西北工业大学
Northwestern Polytechnical University

动 力 学

虚位移原理

西北工业大学
支希哲　朱西平　侯美丽

动　力　学

第六章　虚位移原理

§6-1 概 述

§6-1 概 述

虚位移原理是质点系静力学的普遍原理，它将给出任意质点系平衡的充要条件，这和刚体静力学的平衡条件不同，在那里给出的刚体平衡的充要条件，对于任意质点系的平衡来说只是必要的，但并不是充分的（参阅刚化原理）。

§6-1 概 述

非自由质点系的平衡，可以理解为主动力通过约束的平衡。约束的作用在于：

一方面阻挡了受约束的物体沿某些方向的位移，这时该物体受到约束反力的作用；而另一方面，约束也容许物体有可能沿另一些方向获得位移。

当质点系平衡时，主动力与约束反力之间，以及主动力与约束所许可位移之间，都存在着一定的关系。这两种关系都可以作为质点系平衡的判据。

§6-1 概 述

刚体静力学利用了前一种情况，通过主动力和约束力之间的关系表出刚体的平衡条件。

而虚位移原理则将利用后一种情况，他通过主动力在约束所许可的位移上的表现（通过功的形式）来给出质点系的平衡条件。

因此，在虚位移原理中，首先要研究加在质点系上的各种约束，以及约束所许可的位移的普遍性质。

§6-2　约束和约束方程

- 约束与约束方程
- 约束的类型

§6-2　约束和约束方程

一、约束

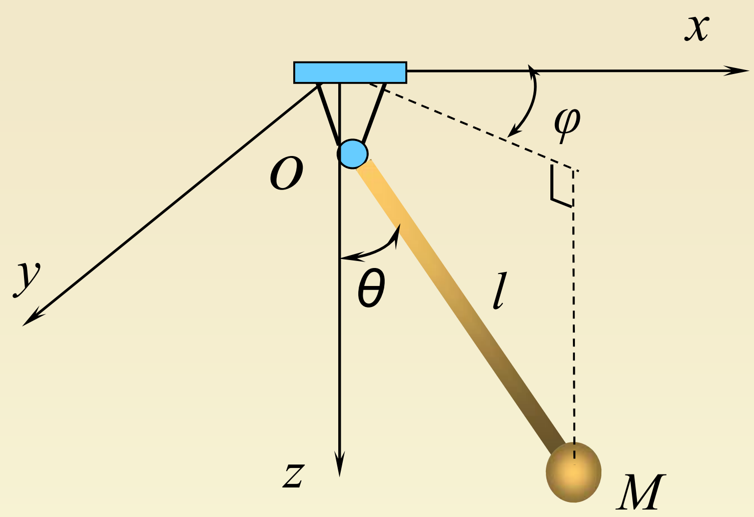
对非自由质点系的位置、速度之间预先加入的限制条件，称为约束。

二、约束方程

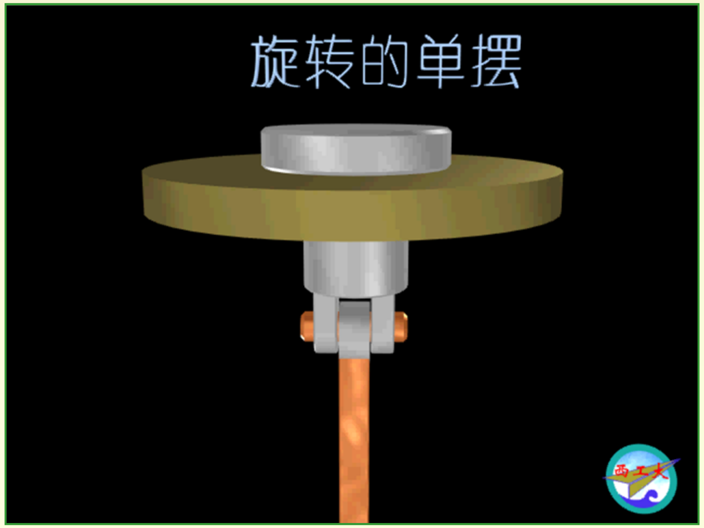
约束对质点系运动的限制可以通过质点系中各质点的坐标和速度以及时间的数学方程来表示。这种方程称为**约束方程**。

约束实例

球面摆



点M被限制在以固定点O为球心、l为半径的球面上运动。



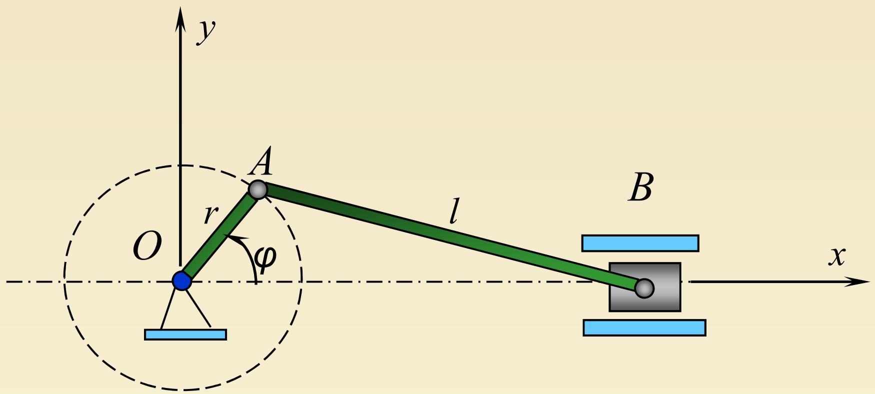
如取固定参考系$Oxyz$，则点M的坐标x，y，z满足方程

$$x^2+y^2+z^2=l^2$$

这就是加于球面摆的约束方程。

曲柄连杆机构

这个质点系的约束方程可表示成



$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2$$

$$y_B = 0$$

式中x_A，y_A和x_B，y_B分别为A，B两点的直角坐标。上述方程表明这四个坐标并非都独立。可以消去其中的某三个，从而只剩下一个独立坐标，这一坐标完全确定了此质点系的位置。

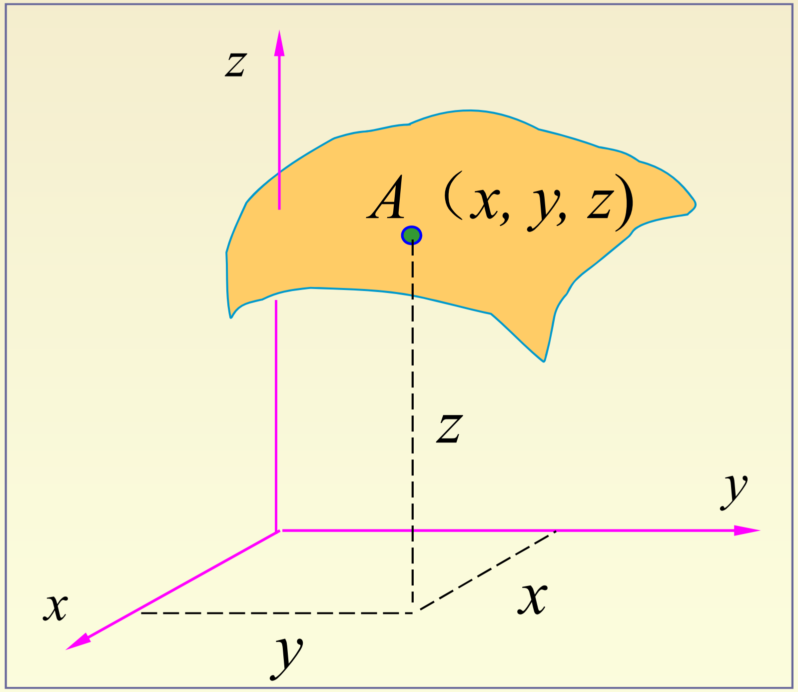
以后我们改称系统的位置为位形。

§6-2 约束和约束方程

曲 面

图示质点A在曲面上运动，质点A的约束方程就是曲面的曲面方程：

$$f(x, y, z) = 0$$



三、约束的类型

按照约束对质点系运动限制的不同情况，可将约束分类如下：

1. 完整约束和非完整约束

其约束方程的一般形式为

$$f_j(x_1, y_1, z_1; \dots; x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots; \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, s)$$

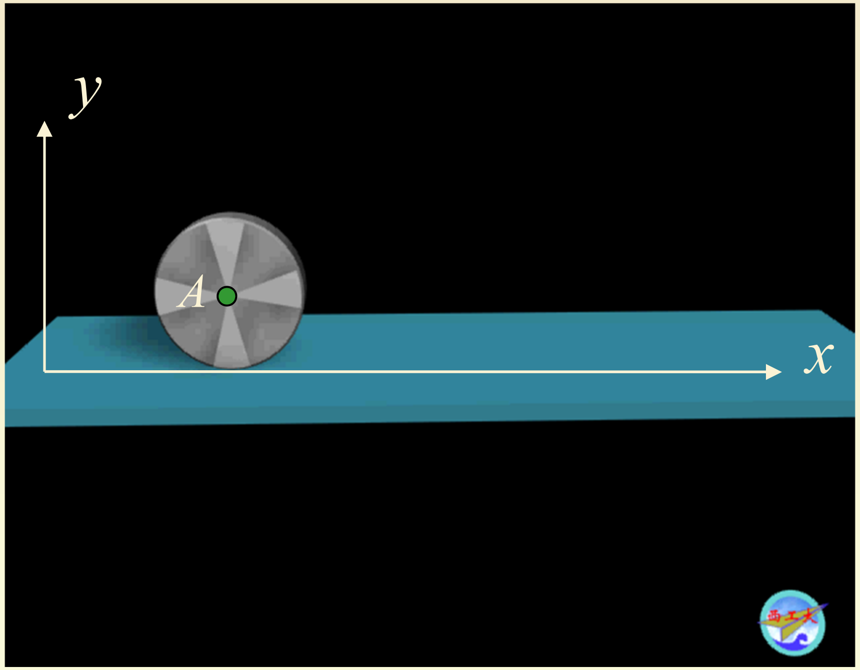
式中n为系统中质点的个数，s为约束方程的数目。

●显含坐标对时间的导数的约束方程是微分方程，如果这方程不可积分成有限形式，则相应的约束称为非完整约束（或非全定约束）只要质点系中存在一个非完整约束，这个系统便称为非完整系统。

●如果约束方程可以积分成有限形式，则这样的约束称为完整约束。方程中不显含坐标对时间的导数的约束为几何约束。当然，几何约束也属于完整约束。几何约束的一般形式为：

$$f_j(x_1, y_1, z_1; \dots; x_n, y_n, z_n; t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, s)$$

1. 完整约束和非完整约束



完整约束

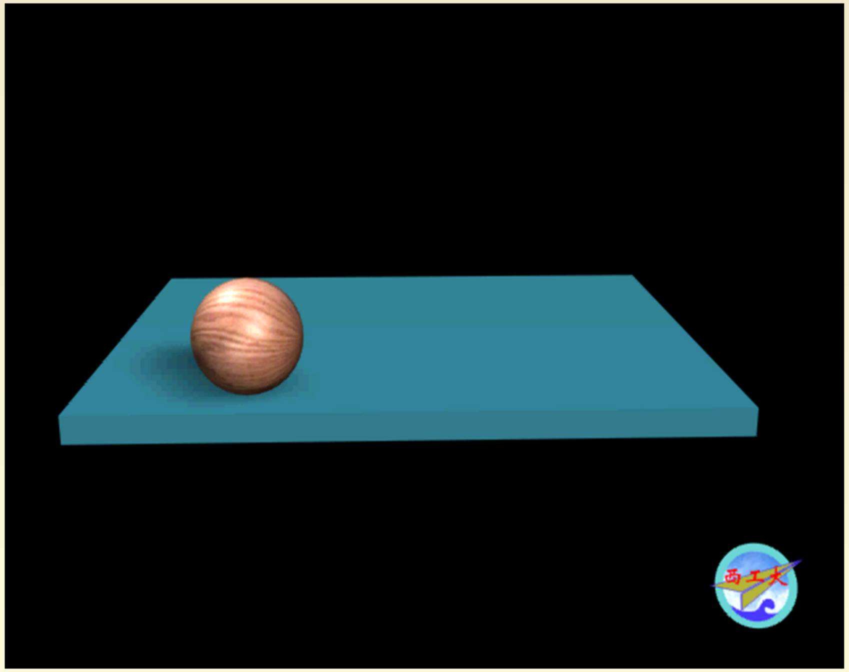
约束方程：

$$y_A = r$$

$$\dot{x}_A = r\dot{\varphi}$$

§6-2 约束和约束方程

1. 完整约束和非完整约束



非完整约束

约束方程：

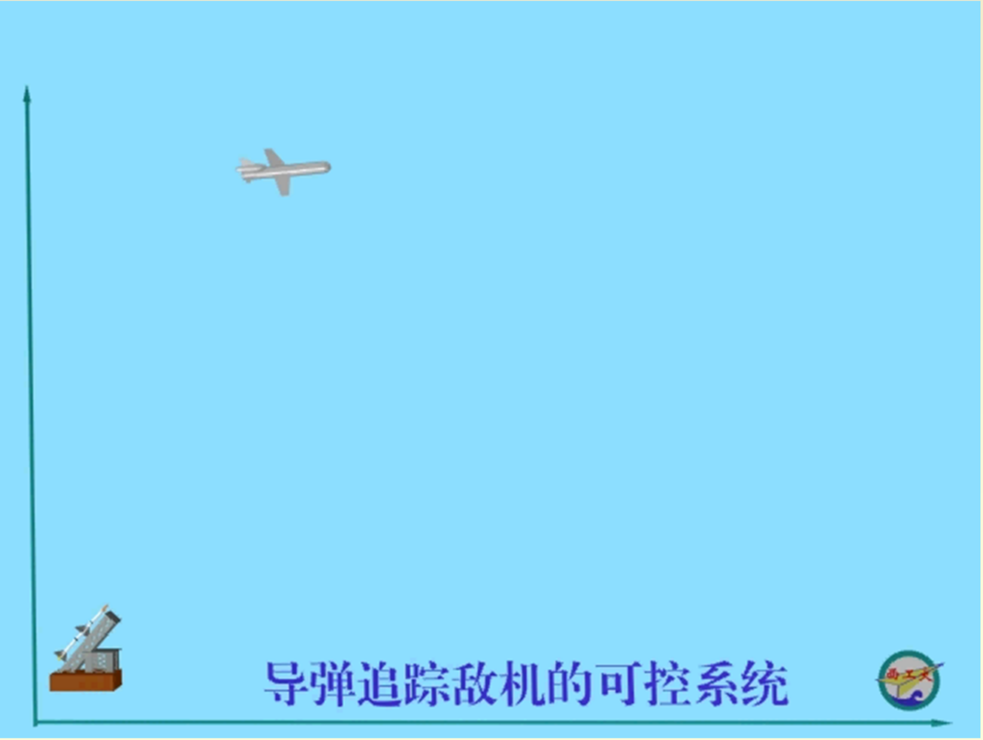
$$\dot{x} - r(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi) = 0$$

$$\dot{y} + r(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi) = 0$$

x，y、z 为球心坐标。

θ、φ、ψ 为欧拉角。

1. 完整约束和非完整约束



非完整约束

2. 定常约束和非定常约束

● 如果约束方程中不含时间t，这种约束称为定常约束或稳定约束。

定常约束一般形式为

$$f_j(x_1,\ y_1,\ z_1;\ \ldots;\ x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots;\ \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n;) = 0$$

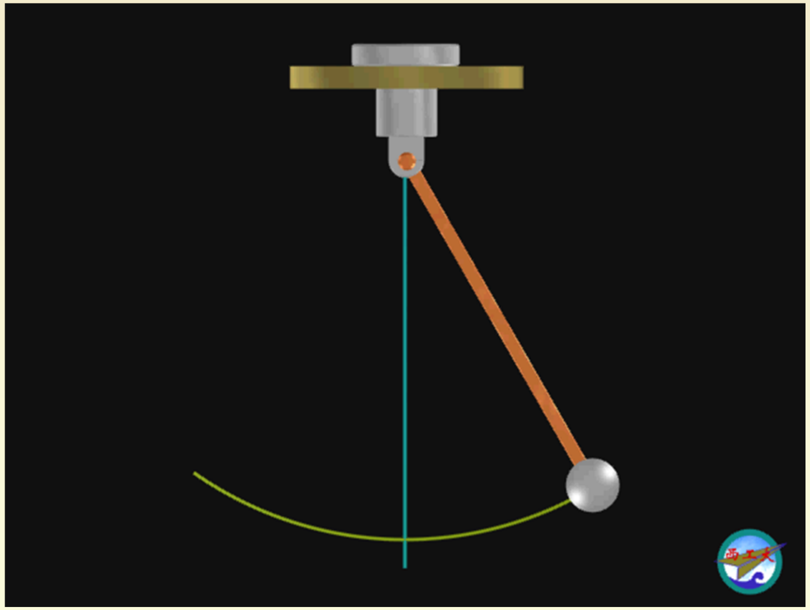
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots, s)$$

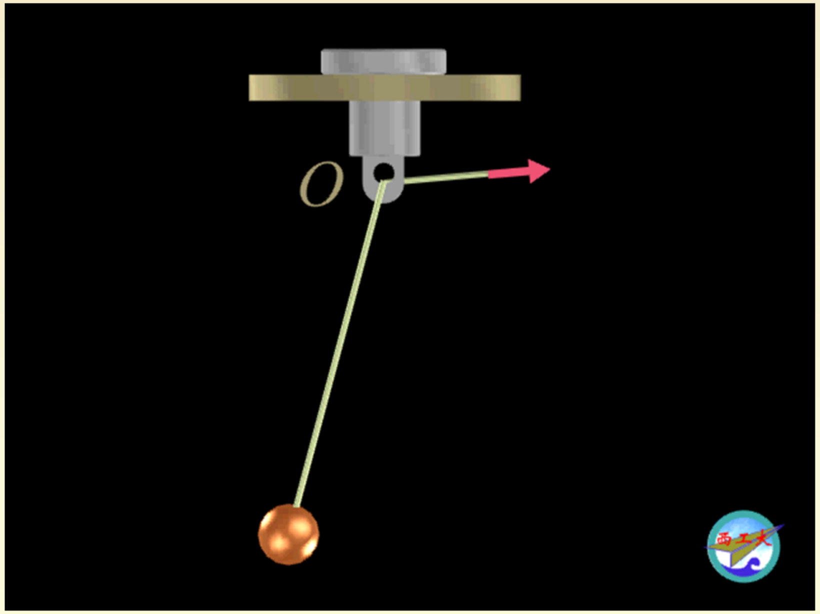
● 如果约束方程中含时间t，这种约束称为非定常约束或不稳定约束。

2. 定常约束和非定常约束

$$x^2 + y^2 = l_0^2$$

$$x^2 + y^2 = (l_0 - v_0 t)^2$$





定常约束

非定常约束

3．双面约束和单面约束

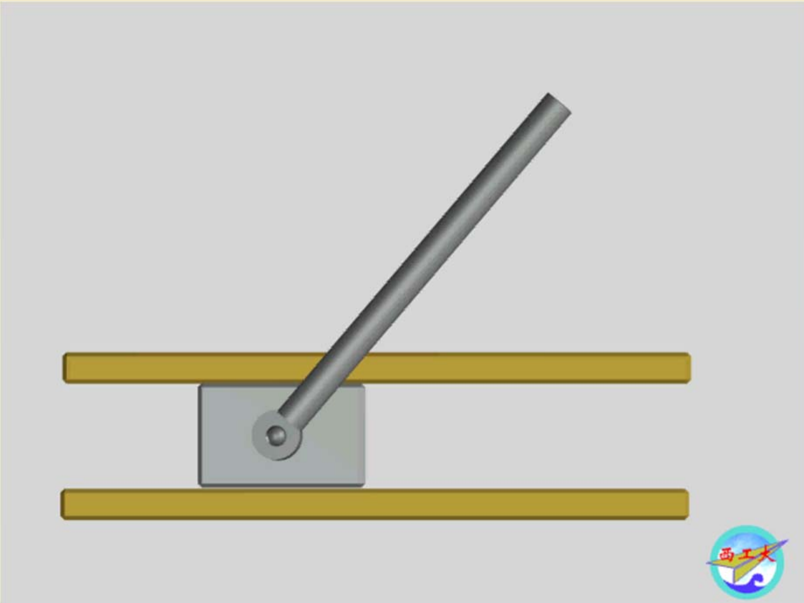
- 由不等式表示的约束称为单面约束（或可离约束）。

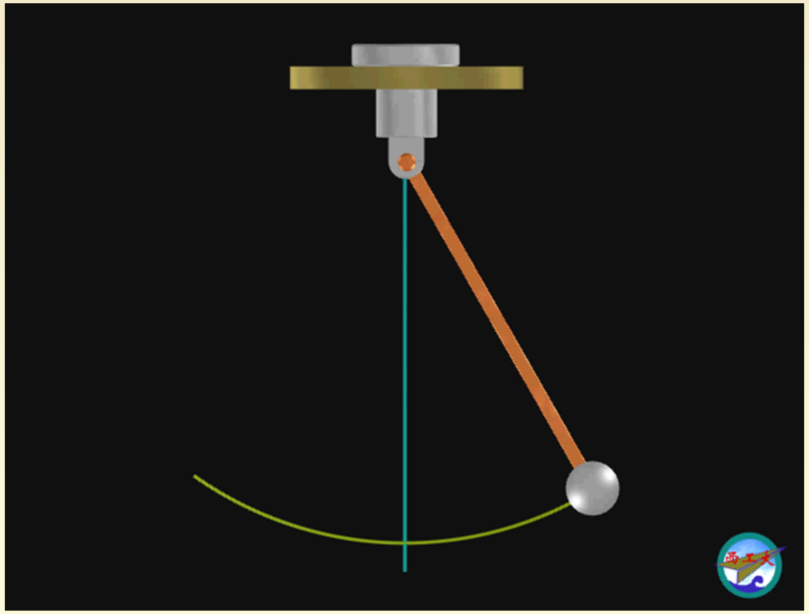
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2$$

- 由等式表示出的约束称为双面约束（或不可离约束）。

3. 双面约束和单面约束

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

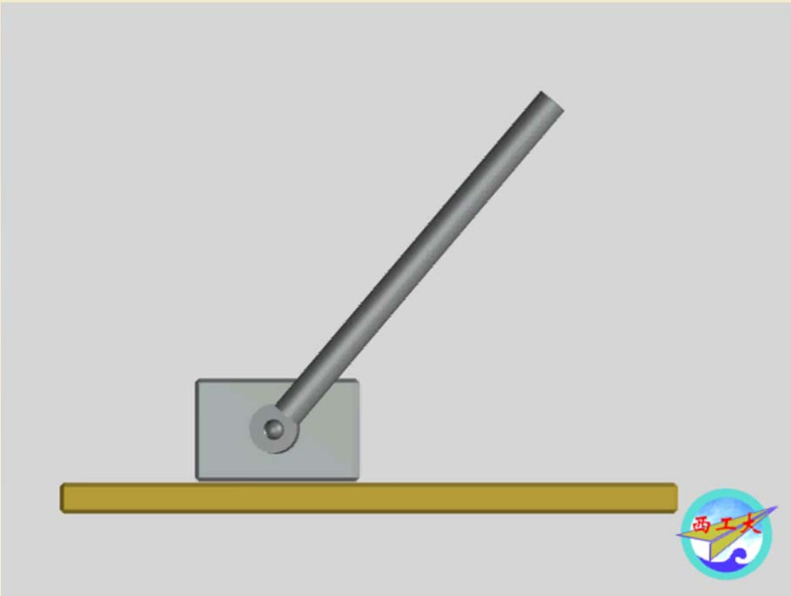


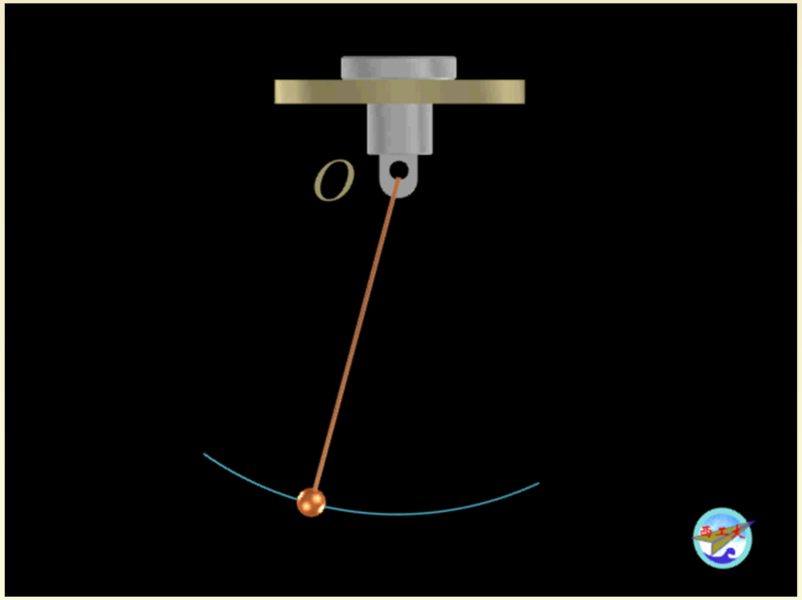


双面约束

3．双面约束和单面约束

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2$$





单面约束

§6-3　虚位移·自由度

- 虚位移
- 自由度

§6-3 虚位移·自由度

一、虚位移

质点或质点系在给定瞬时不破坏约束而为约束所许可的任何微小位移，称为质点或质点系的**虚位移**。

真实位移 —实际发生的位移，用d$\boldsymbol{r}$表示，它同时满足动力学方程、初始条件和约束条件。

可能位移 — 约束允许的位移，用$\Delta\boldsymbol{r}$表示，它只需满足约束条件。

虚位移也可表述为：

定常约束情况下的可能位移，非定常情况下假想约束“冻结”时的可能位移，用$\delta\boldsymbol{r}$表示。

§6-3 虚位移·自由度

虚位移与实位移的区别：

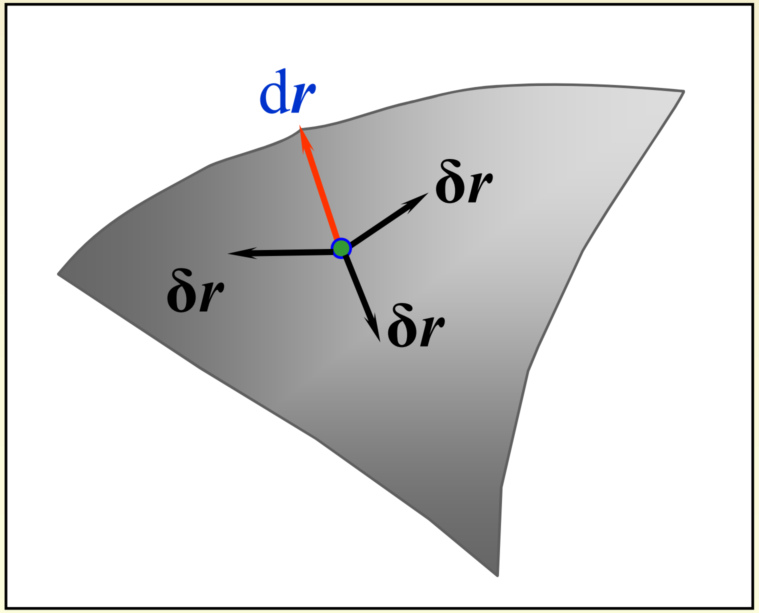
- 与实际发生的微小位移（简称实位移）不同，虚位移是纯粹几何概念，是假想位移，只是用来反映约束在给定瞬时的性质。它与质点系是否实际发生运动无关，不涉及运动时间、主动力和运动初始条件。

- 虚位移仅与约束条件有关，在不破坏约束情况下，具有任意性。而实位移是在一定时间内真正实现的位移，具有确定的方向，它除了与约束条件有关外，还与时间、主动力以及运动的初始条件有关。

§6-3 虚位移·自由度

虚位移与实位移的区别：

例如，一个被约束固定曲面上的质点，它的实际位移只是一个，而虚位移在它的约束面上则有任意多个。

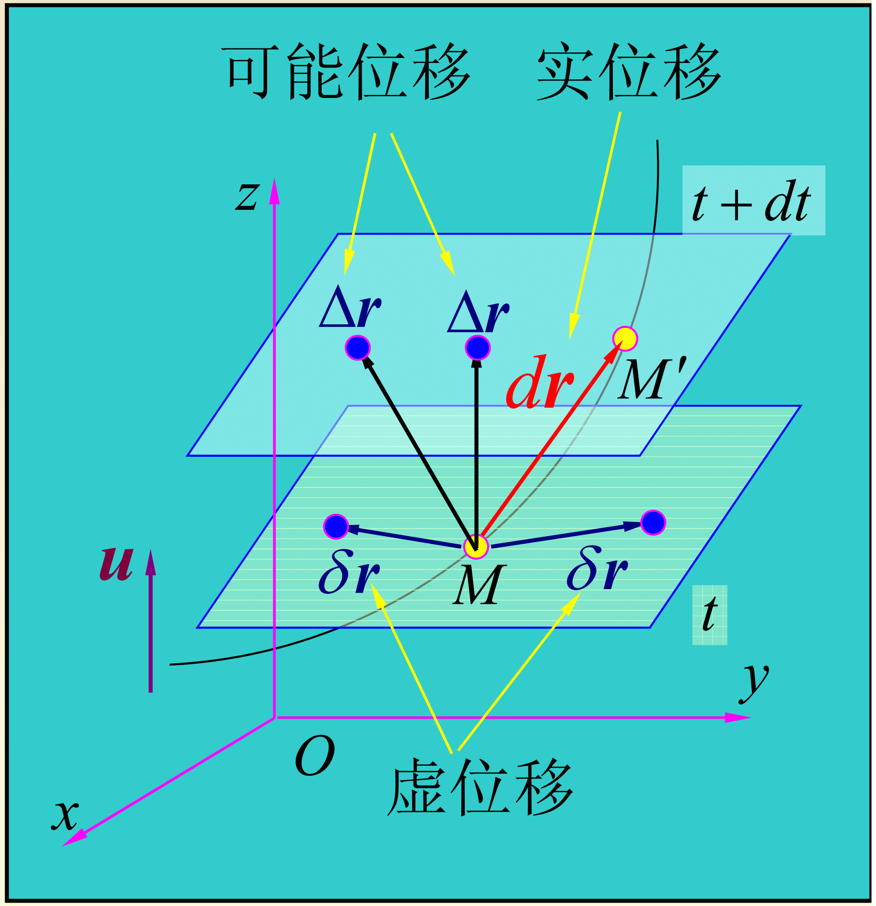


§6-3　虚位移·自由度

虚位移与实位移的区别：

在定常约束的情况下，约束性质不随时间而变，因此，实位移只是所有虚位移中的一个。但对非定常约束，实位移不会和某个虚位移相重合。

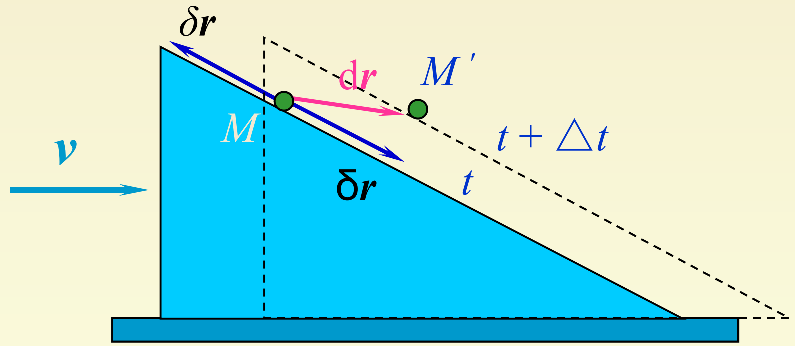
约束方程　　$z - ut = 0$



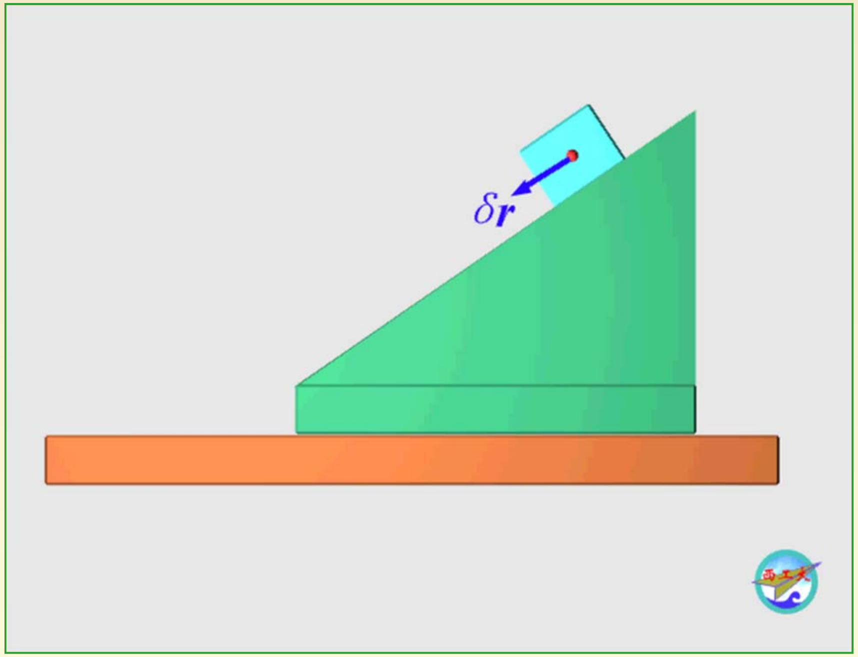
虚位移是约束被“冻结”后此瞬时约束允许的无限小位移，与时间t的变化无关 $(\delta t \equiv 0)$。

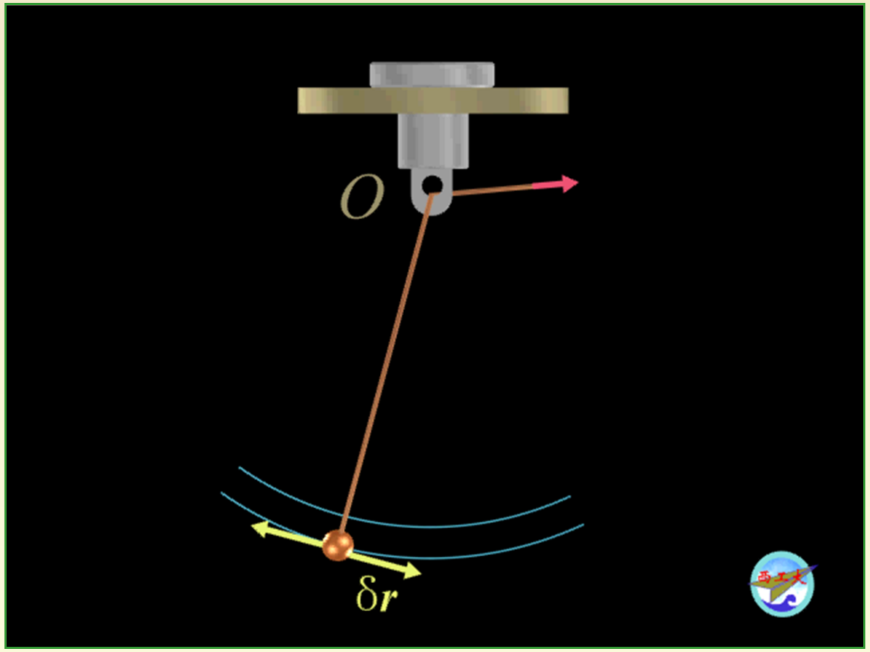
虚位移与实位移的区别：

设有质点M被约束在斜面上运动，同时此斜面本身以匀速$\boldsymbol{v}$作水平直线运动，这里，斜面构成了非定常约束。



虚位移与实位移的区别：





虚位移与实位移

§6-3　虚位移·自由度

实位移——用dr 表示，其投影用dx ， dy ， dz 表示。

虚位移——用δr 表示，其投影用δx ， δy ， δz 表示。

以上δr 和δx ， δy ， δz 表示**等时变分**。

等时变分

$$f_i(\boldsymbol{r}_i, t) = 0$$

微 分 $\Rightarrow$

$$\sum_j^N \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{r}_j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t_j} \mathrm{d}t = 0$$

等时变分 $\Rightarrow$

$$\sum_j^N \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{r}_j} \cdot \delta \boldsymbol{r}_j = 0$$

等时变分运算与微分运算类似，但$\delta t = 0$。

将矢径进行等时变分就是虚位移，将几何约束方程进行等时变分就可以得到虚位移之间的关系。

§6-3 虚位移·自由度

在应用虚位移原理过程中，求出系统各虚位移间的关系是关键，常用方法有：

1. 几何法　在定常约束的情况下，实位移是虚位移的一个，可用求实位移的方法求虚位移间的关系，特别是实位移正比于速度，所以可通过各点速度间的关系来确定对应点的虚位移关系。

如平动刚体上各点的虚位移相等，定轴转动刚体上各点虚位移与其到转轴的距离成正比；平面运动刚体则一般可用速度投影定理和速度瞬心法求两点虚位移间关系等。

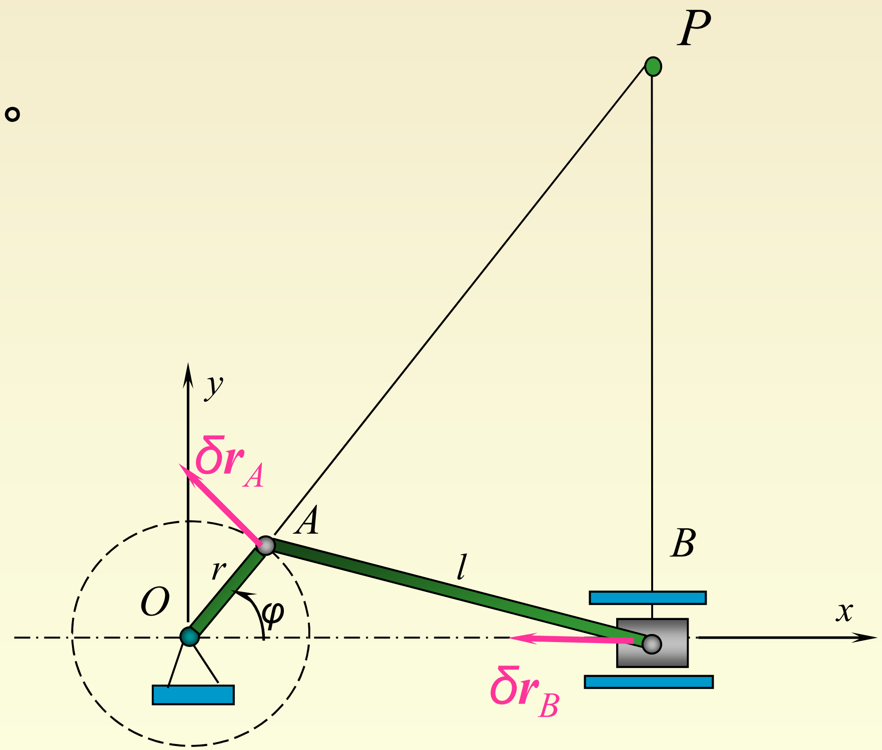
§6-3 虚位移·自由度

以图曲柄连杆机构为例，由于连杆 AB 可作平面运动，其速度瞬心为点 P。

虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_A$ 与 $\delta \boldsymbol{r}_B$ 方向如图所示。

所以虚位移 δr_A 与 δr_B 大小间关系为

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_B}=\frac{PA}{PB}$$

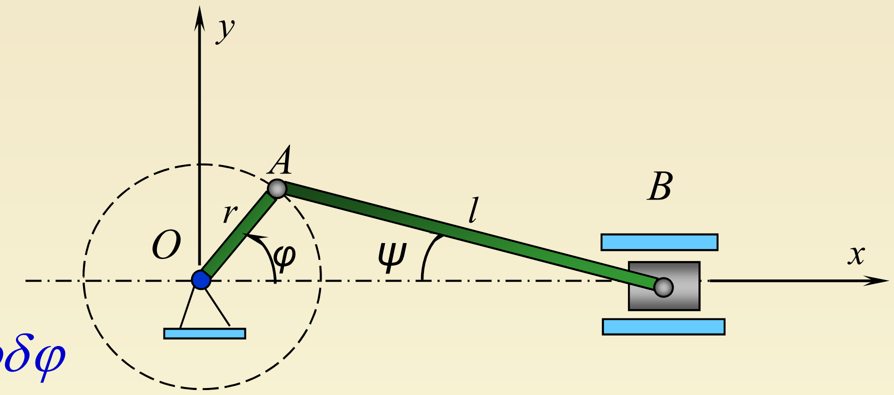


2. 解析法 对于较复杂的系统，各点的虚位移间关系比较复杂，这时可建立一固定直角坐标系，将系统放在一般位置，写出各点的直角坐标（表示为某些独立参变量的函数），然后进行变分运算，求及各点虚位移的投影。这种确定虚位移间关系的方法称为**解析法**。

或选取适当的固定坐标系，写出约束方程并进行变分，即可求得各点的虚位移间的关系。

§ 6-3 虚位移·自由度

例如在图中，设曲柄长$OA=r$，连杆长$AB=l$。 则点A和B的坐标为



$$x_A = r\cos\varphi, \qquad y_A = r\sin\varphi$$

$$x_B = r\cos\varphi + l\cos\psi$$

求变分，有 $\delta x_A = -r\sin\varphi\delta\varphi, \quad \delta y_A = r\cos\varphi\delta\varphi$

$$\delta x_B = -r\sin\varphi\delta\varphi - l\sin\psi\delta\psi$$

考虑到有关系，所以有 $r\sin\varphi = l\sin\psi$ ，所以有

$$\delta x_B = -r\sin\varphi\delta\varphi - l\cos\varphi tg\psi\delta\varphi$$

上面式子西给出了A，B 两点虚位移的投影δx_A，δy_A、δx_B与虚位移$\delta\varphi$的关系。

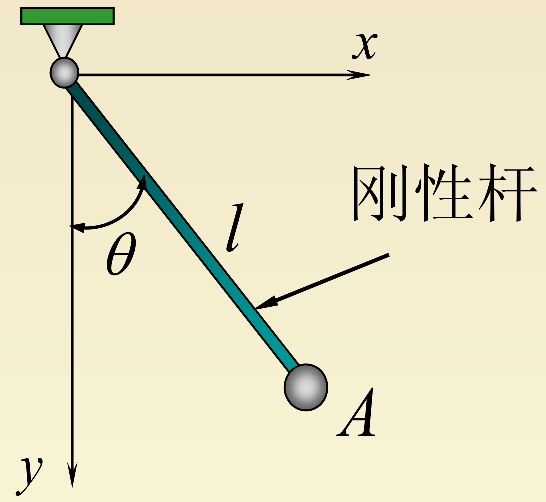
§6-3 虚位移·自由度

例如图示单摆，约束方程为

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

等时变分

$$2x\delta x + 2y\delta y = 0$$



二、自由度

一般情况，一个由n质点系在空间的位形用直角坐标来确定需要$3n$个坐标，即x_i，y_i，z_i（i=1，2, ..., n）。如果系统受到有s个完整约束，其约束方程为

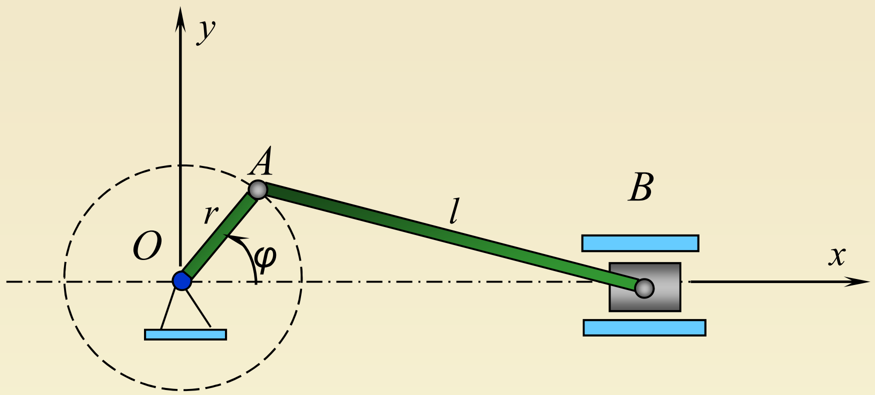
$$f_j(x_1,\ y_1,\ z_1;\ \ldots;\ x_n,\ y_n,\ z_n;\ t)=0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$

则系统的$3n$各坐标并不完全独立，只有$k=3n-s$个坐标是独立的，故确定该质点系的位形只需$3n-s$个坐标，我们说该质点系有$3n-s$个自由度。因此，确定受完整约束的质点系位形的独立坐标数目称为系统的**自由度**。

§6-3 虚位移·自由度

例如曲柄连杆机构：

这个质点系的约束方程可表示成



$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2$$

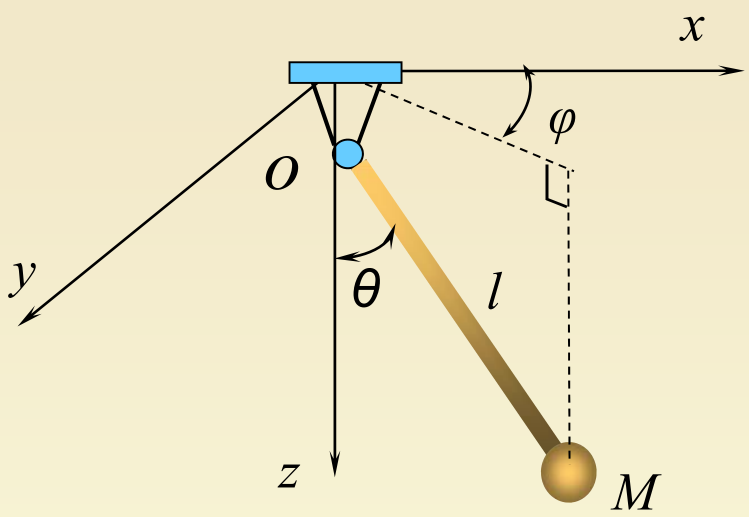
$$y_B = 0$$

式中x_A，y_A和x_B，y_B分别为A，B两点的直角坐标。上述方程表明这四个坐标并非都独立。可以消去其中的某三个，从而只剩下一个独立坐标，这一坐标完全确定了此质点系的位置。因此该质点系有**1**个自由度。

§6-3 虚位移·自由度

例如球面摆:

点M被限制在以固定点O为球心、l为半径的球面上运动。



如取固定参考系$Oxyz$,则球面摆的约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

质点M的自由度?

§6-4　虚功·理想约束

- 虚功
- 理想约束

§6-4　虚功·理想约束

一、虚功

力在虚位移上所做的功称为虚功，记为δW。因为虚位移是假想位移，所以虚功也是假想的概念。

因为虚位移是微小量，所以虚功计算与元功计算类似。例如力$\boldsymbol{F}$在虚位移$\delta \boldsymbol{r}$上所做的虚功为

$$\delta W = \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r}$$

一般来说，主动力和约束力都可以做虚功。

二、理想约束

如果质点系所受的约束力在任意虚位移上所做虚功之和恒等于零，则这样的约束称为理想约束。

故理想约束条件可表示成

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

式中$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}$是作用在第$i$个质点上的约束力。

§6-4　虚功·理想约束

动能定理里曾列举了约束力在质点系实位移上元功之和恒等于零的各种情况。由于在定常约束情况下，实位移可以从虚功转化而来，彼此具有相同的几何性质，所以，那里所讲的各种情况也属于理想约束。

这些约束包括固定的或运动着的光滑支撑面、铰链、始终拉紧而不可伸长的软绳、刚性连接，以及作纯滚动刚体所在的支撑面等等。理想约束是大量实际情况的理论模型。

§6-5　虚位移原理

- 虚位移原理
- 应用虚位移原理解题的步骤

§6-5　虚位移原理

一、虚位移原理

具有双面、定常、理想约束的静止质点系，其平衡的必要和充分条件是：所有主动力在任何虚位移上的虚功之和等于零。

表达式为

$$\sum_{i=1}^{n} \delta W(\boldsymbol{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i . \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

在实际应用时，常将式写成解析式，得相应的平衡条件

$$\sum_{i=1}^{n} \delta W(\boldsymbol{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i) = 0$$

上式称为**静力学普遍方程或虚功方程**。

§6-5 虚位移原理

证明:

➤ 必要性证明：　由刚体静力学知，此时作用在系统内任一质点A_i上的主动力$\boldsymbol{F}_i$和约束反力$\boldsymbol{F}_{Ni}$之矢量和必等于零，即满足条件

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni} = 0$$

对每个质点选取虚位移$\delta \boldsymbol{r}_i$，则对应的虚功之和等于零，即

$$(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

对全体i求和，得

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{Ni} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

由于理想约束的假设 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{Ni} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$，所以原式成立。

§6-5 虚位移原理

➢ 充分性证明：采用反证法。设在条件下质点系并不平衡，则必有些质点（至少一个）上作用有非零的合力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}i}=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}$，由于运动是从静止开始的，故它的实位移$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$必与$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}i}$同向，所以$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}i}$将做正功，即

$$(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i>0$$

对全系统求虚功和，并考虑到理想约束条件，将得到

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i>0$$

但是，在定常约束条件下，可取实位移$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$相重合虚位移$\delta\boldsymbol{r}_i$，于是有

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i>0$$

它和原设条件式矛盾，可见，质点系中没有任可质点能在此条件下进入运动，故充分性得证。

证 明

二、应用虚位移原理解题的步骤

1. 确定研究对象：常选定整体为研究对象；

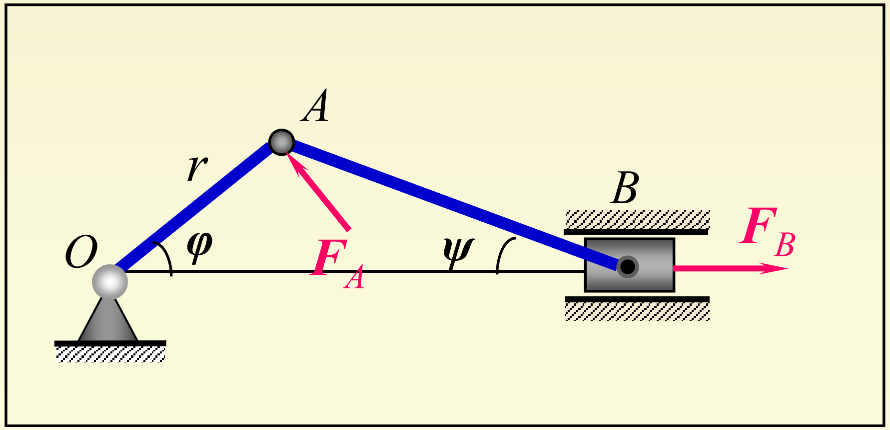
2. 约束分析：是否理想约束？

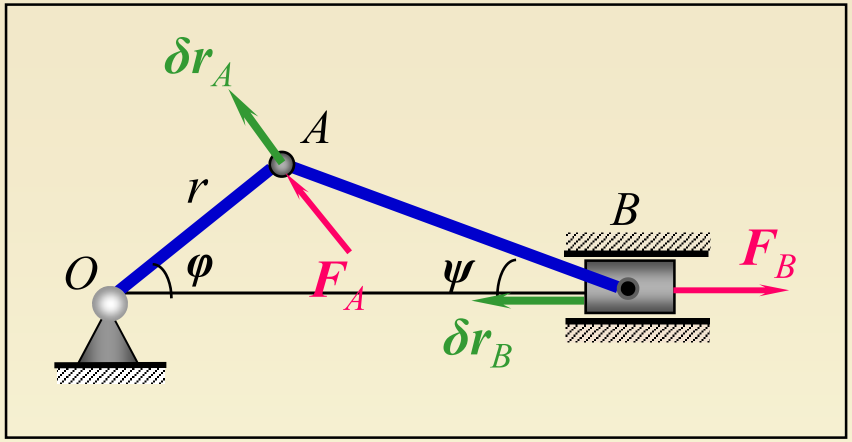
3. 受力分析：
   - 求主动力之间的关系或平衡位置时：只画主动力，
   - 求约束反力时：解除约束，视约束反力作为主动力。

4. 给出系统一组虚位移，找出它们之间的关系；

5. 列出虚功方程并求解。

例题6-1曲柄连杆机构静止在如图所示位置上，已知角度φ和ψ。不计机构自身重量，求平衡时主动力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$ 的大小应满足的关系。





解： 以δr_A 和δr_B 分别代表主动力 F_A 和 F_B 作用点的虚位移，如图所示。

根据虚位移原理的平衡方程，有

$$\sum \delta W = F_A \cdot \delta r_A - F_B \cdot \delta r_B = 0$$

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{\delta r_A}{\delta r_B}$$

因 AB 是刚杆，两端位移在 AB 上的投影应相等，即

$$\delta r_A \cdot \sin(\varphi + \psi) = \delta r_B \cdot \cos\psi$$

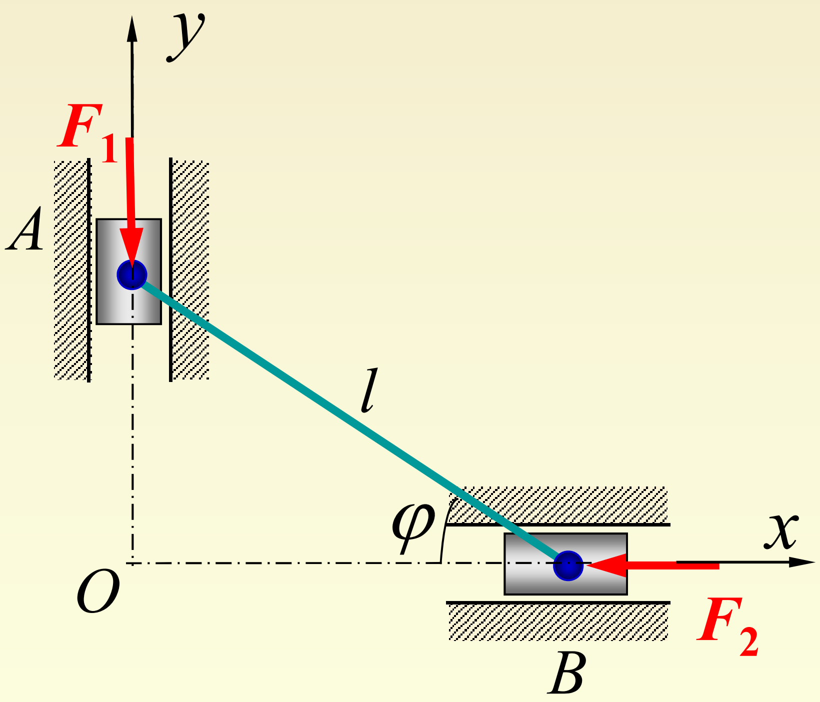
可见 A，B 两点的虚位移大小之比等于

$$\frac{\delta r_A}{\delta r_B} = \frac{\cos\psi}{\sin(\varphi + \psi)}$$

从而解得

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{\delta r_A}{\delta r_B} = \frac{\cos\psi}{\sin(\varphi + \psi)}$$

例题6-2 连杆AB长为l，杆重和滑道、铰链上的摩擦均忽略不计。求在图示位置平衡时，主动力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$之间的关系。



解： 应用几何法

系统为理想约束系统。

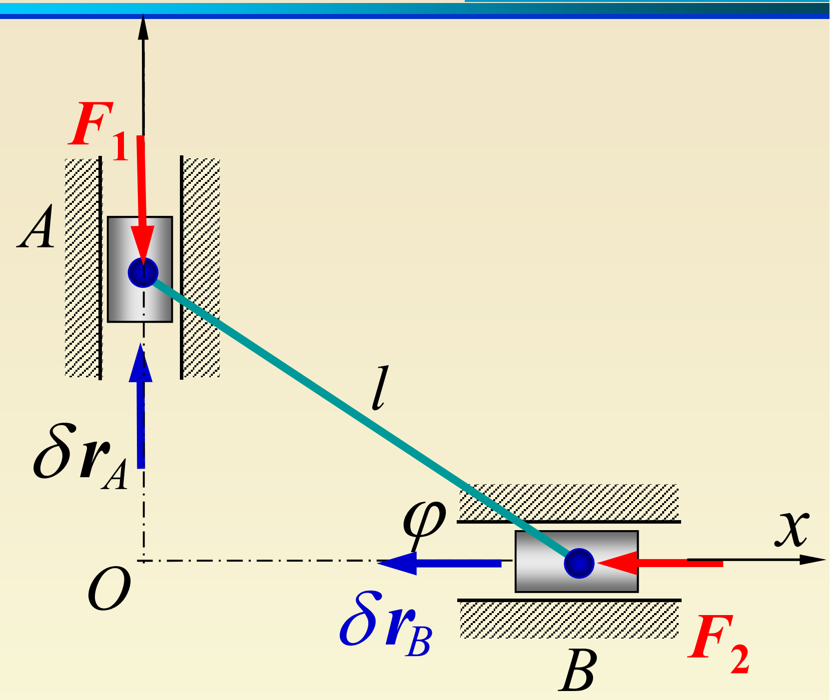
由虚功原理：

$$\delta W = -F_1\delta r_A + F_2\delta r_B = 0$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\delta r_B}{\delta r_A}$$

由速度投影定理：

$$\delta r_B \cos\varphi = \delta r_A \sin\varphi$$



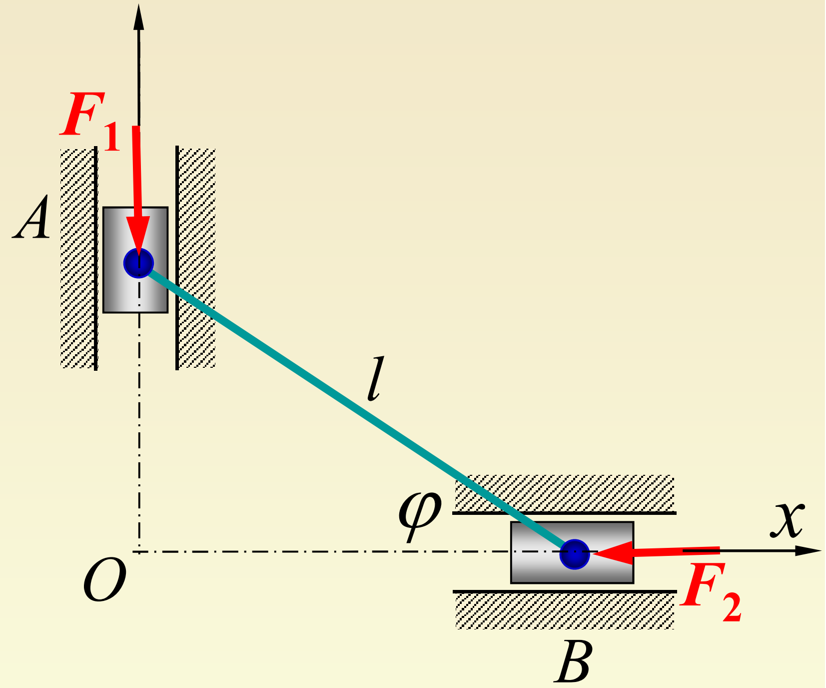
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\delta r_B}{\delta r_A} = \tan\varphi$$

§6-5 虚位移原理

例题6-2

应用解析法

$$\sum_{i=1}^{n}\delta W(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}(F_{ix}\delta x_i+F_{iy}\delta y_i+F_{iz}\delta z_i)=0$$



由虚功原理： $-F_1\delta y_A-F_2\delta x_B=0$

$$\frac{F_1}{F_2}=-\frac{\delta x_B}{\delta y_A}$$

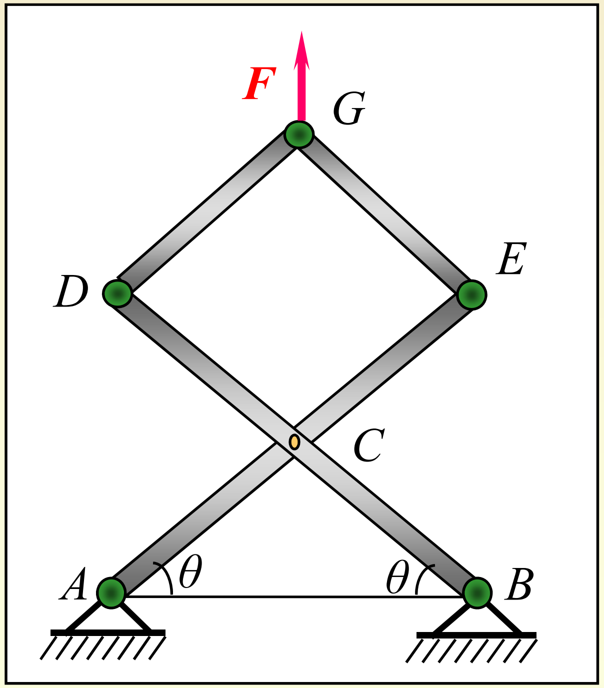
约束方程： $x_B^2+y_A^2=l^2$

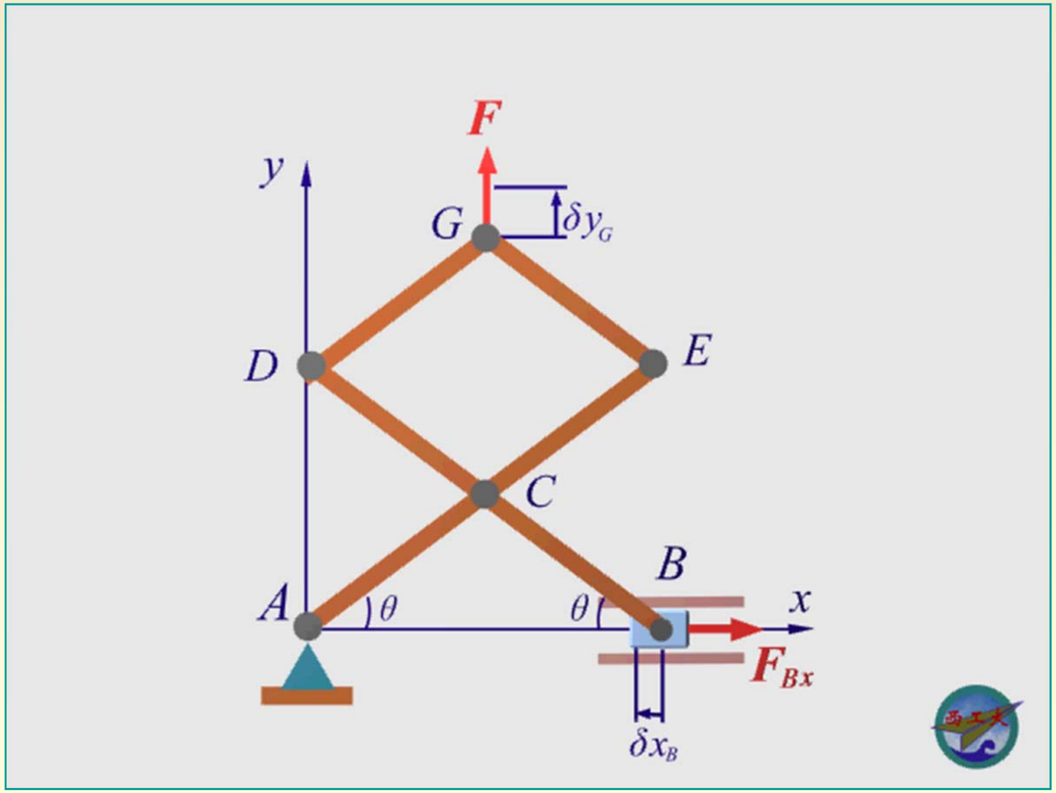
变分得： $2x_B\delta x_B+2y_A\delta y_A=0$

$$\frac{\delta x_B}{\delta y_A}=-\frac{y_A}{x_B}=-\tan\varphi\ ,\qquad \frac{F_1}{F_2}=-\frac{\delta x_B}{\delta y_A}=\tan\varphi$$

例题6-3已知图所示结构，各杆都以光滑铰链连接，且有 $AC=CE=BC=CD=DG=GE=l$。在点G作用一铅直方向的力$\boldsymbol{F}$，求支座B的水平约束反力$\boldsymbol{F}_{Bx}$。

例 题 6-7




F
y
G
δy_G
D
E
C
B
A
θ
θ
x
F_Bx
δx_B

§ 6-5 虚位移原理

解： 此题可用虚位移原理来求解。用约束力F_{Bx}代替水平约束，并将F_{Bx}当作主动力。

设B，G二点沿x，y的虚位移为δx_B和δy_G，根据虚位移原理，有

$$F\delta y_G + F_{Bx}\delta x_B = 0 \qquad \text{(a)}$$

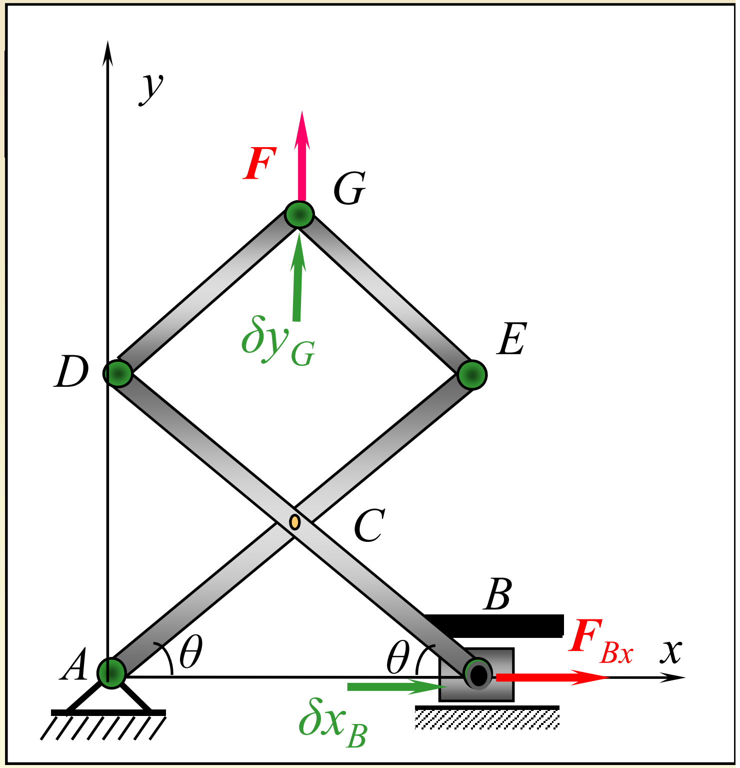
因坐标 $y_G = 3l\sin\theta$, $x_B = 2l\cos\theta$

其变分为

$$\delta y_G = 3l\cos\theta\delta\theta$$
$$\delta x_B = -2l\sin\theta\delta\theta \qquad \text{(b)}$$

代入式（a），得

$$F\times 3l\cos\theta\delta\theta - F_{Bx}\times 2l\sin\theta\delta\theta = 0$$

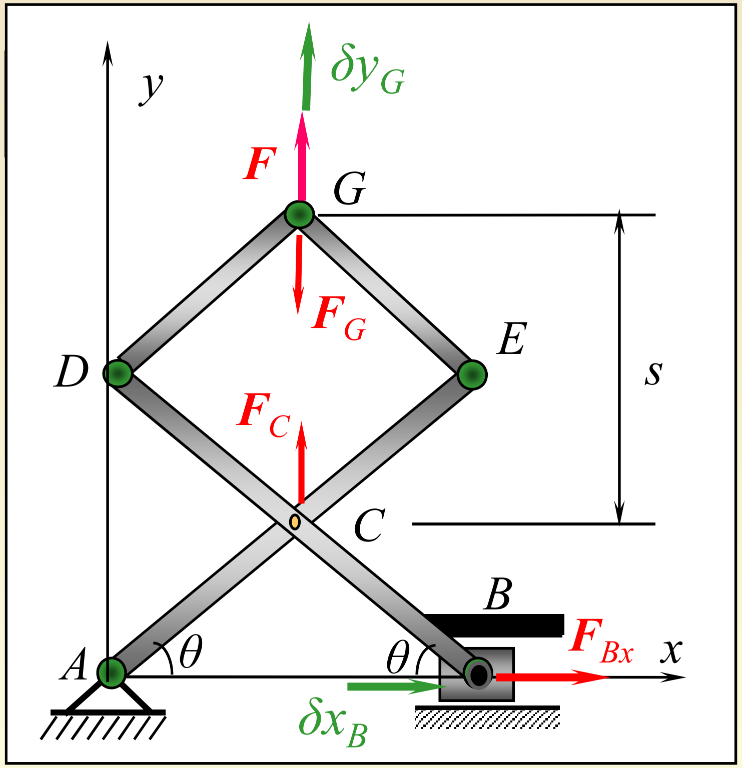


消去$\delta\theta$，解得

$$F_{Bx} = \frac{3}{2}F\cot\theta$$

讨论

如果此题在G，C二点之间再连上一根弹簧，弹簧刚度为k，且在图示瞬时弹簧已有伸长量δ_0。此弹簧对G，C二点的拉力$\boldsymbol{F}_G$，$\boldsymbol{F}_C$为系统内力，如图所示。



令 $s=GC$，由图有

$$s = 2l\sin\theta$$

其变分为

$$\delta s = 2l\cos\theta\delta\theta \qquad \text{(c)}$$

图示位置，弹簧有伸长量δ_0，则弹簧拉力为$F_C=F_G=F_{CG}=k\,\delta_0$。当$G$，$C$二点间有相对伸长的虚位移$\delta_s$时，弹簧力所作虚功为负。根据虚位移原理，

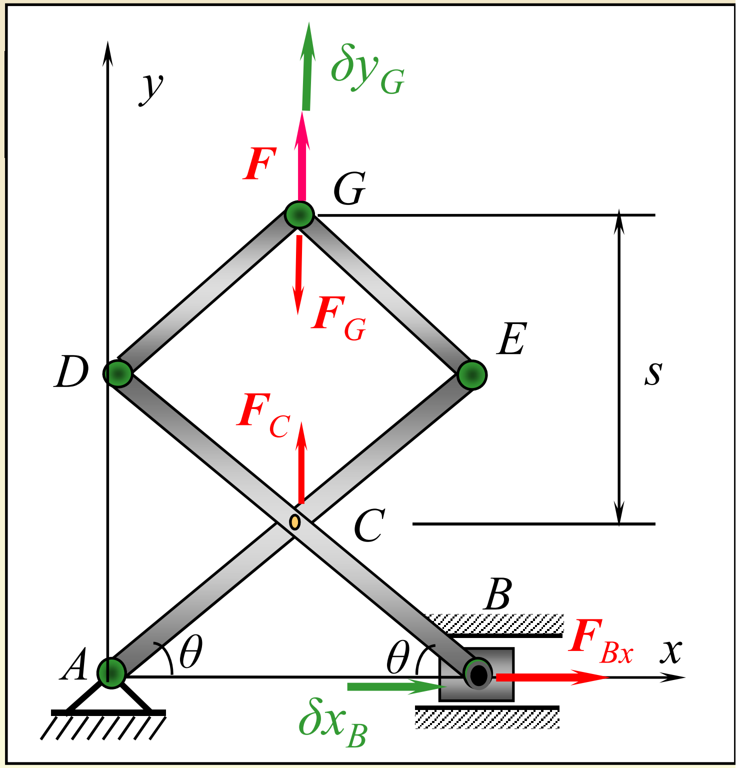
$$F\delta y_G + F_{Bx}\delta x_B - F_{GC}\delta s = 0$$

将式（b），（c）代入上式，注意$F_{CG}=k\,\delta_0$，得

$$F\times 3l\cos\theta\delta\theta - F_{Bx}\times 2l\sin\theta\delta\theta - k\delta_0\times 2l\cos\theta\delta\theta = 0$$

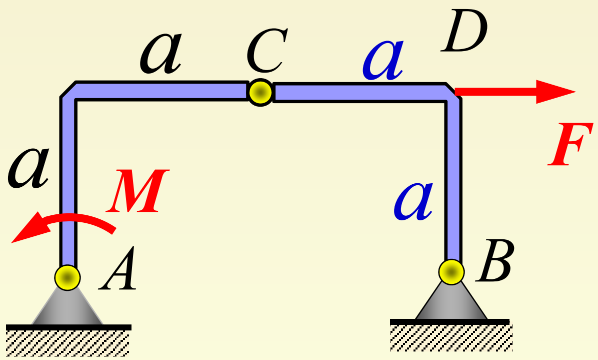
消去$\delta\theta$，解得有弹簧时，B处的水平约束反力为

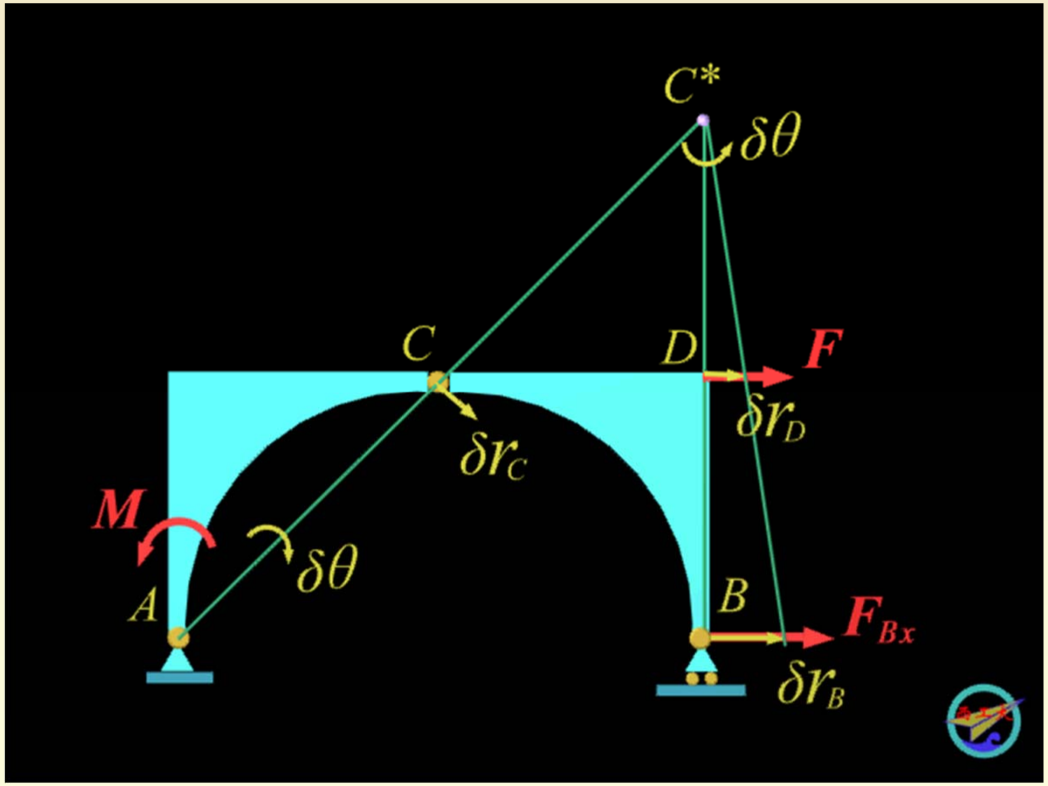
$$F_{Bx} = \frac{3}{2}F\cot\theta - k\delta_0\cot\theta$$

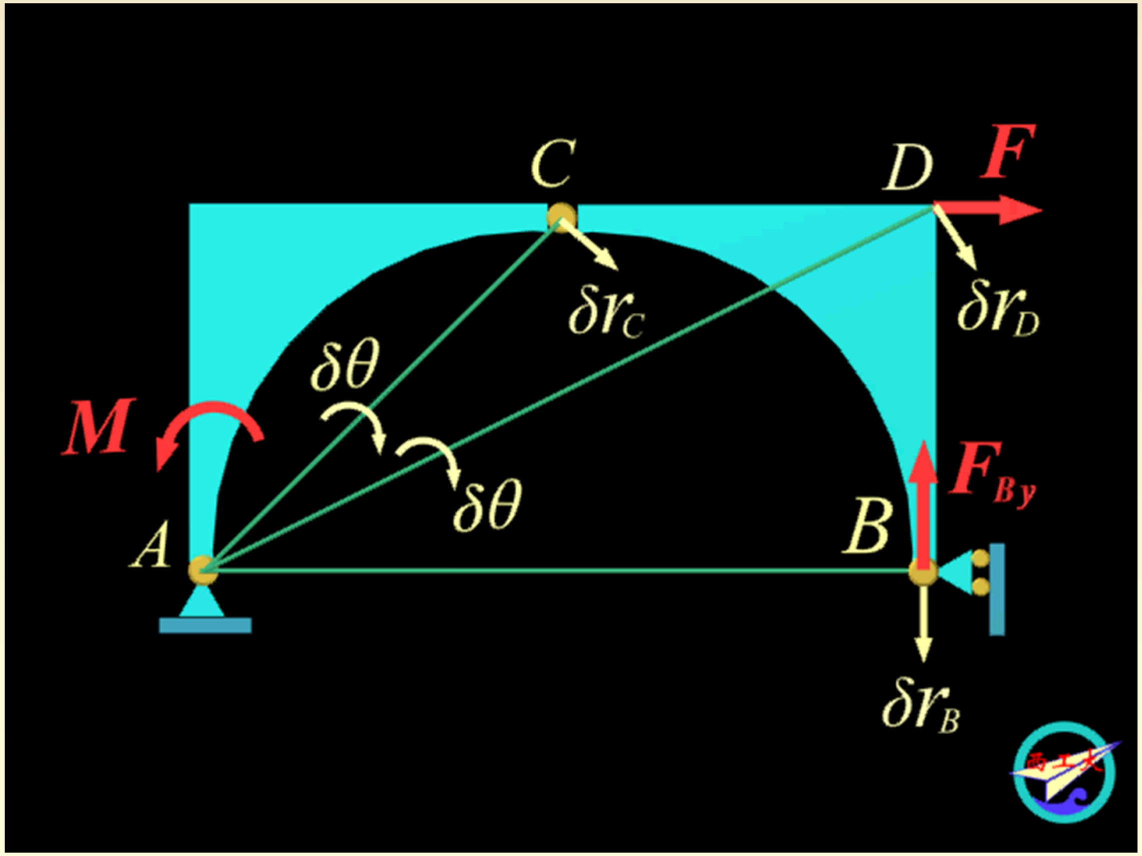


例 题 6-9

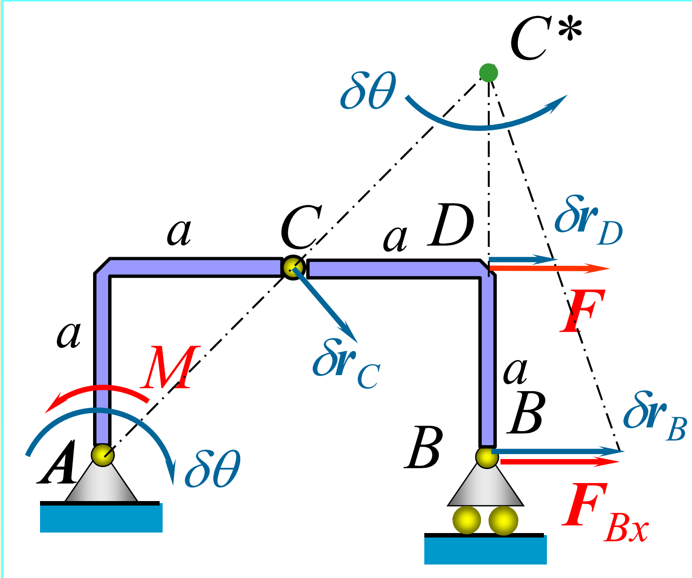
例题6-4 如图所示三铰拱，拱重不计。试求在力*F*及力偶矩*M*作用下铰*B*的约束力。




C*
δθ
C
D
F
δr_D
δr_C
M
δθ
A
B
F_Bx
δr_B


C
D
F
δr_C
δr_D
$\delta\theta$
M
$\delta\theta$
F_{By}
B
A
δr_B

解： 三铰拱是一个受完全约束的结构，使用虚位移原理时，必须首先解除约束，赋予运动自由度。



1\. 求铰B的水平约束力。解除铰B的水平约束，换成水平辊轴再加上水平约束力$\boldsymbol{F}_{Bx}$，系统具有一个自由度。

给曲杆AC一微小转角$\delta\theta$，曲杆BC的转动中心在C^*，可得各力作用点的虚位移分别为

$$\left|\delta \boldsymbol{r}_D\right| = a\cdot\delta\theta, \qquad \left|\delta \boldsymbol{r}_B\right| = 2a\cdot\delta\theta$$

虚位移原理给出：$\delta W = -M\cdot\delta\theta + F\left|\delta \boldsymbol{r}_D\right| + F_{Bx}\left|\delta \boldsymbol{r}_B\right| = 0$

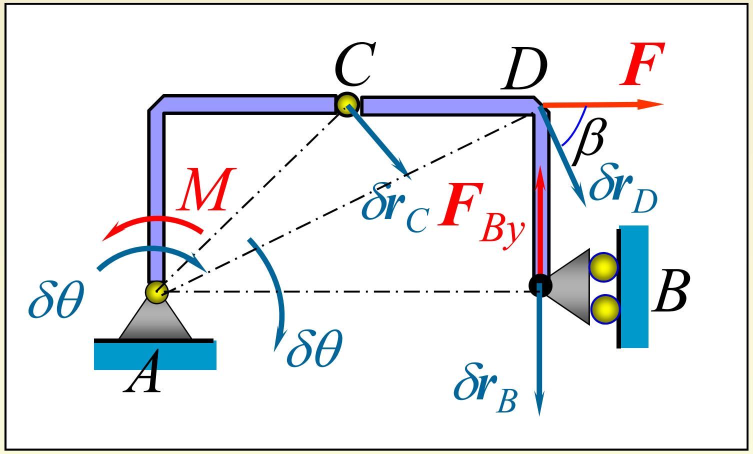
$$(-M + Fa + 2F_{Bx}\cdot a)\delta\theta = 0$$

$$F_{Bx}=\frac{M}{2a}-\frac{F}{2}$$

2. 求铰B的垂直约束力。 解除铰B的垂直约束，换成垂直辊轴再加上垂直约束力$\boldsymbol{F}_{By}$。给杆AC一微小转角$\delta\theta$ ，杆BC的转动中心在A，可得有关虚位移为

$$|\delta \boldsymbol{r}_B|=2a\cdot\delta\theta,\quad \delta x_D=a\cdot\delta\theta$$

δx_D表示$\delta \boldsymbol{r}_D$在x轴的投影。虚位移原理给出

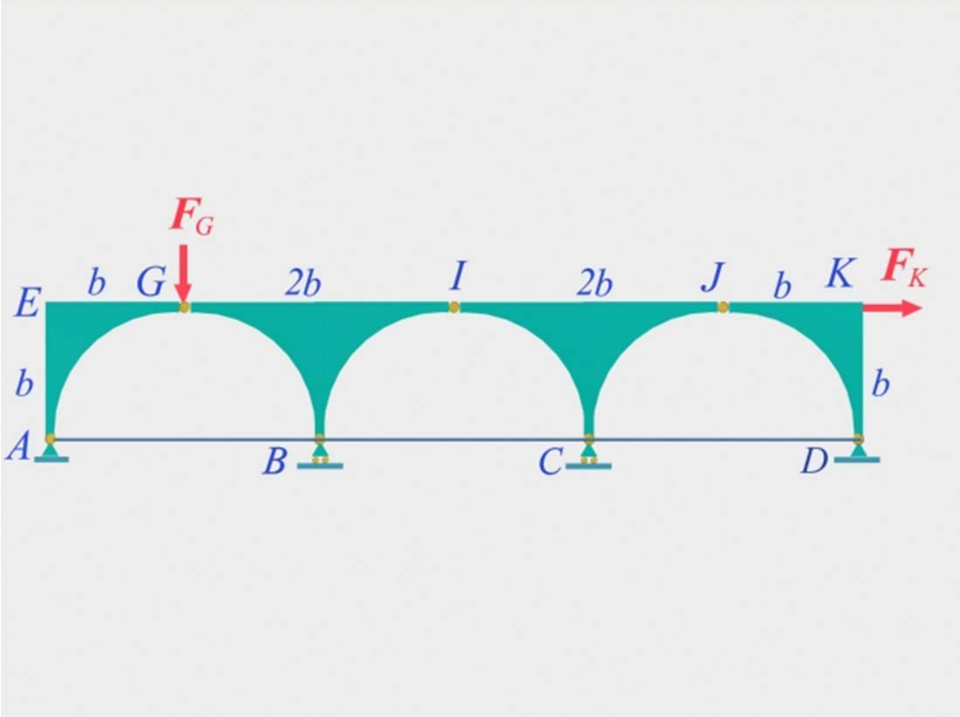


$$\delta W=-M\cdot\delta\theta+F\cdot\delta x_D-F_{By}|\delta \boldsymbol{r}_B|=0$$

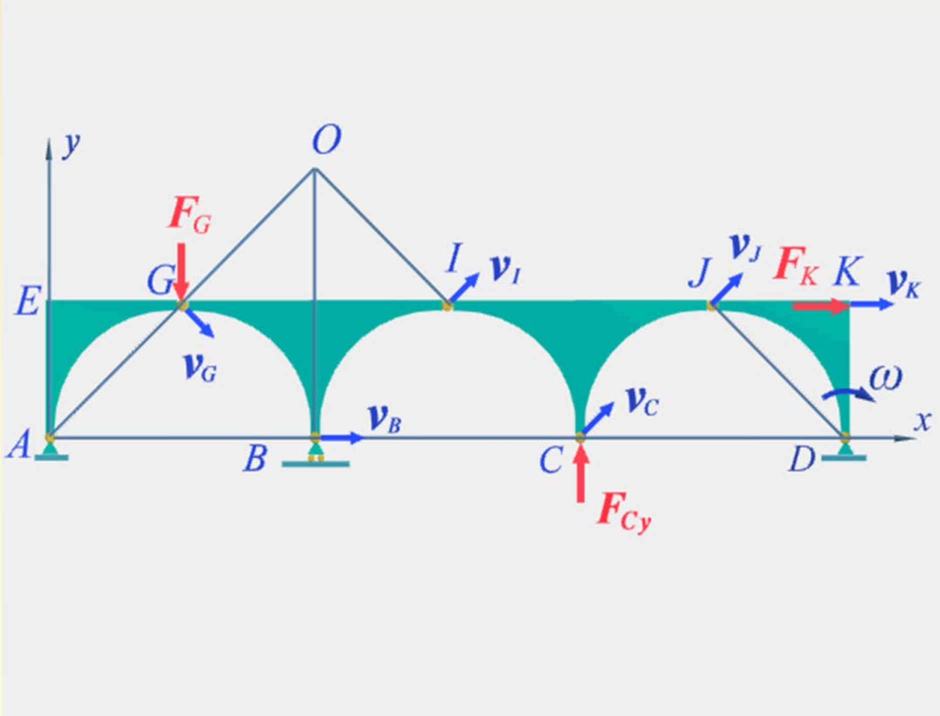
$$(-M+Fa-2F_{By}a)\delta\theta=0$$

$$F_{By}=-\frac{M}{2a}+\frac{F}{2}$$

讨论



F_G
F_K
E
b
G
2b
I
J
K
A
B
C
D

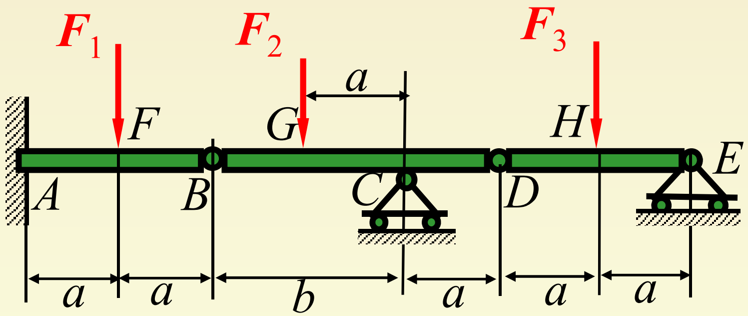


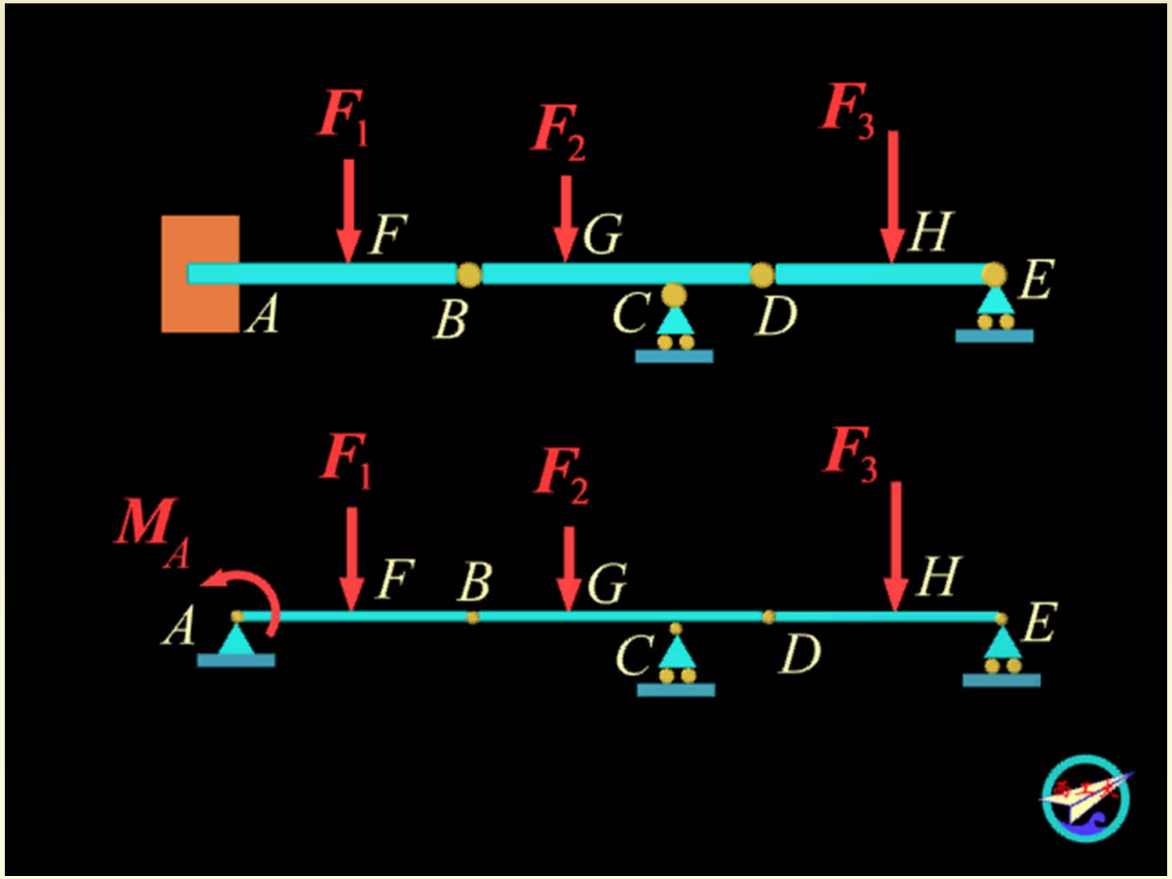
y
O
F_G
G
E
I
v_I
J
v_J
F_K
K
v_K
v_G
v_B
v_C
ω
x
A
B
C
D
F_{Cy}

图片

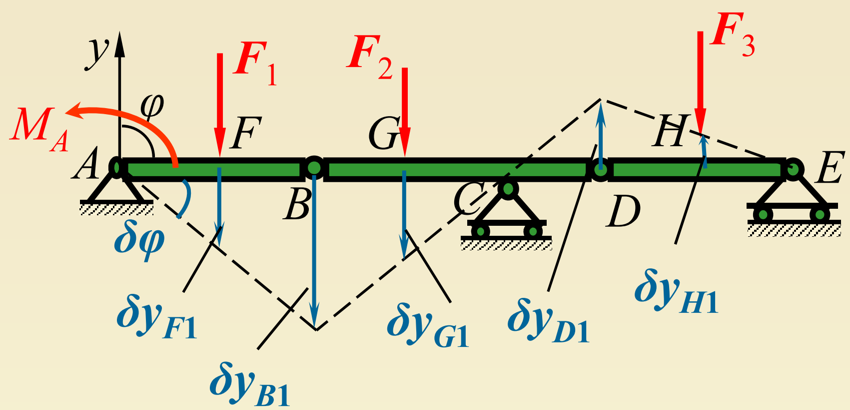
例 题 6-10

例题6-5 如图所示为连续梁。载荷 F_1= 800 N， F_2= 600 N， F_3= 1000 N，尺寸a= 2 m， b= 3 m，求固定端A的约束力。





F_1
F_2
F_3
F
G
H
A
B
C
D
E
M_A
F_1
F_2
F_3
F
B
G
H
A
C
D
E



解： 1. 为了求出固定端A的约束力偶M_A，可将固定端换成铰链，而把固定端的约束力偶视作为主动力。

设杆系的虚位移用广义坐标的独立变分$\delta\varphi$表示，有

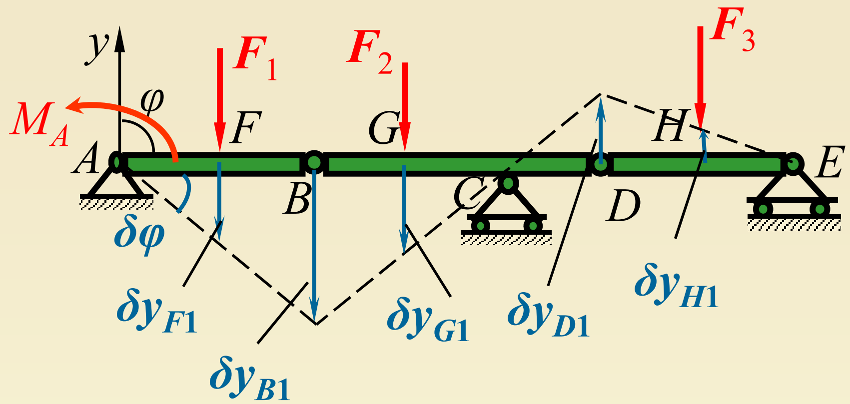
$$-M_A\cdot\delta\varphi+F_1\cdot\delta y_{F1}+F_2\cdot\delta y_{G1}-F_3\cdot\delta y_{H1}=0 \qquad \text{(a)}$$

用几何法求各点的虚位移。由图可知：

$$\delta y_{F1}=a\delta\varphi=2\delta\varphi$$

$$\delta y_{G1}=\frac{a}{b}\delta y_{B1}=\frac{2}{3}\times4\delta\varphi=\frac{8}{3}\delta\varphi$$

$$\delta y_{H1}=\frac{a}{2a}\delta y_{D1}=\frac{1}{2}\times\frac{a}{b}\times\delta y_{B1}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times4\delta\varphi=\frac{4}{3}\delta\varphi$$



代入式(a)得

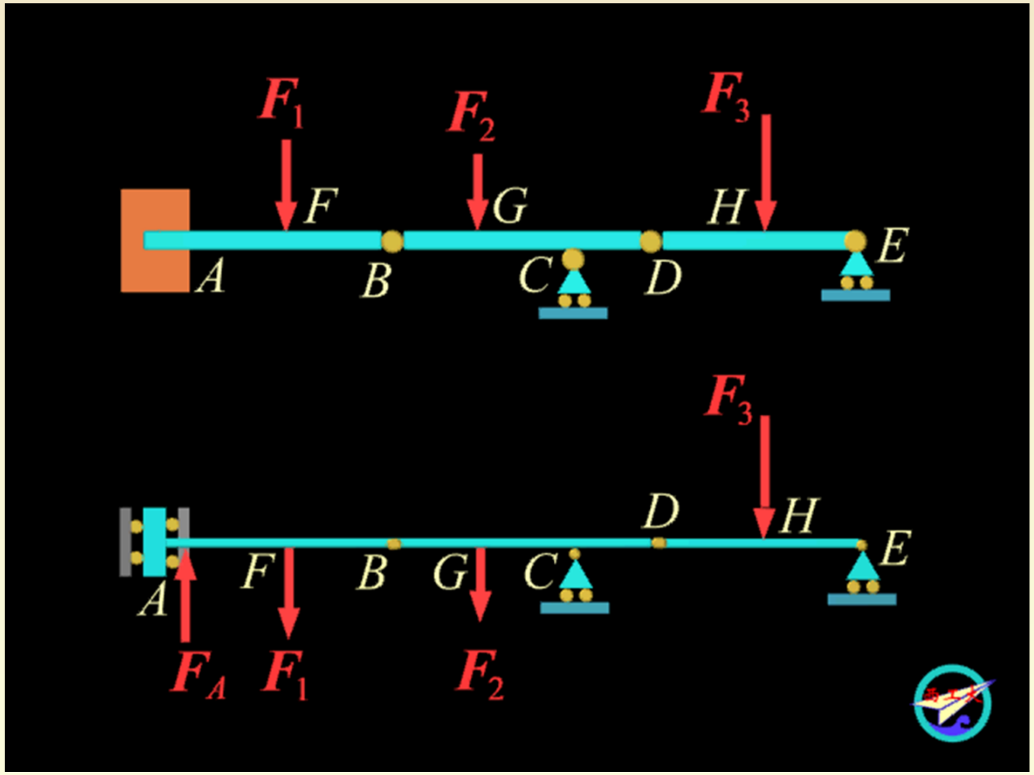
$$(-M_A + 2F_1 + \frac{8}{3}F_2 - \frac{4}{3}F_3)\delta\varphi = 0$$

因广义坐标的独立变分$\delta\varphi$为任意微量

$$\delta\varphi \neq 0$$

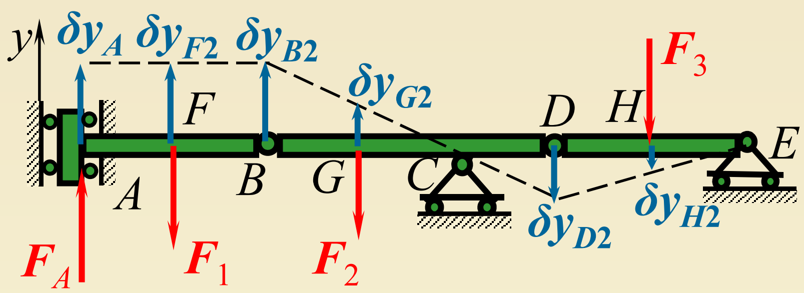
故

$$M_A = 2F_1 + \frac{8}{3}F_2 - \frac{4}{3}F_3 = 1867\ \text{N}\cdot\text{m}$$



F_1
F_2
F_3
F
G
H
E
A
B
C
D
F_3
D
H
E
F
B
G
C
A
F_A
F_1
F_2

2. 为了求出固定端A的约束力$\boldsymbol{F}_A$，应将A端约束换成铅直滚轮，而把固定端的铅直约束力$\boldsymbol{F}_A$视作为主动力。



设杆系的虚位移用广义坐标的独立变分δy_A表示

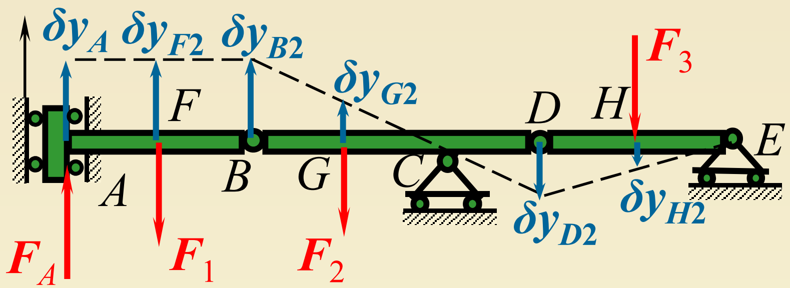
$$F_A\times\delta y_A - F_1\times\delta y_{F2} - F_2\times\delta y_{G2} + F_3\times\delta y_{H2} = 0 \qquad \text{(b)}$$

用几何法求各点的虚位移。因杆AB只能平动，故：

$$\delta y_{F2} = \delta y_{B2} = \delta y_A$$

$$\delta y_{G2} = \frac{a}{b}\delta y_{B2} = \frac{a}{b}\delta y_A = \frac{2}{3}\delta y_A$$

$$\delta y_{H2} = \frac{a}{2a}\delta y_{D2} = \frac{1}{2}\frac{a}{b}\times\delta y_{B2} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\delta y_A = \frac{1}{3}\delta y_A$$



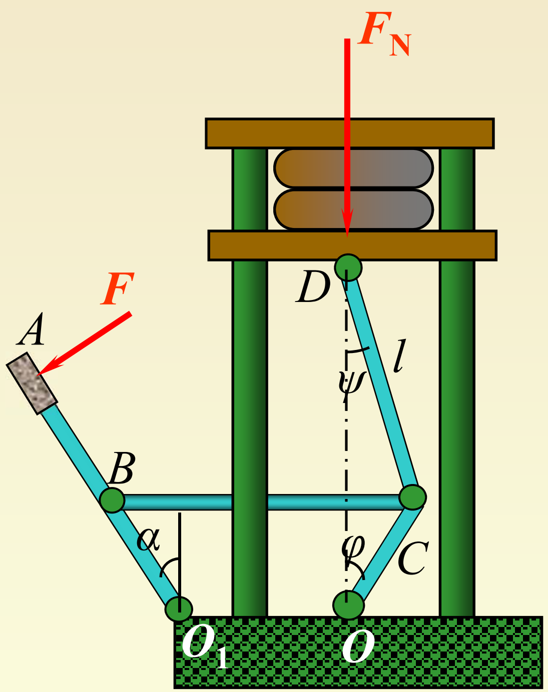
代入式（b）得

$$(F_A - F_1 - \frac{2}{3}F_2 + \frac{1}{3}F_3)\delta y_A = 0$$

因 $\delta y_A \neq 0$，故

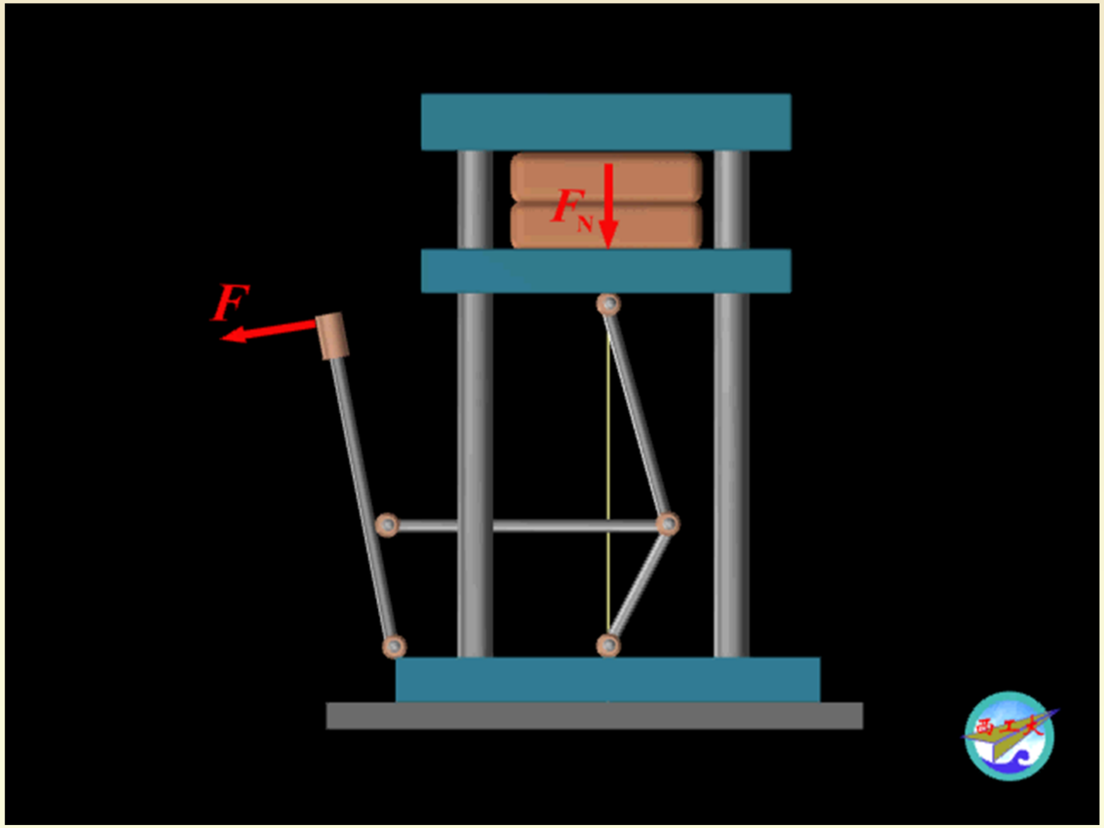
$$F_A = F_1 + \frac{2}{3}F_2 - \frac{1}{3}F_3 = 867\ \ \mathrm{N\cdot m}$$

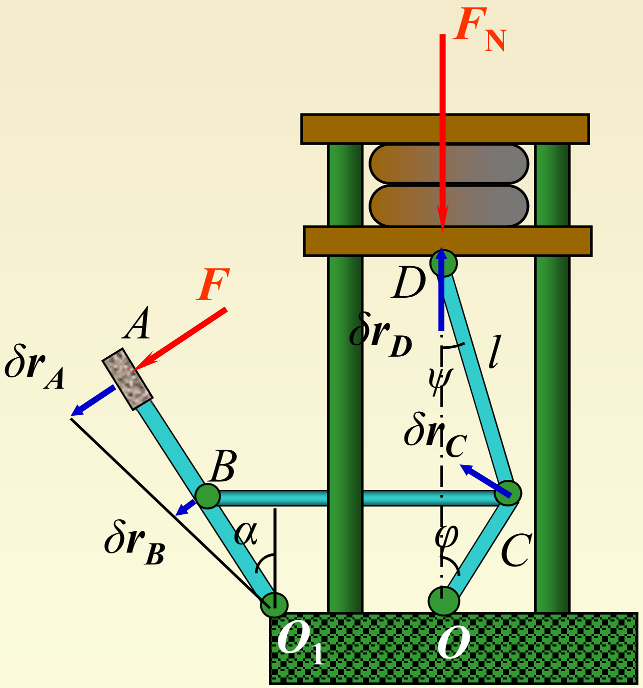
例 题 6-16



例题6-6 杠杆式压力机简图如图所示。手柄O_1A通过拉杆BC带动连杆机构OCD，推动压板D进行挤压。试求在图示位置平衡时，垂直于手柄的主动力$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{F}_N$压力间的关系。

§6-5 虚位移原理





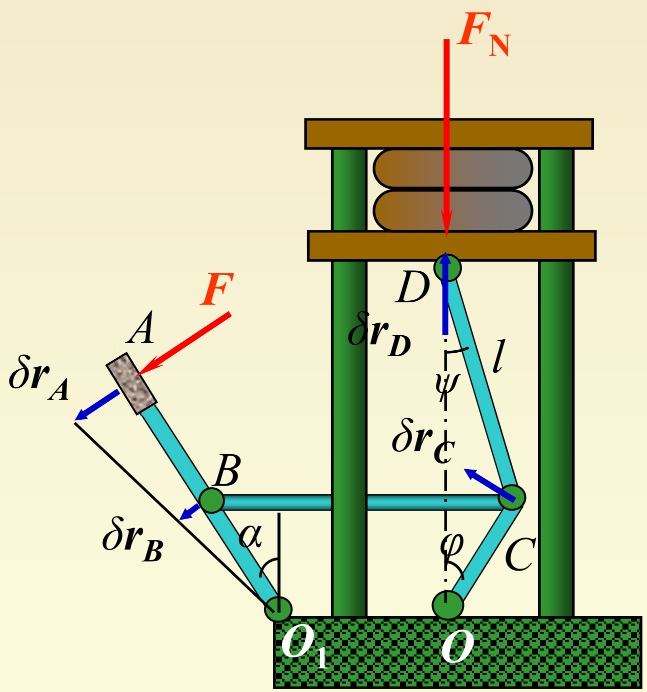
解： 选取机构为研究对象，图上仅画出作用在质点系上的主动力$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$。$\delta \boldsymbol{r}_A$，$\delta \boldsymbol{r}_B$，$\delta \boldsymbol{r}_C$和$\delta \boldsymbol{r}_D$分别表示$A$，$B$，$C$和$D$点的虚位移，均画在图上。

主动力在虚位移的元功之和为零，有

$$\boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_D = 0 \qquad \text{(a)}$$

根据刚体不变形的性质，刚体上任意两点的虚位移在两点连线上的投影必定相等。对于杆CD，有

$$\delta r_C \cos\ (90^\circ - \varphi - \psi) = \delta r_D \cos\ \psi$$



或

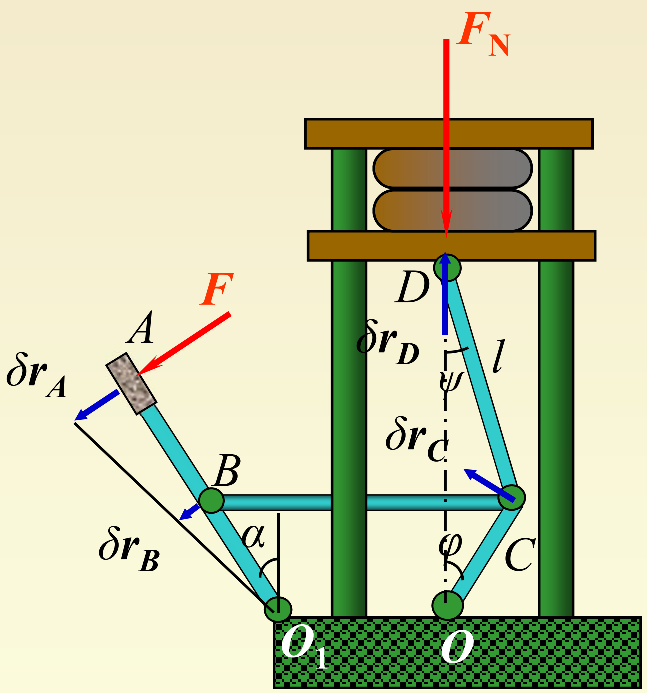
$$\delta r_C = \frac{\cos\ \psi}{\sin\ (\varphi + \psi)} \delta r_D \qquad \text{(b)}$$

对于杆BC，有

$$\delta r_B \cos\ \alpha = \delta r_C \cos\ \varphi$$

或

$$\delta r_B = \frac{\cos\ \varphi}{\cos\ \alpha} \delta r_C \qquad \text{(c)}$$



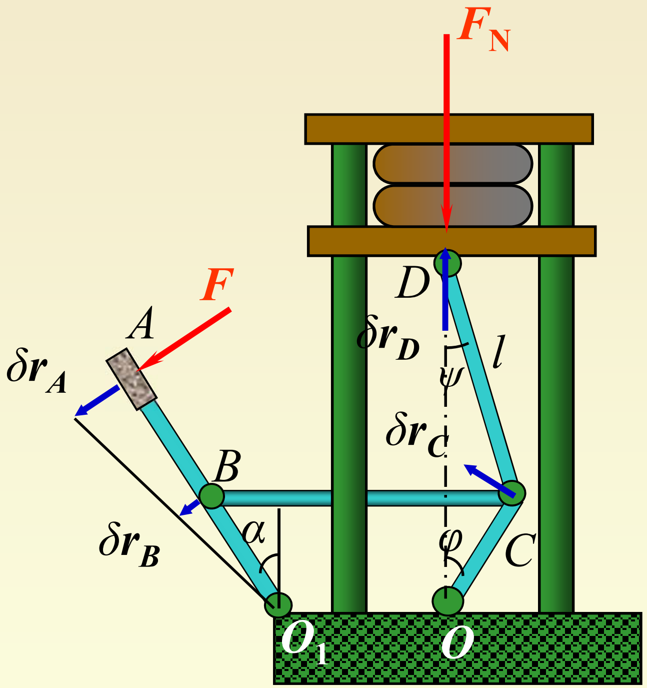
对于杆AB，有

$$\delta r_A = \frac{O_1A}{O_1B}\delta r_B = n\delta r_B \qquad \text{(d)}$$

其中n为长度O_1A与O_1B的比值。由（b），（c），（d）三式可得δr_A与δr_D的关系为

$$\delta r_A = n\delta r_B = n\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\delta r_C$$

$$= n\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\times\frac{\cos\psi}{\sin(\varphi+\psi)}\delta r_D \qquad \text{(e)}$$



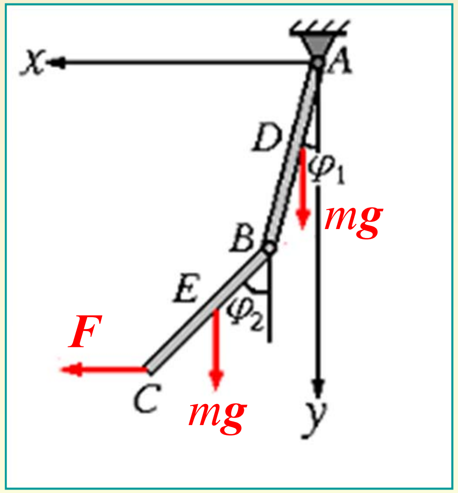
将式（e）代入（a），可得F，F_N两力的比为

$$\frac{F_N}{F}=\frac{\delta r_A}{\delta r_D}=n\frac{\cos\ \varphi}{\cos\ \alpha}\times\frac{\cos\ \psi}{\cos(\varphi+\psi)}$$

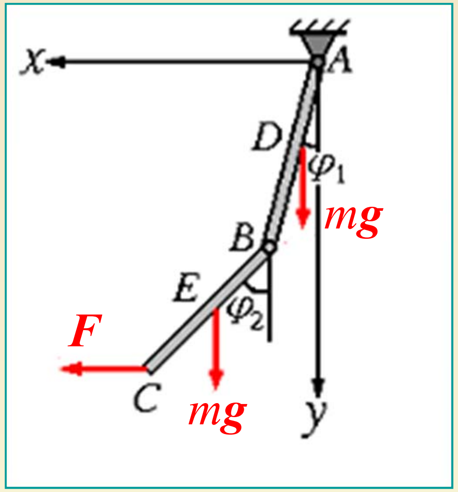
$$=\frac{n}{\cos\ \alpha}\times\frac{1}{\tan\ \varphi+\tan\ \psi}$$

由此可知。为了用较小的推力F产生较大的压力F_N，应当使φ和ψ尽量小。

例题6-7 图中两根匀质刚杆各长 $2l$，质量为 m，在 B 端用铰链连接，A 端用铰链固定，而自由端 C 有水平力 $\boldsymbol{F}$ 作用，求系统在铅直面内的平衡位置。



解： 本例的系统具有两个自由度，它的位置可以用角 φ_1 和 φ_2 (以顺时针为正)来表示。各主动力的作用点有关坐标是



$$y_D = l\cos\varphi_1$$

$$y_E = 2l\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2$$

$$x_C = 2l\sin\varphi_1 + 2l\sin\varphi_2$$

这就是约束方程。

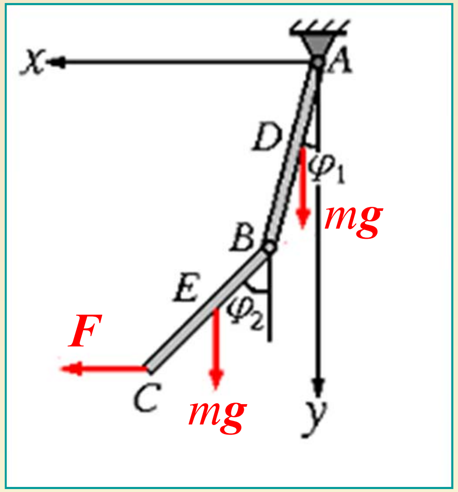
当角 φ_1 和 φ_2 获得变分 $\delta\varphi_1$ 和 $\delta\varphi_2$ 时，各点的有关虚位移是

$$\delta y_D = -l\sin\varphi_1\delta\varphi_1$$

$$\delta y_E = -l(2\sin\varphi_1\delta\varphi_1 + \sin\varphi_2\delta\varphi_2)$$

$$\delta x_C = 2l(\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + \cos\varphi_2\delta\varphi_2)$$

根据虚位移原理的平衡方程，有



$$\begin{aligned}\sum \delta W &= F\delta x_C + mg\delta y_D + mg\delta y_E \\ &= F2l(\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + \cos\varphi_2\delta\varphi_2) - mgl\sin\varphi_1\delta\varphi_1 \\ &\quad - mgl(2\sin\varphi_1\delta\varphi_1 + \sin\varphi_2\delta\varphi_2) \\ &= 0\end{aligned}$$

即

$$(2F\cos\varphi_1 - 3mg\sin\varphi_1)l\delta\varphi_1 + (2F\cos\varphi_2 - mg\sin\varphi_2)l\delta\varphi_2 = 0$$

因为 $\delta\varphi_1$ 和 $\delta\varphi_2$ 是彼此独立的，所以上式可以分解成两个独立方程

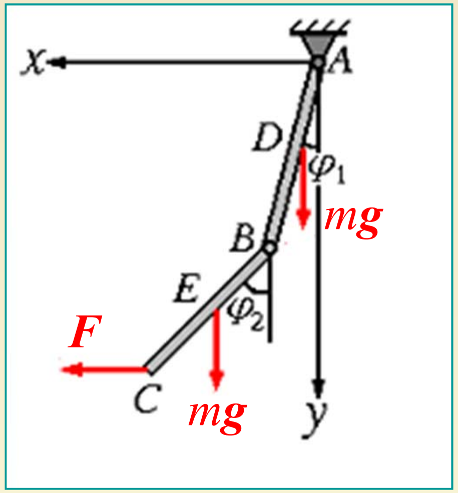
$$2F\cos\varphi_1 - 3mg\sin\varphi_1 = 0$$

$$2F\cos\varphi_2 - mg\sin\varphi_2 = 0$$

从而求得平衡时的角度 φ_1 和 φ_2

$$\varphi_1 = \arctan\frac{2F}{3mg}$$

$$\varphi_2 = \arctan\frac{2F}{mg}$$



§6-6 广义坐标·广义坐标形式的虚位移原理

- 广义坐标
- 广义虚位移
- 广义力
- 广义形式的虚位移原理
- 求广义力的方法
- 主动力均为有势力的情形下的广义力

§6-6　广义坐标·广义坐标形式的虚位移原理

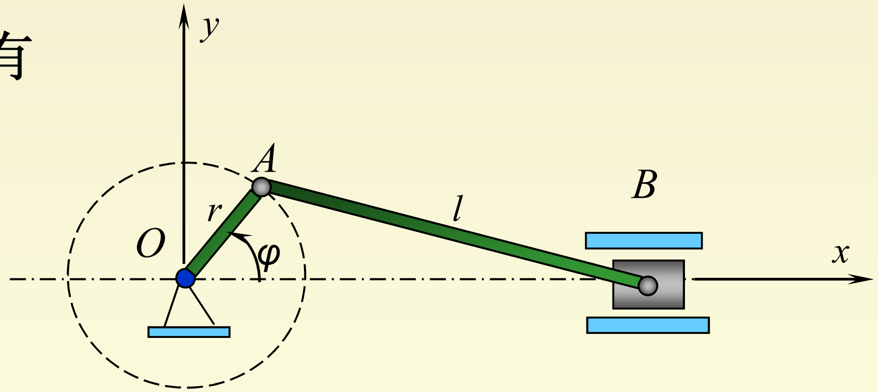
一、广义坐标

1. 定 义　　用以确定质点系位形的一组独立参变数称为广义坐标。

2. 注 意　　在具体问题中，广义坐标的选取要视问题的性质和方便而定。

3. 例 子

例如在图中，选为φ广义坐标，则有



$$x_A = r\cos\varphi$$

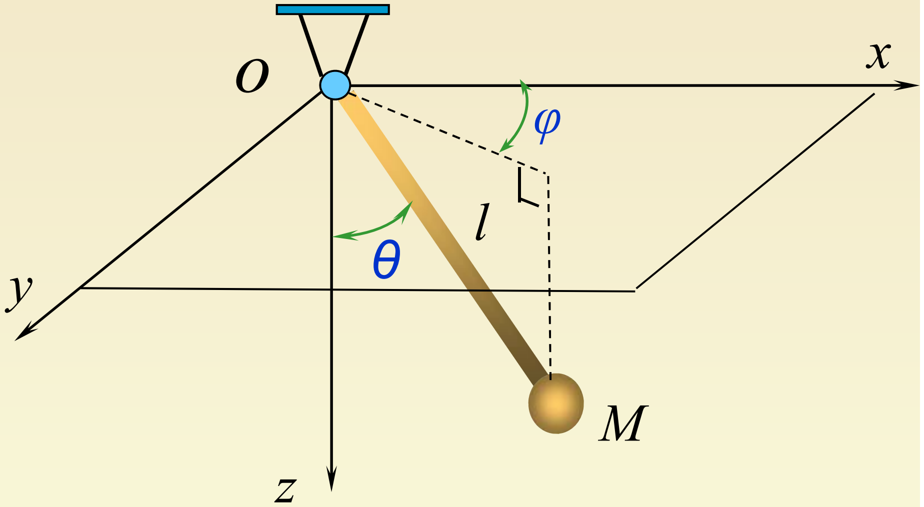
$$y_A = r\sin\varphi$$

$$x_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}$$

$$y_B = 0$$

例如在图中球面摆。

选为θ，φ为广义坐标，则有



$$x = l\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = l\sin\theta\,\mathrm{con}\,\varphi$$

$$z = l\cos\varphi$$

可以选任意合适的变量作为广义坐标。

二、广义虚位移

1. 定 义　　广义坐标的等时变分称为广义虚位移，记为δq_j。

2. 虚位移间的广义坐标变换式

一般情况下，由n个质点A_1，A_2，…，A_n组成的系统，受到s个约束（即有s个独立的约束方程）时，总可以选取k=3m-s个广义坐标q_1，q_2，…，q_k来确定它的位形。于是，质点系内任一点A_i的矢径可表示成广义坐标的函数，即

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1,\ q_2,\ \dots, q_k;\ t) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

取变分，可得虚位移间的广义坐标变换式

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

§ 6-6　广义坐标·广义坐标形式的虚位移原理

矢径可表示成广义坐标的函数

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1,\ q_2,\ ....,\ q_k;\ t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

取变分，可得虚位移间的广义坐标变换式

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

例子： 设曲柄长$OA=r$，连杆长$AB=l$，则点A和B的坐标为

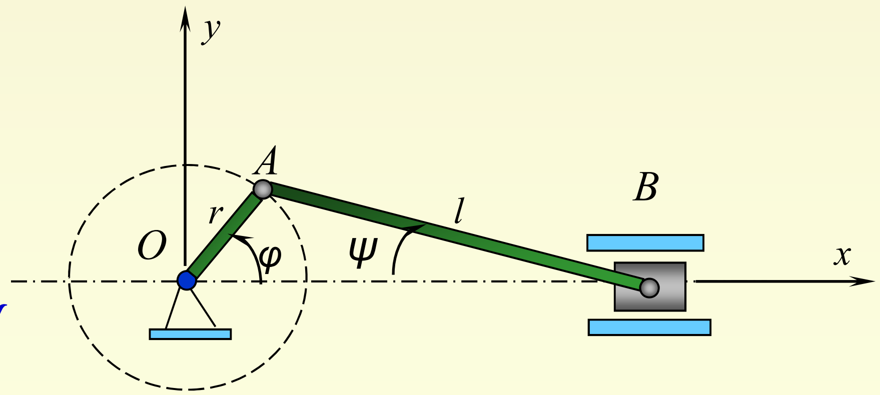
$$x_A = r\cos\varphi, \qquad y_A = r\sin\varphi, \qquad x_B = r\cos\varphi + l\cos\psi$$

求变分，有

$$\delta x_A = -r\sin\varphi\delta\varphi,$$

$$\delta y_A = r\cos\varphi\delta\varphi$$

$$\delta x_B = -r\sin\varphi\delta\varphi - l\sin\psi\delta\psi$$



3. 一个结论

对于完整系统，独立的广义坐标变分数目（即广义虚位移数）等于系统的独立的虚位移的个数，因而也等于系统的自由度数目。

三、广义力

1. 定义 将前面所得虚位移间的广义坐标变换式

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

代入虚位移原理 $\sum_{i=1}^{n} \delta W(\boldsymbol{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i . \delta \boldsymbol{r}_i = 0$ 有

$$\sum_{i=1}^{n} \delta W(\boldsymbol{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{k} \left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

令 $\boxed{Q_j = \sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$

则上式为 $\sum_{i=1}^{n} \delta W(\boldsymbol{F}_i) = \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j = 0$

式中的 $Q_j = \sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$ 称为对应广义坐标 q_j 的**广义力**。

广义力

$$\boxed{Q_j = \sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}} \qquad (j=1,\ 2,\ \dots,\ k)$$

2. 广义力的量纲　　广义力的量纲由它对应的广义虚位移δq_j 而定。

当δq_i的量纲是长度时，$\boldsymbol{Q}_j$的量纲就是力量纲；当δq_j量纲是角度时，$\boldsymbol{Q}_j$的量纲就是力矩的量纲。

3. 广义力 Q_j 的解析表达式

如果用直角坐标，将A_i的坐标x_i，y_i，z_i用广义坐标表示成

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_k; t)$$

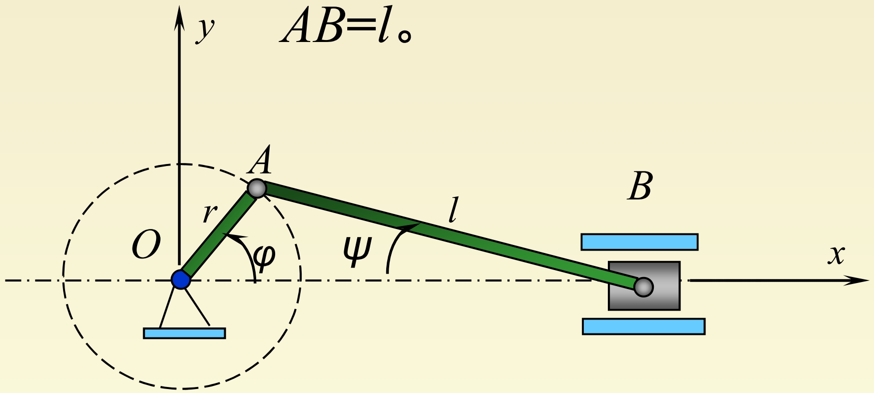
$$y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_k; t)$$

$$z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_k; t)$$

因 $$\boldsymbol{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k}$$

故 $$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\boldsymbol{k}$$

例子： 设曲柄长$OA=r$，连杆长$AB=l$。



$$x_A = r\cos\varphi,$$

$$y_A = r\sin\varphi,$$

$$x_B = r\cos\varphi + l\cos\psi$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\boldsymbol{k}$$

$$\boxed{Q_j=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}}$$

又 $$\boldsymbol{F}_i=F_{ix}\boldsymbol{i}+F_{iy}\boldsymbol{j}+F_{iz}\boldsymbol{k}$$

因而广义力$\boldsymbol{Q}_j$的表达式可写成解析式

$$Q_j=\sum_{t=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

四、广义坐标形式的虚位移原理

$$\sum_{i=1}^{n}\delta W(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j=0$$

对于完整系统，各个广义系统的变分δq_i都是独立的，故得

$$Q_j=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

即受双面、定常、理想、完整约束的质点系，其平衡的必要和充分的条件是，系统的所有广义力都等于零。

上式表示一组方程，是彼此独立的，其数目等于广义坐标的数目，也恰好等于系统的自由度。

五、求广义力的方法

- 应用广义力定义

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\delta W(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j=0$$

- 应用虚功

特别指出，求广义力时并不一定要从定义即出发。在解决具体问题是时，从元功出发直接求广义力往往更为方便。注意到各广义坐标q_1，q_2，…，q_k是彼此独立的，因此为求某个广义力Q_t可以取一组特殊的虚位移，只令 $\delta q_t\neq 0$，而其余的 $\delta q_j=0\ (j\neq t)$ 从而写成

$$\left[\sum\delta W\right]_t=Q_t\delta q_t$$

式中 $\left[\sum\delta W\right]_t$表示仅虚位移$\delta q_t$非零时系统上主动力的虚功之和。于是，求得对应广义坐标q_t的广义力

$$Q_t=\frac{\left[\sum\delta W\right]_t}{\delta q_t}\qquad(t=1,2,\dots,k)$$

六、　主动力均为有势力的情形下的广义力

在主动力均为有势力的情形下，广义力Q_j有更简明的表达形式。

系统有势能函数

$$V=V(x_1\,,\ y_1\,,z_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ z_n)=V(q_1\,,\ q_2\,,\ \ldots,q_k)$$

主动力在坐标轴上的投影分别为

$$F_{ix}=-\frac{\partial V}{\partial x_i},\qquad F_{iy}=-\frac{\partial V}{\partial y_i},\qquad F_{iz}=-\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

由

$$Q_j=\sum_{t=1}^{n}(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j})$$

于是广义力表达式可写成

$$Q_j=-\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j})$$

$$Q_j = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)$$

或简写为

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad j = (1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

亦即，当主动力有势时，对应于每个广义坐标的广义力等于势能函数对该坐标的偏导数冠以负号。

故当主动力有势时，质点系的平衡条件可写成

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

即，在势力场中，具有理想约束的质点系平衡条件为：质点系势能对于每个广义坐标之偏导数分别为零。

故当主动力有势时，质点系主动力的虚功和为

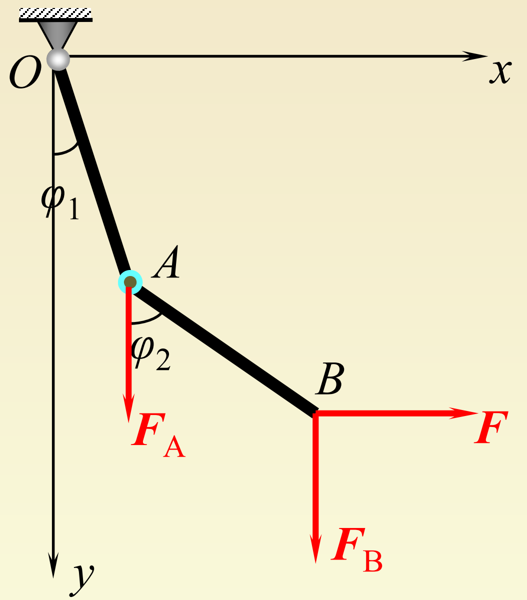
$$\sum_{i=1}^{n}\delta W(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j=\sum_{j=1}^{k}-\frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j=-\delta V$$

故质点系的平衡条件亦可写成

$$\boxed{\delta V=0}$$

即，在势力场中，具有理想约束的质点系平衡条件为：质点系势能在平衡位置处一阶变分为零。亦即平衡位置上保守系统的势能取极值。

例 题 6-13



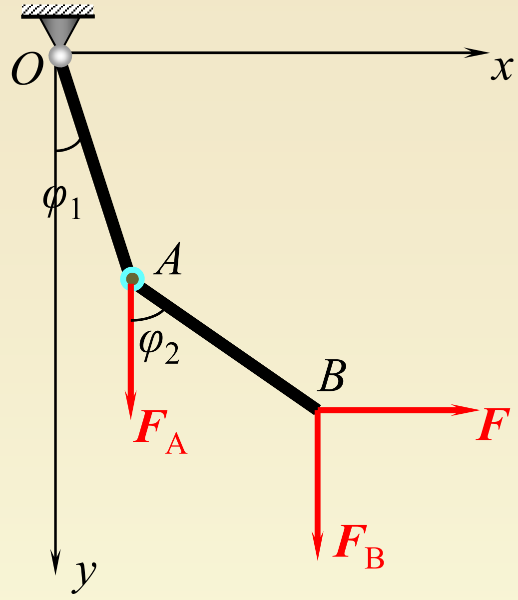
例题6-8 杆OA和AB以铰链连接，O端悬挂于圆柱铰链上，如图所示。杆长$OA=a$，$AB=b$，杆重和铰链的摩擦都忽略不计。今在点A和B分别作用向下的铅垂力$\boldsymbol{F}_A$和$\boldsymbol{F}_B$，又在点B作用一水平力$\boldsymbol{F}$。试求图示位置时广义力，及平衡时φ_1，φ_2与$\boldsymbol{F}_A$，$\boldsymbol{F}_B$，$\boldsymbol{F}$之间的关系。

解： 杆OA和AB的位置可由点A和B的四个坐标x_A，y_A和x_B，y_B完全确定，由于OA和AB杆的长度一定，可列出两个约束方程

$$x_A^2 + y_A^2 = a^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = b^2$$

因此系统有两个自由度。现选择φ_1和φ_2为系统的两个广义坐标，计算其对应的广义力$\boldsymbol{Q}_1$和$\boldsymbol{Q}_2$。



1. 用第一种方法计算。

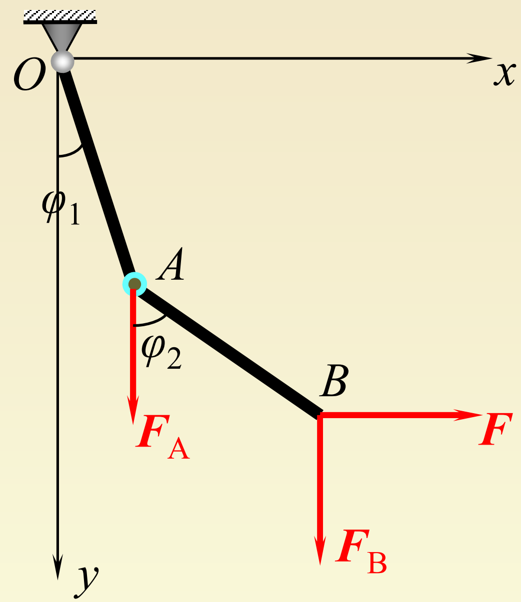
$$Q_1 = F_A \frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1} + F_B \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_1} + F \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_1}$$

$$Q_2 = F_A \frac{\partial y_A}{\partial \varphi_2} + F_B \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_2} + F \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_2} \qquad \text{(a)}$$

$$\boxed{Q_j = \sum_{t=1}^{n} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)}$$

因

$$y_A = a\cos\varphi_1$$
$$y_B = a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2 \qquad \text{(b)}$$
$$x_B = a\sin\varphi_1 + b\sin\varphi_2$$



故

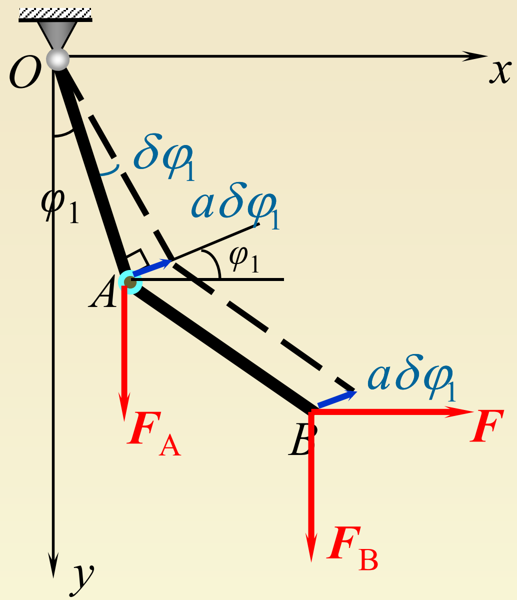
$$\frac{\partial y_A}{\partial\varphi_1} = -a\sin\varphi_1,\quad \frac{\partial y_B}{\partial\varphi_1} = -a\sin\varphi_1,\quad \frac{\partial x_B}{\partial\varphi_1} = a\cos\varphi_1$$

$$\frac{\partial y_A}{\partial\varphi_2} = 0,\quad \frac{\partial y_B}{\partial\varphi_2} = -b\sin\varphi_2,\quad \frac{\partial y_B}{\partial\varphi_2} = b\cos\varphi_2$$

代入式（a），系统平衡时应有

$$Q_1 = -(F_A + F_B)a\sin\varphi_1 + Fa\cos\varphi_1 = 0$$
$$Q_2 = -F_B b\sin\varphi_2 + Fb\cos\varphi_2 = 0 \qquad \text{(c)}$$

解出 $\tan\varphi_1 = \dfrac{F}{F_A + F_B},\quad \tan\varphi_2 = \dfrac{F}{F_B}$ (d)



2. 用第二种方法计算。

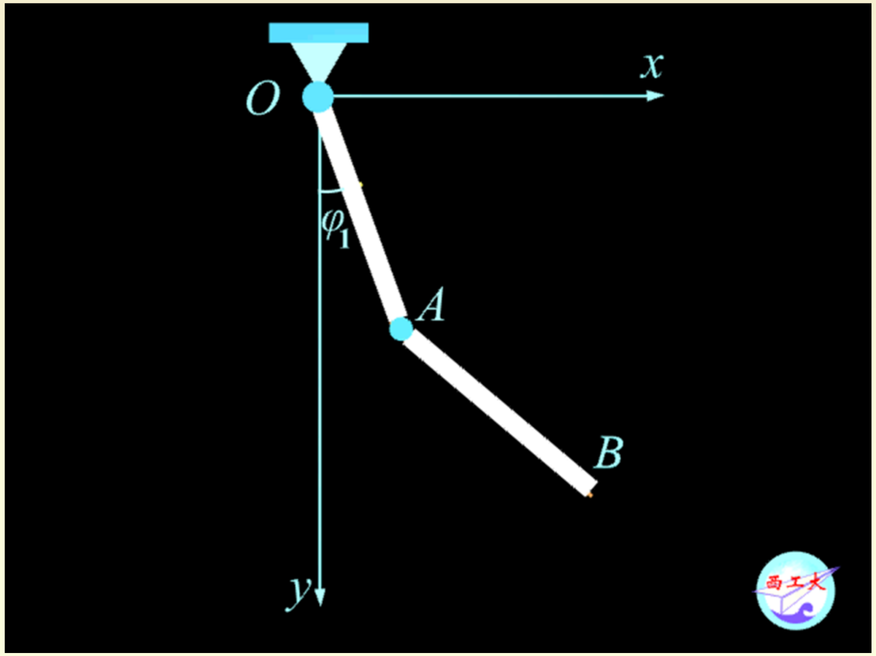
保持φ_2不变，只有$\delta\varphi_1$时，由式（b）的变分可得一组虚位移

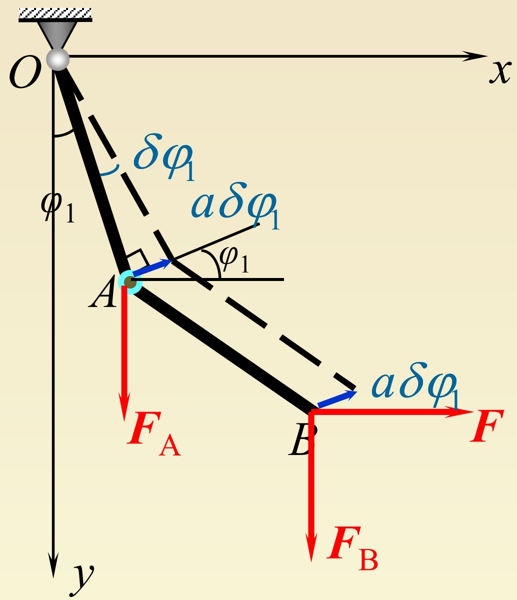
$$y_A = a\cos\varphi_1$$

$$y_B = a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2$$

$$x_B = a\sin\varphi_1 + b\sin\varphi_2$$

（b）





$$y_A = a\cos\varphi_1$$

$$y_B = a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2$$

$$x_B = a\sin\varphi_1 + b\sin\varphi_2$$

（b）

2. 用第二种方法计算。

保持φ_2不变，只有$\delta\varphi_1$时，由式（b）的变分可得一组虚位移

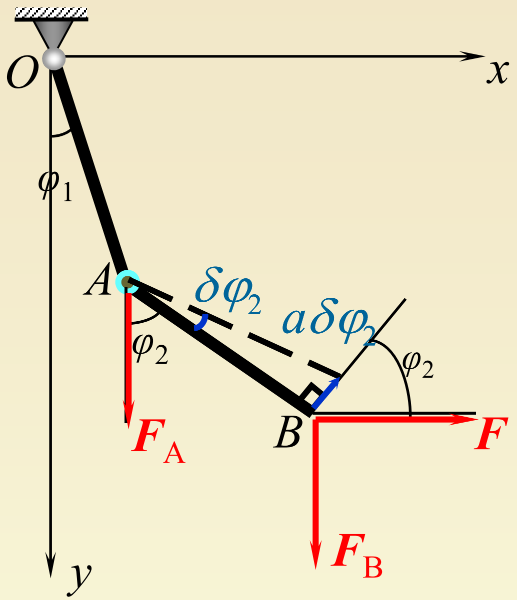
$$\delta y_A = \delta y_B = -a\sin\varphi_1\delta\varphi_1, \quad \delta x_B = a\cos\varphi_1\delta\varphi_1, \tag{e}$$

则对应于φ_1的广义力为

$$Q_1 = \frac{\sum \delta W_1}{\delta\varphi_1} = \frac{F_A\delta y_A + F_B\delta y_B + F\delta x_B}{\delta\varphi_1}$$

将式（e）代入上式，得

$$Q_1 = -(F_A + F_B)a\sin\varphi_1 + Fa\cos\varphi_1$$



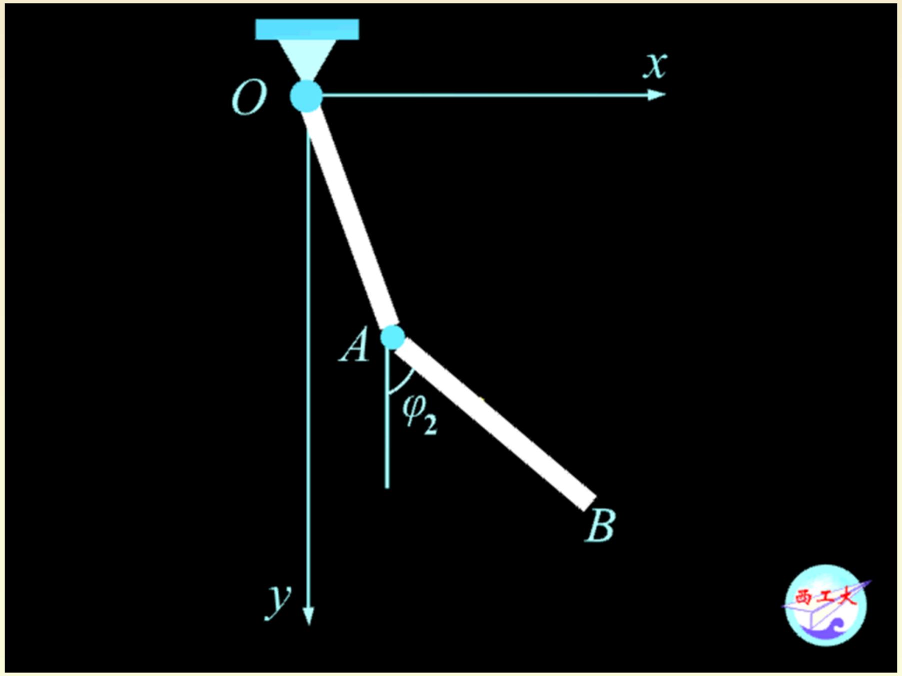
保持φ_1不变，只有$\delta\varphi_2$时，由式（b）的变分可得一组虚位移

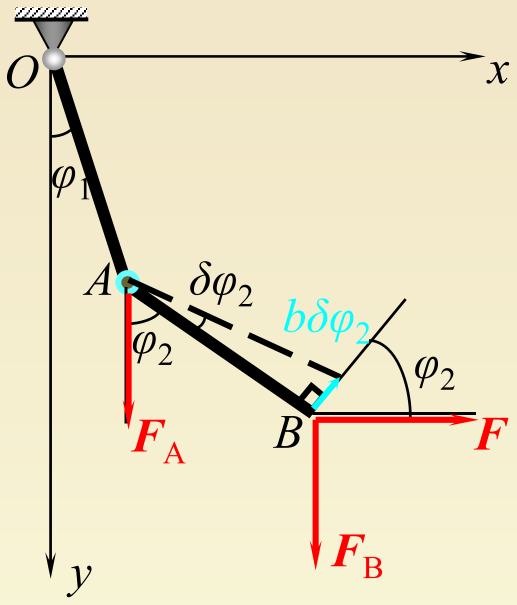
$$y_A = a\cos\varphi_1$$

$$y_B = a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2$$

$$x_B = a\sin\varphi_1 + b\sin\varphi_2$$

（b）





$$y_A = a\cos\ \varphi_1$$
$$y_B = a\cos\ \varphi_1 + b\cos\ \varphi_2$$
$$x_B = a\sin\ \varphi_1 + b\sin\ \varphi_2$$
（b）

保持φ_1不变，只有$\delta\varphi_2$时，由式（b）的变分可得一组虚位移

$$\delta y_A = 0, \quad \delta y_B = -b\sin\ \varphi_2\delta\varphi_2,$$
$$\delta x_B = b\cos\varphi_2\delta\varphi_2$$

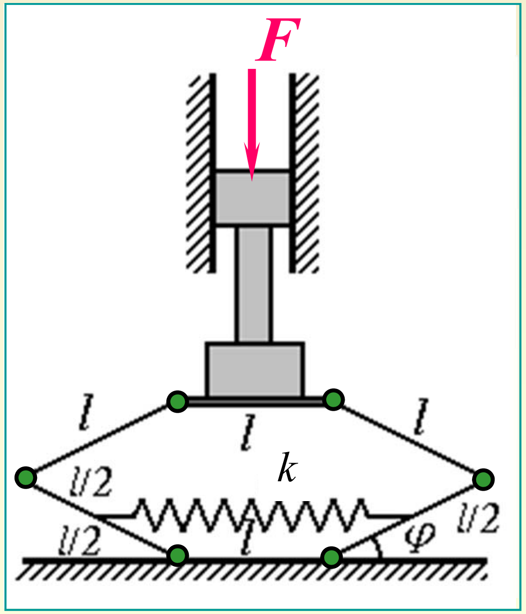
代入对应于φ_2的广义力表达式，得

$$Q_2 = \frac{\sum \delta W_2}{\delta\varphi_2} = \frac{F_A\delta y_A + F_B\delta y_B + F\delta x_B}{\delta\varphi_2}$$
$$= -F_B b\sin\ \varphi_2 + Fb\cos\ \varphi_2$$

两种方法所得的广义力是相同的，显然应得到与式(d) 相同的结果。

例 题 6-19

例题6-9 求图中所示平面铰链缓冲机构的平衡位置。已知机构上部的载荷是 F，各杆的长度和弹簧的原长都是 l。弹簧的刚度系数是 k，不计机构的自重和摩擦。



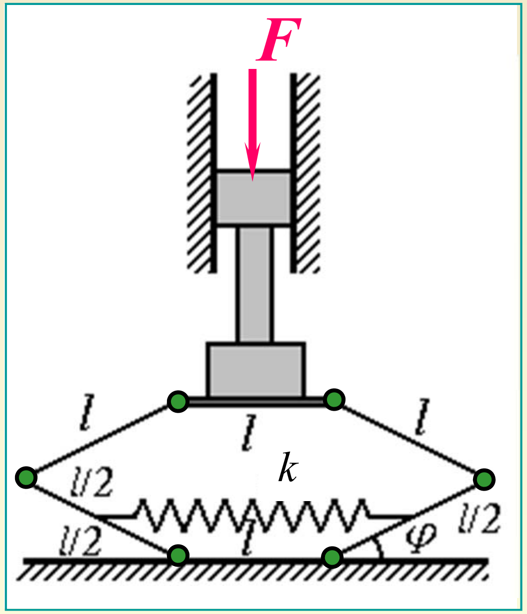
解:　以底线作为重力势能的零点位置，以弹簧原长作为弹簧势能的零点位置。取 φ 为广义坐标，则系统的势能函数

$$V = 2Fl\sin\varphi + \frac{kl^2}{2}\cos^2\varphi$$

而系统的平衡位置的势能应取极值，即有

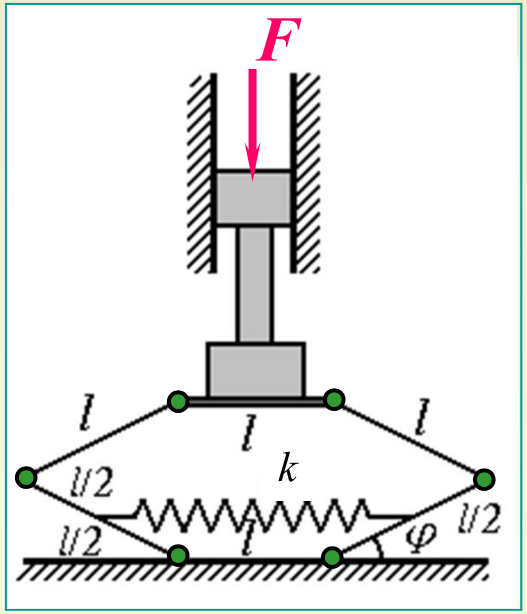
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi} = 2lF\cos\varphi - kl^2\cos\varphi\sin\varphi$$

$$= kl^2\left(\frac{2F}{kl} - \sin\varphi\right)\cos\varphi = 0$$



由此方程求得平衡位置的三个解

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{2F}{kl}\right), \quad \varphi = \frac{\pi}{2}(\text{或} -\frac{\pi}{2})$$



但从实际构造看，可能的平衡位置只有两个，即

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{2F}{kl}\right) \qquad (\text{当}\frac{2F}{kl} \leq 1)$$

$$\text{或}\varphi = \frac{\pi}{2}$$


谢谢大家