14.2 惯性力系的简化

一、 惯性力系的简化

对于作任意运动的质点系，把实际所受的力和虚加惯性力各自向任意点O简化后所得的主矢、主矩分别记作F，M_O和F^*，M^*_O，于是，由力系平衡条件，可得

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^* = 0$$

$$\boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{M}_O^* = 0$$

1.惯性力系的主矢

由质心运动定理有 $F = ma_C$,得

$$\boldsymbol{F}^* = -m\boldsymbol{a}_C$$

即,质点系惯性力的主矢恒等于质点系总质量与质心加速度的乘积，而取相反方向。

2.惯性力系的主矩

• 对任意固定点

由对任意固定点O的动量矩定理有 $\boldsymbol{M}_O=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}$ ，

代入 $\boldsymbol{M}_O+\boldsymbol{M}_O^*=0$

得

$$\boldsymbol{M}_O^*=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

• 对固定轴

现将上式两端投影到任一固定轴Oz上， $M_z^*=-\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$

上式表明：质点系的惯性力对于任一固定点（或固定轴）的主矩，等于质点系对于该点（或该轴）的动量矩对时间的导数，并冠以负号。

● 对质心点

利用相对于质心的动量矩定理，可以得到质点系的惯性力对质心C的主矩表达式

$$\boldsymbol{M}_C^* = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

● 对质心轴

以及它在通过质心C的某一平动轴 Cz' 上的投影表达式

$$M_{z'}^* = -\frac{\mathrm{d}L_{z'}}{\mathrm{d}t}$$

上式表明：质点系的惯性力对质心（或通过质心的平动轴）的主矩，等于质点系对质心（或该轴）的动量矩对时间的导数，并冠以负号。

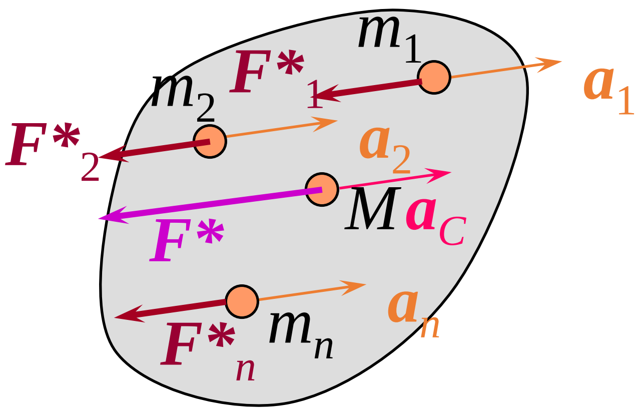
注意

惯性力系的主矢与刚体的运动形式无关。

惯性力系的主矩与刚体的运动形式有关。

二、刚体常见运动情况下惯性力的主矢和主矩

1. 刚体作平动



刚体平移时，惯性力系向质心简化

- **主矢**

$$F^* = \sum(-m_i a_i)$$

$$= \sum(-m_i a_C) = -m a_C$$

- **主矩** $M^* = 0$

刚体平移时，惯性力系简化为通过刚体质心的合力。

2. 刚体做定轴转动

具有质量对称平面的刚体绕垂直于对称平面的固定轴转动。

设刚体绕固定轴Oz转动，在任意瞬时的角速度为ω，角加速度为α。

- 主矢

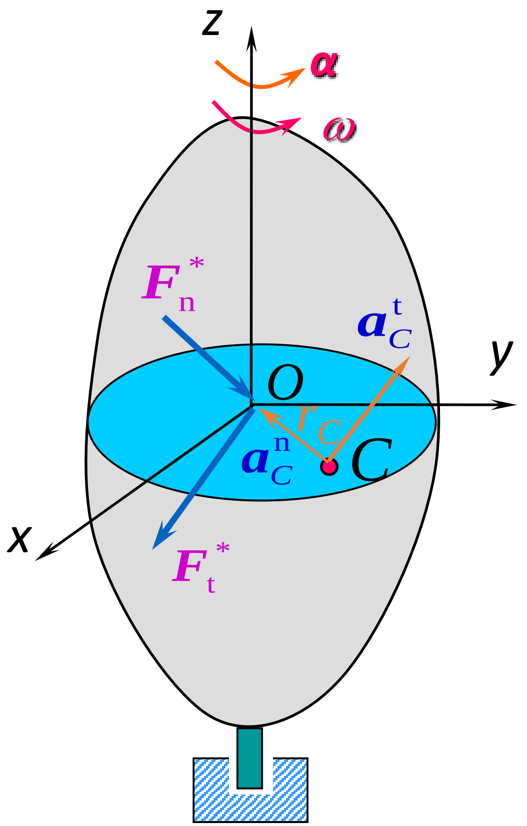
$$F^* = \sum(-m_i a_i) = -m a_C$$

$$a_C = a_C^{t} + a_C^{n}$$

设质心C的转动半径为r_C，则 F_t^*和 F_n^*的大小可分别表示为

$$F^* = F_t^* + F_n^*$$

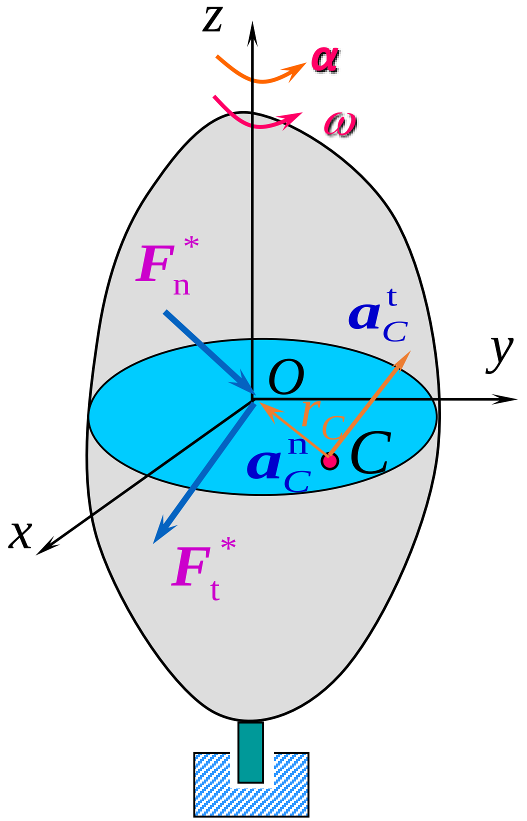
$$F_t^* = -m a_C^{t}; \qquad F_n^* = -m a_C^{n};$$



- **主矢** $$\boldsymbol{F}^* = -m\boldsymbol{a}_C = -m(\boldsymbol{a}_C^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_C^{\mathrm{n}})$$

$$ma_C^{\mathrm{t}} = mr_C\alpha$$

$$ma_C^{\mathrm{n}} = mr_C\omega^2$$



具有质量对称平面的刚体绕垂直于质量对称平面的固定轴转动时，惯性力系向固定轴简化，得到的惯性力系主矢的大小等于刚体质量与质心加速度大小的乘积，方向与质心加速度方向相反。

- **对转轴的主矩**

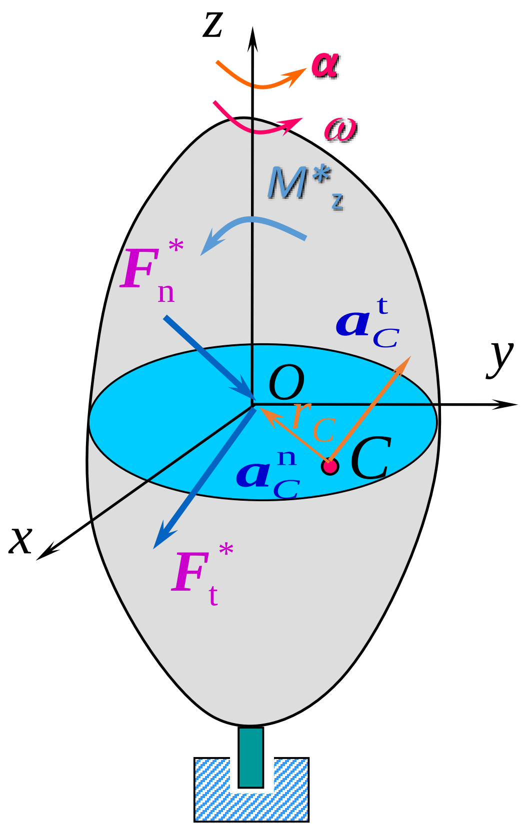
将刚体对转轴Oz的动量矩 $M_z^* = -\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$ **代入** $L_z = J_z\omega$

可得刚体惯性力对轴Oz的主矩

$$M_z^* = -\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_z\omega) = -J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

即

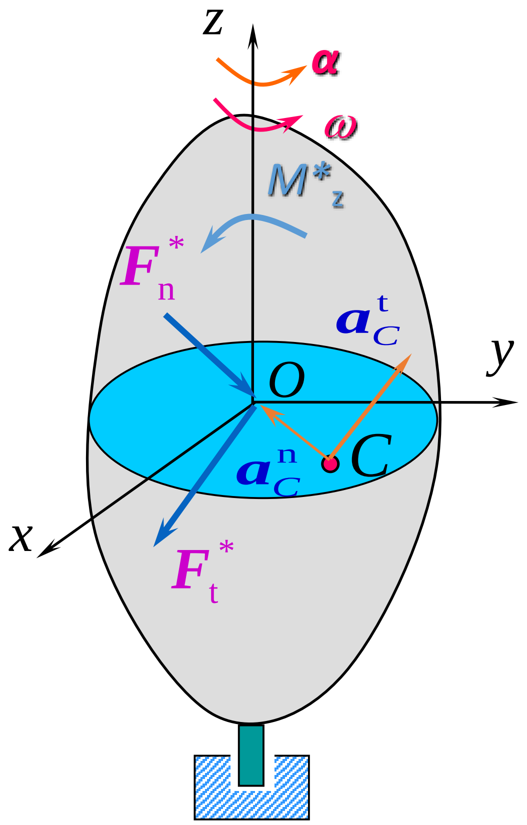
$$M_z^* = -J_z\alpha$$



- **对转轴的主矩**

$$M_z^* = -J_z \alpha$$

具有质量对称平面的刚体绕垂直于质量对称平面的固定轴转动时，惯性力系向固定轴简化的结果，得到合力偶的力偶矩即为惯性力系的主矩，其大小等于刚体对转动轴的转动惯量与角加速度的乘积，方向与角加速度方向相反。



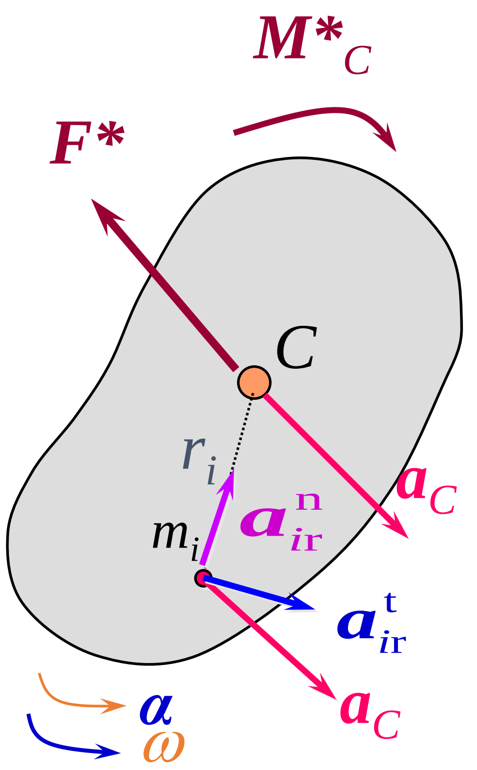
3. 刚体作平面运动

若取质心C为基点，则刚体的平面运动可以分解为随质心C的平动和绕质心（通过质心且垂直于运动平面的轴）的转动。

刚体上各质点的加速度及相应的惯性力也可以分解为随质心的平动和绕质心轴的转动两部分。

于是，此刚体的牵连平动惯性力可合成为作用线通过质心、且在对称面内的一个力F^*。

因质心C在相对运动的转轴上，故刚体的相对转动的惯性力合成为一力偶。

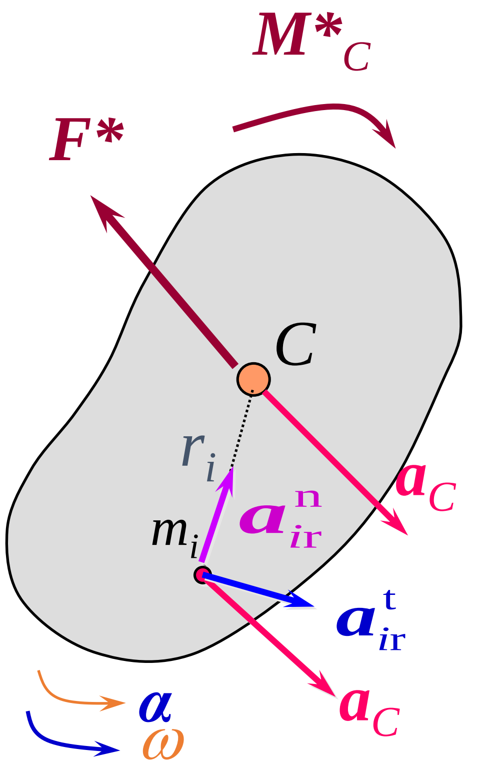


具有质量对称平面的刚体作平面运动，并且运动平面与质量对称平面互相平行。这种情形下，惯性力系向质心简化的结果得到**一个合力**和**一个合力偶**，二者都位于质量对称平面内。

- 主矢

合力的矢量即为惯性力系的主矢，其大小等于刚体质量与质心加速度大小的乘积，方向与质心加速度方向相反。

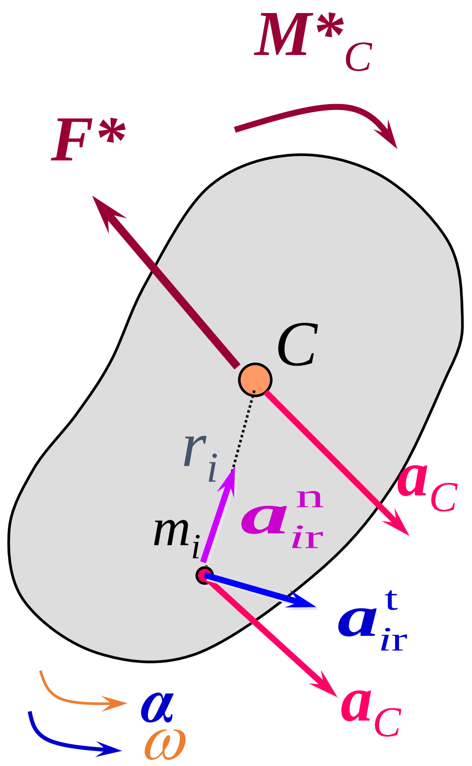
$$F^* = -m a_C$$



- **主矩**

合力偶的力偶矩即为惯性力系的主矩，其大小等于刚体对通过质心的转动轴的转动惯量与角加速度的乘积，方向与角加速度方向相反。

$$M_C^* = -J_{Cz'}\alpha$$



综上所述：

1. 刚体作平动　向质心简化

- 主矢 $\boldsymbol{F}^{*}=\sum(-m_i\boldsymbol{a}_i)=-m\boldsymbol{a}_C$
- 主矩 $\boldsymbol{M}^{*}=0$

2. 刚体做定轴转动　向固定轴简化

- 主矢 $\boldsymbol{F}^{*}=-m\boldsymbol{a}_C=-m(\boldsymbol{a}_C^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_C^{\mathrm{n}})$
- 对转轴的主矩 $M_z^{*}=-J_z\alpha$

3. 刚体作平面运动　向质心简化

- 主矢 $\boldsymbol{F}^{*}=-m\boldsymbol{a}_C$
- 主矩 $M_C^{*}=-J_{Cz'}\alpha$

谢谢！