10.3 质点动力学基本问题

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_x \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F_y \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=F_z \end{cases}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=F_{\mathrm{t}},\quad m\frac{{}^{2}}{\rho}=F_{\mathrm{n}},\quad 0=F_{\mathrm{b}}$$

质点动力学的两类基本问题:

质点动力学的第一类问题：

已知运动，求力。（导数运算）

质点动力学的第二类问题：

已知力，求运动。（积分运算）

例题 1 设电梯以不变的加速度a上升,求放在电梯地板上重W的物块M对地板的压力。

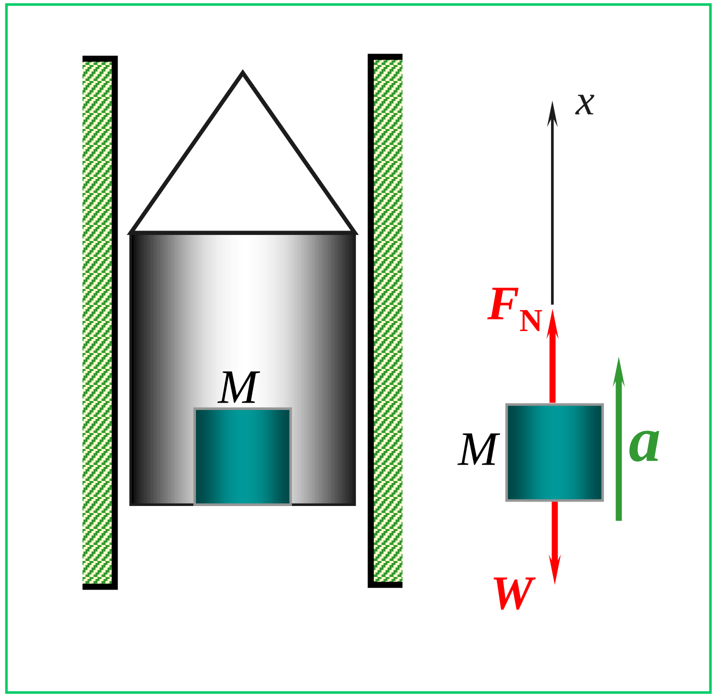
解：分析物体 M ，它受重力 W和地板反力 F_N 的作用。

根据 $\boxed{F = ma}$

可得 $ma = F_N - W$

注意到 $m = W/g$ ，则由上式解得地板反力

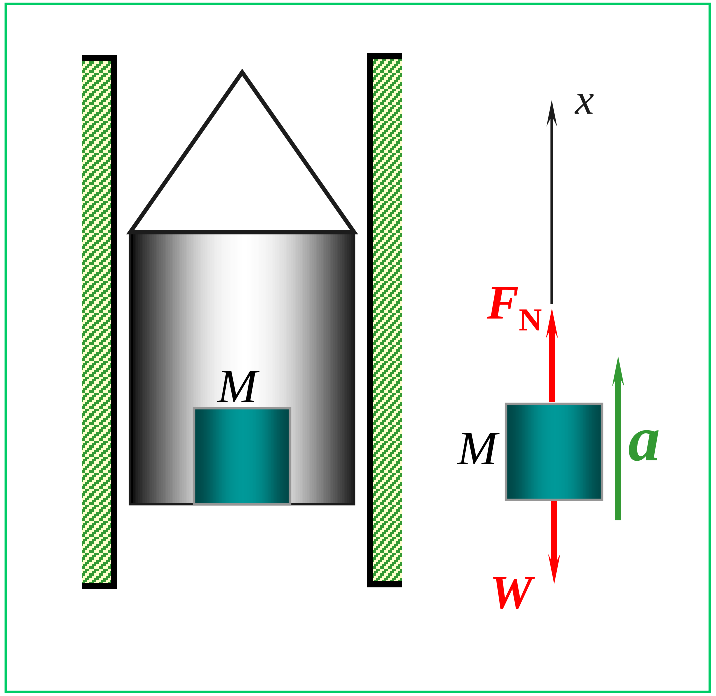
$$F_N = W + \frac{W}{g}a = W(1 + \frac{a}{g})$$



所以地板所受的压力为

$$F'_N = W + \frac{W}{g}a = W(1+\frac{a}{g})$$

上式第一部分称为**静压力**，第二部分称为附加**动压力**，F_N'称为**动压力**。



讨论

令 $n = 1 + \frac{a}{g}$ 则 $F' = nW$

1. $n > 1$，动压力大于静压力，这种现象称为**超重**。

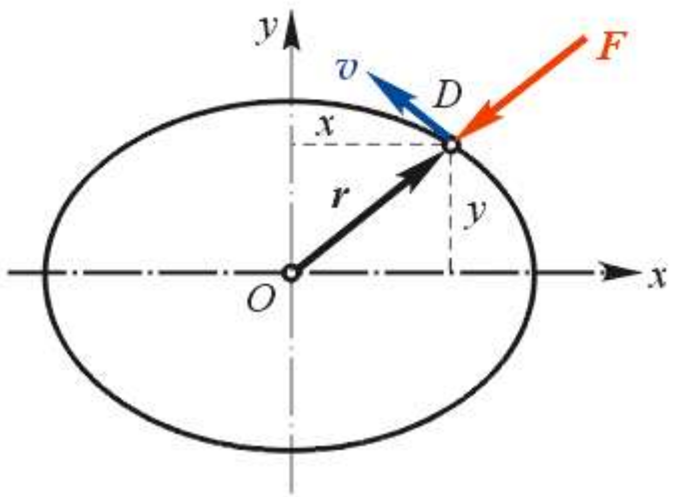
2. $n < 1$，动压力小于静压力，这种现象称为**失重**。

例2 质点*D*在固定平面*Oxy*内运动，已知质点的质量 *m*，运动方程是

$$x = A\cos kt \quad , \quad y = B\sin kt$$

式中*A*，*B*，*k*都是常数量。求作用于质点*D*的力*F*。

解： 本题属于第一类问题。由运动方程求导得到质点的加速度在固定坐标轴*x*，*y*上的投影，即

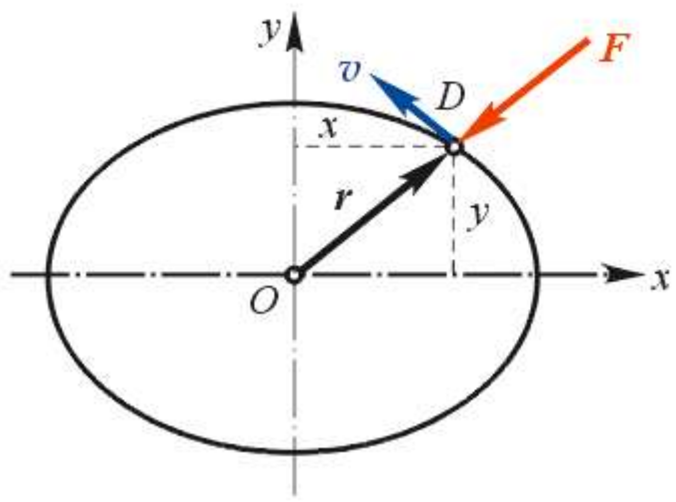


$$a_x = \ddot{x} = -k^2 A\cos kt = -k^2 x$$

$$a_y = \ddot{y} = -k^2 A\sin kt = -k^2 y$$

$$a_x = \ddot{x} = -k^2 A\cos kt = -k^2 x$$

$$a_y = \ddot{y} = -k^2 A\sin kt = -k^2 y$$



代入

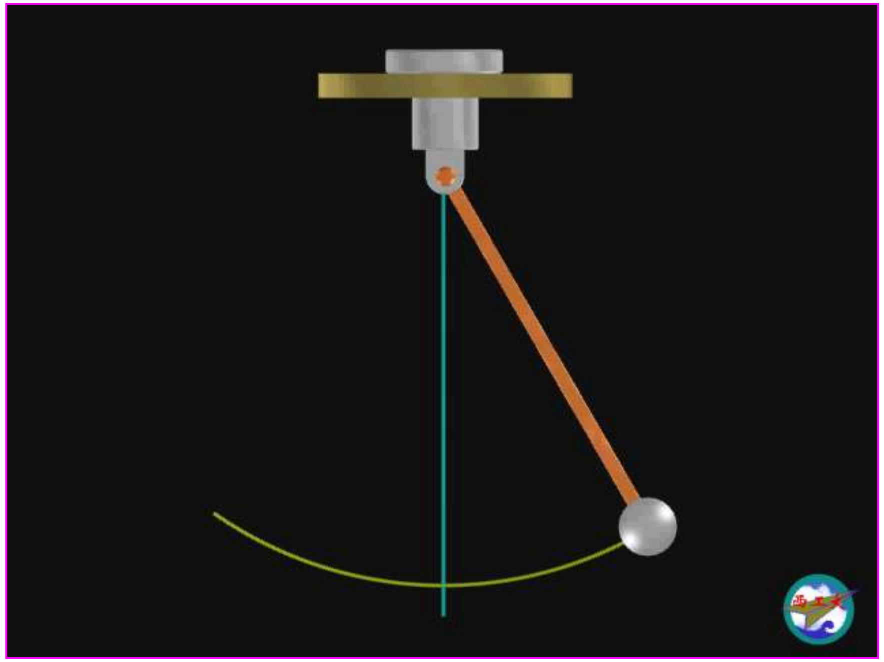
$$m\ddot{x} = F_x \ , \ m\ddot{y} = F_y \ , m\ddot{z} = F_z$$

得 $F_x = -mk^2 x \ , \quad F_y = -mk^2 y$

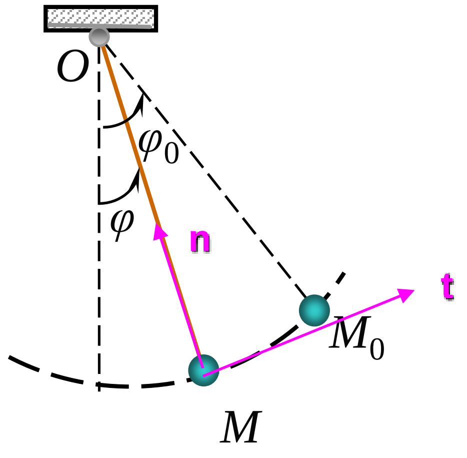
于是力F可表示成

$$F = F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} = -mk^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = -mk^2 \boldsymbol{r}$$

例题 3 单摆 M 的摆锤重 W,绳长 l,悬于固定点 O,绳的质量不计。设开始时绳与铅垂线成偏角 $\varphi_0 \leq \pi/2$,并被无初速释放，求绳中拉力的最大值。



解: 以摆锤 *M* 为研究对象。



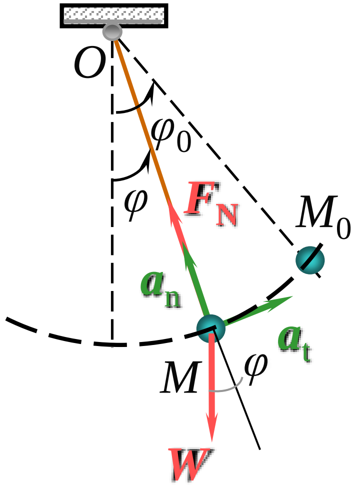
选择如图自然轴系。

$$a_t = l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = l\ddot{\varphi}, \quad a_n = l(\frac{d\varphi}{dt})^2 = l\dot{\varphi}^2$$

写出质点的自然形式的运动微分方程

$$ma_t = \frac{W}{g}l\ddot{\varphi} = -W\sin\varphi \qquad (1)$$

$$ma_n = \frac{W}{g}l\dot{\varphi}^2 = F_N - W\cos\varphi \qquad (2)$$



考虑到 $\ddot{\varphi}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dot{\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\dot{\varphi}^2}{\mathrm{d}\varphi}$

$$\frac{W}{g}l\ddot{\varphi}=-W\sin\varphi \qquad (1)$$

$$\frac{W}{g}l\dot{\varphi}^2=F_N-W\cos\varphi \qquad (2)$$

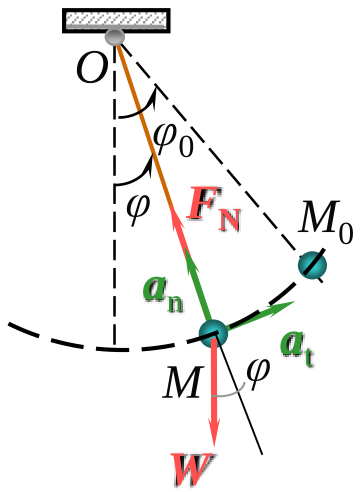
则式(1)化成 $\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\dot{\varphi}^2}{\mathrm{d}\varphi}=-\dfrac{g}{l}\sin\varphi$

对上式采用定积分,把初条件作为积分下限，有

$$\int_0^{\dot{\varphi}}\mathrm{d}(\dot{\varphi}^2)=\int_{\varphi_0}^{\varphi}(-\frac{2g}{l}\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

从而得

$$\dot{\varphi}^2=\frac{2g}{l}(\cos\varphi-\cos\varphi_0) \qquad (4)$$



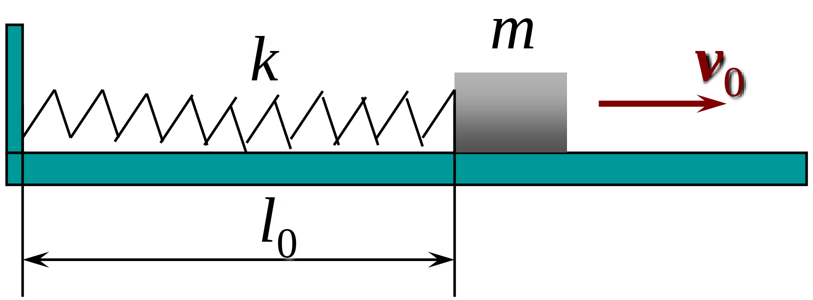
把式(4)代入式(2)，得绳拉力

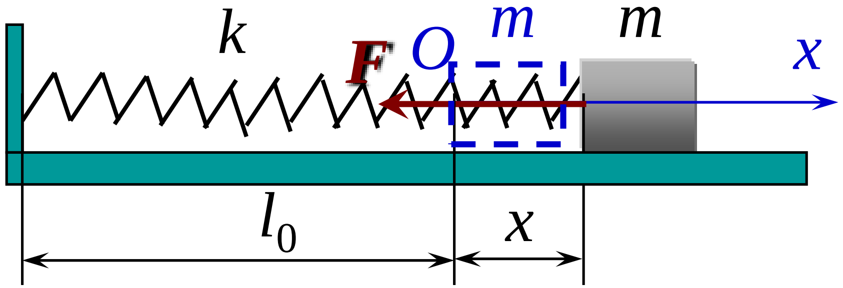
$$F_N=W(3\cos\varphi-2\cos\varphi_0)$$

显然，当摆球 *M* 到达最低位置 $\varphi=0$ 时，有最大值。故

$$F_{N\max}=W(3-2\cos\varphi_0)$$

例题 4 弹簧 - 质量系统，物块的质量为 m ，弹簧的刚度系数为 k，物块自平衡位置的初始速度为 v_0。求物块的运动方程。

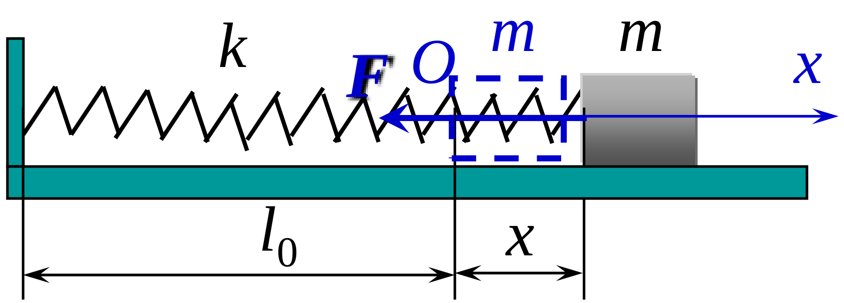




解：这是已知力(弹簧力)求运动规律，故为第二类动力学问题。

以弹簧未变形时的平衡位置为原点建立 Ox **坐标系，将物块置于任意位置** $x > 0$ **处。物块在** x **方向只受有弹簧力** $\boldsymbol{F} = -kx\boldsymbol{i}$。**根据直角坐标系中的质点运动微分方程**

$$m\ddot{x} = \sum_i F_{ix} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx$$



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi), \quad t = 0, x = 0; t = 0, \dot{x} = v_0$$

$$A = \frac{v_0}{\omega_0}, \varphi = 0; \quad x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

谢谢！