§5 两个RV函数的分布

引　例

在结构机构可靠性分析中，将影响系统行为（响应量）的不确定因素称为随机变量，基本变量的随机不确定性决定了响应量的随机不确定性，基本变量的随机不确定性可由PDF来描述。在一般结构机构可靠性分析中，基本变量包括几何构成、材料性能和载荷等；响应量可以是位移、应力、寿命、振动特征量、运动学特征量等，它是基本变量的函数，可靠性分析的目的就是要得到响应量的统计规律，由此评估/预测结构机构的安全性能。

第2章中，我们讨论了RV函数分布的求解方法：**分布函数法**和**公式法**（仅对一维连续型）。

本节将讨论：当RV X 和 Y 的联合分布已知时，如何求出它们的函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布？

若Z的分布存在，注意：**Z 是一维RV** 。

☞二维**离散型**RV（X,Y）的函数$Z=g(X,Y)$的分布

① 由$Z=g(x,y)$确定Z 的所有可能取值

$z_1, z_2, \ldots z_k$；

② 确定Z 取每一个可能取值z_k的概率。

$$P\{Z=z_k\} = P\{g(X,Y)=z_k\}$$

$$\overset{\text{等价于}}{=\!=\!=} P\left\{(X,Y)\in\left\{(x_i,y_j)\middle|g(x_i,y_j)=z_k\right\}\right\}$$

$$=\sum_{(x_i,y_j):g(x_i,y_j)=z_k}\sum P\{X=x_i,Y=y_j\}$$

例1 设二维RV(X, Y)的分布律如右，求Z=X+Y的分布律。

Y \ X	-1	0	1
0	1/4	0	1/4
1	0	1/2	0

解：Z 的所有可能取值 -1,0,1,2

$$P\{Z=-1\}=P\{X=-1,Y=0\}=1/4$$

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=-1,Y=1\}=0+0=0$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=1/4+1/2=3/4$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=0$$

故Z 的分布律为

Z	-1	0	1	2
P	1/4	0	3/4	0

☞二维**连续型**RV（X,Y）的函数$Z=g(X,Y)$的分布

已知(X,Y)的PDF为$f(x,y)$，求 Z的分布有2种方法：**分布函数法**(本节重点)和**公式法**(略)。

分布函数法

$$(1)\ F_Z(z) \xlongequal{\text{CDF定义}} \mathrm{P}\{Z \le z\} = \mathrm{P}\{g(X,Y) \le z\}$$

$$\xlongequal{\text{等价于}} \mathrm{P}\left\{(X,Y) \in \left\{(x,y) \middle| g(x,y) \le z\right\}\right\}$$

$$= \iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$(2)\ f_Z(z) = F_Z'(z)$$

本节仅就几个具体函数来讨论RV函数的分布

和的分布 $Z = X + Y$

商的分布 $Z = X / Y$

积的分布 $Z = XY$

极值分布 $M = \mathrm{Max}(X, Y)$，$N = \mathrm{Min}(X, Y)$

一、和的分布

设连续型RV (X,Y) 的PDF为$f(x,y)$，求$Z=X+Y$的PDF

$$(1)\ F_Z(z)=P\{Z\le z\}$$

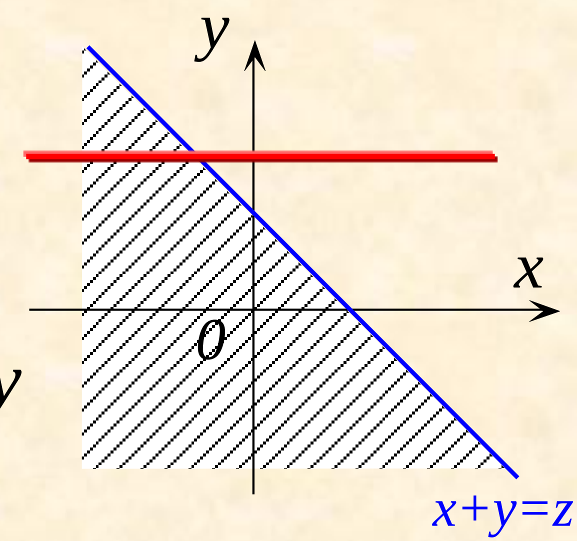
$$=P\{X+Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

积分域

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

z的积分上限函数



于是$Z = X + Y$的PDF为

(2) $f_Z(z) = F_Z'(z)$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\right)$$

积分上限
函数求导

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\right]\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\frac{\mathrm{d}(z-y)}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y$$

Z = *X* + *Y* 的PDF为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y$$

或 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$$

x与y的对称性

特别地，当*X* 和 *Y* 独立时，且*X* 和 *Y* 的边缘PDF分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，则上两式可化为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\,f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

f_X 和 f_Y 的卷积公式

记为 $f_X * f_Y$

P88习题33给出了离散型二维RV的卷积公式

设X与Y相互独立，其分布律分别为

$$\mathrm{P}\{X=k\}=p(k),k=0,1,2,\cdots$$

$$\mathrm{P}\{Y=r\}=q(r),r=0,1,2,\cdots$$

$Z=X+Y$的分布律为

$$\mathrm{P}\{Z=i\}=\sum_{k=0}^{i}p(k)q(i-k),i=0,1,2,\cdots$$

例2. 设X和Y独立，均服从$N(0,1)$,求$Z=X+Y$的PDF.

解：利用卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{代PDF}}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

合并指数项且配平方

$$-(x^2-zx+\frac{z^2}{2})=-(x-\frac{z}{2})^2-\frac{z^2}{4}$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{令 } t=x-\frac{z}{2}}{=\!=\!=} \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

接上 $f_Z(z)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}e^{-\frac{(t-0)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}dt$$

$N\left(0,\left(1/\sqrt{2}\right)^2\right)$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{(z-0)^2}{2\left(\sqrt{2}\right)^2}}$$

$N(0,2)$

所以$Z=X+Y\sim N(0,2)$

重要结论

设n个RV $X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，则

1. 若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$，则$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$

2. $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right), a_i\text{不全为0。}$$

3. 若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1,2$，则$X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

重要结论

4. 若$X_i \sim b(n_i, p)$, 则$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim b\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$

5. $X_i \sim \pi(\lambda_i)$, 则$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \pi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$

6. 若$X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, 则$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta\right)$

由上可知：正态、二项、泊松、Γ分布具有可加性。

补 充

①Γ分布

RV具有PDF

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x>0\\ 0, & else\end{cases}$$

其中常数$\alpha>0,\beta>0,$称X服从参数为α和β的Γ分布,

记为$X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$.

补 充

② Γ函数 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$

Γ函数特性

脱壳性 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

特别地 当n为自然数时, 有 $\Gamma(n+1)=n!$

$$\Gamma(2)=\Gamma(1)=1,\quad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\begin{cases}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots3\cdot2\cdot1\cdot1, & n\text{为偶数}\\ \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

$Z = X + Y$ 的PDF为 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,\mathrm{d}y$$

或 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x$$

$Z = X - Y$ 的PDF

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y, y)\,\mathrm{d}y$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z)\,\mathrm{d}x$$

自学

特别地，当X 和 Y 独立时，且X 和Y 的边缘PDF分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，则上两式可简化。

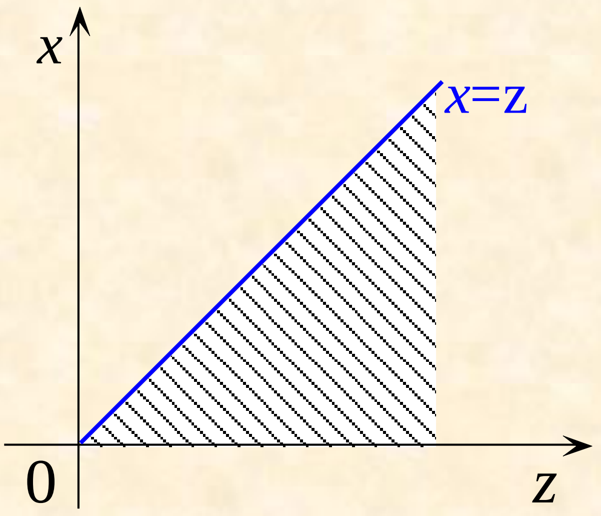
例3 设X_1与X_2相互独立，且$X \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$，$Y \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$，

试证：$Z = X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

证：需要求Z的PDF，故利用卷积公式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \mathrm{d}x$$

易知当$\begin{cases} x > 0 \\ z - x > 0 \end{cases}$ 即$\begin{cases} x > 0 \\ x < z \end{cases}$



时，被积函数不等于零。

于是当$z \leq 0$，$f_Z(z) = 0$；

当z>0时，故利用卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

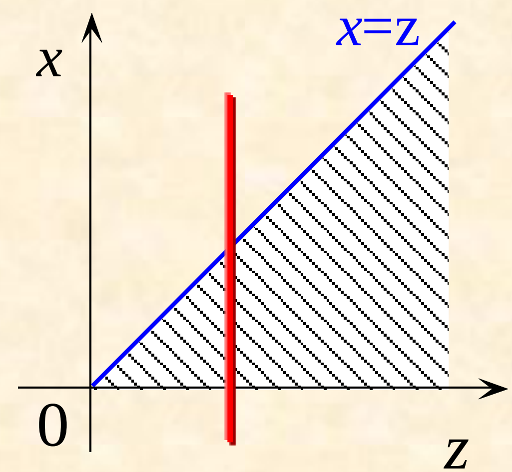
$$\overset{\text{代PDF}}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}x^{\alpha_1-1}e^{-\beta x}\frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}(z-x)^{\alpha_2-1}e^{-\beta(z-x)}\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{积分限}}{=\!=\!=}\frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}e^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}\mathrm{d}x$$

积分域$\begin{cases} x>0 \\ z-x>0 \\ z>0 \end{cases}$

$$\overset{\text{令}x=zt}{=\!=\!=}\frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}e^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^1 (zt)^{\alpha_1-1}(z-zt)^{\alpha_2-1}z\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{整理}}{=\!=\!=}\frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}e^{-\beta z}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\mathrm{d}t$$



$$A?$$

与z有关

$z>0$时，$f_Z(z)=\dfrac{\boxed{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}e^{-\beta z}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\mathrm{d}t=Ae^{-\beta z}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}$

由于$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Z(z)\mathrm{d}z=\int_0^{+\infty}Ae^{-\beta z}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{d}z$

$$=\frac{A}{\beta}\int_0^{+\infty}\underline{e^{-\beta z}(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{d}(\beta z)}=\frac{A}{\beta}\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$\boxed{\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\alpha-1}\mathrm{d}x}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\beta z}, & z>0\\ 0, & else\end{cases}$$

$$Z=X+Y\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$$

得证

二、极值分布(极大值或极小值的分布)

设RV X 和 Y 相互独立，其CDF分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，讨论$M=\mathrm{Max}(X, Y)$，$N=\mathrm{Min}(X, Y)$的分布。

说 明

$M=\mathrm{Max}(X, Y)$表示当RV $X=x$, $Y=y$时，

x和 y 中最大值就是RV $M=\mathrm{Max}(X, Y)$ 的取值；

而x和 y 中最小值就是RV $N=\mathrm{Min}(X, Y)$ 的取值。

1. M =Max（X, Y）的分布

$$F_M(z) \xlongequal{\text{CDF定义}} P\{M \le z\}$$

$$\xlongequal{\text{等价于}} P\{X \le z, Y \le z\}$$

$$\xlongequal{\text{X,Y独立}} P\{X \le z\} P\{Y \le z\}$$

即有 $$F_M(z) = F_X(z) F_Y(z)$$

2. N =Min(X, Y)的分布

$$F_N(z) \xlongequal{\text{CDF定义}} P\{N \le z\}$$

$$= 1 - P\{N > z\}$$

$$\xlongequal{\text{等价于}} 1 - P\{X > z, Y > z\}$$

$$\xlongequal{X,Y\text{独立}} 1 - P\{X > z\} P\{Y > z\}$$

即有 $$F_N(z) = 1 - \left[1 - F_X(z)\right]\left[1 - F_Y(z)\right]$$

上述结果可推广至*n*个相互独立的RV情形

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，各自的CDF为$F_{X_i}(x_i)$

$M=\mathrm{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$， $N=\mathrm{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$$F_M(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$$F_N(z)=1-\left[1-F_{X_1}(z)\right]\left[1-F_{X_2}(z)\right]\cdots\left[1-F_{X_n}(z)\right]$$

特别地，当$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立且相同CDF $F(x)$时

$$F_M(z)=\left[F(z)\right]^n \qquad F_N(z)=1-\left[1-F(z)\right]^n$$

应 用　串、并联系统寿命的分布

实际背景

$M = \text{Max}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的分布：M 相当于一个并联系统的寿命，这个并联系统由n个相互独立工作的元件并联而成，则该并联系统的寿命即为所有元件中最长的寿命，故M的分布相当于该并联系统的寿命。

$N = \text{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的分布：N 相当于一个串联系统的寿命，这个串联系统由n个相互独立工作的元件串联而成，则该串联系统的寿命即为所有元件中最短的寿命，故N的分布相当于该串联系统的寿命。

由于普通系统往往是有串并联系统混合而成，故知道了M和N的分布就可以方便地来求一般系统的寿命分布。

三、商、积的分布

设RV X 和 Y 的JPDF为$f(x,y)$，各自的边缘PDF分别为$f_X(x)$和$f_Y(y)$，则

1. $Z=\dfrac{X}{Y}$的PDF为

$$f_{\frac{X}{Y}}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(yz,y)\,\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{X,Y独立}}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f_X(yz)\,f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

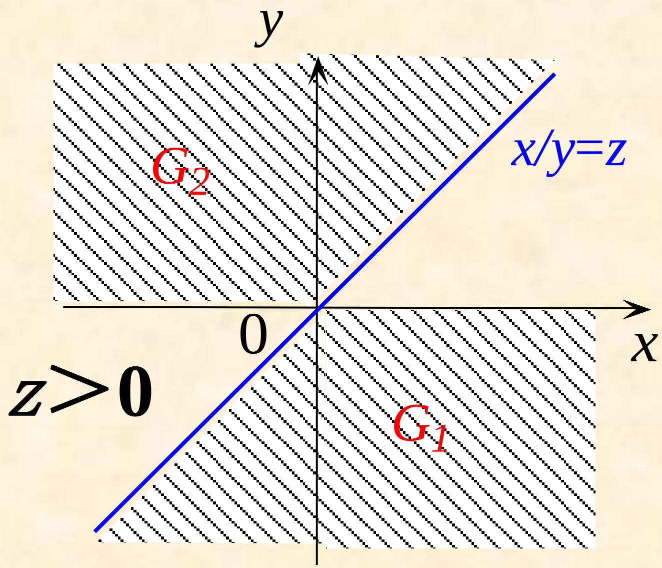
$$f_{\frac{X}{Y}}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(yz,y)\,\mathrm{d}y$$

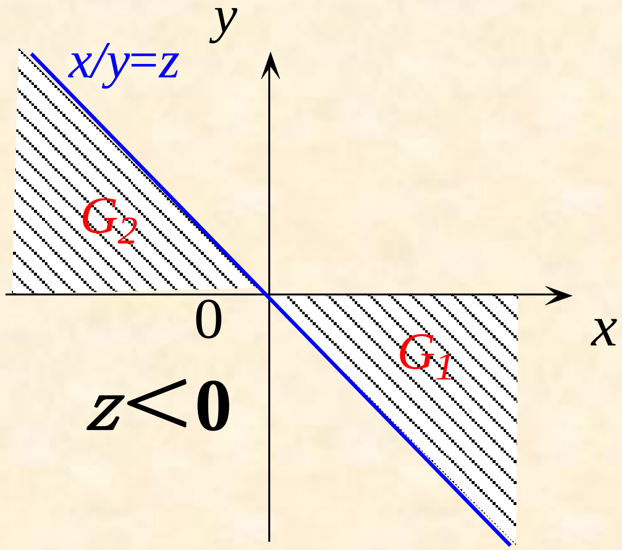
证: Z =X / Y 的CDF为

$$F_Z(z)\xlongequal{\text{CDF定义}}\mathrm{P}\{Z\le z\}=\mathrm{P}\{X/Y\le z\}$$

$$=\iint_{x/y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{G_1\cup G_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

积分域为 $G_1: y<0, x\ge zy \cup G_2: y>0, x\le zy,\ G_1\cap G_2=\varnothing$





$$F_Z(z) \overset{\text{接上}}{=\!=} \iint_{G_1} + \iint_{G_2}$$

$$G_1 \cap G_2 = \varnothing$$

$$G_1: y<0, x \geq zy \cup G_2: y>0, x \leq zy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \left(\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + \int_{0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$$

积分下限函数求导

积分上限函数求导

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left[\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y + \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left[\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(yz, y)(-y)\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{+\infty} f(yz, y)(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{整理}}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y)\,\mathrm{d}y$$

得证

$$f_{\frac{X}{Y}}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\, f(yz,y)\,\mathrm{d}y$$

2. $Z=XY$ 的PDF为

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f\left(\frac{z}{y},y\right)\mathrm{d}y$$

$$\overset{X,Y\text{独立}}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f_X\left(\frac{z}{y}\right)f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

利用X与Y的对称性，则有

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{X,Y\text{独立}}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)\,f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$$

例4 设X与Y分别表示两只不同型号灯泡的寿命，X与Y相互独立，它们的**PDF**分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & else \end{cases}, \quad f_Y(x)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0 \\ 0, & else \end{cases}$$

试求：$Z=X/Y$的**PDF**。

解：利用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f_X(yz)\,f_Y(y)\,\mathrm{d}y$

$$\underline{\underline{\text{代入}}}\begin{cases} \int_0^{\infty} y\cdot e^{-yz}\cdot 2e^{-2y}\mathrm{d}y, & z>0 \\ 0, & z<0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} y>0 \\ yz>0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \int_0^{\infty} 2ye^{-y(2+z)}\mathrm{d}y, & z>0 \\ 0, & z<0 \end{cases} \underline{\underline{\text{分部积分}}} \begin{cases} \dfrac{2}{(2+z)^2}, & z>0 \\ 0, & z<0 \end{cases}$$

小结

- 本节讨论了两个RV函数的分布的求解方法，即：分布函数法

- 利用此方法给出了两个RV的和、积、商、极值的分布的求解公式；具体在应用这些公式时，最关键的问题是确定积分域：

$$\begin{cases} f(x,y)>0\text{区域} \\ z=g(X,Y)\text{取值} \end{cases}$$

作业

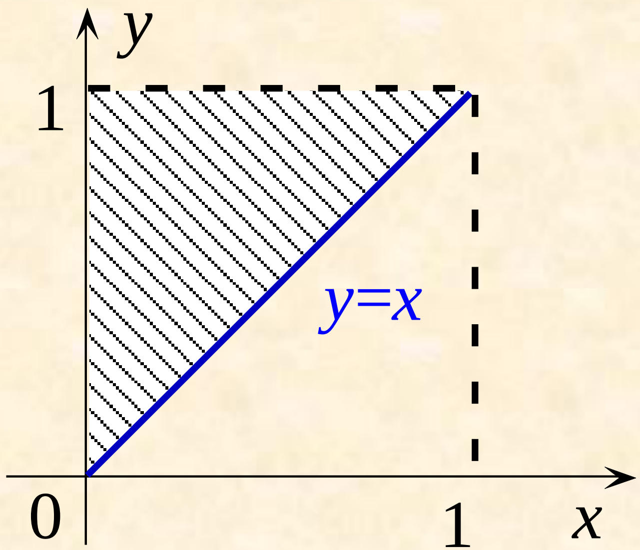
Pages 87-89：

第23, 24, 30, 33, 35, 36题

例5（补充） 二维**RV**(X,Y)的**PDF**为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

求$F(x,y)$。



解: 利用CDF定义 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

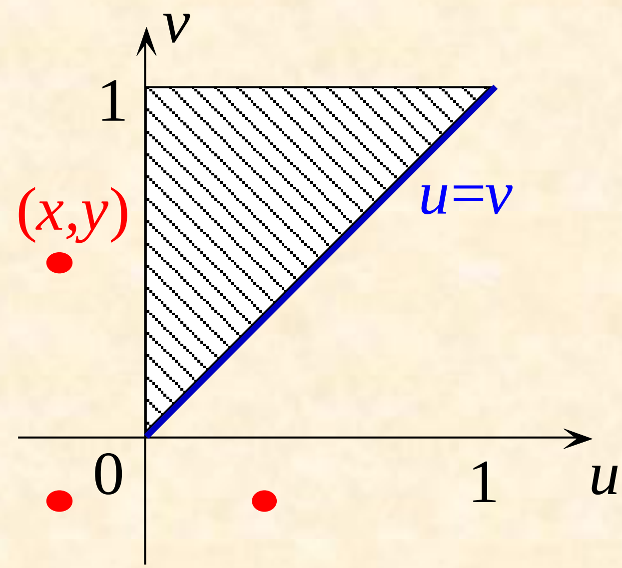
关键是确定积分域:

依据点$(x,y)\in R^2$与区域 $f(x,y)>0$: $\begin{cases} 0\le x\le y \\ 0\le y\le 1 \end{cases}$

的位置关系分7种情况来讨论。

1)当$x<0$或$y<0$时，

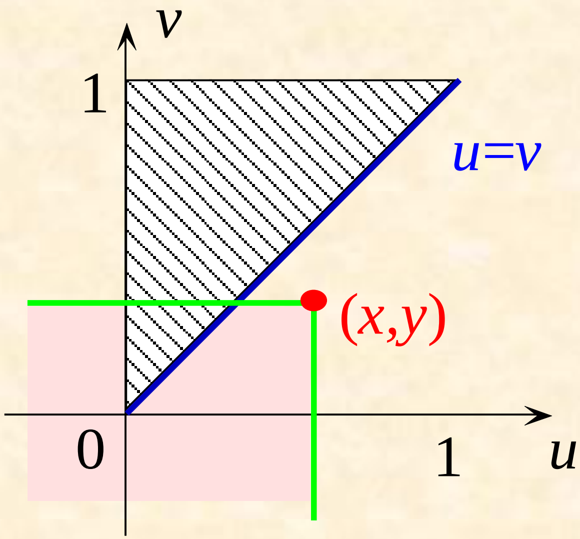
$$F(x,y)=0。$$



2)当$0 \le y \le x < 1$时,

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

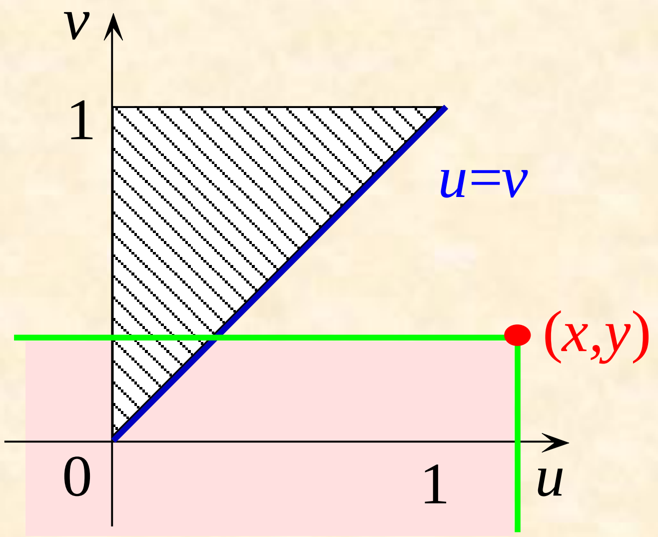
$$= \int_0^y \left[\int_0^v 8uv\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v = y^4$$



3)当$x \ge 1, 0 \le y < 1$时,

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^y \left[\int_0^v 8uv\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v = y^4$$

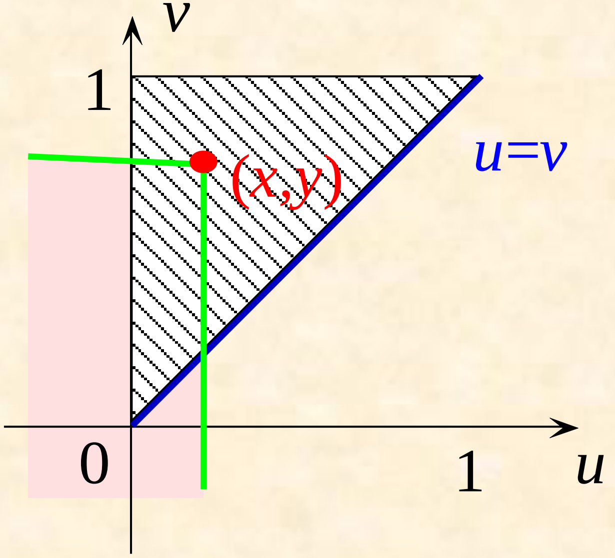


4)当$0 \le x < y < 1$时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_{0}^{x}\left[\int_{u}^{y} 8uv\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u$$

$$=2x^2y^2-x^4$$

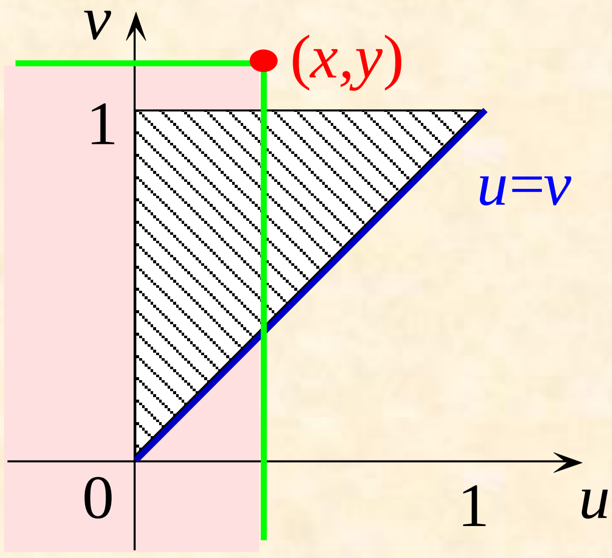


5)当$0 \le x < 1, y \ge 1$时,

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

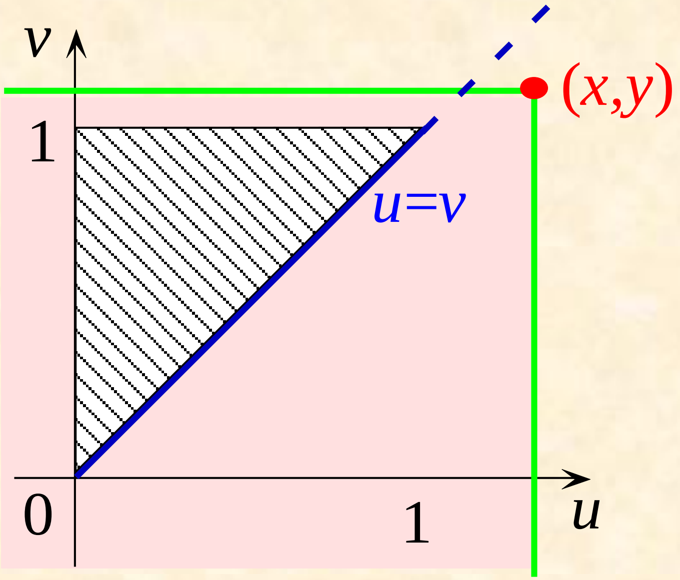
$$= \int_0^x \left[\int_u^1 8uv\,\mathrm{d}v\right]\,\mathrm{d}u$$

$$= 2x^2 - x^4$$



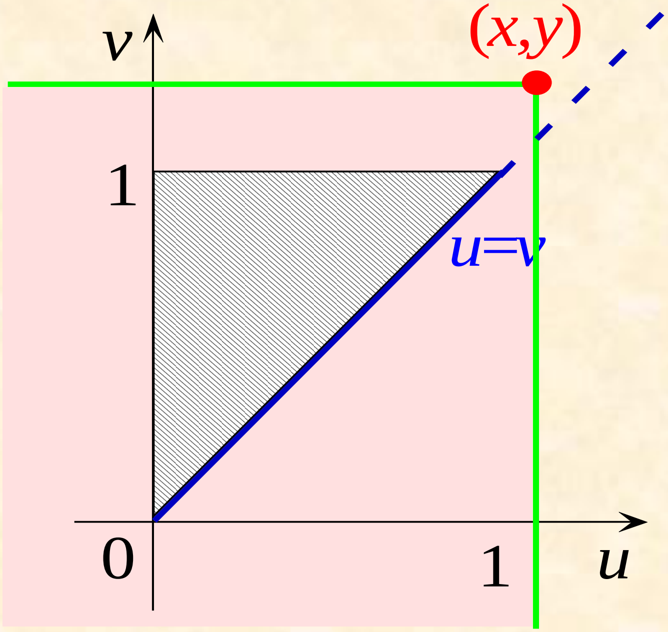
6)当$1 \le y \le x$时，

$$F(x,y)=1。$$



7)当$1 \le x < y$时，

$$F(x,y)=1。$$



$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0 \text{ or } y<0 \\ y^4, & 0\le y\le x<1 \\ y^4, & x\ge 1, 0\le y<1 \\ 2x^2y^2-x^4, & 0\le x<y<1 \\ 2x^2-x^4, & 0\le x<1, y\ge 1 \\ 1, & 1\le y\le x \\ 1, & 1\le x<y \end{cases}$$

$$\text{合并整理为 } F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0 \text{ or } y<0 \\ y^4, & 0\le y<1, y\le x \\ 2x^2y^2-x^4, & 0\le x<y<1 \\ 2x^2-x^4, & 0\le x<1, y\ge 1 \\ 1, & x\ge 1, y\ge 1 \end{cases}$$

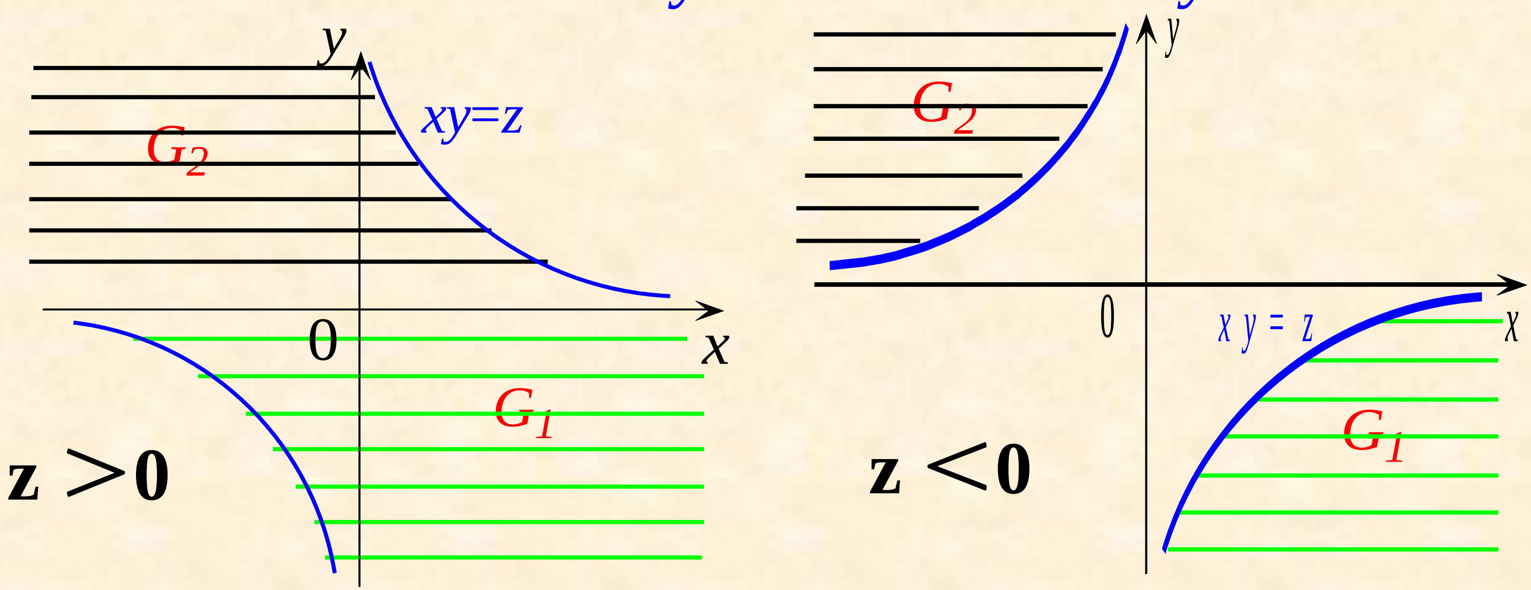
补充证明 Z =*XY* 的PDF

证(略): *Z*=*XY* 的CDF为

$$F_Z(z) \xlongequal{\text{CDF定义}} \mathrm{P}\{Z \le z\} = \mathrm{P}\{XY \le z\} = \iint\limits_{xy\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{G_1 \cup G_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{G_1} + \iint\limits_{G_2}$$

积分域为 $G_1: y<0, x \ge \dfrac{z}{y} \bigcup G_2: y>0, x \le \dfrac{z}{y},\ G_1 \bigcap G_2 = \varnothing$



$$F_Z(z) \xlongequal{\text{接上}} \iint_{G_1} + \iint_{G_2}$$

$$G_1 \cap G_2 = \varnothing$$

$$G_1: y<0, x \ge \frac{z}{y} \cup G_2: y>0, x \le \frac{z}{y}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \left(\int_{\frac{z}{y}}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + \int_{0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\frac{z}{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$$

积分下限函数求导

积分上限函数求导

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left[\int_{\frac{z}{y}}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y + \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left[\int_{-\infty}^{\frac{z}{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f\left(\frac{z}{y}, y\right)\left(-\frac{1}{y}\right) \mathrm{d}y + \int_{0}^{+\infty} f\left(\frac{z}{y}, y\right)\left(\frac{1}{y}\right) \mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{整理}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f(yz, y)\,\mathrm{d}y$$ 得证