西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

运 动 学

刚体的基本运动

杨成鹏
力学与土木建筑学院

第七章　刚体的基本运动

刚体的基本运动

平移和定轴转动是刚体的两种最简单、最基本的运动；以后可以看到，刚体的更复杂的运动可以看成是由这两种运动的合成。因此，这两种运动称为刚体的基本运动。

§7-1 刚体的平移

- 刚体的平移
- 平移的特点

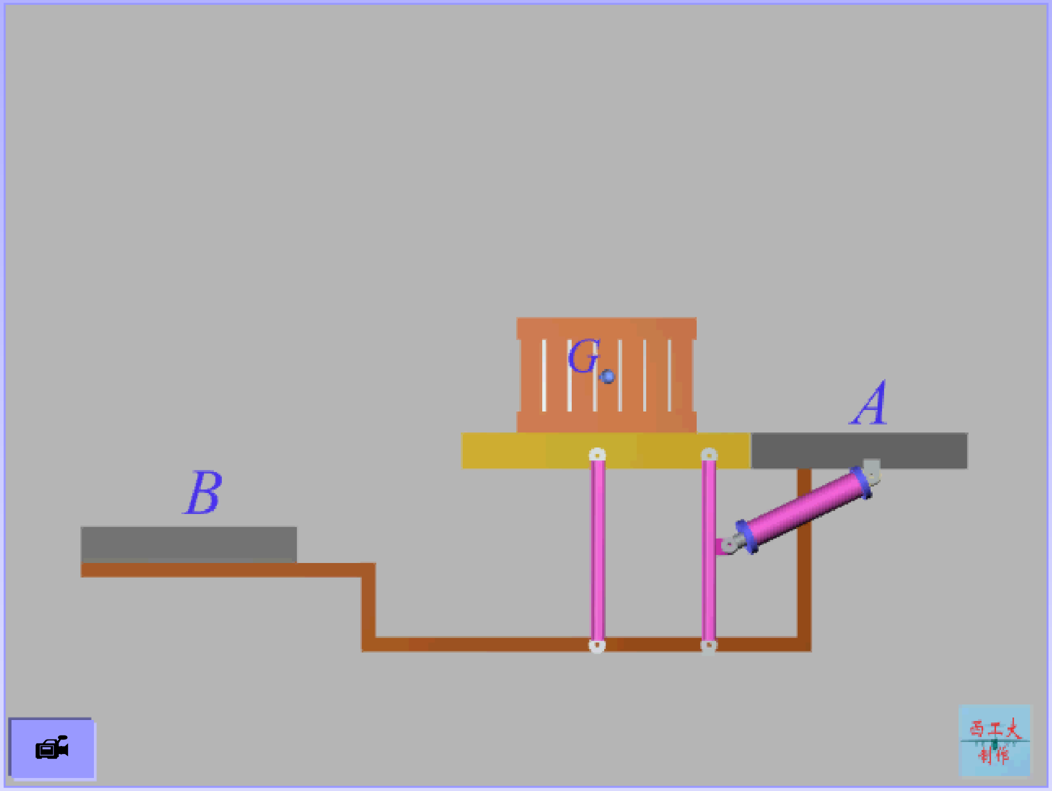
§7-1 刚体的平移

一、刚体平移的定义

在运动过程中，刚体上任意一条直线始终平行于其初始位置，则这种运动称为刚体的平行移动，简称为平移。刚体平移时，其上各点的轨迹可以是直线，也可以是曲线。

§ 7-1 刚体的平移

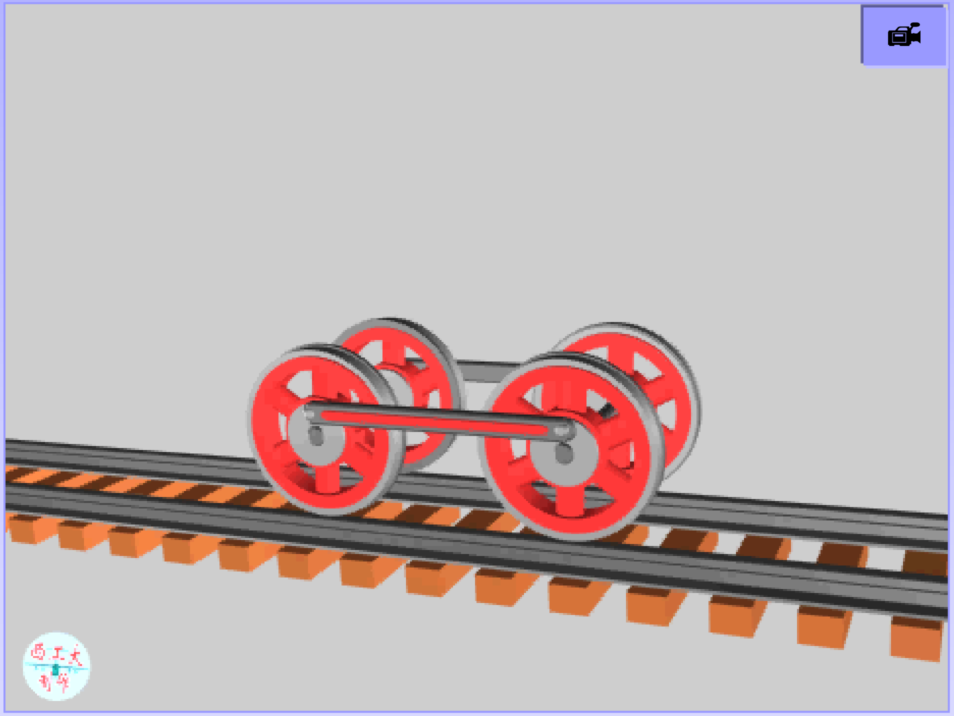
- 平移的实例（摆式输送机中的输送槽）



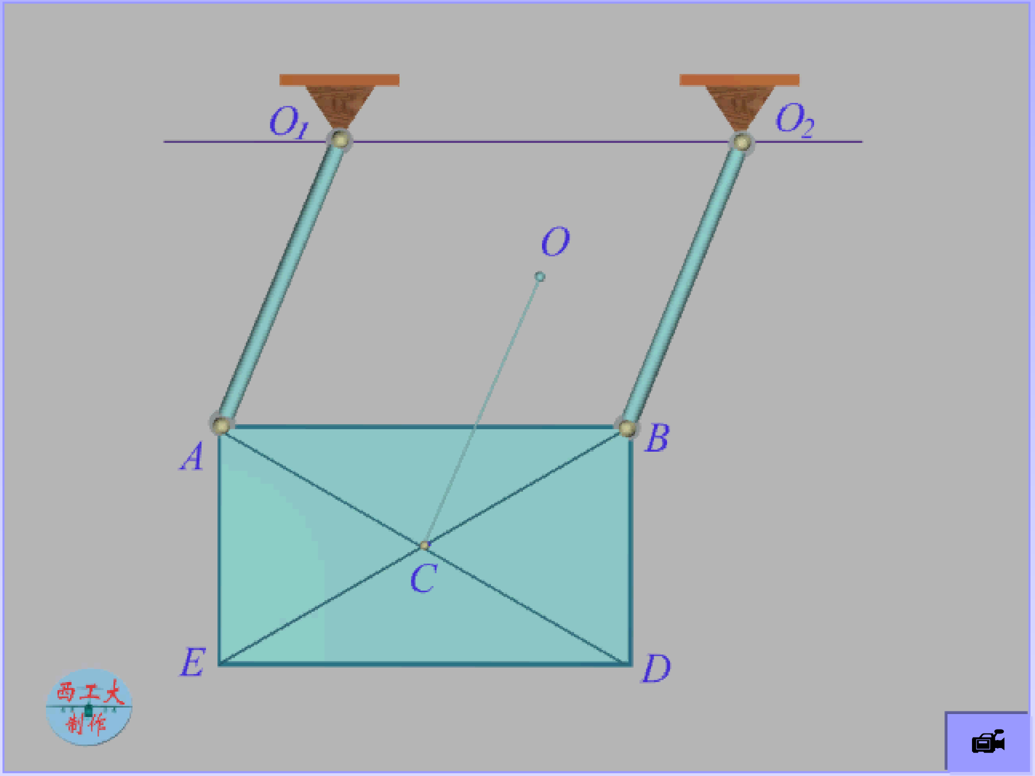
§ 7-1 刚体的平移

● 平移的实例（操作斗）

- 平移的实例（火车车轮的平行连杆）

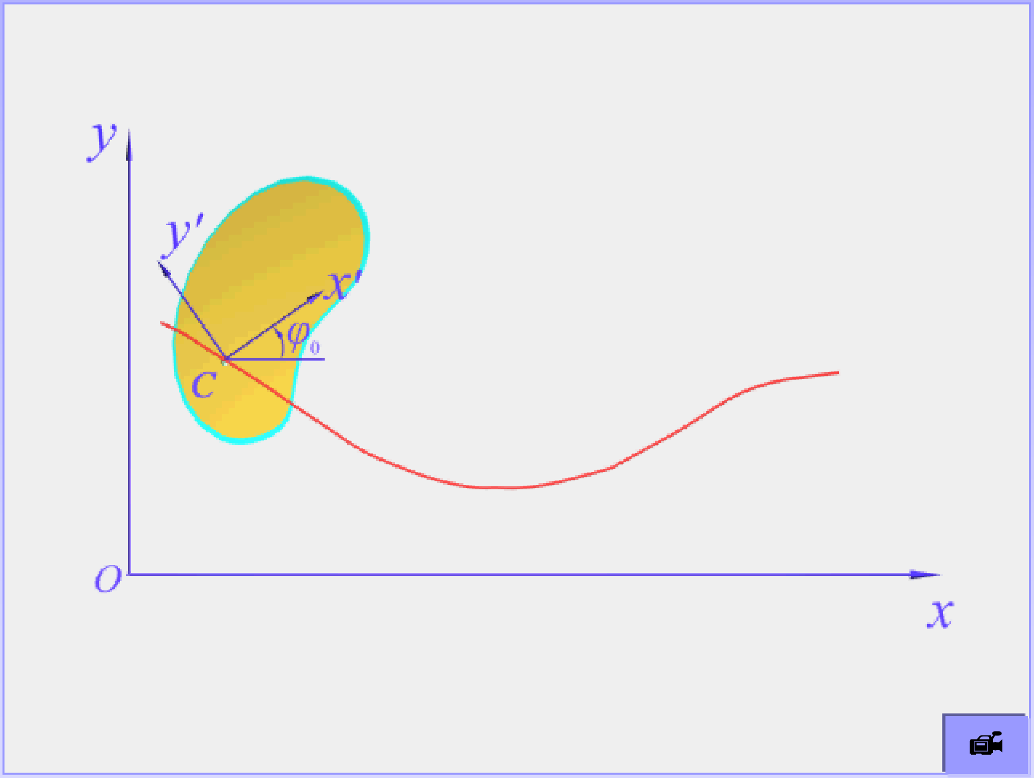


- 刚体的平移



§ 7-1 刚体的平移

● 刚体的平移



§ 7-1 刚体的平移

二、平移的特点

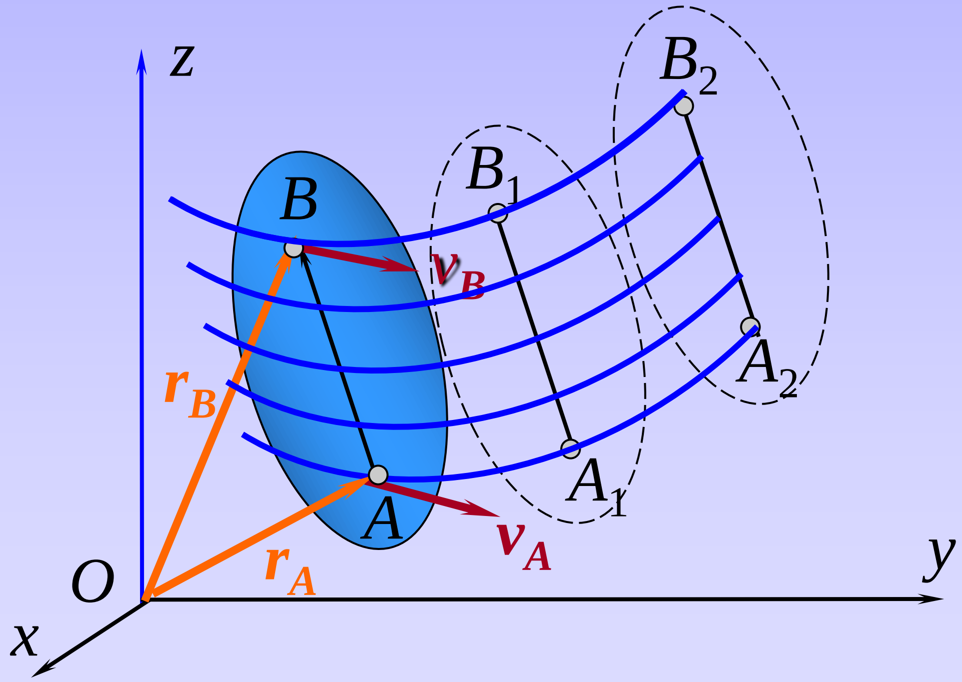
1. 当刚体作平移时，刚体上所有各点的轨迹形状相同，并且位置平行。

2. 当刚体作平移时，同一瞬时，刚体上各点的速度相等，各点的加速度也相等。

证明：

刚体作平移时的特点1可由图说明。

刚体作平移时的特点2可证明如下：



AB为刚体上任意一矢量，则有 $\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{AB}$

刚体平移时，刚体内任一线段AB的长度和方向都保持不变。

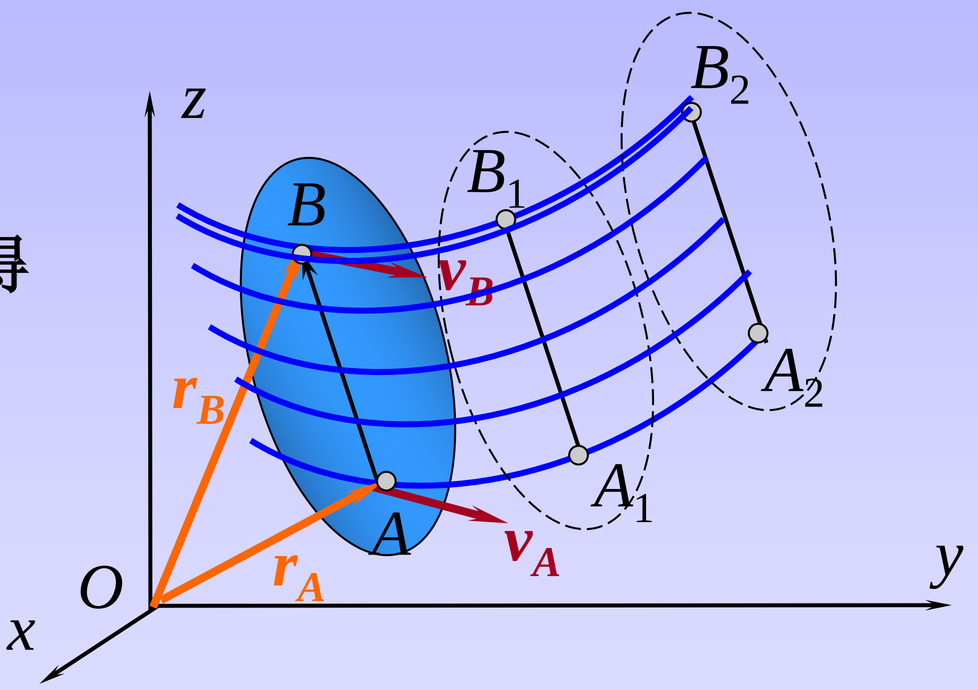
因而 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{AB} = 0$$

故 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}$$ 或 $$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A$$

上式再对时间t求导一次，即得

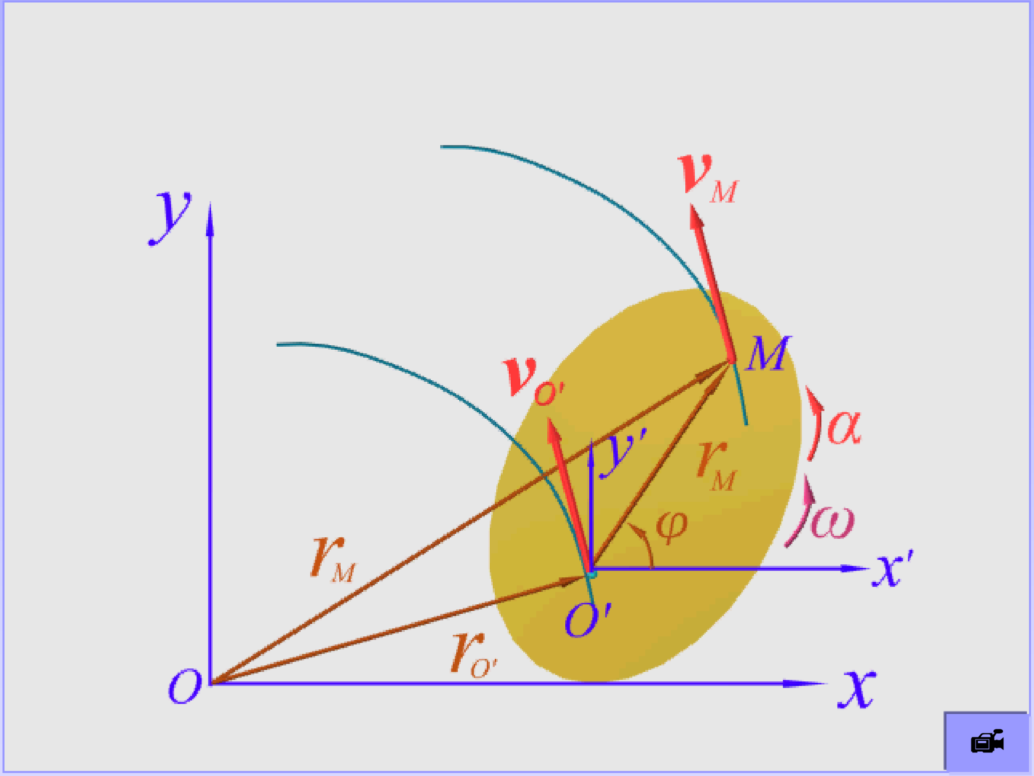
$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A$$

即，在每一瞬时，平移刚体内任意两点的速度和加速度分别相等。

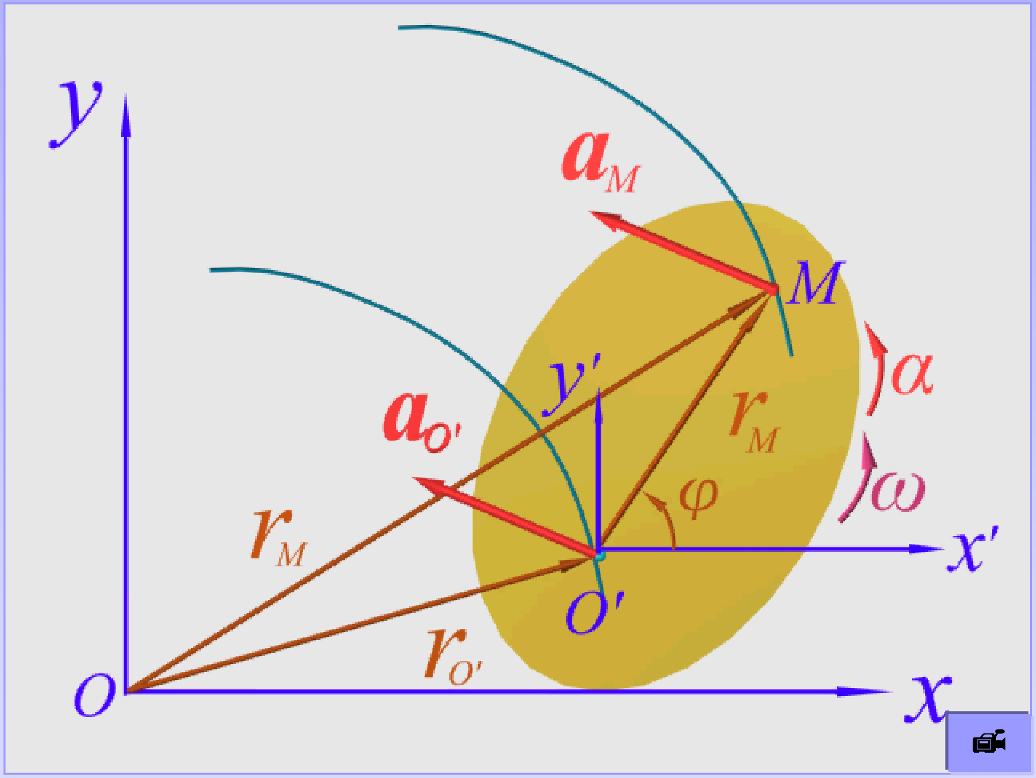


§ 7-1 刚体的平移

● 平移刚体上各点的速度



● 平移刚体上各点的加速度



应该注意，平移刚体内的点，不一定沿直线运动，也不一定保持在同一平面内运动，它的轨迹可以是任意的空间曲线。

如果平移刚体内各点的轨迹都是平面曲线，这种情形称为平面平移；更特殊的，如果各点的轨迹都是直线，则称为直线平移。

当刚体作平移时，根据平移运动的特点，只须确定刚体内任意一点的运动，就可以完全确定整个刚体的运动特征。如此，刚体平移问题就可看作点的运动问题来处理。

§ 7-1 刚体的平移

综上所述，可以得出刚体平移的几个主要结论：

1. 刚体上的各点具有形状相同的运动轨迹。

2. 刚体上的各点在某一瞬时具有相同的速度和加速度。

3. 刚体平移时的运动描述可以简化为其上任意一点的运动分析。

思考题

在图示机构中，已知：$O_1A=O_2B=l$， $O_1O_2=AB$， $AC=0.5BC$。

O_1A，O_2B 与三角板铰接， O_1A匀角速度ω 转动。

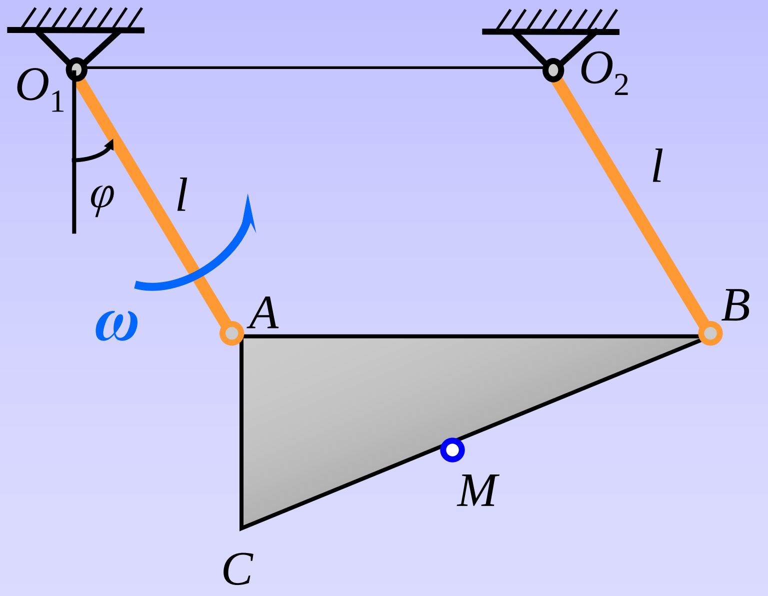
试问：

(1). 三角板ABC作什么运动？

其角速度等于多少？

(2). 三角板BC边中点M的速度

和加速度各为多少？



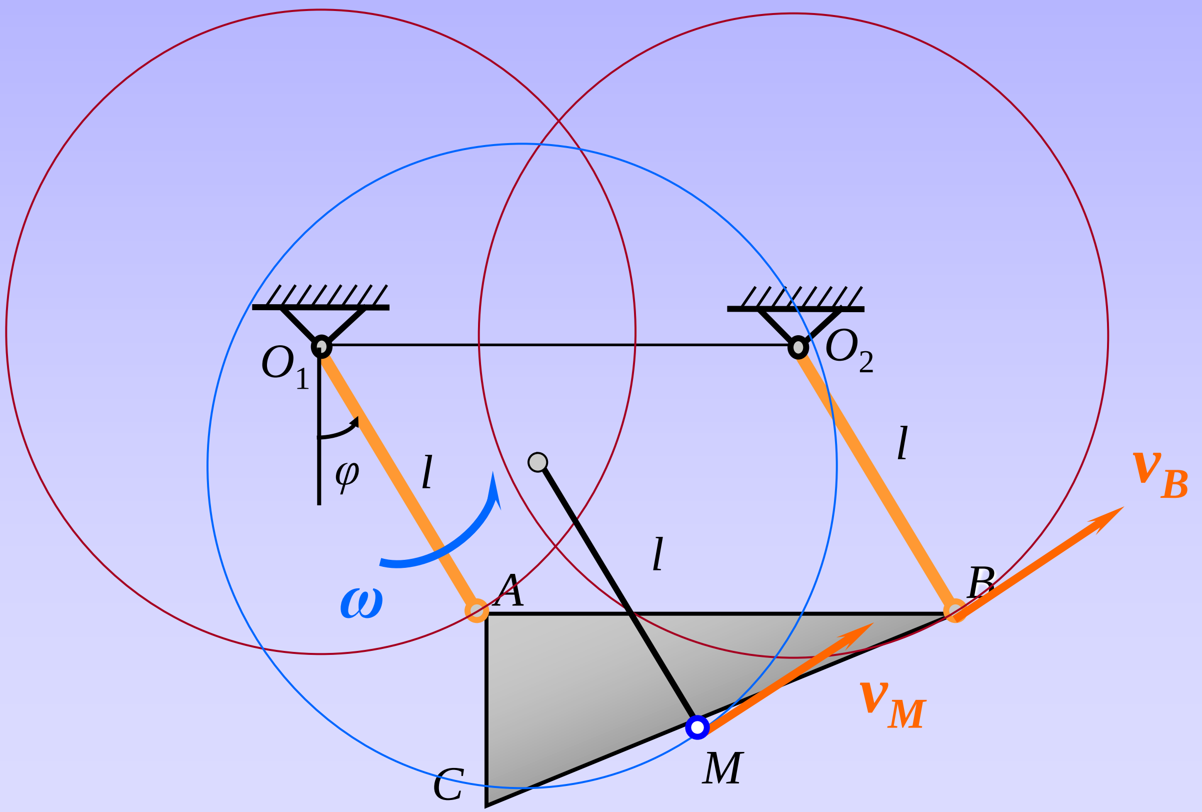
答:

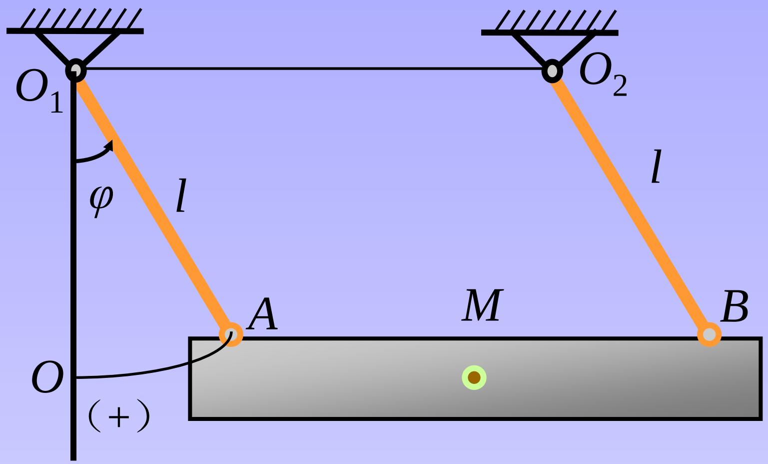
(1). 因为三角板ABC作平移运动，所以其角速度等于零。

(2). 三角板ABC作平移运动，点M与点B有相同的速度和加速度。

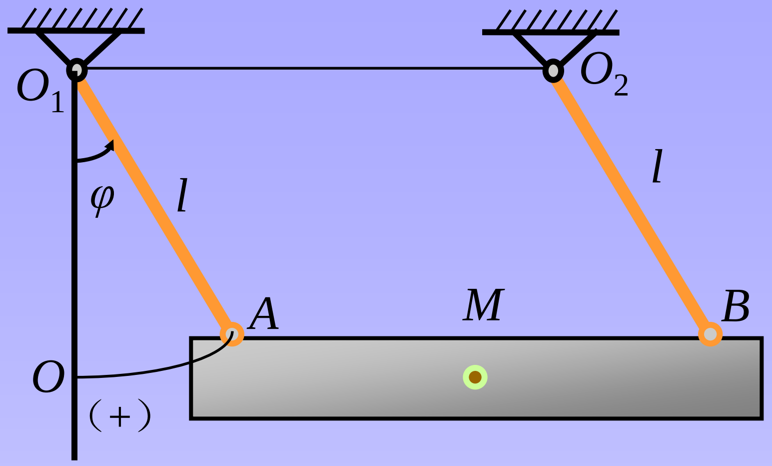
$$v_M = v_B = l\omega$$

$$a_M = a_A = l\omega^2$$





例7-1 荡木用两条等长的钢索平行吊起，如图所示。钢索长为l，长度单位为m。当荡木摆动时，钢索的摆动规律表示为 $\varphi = \varphi_0 \sin \dfrac{\pi}{4} t$，其中 t 为时间，单位为s；转角φ_0的单位为rad。试求当t=0和t=2s时，荡木的中点M的速度和加速度。



解：

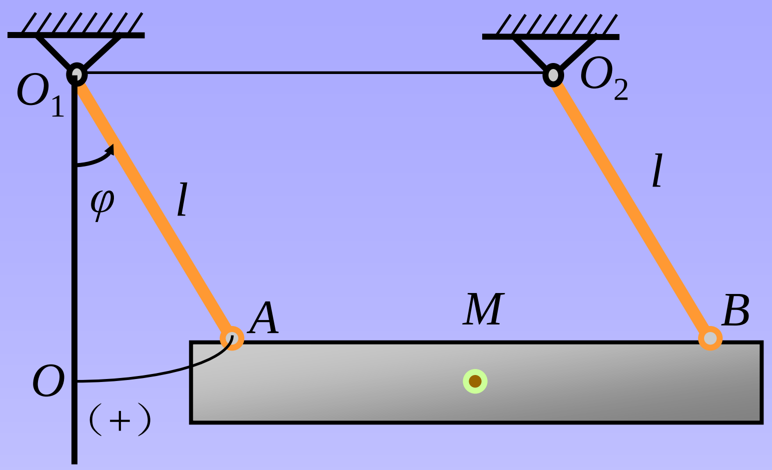
由于两条钢索O_1A和O_2B的长度相等，并且相互平行，于是荡木AB在运动中始终平行于直线O_1O_2，故荡木作平移。

为求中点M 的速度和加速度，只需求出A点（或B点）的速度和加速度即可。点A在圆弧上运动，圆弧的半径为l。如以最低点O为起点，规定弧坐标s向右为正，则A点的运动方程为

$$s = l \cdot \varphi_0 \sin \frac{\pi}{4} t$$

将上式对时间求导，得A点的速度

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{4} l \varphi_0 \cos \frac{\pi}{4} t$$



再求一次导，得A点的切向加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{16} l\varphi_0 \sin\frac{\pi}{4}t$$

A点的法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{\pi^2}{16} l\varphi_0^2 \cos^2\frac{\pi}{4}t$$

代入$t = 0$和$t = 2$，就可求得这两瞬时A点的速度和加速度，亦即点M在这两瞬时的速度和加速度。计算结果列表如下：

t (s)	φ(rad)	v (m s^{-1})	a_t (m s^{-2})	a_n (m s^{-2})
0	0	$\frac{\pi}{4}\varphi_0$（水平向右）	0	$\frac{\pi^2}{16}\varphi_0^2 l$（铅直向上）
2	φ_0	0	$-\frac{\pi}{16}\varphi_0 l$	0

§7-2　刚体的定轴转动

- 刚体的定轴转动
- 转动规律
- 角速度
- 角加速度

§7-2　刚体的定轴转动

一、　刚体的定轴转动

当刚体运动时，如其上（或其延展部分）有一条直线始终保持不动，这种运动称为刚体的定轴转动。

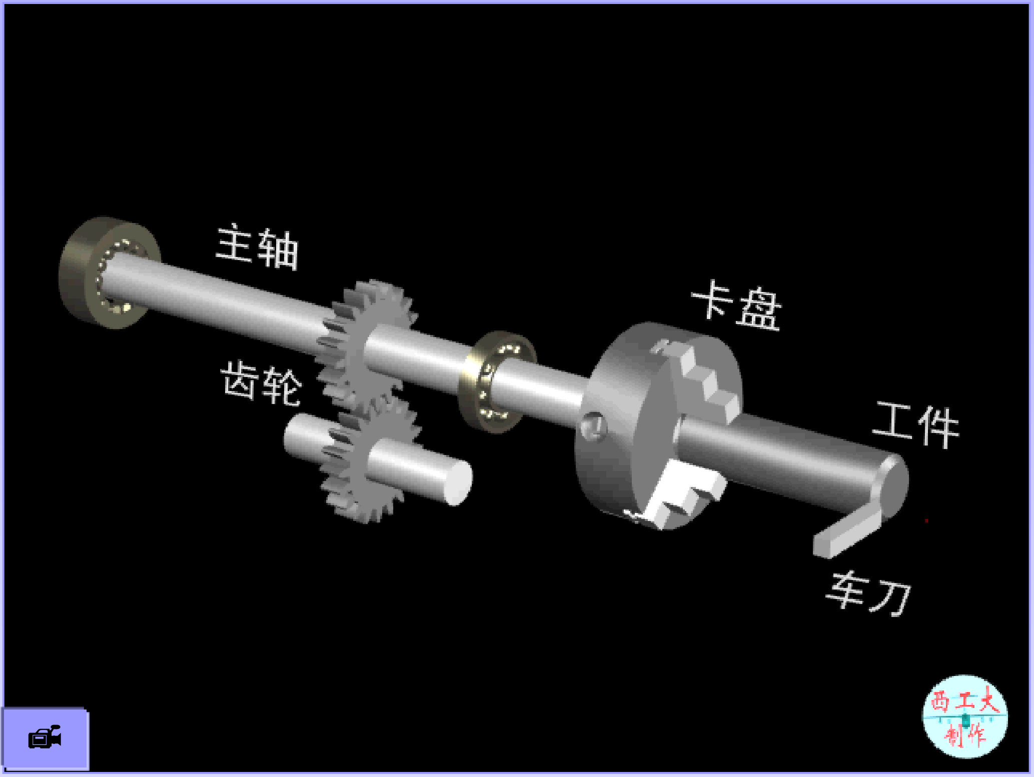
该固定不动的直线称为转轴。

二、刚体定轴转动的特点

当刚体作定轴转动时，转动轴以外的各点都分别在垂直于转轴的平面内作圆周运动，圆心在该平面与转轴之交点上（见图7-3）。

§ 7-2　刚体的定轴转动

● 定轴转动实例（机床主轴）



三、转动规律

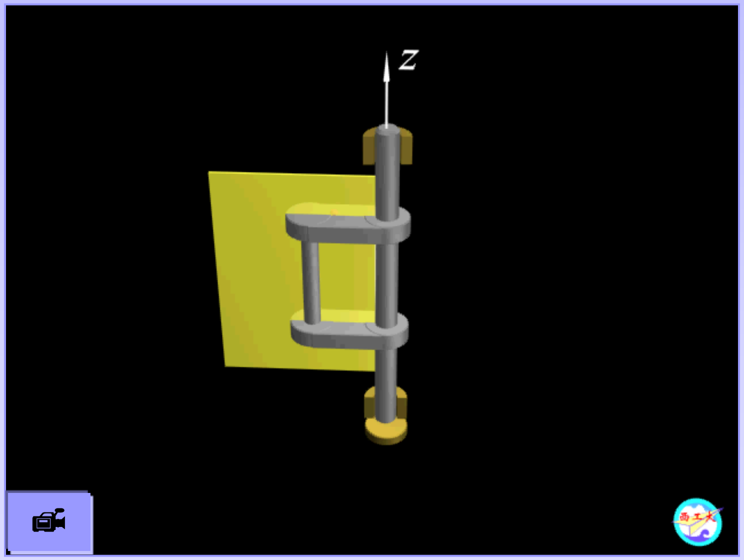
1、转动方程

刚体的位置可由角φ完全确定。角φ也称为角坐标，当刚体转动时，角坐标φ随时间t而变化，因而可表示为时间t的单值连续函数

$$\varphi = f(t)$$

这就是刚体的定轴转动运动方程。

如已知这个方程，则刚体在任一瞬时的位置就可以确定。



2. 角速度

转角φ对时间的导数，称为刚体的角速度，以ω表示。故有

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = f'(t) = \dot{\varphi}$$

（1）、角速度的大小表示刚体在某瞬时转动的快慢，即单位时间内转角的变化。

（2）、当转角φ随时间而增大时，ω为正值，反之为负值；实际上，角速度的正负号确定了刚体转动的方向。

3. 角加速度

角速度ω对时间的导数，称为角加速度，以α表示，故有

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = f''(t) = \ddot{\varphi}$$

它表示单位时间内角速度的变化。

α和ω正负相同时，角速度的绝对值随时间而增大，即刚体作加速转动；反之，两者正负不同时，角速度的绝对值随时间而减小，即刚体作减速转动。

§ 7-2 刚体的定轴转动

- 匀变速转动公式

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\varphi - \varphi_0)$$

其中，积分常数φ_0和ω_0是在初瞬时刚体的转角φ和角速度ω之值。

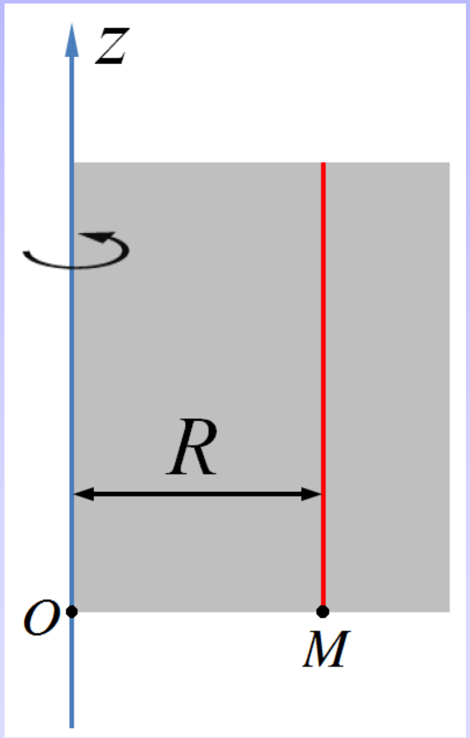
§7-3 定轴转动刚体内各点的速度和加速度

- 定轴转动刚体内各点的速度
- 定轴转动刚体内各点的加速度

§ 7-3 定轴转动刚体内各点的速度和加速度

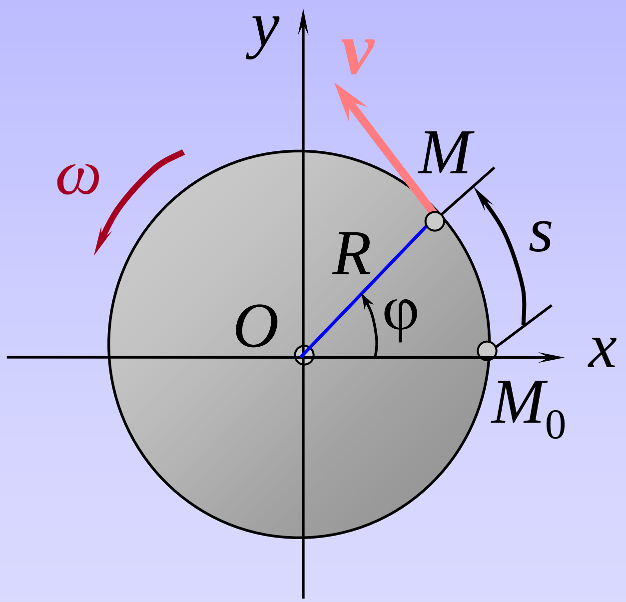
1. 定轴转动刚体内各点的速度

刚体内在平行于转轴z的任一直线上，各点具有相等的速度和相等的加速度，且各点的轨迹为同样大小的圆周，其圆心都在转轴z上。



由于点M绕点O作圆周运动，用自然法表示。点M的弧坐标 $s=R\varphi$，式中的s和φ取相同的正负号。对时间求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$



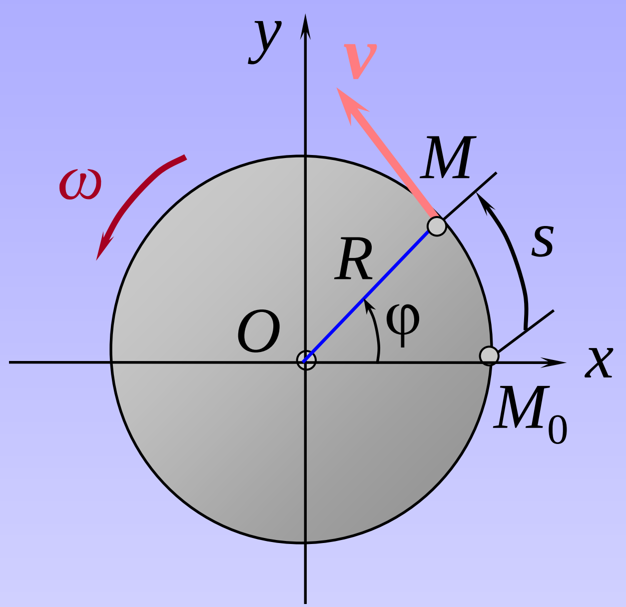
考虑到 $$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v,\quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega$$

故有定轴转动刚体内 M 点的速度

$$v=R\omega$$

$$\boxed{v = R\omega}$$

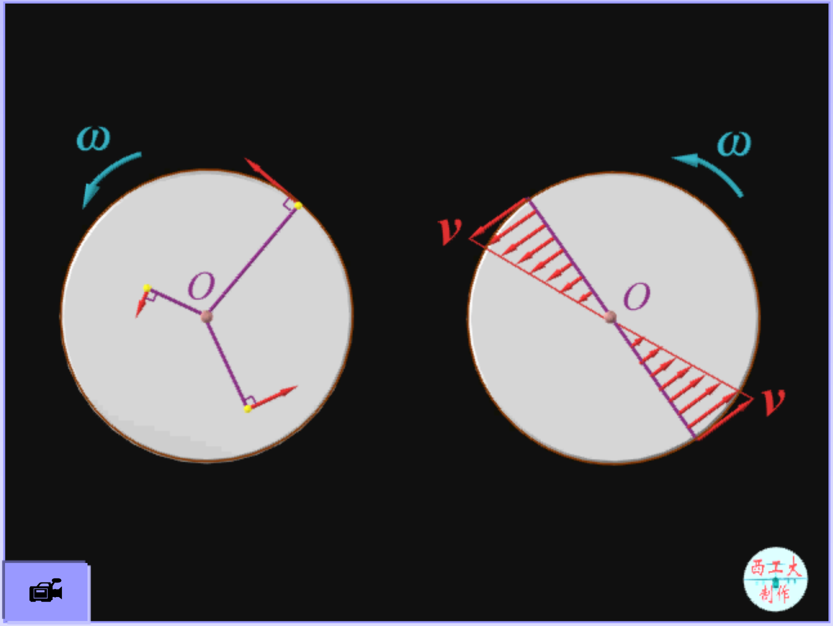
即定轴转动刚体内任一点的速度，等于该点的转动半径与刚体角速度的乘积。

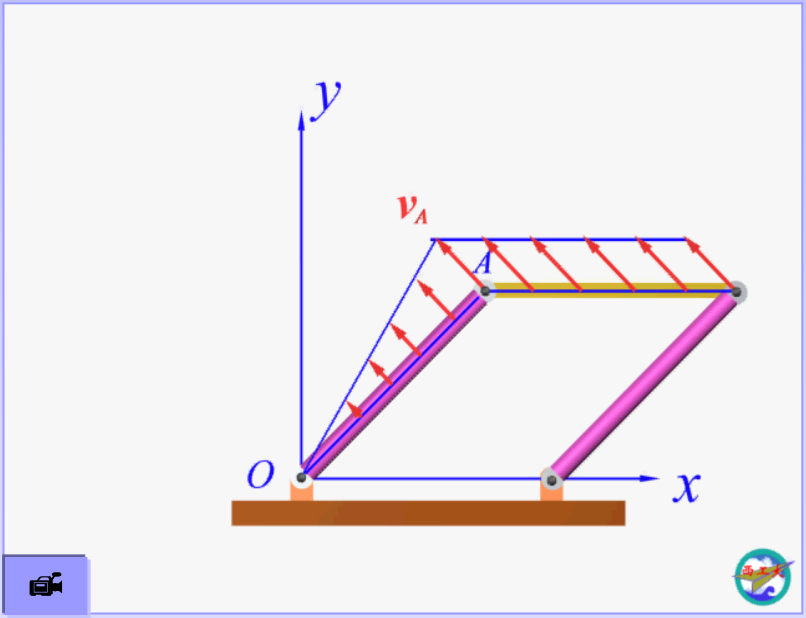


式中v与ω两者正负相同，故速度是沿着点M的轨迹圆周的切线，指向转动前进的一方。

$$\boxed{v = R\omega}$$

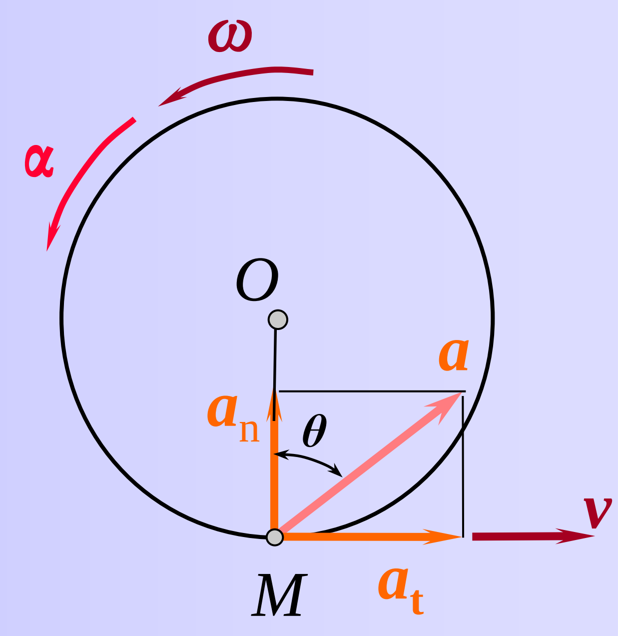
在任一瞬时，定轴转动刚体内各点的速度与各点的转动半径成正比。与转轴垂直的平面上各点的速度分布如图。





2. 定轴转动刚体内各点的加速度

点M的加速度包含两部分：切向分量和法向分量。

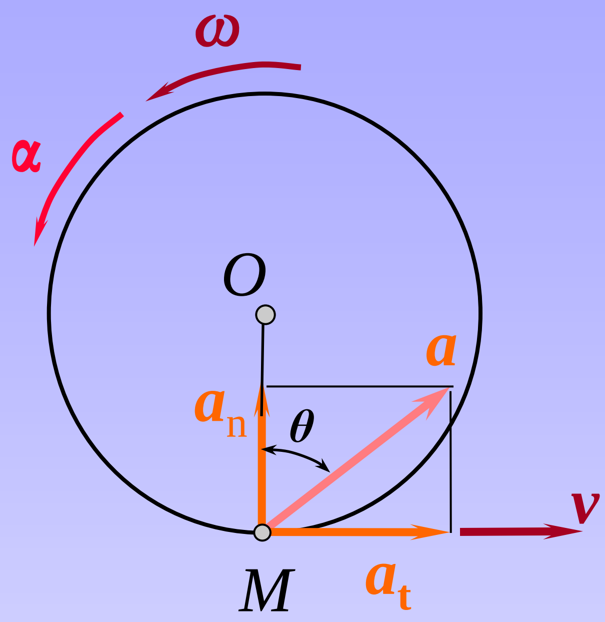


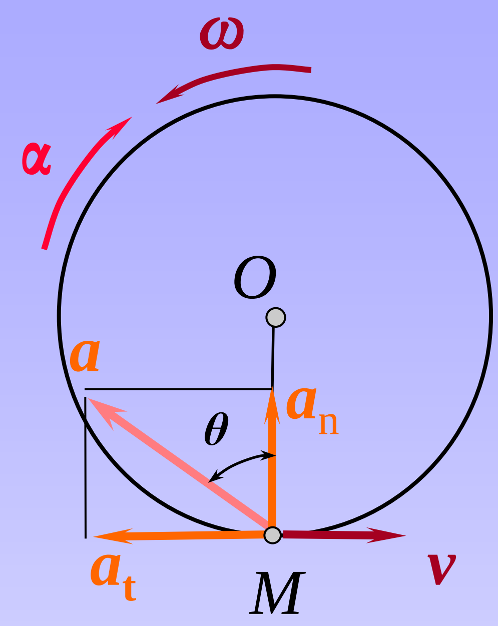
● 切向加速度

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\omega) = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

或 $$a_{\mathrm{t}} = R\alpha$$

即，定轴转动刚体内任一点的切向加速度，等于该点的转动半径与刚体角加速度的乘积。式中 α 和a_{t}具有相同的正负号。

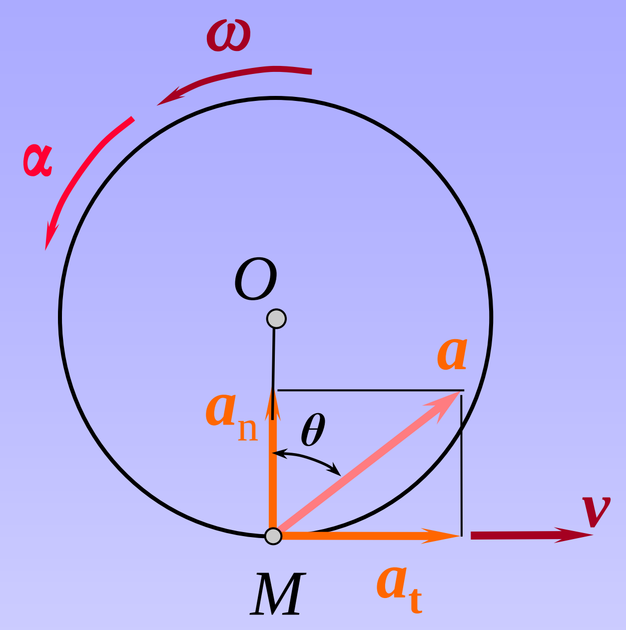




不难看出，当 α 和 ω 正负相同时，切向加速度a_t和速度v有相同的指向，这意味着加速转动；当 α 和 ω 正负不相同时，则a_t与v有相反的指向，这意味着减速转动。

法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{R}$$



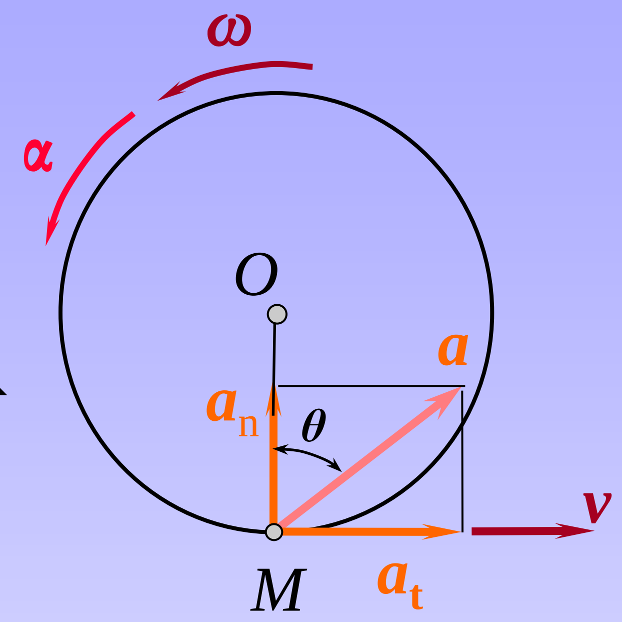
或 $$a_n = R\omega^2$$

即，定轴转动刚体内任一点的法向加速度，等于该点转动半径与刚体角速度平方的乘积。法向加速度a_n恒指向轨迹的曲率中心即圆心O，因此也称为向心加速度。

总加速度

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2\alpha^2 + R^2\omega^4}$$

$$a = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$



它与半径*MO*的夹角*θ*（恒取正值）可按下式求出

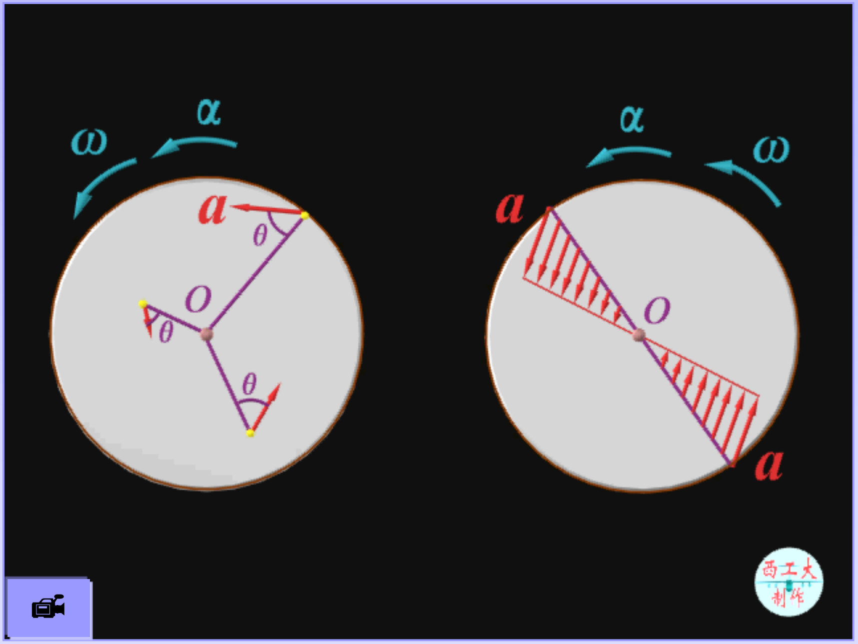
$$\tan\theta = \frac{|a_t|}{a_n} = \frac{R|\alpha|}{R\omega^2} \quad 或 \quad \tan\theta = \frac{|\alpha|}{\omega^2}$$

显然，当刚体作加速转动时，加速度*a*偏向转动前进的一方；当减速转动时，加速度*a*偏向相反的一方；当匀速转动时*a*指向轴心*O*。

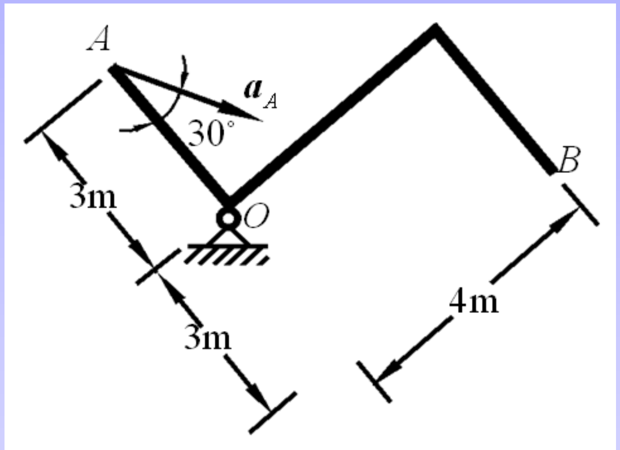
● 加速度的分布规律　$a = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$, $\tan\theta = \frac{|\alpha|}{\omega^2}$

由上式可见，在任一瞬时，定轴转动刚体内各点的切向加速度、法向加速度和总加速的大小都与各点的转动半径成正比。

但是，总加速度a与转动半径所成的偏角，却与转动半径无关，即在任一瞬时，定轴转动刚体内各点的加速度对其转动半径的偏角θ都相同；平面上各点加速度的分布如图。



思考题： 如图所示双直角曲杆可绕O轴转动，图示瞬时A点的加速度$a_A = 6\sqrt{3}m/s^2$，方向如图，则该瞬时刚体转动的角速度大小为________，角加速度大小为________，B点的加速度大小为__________。



$$a_A^n = \omega^2 \times \overline{OA} = a_A \cos 30°$$
$$= 6\sqrt{3} \times \sqrt{3}/2 = 9$$

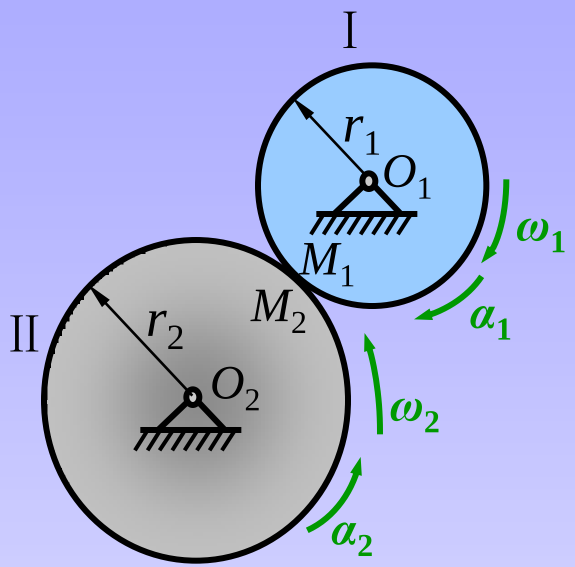
$$\omega = \sqrt{3}\ \mathrm{rad/s}$$

$$a_A^t = \alpha \times \overline{OA} = a_A \sin 30°$$
$$= 6\sqrt{3} \times 0.5 = 3\sqrt{3}$$

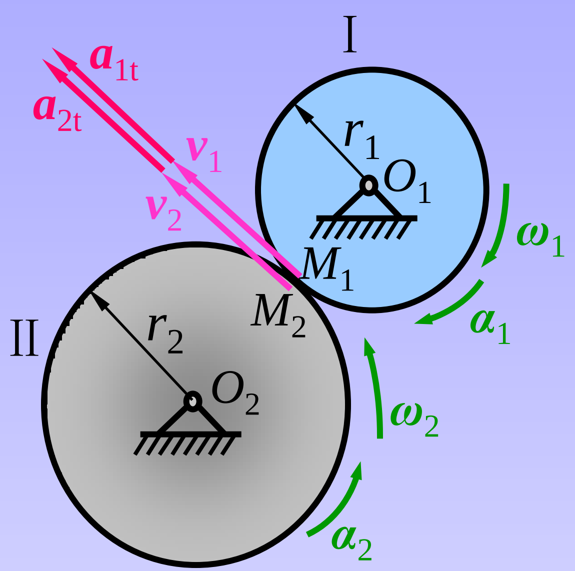
$$\alpha = \sqrt{3}\ \mathrm{rad/s^2}$$

$$a_B = \sqrt{15^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2} = 10\sqrt{3}\mathrm{m/s^2}$$

$$\overrightarrow{a_B} = \omega^2 \times \overline{OB}\overrightarrow{e_n} + \alpha \times \overline{OB}\overrightarrow{e_t}$$
$$= 15\overrightarrow{e_n} + 5\sqrt{3}\overrightarrow{e_t}$$



例7-2　图示为一对外啮合的圆柱齿轮，分别绕固定轴O_1和O_2转动，两齿轮的节圆半径分别为r_1和r_2。已知某瞬时主动轮Ⅰ的角速度为ω_1，角加速度为$\boldsymbol{\alpha}_1$，试求该瞬时从动轮Ⅱ的角速度ω_2和角加速度$\boldsymbol{\alpha}_2$。为简便起见，本例的ω_1，ω_2，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$都代表绝对值。



解： 齿轮传动可简化为两轮以节圆相切并在切点处无相对滑动，因而两轮的啮合点M_1与M_2恒具有相同的速度与切向加速度。即

$$v_1 = v_2, \qquad a_{1t} = a_{2t}$$

提示：$\mathrm{d}s_1 = v_1\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}s_2 = v_2\mathrm{d}t$，若$\mathrm{d}s_1 \neq \mathrm{d}s_2$，将产生相对滑动。

或

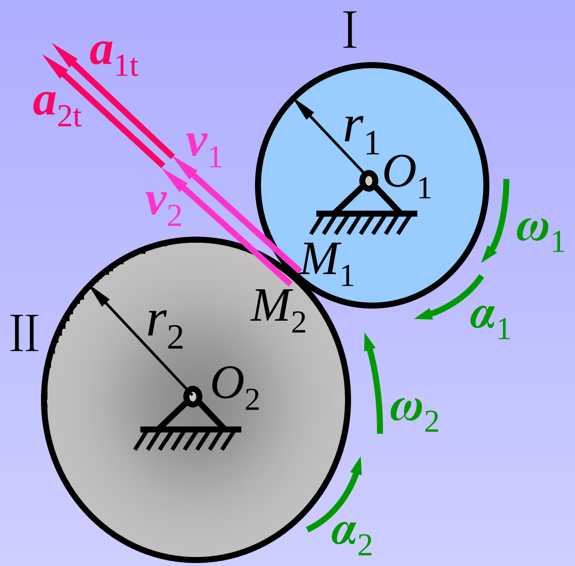
$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2, \qquad r_1\alpha_1 = r_2\alpha_2$$

因而从动轮的角速度和角加速度分别为

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1 , \qquad \alpha_2 = \frac{r_1}{r_2}\alpha_1$$

显然，ω_2，α_2的转向分别与ω_1，α_1相反。

有： $$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{r_2}{r_1},$$



一对啮合齿轮的模数$\left(\frac{\text{节圆直径}}{\text{齿数}}\right)$相等，因此它们的半径$r$与齿数$z$成正比。于是得出

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{z_2}{z_1},$$

即：一对啮合齿轮的角速度和角加速度的大小都反比于节圆半径或齿数。

通常把主动轮与从动轮的角速度之比称为这对齿轮啮合的**传动比**。

传动比定义为 $$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{z_2}{z_1}$$

§7-4 用矢积表示刚体上点的速度与加速度

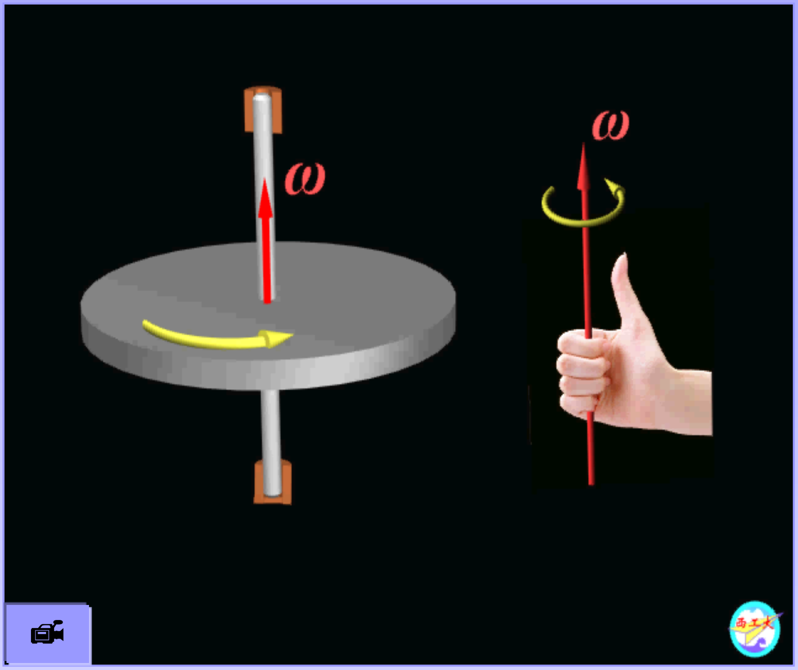
- 用矢量表示角速度与角加速度
- 用矢积表示刚体上点的速度
- 用矢积表示刚体上点的加速度

§ 7-4 用矢积表示刚体上点的速度与加速度

1. 用矢量表示角速度与角加速度

● 角速度矢

沿刚体的转轴z画出一个矢量 $\boldsymbol{\omega}=\omega \boldsymbol{k}$ （其中$\boldsymbol{k}$为轴z的单位矢），$\boldsymbol{\omega}$称为刚体的角速度矢。

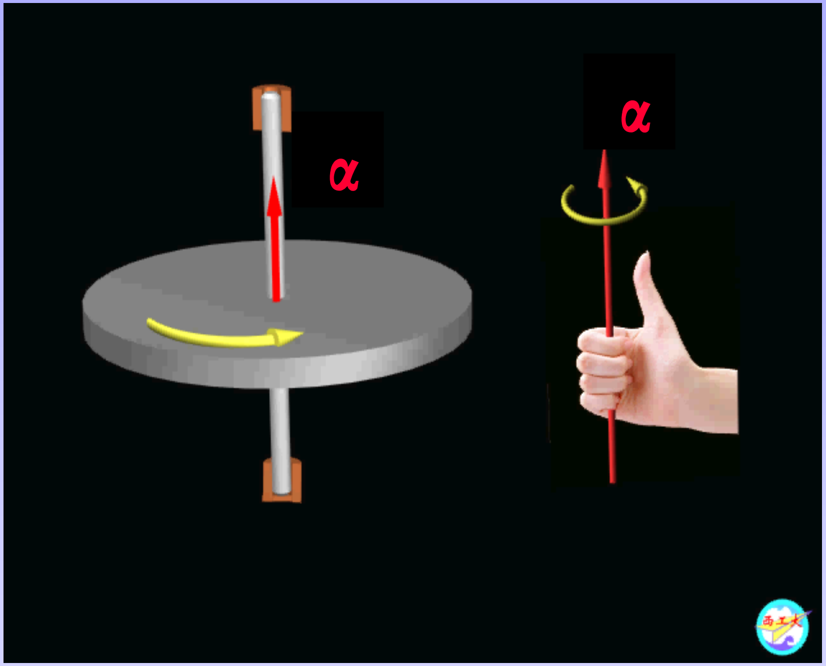


它的作用线表示出转轴的位置，而它的模则以某一比例表示出角速度ω的绝对值。$\boldsymbol{\omega}$的指向由右手法则决定。

定轴转动刚体的角速度矢$\boldsymbol{\omega}$被认为是滑动矢量，可以从转轴上的任一点画出。

角加速度矢

同样，可以用矢量 $\boldsymbol{\alpha}=\alpha\boldsymbol{k}$ 表示刚体的角加速度，它也是滑动矢量，沿转轴z画出。它的模表示角加速度的大小，它的指向则决定于 α 的正负。



$$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\alpha\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

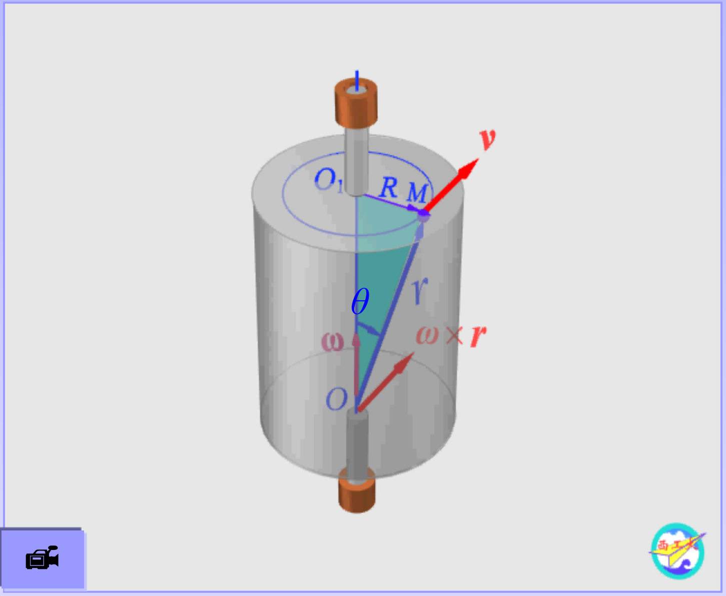
§ 7-4 用矢积表示刚体上点的速度与加速度

2. 用矢积表示刚体上点的速度

定轴转动刚体内任一点M的速度$\boldsymbol{v}$ 的大小为 $|v| = R|\omega|$。由于 $R = r\sin\theta$ ，因而 $|v| = R|\omega| = |\omega| r\sin\theta$ 。

根据矢积的定义，矢积 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 的模也等于 $|\omega| r\sin\theta$ ，它的方向也与速度$\boldsymbol{v}$的方向一致，故有矢积表达式

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$



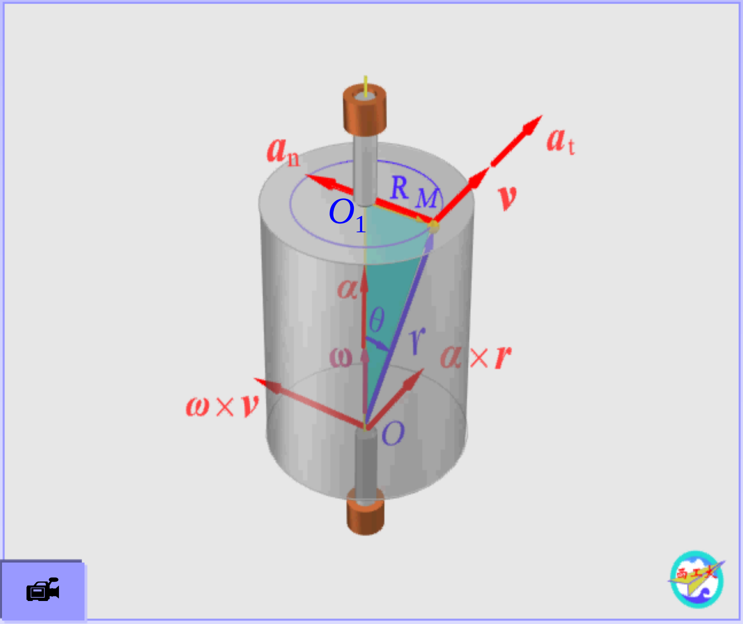
定轴转动刚体内任一点的速度，可以由刚体的角速度矢与该点的矢径的矢积来表示。

3. 用矢积表示刚体上点的加速度

速度的矢积表达式 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$

将上式左右两边对时间求矢导数。左端的导数为点M的加速度，而右端的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$



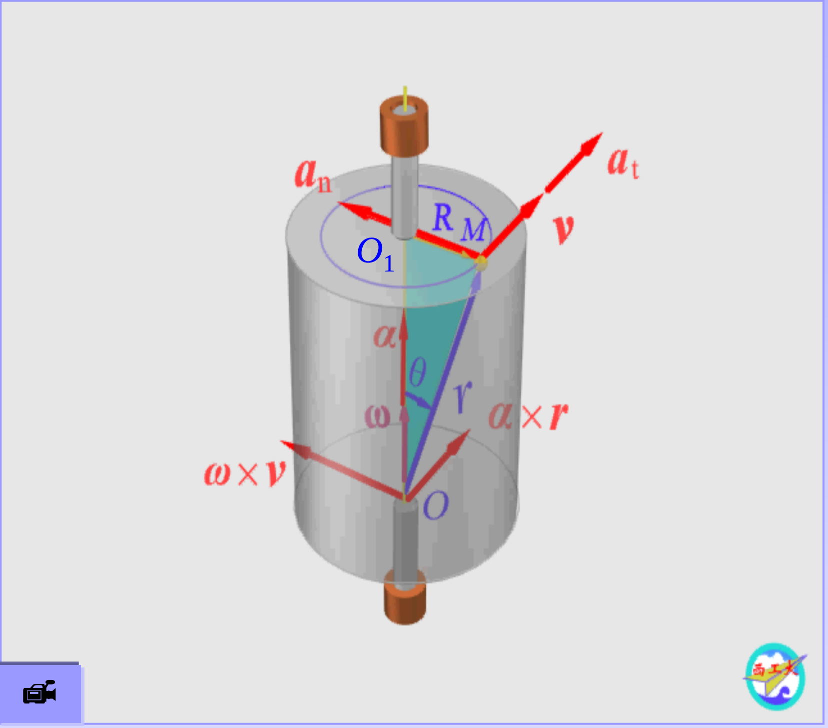
逐项分析

式中第一个矢积 $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$的模为

$$|\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}| = |\alpha| r \sin\theta = R|\alpha| = |a_{\mathrm{t}}|$$

$$|\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}| = |\alpha| r \sin\theta = R|\alpha| = |a_t|$$

这矢积垂直由转轴z和转动半径O_1M决定的平面 OO_1M，它的指向与图中自点O 画出的矢量一致。可见，矢积 $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$ 按大小和方向都与点M的切向加速度a_t相同。



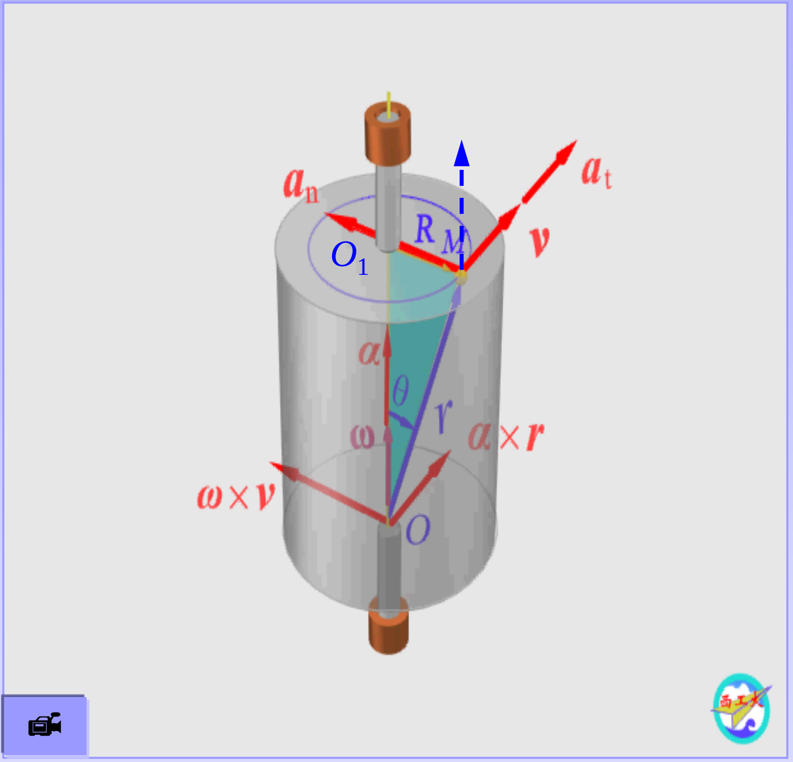
故有矢积表达式

$$\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$$

第二个矢积$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ 模为 $|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}|=|\omega v|=R\omega^2=a_{\mathrm{n}}$

这矢积同时垂直于刚体的转轴和点M的速度$\boldsymbol{v}$，即沿点M的转动半径R，并且按照右手规则它是由点M指向轴心O_1。可见，矢积$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ 表示了点M的法向加速度a_{n} ，即有矢积表达式

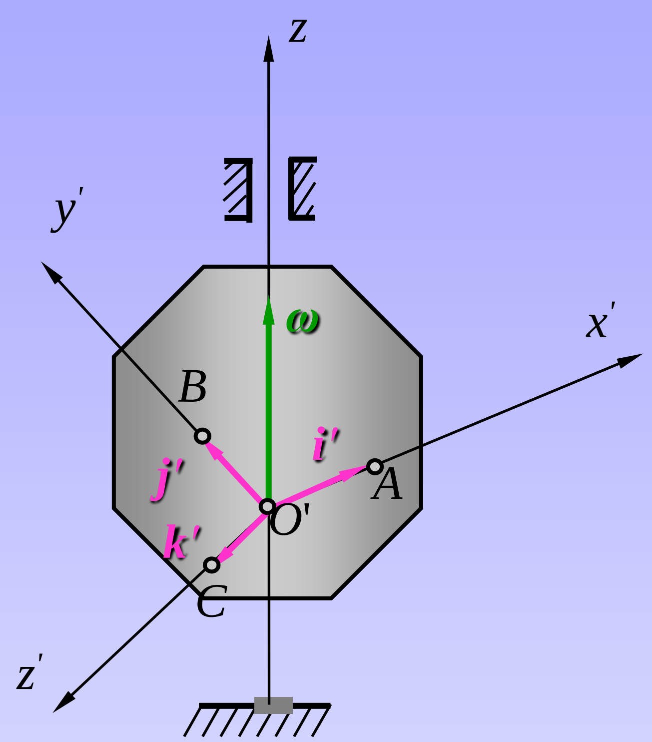
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$



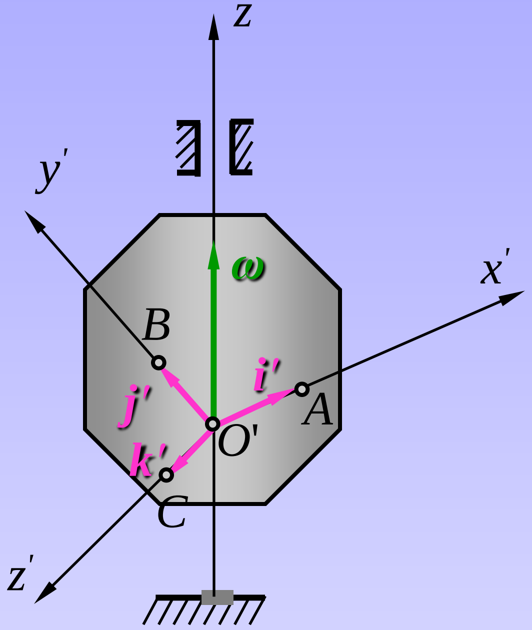
于是，得点M的总加速度的矢积表达式

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}}$$

定轴转动刚体内任一点的切向加速度，可由刚体的角加速度矢与该点矢径的矢积表示，而法向（向心）加速度，则由刚体的角速度矢与该点速度的矢积表示。



例7-4 刚体以角速度ω绕定轴Oz转动，其上固连有动坐标系$O'x'y'z'$（如图），试求由O'点画出的动系轴向单位矢$\boldsymbol{i}'$，$\boldsymbol{j}'$，$\boldsymbol{k}'$端点A，B，C的速度。



解： 先求端点 A 的速度。设 A 点的矢径为$\boldsymbol{r}_A$，则A点的速度为

$$\boldsymbol{v}_A=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}$$

A点是定轴转动刚体内的一点，由式有

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A$$

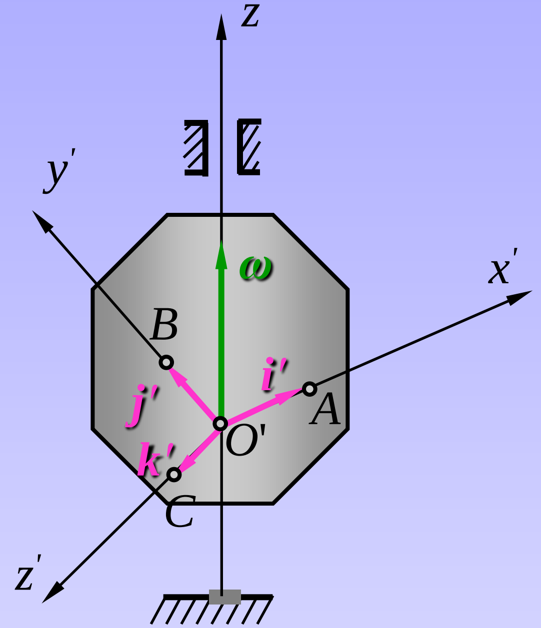
可见 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A$，但这里有 $\boldsymbol{r}_A=\boldsymbol{i}'$,

故

$$\boldsymbol{v}_A=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}'$$

同理可得 $\boldsymbol{v}_B$ 和 $\boldsymbol{v}_C$ 的矢量表达式。

于是得到一组公式



$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}'}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}'}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}'}$$

它称为泊松公式。

谢谢使用