第二章　曲线曲面的基本理论

本章内容

- 第一节： 曲线论的基本知识
- 第二节： 曲面论的基本知识

前言

微分几何是用微积分和线性代数的方法研究空间曲线和曲面的形状，找出决定曲线和曲面形状的不变量系统。 微分几何是数学的一个重要分支，它渗透到各数学分支和理论物理等学科，成为推动这些理论发展的一项重要工具。

经典的微分几何研究三维欧氏空间的曲线和曲面在一点邻近的性质，在微积分发明的同时，就开始了平面曲线微分几何的研究，而第一个作出重要贡献的是Euler (1707~1783).他在1736年引进了平面曲线的内在坐标，即曲线弧长这一概念，从而开始了内在几何的研究。将曲率描述为某一特殊角的变化率也是Euler的工作。

第一节 曲线论的基本知识的主要内容

- 曲线曲面的参数方程和矢量方程
- 重心组合与仿射变换
- 曲线的表示
- 曲线论基本公式

一、曲线曲面的参数方程和矢量方程

- 一）、曲线曲面的表示方法

1、隐式方程：$Implicit\ curves\ f(x,y)=0$
$Example\!:\ x^2+y^2=a^2$

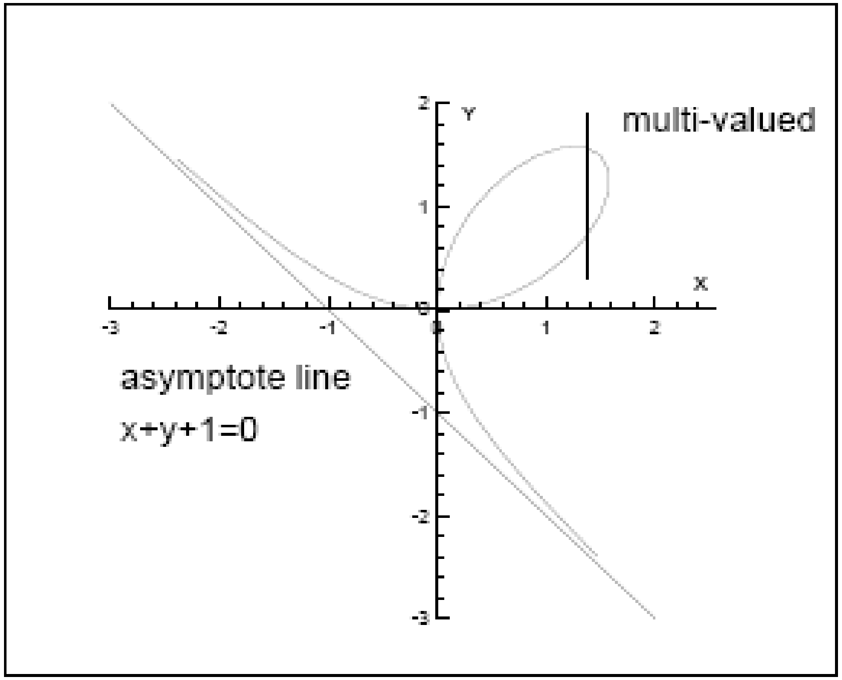
特点：

- 容易验证给定点是否位于曲线上
- 可以表示多值曲线和封闭曲线
- 对于曲线而言， 可以计算接近垂直于x轴的切矢
- 求曲线上一点可能很困难，导致难于跟踪 曲线轨迹
- 依赖于坐标系，不具有几何不变性

隐式方程曲线举例

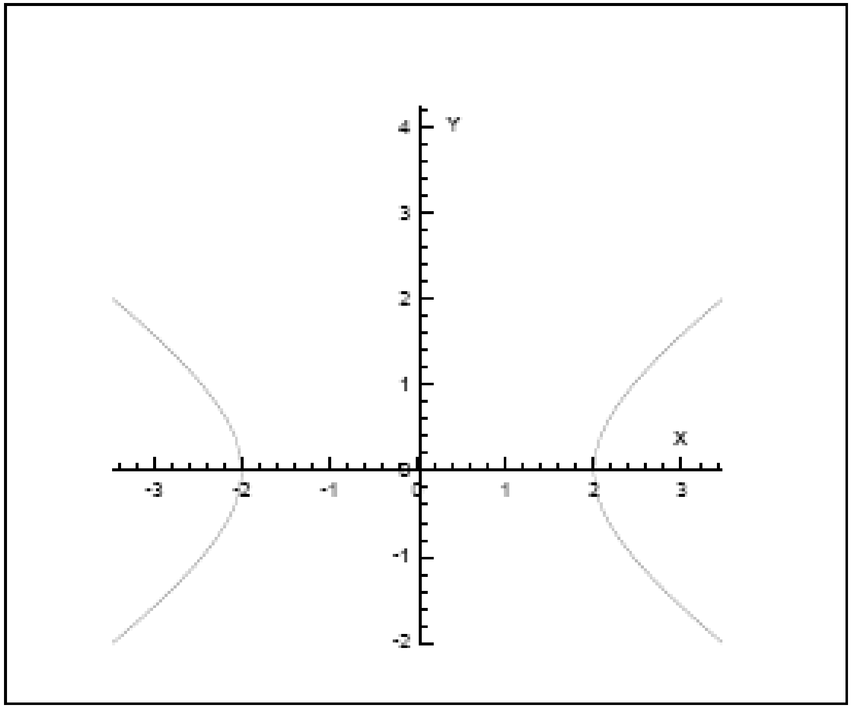
Example: $x^3 + y^3 = 3xy$: Folium of Descartes (see Figure 2.1a)

$$\begin{aligned} \text{Let } f(x,y) &= x^3 + y^3 - 3xy = 0, \\ f(0,0) &= 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0) \quad \text{lies on the curve} \end{aligned}$$



隐式曲线的几何变换

Example: If we translate by (1,2) and rotate the axes by $\theta = atan(\frac{3}{4})$, the hyperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$, shown in Figure 2.1(b), will become $2x^2 - 72xy + 23y^2 + 140x - 20y + 50 = 0$.



一）、曲线曲面的表示方法

- 2、显式方程

Explicit curves $y = f(x)$

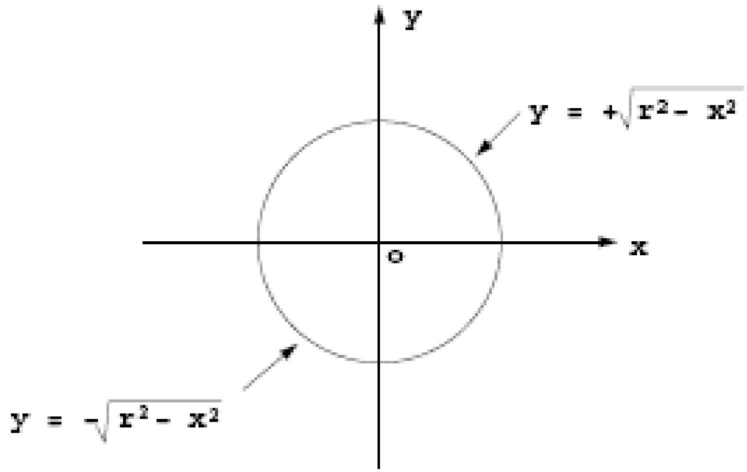
One of the variables is expressed in terms of the other.

Example: $y = x^2$

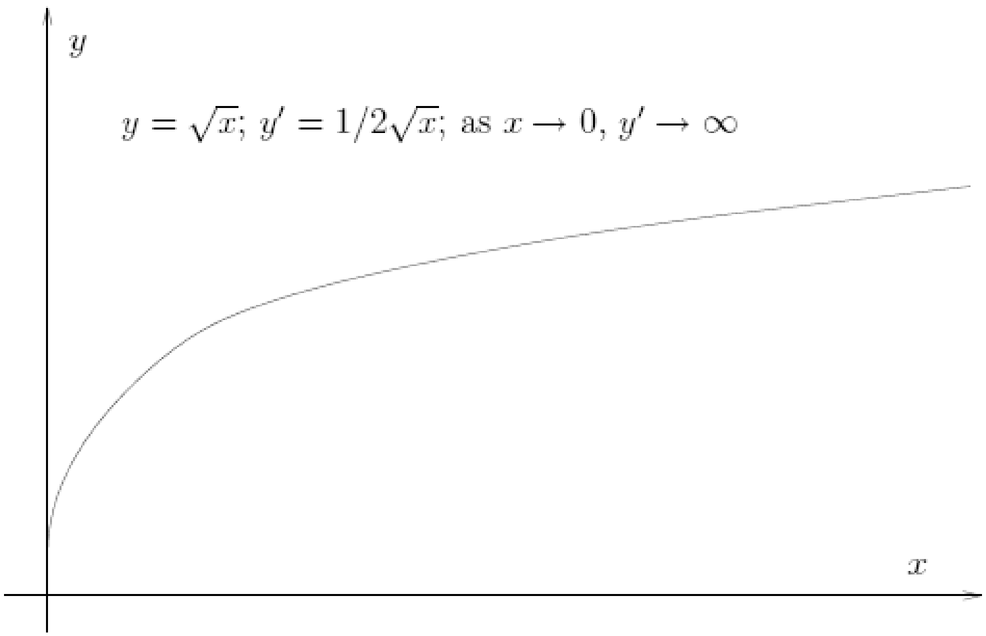
特点：

- 容易验证点是否位于曲线上
- 无法表示多值曲线和封闭曲线
- 对于曲线而言， 计算接近垂直于x轴的切矢很困难
- 求曲线上一点很容易，便于跟踪曲线轨迹
- 依赖于坐标系，不具有几何不变性

显式曲线举例



The derivative of $y = \sqrt{x}$ at the origin $x = 0$ is infinite,



一）、曲线曲面的表示方法

- 3、参数曲线曲面 $\vec{p}=\vec{p}(t) \quad t\in[a,b]$

特点：

- **验证给定点是否位于曲线上比较困难**
- **可以表示多值曲线和封闭曲线**
- **对于曲线而言， 可以计算接近垂直于x轴的切矢**
- **求曲线上一点很容易，便于跟踪 曲线轨迹**
- **不依赖于坐标系，具有几何不变性**

CAGD的曲线曲面大多是参数式

参数曲线举例

Example: Folium of Descartes, see Figure 2.1, can be expressed as:

$$\mathrm{r}(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right) \quad -\infty < t < \infty \quad \Rightarrow \text{easy to trace}$$

$x(t) = x_0 \Rightarrow$ solve for $t \Rightarrow$ plug t into $y(t) = y_0 \quad \Rightarrow$ need to solve a nonlinear equation to check if a point lies on the curve.

Explicit curve $y = \sqrt{x}$ can be expressed as $x = t^2$, $y = t$ $(t \geq 0)$.

$$\mathbf{r} = (t^2, t), \qquad \dot{\mathbf{r}} = (2t, 1)$$

$$\text{unit tangent vector} \quad \mathbf{t} = \frac{(2t, 1)}{\sqrt{4t^2+1}}$$

$$\text{at } \; t = 0, \mathbf{t} = (0, 1)$$

Therefore there is no problem representing a vertical tangent computationally.

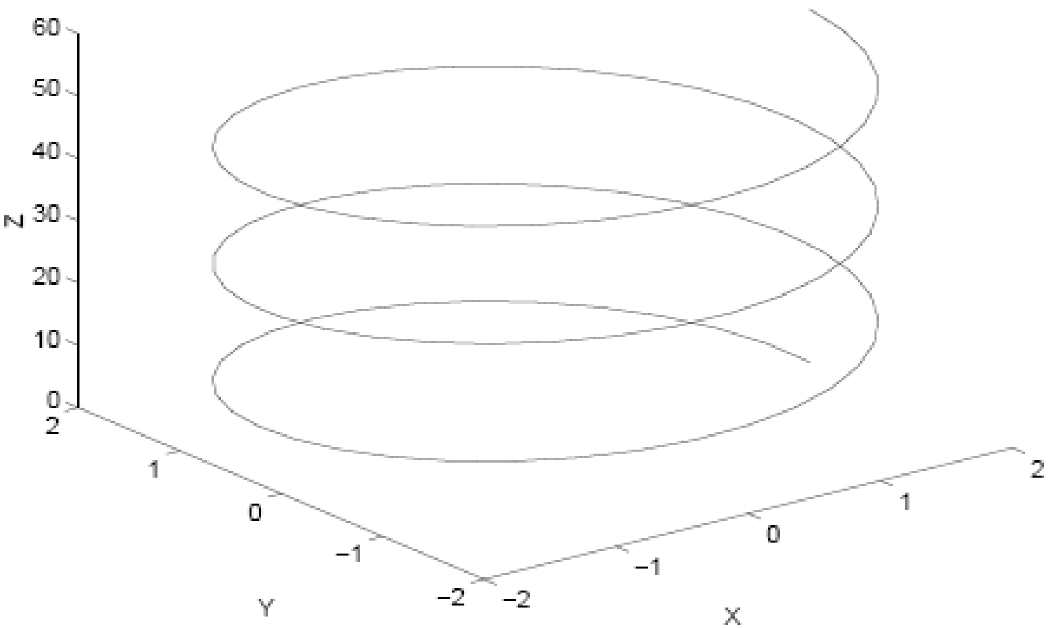
空间的参数曲线

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

$$where \quad \mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Example: Circular helix, see Fig. 2.4.

$$x = a\cos(t), \qquad y = a\sin(t), \qquad z = bt, \qquad 0 \le t \le \pi$$



二）、参数方程与矢量方程

1、矢量：具有大小和方向的量

- 2、矢量的分类：

按起点是否位于原点分：

a. 绝对矢量 (起点位于原点）

b. 相对矢量 (起点不位于原点，可移动）

按大小和方向是否变化分：

a. 常矢量

b. 变矢量

$\vec{r}(t)$

3. 曲线的参数方程与矢量方程

取 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{e}_1+y(t)\vec{e}_2+z(t)\vec{e}_3$,视$\vec{r}(t)$的始点为原点,则当t在(a,b)内取值时, $\vec{r}(t)$的终点在空间画出一条轨迹.这轨迹就是曲线:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), a<t<b, t\text{为参数。} \\ z=z(t) \end{cases}$$

的矢量方程.上式称为曲线的参数方程

$\vec{r}_0$

FABIANNE

曲线的参数方程与矢量方程举例

- 过点$\vec{r}_0$以$\vec{a}$为方向向量的平面直线的矢量方程： $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$

参数方程为：$\begin{cases} x = x_0 + ta_x \\ y = y_0 + ta_y \end{cases}$

以$\vec{r}_0$为圆心，半径为R的圆周

矢量方程为：$(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = R^2$

参数方程为：$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta \\ y = y_0 + R\sin\theta \end{cases}$ $0 < \theta \le 2\pi$

二、重心组合与仿射变换

一）、重心组合（Barycentric Combination）

1、定义:

$$b=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j b_j \quad \text{the sum of several points}$$

$$b_j \in \mathrm{E}^3$$

$$\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$$

如果 $\alpha_j \geq 0, j=0,1,\cdots,n$

称为凸组合（Convex Combination）

一）、重心组合 Barycentric Combination

- 2、重心组合的另一种形式

$$\alpha_0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

$$b = b_0 (1 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j) + \sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_j$$

$$\boxed{b = b_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (b_j - b_0)}$$

the sum of a point & vectors

3、重心组合的物理意义

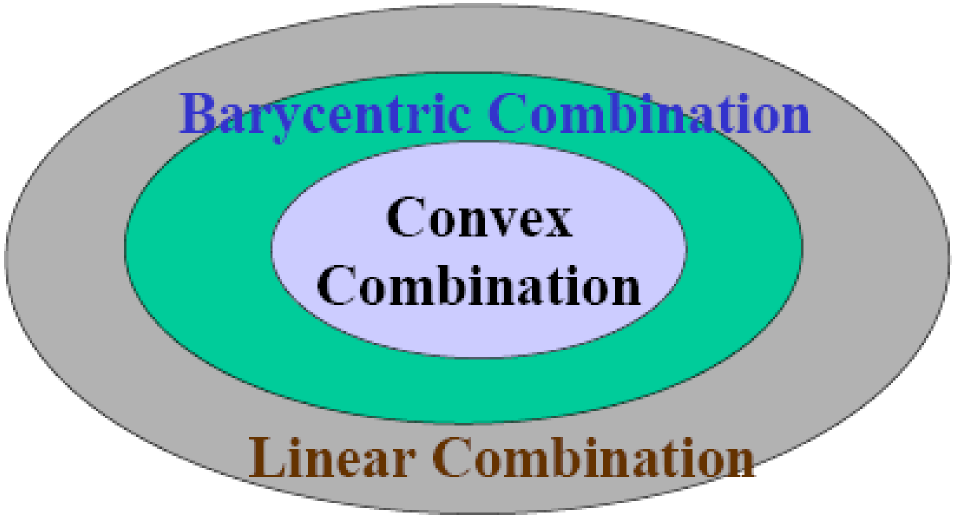
- The term "barycentric combination" is derived from "barycenter", meaning "center of gravity".
- The origin of this formulation is in physics - if the b_j are center of gravity of objects with masses m_j, then their center of gravity b is located at:

$$b = \frac{\sum m_j b_j}{\sum m_j} = \sum\left(\frac{m_j}{\sum m_j}\right) b_j$$

$$\sum\left(\frac{m_j}{\sum m_j}\right) = \sum \alpha_j = 1$$

If some of the m_j are negative, the notion of electric charges may provide a better analogy.

4、几种组合的关系



- Convex Combination ⊂ barycentric combination ⊂ linear combination

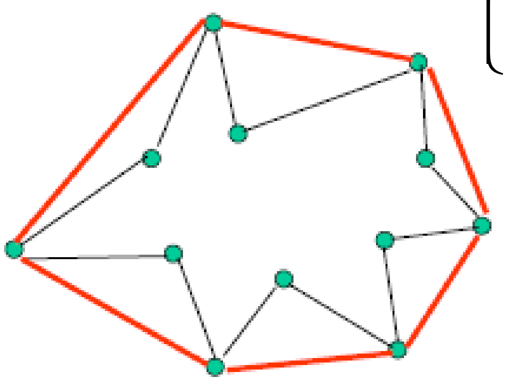
二）点集的凸包与凸集

1、凸包的定义：点集所有凸组合构成的集合 设 $\left\{\vec{b}_j, j=0,1,\cdots,n\right\}$

为二维或三维点集，它的凸包为：

$$V[\vec{b}_0,\cdots,\vec{b}_n]=$$

$$\left\{\vec{b}\;\middle|\;\vec{b}=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\vec{b}_j,\ \sum_{j=0}^{n}\alpha_j=1,\alpha_j\geq 0,\ j=0,1,\cdots n\right\}$$



凸包的示意图

2、凸集

- 定义：连接集合中任两个点的直线完全在此集合中，这样的集合为凸集
- 任何一个点集的凸包就是一个凸集
- 凸集的计算属于计算几何的范畴

三）、仿射变换（Affine Map）

- 1、定义：保持重心组合不变的的变换称为**仿射变换**

即：　　变换　$\Phi: E^3 \to E^3$　满足：

$$x = \sum \alpha_j a_j \quad x, a_j \in \mathrm{E}^3 \quad \sum \alpha_j = 1$$

and Φ *is an affine map, then also*

$$\Phi(x) = \sum \alpha_j (\Phi a_j) \quad \Phi x, \Phi a_j \in \mathrm{E}^3$$

$x,b \in E^3$

2、仿射变换的表示方法

- 设 A为一个三阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{v} \in E^3$ 则 $\Phi\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + v$ 表示一个三维空间的仿射变换。验证：

$\Phi x = Ax + v$ A is a 3x3 matrix

V is a vector from R^3

$$\Phi(x) = \Phi(\sum \alpha_j a_j) = A(\sum \alpha_j a_j) + V$$

$$\because \sum \alpha_j = 1$$

$$A(\sum \alpha_j a_j) + V = A(\sum \alpha_j a_j) + \sum \alpha_j V$$

$$= \sum \alpha_j A a_j + \sum \alpha_j V$$

$$= \sum \alpha_j (A a_j + V) = \sum \alpha_j (\Phi a_j)$$

3、常见的仿射变换

- 恒等变换 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
- 平移变换（Translation）：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$$

- 旋转变换（Rotation）：（以绕z轴旋转为例）

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

- 伸缩变换：（Scaling）

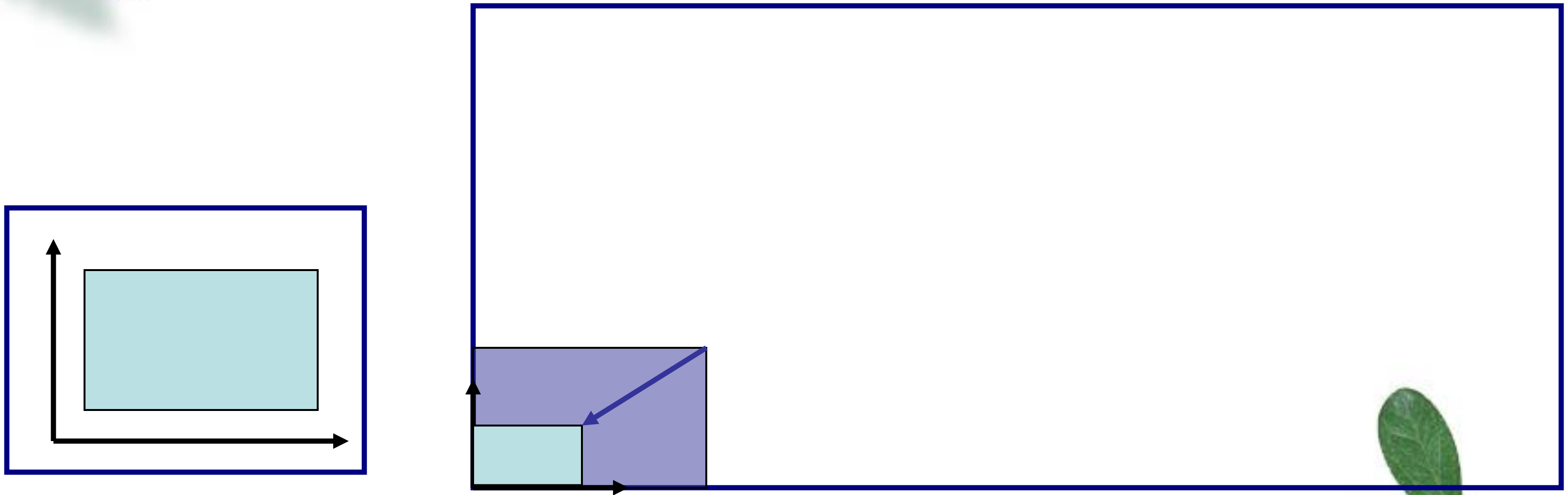
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \mathbf{0}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$$

3、常见的仿射变换

- 切变（Shear）

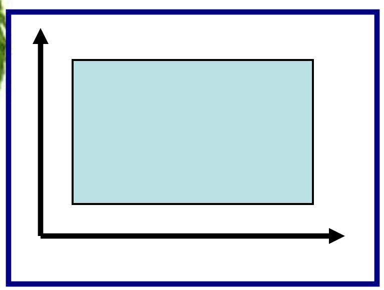
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

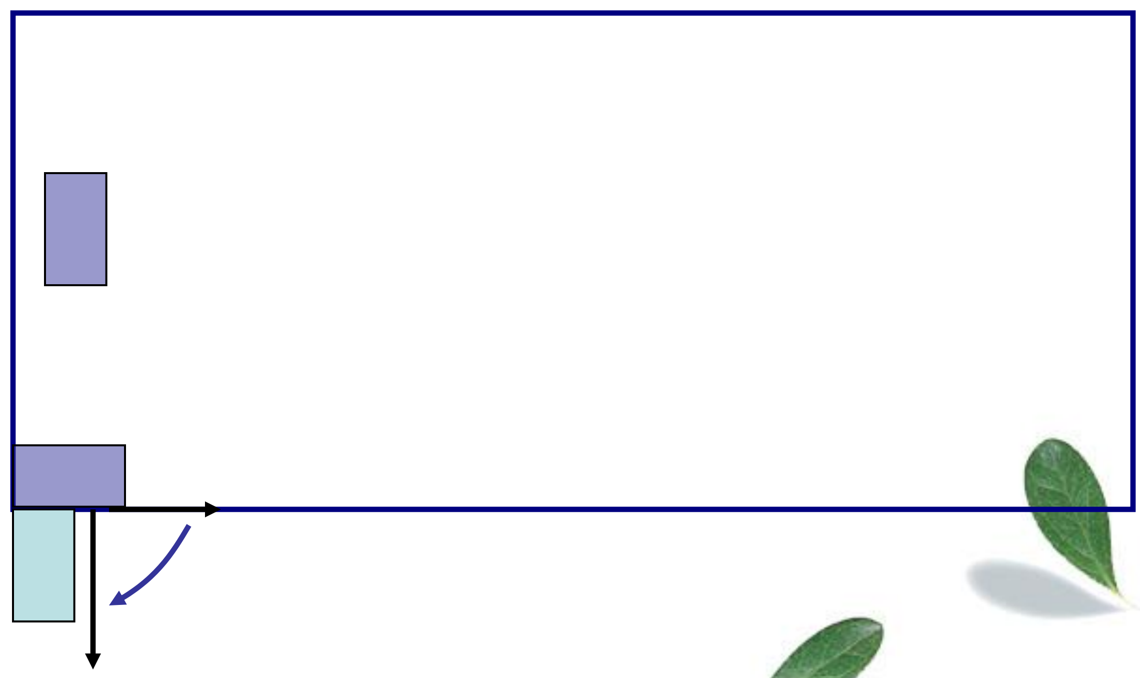
4、二维仿射变换举例



Scale(0.3, 0.3)

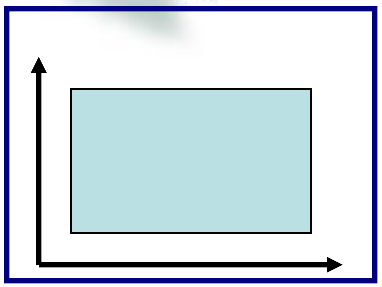
4、二维仿射变换举例



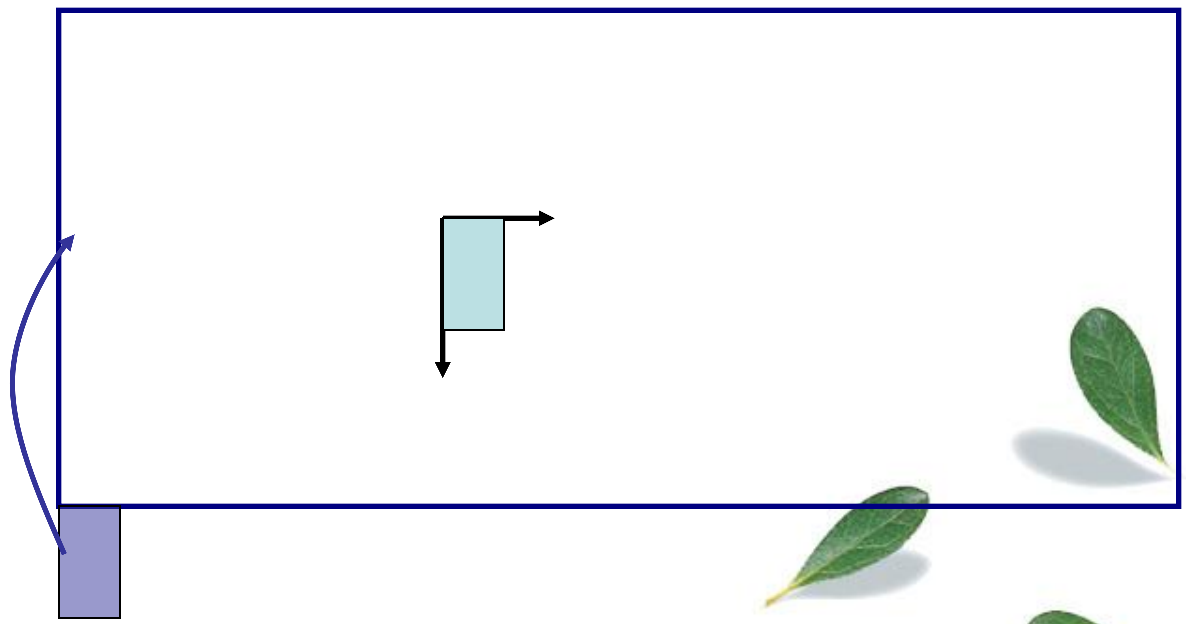


Scale(0.3, 0.3)
Rotate(-90)

4、二维仿射变换举例



Scale(0.3, 0.3)
Rotate(-90)
Translate(5, 3)



5、二维仿射变换的矩阵表示

- **Translation**
  - $x' = x + tx$
  - $y' = y + ty$
- **Scale**
  - $x' = x \times sx$
  - $y' = y \times sy$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= ((x \times sx) \times \cos\theta - (y \times sy) \times \sin\theta) + tx \\ y' &= ((x \times sx) \times \sin\theta + (y \times sy) \times \cos\theta) + ty \end{aligned}}$$

- **Rotation**
  - $x' = x \times \cos\theta - y \times \sin\theta$
  - $y' = y \times \sin\theta + y \times \cos\theta$

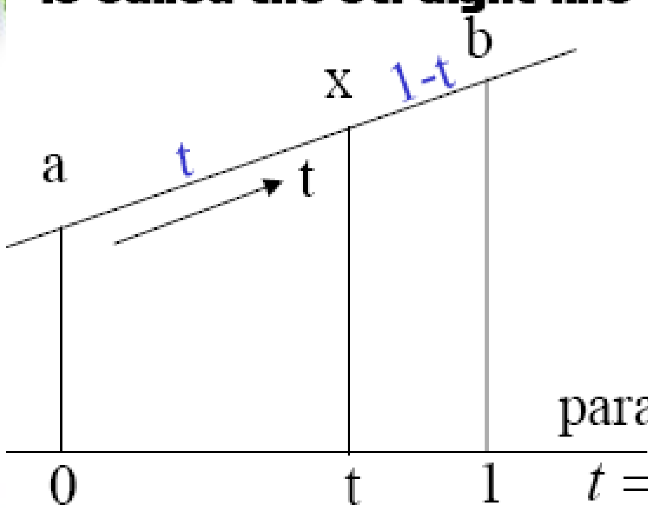
6、线性插值

- 两点之间的线性组合

Let a, b be two distinct points in E^3. The set of all points x in E^3 of the form:

$$x = x(t) = (1-t)a + tb$$

is called the straight line through a and b.



t=0 straight line passes through a
t=1 straight line passes through b
0≤t≤1 the point x is between a & b
for all other values of t, it is outside

parametric space

$$t = (1-t)0 + t * 1$$

6、线性插值

- 线性插值也可表示为：

$$\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$$

其中 $\alpha+\beta=1$

即 α和β 分别为 $\vec{a}$和$\vec{b}$

的重心坐标，与线性插值的另一种形式：$\vec{x}=\vec{x}(t)=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

相比，只需令 $\alpha=1-t$和$\beta=t$

即可。

$\vec{x}$ $t=\frac{\|ax\|}{\|ab\|}$

6、线性插值

- **在线性插值式** $\vec{x}=\vec{x}(t)=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ **中**

点 $\vec{x}$ **将线段*ab* 分为两段，且长度比为：**

t：1—t，即：

$$t=\frac{\|ax\|}{\|ab\|}\quad 0\le t\le 1$$

这时点x一定位于线段位于线段*ab* 的内部

6、线性插值

- 在线性插值式 $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ 中 α和β 不一定都大于零

这时点**x**也可能位于线段位于线段***ab***的外部。这时可以向量引入一维有向距离$\mathbf{Vol_1}$，它可正可负

其中

$$\alpha=\frac{\mathrm{Vol}_1(x,b)}{\mathrm{Vol}_1(a,b)}\text{和}\beta=\frac{\mathrm{Vol}_1(a,x)}{\mathrm{Vol}_1(a,b)}$$

7、共线点比

若有 $\alpha = \dfrac{\mathrm{Vol}_1(x,b)}{\mathrm{Vol}_1(a,b)}$ 和 $\beta = \dfrac{\mathrm{Vol}_1(a,x)}{\mathrm{Vol}_1(a,b)}$ 则令：

$$ratio(a,x,b) = \frac{\mathrm{Vol}_1(a,x)}{\mathrm{Vol}_1(x,b)} = \frac{\beta}{\alpha}$$

为三点的共线点比，在仿射变换下共线点比保持不变，即：

$$ratio(a,x,b) = ratio(\Phi a, \Phi x, \Phi b)$$

三、曲线的表示

- **1、矢量方程和参数方程：对于参数域中的每一个参数值u,都有唯一的变矢量p和它唯一对应，则称p为u的矢量方程，记作：**

$$\vec{p}(u)=[x(u),y(u),z(u)]$$ **或**

$$\vec{p}(u)=x(u)\vec{i}+y(u)\vec{j}+z(u)\vec{k} \quad u\in[a,b]$$

参数方程

$$\begin{cases} x=x(u) \\ y=y(u) \quad u\in[a,b] \\ z=z(u) \end{cases}$$

2、曲线的弧长参数化

- 弧长是曲线的不变量，曲线的弧长参数化与坐标系的选取无关，而且曲线上的点与弧长参数是一一对应的。曲线的弧长参数也称作曲线的自然参数。

2、曲线的弧长参数化

设已知曲线的矢量方程为：

$$\vec{p} = \vec{p}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

根据弧长微分公式：

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(dt)^2}}$$

$$= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} > 0$$

说明弧长s是参数t的单调增加函数。

2、曲线的弧长参数化

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=\int_{t_0}^{t}|\vec{p}\,'(t)|dt$$

上式表示曲线上参数为t_0的点与参数为t的点之间的弧长。

因为s（t）是t的单调增加连续函数，所以一定存在反函数t=t（s），将其代入曲线方程即得：

$$\vec{p}=\vec{p}(t(s))=\vec{\tilde{p}}(s)\Longrightarrow\boxed{\text{一般参数方程就化为了自然参数方程}}$$

2、曲线的弧长参数化

弧长参数化曲线的一个重要特征：

根据弧长微分公式： $ds^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$

$$\because (ds)^2=(d\vec{\mathbf{p}})^2$$

$$\therefore \left|\dot{\vec{p}}(s)\right|=\left|\frac{d\vec{\mathbf{p}}(s)}{ds}\right|=1$$

表示对弧长参数求导

2、曲线的弧长参数化

理论上讲每条正则曲线总可以用弧长来作为它的参数，但实际上计算是有困难的。

第一， $\int_a^t |\vec{r}'(t)| dt$ 可能 不是初等函数，如：

$\vec{r}$ = {acost,bsint,0}（即椭圆的参数方程），

$$\int_a^t |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$$

不能用初等函数表示，因此无法把它改写成用弧长s表示；

2、曲线的弧长参数化

第二，即使**$s(t)$** 已求出，但也可能求不出它的反函数，例如：

$$\vec{r}(t)=\{t,\frac{1}{2}t^2,0\}$$ （即抛物线），

$$s(t)=\int_a^t\sqrt{1+t^2}dt=\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}+\ln(1+\sqrt{1+t^2})$$

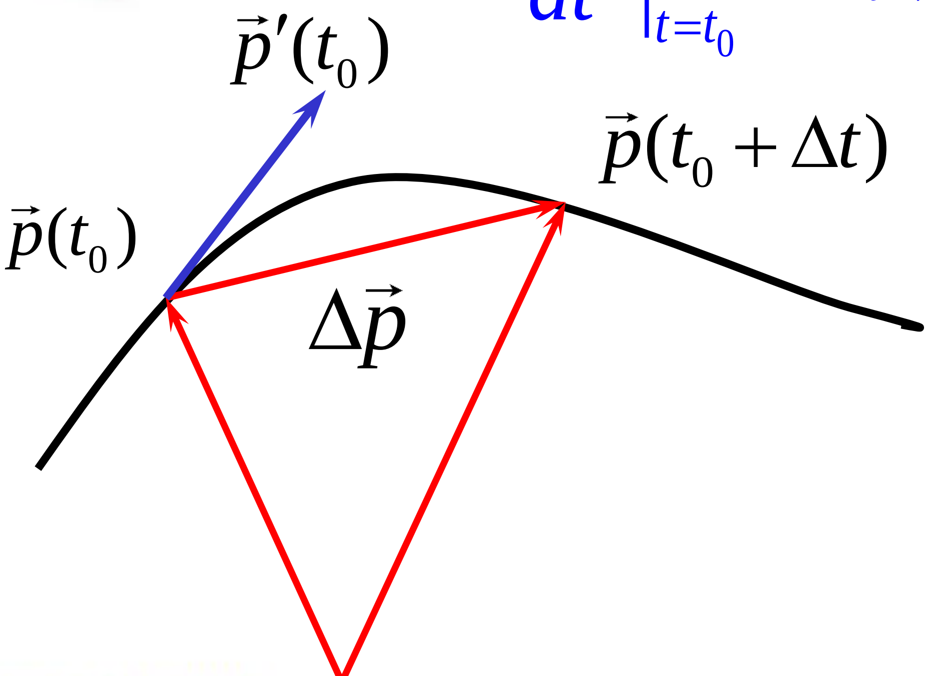
想从中解出**$t=t(s)$**是困难的。

所以，弧长参数主要用于理论分析，实际计算弧长时，常用数值方法进行近似计算。

3. 曲线的切矢

定义：

$$\vec{p}'(t_0)=[\frac{d\vec{p}}{dt}]\Big|_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{p}(t_0+\Delta t)-\vec{p}(t_0)}{\Delta t}$$



切矢的方向沿着参数增加的方向。

3. 曲线的切矢

切矢函数：

$$\vec{p}'(t)=[x'(t),y'(t),z'(t)]$$

单位化的切矢函数：

$$\vec{t}=[\frac{x'(t)}{|\vec{p}'(t)|},\frac{y'(t)}{|\vec{p}'(t)|},\frac{z'(t)}{|\vec{p}'(t)|}]$$

$$\vec{n}=\pm[\frac{y'(t)}{|\vec{p}'(t)|},-\frac{x'(t)}{|\vec{p}'(t)|}]$$

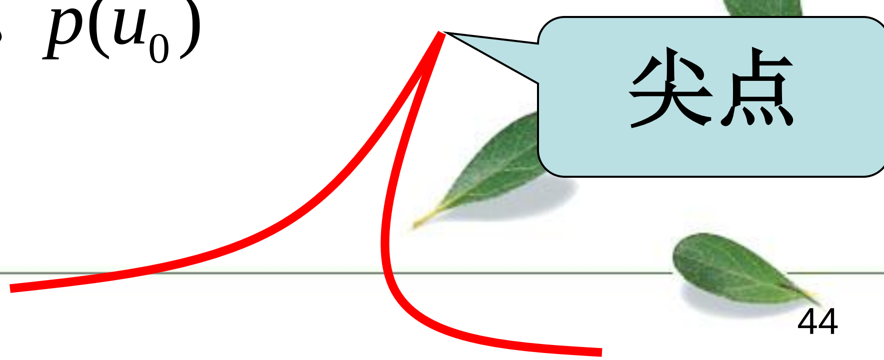
平面曲线的单位法矢

3. 曲线的切矢

- 注1：可类似地定义二阶及二阶以上的高阶导矢。

定义：若$\vec{p}'(u_0)\neq\vec{0}$，则称$\vec{p}(u_0)$为正则点（**regular point**），否则称为奇点。

- 定义：若 $\vec{p}'(u_0)=\vec{0}$，且 $\vec{p}'(u)$ 在**u＝u$_0$**的左右邻域有一个突变，则称 $\vec{p}(u_0)$ 为曲线的尖点（**cusp**）。



3. 曲线的切矢

- 定义：若两条首尾相连的曲线在公共点处对于弧长参数具有直到n阶的相同切矢，则称两条曲线在该点具有n阶切触阶，切触阶是两条曲线之间的内在性质，与参数的选取无关。

四、曲线论基本公式

- （一）自然参数曲线条件下公式的形式

1、Frenet活动标价的建立

$$\vec{t}(s)=\dot{\vec{p}}(s)$$

单位切矢

$$\because (\vec{t}(s))^2\equiv 1$$

$$\therefore 2\vec{t}(s)\bullet\dot{\vec{t}}(s)=0$$

$\Rightarrow$ $\vec{t}(s)$与$\dot{\vec{t}}(s)$垂直

$$\boxed{\dot{\vec{t}}(s)=k(s)\vec{n}(s)} \Rightarrow k(s)=\left|\dot{\vec{t}}(s)\right|=\left|\ddot{\vec{p}}(s)\right|$$

1、Frenet活动标价的建立

$$\dot{\vec{t}}(s) = k(s)\vec{n}(s)$$

曲率矢

单位主法矢

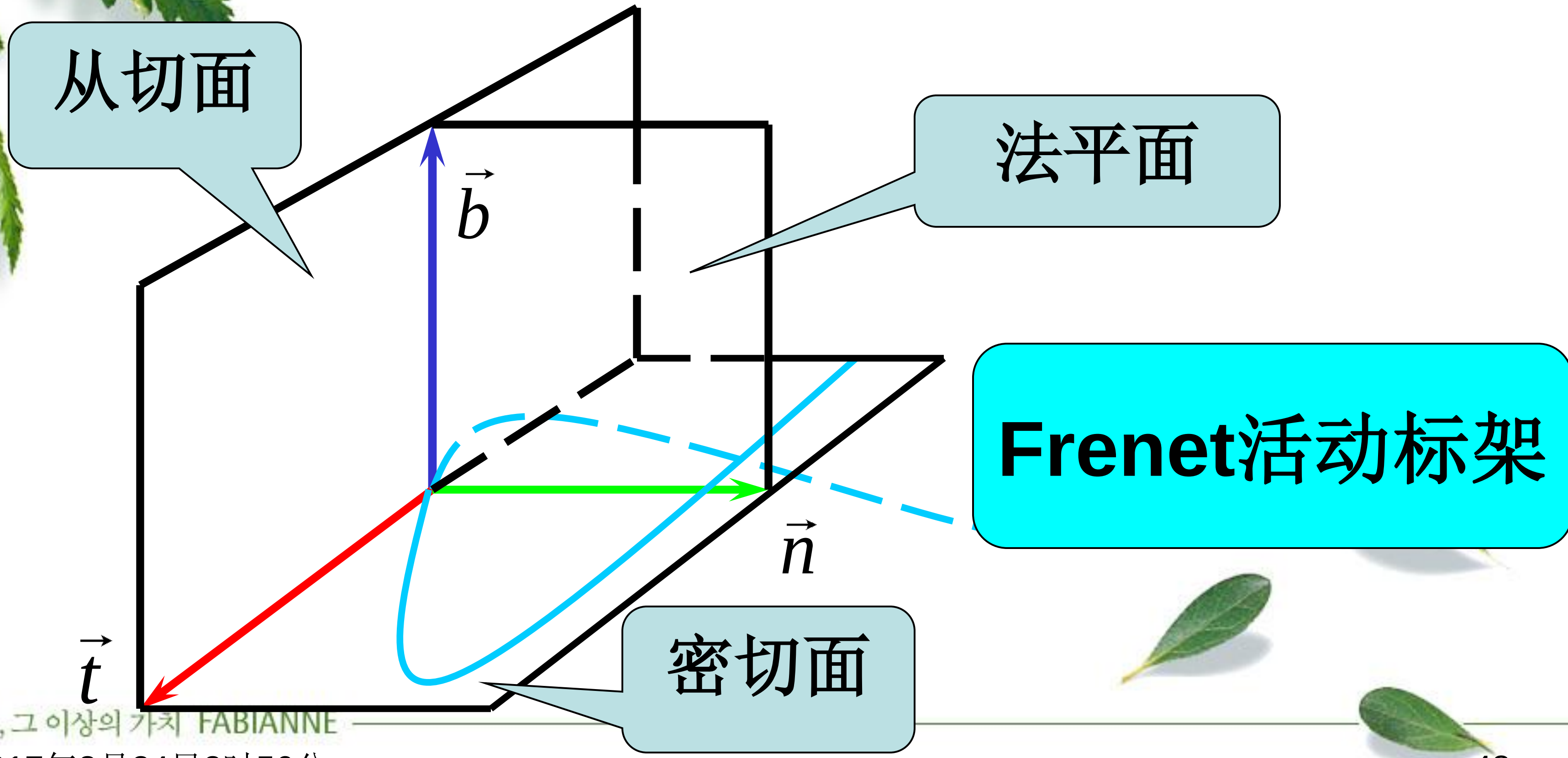
$$k(s) = \left|\dot{\vec{t}}(s)\right|$$ ⟸ 曲线的曲率

$$\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$$ ⟸ 曲线的曲率半径

1、Frenet活动标价的建立

$$\vec{t}(s)\times\vec{n}(s)=\vec{b}(s)$$

单位副法矢



2、自然参数曲线条件下公式的形式

1) $\vec{t},\vec{n},\vec{b}$ 三者之间的关系

结论：t,n,b是构成右手系的三个正交单位向量！

2、自然参数曲线条件下公式的形式

2） $\dot{\vec{t}},\dot{\vec{n}},\dot{\vec{b}}$的计算

- $\dot{\vec{t}}(s)=k(s)\vec{n}(s)$
- 求 $\dot{\vec{b}}$ 由 $\vec{b}\bullet\vec{t}=0$ 两边对弧长求导得：

$$\dot{\vec{b}}\bullet\vec{t}+\vec{b}\bullet\dot{\vec{t}}=0$$

因 $\vec{b}\bullet\dot{\vec{t}}=\vec{b}\bullet k\vec{n}=k(\vec{b}\bullet\vec{n})=0$

所以$\dot{\vec{b}}\bullet\vec{t}=0$,即$\dot{\vec{b}}\perp\vec{t}$ (1)

2、自然参数曲线条件下公式的形式

又因为 $\vec{b}^2=1$ 两边对弧长求导得：

$$2\vec{b}\bullet\dot{\vec{b}}=0 \qquad (2)$$

由（1）（2）可知：$\dot{\vec{b}}$既垂直于$\vec{t}$，又垂直于$\vec{b}$

所以：$\dot{\vec{b}} \parallel \vec{n}$

令$\dot{\vec{b}}=-\tau\vec{n}$

曲线的挠率

2、自然参数曲线条件下公式的形式

- 求$\dot{\vec{n}}$　由$\vec{n}=\vec{b}\times\vec{t}$

两边对弧长求导得：

$$\dot{\vec{n}}=\dot{\vec{b}}\times\vec{t}+\vec{b}\times\dot{\vec{t}}$$

$$=-\tau\vec{n}\times\vec{t}+\vec{b}\times k\vec{n}$$

$$=-\tau(-\vec{b})+k(-\vec{t})$$

$$=\tau\vec{b}-k\vec{t}$$

2、自然参数曲线条件下公式的形式

综上所述，得：

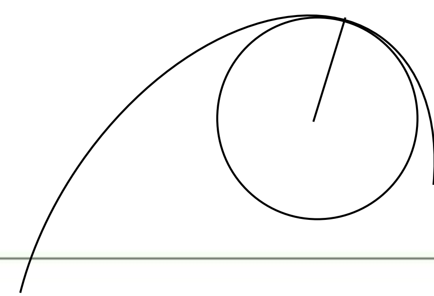
$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{t}} \\ \dot{\vec{n}} \\ \dot{\vec{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$$

上式称为曲线论基本公式，也称**Frenet-Serret**公式，有此式可知：

$\dot{\vec{t}},\dot{\vec{n}},\dot{\vec{b}}$可用$\vec{t},\vec{n},\vec{b}$三者的线性组合表示，而且组合的系数包含曲线的曲率和挠率。

2、自然参数曲线条件下公式的形式

- 相关概念
- 曲率中心：沿主法线方向，与曲线上的点p（u）距离为曲率半径的一点称为曲率中心。
- 密切圆：密切面上以曲率中心为圆心，以曲率半径为半径的圆称为密切圆。



2、自然参数曲线条件下公式的形式

曲线在一点邻近的结构或形状无非表现为两方面，一是弯曲；二是扭曲。

弯曲就是曲线在这点离开这点的切线的几何表现，扭曲就是曲线在这点离开这点的密切平面的几何表现。

曲率就是刻画曲线在一点弯曲程度的；挠率就是刻画曲线在一点扭曲程度和形式的。而反映曲率、挠率以及基本向量之间关系的就是Frenet公式。

3、一般参数曲线条件下的Frenet活动标架

因为

$$\vec{r}(u+\Delta u)=\vec{r}(u)+\vec{r}'(u)\Delta u+\frac{1}{2}\vec{r}''(u)(\Delta u)^2+\frac{1}{6}\vec{r}'''(u)(\Delta u)^3+\cdots$$

设$\vec{r}'(u),\vec{r}''(u),\vec{r}'''(u)$三者线性无关，

则三者可以构成一个局部仿射坐标系，其原点为r（u）

应用Gram-Schmidt正交规范化，可得一个局部正交坐标系，其三个坐标轴为：

3、一般参数曲线条件下的Frenet活动标架

$$
\begin{cases}
\vec{t} = \dfrac{\vec{r}'(u)}{\left|\vec{r}'(u)\right|} \\[2ex]
\vec{b} = \dfrac{\vec{r}'(u)\times\vec{r}''(u)}{\left|\vec{r}'(u)\times\vec{r}''(u)\right|} \\[2ex]
\vec{n} = \vec{b}\times\vec{t} = \dfrac{(\vec{r}'(u)\times\vec{r}''(u))\times\vec{r}'(u)}{\left|(\vec{r}'(u)\times\vec{r}''(u))\times\vec{r}'(u)\right|}
\end{cases}
$$

4、曲率与挠率的计算

- 曲率的计算
  - 一般参数曲线

$$k = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$$

- 自然参数曲线

$$k = |\ddot{\vec{r}}(s)| = \sqrt{(\ddot{x}(s))^2 + (\ddot{y}(s))^2 + (\ddot{z}(s))^2}$$

4、曲率与挠率的计算

- 平面曲线相对曲率的计算
  - 一般参数曲线

$$k_\Gamma = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

- 自然参数曲线

$$k_\Gamma = \ddot{y}(s)\dot{x}(s) - \ddot{x}(s)\dot{y}(s)$$

注：相对曲率的正负表示平面曲线的弯曲方向。相对曲率等于零的点称为平面曲线的拐点。

4、曲率与挠率的计算

- 挠率的计算
  - 一般参数曲线

$$\tau=\frac{(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')}{(\vec{r}'\times\vec{r}'')^2}$$

- 自然参数曲线

$$\tau=\frac{(\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\dddot{\vec{r}})}{(\ddot{\vec{r}})^2}$$

注：1）挠率为零的点称为泛拐点。

2）平面曲线上所有点的挠率恒为零。

4、曲率与挠率的计算

例：试求圆柱螺线$\vec{r}=\vec{r}(\theta)=(a\cos\theta,a\sin\theta,b\theta)$ $(a>0)$的曲率和挠率，并写出Frenet—Serret公式

解：先求曲率k：

$$d\vec{r}=(-a\cos\theta,a\cos\theta,b)d\theta$$

$$(ds)^2=(d\vec{r})^2=(a^2+b^2)(d\theta)^2$$

令弧长的增长方向和参数增加的方向相同，则：

$$ds=\sqrt{a^2+b^2}\,d\theta$$

4、曲率与挠率的计算

所以，单位切矢为：

$$\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-a\sin\theta,a\cos\theta,b]$$

对其微分，可得：

$$d\vec{t}=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}[\cos\theta,\sin\theta,0]d\theta$$

$$\dot{\vec{t}}=\frac{d\vec{t}}{ds}=\frac{-a}{a^2+b^2}[\cos\theta,\sin\theta,0]$$

4、曲率与挠率的计算

由 $\dot{\vec{t}}=k\vec{n}$，得：

$$k=\left|\dot{\vec{t}}\right|=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\vec{n}=[-\cos\theta,-\sin\theta,0]$$

下面计算挠率：

$$\vec{b}=\vec{t}\times\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin\theta & a\cos\theta & b\\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

4、曲率与挠率的计算

$$\vec{b}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[b\sin\theta,-b\cos\theta,a]$$

$$d\vec{b}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}[\cos\theta,\sin\theta,0]$$

所以：$\dot{\vec{b}}=\dfrac{d\vec{b}}{ds}=\dfrac{b}{a^2+b^2}[\cos\theta,\sin\theta,0]=\dfrac{b}{a^2+b^2}(-\vec{n})$

$$\because \dot{\vec{b}}=-\tau\vec{n}$$

$$\therefore \tau=\frac{b}{a^2+b^2}$$

4、曲率与挠率的计算

Frenet－Serret公式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{t}} \\ \dot{\vec{n}} \\ \dot{\vec{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a}{a^2+b^2} & 0 \\ -\dfrac{a}{a^2+b^2} & 0 & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ 0 & -\dfrac{b}{a^2+b^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$$

4、曲率与挠率的计算

其中：

$$\vec{t}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-a\sin\theta,a\cos\theta,b]$$

$$\vec{n}=[-\cos\theta,-\sin\theta,0]$$

$$\vec{b}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[b\sin\theta,-b\cos\theta,a]$$

4、曲率与挠率的计算

例：试求与椭圆$\vec{r}(\theta)=[a\cos\theta, b\sin\theta]$距离为$d$的等距线方程。

解：等距线方程为： $\vec{R}(\theta)=\vec{r}(\theta)\pm d\vec{n}(\theta)$

因为： $$\vec{t}=\left[\frac{x'(\theta)}{\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}}, \frac{y'(\theta)}{\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}}\right]$$

$$=\left[\frac{-a\sin\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}, \frac{b\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}\right]$$

4、曲率与挠率的计算

所以：

$$\vec{n}=\left[\frac{b\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}},\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}\right]$$

等距线方程为：

$$\vec{R}(\theta)=\left[a\cos\theta\pm\frac{d\bullet b\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}},b\sin\theta\pm\frac{d\bullet a\sin\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}\right]$$

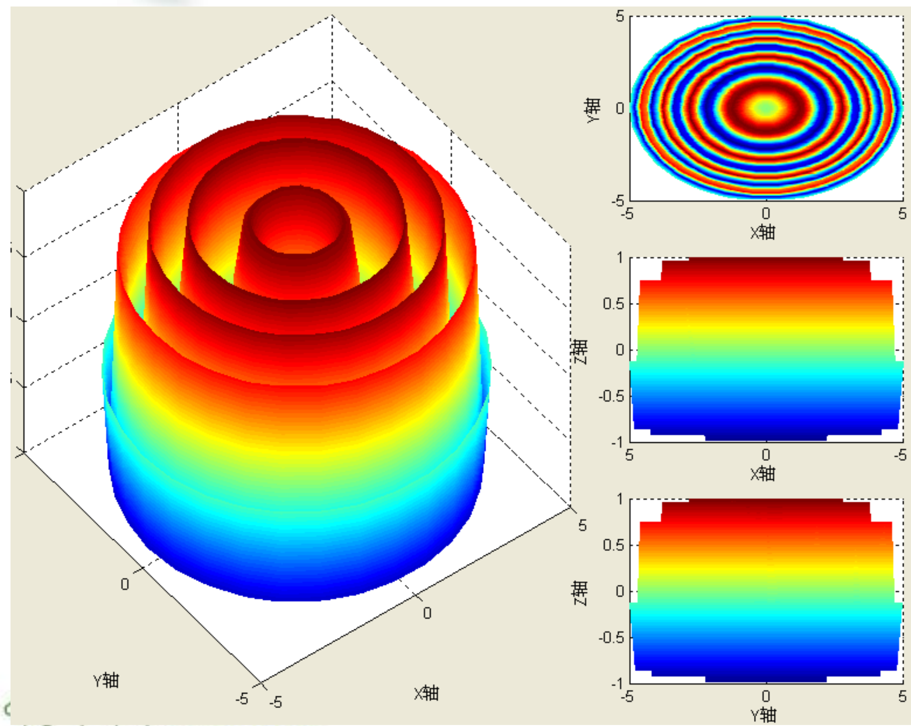
第二节 曲面论的基本知识

- 曲面的表示方法
- 参数曲面
- 直纹面与可展曲面
- 曲面第一基本公式
- 曲面第二基本公式

一、曲面的表示方法

- 1、显式方程：$z = f(x, y)$

如 $z = \sin(x^2 + y^2)$

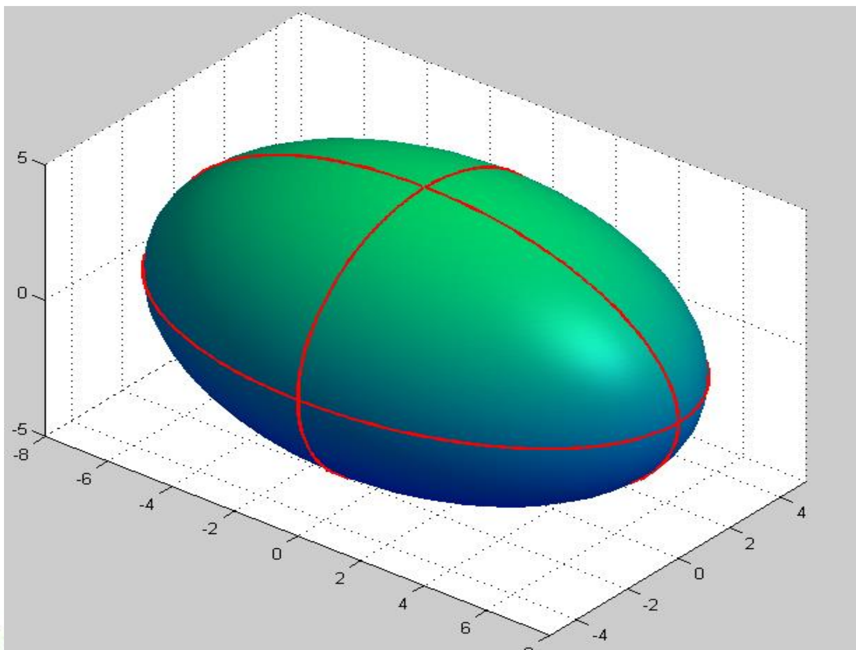


特点：与显式曲线的特点类似

一、曲面的表示方法

- 2、隐式方程： $F(x,y,z)=0$

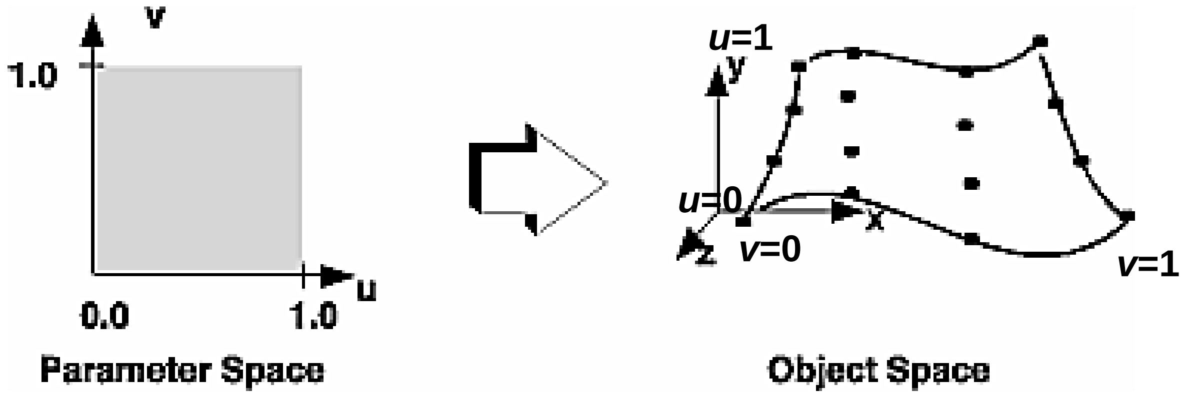
如 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{64}+\dfrac{z^2}{25}=1$



特点：与隐式曲线的特点类似

一、曲面的表示方法

- 3、参数曲面：$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \quad u_1 \le u \le u_2, v_1 \le v \le v_2 \\ z = z(u,v) \end{cases}$



特点：与参数曲线的特点类似

CAGD中的曲面都是参数曲面

二、参数曲面

- **1、曲面的参数方程与矢量方程**

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \quad u_1 \le u \le u_2, v_1 \le v \le v_2 \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

参数方程

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$$

$$u_1 \le u \le u_2, v_1 \le v \le v_2$$

矢量方程

二、参数曲面

- **2、常见曲面的参数方程与矢量方程:**

a)平面：设 $\vec{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ **为平面上的一点，矢量** $\vec{a}=[a_x,a_y,a_z]$和$\vec{b}=[b_x,b_y,b_z]$

为平面上的两个矢量，则它们确定的平面参数方程为：

$$\begin{cases} x=x_0+ua_x+vb_x \\ y=y_0+ua_y+vb_y \quad u,v\in(-\infty,+\infty) \\ z=z_0+ua_z+vb_z \end{cases}$$

矢量方程为： $\vec{r}(u,v)=\vec{P}_0+u\vec{a}+v\vec{b} \quad u,v\in(-\infty,+\infty)$

二、参数曲面

b)旋转面：设母线为XOZ平面上的参数曲线

$$\begin{cases} x = f(t) \\ z = g(t) \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2$$

该曲线绕z轴旋转一周得到的旋转面参数方程为：

$$\begin{cases} x = f(t)\cos\theta \\ y = f(t)\sin\theta \quad t_1 \le t \le t_2, 0 < \theta \le 2\pi \\ z = g(t) \end{cases}$$

矢量方程为：

$$\vec{r}(t,\theta) = [f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t)] \quad t \in [t_1, t_2], \theta \in (0, 2\pi]$$

旋转面举例

- 常见的旋转面有：

球面：$\vec{r}(\varphi,\theta)=[\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi]$

$$\varphi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi]$$

圆柱面：$\vec{r}(\theta,z)=[\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z]$

$$\theta\in[0,2\pi],z\in(-\infty,+\infty)$$

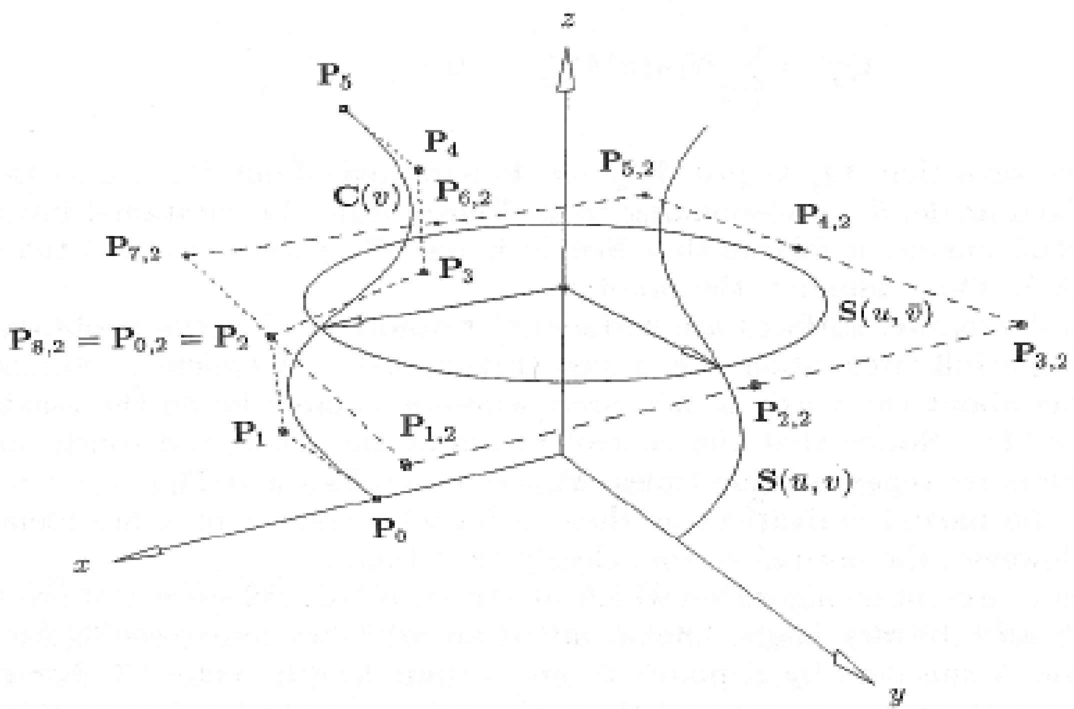
圆锥面：$\vec{r}(\rho,\theta)=[\rho\sin\alpha\cos\theta,\rho\sin\alpha\sin\theta,\rho\cos\varphi]$

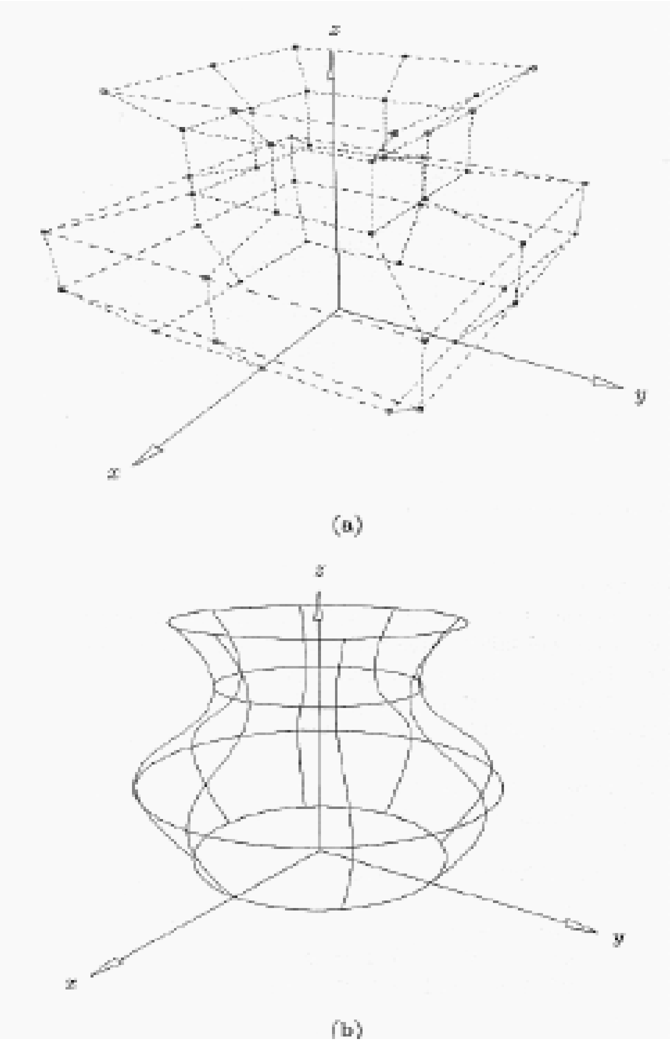
$$\theta\in[0,2\pi],\rho\in(-\infty,+\infty)$$

它们分别可以看作由哪些曲线绕哪个坐标轴旋转得到的？

旋转面举例

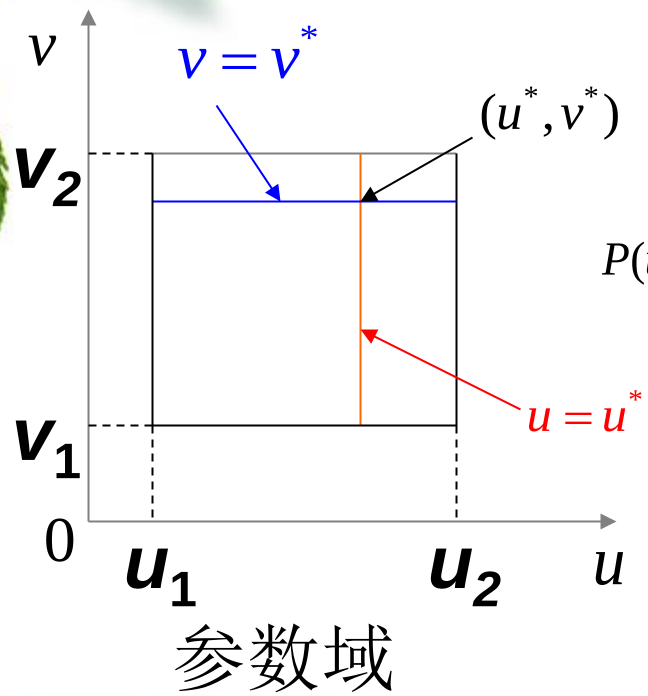
- **Rotational Surfaces**

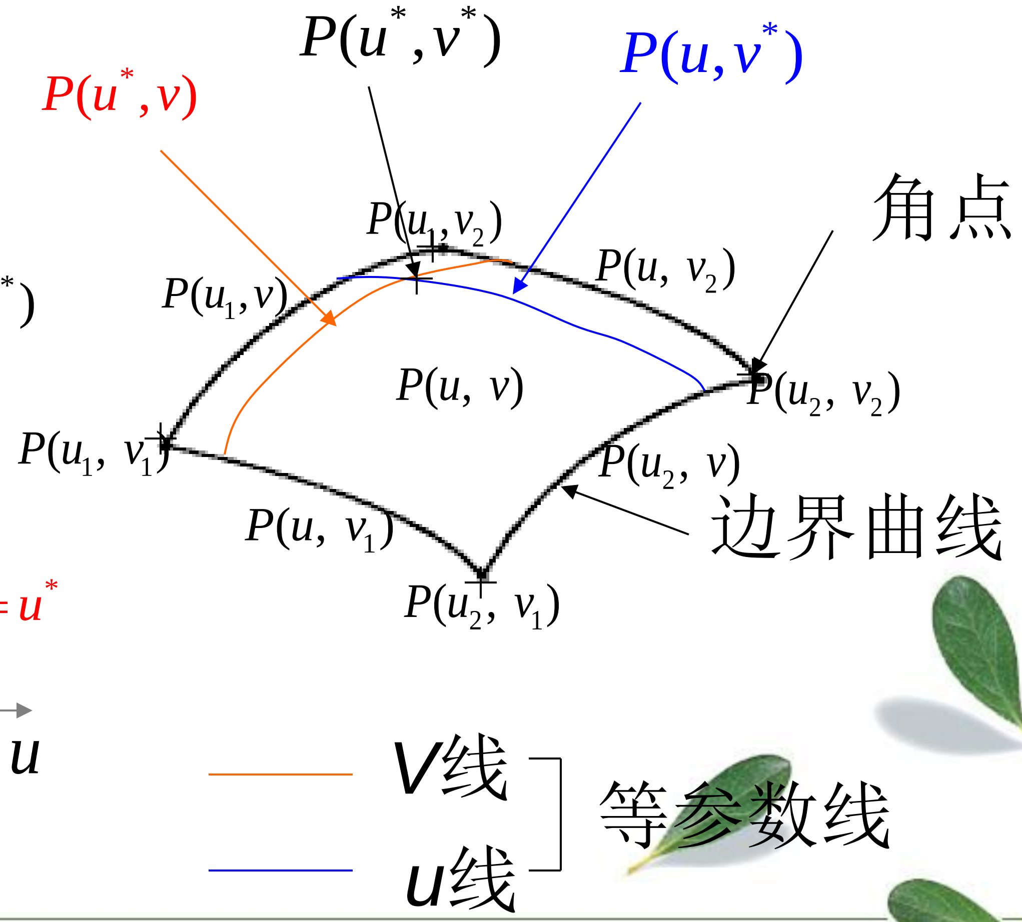




3、 参数曲面的概念

$P(u,v)=[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$ $u_1 \le u \le u_2$ $v_1 \le v \le v_2$





3、 参数曲面的概念

- 上图所示的是一个参数域 为矩形域的四边形曲面片（还有一种参数曲面的参数域是三角域），当参数在参数域内连续变化时，与其对应的空间点（x，y，z）就形成一张曲面片，正常情况下，参数域内的点与曲面片上的点构成一一对应的映射关系，这种一一对应关系不成立的点称作奇点。

4、参数曲面的法矢

正则点: 对曲面 S 上一点 $P_0(u_0,v_0)$,过 P_0 的 u-曲线:$\vec{r}=\vec{r}(u,v_0)$,其切向量为 $\vec{r}_u(u_0,v_0)$,过 P_0 的 v-曲线:$\vec{r}=\vec{r}(u_0,v)$,其切向量为 $\vec{r}_v(u_0,v_0)$,如果 $\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq\vec{0}$,则称 P_0 为正常点,或正则点。以后我们只讨论曲面的正常点。曲面上的点如果都是**正则**点,则曲面叫做正则曲面.

在球面的参数方程中,$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 是球面的不正常点。因球面上点都是一样的,所以一个点是否为正常点与参数的选取或坐标系的选取有关系. **如果 $\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\vec{0}$ 也称该点为奇点**

4、参数曲面的法矢

- 在正则点处，曲面的单位法矢定义为：

$$\vec{n}(u,v)=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\left\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right\|}$$

5、曲面上参数曲线的切矢

给出曲面 S: $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 上的曲线 C :u=u(t),v=v(t)或 $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$。

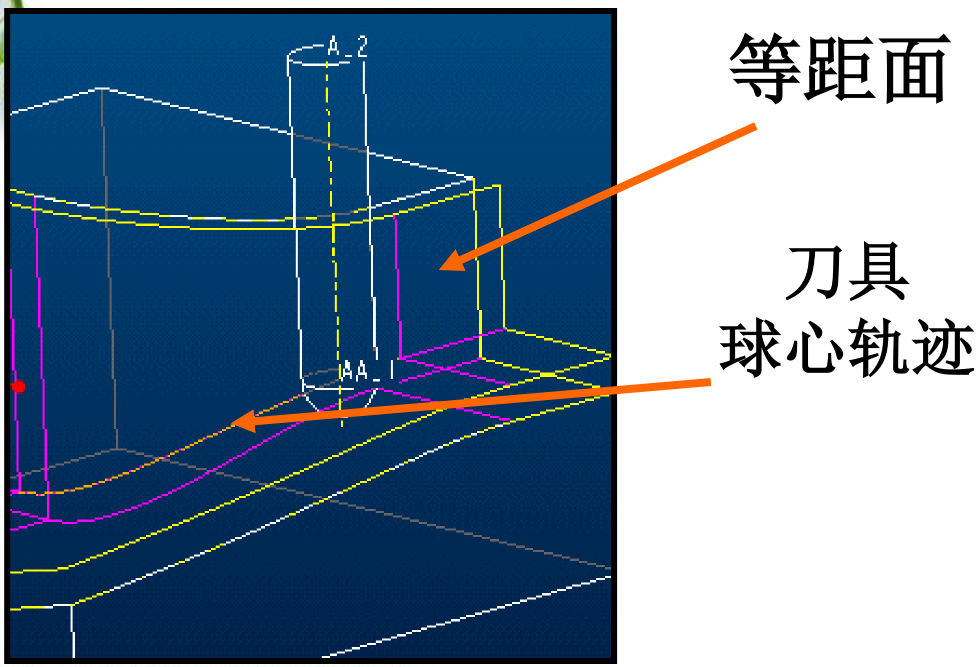
对于曲线 C 有

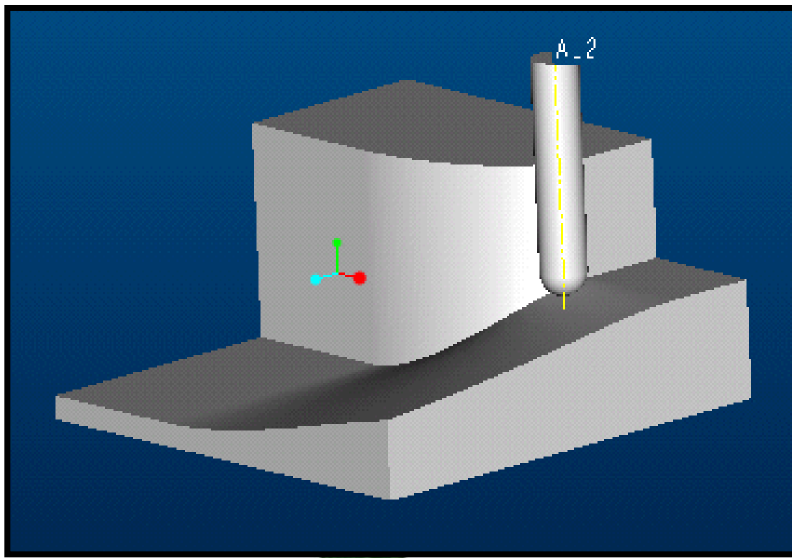
$$\vec{r}'(t)=\vec{r}_u\frac{du}{dt}+\vec{r}_v\frac{dv}{dt} \text{ 或 } d\vec{r}=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv;$$

上式表明过曲面上某一点的任何一条曲线的切矢都处在由 $\vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_v$ 张成的平面内，这个平面就是曲面在这一点的**切平面**。

6、曲面的等距面

方程：$\vec{R}(u,v)=\vec{r}(u,v)\pm d\vec{n}(u,v)$





6、曲面的等距面

$$\vec{R}(u,v)=\vec{r}(u,v)\pm d\vec{n}(u,v)$$

例如：单位球面的矢量方程为：

$$\vec{r}(\phi,\theta)=[\sin\phi\cos\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\phi]$$

下面求它的等距面方程：

$$\vec{r}_\phi(\phi,\theta)=[\cos\phi\cos\theta,\cos\phi\sin\theta,-\sin\phi]$$

$$\vec{r}_\theta(\phi,\theta)=[-\sin\phi\sin\theta,\sin\phi\cos\theta,0]$$

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}_\phi\times\vec{r}_\theta}{\left\|\vec{r}_\phi\times\vec{r}_\theta\right\|}=[\sin\phi\cos\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\phi]$$

所以它的等距面方程为：

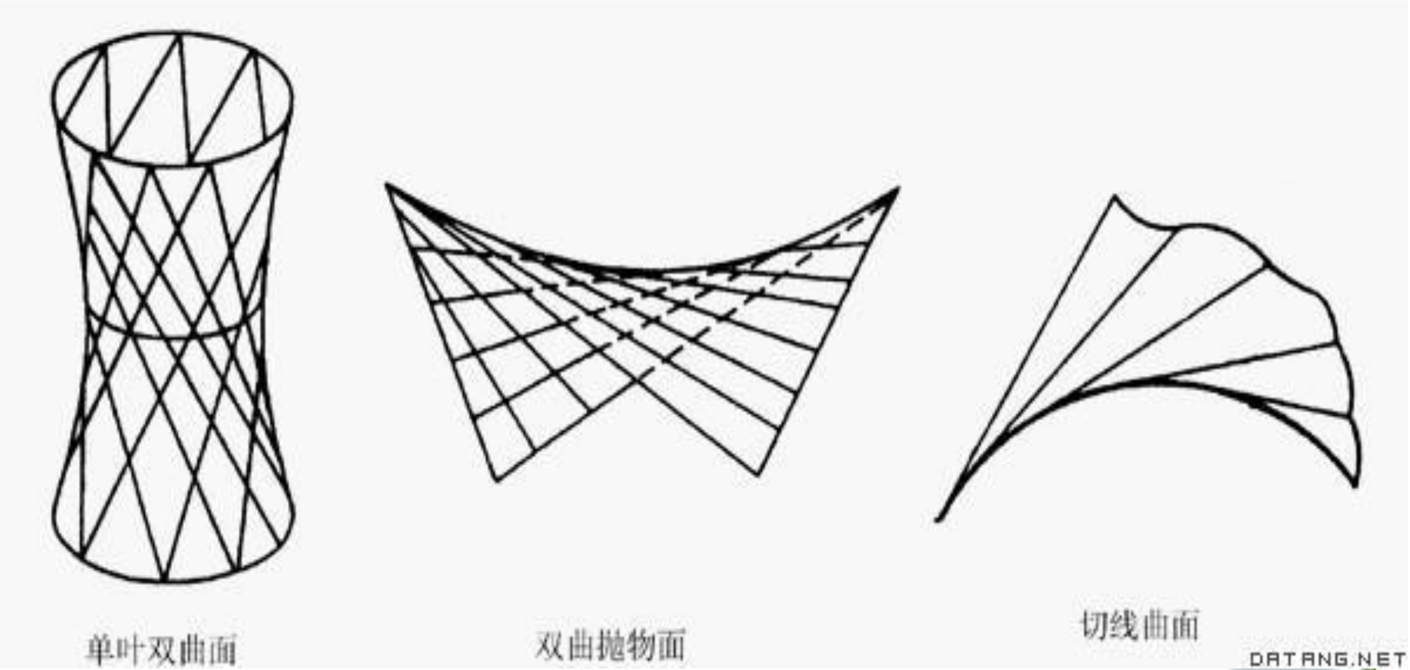
$$\vec{R}(u,v)=\vec{r}(u,v)\pm d\vec{n}(u,v)$$

$$=(1\pm d)[\sin\phi\cos\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\phi]$$

三、直纹面和可展面

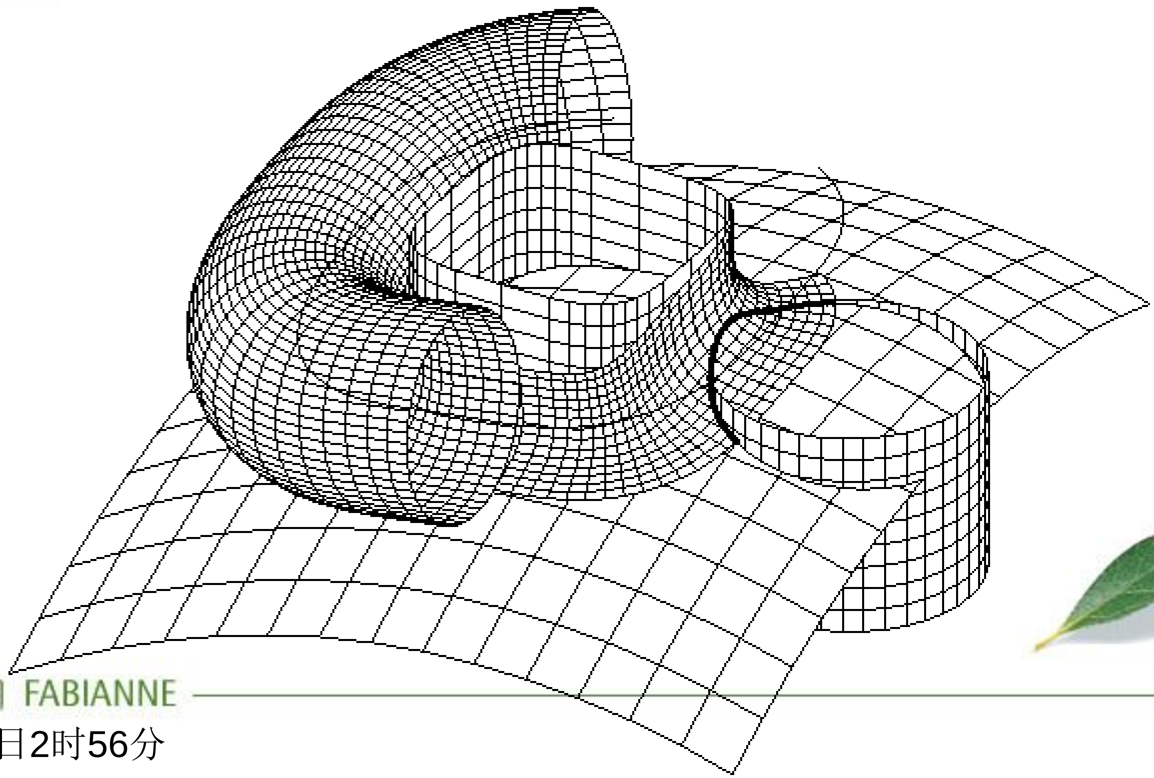
- 直纹面：一族等参数线是直线的曲面称作直纹面，它可以看作是直线段在空间连续运定扫出的轨迹。直纹面上的这族直线称作母线，和所有母线相交的曲线称作准线。
- 常见的柱面和锥面都是直纹面
- 直纹面的方程：沿准线$\vec{\rho}(u)$上的每一点给定一个非零矢量$\vec{\tau}(u)$ 则直纹面可以表示为：$\vec{r}(u,v)=\vec{\rho}(u)+v\vec{\tau}(u)$

直纹面的图形



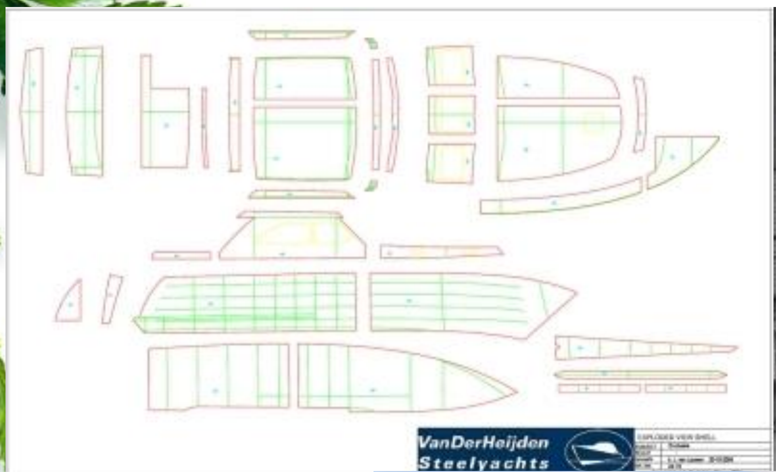
可展曲面(Developable Surface）

- 沿每一条母线只有唯一切平面的直纹面叫做可展曲面。它可以通过简单的弯曲展成平面。



FABIANNE

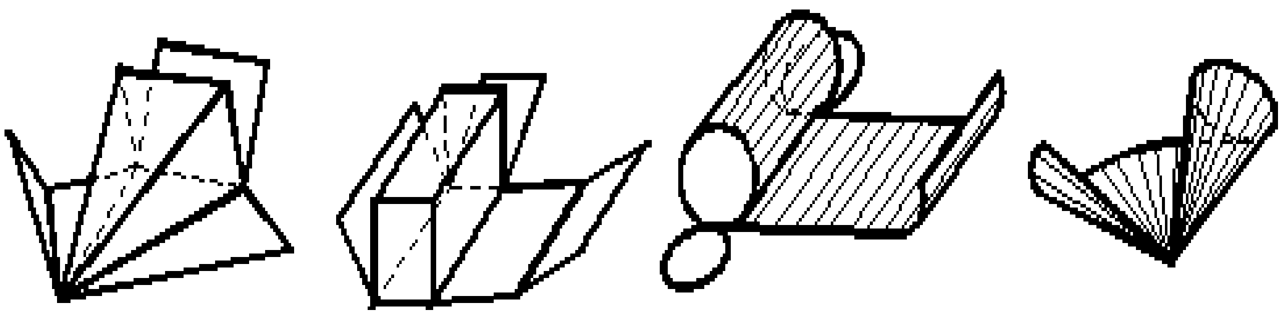
可展曲面应用实例



아름다움, 그 이상의 가치 FABIANNE

可展曲面

- 直纹面中的锥面和柱面都是可展曲面



四、曲面论第一基本公式

给出曲面S:$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$上的曲线C :u=u(t),v=v(t)或$\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$。

对于曲线C有$\vec{r}'(t)=\vec{r}_u\dfrac{du}{dt}+\vec{r}_v\dfrac{dv}{dt}$或$d\vec{r}=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv$，若以S表示曲面上曲线的弧长，则有

$$ds^2=(d\vec{r})^2=(\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv)^2=\vec{r}_u{}^2 du^2+2\vec{r}_u\vec{r}_v dudv+\vec{r}_v{}^2 dv^2。$$

令$E=\vec{r}_u\vec{r}_u, F=\vec{r}_u\vec{r}_v, G=\vec{r}_v\vec{r}_v$，则$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$，这个二次形式决定曲面上曲线C的弧长，曲线C上两点$A(t_0)$、$B(t_1)$之间的弧长是

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

四、曲面论第一基本公式

$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ 是关于 du,dv 的二次形式，称为 S 的第一基本形式，用 I 表示，即 I$=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$，它的系数 $E=\vec{r}_u\vec{r}_u, F=\vec{r}_u\vec{r}_v$,

$G=\vec{r}_v\vec{r}_v$ 叫做曲面的第一类基本量。

说明 因为 $E=\vec{r}_u\vec{r}_u>0, G=\vec{r}_v\vec{r}_v>0$ ， $EG-F^2=\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2=(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)^2>0$

因此第一基本形式是正定的。

因为弧长是曲线的几何不变量，所以第一基本量*E*、*F*、*G*与参数的选取无关。

四、曲面论第一基本公式

例 1　求曲面 z = z(x,y)的第一基本形式。

解　z=z(x,y)表示的曲面即 $\vec{r}=\vec{r}(x,y)=\{x,y,z(x,y)\}$，$\vec{r}_x=\{1,0,p\}$，$\vec{r}_y=\{0,1,q\}$，其中 $p=\frac{\partial z}{\partial x},q=\frac{\partial z}{\partial y}$，$\therefore E=1+p^2,F=pq,G=1+q^2$ 所以第一基本形式是 $\mathrm{I}=(1+p^2)dx^2+2pqdxdy+(1+q^2)dy^2$。

例 2　求球面 $\vec{r}=\{R\cos\theta\cos\varphi,R\cos\theta\sin\varphi,R\sin\theta\}$ 的第一基本形式。

解　…… $\mathrm{I}=R^2\cos^2\theta d\varphi^2+R^2d\theta^2$

例 3　求正螺面 $\vec{r}=\{u\cos v,u\sin v,av\}$ 的第一基本形式。

解　…… $\mathrm{I}=du^2+(u^2+a^2)dv^2$　。

曲面论第一基本公式的应用

1、计算曲面上曲线的弧长

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{ds}{dt}\right|dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{E(\frac{du}{dt})^2+2F(\frac{du}{dt})(\frac{dv}{dt})+G(\frac{dv}{dt})^2}\,dt$$

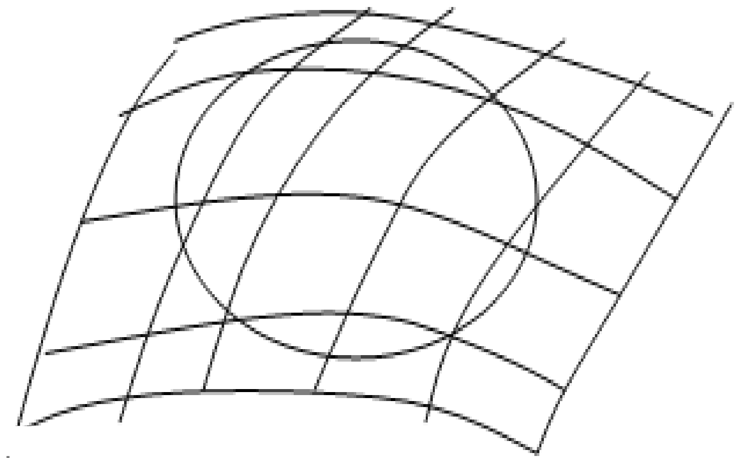
$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{E(u')^2+2F(u')(v')+G(v')^2}\,dt$$

曲面论第一基本公式的应用

2、计算参数曲面面积

设曲面S：$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$，给出曲面S上的一个区域D,我们推导出区域D面积的计算公式。

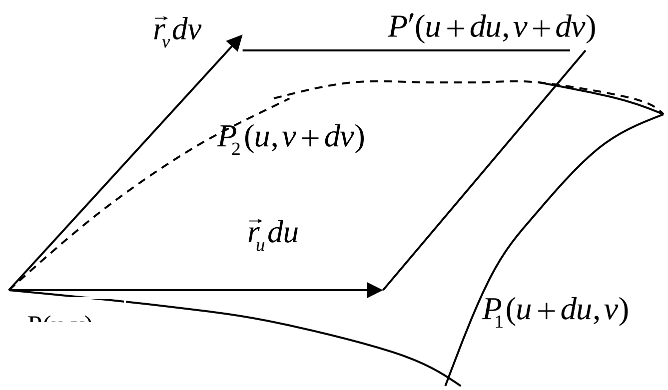
首先用坐标曲线把曲面域D分成完整的和不完整的曲边四边形。u-线，v-线越密，完整的曲边四边形就越接近于平行四边形，而不完整的曲边四边形的面积在整个区域内所占比重越小，以至可以略去



曲面论第一基本公式的应用
2、计算参数曲面面积

每一个 曲边四边形 $PP_1P'P_2$，

设 $P(u,v)$，$P_1(u+\Delta u,v),P_2(u,v+\Delta v)$，$P'(u+\Delta u,v+\Delta v)$，则



$$\overrightarrow{PP_1}=\vec{r}(u+\Delta u,v)-\vec{r}(u,v)=[\vec{r}_u(u,v)+\vec{\varepsilon}_1]\Delta u\approx\vec{r}_u du,$$

$$\overrightarrow{PP_2}=\vec{r}(u,v+\Delta v)-\vec{r}(u,v)=[\vec{r}_v(u,v)+\vec{\varepsilon}_2]\Delta v\approx\vec{r}_v dv,$$

以 $\overrightarrow{PP_1},\overrightarrow{PP_2}$ 为邻边的平行四边形的面积近似为

$\left|\overrightarrow{PP_1}\times\overrightarrow{PP_2}\right|\approx|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|dudv=\sqrt{EG-F^2}dudv$，所以， 区域 D 的面积元素

$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}dudv$，区域 D 的面积 $S=\iint\limits_{\tilde{D}}d\sigma=\iint\limits_{\tilde{D}}\sqrt{EG-F^2}dudv$ ，其中

$\tilde{D}$ 为曲面上区域 D 对应(u,v)平面上的区域。

曲面的内蕴性质

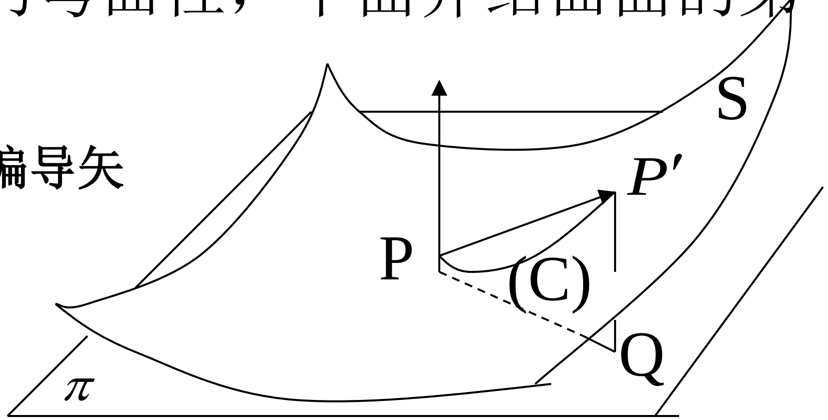
- **定义** 仅由第一基本形式出发所能建立的几何性质称为曲面的内在性质或内蕴性质。
- 曲线的弧长，曲面上两方向的夹角，曲面域的面积都是曲面的内在性质。
- 曲面的第一基本形式。第一基本形式在等距变换下不变，第一基本形式确定的曲面的性质或量在等距变换下不变的。如弧长、面积、曲线的交角。就是说第一基本形式刻画了曲面本身的内在性质，这些性质与曲面在空间的位置，与曲面的弯曲没有关系。

五、曲面的第二基本公式

- 为了研究空间曲面的弯曲性，下面介绍曲面的第二基本形式。

设 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 有二阶连续偏导矢 $\vec{r}_{uu},\vec{r}_{uv},\vec{r}_{vv}$ 下面计算

曲面S上的点到其邻近点P的切平面的有向距离



设 P' 在过 P 点的曲线(C)：u=u(s),v=v(s)或 $\vec{r}=\vec{r}(u(s),v(s))$ 上，s 为(C)的自然参数。P 与 P' 的自然参数分别为 $s, s+\Delta s$，则 $\overrightarrow{PP'}=\vec{r}(s+\Delta s)-\vec{r}(s)=\dot{\vec{r}}\Delta s+\frac{1}{2}(\ddot{\vec{r}}+\vec{\varepsilon})(\Delta s)^2$,其中 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\vec{\varepsilon}=0$。设 $\vec{n}$ 为曲面 S 在P点的单位法向量，由 P' 作平面 π 的垂线，垂足为Q.

。

五、曲面的第二基本公式

如果$\overrightarrow{QP'}=\delta\vec{n}$，则$\delta$称为为从平面$\pi$到曲面S的有向距离（$\overrightarrow{QP'}$与$\vec{n}$同向时,$\delta>0$，$\overrightarrow{QP'}$与$\vec{n}$反向时，$\delta<0$）。因为$\overrightarrow{QP}\cdot\vec{n}=0$，所以

$$\delta=\overrightarrow{QP'}\cdot\vec{n}=(\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PP'})\cdot\vec{n}=\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{n}=[\vec{r}(s+\Delta s)-\vec{r}(s)]\cdot\vec{n}=[\dot{\vec{r}}\Delta s+\tfrac{1}{2}(\ddot{\vec{r}}+\vec{\varepsilon})\Delta s^2]\cdot\vec{n}$$

$=\frac{1}{2}(\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n}+\vec{\varepsilon}\cdot\vec{n})]\Delta s^2$。当$\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n}\neq 0$时，$\delta$的主要部分是

$\frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n}\Delta s^2=\frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n}ds^2$，

五、曲面的第二基本公式

由于$\dot{\vec{r}}=\vec{r}_u\dot{u}+\vec{r}_v\dot{v}$, $\therefore\ddot{\vec{r}}=\vec{r}_{uu}\dot{u}^2+2\vec{r}_{uv}\dot{u}\dot{v}+\vec{r}_{vv}\dot{v}^2$，又因为$\vec{r}_u\cdot\vec{n}=0,\vec{r}_v\cdot\vec{n}=0$，

故$\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n}ds^2=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}du^2+2\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}dudv+\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}dv^2$

引进记号：$L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n},M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n},N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}$ 则

定义 称$\mathrm{II}=\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n}ds^2=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2$为曲面的第二基本形式，它的系数L、M、N 叫做曲面的第二类基本量。

五、曲面的第二基本公式

说明（1）由定义曲面的第二基本形式近似的等于曲面与切平面的有向距离的两倍，因而它刻画了曲面离开切平面的程度。即刻画了曲面在空间中的弯曲性。

（2）第二基本形式不一定是正定的。即II可正可负，曲面向正侧弯曲时为正，曲面向反侧弯曲时为负。所以第二基本形式的符号刻画了曲面的弯曲（相对于$\vec{n}$）的方向。

（3）因为$d\vec{r}=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv, d^2\vec{r}=d(d\vec{r})=\vec{r}_{uu}du^2+\vec{r}_{uv}dudv+\vec{r}_{vv}dv^2$

$+\vec{r}_u d^2u+\vec{r}_v d^2v$，$\vec{n}\cdot d^2\vec{r}=\vec{n}\cdot(\vec{r}_{uu}du^2+\vec{r}_{uv}dudv+\vec{r}_{vv}dv^2)=\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n}ds^2$ 所以也有

$\mathrm{II}=\vec{n}\cdot d^2\vec{r}$。

五、曲面的第二基本公式

（4）第二基本量的计算可按下式：

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}},L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}=\frac{(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\quad M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}=\frac{(\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}=\frac{(\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},$$

曲面的第二基本公式举例

例 1 计算球面 $\vec{r}=\{R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\}$ 的第二基本形式。

解 ……$\mathrm{I}=R^2\cos^2\theta d\varphi^2+R^2d\theta^2$

$L=\vec{r}_{\varphi\varphi}\cdot\vec{n}=-R\cos^2\theta, M=0, N=\vec{r}_{\theta\theta}\cdot\vec{n}=-R$ 。$\therefore \mathrm{II}=-R\cos^2\theta d\varphi^2-Rd\theta^2$ 。

例 2 计算 z=z(x,y)的第二基本形式.

解 曲面的向量方程 $\vec{r}=\{x,y,z(x,y)\}$ …… 记 $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}, q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

$r=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, t=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, 则 $E=\vec{r}_x^{\,2}=1+p^2, F=\vec{r}_x\vec{r}_y=pq, G=\vec{r}_y^{\,2}=1+q^2$

所以第一基本形式 $\mathrm{I}=(1+p^2)dx^2+2pqdxdy+(1+q^2)dy^2$ 。

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}_x\times\vec{r}_y}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\{-p,-q,1\},\ L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

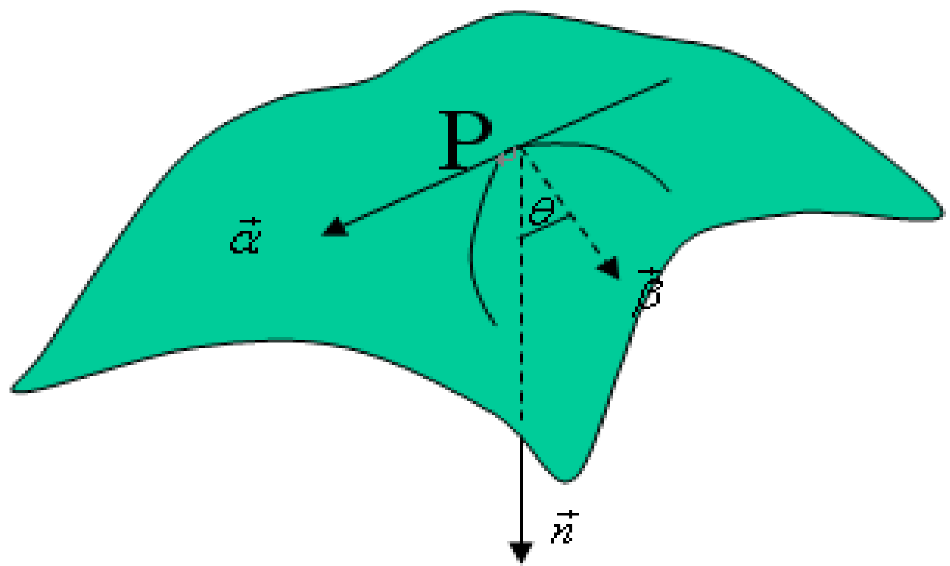
$$N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \text{所以}\ \mathrm{II}=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}dx^2+2\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}dxdy+\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}dy^2$$

法曲率

- 曲面在一点沿不同方向弯曲程度不同，或说曲面离开切平面的速度不同。这个弯曲性可由曲面在一点沿这个方向的一种曲率（即法曲率）来刻画。为介绍法曲率，我们先看曲面上的曲线在一点的曲率。

法曲率

设 C^2 类曲面 S：$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$，P(u,v)为其上一点，S 上过 P 点的一曲线（C）方程为 u=u(s),v=v(s)，或 $\vec{r}=\vec{r}(s)=\vec{r}[u(s),v(s)]$，S 为曲线(C)的自然参数，(C)在 P 点的曲率为 k，则有 $\kappa\cos\theta=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$，其中 θ 为曲线(C)在 P 点的主法向量 $\vec{\beta}$ 与曲面在 P 点的单位法向量 $\vec{n}$ 的夹角。



证 设 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 为曲面上曲线 (C)：$\vec{r}=\vec{r}(s)$ 在 P 点的单位切向量与主法向量，则

$$\dot{\vec{r}}=\vec{\alpha},\ddot{\vec{r}}=\dot{\vec{\alpha}}=\kappa\vec{\beta},\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n}=\kappa\vec{\beta}\cdot\vec{n}=\kappa\cos\theta$$ 。

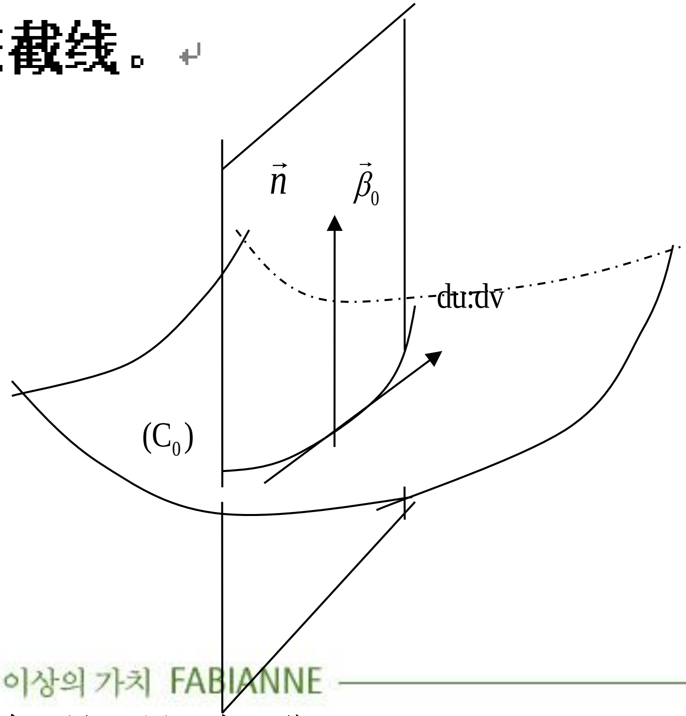
法曲率

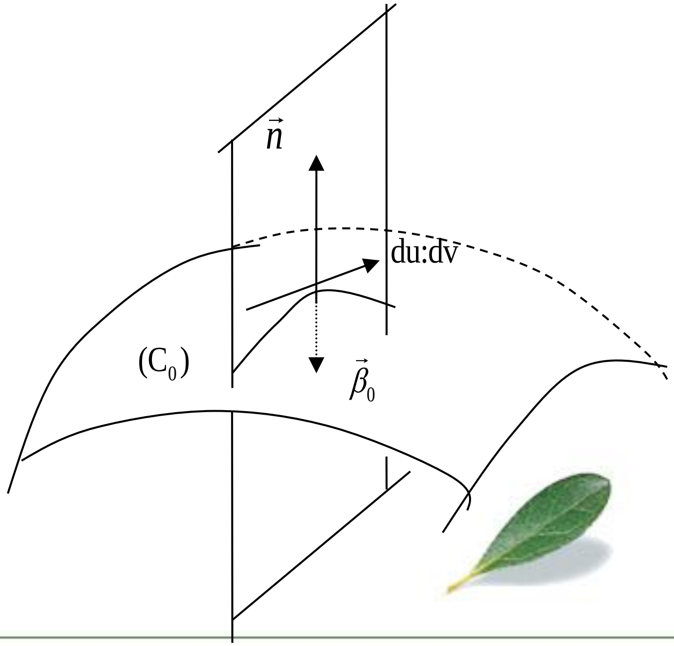
另一方面$\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n}=\dfrac{\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n}ds^2}{ds^2}=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$，所以 $\kappa\cos\theta=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\dfrac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$。

- **说明：对于曲面上已给定点和曲面曲线在该点的切方向，上式右端都有确定的值。因此若在曲面上一个给定点给出相切的两条曲面曲线，且它们有相同的主法向量，则它们的主法向量与曲面在这点的法向量所成的角度也相同，所以据上式，它们的曲率k也相同。特别的，曲线(C)在P点的密切平面与曲面的交线就与(C)在P点有相同的切线和主法线,所以曲率相同。因此对于曲面曲线曲率的研究可以转化为这曲面上一条平面截线的曲率的讨论。**

法曲率

给出曲面S上一点P和P点处的一个方向(d)=du:dv,设$\vec{n}$为曲面在P点的单位法向量，则由P和(d)、$\vec{n}$确定的平面称为曲面在P点的沿方向(d)的**法截面** ，这法截面与曲面的交线称为曲面在P点沿方向(d)的**法截线**。





法曲率

设曲面在P点由方向(d)所确定的法截线为(C_0)，(C_0)在P点的曲率为κ_0，由于(C_0)的主法向量$\vec{\beta}_0=\pm\vec{n},\theta=0$或$\pi$，所以$\kappa_0$（>0）为

$\kappa_0=\pm\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$。当$\vec{n}$与$\vec{\beta}_0$同向，即法截线向$\vec{n}$的正向弯曲时，取"+"，$\vec{n}$与$\vec{\beta}_0$反向，即法截线向$\vec{n}$的反向弯曲时，取"—"。

法曲率

定义 曲面在给定点沿一方向du:dv的法曲率记为κ_n定义为

$$\kappa_n=\begin{cases}\kappa_0 & \text{当法截线向}\vec{n}\text{的正侧弯曲}\\ -\kappa_0 & \text{当法截线向}\vec{n}\text{的反侧弯曲}\end{cases}$$

法曲率

注：1. 由定义及$\kappa_0=\pm\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$，得$\kappa_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$；

2. κ_n 的绝对值是法截线的曲率κ_0。κ_n 不仅刻画了曲面在 P 点沿方向 du: dv 的弯曲程度，还说明了弯曲的方向：曲面向正侧弯曲时 $\kappa_n>0$；曲面向负侧弯曲时 $\kappa_n<0$.

3. 由前面例题知，半径为 R 的球面上任一点处沿任意方向的法曲率$\kappa_n=\frac{1}{R}$或$\kappa_n=-\frac{1}{R}$；平面上每一点处沿任意方向的法曲率为$\kappa_n=0$；

法曲率

4．设曲面上过曲面上一点 P 的一曲线(C)和过 P 与(C)相切的法截线为(C_0)，(C)与(C_0)相切的方向是 du: dv，(C)在 P 点的曲率为 k，曲面在 P 点沿方向 du: dv 的法曲率为κ_n，则由$\kappa\cos\theta=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$和$\kappa_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$可得$\kappa_n=\kappa\cos\theta$。由此可知，曲面曲线的曲率都可以转化为法曲率来讨论。

5．设法截线在 P 点向$\vec{n}$的正向弯曲，则$\kappa_n>0$，这时$\kappa_n=\kappa_0$。则法截线(C_0)的曲率半径$R_n=\frac{1}{\kappa_0}$。在 P 点曲线(C)的曲率半径$R=\frac{1}{\kappa}$。则由$\kappa_n=\kappa\cos\theta$知$R=R_n\cos\theta$。

主曲率和主方向

- 曲面在某一点处沿不同方向可能有不同的法曲率k_n，下面用 $\lambda=\frac{dv}{du}$ 表示密切平面的方向，求在何方向上法曲率取得极值。

将 $\lambda=\frac{dv}{du}$ 代入 $k_n=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$ 得：

$$k_n(\lambda)=\frac{L+2M\lambda+N\lambda^2}{E+2F\lambda+G\lambda^2}$$

当 $L:M:N=E:F:G$ 时 k_n 与 λ 无关，曲面上具有这种性质的点称作脐点

对于曲面上的非脐点，为求法曲率的极值，对

$k_n(\lambda)=\frac{L+2M\lambda+N\lambda^2}{E+2F\lambda+G\lambda^2}$ 求导，并令 $\frac{dk_n(\lambda)}{d\lambda}=0$ 得：

主曲率和主方向

λ 需要满足：

$$(GM-FN)\lambda^2+(GL-EN)\lambda+(FL-EM)=0$$

上式的两个根 λ_1和λ_2 表示的两个方向称为主方向，曲面这一点沿主方向取得法曲率的极值 k_1和k_2，这两个法曲率的极值称为主曲率。

可以证明：主曲率是方程

$$\begin{vmatrix} L-\kappa_n E & M-\kappa_n F \\ M-\kappa_n F & N-\kappa_n G \end{vmatrix}=0$$ 即：

$$(EG-F^2)\kappa_n^2-(LG-2MF+NE)\kappa_n+(LN-M^2)=0$$

两个根

主曲率和主方向

解上述方程可得主曲率的两个值为：

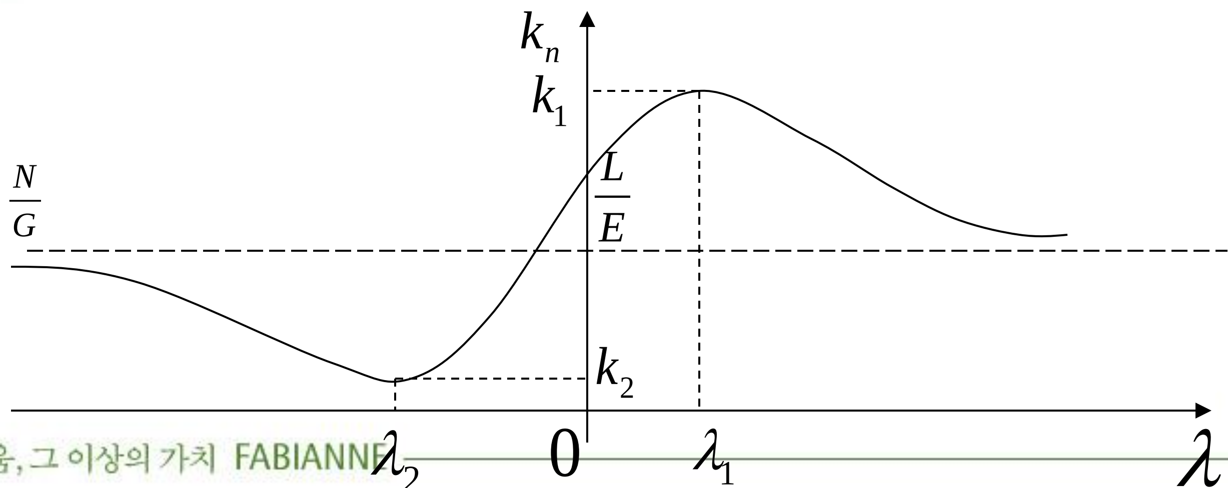
$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

其中：

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} \qquad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

k_n与λ 关系如下图所示：



高斯曲率和平均曲率

- 高斯曲率：$K = k_1 k_2 = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$
- 平均曲率：$H = \dfrac{k_1 + k_2}{2} = \dfrac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}$

当曲面法矢量的方向取反时，k_1和k_2同时变号，

而高斯曲率*K*不变号，所以用*K的*正负判断曲面上点的性质。$K>0$称为椭圆点， $K<0$称为双曲点，$K>0$称为抛物点。

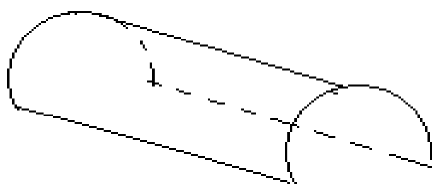
应用：根据高斯曲率和平均曲率划分曲面类型

平面 H=0, K=0

峰 H<0, K>0

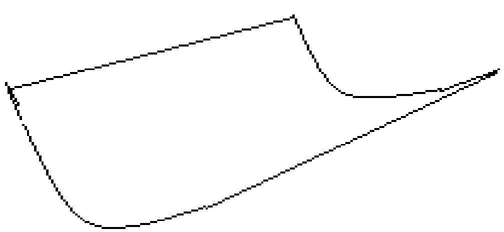
阱 H>0, K>0

极小曲面 H＝0, K<0



脊 H<0, K=0

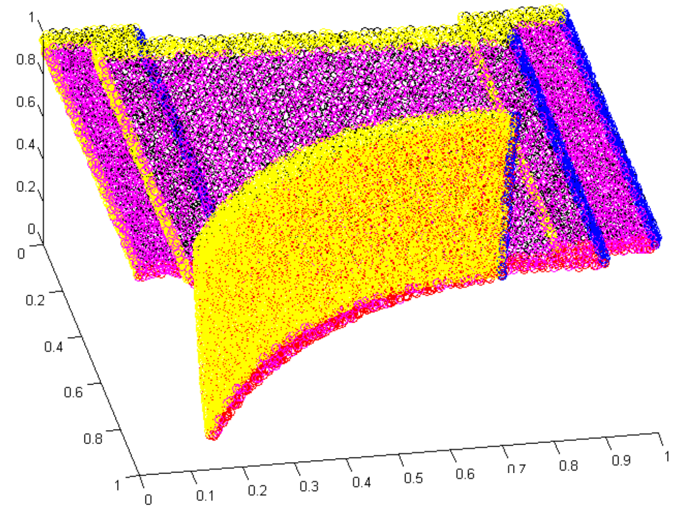
鞍形脊 H<0, K<0

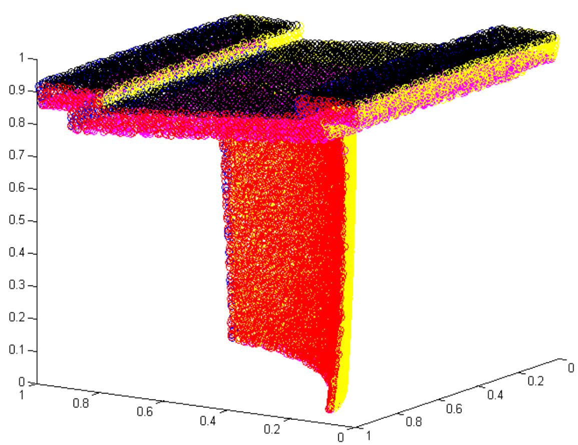


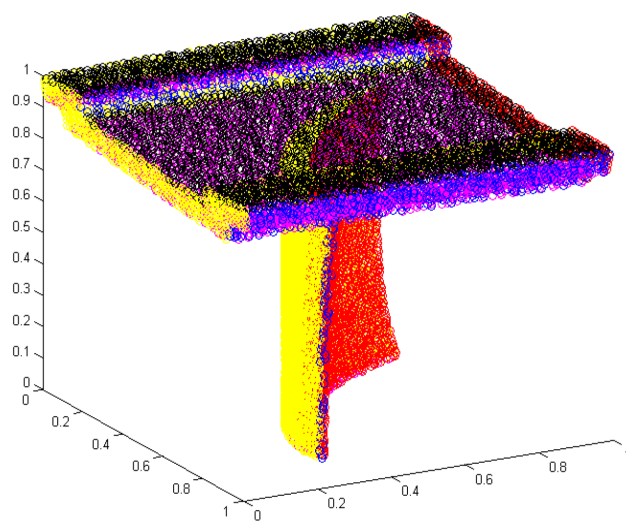
谷 H>0, K=0

鞍形谷 H>0, K<0

应用：根据高斯曲率和平均曲率对点云数据进行区域分割







本 章 结 束