第二章 随机变量及其分布

随机变量

概率分布函数

离散型随机变量

连续型随机变量

随机变量的函数及其分布

在前面的学习中,我们用字母**A**、**B**、**C...**表示事件，并视之为样本空间**S**的子集；针对等可能概型，主要研究了用排列组合手段计算事件的概率。

为了深入研究随机事件及其概率，本章将引入随机变量的概念，以便采用数学方法来分析和研究随机事件的概率及其性质，更深刻地揭示随机现象的统计规律。

§1 随机变量 Random Variable

一、随机变量概念的引入

1、有些试验结果本身与数值有关(本身就是一个数)

例如：掷一颗骰子面上出现的点数；

每天进入教学西楼的人数；

9月份西安的最高温度；

一个灯泡的寿命；等。

2、在有些试验中，试验结果看来与数值无关，但我们可以引进一个变量来表示它的各种结果，也就是说，把试验结果数值化。

例如: 掷硬币试验，考察其正面和反面朝上的情况。

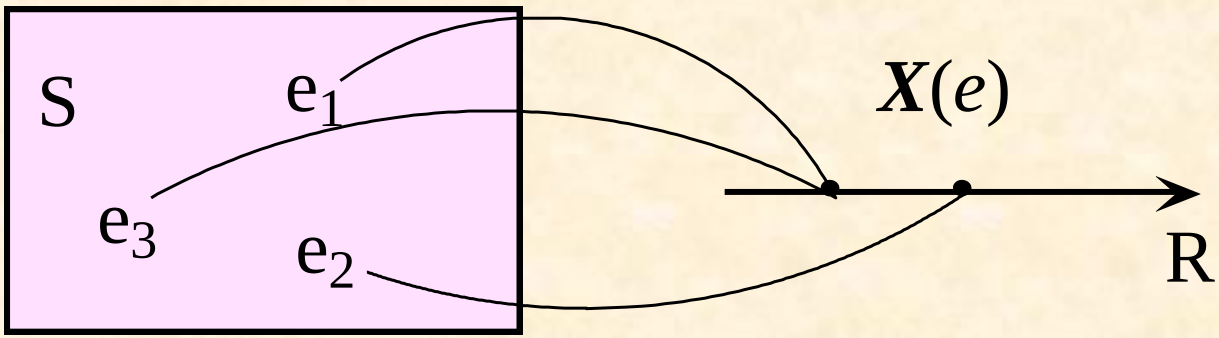
规定: 用 1表示“正面朝上”，

用 0示“反面朝上”。

结 论 不管试验结果是否与数值有关，我们都可以通过引入某个变量，使试验结果与数建立起对应关系。

这种对应关系在数学上理解为定义了一种

实值单值函数: 其<u>定义域为样本空间S</u>，<u>值域为实数</u>。



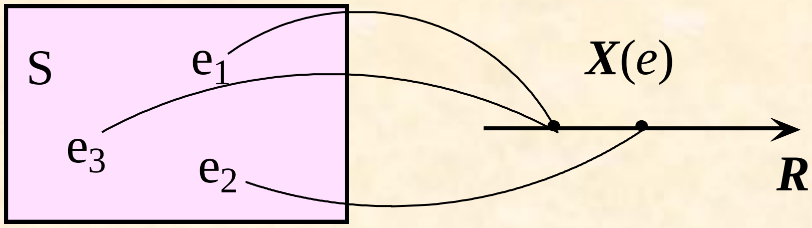
这就引出所谓的随机变量。

二、定义

设随机试验E的样本空间为S={e}，$X=X(e)$是定义在样本空间S上的**实值单值函数**，则称 $X=X(e)$为**随机变量**（简记为：**RV**）。

实值 $X(e)$取值为实数

单值 S中每一个样本点e都有一个实数$X(e)$与之对应



RV通常用大写字母 X、Y、Z、W、N 等表示，而RV的取值则采用小写字母 x、y、z、w、n 等表示。

说 明

随机变量也是一个变量，但与普通变量有本质区别：

1. RV的取值随试验结果的不同而改变，由于试验结果的出现具有随机性，故$X(e)$的取值具有随机性。

2. RV $X(e)$是定义在样本空间S上的，而试验结果的出现具有一定的概率，因此，随机变量取每个值和每个确定范围内的值也有一定的概率。

三、引入随机变量的意义

随机变量概念的产生是概率论发展史上的重大事件。引入随机变量后，**随机试验中的各种事件，就可以通过随机变量的关系式表达出来**。因此，对随机现象统计规律的研究，就由对事件及事件概率的研究转化为**对随机变量及其取值规律的研究**，也方便用数学分析（微积分）的方法对随机试验进行深入的研究，研究结果更丰富、更深刻。

事件及事件的概率 → RV及其取值规律

一般，若L是实数集合，将X 在L上取值写为$\{X\in L\}$，它表示事件$\{e \mid X(e)\in L\}$。

例：单位时间内某电话交换台收到的呼叫次数用X 表示，X 为RV，取值为{0, 1, 2, 3，…}

事件A={收到不少于1次呼叫}

B={没有收到呼叫}

上述事件可用RV表示为

$A=\{X\geqslant 1\}$　　　　$B=\{X=0\}$

则　$P(A)=P\{X\geqslant 1\}$　　　$P(B)=P\{X=0\}$

四、随机变量的分类

按取值方式不同划分为：

- 离散型RV
- 非离散型RV
  - 连续型RV
  - 其它

本章将着重针对一维离散型、连续型RV来讨论。

§2 离散型随机变量及其分布律

一、离散型RV的定义

若随机变量X 的所有可能取值是有限多个或可列无限多个，则称X为离散型随机变量 **Discrete RV**。

例如：

1. 抛一枚硬币，用X表示硬币出现的正反面情况； 

2. 一小时内某电话交换台收到的呼叫次数Y； 

3. 灯泡的寿命T。 

二、离散型RV的分布律

定 义 设 x_k (k=1,2, …) 是离散型随机变量 X 所有可能取值，其中

$$P\{X = x_k\} = p_k,\quad k=1,2,\ldots$$

满足：

① **非负性** $p_k \geq 0, k = 1, 2, \cdots$

② **规范性** $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

用这两条判断一个函数是否是分布律

称 p_k (k=1,2, …)为**离散型随机变量 X 的分布律**，也称**概率质量函数** **Probability Mass Function**。

离散型随机变量分布律也可以用列表法表示

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$ 或

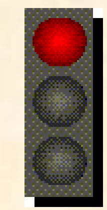
X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

可以想象为：**概率1以一定的规律分布在X的各个可能取值上**，这就是“**分布律**”叫法的由来。

说　明

　　离散型随机变量可完全由其分布律来刻划，即离散型随机变量可完全由其所有可能取值以及取这些值的概率唯一确定。

例1（P32例1）设一汽车在开往目的地的路上需经过四盏信号灯，每盏信号灯以1/2的概率允许或禁止汽车通过。以*X*表示该汽车首次停下时它已通过的信号灯盏数(设各信号灯工作是相互独立)，求*X*的分布律。



解：依题意可知，X 可取值分别为 $0,1,2,3,4.$

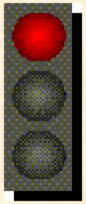
设$\mathbf{A}_i$ = {第i盏信号灯禁止汽车通过}， $i = 1, 2, 3,4,$

p — 每盏信号灯禁止汽车通过的概率,

则 $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_i\right)=p,\quad \mathrm{P}\left(\bar{\mathrm{A}}_i\right)=1-p$

需要求解 $\mathrm{P}\left(X=k\right), k=0,1,2,3,4.$

例1（P32例1） 设一汽车在开往目的地的路上需经过四盏信号灯，每盏信号灯以1/2的概率允许或禁止汽车通过。以X表示该汽车首次停下时它已通过的信号灯盏数（设各信号灯工作是相互独立），求X的分布律。



$A_i=\{$第i盏信号灯禁止汽车通过$\}$， $i=1, 2, 3, 4,$

$$P(X=0)=P(A_1)=p$$

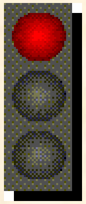
$$P(X=1)=P(\bar{A}_1A_2)\overset{\text{独立}}{=\!=\!=}P(\bar{A}_1)P(A_2)=(1-p)p$$

$$P(X=2)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)=(1-p)^2p$$

$$P(X=3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(A_4)=(1-p)^3p$$

$$P(X=4)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4)=(1-p)^4$$

例1（P32例1） 设一汽车在开往目的地的路上需经过四盏信号灯，每盏信号灯以1/2的概率允许或禁止汽车通过。以*X*表示该汽车首次停下时它已通过的信号灯盏数(设各信号灯工作是相互独立)，求*X*的分布律。



X	0	1	2	3	4
p_k	p	$(1-p)\,p$	$(1-p)^2\,p$	$(1-p)^3\,p$	$(1-p)^4$

将$p = 0.5$代入即可得到的分布律如下：

X	0	1	2	3	4
p_k	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625

例2 设*X*的分布律为

X	-1	1	2
P	**1/3**	***a*** **/2**	**1/6**

求$P\left(0<X\leq 2\right)$?

解：先需要知道*a*? $\because \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, 即$\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+\frac{1}{6}=1 \quad \Rightarrow a=1$

$$P\left(0<X\leq 2\right) = P\left\{(X=1)\cup(X=2)\right\}$$

$$\overset{\text{互斥}}{=\!=\!=} P\left\{X=1\right\}+P\left\{X=2\right\}$$

$$=P(X=1)+P(X=2) = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

三、几种常见离散型RV

1、(0-1)分布 Indicator Probability Distribution

随机变量X只可能取0与1两个值，其分布律为：

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1,(0<p<1)$$

称X 服从参数为p的(0-1)分布或两点分布。

列表法表示为

X	0	1
P	$1-p$	p

应 用 样本空间只有两个样本点的情况都可以用(0−1)分布来描述。如：新生儿性别，产品质量是否合格等.

2、伯努利试验和二项分布

（1）伯努利试验

试验E只有两个可能结果: A及$\bar{A}$ ，则称这样的试验E称为伯努利试验(Bernoulli Trial) 。

设$P(A)=p, (0<p<1), P(\bar{A})=1-p$。

（2）*n*重伯努利试验

将伯努利试验E独立地重复地进行*n*次，则称这一串重复的独立试验为 *n*重伯努利试验。

独立 指各次试验的结果互不影响。

重复 指这*n*次试验中$P(A)=p$ 保持不变。

n重伯努利试验是一种重要的数学模型，应用广泛，是研究最多的模型之一。

例：抛一枚硬币，观察正反面朝上的情况，这是一个伯努利试验；

在相同条件下，独立的抛n次硬币，就是n重伯努利试验。

(3) 二项分布

用X表示 n重伯努利试验中事件A发生的次数，其分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$$

称随机变量X服从参数为n和p 的二项分布(Binomial Distribution)，记为$X\sim b(n,\ p)$。

P(A)=p

易知:

(1) $P(X=k)\geq 0, k=0,1,2,\cdots n;$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n}P(X=k)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=[p+(1-p)]^n=1$

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$$

A在指定的k（$0\le k\le n$）次试验中发生，在其他n-k次

试验中不发生的概率为$P(\overbrace{A\cdots A}^{k}\ \overbrace{\bar{A}\cdots\bar{A}}^{n-k})=p^k(1-p)^{n-k}$

次数	1	2	$3\cdots k$	$k+1$	$k+2$	$\cdots$	n
方式	A	A	$A\cdots A$	$\bar{A}$	$\bar{A}$	$\cdots$	$\bar{A}$
$\vdots$							
方式	$\bar{A}$	A	$A\cdots A$	A	$\bar{A}$	$\cdots$	$\bar{A}$

$\left.\right\} C_n^k$

$$\Rightarrow P\{X=k\}=P\{(\overbrace{A\cdots A}^{k}\ \overbrace{\bar{A}\cdots\bar{A}}^{n-k})\cup(\bar{A}\overbrace{A\cdots A}^{k}\ \overbrace{\bar{A}\cdots\bar{A}}^{n-k-1})\cup\cdots\}$$

$$\overset{\text{互斥}}{=\!=} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

二项分布

$$\mathrm{P}\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$$

二项分布得名由来?

注意到 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 恰好是二项式 $[p+(1-p)]^n$ 展开式中出现 p^k 的项，故称随机变量X服从参数为 n和p的二项分布。

特别地：当n=1，$b(1,\ p)$也就是(0–1)分布

这说明：(0–1)分布是二项分布的一个特例

例3（P35 例2） 从一级品率为0.2的一大批电子管中抽取20只进行测试，问这20只电子管中恰有k只为一级品的概率。

解：思路：这是不放回抽样，故不满足试验独立性要求。但所抽取的20只电子管相对于一大批来说是小数，因此可以当作放回抽样。

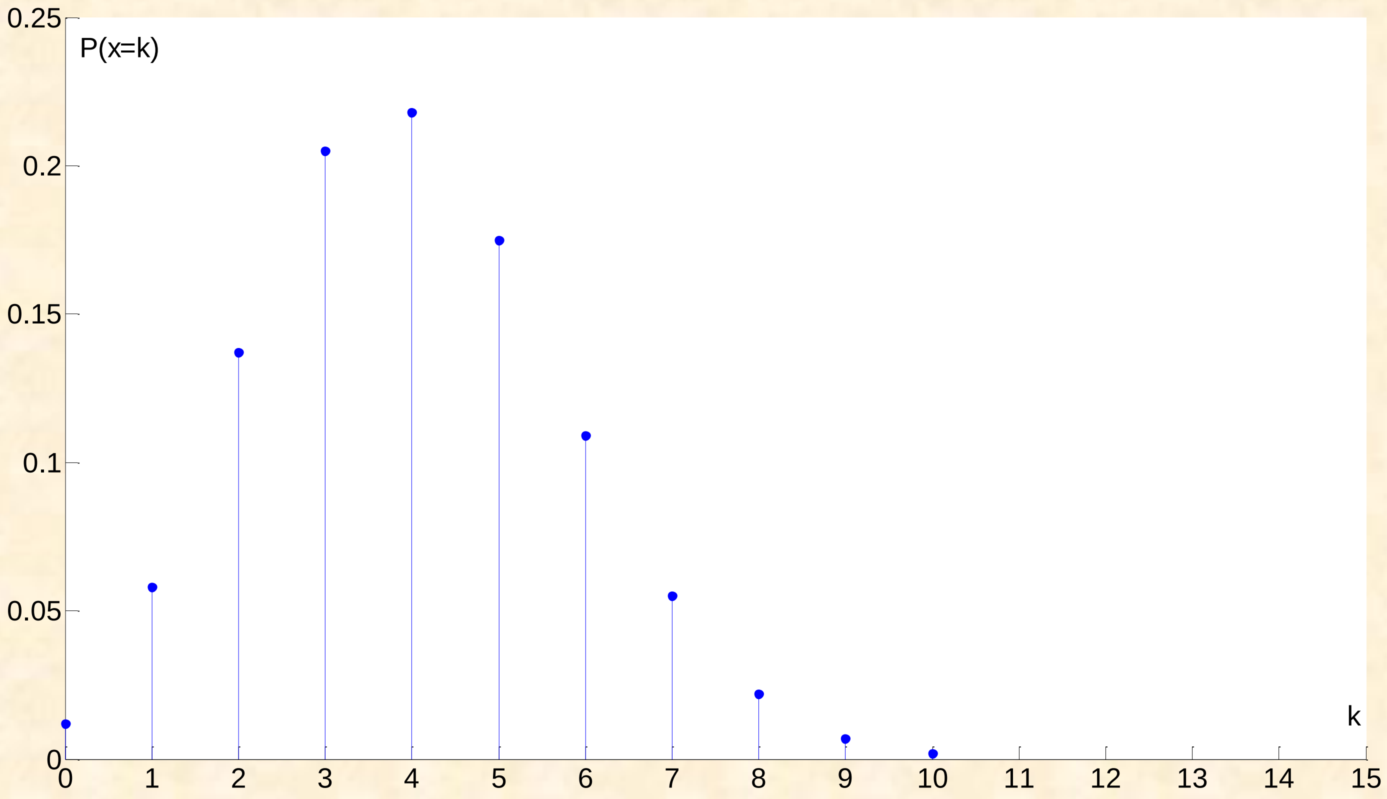
测试一只电子管是否为一级品的试验只有两种结果，

因此测试20只电子管相当于20重伯努利试验。

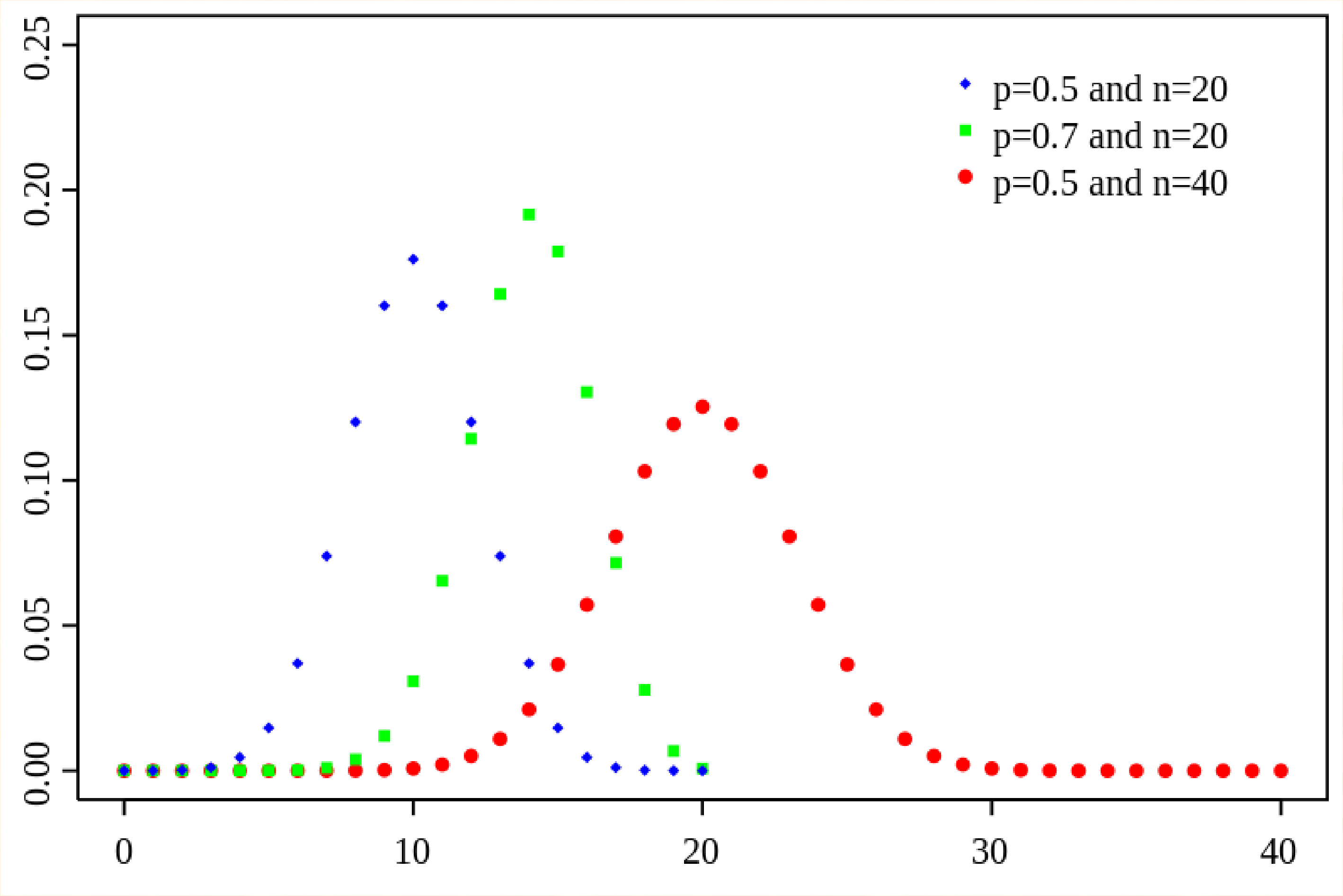
设X={20只电子管中一级品的次数}，则$X \sim b(20,\ 0.2)$

$$P\{X=k\}=C_{20}^{k}0.2^{k}(1-0.2)^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,20$$

为了对$b(20, 0.2)$的分布律有一个直观的了解，可以绘制其分布律图（如下）。从图中可看出：$P\{X=k\}$先随k的增大而增大，直至达最大值(本例中$k=4$时达Max)，随后单调减少。一般，$b(n, p)$的分布律都具有此规律。



下图给出了几个二项分布的分布律。



3、泊松分布

设RV X 所以可能取值为0,1,2, …,而取各个值的概率为

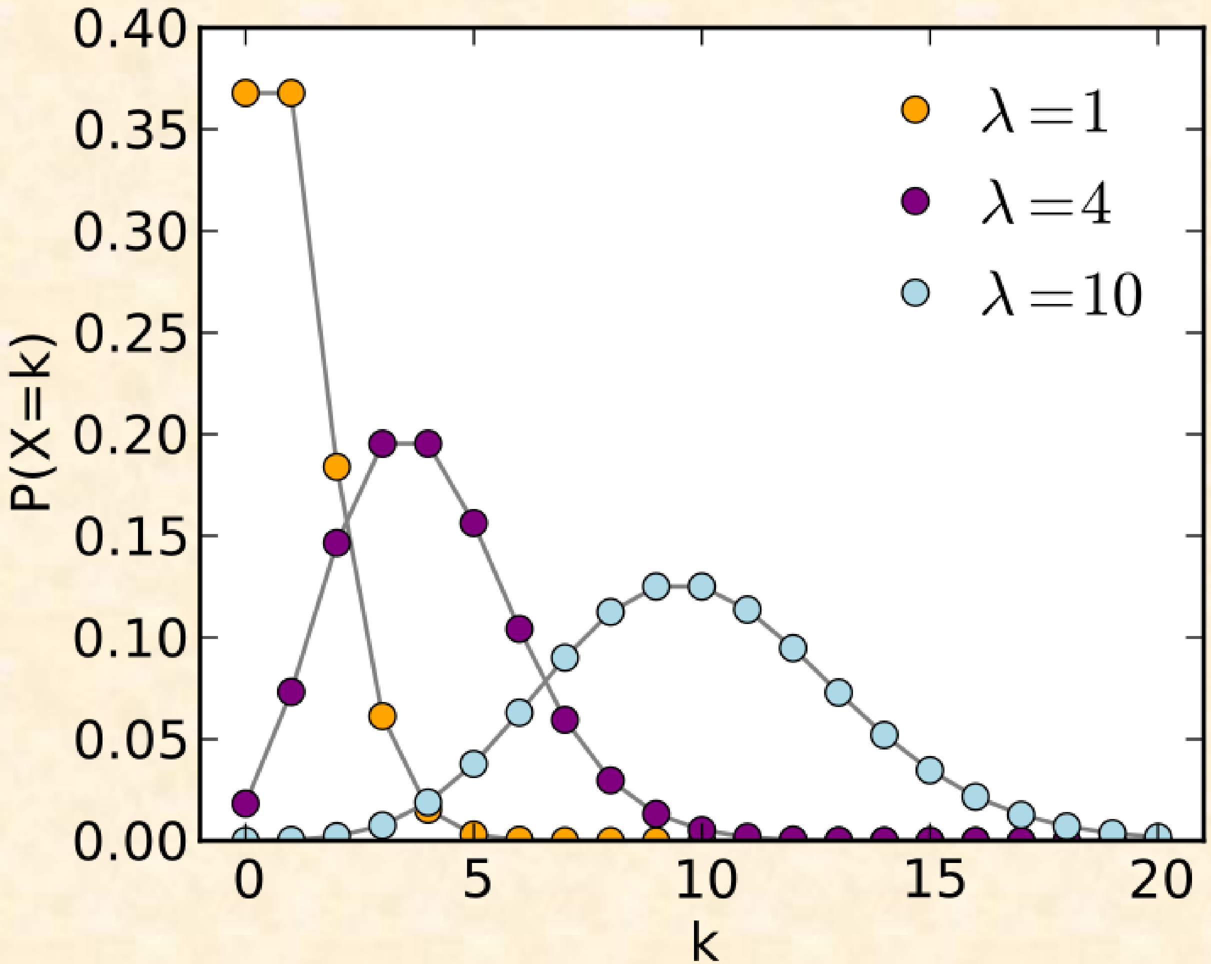
$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k=0,1,2,\dots$$

其中$\lambda>0$为常数，称X 服从参数为λ的泊松分布 **(Poisson Probability Distribution)**，记为$X\sim\pi(\lambda)$.

易知：① $P\{X=k\}\geqslant 0$;

② $$\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$$

下图给出了几个泊松分布的分布律。



泊松定理

设常数 $\lambda>0$，n为任意整数，设$n\,p_n=\lambda$, 则对任意非负整数k有

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

泊松定理给出了当n很大，p很小时二项分布的一个近似算法，这就是有名的二项分布的泊松逼近。

泊松分布表P383， 见附表3。

实际应用：

$n\geqslant 20$，$p\leqslant 0.05$时，泊松定理近似效果较好；

$n\geqslant 100$，$np\leqslant 10$时，泊松定理近似效果更好。

例4（P35 例3）某人练射击，每次命中率为0.02，独立射击400次，求至少击中2次的概率。

解：思路1：每次射击看做是一次E，每次E的结果只有两个(击中、不击中)，因此400次射击相当于400重伯努利试验。

设*X*={400次射击中击中的次数}，则*X* ～ *b*（400，0.02）

$$P(X=k)=C_{400}^{k}(0.02)^{k}(0.98)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,400$$

$$P\{X\geq 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$$

$$=1-(0.98)^{400}-400(0.02)(0.98)^{399}=0.99717$$

例4（P35 例3）某人练射击，每次命中率为0.02，独立射击400次，求至少击中2次的概率。

设X={400次射击中击中的次数}，则$X\sim b(400,\ 0.02)$

思路2：考虑用泊松定理近似计算。

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

已知 $n=400,\ \ p=0.02,\ \lambda=np=8.$

$$P\{X\geq 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$$

$$\approx 1-\frac{8^0e^{-8}}{0!}-\frac{8^1e^{-8}}{1!}\approx 0.99698$$

0.00019

二项分布: 0.99717

例4（P35 例3）某人练射击，每次命中率为0.02，独立射击400次，求至少击中2次的概率。

讨论：

①每次射击命中率0.02很低，但射击400次则击中目标至少2次几乎是肯定的，因此绝不能轻视小概率事件。

②如果射击400次，击中目标次数还不到2次，即

$P\{X<2\}\approx 0.003$ 小概率事件在一次试验中发生，根据实际推断原理，将有理由怀疑每次命中率0.02的假设。

泊松分布也是一种重要分布，其应用广泛：

- 某地区一天内邮递遗失的信件数；
- 某医院在一天内的急诊病人数；
- 交换台在某时间段内接到呼叫的次数；
- 某地区一个时间间隔内发生交通事故的次数；
- 服务台在某时间段内接待的服务次数；
- 显微镜下某区域中的白血球的数目；
- 单位体积空气中含有某种微粒的数目；等等。

4、离散型均匀分布

若$P\{X=x_k\}=1/n$， $k=1, 2, \ldots, n$，称RV X 服从**离散型均匀分布 (Discrete Uniform Distribution)**，当然 x_k 各不相同。

离散型均匀分布可用来描述等可能概型。

如：投硬币,

掷骰子,

等可能概型等。

5、几何分布

RV *X* 的分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\cdots$$

称 ***X*** 服从几何分布 **(Geometric Distribution)** 。

几何分布常用于描述：

① 得到首次成功所需试验次数***X***；

② 在得到第1次成功之前所经历的失败次数***Y***=***X***−1.

$$P\{Y=k\}=p(1-p)^{k},\ k=0,1,2,\cdots$$

6、超几何分布

RV *X* 的分布律为

$$P\left\{X=k\right\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\quad N=0,1,\ldots,$$

$$M,n=0,1,\ldots,N$$

$$k\in\left(Max\left(0,n+M-N\right),\ldots,Min\left(M,n\right)\right)$$

称*X* 服从超几何分布 **(Hypergeometric Distribution)** .

超几何分布举例：P12例4

N个样本中有***M***个不合格，超几何分布描述了在该***N***个样本中抽出***n***个，其中***k***个是不合格的概率。

小结

- 介绍了离散型**RV**及其分布律；
- 几种常见离散型分布。

对于离散型随机变量，如果知道了它的分布律，也就知道了该随机变量取值的概率规律．在这个意义上说：离散型随机变量由它的分布律唯一确定。

作业

Pages 55, 56：

第3, 5, 8, 10, 12, 15题