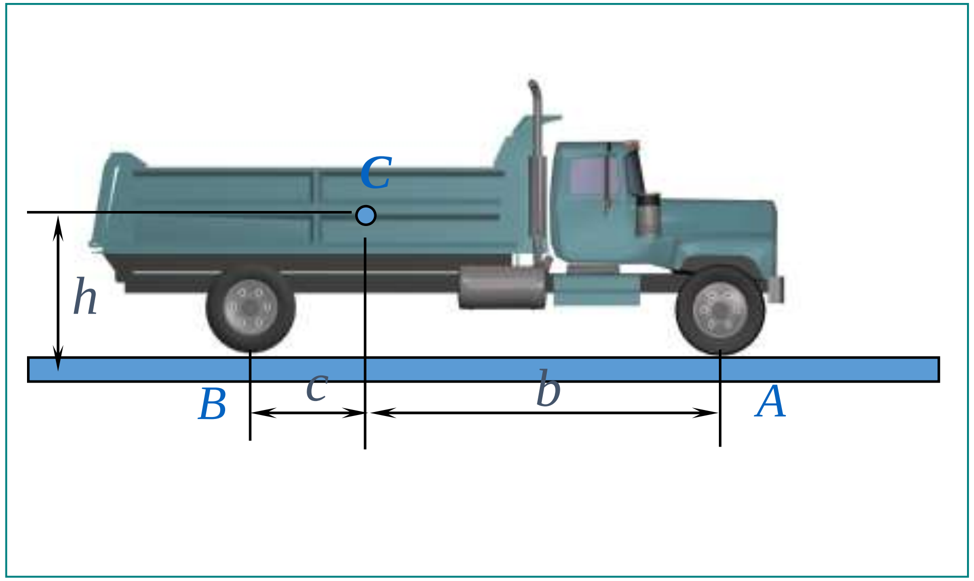
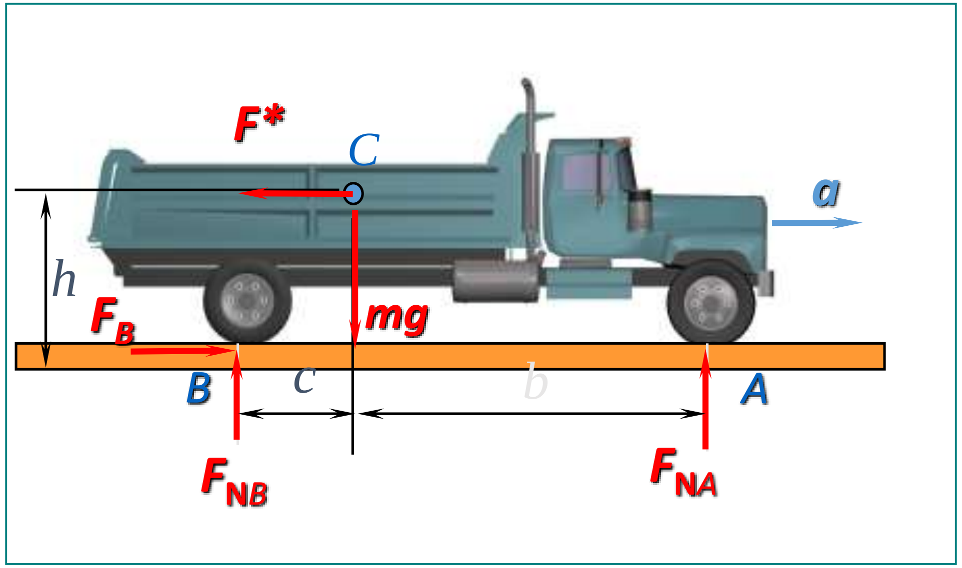
14.3 动静法应用举例

例题 1 汽车连同货物的总质量是m，其质心 C 离前后轮的水平距离分别是 b 和 c，离地面的高度是 h。当汽车以加速度a沿水平道路行驶时，求地面给前、后轮的铅直反力。轮子的质量不计。



解：

取汽车连同货物为研究对象。汽车实际受到的外力有：重力 G，地面对前、后轮的铅直反力 F_{NA}、F_{NB} 以及水平摩擦力 F_B (注意：前轮一般是被动轮，当忽略轮子质量时，其摩擦力可以不计)。



因汽车作平动，其惯性力系合成为作用在质心 C 上的一个力 $F^* = -ma$。

于是可写出汽车的动态平衡方程

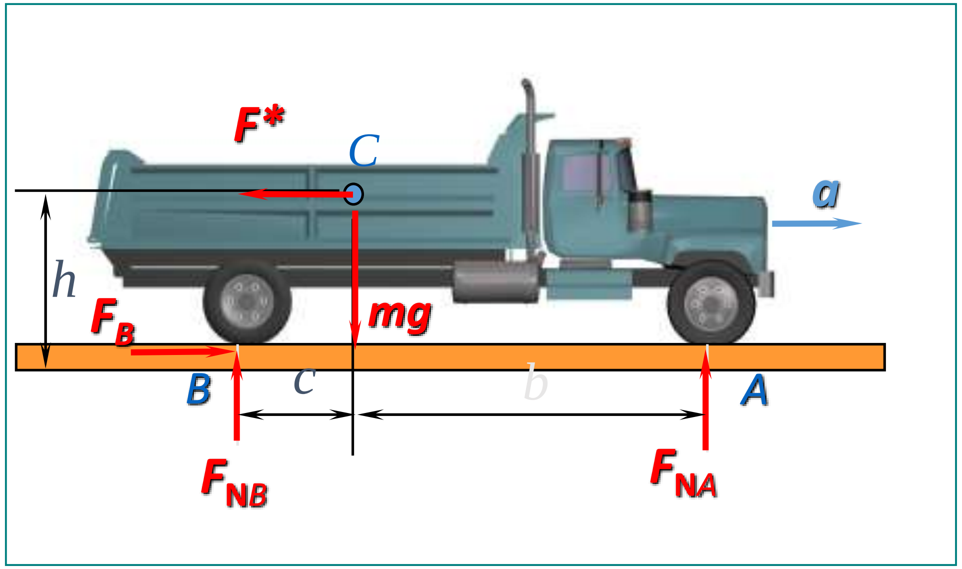
$$\sum M_B = 0\ ,\quad F^* h - mgc + F_{NA}(b+c) = 0 \quad (1)$$

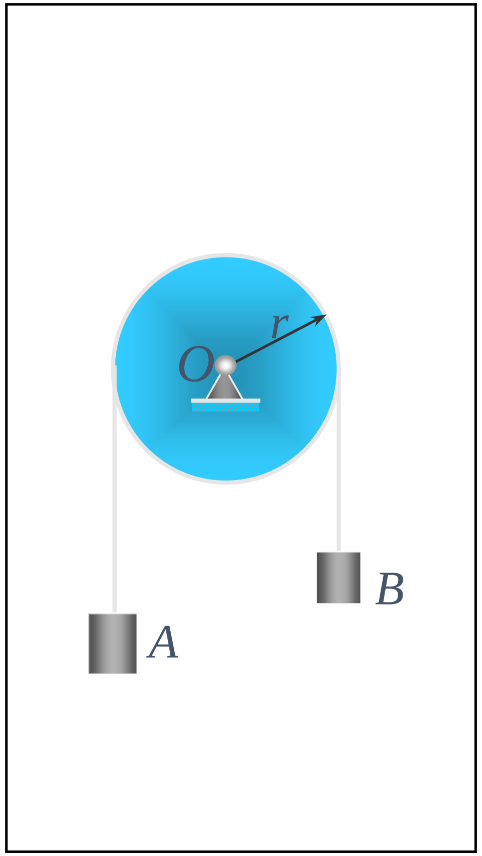
$$\sum M_A = 0\ ,\quad F^* h + mgb - F_{NB}(b+c) = 0 \quad (2)$$

由式(1)和(2)解得

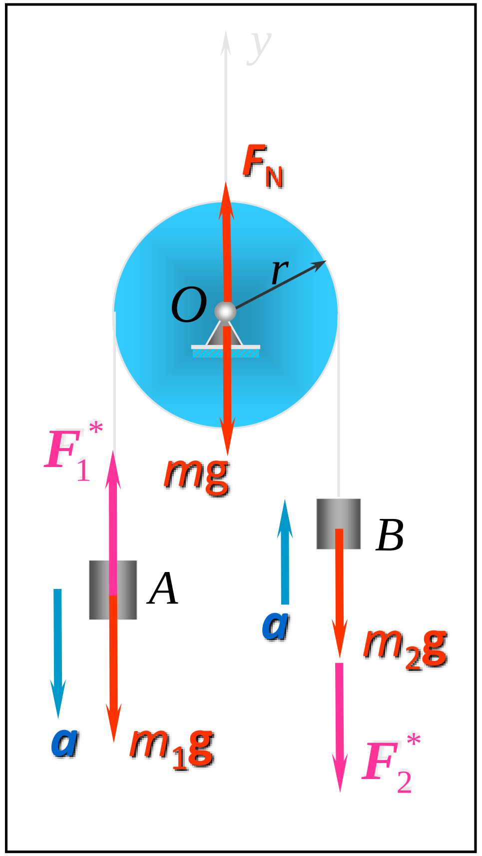
$$F_{NA} = \frac{m(gc-ah)}{b+c}$$

$$F_{NB} = \frac{m(gb+ah)}{b+c}$$





例题 2 如图所示，匀质滑轮的半径为r，质量为m，可绕水平轴转动。轮缘上跨过的软绳的两端各挂质量为m_1和m_2的重物,且$m_1 > m_2$。绳的重量不计，绳与滑轮之间无相对滑动，轴承摩擦忽略不计。求重物的加速度和轴承反力。



解： 以滑轮与两重物一起组成所研究的质点系。作用在该系统上的外力有重力m_1g，m_2g，mg和轴承约束反力F_N。

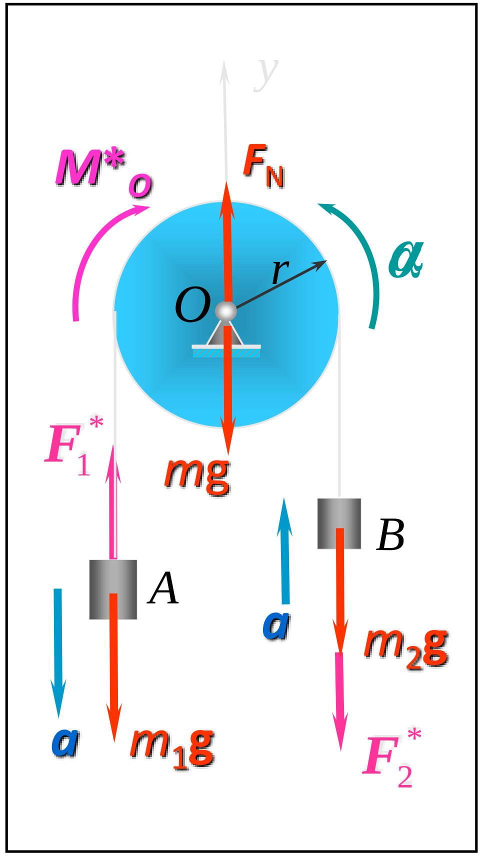
重物的惯性力方向均与加速度a的方向相反，大小分别为：

$$F_1^* = m_1 a, \qquad F_2^* = m_2 a$$

滑轮定轴转动，惯性力向转轴O简化。

主矢 $F^* = ma_O = 0$

主矩 $M^*_O = J_O \alpha = \frac{1}{2} mr^2 \cdot \frac{a}{r} = \frac{1}{2} mar$



应用达朗贝尔原理列平衡方程，得

$$\sum F_y = 0,$$

$$F_N - mg - m_1 g - m_2 g + F_1^* - F_2^* = 0$$

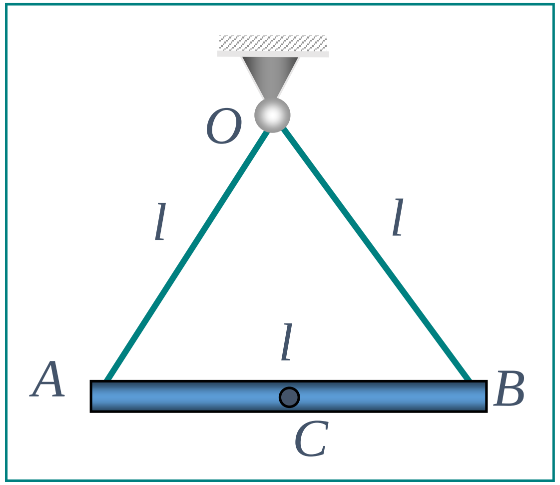
$$\sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$m_1 g r - F_1^* r - F_2^* r - m_2 g r - M_O^* = 0$$

解得 $$F_N = mg + m_1 g + m_2 g - m_1 a + m_2 a$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g$$

例题 3 用长 l 的两根绳子 AO 和 BO 把长 l，质量是 m 的匀质细杆悬在点 O (图 a)。当杆静止时，突然剪断绳子 BO，试求刚剪断瞬时另一绳子 AO 的拉力。

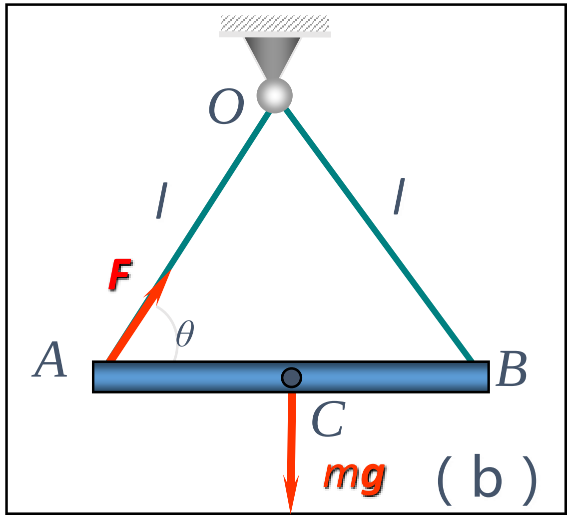


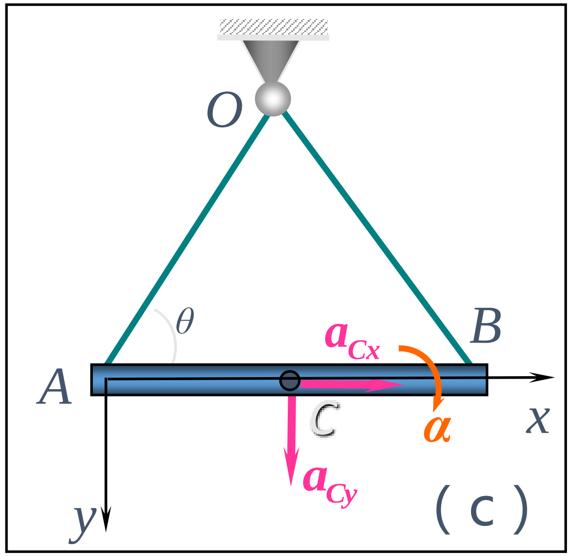
(a)

解：

绳子BO剪断后，杆AB将开始在铅直面内作平面运动。由于受到绳OA的约束，点A将在铅直平面内作圆周运动。在绳子BO刚剪断的瞬时，杆AB上的实际力只有绳子AO的拉力F和杆的重力mg。

在引入杆的惯性力之前，须对杆作加速度分析。取坐标系$Axyz$ 如图(c)所示。





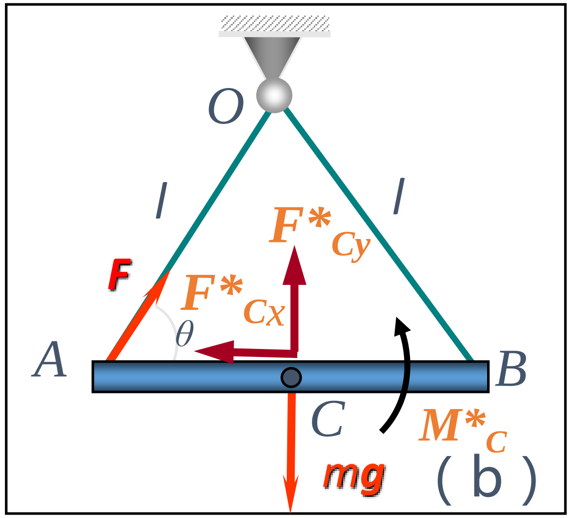
杆的惯性力合成为一个作用在质心的力 F^*_C 和一个力偶 M^*_C ，两者都在运动平面内，F^*_C 的两个分量大小分别是

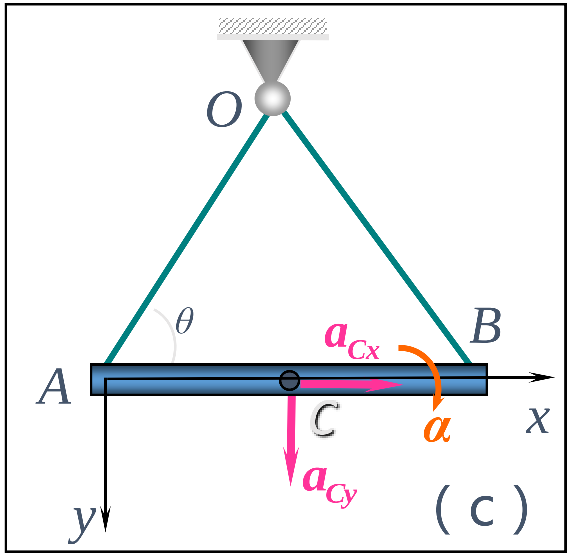
$$F^*_{Cx} = ma_{Cx}\ ,\quad F^*_{Cy} = ma_{Cy}$$

力偶矩 M^*_C 的大小是

$$M^*_C = J_{Cz'}\alpha$$

旋向与α相反(如图b)。





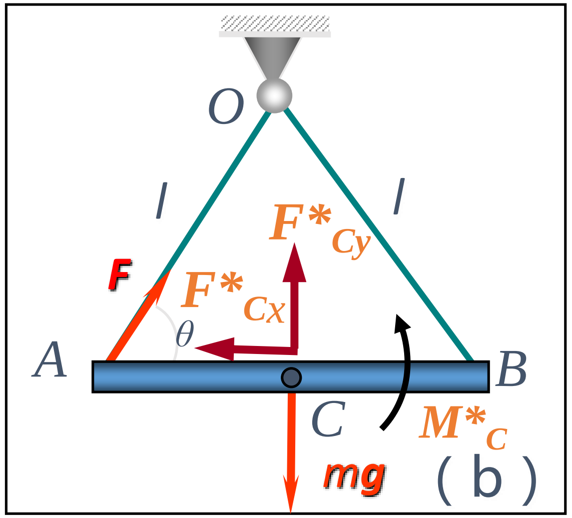
由动静法写出杆的动态平衡方程，有

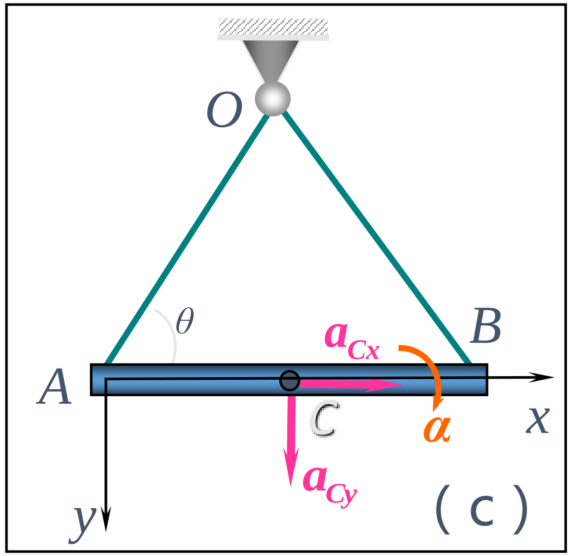
$$\sum F_x = 0, \qquad -ma_{Cx} + F\cos\theta = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \qquad -ma_{Cy} + mg - F\sin\theta = 0 \qquad (2)$$

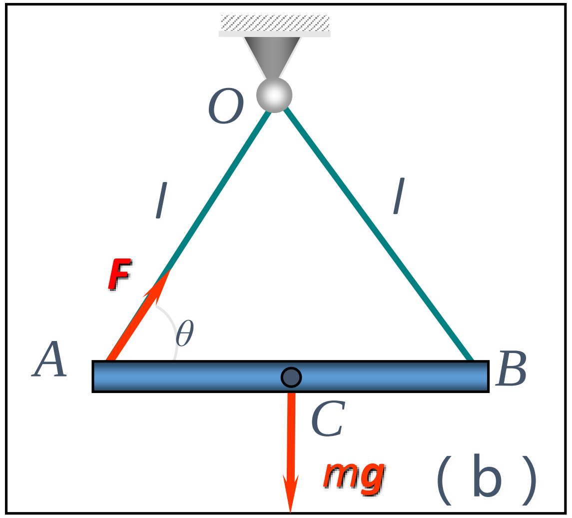
$$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0, \qquad J_{Cz'}\alpha - F\frac{l}{2}\sin\theta = 0 \qquad (3)$$

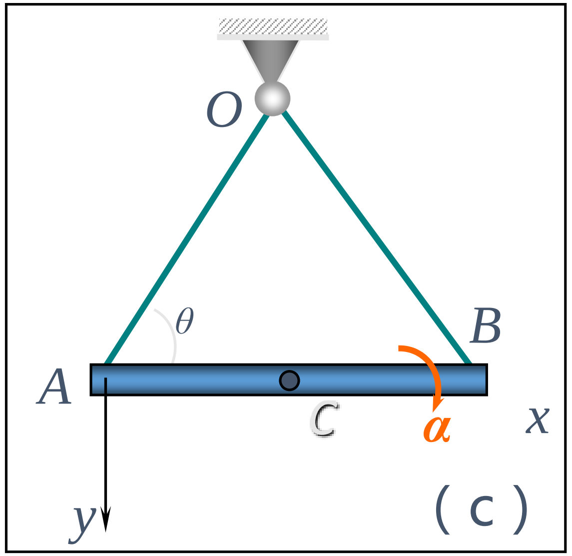
且对于细杆， $J_{Cz'} = ml^2/12$。





利用刚体作平面运动的加速度合成定理，以质心C作基点，则点A的加速度为





在绳BO刚剪断的瞬时，杆的角速度$\omega=0$，角加速度$\alpha\neq0$。因此

$$a^{n}_{AC}=AC\ \ \omega^2=0$$

$$a^{t}_{AC}=l\alpha/2$$

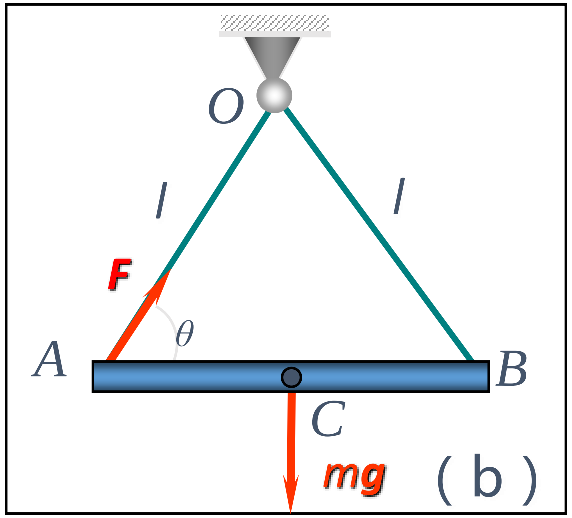
又 $a^{n}_{A}=0$，加速度各分量的方向如图(c)所示。把a_A投影到点A轨迹的法线AO上，就得到

$$0=a_{Cx}\cos\theta-a_{Cy}\sin\theta+a^{t}_{AC}\sin\theta \qquad (4)$$

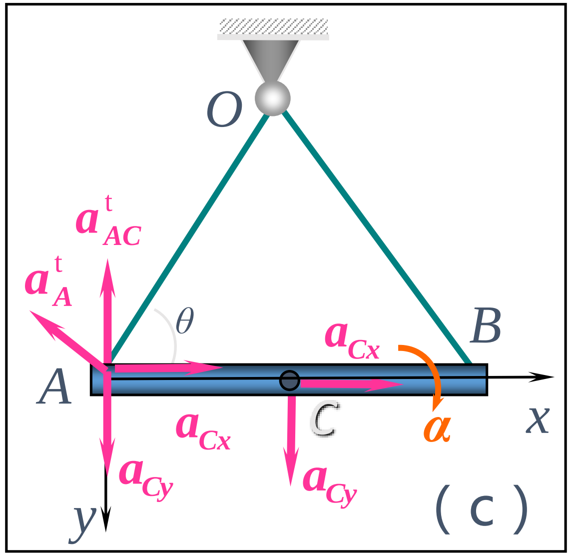
即

$$a_{Cx}\cos\theta-a_{Cy}\sin\theta+\frac{l}{2}\alpha\sin\theta=0$$

这个关系就是该瞬时杆的运动要素所满足的条件。



(b)



(c)

由动静法写出杆的动态平衡方程，有

$$\sum F_x = 0, \qquad -ma_{Cx} + F\cos\theta = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \qquad -ma_{Cy} + mg - F\sin\theta = 0 \qquad (2)$$

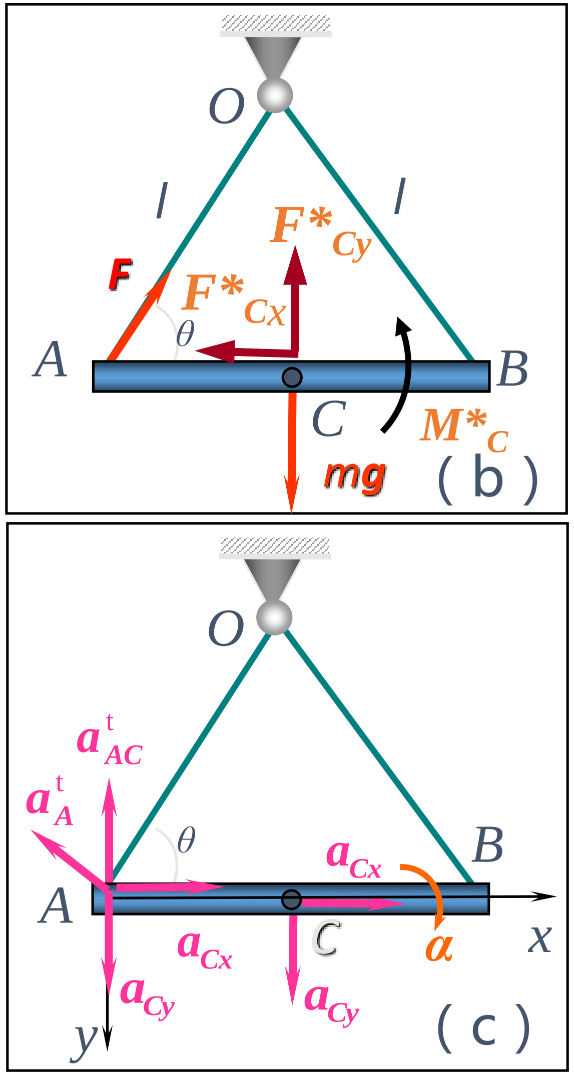
$$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0, \qquad J_{Cz'}\alpha - F\frac{l}{2}\sin\theta = 0 \qquad (3)$$

$$a_{Cx}\cos\theta - a_{Cy}\sin\theta + \frac{l}{2}\alpha\sin\theta = 0 \qquad (4)$$

且对于细杆，$J_{Cz'} = ml^2/12$。

联立求解方程(1)～(4)，就可求出

$$F = \frac{mg\sin\theta}{4\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{13}mg$$



谢谢！