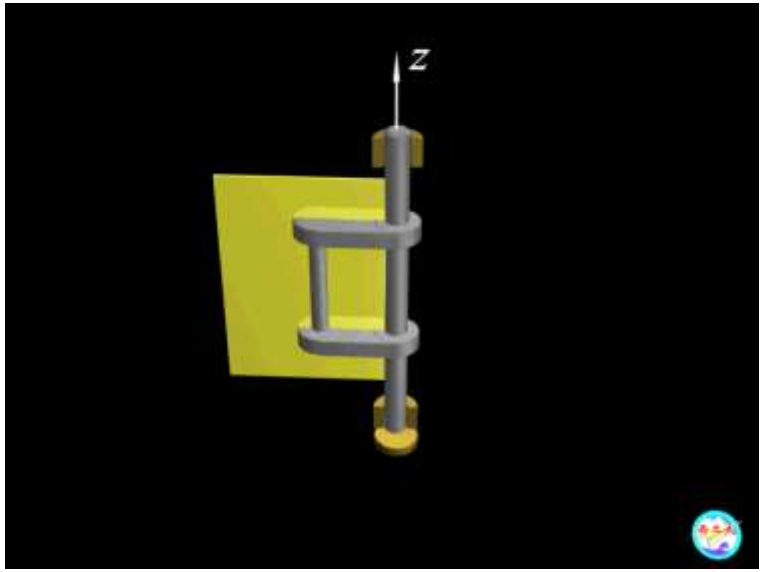
7.3 定轴转动刚体内各点的速度和加速度

1. 定轴转动刚体内各点的速度

刚体内在平行于转轴z的任一直线上，各点具有相等的速度和相等的加速度，又各点的轨迹为同样大小的圆周，其圆心都在转轴z上。



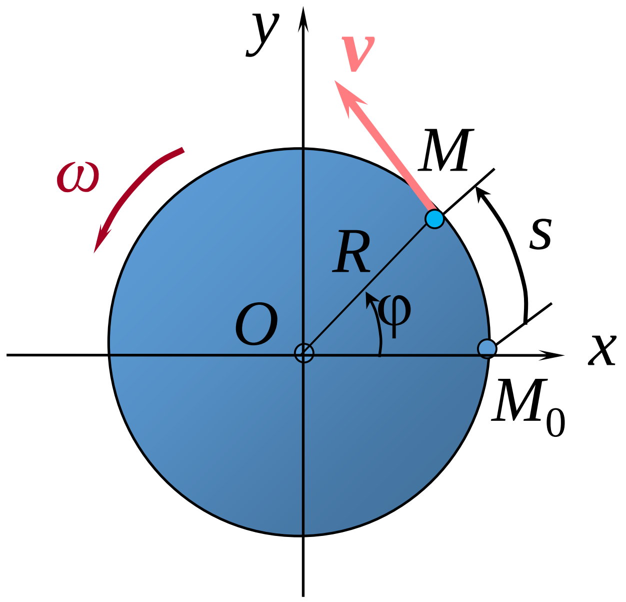
由于点 M 绕点 O 作圆周运动，用自然法表示。点 M 的弧坐标 $s=R\varphi$，式中的 s 和 φ 取相同的正负号。

对时间求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

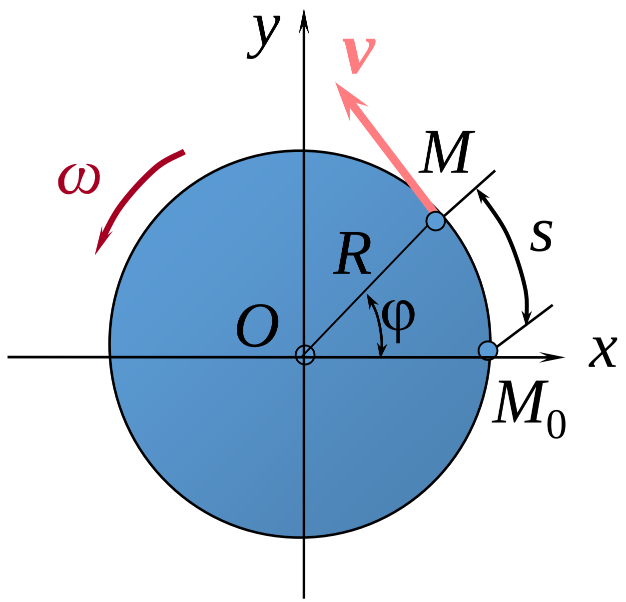
考虑到 $\quad \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v,\quad \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega$

故有 $\quad v=R\omega$



$$\boxed{v = R\omega}$$

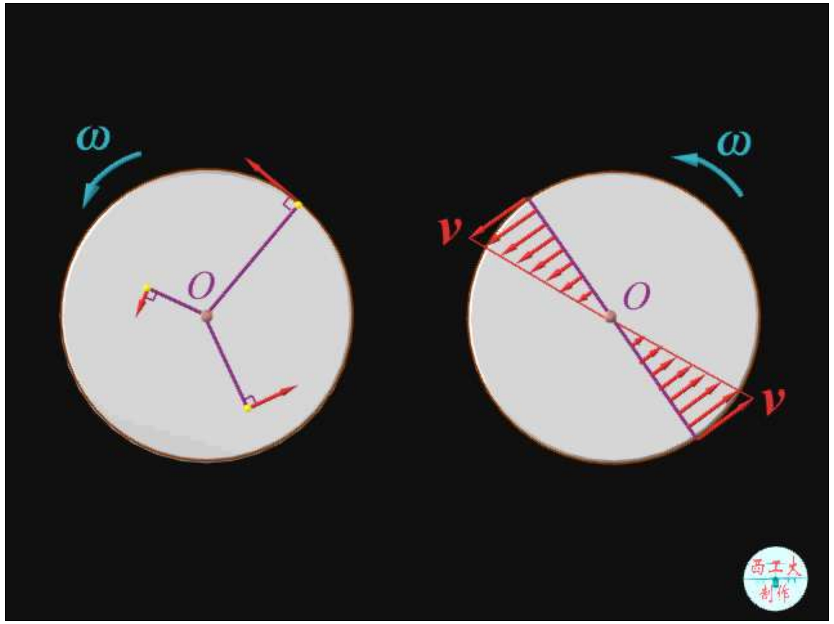
即,**定轴转动刚体内任一点的速度,等于该点的转动半径与刚体角速度的乘积。**

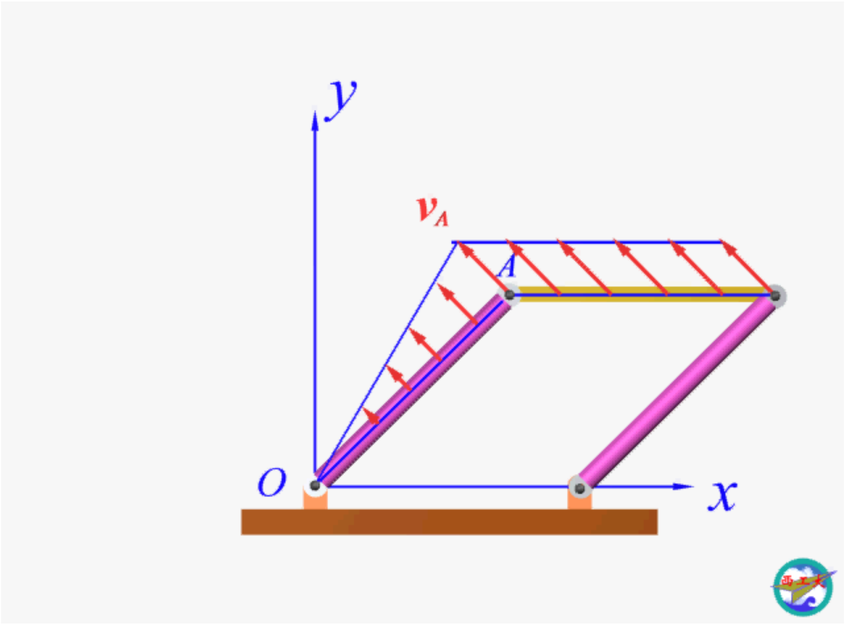


式中v与ω两者正负相同。故速度是沿着点M的轨迹圆周的切线，指向转动前进的一方。

$$\boxed{v = R\omega}$$

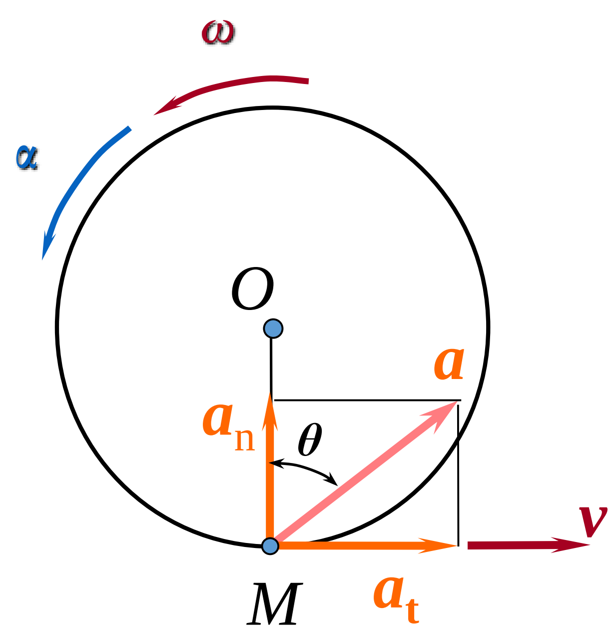
在任一瞬时，定轴转动刚体内各点的速度与各点的转动半径成正比。平面上各点的速度分布如图。





2. 定轴转动刚体内各点的加速度

点M的加速度包含两部分：切向分量和法向分量。



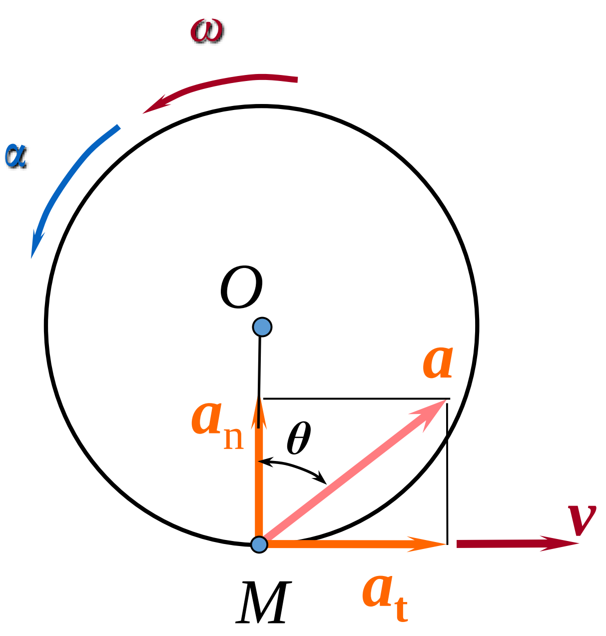
切向加速度

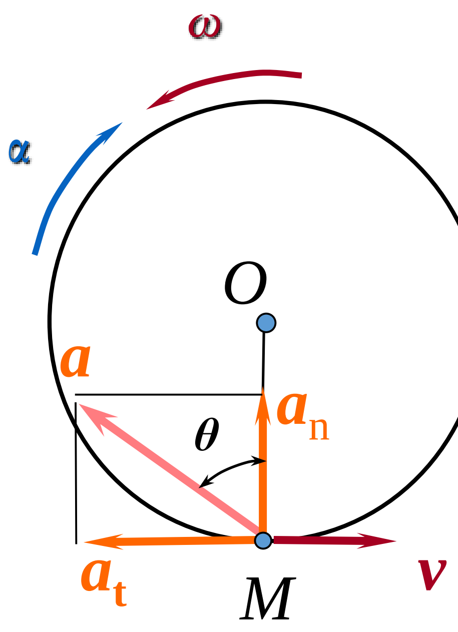
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R\frac{d\omega}{dt}$$

或

$$a_t = R\alpha$$

即，**定轴转动刚体内任一点的切向加速度，等于该点的转动半径与刚体角加速度的乘积**。式中 α 和a_t具有相同的正负号。

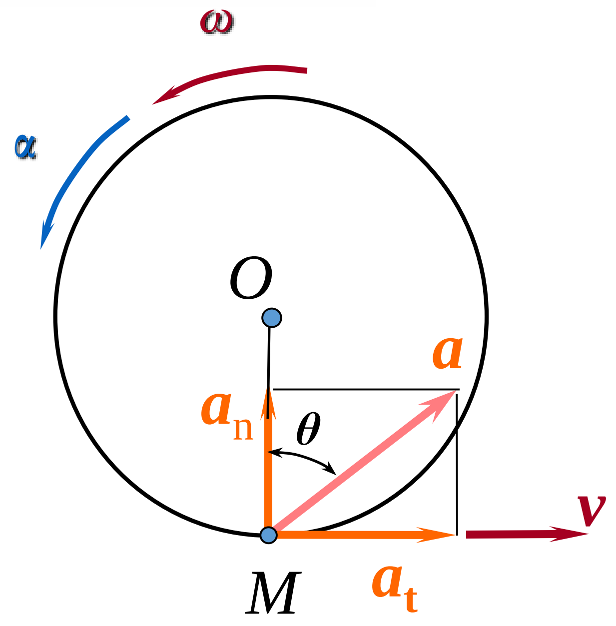




不难看出，当 α 和 ω 正负相同时，切向加速度a_t和v速度有相同的指向，这相当于加速转动；当 α 和 ω 正负不相同时，则a_t与v有相反的指向，这相当于减速转动。

法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{R}$$



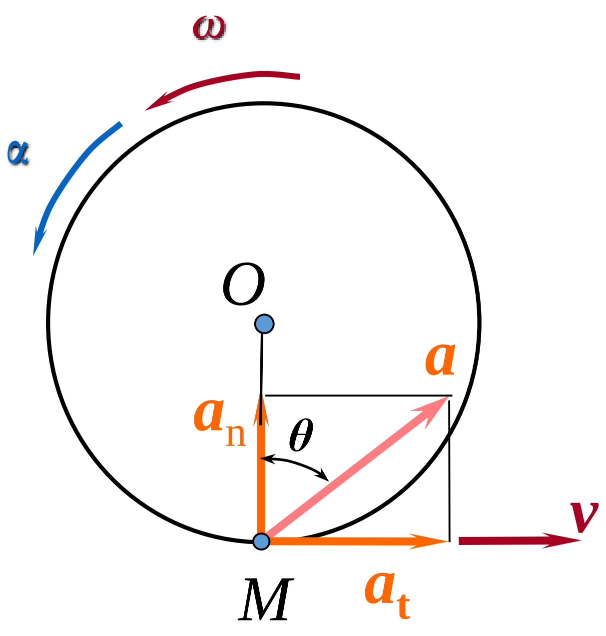
或 $a_n = R\omega^2$

即，定轴转动刚体内任一点的法向加速度，等于该点转动半径与刚体角速度平方的乘积。法向加速a_n恒向轨迹的曲率中心即圆心O，因此也称为**向心加速度**。

总加速度

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2\alpha^2 + R^2\omega^4}$$

$$a = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$



它与半径MO的夹角θ（恒取正值）可按下式求出

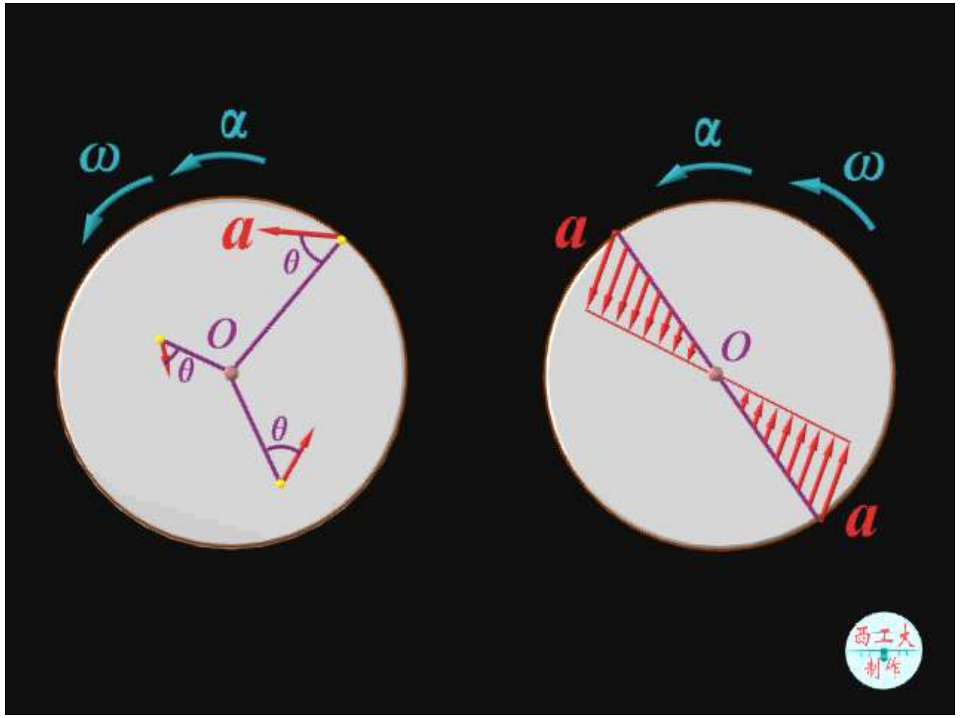
$$\tan\theta = \frac{|a_t|}{a_n} = \frac{R|\alpha|}{R\omega^2} \quad \text{或} \quad \tan\theta = \frac{|\alpha|}{\omega^2}$$

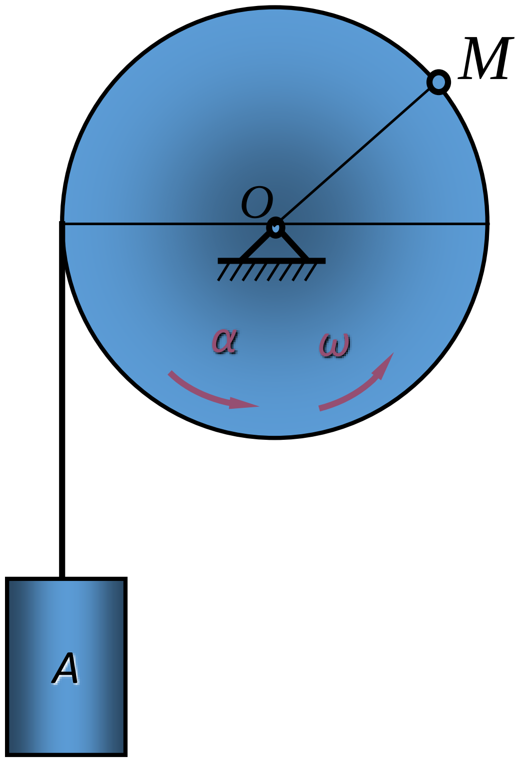
显然，当刚体作加速转动时，加速度θ偏向转动前进的一方；当减速转动时，加速度a偏向相反的一方；当匀速转动时θ指向轴心O。

$$a = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}\,, \qquad \tan\theta = \frac{|\alpha|}{\omega^2}$$

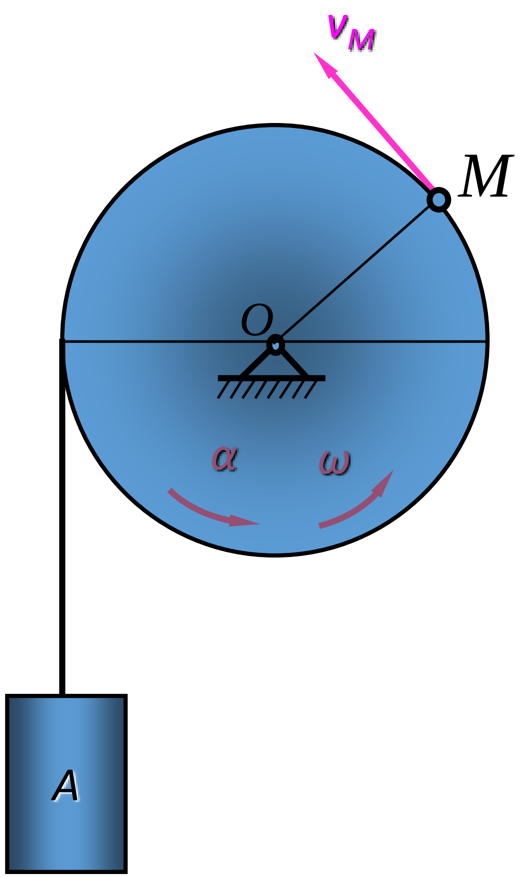
由上式可见，在任一瞬时，定轴转动刚体内各点的切向加速度、法向加速度和总加速的大小都与各点的转动半径成正比。

但是，总加速度a与转动半径所成的偏角，却与转动半径无关，即**在任一瞬时，定轴转动刚体内各点的加速度对其转动半径的偏角θ 都相同**；平面上各点加速度的分布如图。





例题1 滑轮的半径r=0.2 m，可绕水平轴O转动，轮缘上缠有不可伸长的细绳，绳的一端挂有物体A（如图）。已知滑轮绕轴O的转动规律$\varphi=0.15t^3$，其中t以s计，φ以rad计。试求t=2 s时轮缘上M点和物体A的速度和加速度。



解： 首先根据滑轮的转动规律，求得它的角速度和角加速度

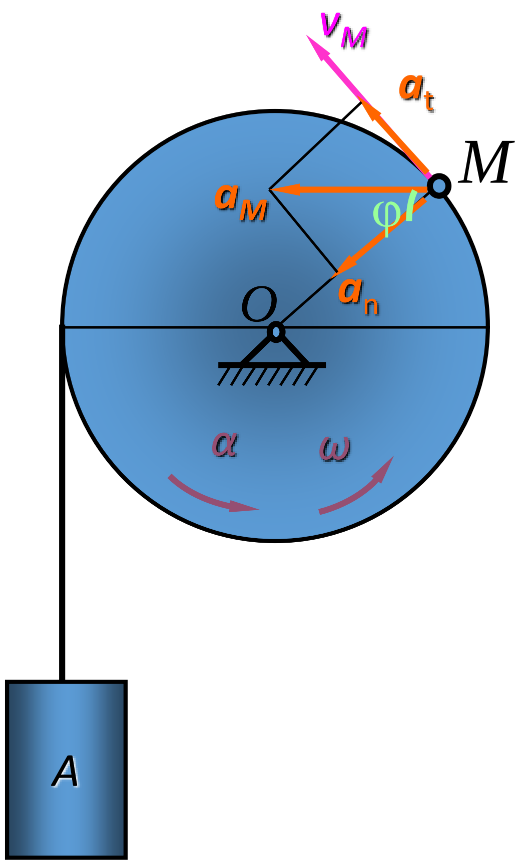
$$\omega = \dot{\varphi} = 0.45t^2 \qquad \alpha = \ddot{\varphi} = 0.9t$$

代入 t =2 s，得

$$\omega = 1.8 \ \ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}, \qquad \alpha = 1.8 \ \ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$$

轮缘上 M 点上在 t =2 s 时的速度为

$$v_M = r\omega = 0.36 \ \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$



加速度的两个分量

$$a_t = r\alpha = 0.36 \quad \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

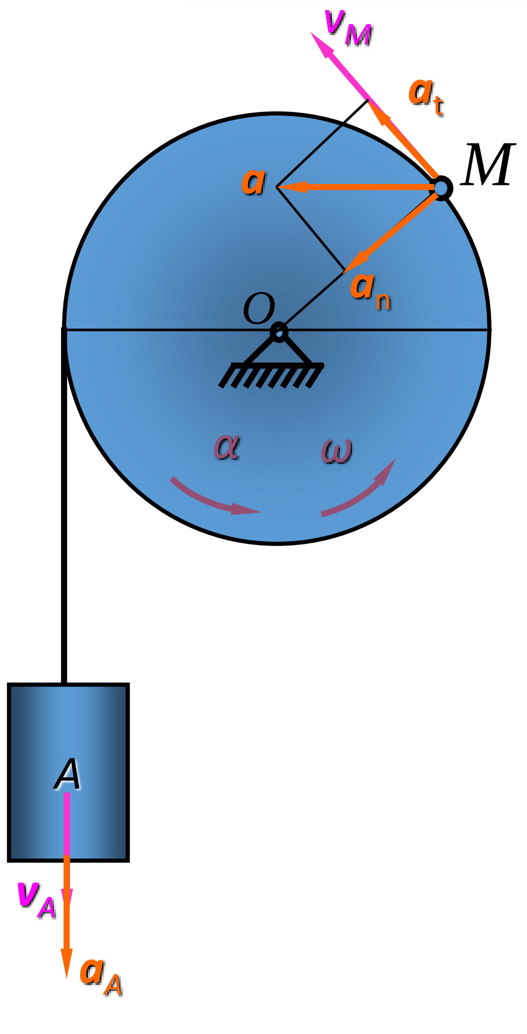
$$a_n = r\omega^2 = 0.648 \quad \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

总加速度 a_M 的大小和方向

$$a_M = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 0.741 \quad \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\alpha}{\omega^2} = 0.556,$$

$$\varphi = 29^\circ$$



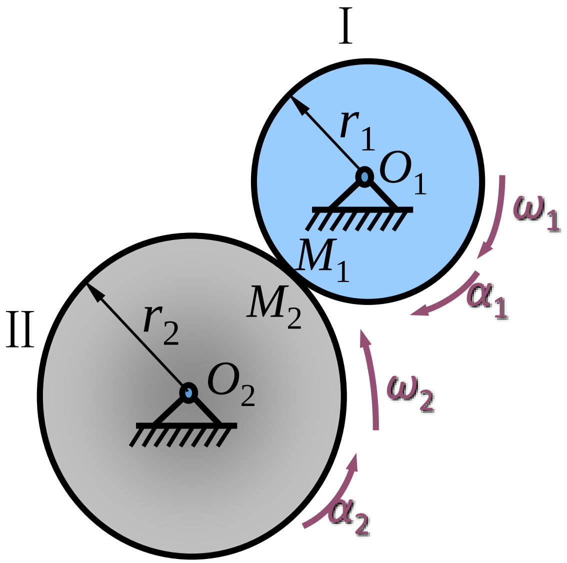
因为物体A与轮缘上M点的运动不同，前者作直线平移，而后者随滑轮作圆周运动，因此，两者的速度和加速度都不完全相同。

由于细绳不能伸长，物体A与M点的速度大小相等，A的加速度与M点切向加速度的大小也相等，于是有

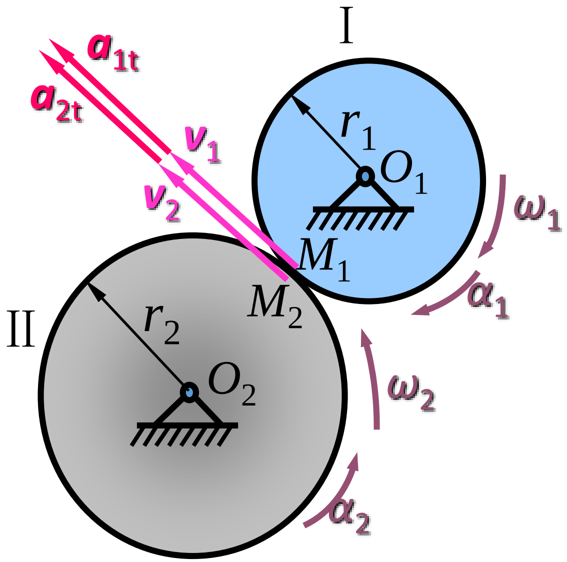
$$v_A = v_M = 0.36 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$a_A = a_t = 0.36 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

它们的方向铅直向下。



例题2 图示为一对外啮合的圆柱齿轮，分别绕固定轴O_1和O_2转动，两齿轮的节圆半径分别为r_1和r_2。已知某瞬时主动轮 I 的角速度为ω_1，角加速度为α_1，试求该瞬时从动轮 II 的角速度ω_2和角加速度α_2。为简便起见，本例的ω_1，ω_2，α_1，α_2都代表绝对值。



解： 齿轮传动可简化为两轮以节圆相切并在切点处无相对滑动，因而两轮的啮合点M_1与M_2恒具有相同的速度与切向加速度。即

$$v_1 = v_2, \quad a_{1t} = a_{2t}$$

或

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2, \quad r_1\alpha_1 = r_2\alpha_2$$

因而从动轮的角速度和角加速度分别为

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1, \quad \alpha_2 = \frac{r_1}{r_2}\alpha_1$$

显然，ω_2，α_2的转向分别与ω_1，α_1相反。

传动比为 $$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

谢谢！