11.2 三种保守力的功

一、 重力的功

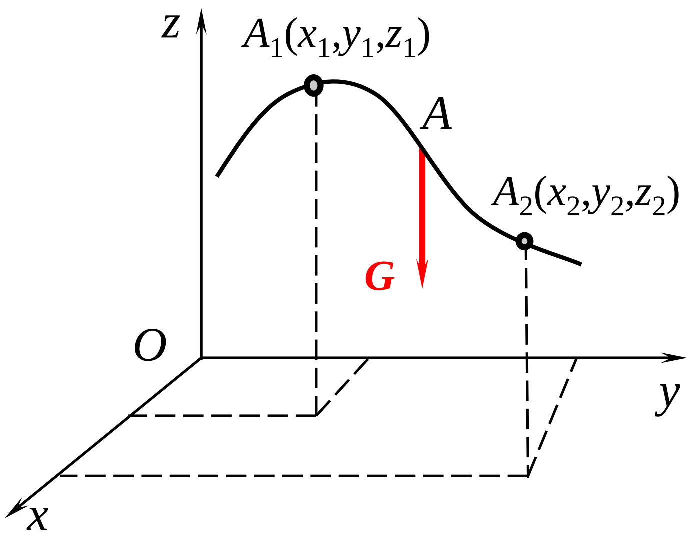
由元功表达式 $\mathrm{d}'W = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$

物体的重力 G 在坐标轴系上的投影为

$$F_\mathrm{x} = F_\mathrm{y} = 0\,, \qquad F_\mathrm{z} = -G$$

得重力的元功 $\mathrm{d}'W = -G\mathrm{d}z$

故重力在曲线路程 A_1A_2 上的功为

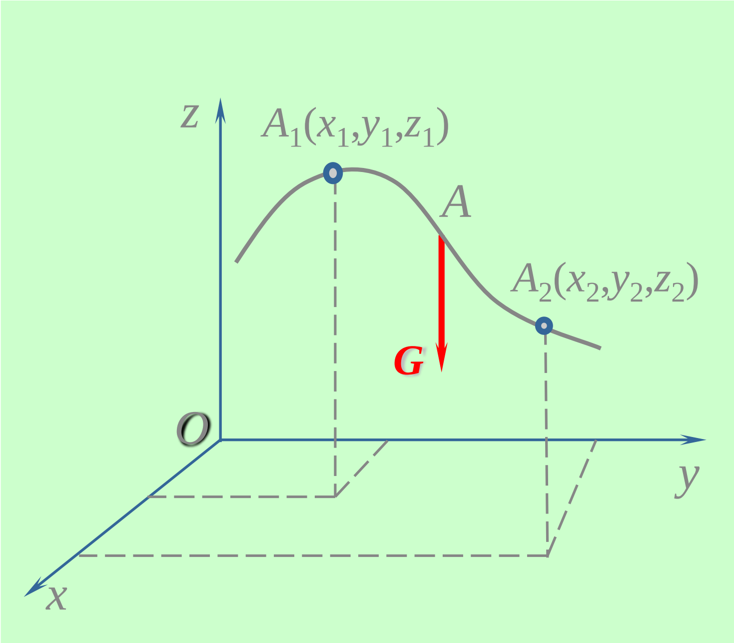


$$W = -\int_{z_1}^{z_2} G\mathrm{d}z = G(z_1 - z_2) = Gh$$

故重力在曲线路程 A_1A_2 上的功为

$$W = -\int_{z_1}^{z_2} G\,\mathrm{d}z = G(z_1 - z_2) = Gh$$

式中 z_1 和 z_2 分别是重心的路程起点和终点的纵坐标；$h = z_1 - z_2$ 是物体重心降落的高度，称为**高度降**。



有 结 论

（1）重力的功等于重力与重心高度降的乘积。

（2）重力的功与运动路径无关。

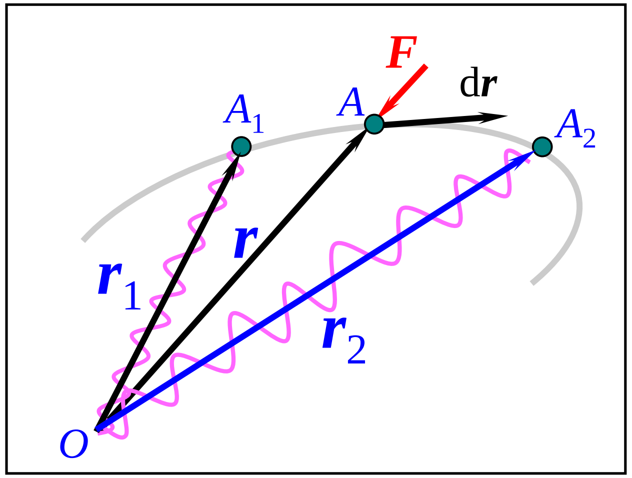
（3）重心下降，重力作正功；否则，重力做负功。

二、 弹性力的功

设弹簧未变形时长度是 l_0 ，刚度系数是k。弹簧的一端 O 固定，而另一端 A 作任意曲线运动，且弹簧始终处于直线状态。

当点 A 由位置 A_1 沿某一路线运动到位置 A_2 时，该路程中弹性力所作的功为：

$$W = \frac{k}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$$



式中 $\lambda_1 = r_1 - l_0$ ， $\lambda_2 = r_2 - l_0$ 分别表示路程始末端 A_1 和 A_2 处弹簧的变形量。

弹性力 F 在曲线路程 A_1A_2 中的功

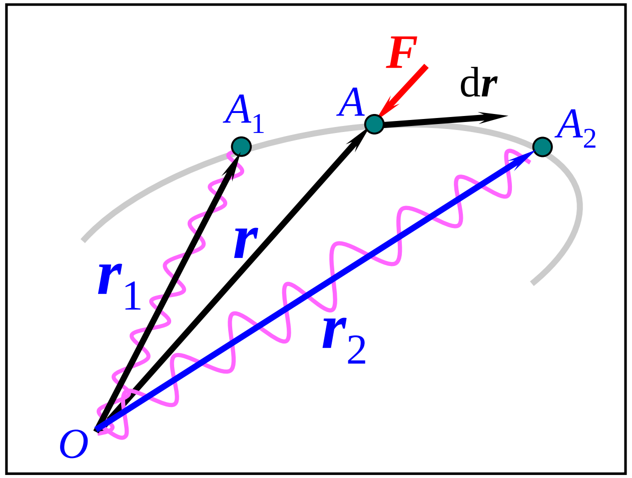
$$W=\frac{k}{2}(\lambda_1^2-\lambda_2^2)$$

有 结 论

(1)弹性力的功，等于弹簧初变形的平方和末变形的平方之差与弹簧刚度系数乘积的一半。

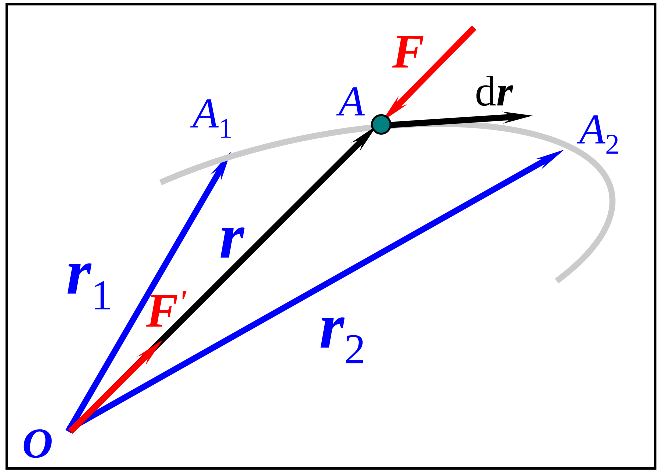
(2)弹性力的功与运动路径无关。

(3)弹簧的变形量减小弹性力作正功；否则，做负功。



三、 牛顿引力的功

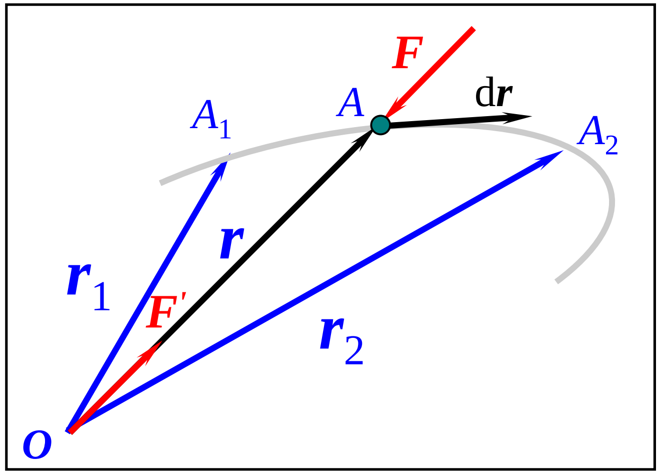
由牛顿万有引力定律知，若两个质点的质量分别是 M 和 m，相互间的距离是 r，则相互间的引力 F 和 F' 的大小等于



$$F = f\frac{Mm}{r^2}$$

式中的引力常数 $f = 6.673\times10^{-11}\mathrm{m^3\,kg^{-1}s^{-2}}$。

设在路程始末端质点 A 到力心 O 的距离（称为极径）分别为 r_1 和 r_2，于是 M，m 间一对牛顿引力在这段路程的功



$$W=-\int_{r_1}^{r_2} f\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r = fMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

牛顿引力的功与运动路径无关。

三种保守力的功

重力的功

$$W = -\int_{z_1}^{z_2} G\,\mathrm{d}z = G(z_1 - z_2) = Gh$$

弹性力的功

$$W = \frac{k}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$$

做功都和路径无关-保守力

牛顿引力的功

$$W = -\int_{r_1}^{r_2} f\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r = fMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

谢谢！