第二节　第二类曲线积分

习题　10-2

1. 计算下列对坐标的曲线积分:

(1) $\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$, 其中 L 为曲线 $x=2t^2+t+1$, $y=t^2+1$ 上从点(1,1)到点(4,2)的一段弧;

(2) $\int_L x\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}y$, 其中 L 为抛物线 $y=x^2$ 上从点 $A(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧;

(3) $\oint_L \cos y\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y$, 其中 L 是由直线 $y=x$, $x=\pi$ 和 x 轴所围三角形的正向边界;

(4) $\int_L (1+2xy)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$, 其中 L 为从点 $(1,0)$ 到点 $(-1,1)$ 的上半椭圆周 $x^2+2y^2=1\,(y\geq 0)$;

(5) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$, 其中 L 为自点 $A(0,0)$ 到点 $B(1,1)$, 再到点 $C(2,0)$ 的折线段;

(6) $\oint_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 L 为依逆时针方向沿圆 $x^2+y^2=a^2$ 绕行一周的路径;

(7) $\int_\Gamma \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+b\mathrm{d}z$, 其中曲线 Γ 为螺旋线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ 上由参数 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段有向弧;

(8) $\oint_\Gamma (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中 Γ 为椭圆周 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 且从 z 轴的正方向看去, Γ 取顺时针方向.

解　(1) 如图 10.7 所示, $L:\begin{cases} x=2t^2+t+1, \\ y=t^2+1, \end{cases}$ t 从 0 变到 1.

$$\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\{[(2t^2+t+1)+(t^2+1)]\cdot(4t+1)+[(t^2+1)-(2t^2+t+1)]\cdot 2t\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1(10t^3+5t^2+9t+2)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\frac{5}{2}t^4+\frac{5}{3}t^3+\frac{9}{2}t^2+2t\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{32}{3}.$$

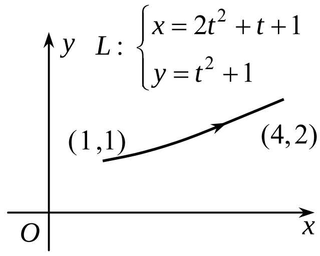

图 10.7

(2) 如图 10.8 所示，L: $y=x^2$，x 从 0 变到 1.

$$\int_L x\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x\mathrm{e}^{x^2}+\frac{\sin x}{x}\cdot 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}-2\cos x\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)+2(1-\cos 1).$$

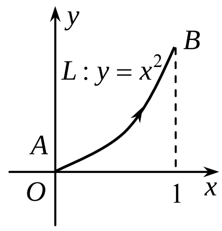

图 10.8

(3) 如图 10.9 所示，$L=OA+AB+BO$，其中

OA: $y=0$, x 从 0 变动到 π,

AB: $x=\pi$, y 从 0 变动到 π,

BO: $y=x$, x 从 π 变动到 0.

$$\oint_L\cos y\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y=\int_{OA}\cos y\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y+\int_{AB}\cos y\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y$$

$$+\int_{BO}\cos y\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^\pi\cos 0\mathrm{d}x+\int_0^\pi\cos\pi\mathrm{d}y+\int_\pi^0(\cos x+\cos x)\mathrm{d}x=\pi-\pi+0=0.$$

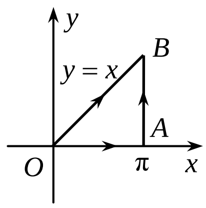

图 10.9

(4) 如图 10.10 所示，$L:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\end{cases}$ t 从 0 变到 π.

$$\int_L(1+2xy)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^\pi\left[\left(1+2\cos t\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\cdot(-\sin t)+\cos^2 t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\pi\left(-\sin t-\sqrt{2}\sin^2 t\cos t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^3 t\right)\mathrm{d}t=-2.$$

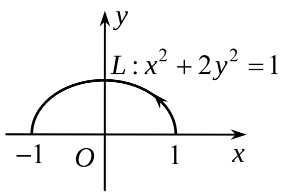

图 10.10

(5) L 如图 10.11 所示，$L=AB+BC$，其中

AB: $y=x$, x 从 0 变动到 1,

$BC: x+y=2$, x 从1变动到 2.

$$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{AB}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y+\int_{BC}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(2x^2+0)\mathrm{d}x+\int_1^2[(x^2+(2-x)^2)-(x^2-(2-x)^2)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x+\int_1^2 2(2-x)^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1-\frac{2}{3}(2-x)^3\Big|_1^2=\frac{4}{3}.$$

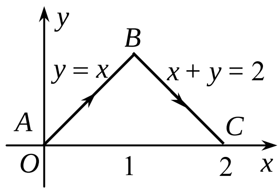

图 10.11

(6) L 如图 10.12 所示, $L:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}$ t 从 0 变到 2π.

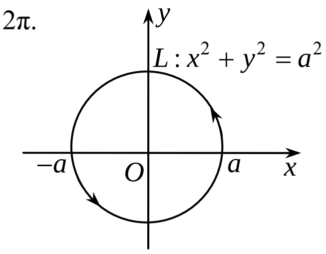

图 10.12

$$\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a(\cos t+\sin t)\cdot(-a\sin t)-a(\cos t-\sin t)\cdot a\cos t}{a^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=-2\pi.$$

(7) $\Gamma:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\quad t\text{ 从 0 变到 }2\pi.\\ z=bt,\end{cases}$

$$\int_\Gamma\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+b\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}[\frac{a\cos t\cdot a\cos t-a\sin t\cdot(-a\sin t)}{a^2}+b^2]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(1+b^2)\mathrm{d}t=2\pi(1+b^2).$$

(8) $\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\qquad t\text{ 从 }2\pi\text{ 变到 0.}\\ z=2-\cos t+\sin t,\end{cases}$

$$\oint_\Gamma(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{2\pi}^0[(2-\cos t)(-\sin t)+(2\cos t-\sin t-2)\cos t+(\cos t-\sin t)(\sin t+\cos t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(2\sin t+2\cos t-3+4\sin^2 t)\mathrm{d}t=-6\pi+4\pi=-2\pi.$$

2. 计算 $\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$, 其中 L 是从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的下列四条不同路径:

(1) 直线 L_1： $y=x$;

(2) 抛物线 L_2： $y=x^2$;

(3) 抛物线 L_3： $x=y^2$;

(4) 立方抛物线 L_4： $y=x^3$;

解 (1) $\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_0^1(x^2+0)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

(2) $\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_0^1[(x\cdot x^2+(x^2-x)\cdot 2x]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1(3x^3-2x^2)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}.$$

(3) $\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_0^1[(y^3\cdot 2y+(y-y^2)]\mathrm{d}y=\int_0^1(2y^4-y^2+y)\mathrm{d}y$

$$=\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{17}{30}.$$

(4) $\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_0^1[x\cdot x^3+(x^3-x)\cdot 3x^2]\mathrm{d}x=\int_0^1(3x^5+x^4-3x^3)\mathrm{d}x$

$$=\frac{3}{6}+\frac{1}{5}-\frac{3}{4}=\frac{1}{12}.$$

3. 计算 $\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，其中

(1) $\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$， L 是由为 $y=x$， $x=1$ 及 $y=0$ 围成的三角形闭路，逆时针方向;

(2) $\boldsymbol{F}=\dfrac{y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$， L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，顺时针方向.

解 (1) L 如图 10.13 所示，$L=OA+AB+BO$，其中

OA： $y=0$， x 从 0 变动到 1，

AB： $x=1$， y 从 0 变动到 1，

BO： $y=x$， x 从 1 变动到 0.

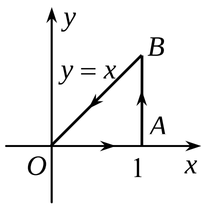

图 10.13

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{OA}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\int_{AB}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\int_{BO}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 0\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y+\int_1^0(-x+x)\mathrm{d}x=1.$$

(2) $L:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}$ t 从 2π 变到 0.

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_L \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\int_{2\pi}^{0}[a\sin t\cdot(-a\sin t)-a\cos t\cdot a\cos t]\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

4. 今有一平面力场 $\boldsymbol{F}$, 大小等于点 (x,y) 到原点的距离, 方向指向原点.

(1) 试计算单位质量的质点 P 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限中的弧段从点 $(a,0)$ 移动到点 $(0,b)$ 时, 力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功;

(2) 试计算质点 P 沿上述椭圆逆时针绕行一圈时, $\boldsymbol{F}$ 所作的功.

解 $\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{e}_F=\sqrt{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-x,-y)=(-x,-y).$

(1) 如图 10.14 所示, 令 $L:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}$ t 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$.

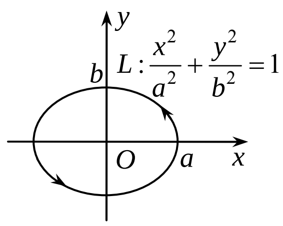

图 10.14

力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L -x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2-b^2)\sin t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2-b^2}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2-b^2}{2}.$$

(2) 令 $L:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}$ t 从 0 变到 2π.

力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=\oint_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_L -x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}(a^2-b^2)\sin t\cos t\mathrm{d}t.$$

$$=\frac{a^2-b^2}{2}\sin^2 t\Big|_0^{2\pi}=0.$$

5. 一力场其力的大小与作用点到 z 轴的距离成反比(比例系数为 k), 方向垂直 z 轴且指向 z 轴. 一质点沿圆周 $x=\cos t$, $y=1$, $z=\sin t$ 由点 $M(1,1,0)$ 经四分之一圆弧至点 $N(0,1,1)$, 求该力场对质点所作的功.

解 力 $\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{e}_F=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-x,-y,0)=(-\frac{kx}{x^2+y^2},-\frac{ky}{x^2+y^2},0).$

令 $\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=1,\\ z=\sin t,\end{cases}$ t 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$. 力场对质点所作的功为

$$W=\int_{\Gamma}\boldsymbol{F}\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\Gamma}-\frac{kx}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\frac{ky}{x^2+y^2}\mathrm{d}y+0\mathrm{d}z=k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cos t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\sin^2 t}{2-\sin^2 t}=-\frac{k}{2}\ln(2-\sin^2 t)\Big|_0^1=\frac{k}{2}\ln 2.$$

6. 一力场其力的大小等于质点到坐标原点的距离，方向指向原点. 试求当质点沿圆柱螺旋线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=kt$ 从 $t=0$ 移动到 $t=2\pi$ 的一段弧时，该力场对质点所作的功.

解 力 $\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{e}_F=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(-x,-y,-z)=(-x,-y,-z).$

令 $\Gamma:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\\ z=kt,\end{cases}$ t 从 0 变到 2π. 力场对质点所作的功为

$$W=\int_{\Gamma}\boldsymbol{F}\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\Gamma}-x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y-z\mathrm{d}z=-k^2\int_0^{2\pi}t\mathrm{d}t=-2\pi^2k^2.$$

7. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化成对弧长的曲线积分，其中 L 为:

(1) 在 xOy 面内沿直线从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$;

(2) 在 xOy 面内沿抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$.

解 (1) L: $y=x$, x 从 0 变到 1.

L 上任一点 (x,y) 处的切向量为 $(1,1)$, 单位切向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, 从而根据两类曲线积分的关系，有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s=\int_L\frac{1}{\sqrt{2}}[P(x,y)+Q(x,y)]\mathrm{d}s.$$

(2) L: $y=x^2$, x 从 0 变到 1.

L 上任一点 (x,y) 处的切向量为 $(1,2x)$, 单位切向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}(1,2x)$, 从而根据两类曲线积分的关系，有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$$

$$=\int_L\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}[P(x,y)+2xQ(x,y)]\mathrm{d}s.$$

8. 把对坐标的曲线积分 $\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 化成对弧长的曲线积分，其中 Γ 为圆柱螺旋线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\le t\le 2\pi)$ 从点 $A(a,0,0)$ 到点 $B(a,0,2\pi b)$ 的一段弧.

解 $\Gamma:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\\ z=bt,\end{cases}$ t 从 0 变到 2π.

Γ 上任一点 (x,y,z) 处的切向量为 $(-a\sin t,a\cos t,b)$, 单位切向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t,a\cos t,b)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-y,x,b)$, 从而根据两类曲线积分的关系, 有

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\Gamma[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}s$$

$$=\int_\Gamma\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-yP(x,y,z)+xQ(x,y,z)+bR(x,y,z)]\mathrm{d}s.$$