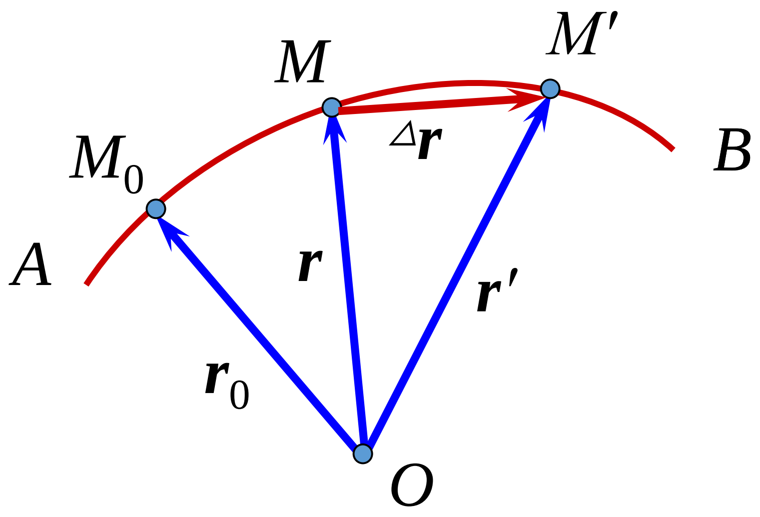
6.3 点的速度和加速度描述的矢量法和直角坐标法

一、用矢量法表示点的速度和加速度

1. 位 移



设有一点M沿曲线AB运动，在任一瞬时t，该点之位置可由如下矢径确定

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

显然，当动点M沿 AB 运动时，$\boldsymbol{r}$是一变矢量。

在时间间隔 Δt内，$\boldsymbol{r}$ 之变化量为

$$\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{MM}' = \Delta \boldsymbol{r}$$

它表示在 Δt时间内动点矢径之改变，称为动点在 Δt时间内的位移。

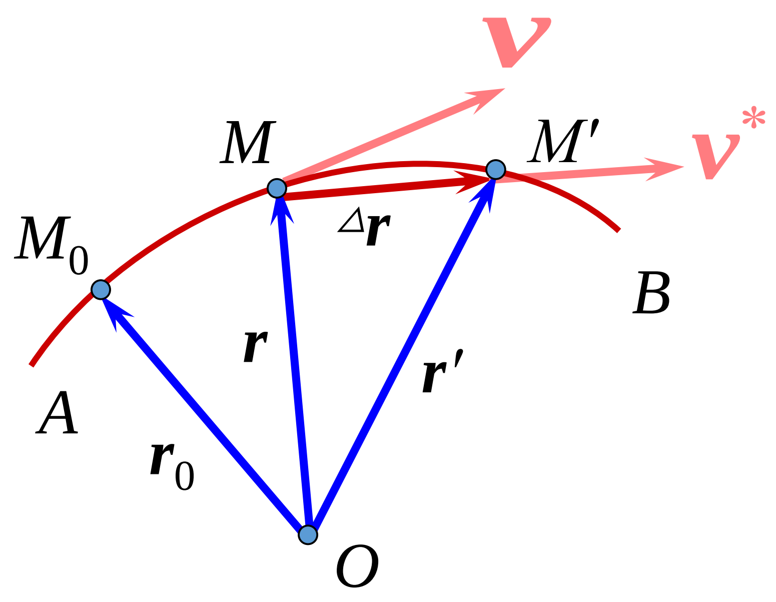
2. 速 度

比值 $\boldsymbol{v}^* = \dfrac{\boldsymbol{MM}'}{\Delta t} = \dfrac{\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$

表示动点在△*t*时间内的**平均速度**。

当△t→0时，v^*的极限值称为动点在瞬间t之**速度**

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}^* = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$



即**点的速度等于它之矢径对时间的一阶导数。**

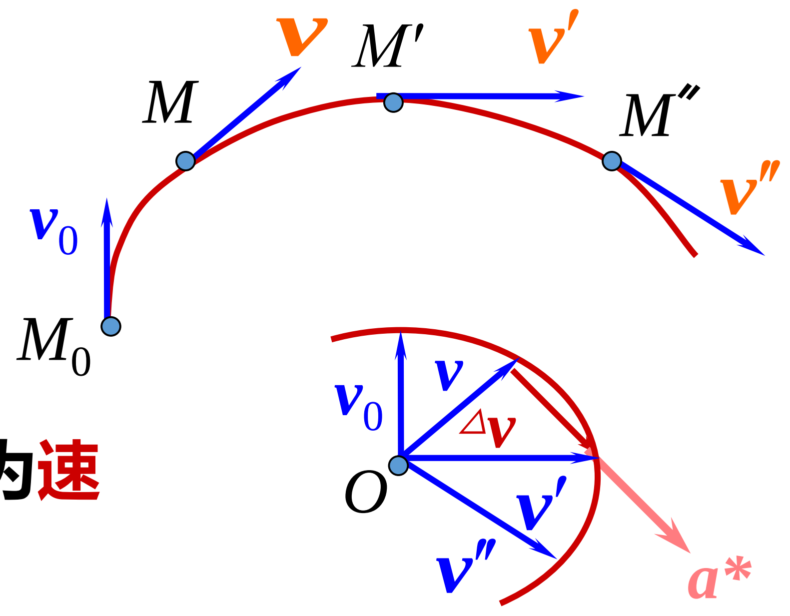
由矢导数定义知，动点之速度v的方向沿动点的矢端图（即轨迹曲线）的切线方向，并与此点的运动方向一致。

3. 加 速 度

设从某一固定点O画出动点在连续瞬间t_0 ，t,$t+\Delta t$、 t_2….速度矢

$$\boldsymbol{v}_0 ,\boldsymbol{v} ,\boldsymbol{v}',\boldsymbol{v}'' \ldots\ldots$$

连接各速度矢量之端点，可得一曲线，称为速度矢端图，此时可视v为一变矢量。

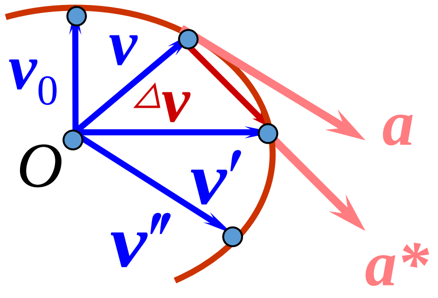


（1）平均加速度

$$\boldsymbol{a}^* = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

（2）瞬时加速度

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$



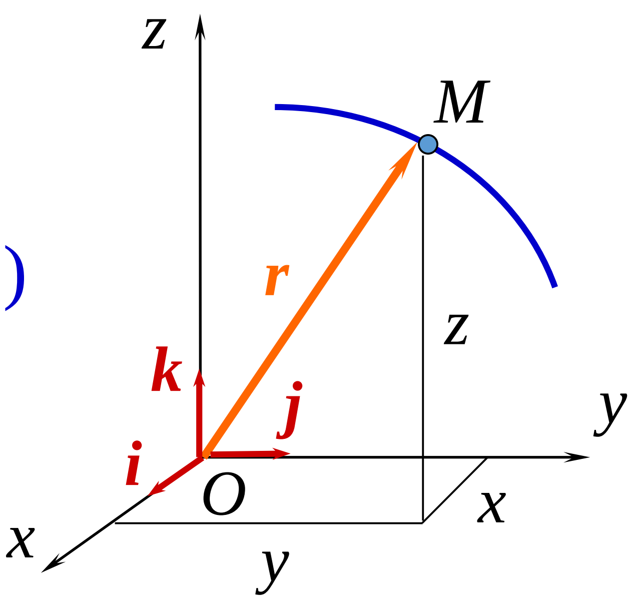
又 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 则 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

即动点的加速度等于它的速度对时间的一阶导数，或等于它的矢径对时间的二阶导数。其方向沿速度矢端图之切线，并指向速度矢端运动的方向。

6.3 点的速度和加速度描述的矢量法和直角坐标法

二、用直角坐标法表示点的速度和加速度

1. 直角坐标法表示点的速度



已知动点的直角坐标形式的运动方程

$$x = f_1(t),\qquad y = f_2(t),\qquad z = f_3(t)$$

又

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

因而

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$$

由于单位矢$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$不随时间而变,它们对时间的导数都等于零,故得

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

二、用直角坐标法表示点的速度和加速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

以v_x，v_y ，v_z ，代表速度v 在固定轴x，y，z上的投影，则有

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

与前式比较，得

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \qquad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

即,点的速度在固定直角坐标系各轴上的投影,分别等于动点的对应坐标对时间的一阶导数。

已知动点速度的投影，可求出速度矢量v的大小和方向余弦。

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})=\frac{v_x}{v},\quad \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})=\frac{v_y}{v},\quad \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k})=\frac{v_z}{v}$$

2. 直角坐标法表示点的加速度

已知速度v

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

可得加速度的矢量表达式

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

另一方面，有分解式

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

加速度的矢量表达式

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

加速度的分解式

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

其中a_x，a_y，a_z**是加速度**$\boldsymbol{a}$ **在固定轴**x，y，z**上的投影。比较上列两式，得**

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

即，点的加速度在固定直角坐标系各轴上的投影，分别等于点的速度的对应投影对时间的一阶导数，或者等于对应坐标对时间的二阶导数。

已知动点加速度的投影，可求出加速度a 的大小和方向余弦

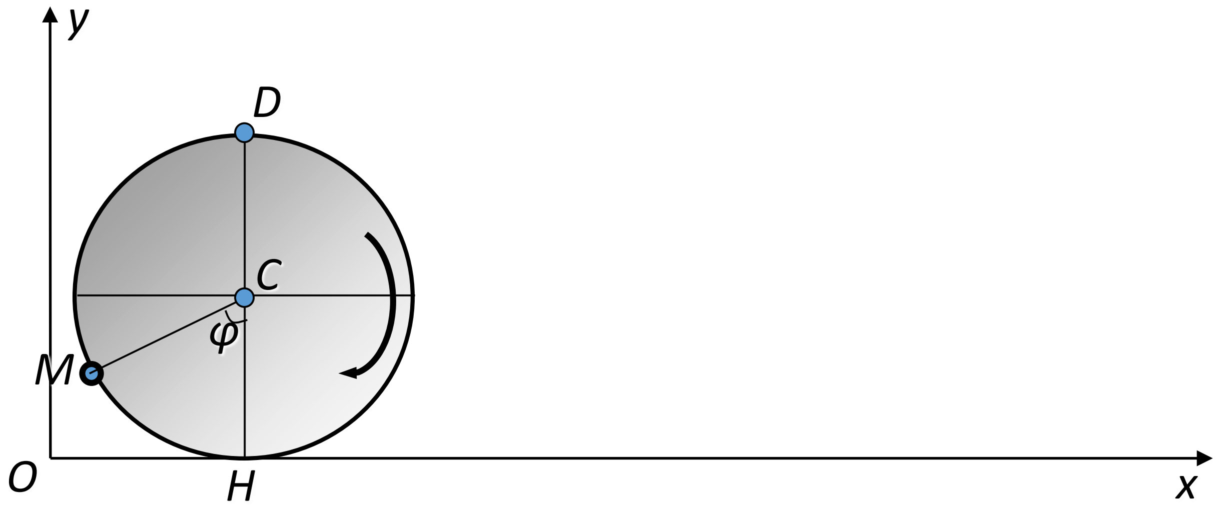
$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t})^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2})^2+(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2})+(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2})^2}$$

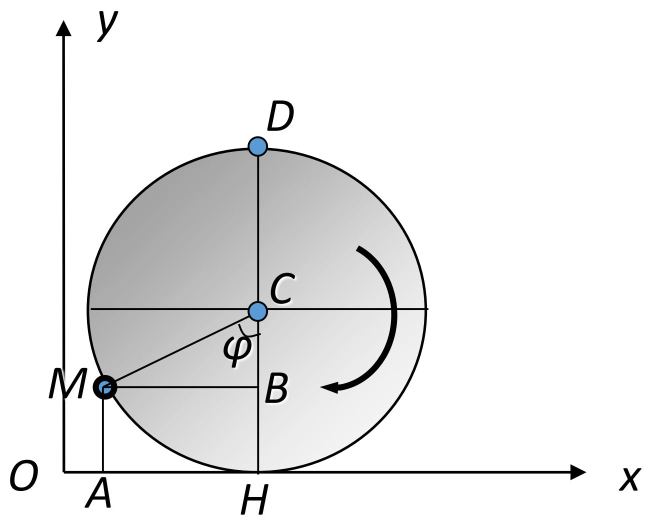
$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i})=\frac{a_x}{a} \qquad \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j})=\frac{a_y}{a}, \qquad \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})=\frac{a_z}{a}$$

例题1 半径是 r 的车轮沿固定水平轨道滚动而不滑动（如图）。轮缘上一点M，在初瞬时与轨道上的O点叠合；在瞬时t半径MC与轨道的垂线HC组成交角$\varphi=\omega t$，其中ω是常量。试求在车轮滚一转的过程中该M点的运动方程，瞬时速度和加速度。



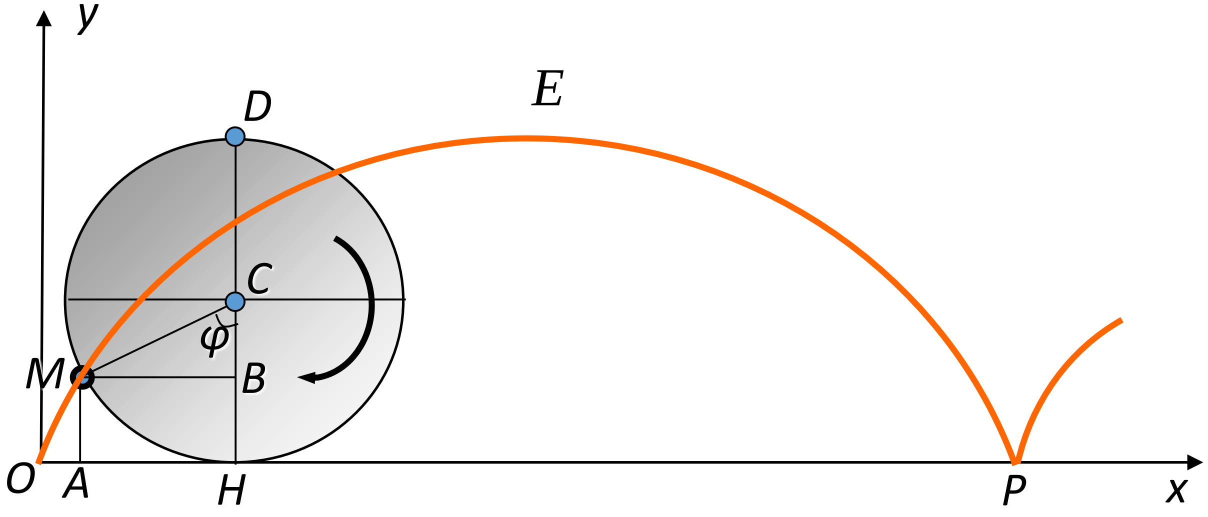
解： **1.求M点的运动方程。**

在M点的运动平面内取直角坐标系Oxy如图所示：轴 x 沿直线轨道，并指向轮子滚动的前进方向，轴 y 铅直向上。考虑车轮在任意瞬时位置，因车轮滚动而不滑动，故有$OH=\overset{\frown}{MH}$ 。于是，在图示瞬时动点M 的坐标为



$$x = OA = OH - AH = \overset{\frown}{MH} - MB$$
$$= r\varphi - r\sin\varphi$$

$$y = AM = HB = HC - BC$$
$$= r - r\cos\varphi$$



$$x = r\varphi - r\sin\varphi$$

$$y = r - r\cos\varphi$$

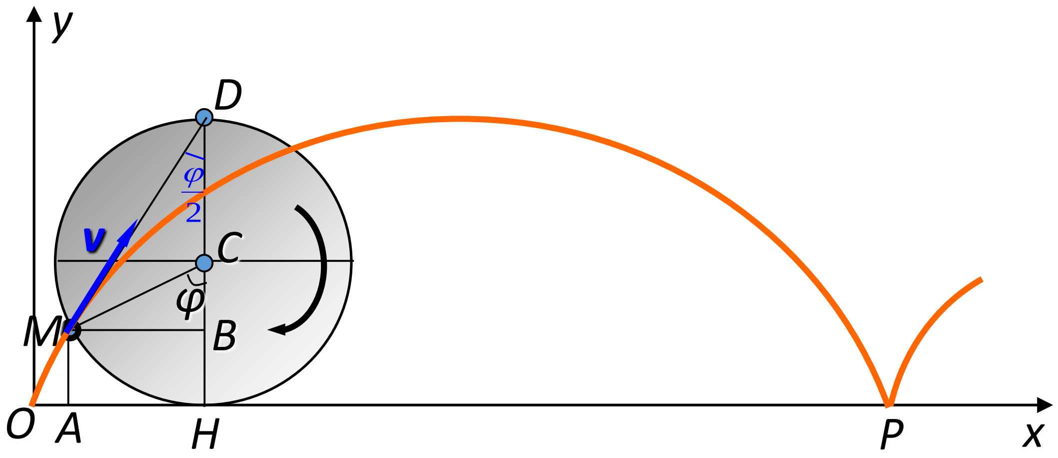
以 $\varphi = \omega t$ 代入，

得M点的运动方程

$$x = r(\omega t - \sin\omega t)$$

$$y = r(1 - \cos\omega t)$$

这方程说明M点的轨迹是滚轮线（即摆线）。车轮滚一圈的时间$T=2\pi/\omega$ ，在此过程中，M点的轨迹只占滚轮线的一环OEP，其两端O和P是尖点。



2.求M点的瞬时速度。

$$x = r(\omega t - \sin \omega t), \quad y = r(1-\cos\omega t)$$

求坐标 x，y 对时间的一阶导数，得

$$v_x = r\omega(1-\cos\omega t)$$

$$v_y = r\omega\sin\omega t$$

故得M点速度 v 的大小和方向，有

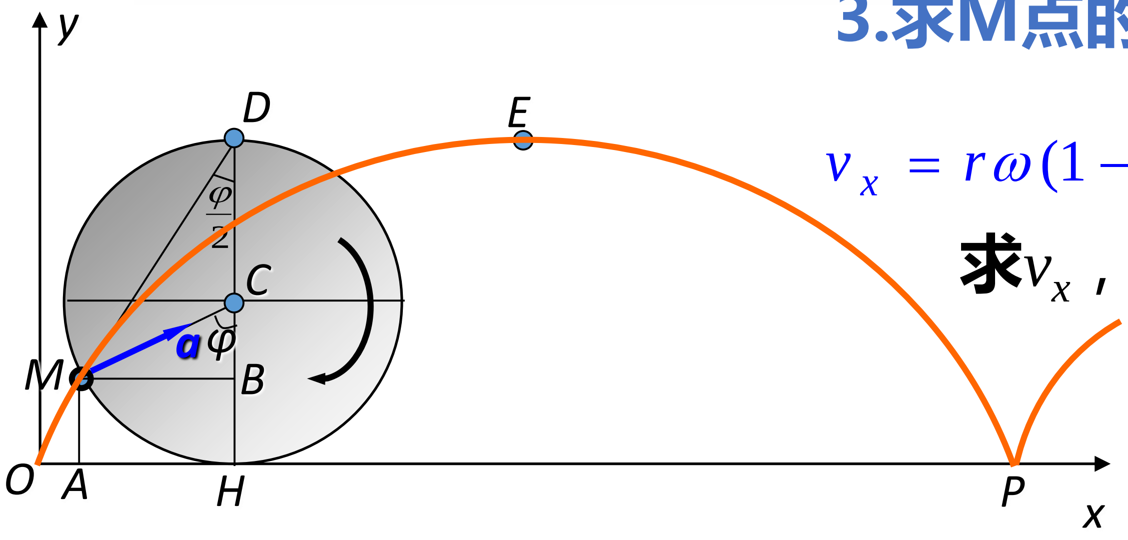
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega\sqrt{(1-\cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t} = 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2}$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i}) = \frac{v_x}{v} = \sin\frac{\omega t}{2} = \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{MB}{MD}$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j}) = \frac{v_y}{v} = \cos\frac{\omega t}{2} = \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{BD}{MD}$$

M点的速度矢恒通过轮子的最高点D。

3.求M点的瞬时加速度。



$$v_x = r\omega(1-\cos\omega t) \qquad v_y = r\omega\sin\omega t$$

求v_x，v_y对时间的一阶导数，得

$$a_x = r\omega^2 \sin\omega t$$

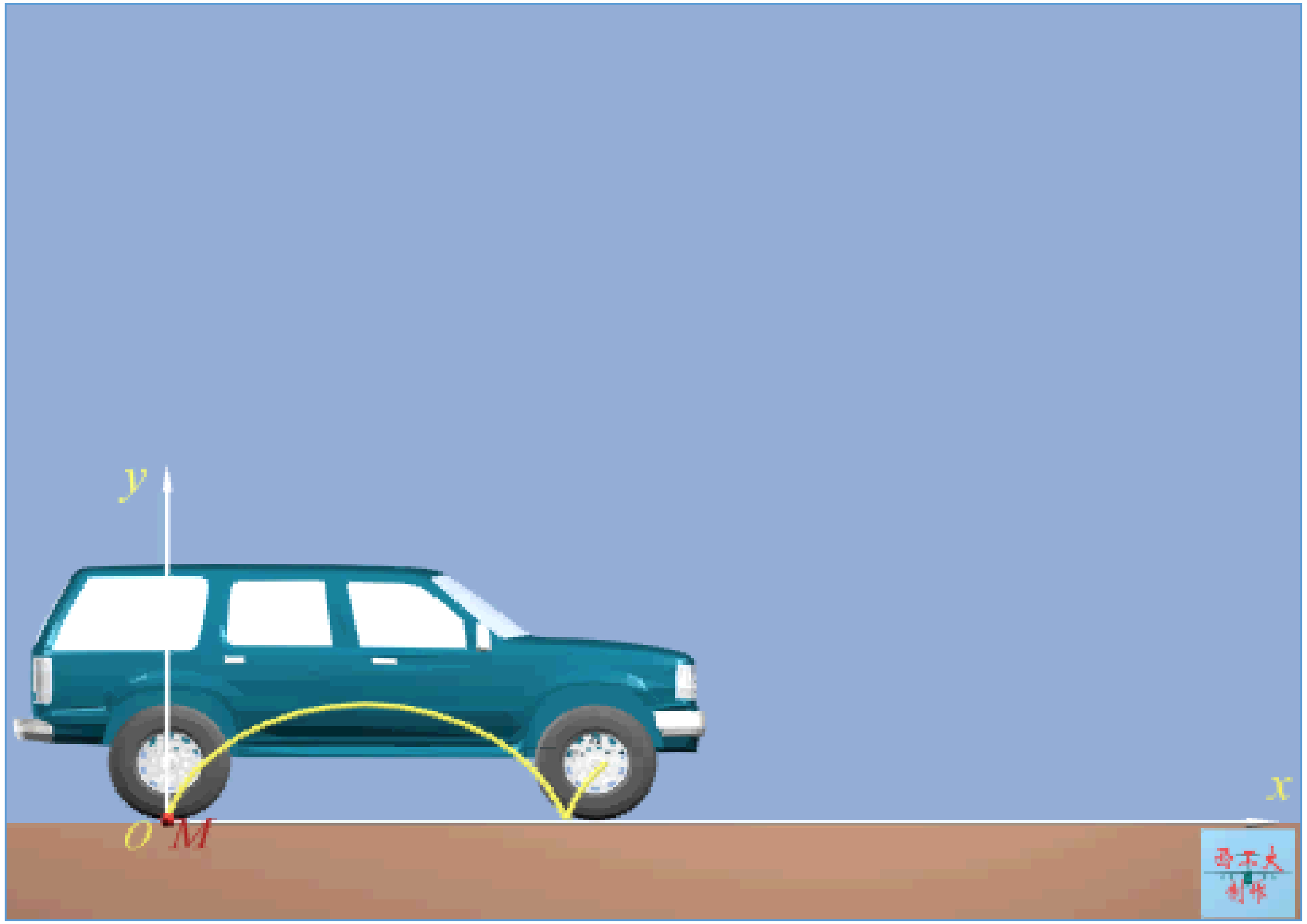
$$a_y = r\omega^2 \cos\omega t$$

故得M点加速度 a 的大小和方向，有

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2, \quad \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) = \frac{a_y}{a} = \cos\varphi = \frac{BC}{MC}, \quad \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}) = \frac{a_x}{a} = \sin\varphi = \frac{MB}{MC}$$

当$t=0$时，有 $x=0$, $y=0$; $v_x = 0$, $v_y = 0$; $a_x = 0, a_y = r\omega^2$

这表示，当M点接触轨道时，它的速度等于零，而加速度垂直于轨道。这是轮子沿固定轨道滚而不滑的特征。



轨 迹 演 示