

# 第四章 *Bezier*曲线曲面

## II





# 第三节 *Bezier*曲线的 升阶与降阶

# 一、Bezier曲线的升阶



## 1、升阶的含义与目的:

含义:

Bezier曲线的升阶就是保持Bezier曲线的形状与定向不变的条件下增加控制顶点的个数。

目的:

增加对曲线形状控制的灵活性，同时在Bezier曲线拼接或构造张量积Bezier曲面时也要经常涉及到Bezier曲线的升阶，需要强调的是Bezier曲线的升阶并没有影响曲线实际的次数。

# 一、Bezier曲线的升阶



## 2、升阶公式

设 $n$ 次Bezier曲线为:  $\vec{p}(t) = \sum_{j=0}^n \vec{b}_j B_{j,n}(t)$

升阶后变为:  $\vec{p}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} \vec{b}_j^{(1)} B_{j,n+1}(t)$

$$\text{令: } \sum_{j=0}^n \vec{b}_j B_{j,n}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} \vec{b}_j^{(1)} B_{j,n+1}(t)$$

即:

$$\sum_{j=0}^n \vec{b}_j C_n^j t^j (1-t)^{n-j} = \sum_{j=0}^{n+1} \vec{b}_j^{(1)} C_{n+1}^j t^j (1-t)^{n+1-j}$$

# 一、Bezier曲线的升阶



对上式左边乘以  $[t+(1-t)]$ , 得:

$$\begin{aligned} & [t + (1-t)] \sum_{j=0}^n \vec{b}_j C_n^j t^j (1-t)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n \vec{b}_j C_n^j [t^j (1-t)^{n+1-j} + t^{j+1} (1-t)^{n-j}] \end{aligned}$$

与  $\sum_{j=0}^{n+1} \vec{b}_j^{(1)} C_{n+1}^j t^j (1-t)^{n+1-j}$  比较  $t^j (1-t)^{n+1-j}$  项前的系数, 可得:

$$\vec{b}_j^{(1)} C_{n+1}^j = \vec{b}_j C_n^j + \vec{b}_{j-1} C_n^{j-1}$$

# 一、Bezier曲线的升阶



因此，可得升阶前后Bezier曲线控制顶点的关系为：

$$\vec{b}_j^{(1)} = \frac{j}{n+1} \vec{b}_{j-1} + (1 - \frac{j}{n+1}) \vec{b}_j, j = 0, 1, 2, \dots, n+1$$

其中：  $\vec{b}_{-1} = \vec{0}, \vec{b}_{n+1} = \vec{0}$

升阶公式

注：

1) 从上式可以看出升阶后的控制顶点是升阶前控制顶点的凸组合，新控制多边形一定在旧控制多边形的凸包内。

2) 升阶后的控制多边形更加逼近Bezier曲线。

# 一、Bezier曲线的升阶



Bezier曲线升阶实例:

给定XOY平面上的三次Bézier的控制顶点依次为:

$$\vec{b}_0 = [-9, 0], \vec{b}_1 = [-3, 6], \vec{b}_2 = [3, 6], \vec{b}_3 = [9, 0]$$

它们确定了一条三次Bézier曲线  $\vec{P}(u)$ ,  $u \in [0, 1]$

求它升阶一次以后得到的四次Bezier曲线的控制顶点。



# 一、Bezier曲线的升阶



解：设升阶后的四次Bezier曲线的控制顶点依次为：

$\vec{b}_i^*, i = 0, 1, 2, 3, 4$ , 则：

$$\vec{b}_0^* = \vec{b}_0 = [-9, 0]$$

$$\vec{b}_1^* = (1 - \frac{1}{4})\vec{b}_1 + \frac{1}{4}\vec{b}_0 = \frac{3}{4}[-3, 6] + \frac{1}{4}[-9, 0] = [-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}]$$

$$\vec{b}_2^* = (1 - \frac{1}{2})\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_1 = \frac{1}{2}[3, 6] + \frac{1}{2}[-3, 6] = [0, 6]$$

$$\vec{b}_3^* = (1 - \frac{3}{4})\vec{b}_3 + \frac{3}{4}\vec{b}_2 = \frac{1}{4}[9, 0] + \frac{3}{4}[3, 6] = [\frac{9}{2}, \frac{9}{2}]$$

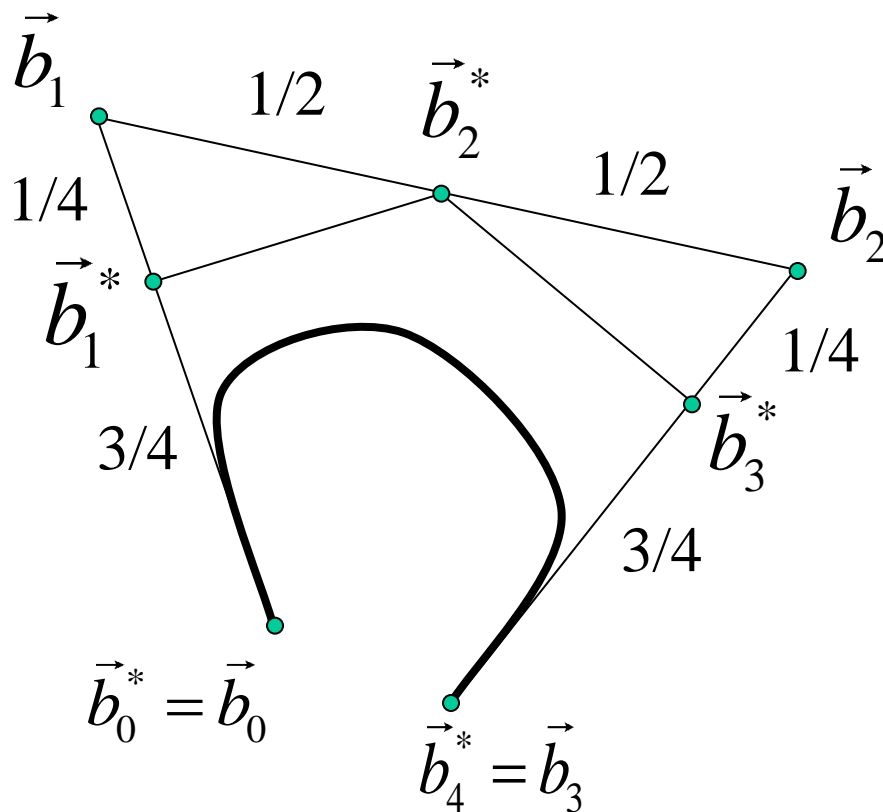
$$\vec{b}_4^* = \vec{b}_3 = [9, 0]$$



# 一、Bezier曲线的升阶



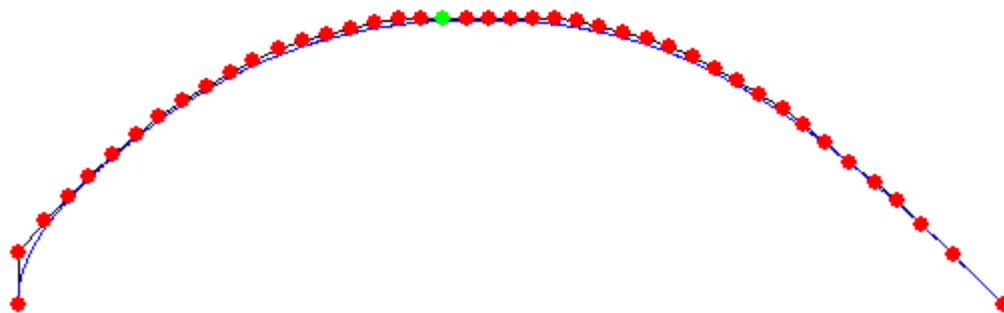
图示:



# 一、Bezier曲线的升阶



思考：Bezier曲线每升阶一次，控制顶点个数就多一个，也更加逼近Bezier曲线，如果无限次的升阶下去，控制多边形的极限是什么？



升阶次数越多，控制多边形越逼近Bezier曲线

# 一、Bezier曲线的升阶



Farin定理:

设 $n$ 次Bezier曲线 $\vec{p}(t)$ , 经过 $k$ 次升阶后, 其控制多边形为 $\pi^k \vec{p}$ , 则:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi^k \vec{p} = \vec{p}(t)$$

说明: 逐次升级后, 控制多边形将收敛到曲线的本身。

## 二、Bezier曲线的降阶



降阶是升阶的逆问题，一般情况下，准确的降阶是**不可能**的。

已知： $n$ 次Bezier曲线的 $n+1$ 个控制顶点为：

$$\vec{b}_i, i = 0, 1, \dots, n$$

求降阶一次后 $n$ 个控制顶点 $\vec{b}_i^{\wedge}, i = 0, 1, \dots, n-1$ 。

假设 $\vec{b}_i$ 是由 $\vec{b}_i^{\wedge}$ 升阶得到的，根据升阶公式有：

$$\vec{b}_i = \frac{i}{n} \vec{b}_{i-1}^{\wedge} + \left(1 - \frac{n-i}{n}\right) \vec{b}_i^{\wedge} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

**$n$ 个未知数， $n+1$ 个方程，不能得到精确解！**

## 二、Bezier曲线的降阶



对于上式，可以按照两种顺序得到以下两种不同的结果：

$$\vec{b}_i^{\wedge} = \frac{n\vec{b}_i - i\vec{b}_{i-1}^{\wedge}}{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \vec{b}_{-1}^{\wedge} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{b}_{i-1}^{\wedge} = \frac{n\vec{b}_i - (n-i)\vec{b}_i^{\wedge}}{i}, \quad i = n, n-1, \dots, 1, \vec{b}_n^{\wedge} = \vec{0} \quad (2)$$

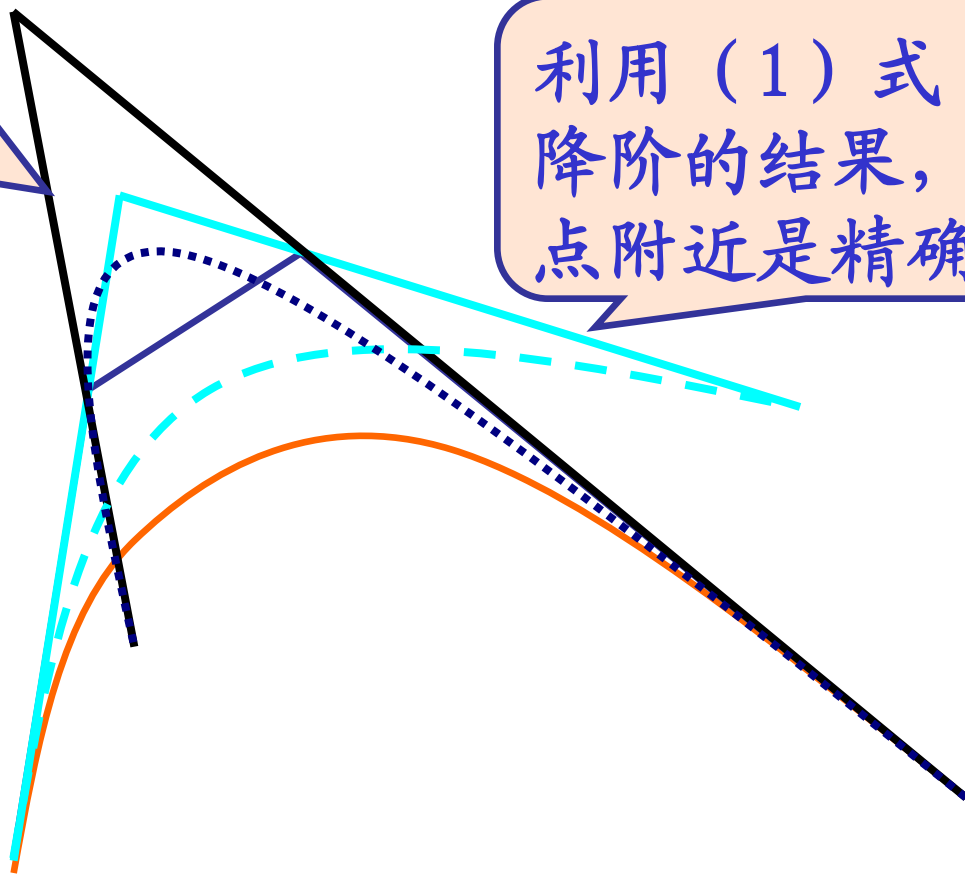
上两式都是外插值，计算不稳定。其中（1）式是按照正序递推的结果，它**只在曲线起点**附近是精确的；（2）式是按照逆序递推的结果，它**只在曲线终点**附近是精确的。

## 二、Bezier曲线的降阶



利用(2)式降阶的结果，在终点附近是精确的。

利用(1)式降阶的结果，在起点附近是精确的。



可以综合利用(1)，(2)式进行降阶，保证起点和终点的插值性，但仍然不是精确的。



第三节  
结束







## 第四节 *Bezier*曲线的几何特性

# 一、Bezier曲线的矩阵形式



## 1、Bezier曲线的幂基表示形式

$$\begin{aligned}\vec{p}(t) &= \sum_{j=0}^n \vec{b}_j B_{j,n}(t) \\ &= \begin{bmatrix} B_{0,n}(t) & B_{1,n}(t) & \cdots & B_{n,n}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{b}_0 \\ \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

将Bernstein基转化为幂基，得：

$$\begin{bmatrix} B_{0,n}(t) & B_{1,n}(t) & \cdots & B_{n,n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & t^n \end{bmatrix} M_n$$

# 一、Bezier曲线的矩阵形式



其中:

$$M_n = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & \cdots & m_{0n} \\ m_{10} & m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n0} & m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

根据Bernstein基与幂基的关系，有：

$$\begin{cases} m_{ij} = (-1)^{i+j} C_n^i C_i^j & i \geq j \\ m_{ij} = 0 & i < j \end{cases}$$

这说明矩阵 $M_n$ 是一个下三角矩阵。

# 一、Bezier曲线的矩阵形式



特别的，对于三次Bezier曲线，有：

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -3 & 3 & & \\ 3 & 6 & 3 & \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3] \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -3 & 3 & & \\ 3 & 6 & 3 & \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_0 \\ \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix}$$

# 一、Bezier曲线的矩阵形式



## 2、三次Hermite插值的Bezier曲线形式

构造三次Hermite插值曲线，使它满足：

$$\vec{p}(0) = \vec{p}_0 \quad (1)$$

$$\vec{p}(1) = \vec{p}_1 \quad (2)$$

$$\vec{p}'(0) = \vec{m}_0 \quad (3)$$

$$\vec{p}'(1) = \vec{m}_1 \quad (4)$$

显然，满足上式条件的三次Hermite插值曲线为：

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 H_{0,3}(t) + \vec{m}_0 H_{1,3}(t) + \vec{m}_1 H_{2,3}(t) + \vec{p}_1 H_{3,3}(t) \quad (5)$$

# 一、Bezier曲线的矩阵形式



下面将(5)式中的三次Bezier曲线, 求其控制顶点:

$$\text{令: } \vec{p}(t) = \sum_{j=0}^3 \vec{b}_j B_{j,3}(t)$$

根据Bezier曲线的端点性质, 有:

$$\vec{b}_0 = \vec{p}(0) = \vec{p}_0 \quad \vec{b}_3 = \vec{p}(1) = \vec{p}_1$$

$$\text{又因为: } \vec{p}'(0) = 3\Delta\vec{b}_0, \vec{p}'(1) = 3\Delta\vec{b}_2$$

将上式代入(3)、(4)可得:

$$\vec{b}_1 = \vec{p}_0 + \frac{1}{3}\vec{m}_0, \vec{b}_2 = \vec{p}_1 - \frac{1}{3}\vec{m}_1$$

# 一、Bezier曲线的矩阵形式



将求得的控制顶点代入Bezier曲线方程，可得：

$$\begin{aligned}\vec{p}(t) &= \sum_{j=0}^3 \vec{b}_j B_{j,3}(t) \\ &= \vec{p}_0 B_{0,3}(t) + (\vec{p}_0 + \frac{1}{3} \vec{m}_0) B_{1,3}(t) + (\vec{p}_1 - \frac{1}{3} \vec{m}_1) B_{2,3}(t) + \vec{p}_1 B_{3,3}(t)\end{aligned}$$

将上式改写为：

$$\begin{aligned}\vec{p}(t) &= \vec{p}_0 (B_{0,3}(t) + B_{1,3}(t)) + \vec{m}_0 (\frac{1}{3} B_{1,3}(t)) + \vec{m}_1 (-\frac{1}{3} B_{2,3}(t)) \\ &\quad + \vec{p}_1 (B_{3,3}(t) + B_{2,3}(t))\end{aligned}\tag{6}$$



# 一、Bezier曲线的矩阵形式



将（5）、（6）两式比较可得：

$$H_{0,3}(t) = B_{0,3}(t) + B_{1,3}(t)$$

$$H_{1,3}(t) = \frac{1}{3} B_{1,3}(t)$$

$$H_{2,3}(t) = -\frac{1}{3} B_{2,3}(t)$$

$$H_{3,3}(t) = B_{2,3}(t) + B_{3,3}(t)$$

上式即为Hermite基与Bernstein基的关系。

# 一、Bezier曲线的矩阵形式



练习：已知五次Hermite插值曲线满足以下的插值条件：

$$\vec{p}(0) = \vec{p}_0 \quad \vec{p}(1) = \vec{p}_1$$

$$\vec{p}'(0) = \vec{m}_0 \quad \vec{p}'(1) = \vec{m}_1$$

$$\vec{p}''(0) = \vec{s}_0 \quad \vec{p}''(1) = \vec{s}_1$$

试将其表示成五次Bezier曲线，并求出五次Hermite基函数与五次Bezier曲线之间的关系。

## 二、Bezier曲线的几何特性



### 1、一次和二次Bezier曲线

$$\text{一次: } \vec{p}(t) = \sum_{j=0}^1 \vec{b}_j B_{j,1}(t)$$

$$= \vec{b}_0(1-t) + \vec{b}_1 t$$

直线段

$$\text{二次: } \vec{p}(t) = \sum_{j=0}^2 \vec{b}_j B_{j,2}(t)$$

$$= \vec{b}_0(1-t)^2 + 2\vec{b}_1 t(1-t) + \vec{b}_2 t^2$$

抛物线的一段，无拐点

## 二、Bezier曲线的几何特性



### 2、三次空间Bezier曲线

在如下的讨论中，设三次空间Bezier曲线为：

$$\vec{p}(t) = \sum_{j=0}^3 \vec{b}_j B_{j,3}(t)$$

其中，控制顶点 $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ 不共面。

## 二、Bezier曲线的几何特性



结论1: 空间三次Bezier曲线无尖点。

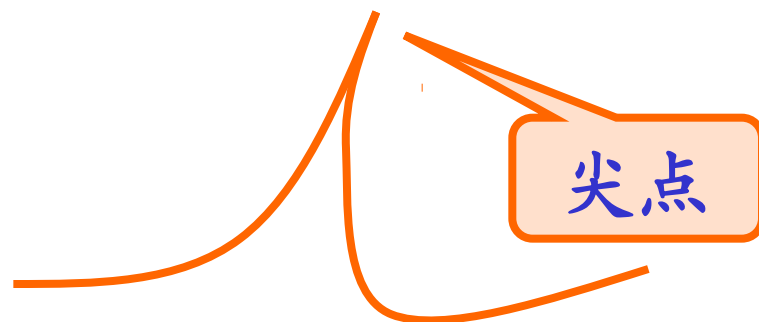
$\vec{p}(t_0)$ 是尖点  $\Leftrightarrow \vec{p}'(t_0) = \vec{0}$ , 而且 $\vec{p}'(t)$ 在 $t = t_0$ 的左右邻域有一个方向的突变。

下面证明结论1:

若有 $0 < t_0 < 1$ , 使得 $\vec{p}'(t_0) = \vec{0}$

$$\text{因为 } \vec{p}(t) = \sum_{j=0}^3 \vec{b}_j B_{j,3}(t)$$

$$= \vec{b}_0 + \vec{a}_1(1 - B_{0,3}(t)) + \vec{a}_2(B_{2,3}(t) + B_{3,3}(t)) + \vec{a}_3 B_{3,3}(t)$$



## 二、Bezier曲线的几何特性



其中  $\vec{a}_i = \Delta \vec{b}_{i-1} = \vec{b}_i - \vec{b}_{i-1}, i = 1, 2, 3$

即为控制多边形的边矢量。对上式求导得:

$$\vec{p}'(t_0) = -B'_{0,3}(t_0)\vec{a}_1 + (B'_{2,3}(t_0) + B'_{3,3}(t_0))\vec{a}_2 + B'_{3,3}(t_0)\vec{a}_3 = \vec{0} \quad (*)$$

因为四个控制顶点不共面，所以控制多边形的三个边矢量线性无关。要使(\*)式成立，当且仅当:

$$B'_{0,3}(t_0) = B'_{2,3}(t_0) = B'_{3,3}(t_0) = 0 \quad (**)$$

即:  $3(1-t_0)^2 = 0$  和  $3t_0^2 = 0$  同时成立。

## 二、Bezier曲线的几何特性



而这显然是不可能的，所以空间三次Bezier曲线无尖点。

**结论2：**空间三次Bezier曲线无泛拐点。

**泛拐点：**挠率  $\tau = 0$ ，且在该点左右邻域挠率正负异号，曲线上这样的点称为泛拐点。

判断泛拐点的必要条件：

$$f(t) \triangleq \det(\vec{p}'(t), \vec{p}''(t), \vec{p}'''(t)) = 0$$

因为挠率的计算公式为：

$$\tau = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{(\vec{r}' \times \vec{r}'')^2}$$



## 二、Bezier曲线的几何特性



下面证明空间三次Bezier曲线无泛拐点:

$$f(t) = \det\left(\sum_{j=0}^3 \vec{b}_j B'_{j,3}(t), \sum_{j=0}^3 \vec{b}_j B''_{j,3}(t), \sum_{j=0}^3 \vec{b}_j B'''_{j,3}(t)\right)$$

矩阵  
升阶

$$= -\det\left(\begin{array}{cccc} \sum_{j=0}^3 \vec{b}_j B_{j,3}(t) & \sum_{j=0}^3 \vec{b}_j B'_{j,3}(t) & \sum_{j=0}^3 \vec{b}_j B''_{j,3}(t) & \sum_{j=0}^3 \vec{b}_j B'''_{j,3}(t) \\ \sum_{j=0}^3 B_{j,3}(t) & \sum_{j=0}^3 B'_{j,3}(t) & \sum_{j=0}^3 B''_{j,3}(t) & \sum_{j=0}^3 B'''_{j,3}(t) \end{array}\right)$$

= 1

= 0

= 0

= 0

## 二、Bezier曲线的几何特性



$$= -\det \left\{ \begin{pmatrix} \vec{b}_0 & \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{0,3}(t) & B'_{0,3}(t) & B''_{0,3}(t) & B'''_{0,3}(t) \\ B_{1,3}(t) & B'_{1,3}(t) & B''_{1,3}(t) & B'''_{1,3}(t) \\ B_{2,3}(t) & B'_{2,3}(t) & B''_{2,3}(t) & B'''_{2,3}(t) \\ B_{3,3}(t) & B'_{3,3}(t) & B''_{3,3}(t) & B'''_{3,3}(t) \end{pmatrix} \right\}$$

则:  $D'(t) \equiv 0$

所以:  $D(t) \equiv C(\text{常数})$

记作  $D(t)$

将  $t = 0$  代入得:  $D(0) = 108 = C$

## 二、Bezier曲线的几何特性



所以：

$$f(t) = -108 \det \begin{pmatrix} \vec{b}_0 & \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -108 \det \begin{pmatrix} \vec{b}_0 & \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

因为空间三次Bezier曲线控制多边形的三个边矢量不共面。

所以：空间三次Bezier曲线无泛拐点。

## 二、Bezier曲线的几何特性



结论3: 空间三次Bezier曲线无重点(即自交点)。

证: 假设存在  $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ , 使得:  $\vec{p}(t_1) = \vec{p}(t_2)$

$$\text{即: } \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_2) = 0$$

上式可化为:

$$\begin{aligned} & [B_{0,3}(t_1) - B_{0,3}(t_2)]\vec{a}_1 + [B_{2,3}(t_2) + B_{3,3}(t_2) - B_{2,3}(t_1) - B_{3,3}(t_1)]\vec{a}_2 \\ & + [B_{3,3}(t_2) - B_{3,3}(t_1)]\vec{a}_3 = 0 \end{aligned}$$

因为上述三个边向量线性无关, 所以上式成立当且仅当系数全部为零。

## 二、Bezier曲线的几何特性



而由  $B_{0,3}(t_1) = B_{0,3}(t_2)$  及  $B_{3,3}(t_1) = B_{3,3}(t_2)$

可得:  $t_1 = t_2$  这与已知  $t_1 < t_2$  矛盾。

所以空间三次Bezier曲线无重点（自交点）。

综上所述：空间三次Bezier曲线无尖点，无泛拐点，无重点。

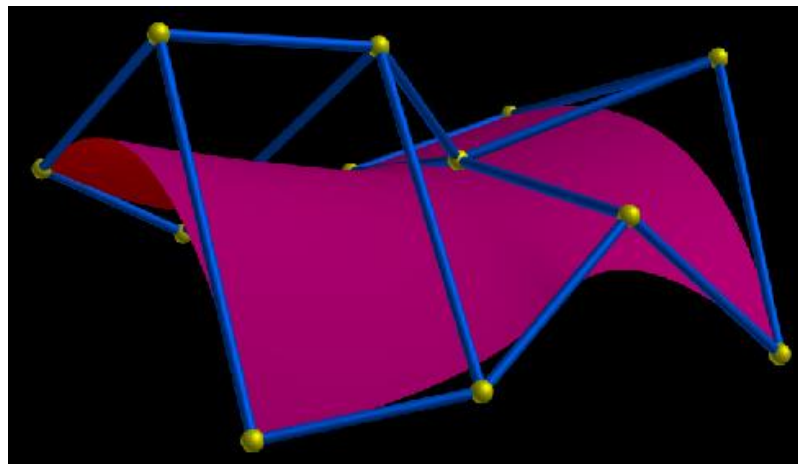


# 第四节 结束





## 第五节 张量积 *Bezier* 曲面





# 一、张量积Bezier曲面的方程及性质



## 1、张量积Bezier曲面的方程

在张量积曲面的一般形式中：

$$\vec{P}(u, v) = [F_0(u) \ F_1(u) \ \cdots \ F_m(u)] \cdot \begin{bmatrix} \vec{b}_{0,0} & \vec{b}_{0,1} & \cdots & \vec{b}_{0,n} \\ \vec{b}_{1,0} & \vec{b}_{1,1} & \cdots & \vec{b}_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{b}_{m,0} & \vec{b}_{m,1} & \cdots & \vec{b}_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0(v) \\ G_1(v) \\ \vdots \\ G_n(v) \end{bmatrix}$$

将基函数分别取作m次和n次Bernstein基函数，  
即得张量积Bezier曲面方程如下：

# 一、张量积Bezier曲面的方程及性质

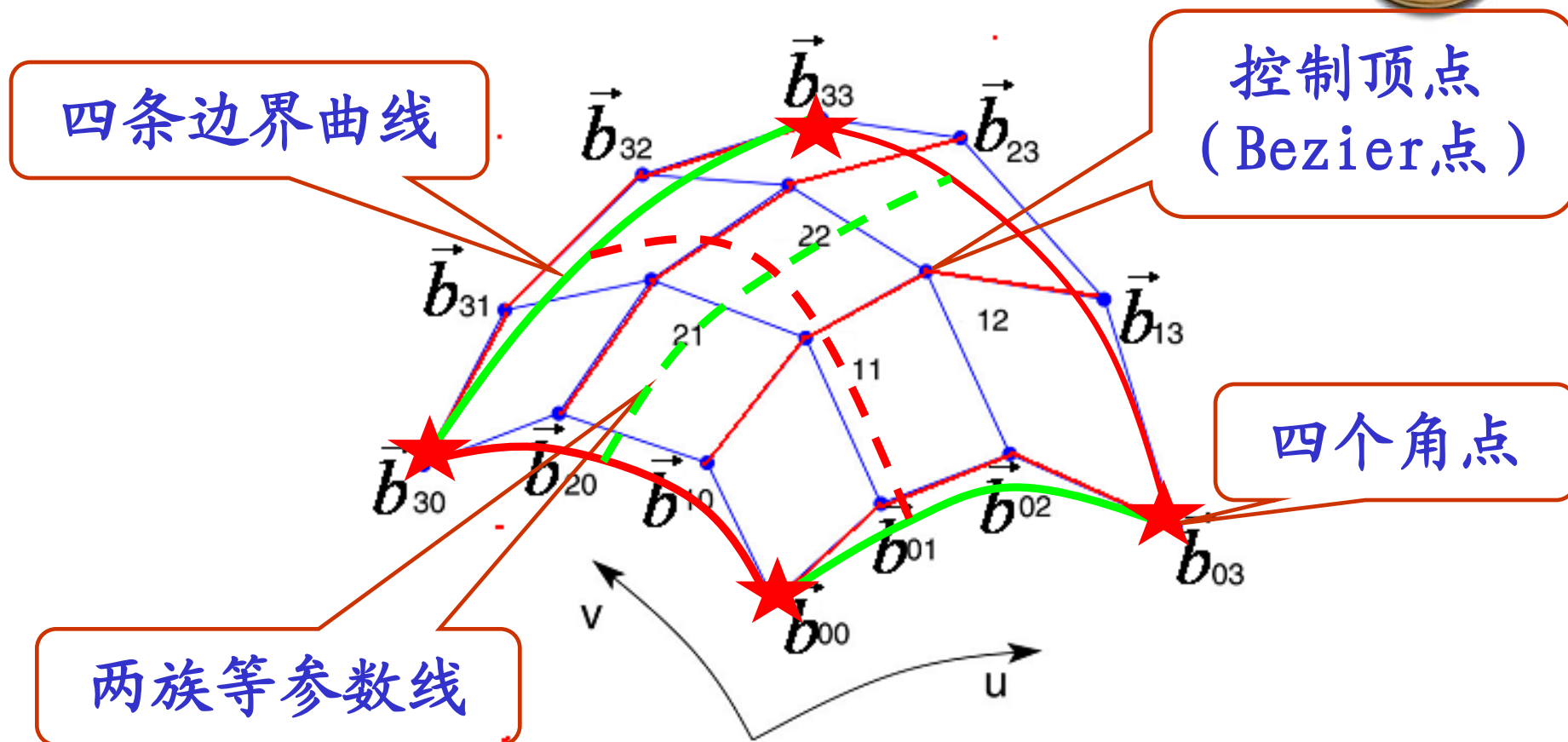


$$\begin{aligned}\vec{P}(u, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \vec{b}_{i,j} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \\ &= [B_{0,m}(u) \ B_{1,m}(u) \ \cdots \ B_{m,m}(u)] \cdot \begin{bmatrix} \vec{b}_{0,0} & \vec{b}_{0,1} & \cdots & \vec{b}_{0,n} \\ \vec{b}_{1,0} & \vec{b}_{1,1} & \cdots & \vec{b}_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{b}_{m,0} & \vec{b}_{m,1} & \cdots & \vec{b}_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,n}(v) \\ B_{1,n}(v) \\ \vdots \\ B_{n,n}(v) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

上式的曲面称为  $m \times n$  次的, 若  $m = n$ , 称为双  $n$  次的。

最常用的是双三次张量积Bezier曲面。

# 一、张量积Bezier曲面的方程及性质



张量积Bezier曲面及其控制网格

# 一、张量积Bezier曲面的方程及性质



## 2、生成方式:

设有以 $u$ 为参数的 $m$ 次Bezier曲线:

$$\vec{p}(u) = \sum_{i=0}^m \vec{b}_i B_{i,m}(u) \quad 0 \leq u \leq 1$$

它的 $m+1$ 个控制顶点分别沿着 $m+1$ 条曲线运动,  
而这 $m+1$ 条曲线有都是以 $v$ 为参数的 $n$ 次Bezier曲线, 即:

$$\vec{b}_i = \sum_{j=0}^n \vec{b}_{i,j} B_{j,n}(v) \quad 0 \leq v \leq 1$$
 组合以上两个方程即得:

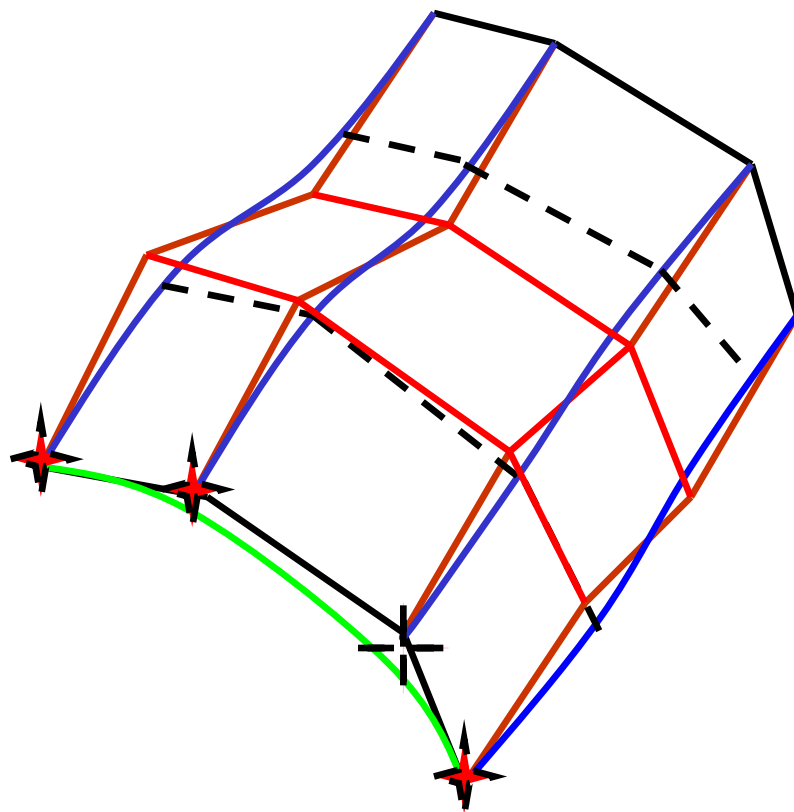
$$\vec{p} = \vec{p}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \vec{b}_{i,j} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

# 一、张量积Bezier曲面的方程及性质



## 张量积Bezier曲面的生成方式

线  
动  
成  
面



注：除了边界的控制网格以外，其余的控制网格（中间控制网格）生成的曲线不在曲面上。

# 一、张量积Bezier曲面的方程及性质



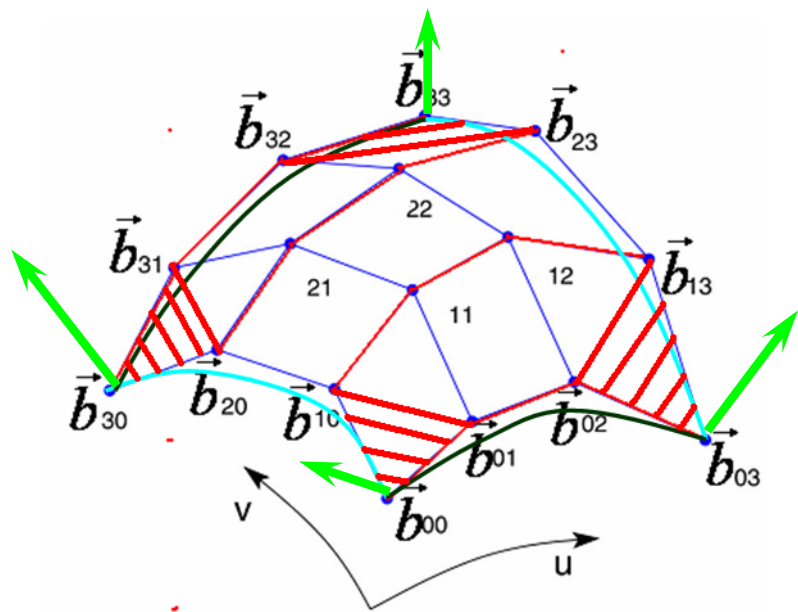
## 3、张量积Bezier曲面的性质:

1) 角点插值性:  $\vec{b}_{00}, \vec{b}_{0n}, \vec{b}_{m0}$  和  $\vec{b}_{mn}$  在曲面上。

2) 角点切平面:

$\vec{b}_{00}, \vec{b}_{01}, \vec{b}_{11}; \vec{b}_{mn}, \vec{b}_{(m-1)n}, \vec{b}_{m(n-1)};$

$\vec{b}_{m0}, \vec{b}_{(m-1)0}, \vec{b}_{m1}; \vec{b}_{0n}, \vec{b}_{0(n-1)}, \vec{b}_{1n}$



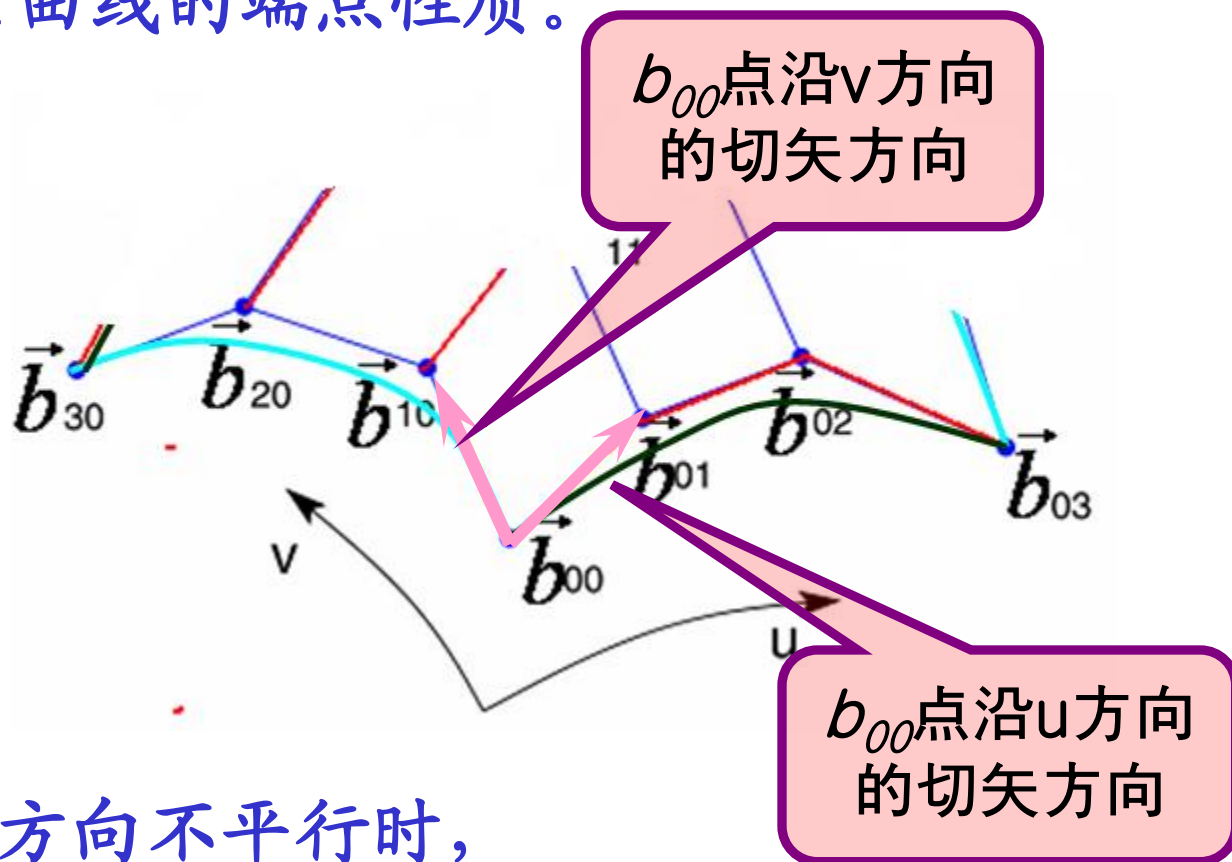
四组点确定的平面分别在角点处和曲面相切。



# 一、张量积Bezier曲面的方程及性质



原因：Bezier曲线的端点性质。



当这两个切矢方向不平行时，  
叉乘后即得角点处的法向量



# 一、张量积Bezier曲面的方程及性质



3) 控制网格最外圈的顶点确定了四条边界曲线，这些边界曲线在曲面上。内部顶点确定的单参数曲线不在曲面上。

4) Bezier曲面边界的跨界切矢仅与定义该边界的控制顶点和相邻一排控制顶点有关；其跨界二阶切矢仅与定义该边界的控制顶点及相邻两排控制顶点有关。

5) 对称性

# 一、张量积Bezier曲面的方程及性质



6) 凸包性

7) 仿射不变性

8) 对于 $m \times n$ 次张量积 $Bezier$ 曲面, 移动控制顶点 $\vec{b}_{i,j}$ ,

将对曲面上的点 $\vec{p}(\frac{i}{m}, \frac{j}{n})$ 影响最大。

# 一、张量积Bezier曲面的方程及性质



张量积Bezier曲面的幂基矩阵表示形式:

$$\vec{p}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \vec{b}_{i,j} B_{i,3}(u) B_{j,3}(v)$$

$$\begin{aligned} &= [B_{0,3}(u) \quad B_{1,3}(u) \quad B_{2,3}(u) \quad B_{3,3}(u)] \begin{bmatrix} \vec{b}_{00} & \vec{b}_{01} & \vec{b}_{02} & \vec{b}_{03} \\ \vec{b}_{10} & \vec{b}_{11} & \vec{b}_{12} & \vec{b}_{13} \\ \vec{b}_{20} & \vec{b}_{21} & \vec{b}_{22} & \vec{b}_{23} \\ \vec{b}_{30} & \vec{b}_{31} & \vec{b}_{32} & \vec{b}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,3}(v) \\ B_{1,3}(v) \\ B_{2,3}(v) \\ B_{3,3}(v) \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_{00} & \vec{b}_{01} & \vec{b}_{02} & \vec{b}_{03} \\ \vec{b}_{10} & \vec{b}_{11} & \vec{b}_{12} & \vec{b}_{13} \\ \vec{b}_{20} & \vec{b}_{21} & \vec{b}_{22} & \vec{b}_{23} \\ \vec{b}_{30} & \vec{b}_{31} & \vec{b}_{32} & \vec{b}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \\ &= U^T M^T B M V \end{aligned}$$

## 二、张量积Bezier曲面的deCasteljau算法



deCasteljau算法说明: Bezier曲线上的任意一点都可以由有限次的线性插值得到, 同理, 张量积Bezier曲面上的任意一点也可以由有限次的线性插值得到, 这就是张量积Bezier曲面的deCasteljau算法的内容:

若给定Bezier曲面的控制网格 $\vec{b}_{i,j}, i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n$ 和一对参数值 $(u, v)$ , 则曲面上的对应的点 $\vec{p}(u, v)$ 可由下式得到:

## 二、张量积Bezier曲面的deCasteljau算法



$$\vec{p}(u, v) = \sum_{i=0}^{m-k} \sum_{j=0}^{n-l} \vec{b}_{i,j}^{k,l} B_{i,m-k}(u) B_{j,n-l}(v) = \cdots = \vec{b}_{00}^{m,n} \quad u, v \in [0, 1]$$

其中:

$$\vec{b}_{i,j}^{k,l} = \begin{cases} \vec{b}_{i,j} & (k = l = 0) \\ (1-u)\vec{b}_{i,j}^{k-1,0} + u\vec{b}_{i+1,j}^{k-1,0} & (k = 1, 2, \dots, m; l = 0) \\ (1-v)\vec{b}_{0,j}^{m,l-1} + v\vec{b}_{0,j+1}^{m,l-1} & (k = m, l = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (1)$$

$$\vec{b}_{i,j}^{k,l} = \begin{cases} \vec{b}_{i,j} & (k = l = 0) \\ (1-v)\vec{b}_{i,j}^{0,l-1} + v\vec{b}_{i,j+1}^{0,l-1} & (k = 0; l = 1, 2, \dots, n) \\ (1-u)\vec{b}_{i,0}^{k-1,n} + u\vec{b}_{i+1,0}^{k-1,n} & (k = 1, 2, \dots, m; l = n) \end{cases} \quad (2)$$

## 二、张量积Bezier曲面的deCasteljau算法



- 确定曲面上一点的方案(一) (“先u后v”)：
  - 当按第一个式子执行时，先以  $u$  参数值对控制网格  $u$  向的  $n+1$  个多边形执行曲线deCasteljau算法， $m$  级递推后，得到沿  $v$  向由  $n+1$  个顶点  $\vec{b}_{0,j}^{m,0} (j=0,1,\dots,n)$  构成的中间多边形。再以  $v$  参数值对它执行曲线的deCasteljau算法， $n$  级递推以后，得到  $\vec{b}_{0,0}^{m,n}$ ，即所求曲面上的点：

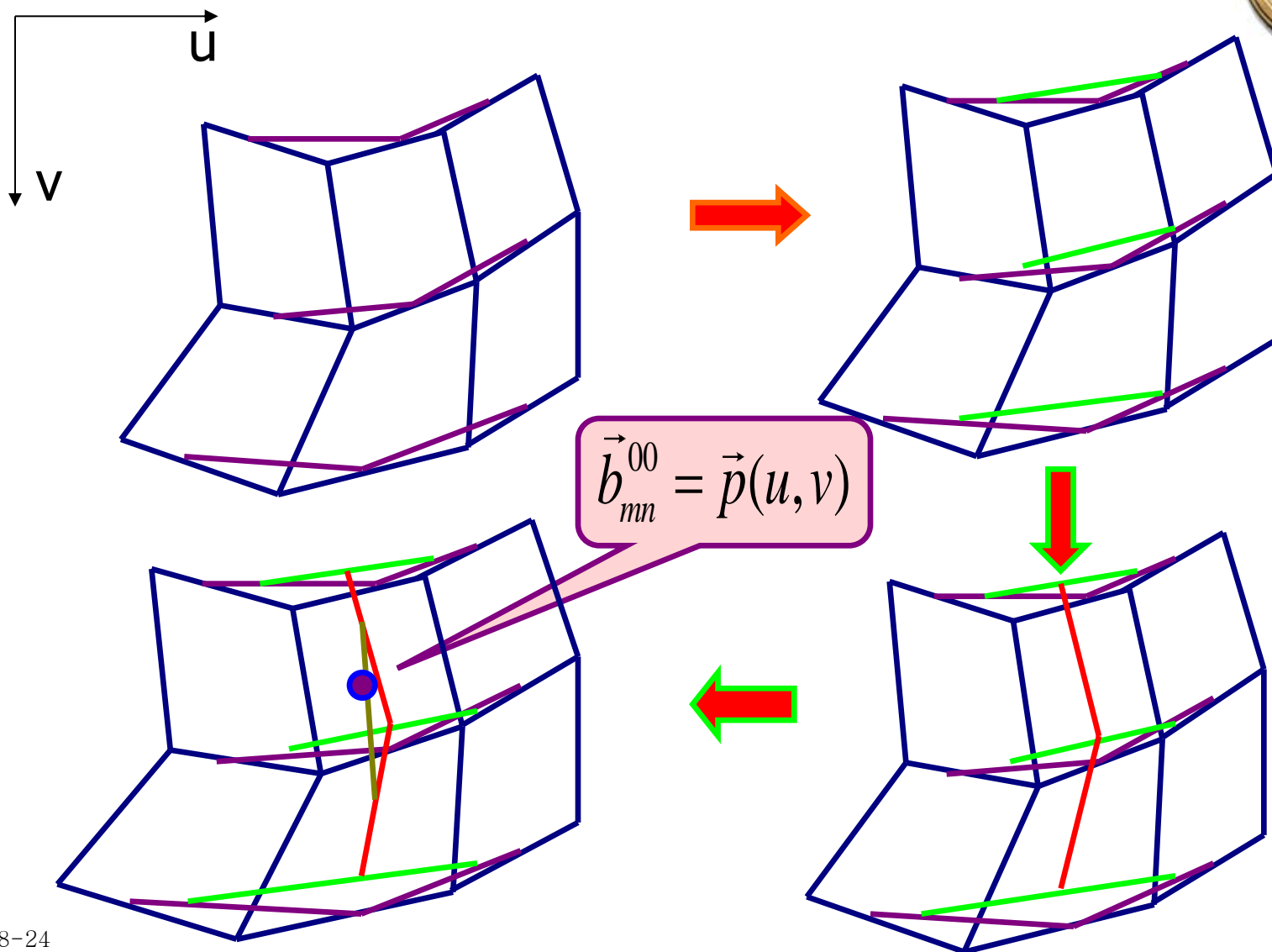
$$\begin{aligned}\vec{p}(u,v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \vec{b}_{i,j} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \\ &= \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^m \vec{b}_{i,j} B_{i,m}(u) \right) B_{j,n}(v)\end{aligned}$$



## 二、张量积Bezier曲面的deCasteljau算法



方案一图示





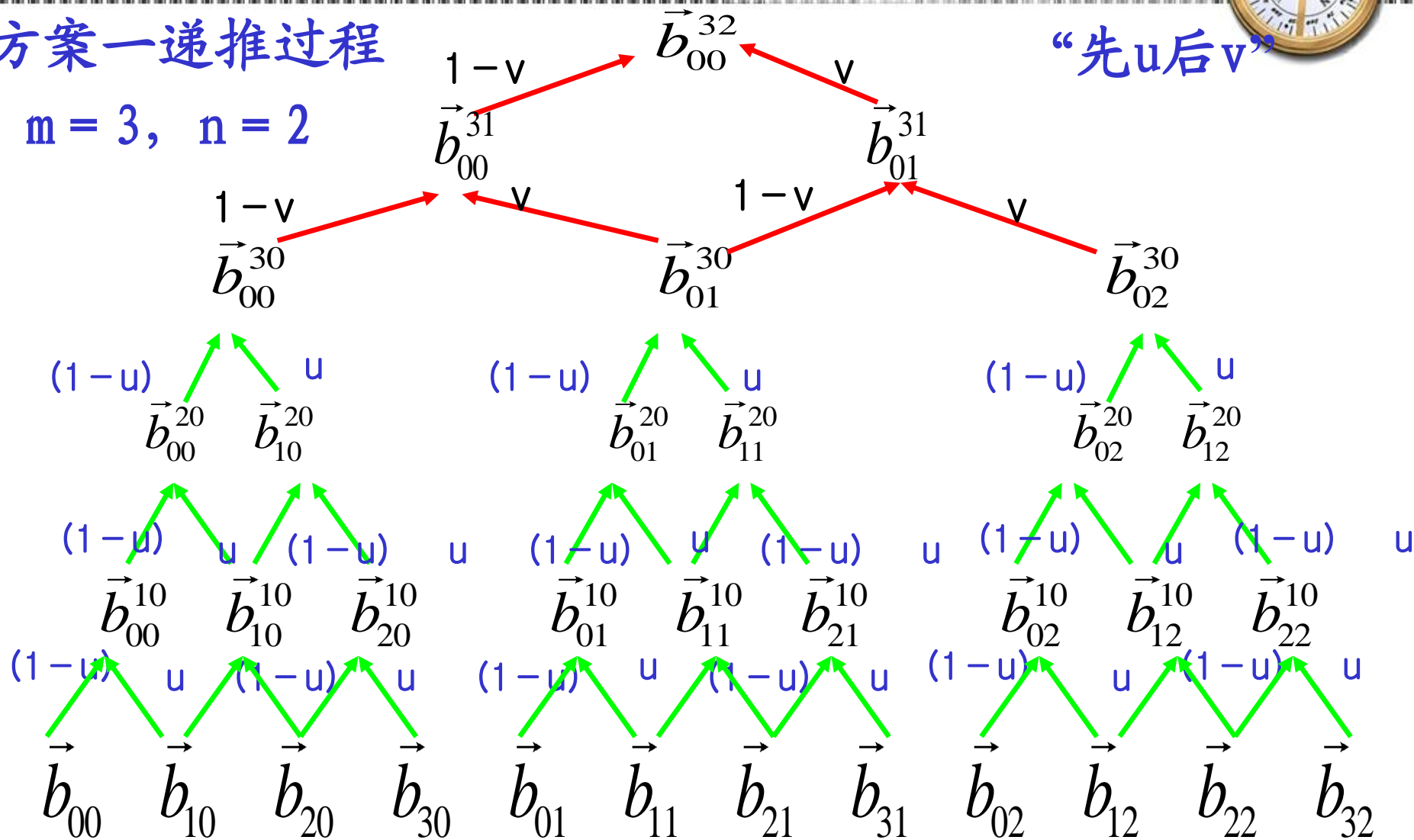
## 二、张量积Bezier曲面的deCasteljau算法



方案一递推过程

$m = 3, n = 2$

“先u后v”



## 二、张量积Bezier曲面的deCasteljau算法



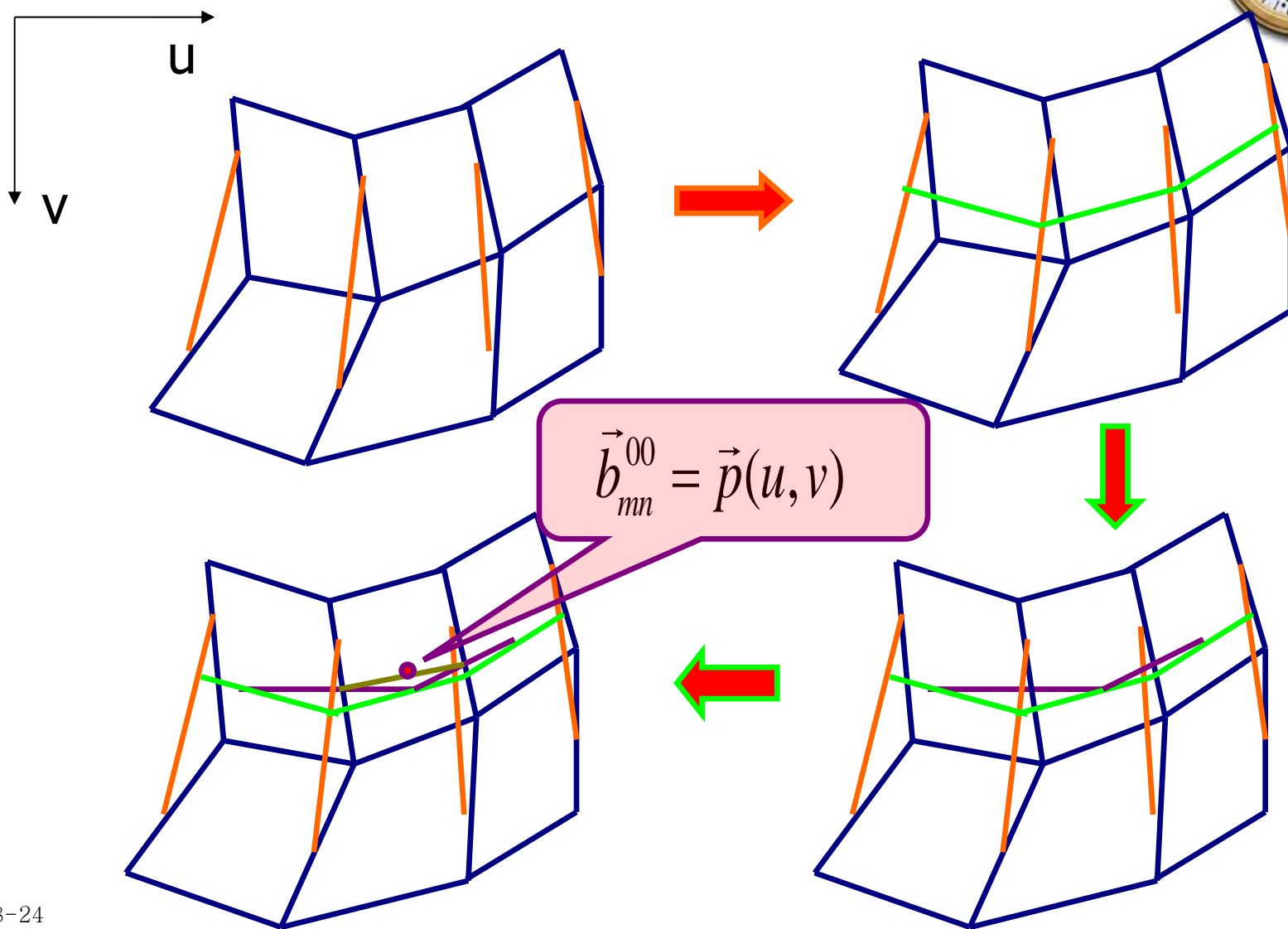
- 确定曲面上一点的方案(二) (“先v后u”)：
  - 当按第二个式子执行时，先以v参数值对控制网格v向的m+1个多边形执行曲线deCasteljau算法，n级递推后，得到沿u向由m+1个顶点  $\vec{b}_{i,0}^{0,n} (i=0,1,\dots,m)$  构成的中间多边形。再以u参数值对它执行曲线的deCasteljau算法，m级递推以后，得到  $\vec{b}_{0,0}^{m,n}$ ，即所求曲面上的点：

$$\begin{aligned}\vec{p}(u,v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \vec{b}_{i,j} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \\ &= \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=0}^n \vec{b}_{i,j} B_{j,n}(v) \right) B_{i,m}(u)\end{aligned}$$

## 二、张量积Bezier曲面的deCasteljau算法



方案二图示



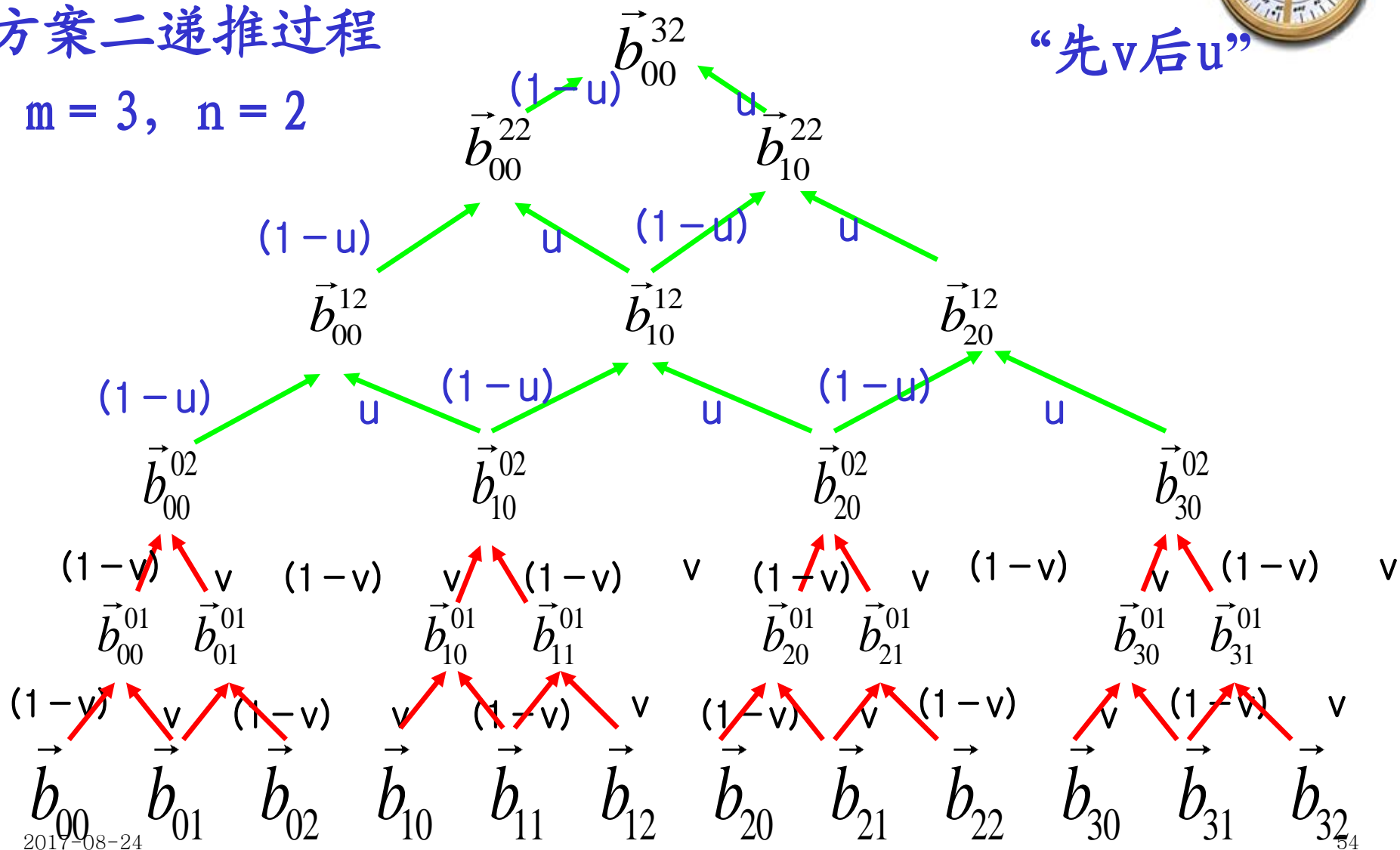
## 二、张量积Bezier曲面的deCasteljau算法



方案二递推过程

$m = 3, n = 2$

“先v后u”



## 二、张量积Bezier曲面的deCasteljau算法



### 方案三：利用双线性插值

$$\vec{b}_{i,j}^{k,k} = [1-u, u] \begin{bmatrix} \vec{b}_{i,j}^{k-1,k-1} & \vec{b}_{i,j+1}^{k-1,k-1} \\ \vec{b}_{i+1,j}^{k-1,k-1} & \vec{b}_{i+1,j+1}^{k-1,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

$$k = 1, 2, \dots, n; i, j = 0, 1, \dots, n-k$$

比较适合于 $m = n$ 的双 $n$ 次张量积Bezier曲面，当 $m \neq n$ 时只能执行 $\min(m, n)$ 次，然后再由一个

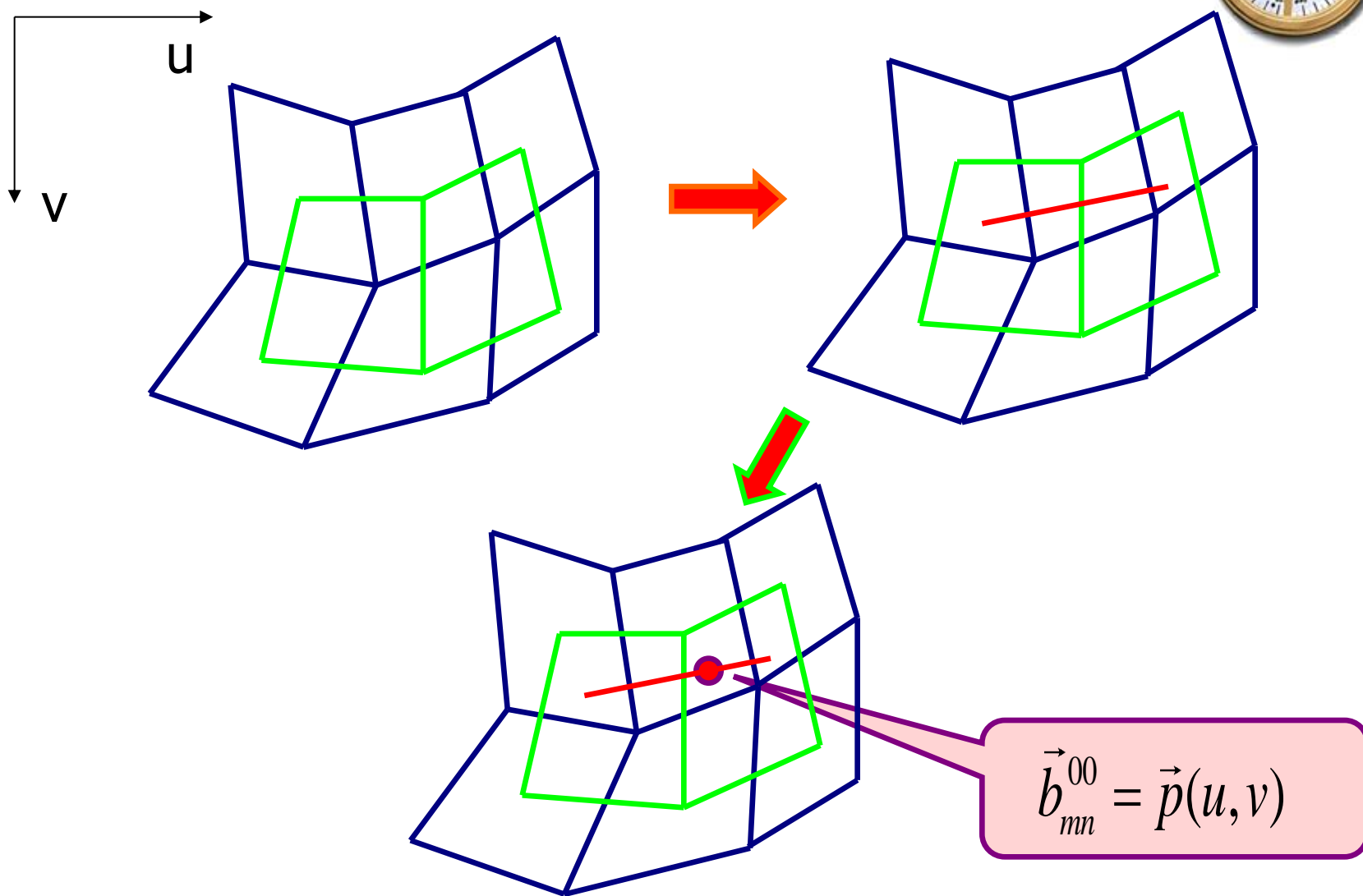
$$\max(m, n) - \min(m, n) + 1$$

个顶点构成的中间多边形沿单参数方向执行曲线的deCasteljau算法即得曲面上对应的点。

## 二、张量积Bezier曲面的deCasteljau算法



方案三图示





### 三、张量积Bezier曲面的偏导矢和法矢



1、偏导矢的计算:

$$\left. \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \right|_{(u,v)} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \vec{b}_{i,j} \left. \frac{dB_{i,m}(u)}{du} \right|_u B_{j,n}(v)$$

特别的:  $\because \vec{p}(u,v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \vec{b}_{i,j} B_{i,3}(u) B_{j,3}(v)$

$$= [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_{00} & \vec{b}_{01} & \vec{b}_{02} & \vec{b}_{03} \\ \vec{b}_{10} & \vec{b}_{11} & \vec{b}_{12} & \vec{b}_{13} \\ \vec{b}_{20} & \vec{b}_{21} & \vec{b}_{22} & \vec{b}_{23} \\ \vec{b}_{30} & \vec{b}_{31} & \vec{b}_{32} & \vec{b}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{p}(u,v)}{\partial u} = [0 \quad 1 \quad 2u \quad 3u^2] \begin{bmatrix} \vec{b}_{00} & \vec{b}_{01} & \vec{b}_{02} & \vec{b}_{03} \\ \vec{b}_{10} & \vec{b}_{11} & \vec{b}_{12} & \vec{b}_{13} \\ \vec{b}_{20} & \vec{b}_{21} & \vec{b}_{22} & \vec{b}_{23} \\ \vec{b}_{30} & \vec{b}_{31} & \vec{b}_{32} & \vec{b}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

### 三、张量积Bezier曲面的偏导矢和法矢



同理有:

$$\left. \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right|_{(u,v)} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \vec{b}_{i,j} B_{i,m}(u) \frac{dB_{j,n}(v)}{dv} \bigg|_v$$

特别的:  $\because \vec{p}(u,v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \vec{b}_{i,j} B_{i,3}(u) B_{j,3}(v)$

$$= [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_{00} & \vec{b}_{01} & \vec{b}_{02} & \vec{b}_{03} \\ \vec{b}_{10} & \vec{b}_{11} & \vec{b}_{12} & \vec{b}_{13} \\ \vec{b}_{20} & \vec{b}_{21} & \vec{b}_{22} & \vec{b}_{23} \\ \vec{b}_{30} & \vec{b}_{31} & \vec{b}_{32} & \vec{b}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{p}(u,v)}{\partial v} = [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_{00} & \vec{b}_{01} & \vec{b}_{02} & \vec{b}_{03} \\ \vec{b}_{10} & \vec{b}_{11} & \vec{b}_{12} & \vec{b}_{13} \\ \vec{b}_{20} & \vec{b}_{21} & \vec{b}_{22} & \vec{b}_{23} \\ \vec{b}_{30} & \vec{b}_{31} & \vec{b}_{32} & \vec{b}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \\ 3v^2 \end{bmatrix}$$

### 三、张量积Bezier曲面的偏导矢和法矢



Bezier曲线的各阶导矢可以表示成低次的Bezier曲线（速端曲线），Bezier曲面的各阶偏导矢也有类似的结论。

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} = m \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-1} \Delta^{1,0} \vec{b}_{i,j} B_{i,m-1}(u) B_{j,n}(v)$$

$$\text{其中: } \Delta^{1,0} \vec{b}_{i,j} = \vec{b}_{i+1,j} - \vec{b}_{i,j},$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial v} = n \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-1} \Delta^{0,1} \vec{b}_{i,j} B_{i,m}(u) B_{j,n-1}(v)$$

$$\text{其中: } \Delta^{0,1} \vec{b}_{i,j} = \vec{b}_{i,j+1} - \vec{b}_{i,j}$$

### 三、张量积Bezier曲面的偏导矢和法矢



类似的，可以定义高阶偏导矢如下：

$$\frac{\partial^k \vec{p}}{\partial u^k} = \frac{m!}{(m-k)!} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-k} \Delta^{k,0} \vec{b}_{i,j} B_{i,m-k}(u) B_{j,n}(v)$$

$$\text{其中: } \Delta^{k,0} \vec{b}_{i,j} = \Delta^{k-1,0} \vec{b}_{i+1,j} - \Delta^{k-1,0} \vec{b}_{i,j}, \quad \Delta^{0,0} \vec{b}_{i,j} = \vec{b}_{i,j}$$

根据张量积曲面的deCasteljau算法，上式可以改写为：

$$\frac{\partial^k \vec{p}}{\partial u^k} = \frac{m!}{(m-k)!} \Delta^{k,0} \vec{b}_{0,0}^{m-k,n}$$

### 三、张量积Bezier曲面的偏导矢和法矢



同理:

$$\frac{\partial^l \vec{p}}{\partial v^l} = \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-l} \Delta^{0,l} \vec{b}_{i,j} B_{i,m}(u) B_{j,n-l}(v)$$

$$\text{其中: } \Delta^{0,l} \vec{b}_{i,j} = \Delta^{0,l-1} \vec{b}_{i,j+1} - \Delta^{0,l-1} \vec{b}_{i,j} \quad \Delta^{0,0} \vec{b}_{i,j} = \vec{b}_{i,j}$$

根据张量积曲面的deCasteljau算法, 上式可以改写为:

$$\frac{\partial^l \vec{p}}{\partial v^l} = \frac{n!}{(n-l)!} \Delta^{0,l} \vec{b}_{0,0}^{m,n-l}$$

### 三、张量积Bezier曲面的偏导矢和法矢



#### 2、混合偏导矢:

$$\frac{\partial^{k+l} \vec{p}}{\partial u^k \partial v^l} = \frac{m!}{(m-k)!} \cdot \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{i=0}^{m-k} \sum_{j=0}^{n-l} \Delta^{k,l} \vec{b}_{i,j} B_{i,m-k}(u) B_{j,n-l}(v)$$

其中:

$$\Delta^{k,l} \vec{b}_{i,j} = \begin{cases} \Delta^{k-1,l} \vec{b}_{i+1,j} - \Delta^{k-1,l} \vec{b}_{i,j} \\ \Delta^{k,l-1} \vec{b}_{i,j+1} - \Delta^{k,l-1} \vec{b}_{i,j} \end{cases}$$

上式也可改写为:

$$\frac{\partial^{k+l} \vec{p}}{\partial u^k \partial v^l} = \frac{m!}{(m-k)!} \cdot \frac{n!}{(n-l)!} \Delta^{k,l} \vec{b}_{0,0}^{m-k,n-l}$$

特别的:

$$\frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial u \partial v} = m \cdot n \cdot \Delta^{1,1} \vec{b}_{0,0}^{m-1,n-1}$$

扭矢



### 三、张量积Bezier曲面的偏导矢和法矢



$$\frac{\partial^k \vec{p}}{\partial u^k} = \frac{m!}{(m-k)!} \Delta^{k,0} \vec{b}_{0,0}^{m-k,n}$$

$$\frac{\partial^l \vec{p}}{\partial v^l} = \frac{n!}{(n-l)!} \Delta^{0,l} \vec{b}_{0,0}^{m,n-l}$$

$$\frac{\partial^{k+l} \vec{p}}{\partial u^k \partial v^l} = \frac{m!}{(m-k)!} \cdot \frac{n!}{(n-l)!} \Delta^{k,l} \vec{b}_{0,0}^{m-k,n-l}$$

这三个等式说明和Bezier曲线的各阶导矢一样，张量积Bezier曲面的各阶偏导矢和混合偏导矢也可以利用张量积曲面的deCasteljau算法求出。

### 三、张量积Bezier曲面的偏导矢和法矢



#### 2、法矢

若张量积Bezier曲面上一点处的两个一阶偏导矢都不是零向量，而且也互相不平行，则曲面在该点的法矢量可以由下式唯一确定：

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\vec{p}_u(u, v) \times \vec{p}_v(u, v)}{|\vec{p}_u(u, v) \times \vec{p}_v(u, v)|}$$

根据前面关于偏导矢的结论，上式也可表示为：

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\Delta^{1,0} \vec{b}_{0,0} \times \Delta^{0,1} \vec{b}_{0,0}}{|\Delta^{1,0} \vec{b}_{0,0} \times \Delta^{0,1} \vec{b}_{0,0}|}$$

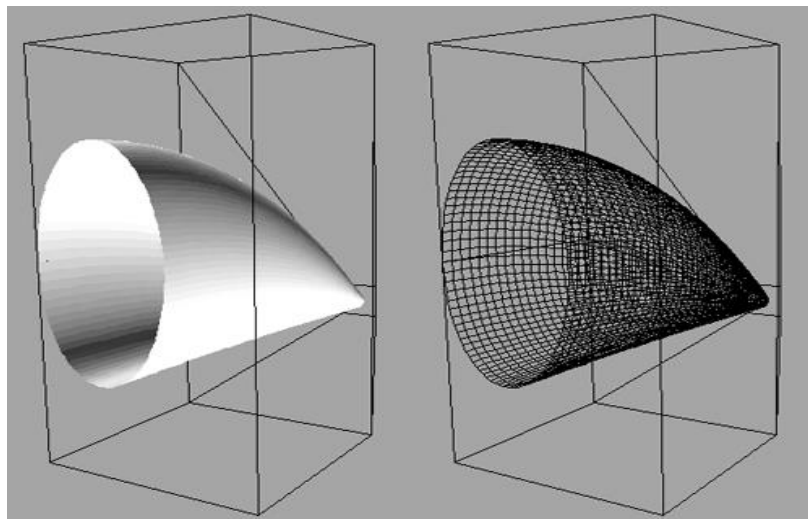
## 四、退化曲面和平移曲面



### 1、退化曲面：

角点处法矢量不能由两个偏导矢唯一确定的曲面称为**退化曲面**，这样的角点称为**退化角点**。

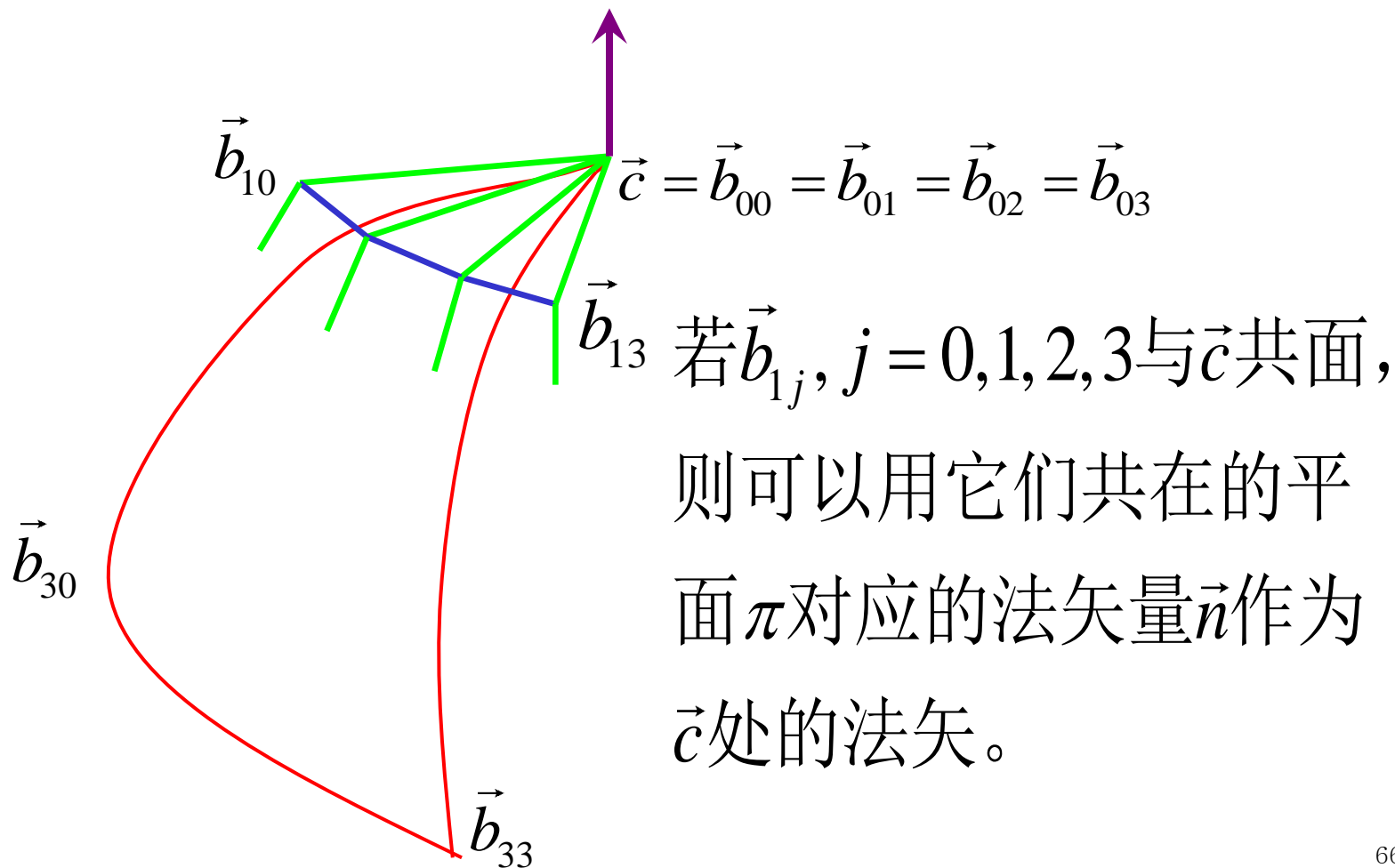
情况1：四条边界曲线之一退化成一个点。



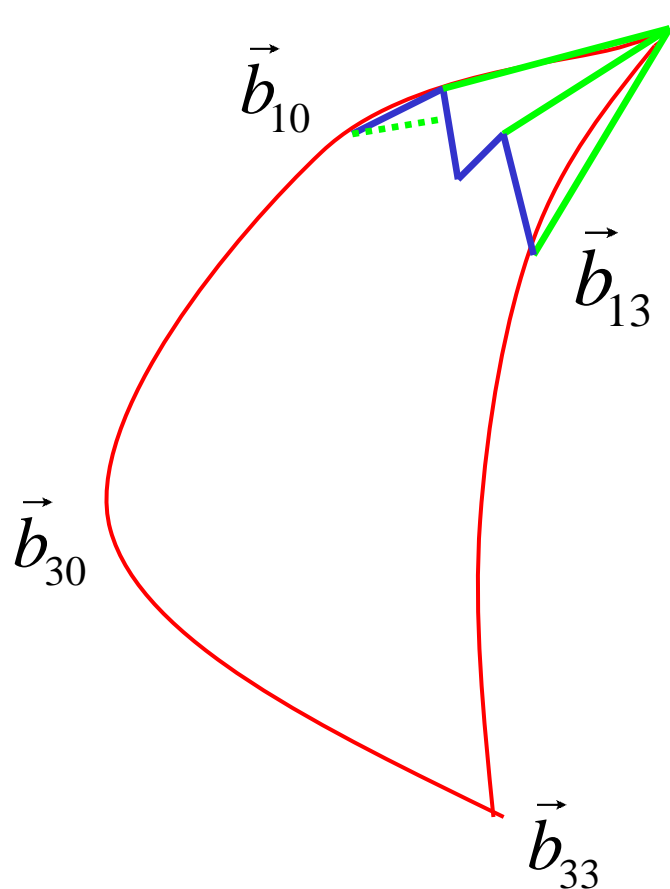
## 四、退化曲面和平移曲面



情况1的法矢量确定方法:



## 四、退化曲面和平移曲面



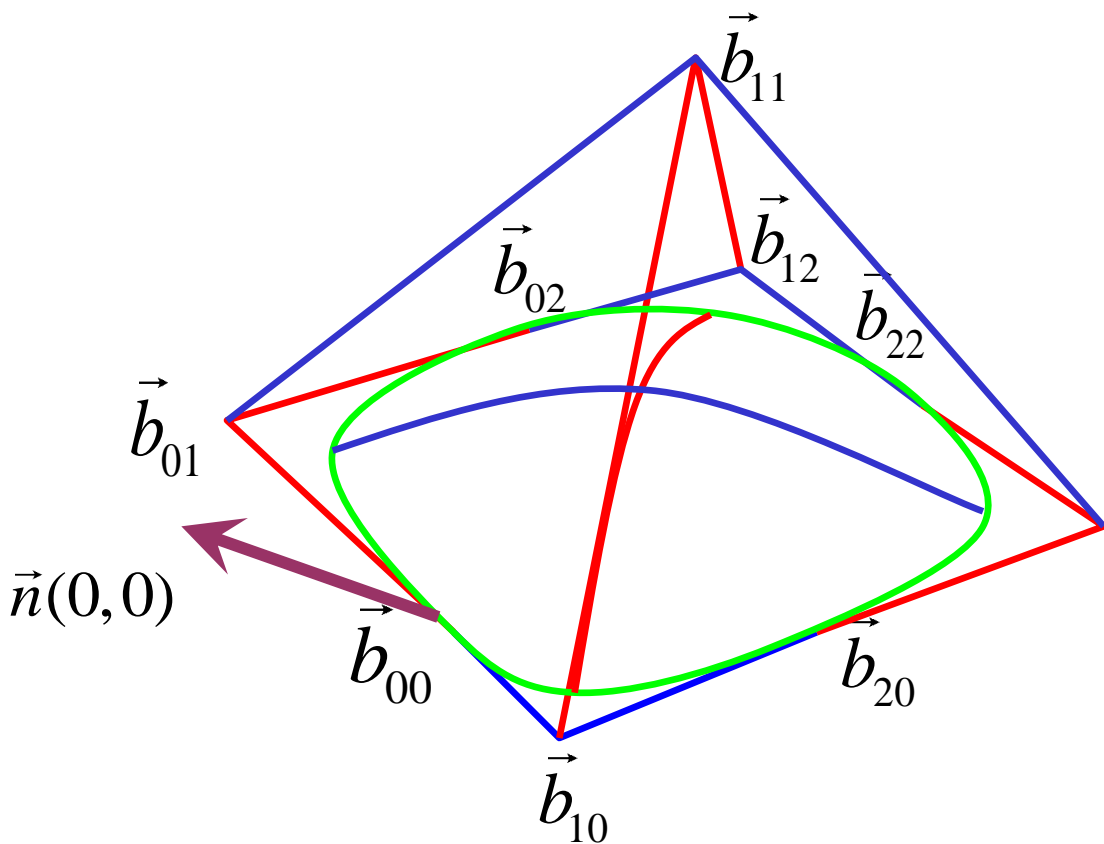
$$\vec{c} = \vec{b}_{00} = \vec{b}_{01} = \vec{b}_{02} = \vec{b}_{03}$$

但如果  $\vec{b}_{1j}, j = 0, 1, 2, 3$   
不与  $\vec{c}$  共面，则这种  
方法无法确定角点处  
的法矢量。

## 四、退化曲面和平移曲面



情况2：退化角点处的两个边界切矢平行。



如图： $\vec{b}_{10}$ ,  $\vec{b}_{00}$ ,  $\vec{b}_{01}$ 共线，  
相邻一排顶点中有 $\vec{b}_{11}$   
与它们不共线，这样它  
们就确定了一个平面，  
用该平面的法矢量作为  
曲面在 $\vec{p}(0,0)$ 处的法矢。



## 四、退化曲面和平移曲面



### 2、平移曲面 (translational surface)

考虑到张量积Bezier曲面的混合偏导矢:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial u \partial v} &= m \cdot n \cdot \Delta^{1,1} \vec{b}_{0,0}^{m-1,n-1} \\ &= m \cdot n \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta^{1,1} \vec{b}_{i,j} B_{i,m-1}(u) B_{j,n-1}(v)\end{aligned}$$

其中:

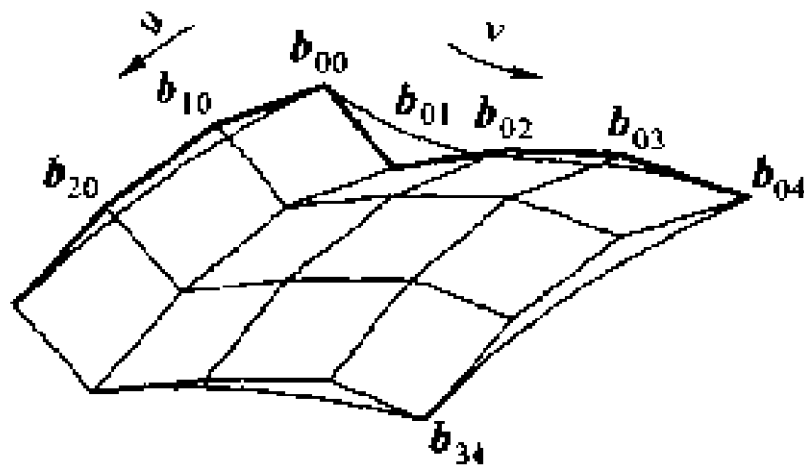
$$\Delta^{1,1} \vec{b}_{i,j} = (\vec{b}_{i+1,j+1} - \vec{b}_{i,j+1}) - (\vec{b}_{i+1,j} - \vec{b}_{i,j})$$

## 四、退化曲面和平移曲面



由 
$$\Delta^{1,1}\vec{b}_{i,j} = (\vec{b}_{i+1,j+1} - \vec{b}_{i,j+1}) - (\vec{b}_{i+1,j} - \vec{b}_{i,j})$$

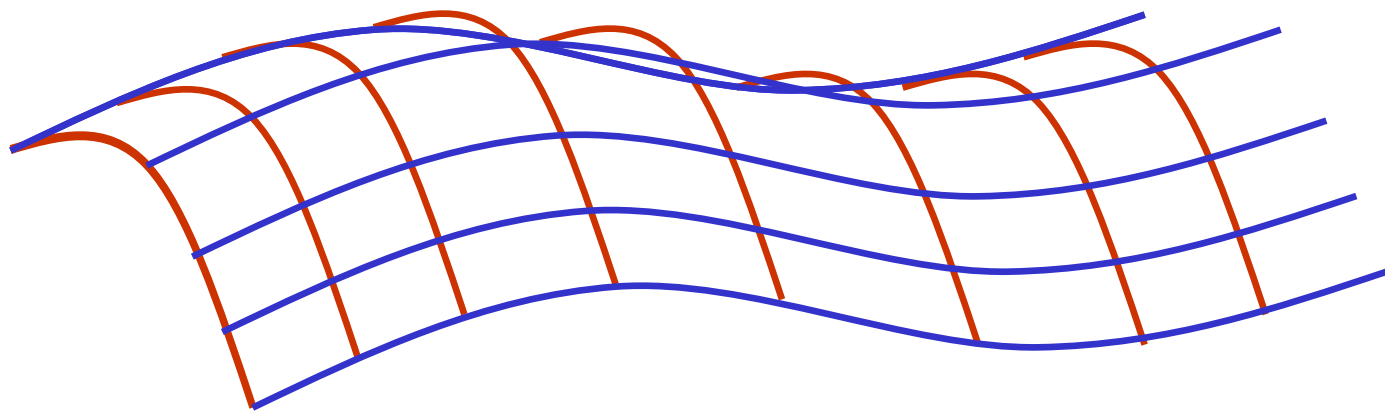
可以看出，如果上式中的四个点构成一个平行四边形，则混合偏导矢为零向量，如果一个Bezier曲面控制网格中的四边形都是平行四边形，则这个曲面上任一点处的混合偏导矢都为零向量，这样的曲面称为平移曲面。



## 四、退化曲面和平移曲面



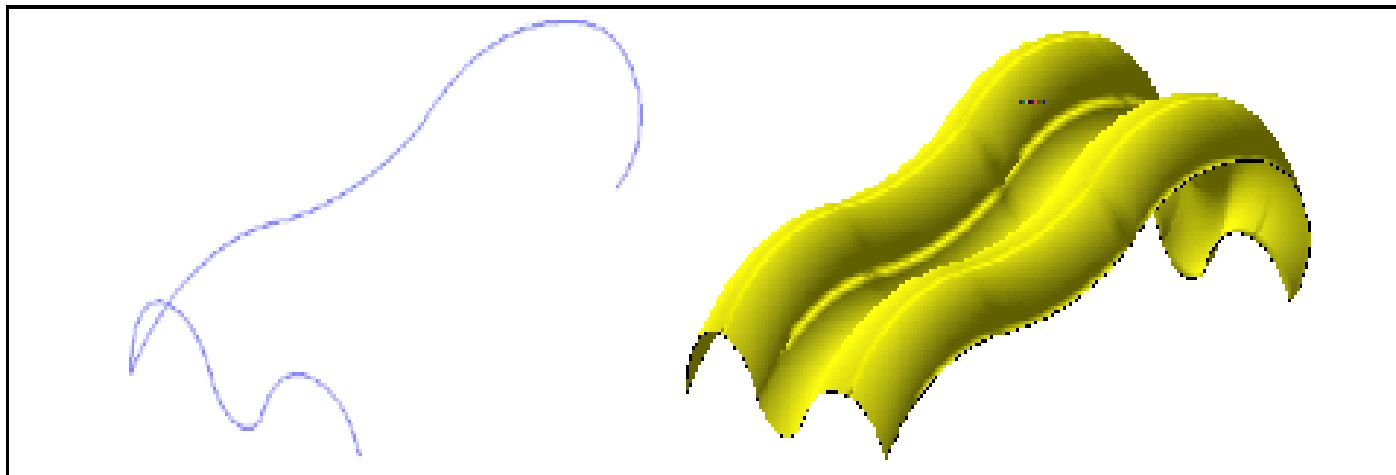
平移曲面可以看作是一条公共端点的两条边界曲线经过平移生成的曲面，如下图所示：



平移曲面上的任一条等参数线都是两条边界曲线之一的平移得到的。它的方程可以表示为：

$$\vec{p}(u, v) = \vec{p}(u, 0) + \vec{p}(0, v) - \vec{p}(0, 0)$$

## 四、退化曲面和平移曲面



平移曲面上任一点的扭矢都是零向量，但从平移曲面的生成方式可以看出两条等参数曲线可以具有任意形状，生成的曲面也可以具有很高的曲率，所以：

零扭矢并不意味着平点，零扭矢实际上和曲面形状是无关的。

## 五、张量积Bezier曲面的分割

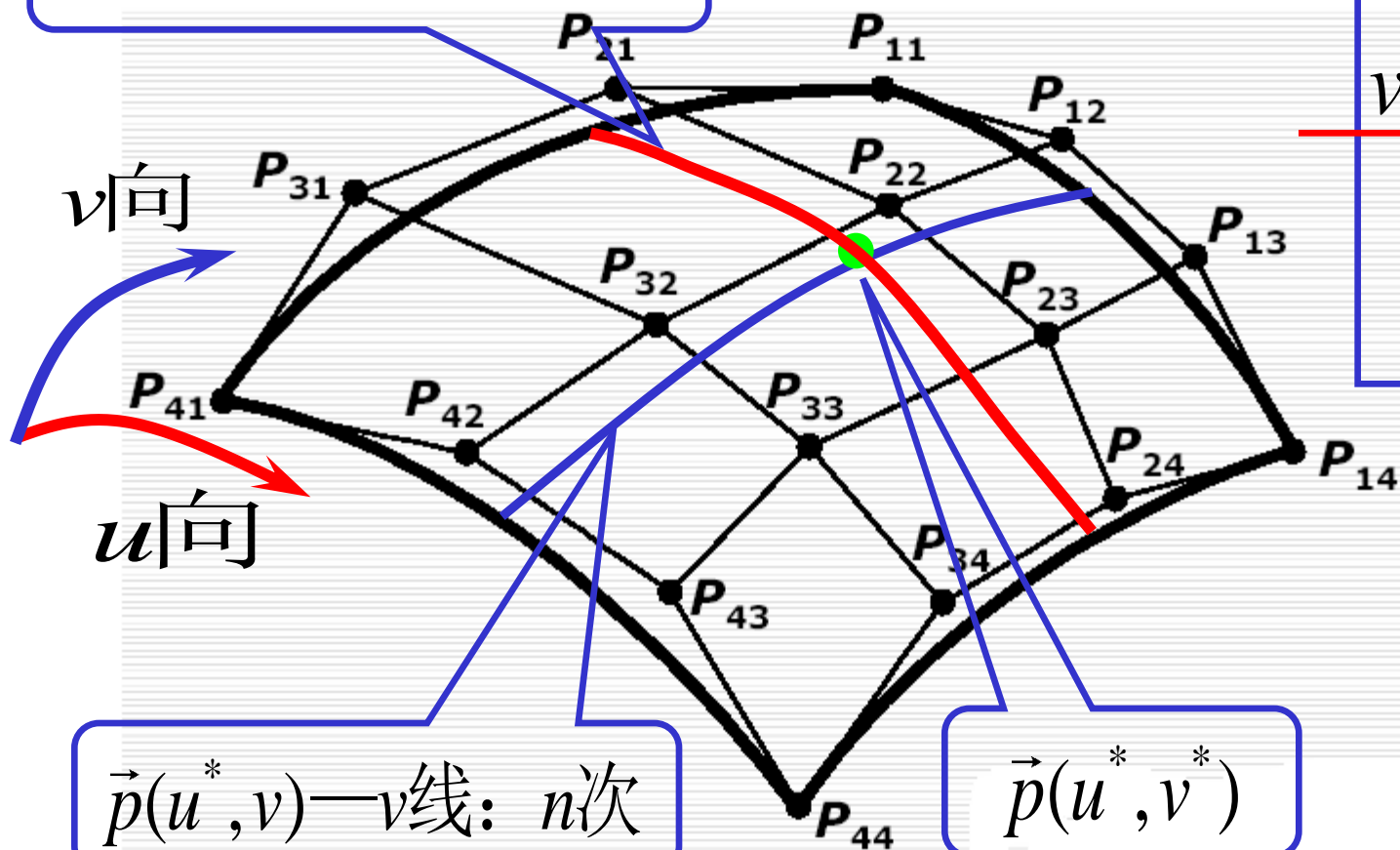


问题：在Bezier曲线上的点可以将Bezier曲线一分为二，前后两段的控制顶点可以通过deCasteljau算法得出。同理，过张量积Bezier曲面上的一点的两条等参数线也可以将曲面一分为四，这四块曲面的控制顶点是否也可以用deCasteljau算法得到？

# 五、张量积Bezier曲面的分割



$\vec{p}(u, v^*)$ — $u$ 线:  $m$ 次



$v = v^*$

$u = u^*$

参数域

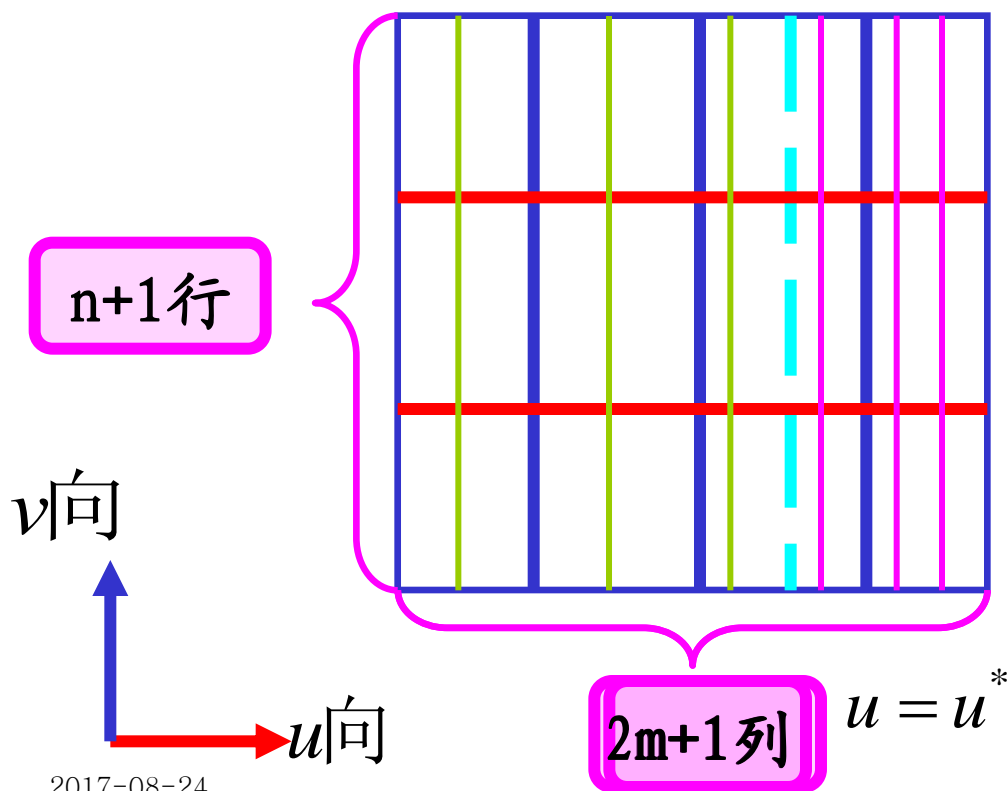


## 五、张量积Bezier曲面的分割



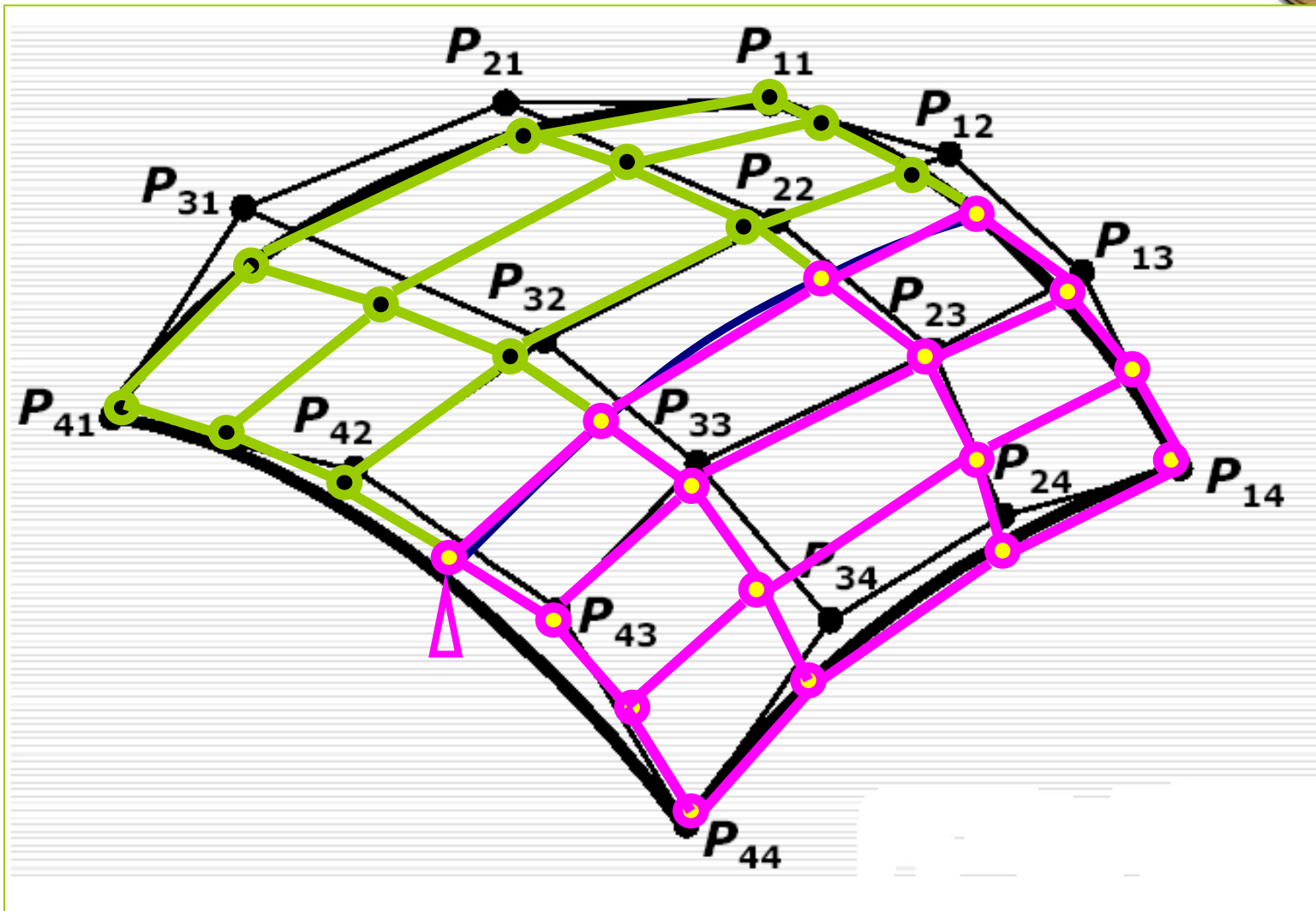
原理：分别沿 $u$ 向和 $v$ 向按曲线分割的方法进行。

设原始的控制网格规模为： $(m+1) \times (n+1)$

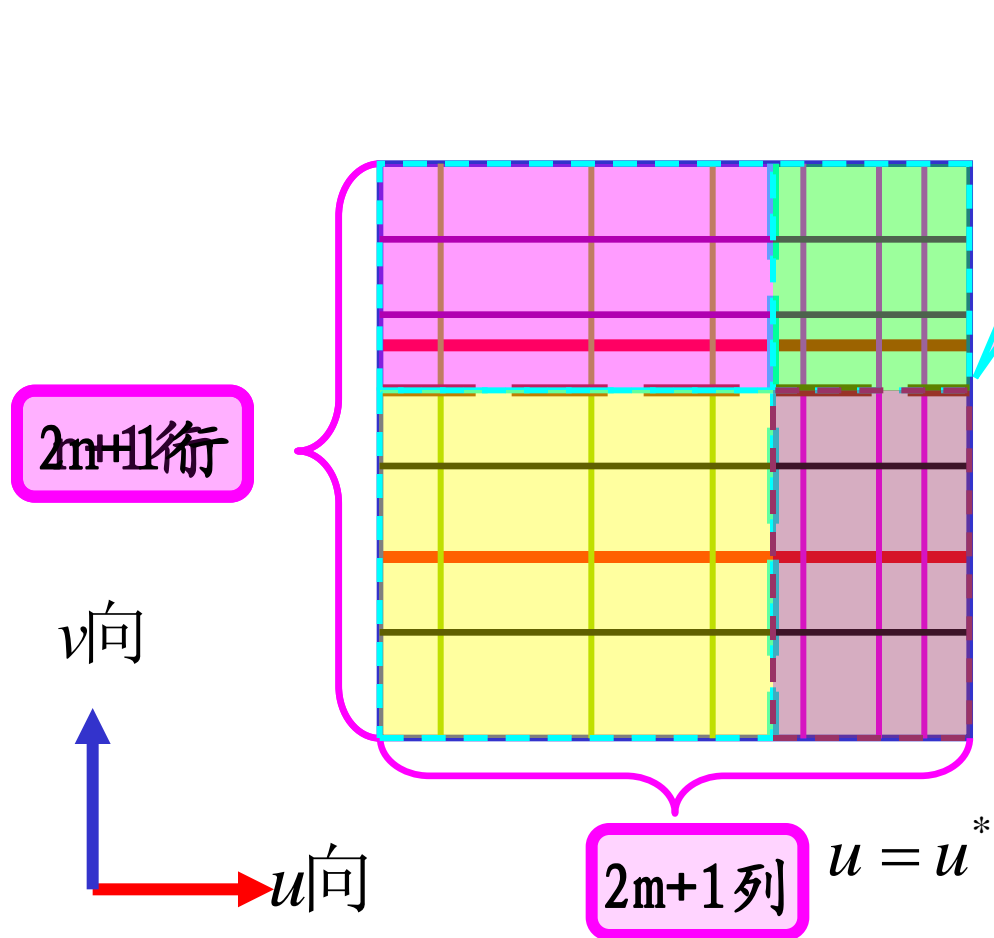


第一步：先用 $u = u^*$ 对控制网格中的 $n+1$ 行控制顶点进行一分为二的分割，从而使纵向（ $v$ 向）的 $m+1$ 列的控制顶点变为 $2m+1$ 列。

## 五、张量积Bezier曲面的分割



## 五、张量积Bezier曲面的分割



第二步：再用  $v = v^*$  对第一步得到的控制网格中的  $2m + 1$  列控制顶点进行一分为二的分割，从而使横向（ $u$ 向）的  $n + 1$  行的控制顶点变为  $2n + 1$  行，从而得到分割后四张子曲面片的控制网格。

## 五、张量积Bezier曲面的分割



总结:

- 1) 张量积Bezier曲面的分割可以看作是Bezier曲线分割的推广。
- 2) 具体计算是可以采用“先u后v”或“先v后u”的两种顺序之一。
- 3) 比这种沿等参数线分割更为复杂的是Bezier曲面的任意分割，其复杂度要大大增加，但适用面更广。

## 六、张量积Bezier曲面的升阶



问题：

将 $m \times n$ 次张量积Bezier曲面升阶为 $(m+1) \times (n+1)$ 次张量积Bezier曲面，求升阶后的控制顶点。

同张量积Bezier曲面的分割一样，张量积Bezier曲面的升阶也是Bezier曲线升阶的推广。升阶的目的是可以增加修改曲面形状的灵活度。但升阶并不影响曲面的实际次数。

## 六、张量积Bezier曲面的升阶



方法：（以先u后v为例）

设 $m \times n$ 次张量积Bezier曲面方程为：

$$\vec{p}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \vec{b}_{i,j} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)$$

首先，将 $n + 1$ 条 $u$ 线由 $m$ 次升阶到 $m + 1$ 次，即：

$$\sum_{i=0}^m \vec{b}_{i,j} B_{i,m}(u) = \sum_{i=0}^{m+1} \vec{b}_{i,j}^* B_{i,m}(u) \quad j = 0, 1, \dots, n$$



## 六、张量积Bezier曲面的升阶



其中:

$$\vec{b}_{i,j}^* = \left(1 - \frac{i}{m+1}\right) \vec{b}_{i,j} + \frac{i}{m+1} \vec{b}_{i-1,j} \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$\text{其中: } \vec{b}_{-1,j} = \vec{b}_{m+1,j} = \vec{0}$$

将上式代入曲面方程即得:

$$\vec{p}(u, v) = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^n \vec{b}_{i,j}^* B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)$$

这时曲面已成为  $(m+1) \times n$  次, 继续对所有的  $v$  线进行升阶。

## 六、张量积Bezier曲面的升阶



$$\sum_{j=0}^n \vec{b}_{i,j}^* B_{j,n}(v) = \sum_{j=0}^{n+1} \vec{b}_{i,j}^{**} B_{j,n+1}(v) \quad i = 0, 1, \dots, m+1$$

其中:

$$\vec{b}_{i,j}^{**} = \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \vec{b}_{i,j}^* + \frac{j}{n+1} \vec{b}_{i,j-1}^* \quad i = 0, 1, \dots, m+1$$

$$\text{其中: } \vec{b}_{i,-1} = \vec{b}_{i,n+1} = \vec{0}$$

代入曲面方程得:

$$\vec{p}(u, v) = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} \vec{b}_{i,j}^{**} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)$$

曲面已经升阶为:  
(m+1) × (n+1)

## 六、张量积Bezier曲面的升阶



上述方法也可以按照“先v后u”的顺序进行。

升阶也可以按照u, v两个方向同时进行, 即:

$$\vec{b}_{i,j}^{**} = \begin{bmatrix} \frac{i}{m+1} & 1 - \frac{i}{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_{i-1,j-1} & \vec{b}_{i-1,j} \\ \vec{b}_{i,j-1} & \vec{b}_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{j}{n+1} \\ 1 - \frac{j}{n+1} \end{bmatrix}$$

$$i = 0, 1, \dots, m+1; j = 0, 1, \dots, n+1$$

$$\vec{b}_{-1,j}^{**} = \vec{b}_{m+1,j}^{**} = \vec{b}_{i,-1}^{**} = \vec{b}_{i,n+1}^{**} = \vec{0}$$

# 本章 本结



HOPE

Wake me up inside  
Tell me there's a reason  
To take another step  
To get up off my knees and,  
Follow this path of most resistance.  
How ever it takes us,  
Whatever it faces and wherever it leads,