西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

动 力 学

动 量 定 理

西北工业大学
支希哲　朱西平　侯美丽

第三章 动量定理

§3-1 动量与冲量

- 动　量
- 冲　量

§3-1　动量与冲量

一、动　量

1. 动量的定义

（1）质点的动量　质点的质量 m 与速度 $\boldsymbol{v}$ 的乘积 $m\boldsymbol{v}$ 称为该质点的动量。

（2）质点系的动量

质点系内各质点的动量的矢量和称为该质点系的动量主矢，简称为质点系的动量。并用 $\boldsymbol{p}$ 表示，即有

$$\boxed{\boldsymbol{p}=\sum m_i \boldsymbol{v}_i}$$

（3）质点系动量的投影式

以 p_x，p_y 和 p_z 分别表示质点系的动量在固定直角坐标轴 x，y 和 z 上的投影。则有

$$p_x=\sum m_i v_{ix}\ ,\quad p_y=\sum m_i v_{iy}\ ,\quad p_z=\sum m_i v_{iz}$$

2. 质点系动量的简捷求法

质点系的质心 *C* 的矢径表达式可写为

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i = m\,\boldsymbol{r}_C$$

当质点系运动时，它的质心一般也是运动的，将上式两端对时间求导数，即得

$$\boldsymbol{p} = \sum m_i \boldsymbol{v}_i = m\boldsymbol{v}_C$$

投影到各坐标轴上有

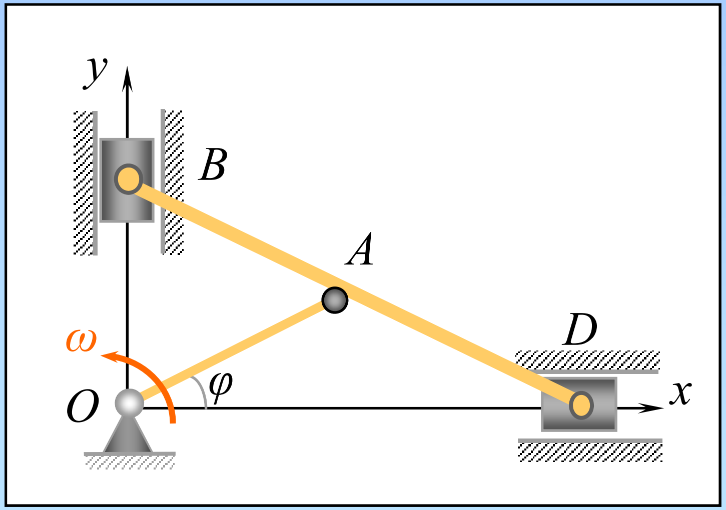
$$p_x = \sum m_i \boldsymbol{v}_{ix} = m v_{Cx}$$

$$p_y = \sum m_i \boldsymbol{v}_{iy} = m v_{Cy}$$

$$p_z = \sum m_i \boldsymbol{v}_{iz} = m v_{Cz}$$

可见，质点系的动量, 等于质点系的总质量与质心速度的乘积。

例题 3-1 画椭圆的机构由匀质的曲柄 *OA*，规尺 *BD* 以及滑块*B* 和 *D* 组成(图 a)，曲柄与规尺的中点 *A* 铰接。已知规尺长$2l$，质量是 $2m_1$；两滑块的质量都是 m_2；曲柄长 l，质量是 m_1，并以角速度ω绕定轴 *O* 转动。试求当曲柄 *OA* 与水平成角φ时整个机构的动量。



(a)

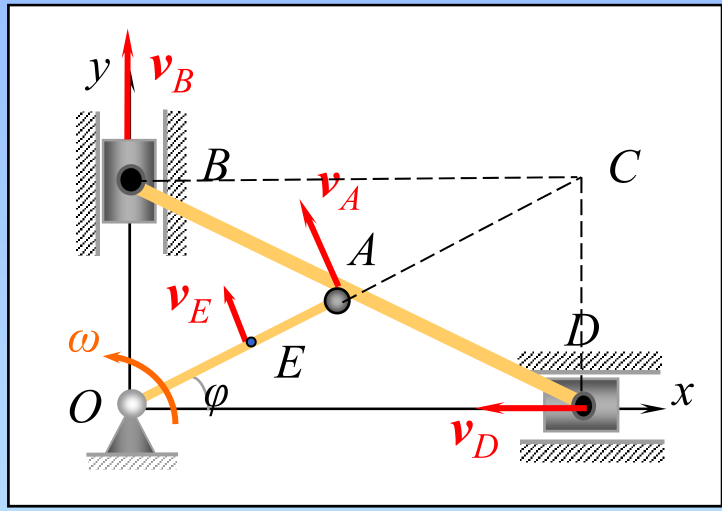
已知： 曲柄OA长 l，质量是 m_1，并以角速度ω绕定轴 O 转动。

规尺BD长$2l$，质量是 $2m_1$，两滑块的质量都是 m_2 。

解法一：

整个机构的动量等于曲柄OA、规尺BD、滑块B 和D的动量的矢量和，即

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{OA}+\boldsymbol{p}_{BD}+\boldsymbol{p}_{B}+\boldsymbol{p}_{D}$$



系统的动量在坐标轴 x，y 上的投影分别为：

$$p_x=-m_1 v_E\sin\varphi-(2m_1)v_A\sin\varphi-m_2 v_D$$

$$=-m_1\frac{l}{2}\omega\sin\varphi-(2m_1)l\omega\sin\varphi-m_2 2l\omega\sin\varphi$$

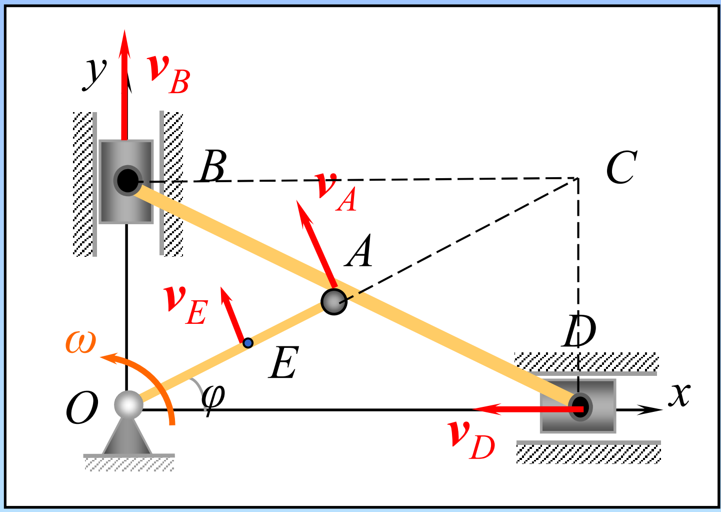
$$=-(\frac{5}{2}m_1+2m_2)l\omega\sin\varphi$$

系统的动量在 y 轴上的投影为：

$$p_y = m_1 v_E \cos\varphi + (2m_1) v_A \cos\varphi + m_2 v_B$$

$$= m_1 \frac{l}{2} \omega \cos\varphi + (2m_1) l\omega \cos\varphi + m_2 2l\omega \cos\varphi$$

$$= (\frac{5}{2} m_1 + 2m_2) l\omega \cos\varphi$$



所以，系统的动量大小为

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

$$= \frac{1}{2}(5m_1 + 4m_2) l\omega$$

方向余弦为为　$\cos(\boldsymbol{p}, x) = \frac{p_x}{p}$，　$\cos(\boldsymbol{p}, y) = \frac{p_y}{p}$

解法二:

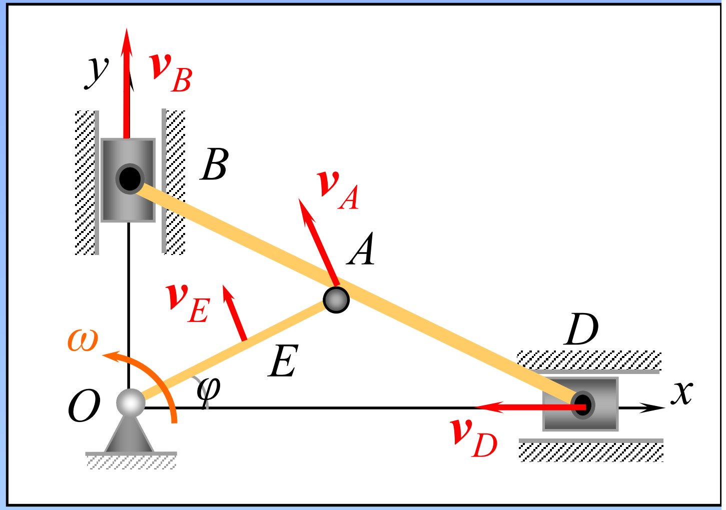
整个机构的动量等于曲柄$\boldsymbol{OA}$、规尺$\boldsymbol{BD}$、滑块$\boldsymbol{B}$ 和$\boldsymbol{D}$的动量的矢量和，即

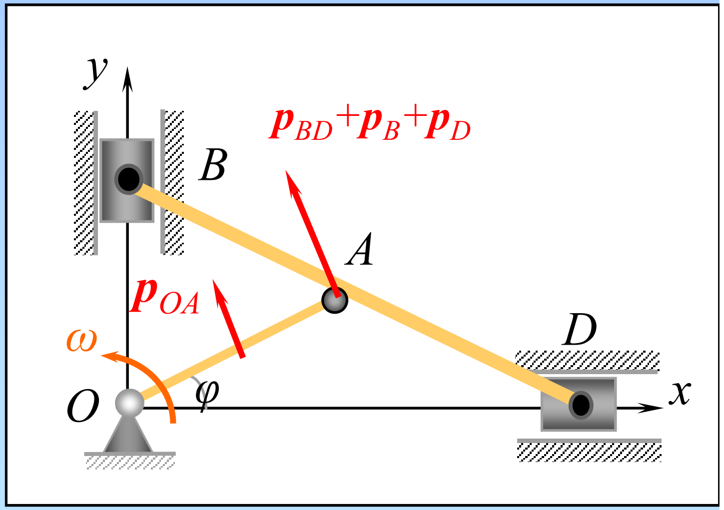
$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{OA} + \boldsymbol{p}_{BD} + \boldsymbol{p}_{B} + \boldsymbol{p}_{D}$$

其中曲柄$\boldsymbol{OA}$的动量$\boldsymbol{p}_{OA}=m_1\boldsymbol{v}_E$,大小是

$$p_{OA} = m_1 v_E = m_1 l\omega/2$$

其方向与$\boldsymbol{v}_E$一致，即垂直于$\boldsymbol{OA}$并顺着$\boldsymbol{\omega}$的转向(图 b)





(b)

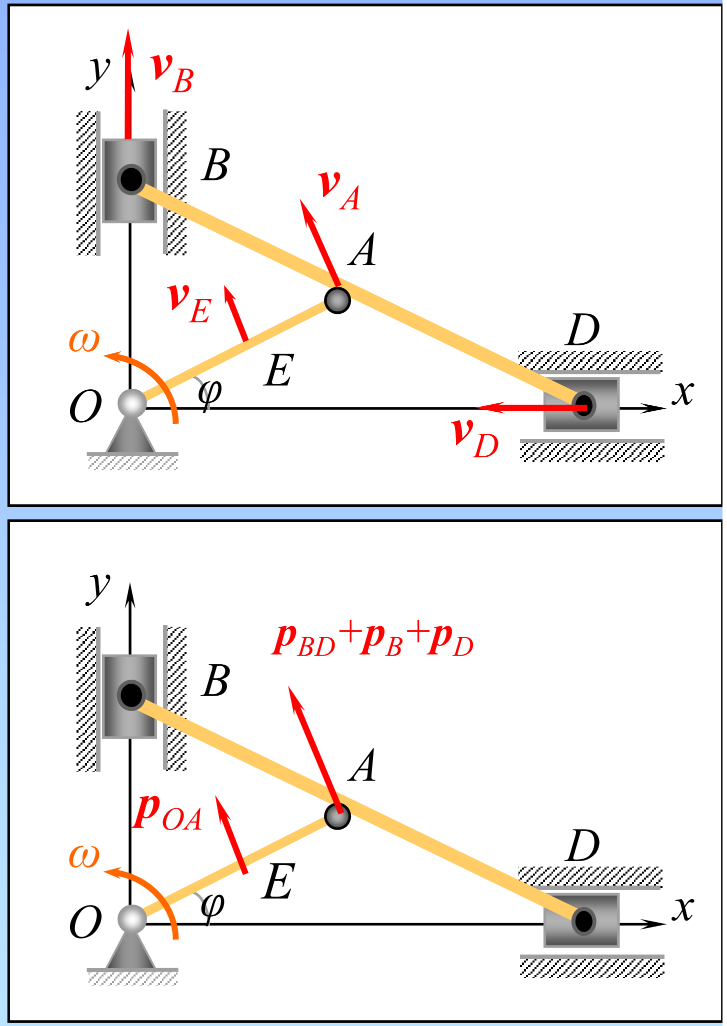
因为规尺和两个滑块的公共质心在点A，它们的动量表示成

$$p' = p_{BD} + p_B + p_D = 2(m_1 + m_2)v_A$$

由于动量K_{OA}的方向也是与v_A的方向一致，所以整个椭圆机构的动量方向与v_A相同，而大小等于

$$p = p_{OA} + p' = \frac{1}{2}m_1 l\omega + 2(m_1 + m_2)l\omega$$

$$= \frac{1}{2}(5m_1 + 4m_2)l\omega$$



(b)

二、冲　量

1. 常力的冲量

常力与作用时间 t 的乘积 $\boldsymbol{F}\cdot t$ 称为常力的冲量。并用 $\boldsymbol{I}$ 表示，即有

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\cdot t$$

冲量是矢量，方向与力相同。

2. 变力的冲量

若力 F 是变力，可将力的作用时间 t 分成无数的微小时间段 $\mathrm{d}t$，在每个 $\mathrm{d}t$ 内，力 $\boldsymbol{F}$ 可视为不变。

元冲量——力 $\boldsymbol{F}$ 在微小时间段 $\mathrm{d}t$ 内的冲量称为力 $\boldsymbol{F}$ 的元冲量。

变力 $\boldsymbol{F}$ 在 t 时间间隔内的冲量为：

$$\boldsymbol{I} = \int_0^t \boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

2. 变力的冲量

$$\boldsymbol{I} = \int_0^t \boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

上式为一矢量积分，具体计算时，可投影于固定坐标系上

$$I_x = \int_0^t F_x \mathrm{d}t\,,\quad I_y = \int_0^t F_y \mathrm{d}t\,,\quad I_z = \int_0^t F_z \mathrm{d}t$$

所以，变力F 的冲量又可表示为：

$$\boldsymbol{I} = I_x \boldsymbol{i} + I_y \boldsymbol{j} + I_z \boldsymbol{k}$$

§3-2 动量定理和冲量定理

- 动量定理
- 冲量定理
- 动量守恒定理

一、动量定理

因为质点系的动量为 $\boldsymbol{p}=\sum m_i\boldsymbol{v}_\mathrm{i}$，对该式两端求时间的导数，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum\frac{\mathrm{d}(m_i\boldsymbol{v}_i)}{\mathrm{d}t}=\sum m_i\boldsymbol{a}_i=\sum\boldsymbol{F}_i$$

分析右端，把作用于每个质点的力$\boldsymbol{F}$分为内力$\boldsymbol{F}^{(i)}$和外力$\boldsymbol{F}^{(e)}$，则得

$$\sum\boldsymbol{F}_i=\sum\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}+\sum\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

因为内力之和 $$\sum\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}=0$$

则有 $$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum\boldsymbol{F}_\mathrm{i}^{(\mathrm{e})}}$$

§3-2　动量定理和冲量定理

一、动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

即，质点系动量对时间的导数，等于作用于它上所有外力的矢量和，这就是质点系动量定理的微分形式。常称为动量定理。

在具体计算时，往往写成投影形式，即

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=\sum F_{ix}^{(\mathrm{e})},\quad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=\sum F_{iy}^{(\mathrm{e})}\quad \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}=\sum F_{iz}^{(\mathrm{e})}$$

即，质点系的动量在固定轴上的投影对时间的导数，等于该质点系的所有外力在同一轴上的投影的代数和。

§3-2 动量定理和冲量定理

一、动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

二、冲量定理

设在 t_1 到 t_2 过程中，质点系的动量由$\boldsymbol{p}_1$ 变为 $\boldsymbol{p}_2$ ，则对上式积分，可得

$$\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\sum\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}\mathrm{d}t\equiv\sum \boldsymbol{I}_i$$

可见，质点系的动量在一段时间内的变化量，等于作用于质点系的外力在同一段时间内的冲量的矢量和。这就是质点系动量定理的积分形式，也称为质点系的冲量定理。

二、冲量定理

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_i^{(e)} \mathrm{d}t = \sum \boldsymbol{I}_i$$

具体计算时，将上式投影到固定直角坐标轴系上

$$p_{2x} - p_{1x} = \sum \int_{t_1}^{t_2} F_{ix}^{(e)} \mathrm{d}t = \sum I_{ix}$$

$$p_{2y} - p_{1y} = \sum \int_{t_1}^{t_2} F_{iy}^{(e)} \mathrm{d}t = \sum I_{iy}$$

$$p_{2z} - p_{1z} = \sum \int_{t_1}^{t_2} F_{iz}^{(e)} \mathrm{d}t = \sum I_{iz}$$

即，质点系动量在某固定轴上投影的变化量，等于作用于质点系的外力在对应时间间隔内的冲量在同一轴上的投影的代数和。

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=\sum F_x^{(e)},\quad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=\sum F_y^{(e)},\quad \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}=\sum F_z^{(e)}$$

三、动量守恒定理

1. 如果在上式中$\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}\equiv 0$，则有

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0=\text{常矢量}$$

其中：$\boldsymbol{p}_0$ 为质点系初始瞬时的动量 。

有结论

在运动过程中，如作用于质点系的所有外力的矢量和始终等于零，则质点系的动量保持不变。这就是质点系的动量守恒定理。

一、动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=\sum F_{ix}^{(\mathrm{e})},\quad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=\sum F_{iy}^{(\mathrm{e})},\quad \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}=\sum F_{iz}^{(\mathrm{e})}$$

二、动量守恒定理

2. 如果在上式中$\sum \boldsymbol{F}_{ix}^{(\mathrm{e})}\equiv 0$，则有

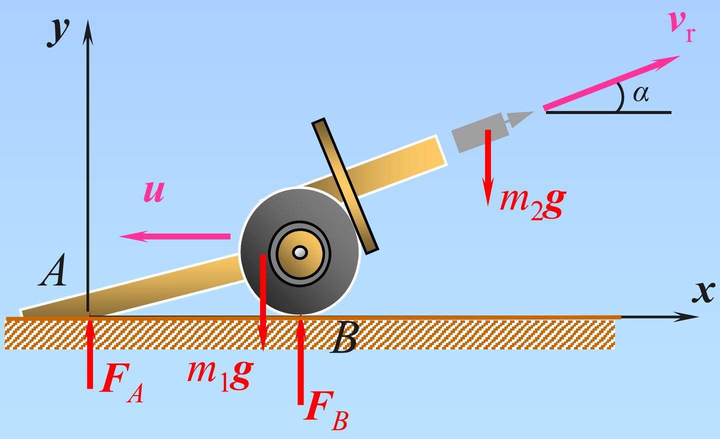
$$\boldsymbol{p}_x=\boldsymbol{p}_{0x}=\text{常 量}$$

其中：$\boldsymbol{p}_{0x}$为质点系初始瞬时的动量 在x轴上的投影。

有结论

在运动过程中，如作用于质点系的所有外力在某一轴上的投影的代数和始终等于零，则质点系的动量在该轴上的投影保持不变。

例题 3-2　火炮（包括炮车与炮筒）的质量是 $\boldsymbol{m_1}$，炮弹的质量是 $\boldsymbol{m_2}$，炮弹相对炮车的发射速度是 $\boldsymbol{v_r}$，炮筒对水平面的仰角是 $\boldsymbol{\alpha}$（图a）。设火炮放在光滑水平面上，且炮筒与炮车相固连，试求火炮的后坐速度和炮弹的发射速度。



(a)

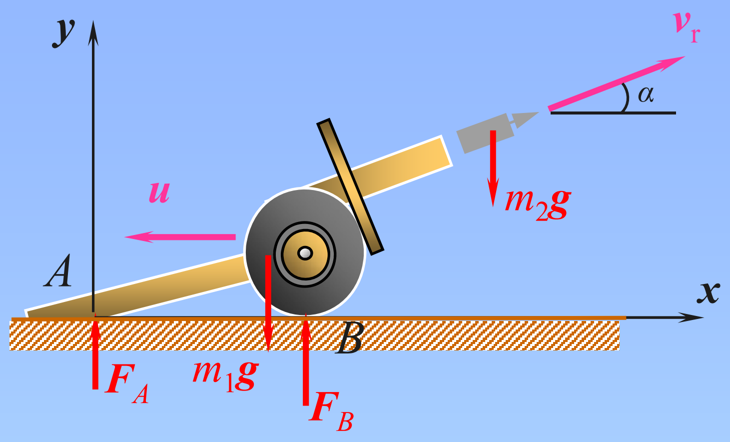
解: 取火炮和炮弹（包括炸药）这个系统作为研究对象。

设火炮的反座速度是 $\boldsymbol{u}$，炮弹的发射速度是 $\boldsymbol{v}$，对水平面的仰角是 θ（图b）。

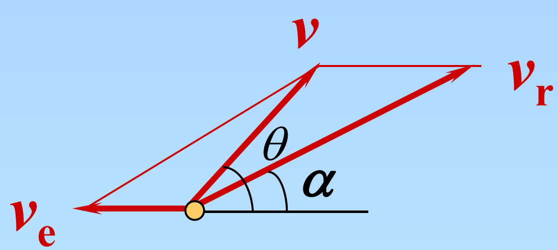
炸药（其质量略去不计）的爆炸力是内力，作用在系统上的外力在水平轴 $\boldsymbol{x}$ 的投影都是零，即有$\sum F_{ix}=0$。

可见，系统的动量在轴 x 上的投影守恒，考虑到初始瞬时系统处于静止，即有$p_{0x}=0$，于是有

$$p_x = m_2 v\cos\theta - m_1 u = 0$$



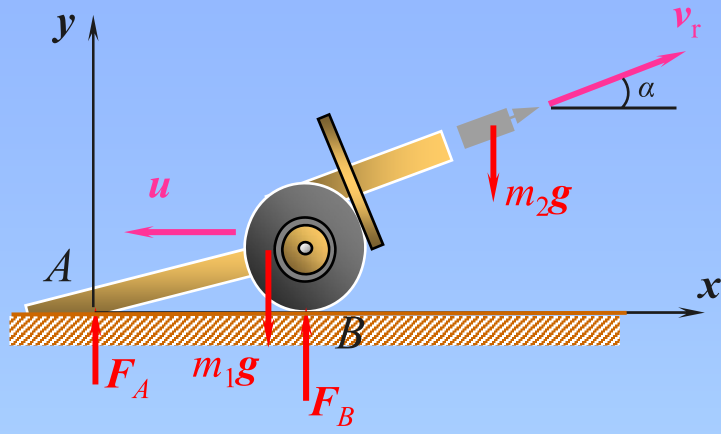
(a)



(b)

$$p_x = m_2 v\cos\theta - m_1 u = 0$$

另一方面，对于炮弹应用速度合成定理，可得



$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

考虑到 $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{u}$，并将上式投影到轴 x 和 y 上，就得到

$$v\cos\theta = v_r\cos\alpha - u$$

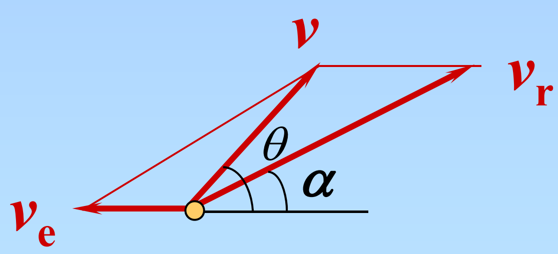
$$v\sin\theta = v_r\sin\alpha$$

联立求解上列三个方程，即得

$$u = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_r \cos\theta$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{(2m_1 + m_2)m_2}{(m_1 + m_2)^2}\cos^2\alpha} \cdot v_r$$

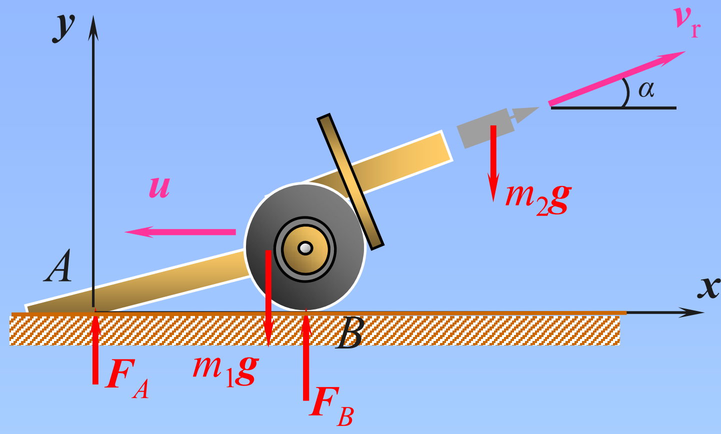
$$\tan\theta = (1 + \frac{m_2}{m_1})\tan\alpha$$



(b)

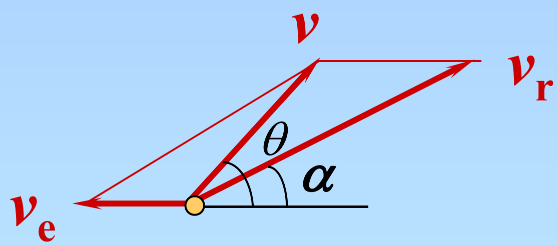
讨论

$$\tan\theta = (1+\frac{m_2}{m_1})\tan\alpha$$



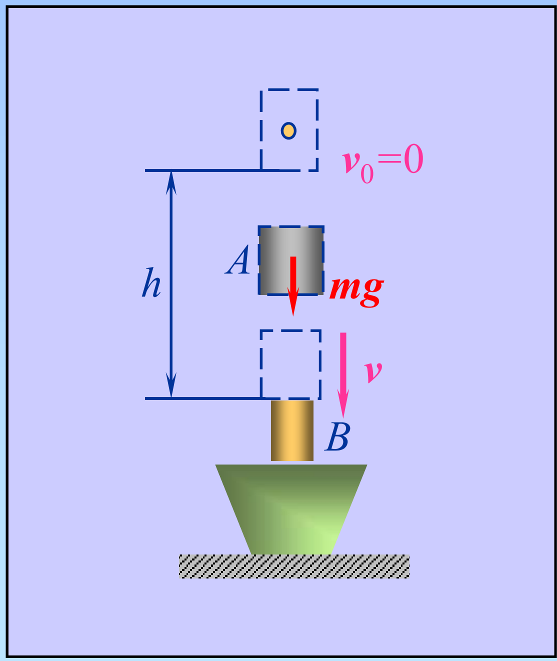
由上式可见，v与v_r方向不同，$\theta>\alpha$。

当$m_1>>m_2$时，$\theta\approx\alpha$。但在军舰或车上时，应该考虑修正量 m_2/m_1。



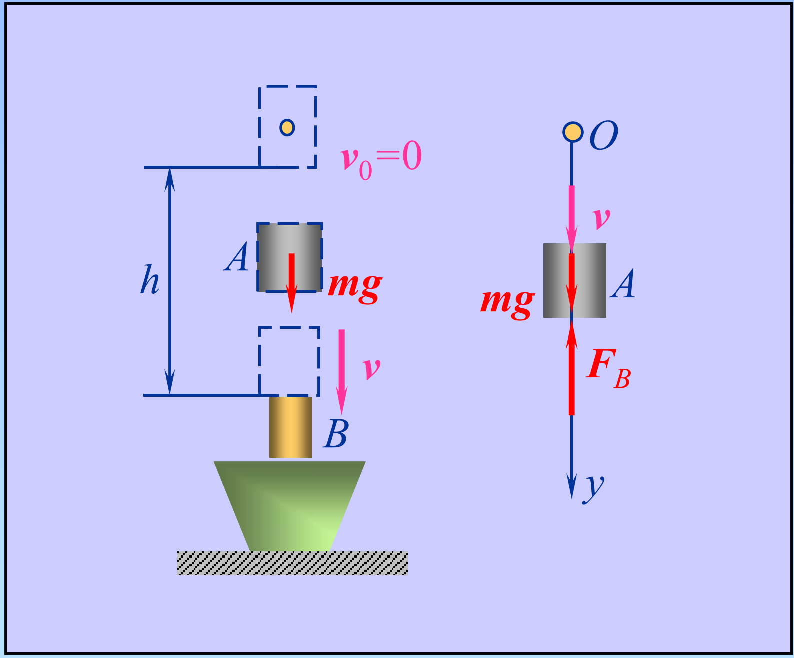
(b)

例题 3-3 锻锤 A 的质量 $m=3\ 000$ kg，从高度 $h=1.45$ m处自由下落到锻件 B 上。假设锻锤由接触锻件到最大变形的时间 $t=0.01$s，求锻锤作用在锻件上的平均碰撞力。



解： 取锻锤作为研究对象。它从高度 h 自由下落到锻件产生最大变形的过程，可分成两个阶段。

（1）碰撞前的自由下落阶段。



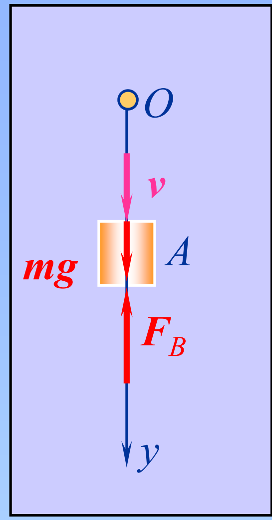
锻锤只受重力作用，由动能定理

$$\frac{1}{2}mv^2-0=mgh$$

从而求得碰撞前锻锤速度的大小

$$v=\sqrt{2gh}$$

（2）锻锤由开始接触锻件到最大变形阶段。



该阶段锻锤受重力mg和锻件对锻锤的碰撞力（设其平均值为F_B）的作用。

写出冲量定理在铅直轴y上的投影式，并注意锻件变形最大时锻锤速度为零，有

$$0-mv=mgt-F_Bt$$

从而求得

$$F_B=\frac{mv}{t}+mg$$

代入求出的速度v和已知数据，即得

$$F_B=16.3\times 102\ \text{kN}$$

§3-3 质心运动定理

- 质心运动定理
- 质心运动守恒定理

§3-3 质心运动定理

一、质心运动定理

质点系动量定理的表达式 $$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}}$$

1. 定理表达式

把质点系动量的表达式 $\boldsymbol{p}=\sum m_i\boldsymbol{v}_i=m\boldsymbol{v}_C$代入上式，可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}_C)=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

引入质心的加速度 $a_C=\mathrm{d}v_\mathrm{c}/\mathrm{d}t$，则上式可改写成

$$m\boldsymbol{a}_C=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

即，质点系的总质量与其质心加速度的乘积,等于作用在该质点系上所有外力的矢量和（主矢）,这就是质心运动定理。

质心运动定理　　$m\boldsymbol{a}_c = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$

2. 定理的转化式

假设 n 个质点组成的质点系由N个部分构成，则由式$\boldsymbol{p} = \sum m_i \boldsymbol{v}_i = m\boldsymbol{v}_C$，可把质心运动定理表达式的左端表示成

$$m\boldsymbol{a}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i = m_1 \boldsymbol{a}_{C1} + m_2 \boldsymbol{a}_{C2} + \cdots m_N \boldsymbol{a}_{CN} = \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{a}_{Cj}$$

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{a}_{Cj} = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

3. 投影表达式

具体计算时，常把质心运动定理表达式投影到固定直角坐标轴系上得

$$\boxed{\begin{aligned} m\frac{d^2 x_C}{dt^2} &= \sum F_{ix}^{(e)} \\ m\frac{d^2 y_C}{dt^2} &= \sum F_{iy}^{(e)} \\ m\frac{d^2 z_C}{dt^2} &= \sum F_{iz}^{(e)} \end{aligned}}$$

§3-3 质心运动定理

质心运动定理　　$ma_C = \sum F_i^{(e)}$

二、质心运动守恒定理

1. 如果$\sum F_i^{(e)} \equiv 0$，则由上式可知 $a_C = 0$，从而有

$$v_c = \text{常矢量}$$

即，如作用于质点系的所有外力的矢量和（主矢）始终等于零，则质心运动守恒，即质心作惯性运动；如果在初瞬时质心处于静止，则它将停留在原处。

质心运动定理投影表达式

$$\boxed{\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 x_C}{\mathrm{d}t^2} &= \sum F_{ix}^{(e)} \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y_C}{\mathrm{d}t^2} &= \sum F_{iy}^{(e)} \\ m\frac{\mathrm{d}^2 z_C}{\mathrm{d}t^2} &= \sum F_{iz}^{(e)} \end{aligned}}$$

2. 如果$\sum F_{ix} \equiv 0$，则由上式可知 $\mathrm{d}^2 x_C / \mathrm{d}t^2 = a_{Cx} = 0$，从而

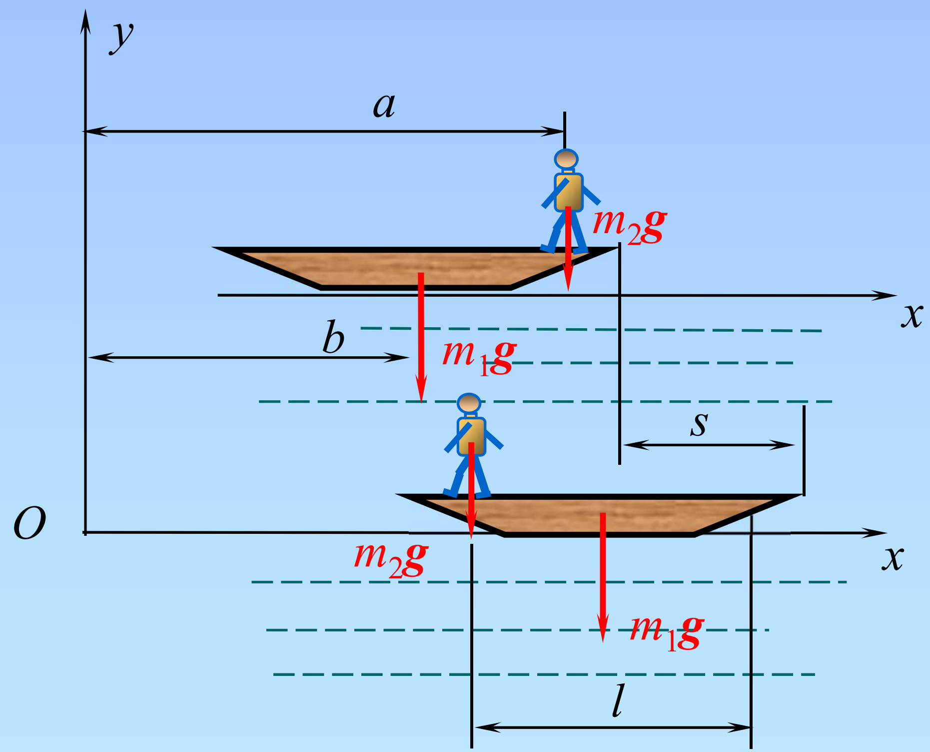
$$\mathrm{d}x_C / \mathrm{d}t = v_{Cx} = \text{常量}$$

即，如果作用于质点系的所有外力在某固定轴上投影的代数和始终等于零，则质心在该轴方向的运动守恒。

另外，如果初瞬时质心的速度在该轴上的投影也等于零（即$v_{Cx} = 0$），则质心沿该轴的位置坐标不变。即

$$x_C = x_{C0} = \text{常量}$$

例题 3-4 如图所示，在静止的小船上，一人自船头走到船尾，设人质量为m_2，船的质量为m_1，船长l，水的阻力不计。求船的位移。



解：取人与船组成质点系。

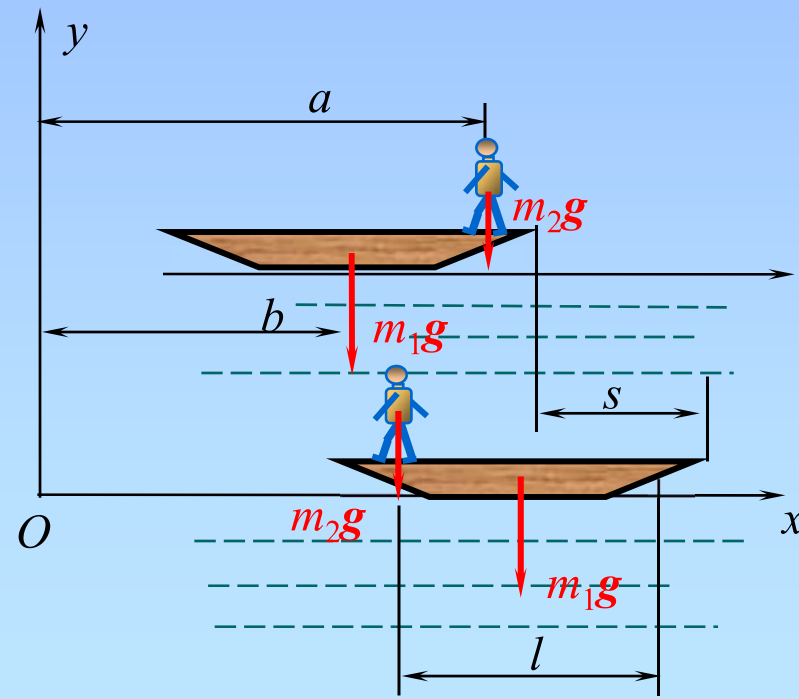
因不计水的阻力，故外力在水平轴上的投影之和等于零，即$\sum F_{ix}=0$。

则有

$$\dot{x}_C=\dot{x}_{C0}$$

又因系统初瞬时静止，因此质心在水平轴上保持不变。即有

$$x_C=x_{C0}$$



取坐标轴如图所示。在人走动前，系统的质心坐标为

$$x_{C0}=\frac{m_2a+m_1b}{m_2+m_1}$$

人走到船尾时，船移动的距离为s，则质心的坐标为

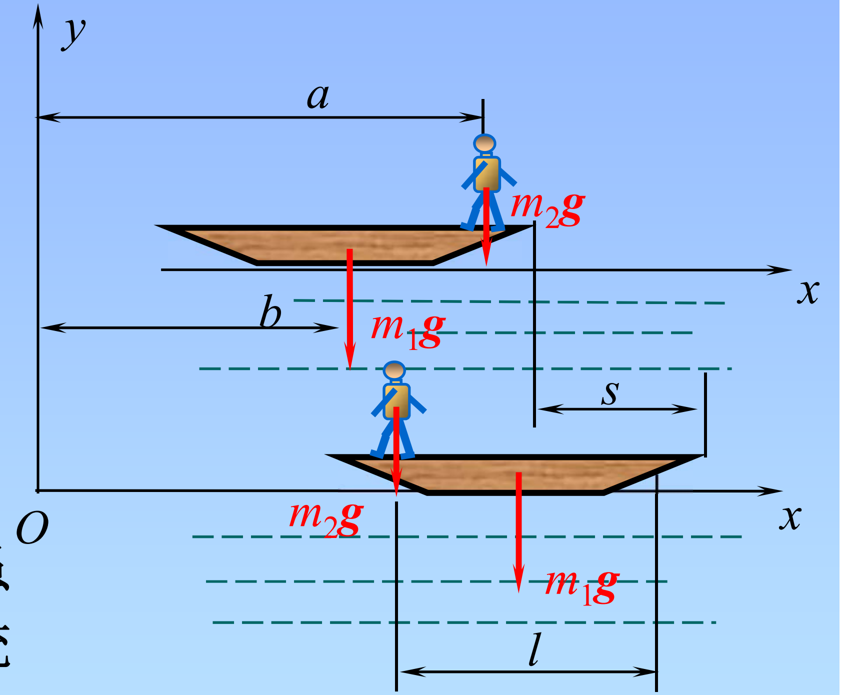
$$x_C=\frac{m_2(a-l+s)+m_1(b+s)}{m_2+m_1}$$

$$x_{C0}=\frac{m_2a+m_1b}{m_2+m_1},\qquad x_C=\frac{m_2(a-l+s)+m_1(b+s)}{m_2+m_1}$$

上式代入 $x_C=x_{C0}$

可以求得小船移动的位移

$$s=\frac{m_2l}{m_2+m_1}$$

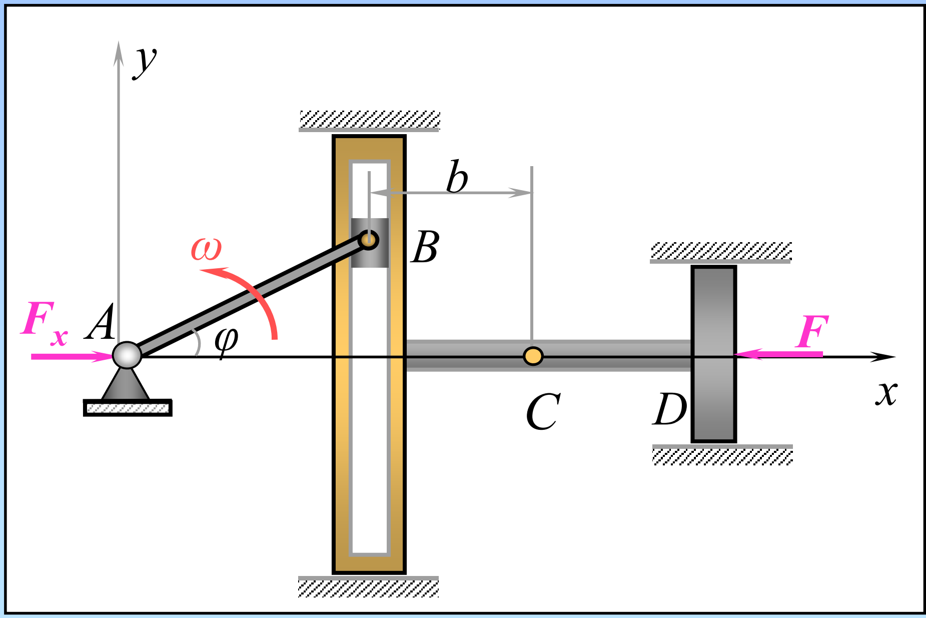


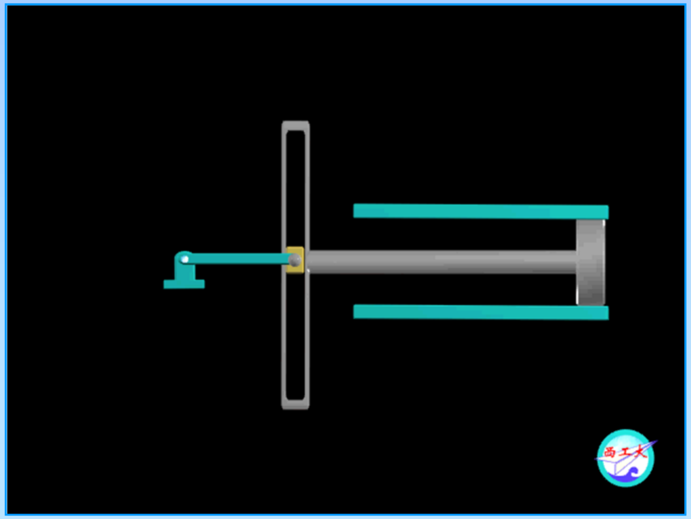
讨 论

1. 质点系的内力（鞋底与船间摩擦力）虽不能改变系统质心的运动，但能改变系统中各部分的（人与船）的运动；

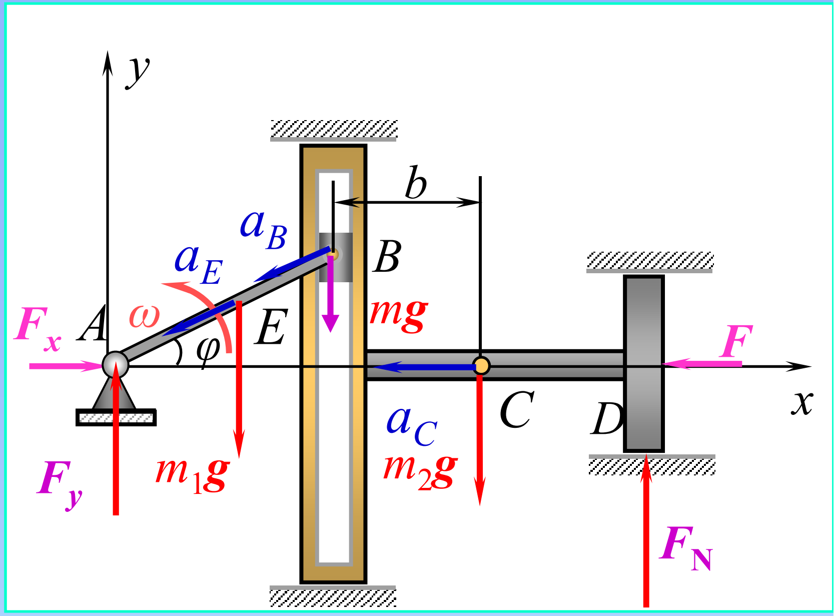
2. 靠码头的小船会因人上岸而离岸后退，为防止，应在岸上将船栓住。

例题 3-5 均质曲柄AB长r，质量为m_1，假设受力偶作用以不变得角速度ω转动，并带动滑槽连杆以及与它固连的活塞D，如图所示。滑槽、连杆、活塞总质量为m_2，质心在点C。在活塞上作用一恒力$\boldsymbol{F}$。滑块$\boldsymbol{B}$质量为m，不计摩擦，求作用在曲柄轴A处的水平反力$\boldsymbol{F}_x$。





解： 选取整个机构为研究的质点系。



由质心运动定理

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{a}_{Cj} = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

得

$$-m_1 a_E \cos\varphi - m a_B \cos\varphi - m_2 a_C = F_x - F$$

即

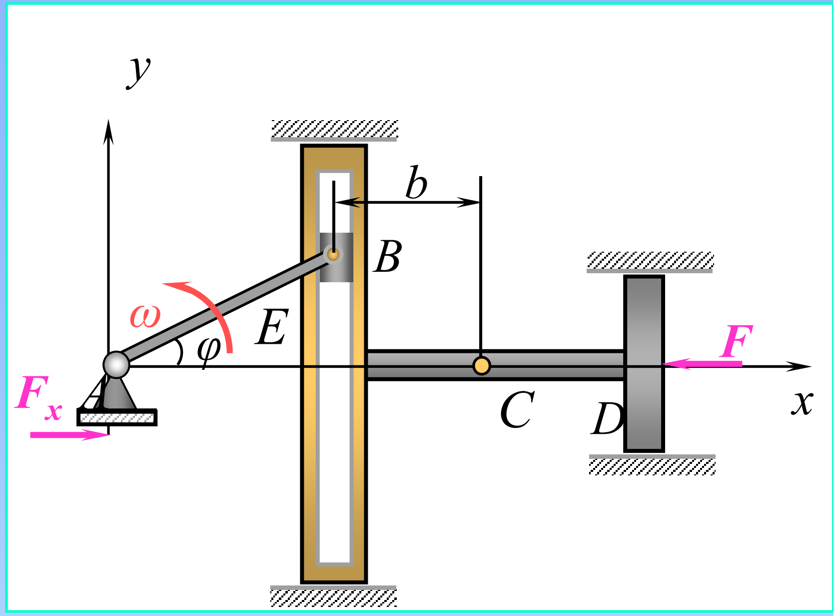
$$-m_1 \frac{r}{2}\omega^2 \cos\varphi - m r\omega^2 \cos\varphi - m_2 r\omega^2 \cos\varphi = F_x - F$$

求得作用在曲柄轴A处的水平反力

$$F_x = F - (\frac{1}{2}m_1 + m + m_2) r\omega^2 \cos\varphi$$

讨 论

如何求作用在曲柄轴A处的竖直反力?



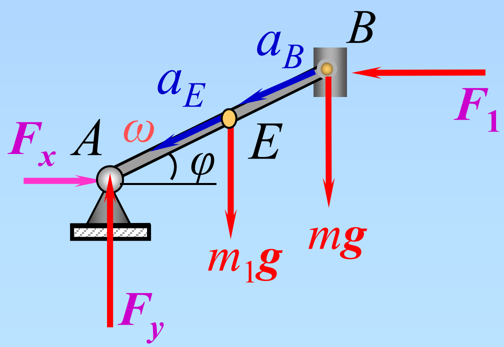
解：选取杆$\boldsymbol{AB}$和滑块$\boldsymbol{B}$为研究的质点系。

由质心运动定理

得
$$\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{a}_{Cj} = \sum \boldsymbol{F}^{(e)}$$

即

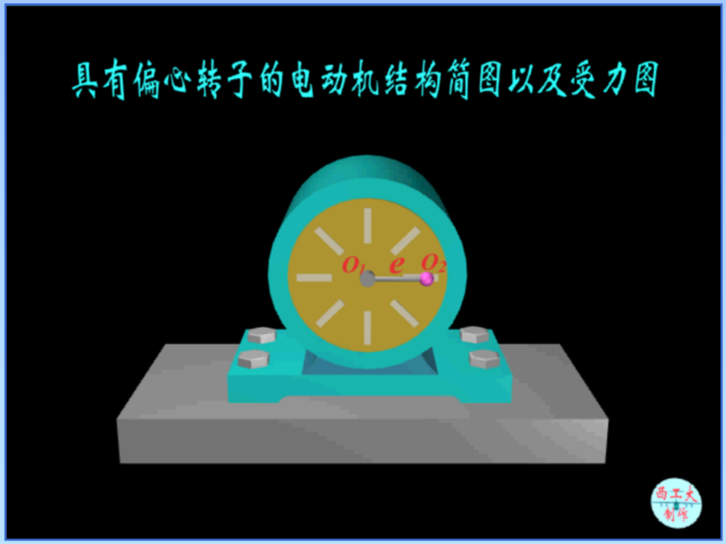
$$-m_1 a_E \sin\varphi - m a_B \sin\varphi = F_y - (m_1 + m_2) g$$



求得作用在曲柄轴A处的竖直反力

$$F_y = (m_1 + m)g - (\frac{1}{2} m_1 + m) r\omega^2 \sin\varphi$$

例题 3-6 电动机的外壳用螺栓固定在水平基础上，定子的质量是 m_1，转子的质量是 m_2，转子的轴线通过定子的质心 O_1。制造和安装的误差，使转子的质心 O_2对它的轴线有一个很小的偏心距 e（图中有意夸张）。求转子以匀角速度 ω 转动时，电动机所受的总水平反力和铅直反力。



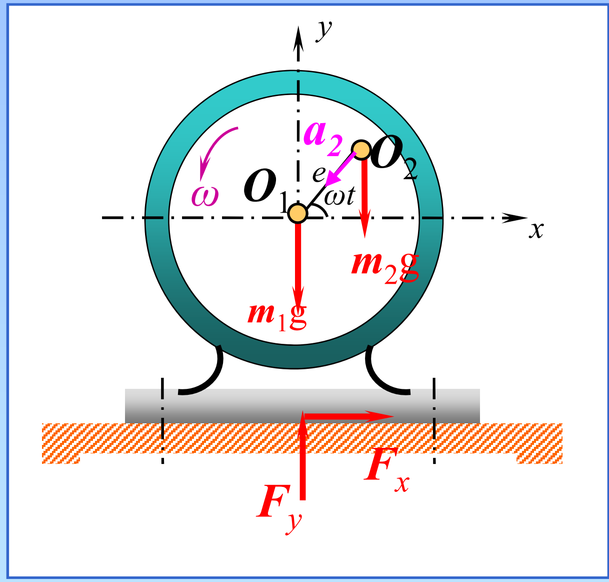
解： 取整个电动机（包括定子和转子）作为研究对象。

由质心运动定理有

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{a}_{Cj} = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

$$-m_2 a_2 \cos \omega t = F_x \qquad (1)$$

$$-m_2 a_2 \sin \omega t = F_y - m_1 g - m_2 g \qquad (2)$$

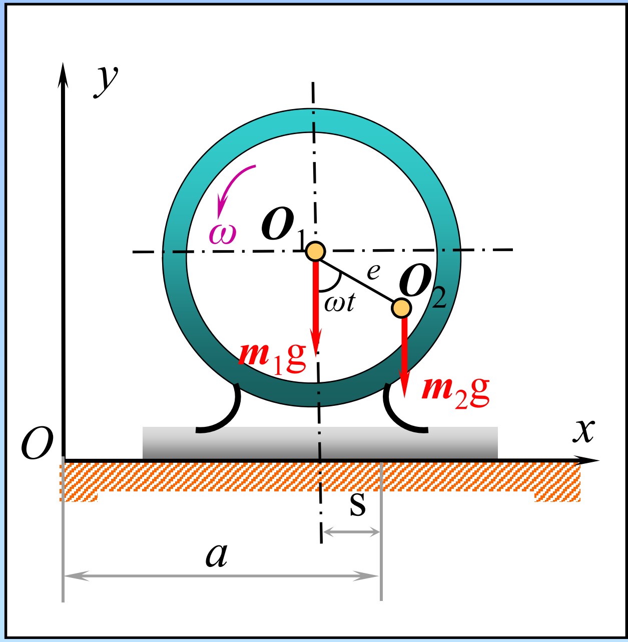


由此求得电动机所受的总水平反力和铅直反力

$$F_x = -m_2 e \omega^2 \cos \omega t$$

$$F_y = (m_1 + m_2) g - m_2 e \omega^2 \sin \omega t$$

例题 3-7 若上例中电动机没有用螺栓固定，各处摩擦不计，初始时电动机静止。试求：（1） 转子以匀角速ω 转动时电动机外壳在水平方向的运动方程；（2）电动机跳起的最小角速度。



1. 电动机外壳在水平方向的运动方程

设电动机的水平位移为 s 。

由于电动机不固定，且不计摩擦，故外力在水平轴上的投影之和等于零，即$\sum F_{ix} \equiv 0$。则有

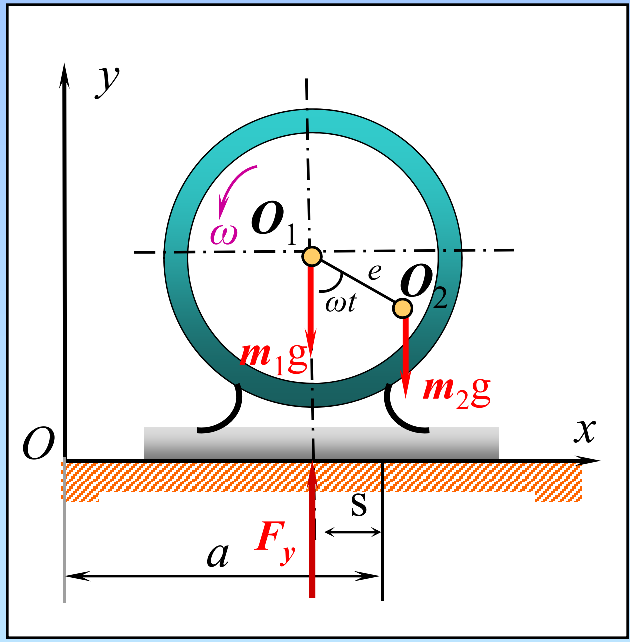
$$\dot{x}_C = \dot{x}_{C0}$$

又因系统初瞬时静止，因此质心在水平轴上保持不变。即有

$$x_C = x_{C0}$$

已知 $x_{C0} = a$，

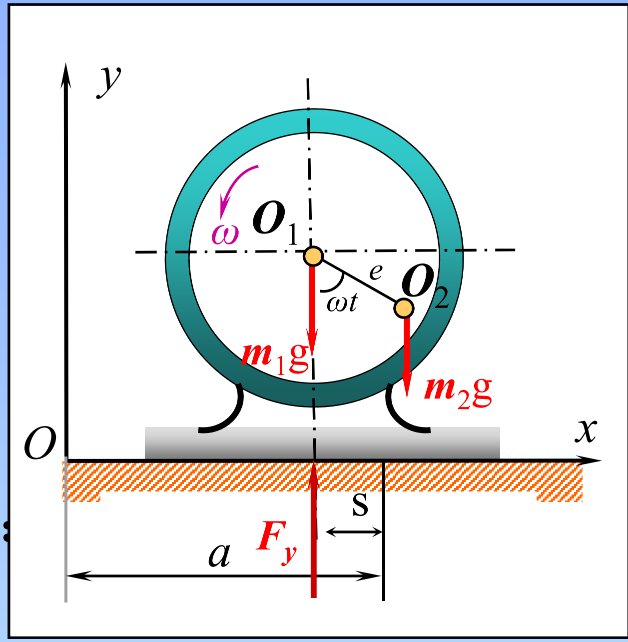
$$x_C = \frac{m_1(a-s) + m_2(a - s + e\sin\omega t)}{m_1 + m_2}$$



$$x_C = x_{C0}$$

已知 $x_{C0} = a$，

$$x_C = \frac{m_1(a - s) + m_2(a - s + e\sin\omega t)}{m_1 + m_2}$$



由 $x_C = x_{C0}$ 解得电动机外壳在水平方向的运动方程：

$$s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} e\sin\omega t$$

由此可见，当转子偏心的电动机未用螺栓固定时，将在水平面上作往复运动。

2. 求电动机起跳条件

由质心运动定理有

$$m_2 a_n \cos\omega t = F_y - m_1 g - m_2 g$$

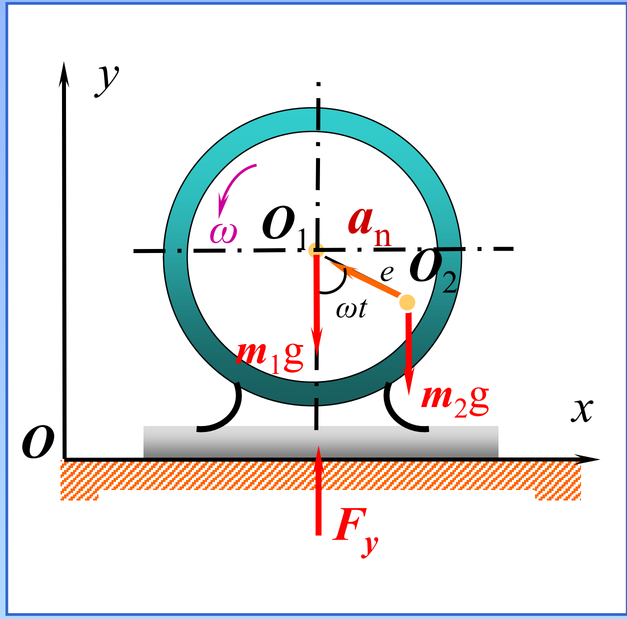
即 $$m_2 e\omega^2 \cos\omega t = F_y - m_1 g - m_2 g$$

因此求得机座的铅直反力：

$$F_y = m_1 g + m_2 g + m_2 e\omega^2 \cos\omega t$$

而机座铅直反力的最小值：

$$F_{y\min} = m_1 g + m_2 g - m_2 e\omega^2$$



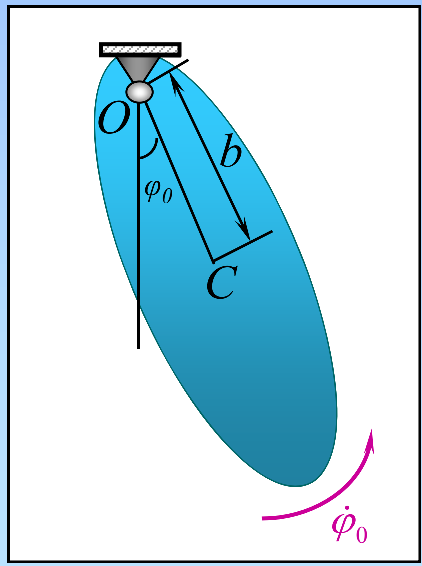
思考题　电动机是否会起跳？ 起跳的条件是什么？

电动机起跳的条件为： $F_y = 0$

由此求得电动机起跳的最小角速度

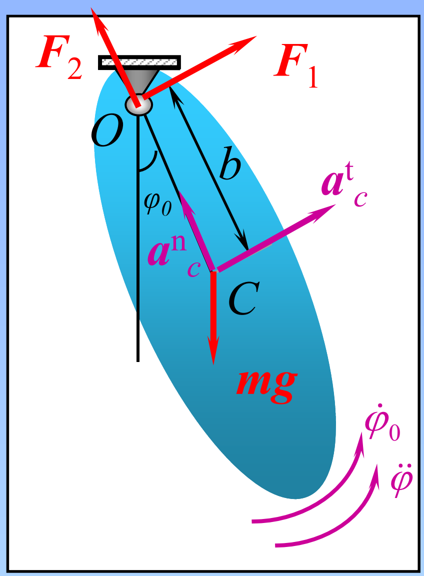
$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2 e} g}$$

例题 3-8 复摆是一个在重力作用下可绕水平轴 O 摆动的刚体。它的质量是 m，对转轴的转动惯量是 J_O，质心 C 到转轴O的距离 $OC=b$。设摆动开始时 OC 对铅直线的偏角是 φ_0，角速度是 $\dot{\varphi}_0$。试求摆动中轴承 O 对复摆的反力。



(a)

解: 复摆在任意位置时，所受的外力有重力 mg 和轴承 O 的反力，为便于计算，把轴承反力沿质心轨迹的切线和法线方向分解成两个分力 F_1和 F_2。



(b)

质心C的加速度在这两个方向的投影为

$$a_C^t = b\ddot{\varphi}, \qquad a_C^n = b\dot{\varphi}^2$$

写出质心运动定理在质心轨迹的自然轴系上的投影式，可得

$$mb\ddot{\varphi} = F_1 - mg\sin\varphi \tag{1}$$

$$mg\dot{\varphi}^2 = F_2 - mg\cos\varphi \tag{2}$$

应用动能定理：$T_2 - T_1 = \sum W$，有

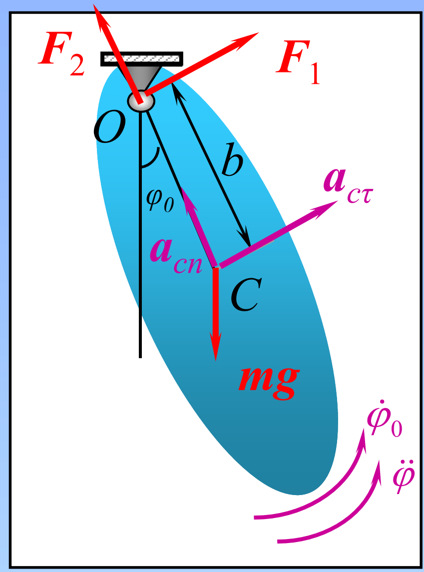
$$\frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}_0^{\ 2} = -mgb(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

从而求得 $$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^{\ 2} + \frac{2mgb}{J_O}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

将上式两端对时间求导，得

$$2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -\frac{2mgb}{J_O}\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

即 $$\ddot{\varphi} = -\frac{mgb}{J_O}\sin\varphi$$



(b)

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0{}^2 + \frac{2mgb}{J_O}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgb}{J_O}\sin\varphi$$

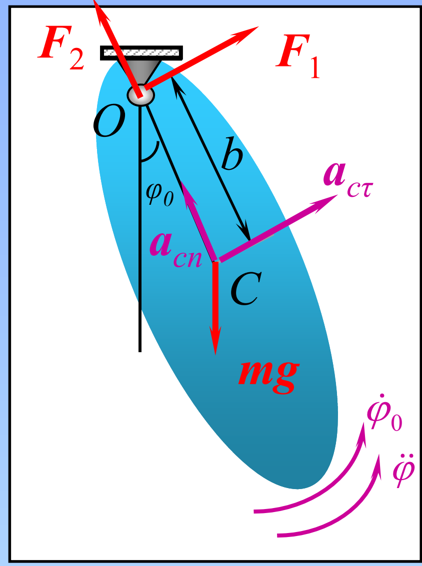
分别代入 $$mb\ddot{\varphi} = F_1 - mg\sin\varphi \qquad (1)$$

$$mg\dot{\varphi}^2 = F_2 - mg\cos\varphi \qquad (2)$$

经整理后即可求出

$$F_1 = mg\sin\varphi - \frac{m^2b^2g}{J_O}\sin\varphi$$

$$F_2 = mg\cos\varphi + mb[\dot{\varphi}_0{}^2 + \frac{2mgb}{J_O}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$



(b)

谢谢使用