第三章 多维随机变量及其分布

二维随机变量

边缘分布

条件分布

相互独立的随机变量

两个随机变量函数的分布

第二章介绍了一维RV及其分布，即随机试验结果只用单一变量来记录的情况。然而在实际中，有些随机试验的结果用一个RV来描述还不够，需要用到多个RV来描述。

例如：

- 在打靶时，<u>命中点的位置</u>是由一对RV（2个坐标）（X,Y）来确定的；
- <u>飞机的重心在空中的位置</u>是由3个RV（3个坐标）（X,Y,Z）来确定的；
- 描述<u>某地气候</u>需要考虑温度、湿度、风速、太阳照射情况等，需要用到多个RV来确定。

于是，本章开始研究多个RV的情况，它是第二章内容的推广。

一维随机变量及其分布

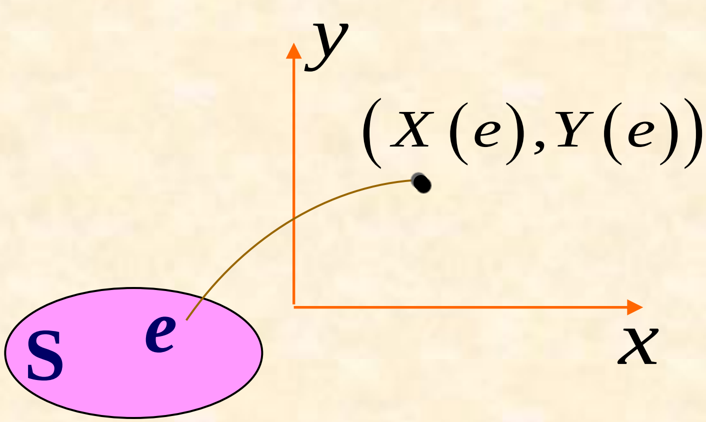
多维随机变量及其分布

由于从二维推广到多维一般无实质性的困难，我们重点讨论二维随机变量 。

§1 二维随机变量

一、定义

一般，设随机试验E的样本空间是S={e}，而$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在S上的RV，由它们构成一个二维向量(X, Y)叫做**二维随机变量**(或**二维随机向量**)。



(X,Y)的性质不仅与X及Y有关，还依赖于X,Y间的相互关系，故需将(X,Y)作为整体研究

二、二维RV的分布函数

1. 定义

(X, Y) 是二维RV， $\forall\, x, y \in R$， 二元函数

$$F(x, y) = P\{(X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)\} \triangleq P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}$$

称为 二维RV (X, Y) 的**分布函数**

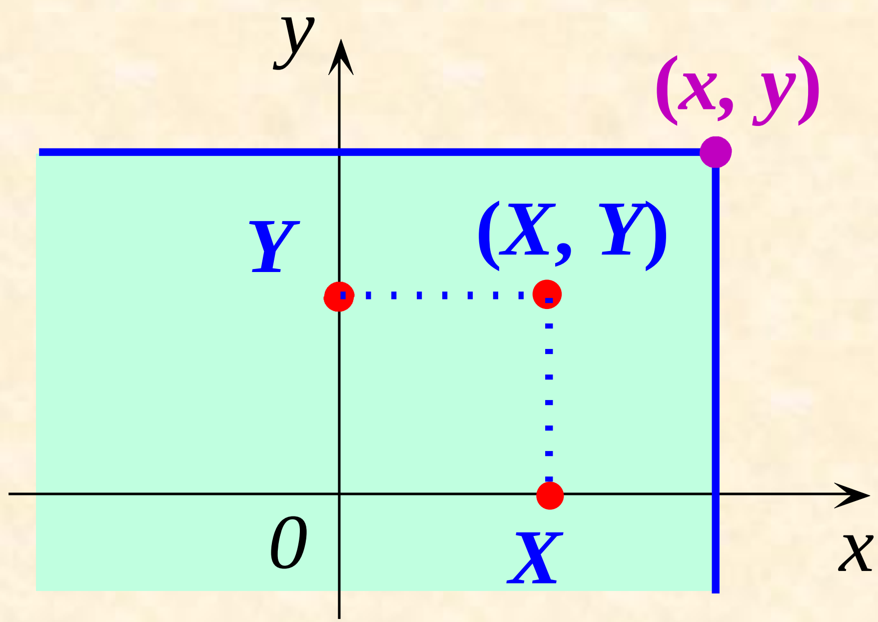
或 RV X 和 Y 的**联合分布函数**

(**Joint Cumulative Distribution Function**)，简记为**JCDF**。

几何解释

若将 (X, Y) 看成是平面上随机点的坐标，

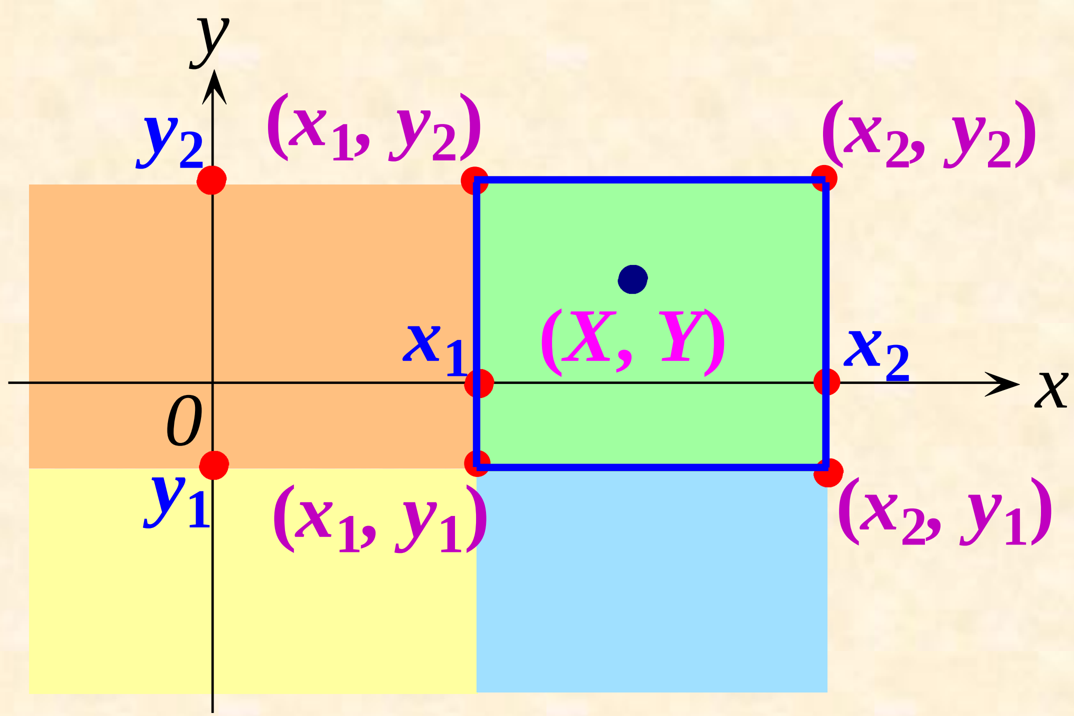
则 $F(x, y)$ 在点 (x, y) 处的函数值即为随机点 (X, Y) 落在点 (x, y) 左下方无穷矩形域内的概率。



随机点落在矩形域 $\{x_1 < X \leqslant x_2,\ y_1 < Y \leqslant y_2\}$ 内的概率为

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2,\ y_1 < Y \leqslant y_2\} =$$

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geqslant 0$$

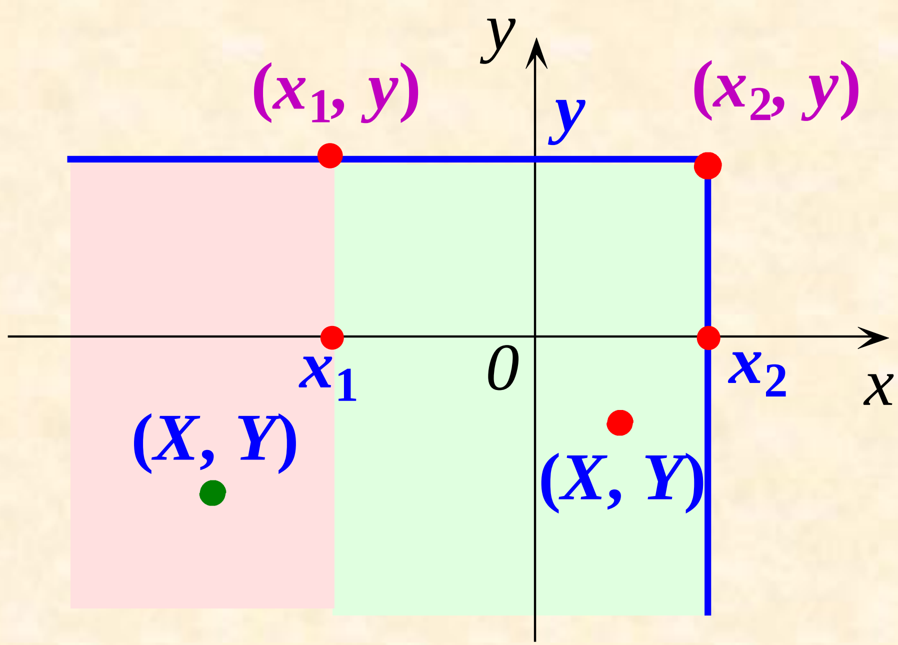


2. 分布函数的性质

① **不减性** $\boldsymbol{F(x, y)}$ 是关于变量$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的不减函数;

$\forall\, y, x_1, x_2 \in R$, 当$x_1 < x_2$时, $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$。

$\forall\, x, y_1, y_2 \in R$, 当$y_1 < y_2$时, $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$。



2. 分布函数的性质

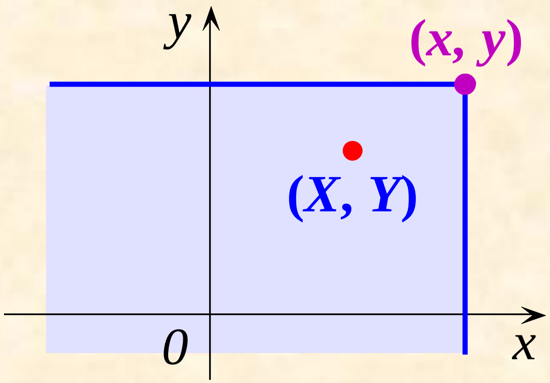
② 有界性

$$0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1，\text{且}$$

$$\forall\, y \in R,\quad F(-\infty, y) = 0;$$

$$\forall\, x \in R,\quad F(x, -\infty) = 0;$$

$$F(-\infty, -\infty) = 0;\qquad F(+\infty, +\infty) = 1。$$



③ 右连续性 $F(x+0, y) = F(x, y)$，

$$F(x, y+0) = F(x, y)。$$

三、二维离散型RV

1. 定义

如果二维RV（X, Y）所有可能取值是有限对或可列无限多对，称（X, Y）是离散型RV。

设二维离散型RV（X, Y）所有可能取值为

$$(x_i, y_j), \ i, j = 1, 2, \ldots,$$

记 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$，（$i, j = 1, 2, \ldots$），

称之为 二维离散型RV（X, Y）的分布律

或 RV X 和 Y 的联合分布律。

易知 p_{ij}（i, j =1,2, …）满足：$p_{ij} \geq 0$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

此外，也可用表格(列表法)来表示二维离散型RV(X, Y)的分布律，如下所示：

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$					
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$					

二维离散型RV的分布函数

$$F(x,y) = \mathrm{P}\{X \le x, Y \le y\} = P\left\{ \bigcup_{\substack{x_i \le x \\ y_j \le y}} (X = x_i, Y = y_j) \right\}$$

$$F(x,y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}$$

例1 把一枚均匀硬币抛掷三次，设 X 为三次抛掷中正面出现的次数，而 Y 为正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值，求 (X, Y) 的分布律。

解: 正面出现次数 — $X \sim b(3, 1/2)$

反面出现次数 — $3 - X$

|正反面出现次数之差| — $Y = |X - (3 - X)|$

取值

X	0	1	2	3
Y	3	1	1	3

$X \sim b(3, 1/2)$

X	0	1	2	3
Y	3	1	1	3

$$P\{X=0, Y=3\}$$

$$\xlongequal[\text{公式}]{\text{乘法}} P\{Y=3 \mid X=0\} P\{X=0\}$$

$$=1\times C_3^0 (1/2)^3 = 1/8$$

$$P\{X=1, Y=1\}$$

$$=P\{Y=1 \mid X=1\} P\{X=1\}$$

$$=1\times C_3^1 (1/2)^1 (1/2)^2 = 3/8$$

Y \ X	0	1	2	3
1	0	3/8	3/8	0
3	1/8	0	0	1/8

$$P\{X=2, Y=1\} = P\{Y=1 \mid X=2\} P\{X=2\} = 1\times C_3^2 (1/2)^2 (1/2)^1 = 3/8$$

$$P\{X=3, Y=3\} = P\{Y=3 \mid X=3\} P\{X=3\} = 1\times C_3^3 (1/2)^3 = 1/8$$

四、二维连续型RV

1. 定义

若存在非负可积函数 $f(x, y)$， $\forall\ x, y \in R$有CDF

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则 称 (X, Y) 是连续型二维RV，

称 $f(x, y)$ 为二维RV (X, Y) 的概率密度

或 称为RV X 和 Y 的联合概率密度(JPDF)。

2. PDF的性质

1.**非负性** $f(x, y) \geqslant 0$;

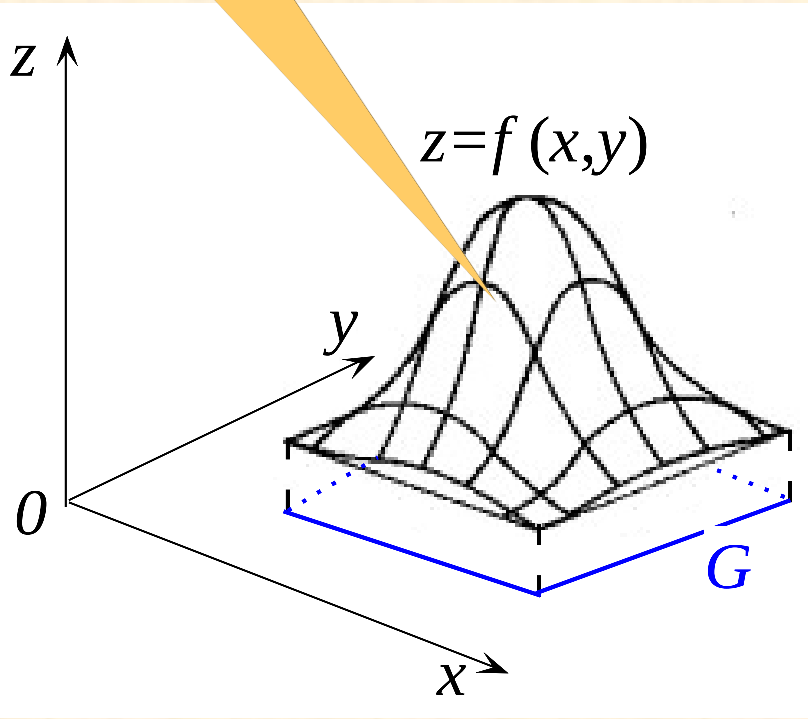
2.**归一性**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1。$$

3. 设G是$x0y$平面上的区域，点（X, Y）落在G内的概率为 $P\{(X,Y)\in G\}$

$$= \iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

体积为1



4. 若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续,则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

当 Δx，Δy 很小时，由性质4可知：

点 (X, Y) 落在矩形域 $(x,\ x+\Delta x)\times(y,\ y+\Delta y)$ 内的概率近似为

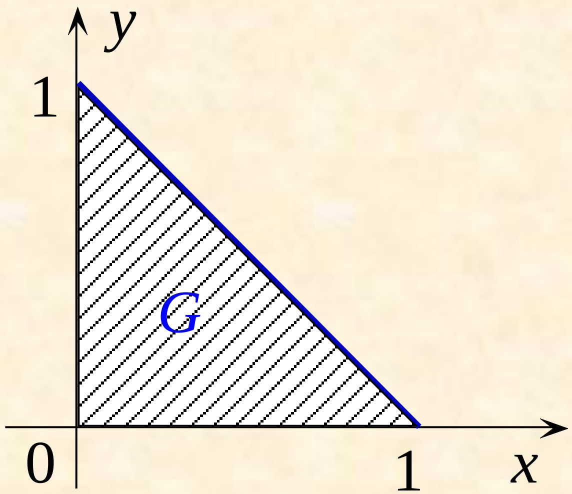
$$\mathrm{P}\{X \le x+\Delta x, Y \le y+\Delta y\} = f(x,y)\cdot \Delta x \Delta y$$

例2 已知(X,Y)的**PDF**为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & else \end{cases},$$

求:（1） (X,Y)的**CDF** $F(x,y)$;

（2） (X,Y)落在G上的概率。



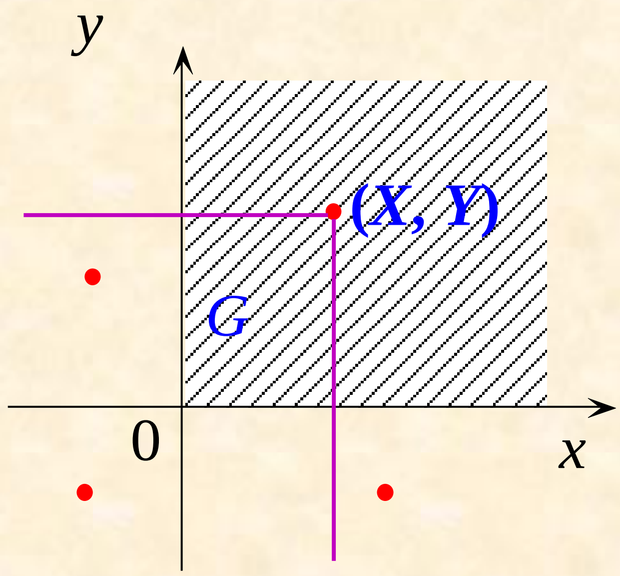
解: (1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & else \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \int_0^y\int_0^x e^{-(u+v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v & , x>0, y>0 \\ 0 & , else \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \int_0^y e^{-v}\mathrm{d}v\int_0^x e^{-u}\mathrm{d}u & , x>0, y>0 \\ 0 & , else \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-y}\right), & x>0, y>0 \\ 0 & , else \end{cases}$$



解：(2) $P\{(X,Y)\in G\}$

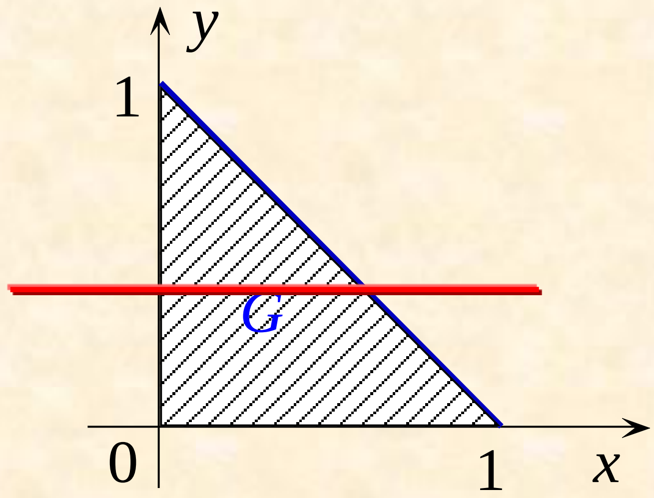
$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & else \end{cases}$$

$$=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{1}\int_0^{1-y} e^{-(x+y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(e^{-y}-e^{-1}\right)\mathrm{d}y$$

$$=1-2e^{-1}$$



小结

- 二维RV的分布函数
- 二维离散型RV
- 二维连续性RV

重点和难点：

求解二维RV分布函数(x, y)，其中 $(x, y) \in R^2$

§2 边缘分布

二维RV（X,Y）的CDF全面地反映了二维RV（X,Y）的取值及其概率规律，而单个RV X和Y也分别具有自己的概率分布，那么：

这二者之间有什么关系？

本节就来探讨这个问题。

一、边缘分布函数

二维RV（X,Y）的分布函数为$F(x,y)$，而RV X和Y各自的CDF $F_X(x)$和$F_Y(y)$，依次称为二维RV（X,Y）关于X和Y的**边缘分布函数**（**Marginal CDF**）。

联合分布与边缘分布间的关系

$$F_X(x)=\mathrm{P}\{X\le x\}=\mathrm{P}\{X\le x, Y<+\infty\}=F(x,+\infty)$$

$$F_Y(y)=\mathrm{P}\{Y\le y\}=\mathrm{P}\{X<+\infty, Y\le y\}=F(+\infty,y)$$

联合分布 $\xrightarrow{\text{完全确定}}$ 边缘分布

二、离散型RV的边缘分布律

一般，二维离散型RV（X,Y）的分布律为,

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\quad (i,j=1,2,\ldots)$$

则（X,Y）的关于X的边缘分布律

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\triangleq p_{i\cdot}\ (i=1,2,\ldots)$$

（X,Y）的关于Y的边缘分布律

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\triangleq p_{\cdot j}\ (j=1,2,\ldots)$$

可将二维离散型RV的联合分布律和边缘分布律列表如下：

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$P\{Y=y_j\}$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	$p_{\cdot 2}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{\cdot j}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$
$P\{X=x_i\}$	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{i\cdot}$	$\cdots$	1

三、连续型RV的边缘概率密度

一般，二维RV（X,Y）的PDF为 $f(x,y)$，

而X 的边缘CDF为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u$$

由于 $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u$

因此，二维RV（X,Y）关于X 的边缘PDF为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad -\infty<x<+\infty$$

同理，关于Y 的边缘PDF为

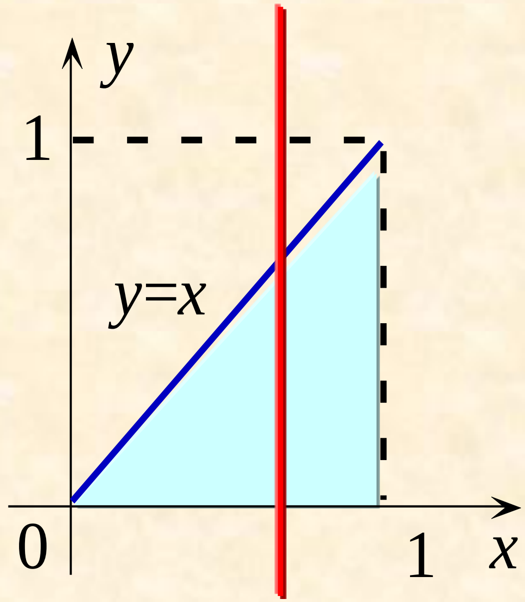
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x,\quad -\infty<y<+\infty$$

例1 设(X,Y)的**PDF**为

$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0, & else \end{cases},$$

求：(1) c值**;**

(2) 边缘**PDF** $f_X(x)$和$f_Y(y)$。

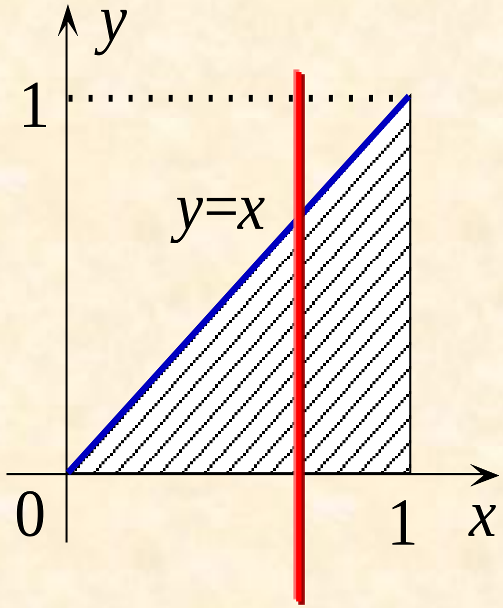


解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$。

即$\int_0^1\int_0^x cy(2-x)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{c}{2}x^2(2-x)\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{5}{24}c=1 \Rightarrow c=\frac{24}{5}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{24}{5}y(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0, & else\end{cases}$$



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

当$x>1\ or\ x<0$时, $\forall y\in R$, 有$f(x,y)=0$

$$\Rightarrow f_X(x)=0$$

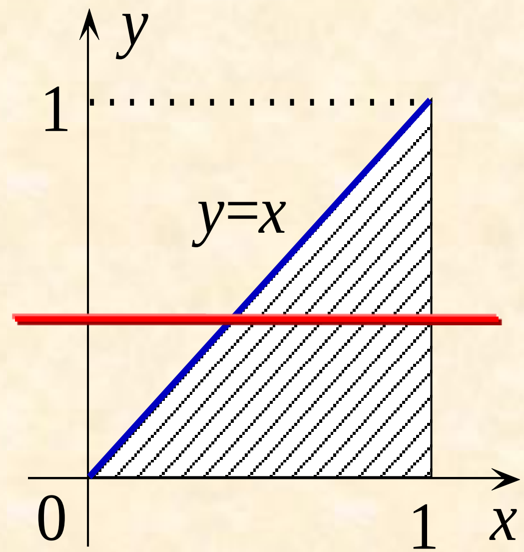
当$0\le x\le 1$时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{x}\frac{24}{5}y(2-x)\,\mathrm{d}y=\frac{12}{5}x^2(2-x)$$

$$综上\ f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{12}{5}x^2(2-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{24}{5}y(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0, & else\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$



当$y>1$ or $y<0$时, $\forall x\in R$, 有$f(x,y)=0$

$$\Rightarrow f_Y(y)=0$$

当$0\le y\le 1$时,

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_{y}^{1}\frac{24}{5}y(2-x)\ \mathrm{d}x=\frac{24}{5}y\left(\frac{3}{2}-2y+\frac{y^2}{2}\right)$$

$$综上\ f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{24}{5}y\left(\dfrac{3}{2}-2y+\dfrac{y^2}{2}\right), & 0\le y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

两个常见的二维分布

1. 均匀分布

设G是平面上的有界区域，其面积为A，若二维RV (X,Y)有PDF

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & else\end{cases}$$

称(X,Y)在G上服从**均匀分布**。

几何解释：　向平面上有界区域G上任投一质点，若质点落在G内任一小区域B的概率与小区域的面积成正比，而与B的形状及位置无关，则质点的坐标(X,Y)在G上服从均匀分布。

2. 二维正态分布

若二维RV（X,Y）有PDF

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\cdots\right.$$

$$\left.\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

$$-\infty<x,y<\infty$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1(>0),\sigma_2(>0),\rho$均为常数， 且$|\rho|<1$,

称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布,

记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$。

结论（P66 例3）

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，且与参数ρ无关。

即：若$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$，则

$$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),\ Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)。$$

由此可知：

完全确定

联合分布 $\rightleftarrows$ 边缘分布

？

小结

- 本节介绍了二维RV的边缘分布；
- 掌握二维RV联合分布与边缘分布之间的关系。

由联合分布可以确定边缘分布；

但由边缘分布一般不能确定联合分布。

作业

Pages 84, 85：
第1, 2, 6, 8, 9题

1999考研

设随机变量$X_i(i=1,2)$服从分布

X_i	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

且$P\{X_1X_2=0\}=1$，则$P\{X_1=X_2\}=?$

由X_i边缘分布知

由$P\{X_1X_2=0\}=1$知

由$P\{X_1X_2\neq0\}=0$

最后由边缘分布

可知联合分辨率

X_1 \ X_2	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$p_{\cdot j}$	1/4	1/2	1/4	**1**

1999考研

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$p_{\cdot j}$	1/4	1/2	1/4	**1**

故 $P\{X_1=X_2\}=$

$P\{X_1=-1, X_2=-1\}+P\{X_1=0, X_2=0\}+P\{X_1=1, X_2=1\}$

$=0$