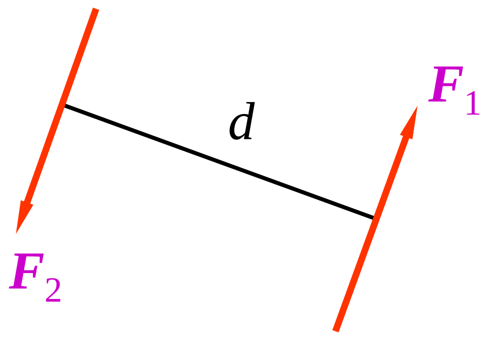
2.4 平面力偶系的合成与平衡条件

1.力偶和力偶矩

力偶 —— 大小相等的二反向平行力。

(1) 作用效果：引起物体的转动。

(2) 力和力偶是静力学的二基本要素。

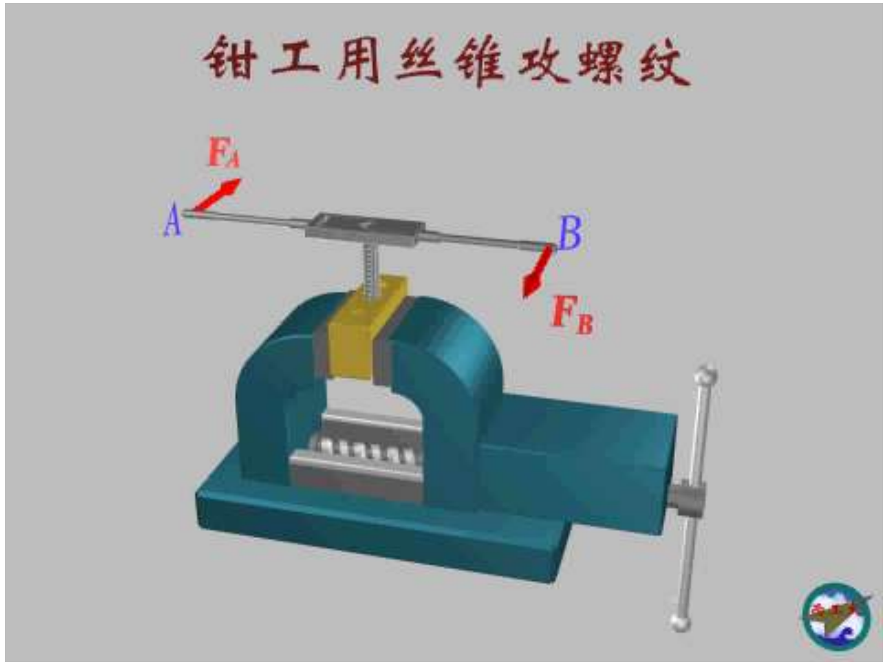


力偶特性一：

力偶中的二个力，既不平衡，也不可能合成为一个力。

力偶特性二：

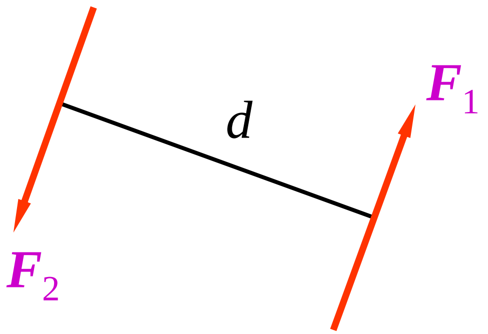
力偶只能用力偶来代替（即只能和另一力偶等效），因而也只能与力偶平衡。



工 程 实 例

力偶臂 —— 力偶中两个力的作用线之间的距离。

力偶矩 —— 力偶中任何一个力的大小与力偶臂d的乘积，加上适当的正负号。



$$M = \pm F_1 \cdot d$$

力偶矩正负规定：

若力偶有使物体逆时针旋转的趋势，力偶矩取正号；反之，取负号。

2. 平面内力偶的等效定理

作用在刚体内同一平面上的两个力偶相互等效的充要条件是二者的力偶矩代数值相等。

由上述证明可以看出：

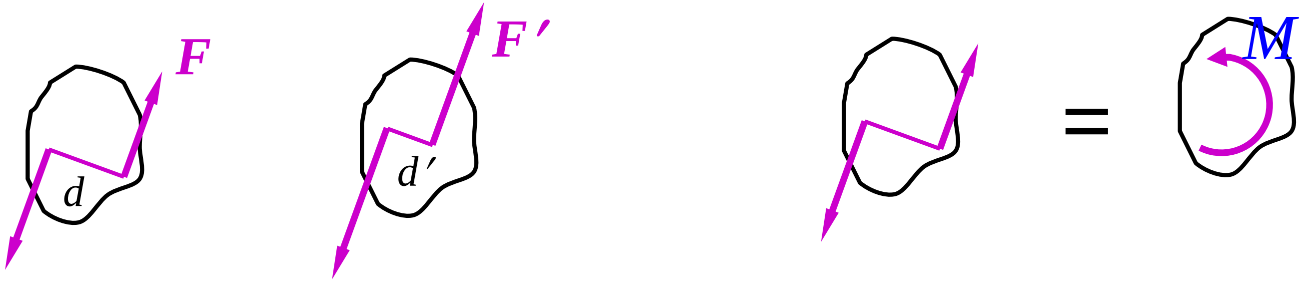
力偶特性三：

力偶可以在其作用面内任意搬移。即力偶在作用面内的位置不是力偶效应的特征。

力偶特性四：

唯一决定平面内力偶效应的特征量是力偶矩的代数值。即保持力偶矩不变，可以改变其力或力臂的大小。

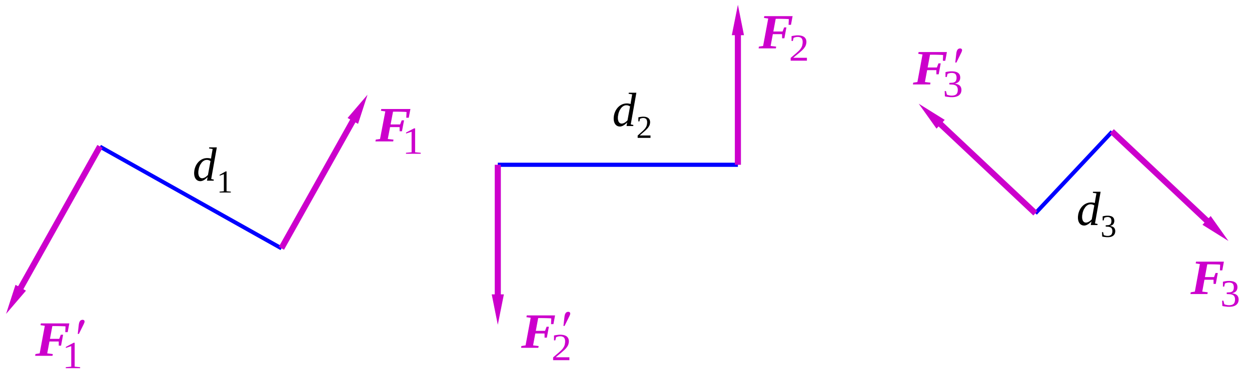
$$M = F \cdot d = F' \cdot d'$$



因此，以后可用力偶的转向箭头来代替力偶。

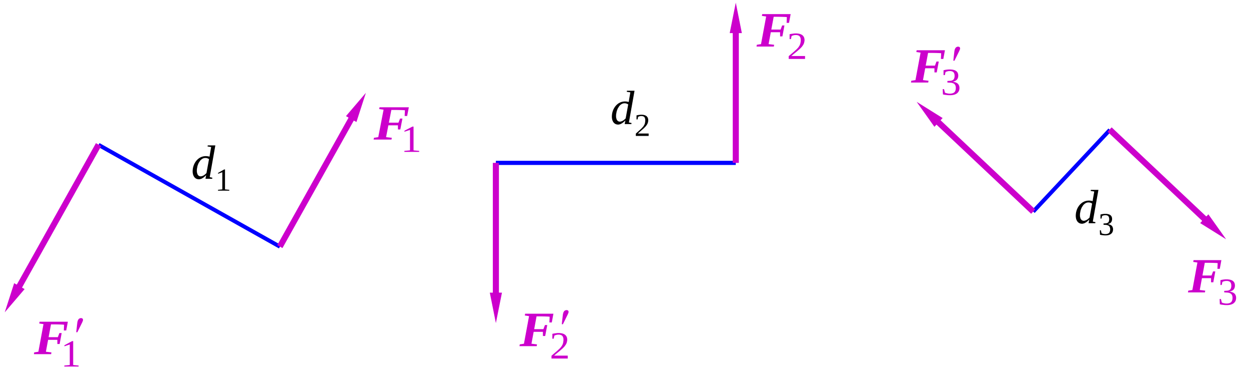
3.平面力偶系的合成

设刚体上作用着三力偶（F_1、F_1'）、（F_2、F_2'）、（F_3、F_3'），力偶臂分别为 d_1，d_2，d_3，转向如图，现求其合成结果。

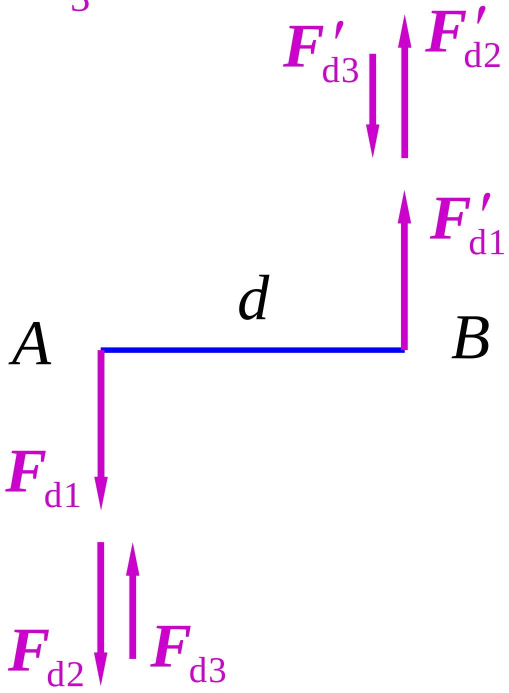


三力偶的矩分别为

$$M_1=F_1d_1,\quad M_2=F_2d_2,\quad M_3=-F_3d_3$$



$$M_1=F_1d_1, \quad M_2=F_2d_2, \quad M_3=-F_3d_3$$



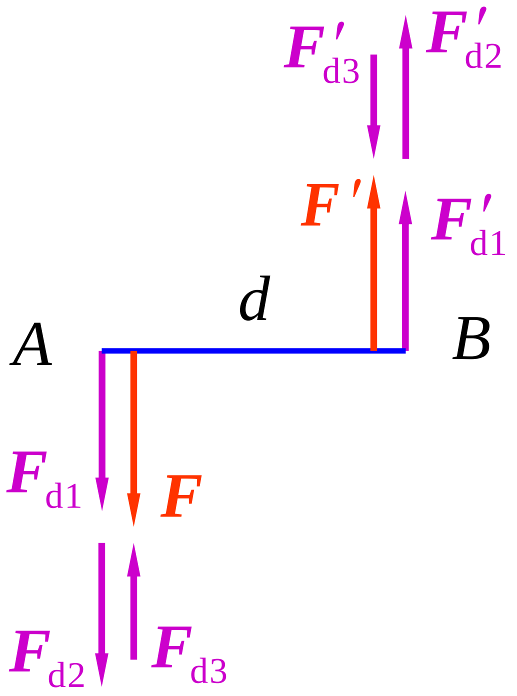
经等效变换后，各力偶中力的大小分别为

$$F_{d1}=\frac{M_1}{d}, \qquad F_{d2}=\frac{M_2}{d}, \qquad F_{d3}=\frac{|M_3|}{d}$$

假定$F_{d1}+F_{d2}>F_{d3}$，**其合力**

$$F=F_{d1}+F_{d2}-F_{d3},\quad F'=F'_{d1}+F'_{d2}-F'_{d3}$$

$$F=-F'$$



合力偶的力偶矩为

$$M=Fd$$

$$=(F_{d1}+F_{d2}-F_{d3})d$$

$$=F_{d1}d+F_{d2}d+(-F_{d3})d$$

$$=M_1+M_2+M_3$$

推广到由任意多个力偶组成的平面力偶系,合力偶矩为

$$M=M_1+M_3+\cdots+M_n=\sum M_i$$

$$M = M_1 + M_3 + \cdots + M_n = \sum M_i$$

结论：平面力偶系合成的结果是一个力偶，它的矩等于原来各力偶的矩的代数和。

4.平面力偶系平衡条件

在上面讨论中，若$F_{d1} + F_{d2} = F_{d3}$ **，则其合力** $F=0$**，从而有**

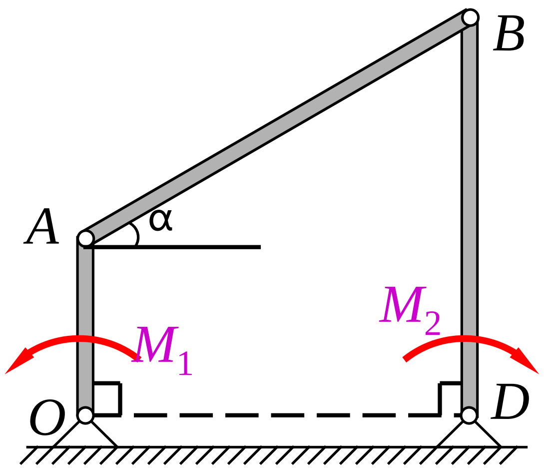
$$M_1 + M_2 + M_3 = 0$$

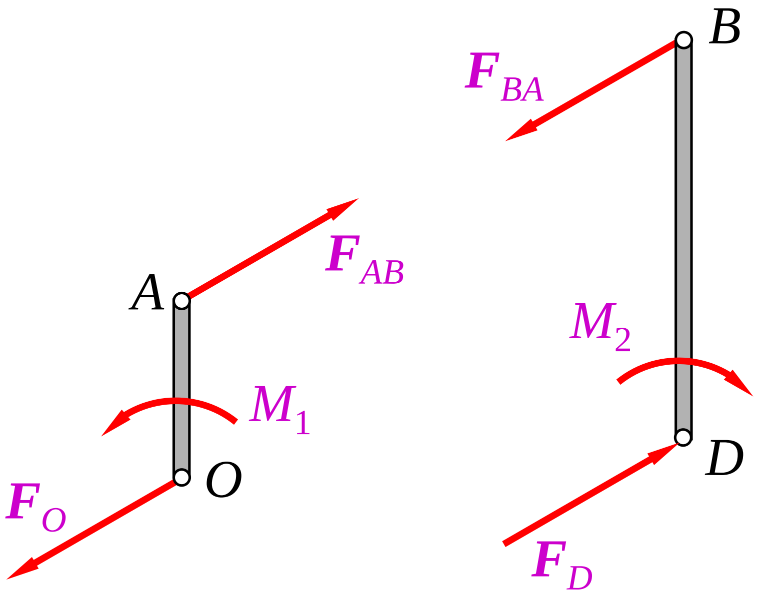
推广到由任意个力偶组成的平面力偶系,有

$$\boxed{M = M_1 + M_3 + \cdots + M_n = \sum M_i = 0}$$

结论：作用在刚体上的平面力偶系的平衡条件是力偶系中各力偶的矩之代数和等于零。

例题1 如图所示的铰接四连杆机构$OABD$，在杆OA和BD上分别作用着矩为 M_1 和 M_2 的力偶，而使机构在图示位置处于平衡。已知$OA= r$，$DB= 2r$，$\alpha= 30°$，不计杆重，试求 M_1 和 M_2 间的关系。





解：杆AB为二力杆。

由于力偶只能与力偶平衡，则AO杆与BD杆的受力如图所示。

分别写出杆*AO*和*BD*的平衡方程：

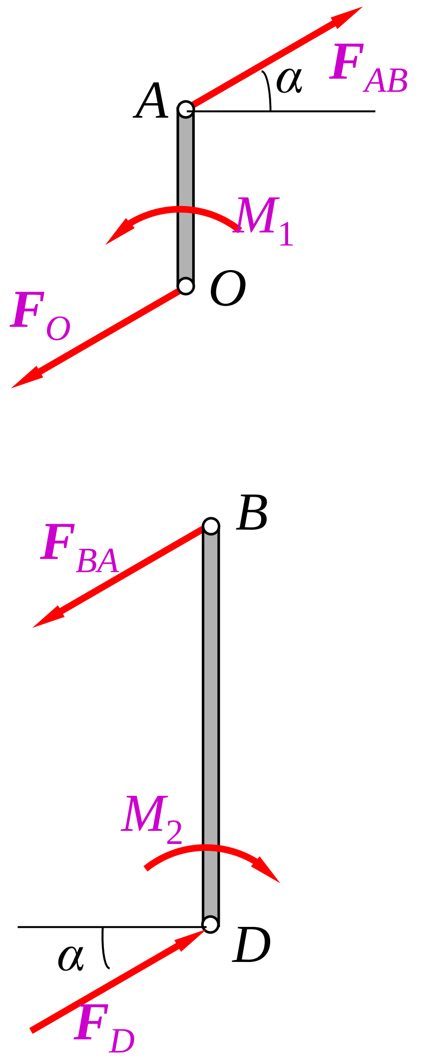
由 $\sum M_i = 0$

得 $M_1 - r\,F_{AB}\cos\alpha = 0$

$-M_2 + 2r\,F_{BA}\cos\alpha = 0$

因为 $F_{AB} = F_{BA}$

则得 $M_2 = 2M_1$



本章小结

1. 平面汇交力系的合力

(1) 几何法：

$$\boldsymbol{F}_R = \sum \boldsymbol{F}_i$$

(2) 解析法：

$$\boldsymbol{F}_R = \sum F_{xi}\boldsymbol{i} + \sum F_{yi}\boldsymbol{j}$$

$$F_R = \sqrt{(\sum F_{xi})^2 + (\sum F_{yi})^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{i}) = \frac{\sum F_{xi}}{F_R}, \quad \cos(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{j}) = \frac{\sum F_{yi}}{F_R}$$

本章小结

2. 平面共点力系的平衡条件

（1）平衡 $\boldsymbol{F}_R=\sum \boldsymbol{F}_i=0$

（2）平衡的几何条件：平面汇交力系的力多边形自行封闭。

（3）平衡的解析条件（平衡方程）：

$$\sum F_{xi}=0,$$

$$\sum F_{yi}=0$$

本章小结

3. 力偶和力偶矩

(1) 同平面内力偶的等效

$$M_1=M_2$$

(2) 平面力偶系的合成与平衡

合成 $M=\sum M_i$

平衡 $\sum M_i=0$

谢谢！