第四章 随机变量的数字特征

数学期望

方差

协方差

相关系数

在前面的课程中，我们讨论了**RV**及其分布，如果知道了随机变量*X*的概率分布，那么*X* 的全部概率特征也就知道了。

然而，在实际问题中，概率分布一般是较难确定的。但在一些实际应用中，人们并不需要知道**RV**的一切概率性质，只要知道它的某些数字特征就够了。

例如：

- 在评定某地区粮食产量的水平时，最关心的是平均产量。
- 在检查一批电视机的质量时，既要了解电视机的平均寿命，又要研究电视机寿命与平均寿命的偏离程度。
- 考察西安市居民的家庭收入情况，既要了解家庭的年平均收入，又要研究贫富之间的差异程度。

因此，在对**RV**的研究中，确定某些数字特征是重要的。

所谓的数字特征：

就是用数字表示随机变量的分布特点。

最常用的数字特征是：

数学期望、方差、协方差、矩

§1 数学期望

一、引例：分赌金问题

甲乙二人赌博，两人获胜的机率相同，比赛规则是先胜3局者为赢家，赢家可获得$100赌金。比赛进行至第3局时，甲胜2局，乙胜1局。这时，由于某些原因终止了比赛，那么应该如何分配这$100？

引例：分赌金问题

分法1： 甲胜2局，乙胜1局，将钱分3份，甲拿2份，乙拿1份。

分法2： 比赛规则是先胜3局者赢，但甲、乙二人都未达到，所以一人分一半。

上述这两种分法都不对。

正确分法：

假定比赛继续，来看甲、乙二人获胜的概率是多少，再根据各人获胜概率来分钱。

$$P\{甲胜\}=P\{第4局甲胜 \cup 第4局甲输\cap第5局甲胜\}$$

$$=P\{第4局甲胜\}+P\{第4局甲输\cap第5局甲胜\}$$

$$\Downarrow$$

$$P\{第5局甲胜|第4局甲输\}\cdot P\{第4局甲输\}$$

$$=1/2+1/2\times1/2=3/4$$

数学期望由此而来

$$P\{乙胜\}=P\{第4局乙胜\cap第5局乙胜\}$$

$$=P\{第5局乙胜|第4局乙胜\}\cdot P\{第4局乙胜\}=1/2\times1/2=1/4$$

甲所能期望得到的赌金为 $100\times3/4+0\times1/4=75\$$

乙所能期望得到的赌金为 $100\times1/4+0\times3/4=25\$$

二、数学期望的定义

1. 设**离散型RV** X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k=1,2,\ldots$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ **绝对收敛**，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为RV X 的**数学期望**(**Expectation/Mean**)，记为 $E(X)$。

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty$$

即

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k}$$

2. 设连续型RV X 的PDF为 $f(x)$，若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

绝对收敛，则称此积分值为RV X 的数学期望，

记为$E(X)$。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

即

$$\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x}$$

数学期望简称期望，又称均值。

$$E(X)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k, & \text{离散}RV\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x, & \text{连续}RV\end{cases}$$

说 明

☞ 离散型RV的数学期望是一个绝对收敛的级数的和；连续型RV的数学期望是一个绝对收敛的积分值。

☞ 数学期望不是随机的，是一个实数。

☞ 数学期望的本质：它是RV观察值的加权平均。

☞ 并非所有的RV都有数学期望，如：柯西分布。

例1　5个独立工作的电子元件，它们的寿命 $X_k \sim Exp(\theta)$, $(k=1,...,5)$，试求：

(1) 单个元件寿命的期望；

(2) 5个元件串联成系统的寿命 N 的期望；

(3) 5个元件并联成系统的寿命 M 的期望。

解：已知 X_k 的PDF为 $f_{X_k}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & else\end{cases}$

求期望，利用其定义 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x$

关键　求 X_k，N 和 M 的PDF

$$X_k \sim Exp(\theta)$$

$$(1)\ E_{X_k}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{分部积分}}{=\!=\!=} -\int_{0}^{+\infty} x\,\mathrm{d}\left(e^{-x/\theta}\right)$$

$$= -xe^{-x/\theta}\Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} e^{-x/\theta}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\theta e^{-x/\theta}\Big|_{0}^{+\infty} = \theta$$

结 论 若$X \sim Exp(\theta)$，则 $E(X)=\theta$。

$$X_k \sim Exp(\theta)$$

(2) 串联系统寿命N的期望，需知N的PDF。

易知 $N = \text{Min}(X_1,\dots,X_5)$，故$N$的分布函数为：

$$F_N(x) = 1-\left[1-F_{X_k}(x)\right]^5$$

$$F_{X_k}(x)=\begin{cases}1-e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$\xlongequal{\text{代入整理}}\begin{cases}1-e^{-5x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$f_N(x)=F_N'(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{\theta}e^{-\frac{5x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases} \quad \Rightarrow N \sim Exp\left(\frac{\theta}{5}\right)$$

$$\therefore E(N)=\frac{\theta}{5}$$

(3) 并联系统寿命M的期望，需知M的PDF。

易知 $M = \mathrm{Max}\left(X_1,\dots,X_5\right)$，故$M$的分布函数为：

$$F_M(x) = \left[F_{X_k}(x)\right]^5 \overset{\text{代入整理}}{=\!=\!=} \begin{cases} \left(1-e^{-x/\theta}\right)^5, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

$$f_M(x) = F_M'(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{\theta}\left(1-e^{-x/\theta}\right)^4 e^{-x/\theta}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

$$\therefore E(M) = \int_0^{+\infty} x\frac{5}{\theta}\left(1-e^{-x/\theta}\right)^4 e^{-x/\theta}\mathrm{d}x \overset{\text{分部积分}}{=\!=\!=} \frac{137}{60}\theta$$

比较上述3个期望值：

单个元件 $E_{X_k}(X)=\theta$

串联系统 $E(N)=\dfrac{\theta}{5}$

并联系统 $E(M)=\dfrac{137}{60}\theta$

$$\frac{\text{并联系统寿命}}{\text{串联系统寿命}}=\frac{E(M)}{E(N)}\approx 11.4$$

并联工作的平均寿命是串联工作的11.4倍

三、RV函数的数学期望

1. $Y=g(X)$

方法1：（定义法）

将$Y=g(X)$的分布代入数学期望的定义来求$E[g(X)]$.

说 明 使用这种方法必须先求出RV $g(X)$的分布，可以利用第2章 § 5中方法来求解，但一般是比较复杂的。

那么是否可以不先求$g(X)$的分布，而只根据X的分布来求$E[g(X)]$？下面的定理给出答案。

定 理

设 $Y=g(X)$，g是连续函数，

Ⅰ 离散型RV X 的分布律为$P\{X=x_k\}=p_k$, $k=1,2,\ldots$,

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

Ⅱ 连续型RV X 的PDF为$f(x)$，若积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx$ 绝对收敛，则

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

该定理的**重要性**在于：当我们求$E[g(X)]$时，不必知道$g(X)$的分布，而只需知道X 的分布即可。这就给求RV函数的数学期望带来很大方便，也即给出了如下的**方法2：（公式法）**

$$E(Y)=E\left[g(X)\right]=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty} g(x_k)\,p_k, & X\text{为离散RV}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x, & X\text{为连续RV}\end{cases}$$

2. $Z=g(X,Y)$

方法1：（定义法）

先求出$Z=g(X,Y)$的分布，再对RV Z（一维RV）利用数学期望的定义来求$E(Z)$。

说 明 使用这种方法必须先求出RV $g(X,Y)$的分布，可以利用第3章§5中方法来求解，一般是比较复杂的，故该方法使用起来非常不方便。

方法2：（公式法）

定理　设$Z = g(X,Y)$，g是连续函数，

Ⅰ 离散型RV（X,Y）的分布律为$P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}$ ($i, j=1,2, \ldots$)，则

$$E(Z)=E\left[g(X,Y)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g\left(x_i,y_j\right)p_{ij}$$

Ⅱ 连续型RV（X,Y）的PDF为$f(x,y)$，则

$$E(Z)=E\left[g(X,Y)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

注意　这里假定上两式右边的<u>级数或积分</u>都绝对收敛

补 充

条件分布的数学期望称为**条件(数学)期望**，可由**条件分布**来计算：

$$E(X|Y)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathrm{P}\{X=x_i|Y=y\}, & X\text{为离散RV}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x, & X\text{为连续RV}\end{cases}$$

例2　　设某商品的需求量$X \sim U(10, 30)$，而商店进货数量为区间[10, 30]上某一整数，商店每卖出一个商品可获利￥500。若供大于求则降价处理，每处理一个商品亏损￥100；若供不应求，商店从外部调剂供应，此时每一个商品仅获利￥300。为使商品所获利润期望值不少于￥9280，试确定进货量。

思路:

求满足期望利润的进货量 → 需知道期望利润

写出利润表达式

解：已知需求量$X \sim U(10, 30)$，设进货量为a，利润为$H(X)$，则

$$f_X(x)=\begin{cases}1/20, & 10 \le x \le 30 \\ 0, & else\end{cases}$$

利润 $$H(X)=\begin{cases}500a+(X-a)\times 300, & a < X \le 30 \\ 500X-(a-X)\times 100, & 10 \le X \le a\end{cases}$$

$$\overset{\text{整理}}{=\!=\!=}\begin{cases}300X+200a, & a < X \le 30 \\ 600X-100a, & 10 \le X \le a\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}1/20, & 10\le x\le 30\\ 0, & else\end{cases}\qquad H(X)=\begin{cases}300X+200a, & a<X\le 30\\ 600X-100a, & 10\le X\le a\end{cases}$$

期望利润 $E\left[H(X)\right]\xlongequal{\text{公式法}}\int_{-\infty}^{+\infty}H(x)\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{\text{代入}}\int_{10}^{a}(600x-100a)\cdot\frac{1}{20}\mathrm{d}x+\int_{a}^{30}(300x+200a)\cdot\frac{1}{20}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{整理}}-7.5a^2+350a+5250\quad\ge 9280$$

解得 $20\frac{2}{3}\le a\le 26$ ，**故最少进货量为** 21

四、数学期望的性质

1. 设C是常数，则 $E(C)=C$；

2. 若C是常数，则 $E(CX)=CE(X)$；

3. $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$；

推广：$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$

$E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+C\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iE(X_i)+C$, 其中$a_i$, C为常数.

$$3.\ E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

以连续型RV为例

证：$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}y\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\ f_X(x)\ \mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}y\ f_Y(x)\ \mathrm{d}y$$

$$=E(X)+E(Y)$$

$+ \Rightarrow -$ 得证

四、数学期望的性质

4. 设X与Y独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

若g与h连续， $E[g(X)h(Y)]=E[g(X)]E[h(Y)]$

推广：当$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立, 且$g_i(x)$是x的连续函数

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} E(X_i),\quad E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right]=\prod_{i=1}^{n} E[g_i(X_i)]$$

注意 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y) \not\Rightarrow X$与$Y$独立

一般， $E(X^2) \neq [E(X)]^2 \triangleq E^2(X)$

4. X与Y独立，则$E(XY)=E(X)E(Y)$

以连续型RV为例

证： $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(xy)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\overset{\text{独立}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\ f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x\times\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(x)\mathrm{d}y$$

$$=E(X)E(Y)$$ 得证

例3　$X \sim b(n, p)$，求$E(X)$。

解：由二项分布可知，若每次试验中P(A)=p，则X表示n重伯努利试验中A发生的次数，设

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验中A发生} \\ 0, & \text{第}i\text{次试验中A不发生} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

可知$X_i \sim (0\text{−}1)$分布, 且X_i间相互独立, 则$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n}\left[1 \times p + 0 \times (1 - p)\right] = np$$

结　论　　若$X \sim b(n, p)$，则 $E(X) = np$。

说 明

☞ 服从**二项分布**的RV可以分解为若干个独立的且服从(0-1)分布的RV之和。

☞ 本题是将X 分解成若干RV之和，然后利用**RV之和的数学期望等于RV数学期望的和**来求数学期望的，此方法具有一定的普遍意义，能够简化数字特征的计算 。

例4（P99 例12） 一民航送客车载有20名旅客，旅客有10个车站可以下车，如果到站无人下车则不停，以X 表示停车次数，设每位旅客在各个车站下车的可能性相同，并且旅客是否下车相互独立，求$E(X)$。

解：引入$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{站有人下车}\\ 0, & \text{第}i\text{站无人下车}\end{cases}$ $\quad i=1,2,\ldots,10$

可知$X_i\sim(0\text{-}1)$分布，则$X=\sum\limits_{i=1}^{10}X_i$

故 $E(X)=E\left(\sum\limits_{i=1}^{10}X_i\right)$ **关键: 求X_i的分布律**

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{站有人下车}\\ 0, & \text{第}i\text{站无人下车}\end{cases}$$

又设$A_j^{(i)}=\{$第j个旅客在第i站下车$\}$，

$i=1,2,\ldots,10$, $j=1,2,\ldots,20$

则$P\left\{A_j^{(i)}\right\}=\dfrac{1}{10}$, $P\left\{\overline{A_j^{(i)}}\right\}=1-\dfrac{1}{10}=\left(\dfrac{9}{10}\right)$。

$$P\{X_i=0\}=P\left\{\bigcap_{j=1}^{20}\overline{A_j^{(i)}}\right\}\overset{\text{独立}}{=\!=}\prod_{j=1}^{20}P\left\{\overline{A_j^{(i)}}\right\}=\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

$$P\{X_i=1\}=1-P\{X_i=0\}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$

$$\therefore E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{10}X_i\right)=\sum_{i=1}^{10}E(X_i)=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]$$

小结

- 本节介绍了**RV**的数学期望，它反映了**RV**取值的平均水平，是**RV**的一个重要的数字特征。

作业

Pages 113-115：

第3, 5, 8, 9, 14题

例5 从10双不同的鞋子中任取8只，记8只鞋中配对的个数为X，求$E(X)$。

思路：令$X_i=\begin{cases}1, & 第i双鞋被取到\\ 0, & 第i双鞋没被取到\end{cases}$ $\quad i=1,2,\ldots,10$

可知X_i～(0−1)分布，则$X=\sum_{i=1}^{10}X_i$

故 $E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{10}X_i\right)=\sum_{i=1}^{10}E(X_i)=10\times\frac{14}{95}=\frac{28}{19}$

关键: 求X_i的分布律

$P\{X_i=1\}=\frac{C_2^2C_{18}^6}{C_{20}^8}=\frac{14}{95}$

X_i	0	1
P	81/95	14/95

例6 设随机变量X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立，$X_i \sim U(0, 2i)$，求行列式$Y = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$的数学期望$E(Y)$。

解： $Y = X_1X_4 - X_2X_3$

$$E(Y) = E(X_1X_4 - X_2X_3) = E(X_1X_4) - E(X_2X_3)$$

$$\overset{\text{独立}}{=\!=\!=} E(X_1)E(X_4) - E(X_2)E(X_3) = 1\times4 - 2\times3 = -2$$

$$E(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2i} \frac{x}{2i}\,\mathrm{d}x = i,\ i = 1,2,3,4$$