第七章 *B*样条曲线曲面

（I）

引 言

- B样条曲线曲面是B样条基函数在CAGD领域的应用。
- 1946年 Schoenberg最早提出了B样条理论
- 1972年 Cox和deBoor分别提出了B样条的标准算法
- 1974年 Gordon和Riesenfeild将B样条方法引入到CAGD领域，作为一种形状数学描述的方法。

第一节　B样条基函数和B样条曲线的基本概念

第一节　基本概念

一、B样条基函数的递推定义

1、定义

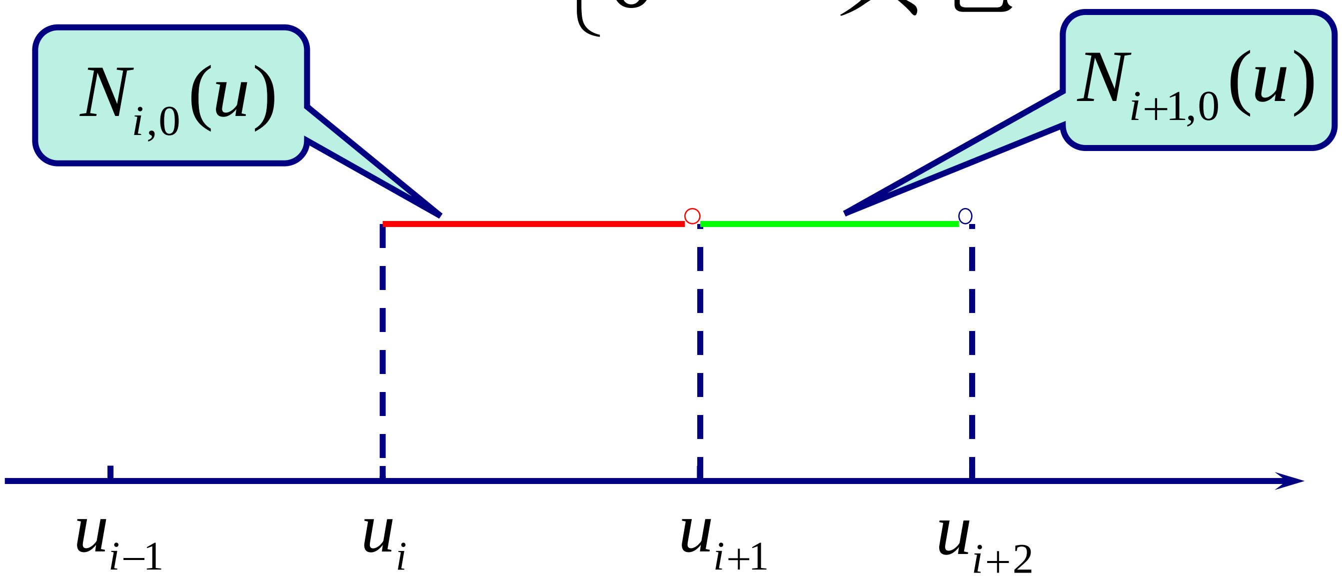
deBoor－Cox公式

$N_{i,k}(u)$中i表示序号，k表示次数，u表示变量

第一节　基本概念

2、低次B样条基函数

1)零次：$N_{i,0}(u)=\begin{cases}1 & u_i \le u < u_{i+1} \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

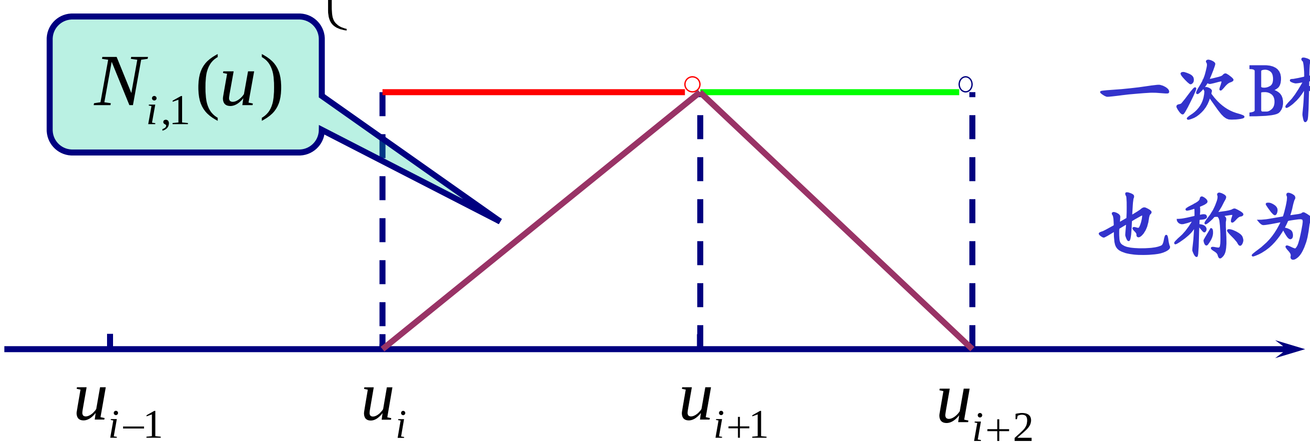


零次B样条基函数也称为平台函数

第一节　基本概念

2）一次B样条基函数

$$N_{i,1}(u)=\begin{cases}\dfrac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i} & u_i \le u < u_{i+1}\\ \dfrac{u_{i+2}-u}{u_{i+2}-u_{i+1}} & u_{i+1} \le u < u_{i+2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



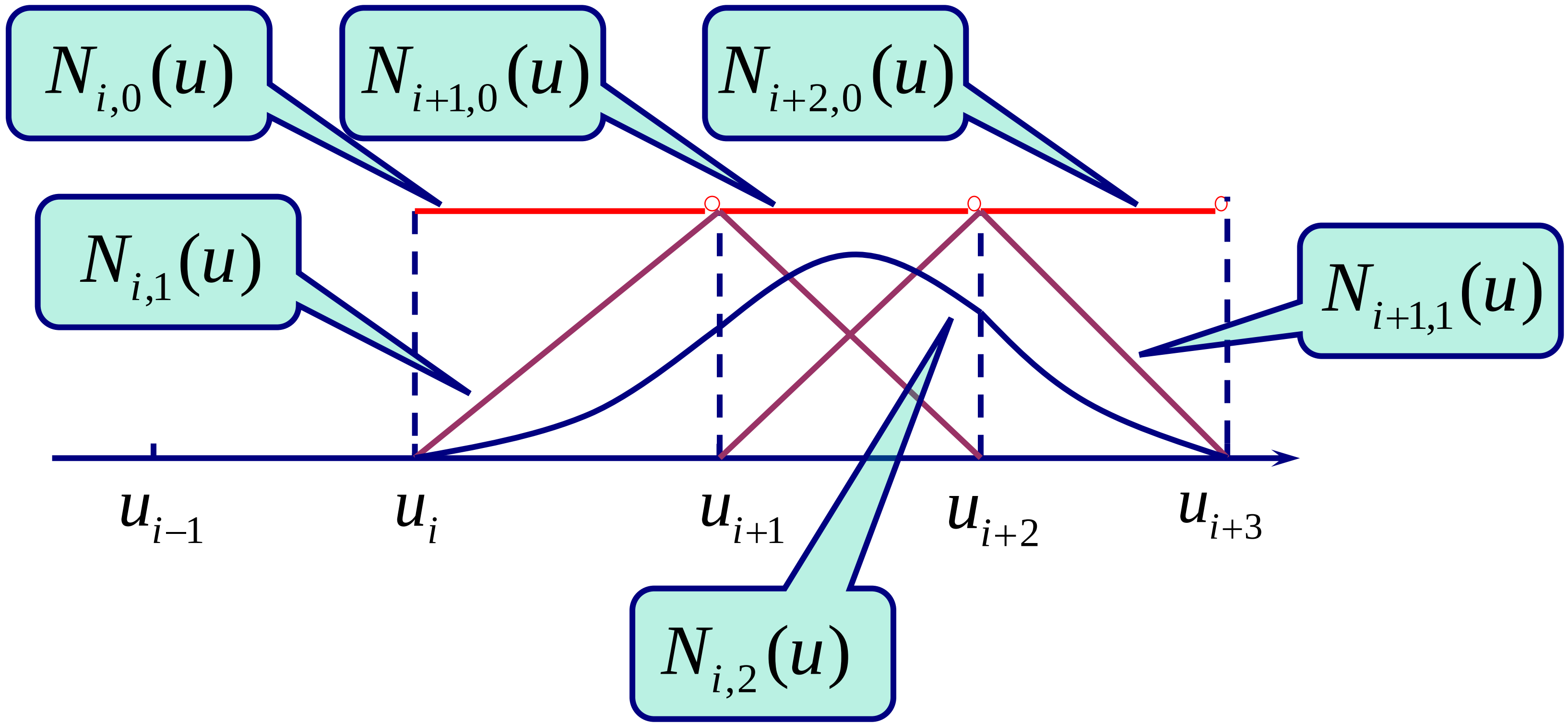
一次B样条基函数

也称为山形函数

3）二次B样条基函数

$$N_{i,2}(u)=\begin{cases}\dfrac{(u-u_i)^2}{(u_{i+1}-u_i)(u_{i+2}-u_i)} & u_i\le u<u_{i+1}\\[2ex] \dfrac{(u-u_i)(u_{i+2}-u)}{(u_{i+1}-u_{i+1})(u_{i+2}-u_i)}+\dfrac{(u_{i+3}-u)(u-u_{i+1})}{(u_{i+3}-u_{i+1})(u_{i+2}-u_{i+1})} & u_{i+1}\le u<u_{i+2}\\[2ex] \dfrac{(u_{i+3}-u)^2}{(u_{i+3}-u_{i+1})(u_{i+3}-u_{i+2})} & u_{i+2}\le u<u_{i+3}\\[2ex] 0 & \text{其它}\end{cases}$$

第一节 基本概念



二次B样条基函数的图形

第一节　基本概念

实例1：U=[0, 0, 0, 1, 1, 1]时B样条基函数的递推过程

$$N_{0,0}=\begin{cases}1 & u_0\le u<u_1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$N_{1,0}=\begin{cases}1 & u_1\le u<u_2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$N_{0,1}=\frac{(u-u_0)N_{0,0}}{u_1-u_0}+\frac{(u_2-u)N_{1,0}}{u_2-u_1}=\frac{uN_{0,0}}{0}+\frac{(-u)N_{1,0}}{0}=0$$

$$N_{2,0}=\begin{cases}1 & u_2\le u<u_3\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$N_{1,1}=\frac{(u-u_1)N_{1,0}}{u_2-u_1}+\frac{(u_3-u)N_{2,0}}{u_3-u_2}=\frac{uN_{1,0}}{0}+\frac{(1-u)N_{2,0}}{1}=(1-u)$$

$$N_{3,0}=\begin{cases}1 & u_3\le u<u_4\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$N_{2,1}=\frac{(u-u_2)N_{2,0}}{u_3-u_2}+\frac{(u_4-u)N_{3,0}}{u_4-u_3}=\frac{uN_{2,0}}{1}+\frac{(1-u)N_{3,0}}{0}=u$$

$$N_{3,1}=\frac{(u-u_3)N_{3,0}}{u_4-u_3}+\frac{(u_5-u)N_{4,0}}{u_5-u_4}=\frac{(u-1)N_{3,0}}{0}+\frac{(1-u)N_{4,0}}{0}=0$$

$$N_{4,0}=\begin{cases}1 & u_4\le u<u_5\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

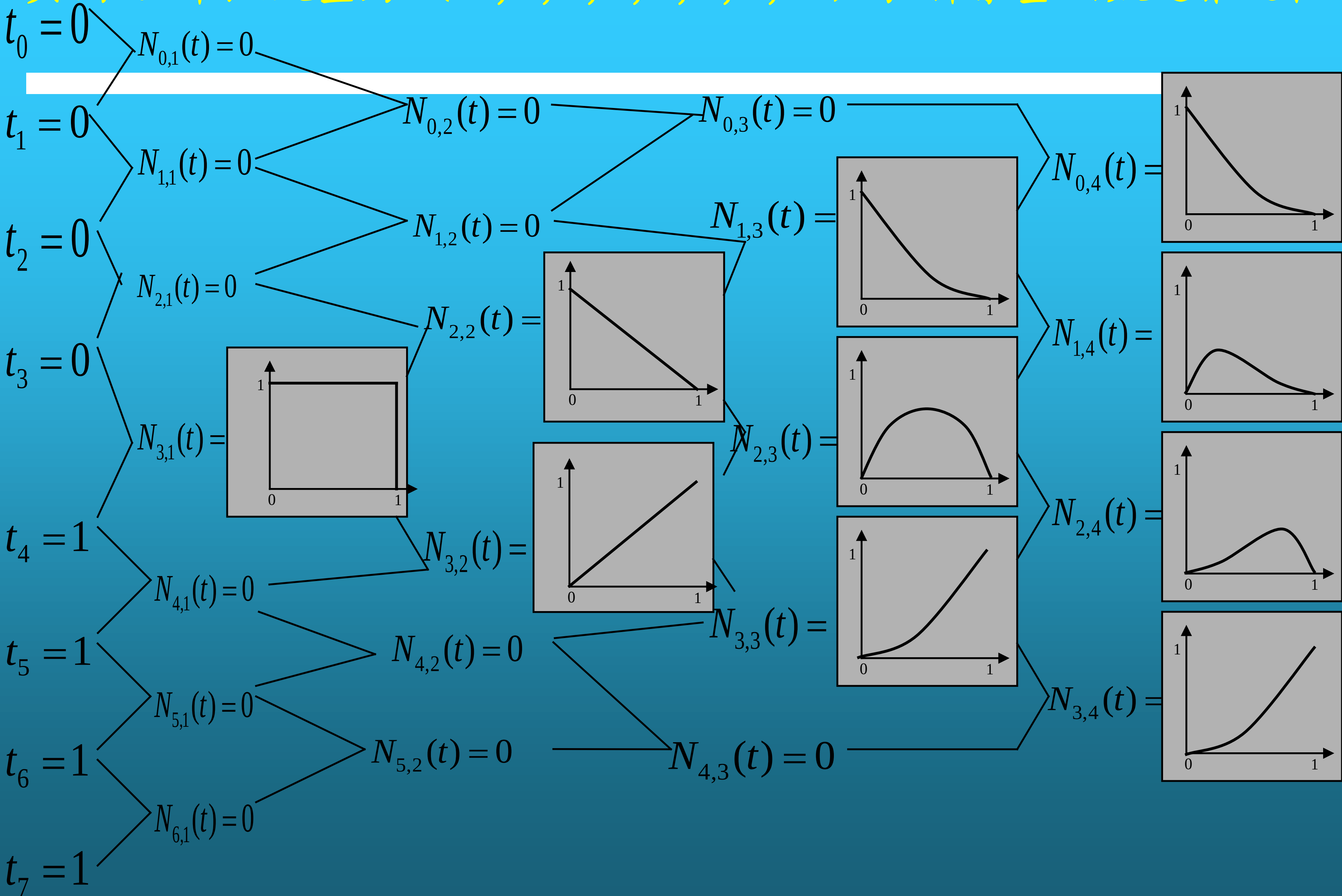
实例1：U=[0, 0, 0, 1, 1, 1]时B样条基函数的递推过程

$$N_{0,2}=\frac{(u-u_0)N_{0,1}}{u_2-u_0}+\frac{(u_3-u)N_{1,1}}{u_3-u_1}=\frac{uN_{0,1}}{0}+\frac{(1-u)N_{1,1}}{1}=(1-u)^2$$

$$N_{1,2}=\frac{(u-u_1)N_{1,1}}{u_3-u_1}+\frac{(u_4-u)N_{2,1}}{u_4-u_2}=u(1-u)+(1-u)u=2u(1-u)$$

$$N_{2,2}=\frac{(u-u_2)N_{2,1}}{u_4-u_2}+\frac{(u_5-u)N_{3,1}}{u_5-u_3}=u^2$$

实例2：节点矢量为（0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1）的B样条基函数递推过程



第一节　基本概念

结论:

ⅰ）B样条基函数是在给定一个参数分割的基础上，定义在数轴上的一系列分段多项式函数。这些参数叫做**节点**它们构成的矢量称为**节点矢量**。

ⅱ）一个k次B样条基函数可以看作由两个k－1次，三个k－2次，…k＋1个零次B样条基函数递推而得。

ⅲ）一个k次B样条基函数在k＋1个节点区间内大于零（称为**局部支承性**）。

第一节　基本概念

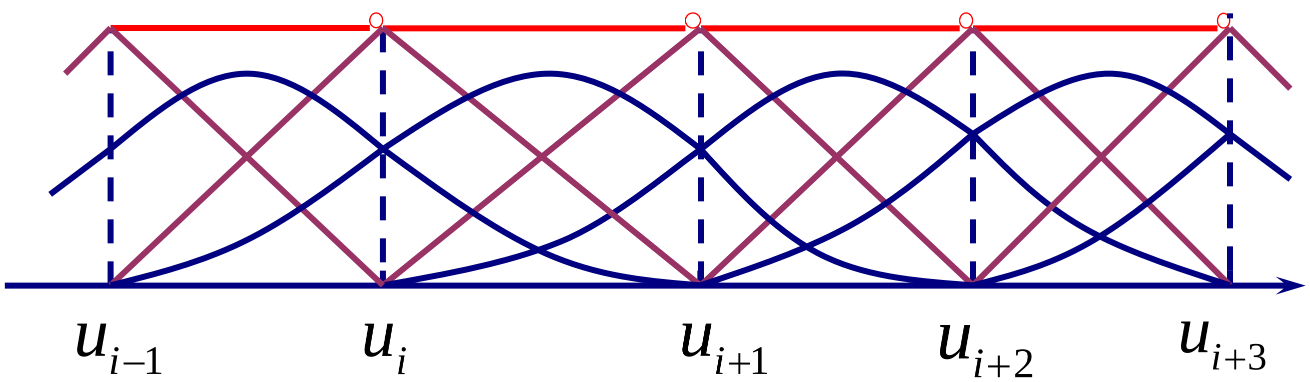
根据递推定义，可知：

$$N_{i,k}(u)\begin{cases}\geq 0 & \boxed{u\in[u_i,u_{i+k+1}]}\\ =0 & u\notin[u_i,u_{i+k+1}]\end{cases}$$

支承区间

即：第i个k次B样条基函数仅在u_i到u_{i+k+1}这k＋1个相邻节点区间内大于零，而在其余区间内均为零，这就是B样条基函数的局部支承性。

iv）在两个相邻节点构成的区间内，有k+1个k次B样条基函数大于零。



如图：在上图每个区间内都有一个零次B样条基、两个一次B样条基、三个二次B样条基大于零。

第一节　基本概念

v）第i个k次B样条基函数仅在u_i到u_{i+k+1}这k+1个区间内大于零，而在其余区间内均为零，这就是B样条基函数的**局部支承性**。

总结：B样条基函数的性质

i）递推性：即deBoor-Cox公式

ii）规范性：$\sum_i N_{i,k}(u) \equiv 1$

iii）局部支承性

第一节　基本概念

iv ）可微性

任一k次B样条基函数在节点区间内部都是无限次可微的，而在节点区间上是C^{k-r}连续的。这里的r是节点的重复度。

把顺序r个节点相重称为该节点具有重复度（multiplication）r，或称该节点为r重节点。

在本书中重复度＝出现次数＝重数。

第一节　基本概念

二、B样条曲线的方程及性质

1、B样条曲线的方程

$$\vec{p}(u)=\sum_{i=0}^{n}\vec{d}_i N_{i,k}(u) \quad u\in U: u_0\le u_1\le\cdots\le u_{n+k+1}$$

其中：u为变量，U为节点矢量，n+1为控制顶点个数。 k为曲线次数， $N_{i,k}$(u)为k次B样条基函数，d_i称为控制顶点（或deBoor点），它们顺序连接成的折线称为B样条控制多边形。

从B样条曲线的方程可以看出，曲线的次数与控制顶点的个数无关，这是与Bezier曲线的不同之处。

2、B样条曲线的局部支承性

因为B样条基函数是一个多项式样条函数，所以在节点矢量内部的每个节点区间内的每一段曲线并不是由所有的控制顶点确定的。

另一方面，移动、增加或删除一个控制顶点也不会影响整条曲线的形状，而只会影响一段曲线。

第一节　基本概念

因为在相邻节点确定的区间$[u_i, u_{i+1}]$中，非零的k次B样条基函数只有k+1个，它们是：$N_{j,k}, j = i-k, i-k+1, \cdots i.$

所以，对于$[u_i, u_{i+k+1}]$这一节点曲线内的曲线段，对它的形状有影响的控制顶点也只有k+1个，它们是$\vec{d}_j, j = i-k, \cdots i$

所以，B样条曲线的分段表示式为：

$$\vec{p}(u) = \sum_{j=i-k}^{i} \vec{d}_j N_{j,k}(u) \qquad u \in [u_i, u_{i+1}]$$

第一节　基本概念

因此，最前面的k+1个控制顶点： $\vec{d}_0,\vec{d}_1,\cdots\vec{d}_k$

影响的曲线段定义在节点区间 $[u_k,u_{k+1}]$内

同理，最后面的k+1个控制顶点: $\vec{d}_{n-k},\vec{d}_{n-k+1},\cdots\vec{d}_n$

影响的曲线段定义在节点区间 $[u_n,u_{n+1}]$内

所以，B样条曲线的分段表示式为:

$$\vec{p}(u)=\sum_{j=i-k}^{i}\vec{d}_j N_{j,k}(u) \qquad u\in[u_i,u_{i+1}],\ i=k,k+1,\cdots n$$

区间$[u_k,u_{n+1}]$称为B样条曲线的定义域。

第一节　基本概念

由B样条曲线的定义域:$[u_k, u_{n+1}]$可知，如果定义域内节点的重复度都是1(即无重复节点），则B样条曲线共有n－k＋1段, 每一段都是k次多项式参数曲线。

另一方面，从B样条曲线的分段表示式可以看出:
单一的一个控制顶点 $\vec{d}_i$

如果它是定义一段曲线段的第一个控制顶点,

这段曲线定义的区间为:$[u_{i+k}, u_{i+k+1}]$

如果它是定义一段曲线段的最后一个控制顶点,

这段曲线定义的区间为:$[u_i, u_{i+1}]$

第一节　基本概念

所以，移动一个控制顶点 $\vec{d}_i$

它至多影响定义在区间$[u_i,u_{i+k+1}]$内这k+1段曲线。

当然，这个区间必须包含在曲线的定义域内。

总结：B样条曲线的局部支承性

1）当$u\in[u_i,u_{i+1}]$时，k次B样条曲线至多与$\vec{d}_j, j=i-k,\cdots i$这k+1个顶点有关，而与其它控制顶点无关，这是与Bezier曲线不同的地方。

第一节　基本概念

2）移动控制顶点$\vec{d}_i$,它仅影响定义在区间$[u_i, u_{i+k+1}]$上的k+1段曲线，而不会影响其它曲线段的形状。

3）在不含重节点的情况下，B样条曲线共有n－k＋1段，增加或减少一个控制顶点，也相应的增加或减少一段曲线段。

举例:

给定控制顶点$\vec{d}_i, i=0,1,\cdots 8$,定义了一条三次B样条曲线:

$$\vec{p}(u)=\sum_{i=0}^{8}\vec{d}_i N_{i,3}(u) \quad u\in U$$

回答以下问题:

（1）节点矢量是什么?

$$U=[u_0,u_{n+k+1}]=[u_0,u_{8+3+1}]=[u_0,u_{12}]$$

第一节　基本概念

（2）定义域是什么？

$$u \in [u_k, u_{n+1}] = [u_3, u_9]$$

（3）不含重节点时，曲线共有多少段？

共有$n-k+1=8-3+1=6$段

（4）$u\in[u_6,u_7]$时，这段曲线由哪些控制顶点定义？

这段曲线由$\begin{bmatrix}\vec{d}_{i-k} & \vec{d}_{i-k+1} & \cdots & \vec{d}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{d}_3 & \vec{d}_4 & \vec{d}_5 & \vec{d}_6\end{bmatrix}$定义。

（5）移动控制顶点$\vec{d}_3$, 将影响哪些段曲线的形状？

将影响定义在$\left[u_i, u_{i+k+1}\right]=\left[u_3, u_7\right]\subset\left[u_3, u_9\right]$上的曲线段。

（6）移动控制顶点$\vec{d}_7$, 将影响哪些段曲线的形状？

将影响定义在$\left[u_7, u_9\right]$上的曲线段。（$\because [u_9, u_{11}]$在定义域外）

第一节　基本概念

3、B样条曲线的其它性质

(1) 可微性：在每一段的内部，曲线是C^{∞}的，但在节点处是C^{k-r}的，r为该节点的重复度。

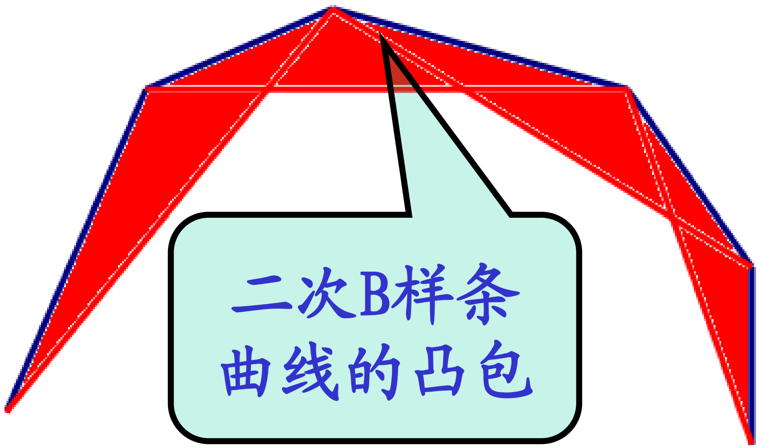
(2) 仿射不变性

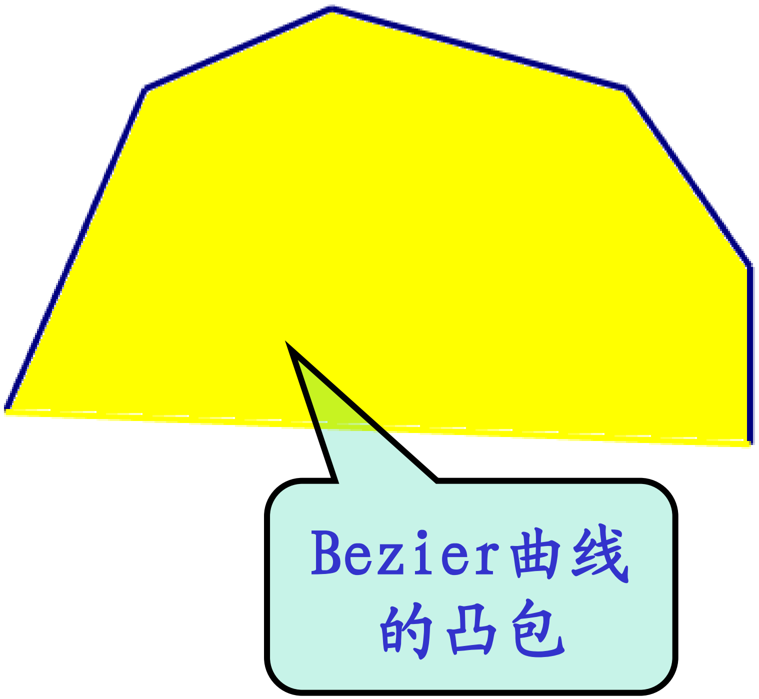
(3) 变差缩减性

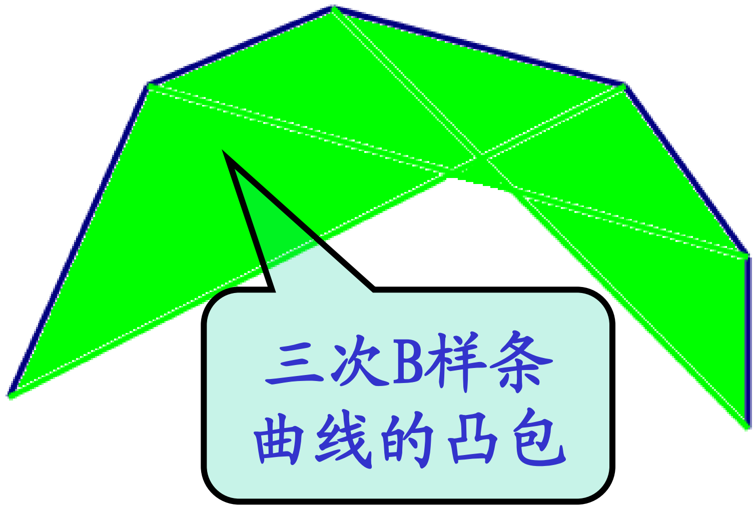
(4) 磨光性质：B样条曲线的次数越高，曲线离控制顶点越远，曲线的越光滑。

第一节 基本概念

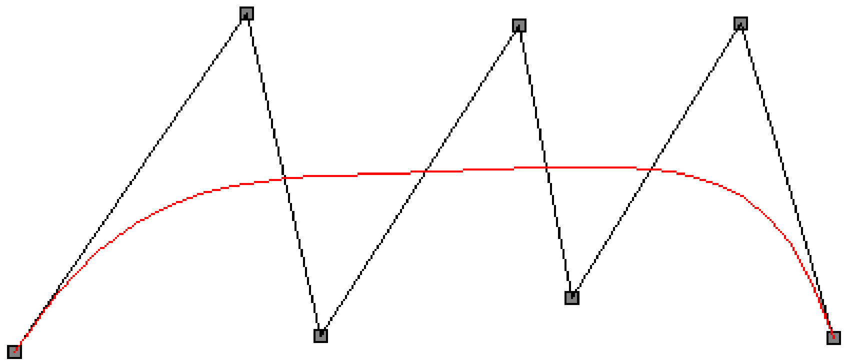
(5) 比Bezier曲线更强的凸包性



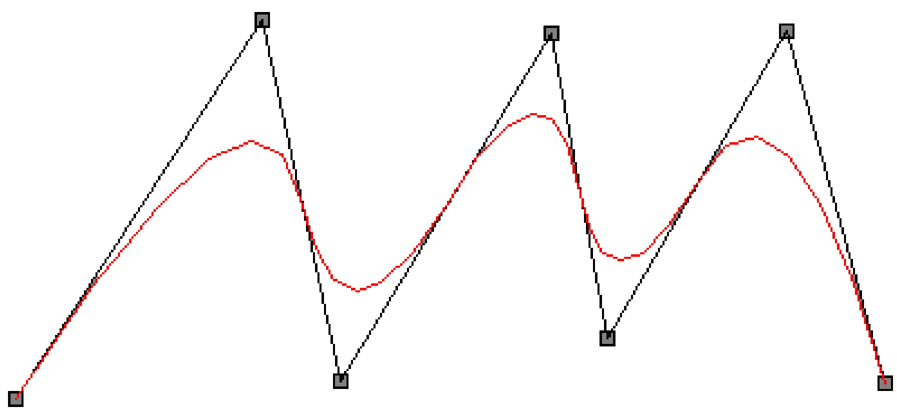




第一节　基本概念



Bezier曲线



三次B样条曲线

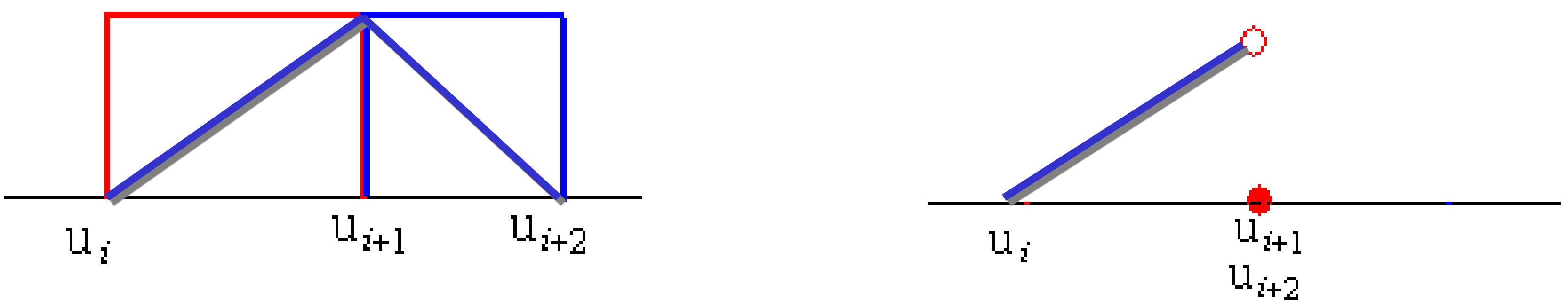
同一控制多边形定义的Bezier曲线和B样条曲线相比，B样条曲线离控制多边形的距离更近，更接近控制多边形的形状。

第一节　基本概念

三、重节点对B样条曲线的影响

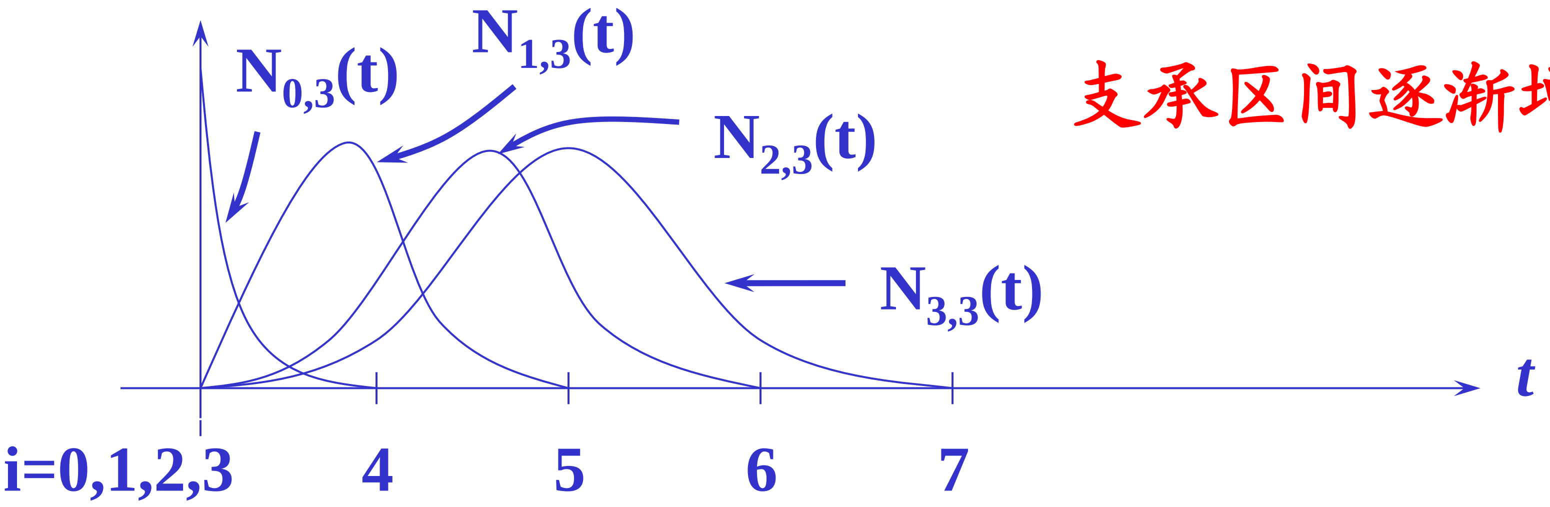
1、重节点对B样条基函数的影响

举例



一重节点时C^0连续　　　　二重节点时出现间断

第一节　基本概念



支承区间逐渐增大！

$N_{0,3}$ is totally discontinuous at $t = t_0$ （间断）

$N_{1,3}$ is position continuous,(c^0)

$N_{2,3}$ is gradient continuous,(c^1)

$N_{3,3}$ is curvature continuous.(c^2)

第一节　基本概念

举例

当$u_0=u_1=u_2$时

$$N_{0,2}(u)=\begin{cases}0 & u\notin[u_2,u_3]\\ \dfrac{(u_3-u)^2}{(u_3-u_0)^2} & u\in[u_2,u_3]\end{cases}$$

三重节点，非零节点区间从正常时的3个减少到1个，在三重节点处函数的连续性降为：间断

$$N_{1,2}(u)=\begin{cases}\dfrac{(u_4-u)^2}{(u_4-u_1)(u_3-u_1)^2}-\dfrac{(u_4-u_2)(u_3-u)^2}{(u_4-u_3)(u_3-u_2)^2} & u\in[u_2,u_3]\\ \dfrac{(u_4-u)^2}{(u_4-u_1)(u_3-u_1)^2} & u\in[u_3,u_4]\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

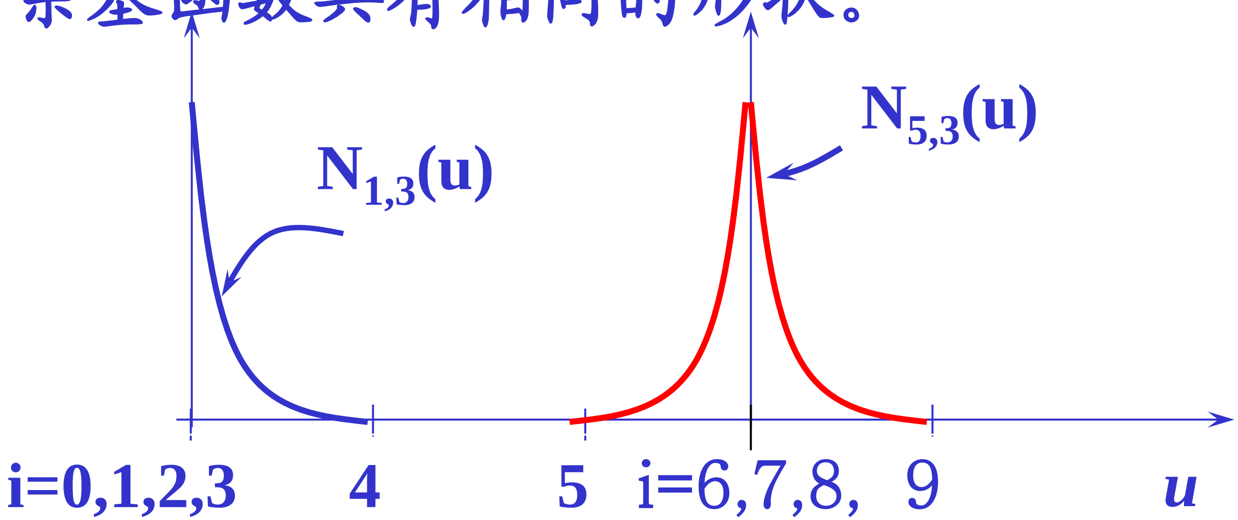
二重节点，非零节点区间从正常时的3个减少到2个，在三重节点处函数的连续性降为：C^1

第一节　基本概念

总结：重节点对B样条基函数的影响

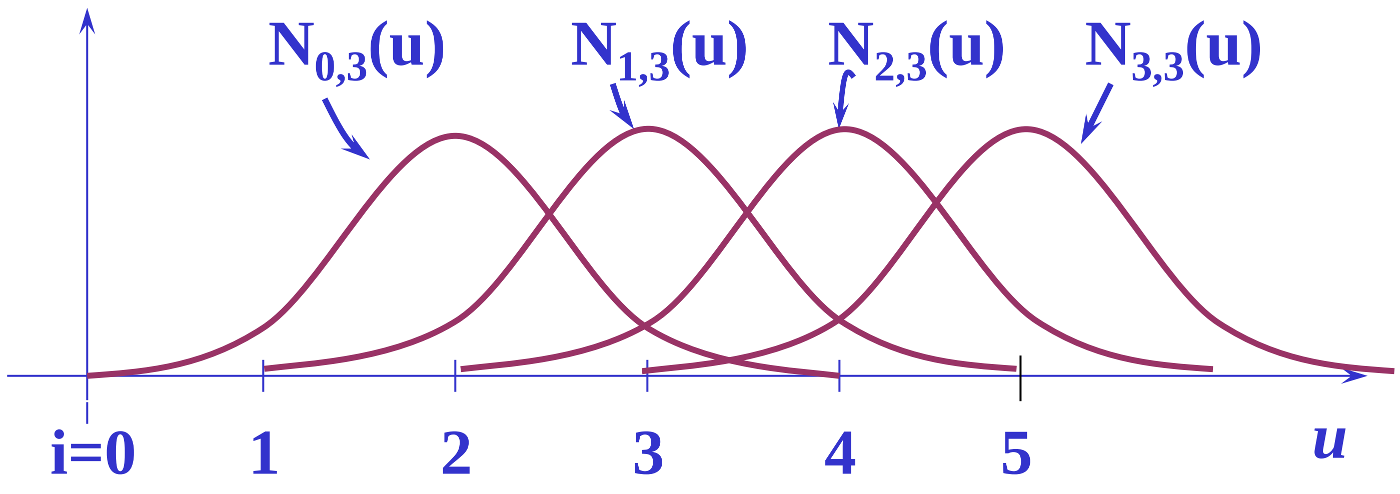
➢节点区间的重复度每增加1，B样条基函数的支承区间中就减少一个非零节点区间，B样条基函数在该重节点处的可微性就降一阶。

➢非零节点区间长度相等时，以k重内节点为界，k次B样条基函数左右两支分别与左右端节点为k+1重的k次B样条基函数具有相同的形状。



总结：重节点对B样条基函数的影响

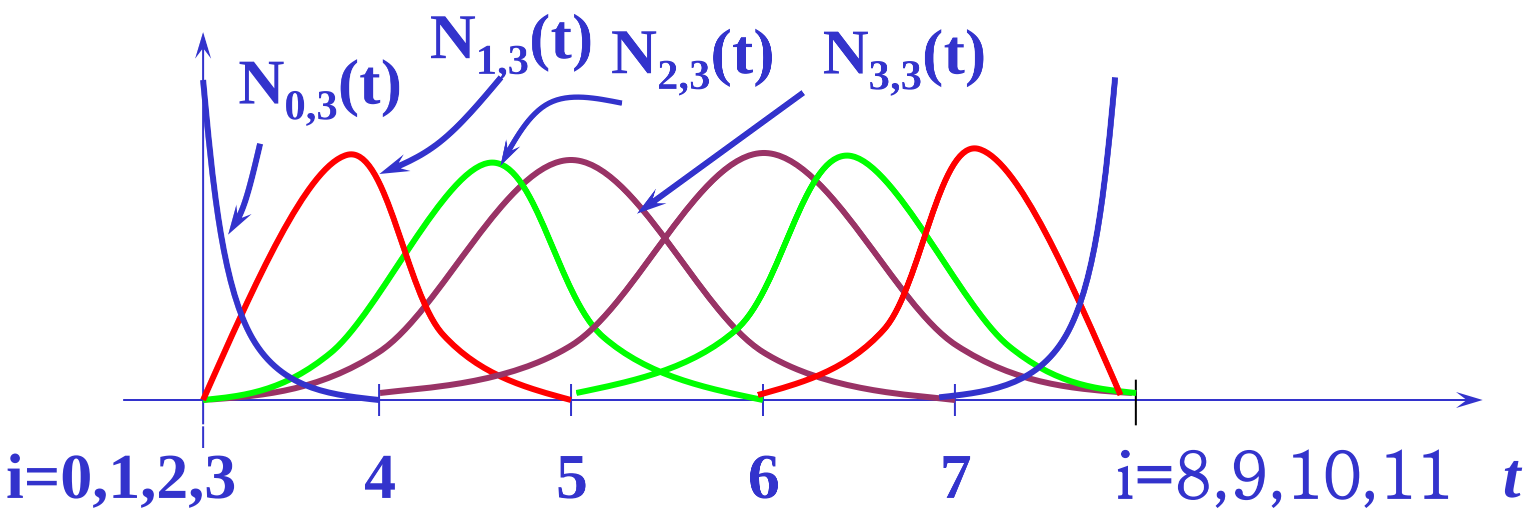
➢均匀B样条基函数（定义在所有相邻节点区间长度都相等的节点矢量上的B样条基函数）在其相应的支承区间上具有相同的形状。



第一节　基本概念

总结：重节点对B样条基函数的影响

➢内节点均匀分布，端节点具有k＋1重的B样条基函数称为**准均匀B样条基函数**，定义在这样节点矢量上的k次准均匀B样条基函数在左右端节点内侧各k－1个非零区间内将称为异于均匀基的非均匀基。



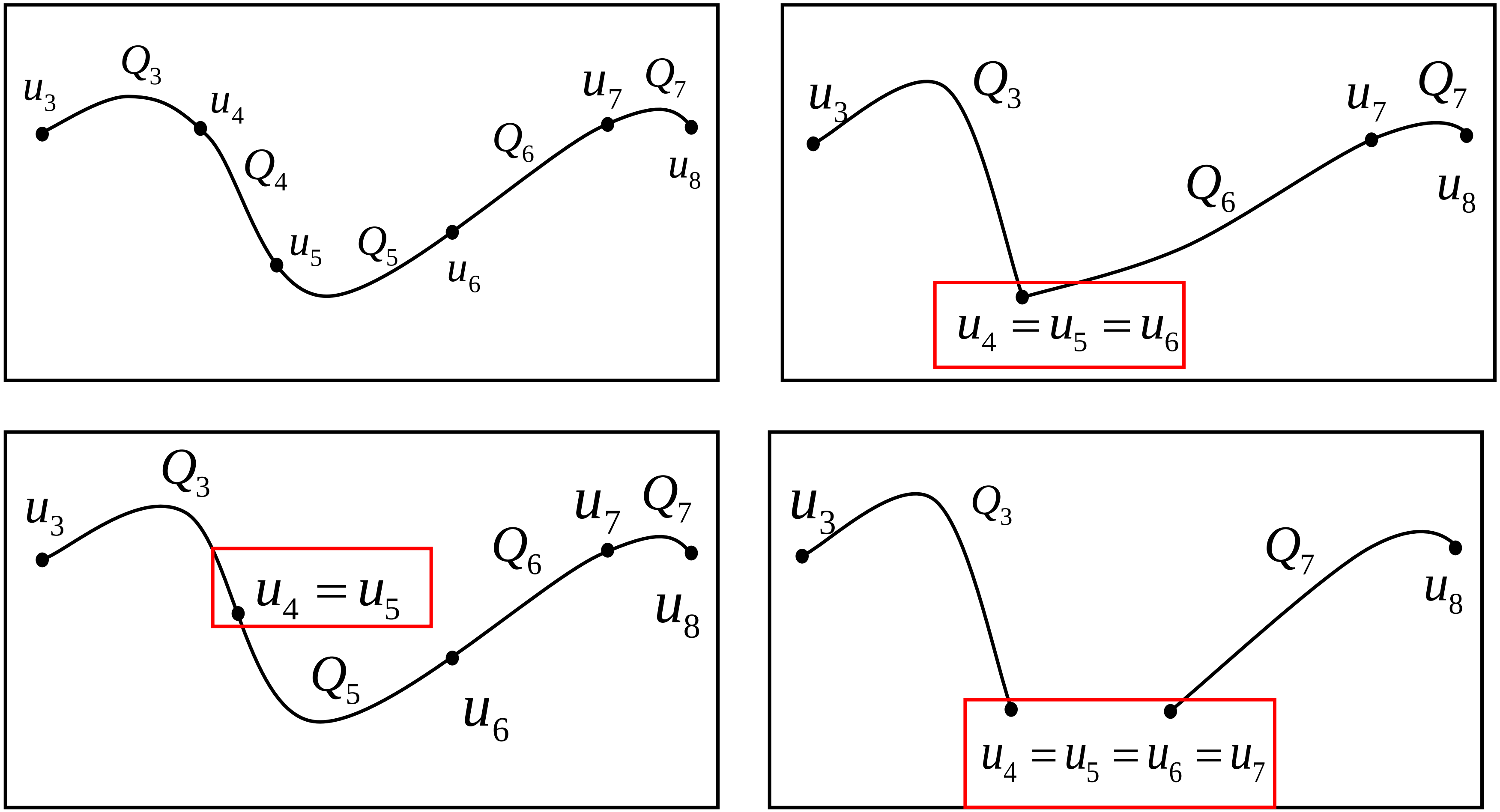
总结：重节点对B样条基函数的影响

由节点矢量$U=\left[\underbrace{0,0,\cdots 0}_{k+1个}\quad,\quad\underbrace{1,\ 1,\cdots 1}_{k+1个}\right]$定义的k次B样条基函数就是k次Bernstein基函数。

第一节　基本概念

2、重节点对B样条曲线的影响

举例



第一节　基本概念

总结：重节点对B样条曲线的影响

- 在B样条曲线定义域内的节点重复度每增加1，B样条曲线段数就减1，B样条曲线在该重节点处的参数连续性就降一阶。

- 当端节点的重复度为k时，k+1次B样条曲线的端点就分别与第一个和最后一个控制顶点重合，并在端点处与控制多边形的第一条边和最后一条边相切。

- 当端节点的重复度为k＋1时，k次B样条曲线就具有和k次Bezier曲线相同的端点几何性质。

第一节　基本概念

总结：重节点对B样条曲线的影响

➢k次B样条曲线若在定义域内相邻的两节点都具有重复度k，就可以生成定义在该节点区间上那段B样条曲线的Bezier点。

端节点重复度为k+1的k次B样条曲线仅有一个非零区间，这时节点矢量$U=\left[\underbrace{0,0,\cdots 0}_{k+1个}\ ,\ \underbrace{1,\ 1,\cdots 1}_{k+1个}\right]$，它定义的k次B样条曲线就是k次Bezier曲线，可见B样条曲线是对Bezier曲线的推广。

第一节
结束

第二节　B样条曲线的分类

一、零次与一次B样条曲线

1、零次B样条曲线

因为零次B样条基函数为:

$$N_{i,0}(u)=\begin{cases}1 & u_i \le u < u_{i+1} \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

所以，对于给定的控制顶点$\vec{d}_i, i=0,1,\cdots n,$ 节点矢量为:

$$\mathrm{U}=\begin{bmatrix}u_0 & u_1 & \cdots & u_{n+1}\end{bmatrix}$$

零次B样条曲线为:

$$\vec{p}(u)=\vec{d}_i \quad u\in\left[u_i,u_{i+1}\right] i=0,1,\cdots n$$

2、一次B样条曲线

因为一次B样条基函数为：

$$N_{i,1}(u)=\begin{cases}\dfrac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i} & u_i\le u<u_{i+1}\\ \dfrac{u_{i+2}-u}{u_{i+2}-u_{i+1}} & u_{i+1}\le u<u_{i+2}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

所以，对于给定的控制顶点$\vec{d}_i$, $i=0,1,\cdots n$, 节点矢量为：

$$U=\begin{bmatrix}u_0 & u_1 & \cdots & u_{n+2}\end{bmatrix}$$

一次B样条曲线为：

$$\vec{p}(u)=\frac{u_{i+1}-u}{u_{i+1}-u_i}\vec{d}_{i-1}+\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}\vec{d}_i \quad u\in[u_i,u_{i+1}]\, i=1,2,\cdots n$$

一、零次与一次B样条曲线

总结：

- 零次B样条曲线为孤立的控制顶点。
- 如果定义域内的节点是严格递增序列，一次B样条曲线就是控制多边形。
- 实际上，零次与一次B样条曲线的图形与节点矢量的选取是无关的。

二、B样条曲线的分类

高于一次的B样条曲线与节点矢量的情况有很大的关系，所以，根据节点矢量的情况将B样条曲线分为以下四类：

（1）均匀B样条曲线

$$\Delta_i : u_{i+1} - u_i = \text{常数} > 0,\ i = 0, 1, \cdots n + k$$

（2）准均匀B样条曲线

对于k次曲线，要求：

$u_0 = u_1 = \cdots u_k, u_{n+1} = u_{n+2} = \cdots u_{n+k+1}$(即端节点k+1重）

内部节点均匀分布，而且重复度为1。

二、B样条曲线的分类

（3）分段Bezier曲线

对于k次曲线，要求：

$u_0 = u_1 = \cdots u_k, u_{n+1} = u_{n+2} = \cdots u_{n+k+1}$(即端节点k+1重）

内部节点重复度都为k。

（4）一般非均匀B样条曲线

对于k次曲线，要求：

端节点重复度≤k+1，内部节点重复度≤k。

三、二次均匀B样条曲线

为了方便起见，k次均匀B样条曲线的节点矢量取为：

$$\mathrm{U}=[u_0,u_1,\cdots u_{n+k+1}]=[-k,1-k,\cdots n+1]$$

其相应的定义域为：

$$u\in\left[u_k,u_{n+1}\right]=[0,n-k+1]$$

上述节点矢量上任一节点区间上的B样条基函数可以由另一节点区间上的B样条基函数平移得到。

三、二次均匀B样条曲线

因此，均匀B样条基函数的整体参数u可以与局部参数t之间互相进行转换，即：

$$u = u(t) = u_i + t$$

$$t = t(u) = u - u_i \quad u \in [u_i, u_{i+1}] \quad i = k, k+1, \cdots n$$

节点区间$[u_i, u_{i+1}]$上k+1个k次非零的规范B样条基函数$N_{i-k,k}(u)$, $\cdots$, $N_{i,k}(u)$经过上述参数变换后可以变为局部参数下的形式：

$$f_{j,k}(t) = N_{i-k+j,k}(u(t)), \quad t \in [0,1] \quad j = 0,1,\cdots k$$

$$f_{j,k}(t) = \frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k-j}(-1)^l C_{k+1}^l (k-j-l+t)^k \quad t \in [0,1]$$

三、二次均匀B样条曲线

1、二次均匀B样条基函数及曲线方程

局部参数下二次均匀B样条基函数的表达式为：

$$\begin{cases} N_{0,2}(t) = \dfrac{1}{2}(1-t)^2 \\ N_{1,2}(t) = \dfrac{1}{2}(1+2t-2t^2) \\ N_{2,2}(t) = \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

可以验证：

$$N_{0,2}(t) = N_{2,2}(1-t)$$

$$N_{1,2}(t) = N_{1,2}(1-t)$$

三、二次均匀B样条曲线

给定的控制顶点$\vec{d}_i, i=0,1,\cdots n$.二次均匀B样条曲线分段表示为:

$$\vec{s}_l(t)=\sum_{j=0}^{2}N_{j,2}(t)\vec{d}_{l+j} \quad t\in[0,1] \quad l=0,1,\cdots n-2$$

根据二次均匀B样条基函数的表达式，曲线的矩阵表达式为:

$$\vec{s}_l(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & t & t^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{d}_l\\ \vec{d}_{l+1}\\ \vec{d}_{l+2}\end{bmatrix} \quad l=0,1,\cdots n-2;t\in[0,1]$$

三、二次均匀B样条曲线

2、二次均匀B样条曲线的几何特征

将t = 0和t = 1分别代入上述分段表达式得:

$$\vec{s}_l(0)=\frac{1}{2}\left(\vec{d}_l+\vec{d}_{l+1}\right)=\vec{s}_{l-1}(1)$$

控制多边形每条边的中点

对曲线方程求导，得:

$$\vec{s}_l'(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{d}_l\\ \vec{d}_{l+1}\\ \vec{d}_{l+2}\end{bmatrix}\quad l=0,1,\cdots n-2;t\in[0,1]$$

三、二次均匀B样条曲线

将t = 0和t = 1分别代入上式得:

$$\vec{s}_l'(0)=\vec{d}_{l+1}-\vec{d}_l$$

控制多边形的相应边

$$\vec{s}_l'(1)=\vec{d}_{l+2}-\vec{d}_{l+1}$$

继续求导得:

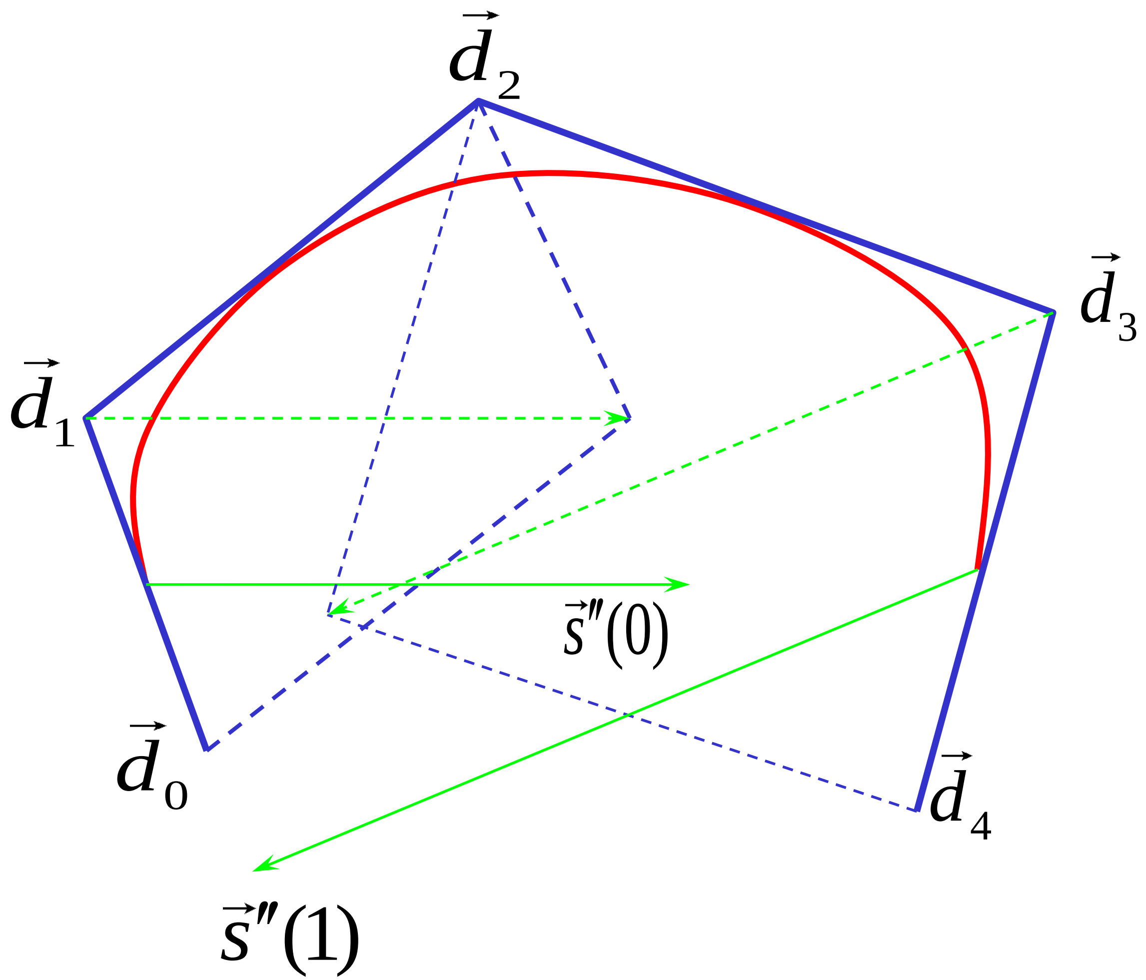
$$\vec{s}_l''(0)=\vec{s}_l''(1)=\vec{d}_{l+2}-2\vec{d}_{l+1}+\vec{d}_l$$

$$=(\vec{d}_{l+2}-\vec{d}_{l+1})-(\vec{d}_{l+1}-\vec{d}_l)$$

控制多边形相邻两条边构成的平行四边形对角线

三、二次均匀B样条曲线

二次均匀B样条曲线的图形



三、二次均匀B样条曲线

综上所述，二次均匀B样条曲线段的几何特征为：

（1）曲线首末端点通过控制多边形相应边的的中点。

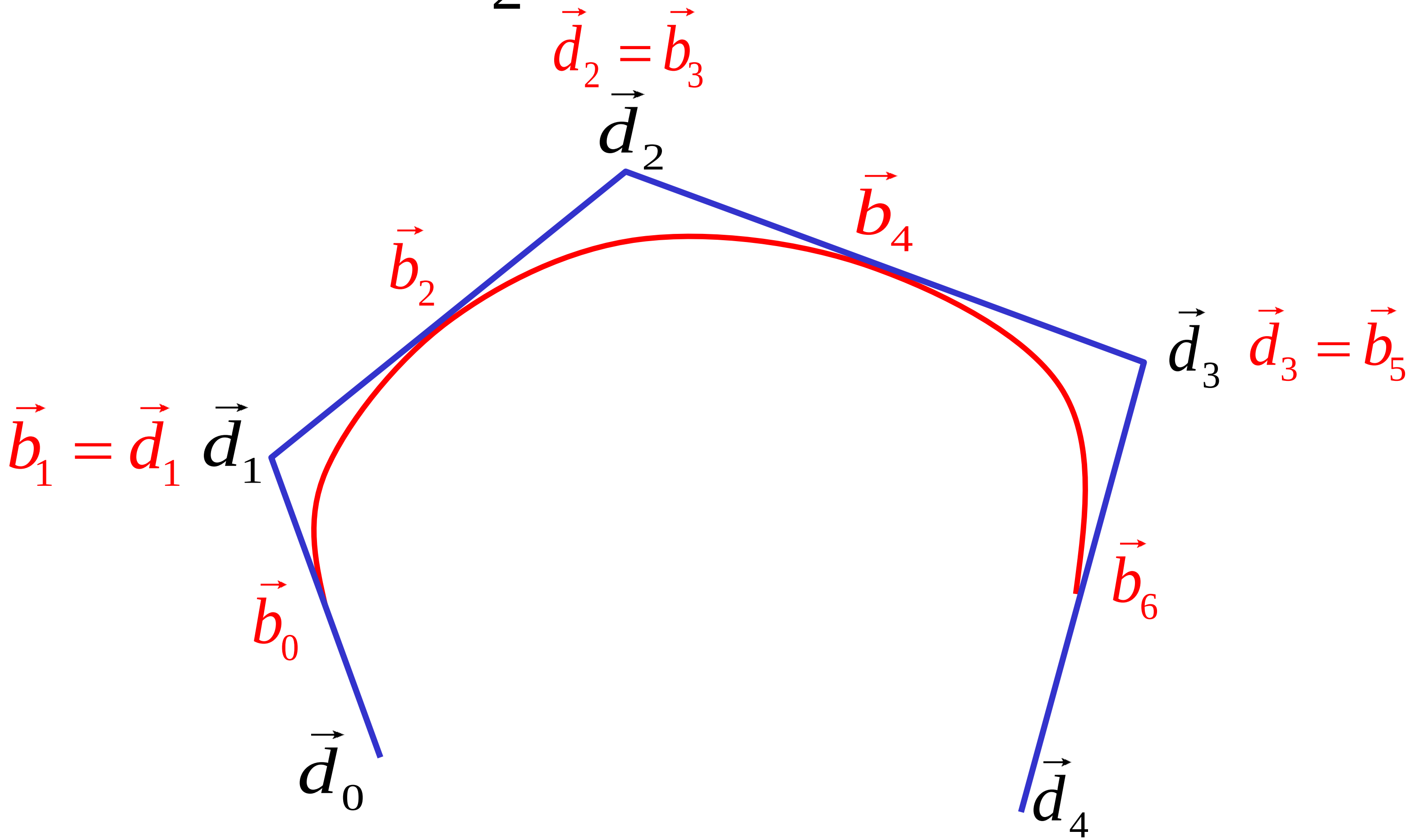
（2）曲线首末端点与控制多边形相应边相切，切矢的模为控制多边形相应边的边长。

（3）每一段二次均匀B样条曲线都可以表示成二次Bezier曲线，即：

$$\vec{s}_l(t)=\sum_{i=0}^{2}\vec{b}_{2l+i}B_{i,2}(t)\quad t\in[0,1]\quad l=0,1,\cdots n-2$$

三、二次均匀B样条曲线

其中： $\vec{b}_{2l} = \vec{s}_l(0) = \frac{1}{2}(\vec{d}_l + \vec{d}_{l+1})$ $\vec{b}_{2l+1} = \vec{d}_{l+1}$



四、三次均匀B样条曲线

1、三次均匀B样条基函数及曲线方程

局部参数下三次均匀B样条基函数的表达式为:

$$
\begin{cases}
N_{0,3}(t) = \dfrac{1}{6}(1-t)^3 \\
N_{1,3}(t) = \dfrac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4) \\
N_{2,3}(t) = \dfrac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) \\
N_{3,3}(t) = \dfrac{1}{6}t^3
\end{cases}
\qquad t \in [0,1]
$$

四、三次均匀B样条曲线

给定的控制顶点$\vec{d}_i, i = 0,1,\cdots n$.三次均匀B样条曲线分段表示为:

$$\vec{s}_l(t) = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(t)\vec{d}_{l+j} \quad t \in [0,1] \quad l = 0,1,\cdots n-3$$

根据三次均匀B样条基函数的表达式，曲线的矩阵表达式为:

$$\vec{s}_l(t) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{d}_l \\ \vec{d}_{l+1} \\ \vec{d}_{l+2} \\ \vec{d}_{l+3} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} l = 0,1,\cdots n-3 \\ t \in [0,1] \end{matrix}$$

四、三次均匀B样条曲线

2、三次均匀B样条曲线的几何特征

将t = 0和t = 1分别代入上述分段表达式得:

$$\vec{s}_l(0)=\frac{1}{6}\left(\vec{d}_l+4\vec{d}_{l+1}+\vec{d}_{l+2}\right)=\vec{s}_{l-1}(1)$$

$$=\vec{d}_{l+1}+\frac{1}{6}\left[\left(\vec{d}_l-\vec{d}_{l+1}\right)+\left(\vec{d}_{l+2}-\vec{d}_{l+1}\right)\right]$$

$$\vec{s}_l(1)=\frac{1}{6}\left(\vec{d}_{l+1}+4\vec{d}_{l+2}+\vec{d}_{l+3}\right)=\vec{s}_{l+1}(0)$$

$$=\vec{d}_{l+2}+\frac{1}{6}\left[\left(\vec{d}_{l+1}-\vec{d}_{l+2}\right)+\left(\vec{d}_{l+3}-\vec{d}_{l+2}\right)\right]$$

四、三次均匀B样条曲线

对曲线方程求导，得：

$$\vec{s}_l'(t)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2t & 3t^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\-3 & 0 & 3 & 0\\3 & -6 & 3 & 0\\-1 & 3 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{d}_l\\\vec{d}_{l+1}\\\vec{d}_{l+2}\\\vec{d}_{l+3}\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}l=0,1,\cdots n-3\\t\in[0,1]\end{matrix}$$

$$\vec{s}_l''(t)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 6t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\-3 & 0 & 3 & 0\\3 & -6 & 3 & 0\\-1 & 3 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{d}_l\\\vec{d}_{l+1}\\\vec{d}_{l+2}\\\vec{d}_{l+3}\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}l=0,1,\cdots n-3\\t\in[0,1]\end{matrix}$$

四、三次均匀B样条曲线

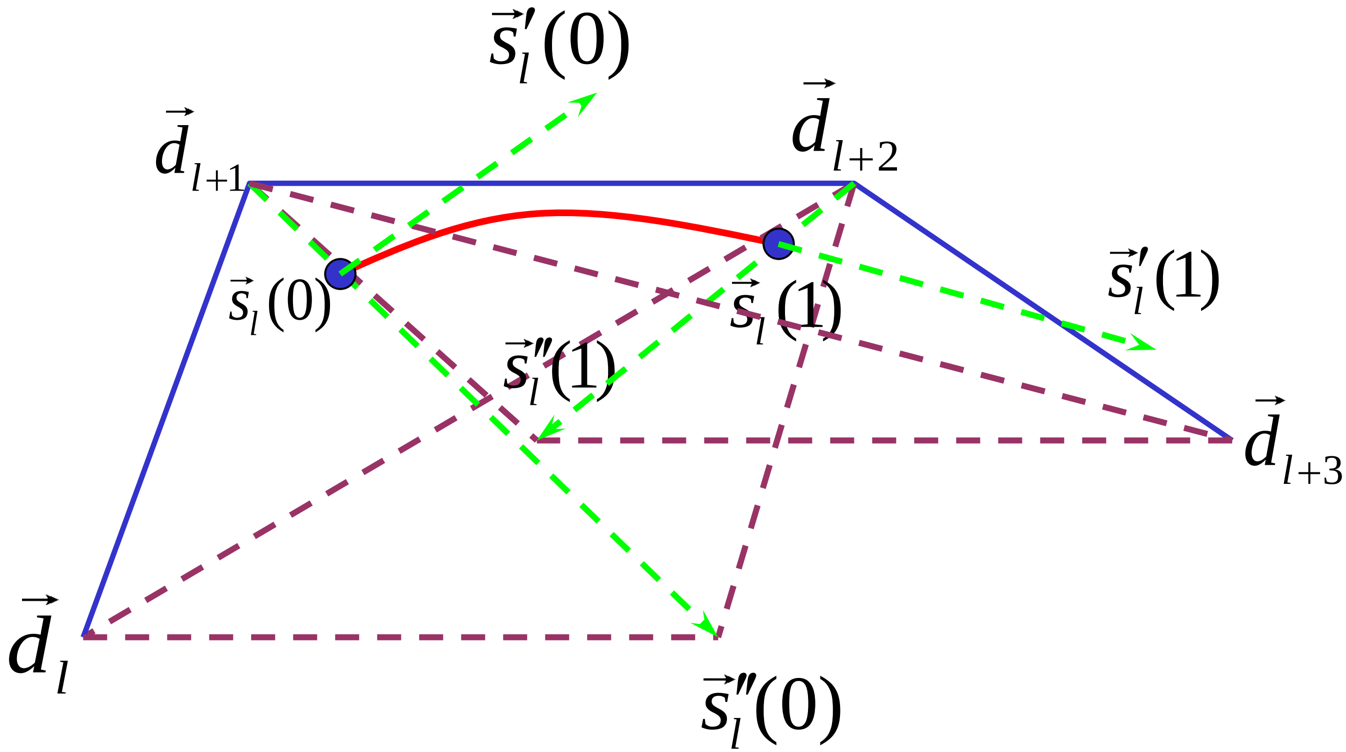
将t = 0和t = 1分别代入上两式，得:

$$\begin{cases} \vec{s}_l{}'(0) = \dfrac{1}{2}(\vec{d}_{l+2} - \vec{d}_l) \\ \vec{s}_l{}'(1) = \dfrac{1}{2}(\vec{d}_{l+3} - \vec{d}_{l+1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{s}_l{}''(0) = \vec{d}_l - 2\vec{d}_{l+1} + \vec{d}_{l+2} = (\vec{d}_l - \vec{d}_{l+1}) - (\vec{d}_{l+1} - \vec{d}_{l+2}) \\ \vec{s}_l{}''(1) = \vec{d}_{l+1} - 2\vec{d}_{l+2} + \vec{d}_{l+3} = (\vec{d}_{l+1} - \vec{d}_{l+2}) - (\vec{d}_{l+2} - \vec{d}_{l+3}) \end{cases}$$

四、三次均匀B样条曲线

三次均匀B样条曲线段的图形



四、三次均匀B样条曲线

三次均匀B样条曲线的分段Bezier形式

首先，三次B样条曲线段可以写成如下的Hermite形式：

$$\vec{s}_l(t)=\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 3 & -2 & -1\\ 2 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{s}_l(0)\\ \vec{s}_l(1)\\ \vec{s}_l'(0)\\ \vec{s}_l'(1)\end{bmatrix}\quad t\in[0,1]\quad (*)$$

根据Hermite插值曲线与三次Bezier曲线的关系，即：

四、三次均匀B样条曲线

$$\vec{b}_{3l} = \vec{s}_l(0) \quad \vec{b}_{3l+3} = \vec{s}_l(1)$$

$$\vec{b}_{3l+1} = \vec{s}_l(0) + \frac{1}{3}\vec{s}'(0) \quad \vec{b}_{3l+2} = \vec{s}_l(1) - \frac{1}{3}\vec{s}'(1)$$

将上式写成矩阵形式，有：

$$\begin{bmatrix} \vec{s}_l(0) \\ \vec{s}_l(1) \\ \vec{s}_l'(0) \\ \vec{s}_l'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_{3l} \\ \vec{b}_{3l+1} \\ \vec{b}_{3l+2} \\ \vec{b}_{3l+3} \end{bmatrix} \qquad (**)$$

四、三次均匀B样条曲线

将（**)代入（*)，得:

$$\vec{s}_l(t)=\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\-3 & 3 & -2 & -1\\2 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{s}_l(0)\\\vec{s}_l(1)\\\vec{s}_l'(0)\\\vec{s}_l'(1)\end{bmatrix}\quad t\in[0,1]$$

$$=\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\-3 & 3 & -2 & -1\\2 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\-3 & 3 & 0 & 0\\0 & 0 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{b}_{3l}\\\vec{b}_{3l+1}\\\vec{b}_{3l+2}\\\vec{b}_{3l+3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-3 & 3 & 0 & 0\\3 & -6 & 3 & 0\\-1 & 3 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{b}_{3l}\\\vec{b}_{3l+1}\\\vec{b}_{3l+2}\\\vec{b}_{3l+3}\end{bmatrix}$$

四、三次均匀B样条曲线

将其与B样条基下的表达式比较可得:

$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{b}_{3l} \\ \vec{b}_{3l+1} \\ \vec{b}_{3l+2} \\ \vec{b}_{3l+3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{d}_{l} \\ \vec{d}_{l+1} \\ \vec{d}_{l+2} \\ \vec{d}_{l+3} \end{bmatrix}$$

即:

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_{3l} \\ \vec{b}_{3l+1} \\ \vec{b}_{3l+2} \\ \vec{b}_{3l+3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{d}_{l} \\ \vec{d}_{l+1} \\ \vec{d}_{l+2} \\ \vec{d}_{l+3} \end{bmatrix}$$

分段Bezier形式为:

$$\vec{s}_l(t) = \sum_{i=0}^{3} \vec{b}_{3l+i} B_{i,3}(t)$$

$$t \in [0,1]$$

四、三次均匀B样条曲线

自学内容

二次、三次准均匀B样条曲线的几何特性

第二节

结束

第三节　非均匀 B样条曲线

一、B样条基函数及其导数的计算

1、B样条基函数的计算

在区间$[u_i, u_{i+1}]$上有k+1个非零k次B样条基函数：

$$N_{i-k,k}(u), N_{i-k+1,k}(u), \cdots, N_{i,k}(u)$$

参与确定它们的节点有：

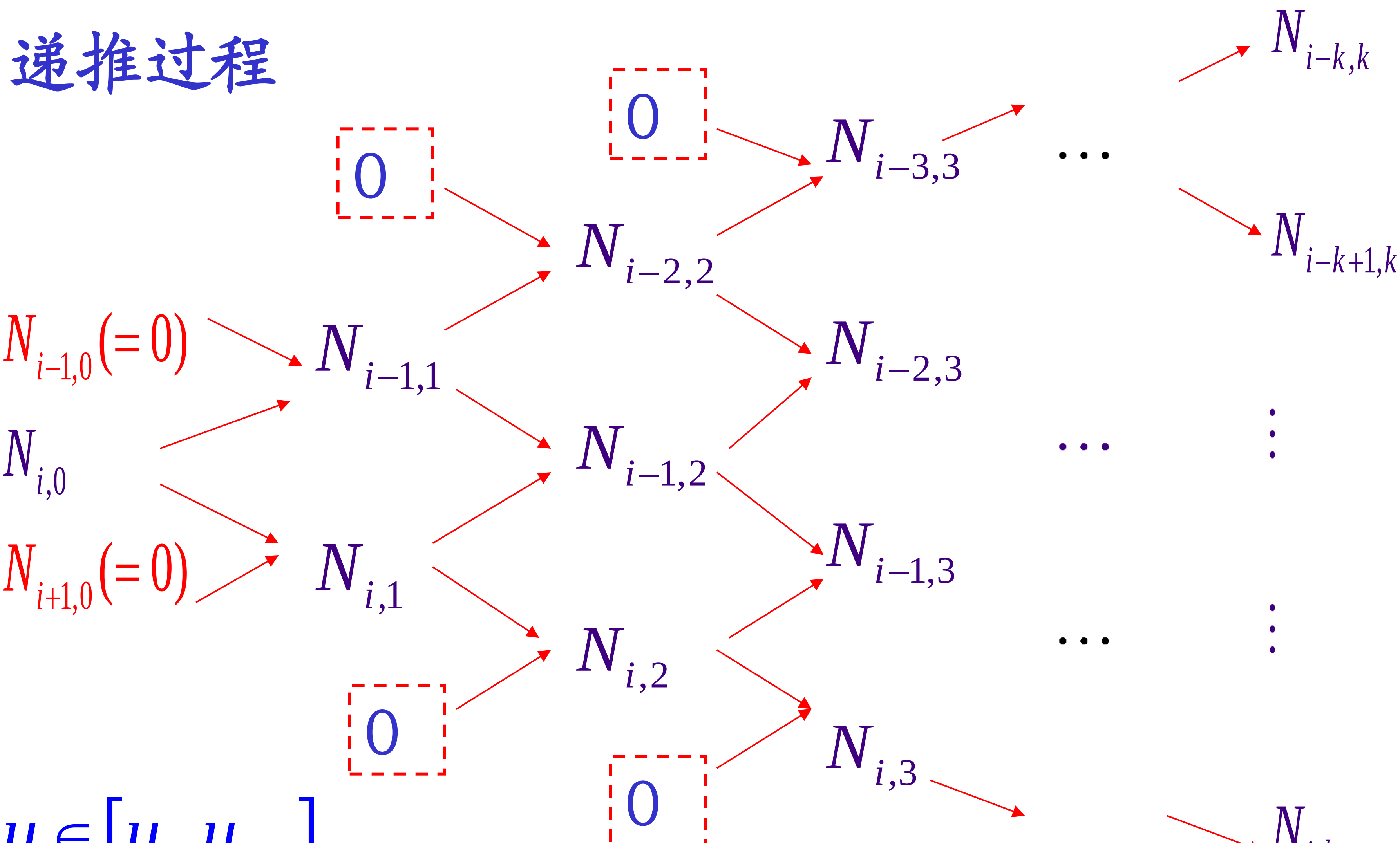
$$u_{i-k}, u_{i-k+1}, \cdots, u_i, u_{i+1}, \cdots u_{i+k+1}$$

由deBoor－Cox递推定义以及零次B样条基函数的表达式，可递推出该区间上的k＋1个B样条基函数。

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u)$$

一、B样条基函数及其导数的计算

递推过程



$u \in [u_i, u_{i+1}]$

一、B样条基函数及其导数的计算

2、B样条基函数导数的计算

$$\frac{d}{du}N_{i,k}(u)=k\left[\frac{N_{i,k-1}(u)}{u_{i+k}-u_i}-\frac{N_{i+1,k-1}(u)}{u_{i+k+1}-u_{i+1}}\right]\quad\left(\text{规定}\frac{0}{0}=0\right)$$

又因为：

$$N_{i,k}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+k}-u_i}N_{i,k-1}(u)+\frac{u_{i+k+1}-u}{u_{i+k+1}-u_{i+1}}N_{i+1,k-1}(u)$$

所以，对$N_{i,k}$（u）的一阶导数等于对deBoor－Cox公式中两个低一次B样条基函数前的系数关于u求导后、相加再乘以k。

二、B样条曲线的deBoor算法

作用：计算B样条曲线上的一点，相当于Bezier曲线的deCasteljau算法。

1、deBoor算法的内容

设控制顶点为$\vec{d}_i, i=0,1,\cdots n$，节点矢量$U=[u_0 \quad u_1 \quad \cdots \quad u_{n+k+1}]$

若给出任一参数值$u\in[u_i,u_{i+1}]\subset[u_k,u_{n+1}]$，B样条曲线上对应的点为：

$$\vec{p}(u)=\sum_{j=i-k}^{i-l}\vec{d}_j^{\,l}N_{j,k-l}(u)=\cdots=\vec{d}_{i-k}^{\,k} \quad u\in[u_i,u_{i+1}]$$

二、B样条曲线的deBoor算法

其中：

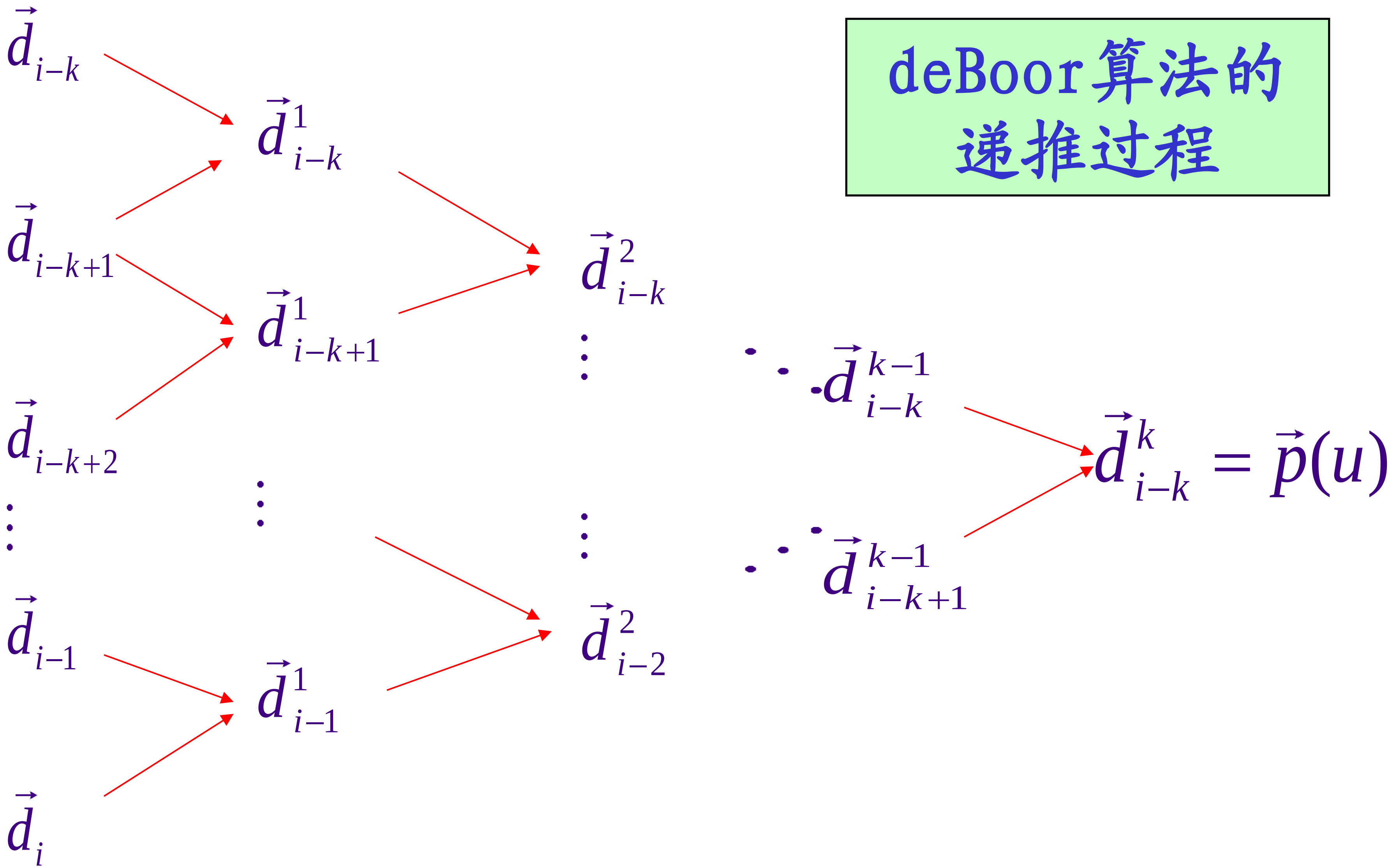
$$\vec{d}_j^l = \begin{cases} \vec{d}_j & l = 0 \\ (1-\alpha_j^l)\vec{d}_j^{l-1} + \alpha_j^l \vec{d}_{j+1}^{l-1} & l = 1,2,\cdots,k;\ j = i-k,\cdots,i-l \end{cases}$$

$$\alpha_j^l = \frac{u - u_{j+l}}{u_{j+k+1} - u_{j+l}} \qquad \text{规定} \frac{0}{0} = 0$$

若用三角阵列表示，即得：

二、B样条曲线的deBoor算法

deBoor算法的递推过程



二、B样条曲线的deBoor算法

在上述的递推过程中，涉及的节点也在相应变化。

$$l=1 \qquad \overbrace{u_{i-k+1}\quad u_{i-k+2}\quad u_{i-k+3}\quad \cdots\quad u_{i+k-2}\quad u_{i+k-1}\quad u_{i+k}}^{\text{共2k个}}$$

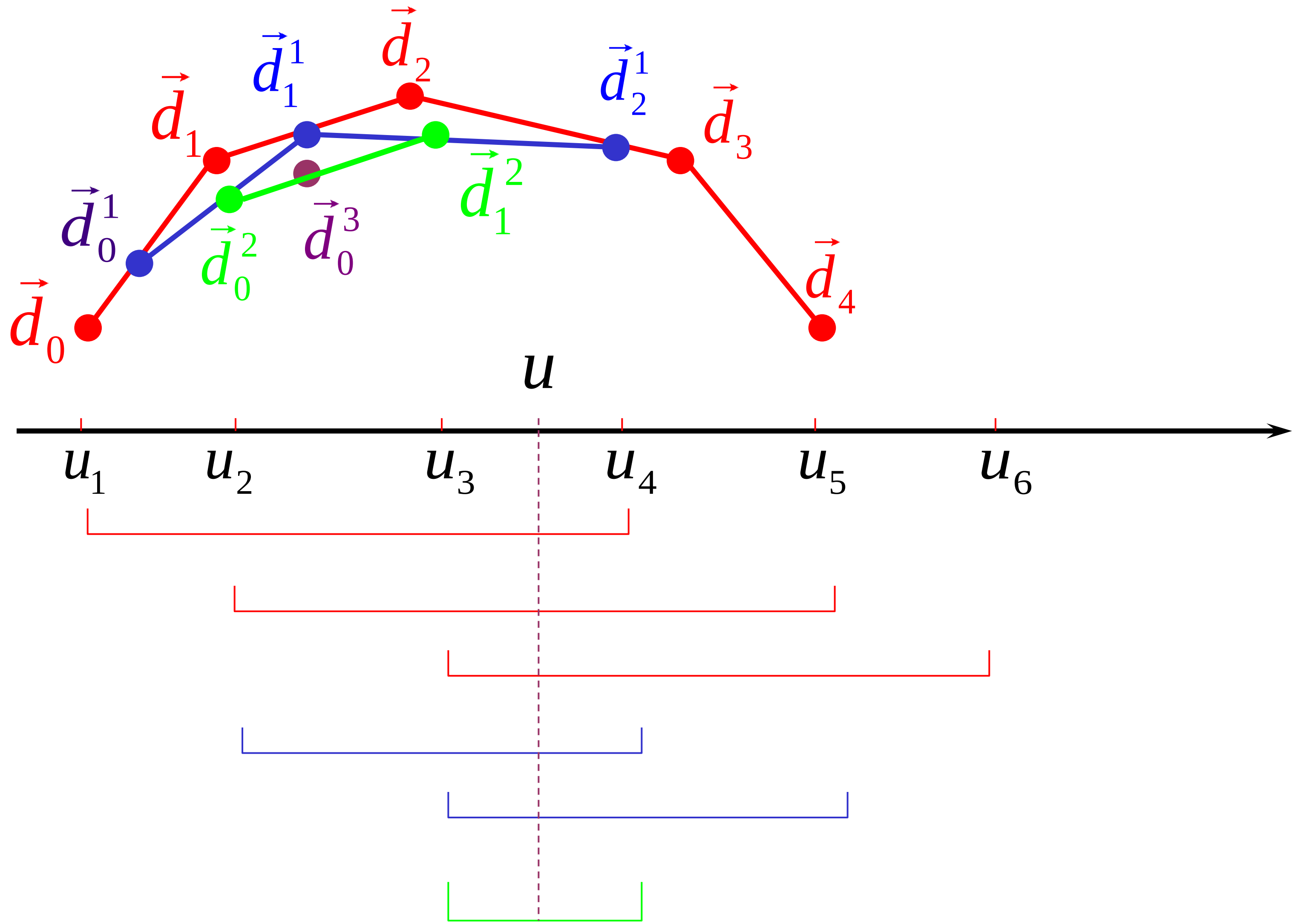
$$l=2 \qquad \overbrace{u_{i-k+2}\quad u_{i-k+3}\quad \cdots\quad u_{i+k-2}\quad u_{i+k-1}}^{\text{共2（k－1）个}}$$

$$\vdots$$

$$l=k \qquad \overbrace{u_{i}\quad u_{i+1}}^{\text{共2个}}$$

二、B样条曲线的deBoor算法

例如:



$l=1$ $j=0$

$j=1$

$j=2$

$l=2$ $j=0$

$j=1$

$l=3$ $j=0$

二、B样条曲线的deBoor算法

实例:

给定控制顶点$\vec{d}_0=[-24,0], \vec{d}_1=[-12,6], \vec{d}_2=[1,8], \vec{d}_3=[10,2],$ $\vec{d}_4=[12,0]$，取节点矢量$U=\left[0,0,0,0,0.75,1,1,1,1\right]$,定义一条三次B样条曲线$\vec{p}(u)$,求$\vec{p}(0.5)$

解：根据题意可知：k = 3，n = 4，$u_3<u=0.5<u_4$，所以 i = 3。

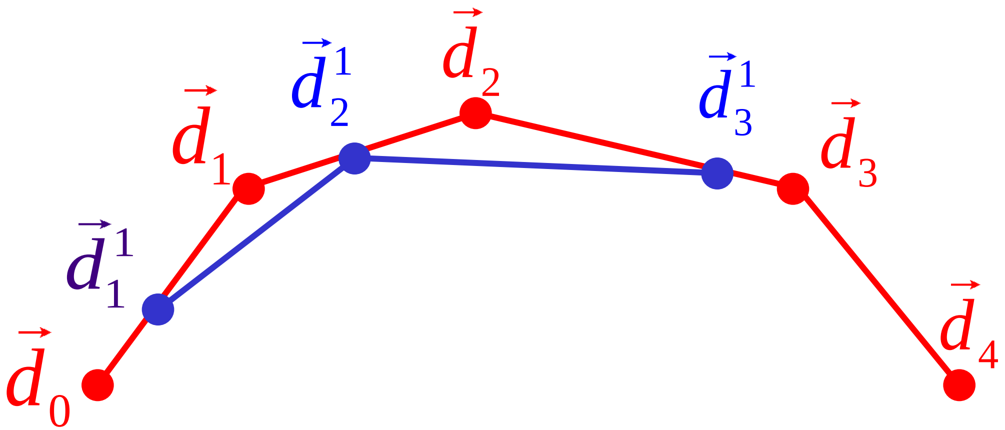
首先，进行第一级递推，计算:

$$\alpha_0^1=\frac{u-u_1}{u_4-u_1}=\frac{0.5-0}{0.75-0}=0.667$$

二、B样条曲线的deBoor算法

$$\alpha_1^1 = \frac{u-u_2}{u_5-u_2} = \frac{0.5-0}{1-0} = 0.5$$

$$\alpha_2^1 = \frac{u-u_3}{u_6-u_3} = \frac{0.5-0}{1-0} = 0.5$$



所以:

$$\vec{d}_0^1 = (1-\alpha_0^1)\vec{d}_0 + \alpha_0^1\vec{d}_1 = [-16, 4]$$

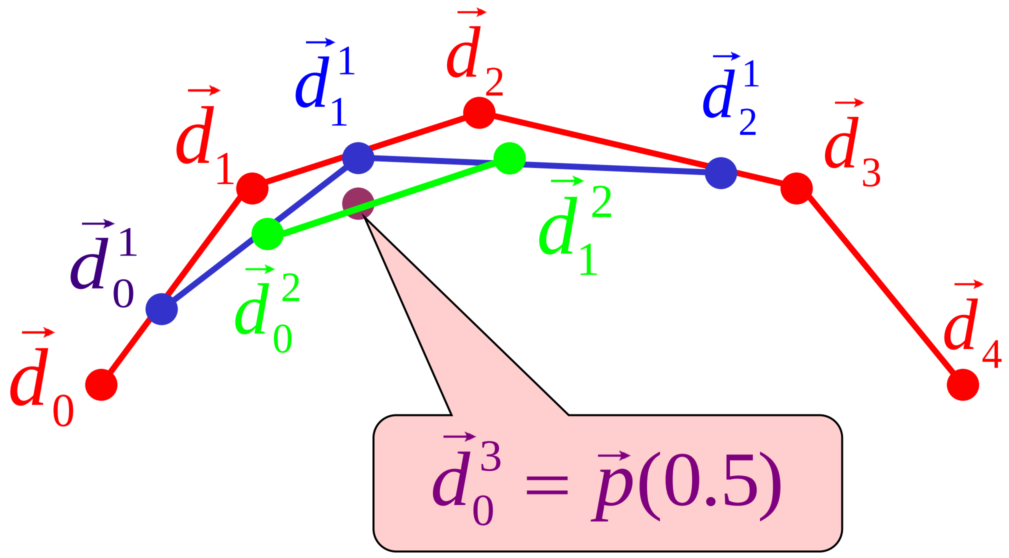
$$\vec{d}_1^1 = (1-\alpha_1^1)\vec{d}_1 + \alpha_1^1\vec{d}_2 = [-5.5, 7]$$

$$\vec{d}_2^1 = (1-\alpha_2^1)\vec{d}_2 + \alpha_2^1\vec{d}_3 = [5.5, 5]$$

二、B样条曲线的deBoor算法

依此类推，进行第二级和第三级递推，得到最后结果：

$$\vec{p}(0.5)=\vec{d}_0^3=(1-\alpha_0^3)\vec{d}_0^2+\alpha_0^3\vec{d}_1^2=[-3,6]$$



二、B样条曲线的deBoor算法

2、利用deBoor算法计算B样条曲线的切矢

由deBoor算法求导可知

再以它们为控制顶点，利用deBoor算法计算切矢

设$u \in [u_i, u_{i+1}] \subset [u_k, u_{n+1}]$，则：

$$\vec{p}^r(u) = \frac{d^r}{du^r} \sum_{j=0}^{n} \vec{d}_j N_{j,k}(u) = \sum_{j=i-k}^{i-r} \vec{d}_j^r N_{j,k-r}(u)$$

其中：

$$\vec{d}_j^l = \begin{cases} \vec{d}_j & l = 0 \\ (k-l+1)\dfrac{\vec{d}_{j+1}^{l-1} - \vec{d}_j^{l-1}}{u_{j+k+1} - u_{j+l}} & l = 1, 2, \cdots, r;\ j = i-k, \cdots, i-r \end{cases}$$

先按此式递推求出$\vec{d}_j^r$

二、B样条曲线的deBoor算法

特别的，如果曲线为具有k+1重端节点的k次非均匀B样条曲线，则在端点处的导矢有如下结果：

$$\vec{p}'(u_k)=k\frac{\vec{d}_1-\vec{d}_0}{u_{k+1}-u_1}\qquad \vec{p}'(u_{n+1})=k\frac{\vec{d}_n-\vec{d}_{n-1}}{u_{n+k}-u_n}$$

$$\vec{p}''(u_k)=k(k-1)\frac{\dfrac{\vec{d}_2-\vec{d}_1}{u_{k+2}-u_2}-\dfrac{\vec{d}_1-\vec{d}_0}{u_{k+1}-u_1}}{u_{k+1}-u_2}$$

$$\vec{p}''(u_{n+1})=k(k-1)\frac{\dfrac{\vec{d}_n-\vec{d}_{n-1}}{u_{n+k}-u_n}-\dfrac{\vec{d}_{n-1}-\vec{d}_{n-2}}{u_{n+k-1}-u_{n-1}}}{u_{n+k-1}-u_n}$$

与Bezier曲线的端点性质类似。

二、B样条曲线的deBoor算法

实例:

给定控制顶点$\vec{d}_0=[-24,0],\vec{d}_1=[-12,6],\vec{d}_2=[1,8],\vec{d}_3=[10,2],$
$\vec{d}_4=[12,0]$，取节点矢量$U=\left[0,0,0,0,0.75,1,1,1,1\right]$,定义一条三次B样条曲线$\vec{p}(u)$,求$\vec{p}'(0.5)$和$\vec{p}''(0.5)$。

解：先求一阶导矢，这时r = 1，k − r = 2，根据公式首先计算:

$$\vec{d}_0^1=3\frac{\vec{d}_1-\vec{d}_0}{u_4-u_1}=\left[48,24\right] \qquad \vec{d}_1^1=3\frac{\vec{d}_2-\vec{d}_1}{u_5-u_2}=[39,6]$$

二、B样条曲线的deBoor算法

$$\vec{d}_2^1 = 3\frac{\vec{d}_3 - \vec{d}_2}{u_6 - u_3} = [27, -18]$$

下面以$\vec{d}_0^1, \vec{d}_1^1, \vec{d}_2^1$为控制顶点，利用deBoor算法

求二次曲线上$u = 0.5 \in [u_3, u_4]$的点，这点就是$\vec{p}'(0.5)$

经过两级递推，得： $\vec{p}'(0.5) = [36, 0]$

再求二阶导矢，这时r = 2，k − r = 1，根据公式首先计算:

$$\vec{d}_0^2 = 2\frac{\vec{d}_1^1 - \vec{d}_0^1}{u_4 - u_2} = [-24, -48] \qquad \vec{d}_1^2 = 2\frac{\vec{d}_2^1 - \vec{d}_1^1}{u_5 - u_3} = [-24, -48]$$

二、B样条曲线的deBoor算法

下面以$\vec{d}_0^2, \vec{d}_1^2$为控制顶点，利用deBoor算法

求一次曲线上$u = 0.5 \in [u_3, u_4]$的点，这点就是$\vec{p}''(0.5)$

所以：$\vec{p}''(0.5) = [-24, -48]$

二、B样条曲线的deBoor算法

总结：

➢deBoor算法不仅可以计算B样条曲线上的一点，还可以计算该点的切矢。算法的每一步都是内线性插值，计算稳定，避免了计算B样条基函数，节省了计算量。也保证了B样条曲线仿射不变性以及变差缩减性的成立。

$$\text{如果取}U=\left[\underbrace{0\quad 0\quad \cdots\quad 0}_{k+1}\underbrace{1\quad 1\quad \cdots\quad 1}_{k+1}\right]\text{，则}\alpha_j^l=u\text{，}$$

这时deBoor算法就是deCasteljau算法。

三、节点矢量的确定

为了使B样条曲线具有和Bezier曲线一样的端点几何性质，一般将k次B样条曲线端节点的重复度取作k+1，并将曲线的定义域取成规范参数域，即：

$$\left[u_k, u_{n+1}\right] = [0,1]$$

$$\text{且}\, u_0 = u_1 = \cdots u_k = 0; u_{n+1} = u_{n+2} = \cdots u_{n+k+1} = 1$$

问题：如何确定中间的节点矢量?

确定参数节点的方法主要有Riesenfeld方法和Hartley-Judd方法等。

三、节点矢量的确定

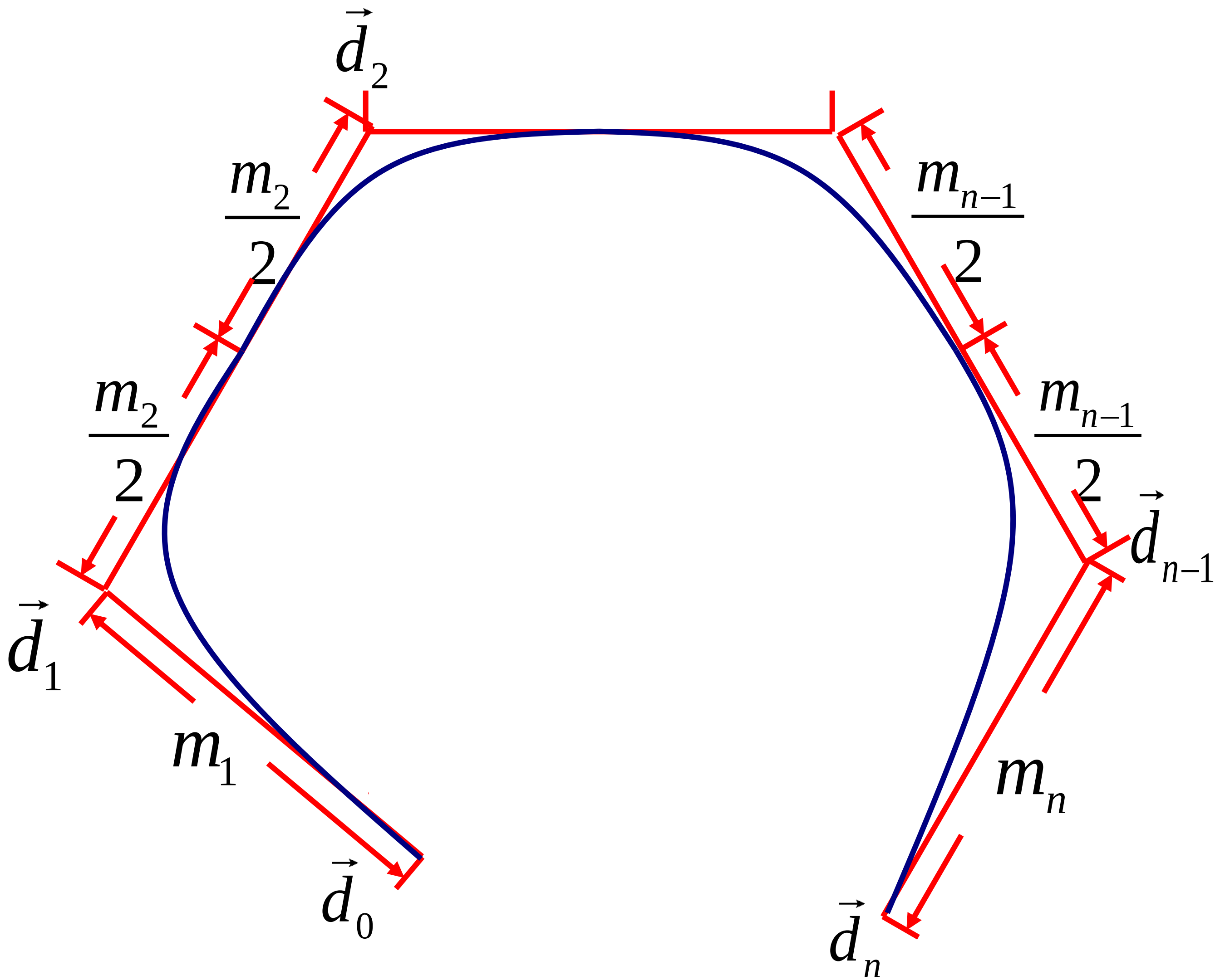
1、Riesenfeld方法

原理：把控制多边形近似看作样条曲线的外切多边形，并使曲线的分段连接点与控制多边形的顶点或边对应起来，然后使其展直，并规范化，从而得到节点矢量。

（1）偶次B样条节点矢量的确定方法

以二次为例，端节点重复度为3的二次B样条曲线通过首末控制顶点，中间连接点位于对应边的中点，如下图：

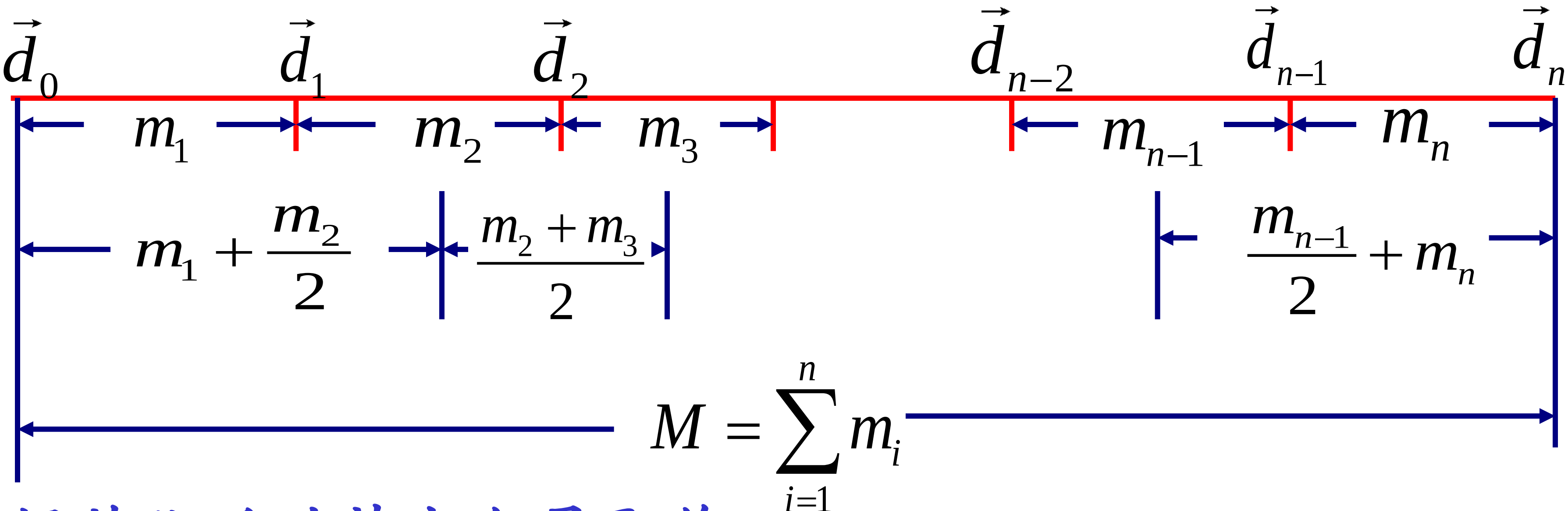
三、节点矢量的确定



二次B样条曲线

三、节点矢量的确定

设控制顶点有n + 1个，二次B样条曲线共n − 1段，需要确定的内部节点应有n − 1个。将控制多边形展开:



规范化后的节点矢量取作:

$$U=\left[0,0,0,\frac{m_1+\frac{m_2}{2}}{M},\frac{m_1+m_2+\frac{m_3}{2}}{M},\cdots\frac{m_1+m_2+\cdots+m_{n-2}+\frac{m_{n-1}}{2}}{M},1,1,1\right]$$

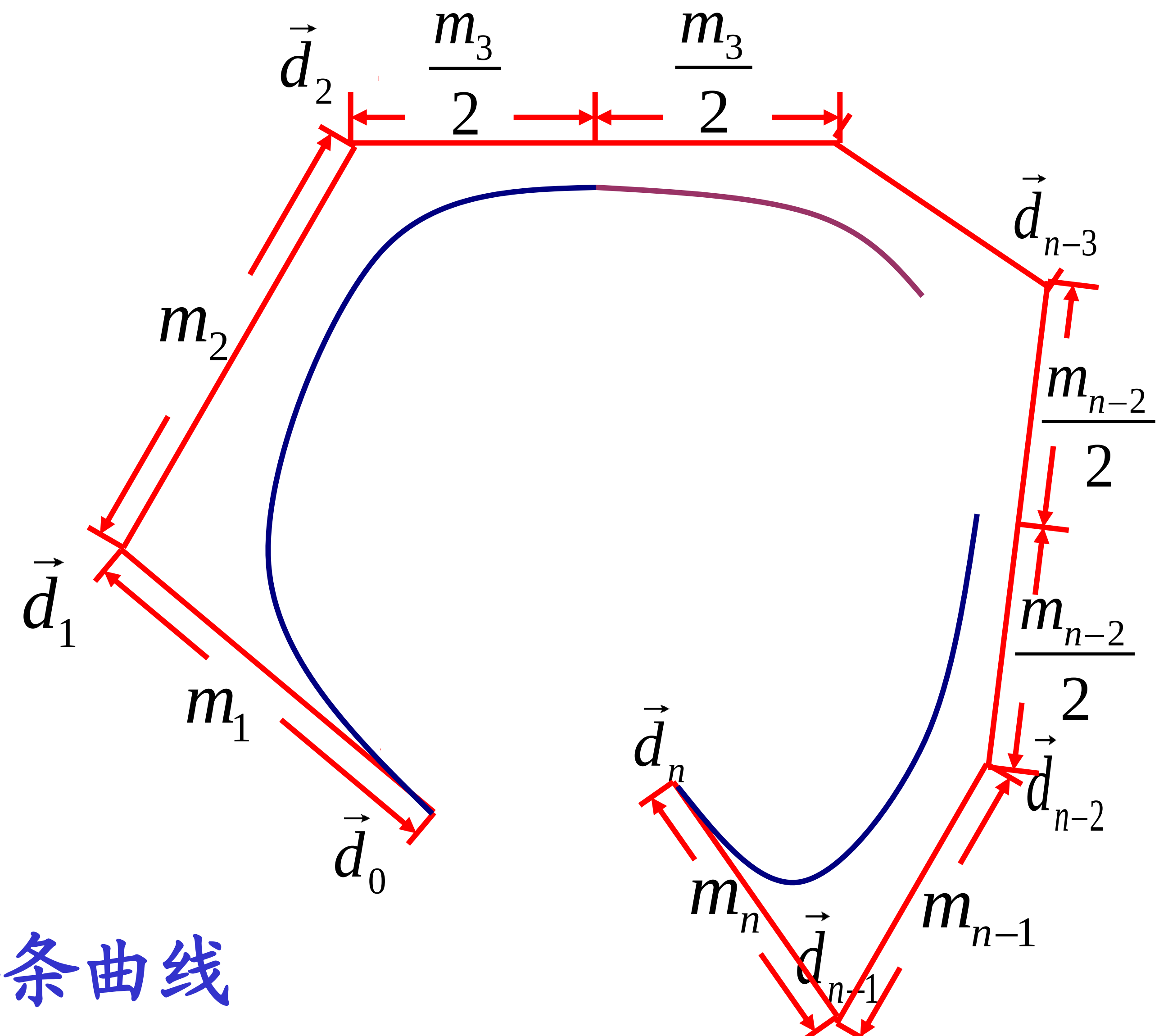
三、节点矢量的确定

通过对二次曲线的讨论，可以将这种方法推广到更高的偶次曲线，幂次每提高两次，第一个内节点就向后移一条边，最后一个内节点向前移一条边的距离，但连接点不一定在边上。如四次B样条曲线：

规范化后的节点矢量取作：

$$U=\left[\begin{array}{l}0,0,0,0,0,\dfrac{m_1+m_2+\dfrac{m_3}{2}}{M},\dfrac{m_1+m_2+m_3+\dfrac{m_4}{2}}{M},\cdots,\\ \cdots\dfrac{m_1+m_2+\cdots+m_{n-3}+\dfrac{m_{n-2}}{2}}{M},1,1,1,1,1\end{array}\right]$$

三、节点矢量的确定

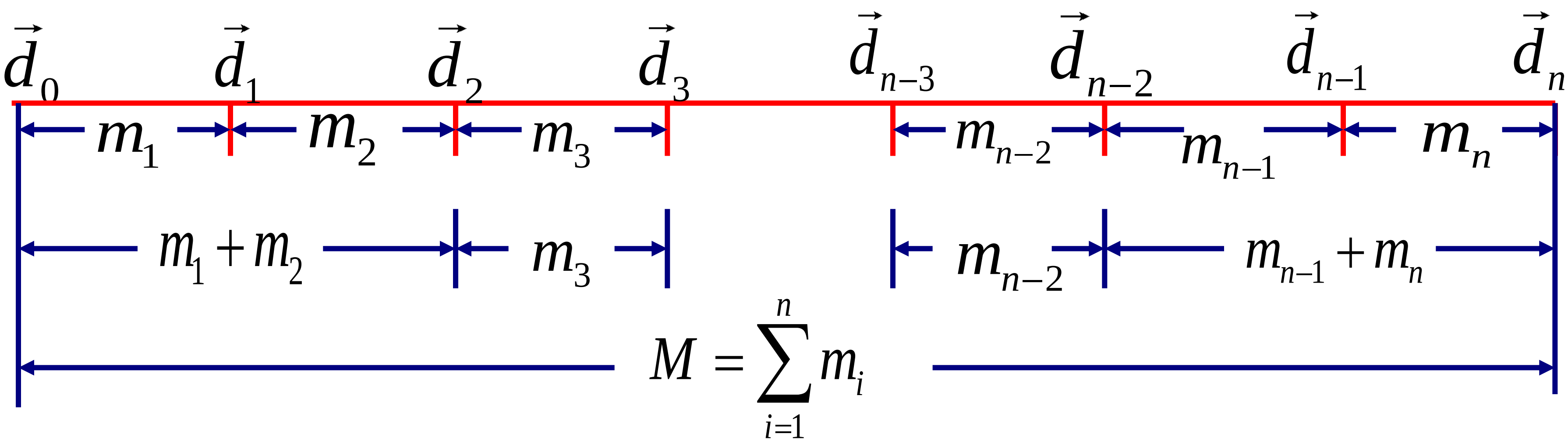


四次B样条曲线

三、节点矢量的确定

（2）奇次B样条节点矢量的确定方法

以三次为例，端节点重复度为4的三次B样条曲线通过首末控制顶点，中间连接点则与相应的控制顶点**对应**，当控制顶点为n+1时，曲线共n-2段，如下图：



三、节点矢量的确定

规范化后的节点矢量取作:

$$U=\left[\begin{array}{l}0,0,0,0,\dfrac{m_1+m_2}{M},\dfrac{m_1+m_2+m_3}{M},\cdots, \\ \cdots\dfrac{m_1+m_2+\cdots+m_{n-2}}{M},1,1,1,1\end{array}\right]$$

通过对三次曲线的讨论，可以将这种方法推广到更高的奇次曲线，幂次每提高两次，第一个内节点就向后移一条边，最后一个内节点向前移一条边的距离，但连接点不一定在边上。如五次B样条曲线:

三、节点矢量的确定

规范化后的节点矢量取作：

$$U=\left[\begin{array}{l} 0,0,0,0,0,0,\dfrac{m_1+m_2+m_3}{M},\dfrac{m_1+m_2+m_3+m_4}{M},\cdots, \\ \cdots\dfrac{m_1+m_2+\cdots+m_{n-3}}{M},1,1,1,1,1,1 \end{array}\right]$$

三、节点矢量的确定

综上所述，Riesenfeld方法为：

1）对于偶次（k次）B样条曲线的节点矢量，共有n－k个连接点，两端各k/2条边对应于内部的第一个和最后一个节点，其余内节点对应于中间n－k－2条边的中点。

2）对于奇次（k次）B样条曲线的节点矢量，共有n－k个连接点，两端各（k＋1）/2条边对应于内部的第一个和最后一个节点，其余内节点对应于中间的n－k－2个控制顶点。

三、节点矢量的确定

自学内容

利用Hartley-Judd方法确定B样条曲线的节点矢量


本章
结束