12.4 相对于质心的动量矩定理

过固定点O建立固定坐标系$Oxyz$，以质点系的质心 C 为原点，取平动坐标系 $Cx'y'z'$, 质点系对固定点O的动量矩。

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C, \qquad \boldsymbol{L}_C = \sum (\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i \boldsymbol{v}_{ri})$$

$\boldsymbol{L}_C$—— 质点系相对质心C 的动量矩

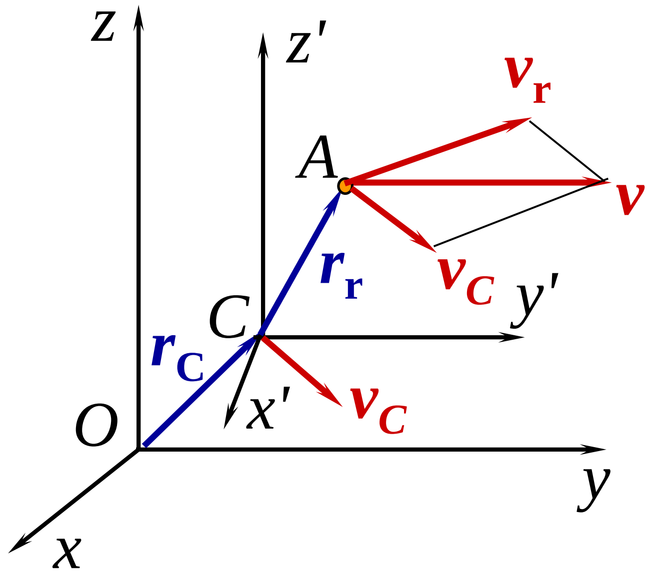
一、相对于质心的动量矩定理

由对定点的动量矩定理

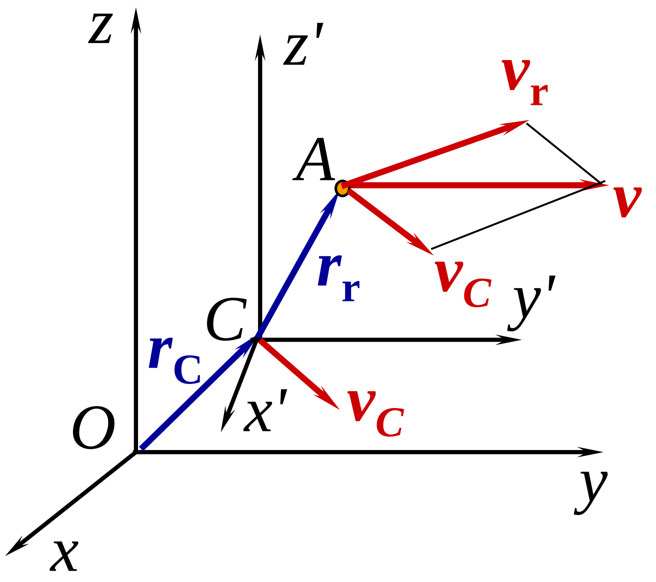
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum M_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) = \sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C) = \sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)})$$



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C) = \sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}) \quad (1)$$



左端

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t} \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

$$= \boldsymbol{v}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

$\Rightarrow 0$

$$= \boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

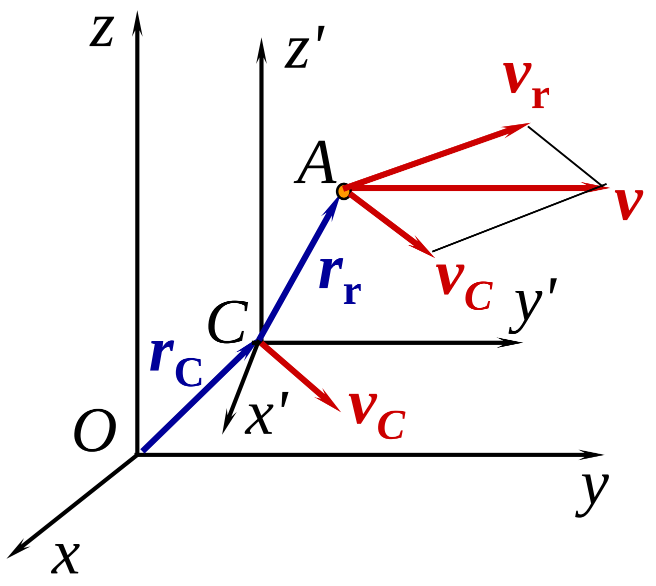
右端

$$= \sum [(\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_{ri}) \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}] = \sum (\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}) + \sum (\boldsymbol{r}_{ri} \times \boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

代入（1）式有

$$\boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum (\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}) + \sum (\boldsymbol{r}_{ri} \times \boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

$$\boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum (\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) + \sum (\boldsymbol{r}_{ri} \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$



注意到由质心运动定理有 $\sum m_i \boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$

所以上式为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum (\boldsymbol{r}_{ri} \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) = \sum M_C(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) = \boldsymbol{M}_C}$$

这就是相对于质心的动量矩定理的一般形式。

即，**质点系相对于质心的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的外力对质心的主矩.**

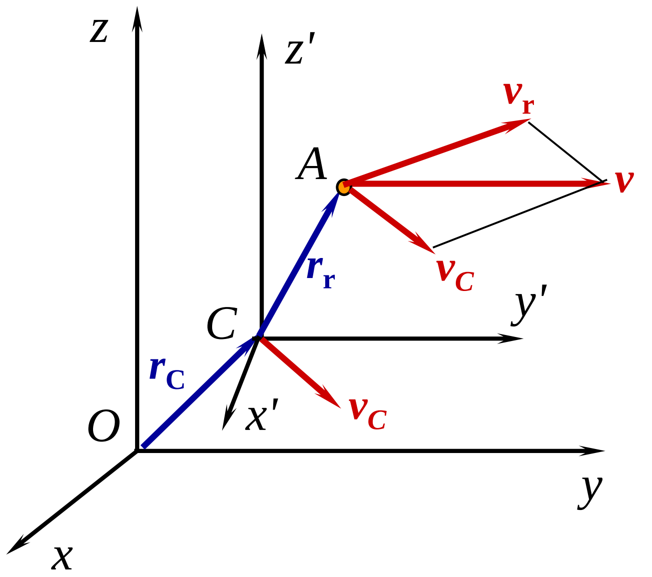
二、相对于质心轴的动量矩定理

将前面所得质点系相对于质心的动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\sum M_C(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\boldsymbol{M}_C}$$

沿质心轴进行投影，得

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_{Cz'}}{\mathrm{d}t}=M_{Cz'}}$$



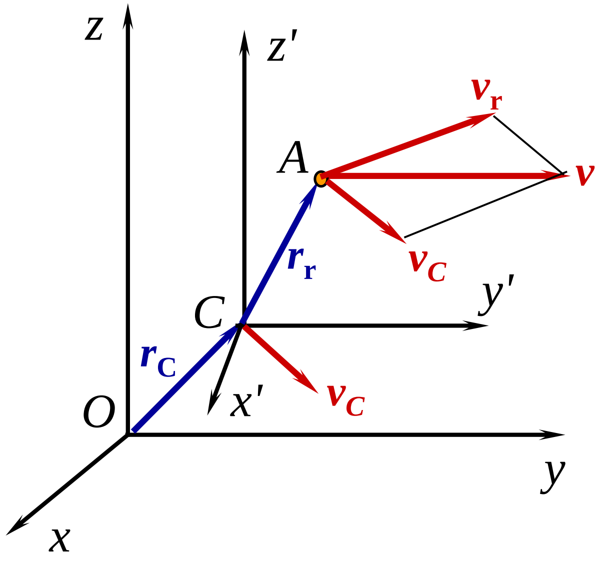
即，**质点系相对于质心轴的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的外力对该轴的主矩.**

1. 对质心的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times\boldsymbol{F}_i^{(e)})=\sum M_C(\boldsymbol{F}_i^{(e)})=\boldsymbol{M}_C$$

2. 对质心轴的动量矩定理

$$\frac{dL_{Cz'}}{dt}=M_{Cz'}$$

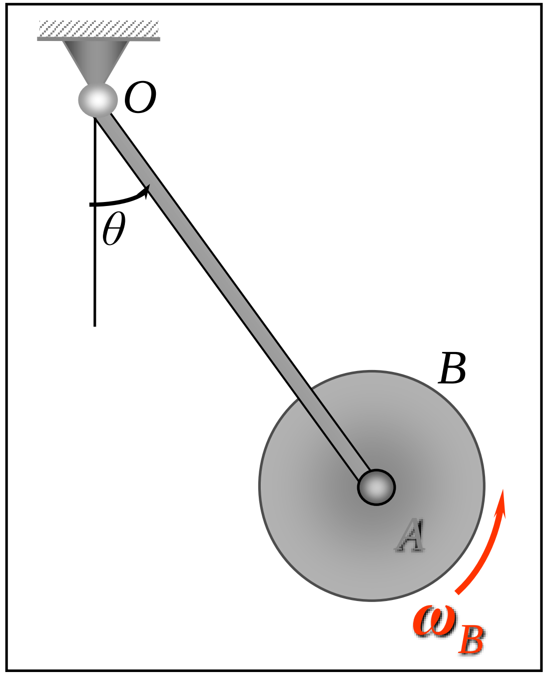


讨 论

1. 在以质心为原点的平动坐标系中，质点系对质心（或质心轴）的动量矩定理的形式与对定点（或定轴）的动量矩定理的形式相同；

2. 由该定理可见，质点系相对于质心（或质心轴）的动量矩的改变，只与质点系的外力有关，而与内力无关，**即内力不能改变质点系对质心（或质心轴）的动量矩。**

例题 1 长度为l，质量为m_1的均质杆OA与半径为R，质量为m_2的均质圆盘B在A处铰接，铰链O，A均光滑。初始时，杆OA有偏角θ_0，轮B有角速度ω（逆时针向）。求系统在重力作用下的运动。



解：

1. 考虑圆盘B，受力如图b所示，根据对质心的动量矩定理

$$J_B\dot{\omega}_B = 0$$

$$\omega_B = \omega = const$$

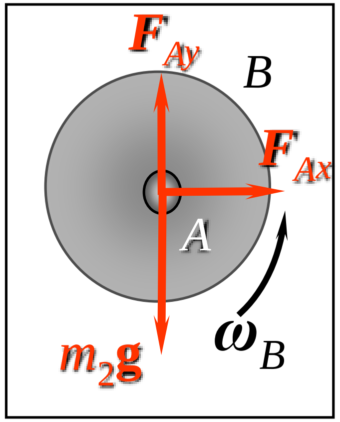
2. 考虑杆轮系统，受力如图c所示,应用对固定点O的动量矩定理，计算轮B动量矩时使用式

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_C + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{p}$$

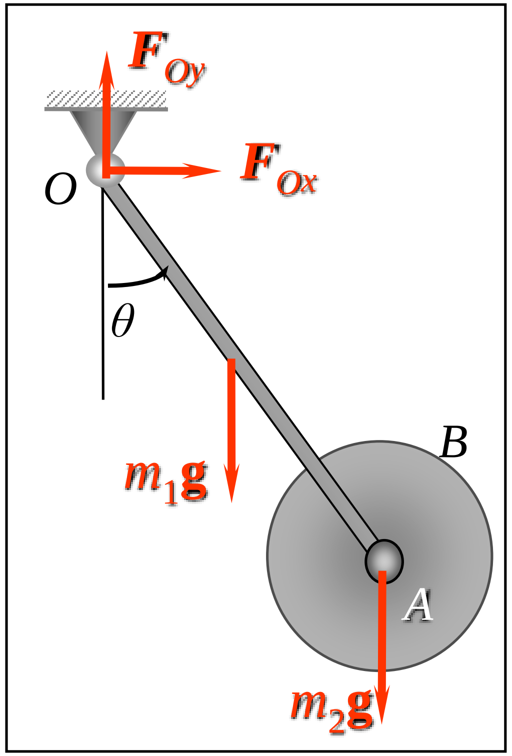
得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J_{0A}\dot{\theta} + (J_B\omega_B + m_2 l\dot{\theta}\cdot l)\right] = -m_1 g\frac{l}{2}\sin\theta - m_2 g l\sin\theta$$

$$\left(\frac{1}{3}m_1 + m_2\right)l\ddot{\theta} + \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)g\sin\theta = 0$$



(b)

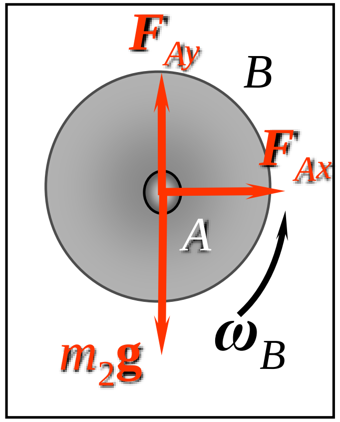


(c)

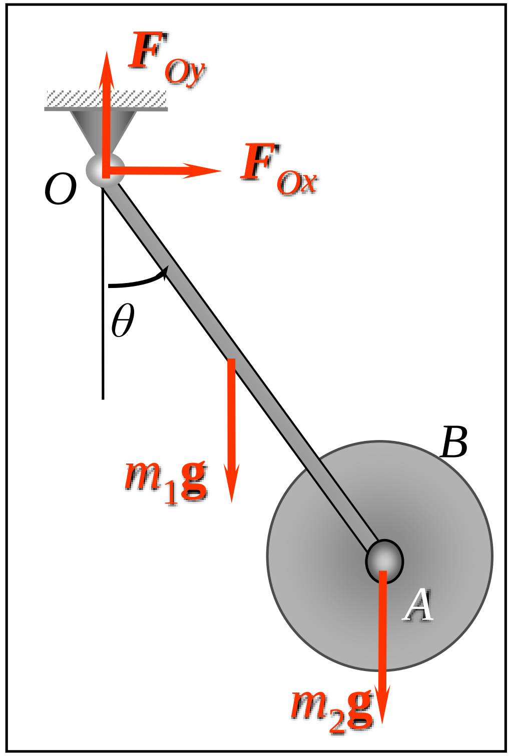
微幅振动时的运动规律为

$$\theta = \theta_0 \cos \omega_0 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3m_1 + 6m_2}{2m_1 + 6m_2} \cdot \frac{g}{l}}$$



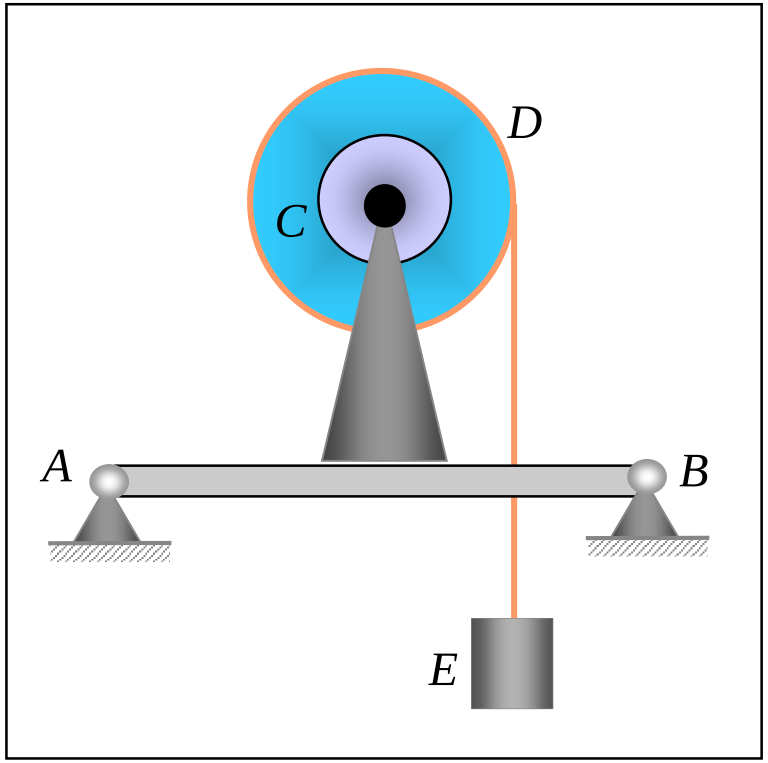
(b)



(c)

3. 运动特性：圆盘的转动不影响系统的摆动，而系统的摆动也不影响圆盘的转动。

例题 2 起重装置由匀质鼓轮D（半径为R，重为W_1）及均质梁AB（长$l=4R$，重$W_2=W_1$）组成，鼓轮通过电机C（质量不计）安装在梁的中点，被提升的重物E重 $W=\frac{1}{4}W_1$。电机通电后的驱动力矩为M，求重物E上升的加速度a及支座A，B的约束力F_{NA}及F_{NB}。



解： **1. 求加速度a**

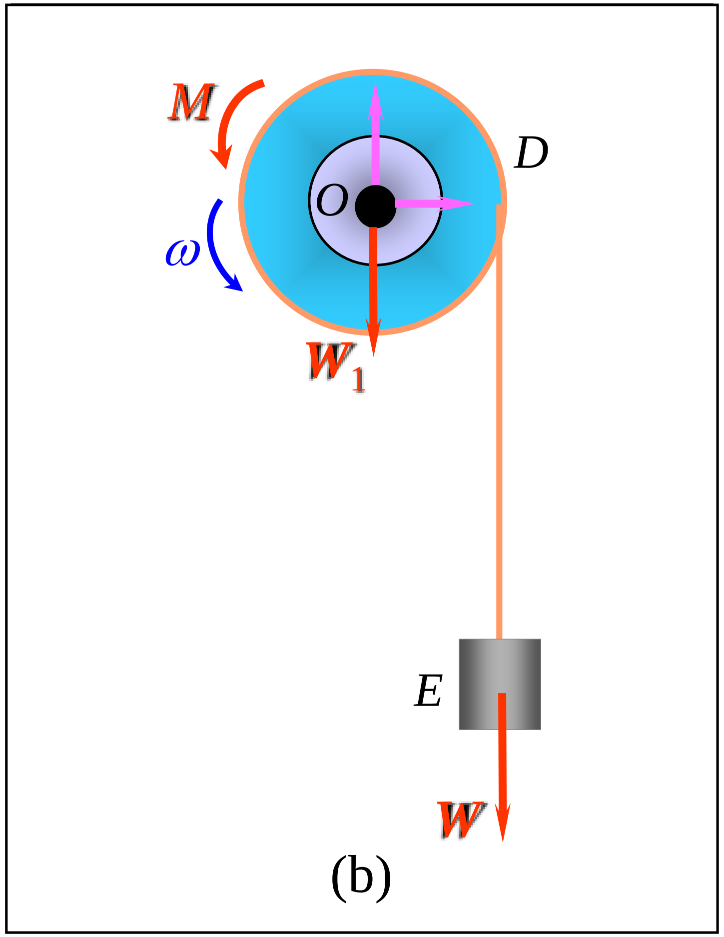
考虑鼓轮D，重物E及与鼓轮固结的电机转子所组成的系统（图b），M为电机定子作用在转子的驱动力矩，对固定点O的应用动量矩定理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(J_D+\frac{W}{g}R^2\right)\omega\right]=M-WR$$

其中 $$J_D=\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}R^2$$

解得

$$\alpha=\frac{4M/R-W_1}{3W_1}\cdot\frac{g}{R},\quad a=\frac{4M/R-W_1}{3W_1}g$$



(b)

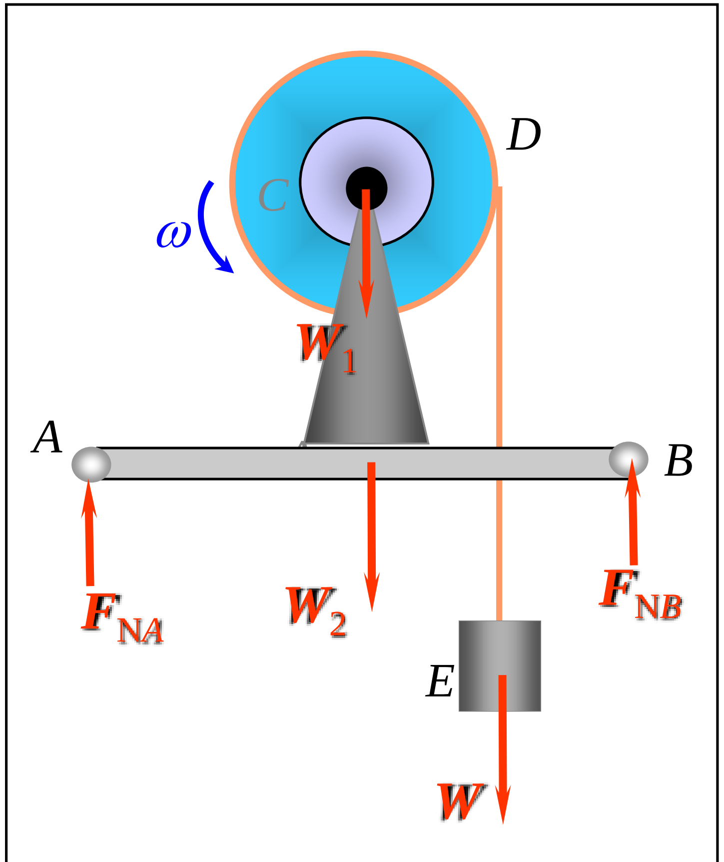
2. 考虑整个系统（图c），注意驱动力矩为M系统内力。对点B应用动量矩定理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J_D\omega-\frac{W}{g}R\omega(\frac{l}{2}-R)\right]=$$

$$(W_1+W_2)\frac{l}{2}+W(\frac{l}{2}-R)-F_{\mathrm{NA}}l$$

解得 $$F_{\mathrm{NA}}=\frac{1}{2}(W_1+W_2)+W(\frac{1}{2}-\frac{R}{l})-\left[J_D-\frac{W}{g}R(\frac{l}{2}-R)\right]\frac{a}{l}$$

$$F_{\mathrm{NA}}=\frac{17}{16}W_1-\frac{1}{16}\frac{W_1}{g}R\alpha$$



(c)

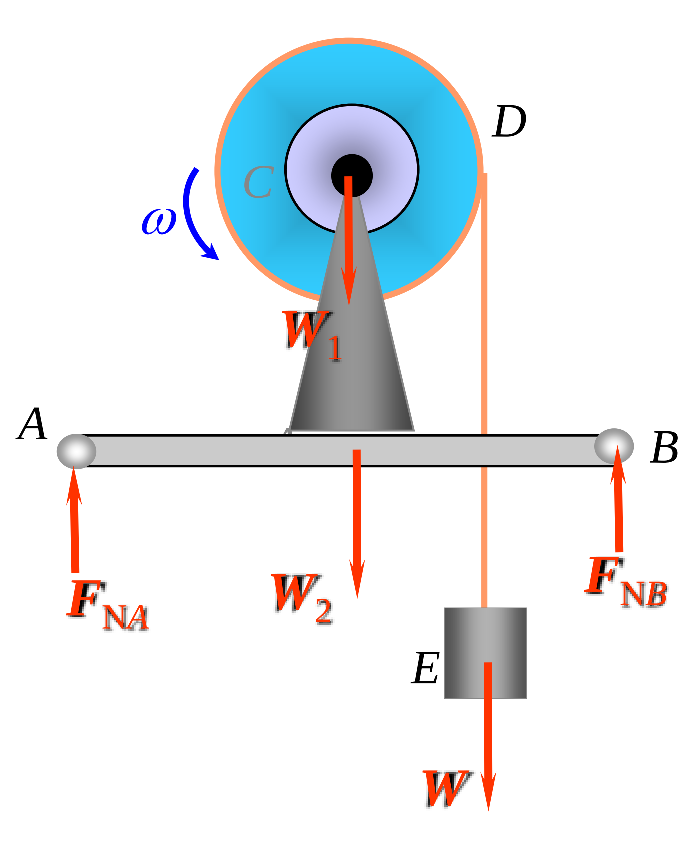
对整个系统应用动量定理得

$$\frac{W}{g}R\alpha = F_{NA} + F_{NB} - W_1 - W_2 - W$$

解得

$$F_{NB} = W_1 + W_2 + W - F_{NA} + \frac{W}{g}R\alpha$$

$$= \frac{19}{16}W_1 + \frac{5}{16}\frac{W_1}{g}a$$



(c)

谢谢！