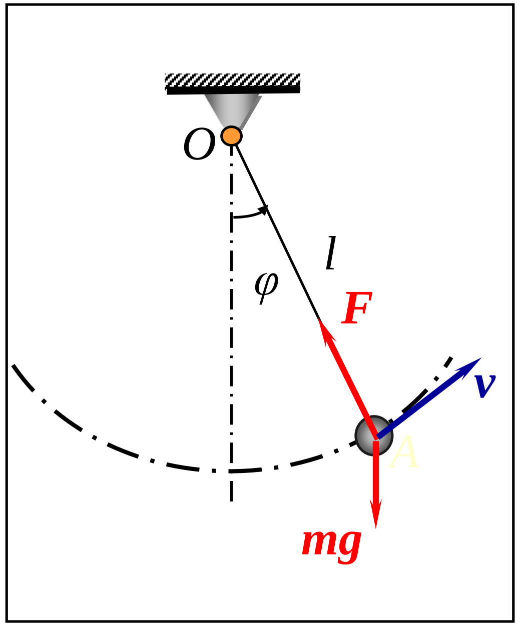
13.2动量矩定理

- 动量矩定理
- 动量矩守恒定理

例题 1 试用动量矩定理导出单摆(数学摆)的运动微分方程。

解：把单摆看成一个在圆弧上运动的质点 A,设其质量为 m,摆线长 l。又设在任一瞬时质点 A 具有速度 v,摆线 OA 与铅垂线的夹角是 φ。



取通过悬点 O 而垂直于运动平面的固定轴 z 作为矩轴,对此轴应用质点的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M_z(m\boldsymbol{v})]=\sum M_z(\boldsymbol{F})$$

例题 4-1

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M_z(m\boldsymbol{v})] = \sum M_z(\boldsymbol{F})$$

由于动量矩和力矩分别是

$$M_z(m\boldsymbol{v}) = mvl = m(l\omega)l = ml^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

和

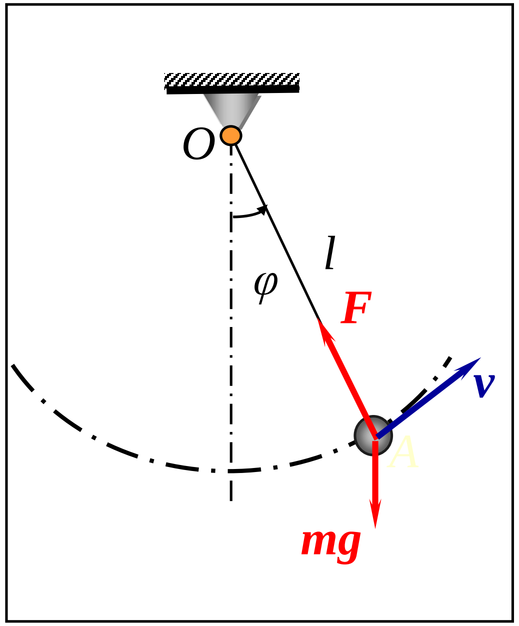
$$\sum M_z(\boldsymbol{F}) = -mgl\sin\varphi$$

从而可得

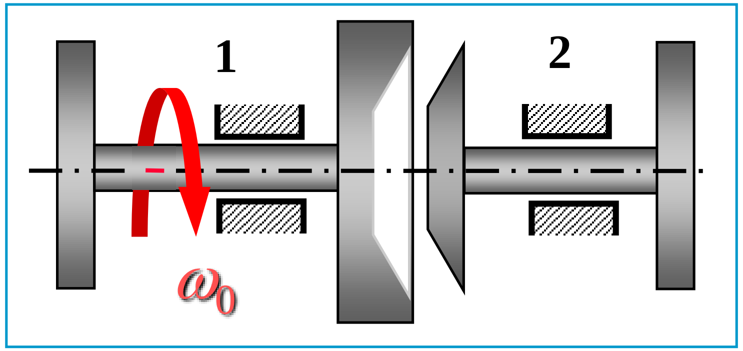
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ml^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}) = -mgl\sin\varphi$$

化简即得单摆的运动微分方程

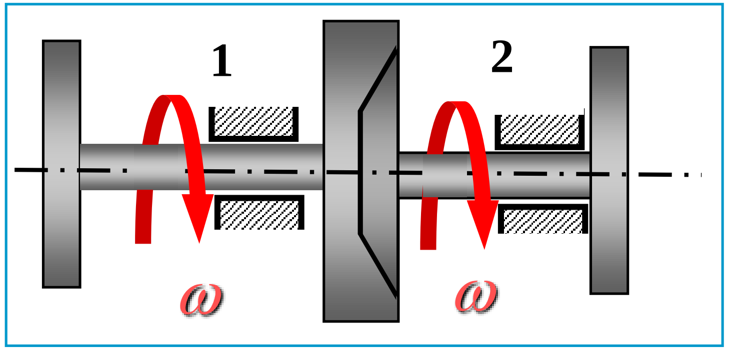
$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$



例题 2 摩擦离合器靠接合面的摩擦进行传动。在接合前，已知主动轴 1 以角速度ω_0转动，而从动轴 2 处于静止(图a)。一经结合，轴 1 的转速迅速减慢。轴 2 的转速迅速加快，两轴最后以共同角速度 ω 转动(图b)。已知轴 1 和轴 2 连同各自的附件对转轴的转动惯量分别是 J_1 和 J_2 ，试求接合后的共同角速度 ω，轴承的摩擦不计。



(a)



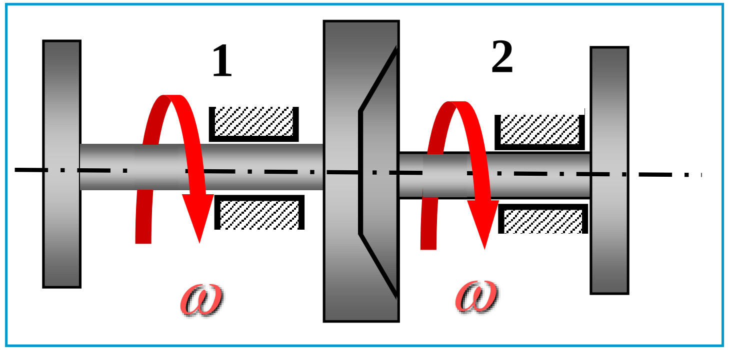
(b)

解: 取轴 1和轴 2 组成的系统作为研究对象。

接合时作用在两轴的外力对公共转轴的矩都等于零，故系统对转轴的总动量矩不变。

接合前系统的动量矩是 $(J_1\omega_0 + J_2\times 0)$。

离合器接合后，系统的动量矩是 $(J_1 + J_2)\omega$。



故由动量矩守恒定理得

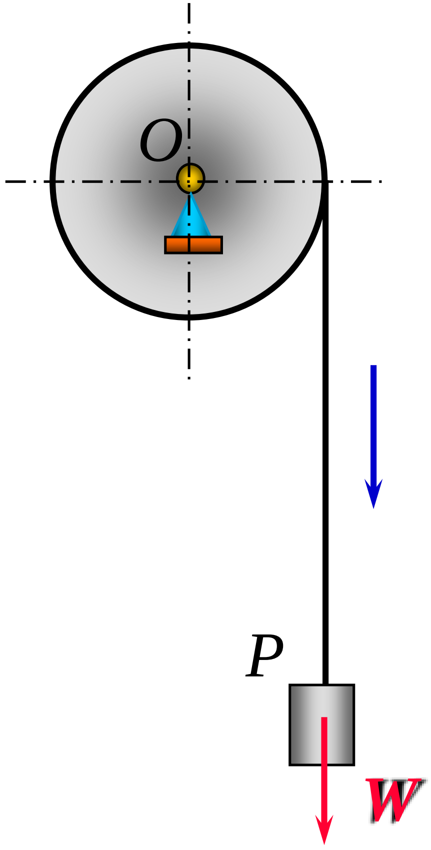
$$J_1\omega_0 = (J_1 + J_2)\omega$$

从而求得结合后的共同角速度

$$\omega = \frac{J_1}{J_1 + J_2}\omega_0$$

显然 ω 的转向与 ω_0 相同。

例题 4-4 匀质圆轮半径为R、质量为m。圆轮在重物P带动下绕固定轴O转动，已知重物重量为W。求重物下落的加速度



解：以整个系统为研究对象。

设圆轮的角速度和角加速度分别为ω和α，重物的加速度为a_P。

圆轮对轴O的动量矩

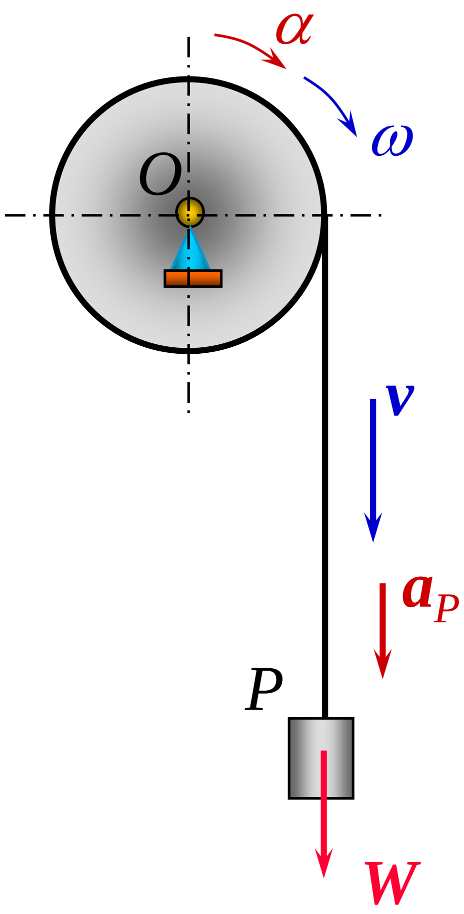
$$L_{O1}=J_O\omega=\frac{1}{2}mR^2\omega$$ 顺时针

重物对轴O的动量矩

$$L_{O2}=mvR=\frac{W}{g}vR$$ 顺时针

系统对轴O的总动量矩

$$L_O=L_{O1}+L_{O2}=\frac{1}{2}mR^2\omega+\frac{W}{g}vR$$ 顺时针



系统对轴O的总动量矩 $L_O = L_{O1} + L_{O2} = \frac{1}{2}mR^2\omega + \frac{W}{g}vR$

应用动量矩定理 $\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = M_O^{(\mathrm{e})}$

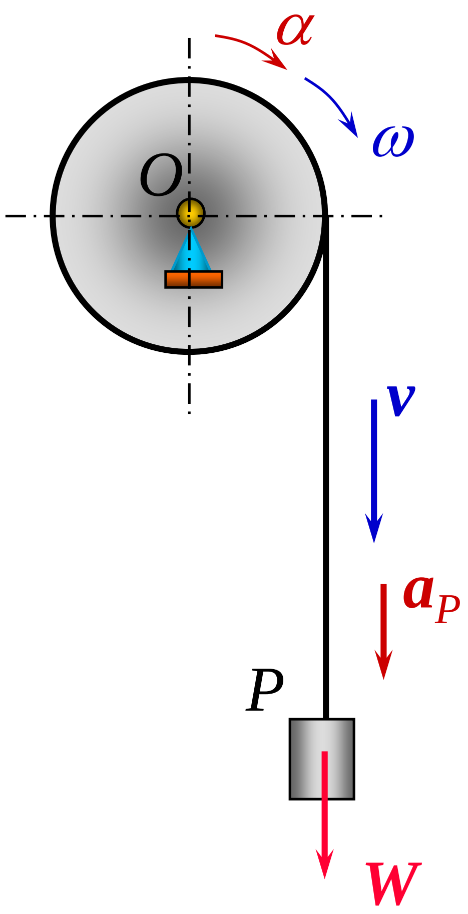
有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}mR^2\omega + \frac{W}{g}vR) = WR$

得 $\frac{1}{2}mR^2\alpha + \frac{W}{g}a_P R = WR$

其中 $a_P = R\alpha$

所以求得重物下落的加速度大小

$$a_P = \frac{W}{\frac{m}{2} + \frac{W}{g}}$$



谢谢！