上节提要

二维$RV(X,Y)$的分布函数 $F(x,y)=\mathrm{P}\{X\le x,Y\le y\}$

① 不减性 ② 有界性 ③ 右连续性

二维离散型$RV(X,Y)$，设 $\mathrm{P}\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，则

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

二维连续型$RV(X,Y)$，设JPDF为 $f(x,y)$，则

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

上节提要

边缘分布函数

联合分布与边缘分布间的关系

$$F_X(x)=F(x,+\infty)\qquad F_Y(y)=F(+\infty,y)$$

$$\text{联合分布}\ \underset{?}{\overset{\text{完全确定}}{\rightleftarrows}}\ \text{边缘分布}$$

上节提要

边缘分布函数

二维离散型RV(X,Y)，设 $\mathrm{P}\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=p_{ij}$，则

$$\mathrm{P}\left\{X=x_i\right\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\triangleq p_{i\bullet}\qquad \mathrm{P}\left\{Y=y_j\right\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\triangleq p_{\bullet j}$$

二维连续型RV(X,Y)，设JPDF为 $f(x,y)$，则

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y,\ -\infty<x<+\infty$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x,\ -\infty<y<+\infty$$

§3 条件分布

第1章中，介绍了条件概率的概念 ；在事件A发生的条件下事件B发生的条件概率

P(B|A)=P(AB)/P(A)

推广到RV

设有两个RV X 和 Y，在给定 Y 的某个或某些值的条件下, 求X 的概率分布。这个分布就是条件分布。

一、离散型RV的条件分布

定 义 设(X,Y)是二维RV，对固定的j，若

$P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\left\{X=x_i \middle| Y=y_j\right\}=\frac{P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}}{P\left\{Y=y_j\right\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}\ ,\ i=1,2,\ldots$$

为在$Y=y_j$条件下RV X 的**条件分布律**（**Conditional Probability**）。

同样 对固定的 i，若 $P\{X=x_i\}>0$，则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, j=1,2,\ldots$$

为在 $X=x_i$ 条件下RV Y 的**条件分布律**。

说 明

作为条件的那个RV，其取值是给定的，
在此条件下来求另一RV的概率分布。

注 意

条件分布也是一种概率分布，它具有概率分布的一切性质。正如条件概率是一种概率，具有概率的一切性质。

例如：

$$\mathrm{P}\left\{X=x_i \middle| Y=y_j\right\} \geq 0,\ \ i=1,2,\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{P}\left\{X=x_i \middle| Y=y_j\right\}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}=\frac{p_{\bullet j}}{p_{\bullet j}}=1$$

二、连续型RV的条件分布

对二维连续型RV（X,Y），$\forall\, x, y \in R$ 有

$$\mathrm{P}\{X = x\} = 0,$$

$$\mathrm{P}\{Y = y\} = 0,$$

故不能直接用条件概率公式得到条件分布，下面我们直接给出条件概率密度的定义。

定 义

设二维RV（X,Y）的概率密度为 $f(x,y)$，（X,Y）关于 Y 的边缘PDF为$f_Y(y)$，若对固定的y，$f_Y(y)>0$，称 $f(x,y)/f_Y(y)$ 为在$Y=y$ 的条件下X 的条件概率密度 Conditional PDF，记为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

而称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x$ 为在$Y=y$ 的条件下X 的条件分布函数 Conditional CDF，记为 $F_{X|Y}(x|y)$ 。

类似地：定义在 $X = x$ 的条件下Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0$$

称 $\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y$为在 $X = x$ 的条件下Y的条件分布函数，记为 $F_{Y|X}(y|x)$ 。

说明：条件PDF也满足PDF的性质1和2，如：

$$f_{X|Y}(x|y) \geq 0 \qquad f_{Y|X}(y|x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y = 1$$

例 1 (P62例2) 一射手进行射击，击中目标的概率为 p（$0<p<1$），射击进行到第二次击中目标为止。各次射击相互独立，以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数，以 Y 表示第二次击中目标时所进行的的射击次数。试求 X 和 Y 的联合分布律及条件分布律。

解： Y的所有可能取值：$n=2,3,\ldots$

X的所有可能取值：$m=1,2,\ldots n-1$

不论m和n取值多少，都表示前$m-1$次射击均未击中，第m次击中，$m+1$次至$n-1$次射击又未击中，最后第n次击中。

$$P\{X=m,Y=n\}=\underbrace{(1-p)(1-p)\cdots(1-p)}_{1,\cdots,m-1}\underbrace{p}_{m}\underbrace{(1-p)\cdots(1-p)}_{m+1,\cdots,n-1}\underbrace{p}_{n}$$

(X,Y)联合分布律

$$P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2},n=2,3,\ldots,m=1,2,\ldots,n-1$$

$$P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2},\ n=2,3,\ldots,\ m=1,2,\ldots,n-1$$

条件分布律？需求边缘分布律

X的边缘分布律

$$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}$$

$$=p^2\sum_{n=m+1}^{\infty}(1-p)^{n-2}\overset{\text{等比级数和}}{=\!=\!=\!=}p^2\frac{(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1},m=1,2,\ldots$$

Y的边缘分布律

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}$$

$$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2},n=2,3,\ldots$$

$$\mathrm{P}\{X=m, Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\ldots, m=1,2,\ldots,n-1$$

$$\mathrm{P}\{X=m\}=p(1-p)^{m-1}, m=1,2,\ldots$$

$$\mathrm{P}\{Y=n\}=(n-1)\,p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\ldots$$

条件分布律

当$m=1,2,\cdots$时， $\mathrm{P}\{Y=n \mid X=m\}=\dfrac{\mathrm{P}\{X=m, Y=n\}}{\mathrm{P}\{X=m\}}$

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}}=p(1-p)^{n-m-1}, n=m+1, m+2,\ldots$$

当$n=2,3,\cdots$时， $\mathrm{P}\{X=m \mid Y=n\}=\dfrac{\mathrm{P}\{X=m, Y=n\}}{\mathrm{P}\{Y=n\}}$

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)\,p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}, m=1,2,\ldots,n-1$$

例2 设二维**RV** (X,Y)在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$上服从均匀分布，

求 $f_{X|Y}(x|y)$。

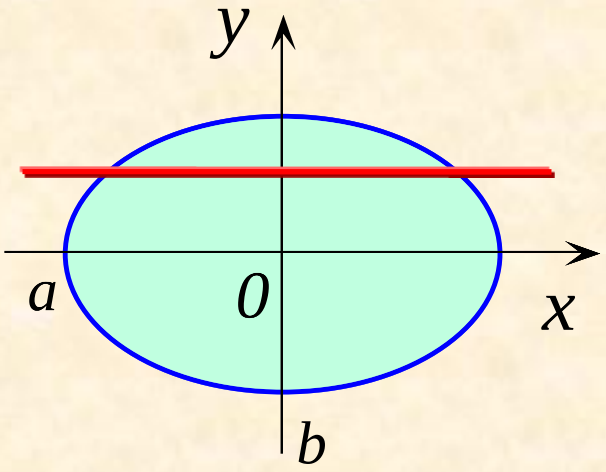
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi ab}, & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

解： $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ **?**

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-u}^{+u}\frac{1}{\pi ab}\,\mathrm{d}x, & -b\le y\le b,\ u=a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}\\ 0, & else\end{cases}$$

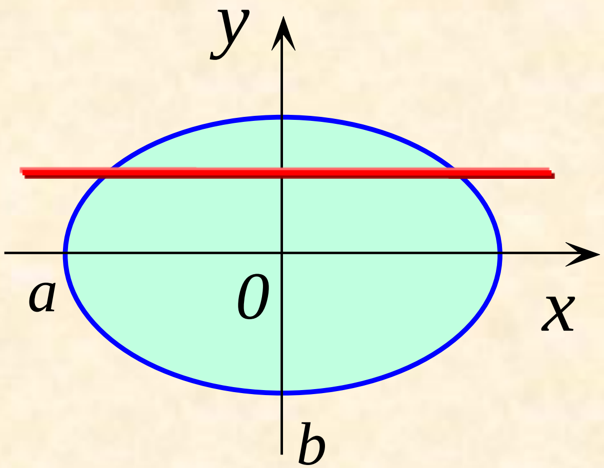
$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi b}\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}, & -b\le y\le b\\ 0, & else\end{cases}$$



$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi ab}, & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\\ 0, & else\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi b}\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}, & -b\le y\le b\\ 0, & else\end{cases}$$

当$-b<y<b$时， $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\ {>0}$$

代入求解 $$=\begin{cases}1\Big/\left(2a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}\right), & |x|\le a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}\\ 0, & else\end{cases}$$



说明：在$Y=y\ (-b<y<b)$时条件下，

$$X\sim U\left(-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}},\ a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)$$

例3 设二维RV $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$, 求 $f_{Y|X}\left(y|x\right)$。

结 论:

$$Y|X \sim N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)\right)$$

$$X|Y \sim N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right)$$

这说明:**二维正态RV的条件分布也是正态分布**。

联合分布

边缘分布　　条件分布

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

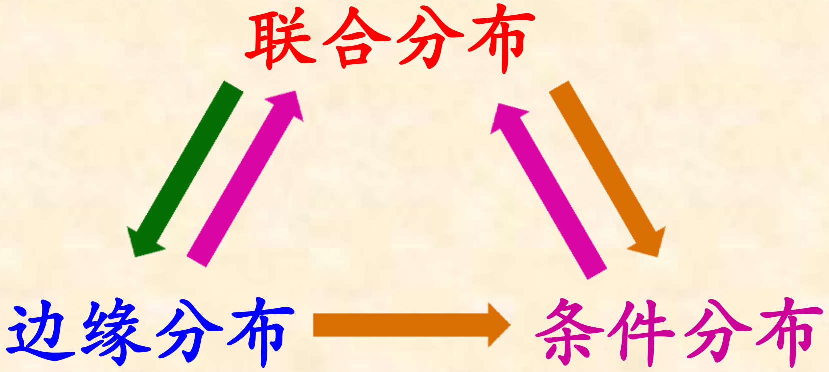
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,\ x \in R$$

$$\mathrm{P}\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

小结

- 本节介绍了二维RV条件分布的概念和计算；
- 离散型和连续型随机变量如何计算条件分布；
- 掌握联合分布、边缘分布与条件分布三者间的关系



§4 相互独立的随机变量

第1章介绍了事件的相互独立性，对于两个事件A 与B 的独立性，若满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则 A 与B 独立。因此，可以利用事件的独立性可以引入两个RV相互独立的概念。

一、RV相互独立的定义

设X 和 Y 是两个RV，$\forall\ x, y \in R$，有

$$P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = P\{X \leqslant x\} \cdot P\{Y \leqslant y\}$$

则称X 和 Y 相互独立。

或用分布函数表示，即

设X 和 Y 是两个RV，$\forall\ x, y \in R$，有

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

则称X 和 Y 相互独立。

若(X,Y)是**离散型RV**，则上述独立性的定义**等价于**:

对(X,Y)<u>所有可能取值</u>(x_i, y_j)，有

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\},\ (i, j=1,2,\ldots)$$

即 $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$ 则称 **X 和 Y 相互独立**。

若(X,Y)是**连续型RV**，则上述独立性的定义**等价于**:

$\forall\, x, y\in R$，有 $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$

几乎处处成立，**称 X 和 Y 相互独立**。

在平面上除去面积为 0
的集合外处处成立

说 明

对于两个RV X 和 Y，有

联合分布 $\xrightarrow{\text{完全确定}}$ 边缘分布

若已知两个RV X 和Y 的边缘分布，未必能得知其联合分布。但如果X 和 Y 相互独立，则

联合分布 $\underset{\text{相互独立}}{\overset{\text{完全确定}}{\rightleftarrows}}$ 边缘分布

二、正态RV的独立性

若$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$，其PDF为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\cdots\right.$$

$$\left.\left[\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},\ x,y\in R$$

而X的PDF为$f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{2\sigma_1^2}},\ x\in R$

而Y的PDF为 $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}},\ y\in R$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}$$

由X 和 Y 的PDF可知

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}$$

对比上两式，可知：当$\rho=0$时，有

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，则$X$ 和Y 相互独立。

这说明$\rho=0$ 是X 和 Y 相互独立的充分条件。

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^{\ 2}}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^{\ 2}}\right]\right\}$$

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^{\ 2}}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^{\ 2}}\right]\right\}$$

反之：若X 和 Y相互独立，即对 $\forall\, x, y\in R$，有

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

特别地，$f(\mu_1,\mu_2)=f_X(\mu_1)\cdot f_Y(\mu_2)$，即：

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\quad\Rightarrow\rho=0$$

这说明$\rho=0$ 是X 和 Y相互独立的必要条件。

二维正态RV X 和 Y 相互独立的充要条件是$\rho=0$ 。

例1　盒内有n个白球，m个黑球，有放回地摸球两次，设

$$X=\begin{cases}1 & \text{第1次摸到白球}\\ 0 & \text{第1次摸到黑球}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1 & \text{第2次摸到白球}\\ 0 & \text{第2次摸到黑球}\end{cases}$$

试求：(1)（X,Y）的分布律和边缘分布律；

(2) X 和Y 的独立性；

(3) 若改为无放回抽样，再求上述两个问题。

n个白球,m个黑球

$Y=1$:第2次摸到白球

$X=1$:第1次摸到白球

(1) (X,Y) 的分布律和边缘分布律(放回抽样)

$X \backslash Y$	0	1	$P\{X=x_i\}$
0	$\frac{m\times m}{(m+n)(m+n)}$	$\frac{m\times n}{(m+n)(m+n)}$	$\frac{m}{m+n}$
1	$\frac{n\times m}{(m+n)(m+n)}$	$\frac{n\times n}{(m+n)(m+n)}$	$\frac{n}{m+n}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{m}{m+n}$	$\frac{n}{m+n}$	1

由于$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$, $i,j=0,1$, 故X与Y独立

n个白球,m个黑球

$Y=1$:第2次摸到白球

$X=1$:第1次摸到白球

(1) (X,Y) 的分布律和边缘分布律(无放回抽样)

$X \backslash Y$	0	1	$P\{X=x_i\}$
0	$\dfrac{m\times(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$	$\dfrac{m\times n}{(m+n)(m+n-1)}$	$\dfrac{m}{m+n}$
1	$\dfrac{n\times m}{(m+n)(m+n-1)}$	$\dfrac{n\times(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$	$\dfrac{n}{m+n}$
$P\{Y=y_j\}$	$\dfrac{m}{m+n}$	$\dfrac{n}{m+n}$	1

由于$p_{11} \neq p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 1}$，故$X$与$Y$不独立

例 2 甲乙两人约定中午12时30分在某地会面。如果甲来到的时间在12:15到12:45之间是均匀分布；乙独立地到达，而且到达时间在12:00到13:00之间是均匀分布。 试求先到的人等待另一人到达的时间不超过5分钟的概率？甲先到的概率是多少？

解：设$X=\{$甲到达时刻$\}$，$Y=\{$乙到达时刻$\}$，以12点为起点，以分钟为单位，则由题意知：

$$X \sim U(15, 45),\quad Y \sim U(0, 60)\ \text{且}X,Y\text{独立}$$

进而可知X和Y的JPDF $f(x, y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，

故所求事件概率为 $P\{|X-Y|\leqslant 5\}$，$P\{X<Y\}$

$$f_X(x)=\begin{cases}1/30, & 15<x<45\\ 0, & else\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1/60, & 0<x<60\\ 0, & else\end{cases}$$

求P{|*X*−*Y*|≤5}，P{*X*<*Y*}，关键是确定积分区域

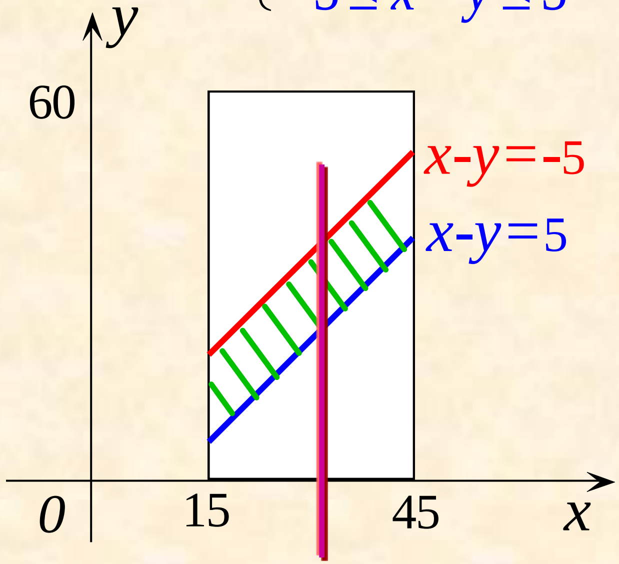
$$P\{|X-Y|\le 5\}=P\{-5\le X-Y\le 5\}$$

$$=\iint\limits_{-5\le x-y\le 5} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

积分域 $\begin{cases}15<x<45\\ 0<y<60\\ -5\le x-y\le 5\end{cases}$

$$=\iint\limits_{-5\le x-y\le 5} f_X(x)f_Y(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{15}^{45}\int_{x-5}^{x+5}\frac{1}{30}\frac{1}{60}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$



$$f_X(x)=\begin{cases}1/30, 15<x<45\\ 0, \qquad else\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}1/60, 0<x<60\\ 0, \qquad else\end{cases}$$

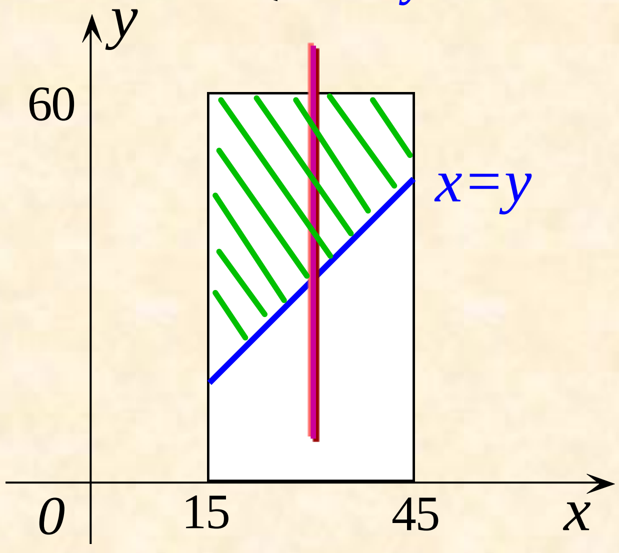
$$\mathrm{P}\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

积分域 $\begin{cases}15<x<45\\ 0<y<60\\ x<y\end{cases}$

$$=\iint\limits_{x<y} f_X(x)\,f_Y(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{15}^{45}\int_{x}^{60}\frac{1}{30}\frac{1}{60}\mathrm{d}y\ \ \mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}$$



三、一般n维RV的一些概念和结果

1. n维RV

设随机试验E的样本空间S=$\{e\}$, $X_1=X_1(e)$, $X_2=X_2(e)$,..., $X_n=X_n(e)$是定义在S上的RV, 由它们构成一个n维向量$(X_1, X_2, ..., X_n)$叫做 **n维随机变量(或 n维随机向量)** 。

2. CDF

$\forall\, x_1, x_2, ..., x_n \in R$，$n$元函数$F(x_1, x_2, ..., x_n) =$ $P\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, ..., X_n \leqslant x_n\}$称为$n$维RV $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 的**分布函数**或RV $X_1, X_2, ..., X_n$的**联合分布函数**。

3. n维离散型RV的分布律

设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 所有可能取值为 $x_{1i_1}, x_{2i_2}, \dots, x_{ni_n}$

$j=1,2,\dots,n,\ i_j=1,2,\dots,$ $P\left\{X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{1i_2}, \dots, X_n = x_{ni_n}\right\}$

称为n维离散型RV $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的**分布律**。

4. n维连续型RV的PDF

若存在非负可积函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ 有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

称 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为**n维连续型RV**， $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的**概率密度函数**。

5. 边缘分布

若 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的CDF $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 已知，则 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 维边缘CDF就随之确定。如:

$$F_{X_1}(x_1)=F(x_1,\infty,\ldots,\infty)$$

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F(x_1,x_2,\ldots,\infty)$$

又设 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的PDF，则 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 关于 X_1，关于 (X_1, X_2) 的边缘PDF分别为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n$$

6. 相互独立

若对所有的$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$，有

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称$X_1, X_2, \ldots, X_n$是**相互独立的**。

设$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$的CDF为$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$，

$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$的CDF为$F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$，

$(X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$的CDF为

$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$，

$\forall x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n \in R$，有

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \times F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

称$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$与$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$是相互独立的。

独立性定理

设 $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 与 $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ 相互独立，则 $X_i\ (i=1,2,\ldots,m)$ 与 $Y_j\ (j=1,2,\ldots,n)$ 相互独立。

又设 $h(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ 与 $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ 是连续函数，则 $h(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 与 $g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ 相互独立。

小结

- 本节介绍了RV的相互独立性；

　　在实际应用中，通常不是由独立性定义来判断RV间是否相互独立，而是根据实际问题本身来判断RV是否相互独立的。

- 给出了离散型、连续型RV相互独立的条件。

作业

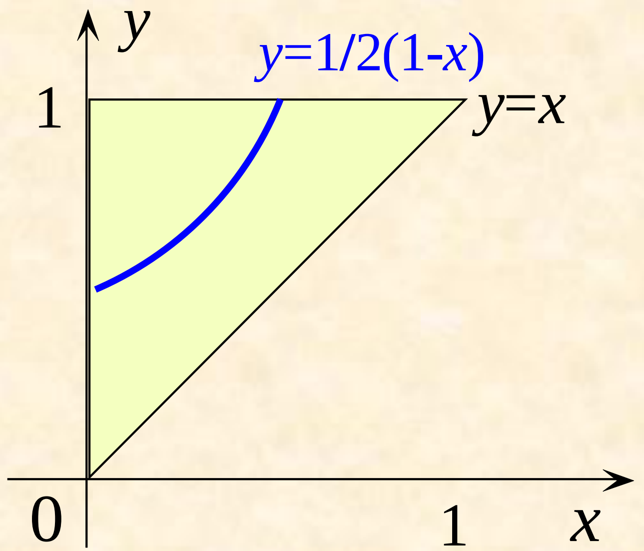
Pages 85-87：

第11, 14, 18, 19, 20 题

例3 设二维**RV** (X,Y)的**PDF**为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & else\end{cases}$$

问X与Y独立与否？



解:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^1 2\mathrm{d}y, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y 2\mathrm{d}x, & 0<y<1\\ 0, & else\end{cases}=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & else\end{cases}$$

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$仅在曲线$y=1/2(1-x)$上成立，其在面积不为0的区域内是不成立的，故**X 和Y 不独立**。