13.2动量矩定理

- 动量矩定理
- 动量矩守恒定理

一、动量矩定理

1. 对定点的动量矩定理

因为质点系对定点O的动量矩为 $L_O=\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)$

将其两端求时间的导数，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}\times m_i\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{r}_i\times m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}\right)=\sum(\underbrace{\boldsymbol{v}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i}_{0}+\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{a}_i)$$

$$=\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{a}_i)=\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i)$$

其中$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$可分为外力对$O$点的矩和内力对$O$点的矩二项

即 $$\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)=\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})+\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)})$$

$$\sum M_O(F_i)=\sum M_O(F_i^{(e)})+\sum M_O(F_i^{(i)})$$

而内力对O点的矩 $\sum M_O(F_i^{(i)})=0$所以有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t}=\sum M_O(F_i^{(e)})}$$

令 $M_O=\sum M_O(F_i^{(e)})$ ，则有 $\boxed{\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t}=M_O}$

有 结 论

质点系对某固定点的动量矩随时间的变化率,等于作用于质点系的全部外力对同一点的矩的矢量和，这就是质点系对定点的动量矩定理。

一、动量矩定理

1. 对定点的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = \sum M_O(F_i^{(e)})$$

2 .对定轴的动量矩定理

将上式投影到固定坐标轴系上，注意到导数的投影等于投影的导数，则得

$$\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t} = \sum M_x(F^{(e)}) \equiv M_x$$

$$\frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t} = \sum M_y(F^{(e)}) \equiv M_y$$

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \sum M_z(F^{(e)}) \equiv M_z$$

有 结 论

质点系对某固定轴的动量矩随时间的变化率,等于作用于质点系的全部外力对同一轴的矩的代数和，这就是质点系对定轴的动量矩定理。

对定点的动量矩定理 $\dfrac{d\boldsymbol{L}_O}{dt}=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$

对定轴的动量矩定理 $\dfrac{dL_z}{dt}=\sum M_z(F^{(e)})$

二、动量矩守恒定理

1. 如果$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})\equiv 0$，则由上面第一式 可知

$$\boldsymbol{L}_O=\text{常矢量}$$

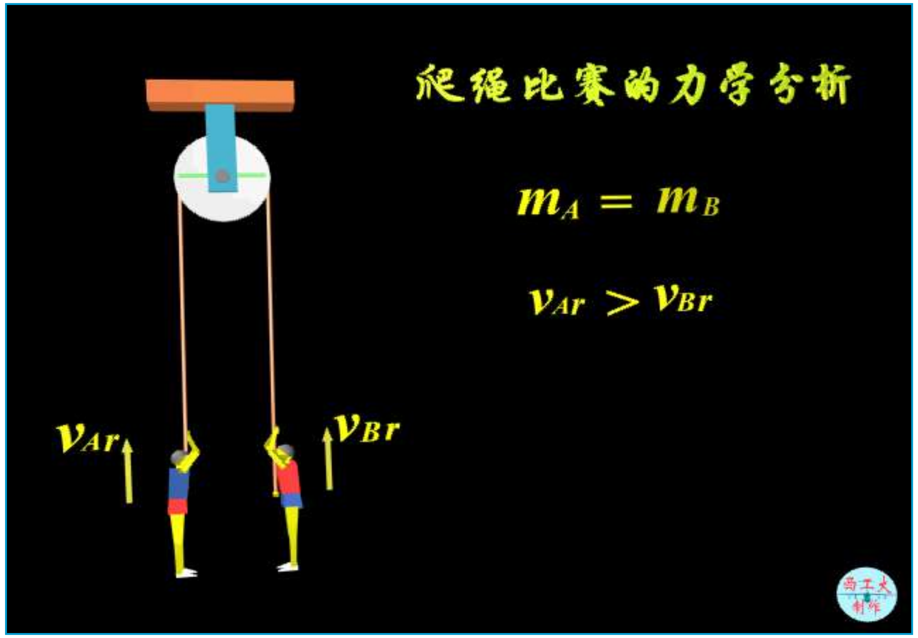
2. 如果$\sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)})\equiv 0$，则由上面第二式 可知

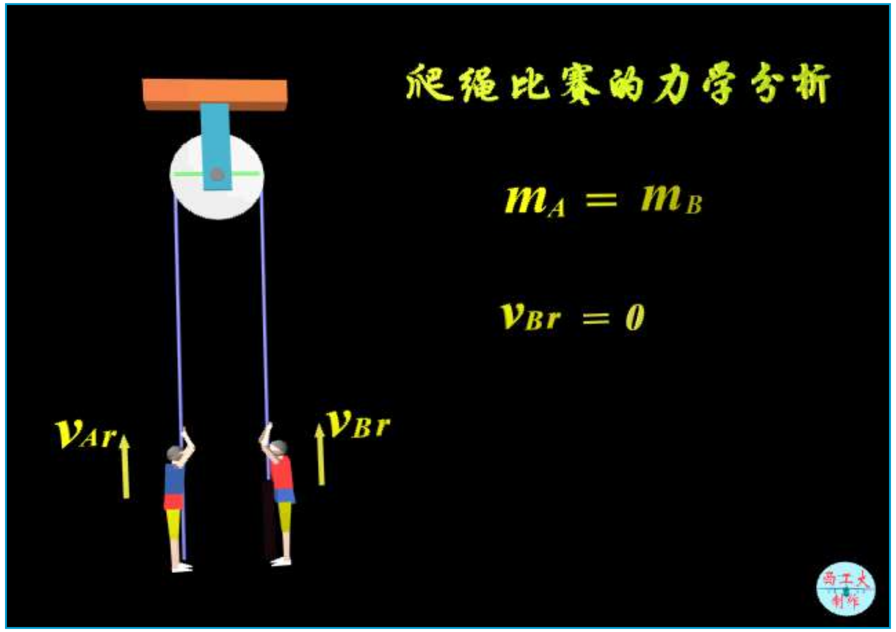
$$L_z=\text{常量}$$

有 结 论

如作用于质点系的所有外力对某固定点(或固定轴)的主矩始终等于零,则质点系对该点(或该轴)的动量矩保持不变。这就是质点系的动量矩守恒定理.它说明了质点系动量矩守恒的条件。

实例之一： 爬绳比赛的力学分析

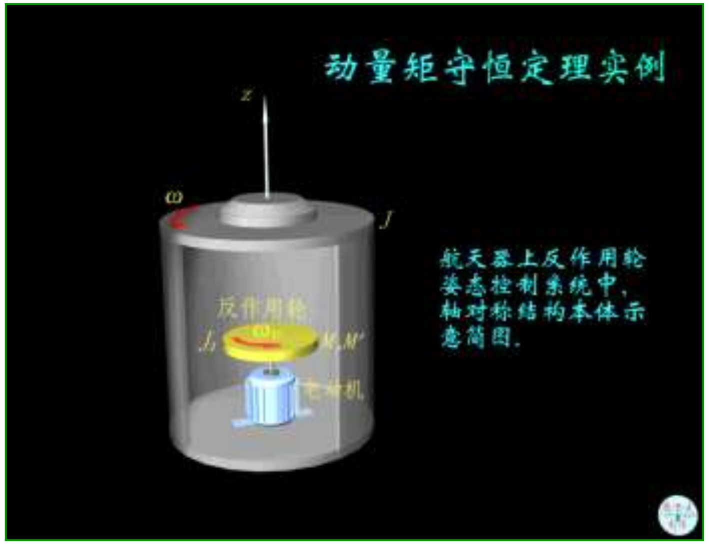


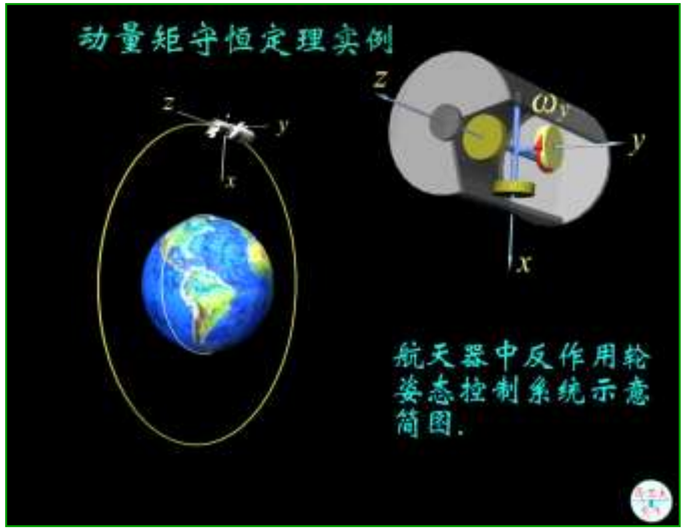


实例之二：直升机机身的反转

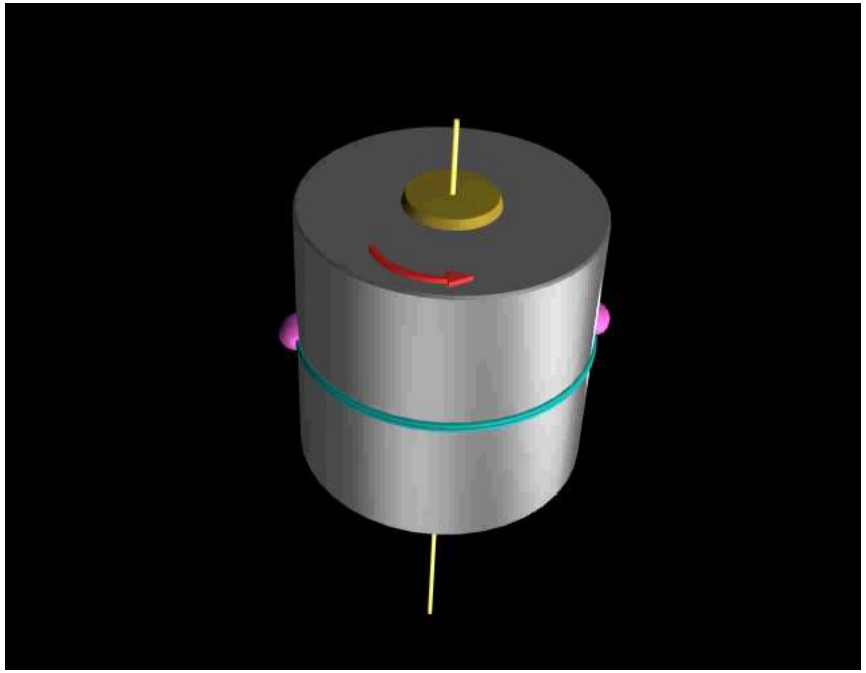
实例分析

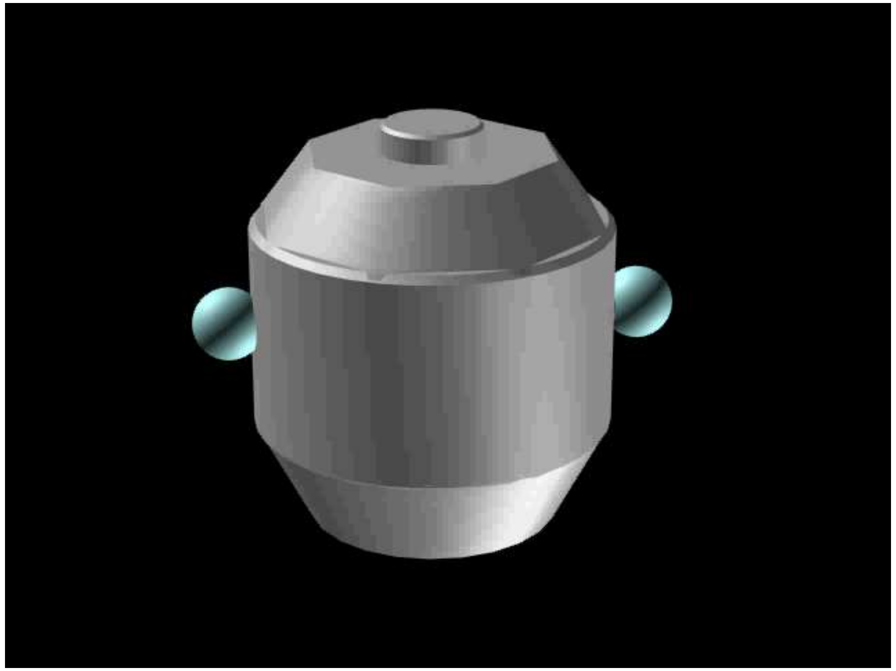
实例之三：航天器姿态控制的实现





实例分析





卫 星 消 旋

几个实际问题

谢谢！