《概率论与数理统计》

任课教师：　王燕萍

email：yanpingwang@nwpu.edu.cn

专业：　飞行器可靠性工程

概率论与数理统计

教材《概率论与数理统计》第四版 浙江大学 盛骤 谢式千 潘承毅 编著 高等教育出版社

参考书《概率论与数理统计》西工大出版社

学时：48学时 （1~12周）

教学内容：第一章 ~ 第五章 概率论

第六章 ~ 第八章 数理统计

考研数学一，数学三内容占比22%

课程学习要求

- 每次课后布置习题，请将作业写在单页的空白纸上，每周二交上交作业（不是交作业本）（计入课程成绩）
- 自学（课堂上未讲到有关教材或PPT中的例题）
- 答疑
- 用（学号+姓名）来验证加入QQ群 479407674（npu-aero-stats），便于上传课件，通知，学习交流等。

课程学习要求

- 注册微助教用于上传课件和课堂签到（计入课程成绩），签到功能使用见PPT最后页

课堂名称：概率论与数理统计HK1

课堂编号：BO400

1、打开微信“扫一扫”，扫描左侧二维码，关注公众号：微助教服务号。

2、点开收到的系统通知：“点击此处加入【概率论与数理统计HK1】课堂”，填写学生资料后加入课堂。

*如未成功收到系统通知，请点击公众号下方“学生” --- “加入课堂” --- “输入课堂编号”手动加入课堂

二维码有效期至：2018-09-09

到期后系统会生成新的二维码

老师的期望

- 按时出勤，不要四海八荒到处溜达
- 请带元神和仙体来上课
- 课外多些时间修炼：预习，复习，做题
- 自己要努力飞升上仙上神，不要应劫挂科

§0 引言

一、概率论与数理统计是研究什么的?

随机现象的统计规律

随机现象
统计规律性

现 象

自然界与人类社会的现象可分为 两类

现象

- 确定性现象 Certainty
  - 在一定条件下必然发生的现象。
  - 经典数学研究
  - 例：太阳东升西落，同性电荷相斥、异性电荷相吸，在地球上向上抛石子必然下落
- 不确定性现象 Uncertainty
  - 随机现象 Random
    - 个别试验结果不可预知，大量重复则有规律。
    - 概率论与数理统计研究
    - 例：抛硬币、炮弹弹着点
  - 模糊现象 Fuzzy
    - 不能给出明确定义或评判标准而形成的不确定性。
    - 模糊数学研究
    - 例：多云天气，黄昏，年轻与年老，胖瘦，经济增长率为4~6%等

随机现象

确定性数学：

经典因果律解释

试验条件 → 试验结果 （原因 → 结果）

客观世界：

试验条件 → 结果1

试验条件 → 结果2

⋮

试验条件 → 结果n

偶然因素

经典因果律无法解释

举例：炮弹弹着点；

同一批工艺流程生产出的拉伸试样,测试强度

现象特点

①个别试验结果呈现随机性；

②大量重复试验其结果又呈现一定规律（概率统计规律，也称为广义因果律）；

这种现象称之为随机现象。

概率论与数理统计：

是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。

二、概率论与数理统计的应用

应用几乎遍及所有科学技术领域，工农业生产和国民经济的各个部门。例如：

1. 气象、水文、地震预报、人口控制及预测都与《概率论》有关);

2. 产品的抽样验收,新研制药品能否在临床应用，需用到《假设检验》；

3. 寻求最佳生产方案要进行《实验设计》和《数据处理》；

4. 可靠性工程：电子系统的设计, 火箭卫星的研制与发射都离不开《可靠性设计》；

5. 通信工程: 处理通信问题需研究《信息论》;

6. 天文: 探讨太阳黑子的变化规律用到《时间序列分析》方法;

7. 化工: 研究化学反应的时变率用《马尔科夫过程》描述;

8. 生物医学: 研究群体增长问题时提出了生灭型《随机模型》, 传染病流行问题用到多变量非线性《生灭过程;

9. 服务系统: 如病人候诊, 电话通信, 机器维修, 存货控制等, 可用一类概率模型来描述, 涉及《排队论》;

10.经济学：如最优决策和经济增长等；

11.赌博（概率论起源）、彩票、保险

分赌注问题 —— 数学期望

赌徒输光问题 —— 大数定律

应用推动其发展，目前，概率论与数理统计在其他自然科学领域的应用趋势还在发展，尤其是当前热门的大数据、人工智能。

英国的逻辑学家和经济学家 杰文斯 曾对概率论大加赞美：

概率论是生活真正的领路人，如果没有对概率的某种估计，那么我们就寸步难行，无所作为。

三、概率论与数理统计的区别与联系

概率论 Probability：

研究的是无限次试验所反映出的规律，它是一种数学上的假设，在现实中无限次试验是永远也不可能实现的。

研究过程：基于一定的假设，进行演绎推理，研究统计规律的传播。

三、概率论与数理统计的区别与联系

数理统计 Statistics：

是以有限次试验为研究基础，从有限次的试验数据中分析、归纳总结出统计规律，并进行推断和预测，为我们的决策提供依据，具有工程应用价值。

研究过程：基于一定的数据，进行归纳总结，从有限的数据中总结出统计规律，为决策提供依据。

因此，概率论是理论基础，数理统计是概率论的实际应用。二者都是研究和揭示随机现象的统计规律性的数学学科。

第一章 概率论的基本概念

随机试验

样本空间、随机事件

频率与概率

等可能概型（古典概型）

几何概率

条件概率

独立性

§1 随机试验 random experiment

⌘ 从观察试验开始

研究随机现象，首先要对研究对象进行观察试验。这里的 试验 是一个含义广泛的术语。它包括各种科学试验，甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验。

试验具有以下 特点：

1.可以在相同条件下重复进行；

2.每次试验的结果不止一个，
并且能事先明确试验的所有可能结果；

3.每次试验前不能确定哪一个结果会出现。

具有上述三个特点的试验称之为 随机试验 ，
记为 **E** 。

几个具体试验

E_1：抛一枚硬币，观察正面H、反面T出现的情况。 {H，T}

E_2：将一枚硬币抛掷两次，观察正面H、反面T出现的情况。

{HH，HT，TH，TT}

E_3：将一枚硬币抛掷两次，观察出现正面的次数。 {0，1，2}

E_4：抛一颗骰子，观察出现的点数。 {1，2，3，4，5，6}

E_5：从一个装有5只白球，5只红球的盒中任取一只，观察其颜色。 {红色，白色}

E_6：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。 $\{t \mid t \geqslant 0\}$

E_7：记录某城市120急救电话台一昼夜接到的呼唤次数。

{0，1，2，3，…}

说 明：

概率论是通过随机试验来研究随机现象的统计规律，以后所提到的试验都是指随机试验。

§2 样本空间、随机事件

一、样本空间 Sample space

定义　随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S（或 Ω）。

样本空间的元素(即试验 E 的每个可能结果)，称为样本点。

上述几个具体试验的样本空间

E_1：抛一枚硬币，观察正面H、反面T出现的情况。

S_1： {H，T}

E_2：将一枚硬币抛掷两次，观察正面H、反面T出现的情况。

S_2： {HH，HT，TH，TT}

E_3：将一枚硬币抛掷两次，观察出现正面的次数。

S_3： {0，1，2}

E_4：抛一颗骰子，观察出现的点数。

S_4： {1，2，3，4，5，6}

E_5：从一个装有5只白球，5只红球的盒中任取一只，观察其颜色。

S_5： {红色，白色}

E_6：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

S_6： $\{t \mid t \geqslant 0\}$

E_7：记录某城市120急救电话台一昼夜接到的呼唤次数。

S_7： {0，1，2，3，…}

注意：

样本空间的元素是由试验目的确定的。

E_2：将一枚硬币抛掷两次，观察正面H、反面T出现的情况。

S_2：{HH，HT，TH，TT}

E_3：将一枚硬币抛掷两次，观察出现正面的次数。

S_3：{0，1，2}

试验 E_2 和 E_3 都是将一枚硬币抛掷两次，但由于试验目的不同，其样本空间也就不同。

二、随机事件 Random event

在实际研究中，我们更关心的是随机试验中满足某种条件的样本点的集合。

例如：在试验 E_6 中测试灯泡的寿命，若规定灯泡的寿命（小时）小于500为次品，而我们关心的是灯泡的正品情况，即测试灯泡的寿命t满足t≥500的样本点。

定义 一般，试验E的样本空间S的子集称为试验E的**随机事件**，简称**事件**。

严格地说，随机事件是满足某种条件的样本点的集合。

样本空间S是不是一个事件？

是

定义：在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**。

理解　　每个样本点对应一个试验结果，而这些试验结果不能同时发生，每次有且只能有一个发生，故当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，则这一事件发生。

举例　E_4：抛一颗骰子，观察出现的点数。

S_4：{1，2，3，4，5，6}　A={点数>4}= {5，6}

随机事件分类：

- 基本(or简单)事件（一个样本点组成的单点集）；
- 复合事件（由2个或2个以上样本点组成的集合）。

两个特殊事件：

必然事件：每次试验中一定发生的事件。

不可能事件：每次试验中都不发生的事件。

样本空间S包含所有的样本点，它是S自身的子集，在每次试验中它总是发生的，所以是必然事件。

空集∅不包含任何样本点，它也作为样本空间S的子集，它在每次试验中都不发生，所以是不可能事件。

例：在掷骰子试验E_4中，“掷出点数小于7”是（必然）事件；“掷出点数8”则是（不可能）事件。

三、事件间的关系与事件的运算

事件是集合，因而事件的关系与事件的运算就可以按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理。下面我们给出这些关系和运算在概率论中的提法及含义。

事件间的关系

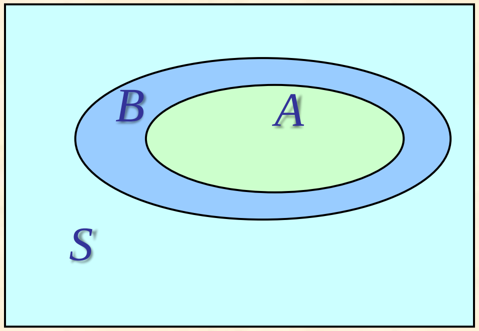
1. 包含 **Containment**

若 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，称事件B包含事件A。

这是指：事件A发生必然导致事件B发生。

文氏图 **Venn diagram** 如右：

如：事件 A={2}, B={2,4,6} 。



$A \subset B$

2. 相等 **Equality**

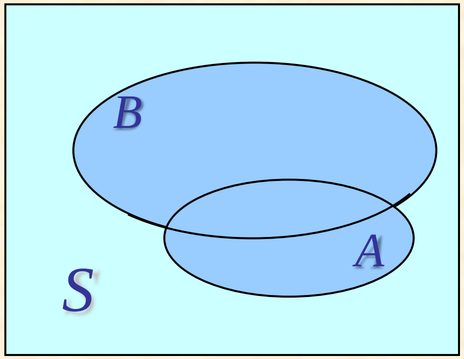
若 A⊂B 且 B⊂A，即 A=B，称事件A与事件B**相等**。

3. 和 **Union**

事件$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ or } x\in B\}$称为事件A与事件B的**和事件**。

和事件A∪B是指：当且仅当A、B中至少有一个发生时，和事件A∪B发生。

文氏图如右：



$A\cup B$

如：A={2, 4, 6}，B={1, 2}，

则 A∪B = {1, 2, 4, 6}

类似地称

$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$为 n个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件。

表示：事件 A_1，A_2，…，A_n中至少有一个发生。

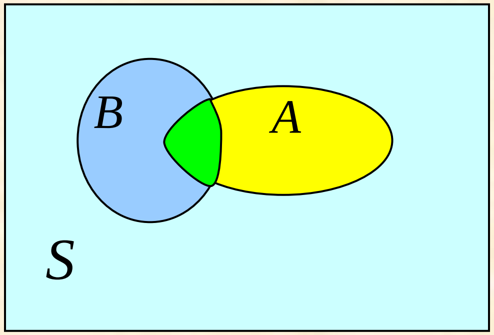
$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$为 可列个事件 A_1，A_2，… 的和事件。

4. 积 Intersection

事件A∩B={x|x∈A and x∈B} 称为事件A与事件B的积事件。 A∩B也记为AB

积事件A∩B是指：当且仅当A、B同时发生时，积事件A∩B发生。

文氏图如右



$A \cap B$

如：A={2, 4, 6}， B={1, 2}，则 A∩B = {2}

类似地称

$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为**n个事件** A_1，A_2，…，A_n 的**积事件**(表示事件 A_1，A_2，…，A_n同时发生)。

表示：**事件 A_1，A_2，…，A_n同时发生**。

$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为**可列个事件** A_1，A_2，… 的**积事件**。

$A\cap\varnothing$，$A\cup\varnothing$

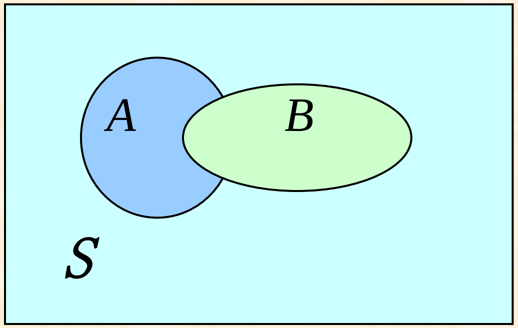
$A\cap S$，$A\cup S$

5. 差 Difference

事件A-B=$\{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$ 称为事件A与事件B的差事件。

差事件A-B是指：当A发生而B不发生时，差事件A-B发生。

文氏图如右



$A-B$

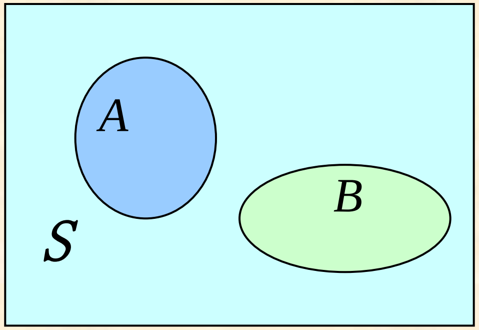
如：A={2, 4, 6}，B={1, 2}，则 A-B = {4, 6}

6. 互不相容/互斥 Disjoint/Mutually Exclusive

若A∩B=∅，称事件A与事件B是互不相容/互斥的。

事件的互不相容/互斥是指：事件A与B不能同时发生。

文氏图如右



$A \cap B = \varnothing$

基本事件 是 <u>两两互不相容</u> 的。

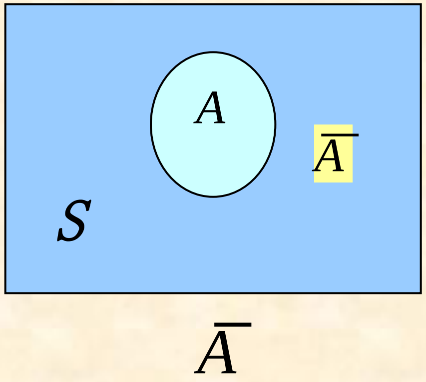
7. 互为对立/互逆 Complementation

若$A \cup B=S$ 且 $A \cap B=\varnothing$，称事件A与事件B互为逆事件，又称事件A与事件B互为对立事件。

互逆事件是指：每次试验中，事件A与B中必有一个且只有一个发生。

A的逆/对立事件记为 $\overline{A}$， $\overline{A}=S-A$

文氏图如右

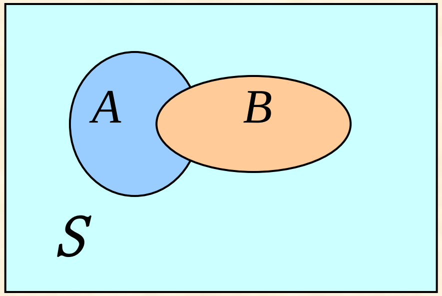


常用事件之间关系

互逆事件必然互不相容 $A \cup B = S$ 且 $AB = \varnothing$

互不相容事件则并不一定互逆 $AB = \varnothing$

$A - B \quad A - AB \quad A\overline{B}$ 之间的关系



$A-B$

差事件常化为积事件考虑，即

$$A - B = A - AB = A\overline{B}$$

类似的：

$$A - BC = A - ABC = A\overline{BC}$$

$$A - B - C = A\overline{B} - C = A\overline{B}\,\overline{C}$$

事件运算律

交换律 **Commutativity**：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

结合律 **Associativity**：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律 **Distributive Law**：

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

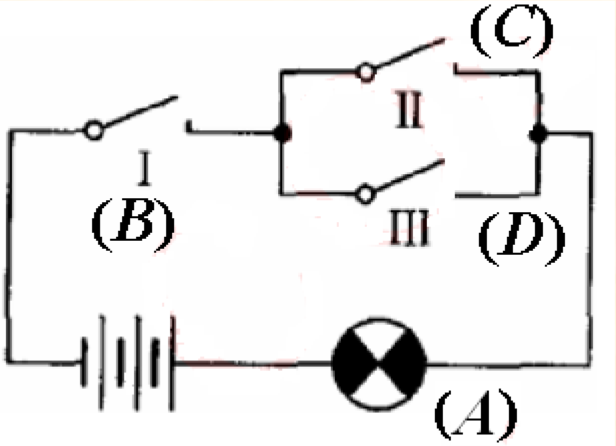
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

德·摩根律/对偶律 **DeMorgan's Law**：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

德·摩根律对于*n*个事件或可列个事件也成立

例（P5 例3）：如图所示电路，



事件A={灯亮}，B={开关 I 闭合}、C={开关 II 闭合}、D={开关III闭合}。

试问：事件A与BC之间的关系？ $BC \subset A$

A与BD ？ $BD \subset A$

A与 $BC \cup BD$ ？ $A = BC \cup BD$

A与 $\overline{B}$ ？ $A\overline{B} = \varnothing$

$\overline{B}$与$\overline{A}$ ？ $\overline{B} \subset \overline{A}$

说明：充分理解事件关系的定义，灵活运用事件的运算律。

§3 频率与概率

在随机试验中，一个事件可能发生，也可能不发生。研究随机现象，不仅关心试验中会出现哪些事件，更重要的是想知道事件出现的可能性大小。

如何度量事件发生可能性的大小?

了解这个可能性对我们的生活有什么指导意义?

例：如果能了解商场购物人数的可能性的大小，可以为合理配置服务人员提供抉择支持；

如能了解发生洪涝灾害可能性的大小，可降低损失。

一、频率 Frequency

定义：在相同的条件下，进行了n次试验，在这n次试验中，事件A发生的次数n_A称为事件A发生的**频数**。比值n_A / n称为事件A发生的**频率**，并记为$f_n(A)$。

由定义，易知频率具有下述**基本性质**：

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；　　**有界性**

(2) $f_n(S) = 1$；　　**规范性**

(3) 互不相容事件**频率的有限可加性**：

若A_1，A_2，…，A_k是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \ldots + f_n(A_k)。$$

由频率的定义可知：

频率表征事件发生的频繁程度。

因此，事件A的发生频率越大，表明事件A在n次试验中发生的越频繁，这意味着事件A在一次试验中发生的可能性越大；反之亦然。那么，能否用事件发生的频率来表示事件在一次试验中发生的可能性大小呢?

例1 P6　考虑“抛硬币”这个试验，我们将一枚硬币抛掷5次、50次、500次，各做10遍。得到数据如下表所示(其中n_H表示H发生的频数，f_n(H)表示H发生的频率)。

抛硬币出现的正面的频率

试验序号	n=5		n=50		n=500	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

由上表可知：$f_5(\mathrm{H})=0.2\sim1.0$，

$f_{50}(\mathrm{H})=0.36\sim0.62$，$f_{500}(\mathrm{H})=0.488\sim0.524$

例题表明：

☞ 频率具有**波动性**；

对于相同的次数n，频率也不尽相同。

☞ 频率具有**稳定性**。

重复试验的次数n较小时，则频率波动较大；

重复试验的次数n较大时，则频率呈现稳定性（稳定于某个常数）。

上述这种**频率的稳定性**就是我们所说的**统计规律**。

能否用事件发生的频率来表示事件在一次试验中发生的可能性大小呢?

事件发生的频率虽然可以表示事件在一次试验中发生的可能性大小，也可以由大量试验获得其值，但它具有波动性，所以使用不方便。

然而，我们可以用频率的稳定值来表示事件在一次试验中发生的可能性大小，这就是下面要引入的概率。

二、概率 Probability

1. 定义：设E是随机试验，S为E的样本空间。对于E的每一事件A赋予一个实数P(A)，称为P(A)为事件A的概率，其中集合函数P(A)应满足以下三个条件：

(1) 非负性 $P(A) \geq 0$；

(2) 规范性 $P(S)=1$；

(3) 可列可加性 若A_1，A_2，…是两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

说明

理论说明
详见第五章

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|f_n(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{A})\right| < \varepsilon\right\} = 1, \quad \forall \varepsilon > 0$

因此 **概率是随机事件发生可能性大小的度量**

事件发生的可能性越大，概率就越大！

2. 性质

① $P(\varnothing)=0$

② 有限可加性

若 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

③ 设事件A、B，若$A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$

$$P(B)\geq P(A)。$$

2. 性质

④ 对任一事件A，$P(A) \leq 1$。

⑤ 逆事件概率

对任一事件A，有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

互逆事件的概率之和为1

⑥ 加法公式　对任意事件A、B，则

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

加法公式的推广

对任意3事件A、B、C的和事件，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$$
$$-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

对任意n个事件A_1，A_2，…，A_n的和事件，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)$$
$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

$1^\circ\ \mathbf{P}(\varnothing)=0$

证：令$A_i=\varnothing(i=1,2,\ldots)$,

可知$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing$, 且 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i, j=1,2,\ldots.$

$$\text{则}P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\xlongequal{\text{P可列可加性}}\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\varnothing)$$

又由概率的非负性知 $\mathbf{P}(\varnothing)\geq 0$

故$\mathbf{P}(\varnothing)=0$。 得证

2° 若$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n$两两互不相容，则 $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\boldsymbol{A}_i)$

证： 令$A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \varnothing (i = 1, 2, \ldots)$,

可知 $A_i A_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots.$

$$\text{则} \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \overset{\text{P可列可加性}}{=\!=\!=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mathrm{P}(A_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$$ 得证

0

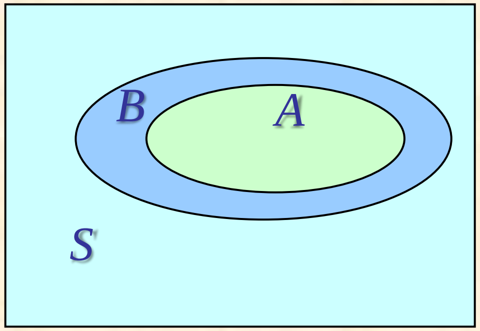
3° 设事件A、B，若$A\subset B$，则$P(B-A)=P(B)-P(A)$，

$P(B)\geq P(A)$。

证明：要证明事件概率之间的关系，需先明确事件间的关系

$$B=A\cup(B-A)$$

$$A\cap(B-A)=\varnothing$$



$A\subset B$

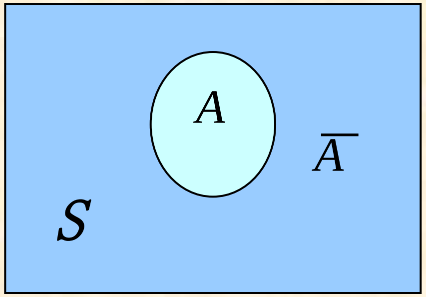
$$\therefore P(B)=P\big(A\cup(B-A)\big)$$

$$\overset{P\text{有限可加性}}{=\!=\!=\!=} P(A)+P(B-A)$$

$$\therefore P(B)-P(A)=P(B-A)$$

又$\because P(B-A)\geq 0$ $\therefore P(B)\geq P(A)$ 得证

5° 对任一事件A，有$P(\bar{A})=1-P(A)$



证明：先明确事件间的关系

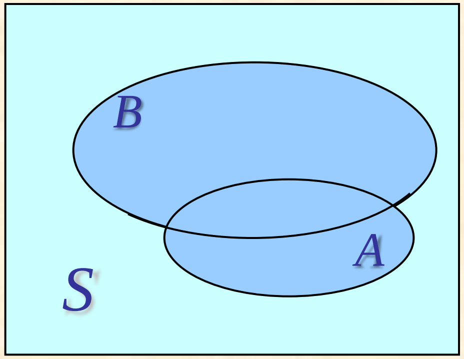
$$A\cup\bar{A}=S$$

$$A\cap\bar{A}=\varnothing$$

$$1=P(S)=P\left(A\cup\bar{A}\right)\xlongequal{\text{P有限可加性}}P\left(A\right)+P(\bar{A})$$

$$\therefore P(\bar{A})=1-P\left(A\right)$$ 得证

6° $\mathrm{P}(A\bigcup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$



$A\cup B$

证明：先明确事件间的关系

$$A\bigcup B = A \bigcup (B-AB)$$

$$A\bigcap (B-AB)=\varnothing$$

$$B \supset AB$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\bigcup B)=\mathrm{P}(A\bigcup(B-AB))$$

$$\xlongequal{\text{P有限可加性}} \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B-AB)$$

$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$$ 得证

本节小结

- 初步了解《概率论与数理统计》的研究对象，区别与联系，应用；
- 了解随机试验概念；
- 了解样本空间、随机事件概念；
- 熟练掌握事件间的关系与事件的运算律；

本节小结

- 掌握频率的定义及其性质；
- 了解概率的定义；
- 熟练掌握概率的性质，尤其是（2/3/n事件）加法公式；

作业

Page 24、25：
第1, 2, 3题

练习一　从下两式分析各表示什么包含关系。

$$(1)\ A \cap B = A$$

$$(2)\ A \cup B = A$$

解：$(1)\ A \cap B = A$，说明A是B的子集，$A \subset B$。

$(2)\ A \cup B = A$，说明B是A的子集，$B \subset A$。

练习二　化简下列格式：

$$(1)(A\cup B)\left(A\cup\overline{B}\right)$$

$$(2)(A\cup B)(B\cup C)$$

$$(3)(A\cup B)\left(A\cup\overline{B}\right)\left(\overline{A}\cup B\right)$$

解：$(1)\ (A\cup B)\left(A\cup\overline{B}\right)=(A\cup B)A\cup(A\cup B)\overline{B}$

$$=A\cup BA\cup A\overline{B}=A$$

$$(2)(A\cup B)(B\cup C)=\left[(A\cup B)B\right]\cup\left[(A\cup B)C\right]$$

$$=(AB\cup B)\cup(AC\cup BC)=B\cup AC$$

$$(3)(A\cup B)\left(A\cup\overline{B}\right)\left(\overline{A}\cup B\right)=A\left(\overline{A}\cup B\right)=A\overline{A}\cup AB=AB$$

微助教签到功能使用

当老师开启签到或者题目之后，学生在“微助教”公众号中点开“学生”分组下的第三个选项“签到”，选择相对应的课程进行签到或者答题。