



3.3 平面任意力系平衡条件 和平衡方程



1. 平面任意力系的平衡条件和平衡方程

(1) 平面任意力系平衡的充要条件

力系的主矢等于零，且力系对任一点的主矩也等于零。

$$F'_R = 0, \quad M_O = 0$$

(2) 平面任意力系的平衡方程

$$F'_R = \sqrt{F_{Rx}'^2 + F_{Ry}'^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}, \quad M_O = \sum M_O(F_i) = 0$$

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum m_O(F) = 0$$

力系中的各力在其作用平面内两坐轴上的投影的代数和分别等于零，同时力系中的各力对任一点矩的代数和也等于零。



(3) 平面任意力系的平衡方程其他形式

$$\sum F_x = 0, \quad \sum M_A(F) = 0, \quad \sum M_B(F) = 0$$

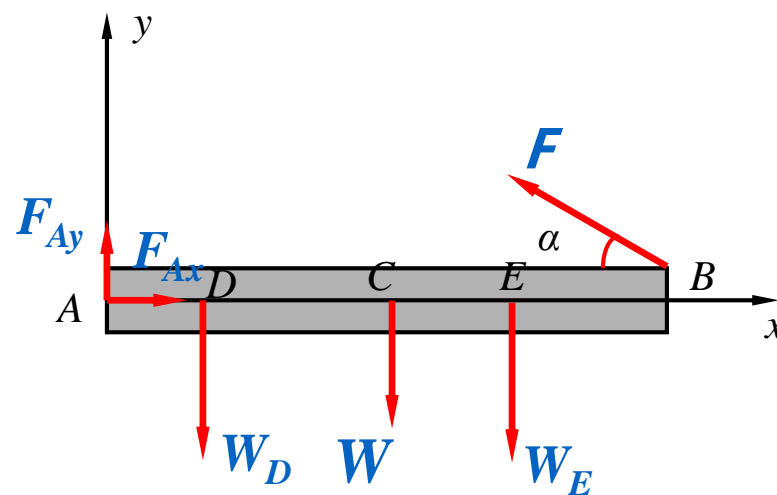
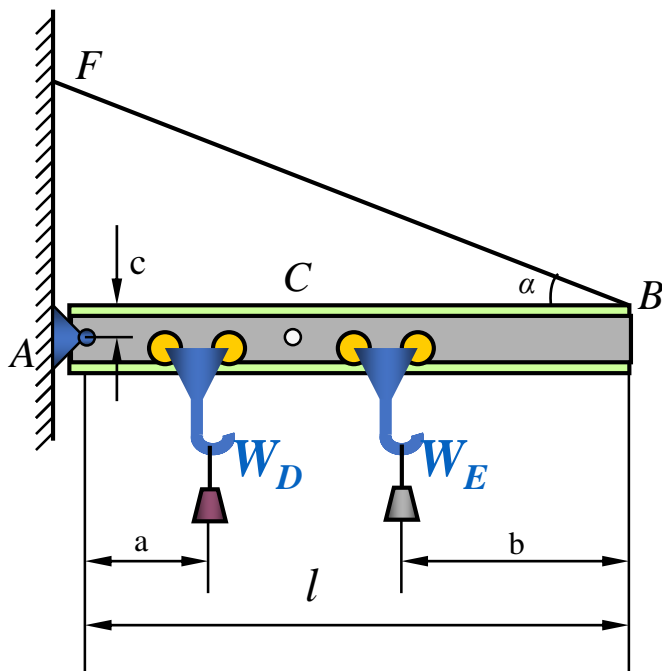
且 A, B 的连线不和 x 轴相垂直。

$$\sum M_A(F) = 0, \quad \sum M_B(F) = 0, \quad \sum M_C(F) = 0$$

A, B, C 三点不共线。



例题1 伸臂式起重机如图所示，匀质伸臂 AB 重 $W=2200\text{N}$ ，吊车 D 、 E 连同吊起重物各重 $W_D=W_E=4000\text{N}$ 。有关尺寸为： $l=4.3\text{m}$ ， $a=1.5\text{m}$ ， $b=0.9\text{m}$ ， $c=0.15\text{m}$ ， $\alpha=25^\circ$ 。试求铰链 A 对臂 AB 的水平和垂直约束力，以及拉索 BF 的拉力。



解：

1. 取伸臂 AB 为研究对象。
2. 受力分析如图。



3. 选如图坐标系，列平衡方程。

$$\sum M_A(F) = 0,$$

$$-W_D \times a - W \times \frac{l}{2} - W_E \times (l - b) + F \cos \alpha \times c + F \sin \alpha \times l = 0$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F \cos \alpha = 0$$

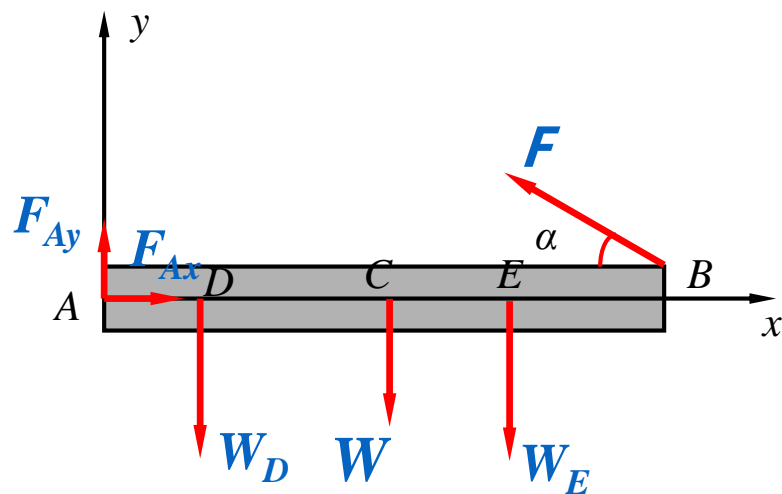
$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - W_D - W - W_E + F \sin \alpha = 0$$

4. 联立求解。

$$F = 12\,456\text{ N}$$

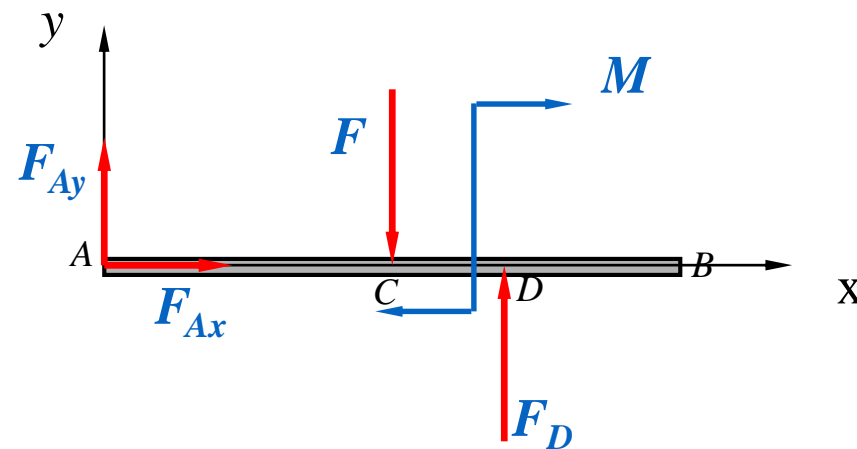
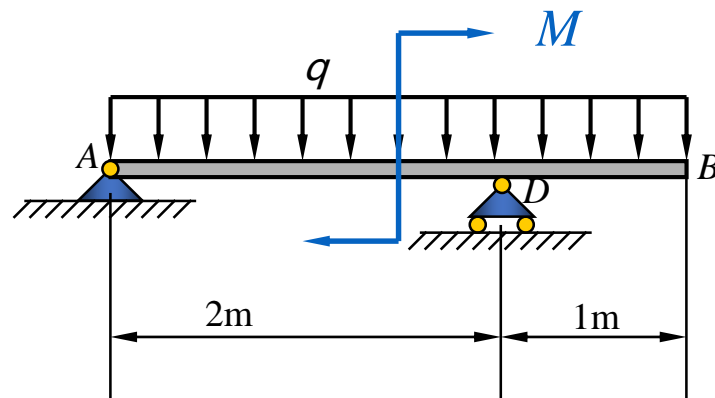
$$F_{Ax} = 11\,290\text{ N}$$

$$F_{Ay} = 4\,936\text{ N}$$





例题2 梁 AB 上受到一个均布载荷和一个力偶作用，已知载荷集度（即梁的每单位长度上所受的力） $q = 100 \text{ N/m}$ ，力偶矩大小 $M = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。长度 $AB = 3 \text{ m}$ ， $DB = 1 \text{ m}$ 。求活动铰支 D 和固定铰支 A 的约束力。



解：

1. 取梁 AB 为研究对象。
2. 受力分析如图，其中 $F = q \times AB = 100 \times 3 = 300 \text{ N}$ ；作用在 AB 的中点 C 。



3. 选如图坐标系，列平衡方程。

$$\sum M_A(F) = 0, \quad -F \times \frac{AB}{2} + F_D \times 2 - M = 0$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

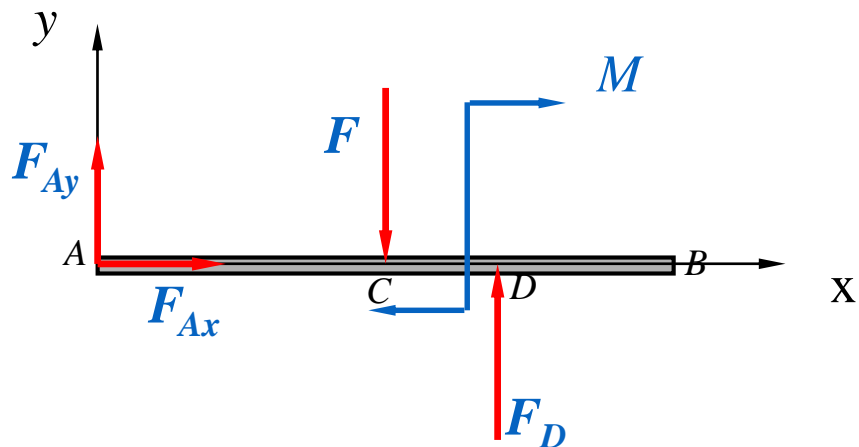
$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F + F_D = 0$$

4. 联立求解。

$$F_D = 475 \text{ N}$$

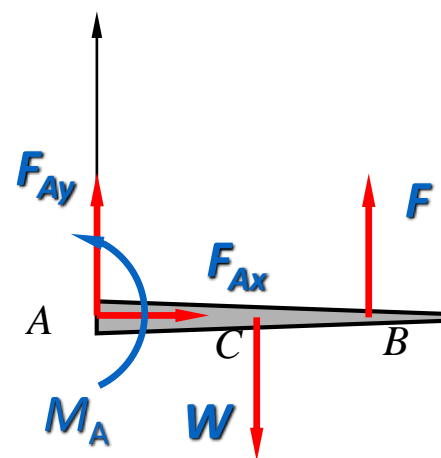
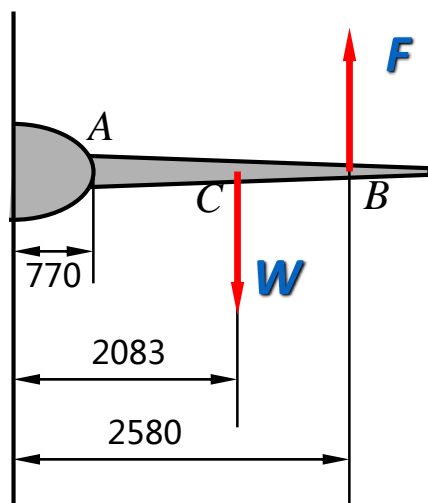
$$F_{Ax} = 0$$

$$F_{Ay} = -175 \text{ N}$$





例题3 某飞机的单支机翼重 $W = 7.8 \text{ kN}$ 。飞机水平匀速直线飞行时，作用在机翼上的升力 $F = 27 \text{ kN}$ ，力的作用线位置如图示，其中尺寸单位是mm。试求机翼与机身连接处的约束力。



解：

1. 取机翼为研究对象。
2. 受力分析如图。



3.选如图坐标系，列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - W + F = 0$$

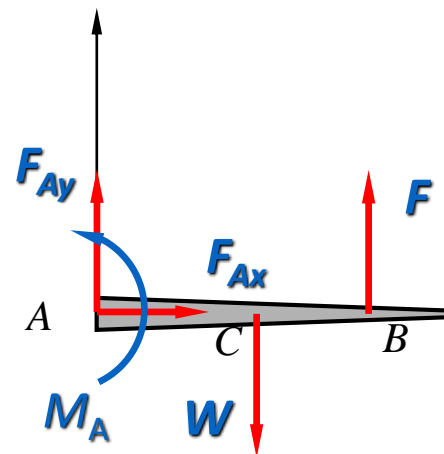
$$\sum M_A(F) = 0, \quad M_A - W \times AC + F \times AB = 0$$

4.联立求解。

$$M_A = -38.6 \text{ kN}\cdot\text{m} \text{ (顺时针)}$$

$$F_{Ax} = 0$$

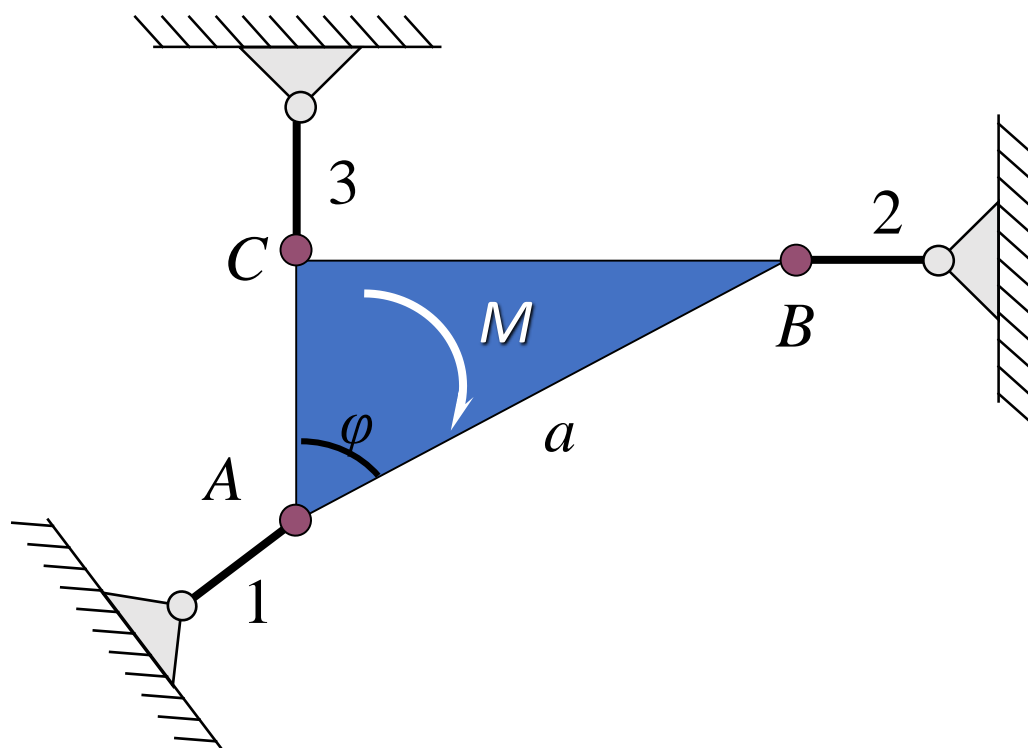
$$F_{Ay} = -19.2 \text{ kN} \text{ (向下)}$$





练习题

已知 M , a , φ , 求三根杆所受的约束力 , 三角块及杆的重量不计。





2. 平面平行力系的平衡条件和平衡方程

(1) 平面平行力系平衡的充要条件

力系中各力的代数和等于零，以及这些力对任一点的矩的代数和也等于零。

(2) 平面平行力系的平衡方程

$$\sum F_y = 0, \quad \sum M_O(F) = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, \quad \sum M_B(F) = 0$$

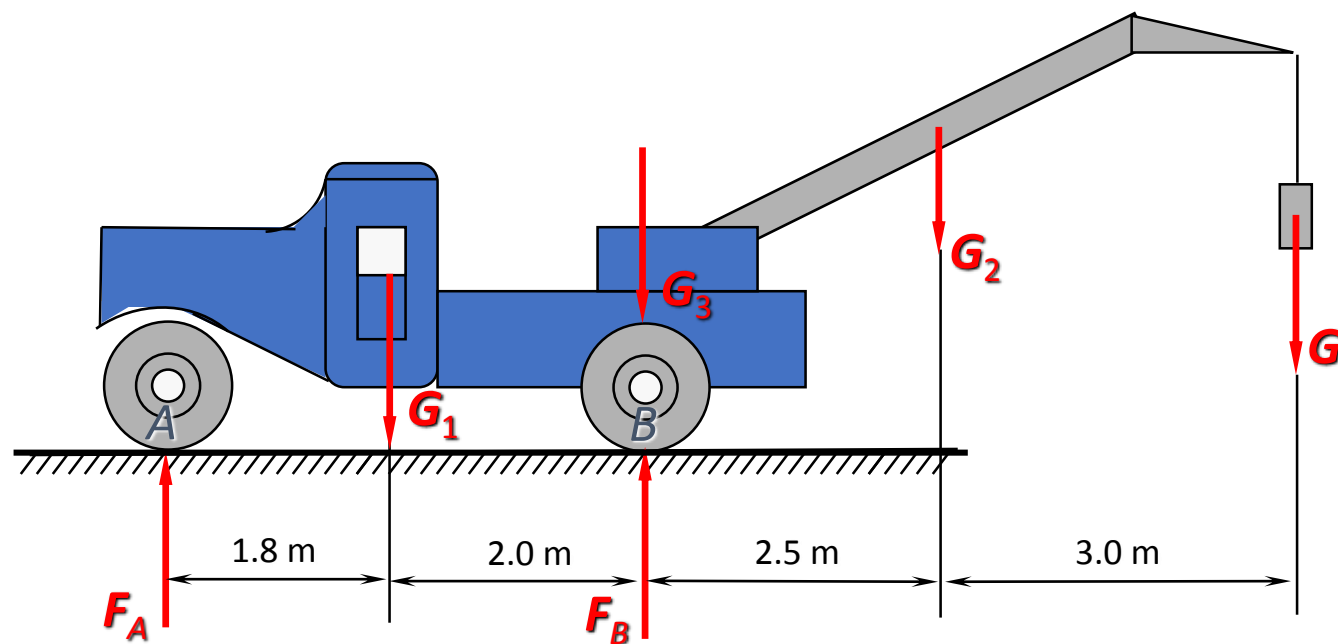
且 A, B 的连线不平行于力系中各力。

由此可见，在一个刚体受平面平行力系作用而平衡的问题中，利用平衡方程只能求解二个未知量。



例题4 一种车载式起重机，车重 $G_1 = 26 \text{ kN}$ ，起重机伸臂重 $G_2 = 4.5 \text{ kN}$ ，起重机的旋转与固定部分共重 $G_3 = 31 \text{ kN}$ 。尺寸如图所示。设伸臂在起重机对称面内，且放在图示位置，试求车子不致翻倒的最大起吊重量

G_{\max} 。





解： 1. 取汽车及起重机为研究对象，
受力分析如图。

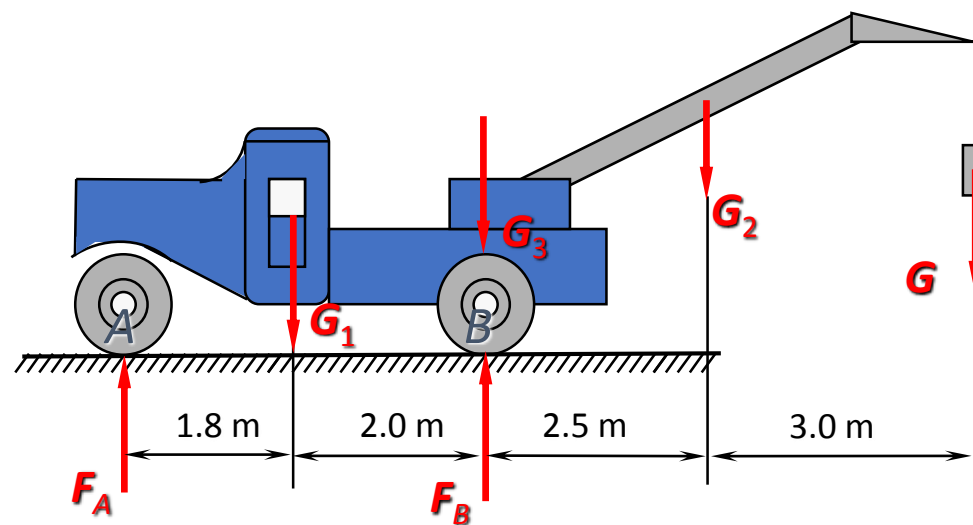
2. 列平衡方程。

$$\sum F = 0,$$

$$F_A + F_B - G - G_1 - G_2 - G_3 = 0$$

$$\sum M_B(F) = 0,$$

$$-G(2.5\text{ m} + 3\text{ m}) - G_2 \times 2.5\text{ m} + G_1 \times 2\text{ m} - F_A(1.8\text{ m} + 2\text{ m}) = 0$$





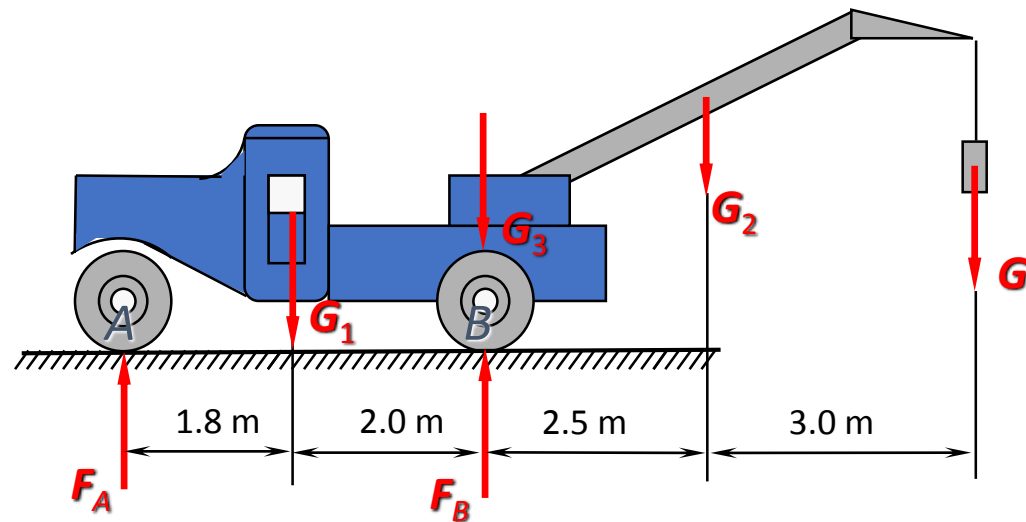
3. 联立求解。

$$F_A = \frac{1}{3.8} (2G_1 - 2.5G_2 - 5.5G)$$

4. 不翻倒的条件是： $F_A \geq 0$,
所以由上式可得

$$G \leq \frac{1}{5.5} (2G_1 - 2.5G_2) = 7.5 \text{ kN}$$

故最大起吊重量为 $G_{\max} = 7.5 \text{ kN}$





谢谢！