西北工業大學 Northwestern Polytechnical University

第一章

质点动力学基础

西北工业大学

支希哲　朱西平　侯美丽

动 力 学

一、 动力学的任务 ——研究物体的机械运动与作用力之间关系的科学。

二、 动力学的应用

动力学的形成与发展是和生产的发展密切联系的，特别是在现代工业与科学技术迅猛发展的今天，对动力学提出了更加复杂的课题。

例如：高速转动机械的动力计算、航空航天高技术、动强度分析、机械手、机器人、系统的动力稳定性等都需要动力学理论。

三、 动力学的分类

$$\text{动力学}\begin{cases}\text{质点动力学}\\ \\ \text{质点系动力学}\end{cases}$$

质 点——具有一定质量但可以忽略其尺寸大小的物体。

质点系——一群具有某种联系的质点，刚体可以看成不变形的质点系。

四、动力学的重点定理

- 动能定理
- 动量定理
- 动量矩定理
- 达朗贝尔原理
- 虚位移原理
- 拉格朗日方程

§1-1 动力学的基本定律

- 第一定律　惯性定律
- 第二定律　力与加速度关系定律
- 第三定律　作用与反作用定律

§1-1　动力学的基本定律

第一定律　　惯性定律

质点如不受力作用,则保持其运动状态不变,即作直线匀速运动或者静止。

第一定律说明了任何物体都具有惯性。

第二定律　　力与加速度关系定律

质点因受力作用而产生的加速度,其方向与力相同，其大小与力成正比而与质量成反比。

$$\boxed{\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}} \qquad (1\text{–}1)$$

第二定律说明了物体机械运动状态的改变，不仅决定于作用于物体的力，而且与物体的惯性有关。

第三定律　　作用与反作用定律

任何两个物体间相互作用的力,总是大小相等，方向相反,沿同一直线,同时分别作用在这两个物体上。

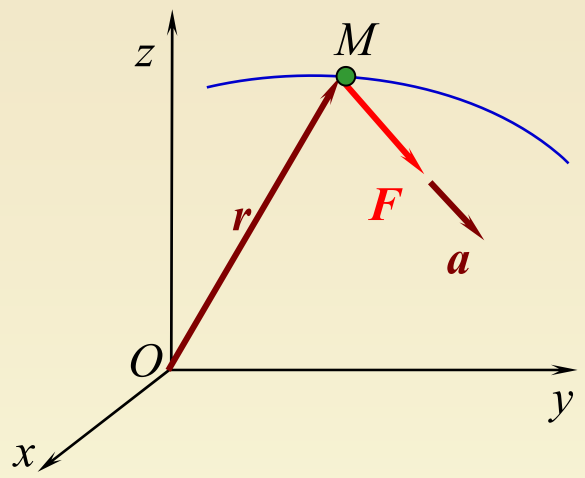
第三定律说明了二物体间相互作用力的关系。

§1-2 质点运动微分方程

- 矢量形式
- 直角坐标形式
- 自然形式

§1-2　质点运动微分方程

一、矢量形式



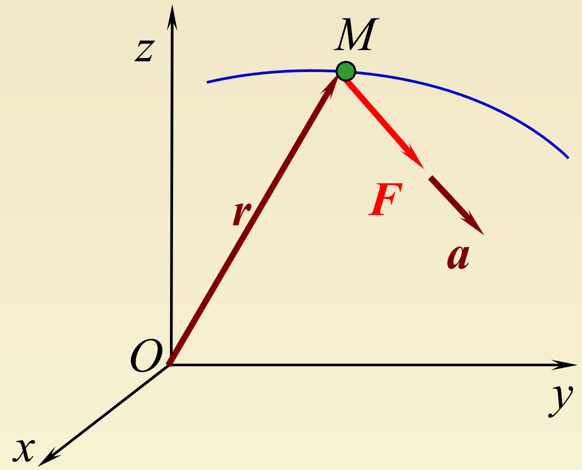
设有可以自由运动的质点 M，质量是 m，作用力的合力是 $\boldsymbol{F}$，加速度是 $\boldsymbol{a}$ 。

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F} \qquad (1-2)$$

这就是质点运动微分方程的矢量形式。

§1-2 质点运动微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F} \qquad (1-2)$$



这就是质点运动微分方程的矢量形式。

二、直角坐标形式

把上式沿固定直角坐标系 $Oxyz$ 的各轴投影，得

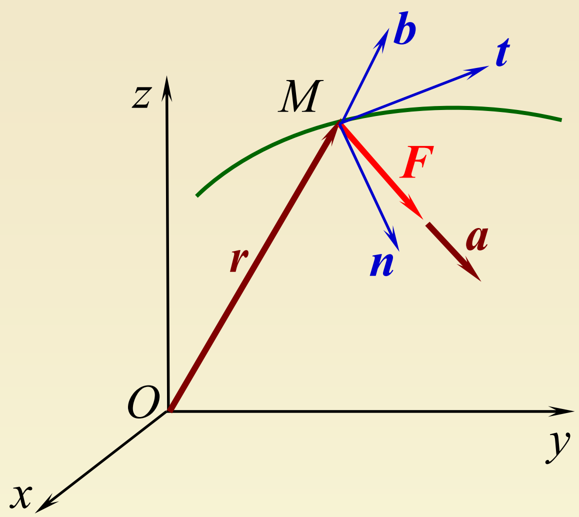
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_x\ ,\quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=F_y\ ,\quad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=F_z \qquad (1-3)$$

$\boldsymbol{F}_x$,$\boldsymbol{F}_y$,$\boldsymbol{F}_z$ 是作用力 $\boldsymbol{F}$ 的合力在各轴上的投影。式(1-3)是直角坐标形式的质点运动微分方程。

§1-2　质点运动微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F} \qquad (1-2)$$

这就是质点运动微分方程的矢量形式。



三、自然形式

如采用自然轴系 $Mtnb$, 并把式(1-2)向各轴投影, 可得

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=F_{\mathrm{t}},\quad m\frac{v^2}{\rho}=F_{\mathrm{n}},\quad 0=F_{\mathrm{b}} \qquad (1-4)$$

式中　$a_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$, $a_{\mathrm{n}}=\dfrac{v^2}{\rho}$ 和 $a_{\mathrm{b}}=0$

是加速度 $\boldsymbol{a}$ 在切线、主法线和副法线正向的投影; F_{t} , F_{n} 和 F_{b} 是合力 $\boldsymbol{F}$ 在相应轴上的投影。式(1-4)就是自然形式的质点运动微分方程。

§1-3 质点动力学基本问题

- 质点动力学的第一类问题
- 质点动力学的第二类问题

§1-3　质点动力学基本问题

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \qquad (1\text{-}1)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \qquad (1-2)$$

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= F_x \\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= F_y \\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} &= F_z \end{aligned}\right. \qquad (1-3)$$

质点动力学的两类问题:

质点动力学的第一类问题：已知运动，求力。

质点动力学的第二类问题：已知力，求运动。

- 解决第一类问题，只需根据质点的已知运动规律 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，通过导数运算，求出加速度，代入(1-1)——(1-4)，即得作用力 $\boldsymbol{F}$。

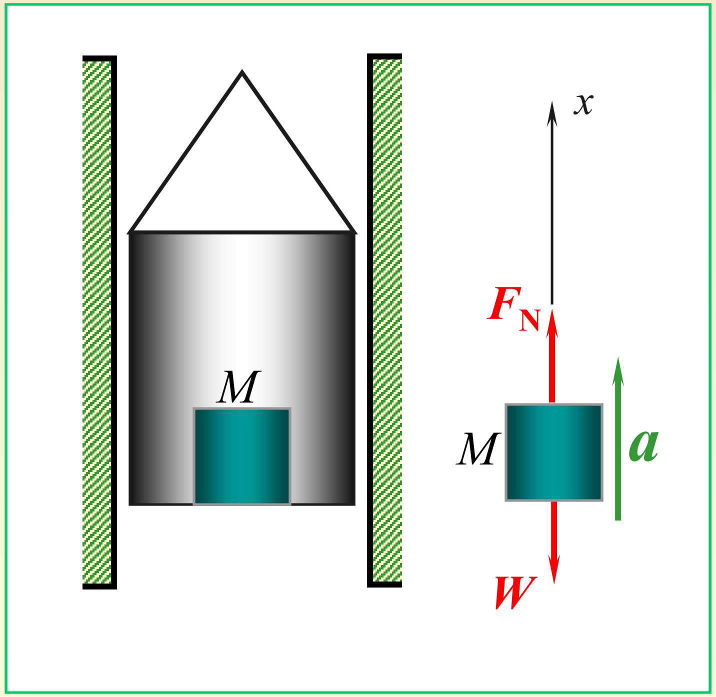
- 求解第二类问题，是个积分过程。

必须注意：在求解第二类问题时，方程的积分中要出现积分常数，为了完全确定质点的运动，必须根据运动的初始条件定出这些积分常数。

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = F_\mathrm{t}, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_\mathrm{n}, \quad 0 = F_\mathrm{b} \qquad (1-4)$$

§ 1-3　质点动力学基本问题

例题 1-1 设电梯以不变的加速度 $\boldsymbol{a}$ 上升，求放在电梯地板上重 $\boldsymbol{W}$ 的物块 M 对地板的压力。



解：分析物体 M，它受重力 $\boldsymbol{W}$ 和地板反力 F_N 的作用。

根据 $\boxed{\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}}$

可得 $ma = F_N - W$

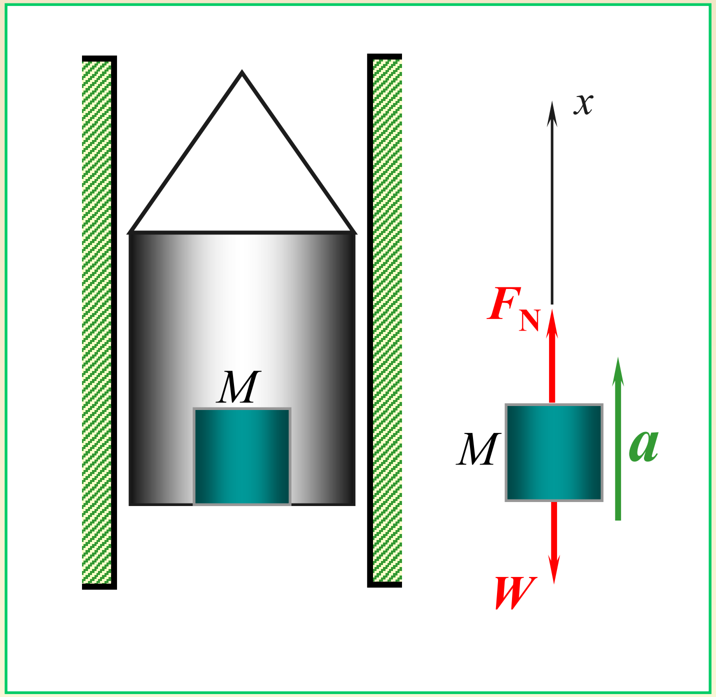
注意到 $m = W/g$，则由上式解得地板反力

$$F_N = W + \frac{W}{g}a = W(1+\frac{a}{g})$$

所以地板所受的压力为

$$F'_{\mathrm{N}}=W+\frac{W}{g}a=W(1+\frac{a}{g})$$

上式第一部分称为静压力，第二部分称为附加动压力，F_{N}'称为动压力。



讨论

令　$n=1+\dfrac{a}{g}$　则　$F'=nW$

1. $n>1$，动压力大于静压力，这种现象称为超重。

2. $n<1$，动压力小于静压力，这种现象称为失重。

§1-3　质点动力学基本问题

质点动力学解题步骤：

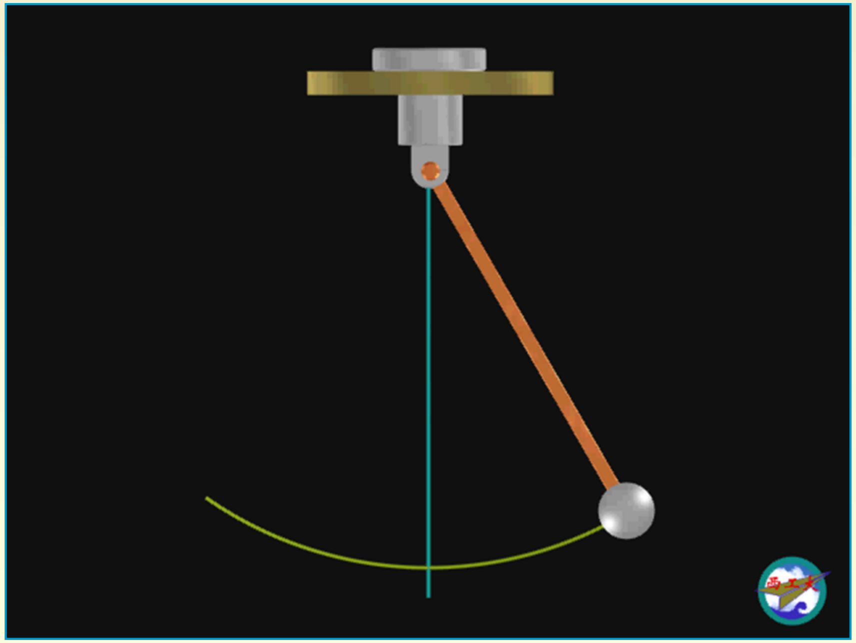
1. 明确研究对象；

2. 进行受力分析，并画出受力图；

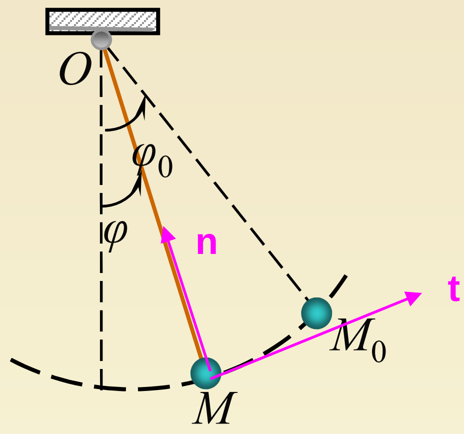
3. 进行运动分析，并画出相应的运动学量，如速度、加速度、角速度、角加速度等；

4. 选择动力学定理进行分析求解。

例题 1-2 单摆 M 的摆锤重 W，绳长 l，悬于固定点 O，绳的质量不计。设开始时绳与铅垂线成偏角 $\varphi_0 \leqslant \pi/2$，并被无初速释放，求绳中拉力的最大值。



解： 摆锤M 在绳的约束下只能沿已知圆弧运动，用自然形式的质点用自然形式的运动微分方程求解较方便。



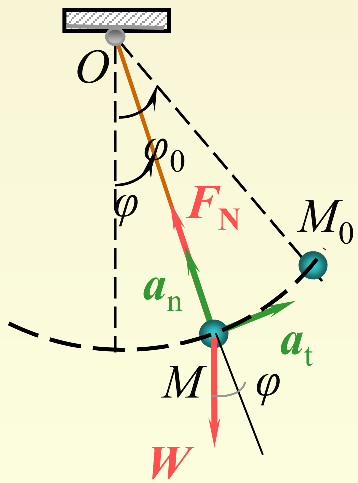
以摆锤M为研究对象。选择如图自然轴系。任意瞬时，质点的加速度在切向和法向的投影为

$$a_{\mathrm{t}} = l\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = l\ddot{\varphi},\quad a_{\mathrm{n}} = l(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t})^2 = l\dot{\varphi}^2$$

写出质点的自然形式的运动微分方程

$$ma_{\mathrm{t}} = \frac{W}{g}l\ddot{\varphi} = -W\sin\varphi \qquad (1)$$

$$ma_{\mathrm{n}} = \frac{W}{g}l\dot{\varphi}^2 = F_{\mathrm{N}} - W\cos\varphi \qquad (2)$$



考虑到 $\ddot{\varphi}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dot{\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\dot{\varphi}^2}{\mathrm{d}\varphi}$ （3）

则式(1)化成 $\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\dot{\varphi}^2}{\mathrm{d}\varphi}=-\dfrac{g}{l}\sin\varphi$

对上式采用定积分,把初条件作为积分下限，有

$$\int_0^{\dot{\varphi}}\mathrm{d}(\dot{\varphi}^2)=\int_{\varphi_0}^{\varphi}(-\frac{2g}{l}\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

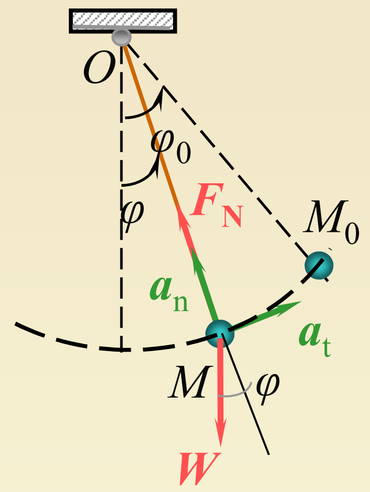
从而得 $\dot{\varphi}^2=\dfrac{2g}{l}(\cos\varphi-\cos\varphi_0)$ (4)

把式(4)代入式(2)，得绳拉力

$$F_{\mathrm{N}}=W(3\cos\varphi-2\cos\varphi_0)$$

显然，当摆球 M 到达最低位置 $\varphi=0$ 时，有最大值。故

$$F_{\mathrm{Nmax}}=W(3-2\cos\varphi_0)$$

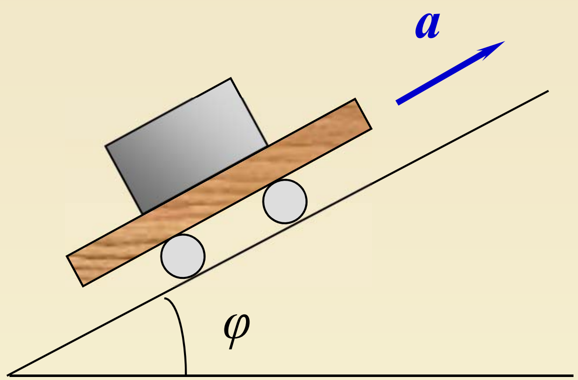


$$\frac{W}{g}l\ddot{\varphi}=-W\sin\varphi \quad (1)$$

$$\frac{W}{g}l\dot{\varphi}^2=F_{\mathrm{N}}-W\cos\varphi \quad (2)$$

§1-3　质点动力学基本问题

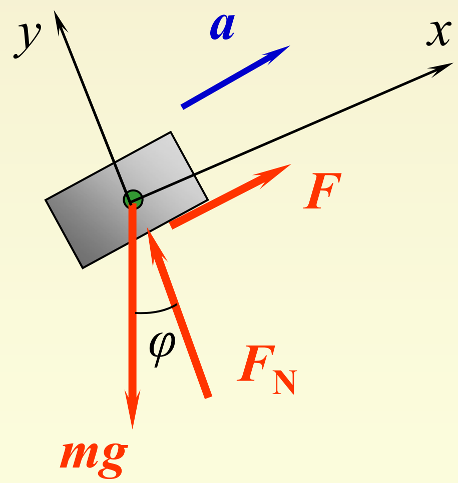
例题 1-3 小车载着质量为m物体以加速度$\boldsymbol{a}$沿着斜坡上行，如果物体不捆扎，也不致于掉下，物体与小车接触面的摩擦系数至少应为多少？



解：　取物体为研究对象。

$$ma = F - mg\sin\varphi$$

$$0 = F_{\mathrm{N}} - mg\cos\varphi$$



解得

$$F = mg\left(\frac{a}{g} + \sin\varphi\right)$$

$$F_{\mathrm{N}} = mg\cos\varphi$$

$$F = mg\left(\frac{a}{g} + \sin\varphi\right)$$

$$F_{\mathrm{N}} = mg\cos\varphi$$

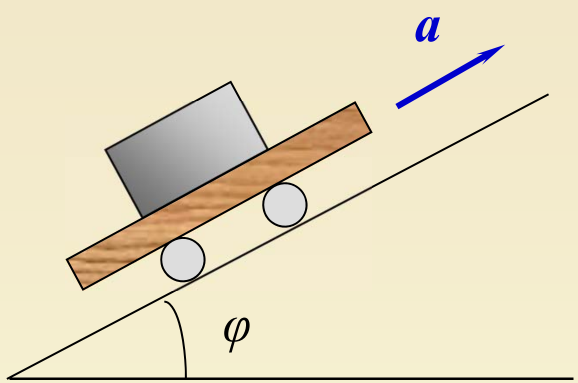
要保证物体不下滑，应有

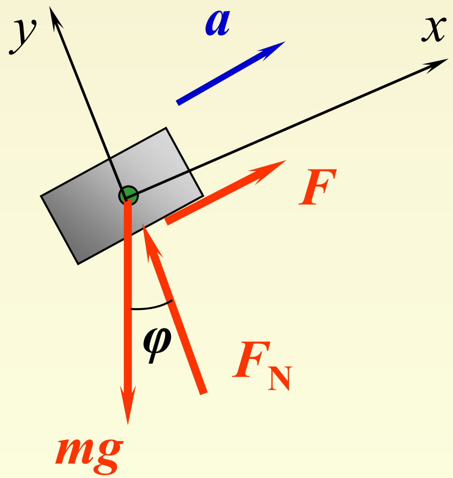
$$F \leq F_{\max} = fF_{\mathrm{N}}$$

即

$$mg\left(\frac{a}{g} + \sin\varphi\right) \leq fmg\cos\varphi$$

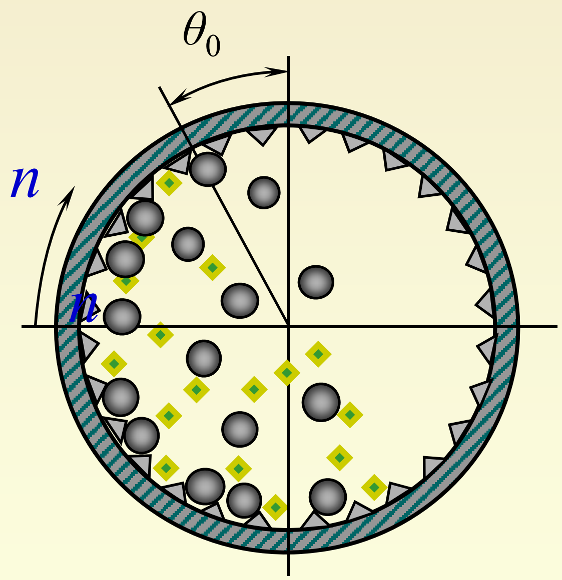
$$f_{\min} = \frac{\left(\dfrac{a}{g} + \sin\varphi\right)}{\cos\varphi}$$





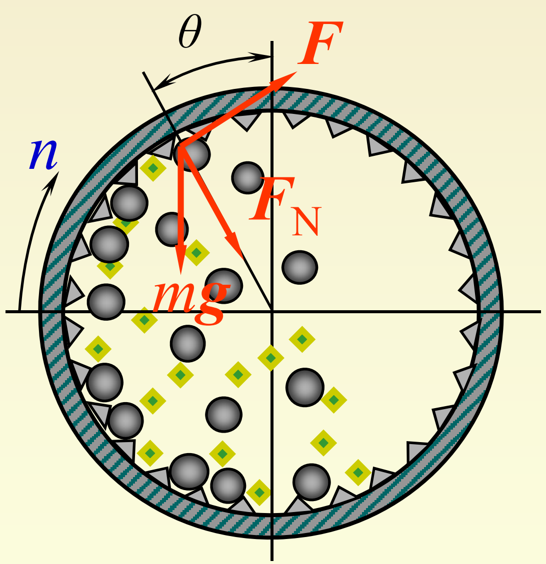
§1-3　质点动力学基本问题

例题1-4 粉碎机滚筒半径为R，绕通过中心的水平匀速转动，筒内铁球由筒壁上的凸棱带着上升。为了使铁球获得粉碎矿石的能量，铁球应在$\theta=\theta_0$ 时（如图）才掉下来。求滚筒每分钟的转数n。



解： 视铁球为质点。铁球被旋转的滚筒带着沿圆弧向上运动，当铁球到达某一高度时，会脱离筒壁而沿抛物线下落。

铁球在上升过程中，受到重力mg、筒壁的法向反力F_N和切向反力F的作用。



根据 $\boxed{F = ma}$

列出质点的运动微分方程在主法线上的投影式

$$m\frac{v^2}{R} = F_N + mg\cos\ \theta$$

铁球在未离开筒壁前的速度，等于筒壁上与其重合点的速度。即

$$v = R\omega = \frac{\pi n}{30}R$$

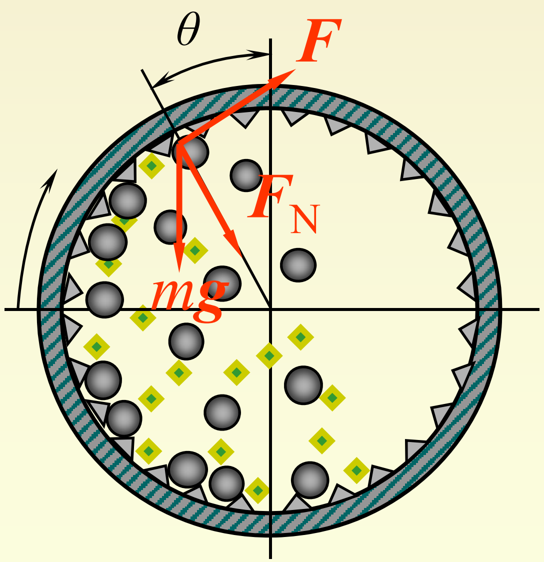
例题 1-4

$$m\frac{v^2}{R}=F_N+mg\cos\theta,\qquad v=R\omega=\frac{\pi n}{30}R$$

解得

$$n=\frac{30}{\pi R}\left[\frac{R}{m}(F_N+mg\cos\theta)\right]^{\frac{1}{2}}$$

当$\theta=\theta_0$时，铁球将落下，这时$F_N=0$，于是得滚筒转速 $n=9.549\sqrt{\frac{g}{R}\cos\theta_0}$

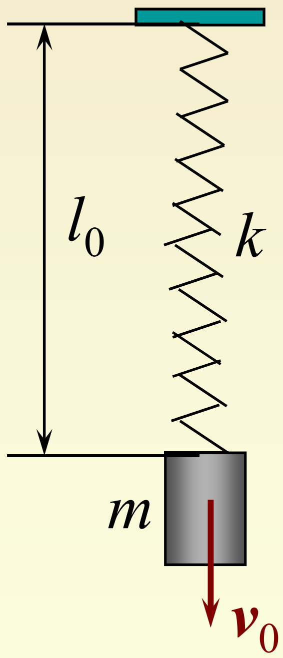


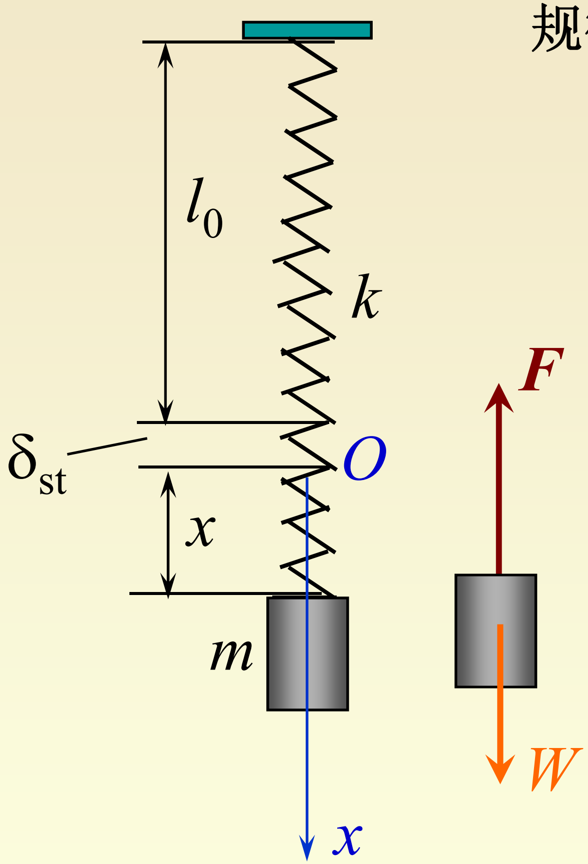
讨论

1.　显然，θ_0 越小，要求n 越大。

2．当 $\theta_0=0$ 时，$n=9.549\sqrt{\frac{g}{R}}$ ，铁球就会紧贴筒壁转过最高点而不脱离筒壁落下，起不到粉碎矿石的作用。

例题 1-6 弹簧—质量系统，物块的质量为m，弹簧的刚度系数为k，物块自平衡位置的初始速度为$\boldsymbol{v}_0$。求物块的运动方程。





解： 以物块为研究对象。这是已知力(弹簧力)求运动规律的问题，故为第二类动力学问题。

以弹簧在静载mg作用下变形后的平衡位置（称为静平衡位置）为原点建立Ox坐标系，将物块置于任意位置 $x>0$ 处。

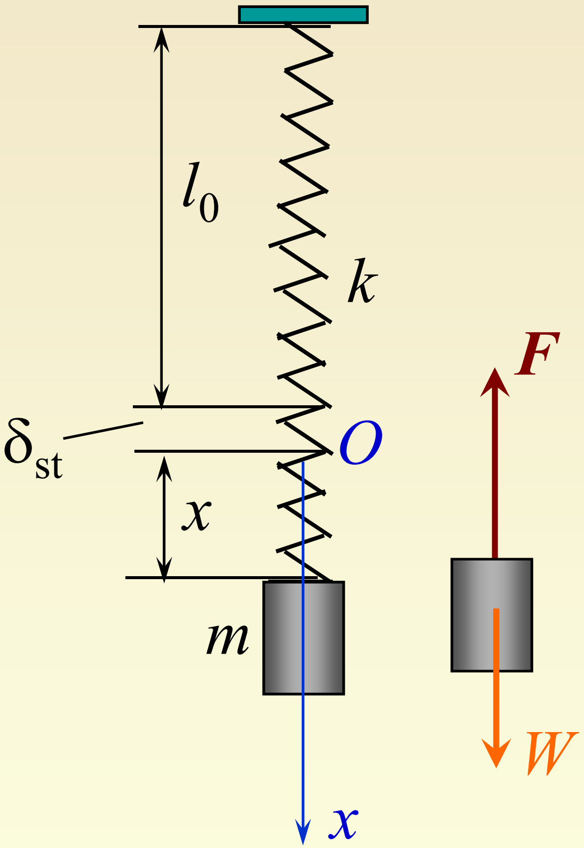
根据 $\boxed{F=ma}$

列出物块的运动微分方程

$$m\ddot{x}=-k(x+\delta_{st})+mg$$

因为 $k\delta_{st}=mg$

所以上式为 $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0,\quad \omega_0^2=\dfrac{k}{m}$



$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0,\quad \omega_0^2=\frac{k}{m}$$

求解可得

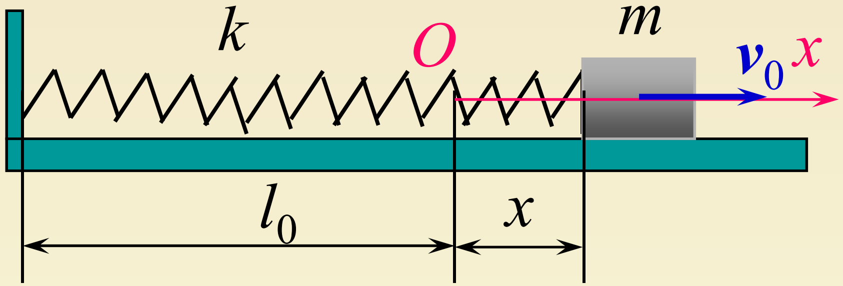
$$x=A\sin(\omega_0 t+\varphi),$$

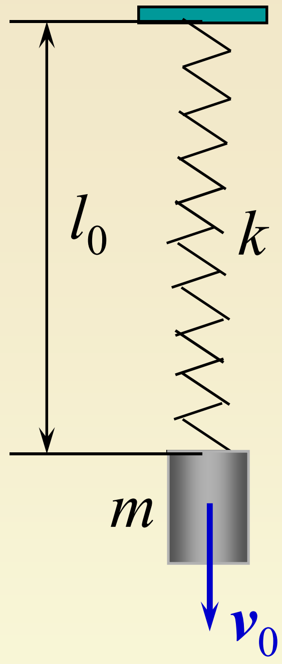
注意到 $t=0,\quad x=0,\quad \dot{x}=v_0$

故可得物块的运动方程

$$x=v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

计算结果分析





$$A=\frac{v_0}{\omega_0},\varphi=0;\qquad x=v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

1. 重力***mg***只改变了系统的平衡位置，对运动规律并无影响。

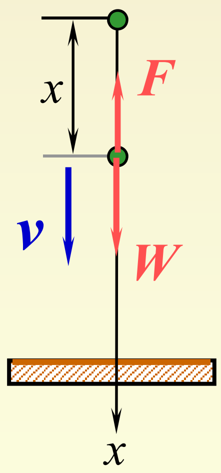
2. 物块垂直悬挂时，坐标原点选择不同，对运动微分方程的影响这一问题请同学们自己研究。

§1-4 质点直线运动微分方程积分的典型例子

例题 1-7 质量是 m 的物体 M 在均匀重力场中沿铅直线由静止下落，受到空气阻力的作用。假定阻力 $\boldsymbol{F}$ 与速度平方成比例，即 $F=\alpha v^2$，阻力系数 $\boldsymbol{\alpha}$ 单位取 kg/m，数值由试验测定。试求物体的运动规律。

解: 取坐标轴 Ox 铅直向下，原点在物体的初始位置。写出物体 M 的运动微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-\alpha v^2 \qquad (1)$$



加速度为零时

$$v=\sqrt{\frac{mg}{\alpha}}=u$$

以 m 除式(1)两端，并代入 u 的值，得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{u^2}(u^2-v^2) \qquad (2)$$

分离变量，并取定积分，有 $\int_0^v \frac{u\mathrm{d}v}{u^2-v^2}=\int_0^t \frac{g}{u}\mathrm{d}t$

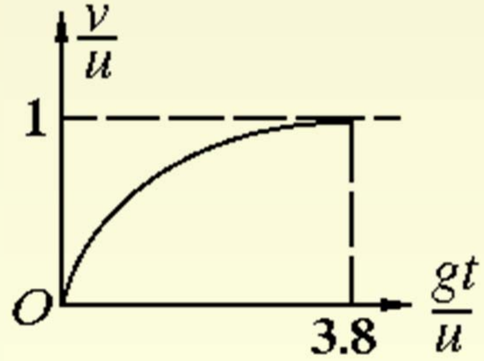
由上式求解*v*，得

$$v=u\frac{e^{(2g/u)t}-1}{e^{(2g/u)t}+1}=u\frac{e^{(g/u)t}-e^{-(g/u)t}}{e^{(g/u)t}+e^{-(g/u)t}} \qquad (3)$$

于是物体速度随时间而变化的规律为

$$v=u\mathrm{th}(\frac{g}{u}t) \qquad (a)$$

th 是双曲正切。



$$v = u\frac{e^{(2g/u)t}-1}{e^{(2g/u)t}+1} = u\frac{e^{(g/u)t}-e^{-(g/u)t}}{e^{(g/u)t}+e^{-(g/u)t}} \qquad (3)$$

为了求出物体的运动规律，只需把式(3)再积分一次，有

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \frac{u^2}{g}\frac{\mathrm{d}[e^{(g/u)t}+e^{-(g/u)t}]}{e^{(g/u)t}+e^{-(g/u)t}}$$

于是求得物体的运动方程为

$$x = \frac{u^2}{g}\ln\frac{e^{(gt/u)}+e^{-(gt/u)}}{2} = \frac{u^2}{g}\ln(\operatorname{ch}\frac{gt}{u}) \qquad (b)$$

谢谢使用