

11.3 动 能



一、质点的动能

设质点的质量为m,速度为 ν ,则该质点的动能

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

即:质点的质量与其速度平方乘积的一半称为质点的动能。

二、质点系的动能

质点系的动能等于系统内所有质点动能的总和,用符号 T 表

$$T = \sum \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\sum mv^2$$

国际单位制中,动能的常用单位是 kg m²/s²,即 J。



$$T = \sum \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \sum m v^2$$

三、几种刚体运动的动能

1. 平动刚体的动能

平动刚体各点的速度和质心速度 ν_{c} 相同,M 表刚体质量,则其动能

$$T = \frac{1}{2} \sum m v_C^2 = \frac{v_C^2}{2} \sum m = \frac{1}{2} M v_C^2$$

即,平动刚体的动能,等于刚体的质量与质心速度平方乘积的一半。

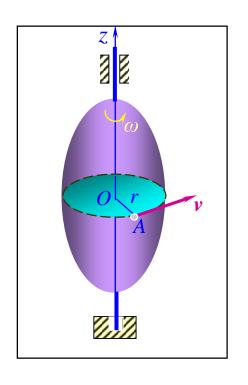


2. 定轴转动刚体的动能

设刚体以角速度 ω 绕定轴 z 转动,以 m 表示刚体内任一点 A 的质量,以 r 表示 A 的转动半径,则该刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum m v^{2} = \frac{1}{2} \sum m (r\omega)^{2} = \frac{\omega^{2}}{2} \sum m r^{2}$$

其中 $\sum mr^2 = J_z$ 是刚体对转轴 z 的转动惯量,故上式可写成 $T = \frac{1}{2}J_z\omega^2$



可见,定轴转动刚体的动能,等于刚体对转轴的转动惯量与其角速度平方乘积的一半.

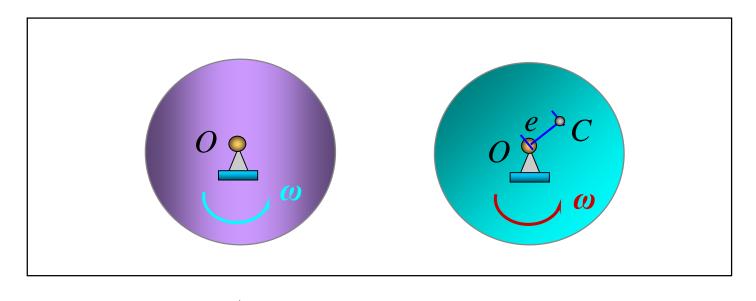
转动惯量 J_z 就是刚体绕 z 轴转动时惯性的度量。





A, B两轮质量相同,以相同的角速度 ω 绕圆心O转动。

A轮为匀质圆盘、B轮质心在C点。两轮动能是否相同?





3. 平面运动刚体的动能

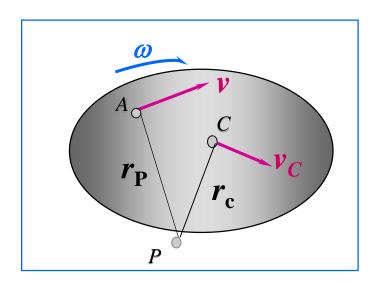
刚体做平面运动时,其上任一点的速度为 ν ,平面运动刚体的角速度是 ω ,速度瞬心在P点,刚体对瞬轴的转动惯量是 $J_{\rm p}$ 。

对平行于瞬轴的质心轴的转动惯量是 人,则该刚体的动能为

$$T = \sum \frac{1}{2} m v^{2} = \sum \frac{1}{2} m (r_{P} \omega)^{2} = \frac{1}{2} \omega^{2} \sum m r_{P}^{2}$$
$$= \frac{1}{2} \omega^{2} J_{P}$$

设刚体的质心 C 到速度瞬心 P 的距离是 r_{C} , 刚体的质量是 M_{o}

根据转动惯量的平行轴定理有 $J_P = J_C + M r_C^2$





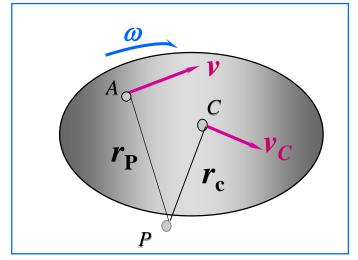
$$T = \sum \frac{1}{2} m v^{2} = \sum \frac{1}{2} m (r_{p} \omega)^{2} = \frac{1}{2} \omega^{2} \sum m r_{p}^{2} = \frac{1}{2} \omega^{2} J_{p}$$

$$J_{p} = J_{c} + M r_{c}^{2}$$

$$T = \frac{1}{2} (J_C + M r_C^2) \omega^2$$

因为质心 C 的速度大小 $v_C = r_C \omega$ 。由上式得

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2$$



即,平面运动刚体的动能,等于它以质心速度作平动时的动能与相对于质心轴转动时的动能之和。



例题1.

系统如图所示,轮 I 的质量为 m_1 ,纯滚动,AO杆的质量为 m_1 ,角速度为 ω ,求系统的动能。

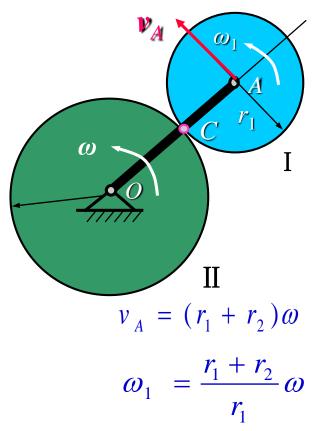
$$T = T_1 + T_2$$

$$T_{1} = \frac{1}{2} J_{o} \omega^{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} m (r_{1} + r_{2})^{2} \right] \omega^{2}$$

$$T_{2} = \frac{1}{2} m_{1} v_{A}^{2} + \frac{1}{2} J_{A} \omega_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{2} m_{1} \left[(r_{1} + r_{2}) \omega \right]^{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_{1} r_{1}^{2} \right) \left(\frac{r_{1} + r_{2}}{r_{1}} \omega \right)^{2}$$

$$= \frac{3}{4} m_{1} \left[(r_{1} + r_{2}) \omega \right]^{2}$$



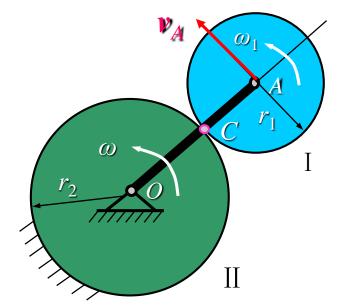


系统如图所示,轮 I 的质量为 m_1 ,纯滚动,AO杆的质量为 m_1 ,角速度为 ω ,求系统的动能。

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{6} m (r_1 + r_2)^2 \omega^2$$

$$T_2 = \frac{3}{4} m_1 [(r_1 + r_2) \omega]^2$$



C是轮 I 上的点, J_C 是绕C点的转动惯量, $T_2 = \frac{1}{2}J_C\omega_1^2$ 是否成立?



谢谢!