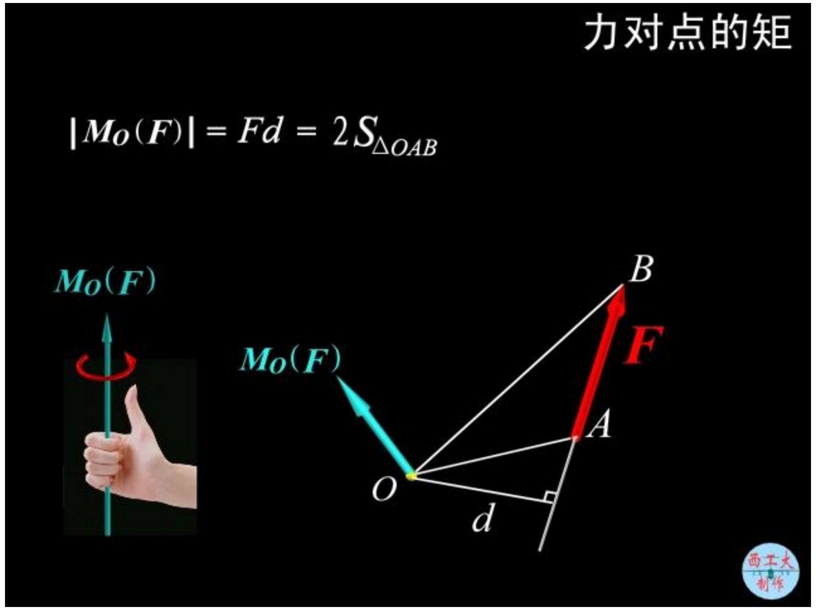
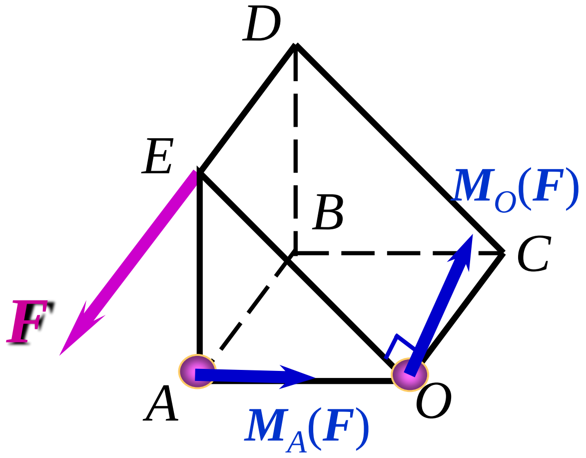
4.3 力对点的矩和力对轴的矩

一、力对点的矩

1.力对点之矩表示成矢量

力可以对空间任意一点取矩，矩心和力所决定的平面可以有任意方位，所以空间力对任一点的矩应该表示成矢量。 符号：$M_O(F)$



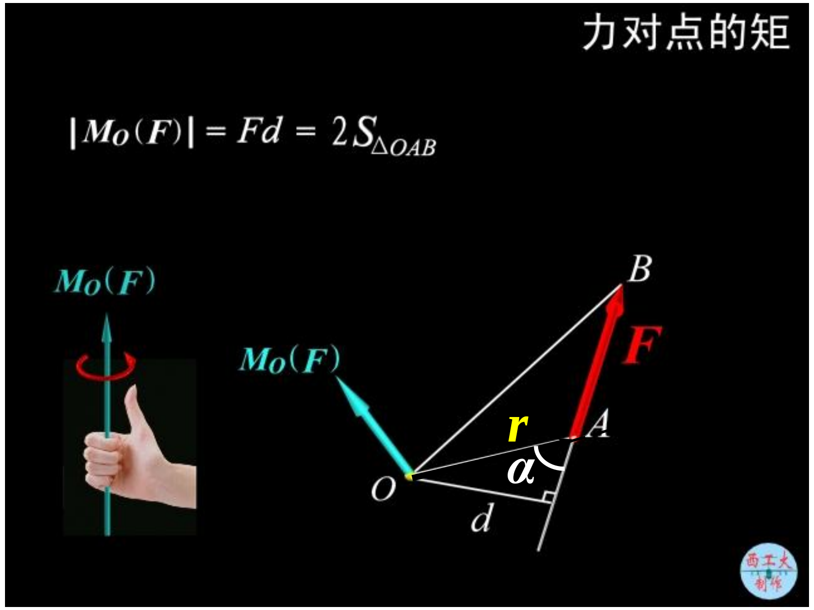


力矩矢$M_O(F)$是一个定位矢量，它的大小和方向都与作用点O的位置有关。

2.力对点之矩矢积表达式

$$M_O(F)=r\times F$$

即力对点的矩矢等于矩心到该力作用点的矢径与该力的矢量积。



大小：

$$|m_O(F)| = |r\times F| = rF\sin\alpha = 2S_{\Delta OAB}$$

方向：用右手规则判定，与力对点之方向规定相符。

3.力对点之矩解析表达式

$$m_O(\boldsymbol{F}) = (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}$$

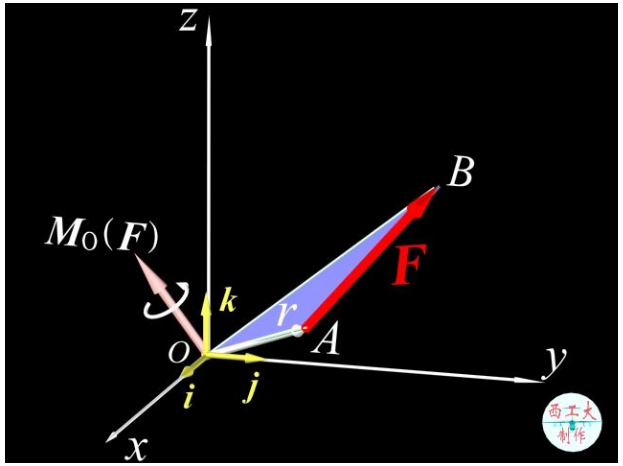
证明： $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ， $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$

把上两式代入 $m_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ **得**

$$m_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \times (F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k})$$

$$= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}$$

写成行列式形式 $$m_O(\boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



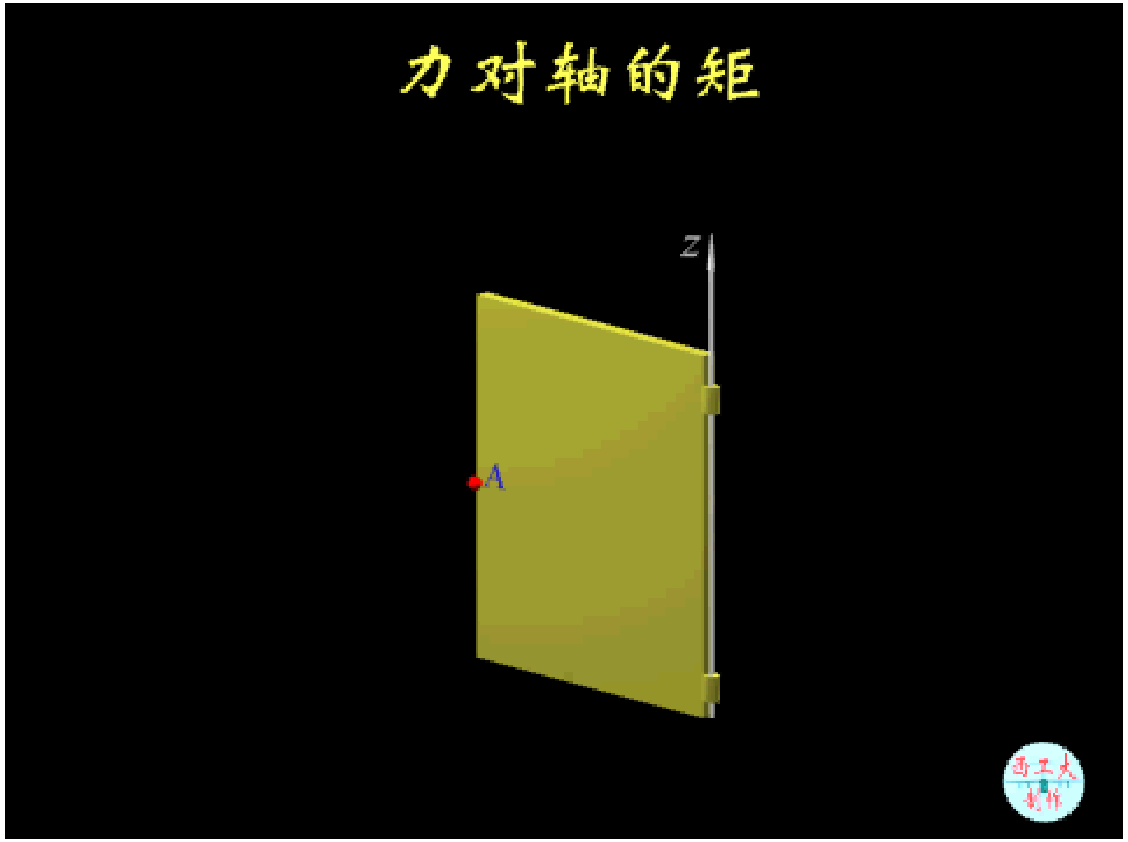
二、力对轴的矩

1. 力对轴的矩定义　把F'的大小与其作用线到轴z的垂直距离的乘积$F'd$加以适当的正负号。

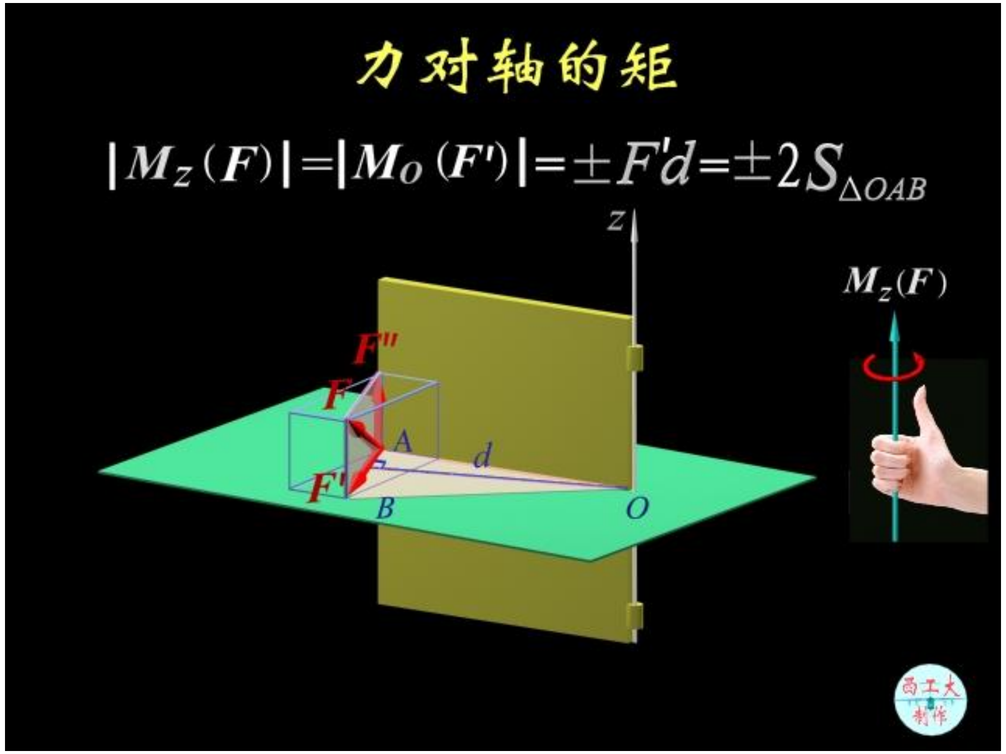
$$M_z(\boldsymbol{F}) = \pm F'd$$

正负号规定：

按右手法则：从轴z的正向回头看，如力F'使物体绕轴z作逆时针转动，则取正号；反之，取负号。



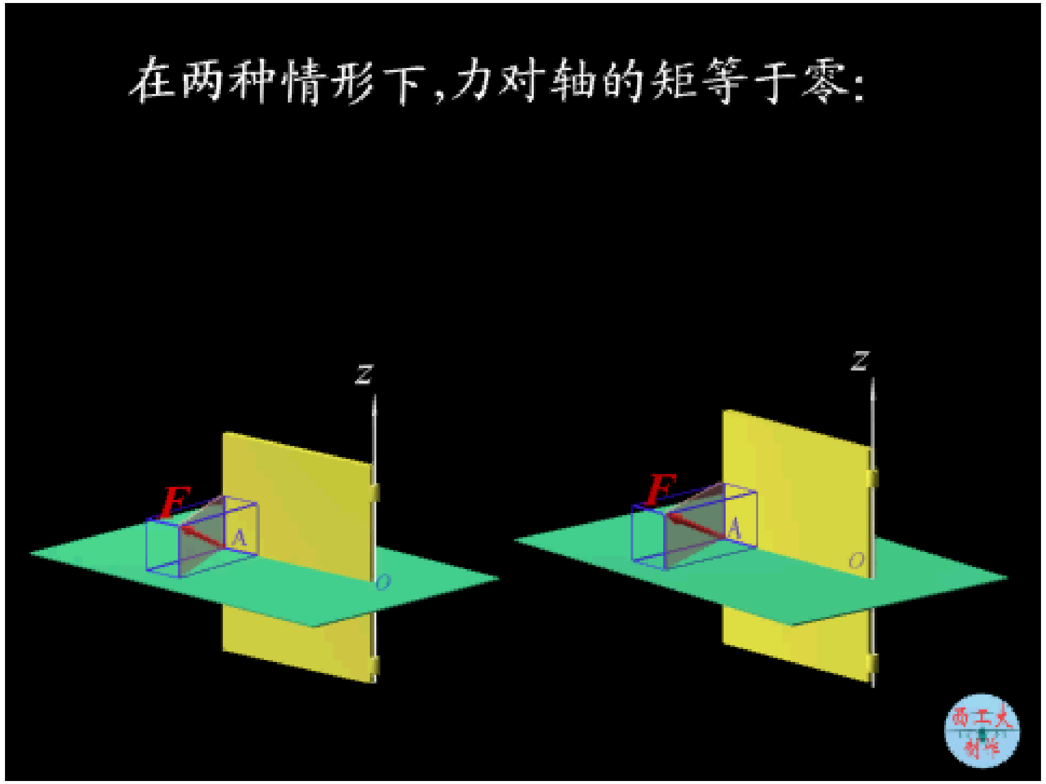
一般的定义： 力F对任一轴的矩，等于这力在这轴的垂直面的投影对该投影面和该轴交点的矩。



$$M_z(\boldsymbol{F}) = \pm F'd$$

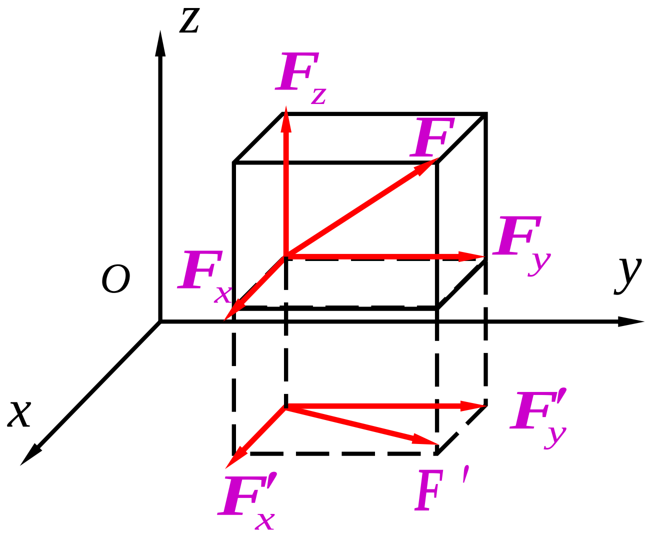
特殊情况

(1) **力和轴平行。**(2) **力的作用线通过矩轴。**



2. 力对轴的矩的解析表达式

$$M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x$$



$$M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y$$

$$M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z$$

$$M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x$$

3.力矩关系定理

力对坐标轴的矩的解析表达式

$$M_x(\mathbf{F}) = yF_z - zF_y,\qquad M_y(\mathbf{F}) = zF_x - xF_z,\qquad M_z(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x$$

力对原点的矩的解析表达式

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = (yF_z - zF_y)\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

比较可得

$$[M_O(F)]_x = M_x(F)$$

$$[M_O(F)]_y = M_y(F)$$

$$[M_O(F)]_z = M_z(F)$$

力对坐标原点的矩在各坐标轴上的投影，等于该力对相应坐标轴的矩。

4. 力对空间任意一点矩的计算

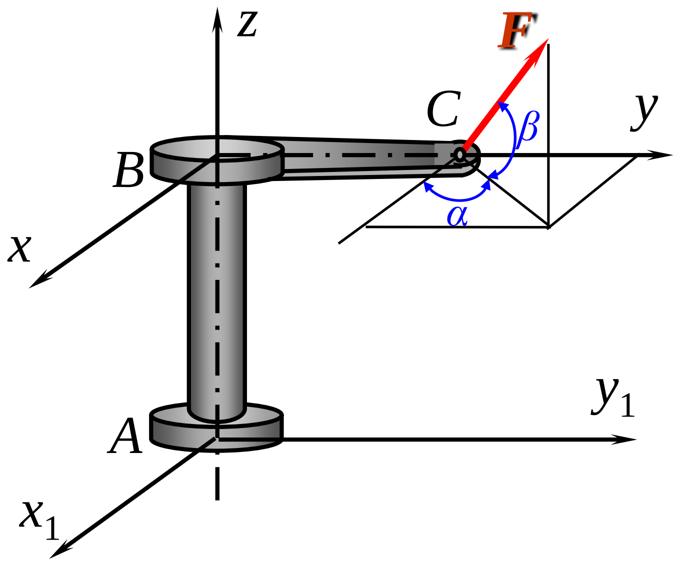
若已知力对坐标轴的矩，则反过来可以求得对原点的矩的大小

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$
$$= \sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}$$

方向余弦

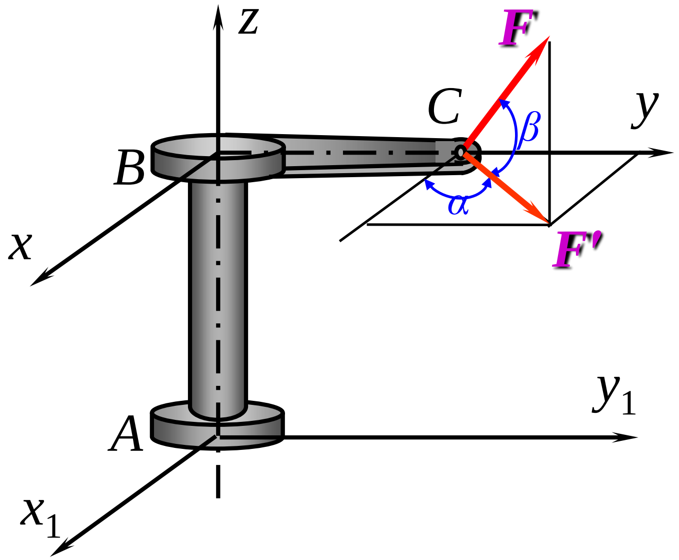
$$\cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{i}) = \frac{yF_z - zF_y}{M_O}, \quad \cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{j}) = \frac{zF_x - xF_z}{M_O}, \quad \cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{k}) = \frac{xF_y - yF_x}{M_O}$$

例题1 **在轴AB的手柄BC的一端作用着力F，试求这力对轴AB以及对点B和点A的矩。已知**AB=20 cm，BC=18 cm，F=50 N，且α=45°，β=60°。



解： **1.力对轴*AB*的矩。**

$$M_{AB}(\boldsymbol{F}) = M_B(\boldsymbol{F}')$$
$$= -F\cos\beta \cdot BC\cos\alpha$$
$$= -3.18 \text{ N}\cdot\text{m}$$



应用解析式求解力对点*B*的矩。

$$M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y$$
$$M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z$$
$$M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x$$
$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

2.力对点*B*的矩。

坐标原点取在*B*点，则*C*点的坐标

$x=0$，$y=0.18$ m，$z=0$

力*F*的各投影

$$F_x = F\cos\beta\cos\alpha = 17.7\ \text{N}$$

$$F_y = F\cos\beta\sin\alpha = 17.7\ \text{N}$$

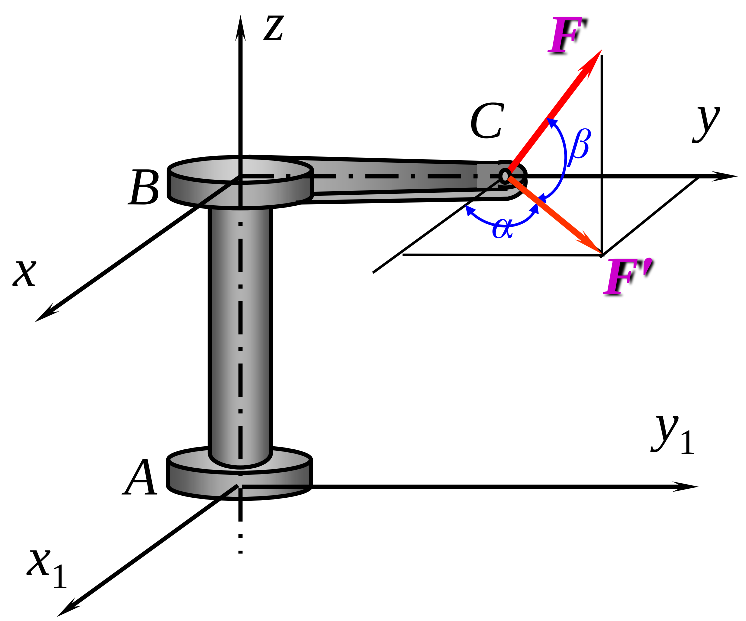
$$F_z = F\sin\alpha = 43.3\ \text{N}$$

力*F*对坐标轴的矩

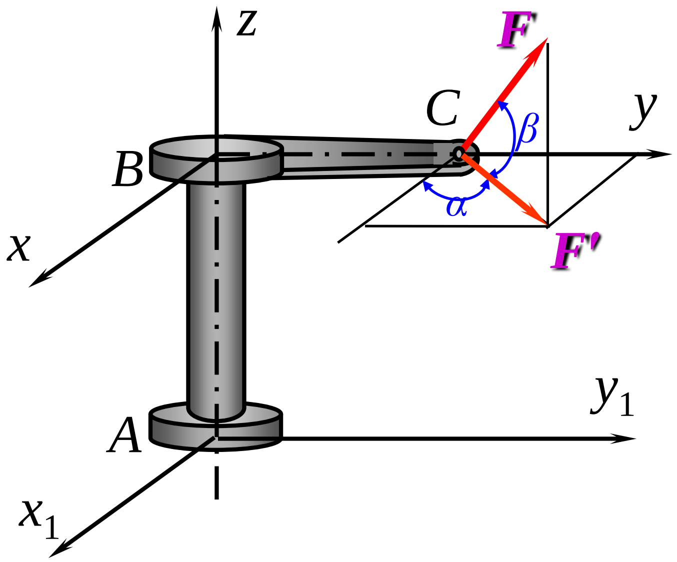
$$M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x = 7.80\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y = 0$$

$$M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z = -3.18\ \text{N}\cdot\text{m}$$



由
$$M_O=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}$$
$$\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{i})=\frac{M_x}{M_O}$$
$$\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{j})=\frac{M_y}{M_O}$$
$$\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{k})=\frac{M_z}{M_O}$$



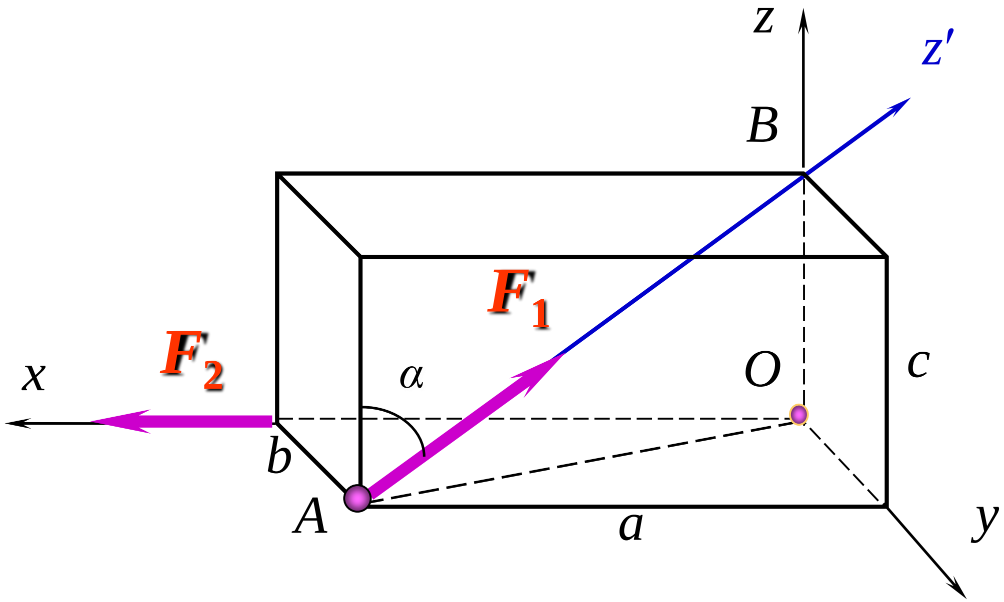
可求出力矩 $\boldsymbol{M}_B(\boldsymbol{F})$的大小和方向余弦。

3. 力对点*A*的矩。

与计算力对点*B*的矩的方法相同，但坐标原点应取在点*A*。

思考题

受力情况如图所示，求（1）F_1力对 x，y，z 轴的矩，（2）F_2力对 z'轴的矩。



谢谢！