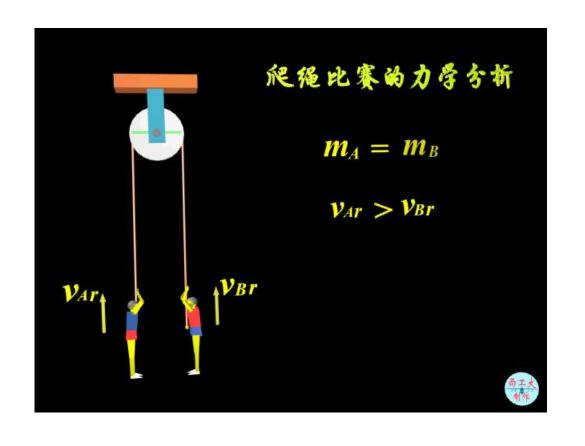
动力学

动量矩定理





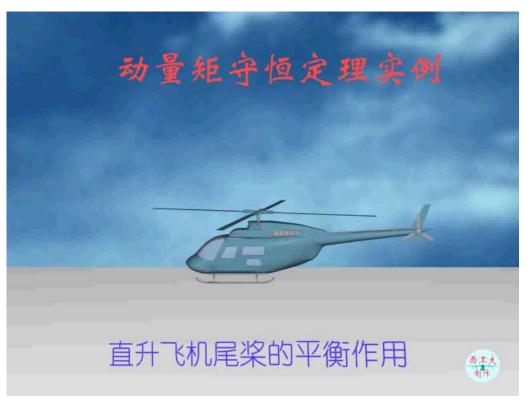




谁最先到 达顶点



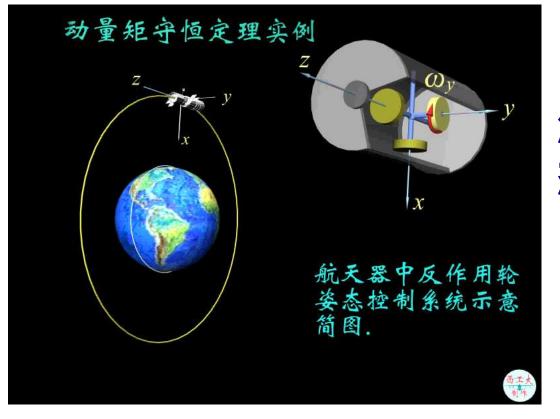




直升飞机如果 没有尾翼将发生 什么现象







航天器是 怎样实现姿 态控制的









13.1 动量矩

- 质点的动量矩
- 质点系的动量矩
- 平动刚体对固定点的动量矩 ≥
- 定轴转动刚体对其转轴的动量矩
- 质点系对固定点的动量矩的另一种表示



一、质点的动量矩

1. 对点的动量 矩

质点A的动量 mv 对点 O 的矩 , 定义为质点A对点 O 的动量 矩。

$$M_O(mv) = r \times mv$$

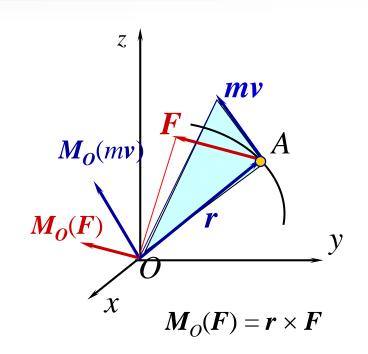
2. 对轴的动量 矩

上式投影到各坐标轴可得动量 mv 对各坐标轴的矩。

$$M_{x}(m\mathbf{v}) = y (mv_{z}) - z (mv_{y})$$

$$M_{y}(m\mathbf{v}) = z (mv_{x}) - x (mv_{z})$$

$$M_{z}(m\mathbf{v}) = x (mv_{y}) - y (mv_{x})$$





二、质点系的动量矩

1. 对点的动量 矩

质点系内各质点对某点 O 的动量矩的矢量和,称为这质点系对该点 O 的动量主矩或动量矩。用 L_O 表示,有

$$L_O = \sum M_O(mv) = \sum r \times mv$$

2. 对轴的动量 矩 类似的可得质点系对各坐标轴的动量矩表达式

$$L_{x} = \sum M_{x}(m\mathbf{v}) = \sum (y \ mv_{z} - z \ mv_{y})$$

$$L_{y} = \sum M_{y}(m\mathbf{v}) = \sum (z \ mv_{x} - x \ mv_{z})$$

$$L_{z} = \sum M_{z}(m\mathbf{v}) = \sum (x \ mv_{y} - y \ mv_{x})$$



三、平动刚体对固定点O的动量矩

设刚体以速度 ν 平动,刚体内任一点 A 的矢径是 r_i ,该点的质量为m,速度大小是 ν_i 。

该质点对点O 的动量矩为 $M_O(m_i v_i) = r_i \times m_i v_i$ 从而整个刚体对点O 的动量矩

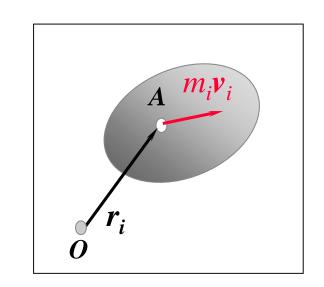
$$\boldsymbol{L}_O = \sum \boldsymbol{M}_O(m_i \boldsymbol{v}_i) = \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

因为刚体平动 $v_i = v = v_C$

$$L_O = \sum M_O(m_i v_i) = \sum (m_i r_i) \times v_C$$

又因为 $(\sum m_i)r_C = \sum m_i r_i$

所以
$$L_O = \sum m_i r_C \times v_C = r_C \times \sum m_i v_C = r_C \times M v_C$$





四、定轴转动刚体对其转轴的动量矩

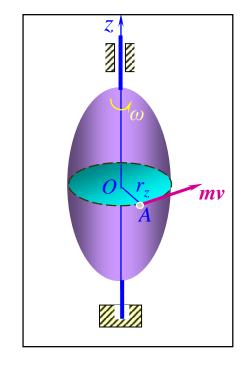
设刚体以角速度 ω 绕固定轴 z 转动,刚体内任一点 A 的转动半径是 r_z 。

该点的速度大小是 $v = r_z \omega$, 方向同时垂直于轴 z 和转动半径 r_z , 且指向转动前进的一方。

若用 m 表示该质点的质量 , 则其动量对转轴 z 的动量矩为 $M_{r}(mv) = r_{r} m r_{r} \omega = mr_{r}^{2} \omega$

从而整个刚体对轴 z 的动量矩

$$L_z = \sum M_z(mv) = \omega \sum mr_z^2 = J_z \omega$$



即,作定轴转动的刚体对转轴的动量矩,等于这刚体对该轴的转动惯量与角速度的乘积。





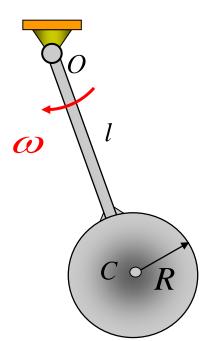
一半径为R、质量为M的匀质圆盘与一长为l、质量为m的匀质细杆相固连,以角速度 α 在铅直面转动。试求该系统对O轴的动量矩。

解: 系统做定轴转动,该系统对0轴的动量矩

$$L_z = J_z \omega$$

$$L_o = J_o \omega = \left[\frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{2}MR^2 + M(R+l)^2\right]\omega$$

顺时针。





五、质点系对固定点O的动量矩的另一种表示

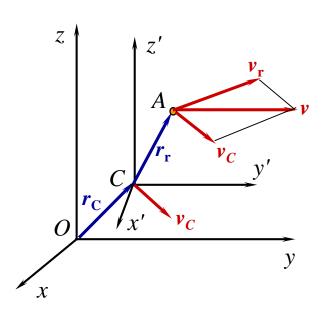
过固定点O建立固定坐标系Oxyz,以质点系的质心 C 为原点,取平动坐标系 Cx'y'z',质点系对固定点O的动量矩为

$$\boldsymbol{L}_{o} = \boldsymbol{r}_{c} \times M\boldsymbol{v}_{c} + \boldsymbol{L}_{c}$$

$$\boldsymbol{L}_{\scriptscriptstyle C} = \sum \left(\boldsymbol{r}_{\scriptscriptstyle ri} \times \boldsymbol{m}_{\scriptscriptstyle i} \boldsymbol{v}_{\scriptscriptstyle ri} \right)$$

 L_C — 质点系相对质心C 的动量矩

上式即平面运动刚体对固定点0的动量矩计算公式





☎ 思考题

一半径为r的匀质圆盘在水平面上纯滚动,如图所示。已知圆盘对质心的转动惯量为 J_o ,角速度为 ω ,质心O点的速度为 ν_o 。试求圆盘对水平面上 O_1 点的动量矩。

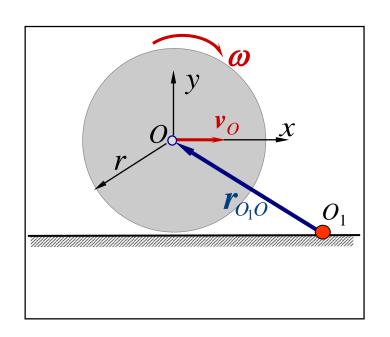
$$L_{O1} = L_O + r_{O_1O} \times m v_O$$

$$L_O = J_O \omega = \frac{1}{2} m r^2 \omega$$

$$v_O = r \omega$$

$$r_{O_1O} \times m v_O = m r^2 \omega$$

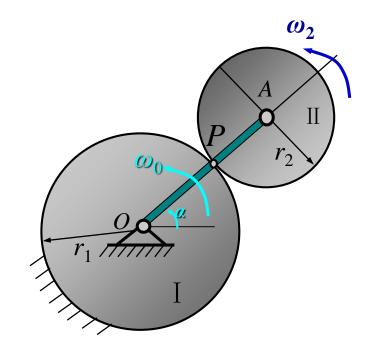
$$L_{O1} = \frac{3}{2} m r^2 \omega$$





☆ 思考题

行星齿轮机构在水平面内运动。质量为m的均质曲柄OA带动行星齿轮II在固定齿轮I上纯滚动。齿轮II的质量为 m_2 ,半径为 r_2 。定齿轮I的半径为 r_1 。求轮II对轴O的动量矩。



$$v_A = (r_1 + r_2) \cdot \omega_O = r_2 \omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \omega_0$$

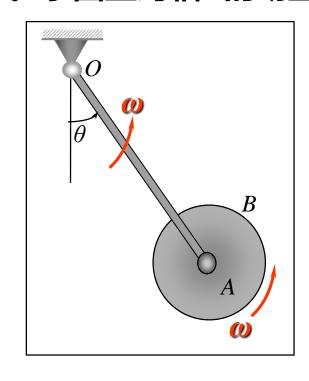
$$L_O = r_C \times M v_C + L_C$$

$$L_O = (r_1 + r_2) \cdot m_2 v_A + J_A \omega_2$$



☎ 思考题

长度为l,质量不计的杆OA与半径为R、质量为m的均质圆盘B在A处铰接,杆OA有角速度 ω ,轮B有相对杆OA的角速度 ω (逆时针向)。求圆盘对轴O的动量矩。



$$L_{o} = \mathbf{r}_{C} \times M\mathbf{v}_{C} + L_{C}$$

$$L_{o} = l \cdot m\mathbf{v}_{A} + L_{A}$$

$$L_{o} = l \cdot ml\omega + J_{A}\omega_{A}$$

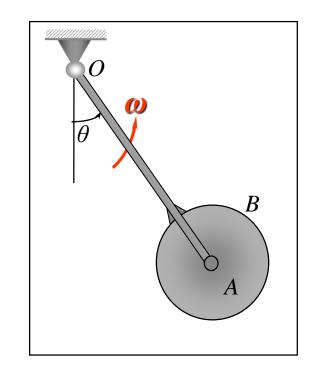
$$L_{o} = ml^{2}\omega + \frac{1}{2}mR^{2} \cdot 2\omega$$

$$L_{o} = m(R^{2} + l^{2})\omega$$



☎ 思考题

长度为l,质量不计的杆OA与半径为R、质量为m的均质圆盘B在A处固结,杆OA有角速度 ω ,(逆时针向)。求圆盘对轴O的动量矩.



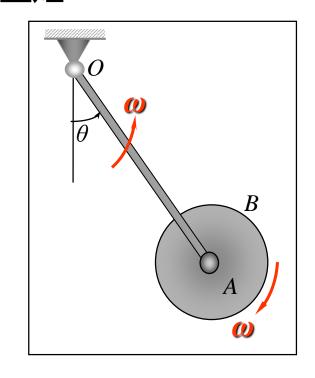
$$L_o = J_o \omega$$

$$L_O = (\frac{1}{2}mR^2 + ml^2)\omega$$





长度为l,质量不计的杆OA与半径为R、质量为m的均质圆盘B在A处铰接,杆OA有角速度 ω ,轮B有相对杆OA的角速度 - ω 。求圆盘对轴O的动量矩.



圆盘作平动

$$L_{o} = l \cdot m v_{A}$$

$$L_{o} = l \cdot m l \omega = m l^{2} \omega$$



谢谢!