3.4 物体系的平衡

1. 几个概念

物体系 —— 由若干个物体通过约束组成的系统。

外 力 —— 物体系以外任何物体作用于该系统的力。

内 力 —— 物体系内部各物体间互相作用的力。

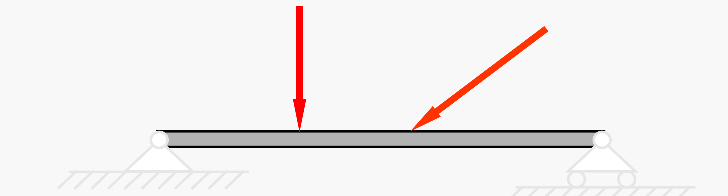
● **物体系平衡方程的数目**

由n个物体组成的物体系，总共有不多于$3n$个独立的平衡方程。

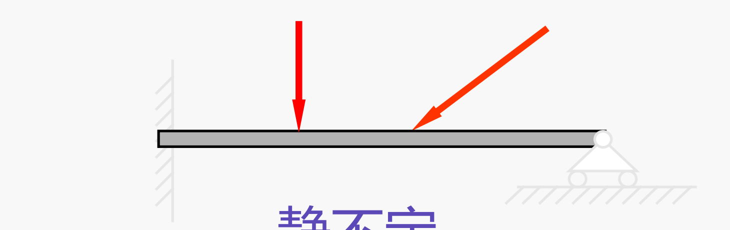
2.静定与静不定

静定问题 ——当系统中未知量数目等于或少于独立平衡方程数目时的问题。

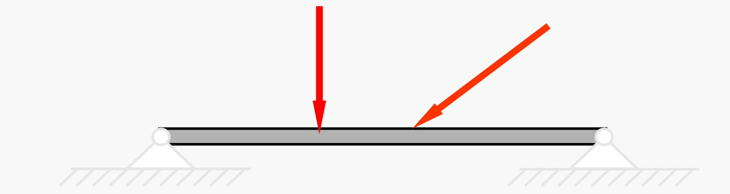
静不定问题 ——当系统中未知量数目多于独立平衡方程数目时，不能求出全部未知量的问题。



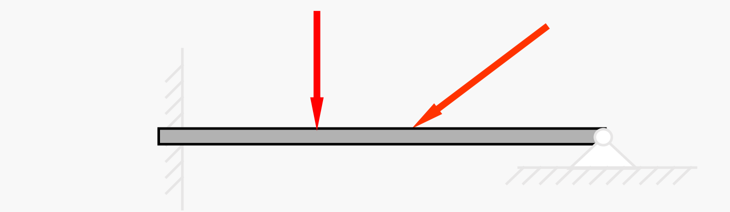
静定



静不定

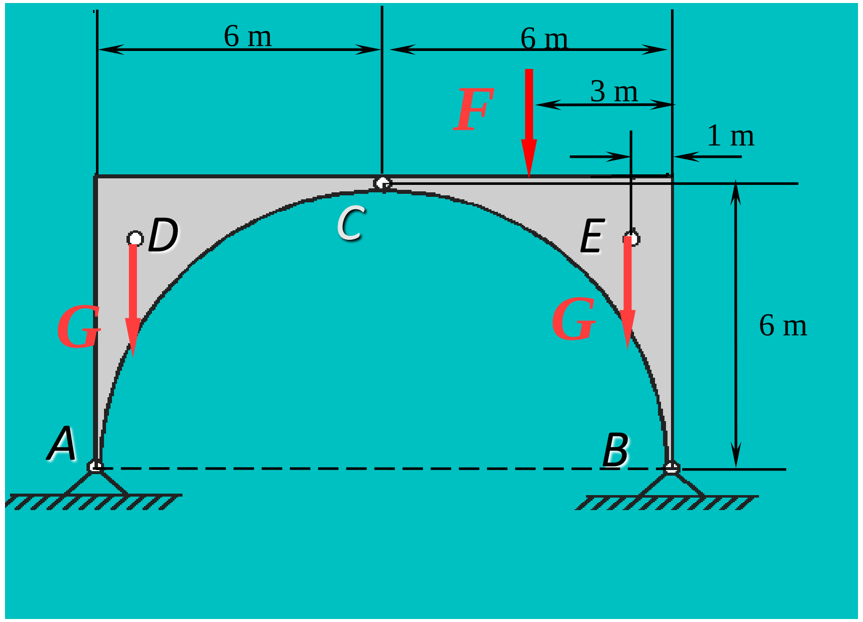


静不定



静不定

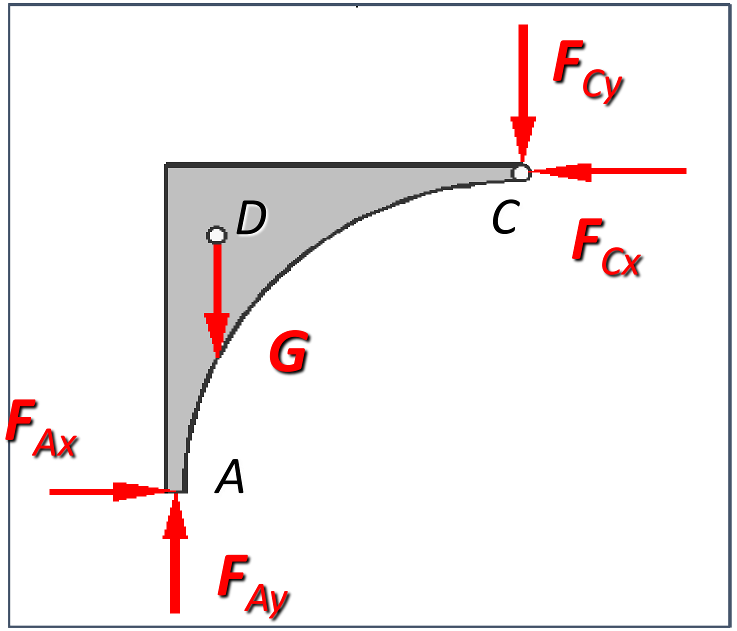
例题1 三铰拱桥如图所示，由左右两段借铰链C连接起来，又用铰链A，B与基础相连接。已知每段重$G = 40$ kN，重心分别在D，E处，且桥面受一集中载荷F =10 kN。设各铰链都是光滑的，试求平衡时各铰链的约束力。尺寸如图所示。

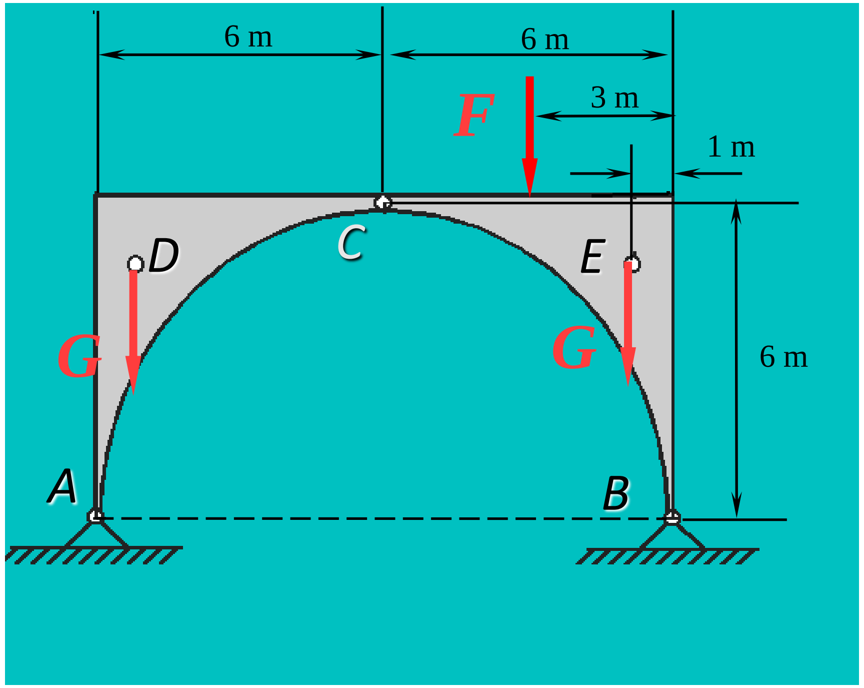


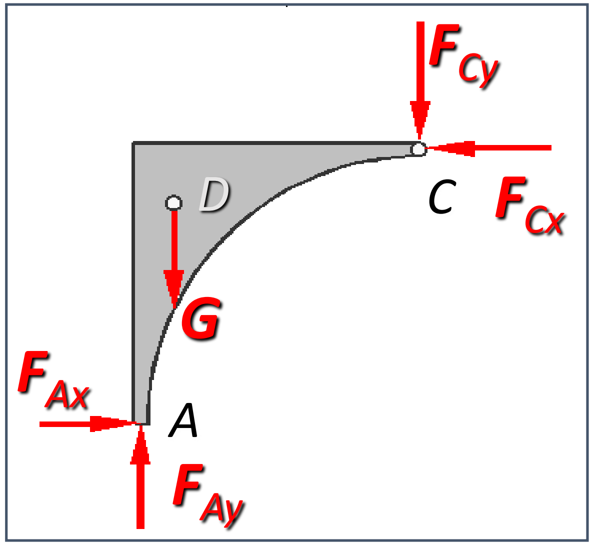
解：

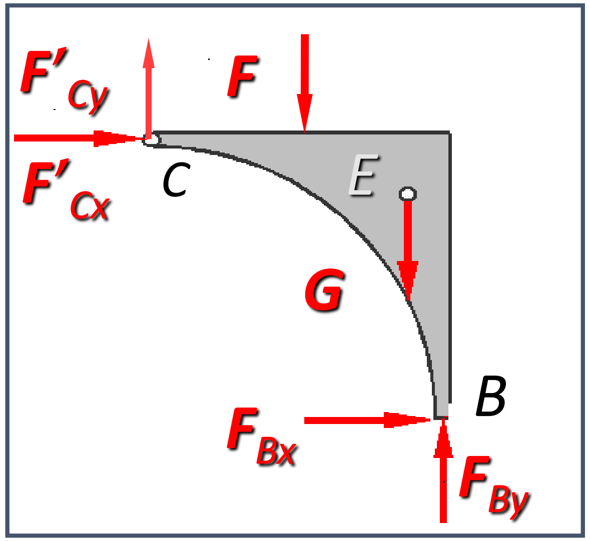
1.取AC段为研究对象。

2.受力分析如图。









3.**列平衡方程。**

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_{Cx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F_{Cy} - G = 0$$

$$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$F_{Ax} \times 6\ \text{m} - F_{Ay} \times 6\ \text{m} + G \times 5\ \text{m} = 0$$

4. **再取** BC **段为研究对象，受力分析如图。**

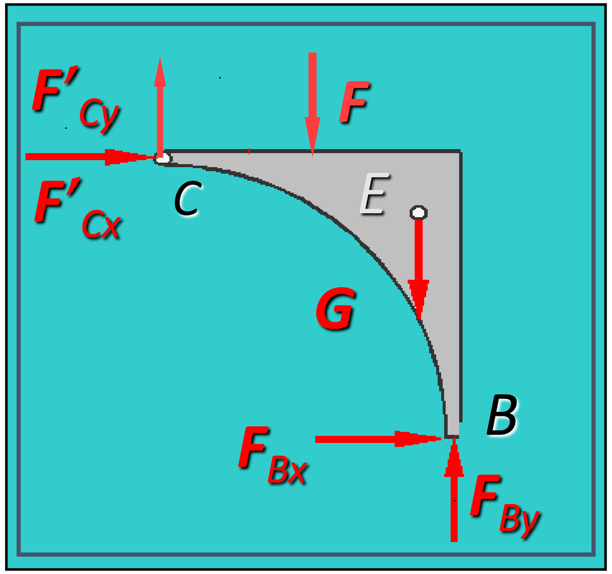
5. **列平衡方程。**

$$\sum F_x = 0, \qquad F'_{Cx} + F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \qquad F'_{Cy} + F_{By} - F - G = 0$$

$$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$-F \times 3\ \text{m} - G \times 5\ \text{m} + F_{By} \times 6\ \text{m} + F_{Bx} \times 6\ \text{m} = 0$$

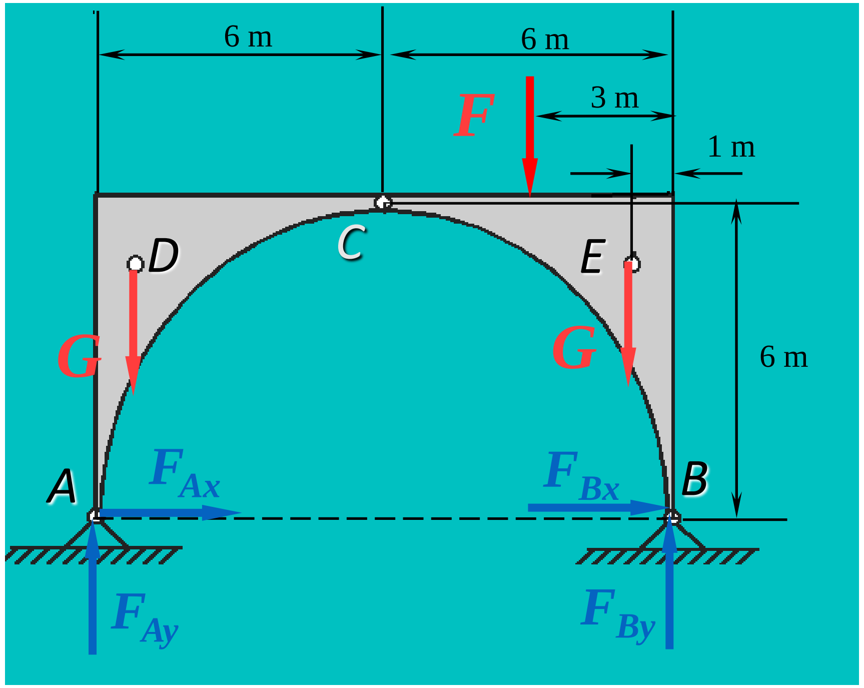


6. **联立求解。**

$F_{Ax} = -F_{Bx} = F_{Cx} = 9.2\ \text{kN}$

$F_{Ay} = 42.5\ \text{kN}$， $F_{By} = 47.5\ \text{kN}$， $F_{Cy} = 2.5\ \text{kN}$

讨论



1.取整体为研究对象，受力分析如图。

$$\sum M_A(F)=0,$$

$$-11G-9F-G+12F_{By}=0$$

$$F_{By}=47.5\ \text{kN}$$

$$\sum M_B(F)=0,$$

$$11G+3F+G-12F_{Ay}=0$$

$$F_{Ay}=42.5\ \text{kN}$$

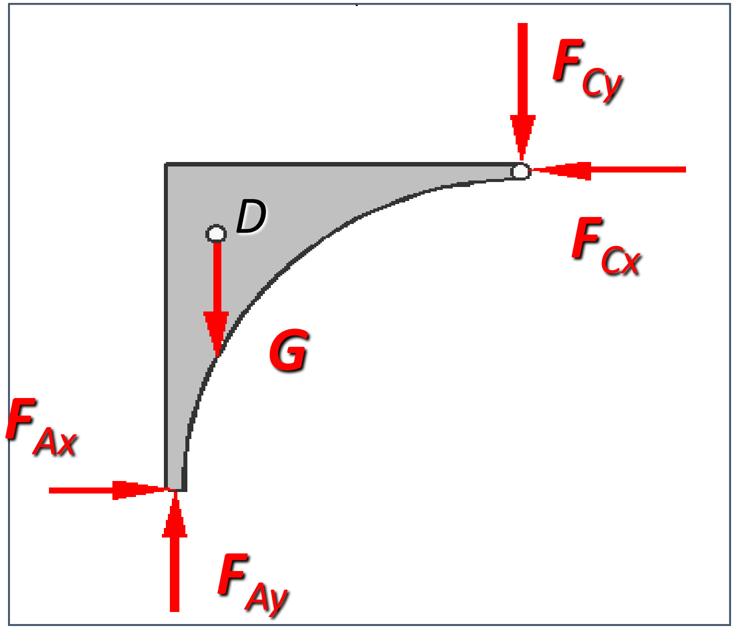
$$\sum F_x=0,$$

$$F_{Ax}+F_{Bx}=0$$

$F_{Ay} = 42.5\ \text{kN}$ ， $F_{By} = 47.5\ \text{kN}$

$F_{Ax} - F_{Bx} = 0$

2. **取AC段为研究对象，受力分析如图。**



列平衡方程

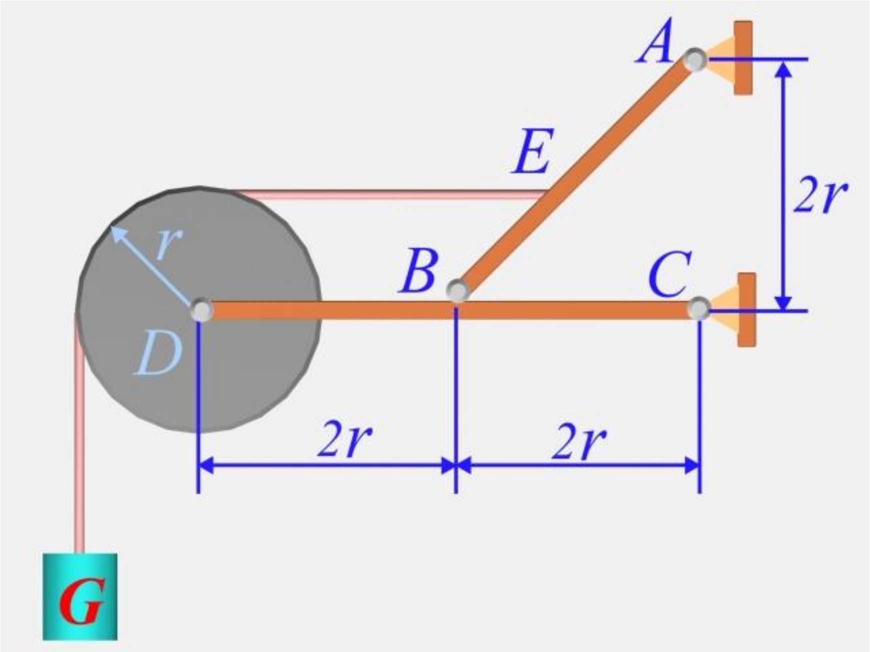
$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0$ ， $6F_{Ax} - 6F_{Ay} + 5G = 0$

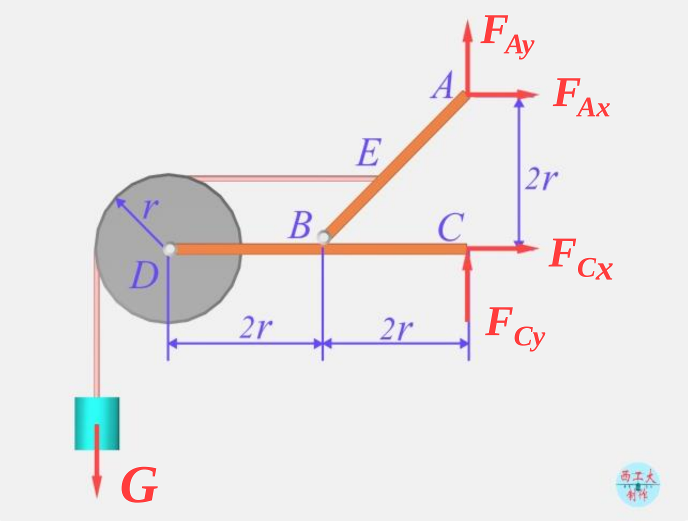
$\sum F_x = 0$ ， $F_{Ax} - F_{Cx} = 0$

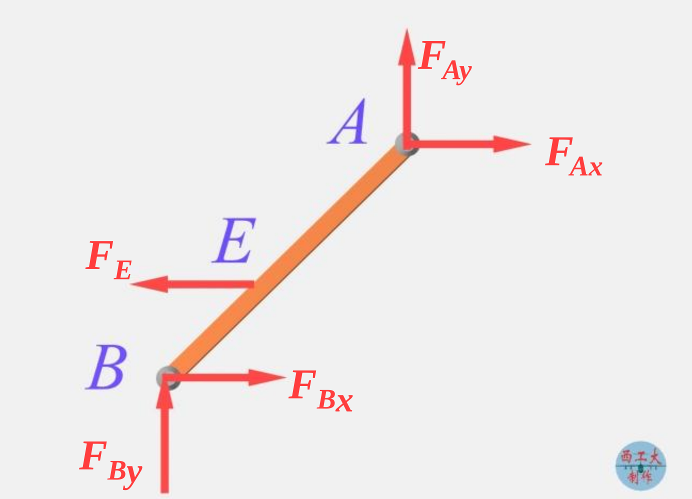
$\sum F_y = 0$ ， $F_{Ay} - F_{Cy} - G = 0$

解得 $F_{Ax} = 9.2\ \text{kN}$ ， $F_{Cx} = 9.2\ \text{kN}$ ， $F_{Cy} = 2.5\ \text{kN}$

例题2 A，B，C，D处均为光滑铰链，物块重为G，通过绳子绕过滑轮水平地连接于杆AB的E点，各构件自重不计，试求B处的约束力。







解：

1.取整体为研究对象。

2.受力分析如图。

3.列平衡方程。

$$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0, \quad 5r \times G - 2r \times F_{Ax} = 0$$

解得 $F_{Ax} = 2.5G$

4.取杆AB为研究对象，受力分析如图。

列平衡方程

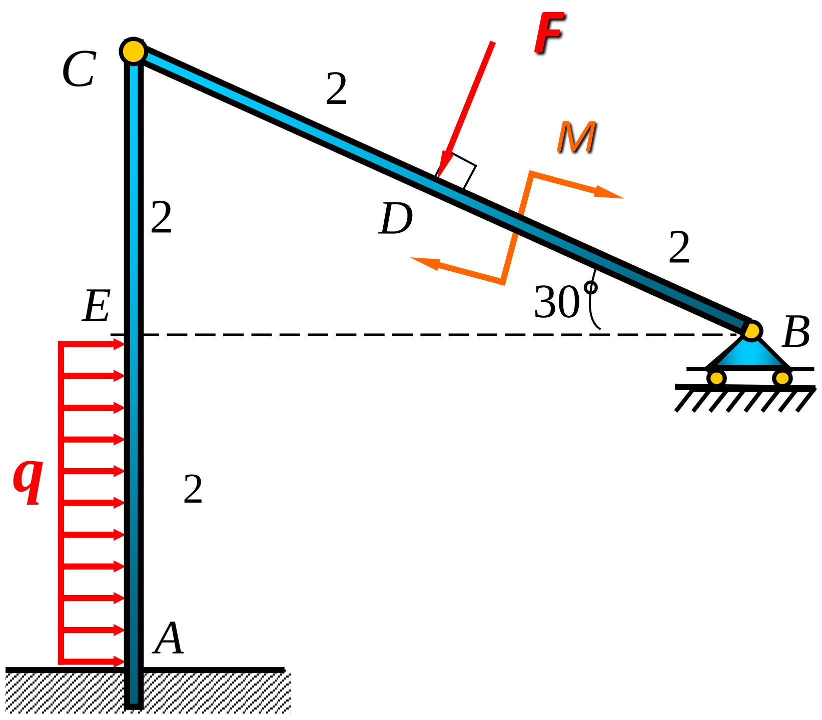
$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_{Bx} - F_E = 0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad 2r \times F_{Bx} - 2r \times F_{By} - rF_E = 0$$

联立求解可得

$$F_{Bx} = -1.5G, \quad F_{By} = -2G$$

例题3 **如图已知** q=3 kN/m，F=4 kN， M=2 kN·m。 CD=BD, AC=4 m，CE=EA=2 m。**各杆件自重不计，试求**A**和**B**处的支座约束力。**

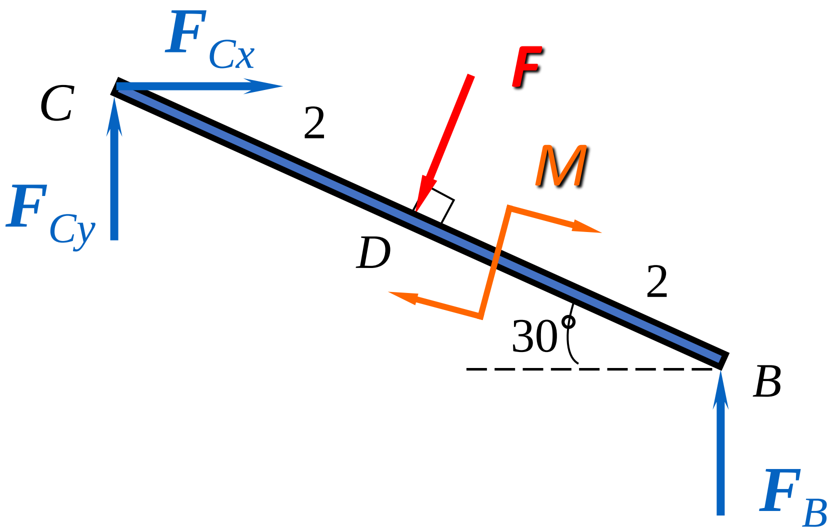


解：1.取*BC*为研究对象，受力分析如图。

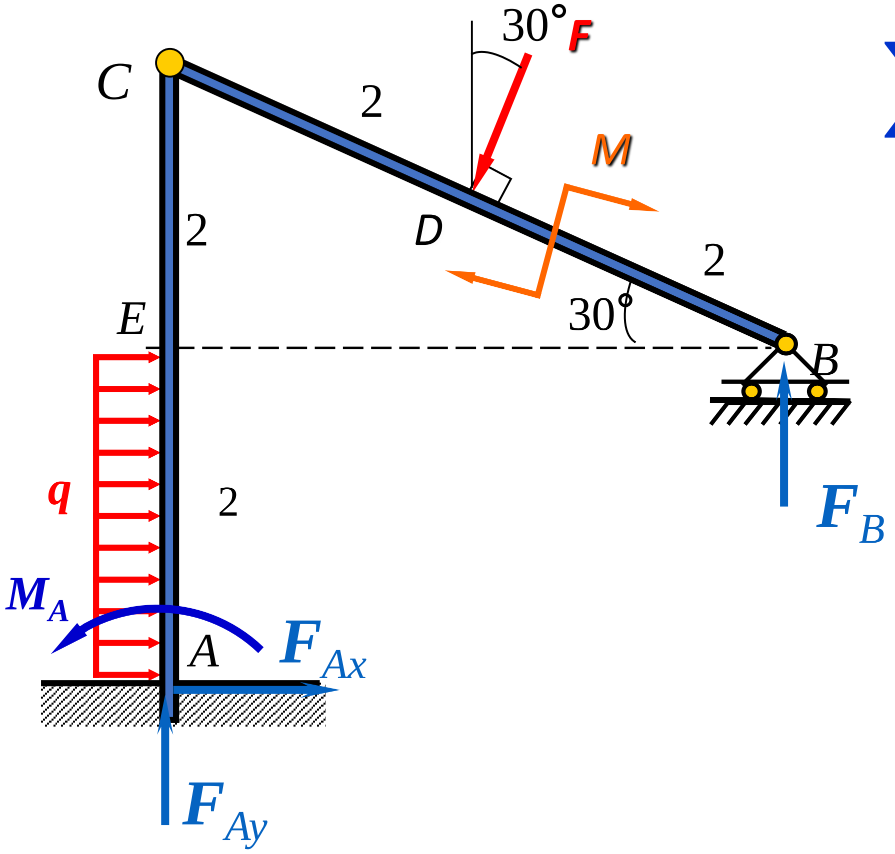
$$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$F_B \cdot 4\cos 30° - 2F - M = 0$$

$$F_B = 2.89\ \text{kN}$$



2. 取整体为研究对象，受力分析如图。



$$\sum F_x = 0\ ,$$

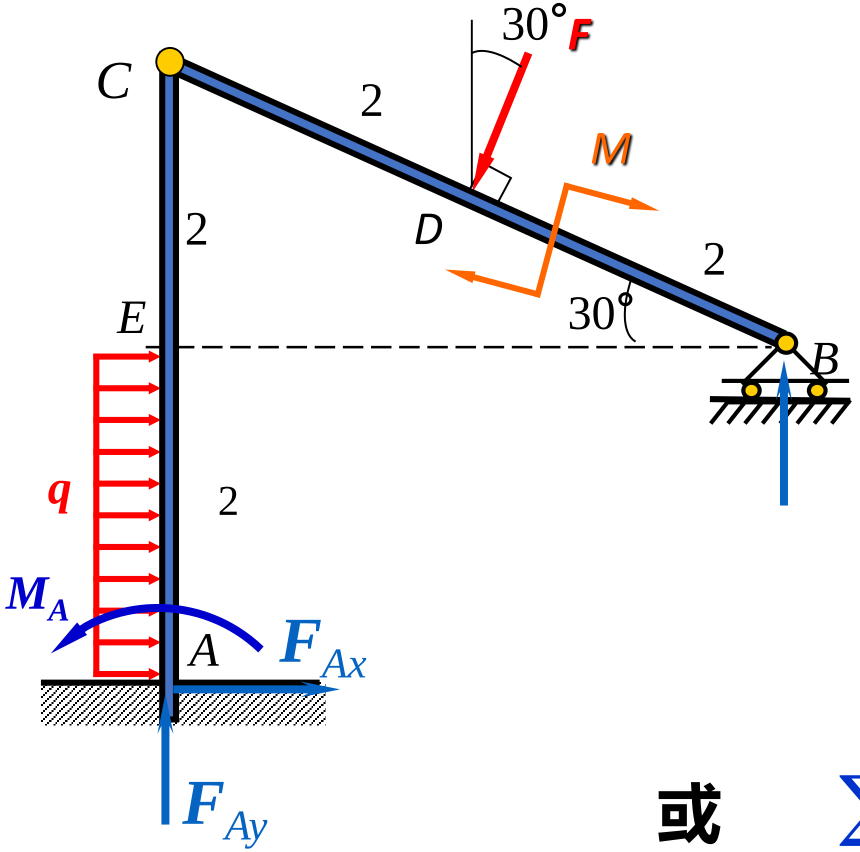
$$-F\sin 30^\circ + 2q + F_{Ax} = 0$$

$$F_{Ax} = 47.5\ \text{kN}$$

$$\sum F_y = 0\ ,$$

$$-F\cos 30^\circ + F_B + F_{Ay} = 0$$

$$F_{Ay} = 0.58\ \text{kN}$$



$$\sum M_A(F) = 0,$$

$$M_A - M - 2q\times 1$$
$$+ 4F_B \cos 30°$$
$$+ F\sin 30°(2+2\sin 30°)$$
$$- F\cos 30°\times 2\cos 30° = 0$$

$$M_A = -2\ \text{kN m}$$

或 $\sum M_C(F) = 0$

$$M_A - M + 4F_{Ax} + 2q\times 3 + 4F_B\cos 30° - 2F = 0$$

也可以取杆为AC研究对象, $\sum M_C=0$。

本章小结

1.平面内的力对点O之矩是代数量。记为 $M_O(\boldsymbol{F})$

$$M_O(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x$$

2.力的平移定理：

平移一力的同时必须附加一力偶，附加力偶的矩等于原来的力对新作用点的矩。

3. 平面任意力系向平面内任选一点简化，一般情况下，可得一个主矢和一个主矩。

$$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}} = \sum \boldsymbol{F}_i \qquad M_O = \sum M_O(\boldsymbol{F}_i)$$

4.平面任意力系平衡方程的一般形式为

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi}=0,\qquad \sum_{i=1}^{n} F_{yi}=0,\qquad \sum_{i=1}^{n} M_O(\boldsymbol{F}_i)=0$$

二矩式为

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\boldsymbol{F}_i)=0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\boldsymbol{F}_i)=0,\quad \sum_{i=1}^{n} F_{xi}=0,$$

其中*x*轴不得垂直*A*，*B*两点连线；

三矩式为

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\boldsymbol{F}_i)=0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\boldsymbol{F}_i)=0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_C(\boldsymbol{F}_i)=0$$

其中，*A*，*B*，*C*三点不得共线。

谢 谢！