第九节　闭区间上连续函数的性质

习题　1-9

1. 证明方程 $x^4-4x-1=0$ 至少有一个根介于1和2之间.

证　令 $f(x)=x^4-4x-1$，易知函数在 $[1,2]$ 上连续，又

$$f(1)=1^4-4\times1-1=-4<0,\quad f(2)=2^4-4\times2-1=7>0,$$

即 $f(1)$ 与 $f(2)$ 异号，于是，由零点定理，至少存在一点 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $x^4-4x-1=0$ 至少有一个根介于1和2之间.

2. 证明方程 $x+\mathrm{e}^x=0$ 在区间 $(-1,1)$ 内有唯一的根.

证　令 $f(x)=x+\mathrm{e}^x$，易知函数在 $[-1,1]$ 上连续，又

$f(-1)=-1+\mathrm{e}^{-1}<0$， $f(1)=1+\mathrm{e}>0$，即 $f(-1)$ 与 $f(1)$ 异号，于是，由零点定理，至少存在一点 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f(\xi)=0$，又 $f(x)=x+\mathrm{e}^x$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增，故满足 $f(\xi)=0$ 的 ξ 是唯一的，即方程 $x+\mathrm{e}^x=0$ 在区间 $(-1,1)$ 内存在唯一的根.

3. 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证　令 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则对给定的 $\varepsilon>0$，$\exists\, X>0$，只要 $|x|>X$，就有

$|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$. 又因为 $f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上连续，根据有界性定理，存在 $M_1>0$，使得 $|f(x)|\le M_1$， $x\in[-X,X]$，取 $M=\max\{M_1,|A-\varepsilon|,|A+\varepsilon|\}$，则 $|f(x)|\le M$， $x\in(-\infty,+\infty)$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

4. 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$， $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

证　由 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$，知对给定的 $M>0$，$\exists\,\delta_1>0$，当 $0<x-a<\delta_1$ 时，

$f(x)<-M$，故 $f(a+\dfrac{\delta_1}{2})<-M<0$.

由 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$,知对上述 $M>0$，$\exists\,\delta_2>0$，当 $0<b-x<\delta_2$ 时，$f(x)>M$，故

$f(b-\dfrac{\delta_2}{2})>M>0$.

考虑区间 $[a+\dfrac{\delta_1}{2},b-\dfrac{\delta_2}{2}]$，易知函数 $f(x)$ 在此区间内连续，且 $f(a+\dfrac{\delta_1}{2})<0$，

$f(b-\dfrac{\delta_2}{2})>0$，由零点定理，$\exists\xi\in(a+\dfrac{\delta_1}{2},b-\dfrac{\delta_2}{2})\subset(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

5. 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，并且

$$f(a)>g(a),\ f(b)<g(b),$$

证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=g(\xi)$.

证　构造函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，易知函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(a)=f(a)-g(a)>0$，$F(b)=f(b)-g(b)<0$，由零点定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=g(\xi)$.

6. 假设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，证明：如果函数没有零点，那么函数 $f(x)$ 在区间 I 上要么处处为正，要么处处为负.

证　不妨设 $f(x)$ 在区间 I 上有正有负，比如 $f(a)>0$，$f(b)<0$，$(a<b)$，(当 $a>b$ 时类似可证)，$[a,b]\subset I$，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由零点定理，至少存在一点 $\xi\in[a,b]\subset I$，使得 $f(\xi)=0$，这与 $f(x)$ 在区间 I 上没有零点矛盾，故 $f(x)$ 在区间 I 上要么处处为正，要么处处为负.