习 题 课

例1　设A、B是两事件，P(A)=0.6，P(B)=0.7，问：

(1)在何条件下P(AB)取MAX，MAX为多少？

(2)在何条件下P(AB)取MIN，MIN为多少？

思路：$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$　　加法公式

$P(AB)\uparrow$ 则 $P(A\cup B)\downarrow$　　$\because P(A)<P(B)\le P(A\cup B)$

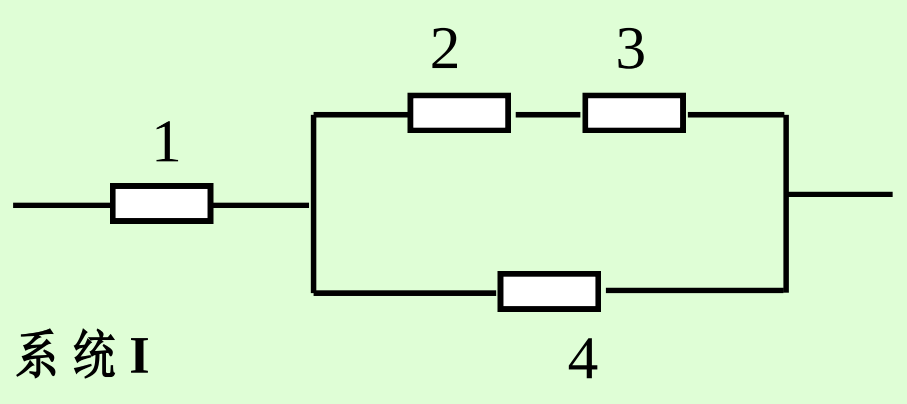
$\Rightarrow A\cup B=B$　$\Rightarrow A\subset B$　　$MAX\{P(AB)\}=P(A)$

$P(AB)\downarrow$ 则 $P(A\cup B)\uparrow$　　$\because P(A\cup B)\le 1$　　$\Rightarrow A\cup B=S$

$MIN\{P(AB)\}=0.3$

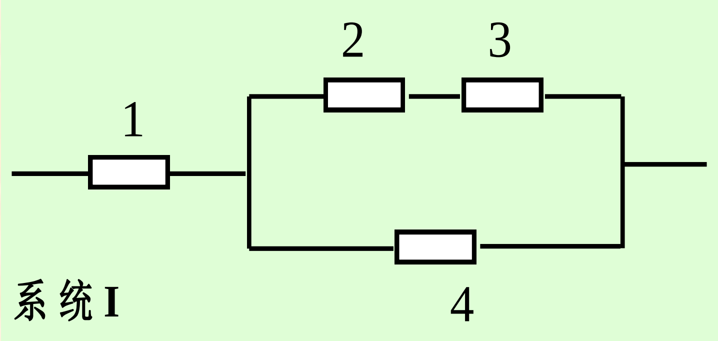
34　试分别求以下两个系统的可靠性：

(1)设有4个独立工作的元件1,2,3,4，它们的可靠性分别为p1，p2，p3，p4，将他们按串并联方式连接.



解：设A_i={第i个元件正常工作}，i=1,2,3,4

A={系统Ⅰ正常工作}



$$A = A_1A_2A_3 \cup A_1A_4$$

$$R^{\mathrm{I}} = P(A) = P(A_1A_2A_3 \cup A_1A_4)$$

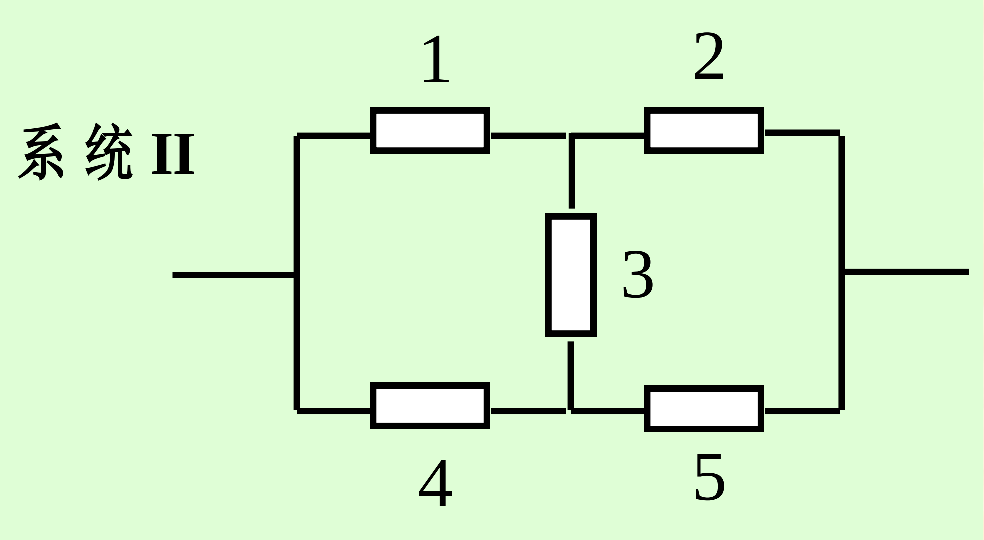
$$\overset{\text{加法公式}}{=\!=\!=} P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_4) - P(A_1A_2A_3 \cap A_1A_4)$$

$$\overset{\text{独立}}{=\!=\!=} P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$= p_1p_2p_3 + p_1p_4 - p_1p_2p_3p_4$$

34 试分别求以下两个系统的可靠性：

(2) 设有5个独立工作的元件1, 2, 3, 4, 5，它们的可靠性分别为p，将他们按桥式连接.



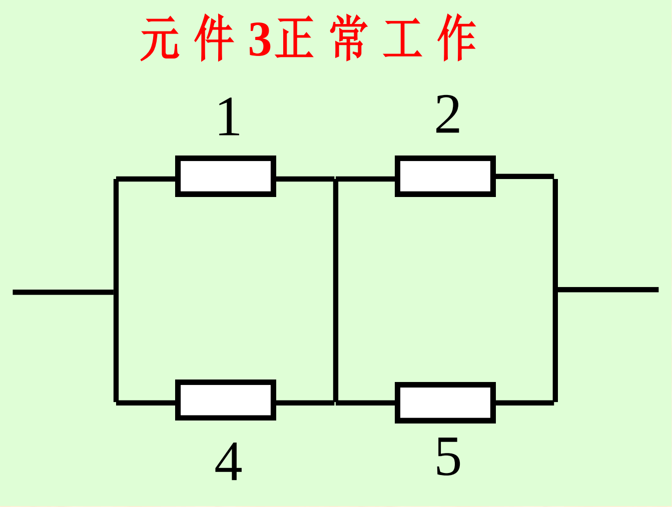
设 A_i={第i个元件正常工作}，i=1, 2, 3, 4, 5

A={系统 II 正常工作}

方法1：全概率公式

以A_3和$\bar{A}_3$为S的一个划分

$$R^{II}=P(A)=\underset{?}{\underline{P(A|A_3)}}P(A_3)+\underset{?}{\underline{P(A|\bar{A}_3)}}P(\bar{A}_3)$$



$$P(A|A_3)=P\{(A_1\cup A_4)\cap(A_2\cup A_5)\}$$

$$\overset{独立}{=\!=}P(A_1\cup A_4)P(A_2\cup A_5)$$

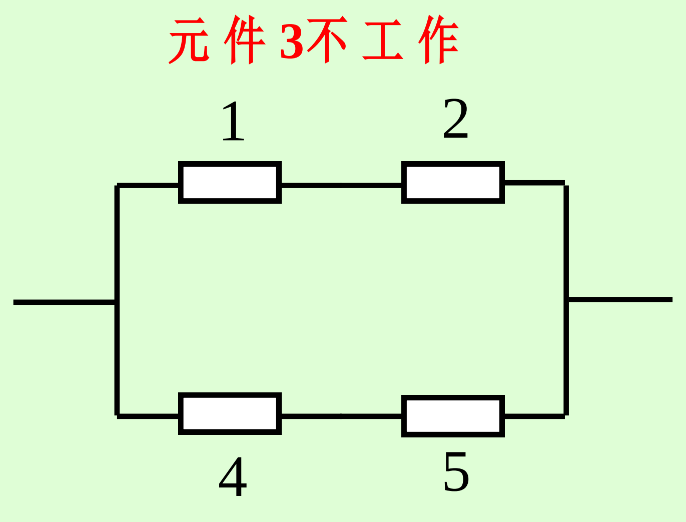
$$=(2p-p^2)(2p-p^2)$$

$$P(A_1\cup A_4)\overset{加法公式}{=\!=\!=}P(A_1)+P(A_4)-P(A_1)P(A_4)=2p-p^2$$

$$P(A_2\cup A_5)\overset{同理}{=\!=}2p-p^2$$

方法1：全概率公式

$$P(A)=\underbrace{P(A|A_3)}_{?}P(A_3)+\underbrace{P(A|\bar{A}_3)}_{?}P(\bar{A}_3)$$



$$P(A|\bar{A}_3)=P(A_1A_2\cup A_4A_5)$$

$$\overset{加法公式}{=\!=\!=}P(A_1A_2)+P(A_4A_5)-P(A_1A_2A_4A_5)$$

$$\overset{独立}{=\!=\!=}p^2+p^2-p^4=2p^2-p^4$$

方法1：全概率公式

$$P(A)=P(A|A_3)P(A_3)+P(A|\bar{A}_3)P(\bar{A}_3)$$

$$P(A|A_3)=(2p-p^2)^2$$

$$P(A|\bar{A}_3)=2p^2-p^4$$

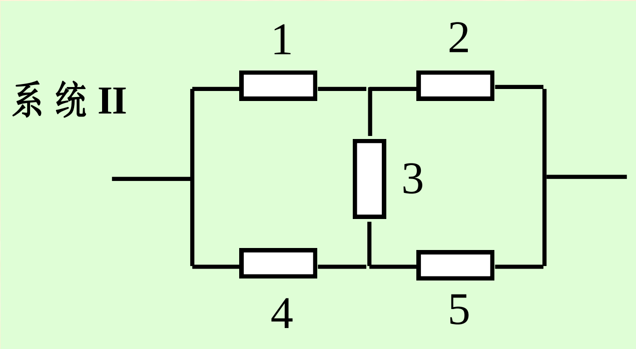
$$P(A)=(2p-p^2)^2\times p+(2p^2-p^4)\times(1-p)$$

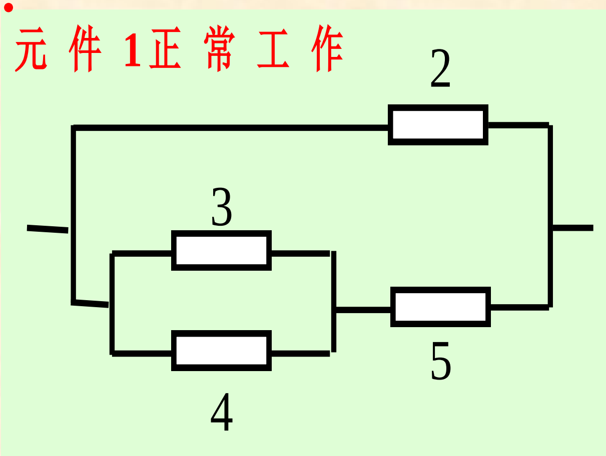
$$=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5$$

方法2：全概率公式

以A_1和$\bar{A}_1$为S的一个划分

$$R^{II}=P(A)=\underbrace{P(A|A_1)}_{?}P(A_1)+\underbrace{P(A|\bar{A}_1)}_{?}P(\bar{A}_1)$$





$$P(A|A_1)=P\{A_2\cup A_3A_5\cup A_4A_5\}$$

$$\underline{\underline{\text{加法公式}}}\ P(A_2)+P(A_3A_5)+P(A_4A_5)$$

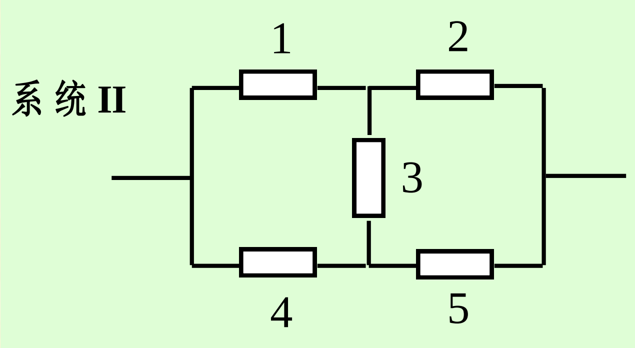
$$-P(A_2A_3A_5)-P(A_2A_4A_5)-P(A_3A_4A_5)+P(A_2A_3A_4A_5)$$

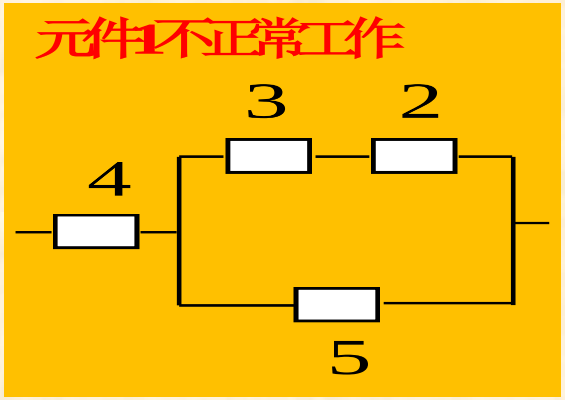
$$=p+2p^2-3p^3+p^4$$

方法2：全概率公式

以A_1和$\bar{A}_1$为S的一个划分

$$R^{II}=P(A)=\underbrace{P(A|A_1)}_{?}P(A_1)+\underbrace{P(A|\bar{A}_1)}_{?}P(\bar{A}_1)$$



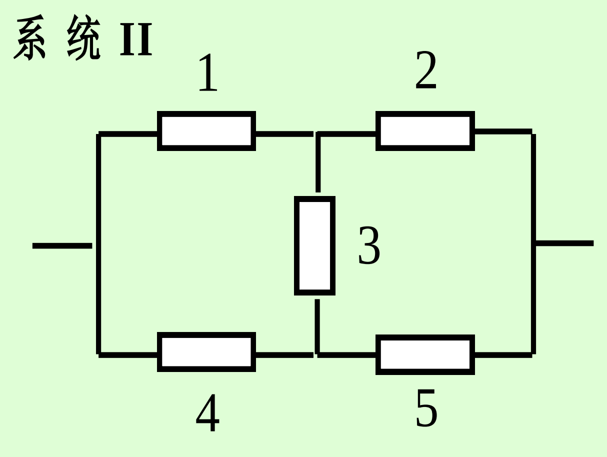


$$P(A|\bar{A}_1)=\ P\{A_4A_5\cup A_4A_3A_2\}$$

$$\overset{\text{加法公式}}{=\!=\!=}P(A_4A_5)+P(A_4A_3A_2)-P(A_2A_3A_4A_5)$$

$$=p^2+p^3-p^4$$

方法3：穷举法



列出所有能使系统正常工作的支路

$$A = \underbrace{A_1A_2}_{B_1} \cup \underbrace{A_1A_3A_5}_{B_2} \cup \underbrace{A_4A_3A_2}_{B_3} \cup \underbrace{A_4A_5}_{B_4}$$

$$P(A) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)$$

$$\overset{\text{加法公式}}{=\!=\!=\!=} \sum_{i=1}^{4} P(B_i) - \sum_{1\le i<j\le 4} P(B_iB_j) + \sum_{1\le i<j<k\le 4} P(B_iB_jB_k) - P(B_1B_2B_3B_4)$$

最后利用独立性、代入相关值整理即可。

9 从5双不同的鞋子中任取4只，问这4只鞋子至少有两只配成一双的概率是多少？

解： $A=\{$所取的4只鞋中至少2只配对$\}$

法1:求A

$$P(A)=\frac{C_5^2+C_5^1C_8^1C_6^1/2!}{C_{10}^4}$$

~从10只鞋中任取4只取法（无序）

去掉次序　　去掉成双

两类
有2双：C_5^2
有1双：$C_5^1C_8^1C_6^1/2!$ 或 $C_5^1\left(C_4^2C_2^1C_2^1\right)$ 或 $C_5^1\left(C_8^2-C_4^1\right)$

法2:求A

$$P(A)=\frac{C_5^1C_8^2-C_5^2}{C_{10}^4}$$

去掉两双重复

9 从5双不同的鞋子中任取4只，问这4只鞋子至少有两只配成一双的概率是多少？

而 $\bar{A}=\{$所取的4只鞋中没有2只配对$\}$　　$P(A)=1-P(\bar{A})$

法3: 求 $\bar{A}$　　考虑鞋子是一只一只取的，有序

$$P(\bar{A})=\frac{10\times 8\times 6\times 4}{10\times 9\times 8\times 7}$$

~$\bar{A}$取法

~从10只鞋中任取4只取法

考虑取鞋子是无序的

去掉次序

或 $$P(\bar{A})=\frac{C_{10}^{1}C_{8}^{1}C_{6}^{1}C_{4}^{1}/4!}{C_{10}^{4}}$$

9 从5双不同的鞋子中任取4只，问这4只鞋子至少有两只配成一双的概率是多少？

而 $\bar{A}$ = {所取的4只鞋中没有2只配对}　　$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

法4:求 $\bar{A}$

$$P(\bar{A}) = \frac{C_5^4 \left(C_2^1\right)^4}{C_{10}^4}$$

考虑鞋子是分5步取的

第1步：取出4双鞋保证4只鞋不配对 C_5^4

第2步：在所取出4双中的第1双中取出1只 C_2^1

第3步：在所取出4双中的第2双中取出1只 C_2^1

第4步：在所取出4双中的第3双中取出1只 C_2^1

第5步：在所取出4双中的第4双中取出1只 C_2^1

9 从5双不同的鞋子中任取4只，问这4只鞋子至少有两只配成一双的概率是多少？

而 $\bar{A}=\{$所取的4只鞋中没有2只配对$\}$ $P(A)=1-P(\bar{A})$

法5：求 $\bar{A}$ $$P(\bar{A})=\frac{C_5^4\left(C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4\right)}{C_{10}^4}$$

考虑鞋子是分2步取的

第1步：取出4双鞋保证4只鞋不配对 C_5^4

第2步：分析鞋子不配对的取法分类

第1类：4只鞋没有右脚的取法 C_4^0

第2类：4只鞋有1只右脚的取法 C_4^1

第3类：4只鞋有2只右脚的取法 C_4^2

第4类：4只鞋有3只右脚的取法 C_4^3

第5类：4只鞋有4只右脚的取法 C_4^4

9 从5双不同的鞋子中任取4只，问这4只鞋子至少有两只配成一双的概率是多少？

而 $\bar{A}=\{$所取的4只鞋中没有2只配对$\}$

$P(A)=1-P(\bar{A})$

法6：求 $\bar{A}$

$$P(\bar{A})=\frac{C_5^4+C_5^1C_4^3+C_5^2C_3^2+C_5^3C_2^1+C_5^4}{C_{10}^4}$$

考虑鞋子是分5类取的

第1类：有4只右脚的取法 C_5^4

第2类：有1左脚3右脚的取法 $C_5^1C_4^3$

第3类：有2左脚2右脚的取法 $C_5^2C_3^2$

第4类：有3左脚1右脚的取法 $C_5^3C_2^1$

第5类：有4左脚的取法 C_5^4

例. 袋中有10个球，9白1红，10个人依次从袋中各取一球，每人取一球后不再放回袋中，问第1人，第2人，…，第10人各取得红球的概率各是多少？

解：法1 设$A_i=\{第i人取到红球\}$, $\bar{A}_i=\{第i人取到白球\}$, $i=1,\cdots,10$

$$P(A_1)=\frac{1}{10}$$

$$P(A_2)=P(A_2\bar{A}_1)\overset{乘法公式}{=\!=\!=\!=}P(A_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)=\frac{1}{9}\times\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$$

同理 $P(A_3)=P(A_3\bar{A}_2\bar{A}_1)=P(A_3|\bar{A}_2\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)=\frac{1}{8}\times\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$

$$\vdots$$

$$P(A_{10})=P(A_{10}\bar{A}_9\bar{A}_8\cdots\bar{A}_2\bar{A}_1)=\frac{1}{10}$$

例. 袋中有10个球，9白1红，10个人依次从袋中各取一球，每人取一球后不再放回袋中，问第1人，第2人，…，第10人各取得红球的概率各是多少？

法2 设$A_i=\{第i人取到红球\}, i=1,\cdots,10$

每人各取一球，每种取法是一个基本事件，这是等可能概型，直接利用相应概型事件概率的计算公式。

$$P(A_i)=\frac{1\times 9!}{10!}=\frac{1}{10}$$

A_i取法数：第i人取到红球有1种方法，其他人取法有9！

总的取法数

本题表明：第i人取到红球的概率是$\frac{1}{10}$，与取球的顺序无关

生活中类似案例：**抓阄，抽签，摸奖券**的公平性原则（与顺序无关）

30.（4）证明事件A、B相互独立的<u>充要条件</u>是 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$。

证：充分性 $P(A|B)=P(A|\bar{B}) \Rightarrow$ A,B相互独立

由 $P(A|B)=P(A|\bar{B}) \quad \Rightarrow \dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} \quad ?P(A)$

比例的等比性质 $\Rightarrow \quad \dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A\bar{B})+P(AB)}{P(\bar{B})+P(B)}$

$$\underset{P\text{有限可加性}}{\overset{A\bar{B}\text{与}AB\text{互斥}}{=\!=\!=}} \frac{P(A\bar{B}\cup AB)}{1}$$

$$=P\left\{A\cap(\bar{B}\cup B)\right\}=P(A)$$

$\Rightarrow \quad P(AB)=P(A)P(B) \quad \Rightarrow$ A,B相互独立

30.（4）证明事件A、B相互独立的充要条件是 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$。

证：必要性 A,B相互独立 $\Rightarrow P(A|B)=P(A|\bar{B})$

$$\left.\begin{array}{l} A,B\text{相互独立} \Rightarrow P(A|B)=P(A) \\ \quad\Big\Downarrow\ \text{独立关于逆运算封闭} \\ A,\bar{B}\text{相互独立} \Rightarrow P(A|\bar{B})=P(A) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A|B)=P(A|\bar{B})$$

得证。

再次深刻理解事件A与B相互独立的含义

27 设本题涉及的事件均有意义，A、B均为事件

(1)已知P(A)>0，证明$P(AB|A) \geq P(AB|A \cup B)$。

$$\text{证}: P(AB|A) \xlongequal{\text{条件P定义}} \frac{P(AB \cap A)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(AB|A \cup B) = \frac{P\{AB \cap (A \cup B)\}}{P(A \cup B)} = \frac{P(AB \cup AB)}{P(A \cup B)} = \frac{P(AB)}{P(A \cup B)}$$

$$\because A \subset (A \cup B) \quad \Rightarrow P(A) \leq P(A \cup B)$$

$$\frac{P(AB)}{P(A)} \geq \frac{P(AB)}{P(A \cup B)}$$ 得证。

27 设本题涉及的事件均有意义，A、B均为事件

(2) 若$P(A|B)=1$，证明$P(\bar{B}|\bar{A})=1$。

$$\text{证}:P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=1 \quad \Rightarrow P(AB)=P(B)$$

$$P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}\overset{\text{德摩根律}}{=\!=\!=}\frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(A)}$$

$$=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}$$

$$=\frac{1-P(A)-P(B)+P(B)}{1-P(A)}=1 \quad \text{得证。}$$

27 设本题涉及的事件均有意义，A、B均为事件

(3) 若设C也是事件，且$P(A|C)\ge P(B|C)$，$P(A|\bar{C})\ge P(B|\bar{C})$，证明$P(A)\ge P(B)$。

$$\text{证}: P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}\ \boxed{\ge}\ \frac{P(BC)}{P(C)}=P(B|C)\ \Rightarrow P(AC)\ge P(BC)$$

$$P(A|\bar{C})=\frac{P(A\bar{C})}{P(\bar{C})}\ \boxed{\ge}\ \frac{P(B\bar{C})}{P(\bar{C})}=P(B|\bar{C})\ \Rightarrow \boxed{P(A\bar{C})\ge P(B\bar{C})}$$

法1: $P(A\bar{C})=P(A-AC)\overset{AC\subset A}{=\!=\!=}P(A)-P(AC)$

$P(B\bar{C})=P(B-BC)\overset{BC\subset B}{=\!=\!=}P(B)-P(BC)$

$$\Rightarrow P(A)-P(AC)\ge P(B)-P(BC)\Rightarrow P(A)-P(B)\ge P(AC)-P(BC)$$

$$\Rightarrow P(A)-P(B)\ge 0$$ 得证。

27 设本题涉及的事件均有意义，A、B均为事件

(3) 若设C也是事件，且$P(A|C)\ge P(B|C)$，$P(A|\bar{C})\ge P(B|\bar{C})$，证明$P(A)\ge P(B)$。

$$\text{证}:P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}\ \ge\ \frac{P(BC)}{P(C)}=P(B|C)\ \Rightarrow P(AC)\ge P(BC)$$

$$A?\updownarrow \qquad \updownarrow ?B$$

$$P(A|\bar{C})=\frac{P(A\bar{C})}{P(\bar{C})}\ \ge\ \frac{P(B\bar{C})}{P(\bar{C})}=P(B|\bar{C})\ \Rightarrow P(A\bar{C})\ge P(B\bar{C})$$

法2: 上两式相加 $\Rightarrow P(AC)+P(A\bar{C})\ge P(BC)+P(B\bar{C})$

P有限可加性 $\Rightarrow P(AC\cup A\bar{C})\ge P(BC\cup B\bar{C})$

分配律 $\Rightarrow P\left[A\cap(C\cup\bar{C})\right]\ge P\left[B\cap(C\cup\bar{C})\right]$

$\Rightarrow P(A)\ge P(B)$ 得证。

31 设事件A、B的概率均大于0，说明以下叙述：
必然对、必然错、可能对、可能错，并说明理由。

(1)若A与B互不相容，则它们相互独立。 必然错

(2)若A与B相互独立，则它们互不相容。 必然错

(3)已知P(A)=0.6，P(B)=0.6，且A、B互不相容。必然错

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1.2>1$

(4)已知P(A)=0.6，P(B)=0.6，且A、B相互独立。可能对

$P(AB)=P(A)P(B)$可能成立

4 设A，B是两个事件：(1) 已知$A\bar{B}=\bar{A}B$，验证$A=B$。

证：已知$A\bar{B}=\bar{A}B \Rightarrow A\bar{B}\cup AB=\bar{A}B\cup AB$

$\Rightarrow A\cap(\bar{B}\cup B)=(\bar{A}\cup A)\cap B \Rightarrow AS=SB \Rightarrow A=B$ 得证。

(2) 验证A和B恰有一个发生的概率为$P(A)+P(B)-2P(AB)$

证：A和B恰有一个发生的概率为

$$P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)\overset{\text{互斥}}{=\!=\!=}P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)$$

$$=P(A-AB)+P(B-AB)\overset{\text{包含}}{=\!=\!=}\left[P(A)-P(AB)\right]+\left[P(B)-P(AB)\right]$$

$$=P(A)+P(B)-2P(AB)$$ 得证。

2 设A、B、C三事件，用A、B、C的运算关系表示下列事件：

(1) A发生，B与C不发生；

$A\bar{B}\bar{C}$ 或$A-B-C$

(2) A与B都发生，而C不发生；

$AB-C$ 或$AB\bar{C}$

(3) A，B，C中至少有一个发生；

$A\cup B\cup C$

或A,B,C都不发生的逆事件：$\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$

或A,B,C中有1,2,3个发生：

$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$

2 设A, B, C三事件，用A, B, C的运算关系表示下列事件：

(6) A，B，C中不多于一个发生；

A,B,C都不发生or有1个发生：$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup \bar{A}B\bar{C}\cup \bar{A}\bar{B}C$

或A,B,C至少有2个不发生：$\bar{A}\bar{B}\cup \bar{B}\bar{C}\cup \bar{A}\bar{C}$

或A,B,C至少有2个发生的逆事件：$\overline{AB\cup BC\cup AC}$

(7) A，B，C中不多于2个发生；

A,B,C都不发生or有1, 2个发生：

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup \bar{A}B\bar{C}\cup \bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup \bar{A}BC$

A,B,C中至少有1个不发生：$\bar{A}\cup \bar{B}\cup \bar{C}$

A,B,C中3个都发生的逆事件：$\overline{ABC}$