

静力学

摩擦

杨成鹏

力学与土木建筑学院

静力学

第五章 摩 擦

§ 5-1 滑动摩擦的概念



§ 5-2 滑动摩擦性质

§ 5-3 考虑滑动摩擦时的平衡问题

§ 5-4 滚动摩擦的概念



§ 5-1 滑动摩擦的概念

- 滑动摩擦的概念 
- 滑动摩擦的分类 



§ 5-1 滑动摩擦的概念

1. 滑动摩擦的概念

当一物体沿着另一物体的表面（或接触面）滑动或具有滑动的趋势时，该表面会产生切向阻力的现象称为**滑动摩擦**，简称**摩擦**。

这个切向阻力称为**滑动摩擦力**，简称**摩擦力**。

2. 滑动摩擦的分类

(1) 按二物体接触面间是否有润滑分类

干摩擦： 由固体表面直接接触而产生的摩擦。

湿摩擦： 固体表面之间存在某种液体，则这时出现的摩擦。

半干摩擦： 当润滑油不足时，固体表面将部分保持直接接触，这种在中间状态下出现的摩擦。







(2) 按二物体接触点（面）之间有无相对速度分类

动（滑动）摩擦： 已发生相对滑动的物体间的摩擦。

静（滑动）摩擦： 仅出现相对滑动趋势而未发生运动时的摩擦。



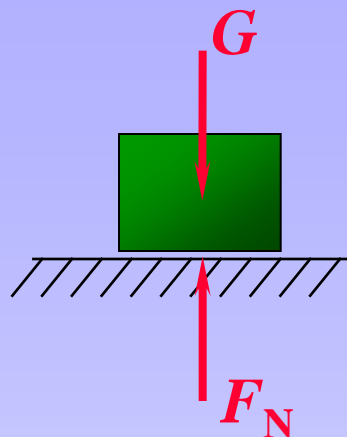
§ 5-2 滑动摩擦的性质

- 静摩擦力的性质 
- 静摩擦力极限摩擦定律 
- 动摩擦定律 
- 摩擦角、摩擦锥、自锁 

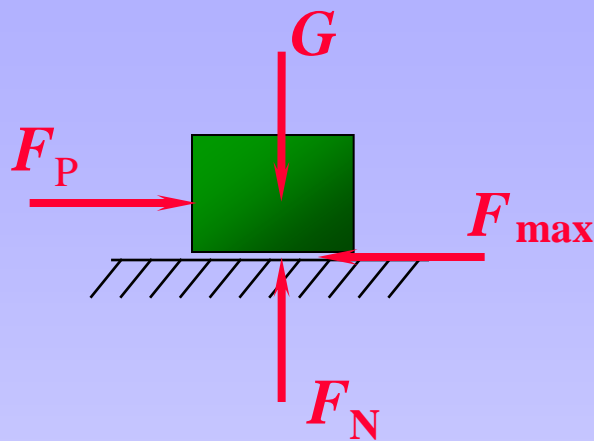


§ 5-2 滑动摩擦的性质

1. 静摩擦力的性质



$$F_N = -G$$



$$F_P = -F$$

摩擦力的大小有如下变化范围： $0 \leq F \leq F_{\max}$

极限值 F_{\max} 称为**极限摩擦力**（最大摩擦力）。

当推力 F_P 增加到等于 F_{\max} 时的平衡称为**临界平衡状态**。

摩擦力的方向总是和物体的相对滑动趋势的方向相反。



§ 5-2 滑动摩擦的性质

2. 静摩擦力极限摩擦定律

静摩擦力的最大值 F_{\max} 与物体对支承面的正压力或法向反作用力 F_N 成正比。

$$\text{即: } F_{\max} = f_s F_N$$

f_s ：静摩擦因数



§ 5-2 滑动摩擦的性质

3. 动摩擦定律

动摩擦力 F_d 与物体对支承面的正压力或法向反作用力 F_N 成正比。

$$\text{即： } F_d = f_d F_N$$

f_d : 动摩擦因数

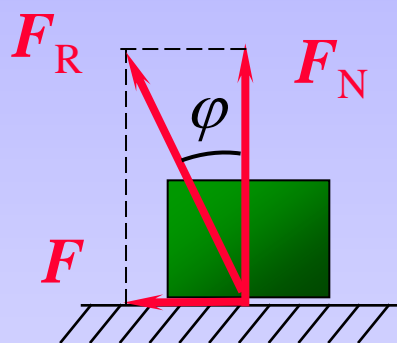
动摩擦力的方向总是和物体的相对滑动的速度方向相反。



§ 5-2 滑动摩擦的性质

4. 摩擦角、摩擦锥、自锁

● 总反力

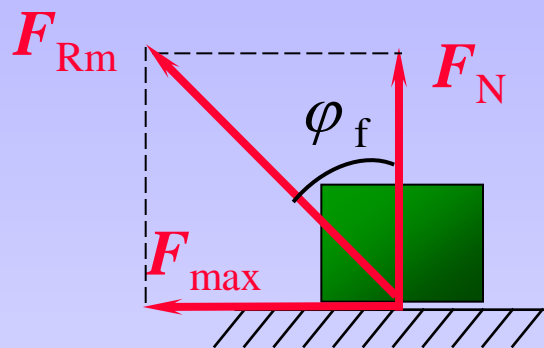


总反力 $F_R = F_N + F$

$$\tan \varphi = \frac{F}{F_N}$$

● 摩擦角

最大总反力 F_{Rm} 对法向反力 F_N 的偏角 φ_f 。



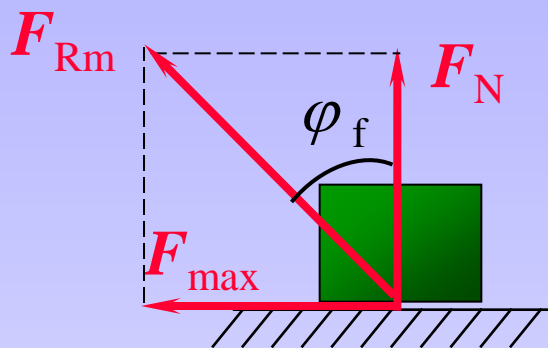
最大总反力 $F_{Rm} = F_N + F_{\max}$

$$\tan \varphi_f = \frac{F_{\max}}{F_N}$$

§ 5-2 滑动摩擦的性质

● 摩擦角

最大总反力 F_{Rm} 对法向反力 F_N 的偏角 φ_f 。



$$\tan \varphi_f = \frac{F_{\max}}{F_N} = \frac{f_s F_N}{F_N} = f_s$$

由此可得重要结论：

最大总反力 $F_{Rm} = F_N + F_{\max}$

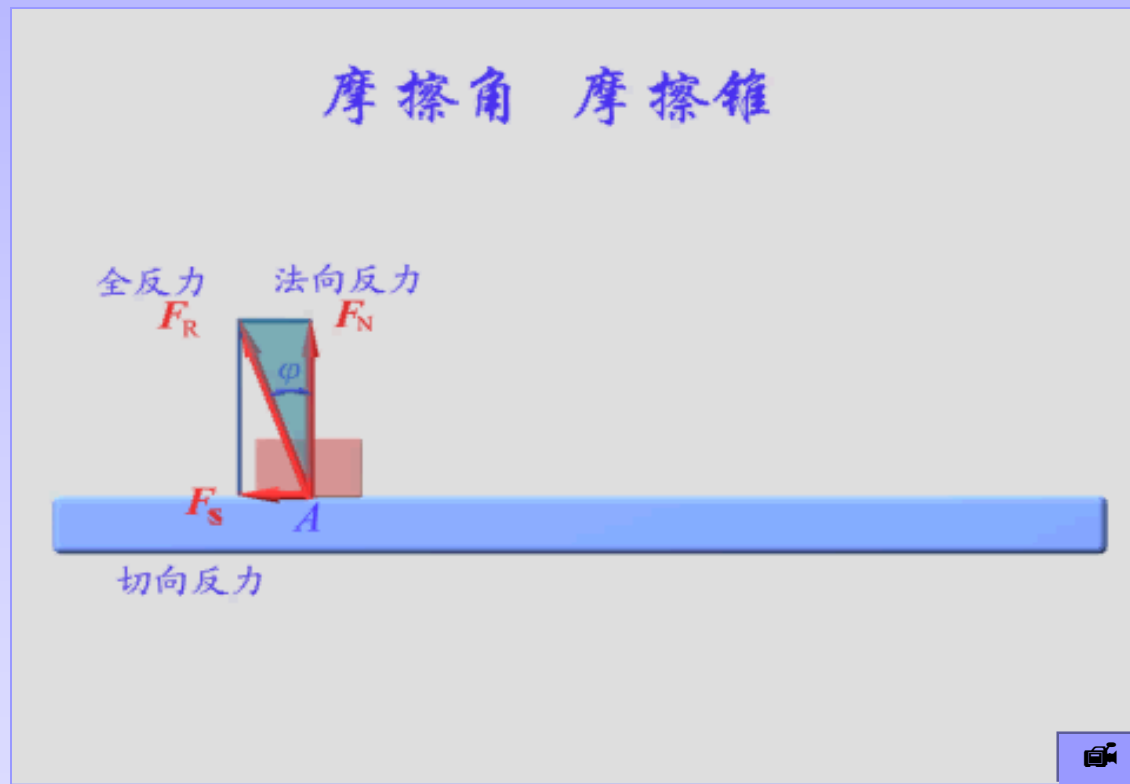
摩擦角的正切=静摩擦因数

$$\tan \varphi_f = \frac{F_{\max}}{F_N}$$

§ 5-2 滑动摩擦的性质

● 摩擦锥

以支承面的法线为轴作出的以 $2\varphi_f$ 为顶角的圆锥。



§ 5-2 滑动摩擦的性质

● 摩擦锥的性质

摩擦角更能形象的说明有摩擦时的平衡状态。

物体平衡时有 $0 \leq F \leq F_{\max}$ \longrightarrow $\frac{F}{F_N} \leq \frac{F_{\max}}{F_N}$

则有 $\tan \varphi = \frac{F}{F_N} \leq \frac{F_{\max}}{F_N} = \tan \varphi_f$ \longrightarrow $0 \leq \varphi \leq \varphi_f$

所以物体平衡范围 $0 \leq F \leq F_{\max}$ 也可以表示为 $0 \leq \varphi \leq \varphi_f$ 。

性质：当物体静止在支承面时，支承面的总反力的偏角不大于摩擦角。

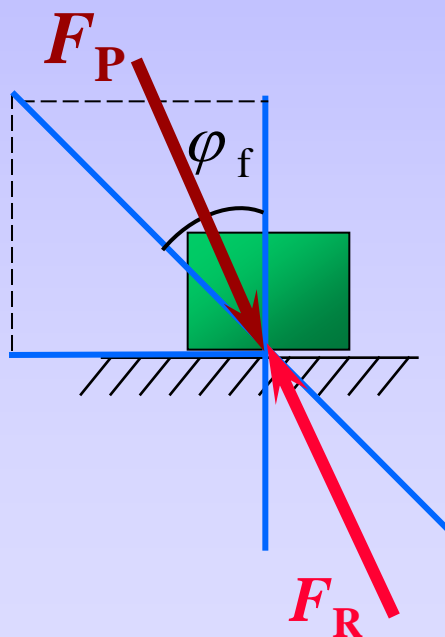


§ 5-2 滑动摩擦的性质

● 两个重要结论

- ① 如果作用于物体的主动力合力的作用线在摩擦锥内，则不论这个力多大，物体总能平衡。

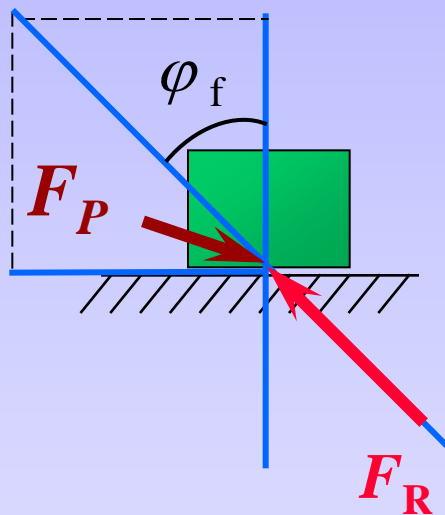
这种现象称为**自锁**。



§ 5-2 滑动摩擦的性质

● 两个重要结论

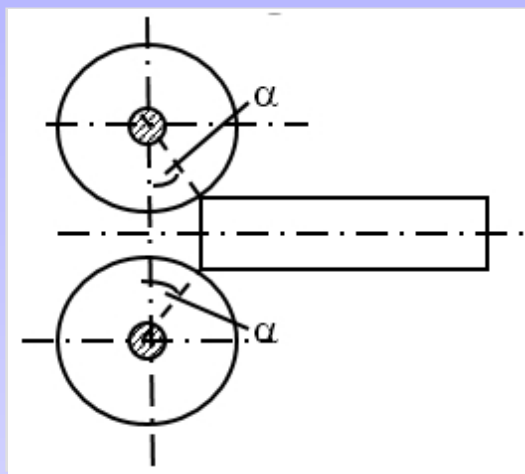
- ② 如果作用于物体的主动力合力的作用线在摩擦锥外，则不论这个力多小，物体都不能保持平衡。



§ 5-2 滑动摩擦的性质

思考题： 图示压延机由两轮构成，若烧红的铁板与铸铁轮接触处的摩擦系数为 f ，摩擦角 $\varphi_f = \arctan f$ ，以下四种 α 角（铁板与铸铁轮接触点的圆心角）的情况，哪一种能使铁板被自动压延而进入滚轮？

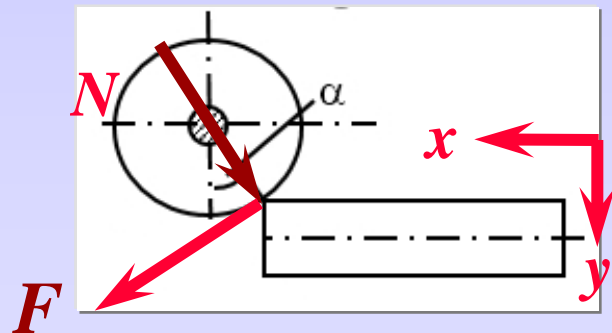
- (A) $\alpha < \varphi_f$;
- (B) $\alpha > 90^\circ - \varphi_f$;
- (C) $\alpha > \varphi_f$;
- (D) $\alpha < 90^\circ - \varphi_f$ 。



正确答案：A

x 轴: $F \cos \alpha - N \sin \alpha > 0$

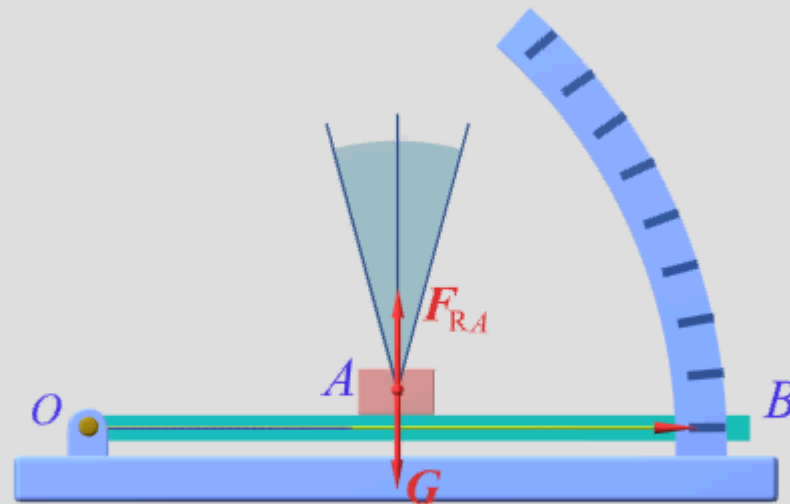
$f N \cos \alpha - N \sin \alpha > 0 \rightarrow f > \tan \alpha$



§ 5-2 滑动摩擦的性质

利用摩擦角测定静摩擦因数

利用摩擦角测定静摩擦因数



§ 5-2 滑动摩擦的性质

螺旋千斤顶



§ 5-2 滑动摩擦的性质

斜面自锁条件

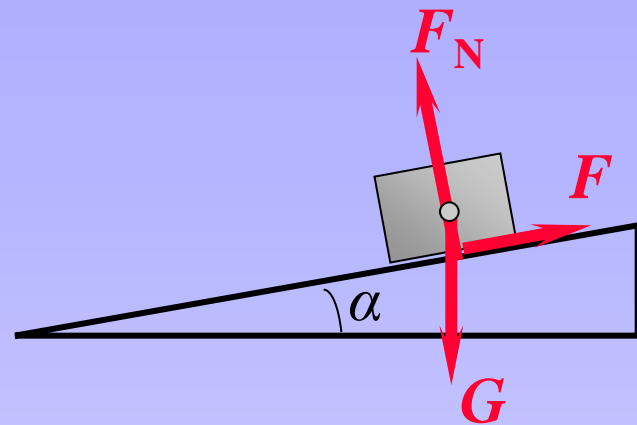
平衡时 $F = G \sin \alpha$, $F_N = G \cos \alpha$

由 $F \leq F_{\max} = f_s F_N$

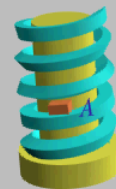
$$G \sin \alpha \leq f_s G \cos \alpha$$

$$\tan \alpha \leq f_s = \tan \varphi_f$$



$$\alpha \leq \varphi_f$$



斜面自锁的条件



§ 5-3 考虑滑动摩擦时的 平衡问题

- 临界平衡状态分析 
- 非临界平衡状态分析 



§ 5-3 考虑滑动摩擦时的平衡问题

考虑摩擦时的平衡问题的分析与前面相同。但要特别注意摩擦力的分析，其中重要的是判断摩擦力的方向和大小。

两种情况

1. 临界平衡状态分析

- 应用 $F_{\max} = f_s F_N$ 作为补充方程。
- 根据物体的运动趋势来判断其接触处的摩擦力方向，不能任意假设。

在许多情况下其结果是一个不等式或范围。



§ 5-3 考虑滑动摩擦时的平衡问题

考虑摩擦时的平衡问题的分析与前面相同。但要特别注意摩擦力的分析，其中重要的是判断摩擦力的方向和大小。

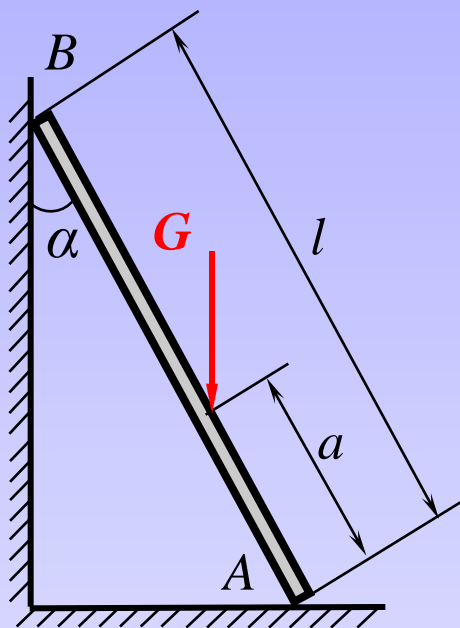
两种情况

2. 非临界平衡状态分析（平衡范围分析）

- 应用 $F \leq f_s F_N$ 作为补充方程。
- 当物体平衡时，摩擦力 F 和支承面的正压力 F_N 彼此独立。

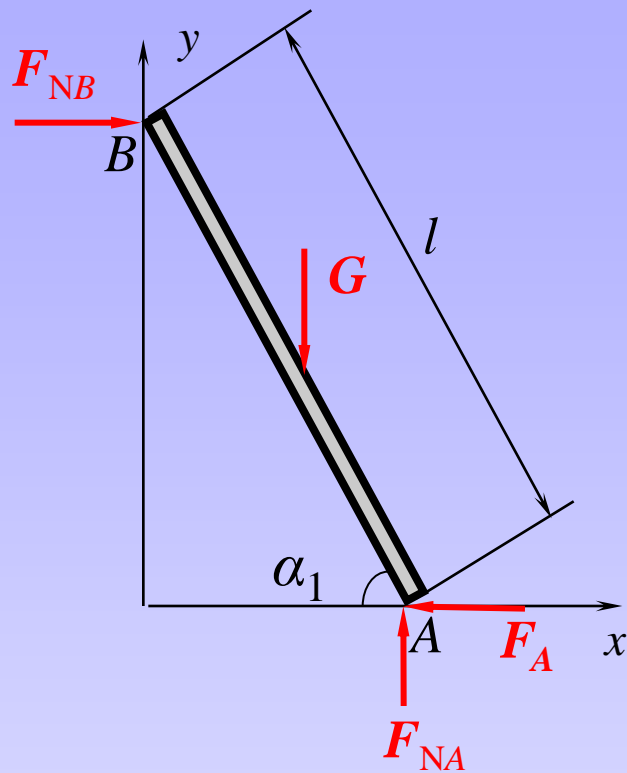
摩擦力 F 的指向可以假定，大小由平衡方程决定。





例5-1 长为 l 的梯子 AB 一端靠在墙壁上，另一端搁在地板上，如图所示。假设梯子与墙壁的接触是完全光滑的，梯子与地板之间有摩擦，其静摩擦因数为 f_s 。梯子重为 G 。（1）若梯子在倾角 α_1 的位置保持平衡，试求约束力 F_{NA} 、 F_{NB} 和摩擦力 F_A ；（2）若梯子不致滑倒，试求其倾角 α 的范围。





解： (1) 以梯子AB为研究对象，看成匀质杆，梯子的受力如图。

使梯子保持静止，必须满足下列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NB} - F_A = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NA} - G = 0 \quad (b)$$

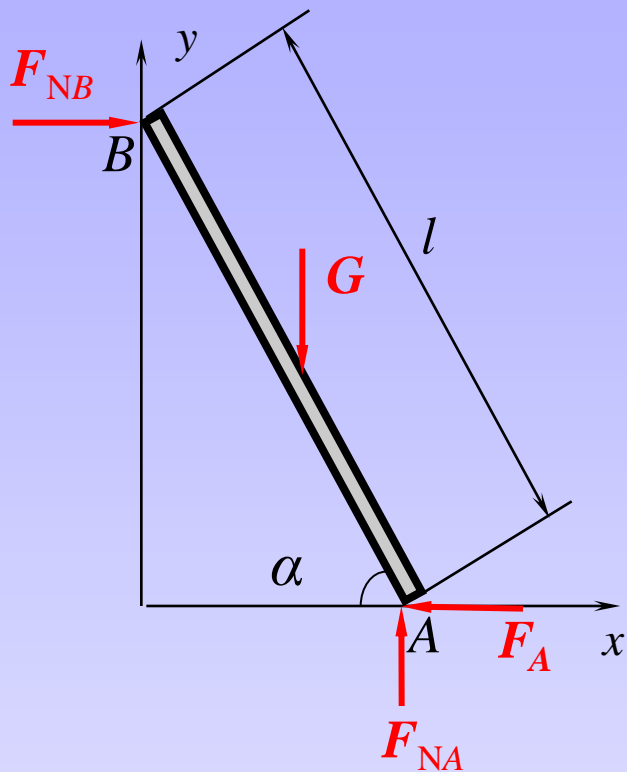
$$\sum M_A(F) = 0, \quad G \frac{l}{2} \cos \alpha_1 - F_{NB} l \sin \alpha_1 = 0 \quad (c)$$

由式(a)、(b)和(c)可解得

$$F_{NB} = \frac{G}{2} \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1}, \quad F_{NA} = G, \quad F_A = -\frac{G}{2} \cot \alpha_1$$



(2) 摩擦力 F_A 的方向必须根据梯子的滑动趋势预先确定，梯子的受力如图所示。



$$\sum F_x = 0, \quad F_{NB} - F_A = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NA} - G = 0 \quad (b)$$

$$\sum M_A(F) = 0, \quad G \frac{l}{2} \cos \alpha - F_{NB} l \sin \alpha = 0 \quad (c)$$

$$\text{补充方程: } F_A = f_s F_{NA} \quad (d)$$

据此不仅可以解出A、B两处的约束力，而且可以确定保持平衡时梯子的临界倾角

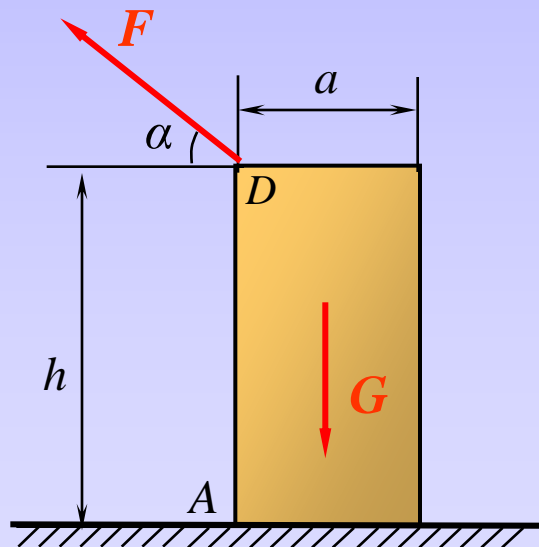
$$\alpha = \operatorname{arccot}(2f_s)$$

由常识可知， α 越大梯子越容易保持平衡，故平衡时梯子对地面的倾角范围为

$$\alpha \geq \operatorname{arccot}(2f_s)$$



例5-2 图示匀质木箱重 $G = 5 \text{ kN}$ ，它与地面间的静摩擦因数 $f_s = 0.4$ 。图中 $h = 2a = 2 \text{ m}$ ， $\alpha = 30^\circ$ 。（1）问当 D 处的拉力 $F = 1 \text{ kN}$ 时，木箱是否平衡？（2）求能保持木箱平衡的最大拉力。



§ 5-3 考虑滑动摩擦时的平衡问题

例题 5-2

解: 1. 判断木箱是否平衡

取木箱为研究对象, 受力分析如图。

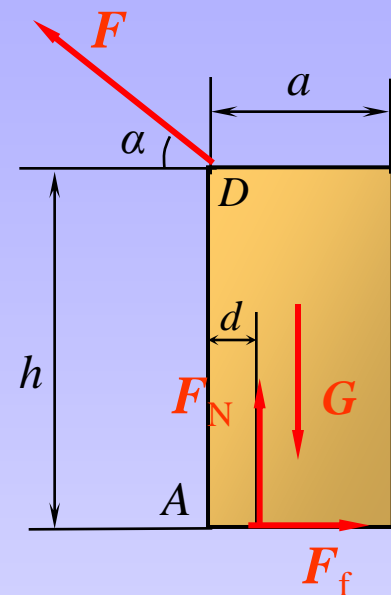
列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_f - F \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_N - G + F \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, \quad hF \cos \alpha - G \frac{a}{2} + F_N d = 0$$

解方程得 $F_f = 866 \text{ N}$, $F_N = 4500 \text{ N}$, $d = 0.171 \text{ m}$



(1) 不发生滑动, 即 $F_f \leq F_{\max} = f_s F_N$ 。

木箱与地面之间的最大摩擦力为 $F_{\max} = f_s F_N = 1800 \text{ N}$

因为 $F_f < F_{\max}$, 所以木箱不滑动。



§ 5-3 考虑滑动摩擦时的平衡问题

例题 5-2

$$\sum F_x = 0, \quad F_f - F \cos \alpha = 0$$

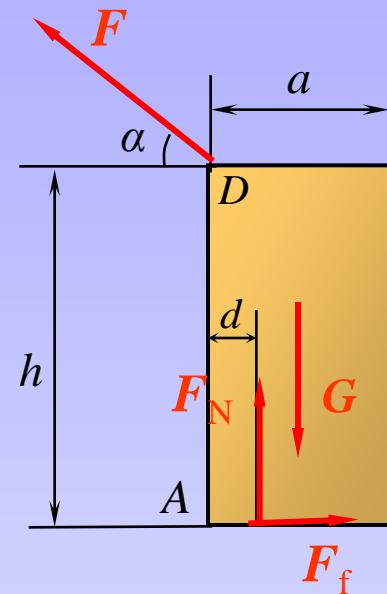
$$\sum F_y = 0, \quad F_N - G + F \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, \quad hF \cos \alpha - G \frac{a}{2} + F_N d = 0$$

解方程得 $F_f = 866 \text{ N}$, $F_N = 4500 \text{ N}$, $d = 0.171 \text{ m}$

(2) 不绕点A翻倒, 即 $d > 0$ 。

又因为 $d = 0.171 \text{ m} > 0$, 所以木箱不会翻倒。



2. 求平衡时最大拉力，即求滑动临界与翻倒临界时的最小力 F 。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_f - F \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_N - G + F \sin \alpha = 0$$

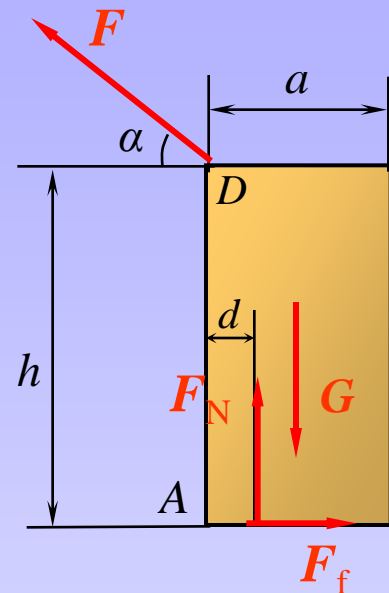
$$\sum M_A(F) = 0, \quad hF \cos \alpha - G \frac{a}{2} + F_N d = 0$$

木箱发生滑动的条件为 $F_f = F_{\max} = f_s F_N$

解得
$$F_{\text{滑}} = \frac{f_s G}{\cos \alpha + f_s \sin \alpha} = 1\,876 \text{ N}$$

木箱绕 A 点翻倒的条件为 $d = 0$ ，则

$$F_{\text{翻}} = \frac{Ga}{2h \cos \alpha} = 1\,443 \text{ N}$$



由于 $F_{\text{翻}} < F_{\text{滑}}$ ，所以保持木箱平衡的最大拉力为

$$F = F_{\text{翻}} = 1\,443 \text{ N}$$





也可以如下分析:

(1) 木箱有向左滑动趋势

列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_f - F \cos \alpha = 0$$

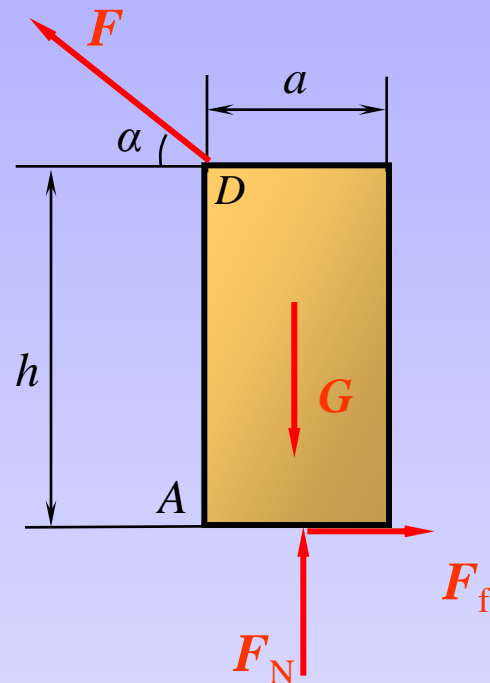
$$\sum F_y = 0, \quad F_N - G + F \sin \alpha = 0$$

补充方程

$$F_f = F_{\max} = f_s F_N$$

解得

$$F_{\text{滑}} = \frac{f_s G}{\cos \alpha + f_s \sin \alpha} = 1\,876 \text{ N}$$



(2) 木箱处于绕 A 点翻倒的临界平衡状态

列平衡方程

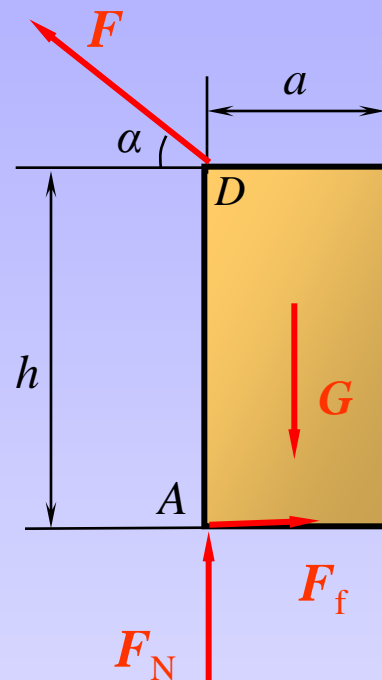
$$\sum M_A(F) = 0, \quad hF \cos \alpha - G \frac{a}{2} = 0$$

解得

$$F_{\text{翻}} = \frac{Ga}{2h \cos \alpha} = 1\,443 \text{ N}$$

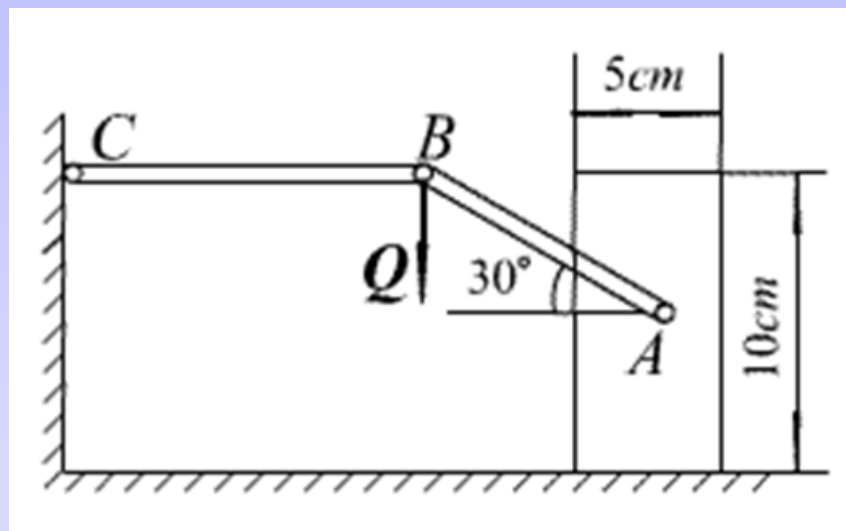
由于 $F_{\text{翻}} < F_{\text{滑}}$, 所以保持木箱平衡的最大拉力为

$$F = F_{\text{翻}} = 1\,443 \text{ N}$$



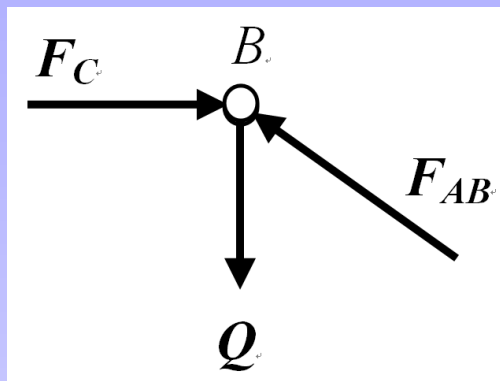
§ 作业题解答

3. 杆AB和BC在B处铰接，在铰链上作用有铅垂力 Q ，C端铰接在墙上，A端铰接在重 $P=1000\text{N}$ 的匀质长方体的几何中心A。已知杆BC水平，长方体与水平面间静摩擦因数为 $f=0.52$ ，杆重不计，尺寸如图所示。试确定不致破坏系统平衡的 Q 的最大值。



§ 作业题解答

1. 以销钉B为研究对象，受力分析如图所示。



$$\sum F_y = 0, F_{AB} \sin 30^\circ - Q = 0$$

$$\Rightarrow F_{AB} = 2Q$$

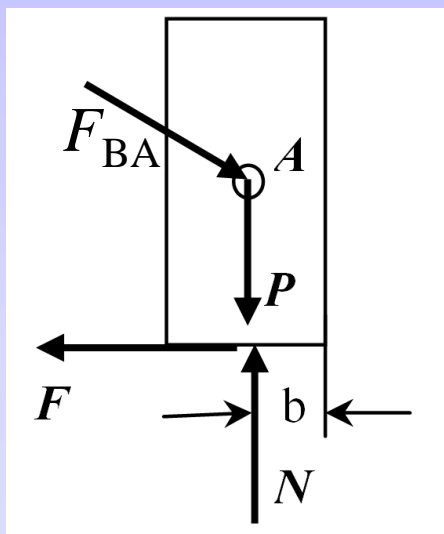
2. 取长方体A为研究对象，受力分析如图，

$$\sum F_x = 0, F_{BA} \cos 30^\circ - F = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, N - P - F_{BA} \sin 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_D = 0,$$

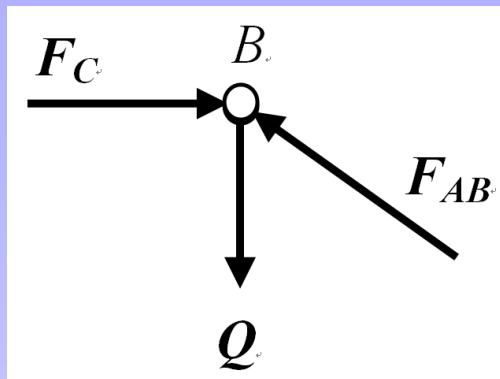
$$\frac{5}{2}P - \frac{10}{2}F_{BA} \cos 30^\circ + \frac{5}{2}F_{BA} \sin 30^\circ - Nb = 0 \quad (3)$$



1) 不滑动时, $F \leq fN$, 由式(1)和(2)得



§ 作业题解答



$$F_{BA} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \left(P + F_{BA} \cdot \frac{1}{2} \right) f, \quad \because F_{BA} = F_{AB}$$

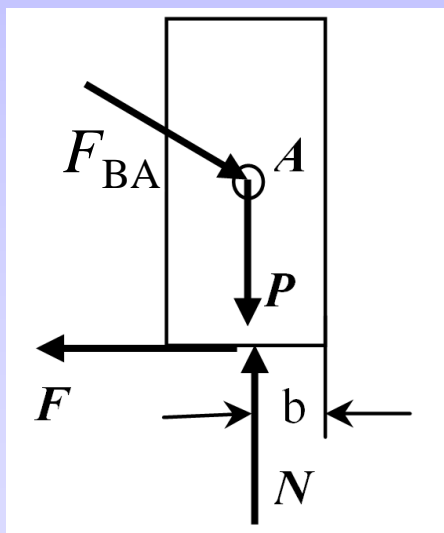
$$\Rightarrow Q \leq 429.03 \text{ N}$$

2) 不绕D点翻倒, $b \geq 0$, 由式(3)求得




$$Q \leq 405.83 \text{ N}$$

故比较以上结果得知, 所求最大力 Q 为

$$Q_{\max} = 405.83 \text{ N}$$



§ 5-4 滚动摩阻的概念

- 滚动摩阻的定义 
- 滚动摩阻性质与产生原因 
- 滚动摩阻定律 

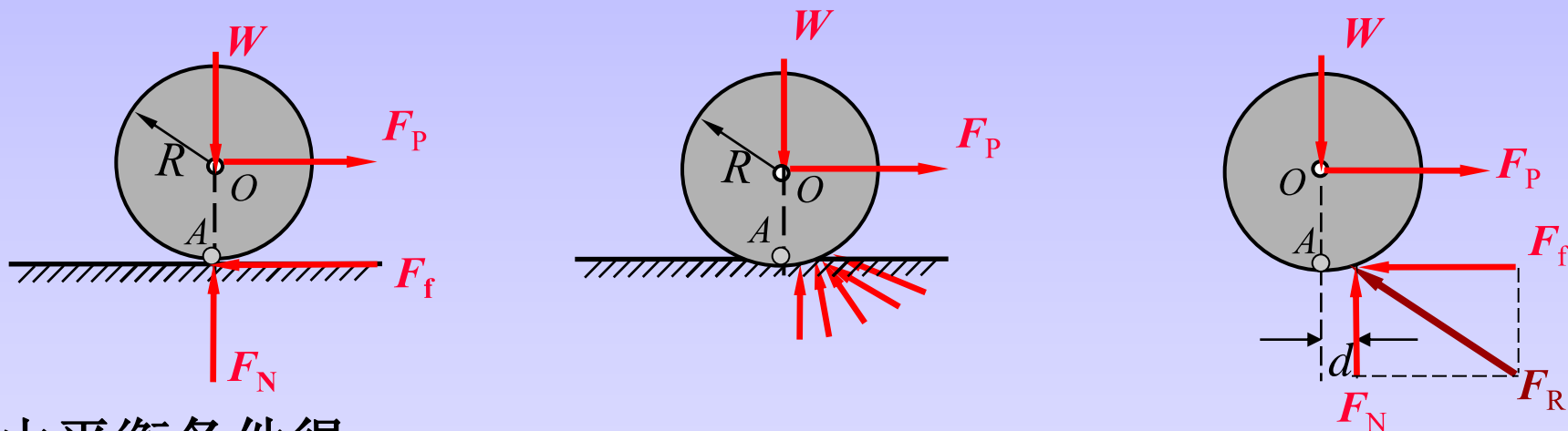


§ 5-4 滚动摩阻的概念

1. 滚动摩阻的定义

当一物体沿着另一物体的表面滚动或具有滚动的趋势时，除可能受到滑动摩擦力外，还受到一个阻力偶的作用。这个阻力偶称为滚动摩阻。

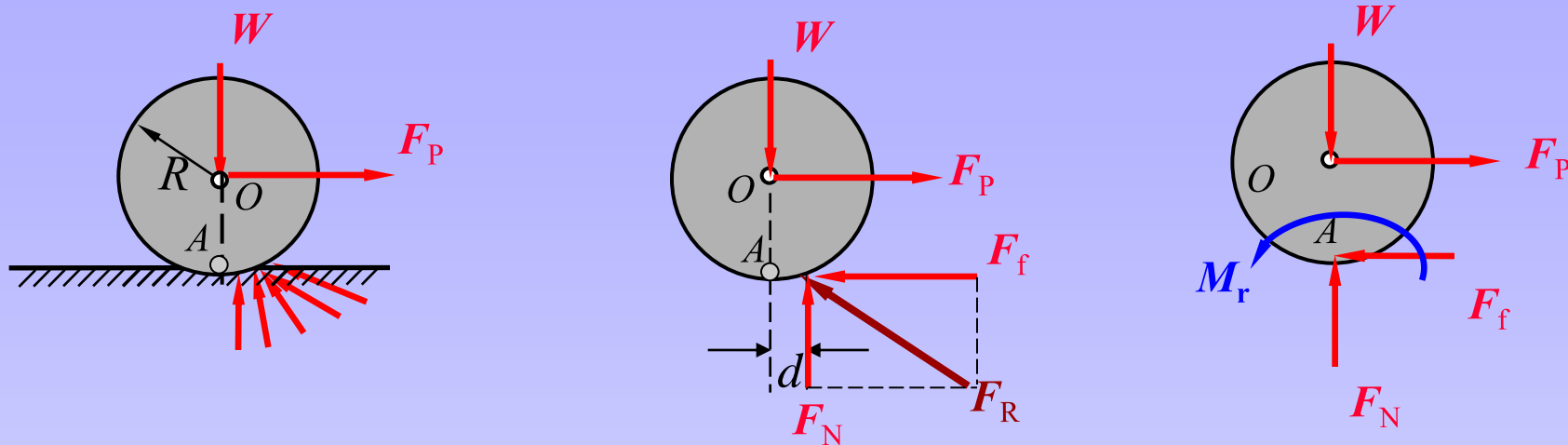
2. 滚动摩阻性质与产生原因



由平衡条件得 $W = -F_N$, $F_f = -F_P$

W , F_N 组成阻止滚动的力偶，即滚阻力偶 M_r 。





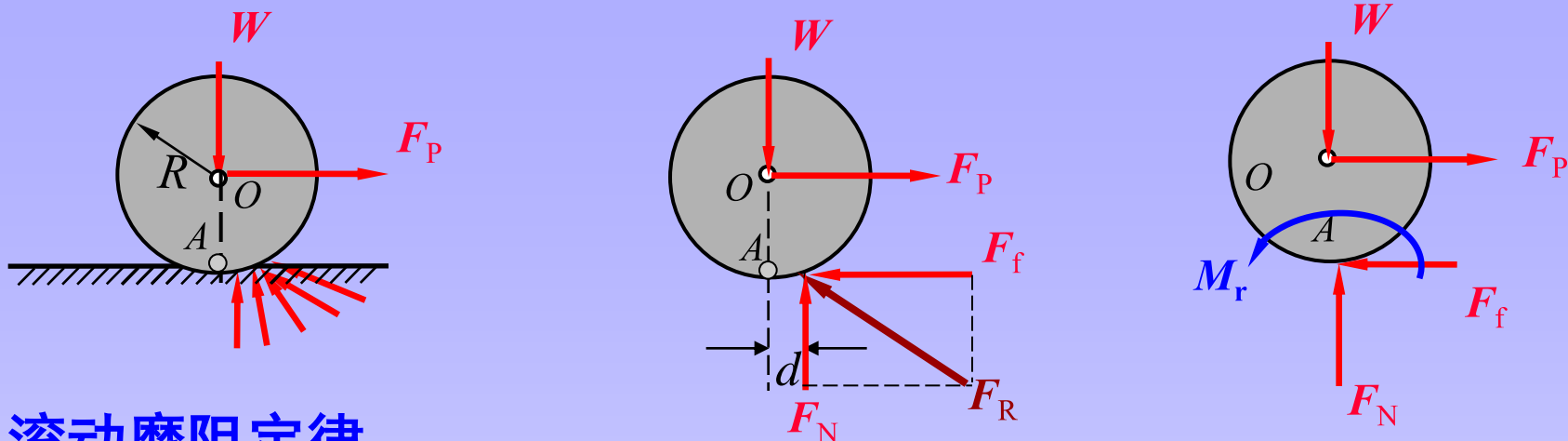
滚动摩阻: $M_r = F_N d$

$$\longrightarrow M_{r,\max} = F_N \delta$$

驱动力偶: F_P 与 F_f



§ 5-4 滚动摩阻的概念



3. 滚动摩阻定律

实验表明：滚动摩阻力偶矩具有极限值 $M_{r,\max}$ ，力偶矩一旦增大到超过 $M_{r,\max}$ ，滚子就不能保持平衡。

滚阻力偶矩的极限值（最大值）可表示为

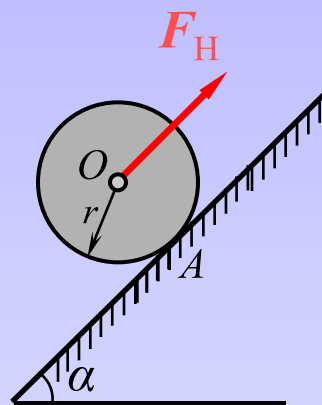
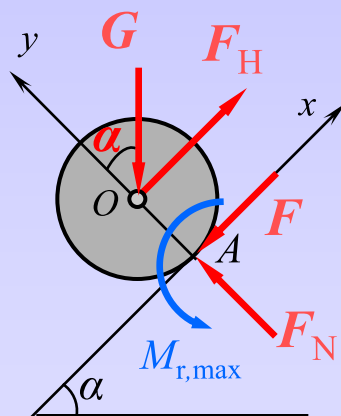
$$M_{r,\max} = F_N \delta$$

δ 称为滚阻系数，具有长度量纲。它与滚子以及支承面的材料、硬度等物理因素有关。



例5-4 匀质轮子的重量 $G = 3 \text{ kN}$ ，半径 $r = 0.3 \text{ m}$ ；今在轮中心施加平行于斜面的拉力 F_H ，使轮子沿与水平面成 $\alpha = 30^\circ$ 的斜面匀速向上作纯滚动。已知轮子与斜面的滚阻系数 $\delta = 0.05 \text{ cm}$ ，试求力 F_H 的大小。

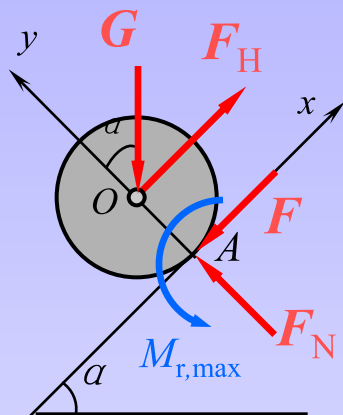
解： 1. 取轮子为研究对象，受力分析如图。



2. 列平衡方程。

$$\sum F_y = 0, \quad F_N - G \cos \alpha = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad M_{r,\max} + G \sin \alpha \times r - F_H r = 0$$



补充方程

$$M_{r,\max} = \delta F_N$$

3. 联立求解。

$$F_H = G \left(\sin \alpha + \frac{\delta}{r} \cos \alpha \right)$$

$$F_H = 1504 \text{ kN}$$

谢谢使用

