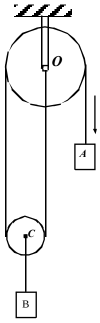
例题12-7 在图示机构中，重物A和B重分别为P_1和P_2，若物体A以加速度a下降，滑轮和绳子的质量均忽略不计，试求轴承O处的反力。



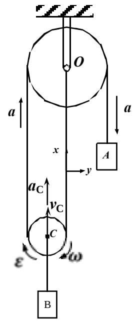
解： 先求物体B的加速度，即点C的加速度。为此，设动滑轮的半径为r，角速度为ω，角加速度为ε。

轮心C的速度： $v_C = \omega \cdot r$

轮心C的加速度： $a_C = \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{d(\omega r)}{dt} = \varepsilon \cdot r$

以C为基点，分析轮缘上D点的加速度：

$$a_D = a_C + a_{DC}^t + a_{DC}^n$$



解： 先求物体B的加速度，即点C的加速度。为此，设动滑轮的半径为r，角速度为ω，角加速度为ε。

轮心C的速度： $v_C = \omega \cdot r$

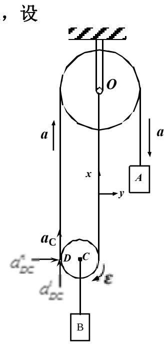
轮心C的加速度： $a_C = \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{d(\omega r)}{dt} = \varepsilon \cdot r$

以C为基点，分析轮缘上D点的加速度：

$$a_D = a_C + a_{DC}^t + a_{DC}^n$$

$$a_D = a;\quad a_{DC}^t = \varepsilon \cdot r;\quad a_{DC}^n = \omega^2 \cdot r$$

由此求得点C的加速度： $a_C = a_{DC}^t = \dfrac{a}{2}$



解： 先求物体B的加速度，即点C的加速度。为此，设动滑轮的半径为r，角速度为ω，角加速度为ε。

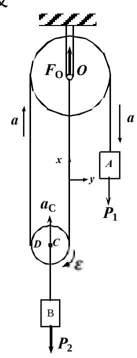
物体A的加速度： $a_A = a$

物体B的加速度： $a_B = \dfrac{1}{2}a$

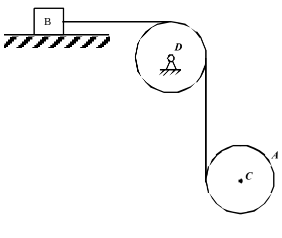
以整体为研究对象，受力分析如图，应用质心运动定理，有

$$-\frac{P_1}{g}a + \frac{P_2}{g}\cdot\frac{a}{2} = F_O - P_1 - P_2$$

由此求得支座O处的约束力为： $F_O = P_1 + P_2 + \dfrac{P_2 - 2P_1}{2g}$



例题12-8 跨过定滑轮D的细绳，一端缠绕在均质圆柱体A上，另一端系在光滑水平面上的物体B上，如图所示。已知圆柱A的半径为r，质量为m_1；物块B的质量为m_2。试求物体B和圆柱质心C的加速度以及绳索的拉力。滑轮D和细绳的质量以及轴承摩擦忽略不计。



解：设物体B的速度为v_B，加速度为a_B；轮心C的速度为v_C，加速度为a_C。并设圆柱的角速度为ω，角加速度为ε。

以C为动点，动系固连在绳索上，则牵连运动为平移，牵连速度为v_B。

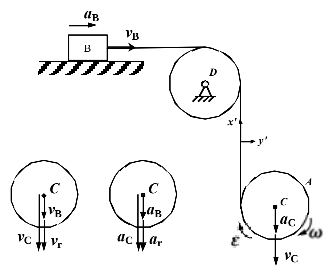
$$v_C = v_B + v_r = v_B + \omega r$$

同理，加速度分析如下：

$$a_C = a_B + a_r$$

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \varepsilon r$$

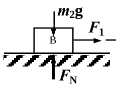
因此， $a_C = a_B + \varepsilon r$



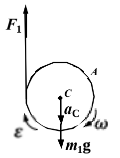
§12-5 刚体的平面运动微分方程 例题12-8

$$a_C = a_B + a_r = a_B + \varepsilon r$$

取分离体B：$F_1 = m_2 a_B$



取分离体A：
$$\begin{cases} F_1 \cdot r = \dfrac{1}{2} m_1 r^2 \cdot \varepsilon = m_2 a_B \cdot r \\ m_1 g - F_1 = m_1 a_C \Rightarrow m_1 g - m_2 a_B = m_1 a_C \end{cases}$$



解得：

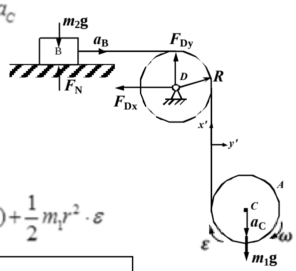
$$a_B = \frac{m_1}{m_1 + 3m_2} g;\quad a_C = \frac{m_1 - 4m_2}{m_1 + 3m_2} g;\quad F_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + 3m_2} g$$

§12-5 刚体的平面运动微分方程 例题12-8

$$a_C = a_B + \varepsilon r;\quad F_1 = m_2 a_B$$

$$F_1 \cdot r = \frac{1}{2} m_1 r^2 \cdot \varepsilon;\quad m_1 g - F_1 = m_1 a_C$$

应用对于定轴D的动量矩定理：



$$\frac{dL_D}{dt} = M_D(\bar{F}_i^{(e)})$$

$$M_D = m_1 g \cdot (R + r)$$

得到：$L_D = m_2 v_B \cdot R + m_1 v_C \cdot (R + r) + \dfrac{1}{2} m_1 r^2 \cdot \varepsilon$

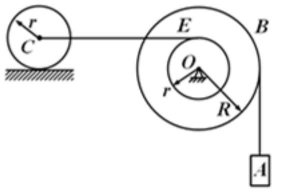
$$\boxed{m_2 a_B \cdot R + m_1 a_C \cdot (R + r) + \frac{1}{2} m_1 r^2 \cdot \varepsilon = m_1 g \cdot (R + r)}$$

§12-5 刚体的平面运动微分方程 例题12-9

例题12-9 图示机构中，匀质圆轮C、鼓轮B和物体A的质量均为m；圆轮C在水平面上作纯滚动，半径为r；鼓轮B的内径为r，外径$R=\sqrt{2}r$，对中心轴回转半径假定为r。绳的CE段水平，系统从静止开始运动。试求：

(1) 物块A下落距离s时轮心C的速度和加速度；

(2) 绳索CE段的拉力和支座O处的约束反力。

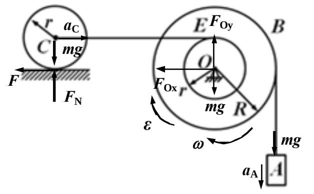


§12-5 刚体的平面运动微分方程 例题12-9

解：设物体A的速度为v_A，加速度为a_A；轮心C的速度为v_C，加速度为a_C。并设鼓轮的角速度为ω，角加速度为ε。

$$\varepsilon = a_A / R = a_A / \sqrt{2} r;\quad a_C = \varepsilon r = a_A / \sqrt{2}$$

应用对于定轴O的动量矩定理：



$$\frac{dL_O}{dt} = M_O(\bar{F}_i^{(e)})$$

$$L_O = m v_C \cdot r + \frac{1}{2} m r^2 \frac{v_C}{r} + m v_A \cdot R + m r^2 \cdot \omega$$

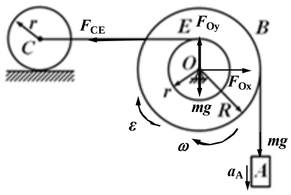
$$M_O = mg \cdot R = mg \cdot \sqrt{2} r$$

得到：$m a_C \cdot r + \dfrac{1}{2} m r a_C + m a_A \cdot \sqrt{2} r + m r^2 \cdot \varepsilon = mg \cdot \sqrt{2} r$ $\quad \boxed{a_C = \dfrac{2\sqrt{2}}{9} g}$

§12-5 刚体的平面运动微分方程 例题12-9

解：求绳索CE段的拉力。取鼓轮和物体A为研究对象，受力分析如图。

应用对于定轴O的动量矩定理：



$$\frac{dL_O}{dt} = M_O(\bar{F}_i^{(e)})$$

$$L_O = m v_A \cdot R + m r^2 \cdot \omega$$

$$M_O = mg \cdot R - F_{CE} r$$

代入定理表达式，得到：

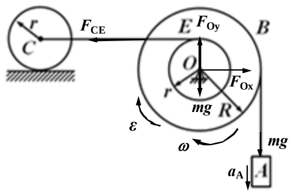
$$m a_A \cdot \sqrt{2} r + m r^2 \cdot \varepsilon = m \sqrt{2} a_C \cdot \sqrt{2} r + m r^2 \cdot \frac{a_C}{r} = mg \cdot \sqrt{2} r - F_{CE} r$$

整理，计算出：$F_{CE} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} mg$

§12-5 刚体的平面运动微分方程 例题12-9

解：求支座O处的约束力。取鼓轮和物体A为研究对象，受力分析如图。

应用质心运动定理：



$$\sum m_i \bar{a}_{Ci} = \sum \bar{F}_k^{(e)}$$

在x方向上，有：

$$F_{Ox} - F_{CE} = 0 \Rightarrow F_{Ox} = \frac{\sqrt{2}}{3} mg$$

在y方向上，有：

$$-m a_A = F_{Oy} - mg - mg$$

$$\Rightarrow F_{Oy} = \frac{14}{9} mg$$

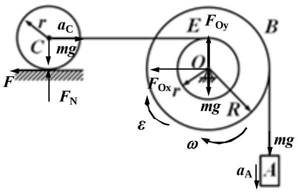
如何求轮心C的速度？

§12-5 刚体的平面运动微分方程

例题12-9

解：求轮心C的速度。先求物体A的速度。

已知： $a_A=\sqrt{2}a_C=\dfrac{4}{9}g$



因此，物体A作匀加速运动。下落距离s满足：

$$v_A^2-0=2a_As$$

求出物体A由静止下落距离s时的速度：

$$v_A=\sqrt{2a_As}=\sqrt{2\cdot\frac{4}{9}g}=\frac{2\sqrt{2gs}}{3}$$

轮心C的速度为： $v_C=\dfrac{v_A}{R}r=\dfrac{v_A}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{gs}$

注意：此题可由动能定理先求出v_C，进一步可方便地求出a_C。

谢谢使用