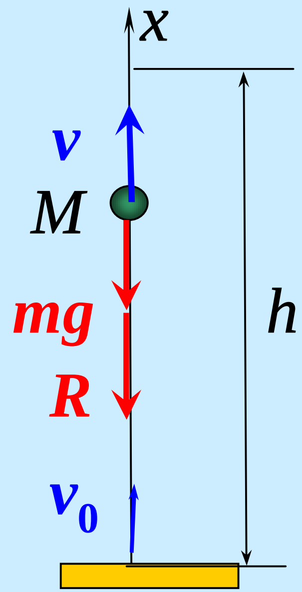
# 质点动力学基础

1 物体自地球表面以速度$v_0$铅直上抛。试求该物体返回地面时的速度$v_1$。假定空气阻力R＝mk$v^2$，其中k是比例常量，按数值它等于单位质量在单位速度时所受的阻力。m是物体质量，v是物体速度，重力加速度认为不变。

解：阻力方向在上升与下降阶段不同（其方向与速度*v*相反），故分段考虑




上升阶段：

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-mkv^2$$

通过坐标变换有

$$mv\frac{dv}{dx}=-mkv^2-mg$$

积分得

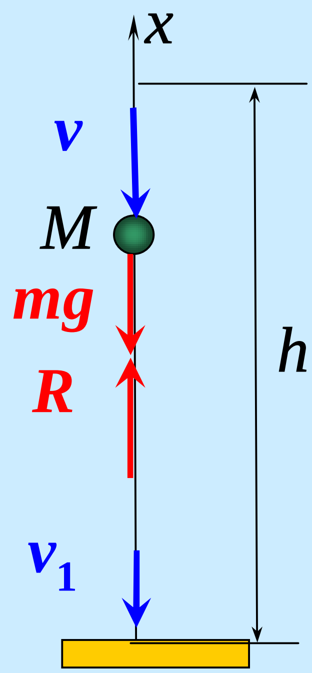
$$\int_o^h dx=-\int_{v_o}^{o}\frac{vdv}{g+kv^2}$$

$$h=\frac{1}{2k}l_n\frac{g+kv^2}{g} \qquad (1)$$

# 质点动力学基础

下落阶段：　$m\dfrac{dv}{dx} = mkv^2 - mg$

积分得　$-\int_h^o dx = \int_o^{-v_1} \dfrac{vdv}{g - kv^2}$




$$h = \frac{1}{2k} l_n\left(\frac{g}{g - kv_1^2}\right) \qquad (2)$$

比较（1）、（2）两式得

$$\frac{g + kv_o^2}{g} = \frac{g}{g - kv_1^2}$$

所以　$v_1 = \dfrac{v_o}{\sqrt{1 + \dfrac{kv_o^2}{g}}}$

# 质点动力学基础

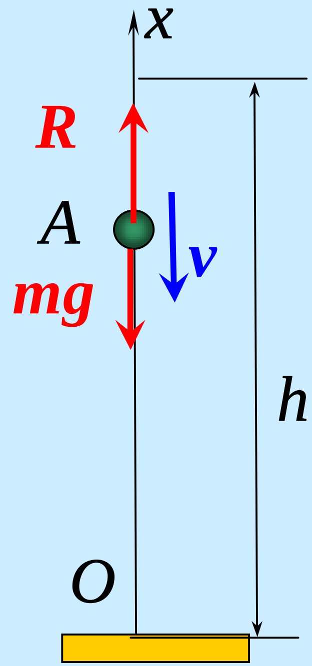
一物体A在介质中由静止降落，假定阻力R＝mkv，其中k是比例常量，按数值它等于单位质量在单位速度时所受的阻力。m是物体质量，v是物体速度，重力加速度认为不变。在同一铅垂直线以速度$v_0$铅直上抛另一物体B,开始两物体相距高度为h。试求两物体相遇的时间、地点。

解：　**A物体运动规律：**

$$m\ddot{x} = -mg + mkv$$

$$v = -\dot{x}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -g - k\dot{x}$$



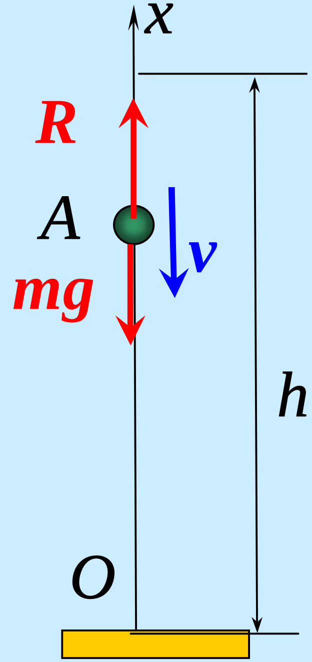

初始条件　　$t = 0$ , $x_0 = h$ , $\dot{x}_0 = 0$

积分得　　$$\int_0^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{-g - k\dot{x}} = \int_0^t dt$$

# 质点动力学基础

$$-\frac{1}{k}ln\left(\frac{g+k\dot{x}}{g}\right)=t$$

$$\dot{x}=\frac{g}{k}(e^{-kt}-1)$$




积分得

$$\int_h^{x_A}dx=\int_o^t\frac{g}{k}(e^{-kt}-1)dt$$

$$x_A=h-\frac{g}{k}t-\frac{g}{k^2}(e^{-kt}-1)$$

# 质点动力学基础

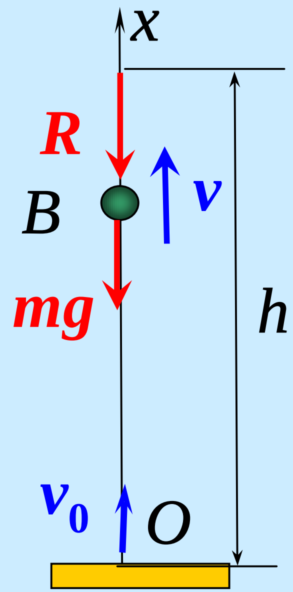
**B物体运动规律：**

$$m\ddot{x} = -mg - mkv$$

$$v = \dot{x}$$

$$\ddot{x} = -g - k\dot{x}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -g - k\dot{x}$$




初始条件　　$t=0\ ,\ x_0=0\ ,\ \dot{x}_0 = v_0$

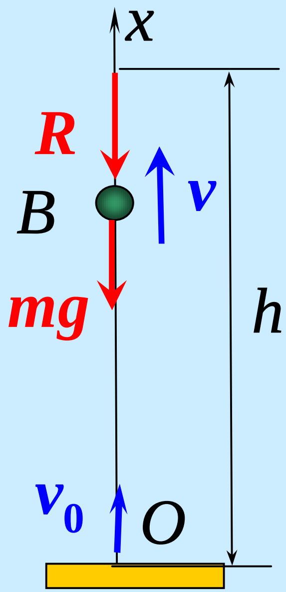
积分得

$$\int_{v_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{-g-k\dot{x}} = \int_0^t dt$$

# 质点动力学基础

$$-\frac{1}{k}ln\left(\frac{g+k\dot{x}}{g+kv_0}\right)=t$$

$$\dot{x}=\frac{1}{k}[(g+kv_0)e^{-kt}-g]$$




积分得

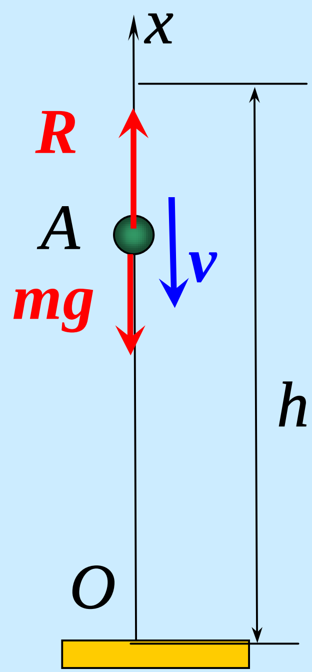
$$\int_0^{x_B}dx=\int_o^t\frac{1}{k}[(g+kv_0)e^{-kt}-1]dt$$

$$x_B=\frac{1}{k^2}(g+kv_0)(1-e^{-kt})-\frac{g}{k}t$$

**A、B相遇时，$x_A = x_B$**

$$x_A = h - \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}(e^{-kt} - 1)$$

$$x_B = \frac{1}{k^2}(g + kv_0)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t$$




可解得

$$t = \frac{1}{k} ln\left(\frac{v_0}{v_0 - kh}\right)$$

相遇地点

$$x_A = h - \frac{g}{k^2} ln\frac{v_0}{v_0 - kh} + \frac{gh}{kv_0}$$

介质阻力与速度一次方成正比时，上抛下落物体微分方程相同

# 动 能 定 理

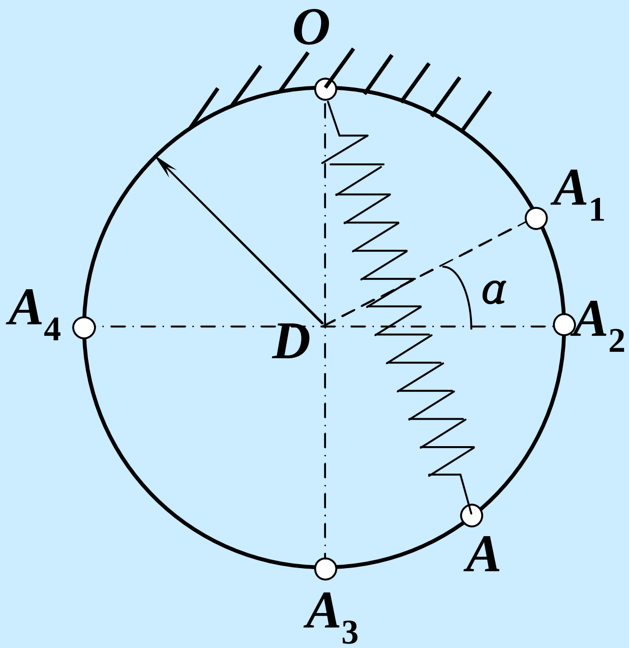
11-1.弹簧的刚度系数是c，其一端固连在铅直平面的圆环顶点O，另一端与可沿圆环滑动的小套环A相连，α =30°。设小套环重G。弹簧的原长等于圆环的半径r；试求下列各情形中重力和弹性力的功：

（1）套环由$A_1$到$A_3$

（2）套环由$A_2$到$A_3$

（4）套环由$A_2$到$A_4$

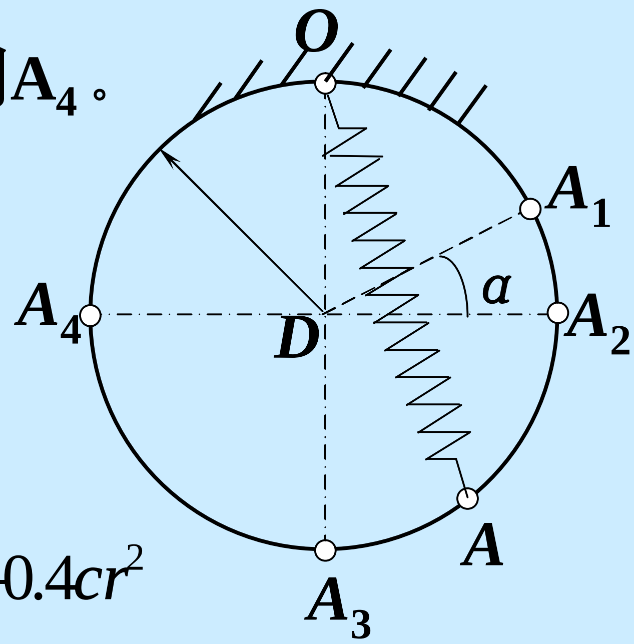
（3）套环由$A_3$到$A_4$



# 动 能 定 理

（1）套环由$A_1$到$A_3$，（2）套环由$A_2$到$A_3$，

（3）套环由$A_3$到$A_4$，（4）套环由$A_2$到$A_4$。




**解：**

(1) $W_P = \frac{3}{2}Gr, \quad W_c = -\frac{1}{2}cr^2$

（2） $W_P = Gr,$

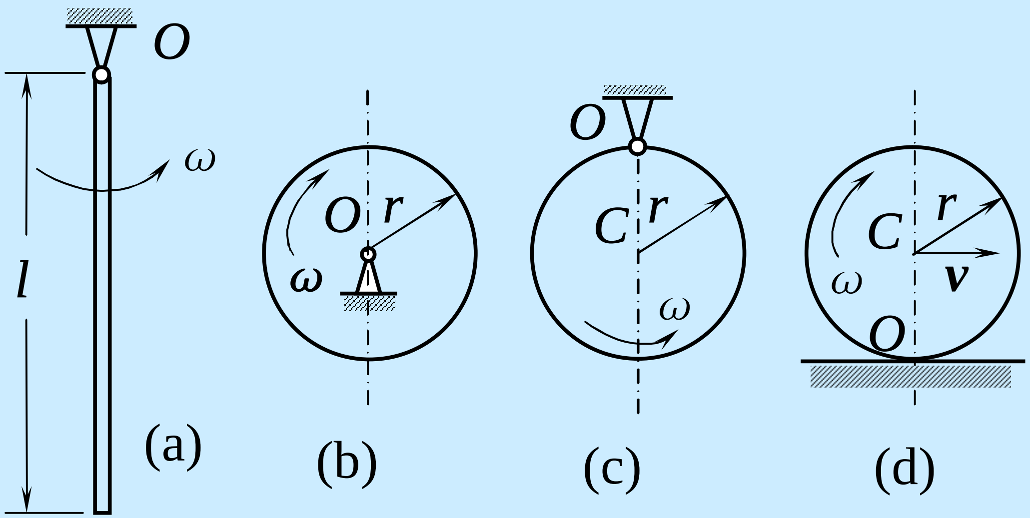
$$W_c = -\frac{1}{2}c\left[\left(\sqrt{2}r - r\right)^2 - r^2\right] = cr^2\left(1-\sqrt{2}\right) = -0.4cr^2$$

（3） $W_P = Gr, \quad W_c = cr^2\left(\sqrt{2}-1\right) = 0.4cr^2$

（4） $W_P = 0, \quad W_c = 0$

# 动 能 定 理

11-5.图（a）、（b）、（c）中的各匀质物体分别绕定轴O转动，图（d）中的匀质圆盘在水平上滚动而不滑动。设各物体的质量都是M，物体的角速度ω是。杆子的长度$l$是，圆盘的半径是r；试分别计算物体的动能。



# 动 能 定 理

**解:**

（1） $$T=\frac{1}{2}I_o w^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)w^2=\frac{1}{6}ml^2w^2$$

（2） $$T=\frac{1}{2}I_o w^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)w^2=\frac{1}{4}mr^2w^2$$

（3） $$T=\frac{1}{2}I_o w^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2+r^2m\right)w^2=\frac{3}{4}mr^2w^2$$

(4) $$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I_c w^2=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)w^2=\frac{3}{4}mr^2w^2$$

# 动 能 定 理

例题.匀质细杆AB的质量是m，长度是$l$，放在铅直平面内，杆的一端A靠墙壁，另一端沿地面运动。已知当杆对水平面的倾角 $\phi=60^0$ 时B端的速度为$v_A$，求杆在该瞬时动能。

解：匀质细杆作平面运动，$P$为速度瞬心

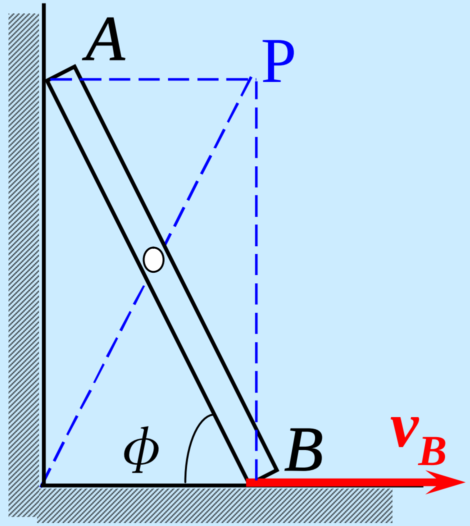
$$w_{AB}=\frac{v_B}{PB}=\frac{2}{\sqrt{3}l}v_B$$

$$v_c=PC\cdot w_{AB}=\frac{1}{2}l\cdot\frac{2}{\sqrt{3}l}v_B=\frac{1}{\sqrt{3}}v_B$$

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I_cw_{AB}^2$$

$$=\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{\sqrt{3}}v_B\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}l}v_B\right)^2$$

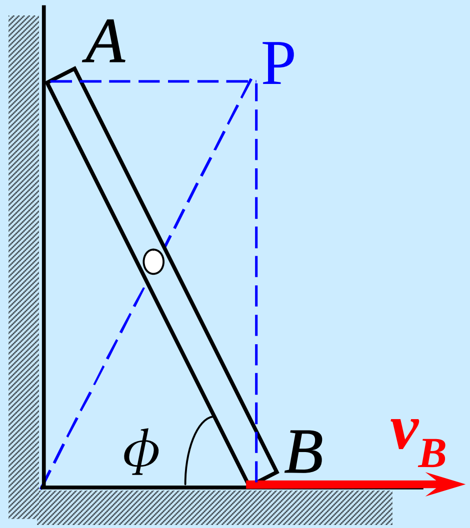
$$=\frac{1}{6}mv_B^2+\frac{1}{18}mv_B^2=\frac{2}{9}mv_B^2$$



# 动 能 定 理

**也可以用下面方法计算：**

$$T=\frac{1}{2}I_P w^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}l}v_B\right)^2=\frac{2}{9}mv_B^2$$



# 动 能 定 理

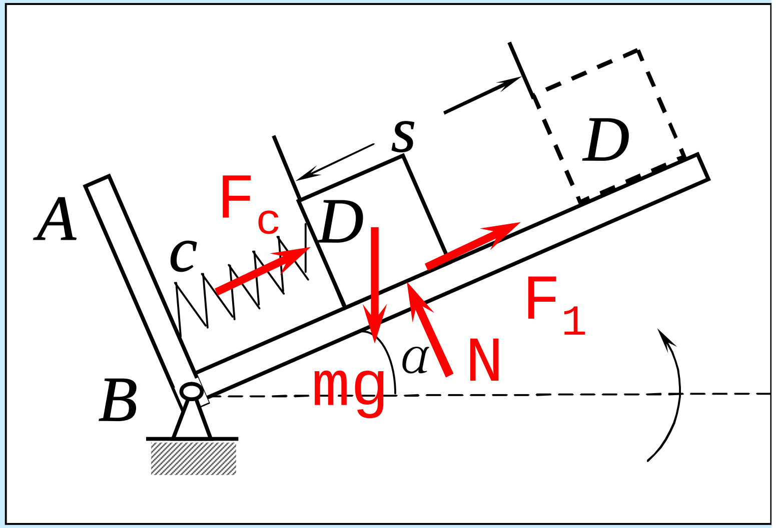
11-7.托架ABC缓慢地绕水平轴B转动，当角α=15$^0$时，托架停止转动，质量m=6kg的物块D开始沿斜面CB下滑，下滑距离s=250mm时压到刚度系数c=1.6N/m的弹簧上。已测得弹簧最大变形λ=50mm 。试求物块与斜面间的静摩擦因数和动摩擦因数。

解:

**1、求静摩擦系数。**

当α=15° 时，物块开始下滑，所以

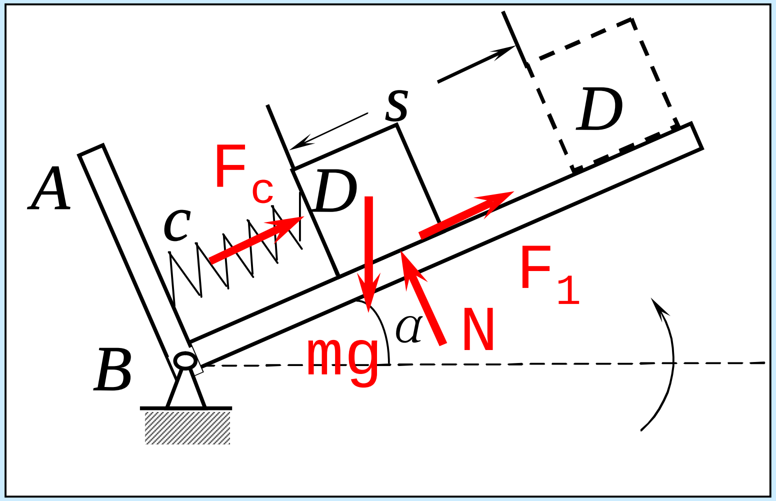
$$f = tga = tg15^0 = 0.268$$



# 动 能 定 理

## 2、求动摩擦系数。

取物块D为研究对象，$T_1=T_2=0$。




$$W_g = mg(s+l)\sin 15^{\circ}$$

$$W_c = -\frac{1}{2}cl^2$$

$$W_{F1} = -F_1(s+l) = -f' \cdot N(s+l) = -f'mg\cos 15^{\circ}(s+l)$$

由 $$T_2 - T_1 = \sum W$$

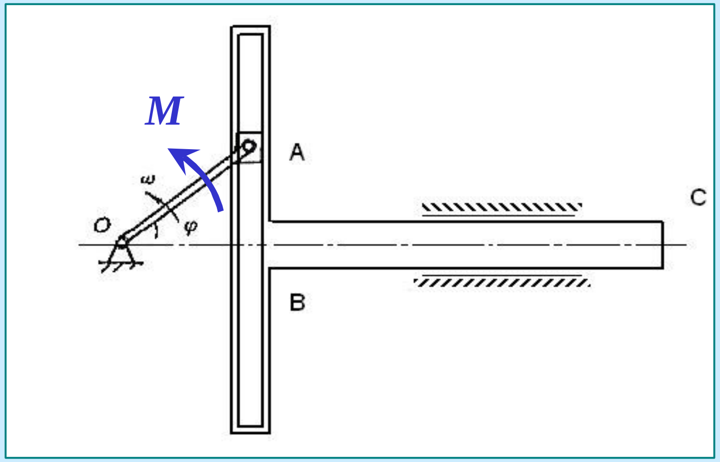
得 $$0-0 = mg(s+l)\sin 15^{\circ} - f'mg\cos 15^{\circ}(s+l) - \frac{1}{2}cl^2$$

$$f' = \frac{1}{\cos 15^{\circ}}\left(\sin 15^{\circ} - \frac{cl}{0.6mg}\right) = 0.151$$

# 动 能 定 理

11-14.在曲柄滑杆机构中，曲柄OA受常值转矩$M_0$作用。初瞬时机构处于静止且角$\phi=\phi_0$；试求曲柄转过一整转时的角速度。假设曲柄长r，对轴O的转动惯量是$I_0$；滑块A的重量是$G_1$；滑道杆的重量是$G_2$；滑块与滑槽间的摩擦力可认为是常力并等于F。

**解:**



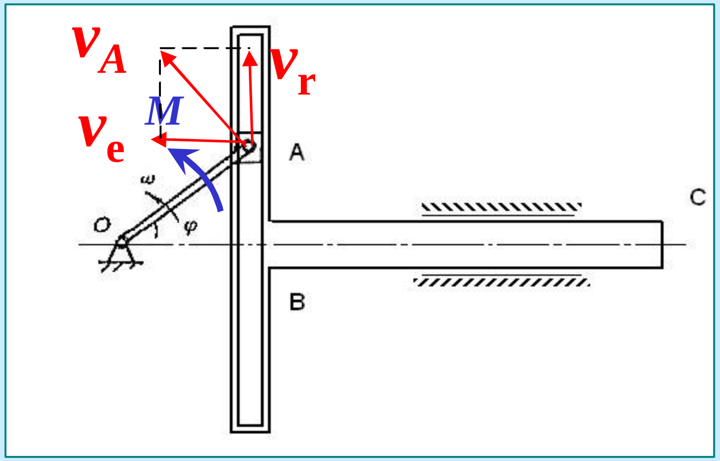

取整体为研究对象，只有转矩*M*和滑动摩擦力作功。 曲柄转动一周，角位移为2π，滑块在滑道中行程为$s=2r\times 2=4r$

$$\sum W = M\cdot 2\pi - F\cdot 4r$$

初瞬时 $T_1=0$,

末瞬时，曲柄角速度为ω，滑块A速度$v_A=r\omega$。

# 动 能 定 理




滑道速度 $v=v_e=v_A\sin\phi=r\omega\sin\phi$

$$T_2=\frac{1}{2}I_o w^2+\frac{1}{2}\frac{G_1}{g}r^2w^2+\frac{1}{2}\frac{G_2}{g}r^2w^2\sin^2 j$$

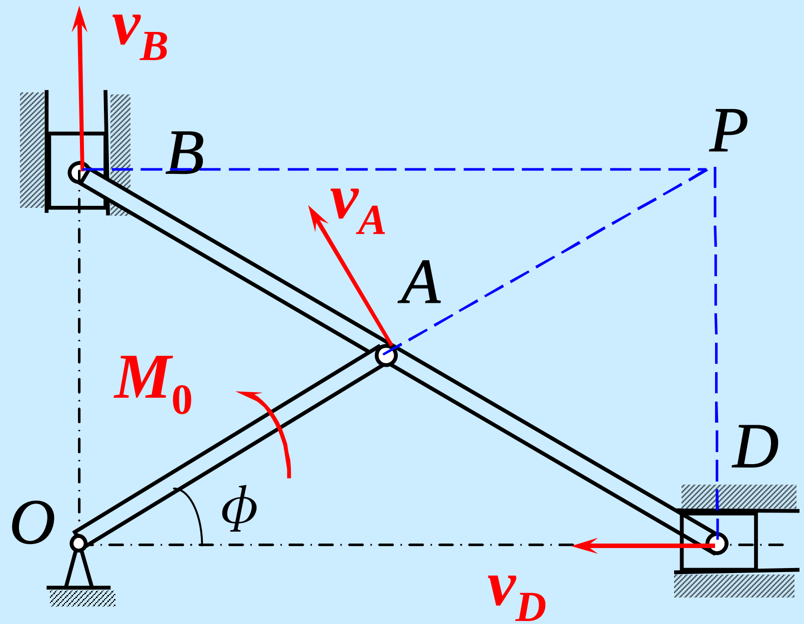
$$=\frac{w^2}{2g}\left(I_o g+G_1r^2+G_2r^2\sin^2 j\right)$$

由 $$T_2-T_1=\sum W$$

$$\frac{w^2}{2g}\left(I_o g+G_1r^2+G_2r^2\sin^2 j\right)=2pM-4rF$$

$$w=2\sqrt{\frac{g(pM-2Fr)}{I_o g+G_1r^2+G_2r^2\sin^2 j}}$$

11-13.椭圆规机构由曲柄OA、规尺BD以及滑块B、D组成。已知曲柄长$l$，质量是$m_1$；规尺长$2l$，质量是$2m_1$，且两者都可以看成匀质细杆；两滑块的质量都是$m_1$。整个机构被放在水平面上，并在曲柄上作用着常值转矩$M_0$，试求曲柄的角加速度，各处的摩擦不计。




**解:**

取整体为研究对象，只有转矩作功。应用微分形式动能定理。

$$dT = d'W \qquad (1)$$

系统动能

$$T = T_{OA} + T_{BD} + T_B + T_D$$

# 动 能 定 理

$$T = T_{OA} + T_{BD} + T_B + T_D$$

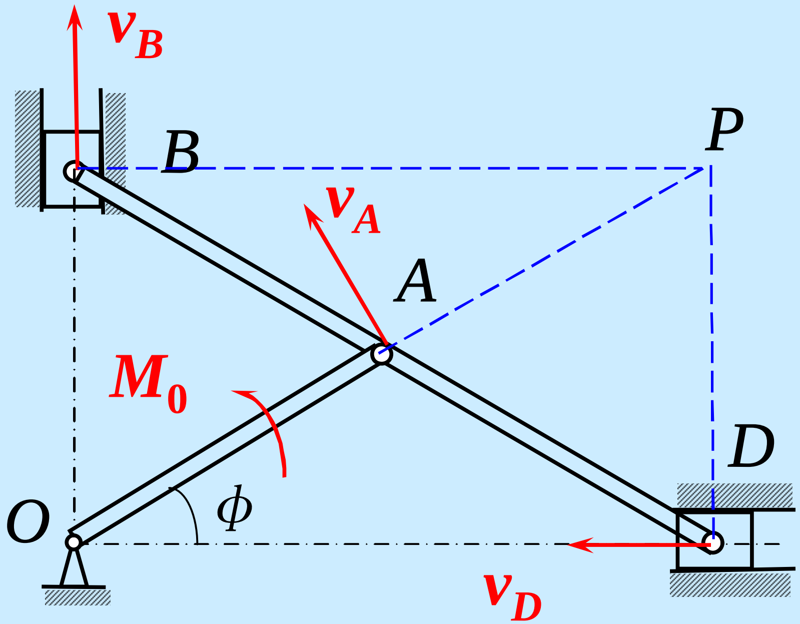
$$T_{OA} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1 l^2\right)w^2$$

$$T_{BD} = \frac{1}{2}\cdot 2m_1(lw)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\times 2m_1(2l)^2\right]w^2$$

$$T_B = \frac{1}{2}m_2(2l\cos\varphi\cdot w)^2$$

$$T_D = \frac{1}{2}m_2(2l\sin\varphi\cdot w)^2$$

$$T = \frac{1}{2}l^2 w^2(3m_1 + 4m_2)$$



# 动 能 定 理

$$T=\frac{1}{2}l^2w^2(3m_1+4m_2)$$

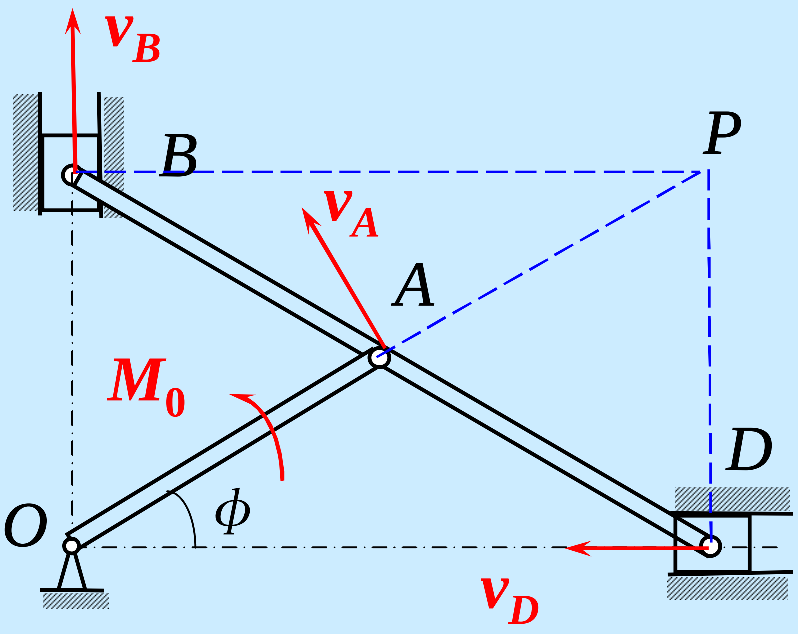
元功 $d'W=M_O dj$

代入 $dT=d'W$

$$w\frac{dw}{dt}l^2(3m_1+4m_2)=M_O\frac{dj}{dt}$$

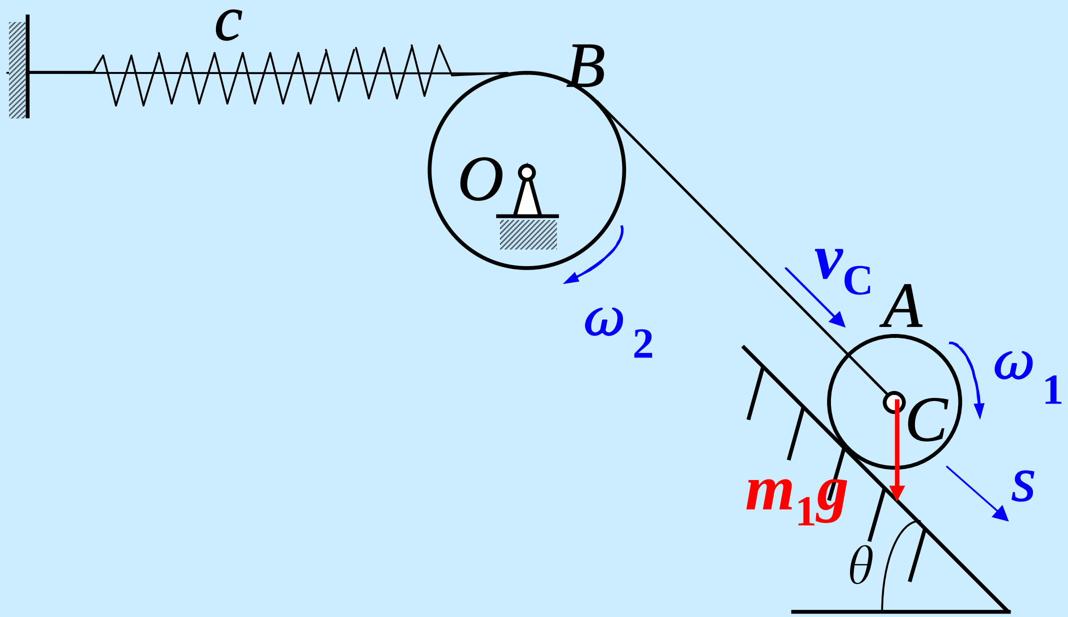
因为 $\dfrac{dw}{dt}=e,\qquad \dfrac{dj}{dt}=w$

所以 $e=\dfrac{M_o}{(3m_1+4m_2)l^2}$

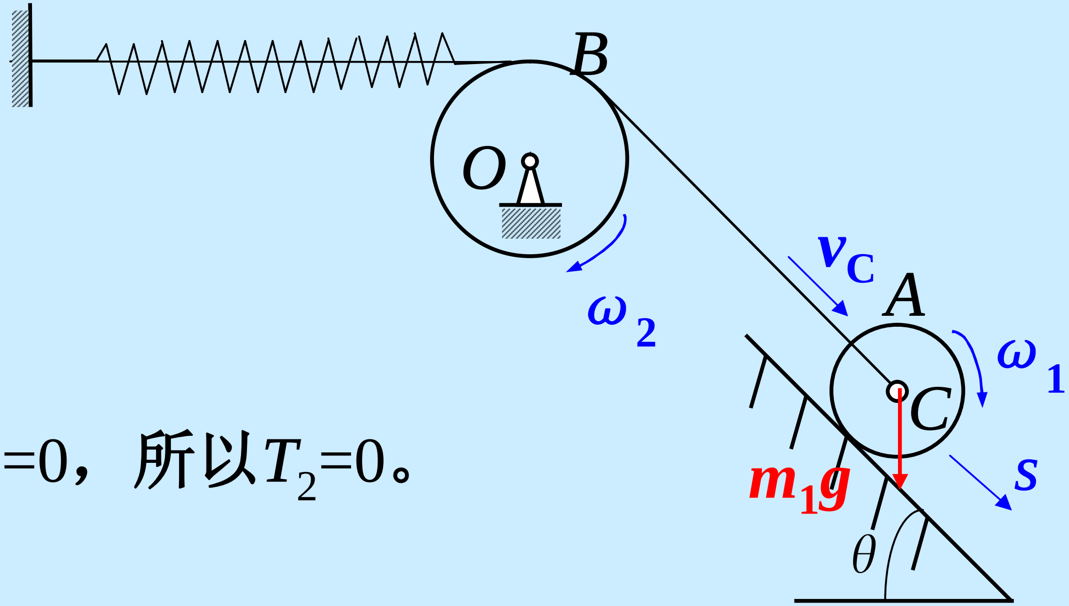


# 动能定理

例题.匀质轮A的半径$r_1$，质量是$m_1$，可在倾角为θ的固定斜面上纯滚动。匀质轮B的半径是$r_1$，质量是m2 。水平刚度系数是c。假设系统从弹簧未变形的位置静止释放，绳与轮B不打滑，绳的倾斜段与斜面平行，不计绳重和轴承摩擦；求轮心C沿斜面向下运动的最大距离以及这瞬时轮心C的加速度。



# 动 能 定 理




解：取整体为研究对象。

求向下运动最大距离$s$ 。

$T_1$=0, 下滑到最大距离时$v_2$=0，所以$T_2$=0。

只有弹力和重力作功

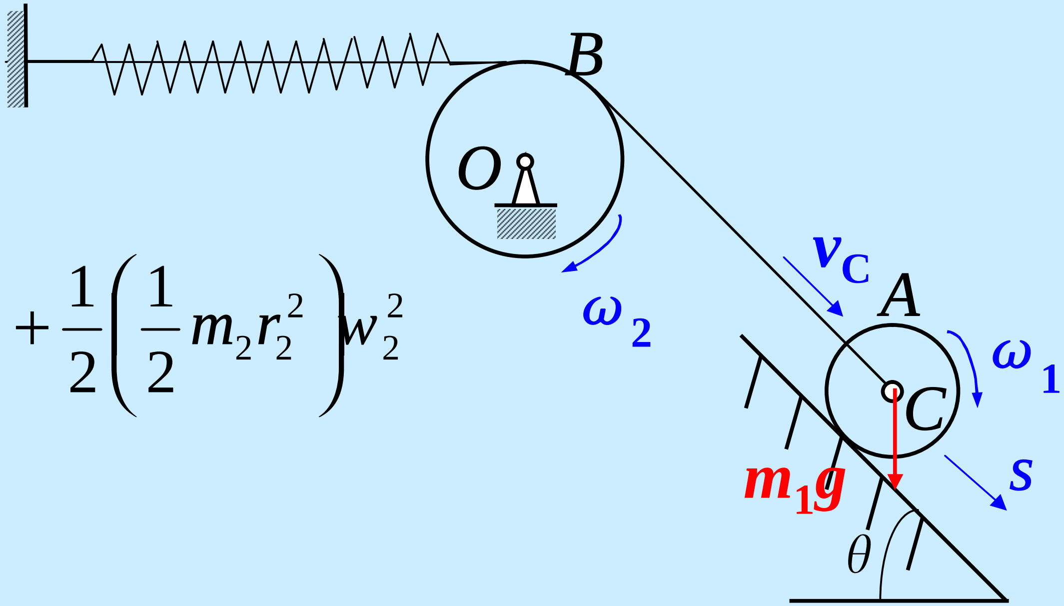
$$\sum W = m_1 gs \cdot \sin\theta + \frac{1}{2}c\left(0^2 - s^2\right)$$

由 $$T_2 - T_1 = \sum W$$

得 $$0 - 0 = m_1 gs \cdot \sin\theta + \frac{c}{2}s^2, \qquad s = \frac{2m_1 g\sin\theta}{c}$$

# 动 能 定 理

## 1.求轮心C的加速度$a_C$




$$T_1=0,$$

$$T_2=\frac{1}{2}m_1v_C^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1r_1^2\right)w_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2r_2^2\right)w_2^2$$

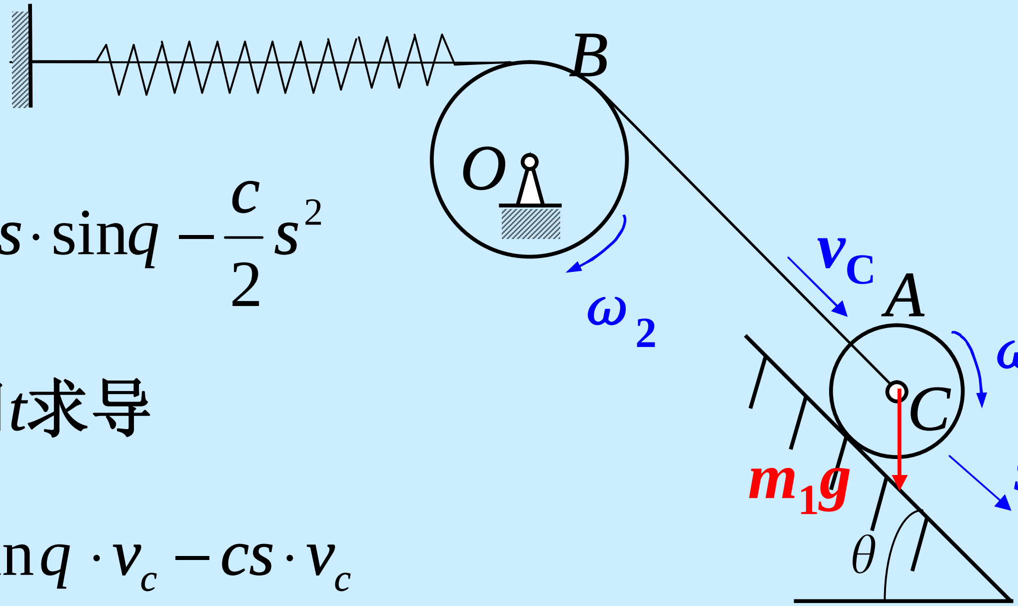
$$w_2=\frac{v_C}{r_2},\quad w_1=\frac{v_C}{r_1}$$

$$T_2=\frac{1}{2}m_1v_c^2+\frac{1}{4}m_1r_1^2\cdot\frac{v_c^2}{r_1^2}+\frac{1}{4}m_2r_2^2\cdot\frac{v_c^2}{r_2^2}$$

$$=\frac{v_c^2}{4}(3m_1+m_2)$$

# 动能定理

$$\sum W = m_1 gs\cdot \sin q - \frac{c}{2}s^2$$




所以 $$\frac{v_c^2}{4}(3m_1+m_2)=m_1gs\cdot\sin q-\frac{c}{2}s^2$$

视s为变量，两边对时间$t$求导

$$\frac{v_c}{2}\cdot a_c(3m_1+m_2)=m_1g\sin q\cdot v_c-cs\cdot v_c$$

得 $$a_c=\frac{2(m_1g\sin q-cs)}{3m_1+m_2}$$

将 $$s=\frac{2m_1g\sin q}{c}$$ 代入上式

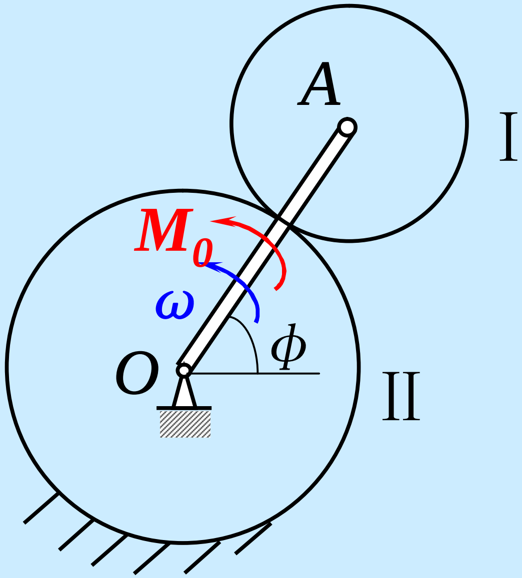
得 $$a_c=\frac{-m_1g\sin q}{3m_1+m_2}$$

（沿斜面向上）

# 动能定理

11-17.外啮合的行星齿轮机构放在水平面内，在曲柄OA上作用着常值转矩$M_0$，来带动齿轮1沿定齿轮2滚动而不滑动。已知齿轮1和2分别具的质量$m_1$和$m_2$，并可看成半径是$r_1$和$r_2$的匀质圆盘；曲柄具有质量m，并可看成匀质细杆。已知机构由静止开始运动，试求曲柄的角速度和转角$\phi$之间的关系。摩擦不计。

解：取整体为研究对象。由运动学得知




$$v_A = (r_1 + r_2)w$$

$$T_1 = 0,$$

$$T_2 = T_A + T_{OA} = \frac{3}{4}m_1(r_1 + r_2)^2 w^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)w^2$$

$$T_2 = \frac{w^2}{12}(r_1 + r_2)^2(9m_1 + 2m)$$

# 动 能 定 理

$$T_2 = \frac{w^2}{12}(r_1 + r_2)^2(9m_1 + 2m)$$

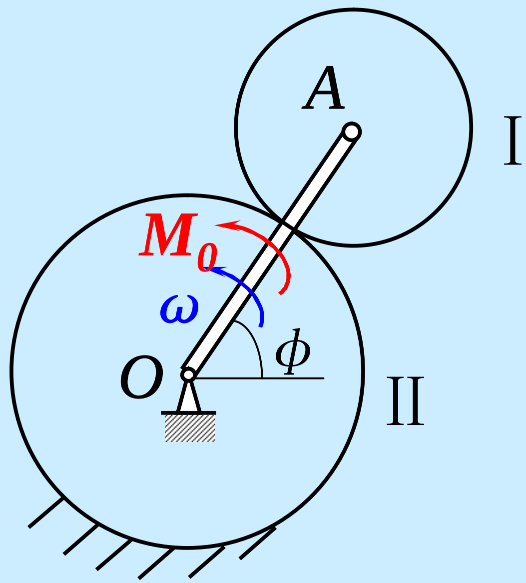
在水平面重力与支承力不作功，有

$$\sum W = M_o j$$

由 $$T_2 - T_1 = \sum W$$

得 $$\frac{w^2}{12}(r_1 + r_2)^2(9m_1 + 2m) = M_o j$$

$$w = \frac{2}{r_1 + r_2}\sqrt{\frac{3M_o j}{2m + 9m_1}}$$



# 动 量 定 理

12-1.图（a）、（b）、（c）中的各匀质物体分别绕定轴O转动，图（d）中的匀质圆盘在水平上滚动而不滑动。设各物体的质量都是M，物体的角速度是ω 。杆子的长度是*l*，圆盘的半径是r；试分别计算物体的动量。

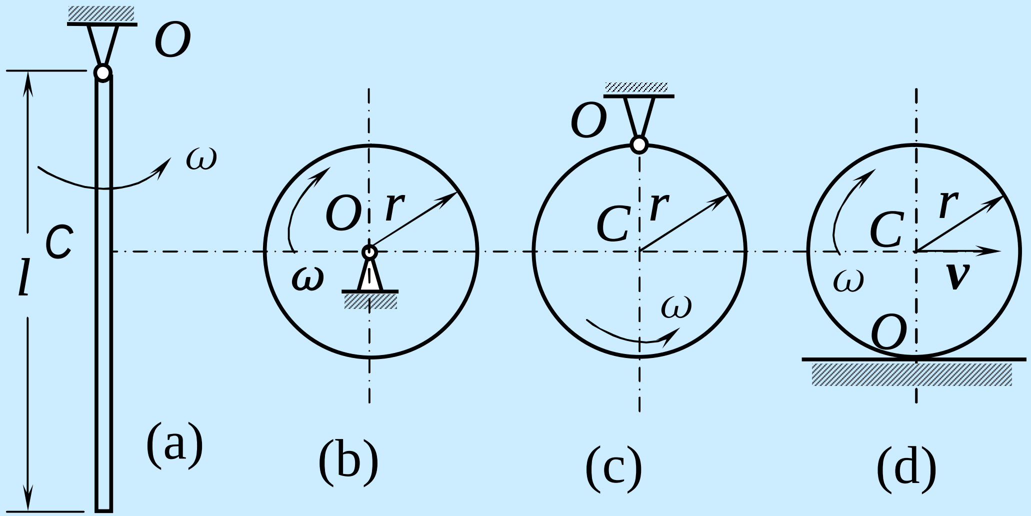
解：

（a） $K=mv_C=ml\omega/2$

（b） $K=mv_O=0$

（c） $K=mv_C=mr\omega$

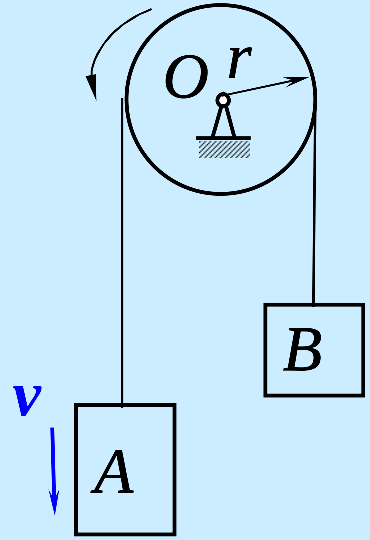
（d） $K=mv_C=mr\omega$



(a) (b) (c) (d)

12-2.试求下列物体系的动量：

(1)物体A和B各重$G_A$和$G_B$，$G_A > G_B$；滑轮重G，并可看作半径为r的匀质圆盘。不计绳索的质量，试求物体A的速度是v时整个系统的动量。



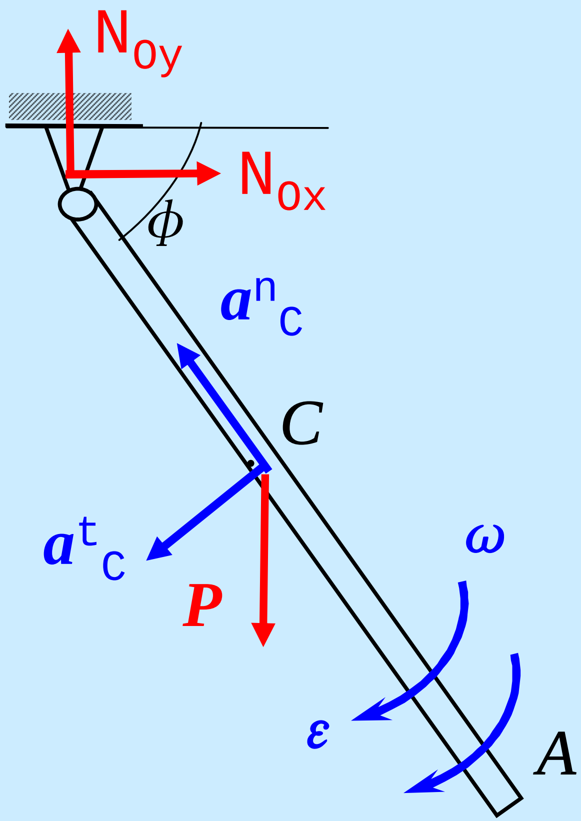

**解：** $\dot{\boldsymbol{K}} = \dot{\boldsymbol{K}}_A + \dot{\boldsymbol{K}}_B$

$$K = \frac{G_A}{g}v - \frac{G_B}{g}v = \frac{v}{g}(G_A - G_B)$$

方向向下。

# 动 量 定 理

12-9.匀质杆OA长2*l*，重P，绕通过O端的水平轴在竖直水平面内转动。设杆OA转动到与水平成$\phi$角时，其角速度与角加速度分别为ω及ε，试求该瞬时杆O端的反力。




解：应用质心运动定理，

$$M_i a_{Ci} = \sum F$$

$$-ma_C^n \cos j - ma_C^t \sin j = N_{Ox}$$

$$ma_C^n \sin j - ma_C^t \cos j = N_{Oy} - P$$

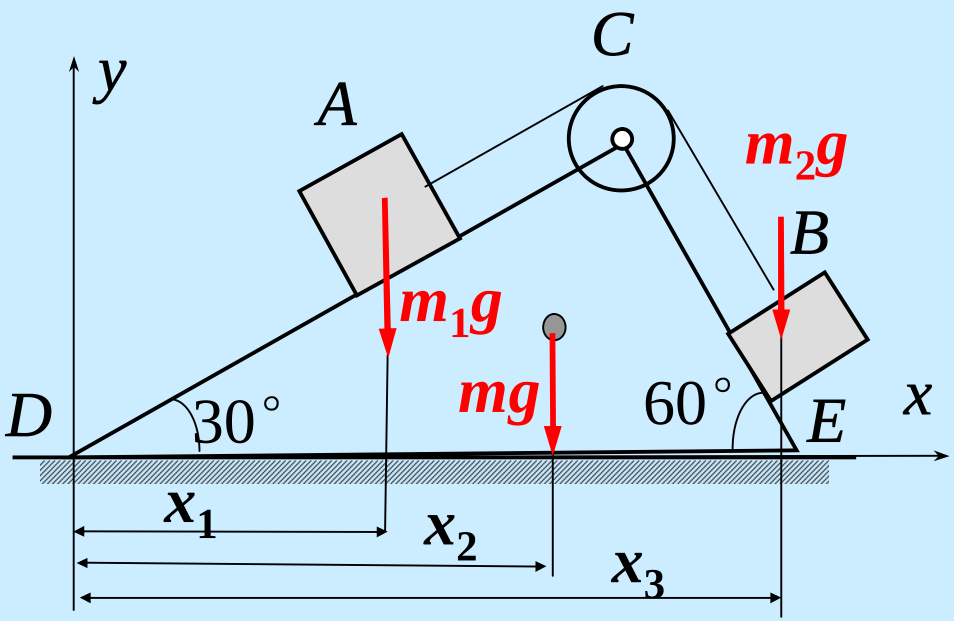
解得

$$N_{Ox} = -\frac{Pl}{g}(w^2 \cos j + e \sin j)$$

$$N_{Oy} = P + \frac{Pl}{g}(w^2 \sin j - e \cos j)$$

# 动 量 定 理

12-11.物体A和B的质量分别是$m_1$和$m_2$，借一绕过滑轮C的不可伸长的绳索相连，这两个物体可沿直角三棱柱的光滑斜面滑动，而三棱柱的底面*DE*则放在光滑水平面上。试求当物体A落下高度h=10cm时，三棱柱沿水平面的位移。设三棱柱的质量$m=4m_1=16m_2$，绳索和滑轮的质量都不计。初瞬时系统处于静止。

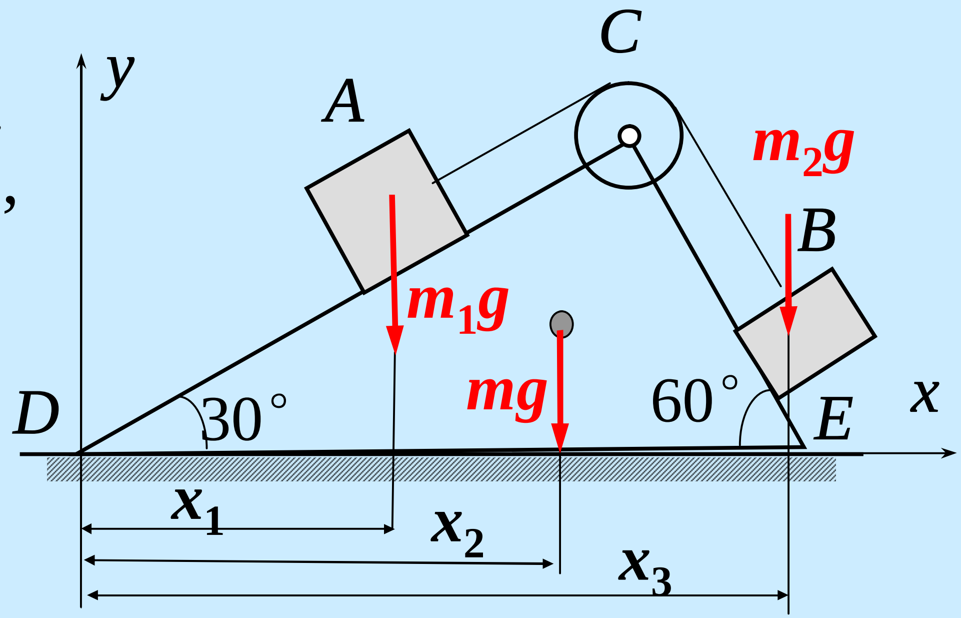


# 动 量 定 理

**解：** 取整个系统为研究对象。系统的外力只有铅直方向的重力$m_1g$、$m_2g$、$mg$和法向反力N。又因系统在初瞬时处于静止，故整个系统的质心在水平方向x的位置守恒，即$x_c=x_{c'}$。

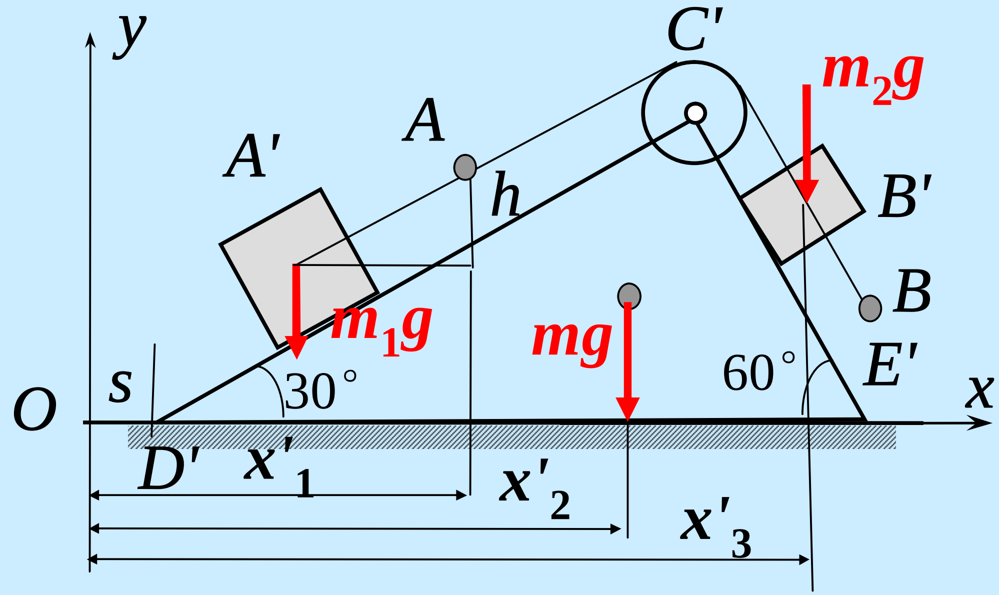
三棱柱移动前系统质心的横坐标

$$x_c=\frac{\sum mx}{\sum m}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+mx}{m_1+m_2+m},$$



# 动量定理

设三棱柱沿水平面的位移是s，则移动后系统质心的横坐标




$$x_{c'}=\frac{\sum mx'}{\sum m}$$

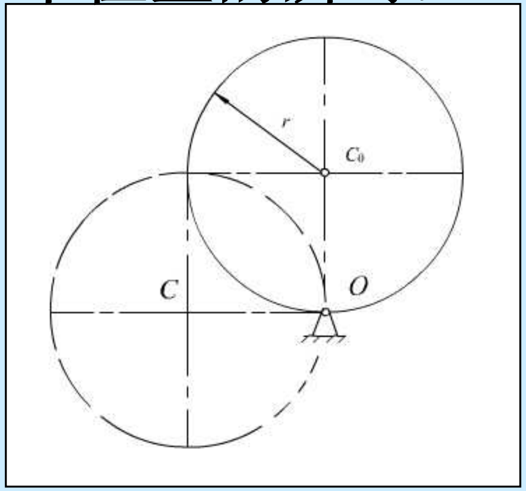
$$=\frac{m_1\left(x_1-h\cot30^0+s\right)+m_2\left(x_2-\dfrac{h}{\sin30^0}\sin30^0+s\right)+m\left(x+s\right)}{m_1+m_2+m}$$

由$x_c=x_{c'}$，得三棱柱沿水平面向右的位移

$$s=\frac{\sqrt{3}m_1+m_2}{m_1+m_2+m}=\frac{\sqrt{3}\times4+1}{4=1+16}\times10=3.77cm。$$

# 动 量 定 理

12-15.匀质圆盘质量是m，半径是r，可绕通过边缘O点且垂直于盘面的水平轴转动。设圆盘从最高位置无初速地开始绕轴O转动，试求当圆盘中心C和轴O的连线经过水平位置的瞬时，轴承O的总反力的大小。

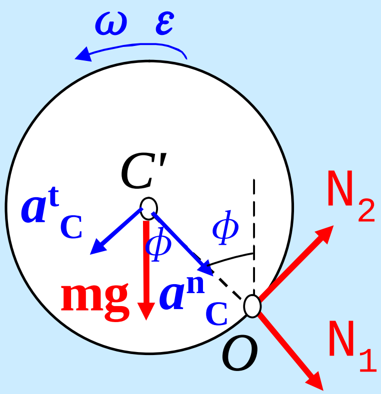



**解一：** 设园盘的中心$C'$与轴$O$的连线与铅垂线成任意角度$\phi$，园盘所受的外力和质心的加速度如图由（b）。

质心运动定理，有

$$ma_C^n = mr\dot{\varphi}^2 = N_1 + mg\cos\varphi \qquad （1）$$

$$ma_C^t = mr\ddot{\varphi} = -N_2 + mg\sin\varphi \qquad （2）$$




(b)

# 动 量 定 理

由积分形式的**动能定理**，有

$$\frac{1}{2}I_o\dot{\varphi}^2-0=mgr(1-\cos\varphi)$$

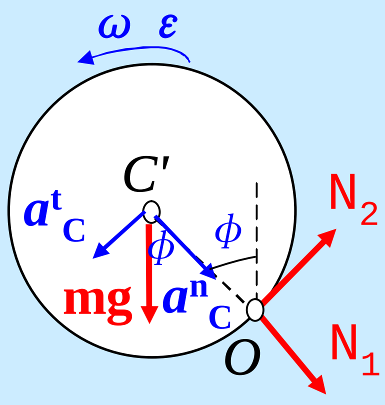
即 $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2+mr^2\right)=mgr(1-\cos\varphi)$$

故 $$r\dot{\varphi}^2=\frac{4}{3}g(1-\cos\varphi) \qquad (3)$$

把上时两端对时间t求导，得

$$2r\dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{dt}=\frac{4}{3}g\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

故 $$\ddot{\varphi}=\frac{d\dot{\varphi}}{dt}=\frac{2g}{3r}\sin\varphi 。\qquad (4)$$




(b)

也可由微分形式的动能定理求出 $\ddot{\varphi}$ ，通过积分得 $\dot{\varphi}$

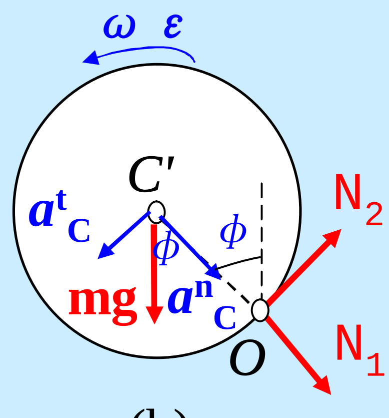
# 动 量 定 理

$$ma_C^n = mr\dot{\varphi}^2 = N_1 + mg\cos\varphi \qquad (1)$$

$$ma_C^t = mr\ddot{\varphi} = -N_2 + mg\sin\varphi \qquad (2)$$

$$r\dot{\varphi}^2 = \frac{4}{3}g(1-\cos\varphi) \qquad (3)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{2g}{3r}\sin\varphi\text{。} \qquad (4)$$




(b)

当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时，把式（3）和（4）分别代入式（1）和（2），得

$$N_1 = \frac{4}{3}mg, \qquad N_2 = mg - \frac{2}{3}mg = \frac{1}{3}mg\text{。}$$

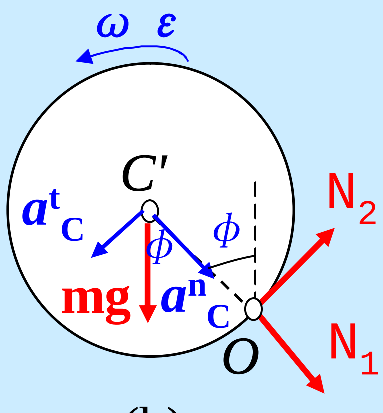
总反力N的大小为 $$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \frac{\sqrt{17}}{3}mg\text{。}$$

# 动 量 定 理

**解二：** 可由**刚体定轴转动微分方程** $J_O\ddot{\varphi}=\sum M_O(F)$ 求 $\ddot{\varphi}$ 和 $\dot{\varphi}$

$$\left(\frac{1}{2}mr^2+mr^2\right)\ddot{\varphi}=mgr\sin\varphi$$

故 $$\ddot{\varphi}=\frac{2g}{3r}\sin\varphi\,, \qquad (5)$$



(b)

因为 $\ddot{\varphi}=\dfrac{d\dot{\varphi}}{dt}\cdot\dfrac{d\varphi}{d\varphi}=\dfrac{\dot{\varphi}d\dot{\varphi}}{d\varphi}$，积分有

$$\int_0^{\dot{\varphi}}\dot{\varphi}d\dot{\varphi}=\frac{2g}{3r}\int_0^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi$$

得 $$\dot{\varphi}^2=\frac{4g}{3r}(1-\cos\varphi) \qquad (6)$$

把式（5）和（6）分别代入式（1）和（2），可求出反力$N_1$和$N_2$。

# 动 量 定 理

**解三：**可分别应用**动能定理**由式（3）求出角速度 $\dot{\varphi}$，

应用**刚体定轴转动微分方程**由式（5）求出角加速度 $\ddot{\varphi}$，

再根据质心运动定理由式（1）和（2）求反力$N_1$和$N_2$。

$$r\dot{\varphi}^2 = \frac{4}{3}g(1-\cos\varphi) \qquad (3)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{2g}{3r}\sin\varphi\,, \qquad (5)$$

$$ma_C^n = mr\dot{\varphi}^2 = N_1 + mg\cos\varphi \qquad (1)$$

$$ma_C^t = mr\ddot{\varphi} = -N_2 + mg\sin\varphi \qquad (2)$$

# 动 量 定 理

**解四：** 根据达朗伯原理，在质心$C'$上加惯性力$Q^t_c=-ma^t_c$，$Q^n_c=-ma^n_c$以及矩为 $-I_C\ddot{\varphi}$ 的惯性力偶(图c)，有

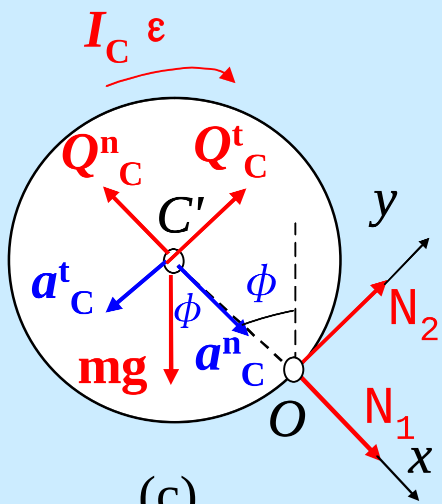
$$\sum F_x=0,\ N_1-mr\dot{\varphi}^2+mg\cos\varphi=0$$

$$\sum F_y=0,\ N_2+mr\ddot{\varphi}-mg\sin\varphi=0$$

$$\sum m_O(F)=0,$$

$$I_C\ddot{\varphi}+mr\ddot{\varphi}r-mgr\sin\varphi=0,$$

即
$$\ddot{\varphi}=\frac{2g}{3r}\sin\varphi\text{。}$$



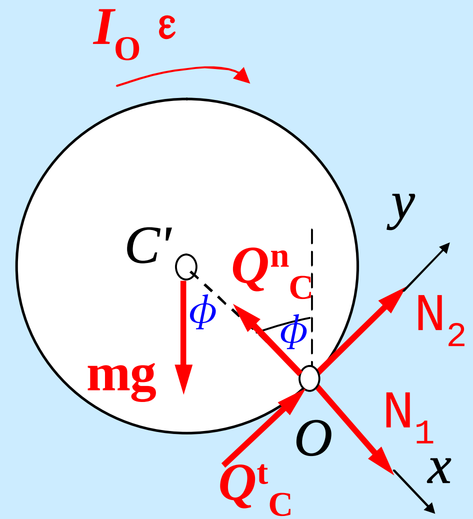
(c)

显然，以上三式分别与式（1）、（2）、（4）相同。

# 动 量 定 理

也可以在点$O$上加惯性力$Q^t_c = -ma^t_c$和$Q^n_c = -ma^n_c$，以及矩为 $-I_O\ddot{\varphi}$

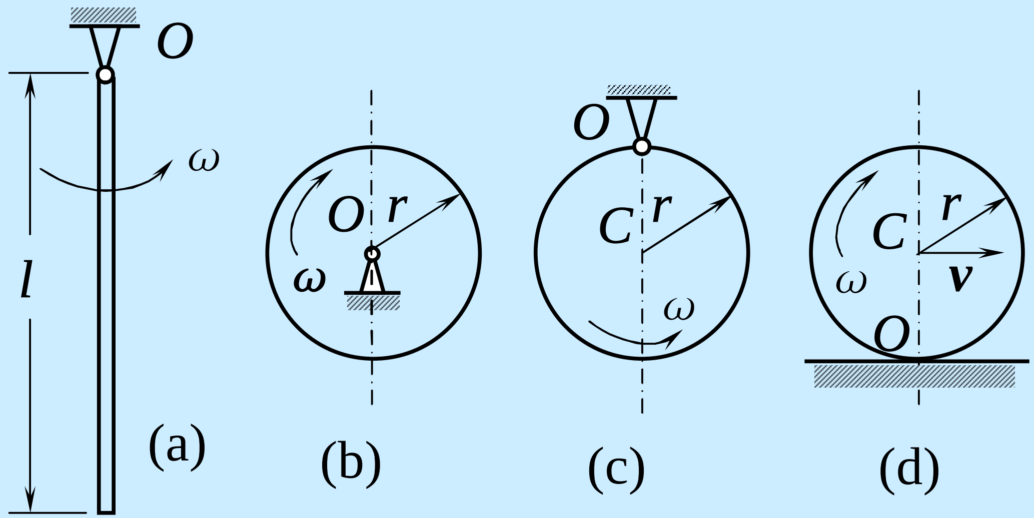
的惯性力偶(图d)，仍可得到相同的结果。



(d)

# 动量矩定理

13-1.已知条件和动能定理题1相同，试分别计算各物体对通过点O并与图面垂直的轴的动量矩。设图d中圆盘和水平面的接触点是点O。




解：

(a) $H_o = I_o w = \dfrac{1}{3} m l^2 w$ 逆时针

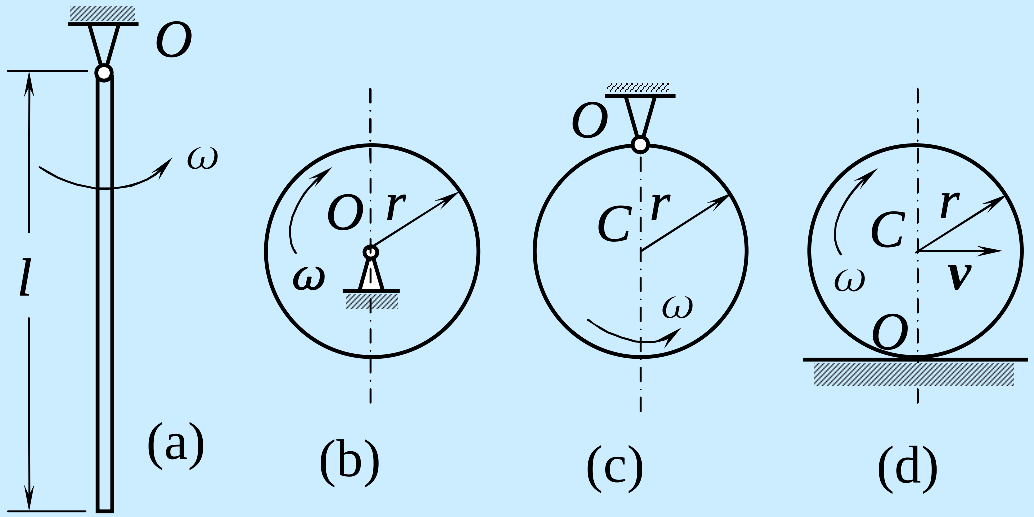
# 动量矩定理

(b) $H_o = I_o w = \frac{1}{2} m r^2 w$　顺时针

(c) $H_o = I_o w = H_c + m v_C \cdot r = \frac{1}{2} m r^2 + m r w \cdot r = \frac{3}{2} m r^2 w$

或　$H_o = I_o w = (\frac{1}{2} m r^2 + m r^2) w^2 = \frac{3}{2} m r^2 w$　逆时针

(d) $H_o = I_o w = (\frac{1}{2} m r^2 + m r^2) w^2 = \frac{3}{2} m r^2 w$　顺时针



# 动量矩定理

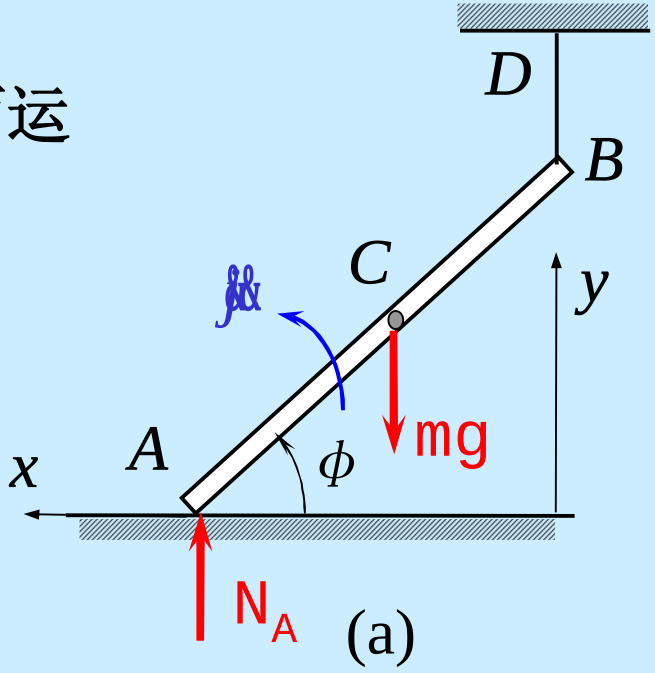
13-10.匀质杆AB长$l$，质量是M。杆的一端系在绳索BD上，另一端搁在光滑水平面上。当绳沿铅直而杆静止时杆对水平面的倾角φ=45$^0$ 。现在绳索突然断掉，求在刚断后的瞬时杆端A的约束反力。

解一：杆AB作平面运动，可用刚体平面运动微分方程求解。

取坐标轴Oxy如图，有

$$M\ddot{y}_c = N_A - Mg\ ,\qquad (1)$$

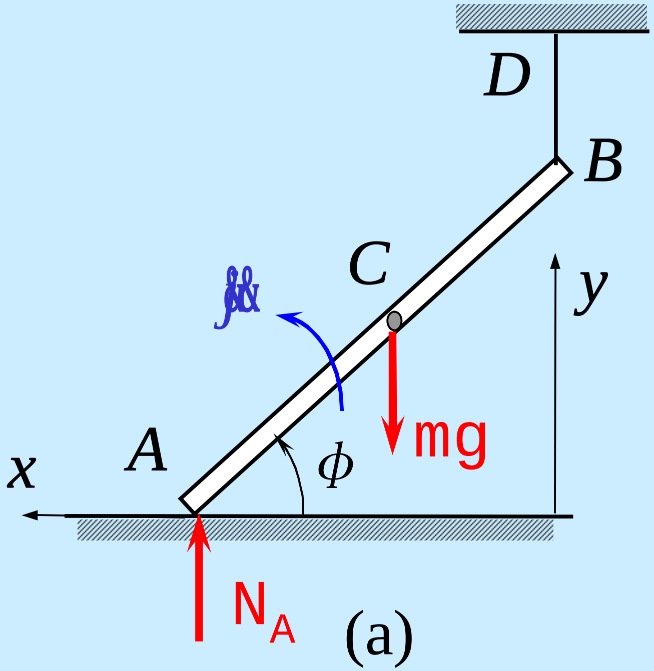
$$\left(\frac{1}{12}Ml^2\right)\ddot{\varphi} = -N_A\frac{l}{2}\cos\varphi \qquad (2)$$



# 动量矩定理

$$M\ddot{y}_c = N_A - Mg\,, \qquad (1)$$

$$\left(\frac{1}{12}Ml^2\right)\ddot{\varphi} = -N_A\frac{l}{2}\cos\varphi \qquad (2)$$




(a)

又

$$y_c = \frac{l}{2}\sin\varphi\,, \qquad (3)$$

$$\dot{y}_c = \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\,,$$

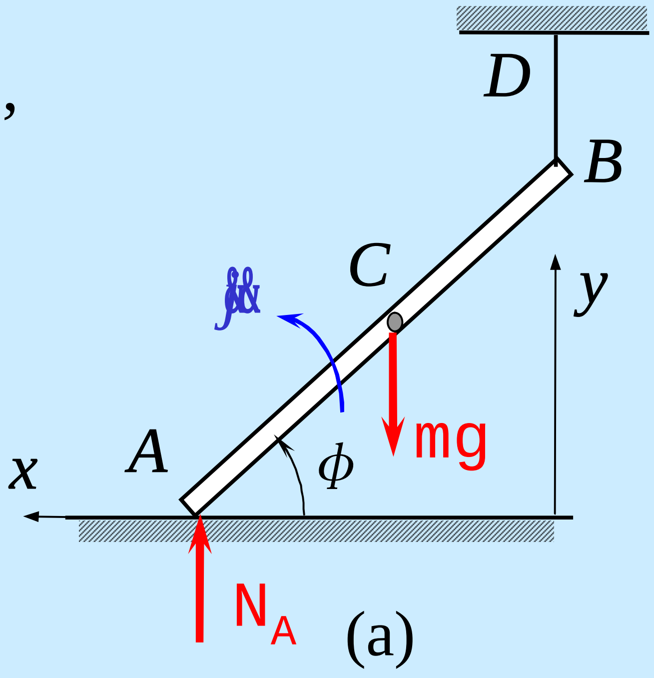
$$\ddot{y}_c = \frac{l}{2}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)$$

# 动量矩定理

$$\ddot{y}_c = \frac{l}{2}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)$$

当t=0时，$\dot{\varphi}=0$，故 $\ddot{y}_c = \frac{1}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi$，考虑到式（2）的 $\ddot{\varphi}$ 有

$$\ddot{y}_C = \frac{l}{2}\left(-\frac{6N_A\cos\varphi}{Ml}\right)\cos\varphi = -\frac{3N_A\cos^2\varphi}{M},$$




代入式（1），得A端的约束反力

$$N_A = \frac{Mg}{1+3\cos^2\varphi} = \frac{Mg}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}Mg$$

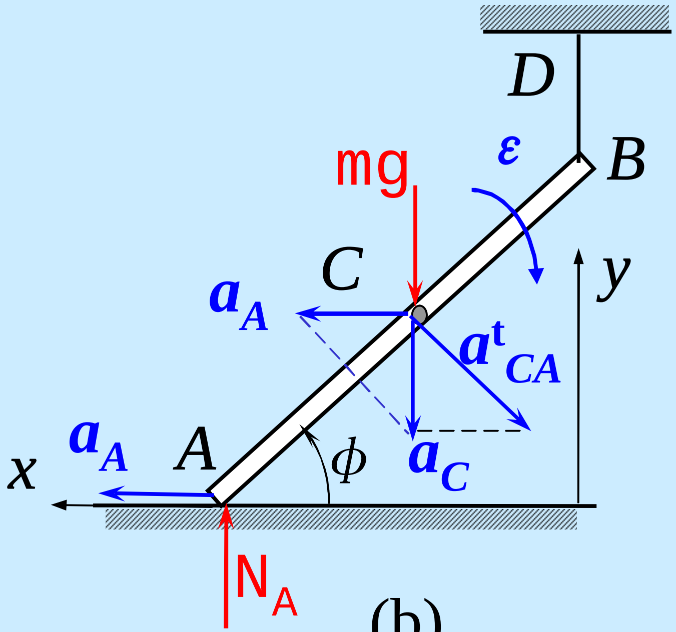
# 动量矩定理

解二：设杆的角加速度 ε 为顺时针方向，坐标系*Oxy*如图，有

$$Ma_{cx} = 0, \quad \dot{x}_c = 常数 = 0,$$

故 $x_c$=常数　　　　　　　　（4）

$$-Ma_{cy} = N_A - Mg, \qquad （5）$$



(b)

$$\left(\frac{1}{12}Ml^2\right)e = N_A \frac{l}{2}\cos j\,,$$

即
$$e = \frac{6N_A \cos j}{Ml} \qquad （6）$$

# 动量矩定理

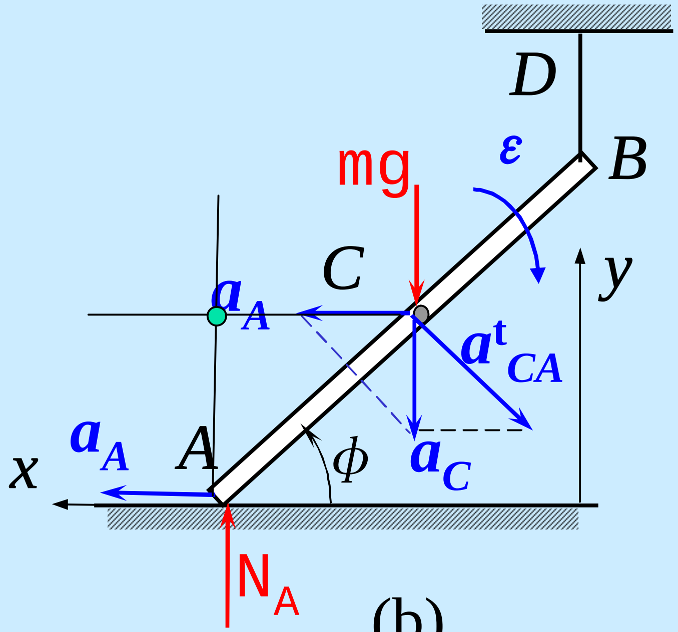
由式（4）知，质心C的加速度$a_c$与轴y平行，取A为基点，有

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{CA}^t + \boldsymbol{a}_{CA}^n ,$$

因初角速度是零，故 $a_{cA}^n = AC \times w^2 = 0$，加速度关系如图b，有

$$a_{cy} = a_c = a_{cA}^t \cos j = \frac{l}{2} e \cos j$$

$$= \frac{1}{2}\cos j \left( -\frac{6N\cos j}{Ml} \right) = \frac{3N\cos^2 j}{M},$$



(b)

代入式（5），得

$$-M \cdot \frac{3N_A \cos^2 j}{M} = N_A - Mg,$$

故A端的约束反力 $$N_A = \frac{Mg}{1+3\cos^2 j} = \frac{2}{5} Mg$$

# 动量矩定理

13-11.匀质圆柱体的质量是m，在其中部绕有细绳，绳的上端B固定不动。现在把圆柱体由静止释放，试求下落高度h时，质心的速度、加速度以及绳索的拉力S。

解一：刚体平面运动微分方程

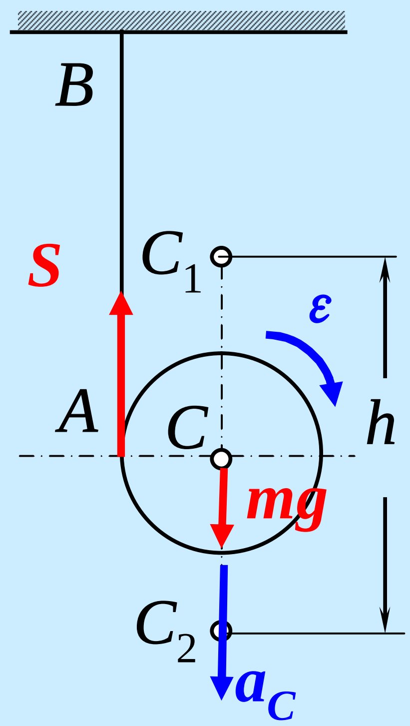
$$ma_c = mg - S \qquad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2}mr^2\right)e = rS, \qquad (2)$$

又 $$a_c = re \qquad (3)$$

把式（2）、（3）代入式（1）得

$$ma_c = mg - \frac{1}{2}ma_c,$$



(a)

# 动量矩定理

$$ma_c = mg - S \qquad （1）$$

$$\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\varepsilon = rS, \qquad （2）$$

又 $$a_c = r\varepsilon \qquad （3）$$

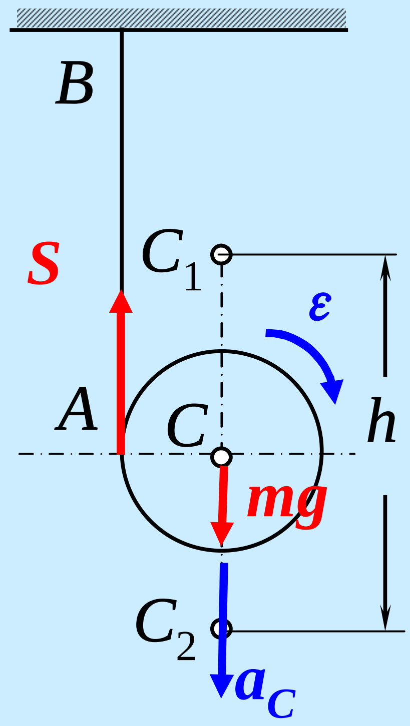
把式（2）、（3）代入式（1）得

$$ma_c = mg - \frac{1}{2}ma_c,$$

故加速度 $$a_c = \frac{2}{3}g = 常量$$

速度 $$v_c = \sqrt{2a_c h} = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$$

把$\boldsymbol{a}_C$代入式（1）得拉力 $$S = m\left(g - \frac{2}{3}g\right) = \frac{1}{3}mg$$



(a)

# 动量矩定理

## 解二：用动能定理

求$\boldsymbol{v}_c$和$\boldsymbol{a}_c$，其中$T_1=0$，而

$$T_2=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)w^2=\frac{3}{4}mv_c^2,$$

$$\sum W=mgh$$

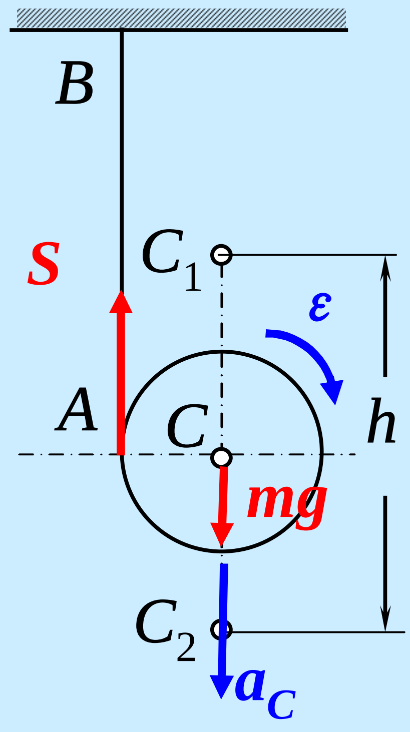
代入 $T_2-T_1=\sum W$ 得

$$\frac{3}{4}mv_c^2-0=mgh \qquad (4)$$

故

$$v_c=\frac{2}{3}\sqrt{3gh}$$

把式（4）对时间求导，得



(a)

# 动量矩定理

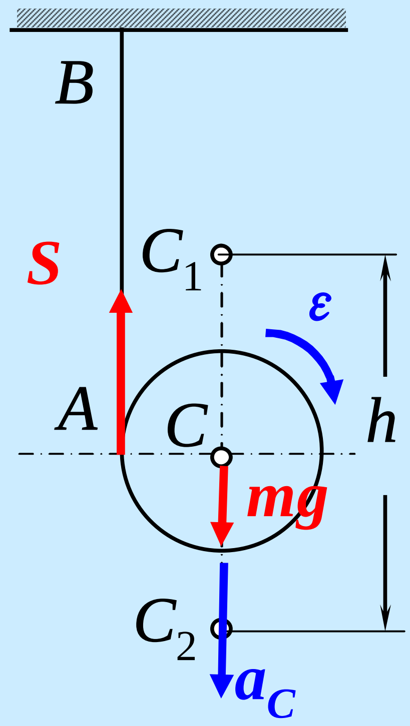
$$\frac{3}{4}mv_c^2 - 0 = mgh \qquad （4）$$

把式（4）对时间求导，得

$$\frac{2}{3}mv_c\frac{dv_c}{dt} = mg\frac{dh}{dt} = mgv_c,$$

故

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = \frac{2}{3}g$$



(a)

# 动量矩定理

**解三：** **用对速度瞬心轴$A$的动量矩定理**

$$\frac{dH_A}{dt} = \sum m_A(F)$$

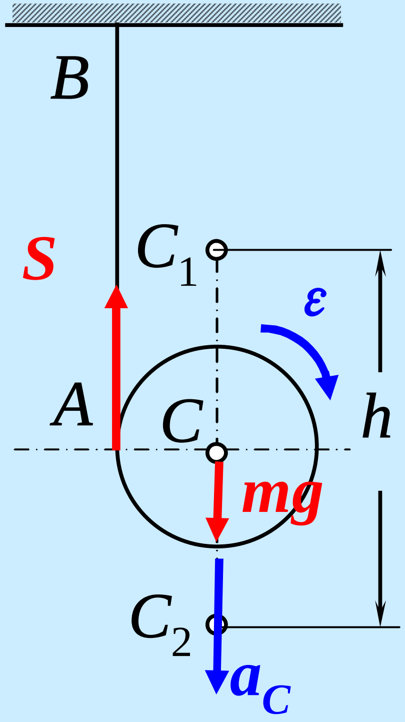
也可求$a_c$和$v_c$，其中

$$H_A = I_A w = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\frac{v_c}{r} = \frac{3}{2}mrv_c,$$

$$\sum m_A(F) = mgr$$

代入得 $$\frac{3}{2}mr\frac{dv_c}{dt} = mgr$$

故 $$a_c = \frac{dv_c}{dt} = \frac{2}{3}g,$$ 而 $$v_c = \sqrt{2a_c h} = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$$




(a)

# 动量矩定理

**解四：** **应用达朗伯原理**(图b)，加惯性力 $Q=-ma_c$和矩为$-I_C\varepsilon$的惯性力偶后，有

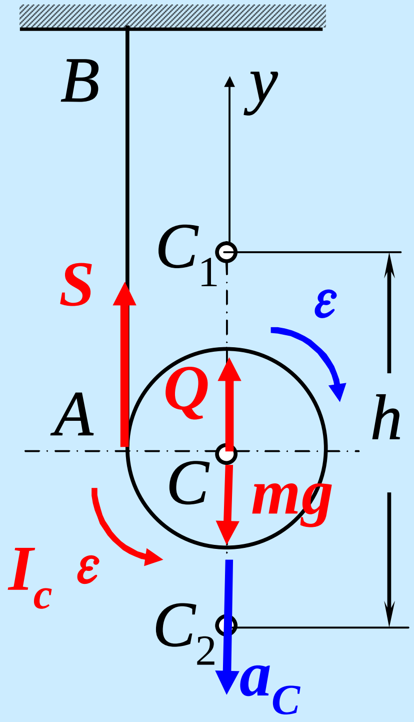
$$\sum m_A(F)=0: \quad Qr-mgr+I_C e=0$$

$$(ma_c-mg)r+\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\frac{a_c}{r}=0$$

故 $$a_c=\frac{2}{3}g,$$

$$\sum F_y=0: \quad S+ma_c-mg=0$$

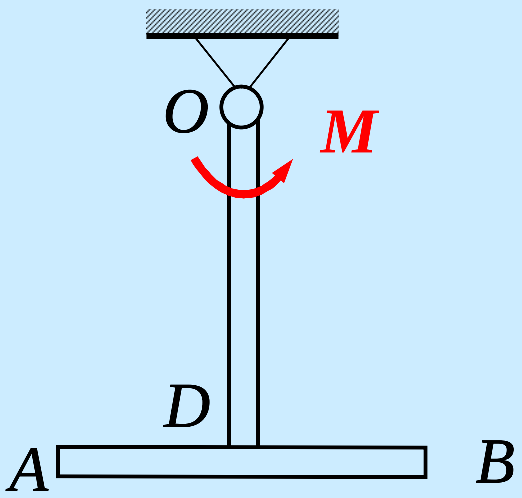
故 $$S=m(g-a_c)=\frac{1}{3}mg$$



(b)

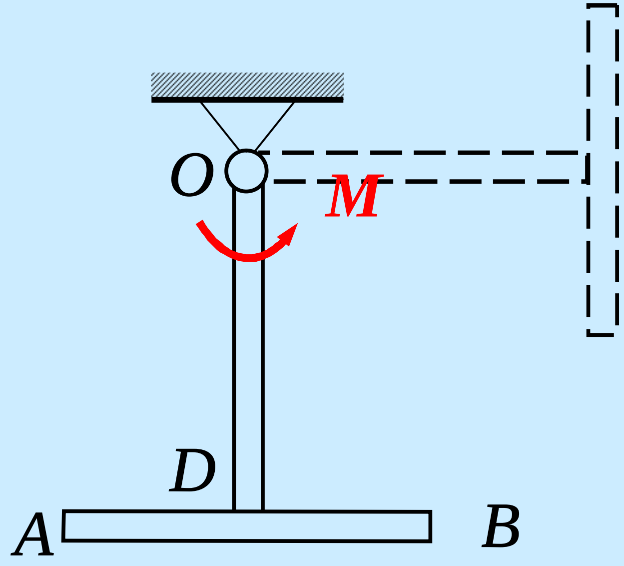
# 动量矩定理

例题. 匀质杆AB和OD，质量均为m，长度都为$l$，垂直的固接成T字型，且D为AB杆的中点，置于铅垂平面内，该T字杆可绕光滑固定轴O转动，如图所示。开始时系统静止，OD杆铅垂。现在一力偶$M=\frac{20}{p}mgl$的常值力偶作用下转动。求OD杆至水平位置时，（1）OD杆角速度和角加速度；（2）支座O处的反力。



# 动量矩定理

解：求ω，应用**动能定理**




$$T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{1}{2} I_O w^2 = \frac{1}{2}(\frac{17}{12} ml^2) w^2$$

$$\sum W = M \times \frac{p}{2} - mg \cdot \frac{l}{2} - mgl = \frac{17}{2} mgl$$

代入 $T_2 - T_1 = \sum W$

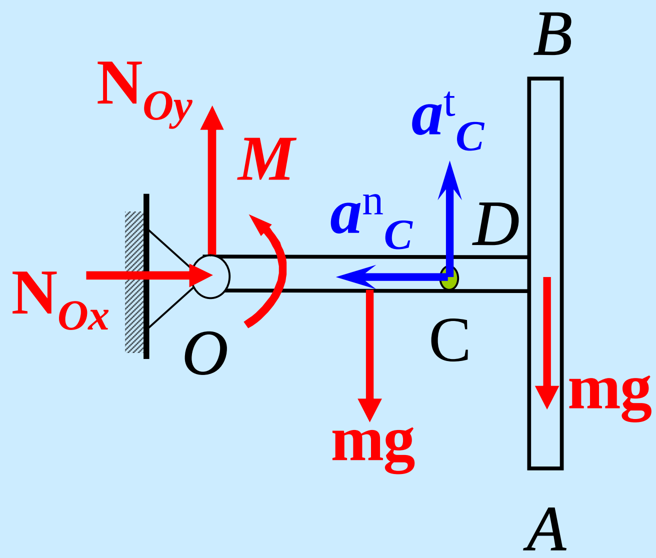
得 $$\frac{17}{24} ml^2 w^2 - 0 = \frac{17}{2} mgl$$

$$w = 2\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

# 动量矩定理

求 ε ,应用**动量矩定理**，当*OD*杆在水平位置时

$$I_O e = M - mg \cdot \frac{l}{2} - mgl$$




其中已知 $M = \frac{20}{p} mgl$

$$\frac{17}{12} ml^2 e = \frac{gl}{2p}(40 - 3p)$$

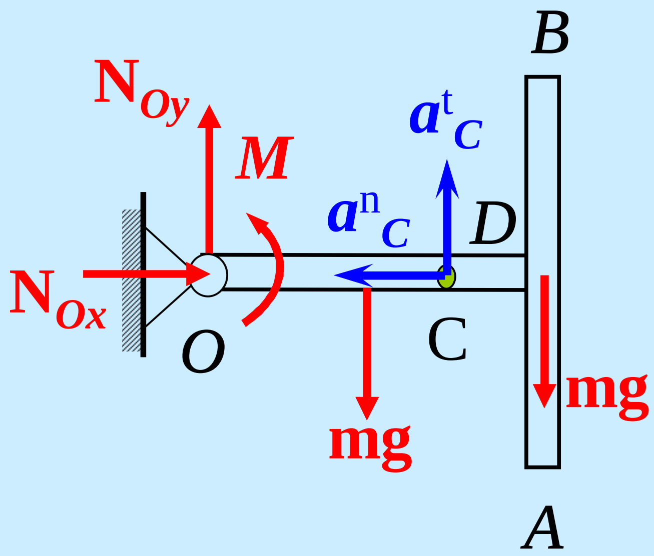
$$e = \frac{6g}{17pl}(40 - 3p)$$

系统质心在图示C点处。

$$a_C^n = \frac{3l}{4} \cdot w^2 = 9g, \qquad a_C^t = \frac{3}{4} l \cdot e = \frac{9g}{34p}(40 - 3p)$$

# 动量矩定理

系统质心在图示$C$点处。




$$a_C^n=\frac{3l}{4}\cdot w^2=9g,$$

$$a_C^t=\frac{3}{4}l\cdot e=\frac{9g}{34p}(40-3p)$$

求反力$N_{ox}$和 $N_{oy}$，应用**质心运动定理**得

$$-2ma_C^n=N_{Ox},$$

$$2ma_C^t=N_{Oy}-2mg$$

解得 $$N_{Ox}=-18mg$$

$$N_{Oy}=2mg+\frac{9mg}{17p}(40-3p)$$

# 动量矩定理

例题. 匀质滚子质量是M，半径是r，对中心轴的回转半径是ρ 。滚子轴颈的半径是$r_0$，轴颈上绕着绳子，绳端作用着与水平面成角α的常力P，设滚子沿水平面作无滑动的滚动；试求滚子质心的加速度，以及保证滚动而不滑动的条件。

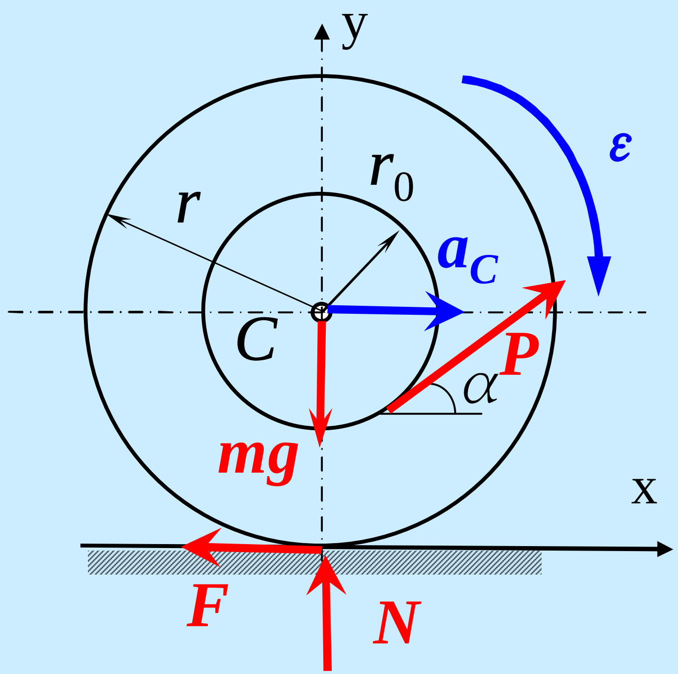
解：根据刚体平面运动微分方程，得

$$Ma_C = P\cos\alpha - F \qquad (1)$$

$$0 = N - Mg + P\sin\alpha \qquad (2)$$

$$(M\rho^2)\varepsilon = Fr - Pr_0 \qquad (3)$$

又 $$a_C = r\varepsilon \qquad (4)$$



# 动量矩定理

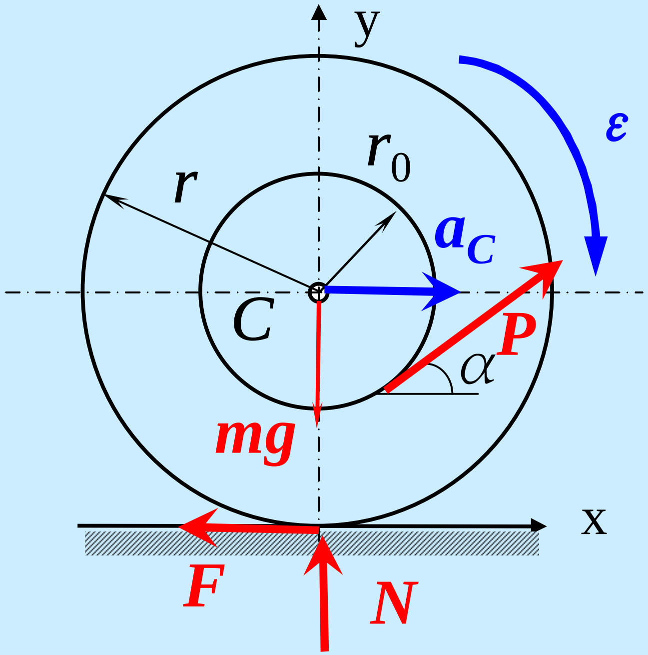
解：根据刚体平面运动微分方程，得

$$Ma_C = P\cos a - F \qquad （1）$$

$$0 = N - Mg + P\sin a \qquad （2）$$

$$\left(Mr^2\right)e = Fr - Pr_0 \qquad （3）$$

又 $$a_C = re \qquad （4）$$




把式（1）和式（4）代入代入式（3），可得加速度

$$a_C = \frac{Pr\left(r\cos a - r_0\right)}{M\left(r^2 + r^2\right)} \qquad （5）$$

滚而不滑的条件是， $F \le fN$。

# 动量矩定理

由式（1）得

$$F = P\cos a - \frac{\Pr\left(r\cos a - r_0\right)}{r^2 + r^2} = \frac{r^2\cos a + rr_0}{r^2 + r^2}P \qquad （7）$$

把式（2）和（7）代入式（6）,得滚而不滑的条件是

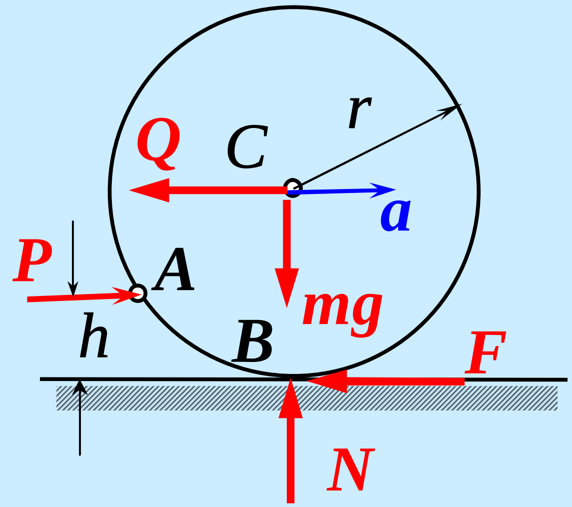
$$f \geq \frac{F}{N} = \frac{P\left(r^2\cos a + rr_0\right)}{\left(Mg - P\sin a\right)\left(r^2 + r^2\right)}$$

# 达朗贝尔原理和动静法

14-3. 质量是m，半径是r的匀质圆球放在粗糙水平面上。在球的铅直中心面上一点A作用着水平向右的力P，使球无滚动地向右滑动，已知球心加速度$a$=0.28g 。设动摩擦因数$f'$ =0.3。试求（1）力P的大小；（2）点A的高度。

解：取圆球为研究对象，小球作平动，受力分析如图。

惯性力大小 $Q = ma$




列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad P - F - Q = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \quad mg - N = 0 \qquad (2)$$

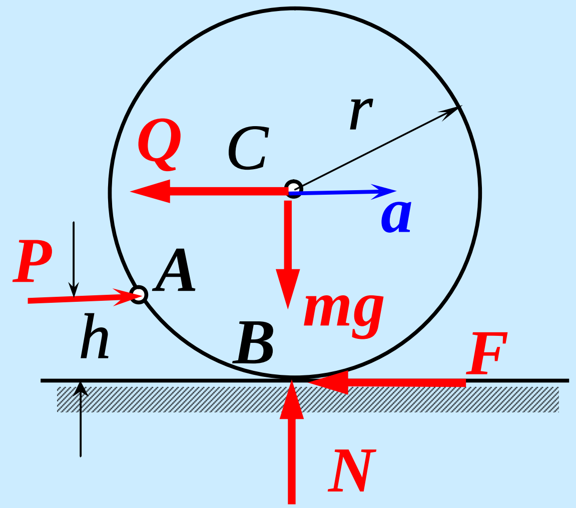
$$\sum M_B = 0, \quad Q \cdot r - Ph = 0 \qquad (3)$$

# 达朗贝尔原理和动静法

$$P-F-Q=0 \qquad (1)$$

$$mg-N=0 \qquad （2）$$

$$Q\cdot r-Ph=0 \qquad （3）$$




又 $F=f'N$

由式（2）得 $N=mg$

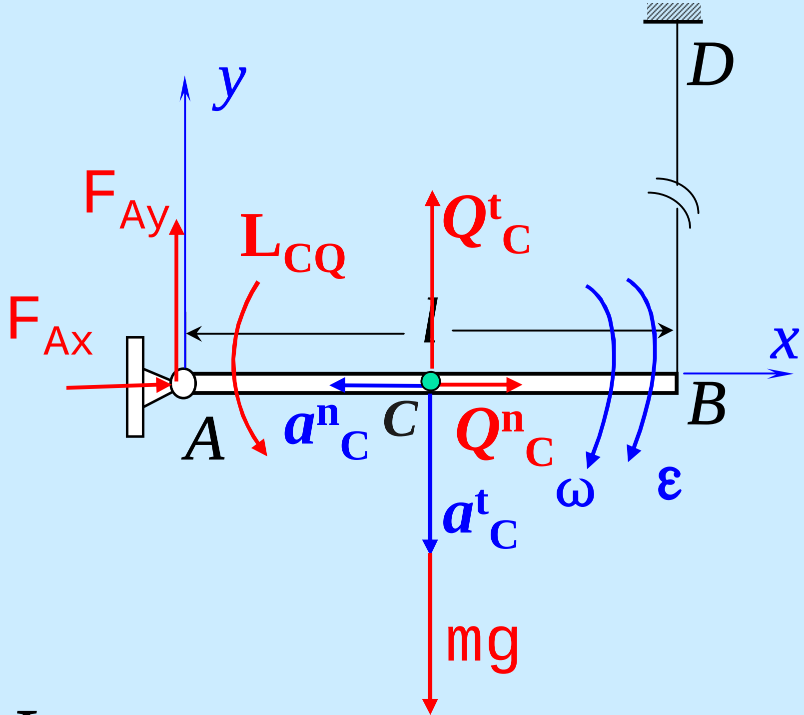
代入式（1）得 $P=f'\times mg+ma=0.5mg$

由式（3）得 $h=\dfrac{Q\cdot r}{P}=0.4r$

# 达朗贝尔原理和动静法

14-8.水平匀质细杆AB长$l$=1m，质量m=12kg，A端用铰链支承，B端用铅直绳吊住。现在把绳子突然割断，求刚割断时杆AB的角加速度 ε 和铰链的动反力$F_A$。

解：取杆为研究对象，受力分析如图。 质心加速度



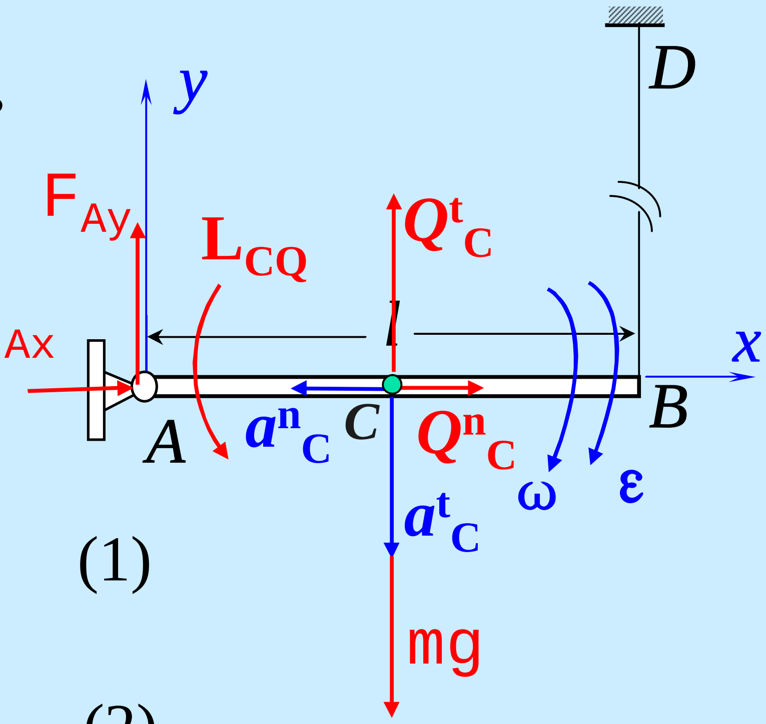

$$a_c^t = \frac{l}{2}e, \qquad a_c^n = \frac{l}{2}w^2$$

将惯性力系向质心C简化，有

$$Q_C^t = m\frac{l}{2}e, \quad Q_C^n = m\frac{l}{2}w^2, \qquad L_{CQ} = I_C e$$

# 达朗贝尔原理和动静法

$$Q_C^t = m\frac{l}{2}e, \quad Q_C^n = m\frac{l}{2}w^2, \quad L_{CQ} = I_C e$$




列平衡方程

$$\sum M_A = 0,$$

$$\frac{1}{12}ml^2e + Q_C^t \cdot \frac{l}{2} - mg\frac{l}{2} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_x = 0, \qquad F_{Ax} + Q_C^n = 0 \qquad (2)$$

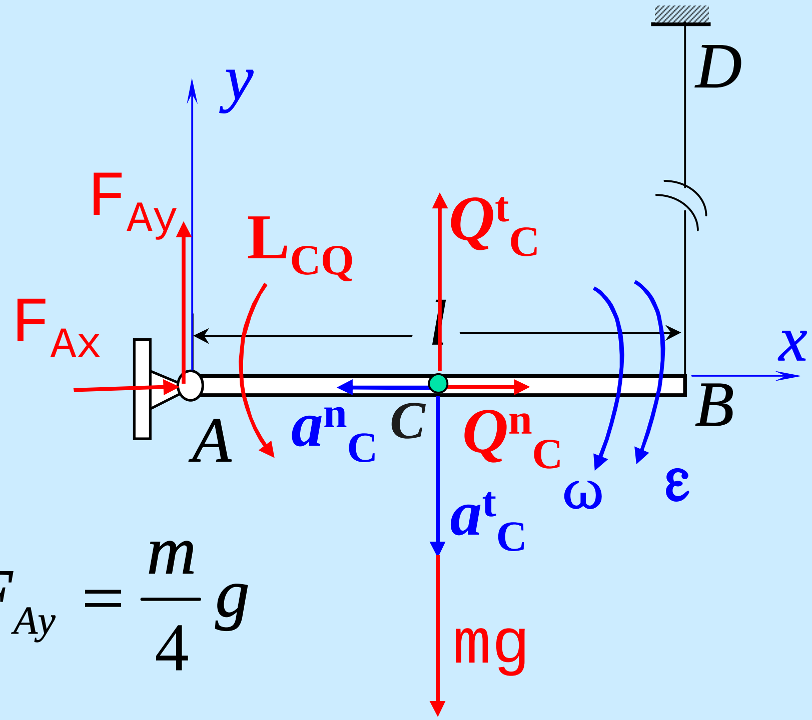
$$\sum F_y = 0, \qquad F_{Ay} + Q_C^t - mg = 0 \qquad （3）$$

# 达朗贝尔原理和动静法

$$\frac{1}{12}ml^2e+Q_C^t\cdot\frac{l}{2}-mg\frac{l}{2}=0$$

$$F_{Ax}+Q_C^n=0$$

$$F_{Ay}+Q_C^t-mg=0$$




解得 $e=\dfrac{3\,g}{2\,l}$， $F_{Ax}=-m\dfrac{l}{2}w^2$， $F_{Ay}=\dfrac{m}{4}g$

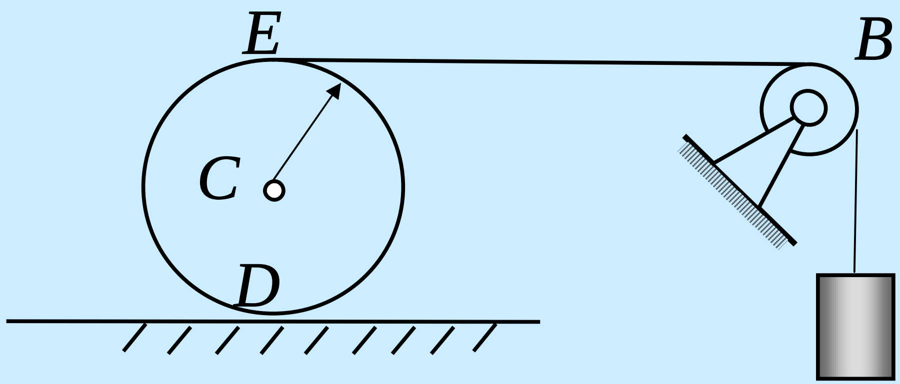
绳子刚割断时有ω=0，所以

$$e=14.7\,\mathrm{rad}/\mathrm{s}^2,\quad F_{Ax}=0,\quad F_{Ay}=29.4N$$

**注意：惯性力若向铰链A简化，则惯性力应该画在A处，且 $L_{AQ}=I_A\varepsilon$ 。**

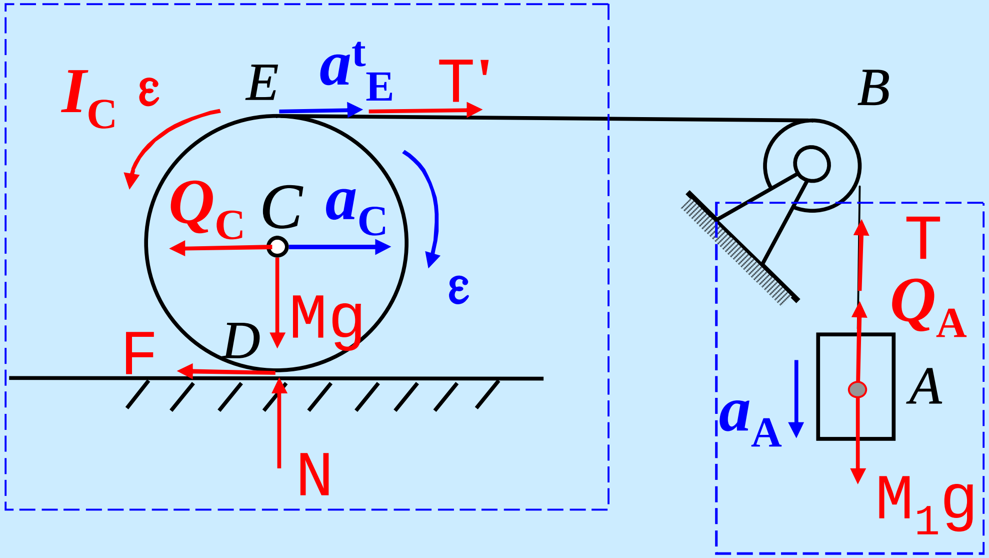
# 达朗贝尔原理和动静法

14-16.匀质滚子质量M=20kg，被水平绳拉着在水平面上作纯滚动。绳子跨过滑轮B而在另一端系有质量$M_1$ =10kg的重物A。求滚子C中心的加速度。滑轮和绳的质量都忽略不计。



# 达朗贝尔原理和动静法

**解一**：用**达朗伯原理**，分别取重物A和滚子为研究对象，在重物上加惯性力$Q_A=-M_1a_A$，在滚子上加惯性力$Q_c=-Ma_c$和矩为$-I_c\varepsilon$的惯性力偶。




其中 $r\varepsilon=a_c=\dfrac{1}{2}a_A.$

对重物A，有 $\sum F_y=0,$

$$M_1a_A+T-M_1g=0 \quad （1）$$

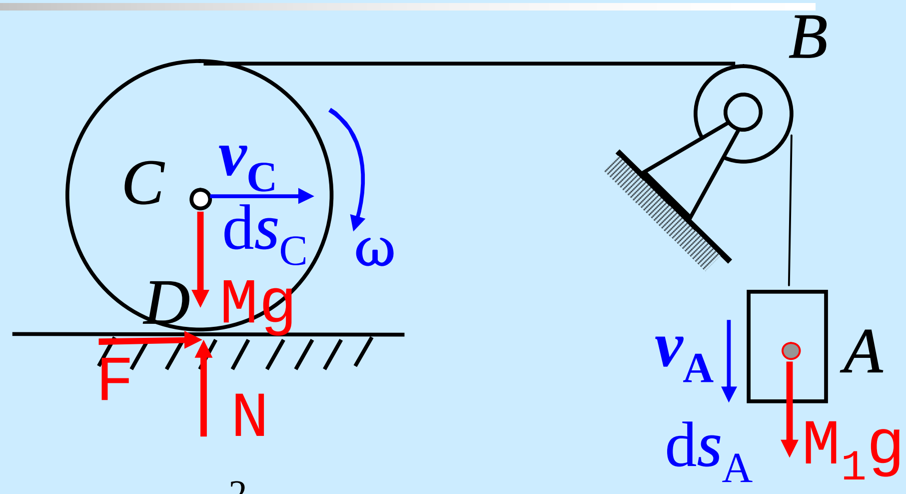
对滚子有 $\sum M_D(F)=0,$

$$\left(\frac{1}{2}Mr^2\right)\frac{a_c}{r}+Ma_cr-2T'r=0 \quad （2）$$

联立解得点C的加速度 $a_c=\dfrac{4M_1g}{3M+8M_1}=2.8\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$

# 达朗贝尔原理和动静法

## 解二：用微分形式动能定理




$$dT = \sum d'W$$

其中

$$T = \frac{1}{2}M_1 v_A^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}Mr^2)(\frac{v_c}{r})^2 = \frac{v_c^2}{4}(8M_1 + 3M)$$

$$\sum d'W = M_1 g \cdot ds_A = 2M_1 g ds_c$$

代入得 $$\frac{1}{2}v_c\frac{dv_c}{dt}(3M+8M_1) = 2M_1 g\frac{ds_c}{dt}$$

故 $$a_c = \frac{dv_c}{dt} = \frac{4M_1 g}{3M+8M_1}$$