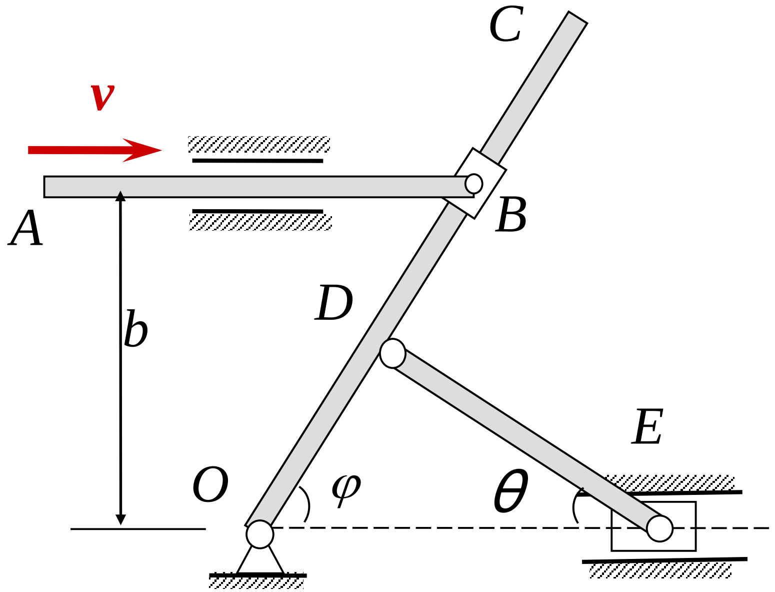
9.4 运动学综合问题分析

例题1 已知杆AB 的速度v =常量，尺寸b。如图瞬时，$OD=BD$，$\varphi=60°$，$\theta=30°$求此时杆OC的角速度和角加速度，滑块E的速度和加速度。



解：（1）速度分析和计算

取滑块B为动点，动系固连杆OC。

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

速度	v_B	v_{Be}	v_{Br}
大小	v	$OB \cdot \omega_{OB}$（未知）	未知
方向	$\rightarrow$	$\perp OB$	沿OC

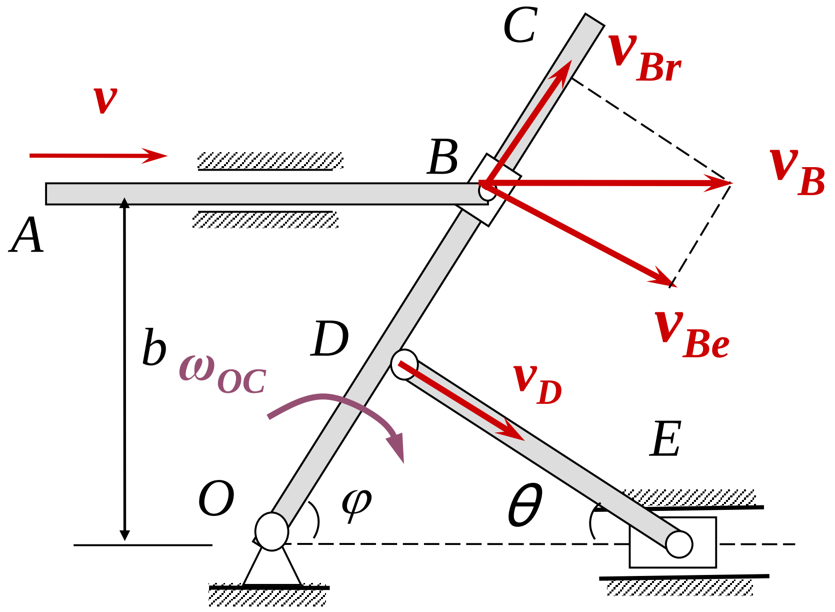
解得

$$v_{Be} = v_B \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} v$$

$$v_{Br} = v_B \cos 60° = \frac{1}{2} v$$

OC的角速度 $$\omega_{OC} = \frac{v_{Be}}{OB} = \frac{3}{4}\frac{v}{b}$$

$$v_D = OD \cdot \omega_{OC} = \frac{\sqrt{3}}{4} v$$

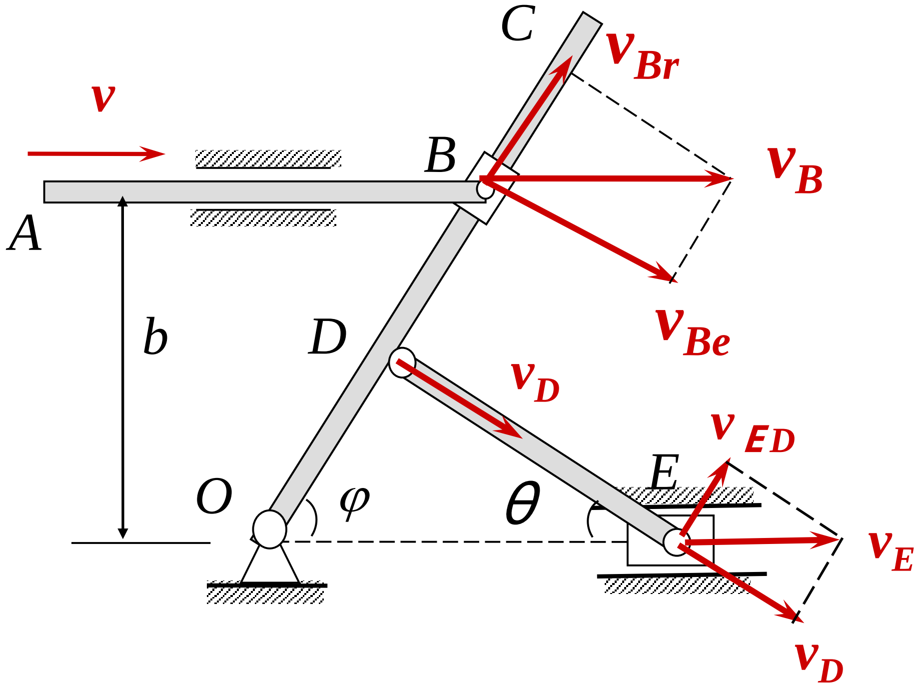


取D点为基点，滑块E的速度为 $\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{v}_{ED}$

速度	$\boldsymbol{v}_E$	$\boldsymbol{v}_D$	$\boldsymbol{v}_{ED}$
大小	未知	$OD \cdot \omega_{OC}$	未知
方向	水平	$\perp OD$	$\perp ED$

解得

$$v_E = \frac{v_D}{\cos\theta} = \frac{v_D}{\cos 30^\circ} = \frac{v}{2}$$



应用投影法亦可得

$$v_D = v_E \cos 30^\circ$$

$$v_E = \frac{v_D}{\cos 30^\circ} = \frac{v}{2}$$

（2）加速度分析和计算

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

加速度	a_B	a^t_{Be}	a^n_{Be}	a_{Br}	a_C
大小	0	$BO \cdot \alpha_{OC}$（未知）	$BO \cdot \omega_{OC}^2$	未知	$2\omega_{OC} \cdot v_{Br}$
方向		$\perp BO$	$B \to O$	沿OC	$\perp BO$

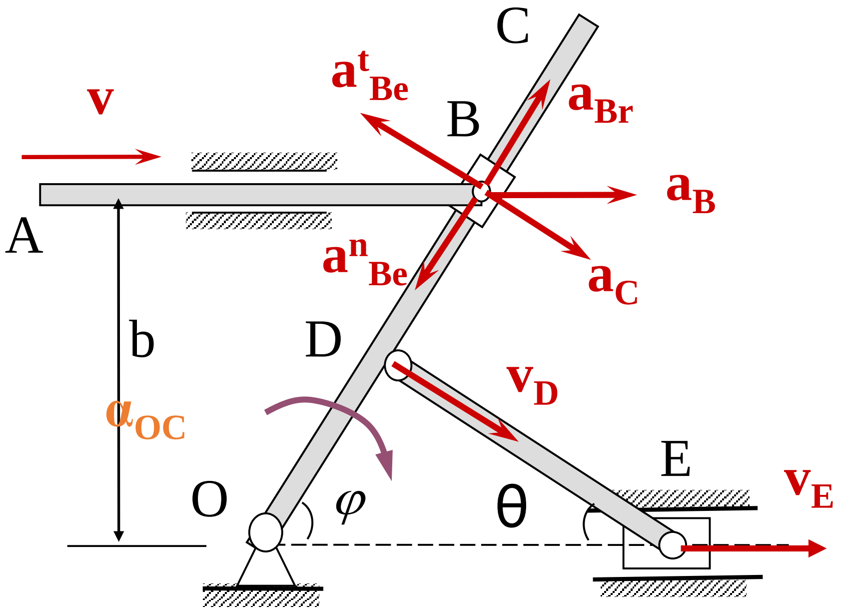
投影到a^t_{Be}方向得 $0 = a^t_{Be} - a_C$

$$a^t_{Be} = a_C = \frac{3v^2}{4b}$$

杆OC的角加速度

$$\alpha_{OC} = \frac{a^t_{Be}}{OB} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8b^2}$$

（逆时针）



为求E点的加速度，取D点为基点，则有 $\boldsymbol{a}_E = \boldsymbol{a}_D^t + \boldsymbol{a}_D^n + \boldsymbol{a}_{ED}^t + \boldsymbol{a}_{ED}^n$

加速度	a_E	a^t_D	a^n_D	a^t_{ED}	a^n_{ED}
大小	未知	$OC \cdot \alpha_{OC}$	$OD \cdot \omega^2_{OC}$	未知	v^2_{ED}/ED
方向	水平向左	$\perp DO$	$D\rightarrow O$	$\perp ED$	$E\rightarrow D$

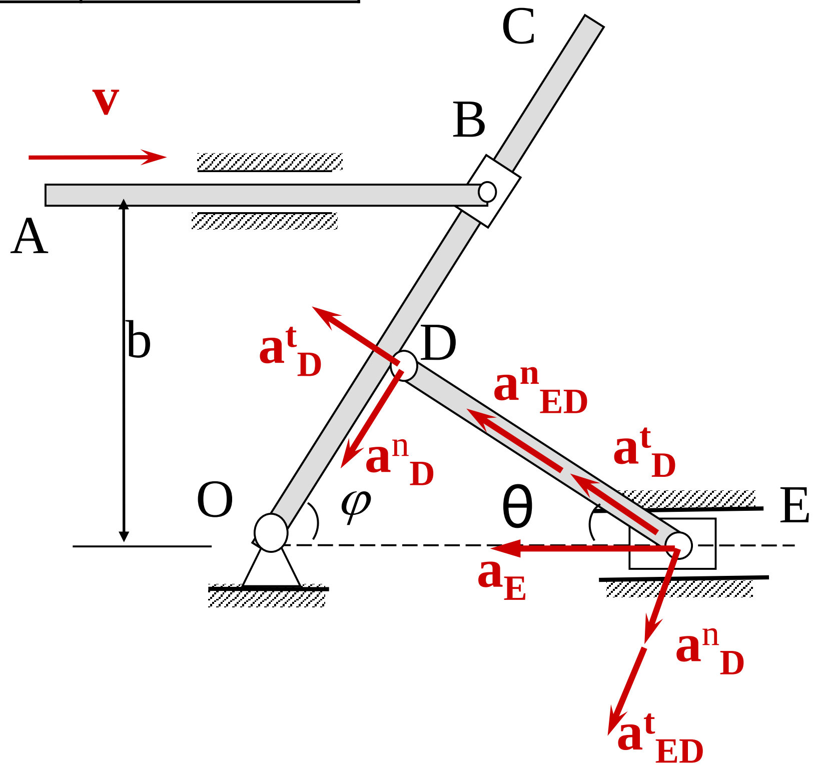
投影到ED方向得 $a_E \cos\theta = a_D^t + a_{ED}^n$

其中 $$a_D^t = OD \cdot \alpha_{OC} = \frac{3v^2}{8b}$$

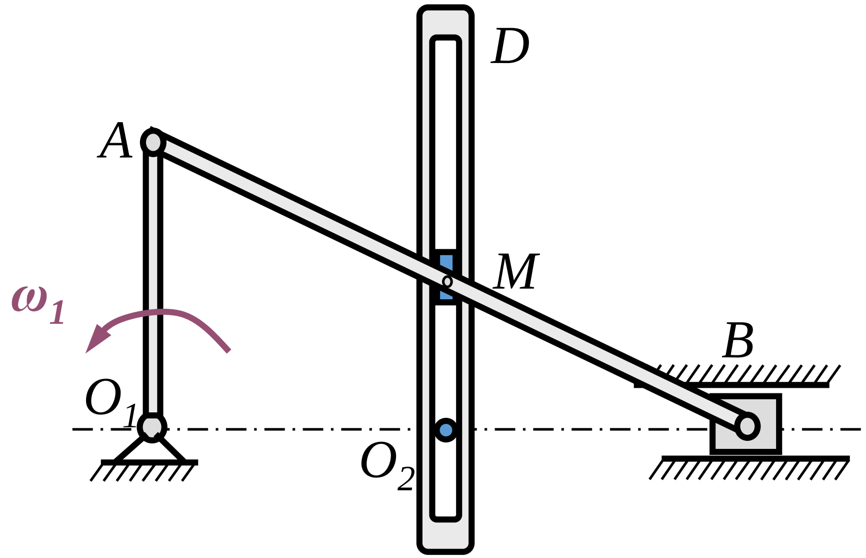
$$a_{ED}^n = \frac{v_{ED}^2}{DE} = \frac{v^2}{16b}$$

解得

$$a_E = \frac{a_D^t + a_{ED}^n}{\cos\theta} = \frac{7\sqrt{3}v^2}{24}$$ 方向水平向左。



例10-13 如图所示平面机构中，曲柄O_1A长为r，以匀角速度ω_1绕水平固定轴O_1转动。通过长为l的连杆AB，带动滑块B在水平导轨内滑动。在连杆AB的中点用铰链连接一滑块M，它可带动滑道摇杆O_2D绕水平固定轴O_2转动，且O_1、O_2和B在同一水平线上。试求O_1A和O_2D处于图示铅垂位置时摇杆O_2D的角速度ω_2和角加速度α_2。



解： 连杆AB作瞬时平动，有

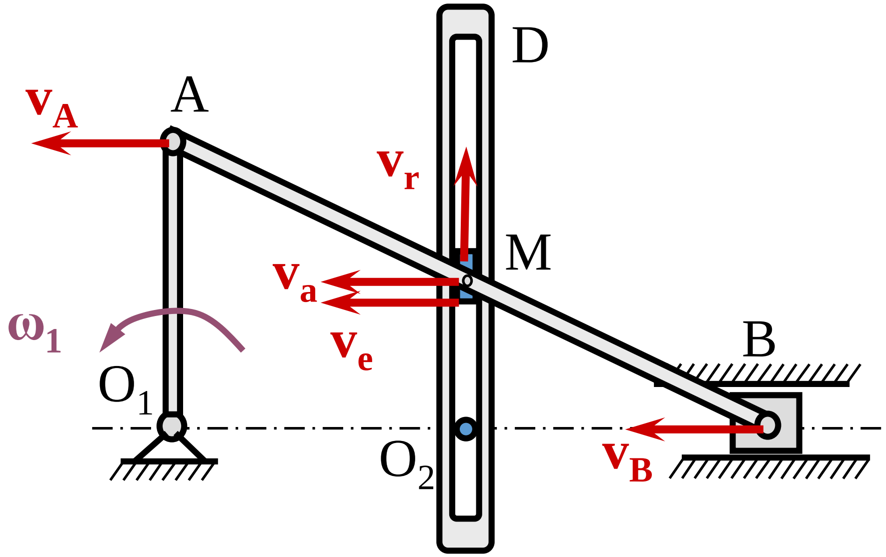
$$v_A = v_M = v_B = r\omega_1, \quad \omega_{AB} = 0.$$

(1) 求摇杆O_2D的角速度

取滑块M为动点，动系与摇杆O_2D相固连.

根据速度合成定理，有

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r \qquad (1)$$



其中

速度	$\boldsymbol{v}_a$	$\boldsymbol{v}_e$	$\boldsymbol{v}_r$
大小	$r\omega_1$	未知	未知
方向	水平向左	水平方向	铅垂方向

因为图示瞬时v_a与v_e均垂直于v_r，故

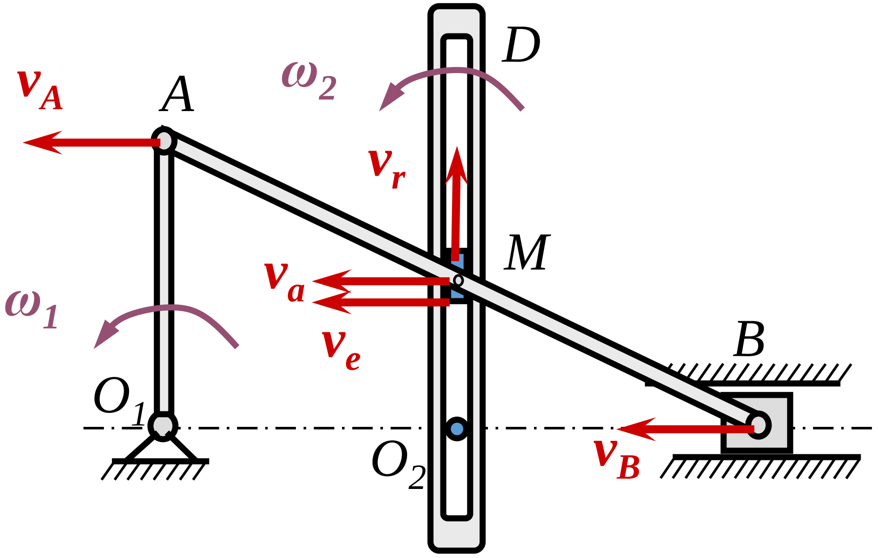
$$v_r = 0, \quad v_a = v_e$$

则有 $v_e = v_a = v_M = r\omega_1$

而摇杆O_2D的角速度为

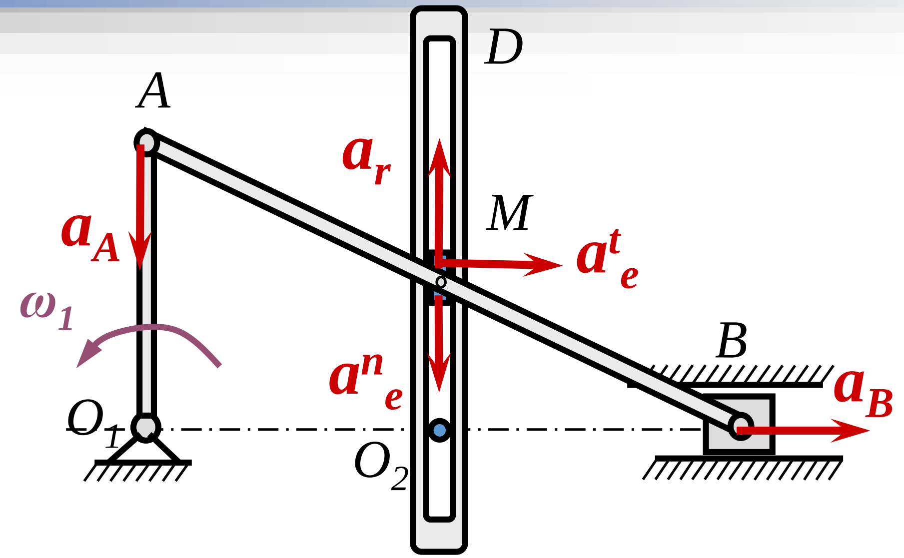
$$\omega_2 = \frac{v_e}{O_2M} = \frac{r\omega_1}{r/2} = 2\omega_1$$

（逆时针）



(2) 求摇杆O_2D的角加速度

根据加速度合成定理，滑块M的绝对加速度为

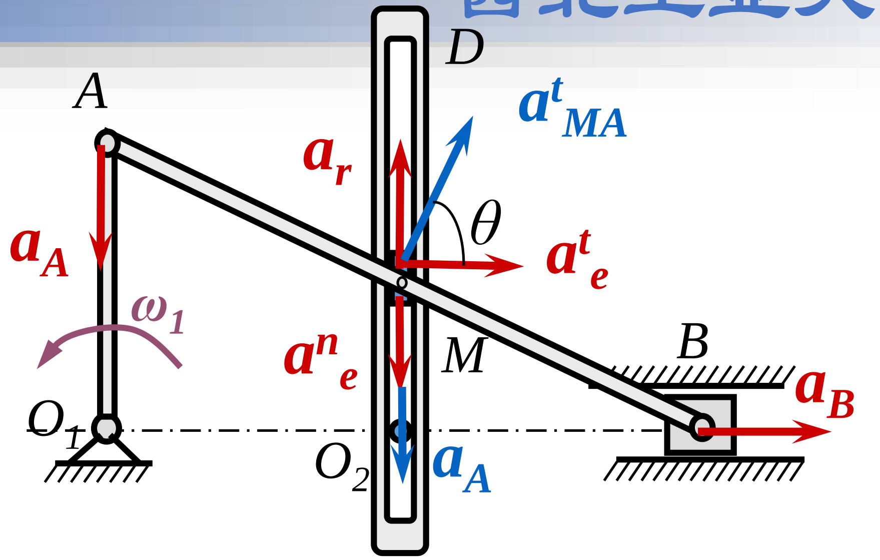


$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C \qquad (2)$$

其中

加速度	a_a	a^t_e	a^n_e	a_r	a_C
大小	未知	$O_2M \cdot \alpha_2$（未知）	$O_2M \cdot \omega_2^2$	未知	$2\omega_2 \cdot v_r=0$
方向	未知	$\perp O_2M$	沿MO_2	沿O_2M	

式（2）中含有4个未知量，不能求解。取点A为基点，并考虑到杆AB的角速度在图示瞬时为零，则点M的加速度



$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{MA}^{\mathrm{t}} \qquad (3)$$

其中

加速度	$\boldsymbol{a}_M$	$\boldsymbol{a}_A$	$\boldsymbol{a}^t_{MA}$
大小	未知	$r\omega_1^2$	$MA\cdot\alpha_{AB}$
方向	未知	铅垂向下	$\perp MA$

联立（2）、（3）两式，可得

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{MA}^{\mathrm{t}} \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{MA}^t \qquad (4)$$

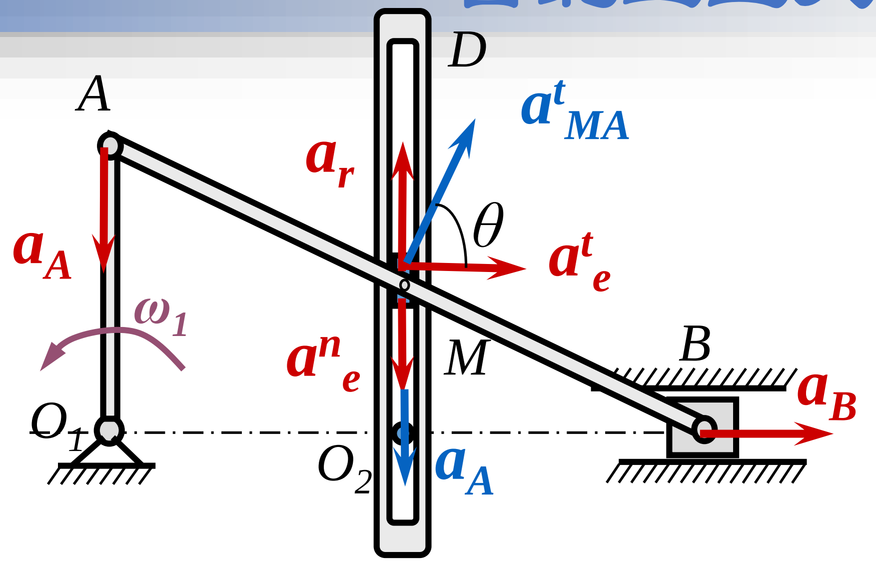
将式（4）投影到与摇杆O_2D相垂直的方向上，得

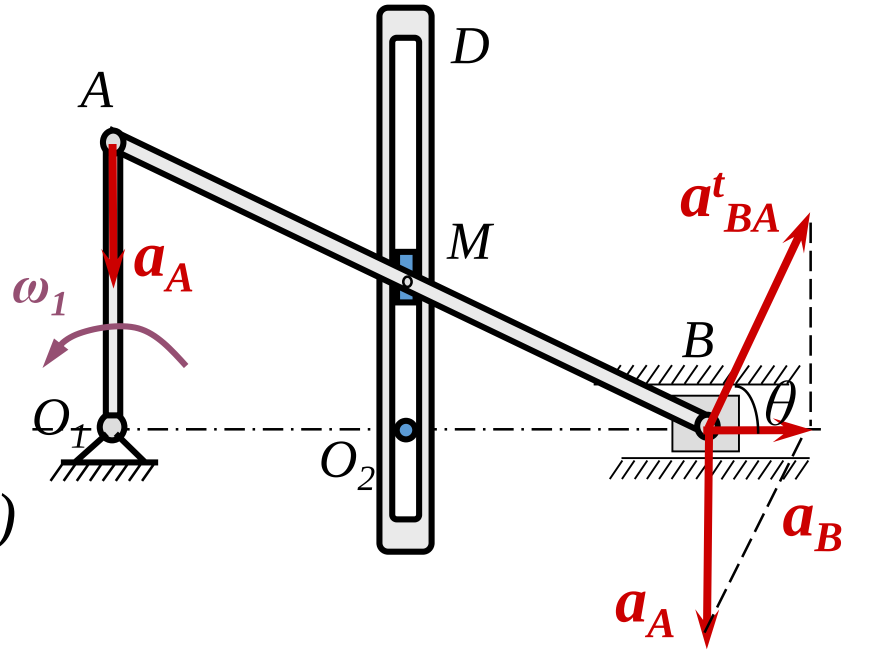
$$a_e^t = a_{MA}^t \cos\theta = MA \cdot \alpha_{AB} \cos\theta \qquad (5)$$

式（5）中α_{AB}为未知量，可见，欲求a^t_e还须先求出连杆AB的角加速度α_{AB}。

取点A为基点，则滑块B的加速度

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^t \qquad (6)$$





$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{t} \quad (6)$$

其中

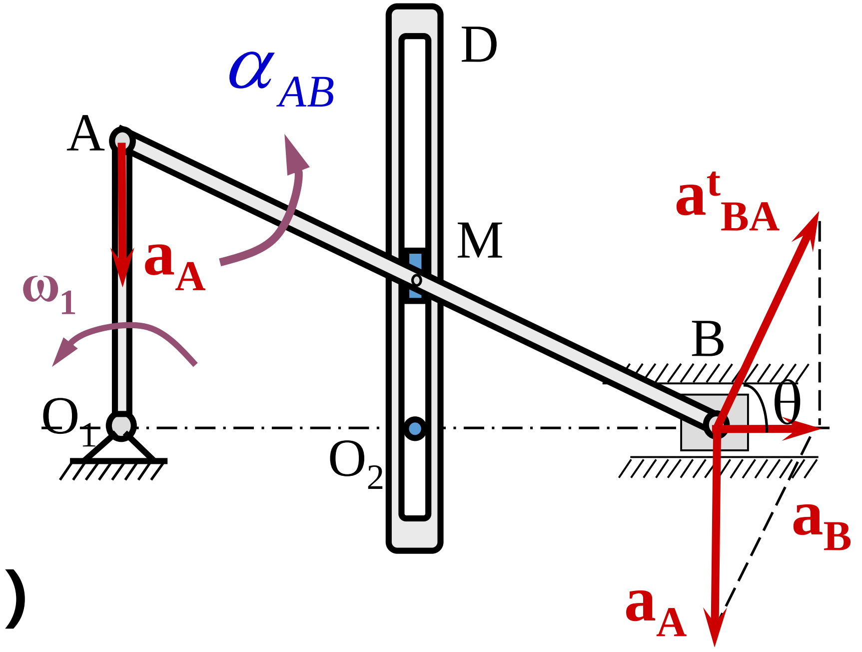
加速度	$\boldsymbol{a}_B$	$\boldsymbol{a}_A$	$\boldsymbol{a}^t_{BA}$
大小	未知	$r\omega_1^2$	$l\cdot\alpha_{AB}$
方向	水平	沿AO	$\perp AB$

将式（6）沿铅垂方向投影，得

$$0 = -a_A + a_{BA}^{t}\sin\theta$$

即 $$a_{BA}^{t} = \frac{a_A}{\sin\theta} = \frac{r\omega_1^2 l}{\sqrt{l^2 - r^2}}$$

故 $$\alpha_{AB} = \frac{a_{BA}^{t}}{l} = \frac{r\omega_1^2}{\sqrt{l^2 - r^2}}$$ （逆时针）



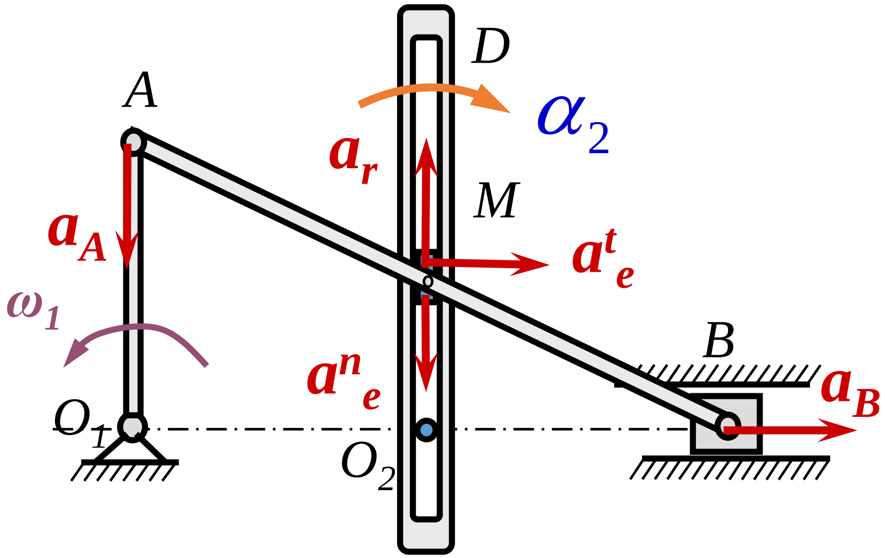
$$a_e^t = a_{MA}^t \cos\theta = MA \cdot \alpha_{AB} \cos\theta \qquad (5)$$

由式（5）得摇杆O$_2$D的角加速度

$$\alpha_2 = \frac{a_e^t}{O_2M} = \frac{MA}{O_2M}\cos\theta \cdot \alpha_{AB} = \frac{(l/2)r/l}{r/2}\alpha_{AB}$$

$$= \alpha_{AB} = \frac{r\omega_1^2}{\sqrt{l^2 - r^2}}$$

（顺时针）



1. 刚体平面运动概念

刚体上处于同一平面内各点到某一固定平面的距离保持不变。

2. 平面图形上点的速度

基点法 $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$

投影法 $v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$

速度瞬心法 $v_M = v_{MP} = MP \cdot \omega$

3. 平面图形上点的加速度

基点法 $\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{t} + \boldsymbol{a}_{BA}^{n}$

谢谢！