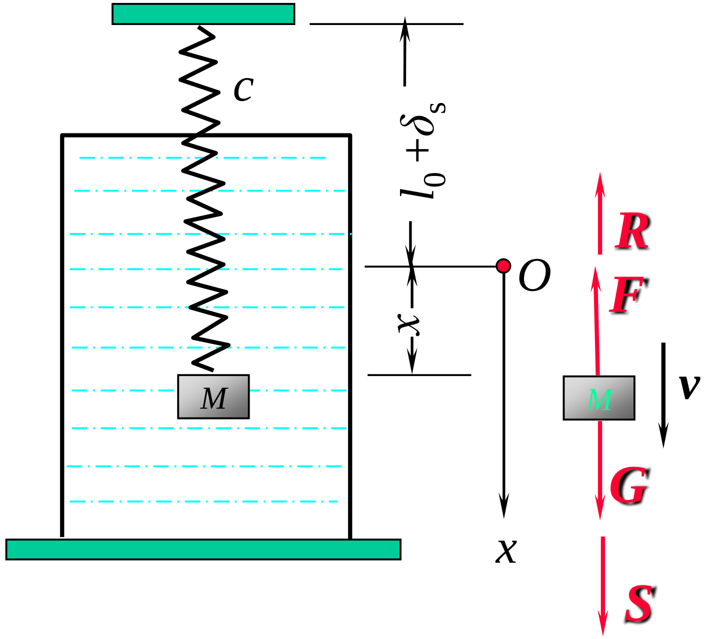
15.4 质点的强迫振动

假定振动物块 M 还受到扰力S的作用 $S_x=H\sin pt$，其中 H 称为力幅，表示扰力的最大值；p 称为扰力变化的频率。H 和 p 都可以认为仅决定于扰力的来源而与物块的运动无关。

取物块M的平衡位置作为原点O，轴Ox铅直向下。在任意瞬时t，物块M的运动微分方程写成



$$m\ddot{x} = G - c(\delta_s + x) - \mu\dot{x} + H\sin pt$$

$$m\ddot{x} = G - c(\delta_s + x) - \mu\dot{x} + H\sin pt$$

考虑到平衡关系 $G = c\delta_s$ ，仍引用 $k^2 = \dfrac{c}{m},\ 2n = \dfrac{\mu}{m}$ ，并引入新的参数 $h = H/m$ ，则上式化为

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin pt \tag{9-25}$$

这就是**质点强迫振动的微分方程的标准形式**，它**是非齐次的二阶常系数线性微分方程**。

方程的通解由两部分组成，即 $x = x_1 + x_2$

其中x_1是与方程（9-25）相对应的齐次方程 $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$ 的通解。

$$x_1 = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha)$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin pt$$

方程的通解由两部分组成，即

$$x = x_1 + x_2$$

特解x_2可以写成

$$x_2 = B\sin(pt - \varepsilon)$$

把特解x_2及其导数

$$\dot{x}_2 = Bp\cos(pt - \varepsilon), \qquad \ddot{x}_2 = -Bp^2\sin(pt - \varepsilon)$$

代入微分方程方程的标准形式得

$$-Bp^2\sin(pt - \varepsilon) + 2npB\cos(pt - \varepsilon) + k^2 B\sin(pt - \varepsilon) \equiv h\sin pt$$

$$-Bp^2\sin(pt-\varepsilon)+2npB\cos(pt-\varepsilon)+k^2B\sin(pt-\varepsilon)\equiv h\sin pt$$

令pt - ε=0 和 $pt-\varepsilon=\dfrac{\pi}{2}$，得两个等式

$$2npB=h\sin\varepsilon,\qquad (k^2-p^2)B=h\cos\varepsilon$$

从而可以解得

$$B=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\tag{9-27}$$

$$tg\varepsilon=\frac{2np}{k^2-p^2}\tag{9-28}$$

故得在小阻尼 $n<k$ 情况下的物块的运动规律

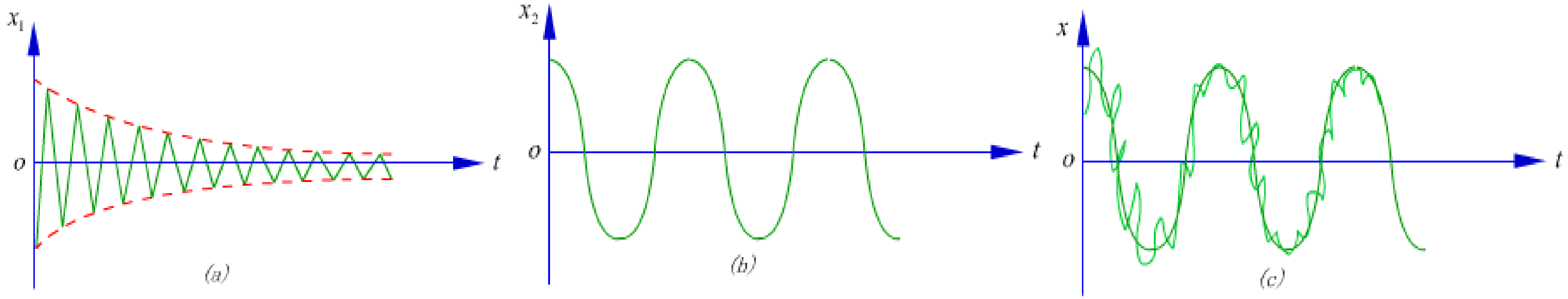
$$x=Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)+B\sin(pt-\varepsilon)\tag{9-29}$$

式中，积分常数 A 和α由运动的初始条件来确定。

$$x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha) + B\sin(pt - \varepsilon)$$

可见，在小阻尼情况下，质点的运动由两部分组成：第一部分x_1是初始扰后的衰减振动，经过一段时间后它就消失了；第二部分x_2是等振幅的简谐运动，这就是强迫振动；它是由扰力引起的，只要扰力继续存在，它就以扰力频率进行下去，不会衰减。这是强迫振动的一个基本特征。

其运动如图所示。



$$x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha) + B\sin(pt - \varepsilon)$$

在临界阻尼和大阻尼的情况下，x_1消失得更快，剩下的仍是不衰减的强迫振动x_2。

由式

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \qquad (9\text{-}27)$$

$$tg\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} \qquad (9\text{-}28)$$

表明，**强迫振动的振幅 B 和相位差ε只决定于系统本身的特性和干扰力的性质，与运动的初始条件无关。**

下面着重讨论强迫振动振幅B对振动系统的参量k、n以及扰力频率p的依赖关系。

令 $$B_0=\frac{h}{k^2}=\frac{H/m}{c/m}=\frac{H}{c}$$

显然，B_0表示在常力H作用下弹簧的静偏离，而B则表示在周期性扰力作用下强迫振动中的最大动偏离。B/B_0称为放大系数，

$$\lambda=\frac{B}{B_0}=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{p^2}{k^2})^2+(2\frac{n}{k}\cdot\frac{p}{k})^2}}$$

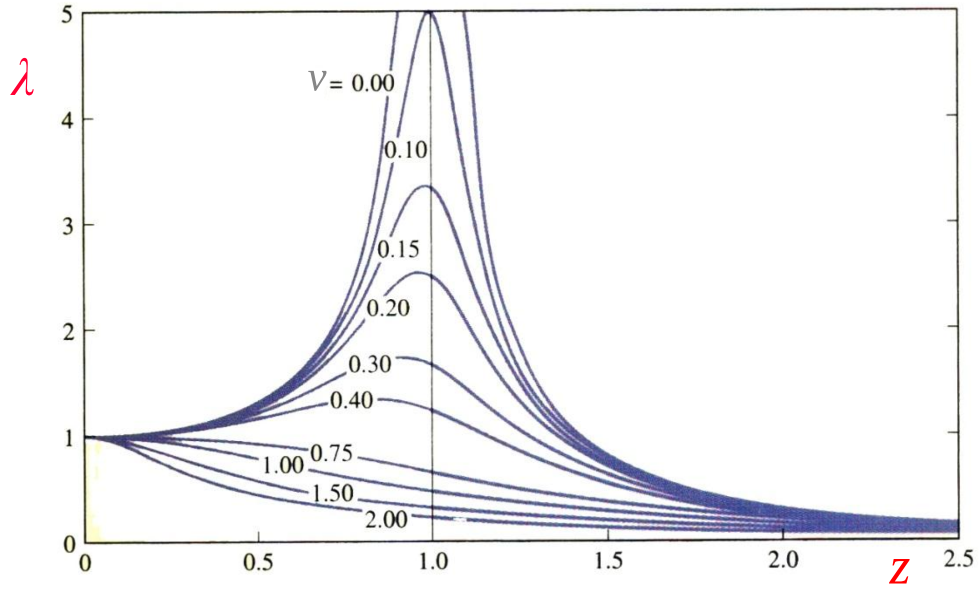
$$\boxed{B=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}}$$

引入无量纲参数 $z=p/k$，$v=n/k$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2+(2vz)^2}} \tag{9-31}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + (2vz)^2}}$$

下图示出在不同v值λ时随z的变化的曲线（幅-频曲线）。



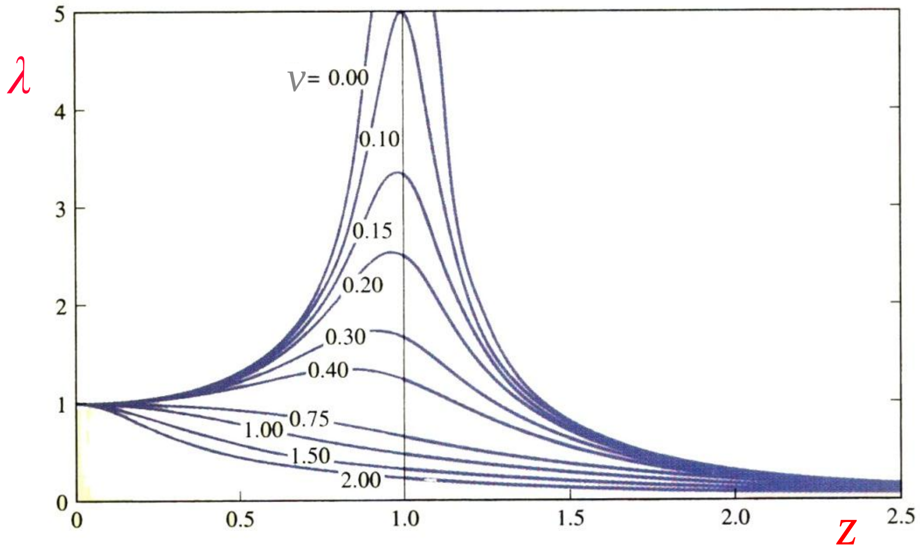
$$v = n/k$$

$$z = p/k$$

由图可以看出下列情况：

(1) 当z值接近于零时，即扰力频率很低时，λ的值接近于1，强迫振动的振幅 B 接近于静偏离B_0（低频强迫振动）。

相当于缓慢加载



$$\lambda = \frac{B}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{p^2}{k^2})^2 + (2\frac{n}{k}\cdot\frac{p}{k})^2}}$$

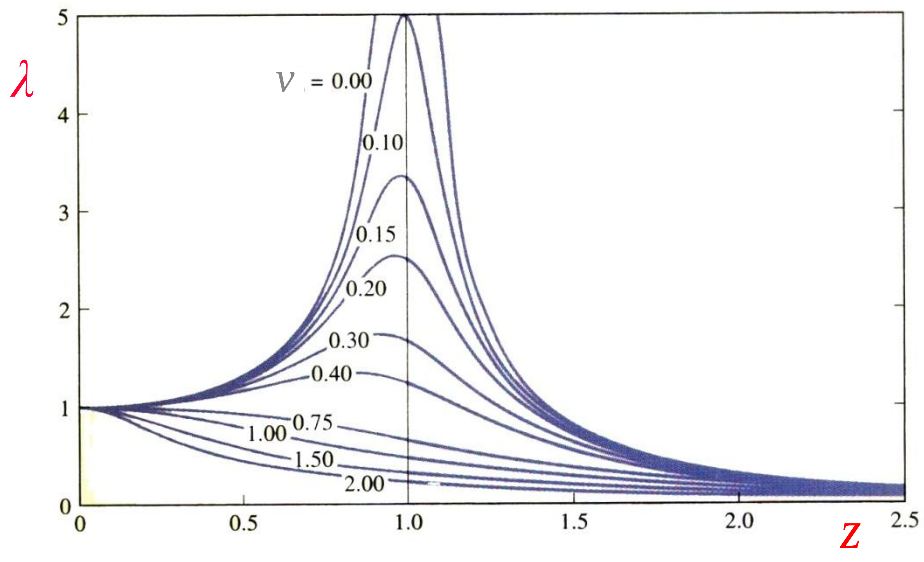
引入无量纲参数 $v = n/k$

$z = p/k$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + (2vz)^2}}$$

（2）当 $z>>1$ ，即扰力频率 p 远大于固有频率k时，$\lambda \to 0$，表示强迫振动的振幅几乎等于零（高频强迫振动）。

来不及振动



$$\lambda=\frac{B}{B_0}=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{p^2}{k^2})^2+(2\frac{n}{k}\cdot\frac{p}{k})^2}}$$

引入无量纲参数 $v=n/k$

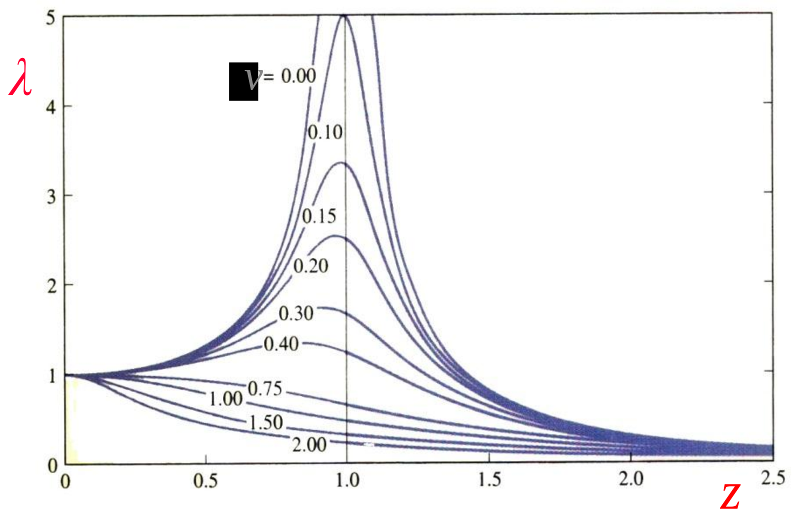
$$z=p/k$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2+(2vz)^2}}$$

（3）当z=1，即 p=k 时，由式

$$B=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2+(2vz)^2}}$$



$$v=n/k \qquad z=p/k$$

可得 $B=\dfrac{h}{2nk}$ $\quad \lambda=\dfrac{k}{2n}$,

可见，这时强迫振动的振幅 B 和阻尼系数成反比。特别是如$n\to 0$,则$B\to\infty$（共振）。

（4）放大系数λ具有极大值。

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + (2\nu z)^2}}$$

取函数 $f(z) = (1-z^2)^2 + (2\nu\ z)^2$ （a）

求导数 $\dfrac{\mathrm{d}\ f(z)}{\mathrm{d}t} = -4z(1-z^2) + 8\nu^2 z = -4z(1-2\nu^2 - z^2)$ （b）

$$\frac{\mathrm{d}^2\ f(z)}{\mathrm{d}^2 t} = -4(1-2\nu^2 - 3z^2)$$

由极值条件 $\dfrac{\mathrm{d}\ f(z)}{\mathrm{d}t} = 0$ **，得** $z = 0$， $z = \sqrt{1-2\nu^2}$ （c）

当 $1\text{-}2\nu^2 > 0$ **时，** $z = 0$ **给出λ的极小值。而** $z = \sqrt{1-2\nu^2}$ **给出λ的极大值，这时强迫振动的振幅也达到最大值，即所谓峰值。对应的扰力频率称为峰值频率，用** p_p**代表，则由式(c)得**

$$p_p = k\sqrt{1-2\nu^2} = \sqrt{k^2 - 2n^2}$$

$$z = p/k \qquad \nu = n/k$$

峰值频率

$$p_p = k\sqrt{1-2v^2} = \sqrt{k^2-2n^2} \qquad (9\text{-}33)$$

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}} \qquad (9\text{-}27)$$

$z = p/k$

$v = n/k$

在式(9-27)**中，令**$P=P_p$**，可得强迫振动的振幅峰值，以**B_p**代表，有**

$$B_p = \frac{h}{2n\sqrt{k^2-n^2}} \qquad (9\text{-}34)$$

如果阻尼很小，$n<<k$**，则由式（9-33）和式（9-34）可得**

$$p_p = k\sqrt{1-2v^2} = k\sqrt{1-2(\frac{n}{k})^2} \approx k$$

$$B_p = \frac{h}{2n\sqrt{k^2-n^2}} = \frac{h}{2nk\sqrt{1-(\frac{n}{k})^2}} \approx \frac{h}{2nk}$$

(9-35)

$$p_p = k\sqrt{1-2v^2} = k\sqrt{1-2\left(\frac{n}{k}\right)^2} \approx k$$

(9-35)

$$B_p = \frac{h}{2n\sqrt{k^2-n^2}} = \frac{h}{2nk\sqrt{1-\left(\frac{n}{k}\right)^2}} \approx \frac{h}{2nk}$$

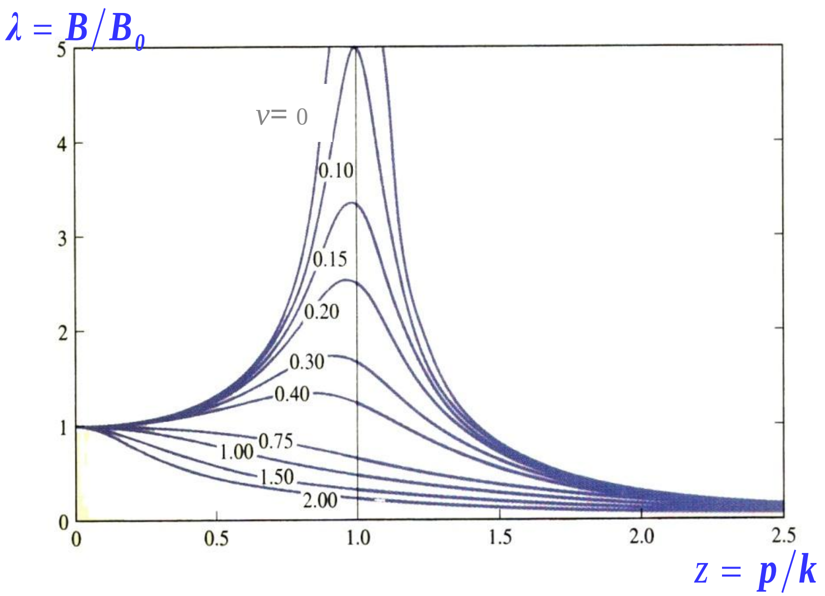
$$\boxed{\begin{array}{l} z = p/k \\ v = n/k \end{array}}$$

与 $B = \dfrac{h}{2nk}$ $\lambda = \dfrac{k}{2n}$， **比较**

可以看出，在小阻尼下发生共振（$p=k$**）时，振幅**B**已接近于峰值**B_p。

$$B=\frac{h}{2nk} \qquad (9\text{-}32)$$

$$B_p=\frac{h}{2n\sqrt{k^2-n^2}} \qquad (9\text{-}34)$$



特别注意：如果阻尼趋向于零；$n\to 0$,则由式（9-32）可给出共振的振幅和由式（9-34）给出强迫振动的振幅峰值B_p都趋向无穷大。

共振频率 $p=k$ 有时也称临界频率，并用P_{cr}代表。

（5）阻尼对强迫振动振幅有不同的影响。

$$z = p/k$$
$$v = n/k$$

由

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + (2vz)^2}} \quad (9\text{-}31)$$

$$B_p = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} \quad (9\text{-}34)$$

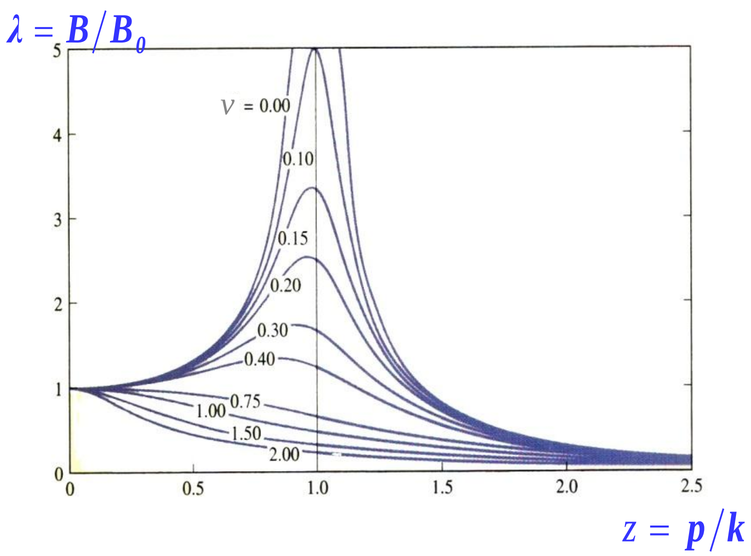
可知当增大阻尼能使放大系数 λ 值和振幅的峰值变小。可见，阻尼对强迫振动振幅及其峰值起抑制作用。

由图可以看出，当阻尼很小（即$n<<k$）且$p \to p_p \approx k$ 时，阻尼对强迫振动振幅的影响特别明显。

当p在所谓共振区（工程上一般取 $0.75k \le p \le 1.25k$）内时，有必要考虑阻尼对强迫振动振幅有影响，为此应由式

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}$$

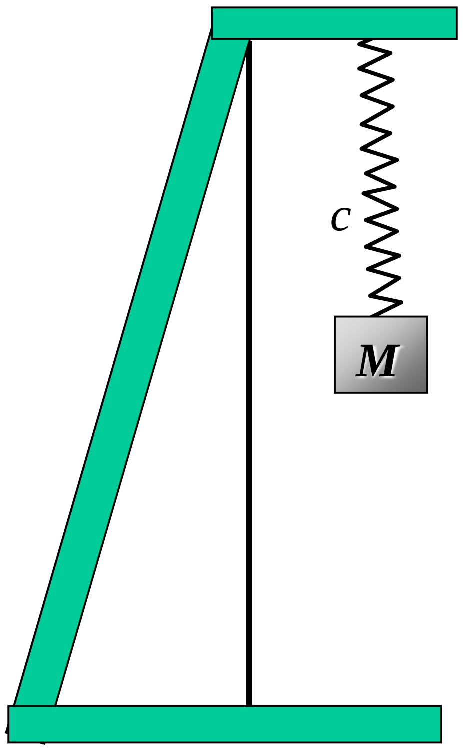
计算振幅。



但在p远离共振区时，阻尼对强迫振动振幅有影响很小，可以忽略，因而可按下面所讲的无阻尼强迫振动计算振幅。

再次指出，阻尼虽然对强迫振动有抑制作用，但强迫振动仍是等幅的简谐振动，并不随时间而衰减。

例9-4 在图所示系统中，弹簧的刚度系数是c,下端挂有质量是m的物块M，上端与振动着的基础相固连。假设基础连带弹簧上端按规律$\zeta=r\sin pt$作铅直振动，求由此而引起的物块M的绝对运动。



解：取弹簧上端不动时物块的平衡位置O作为固定坐标系的原点，令轴Ox铅直向下。在任意瞬时t，物块M的坐标是x，它这时受重力G和弹簧F的作用。

弹簧的变形 $\delta = (l_0 + \delta_s + x - \zeta) - l_0 = \zeta_s + x - \zeta$

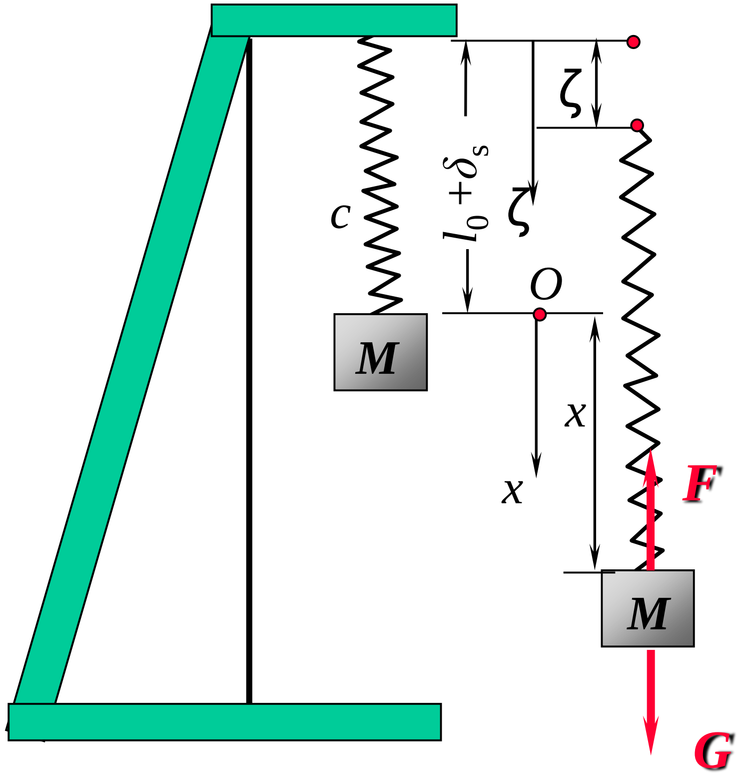
物块M的运动微分方程写成

$$m\ddot{x} = mg - c(\zeta_s + x - \zeta)$$

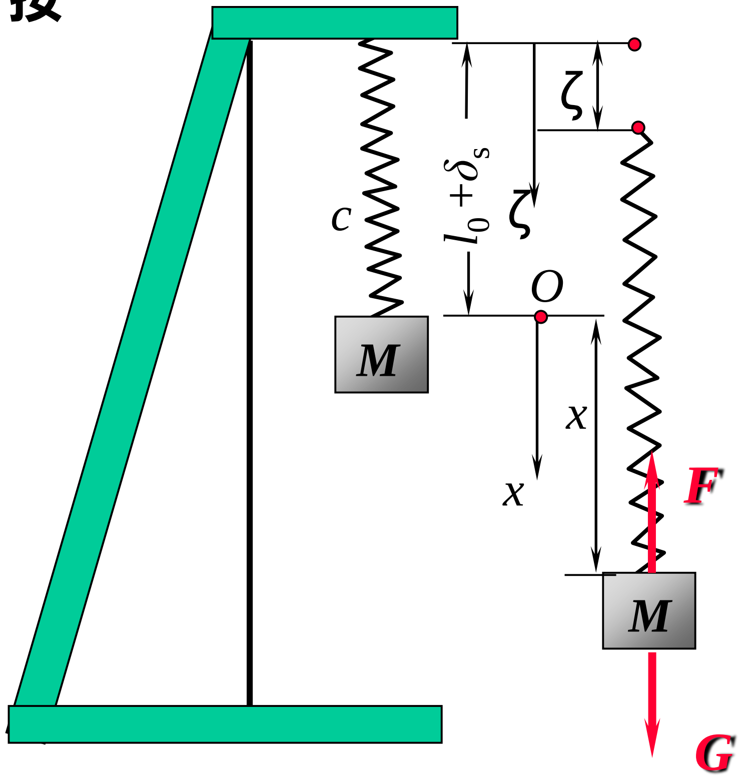
注意到 $c\delta_s = mg$ ，并令 $k^2 = c/m$，则上式化成

$$\ddot{x} + k^2 x = kr\sin pt$$

这是无阻尼强迫振动的标准微分方程。



可见，由于弹簧悬点的简谐运动，使挂在下端的物块受到一个按正弦规律而变化的干扰力，因而物块将作强迫振动。



强迫振动的部分

$$x_2 = \frac{k^2 r}{k^2 - p^2}\sin pt$$

讨论 弹簧刚度对物块运动的影响。

1.设弹簧刚度大（即c值很大），有 $k>>p$，则

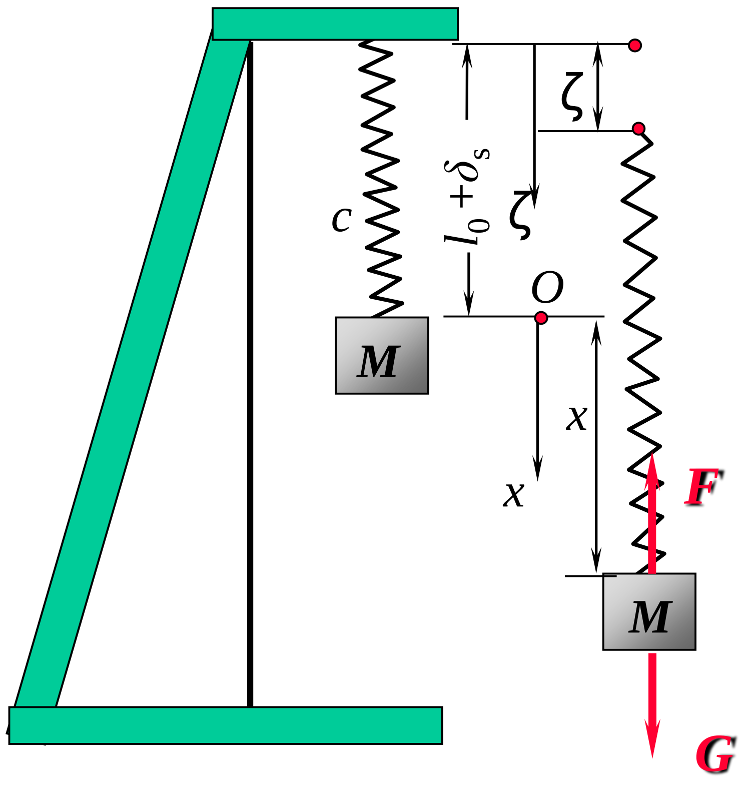
$$x_2 = \frac{1}{1-(p/k)^2} r\sin pt \approx r\sin pt$$

表明M的运动与弹簧上端悬点的运动接近于一致。事实上，当弹簧的刚度极大时，可以看作物块和悬点刚性地联结在一起，因而两者将进行相同的运动。

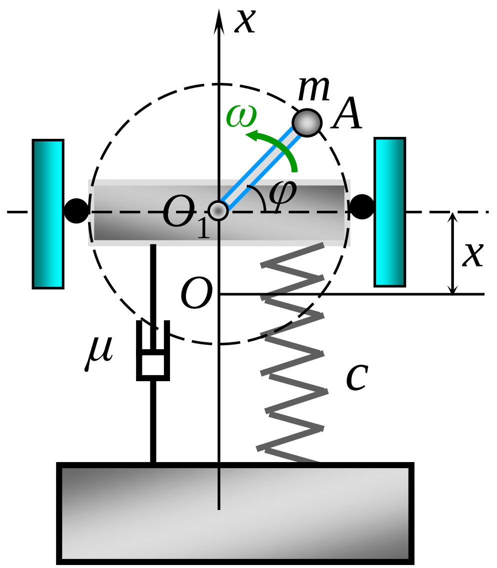
$$x_2 = \frac{k^2 r}{k^2 - p^2}\sin pt$$

2. 如果弹簧的刚度很小，有 $k << p$，则$x_2 \approx 0$。表明物块在空间几乎固定不动。因此，可以用它作参考体，去测定基础的振动。

另外，柔软弹簧防止了基础振动对物块的影响，隔绝外来振动的干扰。这种方式的隔振称为**被动隔振**。对于精密仪器、设备的安装来说，这样的隔振装置是非重要的。



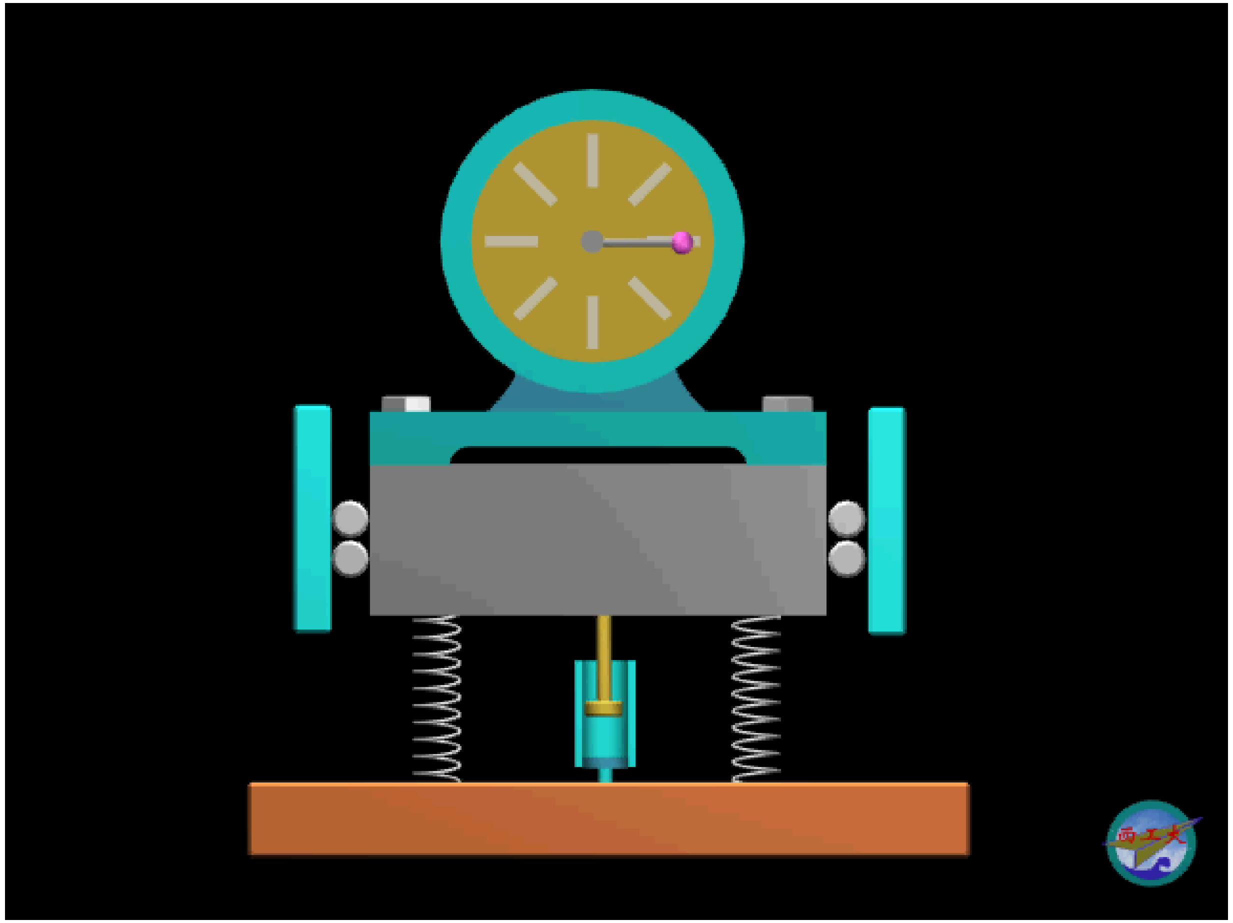
3.如果弹簧的刚度系数适中，$k \approx p$时，物块将作剧烈振动，幅度很大。频率计利用这种现象来测量干扰力的频率。



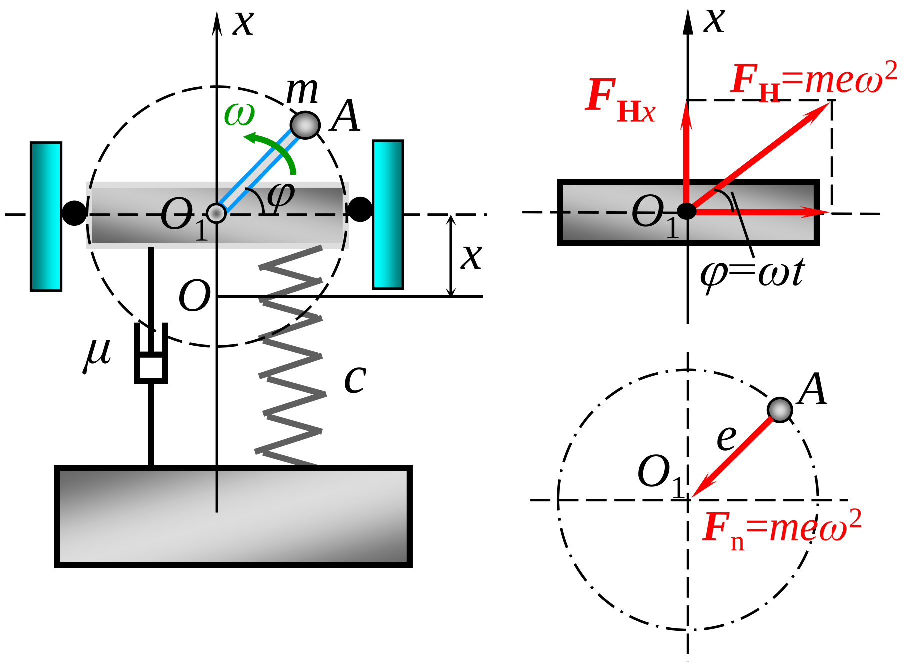
质量为m_1的物块用弹簧及阻尼器支承，被光滑槽约束，只能沿铅直线运动，如图所示。物块上有无质量杆O_1A以匀角速度ω绕物块中心轴O_1转动。杆的A端有一偏心小质量m，设m $\ll m_1$，偏心距$O_1A=e$，弹簧系数为c，阻力系数为μ，试求物块的强迫振动。

例题

振 动



例题 振 动



解：

设O_1A的转角$\varphi=\omega t$，离心力在铅直方向的投影为

$$F_{Hx}=F_H\sin\varphi=me\omega^2\sin\omega t$$

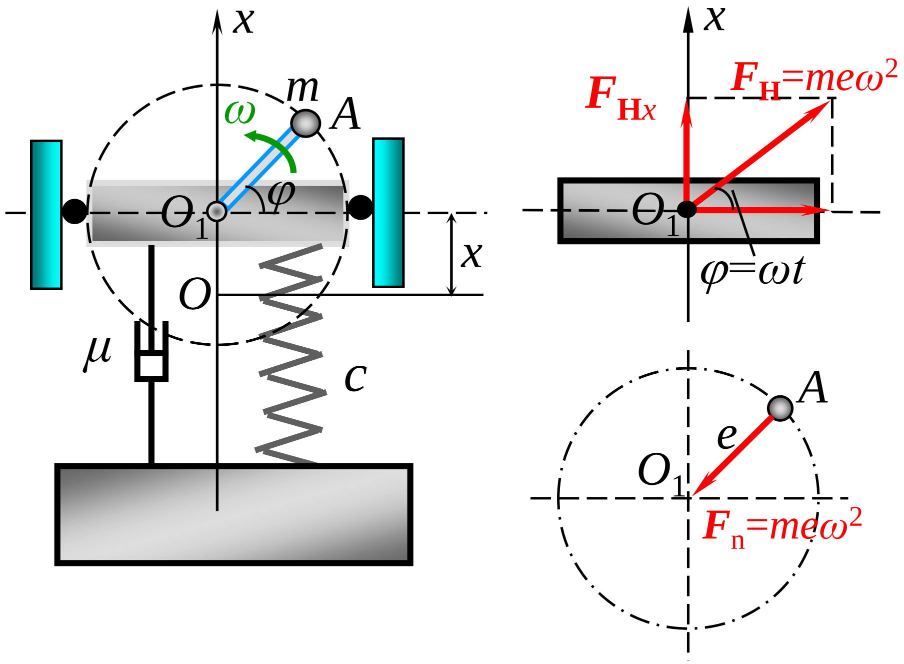
微分方程为

$$(m_1+m)\ddot{x}+\mu\dot{x}+cx=me\omega^2\sin\omega t$$

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=\frac{m}{m_1+m}e\omega^2\sin\omega t$$

令 $$h=\frac{m}{m_1+m}e\omega^2$$

例题 振 动



强迫振动的振幅为

$$B=\frac{\frac{h}{k^2}}{\sqrt{(1-z^2)^2+4\nu^2z^2}}=\frac{\frac{m}{m_1+m}ez^2}{\sqrt{(1-z^2)^2+4\nu^2z^2}}$$

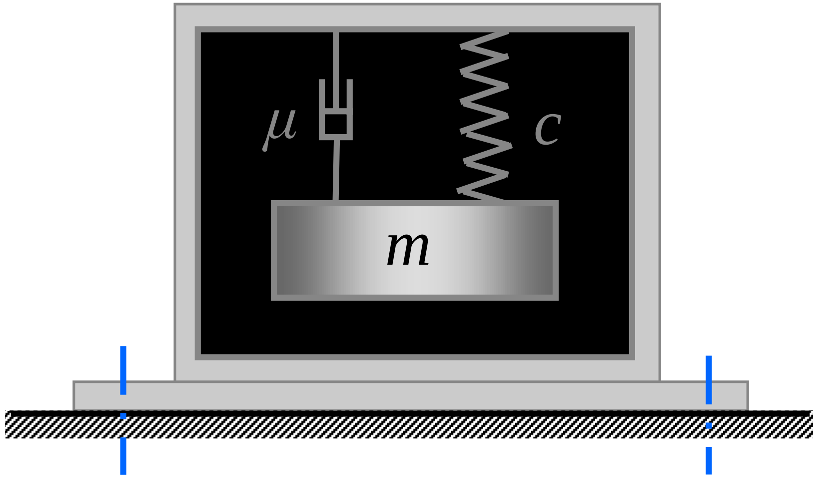
式中 $z=\frac{\omega}{k}$, $\nu=\frac{n}{k}$

令 $b=\frac{m}{m_1+m}e$，则

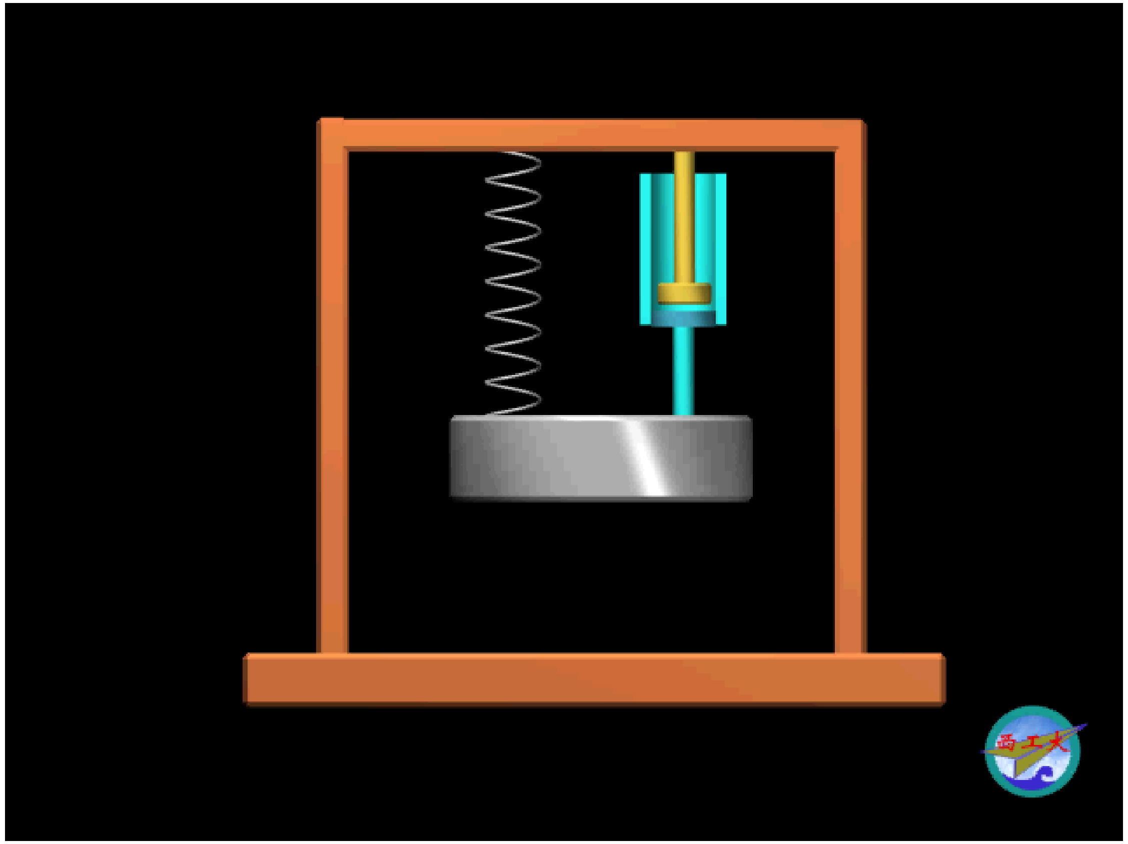
$$\frac{B}{b}=\frac{z^2}{\sqrt{(1-z^2)^2+4\nu^2z^2}}$$

例题 振 动

惯性测振仪的内部安装有“质量(m) - 弹簧(c) - 阻尼器(μ)”系统。测振仪外壳安置在被测振动的物体上。仪器内置质量块相对于外壳(被测振动的物体)的运动被转换成电信号输出。当被测振动的物体的运动规律为$x_e = a\sin\omega t$时，试分析仪器内置质量块相对于外壳(被测振动的物体)的振动。



例题 振 动



例题 振 动

解：

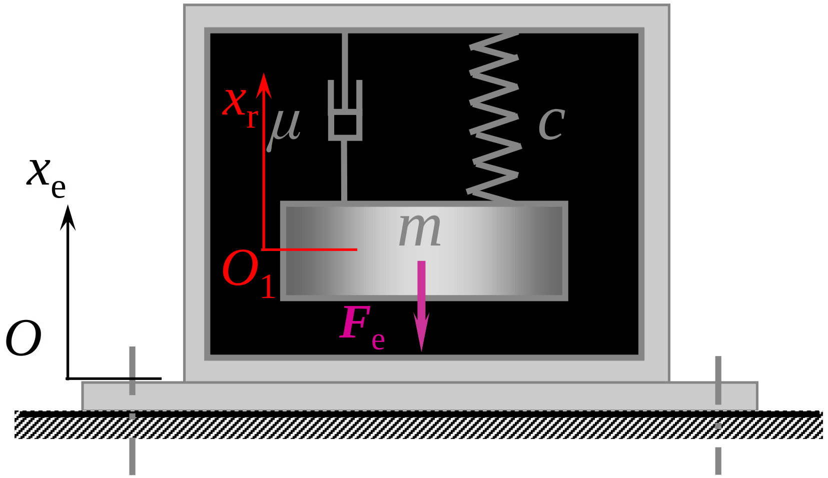
在测振仪外壳上固结动坐标系 $O-x_e$，系统的牵连运动为平移。

以质量块相对于仪器外壳(被测振动的物体)的位移 x_r 作为广义坐标。

系统的运动为非惯性系运动。

应用达朗贝尔原理，在质量块上附加惯性力F_e ，建立系统的运动微分方程。

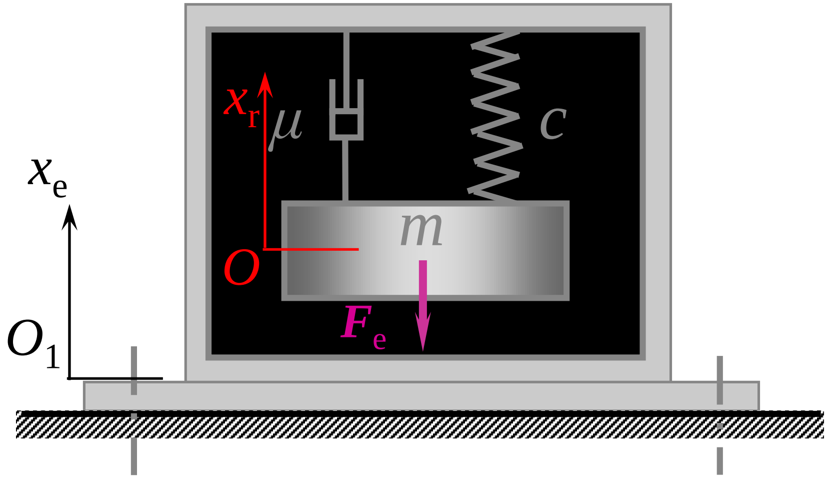
$$m\ddot{x}_r + \mu\dot{x}_r + cx_r = F_e$$



例题 振 动

$$m\ddot{x}_r + \mu\dot{x}_r + cx_r = F_e$$

$$m\ddot{x}_r + \mu\dot{x}_r + cx_r = m\omega^2 a\sin\omega t$$



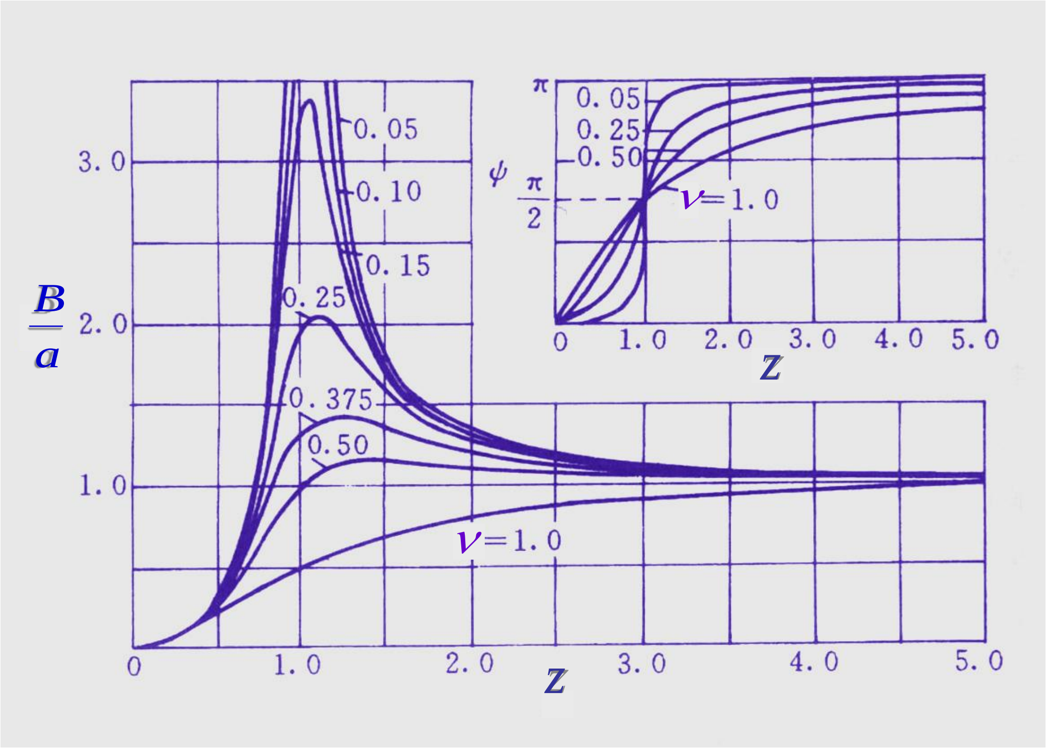
其稳态响应为

$$x_r = B\sin(\omega t - \psi)$$

$$B = a\frac{z^2}{\sqrt{(1-z^2)^2 + (2\nu z)^2}}, \qquad \psi = \arctan\frac{2\nu z}{1-z^2}$$

例题　振　动

稳态响应的幅频特性与相频特性曲线



幅频特性曲线的特点：

在高频区，当$z>>1$时，$B/a\approx 1$。因此，设计时应当使测振仪具有比较低的固有频率，才能有比较大的z值。

被测频率愈高，测量精度也高；被测频率低，测量精度便低。

对于同一z值，阻尼较大时，B/a趋近于1。

谢谢！