第三节　平面及其方程

习题　7-3

1. 求过点$(2,-3,0)$且与向量$(1,-2,3)$垂直的平面方程.

解　取$\boldsymbol{n}=(1,-2,3)$，平面的方程为

$$1(x-2)-2(y+3)+3(z-0)=0,$$

即$x-2y+3z-8=0$为所求的平面.

2. 从原点向一平面引垂线，垂足为(a,b,c)，求此平面的方程.

解　设垂足为$M(a,b,c)$，则$\overrightarrow{OM}=(a,b,c)$，依题意，这个向量就是所求平面的法向量，于是所求平面的方程为

$$a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0,$$

即

$$ax+by+cz-(a^2+b^2+c^2)=0.$$

3. 求过点$M_1(2,-1,2)$和$M_2(4,1,3)$且与x轴平行的平面的方程.

解　设$P(x,y,z)$为此平面上一点，则$\overrightarrow{M_1P}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{i}$共面，$[\overrightarrow{M_1P},\ \overrightarrow{M_1M_2},\ \boldsymbol{i}]=0$，即

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ 4-2 & 1+1 & 3-2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

化简整理，得$y-2z+5=0$.

4. 证明通过不在同一条直线上的三个点$M_i(x_i,y_i,z_i)$，$i=1,\ 2,\ 3$的平面的方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

证　过不共线的三点$M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,\ 2,\ 3)$可唯一确定一个平面$\pi$.设$P(x,y,z)$是平面$\pi$上任意一点，由于三个向量$\overrightarrow{PP_1}$、$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_3}$都在$\pi$上(即共面)，其混合积等于零，于是

$$[\overrightarrow{PP_1}\quad \overrightarrow{P_1P_2}\quad \overrightarrow{P_1P_3}]=0,$$

即
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

5. 指出下列各平面的特殊位, 并画出各平面的图形:

(1) $3z-2=0$;　　(2) $2x+5y-z=0$;

(3) $x-2y=0$;　　(4) $y+4z+1=0$.

解 (1) 是垂直于 z 轴的平面, 垂足坐标为 $(0,0,\frac{2}{3})$;

(2) 是通过原点的平面;

(3) 是通过 z 轴并且在 xOy 面上的投影的斜率为 $\frac{1}{2}$ 的平面;

(4) 是平行于 x 轴并且在 y、z 轴上的截距分别为 -1, $-\frac{1}{4}$ 的平面.

各平面的图形如图 7.5 所示

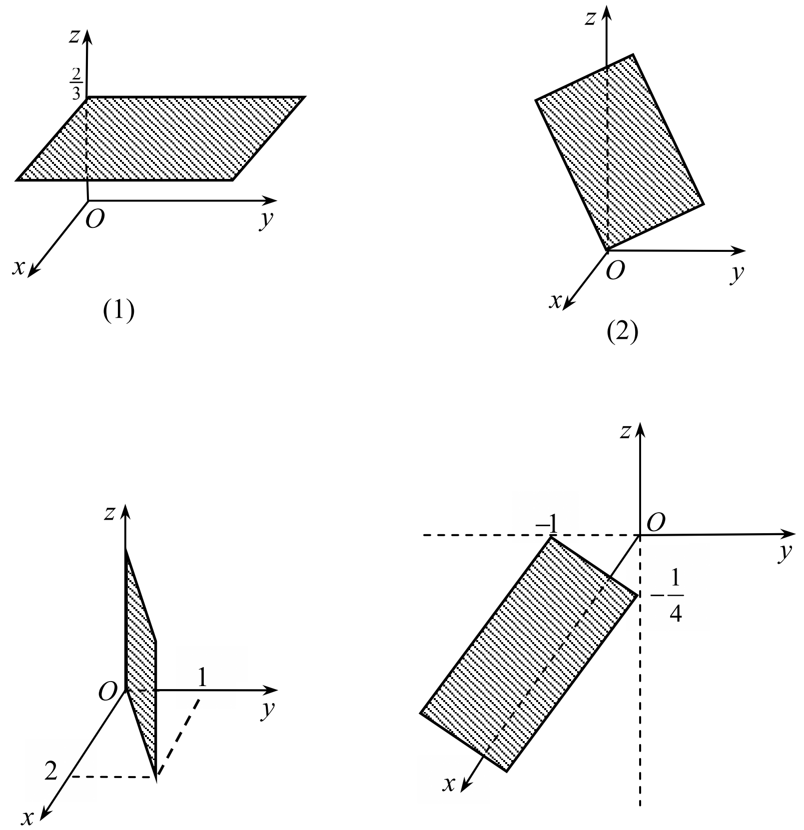

图 7.5

6. 求过点 $M_0(1,2,-2)$ 且包含 y 轴的平面的方程.

解 设平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，因此平面包含 y 轴，故有 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{j}$，即 $(A,B,C)\cdot(0,1,0)=0$，由此有 $B=0$．故可设所求平面的方程为 $Ax+Cz=0$．由于点 $M_0(1,2,-2)$ 在此平面上，因而有 $A-2C=0$，将 $A=2C$ 代入方程得 $2Cx+Cz=0$，即

$$2x+z=0.$$

7. 一平面过点 $A(1,2,-2)$ 及 $B(2,-1,-1)$，且在 z 轴上的截距为 2，求它的方程.

解 设所求平面的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，则由点 $A(1,2,-2)$ 在平面上，得 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}-1=1$，即

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=2\,; \tag{1}$$

由点 $B(2,-1,-1)$ 在平面上，得 $\frac{2}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{2}=1$，即

$$\frac{2}{a}-\frac{1}{b}=\frac{3}{2}\,; \tag{2}$$

联立(1)、(2)，解之得 $\begin{cases}\dfrac{1}{a}=1,\\[2mm]\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

所以所求平面的方程为 $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1$，即

$$2x+y+z-2=0\,.$$

8. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程.

解 设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则所求平面的方程为

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0.$$

$\because \boldsymbol{n}\perp\overline{M_1M_2}$　　$\therefore (A,B,C)\cdot(-1,0,-2)=0$，即

$$-A-2C=0,$$

故 $A=-2C$；

又 $\because \boldsymbol{n}$ 垂直于平面 $x+y+z=0$ 的法向量 $(1,1,1)$，$\therefore (A,B,C)\cdot(1,1,1)=0$，即

$$A+B+C=0,$$

故 $B=-(A+C)=C$；

将 A, B 代入平面的方程并约去 C，得

$$-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0,$$

即 $2x-y-z=0$.

9. 求平行于平面 $x+y+z=1$ 且到坐标原点的距离为 3 的平面方程.

解 因所求平面平行于平面 $x+y+z=1$，故可知所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}//(1,1,1)$，即可设 $\boldsymbol{n}=\lambda(1,1,1)(\lambda\neq 0)$，于是可设所求平面的方程为

$$\lambda x+\lambda y+\lambda z+D=0.$$

由题设，有:
$$3=\frac{|D|}{\sqrt{3\lambda^2}},$$

即 $|D|=3\sqrt{3}\lambda$，所以 $D=\pm 3\sqrt{3}\lambda$，故所求平面的方程为

$$\lambda x+\lambda y+\lambda z\pm 3\sqrt{3}\lambda=0,$$

即 $x+y+z=\pm 3\sqrt{3}$.

10. 过点 $(1,-2,1)$ 且垂直于两已知平面 $\pi_1: x-y+z-1=0$ 及 $\pi_2: 2x+y+z+1=0$ 的平面的方程.

解 已知平面 π_1、π_2 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=(1,-1,1),\ \boldsymbol{n}_2=(2,1,1),$$

取所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-2,1,3),$$

则所求平面的方程为

$$-2(x-1)+(y+2)+3(z-1)=0,$$

化简得 $2x-y-3z-1=0$.

11. 一平面过 z 轴且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，求它的方程.

解 **法 1** 设平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

依题有，$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{k}$，$\widehat{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_0)}=\frac{\pi}{3}$，其中 $\boldsymbol{n}_0=(2,1,-\sqrt{5})$.

由 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{k}$ 得，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}=0$，即 $C=0$， (1)

由 $(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_0})=\dfrac{\pi}{3}$，得 $\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_0})=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_0|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}_0|}=\dfrac{\left|2A+B-\sqrt{5}C\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{10}}=\dfrac{1}{2}$， (2)

(1)、(2)联立，解得 $C=0,\ A=-3B$ 或 $A=\dfrac{1}{3}B.$

平面过 z 轴，故平面过原点，因此所求平面的方程为

$$-3Bx+By=0,\quad \text{或}\frac{1}{3}Bx+By=0,\ \text{约去}B(B\neq 0)\text{，得}$$

$$-3x+y=0,\quad \text{或}\,x+3y=0\,.$$

法 2 因为平面过 z 轴，可设平面方程为 $Ax+By=0$，类似法 1，可得平面方程.

法 3 平面束法.

z 轴的交面式方程为 $\begin{cases}x=0,\\ y=0.\end{cases}$ 过 z 轴的平面束方程为 $x+\lambda y=0$，其法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,\lambda,0)$，设 $\boldsymbol{n}_0=(2,1,-\sqrt{5})$，则由 $\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_0})=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，得

$$\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_0|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}_0|}=\frac{1}{2},\qquad \text{即}\frac{|2+\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}\sqrt{10}}=\frac{1}{2},$$

解得 $\lambda_1=3,\ \lambda_2=-\dfrac{1}{3}$，因此所求平面的方程为 $x+3y=0,\quad$ 或 $x-\dfrac{1}{3}y=0$. 容易验证 $y=0$ 不是所求的平面方程.

12. 求与平面 $x+y-2z-1=0$ 和 $x+y-2z+3=0$ 等距离的平面方程.

解 显然，平面 π_1：$x+y-2z-1=0$ 和 π_2：$x+y-2z+3=0$ 平行. 由题设可知，所求平面必与此两平面平行，故可设所求平面 π 为

$$\lambda x+\lambda y-2\lambda z+D=0.$$

在 π_1 与 π_2 上任找一点 $A,\ B$，$A,\ B$ 到平面 π 的距离即为 π_1 与 π 及 π_2 与 π 之间的距离.

点 $A(1,0,0)\in\pi_1$，点 $B(-3,0,0)\in\pi_2$，由题设有

$$\frac{|\lambda\cdot 1+\lambda\cdot 0-2\lambda\cdot 0+D|}{\sqrt{\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2}}=\frac{|\lambda\cdot(-3)+\lambda\cdot 0-2\lambda\cdot 0+D|}{\sqrt{\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2}},$$

即
$$|\lambda+D|=|-3\lambda+D|,$$

即 $\lambda + D = 3\lambda - D$，故 $\lambda = D$，所求平面的方程为

$$\lambda x + \lambda y - 2\lambda z + \lambda = 0,$$

化简得 $x + y - 2z + 1 = 0$.

13. 求与平面 $x + 6y + z = 0$，且与坐标面所围成的四面体体积为 6 的平面的方程.

解 因所求的平面与平面 $x + 6y + z = 0$ 平行，故可设所求平面方程为

$$\lambda x + 6\lambda y + \lambda z + D = 0, \quad (\lambda \neq 0),$$

由此可得所求平面在 x、y、z 轴的截距为 $\left|\frac{D}{\lambda}\right|$，$\left|\frac{D}{6\lambda}\right|$，$\left|\frac{D}{\lambda}\right|$，于是由题设有

$$\frac{1}{6}\left|\frac{D}{\lambda}\right| \cdot \left|\frac{D}{6\lambda}\right| \cdot \left|\frac{D}{\lambda}\right| = 6,$$

即
$$\left(\frac{D}{\lambda}\right)^3 = \pm 36,$$

所以 $\frac{D}{\lambda} = \pm 6$，从而 $D = \pm 6\lambda$.

故所求平面方程为

$$\lambda x + 6\lambda y + \lambda z \pm 6\lambda = 0,$$

即 $x + 6y + z \pm 6 = 0$.