静 力 学

空间任意力系

西北工业大学
支希哲　朱西平　侯美丽

空间任意力系

本章将研究空间任意力系的简化和平衡条件。

第六章 空间任意力系

§6–1 力对点的矩

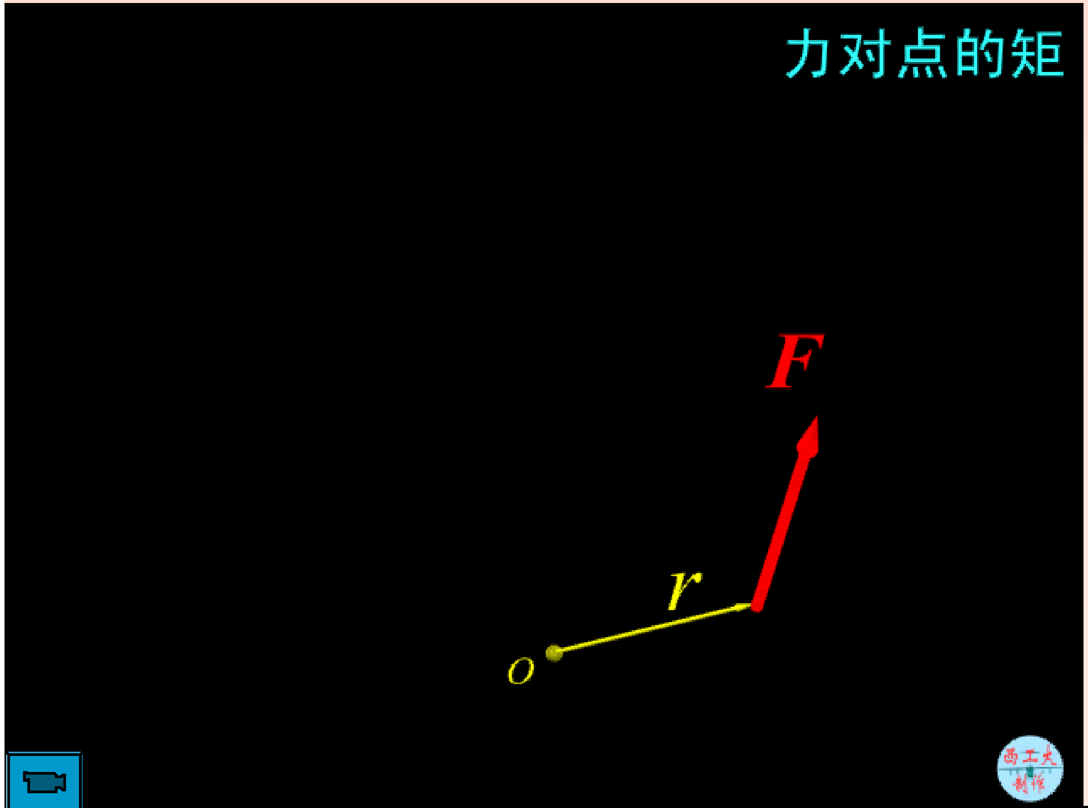
- 力对点之矩表示成矢量
- 力对点之矩矢积表达式
- 力对点之矩解析表达式

§6–1 力对点的矩

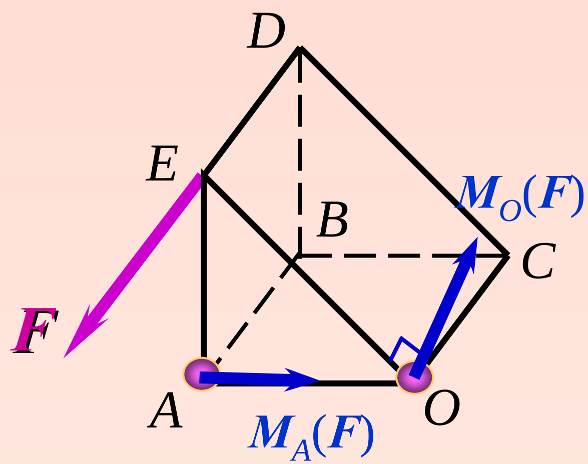
1.力对点之矩表示成矢量

力可以对空间任意一点取矩，矩心和力所决定的平面可以有任意方位，所以空间力对任一点的矩应该表示成矢量。

符号：$M_O(F)$



作用线位置和指向：

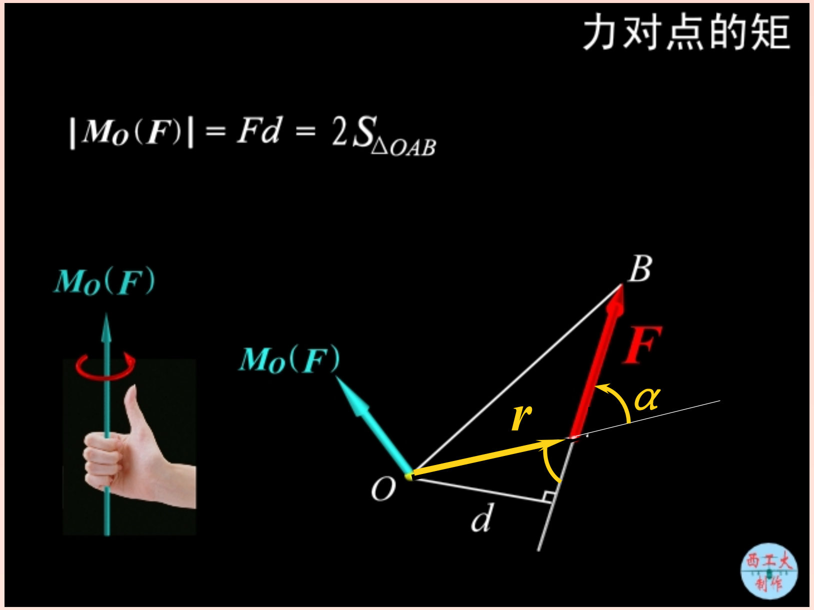


力矩矢$M_O(F)$是一个定位矢量，它的大小和方向都与作用点O的位置有关。

2. 力对点之矩矢积表达式

$$M_O(F)=r \times F$$

即力对点的矩矢等于矩心到该力作用点的矢径与该力的矢量积。



大小：

$$|\, m_O(F) \,| = |\, r \times F \,| = rF\sin\alpha = F\,d = 2\,S_{\Delta OAB}$$

方向： 由矢量代数得知$r \times F$垂直于r与F所构成的平面，它的指向用右手规则判定。

§ 6–1 力对点的矩

3. 力对点之矩解析表达式

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=(yF_x-zF_y)\boldsymbol{i}+(zF_x-xF_z)\boldsymbol{j}+(xF_y-yF_x)\boldsymbol{k}$$

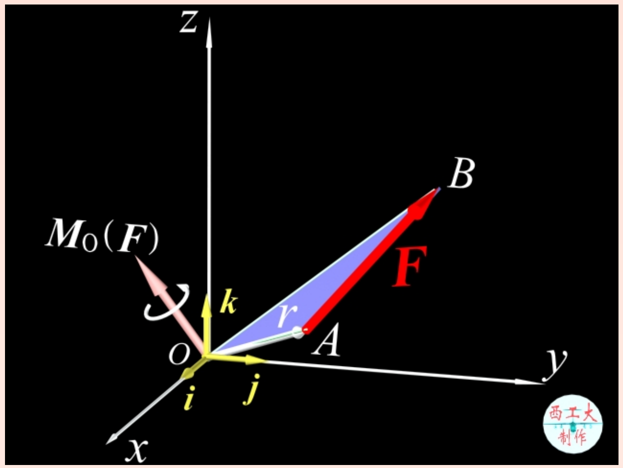
证明：$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ ，　$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$

把上两式代入 $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 得

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\times(F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k})$$

$$=(yF_x-zF_y)\boldsymbol{i}+(zF_x-xF_z)\boldsymbol{j}+(xF_y-yF_x)\boldsymbol{k}$$

写成行列式形式 $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x&y&z\\F_x&F_y&F_z\end{vmatrix}$



§6–2 力对轴的矩

- 力对轴的矩定义
- 力对轴的矩的解析表达式
- 力矩关系定理

§ 6–2 力对轴的矩

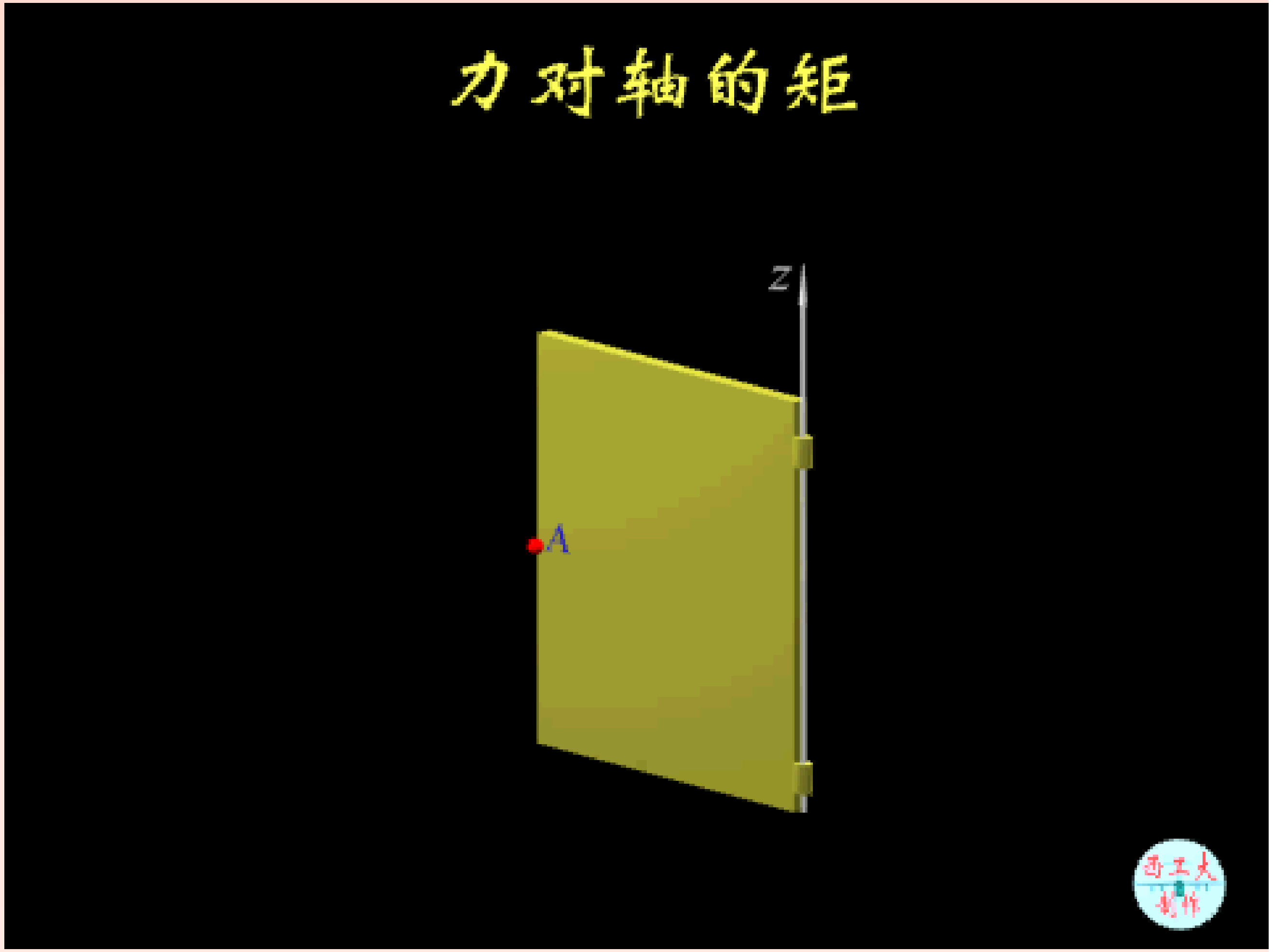
1. 力对轴的矩定义

把F'的大小与其作用线到轴z的垂直距离的乘积$F'd$加以适当的正负号。

$$M_z(F) = \pm F'd$$

正负号规定：

按右手法则：从轴z的正向回头看，如力F'使物体绕轴z作逆时针转动，则取正号；反之，取负号。

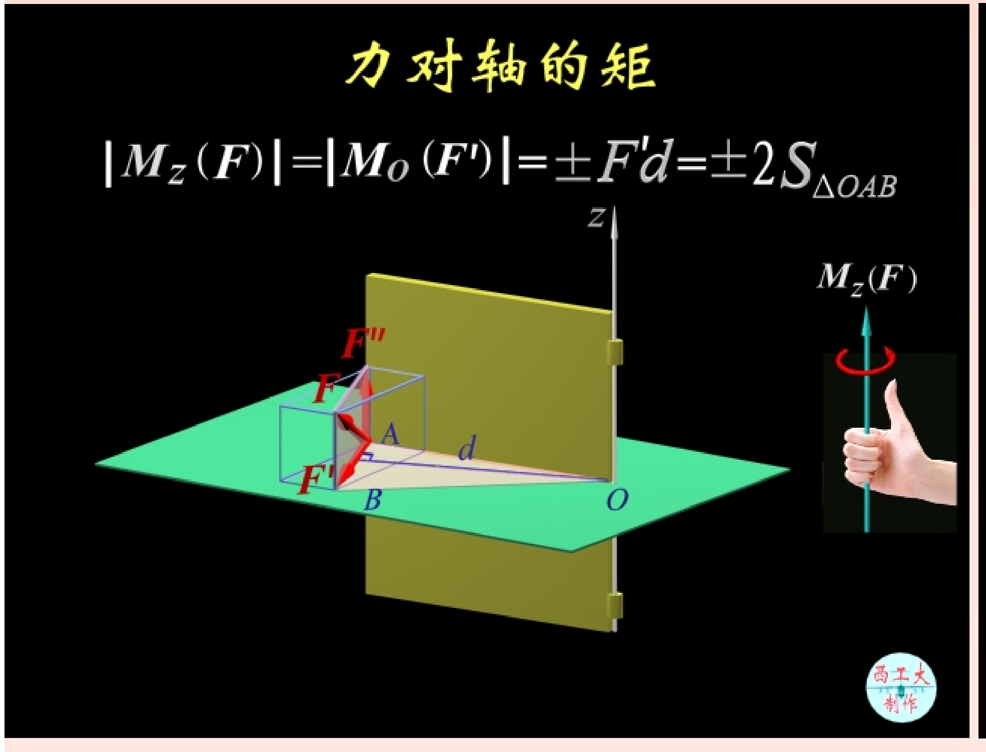


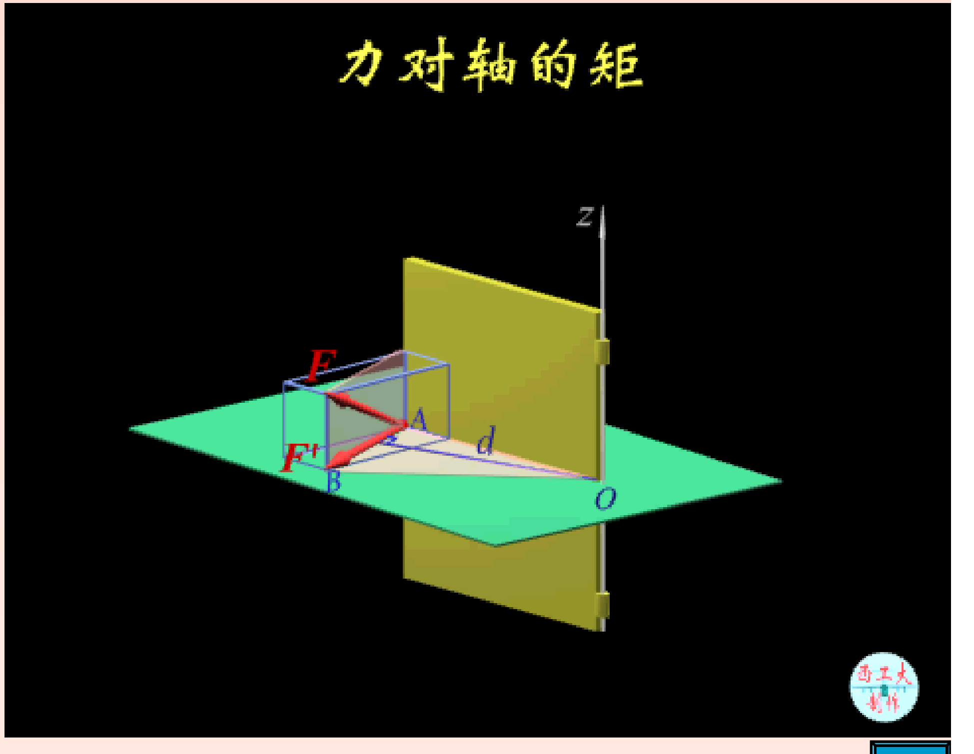
§ 6–2 力对轴的矩

$$M_z(\boldsymbol{F}) = \pm F'd$$

一般的定义：力$\boldsymbol{F}$对任一轴的矩，等于这力在这轴的垂直面的投影对该投影面和该轴交点的矩。

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}')$$

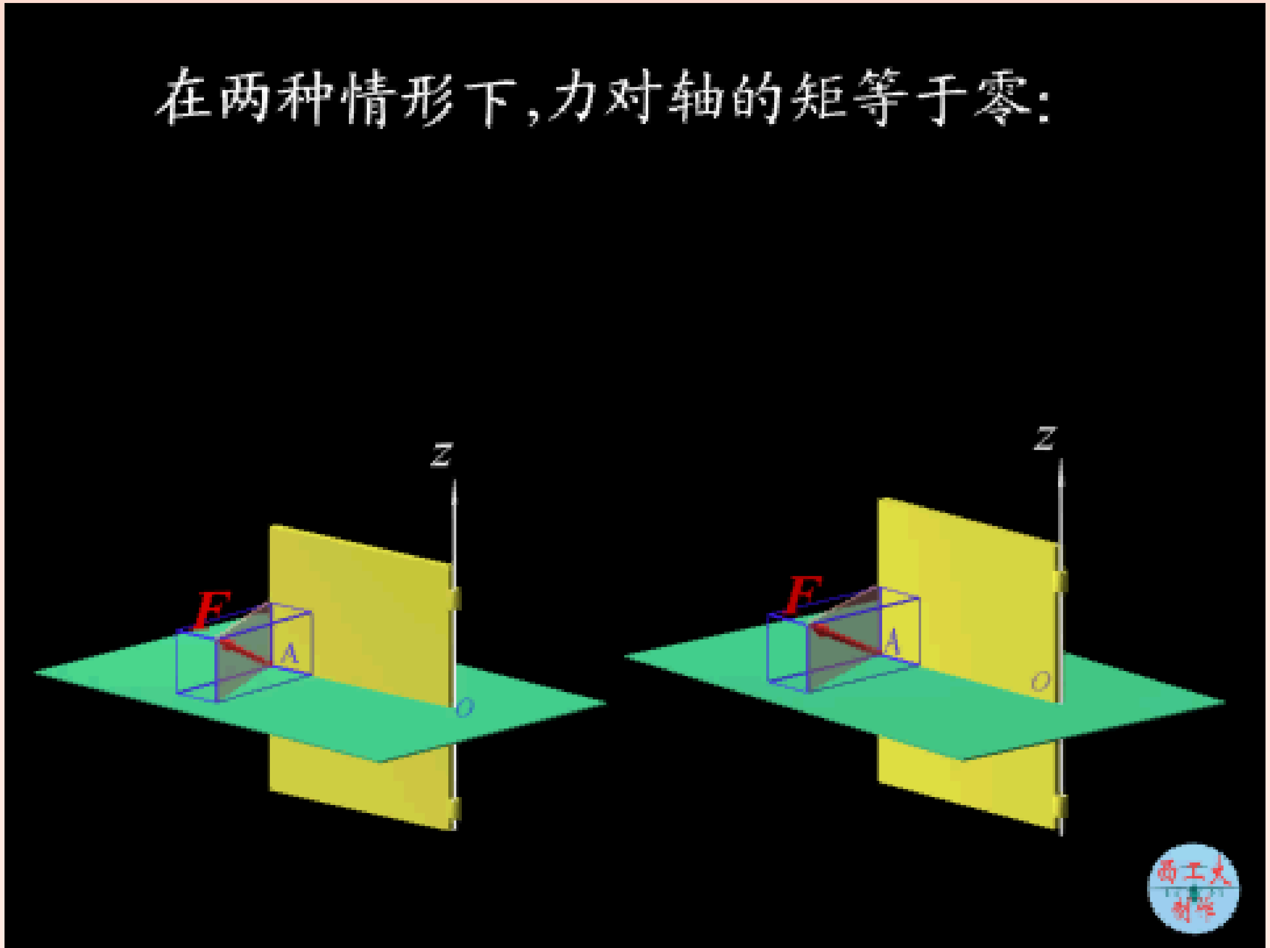




§6–2 力对轴的矩

- **特殊情况**

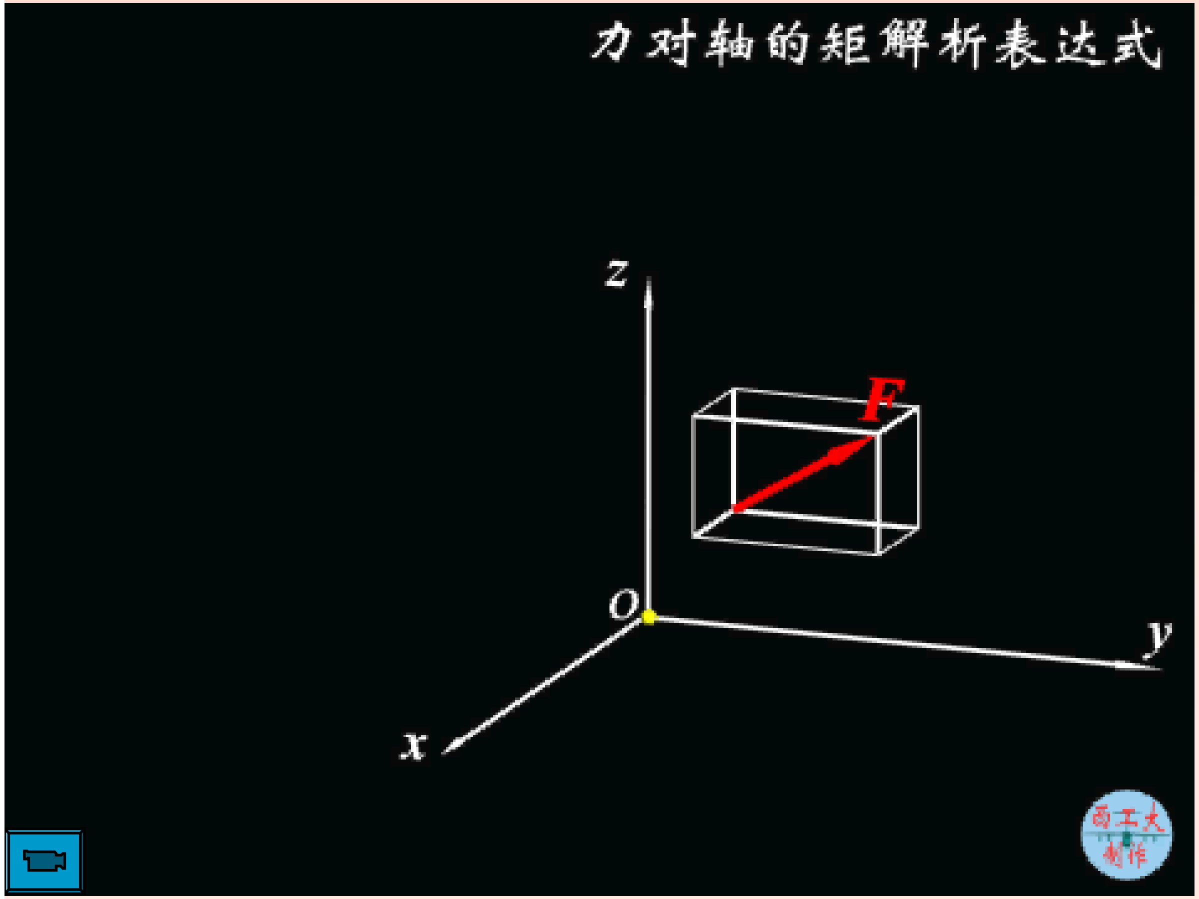
(1) 力和轴平行。**(2)** 力的作用线通过矩轴。

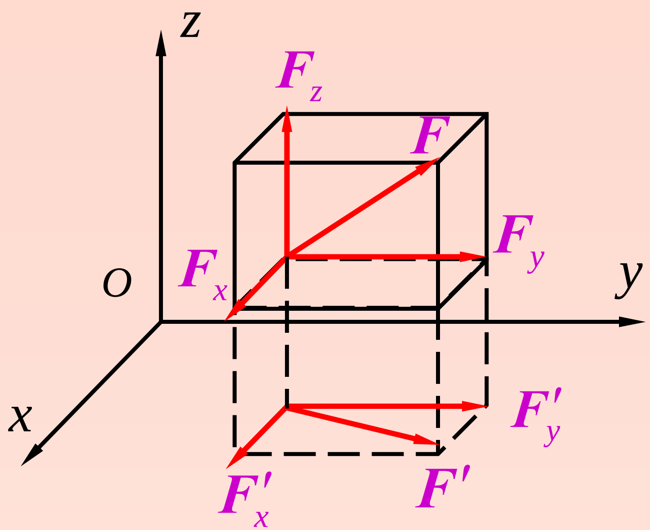


§6–2 力对轴的矩

2. 力对轴的矩的解析表达式

$$M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x$$





$$M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y$$

$$M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z$$

$$M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x$$

3.力矩关系定理

力对坐标轴的矩的解析表达式

$$M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y, \qquad M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z, \qquad M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x$$

力对原点的矩的解析表达式

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}$$

比较可得

$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_x = M_x(\boldsymbol{F})$$

$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_y = M_y(\boldsymbol{F})$$

$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z = M_z(\boldsymbol{F})$$

力对坐标原点的矩在各坐标轴上的投影，等于该力对相应坐标轴的矩。

§6–2 力对轴的矩

力矩关系定理

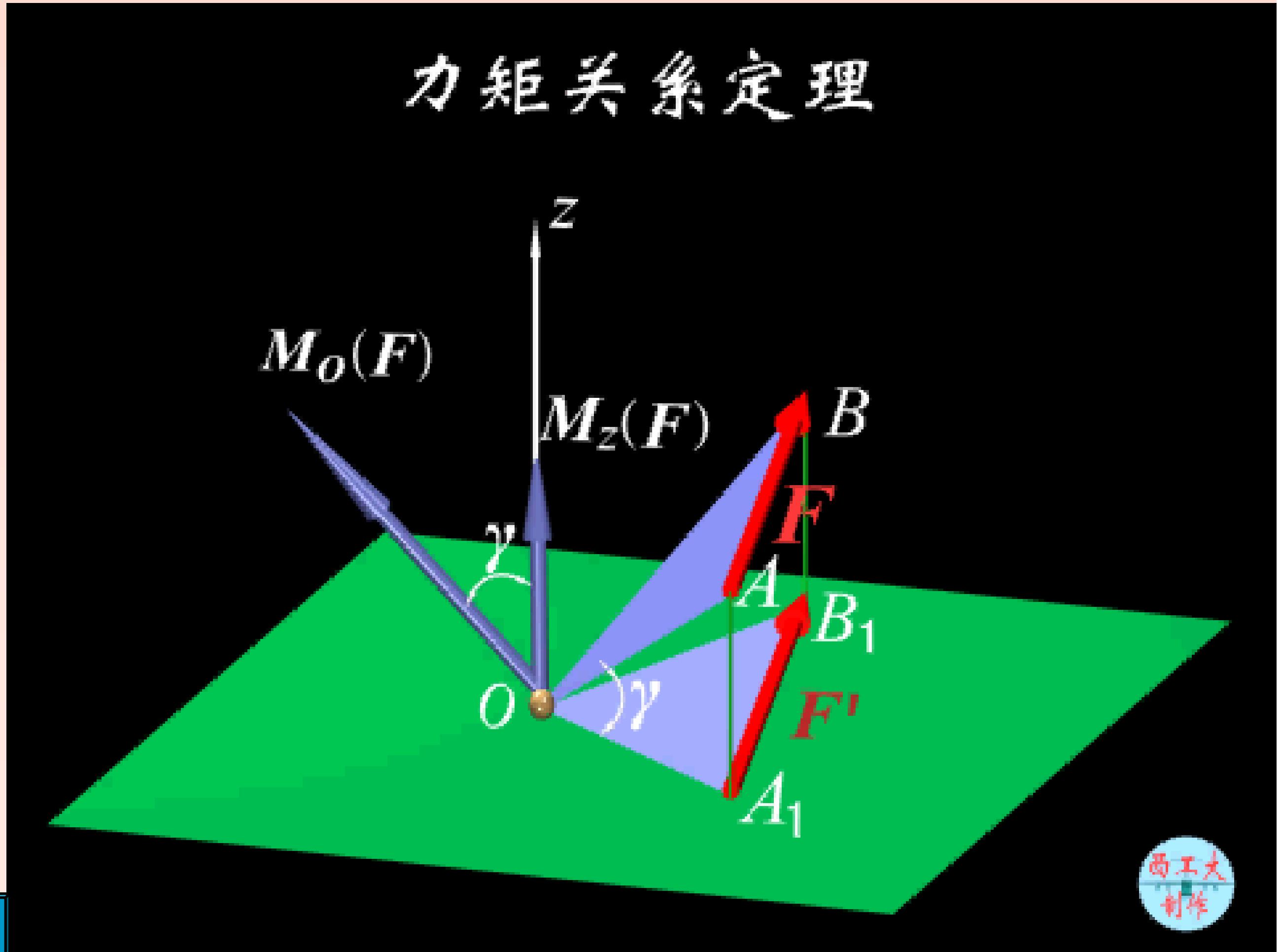
力对坐标原点的矩在各坐标轴上的投影，等于该力对相应坐标轴的矩。

几何证明

$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_x = M_x(\boldsymbol{F})$$

$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_y = M_y(\boldsymbol{F})$$

$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z = M_z(\boldsymbol{F})$$



力矩关系定理

力对坐标原点的矩在各坐标轴上的投影，等于该力对相应坐标轴的矩。

由于原点和坐标轴可以任意选择，所以上述结论可表述为：

力对任一轴的矩，等于该力对这轴上任何一点O的矩矢在这一轴上的投影。

4. 力对空间任意一点矩的计算

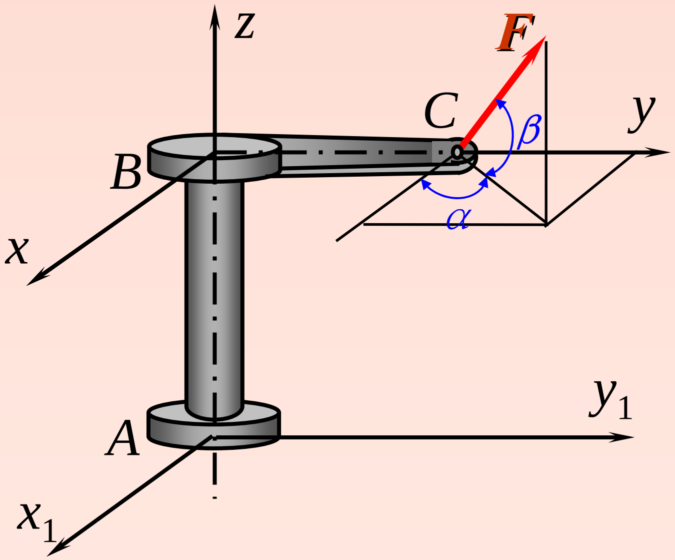
若已知力对坐标轴的矩，则反过来可以求得对原点的矩的大小

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$
$$= \sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}$$

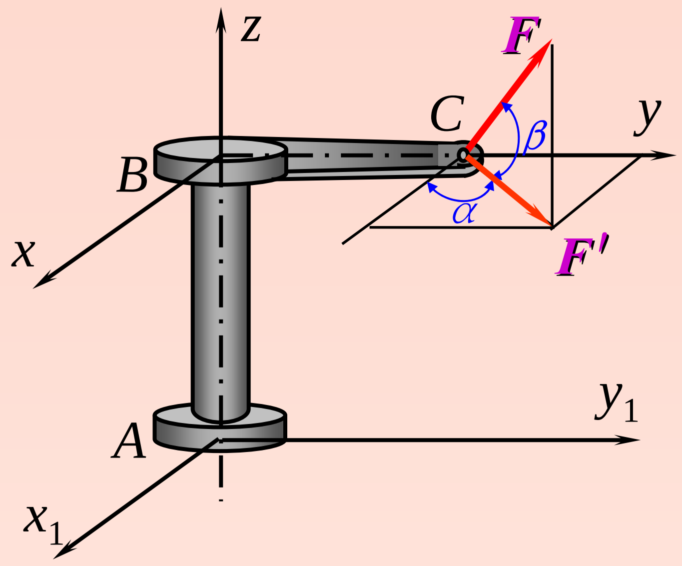
方向余弦

$$\cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{i}) = \frac{yF_z - zF_y}{M_O}, \quad \cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{j}) = \frac{zF_x - xF_z}{M_O}, \quad \cos(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{k}) = \frac{xF_y - yF_x}{M_O}$$

例6-2 在轴AB的手柄BC的一端作用着力$\boldsymbol{F}$，试求这力对轴AB以及对点B和点A的矩。已知AB=20 cm，BC=18 cm，F=50 N，且α=45°，β=60°。



解： **1.力对轴*AB*的矩。**



$$M_{AB}(\boldsymbol{F}) = M_B(\boldsymbol{F}')$$
$$= -F\cos\beta\cos\alpha\cdot BC$$
$$= -3.18\ \ \mathrm{N\cdot m}$$

应用解析式求解力对点*B*的矩。

$$M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y$$

$$M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z$$

$$M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

2. 力对点*B*的矩。

坐标原点取在*B*点，则*C*点的坐标

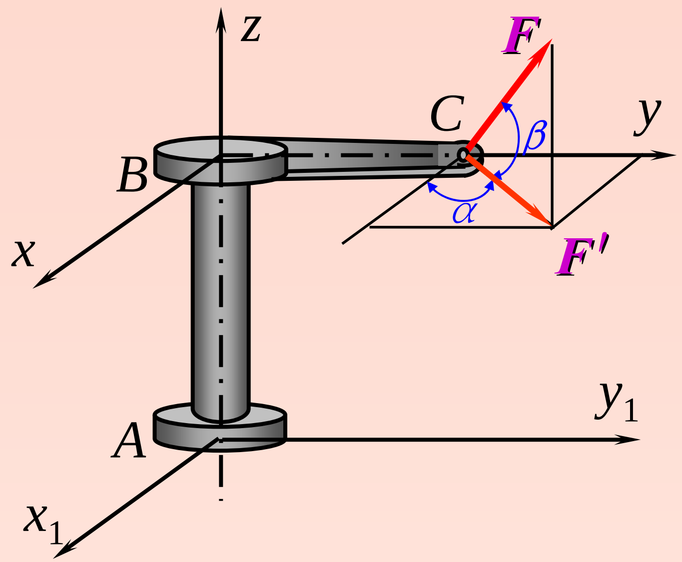
$x=0$， $y=0.18$ m， $z=0$

力*F*的各投影

$$F_x = F\cos\beta\cos\alpha = 17.7\ \text{N}$$

$$F_y = F\cos\beta\sin\alpha = 17.7\ \text{N}$$

$$F_z = F\sin\alpha = 43.3\ \text{N}$$



力***F***对坐标轴的矩

$$M_{Bx}(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y = 7.80\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_{By}(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z = 0$$

$$M_{Bz}(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x = -3.18\ \text{N}\cdot\text{m}$$

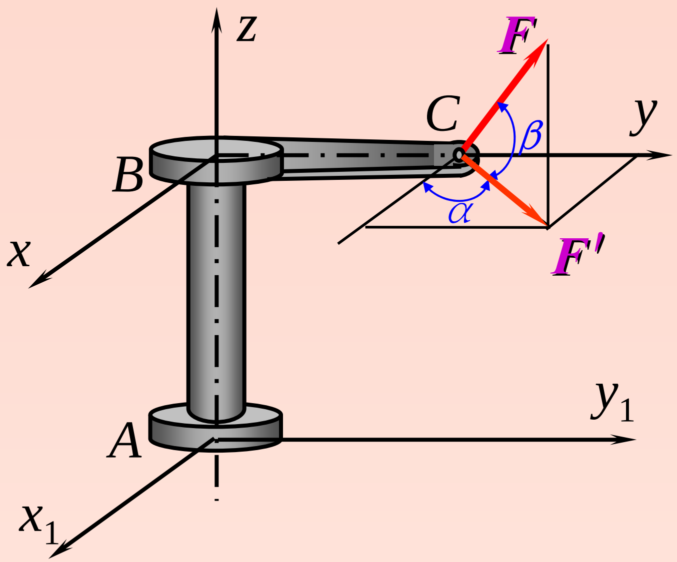
由

$$M_O=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{i})=\frac{M_x}{M_O}$$

$$\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{j})=\frac{M_y}{M_O}$$

$$\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{k})=\frac{M_z}{M_O}$$



可求出力矩 $\boldsymbol{M}_B(\boldsymbol{F})$的大小和方向余弦。

3. 力对点*A*的矩。

与计算力对点***B***的矩的方法相同，但坐标原点应取在点*A*。

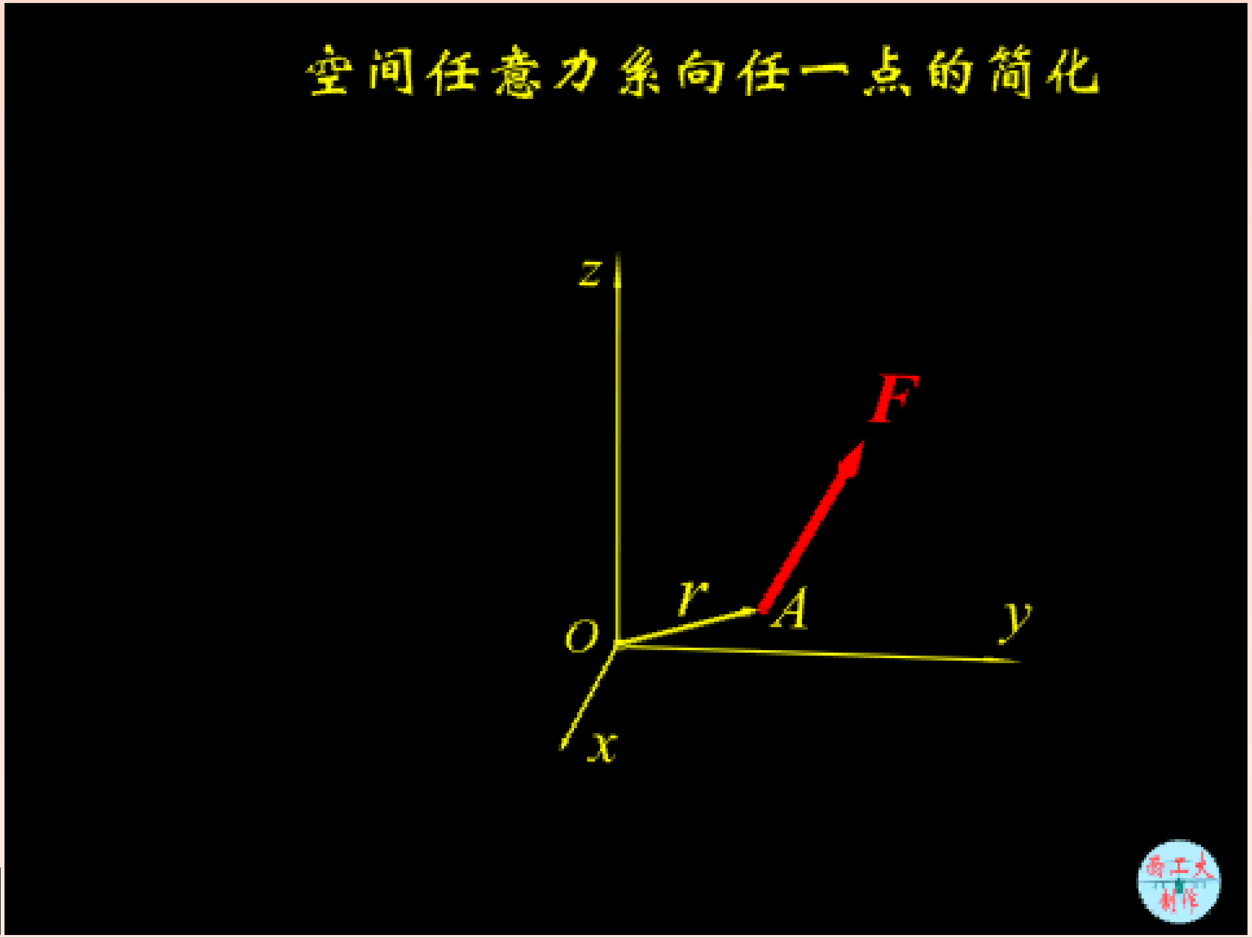
§6–3 空间任意力系向任一点的简化

- 力线平移定理
- 力系向任一点的简化
- 主矢与主矩的计算

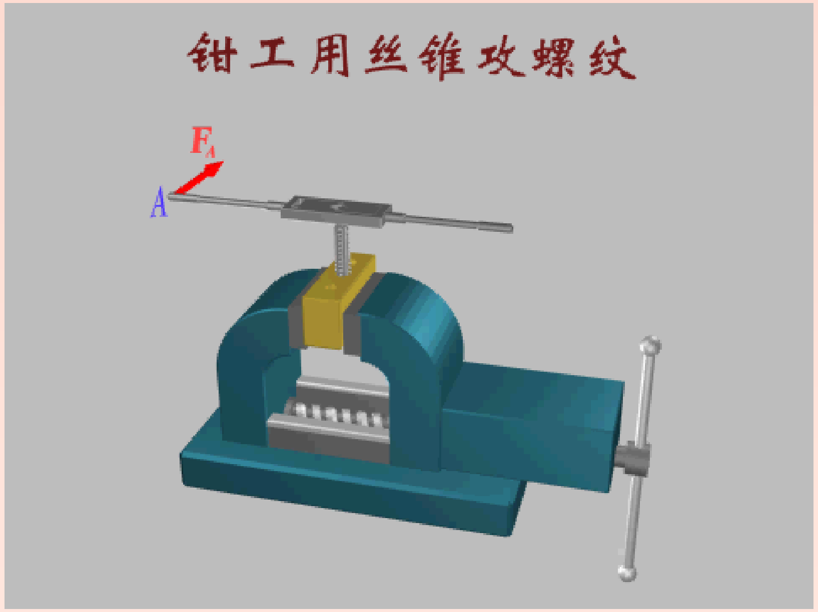
§6–3 空间任意力系向任一点的简化

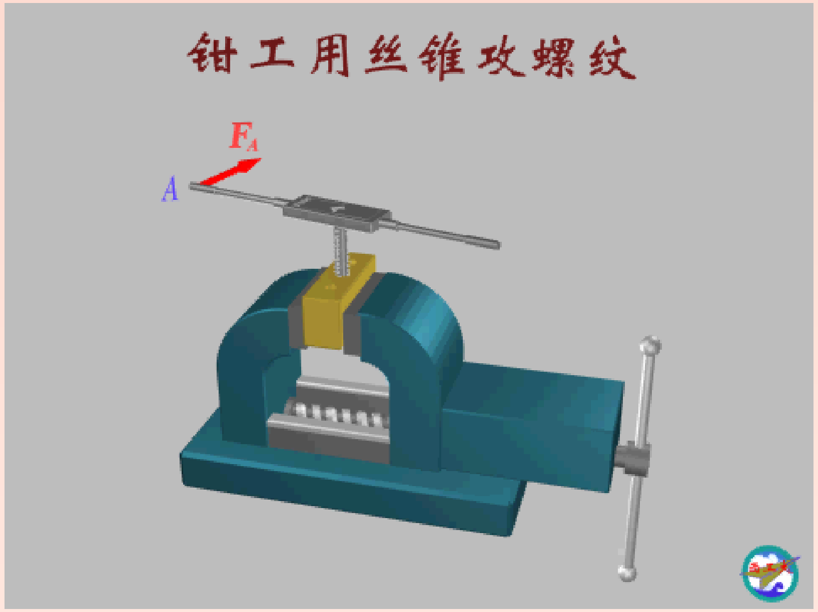
1. 力线平移定理

当一个力的作用线平行移动时，附加力偶矩矢等于原力对新作用点的矩矢。



工程实例分析

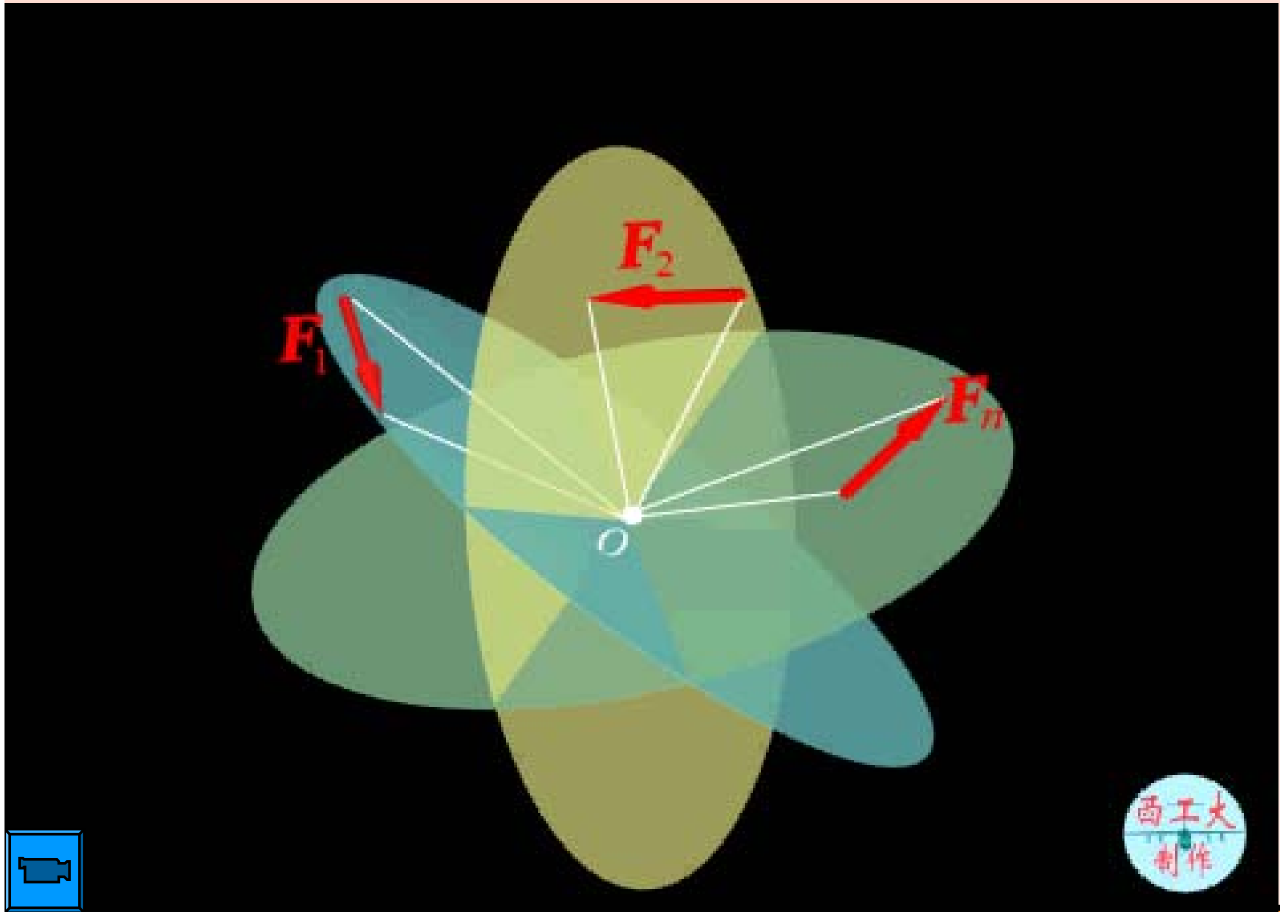




§6–3 空间任意力系向任一点的简化

2. 力系向任一点的简化

空间任意力系向任一点简化后，一般得到一个力和一个力偶。这个力称为原力系的主矢，它等于力系中所有各力的矢量和；这个力偶称为该力系简化中心的主矩，它等于力系中所有各力对该简化中心的矩之矢量和。



$$F'_R = \sum F_i$$

$$M_O = \sum M_i$$

与平面情形相同，主矢与简化中心的位置无关，而主矩则一般与简化中心的位置有关。

3. 主矢与主矩的计算

（1）主矢的计算

主矢$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}$在直角坐标系$oxyz$的投影

$$F'_{\mathrm{R}x}=\sum F_x\ ,\quad F'_{\mathrm{R}y}=\sum F_y\ ,\quad F'_{\mathrm{R}z}=\sum F_z$$

主矢的大小和方向余弦

$$F'_{\mathrm{R}}=\sqrt{F'^2_{\mathrm{R}x}+F'^2_{\mathrm{R}y}+F'^2_{\mathrm{R}z}}$$

$$=\sqrt{\left(\sum F_x\right)^2+\left(\sum F_y\right)^2+\left(\sum F_z\right)^2}$$

$$\cos\left(\boldsymbol{F}'_{R},\boldsymbol{i}\right)=\frac{F'_{\mathrm{R}x}}{F'_{\mathrm{R}}},\qquad \cos\left(\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}},\boldsymbol{j}\right)=\frac{F'_{\mathrm{R}y}}{F'_{\mathrm{R}}},\qquad \cos\left(\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}},\boldsymbol{k}\right)=\frac{F'_{\mathrm{R}z}}{F'_{\mathrm{R}}}$$

（2）主矩的计算

若已知主矩$\boldsymbol{M}_O$在直角坐标系$oxyz$的投影，则可以求得主矩的大小和方向余弦。

$$M_O=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}$$
$$=\sqrt{(yF_z-zF_y)^2+(zF_x-xF_z)^2+(xF_y-yF_x)^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{i})=\frac{yF_z-zF_y}{M_O},\quad \cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{j})=\frac{zF_x-xF_z}{M_O},\quad \cos(\boldsymbol{M}_O,\boldsymbol{k})=\frac{xF_y-yF_x}{M_O}$$

§6–4 空间任意力系的简化结果

- 力系简化的结果
- 合力矩定理的一般形式

§ 6–4 空间任意力系的简化结果

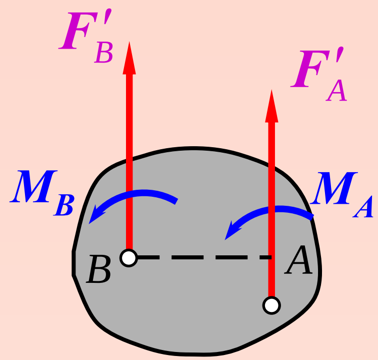
1. 力系简化的结果

(1) 力系合成为合力偶

$F_R'=0$，而 $M_O\neq 0$，则原力系合成为一个矩为 M_O 的合力偶 。

该力系的主矩不随简化中心的位置而改变。

证 明



如果向点B简化，则由力线平移定理有

$$F'_B = F'_A$$

$$M_B=M_A+M_B(F_A')$$

如果 $F'_A = 0$

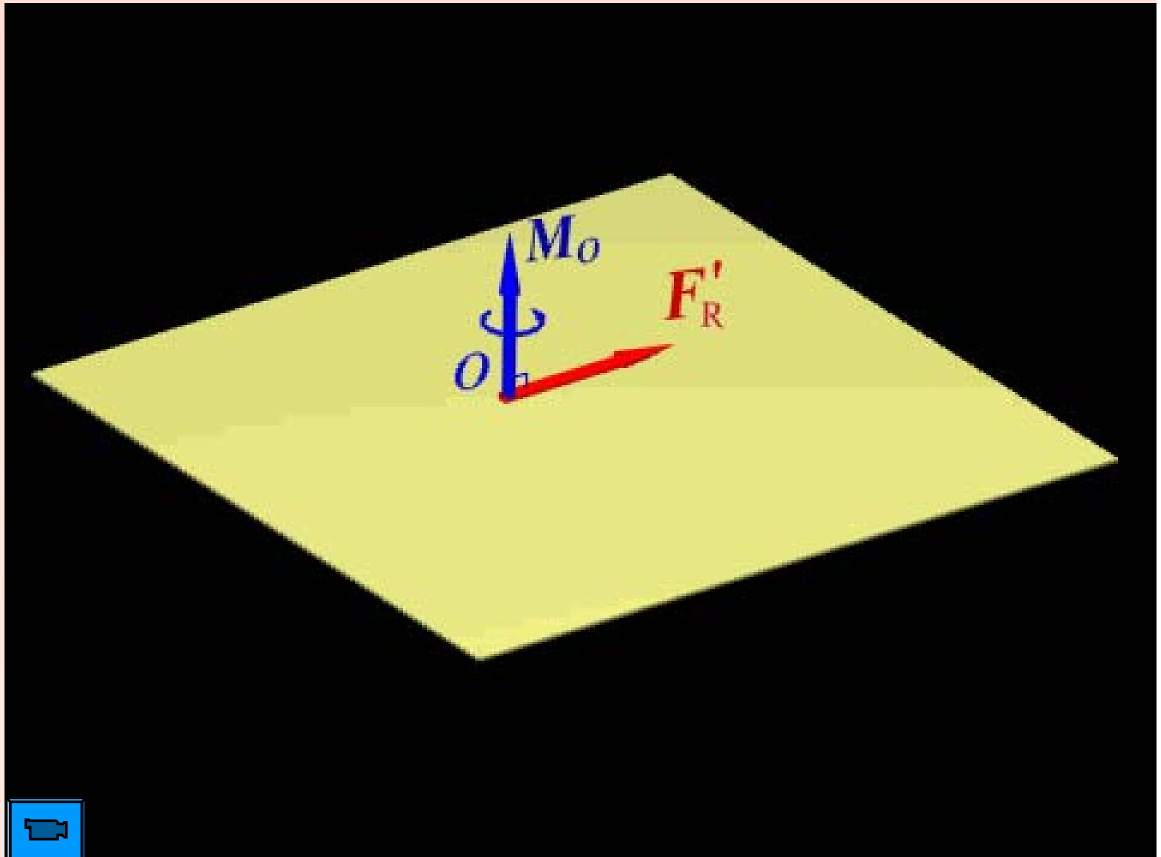
则 $M_B=M_A$

(2) 力系合成为合力

- $F_R' \neq 0$，$M_O = 0$，则原力系合成为一个作用于简化中心O的合力F_R，且 $F_R = F_R'$。

- $F_R' \neq 0$，$M_O \neq 0$，且$F_R' \perp M_O$。

则原力系仍然合成为一个合力F_R。



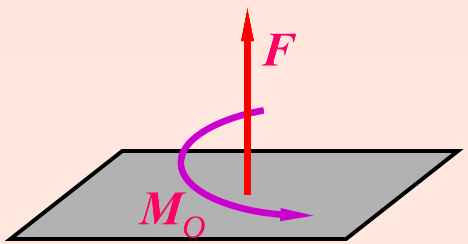
(3) 力系合成为力螺旋

● $F_R' \neq 0$，$M_O \neq 0$，且 $F_R' \parallel M_O$。

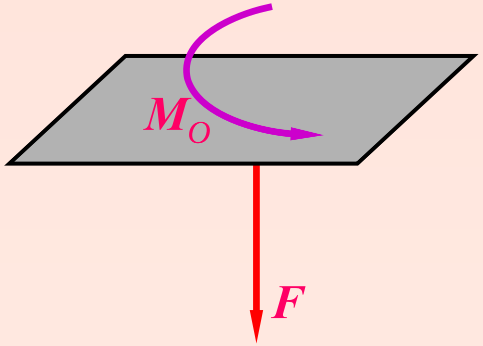
力系合成为一个力（作用于简化中心）和一个力偶，且这个力垂直于这个力偶的作用面。这样的一个力和一个力偶的组合称为**力螺旋**。

右手螺旋：力矢F与力偶矩M_O指向相同（图a）。

左手螺旋：力矢F与力偶矩M_O指向相反（图b）。



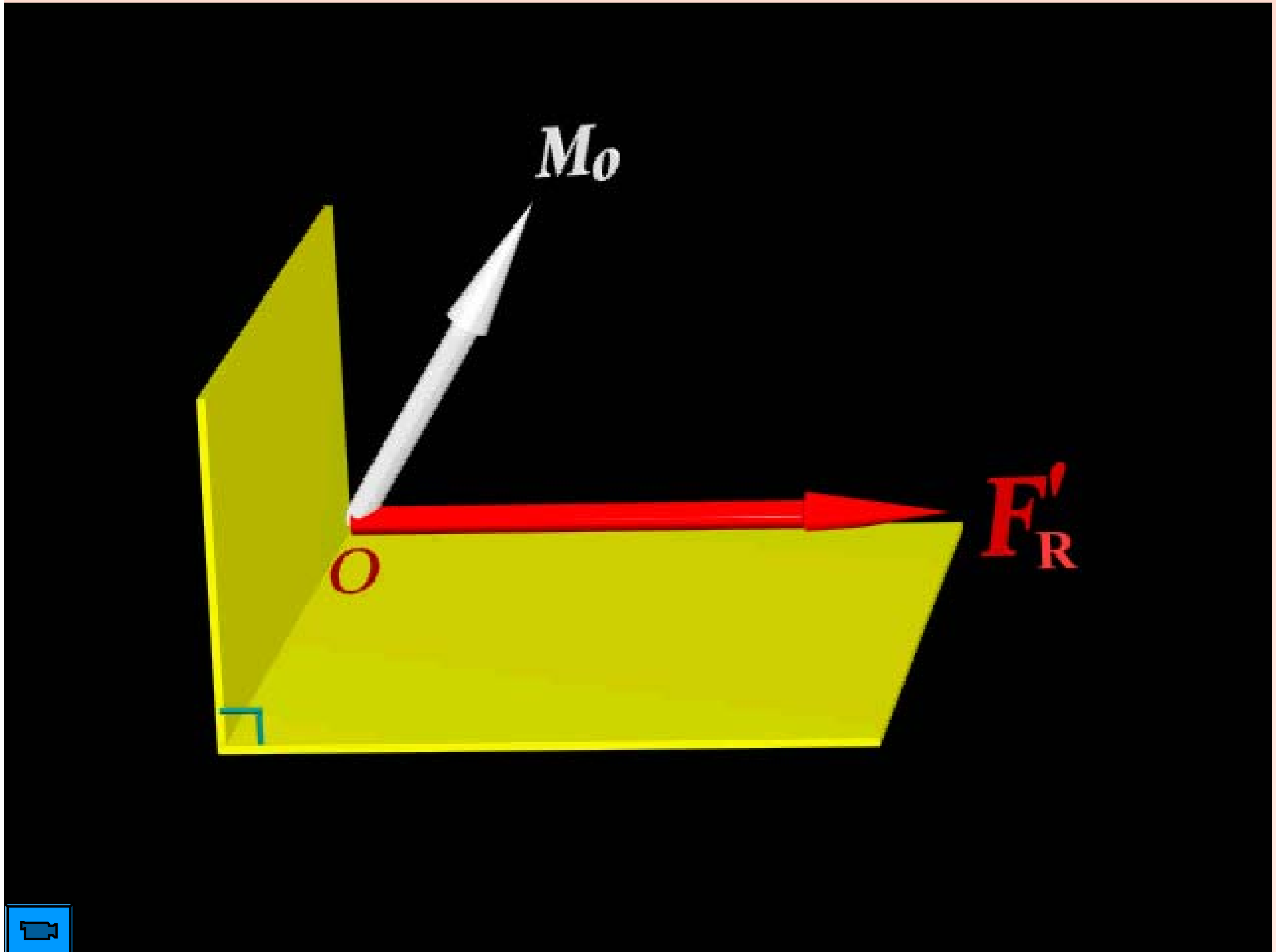
（a）



（b）

§6–4 空间任意力系的简化结果

- $F_R' \neq 0$，$M_O \neq 0$，且F_R' 与 M_O成任意角，力系合成为一个力螺旋。



在一般情况下空间任意力系可合成为力螺旋。

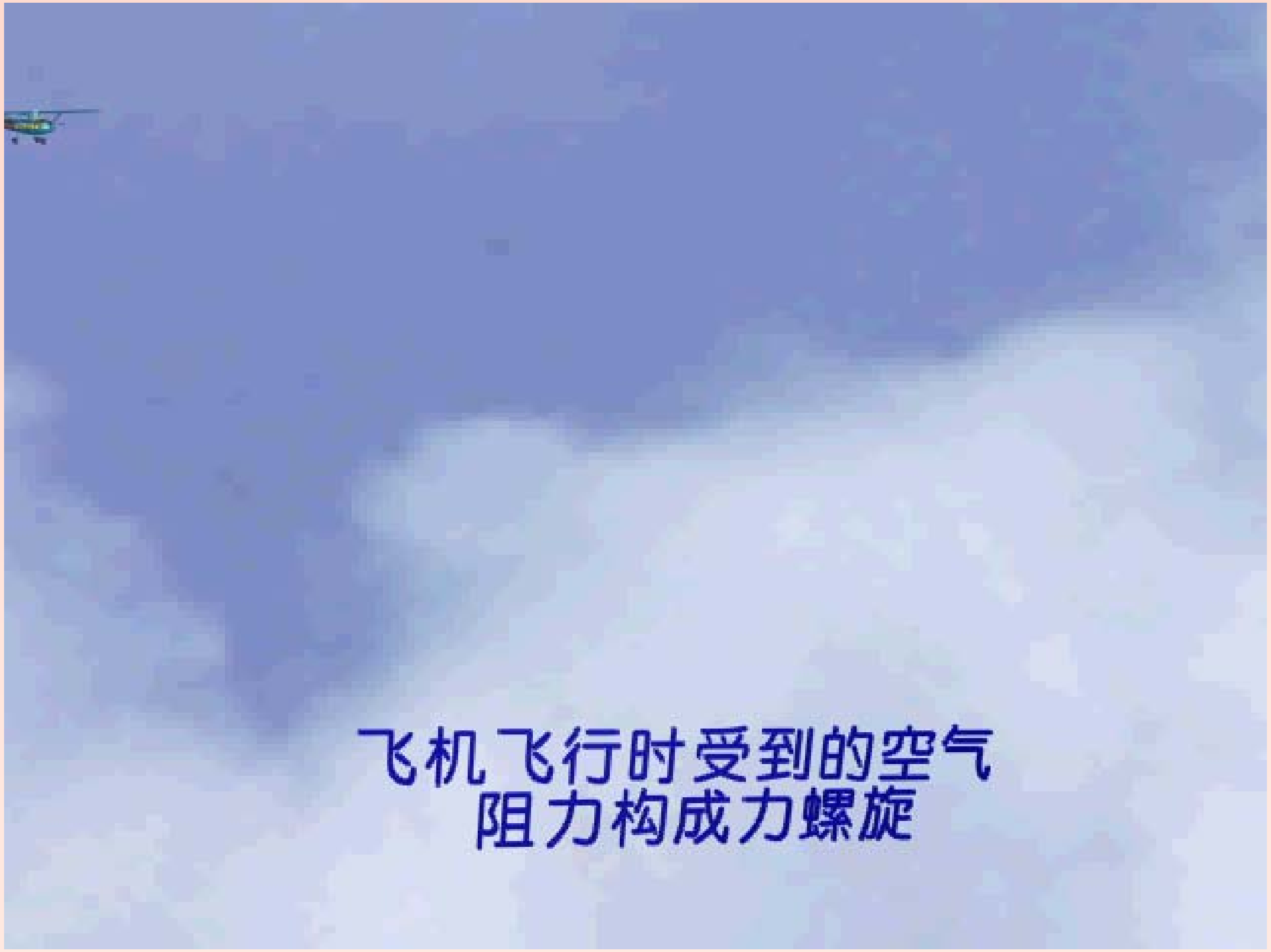
§6–4 空间任意力系的简化结果

归纳本节所述，可得出如下结论，只要主矢和主矩不同时等于零，空间任意力系的最后合成结果可能有三种情形：

- 一个力偶 ($\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}'=0$， $\boldsymbol{M}_O\neq 0$);
- 一个力($\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}'\neq 0$，而 $\boldsymbol{M}_O=0$ 或 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}'\perp\boldsymbol{M}_O$)；
- 一个力螺旋($\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}'\neq 0$， $\boldsymbol{M}_O\neq 0$ 且两者不相互垂直)。

§6–4 空间任意力系的简化结果

力螺旋工程实例

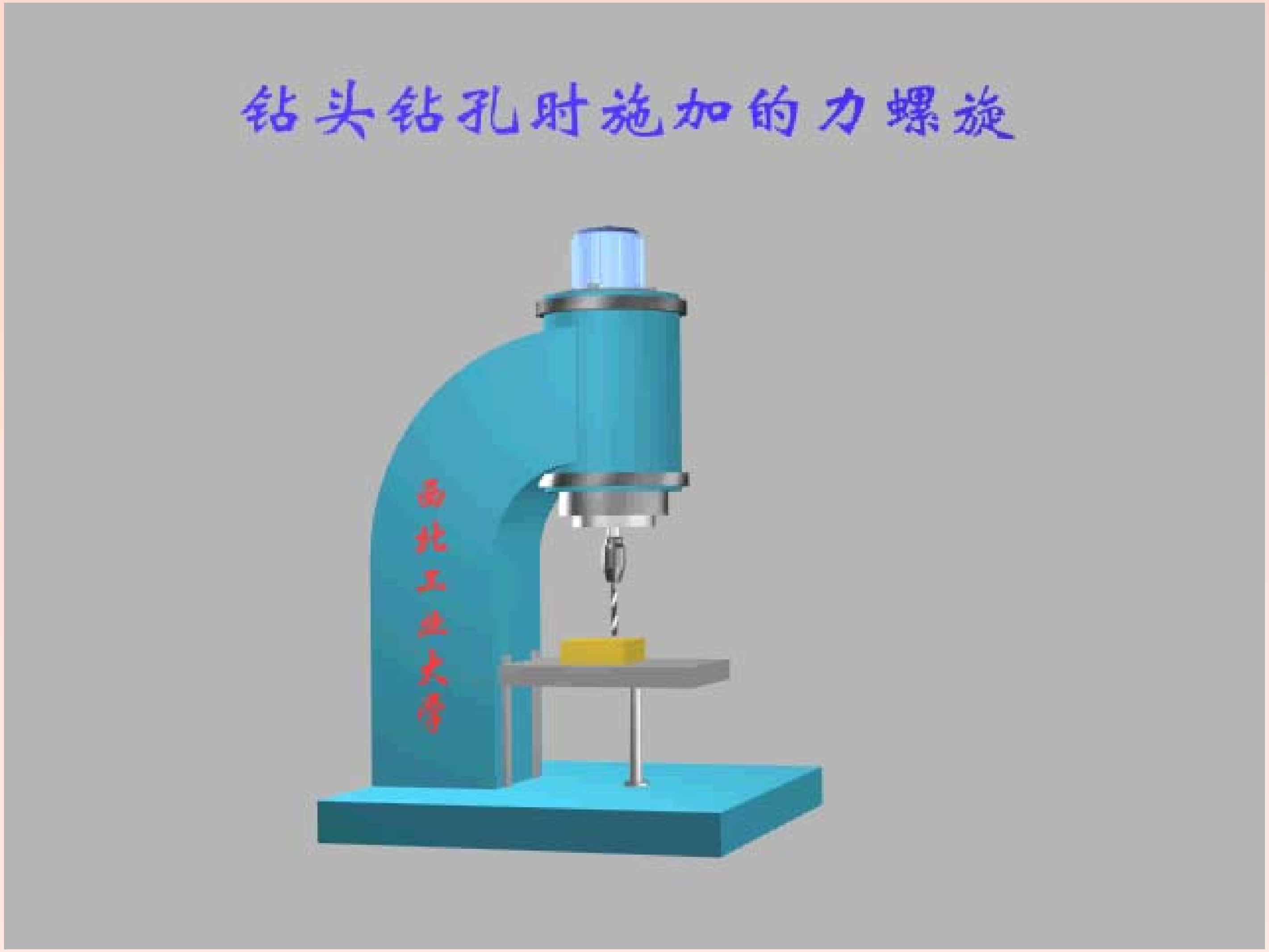


§6–4 空间任意力系的简化结果

力螺旋工程实例

§6–4 空间任意力系的简化结果

力螺旋工程实例



2. 合力矩定理的一般形式

1. 力系如有合力，则合力对任一点的矩等于力系中各力对同一点的矩的矢量和。

2. 力系如有合力，则合力对任一轴的矩等于力系中各力对同一轴的矩的代数和。

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_\mathrm{R})=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$$

$$M_x(\boldsymbol{F}_\mathrm{R})=\sum M_x(\boldsymbol{F}_i)$$

§6–5 空间任意力系的平衡条件和平衡方程

- 空间任意力系平衡的充要条件
- 空间任意力系的平衡方程

§6–5 空间任意力系的平衡条件和平衡方程

1. 空间任意力系平衡的充要条件

力系中所有各力的矢量和等于零，又这些力对任何一点的矩的矢量和也等于零。

2. 空间任意力系的平衡方程

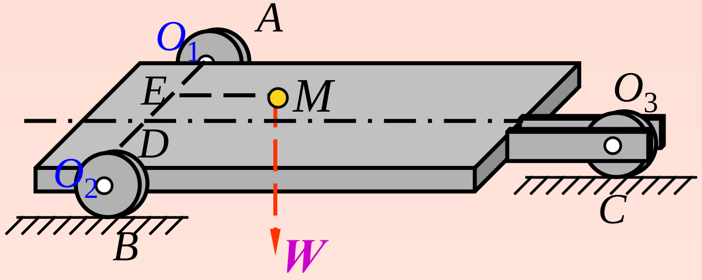
矢量方程 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}' = \sum \boldsymbol{F}_i = 0$， $\boldsymbol{M}_O = \sum M_O(\boldsymbol{F}_i) = 0$

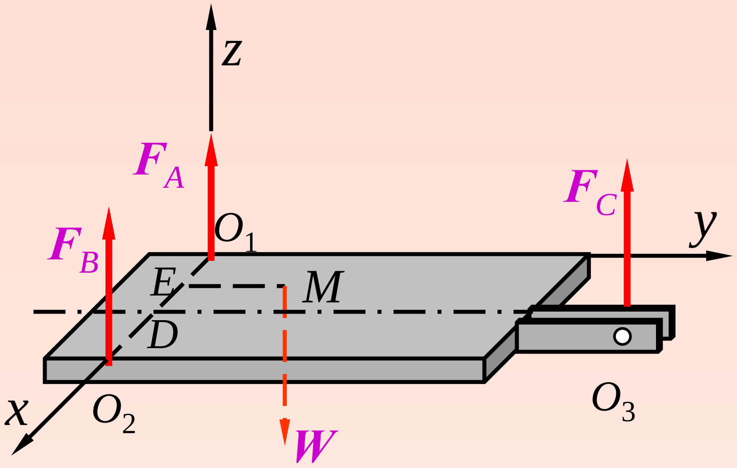
解析表达式

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0, \quad \sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0, \quad \sum M_z(\boldsymbol{F}) = 0$$

例6-4 在三轮货车上放着一重W=1 000 kN的货物，重力$\boldsymbol{W}$的作用线通过矩形底板上的点M。已知O_1O_2=1 m，O_3D=1.6 m，O_1E=0.4 m，EM=0.6 m，点D是线段O_1O_2的中点，$EM \perp O_1O_2$。试求A，B，C，各处地面的铅直反力。





解:

1. 取货车为研究对象。

2. 受力分析如图。

3. 列平衡方程。

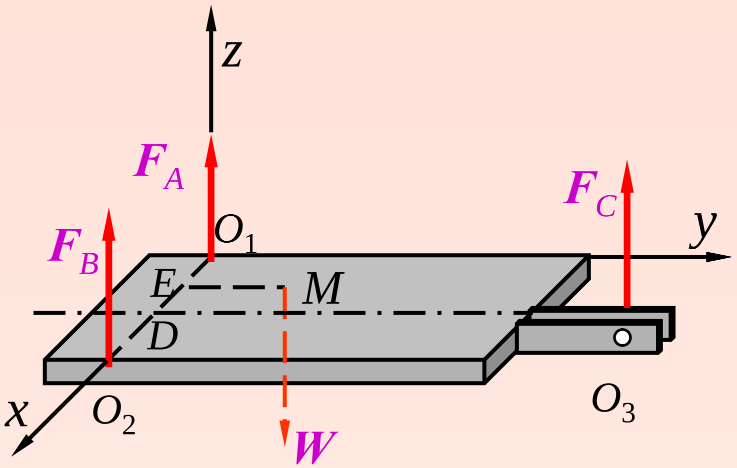
$$\sum M_x = 0 , \qquad F_C \cdot O_3D - W \cdot EM = 0$$

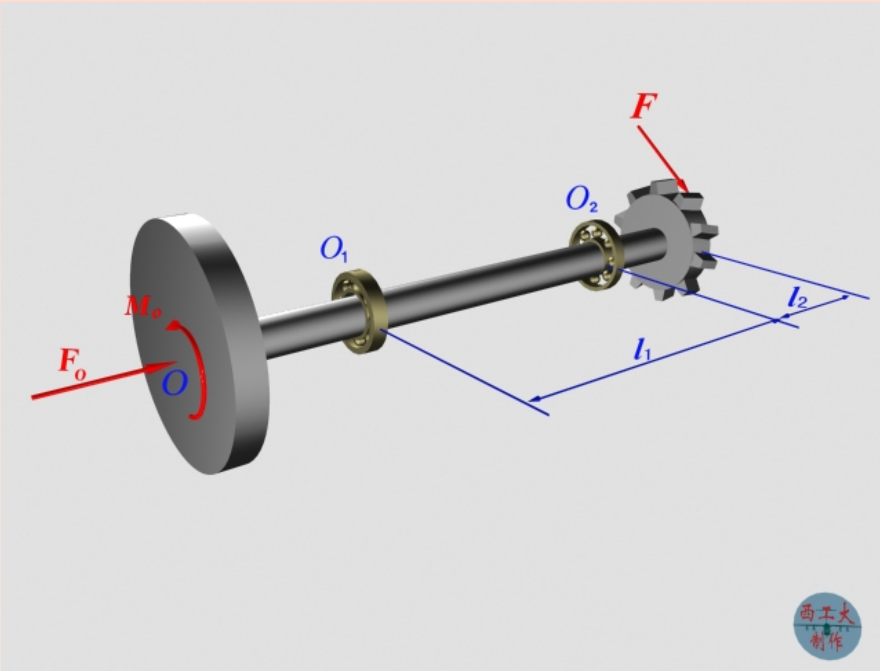
$$\sum M_y = 0 , \qquad W \cdot O_1E - F_C \cdot O_1D - F_B \cdot O_1O_2 = 0$$

$$\sum F_z = 0 , \qquad F_A + F_B + F_C - W = 0$$

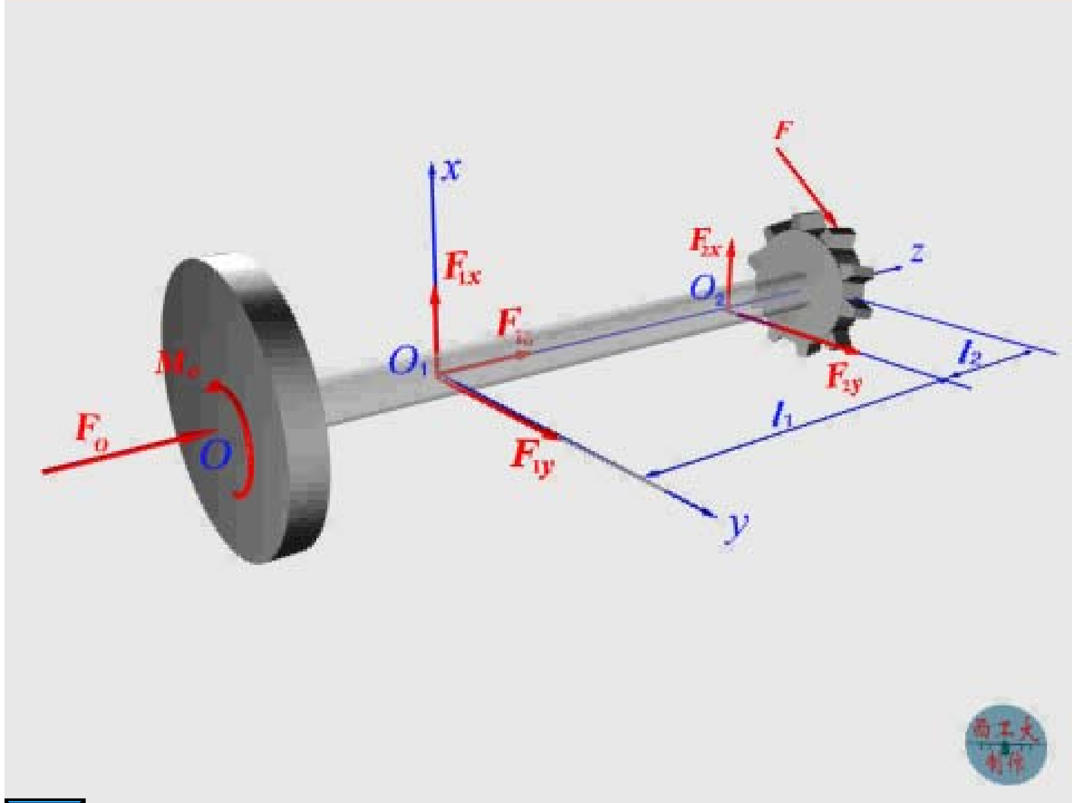
4. 联立求解。

$F_C = 375\text{ N}$，$F_B = 213\text{ N}$，$F_A = 412\text{ N}$





例6-4 涡轮发动机的涡轮叶片上受到的燃气压力可简化成作用在涡轮盘上的一个轴向力和一个力偶，图示中$\boldsymbol{F}_O$， $\boldsymbol{M}_O$。 斜齿轮的压力角为 α，螺旋角为 β，节园半径r及l_1 ，l_2尺寸均已知。发动机的自重不计，试求输出端斜齿轮上所受的作用力$\boldsymbol{F}$ 以及角接触轴承O_1和深沟球轴承O_2处的约束力。



解:

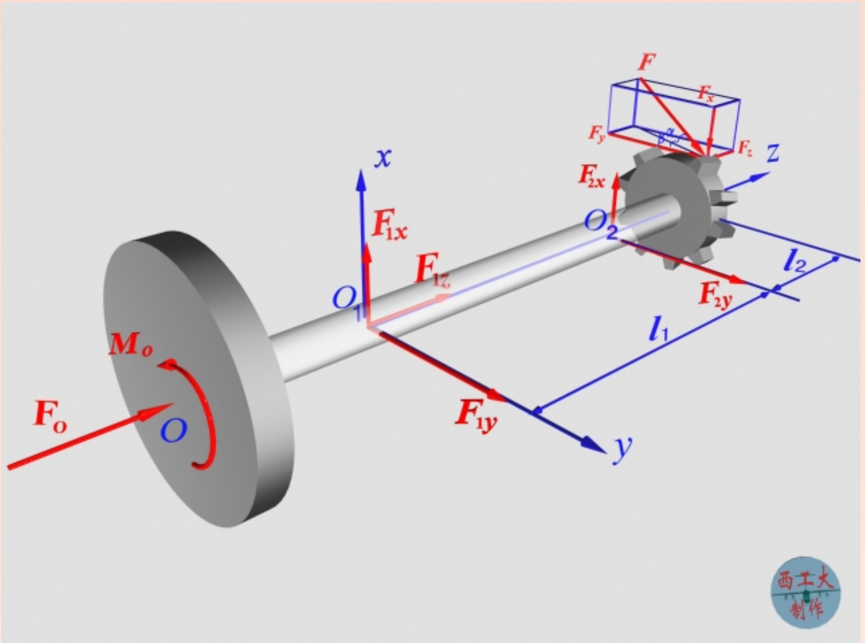
取整个系统为研究对象，建立如图坐标系O_1xyz，画出系统的受力图。

其中在角接触轴承O_1处的反力有三个分量。在深沟球轴承O_2处的反力只有两个分量。

在斜齿轮上所受的压力$\boldsymbol{F}$ 可分解成三个分力。周向力$\boldsymbol{F}_y$，径向力$\boldsymbol{F}_x$ 和轴向力$\boldsymbol{F}_z$ 。其中：

$$F_x = -F\sin\alpha, \quad F_y = F\cos\alpha con\ \beta, \quad F_z = -F\cos\alpha\sin\ \beta$$

系统受空间任意力系的作用，可写出六个平衡方程。



$$\sum F_x = 0, \quad F_{1x} + F_{2x} - F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{1y} + F_{2y} + F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0, \quad F_{1z} - F_z + F_O = 0$$

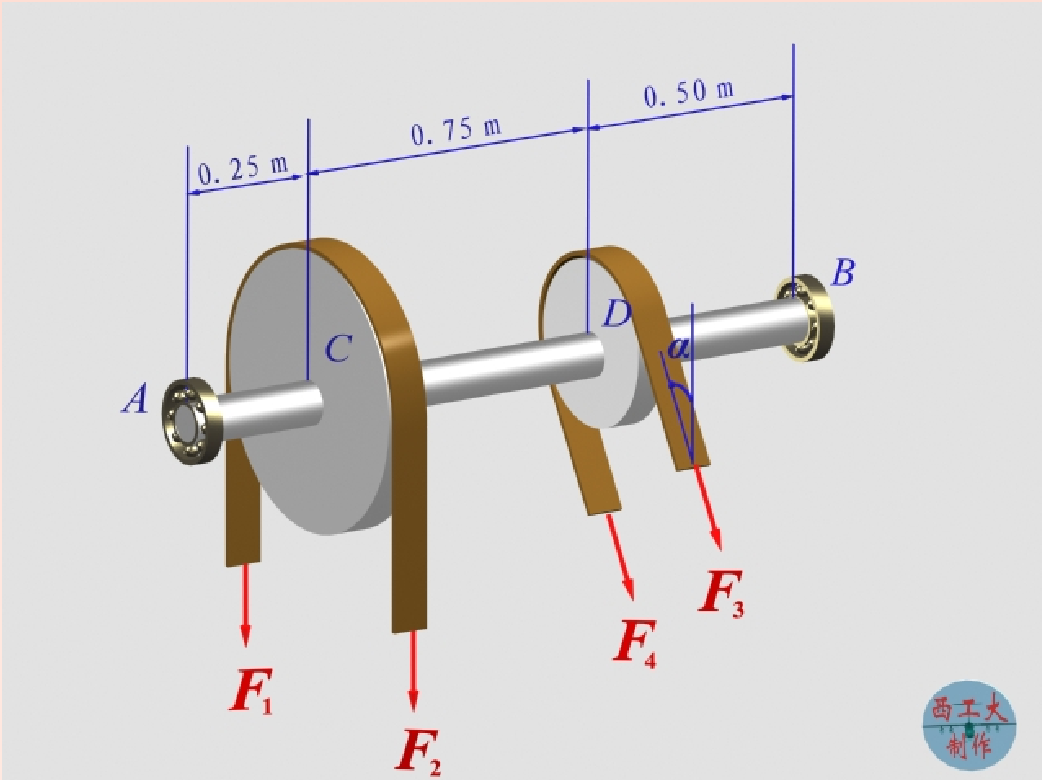
$$\sum M_x = 0, \quad -F_{2y} l_2 - F_y (l_1 + l_2) = 0$$

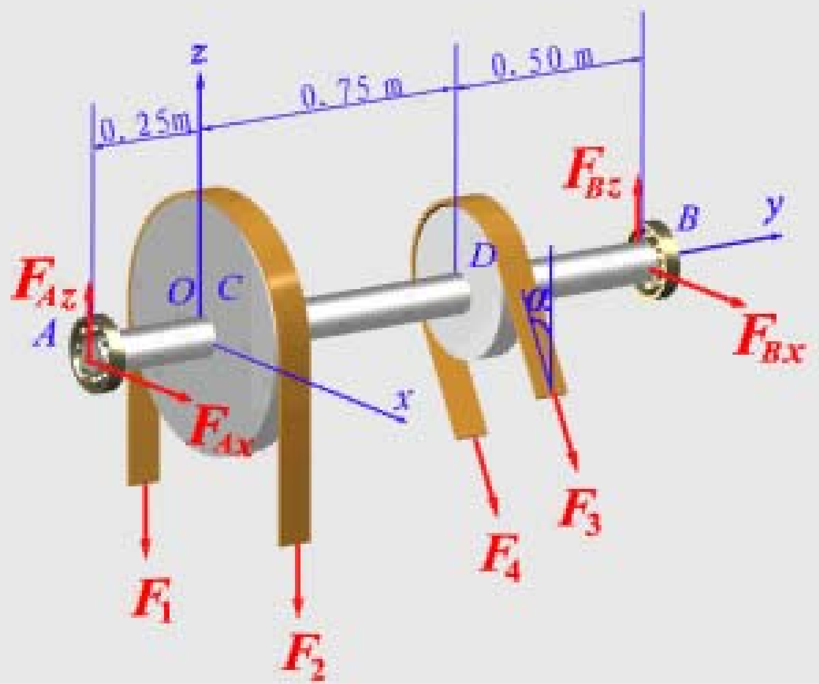
$$\sum M_y = 0, \quad F_{2x} l_2 + F_z r - F_x (l_1 + l_2) = 0$$

$$\sum M_z = 0, \quad F_y r - M_O = 0$$

由以上方程可以求出所有未知量。

例6-6 水平传动轴上装有两个皮带轮C和D，半径分别是r_1=0.4 m，r_2=0.2 m． 套在C 轮上的胶带是铅垂的，两边的拉力T_1=3 400 N，T_2=2 000 N，套在D轮上的胶带与铅垂线成夹角 α=30º，其拉力$\boldsymbol{F}_3$=2$\boldsymbol{F}_4$。求在传动轴匀速转动时，拉力$\boldsymbol{F}_3$和$\boldsymbol{F}_4$以及深沟球轴承处约束力的大小。

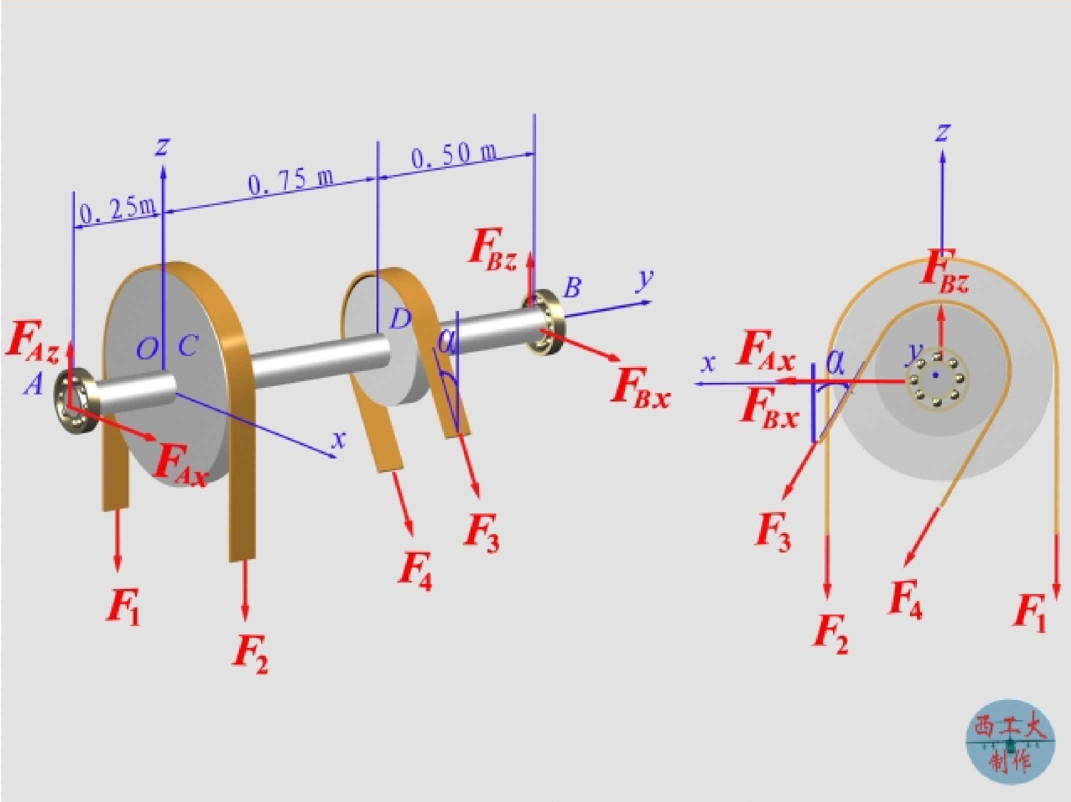




解：

以整个系统为研究对象，建立如图坐标系$Oxyz$，画出系统的受力图。

为了看清皮带轮C和D的受力情况，作出右视图。

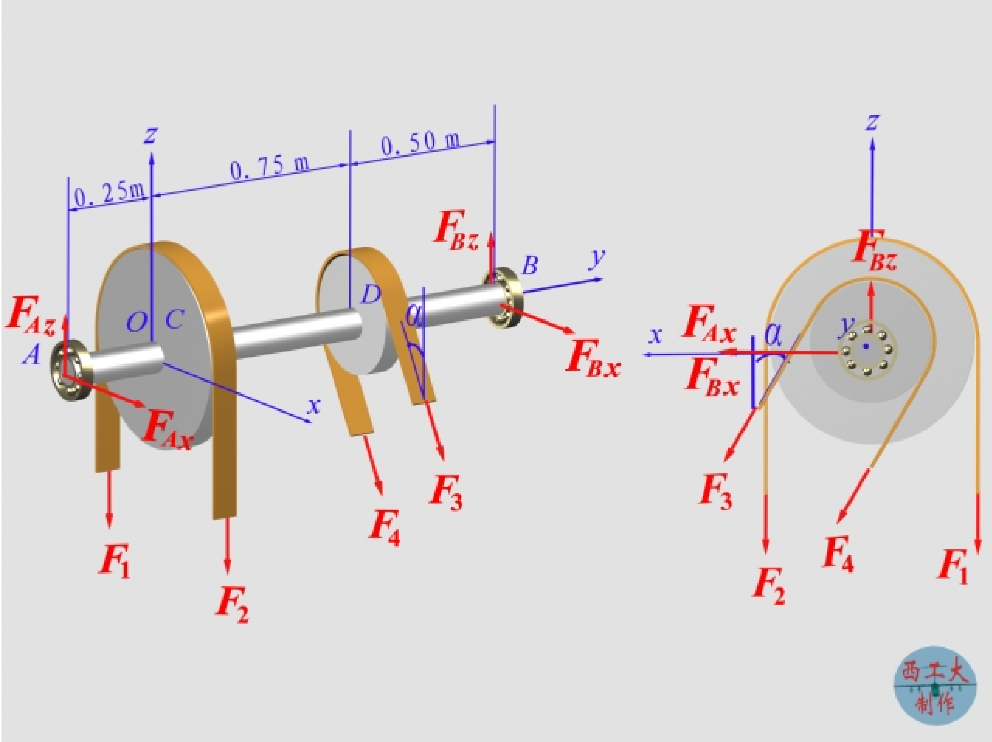


下面以对 x 轴之矩分析为例说明力系中各力对轴之矩的求法。

力F_{Ax}和F_{Bx}平行于轴 x ，力F_2和F_1通过轴 x 。它们对轴x 的矩均等于零。

力F_{Az}和F_{Bz}对轴 x 的矩分别为$-0.25F_{Az}$和$1.25F_{Bz}$。

力F_3和F_4可分解为沿轴 x 和沿轴 z 的两个分量，其中沿轴 x 的分量对轴 x 的矩为零。所以力F_3和F_4对轴 x 的矩等于$-0.75\times(F_3+F_4)\times\cos 30^{\circ}$



系统受空间任意力系的作用，可写出六个平衡方程。

$$\sum F_x = 0,$$

$$F_{Ax} + F_{Bx} + (F_3 + F_4)\sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_z = 0,$$

$$F_{Az} + F_{Bz} - (F_3 + F_4)\cos 30^\circ - (F_1 + F_2) = 0$$

$$\sum M_x = 0,$$

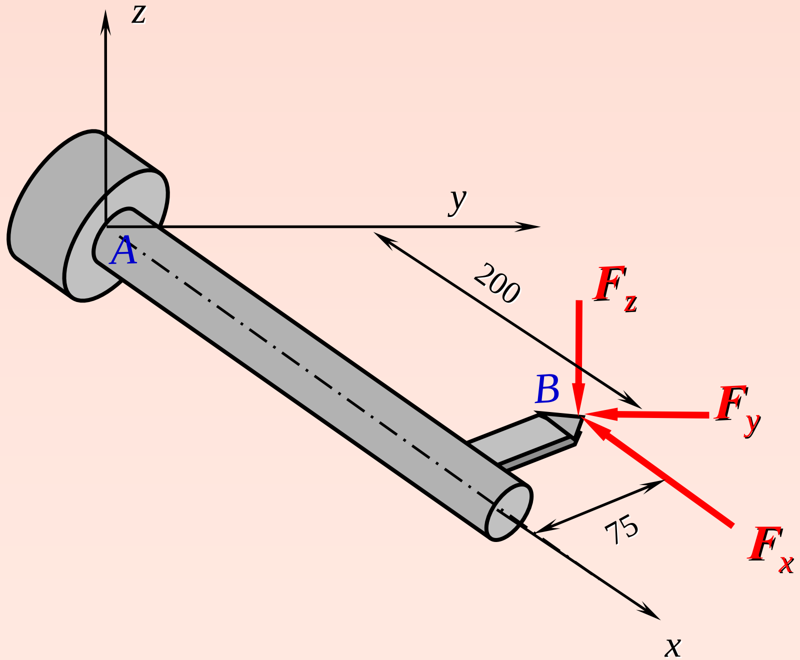
$$-0.25F_{AZ} + 1.25F_{BZ} - 0.75(F_3 + F_4)\cos 30^\circ = 0$$

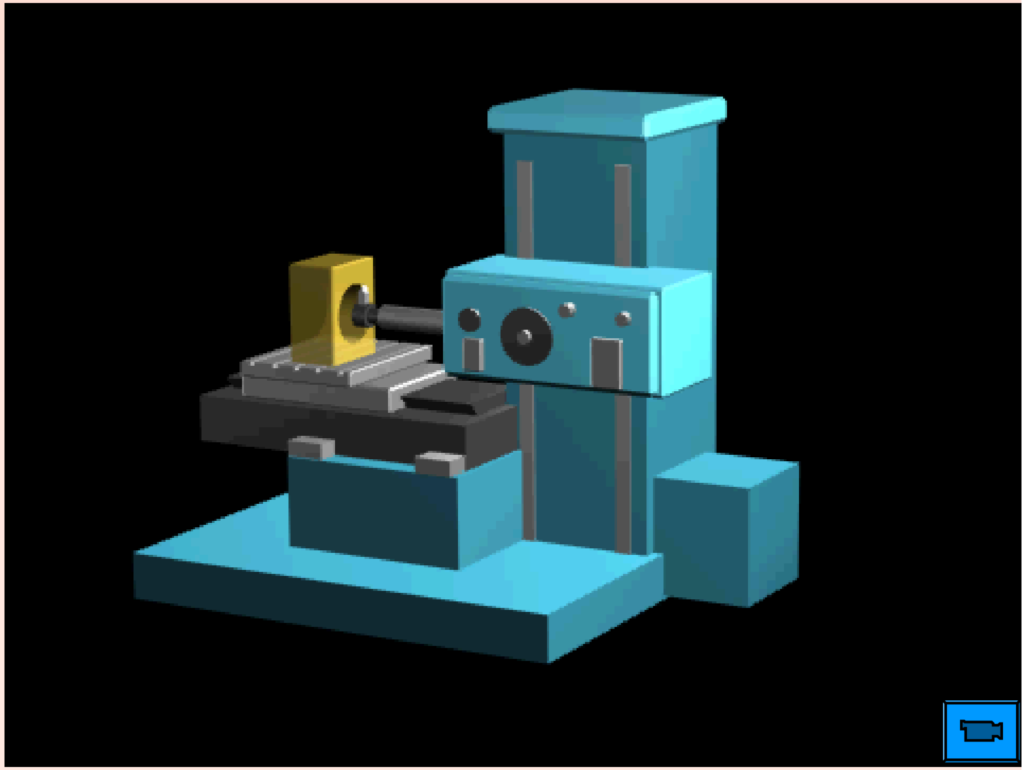
$$\sum M_y = 0, \quad 0.4(-F_1 + F_2) + 0.2(F_3 - F_4) = 0$$

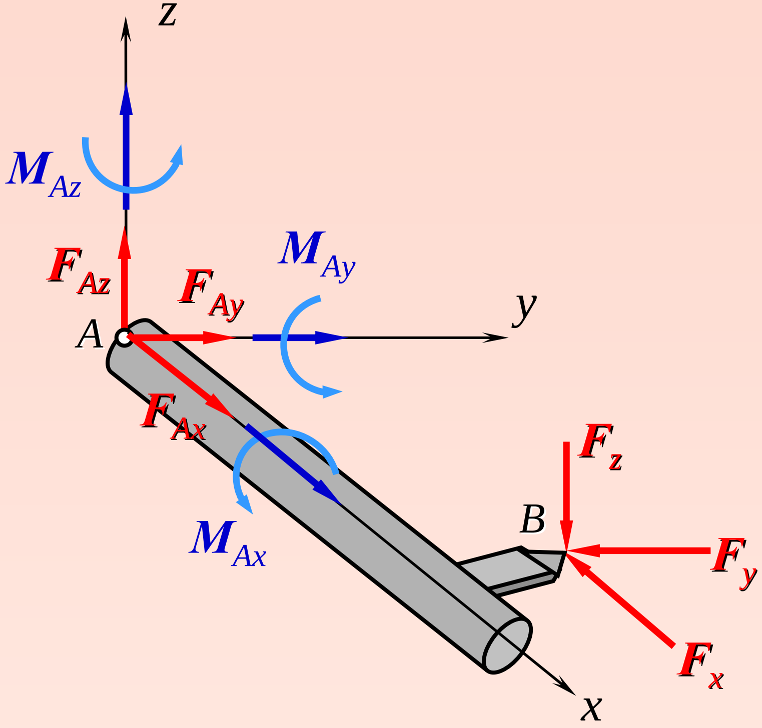
$$\sum M_z = 0, \quad 0.25F_{Ax} - 1.25F_{Bx} - 0.75(F_3 + F_4)\sin 30^\circ = 0$$

又已知$F_3 = 2F_4$, 故利用以上方程可以解出所有未知量。

例6-7 镗刀杆的刀头在镗削工件时受到切向力F_z，径向力F_y，轴向力 F_x 的作用。各力的大小F_z=5 000 N，F_y=1 500 N，F_x=750 N，而刀尖B的坐标 x = 200 mm，y = 75 mm，z = 0。如果不计刀杆的重量，试求刀杆根部A的约束力的各个分量。





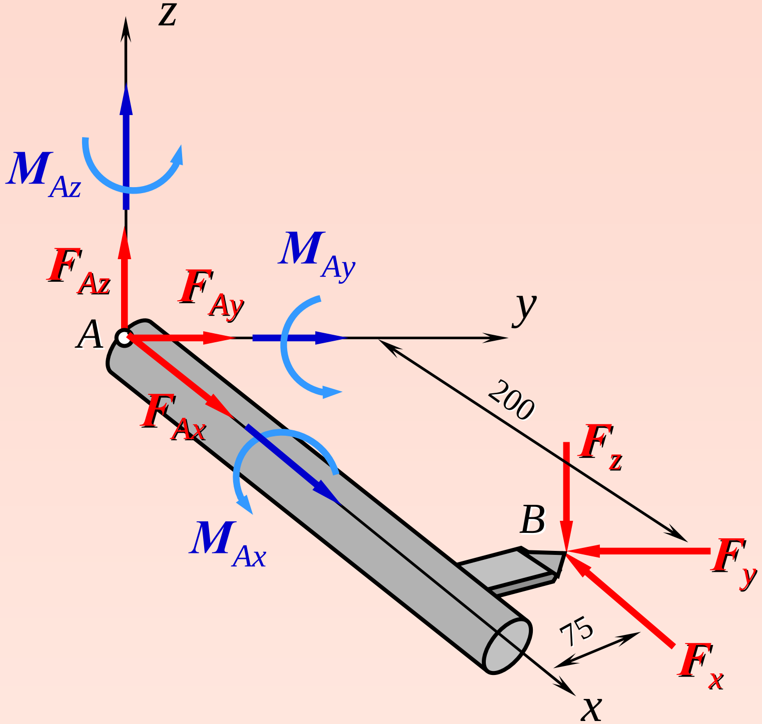


解:

1. 取镗刀杆为研究对象，受力分析如图。

刀杆根部是固定端，约束力是任意分布的空间力系，通常用这个力系向根部的A点简化的结果表出。一般情况下可有作用在A点的三个正交分力和作用在不同平面内的三个正交力偶。

2. 列平衡方程。



$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} - F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0, \quad F_{Az} - F_z = 0$$

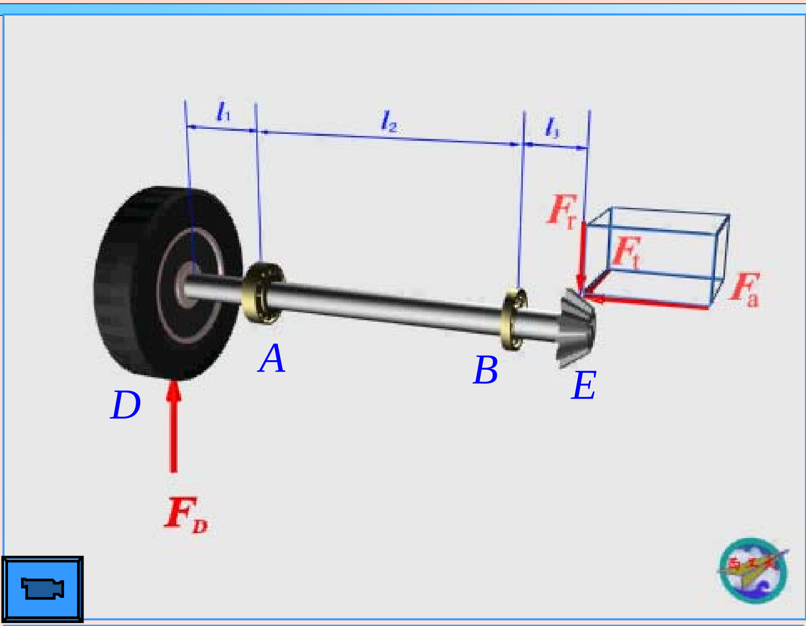
$$\sum M_x = 0, \quad M_{Ax} - 0.075F_z = 0$$

$$\sum M_y = 0, \quad M_{Ay} + 0.2F_z = 0$$

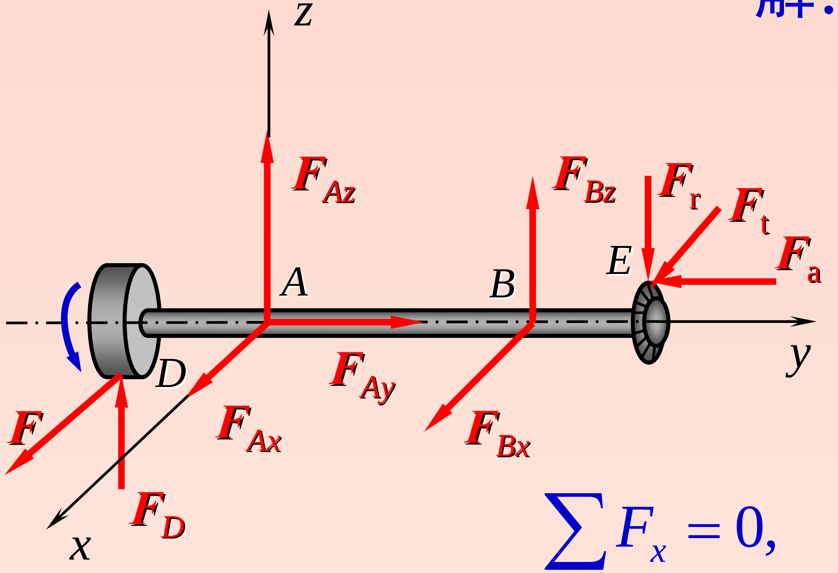
$$\sum M_z = 0, \quad M_{Az} + 0.075F_x - 0.2F_x = 0$$

3. 联立求解。 $F_{Ax} = 750\ \mathrm{N}$, $F_{Ay} = 1\,500\ \mathrm{N}$, $F_{Az} = 5\,000\ \mathrm{N}$

$M_{Ax} = 375\ \mathrm{N\cdot m}$, $M_{Ay} = -1\,000\ \mathrm{N\cdot m}$, $M_{Az} = 243.8\ \mathrm{N\cdot m}$



例6-8 某种汽车后桥半轴可看成支承在各桥壳上的简支梁。A处是圆锥滚子轴承，B处是深沟球轴承。已知汽车匀速直线行驶时地面的法向反力F_D=20 kN，锥齿轮上受到有切向力$\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$，径向力$\boldsymbol{F}_\mathrm{r}$，轴向力$\boldsymbol{F}_\mathrm{a}$的作用。已知$F_\mathrm{t}$=117 kN，$F_\mathrm{r}$=36 kN，$F_\mathrm{a}$=22.5 kN，锥齿轮的节圆平均直径$d$= 98 cm，车轮半径 r=440 cm，l_1=300 mm，l_2=900 cm，l_3=80 cm。如果不计重量，试求地面的摩擦力和A，B两处轴承中约束力的大小。



解：

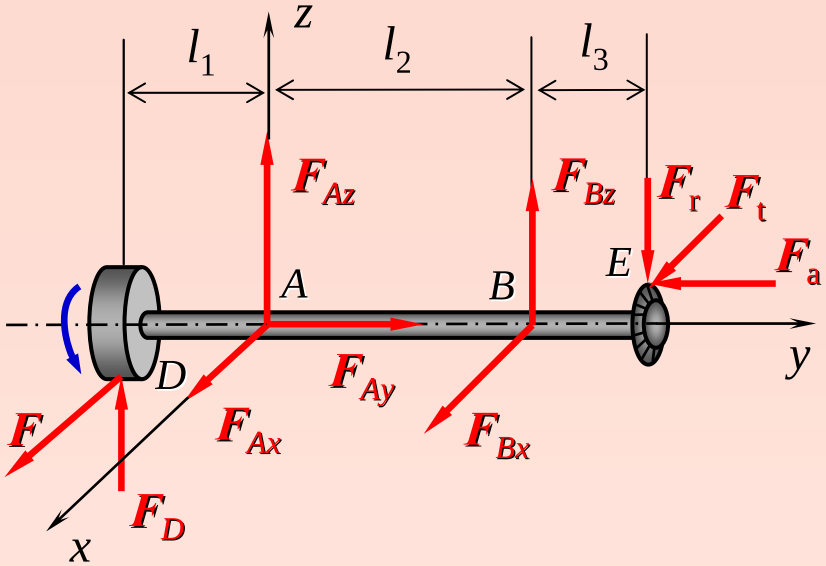
1. 取整体系统为研究对象，受力分析如图。

2. 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0,\qquad F + F_{Ax} + F_{Bx} + F_t = 0$$

$$\sum F_y = 0,\qquad F_{Ay} - F_a = 0$$

$$\sum F_z = 0,\qquad F_D + F_{Az} + F_{Bz} - F_r = 0$$



$$\sum M_x = 0,$$

$$-F_D l_1 + F_{Bx} l_2 + F_r (l_2 + l_3) + F_a \frac{d}{2} = 0$$

$$\sum M_y = 0,$$

$$-Fr + F_t \frac{d}{2} = 0$$

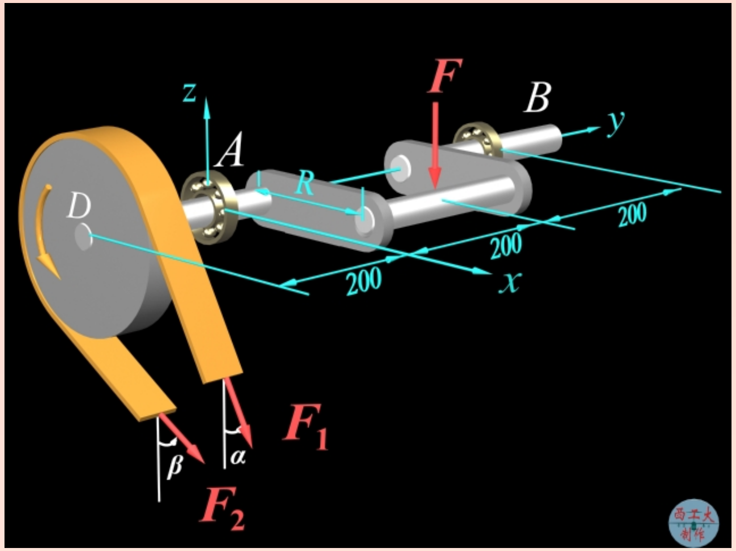
$$\sum M_z = 0,$$

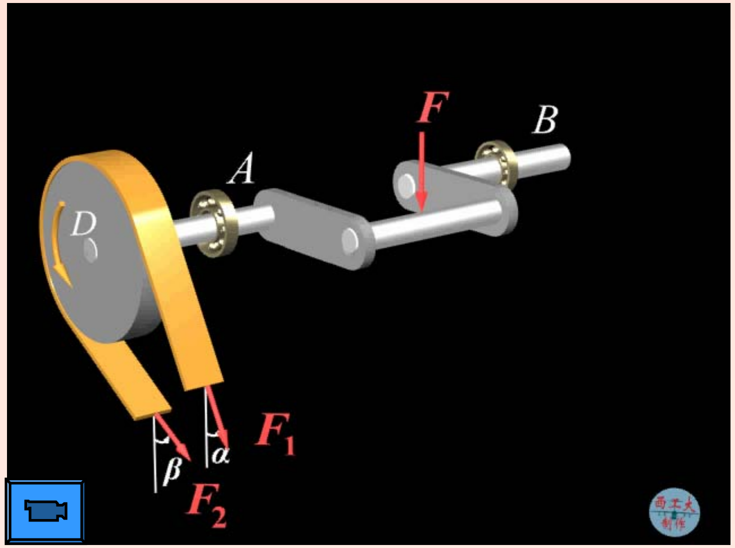
$$F l_1 - F_{Bx} l_2 - F_t (l_2 + l_3) = 0$$

3. 联立求解。

$$F_{Ax} = -7\ \text{kN}, \quad F_{Ay} = 22.5\ \text{kN}, \quad F_{Az} = -28.6\ \text{kN}$$

$$F_{Bx} = -123\ \text{kN}, \quad F_{Bz} = 44.6\ \text{kN}, \quad F = 13\ \text{kN}$$





例6–9 在图中皮带的拉力 $F_2 = 2F_1$，曲柄上作用有铅垂力$F = 2\ 000$ N。已知皮带轮的直径D=400 mm，曲柄长R=300 mm，皮带1和皮带2与铅垂线间夹角分别为 α 和 β，α =30º，β =60º，其它尺寸如图所示，求皮带拉力和轴承约束力。

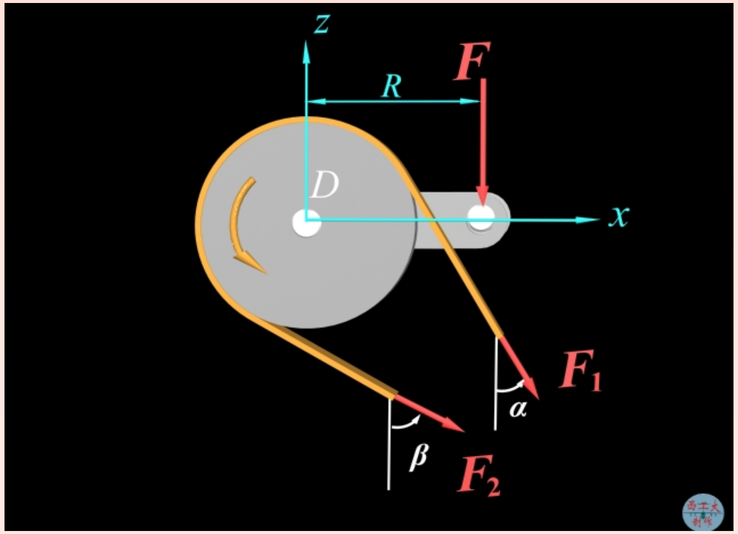
解： 以整个轴为研究对象，主动力和约束反力组成空间任意力系。

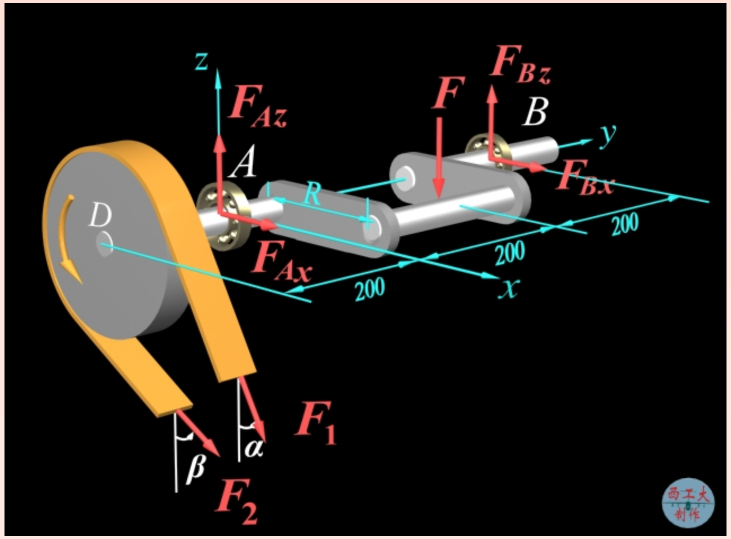
列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 60^\circ + F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad 0 = 0$$

$$\sum F_z = 0, \quad -F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F + F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$



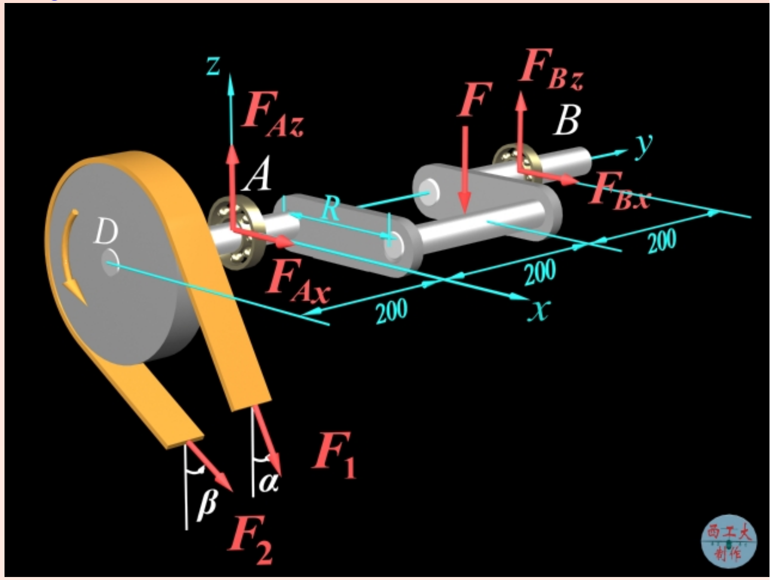


$$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0,\quad F_1\cos 30^\circ\times 200+F_2\cos 60^\circ\times 200$$

$$-F\times 200+F_{Bx}\times 400=0$$

$$\sum M_y(\boldsymbol{F})=0,\quad FR-\frac{D}{2}(F_2-F_1)=0$$

$$\sum M_z(\boldsymbol{F})=0,\quad F_1\sin 30^\circ\times 200+F_2\sin 60^\circ\times 200-F_{Bx}\times 400=0$$



又有 $F_2=2F_1$

解方程得

$$F_1=3\,000\ \text{N}$$

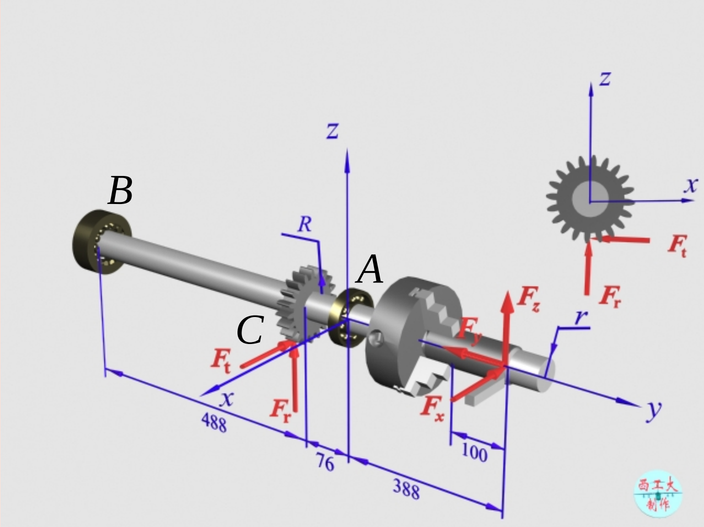
$$F_2=6\,000\ \text{N}$$

$$F_{Ax}=-1\,004\ \text{N}$$

$$F_{Az}=9\,397\ \text{N}$$

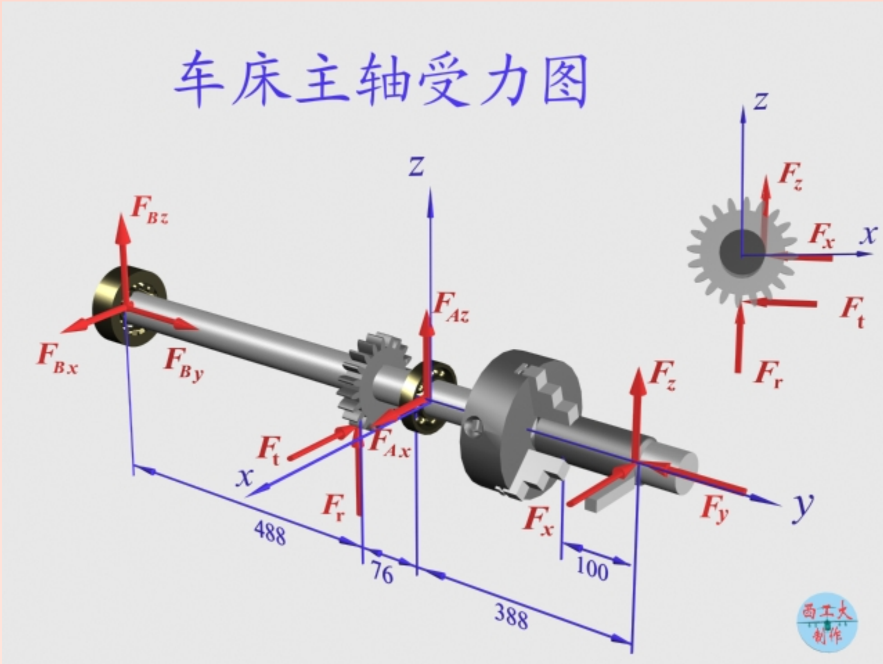
$$F_{Bx}=3\,348\ \text{N}$$

$$F_{Bz}=-1\,799\ \text{N}$$



例6-10 车床主轴如图所示。已知车床对工件的切削力为：径向切削力F_x=4.25 kN，纵向切削力F_y=6.8 kN，主切削力F_z=17 kN，方向如图所示。F_t与F_r分别为作用在直齿轮C上的切向力和径向力，且F_r=0.36F_t。齿轮C的节圆半径为R=50 mm，被切削工件的半径为r=30 mm。卡盘及工件等自重不计，其余尺寸如图。求：(1)齿轮啮合力F_t及F_r；(2)圆柱滚子轴承A和圆锥滚子轴承B的约束力；(3)三爪卡盘E在O处对工件的约束力。

解：1. 以整体为研究对象，主动力和约束反力组成空间任意力系。



列平衡方程

$$\sum F_x = 0,\quad F_{Bx} - F_t + F_{Ax} - F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{By} - F_y = 0$$

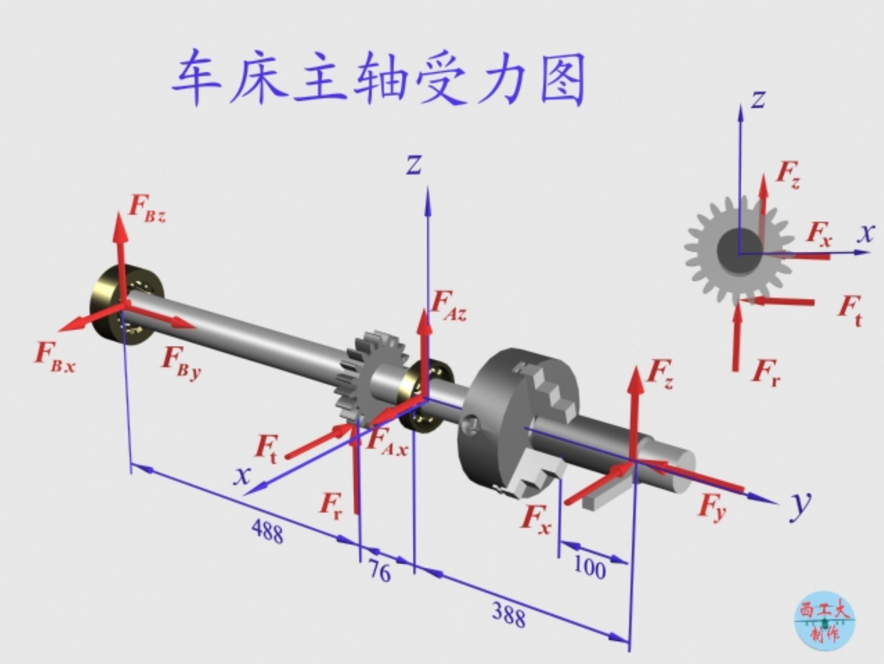
$$\sum F_z = 0,\quad F_{Bz} + F_r + F_{Az} + F_z = 0$$

$$\sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0,\quad -(488+76)F_{Bx} - 76F_r + 388F_z = 0$$

$$\sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_t R - F_z r = 0$$

$$\sum M_z(\boldsymbol{F}) = 0,\quad (488+76)F_{Bx} - 76F_t - 30F_y + 388F_x = 0$$

由题意有 $F_{r} = 0.36 F_{t}$



解方程得

$$F_{\tau} = 10.2\ \text{kN}$$

$$F_{r} = 3.67\ \text{kN}$$

$$F_{Ax} = 15.64\ \text{kN}$$

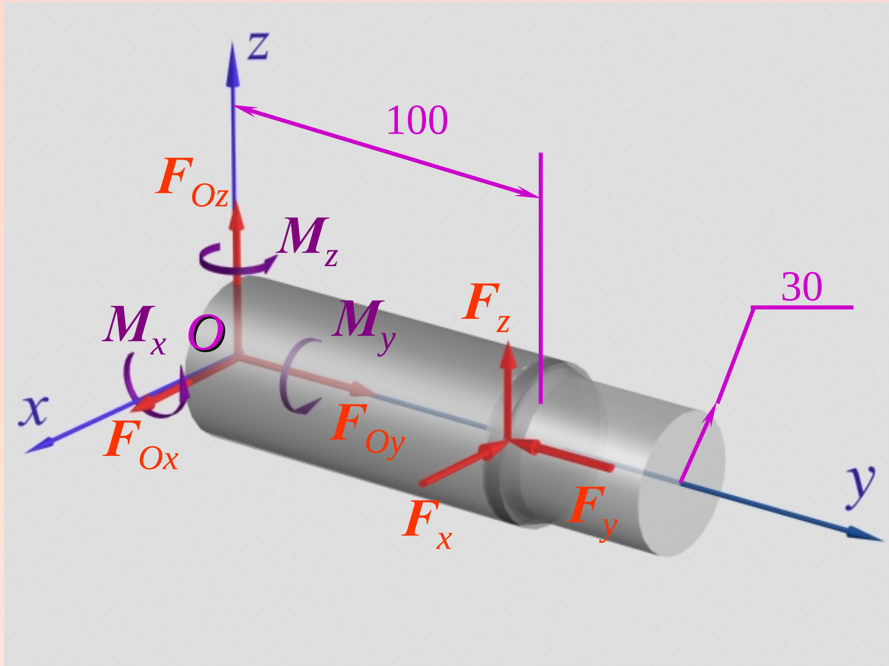
$$F_{Az} = -31.87\ \text{kN}$$

$$F_{Bx} = -1.19\ \text{kN}$$

$$F_{By} = 6.8\ \text{kN}$$

$$F_{Bz} = 11.2\ \text{kN}$$

2. 取工件为研究对象，受力分析如图。



列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ox} - F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Oy} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0, \quad F_{Oz} + F_z = 0$$

$$\sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0, \quad M_x + 100F_z = 0$$

$$\sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0, \quad M_y - 30F_z = 0$$

$$\sum M_z(\boldsymbol{F}) = 0, \quad M_z + 100F_x - 30F_y = 0$$

解方程得

$$F_{Ox} = 4.25 \text{ kN}, \quad F_{Oy} = 6.8 \text{ kN}$$

$$F_{Oz} = -17 \text{ kN}, \quad M_x = -1.7 \text{k N} \cdot \text{m}$$

$$M_y = 0.51 \text{k N} \cdot \text{m}, \quad M_z = -0.22 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

谢谢使用