西北工業大學 Northwestern Polytechnical University

动 力 学

动 能 定 理

西北工业大学

支希哲 朱西平 侯美丽

动　力　学

第二章　动能定理

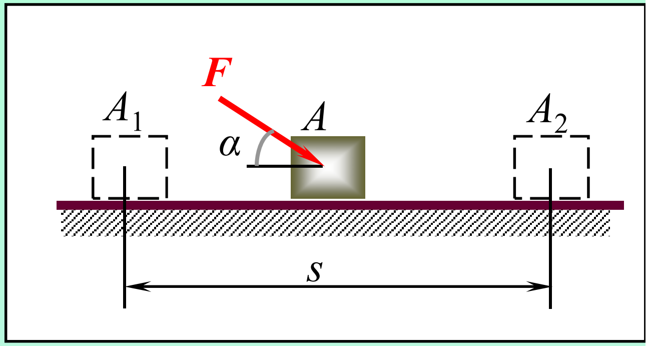
§2-1 力 的 功

- 常力在直线路程中的功
- 变力在曲线路程中的功
- 合力的功定理

§2-1 力 的 功

力的功是力在一段路程中对物体作用所累积的效果，其结果引起能量的转变和转化。下面讨论力的功的计算方法。

一、常力在直线路程中的功



设一物体，在常力$\boldsymbol{F}$作用下沿直线由 A_1 平动到 A_2，所经历的路程是 s。则该常力$\boldsymbol{F}$ 在此路程中的功为

$$W = F\cos\alpha \cdot s$$

其中 $F\cos\alpha$ 为力 $\boldsymbol{F}$ 在运动方向上的投影，可正可负。可见力的功是代数量。

功的基本单位在国际单位制中采用 J：

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N \cdot m}$$

§2-1 力 的 功

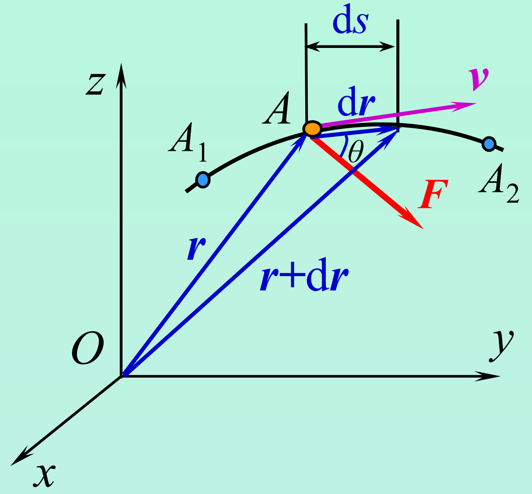
二、 变力在曲线路程中的功

1. 元功的定义

设在质点 A 上作用着变力 $\boldsymbol{F}$，现在把其轨迹曲线 A_1A_2 分成许多微小弧段，使得每个元弧段 $\mathrm{d}s$(即元路程)可视为直线段，而力 $\boldsymbol{F}$ 则视为常力，应用常力在直线路程中的功 的计算式，力 $\boldsymbol{F}$ 在每个元路程 $\mathrm{d}s$ 中的功

$$\mathrm{d}'W = F\cos\theta \cdot \mathrm{d}s$$

上式称为力 $\boldsymbol{F}$ 在元路程 $\mathrm{d}s$ 中的元功。



式中 θ 是力 $\boldsymbol{F}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 间的可变夹角。由于元路程$\mathrm{d}s$对应于位移的大小 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{v}|\mathrm{d}t$，故上式可以改写成

$$\mathrm{d}'W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$

§2-1 力 的 功

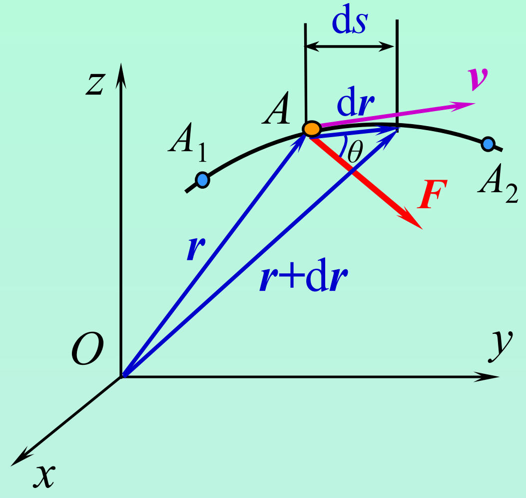
$$\mathrm{d}'W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$

2. 功的解析表达式。

因为 $\boldsymbol{F} = F_x\,\boldsymbol{i} + F_y\,\boldsymbol{j} + F_z\,\boldsymbol{k}$， $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{k}$，代入上式得

$$\mathrm{d}'W = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$$

这就是元功的解析表达式。



3. 变力在曲线路程中的总功

力 $\boldsymbol{F}$ 在有限路程 A_1A_2 中的总功W，是该力在这段路程中全部元功的代数和，可表示成曲线积分

$$W = \int_{A_1A_2} F\cos\theta\,\mathrm{d}s = \int_{A_1A_2} (F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z)$$

三、合力的功定理

如在质点上同时作用着几个力，则由合力投影定理可以推知，**合力在某一路程上的功，等于各分力分别在该路程中的功的代数和**。这个结论称为**合力之功定理**。

§2-2 几种特殊力的功

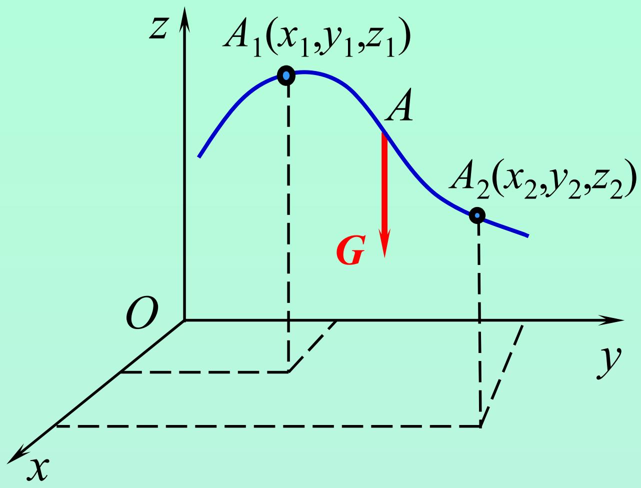
- 重力的功
- 弹性力的功
- 牛顿引力的功

§ 2-2 几种特殊力的功

一、 重力的功

设物体的重心 A 沿某一曲线由 A_1 运动到 A_2 。物体的重力 **G**在坐标轴系上的投影为

$$F_x = F_y = 0\,, \qquad F_z = -G$$



由元功表达式 $\mathrm{d}'W = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$

得重力的元功

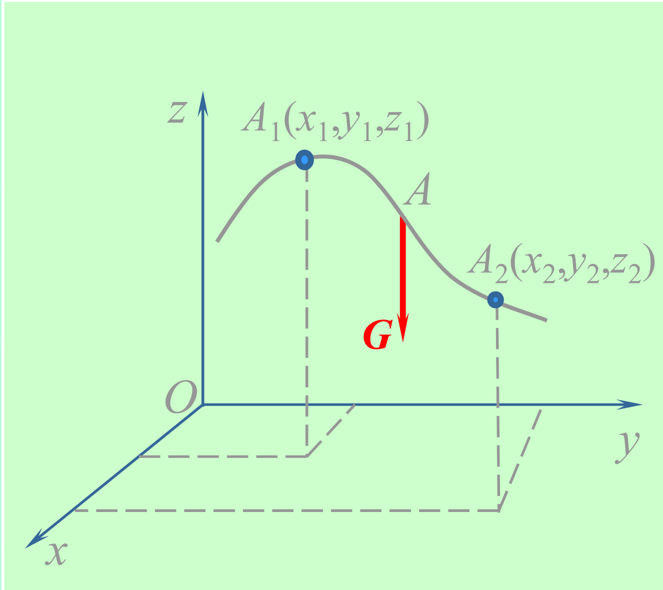
$$\mathrm{d}'W = -G\mathrm{d}z$$

故重力在曲线路程 A_1A_2 上的功为

$$W = -\int_{z_1}^{z_2} G\mathrm{d}z = G(z_1 - z_2) = Gh$$

故重力在曲线路程 A_1A_2 上的功为

$$W=-\int_{z_1}^{z_2} G\mathrm{d}z=G(z_1-z_2)=Gh$$



式中 z_1 和 z_2 分别是重心的路程起点和终点的纵坐标；$h = z_1 - z_2$ 是物体重心降落的高度，称为高度降。

有 结 论

（1）重力的功等于重力与重心高度降的乘积。

（2）重力的功与运动路径无关。

（3）重心下降，重力作正功；否则，重力做负功。

§2-2 几种特殊力的功

二、 弹性力的功

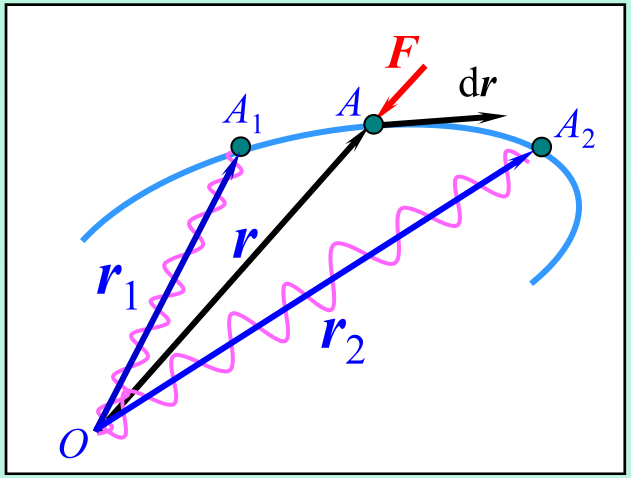
设弹簧未变形时长度是 l_0，刚度系数是k。弹簧的一端 O 固定，而另一端 A 作任意曲线运动，且弹簧始终处于直线状态。现求在点 A 由位置 A_1 沿某一路线运动到位置 A_2 的路程中弹性力所作的功。

在任意位置A，弹簧 的变形为 $\lambda = | r - l_0 |$，矢径方向的单位矢量为$\boldsymbol{r}/r$ 。

1. 弹性力的矢量表示

当$r - l_0 > 0$ 时， $\lambda = r - l_0$ ，弹簧拉长，弹性力$\boldsymbol{F}$指向点O，其矢量表示式为

$$\boldsymbol{F} = k\lambda(-\boldsymbol{r}/r) = k(r - l_0)(-\boldsymbol{r}/r)$$



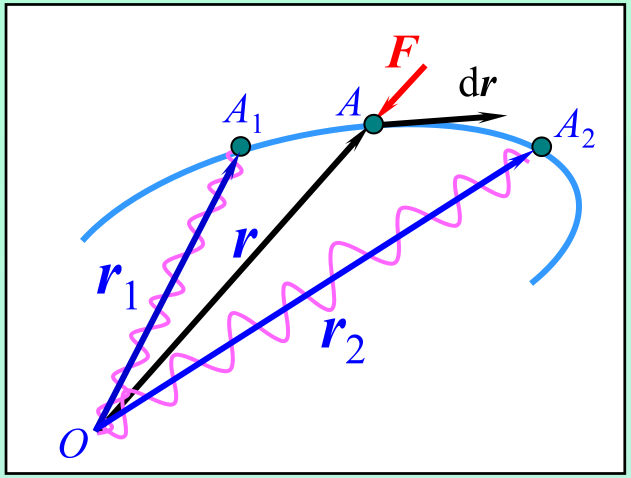
当$r - l_0 < 0$ 时， $\lambda = -(r - l_0)$ ，弹簧压缩，弹性力$\boldsymbol{F}$指向点A，其矢量表示式为

$$\boldsymbol{F} = k\lambda\,\boldsymbol{r}/r = -k(r - l_0)\,\boldsymbol{r}/r$$

§2-2 几种特殊力的功

弹性力的矢量表示 $\boldsymbol{F} = -k(r-l_0)\,\boldsymbol{r}/r$ 式中 $\boldsymbol{r}/r$ 是矢径方向的单位矢量。

2. 弹性力的元功



由元功表达式 $\mathrm{d}'W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$

得 弹性力 $\boldsymbol{F}$ 的元功

$$\mathrm{d}'W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -k(r-l_0)(\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}/r)$$

考虑到 $\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})/2 = \mathrm{d}(r^2)/2$

$= r\,\mathrm{d}r = r\,\mathrm{d}(r-l_0)$，即得

$$\mathrm{d}'W = -k(r-l_0)\,\mathrm{d}(r-l_0)$$

3. 弹性力的功

弹性力 $\boldsymbol{F}$ 在曲线路程 A_1A_2 中的功

$$W = \int_{A_1A_2}\mathrm{d}'W = -k\int_{r_1}^{r_2}(r-l_0)\mathrm{d}(r-l_0) = \frac{k}{2}[(r_1-l_0)^2-(r_2-l_0)^2]$$

§2-2 几种特殊力的功

弹性力 $\boldsymbol{F}$ 在曲线路程 A_1A_2 中的功

$$W=\int_{A_1A_2}\mathrm{d}'W=-k\int_{r_1}^{r_2}(r-l_0)\mathrm{d}(r-l_0)=\frac{k}{2}[(r_1-l_0)^2-(r_2-l_0)^2]$$

以 $\lambda_1=r_1-l_0$ 和 $\lambda_2=r_2-l_0$ 分别表示路程始末端 A_1 和 A_2 处弹簧的变形量，则上式写成

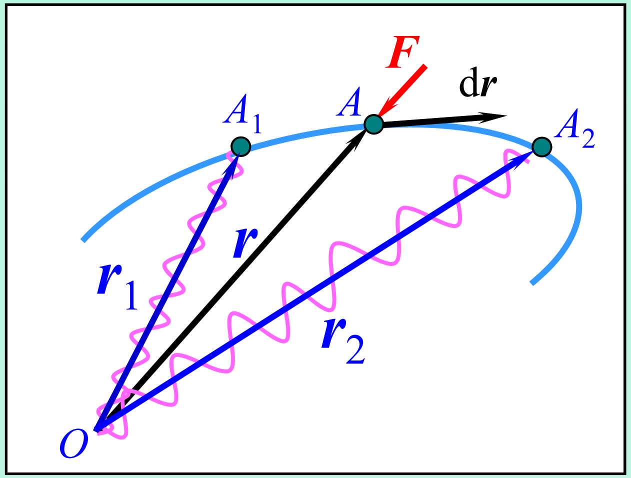
$$W=\frac{k}{2}(\lambda_1^2-\lambda_2^2)$$

有 结 论

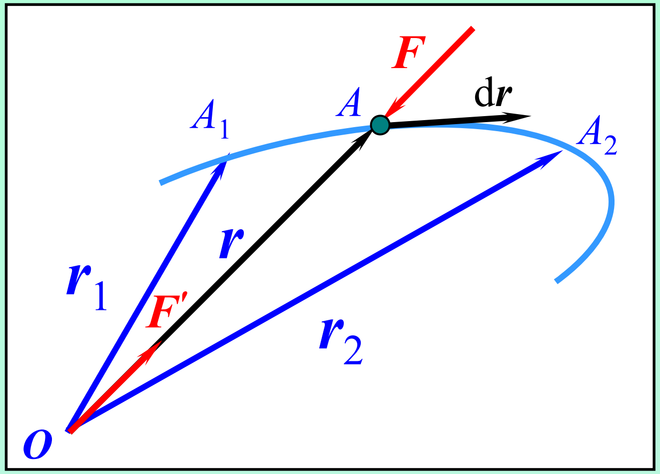
(1) 弹性力的功，等于弹簧初变形的平方和末变形的平方之差与弹簧刚度系数乘积的一半。

(2) 弹性力的功与运动路径无关。

(3) 弹簧的变形量减小弹性力作正功；否则，做负功。



三、 牛顿引力的功



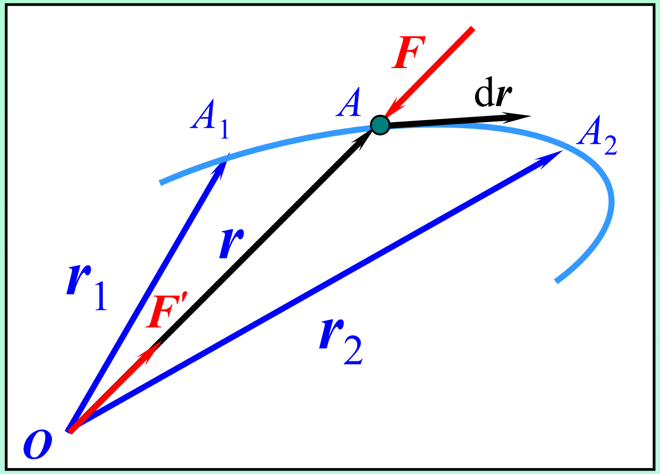
由牛顿万有引力定律知，若两个质点的质量分别是 M 和 m，相互间的距离是 r，则相互间的引力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 的大小等于

$$F = f\frac{Mm}{r^2}$$

式中的引力常数 $f = 6.673\times10^{-11}\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$。

§2-2 几种特殊力的功

和弹簧情形一样，现在要计算的是一对引力的总功。为此可设质量 M 固定在 O 处（固定引力中心），而 m 为运动质点A的质量。它的相对运动轨迹是 A_1A_2。



设在路程始末端质点 A 到力心 O 的距离（称为极径）分别为 r_1 和 r_2，于是 M，m 间一对牛顿引力在这段路程的功

$$W=-\int_{r_1}^{r_2} f\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r = fMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

§2-3 作用于质点系上的力系的功

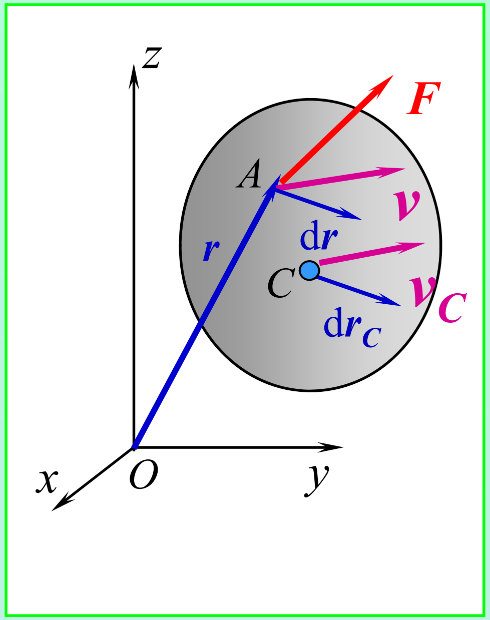
- 平动刚体上力的功
- 定轴转动刚体上外力的功
- 平面运动刚体上力的功
- 质点系和刚体内力的功
- 约束力的功之和等于零的情形

§2-3 作用于质点系上的力系的功

一、 平动刚体上力的功

1. 元 功

设一刚体在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下作平动，其质心在 C 点，刚体上点 A 的矢径是 $\boldsymbol{r}$ ，速度是 $\boldsymbol{v}$ ，则力 $\boldsymbol{F}$ 的元功



$$d'W = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}_C$$

或

$$d'W = \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{v}\,dt = \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{v}_C\,dt$$

2. 总 功

$$\sum d'W = \sum \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r} = \sum \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}_C$$

或

$$\sum d'W = \sum \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{v}\,dt = \sum \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{v}_C\,dt$$

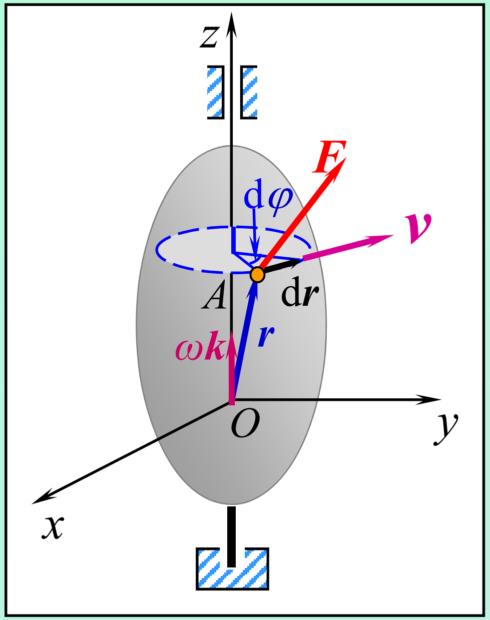
§2-3 作用于质点系上的力系的功

二、 定轴转动刚体上外力的功

1. 元功

设刚体绕定轴z 转动，角速度 $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\boldsymbol{k}$，刚体上点 A 的矢径是 $\boldsymbol{r}$，速度是 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ 。作用着力 $\boldsymbol{F}$，当刚体有一微小转角 $\mathrm{d}\varphi$ 时，力 $\boldsymbol{F}$ 的元功

$$\mathrm{d}'W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}t$$



混合积 $\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})$

由静力学知，力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的矩矢 $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$，而力 $\boldsymbol{F}$ 对轴 z 的矩 $m_z(\boldsymbol{F})$ 等于$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$ 在轴 z 上的投影，即

$$m_z(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{k}$$

所以，混合积 $\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}) = \omega\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}) = \omega\, m_z(\boldsymbol{F})$。

因此有元功 $d'W = m_z(\boldsymbol{F})\omega\, dt = m_z(\boldsymbol{F})\; d\varphi$

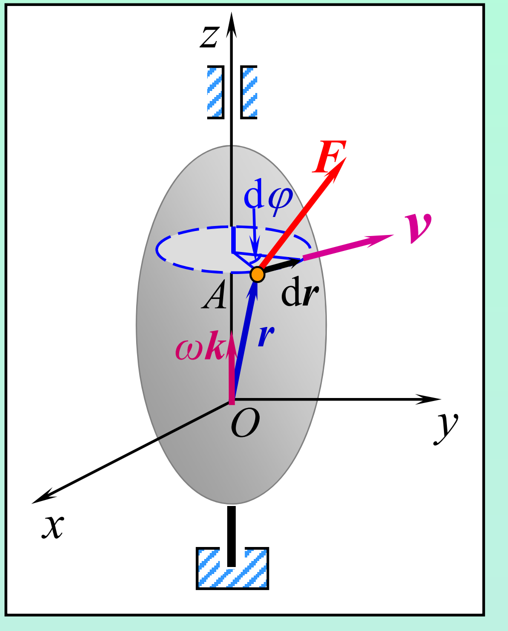
2. 总 功

在刚体由角 φ_1 转到角 φ_2 的过程中，力 $\boldsymbol{F}$ 的总功为

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} m_z(F)\mathrm{d}\varphi \qquad (2-10)$$

有 结 论

作用于定轴转动刚体上的力的功，等于该力对转轴的矩与刚体微小转角的乘积的积分。



特别是，若力矩是常量，则力在上述过程中的总功为

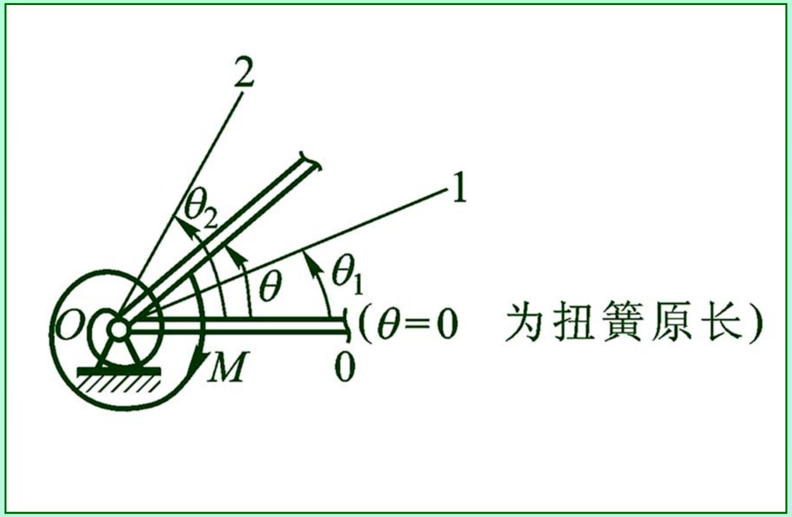
$$W = m_z(\boldsymbol{F})\,(\varphi_2 - \varphi_1)$$

如果刚体上作用着一个力系，则其元功为

$$\sum d'W = \sum m_z(\boldsymbol{F})\omega\; dt = M_z\, d\varphi$$

§2-3 作用于质点系上的力系的功

● 扭转弹簧力矩的功



假设扭簧上的杆处于水平时扭簧未变形，且变形时在弹性范围之内。变形时扭簧作用于杆上的力对点O之矩为

$$M = -k\theta$$

其中k为扭簧的刚度系数。当杆从角度θ_1转到角度θ_2时所作的功为

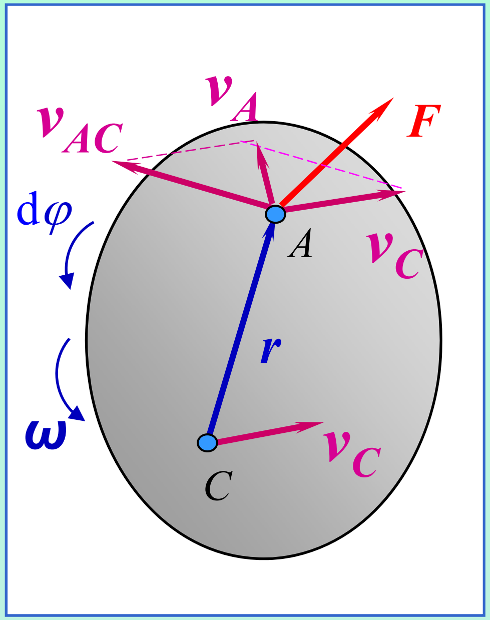
$$W_{12} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-k\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}k\theta_1^2 - \frac{1}{2}k\theta_2^2$$

§2-3 作用于质点系上的力系的功

三、 平面运动刚体上力的功

1. 元 功

设一刚体在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下作平面运动，其质心在 C 点，速度是 $\boldsymbol{v}_C$，刚体上点 A 的速度是 $\boldsymbol{v}_A$，则力 $\boldsymbol{F}$ 的元功



$$\mathrm{d}'W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_A\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{AC})\mathrm{d}t$$

$$= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_C\mathrm{d}t+\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_{AC}\mathrm{d}t$$

$$= \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}t$$

$$= \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C+m_C(\boldsymbol{F})\mathrm{d}\varphi$$

2. 总 功

$$\sum\mathrm{d}'W = \sum[\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C+m_C(\boldsymbol{F})\mathrm{d}\varphi]$$

有 结 论

作用于平面运动刚体上的力的功，等于该力在刚体随质心平动中的功与力对质心的矩在刚体转动中的功之和。

§2-3 作用于质点系上的力系的功

思考题

半径为$2r$的圆轮在水平面上作纯滚动如图示，轮轴上绕有软绳，轮轴半径为r，绳上作用常值水平拉力$\boldsymbol{F}$，求轮心C运动x距离时，力$\boldsymbol{F}$所作的功。

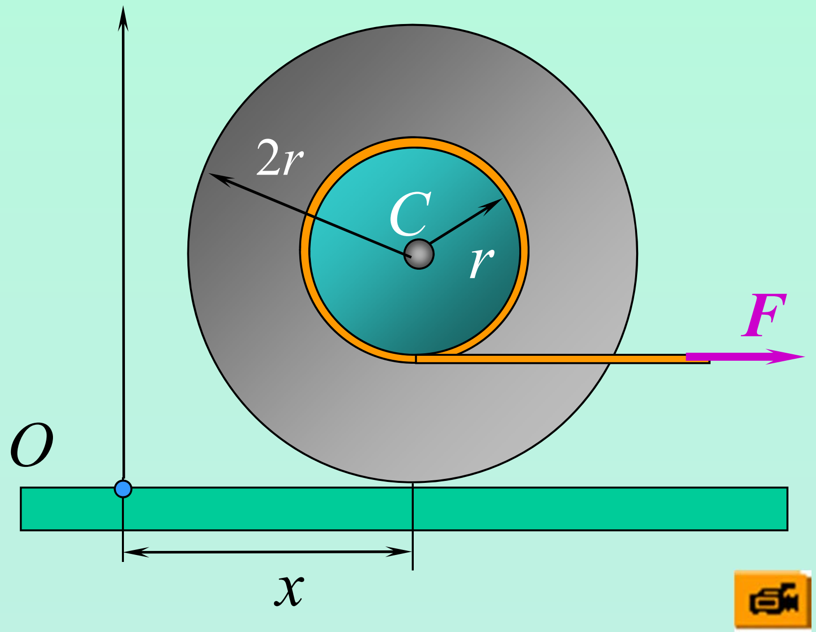
解： 根据平面运动刚体上力的功的表达式可知，

力$\boldsymbol{F}$所作的功为

$$W = Fx - m_C(\boldsymbol{F})\varphi$$

$$= Fx - Fr \cdot \frac{x}{2r}$$

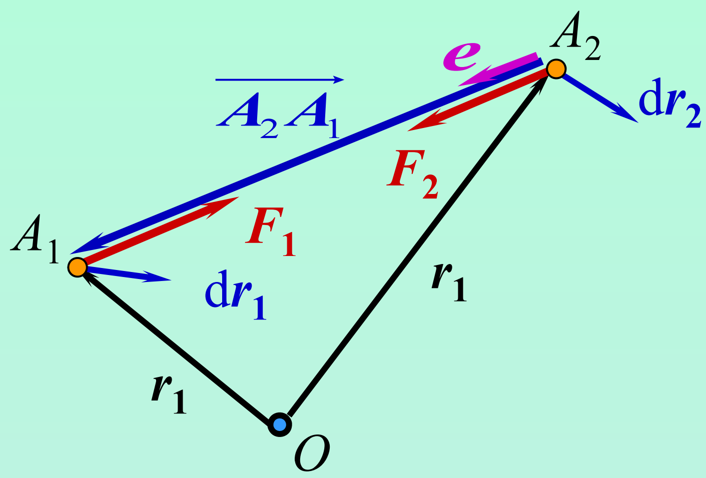
$$= \frac{1}{2}Fx$$



四、 质点系和刚体内力的功

设质点系内有两质点 A_1 和 A_2,相 互间作用着内力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_1$。两质点的元位移分别是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$,故得内力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的元功之和

$$\sum \mathrm{d}'W = \boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{F}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$$
$$=\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$$
$$=\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$$



引入矢量 $\overrightarrow{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1}$ ，设其单位矢量为 $\boldsymbol{e}$

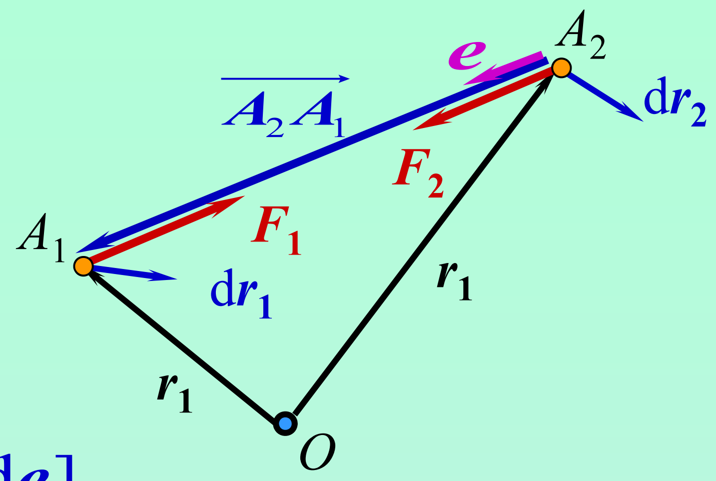
则有 $\boldsymbol{F}_1=-F_1\cdot\boldsymbol{e}$

所以

$$\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}(\overrightarrow{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1})$$

$$\boldsymbol{F}_1 = -F_1 \cdot \boldsymbol{e}$$

$$\boldsymbol{F}_1 \cdot \mathrm{d}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{F}_1 \cdot \mathrm{d}(\overrightarrow{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1})$$



$$\boldsymbol{F}_1 \cdot \mathrm{d}(\overrightarrow{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1}) = -F_1\boldsymbol{e} \cdot \mathrm{d}(A_2A_1 \cdot \boldsymbol{e})$$

$$= -F_1\boldsymbol{e} \cdot [\mathrm{d}(A_2A_1) \cdot \boldsymbol{e} + (A_2A_1) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{e}]$$

$$= -F_1\mathrm{d}(A_2A_1) \cdot (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}) - F_1 \cdot (A_2A_1) \cdot \boldsymbol{e}\mathrm{d}\boldsymbol{e}]$$

$$= -F_1\mathrm{d}(A_2A_1) - F_1 \cdot (A_2A_1) \cdot \boldsymbol{e}\mathrm{d}\boldsymbol{e}]$$

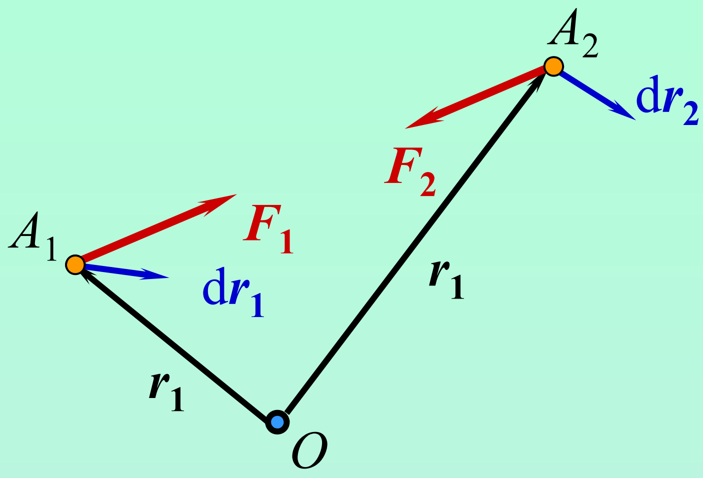
$$\boldsymbol{e}\mathrm{d}\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}\mathrm{d}(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(e^2) = e\mathrm{d}e = 0$$

$$\boldsymbol{F}_1 \cdot \mathrm{d}(\overrightarrow{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1}) = -F_1\mathrm{d}(A_2A_1)$$

所以 $\sum \mathrm{d}'W = -F_1\mathrm{d}(A_1A_2)$

$$\sum \mathrm{d}'W = -F_1 \mathrm{d}(A_1A_2)$$

这里 $\mathrm{d}(A_1A_2)$ 代表两质点间距离 A_2A_1 的变化量，它和参考系的选择无关，在一般质点系中，两质点间距离是可变的，因而，可变质点系内力所做功的总和不一定等于零。



但是,刚体内任意两点间的距离始终保持不变，所以刚体内力所做功的总和恒等于零。

工程上几种内力作功的情形

- 作为整体考察，所有发动机的内力都是有功力。例如汽车内燃机工作时，气缸内膨胀的气体质点之间的内力；气体质点与活塞之间的内力；气体质点与气缸内壁间的内力；这些内力都要作功。

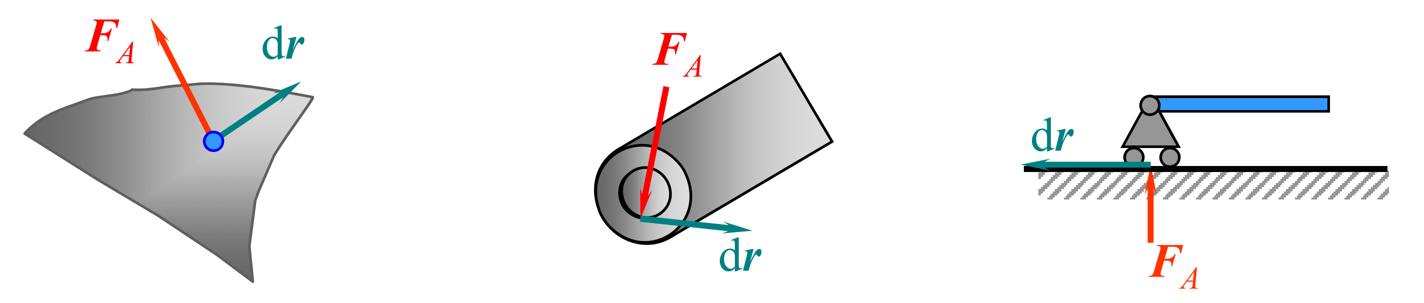
- 有相对滑动的两个物体之间的摩擦力作负功。

- 弹性构件横截面上的所有内力分量作负功。

五、约束力的功之和等于零的情形

1. 光滑的固定支承面、轴承、销钉和活动支座的约束力

光滑的固定支承面(图a)，轴承，销钉(图b)和活动支座(图c)的约束力总是和它作用点的元位移d$\boldsymbol{r}$垂直，所以这些约束力的功恒等于零。



(a) (b) (c)

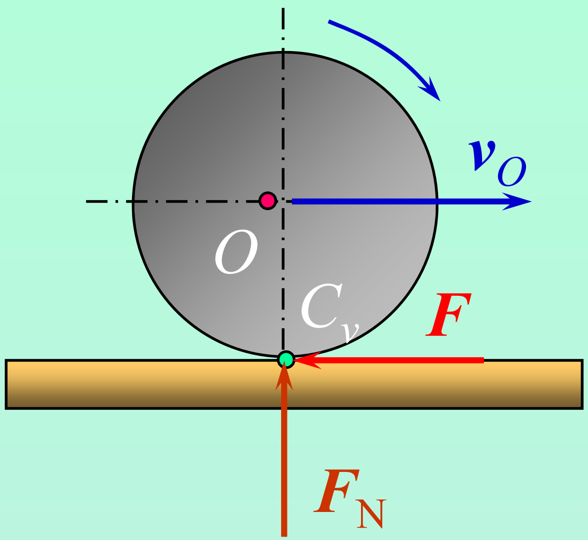
2. 不可伸长柔绳的拉力。

由于柔绳仅在拉紧时才受力，而任何一段拉直的绳子就承受拉力来说，都和刚杆一样, 其内力的元功之和等于零。绳子绕着光滑物体，情形相同。

3. 光滑活动铰链内的压力。

当由铰链相联的两个物体一起运动而不发生相对转动时，铰链间相互作用的压力与刚体的内力性质相同。当发生相对转动时，由于接触点的约束力总是和它作用点的元位移相垂直，这些力也不做功。

4. 圆轮沿支承面滚动时，摩擦力(约束力)的功。



（1）圆轮连滚带滑运动时，动摩擦力F所作元功为

$$d'W_F = -F \cdot dr_{Cv} = -f' F_N \cdot v_{Cv} dt$$

（2）圆轮纯滚动时，这时出现静摩擦力F。

因为C_v为速度瞬心，其速度为零。所以作用在C_v点的静摩擦力F所作元功为

$$d'W = F \cdot v_{Cv} dt = 0$$

§2-4　动　　能

- 质点的动能
- 质点系的动能
- 几种刚体运动的动能
- 柯尼西定理

§2-4 动　能

一、质点的动能

设质点的质量为 m，速度为 $\boldsymbol{v}$，则该质点的动能

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

即：质点的质量与其速度平方乘积的一半称为质点的动能。

动能是物体机械运动的一种度量，恒为正值。

二、质点系的动能

质点系的动能等于系统内所有质点动能的总和，用符号 T 表示，则有

$$T = \sum \frac{1}{2}m_i v_i{}^2 = \frac{1}{2}\sum m_i v_i{}^2$$

国际单位制中，动能的常用单位是 kg·m²/s²，即 J 。

§2-4 动　能

质点系的动能 $T=\sum\frac{1}{2}m_iv_i^{\ 2}=\frac{1}{2}\sum m_iv_i^{\ 2}$

三、几种刚体运动的动能

1. 平动刚体的动能

平动刚体各点的速度和质心速度 $\boldsymbol{v}_C$相同，m 表刚体质量，则其动能

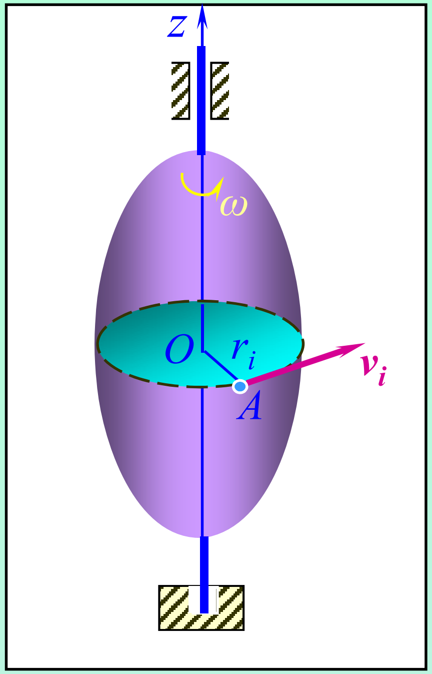
$$T=\frac{1}{2}\sum m_iv_C^2=\frac{v_C^2}{2}\sum m_i=\frac{1}{2}mv_C^2$$

即，**平动刚体的动能，等于刚体的质量与质心速度平方乘积的一半。**

2. 定轴转动刚体的动能

设刚体以角速度 ω 绕定轴 z 转动，以 m_i 表示刚体内任一点 A 的质量，以 r_i 表示 A 的转动半径，则该刚体的动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum m_i(r_i\omega)^2=\frac{\omega^2}{2}\sum m_i r_i^2$$



其中$\sum m_i r_i^2=J_z$是刚体对转轴 z 的转动惯量，故上式可写成

$$T=\frac{1}{2}J_z\omega^2$$

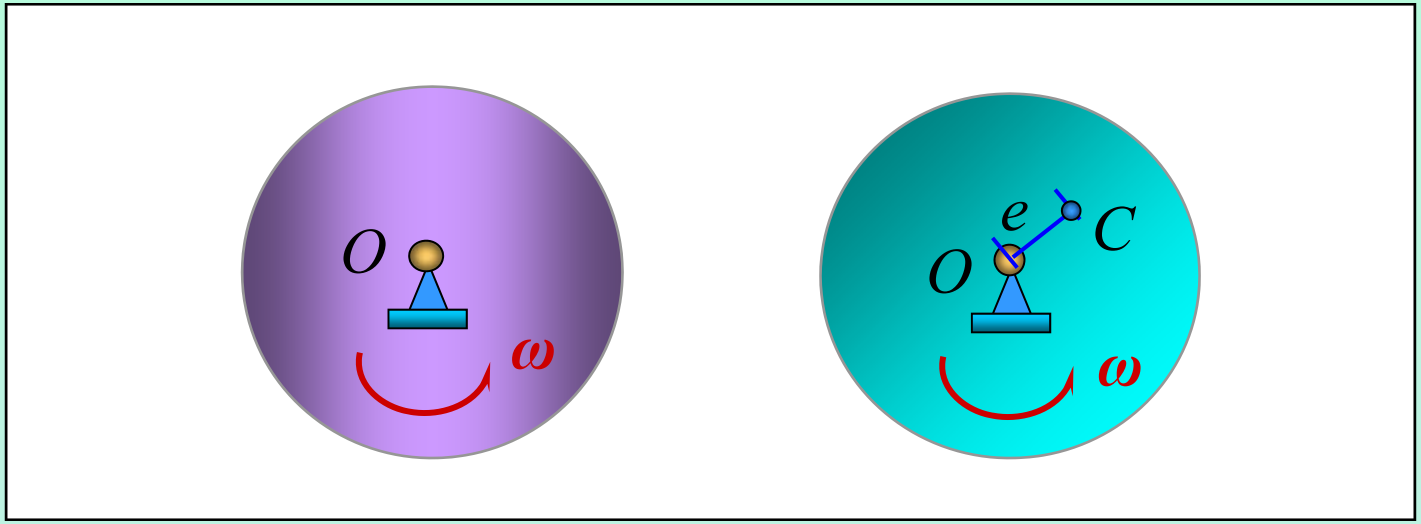
可见，**定轴转动刚体的动能，等于刚体对转轴的转动惯量与其角速度平方乘积的一半.**

转动惯量 J_z 就是刚体绕 z 轴转动时惯性的度量。

§2-4　动　　能

思考题

A，***B***两轮质量相同，以相同的角速度ω绕圆心***O***转动。***A***轮为匀质圆盘、***B***轮质心在***C***点。两轮动能是否相同？



A　　*B*

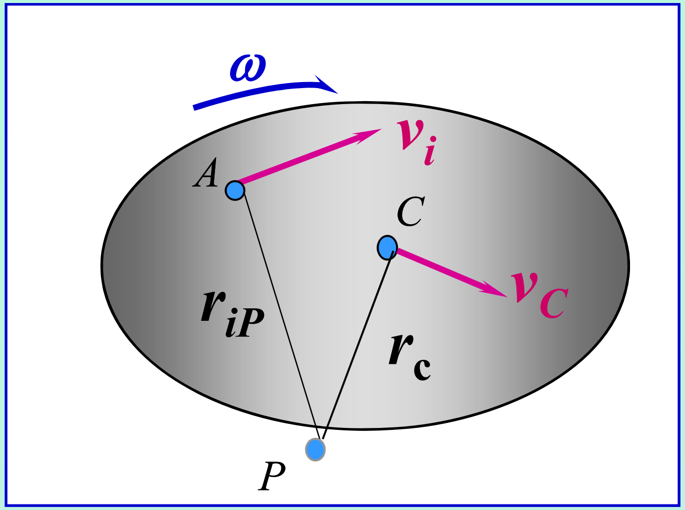
3. 平面运动刚体的动能

刚体做平面运动时，其上任一点的速度为 $\boldsymbol{v}_i$ ，平面运动刚体的角速度是 $\boldsymbol{\omega}$ ，速度瞬心在P 点，刚体对瞬轴的转动惯量是 J_{p}。

对平行于瞬轴的质心轴的转动惯量是 J_{C} ，则该刚体的动能为

$$T=\sum\frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum\frac{1}{2}m_i(r_{iP}\omega)^2=\frac{1}{2}\omega^2\sum m_i r_{iP}^2$$

$$=\frac{1}{2}\omega^2 J_P$$



设刚体的质心 C 到速度瞬心 P 的距离是 r_{C}，刚体的质量是m。

根据转动惯量的平行轴定理有

$$J_P=J_C+mr_C^2$$

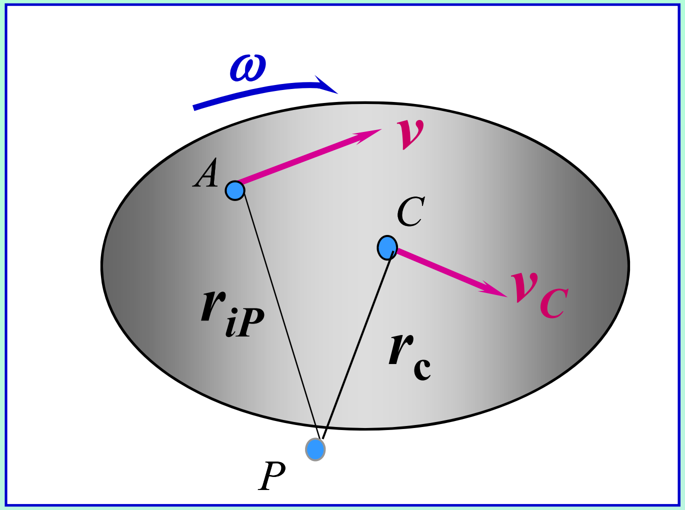
§2-4 动 能

$$T=\sum\frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum\frac{1}{2}m_i(r_{iP}\omega)^2=\frac{1}{2}\omega^2\sum m_i r_{iP}^2=\frac{1}{2}\omega^2 J_P$$

$$J_P=J_C+mr_C^2$$

$$T=\frac{1}{2}(J_C+mr_C^2)\omega^2$$

因为质心 C 的速度大小 $v_C=r_C\omega$ 。由上式得



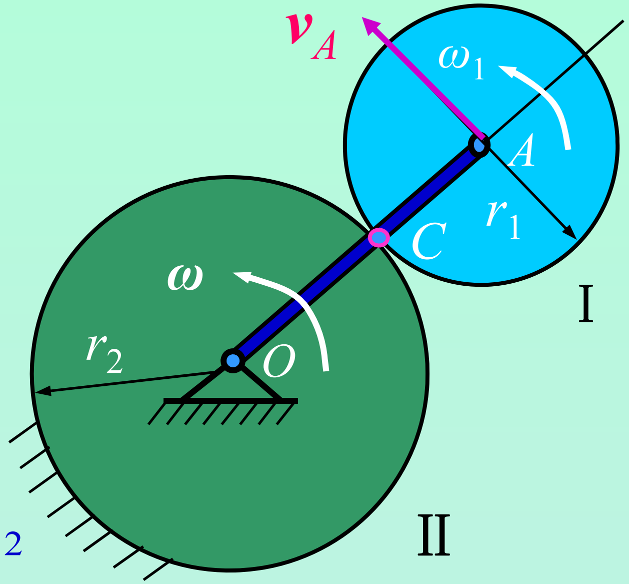
$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2$$

即, **平面运动刚体的动能, 等于它以质心速度作平动时的动能与相对于质心轴转动时的动能之和。**

§ 2-4 动　　能

练习题

系统如图所示，轮 I 的质量为m_1，纯滚动，AO杆的质量为 m ，角速度为 ω ，求系统的动能。



$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} J_O \omega^2, \qquad T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_A{}^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_1{}^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} J_O \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot [\frac{1}{3} m (r_1 + r_2)^2] \omega^2$$

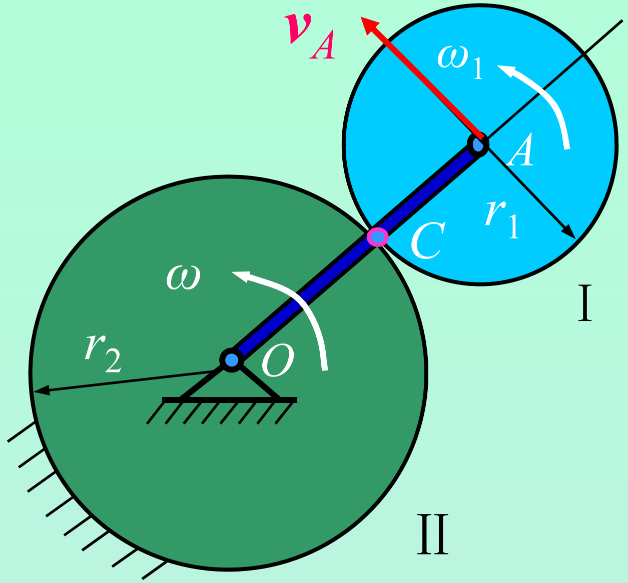
$$T_2 = \frac{1}{2} m_1 [(r_1 + r_2)\omega]^2 + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} m_1 r_1{}^2)(\frac{r_1 + r_2}{r_1}\omega)^2$$

$$T_2 = \frac{3}{4} m_1 [(r_1 + r_2)\omega]^2$$

$$v_A = (r_1 + r_2)\omega$$

$$\omega_1 = \frac{r_1 + r_2}{r_1}\omega$$

系统如图所示，轮 I 的质量为m_1，纯滚动，AO杆的质量为 m，角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，求系统的动能。



$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{6}m(r_1 + r_2)^2\omega^2$$

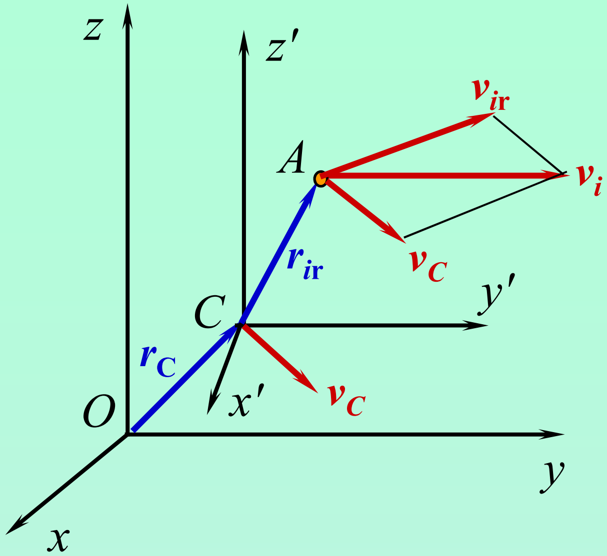
$$T_2 = \frac{3}{4}m_1[(r_1 + r_2)\omega]^2$$

C是轮 I 上的点，J_C是绕C点的转动惯量，$T_2 = \frac{1}{2}J_C\omega_1^2$**是否成立？**

$$J_C = J_A + m_1 r_1^2 = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 + m_1 r_1^2 = \frac{3}{2}m_1 r_1^2$$

四、柯尼西定理

以质点系的质心 C 为原点，取平动坐标系 $Cx'y'z'$，它以质心的速度 $\boldsymbol{v}_C$ 运动。



设质点系内任一质点 A 在这平动坐标系中的相对速度是 $\boldsymbol{v}_{ir}$，则该点的绝对速度

$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{v}_{ir}$，

故得质点系在绝对运动中的动能

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i}{2} = \sum \frac{m_i(\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{ir})\cdot(\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{ir})}{2}$$

$$= \sum \frac{m_i}{2}\boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{v}_C + \sum m_i \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{v}_{ir} + \sum \frac{m_i}{2}\boldsymbol{v}_{ir} \cdot \boldsymbol{v}_{ir}$$

$$T=\sum\frac{m_i}{2}\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}_C+\sum m_i\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}_{i\mathrm{r}}+\sum\frac{m_i}{2}\boldsymbol{v}_{i\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{v}_{i\mathrm{r}}$$

上式右端第一项
$$\sum\frac{m_i}{2}\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}_C=\frac{1}{2}(\sum m_i)\boldsymbol{v}_C^2=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_C^2$$

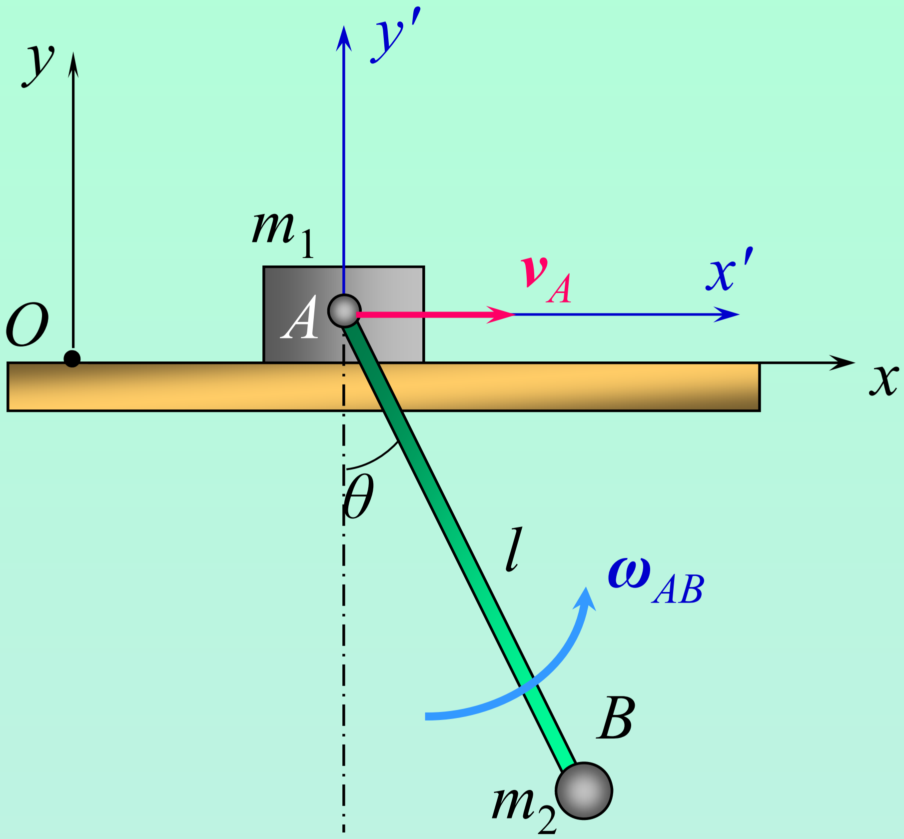
是质点系随质心一起平动时的动能.

第二项
$$\sum\frac{m_i}{2}\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}_{i\mathrm{r}}=\frac{1}{2}(\sum m_i\boldsymbol{v}_{i\mathrm{r}})\cdot\boldsymbol{v}_C=\frac{1}{2}(m\boldsymbol{v}_{C\mathrm{r}})\cdot\boldsymbol{v}_C=0$$

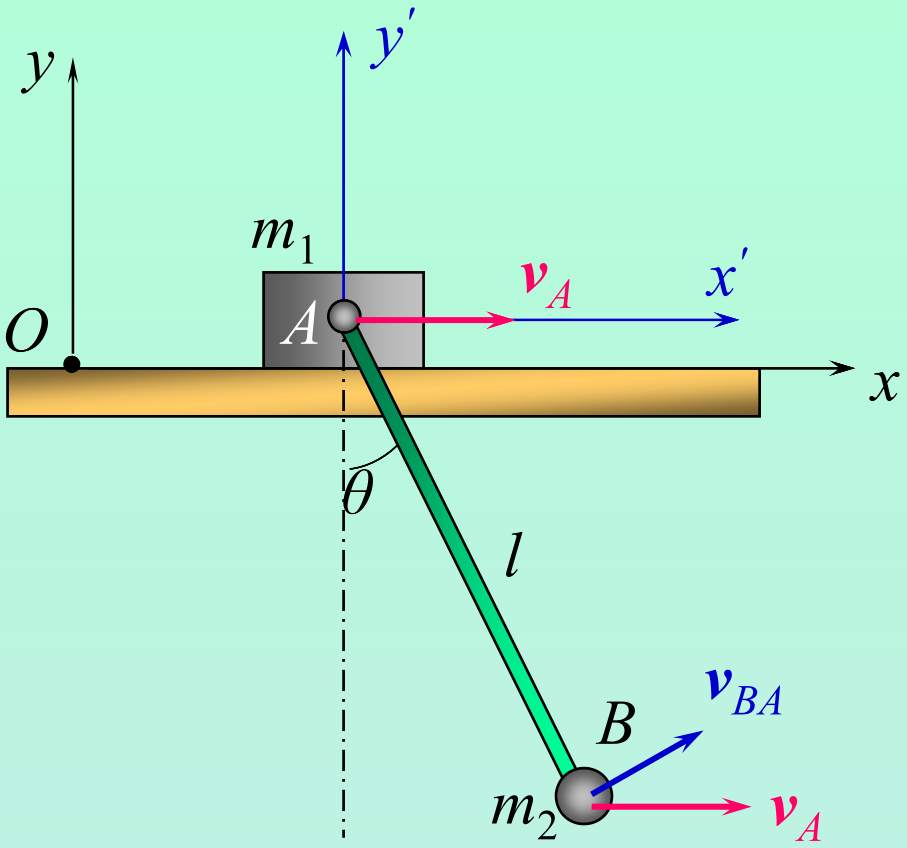
第三项等于 $\sum m_i v_{i\mathrm{r}}^2/2=T_\mathrm{r}$ 是质点系在相对运动中所具有的动能。记为 $\boldsymbol{T}_\mathbf{r}$

所以质点系的动能
$$T=\frac{mv_C^2}{2}+T_\mathrm{r}$$

即，**质点系在绝对运动中的动能，等于它随质心一起平动时的动能，加上它在以质心速度做平动的坐标系中相对运动的动能。**这就是**柯尼西定理。**



例题2-1 已知滑块A的质量为 m_1，质点B的质量为m_2，AB杆的长度为 l、不计质量，以角速度ω_{AB}绕 A点转动，滑块的速度为v_A。求系统的动能。



解： **1. 运动分析与速度分析**

滑块作直线运动，速度为$\boldsymbol{v}_A$；

杆AB作平面运动。以A为基点，质点B的速度为

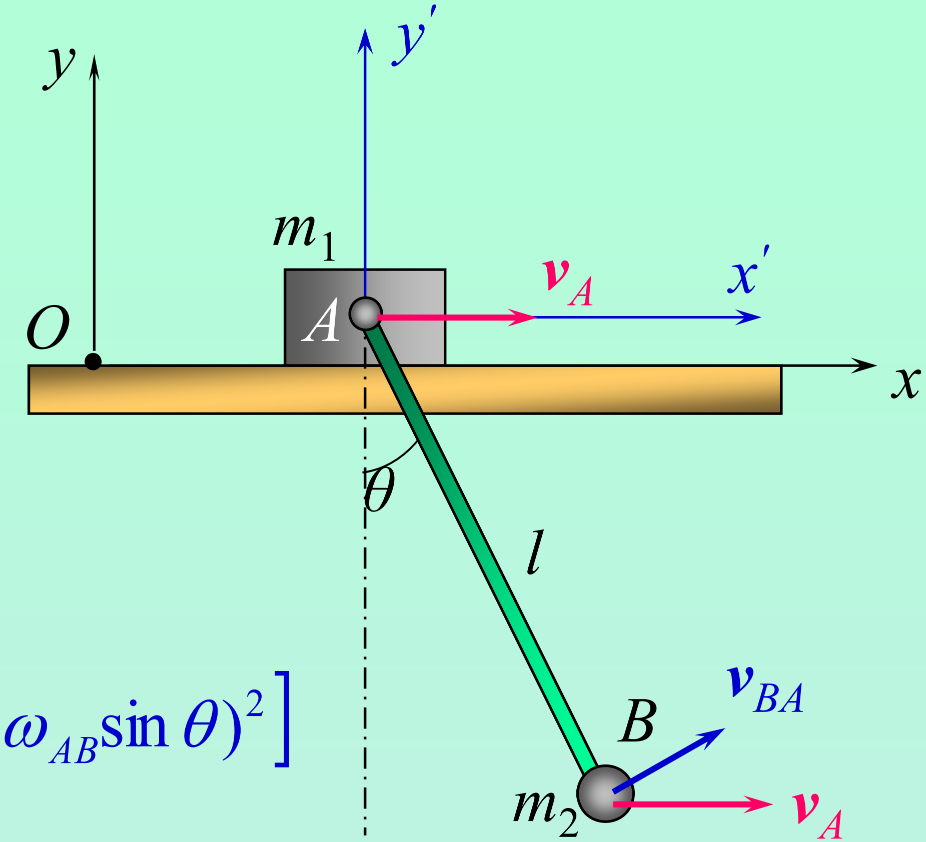
$$v_B = v_A + v_{BA}$$

$$v_{BA} = l\omega_{AB}$$

$$v_{BAx'} = l\omega_{AB}\cos\theta$$

$$v_{BAy'} = l\omega_{AB}\sin\theta$$

2. 计算系统动能



滑块的动能

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_A^2$$

质点B的动能

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_B^2 = \frac{1}{2} m_2 \left[(v_A + l\omega_{AB}\cos\theta)^2 + (l\omega_{AB}\sin\theta)^2 \right]$$

系统的总动能

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_A^2 + m_2 l v_A \omega_{AB}\cos\theta + m_2 l^2 \omega_{AB}^2$$

§2-5　动 能 定 理

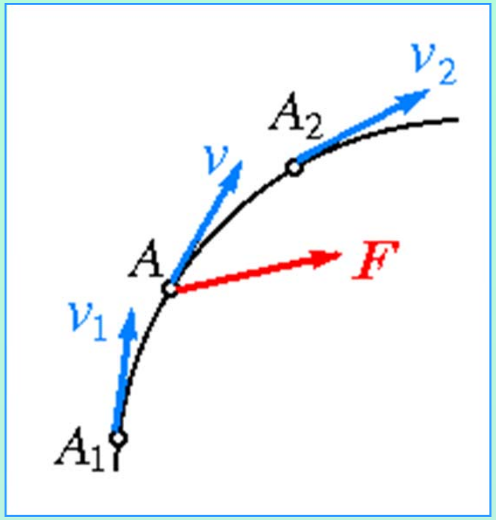
- 质点动能定理
- 质点系动能定理

§2-5 动 能 定 理

动能定理表达了质点或质点系的动能变化和作用力的功之间的数量关系。

一、质点动能定理

设质量为 m 的质点 A，在力作用下 F 沿曲线由 A_1 运动到 A_2，它的速度由 v_1 变为 v_2。



1. 微分形式

由牛顿第二定理

$$m\boldsymbol{a} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$$

$$m\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

两边点乘速度 $\boldsymbol{v}$，得

$$m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$

$$m\boldsymbol{v} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

上式右端就是作用力的元功，左端可改写成 $m\boldsymbol{v} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{v} = m\mathrm{d}(\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v})/2 = \mathrm{d}(mv^2/2)$，从而得

$$\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2) = \mathrm{d}'W$$

即，**质点动能的微分等于作用于质点上的力的元功**，这就是质点动能定理的微分形式。

2. 积分形式　　将上式沿路程 A_1A_2 积分，得

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W$$

式中 $\boldsymbol{W}$ 表示力 $\boldsymbol{F}$ 在路程 A_1A_2 中的功。

可见，**质点动能在某一路程中的改变量，等于作用于质点的各力在该路程中所做的功**。这就是质点动能定理的积分形式。

二、质点系动能定理

1. 微分形式

由质点动能定理的微分形式 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)=\mathrm{d}'W$

对于质点系中的每个质点，都有类似上式，相加得

$$\sum \mathrm{d}(\frac{m_i v_i^2}{2})=\sum \mathrm{d}' W_i$$

因 $\sum \mathrm{d}(\frac{m_i v_i^2}{2})=\mathrm{d}\sum(\frac{m_i v_i^2}{2})=\mathrm{d}T$ 故上式可写成

$$\mathrm{d}T=\sum \mathrm{d}'W_i$$

即，**质点系动能的微分等于作用于质点系各力的元功的代数和**，这就是质点系动能定理的微分形式。

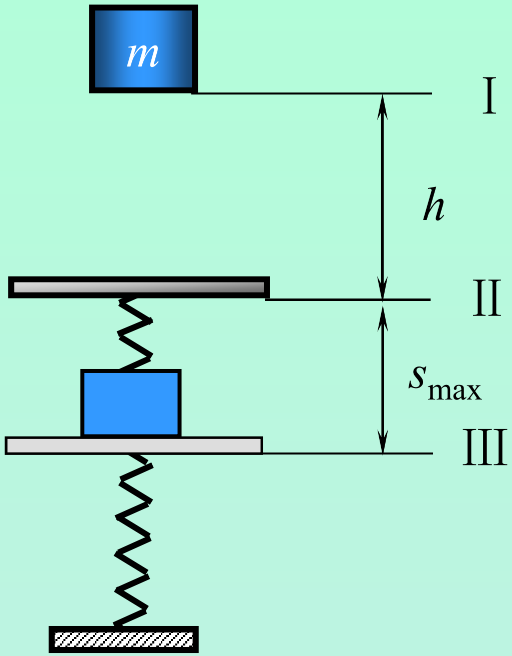
2.积分形式

由微分形式 $\mathrm{d}T=\sum \mathrm{d}'W_i$

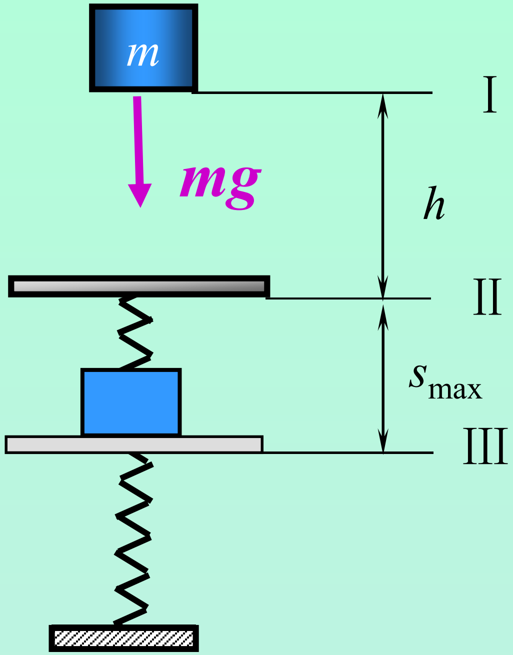
将上式积分，得

$$T_2-T_1=\sum W_i$$

式中 T_1， T_2 分别代表某一运动过程中开始和终了时质点系的动能。上式表明**质点系的动能在某一路程中的改变量，等于作用于质点系的各力在该路程中的功的代数和**。这就是质点系动能定理的积分形式。



例题2-3 质量为m的物体，自高处自由落下，落到下面有弹簧支持的板上，如图所示。设板和弹簧的质量都忽略不计，弹簧的刚度系数为k。求弹簧的最大压缩量。



解： 取物体为研究对象。

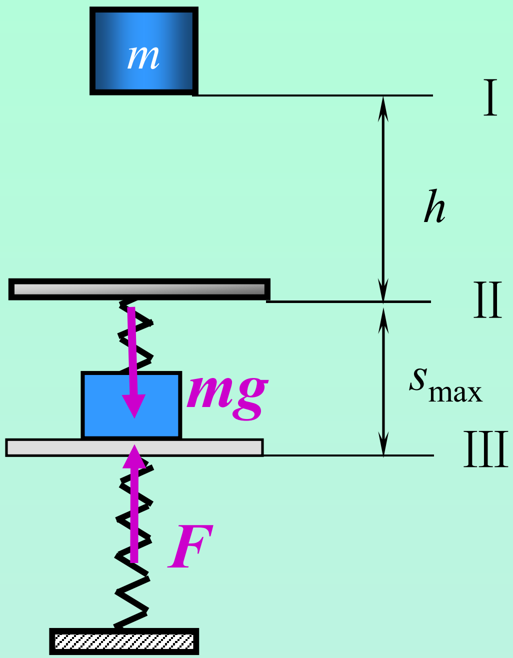
物体从位置 I 落到板上时是自由落体运动，速度由0增到v_1，动能由0变为 $\frac{1}{2}mv_1^2$。

在这段过程中，重力作的功为 mgh。

应用动能定理 $$T_1 - T_2 = \sum W$$

得 $$\frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = mgh$$

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

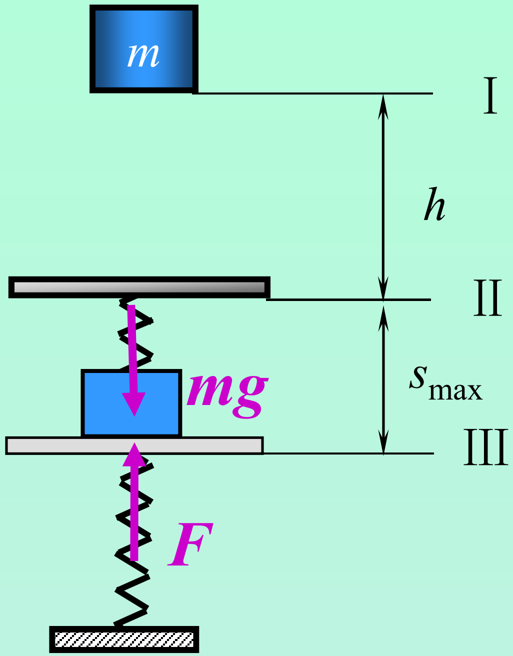


物体继续向下运动，弹簧被压缩，物体速度逐渐减小。当速度等于零时，弹簧被压缩到最大值 s_{max} 。

在这段过程中重力作的功为 mgs_{max} ，弹簧力作的功为 $\frac{1}{2}k\left(0-s_{max}^2\right)$ 。

应用功能定理得

$$0-\frac{1}{2}mv_1^2=mgs_{max}-\frac{1}{2}ks_{max}^2$$



$$0-\frac{1}{2}mv_1^2 = mgs_{\max} - \frac{1}{2}ks_{\max}^2$$

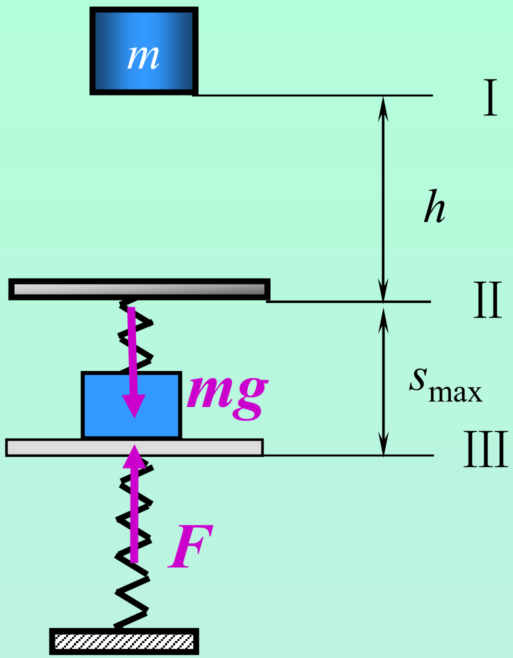
求得

$$s_{\max} = \frac{mg}{k} \pm \frac{1}{k}\sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}$$

由于弹簧的压缩量必定是正值，因此答案取正号，即

$$s_{\max} = \frac{mg}{k} + \frac{1}{k}\sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}$$

讨论



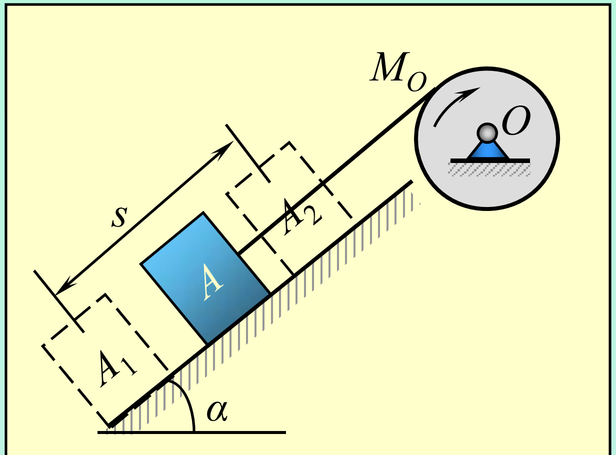
同时也可把上两段合在一起考虑，即对质点从开始下落至弹簧压缩到最大值的过程应用功能定理。

在这一过程的始末位置质点的动能都等于零。在这一过程中，重力作的功为 $mg(h+s_{\max})$，弹簧力作的功同上，于是有

$$0-0=mg(h+s_{\max})-\frac{k}{2}s_{\max}^2$$

解得的结果与前面所得相同。

例题 2-4 运送重物用的卷扬机如图 (a) 所示。已知鼓轮重 W_1, 半径是 r, 对转轴 O 的回转半径是 ρ。在鼓轮上作用着常值转矩 M_O ，使重 W_2 的物体 A 沿倾角为 α 的直线轨道向上运动。已知物体 A 与斜面间的动摩擦系数是 f 。假设系统从静止开始运动，绳的倾斜段与斜面平行，绳的质量和轴承 O 的摩擦都忽略不计。试求物体 A 沿斜面上升距离 s 时物体 A的速度和加速度。



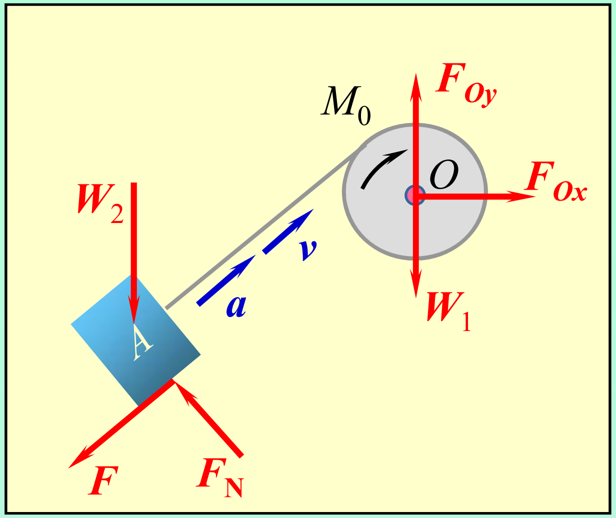
(a)

解：

取鼓轮、绳索和物体 *A* 组成的系统为研究对象。

系统从静止开始运动的，初动能 $T_1 = 0$。在重物上升的单向路程为 s 时，系统的动能 T_2 可计算如下。

用 v 表示这时物体的速度大小，则鼓轮的角速度大小 $\omega = v/r$，从而有



(b)

$$T_2 = \frac{1}{2}J_O\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{W_2}{g}v^2 = \frac{1}{2}(\frac{W_1}{g}\rho^2)(\frac{v}{r})^2 + \frac{1}{2}\frac{W_2}{g}v^2$$

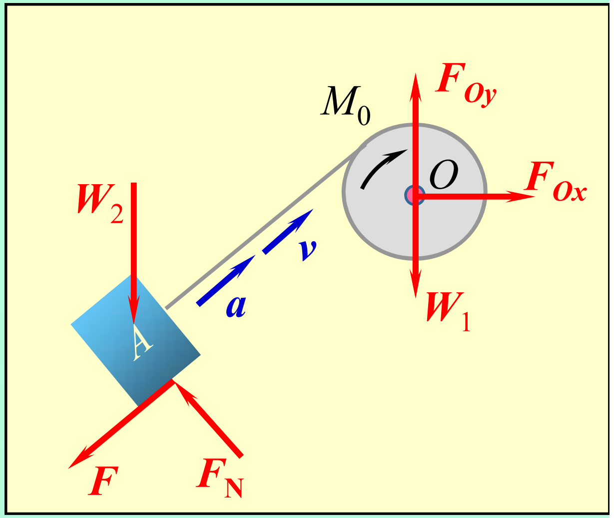
$$= \frac{v^2}{2g}(\frac{\rho^2}{r^2}W_1 + W_2)$$

$T_1 = 0$，$\qquad T_2 = \dfrac{v^2}{2g}\left(\dfrac{\rho^2}{r^2}W_1 + W_2\right)$

在物体 ***A*** 上升 ***s*** 路程中，作用在系统上的力的总功为

$$\sum W = M_O\varphi - W_2\sin\alpha\cdot s - F\cdot s$$

$$= M_O\frac{s}{r} - W_2\sin\alpha\cdot s - W_2 f\cos\alpha\cdot s$$



(b)

根据$T_2 - T_1 = \sum W$，有

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{\rho^2}{r^2}W_1 + W_2\right) - 0 = \left(\frac{M_O}{r} - W_2\sin\alpha - fW_2\cos\alpha\right)s$$

- 由此求出物体 ***A*** 的速度

$$v = \sqrt{\frac{2\left[M_O - W_2(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right]rgs}{W_1\rho^2 + W_2 r^2}}$$

根号内必须为正值，故当满足$M_O \geq W_2 r(\sin\alpha + f\cos\alpha)$时，卷扬机才能开始工作。

物体 *A* 的加速度

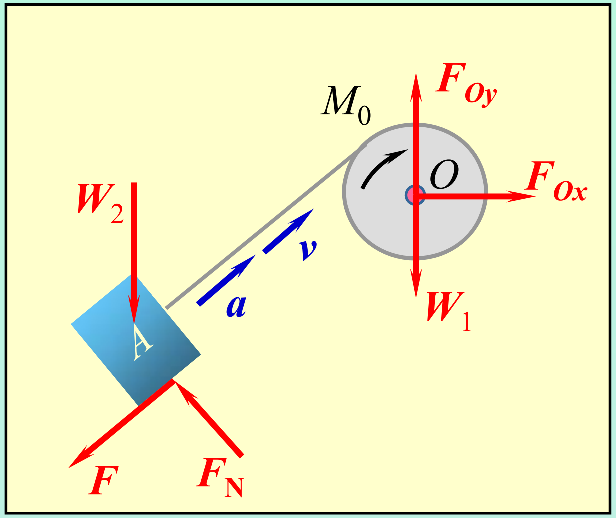
$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{\rho^2}{r^2}W_1+W_2\right)-0=\left(\frac{M_O}{r}-W_2\sin\alpha-fW_2\cos\alpha\right)s \qquad (1)$$

把式(1)中的s看作变值，并求两端对时间 t 的导数，有

$$\frac{2v}{2g}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\rho^2}{r^2}W_1+W_2\right)=\left(\frac{M_O}{r}-W_2\sin\alpha-fW_2\cos\alpha\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

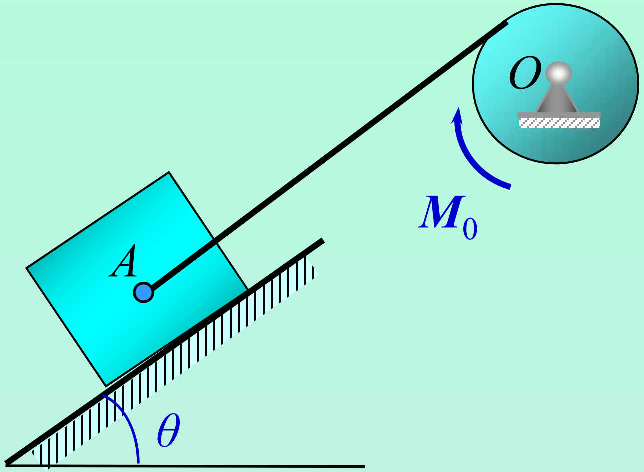
考虑到在直线运动中 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=a$，$\mathrm{d}s/\mathrm{d}t=v$，故物体 *A* 的加速度

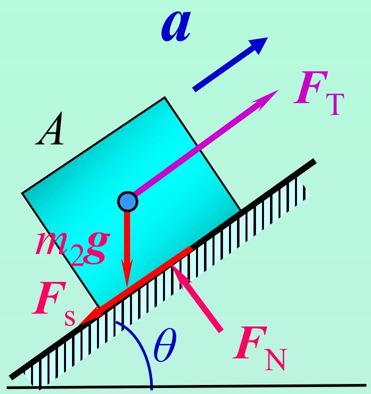
$$a=\frac{M_O-W_2(\sin\alpha+f\cos\alpha)}{W_1\rho^2+W_2r^2}rg$$



思考题

如何求绳子拉力和物体*A*与斜面间的摩擦力？



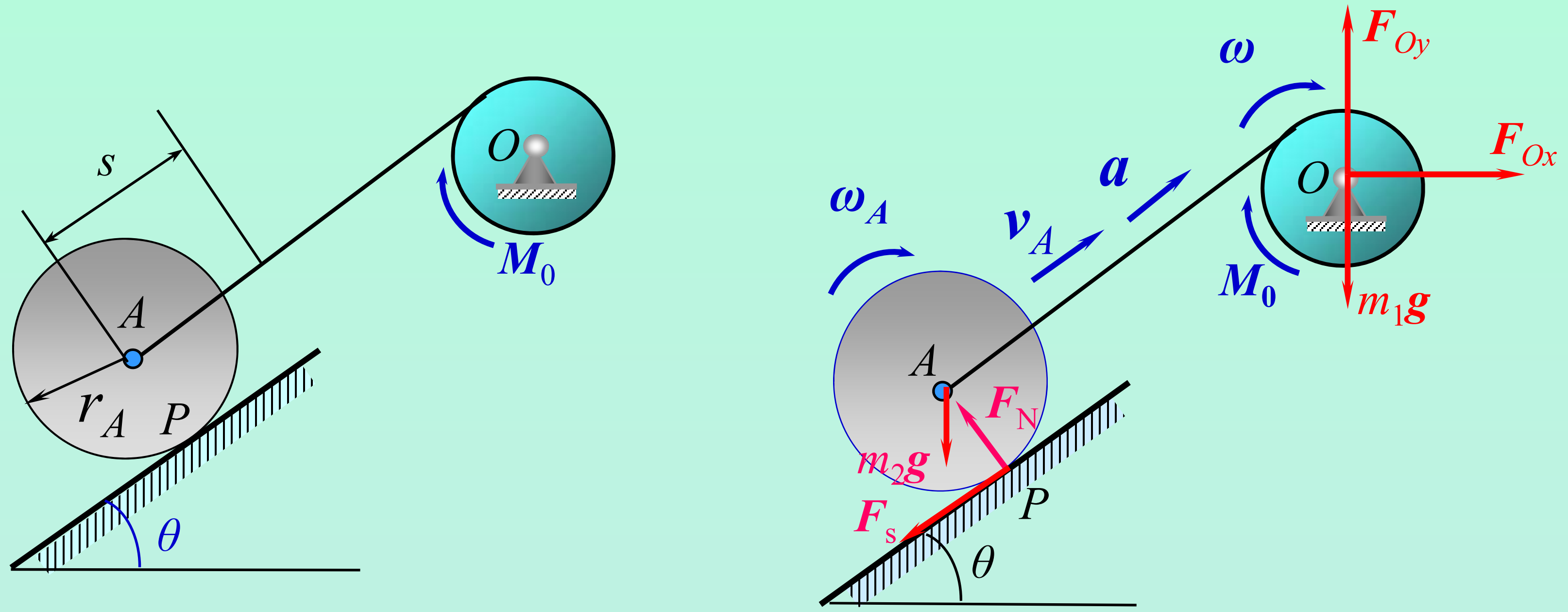


$$m_2a=F_T-F_s-mg\sin\theta$$

$$0=F_N-m_2g\cos\theta$$

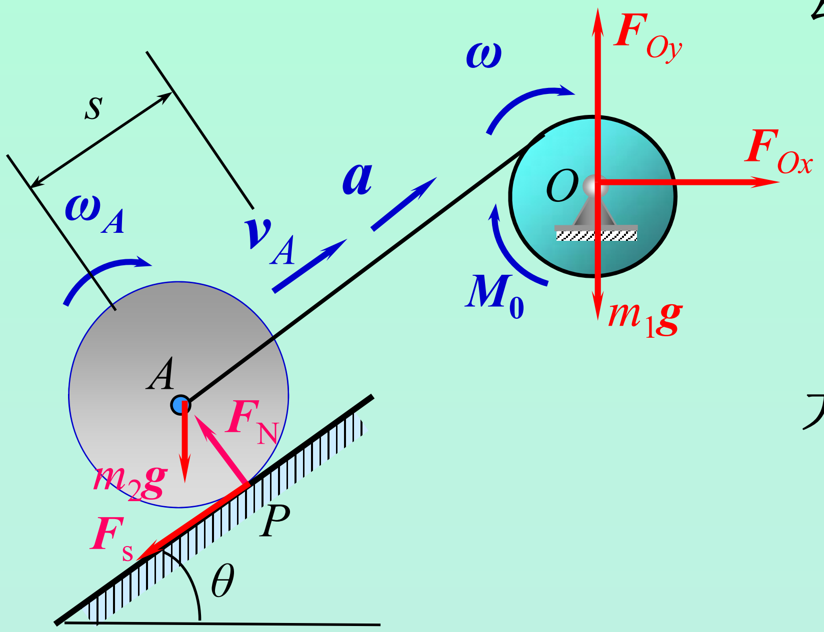
思考题

若将重 W_2 的物体 A 改变成半径为r_A的匀质滚子，试求滚子A 沿斜面上升距离 s 时物体 A的速度和加速度。



思考题

若将重 W_2 的物体 A 改变成半径为r_A的匀质滚子，试求滚子A 沿斜面上升距离 s 时物体 A的速度和加速度。



动能:

$$T_2=\frac{1}{2}J_O\omega^2+\frac{1}{2}\frac{W_2}{g}v_A{}^2+\frac{1}{2}J_A\omega_A{}^2$$

$$\omega=\frac{v_A}{r},\quad \omega_A=\frac{v_A}{r_A}$$

力的功:

$$\sum W=M_O\varphi-W_2\sin\theta\cdot s$$

$$\varphi=\frac{s}{r},$$

§2-6 势力场·势能·机械能守恒定理

- 势力场与势能
- 几种常见势力场的势能
- 势能函数
- 等势面与零势面
- 机械能守恒定理

§2-6　势力场. 势能. 机械能守恒定理

一、势力场与势能

1. **力场**—— 一物体在某空间内都受到一个大小和方向完全由所在位置确定的力作用，这部分空间称为力场。

2. **有势力**——力的功只决定于作用点的始末位置，而与运动路径无关的力统称为有势力(或保守力)。

3. **势力场**(或保守力场)—— 有势力形成的力场称为势力场。

4. **势能**—— 为了描述势力场对物体作功的能力，引入势能的概念，用V表示。

5. 势能的计算

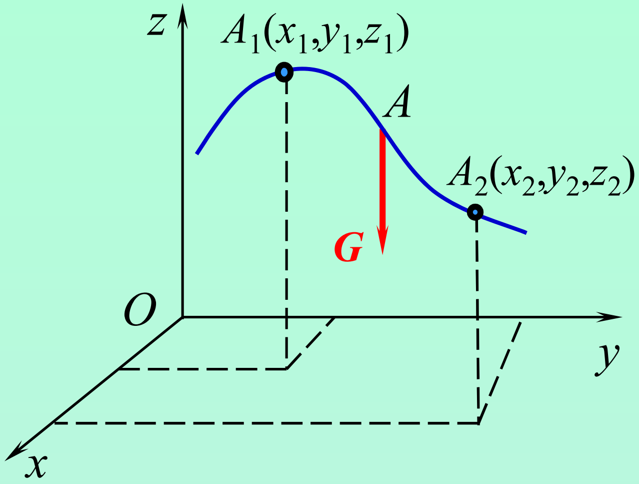
在势力场中任选一点A_0，作为势能零点，则在场中另一点A处的势能就等于由点A运动到势能零点A_0的过程中, 有势力所做的功$W_{(A\to A0)}$。即有

$$V=W_{(A\to A0)}$$

§ 2-5　势力场. 势能. 机械能守恒定理

二、几种常见势力场的势能

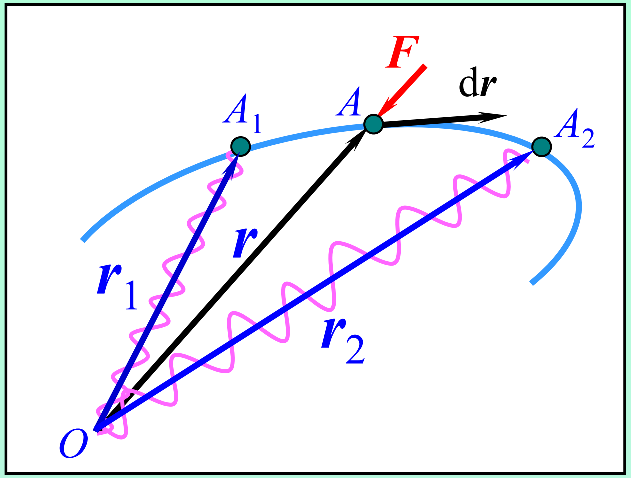
1.　重力场中的势能



取 A_2点为势能零点，则在重力场 A 处的势能为

$$V = W_{(A \to A_2)} = G(z - z_2) = Gh$$

2. 弹性力场中的势能



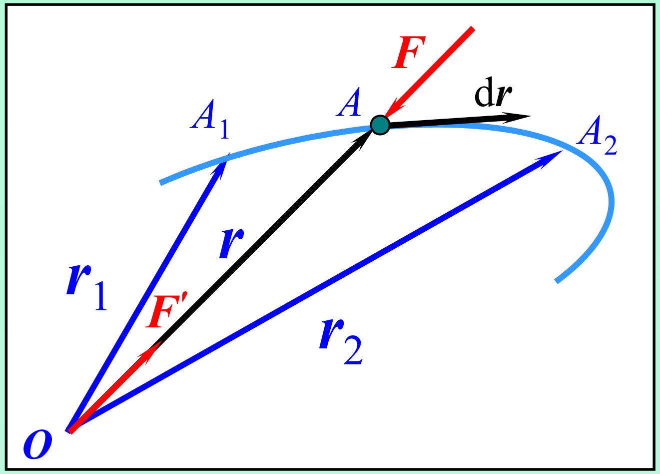
设弹簧在 A 和A_2 位置的变形分别为κ 和κ_2 ，取 A_2点为势能零点，则在弹力场 A 处的势能为

$$V = W_{(A \to A_2)} = \frac{c}{2}(\lambda^2 - \lambda_2^2)$$

3. 牛顿引力场

通常取无穷远处($r=\infty$)作为零点A_0，利用牛顿引力的功的表达式

$$W=-\int_{r_1}^{r_2} f\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r=fMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$



即得在牛顿引力场中极径为r的A处的势能为

$$V=-\frac{fMm}{r}$$

三、势能函数

在一般情况下，质点的势能可以表示成质点位置坐标x，y，z的单值连续函数，即

$$V = V(x, y, z)$$

它称为**势能函数**。

四、等势面与零势面

势力场中，满足条件

$$V(x, y, z) = \text{常量}$$

的各点确定的每个曲面称为**等势面**；由全部势能零点构成的等势面称为**零势面**。

推广到质点系，只需把系内所有各质点的势能加在一起就得到质点系在势力场中的势能。这样，质点系的势能一般可以表示成质点系内所有各质点的坐标 x_1，y_1，z_1；…；x_n, y_n, z_n 的单值连续函数，即

$$V = V(x_1,\ y_1,\ z_1;\ \cdots;\ x_n,\ y_n,\ z_n)$$

例如，可以证明质点系在重力场中的势能为

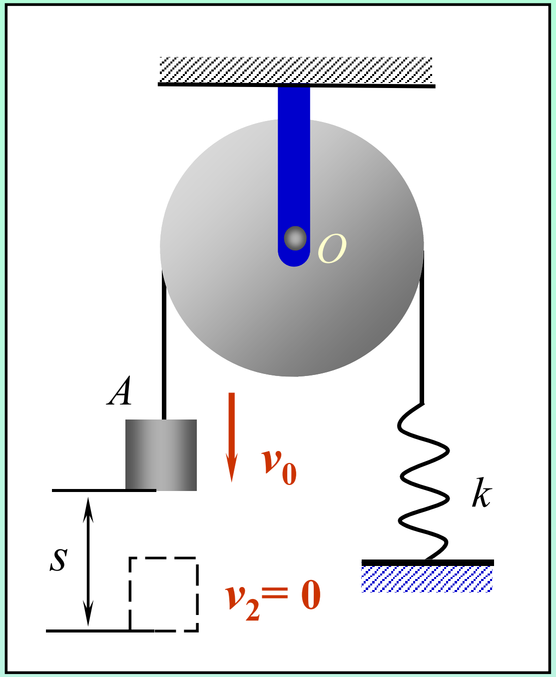
$$V = \sum m_i g(z_i - z_{i0}) = mg(z_C - z_{C0})$$

五、机械能守恒定理

如质点系只在有势力作用下运动，则其动能与势能之和保持不变。动能与势能之和称为机械(总)能。或叙述为：**当作功的力都是有势力时，质点系的机械(总)能保持不变**。这一结论称为**机械能守恒定理**。

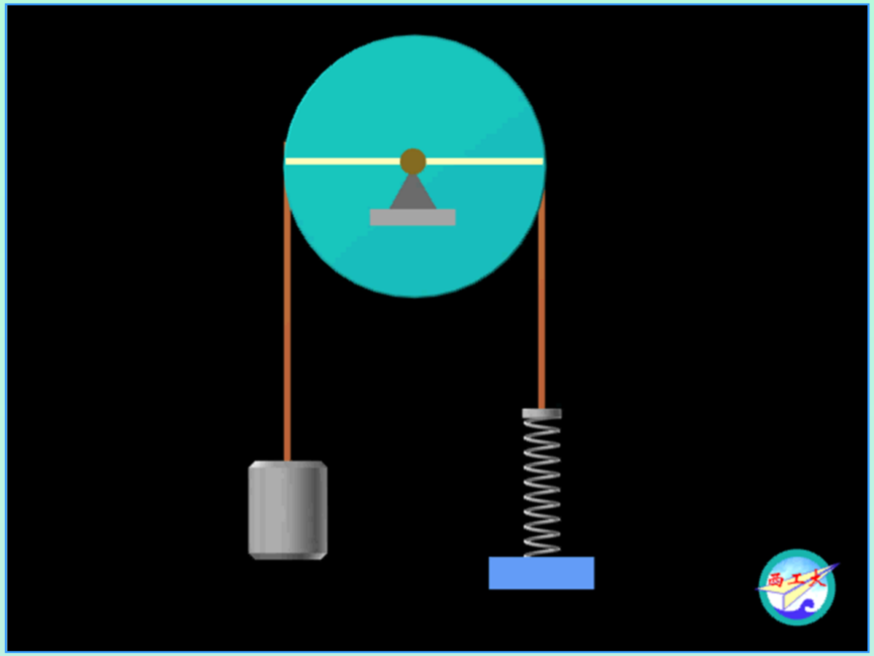
$$T_2+V_2=T_1+V_1=\text{常量}$$

例题 2-7　如图所示质量为 m_1 的物块A悬挂于不可伸长的绳子上，绳子跨过滑轮与铅直弹簧相连，弹簧刚度系数为 k。设滑轮的质量为 m_2 ，并可看成半径是 r 的匀质圆盘。现在从平衡位置给物块 A 以向下的初速度 v_0, 试求物块 A由这位置下降的最大距离s。弹簧和绳子的质量不计。

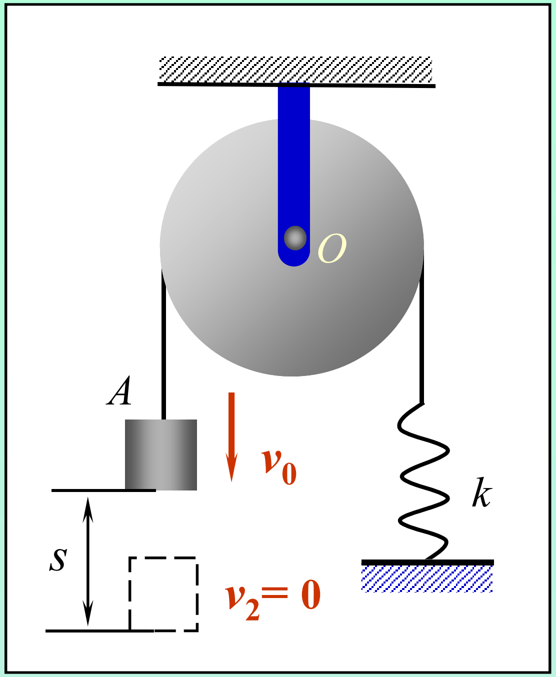


§ 2-5 势力场. 势能. 机械能守恒定理

例题 2-7 如图所示质量为 m_1的物块A悬挂于不可伸长的绳子上，绳子跨过滑轮与铅直弹簧相连，弹簧刚度系数为 k。设滑轮的质量为m_2 ，并可看成半径是 r 的匀质圆盘。现在从平衡位置给物块 A 以向下的初速度 v_0, 试求物块 A由这位置下降的最大距离s。弹簧和绳子的质量不计。



解:　　取整个系统作为研究对象. 系统运动过程中做功的力为有势力(重力和弹性力), 故可用机械能守恒定理求解。



取物块 A的平衡位置作为初位置，弹簧的初变形$\lambda_1=\lambda_s= m_1 g /k$，物块 A有初速度 $v_1 = v_0$，故系统初动能

$$T_1=\frac{1}{2}m_1 v_0{}^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_2 r^2)(\frac{v_0}{r})^2=\frac{1}{4}(2m_1+m_2)v_0{}^2$$

以物块 A 的最大下降点作为末位置，则弹簧的末变形$\lambda_2=\lambda_s+ s$；系统的末动能 $T_2 = 0$。

$$T_1=\frac{1}{2}m_1v_0^{\ 2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_2r^2)(\frac{v_0}{r})^2=\frac{1}{4}(2m_1+m_2)v_0^{\ 2}$$

以物块 ***A*** 的最大下降点作为末位置，则弹簧的末变形$\lambda_2=\lambda_s+s$；系统的末动能 $T_2=0$。

取平衡位置为势能零点，于是，系统的初势能 $V_1=0$，

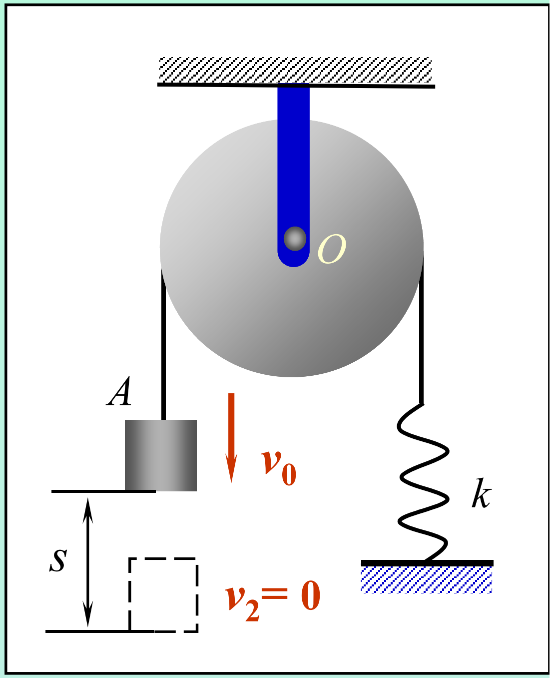
而末势能 $$V_2=\frac{k}{2}[(s+\lambda_s)^2-\lambda_s^2]-m_1gs$$

注意到在平衡位置有 $$m_1g=k\lambda_S$$

所以 $$V_2=\frac{k}{2}s^2$$

应用机械能守恒定理的式 $T_2+V_2=T_1+V_1=$ 常量，有

$$\frac{1}{4}(2m_1+m_2)v_0^{\ 2}=\frac{k}{2}s^2$$

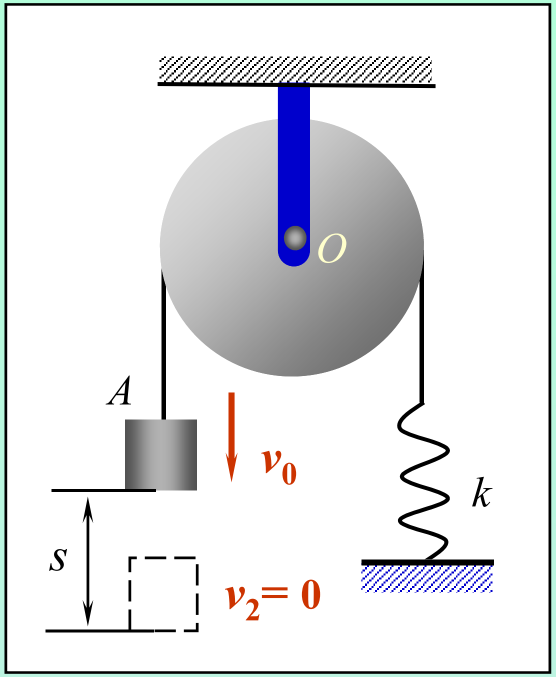


应用机械能守恒定理的式 $T_2+V_2=T_1+V_1=$ 常量，有

$$\frac{1}{4}(2m_1+m_2)v_0^{\ 2}=\frac{k}{2}s^2$$

从而求得物块 A 的最大下降距离

$$s=\sqrt{\frac{2m_1+m_2}{2k}}v_0$$



是否能选物体下降的最低位置或弹簧原长位置为势能零点？

重力势能零点和弹性势能零点是否能选不同位置？

运算结果是否有区别？

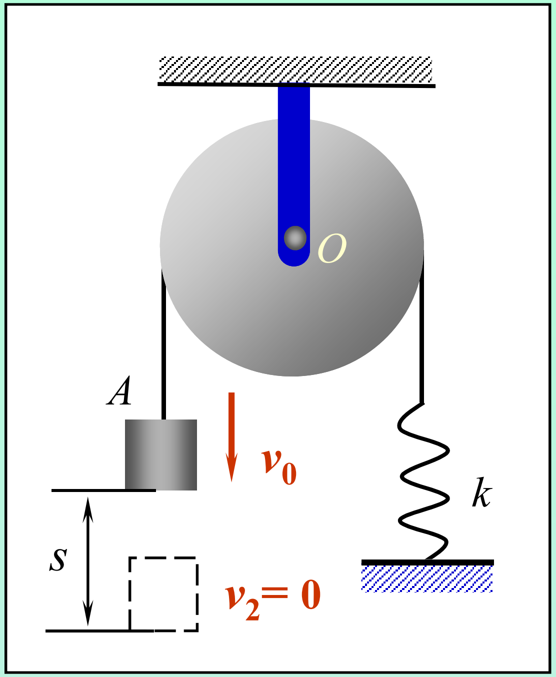
讨论

- 选物体下降的最低位置为势能零点。

$$T_1=\frac{1}{4}(2m_1+m_2)v_0^{\,2},\qquad T_2=0$$

$$V_1=\frac{k}{2}[\lambda_s^2-(s+\lambda_s)^2]+m_1gs=-\frac{k}{2}s^2$$

$$V_2=0$$



应用机械能守恒定理的式 $T_2+V_2=T_1+V_1=$ 常量，有

$$\frac{1}{4}(2m_1+m_2)v_0^{\,2}-\frac{k}{2}s^2=0$$

讨论

● 选物体平衡位置O_1为重力势能零点，弹簧原长位置O_2为势能零点。

$$T_1=\frac{1}{4}(2m_1+m_2)v_0^{\ 2},\qquad T_2=0$$

$$V_1=\frac{k}{2}\lambda_s^2$$

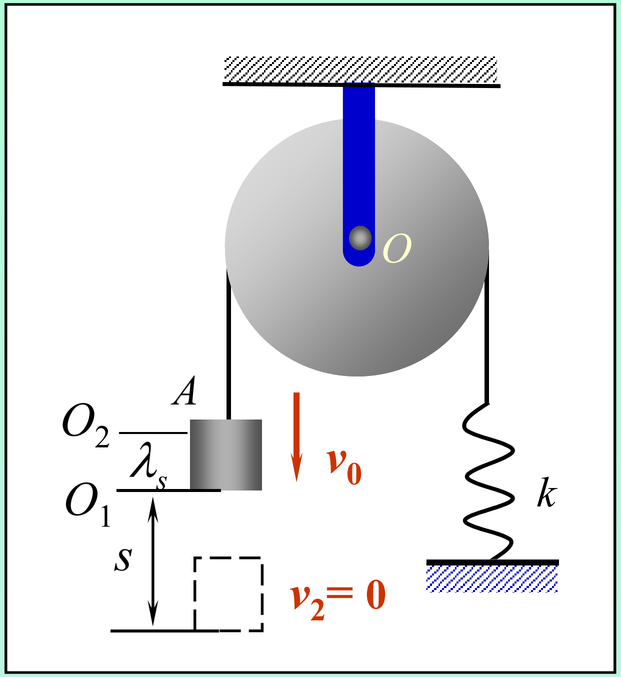
$$V_2=\frac{k}{2}(s+\lambda_s)^2-m_1gs=\frac{k}{2}s^2+\frac{k}{2}\lambda_s^2$$

应用机械能守恒定理的式 $T_2+V_2=T_1+V_1=$ 常量，有

$$\frac{1}{4}(2m_1+m_2)v_0^{\ 2}+\frac{k}{2}\lambda_s^2=\frac{k}{2}s^2+\frac{k}{2}\lambda_s^2$$

即

$$\frac{1}{4}(2m_1+m_2)v_0^{\ 2}=\frac{k}{2}s^2$$



讨论

● 求物体A运动微分方程。

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2r^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2=\frac{1}{4}(2m_1+m_2)\dot{x}^2$$

取平衡位置为势能零点，于是

$$V=\frac{k}{2}[(x+\lambda_s)^2-\lambda_s^2]-m_1gx=\frac{k}{2}x^2$$

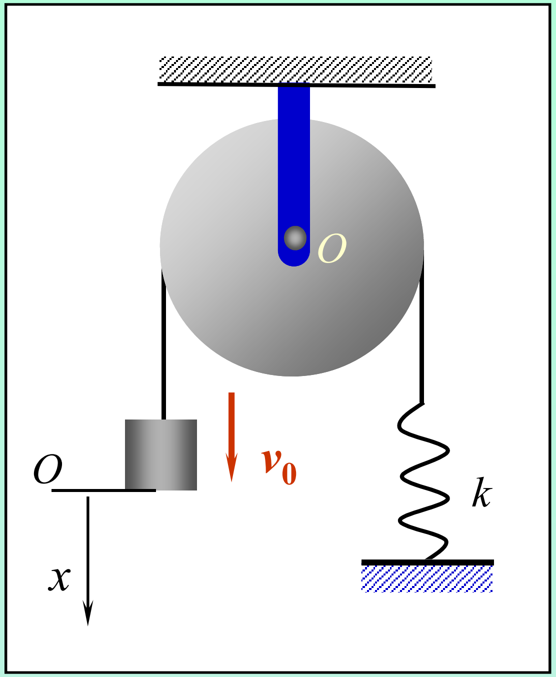
应用机械能守恒定理的式 $T+V=$ 常量，有

$$\frac{1}{4}(2m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{k}{2}x^2=\text{常数}$$

求导得

$$\frac{1}{2}(2m_1+m_2)x\ddot{x}+kx\dot{x}=0$$

$$\frac{1}{2}(2m_1+m_2)\ddot{x}+k\dot{x}=0$$



谢谢使用