西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

动 力 学

动量矩定理

杨成鹏
力学与土木建筑学院

第十二章 动量矩定理

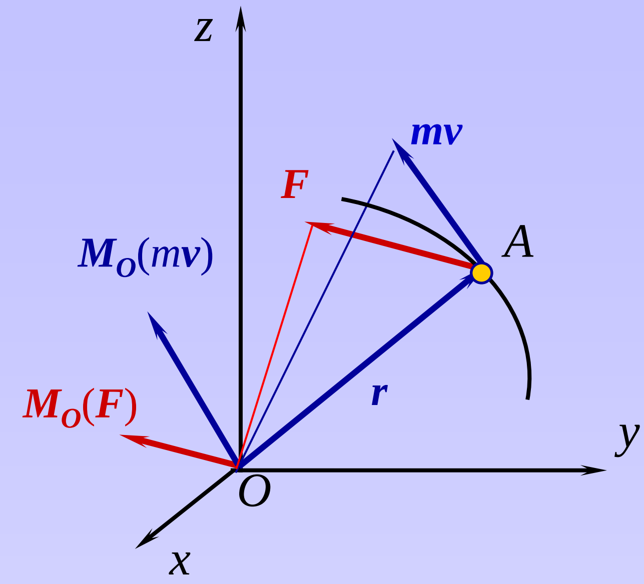
§12-1 动 量 矩

- 质点的动量矩
- 质点系的动量矩
- 定轴转动刚体对其转轴的动量矩

§12-1 动 量 矩

一、质点的动量矩

1. 对点的动量矩



质点A的动量 $m\boldsymbol{v}$ 对点 O 的矩，定义为质点A对点 O 的动量矩。

$$\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

2. 对轴的动量矩

上式投影到各坐标轴可得动量 $m\boldsymbol{v}$ 对各坐标轴的矩。

$$M_x(m\boldsymbol{v}) = y\,(mv_z) - z\,(mv_y)$$

$$M_y(m\boldsymbol{v}) = z\,(mv_x) - x\,(mv_z)$$

$$M_z(m\boldsymbol{v}) = x\,(mv_y) - y\,(mv_x)$$

二、质点系的动量矩

1. 对点的动量矩

质点系内各质点对某点 O 的动量矩的矢量和，称为该质点系对点 O 的动量主矩或动量矩。用 $\boldsymbol{L}_O$ 表示，有

$$\boldsymbol{L}_O = \sum \boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i) = \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i$$

2. 对轴的动量矩

类似的可得质点系对各坐标轴的动量矩表达式

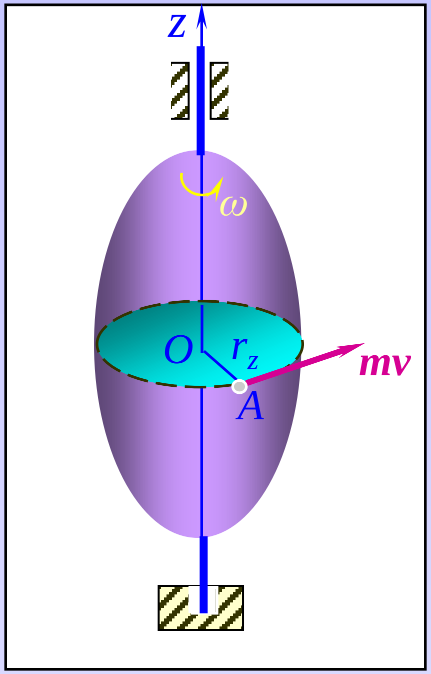
$$L_x = \sum M_x(m_i\boldsymbol{v}_i)$$

$$L_y = \sum M_y(m_i\boldsymbol{v}_i)$$

$$L_z = \sum M_z(m_i\boldsymbol{v}_i)$$

三、定轴转动刚体对其转轴的动量矩

设刚体以角速度 ω 绕固定轴 z 转动，刚体内任一点 A 的转动半径是 r_z。



该点的速度大小是 $v = r_z\,\omega$，方向同时垂直于z 轴和转动半径 r_z，且指向转动前进的一方。

若用 m 表示该质点的质量，则其动量对转轴 z 的动量矩为

$$M_z(m\boldsymbol{v}) = r_z\ m\,r_z\,\omega = m r_z^{\,2}\,\omega$$

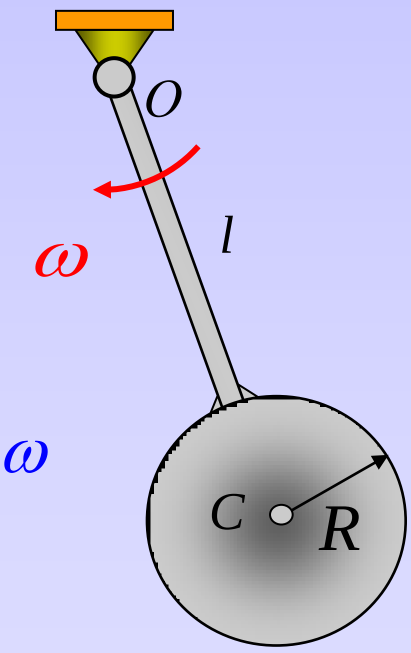
从而整个刚体对轴 z 的动量矩

$$L_z = \sum M_z(m_i\boldsymbol{v}_i) = \omega\sum m_i r_{iz}^{\,2} = J_z\,\omega$$

即，**作定轴转动的刚体对转轴的动量矩，等于这刚体对该轴的转动惯量与角速度的乘积**。

思考题

一半径为R、质量为m_1的匀质圆盘与一长为l、质量为m_2的匀质细杆相固连，以角速度ω在铅直面转动。试求该系统对O轴的动量矩。



解: 系统做定轴转动，该系统对O轴的动量矩

$$L_O = J_O\omega = [\frac{1}{3}m_2 l^2 + \frac{1}{2}m_1 R^2 + m_1(R+l)^2]\omega$$

顺时针方向。

§12-2 动量矩定理

- 动量矩定理
- 动量矩守恒定理

§12-2 动 量 矩 定 理

一、动量矩定理（质点）

质点的动量定理可以表述为 $\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}$

上式两端各用质点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 作矢乘，得

$$\boldsymbol{r} \times \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

右端是力$\boldsymbol{F}$对点O的矩 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$，左端可改写成

$$\boldsymbol{r} \times \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) - \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v})\right] - \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v}$$

当矩心O固定时，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{v}$，因此上面第二项恒等于零，于是得到

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v})\right] = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})}$$

一、动量矩定理（质点）

将上式投影到固定直角坐标系上，则有：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{M}_x(m\boldsymbol{v})\right] &= \boldsymbol{M}_x(\boldsymbol{F}) \\
\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{M}_y(m\boldsymbol{v})\right] &= \boldsymbol{M}_y(\boldsymbol{F}) \\
\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{M}_z(m\boldsymbol{v})\right] &= \boldsymbol{M}_z(\boldsymbol{F})
\end{aligned}\right\}
$$

有 结 论

质点对某固定点（或某固定轴）的动量矩随时间的变化率，等于作用于质点的力对同一点（或同一轴）的矩。这就是**质点的动量矩定理。**

一、动量矩定理（质点系）

1. 对定点的动量矩定理

因为质点系对定点O的动量矩为 $L_O=\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)$

将其两端求时间的导数，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}\times m_i\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{r}_i\times m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}\right)=\sum(\underbrace{\boldsymbol{v}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i}_{0}+\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{a}_i)$$

$$=\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{a}_i)=\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i)$$

其中 $\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$ 可分为外力对O点的矩和内力对O点的矩二项

即 $\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)=\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})+\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})})$

而内力对O点的矩 $\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})})$ 所以有 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})}$

§12-2 动 量 矩 定 理

一、动量矩定理（质点系）

1. 对定点的动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})}$$

令 $\boldsymbol{M}_\mathrm{O}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$，则有 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_\mathrm{O}}$

有 结 论

质点系对某固定点的动量矩随时间的变化率，等于作用于质点系的全部外力对同一点的矩的矢量和，这就是质点系对定点的动量矩定理。

一、动量矩定理（质点系）

1. 对定点的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

2 .对定轴的动量矩定理

将上式投影到固定坐标轴系上，注意到导数的投影等于投影的导数，则得

$$\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}=\sum M_x(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})\equiv M_x$$

$$\frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}=\sum M_y(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})\equiv M_y$$

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})\equiv M_z$$

有 结 论

质点系对某固定轴的动量矩随时间的变化率, 等于作用于质点系的全部外力对同一轴的矩的代数和，这就是质点系对定轴的动量矩定理。

对定点的动量矩定理 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

对定轴的动量矩定理 $$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

二、动量矩守恒定理

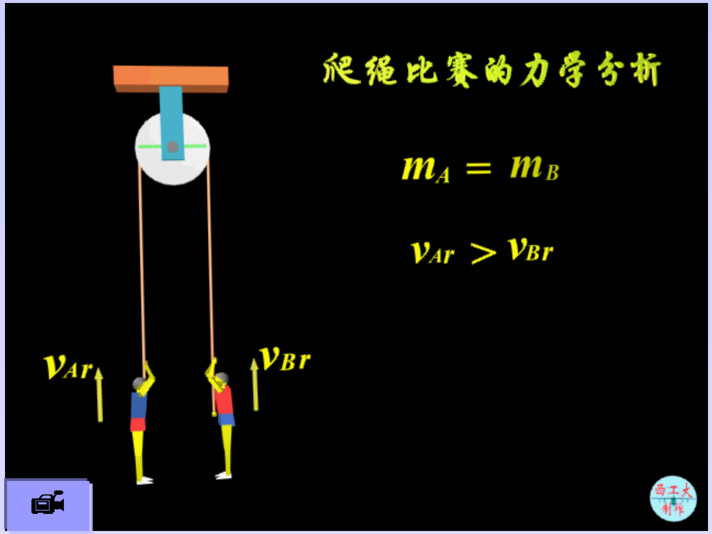
1. 如果$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})\equiv 0$，则由上面第一式 可知， $\boldsymbol{L}_O$ = 常矢量。

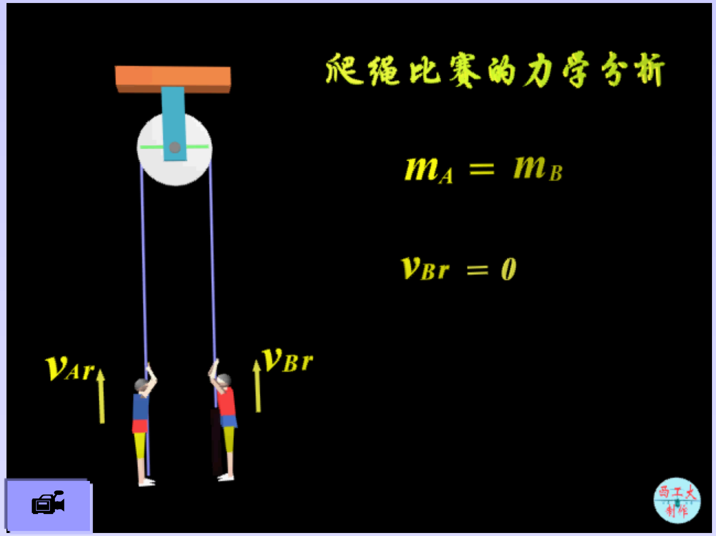
2. 如果$\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})\equiv 0$，则由上面第二式 可知， L_z = 常量。

有 结 论

如作用于质点系的所有外力对某固定点(或固定轴)的主矩始终等于零, 则质点系对该点(或该轴)的动量矩保持不变。这就是质点系的动量矩守恒定理，它说明了质点系动量矩守恒的条件。

实例之一：爬绳比赛的力学分析

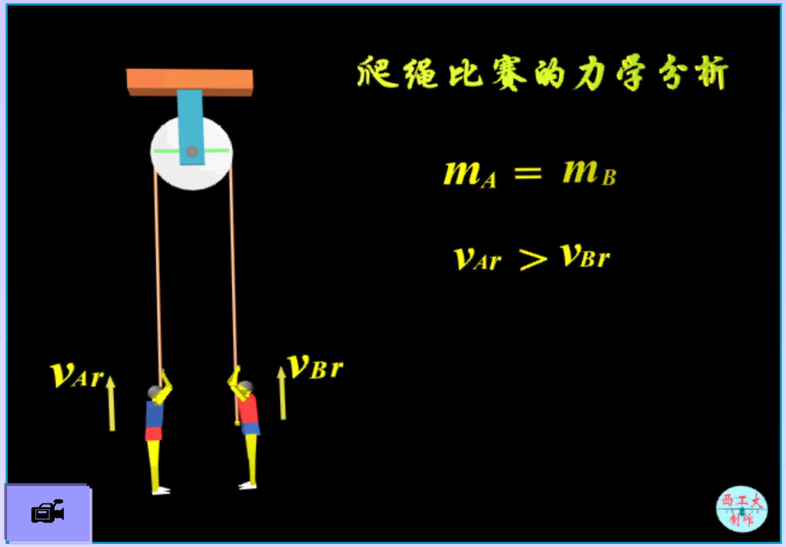




实例之一：爬绳比赛的力学分析

$$L_z = m_A v_A \cdot R - m_B v_B \cdot R$$

$$M_z = m_A g \cdot R - m_B g \cdot R$$



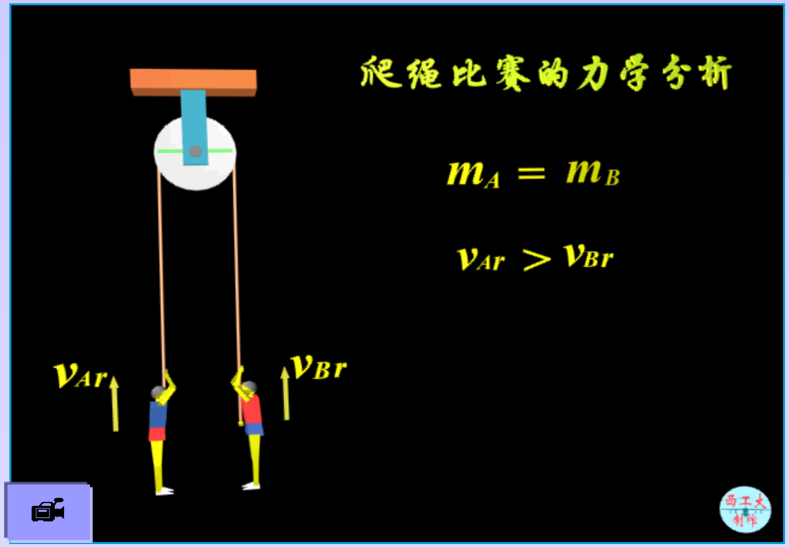
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_A v_A \cdot R - m_B v_B \cdot R)$$

$$= m_A g \cdot R - m_B g \cdot R$$

实例之一：爬绳比赛的力学分析

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_A v_A \cdot R - m_B v_B \cdot R) = m_A g \cdot R - m_B g \cdot R$$



$$m_A = m_B$$

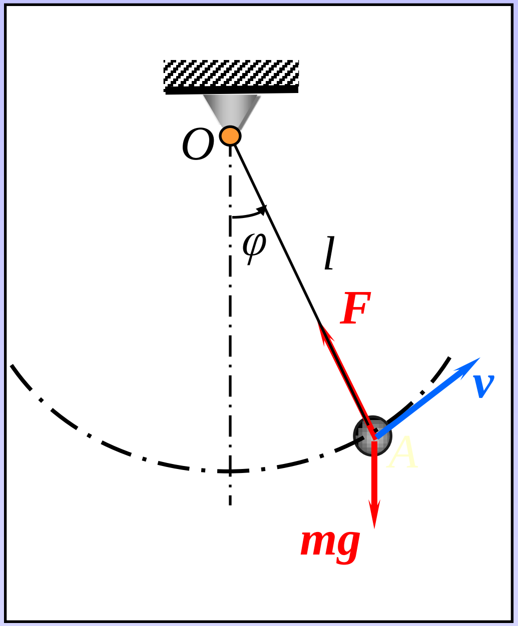
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_A v_A \cdot R - m_B v_B \cdot R) = 0$$

初始静止： $L_{z0} = 0$，

$$m_A v_A \cdot R - m_B v_B \cdot R = 0$$

$$v_A - v_B = 0\ , \quad v_A = v_B$$

例题 12-1 试用动量矩定理导出单摆(数学摆)的运动微分方程。



解： 把单摆看成一个在圆弧上运动的质点 A，设其质量为 m，摆线长 l。又设在任一瞬时质点 A 具有速度 v，摆线 OA 与铅垂线的夹角是 φ。

取通过悬点 O 而垂直于运动平面的固定轴 z 作为矩轴，对此轴应用质点的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M_z(m\boldsymbol{v})] = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

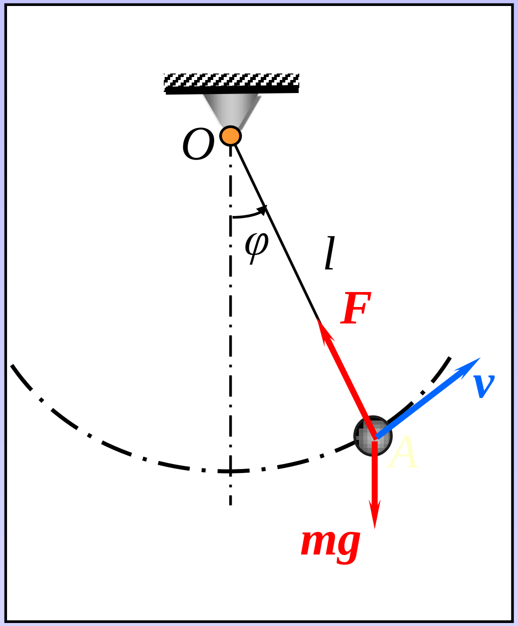
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M_z(m\boldsymbol{v})] = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

由于动量矩和力矩分别是

$$M_z(m\boldsymbol{v}) = mvl = m(l\omega)l = ml^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

和

$$\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) = -mgl\sin\varphi$$



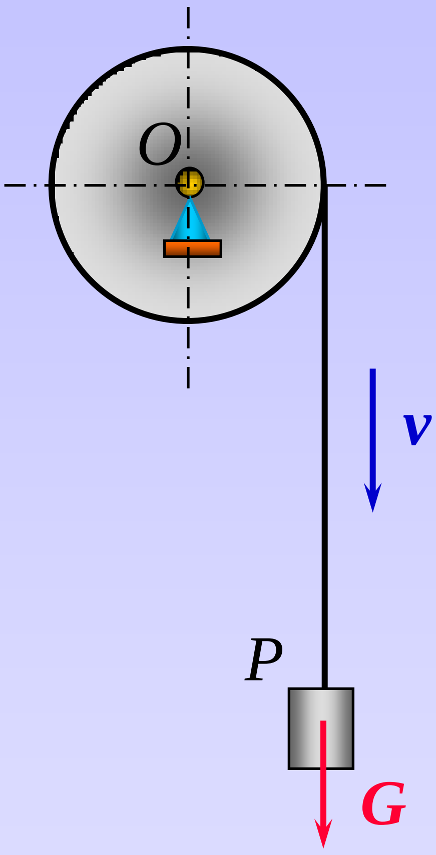
从而可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ml^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}) = -mgl\sin\varphi$$

化简即得单摆的运动微分方程

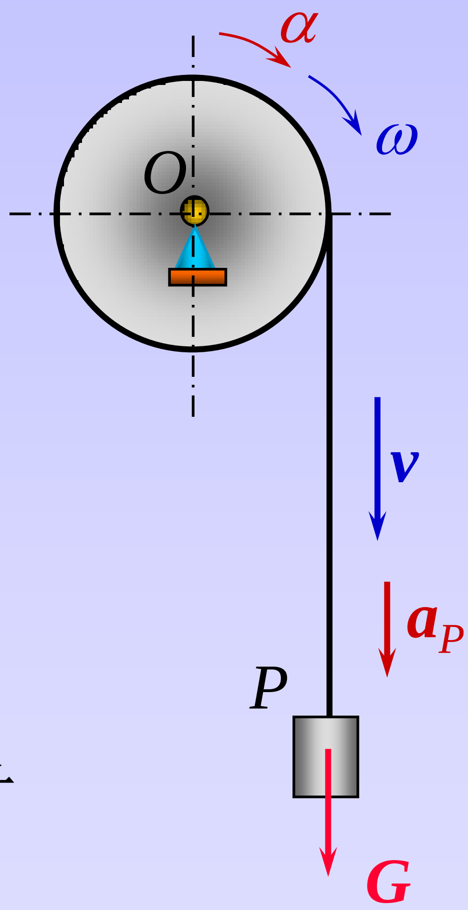
$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

例题 12-2 匀质圆轮半径为R、质量为m。圆轮在重物P带动下绕固定轴O转动，已知重物重量为G。求重物下落的加速度。



解： 以整个系统为研究对象。

设圆轮的角速度和角加速度分别为ω和α，重物的加速度为a_P。



圆轮对轴O的动量矩

$$L_{O1} = J_O\omega = \frac{1}{2}mR^2\omega$$ 顺时针

重物对轴O的动量矩

$$L_{O2} = m'vR = \frac{G}{g}vR$$ 顺时针

系统对轴O的总动量矩

$$L_O = L_{O1} + L_{O2} = \frac{1}{2}mR^2\omega + \frac{G}{g}vR$$ 顺时针

系统对轴O的总动量矩 $L_O = L_{O1} + L_{O2} = \frac{1}{2}mR^2\omega + \frac{W}{g}vR$

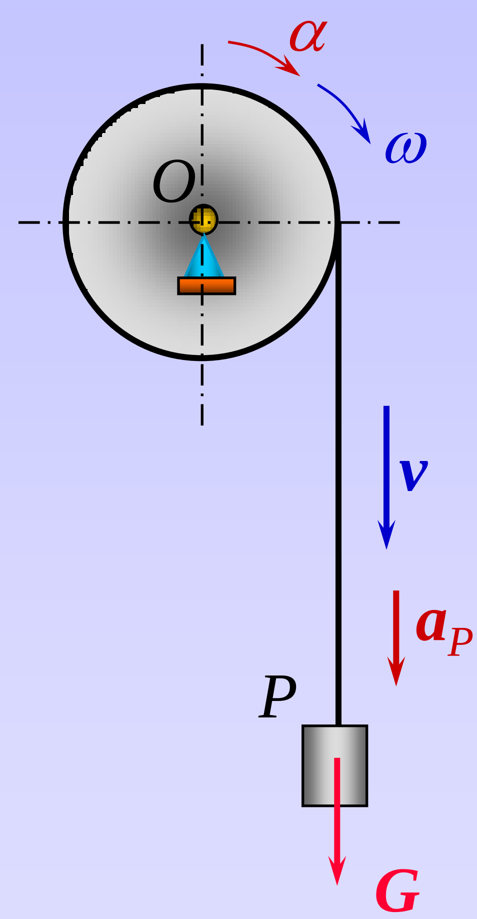
应用动量矩定理 $\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = M_O$

有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}mR^2\omega + \frac{G}{g}vR) = GR$

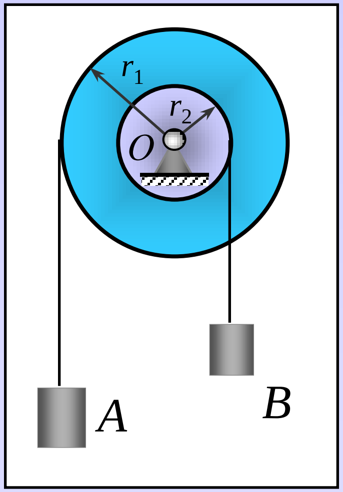
得 $\frac{1}{2}mR^2\alpha + \frac{G}{g}a_P R = GR$

其中 $a_P = R\alpha$

所以求得重物下落的加速度大小 $a_P = \frac{G}{\frac{m}{2} + \frac{G}{g}}$



例题 12-3 两个鼓轮固连在一起，其总质量是m，对水平转轴O的转动惯量是 J_O。鼓轮的半径是 r_1和r_2。绳端悬挂的重物A和B质量分别是m_1和m_2（如图），且 $m_1>m_2$。试求鼓轮的角加速度。



解： 取鼓轮，重物 *A*，*B* 和绳索为研究对象（图b）。对鼓轮的转轴 *z*（垂直于图面，指向读者）应用动量矩定理，有

$$\frac{dL_{Oz}}{dt}=M_{Oz}$$

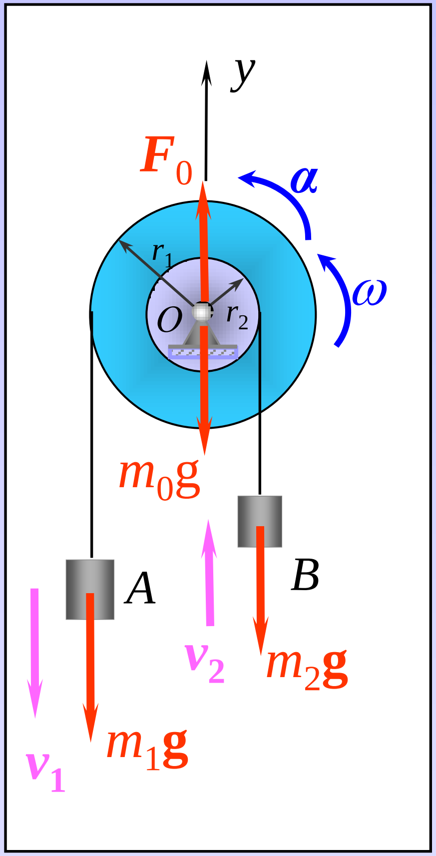
系统的动量矩由三部分组成，等于

$$L_{Oz}=J_O\omega+m_1v_1r_1+m_2v_2r_2$$

考虑到 $v_1=r_1\,\omega$，$v_2=r_2\,\omega$，则得

$$L_{Oz}=(J_O+m_1r_1^2+m_2r_2^2)\omega \qquad (1)$$

$$M_{Oz}=(m_1r_1-m_2r_2)g \qquad (2)$$



(b)

$$L_{Oz} = (J_O + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\omega \qquad (1)$$

$$M_{Oz} = (m_1 r_1 - m_2 r_2) g \qquad (2)$$

将式(1)和(2) 代入方程 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} = M_{Oz}}$

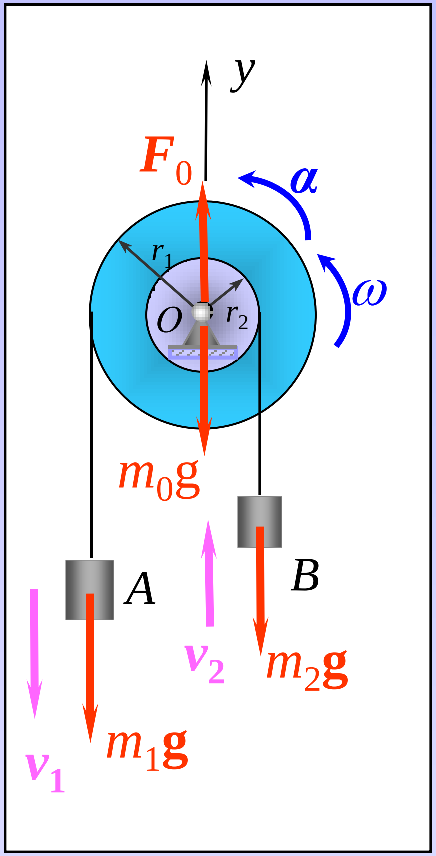
即得

$$(J_O + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = (m_1 r_1 - m_2 r_2) g$$

从而求出鼓轮的角加速度

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{J_O + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2} g$$

方向为逆钟向。



(b)

如何求支座O处的约束力？

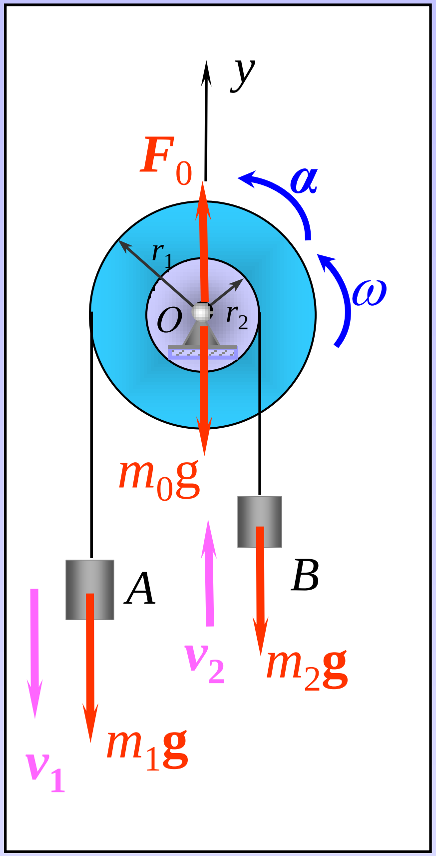
根据质心运动定理可得

$$-m_1 a_A + m_2 a_B = F_0 - (m + m_1 + m_2)g$$

$$a_A = \alpha r_1, \qquad a_B = \alpha r_2$$

从而得出

$$F_0 = (m + m_1 + m_2)g + \alpha(m_2 r_2 - m_1 r_1)$$



(b)

§12-3 刚体的定轴转动微分方程

§12-3 刚体的定轴转动微分方程

一、定轴转动微分方程

设刚体在主动力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots; \boldsymbol{F}_n$ 作用下绕定轴 z 转动，与此同时，轴承上产生了反力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$。

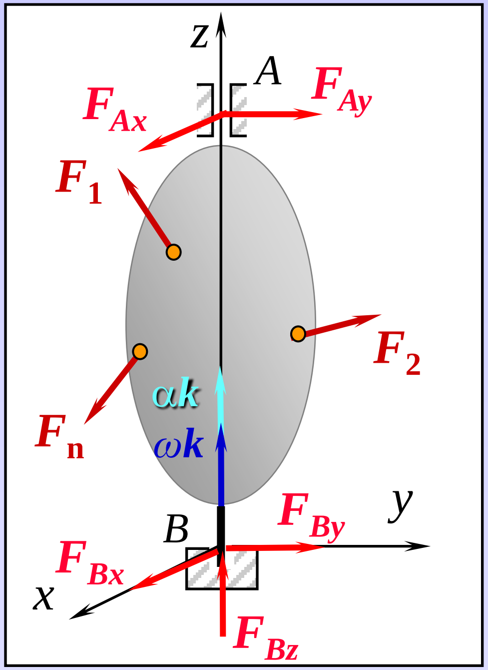
用 $M_z = \sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)})$ 表示作用在刚体上的外力对转轴 z 的主矩(反力 $\boldsymbol{F}_A, \boldsymbol{F}_B$ 自动消去)。

刚体对转轴 z 的动量矩 $L_z = J_z\omega$

于是根据动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z}$$

可得 $$J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_z$$

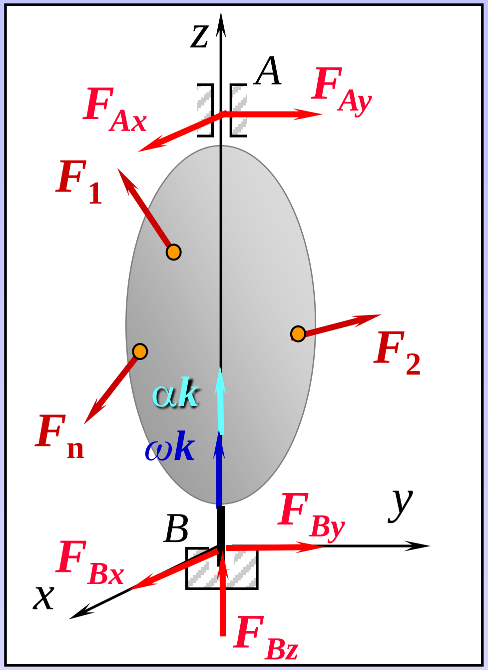


§ 12-3 刚体的定轴转动微分方程

$$J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_z$$

考虑到

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$$



则上式可写成

$$\boxed{J_z \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})}$$

或

$$J_z \ddot{\phi} = M_z$$

即，定轴转动刚体对转轴的转动惯量与角加速度的乘积，等于作用于刚体的外力对转轴的主矩。这就是刚体定轴转动微分方程。

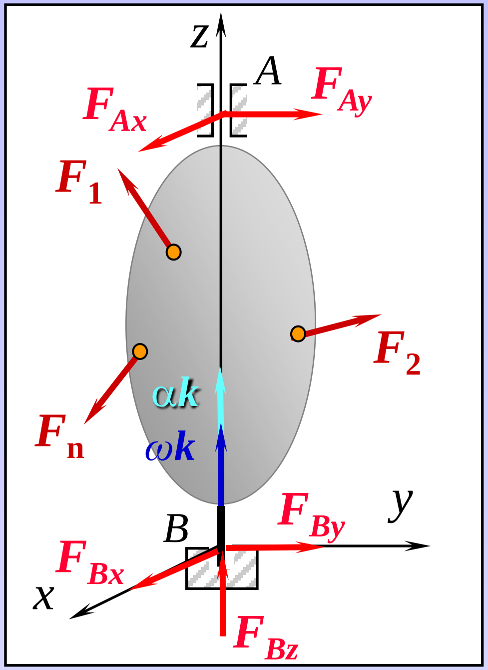
§ 12-3 刚体的定轴转动微分方程

定轴转动微分方程

$$J_z \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

或

$$J_z\ddot{\varphi} = M_z$$



二、几点讨论

1. 若外力矩M_z=0，刚体作匀速转动；

2. 若外力矩M_z=常量，则刚体作匀变速转动；

3. 若外力矩M_z相同，J_z越大，角加速度越小，即刚体转动状态变化的越慢，反之亦然，这正说明J_z是刚体转动时惯性的度量。

思考题 在什么条件下，$F_1=F_2$?

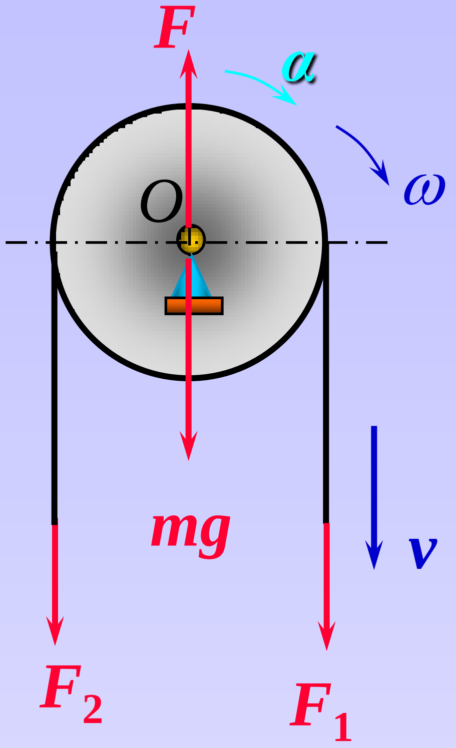
解：由定轴转动微分方程

$$J_O\alpha = F_1R - F_2R$$

即 $$F_1 - F_2 = \frac{J_O\alpha}{R}$$

$$\boxed{J_O = \frac{1}{2}mR^2}$$

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2}mR\alpha$$



$F_1=F_2$ 条件为上式右端 等于零，则

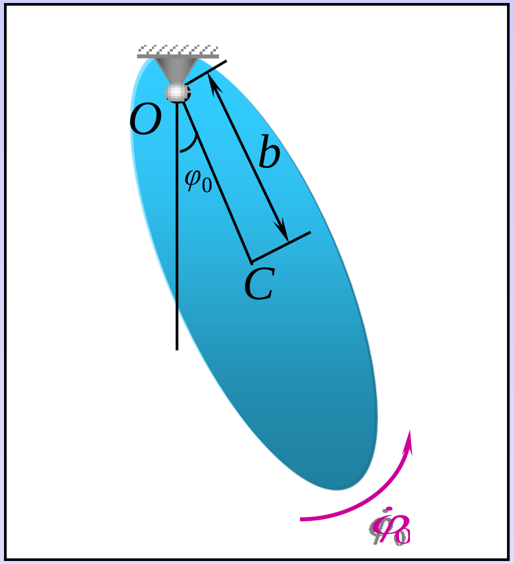
(1) $m=0$

或 (2) $R=0$

或 (3) $\alpha=0$

必须指出：与静力学部分不同，轮子两端绳索的拉力通常不再相等！

例题12-4 复摆由可绕水平轴转动的刚体构成。已知复摆的质量是 m，重心 C 到转轴 O 的距离 $OC = b$，复摆对转轴 O 的转动惯量是J_O，设摆动开始时 OC 与铅直线的偏角是 φ_0，且复摆的初角速度为零，试求复摆的微幅摆动规律。轴承摩擦和空气阻力不计。

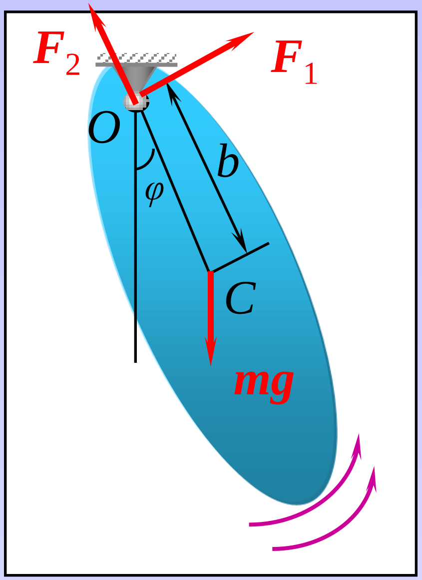


解：复摆在任意位置时，所受的外力有重力 mg 和轴承 O 的反力，为便于计算，把轴承反力沿质心轨迹的切线和法线方向分解成两个分力 F_1和F_2。

根据刚体绕定轴转动的微分方程 $\boxed{J_z\ddot{\varphi} = M_z}$

有

$$J_O \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mgb\sin\varphi$$



重力mg对悬轴 O 产生恢复力矩。

从而

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgb}{J_O}\sin\varphi = 0$$

当复摆作微摆动时，可令 $\sin\varphi \approx \varphi$，于是上式经过线性化后，可得复摆微幅摆动的微分方程

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgb}{J_O}\varphi = 0$$

复摆微幅摆动的微分方程 $\ddot{\varphi}+\frac{mgb}{J_O}\varphi=0$

这是简谐运动的标准微分方程。可见复摆的微幅振动也是简谐运动。

考虑到复摆运动的初条件：当 $t=0$ 时

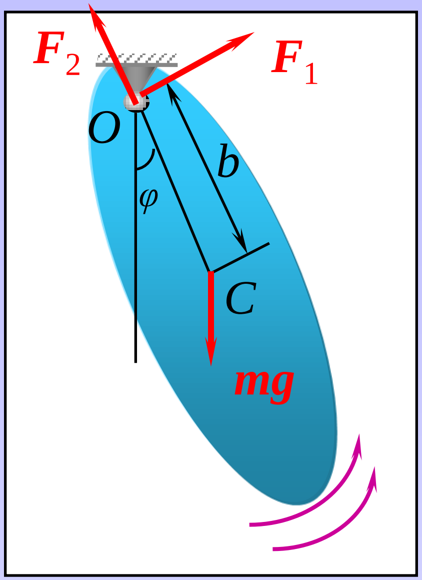
$$\varphi=\varphi_0 \quad , \quad \dot{\varphi}=0$$

则复摆运动规律可写成

$$\varphi=\varphi_0\cos(\sqrt{\frac{mgb}{J_O}}t) \qquad \text{(a)}$$

摆动的频率 $\boldsymbol{\omega_0}$ 和周期 $\boldsymbol{T}$ 分别是

$$\omega_0=\sqrt{\frac{mgb}{J_O}} \quad , \quad T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgb}} \qquad \text{(b)}$$



复摆运动规律可写成

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{mgb}{J_O}}t\right) \qquad \text{(a)}$$

摆动的频率 ω_0 和周期 T 分别是

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgb}{J_O}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgb}} \qquad \text{(b)}$$

工程上常利用关系(b)测定形状不规则刚体的转动惯量。为此，把刚体做成复摆并用试验测出它的摆动频率 ω_0 和周期 T，然后由(b)式求得转动惯量

$$J_O = \frac{mgbT^2}{4\pi^2} \qquad \text{(c)}$$

§12-4 相对于质心的动量矩定理

- 质点系相对动点*A*的动量矩
- 相对于质心的动量矩定理

§ 12-4 相对于质心的动量矩定理

1. 质点系相对于动点A的动量矩

设动参考系 $Ax'y'z'$ 平移，质点系相对动系上A点的动量矩为

$$L_A^{r} = \sum (r_i' \times m_i v_{ri})$$

质点系对定系上O点的动量矩为 $\boldsymbol{L}_O = \sum(\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_{ai})$

由图12-11知，$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_i'$，则质点系对定点O的动量矩为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_O &= \sum\left[\left(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_i'\right)\times m_i \boldsymbol{v}_{ai}\right] \\
&= \sum \boldsymbol{r}_A \times m_i \boldsymbol{v}_{ai} + \underline{\sum \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_{ai}} \\
&= \boldsymbol{r}_A \times m\boldsymbol{v}_C + \underline{\sum \boldsymbol{r}_i' \times m_i\left(\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{ri}\right)} \\
&= \boldsymbol{r}_A \times m\boldsymbol{v}_C + \underline{\sum \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_A + \sum \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_{ri}} \\
&= \boldsymbol{r}_A \times m\boldsymbol{v}_C + \underline{\boldsymbol{r}_{AC} \times m\boldsymbol{v}_A + \sum \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_{ri}} \\
&= \boldsymbol{r}_A \times m\boldsymbol{v}_C + \underline{\boldsymbol{r}_{AC} \times m\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{L}_A^{r}}
\end{aligned}$$

式中，m为质点系总质量，$\boldsymbol{r}_{AC}$为动点A到质点系质心C的矢径，$\boldsymbol{v}_C$为质点系质心相对定系的速度。

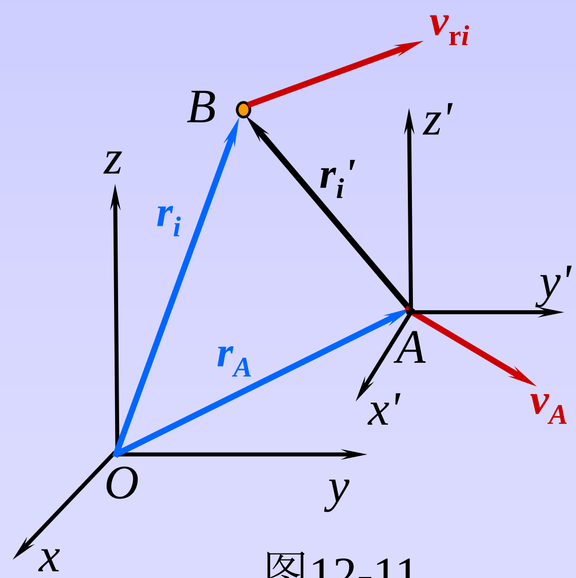


图12-11

§ 12-4 相对于质心的动量矩定理

当动参考系原点 A为质心C时，$\boldsymbol{r}_{AC}=\mathbf{0}$，从而有

$$\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{r}_C\times m\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{L}_C^{\mathrm{r}}$$

上式表明：质点系对任一点O的动量矩，等于质点系随质心平移时对点O的动量矩加上质点系相对于质心的动量矩。

质点系在相对固定参考系的运动中对质心C的动量矩

为：$\boldsymbol{L}_C=\sum\boldsymbol{r}_i'\times m_i\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}i}$，质点系在随质心平移的坐标系的相对运动中对质心C的动量矩为：$\boldsymbol{L}_C^{\mathrm{r}}=\sum\boldsymbol{r}_i'\times m_i\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}i}$，则可以证明

$$\boldsymbol{L}_C=\boldsymbol{L}_C^{\mathrm{r}}$$

即以质点的相对速度或以其绝对速度计算质点系对于质心的动量矩，其结果是相等的。

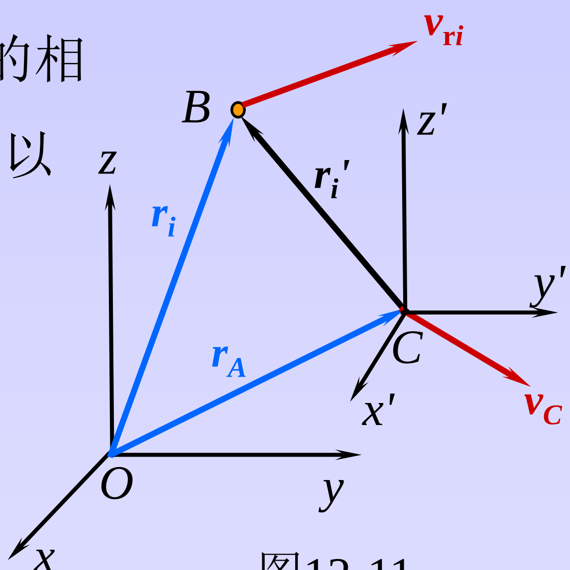


图12-11

2. 相对于质心的动量矩定理

过固定点O建立固定坐标系$Oxyz$，以质点系的质心 C 为原点，取平动坐标系 $Cx'y'z'$，质点系对固定点O的动量矩。

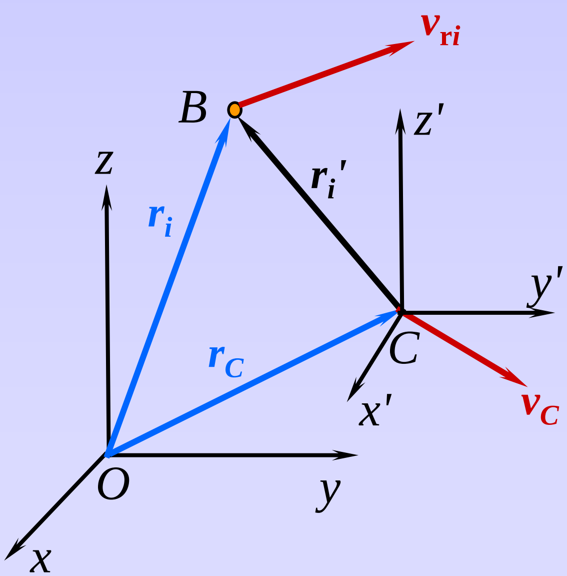
$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C , \quad \boldsymbol{L}_C = \sum (\boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}i})$$

$\boldsymbol{L}_C$—— 质点系相对质心C 的动量矩

由对定点的动量矩定理

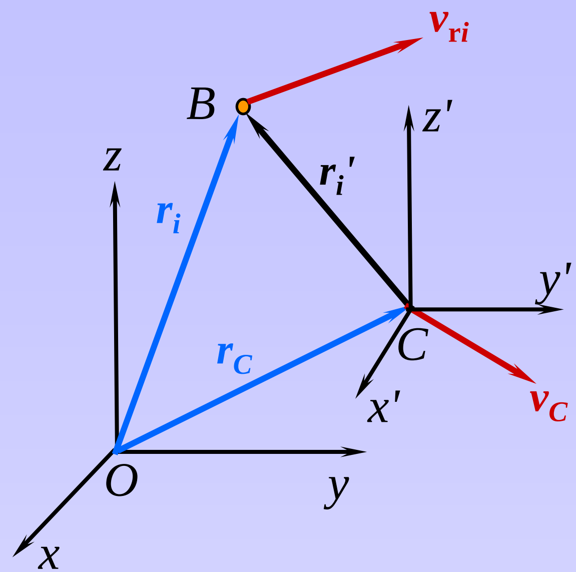
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) = \sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

有
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C) = \sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$



§ 12-4 相对于质心的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C) = \sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) \quad (1)$$



左端 $= \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t} \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$

$= \boldsymbol{v}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{a}_C + \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$

0

$= \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{a}_C + \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$

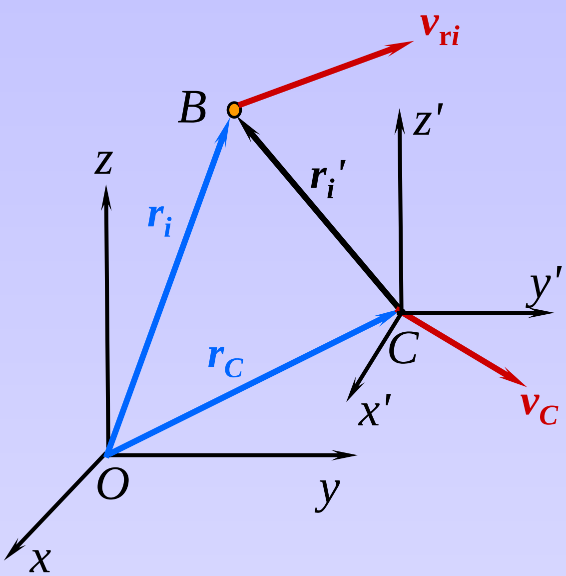
右端 $= \sum [(\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_i') \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}] = \sum (\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) + \sum (\boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$

代入（1）式有 $\quad \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{a}_C + \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum (\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) + \sum (\boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$

§ 12-4 相对于质心的动量矩定理

$$\boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum (\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}) + \sum (\boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

注意到由质心运动定理有 $m\boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$



所以上式为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum (\boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}) = \sum M_C(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) = \boldsymbol{M}_C}$$

这就是相对于质心的动量矩定理的一般形式。

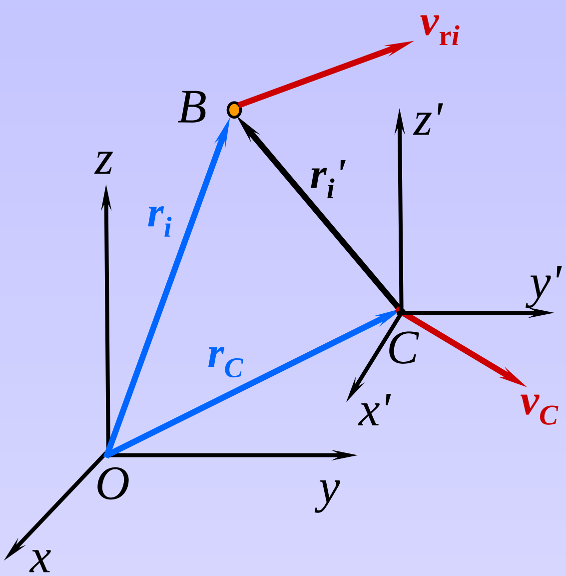
即，**质点系相对于质心的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的外力对质心的主矩。**

§12-4 相对于质心的动量矩定理

3. 相对于质心轴的动量矩定理

将前面所得质点系相对于质心的动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum(\boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\sum\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\boldsymbol{M}_C}$$



沿质心轴进行投影，得

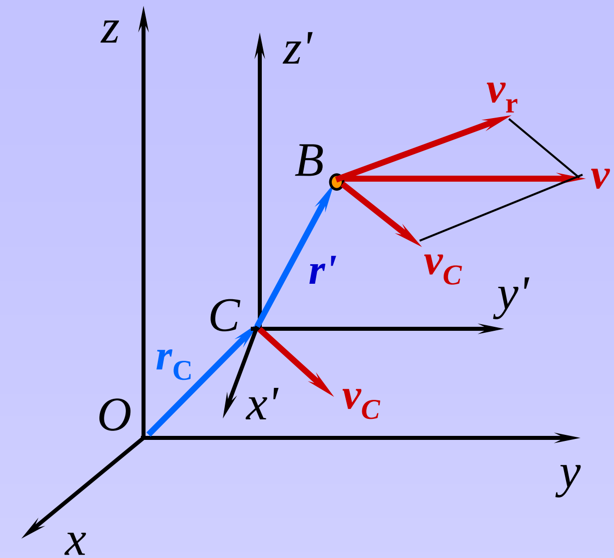
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_{Cz'}}{\mathrm{d}t}=M_{Cz'}}$$

即，**质点系相对于质心轴的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的外力对质心轴的主矩。**

§12-4 相对于质心的动量矩定理

1. 对质心的动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum(\boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\sum M_C(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\boldsymbol{M}_C}$$



2. 对质心轴的动量矩定理

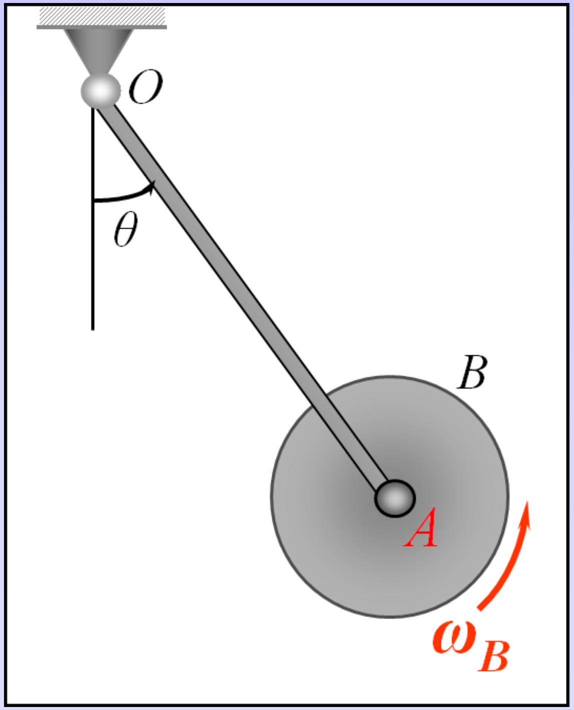
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_{Cz'}}{\mathrm{d}t}=M_{Cz'}}$$

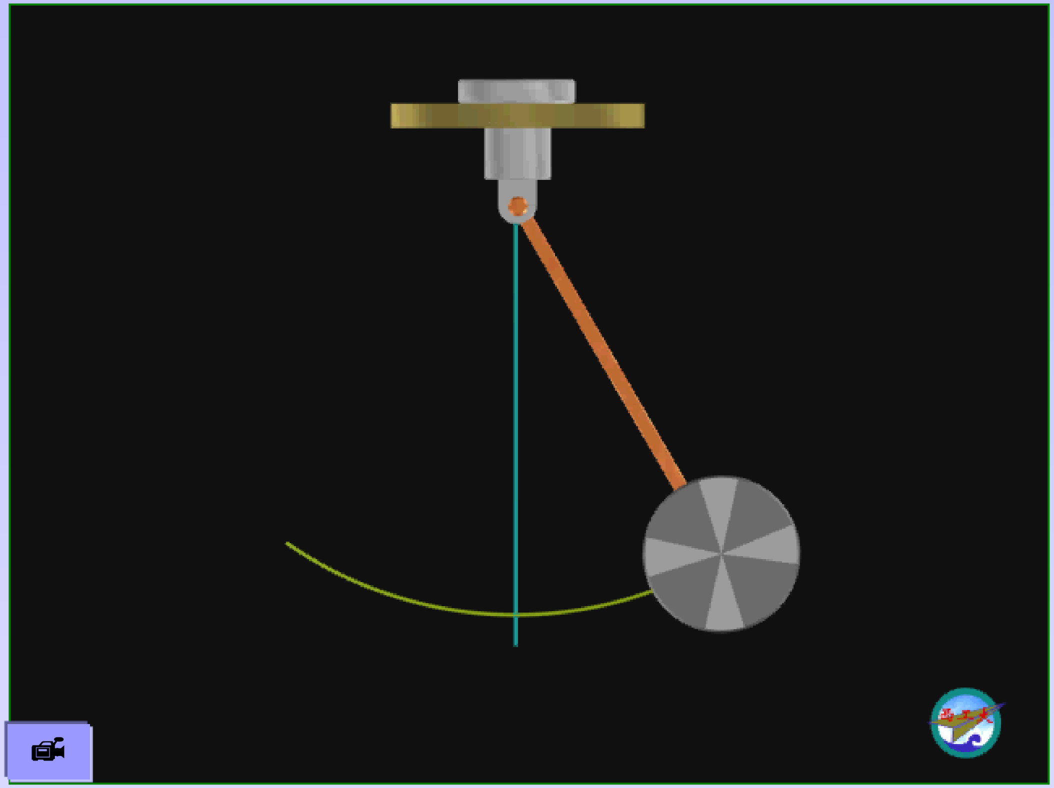
讨 论

1. 在以质心为原点的平动坐标系中，质点系对质心（或质心轴）的动量矩定理的形式与对定点（或定轴）的动量矩定理的形式相同；

2. 由该定理可见，质点系相对于质心（或质心轴）的动量矩的改变，只与质点系的外力有关，而与内力无关，即内力不能改变质点系对质心（或质心轴）的动量矩。

例题12-5 长度为l，质量为m_1的均质杆OA与半径为R，质量为m_2的均质圆盘B在A处铰接，铰链O、A均光滑。初始时，杆OA有偏角θ_0，轮B有角速度ω_0（逆时针向）。求系统在重力作用下的运动。





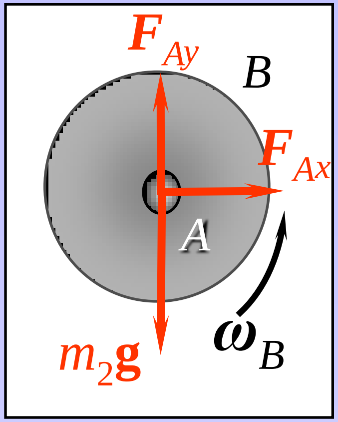
解： 1. 考虑圆盘B，受力如图b所示，根据对质心的动量矩定理

$$J_B \dot{\omega}_B = 0$$

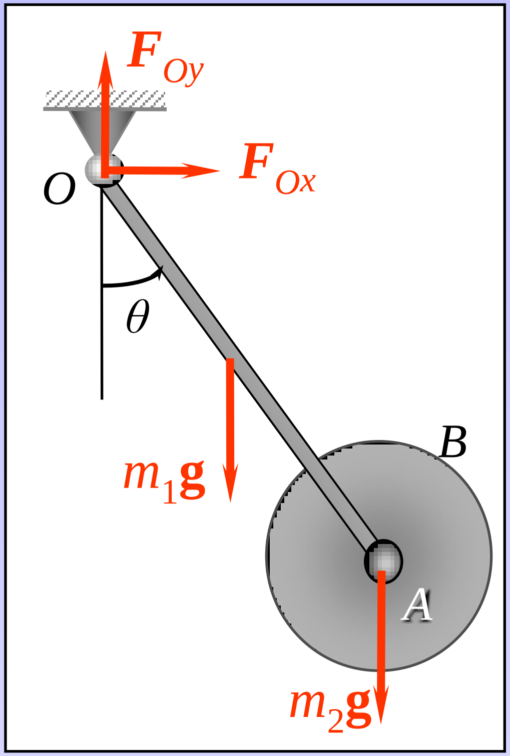
$$\omega_B = \omega_0$$

2. 考虑杆轮系统，受力如图c所示，应用对固定点O的动量矩定理，计算轮B动量矩时使用式

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_C + \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C$$



(b)



(c)

得 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J_{OA}\dot{\theta} + \left(J_B\omega_B + m_2 l\dot{\theta}\cdot l\right)\right] = -m_1 g\frac{l}{2}\sin\theta - m_2 g l\sin\theta$$

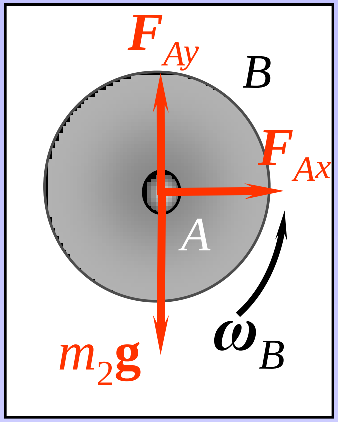
$$\left(\frac{1}{3}m_1 + m_2\right)l\ddot{\theta} + \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)g\sin\theta = 0$$

杆OA的角加速度为

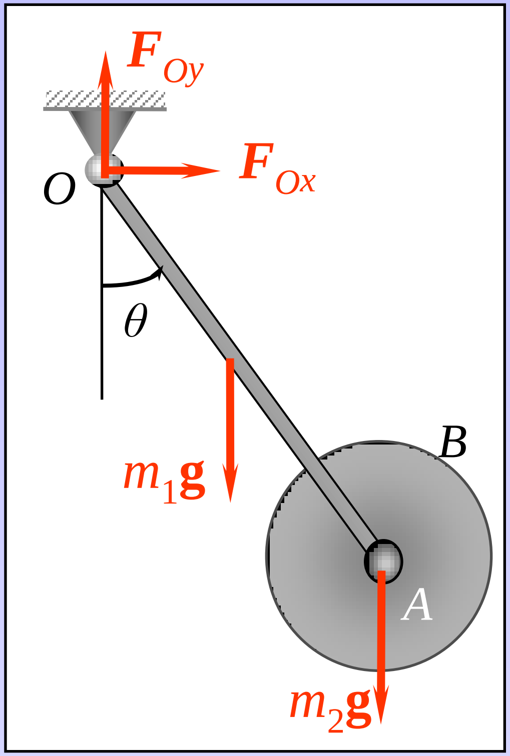
$$\varepsilon = -\frac{3(m_1+2m_2)g\sin\theta}{2(m_1+3m_2)l}$$

$$\varepsilon = \ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\int_0^{\dot{\theta}}\mathrm{d}\dot{\theta}^2 = -\frac{3(m_1+2m_2)g}{(m_1+3m_2)l}\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\cdot\mathrm{d}\theta$$



(b)



(c)

杆OA的角速度为：

$$\omega = \sqrt{\frac{3(m_1+2m_2)g}{(m_1+3m_2)l}(\cos\theta-\cos\theta_0)}$$

3. 运动特性：圆盘的转动不影响系统的摆动，而系统的摆动也不影响圆盘的转动。

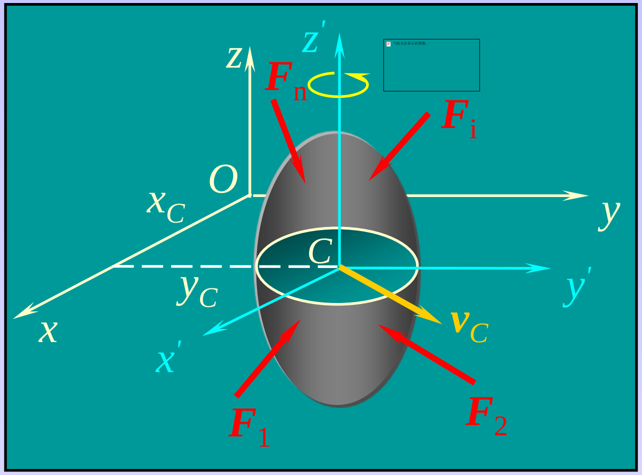
§12-5 刚体的平面运动微分方程

§ 12-5 刚体的平面运动微分方程

设刚体在外力 $F_1, F_2, \cdot\cdot;\ F_n$ 作用下作平面运动。

取固定坐标系 $Oxyz$ ，使刚体平行于坐标面 Oxy 运动，且质心 C在这个平面内，再以质心为原点作平动坐标系 $C x' y' z'$。

由运动学知，刚体的平面运动可分解成随质心的牵连平动和相对于质心的相对转动。



随质心的牵连平动规律可由质心运动定理来确定

即 $$\sum m_i \boldsymbol{a}_c = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

而相对于质心的相对转动规律可由相对质心的动量矩定理来确定

即 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_C$$

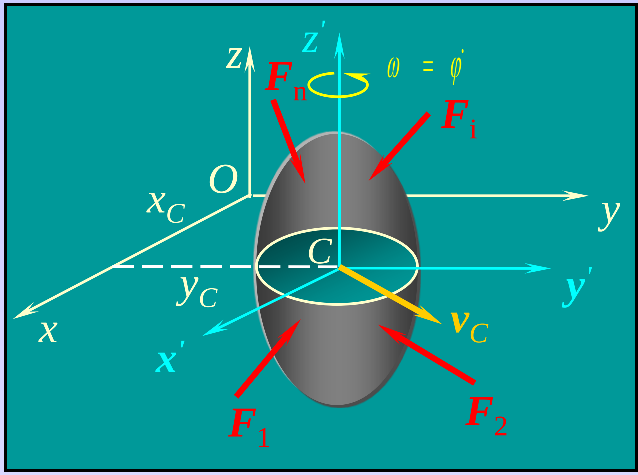
§12-5 刚体的平面运动微分方程

随质心的牵连平动规律可由质心运动定理来确定 $\sum m_i \boldsymbol{a}_c = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$

而相对质心的相对转动规律可由相对质心的动量矩定理来确定 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_C$

将前一式投影到轴 x，y 上，后一式投影到轴 Cz'上，可得

$$\sum m_i a_{Cx} = \sum F_x,\quad \sum m_i a_{Cy} = \sum F_y,\quad \frac{\mathrm{d}L_{Cz'}}{\mathrm{d}t} = M_{Cz'}$$



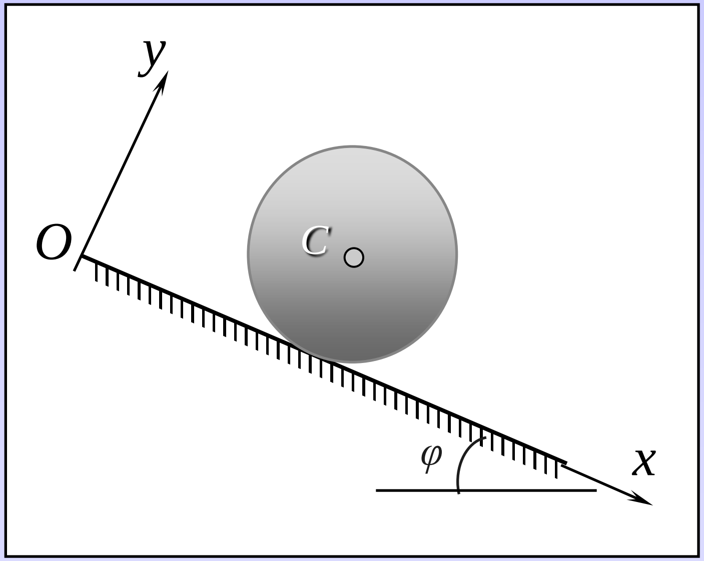
注意到 $a_{Cx} = \ddot{x}_C,\quad a_{Cy} = \ddot{y}_C,\quad L_{Cz'} = J_C\omega = J_C\dot{\phi}$

式中 $\boldsymbol{J_C}$ 表示刚体对轴 Cz' 的转动惯量。

则有 $$\boxed{\sum m_i \ddot{x}_C = \sum F_x,\quad \sum m_i \ddot{y}_C = \sum F_y,\quad J_C\ddot{\phi} = M_C}$$

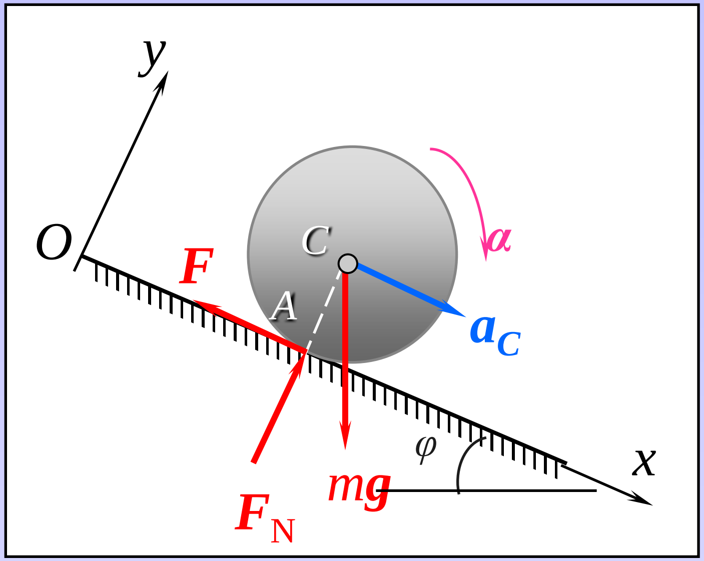
这就是刚体的平面运动微分方程。可以应用它求解刚体作平面运动时的动力学问题。

例题12-5 匀质圆柱的质量是 m，半径是 r，从静止开始沿倾角是φ 的固定斜面向下滚动而不滑动，斜面与圆柱的静摩擦系数是 f_s。试求圆柱质心 C 的加速度，以及保证圆柱滚动而不滑动的条件。



解： 以圆柱为研究对象，圆柱作平面运动。

由刚体平面运动微分方程，有



$$ma_C = mg\sin\varphi - F \qquad (1)$$

$$0 = F_N - mg\cos\varphi \qquad (2)$$

$$J_C\boldsymbol{\alpha} = Fr \qquad (3)$$

由于圆柱只滚不滑，故有运动学关系

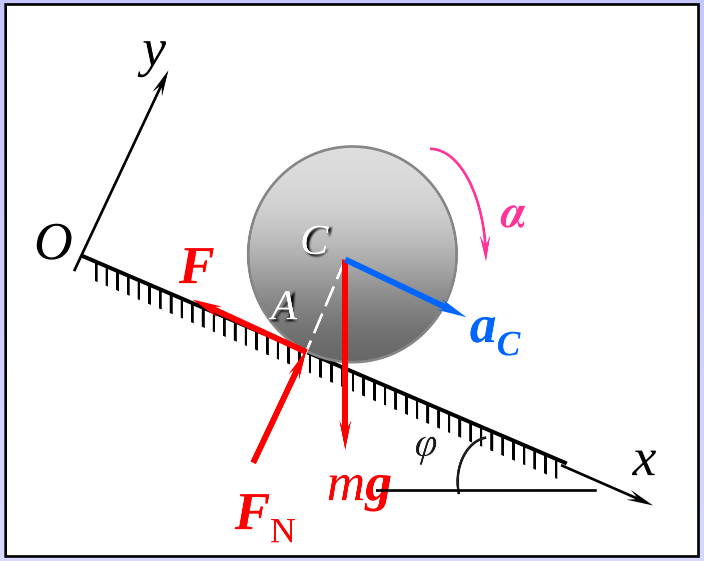
$$a_C = r\boldsymbol{\alpha} \qquad (4)$$

联立求解以上四个方程，并考虑到 $J_C = Mr^2/2$，得到

$$a_C = \frac{2}{3}g\sin\phi, \quad F = \frac{1}{3}mg\sin\phi, \quad F_N = mg\cos\varphi$$

$$a_C = \frac{2}{3} g \sin\phi, \quad F = \frac{1}{3} mg \sin\phi, \quad F_N = mg\cos\varphi$$

由保证圆柱滚动而不滑动的静力学条件：



$$F \le f_s F_N$$

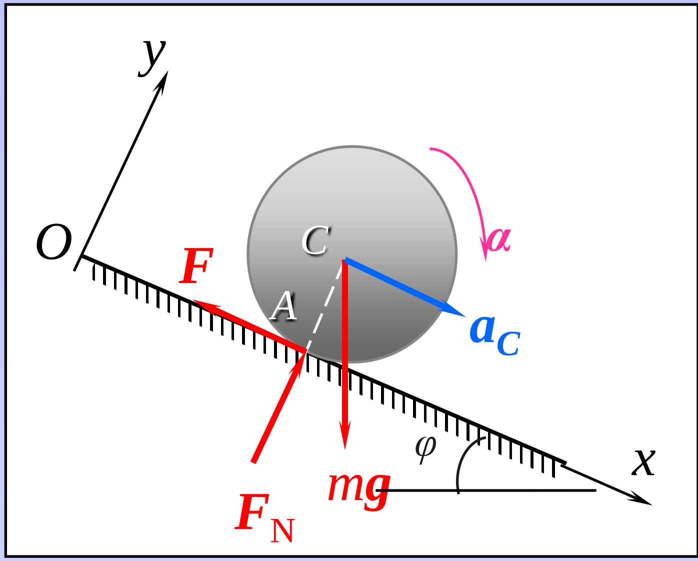
代入求出的 F 和 F_N，则得

$$\frac{1}{3} mg \sin\phi \le f_s mg \cos\phi$$

从而求得圆柱滚动而不滑动的条件

$$\tan\varphi \le 3 f_s$$

讨 论



1. 若$\tan\varphi \le 3f_s$不成立，如何分析？

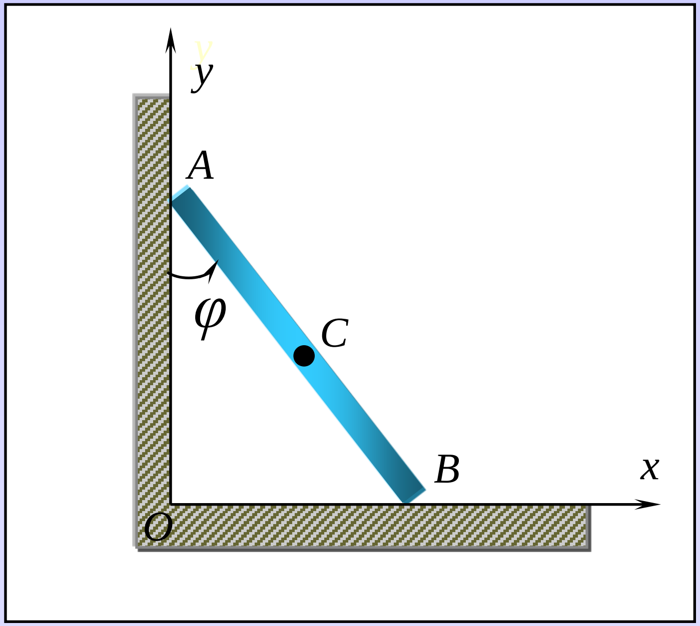
即圆柱有滑动，故运动学关系$a_C = r\alpha$不成立。

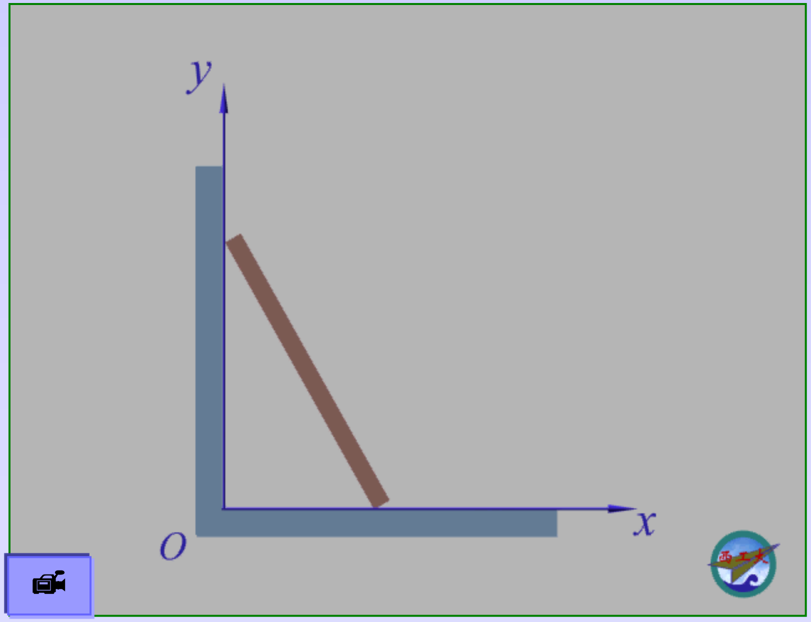
则应用关系$F = F_N f_s$做为补充方程。

2. 本例动量矩方程亦可用 $J_A\alpha = M_A$。

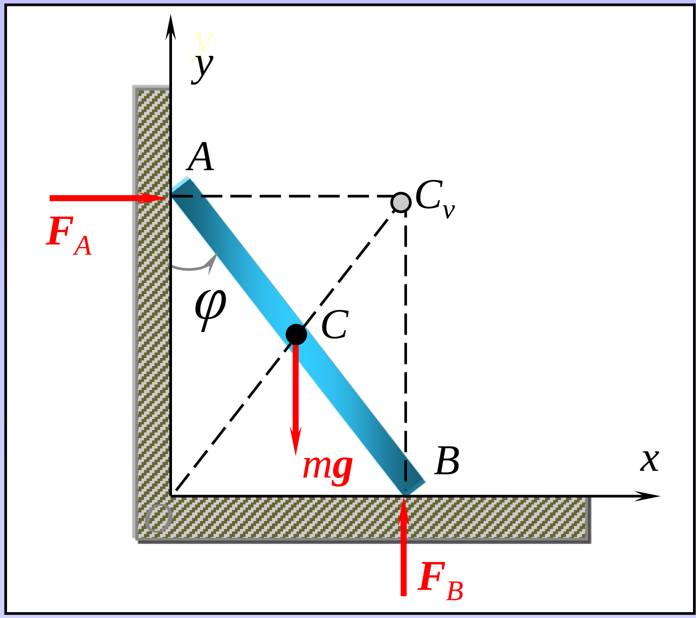
3. 本例亦可用动能定理求出a_C，然后应用质心运动定理求出 F。

例题 12-6 匀质细杆 AB 的质量是 m，长度是 $2l$，放在铅直面内，两端分别沿光滑的铅直墙壁和光滑的水平地面滑动。假设杆的初位置与墙成交角 φ_0，初角速度等于零。试求杆沿铅直墙壁下滑时的角速度和角加速度，以及杆开始脱离墙壁时它与墙壁所成的角度 φ_1。





解: 在 A 端脱离墙壁以前，受力如图所示。杆作平面运动，取坐标系 Oxy，则杆的运动微分方程可写成



$$m\ddot{x}_C = F_A \qquad \text{(a)}$$

$$m\ddot{y}_C = F_B - mg \qquad \text{(b)}$$

$$J_C\ddot{\varphi} = F_B l\sin\varphi - F_A l\cos\varphi \qquad \text{(c)}$$

由几何关系知

$$x_C = l\sin\varphi \qquad \text{(d)}$$

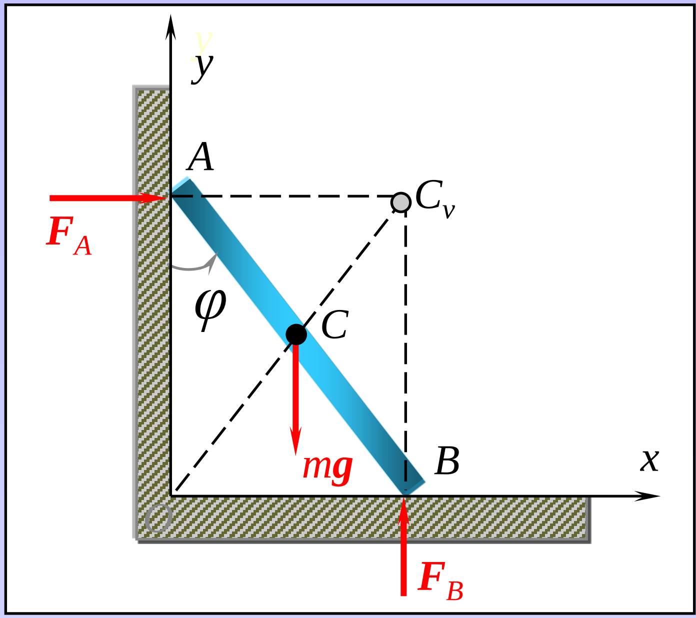
$$y_C = l\cos\varphi \qquad \text{(e)}$$

将式(d)和(e)对时间求导，得

$$\dot{x}_C = l\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \dot{y}_C = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\ddot{x}_C = l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi \qquad \text{(f)}$$

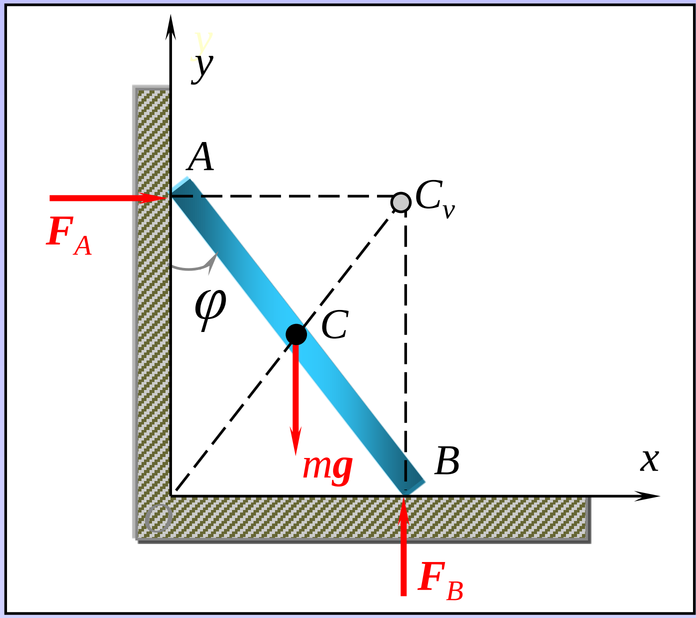
$$\ddot{y}_C = -l\ddot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi \qquad \text{(g)}$$



把 (f)和(g)分别代入 (a)和(b)，再把 F_A 和 F_B 的值代入 (c)

最后得杆 AB 的角加速度

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\sin\varphi \qquad \text{(h)}$$



利用关系 $$\ddot{\varphi}=\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{\dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}$$

把上式化成积分

$$\int_0^{\dot{\varphi}}\dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi}=\frac{3g}{4l}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

求得杆 *AB* 的角速度

$$\dot{\varphi}=\sqrt{\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0-\cos\varphi)} \qquad \text{(i)}$$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)} \qquad \text{(i)}$$

当杆即将脱离墙时，$F_A \to 0$。以$F_A = 0$代入(a)，再根据(f)得

$$l\ddot{\varphi}\cos\varphi_1 = l\dot{\varphi}^2\sin\varphi_1$$

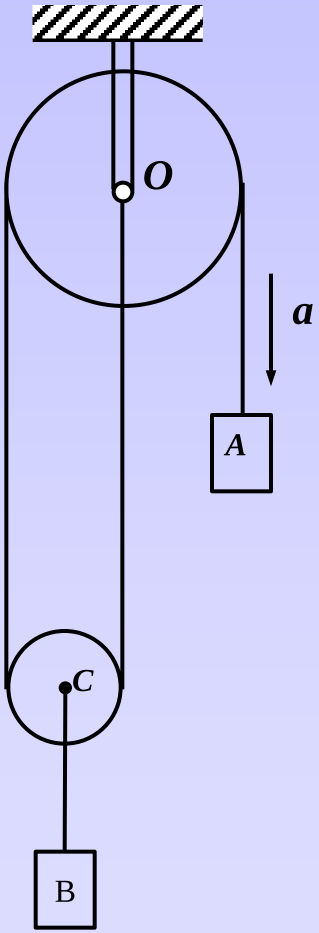
把(h) 和(i)的表达式在 $\varphi = \varphi_1$ 时的值代入上式，得关系

$$l\frac{3g}{4l}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = l\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1)\sin\varphi_1$$

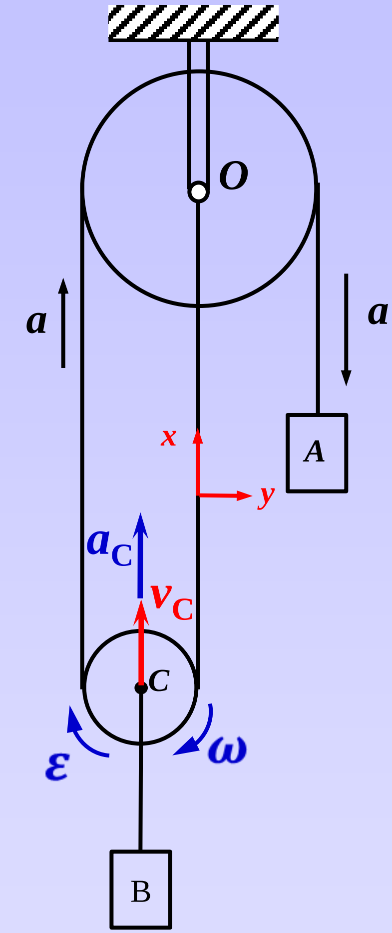
整理后，求得杆开始脱离墙时与墙所成的夹角

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{2}{3}\cos\varphi_0\right)$$

例题12-7 在图示机构中，重物A和B重分别为P_1和P_2，若物体A以加速度a下降，滑轮和绳子的质量均忽略不计，试求轴承O处的反力。



解： 先求物体B的加速度，即点C的加速度。为此，设动滑轮的半径为r，角速度为ω，角加速度为ε。



轮心C的速度： $v_C = \omega \cdot r$

轮心C的加速度： $a_C = \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{d(\omega r)}{dt} = \varepsilon \cdot r$

以C为基点，分析轮缘上D点的加速度：

$$a_D = a_C + a_{DC}^t + a_{DC}^n$$

解： 先求物体B的加速度，即点C的加速度。为此，设动滑轮的半径为r，角速度为ω，角加速度为ε。

轮心C的速度： $v_C = \omega \cdot r$

轮心C的加速度： $a_C = \dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(\omega r)}{\mathrm{d}t} = \varepsilon \cdot r$

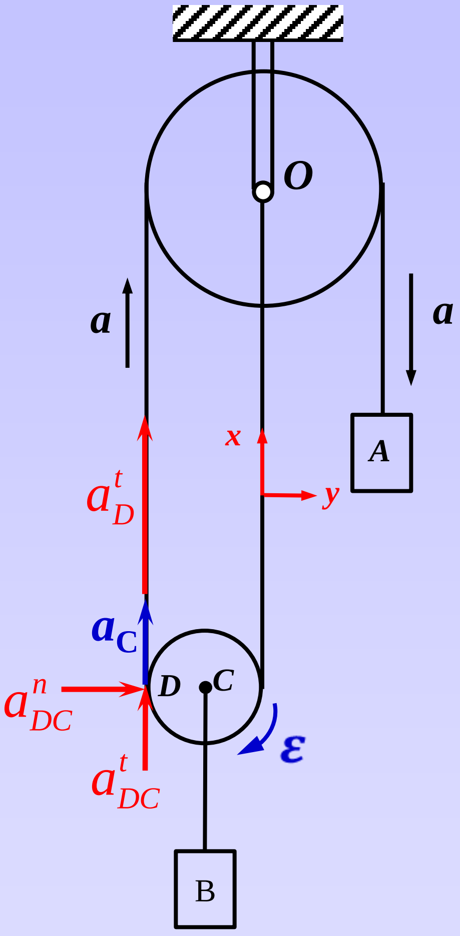
以C为基点，分析轮缘上D点的加速度：

$$\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{DC}^t + \boldsymbol{a}_{DC}^n$$

$$a_D^t = a; \quad a_{DC}^t = \varepsilon \cdot r; \quad a_{DC}^n = \omega^2 \cdot r$$

由此求得点C的加速度：

$$a_C = a_{DC}^t = \frac{a}{2}$$



解： 先求物体B的加速度，即点C的加速度。为此，设动滑轮的半径为r，角速度为ω，角加速度为ε。

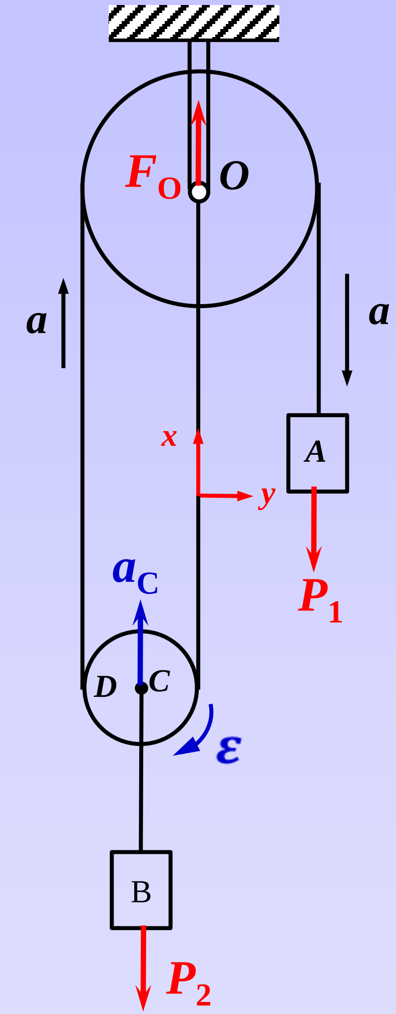
物体A的加速度：$a_A = a$

物体B的加速度：$a_B = \dfrac{1}{2}a$

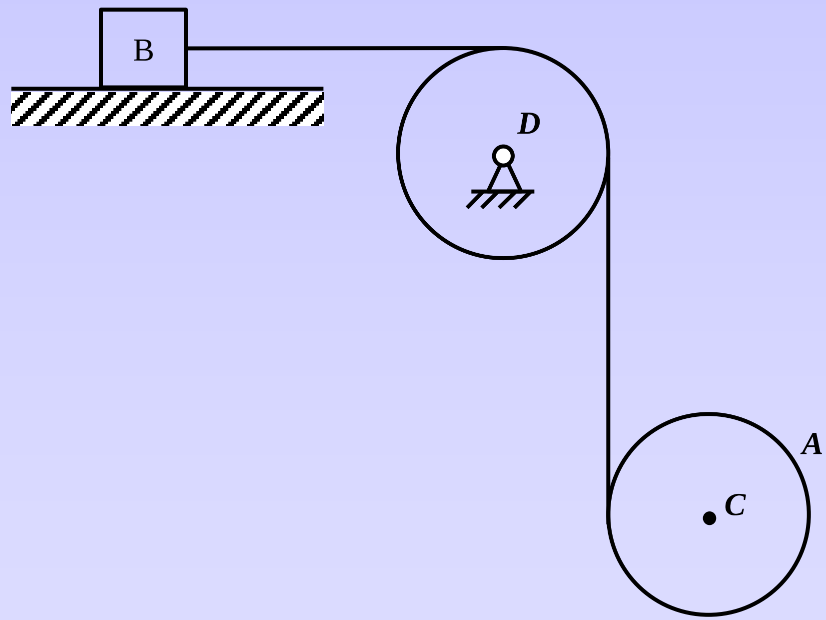
以整体为研究对象，受力分析如图，应用质心运动定理，有

$$-\frac{P_1}{g}a + \frac{P_2}{g}\cdot\frac{a}{2} = F_O - P_1 - P_2$$

由此求得支座O处的约束力为：$F_O = P_1 + P_2 + \dfrac{P_2 - 2P_1}{2g}$



例题12-8 跨过定滑轮D的细绳，一端缠绕在均质圆柱体A上，另一端系在光滑水平面上的物体B上，如图所示。已知圆柱A的半径为r，质量为m_1；物块B的质量为m_2。试求物体B和圆柱质心C的加速度以及绳索的拉力。滑轮D和细绳的质量以及轴承摩擦忽略不计。



解： 设物体B的速度为v_B，加速度为a_B；轮心C的速度为v_C，加速度为a_C。并设圆柱的角速度为ω，角加速度为ε。

以C为动点，动系固连在绳索上，则牵连运动为平移，牵连速度为v_B。

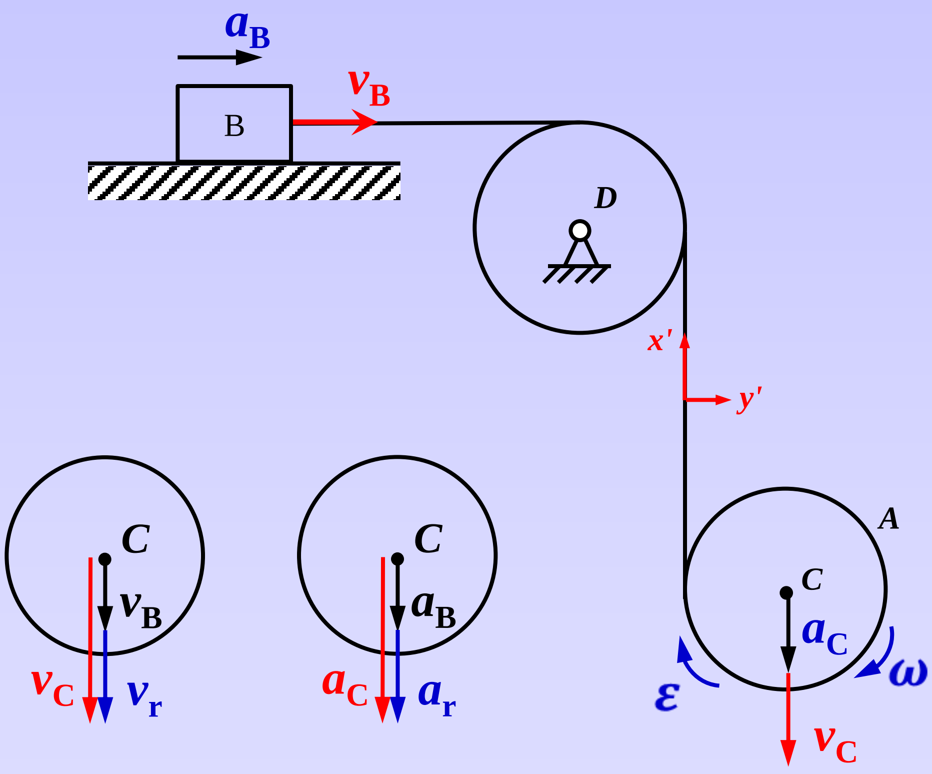
$$v_C = v_B + v_r = v_B + \omega r$$

同理，加速度分析如下：

$$a_C = a_B + a_r$$

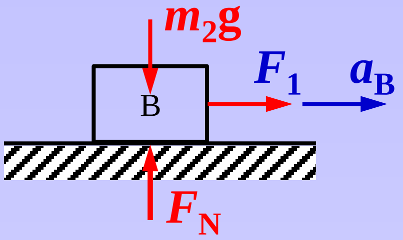
$$a_r = \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\omega r)}{\mathrm{d}t} = \varepsilon r$$

因此，$a_C = a_B + \varepsilon r$



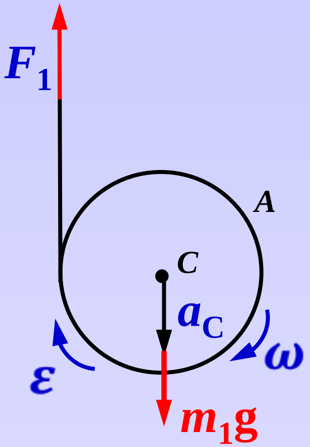
$$a_C = a_B + a_r = a_B + \varepsilon r$$

取分离体B：



根据质心运动定理，有 $F_1 = m_2 a_B$

取分离体A：



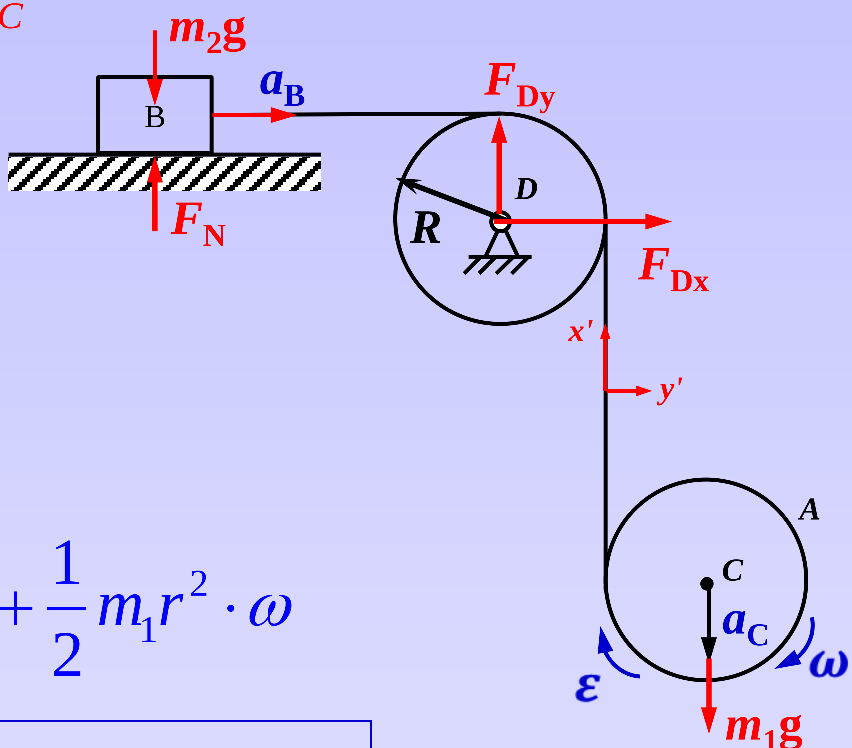
$$\begin{cases} \dfrac{dL_C}{dt} = M_C \Rightarrow F_1 \cdot r = \dfrac{1}{2} m_1 r^2 \cdot \varepsilon \\ \sum m_i a_{Cy} = \sum F_{iy}^{(e)} \Rightarrow m_1 a_C = m_1 g - F_1 \end{cases}$$

解得：

$$a_B = \frac{m_1}{m_1 + 3m_2} g; \quad a_C = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + 3m_2} g; \quad F_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + 3m_2} g$$

$$a_C = a_B + \varepsilon r; \qquad F_1 = m_2 a_B$$

$$F_1 \cdot r = \frac{1}{2} m_1 r^2 \cdot \varepsilon; \qquad m_1 g - F_1 = m_1 a_C$$



应用对于定轴D的动量矩定理：

$$\frac{dL_D}{dt} = \sum M_D(\vec{F}_i^{(e)}) = M_D$$

$$M_D = m_1 g \cdot (R + r)$$

同时：

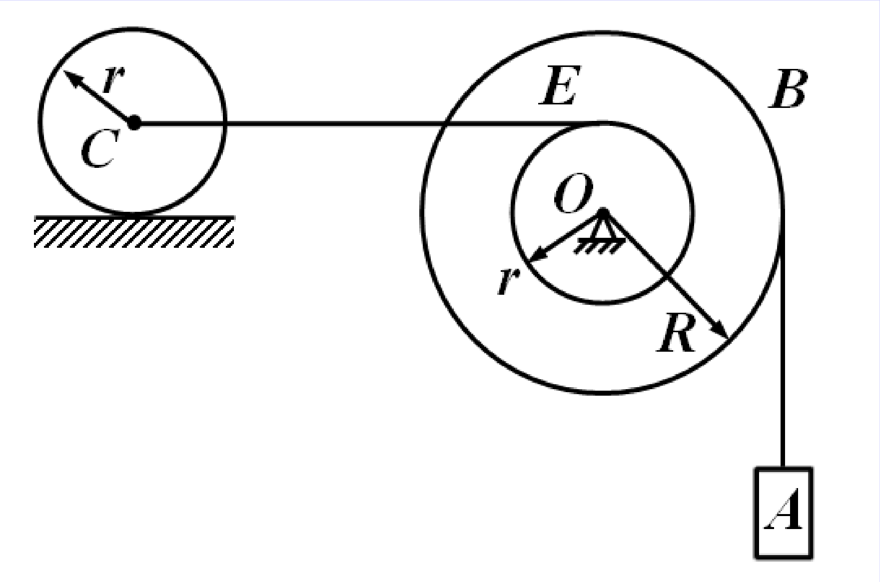
$$L_D = m_2 v_B \cdot R + m_1 v_C \cdot (R + r) + \frac{1}{2} m_1 r^2 \cdot \omega$$

$$\boxed{m_2 a_B \cdot R + m_1 a_C \cdot (R + r) + \frac{1}{2} m_1 r^2 \cdot \varepsilon = m_1 g \cdot (R + r)}$$

例题12-9 图示机构中，匀质圆轮C、鼓轮B和物体A的质量均为m；圆轮C在水平面上作纯滚动，半径为r；鼓轮B的内径为r，外径$R=\sqrt{2}r$，对中心轴回转半径假定为r。绳的CE段水平，系统从静止开始运动。试求：

(1) 物块A下落距离s时轮心C的速度和加速度；

(2) 绳索CE段的拉力和支座O处的约束反力。

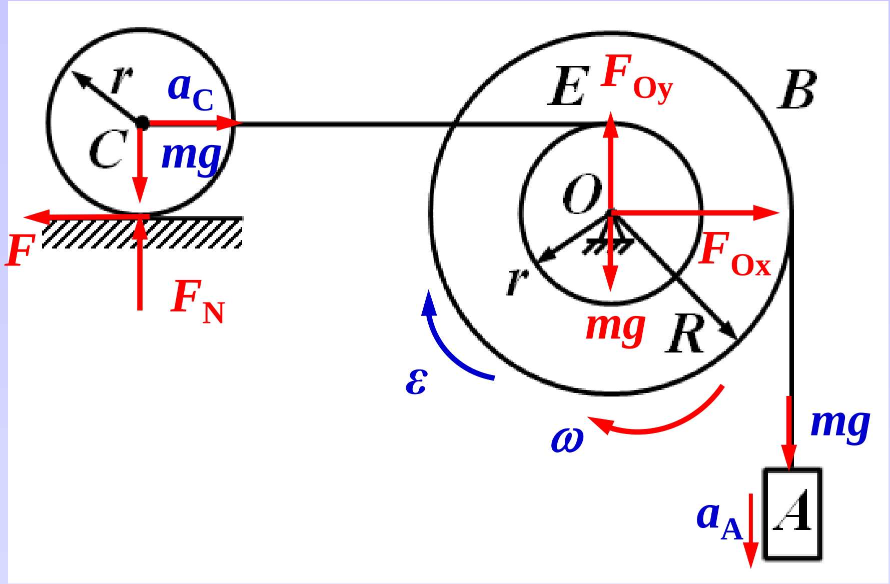


解： 设物体A的速度为v_A，加速度为a_A；轮心C的速度为v_C，加速度为a_C。并设鼓轮的角速度为ω，角加速度为ε。

$$\varepsilon = a_A/R = a_A/\sqrt{2}r; \qquad a_C = \varepsilon r = a_A/\sqrt{2}$$

应用对于定轴O的动量矩定理：

$$\frac{dL_O}{dt} = \sum M_O(\vec{F}_i^{(e)}) = M_O$$



$$L_O = mv_C \cdot r + \frac{1}{2}mr^2\frac{v_C}{r} + mv_A \cdot R + mr^2 \cdot \omega$$

$$M_O = mg \cdot R = mg \cdot \sqrt{2}r$$

得到：$$ma_C \cdot r + \frac{1}{2}mra_C + ma_A \cdot \sqrt{2}r + mr^2 \cdot \varepsilon = mg \cdot \sqrt{2}r$$

$$\boxed{a_C = \frac{2\sqrt{2}}{9}g}$$

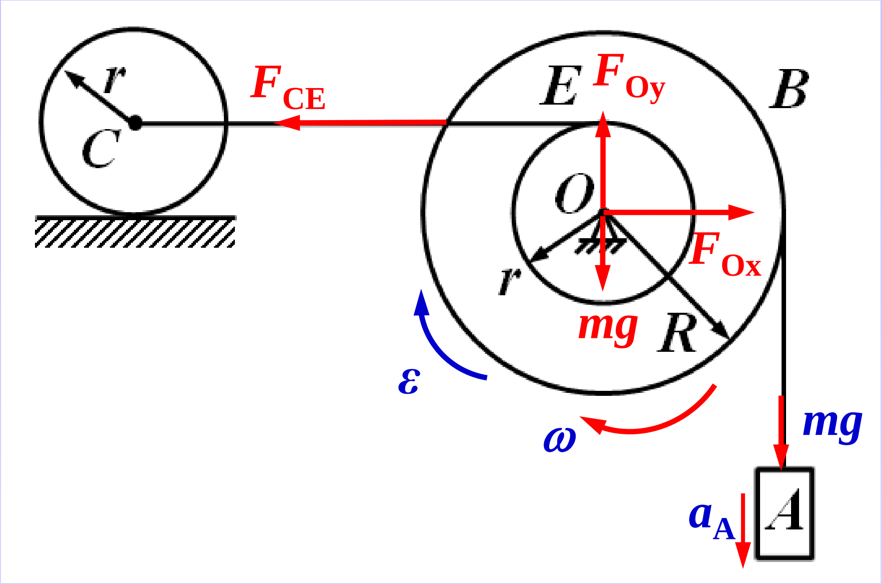
解：求绳索CE段的拉力。取鼓轮和物体A为研究对象，受力分析如图。

应用对于定轴O的动量矩定理：

$$\frac{dL'_O}{dt}=\sum M_O(\vec{F}_i^{(e)})=M'_O$$

$$L'_O=mv_A\cdot R+mr^2\cdot\omega$$

$$M'_O=mg\cdot R-F_{\mathrm{CE}}r$$



代入定理表达式，得到：

$$ma_A\cdot\sqrt{2}r+mr^2\cdot\varepsilon=m\sqrt{2}a_C\cdot\sqrt{2}r+mr^2\cdot\frac{a_C}{r}=mg\cdot\sqrt{2}r-F_{\mathrm{CE}}r$$

整理，计算出： $F_{\mathrm{CE}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}mg$

解：求支座O处的约束力。取鼓轮和物体A为研究对象，受力分析如图。

应用质心运动定理：

$$\sum m_i \vec{a}_{Ci} = \sum \vec{F}_k^{(e)}$$

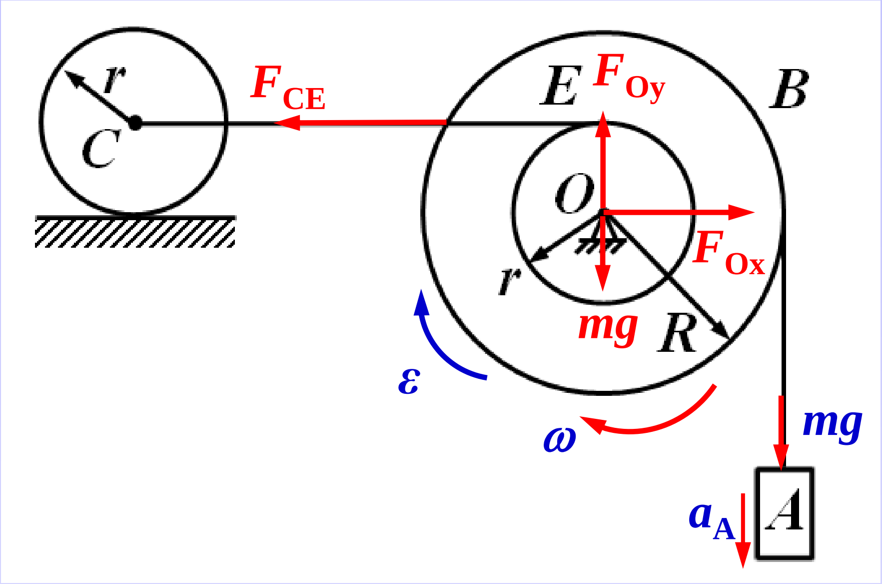
在x方向上，有：

$$F_{Ox} - F_{CE} = 0 \Rightarrow F_{Ox} = \frac{\sqrt{2}}{3} mg$$

在y方向上，有：

$$-ma_A = F_{Oy} - mg - mg$$

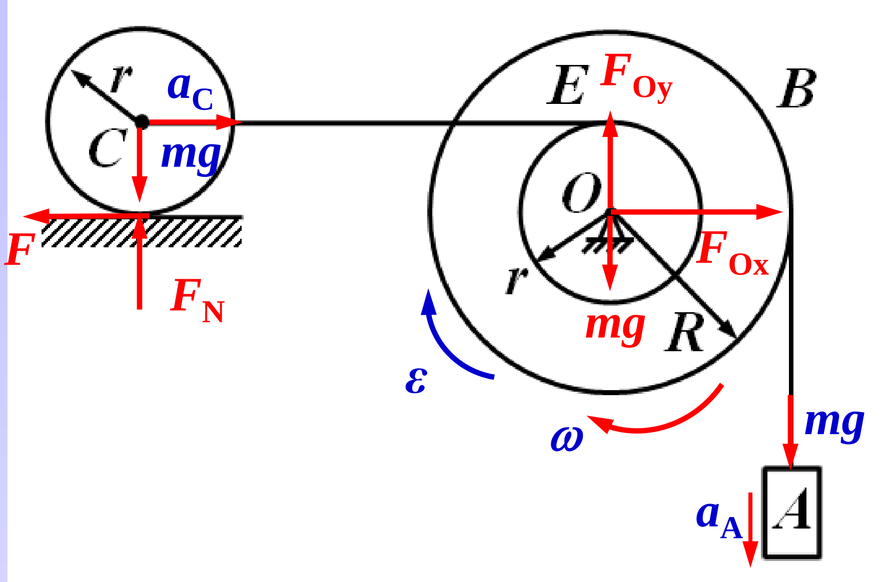
$$\Rightarrow F_{Oy} = \frac{14}{9} mg$$



如何求轮心C的速度？

解：求轮心C的速度。先求物体A的速度。

已知：$a_A = \sqrt{2} a_C = \frac{4}{9} g$



因此，物体A作匀加速运动。下落距离s满足：

$$v_A^2 - 0 = 2a_A s$$

求出物体A由静止下落距离s时的速度：

$$v_A = \sqrt{2a_A s} = \sqrt{2 \cdot \frac{4}{9} g \cdot s} = \frac{2\sqrt{2gs}}{3}$$

轮心C的速度为：$v_C = \frac{v_A}{R} r = \frac{v_A}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{gs}$

注意：此题可由动能定理先求出v_C，进一步可方便地求出a_C。

谢谢使用