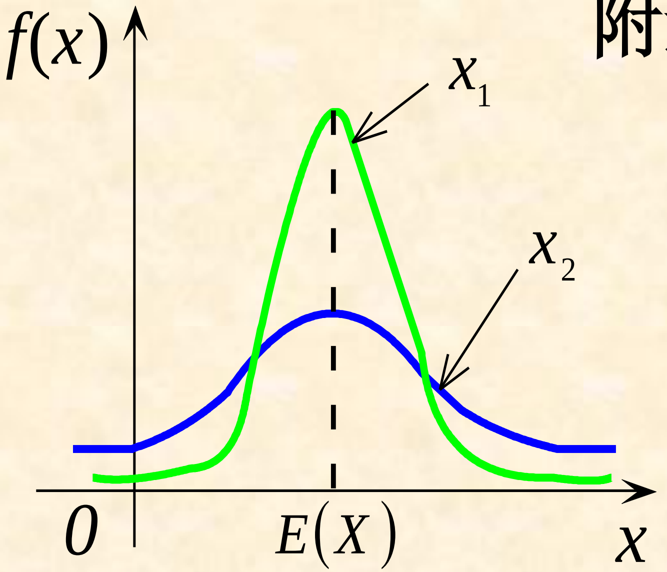
§2 方差

引例

图中，两种分布的均值$E(X)$相同，但具体分布完全不同，明显X_1的分布比X_2的分布较集中于$E(X)$附近。



由此可以看出：仅知道RV的均值是不够的，还不足以很好地掌握RV的概率特征。

因此，研究RV与其均值的偏离程度也是十分必要的。

那么，用哪个量去度量这个偏离程度呢？容易想到

$$E\left\{\left|X-E(X)\right|\right\}$$

但由于上式带有绝对值，不方便运算，故考虑用

$$E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$$

来衡量，这个数字特征就是本节要介绍的方差。

一、方差的定义

设X 是一个RV，若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在，称其为X 的**方差**（Variance），记为$D(X)$或$\mathrm{Var}(X)$，即

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$$

在应用上，记 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ ，称为X 的**标准差/均方差**（Standard Deviation / Mean Square Deviation）。

标准差$\sigma(X)$与X 有相同的量纲。

$$D(X)=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$$

含 义

方差刻划了RV的取值与其数学期望的偏离程度。

若X的取值集中在$E(X)$附近，则$D(X)$较小；
若X的取值相对$E(X)$较分散，则$D(X)$较大。

因此，方差$D(X)$刻画了RV X取值的分散程度。

说 明

数学期望/均值为实数，但方差一定是**非负的实数**。

二、方差的计算

方法1：定义法

由方差定义知，方差是RV X 的函数

$$g(X)=[X-E(X)]^2$$

的数学期望，故

$$D(X)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}\left[x_k-E(X)\right]^2 p_k, & X\text{为离散型RV}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(X)\right]^2 f(x)\,\mathrm{d}x, & X\text{为连续型RV}\end{cases}$$

方法2：方差计算的简化公式(常用)

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

证：$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$

$$\overset{\text{展开}}{=\!=\!=}E\{X^2-2X\cdot E(X)+E^2(X)\}$$

$$=E(X^2)-2E(X)\cdot E(X)+E^2(X)$$

$$=E(X^2)-E^2(X)$$ 得证

例1 设RV X有$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2\neq 0$, 记$X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$,

求$E(X^*), D(X^*)$。

$$\text{解}: E(X^*)=E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{[E(X)-E(\mu)]}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}(\mu-\mu)=0$$

$$D(X^*)=E(X^{*2})-E^2(X^*)=E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}E\left[(X-\mu)^2\right]=\frac{1}{\sigma^2}D(X)\quad=1$$

结 论

X的标准化变量 $X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$, **有$E(X^*)=0$，$D(X^*)=1$。**

三、方差的性质

1. 设C是常数，则 $D(C)=0$；

证：$D(C)=E(C^2)-E^2(C)=C^2-C^2=0$

2. 若C是常数，则 $D(CX)=C^2D(X)$；$D(X+C)=D(X)$

证：$D(CX)=E\left[(CX)^2\right]-E^2(CX)=C^2E\left(X^2\right)-C^2E^2\left(X\right)$

$$=C^2\left\{E\left(X^2\right)-E^2\left(X\right)\right\}=C^2D\left(X\right)$$

$$D(X+C)=E\left\{\left[\left(X+C\right)-E\left(X+C\right)\right]^2\right\}=E\left\{\left[X-E\left(X\right)\right]^2\right\}=D(X)$$

三、方差的性质

3. 设RV X 和Y，则

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

证:$D(X+Y)=E\left\{\left[(X+Y)-E(X+Y)\right]^2\right\}=E\left\{\left[\left(X-E(X)\right)+\left(Y-E(Y)\right)\right]^2\right\}$

$$=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}+E\left\{\left[Y-E(Y)\right]^2\right\}+2E\left\{\left[X-E(X)\right]\left[Y-E(Y)\right]\right\}$$

$$=D(X)+D(Y)+2E\left\{\left[X-E(X)\right]\left[Y-E(Y)\right]\right\}$$

$+\Rightarrow-$ 得证

三、方差的性质

若RV X 和 Y 独立，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)$$

推广：若 $X_1,\ldots,X_n$ 相互独立，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

4. $D(X)=0$ 的充要条件是 X 以概率1取常数 $E(X)$，即

$$D(X)=0 \Longleftrightarrow P\{X=E(X)\}=1$$

若RV X 和Y 独立，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

证：易知

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

由于RV X 和Y 独立，有P75页独立性定理知：

$X-E(X)$ 与$Y-E(Y)$ 也相互独立，再利用E的性质有

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E[X-E(X)]\cdot E[Y-E(Y)]=0$$

$$\therefore D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

得证

$$D(X)=0 \Leftrightarrow P\{X=E(X)\}=1$$

证: 充分性 $P\{X=E(X)\}=1 \Rightarrow D(X)=0$

$\mathrm{P}\{X=E(X)\}=1$ 等价于 $\mathrm{P}\{X^2=E^2(X)\}=1$

则 $E(X^2)=E^2(X) \quad \therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=0$

必要性 $D(X)=0 \Rightarrow \mathrm{P}\{X=E(X)\}=1$

$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=0$ 由于 $[X-E(X)]^2 \geq 0$

故 $X-E(X)=0$ 即 $X=E(X)$

$\therefore \mathrm{P}\{X=E(X)\}=1$ 得证

例2 (0−1) 分布的期望与方差。

解：X 的分布律为

X	0	1
P	$1-p$	p

$$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

$$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=p-p^2=p(1-p)$$

结 论

若X 服从(0−1) 分布, 则 $E(X)=p$，$D(X)=p(1-p)$

例3　$X\sim\pi(\lambda)$，求$E(X)$和$D(X)$。

解：X 的分布律为 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，$k=0,1,2,\ldots$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\times e^{\lambda}=\lambda$$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E[X]=\lambda^2+\lambda$$

$$E[X(X-1)]=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}=\lambda^2$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

结论　若$X\sim\pi(\lambda)$，则 $E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$。

例4　$X \sim b(n, p)$，求$E(X)$和$D(X)$。

解：由上节知：若$X_i \sim (0-1)$分布，且X_i间独立，则

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$，又知 $E(X_i) = p$，$D(X_i) = p(1-p)$，则

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p)$$

结　论

若$X \sim b(n, p)$，则 $E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$。

例5 $X \sim U(a, b)$，求$E(X)$和$D(X)$。

解： X的PDF为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

结论 若$X \sim U(a, b)$，则$E(X)=\dfrac{a+b}{2}, D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

例6 $X \sim Exp(\theta)$，求$E(X)$和$D(X)$。

解： X的PDF为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0 \\ 0, & else\end{cases}, \quad \theta>0$

$$E(X)=\int_0^{+\infty} x\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\mathrm{d}x=\theta$$ **上节结论**

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} x^2\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\mathrm{d}x$$

$$=-\left(x^2e^{-x/\theta}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}2xe^{-x/\theta}\mathrm{d}x\right)=2\theta^2$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$$

结 论 若$X \sim Exp(\theta)$，则 $E(X)=\theta, D(X)=\theta^2$

四、几种常见分布RV的数学期望和方差

1. $X \sim (0-1)$ 分布/$b(1, p)$

分布律为 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$，$k=0,1; 0<p<1$

$$E(X)=p,\quad D(X)=p(1-p)$$

2. $X \sim b(n, p)$

分布律为 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,\cdots,n;$
$0<p<1$

$$E(X)=np,\quad D(X)=np(1-p)$$

3. $X \sim \pi(\lambda)$

分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\ldots, \lambda>0$

$$E(X)=\lambda, \quad D(X)=\lambda$$

4. $X \sim U(a, b)$

PDF为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & else \end{cases}$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}, \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

5. $X \sim Exp(\theta)$

PDF为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0 \\ 0, & else \end{cases}, \quad \theta>0$

$$E(X)=\theta, \quad D(X)=\theta^2$$

6. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

PDF为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<\infty$

$$E(X)=\mu, \quad D(X)=\sigma^2$$

6证: 先求标准化变量$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$的期望和方差

Z的PDF为$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-x^2/2\right\}$

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\mathrm{d}\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=0$$

$$D(Z)=E\left(Z^2\right)-E^2(Z)=E\left(Z^2\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{\text{分部积分}}}\ \frac{-x}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\mathrm{d}x=0+1=1$$

$$\because Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\Rightarrow X=\mu+\sigma Z$$

$$\therefore E(X)=E(\mu+\sigma Z)=\mu+\sigma E(Z)=\mu$$

$$D(X)=D(\mu+\sigma Z)=\sigma^2 D(Z)=\sigma^2$$ 得证。

说 明

上面介绍了6种常见分布的均值与方差，可见对于这6种常见的参数分布，只要知道了它们数字特征，就知道了分布中的参数值，也就可以完全确定它们的分布。

小结

- **本节介绍了RV的方差，它是刻划RV取值在其均值附近离散程度的一个数字特征。**

作业

Pages 115， 116：

第18, 19, 22, 23, 24题

例7 假设(X,Y)在区域$D=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$上服从均匀分布，求$Z=\min(X,Y)$的期望。方差？

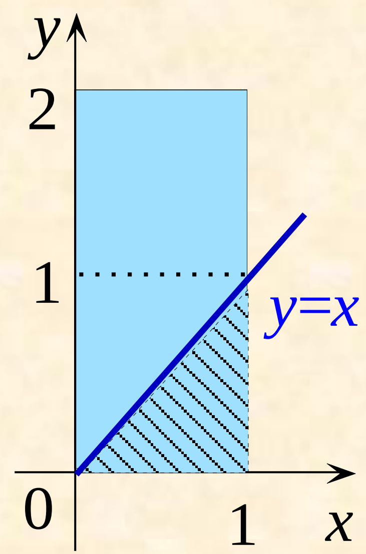
解：可知(X,Y)的PDF为 $f(x,y)=\begin{cases}1/2, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\\ 0, & else\end{cases}$

$$E(Z)=E[Z=\min(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\int_0^x y\frac{1}{2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_0^1\int_x^2 x\frac{1}{2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 x(2-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{12}$$



上节例6：设随机变量X_1, X_2, X_3, X_4相互独立，$X_i \sim U(0, 2i)$，

求行列式$Y = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$的数学期望和方差。

解： $Y = X_1X_4 - X_2X_3$

$$E(Y) = E(X_1X_4 - X_2X_3) = E(X_1X_4) - E(X_2X_3)$$

$$\overset{\text{独立}}{=\!=\!=} E(X_1)E(X_4) - E(X_2)E(X_3) = 1\times 4 - 2\times 3 = -2$$

$$E(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2i} \frac{x}{2i}\,\mathrm{d}x = i,\ i = 1, 2, 3, 4$$

上节例6：设随机变量X_1, X_2, X_3, X_4相互独立，$X_i \sim U(0, 2i)$，

求行列式$Y = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$的数学期望和方差。 $E(X_i) = i$,

$$D(Y) = D(X_1X_4 - X_2X_3) \overset{独立}{=} D(X_1X_4) + D(X_2X_3) = \frac{112}{9} + 28$$

$$D(X_1X_4) = E\left[X_1^2X_4^2\right] - E^2(X_1X_4) \overset{独立}{=} E(X_1^2)E(X_4^2) - \left[E(X_1)E(X_4)\right]^2$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{4\times4^2}{3} - (1\times4)^2 = \frac{112}{9}$$

$$D(X_2X_3) \overset{类似}{=} E(X_2^2)E(X_3^2) - \left[E(X_2)E(X_3)\right]^2 = \frac{4\times2^2}{3} \times \frac{4\times3^2}{3} - (2\times3)^2 = 28$$

$$E(X_i^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2i} \frac{x^2}{2i}\mathrm{d}x = \frac{4i^2}{3}, i = 1, 2, 3, 4$$