动 力 学

转 动 惯 量

西北工业大学
支希哲　朱西平　侯美丽

动　力　学

转动惯量

- §1　转动惯量的概念
- §2　简单形状匀质刚体的转动惯量
- §3　转动惯量的平行轴定理
- §4　刚体对任意轴的转动惯量
- §5　质量对称分布刚体的惯性主轴方向的判定

§1 转动惯量的概念

- 转动惯量的概念
- 回转半径
- 转动惯量的一般表达式
- 极转动惯量

§1 转动惯量的概念

1. 转动惯量的概念

刚体对轴z的转动惯量，是刚体内所有各点的质量与其对该轴的转动半径的平方的乘积的总和（如图1）。

可以表示为

$$J_z = \sum m r_z^2$$

可见，转动惯量永远是正值。

对于质量连续分布刚体：$$J_z = \int_s r_z^2 \mathrm{d}m$$

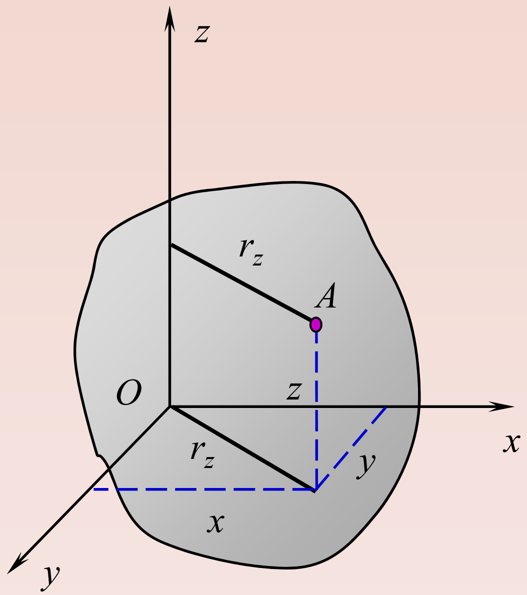


图 1

影响转动惯量大小的因素。

- 整个刚体质量的大小。
- 刚体各部分的质量分布。
- 转轴的位置。

§1 转动惯量的概念

$$J_z = \sum m r_z^2$$

$$J_z = \int_S r_z^2 \mathrm{d}m$$

影响转动惯量大小的因素。

- 整个刚体质量的大小。
- 刚体各部分的质量的分布。
- 转轴的位置。

所以，当谈到刚体的转动惯量时，应指出它是对哪个轴来说的。

刚体的转动惯量是刚体在转动时惯性的度量。

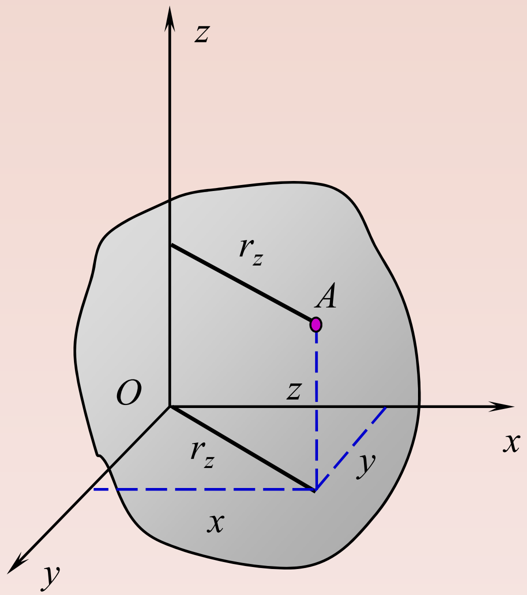


图 1

在国际单位制中，转动惯量的常用单位是$\mathrm{kg \cdot m^2}$ 。

2. 回转半径

刚体对于某轴z的转动惯量与其质量m之比值的平方根为一个当量长度，称为刚体对于该轴的回转半径。因此，有关系式

$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}}, \qquad J_z = m\rho_z^2$$

可见，如果假想地把刚体的全部质量集中于一点，而不改变这刚体对于该轴的转动惯量，则这个点到该轴的距离应等于回转半径。

§1 转动惯量的概念

3. 转动惯量的一般表达式

取固连于刚体的坐标$Oxyz$，设刚体内任一质点A的坐标是（x，y，z），用r_z表示点A到轴z的距离，则 $r_z^2 = x^2 + y^2$（如图2）。

故得刚体对轴z的转动惯量的计算式

$$J_z = \sum m r_z^2 = \sum m(x^2 + y^2)$$

同理，可得刚体对轴x和轴y的转动惯量计算式，合并写成

$$J_x = \sum m r_x^2 = \sum m(y^2 + z^2)$$

$$J_y = \sum m r_y^2 = \sum m(z^2 + x^2)$$

$$J_z = \sum m r_z^2 = \sum m(x^2 + y^2)$$

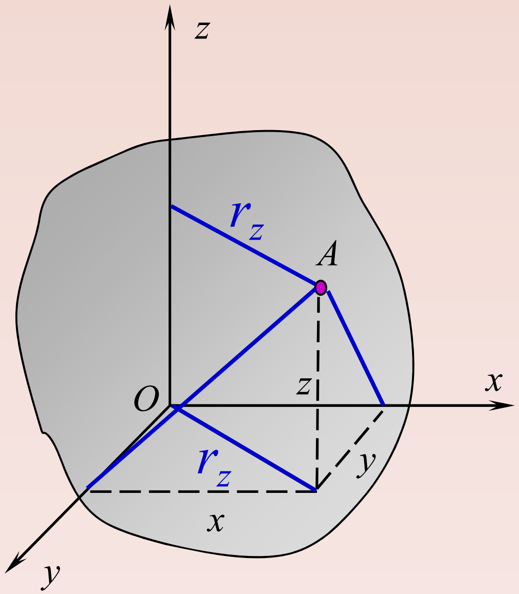


图 2

4. 极转动惯量

对于平面薄板，使平板表面重合于坐标平面Oxy（如图3），如果薄板内各点的坐标 z 可以忽略，则式简写成

$$J_x = \sum my^2$$

$$J_y = \sum mx^2$$

$$J_z = \sum m(x^2 + y^2)$$

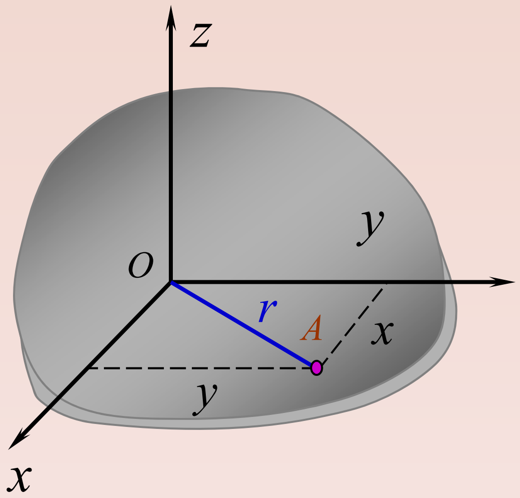


图 3

此时有

$$J_z = J_x + J_y$$

薄板对与板面垂直的轴的转动惯量，称为薄板的极转动惯量。上式指出，薄平板的极转动惯量，等于薄板对板面内与极轴z共点并相互正交的任意两轴的转动惯量之和。

§2 简单形状匀质刚体的转动惯量

§2 简单形状匀质刚体的转动惯量

下面举例说明一些简单形状匀质刚体的转动惯量的积分计算方法。

例题1 已知匀质细长直杆的质量是m，长度是l（如图4），求它对于过质心C且与杆相垂直的轴 z 的转动惯量。

解： 在杆沿轴线x上任一小段dx，其质量 $\frac{m}{l}\mathrm{d}x$，对轴z的转动惯量元素是

$$\mathrm{d}J_z = x^2 \frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

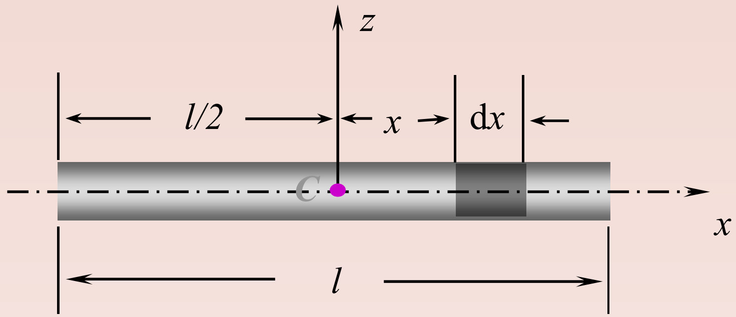


图 4

匀质细长直杆对轴z的转动惯量是

$$J_z = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{m}{l} x^2 \mathrm{d}x = \frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$\boxed{J_z = \frac{1}{12} m l^2}$$

§2 简单形状匀质刚体的转动惯量

例题2 已知匀质矩形薄平板的质量是m，边长为a和b（如图5），求这薄板对垂直板面中心 C 的轴z转动惯量。

解： 由图可见，矩形板在y方向的尺寸a不影响J_y，故可利用上例的结果。

$$J_y = \frac{1}{12}mb^2$$

类似地可得 $$J_x = \frac{1}{12}ma^2$$

利用 $$J_z = J_x + J_y$$

薄板的极转动惯量为

$$J_z = J_x + J_y = \frac{1}{12}(a^2 + b^2)$$

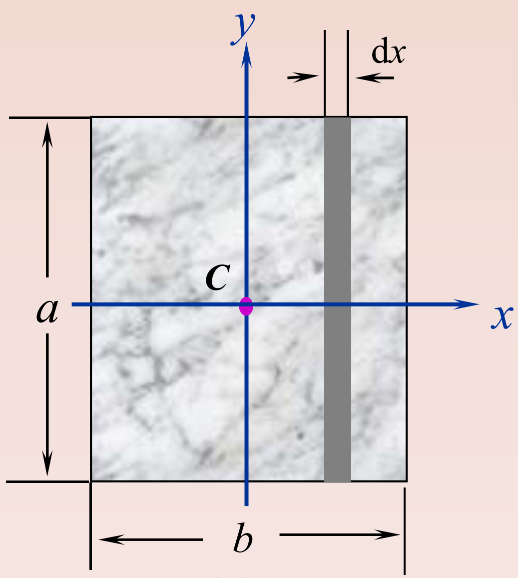
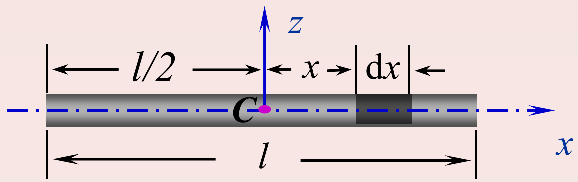


图 5



例题 3 已知匀质薄圆盘的半径是r，质量是m （如图6），求它对垂直于盘面质心轴Oz的转动惯量。

解： 取任一半径为ζ，宽为$\mathrm{d}\zeta$的圆环，其质量是

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\pi r^2}\cdot 2\pi\zeta\mathrm{d}\zeta = \frac{2m}{r^2}\zeta\mathrm{d}\zeta$$

对轴z的转动惯量元素是

$$\mathrm{d}J_z = (\mathrm{d}m)\zeta^2 = \frac{2m}{r^2}\zeta^3\mathrm{d}\zeta$$

于是，求得圆盘对轴z转动惯量

$$J_z = \int_0^r \frac{2m}{r^2}\zeta^3\mathrm{d}\zeta = \frac{m}{2r^2}\left[\zeta^4\right]_0^r = \frac{1}{2}mr^2$$

考虑到 $J_x=J_y$，即可求得

$$J_x = J_y = \frac{1}{2}J_z = \frac{1}{4}mr^2$$

$$\boxed{J_z = \frac{1}{2}mr^2}$$

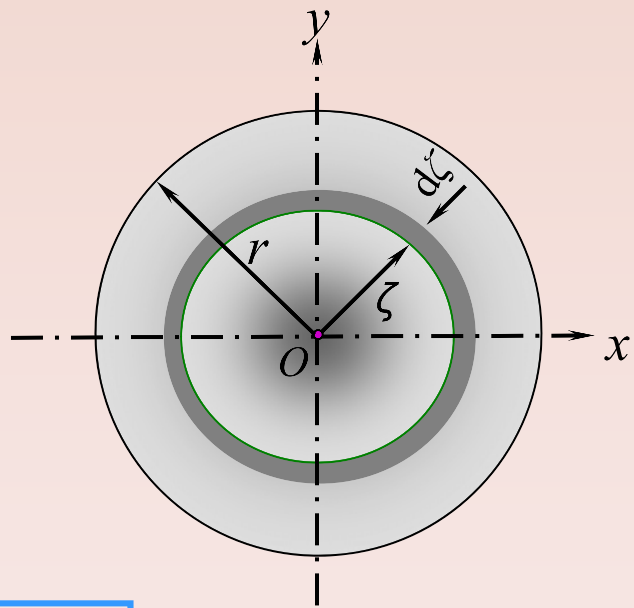


图 6

§3 转动惯量的平行轴定理

§3 转动惯量的平行轴定理

设刚体的质量为m，对轴 z'的转动惯量是 $J_{z'}$，轴z与轴z'相平行且相距d。求此刚体对轴z的转动惯量。取坐标系如图所示，令 $O'O = d$，轴y重合于轴 y'。

设刚体内任一质点A的质量是m_i，则刚体对轴z的转动惯量是

$$J_z = \sum m_i(x^2 + y^2) = \sum m_i\left[x'^2 + (y' - d)^2\right]$$

$$= \sum m_i(x'^2 + y'^2) - 2\left(\sum m_i y'\right)d + \left(\sum m_i\right)d^2$$

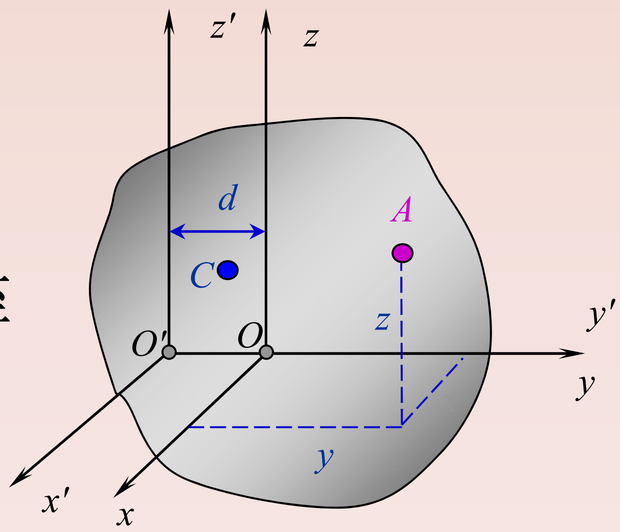


图 7

上式右端第一项就是 $J_{z'}$，第三项是$(\sum m_i)d^2$，至于第二项，根据质心C坐标公式

$$\boxed{y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}}$$

得知 $2d \cdot \left(\sum m_i y'\right) = 2d \cdot \left(\sum m_i\right) y'_C$

§3 转动惯量的平行轴定理

$$J_z=\sum m_i(x^2+y^2)=\sum m_i\left[x'^2+(y'-d)^2\right]$$

$$=\sum m_i(x'^2+y'^2)-2(\sum m_i y')d+(\sum m_i)d^2$$

$$2d\cdot(\sum m_i y')=2d\cdot(\sum m_i)\,y'_C$$

在实际应用中，常令轴 z'通过质心C，因而$y_C'=0$。于是得关系式

$$\boxed{J_z=J_{Cz'}+md^2}$$

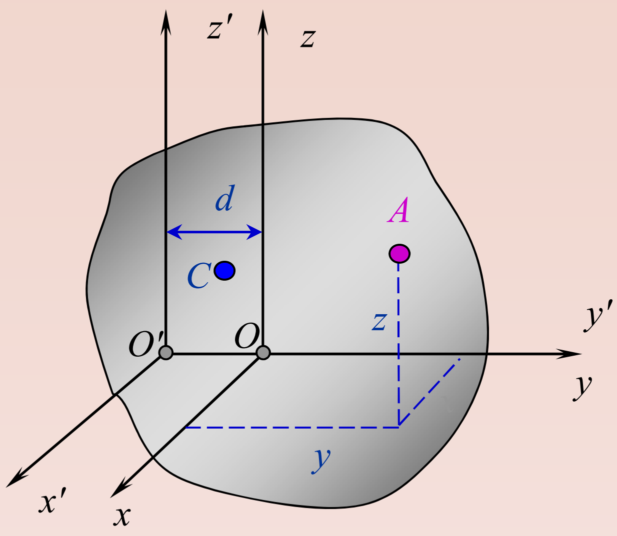


图 7

即，刚体对任一轴的转动惯量，等于它对该轴相平行且通过质心的轴的转动惯量，加上刚体的质量与两个轴之间距离平方的乘积。这就是转动惯量的平行轴定理。

§3 转动惯量的平行轴定理

例题 4

1. 已知杆长l，质量是m。求通过杆端A并与轴z平行的轴z_1的转动惯量。

解：

$$J_{z_1}=J_{Cz}+md^2$$

$$J_{z_1}=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{3}ml^2$$

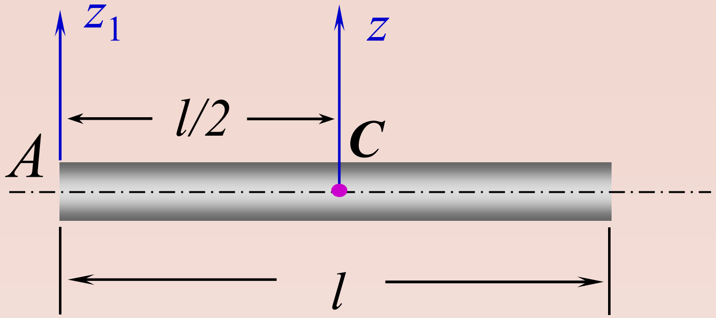


图 8

2. 已知半径r，质量是m。求通过点A并与质心轴z平行的轴z_1的转动惯量。

解：

$$J_{z1}=\frac{1}{2}mr^2+mr^2=\frac{3}{2}mr^2$$

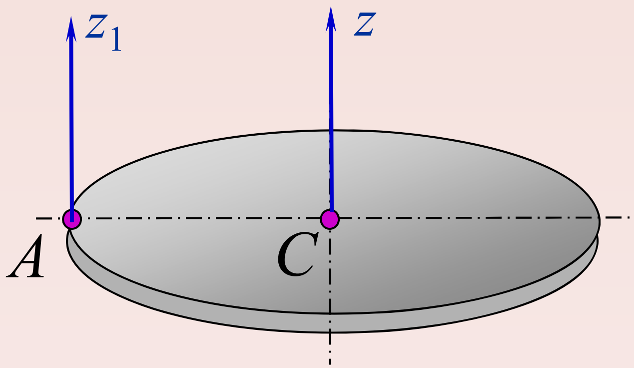


图 9

例题 5 冲击摆可近似地看成由匀质细杆OA和圆盘组成（如图10）。已知杆长l，质量是m_1；圆盘半径是r，质量是m_2。求摆对通过杆端O并与圆盘面垂直的轴z的转动惯量。

解： $J_z = J_1 + J_2$

$$= \left[\frac{1}{12}m_1 l^2 + m_1(\frac{l}{2})^2\right] + \left[\frac{1}{2}m_2 r^2 + m_2(r+l)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}m_1 l^2 + \frac{1}{2}m_2(3r^2 + 4rl + 2l^2)$$

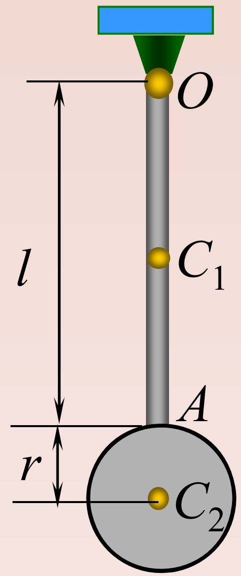


图 10