第五章

参数样条曲线曲面

第一节　C^1、C^2分段三次Hermite插值

一、参数连续性

1、参数连续性与曲线光滑度

对于显式函数表示的曲线，函数的**可微性**与曲线的**光滑度**是紧密联系的。例如：

$$y = ax + b$$ 一次函数表示的直线

$$y = ax^2 + bx + c$$ 二次曲线

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$ 三次曲线

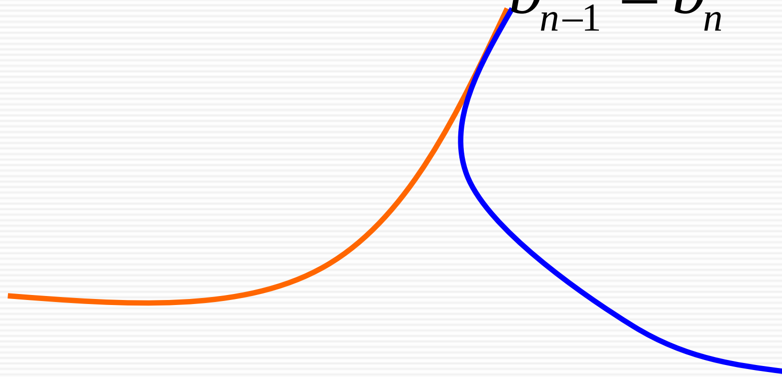
对于显示曲线，函数的 C^0，C^1 和 C^2 连续分别表示函数的图形、切线方向、以及曲率连续。

一、参数连续性

但是对于CAGD中大量涉及到的参数曲线，参数方程的可微性与曲线的光滑性却没有必然的联系。

例如：如图的两条首尾相连的n次Bezier曲线：

$$\vec{b}_{n-1}^{(1)} = \vec{b}_n^{(1)} = \vec{b}_0^{(2)} = \vec{b}_1^{(2)}$$

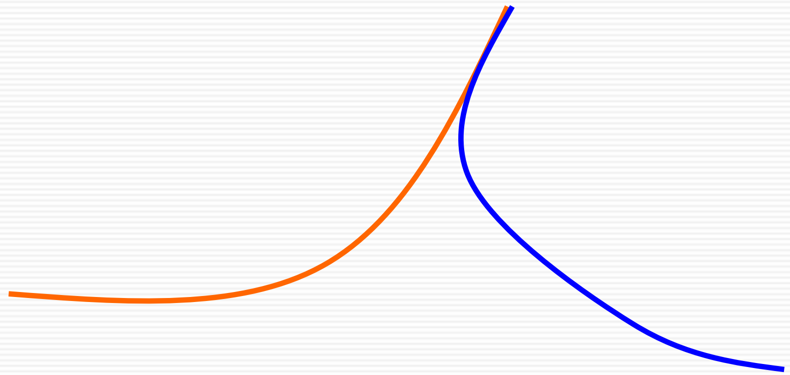


根据Bezier曲线的知识可知，这两条首尾相连的曲线在连接点是C^1连续的，但显然该点是个尖点，切线方向是不连续的。

一、参数连续性

同理，如果让首尾相连的两条n次Bezier曲线的最后三个控制顶点和最前面三个控制顶点重合，即：

$$\vec{b}_{n-2}^{(1)}=\vec{b}_{n-1}^{(1)}=\vec{b}_{n}^{(1)}=\vec{b}_{0}^{(2)}=\vec{b}_{1}^{(2)}=\vec{b}_{2}^{(2)}$$



根据Bezier曲线的知识可知，这两条首尾相连的曲线在连接点是C^2连续的，但显然在该点处曲率**是不连续的**。

一、参数连续性

上两个例子说明，曲线的参数连续性并不能保证曲线的光滑性。反过来，曲线的光滑性也不一定需要相应的参数连续性。例如曲线的二阶几何连续可以保证曲线的曲率是连续的，但这时曲线甚是连C^1连续也不一定满足。

另外，参数曲线的参数连续性也是与曲线的参数化有关的，同一条曲线采用不同的参数，参数的连续性情况可能不同。

一、参数连续性

2、组合（composite）曲线与组合曲面

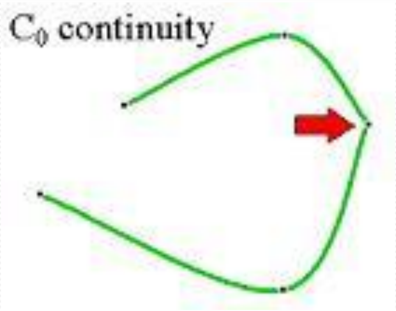
1）C^k连续组合曲线：分段（piecewise）连续曲线段若在公共连接点处达到k阶参数连续，则称该曲线具有k阶参数连续性（k－order piecewise continuity）。

2）C^k连续组合曲面：分片（piecewise）连续曲面片（patch）若沿曲面片的公共边界上关于一个参数跨界达到k阶参数连续，则称该曲面沿该参数方向具有k阶参数连续性（k－order piecewise continuity）。

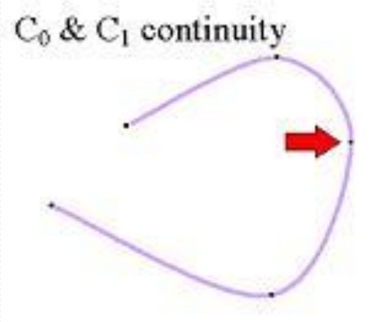
一、参数连续性

3、C^k连续组合曲线的含义

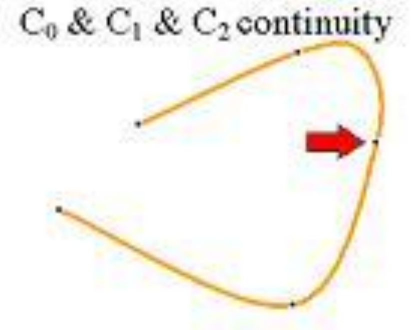
1）C^0连续：位置连续



2）C^1连续：位置连续及切矢连续。



3）C^2连续：从位置连续直到二阶切矢连续。



二、C^1分段三次Hermite插值

1、问题：

给定数据点$\vec{p}_i, i=0,1,\cdots,n$以及相应的切矢

$\dot{\vec{p}}_i, i=0,1,\cdots,n$，构造一条$C^1$分段三次Hermite

插值曲线，插值上述数值点及相应切矢。

解决方法：

首先，要根据某种参数化方法对数据点进行参数化，确定每一个数据对应的参数，这样，插值条件就成为：

$$\vec{p}(u_i)=\vec{p}_i, \quad \vec{p}'(u_i)=\dot{\vec{p}}_i \quad i=0,1,\cdots,n$$

二、C^1分段三次Hermite插值

然后，在每两个数据点$\vec{p}_i$和$\vec{p}_{i+1}$之间构造参数域$[u_i, u_{i+1}]$上的三次Hermite插值曲线如下：

$$\vec{p}(u) = \begin{bmatrix} F_0(t) & F_1(t) & \Delta_i G_0(t) & \Delta_i G_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p}_i \\ \vec{p}_{i+1} \\ \dot{\vec{p}}_i \\ \dot{\vec{p}}_{i+1} \end{bmatrix} \quad u_i \le u \le u_{i+1}$$

其中：$\Delta_i = u_{i+1} - u_i, t = \dfrac{u - u_i}{\Delta_i}$

上式即为C^1分段三次Hermite插值曲线。

二、C^1分段三次Hermite插值

2、C^1参数化

在上述构造C^1分段三次Hermite插值曲线的过程中，需要提供每个数据点的位置及切矢。但在很多情况下，都只给出数据点的坐标，切矢需要用户提供，如何给出切矢的过程，就称为C^1参数化。

1）方法1（FMILL方法）：

设$\vec{p}_i$处的单位切矢为$\vec{t}_i$，取

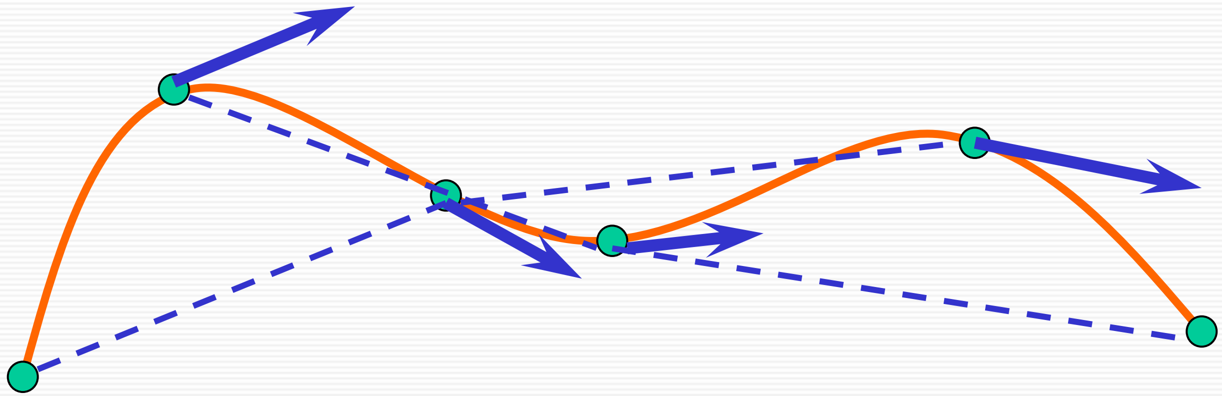
$$\vec{t}_i = \frac{\vec{p}_{i+1} - \vec{p}_{i-1}}{\left\| \vec{p}_{i+1} - \vec{p}_{i-1} \right\|}$$

二、C^1分段三次Hermite插值

按照上式的取法，有：

$$\dot{\vec{p}}_i = \frac{\vec{t}_i}{\Delta_{i-1}+\Delta_i} = \frac{\vec{t}_i}{u_{i+1}-u_{i-1}}$$

将上式代入到C^1分段三次Hermite插值曲线的表达式中，得到的样条曲线称为Catmull-Rom样条。



二、C^1分段三次Hermite插值

在这种方法中首末两点的切矢如何给出，并没有严格的规定，可以利用向前及向后差商作为首末点的切矢，即：

$$\dot{\vec{p}}_0 = \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_0}{\Delta_0} \qquad \dot{\vec{p}}_n = \frac{\vec{p}_n - \vec{p}_{n-1}}{\Delta_{n-1}}$$

2）方法2（Bessel方法）：

$$\dot{\vec{p}}_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} \cdot \frac{\Delta\vec{p}_{i-1}}{\Delta_{i-1}} + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} \cdot \frac{\Delta\vec{p}_i}{\Delta_i}$$

二、C^1分段三次Hermite插值

$$\dot{\vec{p}}_i=\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}+\Delta_i}\cdot\frac{\Delta\vec{p}_{i-1}}{\Delta_{i-1}}+\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1}+\Delta_i}\cdot\frac{\Delta\vec{p}_i}{\Delta_i}$$

在上式中，切矢是前后两点差商的重心组合。

实际上，上式是得出是首先过相邻的三点

$\vec{p}_{i-1},\vec{p}_i$和$\vec{p}_{i+1}$ 作一条抛物线，对应的参数

分别为 u_{i-1},u_i和u_{i+1}，$\dot{\vec{p}}_i$为该抛物线在$\vec{p}_i$处的切矢。

在端点处：$\dot{\vec{p}}_0=2\dfrac{\Delta\vec{p}_0}{\Delta_0}-\vec{p}_1,\quad \dot{\vec{p}}_n=2\dfrac{\Delta\vec{p}_{n-1}}{\Delta_{n-1}}-\vec{p}_{n-1},$

二、C^1分段三次Hermite插值

3）方法3（秋间方法）：

$$\dot{\vec{p}}_i = (1-\alpha_i)\cdot\frac{\Delta\vec{p}_{i-1}}{\Delta_{i-1}} + \alpha_i\cdot\frac{\Delta\vec{p}_i}{\Delta_i}$$

其中：

$$\alpha_i = \frac{\left\|\dfrac{\Delta\vec{p}_{i-2}}{\Delta_{i-2}}\right\|}{\left\|\dfrac{\Delta\vec{p}_{i-2}}{\Delta_{i-2}}\right\| + \left\|\dfrac{\Delta\vec{p}_i}{\Delta_i}\right\|}$$

这种方法与四个点的坐标与参数值有关。

二、C^1分段三次Hermite插值

总结:

1）C^1分段三次Hermite插值曲线实际上是一种样条曲线，它具有局部修改性。如果移动一个数据点，一般只影响该点前后相邻的两段曲线形状。

2）利用C^1分段三次Hermite插值曲线，可以在不需要提高次数的情况下方便地实现对大量数据的插值，无需解方程组，但是因为在连接点只能达到C^1连续，连续阶数不够高，还不能保证曲线足够光滑。

3）如果利用这种方法对一条曲线进行重构，随着采样点增多，重构出的样条曲线将收敛到原曲线。

三、C^2分段三次Hermite插值

1、问题：

给定数据点$\vec{p}_i, i=0,1,\cdots,n$构造一条分段三次Hermite插值曲线，插值上述数值点。如何给出相应的切矢$\dot{\vec{p}}_i$，$i=0,1,\cdots,n$，使得曲线段与段之间达到C^2连续。

2、解决方法： 设分段三次Hermite插值曲线为：

$$\vec{p}_i(u)=\vec{p}_iF_0(t)+\vec{p}_{i+1}F_1(t)+\Delta_iG_0(t)\dot{\vec{p}}_i+\Delta_iG_1(t)\dot{\vec{p}}_{i+1} \quad u_i\le u\le u_{i+1}$$

$$\text{其中：}t=\frac{u-u_i}{\Delta_i},\Delta_i=u_{i+1}-u_i \quad i=0,1,\cdots n-1$$

三、C^2分段三次Hermite插值

在上式中 $\dot{\vec{p}}_i$和$\dot{\vec{p}}_{i+1}$为未知量。

要求第 $i-1$段曲线和第 i 段曲线在 $\vec{p}_i$ 点达到C^2连续

即： $$\vec{p}''_-(u_i)=\vec{p}''_+(u_i)$$

对$\vec{p}_{i-1}(u)$和$\vec{p}_i(u)$求二阶导，并令$u=u_i$得：

三切矢连续性方程

$$\Delta_i\dot{\vec{p}}_{i-1}+2(\Delta_{i-1}+\Delta_i)\dot{\vec{p}}_i+\Delta_{i-1}\dot{\vec{p}}_{i+1}$$

$$=3\left[\frac{\Delta_i\dot{\vec{p}}_{i-1}}{\Delta_{i-1}}+\frac{\Delta_{i-1}\dot{\vec{p}}_i}{\Delta_i}\right] \qquad i=1,2,\cdots n-1$$

三、C^2分段三次Hermite插值

$$\boxed{\Delta_i}\dot{\vec{p}}_{i-1}+\boxed{2(\Delta_{i-1}+\Delta_i)}\dot{\vec{p}}_i+\boxed{\Delta_{i-1}}\dot{\vec{p}}_{i+1}$$
$$=\boxed{3[\frac{\Delta_i\dot{\vec{p}}_{i-1}}{\Delta_{i-1}}+\frac{\Delta_{i-1}\dot{\vec{p}}_i}{\Delta_i}]}\qquad i=1,2,\cdots n-1$$

为表示方便，将上式简记为：

$$\boxed{a_i}\dot{\vec{p}}_{i-1}+\boxed{b_i}\dot{\vec{p}}_i+\boxed{c_i}\dot{\vec{p}}_{i+1}=\boxed{\vec{d}_i}\qquad i=1,2,\cdots n-1$$

在上述三切矢连续性方程中共有n－1个方程，n＋1个未知量，还需要补充两个边界条件才能求解。

三、C^2分段三次Hermite插值

3、边界条件

在处理具体问题时，常根据几何意义或物理意义设置不同形式的边界条件，常见的主要有以下几种：

1）周期条件（用于封闭曲线）

这时最后一个插值点与第一个插值点完全重合，即：

$$\vec{p}_+^{(k)}(u_0) = \vec{p}_+^{(k)}(u_n), \quad k = 0,1,2$$

三、C^2分段三次Hermite插值

将上式和三切矢连续方程联立，即得如下方程：

$$
\begin{bmatrix}
b_1 & c_1 & & & a_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\
c_1 & & & a_n & b_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\dot{\vec{p}}_1 \\ \dot{\vec{p}}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{\vec{p}}_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{d}_n
\end{bmatrix}
$$

根据$\vec{a}_i,\vec{b}_i,\vec{c}_i$的表达式可知，上述矩阵是一个主对角占优的矩阵。

因此上述方程非奇异，存在唯一解。

三、C^2分段三次Hermite插值

2) 非周期条件（适于不封闭的曲线）

i) Bessel边界条件

这种条件是将曲线的首末两段取为二次抛物线，这样两段曲线上的切矢都是常向量，所以有:

$$\dot{\vec{p}}_0 + \dot{\vec{p}}_1 = 2\frac{\Delta \vec{p}_0}{\Delta_0}$$

$$\dot{\vec{p}}_{n-1} + \dot{\vec{p}}_n = 2\frac{\Delta \vec{p}_{n-1}}{\Delta_{n-1}}$$

三、C^2分段三次Hermite插值

这时三切矢连续性方程变为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vec{p}}_0 \\ \dot{\vec{p}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\vec{p}}_{n-1} \\ \dot{\vec{p}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{d}_0 \\ \vec{d}_1 \\ \vdots \\ \vec{d}_{n-1} \\ \vec{d}_n \end{bmatrix}$$

其中: $\vec{d}_0 = 2\dfrac{\Delta\vec{p}_0}{\Delta_0}, \vec{d}_n = 2\dfrac{\Delta\vec{p}_{n-1}}{\Delta_{n-1}}$

上述方程仍是非奇异的，也存在唯一解。

三、C^2分段三次Hermite插值

ii）“非节点”（“not－a －knot”）边界条件

这种条件是利用曲线的首末三个插值点分别构造一条参数三次多项式，这样的做法就不把 $\vec{p}_1$和$\vec{p}_{n-1}$ 当作普通的插值点处理，它们的连续阶数达到C^∞

补充方程：

$$\Delta_1\dot{\vec{p}}_0+(\Delta_0+\Delta_1)\dot{\vec{p}}_1=\frac{1}{\Delta_0+\Delta_1}[(3\Delta_0+2\Delta_1)\frac{\Delta_1\Delta\vec{p}_0}{\Delta_0}+(\Delta_0)^2\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta_1}]$$

$$(\Delta_{n-2}+\Delta_{n-1})\dot{\vec{p}}_{n-1}+\Delta_{n-1}\dot{\vec{p}}_n=\frac{1}{\Delta_{n-2}+\Delta_{n-1}}[(3\Delta_{n-1}+2\Delta_{n-2})\frac{\Delta_{n-2}\Delta\vec{p}_{n-1}}{\Delta_{n-1}}+(\Delta_{n-1})^2\frac{\Delta\vec{p}_{n-2}}{\Delta_{n-2}}]$$

三、C^2分段三次Hermite插值

这种方法下的得到的三切矢连续性方程仍然是主对角占优的矩阵，所以仍然是存在唯一解的。

iii）自然端点条件

这种条件是由 $\vec{p}''(u_0)=\vec{p}''(u_n)=\vec{0}$ 出发，得出：

$$2\dot{\vec{p}}_0+\dot{\vec{p}}_1=3\frac{\Delta\vec{p}_0}{\Delta_0} \qquad \dot{\vec{p}}_{n-1}+2\dot{\vec{p}}_n=3\frac{\Delta\vec{p}_{n-1}}{\Delta_{n-1}}$$

这时，三切矢连续性方程为：

三、C^2分段三次Hermite插值

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vec{p}}_0 \\ \dot{\vec{p}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\vec{p}}_{n-1} \\ \dot{\vec{p}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{d}_0 \\ \vec{d}_1 \\ \vdots \\ \vec{d}_{n-1} \\ \vec{d}_n \end{bmatrix}$$

仍然是主对角占优的矩阵

其中：$\vec{d}_0 = 3\dfrac{\Delta\vec{p}_0}{\Delta_0}, \vec{d}_n = 3\dfrac{\Delta\vec{p}_{n-1}}{\Delta_{n-1}}$

三、C^2分段三次Hermite插值

总结：

➢边界条件还有其它形式，但无论是那种形式的边界条件，三切矢连续性方程都是主对角占优的矩阵，都存在唯一解，且计算稳定。

➢ 参数连续性较高，但由于解的唯一性，不能实现在保持参数连续性的条件下，对曲线形状进行自由修改。

➢收敛性：被插值曲线上的数据点不断加密时，样条曲线将收敛到被插值曲线。而单独的一条参数多项式曲线不具有这样的性质。

➢不具有局部修改性。

➢形状不容易控制。

四、Ferguson（弗格森）三次样条曲线

实质：局部参数下的C^2分段三次Hermite插值曲线

设首尾相连的两条曲线段为：$\vec{p}_{j-1}(t)$和$\vec{p}_j(t)$，$0 \le t \le 1$

Ferguson三次样条曲线应用的连续条件：

$$
\begin{cases}
\vec{p}_{j-1}(1) = \vec{p}_j(0) \\
\vec{p}'_{j-1}(1) = \vec{p}'_j(0), \; j = 1, 2, \cdots, n-1 \\
\vec{p}''_{j-1}(1) = \vec{p}''_j(0)
\end{cases}
$$

四、Ferguson（弗格森）三次样条曲线

$$\because \vec{p}_{j-1}(t) = \vec{p}_{j-1}F_0(t) + \vec{p}_jF_1(t) + \dot{\vec{p}}_{j-1}G_0(t) + \dot{\vec{p}}_jG_1(t)$$

$$= [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{p}_{j-1} \\ \vec{p}_j \\ \dot{\vec{p}}_{j-1} \\ \dot{\vec{p}}_j \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_j(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{p}_j \\ \vec{p}_{j+1} \\ \dot{\vec{p}}_j \\ \dot{\vec{p}}_{j+1} \end{bmatrix}$$

四、Ferguson（弗格森）三次样条曲线

所以，将上两式代入：

$$\vec{p}''_{j-1}(1) = \vec{p}''_j(0),\ j = 1, 2, \cdots, n-1 \text{得：}$$

$$[6 \quad 2 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{p}_{j-1} \\ \vec{p}_j \\ \dot{\vec{p}}_{j-1} \\ \dot{\vec{p}}_j \end{bmatrix} = [0 \quad 2 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{p}_j \\ \vec{p}_{j+1} \\ \dot{\vec{p}}_j \\ \dot{\vec{p}}_{j+1} \end{bmatrix}$$

将上式展开，整理得：

四、Ferguson（弗格森）三次样条曲线

$$\dot{\vec{p}}_{j-1}+4\dot{\vec{p}}_j+\dot{\vec{p}}_{j+1}=3(\vec{p}_{j+1}-\vec{p}_{j-1})\quad j=1,2,\cdots,n-1$$

上式与前面学过的三切矢连续方程比较:

$$\Delta_i\dot{\vec{p}}_{i-1}+2(\Delta_{i-1}+\Delta_i)\dot{\vec{p}}_i+\Delta_{i-1}\dot{\vec{p}}_{i+1}$$
$$=3[\frac{\Delta_i\dot{\vec{p}}_{i-1}}{\Delta_{i-1}}+\frac{\Delta_{i-1}\dot{\vec{p}}_i}{\Delta_i}]\qquad i=1,2,\cdots n-1$$

可以看出：当$\Delta_{i-1}=\Delta_i=1$时，整体参数域上的三切矢连续方程即为Ferguson三次样条满足的三切矢连续方程。

四、Ferguson（弗格森）三次样条曲线

$$\dot{\vec{p}}_{j-1}+4\dot{\vec{p}}_j+\dot{\vec{p}}_{j+1}=3(\vec{p}_{j+1}-\vec{p}_{j-1})\quad j=1,2,\cdots,n-1$$

上述方程组也是由n－1个方程组成，但未知量有n＋1个，也需要根据边界条件补充两个方程，才能求解。这时的方程也显然是主对角占优的。

Ferguson参数样条相当于对数据点进行了均匀参数化后，构造的C^2连续Hermite插值曲线。所以，它只能适用于数据点分布比较均匀的情况，否则，曲线可能会出现尖点或自交点。

五、参数三次样条曲线的分类

1、按照基函数的类型划分:

- Hermite形式
- 幂基形式
- 基样条形式
- B样条形式
- 有理B样条形式

五、参数三次样条曲线的分类

2、按照参数化方法划分:

Ferguson三次样条曲线

- 均匀参数化参数三次样条曲线
- 累积弦长参数三次样条曲线
- 向心参数三次样条曲线
- 修正弦长参数三次样条曲线

第一节结束

第二节　　Ferguson样条曲面

一、Ferguson样条曲面

1、问题:

给定程拓扑矩形阵列的数据点

$$\vec{p}_{ij}, i=0,1,\cdots m;\ j=0,1,\cdots n$$

它们对应的参数为:

$$(u_i, v_j),\text{其中：}\ u_i = i, i=0,1,\cdots,m; v_j = j, j=0,1,\cdots,n$$

要求构造样条曲面插值上述数据点，且上述的等参数线为Ferguson三次样条曲线。

一、Ferguson样条曲面

2、构造步骤:

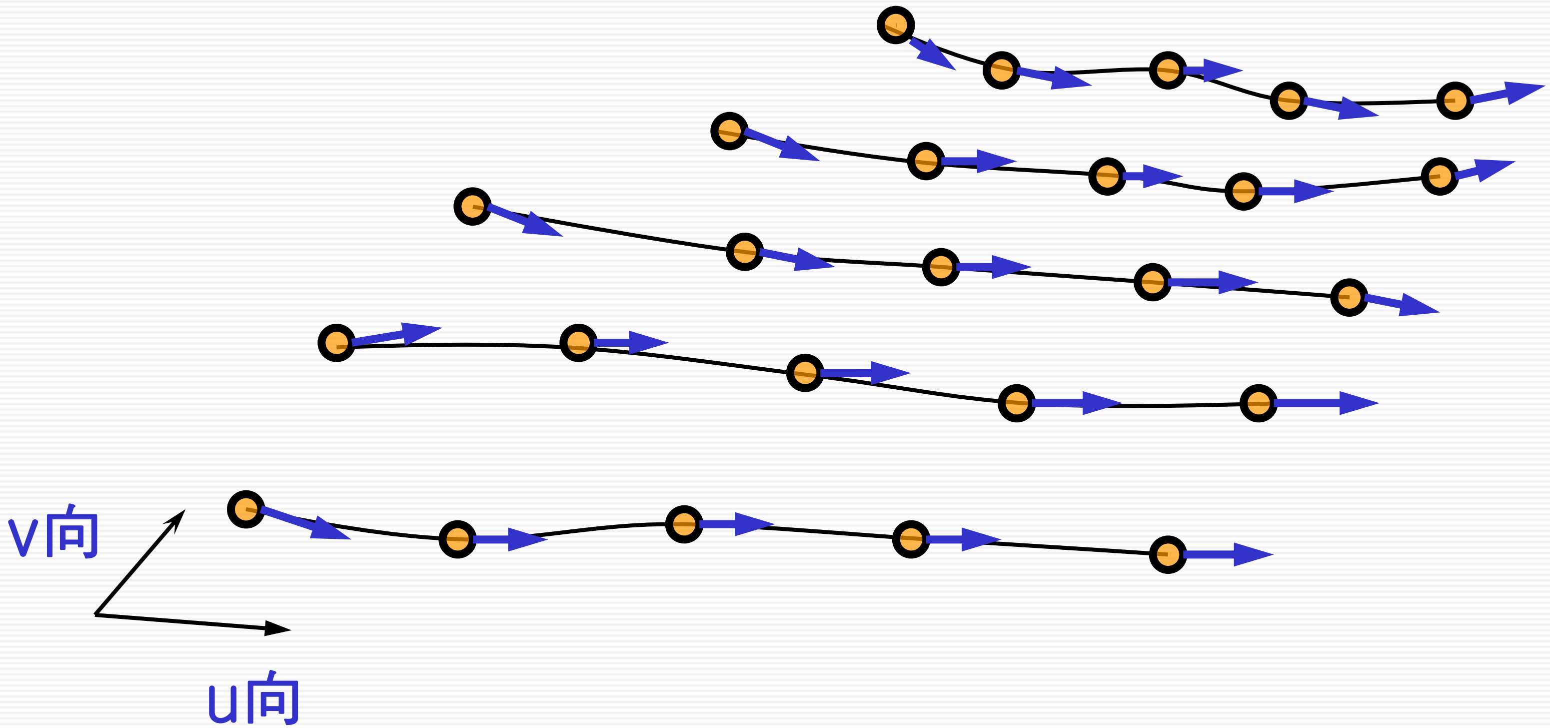
第一步：先沿着u向各排（j=0, 1, …, n)对数据点分别构造Ferguson三次样条曲线，其三切矢连续性方程为:

$$\vec{p}_{u,i-1,j}+4\vec{p}_{u,i,j}+\vec{p}_{u,i+1,j}=3(\vec{p}_{i+1,j}-\vec{p}_{i-1,j})$$
$$i=1,2,\cdots,m-1$$

上述方程加上边界条件，即可解出 $\vec{p}_{u,i,j}$

并生成C^2连续的u向网格线。

一、Ferguson样条曲面



构造出C^2连续的u向网格线

一、Ferguson样条曲面

第二步：再沿着v向各排（i=0, 1, ..., m)对数据点分别构造Ferguson三次样条曲线，其三切矢连续性方程为：

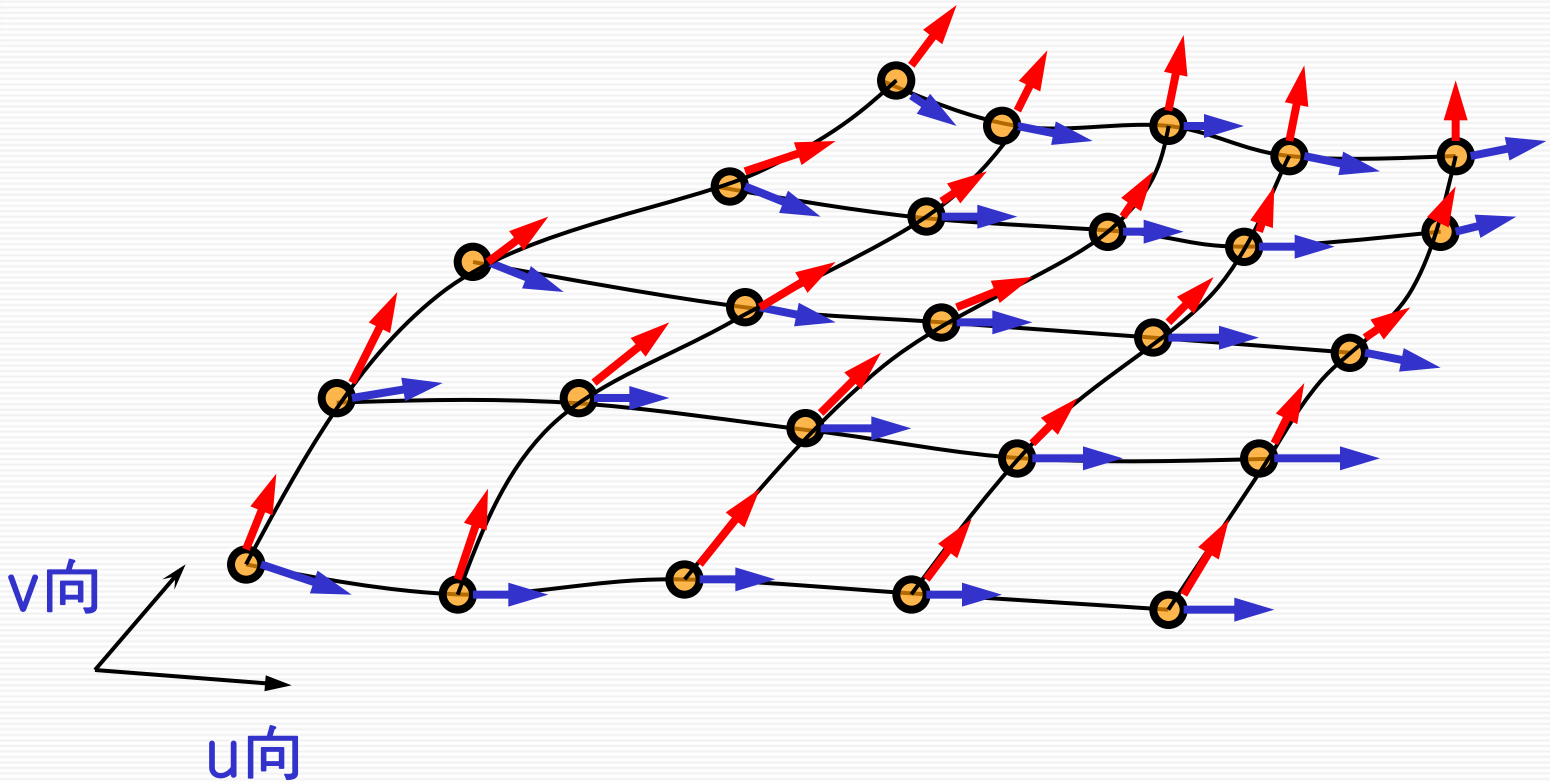
$$\vec{p}_{v,i,j-1} + 4\vec{p}_{v,i,j} + \vec{p}_{v,i,j+1} = 3(\vec{p}_{i,j+1} - \vec{p}_{i,j-1})$$

$$j = 1, 2, \cdots, n-1$$

上述方程加上边界条件，即可解出 $\vec{p}_{v,i,j}$

并生成C^2连续的v向网格线。

一、Ferguson样条曲面



构造v向网格线

一、Ferguson样条曲面

第三步：由步骤1和步骤2得到了每个数据点在u、v两个方向上的偏导矢，将其代入Ferguson三次曲面片方程，即得Ferguson三次样条曲面，其中任一曲面片的方程为：

分片表示式：

$$\vec{p}(u,v) = [F_0(s) \quad F_1(s) \quad G_0(s) \quad G_1(s)] \bullet \begin{bmatrix} \vec{p}_{i,j} & \vec{p}_{i,j+1} & \vec{p}_{v,i,j} & \vec{p}_{v,i,j+1} \\ \vec{p}_{i+1,j} & \vec{p}_{i+1,j+1} & \vec{p}_{v,i+1,j} & \vec{p}_{v,i+1,j+1} \\ \vec{p}_{u,i,j} & \vec{p}_{u,i,j+1} & 0 & 0 \\ \vec{p}_{u,i+1,j} & \vec{p}_{u,i+1,j+1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(t) \\ F_1(t) \\ G_0(t) \\ G_1(t) \end{bmatrix}$$

$$i = u_i \le u \le u_{i+1} = i+1; \; j = v_j \le v \le v_{j+1} = j+1$$

$$s = u - i, i = 0,1,\cdots,m-1; t = v - j, j = 0,1,\cdots n-1$$

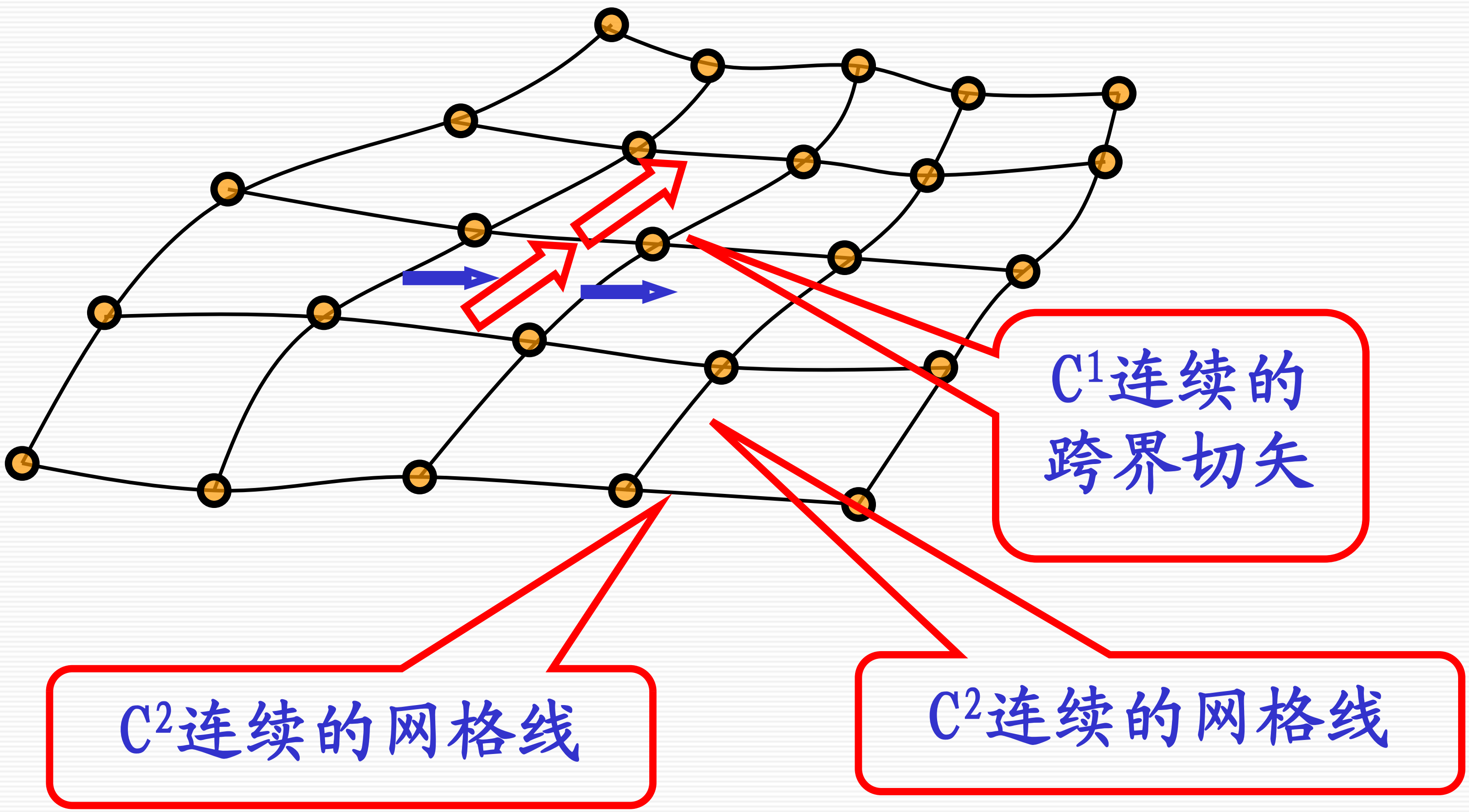
一、Ferguson样条曲面

3、Ferguson样条曲面的连续性:

Ferguson曲面的两族网格线都是C^2连续的Ferguson三次样条曲线，但可以证明，这样构造出的样条曲面沿着公共边界的跨界二阶切矢是不同的，所以，这样的样条曲面仅仅是C^1连续的。

一、Ferguson样条曲面

3、Ferguson样条曲面的连续性：



一、Ferguson样条曲面

4、总结:

1）Ferguson样条曲面实际上采用的是均匀参数化，所以它仅适用于分布比较均匀的数据点。

2）Ferguson样条曲面在两个参数方向上都仅是C^1连续的。

3）Ferguson样条曲面计算稳定，解是存在且唯一的。

4）Ferguson样条曲面的分片表示式中，将扭矢都取作了零向量，这可能导致曲面的形状不一定满足设计要求。

第二节　结束

第三节　孔斯（*Coons*）曲面

Steven A.Coons, (?–1979), M.I.T.

一、具有给定边界的Coons曲面
——第一类Coons曲面

1、插值四个角点的双线性曲面

$$\vec{Q}_3(u,v)=[1-u \quad u]\begin{bmatrix}\vec{p}(0,0) & \vec{p}(0,1)\\ \vec{p}(1,0) & \vec{p}(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}$$

$$0\le u,v\le 1$$

2、线性插值两条边界曲线的曲面

$$\vec{Q}_1(u,v)=[\vec{p}(u,0) \quad \vec{p}(u,1)]\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}$$

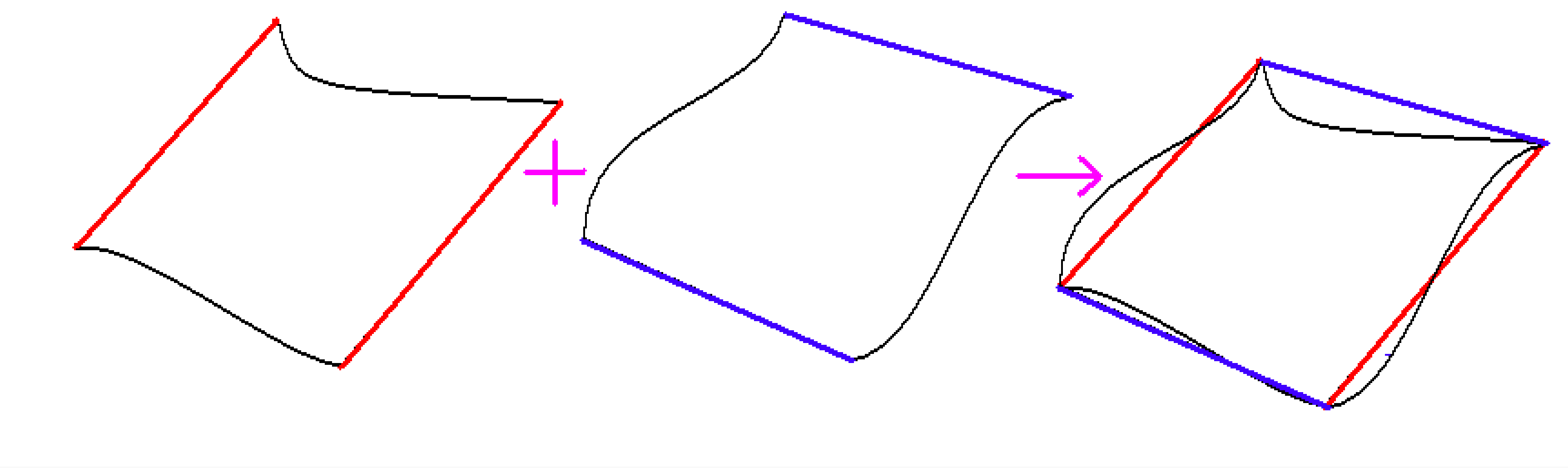
$$0\le u,v\le 1$$

一、具有给定边界的Coons曲面
——第一类Coons曲面

$$\vec{Q}_2(u,v)=[1-u \quad u]\begin{bmatrix}\vec{p}(0,v)\\ \vec{p}(1,v)\end{bmatrix}$$

$$0\le u,v\le 1$$

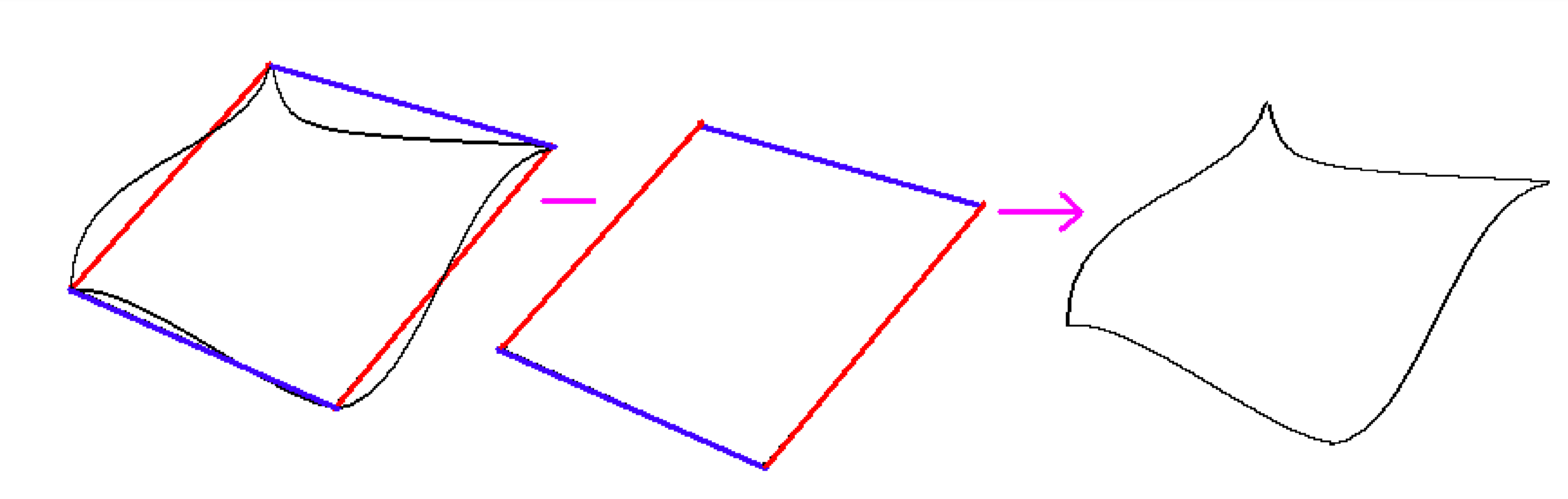
三个曲面求和



一、具有给定边界的Coons曲面——第一类Coons曲面

根据布尔和的思想，构造插值四条边界曲线的双线性Coons曲面为：

$$\vec{Q}(u,v) = \vec{Q}_1(u,v) + \vec{Q}_2(u,v) - \vec{Q}_3(u,v)$$



一、具有给定边界的Coons曲面
——第一类Coons曲面

即：

$$\vec{Q}(u,v)=\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{p}(0,v)\\ \vec{p}(1,v)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\vec{p}(u,0) & \vec{p}(u,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{p}(0,0) & \vec{p}(0,1)\\ \vec{p}(1,0) & \vec{p}(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}-1 & 1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \vec{p}(u,0) & \vec{p}(u,0)\\ \vec{p}(0,v) & \vec{p}(0,0) & \vec{p}(0,1)\\ \vec{p}(1,v) & \vec{p}(1,0) & \vec{p}(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1-v\\ v\end{bmatrix}$$

曲面片的边界信息矩阵

一、具有给定边界的Coons曲面
——第一类Coons曲面

上述曲面方程中的基函数是线性函数，也可以换为其它基函数，只要满足插值条件：

$$F_i(j)=\delta_{ij} \quad i,j=0,1$$

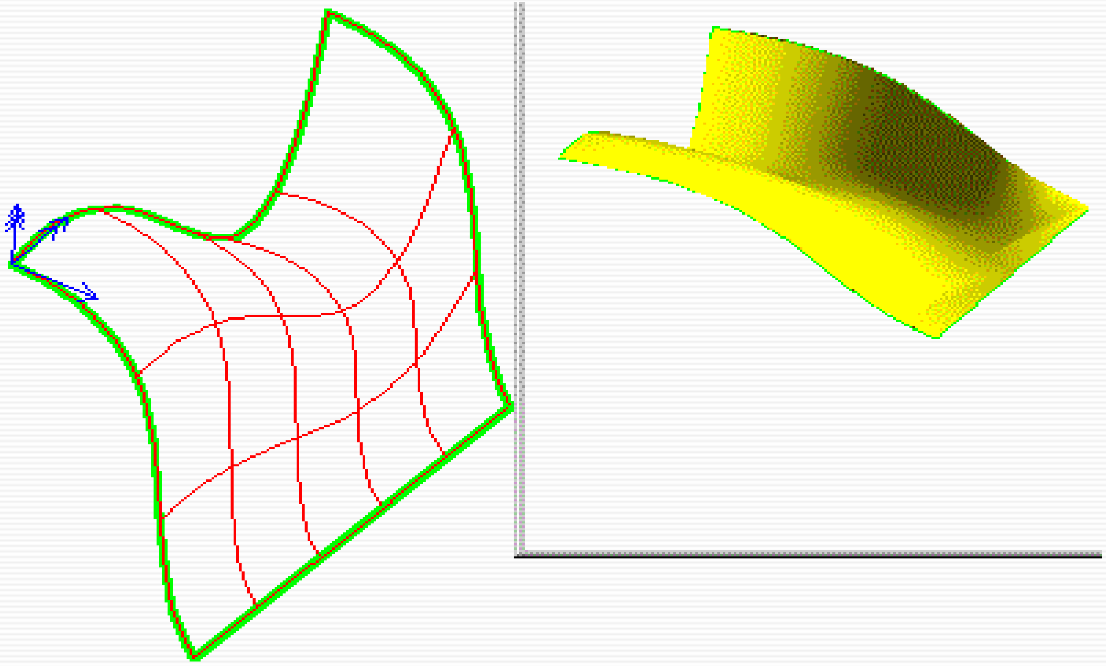
如：

$$\vec{Q}(u,v) = -[-1 \quad F_0(u) \quad F_1(u)]\begin{bmatrix} 0 & \vec{p}(u,0) & \vec{p}(u,0) \\ \vec{p}(0,v) & \vec{p}(0,0) & \vec{p}(0,1) \\ \vec{p}(1,v) & \vec{p}(1,0) & \vec{p}(1,1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ F_0(v) \\ F_1(v) \end{bmatrix}$$

上式即为第一类Coons曲面

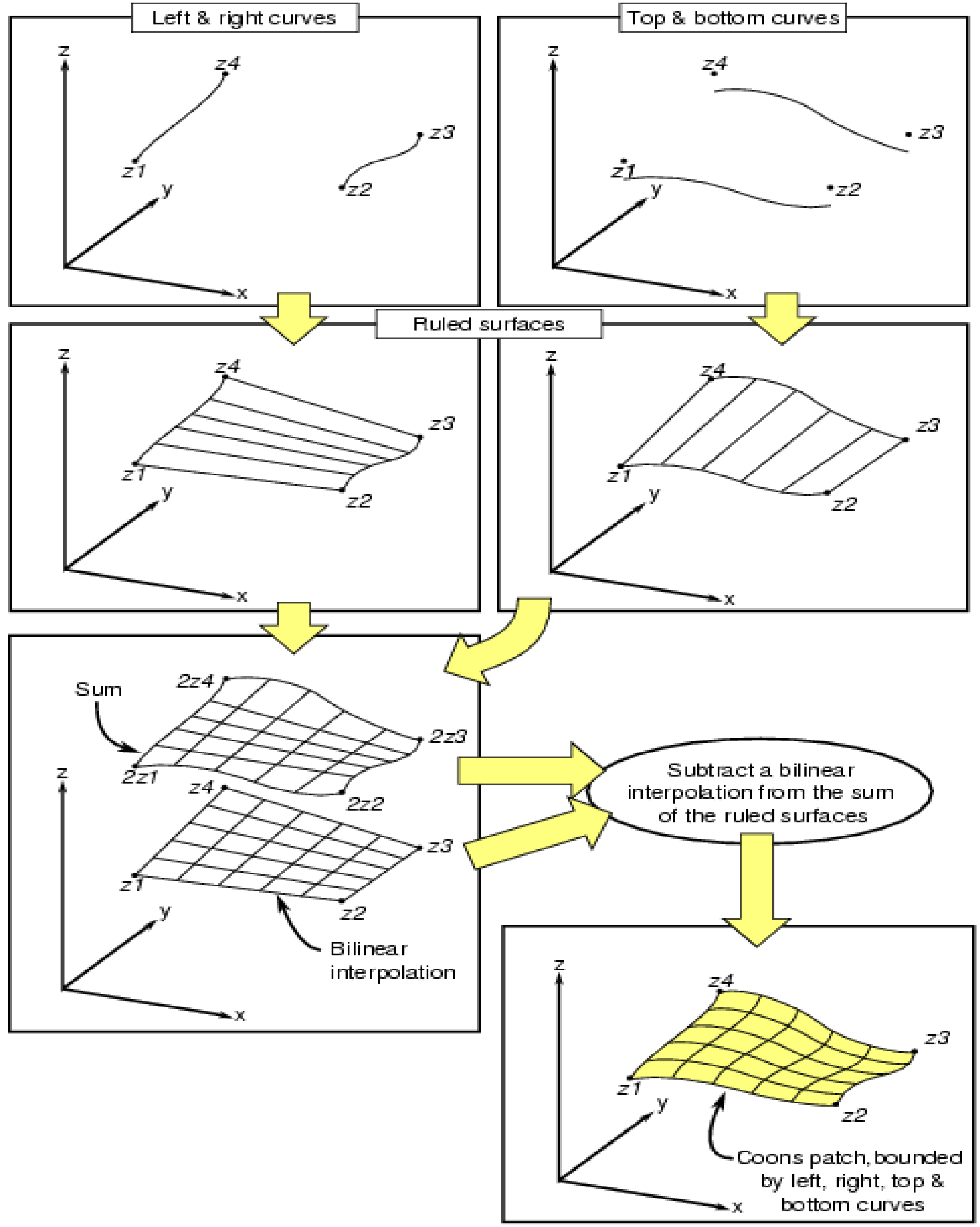
一、具有给定边界的Coons曲面
——第一类Coons曲面

第一类Coons曲面的图形



第一类

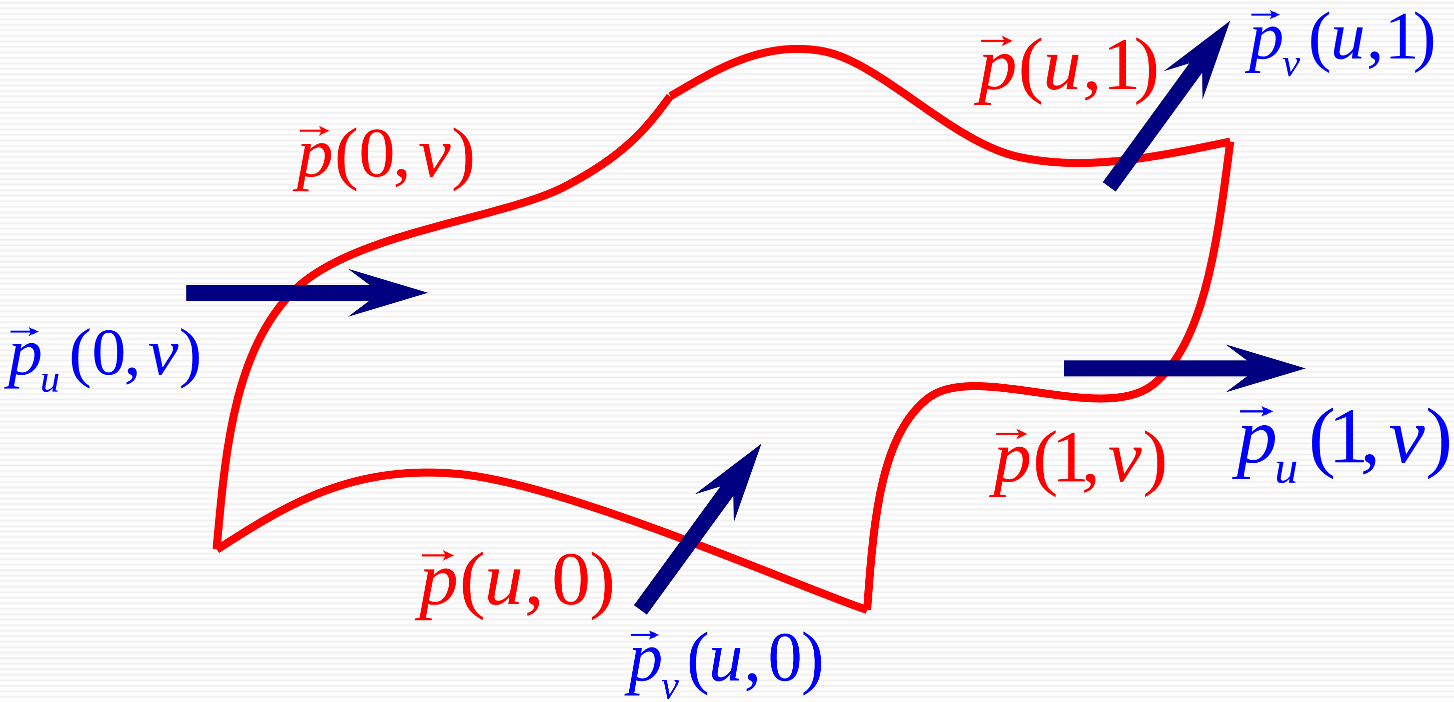
Coons曲面生成的过程



2017-08-24

二、具有给定边界和跨界切矢的Coons曲面
——第二类Coons曲面

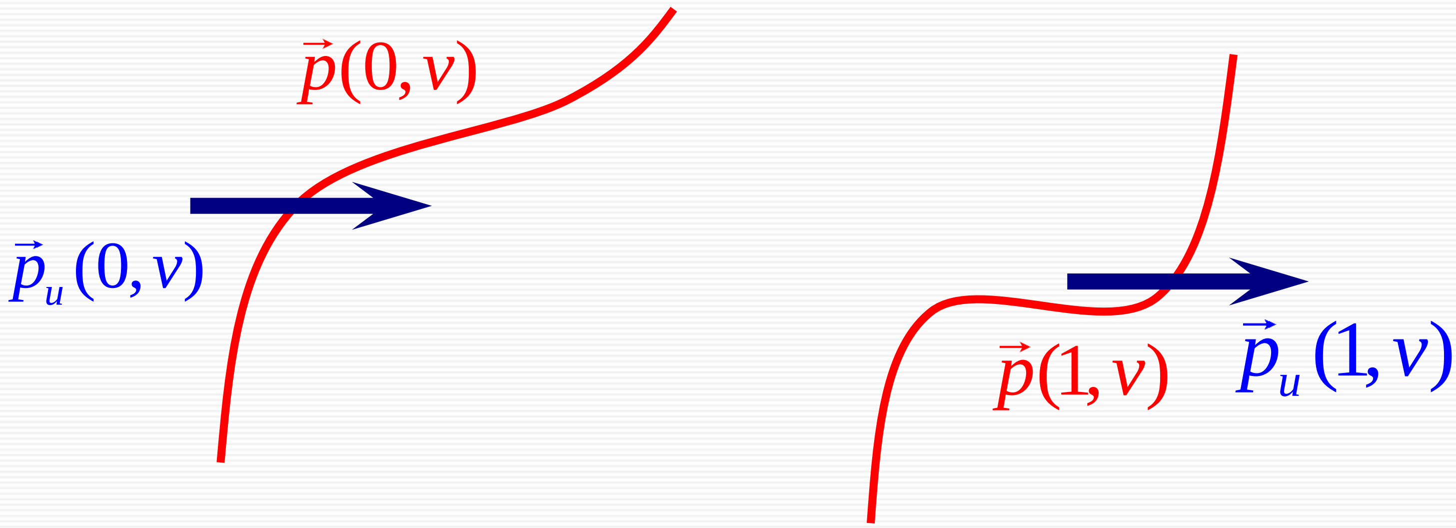
1、第二类Coons曲面需要插值的信息：



二、具有给定边界和跨界切矢的Coons曲面
——第二类Coons曲面

2、构造步骤:

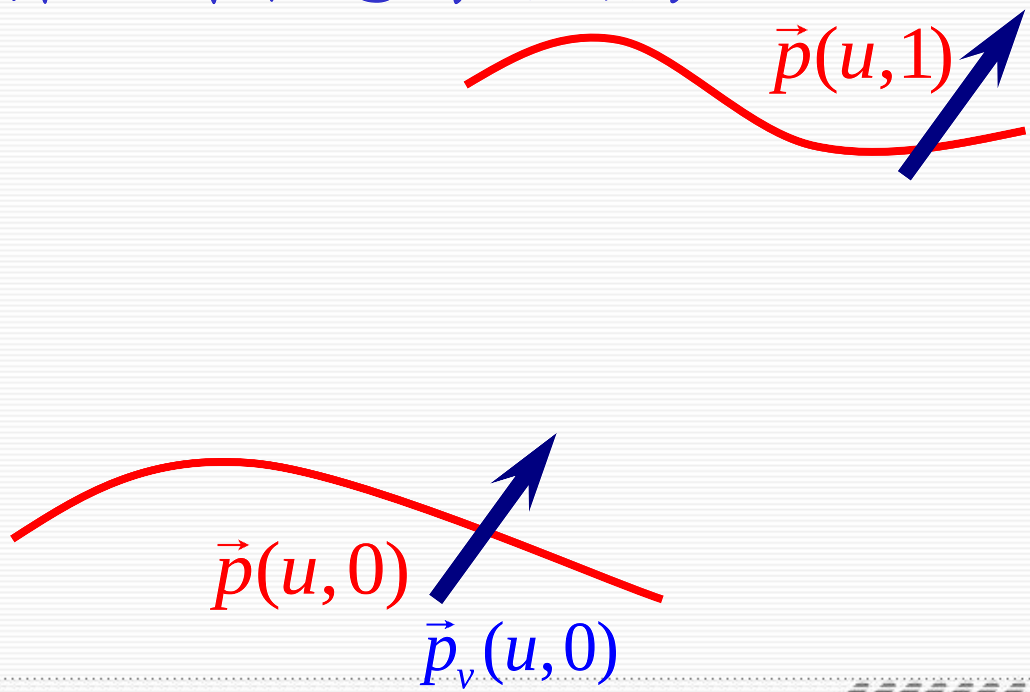
第一步：根据如图信息，构造曲面片Q_1（u，v）



二、具有给定边界和跨界切矢的Coons曲面
——第二类Coons曲面

$$\vec{Q}_1(u,v)=\begin{bmatrix}F_0(u) & F_1(u) & G_0(u) & G_1(u)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{p}(0,v)\\ \vec{p}(1,v)\\ \vec{p}_u(0,v)\\ \vec{p}_u(1,v)\end{bmatrix}$$

同理，插值如下信息的曲面为：



二、具有给定边界和跨界切矢的Coons曲面
——第二类Coons曲面

$$\vec{Q}_2(u,v)=\left[\vec{p}(u,0)\quad \vec{p}(u,1)\quad \vec{p}_v(u,0)\quad \vec{p}_v(u,1)\right]\begin{bmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ G_0(v) \\ G_1(v) \end{bmatrix}$$

利用这两张曲面片共有的信息，构造曲面：

$$\vec{Q}_3(u,v)=[F_0(u)\quad F_1(u)\quad G_0(u)\quad G_1(u)]$$

$$\bullet\begin{bmatrix} \vec{p}(0,0) & \vec{p}(0,1) & \vec{p}_v(0,0) & \vec{p}_v(0,1) \\ \vec{p}(1,0) & \vec{p}(1,1) & \vec{p}_v(1,0) & \vec{p}_v(1,1) \\ \vec{p}_u(0,0) & \vec{p}_u(0,1) & \vec{p}_{uv}(0,0) & \vec{p}_{uv}(0,1) \\ \vec{p}_u(1,0) & \vec{p}_u(1,1) & \vec{p}_{uv}(1,0) & \vec{p}_{uv}(1,1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ G_0(v) \\ G_1(v) \end{bmatrix}$$

二、具有给定边界和跨界切矢的Coons曲面
——第二类Coons曲面

所求的第二类Coons曲面片为:

$$Q(u,v)=Q_1(u,v)+Q_2(u,v)-Q_3(u,v)$$

$$=-\begin{bmatrix}-1 & F_0(u) & F_1(u) & G_0(u) & G_1(u)\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|cc|cc}
0 & \vec{p}(u,0) & \vec{p}(u,1) & \vec{p}_v(u,0) & \vec{p}_v(u,1) \\
\hline
\vec{p}(0,v) & \vec{p}(0,0) & \vec{p}(0,1) & \vec{p}_v(0,0) & \vec{p}_v(0,1) \\
\vec{p}(1,v) & \vec{p}(1,0) & \vec{p}(1,1) & \vec{p}_v(1,0) & \vec{p}_v(1,1) \\
\hline
\vec{p}_u(0,v) & \vec{p}_u(0,0) & \vec{p}_u(0,1) & \vec{p}_{uv}(0,0) & \vec{p}_{uv}(0,1) \\
\vec{p}_u(1,v) & \vec{p}_u(1,0) & \vec{p}_u(1,1) & \vec{p}_{uv}(1,0) & \vec{p}_{uv}(1,1)
\end{array}\right]\begin{bmatrix}-1 \\ F_0(v) \\ F_1(v) \\ G_0(v) \\ G_1(v)\end{bmatrix}$$

二、具有给定边界和跨界切矢的Coons曲面——第二类Coons曲面

上述矩阵包含的几何信息过多，不便应用，为了解决这一问题，利用四个角点的位置矢量、偏导矢和混合偏导矢构造Ferguson曲线，对上述方程进行简化，得到第二类Coons曲面的特例——双三次Coons曲面。

3、双三次Coons曲面

在第二类Coons曲面方程中，首先利用四个角点的位置矢量及偏导矢将边界曲线构造为Ferguson曲线（即Hermite插值曲线）。

二、具有给定边界和跨界切矢的Coons曲面
——第二类Coons曲面

第二类Coons曲面边界信息矩阵的第二行

$$\vec{p}(0,v)=\begin{bmatrix}\vec{p}(0,0) & \vec{p}(0,1) & \vec{p}_v(0,0) & \vec{p}_v(0,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_0(v)\\ F_1(v)\\ G_0(v)\\ G_1(v)\end{bmatrix}$$

第二类Coons曲面边界信息矩阵的第三行

$$\vec{p}(1,v)=\begin{bmatrix}\vec{p}(1,0) & \vec{p}(1,1) & \vec{p}_v(1,0) & \vec{p}_v(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_0(v)\\ F_1(v)\\ G_0(v)\\ G_1(v)\end{bmatrix}$$

二、具有给定边界和跨界切矢的Coons曲面 ——第二类Coons曲面

第二类Coons曲面边界信息矩阵的第三行

$$\vec{p}_u(0,v)=\begin{bmatrix}\vec{p}_u(0,0) & \vec{p}_u(0,1) & \vec{p}_{uv}(0,0) & \vec{p}_{uv}(0,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_0(v)\\F_1(v)\\G_0(v)\\G_1(v)\end{bmatrix}$$

第二类Coons曲面边界信息矩阵的第四行

$$\vec{p}_u(1,v)=\begin{bmatrix}\vec{p}_u(1,0) & \vec{p}_u(1,1) & \vec{p}_{uv}(1,0) & \vec{p}_{uv}(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_0(v)\\F_1(v)\\G_0(v)\\G_1(v)\end{bmatrix}$$

二、具有给定边界和跨界切矢的Coons曲面 ——第二类Coons曲面

利用上述方程，构造曲面：

$$\vec{Q}_1(u,v)=[F_0(u)\quad F_1(u)\quad G_0(u)\quad G_1(u)]\begin{bmatrix}\vec{p}(0,v)\\ \vec{p}(1,v)\\ \vec{p}_u(0,v)\\ \vec{p}_u(1,v)\end{bmatrix}$$

这个曲面插值两条以v为参数的边界曲线，它们都是Hermite插值曲线。

二、具有给定边界和跨界切矢的Coons曲面
——第二类Coons曲面

因为:

$$\vec{Q}_1(u,v)=[F_0(u)\quad F_1(u)\quad G_0(u)\quad G_1(u)]\begin{bmatrix}\vec{p}(0,v)\\ \vec{p}(1,v)\\ \vec{p}_u(0,v)\\ \vec{p}_u(1,v)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\vec{p}(0,0) & \vec{p}(0,1) & \vec{p}_v(0,0) & \vec{p}_v(0,1)\\ \vec{p}(1,0) & \vec{p}(1,1) & \vec{p}_v(1,0) & \vec{p}_v(1,1)\\ \vec{p}_u(0,0) & \vec{p}_u(0,1) & \vec{p}_{uv}(0,0) & \vec{p}_{uv}(0,1)\\ \vec{p}_u(1,0) & \vec{p}_u(1,1) & \vec{p}_{uv}(1,0) & \vec{p}_{uv}(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_0(v)\\ F_1(v)\\ G_0(v)\\ G_1(v)\end{bmatrix}$$

所以：$\vec{Q}_1(u,v)=\vec{Q}_3(u,v)$

二、具有给定边界和跨界切矢的Coons曲面
——第二类Coons曲面

同理：也可以利用第二类Coons曲面信息矩阵的第二列～第四列构造：

$$\vec{p}(u,0),\ \vec{p}(u,1),\ \vec{p}_v(u,0)\text{和}\vec{p}_v(u,1)$$

然后，利用这些信息也可以构造插值以u为参数的边界曲线的曲面：

$$\vec{Q}_2(u,v)=\begin{bmatrix}\vec{p}(u,0) & \vec{p}(u,1) & \vec{p}_v(u,0) & \vec{p}_v(u,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_0(v)\\ F_1(v)\\ G_0(v)\\ G_1(v)\end{bmatrix}$$

二、具有给定边界和跨界切矢的Coons曲面
——第二类Coons曲面

因为:

$$\vec{Q}_2(u,v)=\begin{bmatrix}\vec{p}(u,0) & \vec{p}(u,1) & \vec{p}_v(u,0) & \vec{p}_v(u,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_0(v)\\F_1(v)\\G_0(v)\\G_1(v)\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$[F_0(u)\quad F_1(u)\quad G_0(u)\quad G_1(u)]\bullet\begin{bmatrix}\vec{p}(0,0) & \vec{p}(0,1) & \vec{p}_v(0,0) & \vec{p}_v(0,1)\\ \vec{p}(1,0) & \vec{p}(1,1) & \vec{p}_v(1,0) & \vec{p}_v(1,1)\\ \vec{p}_u(0,0) & \vec{p}_u(0,1) & \vec{p}_{uv}(0,0) & \vec{p}_{uv}(0,1)\\ \vec{p}_u(1,0) & \vec{p}_u(1,1) & \vec{p}_{uv}(1,0) & \vec{p}_{uv}(1,1)\end{bmatrix}$$

所以: $\vec{Q}_2(u,v)=\vec{Q}_3(u,v)$

二、具有给定边界和跨界切矢的Coons曲面
——第二类Coons曲面

至此，根据布尔和的思想，这时的第二类Coons曲面方程为：

$$\vec{Q}(u,v)=\vec{Q}_1(u,v)+\vec{Q}_2(u,v)-\vec{Q}_3(u,v)=\vec{Q}_3(u,v)$$

$$\vec{Q}(u,v)=[F_0(u)\quad F_1(u)\quad G_0(u)\quad G_1(u)]$$

$$\bullet\begin{bmatrix} \vec{p}(0,0) & \vec{p}(0,1) & \vec{p}_v(0,0) & \vec{p}_v(0,1) \\ \vec{p}(1,0) & \vec{p}(1,1) & \vec{p}_v(1,0) & \vec{p}_v(1,1) \\ \vec{p}_u(0,0) & \vec{p}_u(0,1) & \vec{p}_{uv}(0,0) & \vec{p}_{uv}(0,1) \\ \vec{p}_u(1,0) & \vec{p}_u(1,1) & \vec{p}_{uv}(1,0) & \vec{p}_{uv}(1,1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ G_0(v) \\ G_1(v) \end{bmatrix}$$

上述曲面称为双三次Coons曲面

二、具有给定边界和跨界切矢的Coons曲面——第二类Coons曲面

$$\vec{Q}(u,v)=[F_0(u) \quad F_1(u) \quad G_0(u) \quad G_1(u)] \cdot \begin{bmatrix} \vec{p}(0,0) & \vec{p}(0,1) & \vec{p}_v(0,0) & \vec{p}_v(0,1) \\ \vec{p}(1,0) & \vec{p}(1,1) & \vec{p}_v(1,0) & \vec{p}_v(1,1) \\ \vec{p}_u(0,0) & \vec{p}_u(0,1) & \vec{p}_{uv}(0,0) & \vec{p}_{uv}(0,1) \\ \vec{p}_u(1,0) & \vec{p}_u(1,1) & \vec{p}_{uv}(1,0) & \vec{p}_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ G_0(v) \\ G_1(v) \end{bmatrix}$$

双三次Coons曲面

$$\vec{p}(u,v)=[F_0(u) \quad F_1(u) \quad G_0(u) \quad G_1(u)] \cdot \begin{bmatrix} \vec{p}(0,0) & \vec{p}(0,1) & \vec{p}_v(0,0) & \vec{p}_v(0,1) \\ \vec{p}(1,0) & \vec{p}(1,1) & \vec{p}_v(1,0) & \vec{p}_v(1,1) \\ \vec{p}_u(0,0) & \vec{p}_u(0,1) & 0 & 0 \\ \vec{p}_u(1,0) & \vec{p}_u(1,1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ G_0(v) \\ G_1(v) \end{bmatrix}$$

Ferguson曲面

三、Coons双三次样条曲面

回顾：Ferguson 样条曲面

沿两个参数方向都是 C^1 连续的样条曲面

$$\vec{p}(u,v)=[F_0(s)\quad F_1(s)\quad G_0(s)\quad G_1(s)]$$

$$\bullet\begin{bmatrix} \vec{p}_{i,j} & \vec{p}_{i,j+1} & \vec{p}_{v,i,j} & \vec{p}_{v,i,j+1} \\ \vec{p}_{i+1,j} & \vec{p}_{i+1,j+1} & \vec{p}_{v,i+1,j} & \vec{p}_{v,i+1,j+1} \\ \vec{p}_{u,i,j} & \vec{p}_{u,i,j+1} & 0 & 0 \\ \vec{p}_{u,i+1,j} & \vec{p}_{u,i+1,j+1} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_0(t) \\ F_1(t) \\ G_0(t) \\ G_1(t) \end{bmatrix}$$

$$i=u_i\le u\le u_{i+1}=i+1;\ j=v_j\le v\le v_{j+1}=j+1$$

$$s=u-i, i=0,1,\cdots,m-1; t=v-j, j=0,1,\cdots n-1$$

三、Coons双三次样条曲面

下面仿照Ferguson双三次样条曲面的分片表示式，给出C^2连续的Coons双三次样条曲面的分片表示式。

设Coons双三次样条曲面的分片表示式为:

$$\vec{p}(u,v)=[F_0(s)\quad F_1(s)\quad G_0(s)\quad G_1(s)]\bullet\begin{bmatrix}\vec{p}_{i,j} & \vec{p}_{i,j+1} & \vec{p}_{v,i,j} & \vec{p}_{v,i,j+1}\\ \vec{p}_{i+1,j} & \vec{p}_{i+1,j+1} & \vec{p}_{v,i+1,j} & \vec{p}_{v,i+1,j+1}\\ \vec{p}_{u,i,j} & \vec{p}_{u,i,j+1} & \vec{p}_{uv,i,j} & \vec{p}_{uv,i,j+1}\\ \vec{p}_{u,i+1,j} & \vec{p}_{u,i+1,j+1} & \vec{p}_{uv,i+1,j} & \vec{p}_{uv,i+1,j+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_0(t)\\ F_1(t)\\ G_0(t)\\ G_1(t)\end{bmatrix}$$

$$i=u_i\le u\le u_{i+1}=i+1;\ j=v_j\le v\le v_{j+1}=j+1$$

$$s=u-i,i=0,1,\cdots,m-1;t=v-j,j=0,1,\cdots n-1$$

三、Coons双三次样条曲面

问题：如何给出上述分片表示式中的四个扭矢，使得样条曲面达到C^2连续。

扭矢计算方法:

首先，根据曲面数据点的位置矢量，沿u向构造三切矢连续性方程，求出u向的偏导矢，即:

$$\vec{p}_{u,i-1,j} + 4\vec{p}_{u,i,j} + \vec{p}_{u,i+1,j} = 3(\vec{p}_{i+1,j} - \vec{p}_{i-1,j})$$

$$j = 0,1,\cdots,n$$

三、Coons双三次样条曲面

所以，C^2连续的u向网格线为：

$$\vec{p}(u,v_j)=\begin{bmatrix}F_0(s) & F_1(s) & G_0(s) & G_1(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{p}_{i,j}\\ \vec{p}_{i+1,j}\\ \vec{p}_{u,i,j}\\ \vec{p}_{u,i+1,j}\end{bmatrix}$$

$$s=u-i,i=u_i\le u\le u_{i+1}=i+1,i=0,1,\cdots n-1$$

同理，也可以求出v向的偏导矢，并构造出C^2连续的v向网格线。

三、Coons双三次样条曲面

第二步：将第一步求出的u向偏导矢看作“数据点”，沿v向构造混合偏导矢满足的三切矢连续方程如下：

$$\vec{p}_{uv,i,j-1}+4\vec{p}_{uv,i,j}+\vec{p}_{uv,i,j+1}=3(\vec{p}_{u,i,j+1}-\vec{p}_{u,i,j-1})$$

当然，也可以利用v向的偏导矢看作“数据点”，沿u向构造偏导矢满足的三切矢连续方程如下：

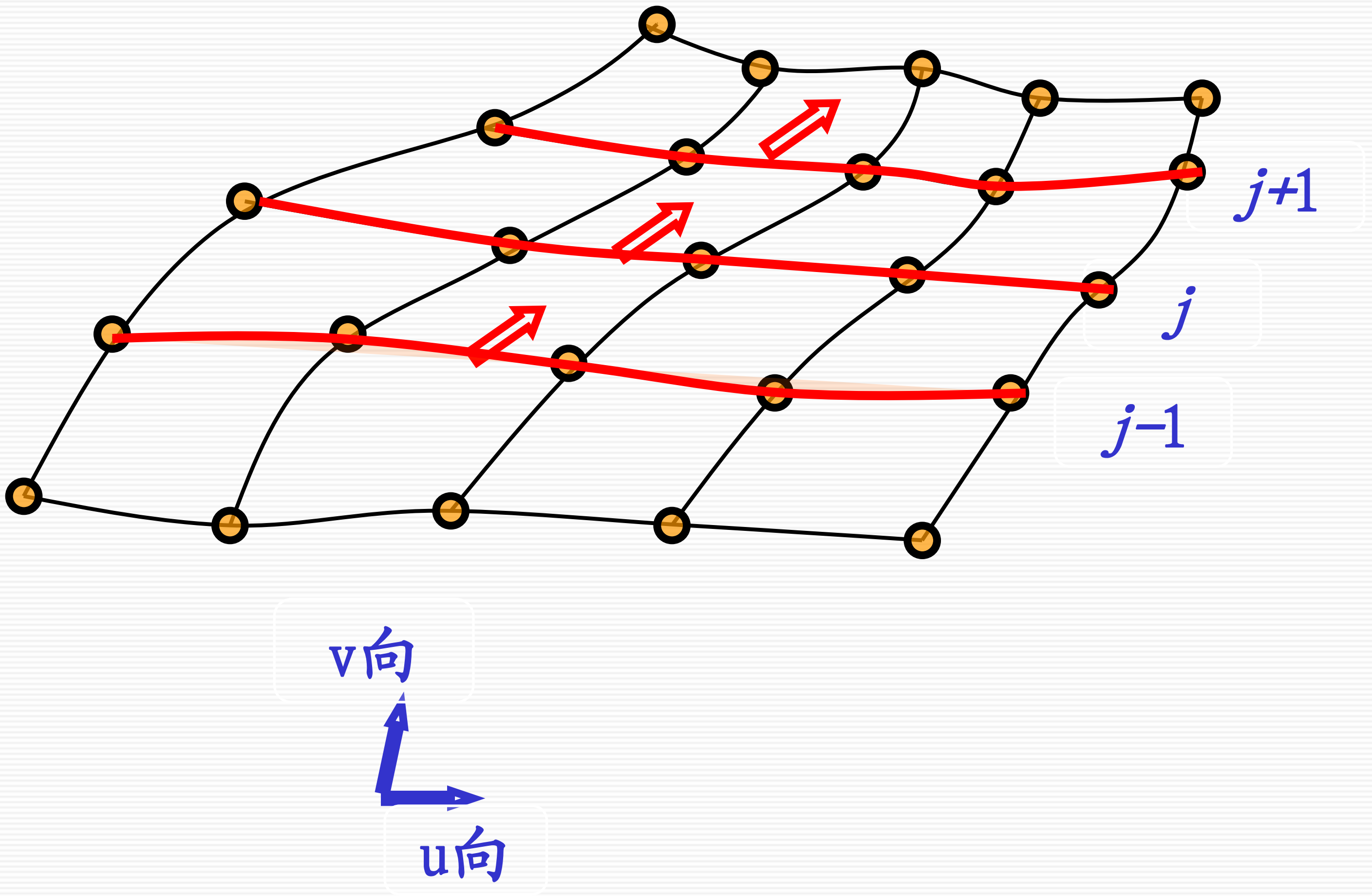
$$\vec{p}_{uv,i-1,j}+4\vec{p}_{uv,i,j}+\vec{p}_{uv,i+1,j}=3(\vec{p}_{v,i+1,j}-\vec{p}_{v,i-1,j})$$

三、Coons双三次样条曲面

至此，Coons双三次样条曲面中的各种偏导矢、混合偏导矢都已经计算出结果，将其代入到分片表示式中，即可以得到u、v两个参数方向都是C^2连续的样条曲面。

Coons双三次样条曲面比Ferguson样条曲面的连续性更高，但是它仍然是建立在均匀参数分割上的样条曲面，只能适用于数据分布比较均匀的情况。

三、Coons双三次样条曲面



四、参数双三次样条曲面

参数双参数三次样条曲面是Coons双参数三次样条曲面的推广，它是建立在一般参数域上的C^2连续样条曲面。

问题：给定呈拓扑矩形排列的点阵：$\vec{p}_{ij}, i=0,1,\cdots m;$ $j=0,1,\cdots n$。以及相应的参数分割：

$$\Delta_u : u_0 < u_1 < \cdots < u_m; \Delta_v : v_0 < v_1 < \cdots < v_n$$

生成沿两个参数都达到C^2连续的参数双三次样条曲面。

四、参数双三次样条曲面

分片表示式:

$$
\vec{p}(u,v)=[F_0(s)\quad F_1(s)\quad \Delta_i G_0(s)\quad \Delta_i G_1(s)]
\bullet\begin{bmatrix}
\vec{p}_{i,j} & \vec{p}_{i,j+1} & \vec{p}_{v,i,j} & \vec{p}_{v,i,j+1} \\
\vec{p}_{i+1,j} & \vec{p}_{i+1,j+1} & \vec{p}_{v,i+1,j} & \vec{p}_{v,i+1,j+1} \\
\vec{p}_{u,i,j} & \vec{p}_{u,i,j+1} & \vec{p}_{uv,i,j} & \vec{p}_{uv,i,j+1} \\
\vec{p}_{u,i+1,j} & \vec{p}_{u,i+1,j+1} & \vec{p}_{uv,i+1,j} & \vec{p}_{uv,i+1,j+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
F_0(t) \\
F_1(t) \\
\Delta_j G_0(t) \\
\Delta_j G_1(t)
\end{bmatrix}
$$

$$
u_i \le u \le u_{i+1}; v_j \le v \le v_{j+1}; s=\frac{u-u_i}{\Delta_i}, i=0,1,\cdots,m-1;
$$

$$
t=\frac{v-j}{\Delta_j}, j=0,1,\cdots n-1
$$

曲面的的数据点

$\vec{p}_{uv,0,0}$	$\vec{p}_{u,0,0}$	$\vec{p}_{u,0,1}$	$\cdots$	$\vec{p}_{u,0,n}$	$\vec{p}_{uv,0,n}$
$\vec{p}_{v,0,0}$	$\vec{p}_{0,0}$	$\vec{p}_{0,1}$	$\cdots$	$\vec{p}_{0,n}$	$\vec{p}_{v,0,n}$
$\vec{p}_{v,1,0}$	$\vec{p}_{1,0}$	$\vec{p}_{1,1}$	$\cdots$	$\vec{p}_{1,n}$	$\vec{p}_{v,1,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vec{p}_{v,m,0}$	$\vec{p}_{m,0}$	$\vec{p}_{m,1}$	$\cdots$	$\vec{p}_{m,n}$	$\vec{p}_{v,m,n}$
$\vec{p}_{uv,m,0}$	$\vec{p}_{u,m,0}$	$\vec{p}_{u,m,1}$	$\cdots$	$\vec{p}_{u,m,n}$	$\vec{p}_{uv,m,n}$

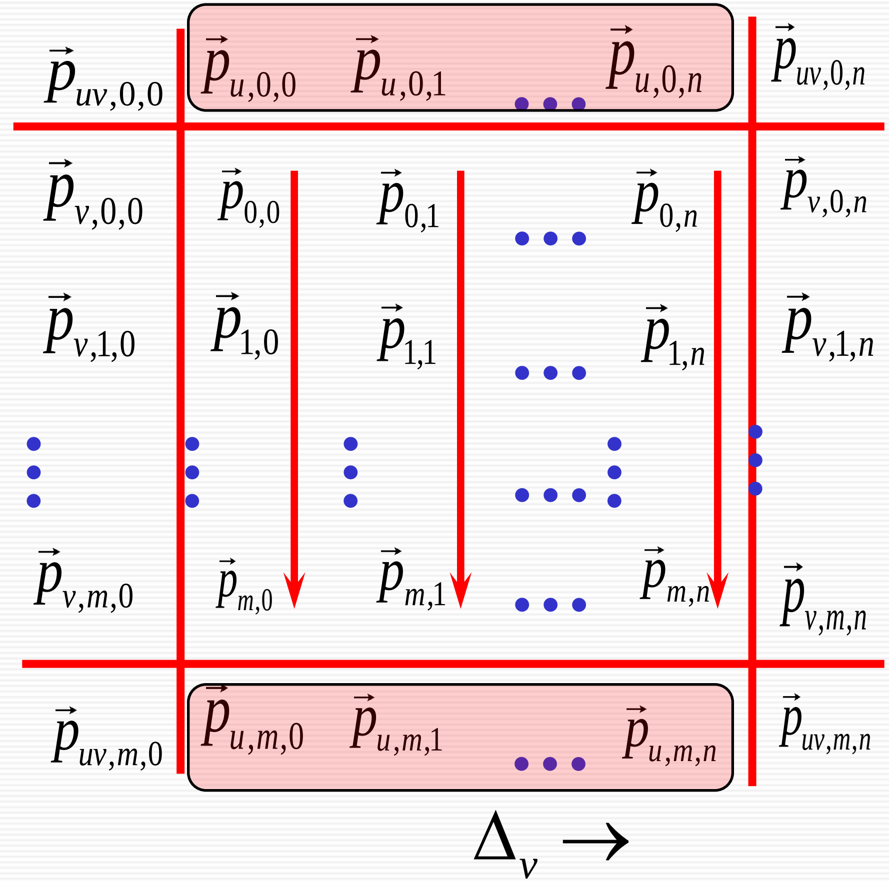
$\Delta_u \downarrow$

$\Delta_v \longrightarrow$

四、参数双三次样条曲面

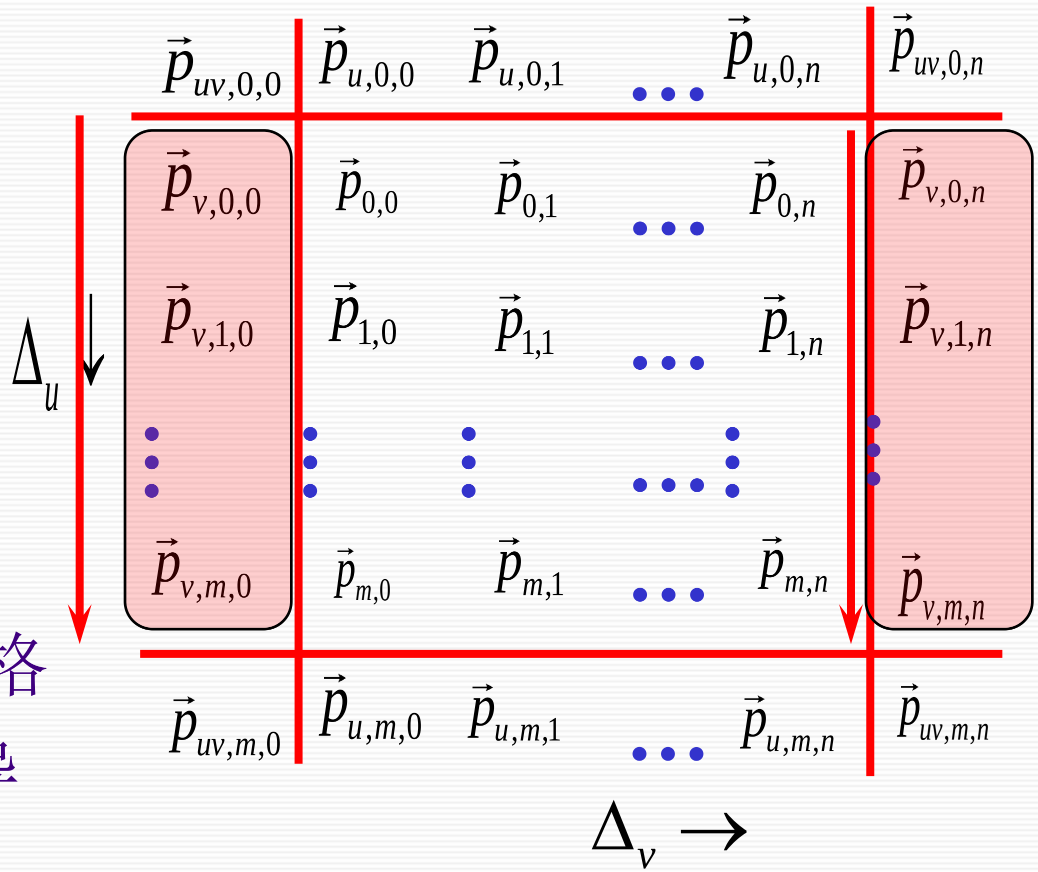
构造步骤:

第一步：先沿表中各列，加上边界条件$\vec{p}_{u,0,j}$和$\vec{p}_{u,m,j}$，$j=0,1,\cdots n$在Δ_u上构造以u为参数的参数三次样条曲线，求出所有u向网格线上各个数据点上的$\vec{p}_{u,i,j}$。



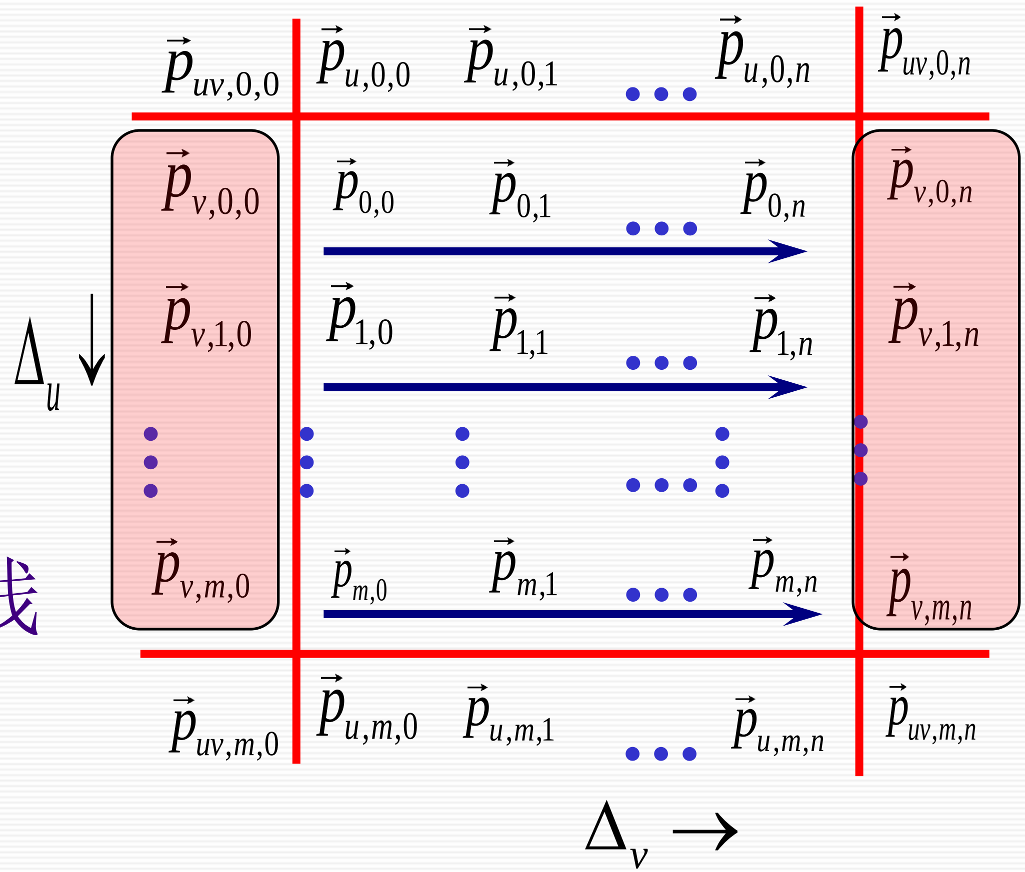
四、参数双三次样条曲面

第二步：对于两条u向边界网格线（即$j=0,n$），分别以$v=v_0$和$v=v_n$边界上网格点的跨界切矢$\vec{p}_{v,i,j}$，$i=0,1,\cdots m, j=0,n$；视作“数据点”构造参数三次曲线，求出两u向边界网格线上网格点处的混合偏导矢$\vec{p}_{uv,i,0}$和$\vec{p}_{uv,i,n}$。



四、参数双三次样条曲面

第三步：沿表中各行，加上边界条件$\vec{p}_{v,i,0}$和$\vec{p}_{v,i,n}$，$i=0,1,\cdots m$在Δ_v上构造以v为参数的参数三次样条曲线，求出所有v向网格线上各个数据点上的$\vec{p}_{v,i,j}$。



四、参数双三次样条曲面

第四步：沿表中的各行以步骤1中得到的$\vec{p}_{u,i,j}$，$j=0,1,\cdots,n$，视作“数据点”，以步骤2中得到的$\vec{p}_{uv,i,0}$和$\vec{p}_{uv,i,n}$作为边界条件，以v为参数构造参数三次曲线，求出内部所有网格点处的混合偏导矢$\vec{p}_{uv,i,j}$。

$\Delta_u \downarrow$

$\vec{p}_{uv,0,0}$	$\vec{p}_{u,0,0}$	$\vec{p}_{u,0,1}$	$\cdots$	$\vec{p}_{u,0,n}$	$\vec{p}_{uv,0,n}$
$\vec{p}_{v,0,0}$	$\vec{p}_{0,0}$	$\vec{p}_{0,1}$	$\cdots$	$\vec{p}_{0,n}$	$\vec{p}_{v,0,n}$
$\vec{p}_{v,1,0}$	$\vec{p}_{1,0}$	$\vec{p}_{1,1}$	$\cdots$	$\vec{p}_{1,n}$	$\vec{p}_{v,1,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vec{p}_{v,m,0}$	$\vec{p}_{m,0}$	$\vec{p}_{m,1}$	$\cdots$	$\vec{p}_{m,n}$	$\vec{p}_{v,m,n}$
$\vec{p}_{uv,m,0}$	$\vec{p}_{u,m,0}$	$\vec{p}_{u,m,1}$	$\cdots$	$\vec{p}_{u,m,n}$	$\vec{p}_{uv,m,n}$

$\Delta_v \rightarrow$

四、参数双三次样条曲面

第五步：将以上步骤求得的偏导矢和混合偏导矢代入参数三次样条曲面的分片表示式中，即可求得所求样条曲面

$$\Delta_u \downarrow \quad \begin{array}{c|cccc|c}
\vec{p}_{uv,0,0} & \vec{p}_{u,0,0} & \vec{p}_{u,0,1} & \cdots & \vec{p}_{u,0,n} & \vec{p}_{uv,0,n} \\
\hline
\vec{p}_{v,0,0} & \vec{p}_{0,0} & \vec{p}_{0,1} & \cdots & \vec{p}_{0,n} & \vec{p}_{v,0,n} \\
\vec{p}_{v,1,0} & \vec{p}_{1,0} & \vec{p}_{1,1} & \cdots & \vec{p}_{1,n} & \vec{p}_{v,1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\vec{p}_{v,m,0} & \vec{p}_{m,0} & \vec{p}_{m,1} & \cdots & \vec{p}_{m,n} & \vec{p}_{v,m,n} \\
\hline
\vec{p}_{uv,m,0} & \vec{p}_{u,m,0} & \vec{p}_{u,m,1} & \cdots & \vec{p}_{u,m,n} & \vec{p}_{uv,m,n}
\end{array}$$

$$\Delta_v \rightarrow$$

四、参数双三次样条曲面

总结:

参数三次样条曲面是一种建立在任意参数分割上的插值曲面，它在u、v两个参数方向上都是C^2连续的。

但这种曲面对形状的控制能力并不强，只能通过修改边界条件影响形状。为了满足C^2连续，它不具有局部修改性，在边界条件不变的情况下，它的结果是唯一的。

本章结束