西北工業大學
Northwestern Polytechnical University

运 动 学

点的运动

西北工业大学
主讲　朱西平

点的运动

点的运动学是研究一般物体运动的基础，又具有独立的应用意义。本章将研究点的简单运动，研究点的相对某一个参考系的几何位置随时间变动的规律，包括点的运动方程、运动轨迹、速度和加速度等。

运　动　学

第一章 点的运动

§ 1–1确定点的运动的基本方法•点的运动方程

§ 1–2用矢量法表示点的速度和加速度

§ 1–3用直角坐标法表示点的速度和加速度

§ 1–4用自然法表示点的速度和加速度

§1-1 确定点的运动的基本方法·点的运动方程

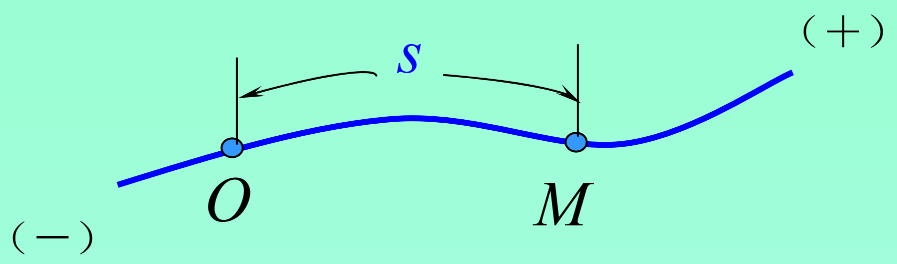
- 自然法
- 坐标法
- 矢量法

1. 自然法

假定动点M的运动轨迹是已知的。

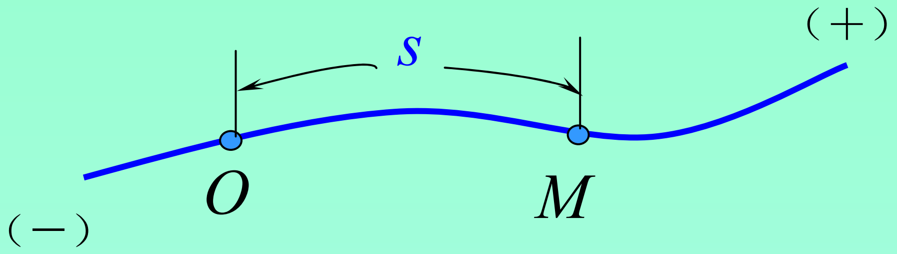
在轨迹上选定一点O作为量取弧长的起点，并规定由原点O向一方量得的弧长取正值，向另一方量得的弧长取负值。

这种带有正负值的弧长OM称为动点的弧坐标，用s表示。点在轨迹上的位置可由弧坐标s完全确定。



当点M沿已知轨迹运动时，弧坐标s随时间而变，并可表示为时间t的单值连续函数，即

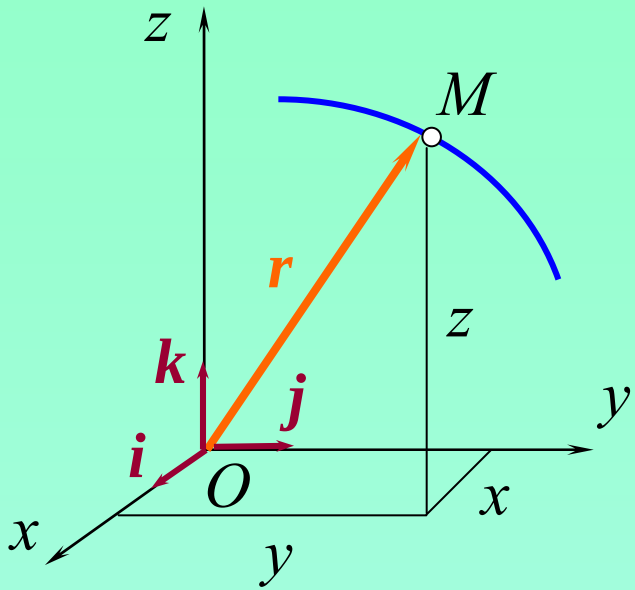
$$s = f(t)$$



这个方程表示了点**M**沿已知轨迹的运动规律，并称为该点沿给定轨迹的运动方程。

2. 坐标法

通常采用直角坐标。动点M对于所选直角坐系的位置，可由它的三个坐标x，y，z 决定。当点M 运动时，这些坐标一般地可以表示为时间t的单值连续函数，即



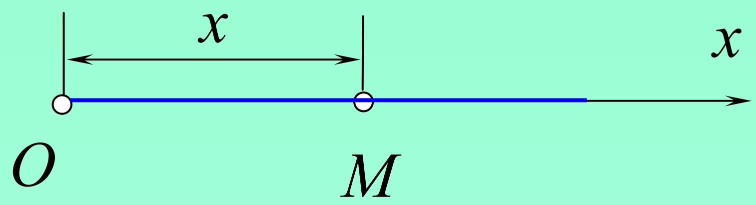
$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t)$$

这一组方程称为点M的**直角坐标形式的运动方程**。若函数f_1， f_2 ， f_3都是已知的，则动点M对应于任一瞬间t 的位置即可完全确定。

- **点M作直线运动**

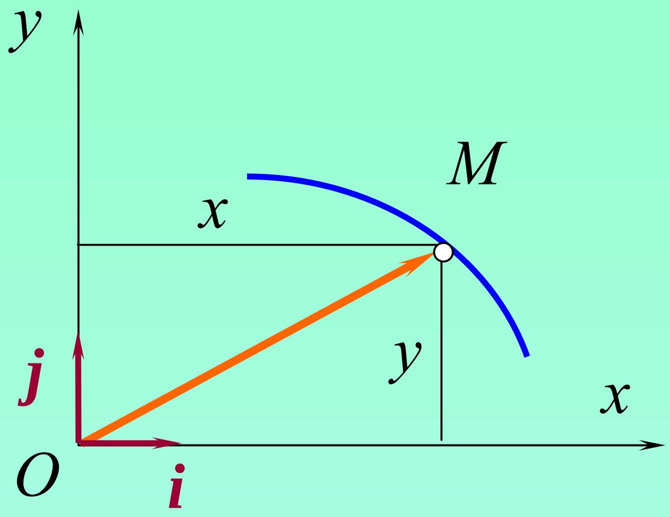
如果点M作直线运动，并取轨迹直线为轴Ox，则点的y，z坐标都恒等于零，因此直线运动方程可以写为

$$x = f(t)$$



- 点*M*始终在一平面内运动

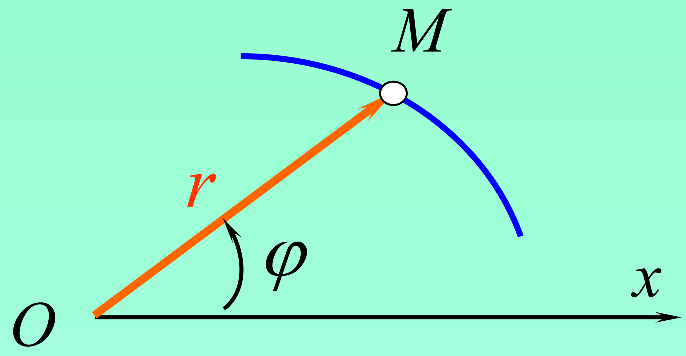
当动点*M*始终在一平面内运动，即点的轨迹为平面曲线时，可取这平面为坐标平面*Oxy*。这样，点*M*的坐标*z*恒等于零，而点的平面运动方程则可写为



$$x = f_1(t)\ ,\qquad y = f_2(t)$$

- **极坐标形式**

在运动平面内取定点 O 为极点，以 Ox 为极轴，则 $OM = r$ 称为 M 的极径，自极轴 Ox 沿逆钟向量到 OM 的角度 ϕ 角为极角。r 和 ϕ 即为动点 M 的两个极坐标。



用时间 t 的函数表示 r, ϕ 的变化，即得点 M 的极坐标形式的运动方程

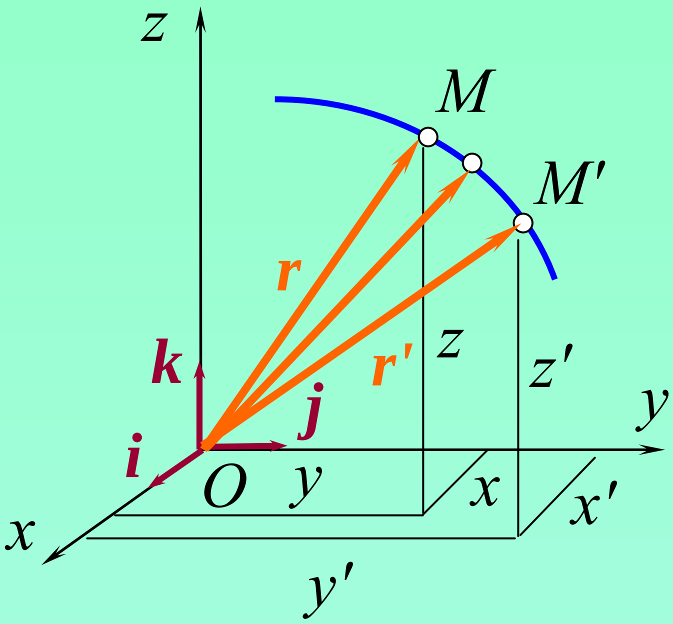
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)\ ,\quad \varphi = \varphi(t)$$

从上式消去时间 t，可得动点的极坐标形式的轨迹方程。

3. 矢量法

由定点O画到动点M的有向线段$OM=r$称为动点M的矢径，它的分解式为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

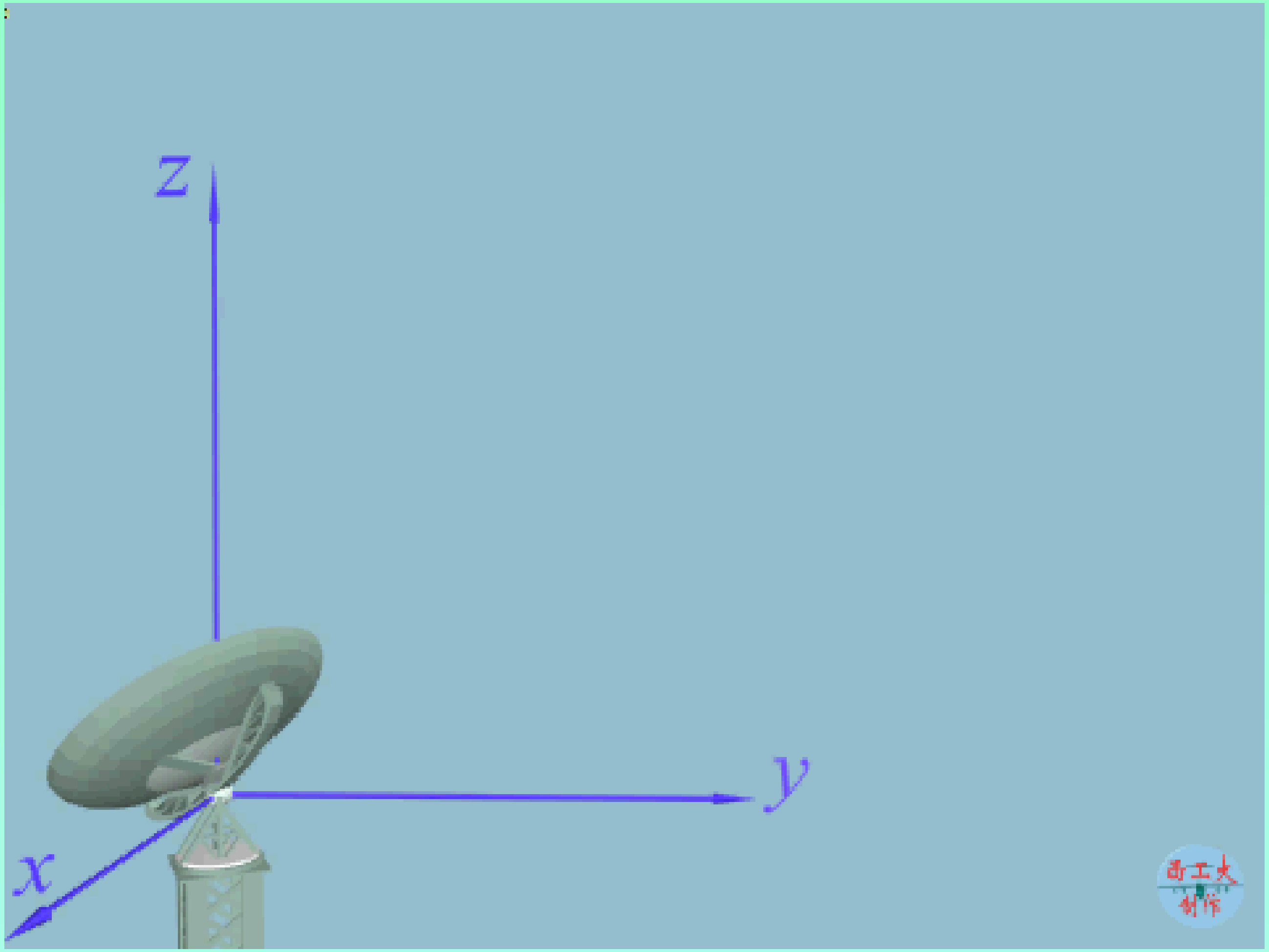


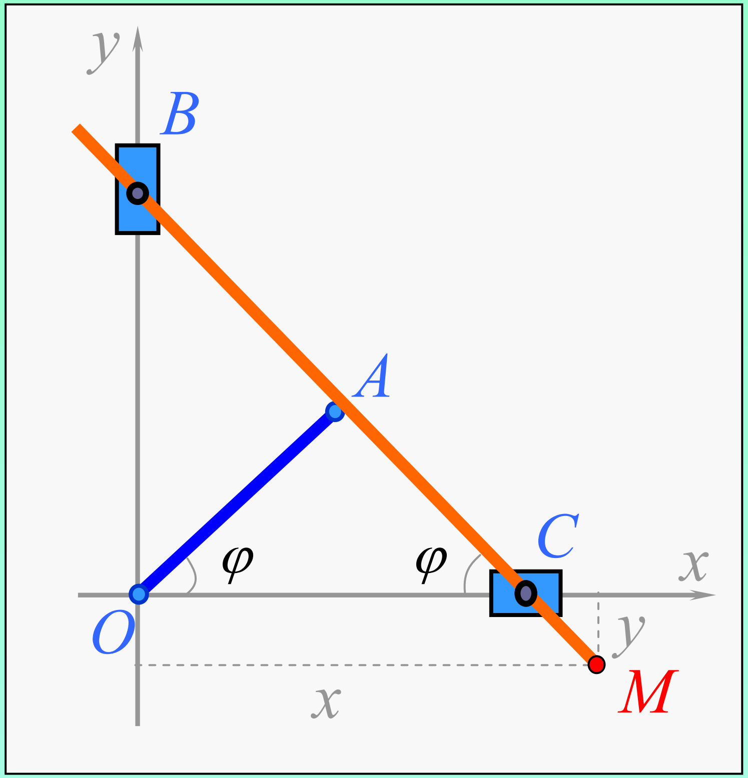
矢径唯一的决定了点M的位置。当点M运动时，矢径r是随时间而变的矢量。一般可表示为时间t的单值连续函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

这方程称为点M的矢量形式的运动方程。矢径的端点在空间描出的曲线称为矢径端图，它就是动点的轨迹。

工程实例

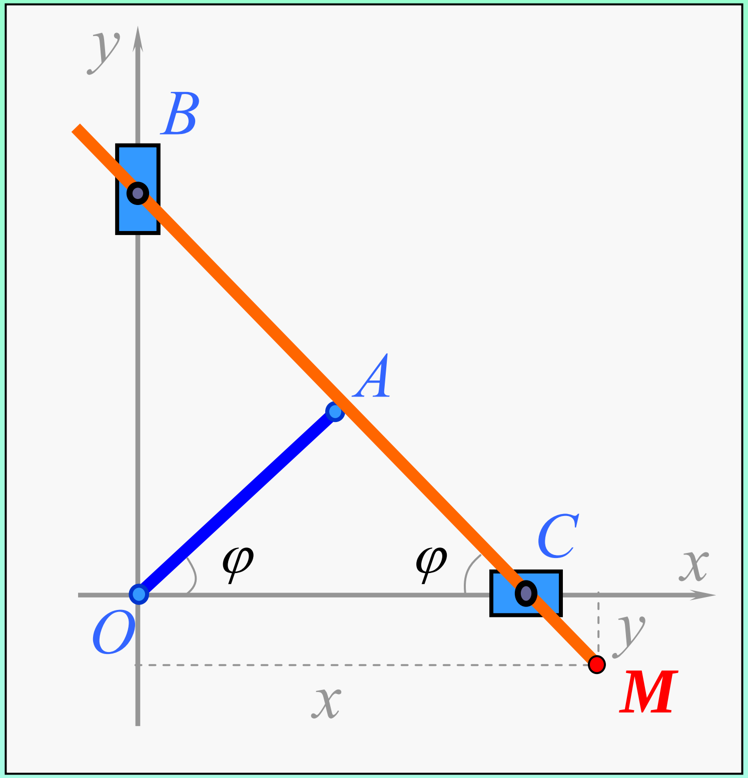




例1-1 椭圆规的曲柄OA可绕定轴O转动，端点A以铰链连接于规尺BC；规尺上的点B和C可分别沿互相垂直的滑槽运动。求规尺上任一点M 的轨迹方程。

已知：$OA = AC = AB = \dfrac{a}{2}$

$CM = b.$



解:　　考虑任意位置，M点的坐标x，y可以表示成

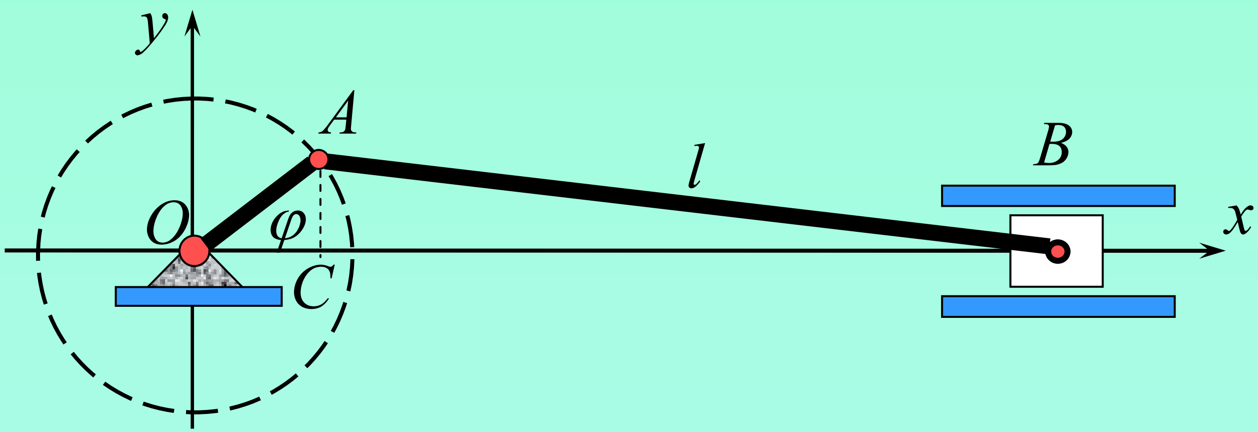
$$x=(a+b)\cos\varphi$$

$$y=-b\sin\varphi$$

消去上式中的角 ϕ，即得M点的轨迹方程:

$$\frac{x^2}{(a+b\ )^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

例1-2 曲柄连杆机构中曲柄OA和连杆AB的长度分别为r和l。且$l>r$，角$\varphi=\omega t$，其中ω是常量。滑块B可沿轴Ox作往复运动。试求滑块B的运动方程，速度和加速度。



解：考虑滑块 B 在任意位置，由几何关系得滑块 B 的坐标

$$x = r\cos\omega t + l\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\omega t}.$$

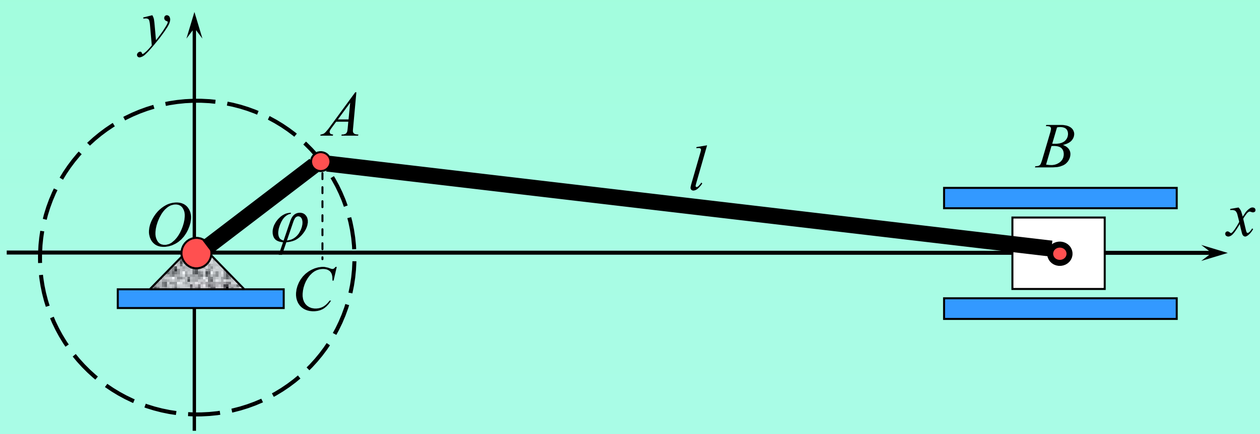
将 $\phi=\omega t$ 代入上式得

$$x = OC + CB = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}$$

令 $\lambda = r/l$，将上式的根式

展开，有

$$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t} = 1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\omega t - \frac{1}{8}\lambda^4\sin^4\omega t$$



略去 λ^4 以及更高阶项，并利用关系 $\sin^2 \omega t = \dfrac{1-\cos 2\omega t}{2}$ 则

$$x = r\cos\omega t + l\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\omega t}$$

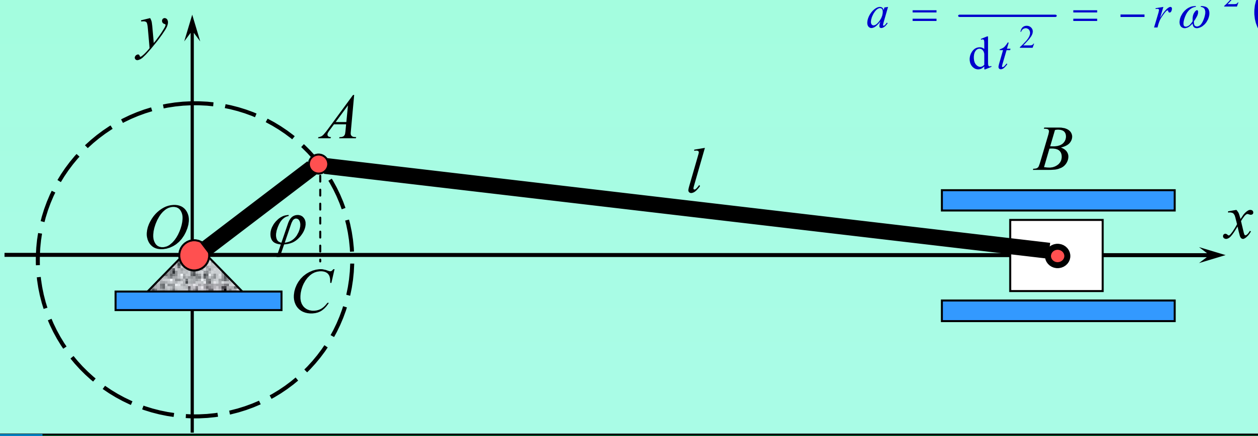
可表示为

$$x = l\left(1-\frac{\lambda^2}{4}\right) + r\left(\cos\omega t + \frac{\lambda}{4}\cos 2\omega t\right)$$

滑块B的速度和加速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -r\omega\left(\sin\omega t + \frac{\lambda}{2}\sin 2\omega t\right),$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -r\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t).$$



§1-2 用矢量法表示点的速度和加速度

- 位移
- 速度
- 加速度

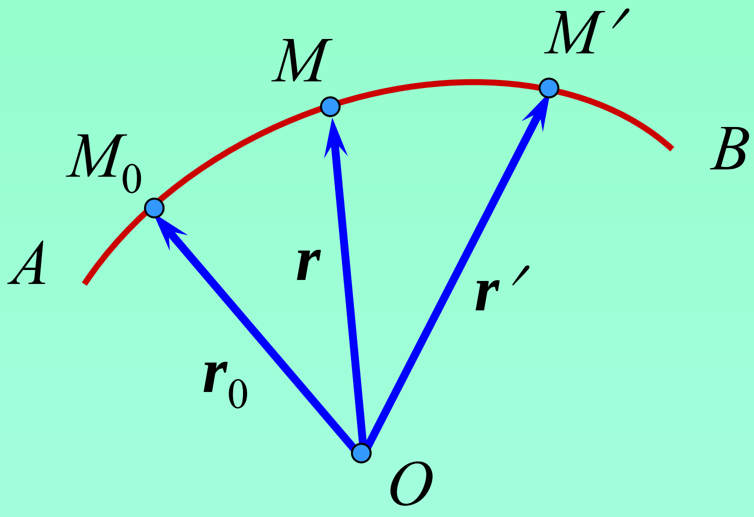
§1-2 用矢量法表示点的速度和加速度

1. 位 移

设有一点M沿曲线AB运动，在任一瞬时t，该点之位置M由矢径

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

确定。



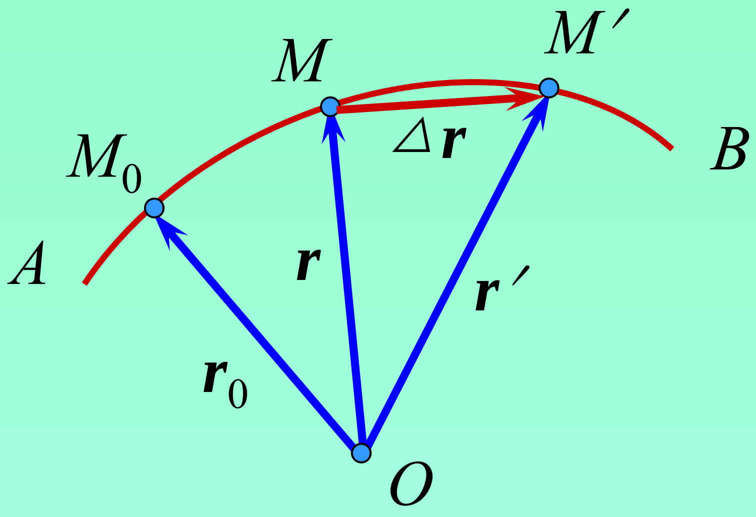
显然，当动点M沿 AB 运动时，$\boldsymbol{r}$ 是一变矢量。

§1-2 用矢量法表示点的速度和加速度

位 移

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

从瞬时 t 到 $t+\Delta t$ 动点位置由M改变到M'，其矢径分别为$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$。



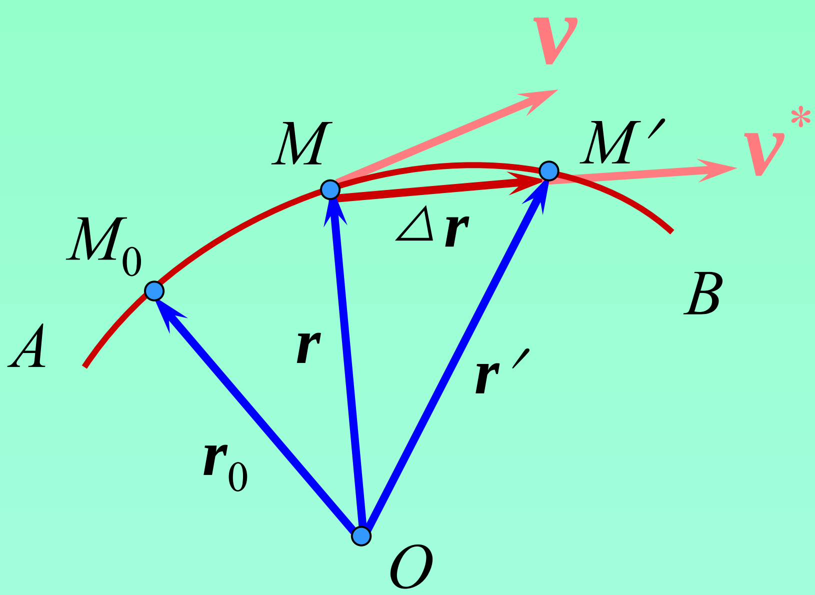
在时间间隔Δt内，$\boldsymbol{r}$ 之变化量为

$$\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{MM}' = \Delta \boldsymbol{r}$$

它表示在Δt时间内，动点矢径之改变，称为动点在Δt时间内的**位移**。

§1-2 用矢量法表示点的速度和加速度

2. 速 度



比值 $\boldsymbol{v}^* = \dfrac{\boldsymbol{MM'}}{\Delta t} = \dfrac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$

表示移动点在此时间内的平均速度。

当 $\Delta t \to 0$时，$\boldsymbol{v}^*$极限值称为动点在瞬间 t 之速度

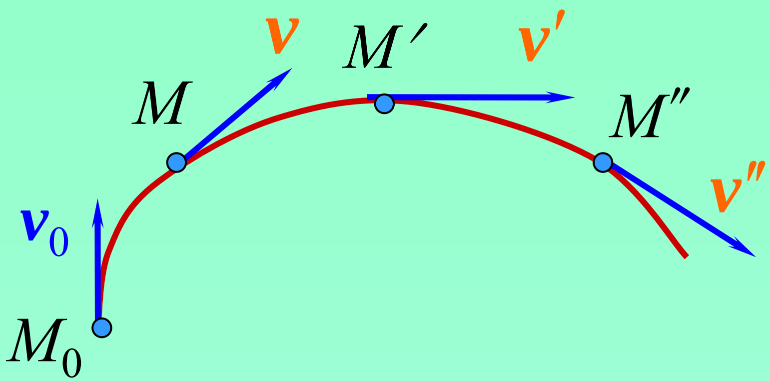
$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}^* = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

即点的速度等于它之矢径对时间的一阶导数。

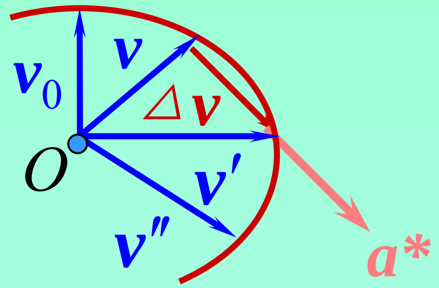
由矢导数定义知，动点之速度**v**方向沿动点的矢端图（即轨迹曲线）的切线方向，并与此点的运动方向一致。

§1-2 用矢量法表示点的速度和加速度

3. 加 速 度



设从某一固定点O画出动点在连续瞬间t_0 ， t, $t+\Delta t$、 t_2....速度矢 $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}''$……



连接各速度矢量之端点，可得一曲线，称为速度矢端图，此时可视$\boldsymbol{v}$为一变矢量。

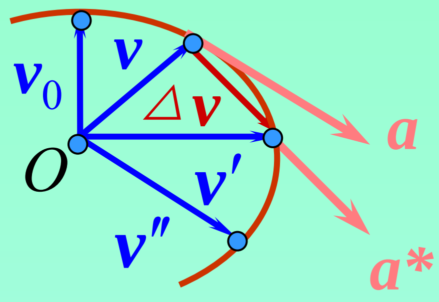
在Δt时间内，速度改变量为 $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$ ，

比值 $\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$称为在$\Delta t$ 时间内之平均加速度

$$\boldsymbol{a}^* = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

当△ $t\to 0$时，$\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$之极限称为动点在瞬间之瞬间时加速度。

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$



又 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 则 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

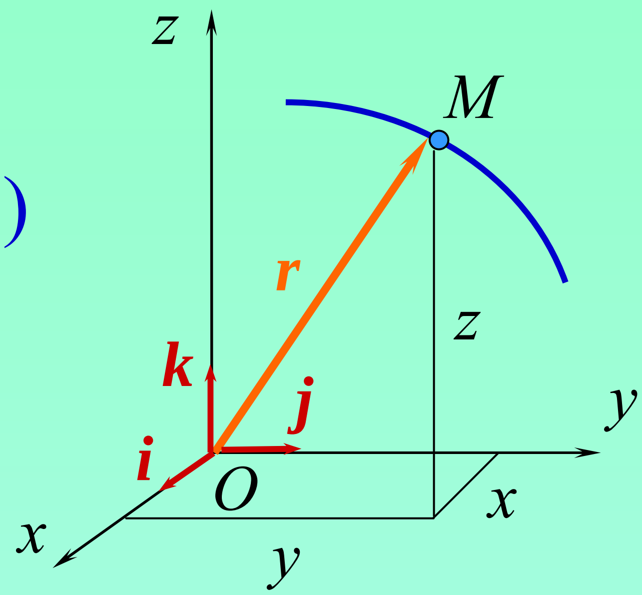
即动点的加速度等于它的速度对时间的一阶导数，或等于它的矢径对时间的二阶导数。其方向沿速度矢端图之切线，并指向速度矢端运动的方向。

§1-3 用直角坐标法表示点的速度和加速度

- 直角坐标法表示点的速度
- 直角坐标法表示点的加速度

§1-3 用直角坐标法表示点的速度和加速度

1. 直角坐标法表示点的速度



已知动点的直角坐标形式的运动方程

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

由坐标原点O画出动点的矢径

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

因而有速度的矢量法表达式

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$$

由于沿固定轴的单位矢$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$不随时间而变, 它们对时间的导数都等于零, 故得

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

§1-3 用直角坐标法表示点的速度和加速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

以v_x，v_y，v_z，代表速度$\boldsymbol{v}$在固定轴x，y，z上的投影, 则有分解式

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

与前式比较, 得

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\qquad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\qquad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

即, 点的速度在固定直角坐标系各轴上的投影, 分别等于动点对应坐标对时间的导数。

已知动点速度的投影，可求出速度矢量$\boldsymbol{v}$的大小和方向。

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})=\frac{v_x}{v},\qquad \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})=\frac{v_y}{v},\qquad \cos(v,k)=\frac{v_z}{v}$$

2. 直角坐标法表示点的加速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

把速度$\boldsymbol{v}$的表达式对时间t求导数，可得加速度的矢量表达式

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

另一方面，有分解式

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

§1-3 用直角坐标法表示点的速度和加速度

加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

其中a_x，a_y，a_z是加速度a在固定轴x，y，z上的投影。比较上列两式，得

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

即，点的加速度在固定直角坐标系各轴上的投影，分别等于点速度的对应投影对时间的一阶导数，或者等于对应坐标对时间的二阶导数。

已知动点加速度的投影，可求出加速度矢量a的大小和方向，有

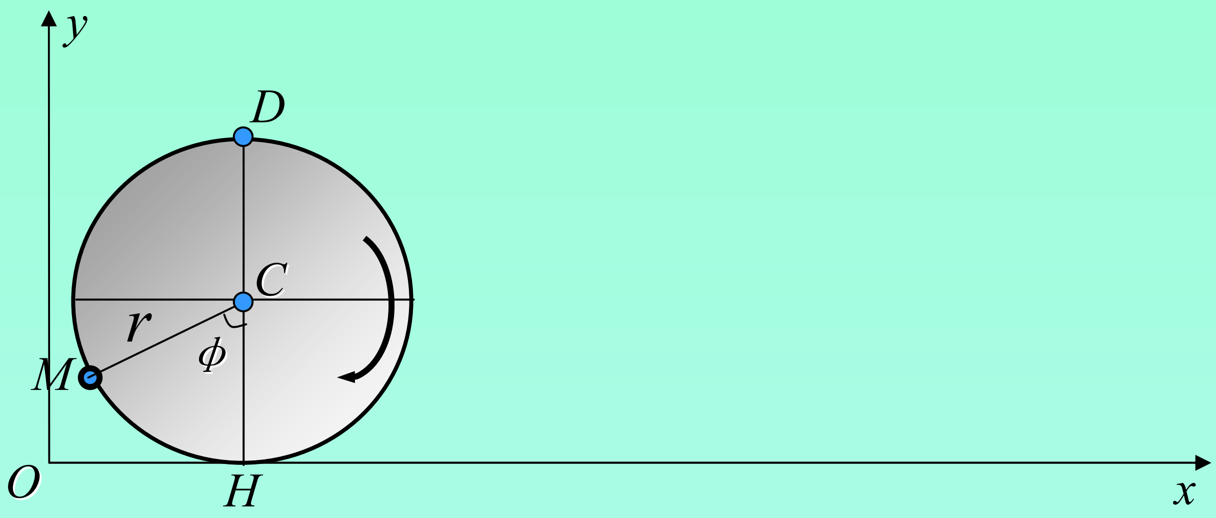
$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t})^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2})^2+(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2})+(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2})^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i})=\frac{a_x}{a}\qquad \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j})=\frac{a_y}{a},\qquad \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})=\frac{a_z}{a}$$

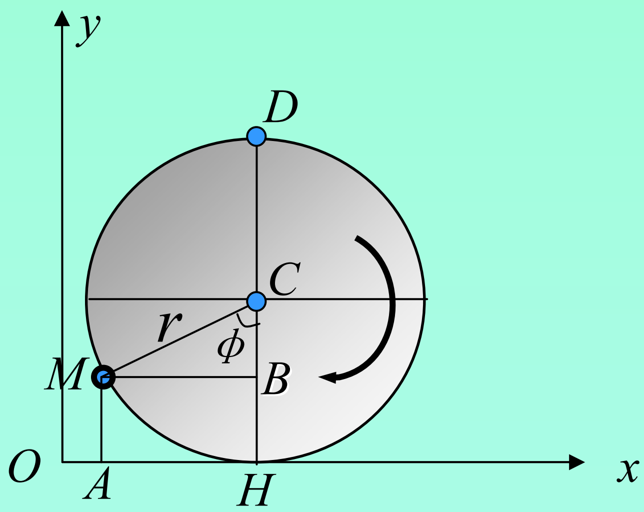
例1-3 半径是 r 的车轮沿固定水平轨道滚动而不滑动（如图）。轮缘上一点M，在初瞬时与轨道上的O点叠合；在瞬时t半径MC与轨道的垂线HC组成交角 $\phi=\omega t$，其中 ω是常量。试求在车轮滚一转的过程中该M点的运动方程，瞬时速度和加速度。



解：　　1. 求M点的运动方程。

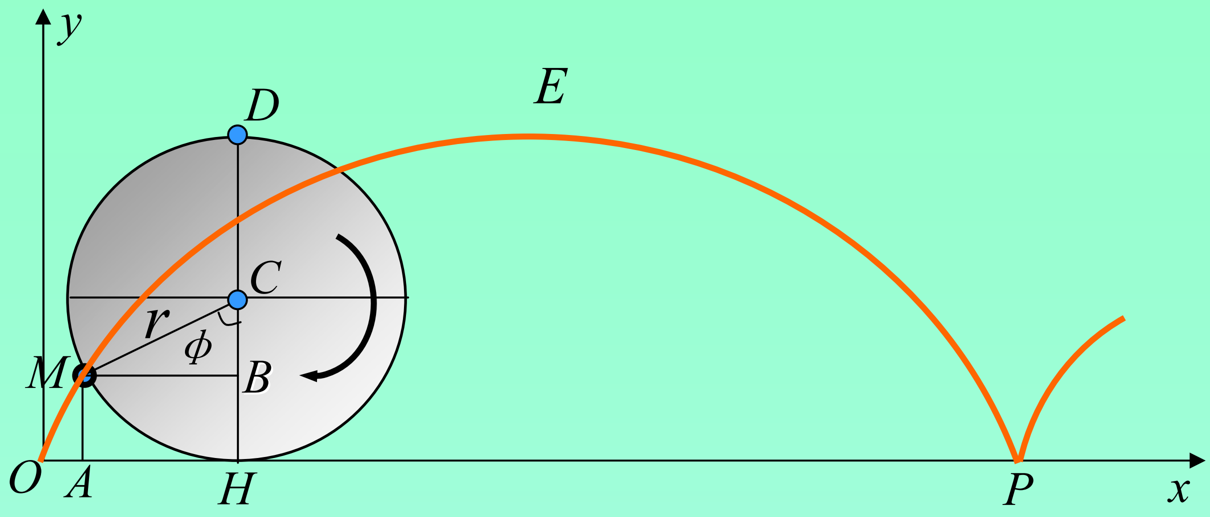
在M点的运动平面内取直角坐标系Oxy如图所示：轴 x 沿直线轨道，并指向轮子滚动的前进方向，轴 y 铅直向上。

考虑车轮在任意瞬时位置，因车轮滚动而不滑动，故有 $OH=\overset{\frown}{MH}$。于是，在图示瞬时动点M 的坐标为



$$x = OA = OH - AH = \overset{\frown}{MH} - MB$$
$$= r\varphi - r\sin\varphi$$

$$y = AM = HB = HC - BC$$
$$= r - r\cos\varphi$$



$$x = r\varphi - r\sin\varphi$$

$$y = r - r\cos\varphi$$

以 $\varphi = \omega t$ 代入，

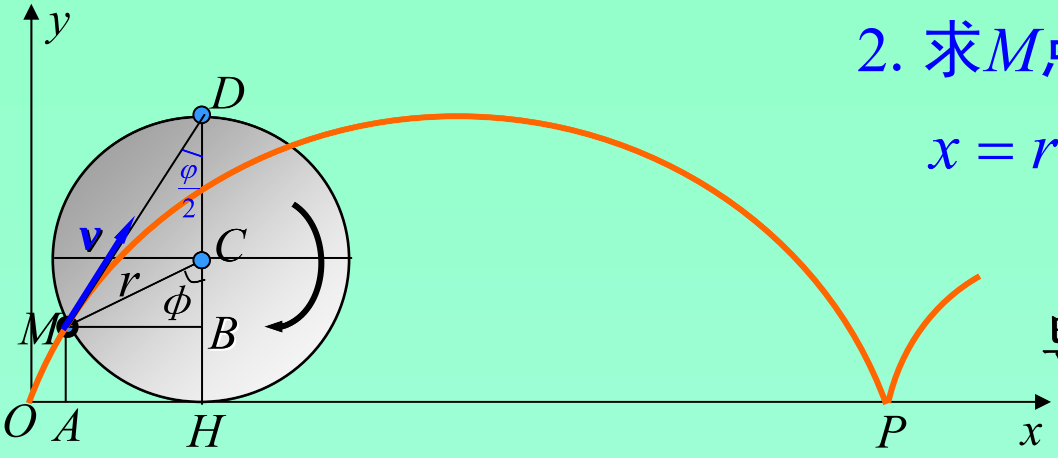
得**M**点的运动方程

$$x = r(\omega t - \sin\omega t)$$

$$y = r(1 - \cos\omega t)$$

这方程说明*M*点的轨迹是滚轮线（即摆线）。

车轮滚一转的时间 $T=2\pi/\omega$ ，在此过程中，*M*点的轨迹只占滚轮线的一环*OEP*，其两端*O*和*P*是尖点。



2. 求M点的瞬时速度。

$$x = r(\omega t - \sin \omega t),\quad y = r(1 - \cos \omega t)$$

求坐标 x，y 对时间的一阶导数，得

$$v_x = r\omega(1 - \cos \omega t)$$

$$v_y = r\omega \sin \omega t$$

故得M点速度 v 的大小和方向，有

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega\sqrt{(1 - \cos \omega t)^2 + \sin^2 \omega t} = 2r\omega \sin \frac{\omega t}{2}$$

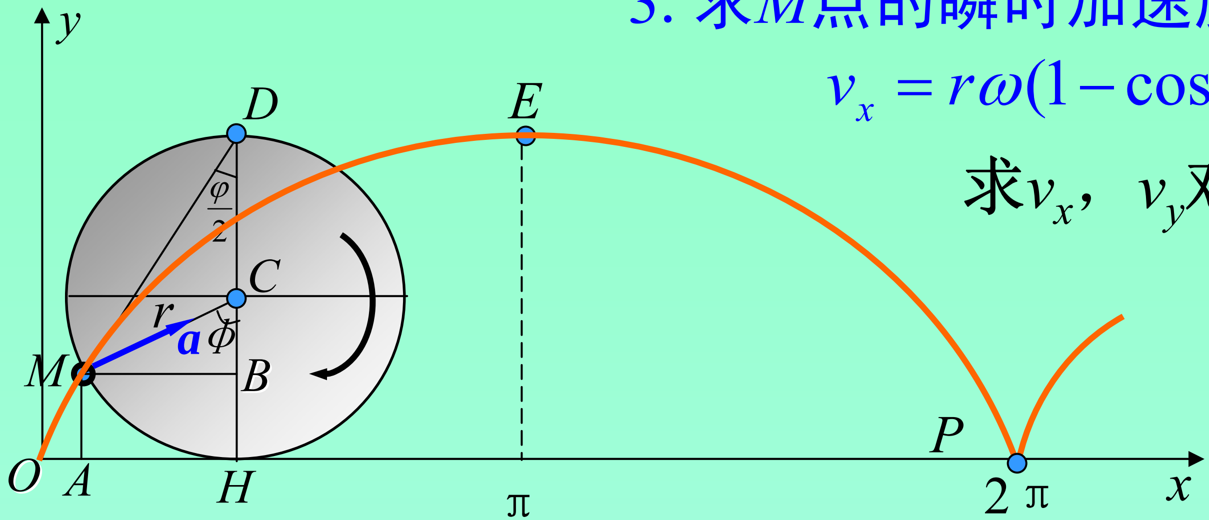
$$\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}) = \frac{v_x}{v} = \sin \frac{\omega t}{2} = \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{MB}{MD}$$

$$\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{j}) = \frac{v_y}{v} = \cos \frac{\omega t}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{BD}{MD}$$

M点的速度矢恒通过轮子的最高点D。

§1-3 用直角坐标法表示点的速度和加速度

例题1-3



3. 求M点的瞬时加速度。

$$v_x = r\omega(1-\cos\omega t),\quad v_y = r\omega\sin\omega t$$

求v_x，v_y对时间的一阶导数，得

$$a_x = r\omega^2\sin\omega t$$

$$a_y = r\omega^2\cos\omega t$$

故得M点加速度 a 的大小和方向，有

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=r\omega^2,\quad \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j})=\frac{a_y}{a}=\cos\varphi=\frac{BC}{MC},\quad \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i})=\frac{a_x}{a}=\sin\varphi=\frac{MB}{MC}$$

当$t=0$时，有 $x=0,\ y=0;\quad v_x=0,\ v_y=0;\quad a_x=0,\ a_y=r\omega^2$

这表示，当M点接触轨道时，它的速度等于零，而加速度垂直于轨道。这是轮子沿固定轨道滚而不滑的特征。

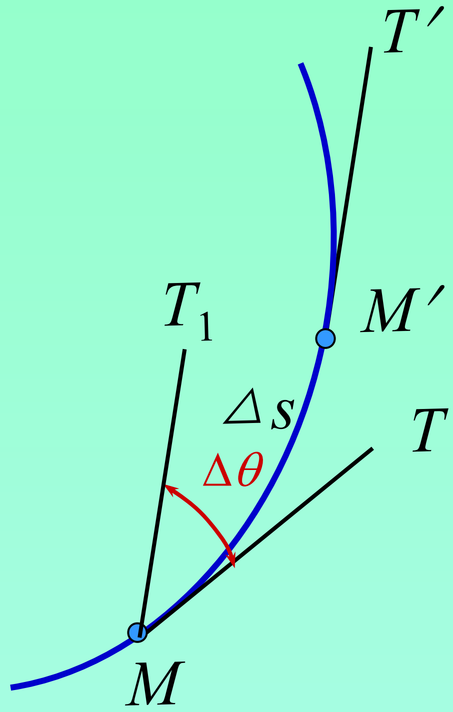
§1-4 自然法表示点的速度和加速度

- 曲线的曲率·自然轴系
- 点的速度在自然轴上的投影
- 点的加速度在自然轴上的投影

§1-4 自然法表示点的速度和加速度

1. 曲线的曲率·自然轴系

● $\Delta\theta$（取绝对值）称为曲线对应于弧 MM' 的邻角，可用来说明该曲线的弯曲。



●比值 $\Delta\theta/|\Delta s|$ 可用来表示弧MM'的平均弯曲程度，并称为平均曲率。

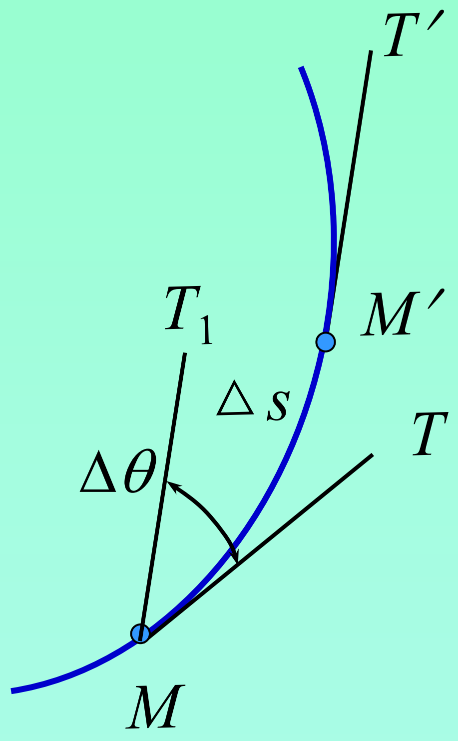
●当点M' 趋近于点M时平均曲率的极限值称为曲线在点M处的曲率，用k表示，有

$$k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$$

$$k=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$$

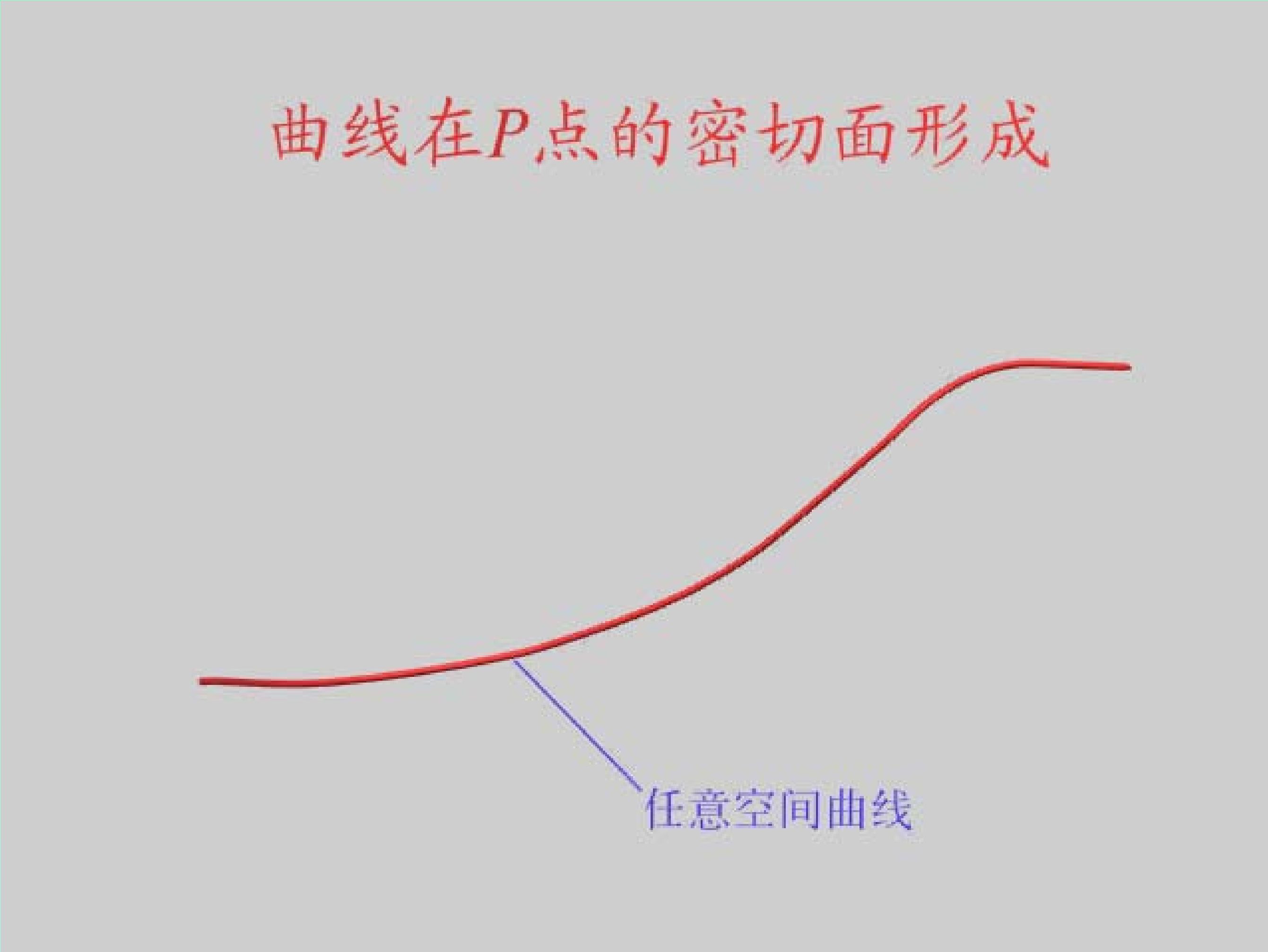
●曲线在点M的曲率倒数，称为曲线在点M的曲率半径，用 ρ 代表，有

$$\rho=\frac{1}{k}$$



§1-4 自然法表示点的速度和加速度

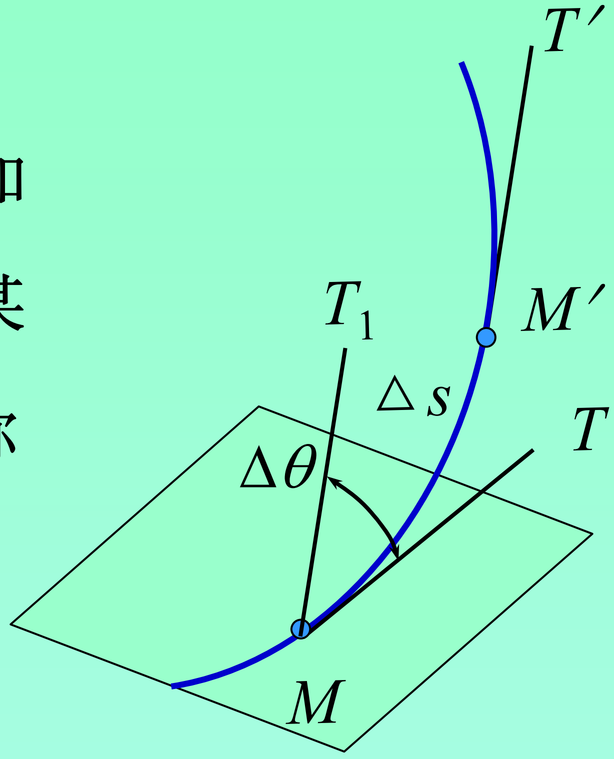
- 密切面

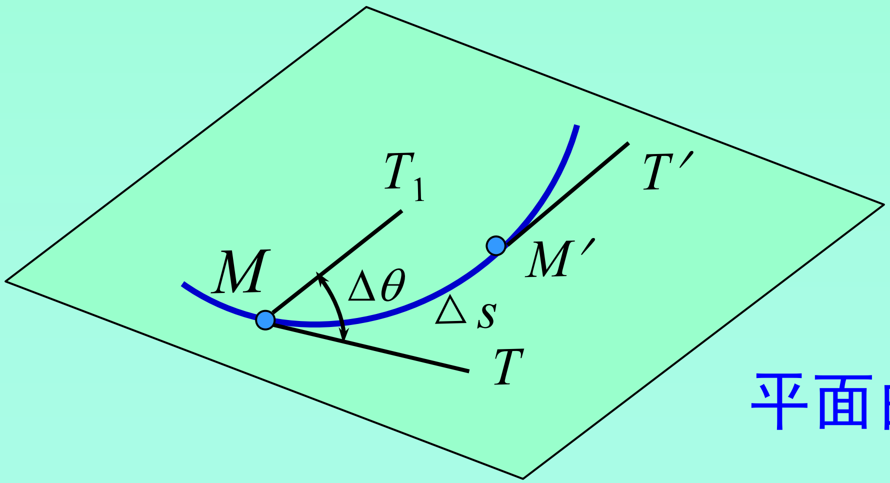


§1-4 自然法表示点的速度和加速度

密切面

在图中点M'趋近于M，即$|\Delta s|$趋近于零的过程中，包括直线 MT 和MT_1的平面，将绕MT转动而趋近于某一极限位置；在这极限位置的平面称为曲线在点M的密切面或曲率平面。





平面曲线在密切面内。

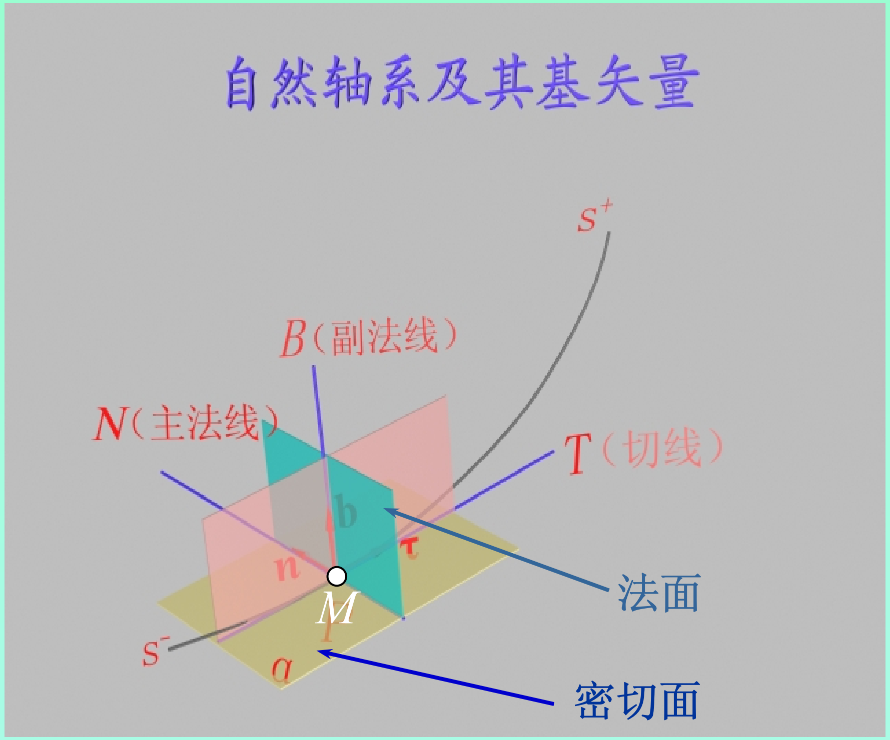
§1-4 自然法表示点的速度和加速度

● 法面 . 主法线 . 副法线

通过点M而与切线垂直的平面，称为曲线在点M 的法面。

法面与密切面的交线MN称为主法线。

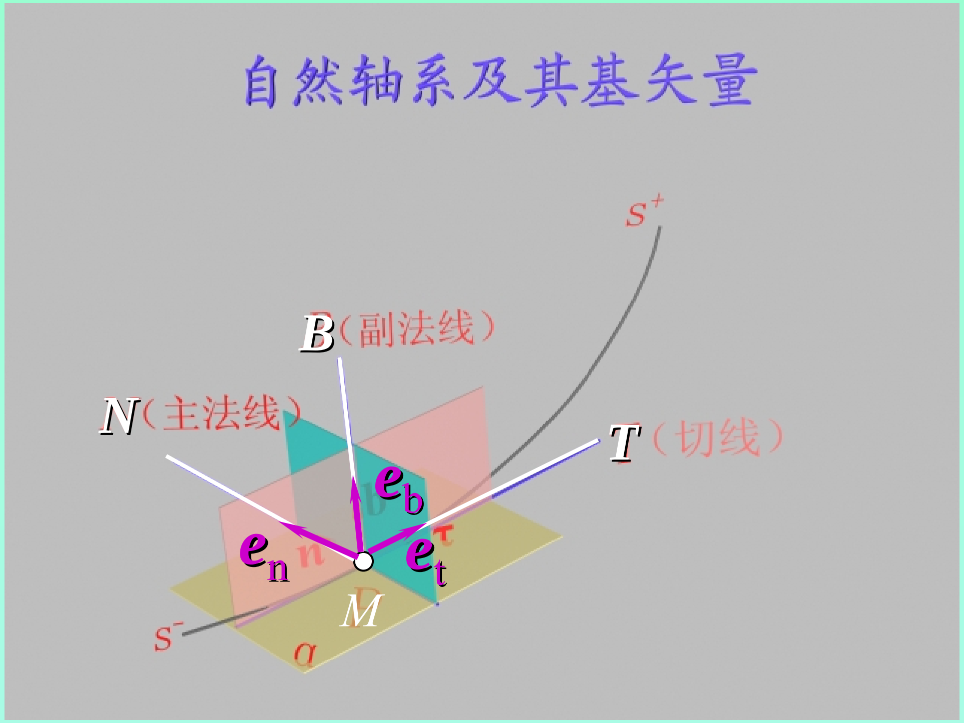
法面内与主法线垂直的直线MB称为副法线。



§1-4 自然法表示点的速度和加速度

自然轴系

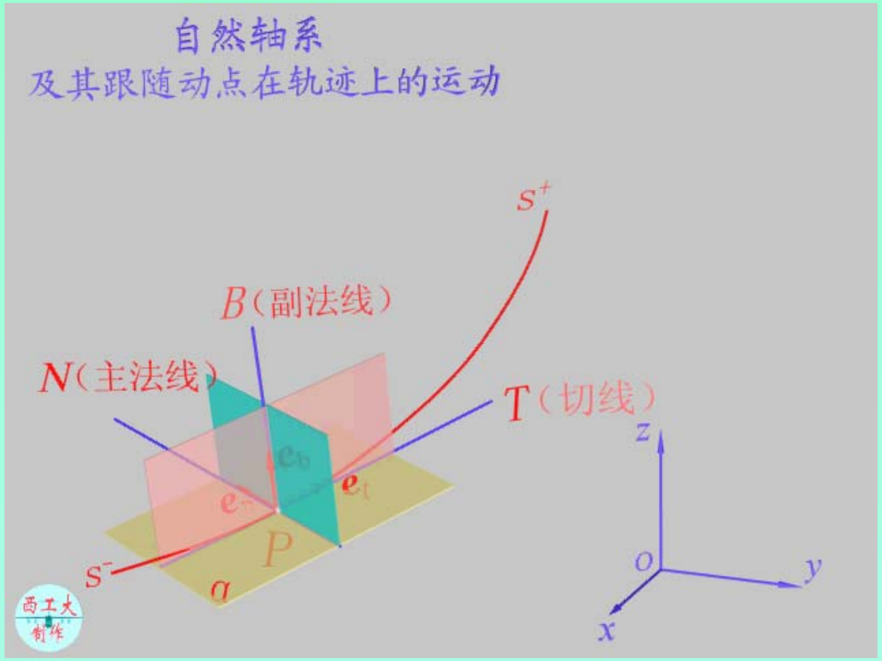
在点M处曲线的切线、主法线和副法线组成一个空间坐标架，称为点M的**自然轴系**；



各轴的正向规定如下：设用$\boldsymbol{e}_t$, $\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{e}_b$代表这三个轴的轴向单位矢，则$\boldsymbol{e}_t$指向弧坐标增加的一方，$\boldsymbol{e}_n$指向曲线的凹边，而$\boldsymbol{e}_b = \boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_n$。

曲线上的点都具有自己的自然轴系，故$\boldsymbol{e}_t$, $\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{e}_b$都是方向随点M的位置而改变的单位矢。

可见自然轴系是随点M的位置而改变的直角空间坐标架，它在研究点沿已知轨迹的运动时有重要的意义。



§1-4 自然法表示点的速度和加速度

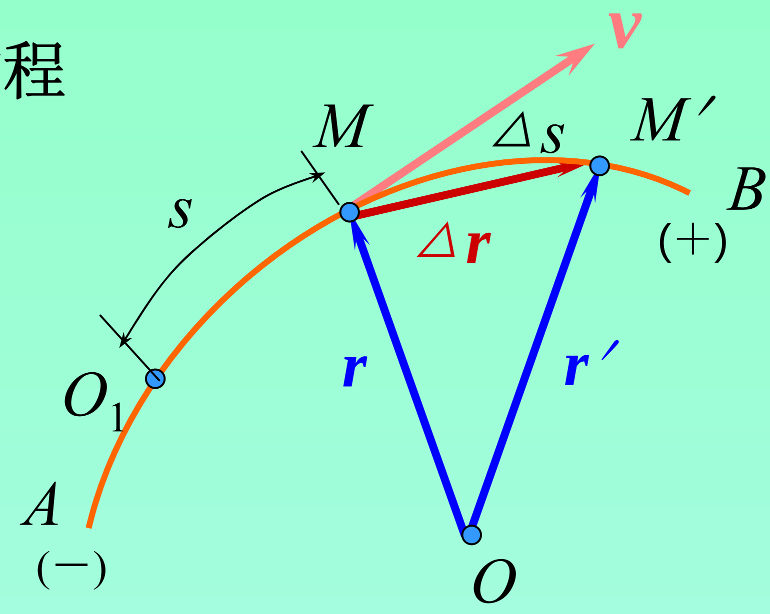
2. 点的速度在自然轴上的投影

设已知点M的运动轨迹和运动方程

$$s = f(t)$$

M点的速度（矢量）为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$



大小

$$v = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|$$

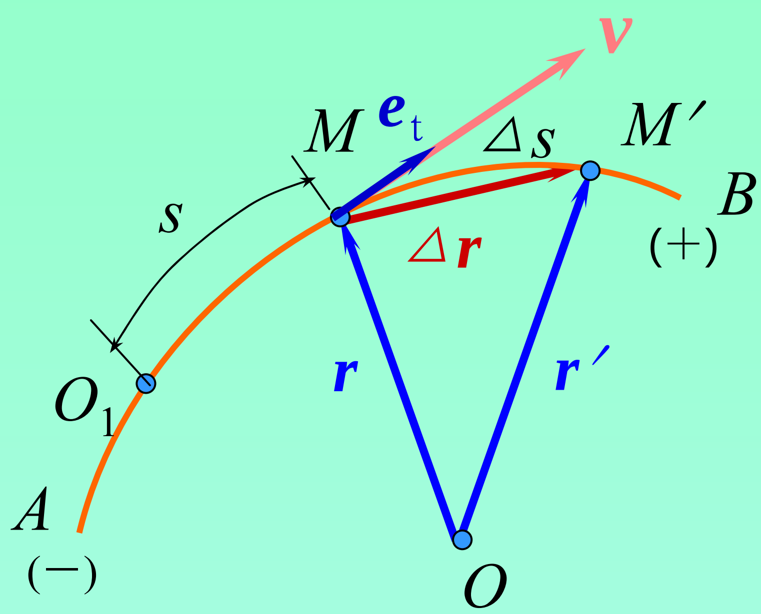
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right|\cdot\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|$$

（由于 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right| \to 1$）

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$$

方向

方向沿轨迹在M处的切线$\boldsymbol{e}_t$并指向弧坐标增加的一方。

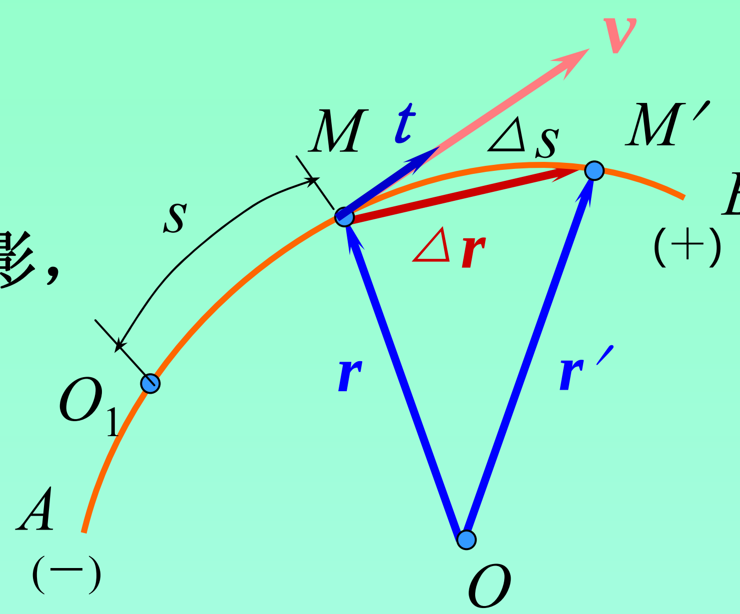


可见，点M的速度是沿轨迹切线，并可表示为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t = v\boldsymbol{e}_t$$

§1-4 自然法表示点的速度和加速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t} = v\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$$



其中v是速度矢量在切线正向的投影，大小等于

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

即：动点的速度在切线上的投影，等于它的弧坐标对时间的一阶导数。又沿轨迹切线，所以它在法线上的投影恒等于零。

§1-4 自然法表示点的速度和加速度

3. 点的加速度在自然轴上的投影

根据加速度的定义以及弧坐标中速度的表达式

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}, \quad \boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$$

$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + v\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}}$$

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}} = ?}$$

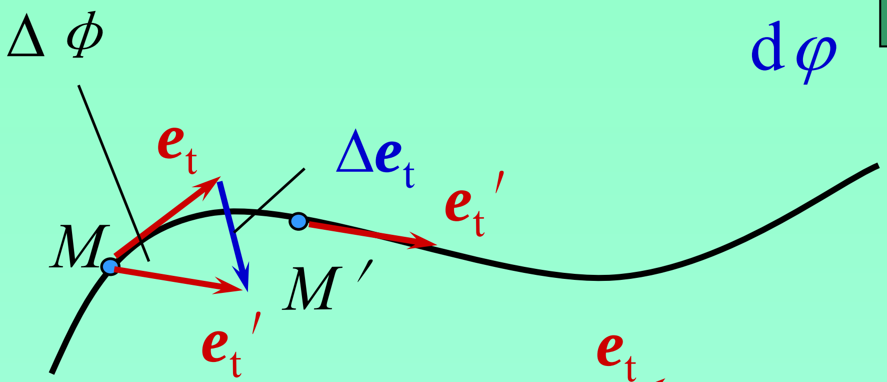
$$\boldsymbol{a}=\dot{v}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}+v\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}} \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}}=?$$

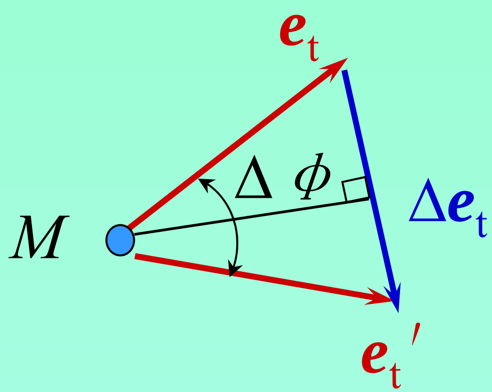
$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}$$

$$=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

? $\qquad \dfrac{1}{\rho} \qquad \dot{s}=v$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\varphi}$$ 大小





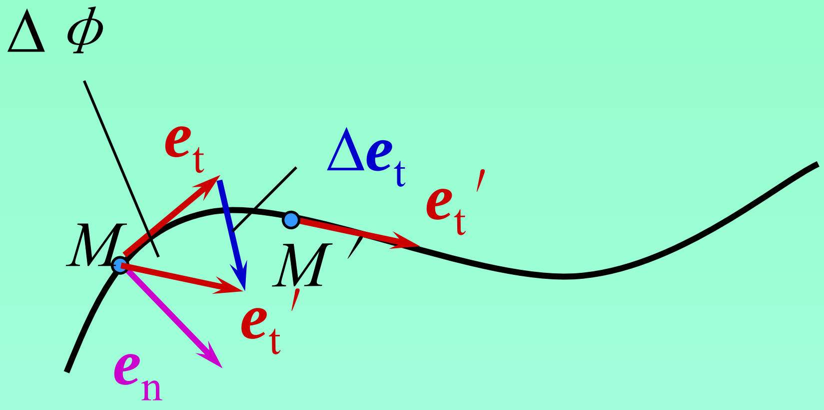
$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\varphi}\right| = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\Delta\varphi}\right|$$

$$= \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{2\left|\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}\right|\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi}$$

$$= \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\dfrac{\Delta\varphi}{2}} = 1$$

$$\Delta e_{\mathrm{t}} = 2\left|\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}\right|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

方向



当$\Delta t\to 0$时，$\boldsymbol{e}_t$和$\boldsymbol{e}_t'$ 以及 $\Delta\boldsymbol{e}_t$同处于M点的密切面内，这时，$\Delta\boldsymbol{e}_t$的极限方向垂直于$\boldsymbol{e}_t$ ，亦即$\boldsymbol{e}_n$方向。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}\varphi}=\boldsymbol{e}_n$$

$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + v\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}} \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}} = ?$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\varphi} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \qquad \frac{1}{\rho} \qquad \dot{s} = v$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$

- 加速度表示为自然轴系投影形式

$$\boldsymbol{a}=a_{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}+a_{\mathrm{n}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}+a_{\mathrm{b}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{b}}$$

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\ddot{s}$$ 切向加速度

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{\rho}$$ 法向加速度

$$a_{\mathrm{b}}=0$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$$

讨论

●切向加速度 $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = \ddot{s}$ 表示速度矢量大小的变化率；

●法向加速度 $a_n = \dfrac{v_t^2}{\rho}$ 表示速度矢量方向的变化率；

● $\boldsymbol{a}_b = 0$ 即 $a_b\boldsymbol{e}_b = 0$, 表明加速度 $\boldsymbol{a}$在副法线方向没有分量；还表明速度矢量$\boldsymbol{v}$和加速度矢量$\boldsymbol{a}$都位于密切面内。

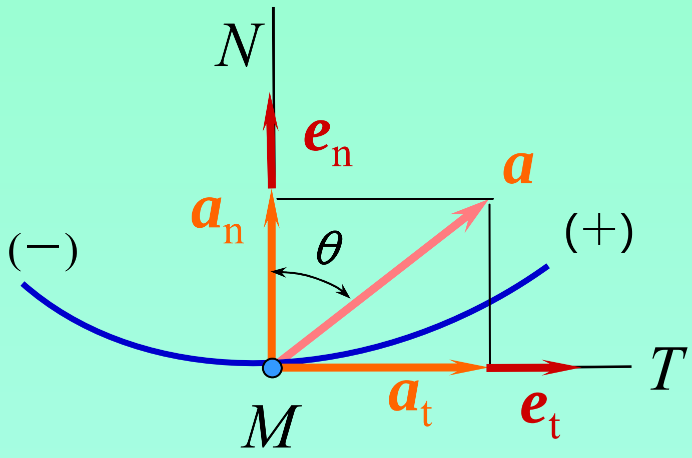
$$\boxed{\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}} \Rightarrow \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$$

动点的加速度在切线上的投影，等于速度在切线上的投影对时间的导数；加速度在主法线上的投影，等于速度的平方除以轨迹在动点处的曲率半径；加速度在副法线上的投影恒等于零。

●加速度大小和方向

因为加速度的两个分量a_n与a_t是相互垂直的，故得加速度a的大小为

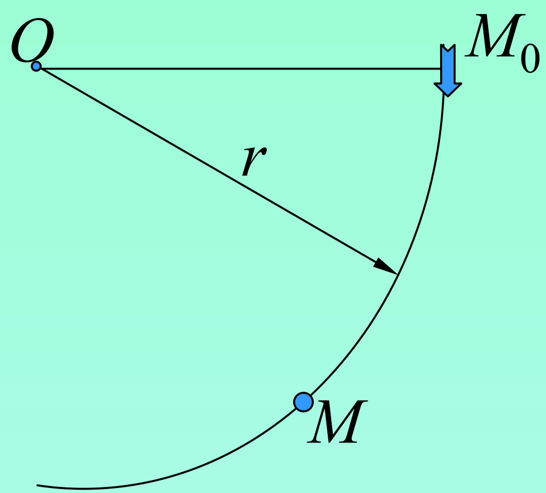
$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{(\frac{dv}{dt})^2+(\frac{v^2}{\rho})^2}$$

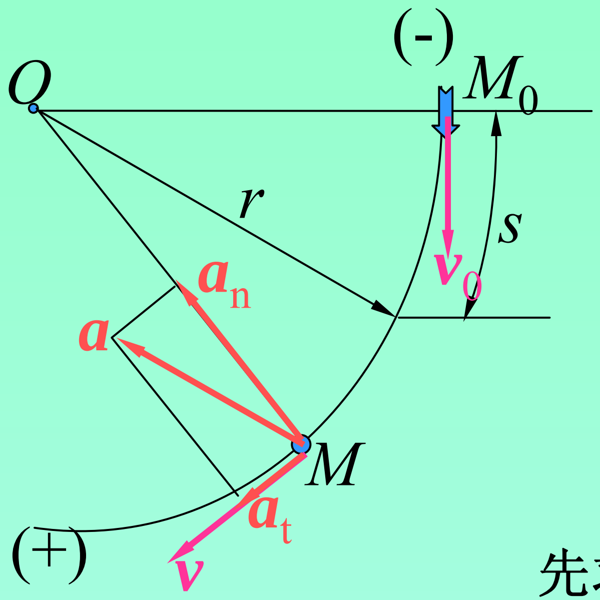


加速度a与主法线所成的角度θ（恒取绝对值），由下式确定

$$\tan\theta=\frac{|a_t|}{a_n}$$

例1-4飞机在铅直面内从位置M_0处以$s=250t+5t^2$规律沿半径r=1 500 m的圆弧作机动飞行（如图）。其中s以m计，t以s计。当t=5s时，试求飞机在轨迹上的位置M及其速度和加速度。





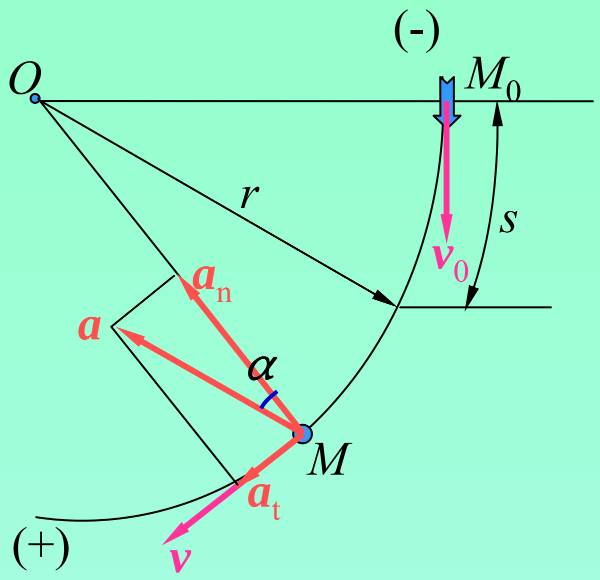
解：因已知飞机沿圆弧轨迹的运动方程，宜用自然法求解。取M_0为弧坐标 s 的原点，s 的正负方向如图所示。

当$t = 5$ s时，飞机的位置 M 可由弧坐标确定

$$s = 250t + 5t^2 = 1\,375$$

先求出飞机的速度和切向加速度、法向加速度

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 250 + 10t, \qquad a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{1500}(250 + 10t)^2$$



代入 $t = 5\mathrm{s}$

得 $v = 300 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

$a_\mathrm{t} = 10 \ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \qquad a_\mathrm{n} = 60 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

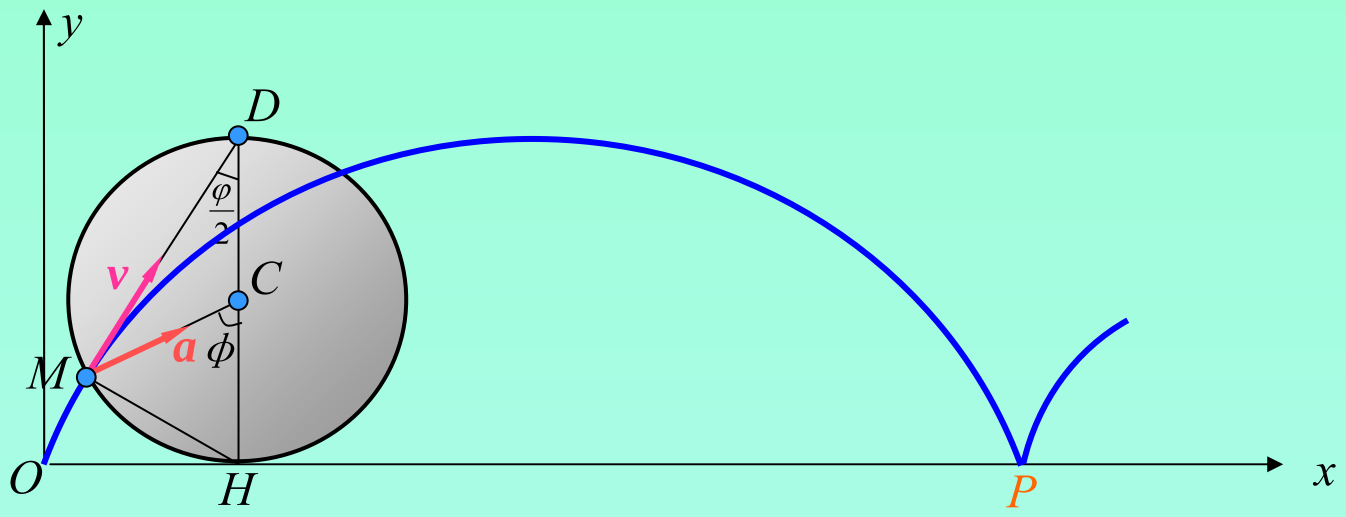
故在这瞬时飞机的总加速度 a 的大小和方向为

$$a = \sqrt{a^2{}_\mathrm{t} + a^2{}_\mathrm{n}} = 60.8 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a_\mathrm{t}}{a_\mathrm{n}} = 0.166$$

$$\alpha = 9.5^\circ$$

例1-5 试求例 4中轮缘上M点的切向加速度和法向加速度，并求轨迹的最大曲率半径。



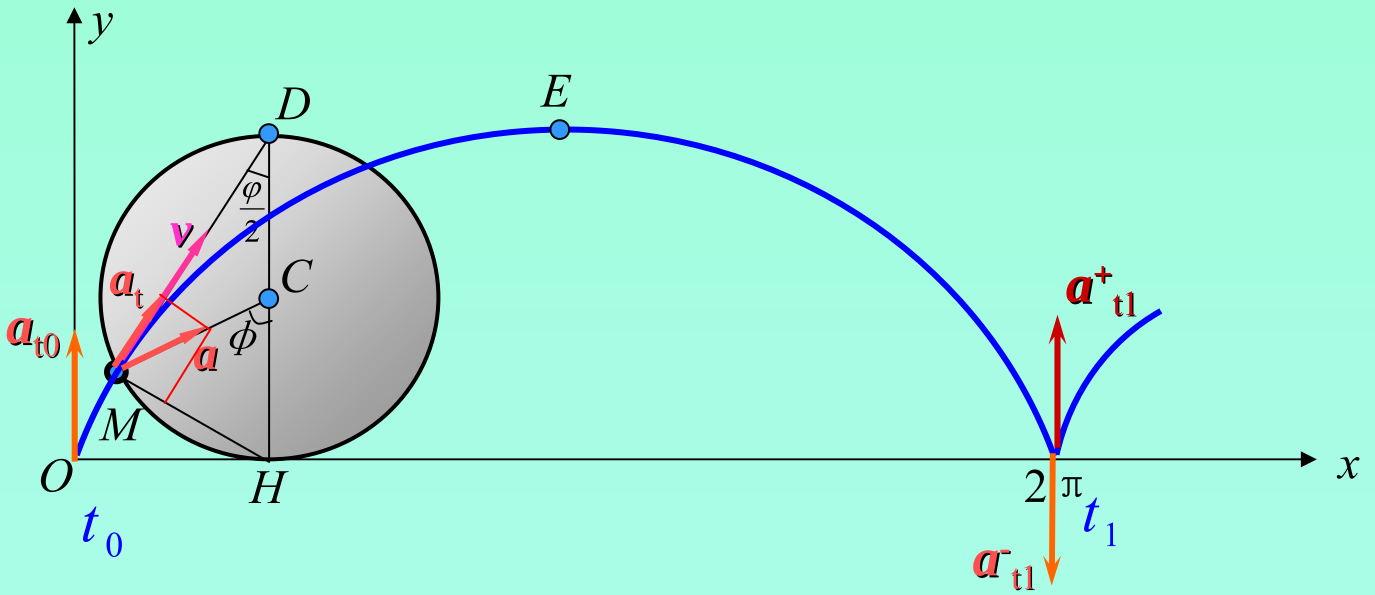
解：1.求切向加速度

由 $v = 2r\omega \sin\dfrac{\omega t}{2}$

因而它的切向加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\omega^2 \cos\frac{\omega t}{2}$$

注意，当 $t_0 = 0$ 时，$a_{t0} = r\omega^2$；而当 $t_1 = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 时，$a_{t1} = -r\omega^2$；两者相差一个负号。在 t_1 以后，***M***点进入另一个滚轮环，这里出现尖点，运动方向发生突然逆转，a_t 由 $-r\omega^2$ 突变为 $r\omega^2$。



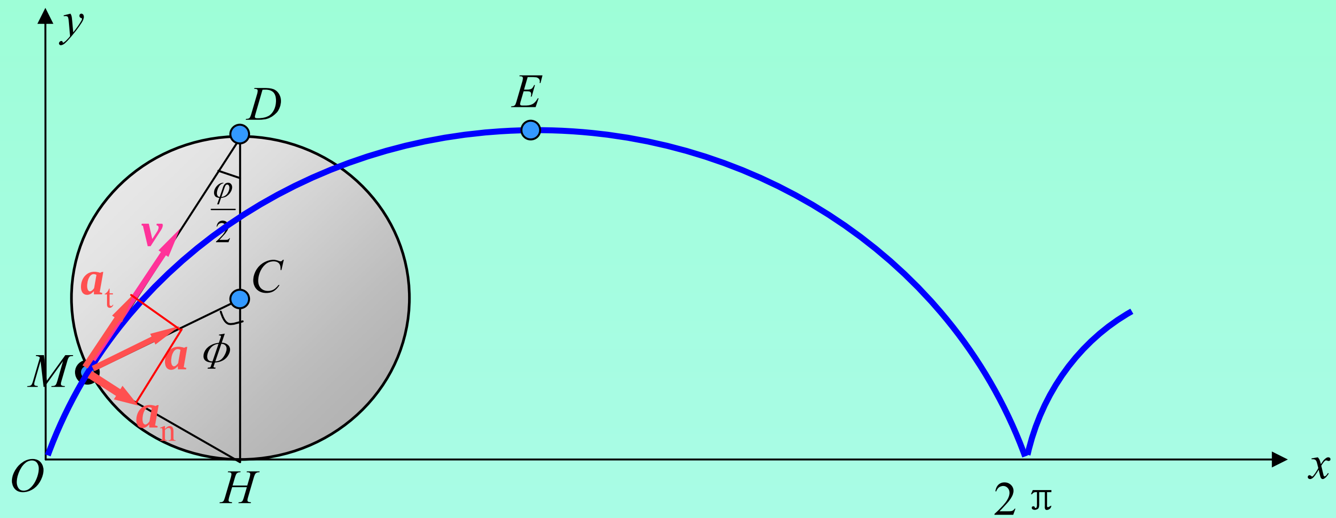
例题1-5

2.求法向加速度

已知 $a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}$， $a=r\omega^2$， $a_t=\dfrac{dv}{dt}=r\omega^2\cos\dfrac{\omega t}{2}$

M点的法向加速度大小 $a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=r\omega^2\sin\dfrac{\omega t}{2}$

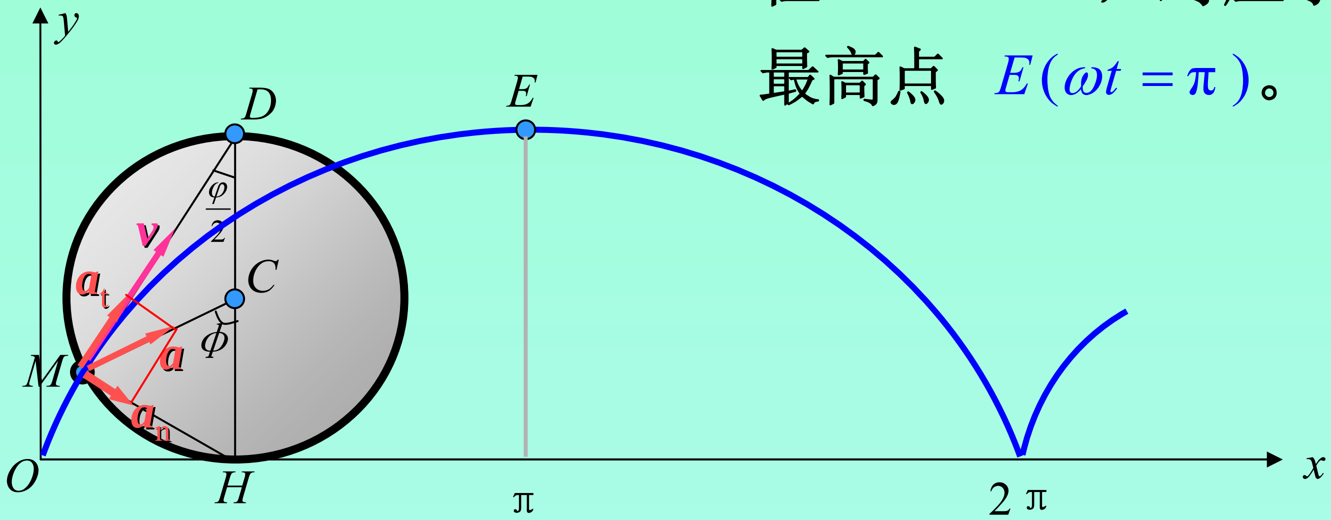
矢量 $\boldsymbol{a}_t$ 和 $\boldsymbol{a}_n$ 的方向分别沿MD 和MH。



3.求最大曲率半径

由 $a_{\mathrm{n}}=\dfrac{v^2}{\rho}$ 可知轨迹的曲率半径为 $\rho=\dfrac{v^2}{a_{\mathrm{n}}}=\dfrac{4r^2\omega^2\sin^2\dfrac{\omega t}{2}}{r\omega^2\sin\dfrac{\omega t}{2}}=4r\sin\dfrac{\omega t}{2}$

可见，轨迹的最大曲率半径 $\rho_{\max}=4r$，对应于轨迹的最高点 $E(\omega t=\pi)$。



谢谢使用