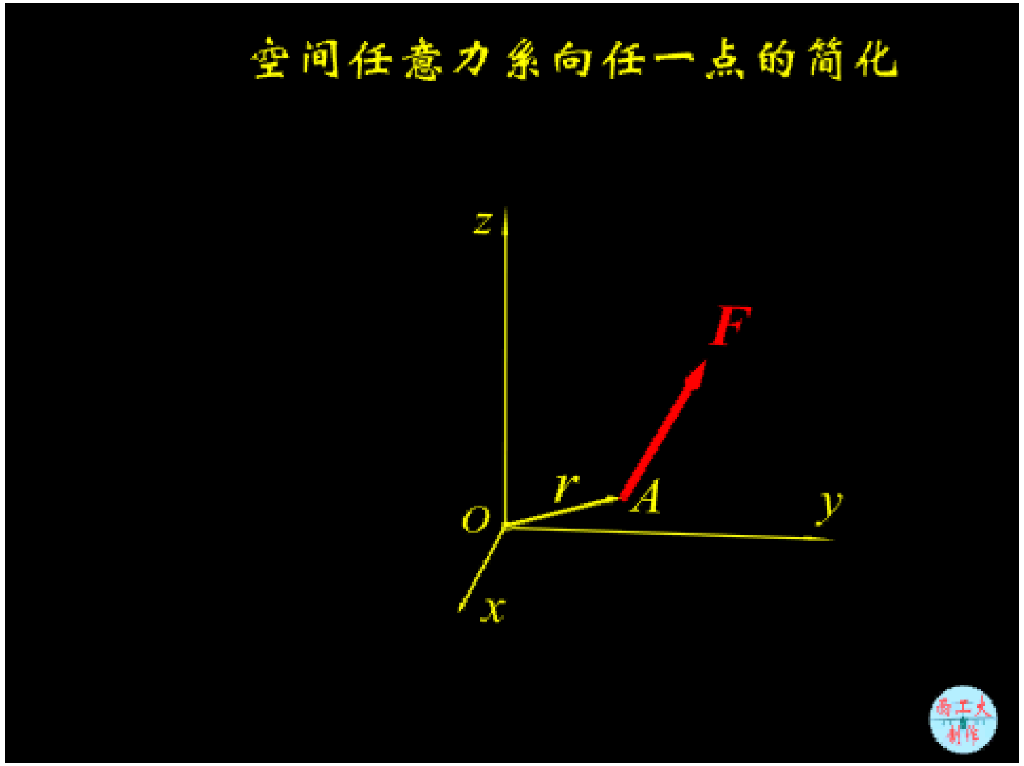
4.4 空间任意力系向任一点的简化

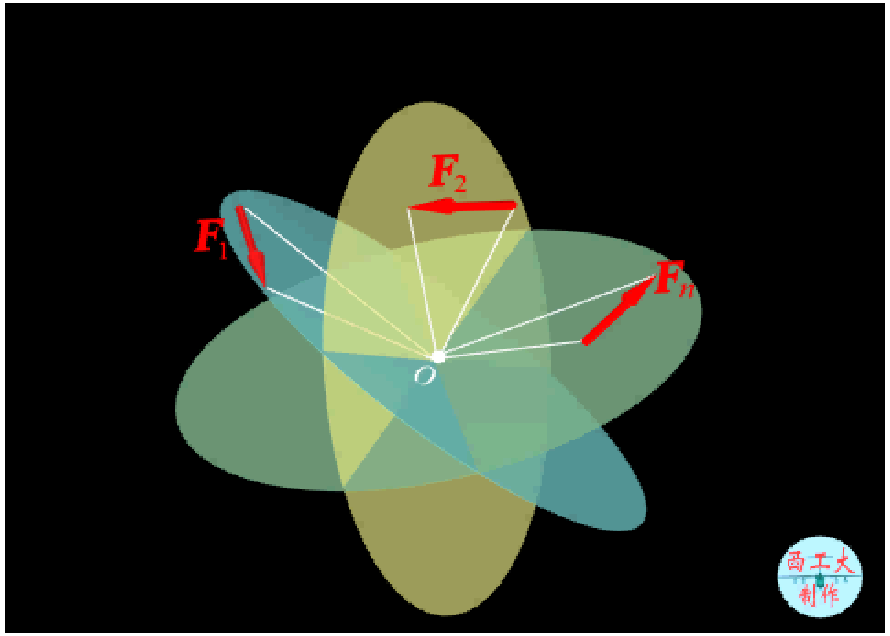
1. 力线平移定理

当一个力的作用线平行移动时，附加力偶矩矢等于原力对新作用点的矩矢。



2. 力系向任一点的简化

空间任意力系向任一点简化后，一般得到一个力和一个力偶。这个力称为原力系的主矢，它等于力系中所有各力的矢量和；这个力偶称为该力系简化中心的主矩，它等于力系中所有各力对该简化中心的矩之矢量和。

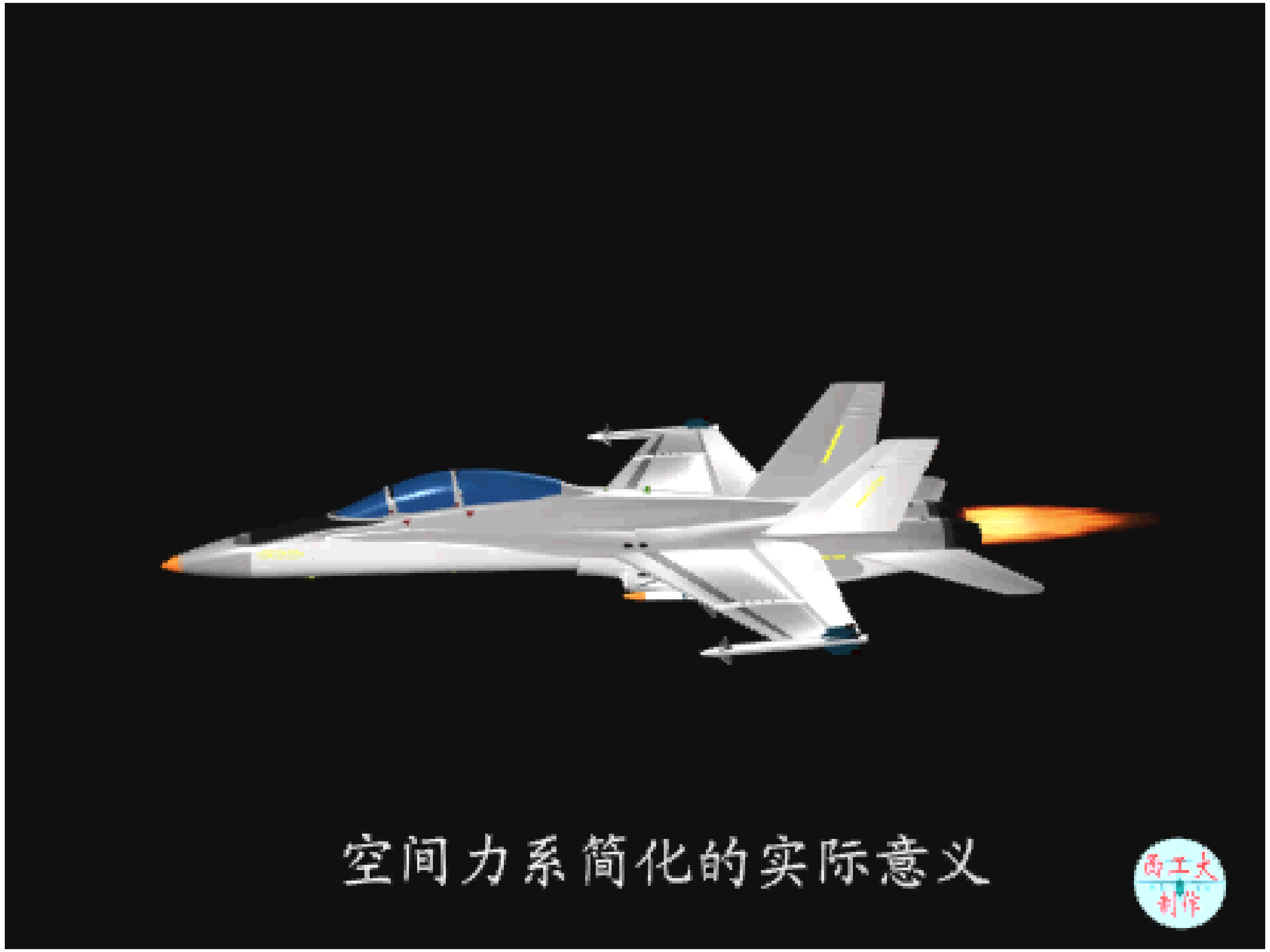


$$F_R' = \sum F_i$$

$$M_O = \sum M_i$$

与平面情形相同，主矢与简化中心的位置无关，而主矩则一般与简化中心的位置有关。

空间任意力系简化的实例



3. 主矢与主矩的计算

（1）主矢的计算

主矢F'_R在直角坐标系$oxyz$的投影

$$F'_{Rx}=\sum F_x\ ,\quad F'_{Ry}=\sum F_y\ ,\quad F'_{Rz}=\sum F_z$$

主矢的大小和方向余弦

$$F'_R=\sqrt{F'^2_{Rx}+F'^2_{Ry}+F'^2_{Rz}}$$

$$=\sqrt{\left(\sum F_x\right)^2+\left(\sum F_y\right)^2+\left(\sum F_z\right)^2}$$

$$\cos\left(\boldsymbol{F}'_R,\boldsymbol{i}\right)=\frac{F'_{Rx}}{F'_R},\qquad \cos\left(\boldsymbol{F}'_R,\boldsymbol{j}\right)=\frac{F'_{Ry}}{F'_R},\qquad \cos\left(\boldsymbol{F}'_R,\boldsymbol{k}\right)=\frac{F'_{Rz}}{F'_R}$$

（2）主矩的计算

若已知主矩M_O在直角坐标系$oxyz$的投影，则可以求得主矩的大小和方向余弦。

$$M_O = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2}$$
$$= \sqrt{(\sum (yF_z - zF_y))^2 + (\sum (zF_x - xF_z))^2 + (\sum (xF_y - yF_x))^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{i}) = \frac{yF_z - zF_y}{M_O}, \quad \cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{j}) = \frac{zF_x - xF_z}{M_O}, \quad \cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{k}) = \frac{xF_y - yF_x}{M_O}$$

4. 空间任意力系简化的结果的讨论

(1) 力系合成为合力偶

$F_R'=0$，而 $M_O\neq 0$，则原力系合成为一个矩为M_O的合力偶。

该力系的主矩不随简化中心的位置而改变。

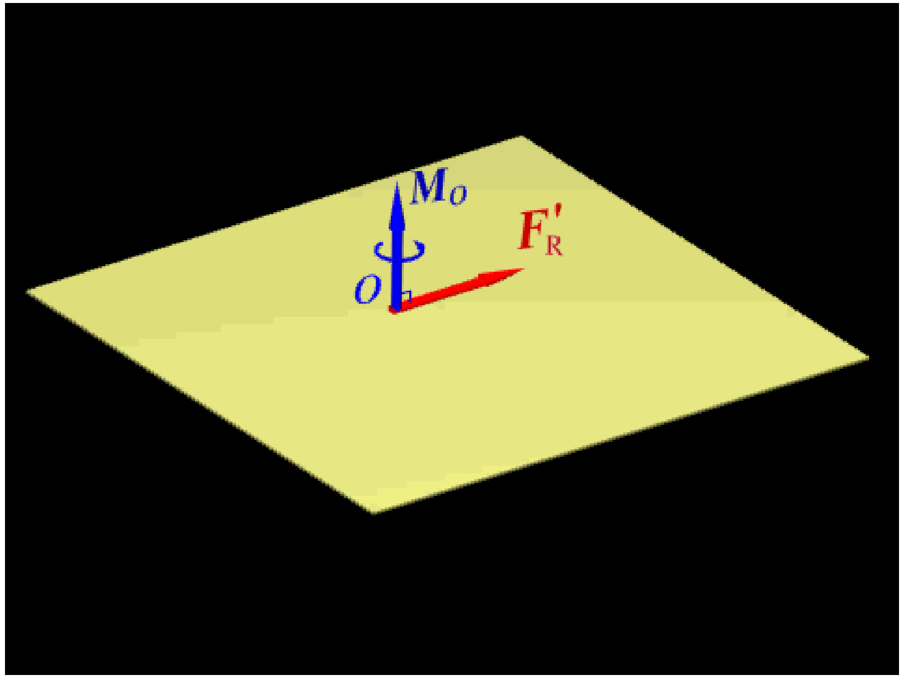
(2) 力系合成为合力

- $F_R'\neq 0$，$M_O=0$，则原力系合成为一个作用于简化中心O的合力F_R，且 $F_R = F_R'$。

- $F_R'\neq 0$，$M_O\neq 0$，

  且$F_R'\perp M_O$。

  则原力系仍然合成为一个合力F_R。



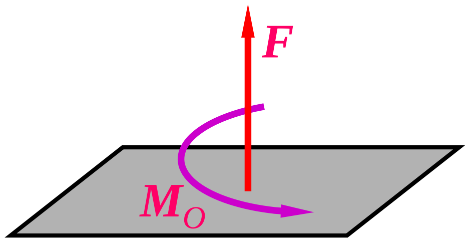
(3) 力系合成为力螺旋

- $F_R' \neq 0$，$M_O \neq 0$，且 $F_R' /\!/ M_O$。

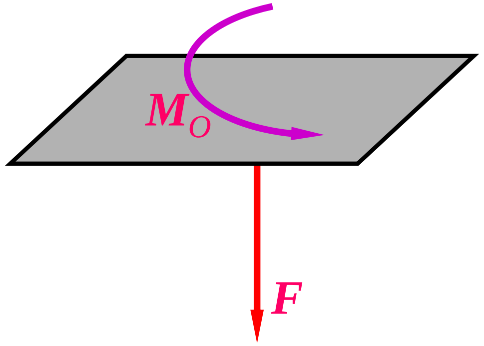
力系合成为一个力（作用于简化中心）和一个力偶，且这个力垂直于这个力偶的作用面。这样的一个力和一个力偶的组合称为**力螺旋**。

右手螺旋：力矢F与力偶矩M_O指向相同（图a）。

左手螺旋：力矢F与力偶矩M_O指向相反（图b）。

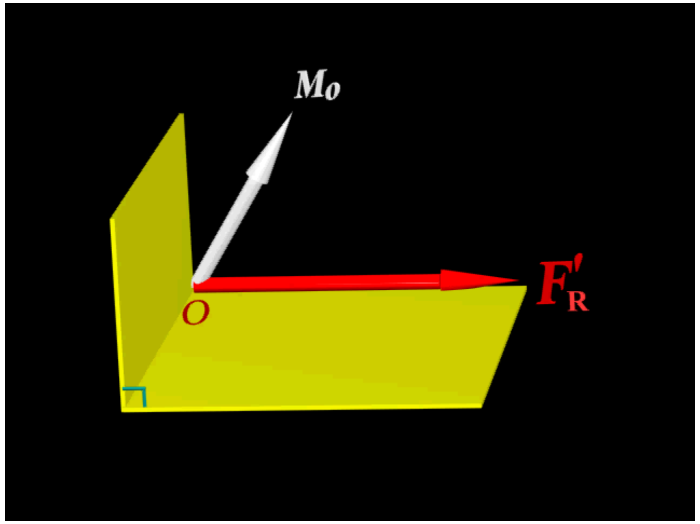


（a）



（b）

- $F_R' \neq 0$，$M_O \neq 0$，且F_R'与M_O成任意角，力系合成为一个力螺旋。

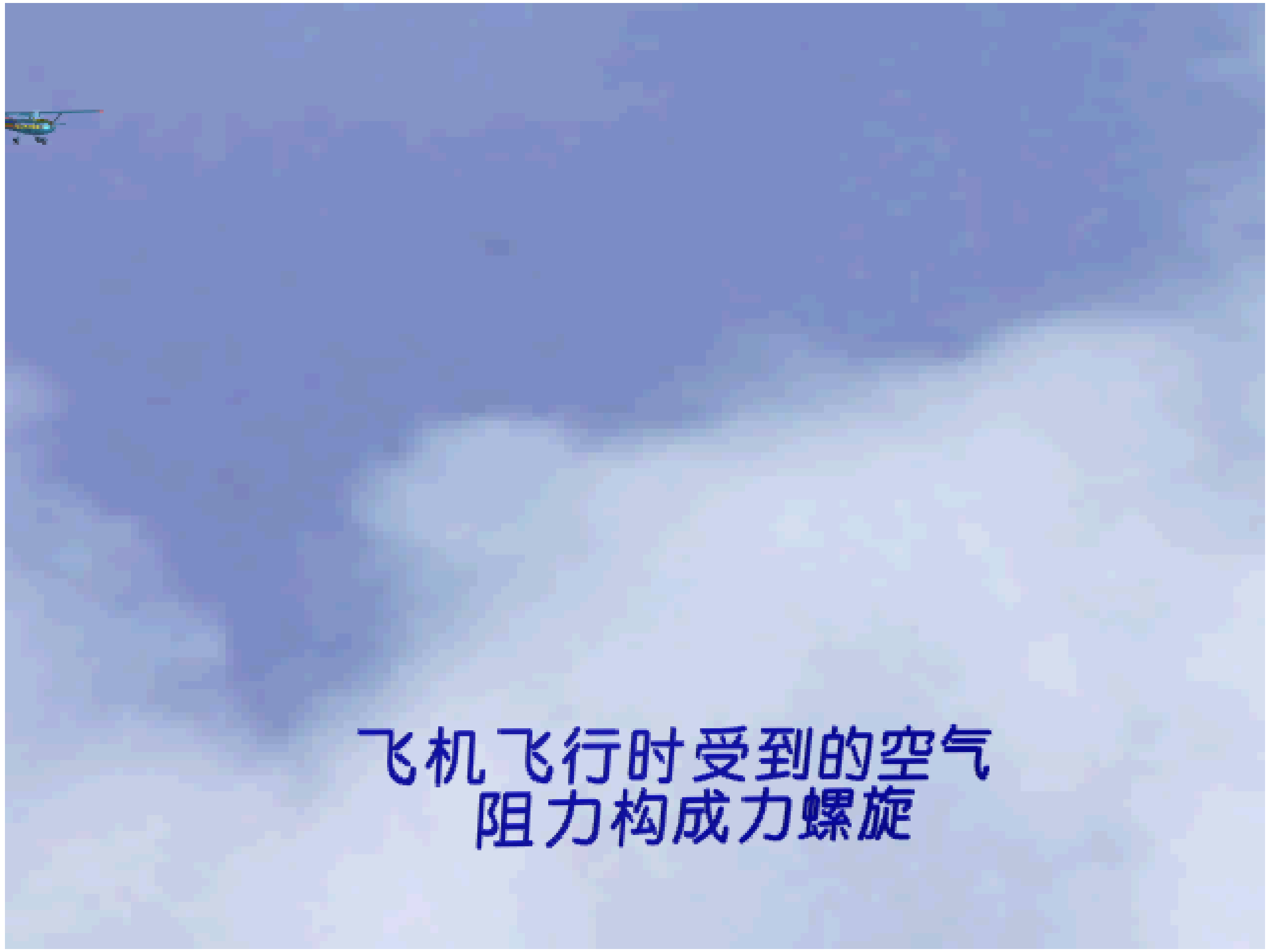


在一般情况下空间任意力系可合成为力螺旋。

归纳本节所述，可得出如下结论，只要主矢和主矩不同时等于零，空间任意力系的最后合成结果可能有三种情形：

- 一个力偶（$F_R'=0$，$M_O \neq 0$）;
- 一个力($F_R' \neq 0$，而$M_O=0$或$F_R' \perp M_O$）；
- 一个力螺旋($F_R' \neq 0$，$M_O \neq 0$且两者不相互垂直)。

力螺旋工程实例



力螺旋工程实例

5.合力矩定理的一般形式

(1) 力系如有合力，则合力对任一点的矩等于力系中各力对同一点的矩的矢量和。

(2) 力系如有合力，则合力对任一轴的矩等于力系中各力对同一轴的矩的代数和。

$$\boldsymbol{M}_{O}\left(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}\right)=\sum \boldsymbol{M}_{O}\left(\boldsymbol{F}_{i}\right)$$

$$M_{x}\left(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}\right)=\sum M_{x}\left(\boldsymbol{F}_{i}\right)$$

谢 谢！