§3 正态总体方差的假设检验

一、单个正态总体方差的检验

设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ, σ^2均未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的样本, 给定显著性水平α。

1. 检验 H_0：$\sigma^2 = \sigma_0^2$；H_1：$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$（σ_0^2已知）

由于样本方差S^2是总体方差σ^2的无偏估计, 故S^2的估计值反映了σ^2的大小。故当H_0为真时, $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$一般来说应该在1附近波动, 而不应过分大于or过分小于1。

一、单个正态总体方差的检验

设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ, σ^2均未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的样本，给定显著性水平α。

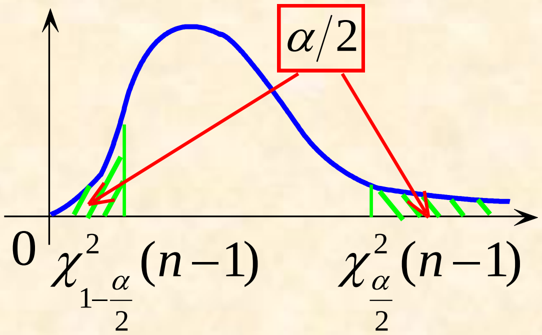
1. 检验 H_0：$\sigma^2 = \sigma_0^2$；H_1：$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$（σ_0^2已知）

检验统计量 $$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0\text{真}}{\sim} \chi^2(n-1)$$

拒绝域(形式) $$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le k_1 \quad \text{或} \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge k_2$$

控制P$\{$拒绝$H_0 | H_0$为真$\}$

$$= P_{\sigma_0^2}\left\{\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1\right) \cup \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\right)\right\} \overset{令}{=} \alpha$$



为方便计算，取

$$P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1\right\} = \frac{\alpha}{2}, \quad P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\right\} = \frac{\alpha}{2}$$

可知 $k_1 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \quad k_2 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

拒绝域 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

2. 右边检验 H_0： $\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$； H_1： $\sigma^2 > \sigma_0^2$ （σ_0^2已知）

检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

拒绝域(形式)

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq k \, ?$$

H_0：$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$；$H_1$：$\sigma^2 > \sigma_0^2$

若$\sigma^2 \le \sigma_0^2$,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k$$

$$\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge k\right\} \supset \left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k\right\}$$

控制 $P\{拒绝H_0 | H_0为真\}$

$$= P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k\right\}$$

$$\le P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge k\right\} \overset{令}{=} \alpha$$

$\chi^2(n-1)$

可知$k = \chi^2_\alpha(n-1)$, 故拒绝域 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_\alpha(n-1)$

单个正态总体方差检验的拒绝域如下，即**P190**表8.1

假设	检验统计量	拒绝域
$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$或 $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2, H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2, H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$

上述单个正态总体方差的检验法称为 χ^2检验法。

二、两个正态总体方差的检验

设$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$是来自总体$X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$的样本,

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$是来自总体$Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$的样本,

且X与Y独立，它们的样本方差分别为S_1^2，S_2^2。

且设$\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$均未知，显著性水平为$\alpha$,

求检验

$$\mathrm{H}_0: , \sigma_1^2 \le \sigma_2^2; \quad \mathrm{H}_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

的拒绝域？

检验 H_0： $\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$； H_1： $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

若 $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$,

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \ge \frac{S_1^2}{S_2^2} \ge k$$

$$\left\{\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \ge k\right\} \supset \left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} \ge k\right\}$$

检验统计量 $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

拒绝域(形式) $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} \ge k$?

控制 $P\{拒绝H_0 | H_0为真\}$

$$= P_{\sigma_1^2 \le \sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} \ge k\right\} \le P_{\sigma_1^2 \le \sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \ge k\right\} \overset{令}{=} \alpha$$

$F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

故拒绝域 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} \ge F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$

此外，关于两个正态总体方差的另外两个检验的拒绝域见P190表8.1，如下：

假设	检验统计量	拒绝域
$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F\leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F\geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$
$H_0:\sigma_1^2\geq\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$		$F\leq F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
$H_0:\sigma_1^2\leq\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$		$F\geq F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

上述检验法称为***F* 检验法**。

P191例2 说明

关于两个正态总体方差是否相等的双边检验问题:

$$H_0:\ \sigma_1^2=\sigma_2^2;\quad H_1:\ \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

如果两个总体的方差相等，称两总体具有方差齐性。

以上介绍了参数假设检验的基本思想和步骤，针对单个、两个正态总体的均值和方差进行显著性检验，对此部分内容总结如下：

1. 确定原假设H_0

在显著性检验中，原假设是作为检验的前提而提出来的，而备择假设是当原假设被拒绝后才被接受的，这就决定了原假设与备择假设不是处于对等的地位。原假设H_0是受到保护的，只有取得了不利于H_0的显著证据时，才能拒绝H_0。因此，H_0的选取在假设检验中至关重要。

H_0是受保护的，一般遵循以下原则确定：

① 把后果严重的错误作为第Ⅰ类错误；

显著性检验是控制犯第Ⅰ类错误的概率，它的大小可由显著水平来限制。如：有病判无病，新药品有毒，药品为假等。

② 把久已存在的状态作为H_0；

原有的理论、看法、状况，或那些历史的、经验的。没有充分证据证明其错误之前，作为H_0。

如：将新技术未提高效益作为H_0（我们感兴趣的是提高效益，但对采取新技术应持谨慎态度，一旦H_0被拒绝，表示有理由采用新技术）

H_0是受保护的，一般遵循以下**原则**确定：

③ 把将研究者收集证据想予以反对的假设作为H_0。

如：P182例2 公司从生产商购买牛奶, 公司怀疑生产商在牛奶中掺水以谋利. 通过测定牛奶的冰点, 可以检验出牛奶是否掺水. 天然牛奶的冰点温度近似服从$N(\mu_0=-0.545℃, \sigma=0.008 ℃)$. 牛奶掺水可使冰点温度升高而接近于水的冰点温度(0 ℃). 测得生产商提交的5批牛奶的冰点温度, 其均值为−0.535℃, 问是否可以认为生产商在牛奶中掺了水？ $\alpha=0.05$

分析 公司通过抽样来证实牛奶中是掺水的，即反对牛奶未掺水($\mu\leqslant\mu_0$是要反对的), 如果没有怀疑就没有必要抽检。所以，建立的假设是 $H_0: \mu\leqslant\mu_0$；$H_1: \mu>\mu_0$

另外说明

如：在提出原假设H_0

（$H_0: \mu \leqslant \mu_0$ 或 $H_0: \mu \geqslant \mu_0$）

时，等号=一定要放在H_0中，而不能放在H_1中。这是因为我们对犯第Ⅰ类错误的概率要进行计算使它不大于给定显著水平α，而通常正是在$\mu = \mu_0$时计算的，故等号要放在H_0中。

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu \leqslant \mu_0;\ H_1: \mu > \mu_0 \\ H_0: \mu = \mu_0;\ H_1: \mu > \mu_0 \end{array}\right\}$$

备择假设相同，

拒绝域相同

2. 检验统计量的选择

检验统计量与H_0有关, 满足:

① 样本的函数; 判断的依据是样本.

② 不含未知参数; 这样才能计算检验统计量的观察值.

③ 包含原假设H_0中已知参数(即包含待检验的参数);

这样才能对H_0是否成立作出判断.

④ 双边检验问题, H_0成立时检验统计量的分布已知.

这样才能依据其分布和显著水平α来确定拒绝域.

常见参数检验问题的检验统计量已列于P189表8.1。

3. 显著性水平α的选取

在显著性检验中，控制犯第Ⅰ类错误的概率为α ,α即为显著性水平。α的大小表明检验者对H_0的偏爱程度；

α越小，对H_0愈是偏爱，越不轻易拒绝H_0 。

针对α的选取，主要考虑以下因素：

① 视检验者对H_0的可信程度而定；

如：根据历史经验有充分把握H_0是正确的，第Ⅰ类错误后果特别严重的，对新产品上市把握严格些等，α取小些；反之，如果对H_0无偏爱，α取大些，这也可以避免由于偏爱造成检验失误。

3. 显著性水平α的选取

② 检验者立场不同可能会对α有不同要求；

如：生产者：希望将合格品误认为不合格品的可能性尽可能小，即犯第 I 类错误的风险要尽可能小，此时α应取小些；

验收者：希望将不合格品误认为合格品的可能性尽可能小，即犯第II类错误的风险要尽可能小，此时α应取大些；

宁可真当假，莫把假当真。

4. 接受H_0不一定说明H_0为真。

在显著性检验方法中，得出**接受H_0的结论，只是说明抽样结果没有提供对H_0不利的显著证据，不足以拒绝H_0，但又必须作出明确选择的判断。**接受H_0只能说明试验结果与H_0不矛盾。

显著性检验是从控制犯第Ⅰ类错误的概率不超过给定显著水平α所作出的判断, α虽小，但第Ⅱ类错误(H_0不真时接受H_0)的概率仍很大。所以，**接受H_0只意味着决定采取的某种行动，并不一定说明H_0是真的**。同样, **拒绝一个假设也不意味着它是假的**，这也仅是采取的另一不同行动。不管哪种情况，都存在作出错误选择的可能性。

5. 拒绝域的确定

一般，从对H_0不利的角度(H_1)来确定拒绝域的形式，利用显著性检验控制犯第 I 类错误的概率不超过给定显著性水平，再依据所选检验统计量的概率分布，最终确定拒绝域。

需要注意的是：在对同一参数的检验问题中，尽管检验统计量相同，但双边检验和单边检验问题的拒绝域是不同的。

例1　某厂生产小型马达，说明书上写着：在正常负载下平均耗电流不超过0.8A。随机测试16台马达，平均耗电流0.92A，标准差0.32A。设马达所消耗的电流服从正态分布，取显著性水平α=0.05，问根据此样本，能否否认厂房的断言？

已知样本均值$\overline{x}=0.92$, 样本标准差$s=0.32$, $n=16$,
检验关于总体均值μ的假设检验问题。

说明书：在正常负载下平均耗电流不超过0.8A

解: 法1 不轻易否定厂方断言

检验 H_0： $\mu \leqslant 0.8$； H_1： $\mu > 0.8$

总体标准差未知，选取检验统计量 $t=\dfrac{\bar{X}-0.8}{S/\sqrt{n}}$

已知 $S=0.32,\ n=16$, 拒绝域 $\dfrac{\bar{x}-0.8}{0.32/\sqrt{16}} \geq t_{0.05}(16-1)$

计算检验统计量的观察值 $\dfrac{0.92-0.8}{0.32/\sqrt{16}}=1.5 < 1.7531$

落在拒绝域之外，故接受H_0，即不能否定厂方断言。

说明书：在正常负载下平均耗电流不超过0.8A

法2 不轻易相信厂方断言

检验 H_0：$\mu \geq 0.8$；H_1：$\mu < 0.8$

选取相同检验统计量 $t = \dfrac{\bar{X} - 0.8}{S/\sqrt{n}}$

拒绝域 $\dfrac{\bar{x} - 0.8}{0.32/\sqrt{16}} \leq -t_{0.05}(16-1)$

计算检验统计量的观察值 $\dfrac{0.92 - 0.8}{0.32/\sqrt{16}} = 1.5 > -1.7531$

落在拒绝域之外，故接受H_0，即否定厂方断言。

由该例题可见：对假设问题的提法不同(即把那个假设当原假设)，统计检验的结果也不会相同。

为何用假设检验处理同一问题会得到截然相反的结果?

这里一个原因是与把那个假设作为原假设有关，另一个原因是样本容量*n*不够大。若样本容量*n*足够大，则不论把那个假设作为原假设，所得检验结果基本上应该是一样的。否则，假设检验便无意义了。

§4 分布拟合检验

（Goodness of Fit Test）

前面我们介绍的是参数假设检验，本节介绍当总体分布未知时，利用样本来检验关于总体分布的假设。重点掌握分布的χ^2拟合检验法。

为了对总体的分布形式作出假设，必须先对样本数据有个粗略了解，可以先根据所给数据绘制直方图(第六章§2内容)。

一、χ^2拟合检验法

总体X 的分布未知，由样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$来检验总体X 的分布假设。

假设 H_0：总体X 的CDF为$F(x; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r)$；

H_1：总体X 的CDF不为$F(x; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r)$。

注：H_1也可以不写

离散总体 H_0: 总体X的分布律为

$$\mathrm{P}\{X = x_i\} = p(x_i; \theta_1, \cdots, \theta_r), \quad i = 1, 2, \cdots$$

连续总体 H_0: 总体X的PDF为$f(x; \theta_1, \cdots, \theta_r)$

- 若H_0中的分布函数不含有未知参数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r$，关于该假设的检验，称为单个分布的 χ^2检验。

- 若H_0中的分布函数含有未知参数$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$，当参数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r$取不同的值时便得到不同的分布，此时 $F(x; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r)$代表一族分布，关于该假设的检验，称为分布族的 χ^2检验。

注意　用 χ^2 检验法时，若H_0中的分布函数含有未知参数，此时应先用最大似然估计法估计出未知参数，然后再做检验。

χ^2检验法的基本思想

① 将总体 X 的可能取值的全体 Ω 分为k($k>r+1$)个互不相交的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$，以 f_i ($i=1,2,\cdots,k$)表示样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$中落入A_i的的个数；

② 在H_0成立下，计算 $p_i=P(A_i)$，$i=1,2,\cdots,k$；

③ 在 n 次试验中，事件A_i出现的频率 f_i/n 与 p_i 之间会有差异。但一般来说，若H_0为真且n很大时，这种差异不应太大。基于此，**Pearson**使用如下检验统计量作为衡量上述差异的综合指标：

检验统计量 $$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(f_i-np_i\right)^2}{np_i}$$

f_i—经验频数

np_i—理论频数

$$\underline{\underline{\text{化简}}}\ \sum_{i=1}^{k}\frac{f_i^2}{np_i}-n$$

Pearson指出：H_0为真时，χ^2检验统计量的观察值倾向于较小；否则χ^2检验统计量值较大；并给出如下定理：

定理 若n充分大($n\geqslant 50$)，则当H_0为真时，统计量

$$\chi^2\overset{\text{近似}}{\sim}\chi^2\left(k-r-1\right)$$

依据该定理，针对上述假设问题，若给定显著性水平α，则其拒绝域为：

$$\chi^2 \geq \chi^2_\alpha(k-r-1)$$

将上述利用χ^2检验统计量进行的检验，称为χ^2拟合检验法。

使用χ^2拟合检验法时应满足 $n \geqslant 50$ 且 $np_i \geqslant 5$。

注意　若不满足 $np_i \geqslant 5$，则应适当合并A_i；一般是合并与A_i相邻的一个或多个A_i，直至满足$np_i \geqslant 5$。合并A_i后，k 值发生相应变化。

直方图

目　的

直方图是统计整理样本观察值的数据，用于初步了解总体的分布情况，以便对总体的分布型式做出假设。

绘制直方图步骤：

1. 找出数据的最大值M和最小值m, 选择一个合适的区间$[a,b]$, a比m略小, b比M略大, 则区间$[a,b]$包含了所有样本观察值。

2. 将区间$[a,b]$等分为k个小区间, 小区间的长度$\Delta=(b-a)/k$称为组距, 端点称为组限。数出落在每个小区间内的数据的个数f_i， f_i为第i个子区间的频数 f_i。

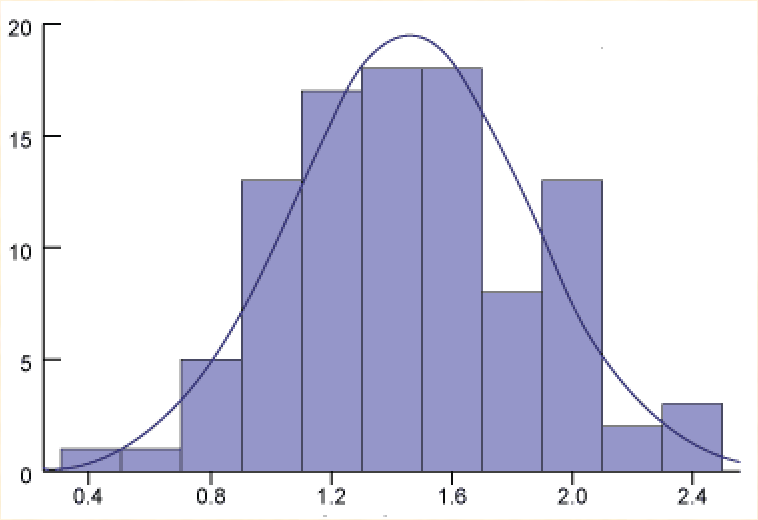
3. 计算出第i个子区间的频率 f_i/n。

4. 在区间$[a, b]$上从左至右, 依次在各个子区间上, 以$(f_i/n)/\Delta$(频率/组距,即单位区间上的频率)为高作小矩形。即画出了直方图。

显然，每个小区间上矩形的面积就等于数据落在该小区间的频率f_i/n。n很大时，频率接近于概率。因此，一般来说每个小区间上的矩形面积接近于概率密度函数曲线之下该小区间之上的曲边梯形的面积。

于是，一般来说：

直方图的外轮廓曲线接近于总体的概率密度曲线。



说 明

(1) 划分子区间数目

$$n<50,\ k=5\sim6;\quad n\geq 50,\ k=10\sim20.$$

(2) 子区间端点通常取比数据精度高一位，以免数据落在分点上。

小结

- 本节介绍了正态总体方差的假设检验，以及关于总体分布的拟合检验。

作业

Pages 220-222：
第13, 15, 17, 23, 25题