西北工業大學
Northwestern Polytechnical University

运 动 学

点的合成运动

杨成鹏
力学与土木建筑学院

运　动　学

第八章　点的合成运动

§8–1　基本概念

- 两种参考系
- 三种运动
- 牵连点•动点和动系的选择

§8–1 基本概念

1.两种参考系

物体的运动的描述结果与所选定的参考系有关。同一物体的运动，在不同的参考系中看来，可以具有极为不同的运动学特征（具有不同的轨迹、速度、加速度等）。

§8–1 基 本 概 念

● **两种参考系**

定参考系（定系）：在分析问题中，认定不动的参考系。

若不特别说明，则认为定系固连于地面，用$Oxyz$表示。

动参考系（动系）：相对于定系作某种运动的参考系。

动系一般用$O'x'y'z'$表示。

本章的研究对象称为*动点*。

2. 三种运动

绝对运动： 动点相对于定参考系的运动。

相对运动： 动点相对于动参考系的运动。

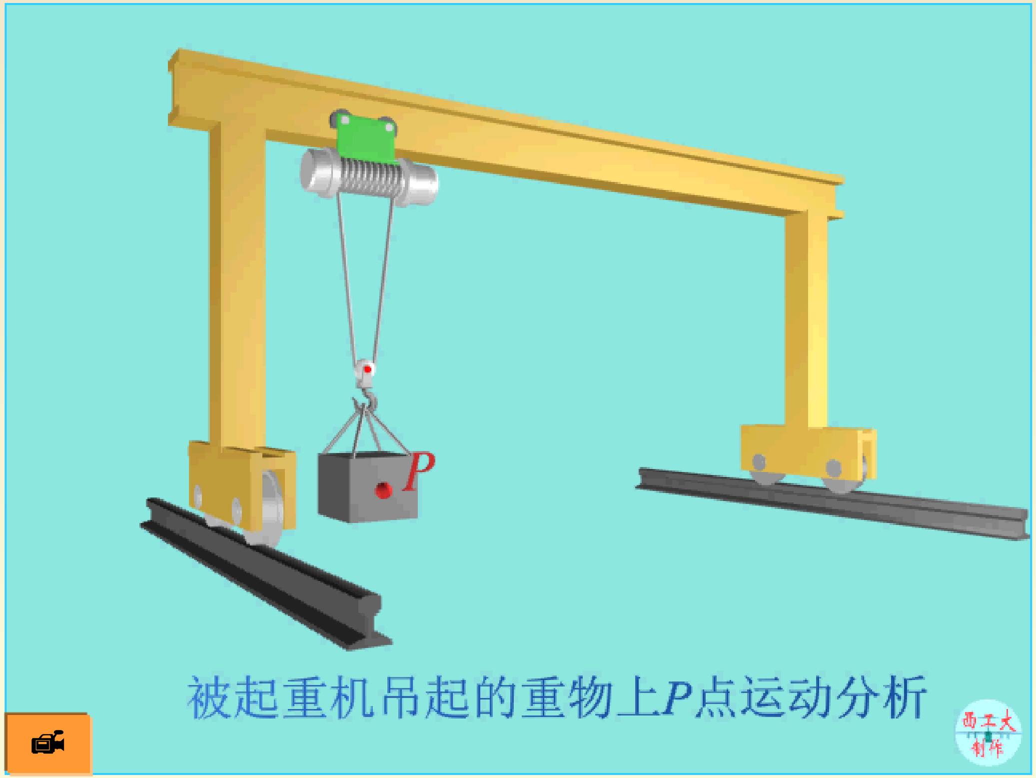
牵连运动： 动参考系相对于定参考系的运动。

3. 两种运动轨迹

绝对运动轨迹：动点相对于定系的运动轨迹。

相对运动轨迹：动点相对于动系的运动轨迹。

工程实例



定参考系？

动参考系？

绝对运动？

相对运动？

牵连运动？

大梁不动时

§8–1 基本概念

工程实例

定参考系？

动参考系？

绝对运动？

相对运动？

牵连运动？

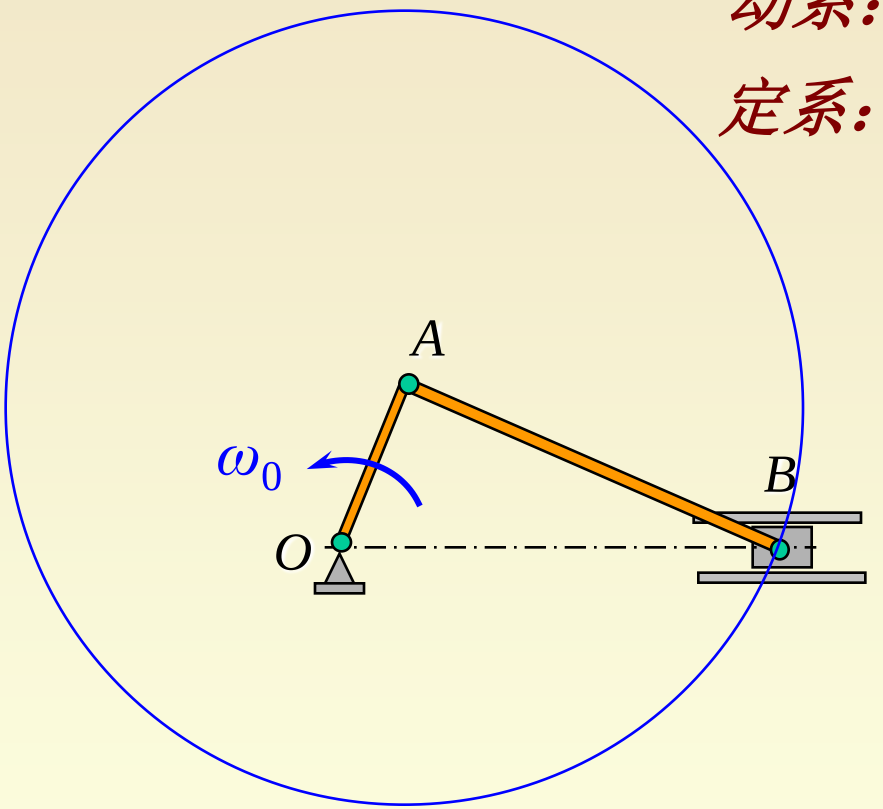
思考题

思考题

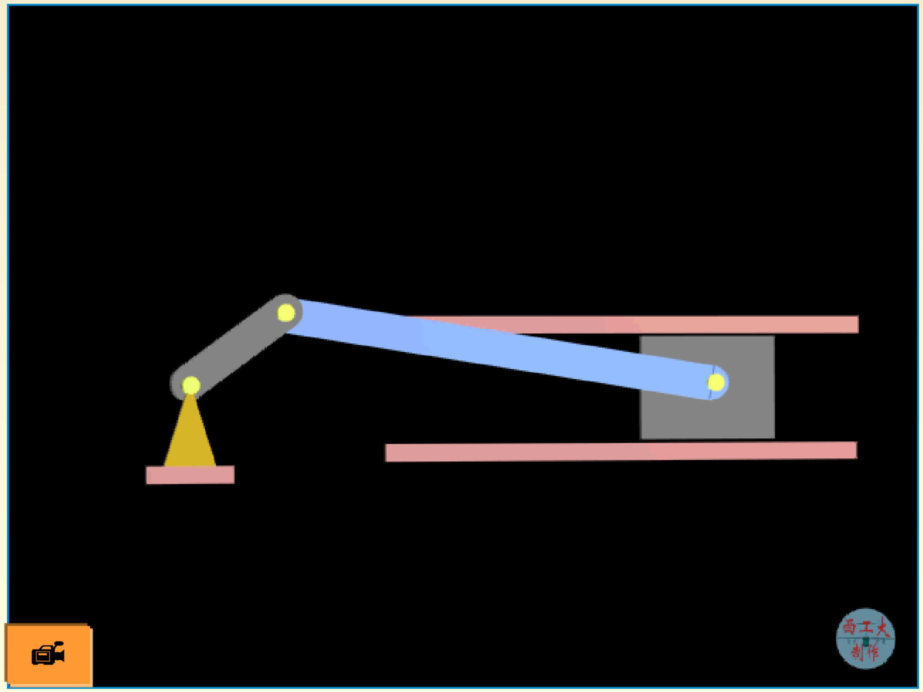
动点：滑块上B点。 绝对运动？

动系：固连于曲柄OA。 相对运动？

定系：固连于机座。 牵连运动？



曲柄—滑块机构

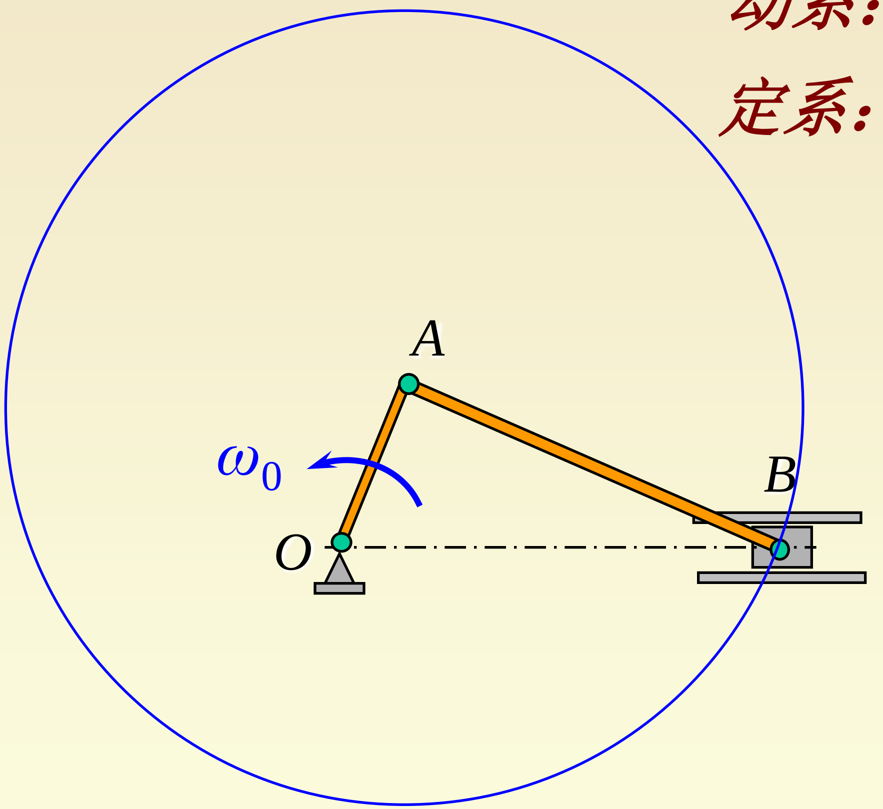


思考题

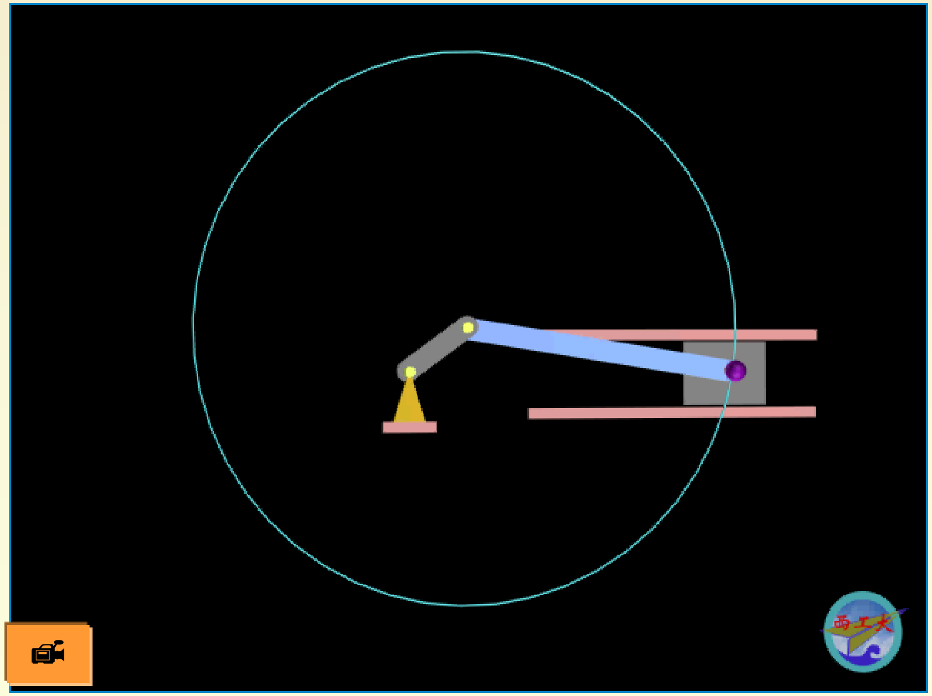
动 点：滑块上B点。 *绝对运动？*

动系：固连于曲柄OA。 *相对运动？*

定系：固连于机座。 *牵连运动？*



曲柄—滑块机构

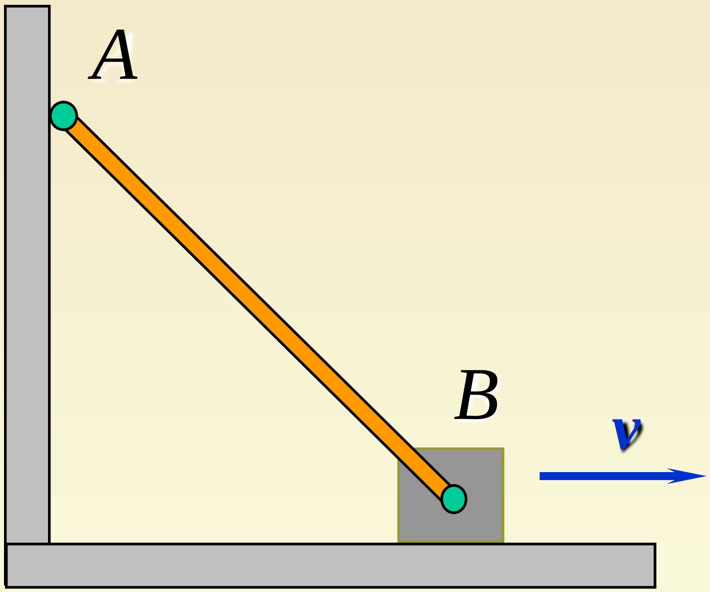


思考题

动点：杆上A点。

动系：固连于滑块B。

定系：固连于墙面。



绝对运动？

相对运动？

牵连运动？

§8–1 基 本 概 念

● 复合运动

由此可见，物体的绝对运动可以看成是牵连运动和相对运动的合成结果。所以绝对运动也称为复合运动或合成运动。

由于牵连运动的存在，使物体的绝对运动和相对运动发生了差别。

如果没有牵连运动，物体的相对运动等同于它的绝对运动。

如果没有相对运动，物体的牵连运动就是它的绝对运动。

§8–1 基本概念

几点说明

◆ 本章只研究点的复合运动理论，通过牵连运动来建立绝对运动和相对运动之间的联系，给出这些运动特征量（轨迹、速度、加速度）之间的关系。

◆ 必须指出在这一章，绝对运动、相对运动都是指点的运动，可能是直线运动，也可能是曲线运动；而牵连运动是指刚体的运动，可能是平动、定轴转动或下一章的平面运动等。

◆ 在复合运动的研究中，参考系的选择是问题的关键。恰当的选择参考系，能把复杂的运动分解为若干种简单运动，或由若干种简单运动组成各种不同的复杂运动。

4. 牵连点的概念

（1）、定 义

动系上（或其延伸面上）与动点瞬时重合的点，称为牵连点。

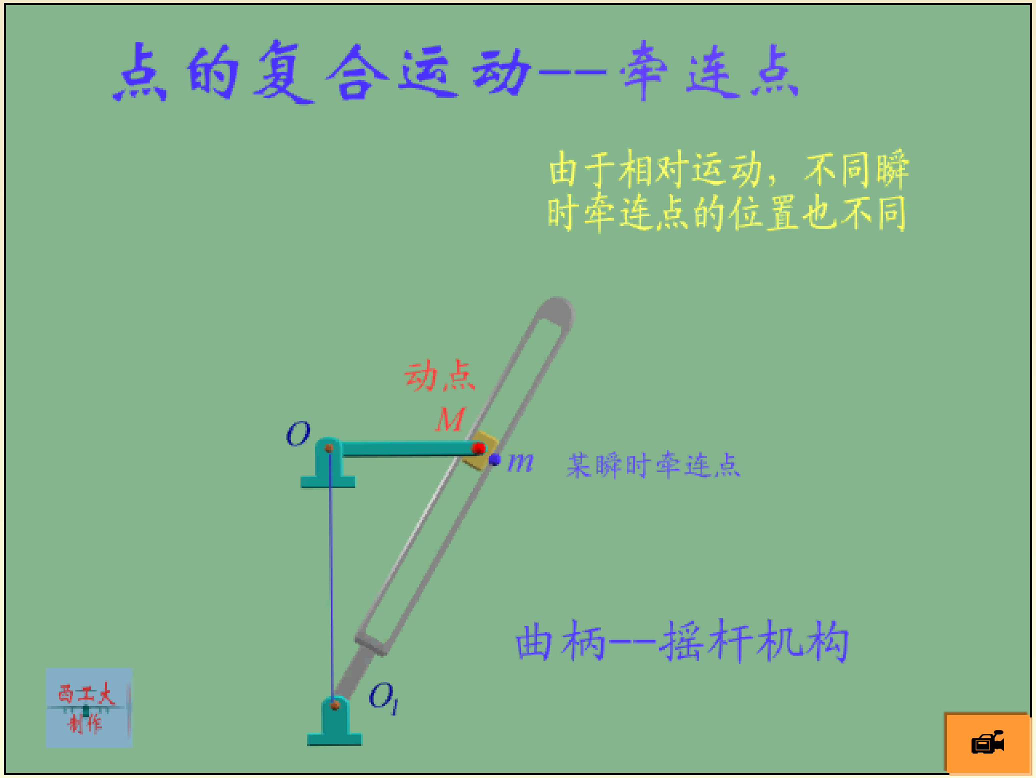
（2）、进一步说明

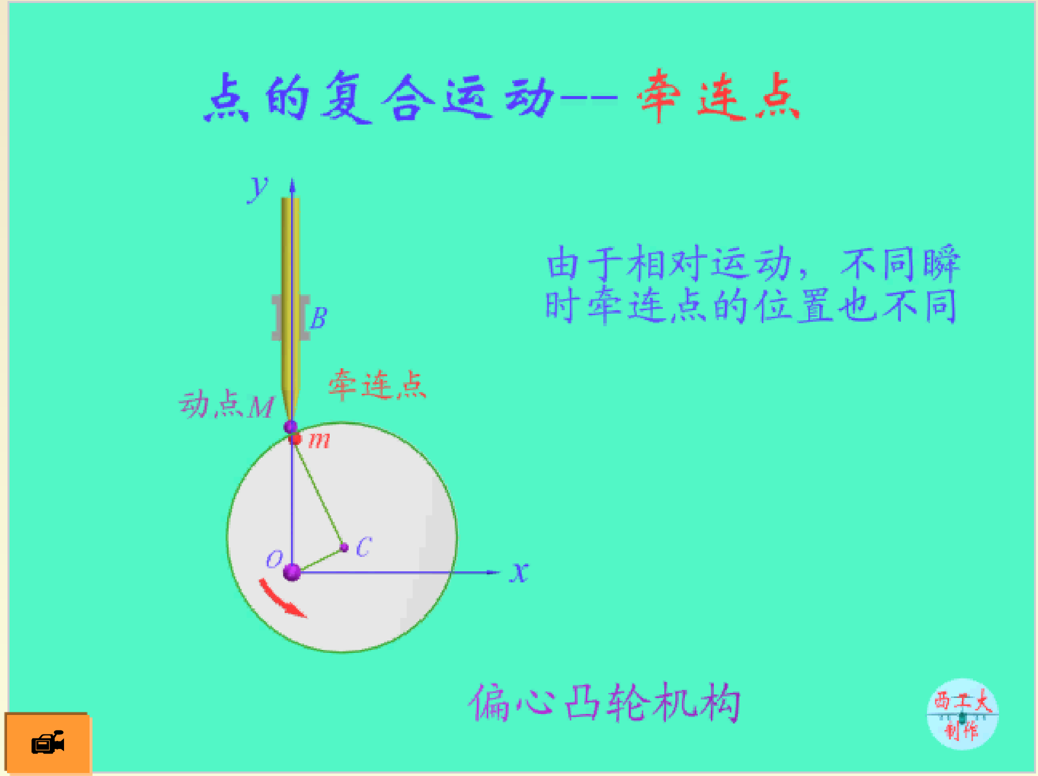
牵连运动一方面是动系的绝对运动，另一方面对动点来说起着“牵连”作用。但是带动动点运动的只是动系上在所考察的瞬时与动点相重合的那一点，该点称为牵连点或瞬时重合点。

（3）、注 意

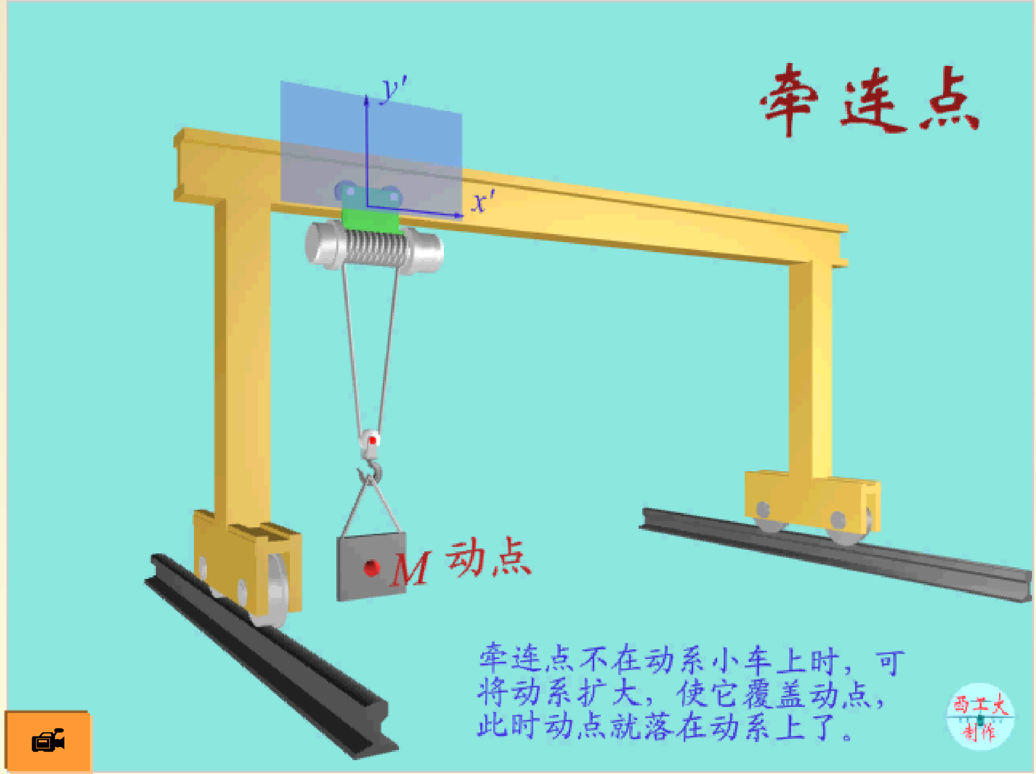
由于相对运动，动点在动系上的位置随时间改变，所以牵连点具有瞬时性。

§8–1 基本概念

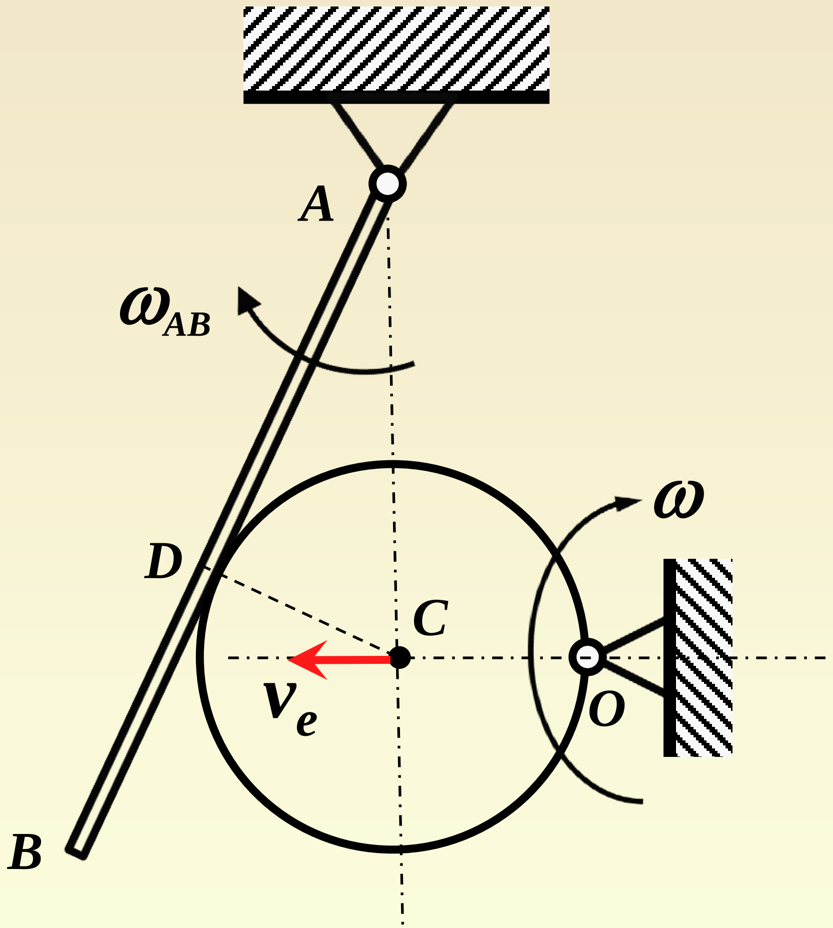

点的复合运动——牵连点
由于相对运动，不同瞬
时牵连点的位置也不同
动点
M
O
m
某瞬时牵连点
O1
曲柄——摇杆机构
西工大
制作


点的复合运动-- 牵连点
y
B
牵连点
动点M
m
C
O
x
由于相对运动，不同瞬时牵连点的位置也不同
偏心凸轮机构
西工大制作

§8–1 基本概念



§8–1 基本概念



动系：固连于AB杆

定系：固连于机座

动点：圆盘中心C点

牵连点？

牵连点的速度？

$$v_e = \omega_{AB}\overline{AC}$$

5、 动点和动系的选择

● 基本原则：

1. 动点对动系要有相对运动。

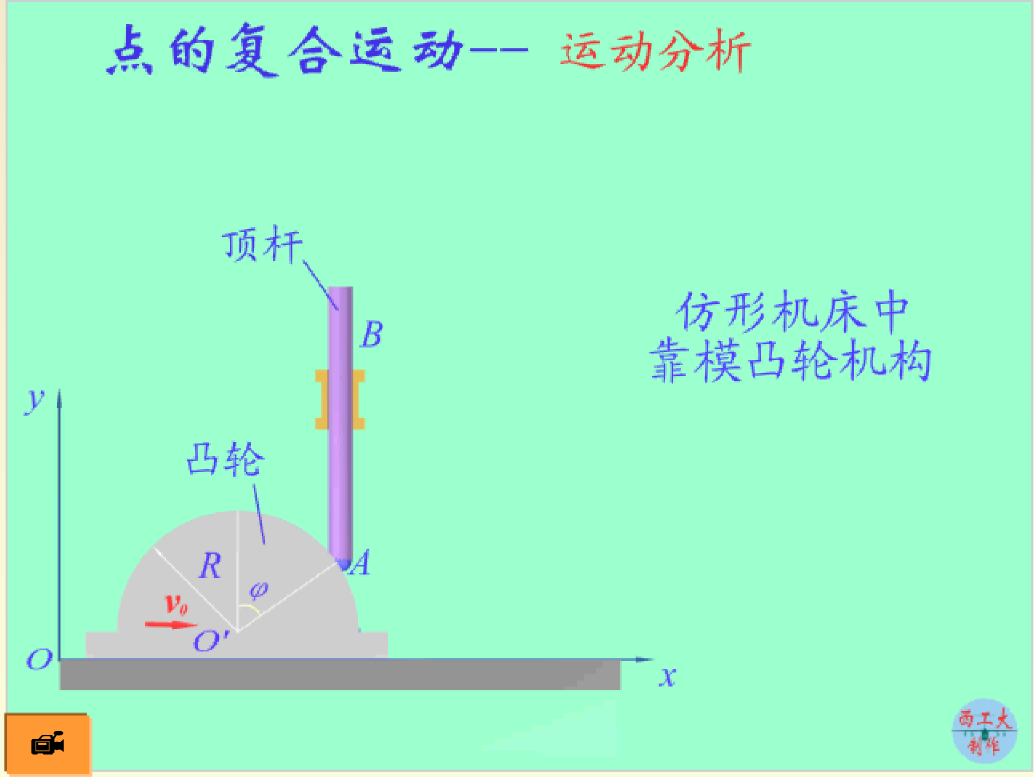
2. 动点的相对运动轨迹要明确、容易确定。

● 具体选择方法：

1. 选择持续接触点为动点。

2. 对没有持续接触点的问题，一般不选择接触点为动点。
根据选择原则具体问题具体分析。

练习题 1



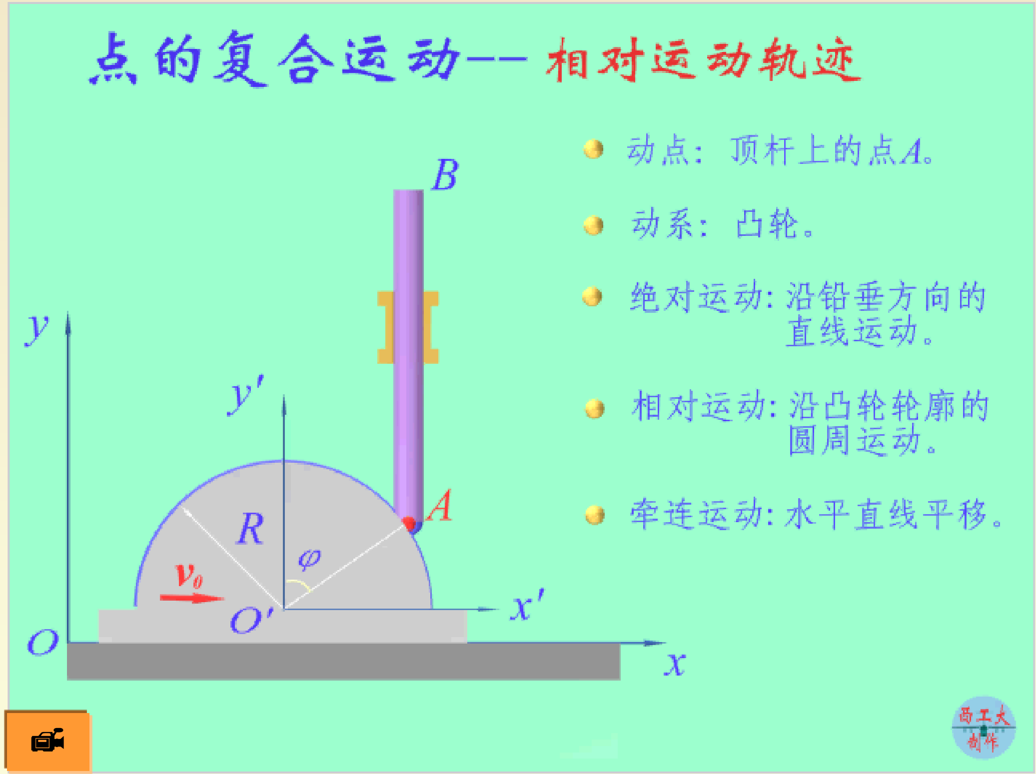
动点？

动参考系？

绝对运动？

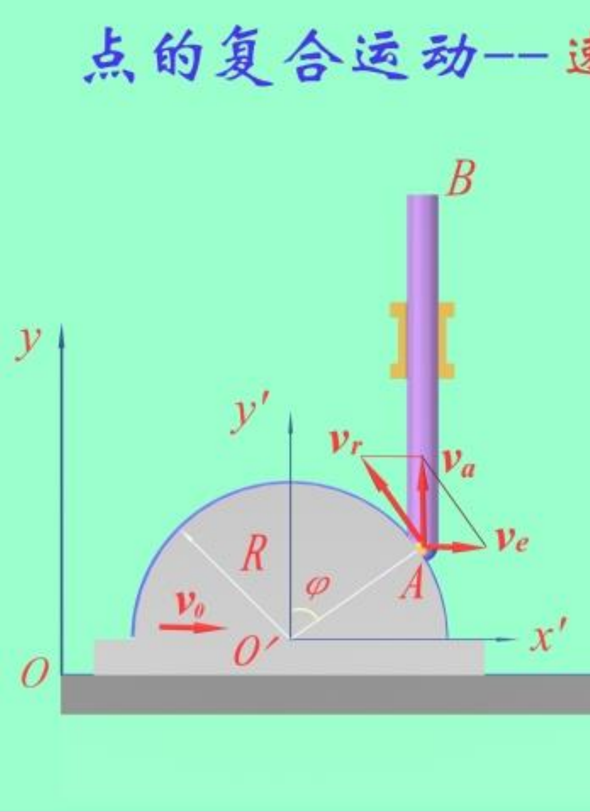
相对运动？

牵连运动？



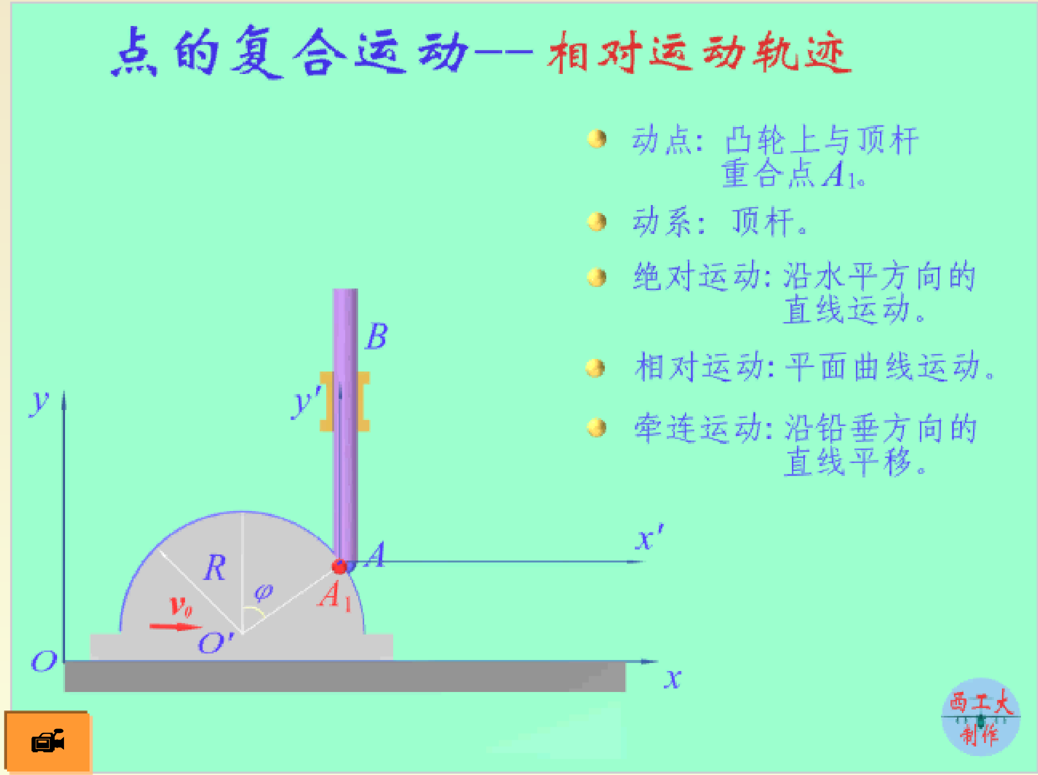
点的复合运动—— 相对运动轨迹
动点：顶杆上的点A。
动系：凸轮。
绝对运动：沿铅垂方向的直线运动。
相对运动：沿凸轮轮廓的圆周运动。
牵连运动：水平直线平移。
B
A
y
y'
R
φ
v_0
O'
x'
O
x

§8–1 基本概念



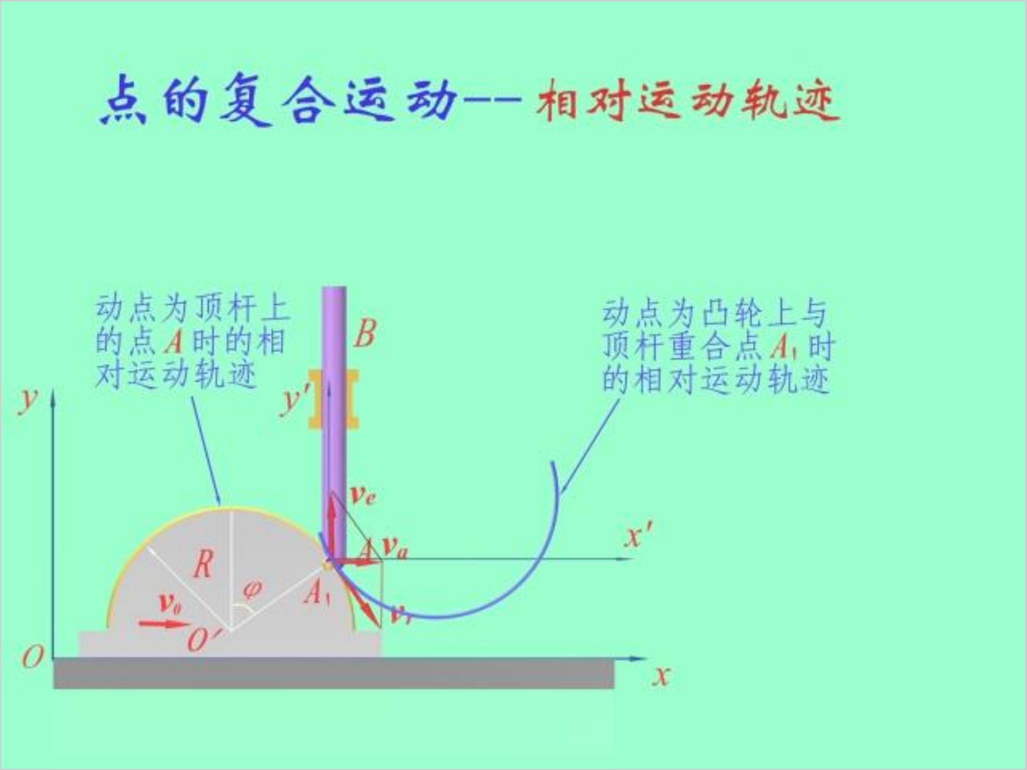
- 动点：顶杆上的点A。
- 动系：凸轮。
- 绝对运动：沿铅垂方向的直线运动。
- 相对运动：沿凸轮轮廓的圆周运动。
- 牵连运动：水平直线平移。

练习题1

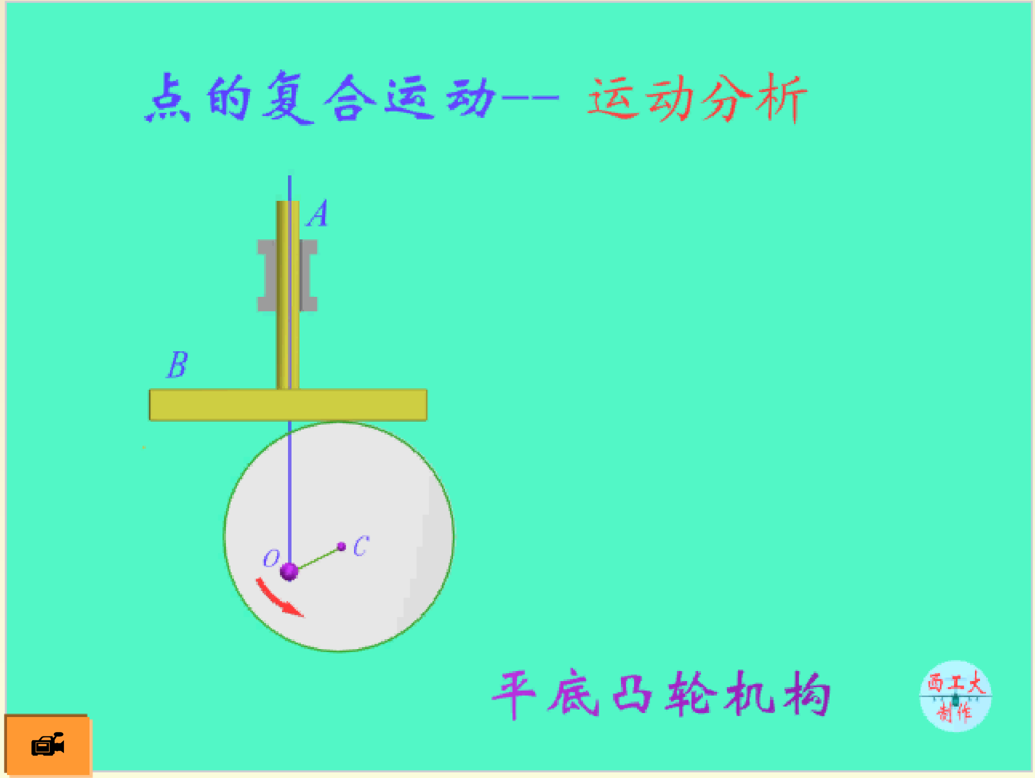


点的复合运动——相对运动轨迹
动点：凸轮上与顶杆重合点A_1。
动系：顶杆。
绝对运动：沿水平方向的直线运动。
相对运动：平面曲线运动。
牵连运动：沿铅垂方向的直线平移。
B
y
y'
x'
A
R
φ
v_0
A_1
O'
O
x
西工大制作

练习题1


点的复合运动-- 相对运动轨迹
动点为顶杆上的点A时的相对运动轨迹
动点为凸轮上与顶杆重合点A_1时的相对运动轨迹
B
y
y'
x'
x
O
O'
R
φ
v_0
v_e
v_a
v_r
A
A_1

练习题 2



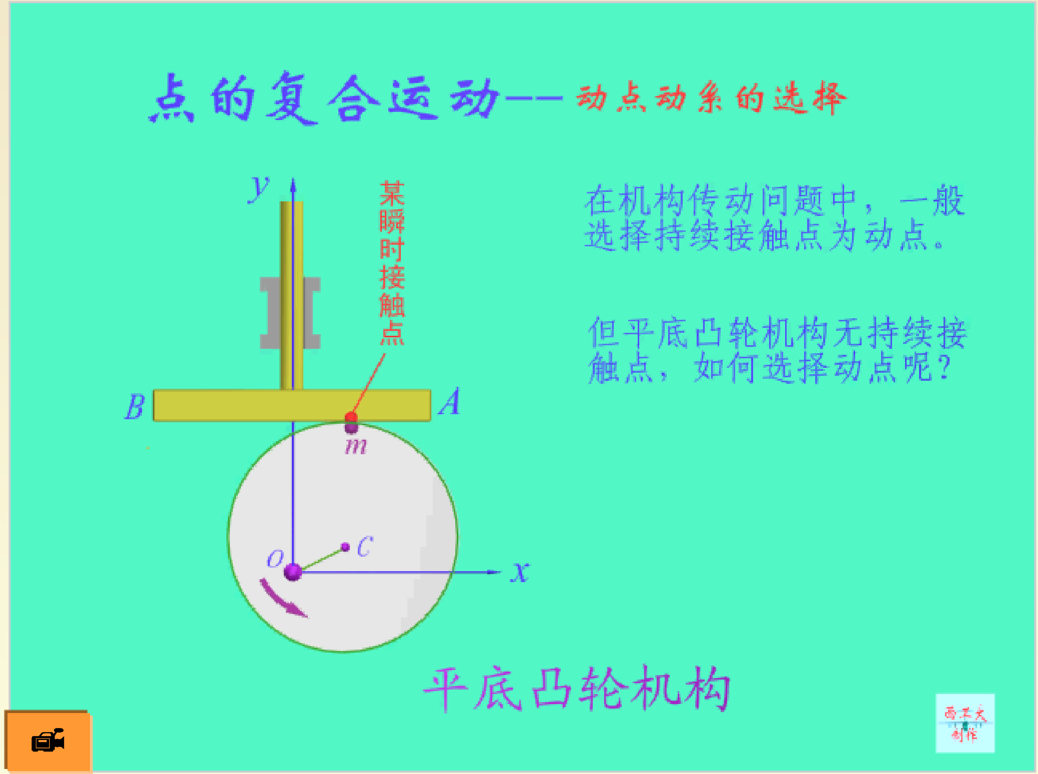
动　　点？

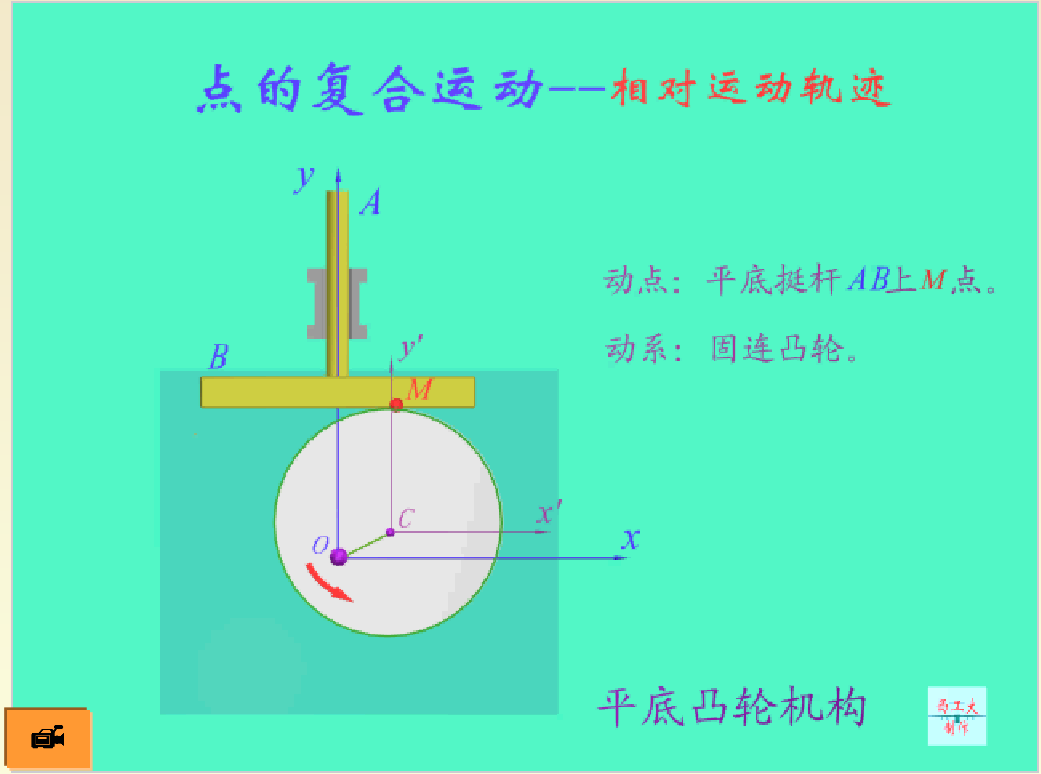
动参考系？

绝对运动？

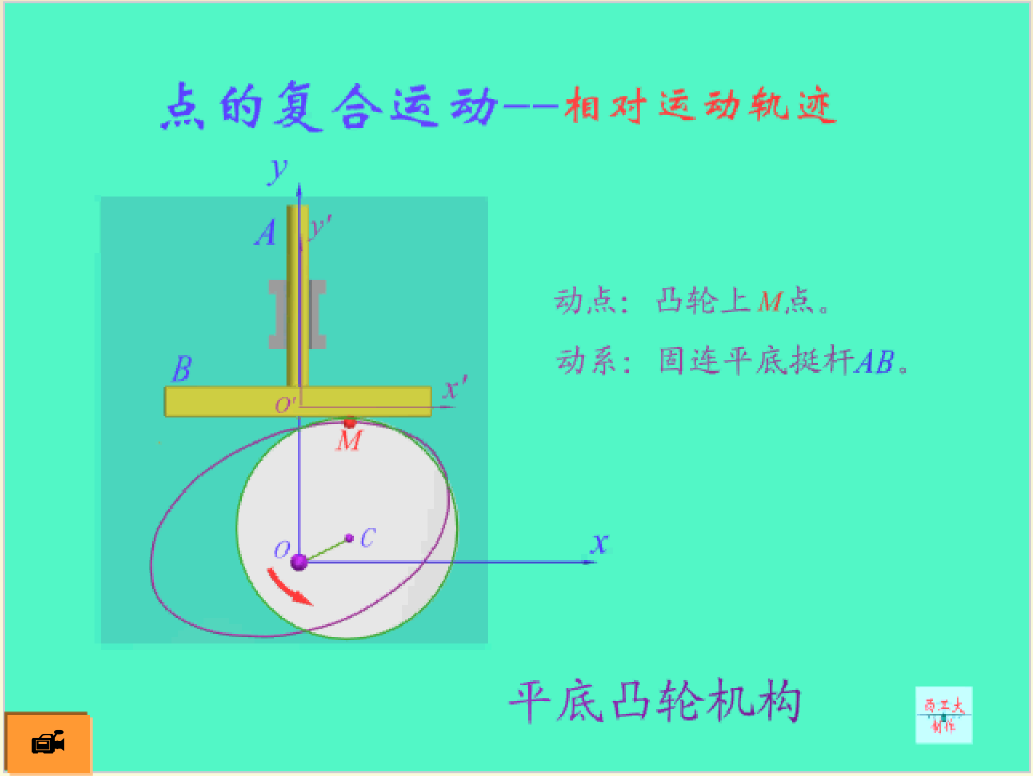
相对运动？

牵连运动？


点的复合运动——动点动系的选择
y
某瞬时接触点
B
A
m
C
O
x
在机构传动问题中，一般选择持续接触点为动点。
但平底凸轮机构无持续接触点，如何选择动点呢？
平底凸轮机构



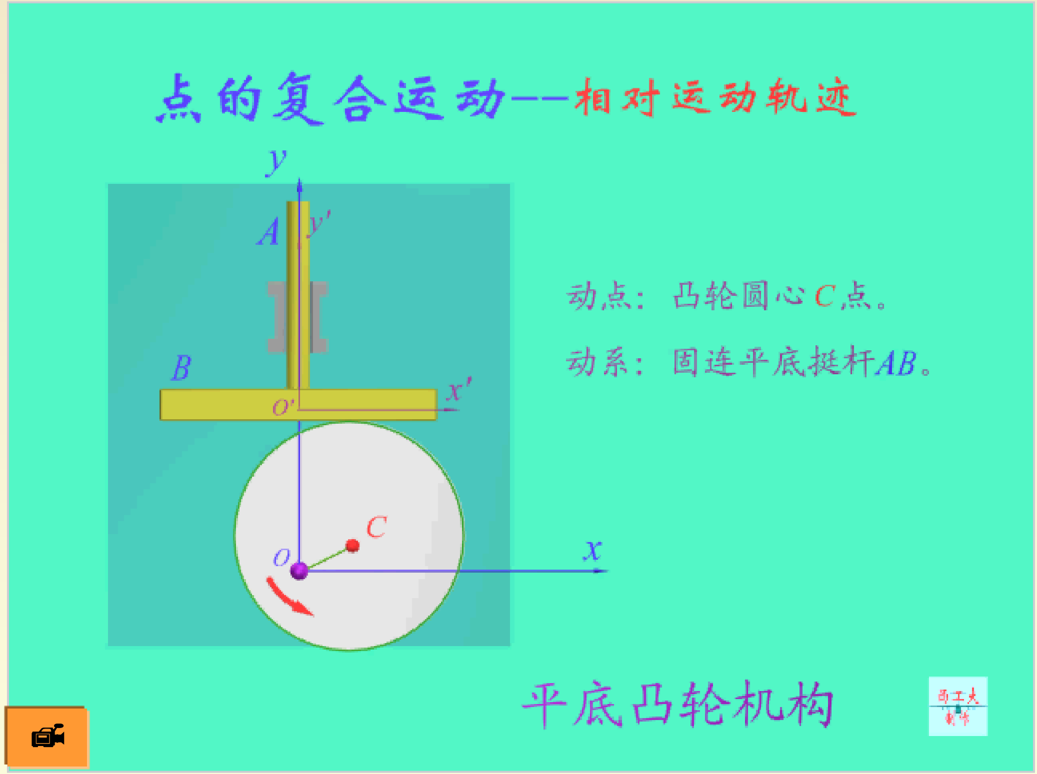
点的复合运动——相对运动轨迹
y
A
B
y′
M
C
x′
O
x
动点：平底挺杆AB上M点。
动系：固连凸轮。
平底凸轮机构



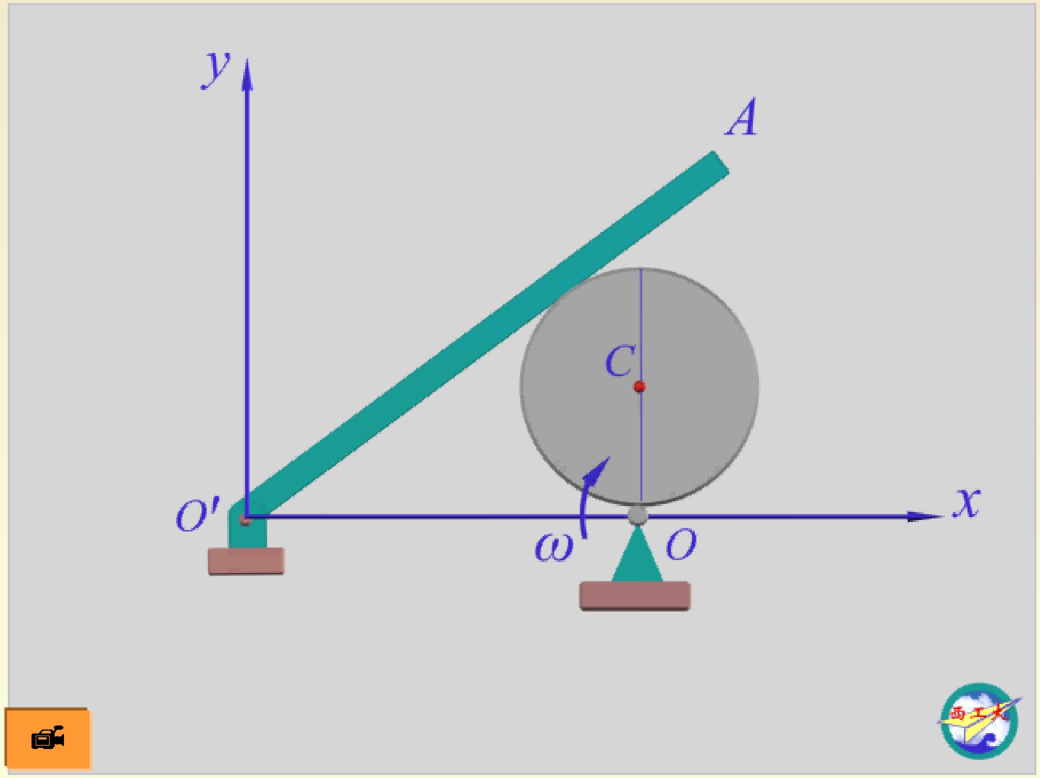
点的复合运动——相对运动轨迹
y
A
y'
B
x'
O'
M
O
C
x
动点：凸轮上M点。
动系：固连平底挺杆AB。
平底凸轮机构

§8–1 基本概念

练习题 2



思考题 2



动　　点？

动参考系？

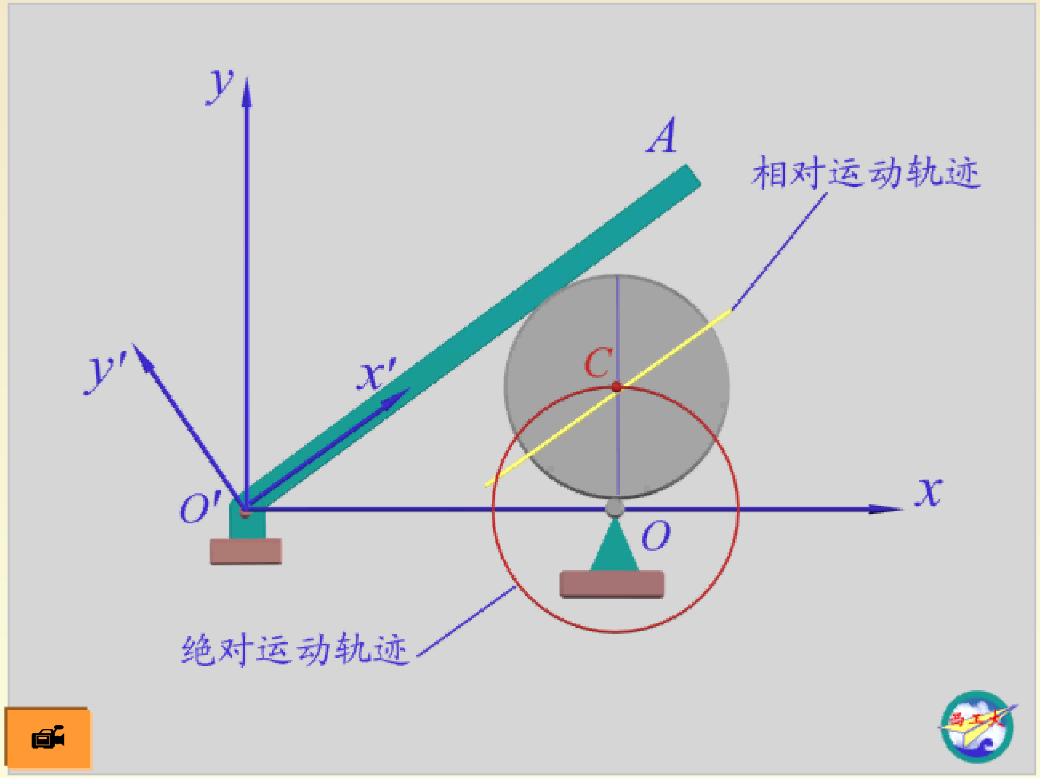
绝对运动？

相对运动？

牵连运动？

§ 8–1 基 本 概 念

思考题 2



§8–2　点的速度合成定理

- 速度合成定理

§8–2 基 本 概 念

● 三种速度

绝对速度v_a： 动点相对于定系的速度。

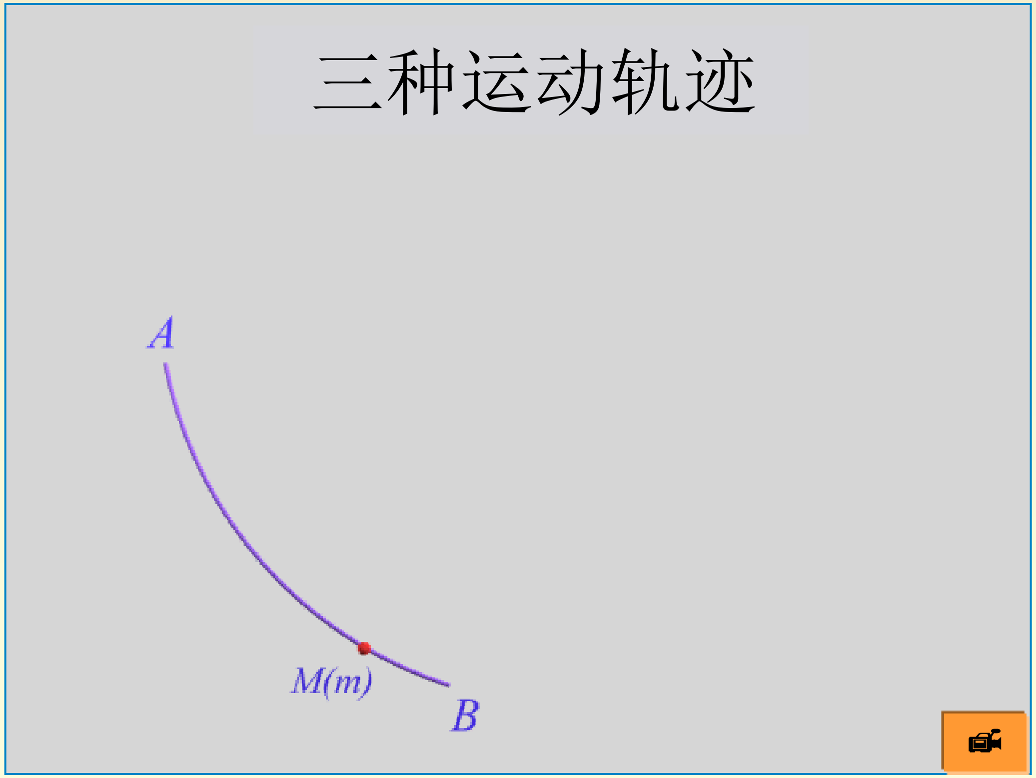
相对速度v_r： 动点相对于动系的速度。

牵连速度v_e： 动系上与动点相重合的点相对于定系的速度。

§ 8–2　点的速度合成定理

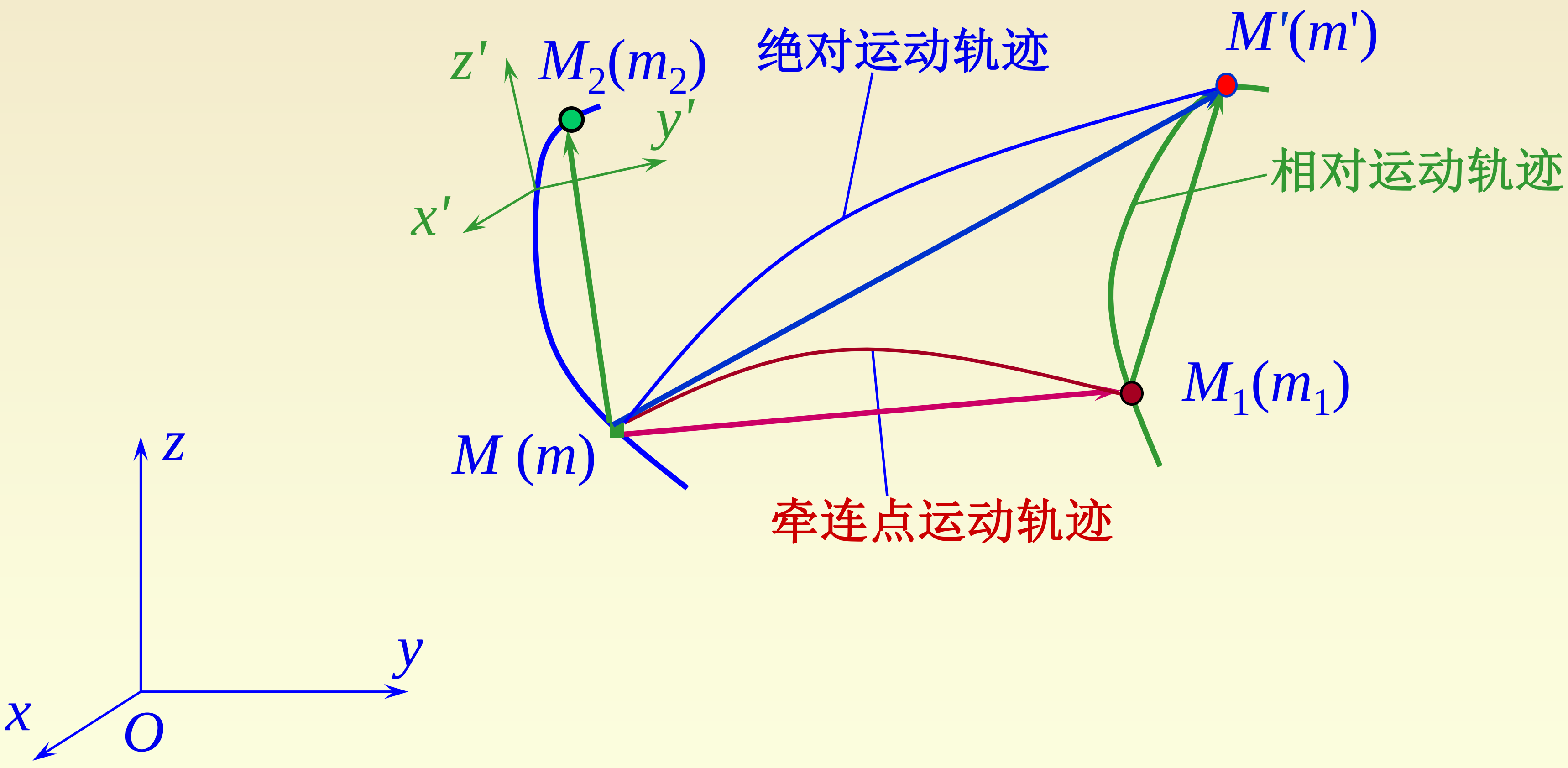
● 三种运动轨迹

设动点M在动系中沿某一曲线AB作相对运动，而动系本身相对定系作某种运动，相应的运动轨迹如下



§ 8–2　点的速度合成定理

● **三种运动轨迹**



§ 8–2 点的速度合成定理

速度合成定理

动点M在时间Δt内的绝对位移 $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$

则有

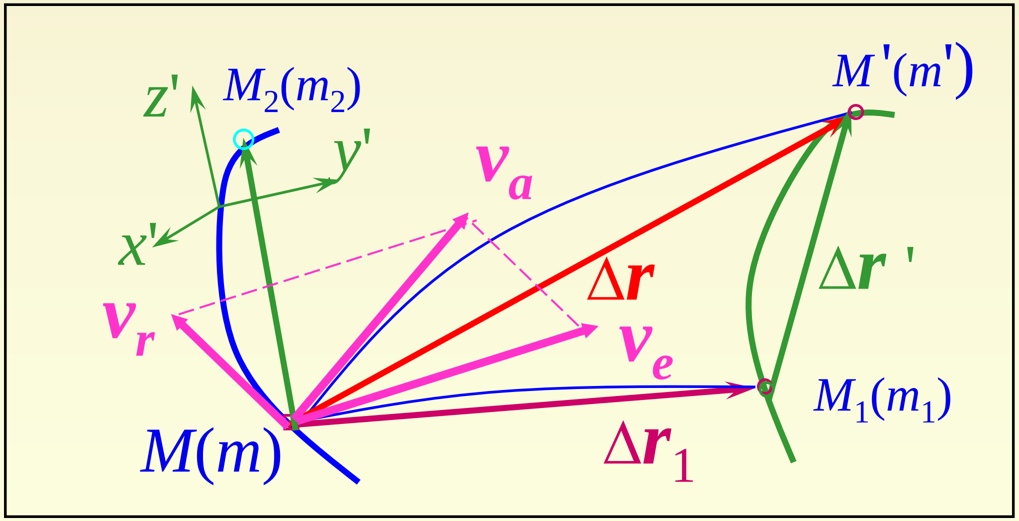
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M'}}{\Delta t} \qquad (1)$$

分析其中各项

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{mm_1}}{\Delta t} = \boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM_2}}{\Delta t} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$



代入（1）式可得

$$\boxed{\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}$$

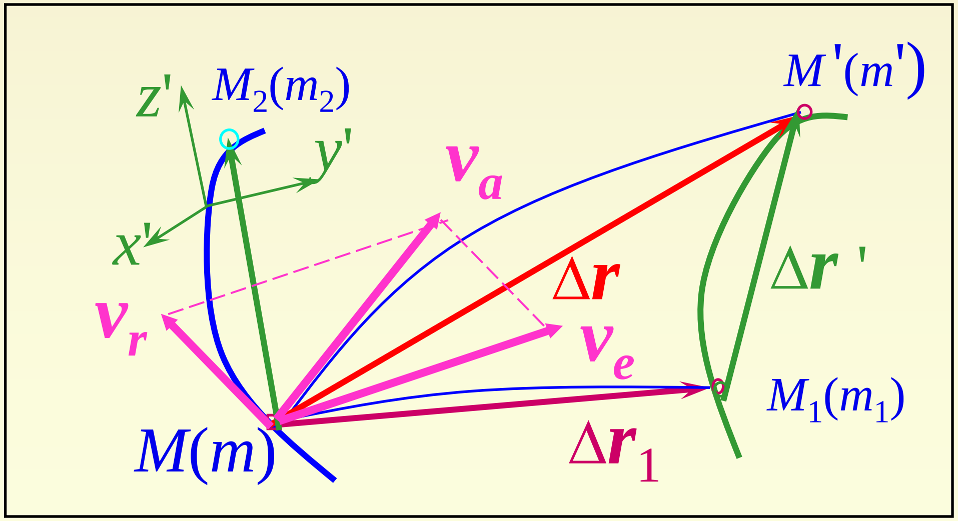
§ 8–2　点的速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}$$

绝对速度

相对速度

牵连速度



速度合成定理

动点的绝对速度等于其相对速度与牵连速度的矢量和。

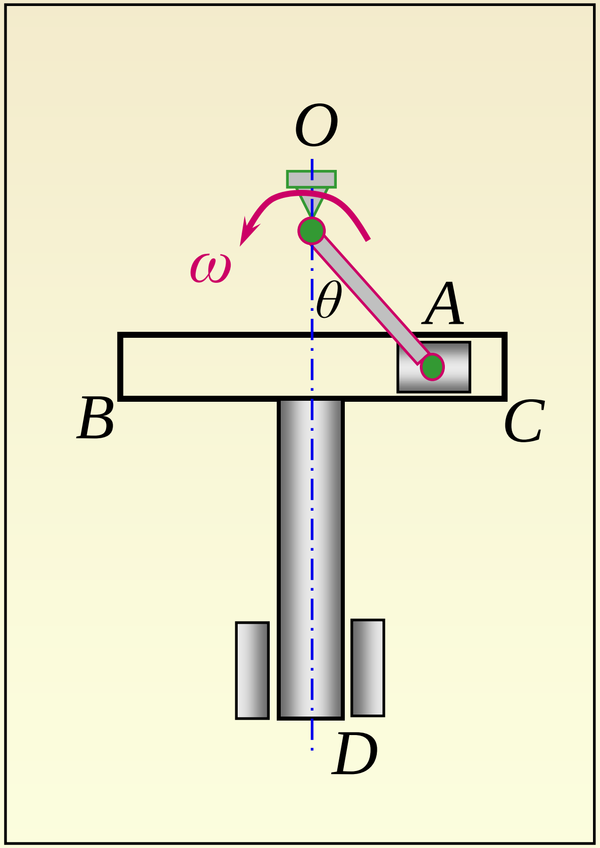
§ 8–2　点的速度合成定理

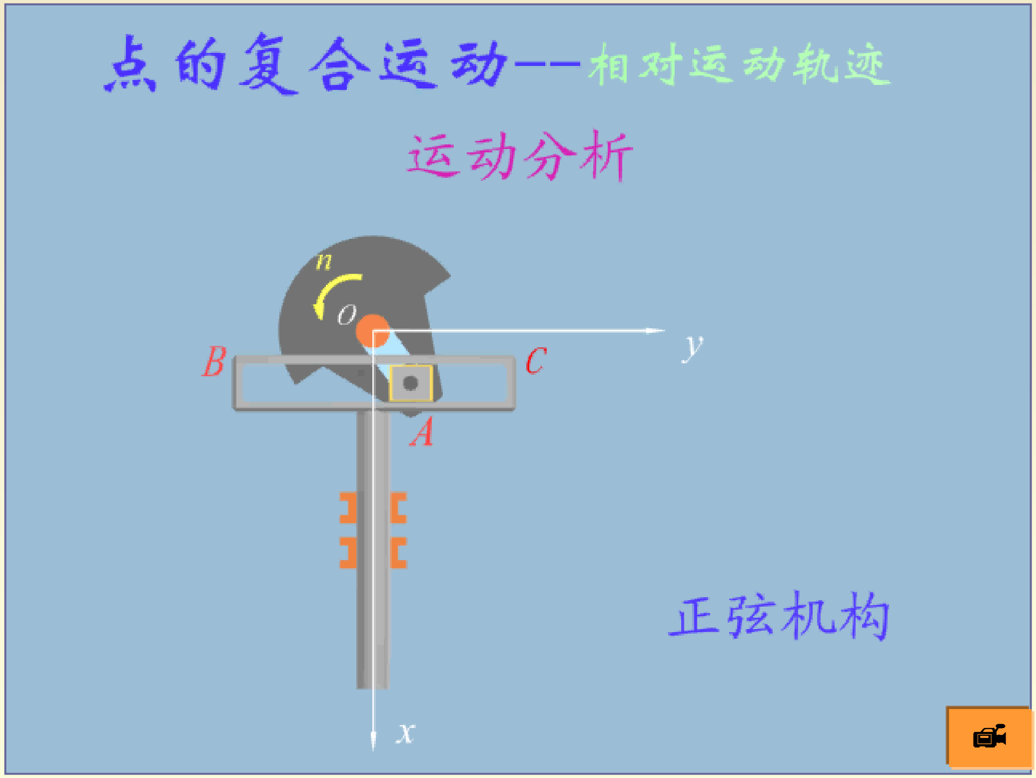
$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}$$

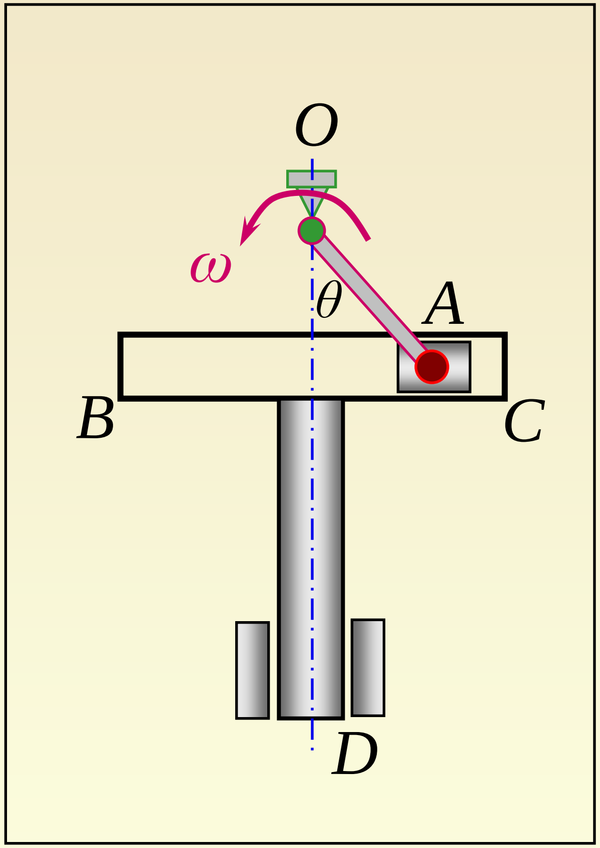
● 几点说明

- 牵连运动是指刚体(动系)的运动；而牵连速度是指刚体上一点(与动点相重合的点)的速度。
- 速度合成定理为平面矢量方程，由此可以写出两个投影式，可以求解两个未知量。
- 速度合成定理对任意形式的牵连运动都适用。

例8–2 已知正弦机构中，曲柄$OA=l$，加速度ω， $\theta=30°$。求T型杆BCD的速度。（滑槽+滑块）




点的复合运动——相对运动轨迹
运动分析
n
O
B
C
y
A
x
正弦机构



解： 1. 选择动点与动系。

动点—曲柄上的A点；

动系—固连于杆BC上。

定系—固连于机座。

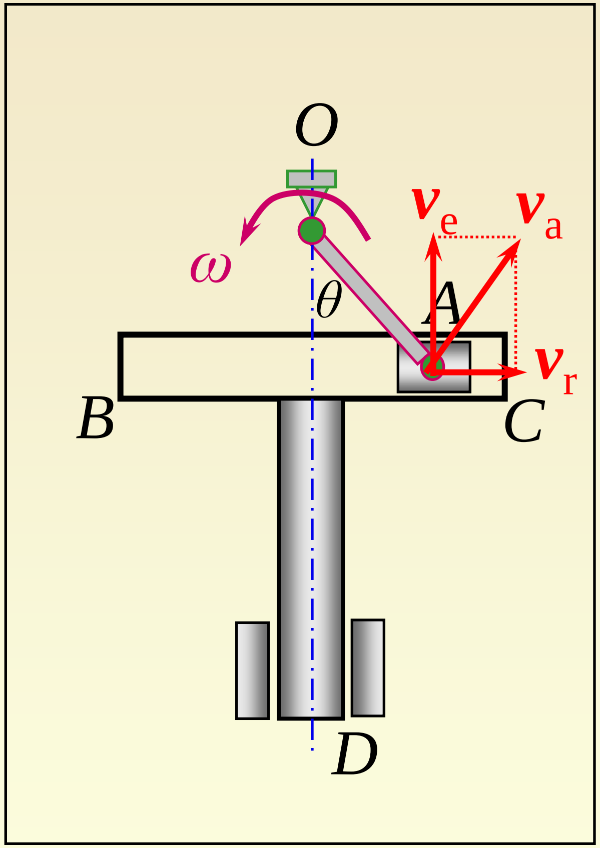
2. 运动分析。

绝对运动—以O为圆心、l为半径的等速圆周运动。

相对运动—沿BC方向的直线运动。

牵连运动—铅垂方向的平移。

3. 速度分析。



绝对速度 v_a： $v_a = \omega l$，方向垂直于OC。

相对速度v_r： $v_r = ?$ ，方向沿BC。

牵连速度v_e： $v_e = ?$ ，方向沿铅垂方向向上。

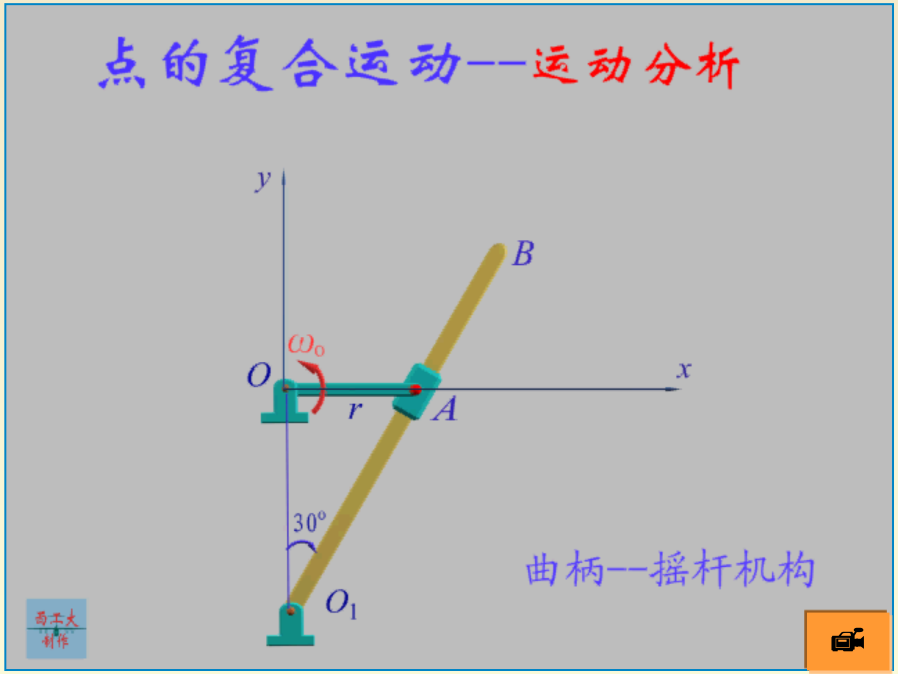
应用速度合成定理 $\boxed{\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e}$

可得T型杆BCD的速度

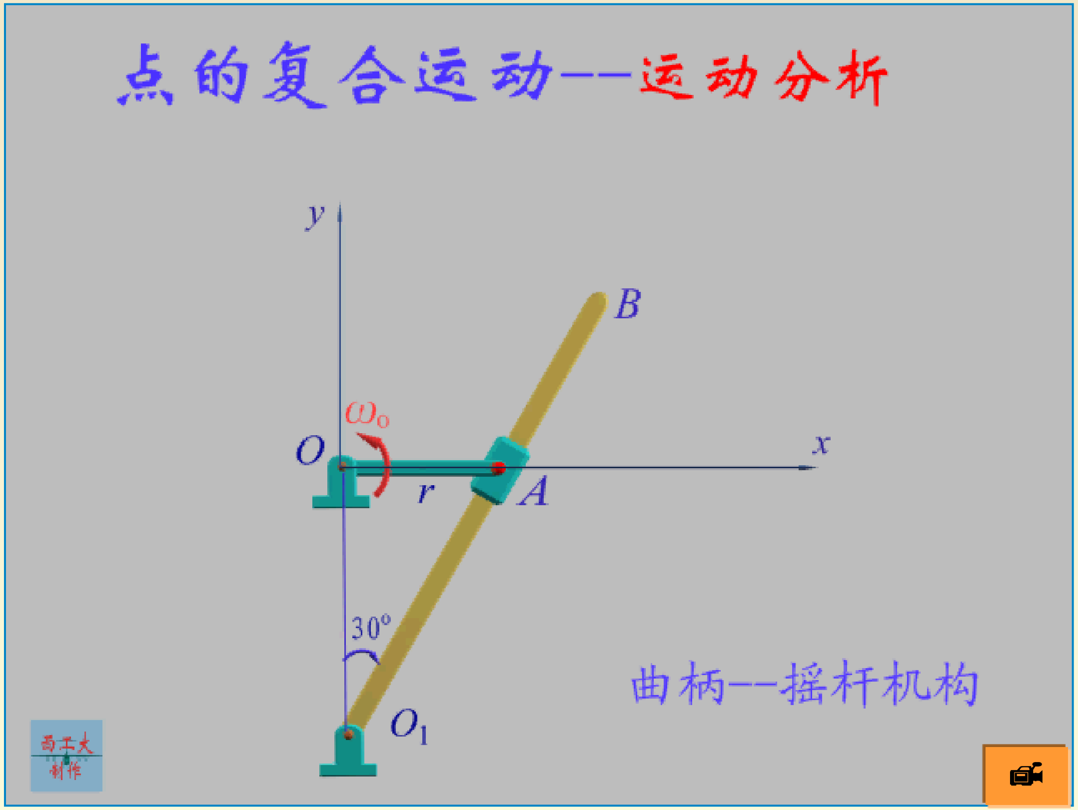
$$v_{BC} = v_e = v_a \sin\theta = \omega l \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\omega l$$

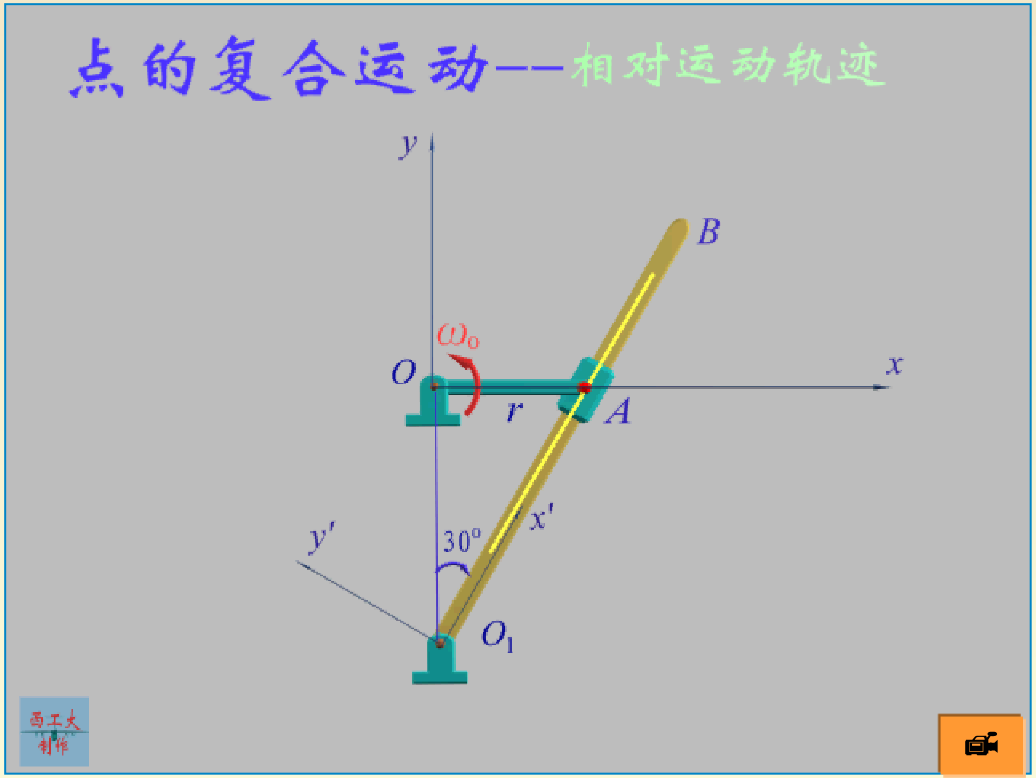
方向铅垂向上。



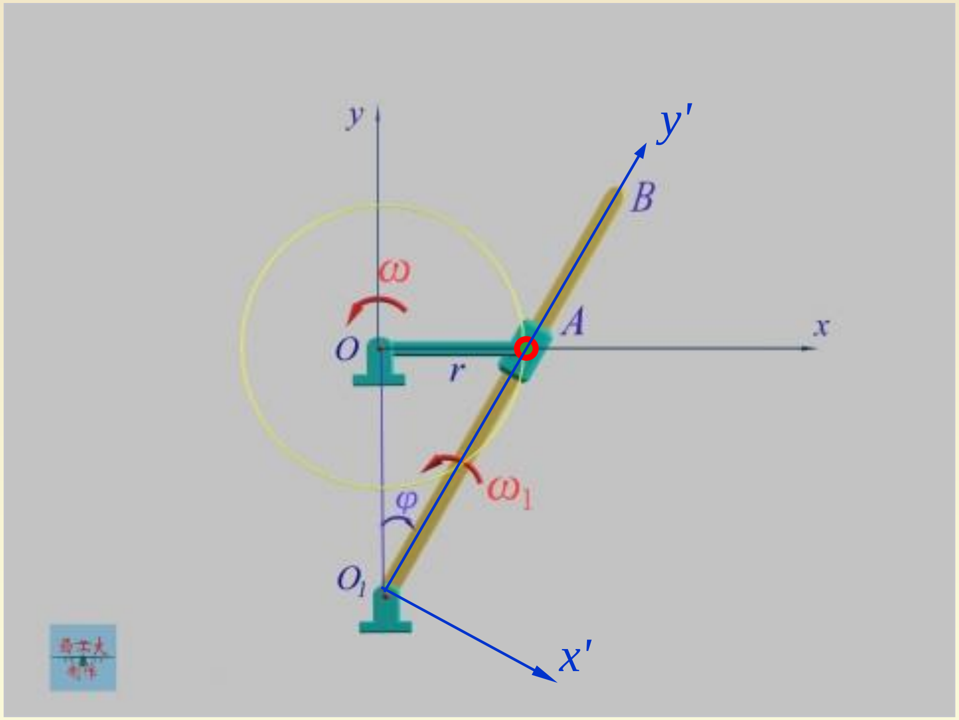
例8–4 刨床的急回机构如图所示。曲柄OA的一端A与套筒用铰链连接。当曲柄OA以匀角速度ω绕固定轴O转动时，套筒在摇杆O_1B上滑动，并带动摇杆O_1B绕固定轴O_1摆动。设曲柄长$OA=r$，两间距离$OO_1= l$。求当曲柄在水平位置时摇杆的角速度ω_1。（套筒）



运 动 演 示



相对运动轨迹



解：

1. 选择动点，动系与定系。

动点一滑块 A 。

动系一$O_1x'y'$，固连于摇杆 O_1B。

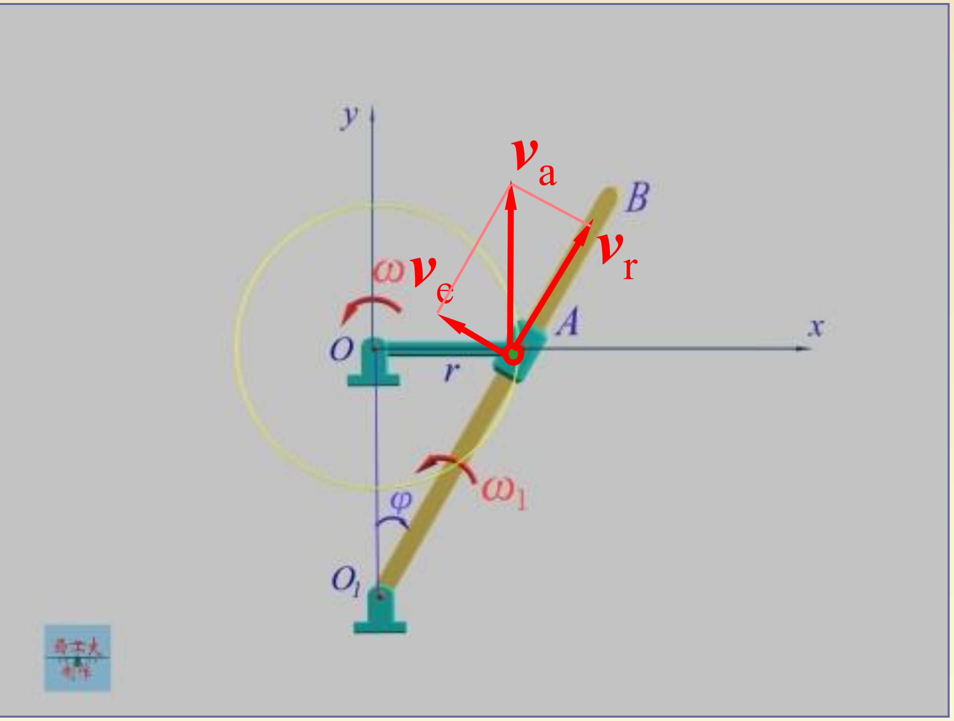
定系一固连于机座。

2. 运动分析。

绝对运动一以O为圆心的圆周运动。

相对运动一沿O_1B的直线运动。

牵连运动一摇杆绕O_1轴的摆动。



3. 速度分析。

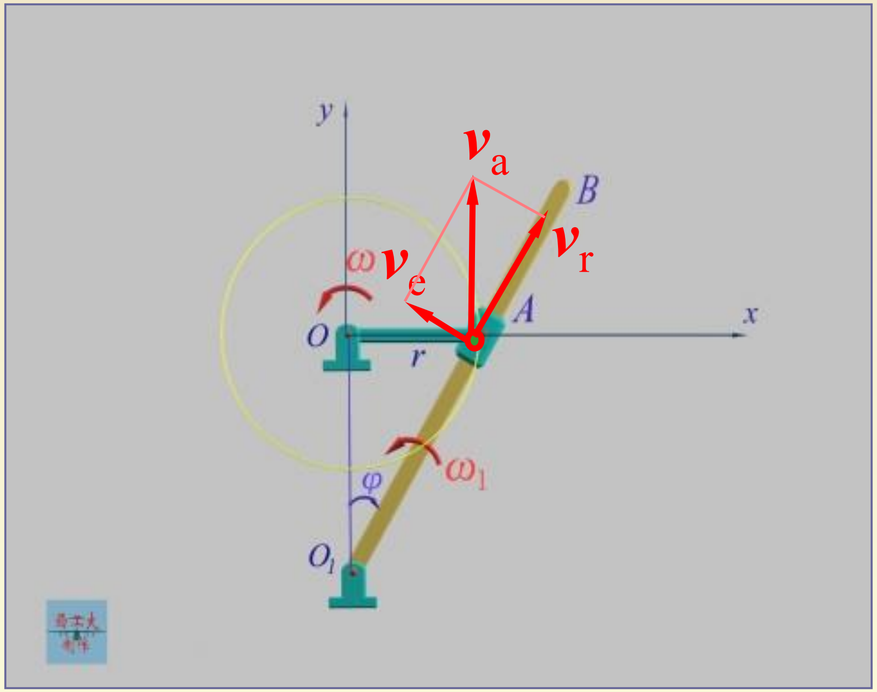
绝对速度v_a： $v_a = OA \cdot \omega = r\omega$，方向垂直于$OA$，沿铅垂方向向上。

牵连速度v_e： v_e为所要求的未知量，方向垂直于O_1B 。

相对速度v_r： 大小未知，方向沿摇杆O_1B 。

应用速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$



应用　$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

可得　$v_e = v_a \sin\varphi$

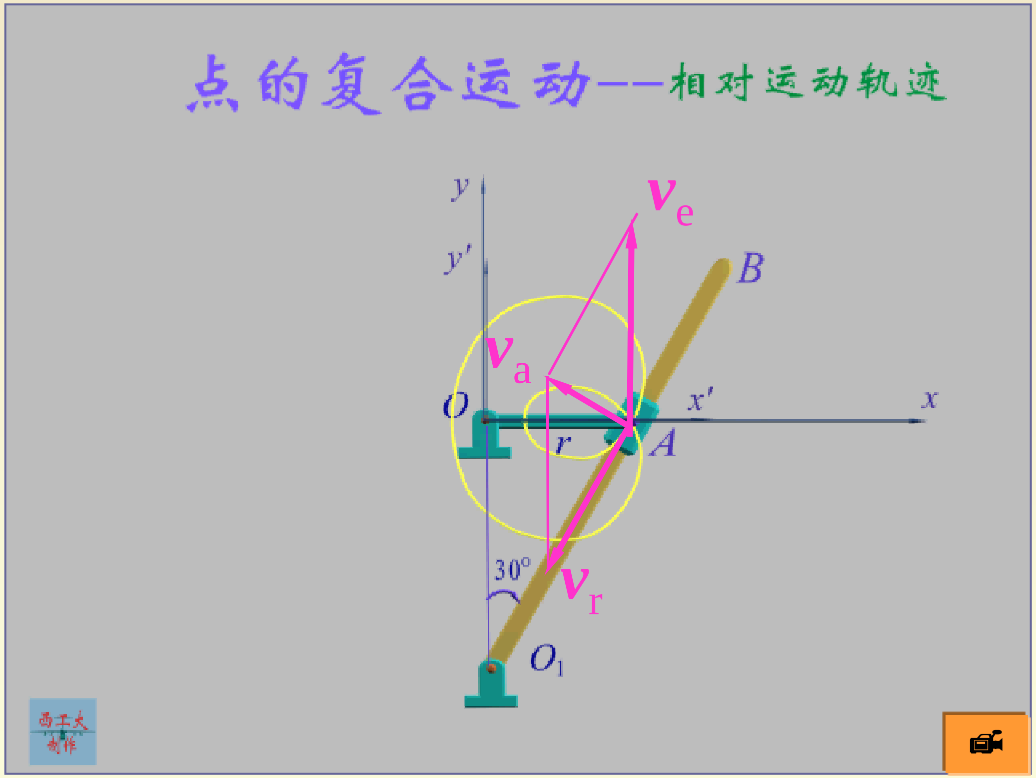
因为　$v_a = r\omega$,　$\sin\varphi = \dfrac{r}{\sqrt{l^2 + r^2}}$,

所以　$v_e = \dfrac{r^2\omega}{\sqrt{l^2 + r^2}}$

设摇杆在此瞬时的角速度为ω_1，则

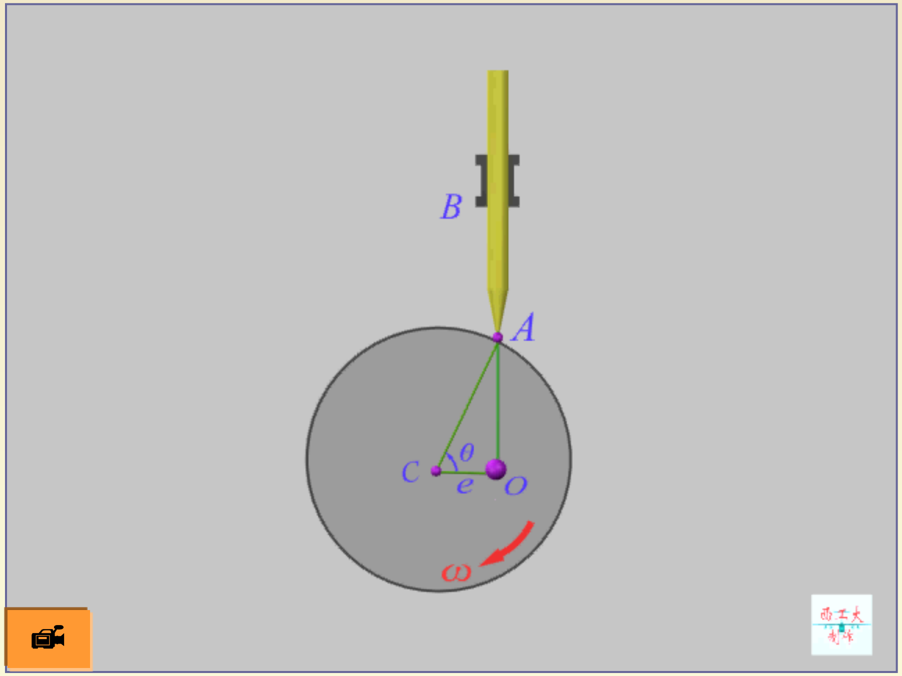
$$v_e = O_1A \cdot \omega_1 = \frac{r^2\omega}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$

其中　$O_1A = \sqrt{l^2 + r^2}$,　所以可得　$\omega_1 = \dfrac{r^2\omega}{l^2 + r^2}$　（逆时针）。

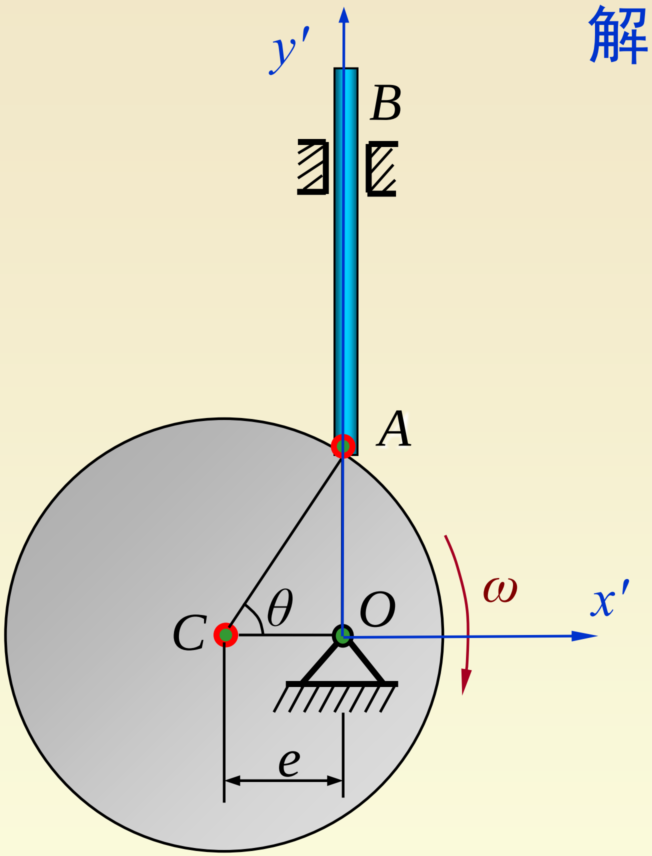


讨论

若取摇杆O_1B上A点为动点，动系固连曲柄OA，则相对运动轨迹是什么曲线？



例8–5 如图所示，半径为R，偏心距为e的凸轮，以匀角速度ω绕O轴转动，杆AB能在滑槽中上下平动，杆的端点A始终与凸轮接触，且OAB成一直线。求在图示位置时，杆AB的速度。



解：

1. 选择动点，动系与定系。

动点－ AB的端点A 。

动系－$Ox'y'$，固连于凸轮。

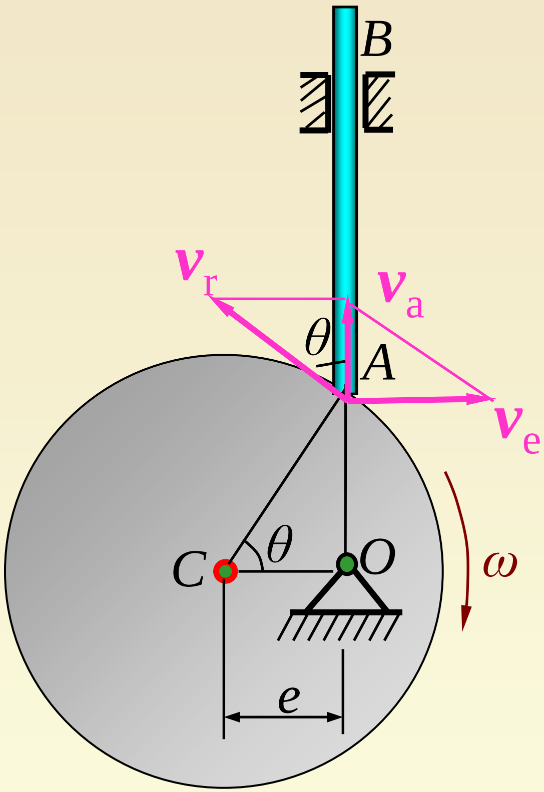
定系－固连于机座。

2. 运动分析。

绝对运动－直线运动。

相对运动－ 以C为圆心的圆周运动。

牵连运动－ 绕O 轴的定轴转动。



3. 速度分析。

绝对速度v_a： v_a为所要求的未知量，方向沿杆AB。

牵连速度v_e： $v_e = OA \cdot \omega$，方向垂直于OA。

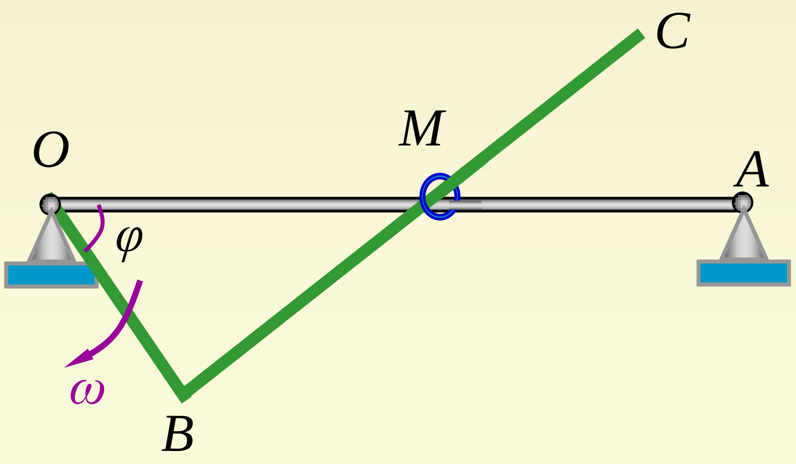
相对速度v_r： 大小未知，方向沿凸轮圆周的切线。

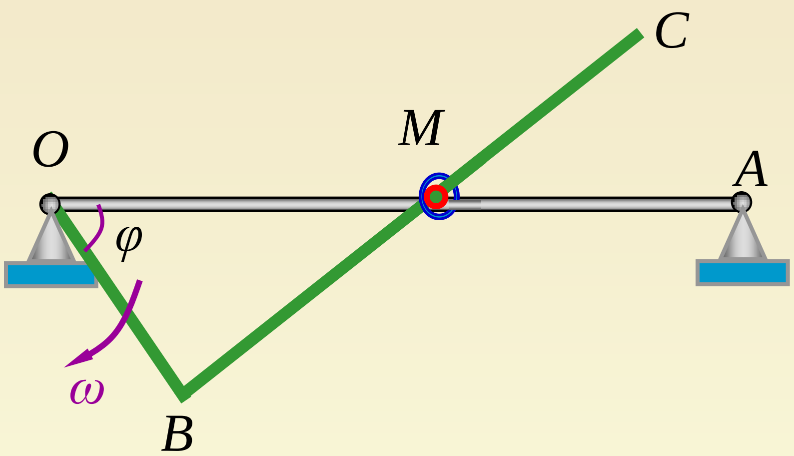
应用速度合成定理 $\boxed{v_a = v_e + v_r}$

可得杆AB的速度 $v_a = v_e \cot\theta = \omega \cdot OA \dfrac{e}{OA} = \omega e$

方向向上。

例8–8 曲杆*OBC*以匀角速度 ω 绕固定轴*O*转动，使圆环*M*在固定直杆*OA*上滑动。设曲柄长 $OB = 10\mathrm{cm}$，*OB*垂直于*BC*。ω=0.5 rad/s，求φ=60°时，小环的绝对速度。（套环）





解：

1. 选择动点，动系与定系。

动点－ 小环M 。

动系－ 固连于摇杆 OBC。

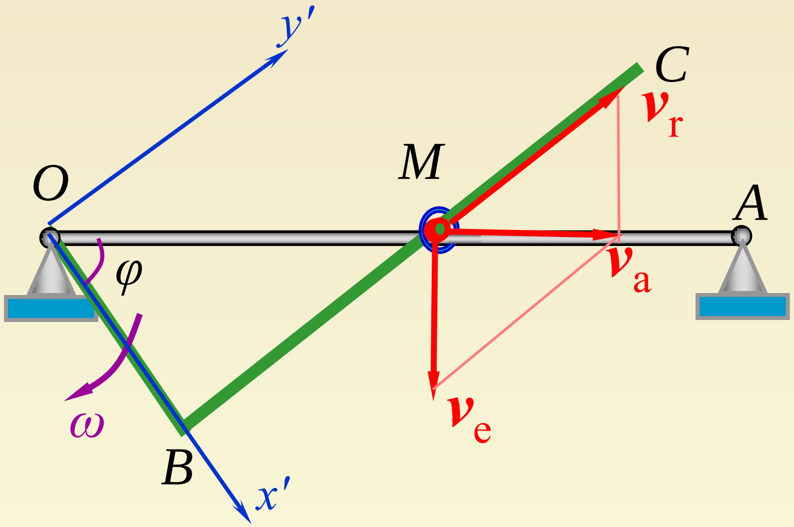
定系－固连于机座。

2. 运动分析。

绝对运动－沿OA的直线运动。

相对运动－沿BC的直线运动。

牵连运动－绕O轴的定轴转动。



3. 速度分析。

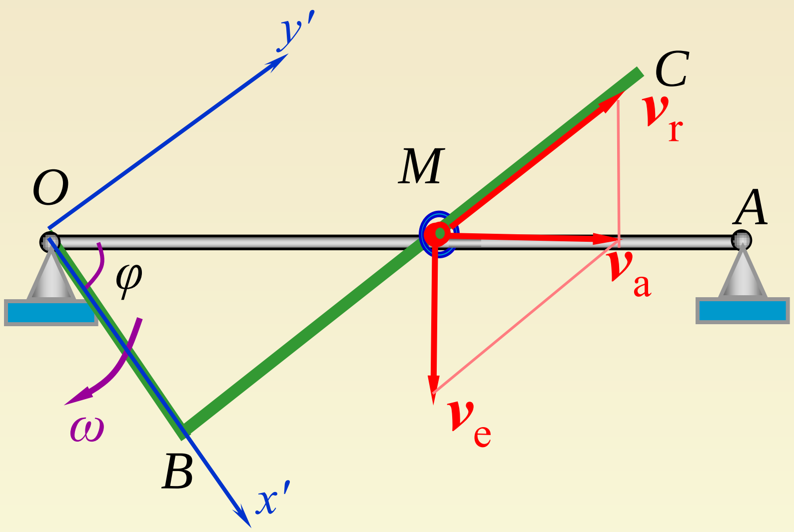
绝对速度v_a：大小未知，方向沿OA向右。

牵连速度v_e：$v_e = OM \cdot \omega$
方向垂直于OA。

相对速度v_r：大小未知，
方向沿杆BC。

应用速度合成定理：

$$\boxed{\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r}$$



应用速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

投影到x′轴，可得

$$v_a \sin 30^\circ = v_e \cos 30^\circ$$

所以，所求小环的绝对速度

$$v_a = v_e \cot 30^\circ = 17.3 \quad \text{cm/s}$$

方向水平向右。

§8–3 牵连运动是平移时点的加速度合成定理

- 三种加速度
- 加速度合成定理

§ 8–3　牵连运动是平移时点的加速度合成定理

1. 三种加速度

绝对加速度—动点相对于定系的加速度称为绝对加速度，用$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}$表示。

相对加速度—动点相对于动系的加速度称为相对加速度，用$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$表示。

牵连加速度—动系上与动点相重合的那一点（牵连点）对于定系的加速度称为牵连加速度，用$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}$表示。

2.牵连运动是平移时点的加速度合成定理

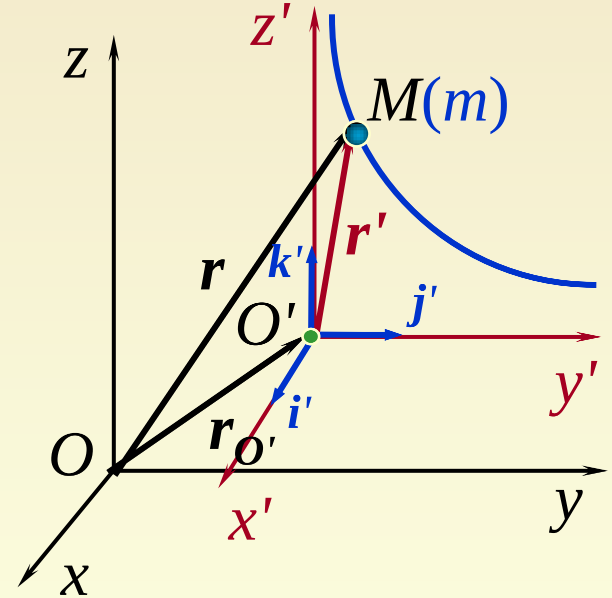
动点M在定系和动系中的矢径分别用$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$表示。

有关系式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{O'}+\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}_{O'}+x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}'$$

上式在定系中对时间t求二阶导数，有

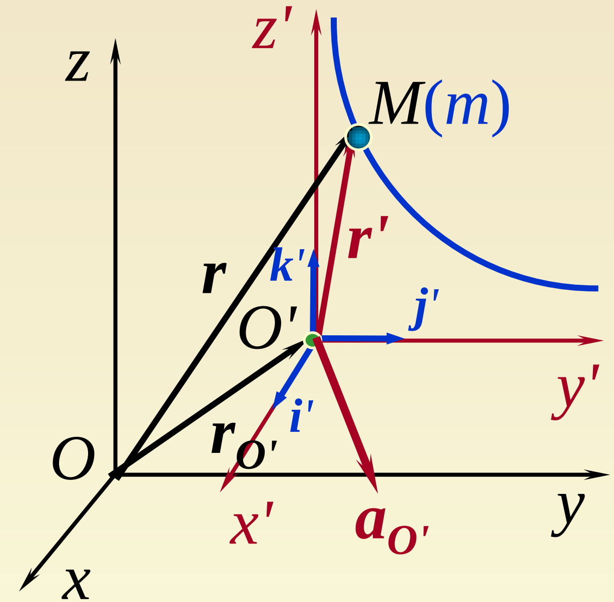
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_{O'}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}'+\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}'+\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}'$$



$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_{O'}}{\mathrm{d}t^2}+\underline{\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}'+\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}'+\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}'}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_{O'}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{a}_{O'}$$

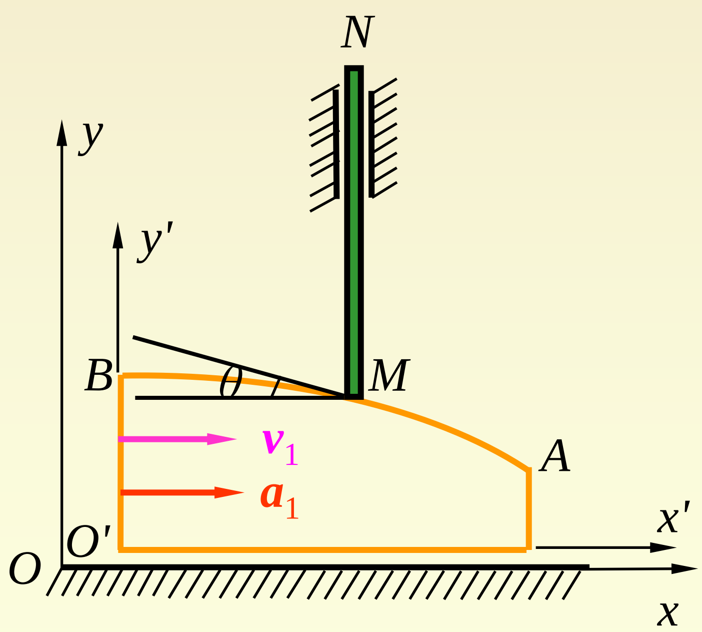
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} \qquad \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

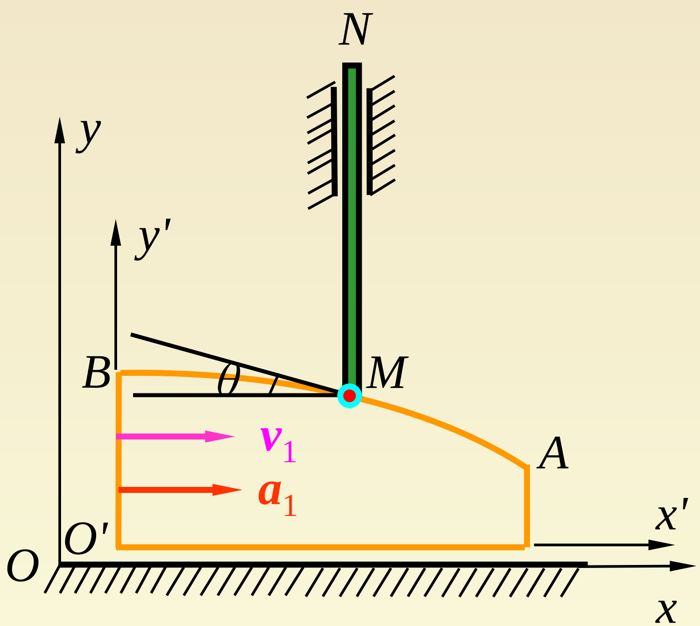


$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}$$

加速度合成定理——牵连运动为平移时，点的绝对加速度等于牵连加速度、相对加速度的矢量和。

例8-10 具有曲面AB的靠模沿水平方向运动时，推动顶杆MN沿铅直固定导槽运动。已知在图中瞬时靠模具有水平向右的速度$\boldsymbol{v}_1$，水平向右的加速度$\boldsymbol{a}_1$，曲线AB在杆端M接触点的切线与水平线的夹角为θ；曲线AB在杆端接触点M的曲率半径是ρ；试求顶杆 MN 在这瞬时的速度及加速度。





解：　1. 选择动点，动系与定系。

动点－顶杆端点M。

动系－固连于靠模上。

定系－固连于机座。

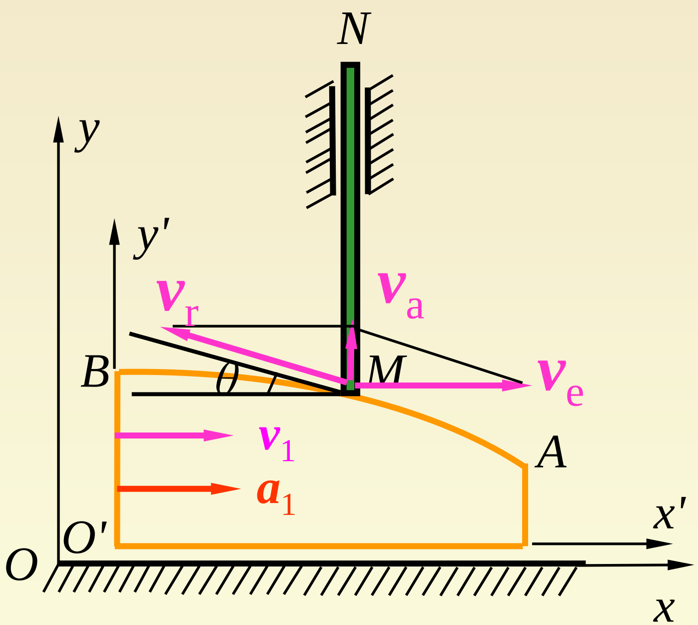
2. 运动分析。

绝对运动－M点沿铅直方向的直线运动。

相对运动－相对于靠模沿其表面 AB 的曲线运动。

牵连运动－ 靠模水平向右的平动。

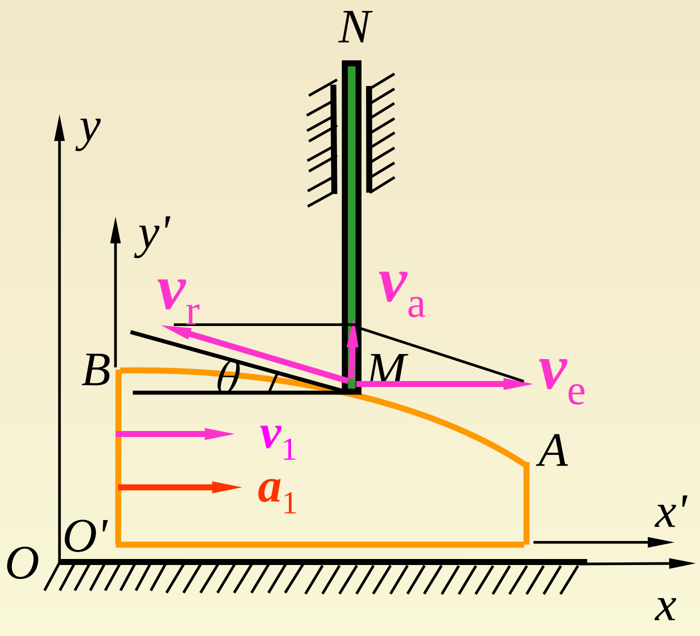
3. 速度分析。



绝对速度v_a：大小未知，方向沿杆MN向上。

相对速度v_r：大小未知，方向沿AB的切线方向。

牵连速度v_e：$v_e = v_1$，方向水平向右。



根据点的速度合成定理，有

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

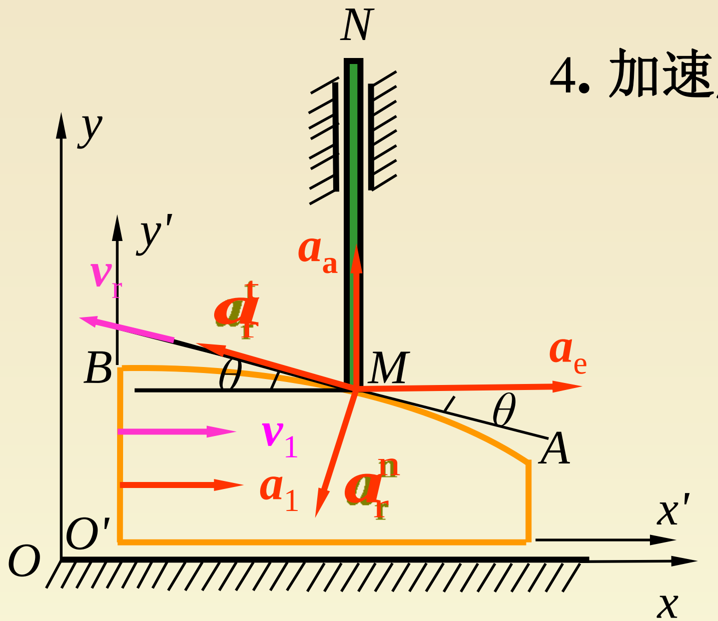
可求得动点 *M* 的绝对速度即顶杆 *MN* 速度的大小

$$v_a = v_e \tan\theta = v_1 \tan\theta$$

方向是铅直向上。

也可求得相对速度的大小

$$v_r = v_e \sec\theta = v_1 \sec\theta$$



4. 加速度分析。

绝对加速度a_a：大小待求，方向铅直。

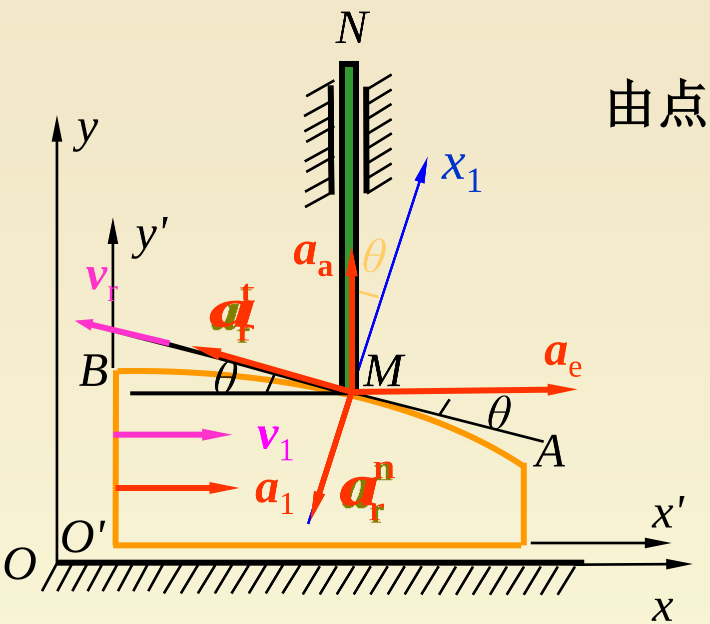
牵连加速度a_e：$a_e = a_1$，方向水平向右。

相对加速度切向分量a_r^t：大小未知，沿相对轨迹的切线。

相对加速度法向分量a_r^n：$a_r^n = v_r^2/\rho$ 沿相对轨迹的法线。

由点的加速度合成定理

$$\boxed{a_a = a_e + a_r^t + a_r^n}$$



由点的加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r^t + \boldsymbol{a}_r^n$$

将上式投影到与$\boldsymbol{a}_r^t$相垂直的轴x_1上，得

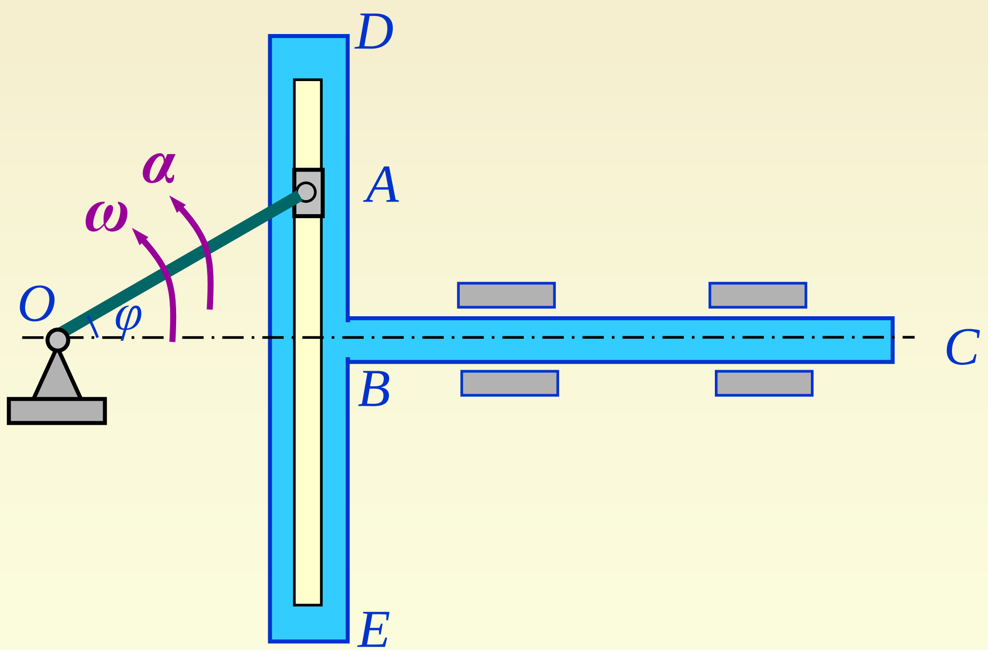
$$a_a \cos\theta = a_e \sin\theta - a_r^n$$

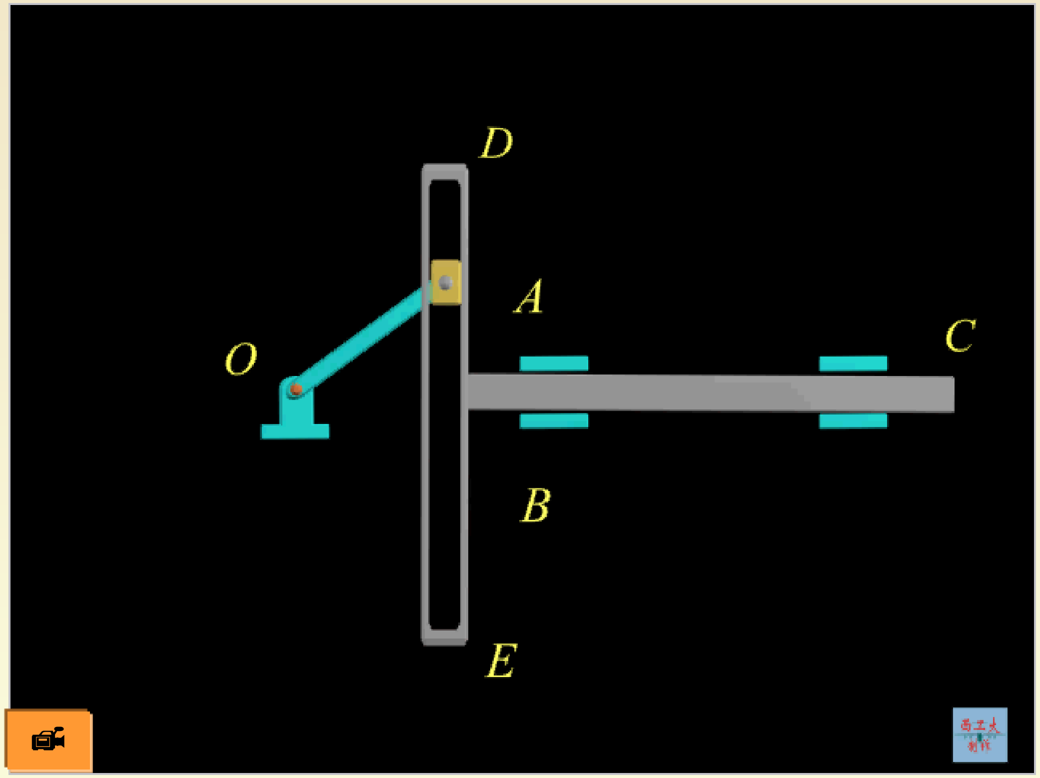
可求得顶杆在该瞬时的加速度

$$a_a = a_e \tan\theta - \frac{a_r^n}{\cos\theta} = a_1 \tan\theta - \frac{v_r^2}{\rho\cos\theta} = a_1 \tan\theta - \frac{v_1^2 \sec^3\theta}{\rho}$$

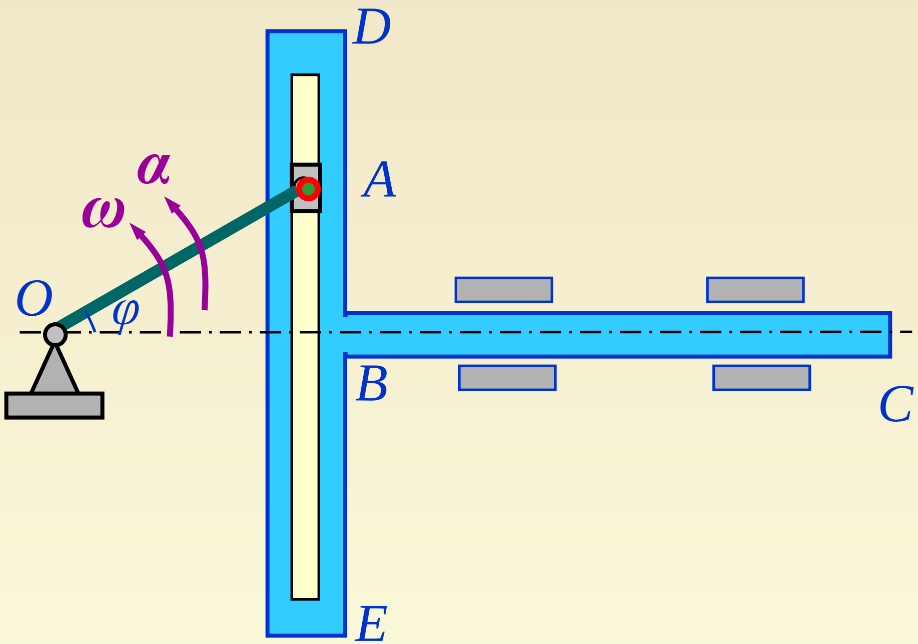
若上式求得$\boldsymbol{a}_a$是负值，说明$\boldsymbol{a}_a$的实际指向与图示假定指向相反。

例8–11 曲柄OA绕固定轴O转动，丁字形杆BC沿水平方向往复平动，如图所示。铰接在曲柄端A的滑块，可在丁字形杆的铅直槽DE内滑动。设曲柄角速度ω，角加速度α，$OA=r$，试求杆BC的加速度。





运 动 演 示



解： 1. 选择动点，动系与定系。

动点－滑块A 。

动系－固连于丁字形杆。

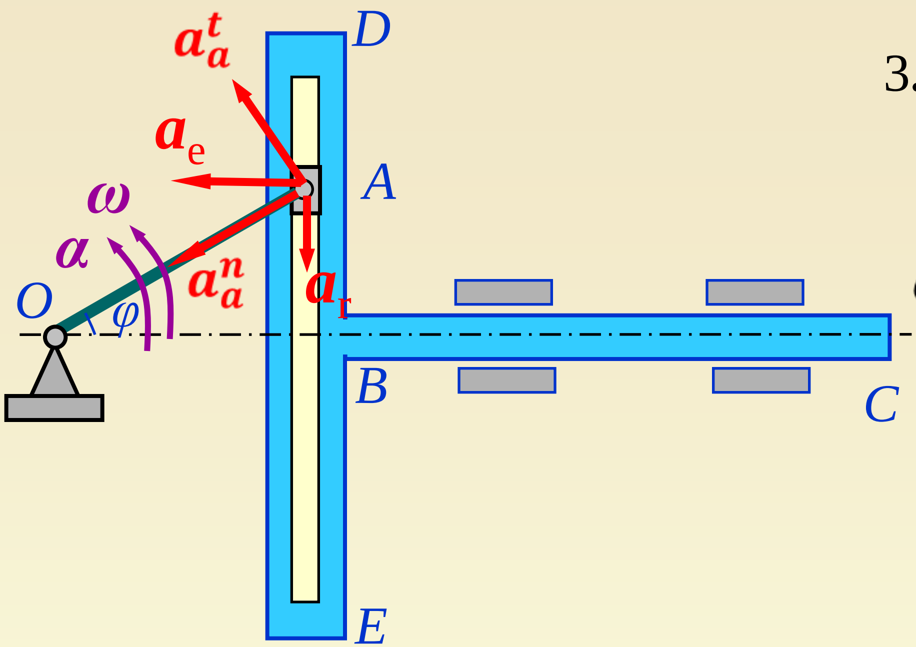
定系－固连于机座。

2. 运动分析。

绝对运动－以O为圆心的圆周运动。

相对运动－沿槽DE的直线运动。

牵连运动－丁字形杆BC 沿水平方向的平动。



3. 加速度分析。

绝对加速度：$a_a^n = OA \cdot \omega^2$，沿着$OA$，指向$O$；$a_a^t = OA \cdot \varepsilon$。

牵连加速度a_e：大小未知，为所要求的量，沿水平方向。

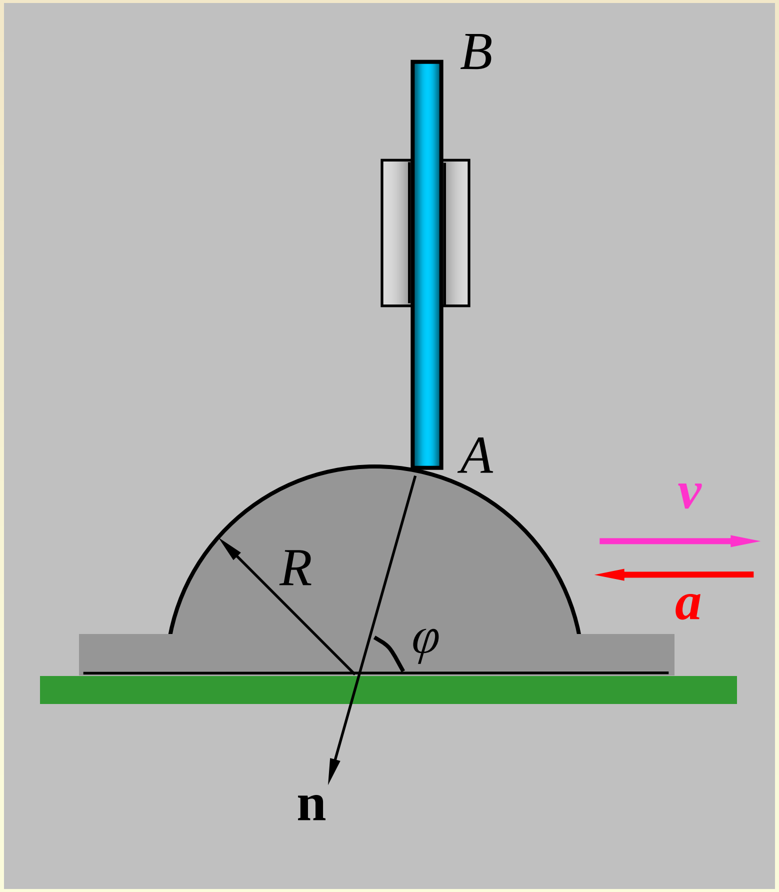
相对加速度a_r：大小未知，方向沿铅直槽DE。

应用加速度合成定理 $\boxed{\boldsymbol{a}_a^t + \boldsymbol{a}_a^n = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e}$

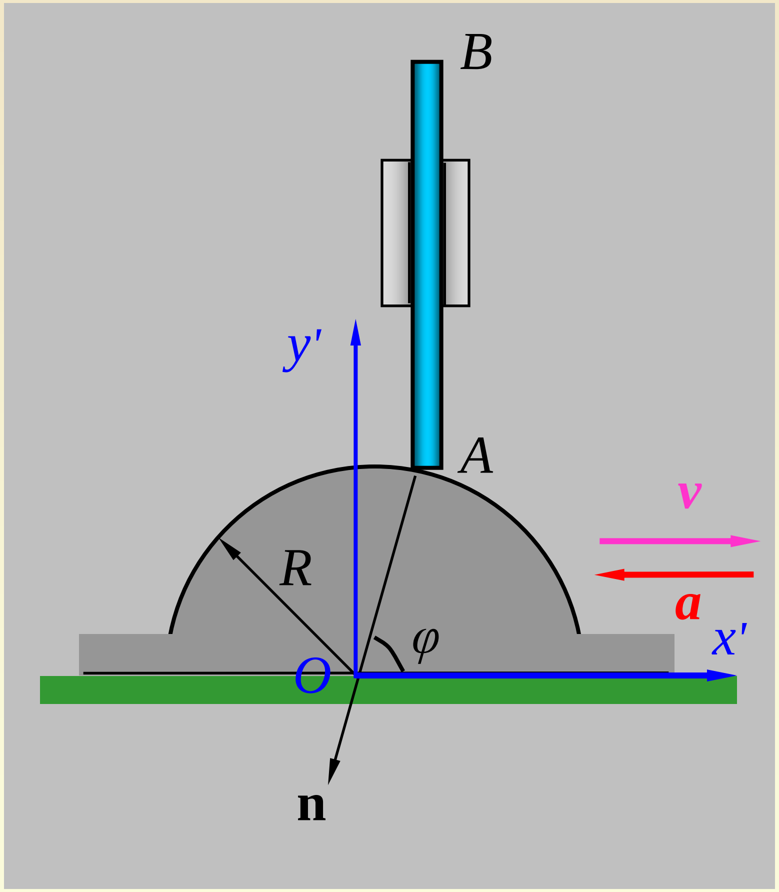
沿水平方向投影： $\boxed{a_a^t \sin\varphi + a_a^n \cos\varphi = 0 + a_e}$

$$\boxed{a_{BC} = a_e = r\varepsilon \sin\varphi + r\omega^2 \cos\varphi}$$

水平向左。



例8−12 凸轮在水平面上向右作减速运动，如图所示。设凸轮半径为R，图示瞬时的速度和加速度分别为$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{a}$。求杆AB在图示位置时的加速度。



解：

1. 选择动点，动系与定系。

动点－ AB的端点A 。

动系－$Ox'y'$，固连于凸轮。

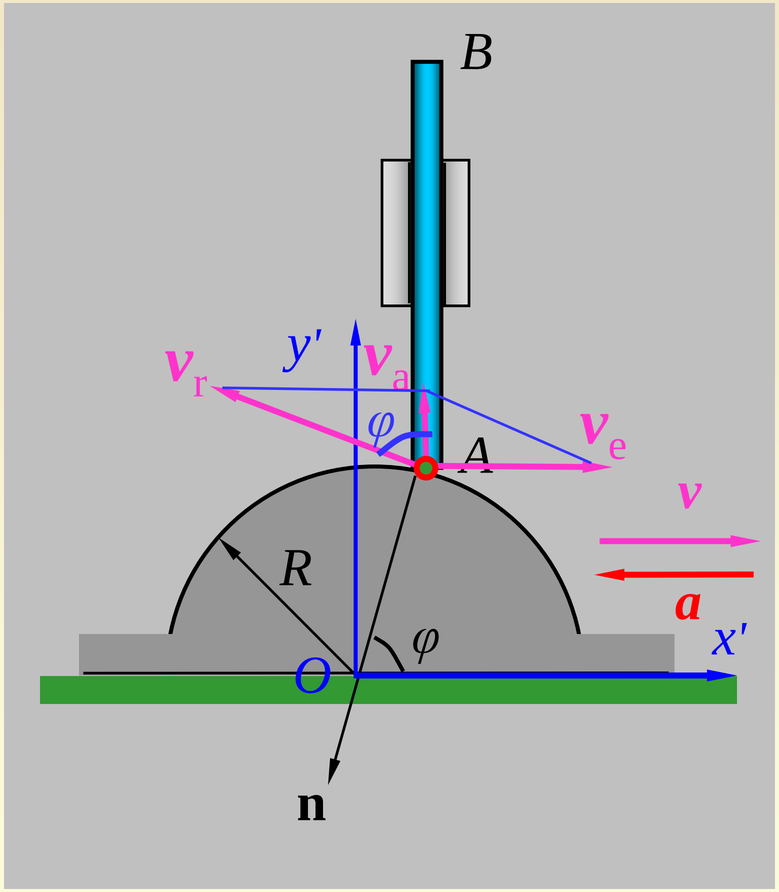
定系－固连于机座。

2. 运动分析。

绝对运动－直线运动。

相对运动－沿凸轮轮廓曲线运动。

牵连运动－水平平动。



3. 速度分析。

绝对速度$\boldsymbol{v}_a$：大小未知，方向沿杆AB向上。

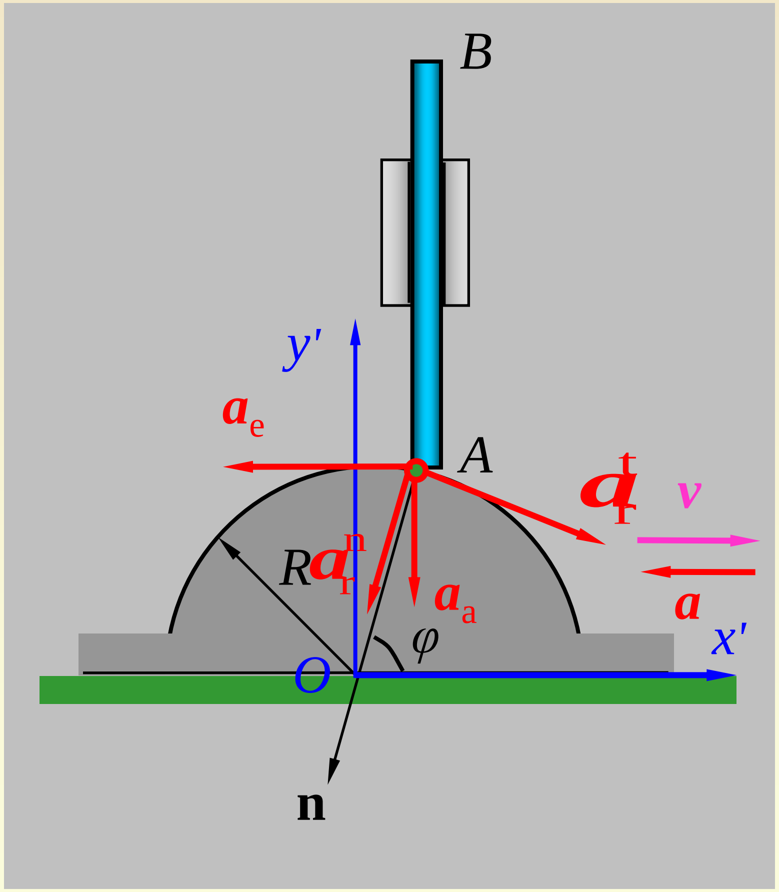
牵连速度$\boldsymbol{v}_e$：$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}$，方向水平向右。

相对速度$\boldsymbol{v}_r$：大小未知，方向沿凸轮圆周的切线 。

根据速度合成定理

$$\boxed{\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r}$$

可求得：$$v_r = \frac{v_e}{\sin\varphi} = \frac{v}{\sin\varphi}$$



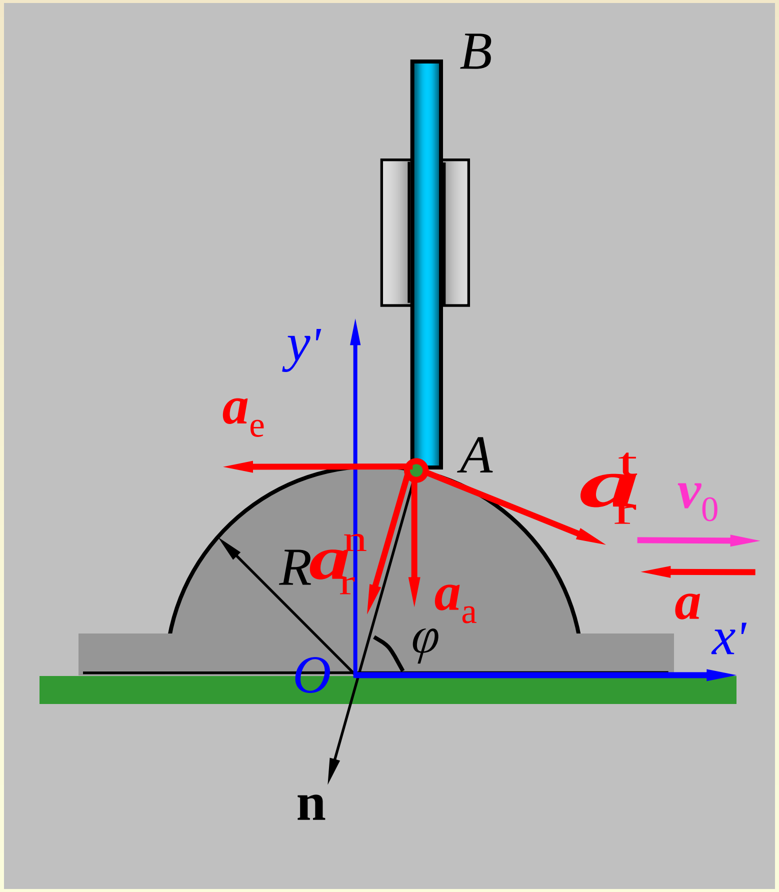
4. 加速度分析。

绝对加速度$\boldsymbol{a}_a$：大小未知，为所要求的量，方向沿直线AB。

牵连加速度$\boldsymbol{a}_e$：$\boldsymbol{a}_e=\boldsymbol{a}$，沿水平方向。

相对加速度切向分量$\boldsymbol{a}_r^t$：大小未知，垂直于OA，假设指向右下。

相对加速度法向分量$\boldsymbol{a}_r^n$：$a_r^n = v_r^2/R$，沿着OA，指向O。



根据加速度合成定理

$$\boxed{\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r^t + \boldsymbol{a}_r^n}$$

上式投影到法线 **n** 上，得

$$a_a \sin\varphi = a_e \cos\varphi + a_r^n$$

解得杆*AB*在图示位置时的加速度

$$a_a = \frac{1}{\sin\varphi}\left(a\cos\varphi + \frac{v^2}{R\sin^2\varphi}\right) = a\cot\varphi + \frac{v^2}{R\sin^3\varphi}$$

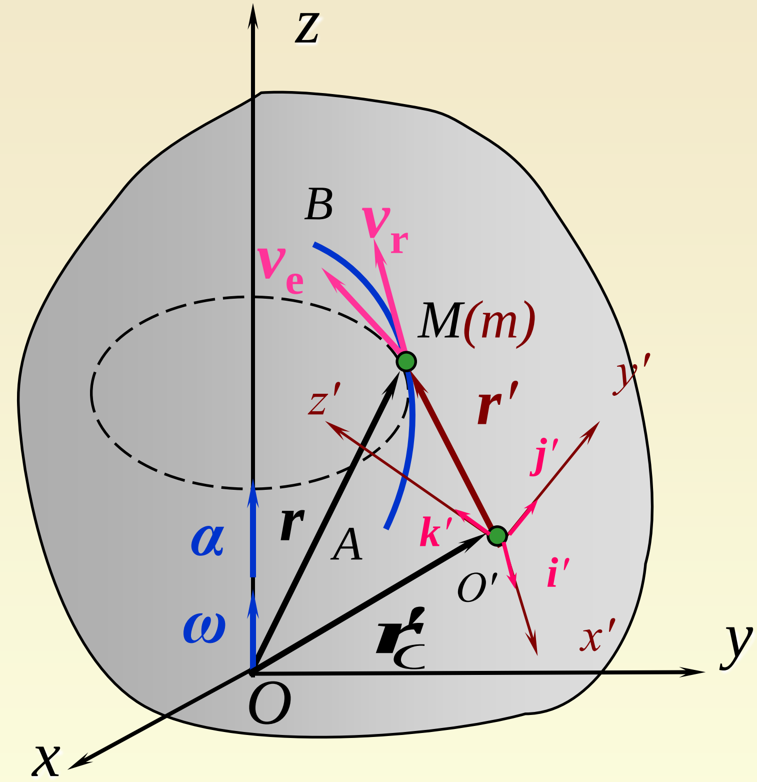
铅直向下。

§8–4 牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理

- 牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理
- 科氏加速度

1. 牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理

设载体以角速度ω和角加速度$\boldsymbol{\alpha}$ 绕定系$Oxyz$的z轴转动；动系$O'x'y'z'$ 固连于载体，动点M沿相对轨迹AB运动。



(1) v_r与 a_r

相对矢径 $\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$

相对速度 $\boldsymbol{v}_r = \dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}'$

相对加速度 $\boldsymbol{a}_r = \ddot{x}'\boldsymbol{i}' + \ddot{y}'\boldsymbol{j}' + \ddot{z}'\boldsymbol{k}'$

(2) $\boldsymbol{v}_\mathrm{e}$与 $\boldsymbol{a}_\mathrm{e}$

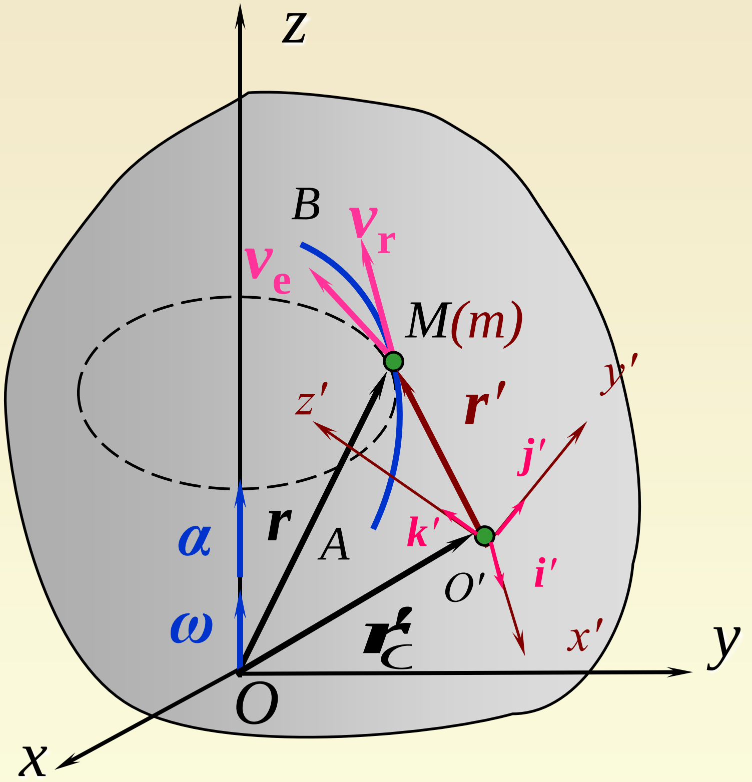
牵连速度

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

牵连加速度

$$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{a}_m^t + \boldsymbol{a}_m^n = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n$$

$$= \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_e$$



$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$
$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} = \dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}'$$

(3) $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$与 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}$

由点的速度合成定理 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$

得 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}'$

在定系中求上式对时间t的导数

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}')$$

§ 8–4 牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}'\boldsymbol{i}'+\dot{y}'\boldsymbol{j}'+\dot{z}'\boldsymbol{k}')$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}$$

- $$\boldsymbol{a}_a=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r}$$

- $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}_e=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_e}$$

$$=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_a$$

$$=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r)$$

$$=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

§ 8–4 牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}')$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}_r = \ddot{x}'\boldsymbol{i}' + \ddot{y}'\boldsymbol{j}' + \ddot{z}'\boldsymbol{k}'}$$

- $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}')$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_r = \dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}'}$$

$$= (\ddot{x}'\boldsymbol{i}' + \ddot{y}'\boldsymbol{j}' + \ddot{z}'\boldsymbol{k}') + (\dot{x}'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t} + \dot{y}'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t} + \dot{z}'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t})$$

$$\boldsymbol{a}_r$$

$$\dot{x}'\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}') + \dot{y}'\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}') + \dot{z}'\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}')$$

$$\boldsymbol{\omega}\times(\dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}')$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

泊松公式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}'$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}'$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}'$$

§8–4 牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

代入

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{a}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}$$

最后得到动点绝对加速度的表达式 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$

上式右端的最后一项称为科氏加速度，并用$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$表示，即 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$

$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}}$$

它表示了牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理（科里奥利定理），即当牵连运动是定轴转动时，动点在每一瞬时的绝对加速度，等于它的牵连加速度、相对加速度和科氏加速度三者的矢量和。

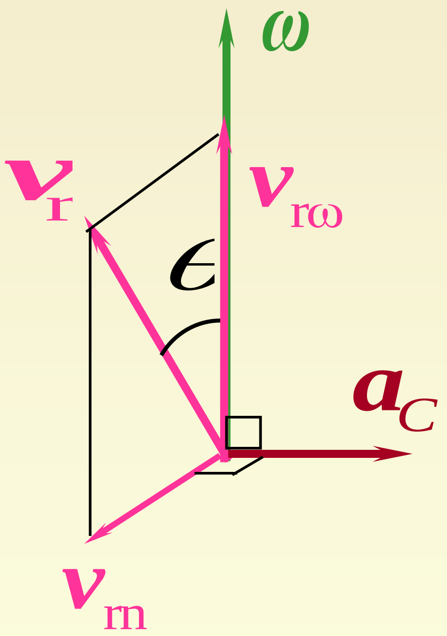
2. 科氏加速度 $a_C = 2\omega \times v_r$

(1) 科氏加速度是牵连转动（ω）和相对运动（v_r）相互影响的结果。

(2) a_C的大小： $a_C = 2\omega v_r \sin\theta = 2\omega v_{rn}$

a_C的方向：

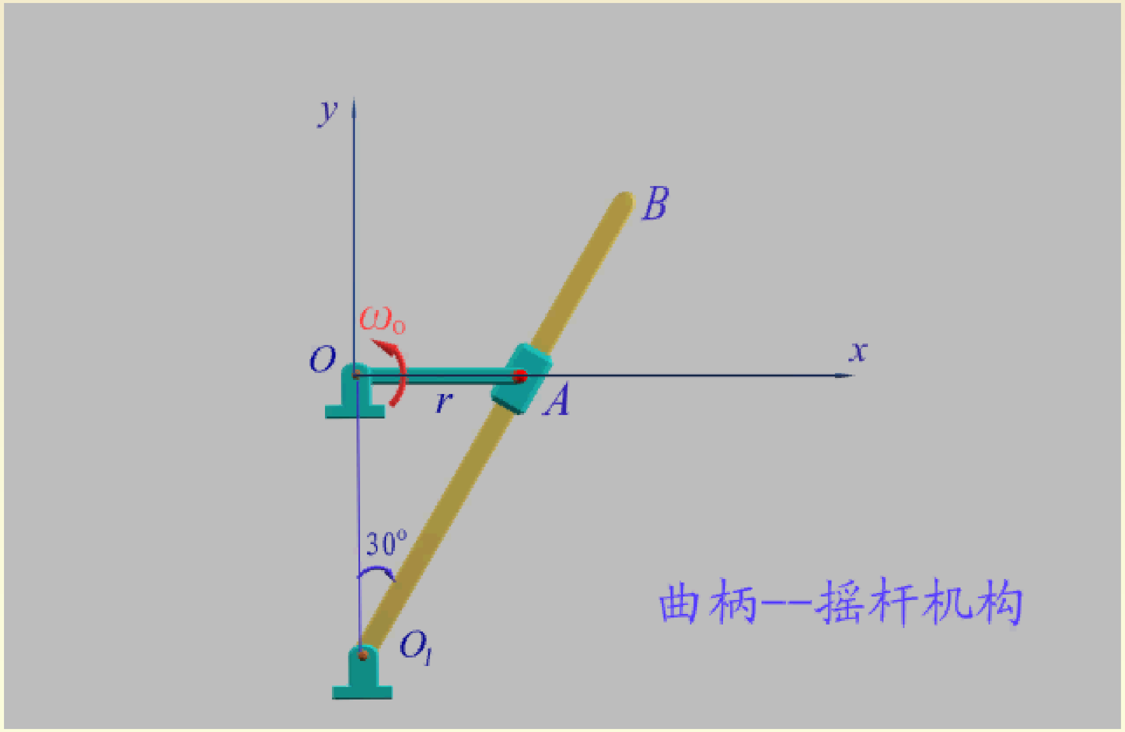
垂直于ω与v_r所确定的平面，由右手规则确定。

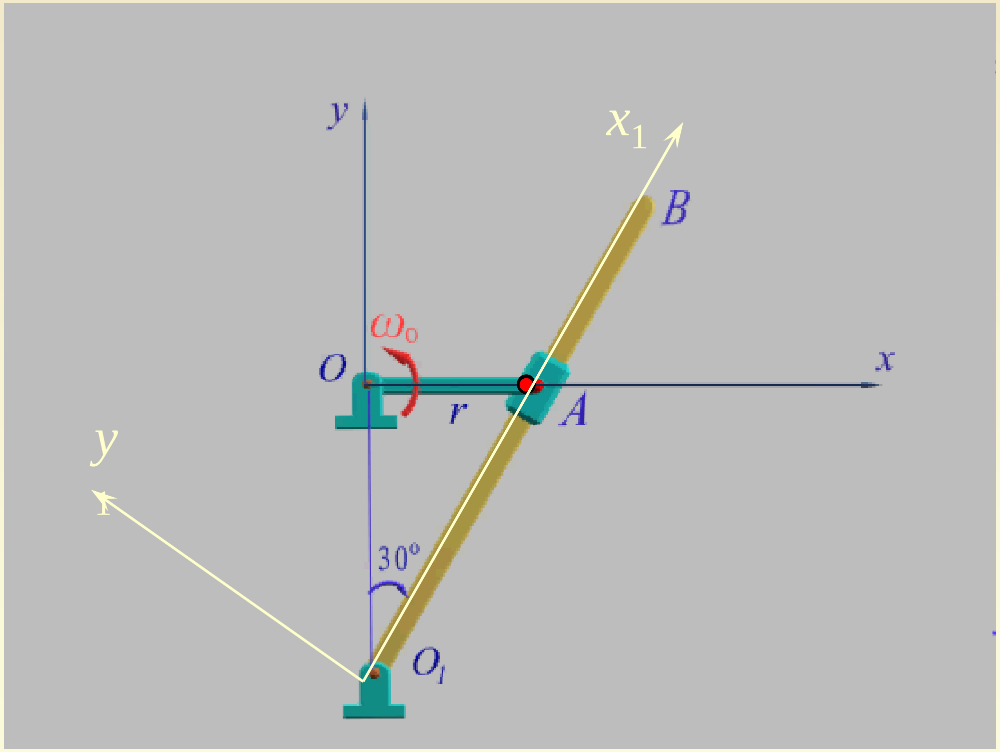


(3) 在一些特殊情况下科氏加速度a_C等于零：

- $\omega=0$ 的瞬时；
- $v_r=0$ 的瞬时；
- $\omega // v_r$ 的瞬时。

例8–13 已知曲柄$OA = r$，以角速度ω_0匀速转动。求曲柄OA水平，摇杆AB与铅垂线夹角为30°时，摇杆AB的角加速度。





解： 1. 选择动点，动系与定系。

动点—滑块 A 。

动系—$O_1x'y'$，固连于摇杆 O_1B。

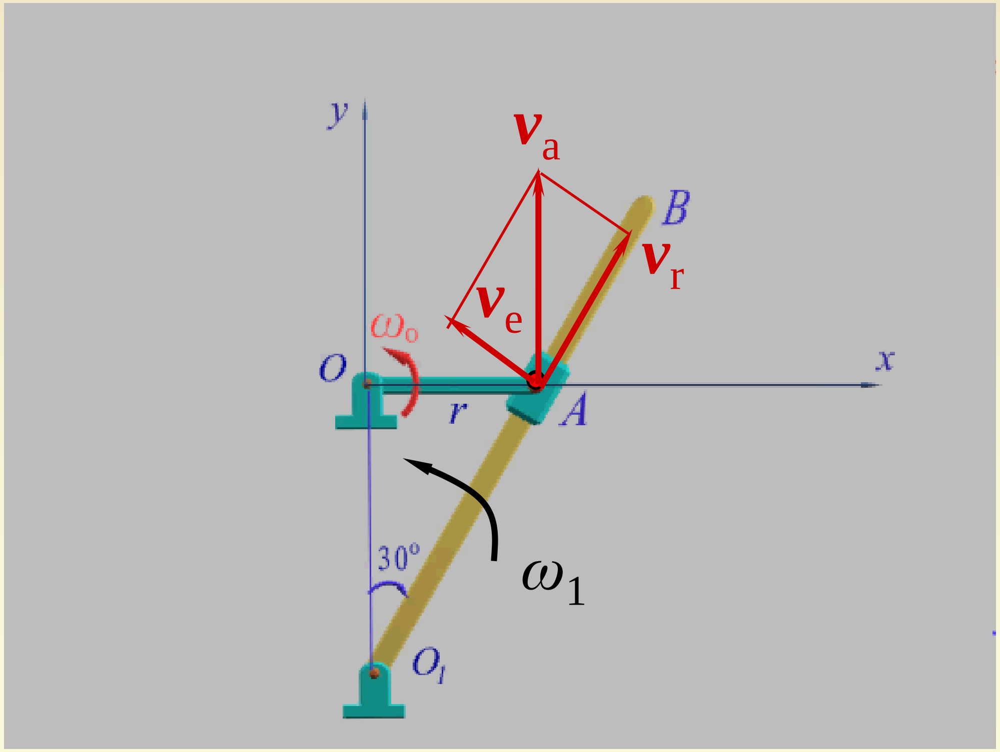
定系—固连于机座。

2. 运动分析。

绝对运动—以O为圆心的圆周运动。

相对运动—沿O_1B的直线运动。

牵连运动—摇杆绕O_1轴的摆动。



2. 速度分析

由前面例子，根据速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

已经求得牵连速度

$$v_e = v_a \cos 60^\circ = \frac{1}{2} r\omega_0$$

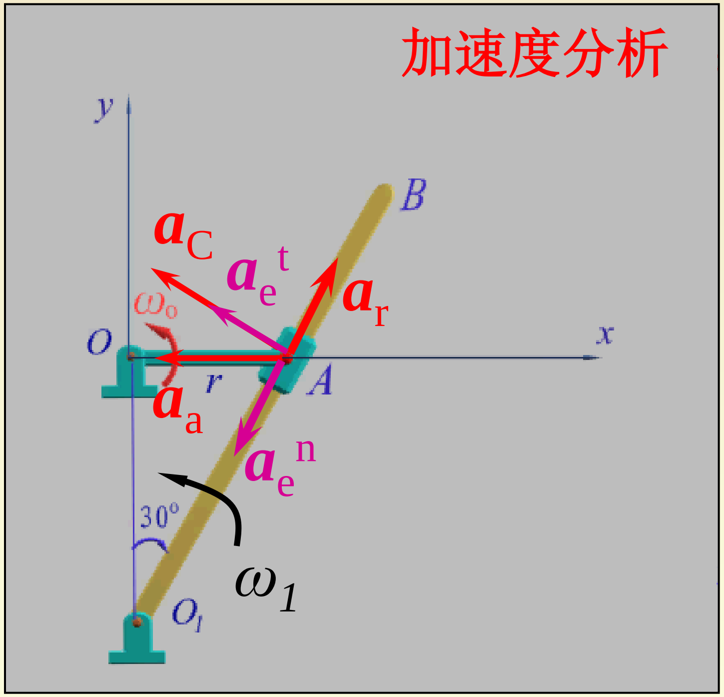
相对速度

$$v_r = v_a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega_0$$

摇杆的角速度

$$\omega_1 = \frac{v_e}{O_1A} = \frac{1}{4}\omega_0$$

3. 加速度分析



$\boldsymbol{a}_a$: $a_a = r\omega_2^2$，沿着OA，指向O；

$\boldsymbol{a}_r$: 大小未知，沿着O_1B，指向B；

$\boldsymbol{a}_e^n$: $a_e^n = r\omega_0^2/8$，沿着O_1A，指向O_1；

$\boldsymbol{a}_e^t$: $a_e^t = \overline{O_1A} \cdot \alpha$，$\alpha$为角加速度，垂直于$O_1A$，指向未知，假设指向左上；

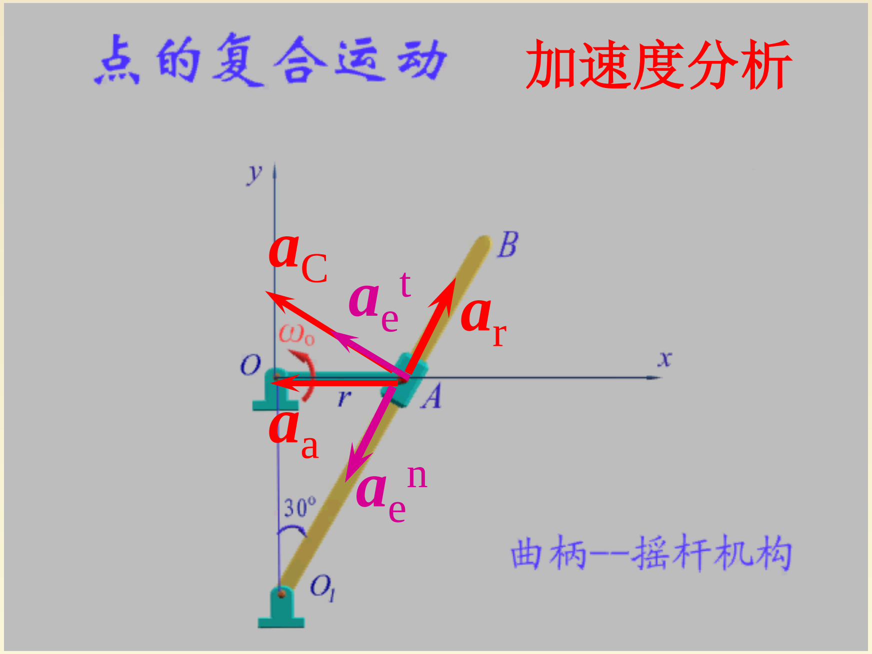
$\boldsymbol{a}_C$: 垂直于O_1B，指向左上。

$$a_C = 2\omega_1 v_r = 2 \times \frac{v_e}{O_1A} \times \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega_0^2$$

由加速度合成定理

$$\boxed{\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C}$$

将上式沿$\boldsymbol{a}_e^t$方向投影，得



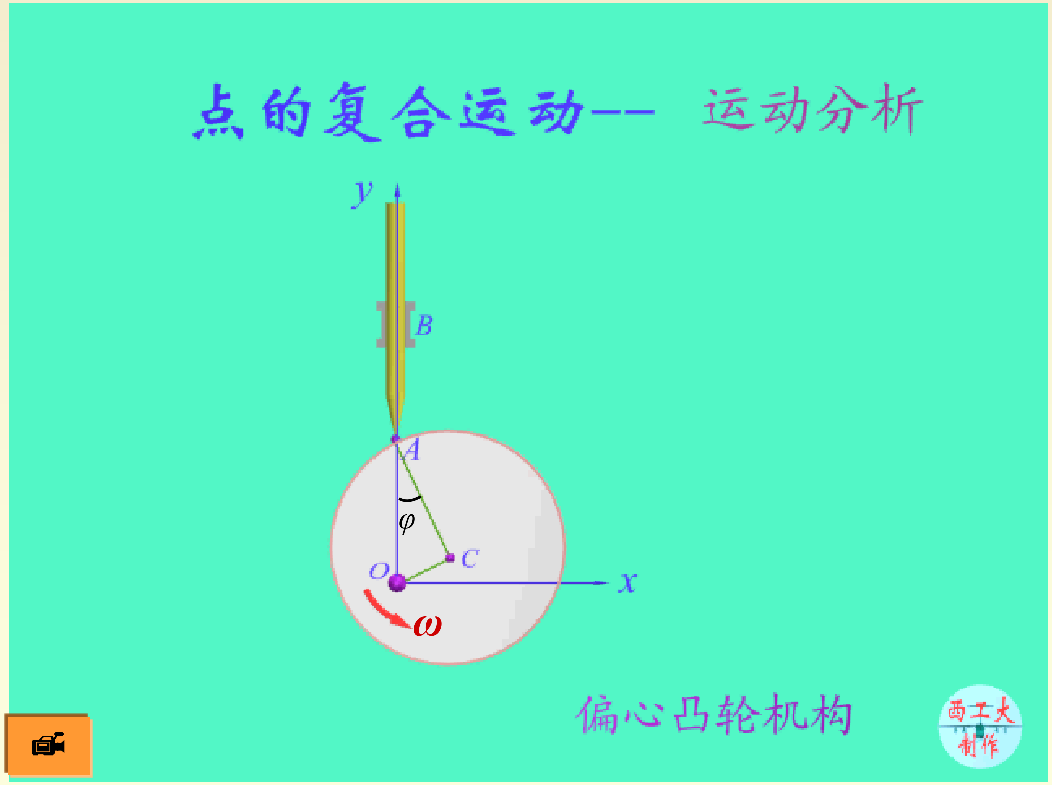
$$a_a \cos 30^\circ = a_e^t + a_C$$

即

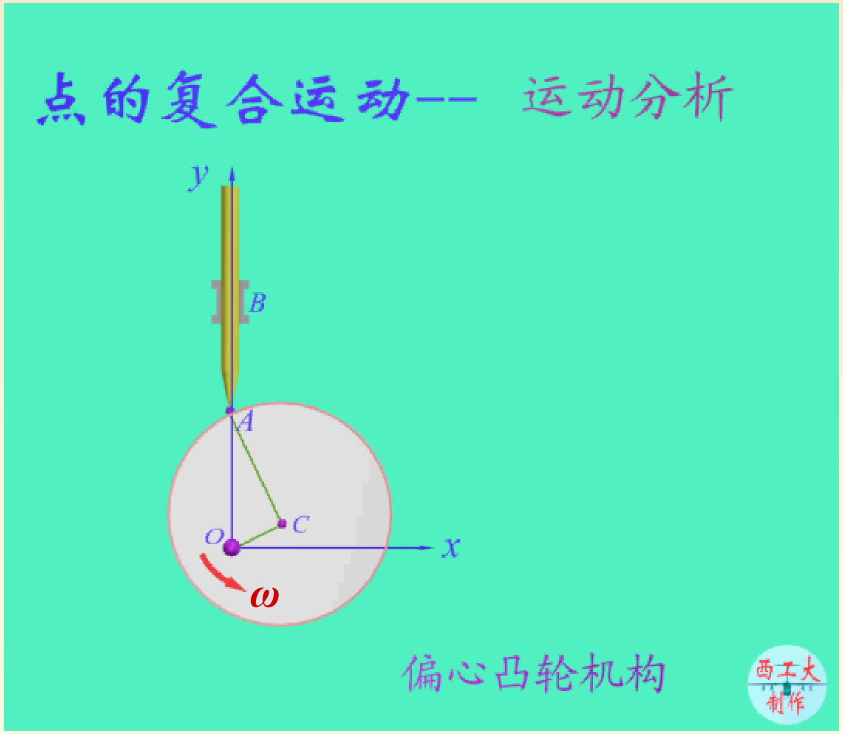
$$r\omega_0^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2r\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega_0^2$$

求得摇杆*AB* 的角加速度　$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{8}\omega_0^2$　（逆时针）。

例8-14 已知凸轮的偏心距$OC=e$，凸轮半径 $r=\sqrt{3}e$，并且以等角速度ω绕O轴转动， 图示瞬时，AC垂直于OC，$\varphi=30°$。求顶杆的速度与加速度。



解:



1. 选择动点，动系与定系。

动点－ AB的端点A 。

动系－固连于凸轮。

定系－固连于机座。

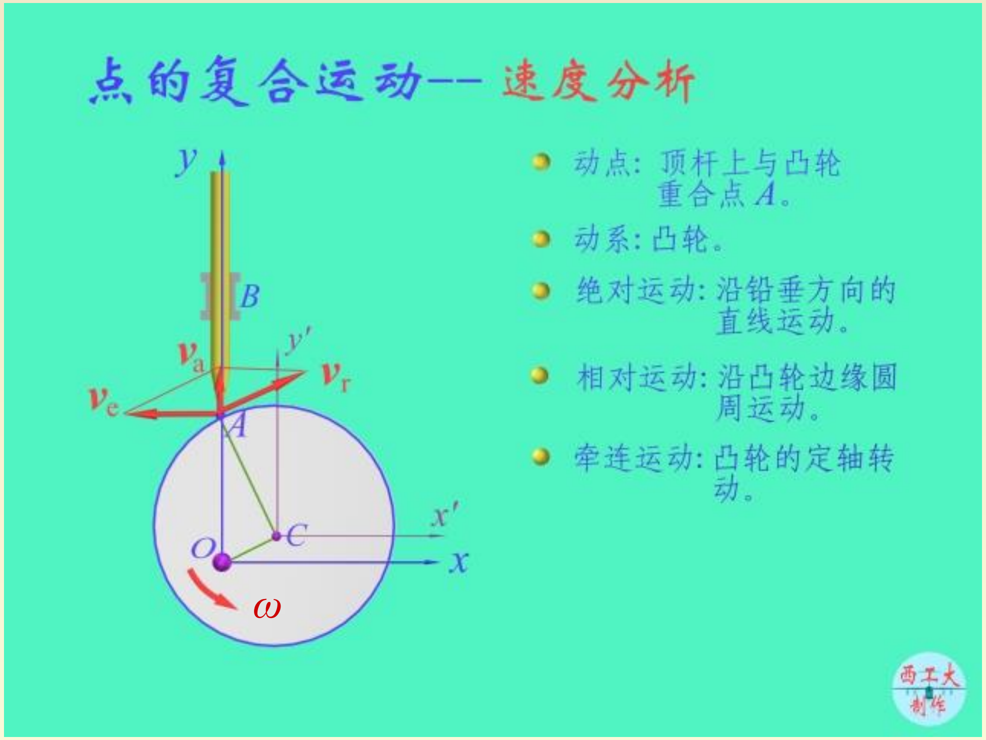
2. 运动分析。

绝对运动－直线运动。

相对运动－ 以C为圆心的圆周运动。

牵连运动－ 绕O 轴的定轴转动。

3. 速度分析。



绝对速度： v_a为所要求的未知量，方向沿杆AB。

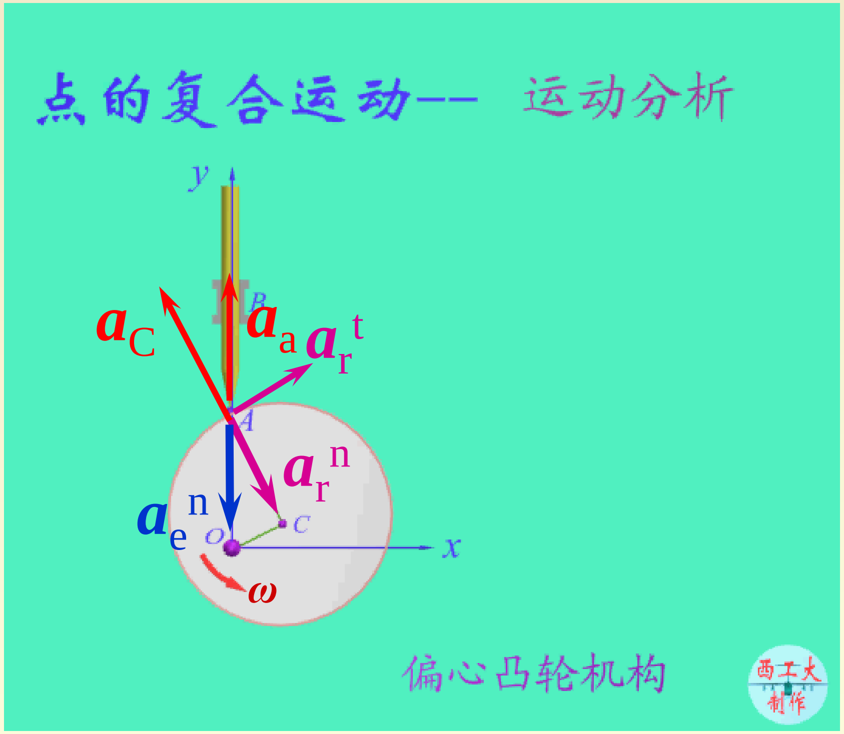
牵连速度： $v_e = OA \cdot \omega = 2e\,\omega$，方向垂直于$OA$。

相对速度： 大小未知，方向沿凸轮圆周的切线。

应用速度合成定理 $\boxed{\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r}$

可得AB杆速度 $$v_a = v_e \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} e\omega$$

相对速度 $$v_r = 2v_a = \frac{4\sqrt{3}}{3} e\omega$$



4. 加速度分析

$\boldsymbol{a}_a$：大小未知，为所要求的量，沿着AB，假设指向上方；

$\boldsymbol{a}_r$：$a_r^n = v_r^2/AC$，沿着AC，指向C；

$\boldsymbol{a}_r^t$：大小未知，垂直于AC，指向未知，假设指向右上；

$\boldsymbol{a}_e^n$：$a_e^n = OA \cdot \omega^2$，沿着$OA$，指向$O$；

$\boldsymbol{a}_C$：沿着CA，指向左上。

$$a_C = 2\omega v_r$$

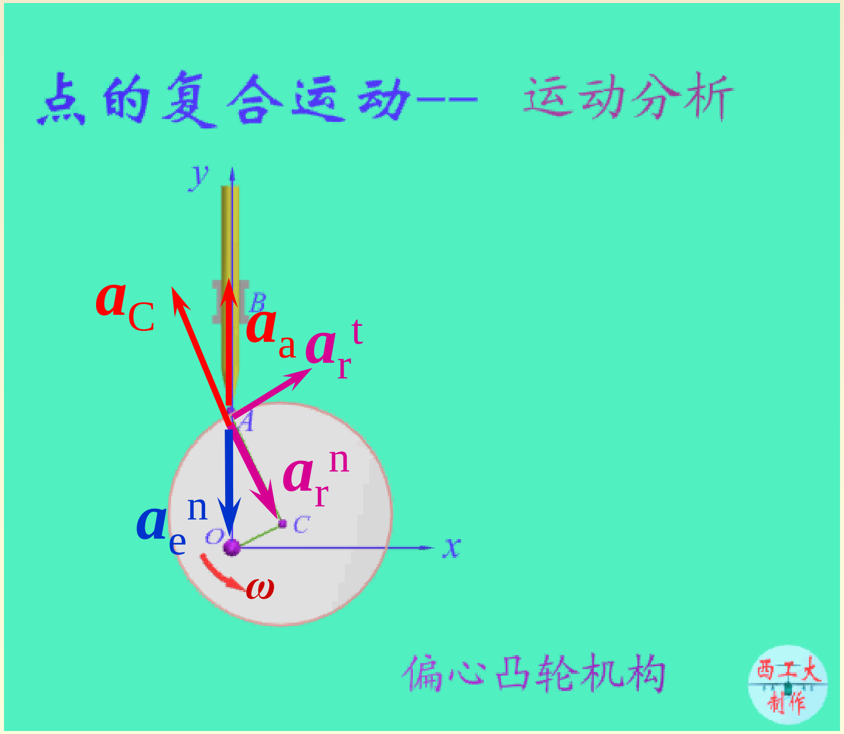
根据加速度合成定理 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$

将上式沿$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$方向投影，得

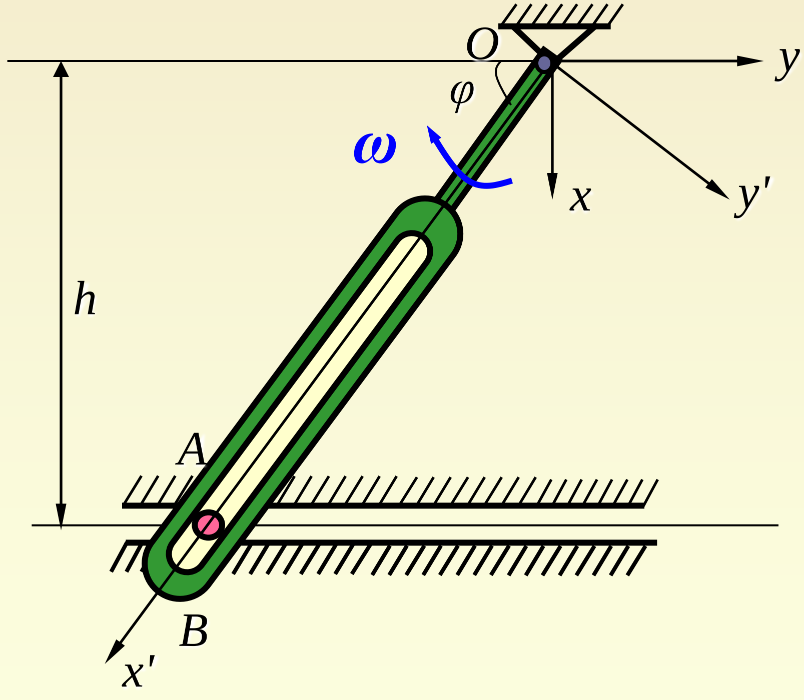
$$a_{\mathrm{a}}\cos 30^{\circ} = a_{\mathrm{C}} - a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} - a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\cos 30^{\circ}$$

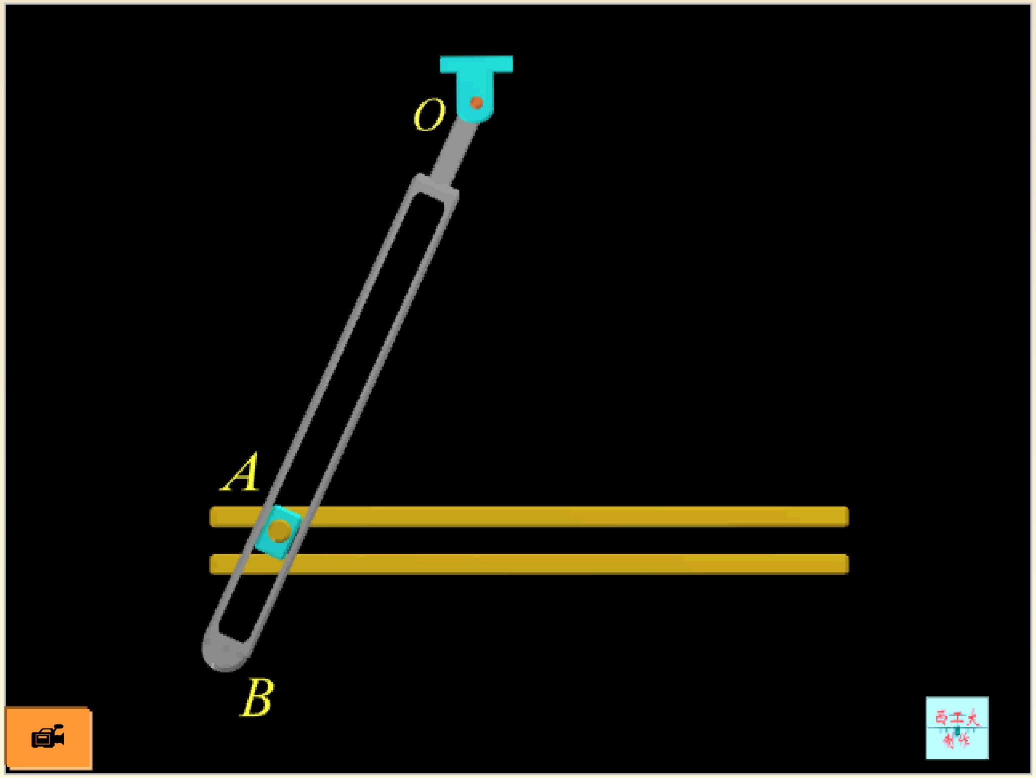
从而求得顶杆的加速度

$$a_{\mathrm{a}} = -\frac{2}{9}e\omega^{2}$$

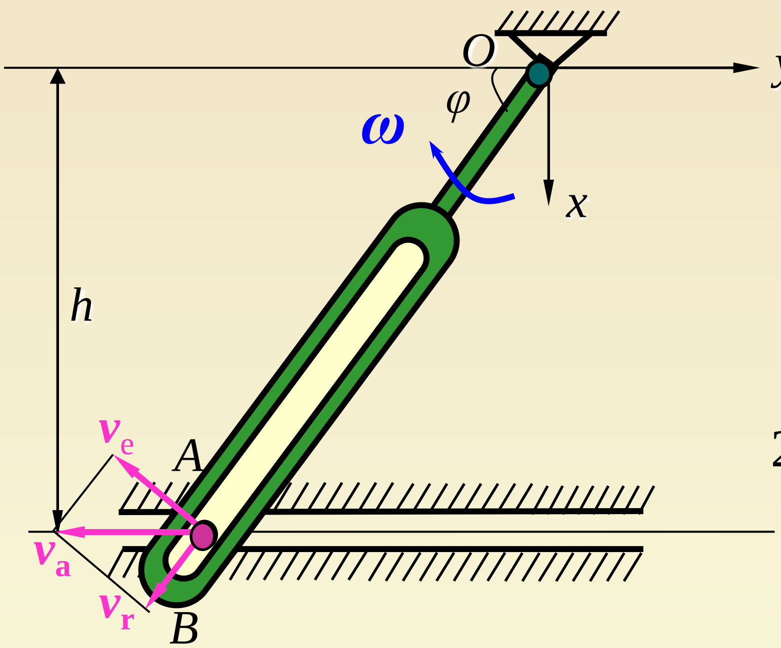


例8-15 在滑块导杆机构中，由一绕固定轴O作顺时针转动的导杆OB带动滑块A沿水平直线轨道运动，O到导轨的距离是h。已知在图示瞬时导杆的倾角是φ，角速度大小是ω，角加速度$\alpha=0$。试求该瞬时滑块A的绝对加速度。





运 动 演 示



解： 1. 选择动点，动系与定系。

动点—取滑块A为动点。

动系— 固连于导杆。

定系—固连于机座。

2. 运动分析。

绝对运动— 沿导轨的水平直线运动。

牵连运动— 导杆OB绕轴O的匀速转动。

相对运动—沿导杆OB的直线运动。

速度合成图如图所示。　应用速度合成定理 $\boxed{\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r}$

求得

$$v_r = v_e \cot\varphi = \frac{h\omega}{\sin\varphi}\cot\varphi = \frac{h\omega\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$

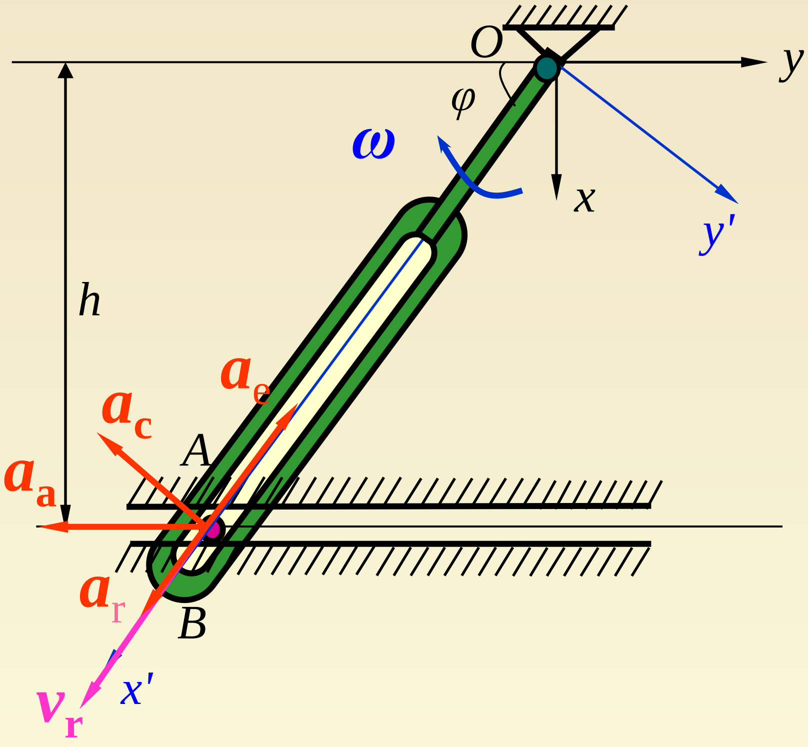
3. 加速度分析。

绝对加速度$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}$：大小待求，方向水平。

牵连加速度$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}$：$a_{\mathrm{e}} = \dfrac{h}{\sin\phi}\omega^2$，方向沿$BO$指向$O$。

相对加速度$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$：大小未知，方向沿$BO$。

科氏加速度$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$：$a_{\mathrm{C}} = 2\omega_0 \cdot v_{\mathrm{r}}$，方向⊥$\boldsymbol{OB}$偏上方。



根据加速度合成定理

$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}}$$

投影到Oy'轴上，得

$$-a_{\mathrm{a}}\sin\varphi = -a_{C},$$

求得滑块A的加速度

$$a_{\mathrm{a}} = \frac{a_{\mathrm{C}}}{\sin\varphi} = \frac{2h\omega^2\cos\varphi}{\sin^3\varphi}$$

谢谢使用