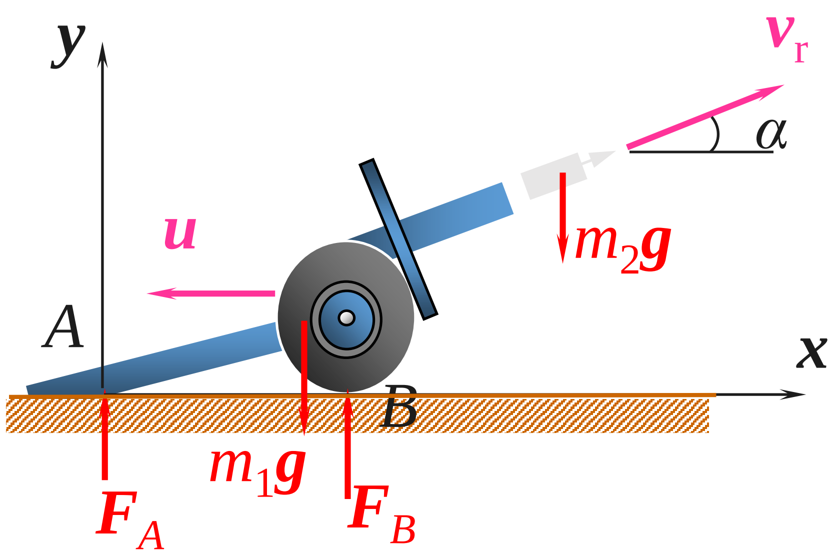
12.2 动量定理和冲量定理

12.2 动量定理和冲量定理

例题 1 火炮（包括炮车与炮筒）的质量是 m_1，炮弹的质量是 m_2，炮弹相对炮车的发射速度是 v_r，炮筒对水平面的仰角是 α（图a）。设火炮放在光滑水平面上，且炮筒与炮车相固连，试求火炮的后坐速度和炮弹的发射速度。



(a)

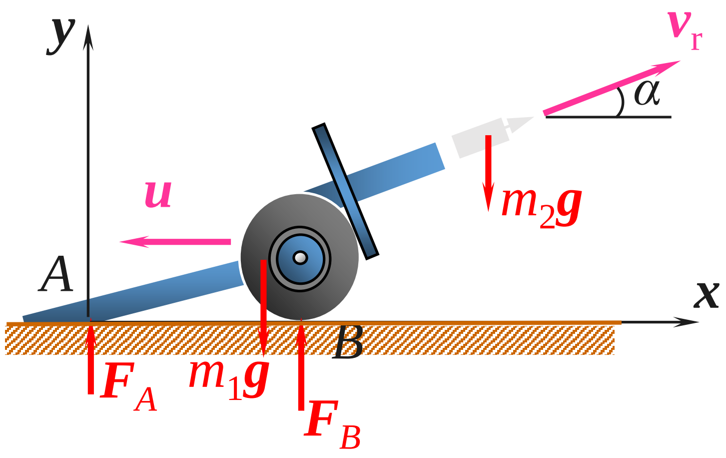
解: 取火炮和炮弹（包括炸药）这个系统作为研究对象。

设火炮的反座速度是 u，炮弹的发射速度是 v，对水平面的仰角是 θ（图b）。

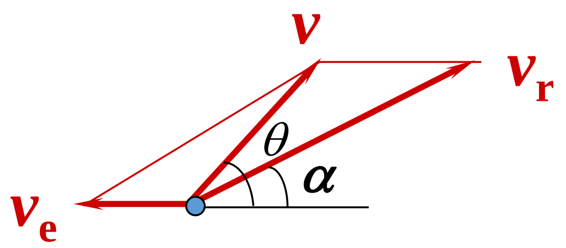
炸药（其质量略去不计）的爆炸力是内力，作用在系统上的外力在水平轴 x 的投影都是零，即有 $\sum F_x = 0$。

可见，系统的动量在轴 x 上的投影守恒，考虑到初始瞬时系统处于静止，即有 $p_{ox} = 0$，于是有

$$p_x = m_2 v\cos\theta - m_1 u = 0$$



(a)



(b)

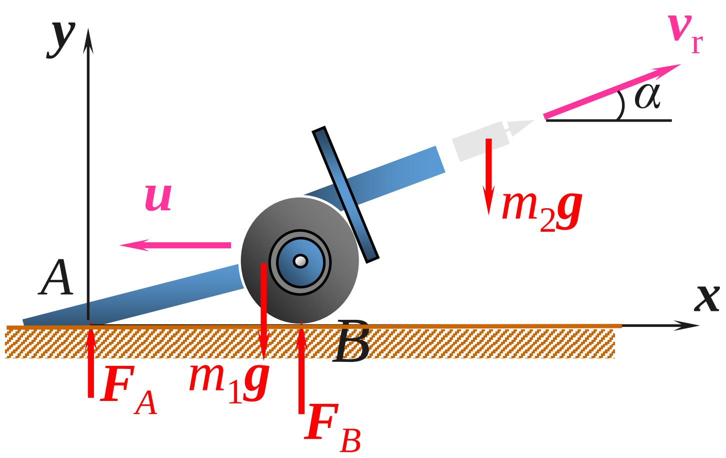
$$p_x = m_2 v\cos\theta - m_1 u = 0$$

另一方面，对于炮弹应用速度合成定理，可得

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

考虑到 $v_e = u$，**并将上式投影到轴** x **和** y **上，就得到**

$$v\cos\theta = v_r\cos\alpha - u \quad , \quad v\sin\theta = v_r\sin\alpha$$

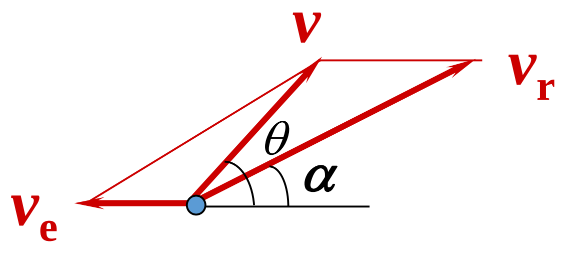


联立求解上列三个方程，即得

$$u = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_r \cos\theta$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{(2m_1 + m_2)m_2}{(m_1 + m_2)^2}\cos^2\alpha} \cdot v_r$$

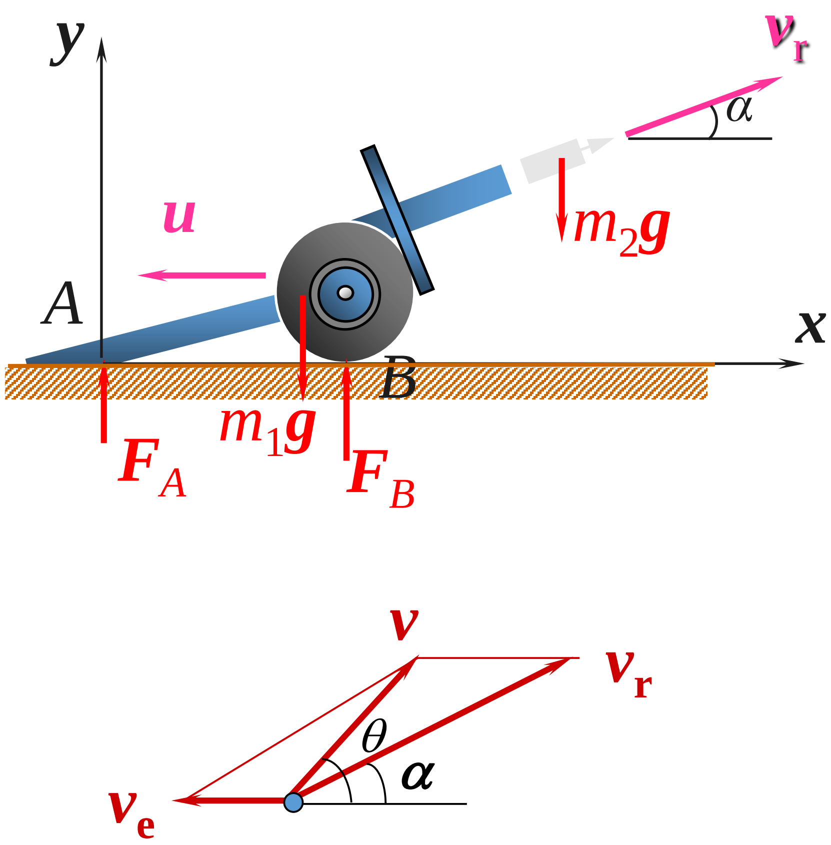
$$\tan\theta = (1 + \frac{m_2}{m_1})\tan\alpha$$



(b)

讨论

$$\tan\theta = \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\tan\alpha$$

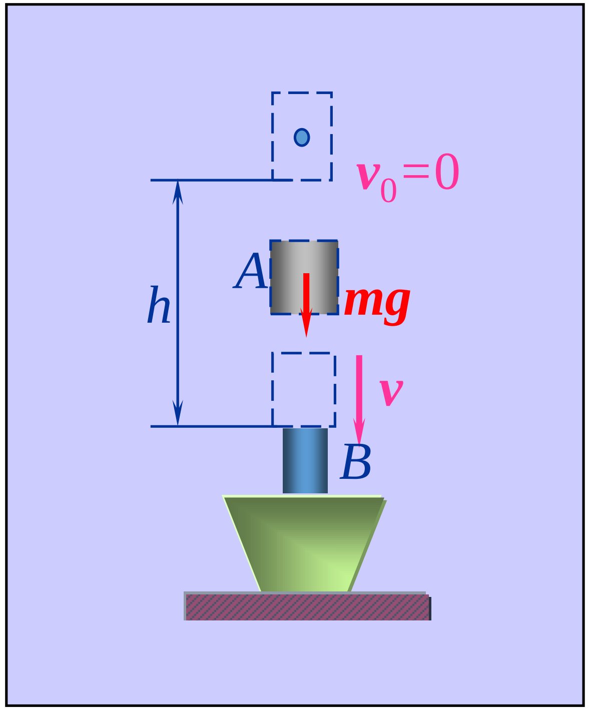


(b)

由上式可见，v与v_r方向不同，$\theta > \alpha$。

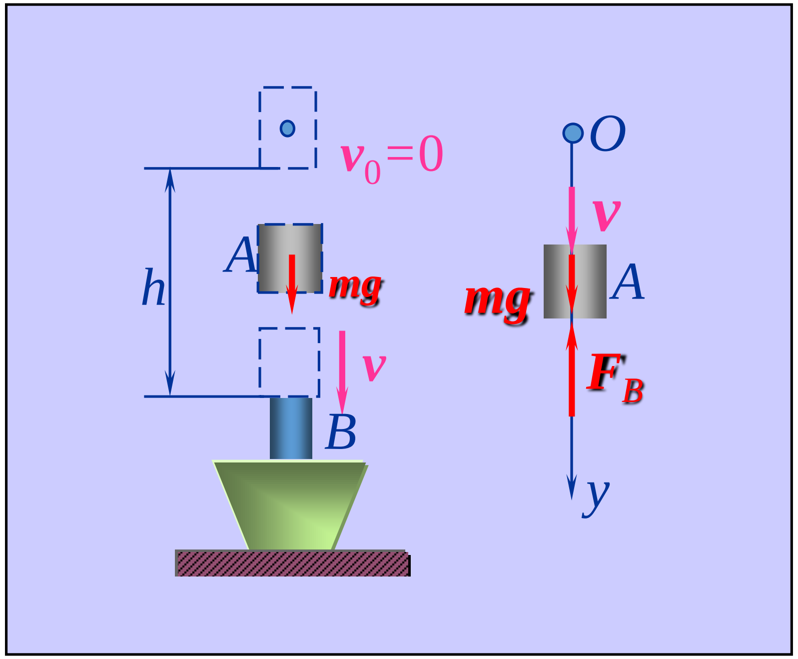
当$m_1 >> m_2$时，$\theta \approx \alpha$。但在军舰或车上时，应该考虑修正量 m_2/m_1。

例题 2 锻锤 A 的质量 $m=3\ 000\ \text{kg}$，从高度 $h=1.45\ \text{m}$ 处自由下落到锻件 B 上。假设锻锤由接触锻件到最大变形的时间 $t=0.01\text{s}$，求锻锤作用在锻件上的平均碰撞力。



解： 取锻锤作为研究对象。它从高度 h 自由下落到锻件产生最大变形的过程，可分成两个阶段。

（1）碰撞前的自由下落阶段。



锻锤只受重力作用，由动能定理

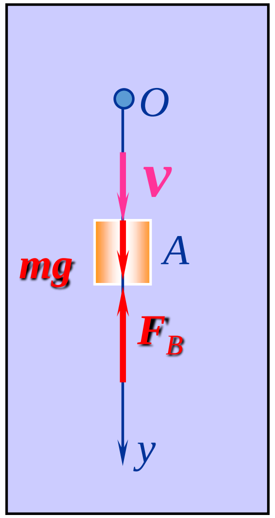
$$\frac{1}{2}mv^2-0=mgh$$

从而求得碰撞前锻锤速度的大小

$$v=\sqrt{2gh}$$

（2）锻锤由开始接触锻件到最大变形阶段。

该阶段锻锤受重力mg和锻件对锻锤的碰撞力（设其平均值为F_B）的作用。



写出冲量定理在铅直轴y上的投影式，并注意锻件变形最大时锻锤速度为零，有 $0 - mv = mgt - F_B t$

从而求得 $$F_B = \frac{mv}{t} + mg$$

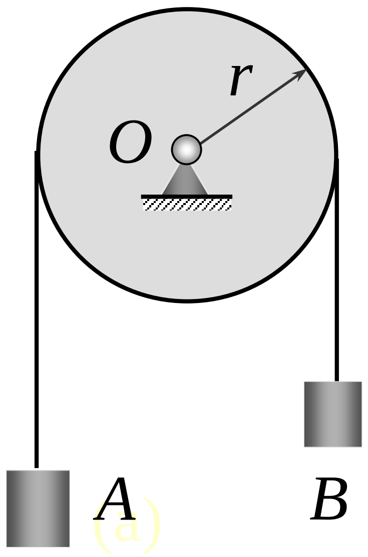
代入求出的速度v和已知数据，即得

$$F_B = 16.3 \times 10^2 \text{ kN}$$

$$mg = 30 \text{ kN}$$

$$F_B >> mg$$

例题 3 柔绳绕过一定滑轮，绳的两端系有质量各为m_1 和m_2 的物块A和B，且$m_1 > m_2$。定滑轮的质量为m_3，并可视为半径等于r 的匀质圆盘。如果绳与滑轮之间不打滑，不计绳重和轴承摩擦，求轴承O 的约束力。



解： 取整个系统为研究对象，根据质点系的动量定理的投影式有

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=F_{Ox} \qquad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=F_{Oy}-(m_1+m_2+m_3)g \qquad (2)$$

式中

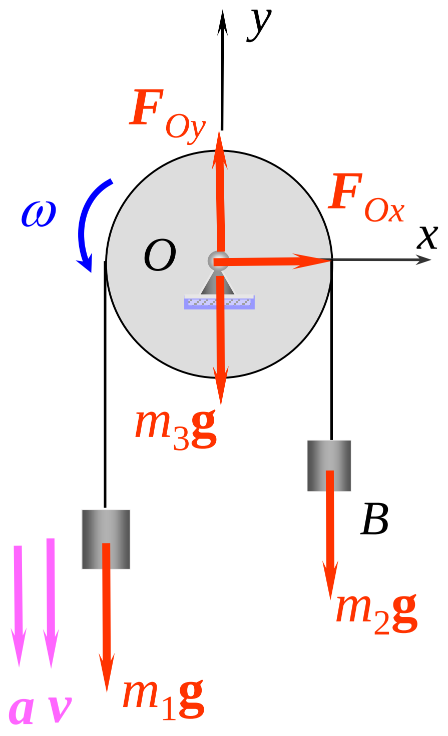
$$p_x=0 \qquad (3)$$

$$p_y=-m_1v+m_2v=-(m_1-m_2)v \qquad (4)$$

将式（3）和式（4）分别代入式（1）和式（2），得

$$F_{Ox}=0 \qquad (5)$$

$$F_{Oy}=(m_1+m_2+m_3)g-(m_1-m_2)a \qquad (6)$$



12.2 动量定理和冲量定理

式（6）中物块的加速度 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

可由微分形式的动能定理

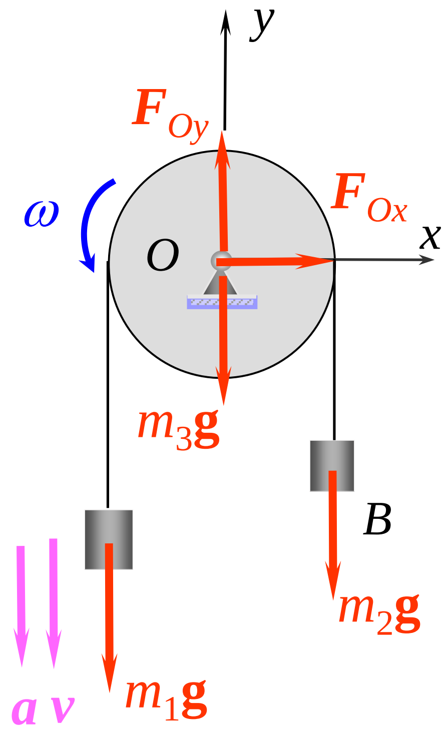
$$\mathrm{d}T=\sum \mathrm{d}'W \qquad (6)$$

求得

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{2(m_1-m_2)}{2(m_1+m_2)+m_3}$$

最后求得轴承O的约束力

$$F_O=F_{Oy}=(m_1+m_2+m_3)g-\frac{2(m_1-m_2)^2}{2(m_1+m_2)+m_3}g$$



谢谢！