# 16-17 学年第一学期答案

二、**解**：设 $A_i$ 为第 $i$ 个元件正常工作($i$=1,2,3,4,5)　　　$A$={系统正常工作}

$$P(A)=P(A|A_3)P(A_3)+P(A|\bar{A}_3)P(\bar{A}_3)$$

$$\begin{aligned}P(A|A_3)&=P\{(A_1\cup A_4)\cap(A_2\cup A_5)\}=P(A_1\cup A_4)P(A_2\cup A_5)\\&=\big(P(A_1)+P(A_4)-P(A_1A_4)\big)\big(P(A_2)+P(A_5)-P(A_2A_5)\big)\\&=(2p-p^2)^2=0.9216\end{aligned}$$

$$P(A|\bar{A}_3)=P\{A_1A_2\cup A_4A_5\}=P(A_1A_2)+P(A_4A_5)-P(A_1A_2A_4A_5)=2p^2-p^4=0.8704$$

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A|A_3)P(A_3)+P(A|\bar{A}_3)P(\bar{A}_3)\\&=(2p-p^2)^2\times p+(2p^2-p^4)\times(1-p)\\&=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5=0.91136\end{aligned}$$

三、**解**：1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{2}dx+A\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx\to\frac{1}{2}=A\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx\to-\frac{A}{x}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}\to A=\frac{1}{2}$

2）当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=0$

当 $0\le x<1$ 时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^x\frac{1}{2}dt=\frac{x}{2}$$

当 $x\ge1$ 时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^1f(t)dt+\int_1^xf(t)dt=\frac{1}{2}+\int_1^x\frac{1}{2t^2}dt=\left(1-\frac{1}{2x}\right)$$

故得分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{2}, & 0\le x<1\\ 1-\frac{1}{2x}, & x\ge1\end{cases}$

3）$P\left\{\frac{1}{2}\le X\le\frac{5}{2}\right\}=P\left\{\frac{1}{2}<X\le\frac{5}{2}\right\}=F(\frac{5}{2})-F(\frac{1}{2})=\frac{4}{5}-\frac{1}{4}=\frac{11}{20}=0.55$

4）$y=g(x)=(x-1)^2$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y \ge 0$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y \le y\}=P\{(X-1)^2 \le y\}=P\{1-\sqrt{y} \le X \le 1+\sqrt{y}\}=F_X(1+\sqrt{y})-F_X(1-\sqrt{y})$$

则 Y 的 PDF 为

$$f_Y(\mathrm{y})=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(1+\sqrt{y})+f_X(1-\sqrt{y})\right)$$

$$=\begin{cases}0 & y<0\\ \dfrac{1}{4\sqrt{y}}\left(\dfrac{1}{(1+\sqrt{y})^2}+1)\right) & 0 \le y<1\\ \dfrac{1}{4\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2} & y>1\end{cases}$$

四、**解**：1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty} e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0\\ 0, & else\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y} e^{-y}dx=ye^{-y}, & y>0\\ 0, & else\end{cases}$$

2）$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 0<x<y\\ 0, & else\end{cases}$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}e^{x-y}, & y>x>0\\ 0, & else\end{cases}$$

3)因为 $f_X(x)\times f_Y(y)\ne f(x,y)$ ,所以 X 与 Y 不独立

4）$E(\mathrm{X})=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{dx}=\int_0^{\infty} xe^{-x}dx=1$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx=\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx=2, D(X)=1$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy=\int_0^{+\infty} y^2e^{-y}dy=2$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty} y^2f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty} y^3e^{-y}dy=6, D(Y)=2$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\left(ye^{-y}\int_0^{y} xdx\right)dy=3$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1 \to \rho_{XY}=\sqrt{2}/2=0.717$$

5 )

方法一：$F_Z(z)=P\{3X+2Y\le z\}=\iint_{3x+2y\le z} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{z}{5}}\int_x^{\frac{z-3x}{2}} e^{-y}dxdy=\begin{cases}1-\frac{5}{3}e^{-\frac{z}{5}}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}} & z>0\\ 0, & else\end{cases}$

$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(e^{-\frac{z}{5}}-\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\right), & z>0\\ 0, & else\end{cases}$

方法二：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{z-2y}{3},y\right)\left|\left(\frac{z-2y}{3}\right)'\right|dy=\frac{1}{3}\int_{\frac{z}{5}}^{\frac{z}{2}} e^{-y}dy=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(e^{-\frac{z}{5}}-\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\right), & z>0\\ 0, & else\end{cases}$

$0<\frac{z-2y}{3}<y\to 2y<z<5y\to z/5<y<z/2$

五、**解**：1）$\mu=E(X)=\frac{\theta}{2}$，令 $\mu=\frac{\theta}{2}=\bar{X}$ 得 $\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M=2\bar{X}$ .

$\hat{\theta}_{MLE}=\max(X_1,X_2,...,X_n)=X_{(n)}$

2）$E(\hat{\theta}_M)=\mathrm{E}(2\bar{X})=2E(\bar{X})=2\,\mathrm{E(X)}=2\cdot\frac{\theta}{2}=\theta$　无偏

$D(\hat{\theta}_M)=\mathrm{D}(2\bar{X})=4D(\bar{X})=4\frac{D(\mathrm{X})}{n}=4\cdot\frac{\theta^2}{12n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

$E\left(\hat{\theta}_M\right)=\theta,\ \lim\limits_{n\to+\infty}D\left(\hat{\theta}_M\right)=0$　　故 $\hat{\theta}_M$ 为 $\theta$ 的相合估计。

或者方法二：按照 $\bar{X}\xrightarrow{P}\frac{\theta}{2}$，故 $2\bar{X}\xrightarrow{P}\theta$，所以 $\hat{\theta}_M$ 为 $\theta$ 的相合估计

3) $\hat{\theta}_{MLE}$ 的 PDF 为 $f_{X_{(n)}}(\mathrm{x})=n\left[F(x)\right]^{n-1}f(x)=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0\le x\le\theta\\ 0 & else\end{cases}$

$E(\hat{\theta}_{MLE})=\int_0^{\theta}xf_{X_{(n)}}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\frac{n}{\theta^n}\int_0^{\theta}\mathrm{x}^n\mathrm{dx}=\frac{n\theta}{n+1}\ne\theta$　有偏　$\frac{n\theta}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}\theta$

$D(\hat{\theta}_{MLE})=\int_0^{\theta}x^2f_{X_{(n)}}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}-\left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2=\frac{n\theta^2}{n+2}-\left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2=\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}E\left(\hat{\theta}_{MLE}\right)=\theta,\ \lim\limits_{n\to+\infty}D\left(\hat{\theta}_{MLE}\right)=0$　　故 $\hat{\theta}_{MLE}$ 为 $\theta$ 的相合估计。

4）$e^{\theta}$ 的矩估计是 $e^{\hat{\theta}_M}=e^{2\bar{X}}$

因为 $e^{\theta}$ 具有单值反函数，所以其最大似然估计为 $e^{\hat{\theta}_{MLE}}=e^{X_{(n)}}$

六、**解：** $n_1=n_2=12, \bar{X}=5.25, \bar{Y}=1.5, S_1^2=0.93182, S_2^2=1, S_1=0.9653, S_2=1$

1） 检验统计量 $Z=S_1^2/S_2^2 \sim F(n_1-1, \mathrm{n}_2-1)$

如果 $H_0$ 成立，则 Z 的取值应该在 1 附近，拒绝域为 $(0, \mathrm{F}_{1-\alpha/2}) \cup (\mathrm{F}_{\alpha/2}, +\infty)$

或 $S_1^2/S_2^2 \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1, \mathrm{n}_2-1)$ *or* $S_1^2/S_2^2 \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, \mathrm{n}_2-1)$

拒绝域为 $(0, 0.2879) \cup (3.4737, +\infty)$

带入样本观察值，检验统计量的观察值为 Z=0.9318 在接受域内，故接受 $H_0$，认为两者的方差相等。

2） 求解均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间所需的枢轴量为

$$W=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}=0.9659 \qquad S_w=0.9828$$

置信区间为 $$\left((\bar{X}-\bar{Y}) \mp t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

（2.9179，4.5821）。$\mu_1$-$\mu_2$ 置信区间下限大于 0，我们认为 $\mu_1$ 比 $\mu_2$ 大