第二节

可分离变量的微分方程和一阶线性微分方程

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一) 可分离变量的微分方程

类型1 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=h(x)g(y)$ (1.1)

—— 可分离变量的微分方程.

求解法： 设函数$g(y)$和$h(x)$是连续的,

1° 当$g(y)\neq 0$时,

$$(1.1)\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=h(x)\,\mathrm{d}x \qquad (1.2)$$ 变量分离

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int h(x)\,\mathrm{d}x$$

西北工業大學 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

设函数$G(y)$和$H(x)$是依次为$\dfrac{1}{g(y)}$和

$h(x)$的原函数，则

$$G(y)=H(x)+C \qquad (1.3)$$

(C为任意常数).

可以验证：(1.3)式为微分方程 (1.1) 的(隐式)通解.

2° 当$g(y_0)=0$时，$y\equiv y_0$也是(1.1)的解.

注 若题目只需求通解，则不必讨论 $g(y)=0$情形.

(二) 一阶线性微分方程

类型2 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \quad (2.1)$$

——— 一阶线性微分方程

当 $Q(x)\equiv 0$, 上方程称为齐次的.

当 $Q(x)\not\equiv 0$, 上方程称为非齐次的.

例如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+x^2$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\sin t+t^2$, 线性的;

$yy'-2xy=3$, $y'-\cos y=1$, 非线性的.

求解法:

1. 常数变易法

1° 齐次线性方程: $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \quad (2.2)$$

分离变量: $$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int P(x)\mathrm{d}x,$$

$$\ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln C,$$

齐次线性方程的通解为: $y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$.

2° 非齐次线性方程: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x).$

将 $C \xrightarrow{\text{变易}} C(x)$ (待定)

作变换 $y=\underline{C(x)e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

$$y'=C'(x)\cdot e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+C(x)\cdot[-P(x)]e^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

将 y 和 y' 代入原方程，得

$$C'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$ 可分离变量方程

积分得 $C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\tilde{C}$,

一阶非齐次线性微分方程(4.1)的通解为:

$$y=[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\tilde{C}]e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

其中 $\tilde{C}$ 为任意常数 .

2. 常数变易公式

(2.1)的通解为:

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C] \quad (2.3)$$

注 1° 常数变易法的实质：未知函数的变量代换法，通过变量代换将原方程化为可分离变量的方程.

2° 在常数变易公式(2.3)中，应将积分

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x,\quad \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

理解成被积函数的某个 原函数.

3° 特解公式

(2.1)满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解为:

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}P(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+y_0\right] \quad (2.4)$$

4° (2.1)的解的结构

$$y=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right] \quad (2.3)$$

$$=\boxed{Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}+\boxed{e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x}$$

对应齐次线性方程(2.2)的通解

非齐次线性方程(2.1)的特解

二、典型例题

例1 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解 分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=2x\,\mathrm{d}x,$

两端积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\,\mathrm{d}x,$

$$\ln|y|=x^2+C_1,\quad |y|=e^{C_1}e^{x^2},\quad y=\underset{C}{\pm e^{C_1}}e^{x^2},$$

$\therefore\quad y=Ce^{x^2}$ 为所求通解.

例2 求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{x+y}{2}$$ 的通解.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=0, \quad \int\frac{\mathrm{d}y}{2\sin\frac{y}{2}}=-\int\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x,$$

$$\ln\left|\csc\frac{y}{2}-\cot\frac{y}{2}\right|=2\cos\frac{x}{2}+C$$ 为所求通解.

例3 一个充满气体的气球突然破了一个孔，漏气的速率正比于气球内气体的质量，比例系数 $k>0$，设球内原有气体 100克，如果孔扎破后一分钟内还有 20克气体，问：在什么时候球内剩下 1克气体？

解 设 t 分钟时，球内有 W 克气体，则

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=-kW, \qquad W(0)=100$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{W}=-k\,\mathrm{d}t, \qquad \int\frac{\mathrm{d}W}{W}=\int -k\,\mathrm{d}t,$$

$$\boxed{\ln W=-kt+\ln C} \qquad (\because W>0)$$

即 $W(t) = C\mathrm{e}^{-kt}$,

由 $W(0) = 100$, 得 $C = 100$ $\therefore$ $W(t) = 100\mathrm{e}^{-kt}$

又依题设, $W(1) = 20$ $\therefore$ $20 = 100\mathrm{e}^{-k}$,

$k = \ln 5$, 于是 $W(t) = 100\mathrm{e}^{-(\ln 5)t}$

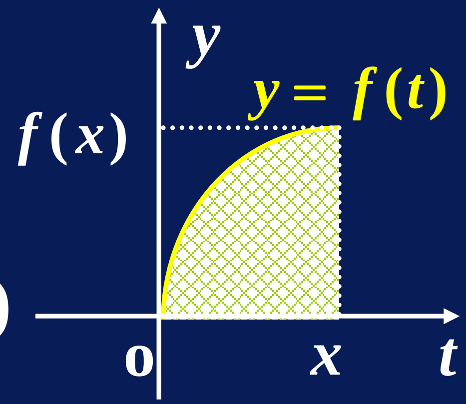
将$W = 1$代入上式，得

$$t = \frac{\ln 100}{\ln 5} \approx 2.86 \quad (\text{分})$$

答: 2.86分钟后，球内剩下 1克气体 .

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

例4 若以连续曲线 $y = f(t)\,(f(t) \geq 0)$为曲边，以 $[0, x]$为底的曲边梯形的面积 与纵坐标 y的$n+1$次幂成正比，且已知 $f(0)=0, f(1)=1$，求此曲线方程.



解 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = k[f(x)]^{n+1}$

$$f(x) = k(n+1)[f(x)]^n f'(x)$$

$$k(n+1)[f(x)]^{n-1} f'(x) = 1,$$

$$f(0)=0,\ f(1)=1.\quad f(x)=?$$

令 $y = f(x),\quad k(n+1)y^{n-1}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1,$

$$\int k(n+1)y^{n-1}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x$$

$k(n+1)\cdot\dfrac{y^n}{n} = x + C$, 由 $y(0)=0$, 得 $C=0$

由 $y(1)=1$, 得 $k = \dfrac{n}{n+1}$

$\therefore\quad y^n = x$ 即 $f^n(x) = x$

又 $\because\quad f(x)\ge 0 \qquad \therefore\quad f(x) = \sqrt[n]{x}$

例5 求方程 $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{e^x}{x}$ 的通解.

解 $P(x) = \dfrac{1}{x}$, $\qquad Q(x) = \dfrac{e^x}{x}$,

通解: $y = e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\cdot e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$

$$= e^{-\ln x}\left(\int \frac{e^x}{x}\cdot e^{\ln x}\,\mathrm{d}x + C\right) = \frac{1}{x}\left(\int \frac{e^x}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\int e^x\,\mathrm{d}x + C\right) = \frac{1}{x}\left(e^x + C\right).$$

例6 设 $f(x)$满足: $\int_1^x \frac{f(t)}{t+f^2(t)}\mathrm{d}t = f(x)-1$, 且 $f(x)$可导，求 $f(x)$.

解 令 $x=1$,得 $f(1)=1$

"$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$" : $\frac{f(x)}{x+f^2(x)} = f'(x)$

关于y非线性

令 $y = f(x)$, 则 $\boxed{\frac{y}{x+y^2} = y',}$ $y(1)=1$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y}\cdot x + y$$ 关于x为线性方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}\cdot x=y$$

通解: $x=e^{-\int(-\frac{1}{y})\mathrm{d}y}[\int ye^{\int(-\frac{1}{y})\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C]$

$$=e^{\ln y}[\int ye^{-\ln y}\mathrm{d}y+C]=y[\int y\cdot\frac{1}{y}\mathrm{d}y+C]$$

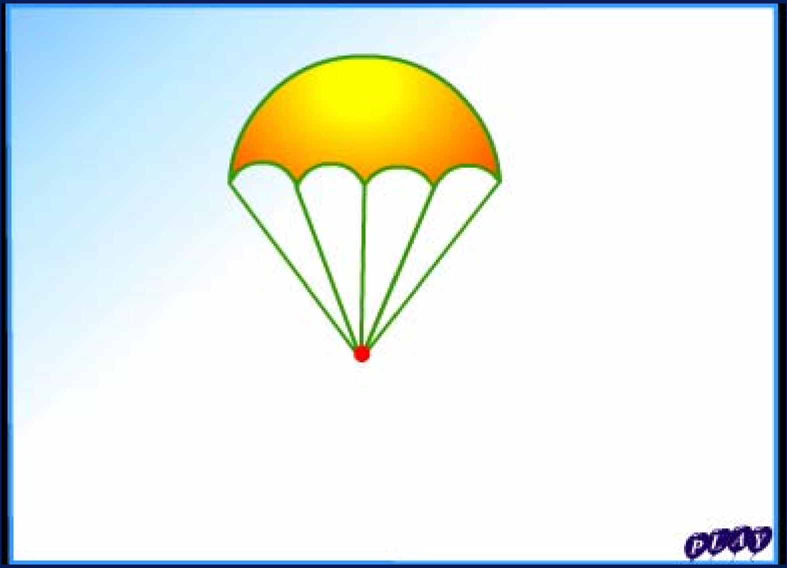
$$=y(y+C)$$

由 $y(1)=1$, 得 $C=0$ $\therefore$ $x=y^2$, 即 $y=\sqrt{x}$

故所求 $f(x)=\sqrt{x}.$

例7 设降落伞从跳伞塔下落后，所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔时 $(t=0)$ 速度为零，求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解 设降落伞下落速度为 $v(t)$,



其所受力为 : $F = mg - kv$

由牛顿第二定律得 :

$$F = ma$$

$$\therefore \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv,$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

(方法1) 即 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{m}v=g$ 一阶非齐次线性方程

由常数变易公式，得通解

$$v=\mathrm{e}^{-\int\frac{k}{m}\mathrm{d}t}[\int g\mathrm{e}^{\int\frac{k}{m}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C]=\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}[\int g\mathrm{e}^{\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t+C]$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}[\frac{mg}{k}\mathrm{e}^{\frac{k}{m}t}+C]=\frac{mg}{k}+C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

将 $v|_{t=0}=0$ 代入通解得： $C=-\frac{mg}{k}$

$\therefore$ 所求特解为 $v=\frac{mg}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}).$

(方法2) $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv$ 可分离变量方程

分离变量、积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\int\frac{\mathrm{d}t}{m},$

得 $-\dfrac{1}{k}\ln(mg-kv)=\dfrac{t}{m}+C_1,$

即 $v=\dfrac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}t}\quad (C=-\dfrac{e^{-kC_1}}{k})$

由 $v|_{t=0}=0$ 得，$C=-\dfrac{mg}{k}$

$\therefore$ 所求特解为 $v=\dfrac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}).$

例8 设于半空间 $x>0$内任意的光滑有向封闭曲面Σ，都有

$$\oiint_{\Sigma} xf(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - xyf(x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - e^{2x}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

其中函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$,求$f(x)$.

解 由题设和高斯公式得

$$0=\oiint_{\Sigma} xf(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - xyf(x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - e^{2x}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$0 = \oiint_{\Sigma} xf(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - xyf(x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - e^{2x}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \pm \iiint_{V} [xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x}]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中 V为封闭曲面 Σ围成的有界闭区域，

当有向曲面 Σ的法向量指向外侧时， 取"+"号，

当有向曲面 Σ的法向量指向内侧时， 取"−"号。

由Σ的任意性，知

$$xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x} = 0 \qquad (x > 0)$$

即 $$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}\qquad(x>0)$$

为一阶非齐次线性微分 方程，

由常数变易公式有

$$f(x)=e^{\int(1-\frac{1}{x})\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{x}e^{2x}e^{\int(\frac{1}{x}-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{e^{x}}{x}\left[\int\frac{1}{x}e^{2x}xe^{-x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{e^{x}}{x}(e^{x}+C)$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^{2x}+Ce^{x}}{x}\right) = 1,$

根据无穷小的比较知,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(e^{2x}+Ce^{x}\right) = 0,$$

即 $C+1=0,$ 从而 $C=-1.$

于是 $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x}(e^{x}-1).$

三、同步练习

1. 求微分方程 $y' = \dfrac{\cos y}{\cos y \sin 2y - x \sin y}$ 的通解.

2. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = y \cos x$ 的通解

3. 常压下的液漏

有高为1米的半球形容器, 水从它的底部小孔流出, 小孔横截面积为1平方厘米开始时容器内盛满了水, 求水从小孔流出过程中容器里水面的高度h(水面与孔口中心间的距离)随时间t的变化规律.

4. 一曲线过点 (2,3), 在该曲线上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 x轴的交点为 Q，且线段 PQ恰被y轴平分，求此曲线方程 .

5. 求方程$\sin x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cos x=5\sin x\cdot e^{\cos x}$的通解

6. 求方程 $y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\sin y\,\mathrm{d}y$的通解

7. 设 $f(t)$连续，且

$$f(t)=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}V+t^3,$$

$t\ge 0$, 求 $f(t)$.

8. 如图所示，平行于y 轴的动直线被曲线 $y = f(x)$ 与$y = x^3\ (x \geq 0)$ 截下的线段 PQ 之长数值上等于阴影部分的面积, 求曲线 $y=f(x)$.

9. 已知 $\varphi(\pi) = 1, \varphi'(x)$连续,试确定 $\varphi(x)$使曲线积分 $\int_L [\sin x - \varphi(x)] \frac{y}{x} \mathrm{d}x + \varphi(x) \mathrm{d}y$ 与路径无关 .

10. 某车间体积为12000立方米, 开始时空气中含有 0.1% 的 CO_2，为了降低车间内空气中CO_2 的含量, 用一台风量为每秒2000立方米的鼓风机通入含 0.03% 的 CO_2 的新鲜空气, 同时以同样的风量将混合均匀的空气排出, 问鼓风机开动6分钟后, 车间内CO_2的百分比降低到多少?

四、同步练习解答

1. 求微分方程 $y' = \dfrac{\cos y}{\cos y \sin 2y - x \sin y}$ 的通解.

解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\cos y \sin 2y - x \sin y}{\cos y} = \sin 2y - x \tan y,$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + (\tan y) \cdot x = \sin 2y,$$

$$x = e^{\ln|\cos y|}\left[\int \sin 2y \cdot e^{-\ln|\cos y|}\,\mathrm{d}y + C\right]$$

$$= \cos y\left[\int \frac{2\sin y \cos y}{\cos y}\,\mathrm{d}y + C\right] = \cos y\,[C - 2\cos y].$$

2. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\cos x$的通解

解 这是可分离变量方程, 分离变量得

两边积分 $$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \cos x\,\mathrm{d}x$$

得 $$\ln|y| = \sin x + C_1$$、

从而 $$y = \pm e^{\sin x + C_1} = \pm e^{C_1} \cdot e^{\sin x}$$

$$= C_2 e^{\sin x}$$

其中 $C_2=\pm e^{C_1}$为任意的非零常数

由于y=0也是方程的解，因此,所给方程的通解为

$$y=Ce^{\sin x}\qquad 其中C为任意常数.$$

有时,可以简化解题过程.

如由 $$\int\frac{\mathrm{d}\,y}{y}=\int\cos x\,\mathrm{d}\,x$$

得 $$\ln|y|=\sin x+\ln|C|$$

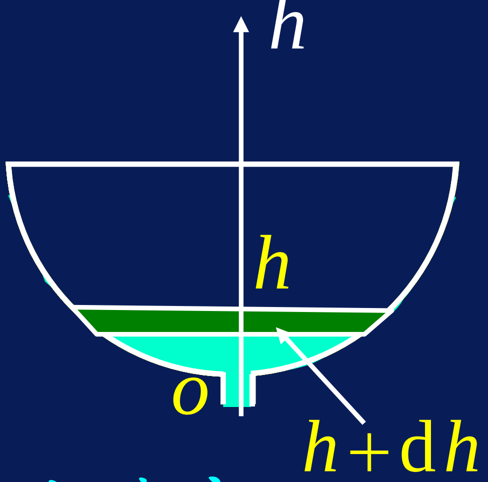
故方程的通解为 $$y=Ce^{\sin x}$$

3. 常压下的液漏

有高为1米的半球形容器, 水从它的底部小孔流出, 小孔横截面积为1平方厘米(如图). 开始时容器内盛满了水, 求水从小孔流出过程中容器里水面的高度h(水面与孔口中心间的距离)随时间t的变化规律.

解 由力学知识得,水从孔口流出的流量为

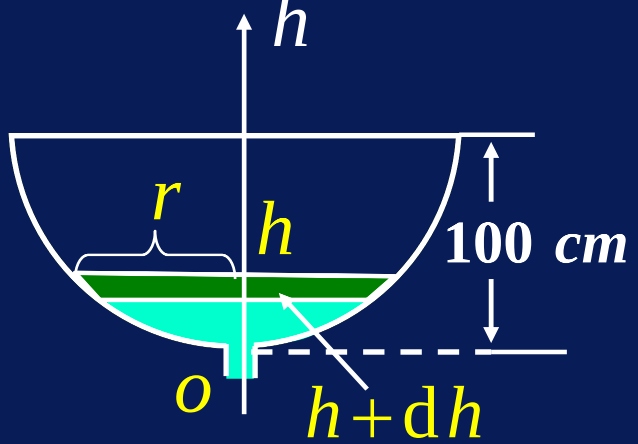
$$Q=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\underbrace{0.62}_{\text{流量系数}}\cdot \underbrace{S}_{\text{孔口截面面积}}\sqrt{2\underbrace{g}_{\text{重力加速度}}h},$$



$\because \quad S = 1 \quad \mathrm{cm}^2,$

$\therefore \quad \mathrm{d}V = 0.62\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t,$

即 $\quad \mathrm{d}V = 0.62\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t \qquad (1)$



设在微小时间间隔 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 内

水面高度由 h 降到 $h+\mathrm{d}h\,(\mathrm{d}h<0)$,

则 $\quad \mathrm{d}V = -\pi r^2\,\mathrm{d}h,$

$\because \quad r = \sqrt{100^2-(100-h)^2} = \sqrt{200h-h^2},$

$\therefore \quad \mathrm{d}V = -\pi(200h-h^2)\,\mathrm{d}h \qquad (2)$

比较(1)和(2)得: $-\pi(200h-h^2)dh = 0.62\sqrt{2gh}\,dt,$

$$-\pi(200h-h^2)dh=0.62\sqrt{2gh}\,dt,$$

即为未知函数的微分方程.

可分离变量

$$\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}(200\sqrt{h}-\sqrt{h^3})\,\mathrm{d}h,$$

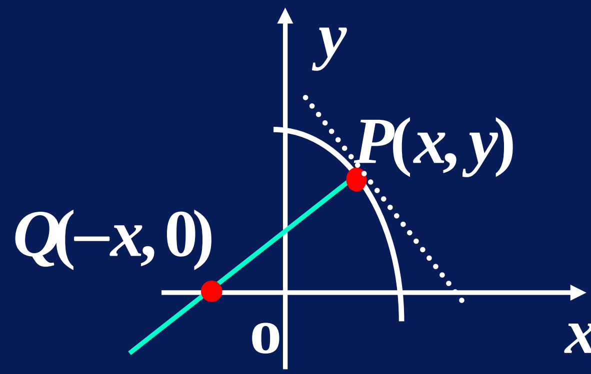
$$t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400}{3}\sqrt{h^3}-\frac{2}{5}\sqrt{h^5}\right)+C,$$

$$\because\quad h|_{t=0}=100,\quad\therefore\quad C=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\times\frac{14}{15}\times10^5,$$

所求规律为 $t=\dfrac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}(7\times10^5-10^3\sqrt{h^3}+3\sqrt{h^5}).$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

4. 一曲线过点 (2,3), 在该曲线上任一点 $P(x, y)$ 处的法线与 x轴的交点为 Q，且线段 PQ恰被y轴平分，求此曲线方程 .



解 线段PQ的斜率：$-\dfrac{1}{y'}$

依题设，有 $-\dfrac{1}{y'}=\dfrac{y}{2x}$

即 $y'=-\dfrac{2x}{y}$, $\int y\,\mathrm{d}y=\int -2x\,\mathrm{d}x$

通解：$\dfrac{1}{2}y^2=-x^2+C$，由 $y(2)=3$, 得 $C=\dfrac{17}{2}$

$\therefore$ 所求曲线为：$y^2+2x^2=17.$

5. 求方程$\sin x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cos x=5\sin x\cdot e^{\cos x}$的通解

解 将方程化为标准型

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cot x=5e^{\cos x},$$

则, $P(x)=\cot x,\qquad Q(x)=5e^{\cos x},$

利用公式 常数变易公式得通解

$$y=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$= e^{-\int \cot x \, \mathrm{d}\, x} \left[\int 5e^{\cos x} e^{\int \cot \mathrm{d}\, x} \, \mathrm{d}\, x + C \right]$$

$$= e^{-\ln|\sin x|} \left[5\int e^{\cos x} e^{\ln|\sin x|} \, \mathrm{d}\, x + C \right]$$

$$= \frac{1}{|\sin x|} \left[5\int e^{\cos x} \, |\sin x| \, \mathrm{d}\, x + C \right]$$

$$= \frac{1}{\sin x} \left[5\int e^{\cos x} \sin x \, \mathrm{d}\, x + C \right]$$

$$= \frac{1}{\sin x} \left[5 \cdot e^{\cos x} + C \right]$$

6. 求方程 $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \sin y\,\mathrm{d}y$的通解

解　视x为函数,y为自变量,将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{x}{y} = \frac{\sin y}{y}$$

这是一阶非齐次线性方 程,

$$P(y) = \frac{1}{y},\qquad Q(y) = \frac{\sin y}{y}.$$

于是通解为

$$x = e^{-\int P(y)\,\mathrm{d}y}\left[\int Q(y)e^{\int P(y)\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y + C\right]$$

$$x = e^{-\int \frac{\mathrm{d}y}{y}} \left[\int \frac{\sin y}{y} \cdot e^{\int \frac{\mathrm{d}y}{y}} \mathrm{d}y + C \right]$$

$$= \frac{1}{|y|} \left[\int \frac{\sin y}{y} |y| \mathrm{d}y + C \right]$$

$$= \frac{1}{y} \left[\int \frac{\sin y}{y} \cdot y \mathrm{d}y + C \right]$$

$$= \frac{1}{y} [-\cos y + C].$$

7. 设 $f(t)$连续，且

$$f(t)=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}V+t^3,$$

$t\ge 0$,求 $f(t)$.

解 $f(t)=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r+t^3$

$$=6\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\cdot\int_0^t r^2 f(r)\,\mathrm{d}r+t^3$$

$$=12\pi\int_0^t r^2 f(r)\,\mathrm{d}r+t^3$$

一阶线性方程

$$\boxed{f'(t)=12\pi t^2 f(t)+3t^2,\ f(0)=0.\qquad f(t)=?}$$

$$f(t)=e^{\int_0^t 12\pi t^2\,\mathrm{d}t}\left[\int_0^t 3t^2 e^{-\int_0^t 12\pi t^2\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+0\right]$$

$$=e^{4\pi t^3}\cdot\int_0^t 3t^2 e^{-4\pi t^3}\,\mathrm{d}t$$

$$=e^{4\pi t^3}\cdot\left[-\frac{1}{4\pi}\int_0^t e^{-4\pi t^3}\,\mathrm{d}(-4\pi t^3)\right]$$

$$=e^{4\pi t^3}\cdot\left[-\frac{1}{4\pi}e^{-4\pi t^3}\Big|_0^t\right]$$

$$=e^{4\pi t^3}\cdot\left[-\frac{1}{4\pi}e^{-4\pi t^3}+\frac{1}{4\pi}\right]=\frac{1}{4\pi}(e^{4\pi t^3}-1).$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

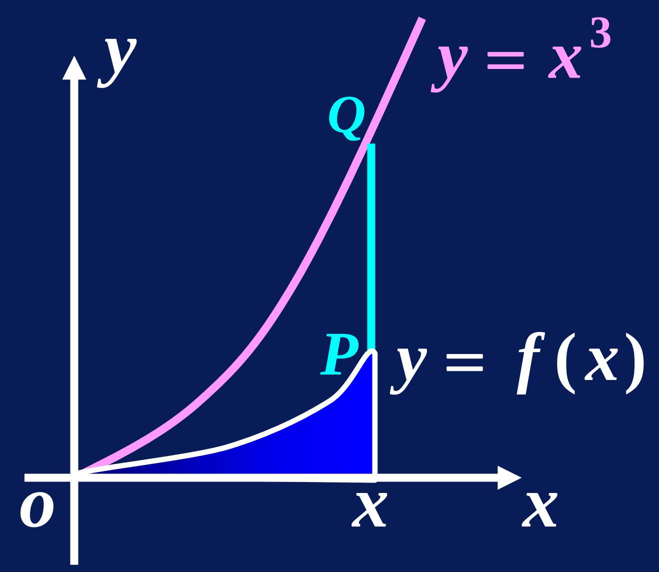
8. 如图所示，平行于 y 轴的动直线被曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^3\ (x\geq 0)$ 截下的线段 PQ 之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线 $f(x)$

解 $\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 - f(x)$,

$\int_0^x y\,\mathrm{d}x = x^3 - y$,

两边求导得 $y' + y = 3x^2$,

解此微分方程



$$y' + y = 3x^2$$

$$y = e^{-\int \mathrm{d}x}\left[C + \int 3x^2 e^{\int \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6,$$

由 $y|_{x=0} = 0$, 得 $C = -6$,

所求曲线为 $y = 3(-2e^{-x} + x^2 - 2x + 2)$.

9. 已知 $\varphi(\pi)=1, \varphi'(x)$连续，试确定 $\varphi(x)$使曲线积分 $\int_L [\sin x-\varphi(x)]\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y$与路径无关．

$\underbrace{[\sin x-\varphi(x)]\frac{y}{x}}_{P}$ $\underbrace{\varphi(x)}_{Q}$

解 依题设，知 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

即 $[\sin x-\varphi(x)]\dfrac{1}{x}=\varphi'(x)$

得

$$\boxed{\varphi'(x)+\frac{1}{x}\varphi(x)=\frac{\sin x}{x},\quad \varphi(\pi)=1 \qquad \varphi(x)=?}$$

$$\varphi(x)=e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=e^{-\ln x}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{\ln x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int\frac{\sin x}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}(-\cos x+C)$$

由 $\varphi(\pi)=1$, 得 $C=\pi-1$

$\therefore\quad \varphi(x)=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$

10. 某车间体积为12000立方米, 开始时空气中含有0.1% 的 CO_2, 为了降低车间内空气中CO_2的含量, 用一台风量为每秒2000立方米的鼓风机通入含 0.03% 的 CO_2 的新鲜空气, 同时以同样的风量将混合均匀的空气排出, 问鼓风机开动6分钟后, 车间内CO_2的百分比降低到多少?

解 设鼓风机开动后 t 时刻 CO_2的含量为 $x(t)\%$

在 $[t, t+dt]$内,

CO_2的通入量 $= 2000 \cdot dt \cdot 0.03,$

CO_2的排出量 $= 2000 \cdot dt \cdot x(t),$

CO_2的改变量 = CO_2的通入量 $-$ CO_2的排出量

$$12000dx = 2000 \cdot dt \cdot 0.03 - 2000 \cdot dt \cdot x(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{6}(x - 0.03),$$ 解得 $x = 0.03 + Ce^{-\frac{1}{6}t}$,

$\because x|_{t=0} = 0.1,\ \therefore C = 0.07,\quad x = 0.03 + 0.07e^{-\frac{1}{6}t},$

$$x|_{t=6} = 0.03 + 0.07e^{-1} \approx 0.056,$$

6分钟后, 车间内CO_2的百分比降低到 0.056%.