



# 8.3 牵连运动是平移时点的 加速度合成定理



## 1. 三种加速度

**绝对加速度** - 动点对于定系的加速度称为绝对加速度，用 $a_a$ 表示。

**相对加速度** - 动点对于动系的加速度称为相对加速度，用 $a_r$ 表示。

**牵连加速度** - 动系中与动点相重合的那一点对于定系的加速度称为牵连加速度，用 $a_e$ 表示。



## 2. 加速度合成定理

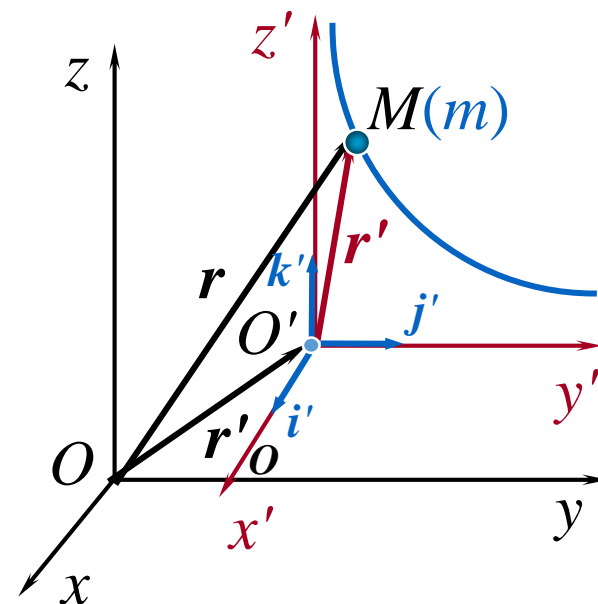
动点 $M$ 在定系和动系中的矢径分别用 $r$ 和 $r'$ 表示。

有关系式

$$r = r_{o'} + r' = r_{o'} + x'i' + y'j' + z'k'$$

在定系中把式对时间 $t$ 求二阶导数，有

$$a_a = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r_{o'}}{dt^2} + \frac{d^2 x'}{dt^2} i' + \frac{d^2 y'}{dt^2} j' + \frac{d^2 z'}{dt^2} k'$$



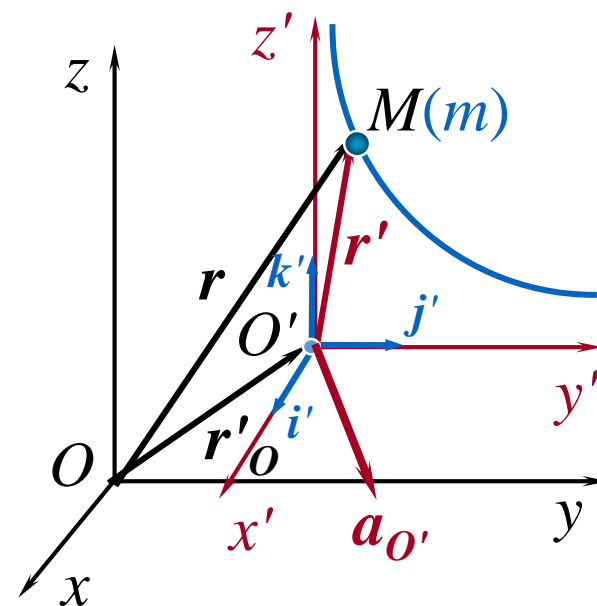


$$a_a = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}_{o'}}{dt^2} + \frac{d^2 x'}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \mathbf{k}'$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_{o'}}{dt^2} = \mathbf{a}_{o'}$$

 $\mathbf{a}_e$ 
 $\mathbf{a}_r$ 

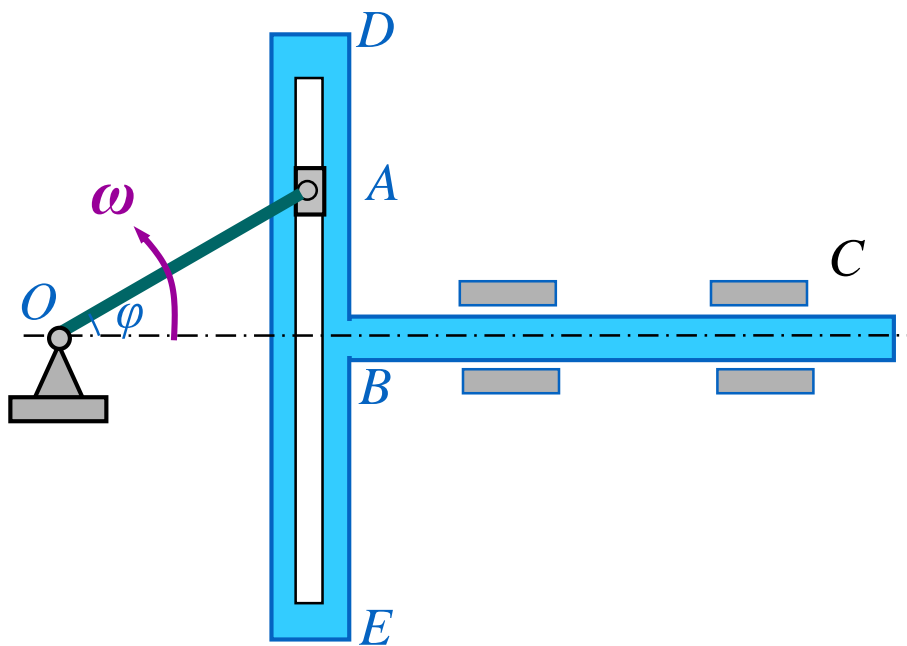
$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r$$



**加速度合成定理**——牵连运动为平移时，点的绝对加速度等于牵连加速度、相对加速度的矢量和。



**例题1** 曲柄 $OA$ 绕固定轴 $O$ 转动，T形杆 $BC$ 沿水平方向往复平动，如图所示。铰接在曲柄 $A$ 端的滑块，可在T形杆的铅直槽 $DE$ 内滑动。设曲柄以角速度 $\omega$ 作匀角速转动， $OA=r$ ，试求杆 $BC$  的加速度。





解： 1. 选择动点，动系与定系。

动点 - 滑块A。

动系 -  $Bx'y'$ ，固连于T形杆。

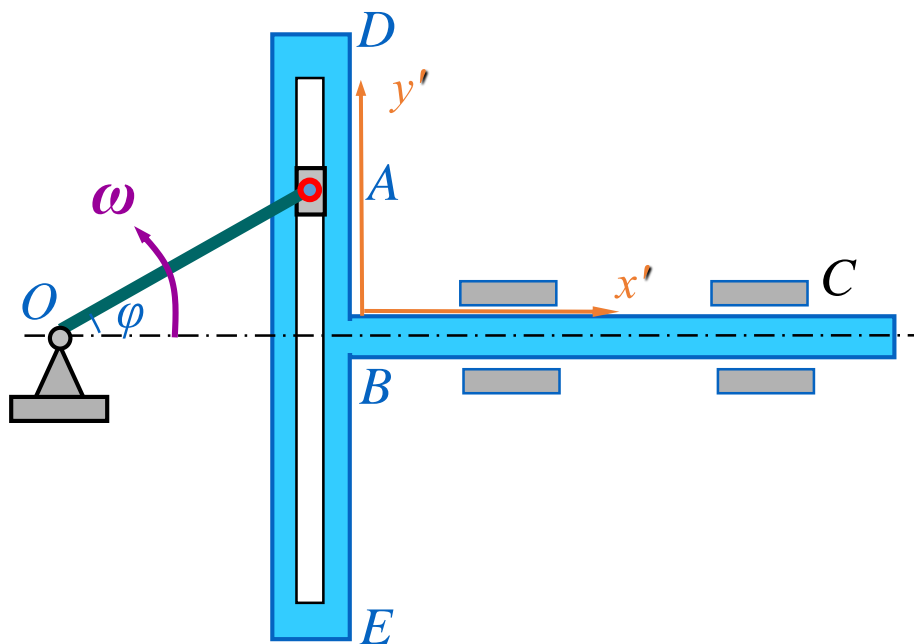
定系 - 固连于机座。

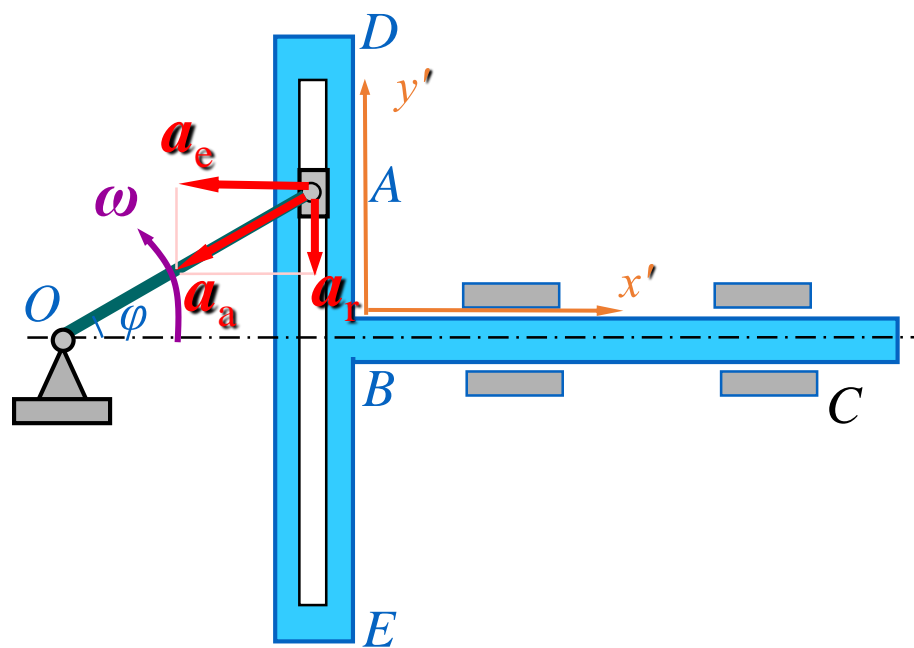
2. 运动分析。

绝对运动 - 以O为圆心的圆周运动。

相对运动 - 沿槽CD的直线运动。

牵连运动 - T形杆BC沿水平方向平动。





## 3. 加速度分析。

**绝对加速度** $a_a$  :  $a_a = OA \omega^2$  ,

沿着  $OA$  , 指向  $O$ 。

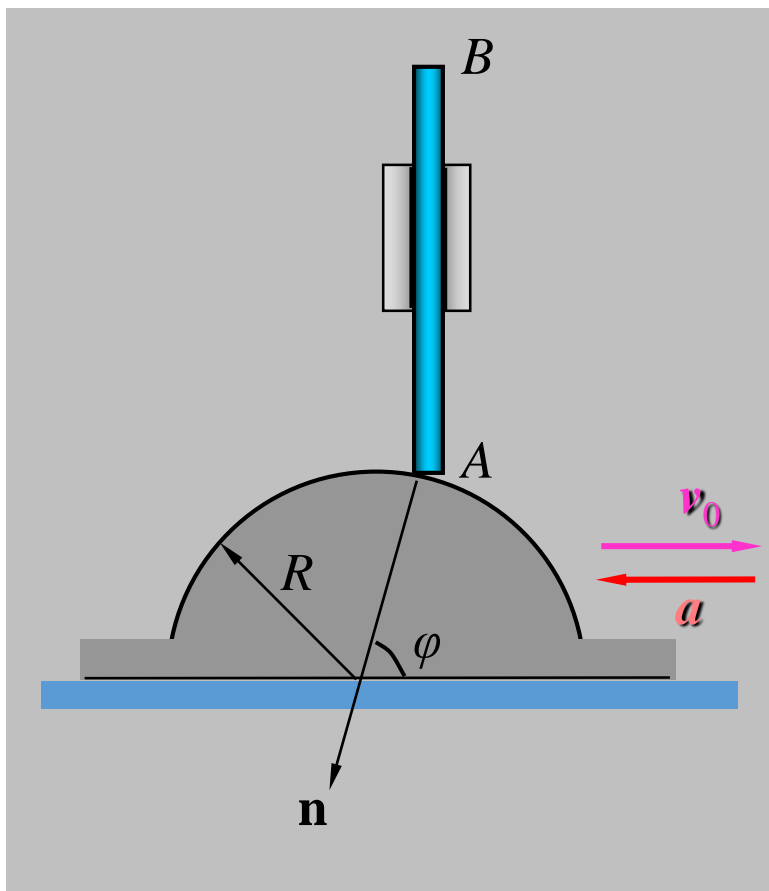
**牵连加速度** $a_e$  : 大小未知 , 为所要求的量 , 沿水平方向。

**相对加速度** $a_r$  : 大小未知 , 方向沿铅直槽  $DE$ 。

应用加速度合成定理

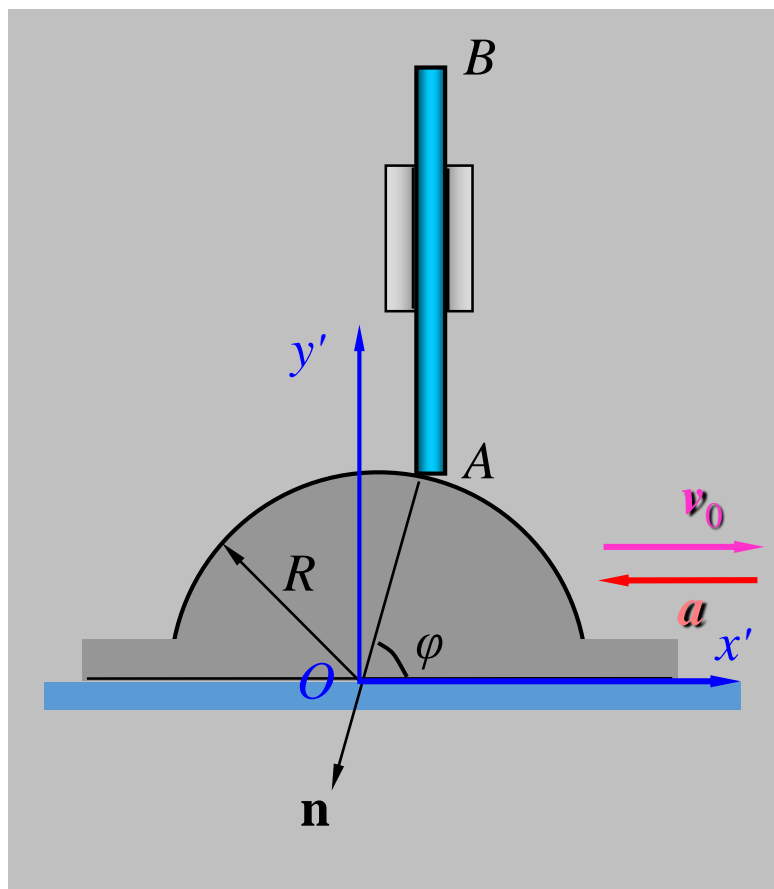
$$a_a = a_e + a_r$$

得杆  $BC$  的加速度  $a_{BC} = a_e = a_a \cos \varphi = r \omega^2 \cos \varphi$



**例题2** 凸轮在水平面上向右作减速运动，如图所示。设凸轮半径为 $R$ ，图示瞬时的速度和加速度分别为 $v$ 和 $a$ 。求杆 $AB$ 在图示位置时的加速度。





解： 1. 选择动点，动系与定系。

动点 -  $AB$ 的端点 $A$ 。

动系 -  $Ox'y'$ ，固连于凸轮。

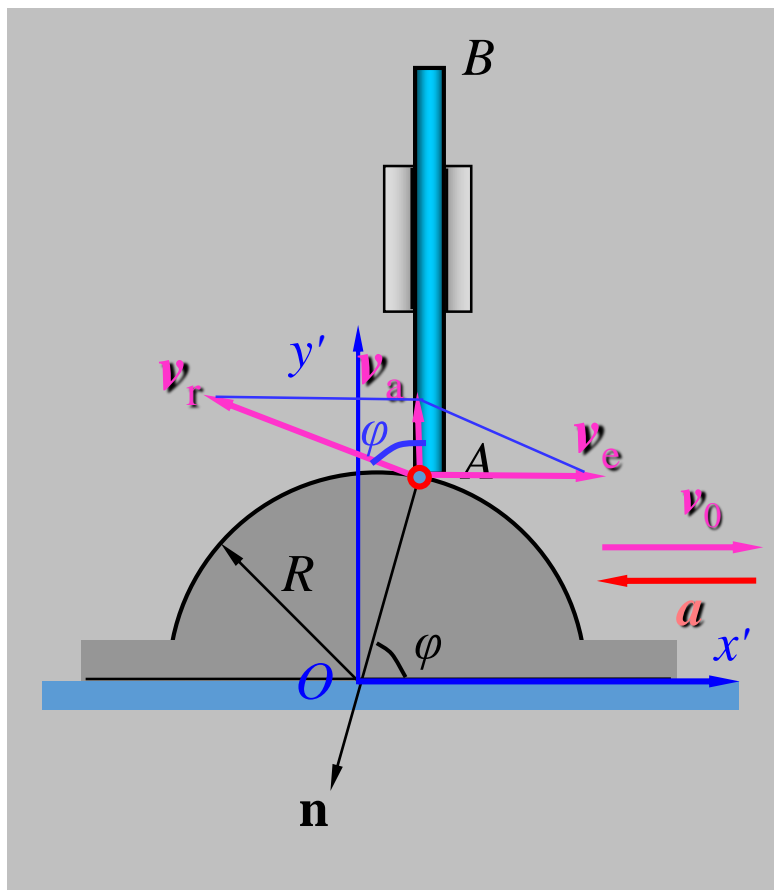
定系 - 固连于机座。

2. 运动分析。

绝对运动 - 直线运动。

相对运动 - 沿凸轮轮廓曲线运动。

牵连运动 - 水平平动。



### 3. 速度分析。

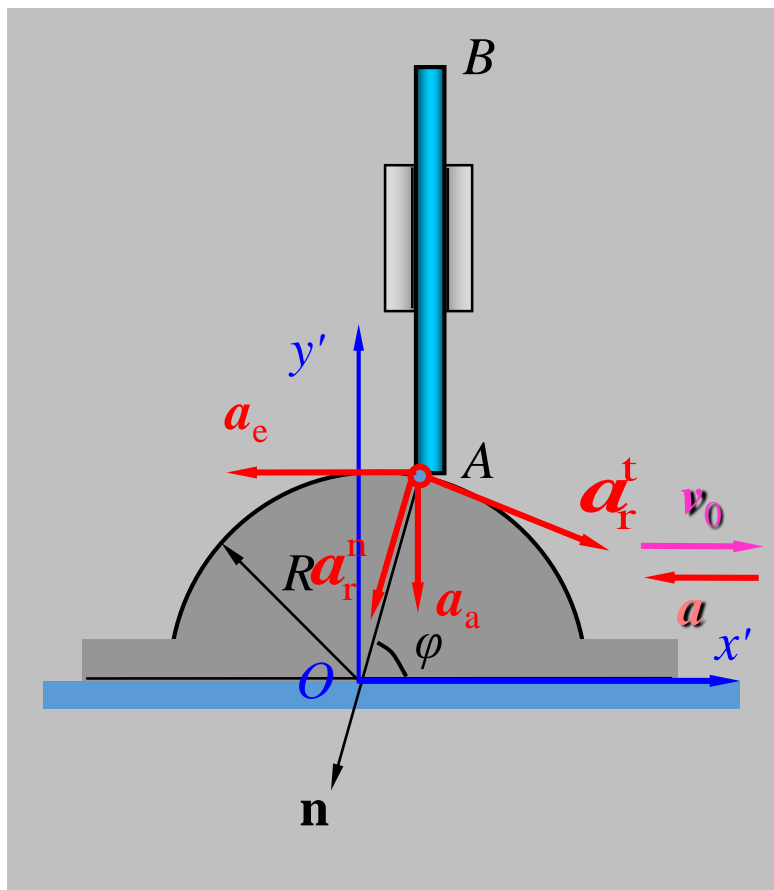
**绝对速度** $v_a$ ：大小未知，方向沿杆 $AB$ 向上。

**牵连速度** $v_e$ ： $v_e = v$ ，方向水平向右。

**相对速度** $v_r$ ：大小未知，方向沿凸轮圆周的切线。

根据速度合成定理  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$

可求得：
$$v_r = \frac{v_e}{\sin \varphi} = \frac{v}{\sin \varphi}$$



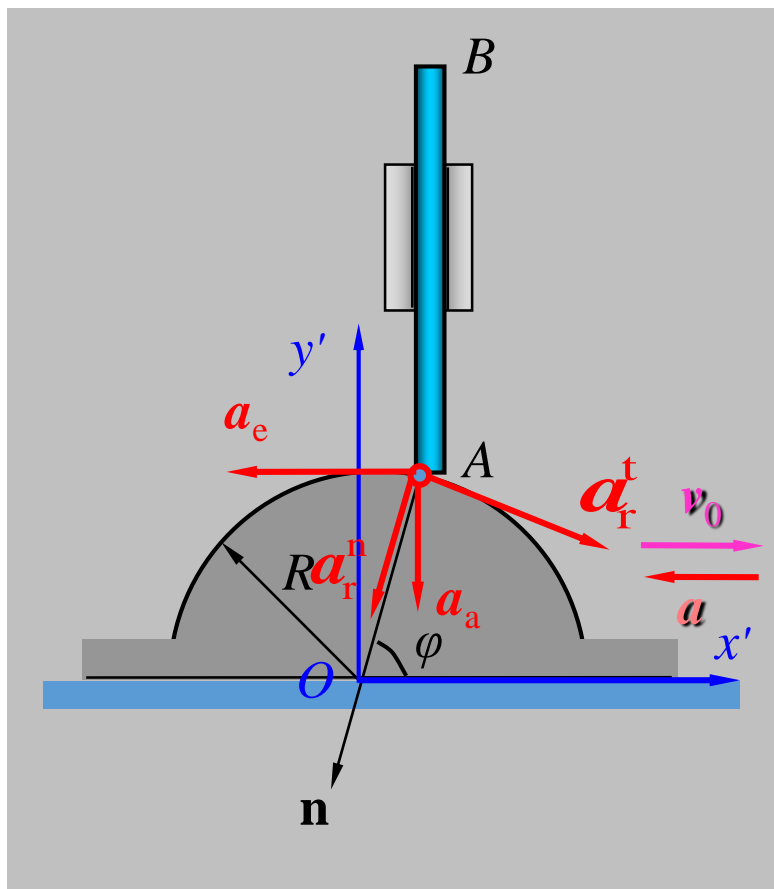
#### 4. 加速度分析。

**绝对加速度 $a_a$** ：大小未知，为所要求的量，方向沿直线 $AB$ 。

**牵连加速度 $a_e$** ： $a_e = a$ ，沿水平方向。

**相对加速度切向分量 $a_r^t$** ：大小未知，垂直于 $OA$ ，假设指向右下。

**相对加速度法向分量 $a_r^n$** ： $a_r^n = v_r^2 / R$ ，沿着 $OA$ ，指向 $O$ 。



根据加速度合成定理

$$a_a = a_e + a_r^t + a_r^n$$

上式投影到法线  $n$  上, 得

$$a_a \sin \varphi = a_e \cos \varphi + a_r^n$$

解得杆  $AB$  在图示位置时的加速度

$$\begin{aligned} a_a &= \frac{1}{\sin \varphi} \left( a \cos \varphi + \frac{v^2}{R \sin^2 \varphi} \right) \\ &= a \cot \varphi + \frac{v^2}{R \sin^3 \varphi} \end{aligned}$$



# 谢谢！