9.3 平面运动的加速度分析

加速度合成定理

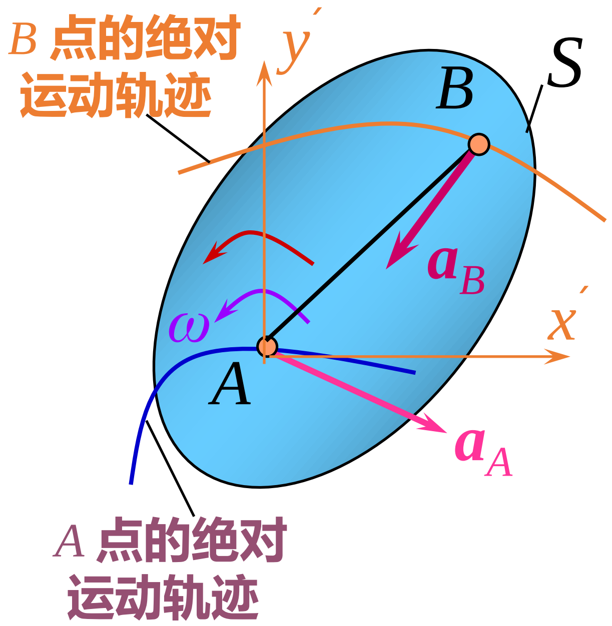
如果已知平面图形上一点A的加速度$\boldsymbol{a}_A$、图形的角速度ω与角加速度　　，应用加速度合成定理，可以确定平面图形上任意点B的加速度。

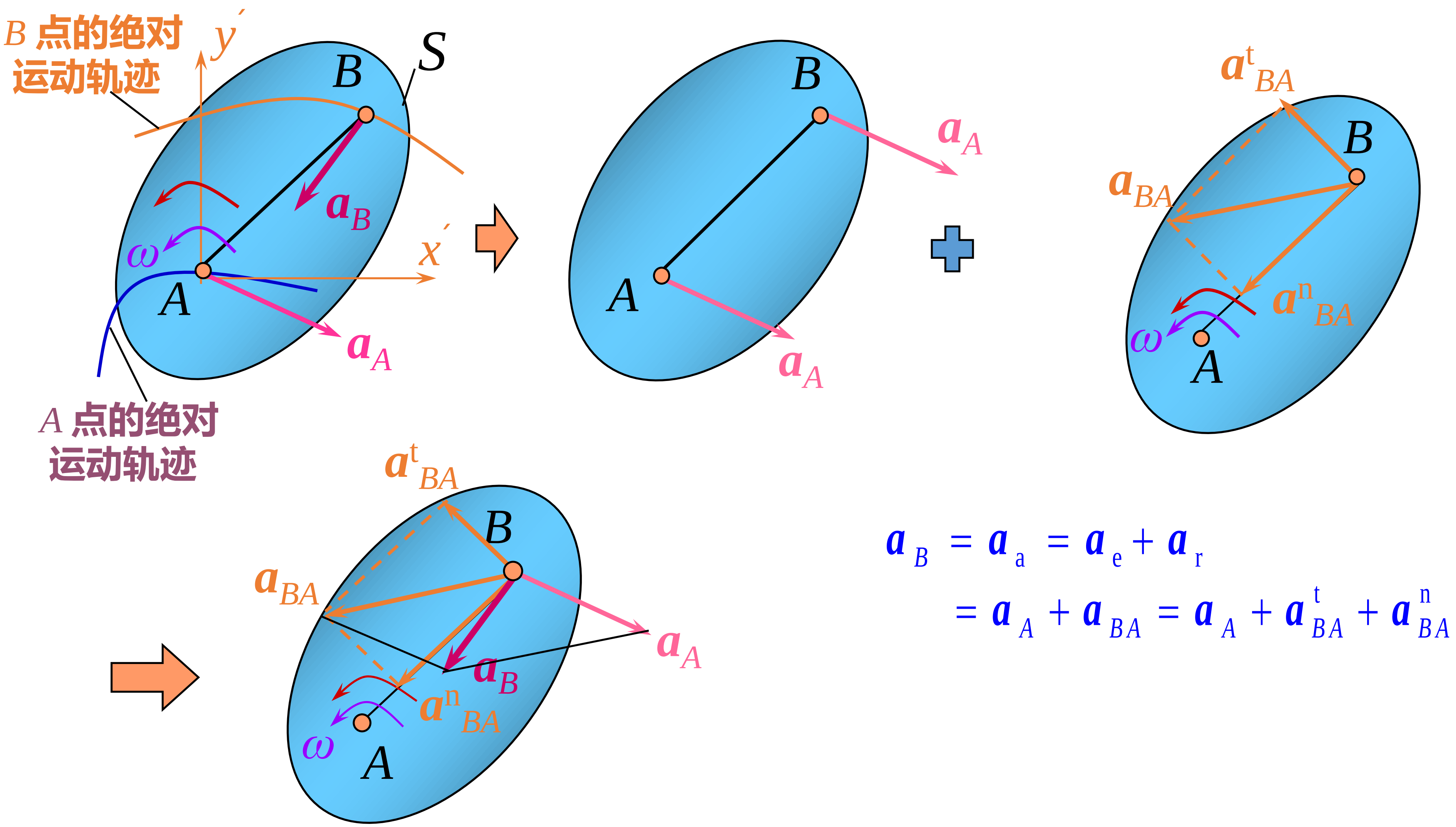
(1) 选择加速度已知的点A为基点；

(2) 建立平动系；

(3) 应用牵连运动为平动的加速度合成定理 $\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r$ 可以确定图形上任意点的加速度。这时

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_a \quad , \boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_A \quad , \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_{BA}$$





$$a_B = a_a = a_e + a_r$$

$$= a_A + a_{BA} = a_A + a^t_{BA} + a^n_{BA}$$

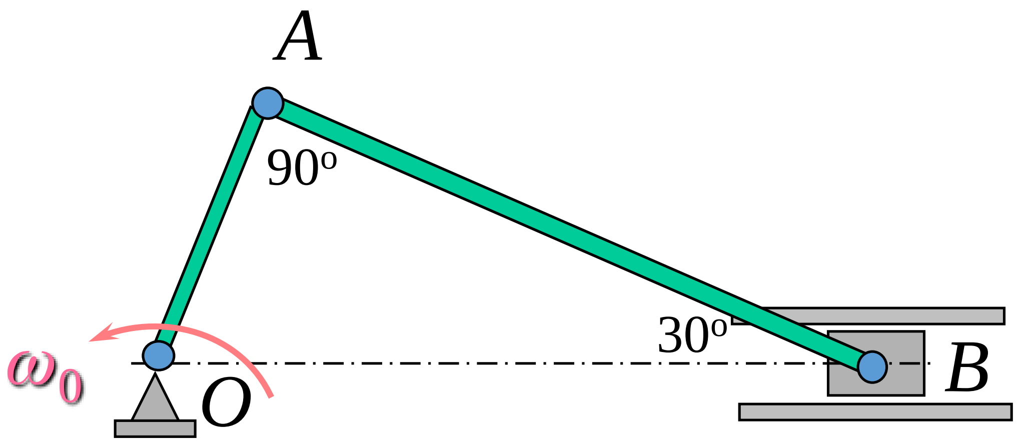
$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{t} + \boldsymbol{a}_{BA}^{n}$$

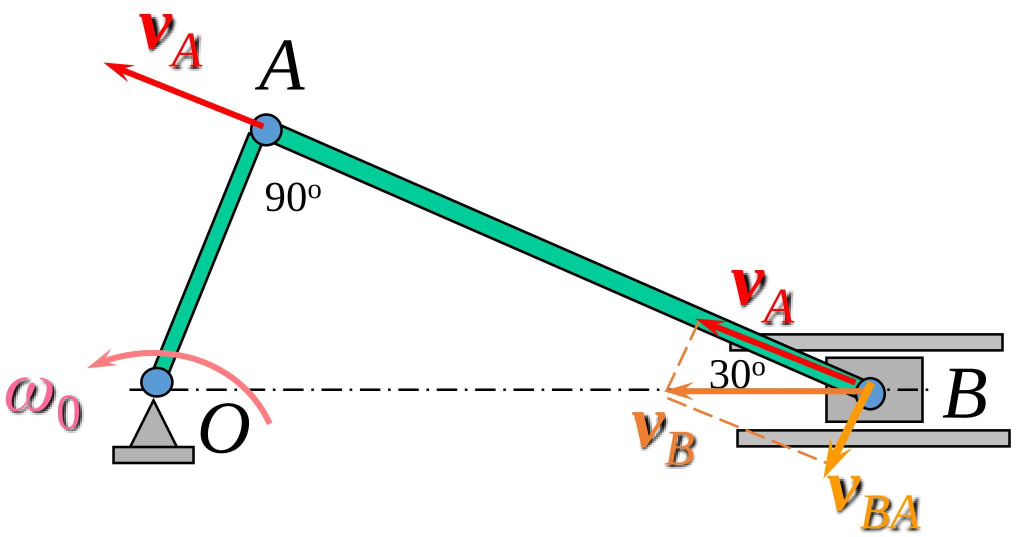
此即用基点法求点的加速度的基本公式。

有结论：

平面图形上任意一点的加速度，等于基点的加速度与这一点对于以基点为坐标原点的平移系的相对切向加速度和法向加速度的矢量和。

例题1 曲柄－滑块机构，$OA=r$，$AB=l$，曲柄以匀角速度ω_0绕O轴转动。求：图示瞬时，滑块B的加速度$\boldsymbol{a}_B$和连杆AB的角加速度 $_{AB}$。





解：

(1) **确定连杆的角速度**

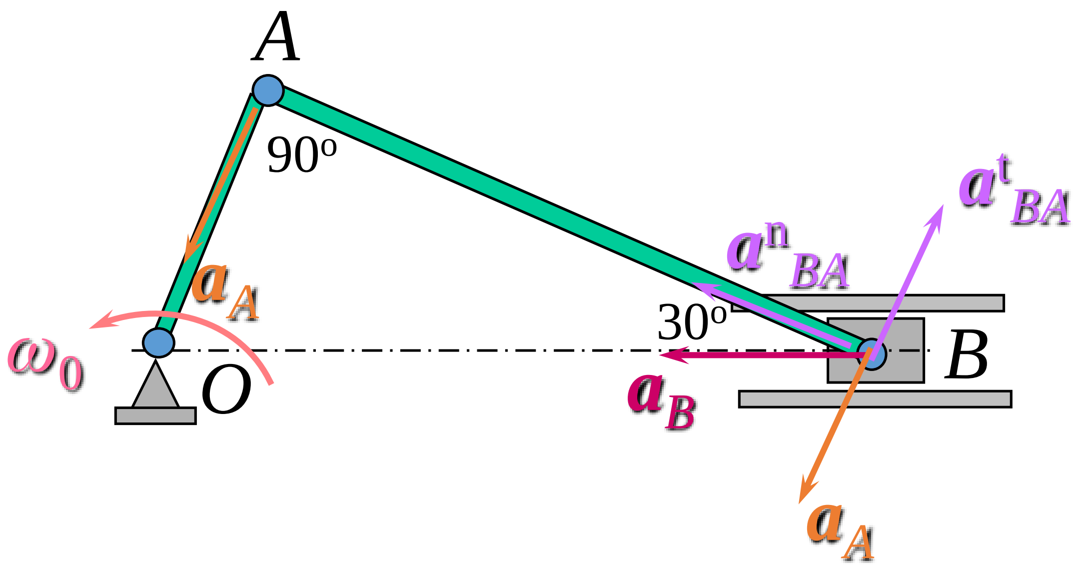
以A为基点

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

$$v_A = r\omega_0\,, \quad v_{BA} = v_A \tan 30^\circ = r\omega_0 \tan 30^\circ$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{l} = \frac{r}{l}\omega_0 \tan 30^\circ = \frac{\omega_0}{3}$$

$$\omega_{AB}=\frac{\omega_0}{3}$$



(2) 加速度分析

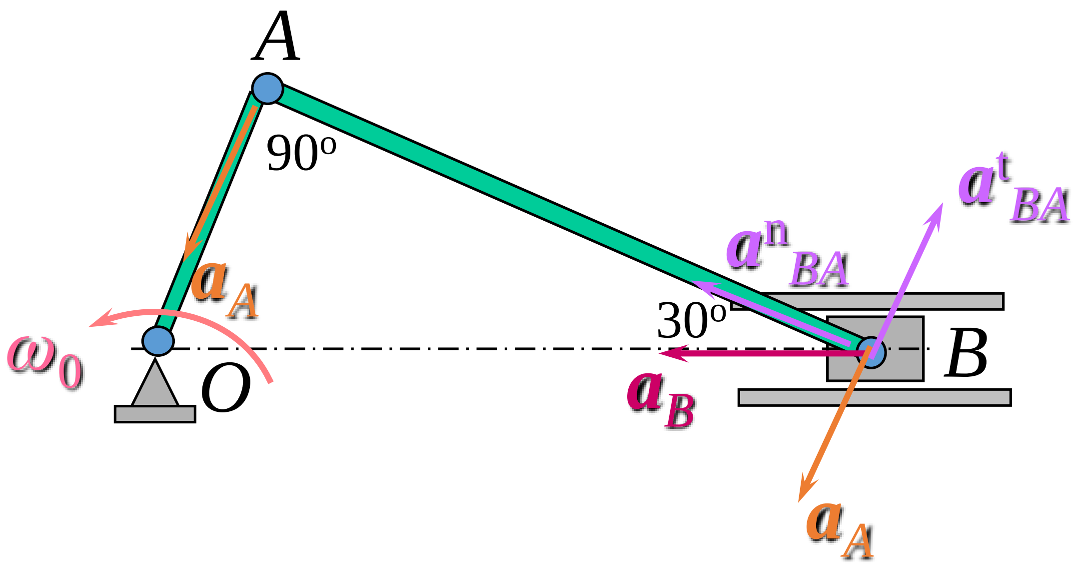
*A*点的加速度:

$$a_A=r\omega_0^2$$

*B*点的加速度：根据加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}^t_{BA}+\boldsymbol{a}^n_{BA}$$

$$a^t_{BA}=\alpha_{AB}l,\qquad a^n_{BA}=AB\times\omega_{AB}^2=\frac{l\omega_0^2}{9}$$



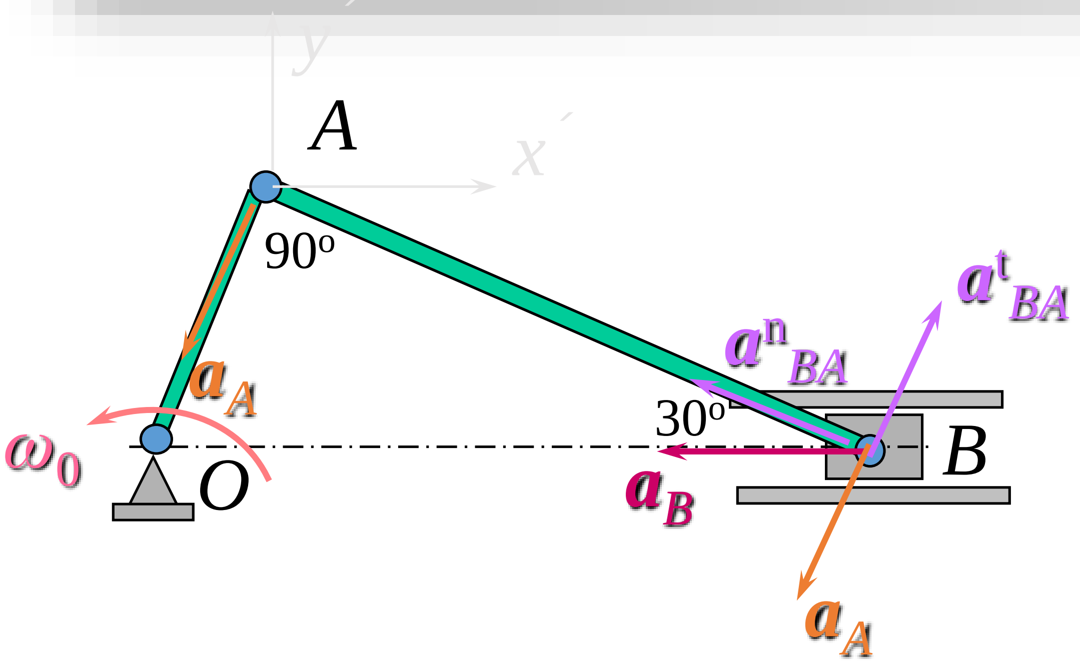
$$a^{n}_{BA} = AB \times \omega^{2}_{AB} = \frac{l\omega_0^2}{9},$$

$$a^{t}_{BA} = \alpha_{AB} l$$

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^{t}_{BA} + \boldsymbol{a}^{n}_{BA}$$

将加速度合成定理中各项向BA方向投影

$$a_B \cos 30^\circ = a^{n}_{AB} = \frac{l\omega_0^2}{9}, \qquad a_B = \frac{2\sqrt{3}}{27} l\omega_0^2$$



（3）角加速度分析

根据加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^t_{BA} + \boldsymbol{a}^n_{BA}$$

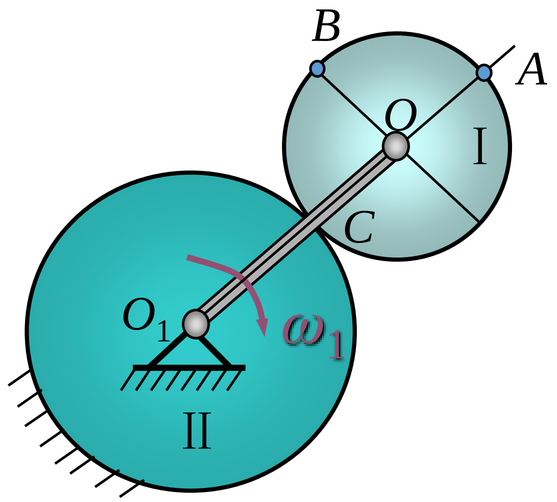
$$a^t_{BA} = \alpha_{AB} l$$

将加速度合成定理中各项向a_A方向投影

$$a_B \sin 30^\circ = a_A - a^t_{AB}, \qquad a^t_{BA} = r\omega_0^2 - \frac{\sqrt{3}}{27} l\omega_0^2 = (r - \frac{\sqrt{3}}{27} l)\omega_0^2$$

$$\alpha_{AB} = \frac{a^t_{BA}}{l} = (\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{27})\omega_0^2 = \frac{8\sqrt{3}}{27}\omega_0^2$$

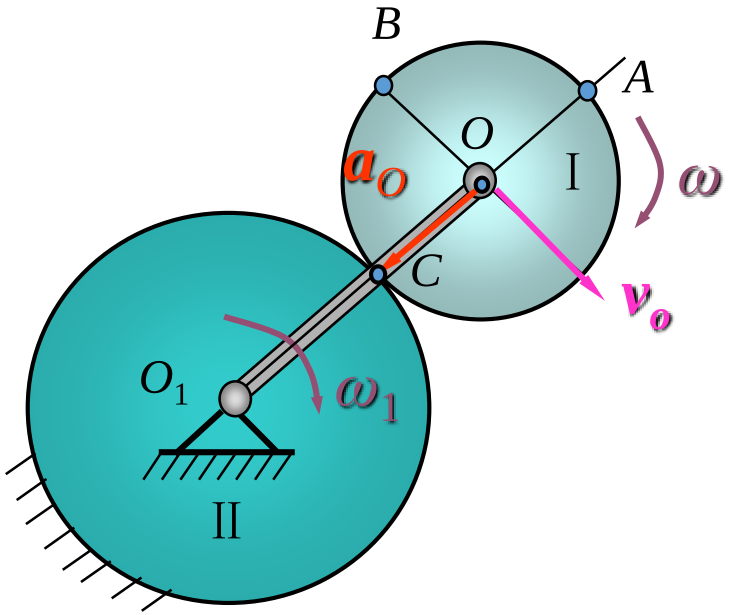
例题2 如图所示，在外啮合行星齿轮机构中，系杆$O_1O = l$，以匀角速度ω_1绕O_1轴转动。大齿轮Ⅱ固定，行星轮Ⅰ半径为r，在轮Ⅱ上只滚不滑。设A和B是轮缘上的两点，A点在O_1O的延长线上，而B点则在垂直于O_1O的半径上。试求点A和B 的加速度。



解： 轮Ⅰ作平面运动，其中心O的速度和加速度分别为：

$$v_O = l\omega_1 \ , \quad a_O = l\omega_1^{\,2}$$

轮Ⅰ的速度瞬心在C点，则轮Ⅰ的角速度



$$\omega = \frac{v_O}{r} = \frac{l}{r}\omega_1 \quad \text{（顺时针）}$$

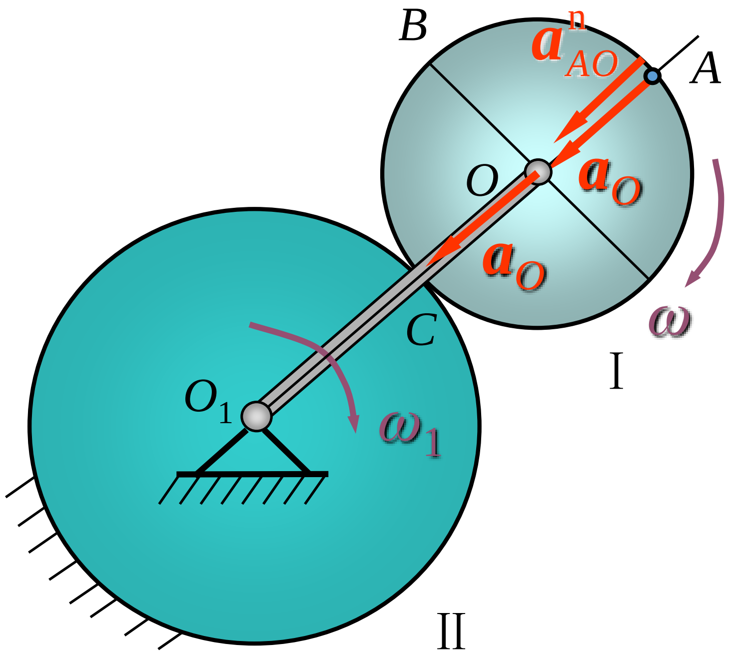
因为ω_1和ω都为常量，所以轮Ⅰ的角加速度为零，则有

$$\alpha = 0$$

(1) 求A点的加速度。

轮 I 的角速度 $\omega = \dfrac{v_O}{r} = \dfrac{l}{r}\omega_1$, 角加速度 $\alpha = 0$

选O为基点，应用加速度合成定理 $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{AO}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{AO}^{\mathrm{n}}$



各加速度的大小为 $a_O = l\omega_1^2$,

$a_{AO}^{\mathrm{n}} = r\omega^2 = \dfrac{l^2}{r}\omega_1^2$, $a_{AO}^{\mathrm{t}} = 0$ 方向如图。

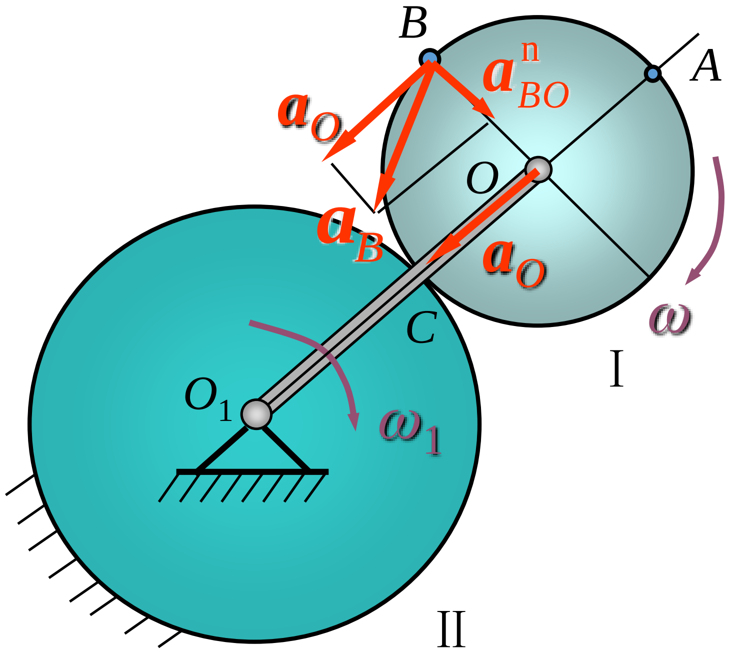
所以由图可知A点的加速度的方向沿AO，它的大小为

$$a_A = a_O + a_{AO}^{\mathrm{n}}$$
$$= l\omega_1^2 + \frac{l^2}{r}\omega_1^2$$
$$= l\omega_1^2(1 + \frac{l}{r})$$

(2) 求B点的加速度。

选O为基点，应用加速度合成定理 $\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{a}_{BO}^{t}+\boldsymbol{a}_{BO}^{n}$

其中 $a_O=l\omega_1^2$, $a_{BO}^{n}=r\omega^2=\dfrac{l^2}{r}\omega_1^2$, $a_{BO}^{t}=0$



方向如图。

所以B点的加速度大小为

$$a_B=\sqrt{a_O^2+\left(a_{BO}^{n}\right)^2}=l\omega_1^2\sqrt{1+\left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

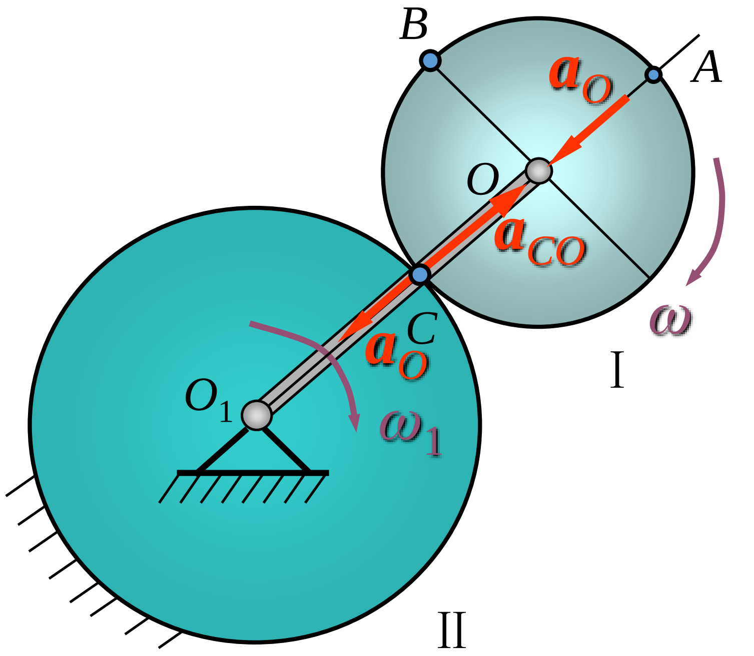
它与半径OB间的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{a_O}{a_{BO}^{n}}=\arctan\frac{l\omega_1^2}{\frac{l^2}{r}\omega_1^2}=\arctan\frac{r}{l}$$

(2) 求C点的加速度。

选O为基点，应用加速度合成定理 $\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{BO}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{BO}^{\mathrm{n}}$

其中 $a_O = l\omega_1^2$， $a_{BO}^{\mathrm{n}} = r\omega^2 = \dfrac{l^2}{r}\omega_1^2$， $a_{BO}^{\mathrm{t}} = 0$



方向如图。

所以B点的加速度大小为

$$a_B = \sqrt{a_O^2 + \left(a_{BO}^{\mathrm{n}}\right)^2} = l\omega_1^2\sqrt{1 + \left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

它与半径OB间的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{a_O}{a_{BO}^{\mathrm{n}}} = \arctan\frac{l\omega_1^2}{\dfrac{l^2}{r}\omega_1^2} = \arctan\frac{r}{l}$$

谢谢！