运 动 学

点的复合运动

西北工业大学
主讲　朱西平

§3–1　基本概念

- 两种参考系
- 三种运动
- 牵连点•动点和动系的选择

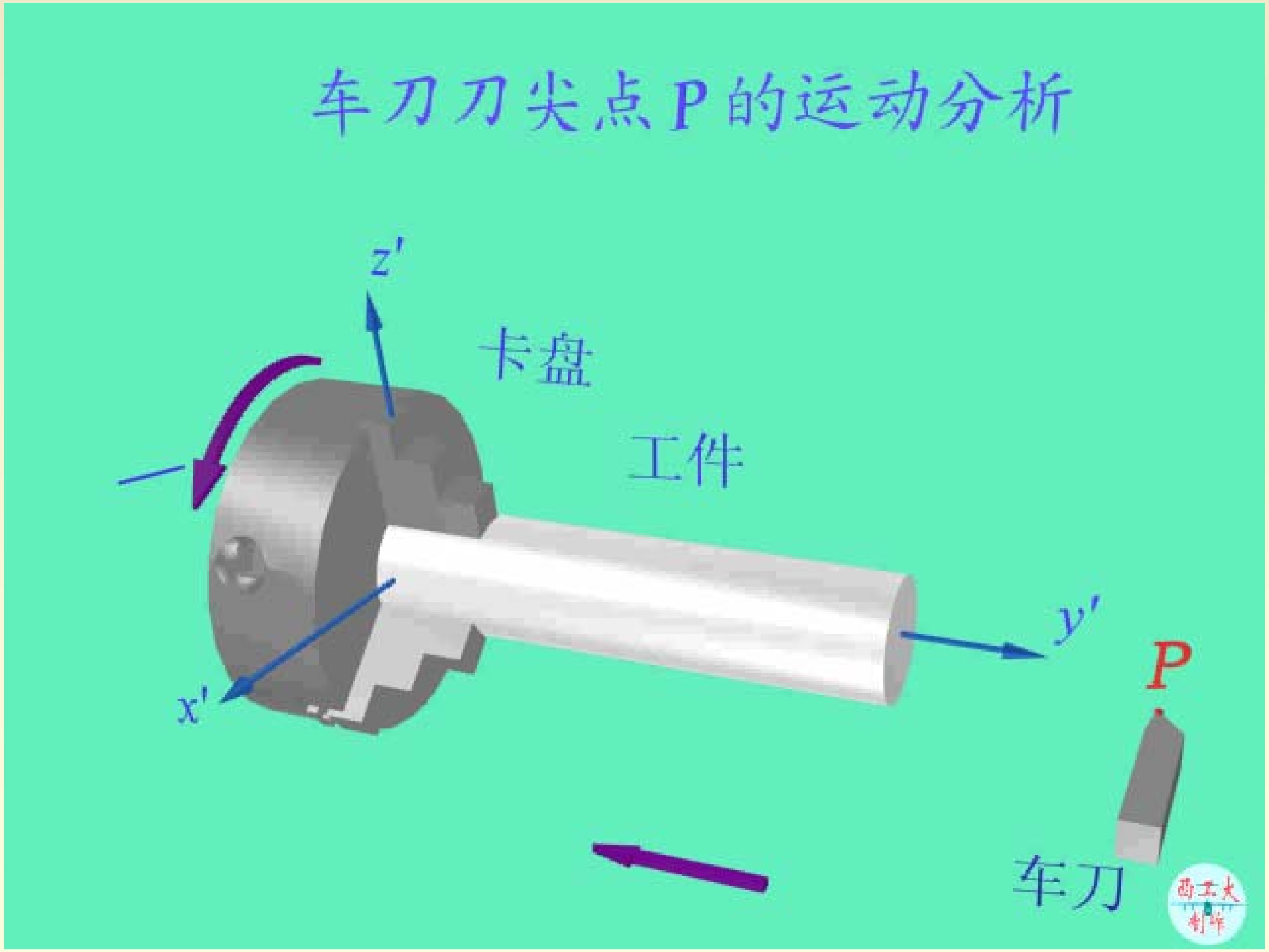
§3–1 基 本 概 念

1.两种参考系

物体的运动的描述结果与所选定的参考系有关。

同一物体的运动，在不同的参考系中看来，可以具有极为不同的运动学特征（具有不同的轨迹、速度、加速度等）。

实例分析



实例分析

§3–1 基本概念

在实际问题中，往往不仅要知道物体相对地球的运动，而且有时要知道被观察物体相对与地面运动着的参考系的运动情况。例如在运动着的飞机、车船上观察其他飞机、车船的运动。

在运动学中，所描述的一切运动都只具有相对的意义。在不同的参考系中观察到的同一物体的不同运动特征之间存在着一定的联系。

本章利用运动的分解、合成的方法对点的速度、加速度进行分析，研究点在不同参考系中的运动，以及它们之间的联系。

§3–1 基 本 概 念

- **两种参考系**

静参考系（定系）：认定不动的参考系。

动参考系（动系）：相对静系运动着的参考系。

2. 三种运动

绝对运动： 动点对于定参考系的运动。

绝对运动轨迹： 动点相对定系的运动轨迹。

相对运动： 动点对于动参考系的运动。

相对运动轨迹： 动点相对动系的运动轨迹。

牵连运动： 动参考系对于定参考系的运动。

§3–1 基 本 概 念

● 工程实例

定参考系?

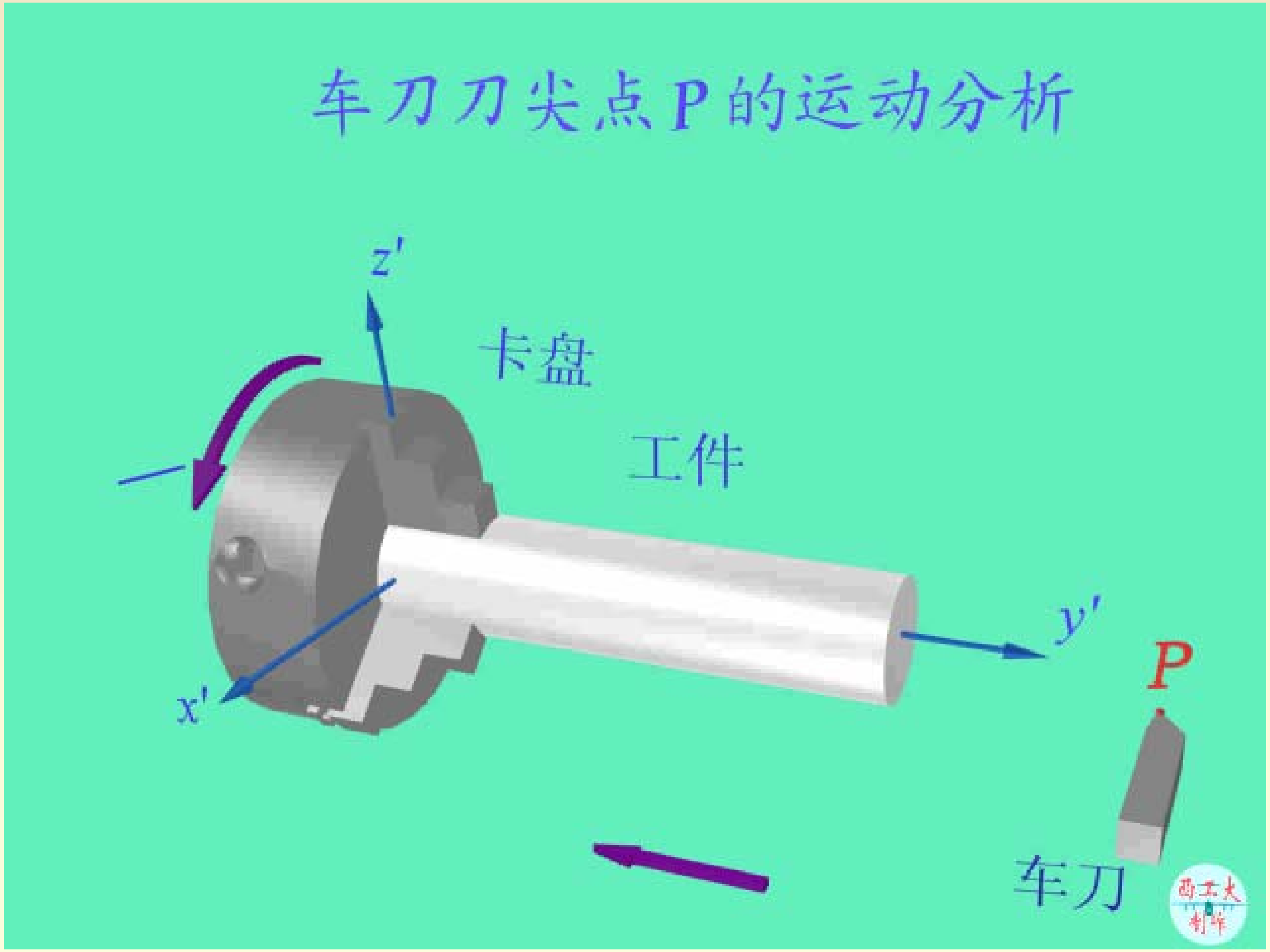
动参考系?

绝对运动?

相对运动?

牵连运动?

工程实例



定参考系？

动参考系？

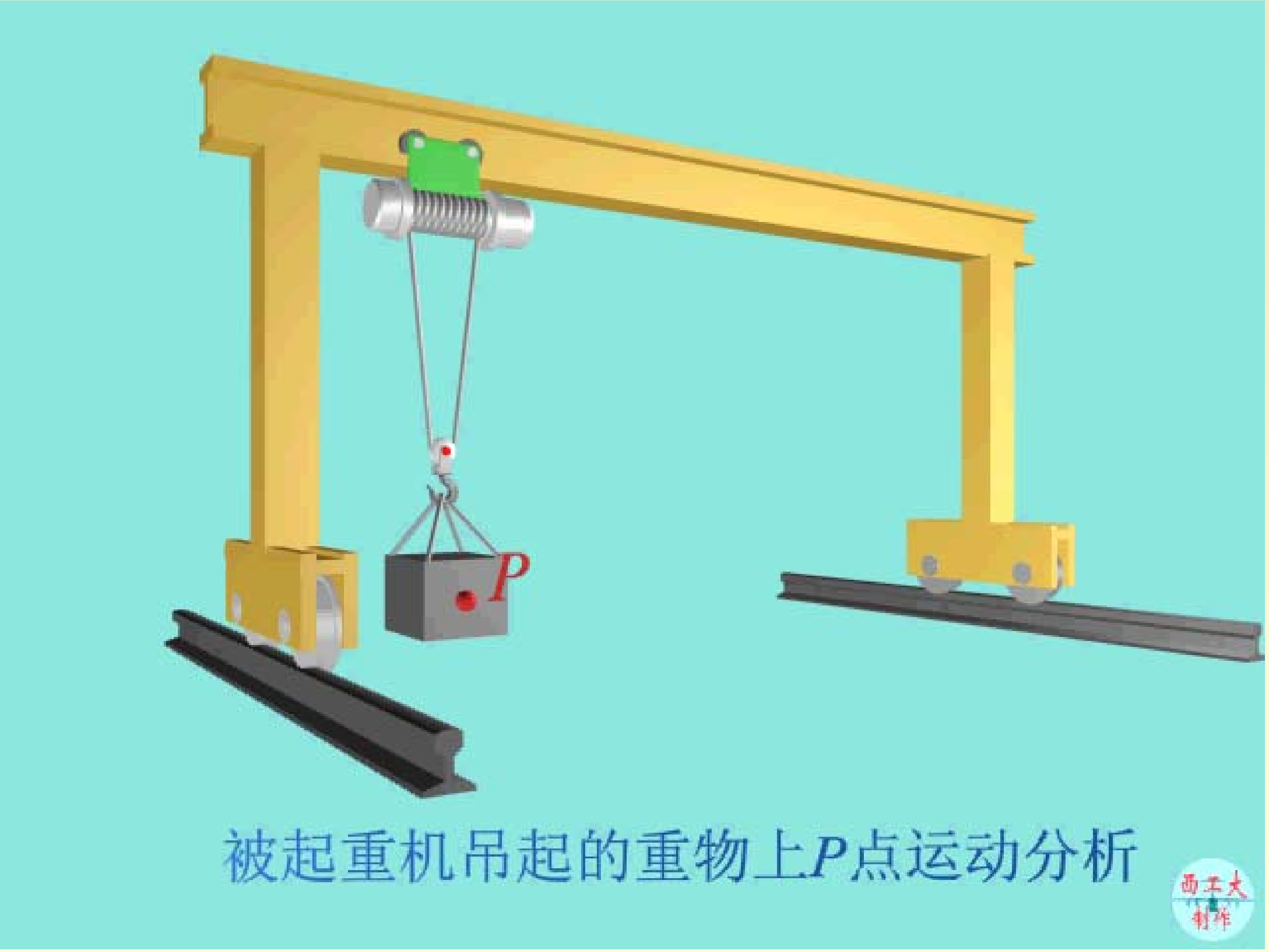
绝对运动？

相对运动？

牵连运动？

§3-1 基本概念

工程实例



大梁不动时

定参考系？

动参考系？

绝对运动？

相对运动？

牵连运动？

§3–1 基 本 概 念

工程实例

定参考系？

动参考系？

绝对运动？

相对运动？

牵连运动？

§3–1 基本概念

工程实例

定参考系？

动参考系？

绝对运动？

相对运动？

牵连运动？

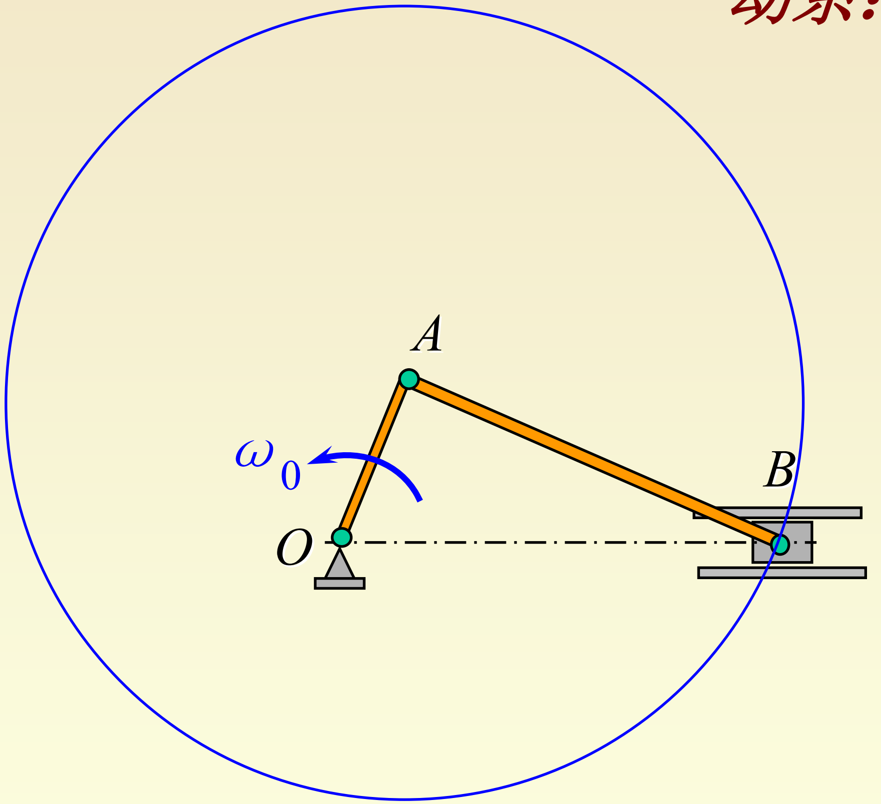
思考题

思考题

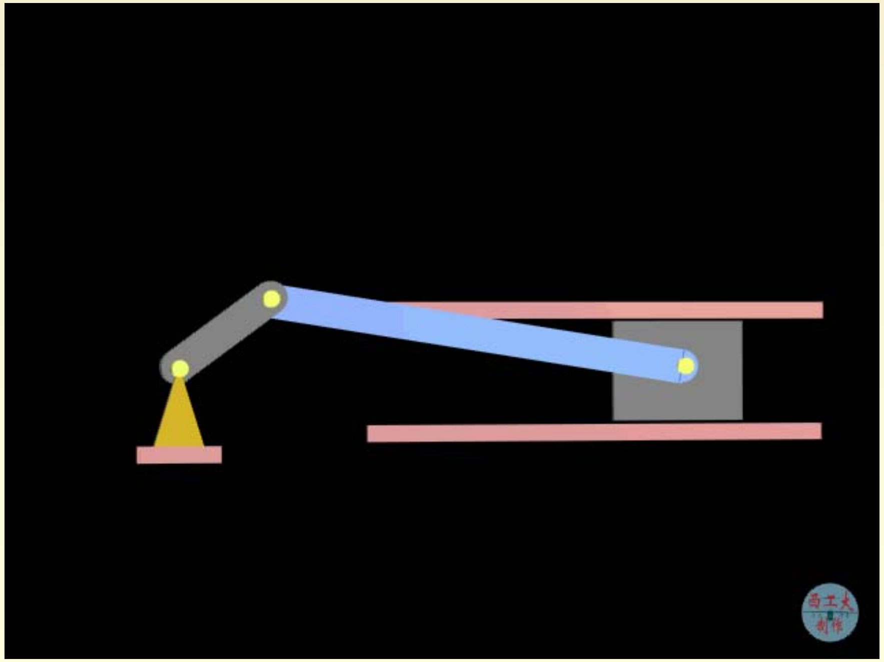
动 点：滑块上B点。 *绝对运动？*

动系：固连曲柄OA。 *相对运动？*

牵连运动？



曲柄—滑块机构



思考题

思考题

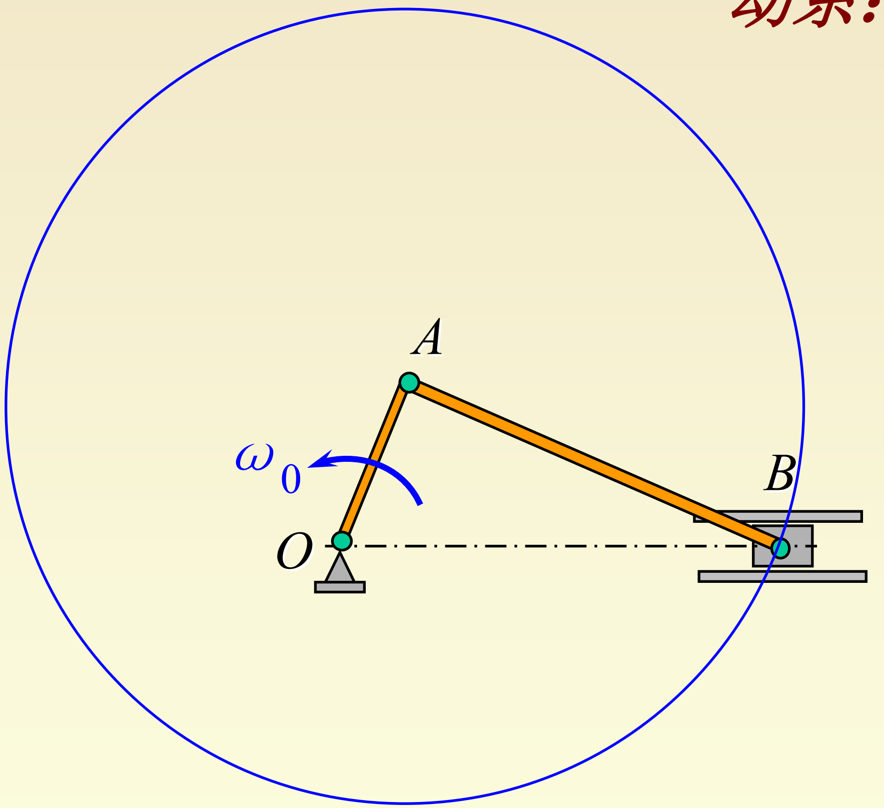
动 点：滑块上B点。

动系：固连曲柄OA。

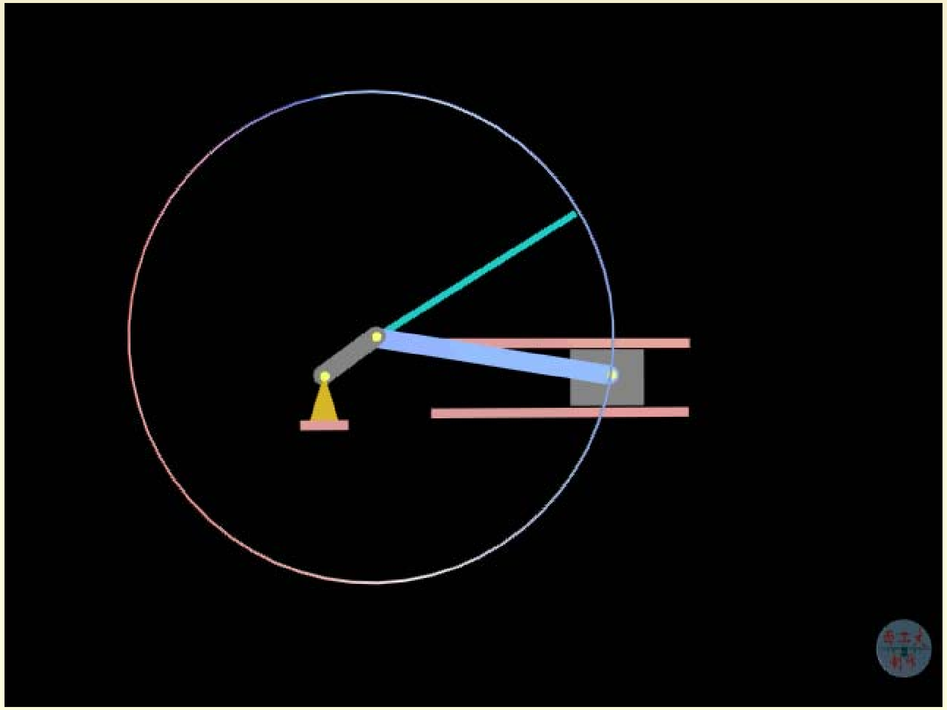
绝对运动？

相对运动？

牵连运动？



曲柄—滑块机构



§3–1 基 本 概 念

● 两点重要结论

◆ 运动的相对性 —— 物体对于不同的参考系，运动各不相同。

◆ 绝对运动与相对运动都是指点的运动； 牵连运动则是刚体的运动。

§3–1 基本概念

● 两点说明

◆ 本章只研究点的运动理论，通过牵连运动来建立绝对运动和相对运动之间的联系，给出这些运动特征量（轨迹、速度、加速度）之间的关系。

◆ 在复合运动的研究中，动点、动参考系的选择是问题的关键。恰当的选择参考系，能把复杂的运动分解为若干种简单运动，或由若干种简单运动组成各种不同的复杂运动。

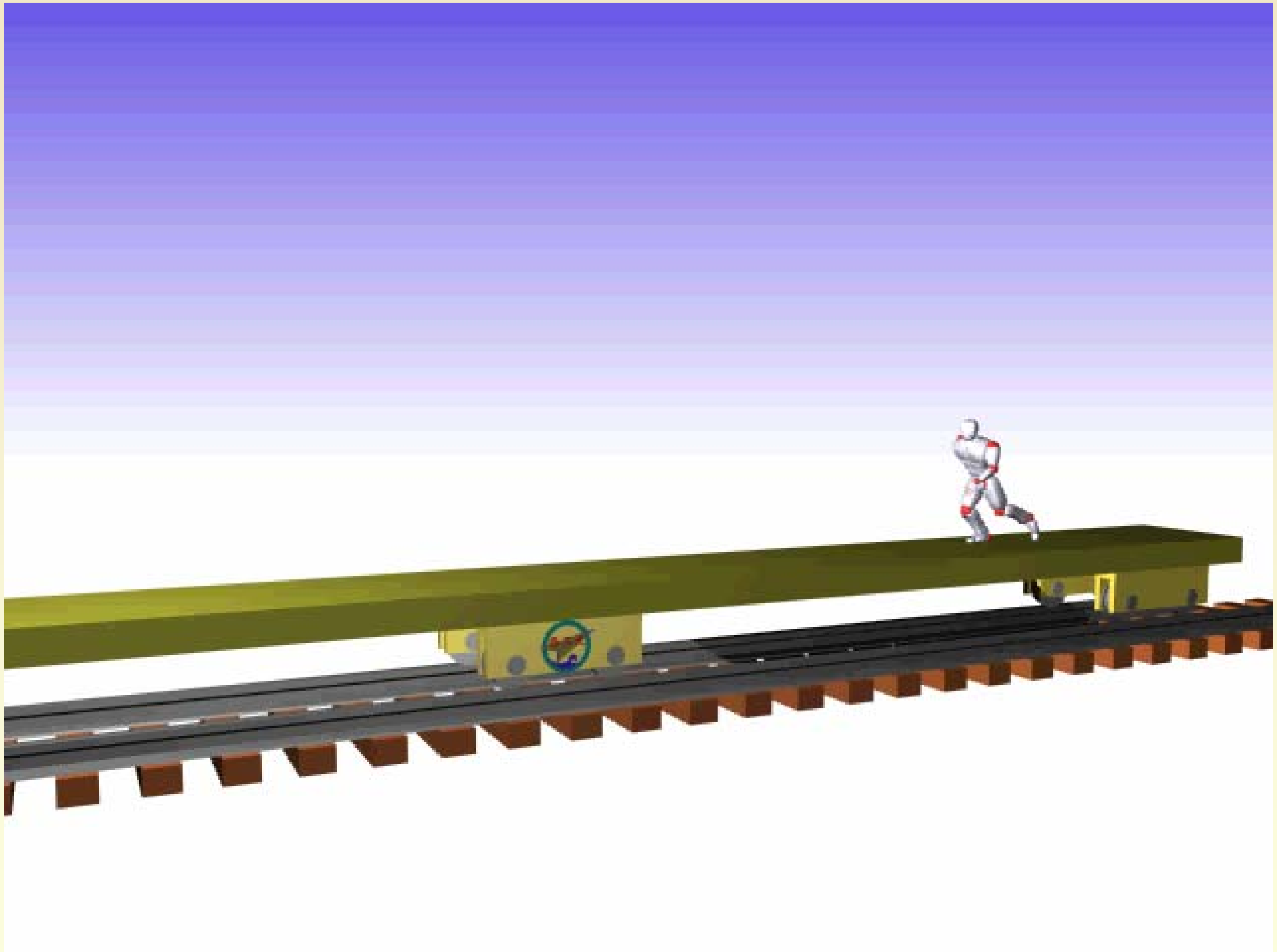
3. 牵连点•动点和动系的选择

● 牵 连 点

牵连运动一方面是动系的绝对运动，另一方面对动点来说起着“牵连”作用。但是带动动点运动的只是动系上在所考察的瞬时与动点相重合的那一点，该点称为瞬时重合点或牵连点。由于相对运动，动点在动系上的位置随时间改变，所以牵连点具有瞬时性。

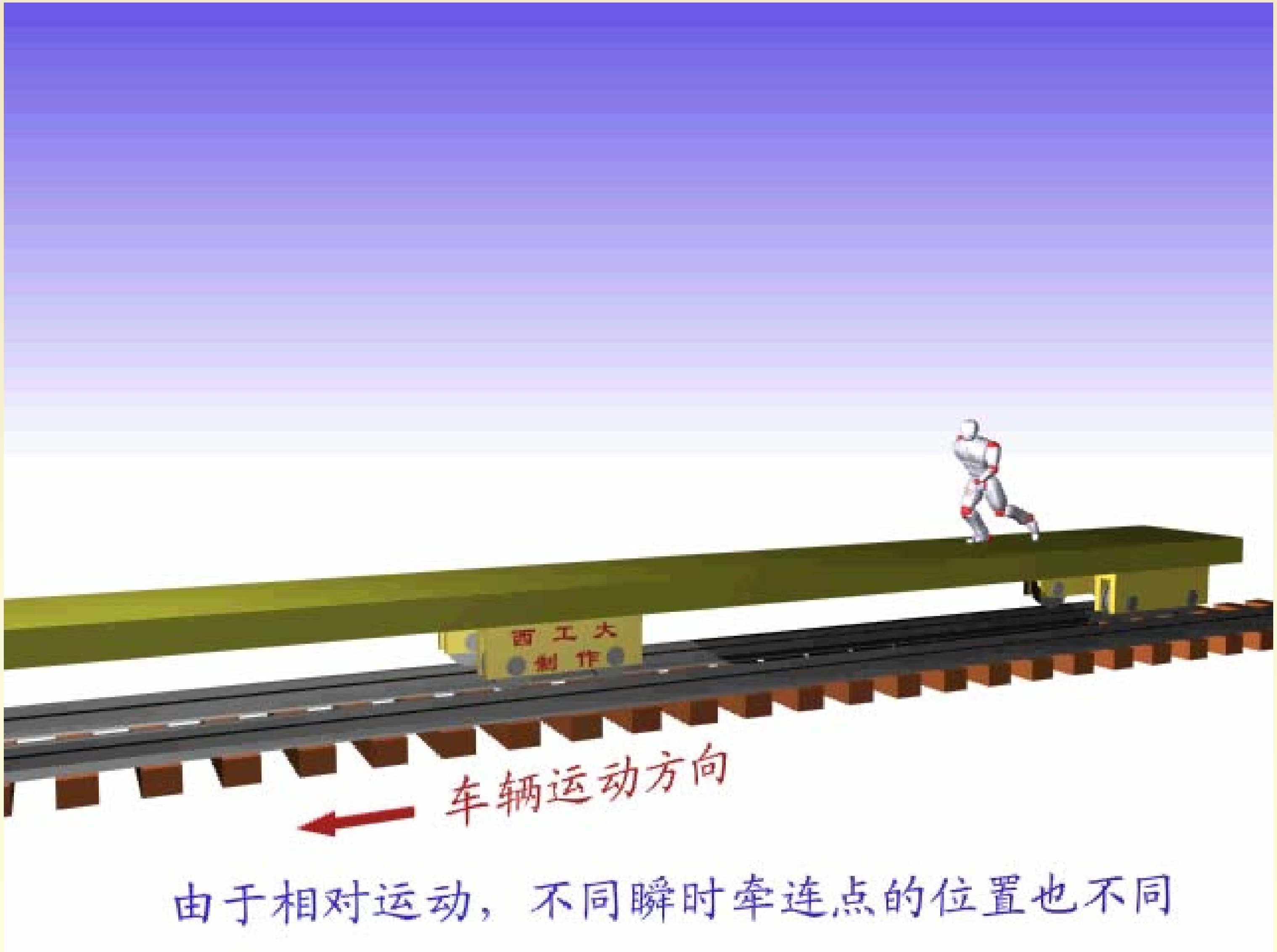
§3–1 基本概念

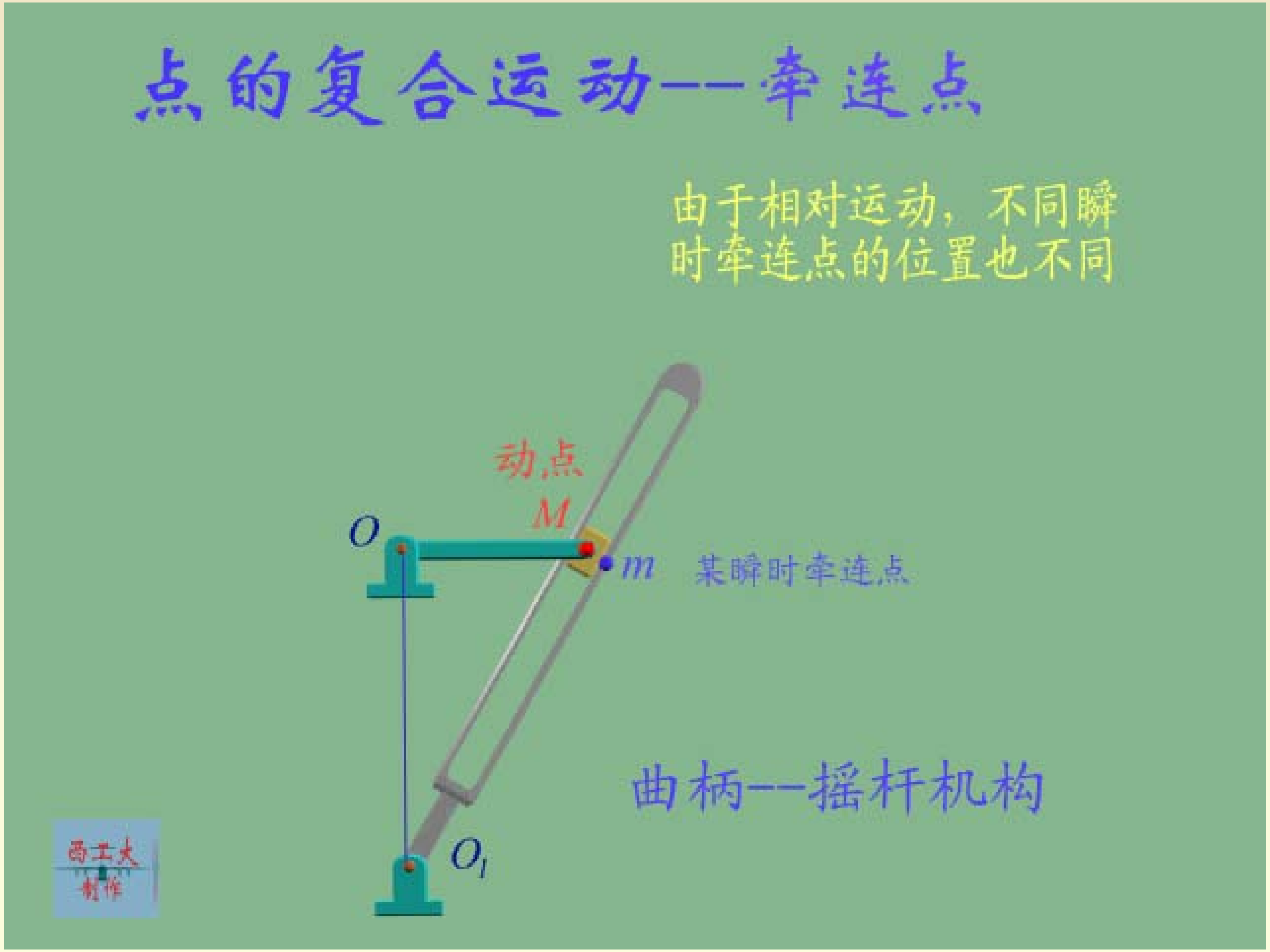
牵连点

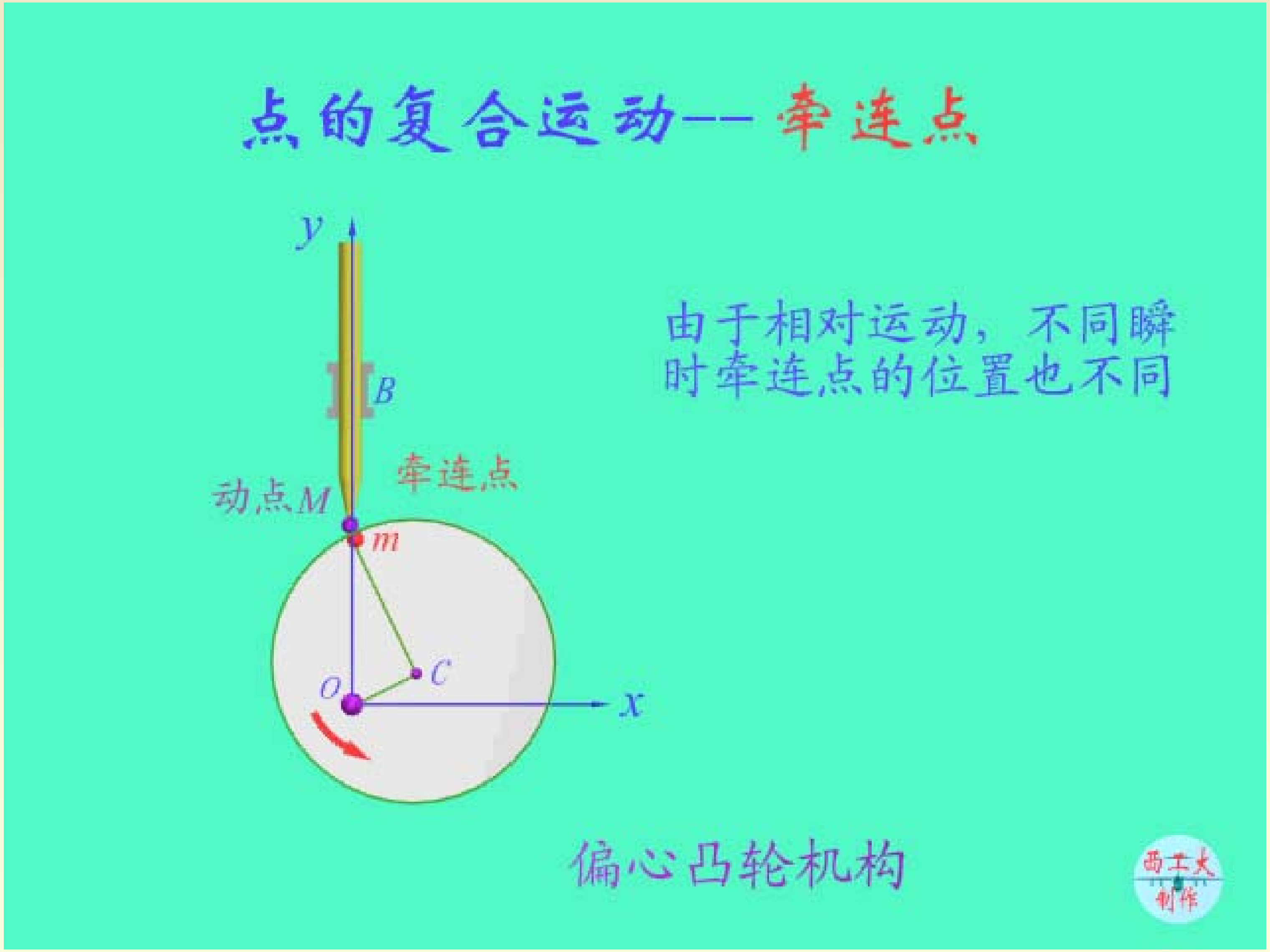


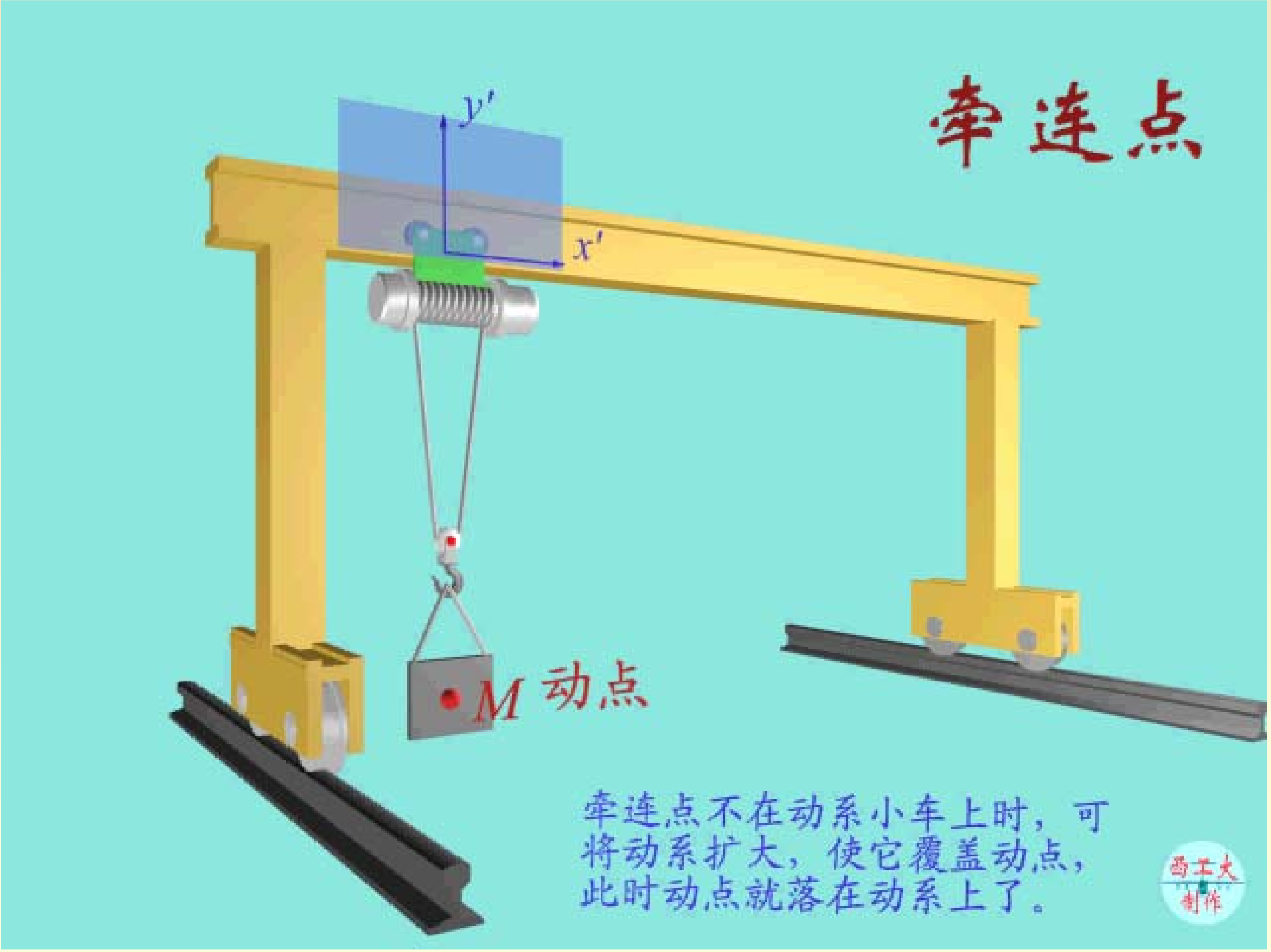
复合运动实例

§3–1 基本概念




点的复合运动——牵连点
由于相对运动，不同瞬时牵连点的位置也不同
动点
M
O
m
某瞬时牵连点
曲柄——摇杆机构
O1
西工大制作


点的复合运动—— 牵连点
由于相对运动，不同瞬
时牵连点的位置也不同
y
B
牵连点
动点M
m
C
O
x
偏心凸轮机构
西工大
制作


牵连点
y′
x′
M 动点
牵连点不在动系小车上时，可
将动系扩大，使它覆盖动点，
此时动点就落在动系上了。
西工大
制作

§3–1 基 本 概 念

● 三种速度

绝对速度v_a ：动点相对定系的速度。

相对速度v_r ：动点相对动系的速度。

牵连速度v_e ：动系上与动点重合的那一点相对定系的速度。

§3–1 基 本 概 念

● 动点和动系的选择

原则： 1. 动点对动系要有相对运动。

2. 动点的相对轨迹要容易确定。

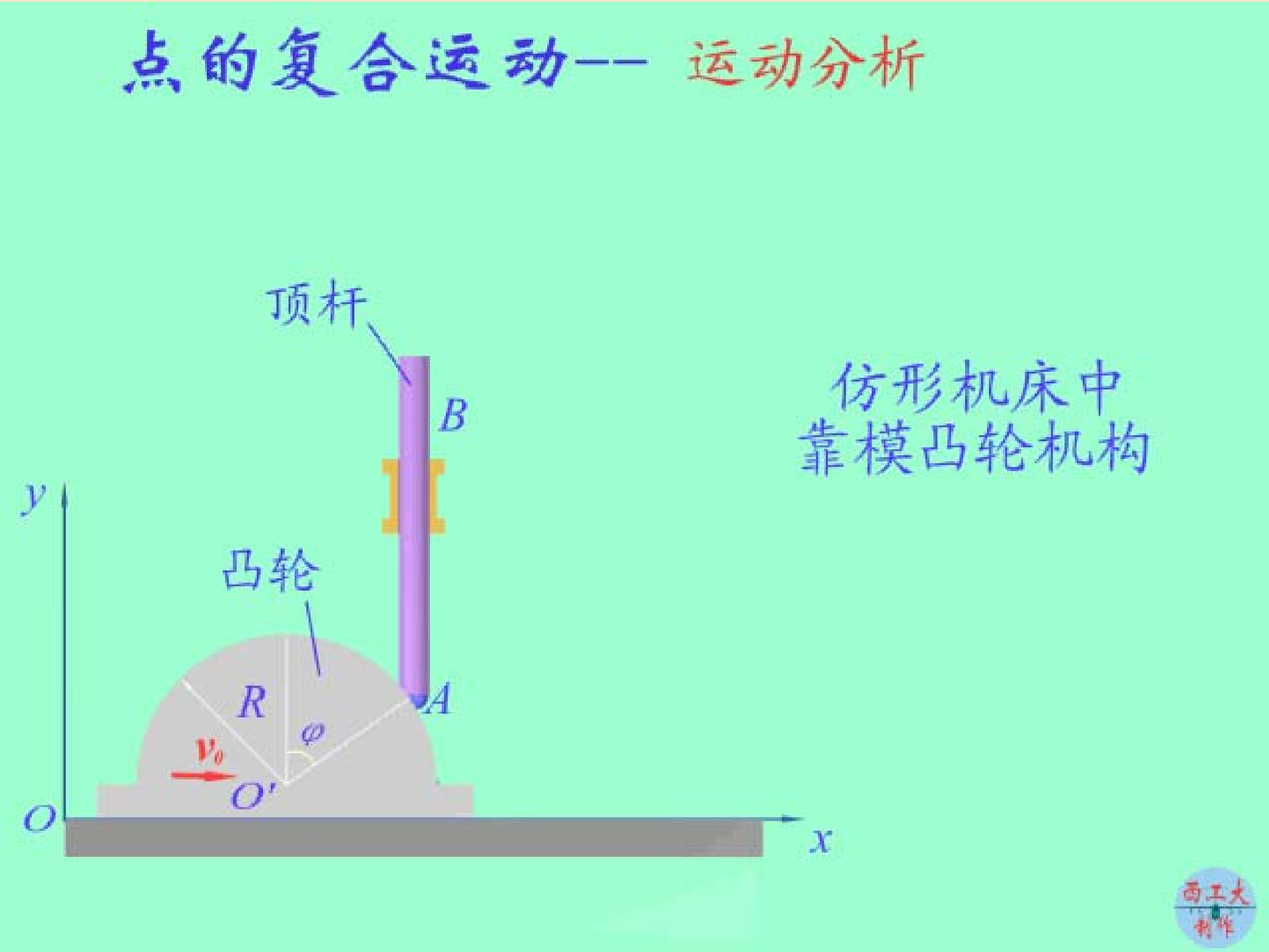
具体选择方法：

1. 选择持续接触点为动点。

2. 动系固连在瞬时重合点所在的物体上。这样相对运动轨迹就很容易确定。

3. 对没有持续接触点的问题，一般不选择接触点为动点。根据选择原则具体问题具体分析。

练习题 1



动　　点？

动参考系？

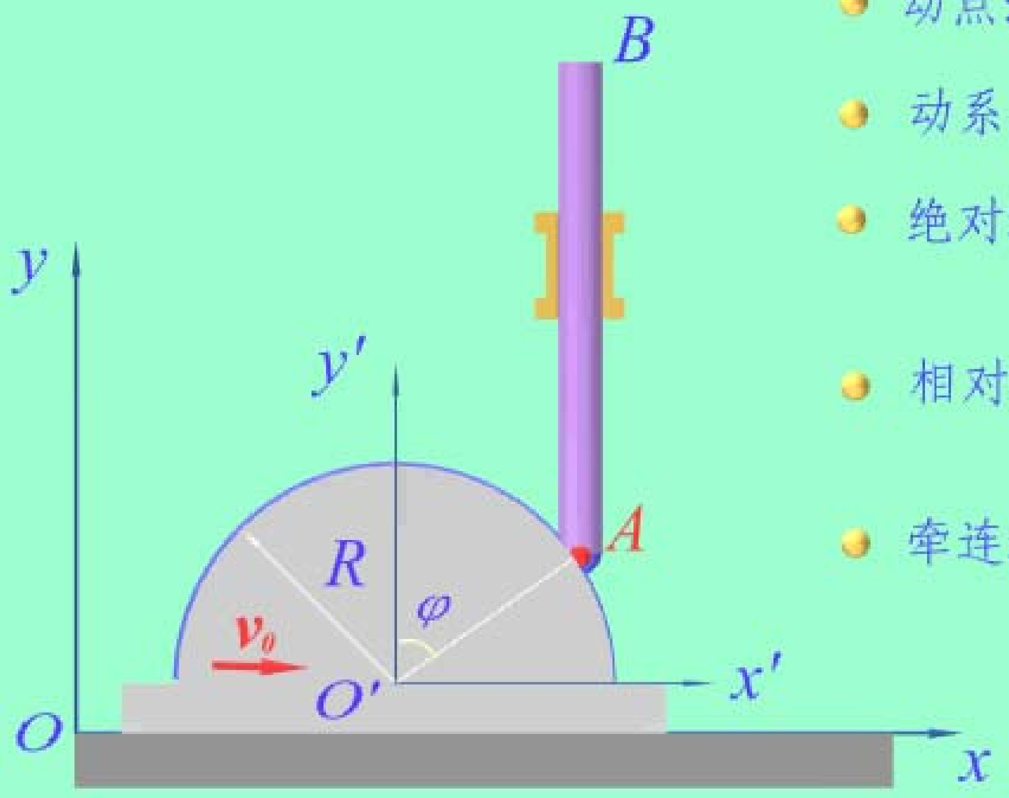
绝对运动？

相对运动？

牵连运动？

练习题1

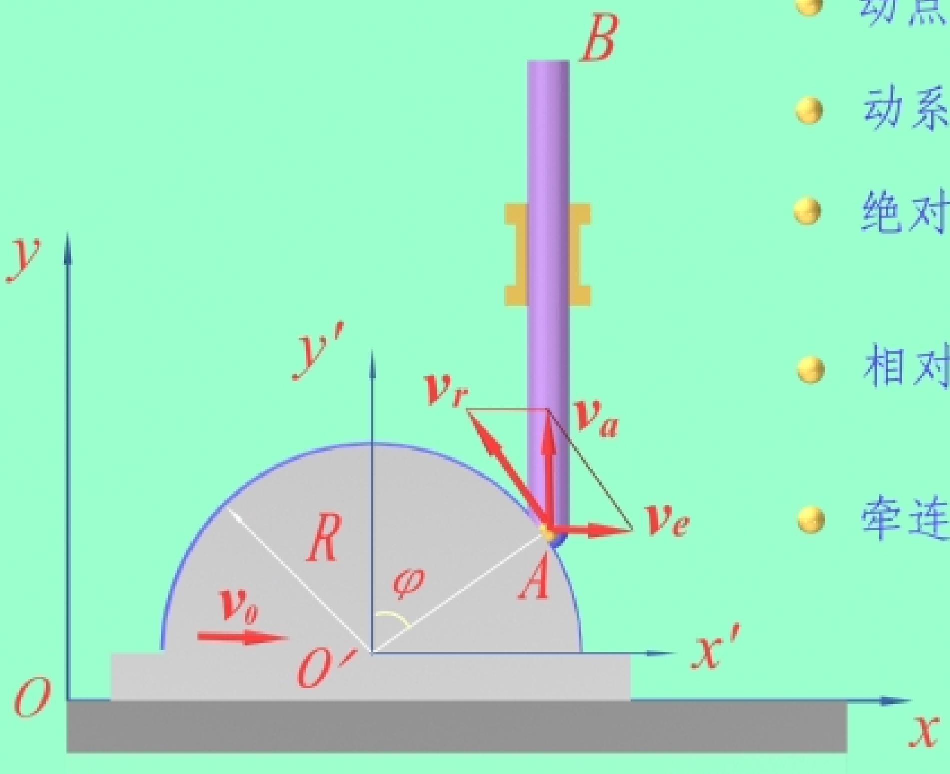
点的复合运动–– 相对运动轨迹



- 动点：顶杆上的点A。
- 动系：凸轮。
- 绝对运动：沿铅垂方向的直线运动。
- 相对运动：沿凸轮轮廓的圆周运动。
- 牵连运动：水平直线平移。

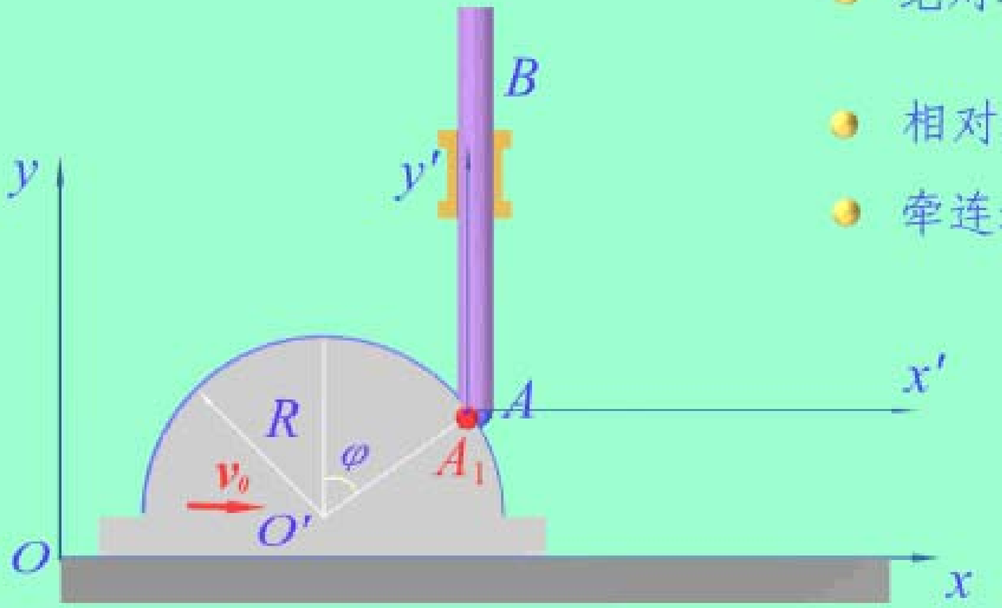
练习题1

点的复合运动——速度分析



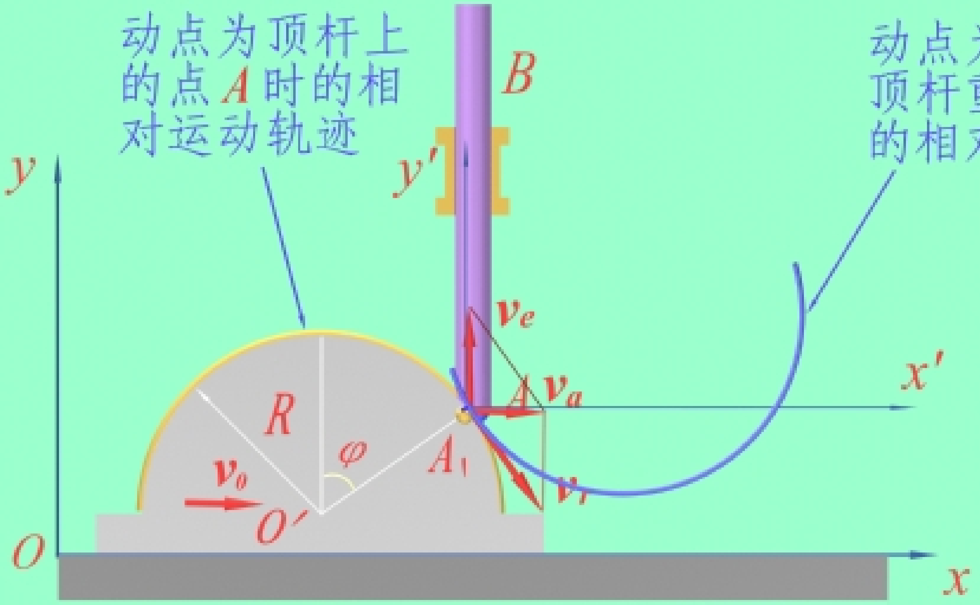
- 动点：顶杆上的点A。
- 动系：凸轮。
- 绝对运动：沿铅垂方向的直线运动。
- 相对运动：沿凸轮轮廓的圆周运动。
- 牵连运动：水平直线平移。

点的复合运动—— 相对运动轨迹



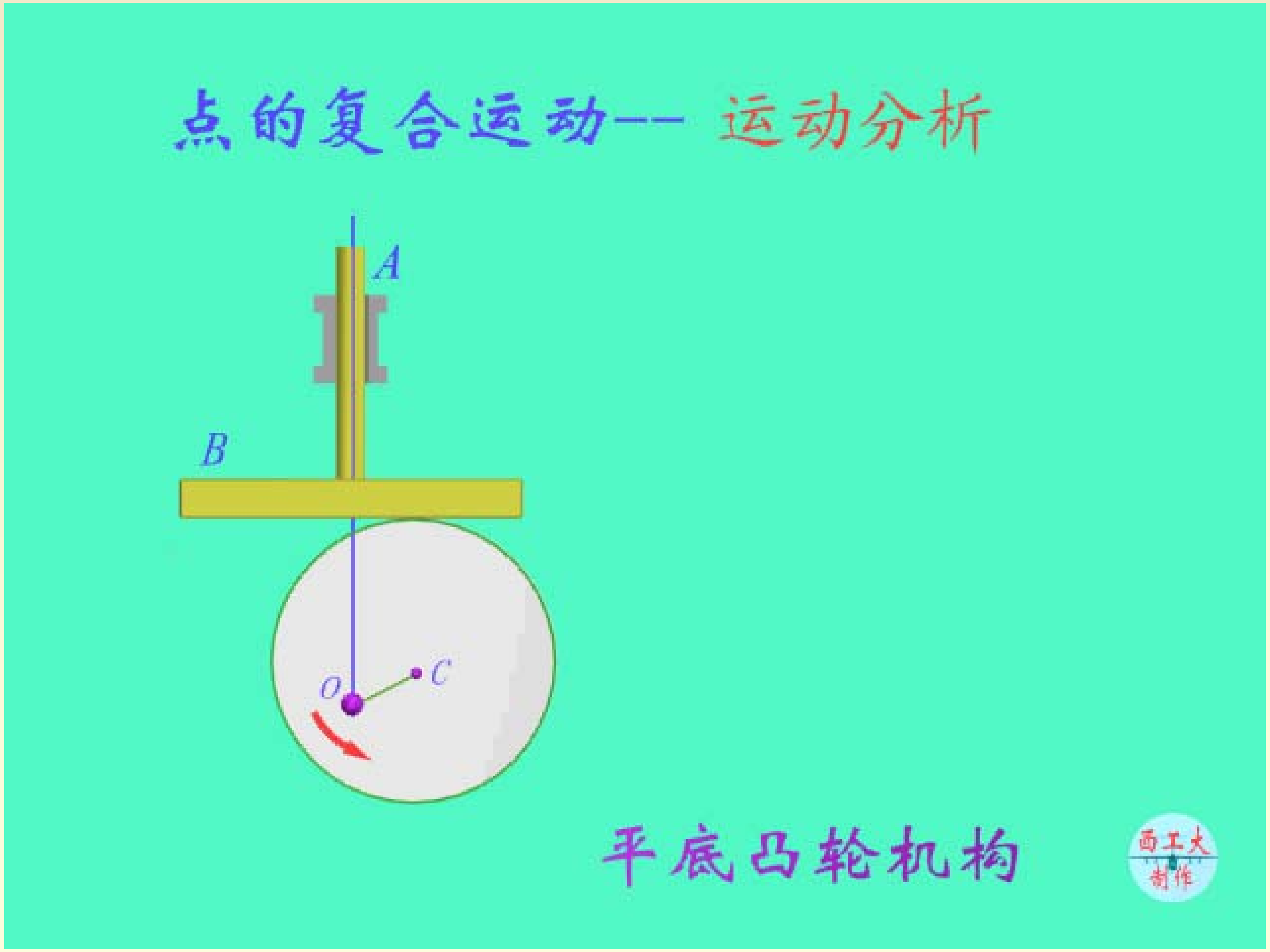
- 动点：凸轮上与顶杆重合点A_1。
- 动系：顶杆。
- 绝对运动：沿水平方向的直线运动。
- 相对运动：平面曲线运动。
- 牵连运动：沿铅垂方向的直线平移。

点的复合运动-- 相对运动轨迹



练习题 2

练习题 2



动　　点？

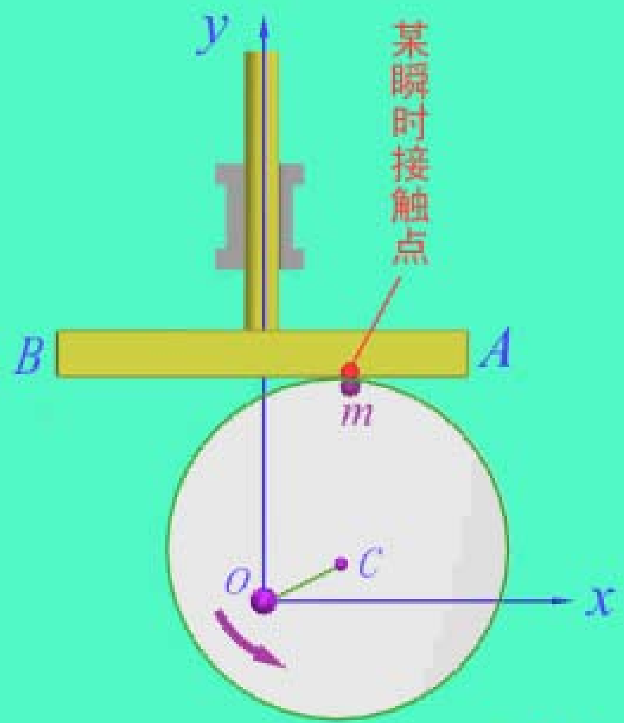
动参考系？

绝对运动？

相对运动？

牵连运动？

点的复合运动——动点动系的选择

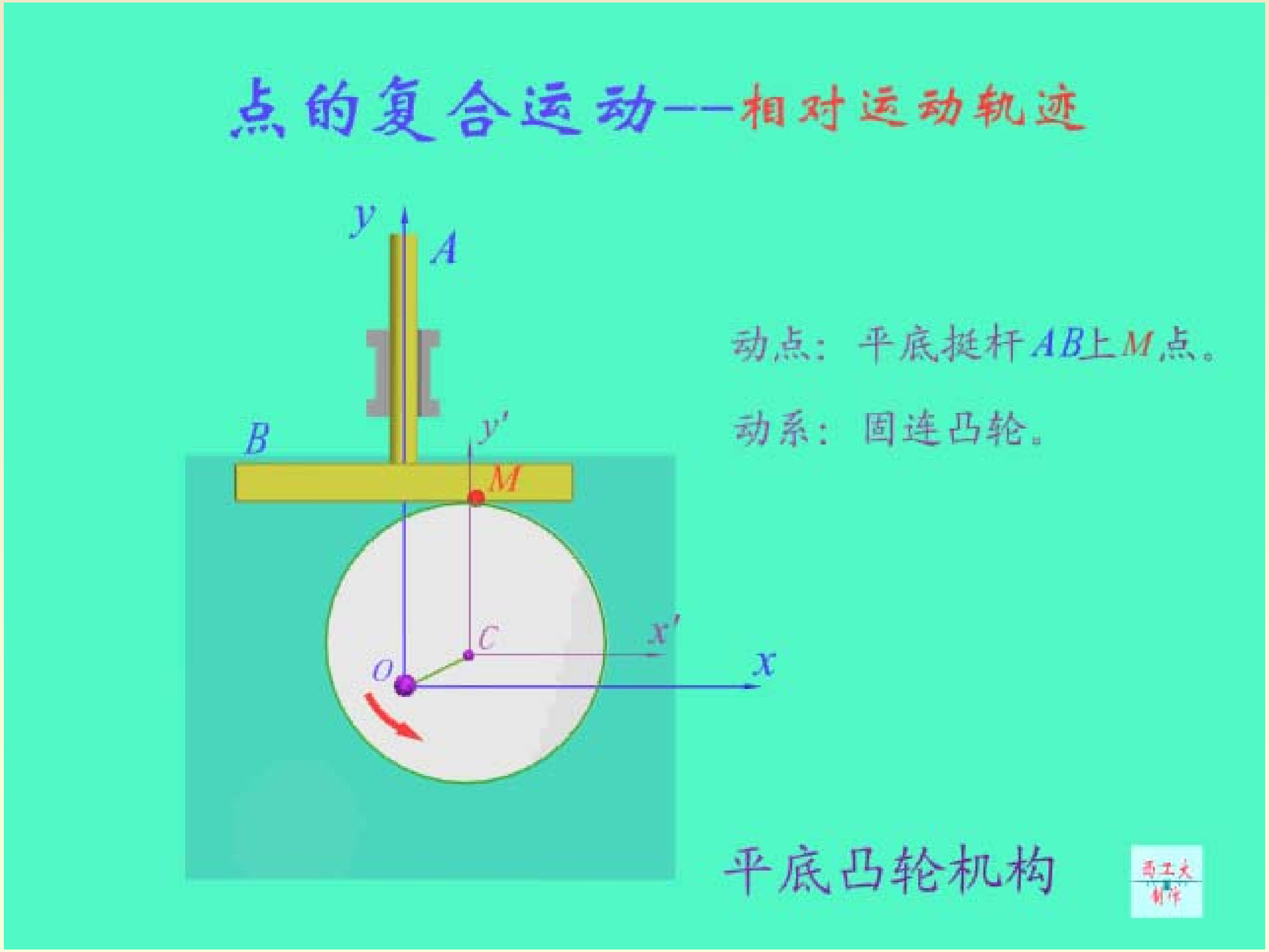


在机构传动问题中，一般选择持续接触点为动点。

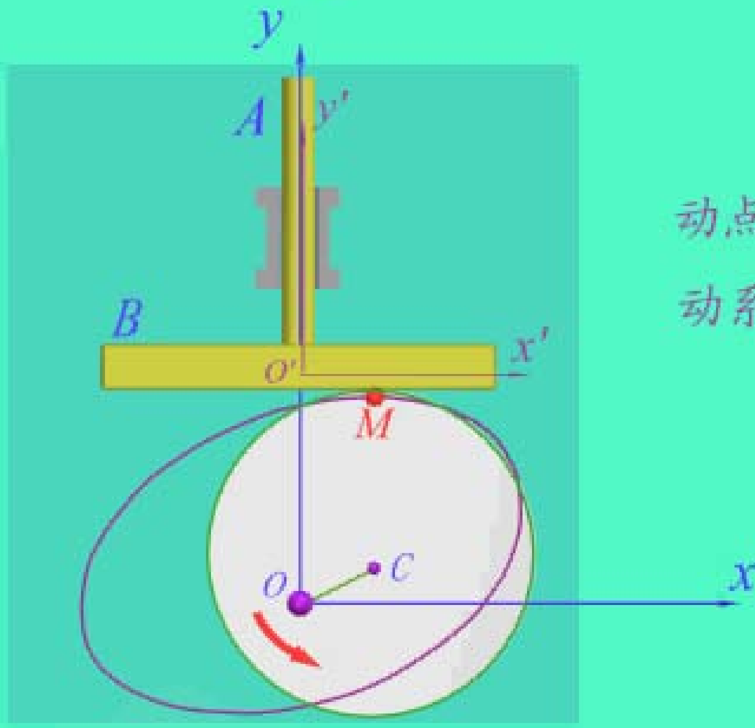
但平底凸轮机构无持续接触点，如何选择动点呢？

平底凸轮机构

练习题 2



点的复合运动——相对运动轨迹

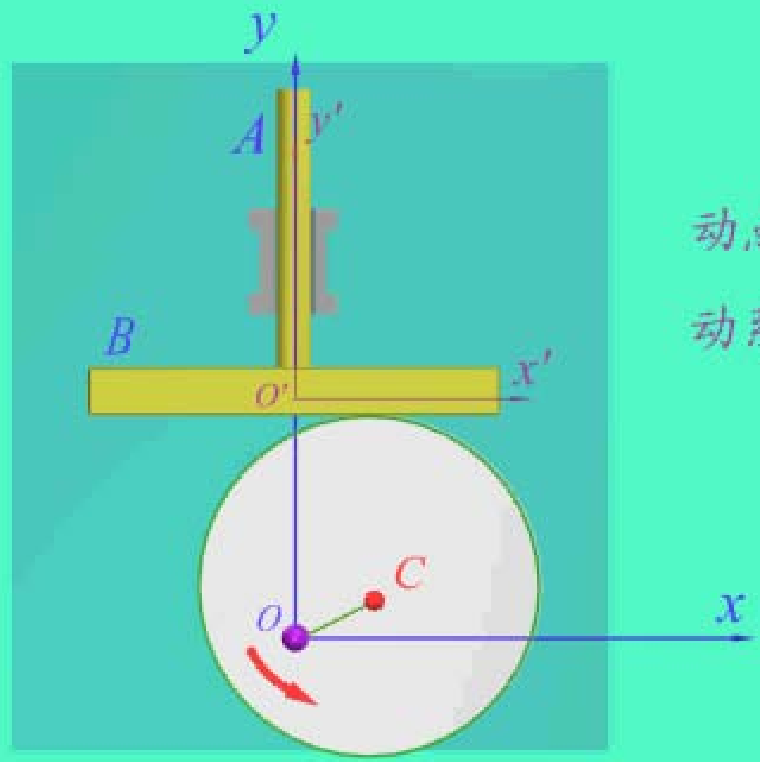


动点：凸轮上M点。

动系：固连平底挺杆AB。

平底凸轮机构

点的复合运动——相对运动轨迹

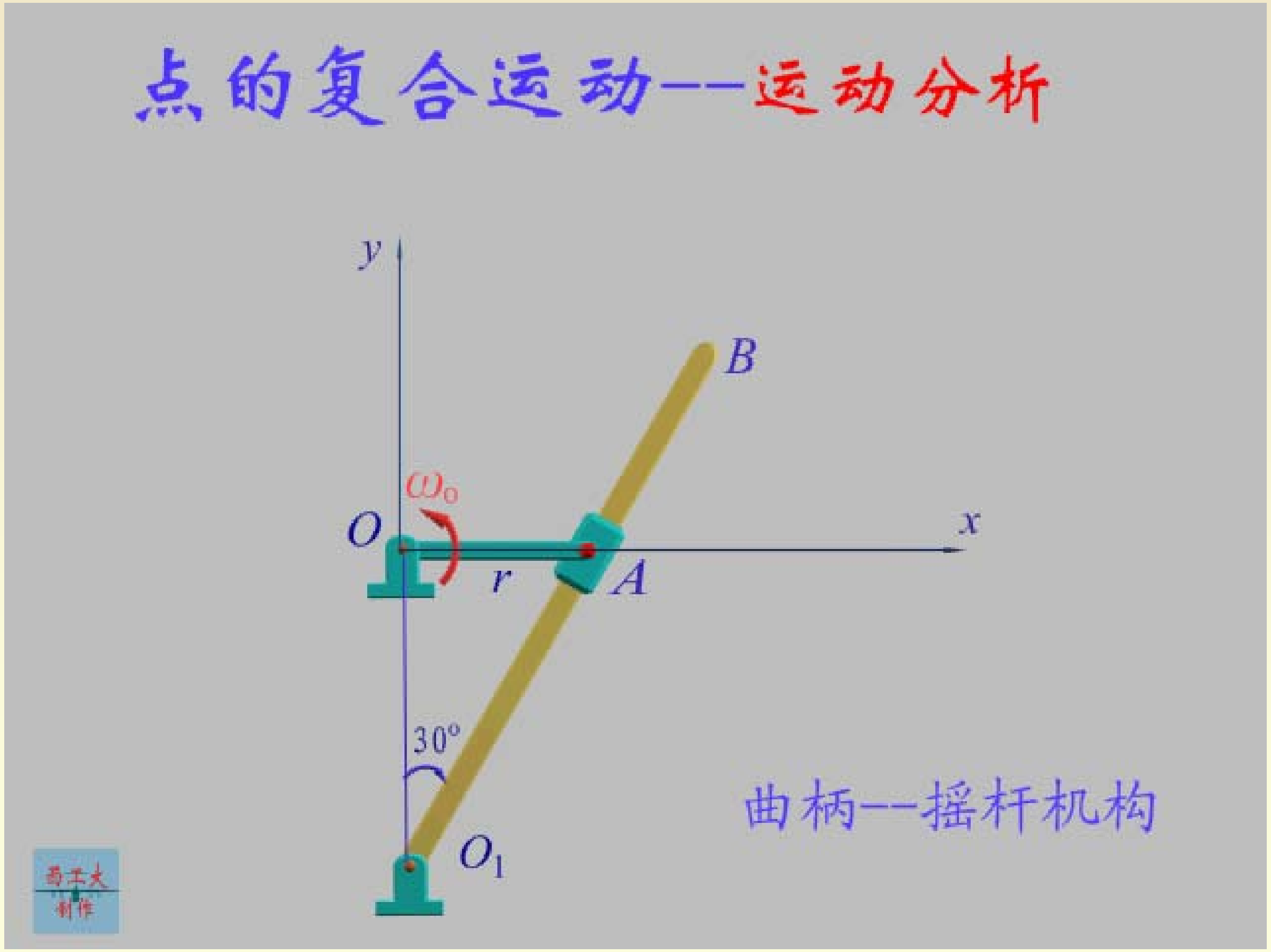


动点：凸轮圆心 C 点。

动系：固连平底挺杆 AB。

平底凸轮机构

练习题 3



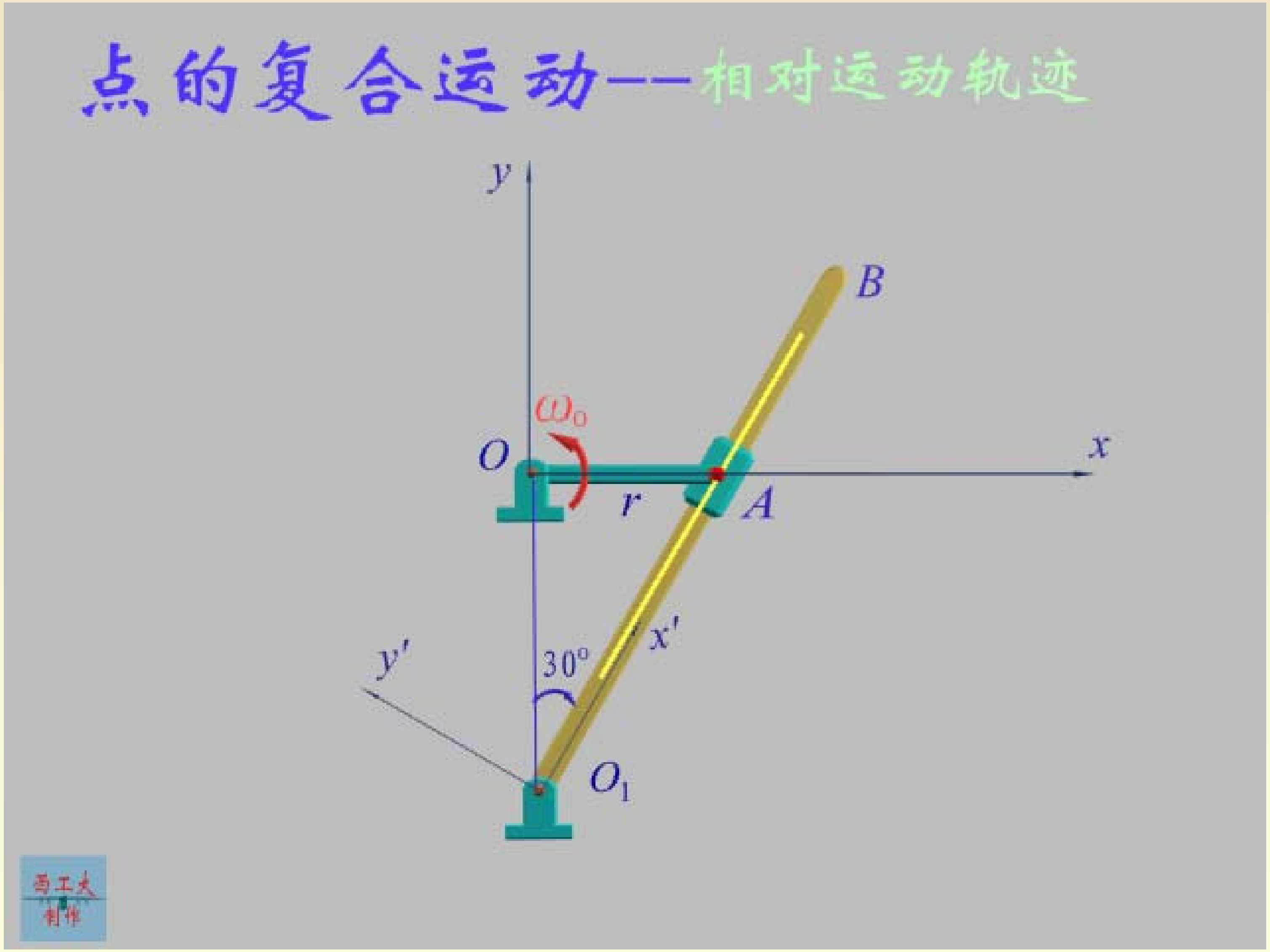
动　　点？

动参考系？

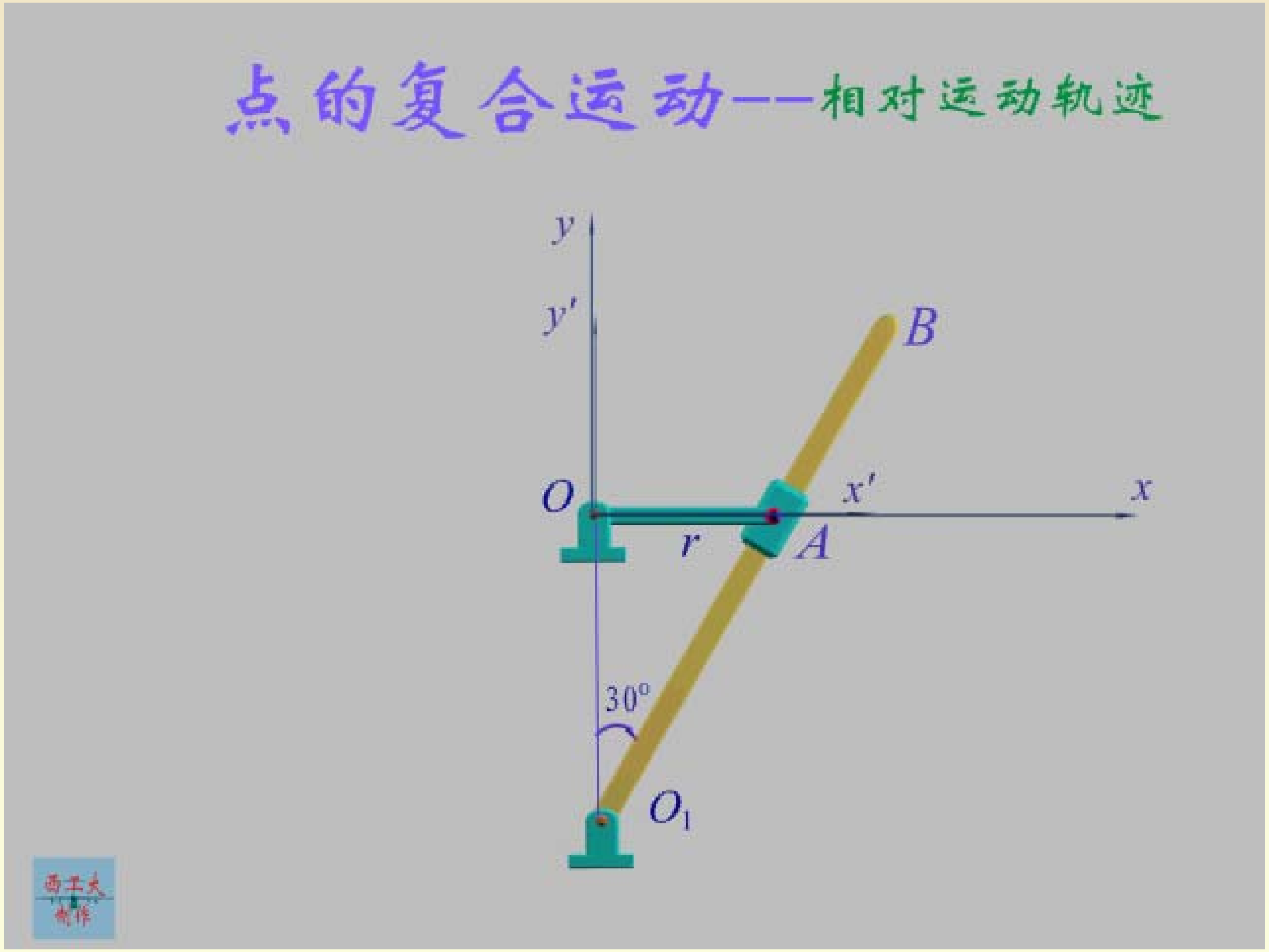
绝对运动？

相对运动？

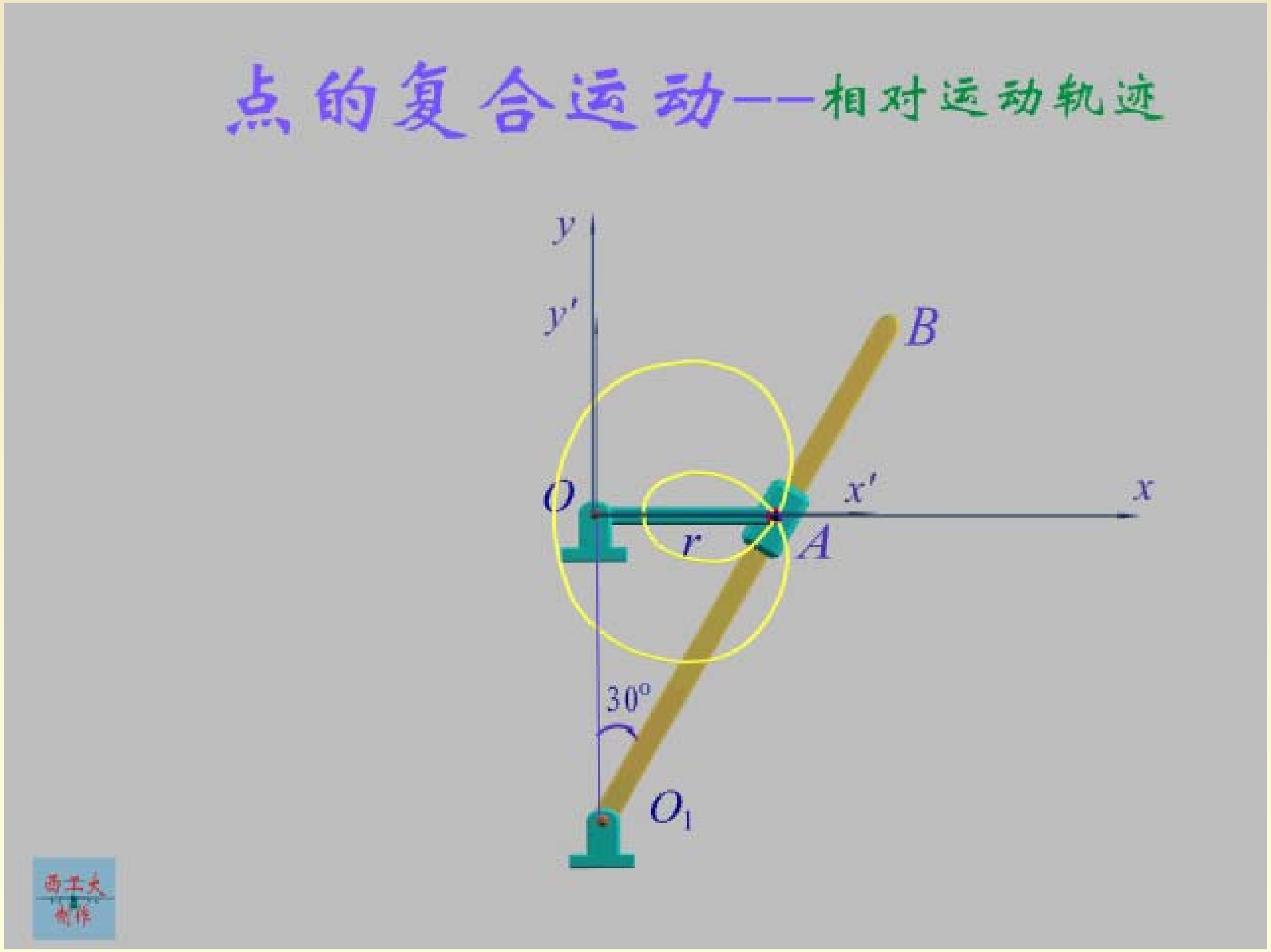
牵连运动？


点的复合运动——相对运动轨迹
y
B
ω_0
O
x
r
A
y′
x′
30°
O_1
西工大
制作

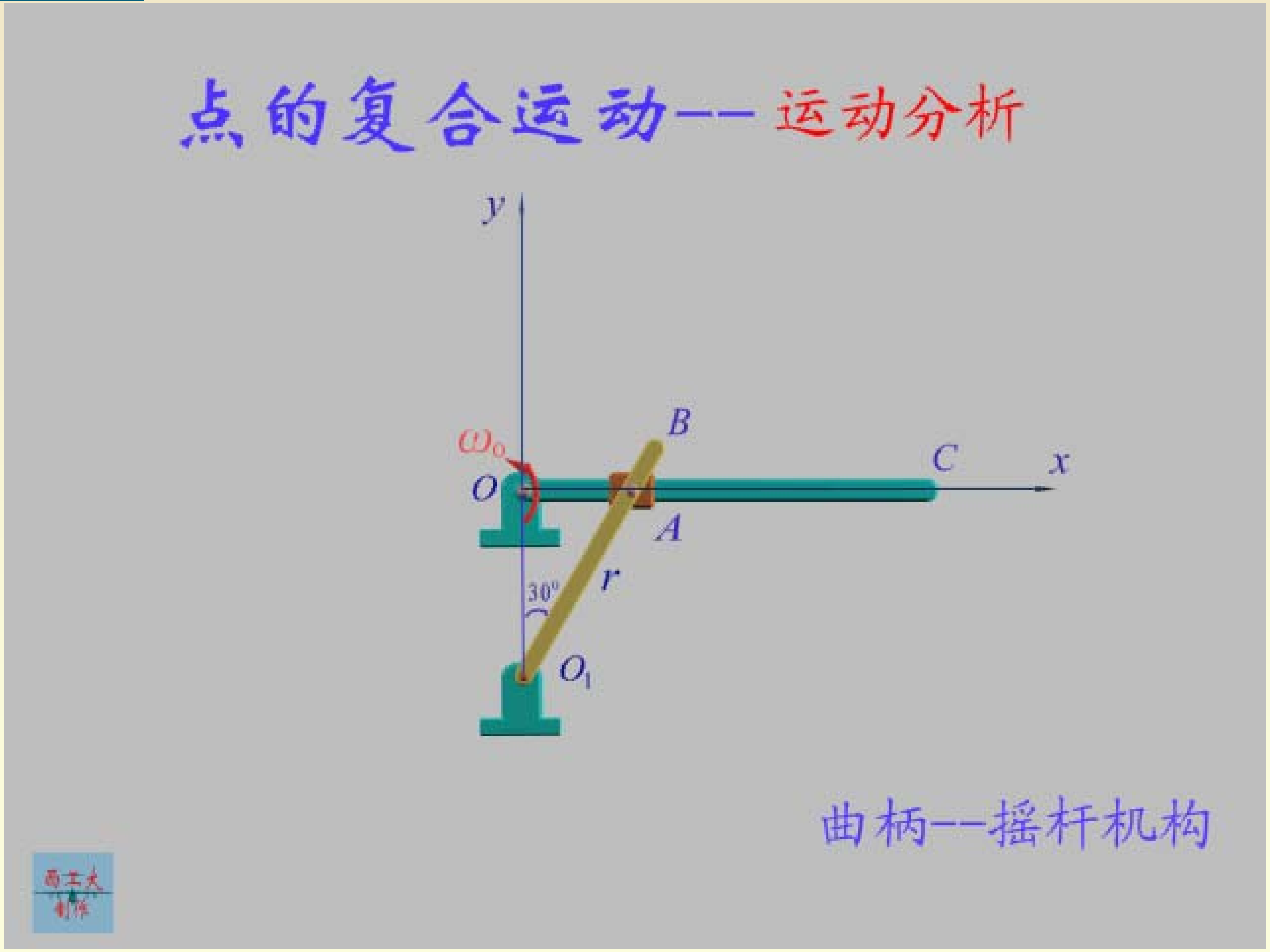
练习题 3



练习题 3

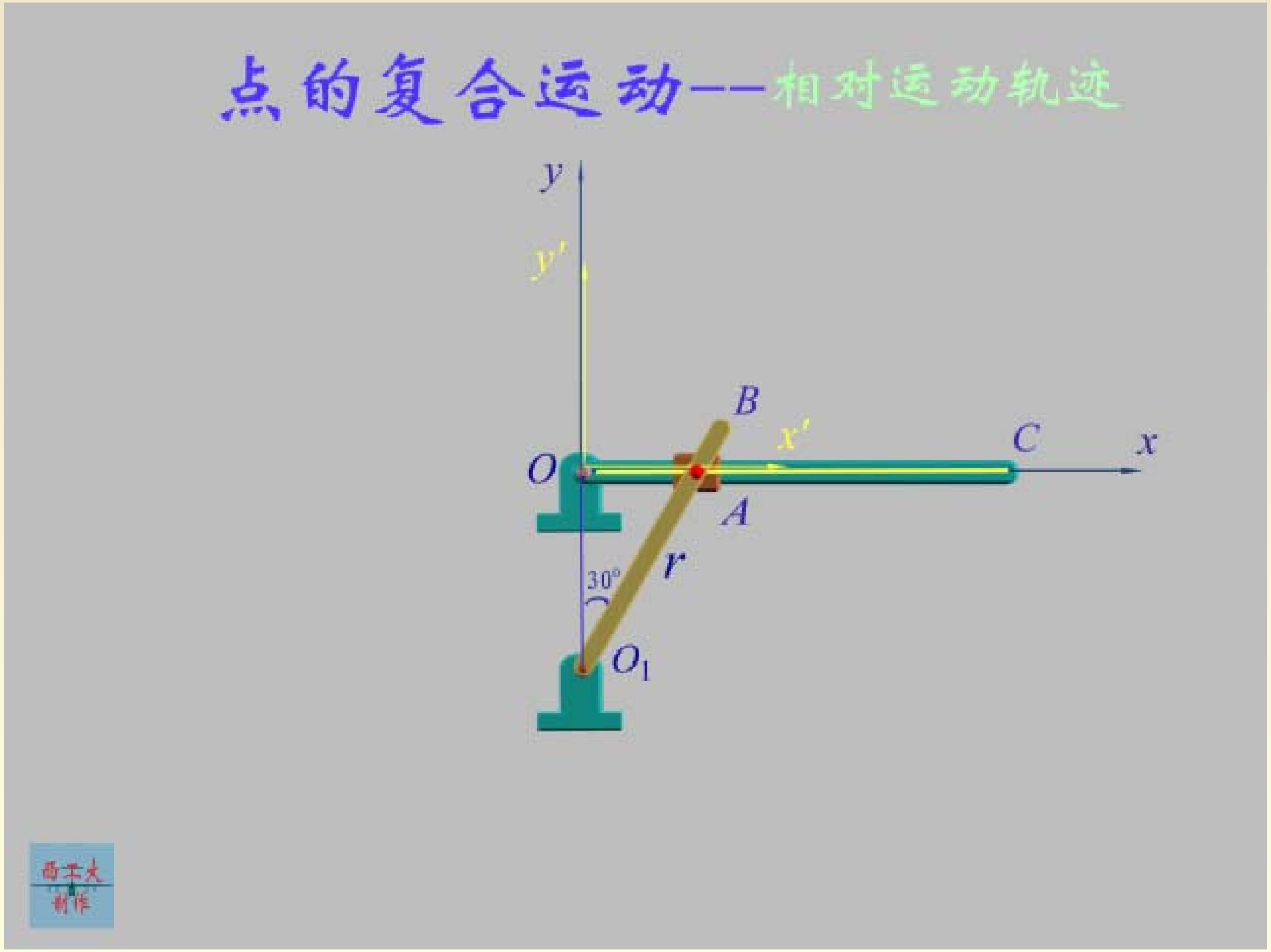


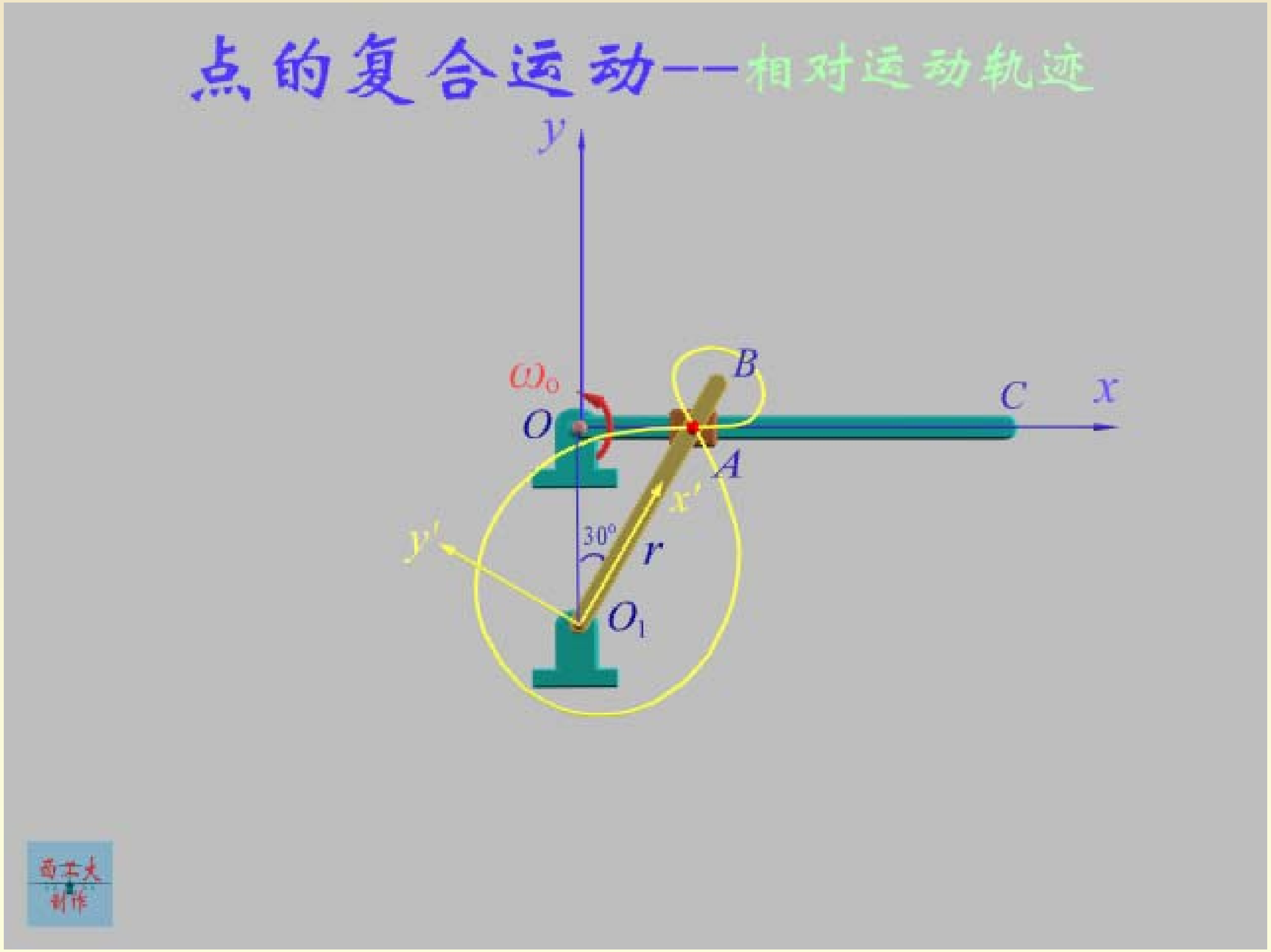
练习题 4



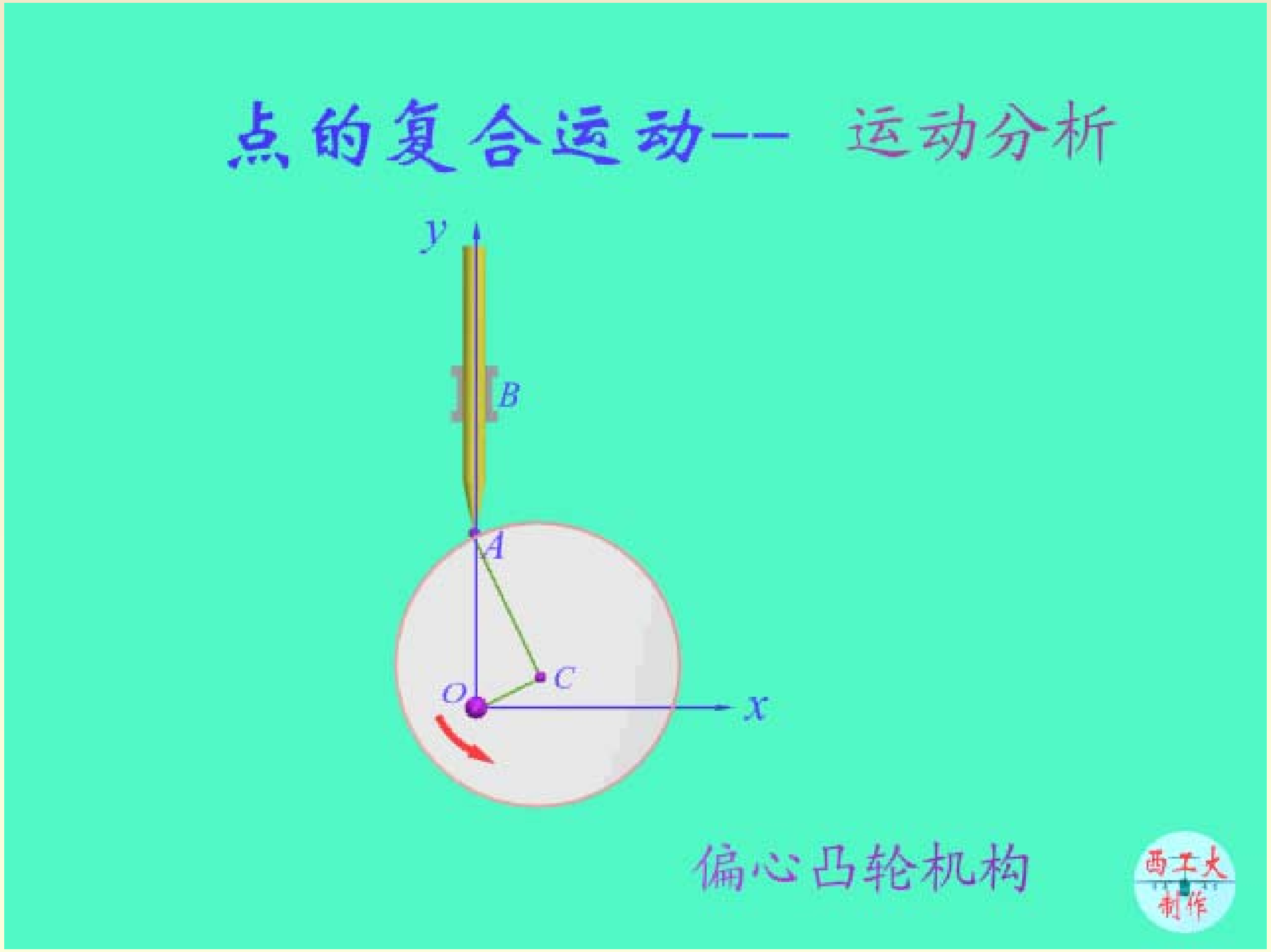
§3–1 基本概念

练习题 4




点的复合运动——相对运动轨迹
y
ω_0
O
B
C
x
A
x′
y′
30°
r
O_1
西工大
制作

练习题 6



动　　点？

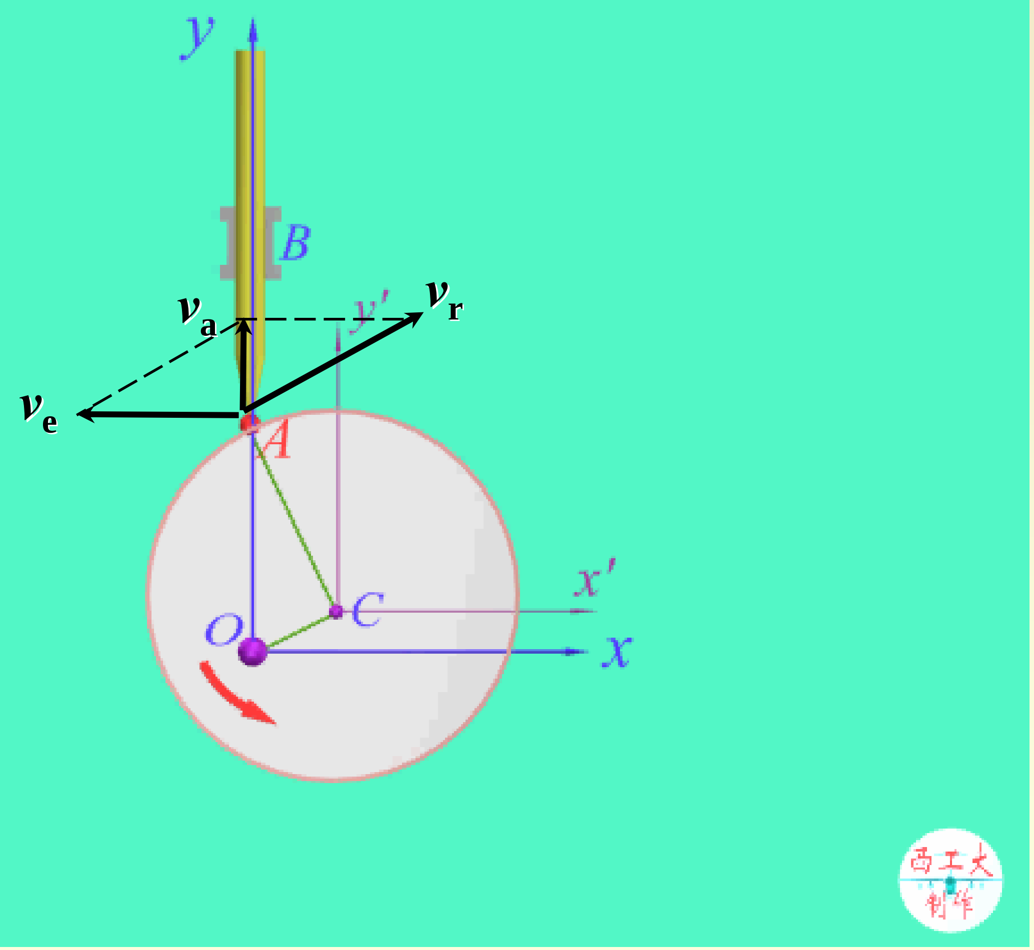
动参考系？

绝对运动？

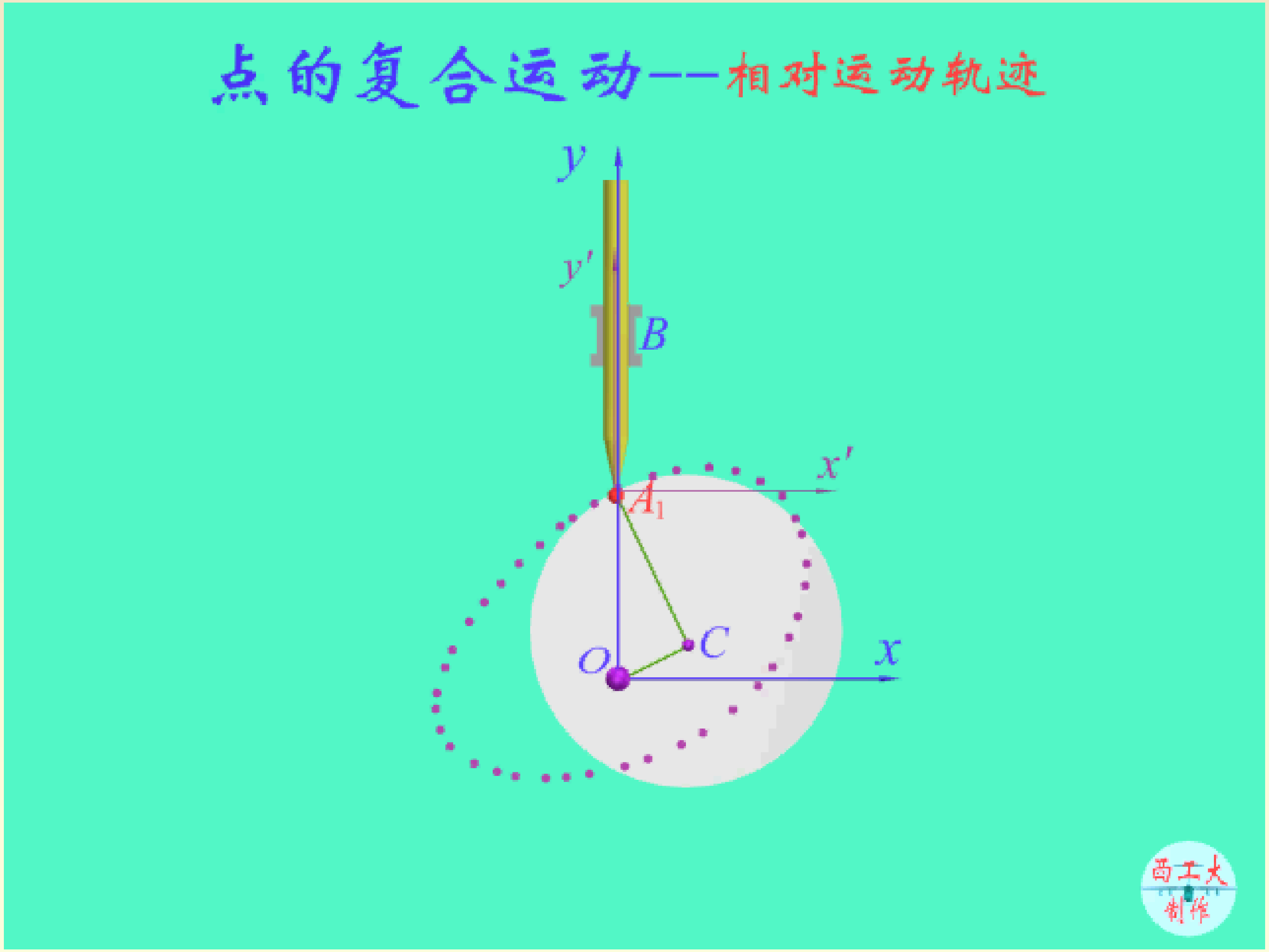
相对运动？

牵连运动？

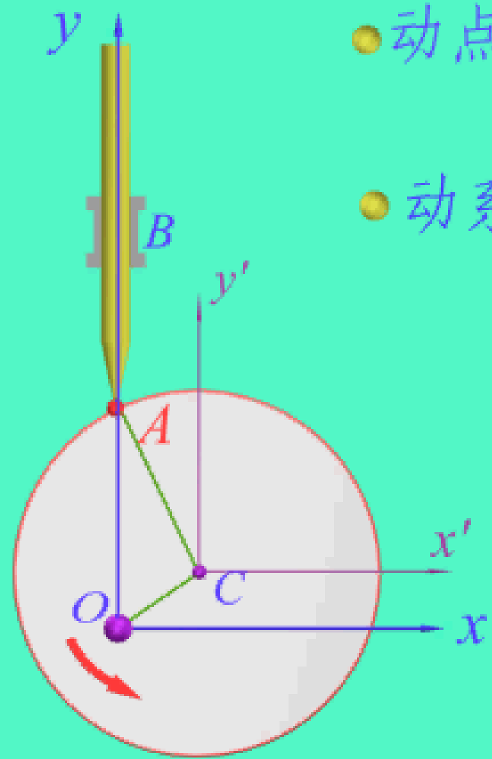
点的复合运动——相对运动轨迹



练习题 6

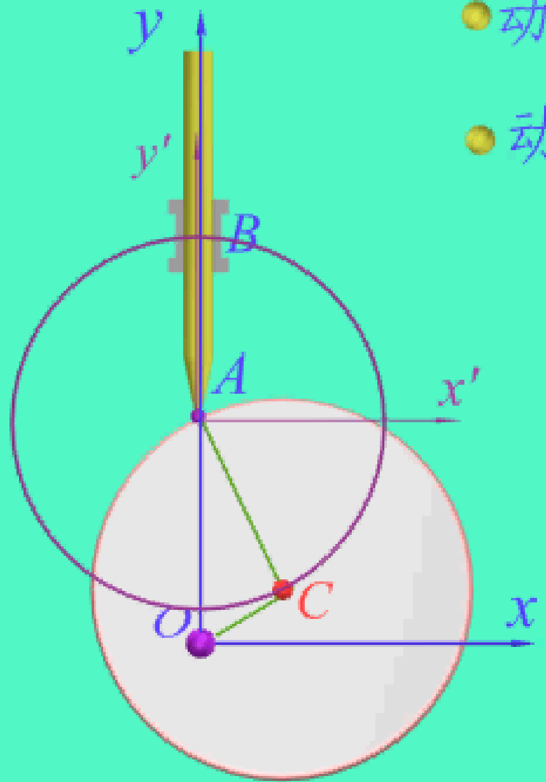


点的复合运动-- 速度分析



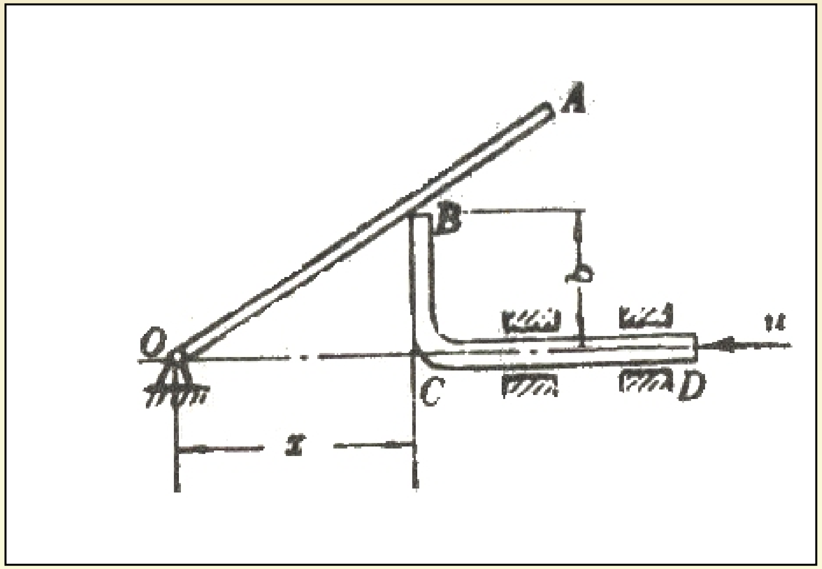
- 动点：顶杆上与凸轮重合点A。
- 动系：原点在凸轮圆心C点的平移坐标系。

点的复合运动——相对运动轨迹



- 动点：凸轮圆心点C。
- 动系：固连顶杆AB。

8-4. 杆*OA*长*l*，由推杆*BCD*推动而在圆面内绕点*O*转动，试求杆端*A*的速度大小（表示为由推杆至点*O*的距离*x*的函数），假定推杆的速度为*u*,其弯头长为*b*。



解：(1)运动分析：

动点：推杆*BCD*中*B*点。

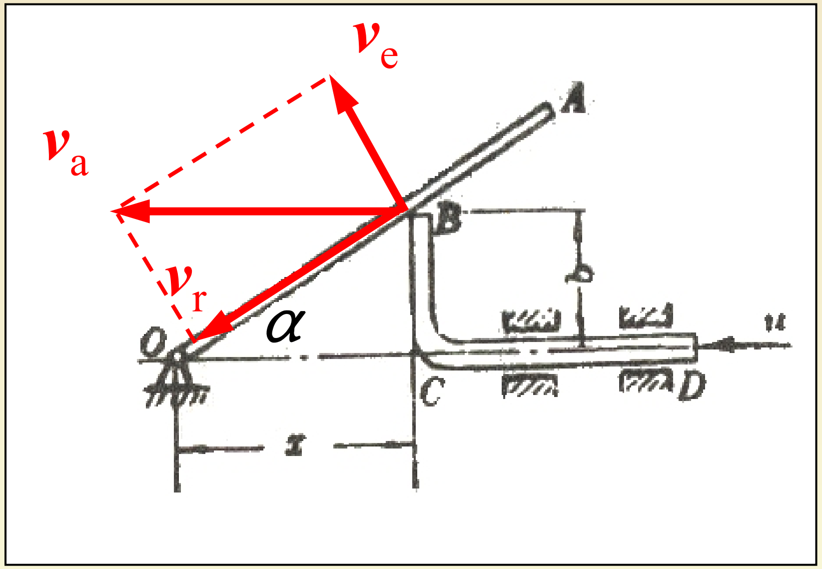
动系：固连*OA*杆。

绝对运动：*B*点沿水平向左。

牵连运动：*OA*杆定轴 。

相对运动：*B*点沿*OA*。

（2）速度分析 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$



$$v_e = v_a \sin\alpha = u \sin\alpha = \frac{ub}{\sqrt{x^2 + b^2}}$$

$$\omega_{OA} = \frac{v_e}{OB}$$

$$v_A = OA \cdot \omega_{OA} = \frac{OA}{OB} v_e$$

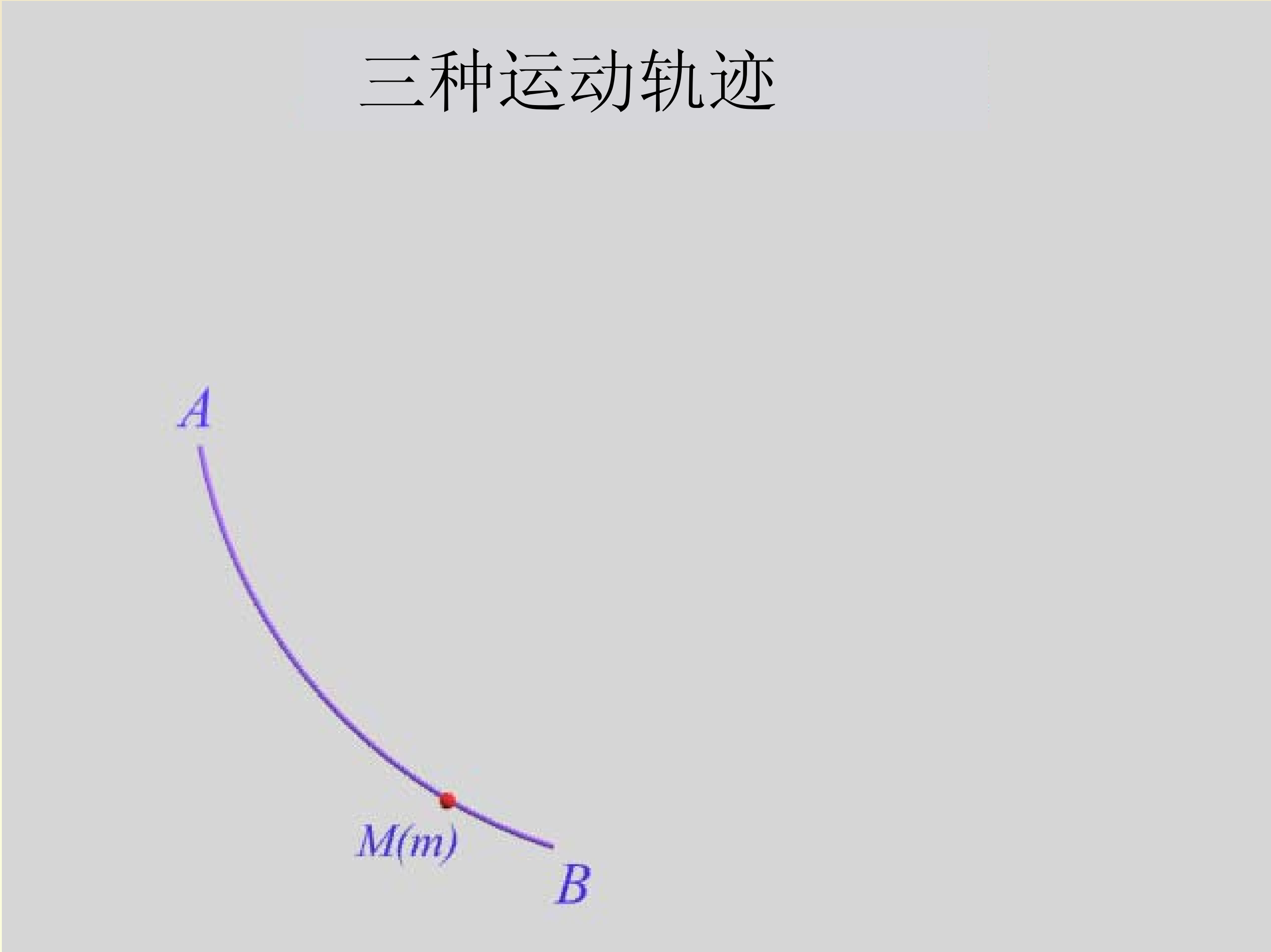
$$= \frac{l}{\sqrt{x^2 + b^2}} \cdot \frac{ub}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{ubl}{x^2 + b^2}$$

§3–2　点的速度合成定理

- 速度合成定理

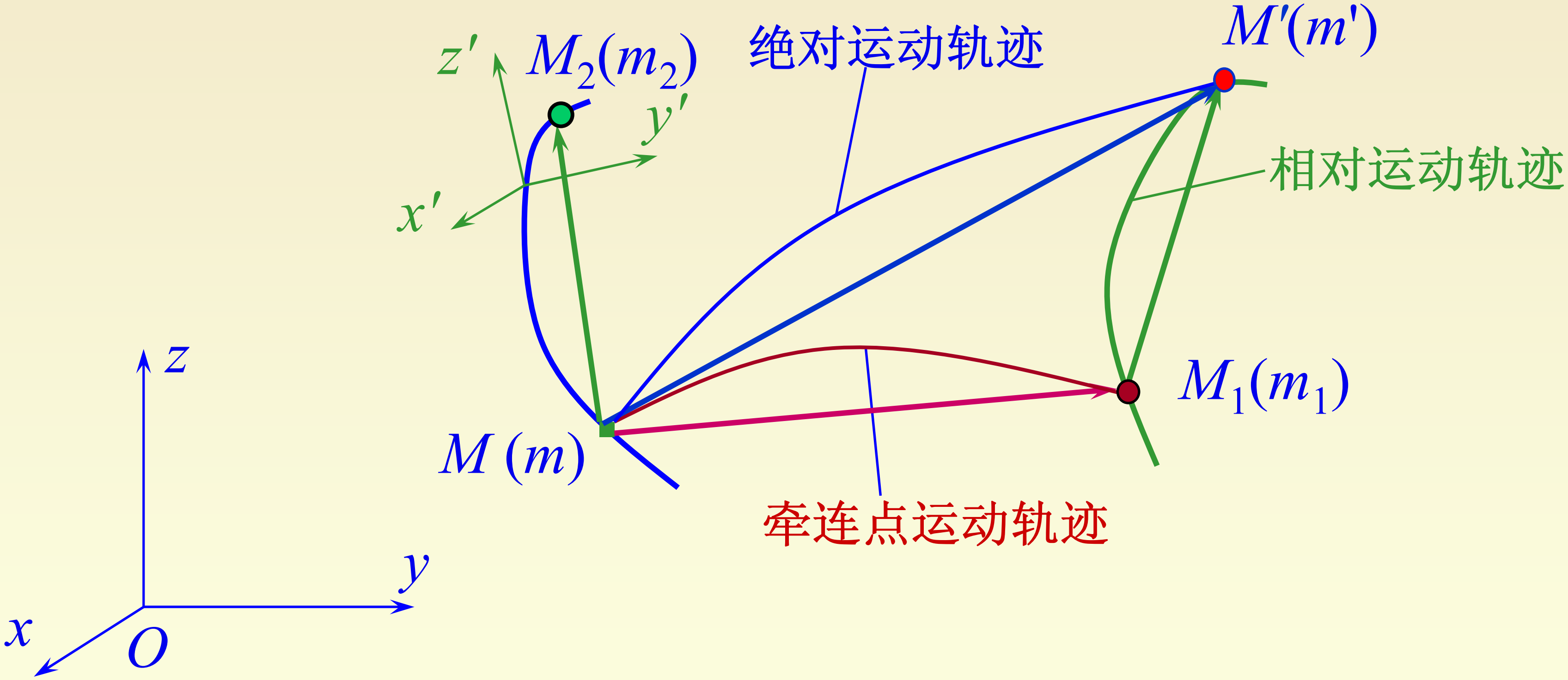
§3–2 点的速度合成定理

三种运动轨迹



§3–2 点的速度合成定理

- 三种运动轨迹



§3–2　点的速度合成定理

● 速度合成定理

动点M在时间Δt内的绝对位移　$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$

则有

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{M_1M'}}{\Delta t} \qquad (1)$$

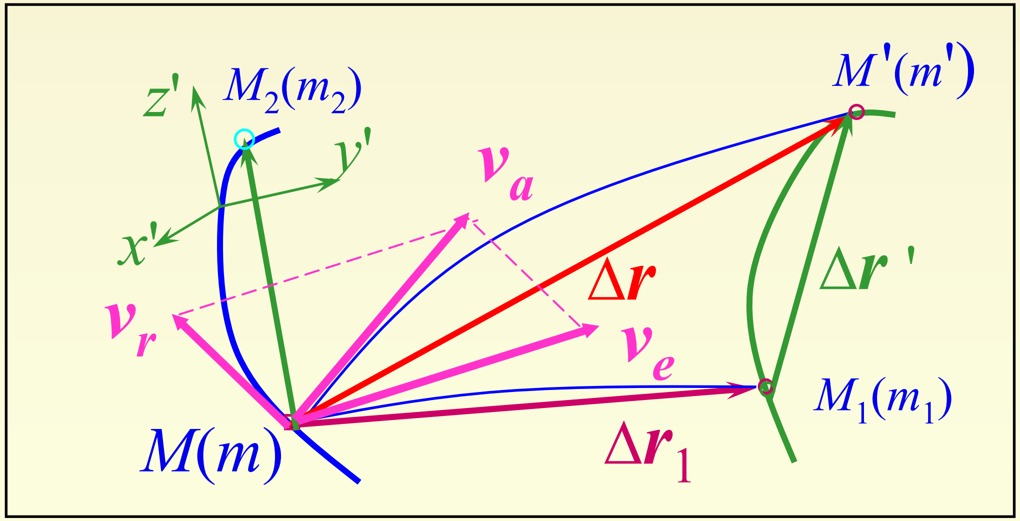
分析其中各项

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \boldsymbol{v}_\mathrm{a} \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{mm_1}}{\Delta t} = v_m = \boldsymbol{v}_\mathrm{e}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{M_1M'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_2}}{\Delta t} = \boldsymbol{v}_\mathrm{r}$$

代入（1）式可得

$$\boxed{\boldsymbol{v}_\mathrm{a} = \boldsymbol{v}_\mathrm{r} + \boldsymbol{v}_\mathrm{e}}$$



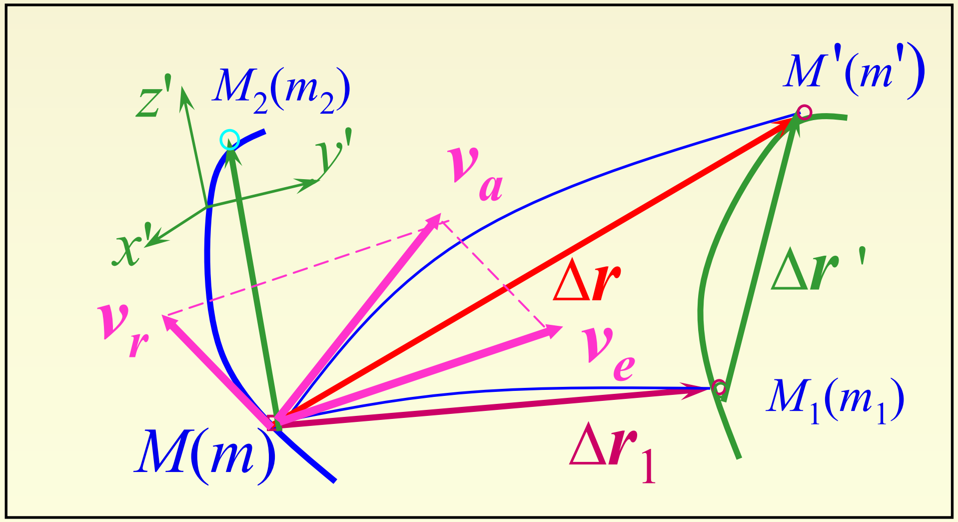
§ 3–2 点的速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}$$

绝对速度

相对速度

牵连速度



速度合成定理

动点的绝对速度等于其相对速度与牵连速度的矢量和。

§3–2　点的速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e$$

- **几点说明**

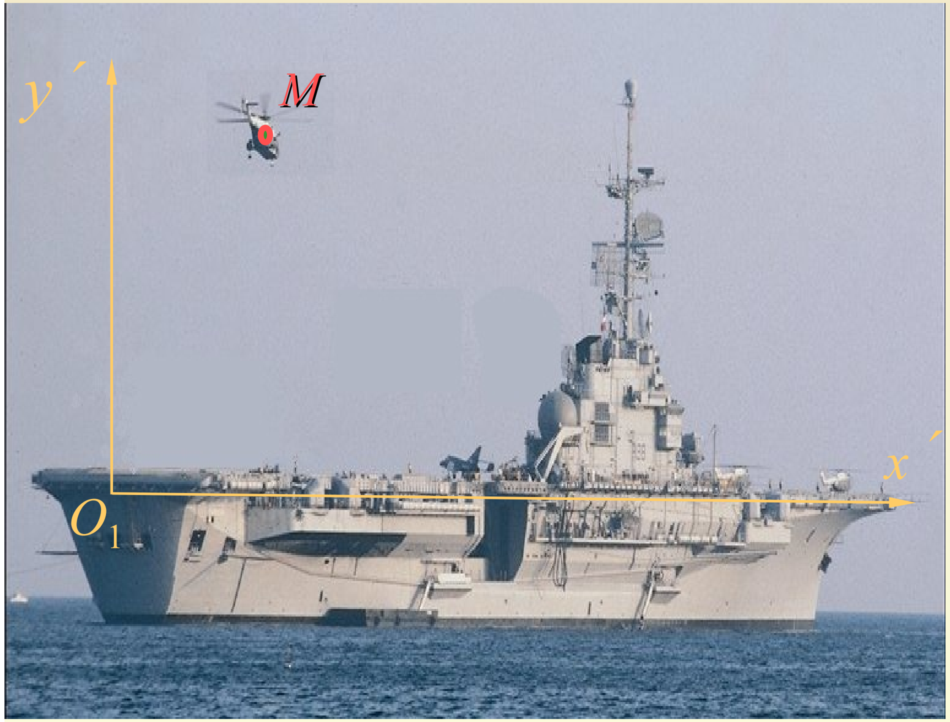
◆ 牵连运动是指刚体(动系)的运动；而牵连速度是指刚体上一点(与动点相重合的点)的速度。

◆ 速度合成定理为平面矢量方程，由此可以写出两个投影式，所以可以求解两个未知量。

◆ 速度合成定理对任意形式的牵连运动都适用。

例3-1 军舰以20节（knot，1=1.852km/h）的速度向右前进，直升飞机一每小时18km的速度垂直降落。求直升飞机相对于军舰的速度。

§3–2 点的速度合成定理



解:

1. 选择动点与动系。

动点－直升飞机。

动系－$O_1x'y'$，固连军舰上。

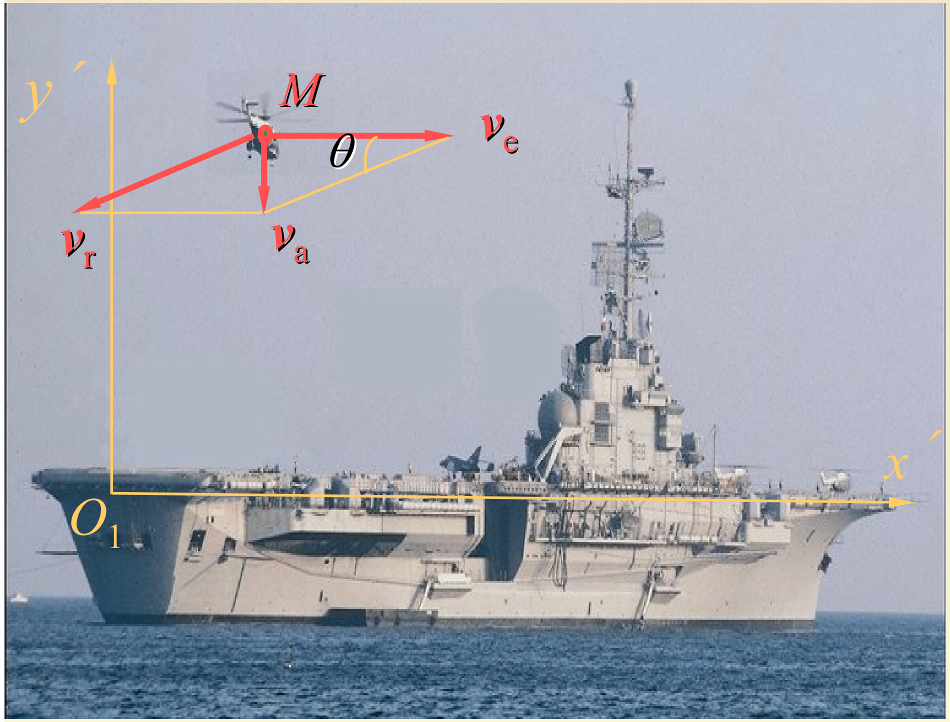
定系－固连地球。

2. 运动分析。

绝对运动－垂直向下直线运动。

相对运动－直线运动。

牵连运动－水平方向平动。



3. 速度分析。

绝对速度$\boldsymbol{v}_a$：v_a大小已知，方向沿铅垂方向向下。

牵连速度$\boldsymbol{v}_e$：v_e大小已知，方向水平向右。

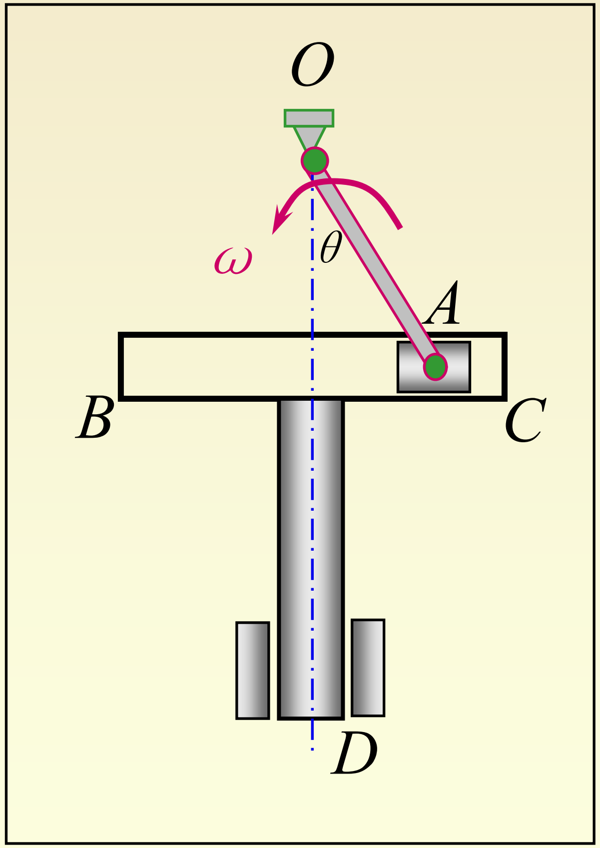
相对速度$\boldsymbol{v}_r$：大小方向均未知，为所要求的量。

应用速度合成定理 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

$$v_r = \sqrt{v_e^{\,2} + v_a^2} = \sqrt{(37.04)^2 + 18^2} = \sqrt{1372 + 324} = 41.18\,\text{km/h}$$

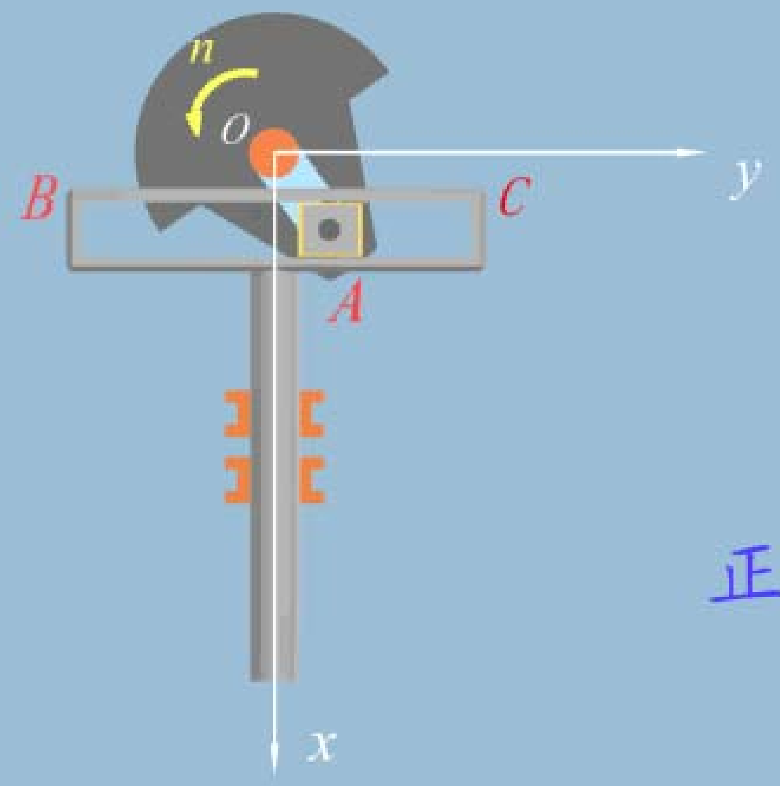
$$\tan\theta = \frac{v_a}{v_e} = \frac{18}{37.04} = 0.486 \qquad \theta = 25.92^\circ$$

例3-2 已知正弦机构中，曲柄$OA=l$，加速度ω， $\theta=30^{\circ}$。求连杆BCD的速度。

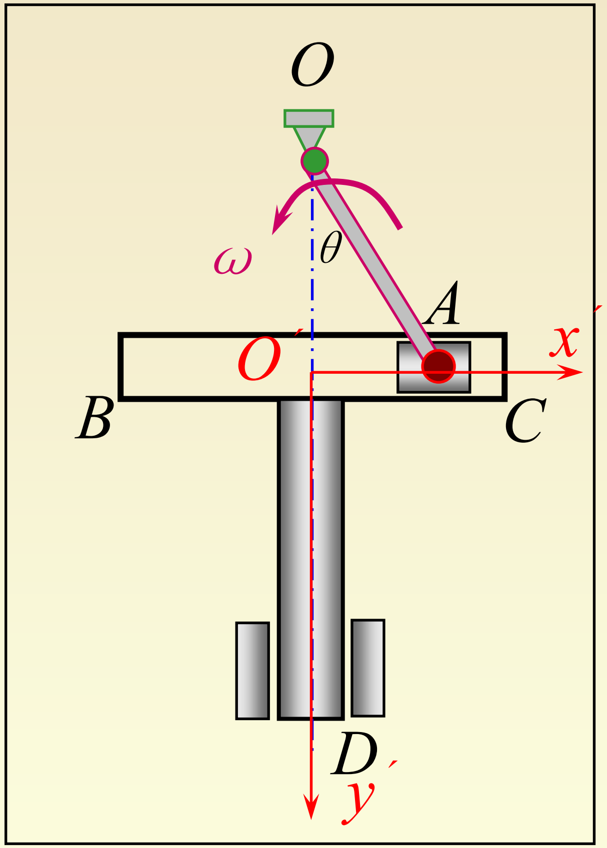


点的复合运动——相对运动轨迹

运动分析



正弦机构



解： **1.** 选择动点与动系。

动点－曲柄上的A点；

动系－$O'x'y'$固连杆BC上。

定系－固连机架上。

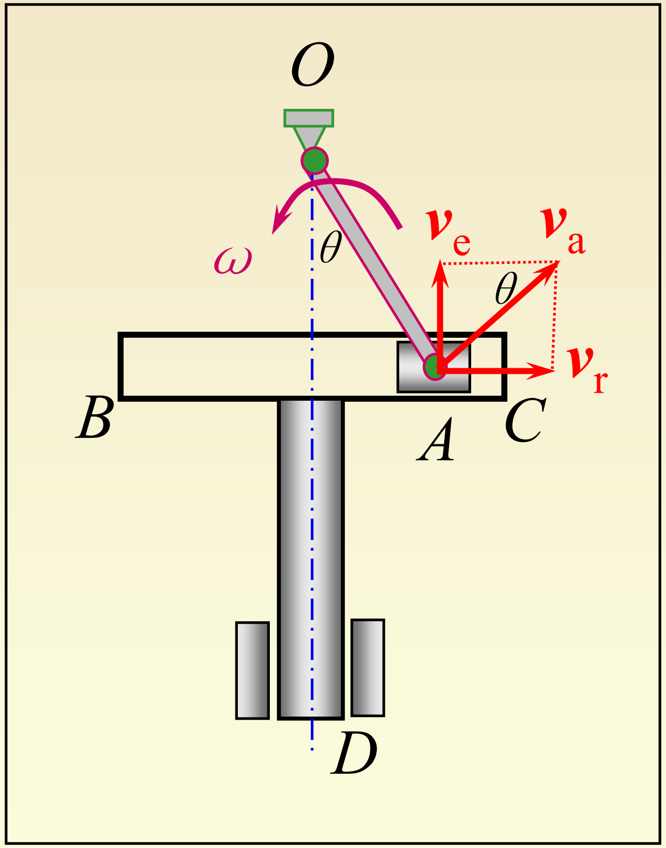
2. 运动分析。

绝对运动－以O为圆心、l为半径的等速圆周运动。

相对运动－沿BC方向的直线运动。

牵连运动－铅垂方向的平移。

3. 速度分析。



绝对速度 $\boldsymbol{v}_a$： $v_a = \omega l$，方向已知。

相对速度$\boldsymbol{v}_r$： $v_r = ?$ ，方向已知。

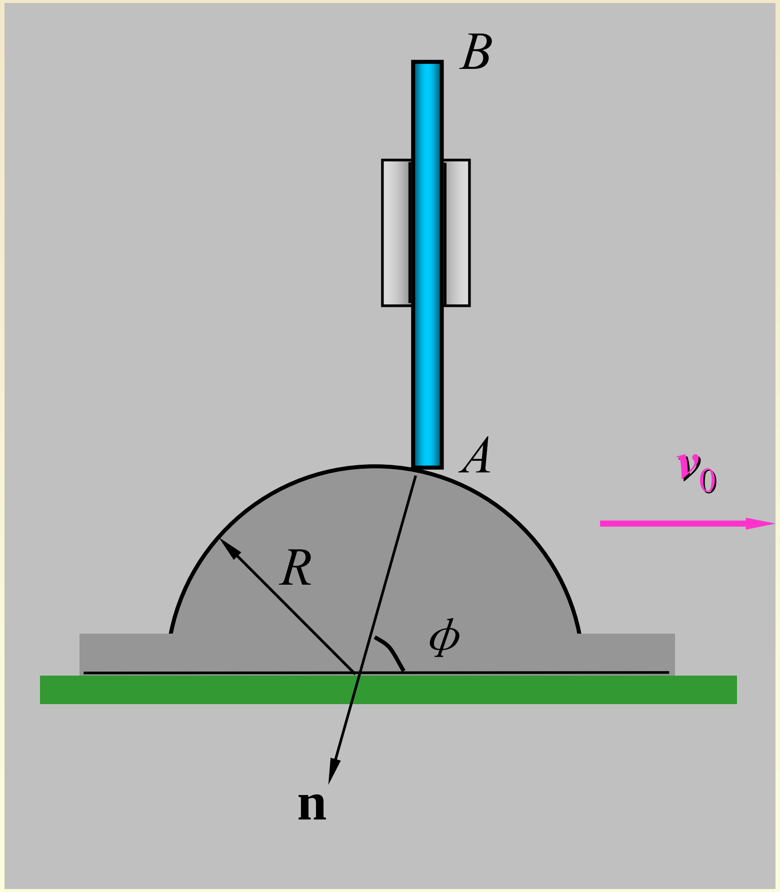
牵连速度$\boldsymbol{v}_e$： $v_e = ?$,方向已知。

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

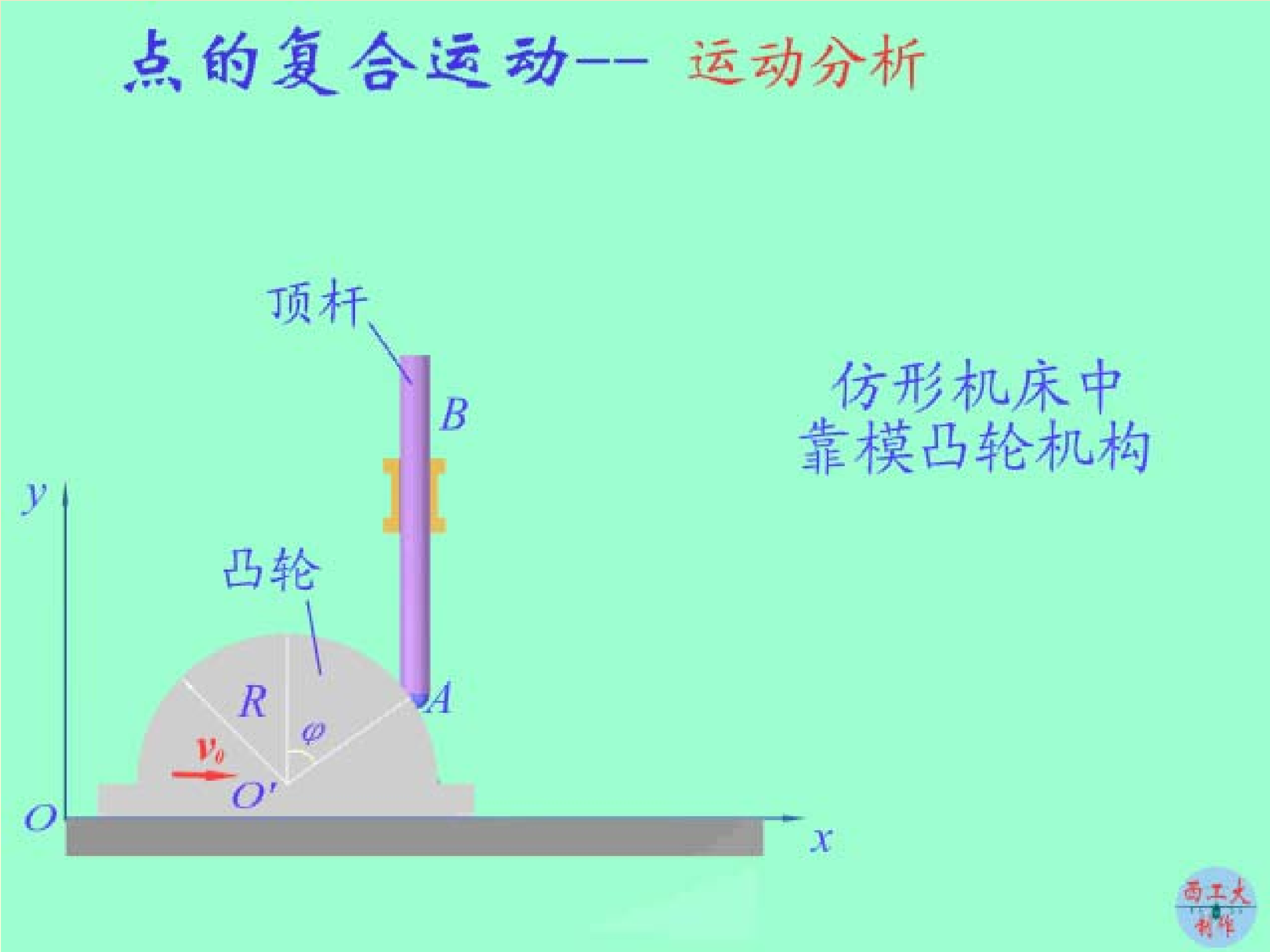
$$v_{BC} = v_e = v_a \sin\theta$$

$$= \omega l \sin 30^\circ$$

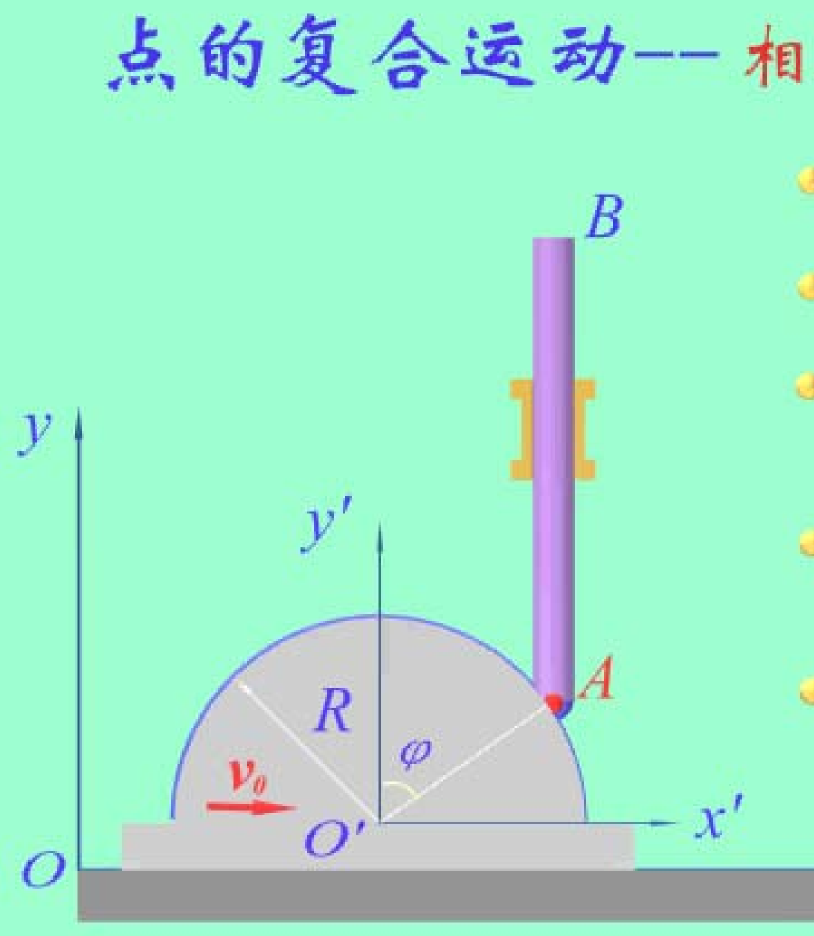
$$= \frac{1}{2}\omega l$$



例3–3 仿形机床中半径为R的半圆形靠模凸轮以等速度v_0沿水平轨道向右运动，带动顶杆AB沿铅垂方向运动，如图所示。试求 $\phi=60^\circ$时，顶杆AB的速度。

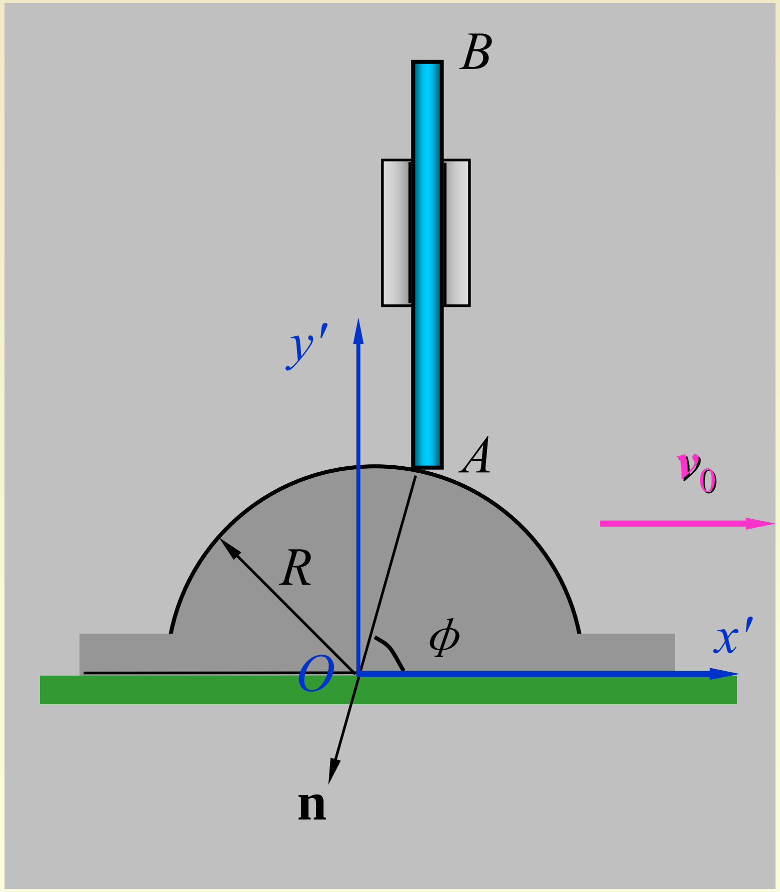


运 动 演 示



- 动点：顶杆上的点A。
- 动系：凸轮。
- 绝对运动：沿铅垂方向的直线运动。
- 相对运动：沿凸轮轮廓的圆周运动。
- 牵连运动：水平直线平移。

相对运动轨迹



解：

1. 选择动点，动系与定系。

动点－ AB的端点A 。

动系－$Ox'y'$，固连于凸轮。

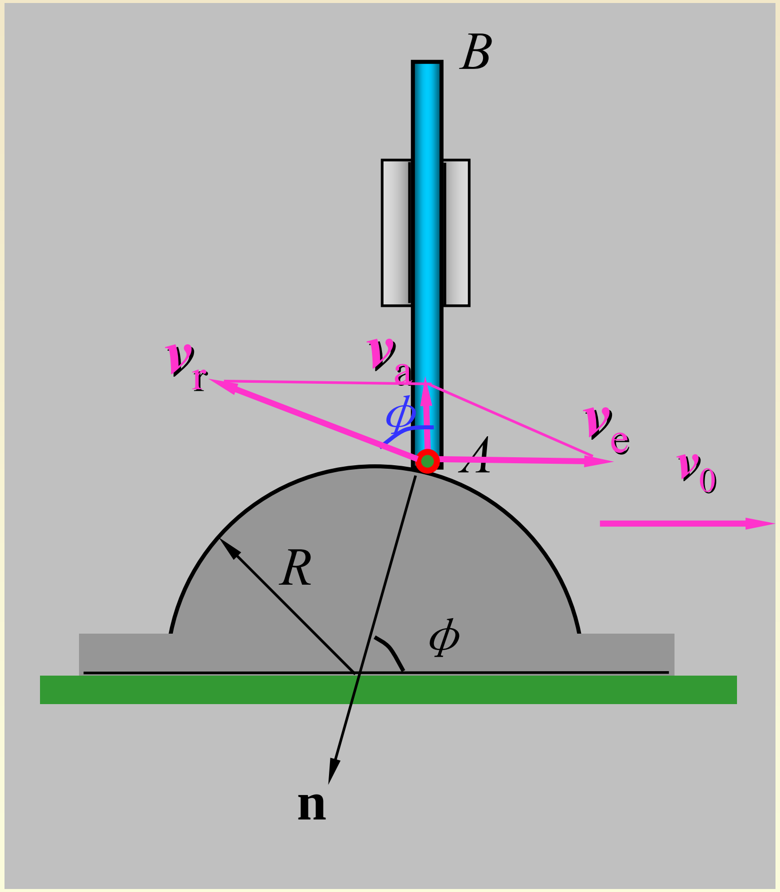
定系－固连于水平轨道。

2. 运动分析。

绝对运动－直线运动。

相对运动－沿凸轮轮廓曲线运动。

牵连运动－水平平动。

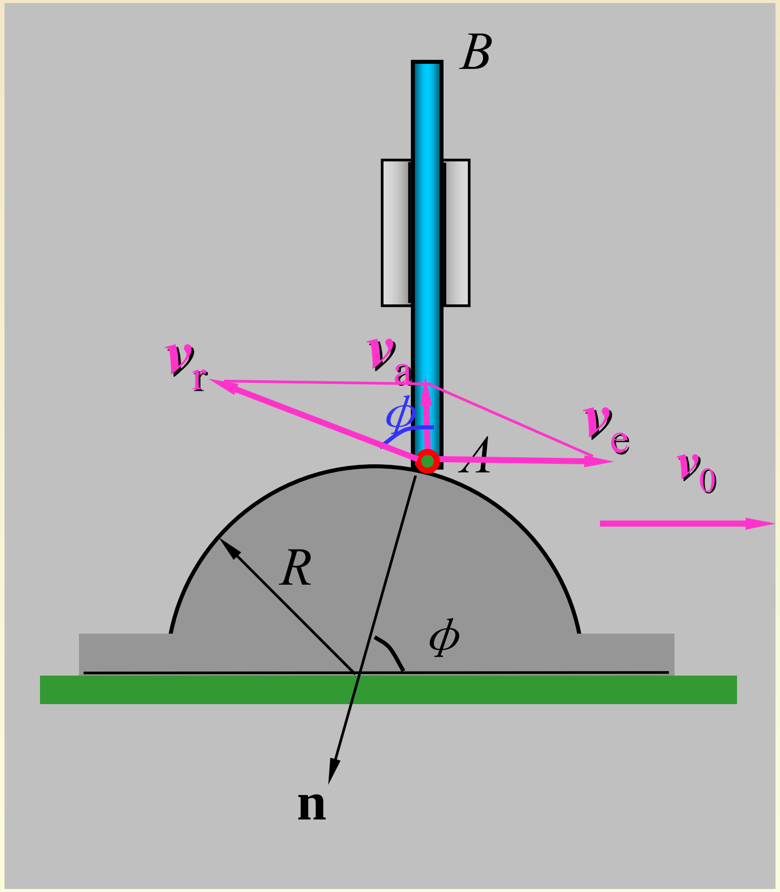


3. 速度分析。

绝对速度v_a：大小未知，方向沿杆AB向上。

牵连速度v_e：$v_e = v_0$，方向水平向右。

相对速度v_r：大小未知，方向沿凸轮圆周的切线 。

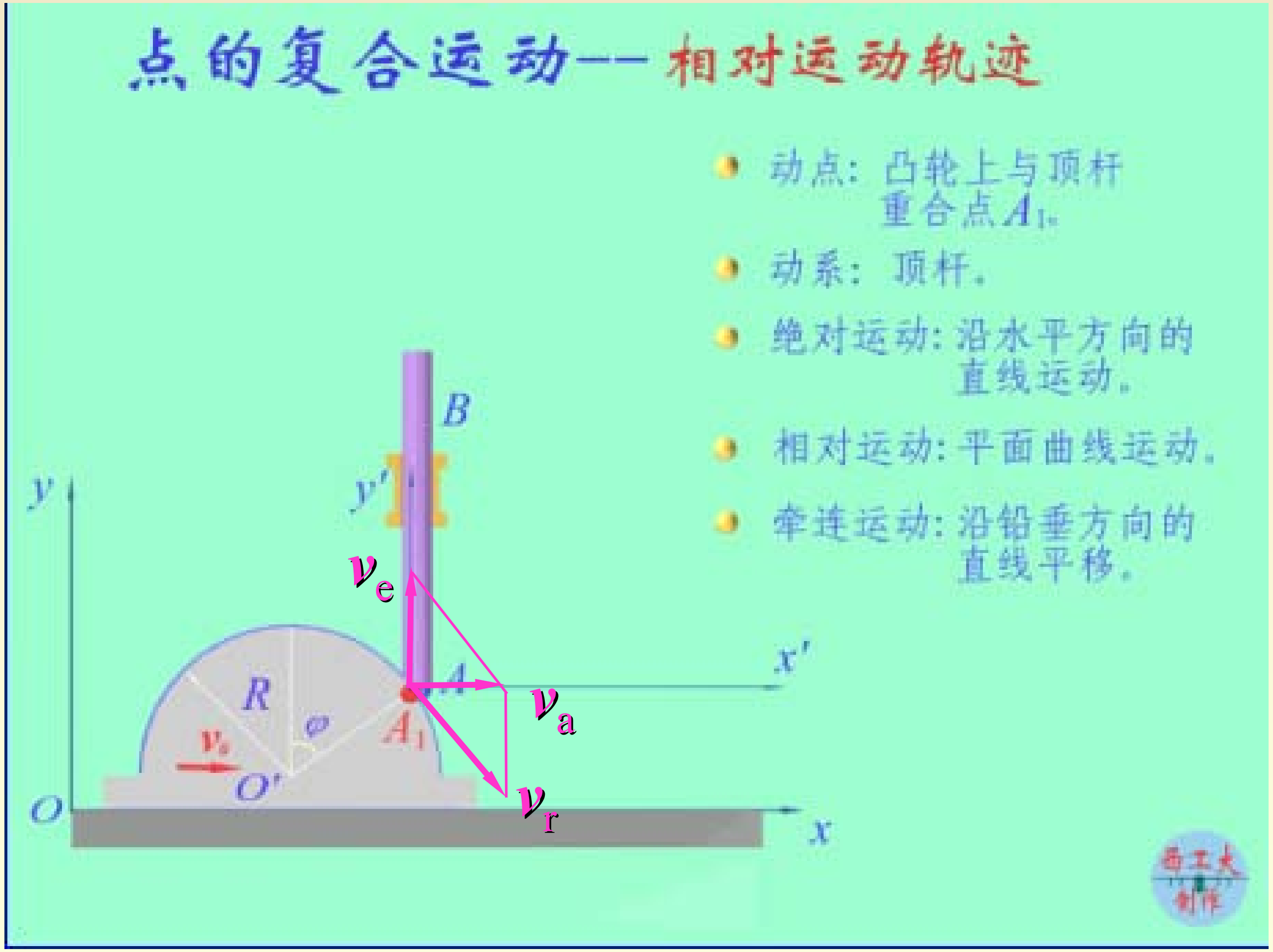


应用速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

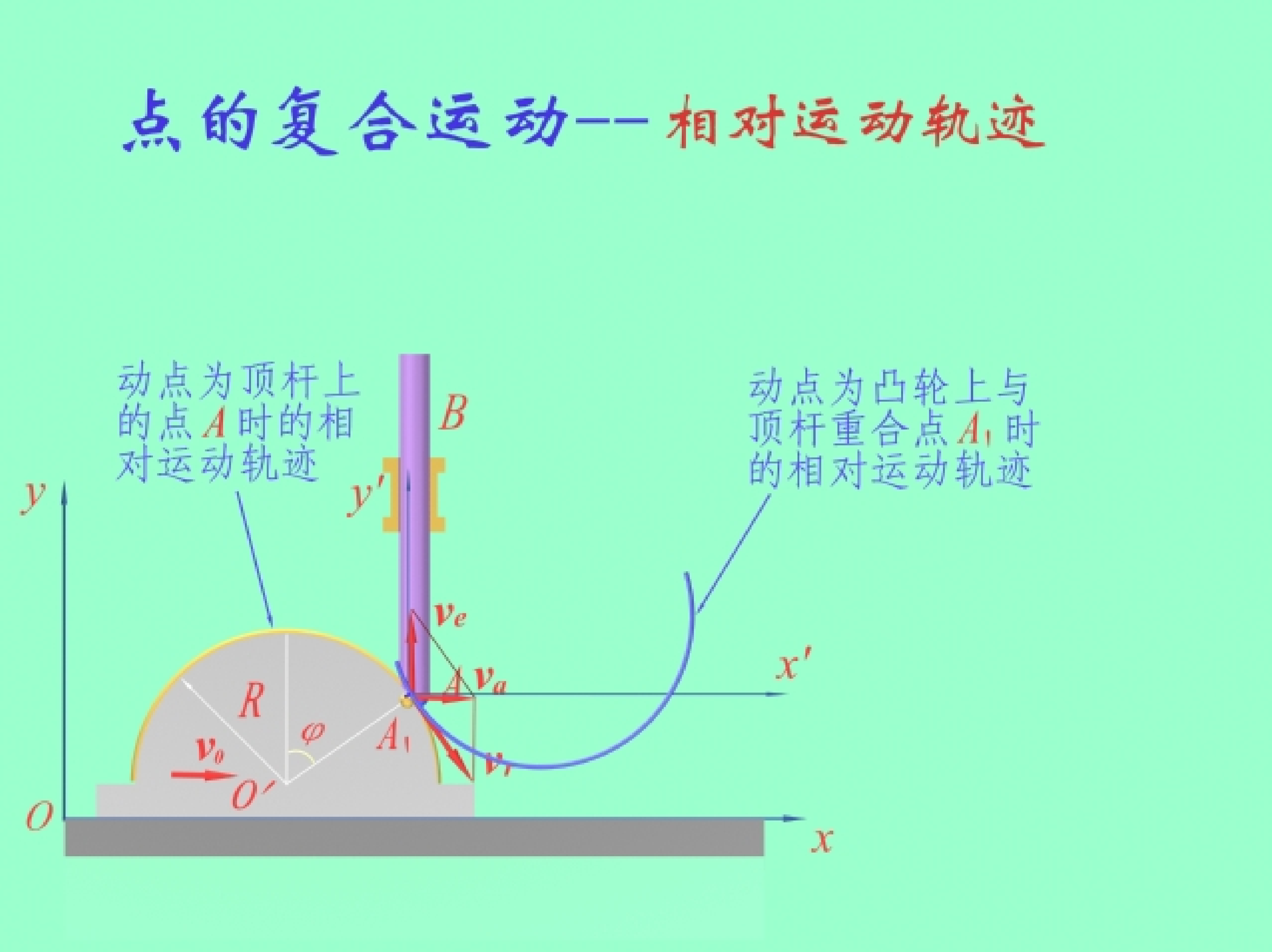
$$v_{\mathrm{a}} = v_{\mathrm{e}} \cdot \cot\varphi = v_0 \cdot \cot 60^\circ = 0.577 v_0$$

此瞬时杆AB的速度方向向上。



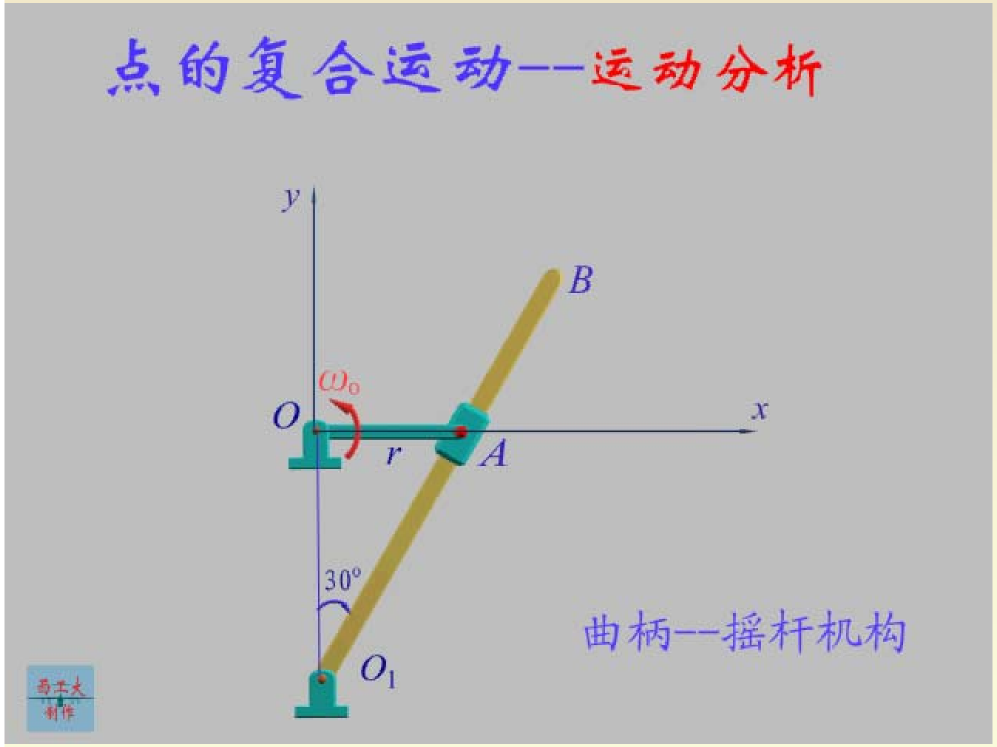
讨论

若取凸轮上与顶重合点A_1为动点，动系固连顶杆AB，则相对运动轨迹是什么曲线？

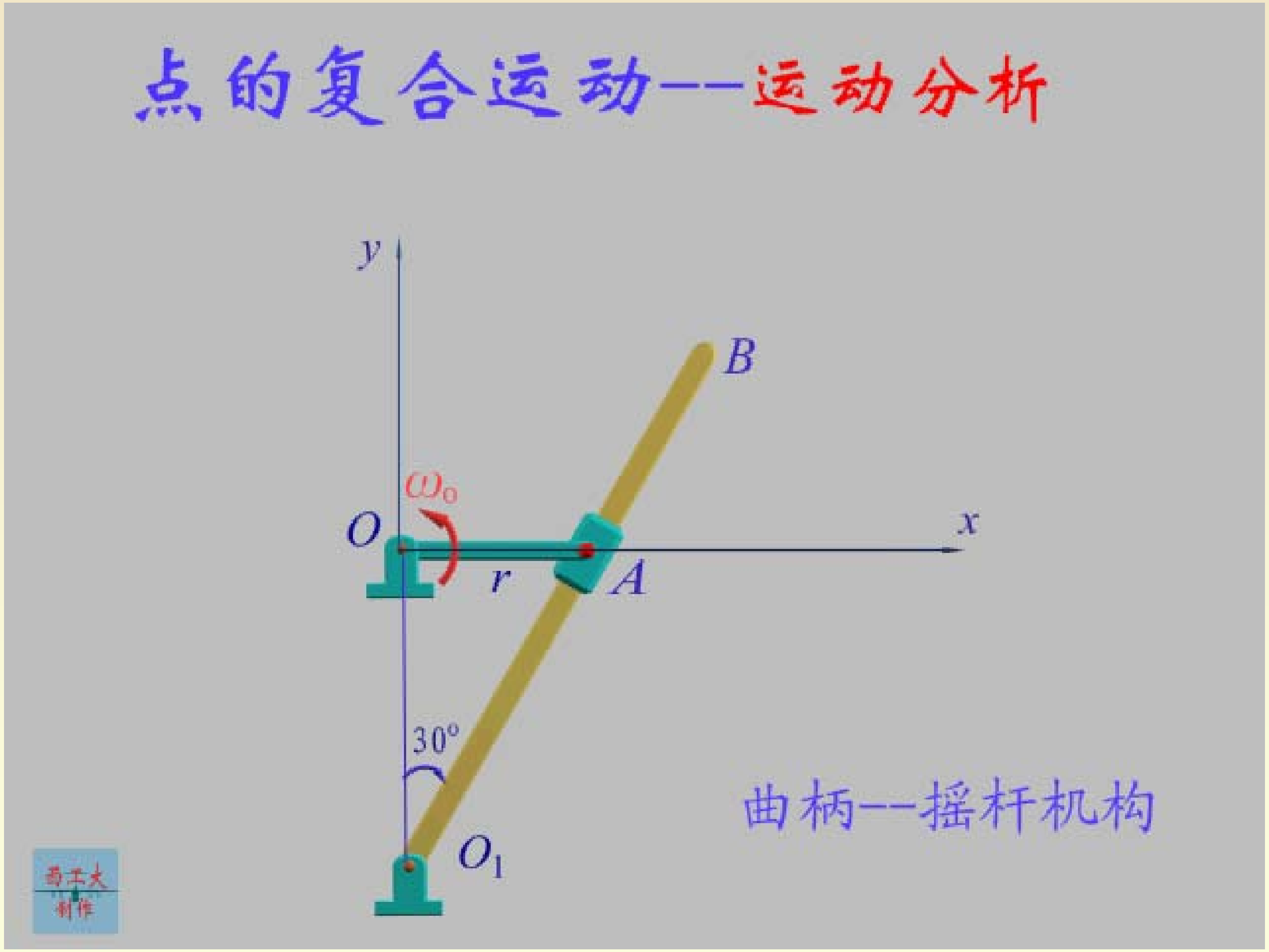


讨论

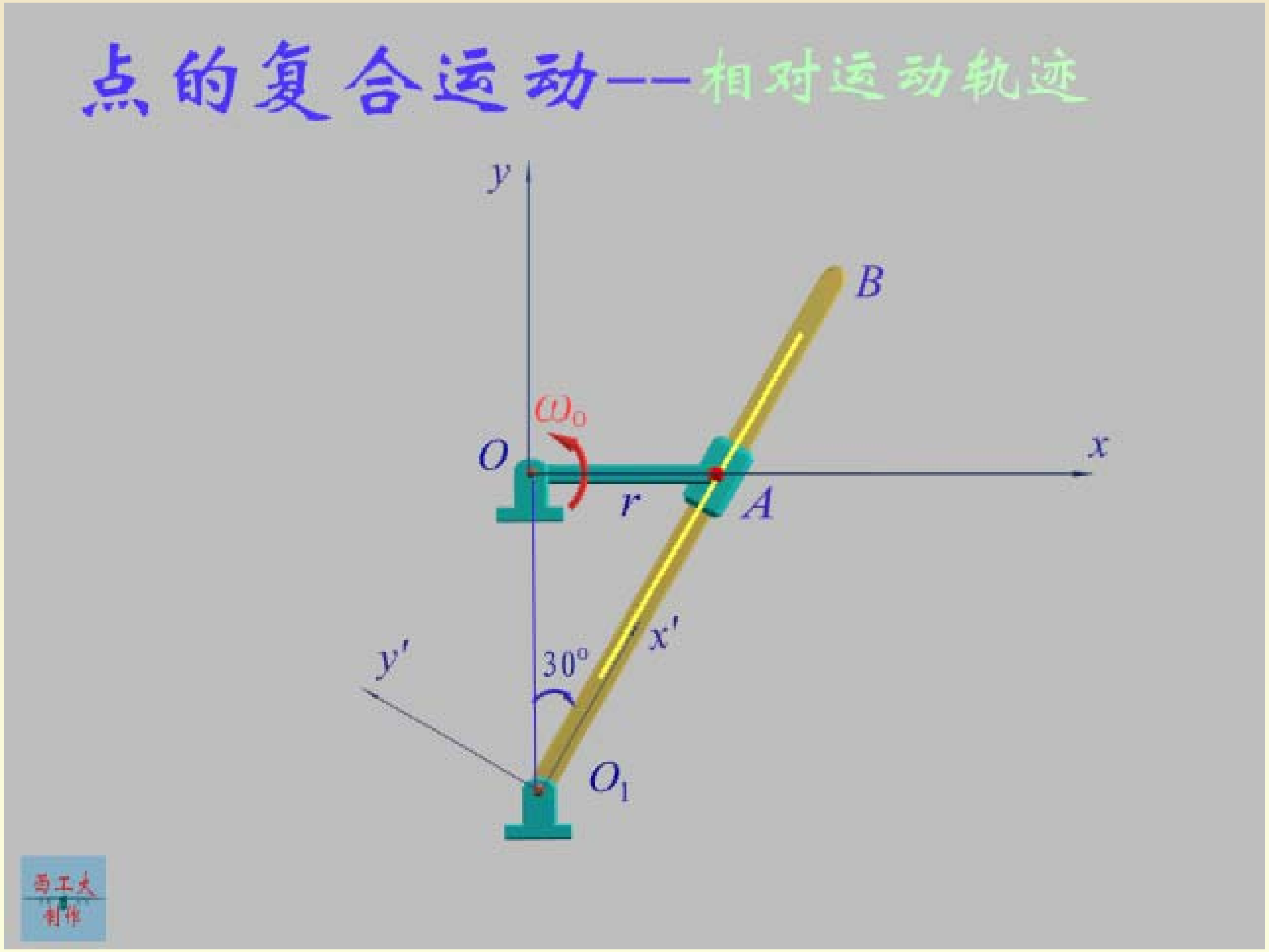
若取凸轮上与顶重合点 A_1 为动点，动系固连顶杆 AB，则相对运动轨迹是什么曲线？



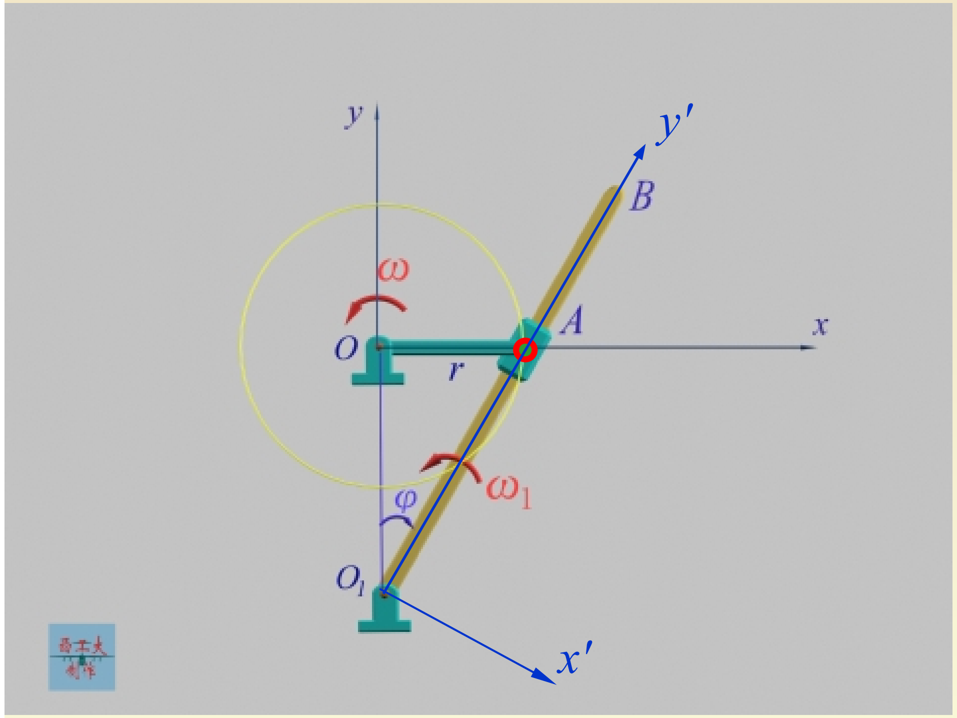
例3-4 刨床的急回机构如图所示。曲柄OA的一端A与滑块用铰链连接。当曲柄OA以匀角速度ω绕固定轴O转动时，滑块在摇杆O_1B上滑动，并带动摇杆O_1B绕固定轴O_1摆动。设曲柄长$OA=r$，两间距离$OO_1=l$。求当曲柄在水平位置时摇杆的角速度ω_1。



运 动 演 示



相对运动轨迹



解：

1. 选择动点，动系与定系。

动点—滑块 A 。

动系—$O_1x'y'$，固连于摇杆 O_1B。

定系—固连于机座。

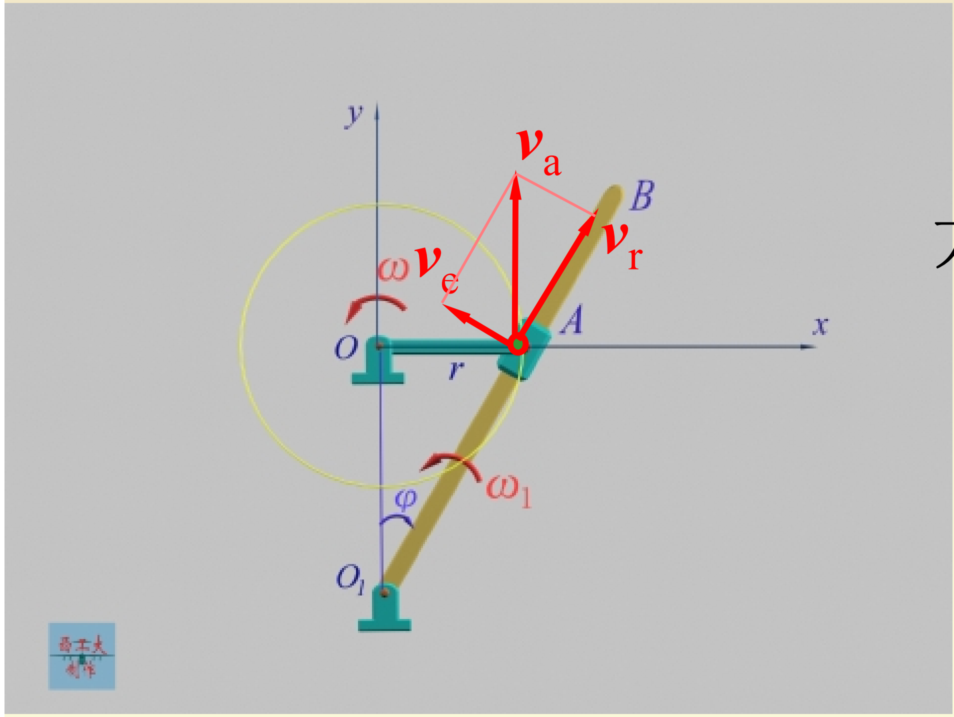
2. 运动分析。

绝对运动—以O为圆心的圆周运动。

相对运动—沿O_1B的直线运动。

牵连运动—摇杆绕O_1轴的摆动。

3. 速度分析。

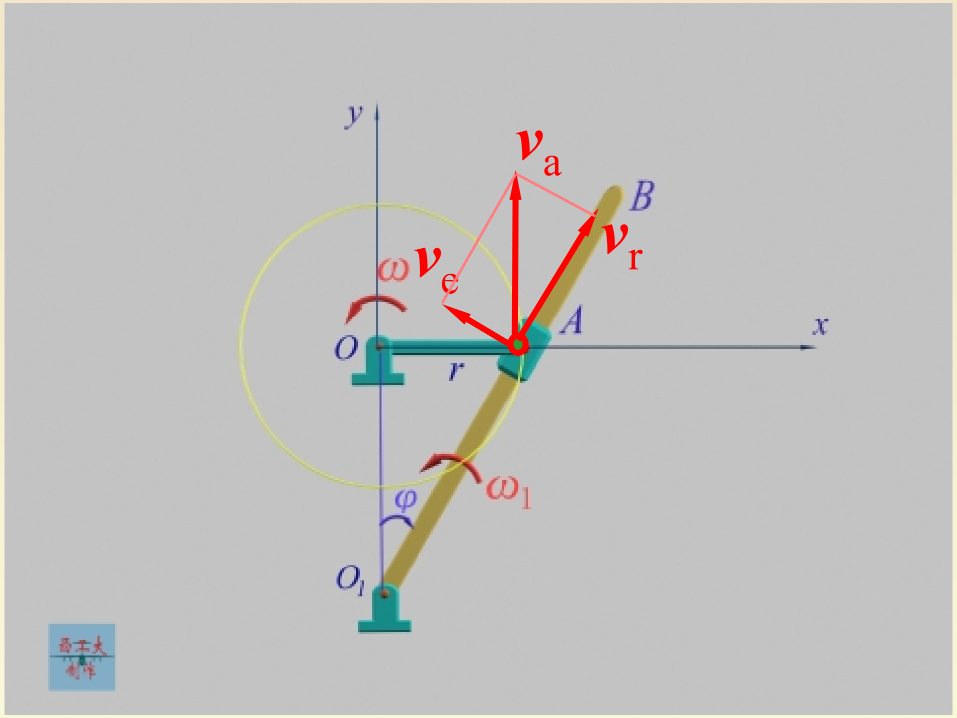


绝对速度v_a：$v_a = OA \cdot \omega = r\omega$，方向垂直于$OA$，沿铅垂方向向上。

牵连速度v_e：v_e为所要求的未知量，方向垂直于O_1B。

相对速度v_r：大小未知，方向沿摇杆O_1B。

应用速度合成定理 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$



$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_e = v_a \sin\varphi$$

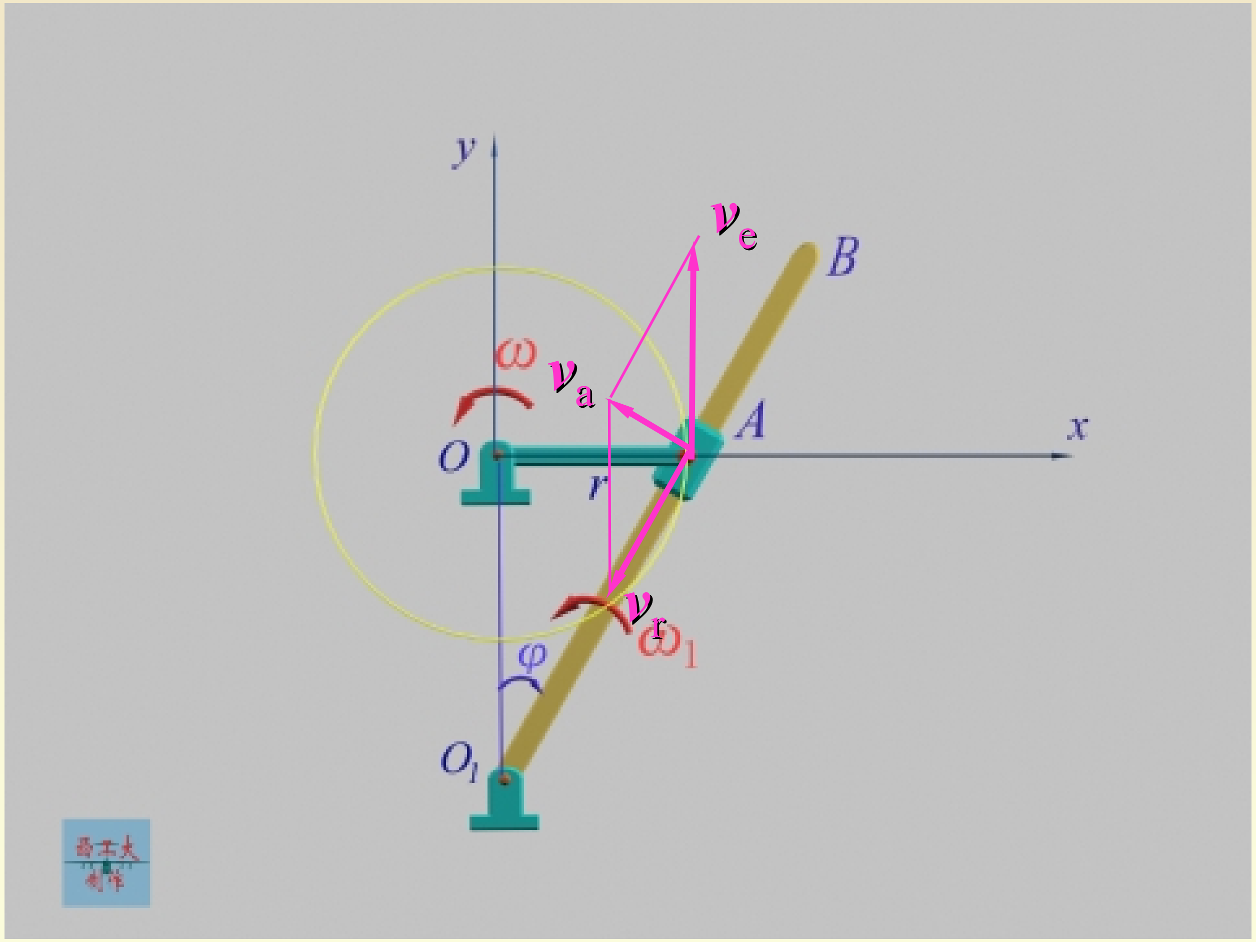
$$v_a = r\omega\,, \qquad \sin\varphi = \frac{r}{\sqrt{l^2 + r^2}},$$

所以 $$v_e = \frac{r^2\omega}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$

设摇杆在此瞬时的角速度为 ω_1，则

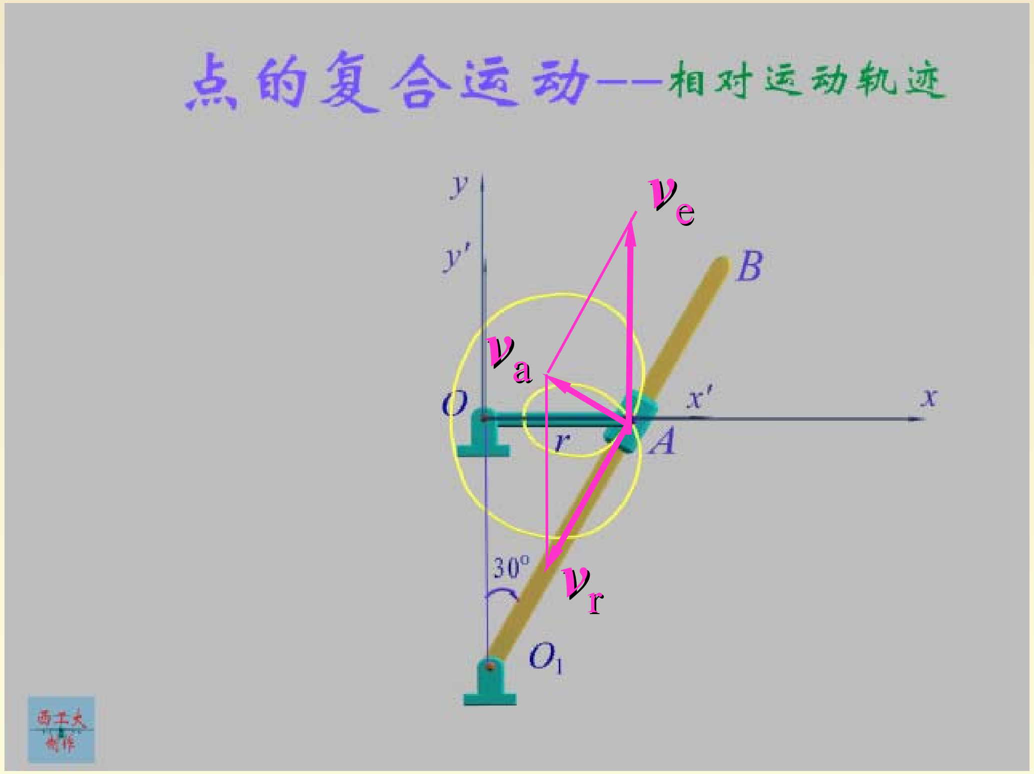
$$v_e = O_1A \cdot \omega_1 = \frac{r^2\omega}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$

其中 $O_1A = \sqrt{l^2 + r^2}$ 所以可得 $$\omega_1 = \frac{r^2\omega}{l^2 + r^2}$$



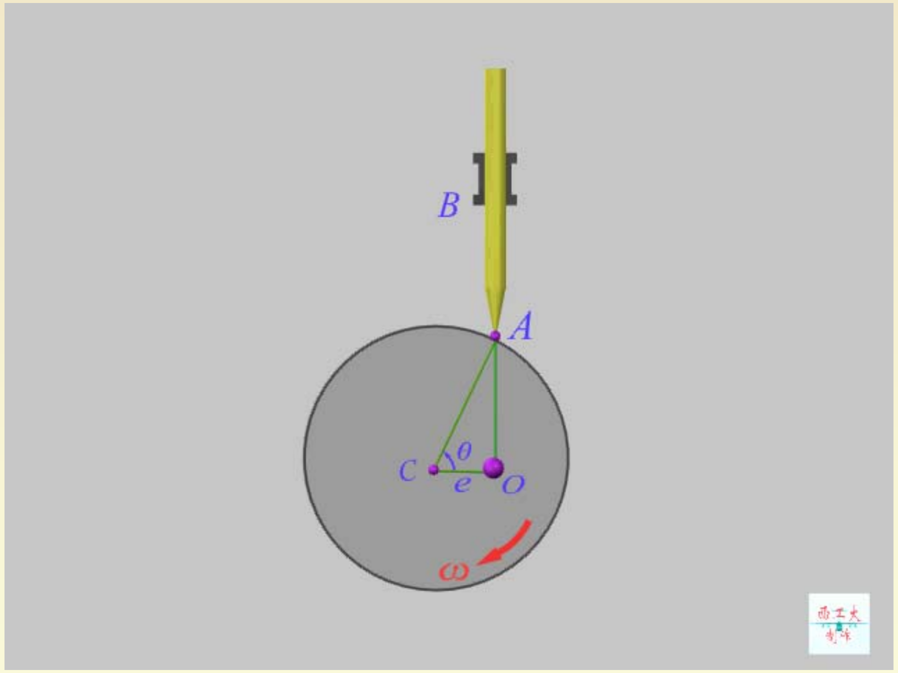
讨论

若取摇杆O_1B上A点为动点，动系固连曲柄OA，则相对运动轨迹是什么曲线？

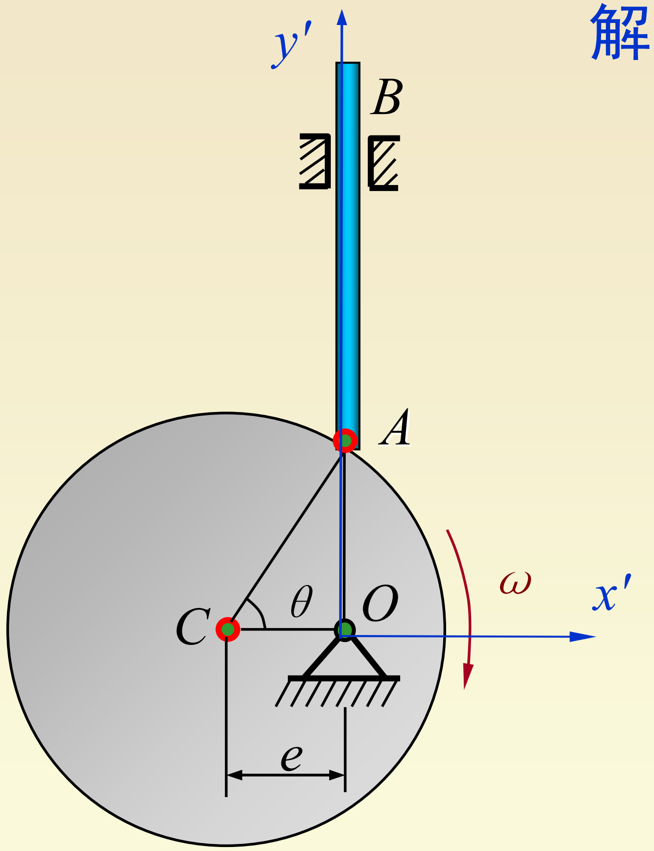


讨论

若取摇杆O_1B上A点为动点，动系固连曲柄OA，则相对运动轨迹是什么曲线？



例3–5 如图所示，半径为R，偏心距为e的凸轮，以匀角速度 ω绕O轴转动，杆AB能在滑槽中上下平动，杆的端点A始终与凸轮接触，且OAB成一直线。求在图示位置时，杆AB的速度。



解：

1. 选择动点，动系与定系。

点动－ AB的端点A 。

动系－$Ox'y'$，固连于凸轮。

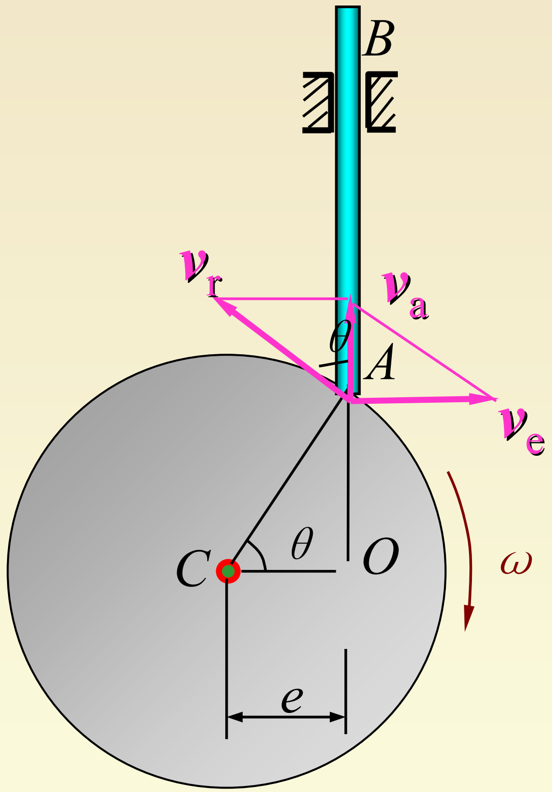
定系－固连于机座。

2. 运动分析。

绝对运动－直线运动。

相对运动－以C为圆心的圆周运动。

牵连运动－绕O 轴的定轴转动。



3. 速度分析。

绝对速度$\boldsymbol{v}_a$： v_a为所要求的未知量，方向沿杆AB。

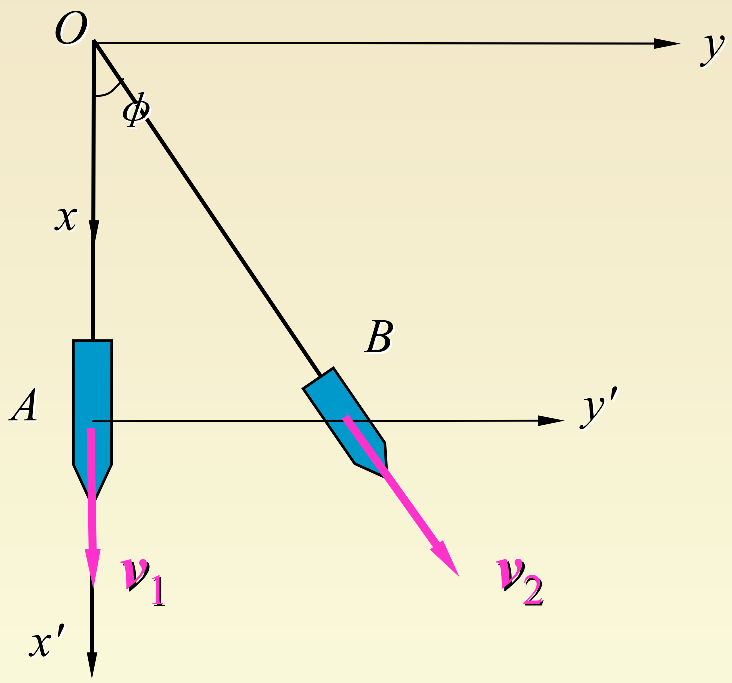
牵连速度$\boldsymbol{v}_e$： $v_e = OA \cdot \omega$，方向垂直于OA 。

相对速度$\boldsymbol{v}_r$：大小未知，方向沿凸轮圆周的切线 。

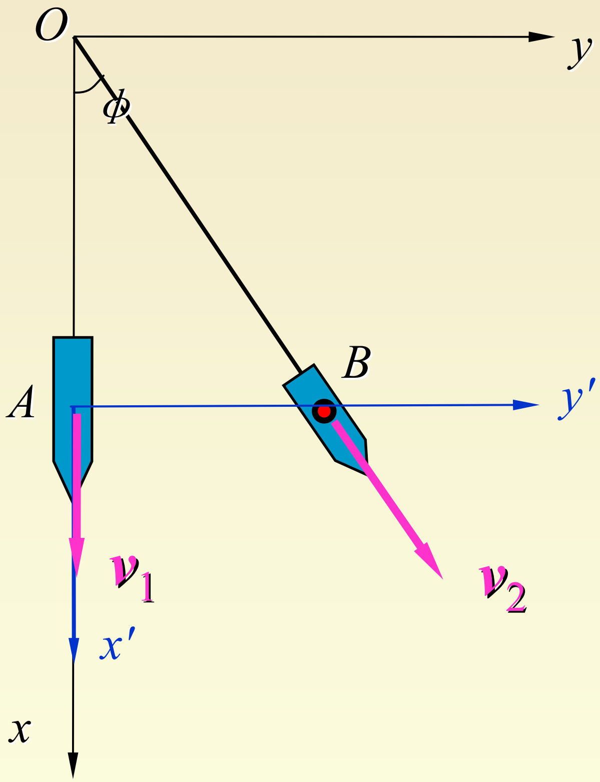
应用速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_a = v_e \cot\theta = \omega \cdot OA \frac{e}{OA} = \omega e$$



例3-7 船A和船B分别沿夹角是ϕ的两条直线行驶。已知船A的速度是$\boldsymbol{v}_1$，船B始终在船A的左舷正对方向。试求船B的速度$\boldsymbol{v}_2$和它对船A的相对速度。



解：

1. 选择动点，动系与定系。

动点—取船B上任一点为动点。

动系— $Ax'y'$固连于船A上。

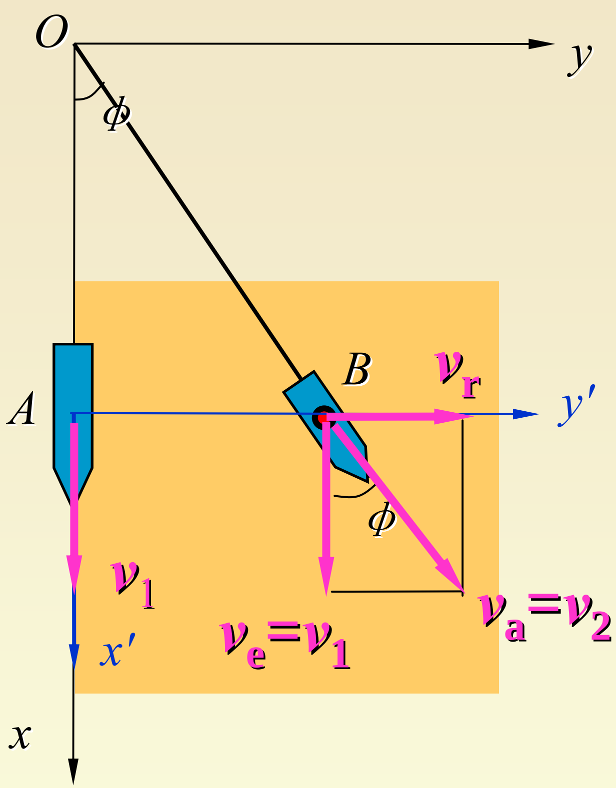
定系—固连于海岸。

2. 运动分析。

绝对运动— 沿OB的直线运动。

牵连运动— 随动系$Ax'y'$的直线平动。

相对运动—沿AB的直线运动。



3. 速度分析。

绝对速度v_a： $v_a=v_2$, 大小待求，方向沿OB。

牵连速度v_e： $v_e = v_1$，方向沿轴Ox正向。

相对速度v_r： 大小未知，方向沿AB 。

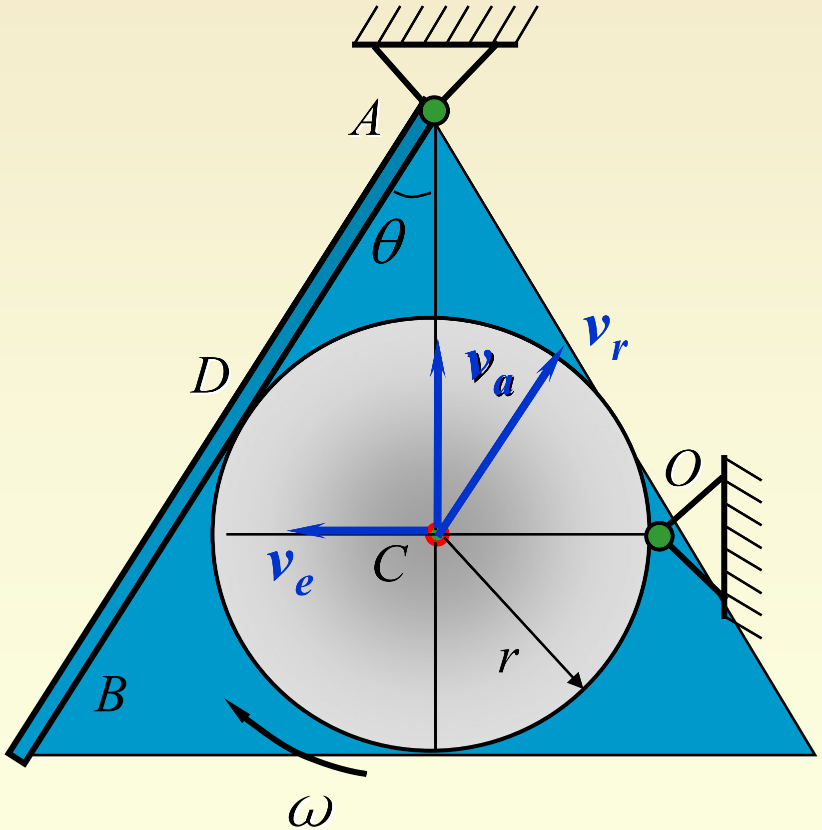
4. 求速度。

应用速度合成定理 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

得船B的绝对速度和对于船A的相对速度的大小

$$v_2 = \frac{v_1}{\cos\varphi}, \qquad v_r = v_1 \tan\varphi$$

已知 $\omega_0 = 2$ rad/s， $\theta = 30°$ 。$r = 2\sqrt{3}$ cm，$AB=4r$， 求杆AB的角速度和角加速度。



已知 $\omega_0=2\mathrm{rad/s}$， $\theta=30°$ 。$r=2\sqrt{3}\mathrm{cm}$， $AB=4r$，求杆AB的角速度和角加速度。

解：**1.**角速度

动点—点C。

动系—固连于摇杆 AB。

定系—固连于机座。

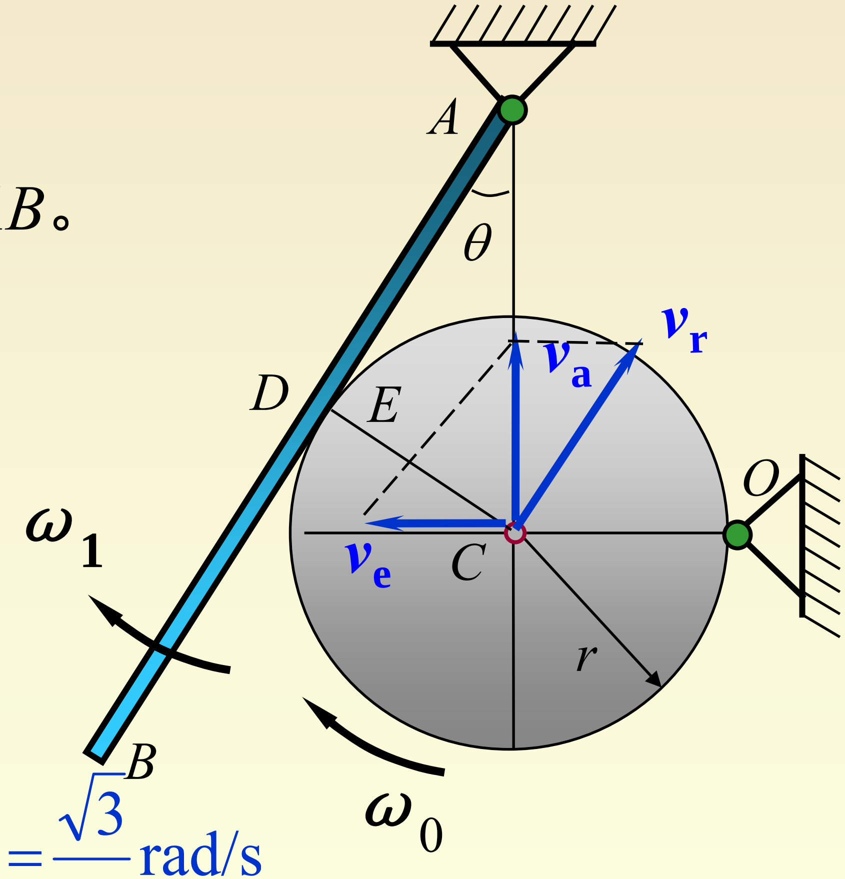
$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

$$v_a=r\omega_0$$

$$v_e=v_a\tan\theta=r\omega_0\tan\theta$$

$$v_r=\frac{v_a}{\cos\theta}=\frac{r\omega_0}{\cos\theta}$$

$$\omega_1=\frac{v_e}{AC}=\frac{v_e}{2r}=\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{rad/s}$$



§3–3 牵连运动是平移时点的加速度合成定理

- 三种加速度
- 加速度合成定理

§3-3　牵连运动是平移时点的加速度合成定理

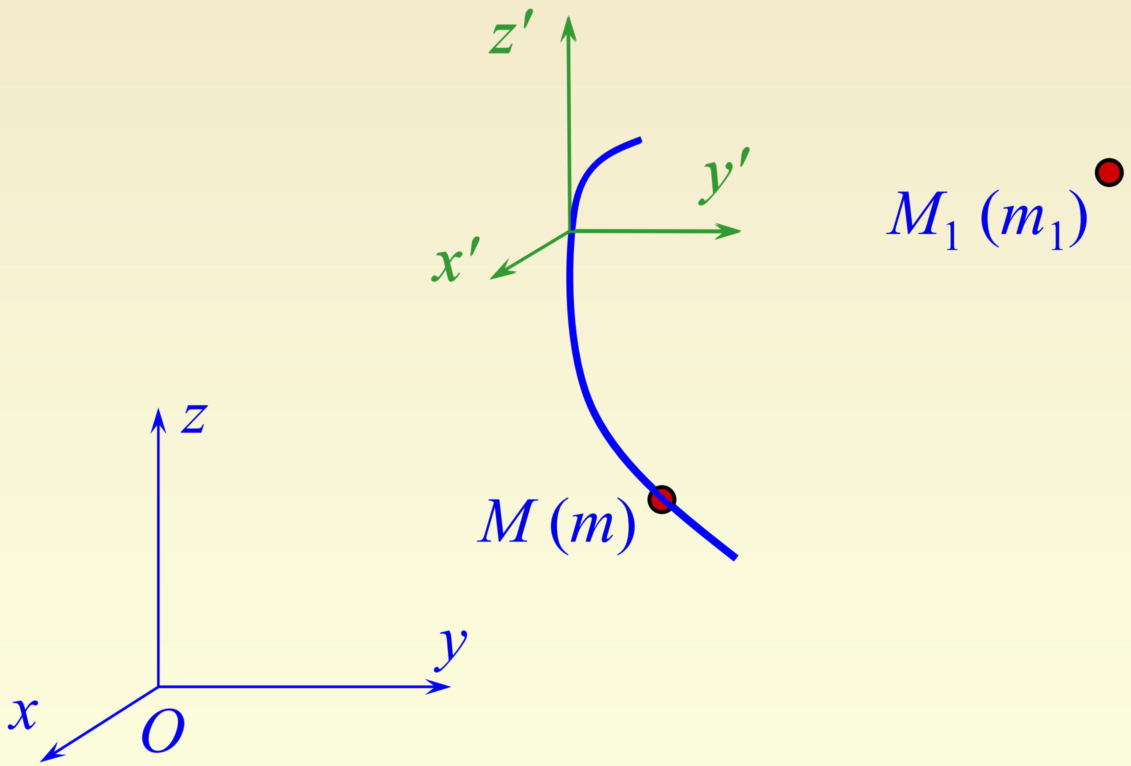
1. 三种加速度

绝对加速度—动点对于定系的加速度称为绝对加速度，用$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}$表示。

相对加速度—动点对于动系的加速度称为相对加速度，用$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$表示。

牵连加速度—动系中与动点相重合的那一点对于定系的加速度称为牵连加速度，用$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}$表示。

2. 加速度合成定理 (牵连运动为平移)

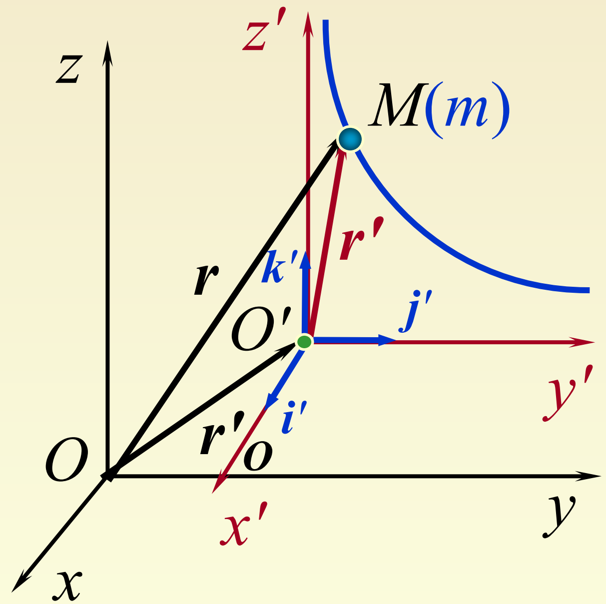


2. 加速度合成定理

动点M在定系和动系中的矢径分别用$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$表示。

有关系式

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{O'} + \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_{O'} + x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$$



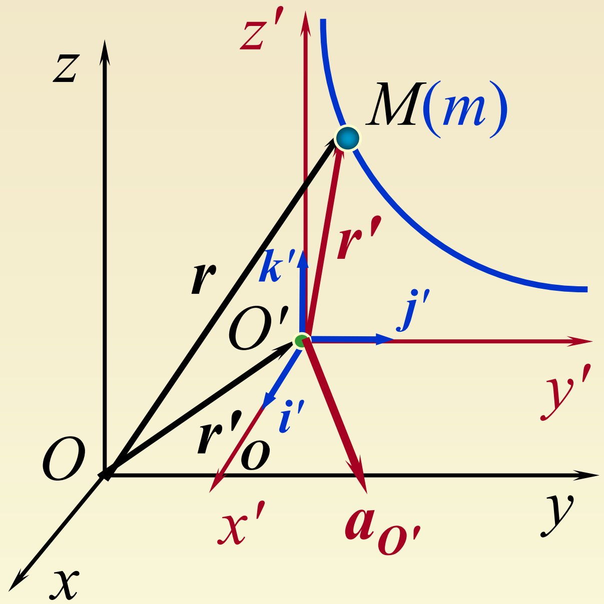
在定系中把式对时间t求二阶导数，有

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_{O'}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}' + \frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}' + \frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}'$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_{O'}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}'+\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}'+\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}'$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_{O'}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{a}_{O'}$$

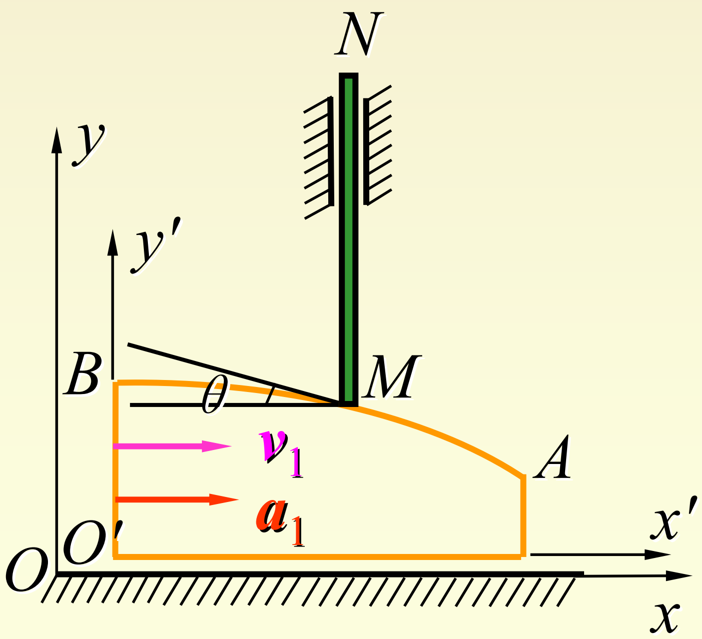
$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}$　　$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$

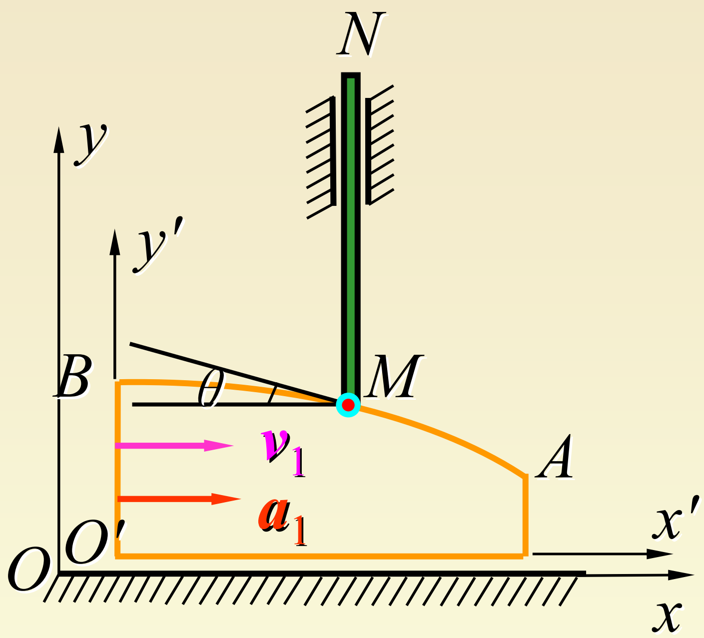


$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}$$

加速度合成定理——牵连运动为平移时，点的绝对加速度等于牵连加速度、相对加速度的矢量和。

例3-10 具有曲面AB的靠模沿水平方向运动时，推动顶杆MN沿铅直固定导槽运动。已知在图中瞬时靠模具有水平向右的速度$\boldsymbol{v}_1$，水平向右的加速度$\boldsymbol{a}_1$，曲线AB在杆端M接触点的切线与水平线的夹角为θ；曲线AB在杆端接触点M的曲率半径是ρ；试求顶杆MN在这瞬时的速度及加速度。





解： 1. 选择动点，动系与定系。

动点－顶杆端点M。

动系－固连于靠模上。

定系－固连于机座。

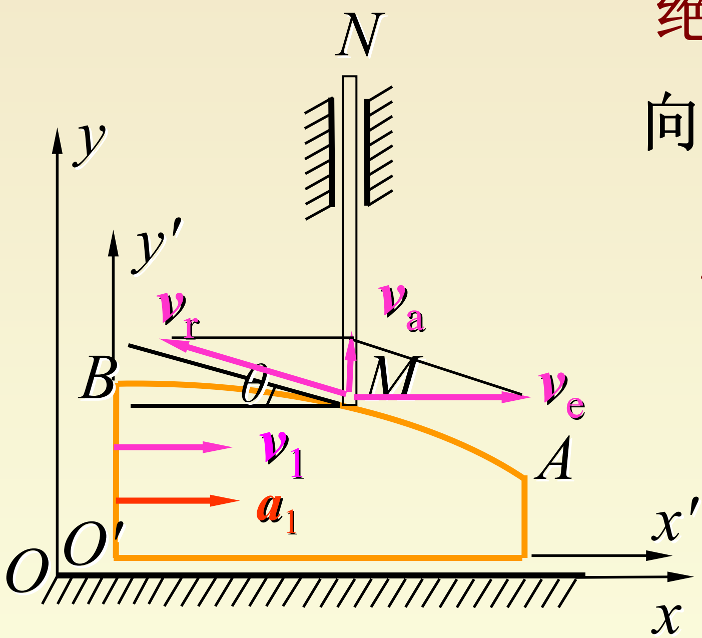
2. 运动分析。

绝对运动－M点沿铅直方向的直线运动。

相对运动－相对于靠模沿其表面 AB 的曲线运动。

牵连运动－ 靠模水平向右的平动。

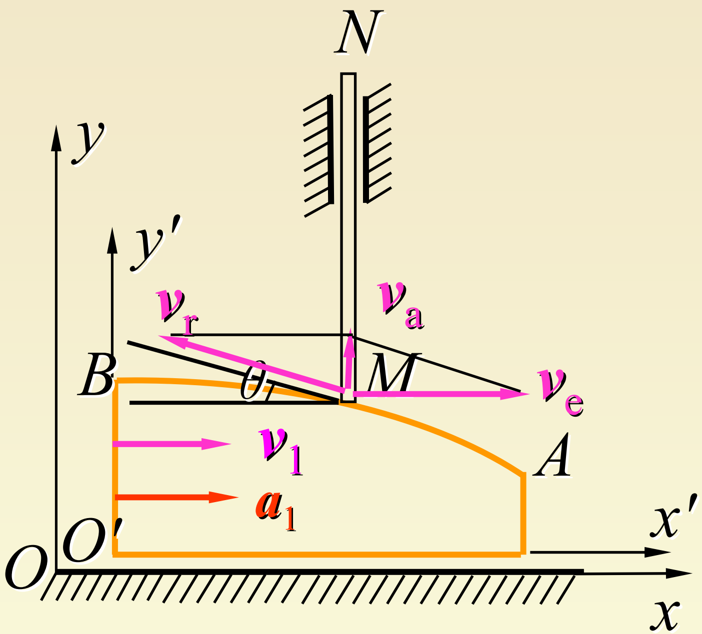
3. 速度分析。



绝对速度$\boldsymbol{v}_a$： 大小未知，方向沿杆MN向上。

牵连速度$\boldsymbol{v}_e$： $v_e = v_1$ ，方向水平向右。

相对速度$\boldsymbol{v}_r$：大小未知，方向沿AB的切线方向方向。



根据点的速度合成定理，有

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

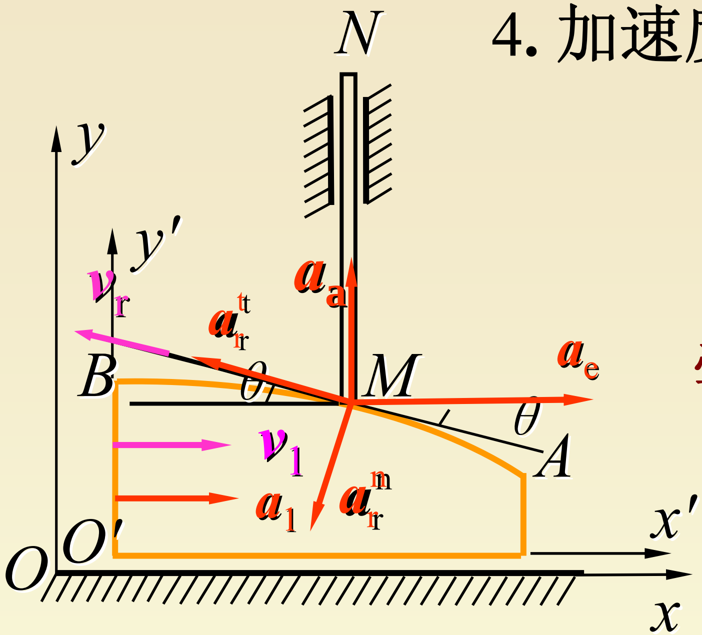
可求得动点 M 的绝对速度即顶杆 MN 速度的大小

$$v_a = v_e \tan\theta = v_1 \tan\theta$$

方向是铅直向上。

也可求得相对速度的大小

$$v_r = v_e \sec\theta = v_1 \sec\theta$$



4. 加速度分析。　由点的加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r^t + \boldsymbol{a}_r^n$$

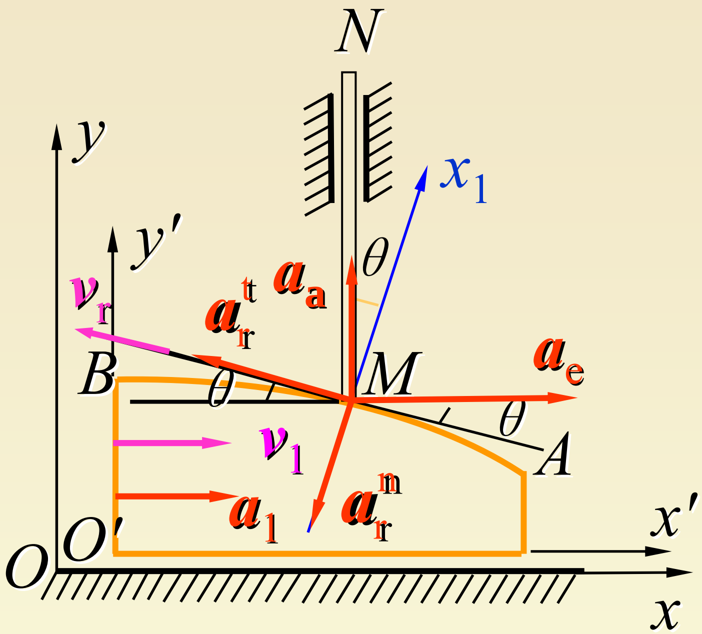
绝对加速度$\boldsymbol{a}_a$：大小待求，方向铅直。

牵连加速度$\boldsymbol{a}_e$：$a_e = a_1$，方向水平向右。

相对加速度切向分量$\boldsymbol{a}_r^t$：大小未知，沿相对轨迹的切线。

相对加速度法向分量$\boldsymbol{a}_r^n$：$a_r^n = v_r^2/\rho$ 沿相对轨迹的法线。

加速度	$\boldsymbol{a}_a$	$\boldsymbol{a}_e$	$\boldsymbol{a}_r^t$	$\boldsymbol{a}_r^n$
大小	未知	a_1	未知	v_r^2/ρ
方向	铅直	水平向右	沿相对轨迹的切线	沿相对轨迹的法线



$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r^t + \boldsymbol{a}_r^n$$

将上式投影到与$\boldsymbol{a}_r^t$相垂直的轴x_1上，得

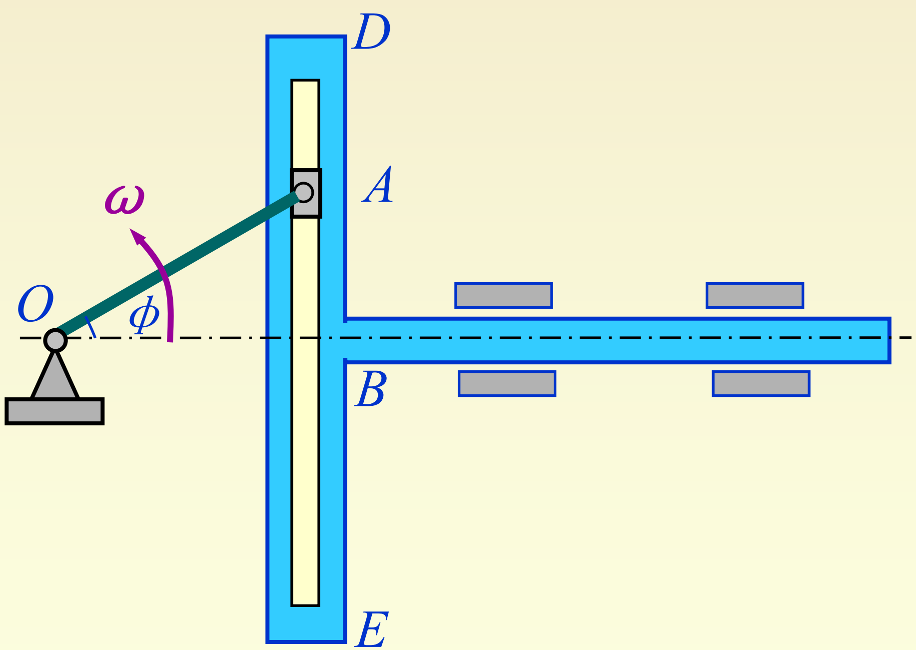
$$a_a \cos\theta = a_e \sin\theta - a_r^n$$

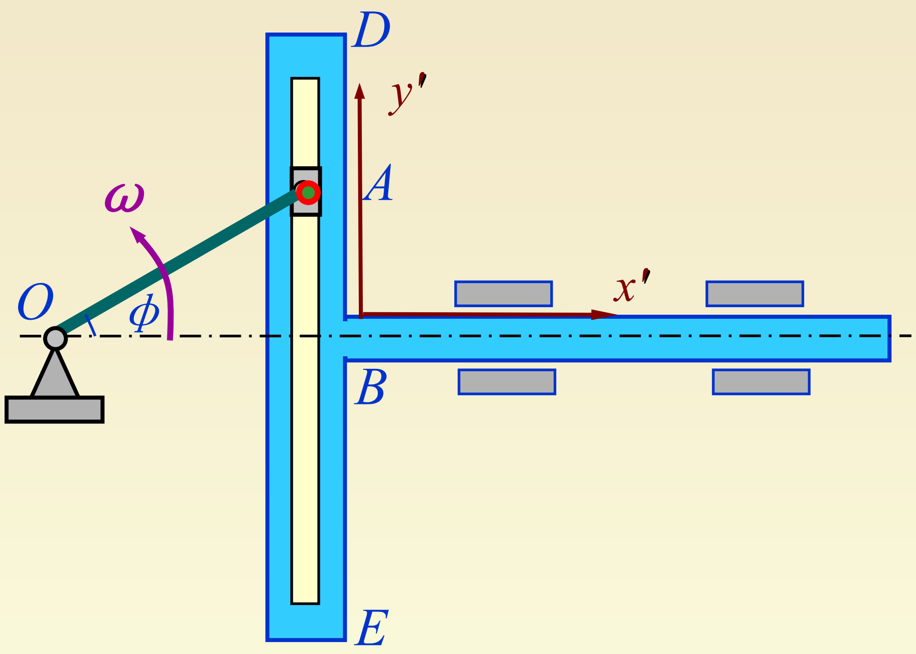
可求得顶杆在该瞬时的加速度

$$a_a = a_1 \tan\theta - \frac{v_1^2 \sec^3\theta}{\rho}$$

若上式求得$\boldsymbol{a}_a$是负值，说明$\boldsymbol{a}_a$的实际指向与图示假定指向相反。

例3-11 曲柄OA绕固定轴O转动，丁字形杆BC沿水平方向往复平动，如图所示。铰链在曲柄端A的滑块，可在丁字形杆的铅直槽DE内滑动。设曲柄以角速度 ω作匀角速转动，$OA=r$，试求杆BC 的加速度。





解： 1. 选择动点，动系与定系。

动点－滑块A 。

动系－$Bx'y'$，固连于丁字形杆。

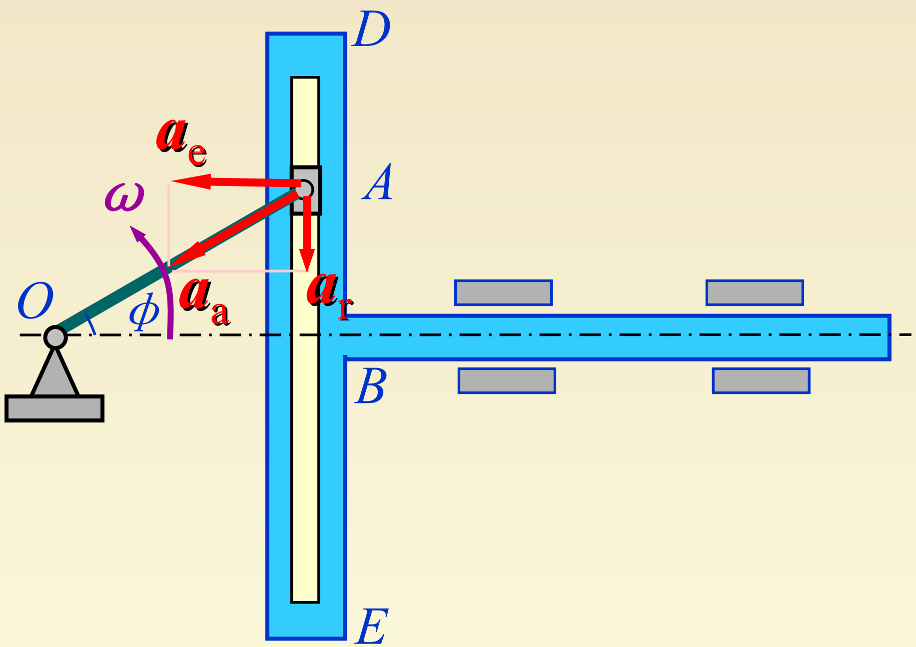
定系－固连于机座。

2. 运动分析。

绝对运动－以O为圆心的圆周运动。

相对运动－沿槽CD的直线运动。

牵连运动－丁字形杆BC 沿水平方向平动。



3. 加速度分析。

绝对加速度a_a：$a_a = OA\ \omega^2$，沿着OA，指向O。

牵连加速度a_e：大小未知，为所要求的量，沿水平方向

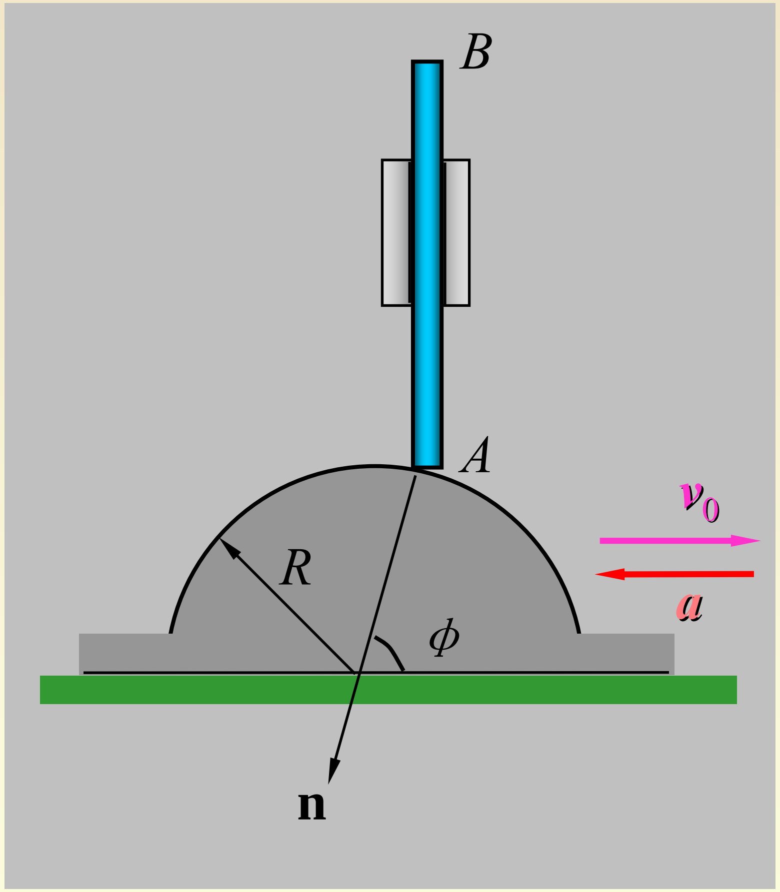
相对加速度a_r：大小未知，方向沿铅直槽DE。

应用加速度合成定理

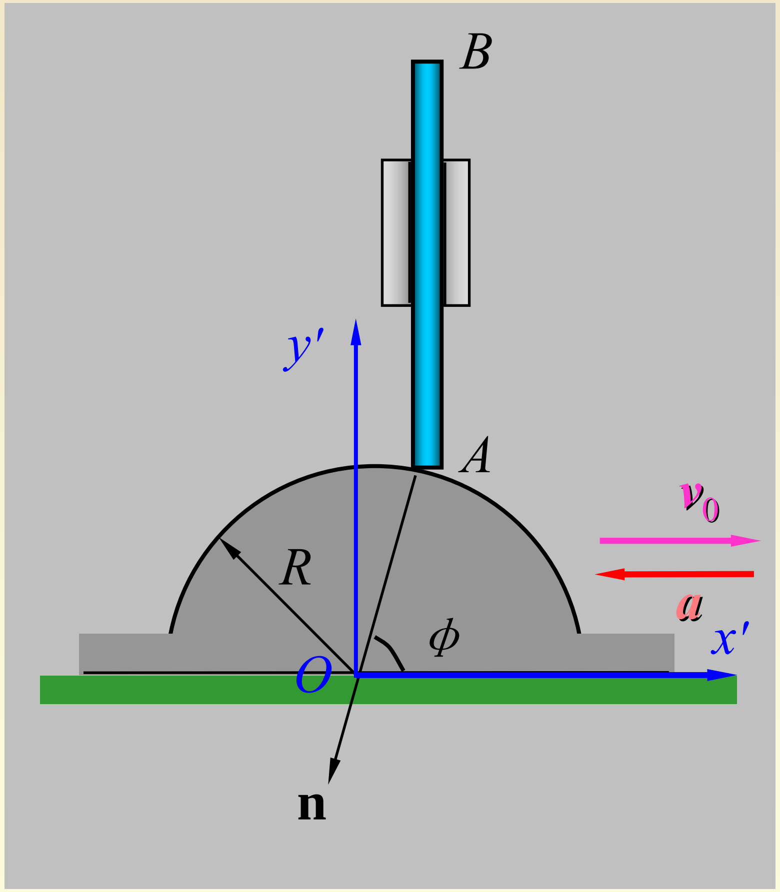
$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r$$

得杆BC的加速度

$$a_{BC} = a_e = a_a\cos\varphi = r\omega^2\cos\varphi$$



例3-12 凸轮在水平面上向右作减速运动，如图所示。设凸轮半径为R，图示瞬时的速度和加速度分别为$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{a}$。求杆AB在图示位置时的加速度。



解：

1. 选择动点，动系与定系。

动点— AB的端点A 。

动系－$Ox'y'$，固连于凸轮。

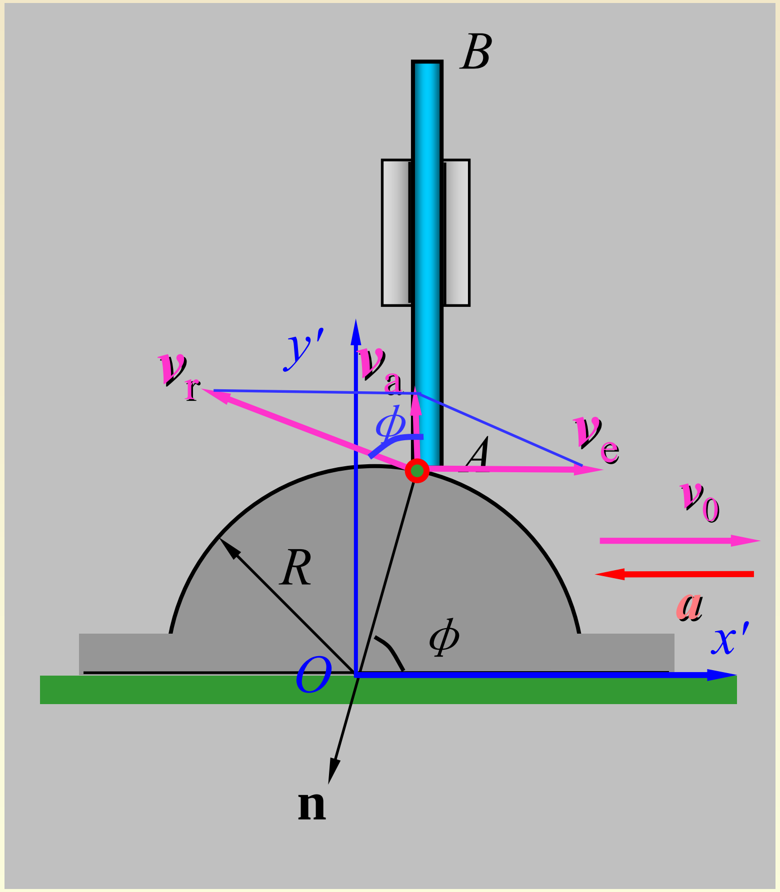
定系－固连于机座。

2. 运动分析。

绝对运动－直线运动。

相对运动－沿凸轮轮廓曲线运动。

牵连运动－水平平动。



3. 速度分析。

绝对速度$\boldsymbol{v}_a$：大小未知，方向沿杆AB向上。

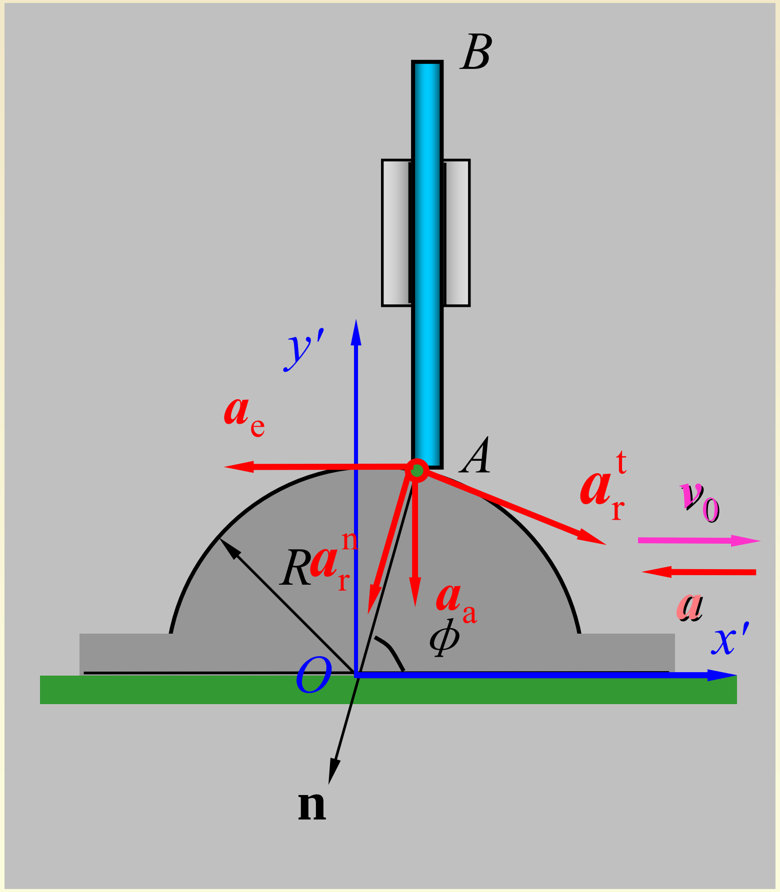
牵连速度$\boldsymbol{v}_e$：$v_e = v$，方向水平向右。

相对速度$\boldsymbol{v}_r$：大小未知，方向沿凸轮圆周的切线 。

根据速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

可求得： $v_r = \dfrac{v_e}{\sin\varphi} = \dfrac{v}{\sin\varphi}$



4. 加速度分析。

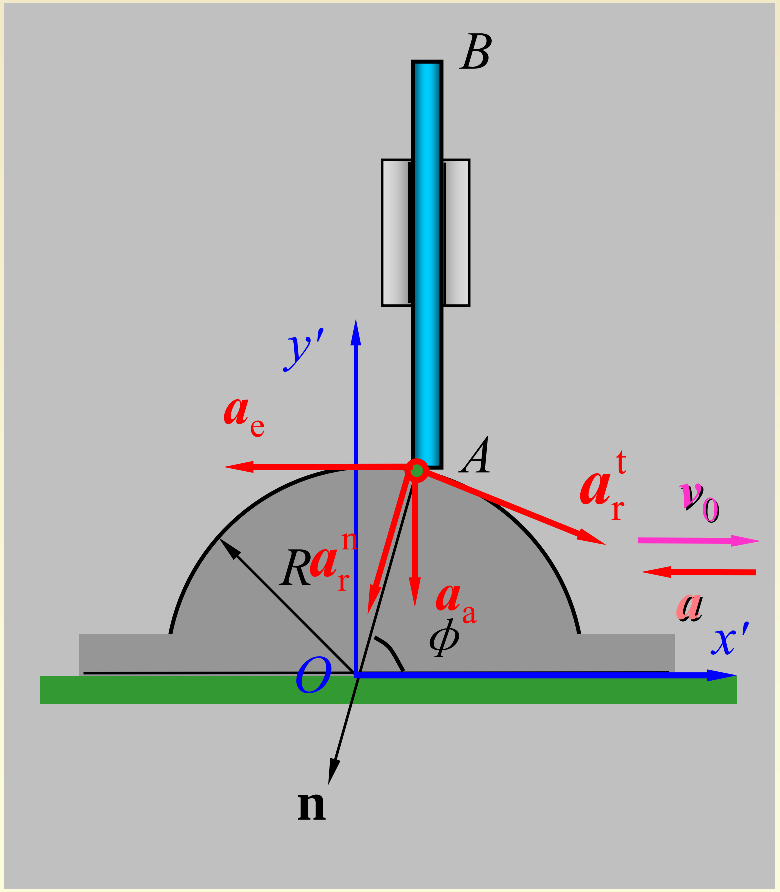
绝对加速度a_a：大小未知，为所要求的量，

方向沿直线AB。

牵连加速度a_e：$a_e = a$，沿水平方向。

相对加速度切向分量a_r^t：大小未知，垂直于OA，假设指向右下。

相对加速度法向分量a_r^n：$a_e^n = v_r^2 / R$，沿着OA，指向O。



根据加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}^t{}_r + \boldsymbol{a}^n{}_r$$

上式投影到法线 **n** 上，得

$$a_a \sin\varphi = a_e \cos\varphi + a_r^n$$

解得杆*AB*在图示位置时的加速度

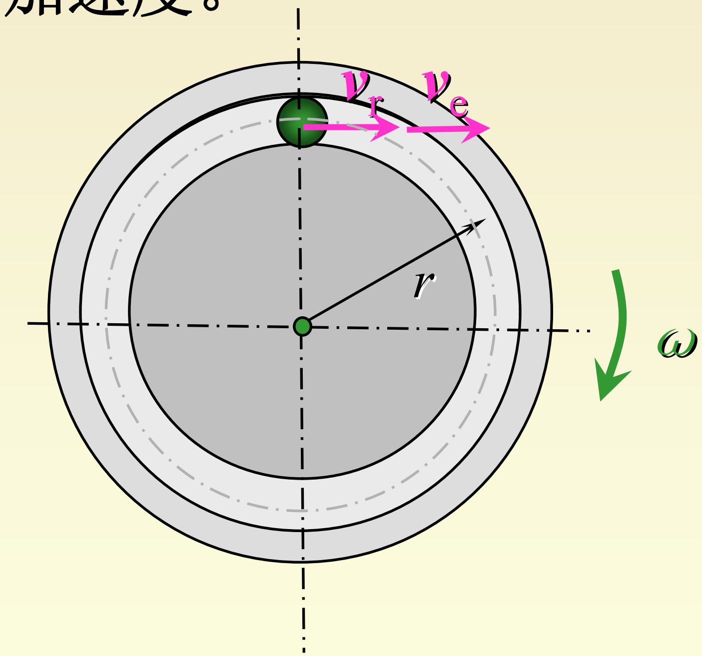
$$a_a = \frac{1}{\sin\varphi}\left(a\cos\varphi + \frac{v^2}{R\sin^2\varphi}\right) = a\cot\varphi + \frac{v^2}{R\sin^3\varphi}$$

§3–4 牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理

- 牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理
- 科氏加速度

引 例

设动点M在园盘上半径是r的圆槽内相对于圆盘以大小不变的速度v_r作圆周运动，同时，圆盘以匀角速度 ω绕定轴O转动，求M点牵连、相对、绝对加速度。



解：

动点－M点 。

动系－固连于圆盘。

相对速度 v_r=const

牵连速度 $v_e = r\omega$

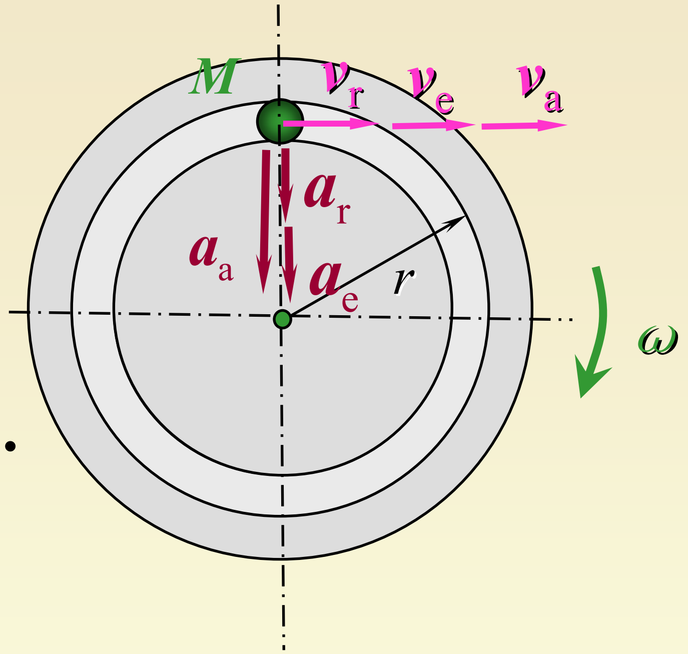
动点－M点。 $v_e = r\omega$

动系－固连于圆盘。

应用速度合成定理 $v_a = v_e + v_r$

$$v_a = r\omega + v_r = \text{常量}$$

所以M绝对运动为沿槽匀速圆周运动.



加速度分析

$$a_r = a_r^n \qquad a_r = a_r^n = v_r^2/r$$

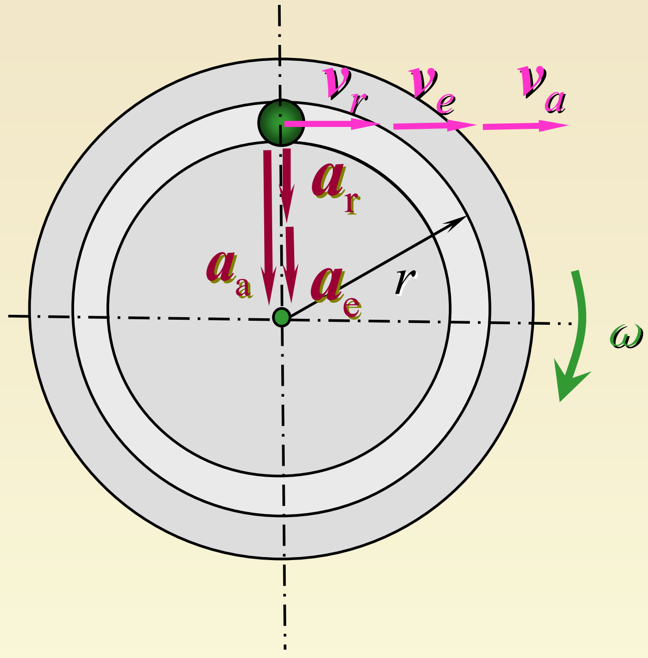
$$a_e = a_e^n \qquad a_e = a_e^n = v_e^2/r = r\omega^2$$

$$a_a = a_a^n \qquad a_a = a_a^n = v_a^2/r = (r\omega + v_r)^2/r$$

$$a_a = v_r^2/r + r\omega^2 + 2\omega v_r$$

$$a_r = v_r^2/r \ , \quad a_e = r\omega^2$$

$$a_a = v_r^2/r + r\omega^2 + 2\omega v_r$$

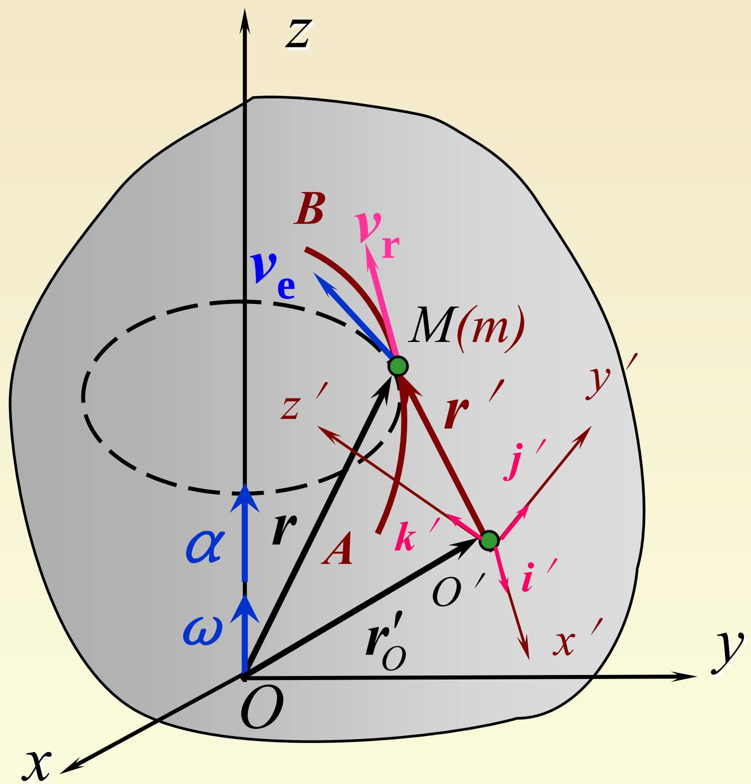


由此可见，在此实例中，点M的绝对加速度$\boldsymbol{a}_a$并不不等于其牵连加速度（大小$r\omega^2$）与相对加速度（大小$\dfrac{v_r^2}{r}$）的矢量和。这里增加了一项$2\omega v_r$称为**科氏加速度**，用$\boldsymbol{a}_C$表示。

即：**当牵连运动是定轴转动时，动点的加速度并不等于牵连加速度与相对加速之矢量和。**

1. 牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理

设载体以角速度 ω 和角加速度 ε 绕定系 $Oxyz$ 的轴 z 转动；动系 $O'x'y'z'$ 固连于载体，动点 M 沿相对轨迹 AB 运动。



(1) v_r与 a_r

相对矢径 $\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$

相对速度 $\boldsymbol{v}_r = \dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}'$

相对加速度 $\boldsymbol{a}_r = \ddot{x}'\boldsymbol{i}' + \ddot{y}'\boldsymbol{j}' + \ddot{z}'\boldsymbol{k}'$

(2) $\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}$与 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}$

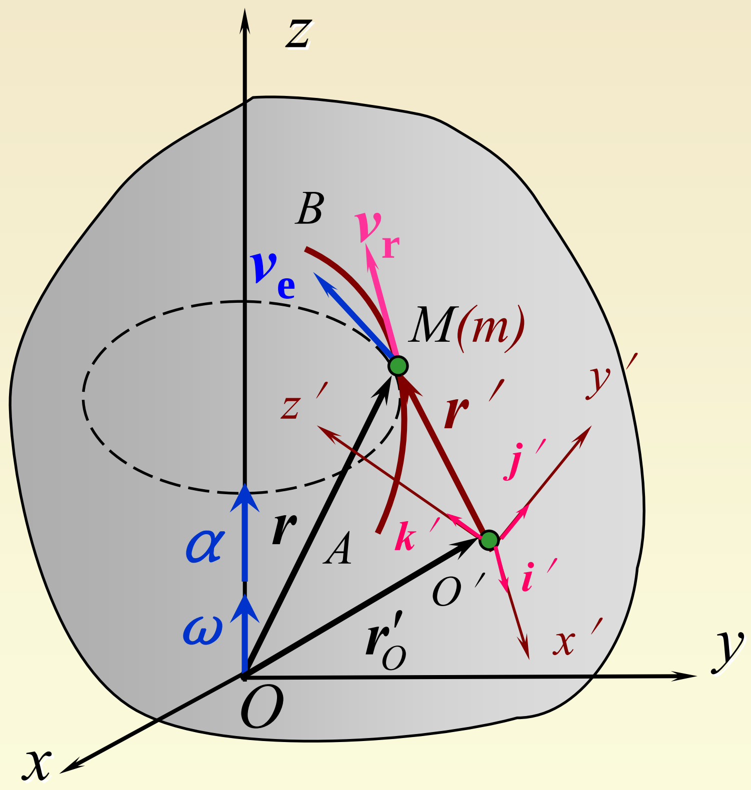
牵连速度

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{v}_{m} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

牵连加速度

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{a}_{m} = \boldsymbol{a}_{m}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{m}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}$$

$$= \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}$$



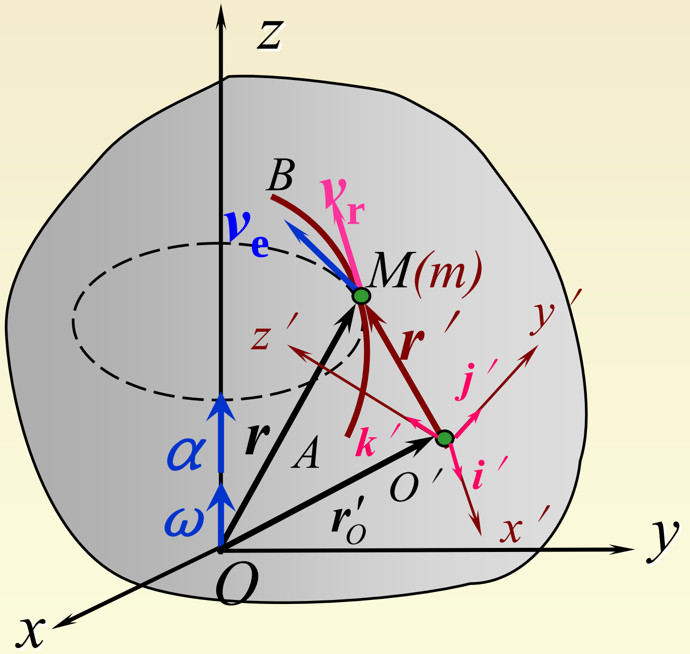
(3) $\boldsymbol{v}_a$与 $\boldsymbol{a}_a$

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$
$$\boldsymbol{v}_r = \dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}'$$

由点的速度合成定理 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

得 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} + \dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}'$

在定系中求上式对时间t的导数



$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}')$$

§ 3–4 牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}'\boldsymbol{i}'+\dot{y}'\boldsymbol{j}'+\dot{z}'\boldsymbol{k}')$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}$$

- $$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}$$

- $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}$$

$$=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$$

$$=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}})$$

$$=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

§3–4 牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}'\boldsymbol{i}'+\dot{y}'\boldsymbol{j}'+\dot{z}'\boldsymbol{k}')$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=\ddot{x}'\boldsymbol{i}'+\ddot{y}'\boldsymbol{j}'+\ddot{z}'\boldsymbol{k}'}$$

- $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}'\boldsymbol{i}'+\dot{y}'\boldsymbol{j}'+\dot{z}'\boldsymbol{k}')$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}=\dot{x}'\boldsymbol{i}'+\dot{y}'\boldsymbol{j}'+\dot{z}'\boldsymbol{k}'}$$

$$=(\ddot{x}'i'+\ddot{y}'j'+\ddot{z}'k')+(\dot{x}'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t}+\dot{y}'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t}+\dot{z}'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t})$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}'\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}')+\dot{y}'\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}')+\dot{z}'\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}')$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{\omega}\times(\dot{x}'\boldsymbol{i}'+\dot{y}'\boldsymbol{j}'+\dot{z}'\boldsymbol{k}')$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

泊松公式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}'$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}'$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}'$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

§ 3–4 牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

代入
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}$$

最后得到动点绝对加速度的表达式 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$

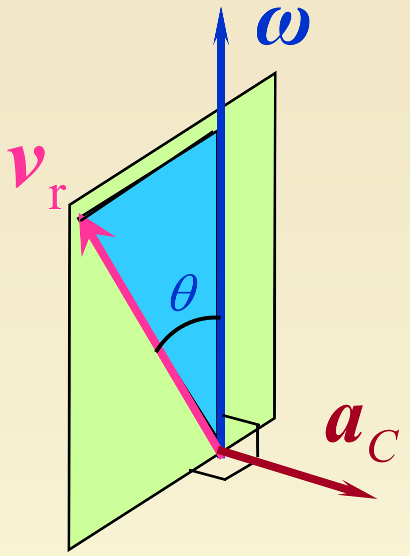
上式右端的最后一项称为**科氏加速度**，并用$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$表示，即

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

它表示了牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理（科里奥利定理），即**当牵连运动是定轴转动时，动点在每一瞬时的绝对加速度，等于它的牵连加速度、相对加速度和科氏加速度三者的矢量和。**

2. 科氏加速度 $\boldsymbol{a}_C = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$



(1) 科氏加速度是牵连转动（$\boldsymbol{\omega}$）和相对运动（$\boldsymbol{v}_r$）相互影响的结果。

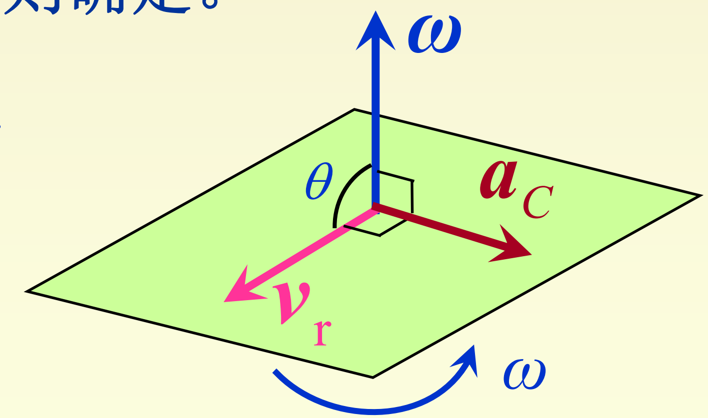
(2) $\boldsymbol{a}_C$的大小： $a_C = 2\omega v_r \sin\theta$

$\boldsymbol{a}_C$的方向：

垂直于$\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{v}_r$所确定的平面，由右手规则确定。

当 $\theta=90°$ 时，$\sin\theta=1$ ，$a_C = 2\omega v_r$

平面问题属于这种情况。



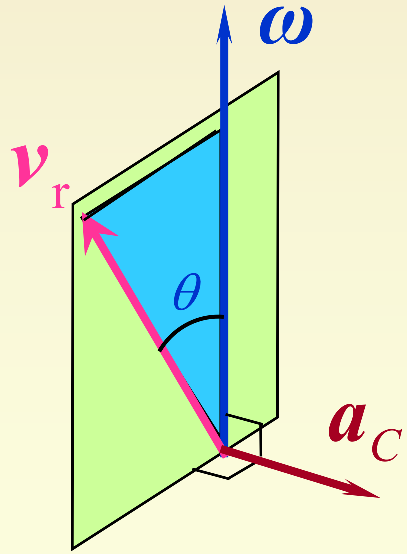
2. 科氏加速度

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} \qquad \boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

(3) 在一些特殊情况下科氏加速度$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$等于零：

- $\omega=0$ 的瞬时；牵连运动为平动。

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$



- $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}=0$ 的瞬时；

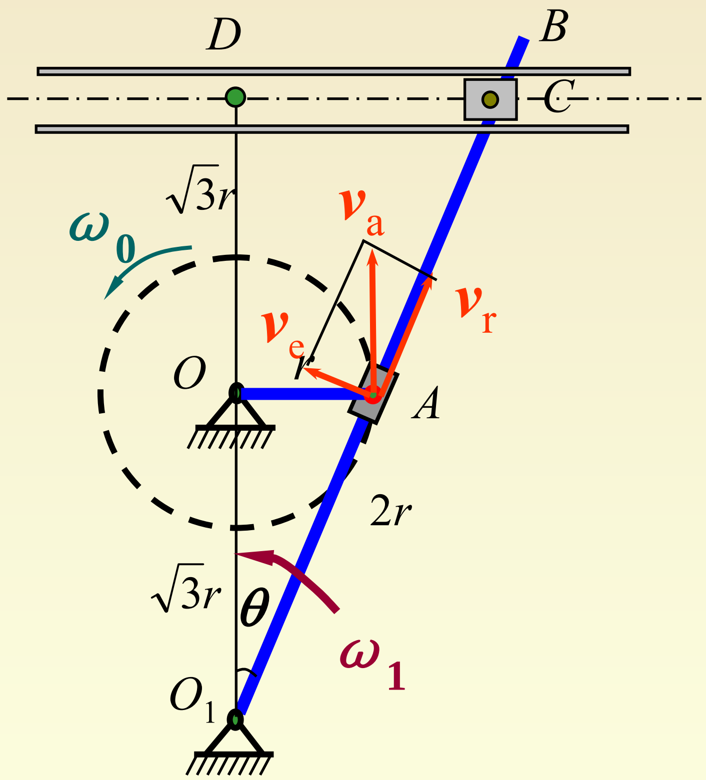
- $\omega \,/\!/\, \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ 的瞬时。

已知 ω_0=常量， θ=30°。OO_1= OD = $\sqrt{3}r$，求滑块C加速度。

解：1. 动点—滑块 A。

动系—$O_1x'y'$，固连于摇杆 O_1B。

定系—固连于机座。



2.根据速度合成定理 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

$$v_e = v_a \cos 60^\circ = \frac{1}{2} r\omega_0$$

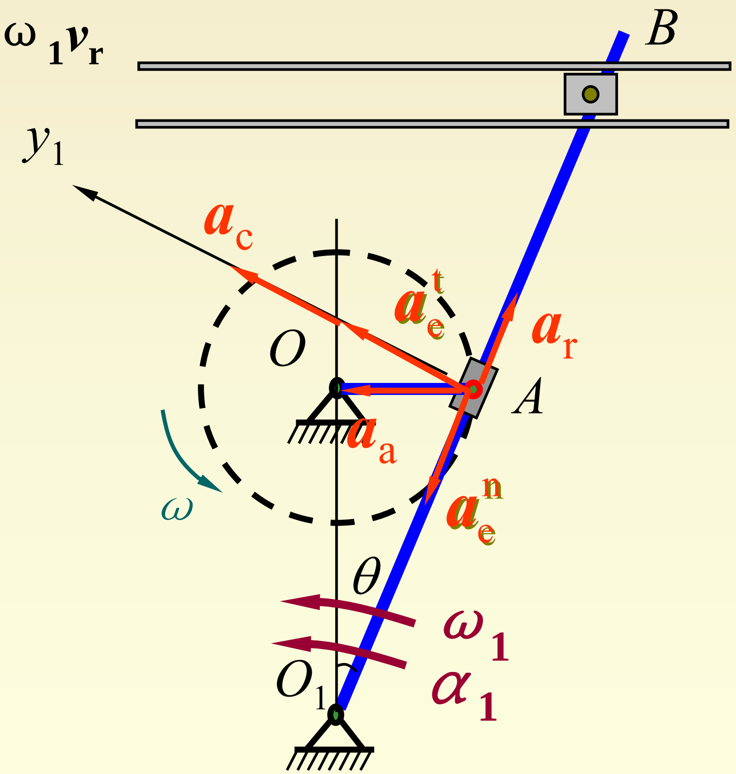
$$v_r = v_a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega_0$$

$$\omega_1 = \frac{1}{4}\omega_0$$

3. 加速度分析。由加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c$$

	$\boldsymbol{a}_a$	$\boldsymbol{a}_e^t$	$\boldsymbol{a}_e^n$	$\boldsymbol{a}_r$	$\boldsymbol{a}_c$
方向：	沿AO	⊥ O_1B	沿AO_1	沿O_1B	⊥ O_1B
大小：	$r\cdot\omega_0^2$	?	$O_1A\cdot\omega_1^2$	?	$2\omega_1 v_r$



将所有加速度矢量向a_e^t方向上投影：

$$a_a\cos 30^\circ = a_e^t + a_C$$

$$a_e^t = a_a\cos 30^\circ - a_C = \frac{\sqrt{3}}{4}r\omega_0^2$$

$$\alpha_1 = \frac{a_e^t}{O_1A} = \frac{\sqrt{3}}{8}r\omega_0^2$$

4. 动点—滑块 C 。

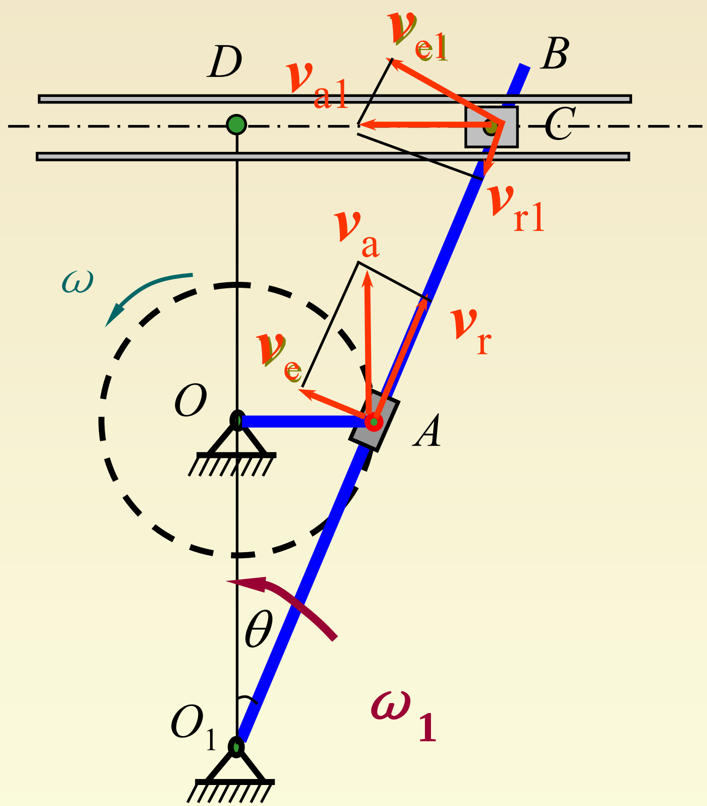
动系—$O_1x'y'$，固连于摇杆 O_1B。

$$\boldsymbol{v}_{a1}=\boldsymbol{v}_{e1}+\boldsymbol{v}_{r1}$$

$$\omega_1=\frac{1}{4}\omega_0$$

$$v_{e1}=O_1C\cdot\omega_1=4r\cdot\frac{1}{4}\omega_0=r\omega_0$$

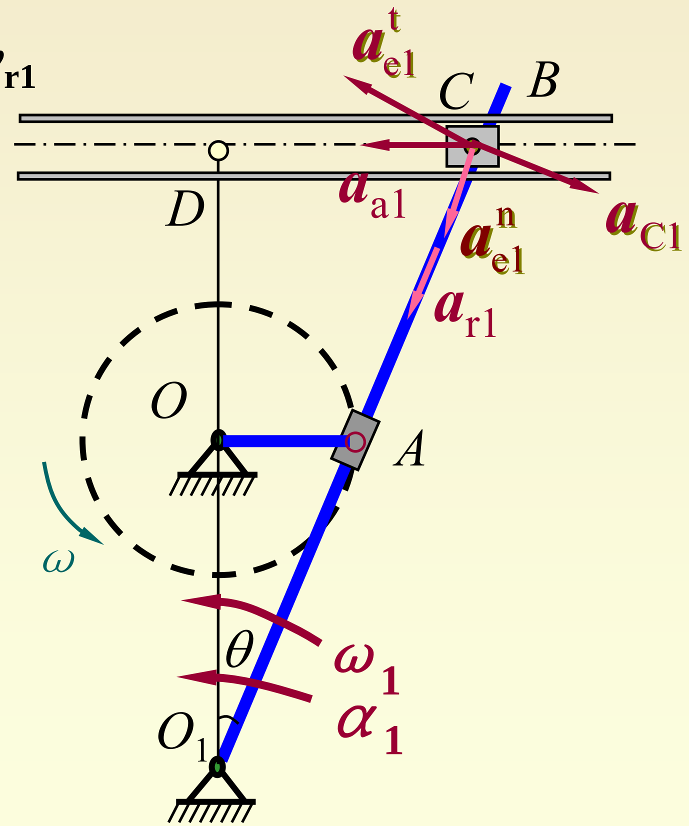
$$v_{r1}=\frac{1}{\sqrt{3}}r\omega_0$$



5. 加速度分析。 由加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_{a1} = \boldsymbol{a}_{e1}^{t} + \boldsymbol{a}_{e1}^{n} + \boldsymbol{a}_{r1} + \boldsymbol{a}_{C1}$$

方向：	沿CD	⊥ O_1B	沿CA	沿CA	⊥ CA
大小：	?	$O_1C\cdot\alpha_1$	$O_1C\cdot\omega_1^2$	?	$2\omega_1 v_{r1}$



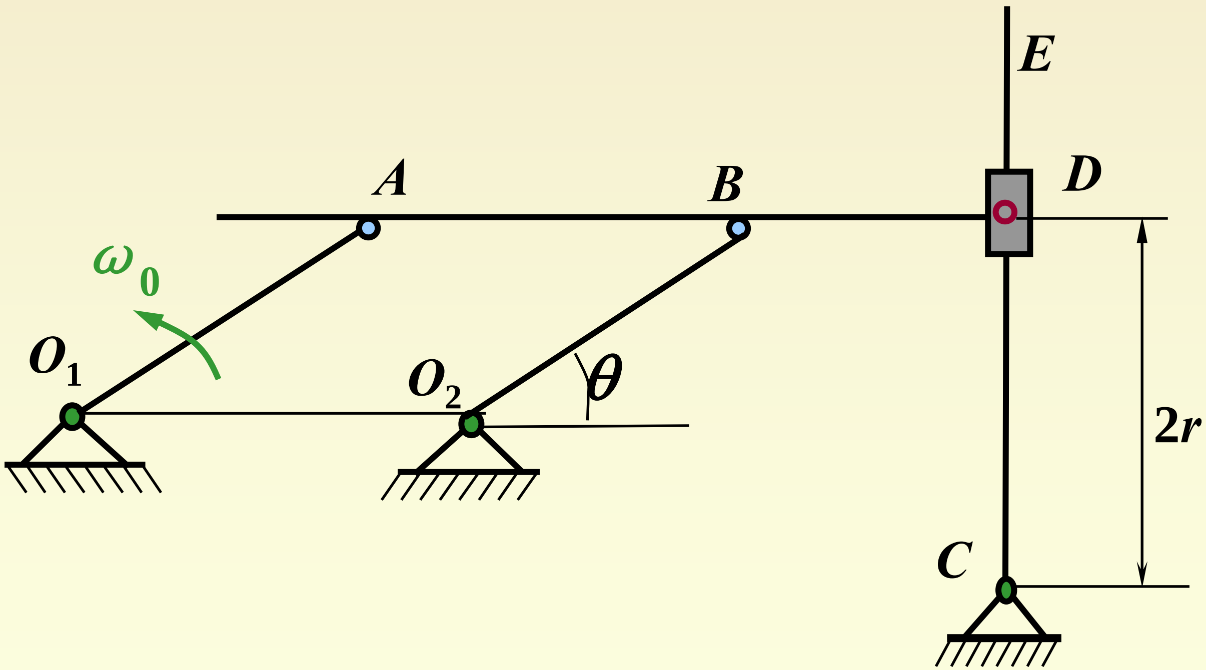
将所有加速度矢量向a_{e1}^{t}方向上投影：

$$a_{a1}\cos 30^\circ = a_{e1}^{t} - a_{C1}$$

$$a_{a1} = \frac{2}{3} r\omega_0^2$$

已知：$O_1A=O_2B=r$, $O_1O_2=AB$, ω_0=常量， $\theta=60^\circ$ ，杆CE铅直。

求：杆**CE**的角速度和角加速度。

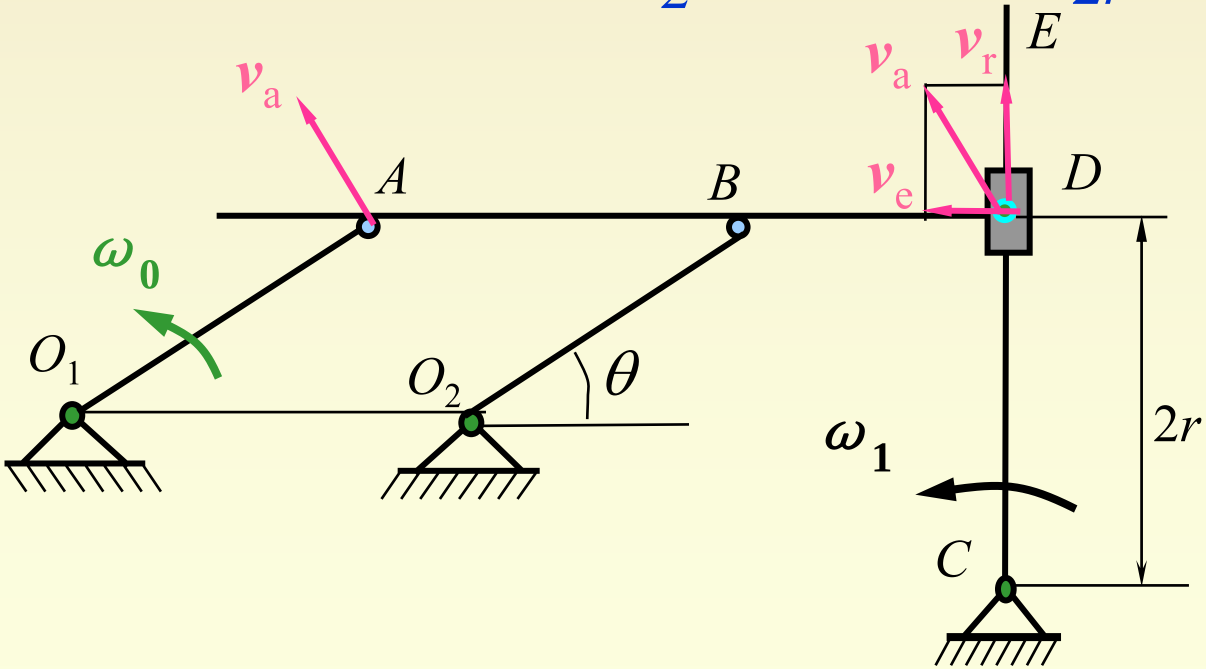


解： 动点—滑块D。 动系—固结在杆*CE*上。

1.速度分析

根据速度合成定理 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ $v_{\mathrm{a}} = r\omega_0$

$$v_{\mathrm{e}} = v_{\mathrm{a}}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}r\omega_0 \qquad v_{\mathrm{r}} = v_{\mathrm{a}}\cos\theta = \frac{1}{2}r\omega_0 \qquad \omega_1 = \frac{v_e}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega_0$$



2. 加速度分析

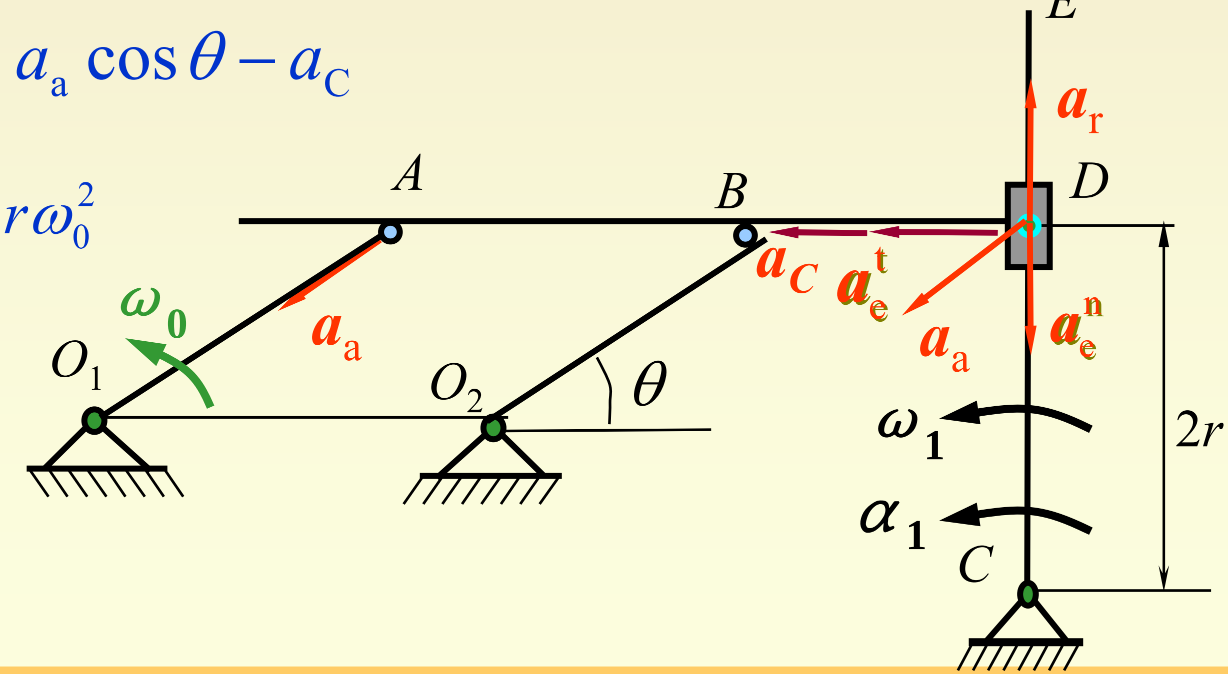
$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c$$

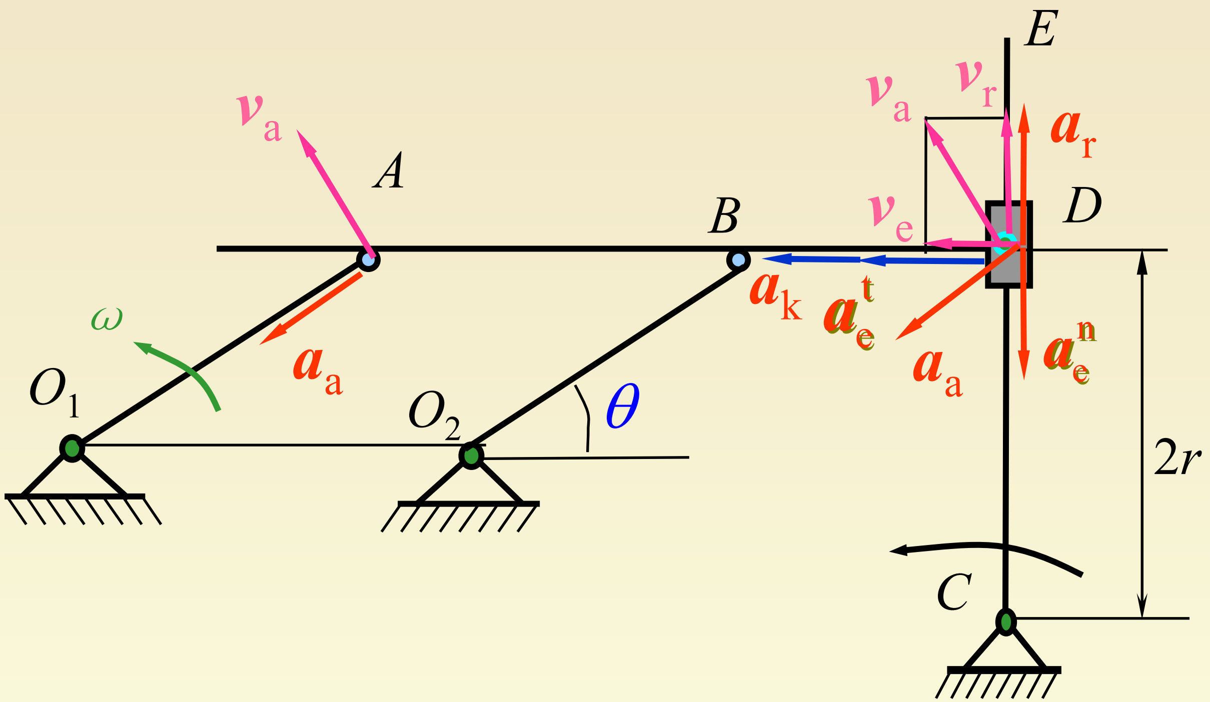
	$\boldsymbol{a}_a$	$\boldsymbol{a}_e^t$	$\boldsymbol{a}_e^n$	$\boldsymbol{a}_r$	$\boldsymbol{a}_c$
方向：	// AO_1	⊥CE	沿DC	沿DE	沿DB
大小：	$r\omega_0^2$	?	$2r\omega_1^2$	?	$2\omega_1 v_r$

将所有加速度矢量向***DB***方向上投影：$a_a\cos\theta = a_e^t + a_C$

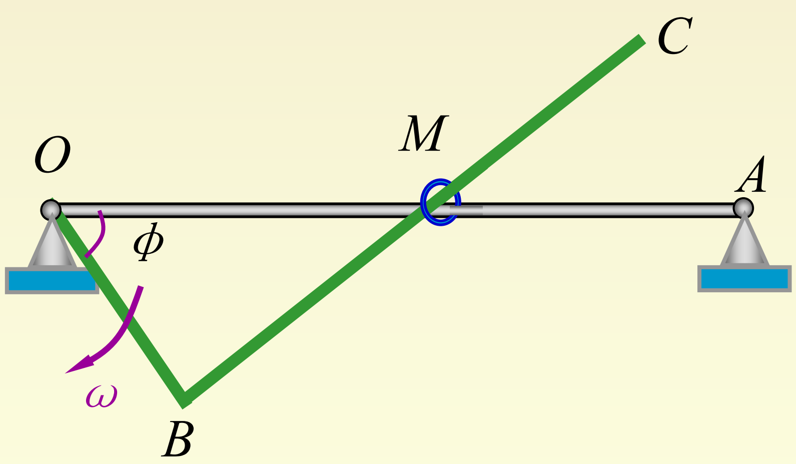
$$a_e^t = a_a\cos\theta - a_C$$

$$\alpha_1 = \frac{a_e^t}{2r} = \frac{2-\sqrt{3}}{8} r\omega_0^2$$




E
v_r
v_a
a_r
v_a
A
B
D
v_e
a_k
a_e^t
a_e^n
a_a
ω
a_a
O_1
O_2
θ
2r
C

曲杆OBC以匀角速度 ω绕固定轴O转动，使圆环M沿固定直杆OA上滑动。设曲柄长OB=10 cm，OB垂直BC,。 ω=0.5 rad/s，求 ϕ =60° 时，小环的绝对加速度。



根据加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c$$

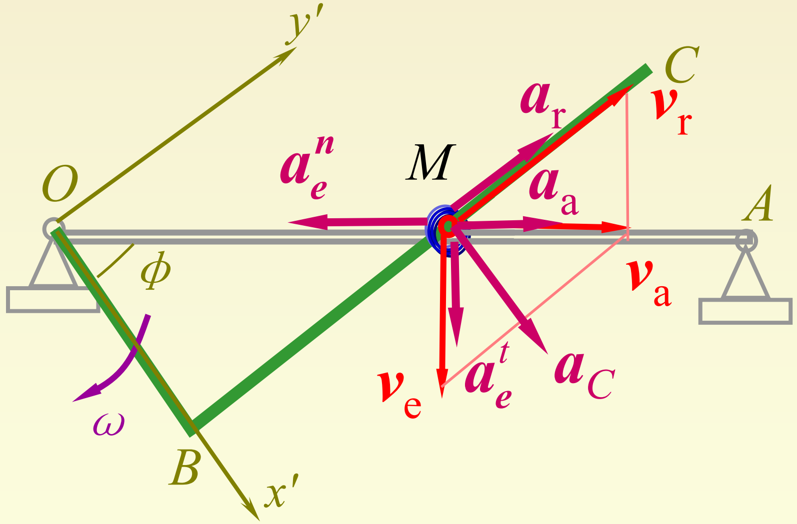
方向:	沿MA	⊥AO	沿MO	沿MC	⊥BC
大小:	?	0	OM·ω²	?	2ωv_r

投影到$\boldsymbol{a}_C$方向，得

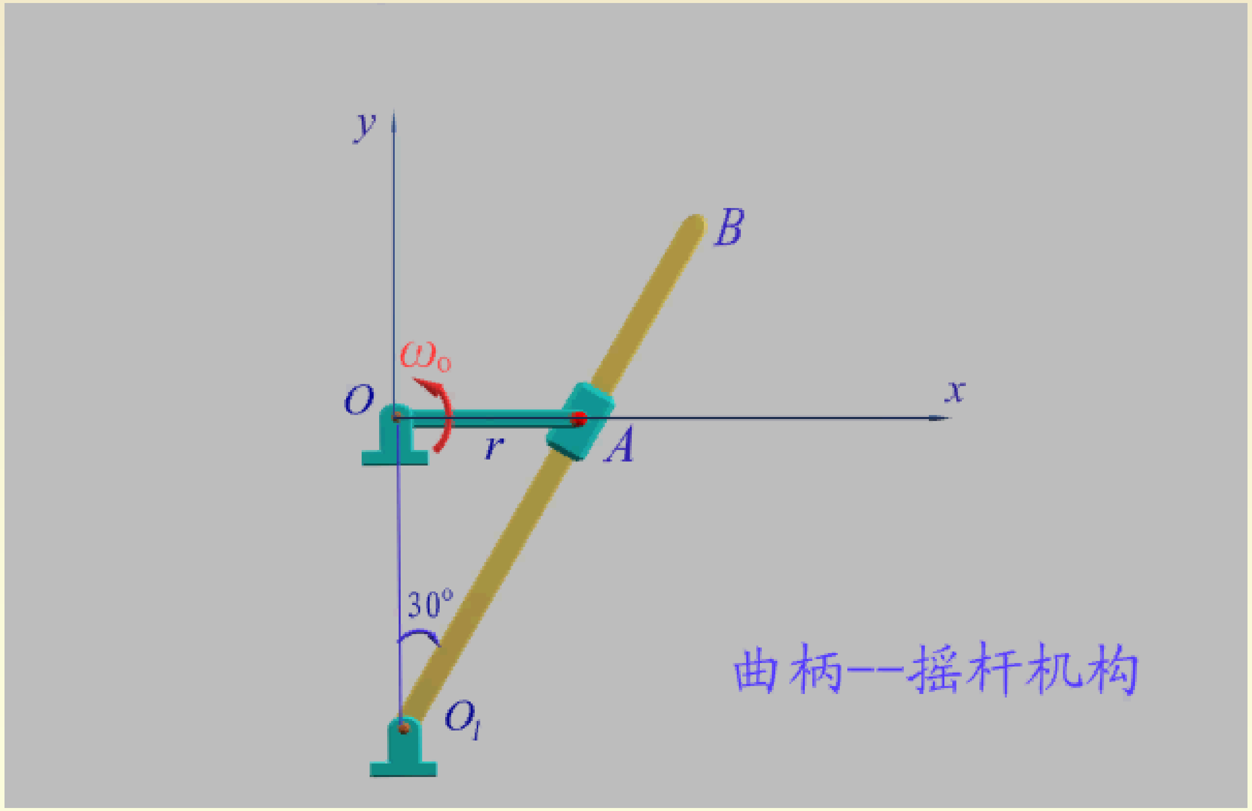
$$a_a \cos\varphi = -a_e^n \cos\varphi + a_C,$$

求得加速度

$$a_a = 35 \text{ cm/s}^2$$



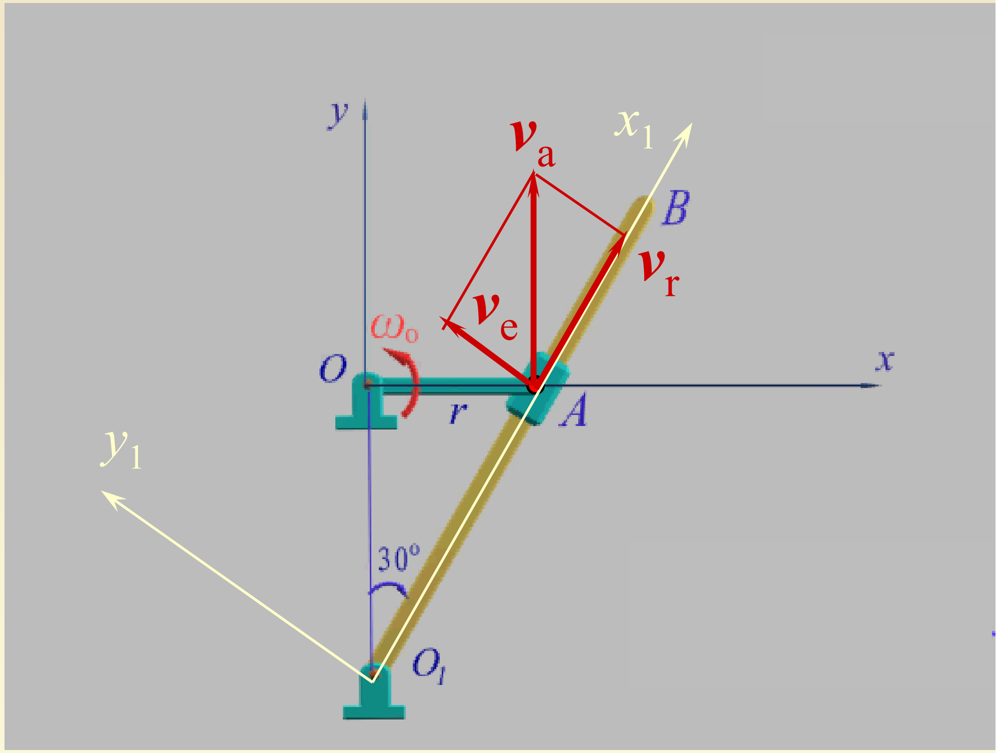
例3-13 已知曲柄$OA=r$，以角速度ω_0匀速转动。求曲柄OA水平，摇杆AB与铅垂线夹角为30º时，摇杆AB的角加速度。



解： 1. 选择动点、动系。

动点：滑块A。

动系：$O_1x_1y_1$固结于O_1B。



2. 速度分析

绝对速度v_a：$v_a = r\omega_0$沿着铅垂方向向上；

相对速度v_r：大小未知，沿O_1B方向向上；

牵连速度v_e：大小未知，方向垂直与O_1A，斜向左上方。

根据速度合成定理 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

可求得

$$v_e = v_a \cos 60^\circ = \frac{1}{2} r\omega_0$$

$$v_r = v_a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega_0$$

3. 加速度分析

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}$: $a_{\mathrm{a}}=r\omega_0^2$，沿着$OA$，指向$O$；

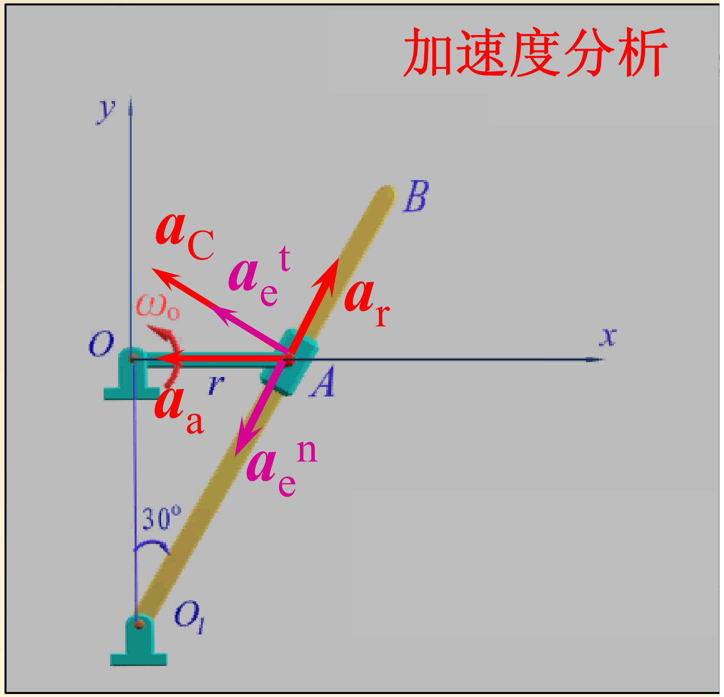
$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$: 大小未知，沿着$O_1B$，指向$B$；

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}$: $a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}=r\omega_0^2/8$，沿着$O_1A$，指向$O_1$；

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}$: $a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}=O_1A\cdot\alpha$，$\alpha$为未知，垂直于$O_1A$，指向未知，假设指向左上；

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$: 垂直于$O_1B$，指向左上。

$$a_{\mathrm{C}}=2\omega_{O1}v_{\mathrm{r}}=2\times\frac{v_{\mathrm{e}}}{O_1A}\times\frac{\sqrt{3}}{2}r\omega_0=\frac{\sqrt{3}}{4}r\omega_0^2$$



由加速度合成定理

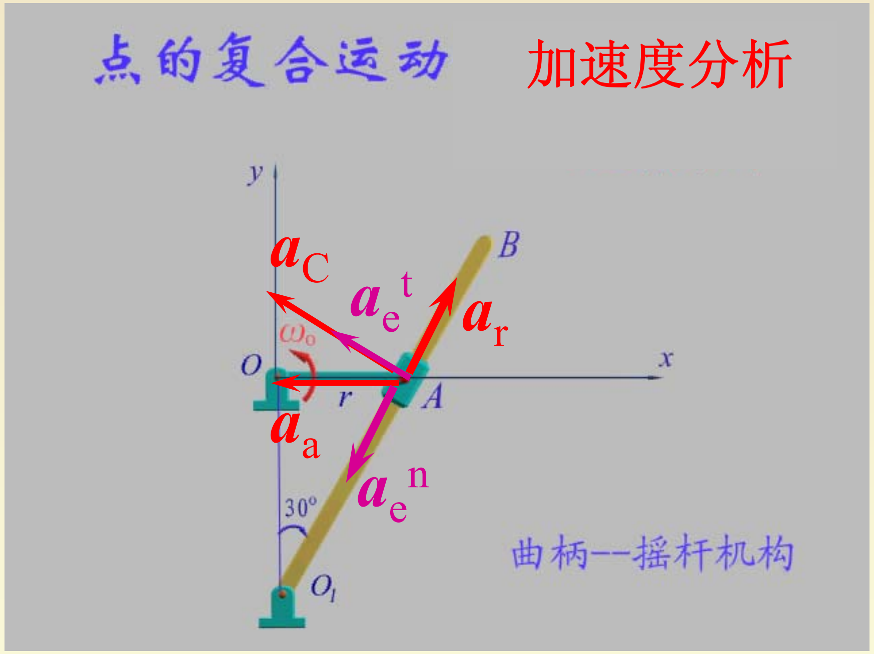
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

将所有加速度矢量向$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}$方向上投影：

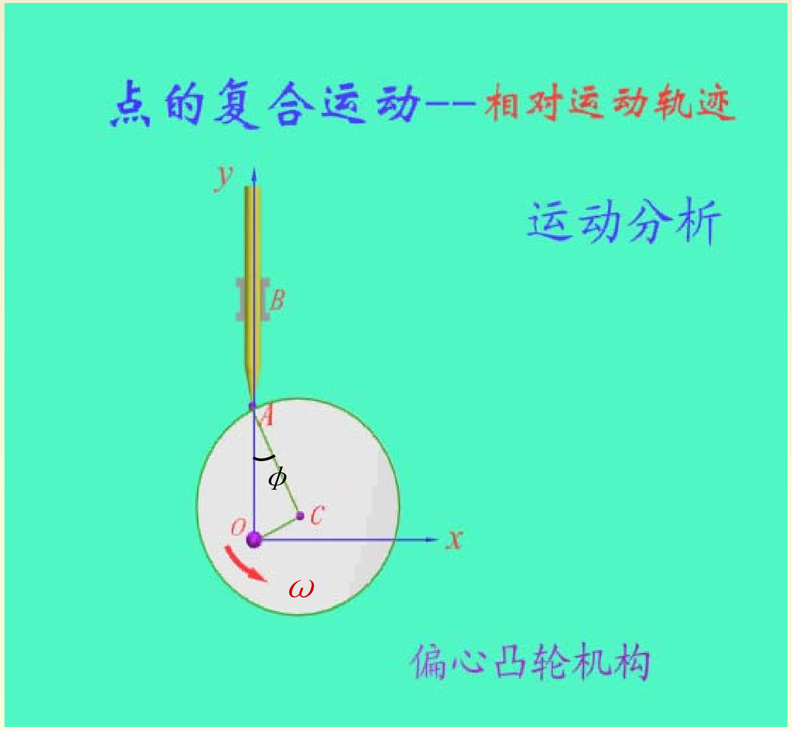
$$a_{\mathrm{a}}\cos 30^{\circ} = a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} + a_{\mathrm{C}}$$

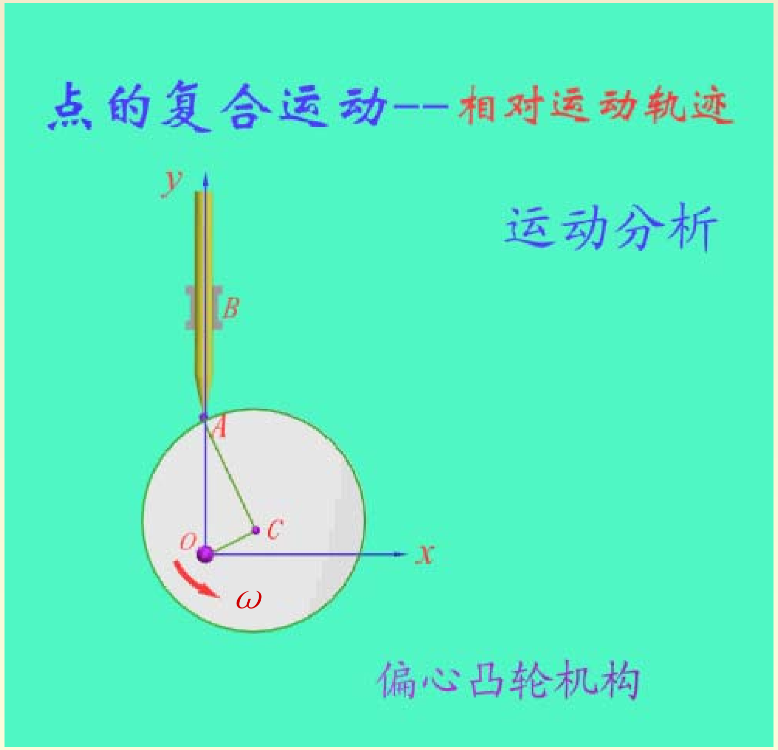
$$r\omega_0^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2r\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega_0^2$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{8}\omega_0^2$$



例3-14 已知凸轮的偏心距$OC=e$,凸轮半径 $r=\sqrt{3}e$,并且以等加速度 ω绕O轴转动， 图示瞬时，AC垂直于OC， $\phi=30^{o}$。求顶杆的速度与加速度。





解： **1.** 选择动点、动系。

动点：顶杆上A点；

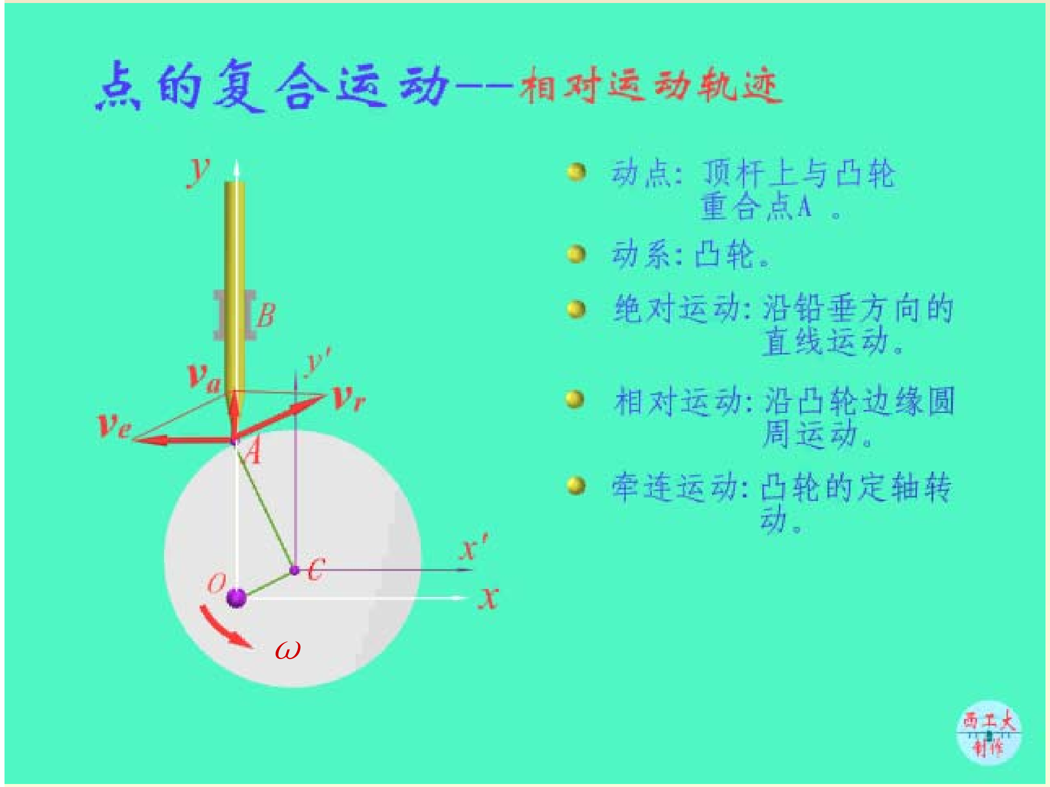
动系：Cx_1y_1固结于凸轮。

2. 运动分析

绝对运动：铅垂直线运动；

相对运动：圆周运动；

牵连运动：绕O轴的定轴转动



3. 速度分析。

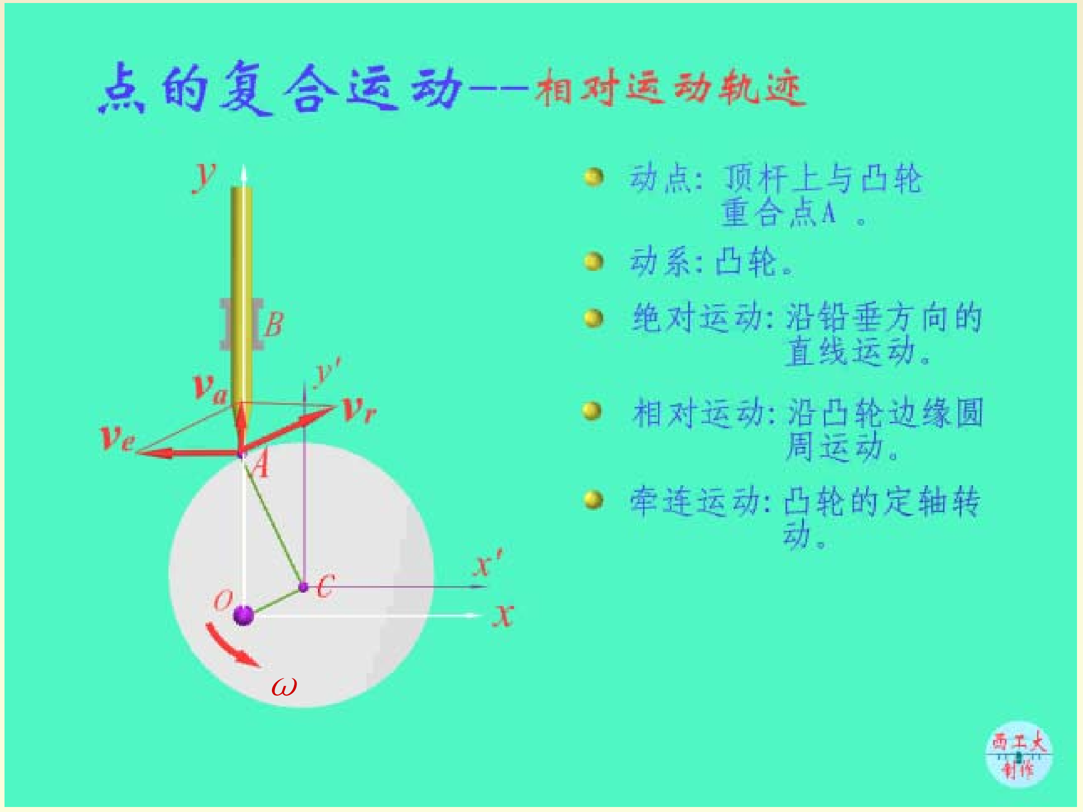
绝对速度$\boldsymbol{v}_a$： v_e为所要求的未知量，方向沿着铅垂方向向上；

相对速度$\boldsymbol{v}_r$：大小未知，方向垂直与CA。

牵连速度$\boldsymbol{v}_e$： $v_e = OA\ \omega = 2e\ \omega$，方向垂直与$OA$，指向左方；

根据速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$



由速度平行四边形

$$v_{\mathrm{a}} = v_{\mathrm{e}} \tan 30^{\circ}$$

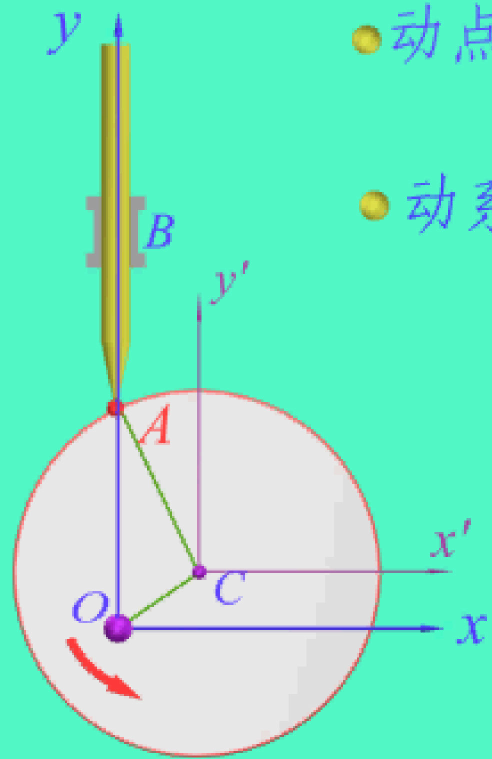
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} e\omega$$

同时求得相对速度

$$v_{\mathrm{r}} = 2v_{\mathrm{a}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} e\omega$$

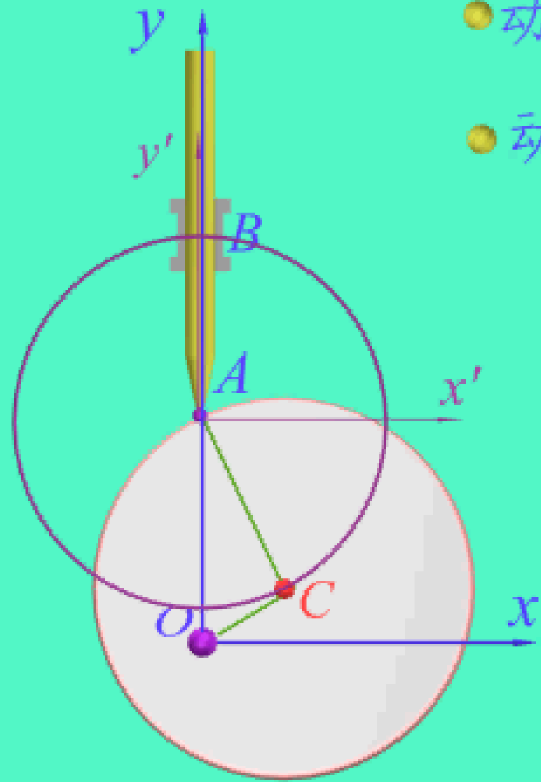
练习题 6

点的复合运动-- 速度分析



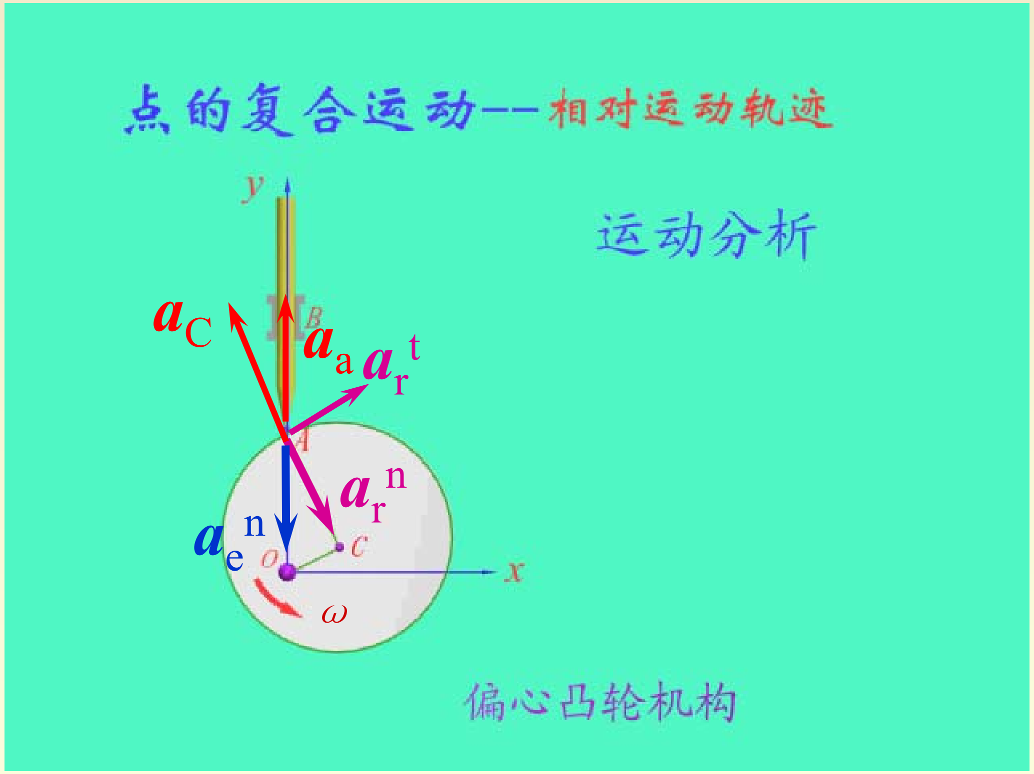
- 动点：顶杆上与凸轮重合点 A。
- 动系：原点在凸轮圆心 C 点的平移坐标系。

点的复合运动——相对运动轨迹



- 动点：凸轮圆心点C。
- 动系：固连顶杆AB。

4. 加速度分析



a_a:大小未知，为所要求的量，沿着AB，假设指向上方；

a_r: $a_r^n=v_r^2/AC$，沿着AC，指向C；

a_r^t大小未知，垂直于AC，指向未知，假设指向右上；

a_e^n: $a_e^n=OA\ \omega^2$，沿着OA，指向O；

a_C: 沿着CA，指向左上。

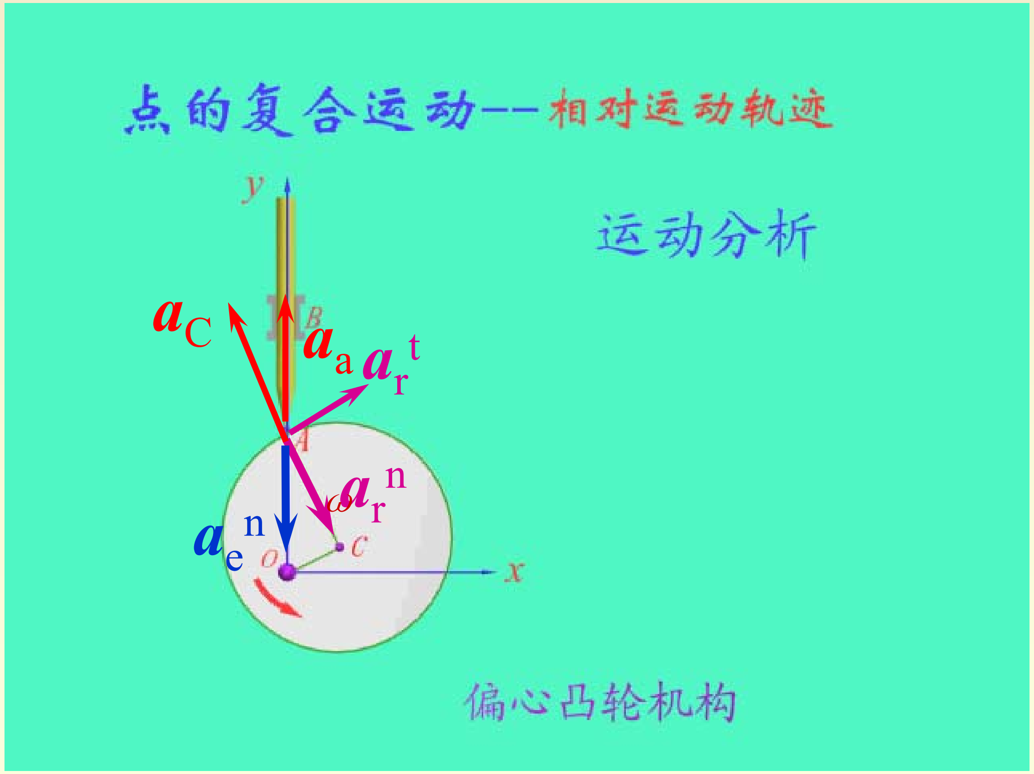
$$a_C = 2\omega v_r$$

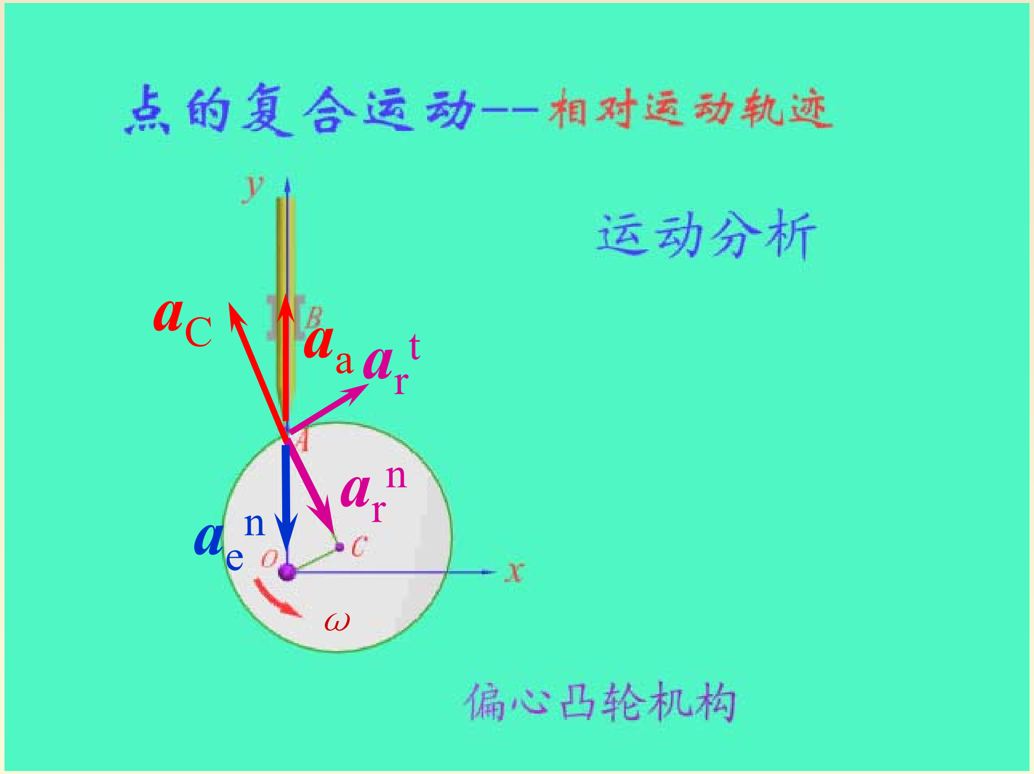
加速度合成定理　$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$

其中　$a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} = OA\,\omega^2 = 2e\,\omega^2$，

$$a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} = \frac{v_{\mathrm{r}}^2}{AC} = \frac{\frac{16}{3}e^2\omega^2}{\sqrt{3}e} = \frac{16\sqrt{3}}{9}e\omega^2$$

$$a_{\mathrm{C}} = 2\omega v_{\mathrm{r}} = 2\omega\frac{4\sqrt{3}}{3}e\omega = \frac{8\sqrt{3}}{3}e\omega^2$$





$$a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} = OA\ \omega^2 = 2e\ \omega^2$$

$$a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} = \frac{16\sqrt{3}}{9} e\omega^2$$

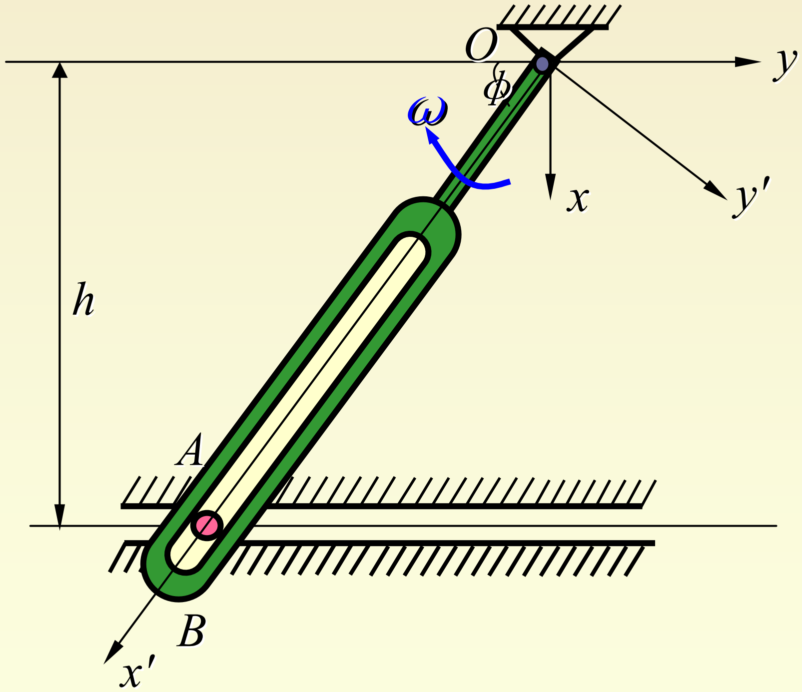
$$a_{\mathrm{C}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} e\omega^2$$

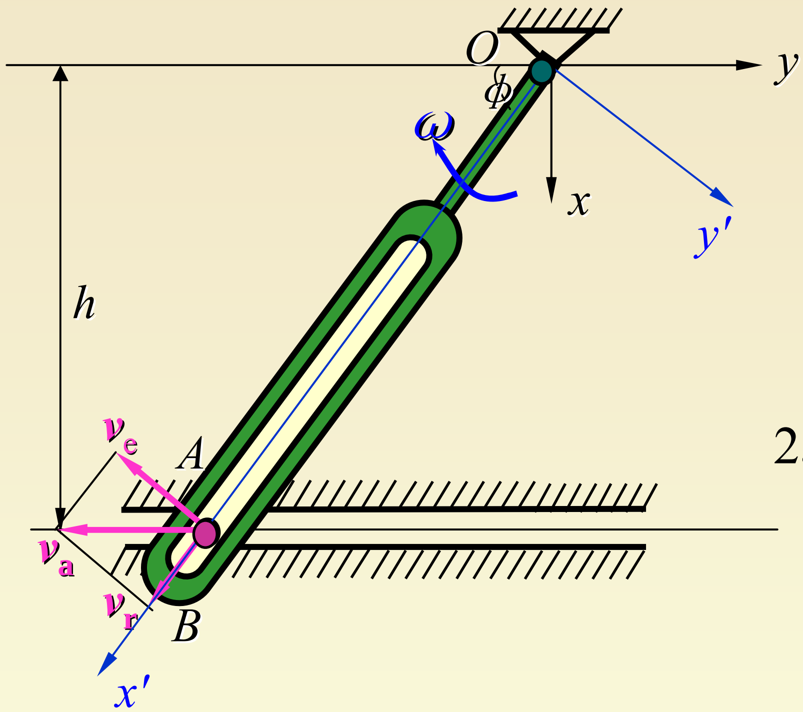
将$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$向$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$方向投影

$$a_{\mathrm{a}}\cos 30^\circ = a_{\mathrm{C}} - a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} - a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\cos 30^\circ$$

$$a_{\mathrm{a}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{16\sqrt{3}}{9}\right)e\omega^2 - \sqrt{3}e\omega^2, \qquad a_{\mathrm{a}} = -\frac{2}{9}e\omega^2$$

例3-15 在滑块导杆机构中，由一绕固定轴O作顺钟向转动的导杆OB带动滑块A沿水平直线轨道运动，O到导轨的距离是h。已知在图示瞬时导杆的倾角是 ϕ，角速度大小是 ω ，角加速度 α $=0$。试求该瞬时滑块A的绝对加速度。





解:　1. 选择动点，动系与定系。

动点－取滑块A为动点。

动系－ $Ax'y'$固连于导杆。

定系－固连于机座。

2. 运动分析。

绝对运动－ 沿导轨的水平直线运动。

牵连运动－ 导杆OB绕轴O的匀速转动。

相对运动－沿导杆OB的直线运动。

速度合成图如图所示。　应用速度合成定理　$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

求得:

$$v_r = v_e \cot\varphi = \frac{h\omega}{\sin\varphi}\cot\varphi = \frac{h\omega\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$

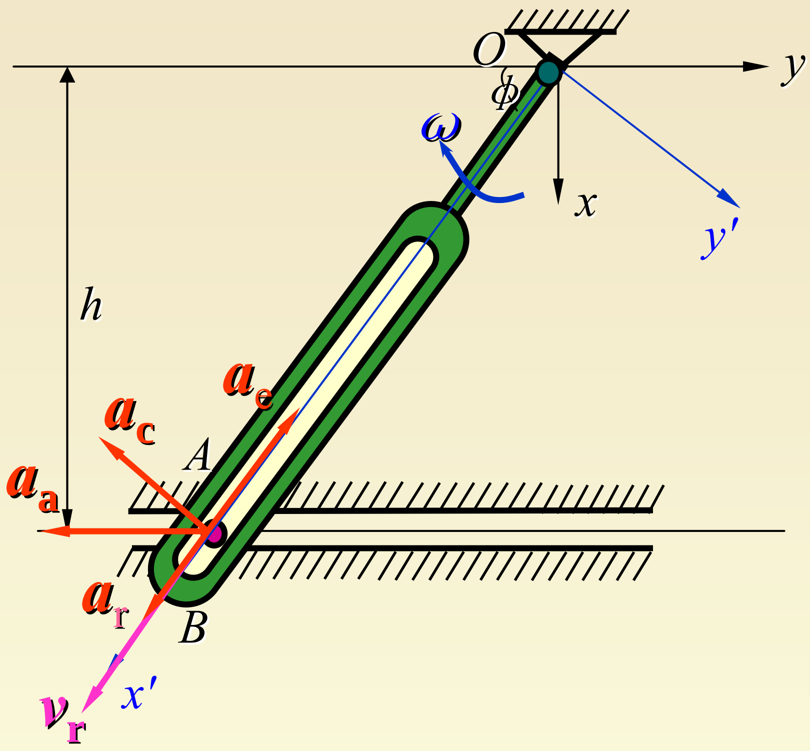
3. 加速度分析。

绝对加速度$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}$：大小待求，方向水平。

牵连加速度$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}$：$a_{\mathrm{e}}=\dfrac{h}{\sin\varphi}\omega$，方向沿$BO$指向$O$。

相对加速度$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$：大小未知，方向沿$BO$。

科氏加速度$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$：$a_{\mathrm{C}}=2\omega_0\cdot v_{\mathrm{r}}$，方向⊥$OB$偏上方。



根据加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}$$

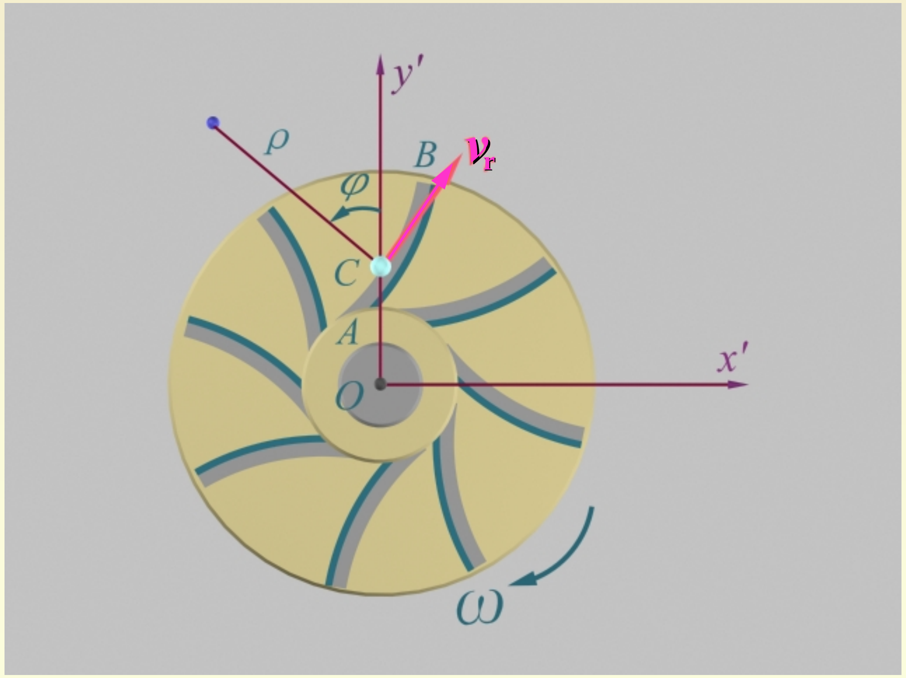
投影到Oy'轴上，得

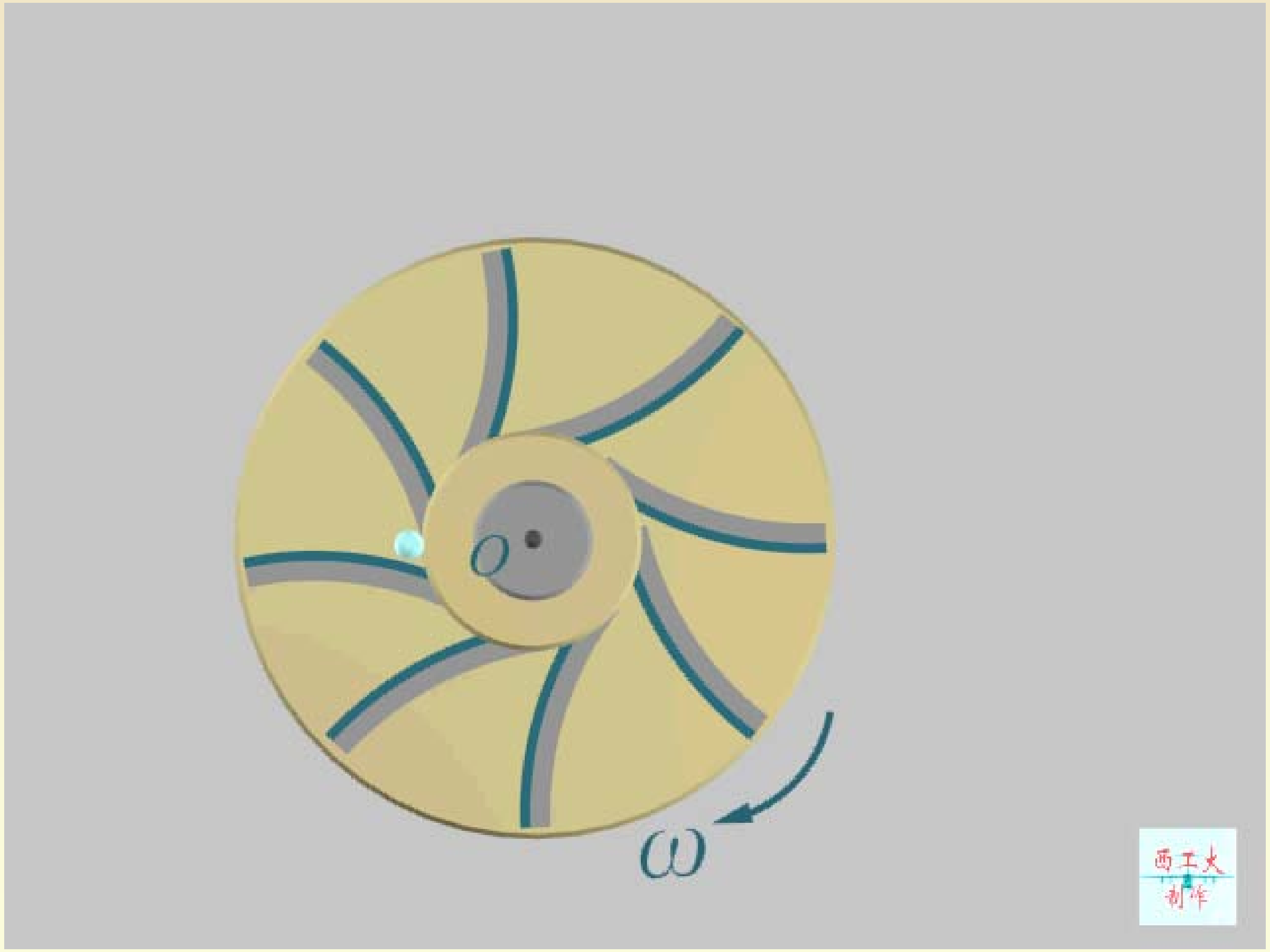
$$-a_{\mathrm{a}}\sin\varphi=-a_{C},$$

求得滑块A的加速度

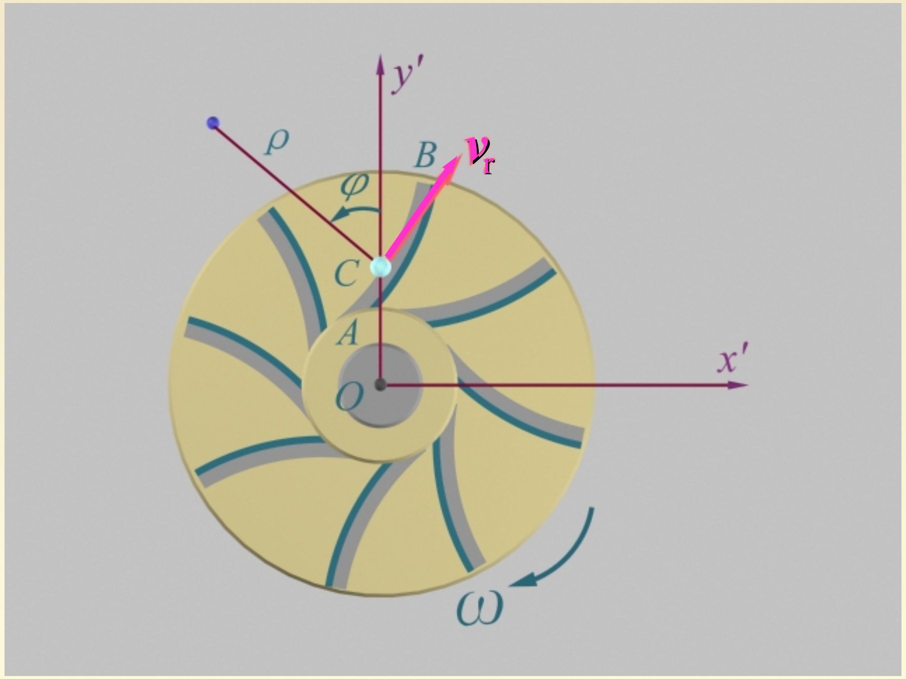
$$a_{\mathrm{a}}=\frac{a_{\mathrm{C}}}{\sin\varphi}=\frac{2h\omega^2\cos\varphi}{\sin^3\varphi}$$

例3-16 空气压缩机的工作以角速度 ω 绕垂直于图面的O轴匀速运动，空气以相对速度$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$沿弯曲的叶片匀速流动，如图所示。如曲线$AB$在$C$点的曲率半径为 ρ，通过点C的法线与半径间夹的角为 ϕ，$CO=r$，求气体微团在C点的绝对加速度$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}$。





运 动 演 示



解： 1. 选择动点，动系与定系。

动点－取气体微团。

动系－$Ox'y'$，固连于工作轮。

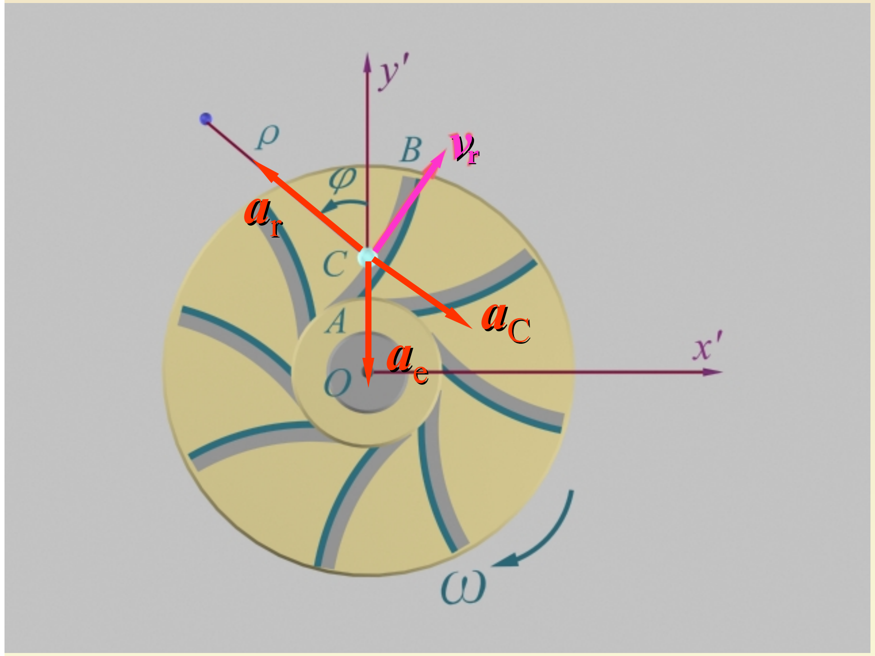
定系－固连于机座。

2. 运动分析。

绝对运动－平面曲线运动。

相对运动－沿曲线AB运动。

牵连运动－绕轴O定轴转动。



3. 加速度分析。

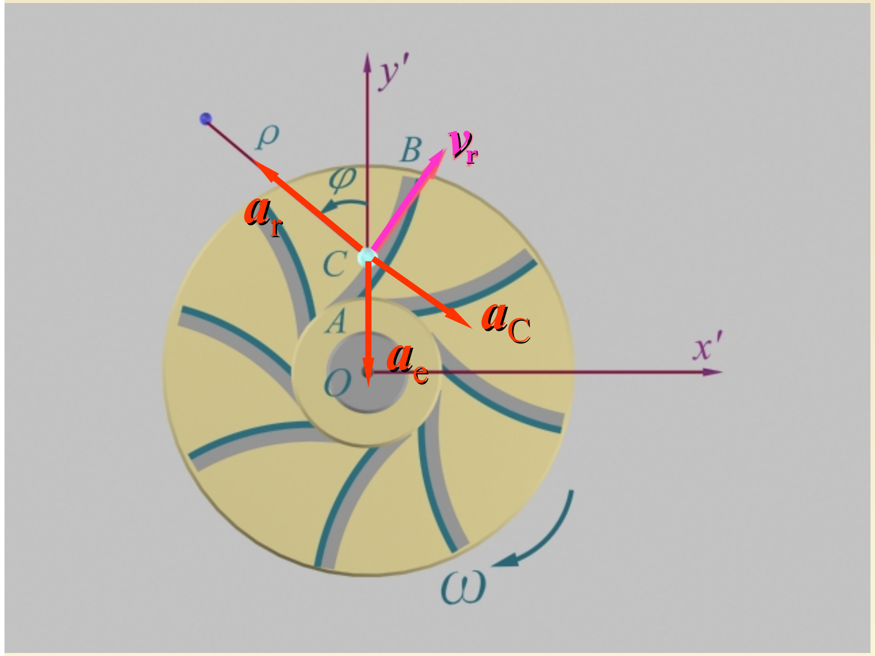
绝对加速度a_a：大小方向均未知。

牵连加速度a_e：$a_e = \omega^2 r$，沿OC指向O；

相对加速度a_r：$a_e = v_r^2 / \rho$，方向如图。

科氏加速度a_C：$a_C = 2\omega v_r \sin 90^\circ = 2\omega v_r$

垂直于v_r，指向如图。



根据加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

分别投影到x'，y'轴上

$$a_{ax'} = 0 - \frac{v_r^2}{\rho}\sin\varphi + 2\omega v_r \sin\varphi$$

$$= (2\omega v_r - \frac{v_r^2}{\rho})\sin\varphi$$

$$a_{ay'} = -\omega^2 r + \frac{v_r^2}{\rho}\cos\varphi - 2\omega v_r \cos\varphi$$

$$= (\frac{v_r^2}{\rho} - 2\omega v_r)\cos\varphi - \omega^2 r$$

绝对加速度的大小

$$a_a = \sqrt{a_{ax'}^2 + a_{ay'}^2}$$

方向可由其方向余弦确定。

谢谢使用