第五节　曲线的凹凸性与拐点

习题　3-5

1. 判定下列曲线的凹凸性:

(1) $y=\mathrm{sh}x$;　　(2) $y=1-x^{\frac{1}{3}}$;

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$;　　(4) $y=\dfrac{1}{4}x^2+\sin x$;

解　(1) $y=\mathrm{sh}x,\ y'=\mathrm{ch}x,\ y''=\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$. 令 $y''=0$, 可得 $x=0$, 且当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $y''<0$, 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $y''>0$, 所以曲线 $y=\mathrm{sh}x$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是凸的, 在区间 $[0,+\infty)$ 上是凹的.

(2) $y=1-x^{\frac{1}{3}},\ y'=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\ y''=\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$. 当 $x=0$ 时, y'' 不存在, 且当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $y''<0$, 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $y''>0$. 又函数 $y=1-x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处连续, 所以曲线 $y=1-x^{\frac{1}{3}}$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是凸的, 在区间 $[0,+\infty)$ 上是凹的.

(3) $y=\sqrt{1+x^2},\ y'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ y''=\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}>0$, 所以曲线 $y=\sqrt{1+x^2}$ 在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上是凹的.

(4) $y=\dfrac{1}{4}x^2+\sin x,\ y'=\dfrac{1}{2}x+\cos x,\ y''=\dfrac{1}{2}-\sin x$. 令 $y''=0$, 可得 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$ 或 $x=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$.

当 $x\in(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{6})$ 时, $y''>0$, 当 $x\in(2k\pi+\dfrac{\pi}{6},2k\pi+\dfrac{5\pi}{6})$ 时, $y''<0$, 当 $x\in(2k\pi+\dfrac{5\pi}{6},2k\pi+2\pi)$ 时, $y''>0$, 所以曲线 $y=\dfrac{1}{4}x^2+\sin x$ 在区间 $[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{6}]\cup[2k\pi+\dfrac{5\pi}{6},2k\pi+2\pi]$ 上是凹的, 在区间 $[2k\pi+\dfrac{\pi}{6},2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}]$ 上是凸的.

2. 求下列函数图形的凹凸区间和拐点:

(1) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$;　　(2) $y=\mathrm{e}^{\arctan x}$;

(3) $y = xe^{-x}$;　　　　(4) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$;

(5) $y = x^2 + \frac{1}{x}$;　　　　(6) $y = (2x-5)\sqrt[3]{x^2}$.

解 (1) $y = e^{-x^2}$, $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = e^{-x^2}(-2+4x^2)$. 令 $y''=0$，可得 $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

当 $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时，$y''>0$, 当 $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 时，$y''<0$, 当 $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 时，$y''>0$, 所以曲线 $y = e^{-x^2}$ 在区间 $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 上是凹的，在区间 $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ 上是凸的，拐点为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$ 和 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$.

(2) $y = e^{\arctan x}$, $y' = \frac{1}{1+x^2}e^{\arctan x}$, $y'' = \frac{1-2x}{(1+x^2)^2}e^{\arctan x}$. 令 $y''=0$，可得 $x = \frac{1}{2}$.

当 $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ 时，$y''>0$, 当 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时，$y''<0$, 所以曲线 $y = e^{\arctan x}$ 在区间 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 上是凹的，在区间 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上是凸的，拐点为 $(\frac{1}{2}, e^{\arctan\frac{1}{2}})$.

(3) $y = xe^{-x}$, $y' = (1-x)e^{-x}$, $y = (x-2)e^{-x}$. 令 $y''=0$，可得 $x=2$.

当 $x \in (-\infty, 2)$ 时，$y''<0$, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时，$y''>0$, 所以曲线 $y = xe^{-x}$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上是凸的，在区间 $[2, +\infty)$ 上是凹的，拐点为 $(2, 2e^{-2})$.

(4) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$, $y' = x^2 - 2x$, $y'' = 2x - 2$. 令 $y''=0$，可得 $x=1$.

当 $x \in (-\infty, 1)$ 时，$y''<0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时，$y''>0$, 所以曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 上是凸的，在区间 $[1, +\infty)$ 上是凹的，拐点为 $(1, \frac{4}{3})$.

(5) $y = x^2 + \frac{1}{x}$, $y' = 2x - \frac{1}{x^2}$, $y'' = 2 + 2\frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3}(x+1)(x^2-x+1)$. 令 $y''=0$，可得 $x=-1$. 当 $x=0$ 时，y, y' 及 y'' 不存在.

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时，$y''>0$, 当 $x \in (-1, 0)$ 时，$y''<0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时，$y''>0$, 所以曲线 $y = x^2 + \frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$ 上是凹的，在区间 $[-1, 0)$ 上是凸的，拐点为 $(-1, 0)$.

(6) $y=(2x-5)x^{\frac{2}{3}}$, $y'=2x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(2x-5)x^{-\frac{1}{3}}$,

$$y''=\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{9}(2x-5)x^{-\frac{4}{3}}=\frac{10}{9}(2x+1)x^{-\frac{4}{3}},$$

令 $y''=0$，可得 $x=-\frac{1}{2}$. 当 $x=0$ 时，y'' 不存在.

当 $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})$ 时，$y''<0$，当 $x\in(-\frac{1}{2},0)$ 或 $x\in(0,+\infty)$ 时，$y''>0$，又函数 $y=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 处连续，所以曲线 $y=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 在区间 $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ 上是凸的，在区间 $[-\frac{1}{2},+\infty)$ 上是凹的，拐点为 $(-\frac{1}{2},-3\sqrt[3]{2})$.

3. 求下列曲线的拐点:

(1) $x=t^2, y=3t+t^3$; (2) $x=2a\cot\theta, y=2\sin^2\theta$.

解 (1) $\begin{cases}x=t^2,\\ y=3t+t^3,\end{cases}$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3+3t^2}{2t}=\frac{3}{2}(\frac{1}{t}+t)$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3(t^2-1)}{4t^3}$. 令 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$，可得 $t=\pm1$，对应着曲线上两点 $(1,4)$ 及 $(1,-4)$. 当 $t=0$ 时，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 不存在.

由于当 $t\in(-\infty,-1)$ 时，$x>1$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$，当 $t\in(-1,0)$ 时，$x<1$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}>0$，当 $t\in(0,1)$ 时，$x<1$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$，当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$x>1$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}>0$，故 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 在 $t=\pm1$ 对应的 $x=1$ 两侧邻近处异号，所以 $(1,4)$ 和 $(1,-4)$ 都是曲线的拐点.

当 $t=0$ 时，对应着曲线上一点 $(0,0)$，且曲线上任一点 (x,y) 处满足 $x\geq0$，所以 $(0,0)$ 是曲线的顶点，不是拐点.

(2) $\begin{cases}x=2a\cot\theta,\\ y=2\sin^2\theta,\end{cases}$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4\sin\theta\cos\theta}{-2a\csc^2\theta}=-\frac{2}{a}\sin^3\theta\cos\theta$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{a^2}\sin^4\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\frac{1}{a^2}\sin^4\theta(3-4\sin^2\theta).$$

令 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$，可得 $\theta=\pm\frac{\pi}{3}$（对应着曲线上两点 $(\frac{2\sqrt{3}}{3}a,\frac{3}{2})$ 及 $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}a,\frac{3}{2})$）和 $\theta=0$（曲线上无对应点）.

由于当 $t\in(-\pi,-\frac{\pi}{3})$ 时，$x>-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$，当 $t\in(-\frac{\pi}{3},0)$ 时，$x<-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\frac{d^2y}{dx^2}>0$, 当 $t\in(0,\frac{\pi}{3})$ 时, $x>\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{d^2y}{dx^2}>0$, 当 $t\in(\frac{\pi}{3},\pi)$ 时, $x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{d^2y}{dx^2}<0$, 故 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 在 $\theta=\pm\frac{\pi}{3}$ 对应的 $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 两侧邻近处异号, 所以 $(\frac{2\sqrt{3}}{3}a,\frac{3}{2})$ 和 $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}a,\frac{3}{2})$ 都是曲线的拐点.

4. 试决定 a,b,c, 使 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 有一拐点 $(1,-1)$, 且在 $x=0$ 处有极大值 1.

解 依题有 $\begin{cases}y(1)=-1,\\ y'(0)=0,\\ y''(1)=0,\end{cases}$ 于是可得方程组 $\begin{cases}1+a+b+c=-1,\\ b=0,\\ 6+2a=0,\end{cases}$ 解之可得 $\begin{cases}a=-3,\\ b=0,\\ c=1,\end{cases}$

从而可知 $y=x^3-3x^2+1$.

5. 试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值, 使曲线在拐点处的法线通过原点.

解 $y'=4kx(x^2-3)$, $y''=12k(x^2-1)=12k(x+1)(x-1)$. 令 $y''=0$, 可得 $x=\pm1$. 显然当 $k\neq0$ 时, y'' 在 $x=\pm1$ 两侧邻近处异号, 因此 $(1,4k)$ 和 $(-1,4k)$ 都是曲线的拐点.

而曲线在 $(1,4k)$ 及 $(-1,4k)$ 处的法线方程分别为

$$y-4k=\frac{1}{8k}(x-1),\ y-4k=\frac{1}{-8k}(x+1),$$

要使曲线在拐点处的法线通过原点, 则应有 $-4k=-\frac{1}{8k}$, 即 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

6. 证明: 曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

解 $y'=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$, $y''=\frac{2(x^3-3x^2-3x+1)}{(x^2+1)^3}=\frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$.

令 $y''=0$, 可得 $x=-1$, $x=2-\sqrt{3}$ 及 $x=2+\sqrt{3}$.

因为当 $x\in(-\infty,-1)$ 时, $y''<0$, 当 $x\in(-1,2-\sqrt{3})$ 时, $y''>0$, 当 $x\in(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$ 时, $y''<0$, 当 $x\in(2+\sqrt{3},+\infty)$ 时, $y''>0$, 所以曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 有

三个拐点，它们是 $A(-1,-1)$，$B(2-\sqrt{3},-\frac{1+\sqrt{3}}{4})$ 和 $C(2+\sqrt{3},\frac{-1+\sqrt{3}}{4})$.

由于直线 AB, BC 的斜率分别为

$$k_{AB}=\frac{-\frac{1+\sqrt{3}}{4}+1}{2-\sqrt{3}+1}=\frac{1}{4},\ k_{BC}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{4},$$

从而可知曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 的三个拐点位于同一条直线上，该直线的斜率为 $\frac{1}{4}$.

7. 利用函数图形的凹凸性，证明下列不等式:

(1) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n\ (x>0,\ y>0,\ x\neq y,\ n>1)$;

(2) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}\ (x\neq y)$.

证 (1) 令 $f(x)=x^n$ (其中 $n>1$)，则 $f'(x)=nx^{n-1}$，$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$. 显然当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$，因此曲线 $f(x)=x^n$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是凹的，从而对 $\forall x>0,\ y>0,\ x\neq y$，有

$$f(\frac{x+y}{2})<\frac{1}{2}(f(x)+f(y)),$$

即

$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n.$$

(2) 令 $f(x)=e^x$，则 $f''(x)=e^x>0$，因此曲线 $f(x)=x^n$ 在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上是凹的，从而对 $\forall x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R},\ x\neq y$，有

$$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}.$$

8. 设函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数，如果 $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0$，而 $f'''(x_0)\neq 0$，试问点 $x=x_0$ 是否为极值点? 又 $(x_0, f(x_0))$ 是否为拐点? 为什么?

解 将函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展成带有皮亚诺余项的三阶泰勒公式，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3).$$

不妨设 $f'''(x_0) > 0$，则当 x 在 x_0 处的左侧邻近处取值时，由于 $x - x_0 < 0$，所以 $f'''(x_0)(x - x_0)^3 < 0$，从而 $f(x) < f(x_0)$；当 x 在 x_0 处的右侧邻近处取值时，由于 $x - x_0 > 0$，所以 $f'''(x_0)(x - x_0)^3 > 0$，从而 $f(x) > f(x_0)$，故点 $x = x_0$ 不是极值点.

另一方面，由于

$$f'''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0,$$

根据极限的保号性知，$f''(x)$ 在 $x = x_0$ 两侧邻近处异号，所以 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点.

若 $f'''(x_0) < 0$，类似可得相同的结论.