第六章　几何连续性

引 言

在上一章中，我们研究了满足参数连续性的样条曲线和样条曲面。同时也指出了参数连续性和计算机辅助几何设计中最关心的曲线曲面的光滑性没有必然联系。而且曲线曲面在满足参数连续性的同时，往往也失去了对形状的修改能力。为了解决上述问题，本章将研究几何连续性的概念。

第一节　参数连续的组合Bezier曲线

一、参数连续条件:

1、局部参数条件下:

设l条局部参数的n次Bezier曲线段构成的组合Bezier曲线为:

$$\vec{S}_i(t) = \sum_{j=0}^{n} \vec{b}_{ni+j} B_{j,n}(t), t \in [0,1], i = 0,1,2,\cdots,l-1$$

其中 i为段序号。

第一节　参数连续的组合Bezier曲线

局部参数下，曲线C^r连续的定义:

$$\vec{S}_{i-1}^{(k)}(1)=\vec{S}_i^{(k)}(0) \quad k=0,1,\cdots r$$

因为Bezier曲线在首末端点处的k阶导矢可以表示为:

$$\frac{d^k}{dt^k}\vec{p}(0)=\frac{n!}{(n-k)!}\Delta^k\vec{b}_0$$

$$\frac{d^k}{dt^k}\vec{p}(1)=\frac{n!}{(n-k)!}\Delta^k\vec{b}_{n-k}$$

第一节 参数连续的组合Bezier曲线

特别的，在局部参数下，n次Bezier曲线端点的k阶导矢为：

$$\vec{S}_{i-1}^{(k)}(1)=\frac{n!}{(n-k)!}\Delta^k\vec{b}_{ni-k} \qquad \vec{S}_{i}^{(k)}(0)=\frac{n!}{(n-k)!}\Delta^k\vec{b}_{ni}$$

所以在局部参数下，n次Bezier曲线C^r连续的条件为：

$$\Delta^k\vec{b}_{ni-k}=\Delta^k\vec{b}_{ni} \qquad k=0,1,\cdots r$$

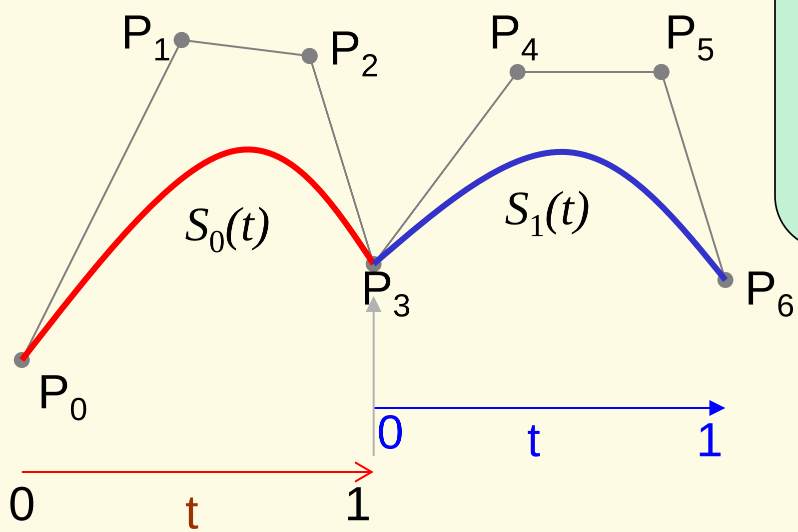
它与连接点前后共2r + 1个控制顶点有关。

第一节　参数连续的组合Bezier曲线

特别的，当r = 0时，有：

$$\vec{b}_{ni} = \vec{b}_{n(i-1)+n} = \vec{b}_{ni+0}$$

即第 $i-1$段曲线的最后一个控制顶点与第 i段的第一个控制顶点重合。



C^0 continuity:
Adjacent curve segments share a common joint.

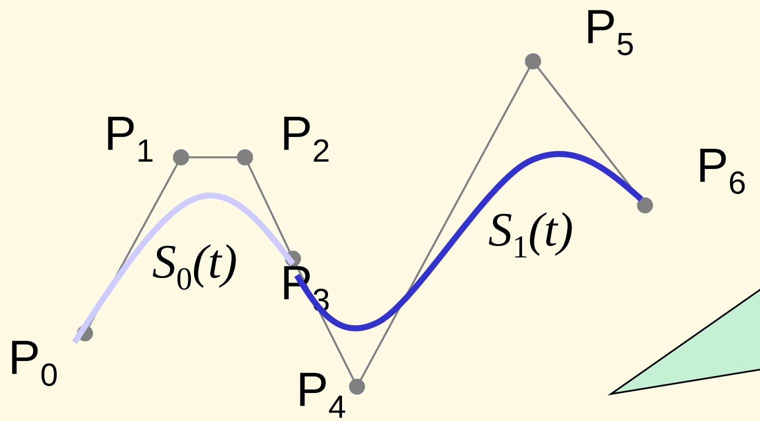
$$S_0(1)=S_1(0)$$

第一节 参数连续的组合Bezier曲线

当r = 1时，有：

$$\vec{b}_{ni} = \vec{b}_{ni}\text{且}\Delta\vec{b}_{ni-1} = \Delta\vec{b}_{ni} \quad \text{即：} \quad \vec{b}_{ni+1} = \vec{b}_{ni} + (\vec{b}_{ni} - \vec{b}_{ni-1})$$

即这相邻的三个控制顶点必须共线，且等距分布。

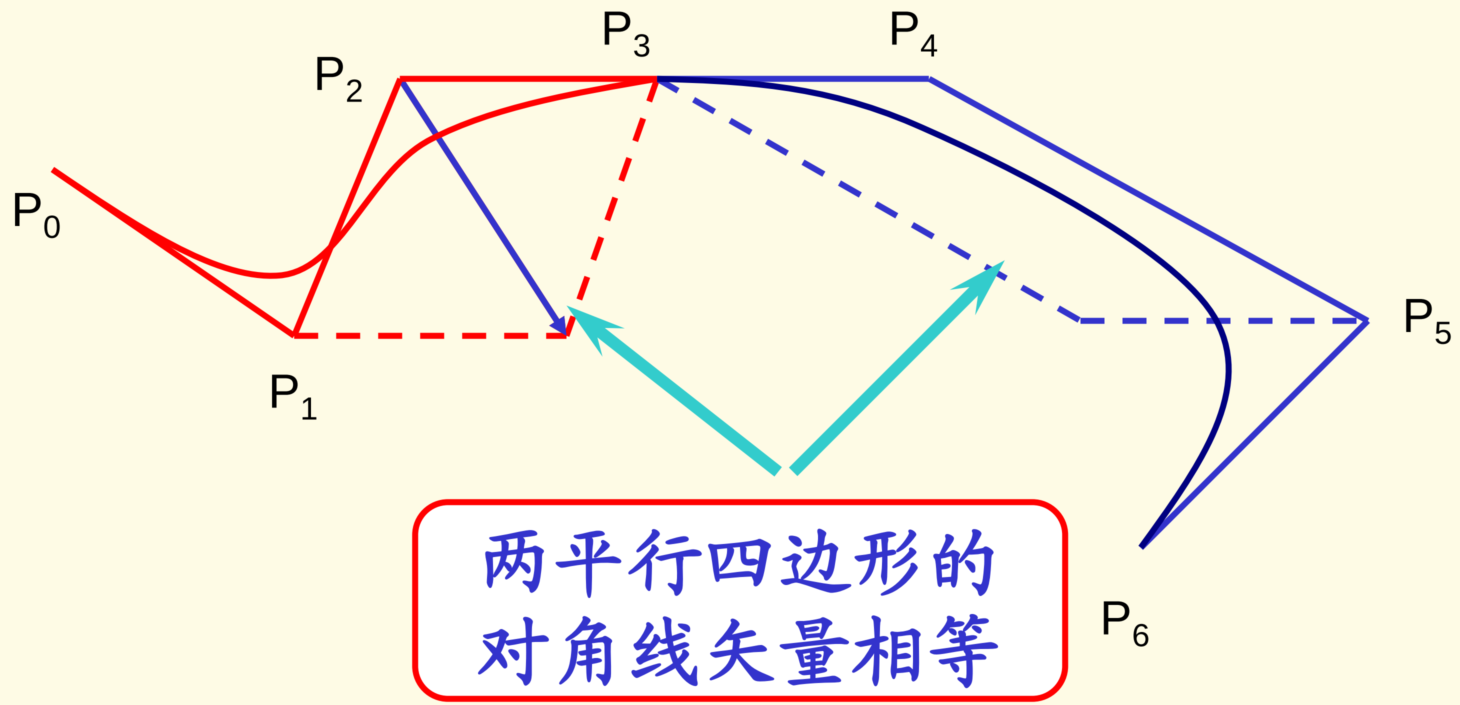


C^1-continuity: The derivative of the first Bezier curve segment at the end point is same as that of the second at the start point.

$$S_0(1)=S_1(0) \quad and \quad S'_0(1)=S'_1(0)$$

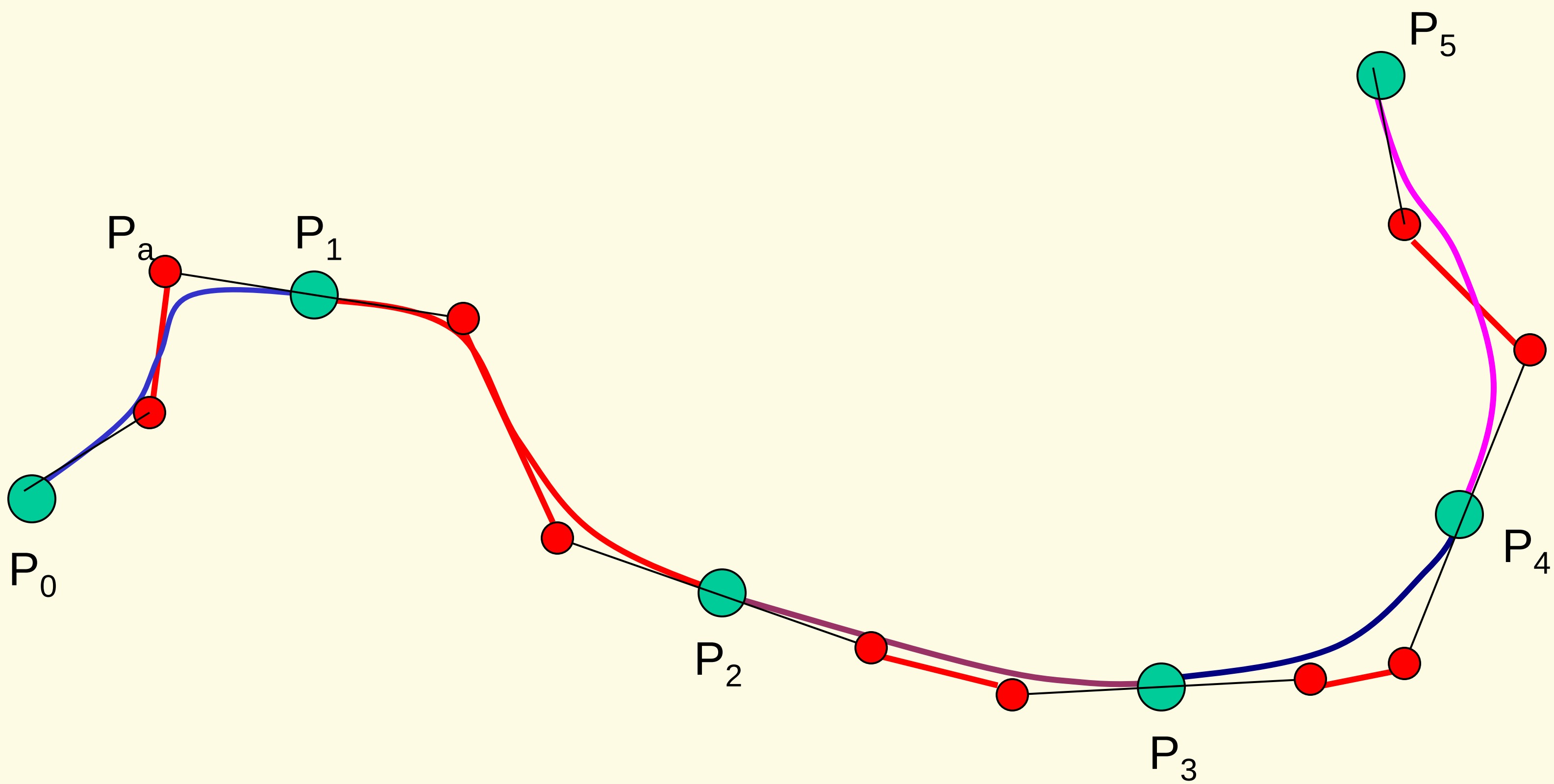
当r = 2时，有：

$$\vec{b}_{ni}=\vec{b}_{ni}，\quad \Delta\vec{b}_{ni-1}=\Delta\vec{b}_{ni}，\quad 且\Delta^2\vec{b}_{ni-2}=\Delta^2\vec{b}_{ni}$$



第一节　参数连续的组合Bezier曲线

实例：构造C^1分段连续的局部参数组合三次Bezier曲线



第一节　参数连续的组合Bezier曲线

2、整体参数条件下：

局部参数条件下，组合Bezier曲线相当于均匀参数的样条曲线，它只适用于分布比较均匀的数据，为了推广组合Bezier曲线的适用面，采用整体参数条件下的组合Bezier曲线。

解决方法：

设$\vec{b}_{ni}$，$i=0,1,\cdots l$为n次组合Bezier曲线

第i-1段和第i段的连接点，对这些点进行

适当的参数化, 其对应的参数为$u_i, i=0,1,\cdots l$

第一节　参数连续的组合Bezier曲线

在整体参数下，n次组合Bezier曲线的分段表达式为:

$$\vec{p}(u) = \vec{s}_i(t) = \sum_{j=0}^{n} \vec{b}_{ni+j} B_{j,n}(t), \quad t = \frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i} = \frac{u-u_i}{\Delta_i}$$

$$u \in [u_i, u_{i+1}], i = 0,1,\cdots l-1$$

整体参数下，曲线C^r连续的定义:

$$\vec{p}_-^{(k)}(u_i) = \vec{p}_+^{(k)}(u_i) \quad k = 0,1,\cdots r$$

第一节　参数连续的组合Bezier曲线

因为:

$$\vec{p}_{-}^{(k)}(u_i)=\frac{1}{(\Delta_{i-1})^k}\vec{s}_{i-1}^{(k)}(1)=\frac{1}{(\Delta_{i-1})^k}\frac{n!}{(n-k)!}\Delta^k\vec{b}_{ni-k}\quad k=0,1,\cdots r$$

$$\vec{p}_{+}^{(k)}(u_i)=\frac{1}{(\Delta_{i})^k}\vec{s}_{i}^{(k)}(0)=\frac{1}{(\Delta_{i})^k}\frac{n!}{(n-k)!}\Delta^k\vec{b}_{ni}\quad k=0,1,\cdots r$$

所以，整体参数下n次组合Bezier曲线C^r连续的条件为:

$$\frac{1}{(\Delta_{i-1})^k}\Delta^k\vec{b}_{ni-k}=\frac{1}{(\Delta_{i})^k}\Delta^k\vec{b}_{ni}\quad k=0,1,\cdots r$$

也可记为: $$(\Delta_i)^k\Delta^k\vec{b}_{ni-k}=(\Delta_{i-1})^k\Delta^k\vec{b}_{ni}\qquad k=0,1,\cdots r$$

第一节　参数连续的组合Bezier曲线

$$(\Delta_i)^k \Delta^k \vec{b}_{ni-k} = (\Delta_{i-1})^k \Delta^k \vec{b}_{ni} \qquad k = 0,1,\cdots r$$

从上式可以看出，与局部参数条件下一样，C^r阶连续的条件也仅与连接点前后的2r+1个控制顶点有关，但具体的结论不同。

特别的，当r = 0时，有：

$$\vec{b}_{ni} = \vec{b}_{n(i-1)+n} = \vec{b}_{ni+0}$$

与局部参数下C^0连续的条件一致

第一节　参数连续的组合Bezier曲线

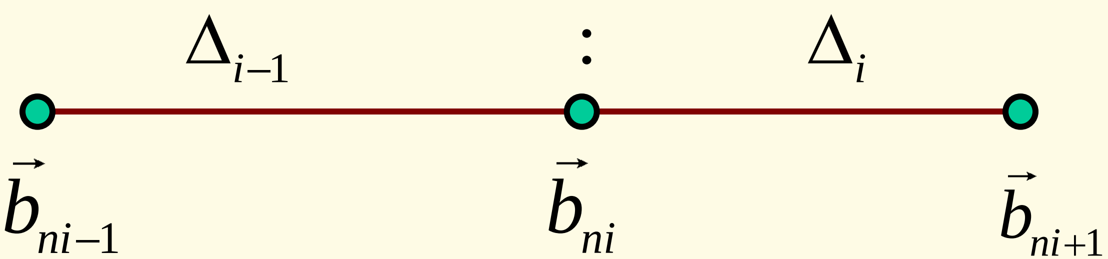
当r＝1时，在整体参数条件下C^1连续的条件为：

$$\vec{b}_{ni}=\vec{b}_{ni}，且(\Delta_i)\Delta\vec{b}_{ni-1}=(\Delta_{i-1})\Delta\vec{b}_{ni}$$

即：
$$\vec{b}_{ni+1}=\vec{b}_{ni}+\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}(\vec{b}_{ni}-\vec{b}_{ni-1})$$

或：
$$\vec{b}_{ni}=\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}+\Delta_i}\vec{b}_{ni-1}+\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1}+\Delta_i}\vec{b}_{ni+1}$$

上式说明，这三个顶点必须共线，且距离之比为：



第一节　参数连续的组合Bezier曲线

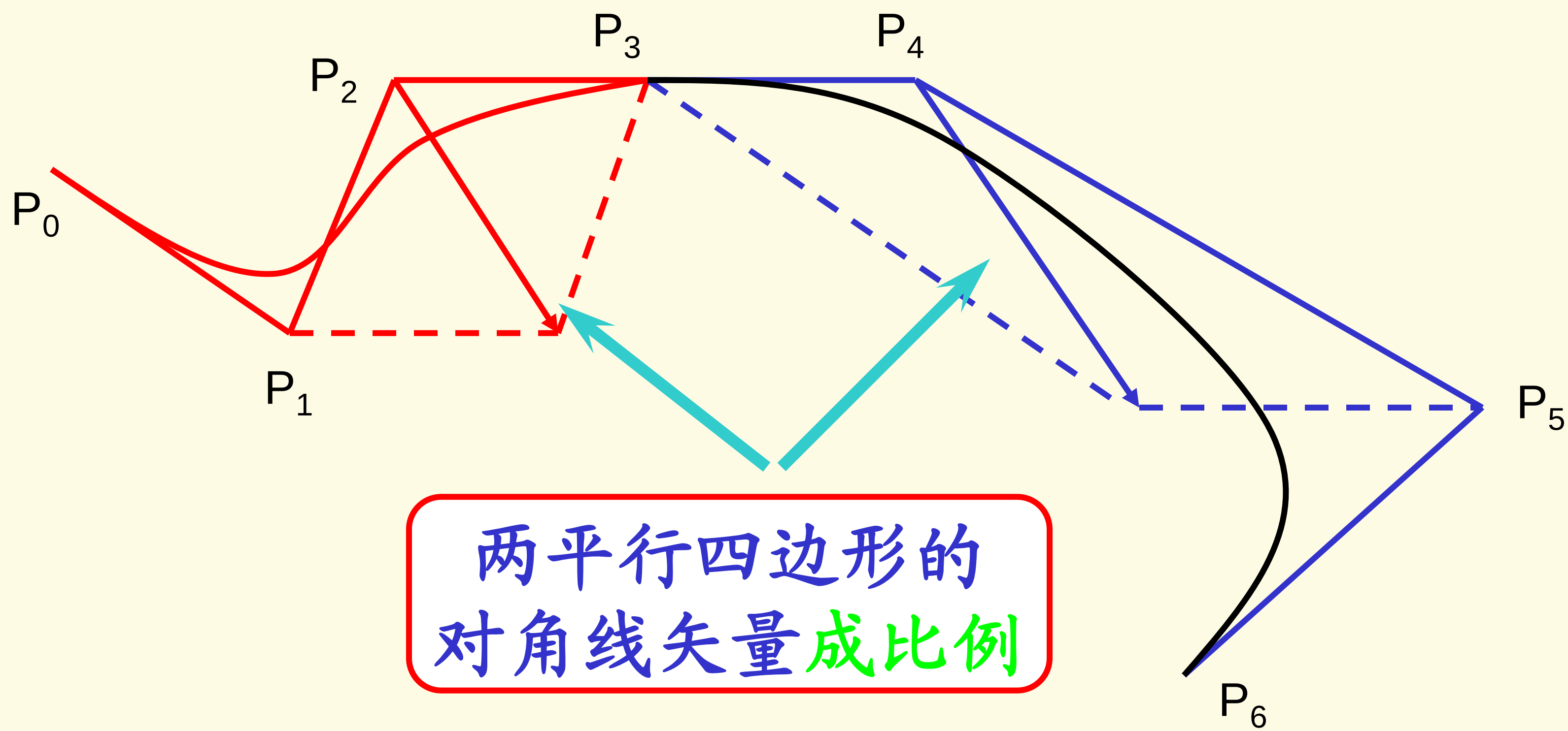
当r = 2时，在整体参数条件下C^2连续的条件为：

$$\begin{cases} \vec{b}_{ni} = \vec{b}_{ni} \\ \Delta_{i-1}\Delta\vec{b}_{ni} = \Delta_i\Delta\vec{b}_{ni-1} \\ (\Delta_{i-1})^2\,\Delta^2\vec{b}_{ni} = (\Delta_i)^2\,\Delta^2\vec{b}_{ni-2} \end{cases}$$

上式说明：1、$\vec{b}_{ni-2},\vec{b}_{ni-1},\vec{b}_{ni},\vec{b}_{ni+1},\vec{b}_{ni+2}$五个点共面。

2、$\vec{b}_{ni-2},\vec{b}_{ni-1},\vec{b}_{ni}$构成平行四边形的对角线与$\vec{b}_{ni},\vec{b}_{ni+1},\vec{b}_{ni+2}$构成平行四边形的对角线平行，且长度之比为$(\Delta_{i-1})^2:(\Delta_i)^2$。

第一节　参数连续的组合Bezier曲线



整体参数下C^2连续的组合Bezier曲线

第一节　参数连续的组合Bezier曲线

一般情况的表示:

由C^1连续的条件:

$$\vec{b}_{ni}=\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}+\Delta_i}\vec{b}_{ni-1}+\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1}+\Delta_i}\vec{b}_{ni+1}$$

可得:

$$\vec{b}_{ni+1}=\frac{\Delta_{i-1}+\Delta_i}{\Delta_{i-1}}\vec{b}_{ni}+(1-\frac{\Delta_{i-1}+\Delta_i}{\Delta_{i-1}})\vec{b}_{ni-1}$$

若令:

$$\bar{t}=\frac{\Delta_{i-1}+\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$$

第一节 参数连续的组合Bezier曲线

则上式可写为:

$$\vec{b}_{ni+1} = (1-\bar{t})\vec{b}_{ni-1} + \bar{t}\,\vec{b}_{ni}$$

根据deCasteljau算法，上式可记为:

$$\vec{b}_{ni+1} = \vec{b}^{1}_{ni-1}(\bar{t})$$

类似的，整体参数下，C^r连续的条件可写为:

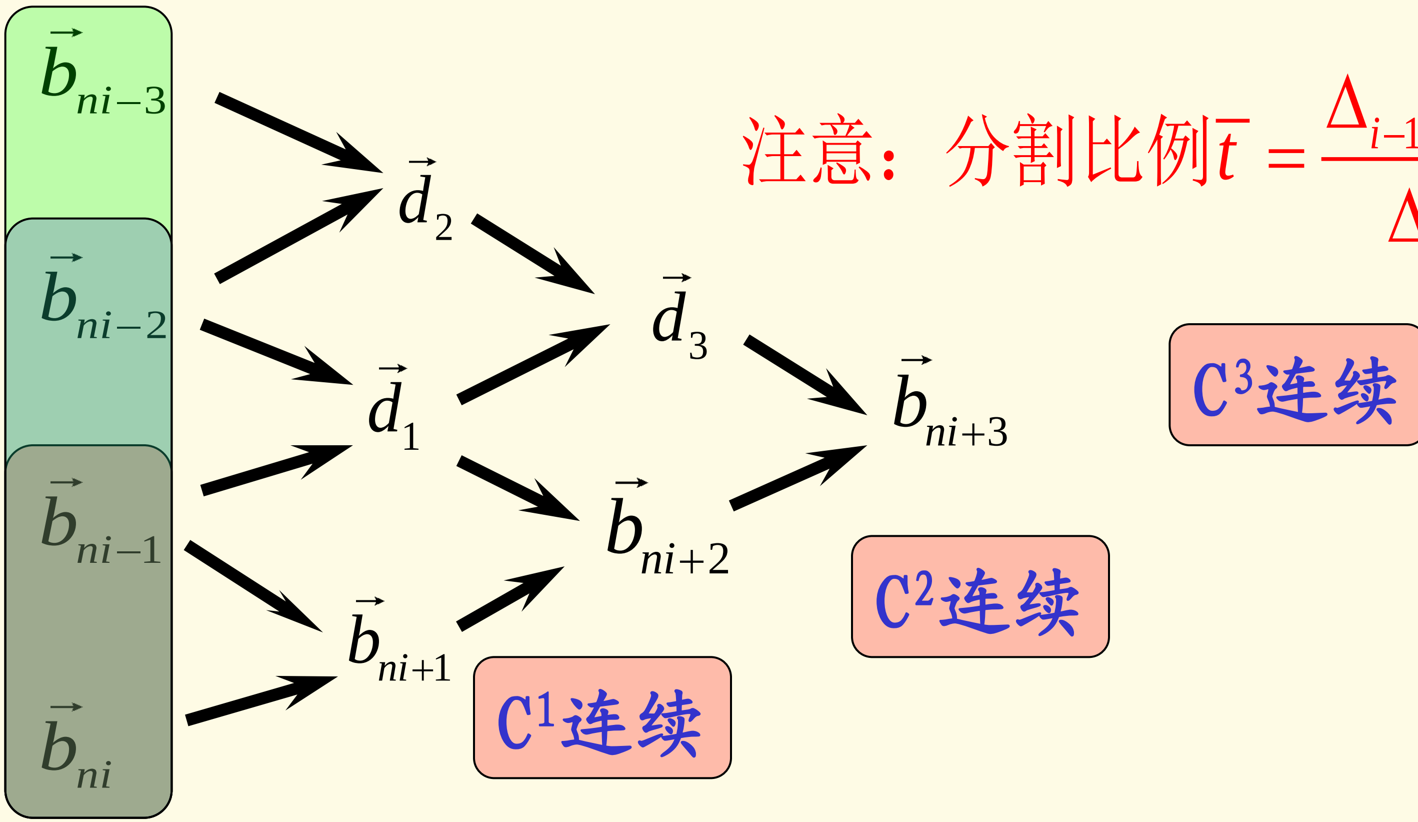
$$\vec{b}_{ni+k} = \vec{b}^{k}_{ni-k}(\bar{t}) \qquad k = 0,1,\cdots r$$

第一节　参数连续的组合Bezier曲线

可见，利用deCasteljau算法可以实现整体参数条件下的Bezier曲线拼接

$\vec{b}_{ni-k}$

$\vdots$



注意：分割比例$\bar{t} = \dfrac{\Delta_{i-1} + \Delta_i}{\Delta_{i-1}} > 1$

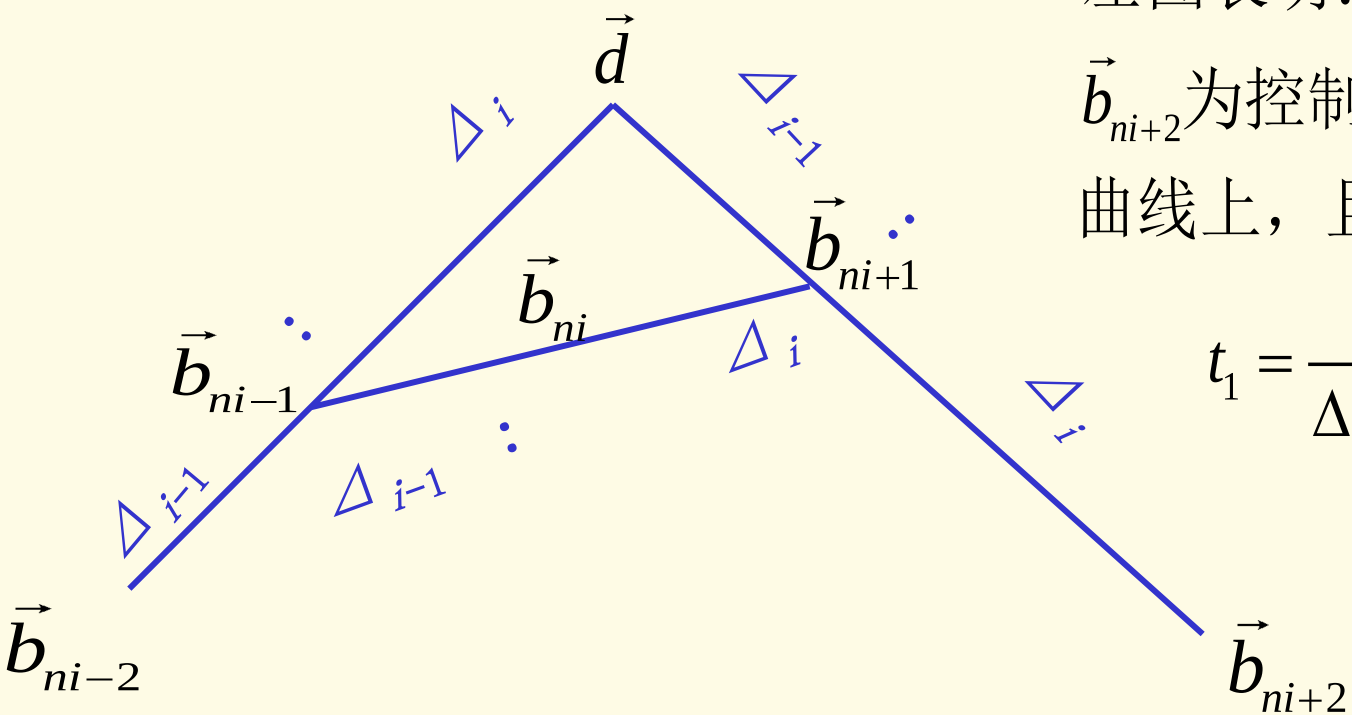
整体参数下C^2连续条件的另一种表示方法:

$$\begin{cases} \vec{b}_{ni+1} = \vec{b}^1_{ni-1}(\bar{t}) \\ \vec{b}_{ni+2} = \vec{b}^2_{ni-2}(\bar{t}) = (1-\bar{t})\vec{b}^1_{ni-2}(\bar{t}) + \bar{t}\,\vec{b}^1_{ni-1}(\bar{t}) \end{cases}$$

若令:$t_1 = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1}+\Delta_i}, \vec{d} = \vec{b}^1_{ni-2}$,则由上式可得:

$$\begin{cases} \vec{b}_{ni-1} = (1-t_1)\vec{b}_{ni-2} + t_1\vec{d} \\ \vec{b}_{ni+1} = (1-t_1)\vec{d} + t_1\vec{b}_{ni+2} \qquad 0 \le t_1 \le 1 \\ \vec{b}_{ni} = (1-t_1)\vec{b}_{ni-1} + t_1\vec{b}_{ni+1} \end{cases}$$

上式表明：存在一辅助顶点，使得$\overrightarrow{b_{ni-2}b_{ni-1}}$与$\overrightarrow{b_{ni+1}b_{ni+2}}$交于$\vec{d}$，且成下图的比例关系：



左图表明：$\vec{b}_{ni}$在以$\vec{b}_{ni-2}$、$\vec{d}$、$\vec{b}_{ni+2}$为控制顶点的二次Bezier曲线上，且对应的参数为：

$$t_1=\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1}+\Delta_i}$$

二、C^1二次与C^2三次样条曲线

1、C^1二次样条曲线

给定控制顶点$\vec{b}_j, j=0, 1, \cdots 2l$，它们构成了$l$段二次Bezier曲线，其中$\vec{b}_{2i}, i=1, \cdots l-1$为相邻两段的连接点，它们和首末端点对应的参数为：$u_0 < u_1 < \cdots < u_l$，$\vec{b}_{2i+1}$为每段内部的控制顶点。

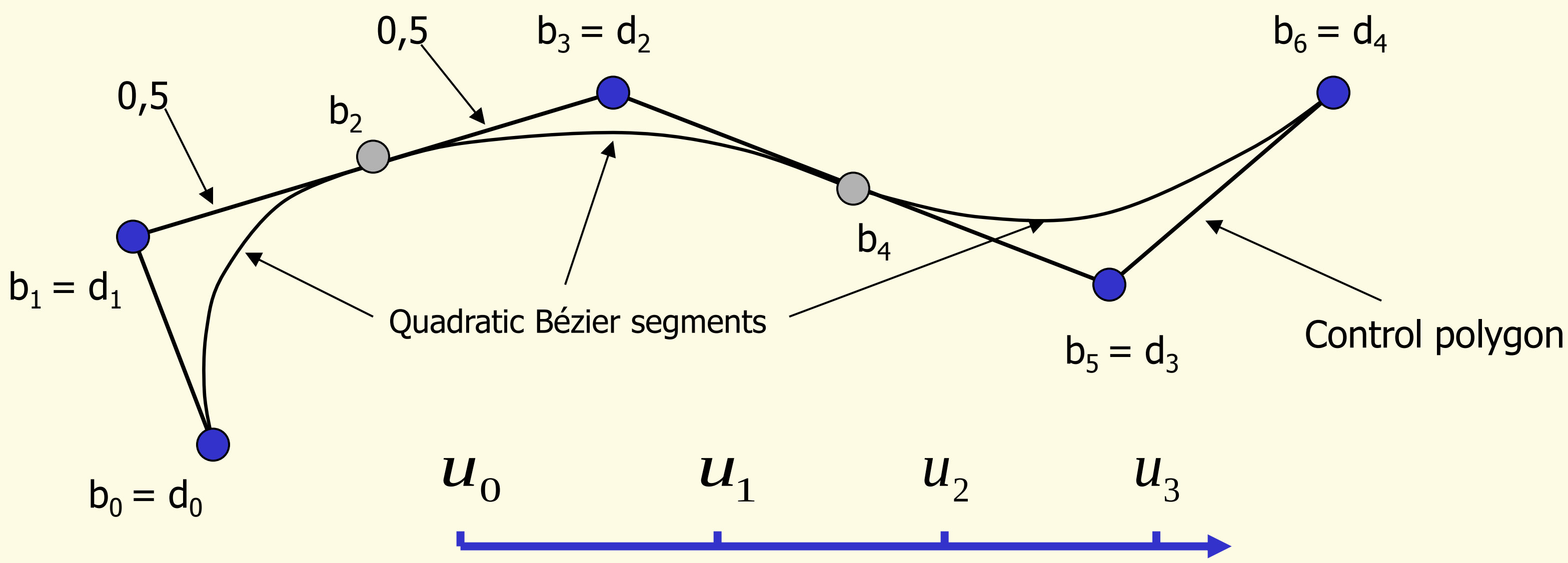
为满足C^1连续条件，这些控制顶点满足:

$$\vec{b}_{2i} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}+\Delta_i}\vec{b}_{2i-1} + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1}+\Delta_i}\vec{b}_{2i+1} \quad i=1,2,\cdots l-1$$

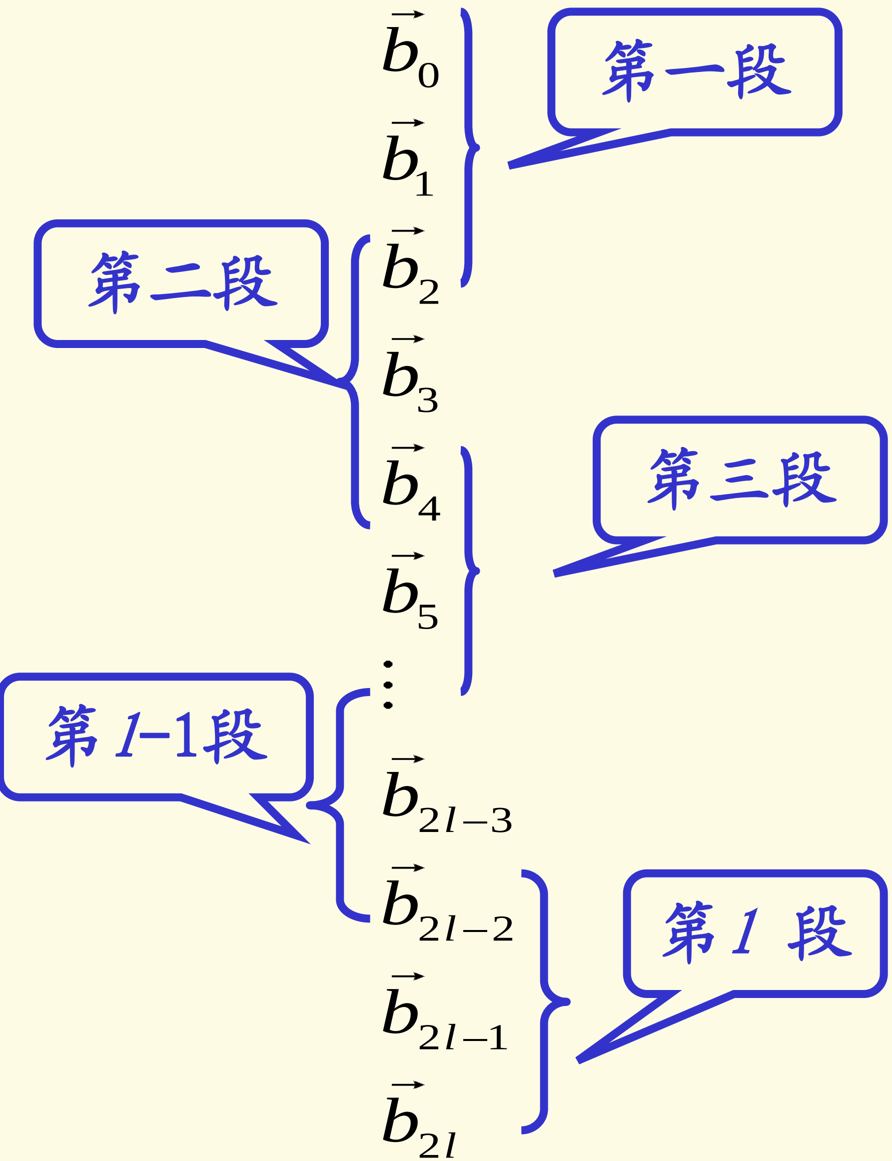
第一节 参数连续的组合Bezier曲线

记：$\vec{d}_0 = \vec{b}_0, \vec{d}_i = \vec{b}_{2i-1}, i = 1, 2, \cdots l, \vec{d}_{l+1} = \vec{b}_{2l+1}$

称$\vec{d}_i, i = 0, 1, \cdots l+1$为deBoor点，构成的多边形为B样条多边形或deBoor多边形，它们定义的样条曲线为B样条曲线。



第一节　参数连续的组合Bezier曲线



如此定义的C^1连续二次样条曲线具有局部修改性：

每移动一个顶点至多只影响三段相邻曲线段的形状，而对其它曲线段形状的没有影响。

2、C^2三次样条曲线

给定控制顶点$\vec{b}_j, j=0, 1,\cdots 3l$，它们构成了$l$段三次Bezier曲线，其中$\vec{b}_{3i}, i=1,\cdots l-1$为相邻两段的连接点，它们和首末端点对应的参数为：$u_0 < u_1 < \cdots < u_l$，$\vec{b}_{3i-1}$和$\vec{b}_{3i+1}$为每段内部的控制顶点。

根据Bezier曲线拼接的知识，为满足C^1连续条件，这些控制顶点满足：

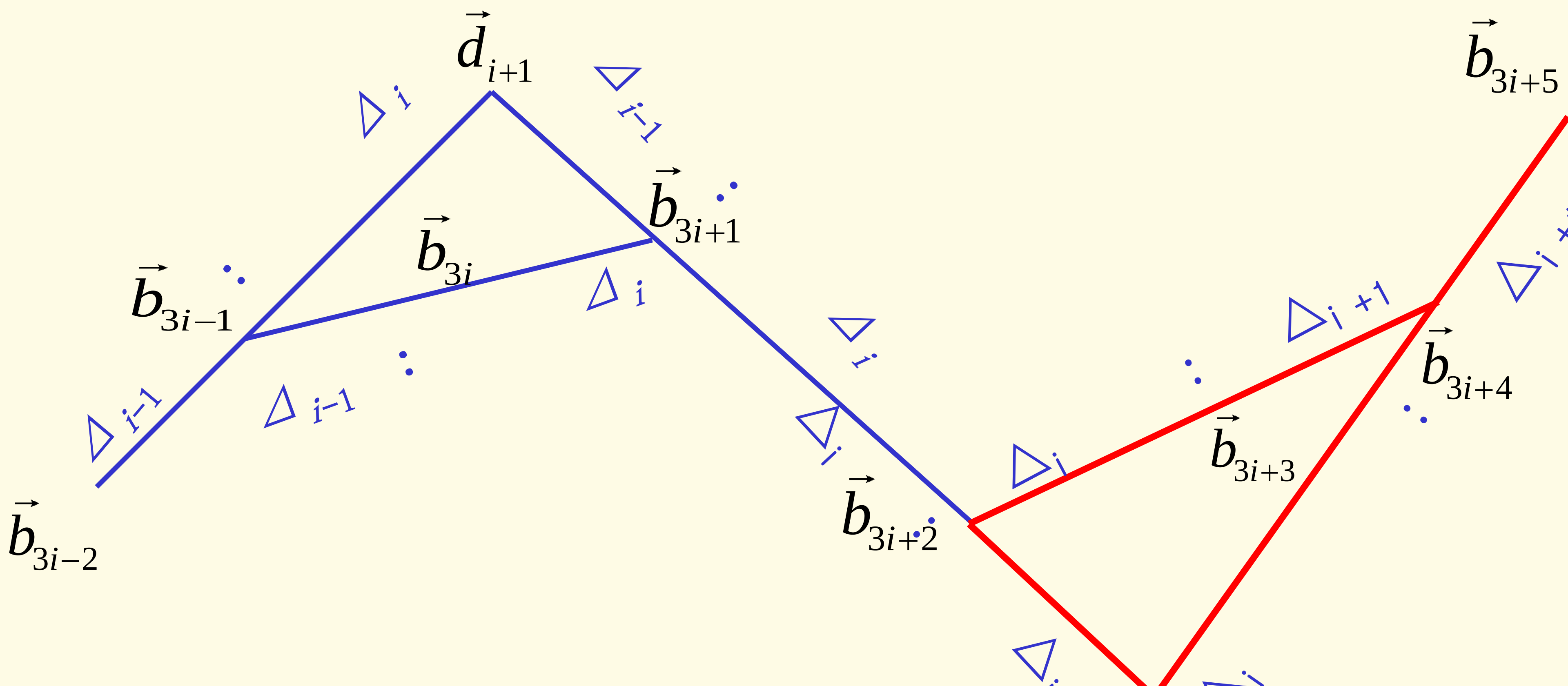
第一节 参数连续的组合Bezier曲线

首先，为了在$\vec{b}_{3i}$处达到C^1连续，$\vec{b}_{3i-1}$，$\vec{b}_{3i}$和$\vec{b}_{3i+1}$，$i=1,2,\cdots l-1$三点必须共线，且满足：

$$\vec{b}_{3i}=\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}+\Delta_i}\vec{b}_{3i-1}+\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1}+\Delta_i}\vec{b}_{3i+1} \quad i=1,2,\cdots l-1$$

其次，为了在$\vec{b}_{3i}$达到C^2连续，还必须存在一系列的辅助顶点$\vec{d}_i$,如图：

第一节　参数连续的组合Bezier曲线



$\vec{d}_{i+1},\vec{b}_{3i+1},\vec{b}_{3i+2},\vec{d}_{i+2}$四点共线，且成比例关系

相邻两段的控制顶点

第一节　参数连续的组合Bezier曲线

$\vec{d}_i, \vec{b}_{3i-2}, \vec{b}_{3i-1}, \vec{d}_{i+1}$四点共线，且成如下的比例关系：

令$\Delta = \Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i$，则：

$$\begin{cases} \vec{b}_{3i-2} = \dfrac{\Delta_{i-1} + \Delta_i}{\Delta} \vec{d}_i + \dfrac{\Delta_{i-2}}{\Delta} \vec{d}_{i+1} \\ \vec{b}_{3i-1} = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} \vec{d}_i + \dfrac{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1}}{\Delta} \vec{d}_{i+1} \end{cases}$$

$$i = 2, 3, \cdots l - 2$$

对于首末两段，有：

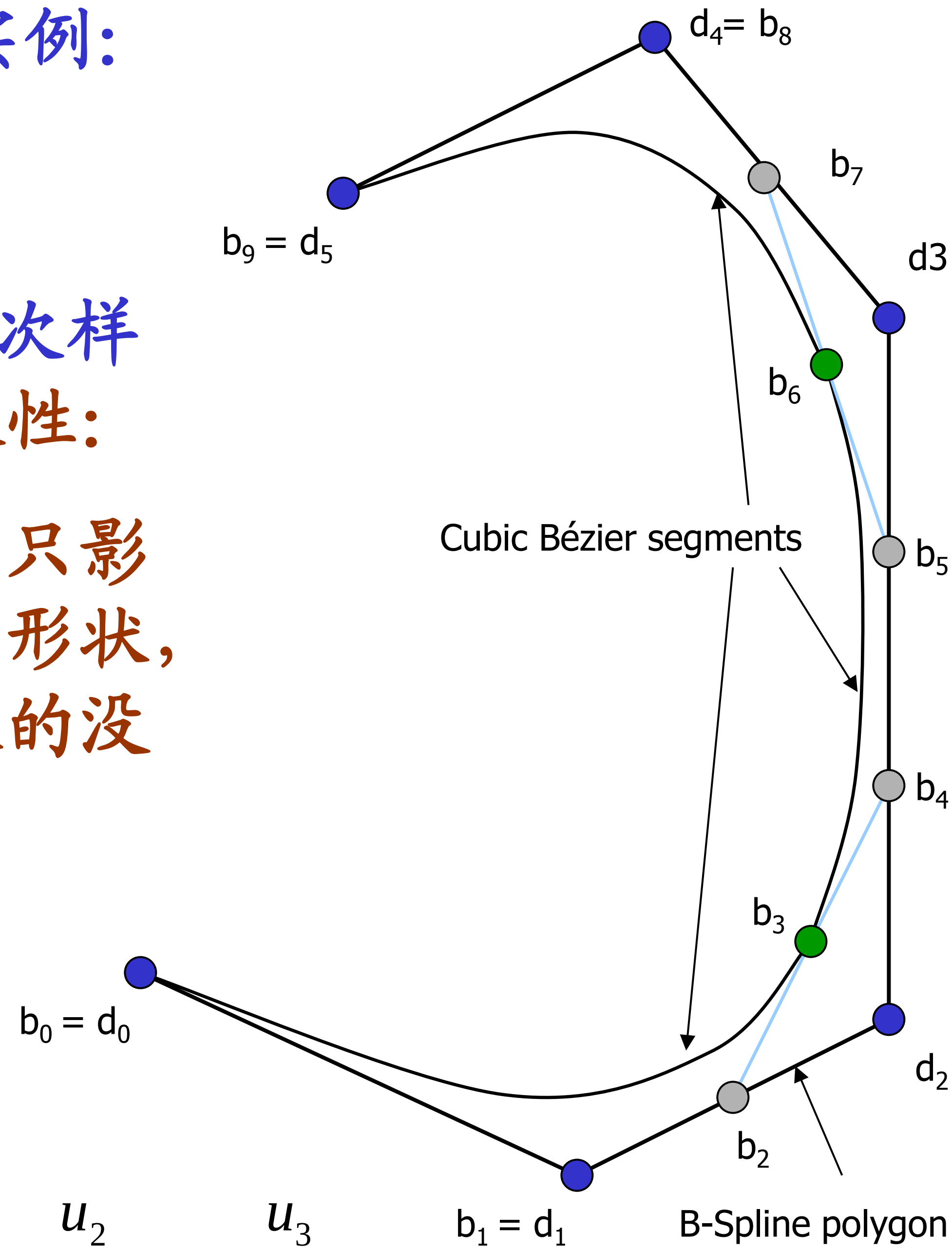
$$\begin{cases} \vec{b}_0 = \vec{d}_0, \vec{b}_1 = \vec{d}_1 \\ \vec{b}_2 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta_0 + \Delta_1}\vec{d}_1 + \dfrac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1}\vec{d}_2 \\ \vec{b}_{3l-1} = \vec{d}_{l+1}, \vec{b}_{3l} = \vec{d}_{l+2} \\ \vec{b}_{3l-2} = \dfrac{\Delta_{l-1}}{\Delta_{l-2} + \Delta_{l-1}}\vec{d}_l + \dfrac{\Delta_{l-2}}{\Delta_{l-2} + \Delta_{l-1}}\vec{d}_{l+1} \end{cases}$$

由$\vec{d}_0, \vec{d}_1, \cdots \vec{d}_{l+2}$确定的样条曲线称为三次B样条曲线

C^2连续三次样条曲线实例:

如此定义的C^2连续三次样条曲线具有局部修改性:

每移动一个顶点至多只影响四段相邻曲线段的形状,而对其它曲线段形状的没有影响。



第一节　结束

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

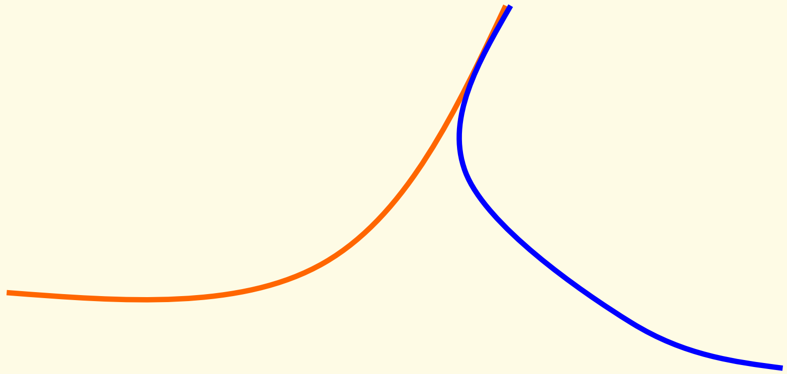
一、几何连续的概念

1、概念的提出:

目的：解决参数连续性和光滑性出现矛盾的问题。

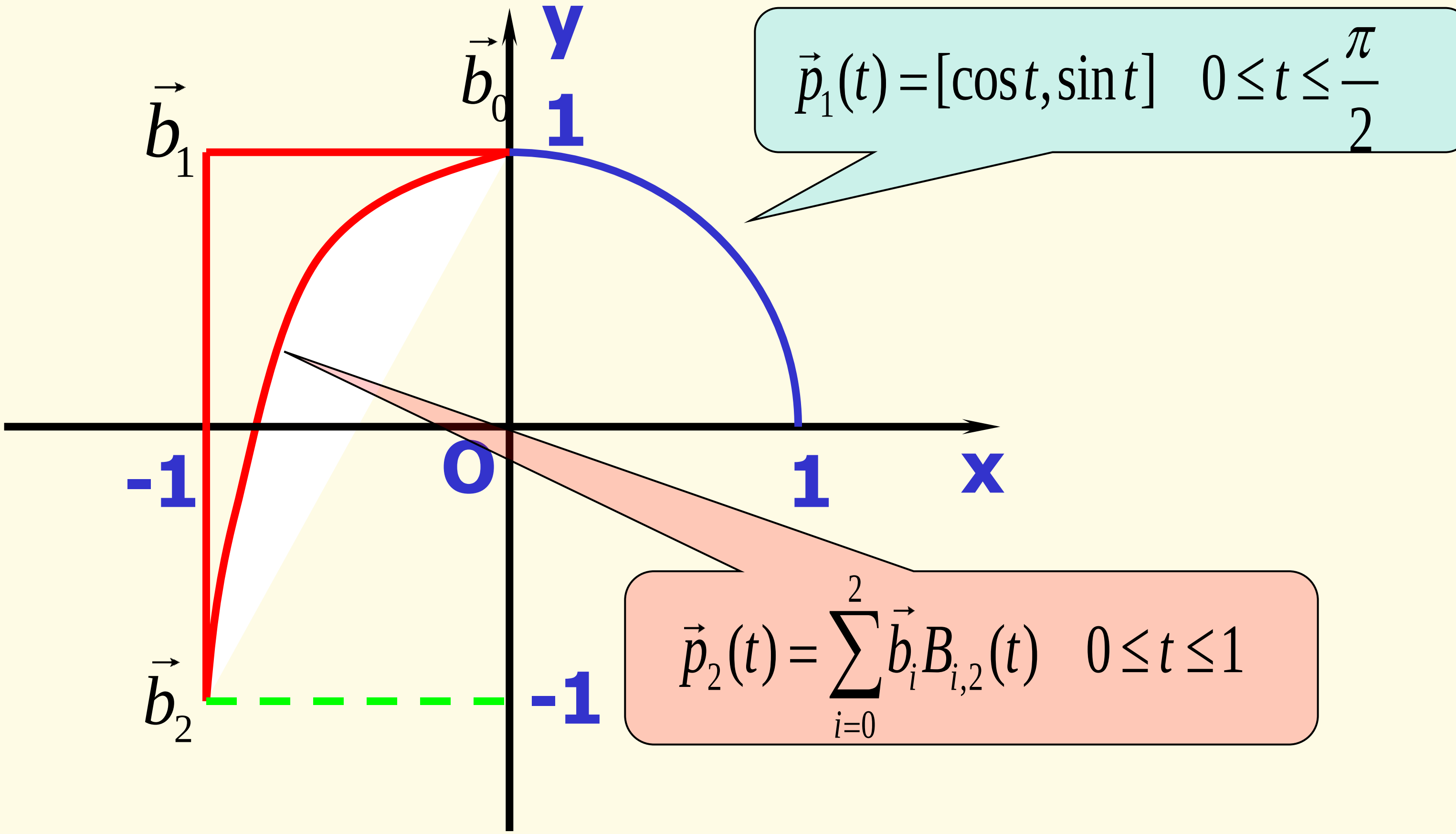
$$\vec{b}_{n-2}^{(1)} = \vec{b}_{n-1}^{(1)} = \vec{b}_{n}^{(1)} = \vec{b}_{0}^{(2)} = \vec{b}_{1}^{(2)} = \vec{b}_{2}^{(2)}$$

回顾



C^2连续但不光滑

举例：考察下图两条曲线在拼接点处的连续性：



其中:

$\vec{p}_1(t)$在[0,1]（即$t=\dfrac{\pi}{2}$）处的一、二阶切矢和曲率分别为:

$$\vec{p}_1'(\frac{\pi}{2})=[-\sin t,\cos t]\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=[-1,0]$$

$$\vec{p}_1''(\frac{\pi}{2})=[-\cos t,-\sin t]\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=[0,-1]$$

$$k_1(\frac{\pi}{2})=1$$

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

第二条曲线为二次Bezier曲线，它的控制顶点分别为:

$$\vec{b}_0=[0,1],\vec{b}_1=[-1,1],\vec{b}_2=[-1,-1]$$

曲率

连续

$\vec{p}_2(t)$在[0,1]（即t=0）处的一、二阶切矢和曲率分别为:

$$\vec{p}_2'(0)=2\Delta\vec{b}_0=[-2,0]\neq p_1'(\frac{\pi}{2})=[-1,0]$$

$$\vec{p}_2''(0)=2\cdot1\cdot\Delta^2\vec{b}_0=[2,-4]\neq\vec{p}_2''(\frac{\pi}{2})=[0,-1]$$

$$k_2(0)=\frac{1}{2}\frac{\left|\Delta\vec{b}_0\times\Delta\vec{b}_1\right|}{\left|\Delta\vec{b}_0\right|^3}=1=k_1(\frac{\pi}{2})$$

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

从上述两条曲线在拼接点处的连续性分析可知:

1、两条曲线在拼接点处只能是C^0连续。

2、尽管切矢不连续，但切矢方向是连续的。

3、尽管不是C^2连续，但曲率是连续的，两条曲线在拼接点处有公共的曲率圆，曲线具有较好的光滑性。说明不满足参数连续性的曲线也可以具有较好的光滑性。

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

2、几何连续的定义:

等价定义一:

两条曲线达到n阶几何连续，当且仅当两条曲线弧长参数化后，在连接点处达到C^n连续。

定义一说明在弧长参数下，C^n和G^n是一致的。

等价定义二:

两条曲线达到n阶几何连续，当且仅当两条曲线之一经适当地重新参数化后，可以使它们在连接点处达到正则的C^n连续。

定义二说明G^n经过重新参数化后，可以是C^n的。

n阶几何连续记作G^n

定义二说明正则的C^n 连续一定也是G^n连续的。

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

3、低阶几何连续的条件 设组合曲线为 $\vec{p}(u)$

1）G^0连续（位置连续）： $\vec{p}_-(u)=\vec{p}_+(u)$

2）G^1连续（切向连续）：

$$\begin{cases}\vec{p}_+(u)=\vec{p}_-(u)\\ \vec{p}'_+(u)=\alpha\,\vec{p}'_-(u) \quad \alpha>0\end{cases}$$

α=1，即为C^1连续

3）G^2连续（曲率连续与密切平面连续）：

$$\begin{cases}\vec{p}_+(u)=\vec{p}_-(u)\\ \vec{p}'_+(u)=\alpha\,\vec{p}'_-(u) \qquad \alpha>0\\ \vec{p}''_+(u)=\alpha^2\vec{p}''_-(u)+\beta\,\vec{p}'_-(u)\end{cases}$$

α=1，β=0

即为C^2连续

二、Bezier曲线低阶几何连续的拼接条件

1、G^0连续条件:

无论是局部参数条件还是整体参数下，G^0连续的条件都是相邻两段的首末控制顶点重合。

2、G^1连续条件:

设两条n次Bezier曲线段为:

$$\vec{s}_i(t)=\sum_{j=0}^{n}\vec{b}_{ni+j}B_{j,n}(t)\quad t\in[0,1],\quad i=0,1$$

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

由**Bezier**曲线的性质和**G¹**连续的定义可知：

要使 $\vec{s}_0'(1)=\alpha\vec{s}_1'(0)\quad(\alpha>0)$ 成立，需：

$$\Delta\vec{b}_n=\frac{1}{\alpha}\Delta\vec{b}_{n-1}=\delta\Delta\vec{b}_{n-1}$$

即： $\vec{b}_{n+1}=\vec{b}_n+\delta(\vec{b}_n-\vec{b}_{n-1})\quad\delta>0$

所以，要使两条**n**次**Bezier**曲线达到**G¹**连续，只需：

$\vec{b}_{n-1},\vec{b}_n,\vec{b}_{n+1}$三点共线，并按照顺序排列即可

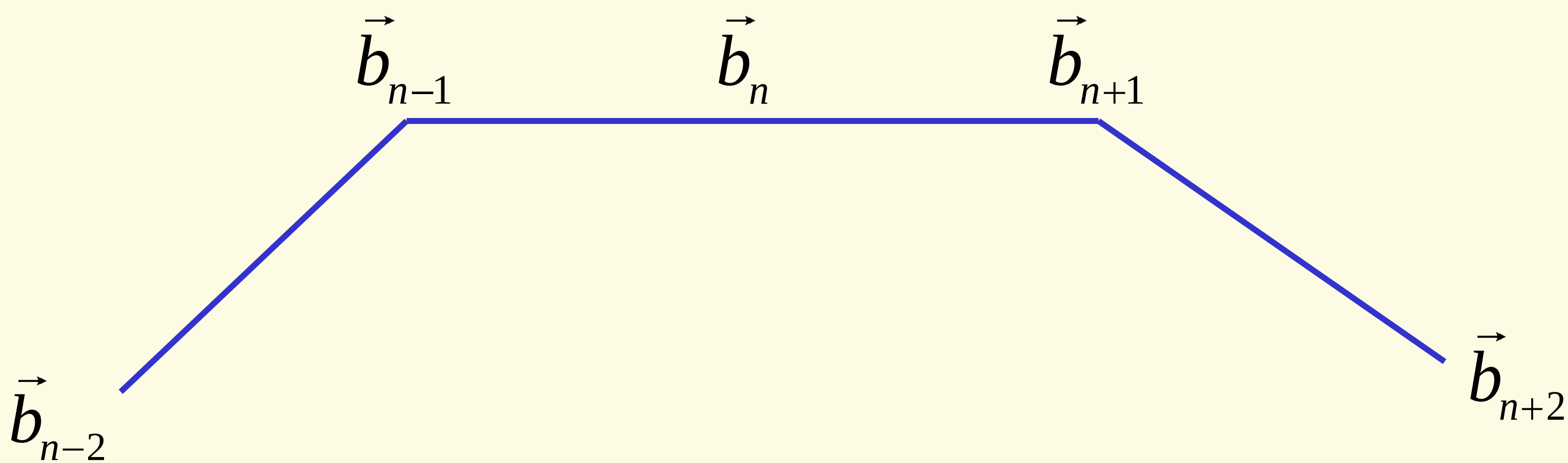
第二节 几何连续的组合Bezier曲线

3、G^2连续条件:

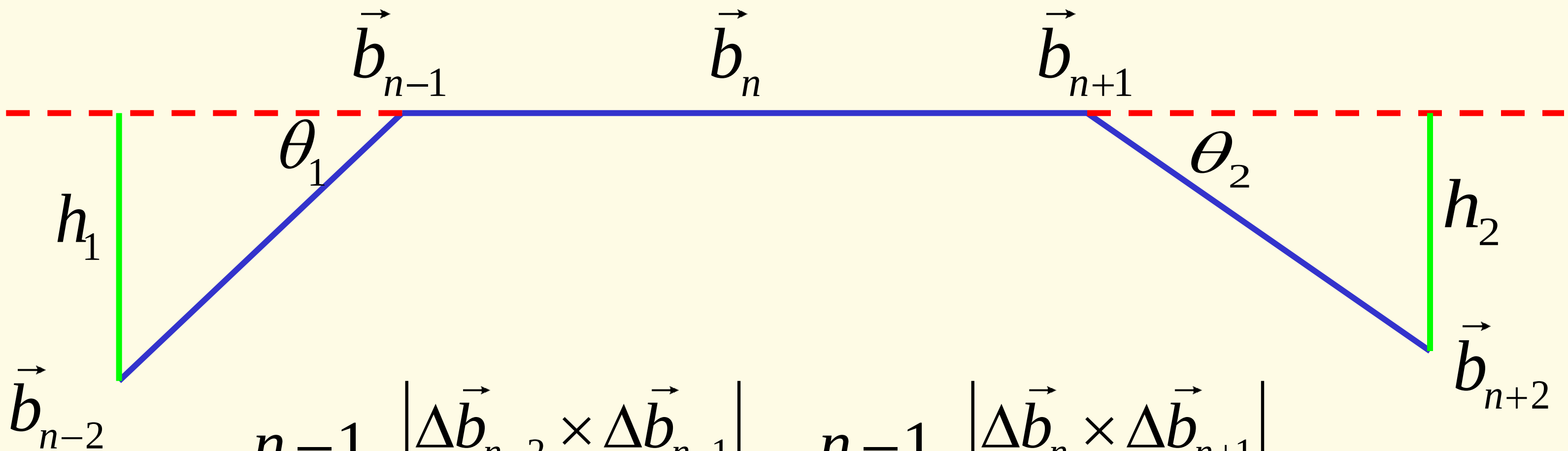
1）局部参数条件下:　　由曲率连续的条件可知:

$$k_1(1) = k_2(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\left|\Delta \vec{b}_{n-2} \times \Delta \vec{b}_{n-1}\right|}{\left|\Delta \vec{b}_{n-1}\right|^3} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\left|\Delta \vec{b}_{n} \times \Delta \vec{b}_{n+1}\right|}{\left|\Delta \vec{b}_{n}\right|^3}$$



第二节 几何连续的组合Bezier曲线



$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\left|\Delta\vec{b}_{n-2}\times\Delta\vec{b}_{n-1}\right|}{\left|\Delta\vec{b}_{n-1}\right|^3}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\left|\Delta\vec{b}_{n}\times\Delta\vec{b}_{n+1}\right|}{\left|\Delta\vec{b}_{n}\right|^3}$$

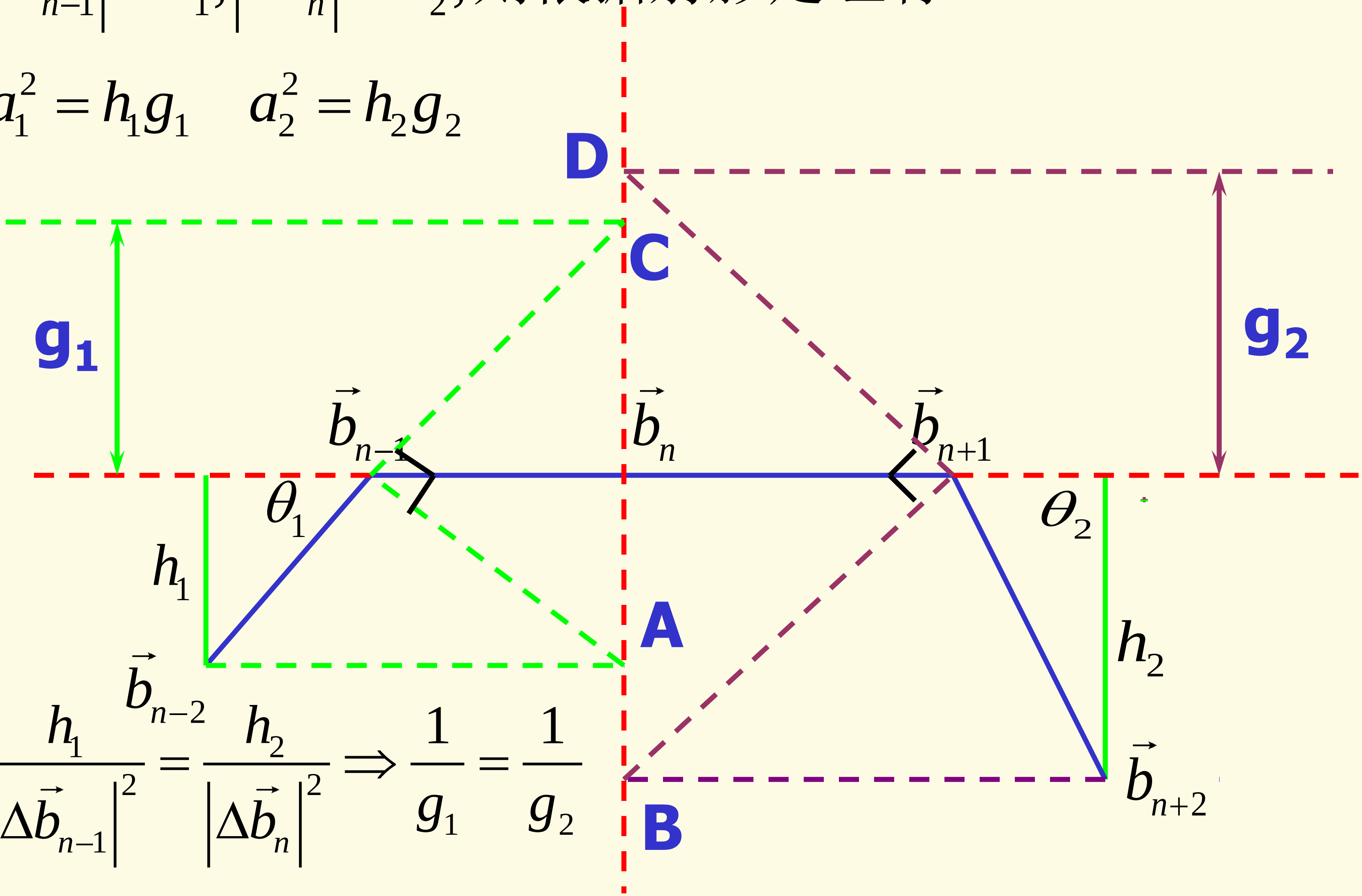
$$\Leftrightarrow\quad\frac{\left|\Delta\vec{b}_{n-2}\right|\left|\Delta\vec{b}_{n-1}\right|\sin\theta_1}{\left|\Delta\vec{b}_{n-1}\right|^3}=\frac{\left|\Delta\vec{b}_{n}\right|\left|\Delta\vec{b}_{n+1}\right|\sin\theta_2}{\left|\Delta\vec{b}_{n}\right|^3}$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{h_1}{\left|\Delta\vec{b}_{n-1}\right|^2}=\frac{h_2}{\left|\Delta\vec{b}_{n}\right|^2}$$

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

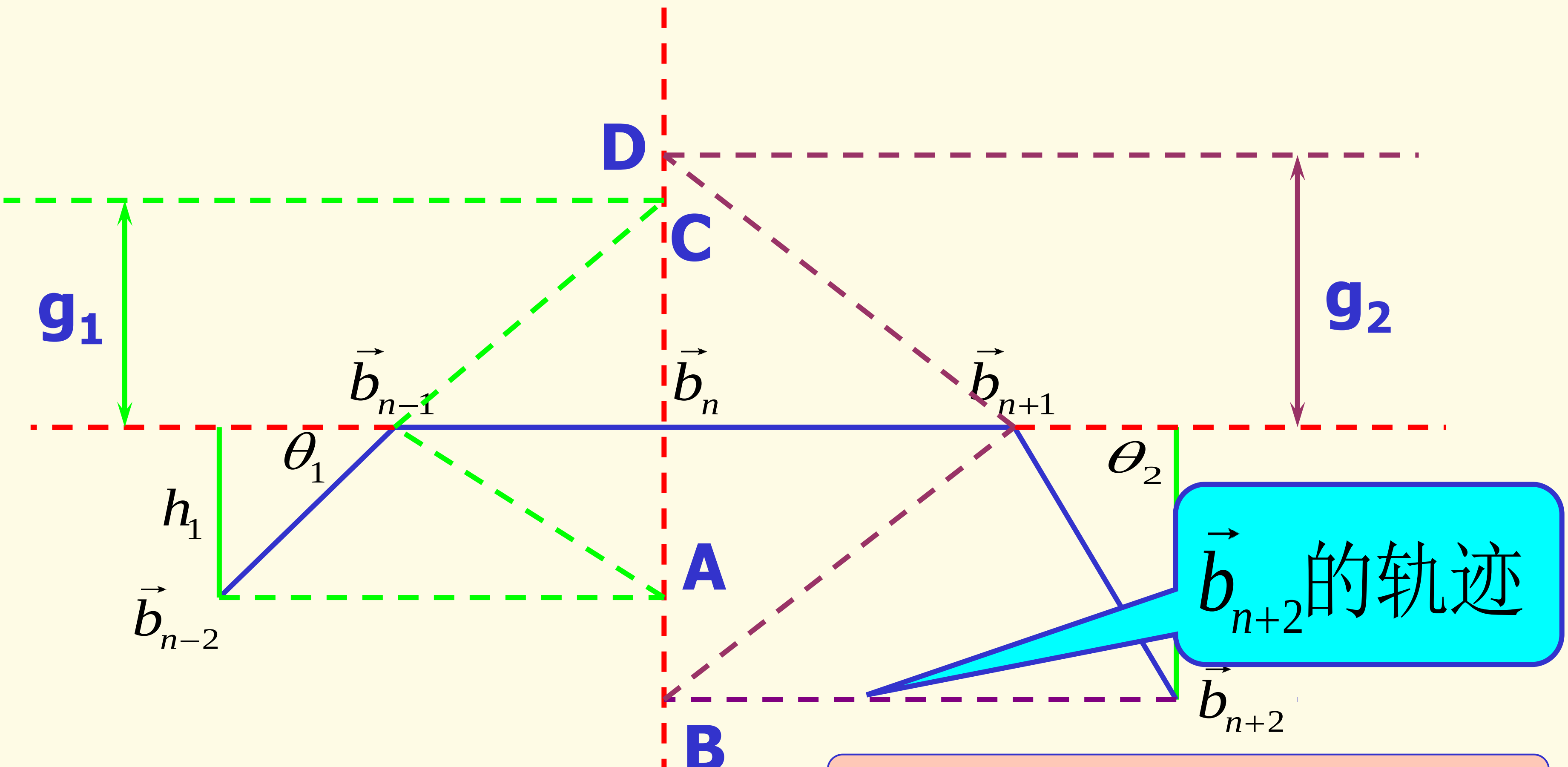
令$\left|\Delta\vec{b}_{n-1}\right| = a_1, \left|\Delta\vec{b}_n\right| = a_2$,则根据射影定理有:

$$a_1^2 = h_1 g_1 \quad a_2^2 = h_2 g_2$$



$$\frac{h_1}{\left|\Delta\vec{b}_{n-1}\right|^2} = \frac{h_2}{\left|\Delta\vec{b}_n\right|^2} \Rightarrow \frac{1}{g_1} = \frac{1}{g_2}$$

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

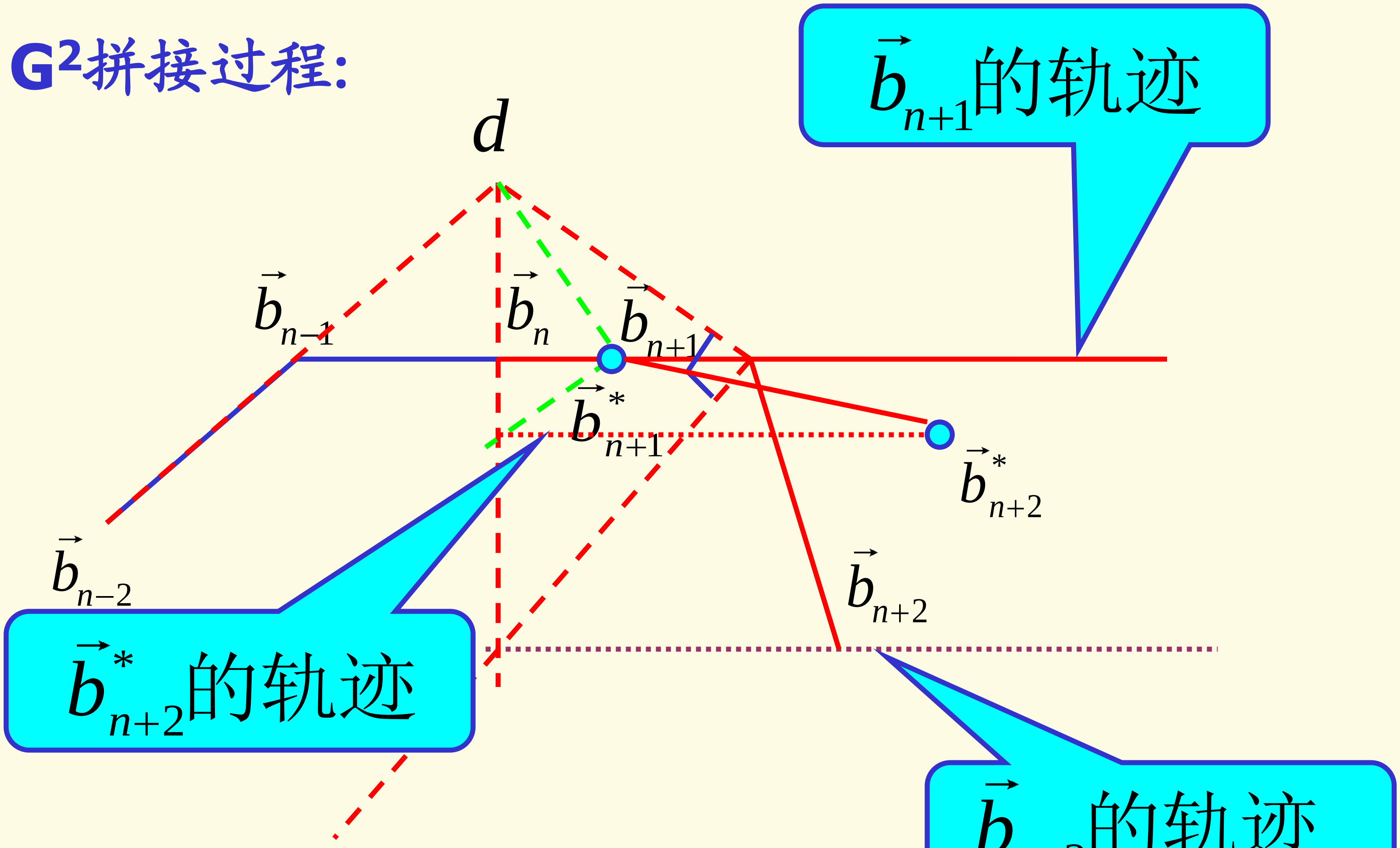


$$\frac{h_1}{\left|\Delta\vec{b}_{n-1}\right|^2}=\frac{h_2}{\left|\Delta\vec{b}_n\right|^2}\Rightarrow\frac{1}{g_1}=\frac{1}{g_2}$$

G^2连续的拼接条件

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

G^2拼接过程:



第二节 几何连续的组合Bezier曲线

2）整体参数条件下G^2C^1连续的条件：

设由两段n次Bezier曲线段构成的组合Bezier曲线定义在参数分割$\Delta_u: u_0 < u_1 < u_2$上。

在整体参数下，可以通过调整$\vec{b}_{n+1}$或$\vec{b}_{n-1}$的位置，使得：

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0} = \frac{\left|\Delta\vec{b}_n\right|}{\left|\Delta\vec{b}_{n-1}\right|}$$

成立，从而使曲线达到C^1连续，下面研究整体参数下实现G^2C^1连续的条件。

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

根据几何连续的定义可知:G^2连续即为弧长参数意义下的C^2连续,即:

$$\ddot{\vec{p}}_-(s)=\ddot{\vec{p}}_+(s)$$

设一般参数*u*为*s*的二阶可导函数*u=u(s)*

根据链式求导法则,由上式可得:

$$\vec{p}''_+(u)-\vec{p}''_-(u)=\gamma(u)\vec{p}'(u) \qquad (*)$$

其中:

$$\gamma(u)=\frac{u''_- - u''_+}{(u')^2}$$

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

对于G^2分段参数多项式曲线，可将$\gamma(u)$取作：

$$\gamma(u)=\begin{cases}\gamma_i & u=u_i\\ 0 & u\neq u_i\end{cases}$$

上述结论对于一般的参数曲线都成立，下面推导对于**Bezier**曲线的结果：

用$\vec{p}'(u)$叉乘下式两边：

$$\vec{p}''_+(u)-\vec{p}''_-(u)=\gamma(u)\vec{p}'(u)$$

得：$\vec{p}''_-(u_1)\times\vec{p}'(u_1)=\vec{p}''_+(u_1)\times\vec{p}'(u_1)$

根据**Bezier**曲线的性质，得：

$$\frac{\left|\Delta\vec{b}_{n-2}\times\Delta\vec{b}_{n-1}\right|}{(\Delta_0)^3}=\frac{\left|\Delta\vec{b}_{n}\times\Delta\vec{b}_{n+1}\right|}{(\Delta_1)^3} \qquad (**)$$

即：

$$\frac{S_{\Delta\vec{b}_{n-2}\vec{b}_{n-1}\vec{b}_{n}}}{S_{\Delta\vec{b}_{n}\vec{b}_{n+1}\vec{b}_{n+2}}}=\left(\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\right)^3$$

根据**C¹**连续条件：

$$\frac{\left|\Delta\vec{b}_{n-1}\right|}{\left|\Delta\vec{b}_{n}\right|}=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}$$

得：

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

$$\frac{S_{\Delta \vec{b}_{n-2}\vec{b}_{n-1}\vec{b}_n}}{S_{\Delta \vec{b}_n\vec{b}_{n+1}\vec{b}_{n+2}}}=\left(\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\right)^3=\left(\frac{\left|\Delta \vec{b}_{n-1}\right|}{\left|\Delta \vec{b}_n\right|}\right)^3$$

上式说明局部参数条件下的G^2连续拼接条件和整体参数下的G^2C^1连续拼接条件是一致的。

对上式继续进行化简，可得:

$$\frac{\Delta \vec{b}_{n-2}\times(\vec{b}_{n+1}-\vec{b}_{n-1})}{(\Delta_0)^2}=\frac{(\vec{b}_{n+1}-\vec{b}_{n-1})\times\Delta \vec{b}_{n+1}}{(\Delta_1)^2}$$

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

记：$A_{-}=S_{\Delta\vec{b}_{n-2}\vec{b}_{n-1}\vec{b}_{n+1}}, A_{+}=S_{\Delta\vec{b}_{n-1}\vec{b}_{n+1}\vec{b}_{n+2}}$

两条n次Bezier曲线在整体参数下达到G^2C^1连续的条件为：

$$\frac{A_{-}}{A_{+}}=\left(\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\right)^2$$

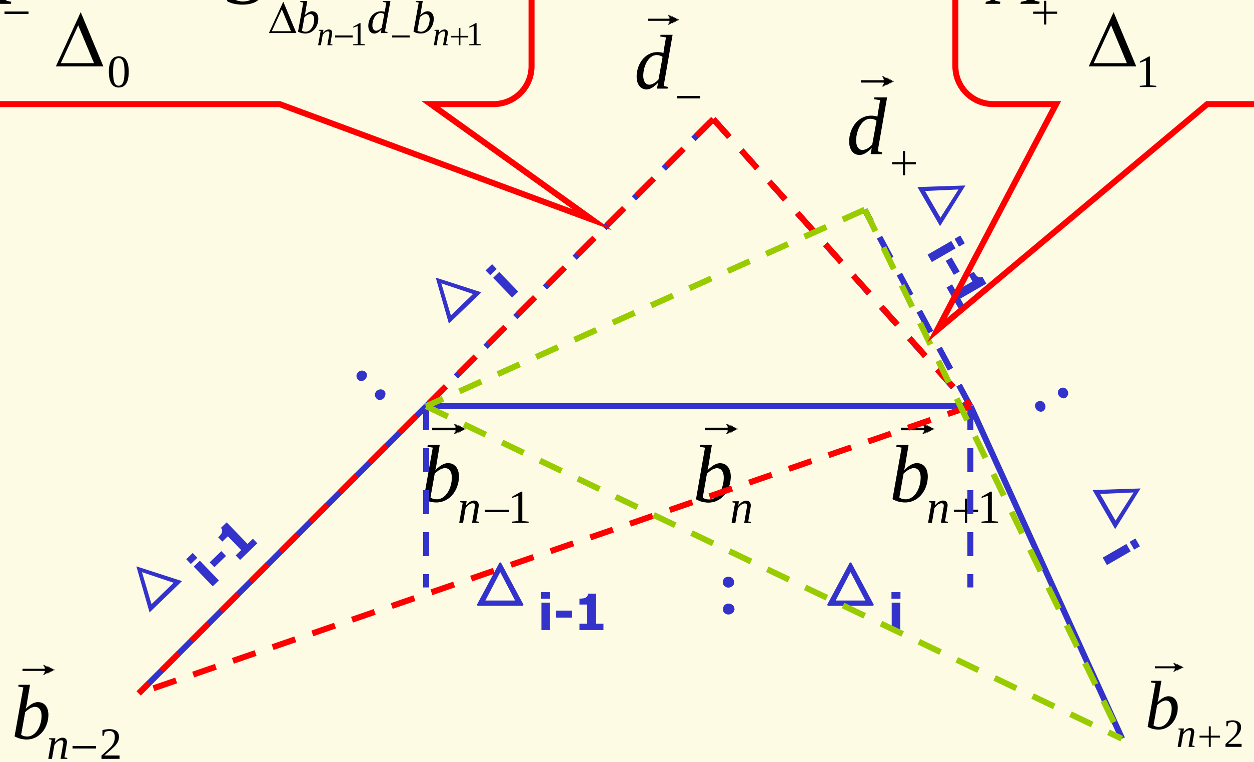
即：

$$A_{-}\frac{\Delta_1}{\Delta_0}=A_{+}\frac{\Delta_0}{\Delta_1}$$

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

$$A_{-}\frac{\Delta_1}{\Delta_0}=S_{\Delta\vec{b}_{n-1}\vec{d}_{-}\vec{b}_{n+1}}$$

$$A_{+}\frac{\Delta_0}{\Delta_1}=S_{\Delta\vec{b}_{n-1}\vec{d}_{+}\vec{b}_{n+1}}$$



G^2C^1拼接条件：$A_{-}\frac{\Delta_1}{\Delta_0}=A_{+}\frac{\Delta_0}{\Delta_1}$

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

从上图可以看出，满足G^2C^1连续条件的 $\vec{d}_-$和$\vec{d}_+$ 不唯一，也不一定重合，即不一定满足C^2连续的条件。

三、G^2连续三次样条曲线

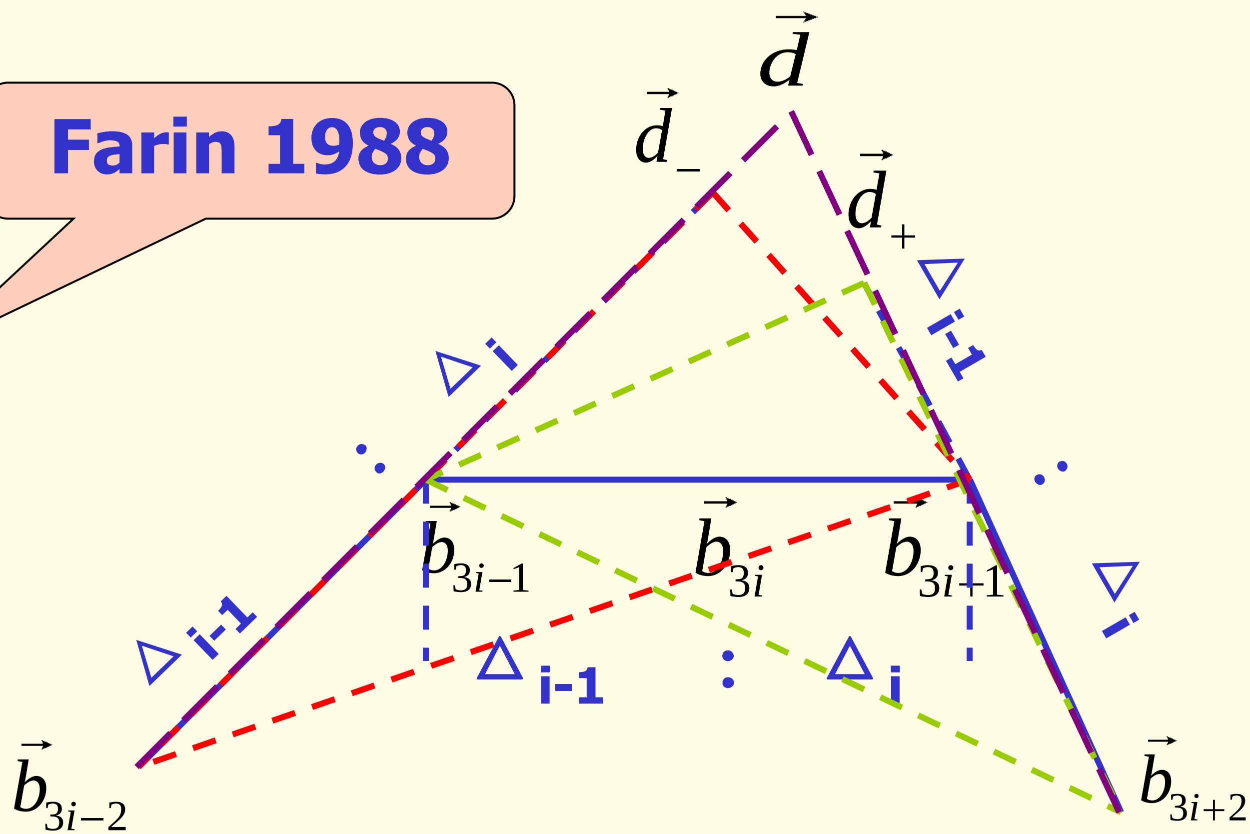
1、Gamma样条曲线

1987年Boehm根据上述G^2C^1连续条件，设计了一种整体参数的G^2C^1连续三次样条曲线，称为γ（Gamma）—样条曲线，它可以在保持G^2C^1连续的同时，通过调整一系列的形状参数的大小，调整曲线形状。

记：$A_- \dfrac{\Delta_1}{\Delta_0} = A_+ \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1} = A \qquad \gamma_i = \dfrac{S_{\Delta \vec{b}_{3i-1}\vec{d}\vec{b}_{3i+1}}}{A}$

$$\begin{cases} \dfrac{\left|\overrightarrow{b_{3i-2}b_{3i-1}}\right|}{\left|\overrightarrow{b_{3i-1}d}\right|} = \dfrac{\Delta_{i-1}}{\gamma_i \Delta_i} \\ \dfrac{\left|\overrightarrow{db_{3i+1}}\right|}{\left|\overrightarrow{b_{3i+1}b_{3i+2}}\right|} = \dfrac{\gamma_i \Delta_{i-1}}{\Delta_i} \\ \dfrac{\left|\overrightarrow{b_{3i}b_{3i+1}}\right|}{\left|\overrightarrow{b_{3i-1}b_{3i}}\right|} = \dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} = \delta_i \end{cases}$$

Farin 1988



Gamma样条的算法:

给出控制顶点:$\vec{d}_0,\vec{d}_1,\cdots\vec{d}_{L+1},\vec{d}_{L+2}$,以及它们对应的参数:

$u_0<u_1<\cdots<u_L$,每一段对应的形状参数:γ_1, $\gamma_2,\cdots\gamma_{L-1}$,

由上式可得:

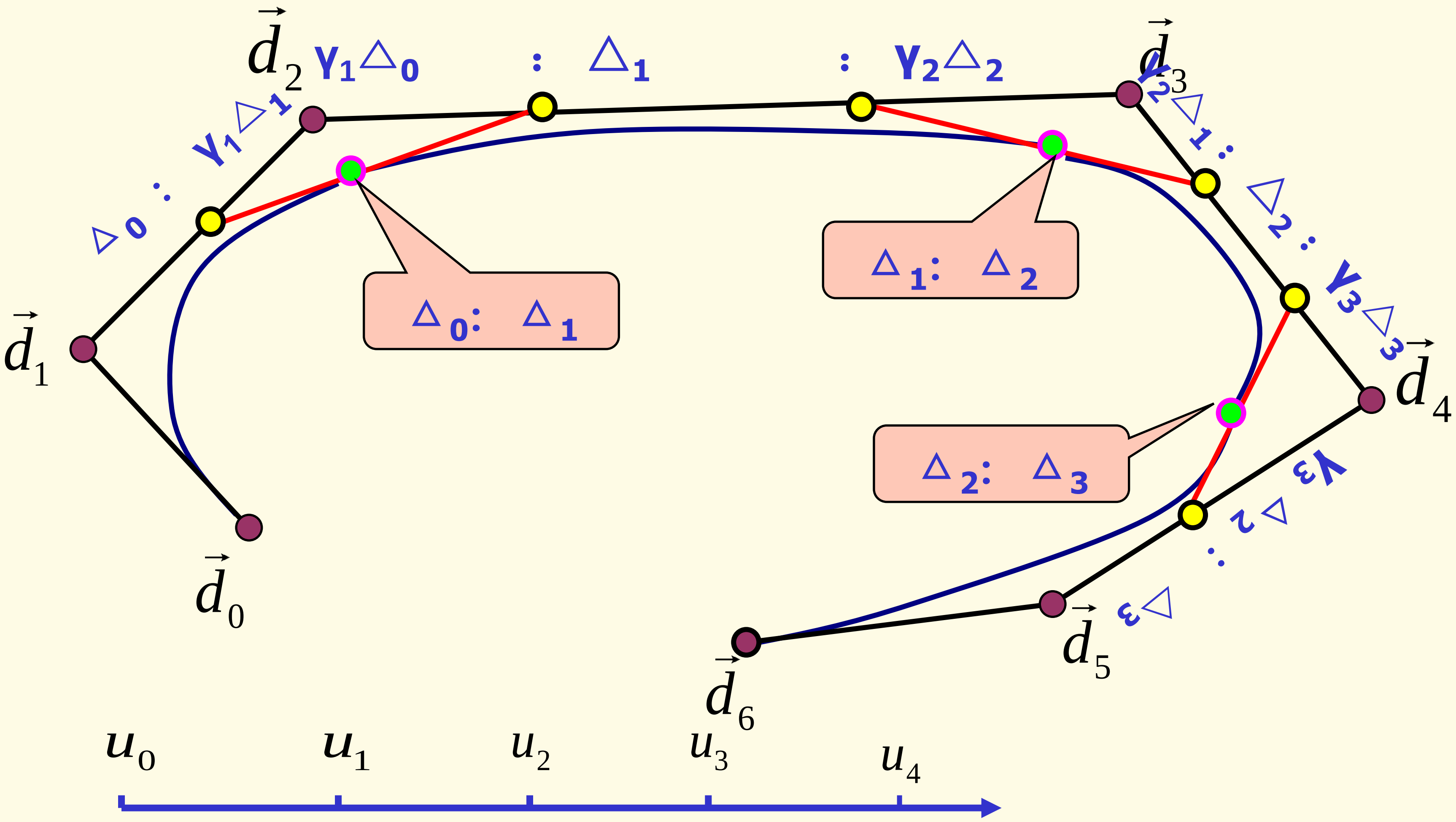
γ_i=1时即为C^2连续样条曲线

$$\begin{cases}\vec{b}_{3i-2}=\dfrac{\Delta_{i-1}+\gamma_i\Delta_i}{\Delta}\vec{d}_i+\dfrac{\gamma_{i-1}\Delta_{i-2}}{\Delta}\vec{d}_{i+1}\\ \vec{b}_{3i-1}=\dfrac{\gamma_i\Delta_i}{\Delta}\vec{d}_i+\dfrac{\Delta_{i-1}+\gamma_{i-1}\Delta_{i-2}}{\Delta}\vec{d}_{i+1}\\ \vec{b}_{3i}=\dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}+\Delta_i}\vec{b}_{3i-1}+\dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1}+\Delta_i}\vec{b}_{3i-1}\end{cases}$$

其中:

$$\Delta=\gamma_{i-1}\Delta_{i-2}+\Delta_{i-1}+\gamma_i\Delta_i$$

Gamma样条举例

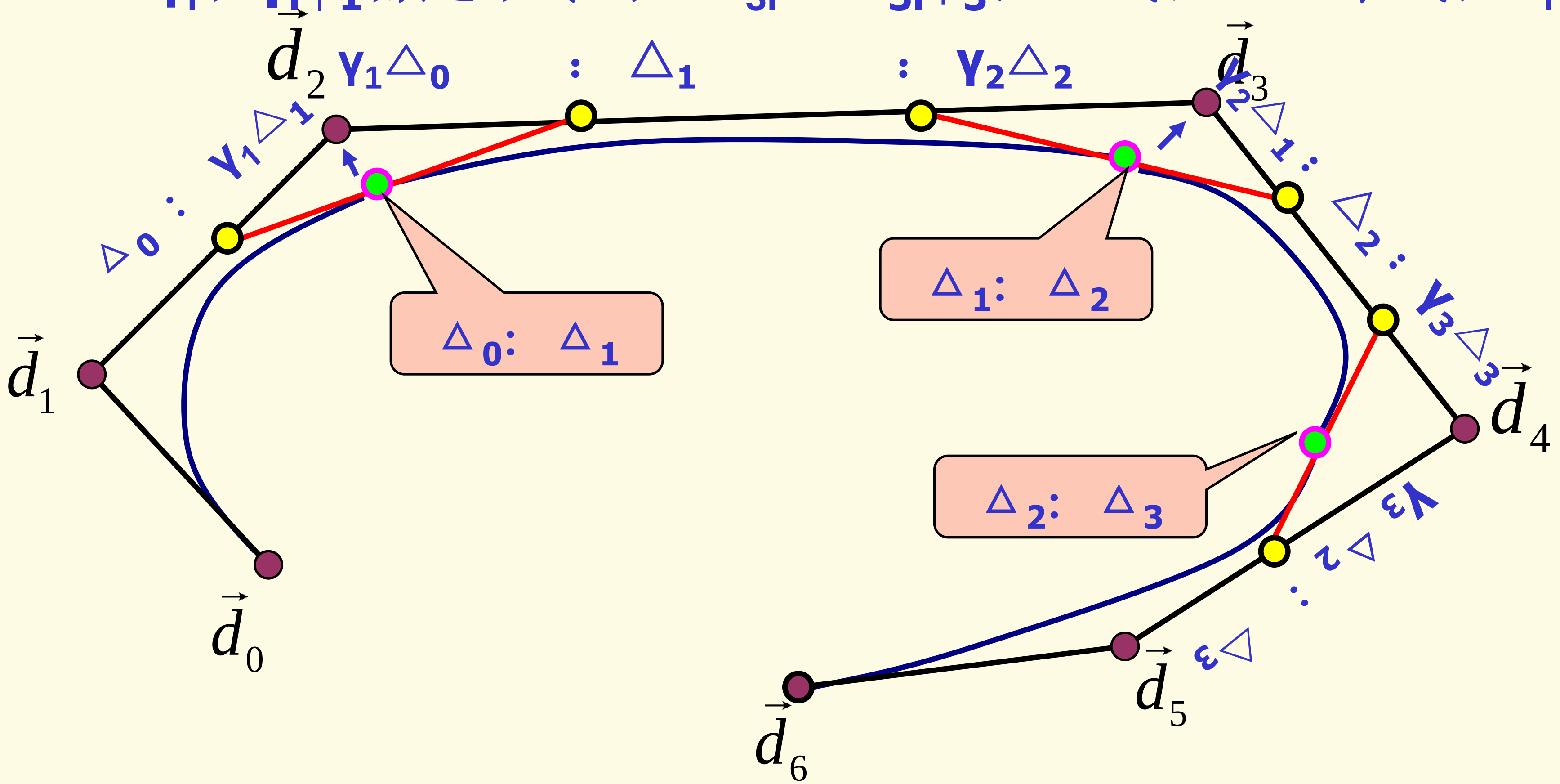

$\vec{d}_2$
$\gamma_1\triangle_0$
:
$\triangle_1$
:
$\gamma_2\triangle_2$
$\vec{d}_3$
$\gamma_1\triangle_1$
$\triangle_0$
:
$\vec{d}_1$
$\triangle_0$: $\triangle_1$
$\triangle_1$: $\triangle_2$
$\gamma_2\triangle_1$:
$\triangle_2$:
$\gamma_3\triangle_3$
$\vec{d}_4$
$\triangle_2$: $\triangle_3$
γ_3
$\triangle_2$
:
$\triangle_3$
$\vec{d}_0$
$\vec{d}_5$
$\vec{d}_6$
u_0
u_1
u_2
u_3
u_4

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

形状参数对曲线形状的影响:

γ_i减小时，b_{3i}及其曲线段将被拉向d_{i+1}

γ_i和γ_{i+1}都趋于零时，b_{3i}～ b_{3i+3}段曲线被趋近于线段$d_i d_{i+1}$



第二节 几何连续的组合Bezier曲线

2、Beta样条曲线

实质：一种从局部参数条件下的G²拼接条件出发，推出的G²连续样条曲线。

回顾 局部参数条件下的G²拼接条件

$$
\begin{cases}
\vec{s}_1(0) = \vec{s}_0(1) \\
\vec{s}_1'(0) = \beta_1 \vec{s}_0{}'(1) \quad \beta_1 > 0 \\
\vec{s}_1''(0) = \beta_1^2 \vec{s}_0{}''(1) + \beta_2 \vec{s}_1'(0) \quad \beta_1 > 0
\end{cases}
$$

G²Beta约束

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

根据Bezier曲线的性质，上述G^2Beta约束可以转化为:

$$\begin{cases} \vec{s}_1(0)=\vec{s}_0(1)=\vec{b}_n \\ \vec{b}_{n+1}=\vec{b}_n+\beta_1(\vec{b}_n-\vec{b}_{n-1}) \quad \beta_1>0 \\ \vec{b}_{n+2}=\beta_1^2\vec{b}_{n-2}-(2\beta_1^2+2\beta_1+\dfrac{\beta_2}{n-1})\vec{b}_{n-1}+(\beta_1^2+2\beta_1+\dfrac{\beta_2}{n-1}+1)\vec{b}_n \end{cases}$$

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

建立过程:

$Step\,1.$计算：$\gamma = \dfrac{(n-1)(1+\beta_1)}{\beta_2 + \beta_1 (n-1)(1+\beta_1)} \quad \beta_1 > 0$

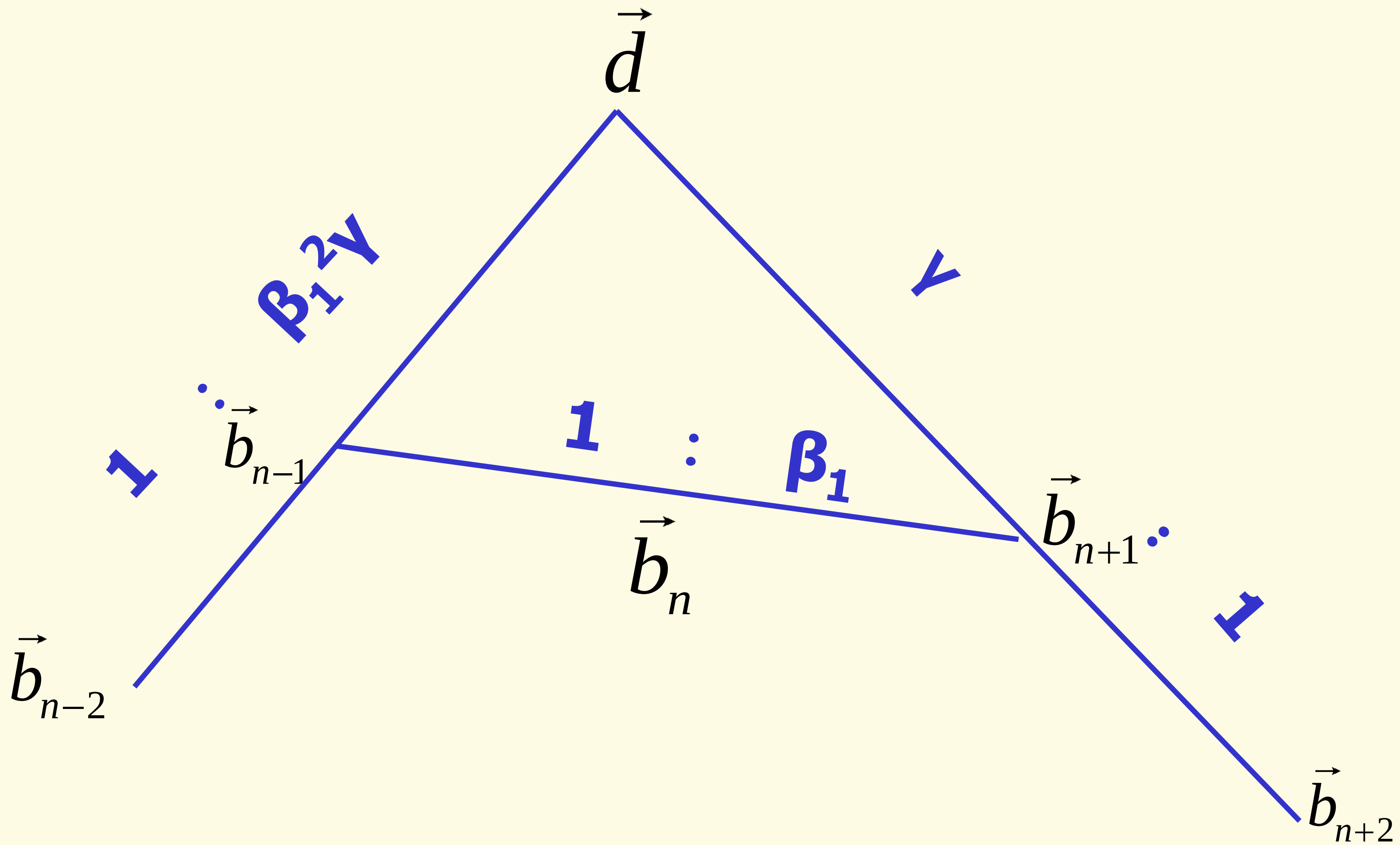
$Step\,2.$计算：$\vec{b}_{n+1} = \vec{b}_n + \beta_1 (\vec{b}_n - \vec{b}_{n-1})$

$Step\,3.$计算：$\vec{d} = \vec{b}_{n-1} + \beta_1^{\,2} \gamma (\vec{b}_{n-1} - \vec{b}_{n-2})$

$Step\,4.$计算：$\vec{b}_{n+2} = \vec{b}_{n+1} + \dfrac{1}{\gamma} (\vec{b}_{n+1} - \vec{d})$

第二节 几何连续的组合Bezier曲线

如图：调整β_1和β_2的大小，可以修改曲线的形状。



第二节 几何连续的组合Bezier曲线

自学:

G^1二次Beta样条曲线

G^2三次Beta样条曲线


第二节　结束

第三节 参数曲面的连续性

问题的复杂性:

- 曲面拓扑结构的复杂性
- 曲面不存在弧长参数化问题
- 多张曲面相交时连续性分析更加复杂
- 边界曲线的复杂性

第三节　　参数曲面的连续性

一、曲面的参数连续性：

1、C^0连续：即位置连续，具有相同边界。

2、C^n连续：

两曲面$\vec{p}(s,t)$和$\vec{q}(u,v)$沿它们的公共连接线$\vec{p}(\gamma)=\vec{q}(\gamma)$上处处具有连续的n阶偏导矢：

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial t^j}\vec{p}(\gamma)=\frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial v^j}\vec{q}(\gamma) \qquad i+j=1,2,\cdots n$$

上式中的曲线是曲面上的曲线，不一定是等参数线

第三节　　参数曲面的连续性

特别的，如果两个曲面 $\vec{p}(s,t),\vec{q}(u,v)$ 都定义在正方形的参数域上，公共边界线为 $\vec{p}(s,0)=\vec{q}(u,1)$

则它们沿公共边界线达到C^n连续的定义为：

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial t^j}\vec{p}(s,0)=\frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial v^j}\vec{q}(u,1) \qquad i+j=1,2,\cdots n$$

实际上，

$$\frac{\partial^{i}}{\partial s^i}\vec{p}(s,0)=\frac{\partial^{i}}{\partial u^i}\vec{q}(u,1) \qquad i=1,2,\cdots n$$

第三节　　参数曲面的连续性

自然是满足的，关键是要考察沿公共边界的其余直到n阶的跨界切矢和混合偏导矢是否相等。

例如：考察上述情况是否达到C^1连续时，关键要考察:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{p}(s,0)=\frac{\partial}{\partial v}\vec{q}(u,1)$$

与曲线的参数连续性一样:

1）曲面的参数连续性也是与曲面的参数选取有关的，重新参数化后连续性可能变化。

2）曲面的参数连续性和曲面的光滑性不一定一致。

第三节 参数曲面的连续性

二、曲面的几何连续性：

1、G^0连续：与C0连续相同。即位置连续，具有相同边界。

2、G^1连续：

两曲面$\vec{p}(s,t)$和$\vec{q}(u,v)$沿它们的公共连接线$\vec{p}(\gamma)=\vec{q}(\gamma)$上处处具有公共的切平面或公共的法线。（法矢平行）

上式中的曲线是曲面上的曲线，不一定是等参数线

设曲面在公共连接线上的四个偏导矢为：

$\vec{p}_s(\gamma),\vec{p}_t(\gamma),\vec{q}_u(\gamma),\vec{q}_v(\gamma)$

要使公共连接线上具有公共的切平面，则：

$$\vec{p}_s(\gamma)\times\vec{p}_t(\gamma)//\vec{q}_u(\gamma)\times\vec{q}_v(\gamma)$$

即：$$\left(\vec{p}_s(\gamma)\times\vec{p}_t(\gamma)\right)\times\left(\vec{q}_u(\gamma)\times\vec{q}_v(\gamma)\right)=\vec{0}$$

由上式可得：

$$\left(\vec{p}_s,\vec{q}_u,\vec{q}_v\right)\vec{p}_t-\left(\vec{p}_t,\vec{q}_u,\vec{q}_v\right)\vec{p}_s=\vec{0}$$

第三节 参数曲面的连续性

特别的，如果公共连接线为等参数线时，

$$如\ \vec{p}(s,t_0)=\vec{q}(u,v_0)$$

这时，$\vec{p}_s(s,t_0)=\vec{q}_u(u,v_0)$自然成立

$$(\vec{p}_s,\vec{q}_u,\vec{q}_v)\vec{p}_t-(\vec{p}_t,\vec{q}_u,\vec{q}_v)\vec{p}_s=\vec{0}$$ 可化简为：

$$(\vec{p}_t,\vec{q}_u,\vec{q}_v)=0$$

$h(u)=1, g(u)=0$时，

即为C^1连续

即三个矢量线性相关，也就是共面。

$$\therefore \vec{p}_t=h(u)\vec{q}_v+g(u)\vec{q}_u \quad h(u)>0$$

3、G^2连续：

G^2连续要求两曲面沿公共连接线处处在所有方向都具有公共的法曲率。

定义：

两曲面沿公共连接线具有G^2连续性，当且仅当它们满足沿公共连接线上处处具有公共切平面的条件之外，又具有公共的主曲率，以及在两个主曲率不相等时具有公共的主方向。

4、G^n连续：

定义：

两曲面沿它们正则的公共连接线具有G^n连续性，当且仅当存在一个等价于$\vec{q}$的参数化$\vec{q}(\bar{u},\bar{v})$使得$\vec{p}(s,t)$和$\vec{q}(\bar{u},\bar{v})$沿公共连接线是C^n连续的。

即：

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial t^j}\vec{p}(\gamma)=\frac{\partial^{i+j}}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{v}^j}\vec{q}(\gamma) \qquad i+j=1,2,\cdots n$$

第三节　参数曲面的连续性

三、Bezier曲面的拼接

1、C^0（G^0）连续

例如：要求两个双三次Bezier曲面有公共的边界曲线：

$$\vec{r}^{(1)}(1,v)=\vec{r}^{(2)}(0,v)$$

根据张量积Bezier曲面的矩阵表示式，有：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} AM^{(1)}A^T = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} AM^{(2)}A^T$$

从上式可以得出：

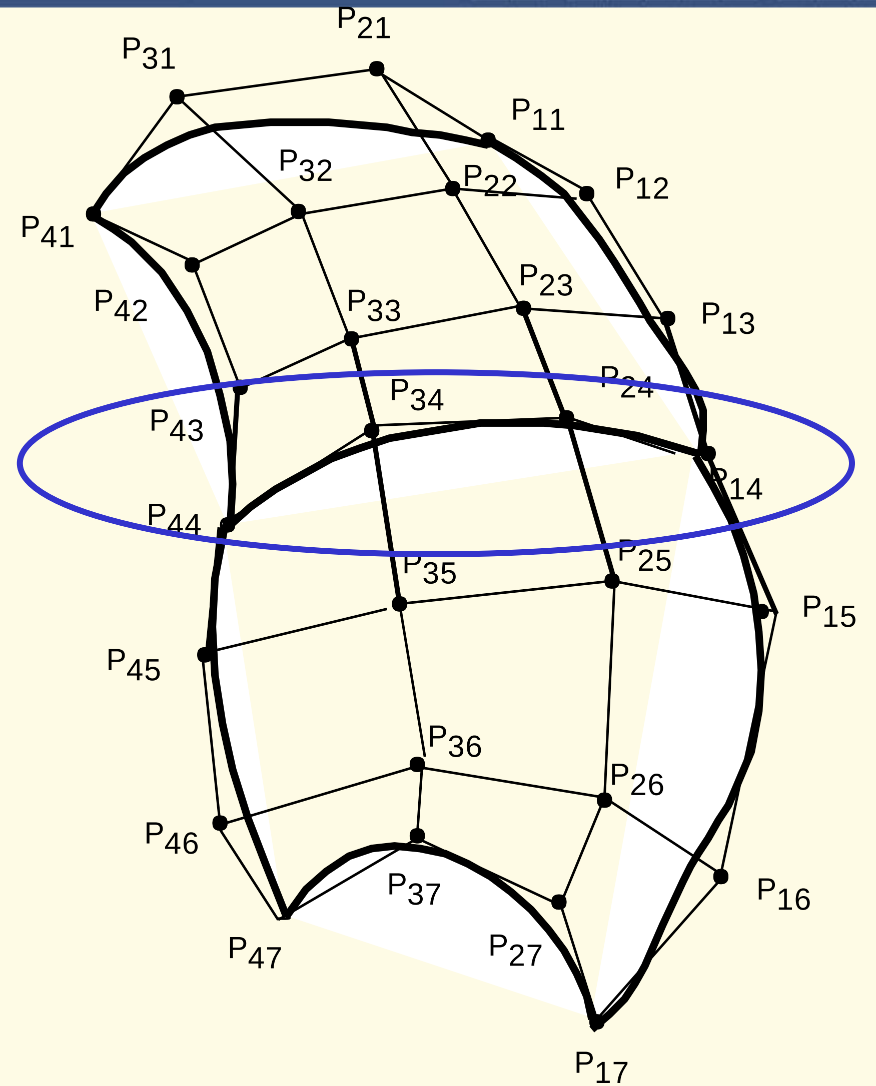
第三节　　参数曲面的连续性

$$[0\quad 0\quad 0\quad 1]\begin{bmatrix}\vec r_{00} & \vec r_{01} & \vec r_{02} & \vec r_{03}\\ \vec r_{10} & \vec r_{11} & \vec r_{12} & \vec r_{13}\\ \vec r_{20} & \vec r_{21} & \vec r_{22} & \vec r_{23}\\ \vec r_{30} & \vec r_{31} & \vec r_{32} & \vec r_{33}\end{bmatrix}^{(1)}$$

$$=[1\quad 0\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}\vec r_{00} & \vec r_{01} & \vec r_{02} & \vec r_{03}\\ \vec r_{10} & \vec r_{11} & \vec r_{12} & \vec r_{13}\\ \vec r_{20} & \vec r_{21} & \vec r_{22} & \vec r_{23}\\ \vec r_{30} & \vec r_{31} & \vec r_{32} & \vec r_{33}\end{bmatrix}^{(2)}$$

即得：$\vec r_{3i}^{(1)}=\vec r_{0i}^{(2)}$

Bezier曲面C^0连续条件：表示两张曲面片上定义公共边界的控制顶点重合。



两张C^0连续的双三次Bezier曲面片

2、G^1连续：以双三次Bezier曲面为例：

$$\vec{r}_u^{(2)}(0,v)\times\vec{r}_v^{(2)}(0,v)=\lambda(v)\vec{r}_u^{(1)}(1,v)\times\vec{r}_v^{(1)}(1,v)$$

因为 $\vec{r}_v^{(2)}(0,v)=\vec{r}_v^{(1)}(1,v)$

令 $\vec{r}_u^{(2)}(0,v)=\lambda(v)\vec{r}_u^{(1)}(1,v)$

上式一个简单的充分条件是存在常数$\lambda>0$使

$$(r_{1i}^2-r_{0i}^2)=\lambda(r_{3i}^1-r_{2i}^1)$$

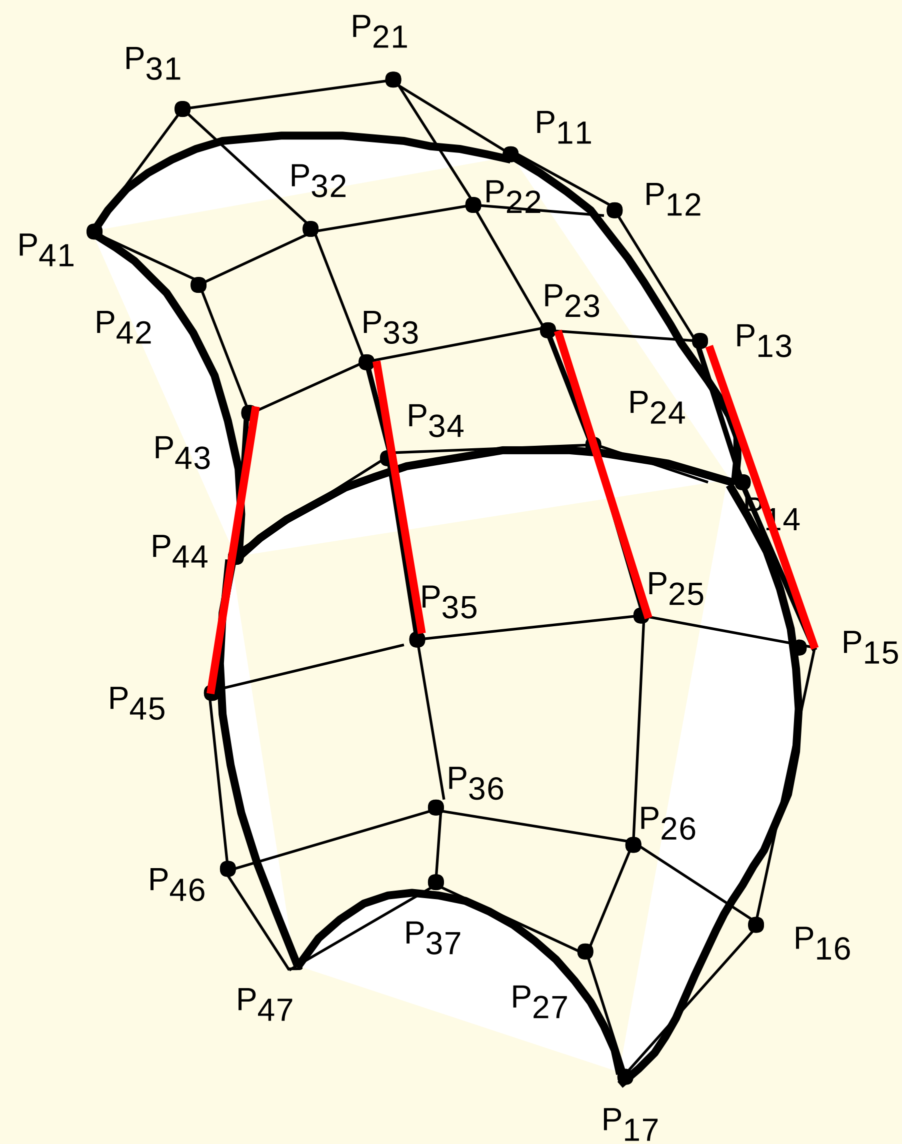
第三节　参数曲面的连续性

$$(r_{1i}^2 - r_{0i}^2) = \lambda(r_{3i}^1 - r_{2i}^1)$$

说明跨界的三排控制顶点中，对应的点共线，且成相等的比例。

这就是张量积**Bezier**曲面达到**G¹**连续的拼接条件。

$$\frac{P_{13}P_{14}}{P_{14}P_{15}} = \frac{P_{23}P_{24}}{P_{24}P_{25}} = \frac{P_{33}P_{34}}{P_{34}P_{35}} = \frac{P_{43}P_{44}}{P_{44}P_{45}}$$



本章结束