第四章 Bezier曲线曲面

I

第一节　　Bezier曲线的定义及性质

简介

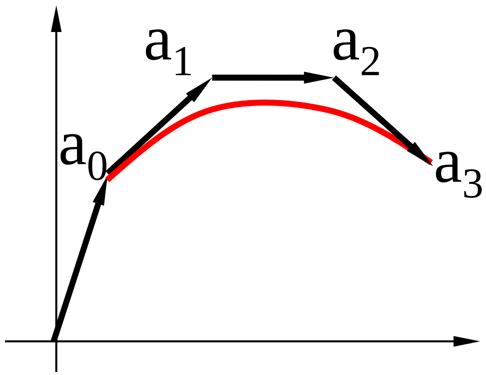
Pierre Bezier

1910-1999

- Bezier曲线是一种参数多项式曲线，因其独特的基函数，使得这种曲线具有许多优良的性质，利用Bezier曲线曲面进行造型时，对对象的控制达到了直接几何化的程度。
- Bezier曲线的发展过程：
- 1959年 Citroen公司的deCasteljau提出了生成Bezier曲线的递推算法。
- 1962年 Renault公司的Pierre Bezier提出了Bezier曲线的原始定义。1972年英国的Forrest提出了以控制顶点为矢量系数，Bernstein基函数为基的这种形式Bezier曲线。

一、Bezier曲线的定义

- 1、Bezier曲线的原始定义：



$$\vec{p}(t)=\sum_{i=0}^{n}\vec{a}_i f_i(t) \qquad 0\le t\le 1$$

$\vec{a}_i$为相对矢量，从$\vec{a}_0$的末端到$\vec{a}_n$的末端首尾相连构成的多边形称为控制多边形。

基函数的表达式为：

$$f_i(t)=\sum_{j=i}^{n}(-1)^{i+j}C_n^j C_{j-1}^{i-1}t^j$$

i=0,1,…,n

一、Bezier曲线的定义

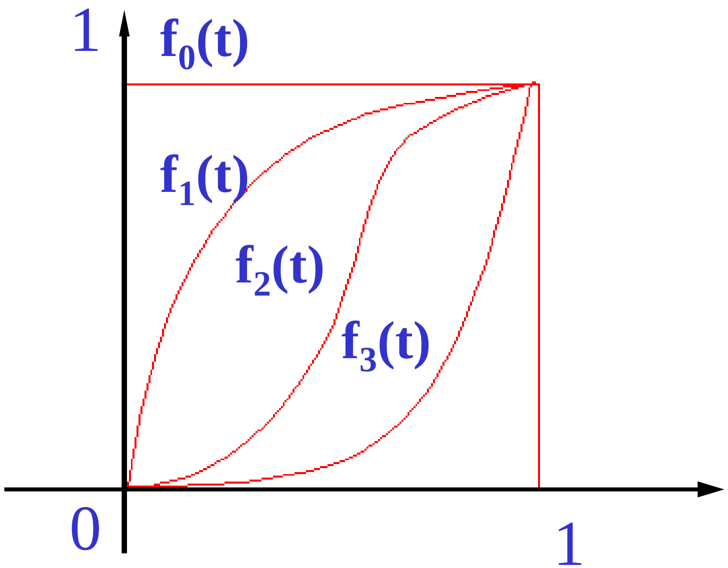
当n=3时:

$$f_0(t)=1$$

$$f_1(t)=3t-3t^2+t^3$$

$$f_2(t)=3t^2-2t^3$$

$$f_3(t)=t^3$$



2、Bernstein-Bezier曲线

- 1972年 Forrest将Bezier曲线中的矢量系数改为绝对矢量，即：

$$\vec{b}_0=\vec{a}_0,\vec{b}_j=\vec{b}_{j-1}+\vec{a}_j \qquad j=1,2,\cdots n$$

这时，Bezier曲线的方程变为：

$$\vec{p}(t)=\sum_{j=0}^{n}\vec{b}_j B_{j,n}(t) \qquad 0\le t\le 1$$

其中：

Bernstein基函数

$$B_{j,n}(t)=C_n^j t^j(1-t)^{n-j} \qquad j=0,1,\cdots n$$

2、Bernstein-Bezier曲线

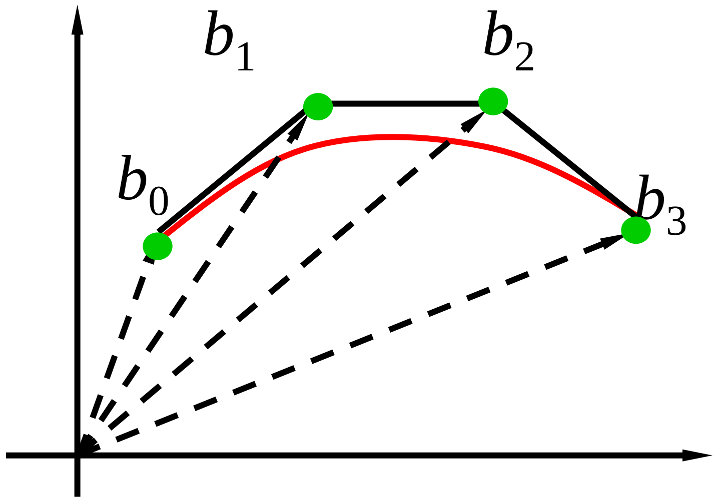
当n＝3时：

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3$$

$$B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2$$

$$B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_{3,3}(t) = t^3$$

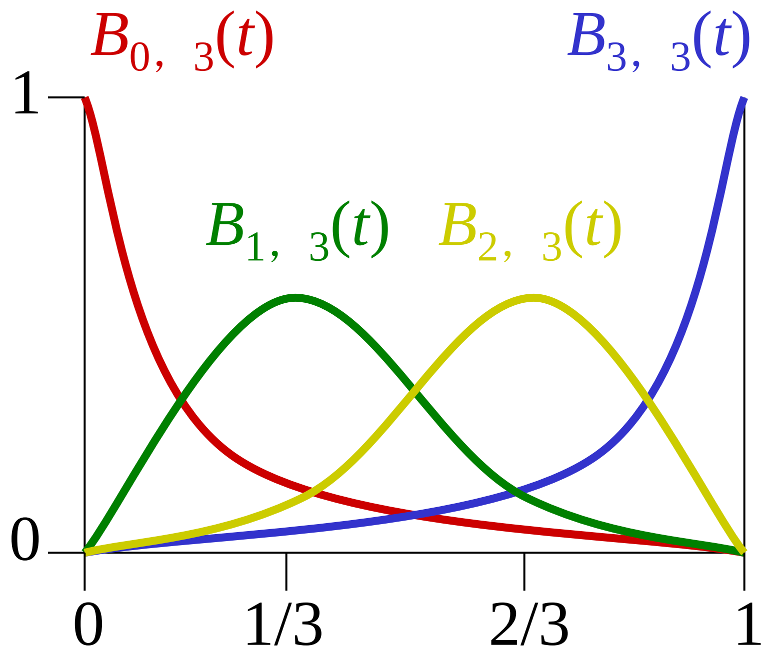


b_i为绝对位置矢量，称为控制顶点。

三次Bezier曲线的矩阵形式：

$$\vec{p}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_0 \\ \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} \qquad 0 \le t \le 1$$

2、Bernstein-Bezier曲线



三次Bernstein基函数的图形

二、Bezier曲线的性质

1、Bernstein基函数的性质

1）非负性:

$$0 \le B_{i,n}(u) \le 1 \quad 0 \le u \le 1, i = 0,1,\cdots n$$

2）规范性:

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) \equiv 1, \qquad 0 \le u \le 1$$

$$\because 1 = [u + (1-u)]^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^i (1-u)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u)$$

1、Bernstein基函数的性质

3）对称性:

$$B_{i,n}(u) = B_{n-i,n}(1-u) \quad 0 \le u \le 1, i = 0,1,\cdots n$$

4）导函数:

$$B'_{i,n}(u) = n[B_{i-1,n-1}(u) - B_{i,n-1}(u)] \quad i = 1,2,\cdots n$$

证明: $\mathbf{B}'_{j,n}(t)$

$$= C_n^j j t^{j-1}(1-t)^{n-j} - C_n^j (n-j) t^j (1-t)^{n-j-1}$$

$$= nC_{n-1}^{j-1} t^{j-1}(1-t)^{n-j} - nC_{n-1}^j t^j (1-t)^{n-j-1}$$

$$= n[\mathbf{B}_{j-1,n-1}(t) - \mathbf{B}_{j,n-1}(t)]$$

1、Bernstein基函数的性质

5）最大值:

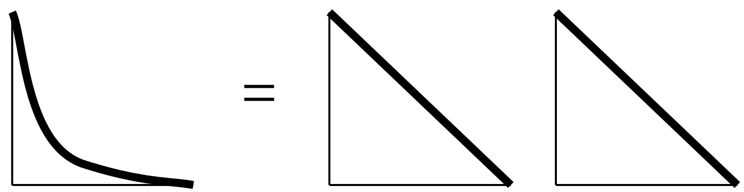
当$u=\dfrac{i}{n}$时，$B_{i,n}(u)$达到最大值。

可以由性质4推出

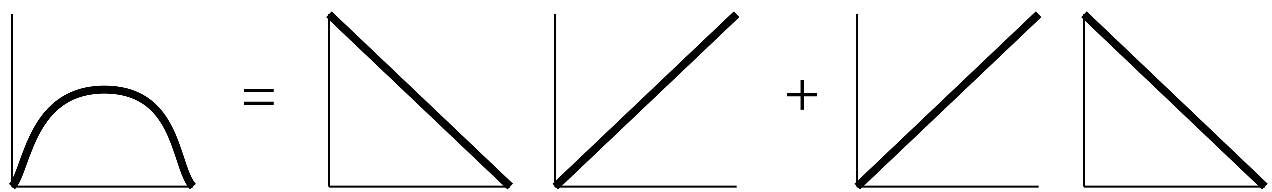
1、Bernstein基函数的性质

6）递推性:

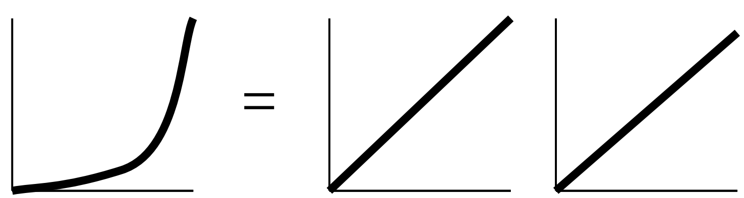
$$\boxed{B_{i,n}(u) = (1-u)B_{i,\, n-1}(u) + uB_{i-1,\, n-1}(u)}$$



$B_{0,\ 2}(u)$ = (1-u) $B_{0,1}(u)$



$B_{1,2}(u)$ = (1-u) $B_{1,1}(u)$ + u $B_{0,1}(u)$



$B_{2,2}(u)$ = u $B_{1,1}(u)$

1、Bernstein基函数的性质

6）递推性：

$$\boxed{B_{i,n}(u) = (1\text{-}u)B_{i,\,n-1}(u) + uB_{i-1,\,n-1}(u)}$$

证明：

$$
\begin{aligned}
B_{i,n}(u) &= C_n^i u^i (1-u)^{n-i} \\
&= (C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}) u^i (1-u)^{n-i} \\
&= C_{n-1}^i u^i (1-u)^{n-i} + C_{n-1}^{i-1} u^i (1-u)^{n-i} \\
&= (1-u) B_{i,n-1}(u) + u B_{i-1,n-1}(u)
\end{aligned}
$$

1、Bernstein基函数的性质

7）升阶公式:

$$(1-u)B_{i,n}(u)=(1-\frac{i}{n+1})B_{i,n+1}(u)$$

$$uB_{i,n}(u)=\frac{i+1}{n+1}B_{i+1,n+1}(u)$$

$$B_{i,n}(u)=(1-\frac{i}{n+1})B_{i,n+1}(u)+\frac{i+1}{n+1}B_{i+1,n+1}(u)$$

1、Bernstein基函数的性质

8）分割：

$$B_{i,n}(cu)=\sum_{j=0}^{n}B_{i,j}(c)B_{j,n}(u)$$

9）积分： $$\int_0^1 B_{i,n}(u)du=\frac{1}{n+1}$$

10）Bernstein基与幂基的关系：

$$u^i=\sum_{j=i}^{n}\frac{C_j^i}{C_n^i}B_{j,n}(u)$$ 特别的： $$u=\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{n}B_{j,n}(u)$$

1、Bernstein基函数的性质

$$B_{i,n}(u)=\sum_{j=i}^{n}(-1)^{i+j}C_n^jC_j^iu^j=\sum_{j=i}^{n}(-1)^{i+j}C_n^iC_{n-i}^{j-i}u^j$$

11）端点性质：

$$B_{i,n}(0)=\begin{cases}1 & i=0\\ 0 & 1\le i\le n\end{cases}\qquad B_{i,n}(1)=\begin{cases}1 & i=n\\ 0 & 0\le i<n\end{cases}$$

12）线性无关性：

$B_{0,n}(u)$，$B_{1,n}(u)$，…，$B_{n,n}(u)$ 线性无关，可以作为n次多项式空间的一组基。

2、Bezier曲线的性质

Bernstein基函数的性质决定了Bezier曲线的如下性质：

1）端点插值性：

$$\vec{p}(0)=\vec{b}_0 \quad \vec{p}(1)=\vec{b}_n$$

这两条性质可以很容易控制Bezier曲线在首末端点的形态。

2）端点切矢：

$$\vec{p}'(0)=n(\vec{b}_1-\vec{b}_0) \quad \vec{p}'(1)=n(\vec{b}_n-\vec{b}_{n-1})$$

即Bezier曲线在首末端点的切矢分别与与控制多边形的第一条边和最后一条边平行，且模长是其n倍。

2、Bezier曲线的性质

更进一步的结论:

$$\vec{p}''(0)=n(n-1)[(\vec{b}_2-\vec{b}_1)-(\vec{b}_1-\vec{b}_0)]$$

$$\vec{p}''(1)=n(n-1)[(\vec{b}_n-\vec{b}_{n-1})-(\vec{b}_{n-1}-\vec{b}_{n-2})]$$

更高阶导矢:

$$\vec{p}^k(0)=\frac{n!}{(n-k)!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i\vec{b}_i$$

以后证明!

$$\vec{p}^k(1)=\frac{n!}{(n-k)!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i\vec{b}_{n-i}$$

说明Bezier曲线在首末端点的k阶导矢只和最前面的k条边（k+1个顶点）和最后面的k条边（k+1个顶点）有关。

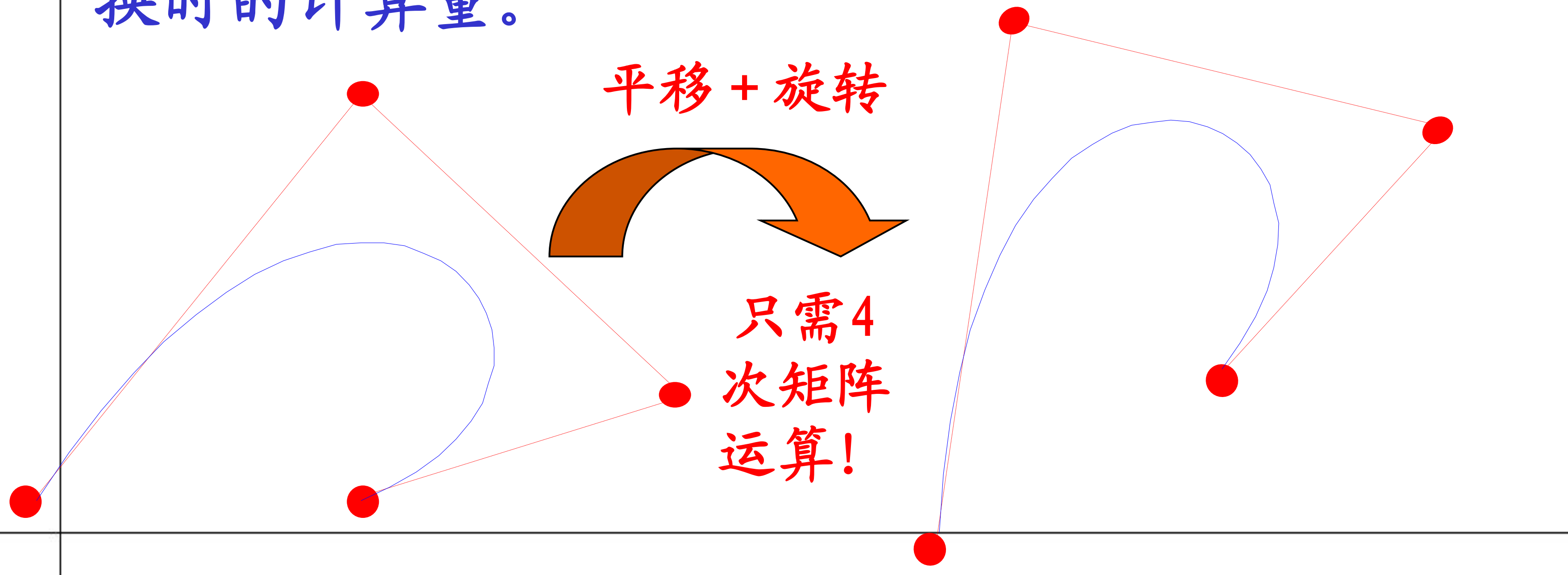
2、Bezier曲线的性质

3）仿射不变性（Affine invariance ）:

$$\because 0 \le B_{i,n}(u) \le 1, \text{且} \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) \equiv 1$$

即Bezier曲线上的点是控制顶点的重心组合。

意义：大大减少对Bezier曲线曲面进行仿射变换时的计算量。

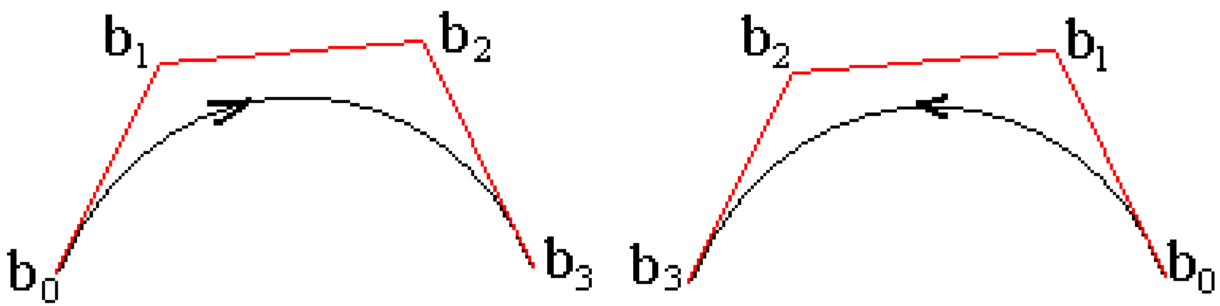


2、Bezier曲线的性质

4）对称性：

由Bernstein基函数的对称性，可得：

$$\sum_{j=0}^{n}\vec{b}_j B_{j,n}(u) = \sum_{j=0}^{n}\vec{b}_{n-j} B_{j,n}(1-u)$$

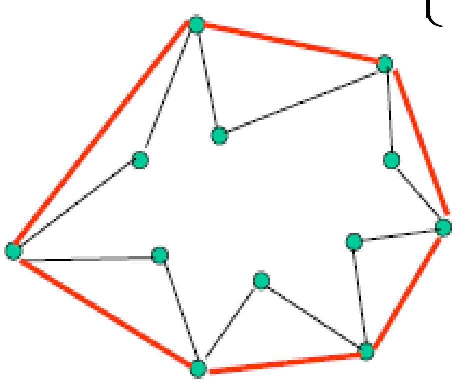


2、Bezier曲线的性质

5）凸包性（Convex Hull）：

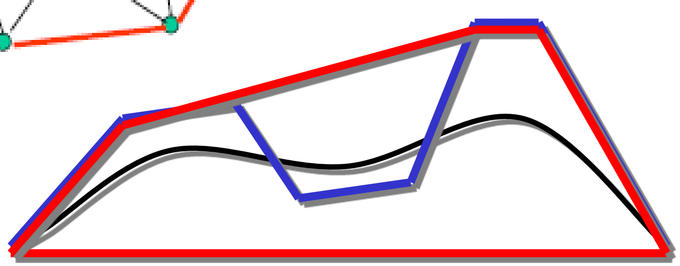
回顾：凸包的定义

$$V[\vec{b}_0,\cdots,\vec{b}_n]=\left\{\vec{b}\,\middle|\,\vec{b}=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\vec{b}_j,\sum_{j=0}^{n}\alpha_j=1,\alpha_j\geq 0,\ j=0,1,\cdots n\right\}$$



由Bezier曲线和凸包的定义可知:

Bezier曲线一定位于控制顶点的凸包内。

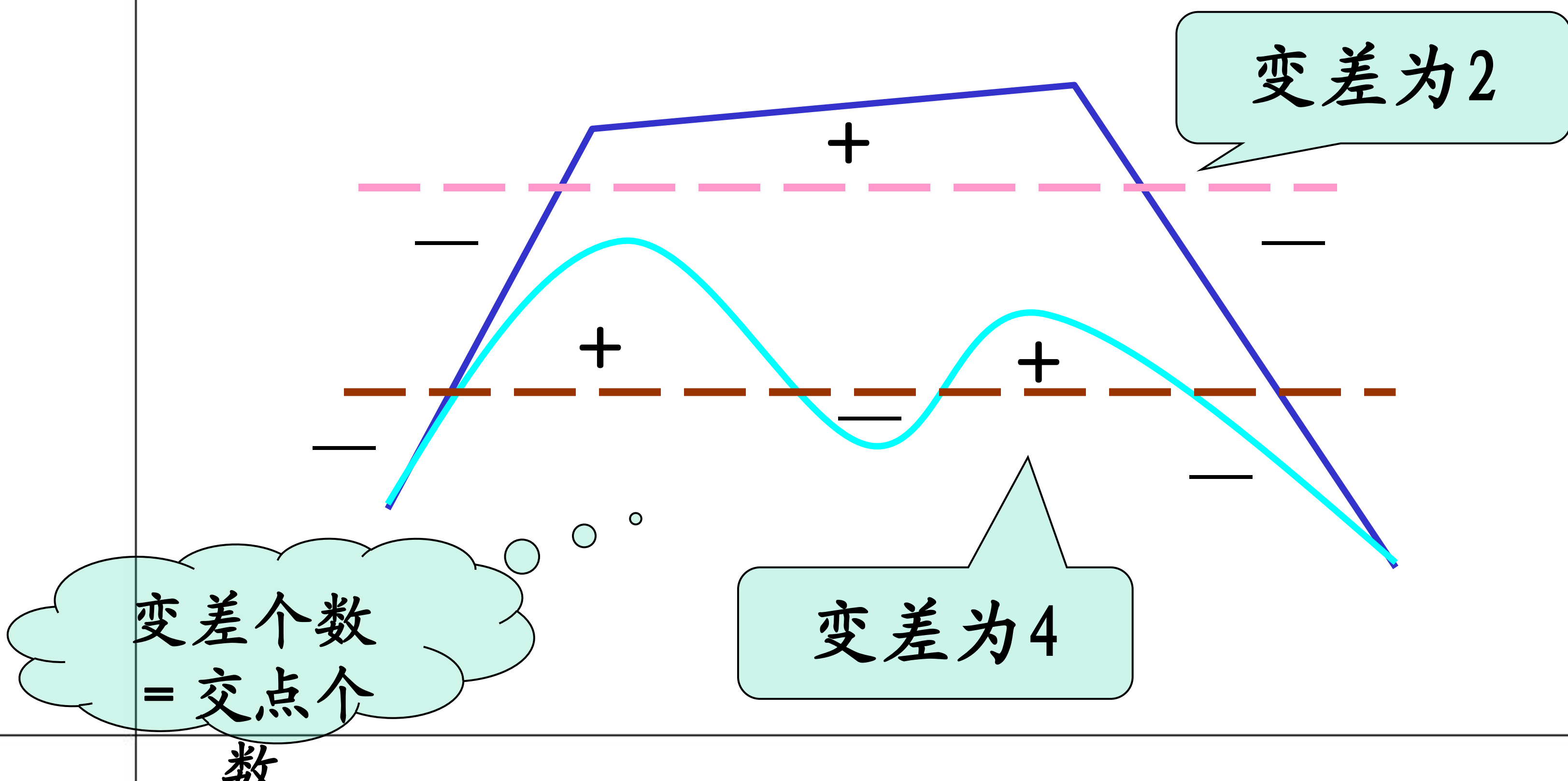


意义：可以预估曲线的范围，排除曲线相交。

2、Bezier曲线的性质

6) 变差缩减性:

凸性：平面曲线（或多边形）为凸是指它与平面上任一直线的交点不多于两个。



2、Bezier曲线的性质

实际上，给定平面上的两点A、B，则平面上任一条直线L与线段AB的交点至多为一个（不考虑L与AB重合的情况），而连接AB两点的曲线与直线L的交点则可以有任意个。

Bezier曲线的变差缩减性是指：任意平面（直线）与空间（平面）Bezier曲线的交点个数不会超过它与控制多边形的交点个数。

凸性定理：

若Beizer曲线的控制多边形是凸的，则它生成的Bezier曲线也一定是凸的。

2、Bezier曲线的性质

注：凸性定理的逆命题不成立，即凹的控制多边形也有可能生成凸的Bezier曲线。

例如：设平面4次Bezier曲线的控制顶点依次为：

$$\vec{b}_0=[0,0],\vec{b}_1=[\frac{1}{4},\frac{1}{4}],\vec{b}_2=[\frac{1}{2},\omega],\vec{b}_3=[\frac{3}{4},\frac{1}{4}],\vec{b}_4=[1,0]$$

根据Bernstein基函数的性质，上述Bezier曲线为：

$$\vec{p}(t)=\left[x,y\right]$$ 其中：

$$\begin{cases} x=t \\ y=(1-x)^3x+6\omega(1-x^2)x^2+(1-x)x^3 \end{cases} \quad 0\le x\le 1$$

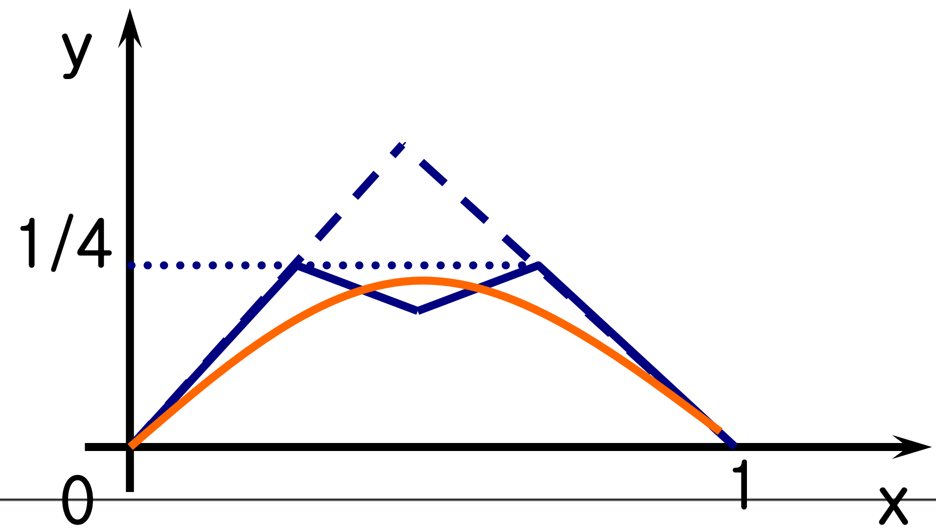
2、Bezier曲线的性质

$$y'' = 6[(2\omega - 1)(1-x)^2 + 2(1-4\omega)(1-x)x + (2\omega-1)x^2]$$

由此可知：

当$0 \le \omega \le \dfrac{1}{2}$时，曲线为凸；当$\omega < 0$或$\omega > \dfrac{1}{2}$时，曲线有两个拐点。

如下图：取0＜ω<1/4时，控制多边形是凹的，但Bezier曲线是凸的。



2、Bezier曲线的性质

7)线性精度：

给定两点$\vec{p}$和$\vec{q}$，若令：

$$\vec{b}_j = (1-\frac{j}{n})\vec{p} + \frac{j}{n}\vec{q} \quad j = 0,1,\cdots,n$$

则Bezier曲线$\sum_{j=0}^{n}\vec{b}_j B_{j,n}(u)$即为直线段$\overline{pq}$。

8)仿射参数变换不变性：

对Bezier曲线的拼接有重要意义！

$$\sum_{i=0}^{n}\vec{b}_i B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n}\vec{b}_i B_{i,n}(\frac{u-a}{b-a}) \quad t \in [0,1] \Rightarrow u \in [a,b]$$

2、Bezier曲线的性质

9)移动n次Bezier曲线的第j个控制顶点，将对曲线上参数为j/n的点影响最大。

总结：

Bezier曲线是一种具有优良性质的参数多项式曲线，它对曲线形状的控制达到了几何直观的程度。

不足之处：

1）不具有局部修改性。

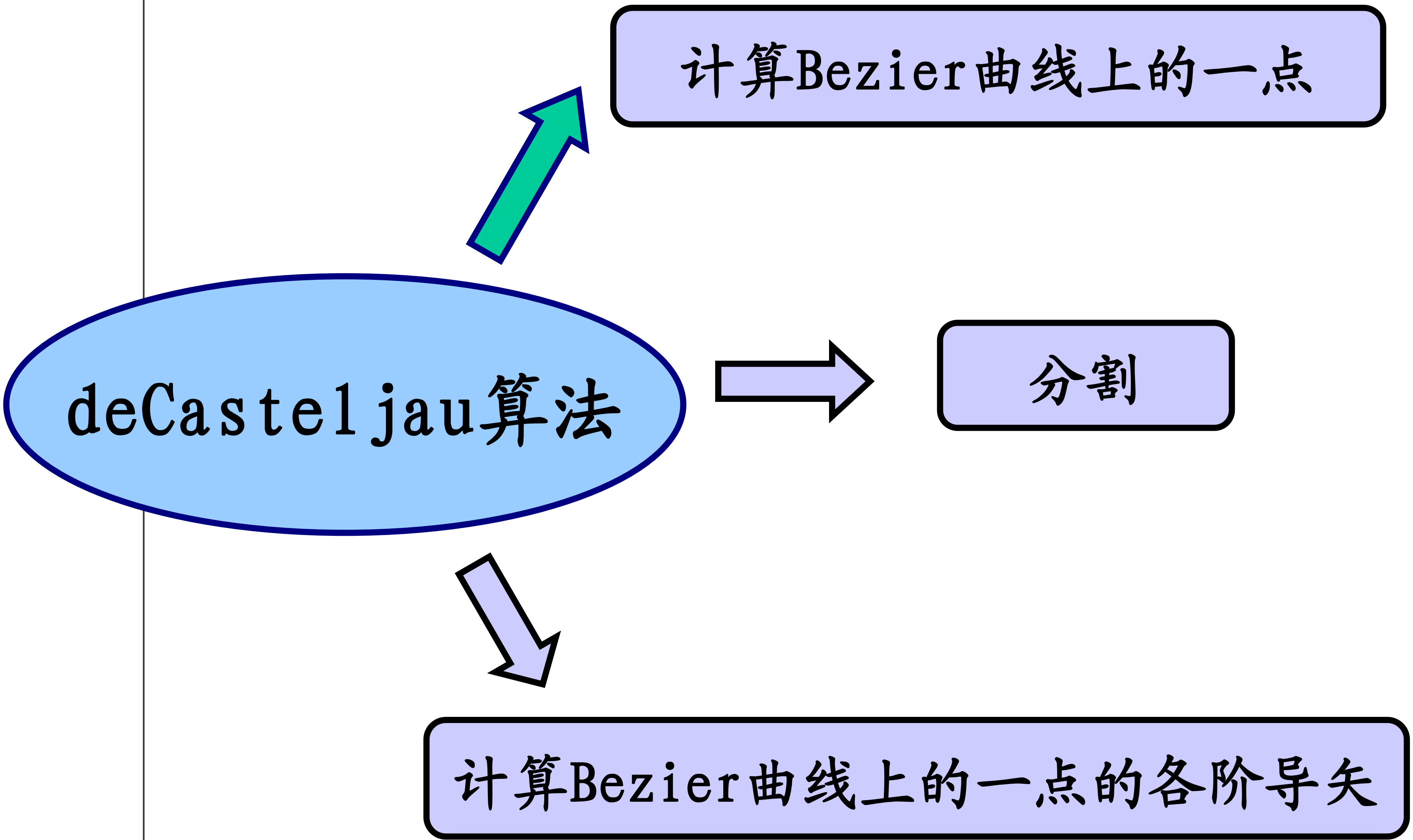
2）控制顶点的个数与曲线次数有关。

3）仍是一种多项式参数曲线，次数不能太高。

第一节　结束

第二节　Bezier曲线的线性运算

一、德卡斯特里奥（deCasteljau）算法



一、德卡斯特里奥（deCasteljau）算法

1、引例——三切线定理

设$\vec{b}_0,\vec{b}_1$和$\vec{b}_2$为平面上的任意三个点，令：

$$\vec{b}_0^1(t)=(1-t)\vec{b}_0+t\vec{b}_1 \qquad (1)$$

$$\vec{b}_1^1(t)=(1-t)\vec{b}_1+t\vec{b}_2 \qquad (2)$$

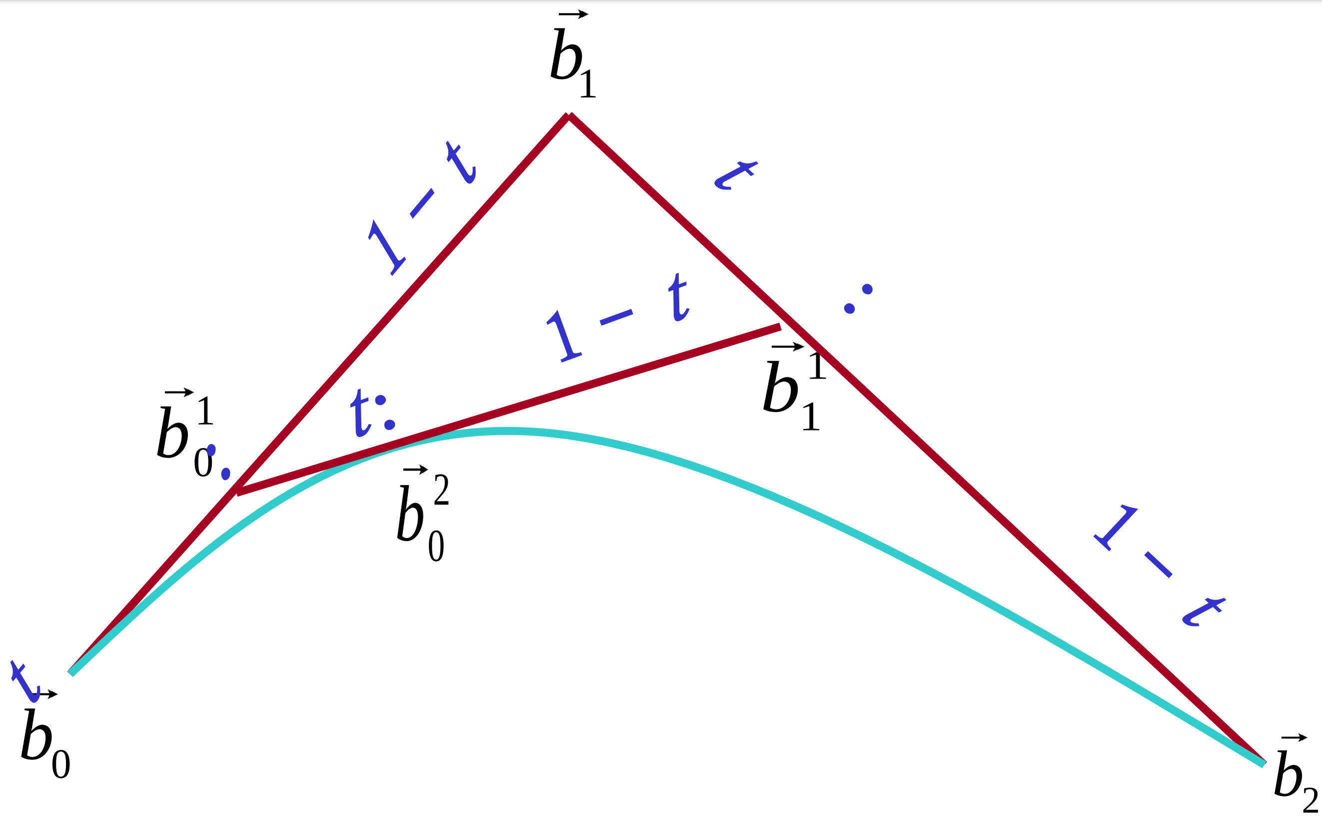
$$\vec{b}_0^2(t)=(1-t)\vec{b}_0^1+t\vec{b}_1^1 \qquad (3)$$

将（1），（2）代入（3）得:

二次Bezier曲线

$$\vec{b}_0^2(t)=(1-t)^2\vec{b}_0+2t(1-t)\vec{b}_1+t^2\vec{b}_2$$

一、德卡斯特里奥(deCasteljau)算法



结论:

1) $ratio(\vec{b}_0,\vec{b}_0^1,\vec{b}_1)=ratio(\vec{b}_1,\vec{b}_1^1,\vec{b}_2)=ratio(\vec{b}_0^1,\vec{b}_0^2,\vec{b}_1^1)=\dfrac{t}{1-t}$

2) $\overrightarrow{b_0b_1}$, $\overrightarrow{b_1b_2}$和$\overrightarrow{b_0^1b_1^1}$都与曲线相切。

一、德卡斯特里奥（deCasteljau）算法

由三切线定理可知:

1）二次Bezier曲线上的一点可以通过三次线性插值得到。

2）二次Bezier曲线可以表示成两个一次Bezier曲线（直线）的线性组合。

上述结论是否可以推广到一般情况?

一、德卡斯特里奥（deCasteljau)算法

2、德卡斯特里奥（deCasteljau）算法

设$\vec{b}_0, \vec{b}_1, \cdots \vec{b}_n$为$n$次Bezier曲线的$n+1$个控制顶点，$t \in [0,1]$，则：

递推级数

$$\vec{b}_j^k = \begin{cases} \vec{b}_j & k=0 \\ (1-t)\vec{b}_j^{k-1} + t\vec{b}_{j+1}^{k-1} & k=1,2,\cdots n;\ j=0,1,\cdots n-k \end{cases} \qquad (*)$$

序号

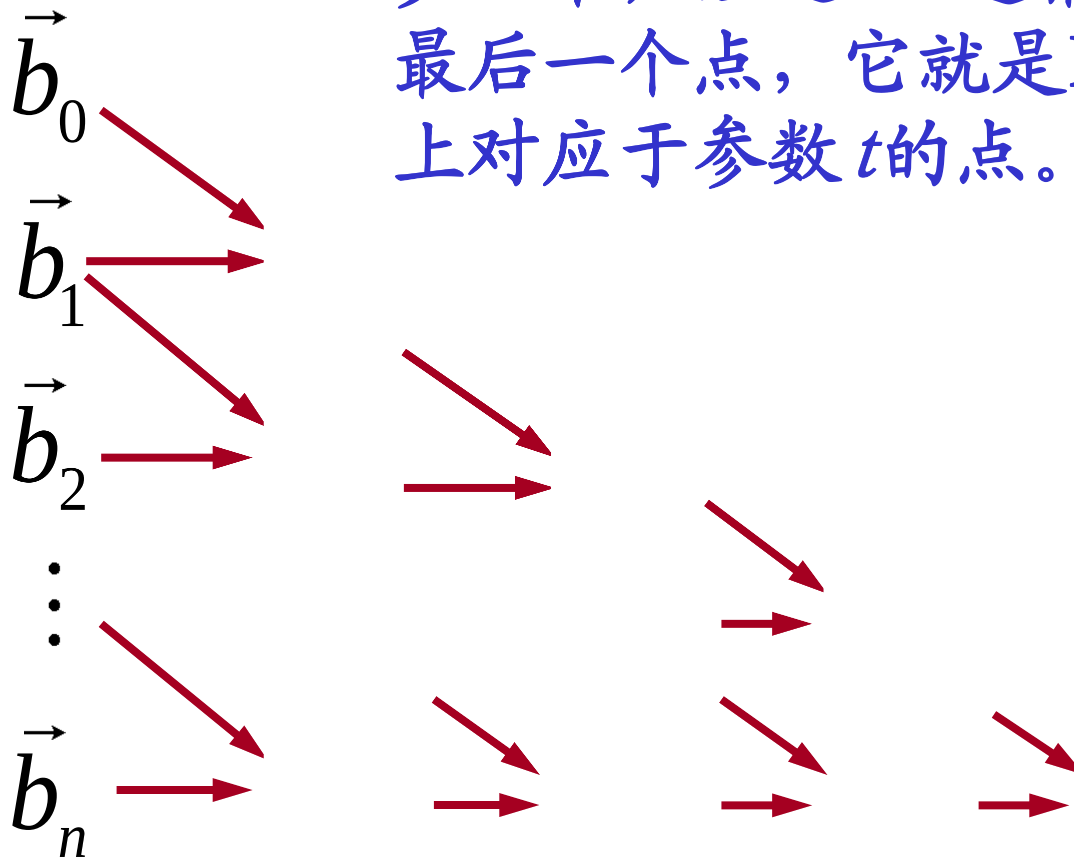
且$\vec{b}_0^n = \vec{p}(t)$

$\vec{b}_j^k$称为中间控制顶点

一、德卡斯特里奥(deCasteljau)算法

图示:

每递推一级，中间控制顶点就会少一个，经过n级递推后，只剩最后一个点，它就是Bezier曲线上对应于参数t的点。



一、德卡斯特里奥（deCasteljau)算法

注：1）当 t从0到1连续变化时，$\vec{b}_0^n(t)$ 的轨迹

就是n次Bezier曲线。

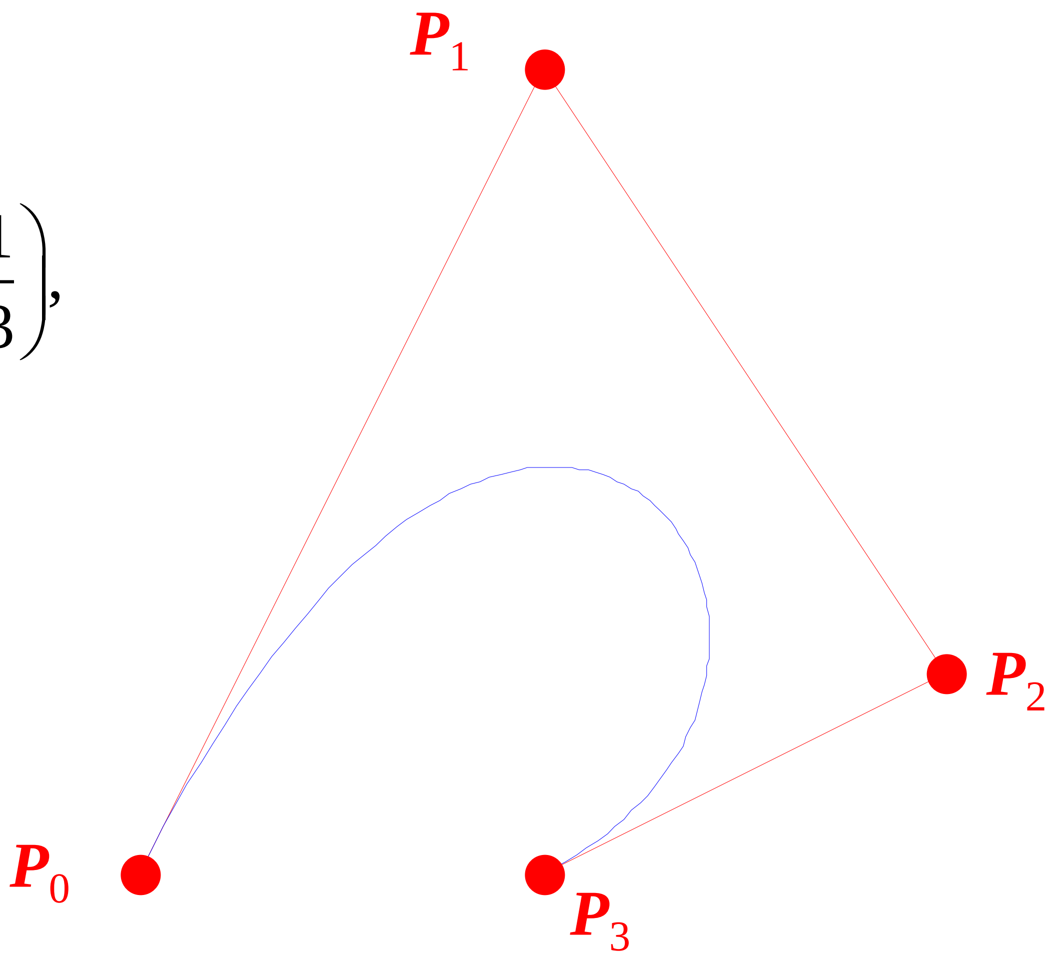
2）n次Bezier曲线可以看作是分别由前

n个控制顶点和后n个控制顶点确定的两条n-1次Bezier曲线的线性组合。

一、德卡斯特里奥(deCasteljau)算法

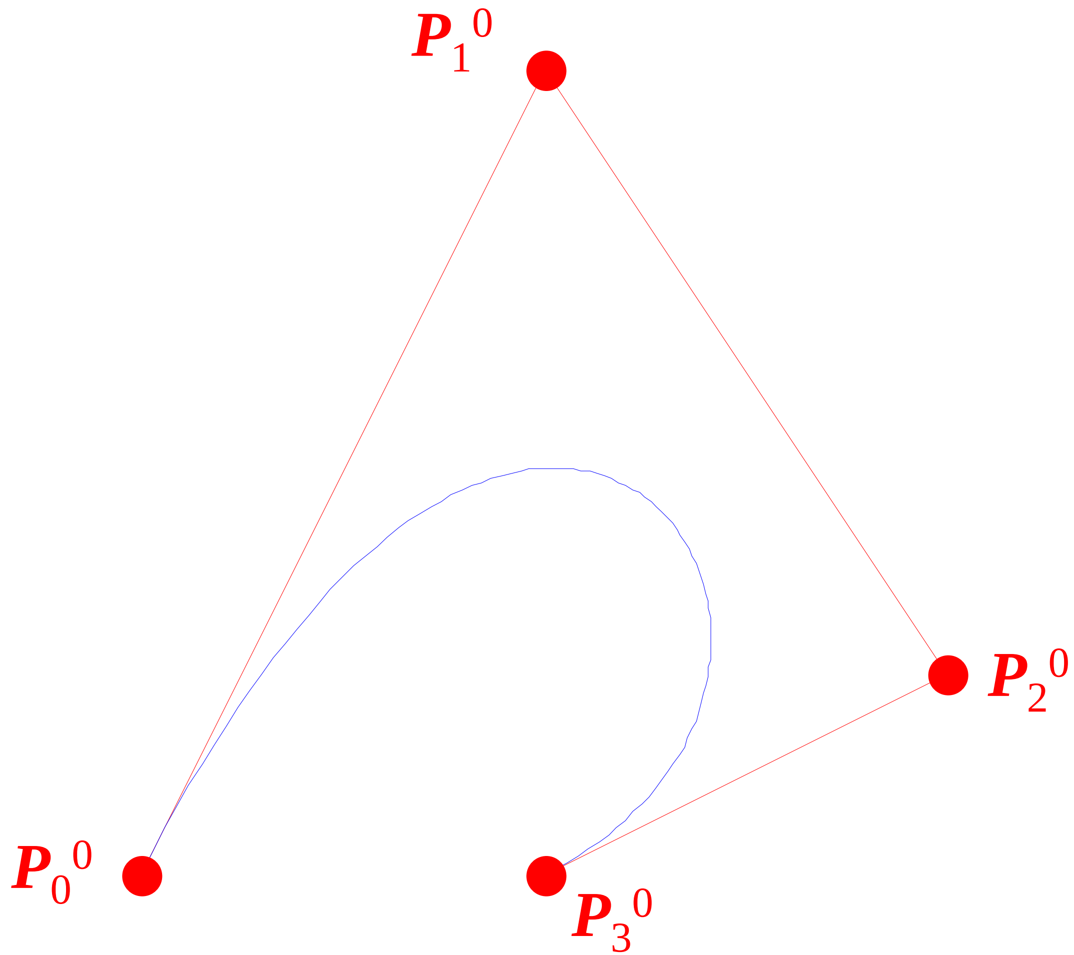
算例与几何作图:

$$\vec{P}\left(\frac{1}{3}\right)=\sum_{i=0}^{3}\vec{P}_i B_{i,n}\left(\frac{1}{3}\right),$$



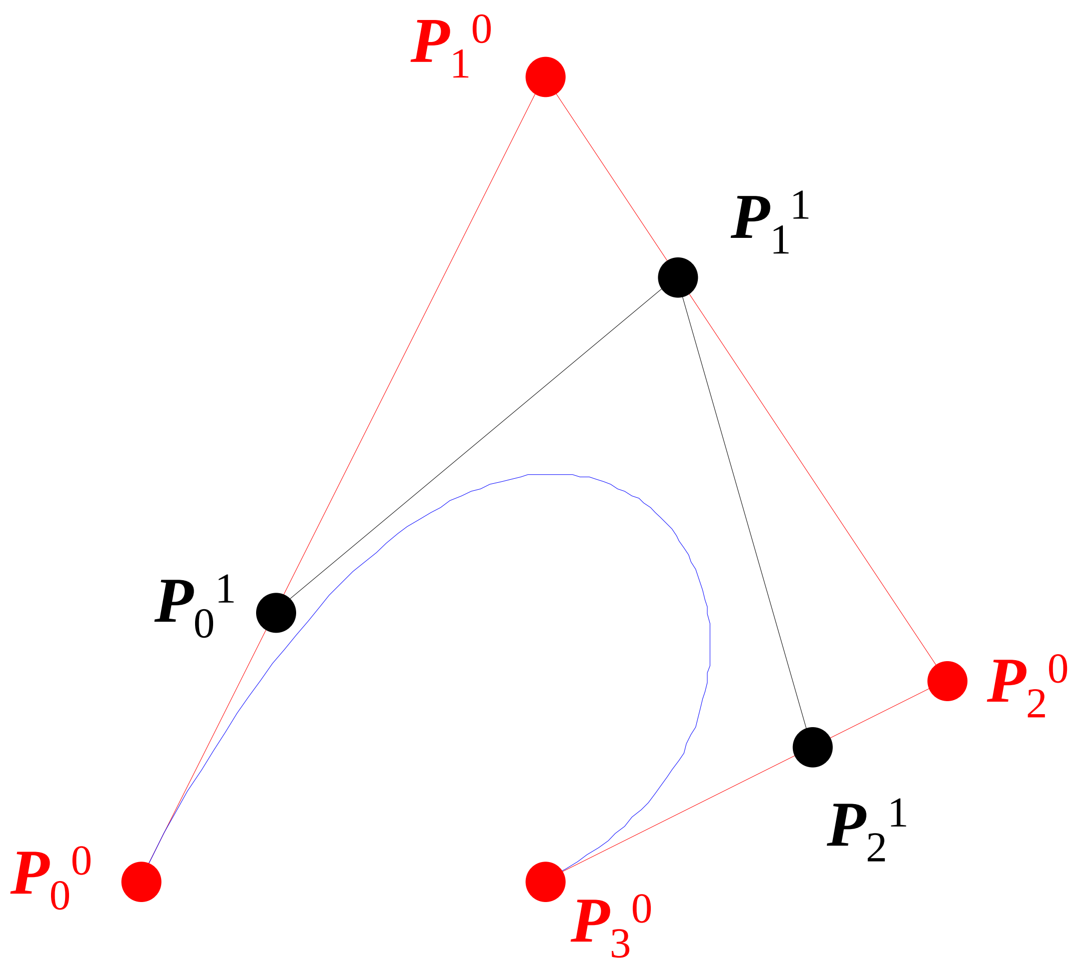
一、德卡斯特里奥（deCasteljau）算法

算例与几何作图：

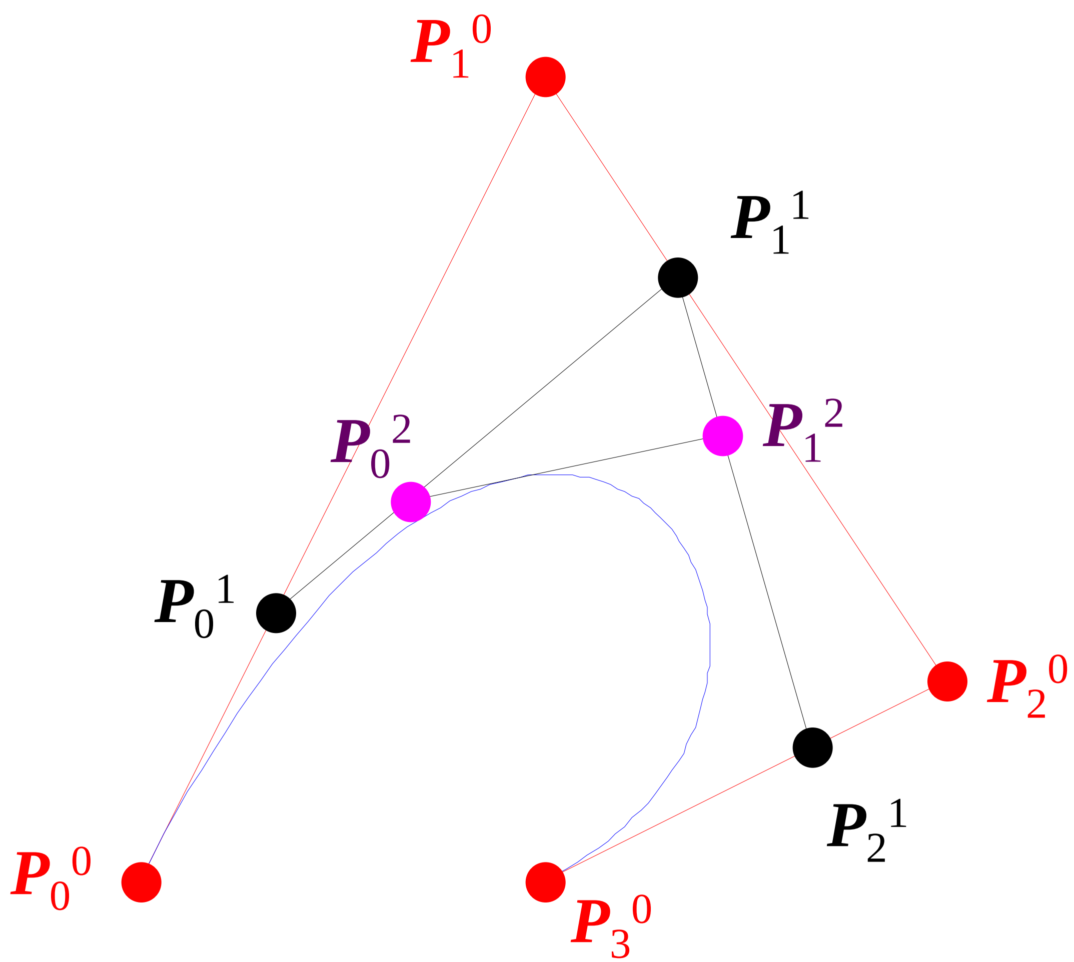


一、德卡斯特里奥(deCasteljau)算法

算例与几何作图:

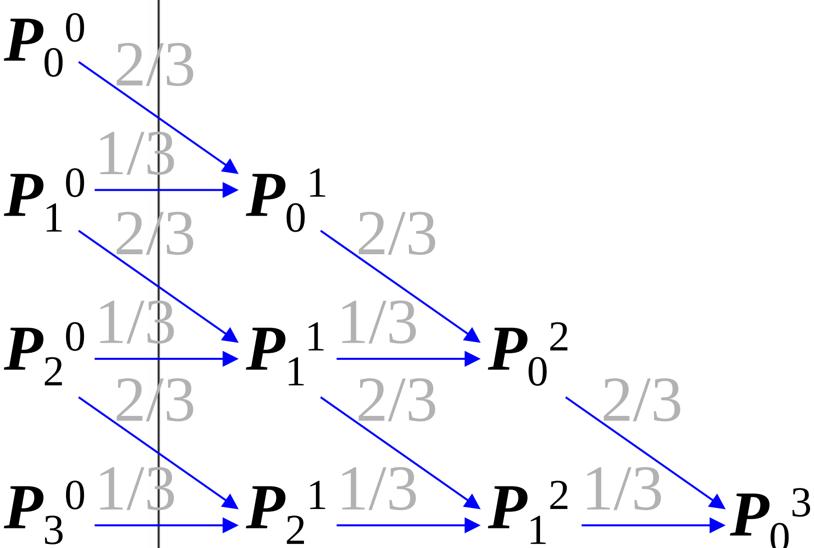


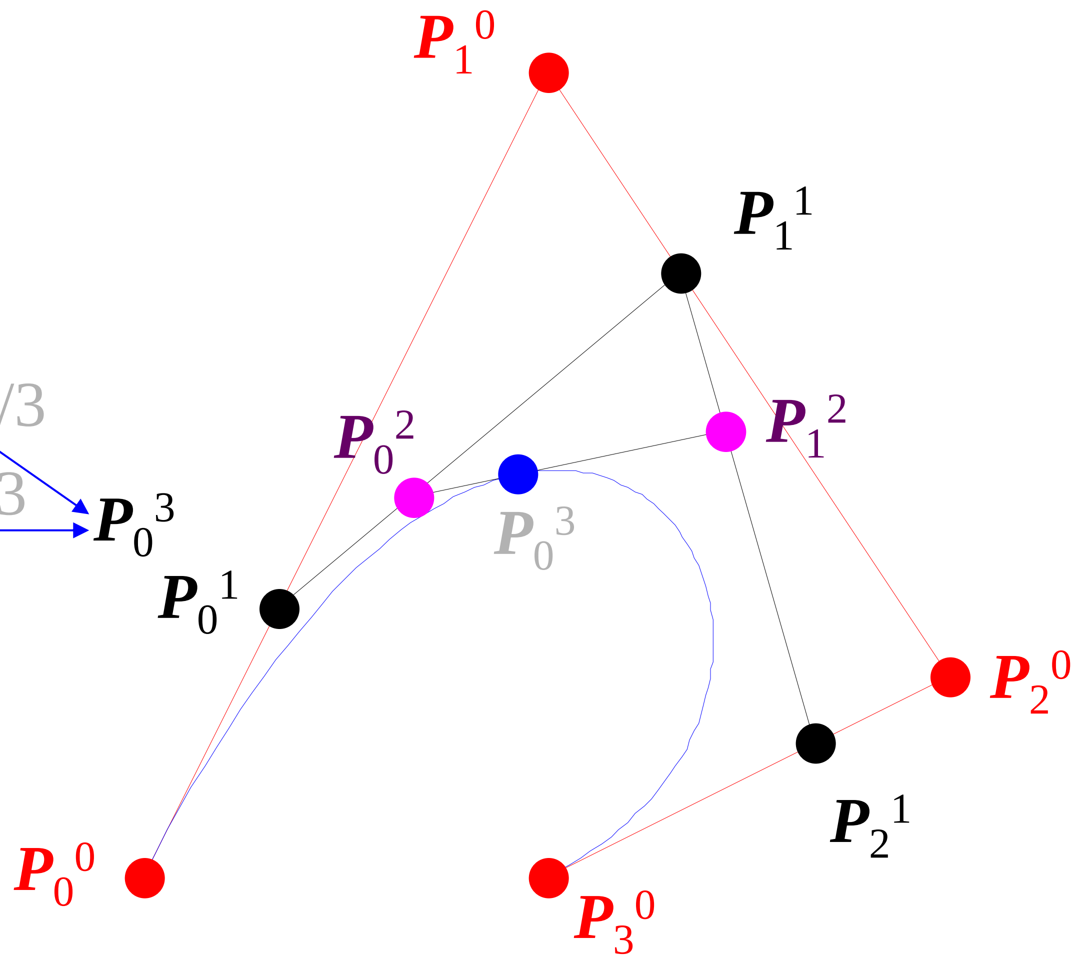
算例与几何作图:



一、德卡斯特里奥(deCasteljau)算法

算例与几何作图:





一、德卡斯特里奥（deCasteljau）算法

3、deCasteljau算法的算子形式：

令I为横等算子，E为移位算子，即：

$$I\vec{b}_j=\vec{b}_j \qquad E\vec{b}_j=\vec{b}_{j+1} \qquad E^k\vec{b}_j=\vec{b}_{j+k} \qquad E^{-1}\vec{b}_j=\vec{b}_{j-1}$$

根据上述算子的定义以及deCasteljau算法，有：

$$\vec{b}_0^n(t)=(1-t)\vec{b}_0^{n-1}(t)+t\vec{b}_1^{n-1}(t)$$
$$=[(1-t)I+tE]\vec{b}_0^{n-1}(t)$$

同理：

$$\vec{b}_0^{n-1}(t)=(1-t)\vec{b}_0^{n-2}(t)+t\vec{b}_1^{n-2}(t)$$
$$=[(1-t)I+tE]\vec{b}_0^{n-2}(t)$$

一、德卡斯特里奥（deCasteljau）算法

所以:

$$\vec{b}_0^n(t)=[(1-t)I+tE]^2\vec{b}_0^{n-2}(t)$$

依此类推:

$$\begin{aligned}\vec{b}_0^n(t)&=[(1-t)I+tE]\vec{b}_0^{n-1}(t)\\&=[(1-t)I+tE]^2\vec{b}_0^{n-2}(t)\\&=\cdots=[(1-t)I+tE]^{n-1}\vec{b}_0^1(t)\\&=[(1-t)I+tE]^n\vec{b}_0(t)\end{aligned}$$

一、德卡斯特里奥(deCasteljau)算法

中间控制顶点:

$$\vec{b}_j^k = [(1-t)I + tE]^k \vec{b}_j$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i (1-t)^{k-i} t^i E^i \vec{b}_j$$

$$= \sum_{i=0}^{k} B_{i,k}(t) \vec{b}_{j+i}$$

上式说明，当t从0到1连续变化时，第k层中间控制顶点的轨迹就是一条k次Bezier曲线。

二、Bezier曲线的导矢

1、速端曲线

由Bernstein基函数的性质:

$$B'_{i,n}(u)=n[B_{i-1,n-1}(u)-B_{i,n-1}(u)] \quad i=1,2,\cdots n$$

可得:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}(t)=n\sum_{j=0}^{n}[B_{j-1,n-1}(t)-B_{j,n-1}(t)]\vec{b}_j$$

在上式中:

$$B_{j,n}(t)=0, \quad for\ j\notin\{0,1,\cdots,n\}$$

二、Bezier曲线的导矢

对求导结果继续化简，可得:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}(t)=n\sum_{j=1}^{n}B_{j-1,n-1}(t)\vec{b}_j-n\sum_{j=0}^{n-1}B_{j,n-1}(t)\vec{b}_j$$

$$=n\sum_{j=0}^{n-1}B_{j,n-1}(t)\vec{b}_{j+1}-n\sum_{j=0}^{n-1}B_{j,n-1}(t)\vec{b}_j$$

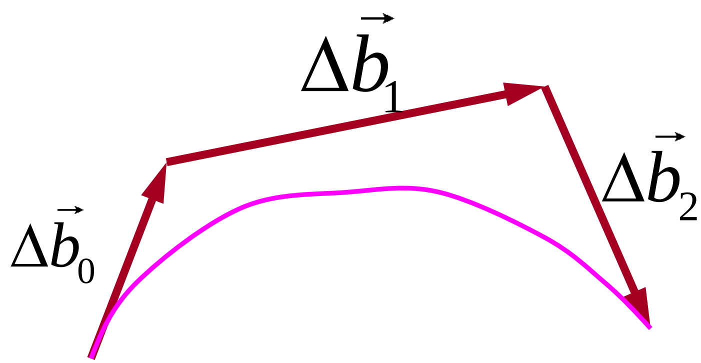
$$=n\sum_{j=0}^{n-1}(\vec{b}_{j+1}-\vec{b}_j)B_{j,n-1}(t)$$

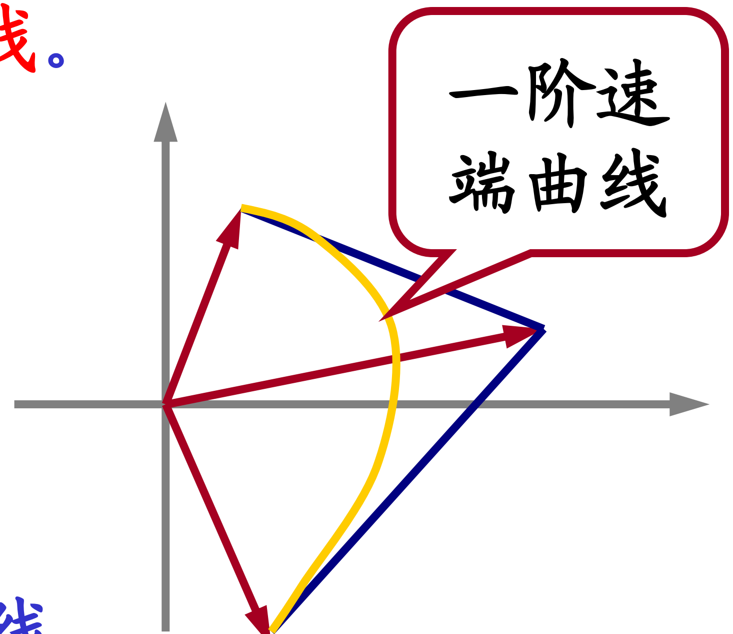
$$=n\sum_{j=0}^{n-1}\Delta\vec{b}_jB_{j,n-1}(t)$$

二、Bezier曲线的导矢

在上式中 $\Delta\vec{b}_j, j=0,1,\cdots n-1$ 为相对矢量，

现将它们的起点都移动到坐标系的原点，则可以构成n－1个绝对矢量，以这n－1个绝对矢量作为控制顶点，则可以生成一个n－1次Bezier曲线，称其为**一阶速端曲线**。





还可以类似地定义高阶速端曲线。

二、Bezier曲线的导矢

2、高阶导矢

将Bezier曲线表示成算子形式:

$$\vec{p}(t)=[(1-t)I+tE]^n\vec{b}_0$$

各阶导矢可表示为:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{p}(t)&=n[(1-t)I+tE]^{n-1}(E\vec{b}_0-\vec{b}_0)\\&=n[(1-t)I+tE]^{n-1}(\vec{b}_1-\vec{b}_0)\\&=n[(1-t)I+tE]^{n-1}\Delta\vec{b}_0\end{aligned}$$

二、Bezier曲线的导矢

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{p}(t)=n(n-1)[(1-t)I+tE]^{n-2}(E\Delta\vec{b}_0-\Delta\vec{b}_0)$$

$$=n(n-1)[(1-t)I+tE]^{n-2}(\Delta\vec{b}_1-\Delta\vec{b}_0)$$

$$=n(n-1)[(1-t)I+tE]^{n-2}\Delta^2\vec{b}_0$$

一般地:

r阶速端曲线

$$\frac{d^r}{dt^r}\vec{p}(t)=n(n-1)\cdots(n-r+1)[(1-t)I+tE]^{n-r}\Delta^r\vec{b}_0$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{j=0}^{n-r}\Delta^r\vec{b}_j B_{j,n-r}(t)$$

二、Bezier曲线的导矢

（1）曲线端点处的高阶导矢

分别令t = 0和t = 1，代入上式r阶速端曲线的表达式，得:

$$\frac{d^r}{dt^r}\vec{p}(0)=\frac{n!}{(n-r)!}\Delta^r\vec{b}_0$$

$$\frac{d^r}{dt^r}\vec{p}(1)=\frac{n!}{(n-r)!}\Delta^r\vec{b}_{n-r}$$

可见Bezier曲线在端点处的r阶导矢仅与最近的r + 1个控制顶点（控制多边形的r条边）有关，而与其它控制顶点无关。

二、Bezier曲线的导矢

特别的:

$$\vec{p}'(0)=n\Delta\vec{b}_0=n(\vec{b}_1-\vec{b}_0)\qquad \vec{p}'(1)=n\Delta\vec{b}_{n-1}=n(\vec{b}_n-\vec{b}_{n-1})$$

$$\vec{p}''(0)=n(n-1)\Delta^2\vec{b}_0\qquad \vec{p}''(1)=n(n-1)\Delta^2\vec{b}_{n-2}$$

所以，曲线在端点处的曲率为:

$$k(0)=\frac{\left|\vec{p}'(0)\times\vec{p}''(0)\right|}{\left|\vec{p}'(0)\right|^3}=\frac{n^2(n-1)\left|\Delta\vec{b}_0\times\Delta\vec{b}_1\right|}{n^3\left|\Delta\vec{b}_0\right|^3}=\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{\left|\Delta\vec{b}_0\times\Delta\vec{b}_1\right|}{\left|\Delta\vec{b}_0\right|^3}$$

$$k(1)=\frac{\left|\vec{p}'(1)\times\vec{p}''(1)\right|}{\left|\vec{p}'(1)\right|^3}=\frac{n^2(n-1)\left|\Delta\vec{b}_{n-2}\times\Delta\vec{b}_{n-1}\right|}{n^3\left|\Delta\vec{b}_{n-1}\right|^3}=\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{\left|\Delta\vec{b}_{n-2}\times\Delta\vec{b}_{n-1}\right|}{\left|\Delta\vec{b}_{n-1}\right|^3}$$

二、Bezier曲线的导矢

(2)曲线内部点的高阶导矢

由$\frac{d^r}{dt^r}\vec{p}(t)=\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{j=0}^{n-r}\Delta^r\vec{b}_j B_{j,n-r}(t)$可得:

$$\frac{d^r}{dt^r}\vec{p}(t)=\frac{n!}{(n-r)!}\Delta^r\sum_{j=0}^{n-r}\vec{b}_j B_{j,n-r}(t)$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}\Delta^r[(1-t)I+tE]^{n-r}\vec{b}_0$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}\Delta^r\vec{b}_0^{n-r}$$

二、Bezier曲线的导矢

上式表明，曲线内部点的r阶导矢可以表示成deCasteljau算法中间控制顶点的r阶差分，再乘以倍数，根据差分的定义，可以证明：

$$\Delta^r \vec{b}_0^{n-r} = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} C_r^i \vec{b}_i^{n-r}$$

上式涉及到的中间控制顶点为：

$$\vec{b}_0^{n-r}, \vec{b}_1^{n-r}, \cdots, \vec{b}_r^{n-r}$$

这些点正好是表示deCasteljau算法递推过程的三角阵列的第n－r列的r个中间控制顶点。

二、Bezier曲线的导矢

可见，Bezier曲线的各阶导矢可以作为deCasteljau算法的“副产品”计算出结果！

例如：

$$\begin{array}{cccc}
\boldsymbol{b}_0^{\,0} & & & \\
\boldsymbol{b}_1^{\,0} & \boldsymbol{b}_0^{\,1} & & \\
\boldsymbol{b}_2^{\,0} & \boldsymbol{b}_1^{\,1} & \boldsymbol{b}_0^{\,2} & \\
\boldsymbol{b}_3^{\,0} & \boldsymbol{b}_2^{\,1} & \boldsymbol{b}_1^{\,2} & \boldsymbol{b}_0^{\,3}
\end{array}$$

$$\vec{p}'''(t) = n(n-1)(n-2)(\vec{b}_3^{n-3} - 3\vec{b}_2^{n-3} + 3\vec{b}_1^{n-3} + \vec{b}_0^{n-3})$$

$$= 6(\vec{b}_3^{0} - 3\vec{b}_2^{0} + 3\vec{b}_1^{0} + \vec{b}_0^{0})$$

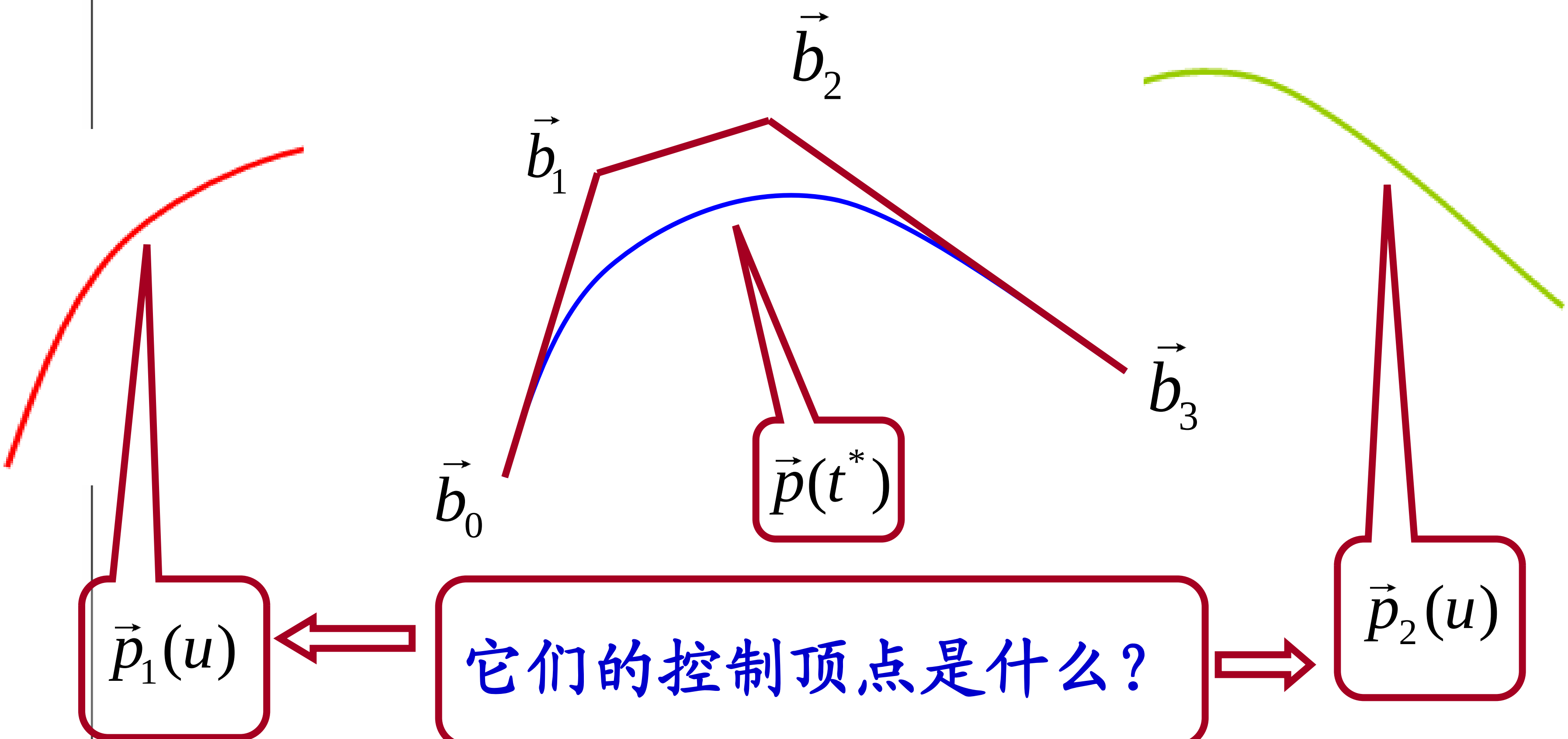
$$\vec{p}''(t) = n(n-1)(\vec{b}_2^{n-2} - 2\vec{b}_1^{n-2} + \vec{b}_0^{n-2})$$

$$= 6(\vec{b}_2^{1} - 2\vec{b}_1^{1} + \vec{b}_0^{1})$$

$$\vec{p}'(t) = n(\vec{b}_1^{n-1} - \vec{b}_0^{n-1}) = 3(\vec{b}_1^{2} - \vec{b}_0^{2})$$

三、Bezier曲线的分割

意义：因为Bezier曲线不具有局部修改性，如果需要对Bezier曲线的一部分进行修改，就需要首先对其进行分割。



三、Bezier曲线的分割

1、分割定理：

设$\vec{p}(t)$为一条n次Bezier曲线，它的控制顶点为：$\vec{b}_0$，$\vec{b}_1,\cdots$，$\vec{b}_n$, $\vec{p}(t^*)(0<t^*<1)$将曲线分割成前后两段n次Bezier曲线，分别记作$\vec{p}_1(u)$和$\vec{p}_2(u)$，其中$0<u<1$。则$\vec{p}_1(u)$和$\vec{p}_2(u)$的控制顶点分别为：

$\vec{b}_0^0(t^*),\vec{b}_0^1(t^*),\cdots,\vec{b}_0^n(t^*)$ 和 $\vec{b}_0^n(t^*),\vec{b}_1^{n-1}(t^*),\cdots,\vec{b}_n^0(t^*)$

即以 t^*为参数，对原Bezier曲线进行deCasteljau算法得到的三角阵列中的每列第一个元素和最后一个元素（逆序）。

三、Bezier曲线的分割

证明：按照分割的定义，有：

$$\vec{p}_1(u) = \vec{p}(t^* u)$$

$$\vec{p}_2(u) = \vec{p}[1-(1-t^*)(1-u)],\text{其中}:0 < u < 1$$

按照上式，显然有：

$$\vec{p}_1(0) = \vec{p}(0), \vec{p}_1(1) = \vec{p}(t^*)$$

$$\vec{p}_2(0) = \vec{p}(t^*), \vec{p}_2(1) = \vec{p}(1)$$

根据deCasteljau算法的算子形式，有：

三、Bezier曲线的分割

$$\vec{p}_1(u)=\sum_{j=0}^{n}\vec{b}_0^{\,j}(t^*)B_{j,n}(u)$$

$$=\sum_{j=0}^{n}B_{j,n}(u)[(1-t^*)I+t^*E]^j\vec{b}_0$$

$$=\sum_{j=0}^{n}C_n^j(1-u)^{n-j}[u(1-t^*)I+ut^*E]^j\vec{b}_0$$

$$=[(1-u)I+u(1-t^*)I+ut^*E]^n\vec{b}_0$$

$$=[(1-t^*u)I+(t^*u)E]^n\vec{b}_0=\vec{b}^n(t^*u)$$

说明$p_1(u)$确实是原Bezier曲线的前半段

三、Bezier曲线的分割

同理有:

$$\vec{p}_2(u)=\sum_{j=0}^{n}\vec{b}_j^{n-j}(t^*)B_{j,n}(u)$$

$$=\sum_{j=0}^{n}B_{j,n}(u)[(1-t^*)I+t^*E]^{n-j}\vec{b}_j$$

$$=\sum_{j=0}^{n}C_n^j(1-u)^{n-j}u^j[(1-t^*)I+t^*E]^{n-j}E^j\vec{b}_0$$

$$=[(1-(u+t^*-t^*u))I+(u+t^*-t^*u)E]^n\vec{b}_0$$

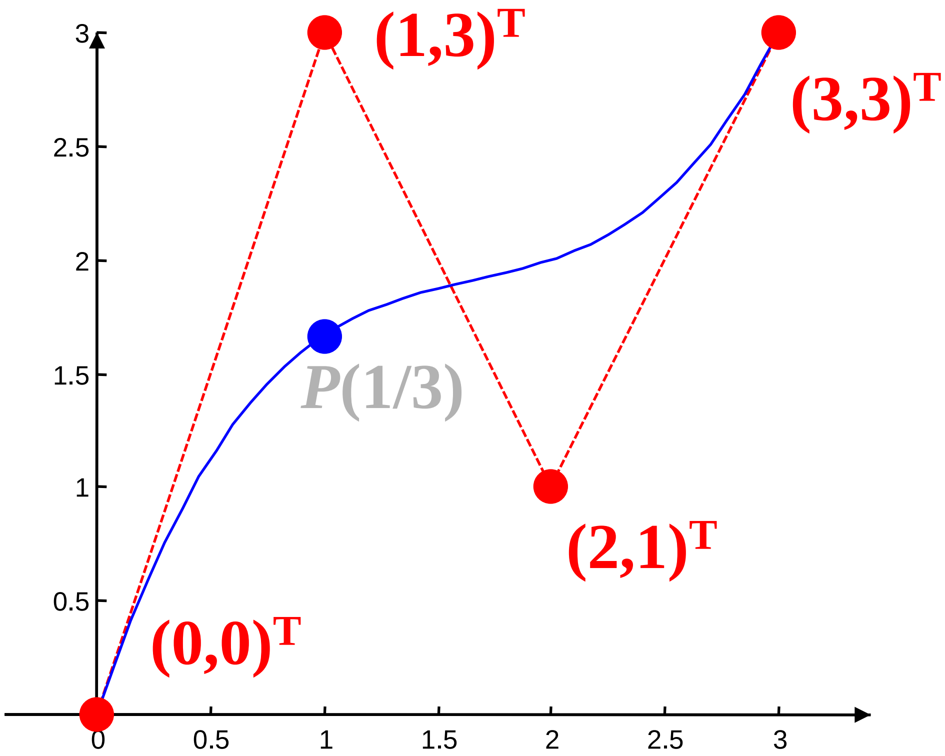
$$=\vec{b}^n[1-(1-t^*)(1-u)]$$

说明$p_2(u)$确实是原Bezier曲线的后半段

三、Bezier曲线的分割

Bezier曲线分割实例:

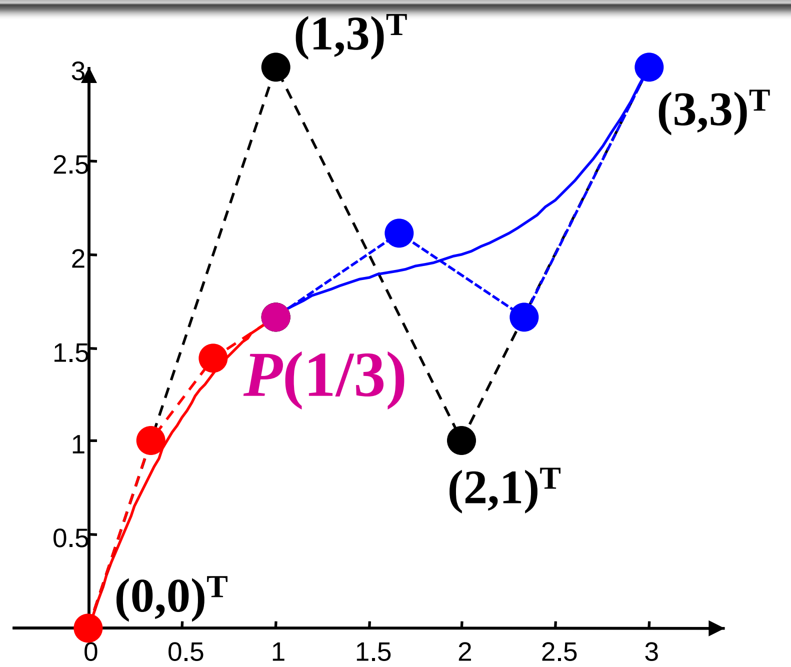
以$\vec{p}\left(\frac{1}{3}\right)=\sum_{i=0}^{3}\vec{P}_i B_{i,3}\left(\frac{1}{3}\right)$将曲线分为前后两段，求这两段的Bezier曲线的控制顶点。



三、Bezier曲线的分割

$$\vec{p}\left(\frac{1}{3}\right)=\sum_{i=0}^{3}\vec{P}_i B_{i,3}\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$
\begin{array}{lllll}
P_0 \rightarrow (0,0)^T & & & & \\
 & \xrightarrow{2/3} & & & \\
P_1 \rightarrow (1,3)^T & \xrightarrow{1/3} & (1/3,1)^T & & \\
 & \xrightarrow{2/3} & & \xrightarrow{2/3} & \\
P_2 \rightarrow (2,1)^T & \xrightarrow{1/3} & (4/3,7/3)^T & \xrightarrow{1/3} & (2/3,13/9)^T \\
 & \xrightarrow{2/3} & & \xrightarrow{2/3} & \quad \xrightarrow{2/3} \\
P_3 \rightarrow (3,3)^T & \xrightarrow{1/3} & (7/3,5/3)^T & \xrightarrow{1/3} & (5/3,19/9)^T \xrightarrow{1/3} (1,\ 5/3)^T
\end{array}
$$



三、Bezier曲线的分割

$$
\begin{tikzcd}
P_0 \to (0,0)^T \arrow[dr, "2/3"] & & & \\
P_1 \to (1,3)^T \arrow[r, "1/3"] \arrow[dr, "2/3"] & (1/3,1)^T \arrow[dr, "2/3"] & & \\
P_2 \to (2,1)^T \arrow[r, "1/3"] \arrow[dr, "2/3"] & (4/3,7/3)^T \arrow[r, "1/3"] \arrow[dr, "2/3"] & (2/3,13/9)^T \arrow[dr, "2/3"] & \\
P_3 \to (3,3)^T \arrow[r, "1/3"] & (7/3,5/3)^T \arrow[r, "1/3"] & (5/3,19/9)^T \arrow[r, "1/3"] & (1,5/3)^T
\end{tikzcd}
$$

所以，前半段*Bezier*曲线的控制顶点依次为：

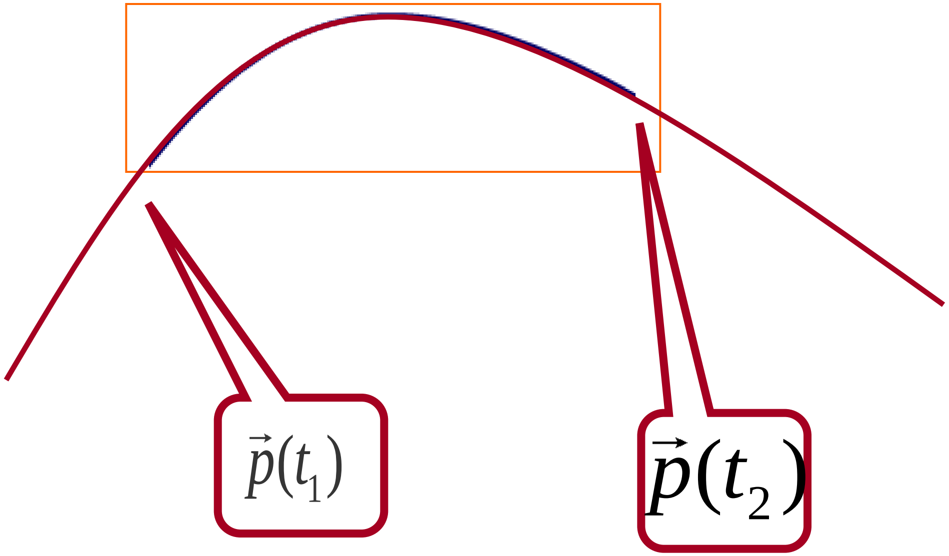
$$[0,0],[\frac{1}{3},1],[\frac{2}{3},\frac{13}{9}],[1,\frac{5}{3}]$$

而后半段*Bezier*曲线的控制顶点依次为：

$$[1,\frac{5}{3}],[\frac{5}{3},\frac{19}{9}],[\frac{7}{3},\frac{5}{3}],[3,3]$$

三、Bezier曲线的分割

2、任意分割



它的控制顶点是什么？

三、Bezier曲线的分割

设n次Bezier曲线$\vec{p}(t)$的控制顶点为:

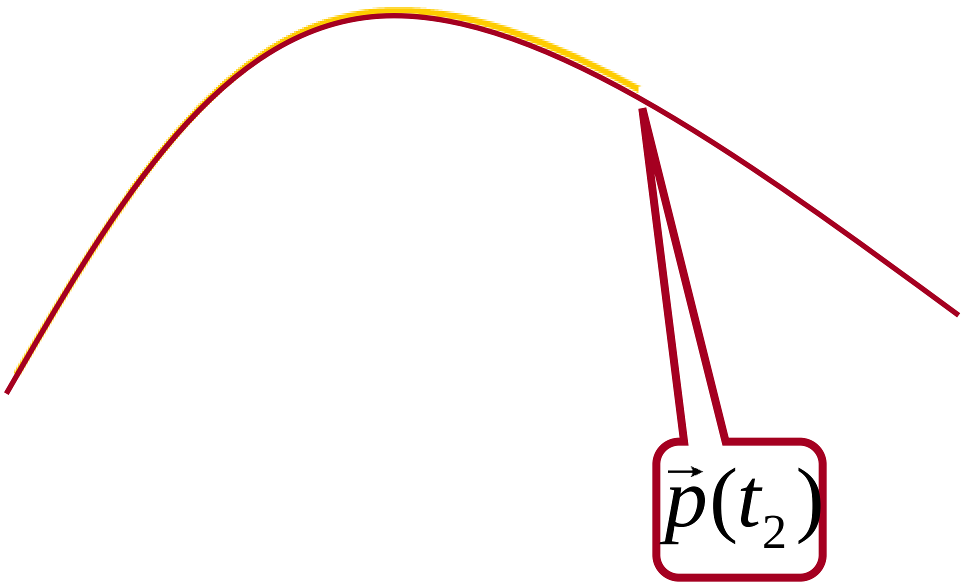
$$\vec{b}_i, i = 0,1,\cdots,n。$$

给定两个参数值:$0 < t_1 < t_2 < 1$,求界于$\vec{p}(t_1)$和$\vec{p}(t_2)$两点之间的子曲线段的控制顶点。

解决方法:根据分割定理,分步实现任意分割。

三、Bezier曲线的分割

（方案1）第一步：

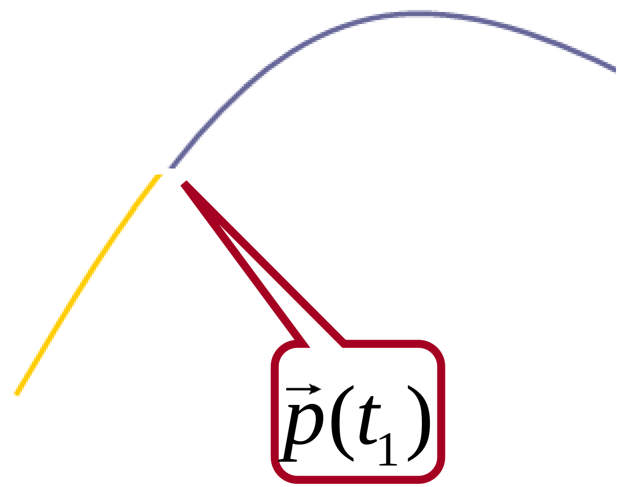


$\Rightarrow \vec{p}(t), t \in [0, t_2]$的控制顶点依次为：

$$\vec{b}_0^0(t_2), \vec{b}_0^1(t_2), \cdots, \vec{b}_0^n(t_2)$$

三、Bezier曲线的分割

（方案1）第二步:



确定中间曲线段控制顶点的方法

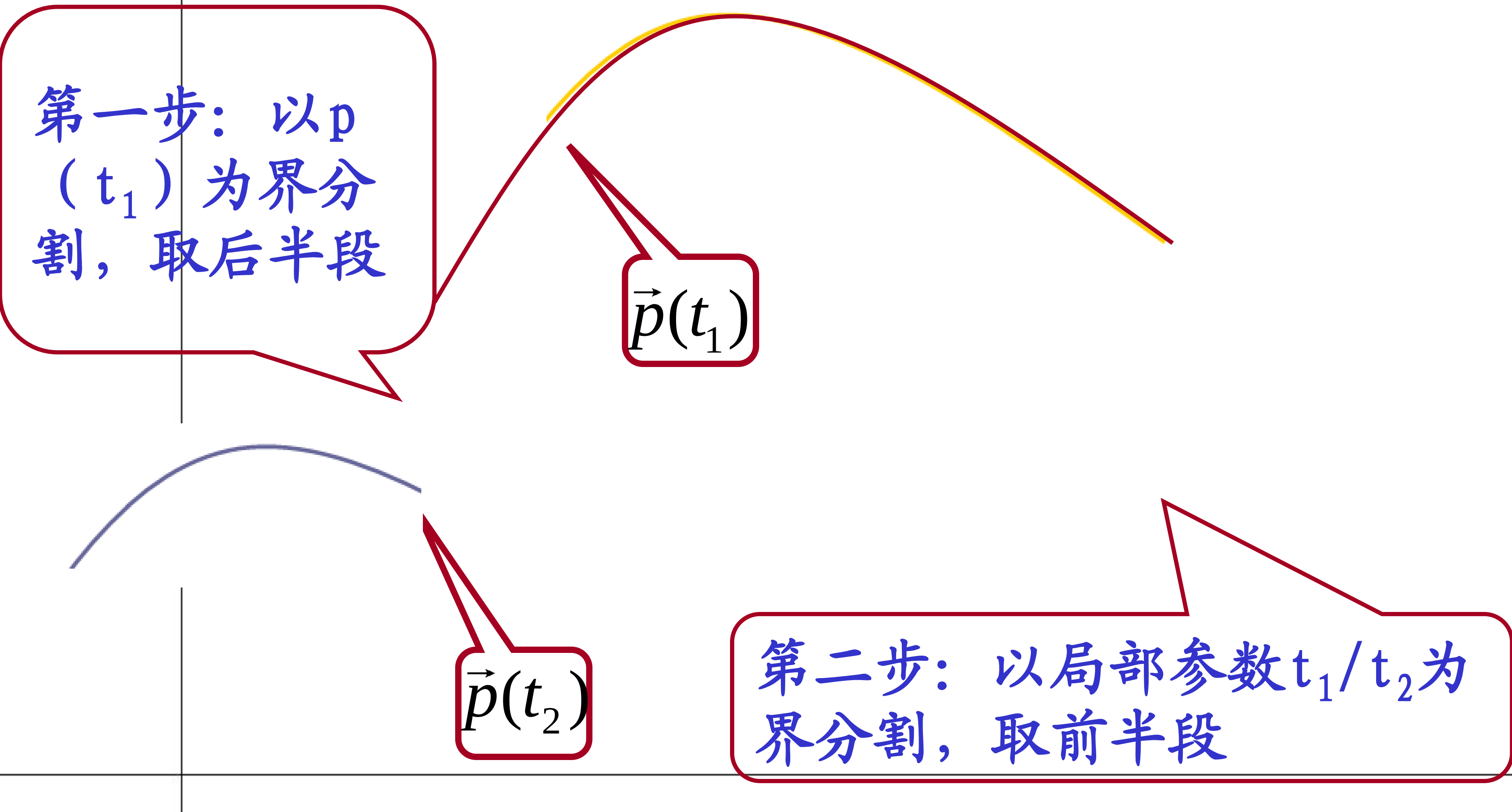
Step 1. 将第一步分割后曲线的控制顶点：$\vec{b}_0^0(t_2), \vec{b}_0^1(t_2), \cdots, \vec{b}_0^n(t_2)$ 作为一条新的完整Bezier曲线$\vec{p}(u)$的初始控制顶点，其中：

$u = {}^{t}\!/_{t_2}$，则$0 \le u \le 1$。

Step 2. 令$u^* = t_1 / t_2$，对新的Bezier曲线以u^*为参数再进行一次分割，取$[t_1 / t_2, 1]$段的控制顶点即为原曲线$\vec{p}(t)$界于$[t_1, t_2]$段的控制顶点。

三、Bezier曲线的分割

方案2：原理与方案1完全相同。



三、Bezier曲线的分割

Bezier曲线分割实例:

给定XOY平面上的三次Bézier的控制顶点依次为:

$$\vec{b}_0=[-9,0],\vec{b}_1=[-3,6],\vec{b}_2=[3,6],\vec{b}_3=[9,0]$$

它们确定了一条三次Bézier曲线$\vec{P}(u)$，$u\in[0,1]$

求$\vec{P}(\frac{1}{4})$和$\vec{P}(\frac{3}{4})$之间的这一段三次Bézier曲线

的控制顶点。

三、Bezier曲线的分割

解：(1) 首先根据deCasteljau算法，求$t\in[0,\frac{3}{4}]$这一段的控制顶点，得中间控制顶点的三角阵列为：

$$
\begin{array}{llll}
\boxed{[-9,0]} & & & \\
[-3,6] & \boxed{[-\frac{9}{2},\frac{9}{2}]} & & \\
[3,6] & [\frac{3}{2},6] & \boxed{[0,\frac{45}{8}]} & \\
[9,0] & [\frac{15}{2},\frac{3}{2}] & [6,\frac{21}{8}] & \boxed{[\frac{9}{2},\frac{27}{8}]}
\end{array}
$$

所以 $t\in[0,\frac{3}{4}]$ 这一段的控制顶点依次为：

$[-9,0]$，$\left[-\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right]$ $[0,\frac{45}{8}]$ $[\frac{9}{2},\frac{27}{8}]$

三、Bezier曲线的分割

再以u = $\frac{1}{4}/\frac{3}{4}=\frac{1}{3}$，求$u\in[\frac{1}{3},1]$这一段曲线的控制顶点，得中间控制顶点的三角阵列为：

$$[-9,0]$$

$$[-\frac{9}{2},\frac{9}{2}] \quad [-\frac{15}{2},\frac{3}{2}]$$

$$[0,\frac{45}{8}] \quad [-3,\frac{39}{8}] \quad [-6,\frac{21}{8}]$$

$$\boxed{[\frac{9}{2},\frac{27}{8}]} \boxed{[\frac{3}{2},\frac{39}{8}]} \boxed{[-\frac{3}{2},\frac{39}{8}]} \boxed{[-\frac{9}{2},\frac{27}{8}]}$$

所以 $t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ 这一段的控制顶点依次为：

$$[-\frac{9}{2},\frac{27}{8}],[-\frac{3}{2},\frac{39}{8}],[\frac{3}{2},\frac{39}{8}],[\frac{9}{2},\frac{27}{8}]$$

三、Bezier曲线的分割

分割极限定理:

设n次Bezier曲线经过k次分割后，曲线被分为2^k段n次Bezier曲线，它们共有$2^k(n+1)$个控制顶点，记为：$B^k\{\vec{p}_n\}$，则：

$$\lim_{k \to +\infty} B^k\{\vec{p}_n\} = \vec{p}(t)$$