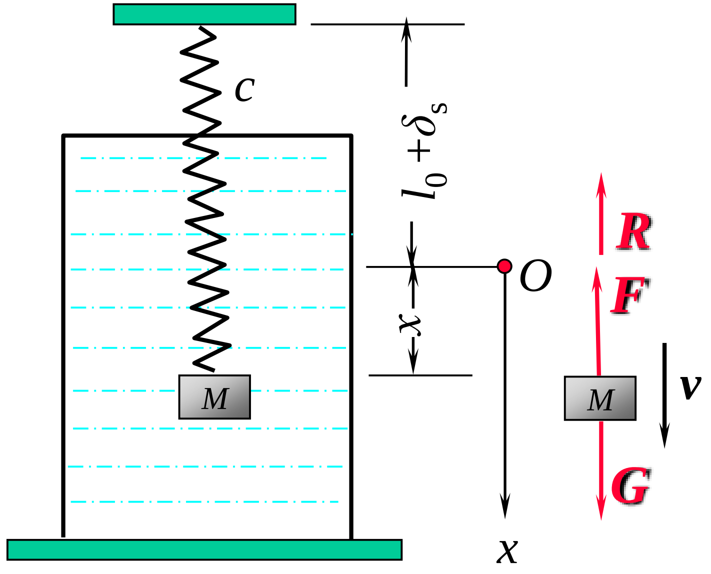
15.3 质点的衰减振动

一、质点的衰减振动

本节将讨论质点在有阻尼时的自由振动，但只限于与速度一次方成正比的介质阻力，这种阻力称为**线性阻力**（或**粘滞阻力**）。



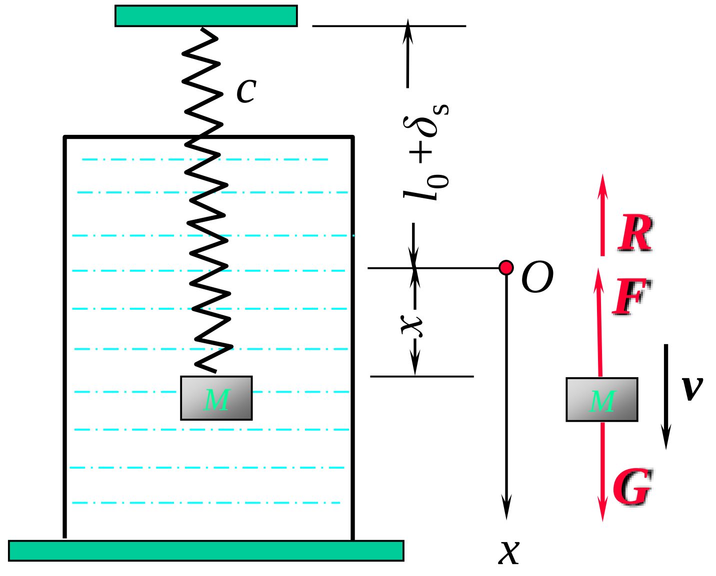
如图示系统在介质里运动中，质点M将受到介质阻力的作用。

在微振动情况下，速度不大，可以认为阻力R与速度v的一次方成正比，即有

$$R = -\mu v$$

其中，μ称为**粘滞阻力系数**（以 kg/s 为单位），表示质点在单位速度时，所受的阻力值，其大小与介质和物体的形状等因素有关，可由实验测定。式中负号表示阻力与速度的方向恒相反。

取物块的平衡位置作为坐标原点O，轴Ox沿直线向下。当物块在位置O时，弹簧拉力$F_0 = c\delta_s$,与表观重力G（已扣除浮力）相互平衡，即有 $G = c\delta_s$



物块运动时，$F_x = -c(\delta_s + x)$，$R_x = -\mu\dot{x}$

质点的运动微分方程写成 $m\ddot{x} = G - c(\delta_s + x) - \mu\dot{x}$

考虑到，$G = c\delta_s$上式简化成

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0$$

代入参量

$$k^2 = \frac{c}{m}, \qquad 2n = \frac{\mu}{m}$$

(n称为**阻尼系数**)

则上式写成

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0 \qquad (9\text{-}14)$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0 \qquad (9\text{-}14)$$

这就是在线性恢复力和线性阻力作用下质点运动微分方程的标准形式。式中n称为阻尼系数。

此式是二阶常数线性齐次方程。

有三种不同的情形：

（1）$n<k$ 称为小阻尼，

（2）$n=k$ 称为临界阻尼，

（3）$n>k$ 称为大阻尼。

我们将只讨论小阻尼 $n < k$ 情形。

引入参量 $k_1=\sqrt{k^2-n^2}$，则式(9-14)的通解可以写成

$$x=e^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t)$$

式中，积分常量C_1和C_2可以由运动的初始条件来决定。

把上式对时间t求导数，得质点速度的一般表达式

$$\dot{x}=-ne^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t)$$

$$+k_1e^{-nt}(-C_1\sin k_1t+C_2\cos k_1t)$$

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t)$$

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + k_1 e^{-nt}(-C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t)$$

运动的初始条件：当t=0**时，**$x = x_0 \quad \dot{x} = \dot{x}_0$ **；将它们代入上式，得到**

$$x_0 = C_1, \qquad \dot{x}_0 = -nC_1 + k_1 C_2$$

从而解得

$$C_1 = x_0, \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1}$$

于是，质点的运动方程写成

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos k_1 t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1}\sin k_1 t\right) \qquad (9\text{-}18)$$

或者通过三角函数的变换，把上式写成

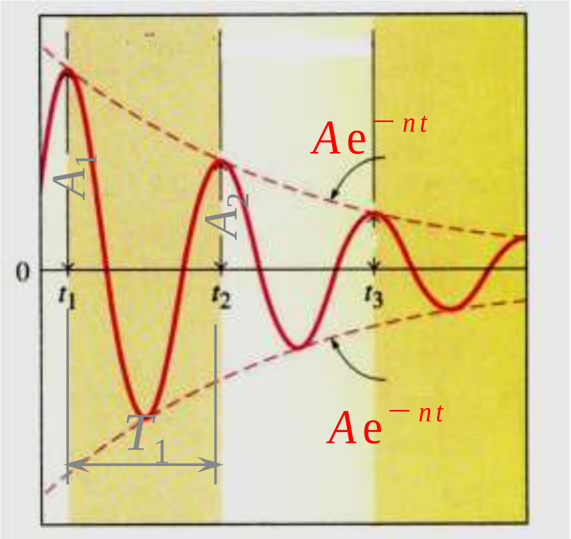
$$x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha) \qquad (9\text{-}19)$$

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos k_1 t + \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{k_1} \sin k_1 t\right) \tag{9-18}$$

$$x = A e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) \tag{9-19}$$

式中
$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + n x_0}{k_1}\right)^2}$$

$$tg\alpha = \frac{k_1 x_0}{\dot{x}_0 + n x_0}$$



结果分析讨论

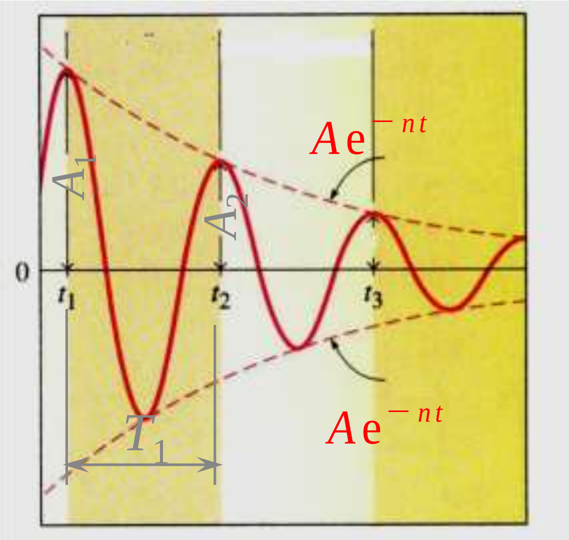
1。由式(9-18)或式(9-19)可以看到，由于小阻尼的影响，物块不再进行振幅不变的简谐运动。

2。 因子$\sin(k_1 t+\alpha)$表明物块仍周期性地通过平衡位置O而交替地向点O的两侧偏离。

$$x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha) \tag{9-19}$$

3。 因子Ae^{-nt}表示这些偏离的可能最大值，但它是随时间而不断减小的，最后趋近于零。

这样的运动称为衰减振动，但习惯上仍把 $T_1 = 2\pi / k_1$ 称为它的**周期**，而Ae^{-nt}称为它的**振幅**。与无阻尼自由振动相比较，衰减振动也称为**有阻尼自由振动**。

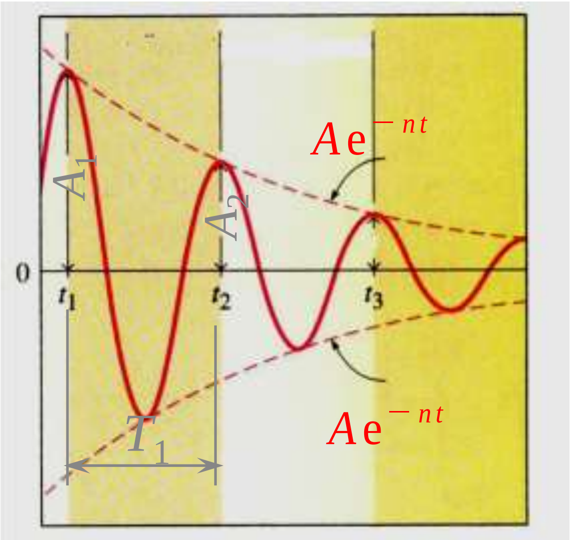


二、阻尼对周期T_1的影响

上式可改写成

$$T_1=\frac{2\pi}{k_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}$$

$$T_1=\frac{2\pi}{k}\left[1-\left(\frac{n}{k}\right)^2\right]^{-1/2}=T\left[1-\left(\frac{n}{k}\right)^2\right]^{-1/2}$$

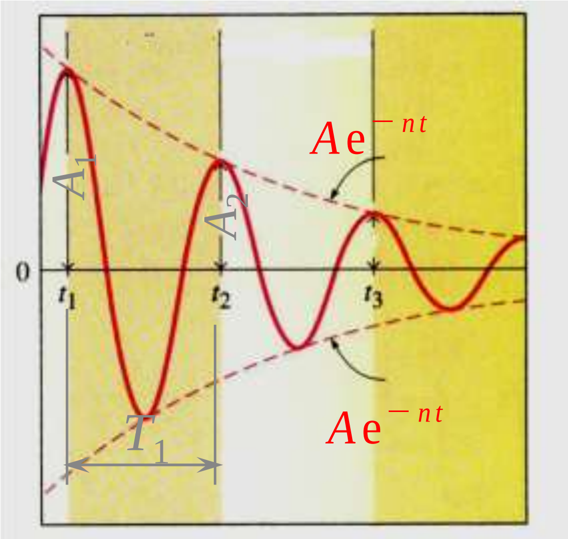


$$k^2=\frac{c}{m},\qquad 2n=\frac{\mu}{m}$$

式中，T是无阻尼自由振动周期。

- 因为衰减振动中 $n<k$ ，可见，由于小阻尼的存在，使振动的周期 T_1 相对于无阻尼时的周期 T 来说有所增长。

$$T_1=\frac{2\pi}{k}\left[1-(\frac{n}{k})^2\right]^{-1/2}=T\left[1-(\frac{n}{k})^2\right]^{-1/2}$$



$k^2=\frac{c}{m}$, $2n=\frac{\mu}{m}$

1。当 $n\to k$ 时，周期 T_1 无限地增长，$(T_1\to\infty)$,从而运动失去往复性。

2。而当 n 很小时，即 $n<<k$ 时，T_1 可近似地表示为

$$T_1=T\left[1+\frac{1}{2}(\frac{n}{k})^2+\cdots\right]$$

例如，当 $n/k=0.05$ 时，

$$T_1\approx T\left[1+\frac{1}{2}(0.05)^2\right]=1.00125T$$

仅增加0.12 5 %.

可见，当阻尼系数 n 比 k 小得多时，阻尼对周期的影响并不显著，在初步计算中甚至可以直接用 T 代替 T_1。

三、阻尼对振幅Ae^{-nt}的影响

$$x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha)$$

(9-19)

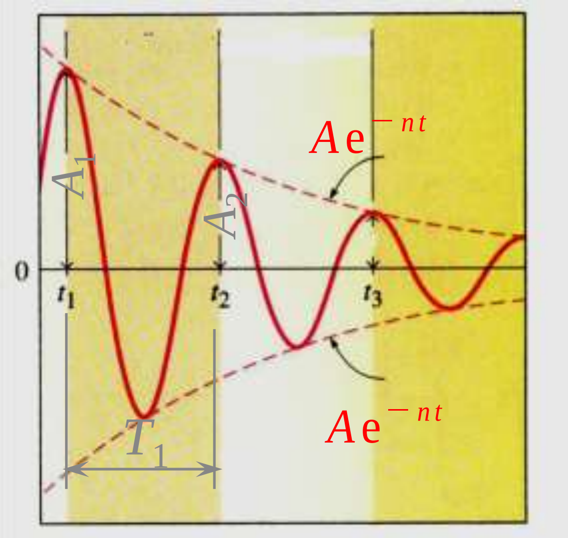
由于阻尼的存在，振幅 Ae^{-nt} 随时在减小。为了说明振幅衰减的快慢，可作如下分析

在任意瞬时t_1，振幅是 $A_1 = Ae^{-nt_1}$

时间逐次增加半周期 $\dfrac{1}{2}T_1$ ，则瞬时振幅将分别是

$$A_2 = Ae^{-n(t_1+T_1/2)} = Ae^{-nt_1}e^{-nT_1/2} = A_1 e^{-nT_1/2}$$

$$A_3 = Ae^{-n(t_1+2T_1/2)} = A_2 e^{-nT_1/2}$$



因此，有比值 $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{A_3}{A_2} = \cdots = e^{-nT_1/2}$ =常数

即，每隔半个周期的振幅按等比级数递减。

- **公比** $r = e^{-nT_1/2}$ **称为减缩率。**

- $\Delta = \ln e^{-nT_1/2} = -\dfrac{nT_1}{2}$ **称为对数减缩率。**

减缩率（或对数减缩率）表示每经过半个周期后振幅的衰减程度。由于振幅是按等比级数递减的，即使阻尼很小，振幅的衰减也是迅速的。

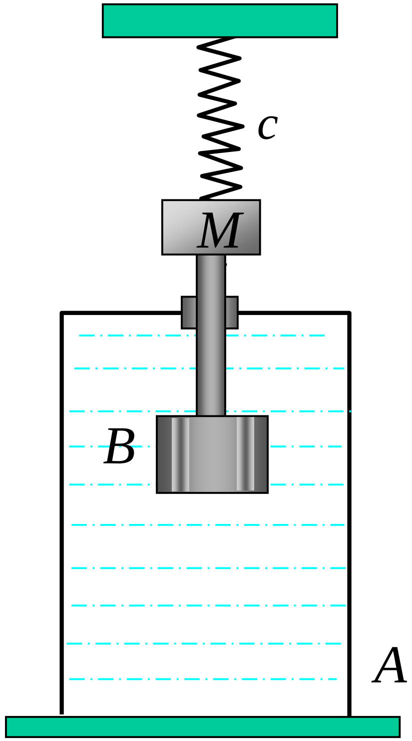
1. 小阻尼($n<k$)情形

仍以 $n=0.05k$ **为例，这时减缩率是** $r = e^{-nT_1/2} = 0.855$

即，每经过半个周期，振幅就缩减15%。经过10个周期，振幅将变成原来振幅的$(0.855)^{20}=0.043$，只有原来的4.3%。

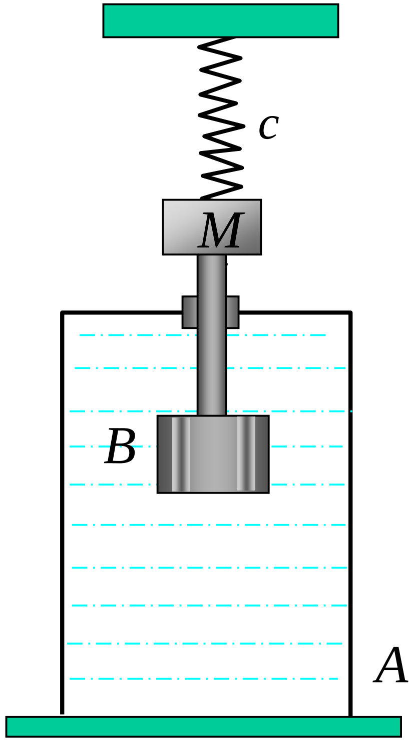
通过以上讨论可见，小阻尼（$n<k$）对周期的影响很小，可以忽略不计，而对振幅的影响却是非常显著的。当 $n \geq k$ 时，运动将失去往复性。

例9-3 图示为一种液体减振器装置的简化模型。悬挂在弹簧下端的物块M与圆筒A内的活塞B相固连，筒内充满粘性液体。活塞上钻有许多圆孔，当物块M上下振动时，液体从孔中往复流过，给活塞一正比于速度的阻力。设物块连同活塞的质量 $m=1$ kg，弹簧的刚度系数$c=3\ 920$ N/m。已知物块开始运动后经过10个周期，振幅减到初值的1/ 40。求阻尼系数n和阻力系数μ。



解：由题意知，物块M的运动是衰减运动。阻尼系数n可通过减缩率来求出。已知经过10周期，振幅减缩到初始的1/40，即有

$$(e^{-nT_1/2})^{20}=\frac{1}{40}$$



取自然对数，求得对数减缩率

$$\Delta=\ln e^{-nT_1/2}=-\frac{nT_1}{2}=\frac{1}{20}\ln\frac{1}{40}=-0.1844$$

另一方面，考虑到

$$T_1=\frac{2\pi}{k_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}$$

故有

$$\Delta=-\frac{nT_1}{2}=-\frac{n\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}=-\frac{\pi}{\sqrt{(k/n)^2-1}}$$

$$\Delta = -\frac{nT_1}{2} = -\frac{n\pi}{\sqrt{k^2-n^2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{(k/n)^2-1}} \qquad (1)$$

即 $$\frac{k}{n} = \sqrt{(\frac{\pi}{\Delta})^2+1} \qquad (2)$$

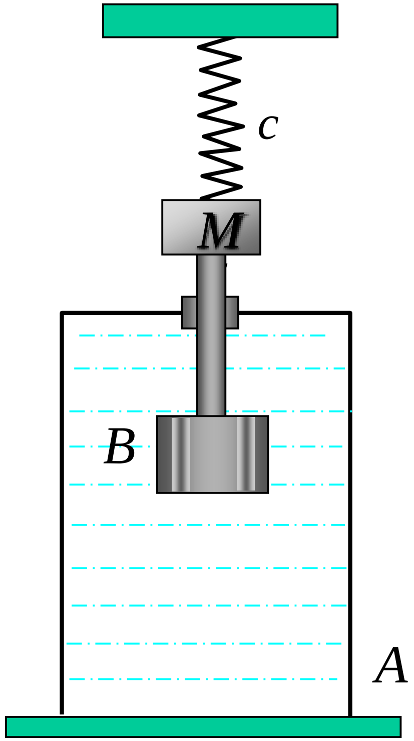
在此处键入公式。

以Δ值代入式（2），求得 $$\frac{k}{n} = \sqrt{(\frac{3.142}{0.1844})^2+1} = 17.07$$

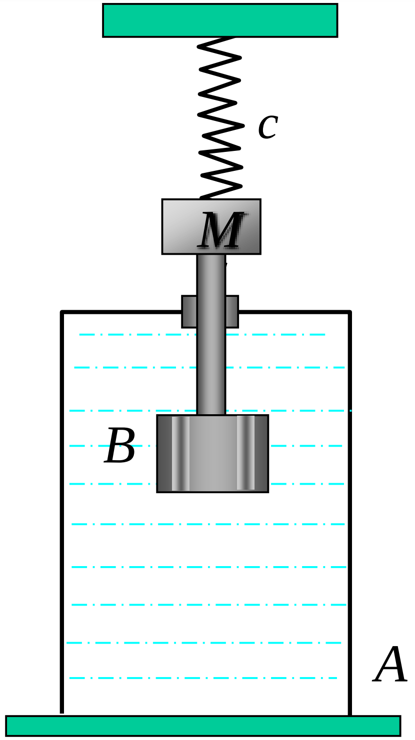
但固有频率 $$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{3920}{1}} = 62.6 \ \text{rad/s}$$

于是，求得阻尼系数为 $$n = \frac{k}{17.07} = \frac{62.6}{17.07} = 3.67 \ \text{rad/s}$$

因而阻尼系数为 μ=2 mn=2×1×3.67=7.34 kg / s



在本例中$n<<k$，可以取T_1近似地等于T。于是有



$$-\frac{nT_1}{2} \approx -\frac{nT}{2} = -\frac{n\pi}{k} = -0.1844$$

因而
$$\frac{n}{k} = \frac{0.1844}{\pi} = 0.0587,$$

$$n = 0.056 \cdot k = 0.0587 \times 62.6 = 3.68 \quad \mathrm{rad/s}$$

其实，当 $n<<k$ 时，在式（1）和式（2）的根式中，与 $(k/n)^2$ 相比较可以忽略1，用这种近似计算求得的结果是足够精确的。

$$\Delta = -\frac{\pi}{\sqrt{(k/n)^2-1}} \qquad (1)$$

$$\frac{k}{n} = \sqrt{(\frac{\pi}{\Delta})^2+1} \qquad (2)$$

谢谢！