]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right]$$

$$\because \quad \lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{36\sin 6x}{6x} = 36$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} = 36+0 = 36$$

方法2 (1)

$$\because \quad 0=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{x}+f(x)}{x^{2}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 6x}{x}+f(x)\right]=0$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x}=-6$

方法3 (1) 依题设，知

$$\sin 6x + xf(x) = o(x^3) \quad (\text{当 } x \to 0 \text{ 时})$$

$$\therefore \quad xf(x) = o(x^3) - \sin 6x,$$

即 $$f(x) = \frac{o(x^3)}{x} - \frac{\sin 6x}{x}$$

从而 $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{o(x^3)}{x} - \frac{\sin 6x}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{o(x^3)}{x^3}\cdot x^2 - \frac{\sin 6x}{6x}\cdot 6\right]$$

$$= 0\times 0 - 6 = -6.$$

$$\boxed{xf(x)=o(x^3)-\sin 6x}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+o(x^3)-\sin 6x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}=36.$$

类似题:

(1) 已知 $\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+\ln(1+2x)}{x^2}=0$,

则 $\lim_{x\to 0}\frac{2+f(x)}{x}=$ <u>2</u>.

(2) 已知 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=2$, 求 $\lim_{x\to 0}f(x)$.

(答案: 12)

例2 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中$g(x)$有二阶导数， $g(0)=1$.

(1) 确定a的值，使 $f(x)$在 $x=0$处连续；

(2) 在(1)成立的情形下，求 $f'(x)$.

解 1. $f(x)$在$x=0$处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$

$$\because \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-\cos x}{x} \qquad (\frac{0}{0})$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)+\sin x}{1} = g'(0)$$

$$\therefore \qquad a = g'(0)$$

2. 当 $x \neq 0$时， $f'(x) = [\frac{g(x)-\cos x}{x}]'$

$$= \frac{x[g(x)-\cos x]' - [g(x)-\cos x]}{x^2}$$

$$= \frac{x[g'(x)+\sin x] - [g(x)-\cos x]}{x^2}$$

当 $x=0$时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-g'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-g'(0)x}{x^2} \qquad (\frac{0}{0})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}[\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}+\frac{\sin x}{x}]=\frac{1}{2}[g''(0)+1]$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}, & x\neq 0\\[2ex] \dfrac{1}{2}[g''(0)+1], & x=0\end{cases}$$

2.证明不等式

例3　证明：$\pi^e < e^\pi$.

分析　$\pi^e < e^\pi \Leftrightarrow \ln\pi^e < \ln e^\pi$

$$\Leftrightarrow e\ln\pi < \pi$$

$$\Leftrightarrow \pi - e\ln\pi > 0$$

证　令 $f(x) = x - e\ln x$

则$f(x)$在$[e,+\infty)$上可导，

且 $f'(x) = 1 - \dfrac{e}{x} = \dfrac{x-e}{x}$

需证：当 $x > e$时

$$f(x) > 0 = f(e)$$

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点： $x=e$

$\because$ 当 $x>e$ 时， $f'(x)>0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调增加

故当 $x>e$ 时， $f(x)>f(e)=0$

$\because \pi>e$， $\therefore$ $f(\pi)>0$

即 $\pi-e\ln\pi>0$, 亦即 $\pi^e<e^\pi$

一般地，设 $\alpha > \beta \geq e$，证明：

$$\alpha^{\beta} < \beta^{\alpha}$$

提示：令 $f(x) = x\ln\beta - \beta\ln x$

例4 设在$[0,1]$上，$f''(x) > 0$,则(**B**)成立.

$(A)\ f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$

$(B)\ f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$

$(C)\ f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$

$(D)\ f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

解 在[0,1]上，$f''(x) > 0,$

令 $g(x) = f'(x)$ 则由 $g'(x) = f''(x) > 0, x \in [0,1]$

知 $g(x) = f'(x)$在[0,1]上单调增加

又由拉格朗日中值定理，知 $\exists \xi \in (0,1)$

使 $f(1) - f(0) = f'(\xi)(1-0) = f'(\xi)$

$\therefore$ 对 $0 < \xi < 1$，有 $g(0) < g(\xi) < g(1)$

即 $f'(0) < f'(\xi) < f'(1)$ 故选 (B).

例5 设 $x > -1$, 证明:

$\boxed{\begin{array}{l}(1)\text{ 需证: 当} x > -1 \text{时,} \\ \quad f(x) \le f(0) = 0\end{array}}$

(1) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, $(1+x)^{\alpha} \le 1 + \alpha x$;

(2) 当 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$ 时, $(1+x)^{\alpha} \ge 1 + \alpha x$.

证法1 令 $f(x) = (1+x)^{\alpha} - (1+\alpha x)$, 则 $f(0) = 0$

$$f'(x) = \alpha\,[(1+x)^{\alpha-1} - 1],$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)\,(1+x)^{\alpha-2}$$

(1) 当 $0 < \alpha < 1$, $x > -1$ 时, $f''(x) < 0$

$f'(x)$在$(-1,+\infty)$上单调减少

$\therefore$ $f(x)$在$(-1,+\infty)$上有唯一驻点 $x=0$, 且为$f(x)$的极大值点，从而为 $f(x)$的最大值点.

$\therefore$ 当$0<\alpha<1$, $x>-1$时， $f(x)\le f(0)=0$

即 $(1+x)^{\alpha}\le 1+\alpha x.$

$$\boxed{f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}}$$

(2) 当$\alpha<0$或$\alpha>1$, $x>-1$时， $f''(x)>0$

$f'(x)$在$(-1,+\infty)$上单调增加

$\therefore$ $f(x)$在$(-1,+\infty)$上有唯一驻点 $x=0$, 且为$f(x)$的极小值点，从而为 $f(x)$的最小值点.

$\therefore$ 当 $\alpha < 0$或$\alpha > 1$，$x > -1$时， $f(x) \geq f(0) = 0$

即 $(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x.$

证法2 (用泰勒公式)

令 $g(x) = (1+x)^{\alpha}$， 则 $g(0) = 1$

$$g'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad g'(0) = \alpha$$

$$g''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

由$g(x)$的一阶麦克劳林公式，得

$$g(x) = (1+x)^{\alpha} = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(\theta x)}{2!}x^2$$

$$g(x)=(1+x)^{\alpha}=g(0)+g'(0)x+\frac{g''(\theta x)}{2!}x^2$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(\theta x+1)x^2 \quad (0<\theta<1)$$

$\because$ 当 $x>-1$时， $\theta x>-\theta>-1,\ \theta x+1>0,$

$\therefore$ (1)当 $0<\alpha<1, x>-1$时， $g(x)\le 1+\alpha x$

即 $(1+x)^{\alpha}\le 1+\alpha x.$

$\therefore$ (2)当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1,\ x>-1$时， $g(x)\ge 1+\alpha x$

即 $(1+x)^{\alpha}\ge 1+\alpha x.$

例6 证明：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

证法1 $\sin x > \frac{2}{\pi}x \Leftrightarrow$ si

需证：$f(x) > f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$

令 $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$,

$f(x)$在$[0, \frac{\pi}{2}]$上可导，且 $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0.$

由罗尔定理知，$\exists\, x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$，使 $f'(x_0) = 0.$

$\because \quad f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$,

$$f''(x) = -\sin x < 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$\therefore\quad f'(x)$在$[0, \frac{\pi}{2}]$上单调减少，故

(1) 当 $0 < x < x_0$时， $f'(x) > f'(x_0) = 0$

$f(x)$在$[0，\ x_0]$上单调增加，

$\therefore\quad \forall\ x \in (0, x_0],\ \ f(x) > f(0) = 0$

(2) 当 $x_0 < x < \frac{\pi}{2}$时， $f'(x) < f'(x_0) = 0$

$f(x)$在$[x_0, \frac{\pi}{2}]$上单调减少，

$$\therefore \quad \forall\ x \in [x_0, \frac{\pi}{2}),\ \ f(x) > f(\frac{\pi}{2}) = 0$$

综上所述：$\forall\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$，有 $f(x) > 0$

即 $\sin x - \frac{2}{\pi} x > 0, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2})$

亦即当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x > \frac{2}{\pi} x.$

证法2 $\sin x > \frac{2}{\pi} x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2})$

令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x=0\end{cases}$ 则

$g(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上连续，在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内可导，且

当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时，

$$g'(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$=\frac{\cos x}{x^2}\cdot(x-\tan x)$$

而令 $h(x)=x-\tan x$

$h(x)$ 在$[0,\dfrac{\pi}{2})$上可导，且 $h(0)=0$,

$$h'(x)=1-\sec^2 x=-\tan^2 x<0,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$h(x)$ 在$[0,\dfrac{\pi}{2})$上单调减少

$$\therefore \forall x\in(0,\frac{\pi}{2}),\quad \text{有 } h(x)<h(0)=0.$$

$$\therefore \quad g'(x)<0,\quad x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$\therefore \quad g(x)$ 在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上单调减少

故当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时,

$$g(\frac{\pi}{2}) < g(x) < g(0)$$

即 $\dfrac{2}{\pi} < \dfrac{\sin x}{x} < 1,$ 亦即 $\dfrac{2}{\pi} x < \sin x < x.$

例7 设 $f''(x)<0$, $f(0)=0$. 证明对任意

$x_1>0, x_2>0$， 有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$

证 不妨设 $0<x_1<x_2$

$$\because \quad f(x_1+x_2)-f(x_2)-f(x_1)$$

$$=[\,f(x_1+x_2)-f(x_2)\,]-[\,f(x_1)-f(0)\,]$$

$$=f'(\xi_2)x_1-f'(\xi_1)x_1 \quad (x_2<\xi_2<x_1+x_2,\, 0<\xi_1<x_1)$$

$$=x_1 f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)<0 \qquad (\xi_1<\xi<\xi_2)$$

$$\therefore \quad f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

3. 方程根的确定

例8 讨论方程： $e^x = a x^2$ (常数$a > 0$)

有几个实根？并确定根 所在范围.

思路： $f(x) = 0$

1° 确定$f(x)$的单调区间；

2° 在各单调区间的端点处

查$f(x)$的值或极限是否异号 .

解 显然 $x = 0$不是根

$$e^x = a x^2 \Leftrightarrow x = \ln a + 2\ln|x|$$

$$\Leftrightarrow x - 2\ln|x| - \ln a = 0$$

1° 令 $f(x) = x - 2\ln|x| - \ln a$

则 $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-2}{x}$

则 $f'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点： $x=2$

$$f''(x)=\frac{2}{x^2}>0,\ x\neq 0$$

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$			极小值	

$$2^\circ \quad \because \lim_{x\to -0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x[1 - \frac{2\ln(-x)}{x} - \frac{\ln a}{x}]$$

$$= -\infty$$

$\therefore$ $f(x)$在$(-\infty, 0)$内有唯一零点： x_1

$$\because \lim_{x\to +0} f(x) = +\infty$$

$$f(2) = 2 - 2\ln 2 - \ln a = 2 - \ln 4a$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$\therefore$ 当 $f(2) < 0$ 时， 即 $a > \frac{e^2}{4}$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内

恰有两个零点： $x_2 \in (0,2), x_3 \in (2,+\infty)$

当 $f(2) = 0$ 时， 即 $a = \frac{e^2}{4}$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内

只有一个零点： x_2

当 $f(2) > 0$ 时， 即 $a < \frac{e^2}{4}$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内

无零点 .

例9 设 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且当 $x>a$时，$f'(x)>k>0$，其中k为常数，证明：

若 $f(a)<0$，则方程 $f(x)=0$在$(a,+\infty)$内有且仅有一个实根.

证 1° 至多性 $\because$ $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且

$$f'(x)>k>0, x\in(a,+\infty)$$

$\therefore$ $f(x)$在$[a,+\infty)$上单调增加，

故 $f(x)$在$(a,+\infty)$内至多有一个零点 .

2° 存在性

需证：$\exists\, x_0 \in (a,+\infty)$, 使 $f(x_0) > 0$

$\because \quad f(a) < 0,$

而由 $f'(x) > k > 0,\ x \in (a,+\infty),$

即 $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad x \in (a,+\infty)$

$> k(x-a), \qquad \exists \xi \in (a, x)$

亦即 $f(x) > f(a) + k(x-a), \quad x \in (a,+\infty)$

$\because \quad \lim\limits_{x\to+\infty} [f(a) + k(x-a)] = +\infty$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

从而必存在 $x_0 \in (a,+\infty)$, 使 $f(x_0) > 0$

(事实上，只要取 x_0满足：$f(a)+k(x_0-a)>0$,

$x_0 > a - \dfrac{f(a)}{K}$ 即可).

由零点定理, $\exists \xi \in (a, x_0)$, 使 $f(\xi) = 0$,

故 $f(x)$在$(a,+\infty)$内有且只有一个零点 ，

即方程 $f(x) = 0$在$(a,+\infty)$内有且只有一个实根 .

例10 讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点的个数．

解 等价问题是： $(4x + \ln^4 x) - (4\ln x + k) = 0$ 有几个不同的实根.

令 $f(x) = \ln^4 x - 4\ln x + 4x - k$, 则

$$f'(x) = \frac{4\ln^3 x}{x} - \frac{4}{x} + 4 = \frac{4(\ln^3 x - 1 + x)}{x}, \quad (x > 0)$$

驻点： $x = 1$

当$0<x<1$时， $f'(x)=\dfrac{4[\ln^3 x-(1-x)]}{x}<0$

$\therefore \quad f(x)$在$(0,1]$上单调减少；

当$x>1$时， $f'(x)=\dfrac{4[\ln^3 x+(x-1)]}{x}>0$

$\therefore \quad f(x)$在$[1,+\infty)$上单调增加．

于是 $f(1)=\min\limits_{x\in(0,+\infty)} f(x)=4-k$

(1) 当$k<4$, 即$4-k>0$时， $f(x)\geq f(1)>0$,

此时，$f(x)$无零点，从而两曲线无交点；

(2) 当 $k=4$，即 $4-k=0$时，$f(x)$有唯一零点，

$f(1)=0$，从而两曲线只有一个交点；

(3) 当 $k>4$，即 $4-k<0$时，$f(1)<0$，

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}[(\ln x)(\ln^3 x-4)+4x-k]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[(\ln x)(\ln^3 x-4)+4x-k]=+\infty$$

此时，$f(x)$有两个零点，从而曲线有两个交点．

4. 求极值

例11 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$中的最大一个数 .

分析 无穷多个数，不能逐个计算，比较大小.

解 $x_n = f(n) = \sqrt[n]{n}$

考虑：$f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$ 在$[1, +\infty)$上的最大值.

$$f'(x) = (e^{\frac{\ln x}{x}})' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot (\frac{\ln x}{x})' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}$$

令 $f'(x) = 0$，得唯一驻点：$x = e$.

x	$[1, e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值 (最大值)	↘

$\because \quad f(x)$在$[e,+\infty)$上单调减少

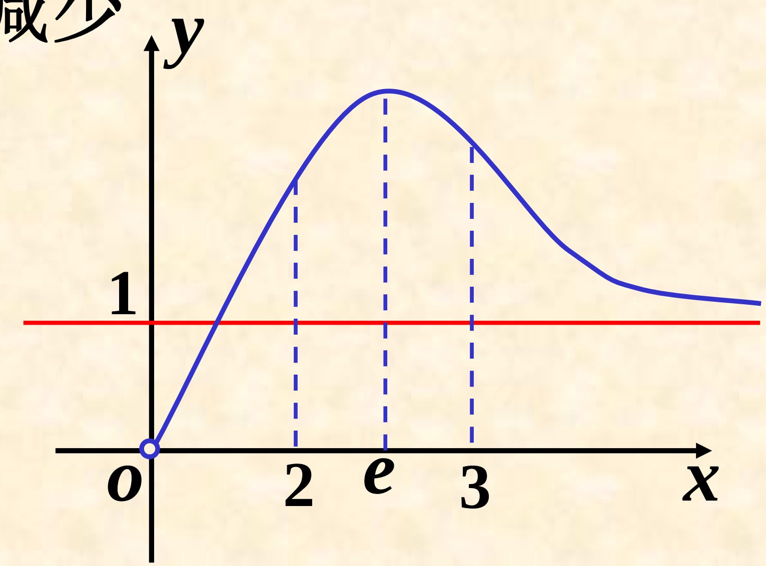
而 $\quad e<3<4<\cdots<n<\cdots$

$\therefore \quad f(3)>f(n) \quad (n\geq 4)$

即 $\quad \sqrt[3]{3}>\sqrt[n]{n} \quad (n\geq 4)$

又$\because \quad 1<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

$\therefore \quad \{\sqrt[n]{n}\}$中的最大者为$\sqrt[3]{3}$.



例12 设 $f(x)$有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，判断 $f(0)$是否为 $f(x)$的极值 .

解 $\because \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1>0$

由极限的保号性，知

$$\frac{f''(x)}{|x|}>0,\quad x\in \mathring{U}(0)$$

$$f''(x) > 0, \quad x \in \mathring{U}(0)$$

$\therefore \quad f'(x)$在$U(0)$上单调增加

当 $x < 0, x \in U(0)$时，有

$$f'(x) < f'(0) = 0$$

当 $x > 0, x \in U(0)$时，有

$$f'(x) > f'(0) = 0$$

$\therefore \quad f(0)$为 $f(x)$的极小值 .

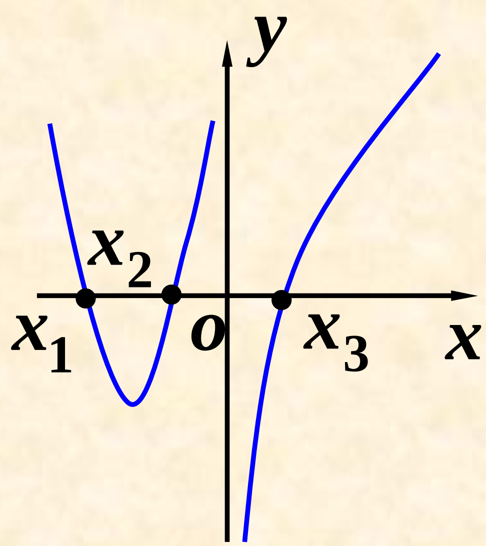
例13 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$有(C)

(A) 一个极小值点和两个极 大值点；

(B) 两个极小值点和一个极 大值点；

(C) 两个极小值点和两个极 大值点；

(D) 三个极小值点和一个极 大值点.

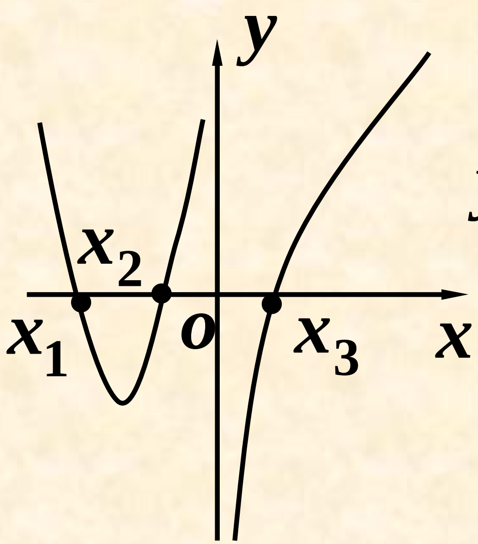


$y = f'(x)$

解 $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$

$f'(0)$不存在

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, 0)$	0	$(0, x_3)$	x_3	$(x_3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



$y = f'(x)$