诚信保证

本人知晓我校考场规则和违纪处分条例的有关规定，保证遵守考场规则，诚实做人。　　本人签字：____________

编号：__________

西北工业大学考试试题（卷）

2015－2016 年第 1 学期

开课学院　航空学院　课程　概率论与数理统计　学时　48

考试日期　2015.12.04　考试时间　2　小时　　考试形式（闭）（A）卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

考生班级		学　号		姓　名	

一、填空（每空 2 分，共 20 分）

1. 已知 $P(\bar{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\bar{B})=0.5$，则条件概率 $P(B\,|\,A\cup\bar{B})=$ _______。

2. 11 张卡片上分别写上 reliability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，排列结果为 ability 的概率为____________。

3. 设随机变量 X 的分布律

X	-1	2	3
p_k	1/2	1/4	1/4

则 $P\{2\le X\le 3\}=$__________。

4. 设 $X_1,\dots,X_n$ 相互独立且具有相同的分布函数 $F(x)$ 和密度函数 $f(x)$，则 $Z=\max(X_1,\dots,X_n)$ 的密度函数 $f_Z(z)=$______________。

注：1. 命题纸上一般不留答题位置，试题请用小四、宋体打印且不出框。

2. 命题教师和审题教师姓名应在试卷存档时填写。

5. 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，随机变量 Y 为区间[0,6]上的均匀分布，X, Y 之间相关系数 $\rho_{XY}=0.5$，则 $D\left(3X-Y+2\right)$=________。

6. 设 $X_1,X_2,...,X_{20}$ 是相互独立的随机变量，且都在区间(0,12)上服从均匀分布。记 $X=\sum_{k=1}^{20}X_k$，则 $P(X>100)\approx$________。（已知 $\Phi(\sqrt{5/3})=0.9525$）

7. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自泊松分布总体 $X\sim\pi(\lambda)$（其中 λ 未知）的一个样本。$\hat{\lambda}_1=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$，$\hat{\lambda}_2=\frac{1}{4}\left(X_1+X_2\right)+\frac{1}{2}X_4$，$\hat{\lambda}_3=\frac{1}{6}(X_2+X_3)+\frac{2}{3}X_1$ 和 $\hat{\lambda}_4=\frac{1}{13}(X_1+2X_2+4X_3+5X_4)$ 均为参数 λ 的估计量，则其中最有效的估计量是________。

8. 设随机变量 X，$E\left(X\right)=\mu$，$D\left(X\right)=\sigma^2$，根据切比雪夫不等式有 $P\left\{\left|X-\mu\right|<2\sigma\right\}\geq$ ________。

9. 设 $X_1,X_2,...,X_8$ 为来自总体 $N\left(0,1\right)$ 的一个样本，则统计量 $Y=\frac{(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2}{(X_5+X_6)^2+(X_7+X_8)^2}\sim$________。

10. 假设 H_0 : 总体 X 的分布函数为 $F\left(x;\theta\right)$，θ 为未知参数。若在 H_0 成立条件下 X 的所有可能取值的全体分为 k 个互不相交的子集 $A_i(i=1,2,...,k)$，f_i 表示样本值 $x_1,x_2,...,x_n$ 中落入 A_i 的个数，$p_i=P(A_i)$，则给定显著性水平 α，该假设检验问题的拒绝域为 χ^2 =________________ ≥ ________________。

二、（8 分）病树的主人外出，委托邻居浇水，设已知如果不浇水，树死去的概率为 0.9。若浇水则树死去的概率为 0.1。有 0.9 的把握邻居会记得浇水，求

（1）主人回来树还活着的概率；

（2）若主人回来树已死去，求邻居忘记浇水的概率。

三、（14 分）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 1<x<e\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：（1）求 X 的分布函数 $F(x)$；

（2）求概率 $P\left\{2<X<\dfrac{5}{2}\right\}$；

（3）求 $D\left(2X^2+5\right)$；

（4）求函数 $Y=2X-3$ 的概率密度函数。

四、（20 分）设总体 X 的分布函数为

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<\theta\\ \dfrac{x\text{-}\theta}{1-\theta}, & \theta\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，若 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，试求：

（1）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$；

（2）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_{MLE}$；

（3）求 $P(\theta<X\le 1/2)$ 的最大似然估计；

（4）判断 $\hat{\theta}_M$ 是否为 θ 的无偏估计和相合估计？

（5）判断 $\hat{\theta}_{MLE}$ 是否为 θ 的无偏估计和相合估计？

五、（18 分）两种小麦品种从播种到抽穗所需的天数如下

x	100	101	99	98	99	101	99	100	99	98
y	100	99	100	98	99	98	99	98		

设两样本依次来自正态总体 $X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$, $\mu_i,\sigma_i^2 (i=1,2)$ 均未知，且 X 与 Y 相互独立。

（1）利用总体 X 及总体 Y 的样本值，试分别检验以下假设(给定显著性水平 $\alpha=0.05$)

a: 检验假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$；

b: 检验假设 $H_0:\mu_1-\mu_2\leq 0$, $H_1:\mu_1-\mu_2>0$。

（2）利用总体 X 的样本值，分别求均值 μ_1 的置信度为 0.95 的置信区间，以及方差 σ_1^2 的置信度为 0.95 的单侧置信上限；

（已知 $t_{0.025}(9)=2.2622$，$t_{0.025}(10)=2.2281$，$t_{0.05}(16)=1.7459$，$t_{0.05}(18)=1.7341$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.022$，$\chi^2_{0.025}(10)=20.483$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.700$，$\chi^2_{0.975}(10)=3.247$，$\chi^2_{0.95}(9)=3.325$，$\chi^2_{0.95}(10)=3.94$，$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，$\chi^2_{0.05}(10)=18.307$，$F_{0.025}(9,7)=4.82$，$F_{0.025}(10,8)=4.30$，$F_{0.025}(7,9)=4.20$，$F_{0.025}(8,10)=3.85$）。

六、（20 分）设二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{A}{x^4 y}, & \dfrac{1}{x}<y<x, x>1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1）求常数 A;

（2）求 Cov(X,Y);

（3）判断 X 与 Y 是否独立，并给出理由；

（4）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$；

（5）求 $Z=XY$ 的概率密度函数 $f_Z\left(z\right)$。

答案

一、填空

1. $\underline{\quad 0.25 \quad}$。

2. $\underline{12/A_{11}^{7}=1/138600=7.22\times10^{-6}}$。

3. $\underline{\quad 1/2 \quad}$。

4. $\underline{n(F(z))^{n-1}f(z)}$　。

5. $\underline{39-6\sqrt{3}=28.6077}$（或 5.25-$\underline{3\sqrt{3}/2}$=2.6519）。

6. $\underline{\quad 0.9525 \quad}$

7. $\underline{\hat{\lambda}_1}$。

8. $P\left\{|X-\mu|<2\sigma\right\}\geq\frac{3}{4}$　。

9. $Y=\frac{(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2}{(X_5+X_6)^2+(X_7+X_8)^2}\sim\underline{\quad F(2,2)\quad}$。

10. H_0：总体 X 的分布函数为 $F\left(x;\theta\right)$，θ 为未知参数。若在 H_0 成立条件下的 X 的所有可能取值的全体分为 k 个互不相交的子集 $A_i(i=1,2,...,k)$，f_i 表示样本值 $x_1,x_2,...,x_n$ 中落入 A_i 的个数，$p_i=P(A_i)$，则给定显著性水平 α，该假设检验问题的拒绝域为 $\underline{\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(f_i-np_i\right)^2}{np_i}\geq\chi_\alpha^2(k-2)}$ 或 $\underline{\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i^2}{np_i}-n\geq\chi_\alpha^2(k-2)}$.

二（1）0.82　　　　（2）0.5

三、（1）$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \ln x, & 1\leq x<e\\ 1, & x\geq e\end{cases}$　　（2）$P\left\{2<X<\frac{5}{2}\right\}=\ln\frac{5}{4}$

（3）$D\left(2X^2+5\right)=2e^2-2$

（4） $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y+3}, & -1<y<2e-3 \\ 0, & else \end{cases}$

四（1） $\hat{\theta}_M=2\bar{X}-1$.

（2）故从极大似然估计的意义出发求 θ 的最大似然估计,θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_{MLE}=X_{(1)}=\min(X_1,X_2,...,X_n)$。

（3） $\hat{P}(\theta<X\le\frac{1}{2})=\dfrac{1-2\hat{\theta}_{MLE}}{2-2\hat{\theta}_{MLE}}=\dfrac{1-2X_{(1)}}{2-2X_{(1)}}$

（4） $\hat{\theta}_M$ 是 θ 的无偏估计 ，$\hat{\theta}_M$ 为 θ 的相合估计。

（5） $\lim\limits_{n\to+\infty}E(\hat{\theta}_{MLE})=\theta,\ \lim\limits_{n\to+\infty}D(\hat{\theta}_{MLE})=0$，故 $\hat{\theta}_{MLE}$ 为 θ 的相合估计

五、(1). 方差比 σ_1^2/σ_2^2 的检验假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\ H_1:\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$

接受原假设，即认为 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$。

均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的检验假设 $H_0:\mu_1-\mu_2\le 0,\ H_1:\mu_1-\mu_2>0$

接受原假设 H_0

（2） a. 均值 μ_1 的置信区间为：(98.631，100.169)

b. 方差 σ_1^2 的单侧置信上限为 $\bar{\sigma}_1^2$=3.1279

六（1） $A=\dfrac{9}{2}$

(2) $COV(X,Y)=\dfrac{15}{32}$

(3) $f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{9\ln x}{x^4}, & x>1 \\ 0, & else \end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}y^2, & 0<y< \\ \dfrac{3}{2y^4}, & y>1 \end{cases}$

因为 $f_X(x)\times f_Y(y)\ne f(x,y)$ 所以 X 与 Y 不是相互独立的

（4）当 0<y<1 时，$f_{X|Y}(x \mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{3}{x^4y^3} & ,x>\dfrac{1}{y}\\ 0, & else\end{cases}$

当 y>1 时，$f_{X|Y}(x \mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{3y^3}{x^4} & ,x>y\\ 0, & else\end{cases}$

当 x>1 时，$f_{Y|X}(y \mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2y\ln x} & ,\dfrac{1}{x}<y<x\\ 0, & else\end{cases}$

(5) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{|x|}f(x,\dfrac{z}{x})dx=\begin{cases}\int_{\sqrt{z}}^{\infty}\dfrac{9}{2x^4z}dx=\dfrac{3}{2z^{5/2}} & ,z>1\\ 0 & ,else\end{cases}$