西北工業大學

理论力学

课堂教学软件

制作：支希哲 朱西平 侯美丽

动 力 学

一、 动力学的任务 ——研究物体的机械运动与作用力之间关系的科学。

二、 动力学的应用

动力学的形成与发展是和生产的发展密切联系的，特别是在现代工业与科学技术迅猛发展的今天，对动力学提出了更加复杂的课题。

例如：高速转动机械的动力计算、航空航天高技术、动强度分析、机械手、机器人、系统的动力稳定性等都需要动力学理论。

三、 动力学的分类

动力学
- 质点动力学
- 质点系动力学

质　点——具有一定质量但可以忽略其尺寸大小的物体。

质点系——一群具有某种联系的质点，刚体可以看成不变形的质点系。

第十章

质点动力学基础

杨成鹏
力学与土木建筑学院

第十章 质点动力学基础

§10-1 动力学的基本定律

- 第一定律　　惯性定律
- 第二定律　　力与加速度关系定律
- 第三定律　　作用与反作用定律

§10-1　动力学的基本定律

第一定律　惯性定律

质点如不受力作用，则保持其运动状态不变，即作匀速直线运动或者静止。

第一定律说明了任何物体都具有惯性。

第二定律　力与加速度关系定律

质点因受力作用而产生的加速度，其方向与力相同，其大小与力成正比而与质量成反比。

$$\boxed{F = ma} \qquad (1\text{–}1)$$

第二定律说明了物体机械运动状态的改变，不仅决定于作用于物体的力，而且与物体的惯性有关。

第三定律　作用与反作用定律

任何两个物体间相互作用的力，总是大小相等，方向相反，沿同一直线，同时分别作用在这两个物体上。

第三定律说明了二物体间相互作用力的关系。

§10-1　动力学的基本定律

说　明：

1. $\boxed{F = ma}$　该式称为质点动力学基本方程。

2. 牛顿第一定律和第二定律不是在任何参考系中都能成立的。

3. 牛顿定律适用的参考系称为基础坐标系。

4. 惯性参考系——相对于基础参考系作惯性运动的坐标系。

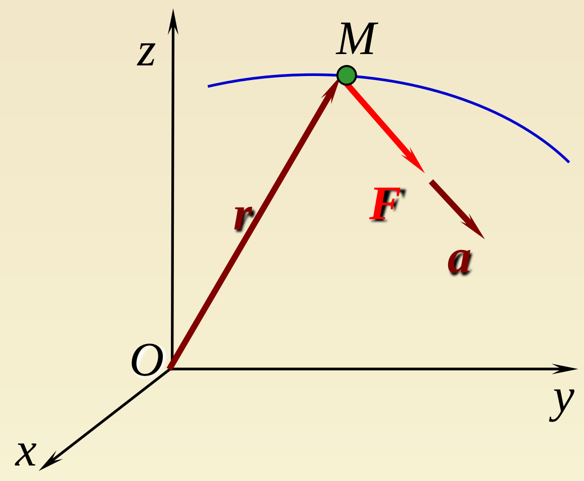
5. 在惯性参考系中牛顿定律也同样适用。

思考题　加速度可分为a_a，a_e，a_r，a_c，　公式$F = ma$中的a指的是什么加速度。

§10-2 质点运动微分方程

- 矢量形式
- 直角坐标形式
- 自然形式

一、矢量形式



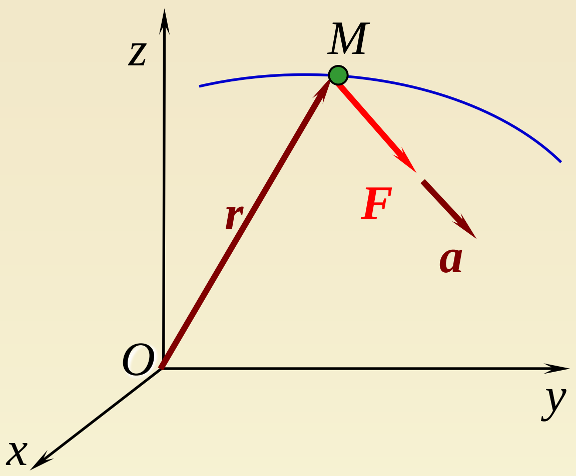
设有可以自由运动的质点 M，质量是 m，作用力的合力是 $\boldsymbol{F}$，加速度是 $\boldsymbol{a}$ 。

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F} \qquad (1-2)$$

这就是质点运动微分方程的矢量形式。

§ 10-2　质点运动微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F} \qquad (1-2)$$



这就是质点运动微分方程的矢量形式。

二、直角坐标形式

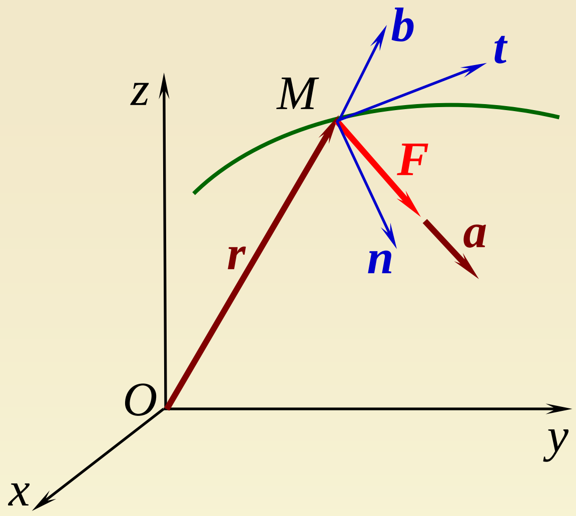
把上式沿固定直角坐标系 $Oxyz$ 的各轴投影, 得

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_x\ ,\quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F_y\ ,\quad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=F_z \qquad (1-3)$$

$\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$, $\boldsymbol{F}_z$ 是作用力 $\boldsymbol{F}$ 的合力在各轴上的投影。式(1–3)是直角坐标形式的质点运动微分方程。

§ 10-2　质点运动微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F} \qquad (1-2)$$



这就是质点运动微分方程的矢量形式。

三、自然形式

如采用自然轴系 *Mtnb*, 并把式(1-2)向各轴投影, 可得

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=F_\mathrm{t}, \quad m\frac{v^2}{\rho}=F_\mathrm{n}, \quad 0=F_\mathrm{b} \qquad (1-4)$$

式中 $a_\mathrm{t}=\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$, $a_\mathrm{n}=\dfrac{v^2}{\rho}$ 和 $a_\mathrm{b}=0$

是加速度 $\boldsymbol{a}$ 在切线、主法线和副法线正向的投影; $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$, $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ 和 $\boldsymbol{F}_\mathrm{b}$ 是合力 $\boldsymbol{F}$ 在相应轴上的投影。式(1-4)就是自然形式的质点运动微分方程。

§10-3 质点动力学基本问题

- 质点动力学的第一类问题
- 质点动力学的第二类问题

§ 10-3 质点动力学基本问题

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}\quad(1-1)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}\quad(1-2)$$

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_x \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F_y \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=F_z \end{cases}\quad(1-3)$$

质点动力学的两类问题:

质点动力学的第一类问题：已知运动，求力。

质点动力学的第二类问题：已知力，求运动。

- 解决第一类问题，只需根据质点的已知运动规律 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，通过导数运算，求出加速度，代入(1-1)—(1-4)，即得作用力 $\boldsymbol{F}$。

- 求解第二类问题，是个积分过程。

必须注意：在求解第二类问题时，方程的积分中要出现积分常数，为了完全确定质点的运动，必须根据运动的初始条件定出这些积分常数。

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=F_\mathrm{t},\quad m\frac{v^2}{\rho}=F_\mathrm{n},\quad 0=F_\mathrm{b}\qquad(1-4)$$

§10-3　质点动力学基本问题

质点动力学解题步骤：

1. 根据题意适当选取某质点或物体为研究对象；

2. 根据运动特点（直线、曲线、轨迹是否已知等）选取坐标系。若需建立运动微分方程，应将质点放在一般位置进行分析，分析各运动特征量之间的关系；

3. 进行受力分析，并画出受力图；

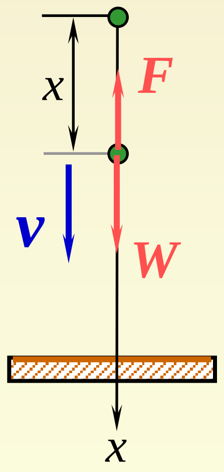
4. 建立动力学方程组并求解。

§10-4 质点直线运动微分方程积分的典型例子

例题 10-3 质量是 m 的物体 M 在均匀重力场中沿铅直线由静止下落，受到空气阻力的作用。假定阻力 $\boldsymbol{F}$ 与速度平方成比例，即 $F=\alpha v^2$，阻力系数 α 单位取 kg/m，数值由试验测定。试求物体的运动规律。

解: 取坐标轴 Ox 铅直向下，原点在物体的初始位置。写出物体 M 的运动微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-\alpha v^2 \quad (1)$$



加速度为零时

$$v=\sqrt{\frac{mg}{\alpha}}=u$$

以 m 除式(1)两端，并代入 u 的值，得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{u^2}(u^2-v^2) \qquad (2)$$

分离变量, 并取定积分, 有 $\int_0^v \frac{u\mathrm{d}v}{u^2-v^2}=\int_0^t \frac{g}{u}\mathrm{d}t$

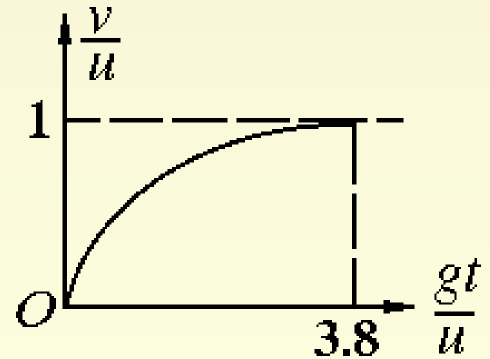
由上式求解v, 得

$$v=u\frac{e^{(2g/u)t}-1}{e^{(2g/u)t}+1}=u\frac{e^{(g/u)t}-e^{-(g/u)t}}{e^{(g/u)t}-e^{-(g/u)t}} \qquad (3)$$

于是物体速度随时间而变化的规律为

$$v=u\,\mathrm{th}(\frac{g}{u}t) \qquad (a)$$

th 是双曲正切。



$$v = u\frac{e^{(2g/u)t}-1}{e^{(2g/u)t}+1} = u\frac{e^{(g/u)t}-e^{-(g/u)t}}{e^{(g/u)t}-e^{-(g/u)t}} \qquad (3)$$

为了求出物体的运动规律，只需把式(3)再积分一次，有

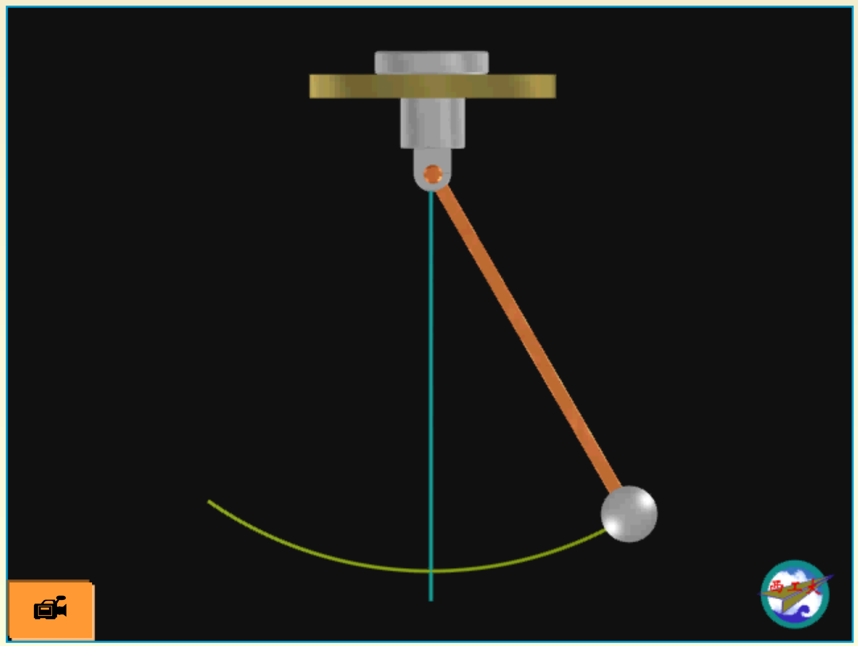
$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \frac{u^2}{g}\frac{\mathrm{d}[e^{(g/u)t}+e^{-(g/u)t}]}{e^{(g/u)t}+e^{-(g/u)t}}$$

于是求得物体的运动方程为

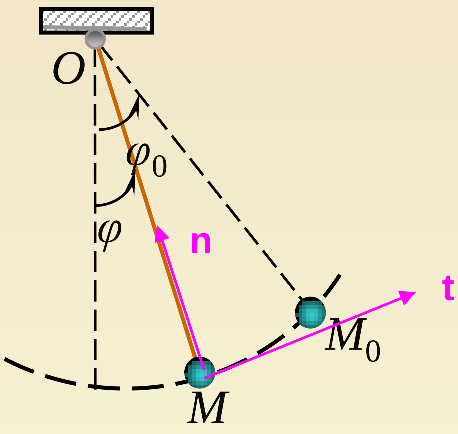
$$x = \frac{u^2}{g}\ln\frac{e^{(gt/u)}+e^{-(gt/u)}}{2} = \frac{u^2}{g}\ln(\mathrm{ch}\,\frac{gt}{u}) \qquad (b)$$

§10-4 质点直线运动微分方程积分的典型例子

例题10-4 单摆 M 的摆锤重 W，绳长 l，悬于固定点 O，绳的质量不计。设开始时绳与铅垂线成偏角 $\varphi_0 \leqslant \pi/2$，并被无初速释放，求绳中拉力的最大值。

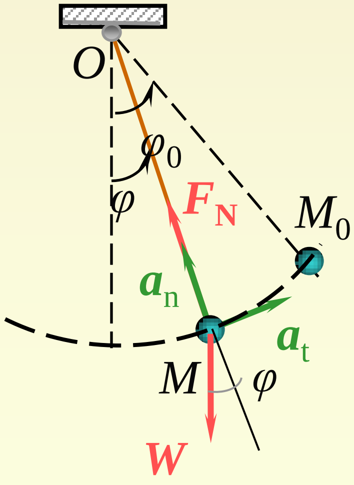


解1： 摆锤M 在绳的约束下只能沿已知圆弧运动，用自然形式的质点用自然形式的运动微分方程求解较方便。



以摆锤M为研究对象。选择如图自然轴系。任意瞬时，质点的加速度在切向和法向的投影为

$$a_{\mathrm{t}} = l\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = l\ddot{\varphi}, \quad a_{\mathrm{n}} = l(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t})^2 = l\dot{\varphi}^2$$



写出质点的自然形式的运动微分方程

$$ma_{\mathrm{t}} = \frac{W}{g}l\ddot{\varphi} = -W\sin\varphi \qquad (1)$$

$$ma_{\mathrm{n}} = \frac{W}{g}l\dot{\varphi}^2 = F_{\mathrm{N}} - W\cos\varphi \qquad (2)$$

考虑到 $$\ddot{\varphi}=\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}^2}{\mathrm{d}\varphi} \qquad (3)$$

则式(1)化成 $$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}^2}{\mathrm{d}\varphi}=-\frac{g}{l}\sin\varphi$$

对上式采用定积分,把初条件作为积分下限，有

$$\int_0^{\dot{\varphi}}\mathrm{d}(\dot{\varphi}^2)=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\left(-\frac{2g}{l}\sin\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$

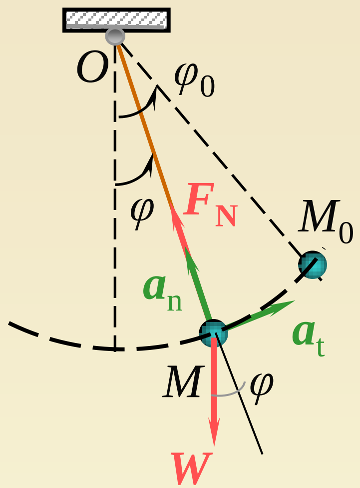
从而得 $$\dot{\varphi}^2=\frac{2g}{l}(\cos\varphi-\cos\varphi_0) \qquad (4)$$

把式(4)代入式(2)，得绳拉力

$$F_{\mathrm{N}}=W(3\cos\varphi-2\cos\varphi_0)$$

显然，当摆球 **M** 到达最低位置$\varphi=0$时，有最大值。故

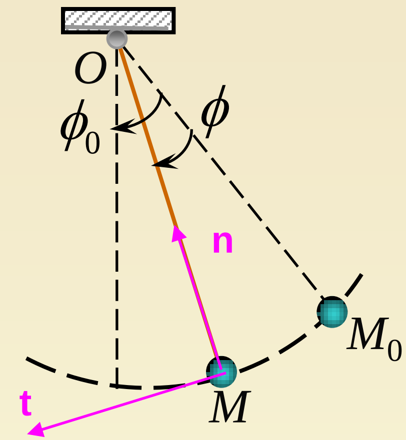
$$F_{\mathrm{Nmax}}=W(3-2\cos\varphi_0)$$



$$\frac{W}{g}l\ddot{\varphi}=-W\sin\varphi \qquad (1)$$

$$\frac{W}{g}l\dot{\varphi}^2=F_{\mathrm{N}}-W\cos\varphi \qquad (2)$$

解2：　摆锤M 在绳的约束下只能沿已知圆弧运动，用自然形式的质点用自然形式的运动微分方程求解较方便。



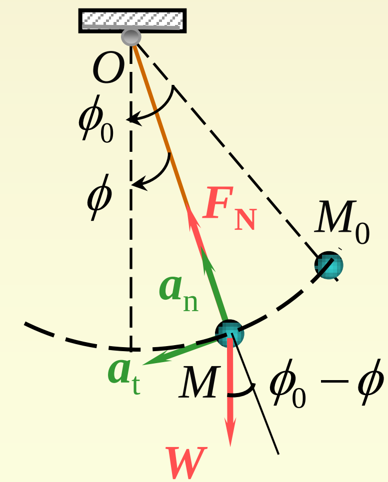
以摆锤M为研究对象。选择如图自然轴系。任意瞬时，质点的加速度在切向和法向的投影为

$$a_{\mathrm{t}}=l\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}=l\ddot{\phi},\quad a_{\mathrm{n}}=l(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t})^2=l\dot{\phi}^2$$

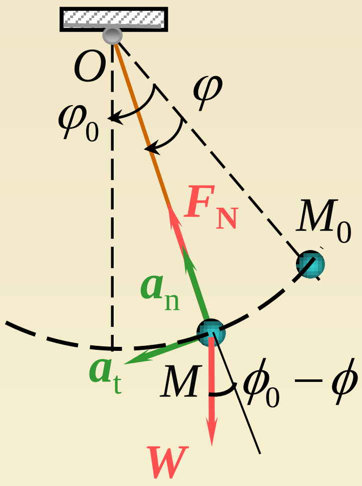
写出质点的自然形式的运动微分方程

$$ma_{\mathrm{t}}=\frac{W}{g}l\ddot{\phi}=W\sin\phi \qquad (1)$$

$$ma_{\mathrm{n}}=\frac{W}{g}l\dot{\phi}^2=F_{\mathrm{N}}-W\cos(\phi_0-\phi) \qquad (2)$$



考虑到 $$\ddot{\phi}=\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}\phi}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}^2}{\mathrm{d}\phi} \qquad (3)$$



$$\frac{W}{g}l\ddot{\phi}=W\sin\phi \qquad (1)$$

$$\frac{W}{g}l\dot{\phi}^2=F_N-W\cos(\phi_0-\phi) \qquad (2)$$

则式(1)化成 $$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}^2}{\mathrm{d}\phi}=\frac{g}{l}\sin\phi$$

对上式采用定积分，把初条件作为积分下限，有

$$\int_0^{\dot{\phi}}\mathrm{d}(\dot{\phi}^2)=\int_0^{\phi}(\frac{2g}{l}\sin\phi)\mathrm{d}\phi$$

从而得 $$\dot{\phi}^2=\frac{2g}{l}(1-\cos\phi) \qquad (4)$$

把式(4)代入式(2)，得绳拉力

$$F_N=2W+W\cos(\phi_0-\phi)-2W\cos\phi$$

显然，当摆球 **M** 到达最低位置 $\phi=\phi_0$ 时，有最大值。故

$$F_{N\max}=W(3-2\cos\phi_0)$$

§10-5 质点的相对运动微分方程

- 质点相对运动动力学基本方程
- 几种特殊情形

§10-5　质点的相对运动微分方程

一、质点相对运动动力学基本方程

设已知坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 对于基础坐标系 $Oxyz$ 进行着某种运动。

以 $\boldsymbol{F}$ 和$\boldsymbol{F}_\mathrm{N}$ 代表作用于质点 M 的主动力和约束力，

对于基础坐标系 $Oxyz$，有

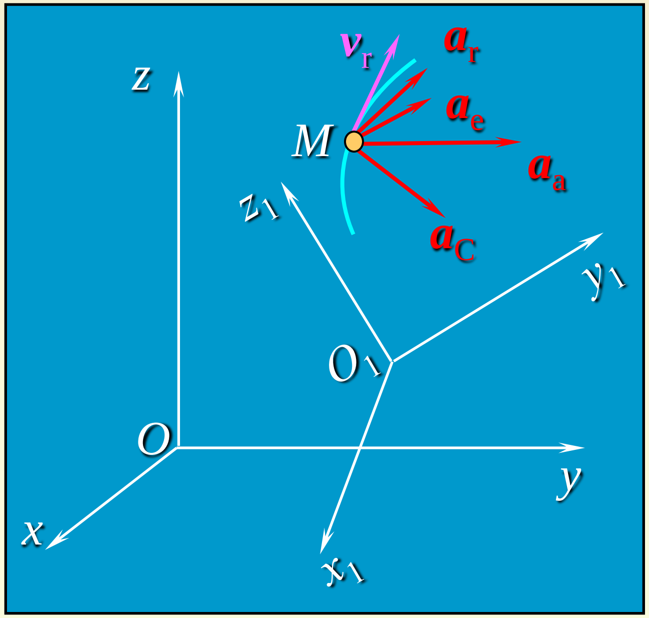
$$m\,\boldsymbol{a}_\mathrm{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_\mathrm{N}$$

由运动学知，绝对加速度 $\boldsymbol{a}_\mathrm{a}$ 等于牵连加速度 $\boldsymbol{a}_\mathrm{e}$，相对加速度 $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ 和科氏加速度 $\boldsymbol{a}_\mathrm{C}$ 三者的矢量和，即

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{a} = \boldsymbol{a}_\mathrm{e} + \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \boldsymbol{a}_\mathrm{C}$$

代入上式得

$$m(\boldsymbol{a}_\mathrm{e} + \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \boldsymbol{a}_\mathrm{C}) = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_\mathrm{N}$$



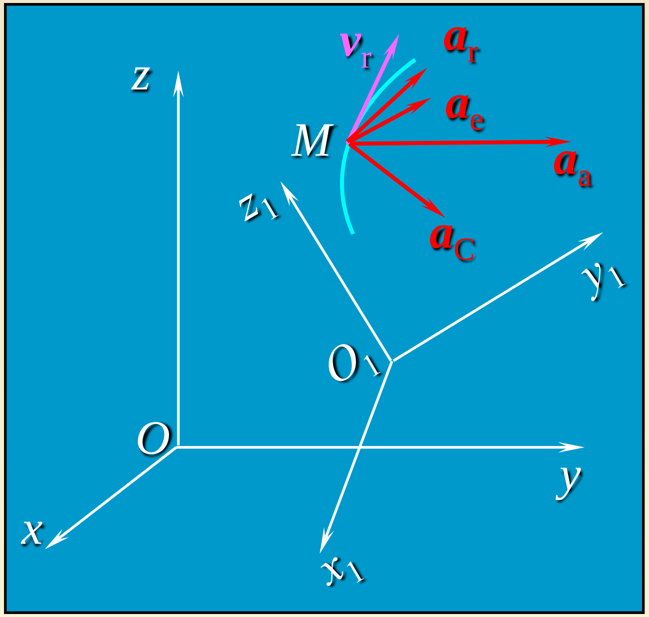
§ 10-5　质点的相对运动微分方程

$$m(\boldsymbol{a}_\mathrm{e} + \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \boldsymbol{a}_\mathrm{C}) = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_\mathrm{N}$$

$$m\,\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_\mathrm{N} - m\boldsymbol{a}_\mathrm{e} - m\,\boldsymbol{a}_\mathrm{C}$$

令　$\boldsymbol{F}_\mathrm{Ie} = -m\boldsymbol{a}_\mathrm{e}$，　$\boldsymbol{F}_\mathrm{IC} = -m\boldsymbol{a}_\mathrm{C}$

则有　$m\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_\mathrm{N} + \boldsymbol{F}_\mathrm{Ie} + \boldsymbol{F}_\mathrm{IC}$



这就是**质点的相对运动微分方程**，又叫**质点相对运动的动力学基本方程**。

$\boldsymbol{F}_\mathrm{Ie}$和$\boldsymbol{F}_\mathrm{IC}$ 分别称为质点的牵连惯性力和科氏惯性力，通称为欧拉惯性力。

§10-5　质点的相对运动微分方程

二、几种特殊情形

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} - m\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} - m\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{IC}}$$

1. 相对于平动坐标系的运动

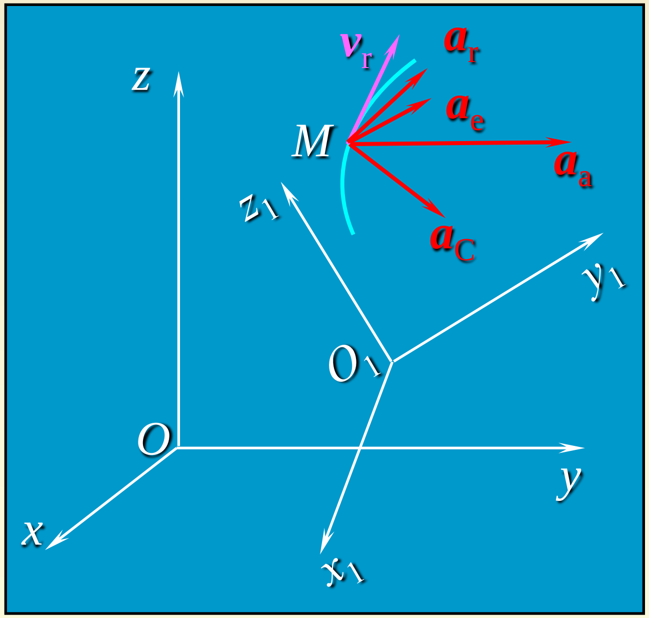
设动系 $O_1x_1y_1z_1$ 相对基础坐标系作平动。在此情况下,没有科氏加速度和对应的科氏惯性力。故

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}}$$

2. 相对于惯性坐标系的运动

设动系 $O_1x_1y_1z_1$ 对于基础坐标系 $Oxyz$ 作匀速直线运动。 牵连加速度、科氏加速度都等于零。故

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$$



这时质点的相对加速度就等于对基础坐标系的绝对加速度。

3. 相对平衡和相对静止

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} - m\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} - m\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{IC}}$$

（1）相对平衡—— 当质点相对于动系作匀速直线运动时，称为相对平衡。

此时$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = 0$，有

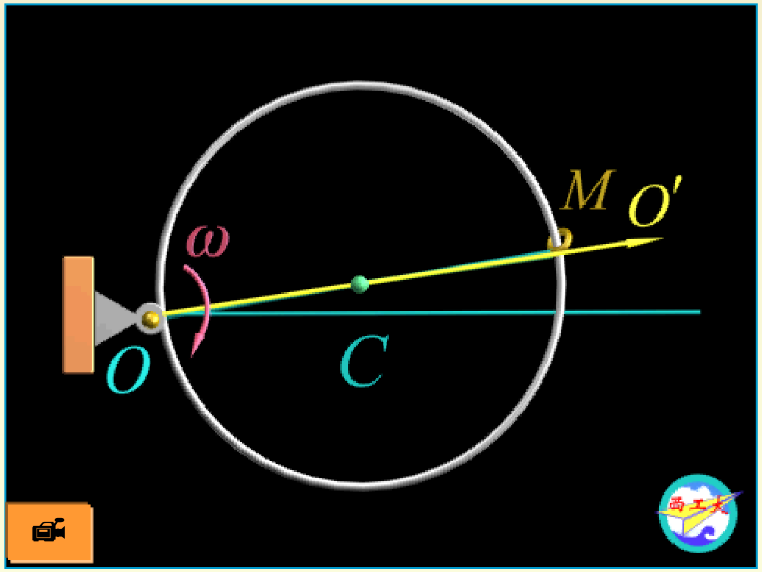
$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{IC}} = 0$$

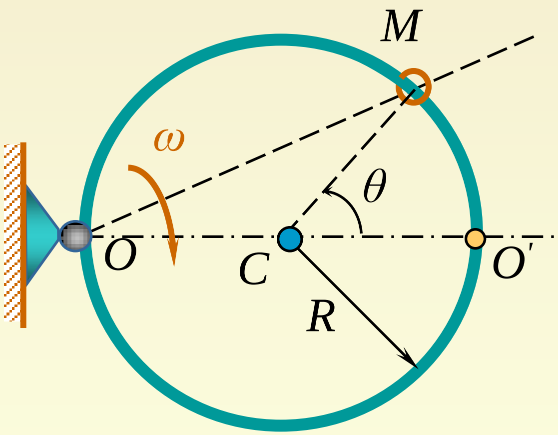
（2）相对静止—— 当质点在动系中的位置不变时，称为相对静止。

此时 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} = 0$, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = 0$, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = 0$, 有

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}} = 0$$

例题 10-6　一质量是 m 的小环 M 套在半径是 $\boldsymbol{R}$ 的光滑圆环上，并可沿大圆环滑动，而大圆环在水平面内以匀角速度 ω 绕通过点 O 的铅垂轴转动。在初瞬时，$\theta=0$，$\dot{\theta}=2\omega$，试写出小环 M 相对于大圆环的运动微分方程，并求出大圆环对小环M 的约束力。





解: ● 运动分析

分析小环。 取动坐标系与大圆环固连，小环 M 相对于大圆环的位置用弧坐标 $s=R\theta$ 表示。

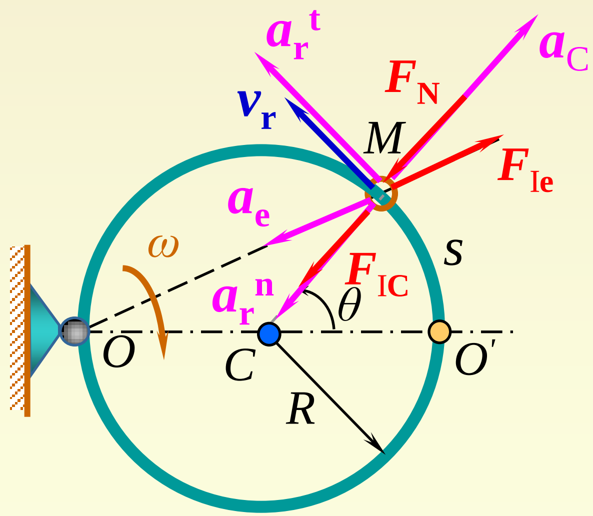
● 受力分析

作用于小环 $\boldsymbol{M}$ 的力有大圆环的约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 。为了写出小环的相对运动微分方程，还要加上相应的牵连惯性力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}}$和科氏惯性力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{IC}}$。

其中

$$F_{\mathrm{Ie}}=ma_{\mathrm{e}}=2mR\cos\frac{\theta}{2}\omega^2$$

$$F_{\mathrm{IC}}=ma_{\mathrm{C}}=m2\omega v_{\mathrm{r}}=2m\omega R\dot{\theta}$$



由相对运动动力学基本方程

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{IC}}$$

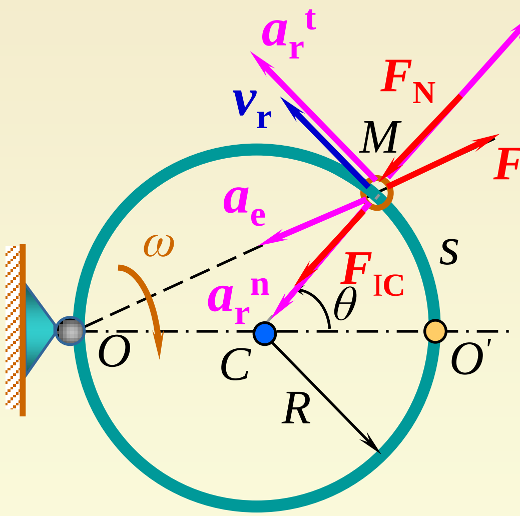
$$F_{\mathrm{Ie}} = ma_{\mathrm{e}} = 2mR\cos\frac{\theta}{2}\omega^2$$

$$F_{\mathrm{IC}} = ma_{\mathrm{C}} = m2\omega v_{\mathrm{r}} = 2m\omega R\dot{\theta}$$

在相对切向和法向投影，得

$$mR\ddot{\theta} = -F_{\mathrm{Ie}}\sin\frac{\theta}{2} \qquad (1)$$

$$mR\dot{\theta}^2 = F_{\mathrm{N}} + F_{\mathrm{IC}} - F_{\mathrm{Ie}}\cos\frac{\theta}{2} \qquad (2)$$



由式(1)得 $mR\ddot{\theta} = -2\omega^2 mR\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\sin\theta \qquad (\mathrm{a})$$

这就是小环 ***M*** 相对于大圆环的运动微分方程。

应用循环变换 $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}$ ，将式(a)的变量分离并代入初始条件进行积分

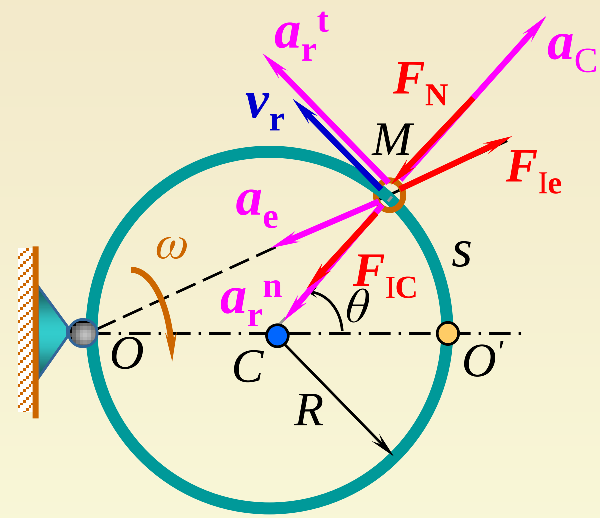
应用循环变换 $\ddot{\theta}=\dot{\theta}\dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}$ ，对 $\ddot{\theta}=-\omega^2\sin\theta$ 进行积分

$$\int_{2\omega}^{\dot{\theta}}\dot{\theta}\mathrm{d}\dot{\theta}=\int_{0}^{\theta}-\omega^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

于是有 $\dot{\theta}^2=2\omega^2(1+\cos\theta)$

将上式代入式 $mR\dot{\theta}^2=F_{\mathrm{N}}+F_{\mathrm{IC}}-F_{\mathrm{Ie}}\cos\dfrac{\theta}{2}$ (2)

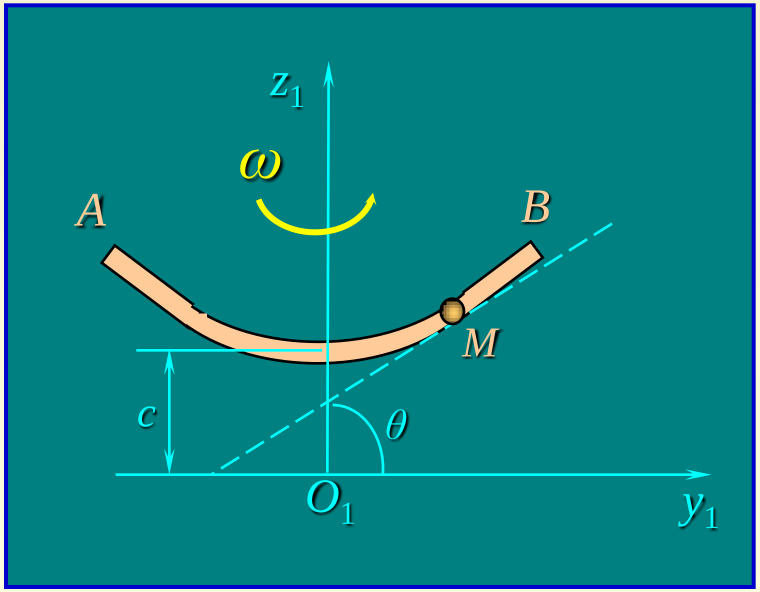
得 $F_{\mathrm{N}}=2mR\omega^2(1+\cos\theta)-F_{\mathrm{IC}}+F_{\mathrm{Ie}}\cos\dfrac{\theta}{2}$



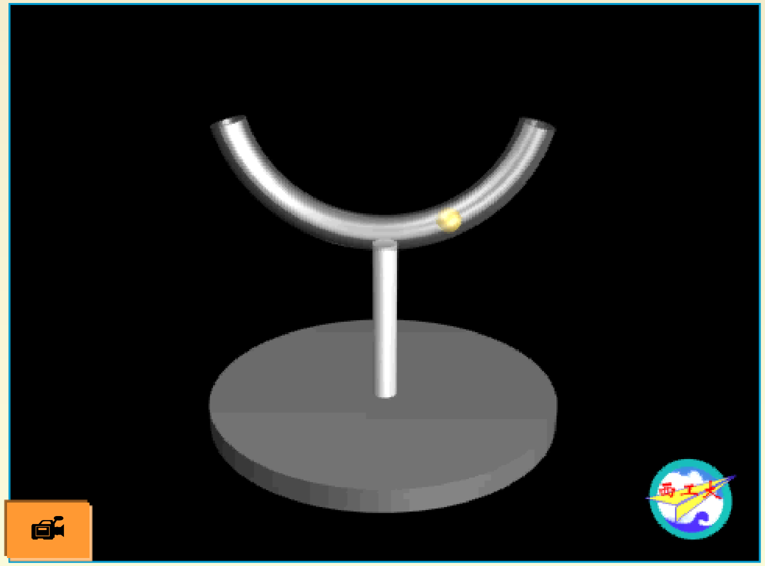
而 $F_{\mathrm{IC}}=2m\omega R\dot{\theta}=2m\omega R\sqrt{2\omega^2(1+\cos\theta)}=4mR\omega^2\cos\dfrac{\theta}{2}$

所以，大圆环对小环的约束力为 $F_{\mathrm{N}}=mR\omega^2[3(1+\cos\theta)-4\cos\dfrac{\theta}{2}]$

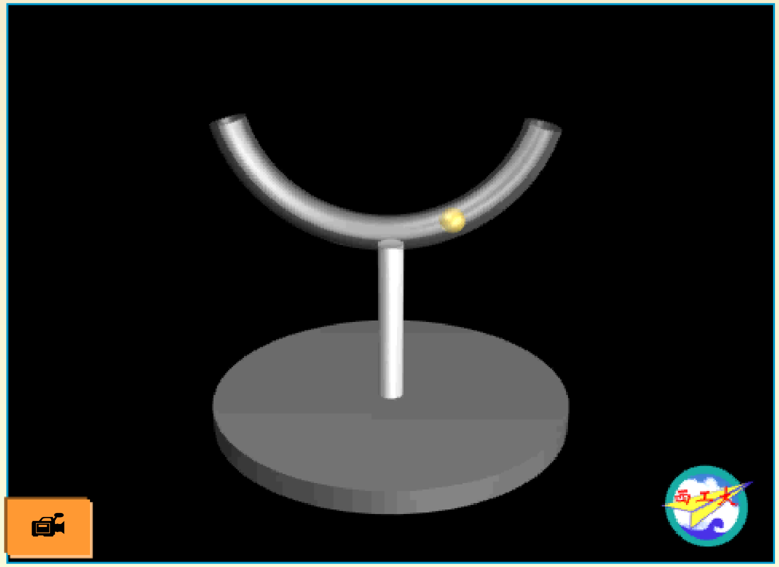
例题10-7　细管 AB 以匀角速度 ω 绕铅直轴 O_1z_1 转动，管内放一质量是 m 的光滑小球 M 。欲使小球在管内任何位置处于相对静止，或沿管作匀速相对运动，则细管应在铅直平面 $O_1y_1z_1$ 内弯成何种曲线?



动　画　演　示



小球相对静止



小球作匀速相对运动

解:　设细管弯成图示形状， 取动系与弯管固连。

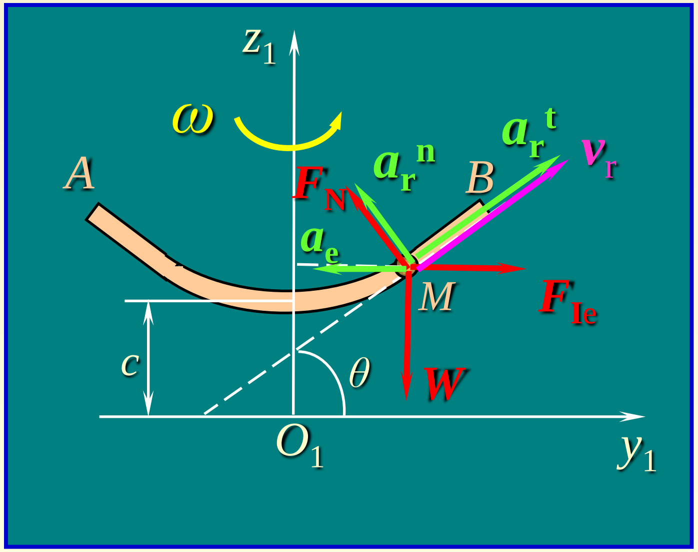
● 受力分析

分析小球，实际作用于小球的力有重力 $\boldsymbol{W}$ 和管壁的法向反力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$。此外，当研究小球 M 相对于转动坐标系$O_1y_1z_1$ 的运动时，还要加入小球的牵连惯性力和科氏惯性力。

● 运动分析

小球牵连惯性力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}}$的大小等于 $F_{\mathrm{Ie}} = m\omega^2|y_1|$,其方向水平而背离铅直转轴 O_1z_1。

科氏惯性力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{IC}}$方向垂直于相对速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ 和转轴 O_1z_1，即垂直于 $O_1y_1z_1$平面向里;



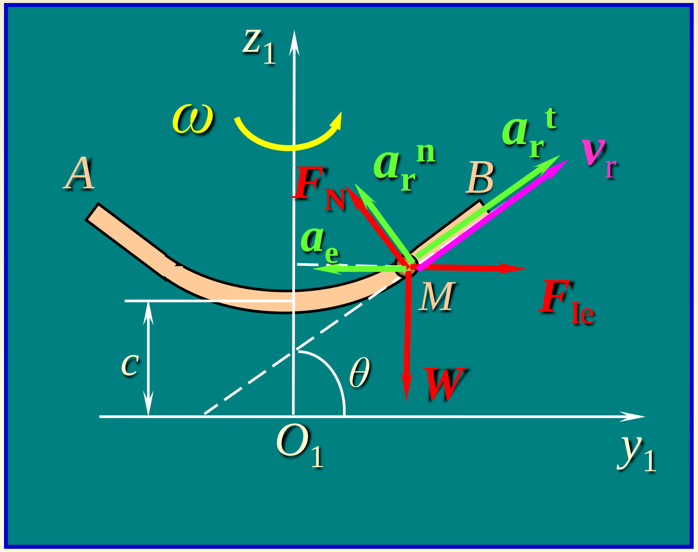
由相对运动动力学基本方程

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{IC}}$$

投影到细管曲线的切线方向，注意到相对静止时$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=0$，相对匀速运动时$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{t}}=0$，则得

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}}^{\mathrm{t}} - W_{\mathrm{t}} = 0$$

即 $$my_1\omega^2\cos\theta - mg\sin\theta = 0$$



其中θ 是切线对O_1y_1 轴的倾角，由此求得

切线的斜率 $$\mathrm{tg}\theta = \frac{\omega^2}{g}y_1 = \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}y_1}$$

求出积分，并确定积分常量，得

$$z_1 = \frac{\omega^2}{2g}y_1^2 + c$$ 可见细管应弯成抛物线形状。

谢谢使用