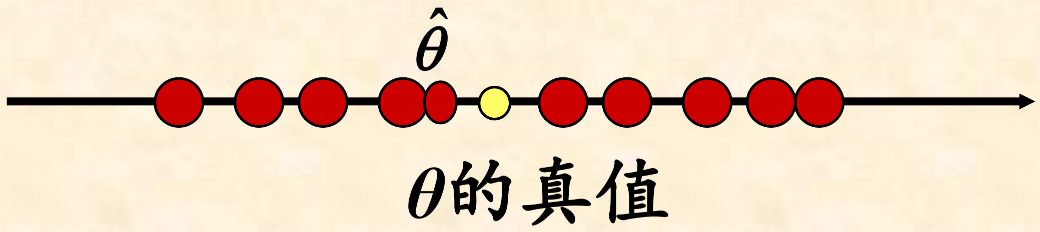
§3 区间估计

针对总体分布中的未知参数，利用估计量可以获得参数的估计值，然而该估计值未必等于参数真值，即使相等也无法判定。



因此，还需要知道估计值的精确程度，也就是要根据估计量的分布，在一定的可信程度下，找出未知参数所在的可能范围，通常这种范围以具有一定置信度的区间形式给出，这类问题称为参数的区间估计。

这样所得的总体分布中未知参数的区间，即所谓置信区间，下面来看其具体定义。

一、定义

设总体X的CDF为$F(x;\theta)$，含有未知参数$\theta, \theta \in \Theta$，$\forall 0 < \alpha < 1$，若由来自$X$的样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$确定的两个统计量$\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$和$\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ $\left(\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2\right)$，$\forall \theta \in \Theta$满足$P\left\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\right\} = 1 - \alpha$，则称随机区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的**置信区间**。

称$\hat{\theta}_1$为置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间的**置信下限**；

$\hat{\theta}_2$为置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间的**置信上限**；

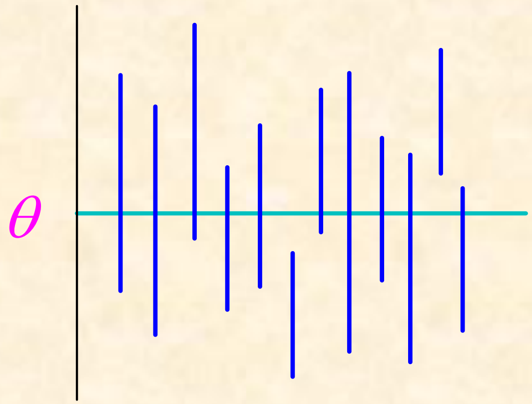
$1-\alpha$为**置信水平(置信度)**。

说 明

① **被估计参数**虽然未知，但它**是常数**，**没有随机性**。

② **区间** $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 是**随机**的。

$P\left\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\right\} = 1-\alpha$ 的**本质**是：随机区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$以概率$1-\alpha$包含$\theta$，而不是$\theta$以$1-\alpha$概率落在区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$内。



若反复抽样多次(每次样本容量相等)，每组样本值确定一个区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$，所得区间要么包含$\theta$的真值，要么不包含$\theta$的真值；在这些区间中，包含$\theta$真值的区间约占$100(1-\alpha)\%$，而不包含$\theta$真值的区间约占$100\alpha\%$.

说 明

③ 若总体是连续型RV,对给定α, 可以按要求

$$P\left\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\right\} = 1-\alpha$$找到置信区间.

若总体是离散型RV,对给定α, 常常找不到区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$使得$P\left\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\right\}$恰好为$1-\alpha$。此时, 只要找区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$使得$P\left\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\right\}$至少为$1-\alpha$, 且尽可能地接近$1-\alpha$。

二、求置信区间的步骤

1. 寻找一个枢轴量$W=W(X_1, X_2, \ldots, X_n;\theta)$且其分布已知;

枢轴量是一个包含样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$与待估参数θ、而不含其它未知参数的函数、其分布不依赖于θ以及其它未知参数。

2. 给定置信度$1-\alpha$，定出常数a、b使

$$P\{a<W<b\}=1-\alpha$$

3. 从不等式$a<W<b$解出等价不等式$\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2$，其中$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$都是统计量，则$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的一个置信区间。

说 明

☞ 枢轴量的构造，通常从θ的点估计着手考虑。

☞ 常数a、b的确定：利用的是枢轴量W的分布和置信度$1-\alpha$，以及分位点的定义。

可以看出满足$P\{a<W<b\}=1-\alpha$的常数a、b并不惟一，通常我们采用对称分位点，即

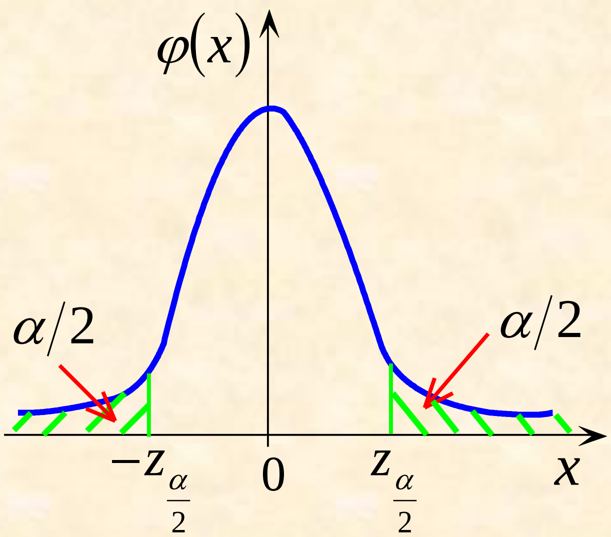
$$P\{W<a\}=P\{W>b\}=\alpha/2$$

由此确定常数a、b。

例1 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自X的样本，求μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间？

解：易知样本均值$\bar{X}$是μ的无偏估计，$\bar{X} \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$

枢轴量 $W = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$



给定$1-\alpha$有 $P\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} < W < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$

等价变换得到

$$P\left\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

μ的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间为 $\left(\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

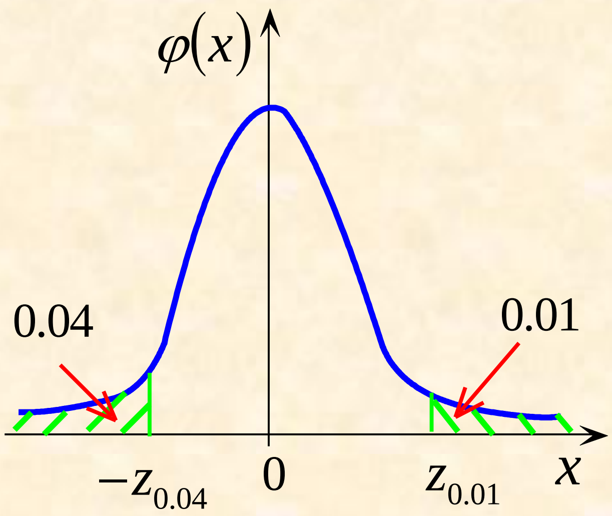
置信区间的讨论

① 置信度为1-α的置信区间并不唯一 。

以例1来说, 若$\alpha = 0.05$, μ一个置信度为1-α的置信区间为

$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025}\right)$$

常数a,b还可以这样确定: $P\left\{-z_{0.04} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.01}\right\} = 0.95$



$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

置信区间的讨论

① 置信度为$1-\alpha$的置信区间并不唯一。

以例1来说，若$\alpha=0.05$, μ一个置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025}\right)$$

常数a,b还可以这样确定：$P\left\{-z_{0.04} < \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.01}\right\} = 0.95$

由此给出μ的另一个置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01},\ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\right)$$

由此可见，置信区间求解过程中常数a,b的选择不同，得到参数的置信度为$1-\alpha$的置信区间也不尽相同。

置信区间的讨论

② 置信区间的长度反映了估计的精确度：置信区间的长度短，表示估计的精度高。

区间$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025}\right)$长度为 $2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} \approx 3.92\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\right)$长度为$\left(z_{0.01}+z_{0.04}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} \approx 4.08\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

结论 若枢轴量的**PDF**是单峰对称的，当样本容量***n***固定时，形如$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$的对称置信区间长度最短, 自然选用它。

因此，通常在求参数的双侧置信区间时，无论枢轴量的分布是否对称，我们都采用对称分位点来获得置信区间. 这样的置信区间长度虽不是最短，但容易获得。

置信区间的讨论

③ 置信度$1-\alpha$反映了估计的可靠度，且当样本容量n固定时，置信区间的置信度与估计精度是矛盾的。

一般来说, 当样本容量 n 给定时, 置信度$1-\alpha$ 越大, 则置信区间包含参数真值的概率越大, 也即估计的可靠度越高。与此同时, 置信区间的长度也增大, 进而估计的精度降低。由此可见, 给定 n 时, 置信区间的置信度(可靠度)与估计精度是相互矛盾的。如例1　区间长度 $L=2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$

给定α时, 样本容量n越大, 区间长度L越小. 因此, 在保证一定置信度时，为了使置信区间有预先指定的长度，可以事先确定样本容量n。

置信区间的讨论

③ 置信度 $1-\alpha$ 反映了估计的可靠度，且当样本容量 n 固定时，置信区间的置信度与估计精度是矛盾的。

协调区间置信度(可靠度)与估计精度原则

在样本容量 n 给定时，先保证置信度(可靠度)，再提高估计精度。若要同时提高二者，只有增加样本容量 n (即增加试验次数，掌握更多信息)。

如例1　区间长度 $L=2\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$

§ 4 正态总体均值与方差的区间估计

- 单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$
  - 均值μ的置信区间
    - σ^2已知
    - σ^2未知
  - 方差σ^2的置信区间
    - μ已知
    - μ未知
- 两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $N(\mu_2,\sigma_2^2)$
  - 两个总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信区间
    - σ_1^2,σ_2^2均已知
    - $\sigma_1^2,\ \sigma_2^2$均未知, 但n_1,n_2很大
    - $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma$未知
  - 两个总体方差比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间
    - μ_1,μ_2已知
    - $\mu_1,\ \mu_2$未知

一、单个正态总体

设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自X的样本，样本均值$\bar{X}$，样本方差S^2，给定置信度$1-\alpha$.

1. 均值μ的置信区间

① σ^2已知

枢轴量 $$W = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

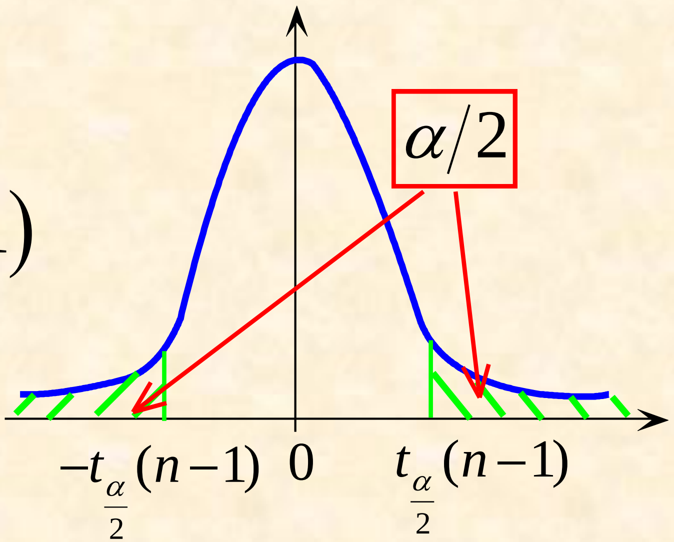
μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为 $$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

σ^2已知：$W=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

1. 均值μ的置信区间

② σ^2未知

枢轴量 $W=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$



给定$1-\alpha$有

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<W<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

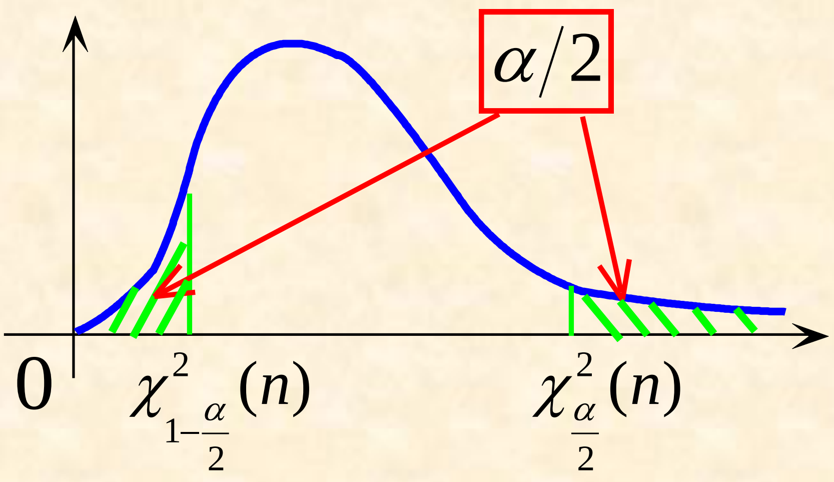
μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为 $\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

2. 方差σ^2的置信区间

① μ 已知

枢轴量 $W=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$

给定$1-\alpha$有 $P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)<W<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right\}=1-\alpha$



2. 方差σ^2的置信区间

$$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right\} = 1-\alpha$$

① μ 已知

σ^2的置信度为1−α 的置信区间为

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \Big/ \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\ ,\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \Big/ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right)$$

σ 的置信度为1−α 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \Big/ \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\ ,\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \Big/ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$$

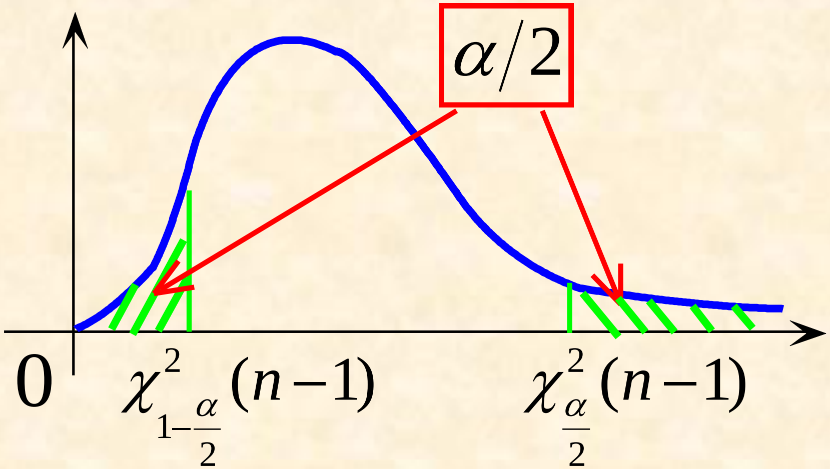
2. 方差σ^2的置信区间

μ已知：$W=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$

② μ未知

枢轴量 $W=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

给定$1-\alpha$有 $P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<W<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$



$$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

2. 方差σ^2的置信区间

② μ未知

因此，σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

σ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$$

二、两个正态总体

设$X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$是来自总体$X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$的样本,

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$是来自总体$Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$的样本,

且X与Y独立，它们的样本均值为$\bar{X}, \bar{Y}$,

样本方差为S_1^2, S_2^2.

给定置信度为$1-\alpha$,讨论以下情形的置信区间:

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

1. $\mu_1-\mu_2$的置信区间

① σ_1^2和σ_2^2已知

枢轴量 $$W=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

给定$1-\alpha$有 $$P\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}}<W<z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

σ_1^2和σ_2^2已知：$W=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

1. $\mu_1-\mu_2$的置信区间

② σ_1^2和σ_2^2均未知，但n_1和n_2很大(>50)

枢轴量 $W=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}\overset{\text{近似}}{\sim}N(0,1)$

$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right)$$

1. $\mu_1-\mu_2$的置信区间

③ $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，但未知，

枢轴量

$$W=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

说 明

若所求得的 $\mu_1-\mu_2$的双侧置信区间的区间下限大于0，实际中我们认为 μ_1 比μ_2 大。

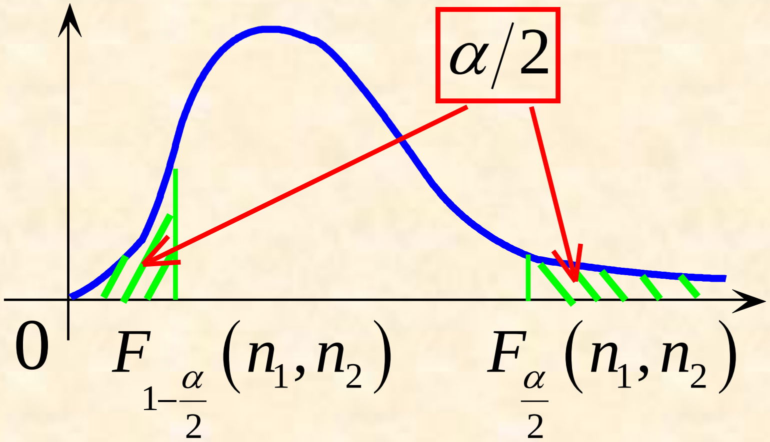
若所求得的 $\mu_1-\mu_2$的双侧置信区间包含0，实际中我们认为 μ_1 与μ_2 没有显著差别。

2. σ_1^2/σ_2^2的置信区间

① μ_1和μ_2已知

枢轴量 $$W=\frac{\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2\Big/\sigma_1^2}{\dfrac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2\Big/\sigma_2^2}\sim F(n_1,n_2)$$

给定$1-\alpha$有 $$\mathrm{P}\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)<W<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)\right\}=1-\alpha$$



2. σ_1^2/σ_2^2的置信区间

① μ_1和μ_2已知

因此，σ_1^2/σ_2^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)}, \frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)} \right)$$

μ_1和μ_2已知：$W=\dfrac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2\Big/\sigma_1^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2\Big/\sigma_2^2}$

2. σ_1^2/σ_2^2的置信区间

② μ_1和μ_2未知

枢轴量 $$W=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

给定$1-\alpha$有

$$\mathrm{P}\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)<W<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right\}=1-\alpha$$

2. σ_1^2/σ_2^2的置信区间

② μ_1 和μ_2未知

因此，σ_1^2/σ_2^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

说 明

若所求得的σ_1^2/σ_2^2的**双侧置信区间包含1**，

实际中我们认为σ_1^2与σ_2^2没有显著差别。

本节小结

以上针对正态的均值和方差，分别在多种情况下讨论了它们区间估计。重点是要掌握各种情况下所构造的枢轴量(枢轴量的构造常从相应参数的点估计出发，是样本和待估参数的函数，要包含总体已知的信息，这样才能充分利用已知信息来更好地估计未知参数，并且枢轴量的分布已知，其分布中也不含任何未知的参数)。确定枢轴量之后，利用区间分析的求解步骤得到参数的置信区间。

§5 单侧置信区间

除了讨论总体分布中未知参数的双侧置信区间以外，在某些实际问题中，如：研究元器件的寿命，我们关心的是平均寿命的下限；又或者研究产品的废品率，我们关心的是废品率的上限。这就要求我们来探讨参数的单侧区间估计问题。

定义

$\forall 0<\alpha<1$,若统计量$\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$对任意$\theta\in\Theta$满足

$$P\{\theta>\hat{\theta}_1\}=1-\alpha$$

则称随机区间$(\hat{\theta}_1,\infty)$是θ的置信水平为$1-\alpha$的**单侧置信区间**,称$\hat{\theta}_1$为θ的置信水平为$1-\alpha$的**单侧置信下限**。

若统计量$\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$对任意$\theta\in\Theta$满足

$$P\{\theta<\hat{\theta}_2\}=1-\alpha$$

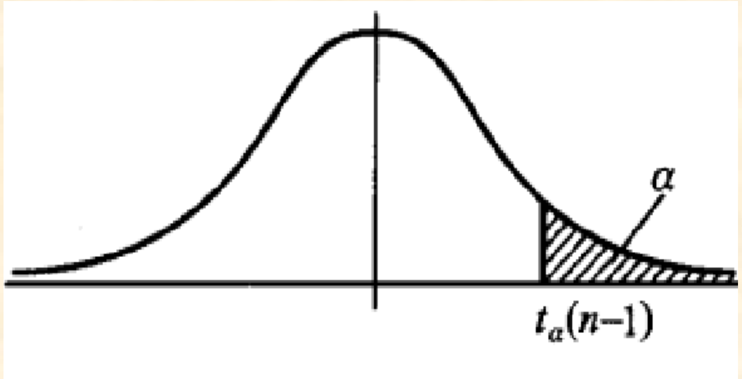
称随机区间$(-\infty,\hat{\theta}_2)$是θ的置信水平为$1-\alpha$的**单侧置信区间**,称$\hat{\theta}_2$为θ的置信水平为$1-\alpha$的**单侧置信上限**。

例 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ、σ^2未知， $X_1, X_2, \ldots,$ X_n是来自X 的样本，试求μ和σ^2的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间。

思路　　可仿照双侧置信区间求解步骤，只需将求解过程中要确定的两个常数 a、b 换成确定一个常数即可。

1) 均值μ的单侧置信区间

枢轴量 $\boxed{\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$



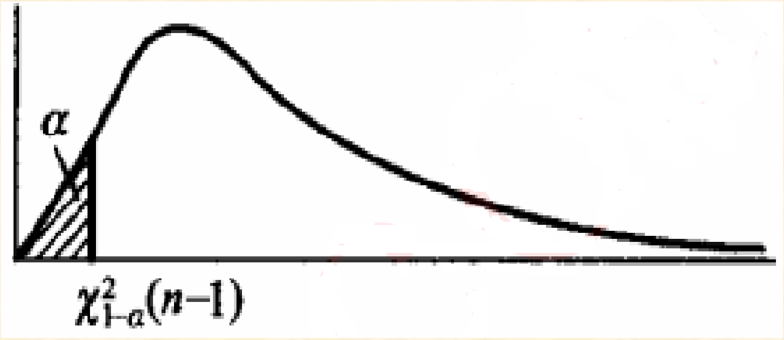
$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha \Rightarrow P\left\{\mu > \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

可以得到μ的置信度为1-α 的单侧置信区间

单侧置信下限

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \infty\right)$$

2） 方差σ^2的置信区间



枢轴量 $\boxed{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} \sim \chi^2(n-1)$

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\} = 1-\alpha \Rightarrow \mathrm{P}\left\{\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

可以得到σ^2的置信度为1-α 的单侧置信区间

$$\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$$

单侧置信上限

单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本均值 $\bar{X}$，样本方差 S^2

参数	条件	枢轴量及其分布	置信区间	单侧置信限
μ	σ^2 已知	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\underline{\mu}=\bar{X}-z_{\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\overline{\mu}=\bar{X}+z_{\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	σ^2 未知	$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\bar{X}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$	$\underline{\mu}=\bar{X}-t_{\alpha}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$, $\overline{\mu}=\bar{X}+t_{\alpha}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$
σ^2	μ 已知	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$	$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$	$\underline{\sigma^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha}(n)}$, $\overline{\sigma^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}$
	μ 未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$	$\underline{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$, $\overline{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$

两个独立正态总体 $X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$ 的样本均值 $\bar{X},\bar{Y}$ ，样本方差 S_1^2,S_2^2

参数	条件	枢轴量及其分布	置信区间
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$Z=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 未知，但 n_1 与 $n_2 \geq 50$	$Z=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}\right)$
$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知	$t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$, $S_W=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 已知	$F=\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2} \sim F(n_1,n_2)$	$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2}\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)}, \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2}\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)}\right)$
	μ_1,μ_2 未知	$F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}, \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

结 论

在求总体分布中未知参数的单侧置信上(下)限时，所选择的枢轴量和求解该参数的双侧置信区间时所选择的枢轴量相同，只需将参数在同样条件下的双侧置信区间的上(下)限中的 $\alpha/2$ 换为α即可。(P172表7-1)

作业

Pages 175, 176：

第16, 18, 21, 23, 25题