



5.3 考虑滑动摩擦时的 平衡问题



考虑摩擦时的平衡问题的分析与前面相同。但要特别注意摩擦力的分析，其中重要的是判断摩擦力的方向和大小。

两种方法

1. 临界平衡状态分析

- 应用 $F_{\max} = f_s F_N$ 作为补充方程。
- 根据物体的运动趋势来判断其接触处的摩擦力方向，不能任意假设。

在许多情况下其结果是一个不等式或范围。



考虑摩擦时的平衡问题的分析与前面相同。但要特别注意摩擦力的分析，其中重要的是判断摩擦力的方向和大小。

两种方法

2.非临界平衡状态分析（平衡范围分析）

- 应用 $F \leq f_s F_N$ 作为补充方程。
- 当物体平衡时，摩擦力 F 和支承面的正压力 F_N 彼此独立。

摩擦力 F 的指向可以假定，大小由平衡方程决定。



例题1 在倾角 α 大于摩擦角 φ_f 的固定斜面上放有重 G 的物块，为了维持这物块在斜面上静止不动，在物块上作用了水平力 F 。试求这力容许值的范围。

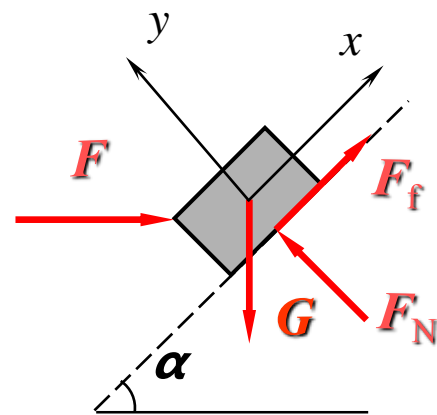
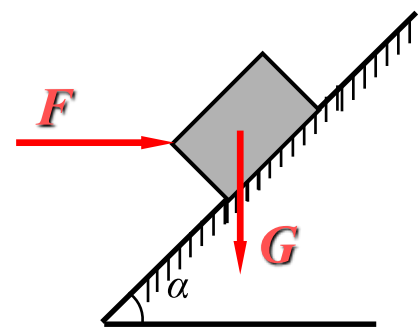
解： 取物块为研究对象。

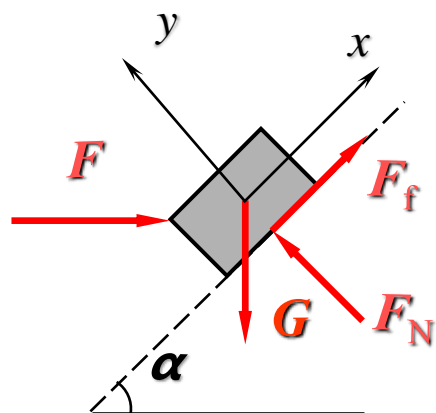
1. 设 F 值较小但仍大于维持平衡的最小值 F_{\min} ，
受力分析如图。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F \cos \alpha + F_f - G \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_N - G \cos \alpha - F \sin \alpha = 0$$





联立求解得 $F_f = G \sin \alpha - F \cos \alpha$

$$F_N = G \cos \alpha + F \sin \alpha$$

假设处于临界平衡状态 $F_f = f_s F_N$,

所以 $G \sin \alpha - F \cos \alpha = f_s (G \cos \alpha + F \sin \alpha)$

解得使物块不致下滑的 F 的最小值

$$F = \frac{\tan \alpha - f_s}{1 + f \tan \alpha} G$$

将 $f_s = \tan \varphi_f$ 代入上式得

$$F = \frac{\tan \alpha - f_s}{1 + f \tan \alpha} G = G \tan(\alpha - \varphi_f) \quad (\text{a})$$



2. 设 F 值较大但仍小于维持平衡的最大值 F_{\max} ,
受力分析如图。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F \cos \alpha - F_f - G \sin \alpha = 0$$

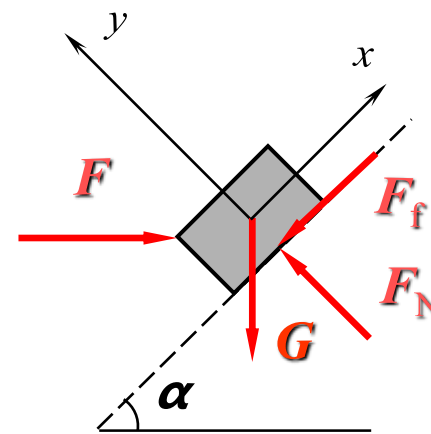
$$\sum F_y = 0, \quad F_N - G \cos \alpha - F \sin \alpha = 0$$

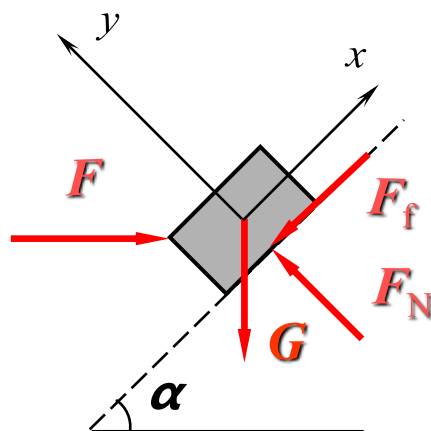
联立求解 $F_f = -G \sin \alpha + F \cos \alpha$

$$F_N = G \cos \alpha + F \sin \alpha$$

在平衡范围内 $0 \leq F_f \leq f_s F_N$,

所以 $-G \sin \alpha - F \cos \alpha \leq f_s (G \cos \alpha + F \sin \alpha)$





$$-G \sin \alpha - F \cos \alpha \leq f_s (G \cos \alpha + F \sin \alpha)$$

解得使物块不致上滑的力 F 值

$$F \leq \frac{\tan \alpha - f_s}{1 + f_s \tan \alpha} G$$

将 $f_s = \tan \varphi_f$ 代入上式得

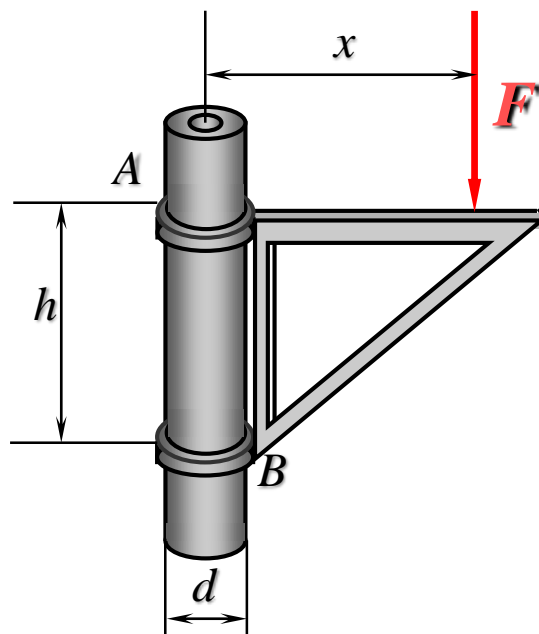
$$F \leq \frac{\tan \alpha - f_s}{1 + f_s \tan \alpha} G = G \tan(\alpha + \varphi_f) \quad (\text{b})$$

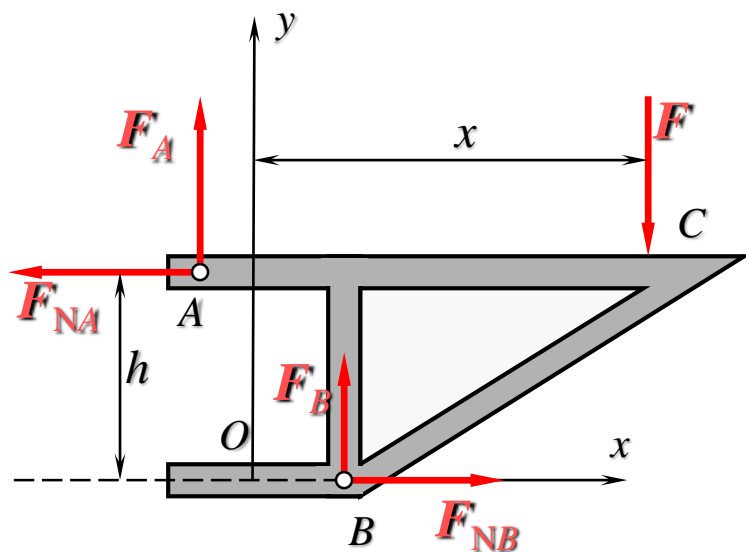
3.综合条件 (a) 和 (b) , 得所求为了维持这物块在斜面上静止不动 , 在物块上所作用水平力 F 的容许值范围

$$G \tan(\alpha - \varphi_f) \leq F \leq G \tan(\alpha + \varphi_f)$$



例题2—活动支架套在固定圆柱的外表面，且 $h = 20 \text{ cm}$ 。假设支架和圆柱之间的静摩擦因数 $f_s = 0.25$ 。问作用于支架的主动力 F 的作用线距圆柱中心线至少多远才能使支架不致下滑（支架自重不计）。





3.联立求解。

$$F_{NA} = F_{NB} = 2F$$

$$x = 40 \text{ cm}$$

解:

1.取支架为研究对象,受力分析如图。

2.列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{NA} + F_{NB} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_A + F_B - F = 0$$

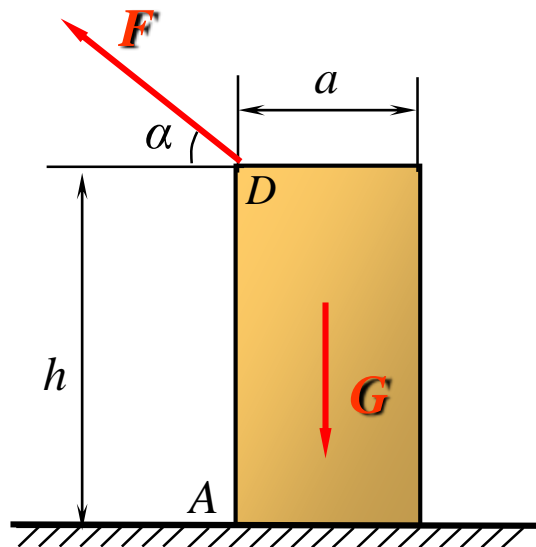
$$\sum M_O = 0, \quad hF_{NA} - \frac{d}{2}(F_A - F_B) - xF = 0$$

补充方程

$$F_A = f_s \times F_{NA}, \quad F_B = f_s \times F_{NB}$$



例题3 图示匀质木箱重 $G = 5 \text{ kN}$ ，它与地面间的静摩擦因数 $f_s = 0.4$ 。图中 $h = 2a = 2 \text{ m}$ ， $\alpha = 30^\circ$ 。（1）问当 D 处的拉力 $F = 1 \text{ kN}$ 时，木箱是否平衡？（2）求能保持木箱平衡的最大拉力。





解：取木箱为研究对象，受力分析如图

(1) 木箱有向左滑动趋势

列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_f - F \cos \alpha = 0$$

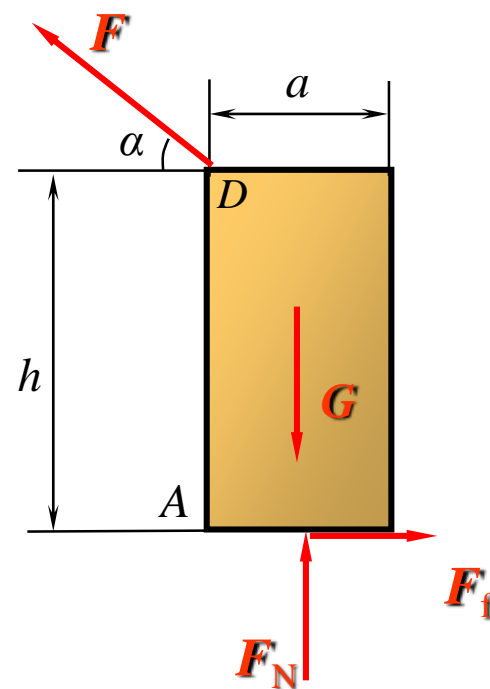
$$\sum F_y = 0, \quad F_N - G + F \sin \alpha = 0$$

补充方程

$$F_f = F_{\max} = f_s F_N$$

解得

$$F_{\text{滑}} = \frac{f_s G}{\cos \alpha + f_s \sin \alpha} = 1\,876 \text{ N}$$





(2) 木箱处于绕 A 点翻倒的临界平衡状态

列平衡方程

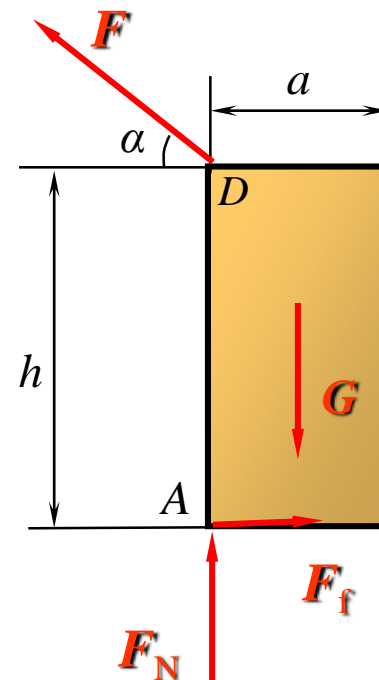
$$\sum M_A(F) = 0, \quad hF \cos \alpha - G \frac{a}{2} = 0$$

解得

$$F_{\text{翻}} = \frac{Ga}{2h \cos \alpha} = 1443 \text{ N}$$

由于 $F_{\text{翻}} < F_{\text{滑}}$ ，所以保持木箱平衡的最大拉力为

$$F = F_{\text{翻}} = 1443 \text{ N}$$





1、滑动摩擦力是在两个物体相互接触的表面之间有相对滑动趋势或有相对滑动时出现的切向约束力。前者称为**静滑动摩擦力**，后者称为**动滑动摩擦力**。

(1) 静摩擦力：

$$0 \leq F \leq F_{\max}$$

静摩擦定律为

$$F_{\max} = f_s F_N$$

(2) 动摩擦力：

$$F = f_d F_N$$



2、摩擦角 φ_f ： $\tan \varphi_f = f_s$

物体平衡时，全约束力与法线间夹角 φ 的变化范围为

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_1$$

当主动力的合力作用线在摩擦角之内发生自锁现象。

3、求解摩擦问题的两种方法

(1) 临界平衡状态分析法： $F_{\max} = f_s F_N$

(2) 平衡范围分析： $F \leq f_s F_N$



谢谢！