动 力 学

达朗贝尔原理

西北工业大学
支希哲　朱西平　侯美丽

动 力 学

第五章 达朗贝尔原理

§ 5–1 达朗贝尔原理

§ 5–2 惯性力系的简化

§ 5–3 动静法应用举例

§ 5–4 定轴转动刚体对轴承的动压力

§ 5–5 消除附加动压力的条件

·动平衡和静平衡

引 言

- 达朗贝尔原理为解决非自由质点系的动力学问题提供了有别于动力学普遍定理的另外一类方法。

- 引进惯性力的概念，将动力学系统的二阶运动量表示为惯性力，进而应用静力学方法研究动力学问题 —— 达朗贝尔原理。

- 达朗贝尔原理一方面广泛应用于刚体动力学求解动约束力；另一方面又普遍应用于弹性杆件求解动应力。

第五章 达朗贝尔原理

车底盘距路面的高度为什么不同？

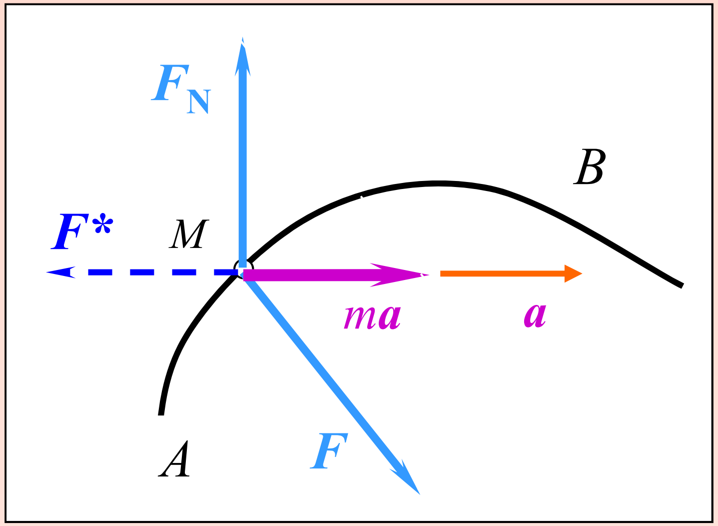
§ 5-1 达朗贝尔原理

- 质点达朗贝尔原理
- 质点系达朗贝尔原理

§ 5-2 达朗贝尔原理

一、质点达朗伯原理

设质量为m的非自由质点M，在主动力$\boldsymbol{F}$和约束力$\boldsymbol{F}_N$作用下沿曲线运动，该质点的动力学基本方程为



$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_N$$

或

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_N + (-m\boldsymbol{a}) = 0$$

引入质点的惯性力$\boldsymbol{F}^* = -m\boldsymbol{a}$ 这一概念，于是上式可改写成

$$\boxed{\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{F}^* = 0}$$

上式表明，**在质点运动的每一瞬时，作用于质点的主动力、约束力和质点的惯性力在形式上构成一平衡力系。**这就是质点的达朗伯原理。

质点达朗贝尔原理

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{F}^* = 0$$

质点达朗贝尔原理的投影形式

$$F_x + F_{\mathrm{N}x} + F_x^* = 0$$

$$F_y + F_{\mathrm{N}y} + F_y^* = 0$$

$$F_z + F_{\mathrm{N}z} + F_z^* = 0$$

二、质点系达朗贝尔原理

上述质点的达朗贝尔原理可以直接推广到质点系。将达朗贝尔原理应用于每个质点，得到n个矢量平衡方程。

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i} + \boldsymbol{F}_i^* = 0$$

这表明，在质点系运动的任一瞬时，作用于每一质点上的主动力、约束力和该质点的惯性力在形式上构成一平衡力系。

这就是质点系的达朗贝尔原理。

§ 5-2 达朗贝尔原理

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i} + \boldsymbol{F}_i^* = 0$$

对于所讨论的质点系，有$\boldsymbol{n}$个形式如上式的平衡方程，即有$\boldsymbol{n}$个形式上的平衡力系。将其中任何几个平衡力系合在一起，所构成的任意力系仍然是平衡力系。根据静力学中空间任意力系的平衡条件，有

$$\sum \boldsymbol{F}_i + \sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i} + \sum F_i^* = 0$$

$$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) + \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}) + \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^*) = 0$$

$$\sum \boldsymbol{F}_i + \sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i} + \sum \boldsymbol{F}_i^* = 0$$

$$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) + \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}) + \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^*) = 0$$

上式表明，**在任意瞬时，作用于质点系的主动力、约束力和该点的惯性力所构成力系的主矢等于零，该力系对任一点*O*的主矩也等于零**。

考虑到上式中的求和可以对质点系中任何一部分进行，而不限于对整个质点系，因此，该式并不表示仅有**6**个平衡方程，而是共有**3*n***个独立的平衡方程。同时注意，在求和过程中所有内力都将自动消去。

达朗伯原理提供了按静力学平衡方程的形式给出质点系动力学方程的方法，这种方法称为动静法。这些方程也称为动态平衡方程。

§ 5-2 惯性力系的简化

- 惯性力系的简化
- 刚体常见运动情况下惯性力的主矢和主矩

§ 5-2 惯性力系的简化

一、 惯性力系的简化

对于作任意运动的质点系，把实际所受的力和虚加惯性力各自向任意点O简化后所得的主矢、主矩分别记作$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{M}_O$和$\boldsymbol{F}^*$，$\boldsymbol{M}^*_O$，于是，由力系平衡条件，可得

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^*=0$$

$$\boldsymbol{M}_O+\boldsymbol{M}_O^*=0$$

1. 惯性力系的主矢

由质心运动定理有 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}_C$,得

$$\boldsymbol{F}^*=-m\boldsymbol{a}_C$$

即, 质点系惯性力的主矢恒等于质点系总质量与质心加速度的乘积，而取相反方向。

§ 5-2 惯性力系的简化

2. 惯性力系的主矩

● 对任意固定点

由对任意固定点$\boldsymbol{O}$的动量矩定理有 $\boldsymbol{M}_O=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}$， 代入 $\boldsymbol{M}_O+\boldsymbol{M}_O^*=0$

得

$$\boldsymbol{M}_O^*=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

● 对固定轴

现将上式两端投影到任一固定轴Oz上， $M_z^*=-\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$

上式表明：**质点系的惯性力对于任一固定点（或固定轴）的主矩，等于质点系对于该点（或该轴）的动量矩对时间的导数，并冠以负号。**

§ 5-2 惯性力系的简化

对质心点

利用相对于质心的动量矩定理，可以得到质点系的惯性力对质心C的主矩表达式

$$\boldsymbol{M}_C^* = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t}$$

对质心轴

以及它在通过质心C的某一平动轴 Cz'上的投影表达式 $M_{z'}^* = -\dfrac{\mathrm{d}L_{z'}}{\mathrm{d}\,t}$

上式表明：**质点系的惯性力对质心（或通过质心的平动轴）的主矩，等于质点系对质心（或该轴）的动量矩对时间的导数，并冠以负号。**

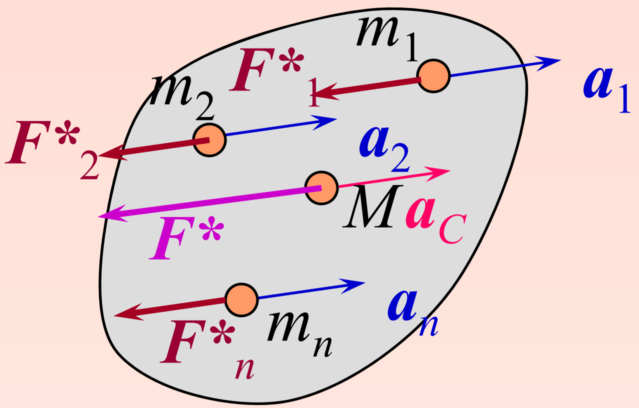
注 意

- *惯性力系的主矢与刚体的运动形式无关。*
- 惯性力系的主矩与刚体的运动形式有关。

§ 5-2 惯性力系的简化

二、刚体常见运动情况下惯性力的主矢和主矩

1. 刚体作平动　　刚体平移时，惯性力系向质心简化



- 主矢

$$F^* = \sum(-m_i a_i)$$

$$= \sum(-m_i a_C) = -m a_C$$

- 主矩　　$M^* = 0$

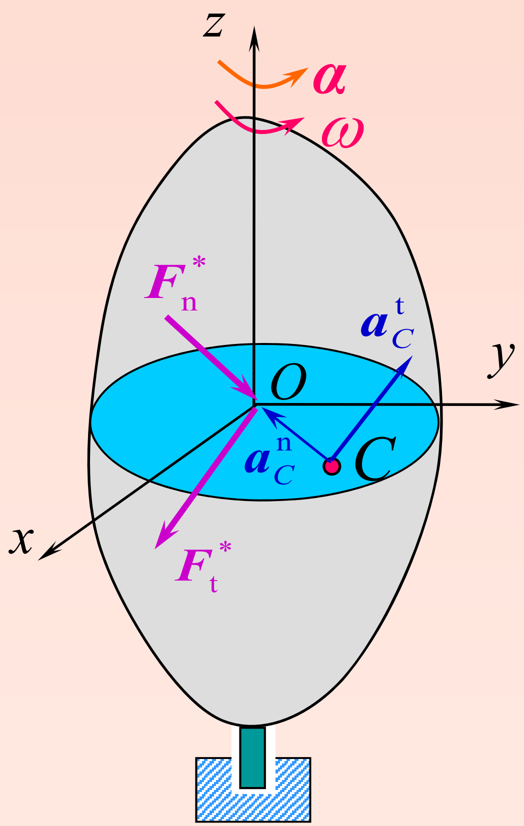
刚体平移时，惯性力系简化为通过刚体质心的合力。

§ 5-2 惯性力系的简化

2. 刚体做定轴转动

具有质量对称平面的刚体绕垂直于对称平面的固定轴转动。

设刚体绕固定轴Oz转动，在任意瞬时的角速度为$\boldsymbol{\omega}$，角加速度为$\boldsymbol{\alpha}$。



- 主矢 $\boldsymbol{F}^* = \sum(-m_i \boldsymbol{a}_i) = -m\boldsymbol{a}_C$

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_C^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_C^{\mathrm{n}}$$

设质心C的转动半径为r_C，则 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}^*$ 和 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}^*$ 的大小可分别表示为

$$\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}^* + \boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}^*$$

§ 5-2 惯性力系的简化

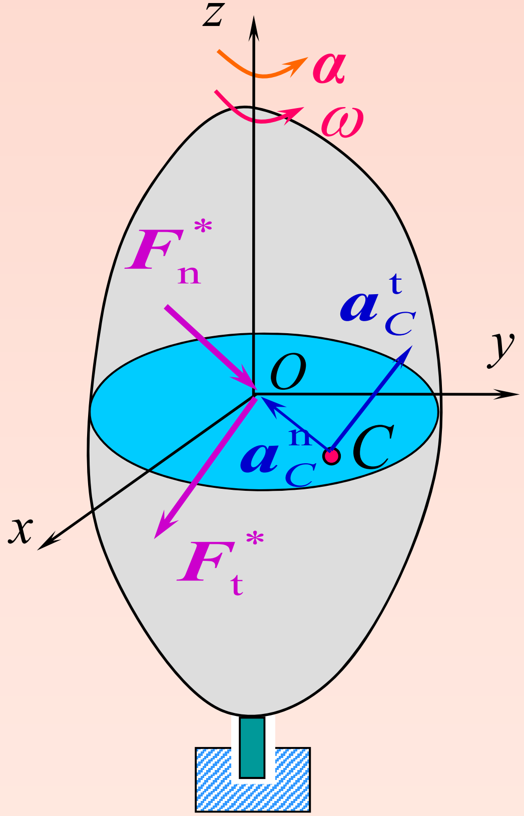
$$\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F}_\mathrm{t}^* + \boldsymbol{F}_\mathrm{n}^*$$

其中 $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}^* = -m\boldsymbol{a}_C^\mathrm{t}$; $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}^* = -m\boldsymbol{a}_C^\mathrm{n}$;

$$\boldsymbol{F}^* = -m\boldsymbol{a}_C = -m(\boldsymbol{a}_C^\mathrm{t} + \boldsymbol{a}_C^\mathrm{n})$$

$$ma_C^\mathrm{t} = mr_C\alpha$$

$$ma_C^\mathrm{n} = mr_C\omega^2$$



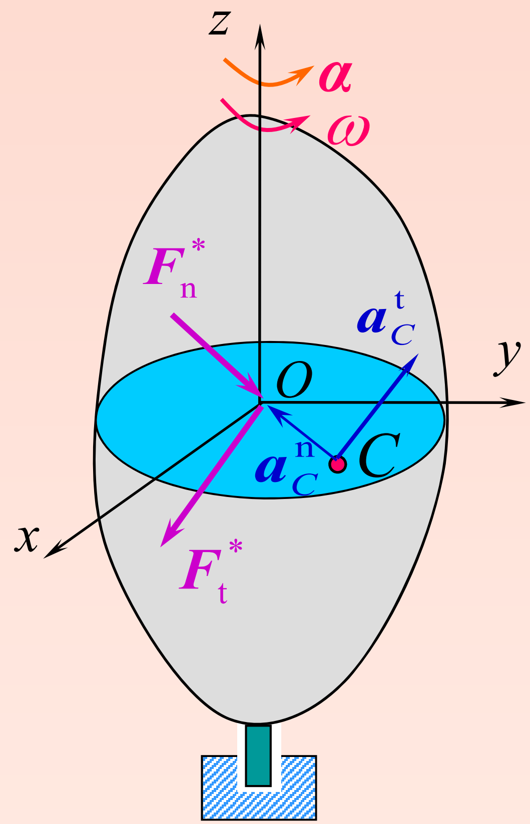
显然，当质心C在转轴上时，刚体的惯性力主矢必为零。

§ 5-2 惯性力系的简化

- 主矢

$$\boldsymbol{F}^{*}=-m\boldsymbol{a}_{C}=-m(\boldsymbol{a}_{C}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{C}^{\mathrm{n}})$$

具有质量对称平面的刚体绕垂直于质量对称平面的固定轴转动时，惯性力系向固定轴简化，得到的**惯性力系主矢的大小等于刚体质量与质心加速度大小的乘积，方向与质心加速度方向相反。**



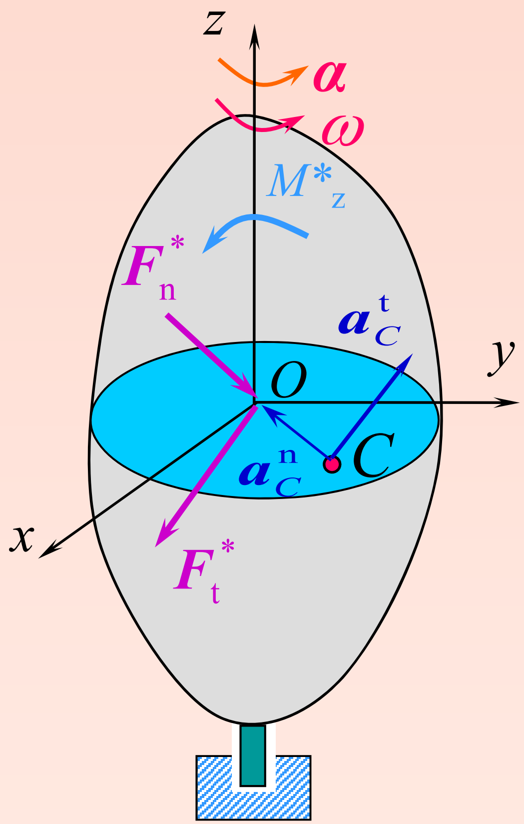
● 对转轴的主矩

将刚体对转轴Oz的动量矩 $L_z = J_z\omega$

代入 $M_z^* = -\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$ 可得刚体惯性力对轴Oz的主矩

$$M_z^* = -\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_z\omega) = -J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

即 $$M_z^* = -J_z\alpha$$

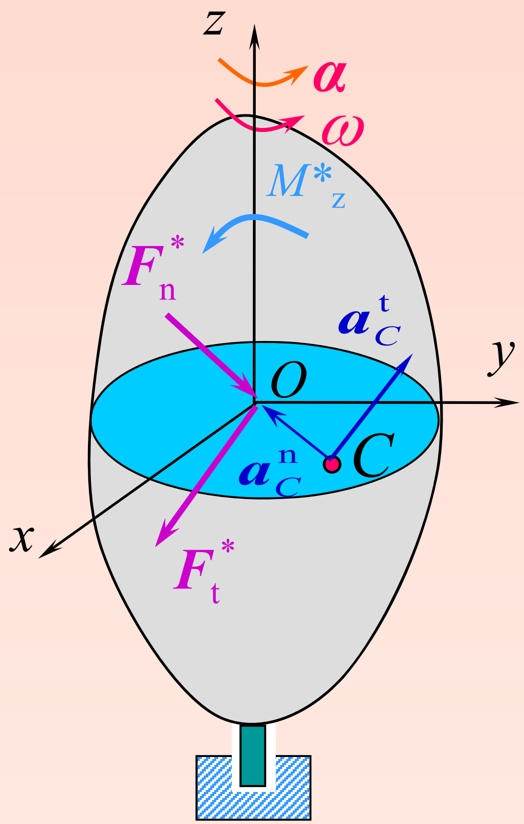


§ 5-2 惯性力系的简化

● 对转轴的主矩

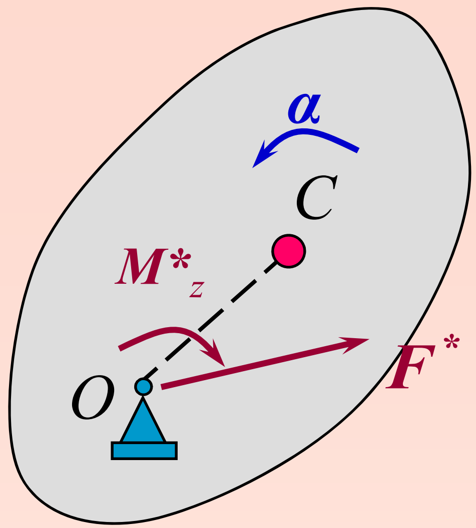
$$M_z^* = -J_z \alpha$$

具有质量对称平面的刚体绕垂直于质量对称平面的固定轴转动时，惯性力系向固定轴简化的结果，得到合力偶的力偶矩即为**惯性力系的主矩，其大小等于刚体对转动轴的转动惯量与角加速度的乘积，方向与角加速度方向相反。**



§ 5-2 惯性力系的简化

- 主矢 $\boldsymbol{F}^{*}=-m\boldsymbol{a}_{C}=-m(\boldsymbol{a}_{C}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{C}^{\mathrm{n}})$
- 对转轴的主矩 $M_{z}^{*}=-J_{z}\alpha$



具有质量对称平面的刚体绕垂直于质量对称平面的固定轴转动时，惯性力系向固定轴简化的结果，得到一个合力和一个合力偶。

合力的矢量即为惯性力系的主矢，其大小等于刚体质量与质心加速度大小的乘积，方向与质心加速度方向相反。

合力偶的力偶矩即为惯性力系的主矩，其大小等于刚体对转动轴的转动惯量与角加速度的乘积，方向与角加速度方向相反。

§ 5-2 惯性力系的简化

3. 刚体作平面运动

具有质量对称平面的刚体作平面运动，并且运动平面与质量对称平面互相平行。对于这种情形，先将刚体的空间惯性力系向质量对称平面内简化，得到这一平面内的平面惯性力系，然后再对平面惯性力系作进一步简化。

§ 5-2 惯性力系的简化

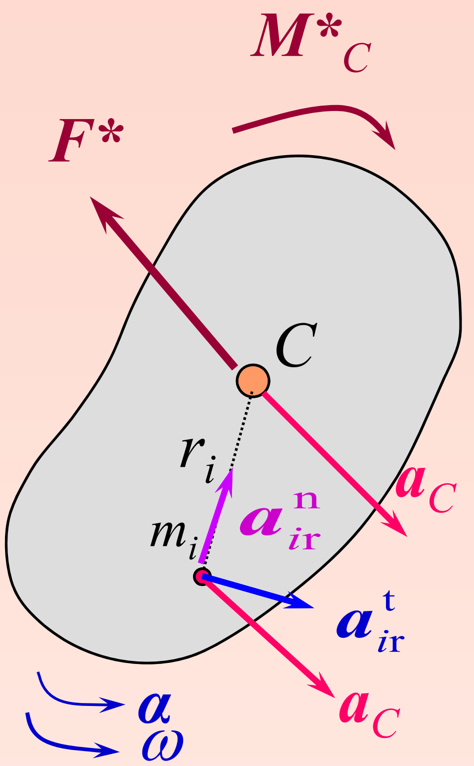
3. 刚体作平面运动

若取质心C为基点，则刚体的平面运动可以分解为随质心C的平动和绕质心（通过质心且垂直于运动平面的轴）的转动。

刚体上各质点的加速度及相应的惯性力也可以分解为随质心的平动和绕质心轴的转动两部分。

于是，此刚体的牵连平动惯性力可合成为作用线通过质心、且在对称面内的一个力F^*。

因质心C在相对运动的转轴上，故刚体的相对转动的惯性力合成为一力偶。



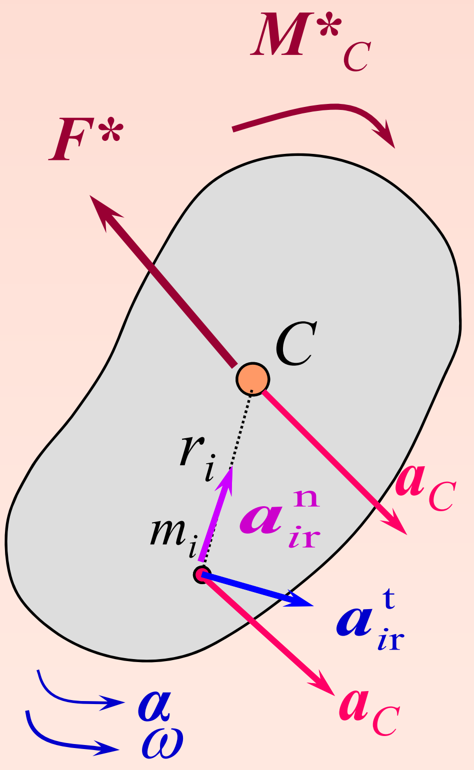
§ 5-2 惯性力系的简化

具有质量对称平面的刚体作平面运动，并且运动平面与质量对称平面互相平行。这种情形下，惯性力系向质心简化的结果得到一个合力和一个合力偶，二者都位于质量对称平面内。

- 主矢

合力的矢量即为惯性力系的主矢，其大小等于刚体质量与质心加速度大小的乘积，方向与质心加速度方向相反。

$$F^* = -m\boldsymbol{a}_C$$

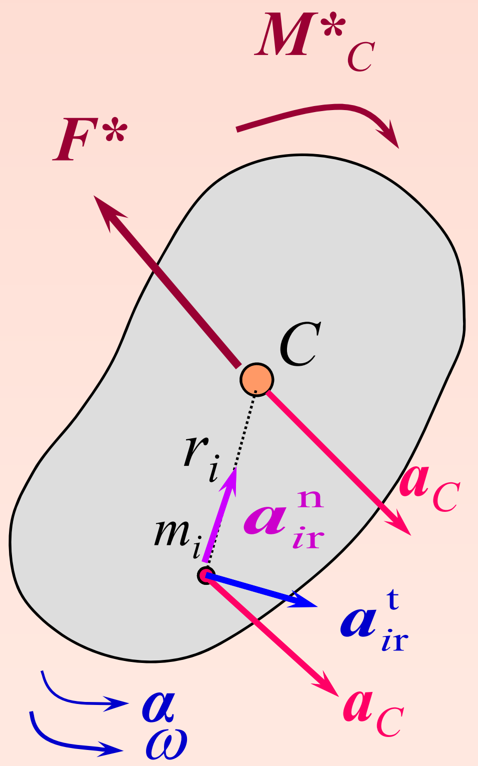


§ 5-2 惯性力系的简化

● 主矩

合力偶的力偶矩即为惯性力系的主矩，其大小等于刚体对通过质心的转动轴的转动惯量与角加速度的乘积，方向与角加速度方向相反。

$$M_C^* = -J_{Cz'}\alpha$$



§ 5-2 惯性力系的简化

综上所述：

1. 刚体作平动 *向质心简化*

- 主矢 $\boldsymbol{F}^{*}=\sum(-m_i\boldsymbol{a}_i)=-m\boldsymbol{a}_C$
- 主矩 $\boldsymbol{M}^{*}=0$

2. 刚体做定轴转动 *向固定轴简化*

- 主矢 $\boldsymbol{F}^{*}=-m\boldsymbol{a}_C=-m(\boldsymbol{a}_C^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_C^{\mathrm{n}})$
- 对转轴的主矩 $M_z^{*}=-J_z\alpha$

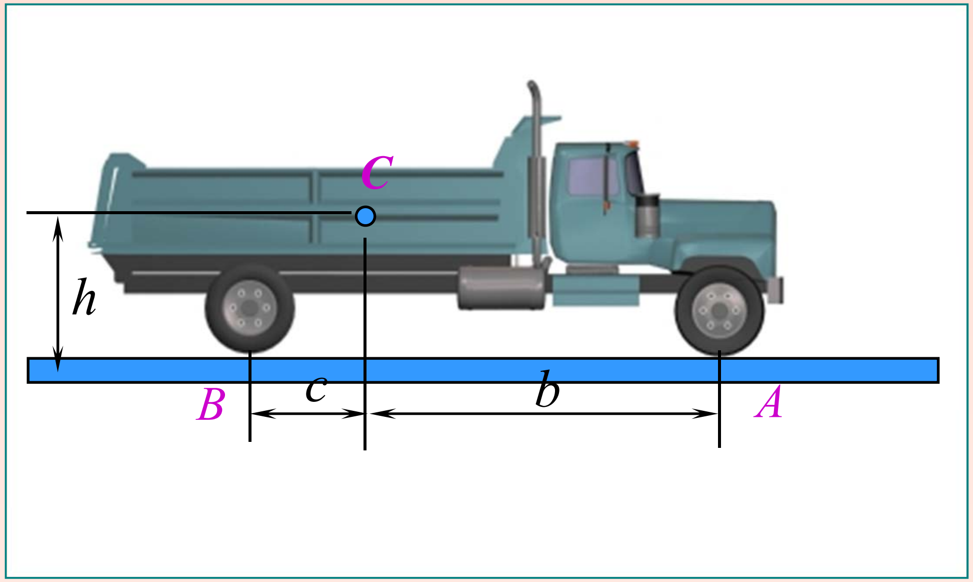
3. 刚体作平面运动 *向质心简化*

- 主矢 $\boldsymbol{F}^{*}=-m\boldsymbol{a}_C$
- 主矩 $M_C^{*}=-J_{Cz'}\alpha$

§ 5-3 动静法应用举例

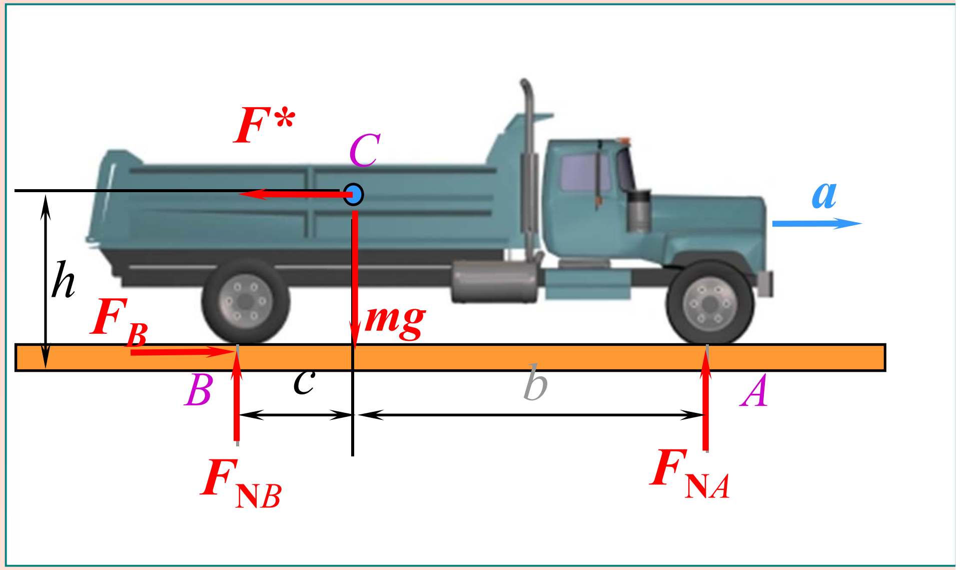
§ 5-3　动静法应用举例

例题 5-1 汽车连同货物的总质量是m，其质心 C 离前后轮的水平距离分别是 b 和 c，离地面的高度是 h。当汽车以加速度a沿水平道路行驶时，求地面给前、后轮的铅直反力。轮子的质量不计。



解:

取汽车连同货物为研究对象。汽车实际受到的外力有：重力 G，地面对前、后轮的铅直反力 F_{NA}、F_{NB} 以及水平摩擦力 F_B (注意：前轮一般是被动轮，当忽略轮子质量时，其摩擦力可以不计)。



因汽车作平动，其惯性力系合成为作用在质心 C 上的一个力 $F^* = -ma$ 。

§5-3 动静法应用举例

于是可写出汽车的动态平衡方程

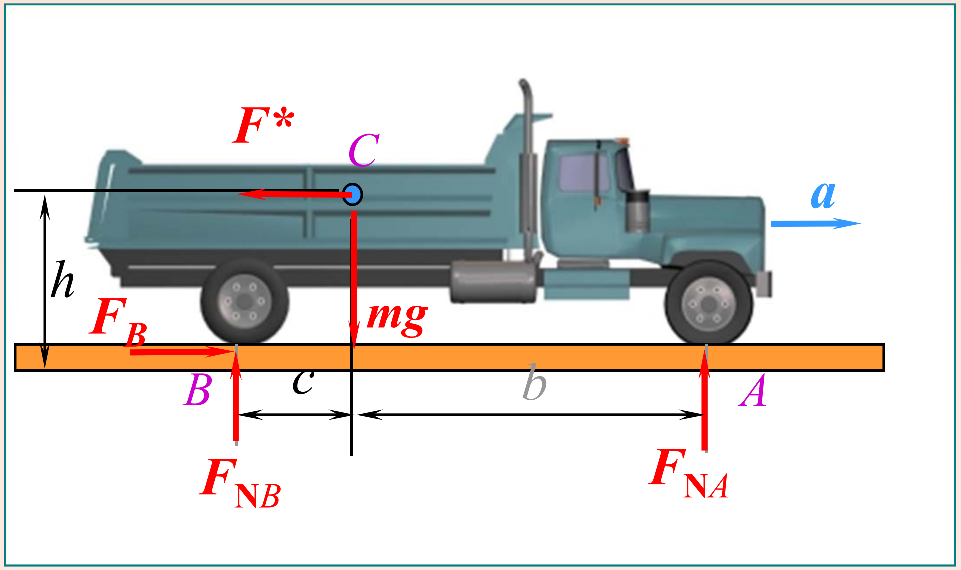
$$\sum M_B = 0\ ,\quad F^* h - mgc + F_{NA}(b+c) = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0\ ,\quad F^* h + mgb - F_{NB}(b+c) = 0 \quad (2)$$

由式(1)和(2)解得

$$F_{NA} = \frac{m(gc-ah)}{b+c}$$

$$F_{NB} = \frac{m(gb+ah)}{b+c}$$

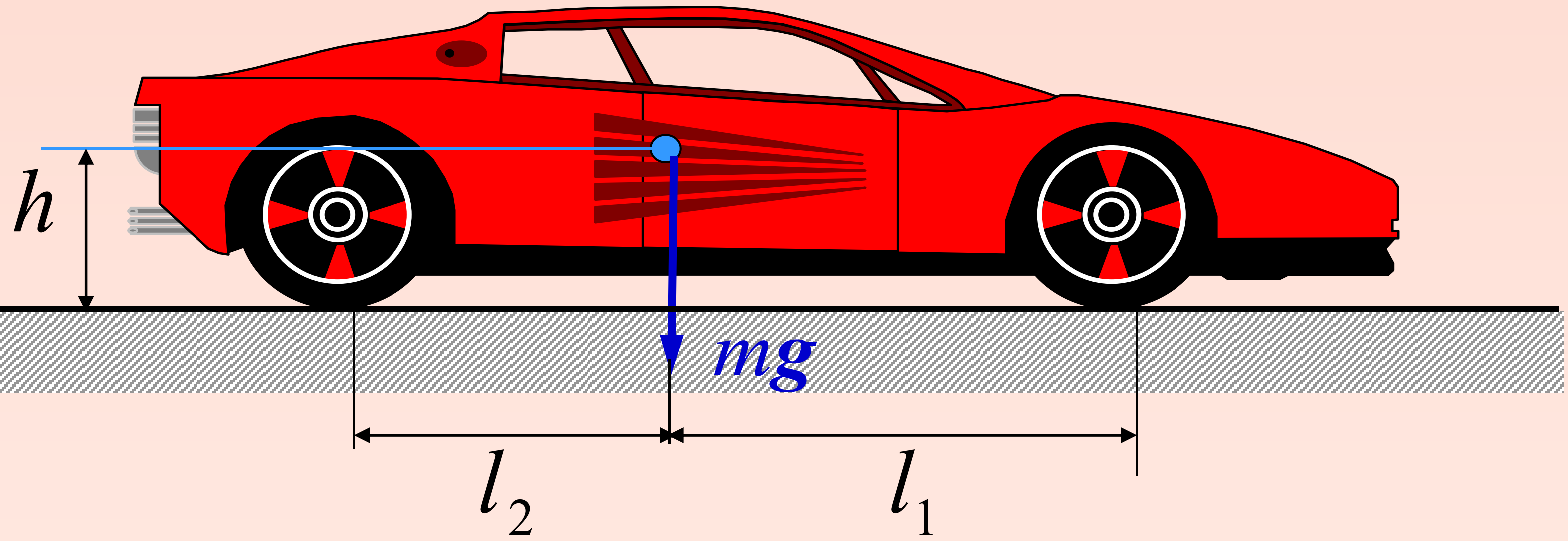


§5-3　动静法应用举例

无ABS系统时，刹车会产生侧滑现象

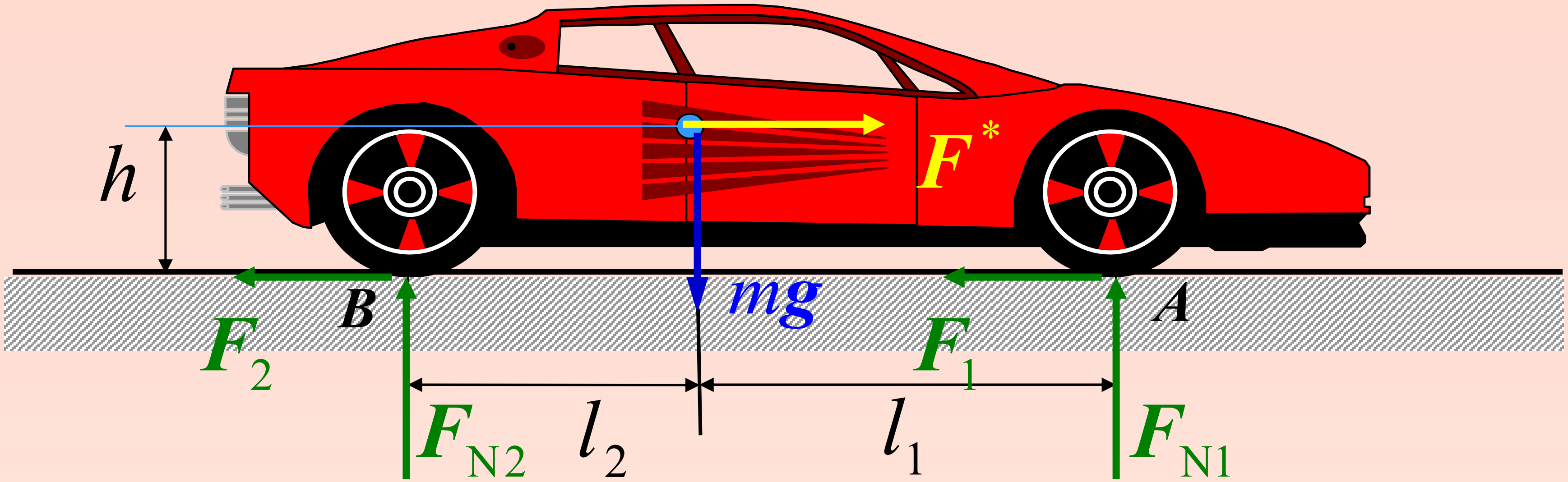
思考题

汽车刹车时，前轮和后轮哪个容易“抱死”？



车轮防抱死装置ABS:　Anti-Brake System

分析汽车刹车时的动力学特性



$$\sum M_B = 0, \quad F_{N1}(l_1+l_2) - mgl_2 - F^* h = 0 \qquad F_{N1} = \frac{mgl_2 + F^* h}{l_1 + l_2}$$

$$\sum M_A = 0, \quad -F_{N2}(l_1+l_2) + mgl_1 - F^* h = 0 \qquad F_{N2} = \frac{mgl_1 - F^* h}{l_1 + l_2}$$

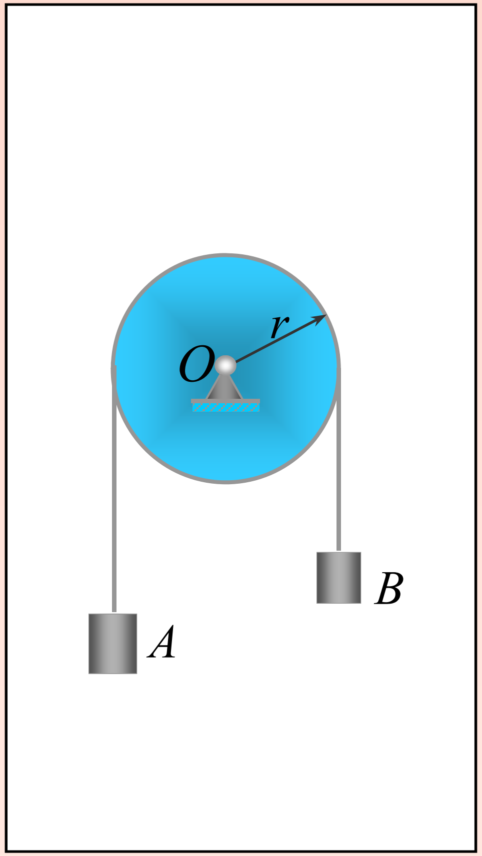
刹车时的动力学特性：车头下沉；

若质心在中间，后轮容易打滑。

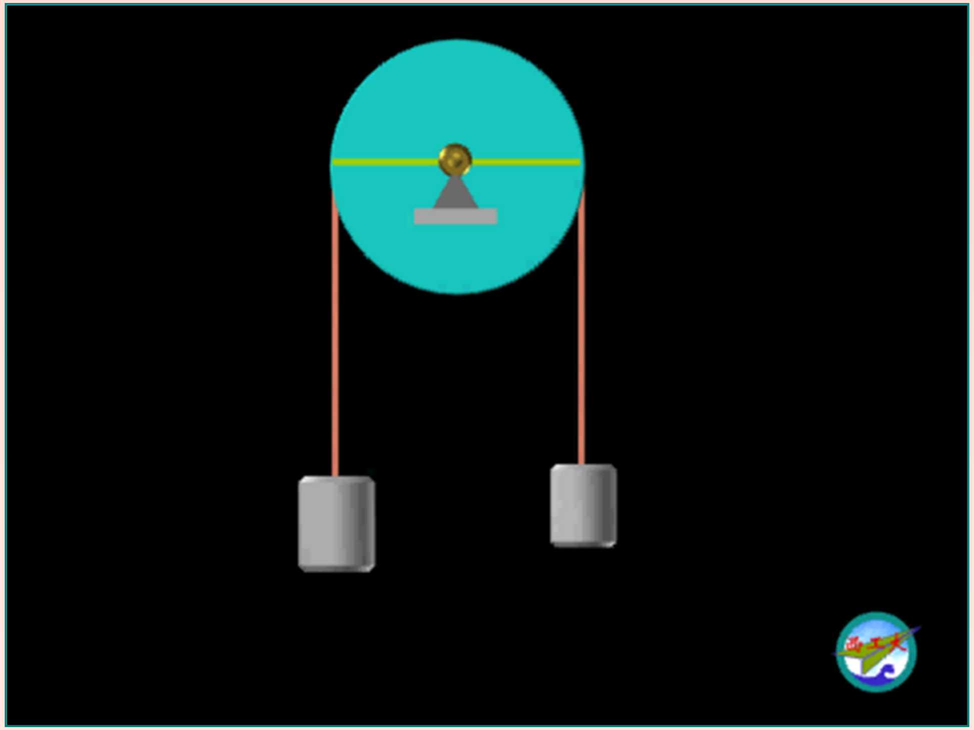
§5-3　动静法应用举例

底盘可升降的轿车

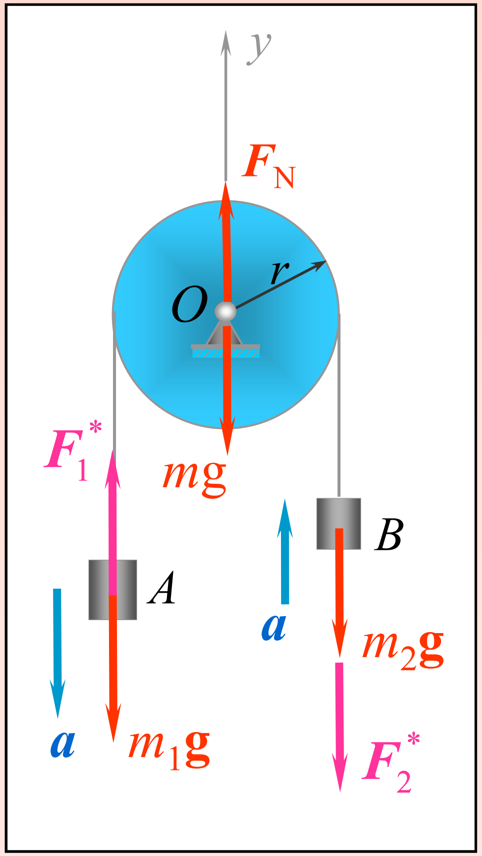
§5-3　动静法应用举例



例题5-2 如图所示，匀质滑轮的半径为r，质量为m，可绕水平轴转动。轮缘上跨过的软绳的两端各挂质量为m_1和m_2的重物，且$m_1 > m_2$。绳的重量不计，绳与滑轮之间无相对滑动，轴承摩擦忽略不计。求重物的加速度和轴承反力。



§ 5-3 动静法应用举例



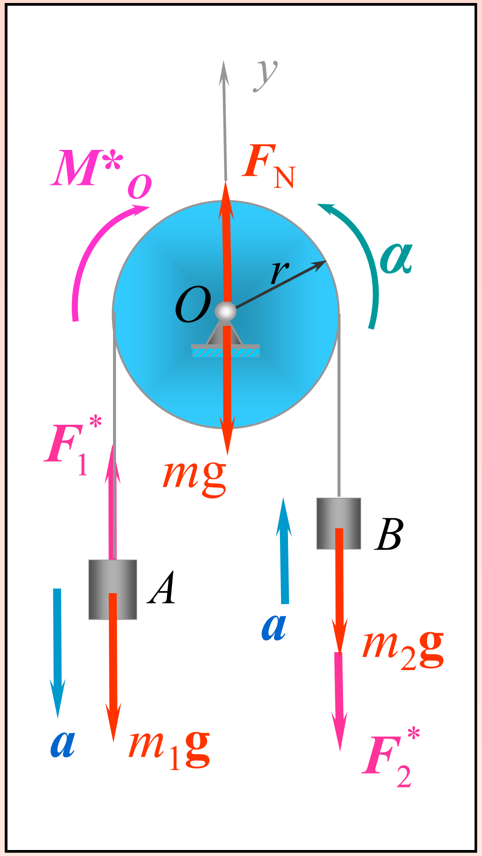
解： 以滑轮与两重物一起组成所研究的质点系。作用在该系统上的外力有重力$m_1\boldsymbol{g}$，$m_2\boldsymbol{g}$，$m\boldsymbol{g}$和轴承约束反力$\boldsymbol{F}_N$。在系统中每个质点上假想地加上惯性力后，可以应用达朗伯原理。

已知$m_1>m_2$，则重物的加速度$\boldsymbol{a}$方向如图所示。重物的惯性力方向均与加速度$\boldsymbol{a}$的方向相反，大小分别为：

$$F_1^* = m_1 a$$

$$F_2^* = m_2 a$$

§ 5-3　动静法应用举例



$$F_1^* = m_1 a \ , \quad F_2^* = m_2 a$$

滑轮定轴转动，惯性力向转轴O简化。

主矢　$F^* = ma_O = 0$

主矩　$M^*_O = J_O \alpha = \frac{1}{2} mr^2 \cdot \frac{a}{r} = \frac{1}{2} mar$

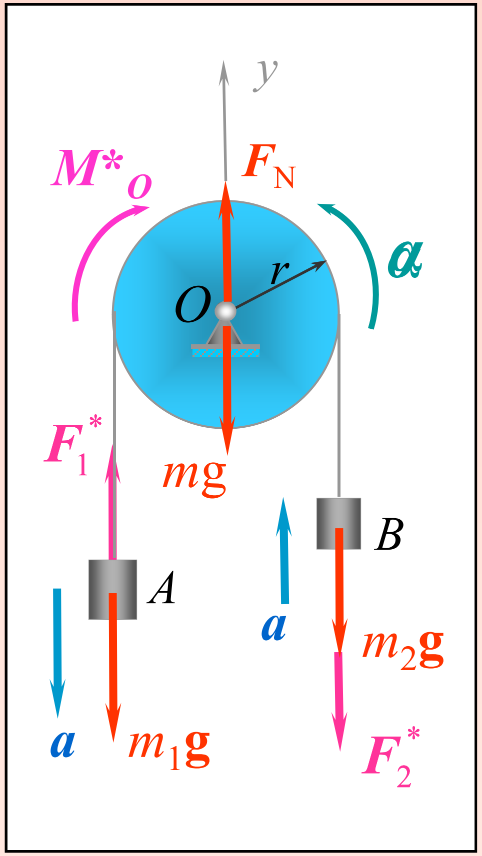
应用达朗贝尔原理列平衡方程，得

$$\sum F_y = 0,$$

$$F_N - mg - m_1 g - m_2 g + F_1^* - F_2^* = 0$$

$$\sum m_O(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$(m_1 g - F_1^* - F_2^* - m_2 g) r - M_O^* = 0$$



$$F_1^* = m_1 a \ , \quad F_2^* = m_2 a \ , \qquad M_O^* = \frac{1}{2} mar$$

$$\sum F_y = 0,$$

$$F_N - mg - m_1 g - m_2 g + F_1^* - F_2^* = 0$$

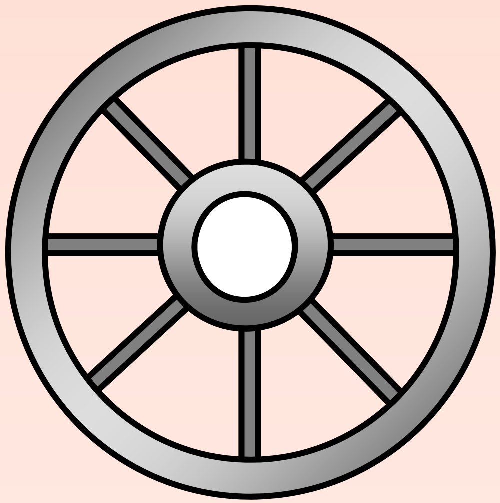
$$\sum m_O(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$m_1 gr - F_1^* r - F_2^* r - m_2 gr - M_O^* = 0$$

解得 $F_N = mg + m_1 g + m_2 g - m_1 a + m_2 a = 0$

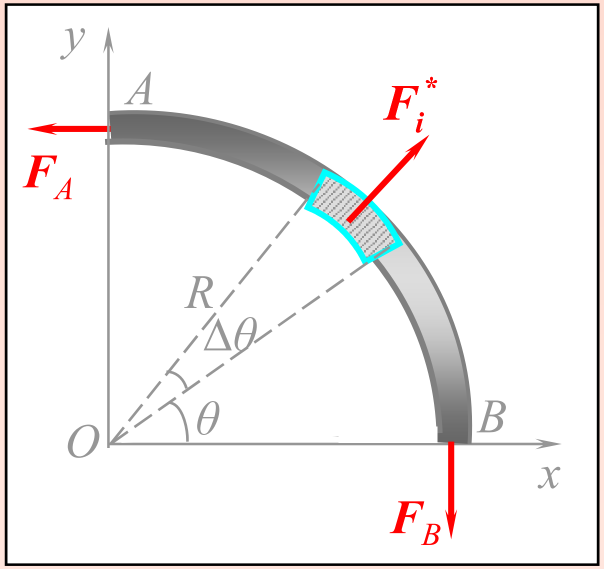
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} g$$

例题5-3飞轮质量为m，半径为R，以匀角速度ω转动。设轮缘较薄，质量均匀分布，轮辐质量不计。若不考虑重力的影响，求轮缘横截面的张力。



解：　取四分之一轮缘为研究对象，如图所示。

将轮缘分成无数微小的弧段，每段加惯性力



$$\boldsymbol{F}_i^* = m_i \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{n}}$$

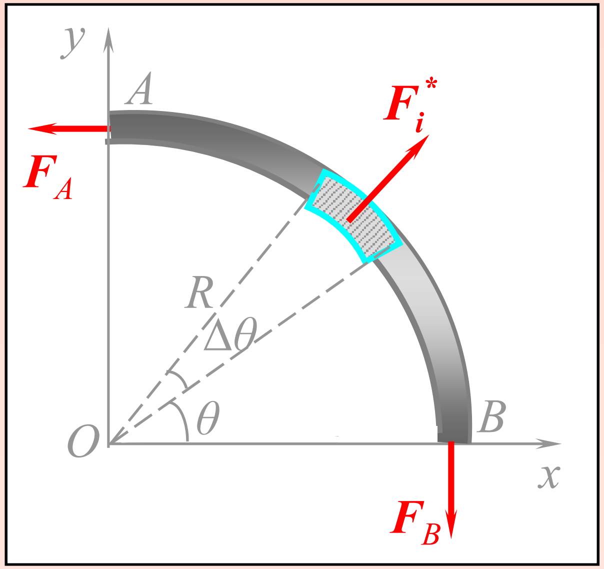
$$F_i^* = m_i a_i^{\mathrm{n}} = \frac{m}{2\pi R} R\Delta\theta_i \times R\omega^2$$

建立平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_i^* \cos\ \theta_i - F_A = 0$$

令 $\Delta\theta_i \to 0$ ，有

$$F_A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m}{2\pi} R\omega^2 \cos\ \theta \mathrm{d}\theta = \frac{mR\omega^2}{2\pi}$$



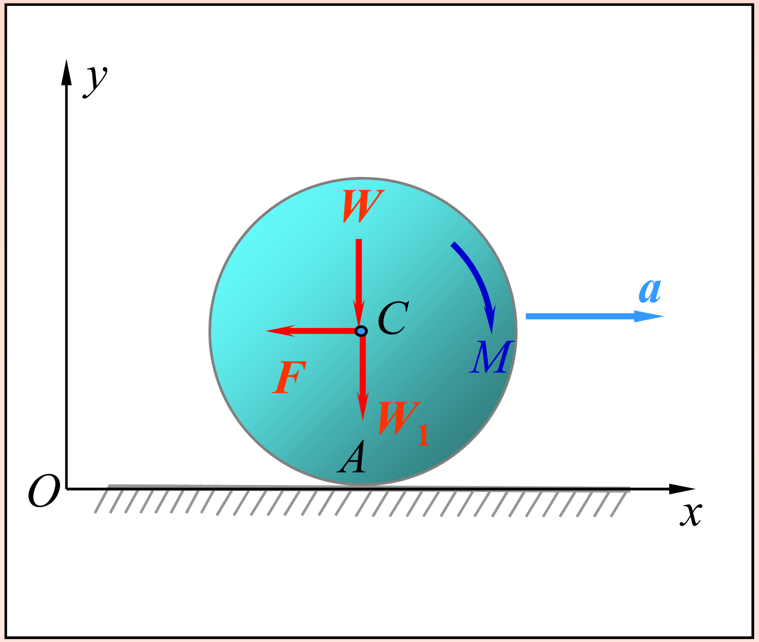
再建立平衡方程

$$\sum F_y = 0, \quad \sum F_i^* \sin\theta_i - F_B = 0$$

同样解得

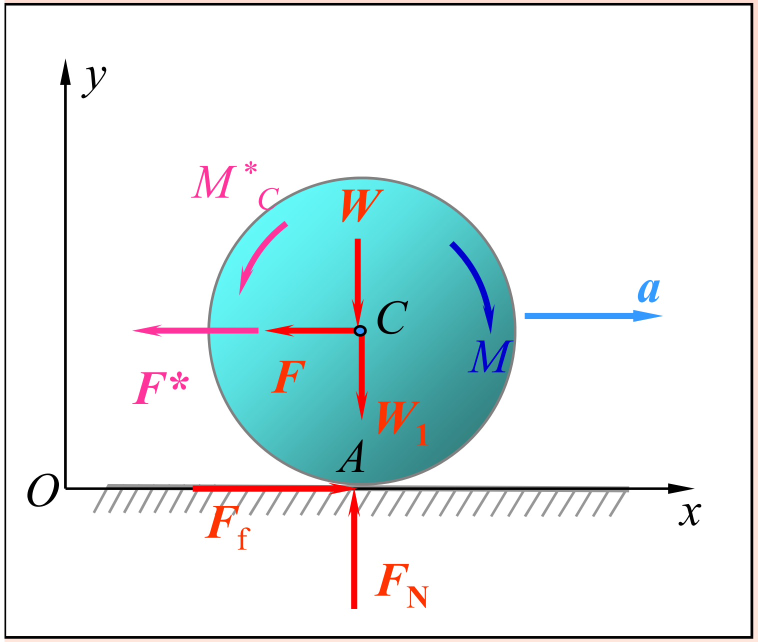
$$F_B = \frac{mR\omega^2}{2\pi}$$

由于轮缘质量均分布，任一截面张力都相同。



例题5-4 车辆的主动轮如图所示。设轮的半径为r，重为$\boldsymbol{W}_1$(W_1= mg)，在水平直线轨道上运动。车身对轮子的作用力可分解为$\boldsymbol{W}$和$\boldsymbol{F}$，驱动力偶矩为M。车轮对通过其质心并垂直于车轮对称面的轴的回转半径为ρ_C，轮与轨道间的滑动摩擦系数为f_s，不计滚动摩阻的影响。求在不滑动条件下，驱动力偶矩M的最大值。

解： 分析车轮的受力情况如下。



主动力系：车身的载荷$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{W}$，驱动力偶矩$\boldsymbol{M}$，车轮的重量$\boldsymbol{W}_1=m\boldsymbol{g}$。

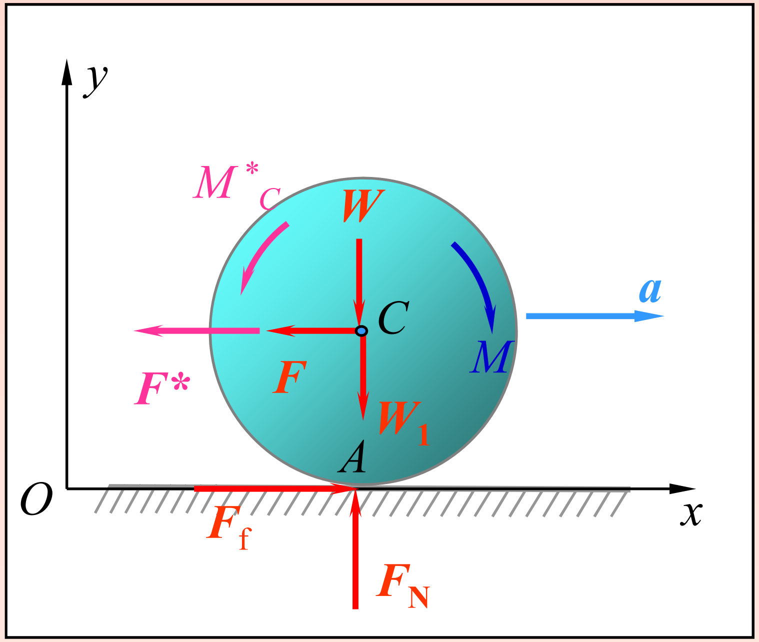
约束力系：法线约束力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$，滑动摩擦力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{f}}$。

惯性力系：因车轮作平面运动，设车身有向前的加速度$\boldsymbol{a}$，则惯性力系向质心C简化的主矢量$\boldsymbol{F}^*$和主矩M^*_C为：

$$\boldsymbol{F}^* = -m\boldsymbol{a}$$

$$M_C^* = -J_C\alpha = -(m\rho_C^2)\frac{a}{r}$$

应用动静法，写出动态平衡方程：

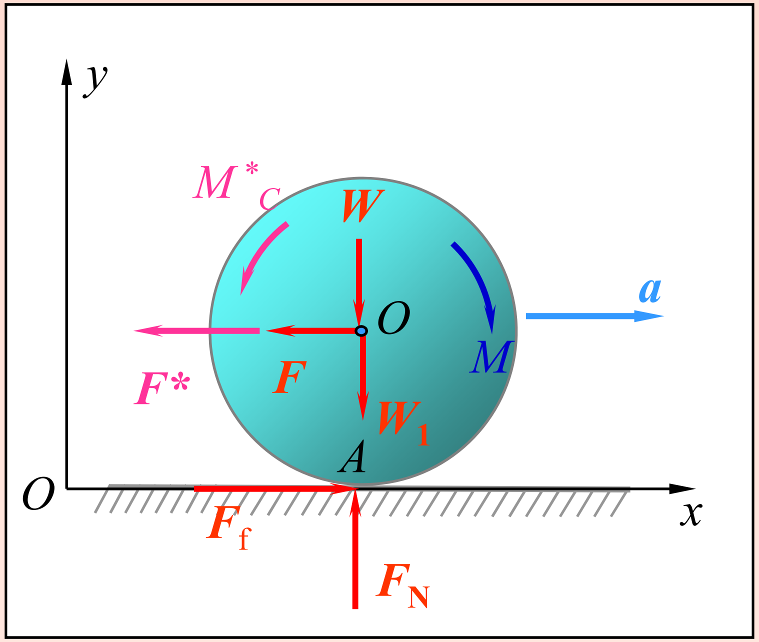


$$\sum F_x = 0, \quad F_f - F - F^* = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_N - W - W_1 = 0$$

$$\sum m_C(\boldsymbol{F}) = 0, \quad M_C^* + F_f r - M = 0$$

是否可以 $\sum m_A(\boldsymbol{F}) = 0$?　$M_C^* + (F^* + F)r - M = 0$



上三式包含$\boldsymbol{F}_{\mathrm{f}}$，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$和$\boldsymbol{a}$三个未知量，故可解出

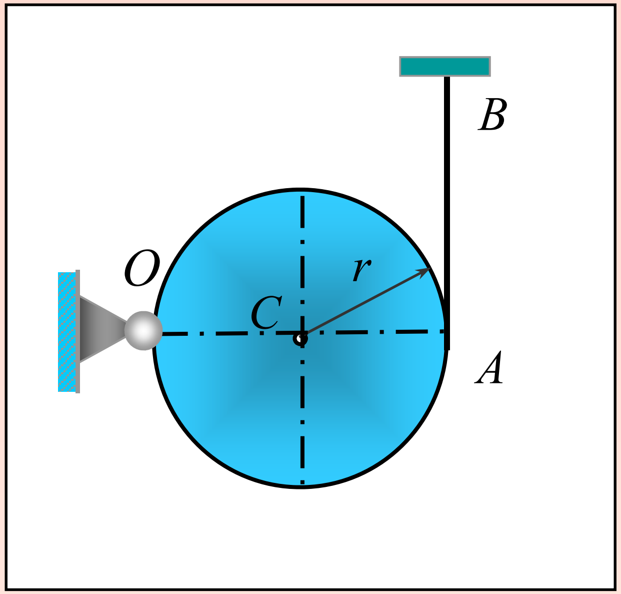
$$F_{\mathrm{f}} = \frac{Mr + F\rho_C^2}{\rho_C^2 + r^2}$$

$$F_{\mathrm{N}} = W + W_1$$

再利用$\boldsymbol{F}_{\mathrm{f}} \leq \boldsymbol{f}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$的条件，可得

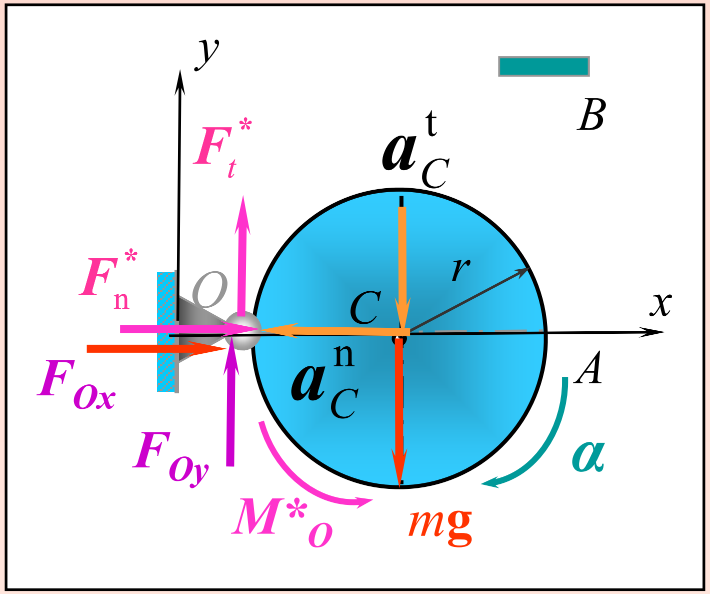
$$M \leq r\left[f_{\mathrm{s}}(W + W_1)(1 + \frac{\rho_C^2}{r^2}) - F\frac{\rho_C^2}{r^2} \right]$$

§5-3　动静法应用举例



例题5-5 如图所示，匀质圆盘的半径为r，质量为m，可绕水平轴O转动。突然剪断绳，求圆盘的角加速度和轴承O处的反力。

解： 圆盘定轴转动，惯性力向转轴O简化。



主矢　$F^*_t = ma^t_C = m r \alpha$

$F^*_n = mr\omega^2 = 0$

主矩　$M^*_O = J_O \alpha = \frac{3}{2} mr^2\alpha$

应用达朗贝尔原理列平衡方程，得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ox} + F^*_n = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Oy} + F^*_t - mg = 0$$

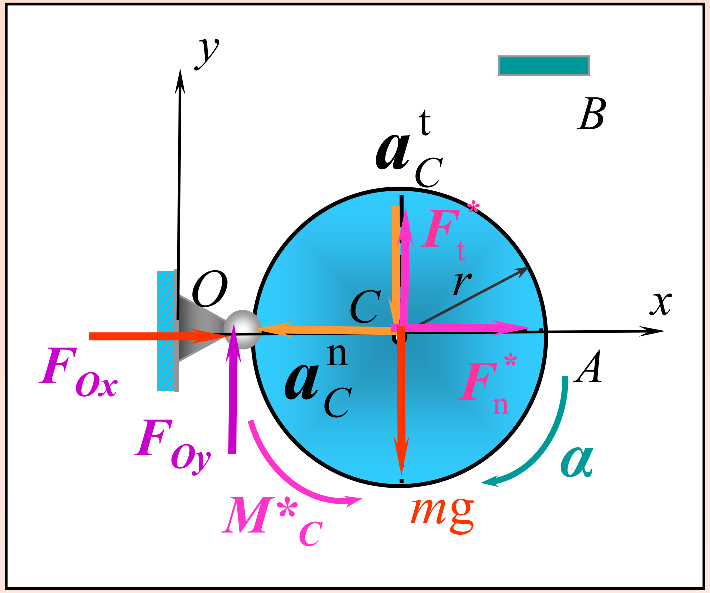
$$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0, \quad (F_{Oy} + F^*_t)r - M^*_O = 0$$

是否可以 $\sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0$?

$$mgr - M^*_O = 0$$

讨论

若认为圆盘平面运动，则惯性力应向圆心C简化。



主矢 $F^*_t = ma^t_C = m r\alpha$

$F^*_n = mr\omega^2 = 0$

主矩 $M^*_C = J_C\alpha = \frac{1}{2}mr^2\alpha$

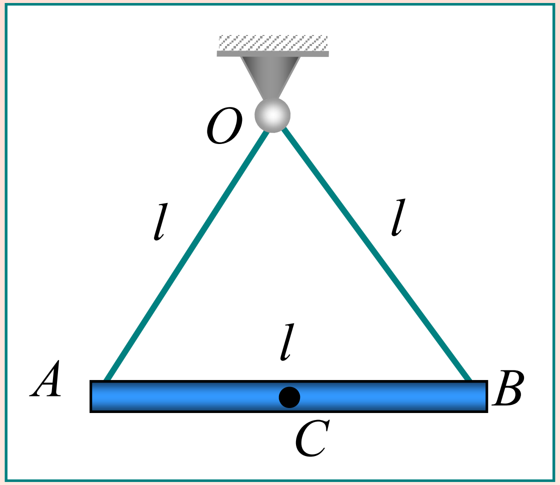
应用达朗贝尔原理列平衡方程，得

$\sum F_x = 0, \quad F_{Ox} + F^*_n = 0$

$\sum F_y = 0, \quad F_{Oy} + F^*_t - mg = 0$

$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_{Oy}r - M^*_C = 0$

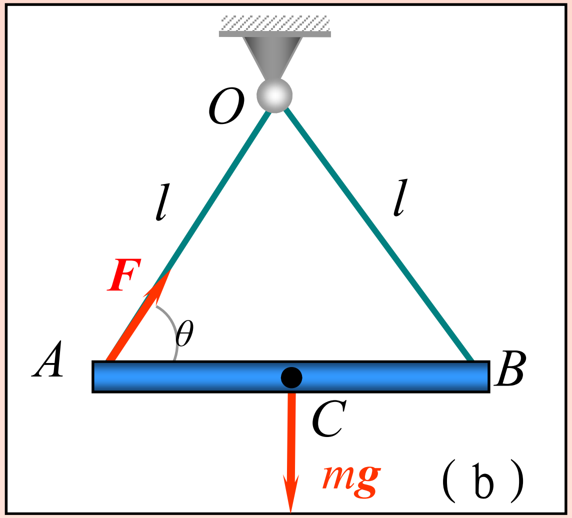
例题 5-6 用长 l 的两根绳子 AO 和 BO 把长 l，质量是 m 的匀质细杆悬在点 O (图 a)。当杆静止时，突然剪断绳子 BO，试求刚剪断瞬时另一绳子 AO 的拉力。



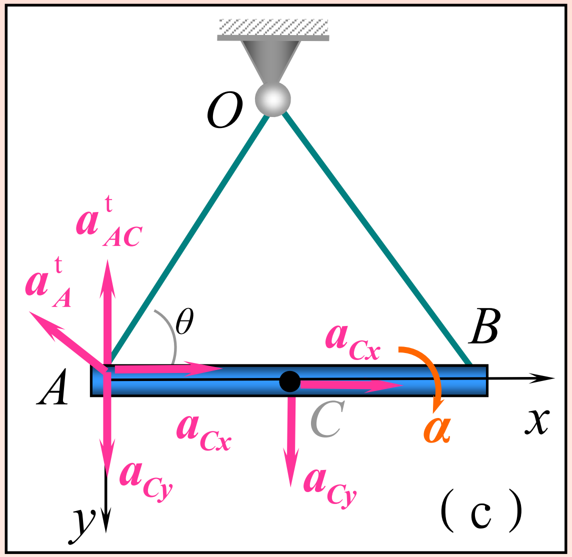
(a)

解：

绳子BO剪断后，杆AB将开始在铅直面内作平面运动。由于受到绳OA的约束，点A将在铅直平面内作圆周运动。在绳子BO刚剪断的瞬时，杆AB上的实际力只有绳子AO的拉力$\boldsymbol{F}$和杆的重力$m\boldsymbol{g}$。



在引入杆的惯性力之前，须对杆作加速度分析。取坐标系$Axyz$ 如图(c)所示。利用刚体作平面运动的加速度合成定理，以质心C作基点，则点A的加速度为



$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}^{\mathrm{n}}_A + \boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}_A = \boldsymbol{a}_{Cx} + \boldsymbol{a}_{Cy} + \boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}_{AC} + \boldsymbol{a}^{\mathrm{n}}_{AC}$$

在绳BO刚剪断的瞬时，杆的角速度$\omega=0$，角加速度$\alpha\neq0$。因此

$$a^{\mathrm{n}}_{AC}=AC\cdot\omega^2=0$$

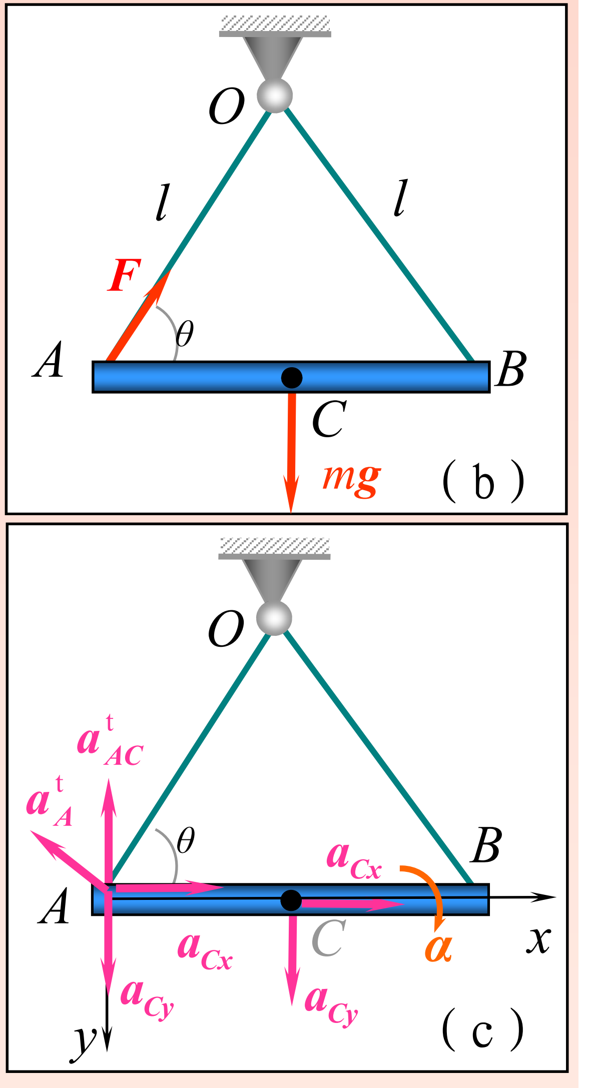
$$a^{\mathrm{t}}_{AC}=l\alpha/2$$

又 $a^{\mathrm{n}}_{A}=0$，加速度各分量的方向如图(c)所示。把$\boldsymbol{a}_A$投影到点A轨迹的法线 AO上，就得到

$$0=a_{Cx}\cos\theta-a_{Cy}\sin\theta+a^{\mathrm{t}}_{AC}\sin\theta$$

即
$$a_{Cx}\cos\theta-a_{Cy}\sin\theta+\frac{1}{2}\alpha\sin\theta=0 \qquad (1)$$

这个关系就是该瞬时杆的运动要素所满足的条件。



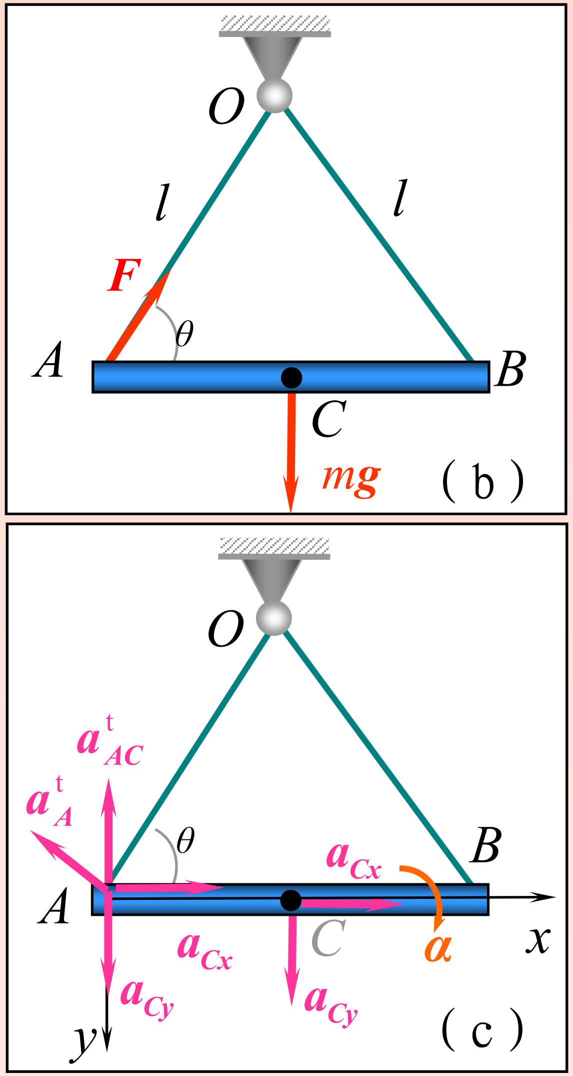
杆的惯性力合成为一个作用在质心的力 $\boldsymbol{F}^*_C$ 和一个力偶M^*_C，两者都在运动平面内，$\boldsymbol{F}^*_C$的两个分量大小分别是

$$F^*_{Cx}=ma_{Cx}\ ,\quad F^*_{Cy}=ma_{Cy}$$

力偶矩 $\boldsymbol{M}^*_C$ 的大小是

$$M^*_C=J_{Cz'}\boldsymbol{\alpha}$$

旋向与$\boldsymbol{\alpha}$相反(如图b)。



由动静法写出杆的动态平衡方程，有

$$\sum F_x = 0, \qquad -ma_{Cx} + F\cos\theta = 0 \qquad (2)$$

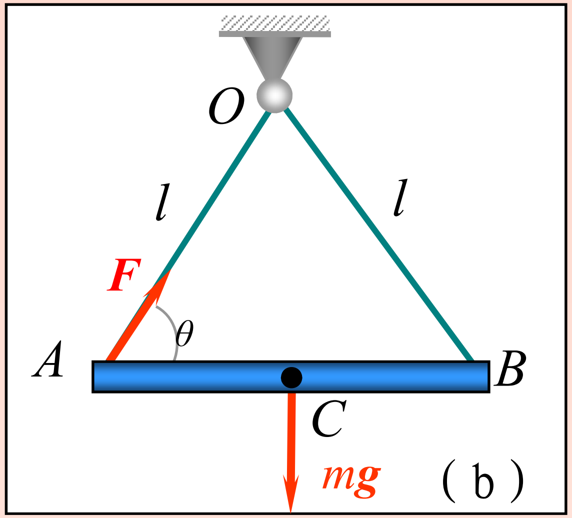
$$\sum F_y = 0, \qquad -ma_{Cy} + mg - F\sin\theta = 0 \qquad (3)$$

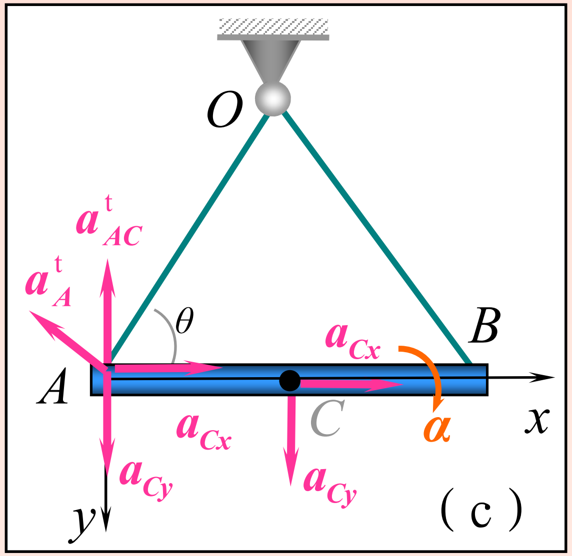
$$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0, \qquad -J_{Cz'}\alpha + F\frac{l}{2}\sin\theta = 0 \qquad (4)$$

且对于细杆，$J_{Cz'} = ml^2/12$ 。

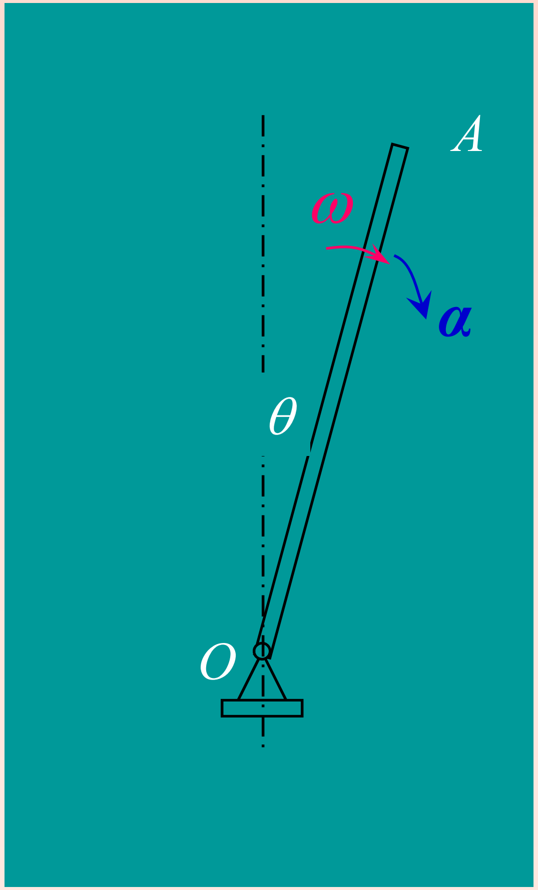
联立求解方程(1)～(4)，就可求出

$$F = \frac{mg\sin\theta}{4\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{13}mg$$





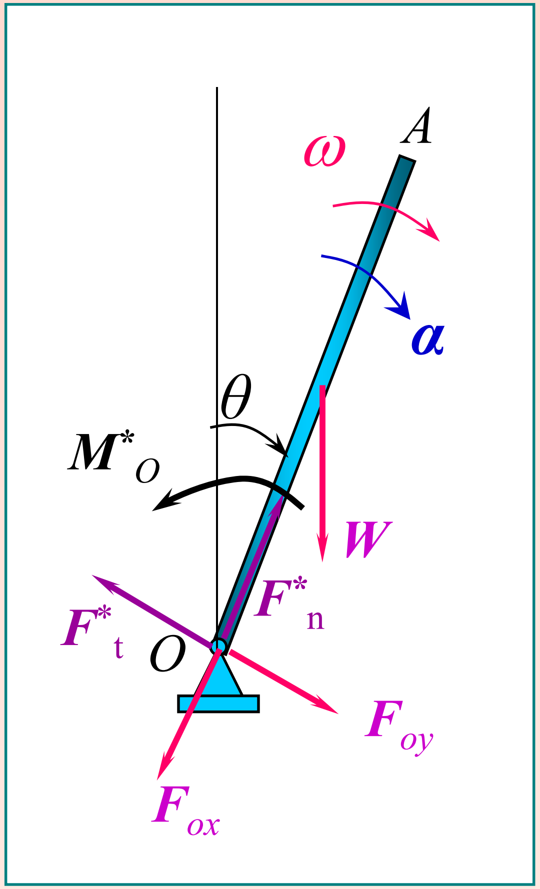
§ 5-3 动静法应用举例



例题 5-7 均质杆件OA重$\boldsymbol{W}$，长l，A端铰接，在铅垂位置时受微小扰动运动到倾斜任意角θ位置。

求：1. 惯性力的简化结果；
2. O处的约束力。

解： 1. 惯性力的简化结果

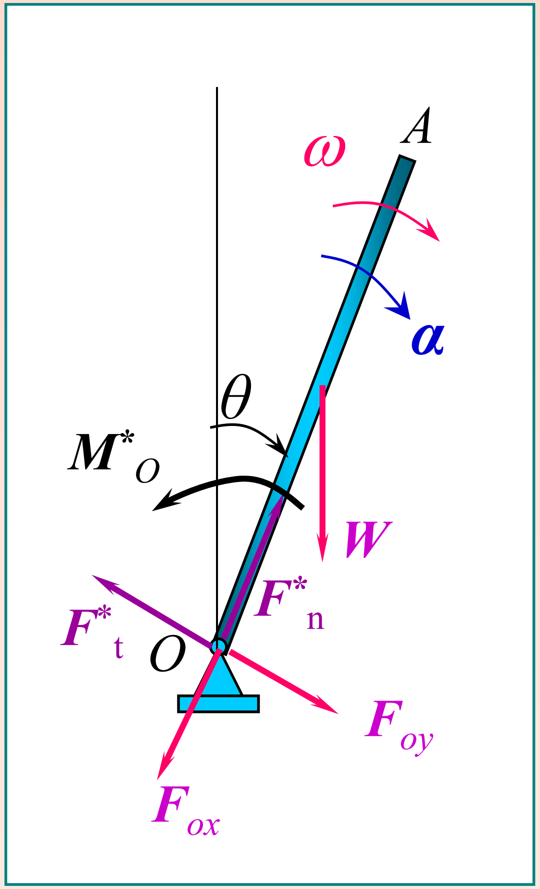


杆件OA绕O轴作定轴转动，假定转动角速度和角加速度分别为ω和$\boldsymbol{\alpha}$ 。

假设O处有沿着杆件轴线和垂直于杆件轴线方向约束力；

杆件上由于定轴转动而产生的分布惯性力向O处简化的结果为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}^{*},\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}^{*},\ M_{O}^{*}$$



$$F^*_t = \frac{W}{g} \times \frac{l}{2} \alpha, \quad F^*_n = \frac{W}{g} \times \frac{l}{2} \omega^2, \quad M^*_O = J_O \alpha$$

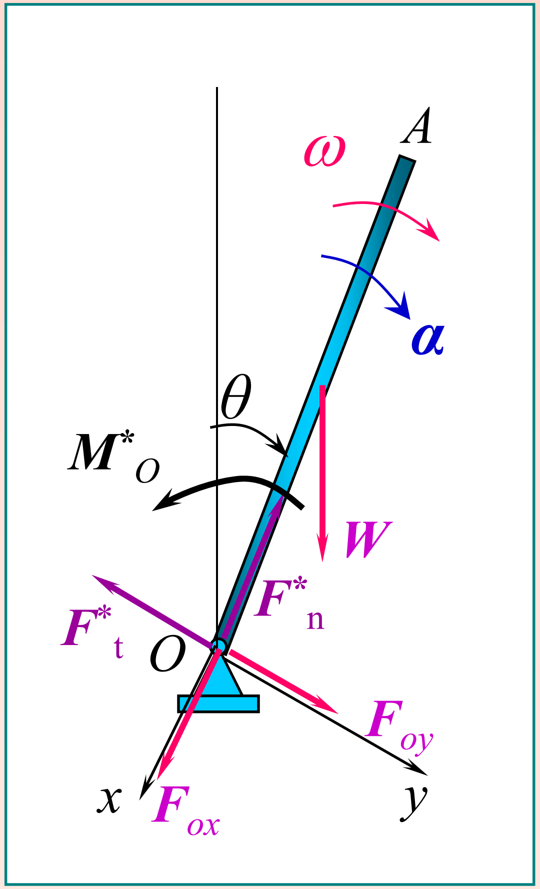
2. 计算动约束力

先应用动静法求未知运动量ω和$\boldsymbol{\alpha}$。

$$\sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0$$

$$J_O \alpha - W \times \frac{l}{2} \times \sin\theta = 0, \quad \alpha = \frac{3g}{2l} \sin\theta$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1 - \cos\theta)}$$



$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$$

计算动约束力：

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Ox} - F_{\mathrm{n}}^{*} + W\cos\theta = 0$$

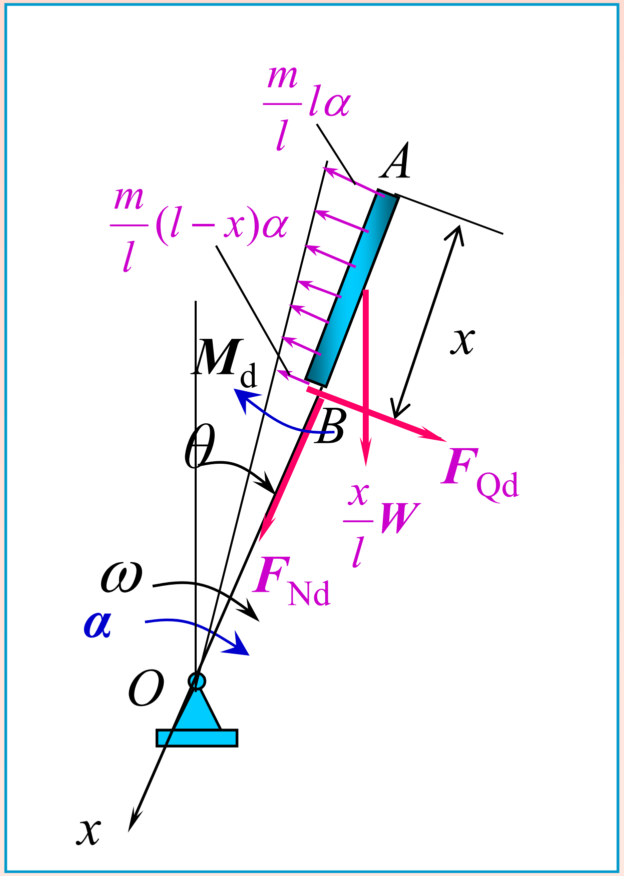
$$F_{Ox} = \frac{W}{g} \times \frac{l}{2}\omega^2 - W\cos\theta = \frac{W}{2}(3-5\cos\theta)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{Oy} - F_{\mathrm{t}}^{*} + W\sin\theta = 0$$

$$F_{Oy} = W\sin\theta + \frac{W}{g} \times \frac{l}{2} \times \varepsilon = -\frac{W}{4}\sin\theta$$

讨论　计算杆中的弯矩分布、最大弯矩及其位置。



此时需将杆视为弹性梁。

从任意部位*B*处截出杆段 ***AB=x*** 为研究对象。

惯性力***F****按梯形分布

$\frac{x}{l}W$ -----重力

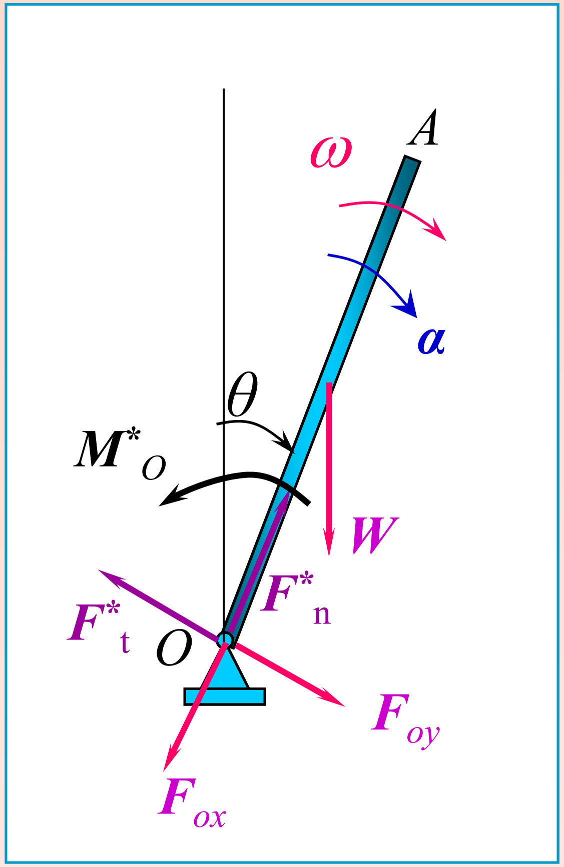
F_{Nd} -----动轴力

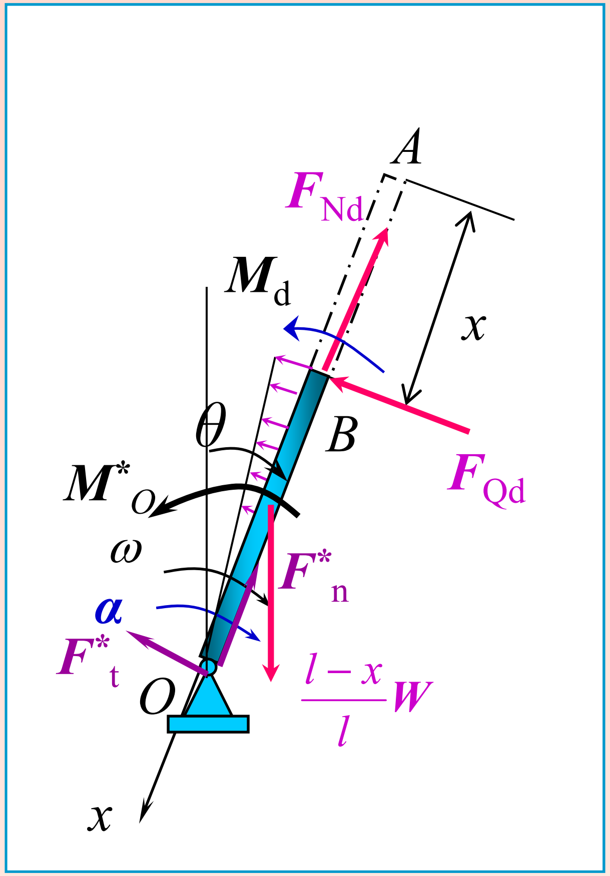
F_{Qd} -----动剪力

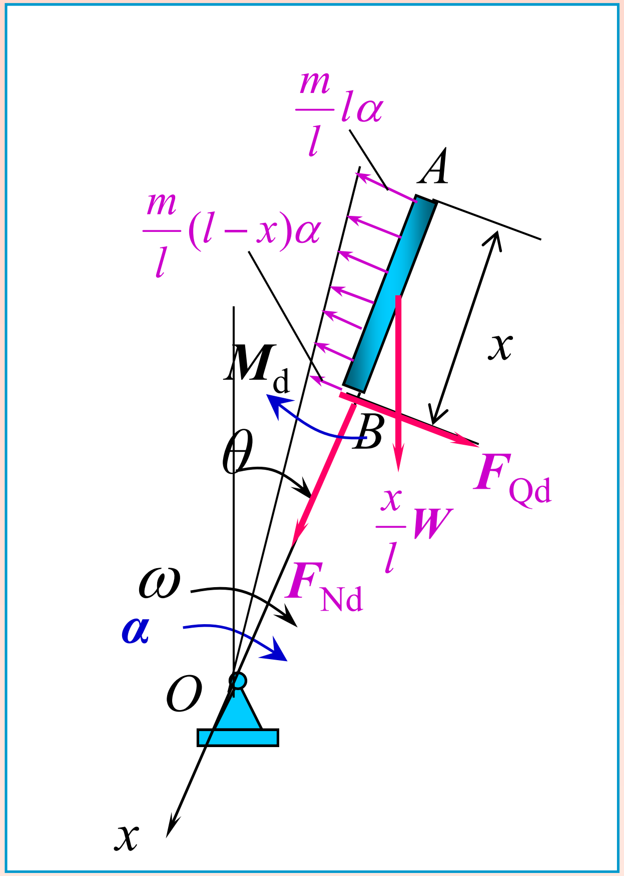
M_d -----动弯矩

§ 5-3 动静法应用举例

例题 5-7







惯性力F*按梯形分布

F_{Nd} -----动轴力　M_d-----动弯矩

F_{Qd}-----动剪力　$\frac{x}{l}W$-----重力

由动静法得

$$-\sum M_B(\frac{x}{l}\boldsymbol{W})+\sum M_B(\boldsymbol{F}^*)-M_{\rm d}=0$$

$$M_{\rm d}=-\sum M_B(\frac{x}{l}\boldsymbol{W})+\sum M_B(\boldsymbol{F}^*) \qquad \text{(a)}$$

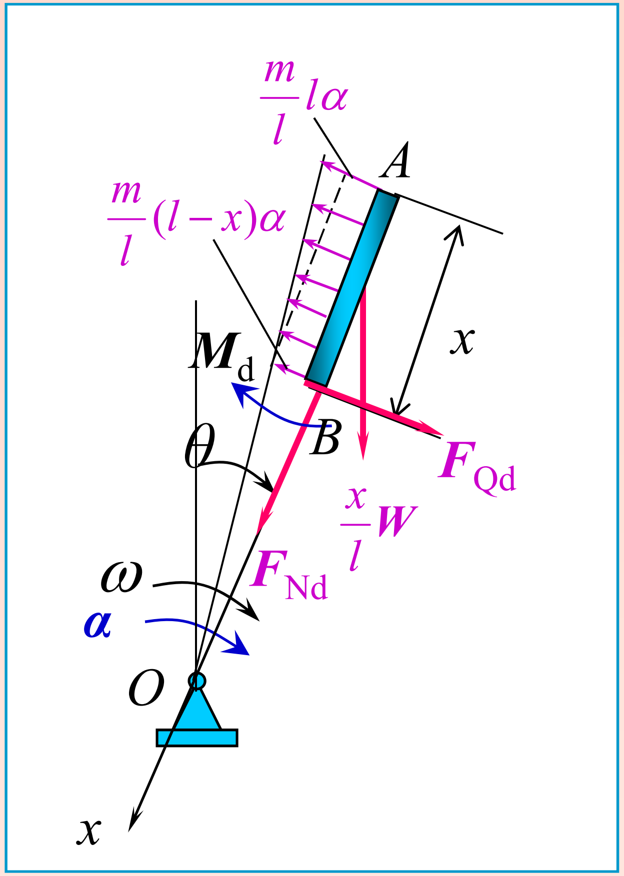
$$M_{\rm d}=-\frac{x}{l}W\sin\theta\cdot\frac{x}{2}+\frac{m}{l}(l-x)\beta\cdot x\cdot\frac{x}{2} \qquad \text{(b)}$$

$$+\frac{l}{2}\cdot\frac{m}{l}\alpha[l-(l-x)]\cdot x\cdot\frac{2}{3}x$$

式中 $m=\dfrac{W}{g}$

已知 $\alpha=\dfrac{3g}{2l}\sin\theta$

解得 $M_{\rm d}=\dfrac{1}{4}Wl\sin\theta(\dfrac{x}{l})^2(1-\dfrac{x}{l}) \qquad \text{(c)}$



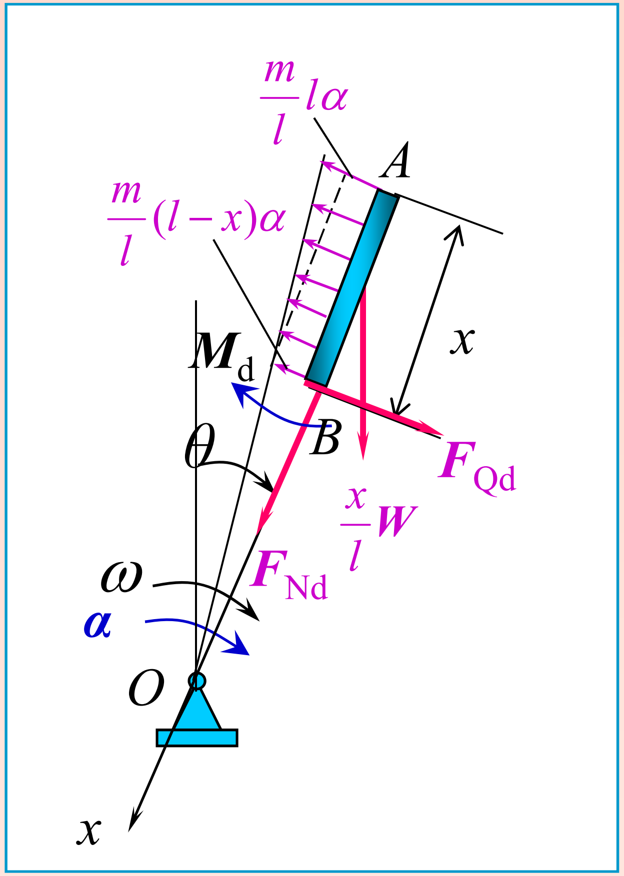
$$M_d = \frac{1}{4} Wl\sin\theta\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(1-\frac{x}{l}\right) \qquad \text{(c)}$$

为求杆内动弯矩最大值，对上式求导

$$\frac{dM_d}{dx} = 0 \quad 得 \quad x = \frac{2}{3}l \qquad \text{(d)}$$

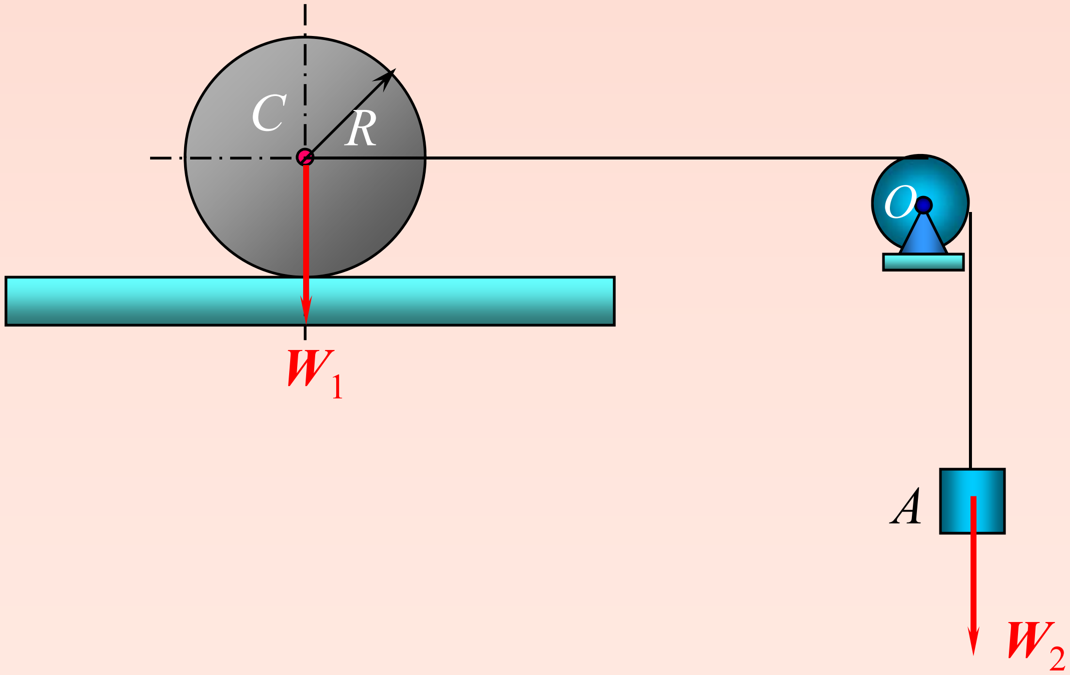
式（d）代入式（c）得杆内动弯矩最大值

$$M_{d\max} = \frac{1}{27} Wl\sin\theta$$



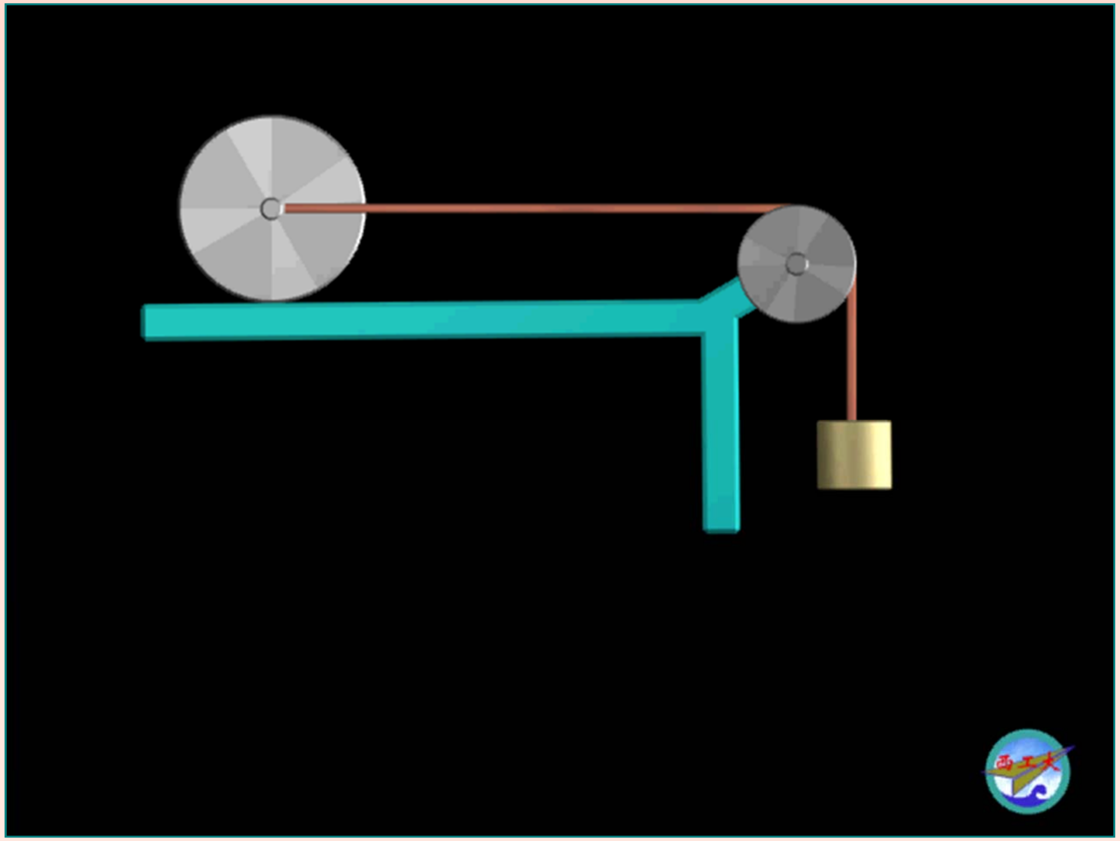
§ 5-3　动静法应用举例

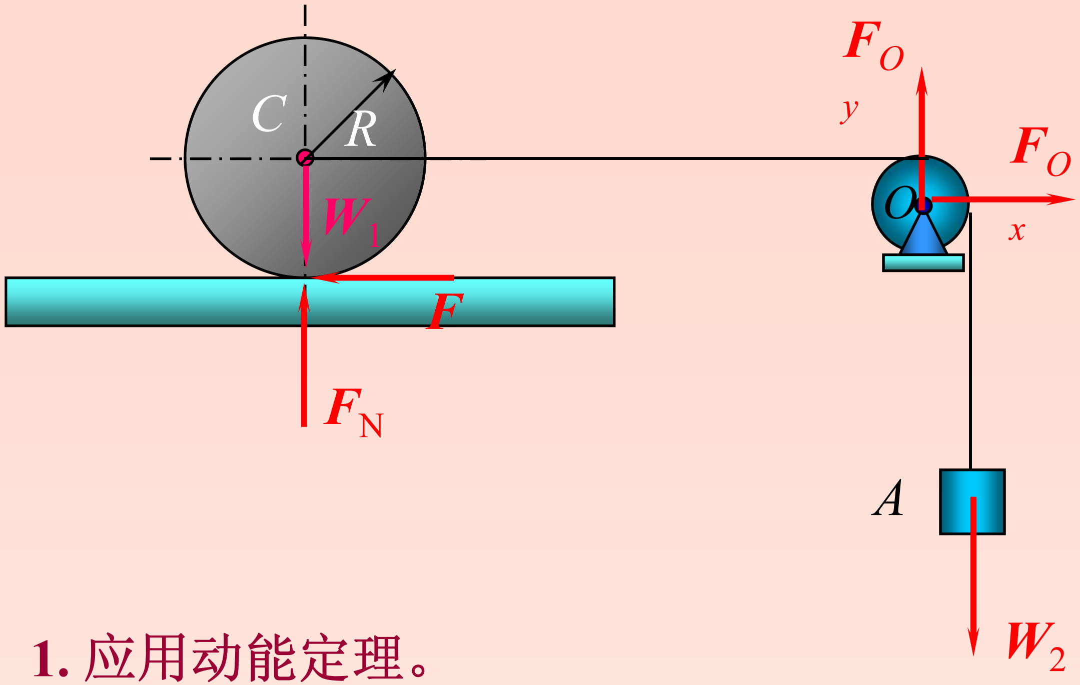
例题5-8　半径为R，重量为W_1的大圆轮，由绳索牵引，在重量为W_2的重物A的作用下，在水平地面上作纯滚动，系统中的小圆轮重量忽略不计。求大圆轮与地面之间的滑动摩擦力。



§5-3　动静法应用举例

例题 5-8





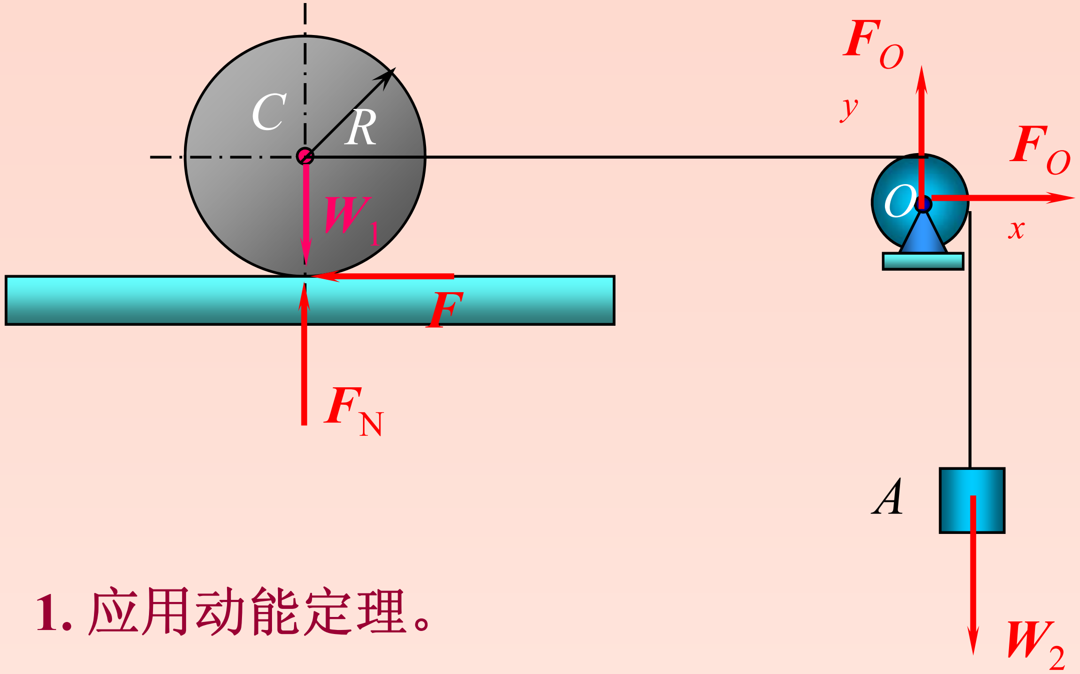
解：

考察整个系统，有4个未知约束力。

如果直接采用动静法，需将系统拆开。因为系统为一个自由度，所以考虑先应用动能定理，求出加速度，再对大圆轮应用动静法。

1. 应用动能定理。

$$\frac{1}{2}\frac{W_2}{g}v^2+\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}v^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}R^2)(\frac{v}{R})^2-T_0=W_2\times s$$



两边对时间t求导，且

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$$

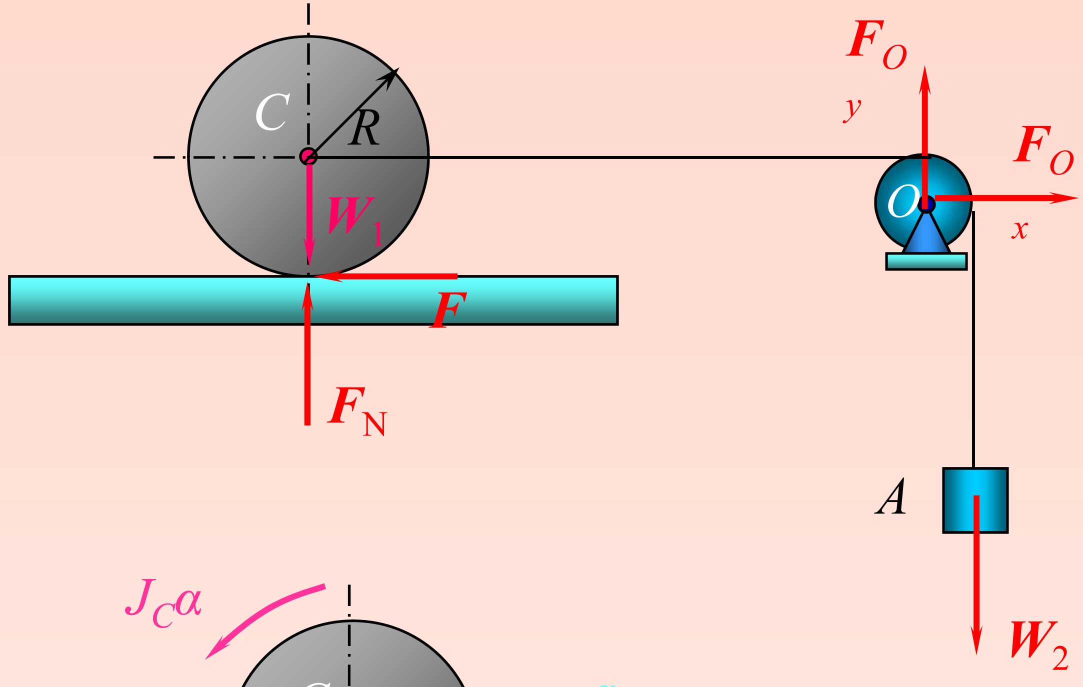
得

$$a=\frac{W_2 g}{W_2+\frac{3}{2}W_1}$$

1. 应用动能定理。

$$\frac{1}{2}\frac{W_2}{g}v^2+\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}v^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}R^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2-T_0=W_2\times s$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{W_2}{g}+\frac{3}{2}\frac{W_1}{g}\right)v^2-T_0=W_2\times s$$



$$a=\frac{W_2 g}{W_2+\frac{3}{2}W_1}$$

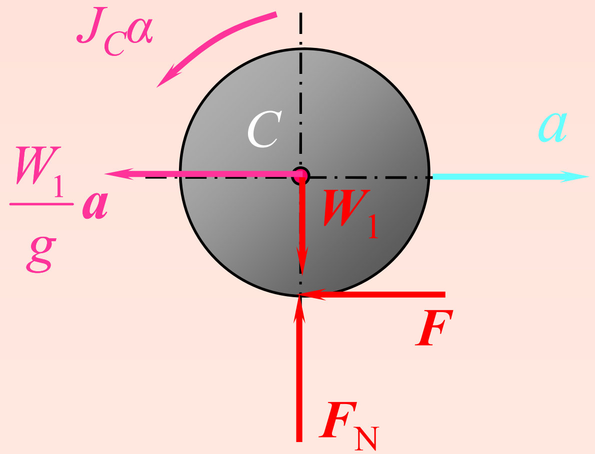
2. 应用动静法。

取轮子为研究对象。

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad J_C\alpha-FR=0$$

将 $\alpha=\dfrac{a}{R}$ 带入上式得

$$F=\frac{J_C\alpha}{R}=\frac{J_C a}{R^2}=\frac{W_2W_1}{2(W_2+\frac{3}{2}W_1)}$$



§5-4 定轴转动刚体对轴承的动压力

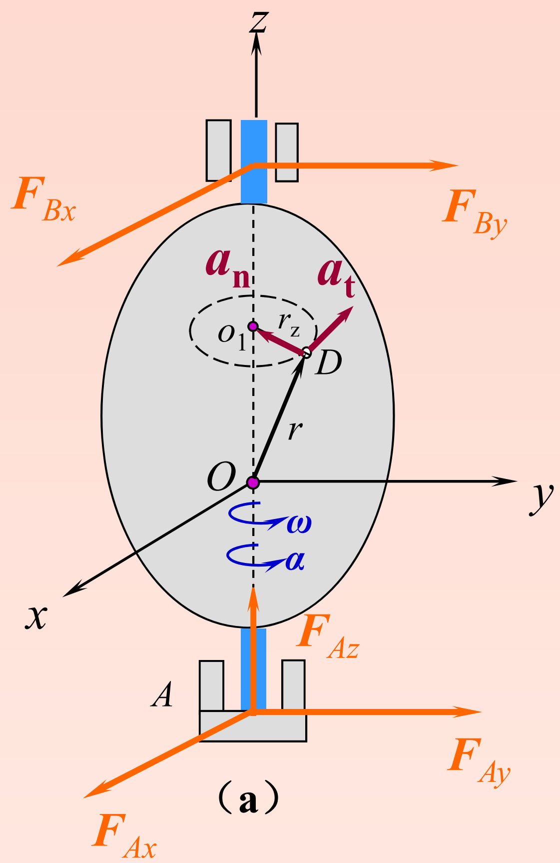
§5-4 定轴转动刚体对轴承的动压力

当刚体作定轴转动时，惯性力一般要在轴承上引起附加动压力。这种现象在工程技术上是必须注意的。

设有绕固定轴Oz转动的刚体，在任意瞬时的角速度是ω，角加速度是$\boldsymbol{\alpha}$ 。（图a)取固定坐标$Oxyz$如图所示。

刚体上任意点D的切向和法向加速度的值分别是

$$a_t = r_z\alpha \ , \qquad a_n = r_z\omega^2$$



（a）

§ 5-4 定轴转动刚体对轴承的动压力

由图b可知，点D的加速度在各坐标轴的投影分别是

$$a_x = -a_n \cos\varphi - a_t \sin\varphi = -\omega^2 r_z \cos\varphi - \alpha\, r_z \sin\varphi$$

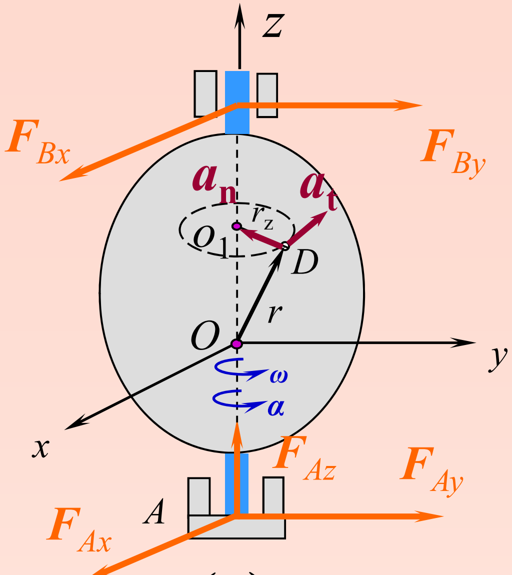
$$= -\omega^2 x - \alpha y$$

$$a_y = -a_n \sin\varphi + a_t \cos\varphi = -\omega^2 r_z \sin\varphi + \alpha\, r_z \cos\varphi$$

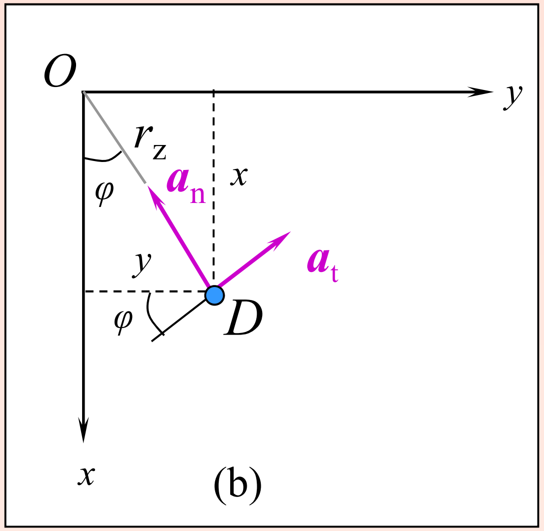
$$= -\omega^2 y + \alpha x$$

$$a_z = 0$$

以该点的质量乘以上各式并冠以负号，就得到该质点惯性力在各坐标轴上的投影。



（a）



(b)

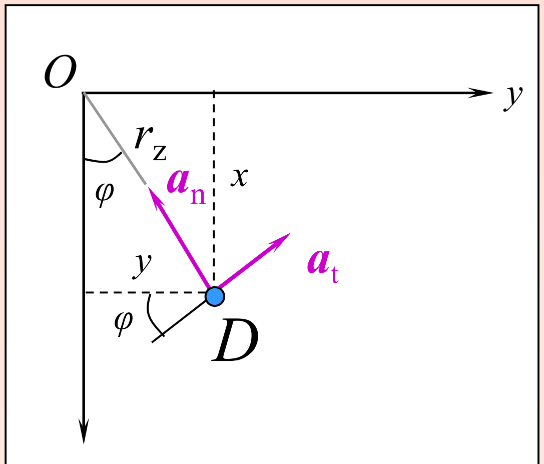
§ 5-4 定轴转动刚体对轴承的动压力

整个刚体惯性力的主矢F^*在各轴上投影分别是

$$F_x^* = \sum(-m_i a_{ix}) = \omega^2 \sum m_i x_i + \alpha \sum m_i y_i = m x_C \omega^2 + m y_C \alpha$$

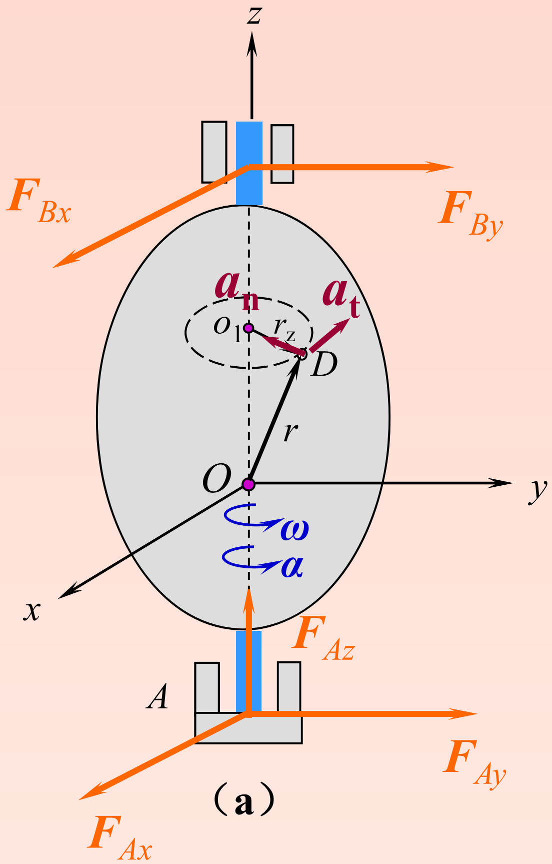
$$F_y^* = \sum(-m_i a_{iy}) = \omega^2 \sum m_i y_i - \alpha \sum m_i x_i = m y_C \omega^2 - m x_C \alpha$$

$$F_z^* = 0$$



(b)

$$a_x = -\omega^2 x - \alpha y$$
$$a_y = -\omega^2 y + \alpha x$$



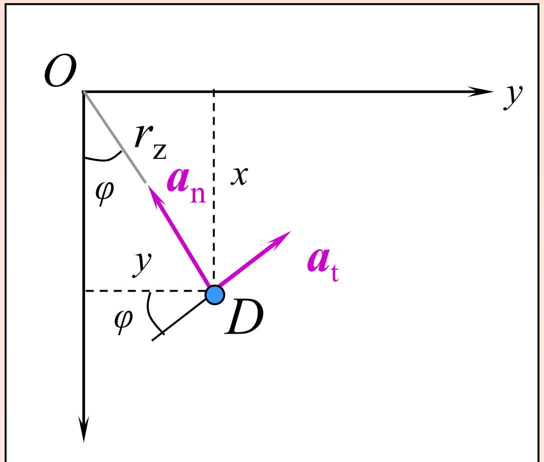
（a）

整个刚体惯性力的主矩M^*在各轴上投影分别是

$$M_x^* = \sum m_i a_{iy} z_i = \sum m_i(-\omega^2 y_i + \alpha x_i) z_i = -J_{yz}\omega^2 + J_{zx}\alpha$$

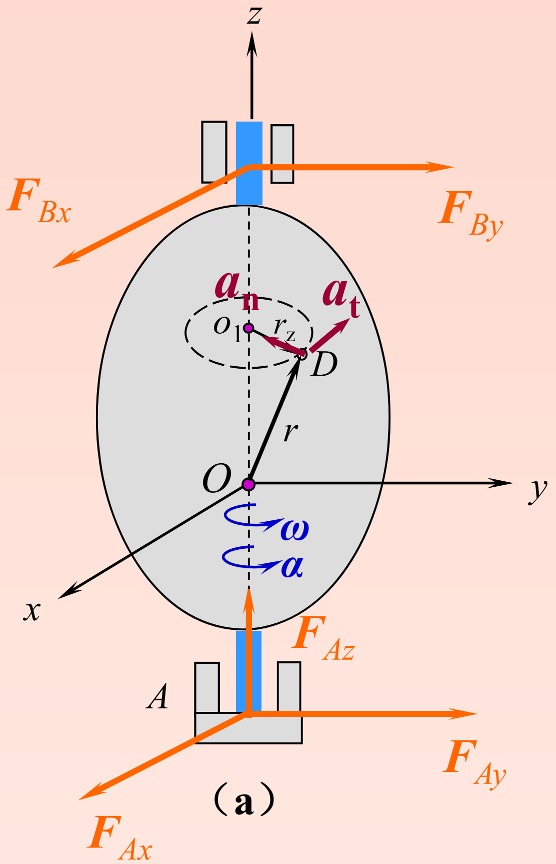
$$M_y^* = -\sum m_i a_{ix} z_i = \sum m_i(\omega^2 x_i + \alpha y_i) z_i = J_{zx}\omega^2 + J_{yz}\alpha$$

$$M_z^* = -\sum m_i a_{it} r_{iz} = -\alpha \sum m_i r_{iz}^2 = -J_z \alpha$$



(b)

$$a_x = -\omega^2 x - \alpha y$$
$$a_y = -\omega^2 y + \alpha x$$



（a）

§5-4 定轴转动刚体对轴承的动压力

根据达朗贝尔定理，列出动态平衡方程，有

$$\sum F_x = 0, \qquad F_{Ax} + F_{Bx} + F_{\mathrm{R}x} + F_x^* = 0$$

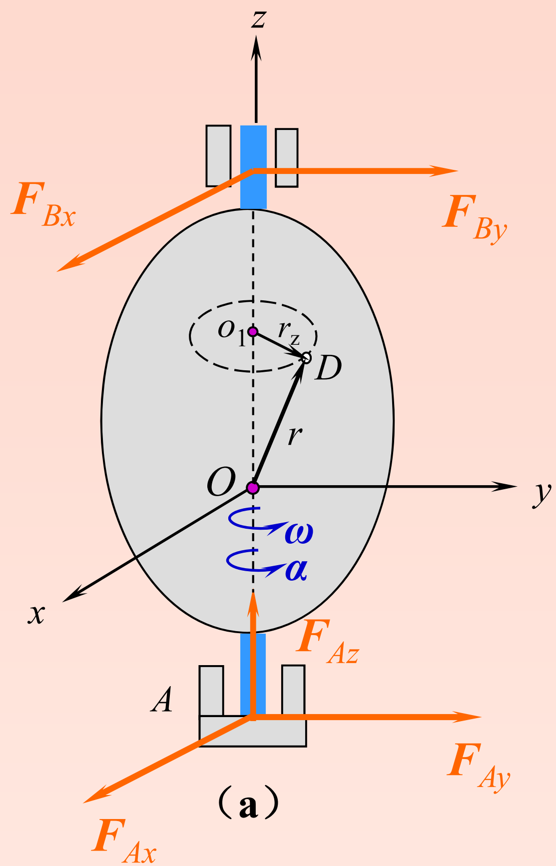
$$\sum F_y = 0, \qquad F_{Ay} + F_{By} + F_{\mathrm{R}y} + F_y^* = 0$$

$$\sum F_z = 0, \qquad F_{Az} + F_{\mathrm{R}z} = 0$$

$$\sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0, \qquad M_x(\boldsymbol{F}_{Ay}) + M_y(\boldsymbol{F}_{By}) + M_{\mathrm{R}x} + M_x^* = 0$$

$$\sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0, \qquad M_y(\boldsymbol{F}_{Ax}) + M_y(\boldsymbol{F}_{Bx}) + M_{\mathrm{R}y} + M_y^* = 0$$

$$\sum M_z(\boldsymbol{F}) = 0, \qquad M_{\mathrm{R}z} + M_z^* = 0$$



（a）

$\boldsymbol{F}_{\mathbf{R}x}$、$\boldsymbol{F}_{\mathbf{R}y}$、$\boldsymbol{F}_{\mathbf{R}z}$分别为主动力系主矢在坐标轴上的投影，$\boldsymbol{M}_{\mathbf{R}x}$、$\boldsymbol{M}_{\mathbf{R}y}$、$\boldsymbol{M}_{\mathbf{R}z}$分别为主动力系对点$\boldsymbol{O}$的主矩在各坐标轴上的投影。

§5-4 定轴转动刚体对轴承的动压力

根据达达朗贝尔定理，列出动态平衡方程，有

$$\sum F_x = 0, \qquad F_{Ax} + F_{Bx} + F_{\mathrm{R}x} + F_x^* = 0$$

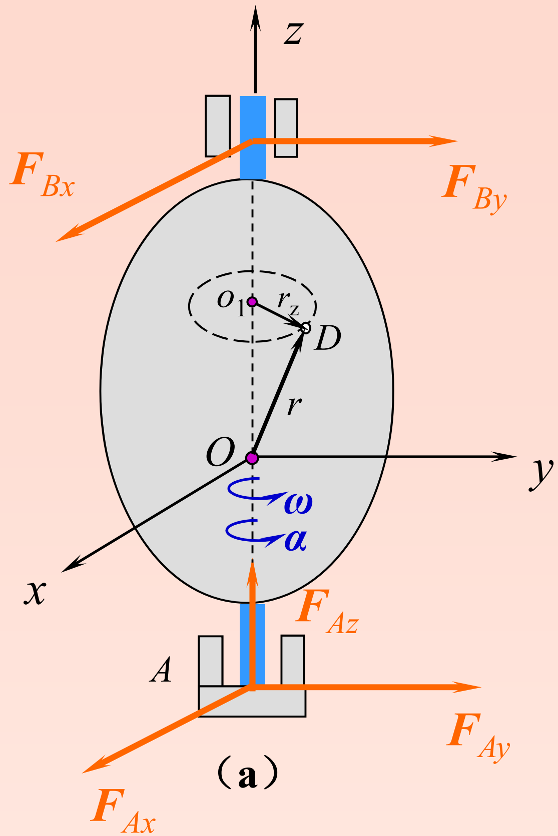
$$\sum F_y = 0, \qquad F_{Ay} + F_{By} + F_{\mathrm{R}y} + F_y^* = 0$$

$$\sum F_z = 0, \qquad F_{Az} + F_{\mathrm{R}z} = 0$$

$$\sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0, \qquad M_x(\boldsymbol{F}_{Ay}) + M_y(\boldsymbol{F}_{By}) + M_{\mathrm{R}x} + M_x^* = 0$$

$$\sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0, \qquad M_y(\boldsymbol{F}_{Ax}) + M_y(\boldsymbol{F}_{Bx}) + M_{\mathrm{R}y} + M_y^* = 0$$

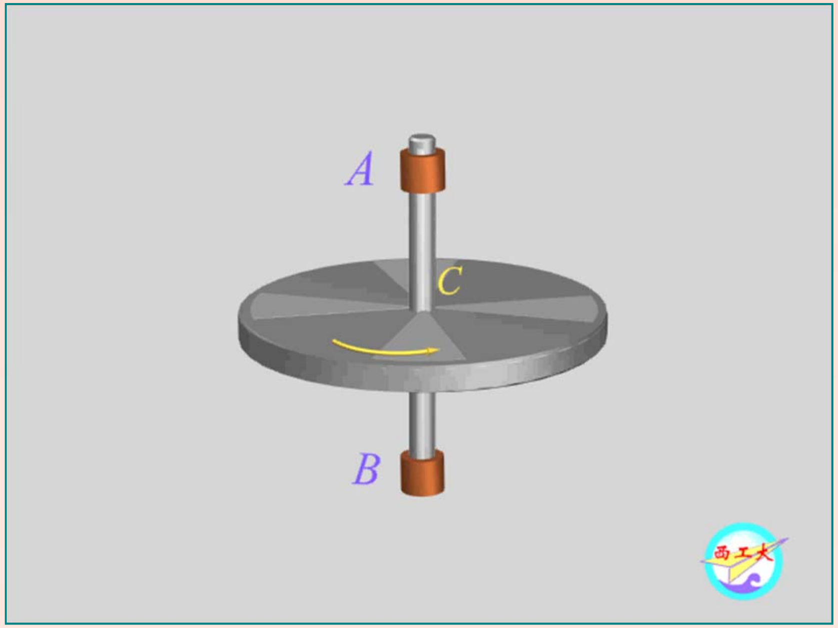
$$\sum M_z(\boldsymbol{F}) = 0, \qquad M_{\mathrm{R}z} + M_z^* = 0$$

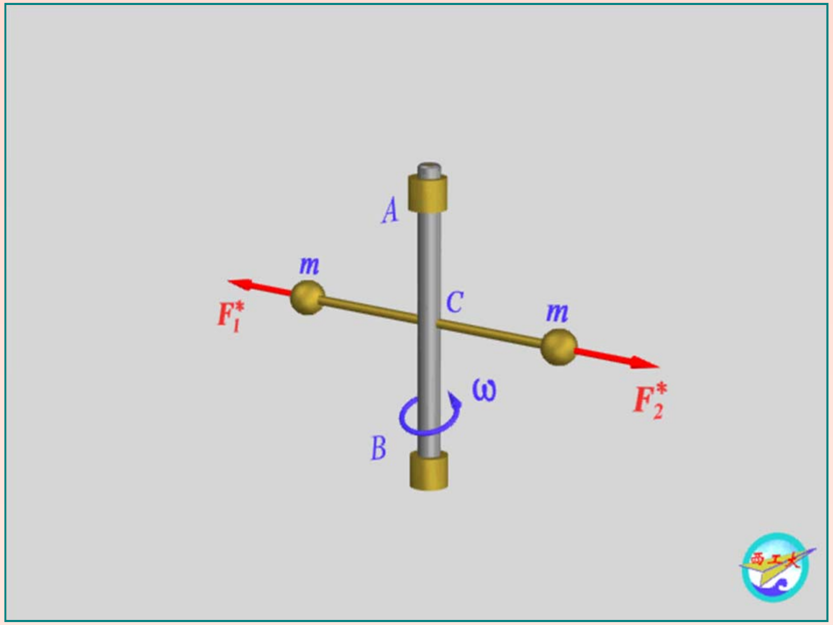


（a）

由前五个式子即可求得定轴转动刚体轴承处的**动反力**。显然，该动反力由两部分组成：一部分为主动力系所引起的**静反力**；另一部分是由转动刚体的惯性力系所引起的**附加反动力**。与此对应，轴承所受的压力也可分为**静压力**和**附加动压力**。

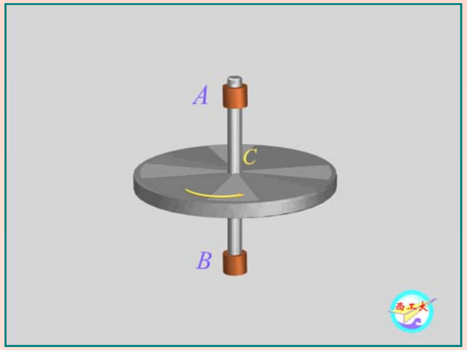
定轴转动刚体轴承处的动反力分析

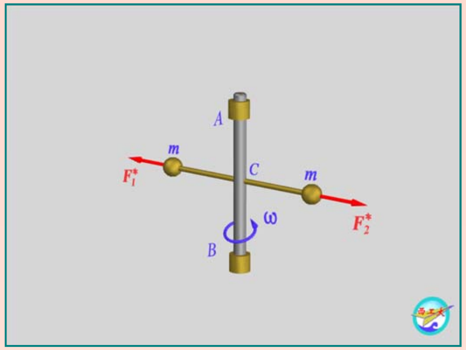


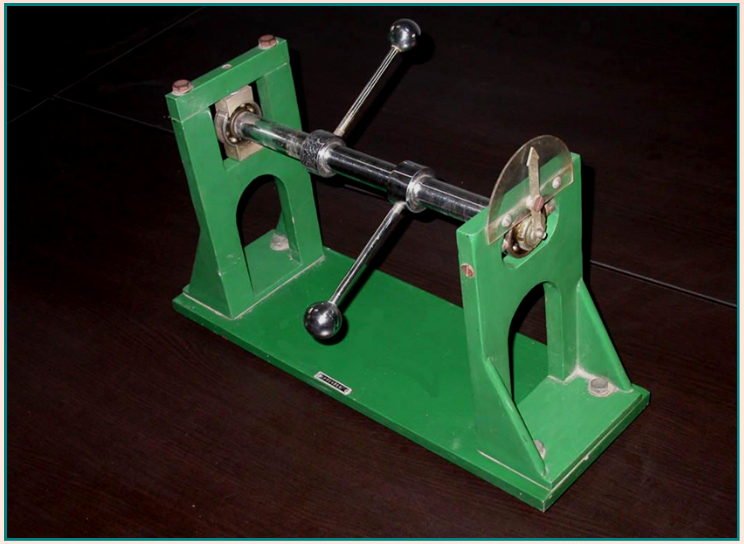


§5-4 定轴转动刚体对轴承的动压力

定轴转动刚体轴承处的动反力分析



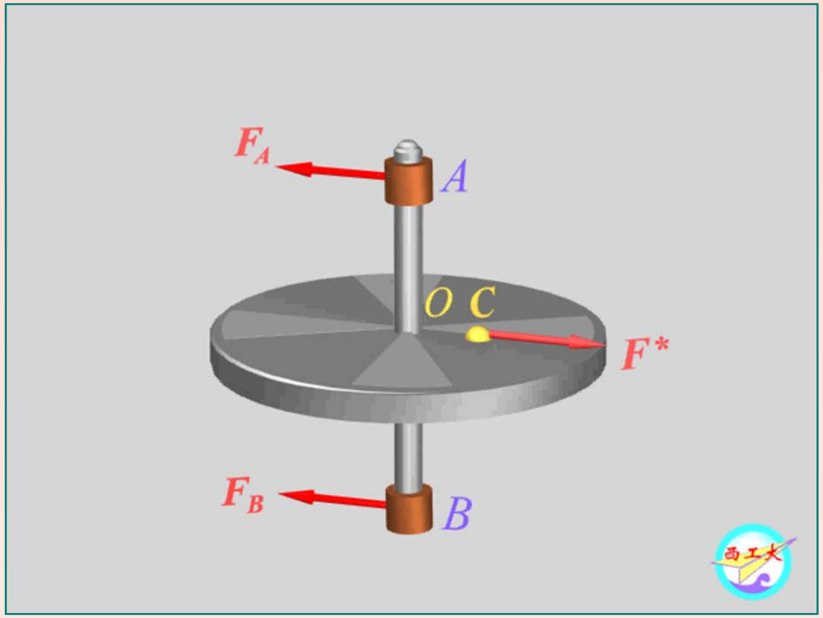


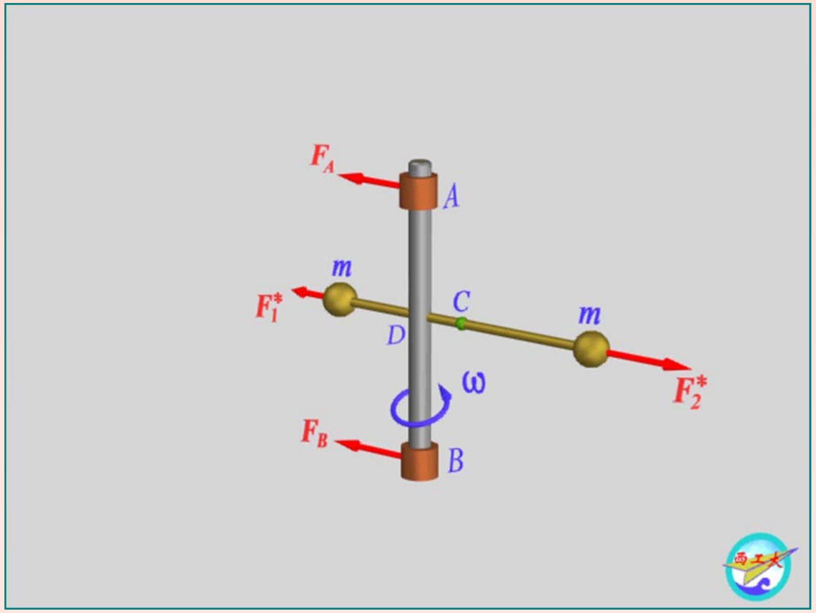


定轴转动刚体轴承处的
动反力演示装置

高速旋转时有较小的动反力

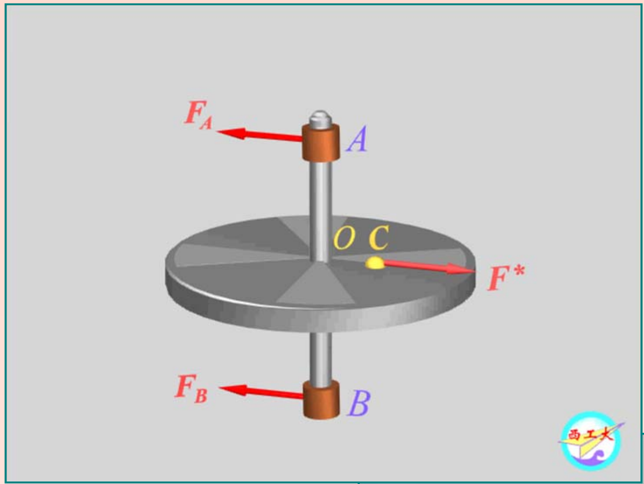
定轴转动刚体轴承处的动反力分析

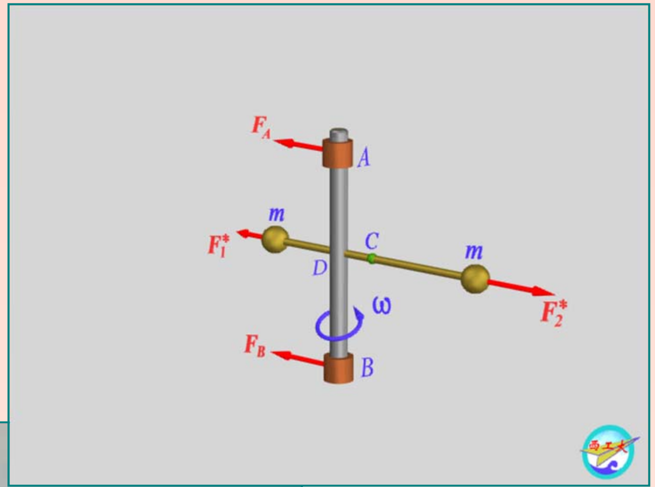




§5-4 定轴转动刚体对轴承的动压力

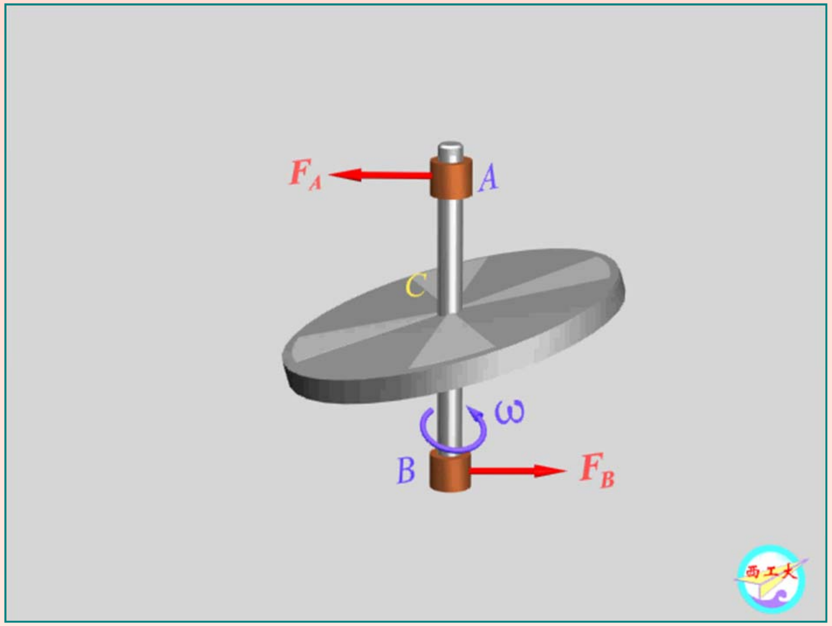
定轴转动刚体轴承处的动反力分析

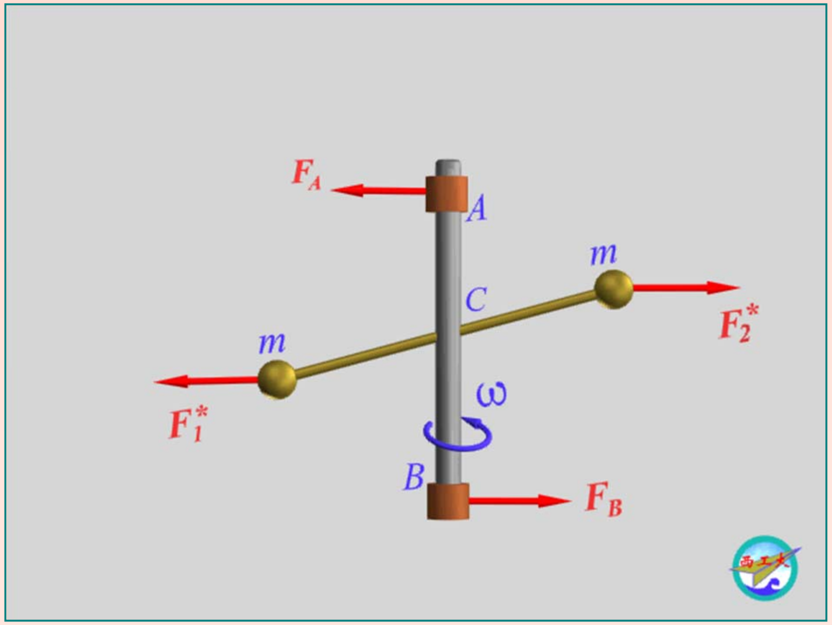




§ 5-4 定轴转动刚体对轴承的动压力

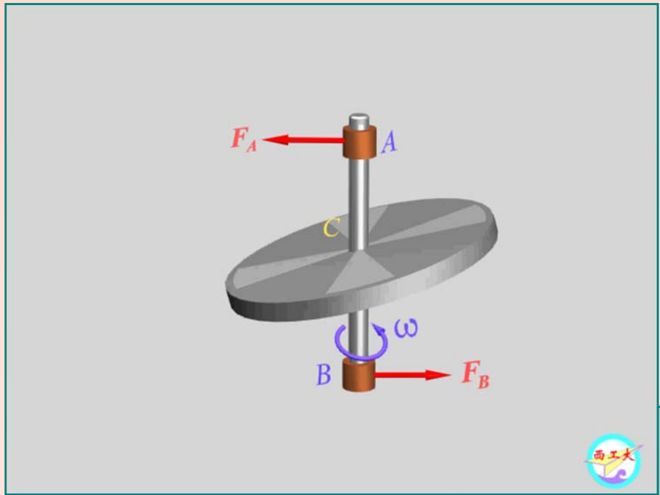
定轴转动刚体轴承处的动反力分析

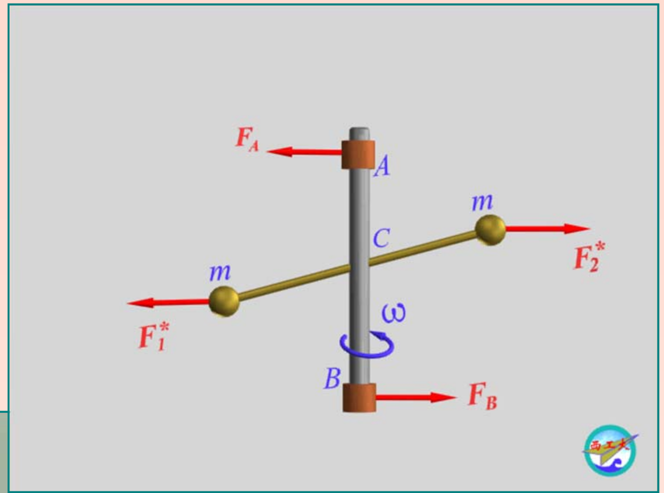




§5-4 定轴转动刚体对轴承的动压力

定轴转动刚体轴承处的动反力分析





高速旋转时有较大的动反力

§5-5 消除附加动压力的条件
· 静平衡和动平衡

- 附加动压力产生的原因 ▶
- 消除附加动压力的条件 ▶

一、附加动压力产生的原因

1. 对于F^*_x和F^*_y来说，
$$F_x^* = m x_C \omega^2 + m y_C \alpha$$
$$F_y^* = m y_C \omega^2 - m x_C \alpha$$

有x_C和y_C项,说明质心不在转轴上。

2. 对于M^*_x和M^*_y来说，
$$M_x^* = -J_{yz}\omega^2 + J_{zx}\alpha$$
$$M_y^* = J_{zx}\omega^2 + J_{yz}\alpha$$

有J_{zx}和J_{zy}项,说明转轴非惯性主轴。

二、消除附加动压力的条件

在转动刚体的轴承上可能因惯性力而产生的巨大的附加动压力，以致使机器坏损或引起剧烈的振动。

为力消除轴承上附加动压力，必须也只须转动刚体的惯性力系的主矢等于零，以及惯性力系对于与轴Oz相垂直的任何两轴 x 、y的主矩M^*_x和M^*_y都等于零。

§ 5-5 消除附加动压力的条件· 静平衡和动平衡

第一个条件: $\boldsymbol{F}^{*}= -m\boldsymbol{a}_C=0$, 相当于刚要求刚体的质心 C 在转轴 Oz 上，即 $x_C = y_C = 0$。

第二个条件: $M^{*}_{x}=M^{*}_{y}= 0$，相当于刚要求刚体对于与轴 Oz 相关的两个惯性积 $\sum m_i y_i z_i = \sum m_i z_i x_i = 0$。这样的轴 Oz 为刚体对于点 O 的惯性主轴。而轴 Oz 如果通过刚体质心 C，则为中心惯性主轴。

由此可见，**要使定轴转动刚体的轴承不受附加动压力的作用，必须也只须转动轴是刚体的一个中心惯性主轴。**

三 、刚体的静平衡和动平衡

- 动平衡

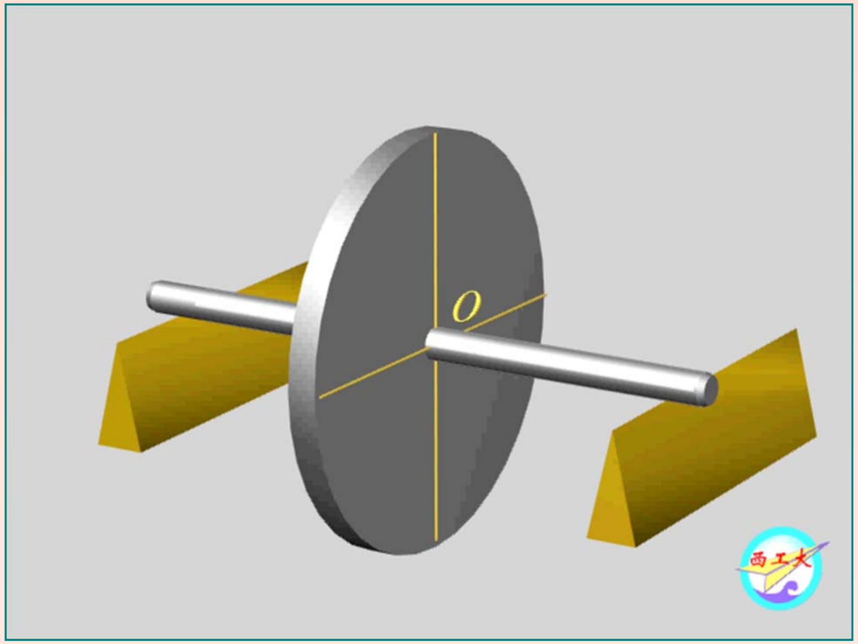
当刚体绕任何一个中心惯性主轴作匀速转动时，其惯性力自成平衡，这种现象称为**动平衡**。这时轴承上不产生附加动压力。

- 静平衡

质心在转动轴线上的情况称为**静平衡**。

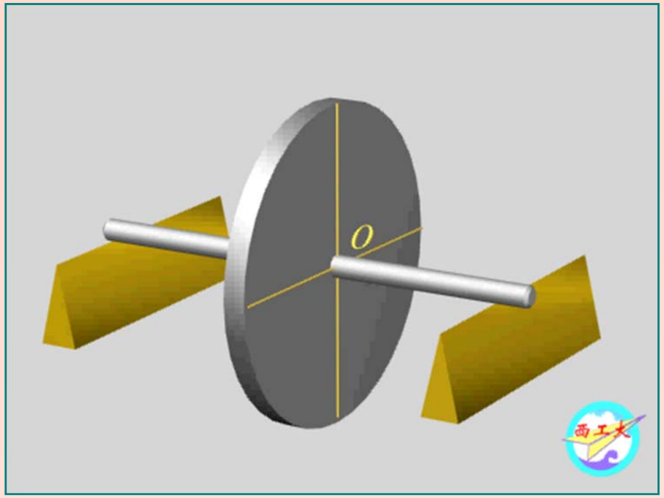
静平衡的检查

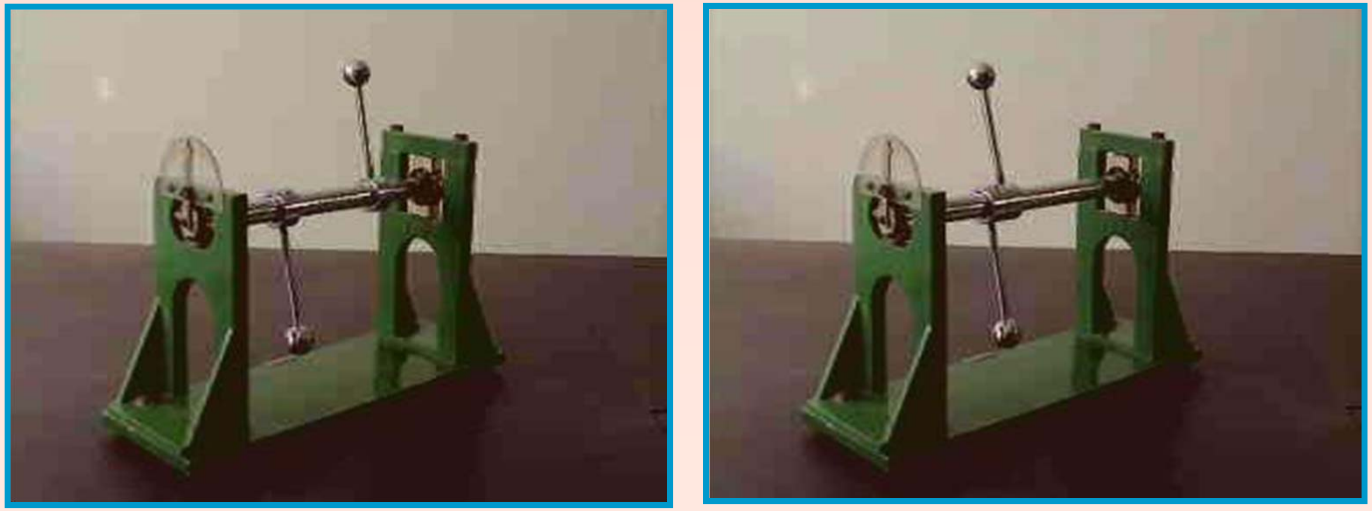
为检查刚体是否静平衡，通常采用静平衡架，将刚体的转轴放在两个水平支撑上。若质心在转轴上，则刚体可静止在任何位置随遇平衡。若质心不在轴线上，刚体就只能静止在质心C最低时的稳定位置上如图。



静不平衡的转子

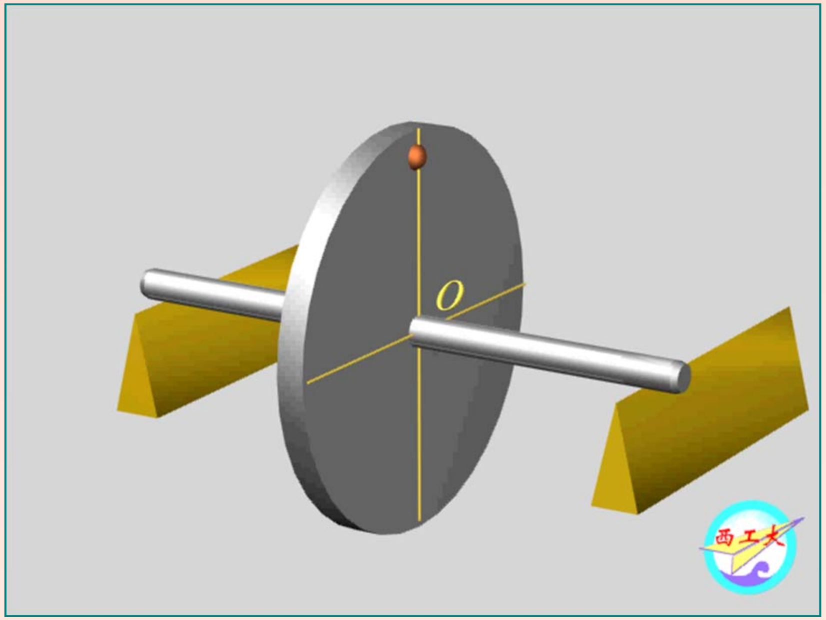
● **静平衡的检查**

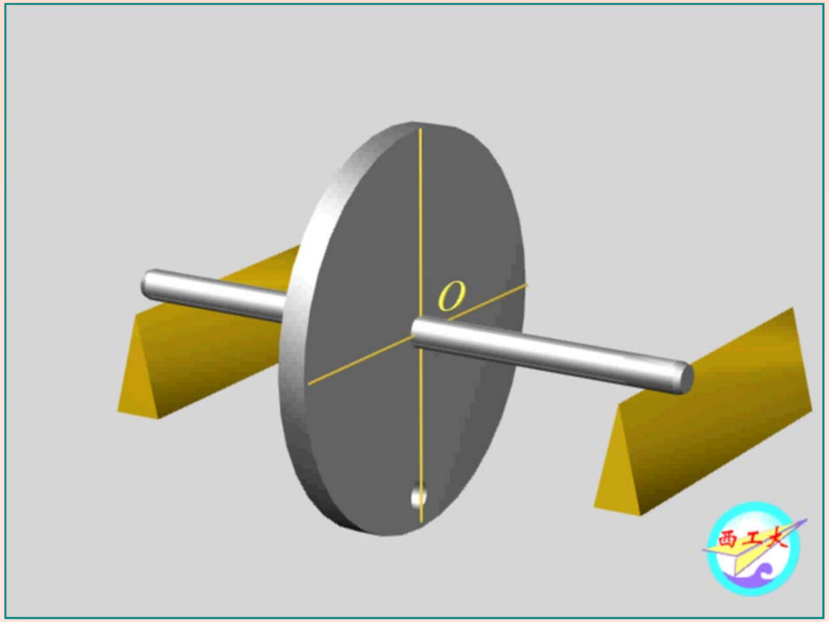




静平衡的转子

对于转子进行静平衡

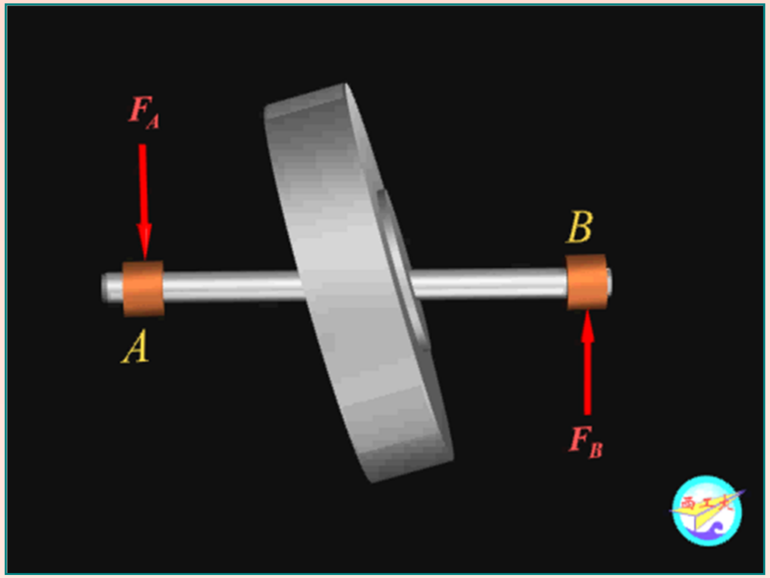




§5-5 消除附加动压力的条件·静平衡和动平衡

动平衡的检查

静平衡的刚体并不一定也是动平衡。

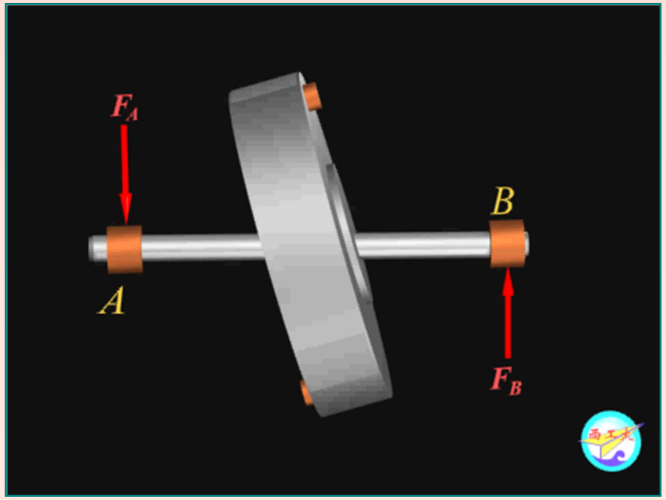


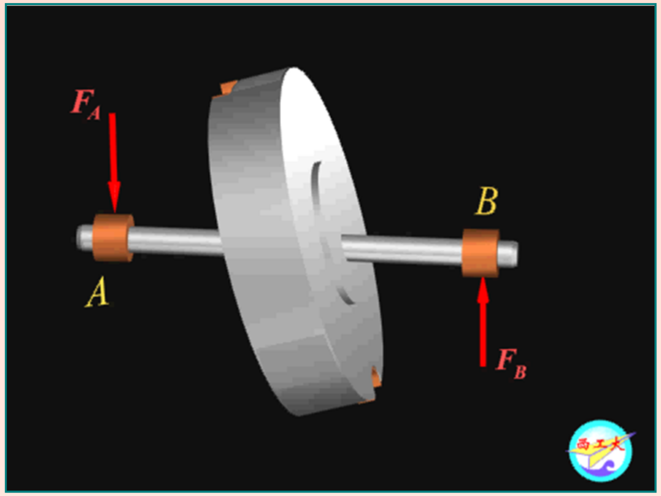
静平衡的刚体转动时，惯性力的主矢必等于零。因此，如果这刚体不是动平衡的，那么它的惯性力只能合成为一个力偶。

§5-5 消除附加动压力的条件·静平衡和动平衡

对转子进行动平衡

利用专门的装置（动平衡机）可以测知这个力偶的作用面的方位、矩的大小和旋向。这样，如果在这刚体的适当位置上焊接（或挖去）一对与转轴上呈斜对称的质量M_1和M_2。





附加质量以改变整个转子的质量分布，使转轴成为中心惯性主轴

§5-5 消除附加动压力的条件·静平衡和动平衡

动平衡的转动刚体，在主动力（包括重力）自成平衡时，能绕其轴自由地作匀速转动，这时轴承上没有任何反力。因此，**中心惯性主轴**也称为**自由轴**。


谢谢大家的使用
28