西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

静 力 学

刚体的基本运动

西北工业大学
主讲 朱西平

运 动 学

第二章 刚体的基本运动

§ 2–1 刚体的平移

§ 2–2 刚体的定轴转动

§ 2–3 定轴转动刚体内各点的速度和加速度

§ 2–4 用矢积表示刚体上点的速度和加速度

§2-1 刚体的平移

- 刚体的平移
- 平移的特点

§2-1 刚体的平移

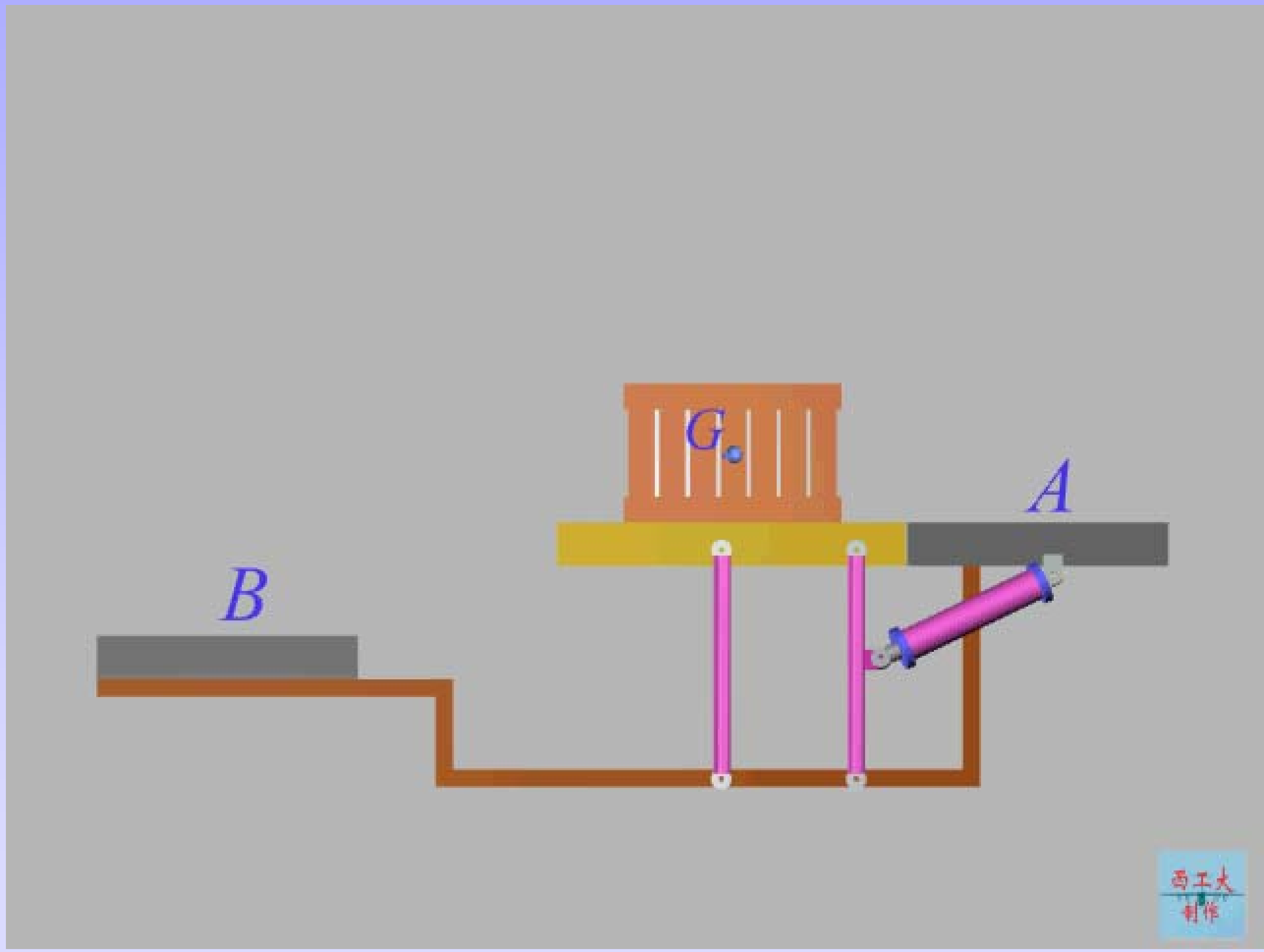
刚体的两种最简单的运动是平移和定轴转动。以后可以看到，刚体的更复杂的运动可以 看成由这两种运动的合成。因此，这两种运动也称为刚体的基本运动。

1. 刚体的平移

在运动过程中，刚体上任意一条直线的方向都保持不变。具有这种特征的刚体运动，称为刚体的平行移动，简称为平移。

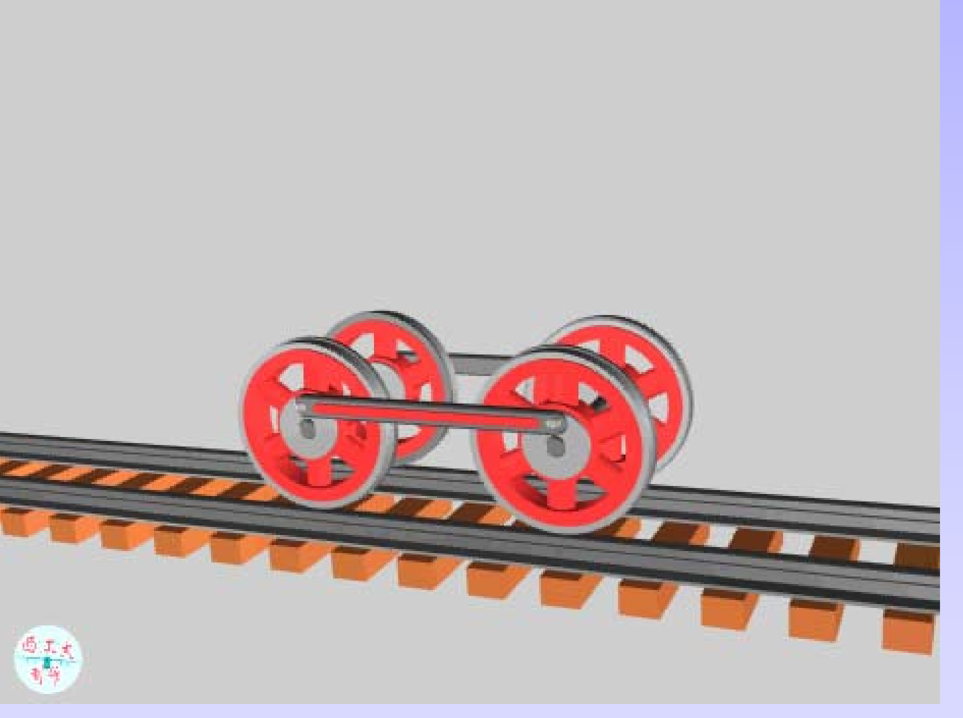
§2-1 刚体的平移

● 平移的实例



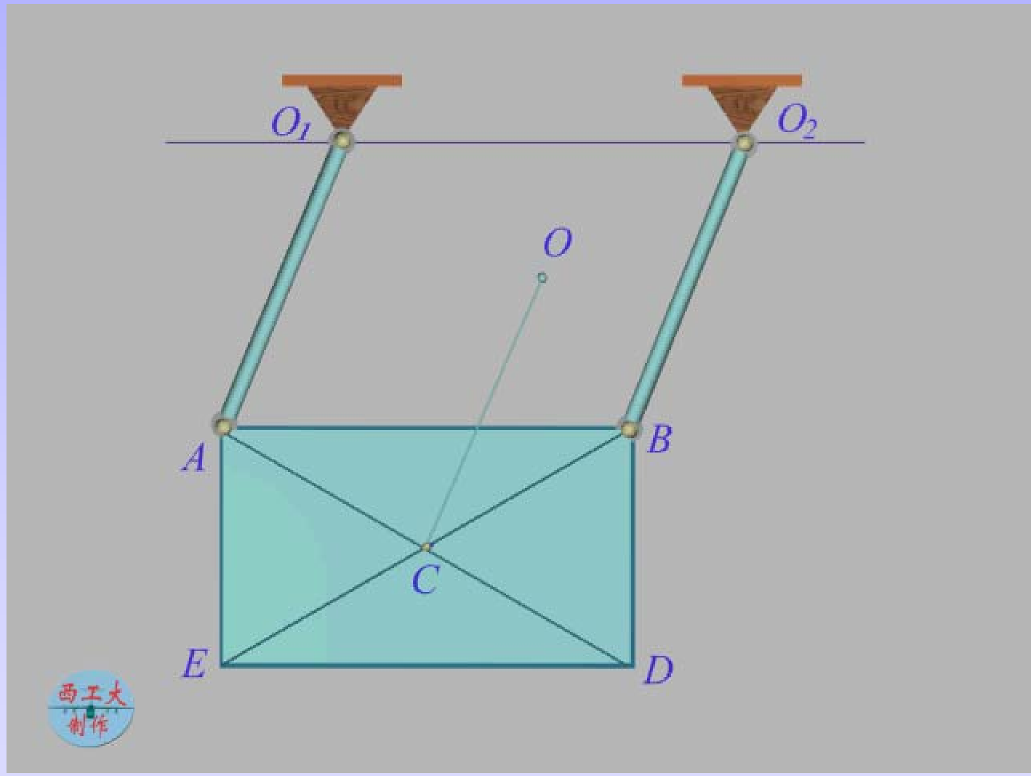
§2-1 刚体的平移

● 平移的实例

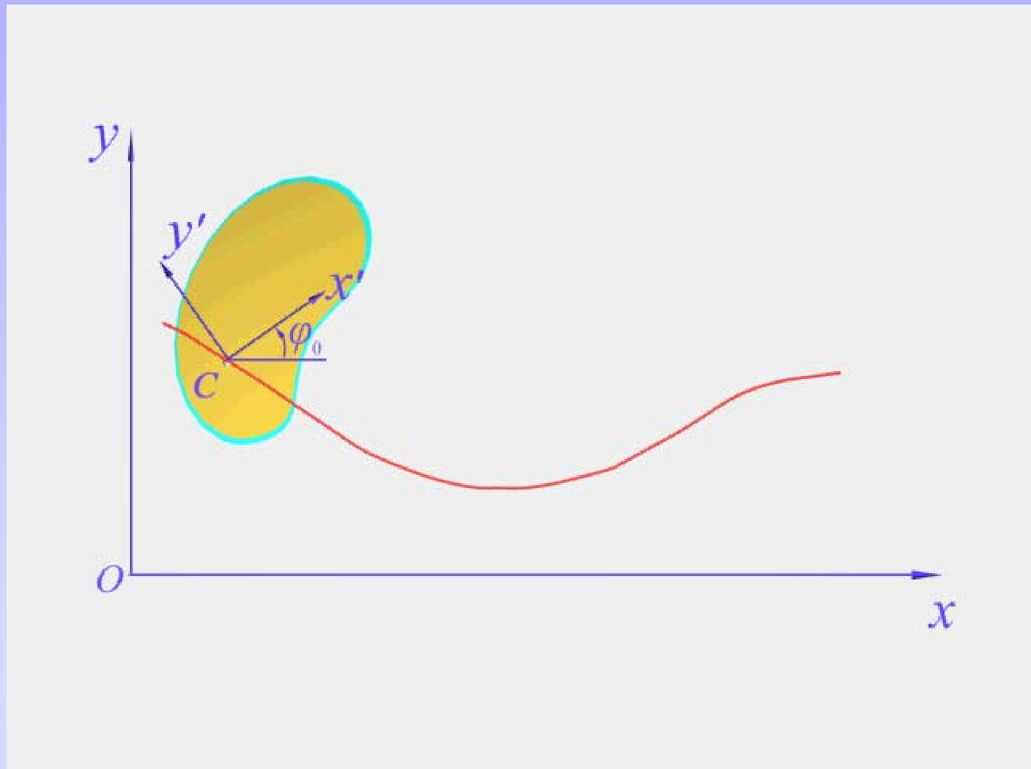


§ 2-1 刚体的平移

● 刚体的平移



● 刚体的平移



2. 平移的特点

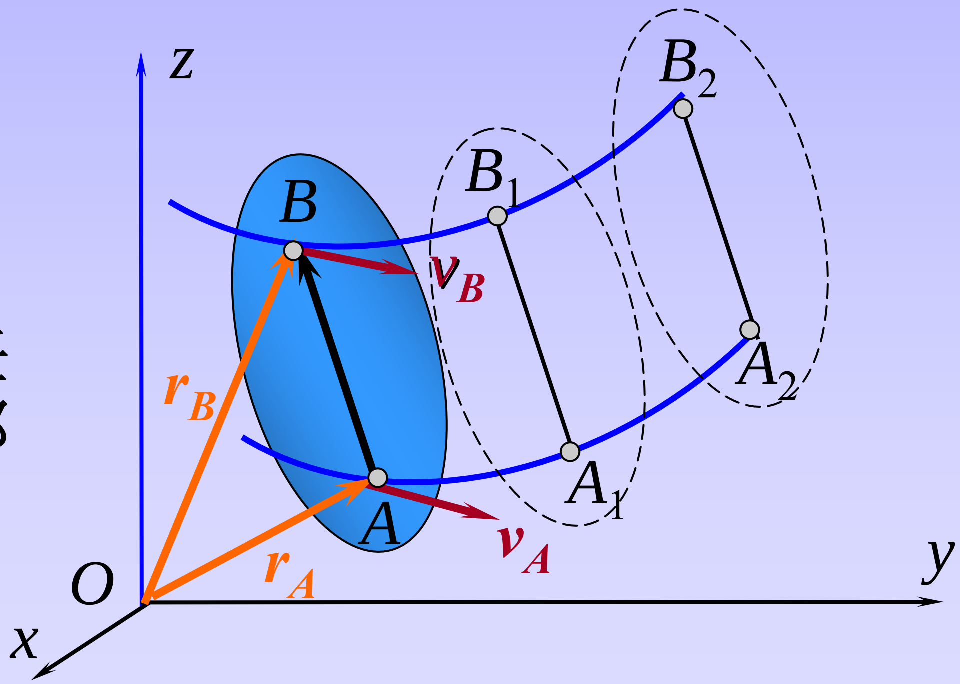
定理 当刚体作平移时，体内所有各点的轨迹形状完全相同，而且在每一瞬时，刚体各点的速度相等，各点的加速度也相等。

证明：

$$\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{AB}$$

刚体平移时，刚体内任一线段AB的长度和方向都保持不变。

因而 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{AB} = 0$$



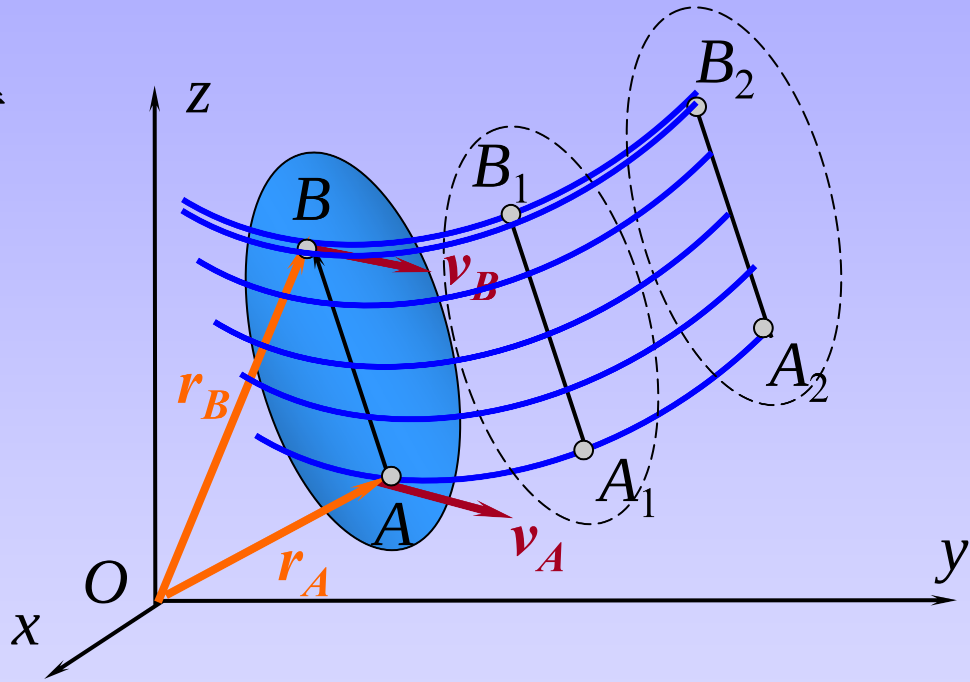
§ 2-1 刚体的平移

故 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}$ 或 $\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A$

上式再对时间t求导一次，即得

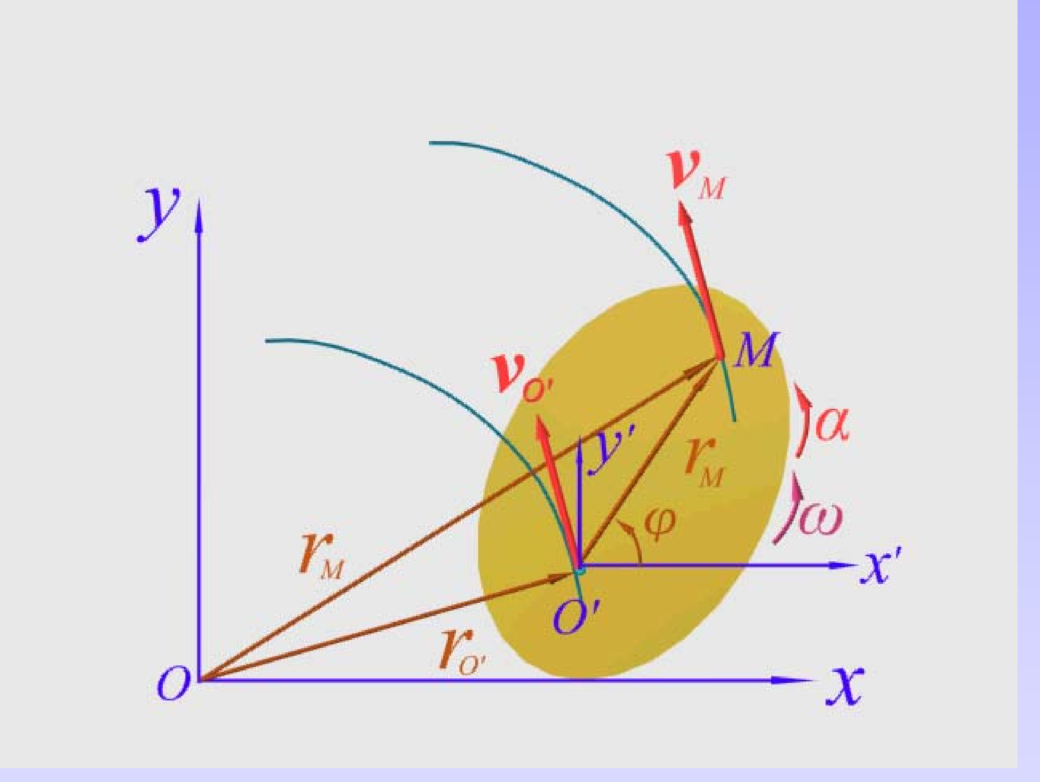
$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A$$

即，在每一瞬时，平移刚体内任意两点的速度和加速度分别相等。

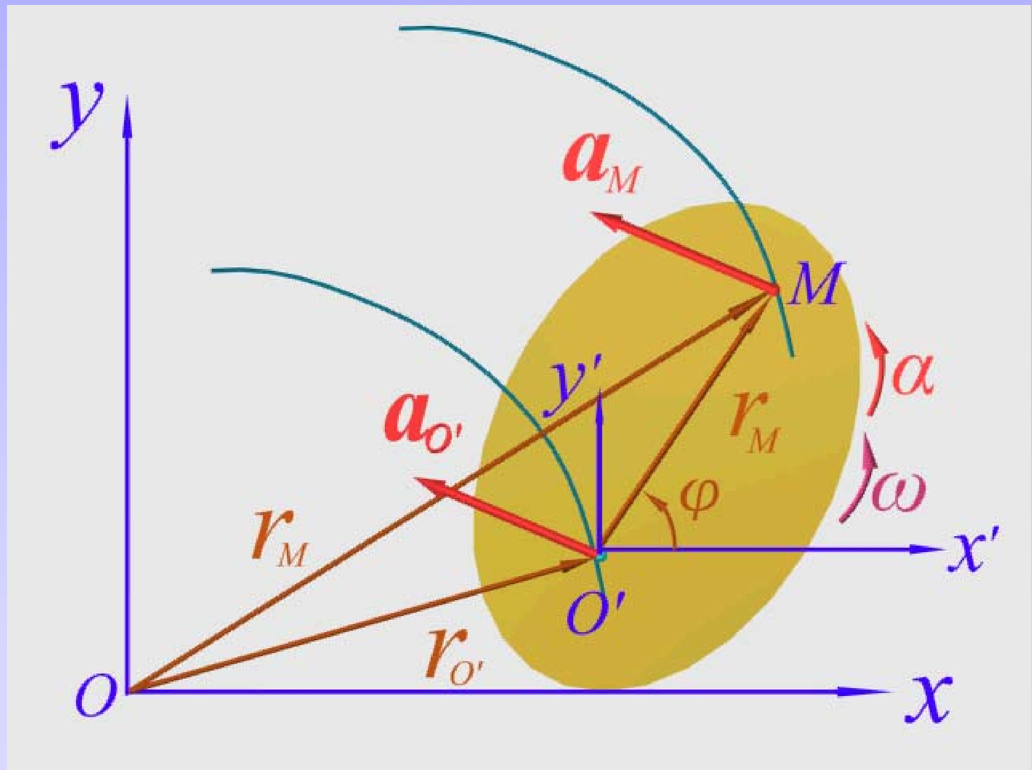


并且刚体内所有各点的轨迹形状完全相同。

● 平移刚体上各点的速度



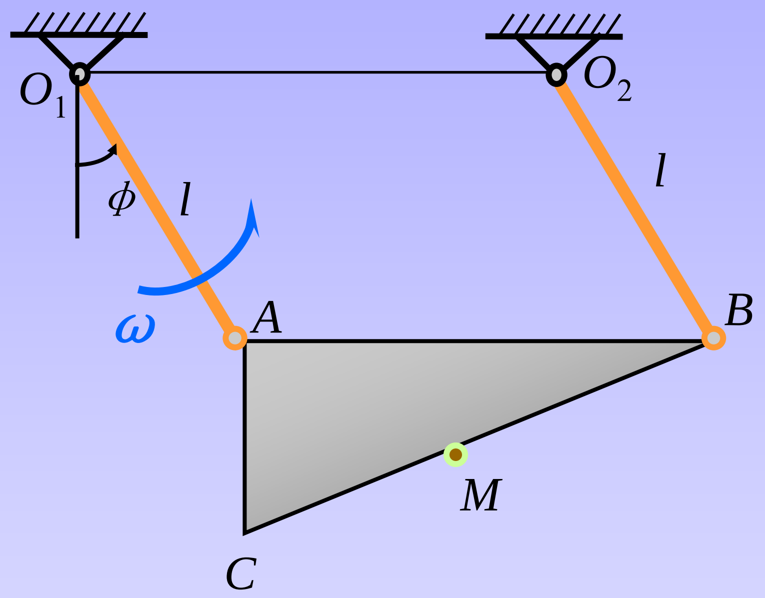
● 平移刚体上各点的加速度



综上所述，可以得出刚体平移的特点：

- 刚体上的各点具有形状相同的运动轨迹。
- 刚体上的各点在某一瞬时具有相同的速度和加速度。
- 刚体平移时的运动分析可以简化为其上任意一点(一般取为质心)的运动分析。

思考题



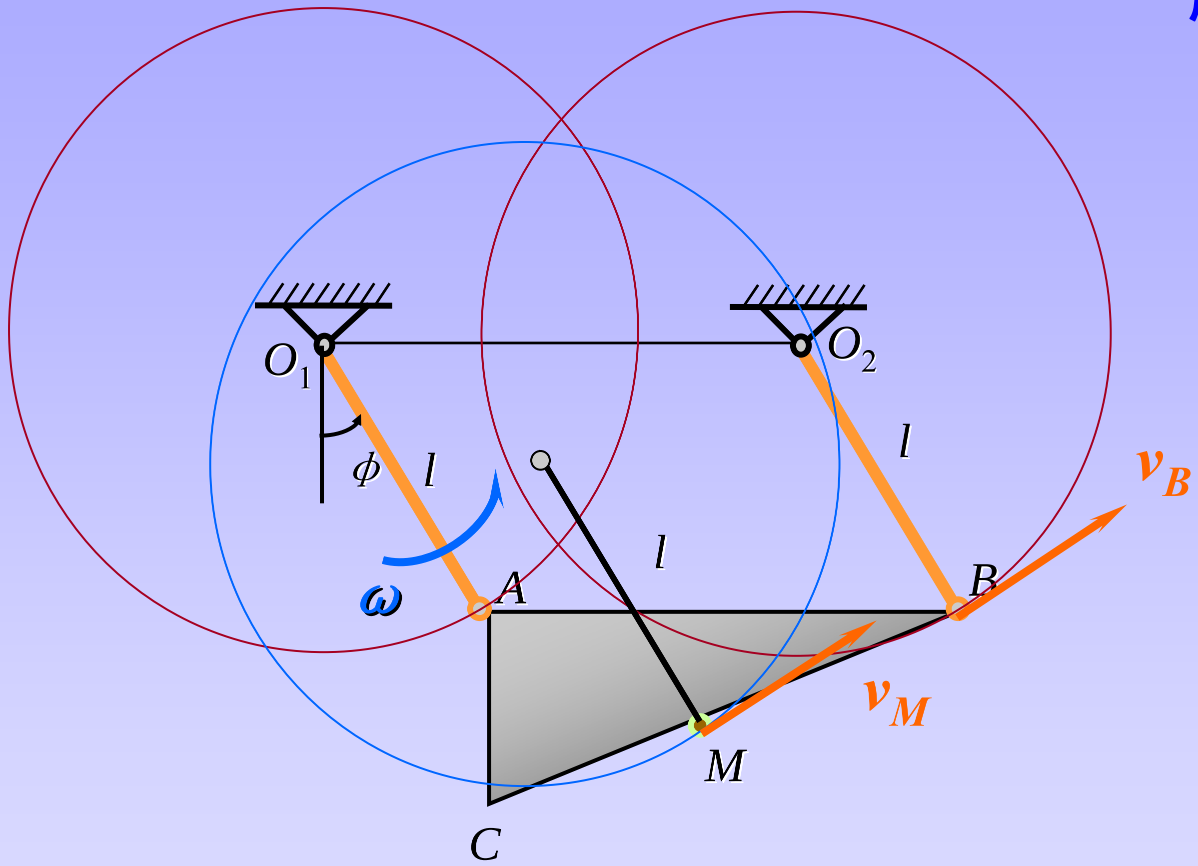
已知：$O_1A=O_2B=l$， $O_1O_2=AB$,

$AC=0.5BC$

求：

(1). 三角板ABC的角速度。

(2). 三角板BC边中点M的速度和加速度。

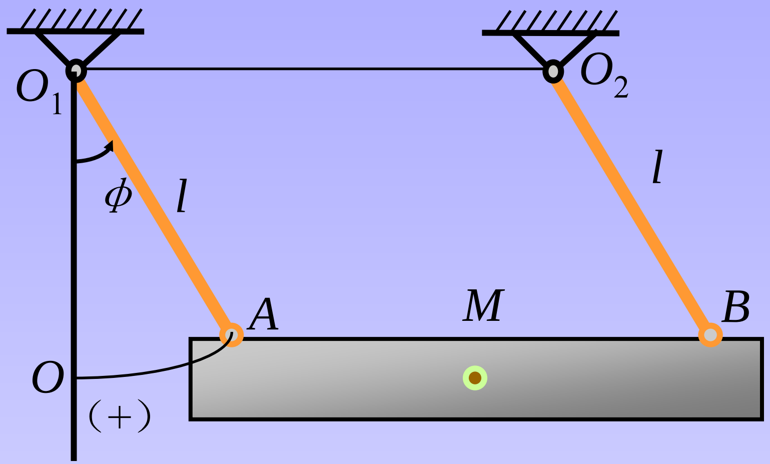


解:

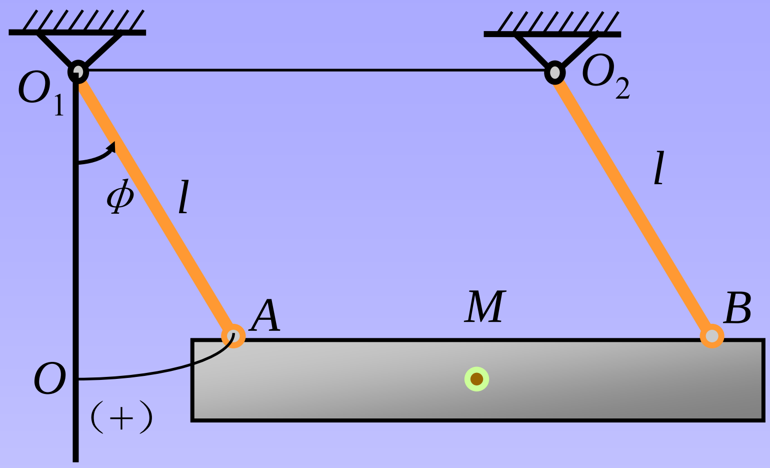
三角板ABC作平移运动，点M与点B有相同的速度和加速度。

$$v_M = v_B = r\omega$$

$$a_M = a_B = r\omega^2$$



例2-1 荡木用两条等长的钢索平行吊起，如图所示。钢索长为长l，度单位为m。当荡木摆动时钢索的摆动规律为$\varphi=\varphi_0\sin\frac{\pi}{4}t$，其中 t 为时间，单位为s；转角 ϕ_0的单位为rad。试求当t=0和t=2 s时，荡木的中点M的速度和加速度。



解:

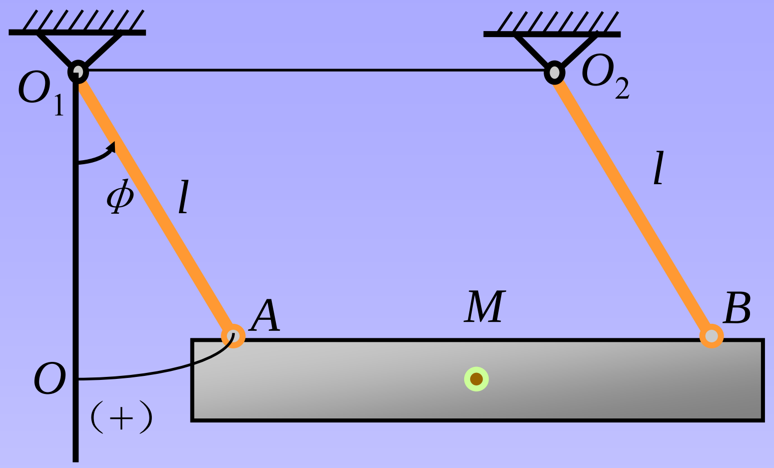
由于两条钢索O_1A和O_2B的长度相等，并且相互平行，于是荡木AB在运动中始终平行于直线O_1O_2，故荡木作平移。

为求中点M的速度和加速度，只需求出A点（或B点）的速度和加速度即可。点A在圆弧上运动，圆弧的半径为l。如以最低点O为起点，规定弧坐标s向右为正，则A点的运动方程为

$$s = \varphi_0 l \sin \frac{\pi}{4} t$$

将上式对时间求导，得A点的速度

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{4} l \varphi_0 \cos \frac{\pi}{4} t$$



再求一次导，得A点的切向加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{16} l \varphi_0 \sin\frac{\pi}{4}t$$

A点的法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{\pi^2}{16} l \varphi_0^2 \cos^2\frac{\pi}{4}t$$

代入$t=0$和$t=2$，就可求得这两瞬时A点的速度和加速度，亦即点M在这两瞬时的速度和加速度。计算结果列表如下：

t (s)	ϕ(rad)	v (m·s^{-1})	a_t (m·s^{-2})	a_n (m·s^{-2})
0	0	$\frac{\pi}{4}\varphi_0$（水平向右）	0	$\frac{\pi^2}{16}\varphi_0^2 l$（铅直向上）
2	ϕ_0	0	$-\frac{\pi}{16}\varphi_0 l$	0

§2-2　刚体的定轴转动

- 刚体的定轴转动
- 角坐标
- 角速度
- 角加速度

§2-2 刚体的定轴转动

1. 刚体的定轴转动

当刚体运动时，如其上有一条直线始终保持不动，这种运动称为刚体的定轴转动。

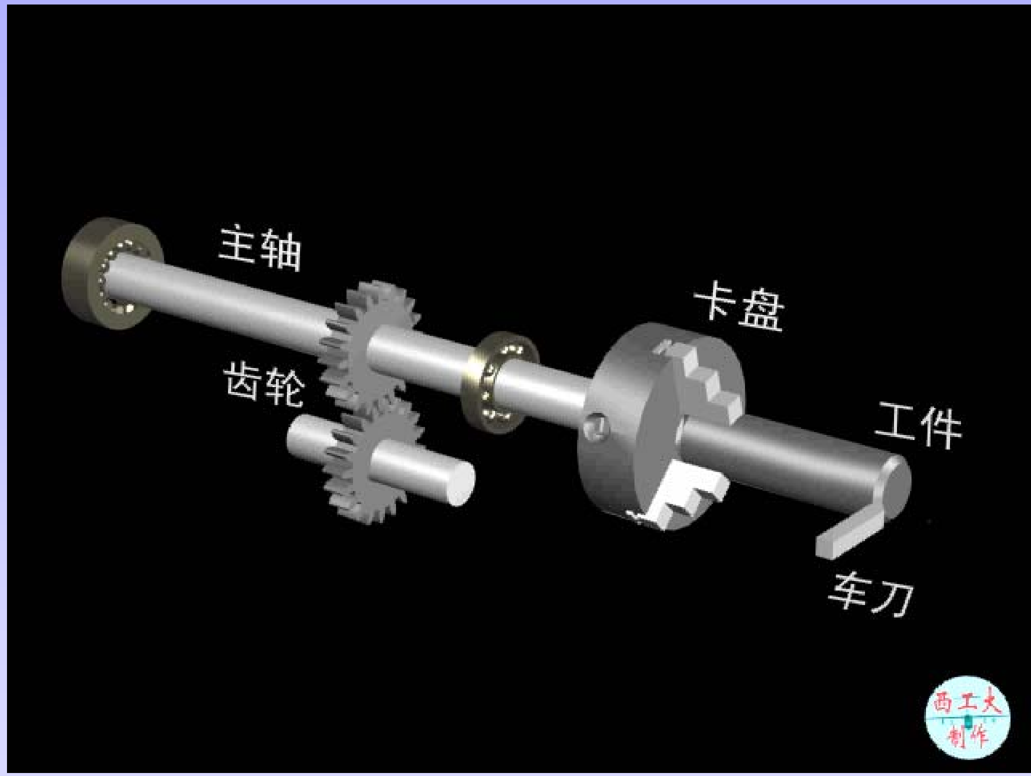
该固定不动的直线称为转轴。

刚体定轴转动的特点

当刚体作定轴转动时，转动轴以外的各点都分别在垂直于转轴的平面内作圆周运动，圆心在该平面与转轴之交点上。

§2-2 刚体的定轴转动

● 定轴转动实例

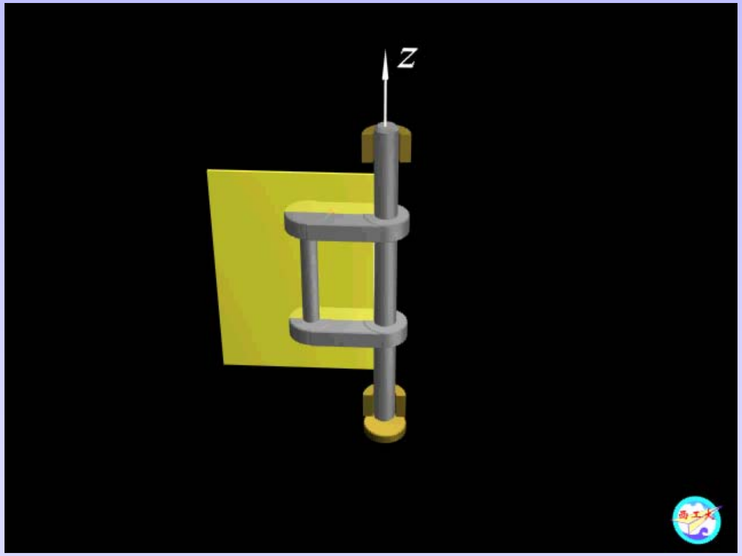


2. 角坐标

刚体的位置可由角 ϕ 完全确定。角 ϕ 也称为角坐标，当刚体转动时，角坐标 ϕ 随时间 t 而变化，因而可表示为时间 t 的单值连续函数

$$\varphi = f(t)$$

这就是刚体的定轴转动运动方程。如已知这个方程，则刚体在任一瞬时的位置就可以确定。



3. 角速度

角 φ 对时间的导数，称为刚体的角速度（代数值），以 ω 代表。故有

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = f'(t) = \dot{\varphi}$$

角速度的大小表示刚体在该瞬时转动的快慢，即单位时间内转角的变化。当转角 φ 随时间而增大时， ω 为正值，反之为负值，这样，角速度的正负号确定了刚体转动的方向。

4. 角加速度

角速度ω对时间的导数，称为角加速度（代数值），以 α 代表，故有

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = f''(t) = \ddot{\varphi}$$

它表示单位时间内角速度的变化。

α 和ω正负相同，则角速度的绝对值随时间而增大，即刚体作加速转动；反之，两者正负不同，则角速度的绝对值随时间而减小，即刚体作减速转动。但减速转动只到ω=0时为止。刚体由静止开始的转动都是加速转动。

§2-2 刚体的定轴转动

- 匀变速转动公式

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\varphi - \varphi_0)$$

其中积分常数ϕ_0和ω_0是在初瞬时刚体的转角ϕ和角速度ω之值。

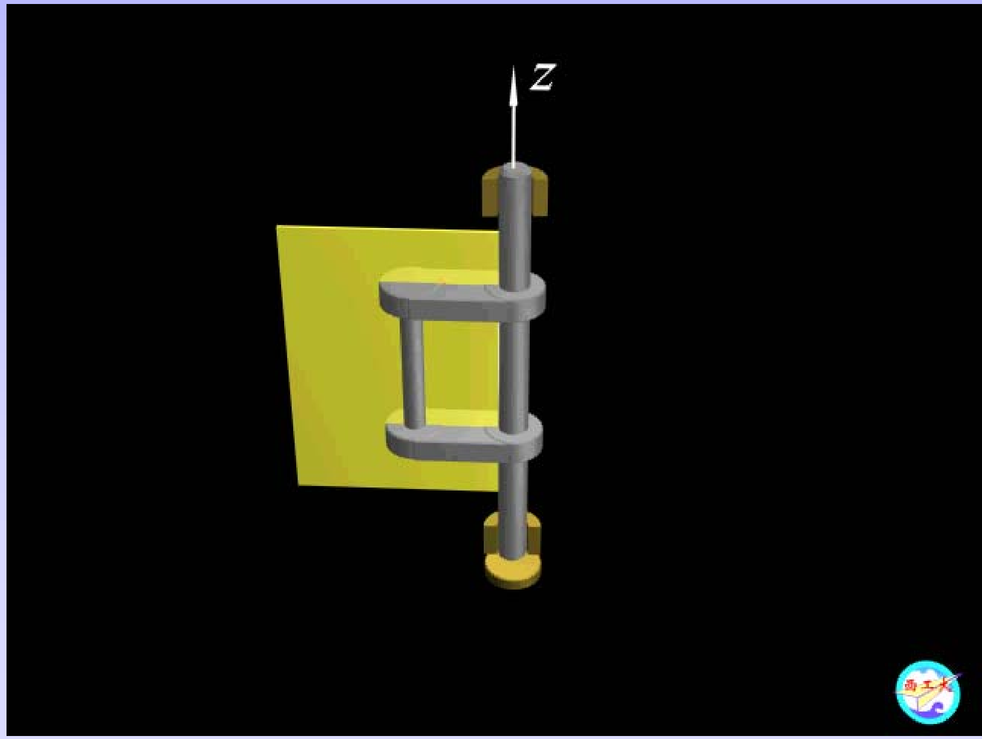
§2-3 定轴转动刚体内各点的速度和加速度

- 定轴转动刚体内各点的速度
- 定轴转动刚体内各点的加速度

§2-3 定轴转动刚体内各点的速度和加速度

1. 定轴转动刚体内各点的速度

刚体内在平行于转轴z的任一直线上，各点具有相等的速度和相等的加速度，又各点的轨迹为同样大小的圆周，其圆心都在转轴z上。



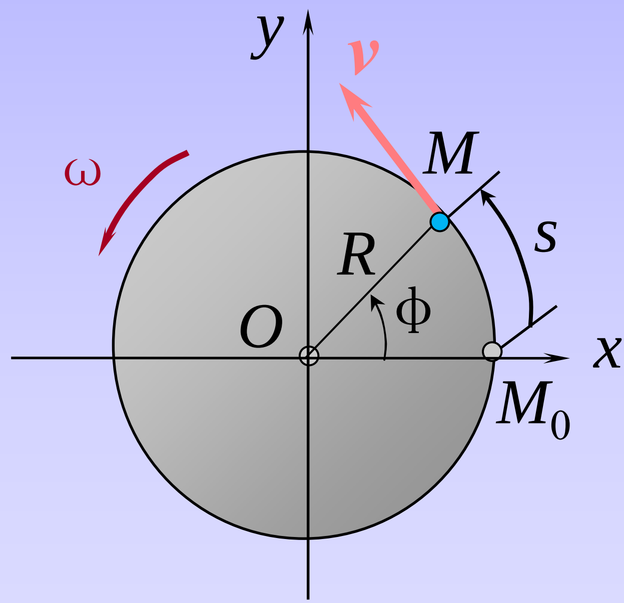
由于点M绕点O作圆周运动，用自然法表示。点M的弧坐标 $s=R\phi$，式中的s和ϕ取相同的正负号。

对时间求导数，得

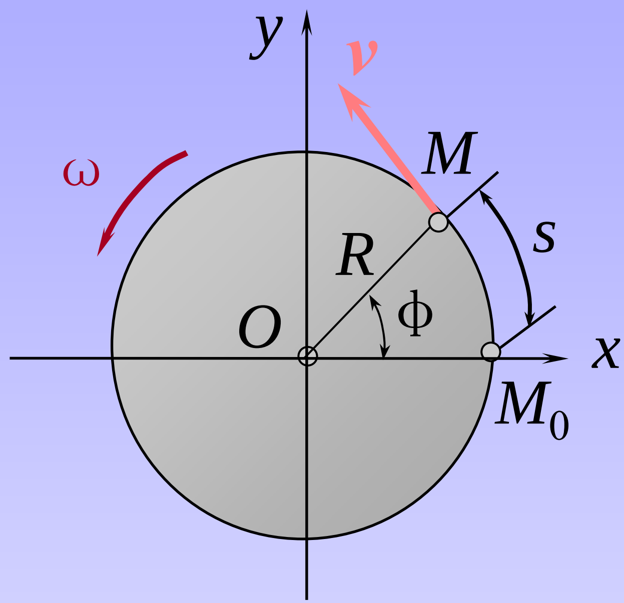
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

考虑到 $$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v,\quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega$$

故有 $$v=R\omega$$



$$\boxed{v = R\omega}$$

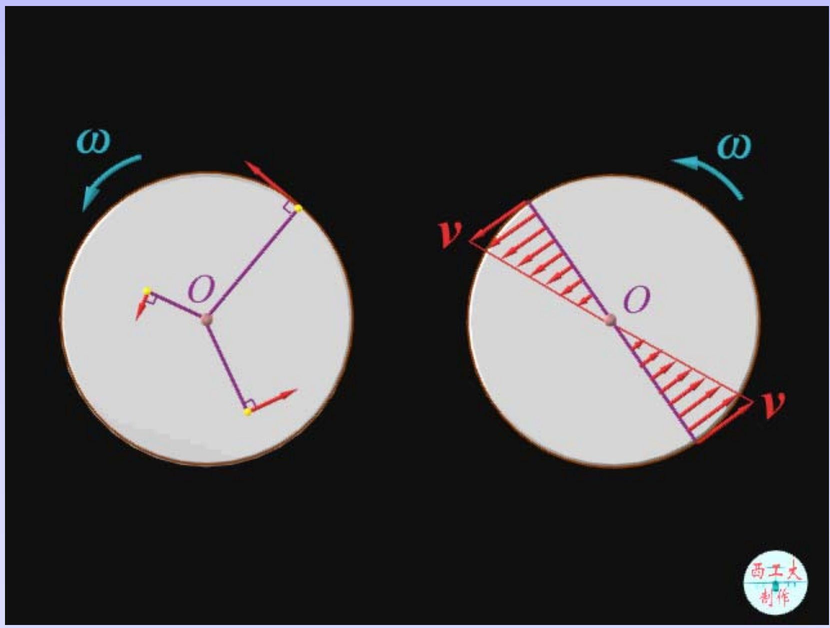


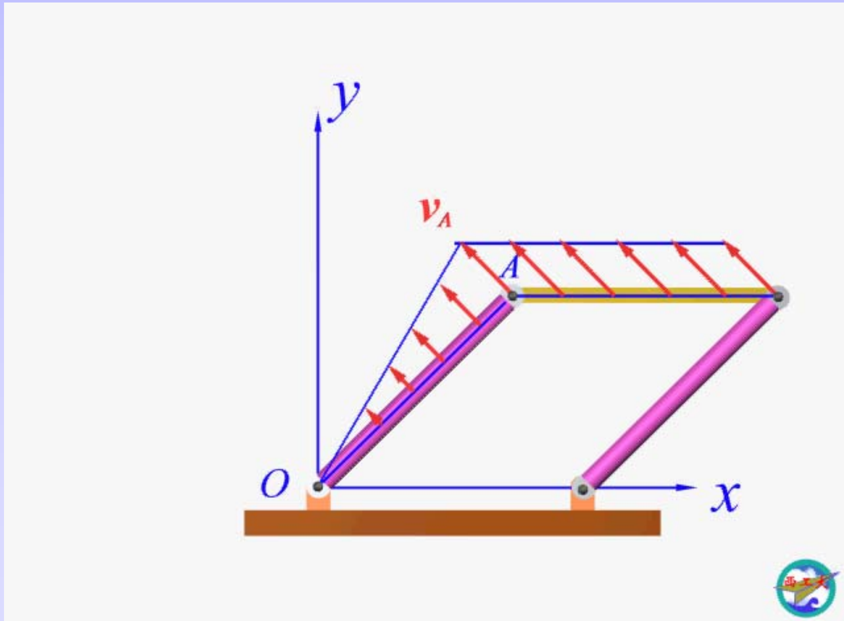
即,定轴转动刚体内任一点的速度,等于该点的转动半径与刚体角速度的乘积。

式中v与ω两者正负相同。故速度是沿着点M的轨迹圆周的切线，指向转动前进的一方。

$$\boxed{v = R\omega}$$

在任一瞬时，定轴转动刚体内各点的速度与各点的转动半径成正比。平面上各点的速度分布如图。

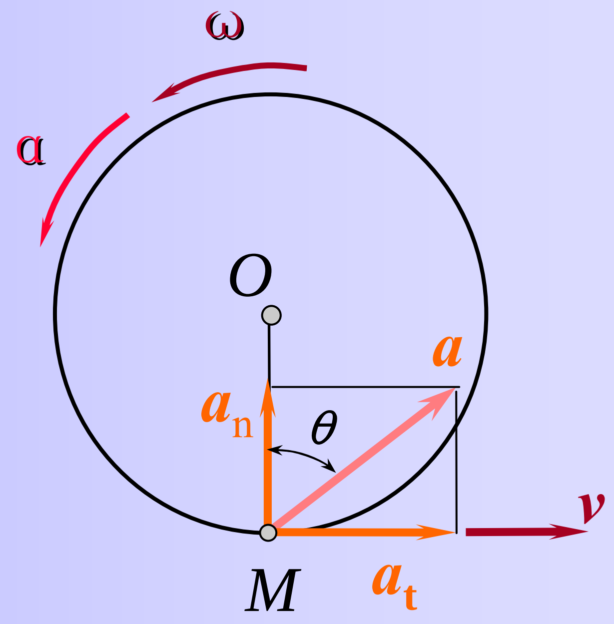




2. 定轴转动刚体内各点的加速度

点M的加速度包含两部分：

切向分量和法向分量。



● 切向加速度

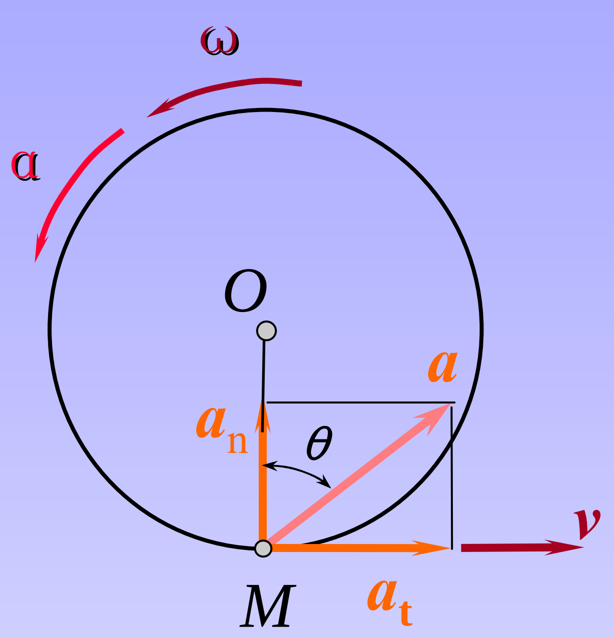
$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\omega) = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

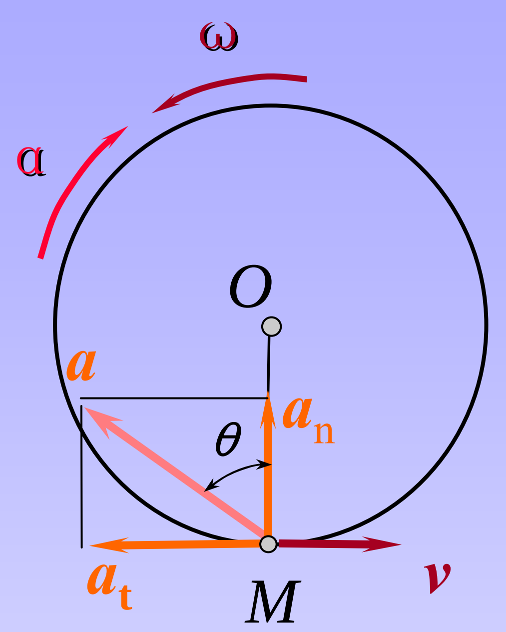
或 $$a_{\mathrm{t}} = R\alpha$$

即，定轴转动刚体内任一点的切向加速度，等于该点的转动半径与刚体角加速度的乘积。式中 α 和a_{t}具有相同的正负号。

§2-3 定轴转动刚体内各点的速度和加速度

加速度



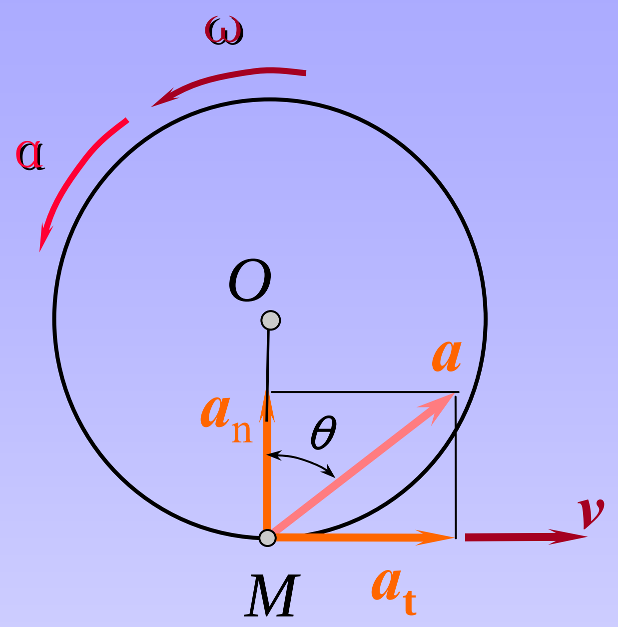


不难看出，当α和ω正负相同时，切向加速度a_t和v速度有相同的指向，这相当于加速转动；当α和ω正负不相同时，则a_t与v有相反的指向，这相当于减速转动。

● 法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{R}$$

或　$$a_n = R\omega^2$$



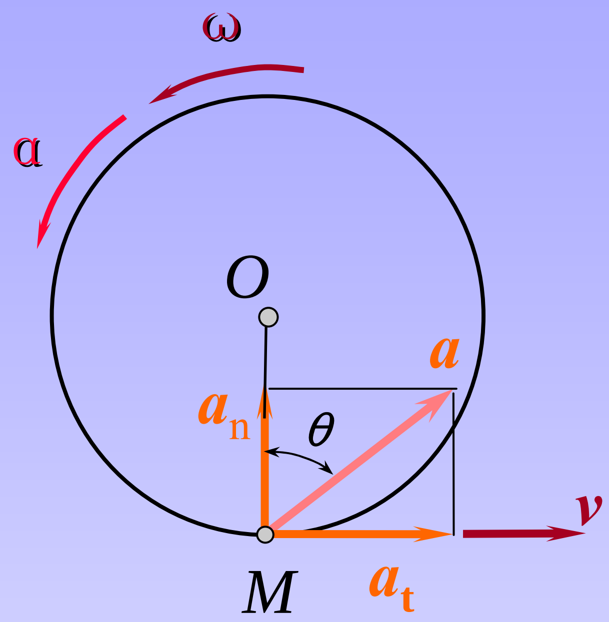
即，定轴转动刚体内任一点的法向加速度，等于该点转动半径与刚体角速度平方的乘积。法向加速a_n恒向轨迹的曲率中心即圆心O，因此也称为向心加速度。

总加速度

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{t}}^2+a_{\mathrm{n}}^2}=\sqrt{R^2\alpha^2+R^2\omega^4}$$

$$a=R\sqrt{\alpha^2+\omega^4}$$

它与半径MO的夹角 θ（恒取正值）可按下式求出



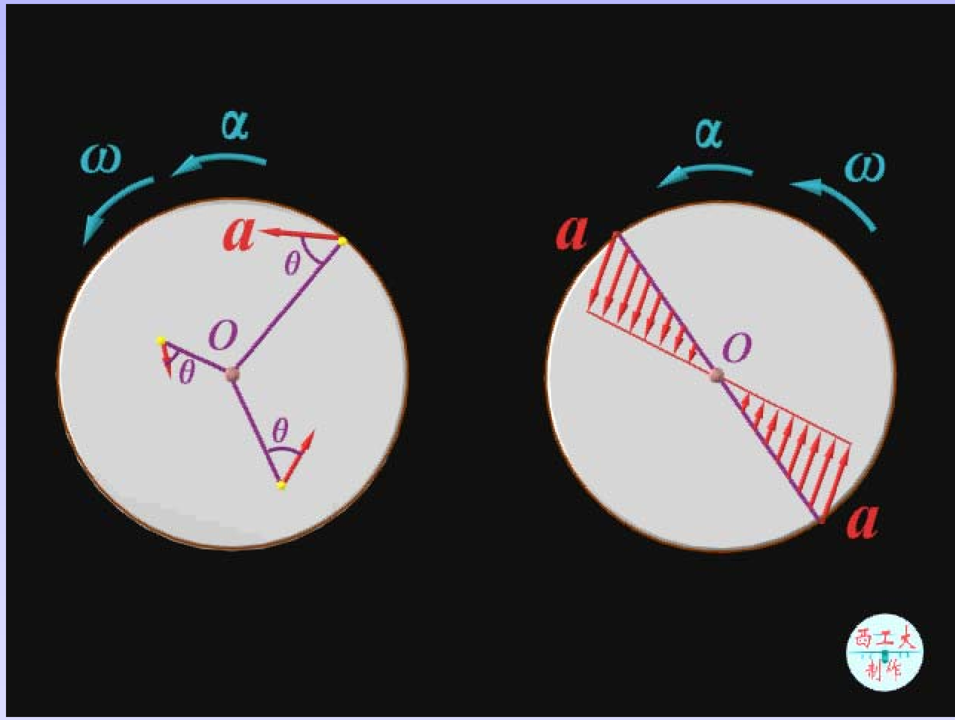
$$\tan\theta=\frac{|a_{\mathrm{t}}|}{a_{\mathrm{n}}}=\frac{R|\alpha|}{R\omega^2} \quad 或 \quad \tan\theta=\frac{|\alpha|}{\omega^2}$$

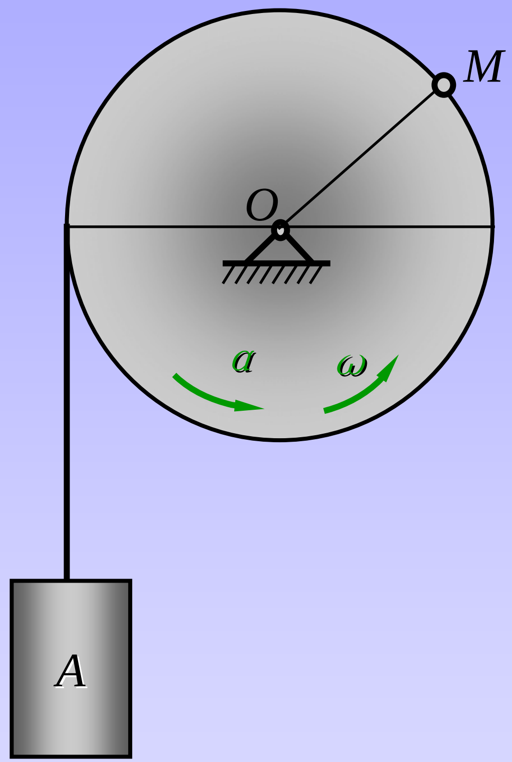
显然，当刚体作加速转动时，加速度a偏向转动前进的一方；当减速转动时，加速度a偏向相反的一方；当匀速转动时a指向轴心O。

$$a = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}\,, \qquad \tan\theta = \frac{|\alpha|}{\omega^2}$$

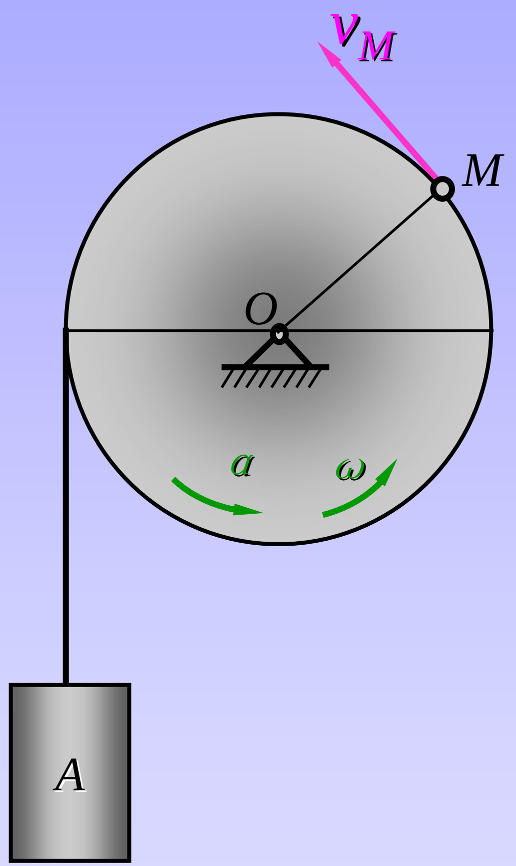
由上式可见，在任一瞬时，定轴转动刚体内各点的切向加速度、法向加速度和总加速的大小都与各点的转动半径成正比。

但是，总加速度$\boldsymbol{a}$与转动半径所成的偏角，却与转动半径无关，即在任一瞬时，定轴转动刚体内各点的加速度对其转动半径的偏角 θ 都相同；平面上各点加速度的分布如图。





例 2-2　滑轮的半径 r=0.2 m，可绕水平轴 O 转动，轮缘上缠有不可伸长的细绳，绳的一端挂有物体 A（如图）。已知滑轮绕轴 O 的转动规律 $\phi=0.15t^3$，其中 t 以s计，ϕ 以rad计。试求 t=2 s 时轮缘上 M 点和物体 A 的速度和加速度。



解:

首先根据滑轮的转动规律，求得它的角速度和角加速度

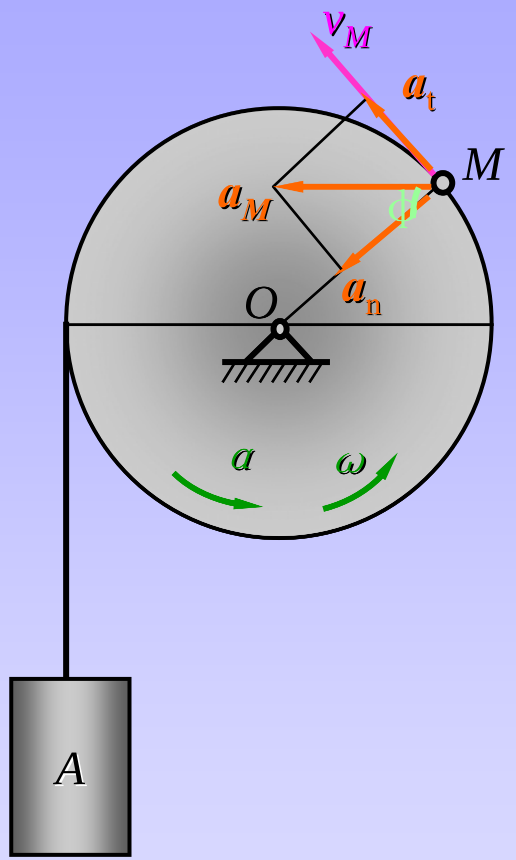
$$\omega=\dot{\varphi}=0.45t^2 \qquad \alpha=\ddot{\varphi}=0.9t$$

代入 $t=2$ s， 得

$$\omega=1.8\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}, \qquad \alpha=1.8\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

轮缘上 M 点上在 $t=2$ s 时的速度为

$$v_M=r\omega=0.36\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$



加速度的两个分量

$$a_t = r\alpha = 0.36 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

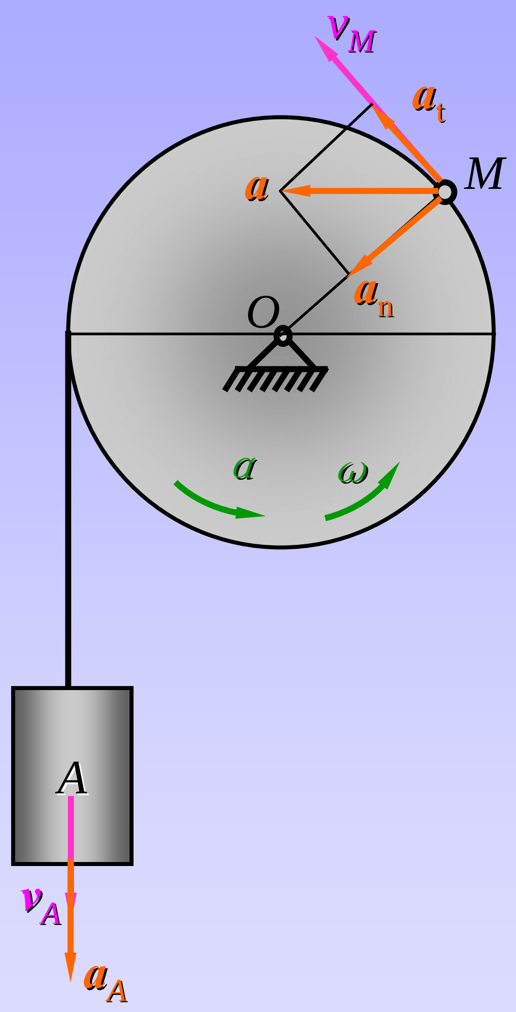
$$a_n = r\omega^2 = 0.648 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

总加速度 a_M 的大小和方向

$$a_M = \sqrt{a_t^{\ 2} + a_n^{\ 2}} = 0.741 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\alpha}{\omega^2} = 0.556,$$

$$\varphi = 29^\circ$$



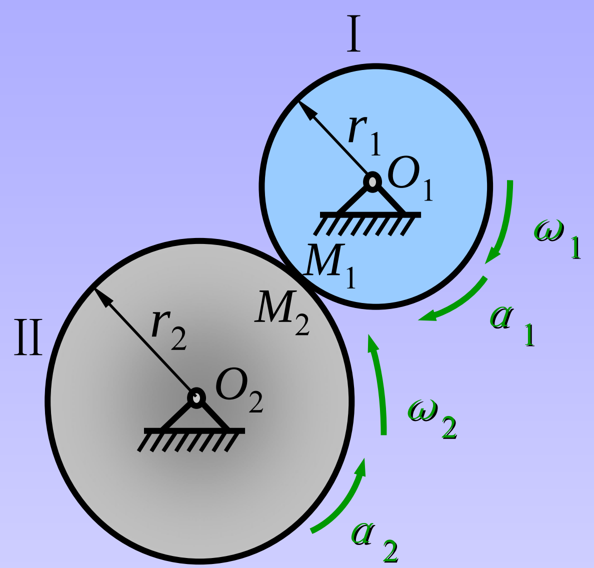
因为物体A与轮缘上M点的运动不同，前者作直线平移，而后者随滑轮作圆周运动，因此，两者的速度和加速度都不完全相同。

由于细绳不能伸长，物体A与M点的速度大小相等，A的加速度与M点切向加速度的大小也相等，于是有

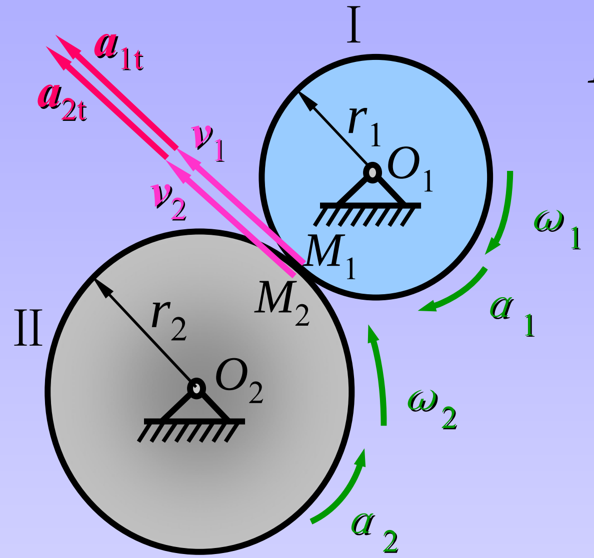
$$v_A = v_M = 0.36 \ \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$a_A = a_t = 0.36 \ \ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

它们的方向铅直向下。



例2-3 图示为一对外啮合的圆柱齿轮，分别绕固定轴O_1和O_2转动，两齿轮的节圆半径分别为r_1和r_2。已知某瞬时主动轮 I 的角速度为 ω_1 ，角加速度为 α_1，试求该瞬时从动轮 II 的角速度 ω_2和角加速度 α_2 。为简便起见，本例的 ω_1 ， ω_2 ， α_1 ， α_2都代表绝对值。



解： 齿轮传动可简化为两轮以节圆相切并在切点处无相对滑动，因而两轮的啮合点 M_1 与 M_2 恒具有相同的速度与切向加速度。即

$$v_1 = v_2, \qquad a_{1t} = a_{2t}$$

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2, \qquad r_1\alpha_1 = r_2\alpha_2$$

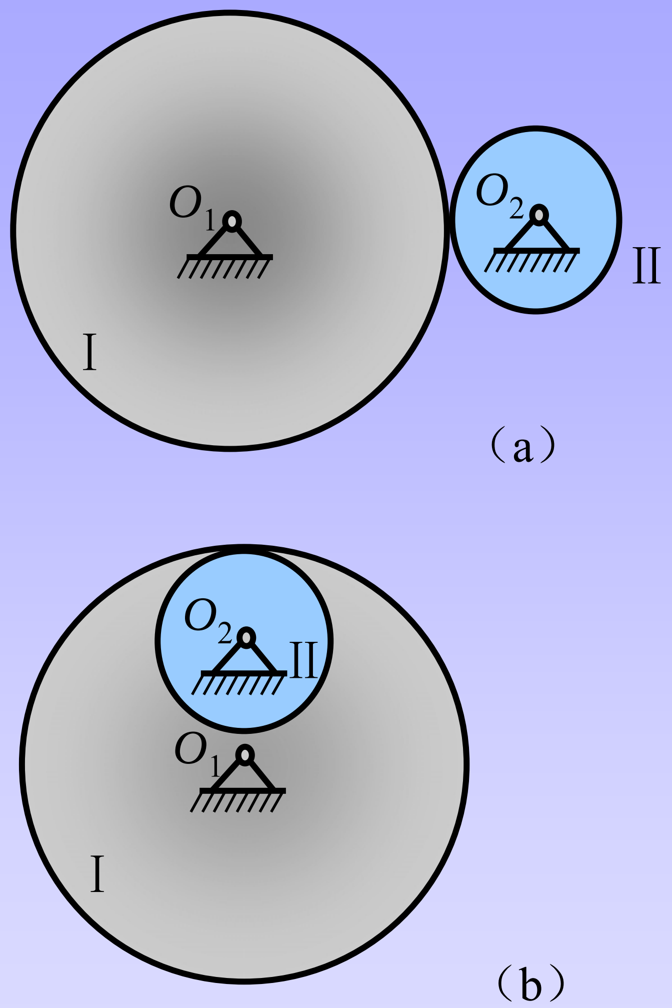
因而从动轮的角速度和角加速度分别为

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1, \qquad \alpha_2 = \frac{r_1}{r_2}\alpha_1$$

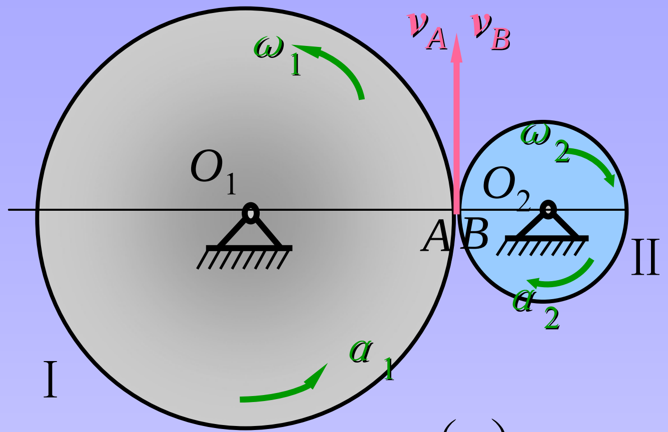
显然，ω_2，α_2 的转向分别与 ω_1，α_1 相反。

传动比为

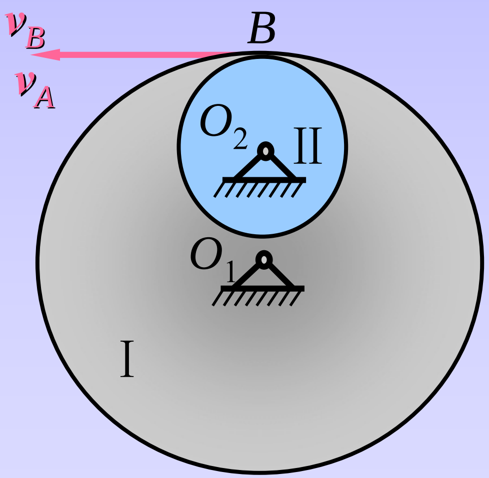
$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$$



例2-4 如图a，b分别表示一对外啮合和内啮合的圆柱齿轮。已知齿轮 I 的角速度是 ω_1，角加速度是 α_1，试求齿轮 II 的角速度 ω_2 和角加速度 α_2。齿轮 I 和 II 的节圆半径分别是 R_1 和 R_2，齿数分别是 z_1 和 z_2。



（a）



（b）

解： 设A，B是齿轮Ⅰ，Ⅱ节圆上相啮合的点。

在这两啮合点间无相对滑动，因而它们具有相等的速度大小，同样也具有相等的切向加速度。于是有

$$v_A = v_B \;, \quad a_{At} = a_{Bt}$$

但

$$v_A = R_1\omega_1 \;, \quad v_B = R_2\omega_2$$

$$a_{At} = R_1\alpha_1 \;, \quad a_B = R_2\alpha_2$$

故得

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2}\omega_1 \;, \quad \alpha_2 = \frac{R_1}{R_2}\alpha_1$$

转向分别如图所示。

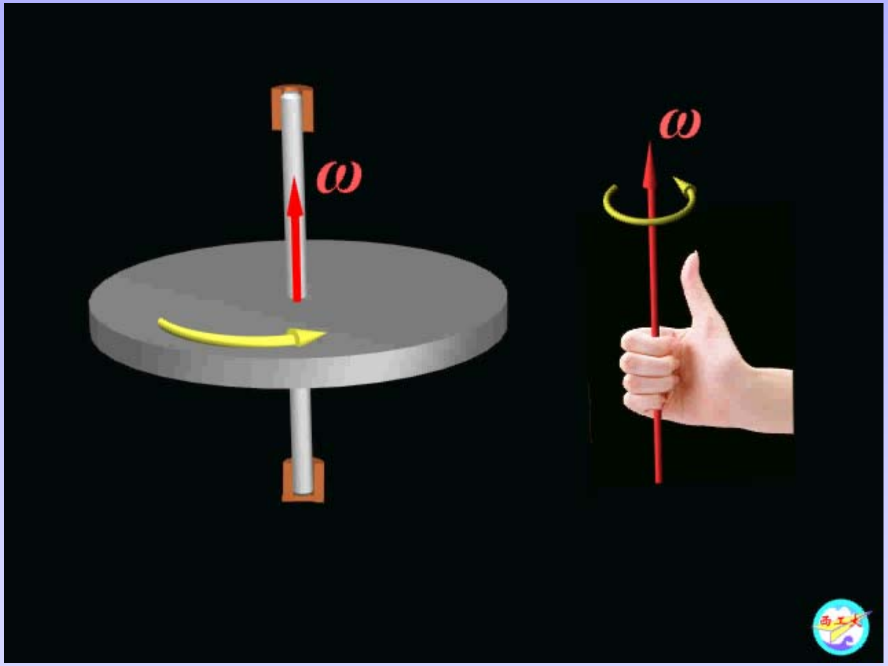
§2-4 用矢积表示刚体上点的速度与加速度

- 用矢量表示角速度与角加速度
- 用矢积表示刚体上点的速度
- 用矢积表示刚体上点的加速度

1. 用矢量表示角速度与角加速度

● 角速度矢

沿刚体的转轴z画出一个矢量 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$ （其中k为轴z的单位矢），ω称为刚体的角速度矢。它的作用线表示出转轴的位置，而它的模则以某一比例表示出角速度ω的绝对值。ω的指向由右手规定决定。

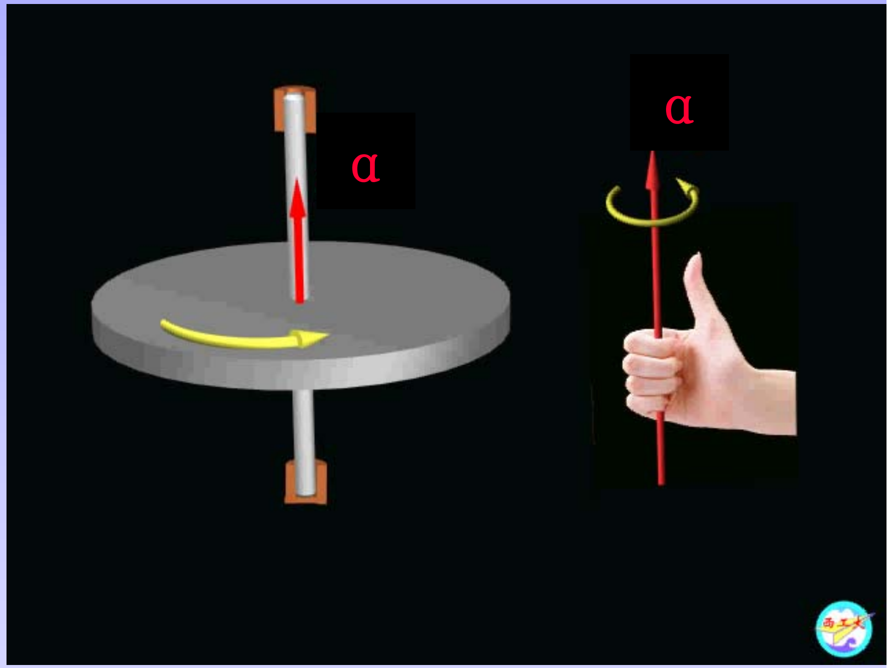


角速度矢ω被认为是滑动矢量，可以从转轴上的任一点画出。

§ 2-4 用矢积表示刚体上点的速度与加速度

● 角加速度矢

同样，可以用矢量 $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\,\boldsymbol{k}$ 表示刚体的角加速度，它也是滑动矢量，沿转轴z画出。它的大小表示角加速度的模，它的指向则决定于α 的正负。



$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

§2-4 用矢积表示刚体上点的速度与加速度

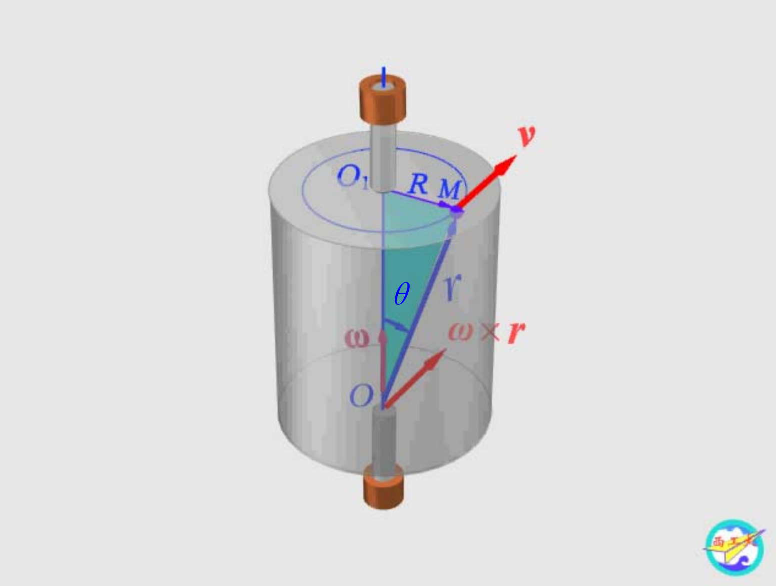
2. 用矢积表示刚体上点的速度

大小

定轴转动刚体内任一点M的速度$\boldsymbol{v}$的大小为 $|v| = R|\omega|$ 。由于 $R = r\sin\theta$，因而 $|v| = R|\omega| = |\omega| r\sin\theta$ 。

方向

根据矢积的定义，矢积 $\omega \times \boldsymbol{r}$ 的模也等于 $|\omega| r\sin\theta$ ，它的方向也与速度$\boldsymbol{v}$的方向一致。故有矢积表达式



$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

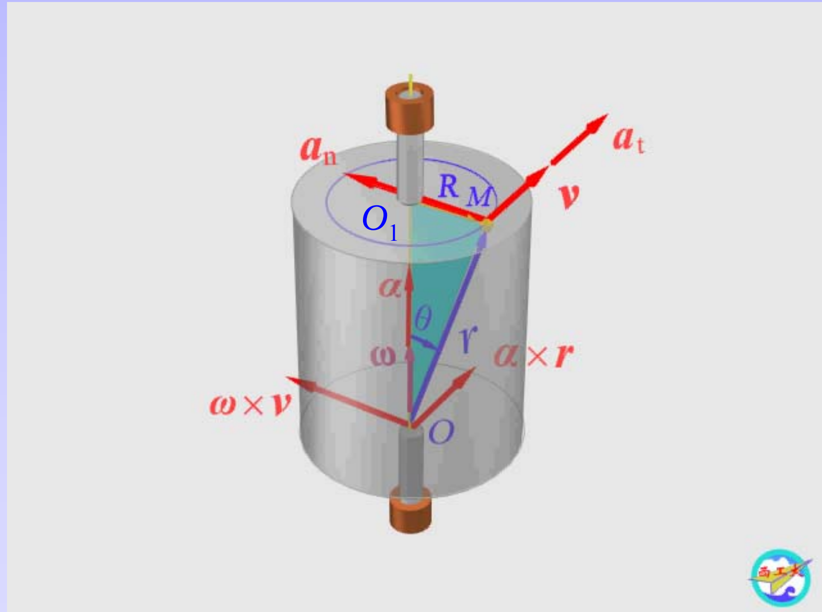
定轴转动刚体内任一点的速度，可以由刚体的角速度矢与该点的矢径的矢积表示。

3. 用矢积表示刚体上点的加速度

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

将上式左右两边对时间求矢导数。左端的导数为点M的加速度，而右端的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$



- 矢积 $\alpha\times\boldsymbol{r}$

$\boxed{大小}$

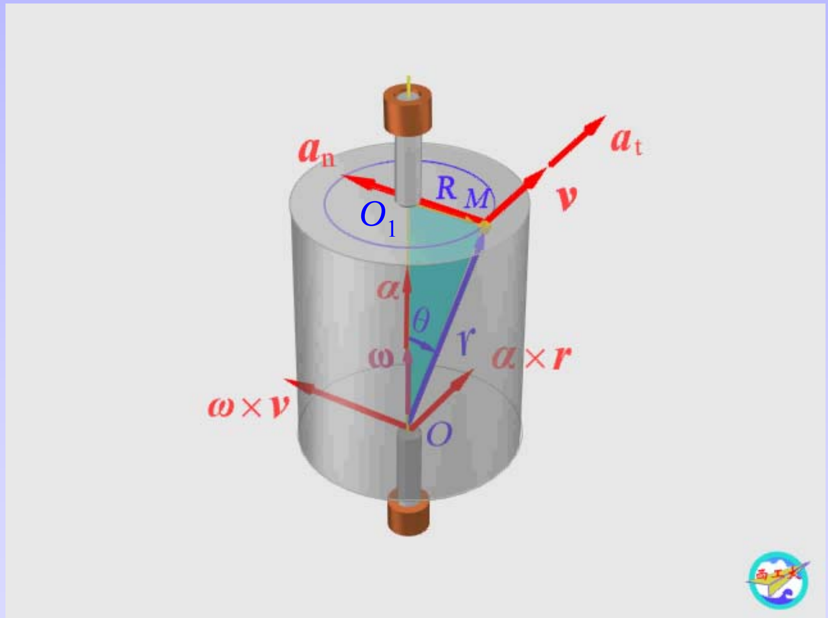
$$|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}|=|\alpha|r\sin\theta=R|\alpha|=|a_t|$$

$$|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}| = |\alpha| r\sin\theta = R|\alpha| = |a_{\mathrm{t}}|$$

方向

这矢积垂直由转轴z和转动半径O_1M决定的平面 OO_1M，它的指向与图中自点O 画出的矢量一致。

可见，矢积 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}$ 按大小和方向都与点M的切向加速度a_{t}相同。故有矢积表达式



$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}$$

§2-4 用矢积表示刚体上点的速度与加速度

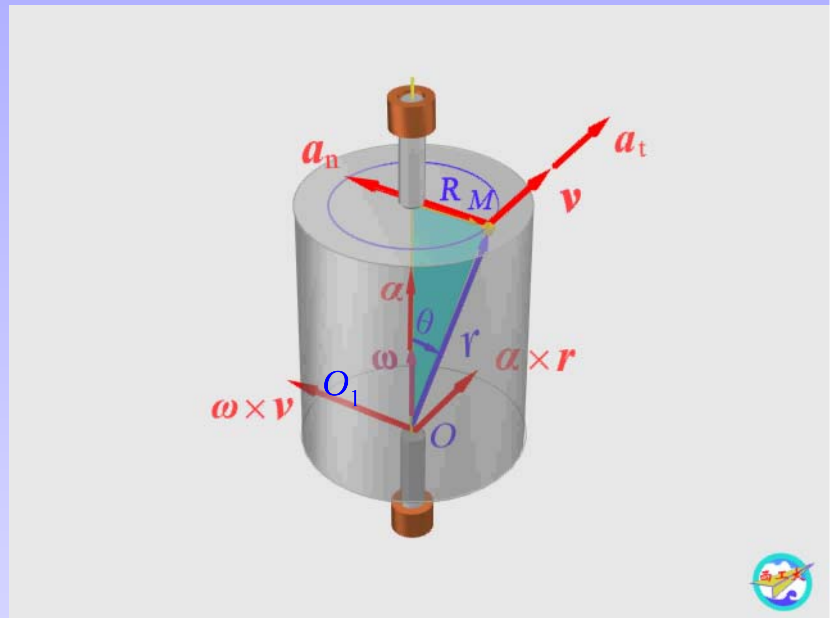
● 矢积 $\omega\times\boldsymbol{v}$

大小

$$|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}| = |\omega v| = R\omega^2 = a_{\mathrm{n}}$$

方向

这矢积同时垂直于刚体的转轴和点M的速度$\boldsymbol{v}$，即沿点M的转动半径R，并且按照右手规则它是由点M指向轴心O_1。



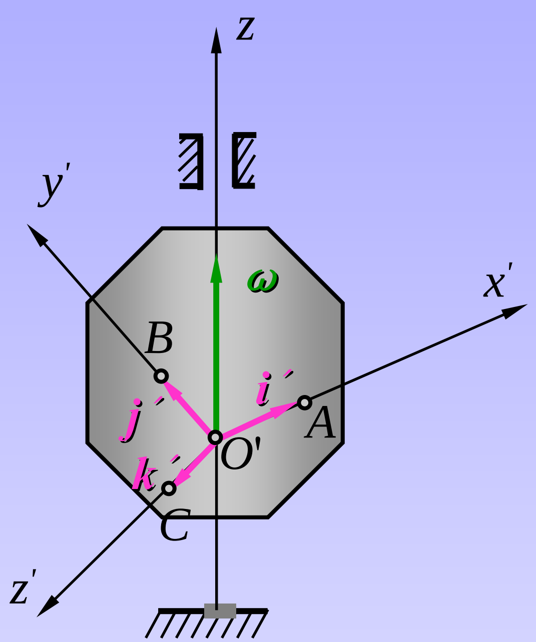
可见，矢积 $\omega\times\boldsymbol{v}$ 表示了点M的法向加速度a_{n}，即有矢积表达式

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

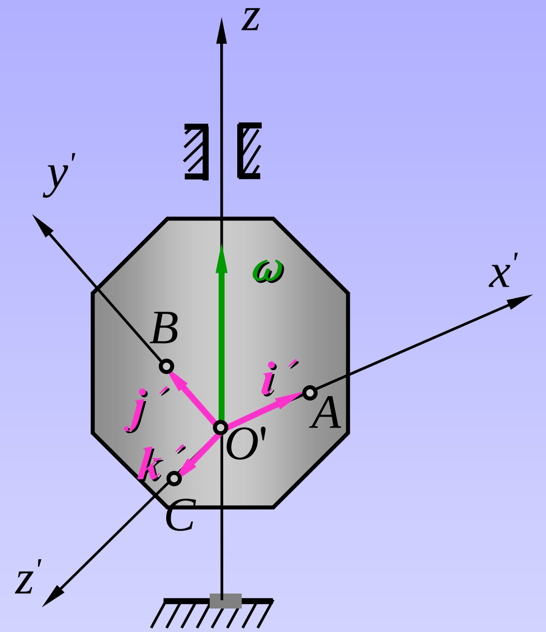
于是，得点M的总加速度的矢积表达式

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}}$$

定轴转动刚体内任一点的切向加速度，可由刚体的角加速度矢与该点矢径的矢积表示，而法向（向心）加速度，则由刚体的角速度矢与该点速度的矢积表示。



例2-5 刚体以角速度 ω 绕定轴 Oz 转动，其上固连有动坐标系 $O'x'y'z'$（如图），试求由 O' 点画出的动系轴向单位矢 $\boldsymbol{i}'$，$\boldsymbol{j}'$，$\boldsymbol{k}'$ 端点 A，B，C 的速度。



解： 先求端点 A 的速度。设 A 点的矢径为$\boldsymbol{r}_A$，

则A点的速度为

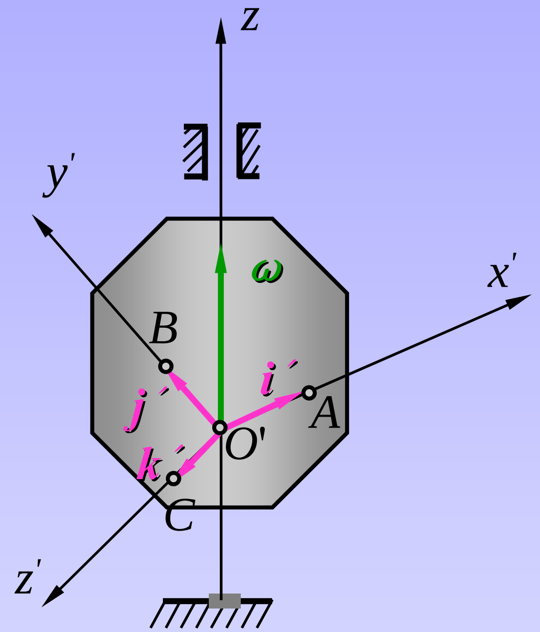
$$\boldsymbol{v}_A=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}$$

A点是定轴转动刚体内的一点，由式有

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A$$

可见 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A$ ，但这里有 $\boldsymbol{r}_A=\boldsymbol{i}'$,

故 $$\boldsymbol{v}_A=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}'$$



同理可得 $\boldsymbol{v}_B$ 和 $\boldsymbol{v}_C$ 的矢量表达式。

于是得到一组公式

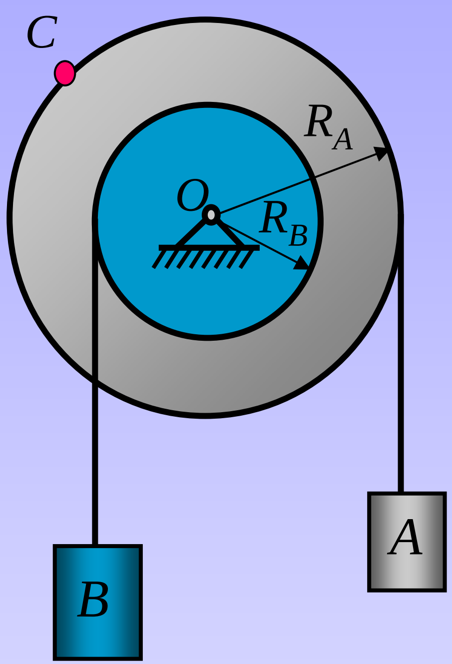
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}'}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}'}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}'}$$

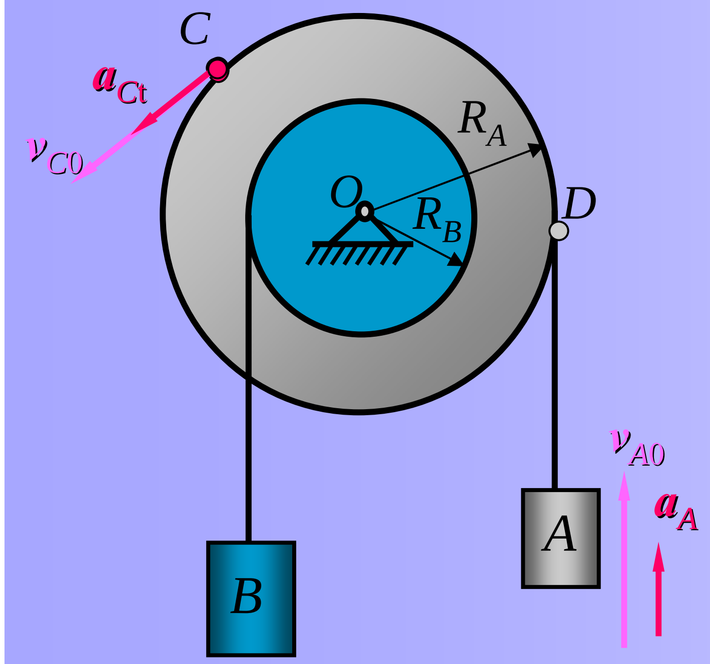
它称为泊松公式。

谢谢使用



物体A和B以不可伸长的绳子分别绕在半径R_A=50 cm和R_B=30 cm的滑轮上。已知重物A具有匀加速度a_A=100 cm·s^{-2}，且初速度v_{A0}=150 cm·s^{-1}，两者都向上。试求：（1）.滑轮在t=3 s内转过的转数，（2）.当t=3 s时重物B的速度和走过的路程，（3）.当t=0时滑轮边缘上C点的加速度。

解： **1. 求滑轮在3 s内转过的转数。**



滑轮边缘上C点沿圆周的位移恒等于重物A的位移；C点的速度和切向加速度分别等于A点的速度和加速度的大小。故有

$$v_{C0} = v_{A0} = 150 \quad \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$$

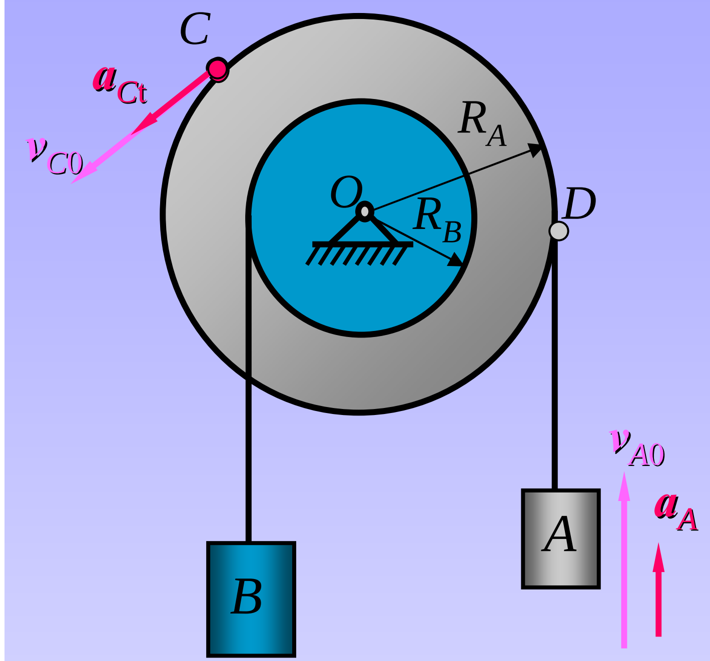
$$a_{Ct} = a_A = 100 \quad \mathrm{cm \cdot s^{-2}}$$

可见滑轮的初角速度

$$\omega_0 = \frac{v_{C0}}{R_A} = 3 \quad \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

滑轮的角加速度α等于常量，等于

$$\alpha = \frac{a_{Ct}}{R_A} = \frac{100}{50} = 2 \quad \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$$



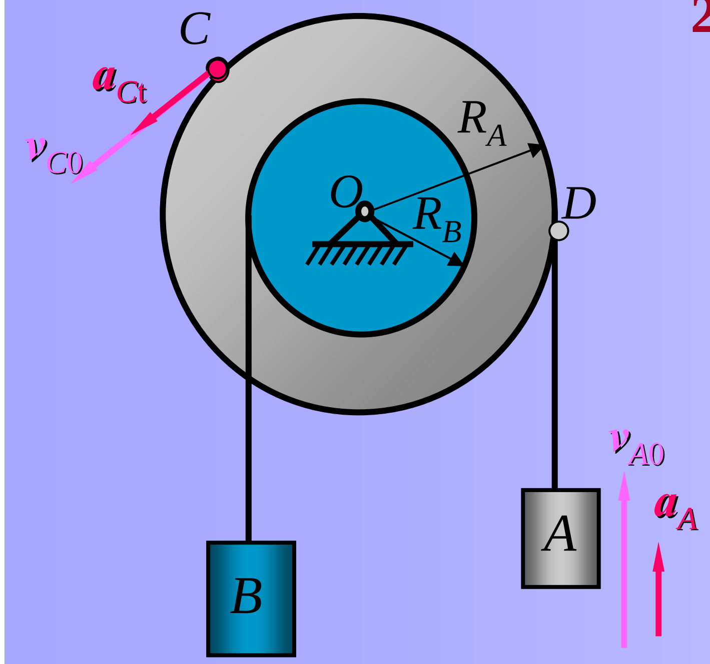
根据匀加速转动的角速度和转角公式，直接可得此时滑轮的转角

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= \varphi_0 + 3\times 3 + \frac{1}{2}\times 2\times 3^2 = (\varphi_0 + 18)\ \text{rad}$$

其中 ϕ_0是滑轮的初转角，决定于参考平面的选择；为了方便，可令 ϕ_0=0。滑轮在3 s内转过的转数是

$$N = \frac{\varphi - \varphi_0}{2\pi} = 2.86 \qquad \text{（转）}$$



2. 求当 $t=3$ s 时滑轮的角速度和走过的路程。

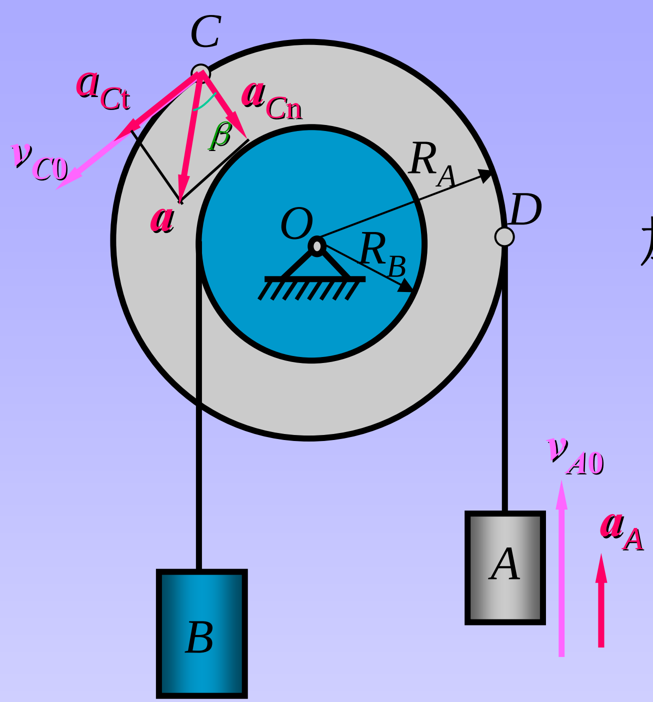
$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 9 \ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

从而求出这时B点的速度

$$v_B = R_B \omega = 270 \ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

重物B 在 3 s内所走过的路程

$$s_B = R_B(\varphi - \varphi_0) = 540 \ \text{cm}$$



3. 求当$t=0$时滑轮边缘上C点的加速度。

当$t=0$时滑轮边缘上C点的切向加速度和法向加速度分别为

$$a_{Ct}=a_A=100 \quad \mathrm{cm\cdot s^{-2}}$$

$$a_{Cn}=R_A\omega_0^2=450 \quad \mathrm{cm\cdot s^{-2}}$$

故C点在$t=0$时的全加速度的大小，以及它和半径的夹角分别等于

$$a=\sqrt{a_{Ct}^2+a_{Cn}^2}=460 \quad \mathrm{cm\cdot s^{-2}}$$

$$\beta=\arctan\frac{|\alpha|}{\omega^2}=12.5^\circ$$

且 $\boldsymbol{a}_C$ 偏到CO的右侧，如图所示。