11.1 作用于质点系上的力系的功

一、 平动刚体上力的功

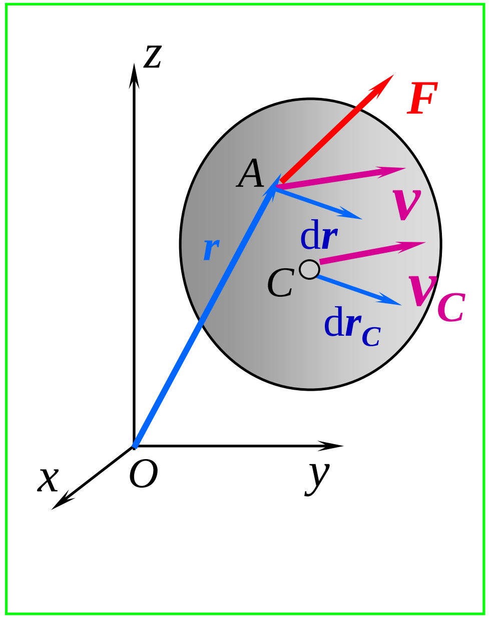
1. 元 功

设一刚体在力 F 作用下作平动，其质心在 C 点，刚体上点 A 的矢径是 $\boldsymbol{r}$ ，速度是 $\boldsymbol{v}$，则力 F 的元功

$$\mathrm{d}'W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C$$

或

$$\mathrm{d}'W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_C\,\mathrm{d}t$$



2. 总元功

$$\sum\mathrm{d}'W = \sum\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C$$

或

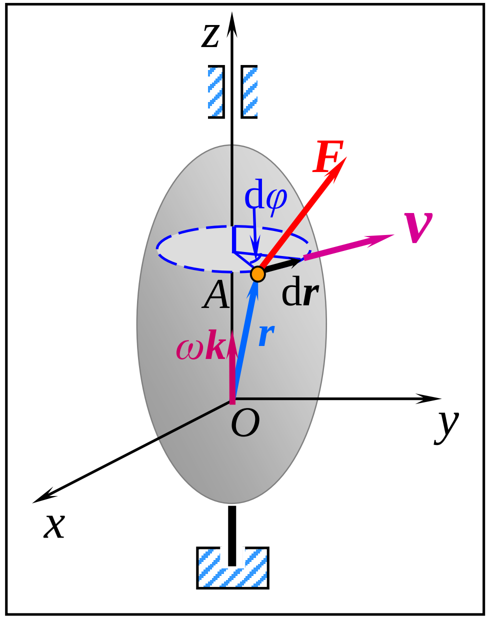
$$\sum\mathrm{d}'W = \sum\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = \sum\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_C\,\mathrm{d}t$$

二、 定轴转动刚体上外力的功

1. 元功

设刚体绕定轴 z 转动，角速度为 ω ，刚体上点 A 作用着力 F，当刚体有一微小转角 $\mathrm{d}\varphi$ 时，力 F 的元功

$$\mathrm{d}'W = m_z(F)\omega\,\mathrm{d}t = m_z(F)\,\mathrm{d}\varphi$$



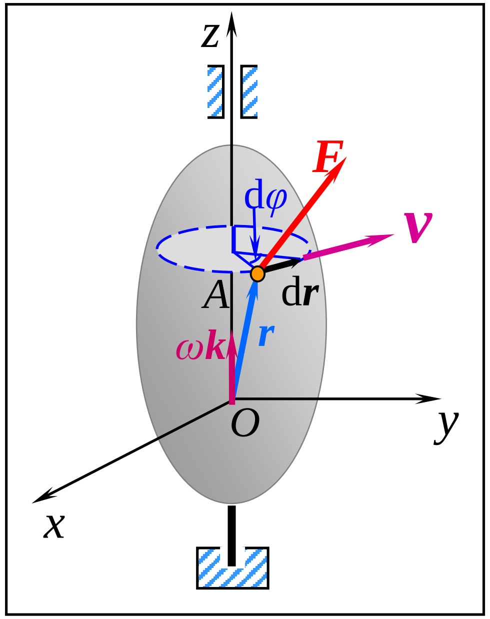
元功 $\mathrm{d}'W = m_z(\boldsymbol{F})\omega\,\mathrm{d}t = m_z(\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}\varphi$

2. 总 功 在刚体由角 φ_1 转到角 φ_2 的过程中，力 F 的总功为

有 结 论

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} m_z(F)\mathrm{d}\varphi \qquad (2-10)$$

作用于定轴转动刚体上的力的功，等于该力对转轴的矩与刚体微小转角的乘积的积分。



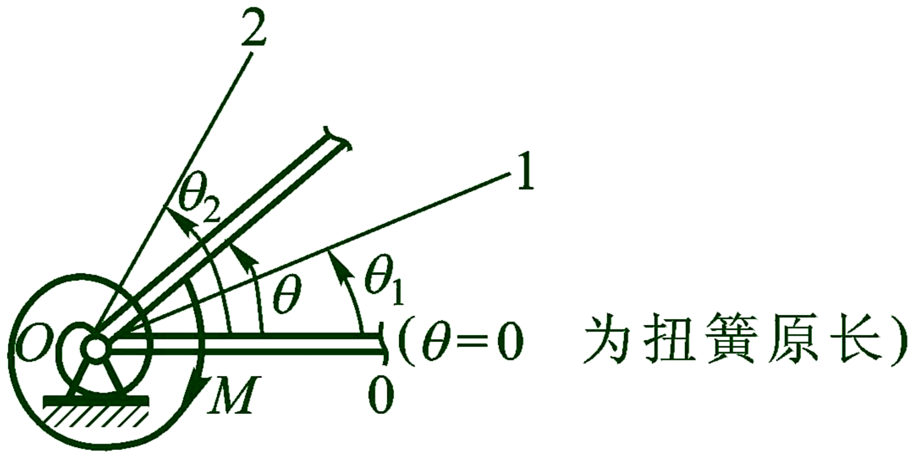
特别是，若力矩是常量，则力在上述过程中的总功为

$$W = M_z(\boldsymbol{F})\,(\varphi_2 - \varphi_1)$$

如果刚体上作用着一个力系，则其元功为

$$\sum \mathrm{d}'W = \sum M_z(\boldsymbol{F})\omega\,\mathrm{d}t = M_z\,\mathrm{d}\varphi$$

扭转弹簧力矩的功



假设扭簧上的杆处于水平时扭簧未变形，且变形时在弹性范围之内。变形时扭簧作用于杆上的力对点*O*之矩为

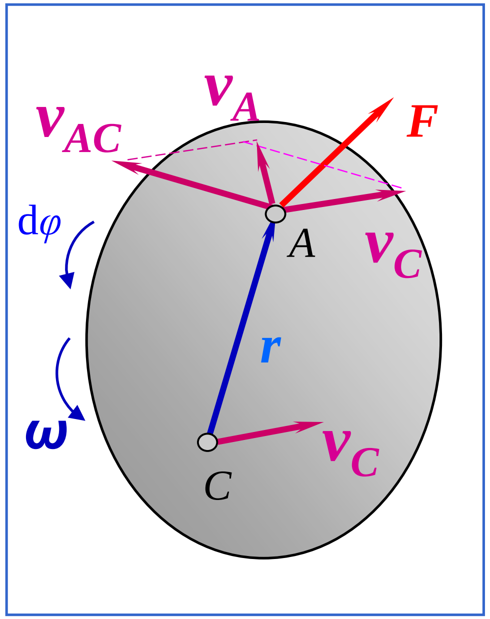
$$M = -k\theta$$

其中*k*为扭簧的刚度系数。当杆从角度θ_1转到角度θ_2时所作的功为

$$W_{12} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-k\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}k\theta_1^2 - \frac{1}{2}k\theta_2^2$$

三、 平面运动刚体上力的功

1.元功　设一刚体在力 F 作用下作平面运动，其质心在 C 点，速度是 v_C ，刚体上点 A 的速度是 v_A，则力 F 的元功



$$\mathrm{d}'W = F\cdot v_A \mathrm{d}t = F\cdot(v_C + v_{AC})\mathrm{d}t$$
$$= F\cdot v_C \mathrm{d}t + F\cdot v_{AC}\mathrm{d}t$$
$$= F\cdot \mathrm{d}r_C + F\cdot(\omega\times r)\,\mathrm{d}t$$
$$= F\cdot \mathrm{d}r_C + M_C(F)\,\mathrm{d}\varphi$$

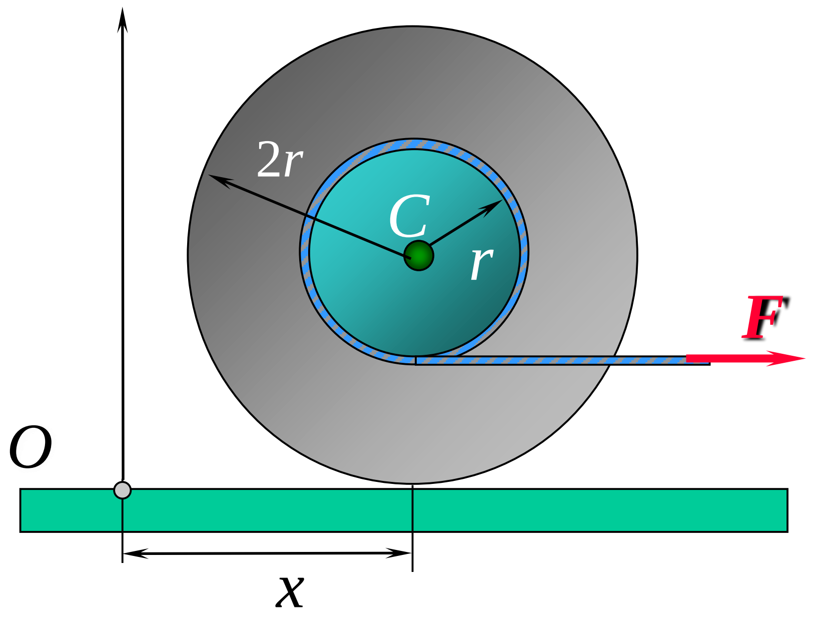
2.总功　$\sum \mathrm{d}'W = \sum[F\cdot \mathrm{d}r_C + M_C(F)\,\mathrm{d}\varphi]$

有 结 论

作用于平面运动刚体上的力的功，等于该力在刚体随质心平动中的功与力对质心的矩在刚体转动中的功之和。

思考题

半径为$2r$ 的圆轮在水平面上作纯滚动如图示，轮轴上绕有软绳，轮轴半径为r，绳上作用常值水平拉力F，求轮心C运动x 距离时，力F 所作的功。



解： 根据平面运动刚体上力的功的表达式可知，力F 所作的功为

$$W = Fx - M_C(\boldsymbol{F})\varphi$$

$$= Fx - Fr \cdot \frac{x}{2r}$$

$$= \frac{1}{2}Fx$$

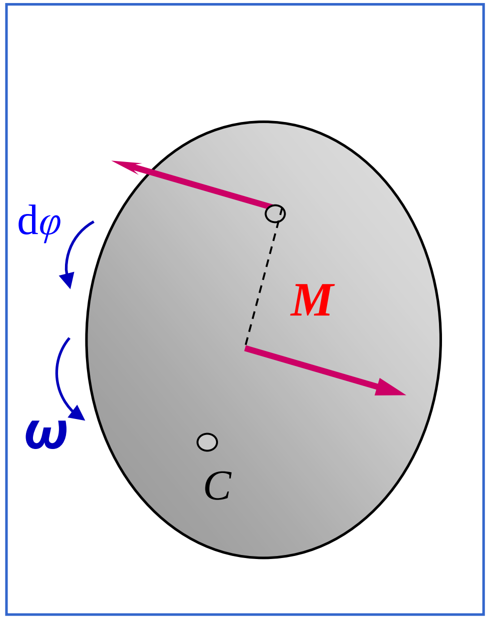
☆ 作用在平面运动刚体上力力偶的功

设在一作平面运动的刚体上作用着一力偶，力偶矩为M，则该力偶的元功为：

元功 $d'W = m\ d\varphi$

力偶在从角位移 φ_1到φ_2中所做的总功为：

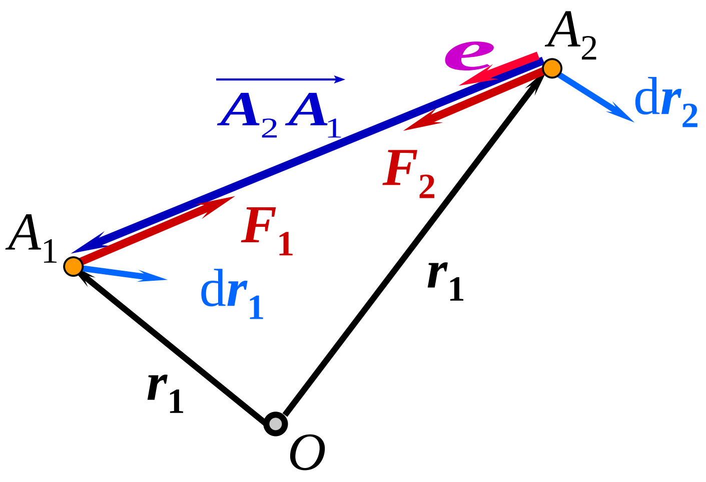
$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} m_z(F)\,d\varphi \qquad (2-10)$$



三、 质点系和刚体内力的功

设质点系内有两质点 A_1 和 A_2,相 互间作用着内力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_1$。两质点的元位移分别是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$,故得内力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的元功之和

$$\sum \mathrm{d}'W = \boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{F}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$$
$$=\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$$
$$=\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$$



引入矢量 $\overrightarrow{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1}$,设其单位矢量为 $\boldsymbol{e}$

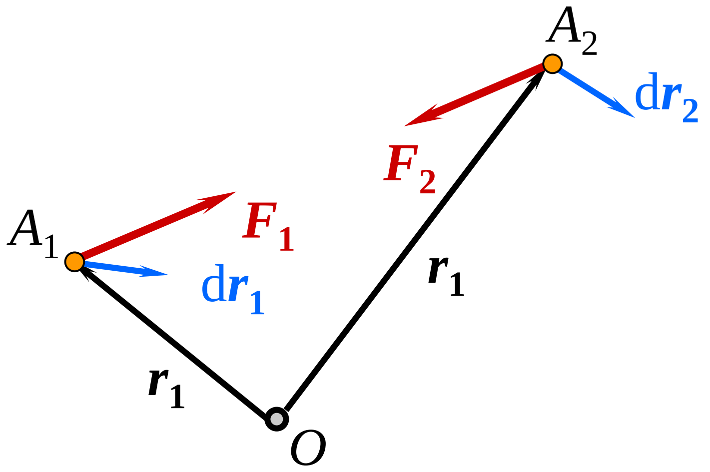
则有 $\boldsymbol{F}_1=-F_1\cdot\boldsymbol{e}$

所以 $\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}(\overrightarrow{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1})$

所以 $\sum\mathrm{d}'W=-F_1\mathrm{d}(A_1A_2)$

$$\sum \mathrm{d}'W = -F_1 \mathrm{d}(A_1A_2)$$

这里 $\mathrm{d}(A_1A_2)$ 代表两质点间距离 A_2A_1 的变化量，它和参考系的选择无关,在一般质点系中，两质点间距离是可变的，因而，**可变质点系内力所做功的总和不一定等于零。**



但是,刚体内任意两点间的距离始终保持不变，所以**刚体内力所做功的总和恒等于零。**

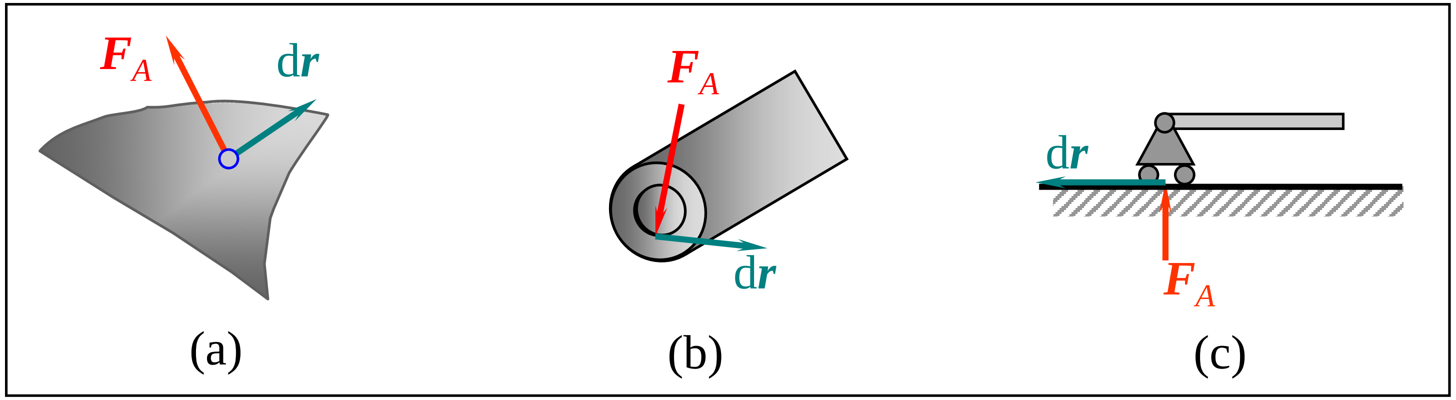
工程上几种内力作功的情形

- 作为整体考察，所有发动机(蒸汽机、内燃机、涡轮机、电动机、发电机等)的内力都是有功力。例如汽车内燃机工作时，气缸内膨胀的气体质点之间的内力；气体质点与活塞之间的内力；气体质点与气缸内壁间的内力；这些内力都要作功。
- 有相对滑动的两个物体之间的摩擦力作功。如机器中有相对滑动的两个零件之间摩擦力做负功，消耗机器能量。
- 弹性构件中的内力分量（弯矩、剪力和轴力）做负功，转变为弹性势能，即为弹性应变能。

四、约束力的功之和等于零的情形

1. 光滑的固定支承面、轴承、销钉和活动支座的约束力

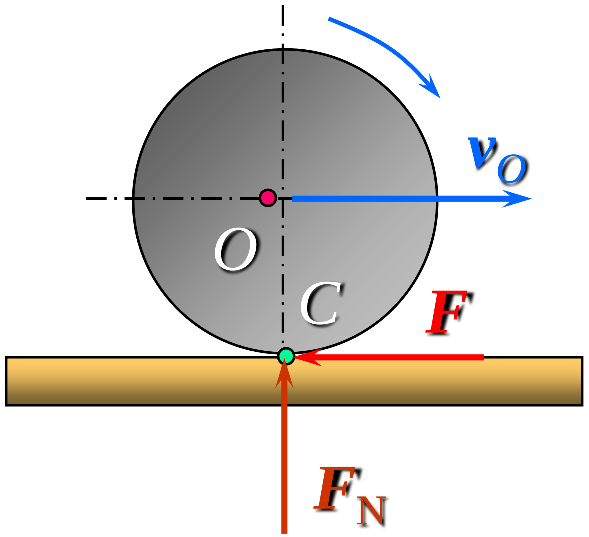
光滑的固定支承面(图a)，轴承，销钉(图b)和活动支座(图c)的约束力总是和它作用点的元位移d*r*垂直，所以这些约束力的功恒等于零。



2. 不可伸长柔绳的拉力。

由于柔绳仅在拉紧时才受力，而任何一段拉直的绳子就承受拉力来说，都和刚杆一样, 其内力的元功之和等于零。

3. 圆轮沿支承面滚动时，摩擦力(约束力)的功。



（1）圆轮连滚带滑运动时，动摩擦力F 所作元功为

$$\mathrm{d}'W_F = -F \cdot v_C \mathrm{d}t = -f' F_N \cdot v_C \mathrm{d}t$$

（2）圆轮纯滚动时，这时出现静摩擦力F 。

因为C 为速度瞬心，其速度为零。所以作用在C点的静摩擦力F 所作元功为

$$\mathrm{d}'W = F \cdot v_C \mathrm{d}t = 0$$

谢谢！