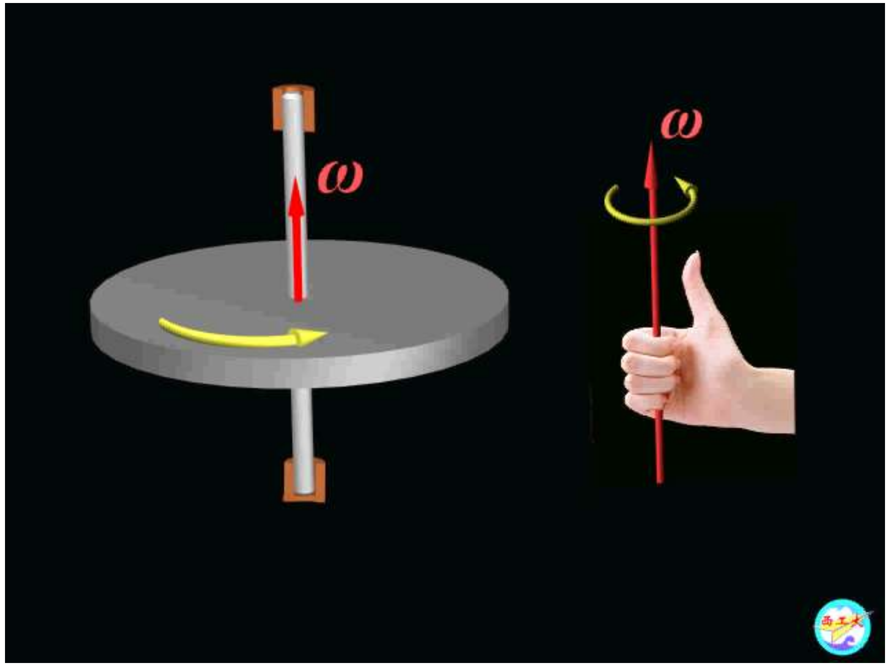
7.4 用矢积表示刚体上点的速度与加速度

1. 用矢量表示角速度与角加速度

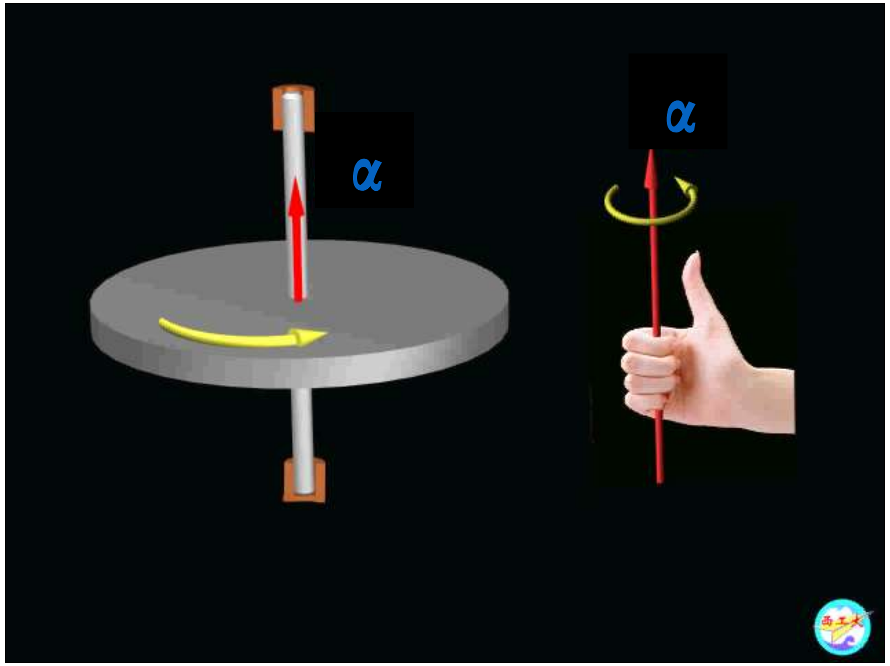
角速度矢

沿刚体的转轴z画出一个矢量 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$ （其中k为轴z的单位矢），ω称为刚体的角速度矢。



角加速度矢

同样，可以用矢量 $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \boldsymbol{k}$ 表示刚体的角加速度，它也是滑动矢量，沿转轴z画出。它的大小表示角加速度的模，它的指向则决定于 α 的正负。



$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

2. 用矢积表示刚体上点的速度

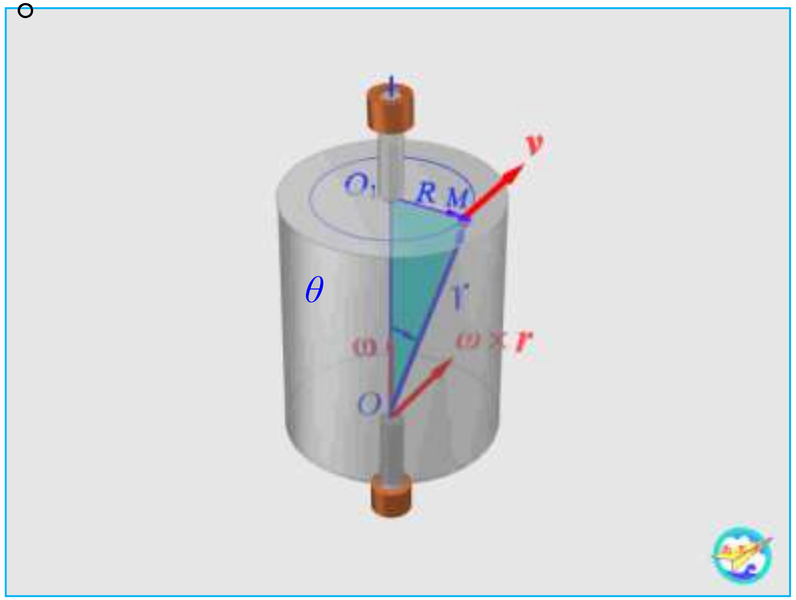
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

大小

定轴转动刚体内任一点M的速度v的大小为 $|v|=R|\omega|$ 。由于 $R=r\sin\theta$，因而 $|v|=R|\omega|=|\omega|r\sin\theta$。

方向

根据矢积的定义，矢积$\omega\times r$ 的模也等于 $|\omega|r\sin\theta$ ，它的方向也与速度v的方向一致。 故有矢积表达式



$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

定轴转动刚体内任一点的速度，可以由刚体的角速度矢与该点的矢径的矢积表示。

3. 用矢积表示刚体上点的加速度

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

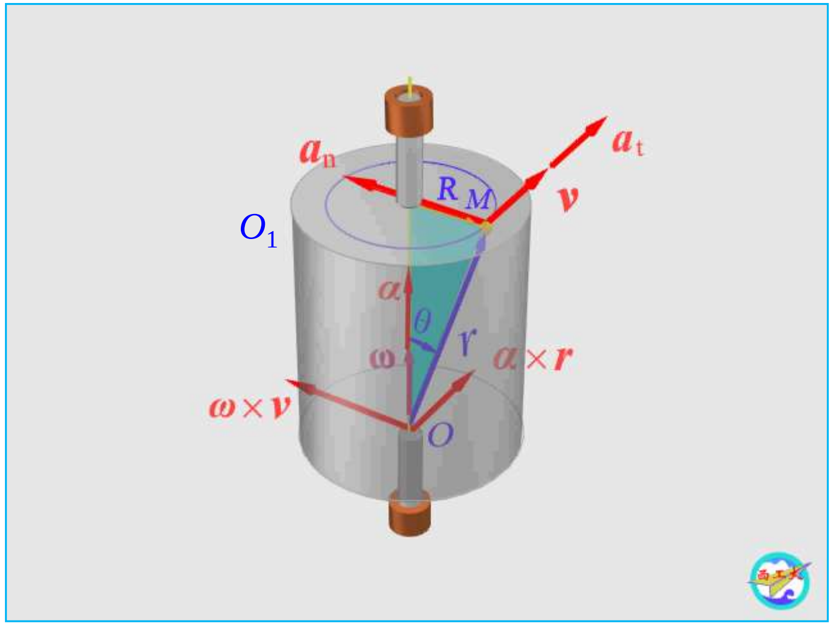
将上式左右两边对时间求矢导数。左端的导数为点M的加速度，而右端的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

矢积 $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$

大小

$$|\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}| = |\alpha| r \sin\theta = R|\alpha| = |a_t|$$

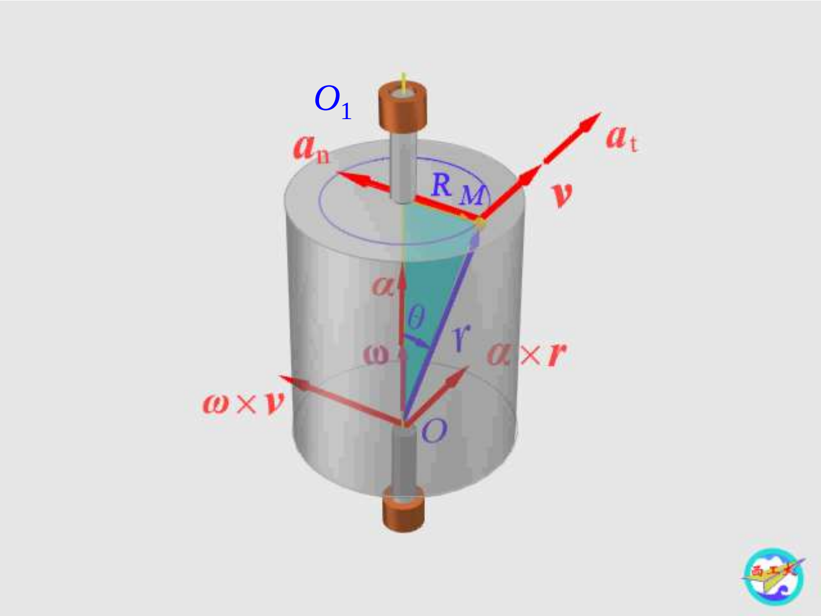


方向

$$|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}| = |\alpha| r\sin\theta = R|\alpha| = |a_{\mathrm{t}}|$$

这矢积垂直由转轴z和转动半径O_1M决定的平面 OO_1M，它的指向与图中自点O 画出的矢量一致。

可见，矢积 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}$ 按大小和方向都与点M的切向加速度a_{t}相同。



故有矢积表达式

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}$$

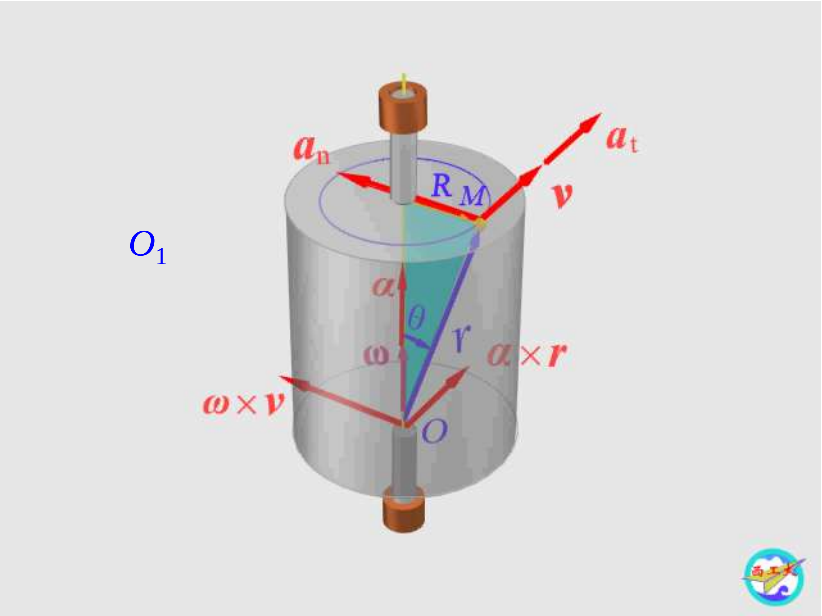
矢积 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$

大小

方向

$$\left|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}\right|=\left|\omega v\right|=R\omega^{2}=a_{\mathrm{n}}$$

这矢积同时垂直于刚体的转轴和点M的速度v，即沿点M的转动半径R，并且按照右手规则它是由点M指向轴心O_1。

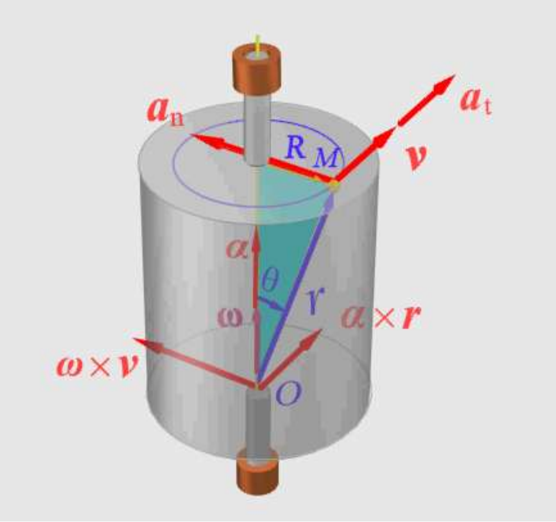


可见，矢积$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ 表示了点M的法向加速度a_{n}，即有矢积表达式

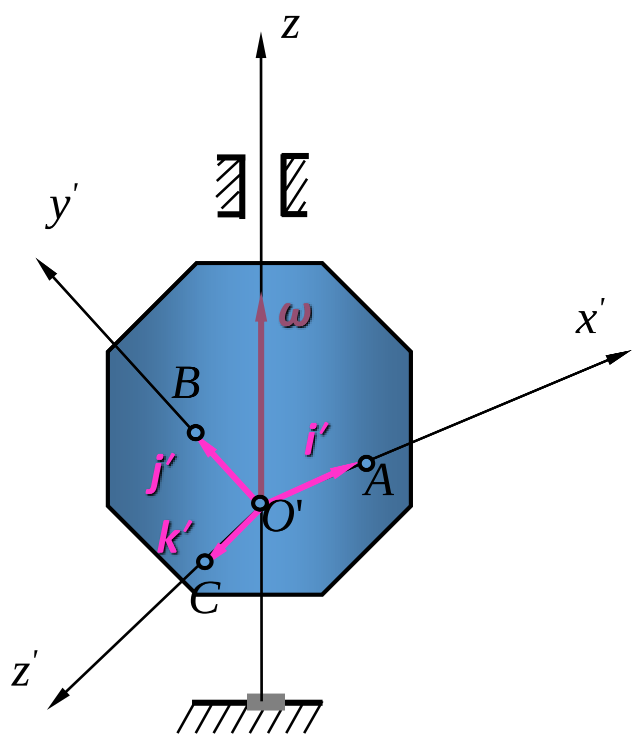
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

于是，得点M的总加速度的矢积表达式

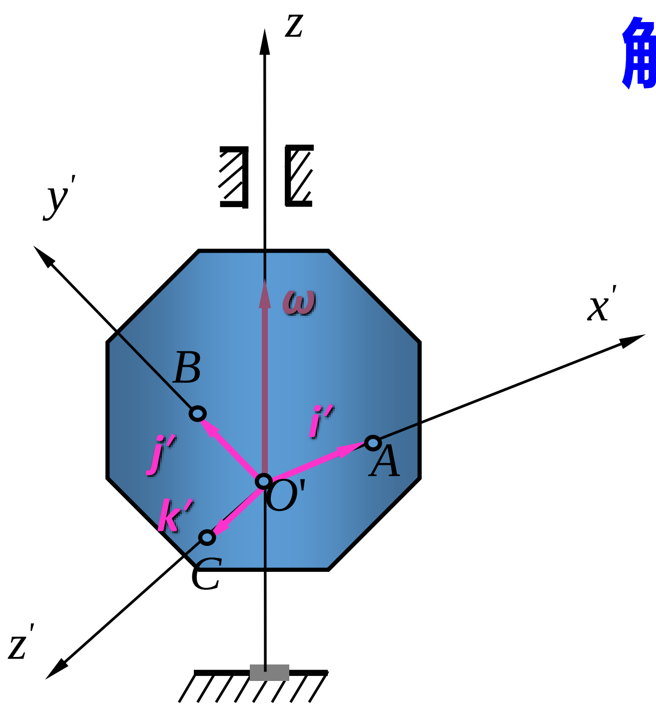
$$\boxed{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}}$$



定轴转动刚体内任一点的切向加速度，可由刚体的角加速度矢与该点矢径的矢积表示，而法向（向心）加速度，则由刚体的角速度矢与该点速度的矢积表示。



例题1 **刚体以角速度ω绕定轴Oz转动，其上固连有动坐标系$O'x'y'z'$（如图），试求由O'点画出的动系轴向单位矢$\boldsymbol{i}'$，$\boldsymbol{j}'$，$\boldsymbol{k}'$端点A，B，C的速度。**



解： 先求端点 A 的速度。设 A 点的矢径为$\boldsymbol{r}_A$，则A点的速度为

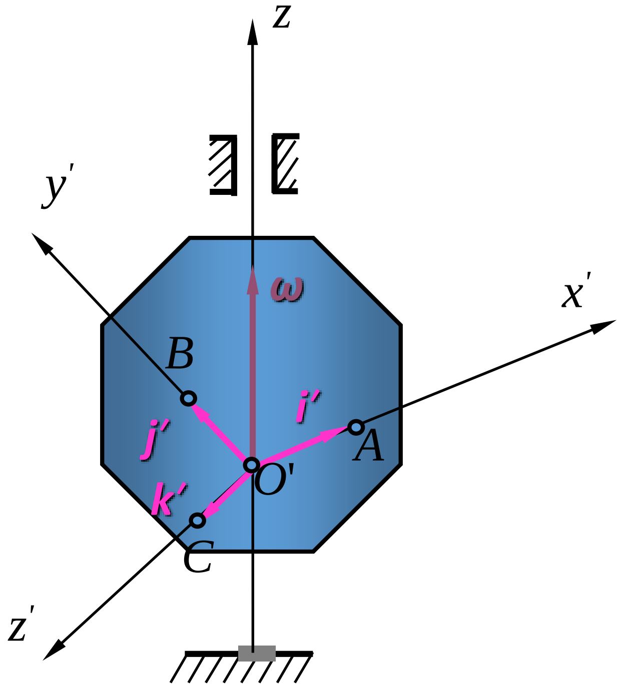
$$\boldsymbol{v}_A = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}$$

A点是定轴转动刚体内的一点，由式有

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_A$$

可见 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_A$ ，但这里有 $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{i}'$,

故 $$\boldsymbol{v}_A = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}'$$



同理可得 v_B 和 v_C 的矢量表达式。

于是得到一组公式

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}'}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}'}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}'}$$

它称为泊松公式。

谢谢！