6.4自然法描述点的速度和加速度

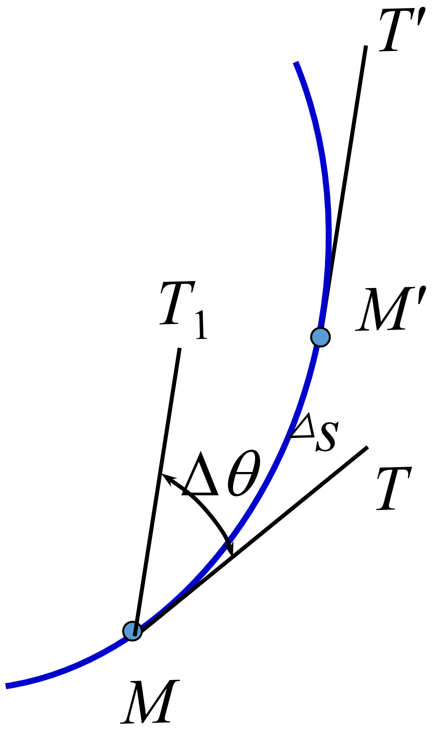
1. 曲线的曲率 · 自然轴系

- $\Delta\theta$（取绝对值）称为曲线对应于弧 MM' 的**邻角**，可用来说明该曲线的弯曲程度。

- 比值 $\Delta\theta/|\Delta s|$ 可用来表示弧MM'的平均弯曲程度，并称为**平均曲率**。

- 当点M'趋近于点M时，平均曲率的极限值称为曲线在点M处的**曲率**，用k 表示，有

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$$

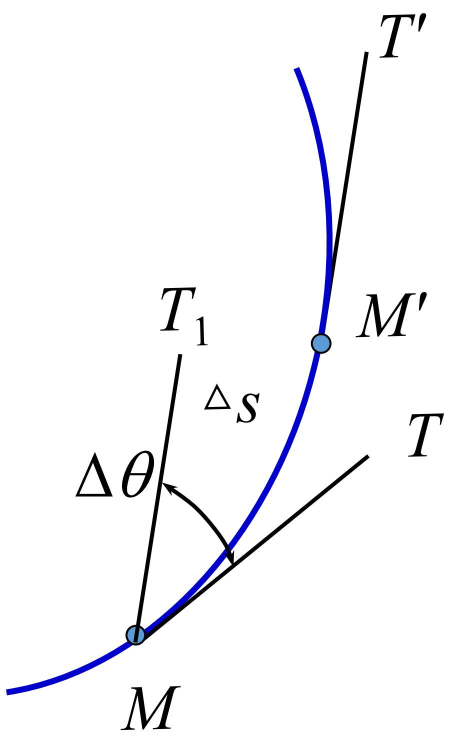


曲 率

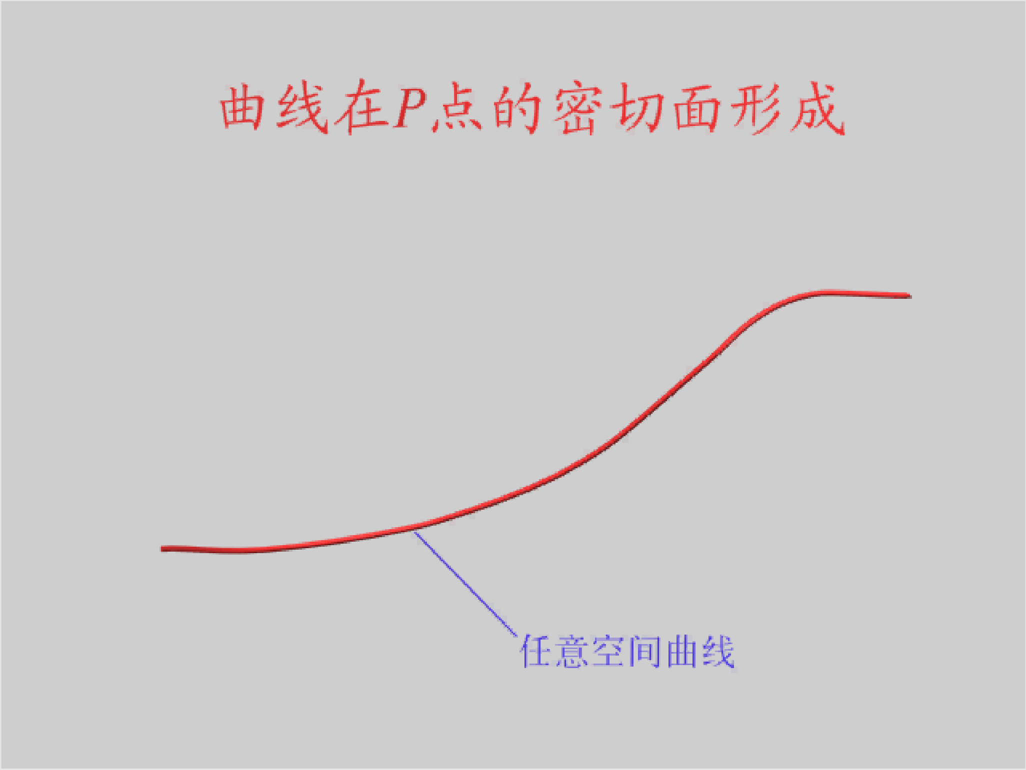
$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \theta}{|\Delta s|}$$

- **曲线在点M的曲率的倒数，称为曲线在点M的曲率半径，用ρ表示，有**

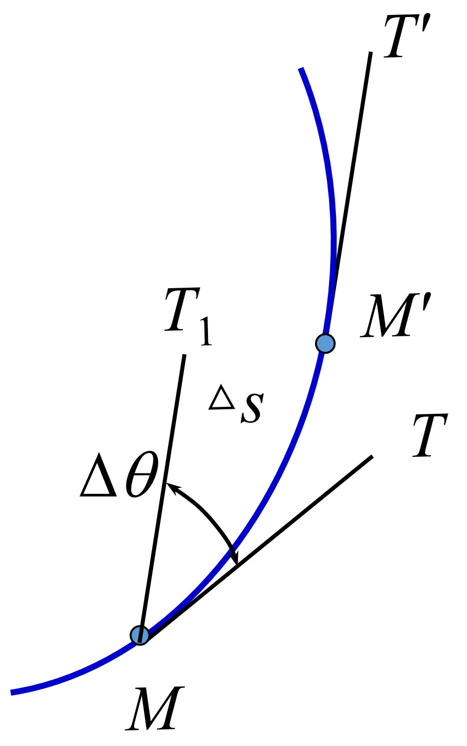
$$\rho = \frac{1}{k}$$



- **密切面**



在图中点M'趋近于M，即 $|\Delta s|$ 趋近于零的过程中，包括直线 MT 和MT_1的平面，将绕MT转动而趋近于某一极限位置；在这极限位置的平面称为曲线在点M的密切面或曲率平面。

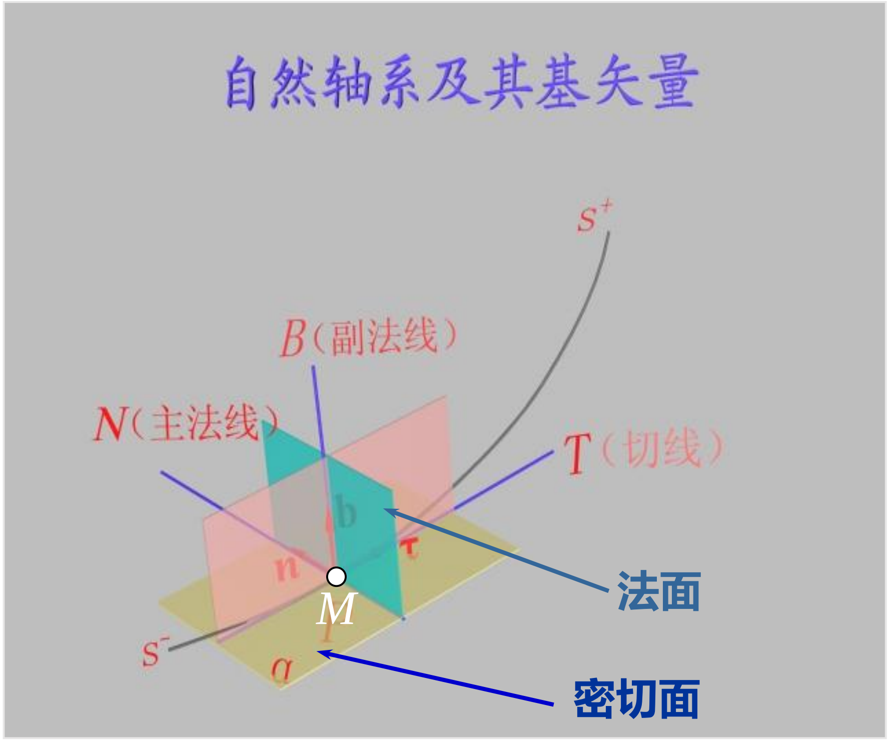


● **法面 . 主法线 . 副法线**

通过点M而与切线垂直的平面，称为曲线在点M 的法面。

法面与密切面的交线MN称为主法线。

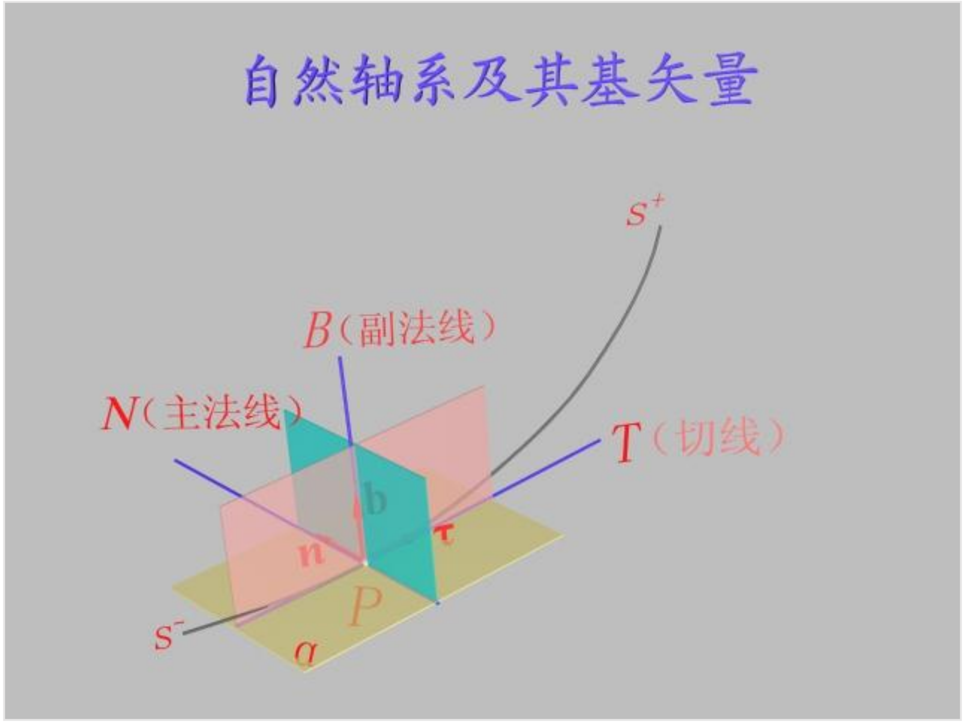
法面内与主法线垂直的直线MB称为副法线。



- **自然轴系**

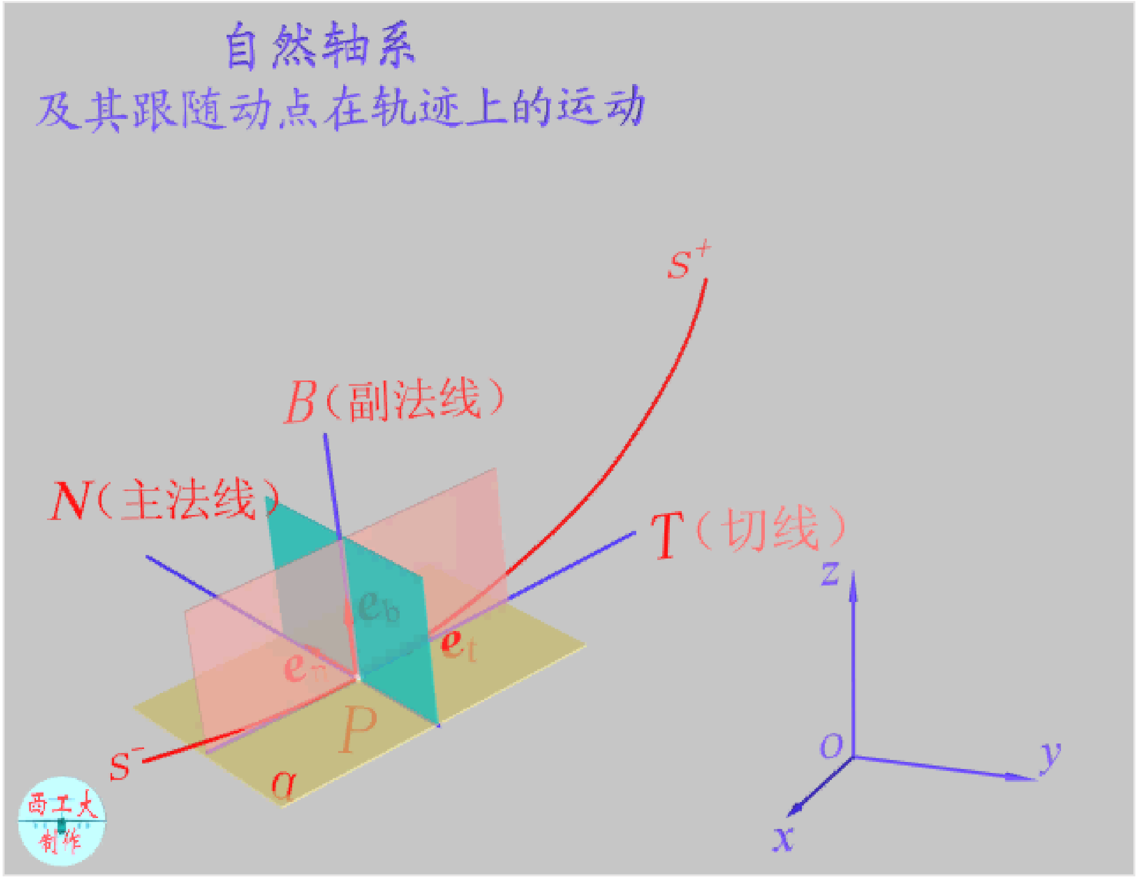
在点M处曲线的切线、主法线和副法线组成一个空间坐标架，称为点M的自然轴系；

各轴的正向规定如下：设用 τ,n,b 代表这三个轴的轴向单位矢，则 τ 指向弧坐标增加的一方，n 指向曲线的凹边，而 $b=\tau\times n$；



曲线上的点都具有自己的自然轴系，故 τ,n,b 都是方向随点M的位置而改变的单位矢。

可见自然轴系是随点M的位置而改变的直角空间坐标架，它在研究点沿已知轨迹的运动时有重要的意义。



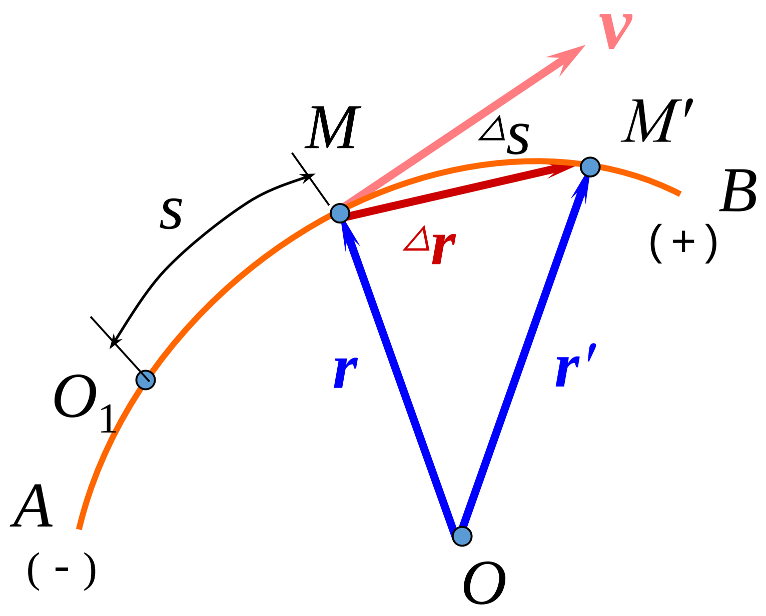
2. 点的速度在自然轴上的投影

设已知点M的运动轨迹和运动方程

$$s = f(t)$$

M点的速度（矢量）为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$



大小 $$|v| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right|\cdot\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| \qquad \left(\text{由于} \quad \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right| \to 1\right)$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$$

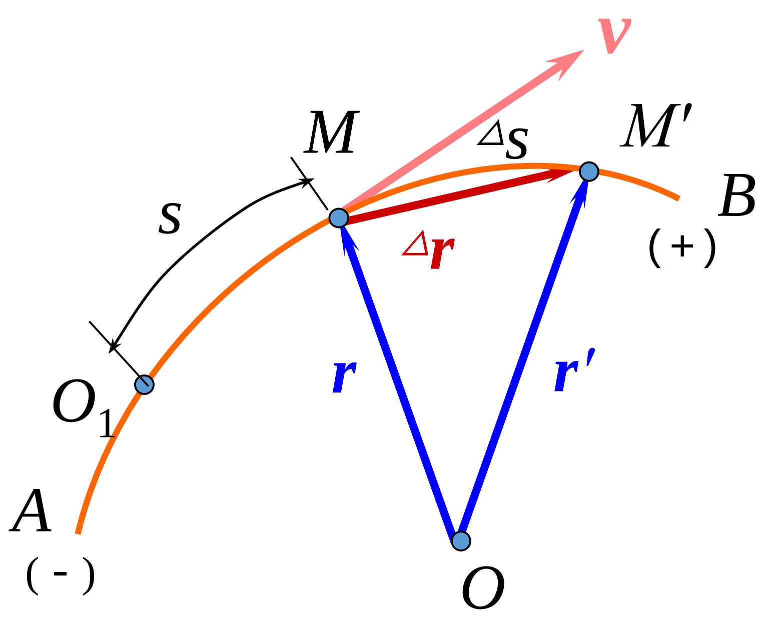
2. 点的速度在自然轴上的投影

设已知点M 的运动轨迹和运动方程

$$s = f(t)$$

M点的速度（矢量）为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$



大小

$$|v| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right|\cdot\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|$$

（由于 $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right| \to 1$ ）

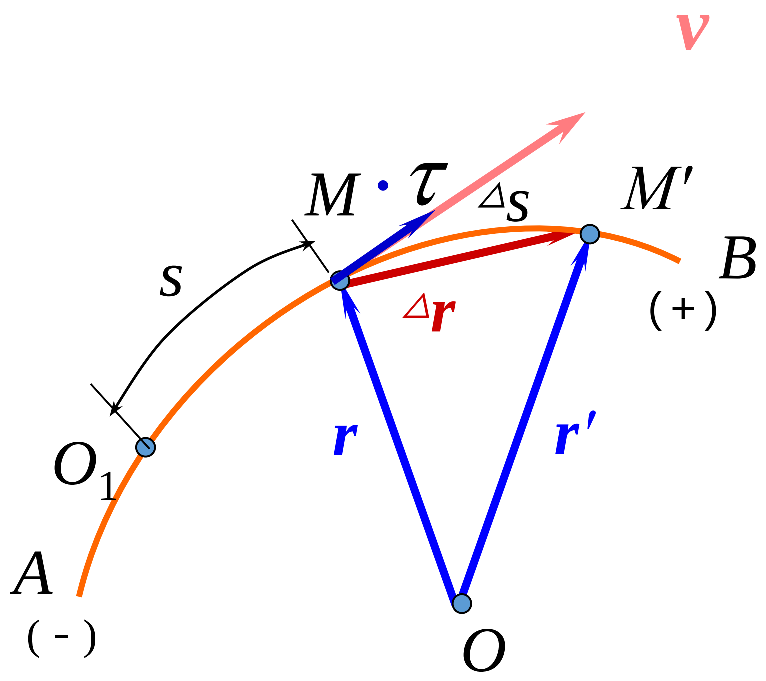
$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$$

方向

方向沿轨迹在M处的切线 并指向弧坐标增加的一方。

可见，点M的速度是沿轨迹切线，并可表示为

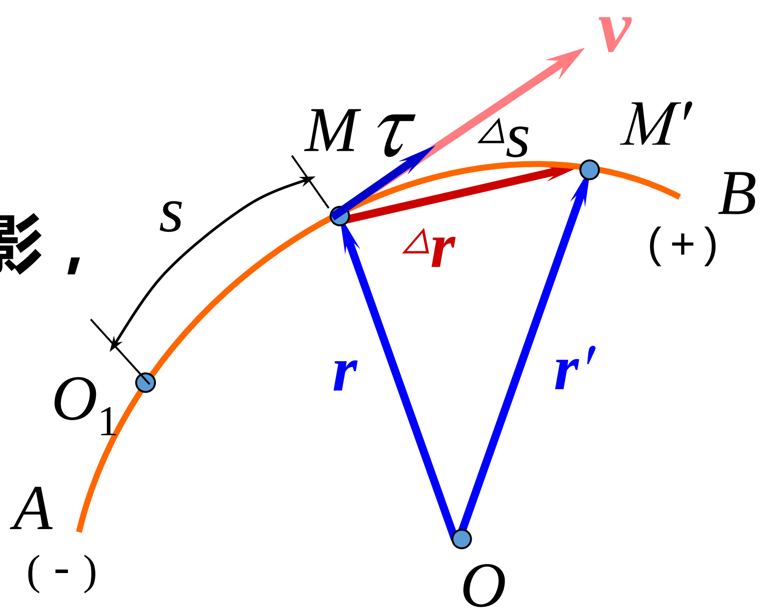
$$\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}=v\boldsymbol{\tau}$$



$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\tau = v\tau$$

其中v 是速度矢量在切线正向的投影，大小等于

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$



即：动点的速度在切线上的投影，等于它的弧坐标对时间的一阶导数。**又沿轨迹切线，所以它在法线上的投影恒等于零。**

3. 点的加速度在自然轴上的投影

根据加速度的定义以及弧坐标中速度的表达式

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}},\quad \boldsymbol{v}=v\boldsymbol{\tau}$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}=\dot{v}\boldsymbol{\tau}+v\dot{\boldsymbol{\tau}}$$

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\tau}}=?}$$

$$a = \dot{v}\tau + v\dot{\tau} \qquad \dot{\tau} = ?$$

$$\dot{\tau} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

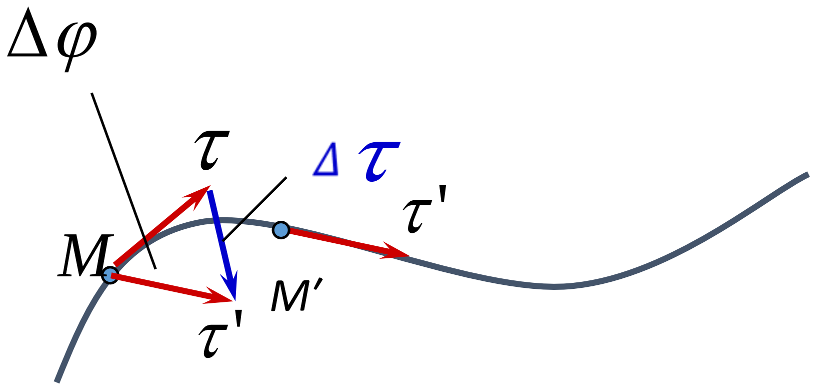
? $\qquad \frac{1}{\rho} \qquad \dot{s} = v$

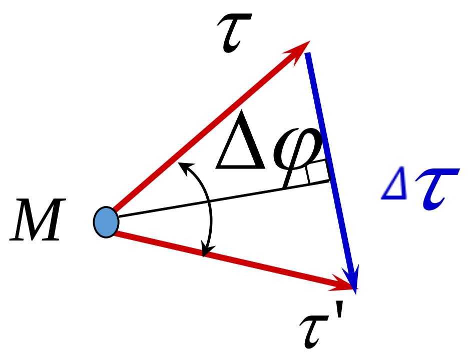
$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\varphi}$$ 大小

$$\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\varphi}\right| = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{\Delta\tau}{\Delta\varphi}\right|$$

因为 $\Delta\tau = 2|\tau|\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}$ 所以

$$\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\varphi}\right| = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{\Delta\tau}{\Delta\varphi}\right| = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{2|\tau|\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\dfrac{\Delta\varphi}{2}} = 1$$

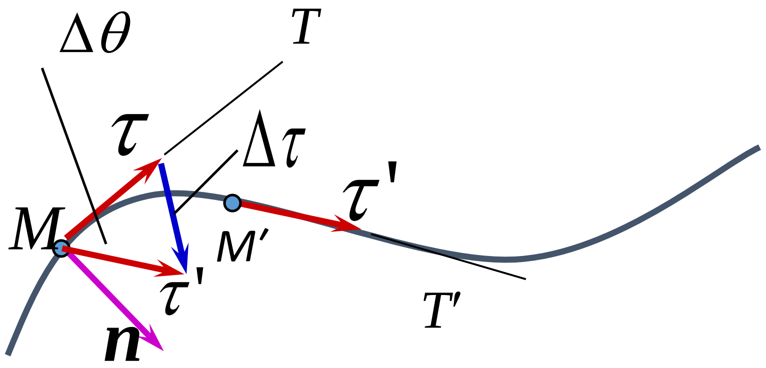




$\frac{d\tau}{d\varphi}$ 方向

当$\Delta\varphi\to0$时，τ 和 τ' 以及 $\Delta\tau$ 同处于M点的密切面内，这时，$\Delta\tau$ 的极限方向垂直于τ，亦即沿 n 方向。

$$\frac{d\tau}{d\varphi}=n$$



$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + v\dot{\boldsymbol{\tau}} \qquad \dot{\tau} = ?$$

$$\dot{\tau} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}\varphi} = \boldsymbol{n} \qquad \frac{1}{\rho} \qquad \dot{s} = v$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}}$$

- 加速度在自然轴系上的投影形式

$$\boldsymbol{a}=a_{\mathrm{t}}\boldsymbol{\tau}+a_{\mathrm{n}}\boldsymbol{n}+a_{\mathrm{b}}\boldsymbol{b}$$

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\ddot{s}$$ **切向加速度**

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{\rho}$$ **法向加速度**

$$a_{\mathrm{b}}=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$$

讨论

切向加速度 $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = \ddot{s}$ 表示速度矢量大小的变化率；

法向加速度 $a_n = \dfrac{v_t^2}{\rho}$ 表示速度矢量方向的变化率；

$\boldsymbol{a}_b = 0$ 表明加速度 $\boldsymbol{a}$ 在副法线方向没有分量；

还表明速度矢量$\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量$\boldsymbol{a}$ 都位于密切面内。

结　论

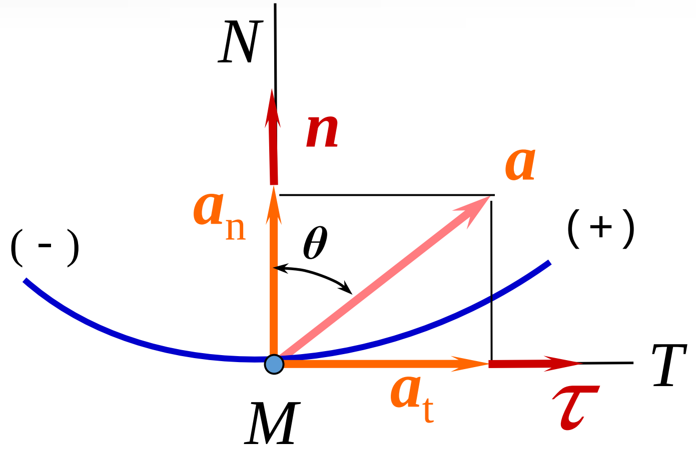
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$$

动点的加速度在切线上的投影，等于速度在切线上的投影对时间的导数；加速度在主法线上的投影，等于速度的平方除以轨迹在动点处的曲率半径；加速度在副法线上的投影恒等于零。

- 加速度大小和方向

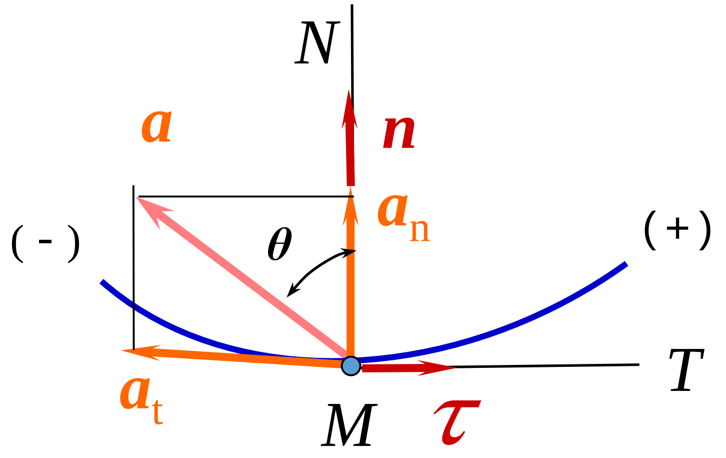
因为加速度的两个分量a_n与a_t是相互垂直的，故得加速度a的大小为

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$



加速度a与主法线所成的角度θ（恒取绝对值），由下式确定

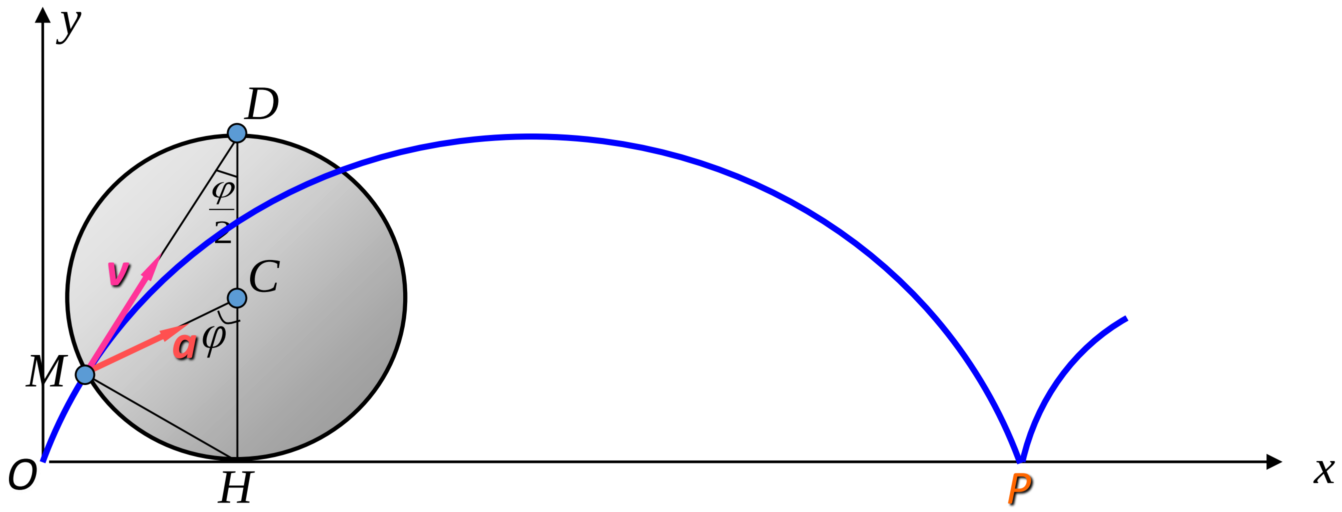
$$\tan\theta=\frac{|a_t|}{a_n}$$



谢谢！

6.4自然法描述点的速度和加速度（例题）

例题1 试求例 4中轮缘上M点的切向加速度和法向加速度，并求轨迹的最大曲率半径。



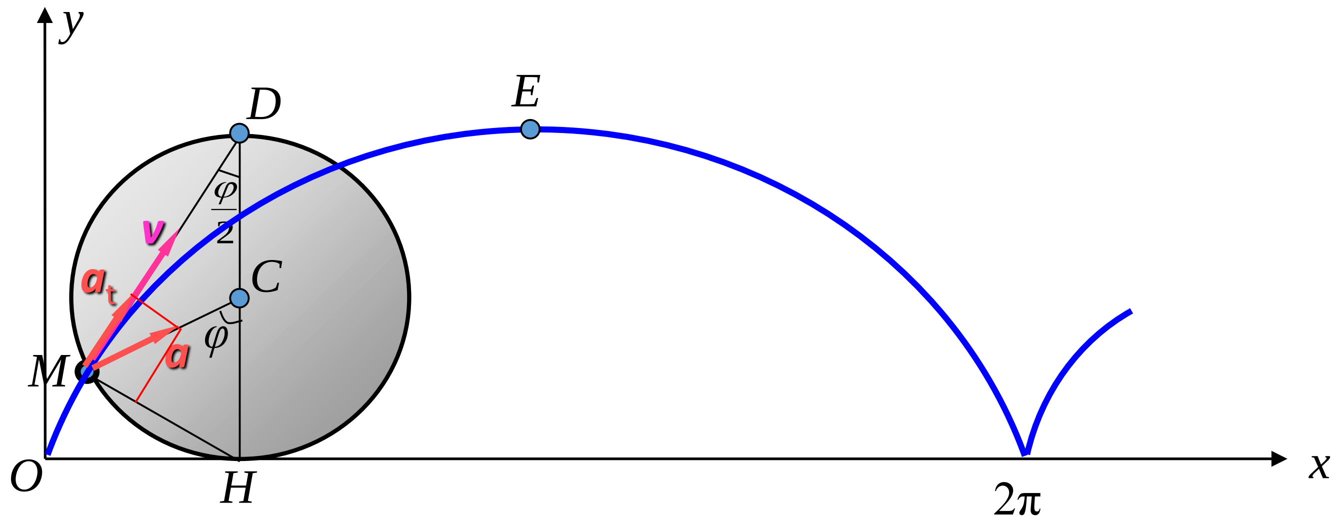
解：1.求切向加速度

由 $v = 2r\omega\sin\dfrac{\omega t}{2}$

因而它的切向加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\omega^2\cos\frac{\omega t}{2}$$

注意，当 $t_0 = 0$ 时，$a_{t0} = r\omega^2$；而当 $t_1 = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 时，$a_{t1} = -r\omega^2$ ；两者相差一个负号。在 t_1 以后，M点进入另一个滚轮环，这里出现尖点，a_t 运动方向发生突然逆转，由 $r\omega^2$ 突变为 $-r\omega^2$。

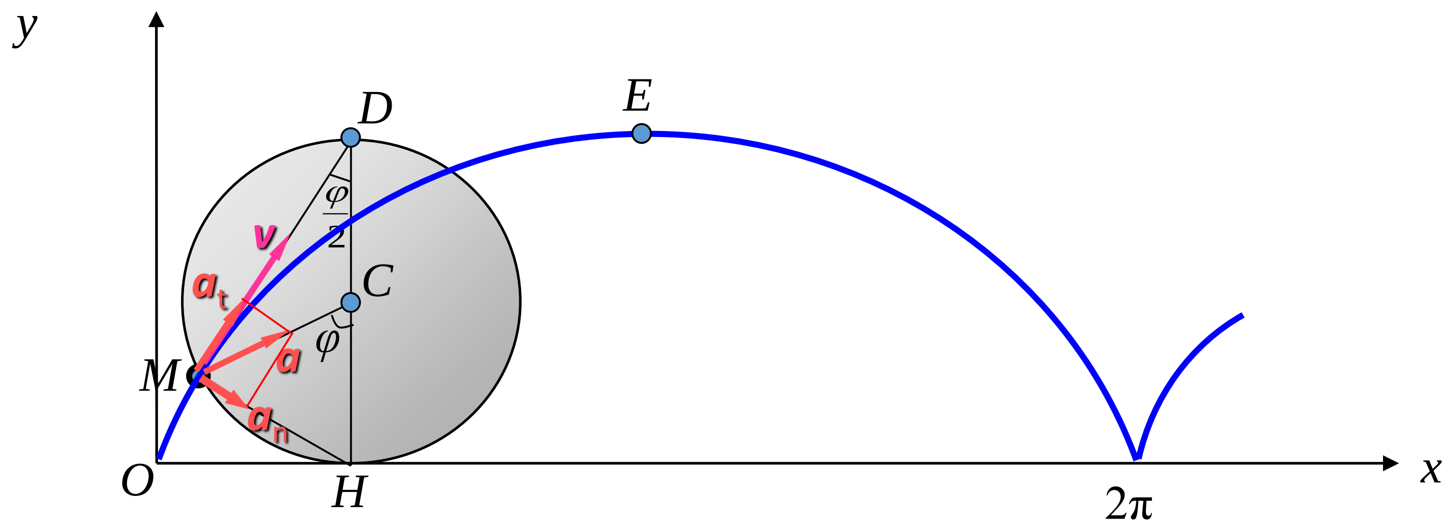


2.求法向加速度

已知 $a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}$, $a=r\omega^2$, $a_t=\dfrac{dv}{dt}=r\omega^2\cos\dfrac{\omega t}{2}$

M**点的法向加速度大小** $a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=r\omega^2\sin\dfrac{\omega t}{2}$

矢量 a_t 和 a_n 的方向分别沿MD 和MH。

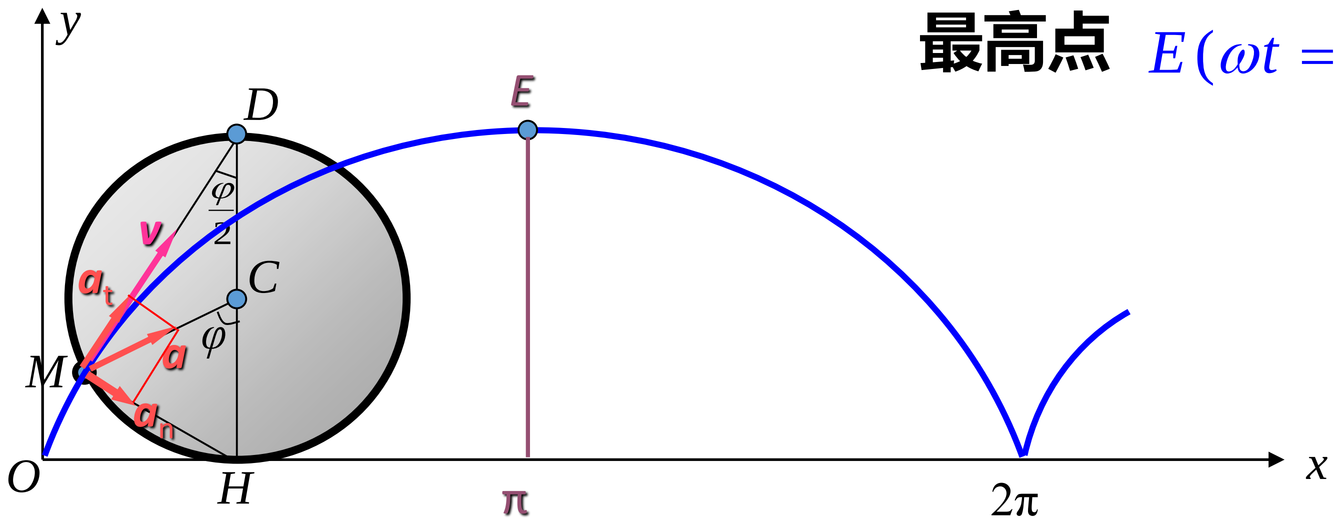


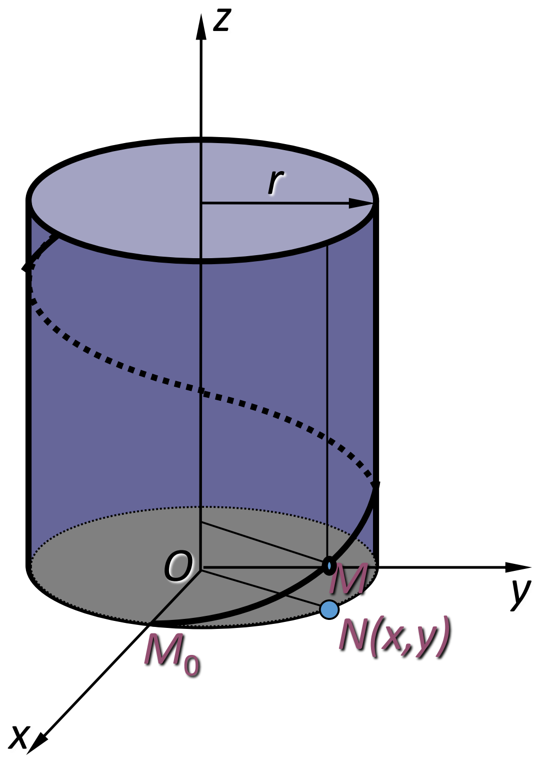
3.求曲率半径

另一方面，$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$，故轨迹的曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4r^2\omega^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2}}{r\omega^2 \sin \frac{\omega t}{2}} = 4r \sin \frac{\omega t}{2}$$

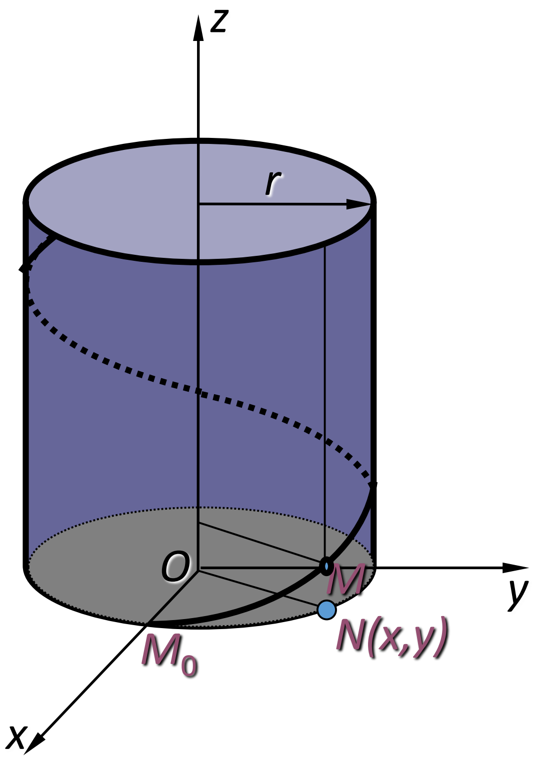
可见，轨迹的最大曲率半径 $\rho_{max} = 4r$，对应于轨迹的最高点 $E(\omega t = \pi)$。





例题2 圆柱的半径为r，绕铅直固定轴 z 作匀速运动，周期为 T 秒。动点M以匀速 u 沿圆柱的一条母线NM运动（如图）试求M点的轨迹、速度和加速度，并求轨迹的曲率半径。

解： 1. M点的运动方程和轨迹。



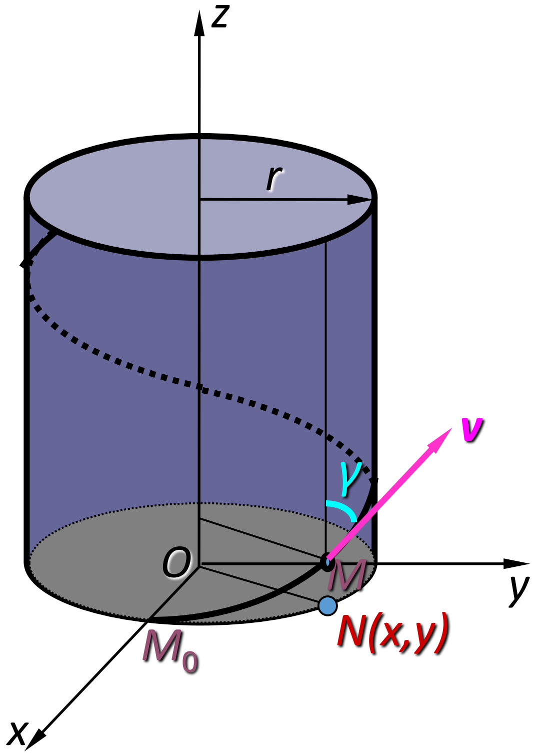
取固定直角坐标系$Oxyz$如图所示。设开始时M点在M_0位置，当圆柱转动时，角$\angle M_0ON$随时间成正比地增加，在瞬时t ，它等于 $\frac{2\pi}{T}t$ ，故M点的坐标为

$$x = r\cos(\frac{2\pi}{T}t),\quad y = r\sin(\frac{2\pi}{T}t),\quad z = ut$$

这就是M点的运动方程。

M点的轨迹方程 $$x = r\cos(\frac{\omega z}{u}),\quad y = r\sin(\frac{\omega z}{u}),$$

这螺旋线方程就是M点在固定坐标系中的运动轨迹。



2. M 点的速度。

对运动方程求导得

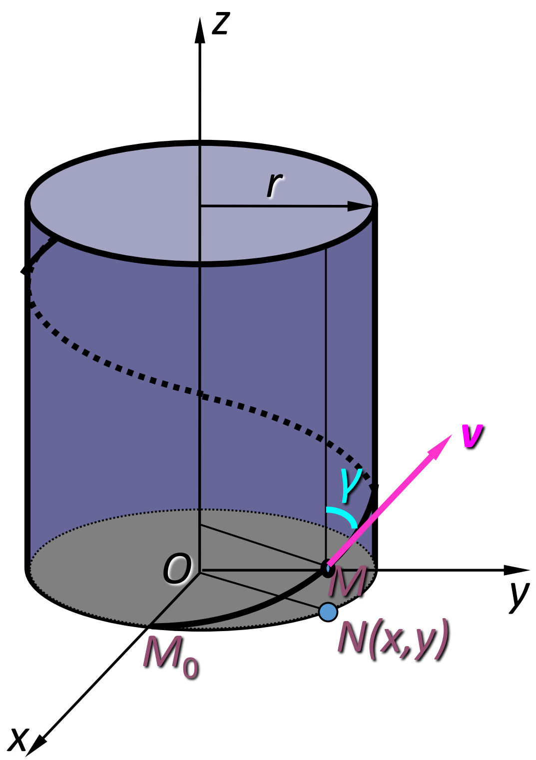
$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-r\omega\sin\omega t,\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=r\omega\cos\omega t,\quad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=u$$

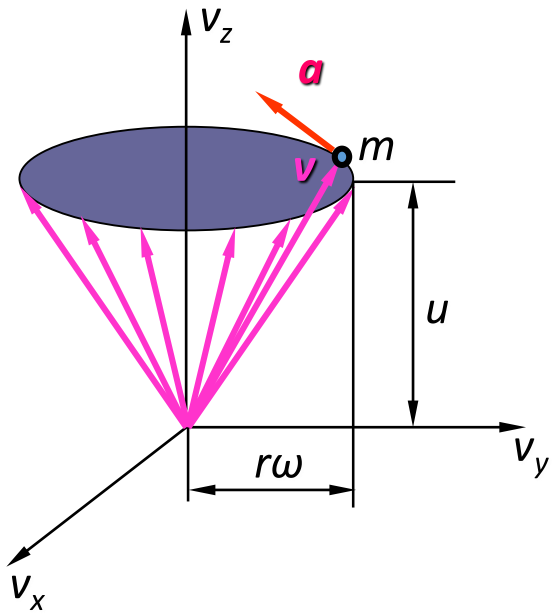
速度在平面Oxy上的投影大小等于 $\sqrt{v_x^2+v_y^2}=r\omega,$

$$|v|=\sqrt{{v_x}^2+{v^2}_y+{v^2}_z}=\sqrt{r^2\omega^2+u^2}=\text{常数}$$

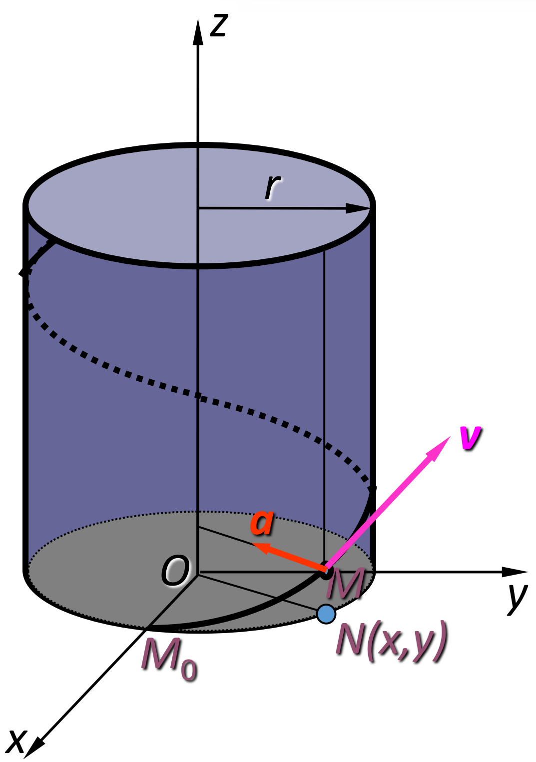
$$\cos\gamma=\frac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}=\frac{u}{\sqrt{r^2\omega^2+u^2}}$$

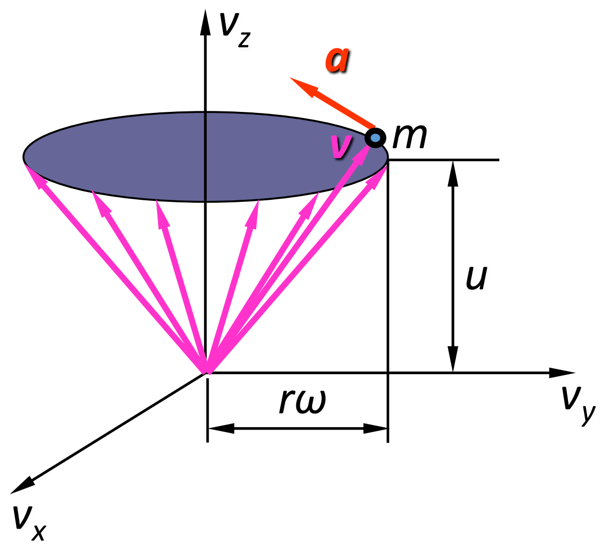
速度与圆柱母线的交角γ 不变。





速度矢端图是一个半径为$r\omega$的圆周平行于平面Oxy。





3. 点M的加速度。

对速度方程求导得

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2 \cos\omega t$$

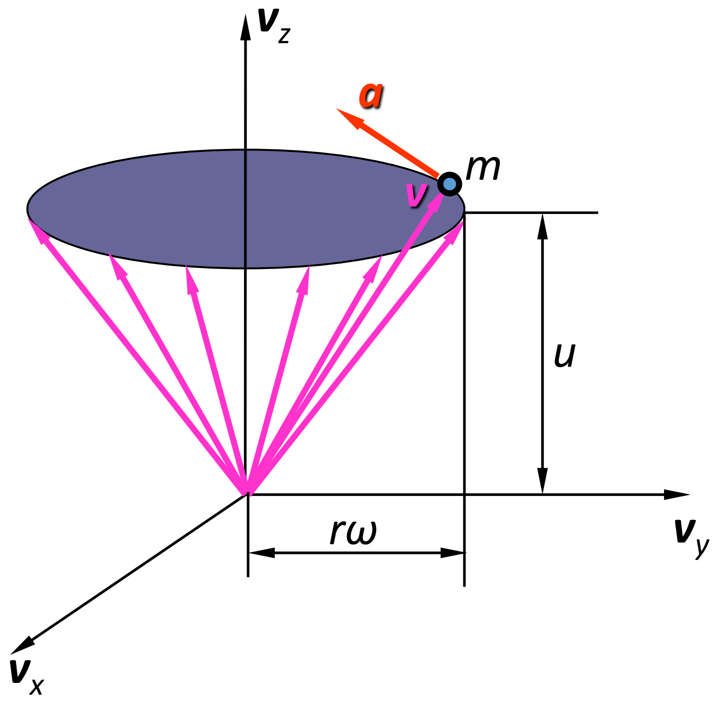
$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2 \sin\omega t$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0$$

因a_z= 0，故加速度 *a* 垂直于 *z* 轴

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$$

加速度 *a* 的方向指向 *z* 轴。



4. 曲率半径。

曲率半径 $\rho = v^2 / a_n$

$$a_t = 0, \qquad a_n = |\boldsymbol{a}|$$

$$\rho = \frac{v^2}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{r^2\omega^2 + u^2}{r\omega^2} = r + \frac{u^2}{r\omega^2}$$

曲率半径为常数

$$\rho = \frac{r}{\sin^2\gamma}$$

本章小结

一. 点的运动描述的矢量法

1.点的运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$

2. 点的速度 $$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}}$$

3. 点的加速度 $$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{\boldsymbol{r}}$$

二. 点的运动描述的直角坐标法

1. 运动方程 $x = f_1(t),\quad y = f_2(t),\quad z = f_3(t)$

2. 速度 $$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

3. 加速度 $$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

三、 点的运动描述的自然法

1. 运动方程

$$s = f(t)$$

2. 速度

$$v = v_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$$

3. 加速度

$$\boldsymbol{a} = a_{\mathrm{t}}\boldsymbol{\tau} + a_{\mathrm{n}}\boldsymbol{n} + a_{\mathrm{b}}\boldsymbol{b}$$

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \ddot{s}, \quad a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_{\mathrm{b}} = 0$$