第四节

有理函数的积分与积分表的使用

- 一、主要内容
- 二、典型例题
- 三、同步练习
- 四、同步练习解答

一、主要内容

(一)问题 1. 初等函数在其定义区间上一定有原函数，

但原函数是否一定是初等函数?

答: 不一定. 一般地,

$$\text{初等函数 } F(x) \xrightarrow{\text{求导}} \text{初等函数 } F'(x)=f(x)$$

$$\text{初等函数 } F(x) \;\cancel{\xleftarrow{\text{积分}}}\; \text{初等函数 } F'(x)=f(x)$$

如: 下列不定积分都不能用初等函数表示:

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int \sin x^2\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\sin x}{x^n}\,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathrm{N}^+), \qquad \int \ln\sin x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x \ (0<k<1)\text{等等}.$$

2.有理函数的原函数是否一定是初等函数?

答: 一定是.

(二) 定义 (有理函数)

两个多项式的商表示的函数称之为有理函数.

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

其中 $m,n\in\mathrm{N}^+$, a_0, a_1, $\cdots$, a_n, b_0, b_1, $\cdots$, b_m 均为实常数， $a_0\neq 0$， $b_0\neq 0$.

(三) 定义(真分式, 假分式, 部分分式)

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

(1) $n<m$, 这有理函数称为真分式;

(2) $n\geq m$, 这有理函数称为假分式;

(3) 部分分式　如下四种分式称为部分分式:

① $\dfrac{A}{(x-a)}$, ② $\dfrac{A}{(x-a)^k}$,

③ $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, ④ $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$.

其中 $k\geq 2, k\in \mathrm{N}^+, a, A, M, N, p$和$q$均为实常数，$p^2-4q<0$.

(四) 有理函数的积分 (分解)

(1) 假分式 ($n \geq m$) 分解

假分式 $=$ 多项式 + 真分式

$$R(x) = \underbrace{P^*(x)}_{\text{多项式}} + \underbrace{R^*(x)}_{\text{真分式}}$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P^*(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)} \quad (k < m)$$

(2) 真分式 $\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$（$k<m$）的分解

真分式化为部分分式之和的一般规律:

定理　若真分式 $R^*(x)=\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ 的分母:

$$Q_m(x)=b_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{\mu}$$

其中 $p^2-4q<0,\cdots r^2-4s<0$;

$\alpha,\cdots,\beta,\lambda,\cdots\mu$ 均为正整数；

$\alpha+\cdots+\beta+2(\lambda+\cdots+\mu)=m$.

则 $R^*(x)=$

$$\Big[\overbrace{\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}}^{\alpha\text{ 项}}\Big]+$$

$$\cdots+\Big[\overbrace{\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}}^{\beta\text{ 项}}\Big]+$$

$$\Big[\overbrace{\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}}^{\lambda\text{ 项}}\Big]+$$

$$\cdots+\Big[\overbrace{\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\cdots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}}^{\mu\text{ 项}}\Big].$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots,\alpha),\cdots,B_j(j=1,2,\cdots,\beta),$
$M_k, N_k(k=1,2,\cdots,\lambda),\cdots,R_l, S_l(l=1,2,\cdots,\mu)$
均为实常数 .

注 1° 此定理为真分式化为部分分式之和的待定系数法提供了理论根据.

2° 分解规则:

(a) 分母 $Q_m(x)$ 含因式 $(x-a)^l$,则分解对应 l 项:

$$\frac{A_1}{(x-a)^l}+\frac{A_2}{(x-a)^{l-1}}+\cdots+\frac{A_l}{x-a}$$

（b）$Q_m(x)$含因式（x^2+px+q）^{l},

则分解对应l项:

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^l}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{l-1}}$$

$$+\cdots+\frac{M_lx+N_l}{x^2+px+q}$$

(3)有理函数积分小结

小结1 （a）有理函数的分解

$$\text{有理函数} \xlongequal[\text{相除}]{} \text{多项式} + \boxed{\text{真分式}} \xrightarrow{\text{分解}} \boxed{\text{部分分式之和}}$$

（b）真分式分解为部分分式的方法

1^0 比较系数法； 2^0 赋值法；3^0 配搭法；4^0 综合法.

小结2（四种典型部分分式的积分）

(1) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{1-k}(x-a)^{1-k} + C \quad (k \geq 2)$

(3) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x$

$(p^2-4q<0\,,\,k\neq 1)$

变分子为

$\displaystyle\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}$

再分项积分

(五)可化为有理函数的积分举例

(1) 三角函数有理式的积分 $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

(a)万能代换　令$t = \tan\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{令 } u = \tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(2) 其他变换 $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

令 $u = \tan x$

$(a)\quad \int R(\tan x)\,\mathrm{d}\,x \xlongequal{u=\tan x} \int R(u)\frac{\mathrm{d}\,u}{1+u^2}$

$(b)\quad \int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x)\,\mathrm{d}\,x$

$\xlongequal{u=\tan x} \int R\left(\frac{u^2}{u^2+1}, \frac{1}{u^2+1}, \frac{u}{u^2+1}\right)\frac{\mathrm{d}\,u}{u^2+1}$

三角函数有理式

(六)简单无理函数的积分小结

1. $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x$,

令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$

2. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$,

令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

3. $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})\,\mathrm{d}x$,

令 $t = \sqrt[p]{ax+b}$

其中，p为m, n的最小公倍数.

二、典型例题

例1 分解: $R(x)=\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-x}$.

解 $\therefore\ R(x)=\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-x}$

$$=(x^2+x+1)+\frac{x^2+x-8}{x^3-x}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+x+1 \\
\hline
x^3-x & x^5+x^4-8 \\
 & x^5-x^3 \\
\hline
 & \quad x^4+x^3-8 \\
 & \quad x^4-x^2 \\
\hline
 & \quad x^3+x^2-8 \\
 & \quad x^3-x \\
\hline
 & \quad\quad x^2+x-8
\end{array}
$$

例2 分解 $\dfrac{x^2+x-8}{x^3-x}$.

解 (方法1) 比较系数法 $Q(x)=x^3-x=x(x-1)(x+1)$

$$\frac{x^2+x-8}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

$$=\frac{A(x^2-1)+B(x^2+x)+C(x^2-x)}{x^3-x}$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x^3-x}$$

$$\therefore \quad x^2+x-8=(A+B+C)x^2+(B-C)x-A$$

比较两边 x同次幂的系数，得

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ B-C=1 \\ -A=-8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=8 \\ B=-3 \\ C=-4 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2+x-8}{x^3-x}=\frac{8}{x}-\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x+1}.$$

$$\boxed{\frac{x^2+x-8}{x^3-x}=\frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x^3-x}}$$

(方法2) 赋值法

$$x^2+x-8=A(x^2-1)+B(x^2+x)+C(x^2-x)$$

令 $x=0$, 得 $-8=-A$, $A=8$

令 $x=1$, 得 $-6=2B$, $B=-3$

令 $x=-1$, 得 $-8=2C$, $C=-4$

$$\therefore \quad \frac{x^2+x-8}{x^3-x}=\frac{8}{x}-\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x+1}.$$

(方法3) 配搭法

$$\frac{x^2+x-8}{x^3-x}=\frac{x^2+x-8}{x(x-1)(x+1)}=\frac{(x^2+x)-8}{(x-1)(x^2+x)}$$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{8}{(x-1)(x^2+x)}=\frac{1}{x-1}-\frac{4[\ (x+1)-(x-1)\ ]}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x-1}-4\cdot[\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x+1)}]$$

$$=\frac{1}{x-1}-4\cdot[\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}-\frac{(x+1)-x}{x(x+1)}]$$

$$=\frac{8}{x}-\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x+1}.$$

例3 将 $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$ 分解为部分分式.

解(方法1) 比较系数法

设 $\dfrac{1}{x(x-1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x-1}$

通分 $\dfrac{1}{x(x-1)^2} = \dfrac{A(x-1)^2 + Bx + Cx(x-1)}{x(x-1)^2}$

去分母 $1 = A(x-1)^2 + Bx + Cx(x-1)$

去分母：$1 = A(x-1)^2 + Bx + Cx(x-1)$

比较系数法：$\begin{cases} x^0\text{项：} & A = 1, \\ x^1\text{项：} & -2A + B - C = 0, \\ x^2\text{项：} & A + C = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -1 \end{cases}$

故 $$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$$

(方法2) 赋值法

设 $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$$

通分后去分母: $1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)$

$$\begin{cases} \text{令} \quad x=0 \Rightarrow A=1 \\ \text{令} \quad x=1 \Rightarrow B=1 \\ \text{令} \quad x=2 \Rightarrow 1=A+2B+2,\ C=-1 \end{cases}$$

故 $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$$

(方法3) 配搭法

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{x-(x-1)}{x(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

故 $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$$

例4 $I=\int \frac{x-4}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$

配分母的导数

$$=\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-5}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}-5\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|-\frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$$

例5 求$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx.$

解 1° 分解:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}=(x^2+x+1)+\frac{x^2+x-8}{x^3-x} \quad (例1)$$

$$=(x^2+x+1)+\frac{8}{x}-\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x+1}.$$

(例2)

2° 求积分:

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int (x^2+x+1)\,\mathrm{d}x+\int \frac{8}{x}\,\mathrm{d}\,x-\int \frac{3}{x-1}\,\mathrm{d}x-\int \frac{4}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+8\ln|x|-3\ln|x-1|-4\ln|x+1|+C.$$

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}\mathrm{d}x=(x^2+x+1)+\frac{8}{x}-\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x+1}.$$

例6 求$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x.$

解 由例3，得

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$$

$$\therefore \int \frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{x-1}-\ln|x-1|+C$$

例7 求积分 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x.$

解 $$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2},$$

$$1 = A(1+x^2) + (Bx+C)(1+2x),$$

整理得 $$1 = (A+2B)x^2 + (B+2C)x + A + C,$$

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5},$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

$$\therefore \int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}\mathrm{d}x + \int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C.$$

注　利用待定系数法分解有理函数为部分分式, 然后再求积分, 这是求有理函数积分的一般方法，　但运算起来常常比较麻烦. 因此，在求有理函数的积分时，应该首先考虑是否有**其他更简便**的方法.

例8 (1) $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,\mathrm{d}x$

处理分母

$$\xlongequal{\text{令 } x-1=t} \int \frac{(1+t)^3}{t^{100}}\,\mathrm{d}t = \cdots$$

（四项幂函数积分）

(2)
$$I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6+x^8} \xlongequal{\text{令 } x=\frac{1}{t}} -\int \frac{t^6}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{t^6+t^4-t^4}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int \left(t^4-\frac{t^4}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int \left(t^4-\frac{t^4+t^2-t^2-1+1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\int \left(t^4-t^2+1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \cdots$$

另解:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6+x^8} = \int \frac{1}{x^6(x^2+1)}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1+x^2-x^2}{x^6(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^4(x^2+1)}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^6} - \frac{1+x^2-x^2}{x^4(x^2+1)}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \cdots = \int \left(\frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \cdots$$

例9 求 $\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\mathrm{d}x.$

解 原式 $\underset{\mathrm{d}t=4x^3\mathrm{d}x}{\underline{\underline{t=x^4}}}\ \frac{1}{4}\int \frac{t^2}{t^2+3t+2}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{4}\int(1-\frac{3t+2}{t^2+3t+2})\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}[t-\int\frac{3t+2}{(t+1)(t+2)}\mathrm{d}t\,]=\frac{1}{4}[t-\int(\frac{4}{t+2}-\frac{1}{t+1})\mathrm{d}t]$$

$$\frac{3t+2}{(t+1)(t+2)}$$

$$=\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t+1}$$

$$3t+2=A(t+1)+B(t+2)$$

$$A=4, B=-1$$

原式 $= \frac{1}{4}[t - \int (\frac{4}{t+2} - \frac{1}{t+1})\mathrm{d}t]$

$$= \frac{1}{4}t - \ln(t+2) + \frac{1}{4}\ln(t+1) + C$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \ln(x^4+2) + \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + C$$

例10 求积分 $\int \frac{1}{\sin^4 x} \mathrm{d}x.$

解(方法1) $t = \tan\frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} \mathrm{d}x = \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{8t^4} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3t^3} - \frac{3}{t} + 3t + \frac{t^3}{3}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{24(\tan\frac{x}{2})^3} - \frac{3}{8\tan\frac{x}{2}} + \frac{3}{8}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{24}(\tan\frac{x}{2})^3 + C.$$

(方法2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \csc^2 x\,\mathrm{d}x + \int \cot^2 x\cdot\csc^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\cot x - \int \cot^2 x\,\mathrm{d}(\cot x)$$

$$= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C.$$

(方法3) $\int \frac{1}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \csc^4 x\,\mathrm{d}x$

$$= \int (1+\cot^2 x)\cdot \csc^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int (1+\cot^2 x)\,\mathrm{d}\cot x$$

$$= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C.$$

注 比较以上三种解法, 便知万能代换不一定是最佳方法, 故三角有理式的计算中先考虑其它手段, 不得已才用万能代换.

例11 $I=\int\frac{\tan x}{1+2\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{(\sec^2 x+2)\cos^2 x}=\int\frac{\tan x}{\tan^2 x+3}\mathrm{d}\tan x$$

$$\underline{\underline{u=\tan x}}\quad\int\frac{u}{u^2+3}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(u^2+3)}{u^2+3}=\frac{1}{2}\ln(u^2+3)+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln(\tan^2 x+3)+C$$

$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ 令$t=\sin x$,或$t=\cos x$

例12 $I=\int \dfrac{\cos^3 x-2\cos x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$.

令$t=\sin x$

解 $I=\int \dfrac{(\cos^2 x-2)\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}=-\int \dfrac{(\sin^2 x+1)\,\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}$

$=-\int \dfrac{(t^2+1)\,\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}=-\int \dfrac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+1+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t=-\int \dfrac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+3}$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{3}}+C=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{3}\sin x}+C$

小结 被积函数为 $\cos x$ 的奇函数时，令$t=\sin x$

例13 $I=\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$

解 令 $t=\sqrt{x+2}$， 则

$$x=t^2-2,\quad \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$$

$$I=\int \frac{t}{1+t}\,2t\,\mathrm{d}t=2\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2\left[\frac{1}{2}t^2-t+\ln\left|1+t\right|\right]+C$$

$$=x-2\sqrt{x+2}+2\ln\left|1+\sqrt{x+2}\right|+C$$

例14 $I=\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x\,.$

$\boxed{\text{分子迎合分母}}$

解 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,则 $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $\mathrm{d}x=\frac{4t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$.

$$I=\int \frac{\cancel{t^2+1}}{t^2-1}t\frac{4t}{(t^2+1)^{\cancel{2}}}\mathrm{d}t=2\int \frac{(t^2-1)+(t^2+1)}{(t^2-1)(t^2+1)}\mathrm{d}t$$

$$=2\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+2\arctan t+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$$

例15 (1)求 $I=\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解 令$t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$,则 $x=\frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$

$$I=\int (t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$$

$$=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|2x+2x\sqrt{x+1}+1\right|+C$$

令$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$

(2) $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\cdots$

例16 求 $I=\int \frac{\mathrm{d}\,x}{3-2\sin x}$.

解 应用 P410 公式36 $(b^2>c^2)$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{b+c\sin ax}=-\frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\arctan\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)\right]+C}$$

$$I=\int \frac{\mathrm{d}\,x}{3-2\sin x}\quad (a=1, b=3,\quad c=-2)$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3^2-2^2}}\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{3-(-2)}{3+(-2)}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)+C$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\sqrt{5}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)+C$$

例17　求$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x-9x^2}}$.

解　附录积分表中查不到.作变换$t=3x$，则

$$I=\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t-t^2}}$$，应用 P409 公式24:

$$\boxed{\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}}+C}\quad (2a=1)$$

$$I=\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t-t^2}}=-\frac{1}{1/2}\sqrt{\frac{1-t}{t}}+C\Big|_{t=3x}=-2\sqrt{\frac{1-3x}{3x}}+C$$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

三、同步练习

1. 求 $I=\int \frac{x^3+x^2+2}{(x-1)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

2. 求 $I=\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$

3. $I=\int \frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x$

4. 求 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

5. $I_1=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

6. $I=\int \frac{1+\sin x}{3+\cos x}\,\mathrm{d}x$

7. $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+3\cos^2 x}$

西北工业大学 NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

8. $I=\int \frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x \quad (ab\neq 0)$.

9. $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

10. $I=\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

11. 求 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ \sqrt{4x^2+9}}$

12. 求 $I=\int \frac{(x+4)\mathrm{d}\,x}{(x^2+2x+4)\sqrt{x^2+2x+5}}$

四、同步练习解答

1. 求 $I=\int \dfrac{x^3+x^2+2}{(x-1)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

解 (1) 分解为部分分式 (综合法)

设 $$\frac{x^3+x^2+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

通分后去分母: $x^3+x^2+2=$

$$A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-1)+(Dx+E)(x-1)(x^2+1)$$

$$\begin{cases} \text{令 } x=1 \Rightarrow 4=4A,\ A=1 \\ \text{令 } x=0 \Rightarrow 2=A-C-E \Rightarrow C=A-E-2=-E-1 \end{cases}$$

令 $x=1,\quad x=0 \Rightarrow A=1,\quad C=-E-1=-1$

$$\text{再比较系数:}\begin{cases} x^4\text{项:}\quad 0=A+D, & \Rightarrow D=-1 \\ x^3\text{项:}\quad 1=E-D, & \Rightarrow E=0 \\ x^2\text{项:}\quad 1=2A+B+D-E, & \Rightarrow B=0 \end{cases}$$

故 $$\frac{x^3+x^2+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}$$

$$x^3+x^2+2=$$
$$A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-1)+(Dx+E)(x-1)(x^2+1)$$

(2) 积分 $I=\int \frac{x^3+x^2+2}{(x-1)(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$

$$\overset{\text{由(1)}}{=\!=\!=}\int\left[\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-I_2$$

由第3节例8，知

$$I_2=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}I_1=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

2. 求$I=\int\frac{1}{x^6(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$

分母次数较高,
宜使用**倒代换.**

解 令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x=\frac{1}{t}$, $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, 故

$$I=\int\frac{1}{\frac{1}{t^6}(1+\frac{1}{t^2})}(-\frac{1}{t^2})\,\mathrm{d}t=-\int\frac{t^6}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\int(t^4-t^2+1-\frac{1}{1+t^2})\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t+C$$

$$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}+\arctan\frac{1}{x}+C$$

3. $I=\int\frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$

配分母的导数

$$=\frac{1}{2}\int\frac{4x^3+10x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x+\int\frac{2x^2+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$$

迎合分母

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^4+5x^2+5)}{x^4+5x^2+4}+\int\frac{(x^2+1)+(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+5x^2+4\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\arctan x+C$$

4. 求 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

迎合分母

解 原式 $=\int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}-\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\arctan(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}+C$$

$$5.\quad I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

注意本题技巧

按常规方法较繁

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C\ (x\neq 0)$$

问题　求 $I_2=\int\frac{1}{x^4+ax^2+1}\mathrm{d}x.$

常规方法　$1°$　分解分母　令

$$x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$

比较系数　$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

$$\boxed{\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}}$$

$2°$ 化为部分分式．令

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1},$$ 比较系数定 A, B, C, D．

$3°$ 分项积分．

6. $I=\int \frac{1+\sin x}{3+\cos x}\,\mathrm{d}x$

前式令$u=\tan\frac{x}{2}$

后式配元

$$=\int \frac{1}{3+\cos x}\,\mathrm{d}x+\int \frac{\sin x}{3+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u-\int \frac{1}{3+\cos x}\,\mathrm{d}(3+\cos x)$$

$$=\int \frac{1}{u^2+2}\,\mathrm{d}u-\ln|3+\cos x|=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}-\ln|3+\cos x|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right)-\ln|3+\cos x|+C$$

7. $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+3\cos^2 x}=\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x}{\tan^2 x+3}$

$=\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2 x+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan x)+C$

8. $I=\int \frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x \quad (ab\neq 0)$.

令$t=\tan x$

解法 1 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{(a\tan x+b)^2\cos^2 x}=\int \frac{\mathrm{d}t}{(a\,t+b)^2}$

$=-\frac{1}{a(a\,t+b)}+C=-\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}+C$

解法 2 令 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$ ，$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$

$$I=\frac{1}{a^2+b^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x-\varphi)}\qquad (\text{其中}\quad \varphi=\arctan\frac{a}{b})$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\tan(x-\varphi)+C$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\tan(x-\arctan\frac{a}{b})+C$$

$$a\sin x+b\cos x$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left[\underbrace{\boxed{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}}_{\sin\varphi}\sin x+\underbrace{\boxed{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}}_{\cos\varphi}\cos x\right]$$

9. $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解　令 $u=\sqrt[3]{x+2}$，则 $x=u^3-2, \mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$

$$I=\int \frac{3u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u=3\int \frac{(u^2-1)+1}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

$$=3\int\left(u-1+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u=3\left[\frac{1}{2}u^2-u+\ln|1+u|\right]+C$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right|+C$$

10. $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2}$

为同时去两根式

令$x=t^6$,

则$\mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$

$=6\int(t^2-t+1-\frac{1}{1+t})\mathrm{d}t$

$=6\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|1+t|\right]+C$

$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$

小结 为同时去掉根式$\sqrt[n]{x},\sqrt[m]{x}$ 取根指数 n 和m 的最小公倍数 l,令$x=t^l$.

11. 求 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+9}}$

解　令 $u=\sqrt{4x^2+9}$,

则 $u^2=4x^2+9, u\,\mathrm{d}u=4x\,\mathrm{d}x$

$$I=\int \frac{4x\,\mathrm{d}x}{4x^2\sqrt{4x^2+9}}=\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-3^2}$$ (P408 公式 10)

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{\sqrt{4x^2+9}+3}\right|+C$$

12. 求 $I=\int\frac{(x+4)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+4)\sqrt{x^2+2x+5}}$

$\boxed{(x+1)^2+3}$

$\boxed{(x+1)^2+4}$

解 令 $x+1=2\tan t$，则 $\mathrm{d}x=2\sec^2 t\,\mathrm{d}t$

$$I=\int\frac{2\tan t+3}{(4\tan^2 t+3)\cancel{2\sec t}}\cdot\cancel{2}\sec^{\cancel{2}} t\,\mathrm{d}t=\int\frac{2\sin t+3\cos t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=2\int\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}+3\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}$$

$$=-2\int\frac{\mathrm{d}\cos t}{4-\cos^2 t}+3\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t+3}$$

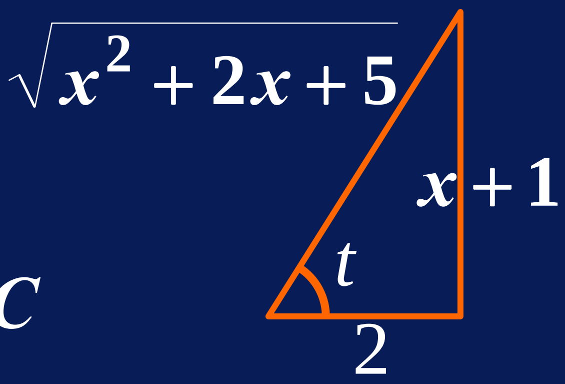
$$I=-2\boxed{\int\frac{\mathrm{d}\cos t}{4-\cos^2 t}}+3\boxed{\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t+3}}$$

(P408 公式10)　　(P408 公式8)

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\cos t}{2+\cos t}\right|+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sin t}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-1}{\sqrt{x^2+2x+5}+1}\right|$$

$$+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3(x^2+2x+5)}}\right)+C$$



$$\boxed{x+1=2\tan t}$$