西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

运 动 学

刚体的平面运动

西北工业大学

主讲　朱西平

刚体的平面运动

刚体平移与定轴转动是最常见的、简单的刚体运动,称为刚体的基本运动。刚体还可以有更复杂的运动形式，其中，刚体的平面运动是工程机械中较为常见的一种刚体运动，它可以看作为平移与转动的合成，也可以看作为绕不断运动的轴的转动。

本章就分析刚体平面运动的分解，平面运动刚体的角速度、角加速度，以及刚体上各点的速度和加速度。

运　动　学

第四章　刚体的平面运动

§ 4–1 刚体平面运动简化与分解

§ 4–2 平面运动的速度分析

§ 4–3 平面运动的加速度分析

§ 4–4 刚体转动的合成

§4–1 刚体平面运动简化与分解

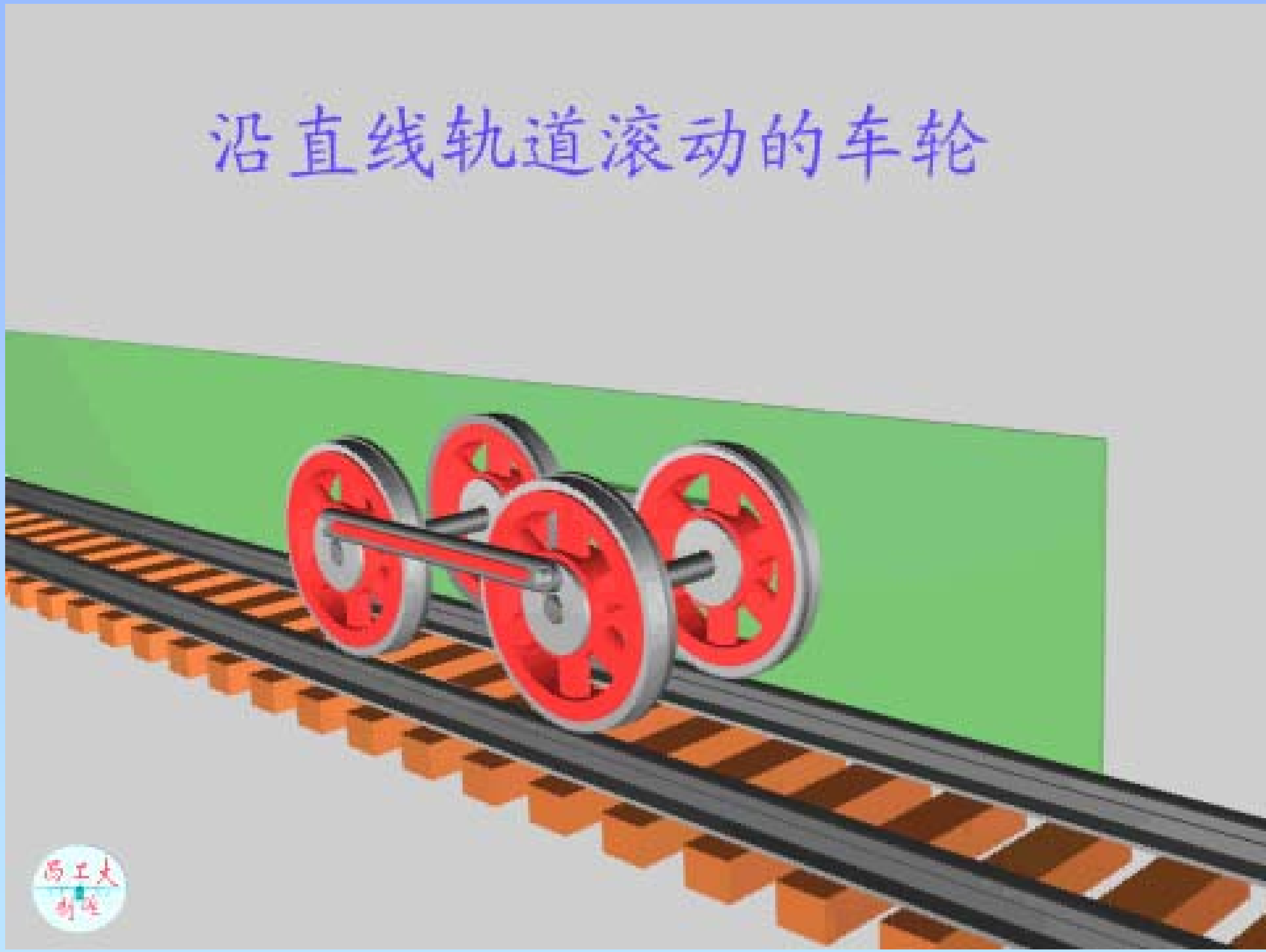
- 刚体平面运动简化
- 刚体平面运动方程
- 刚体平面运动的分解

§4–1 刚体平面运动简化与分解

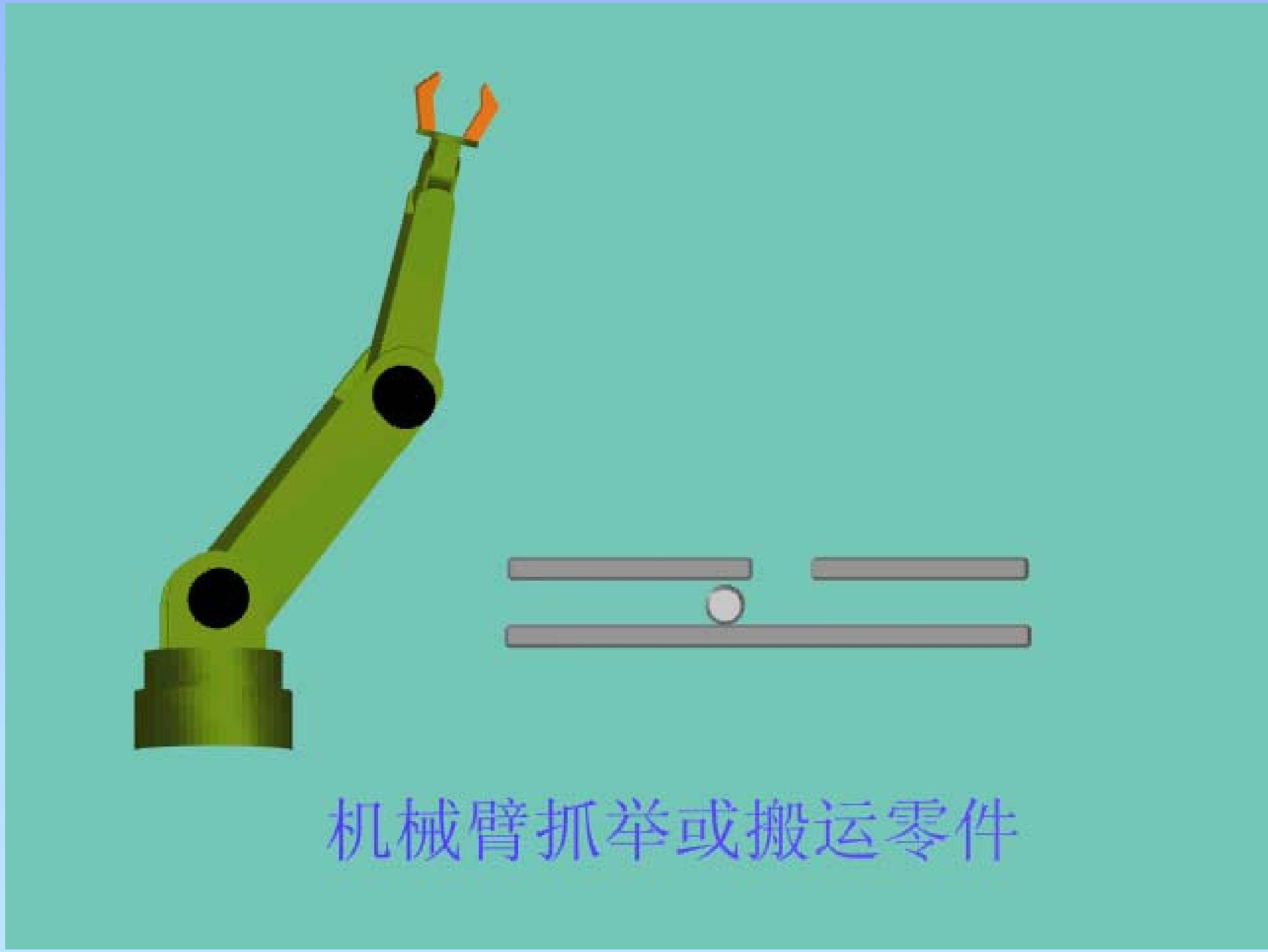
- 刚体平面运动实例

§ 4–1 刚体平面运动简化与分解

平面运动实例

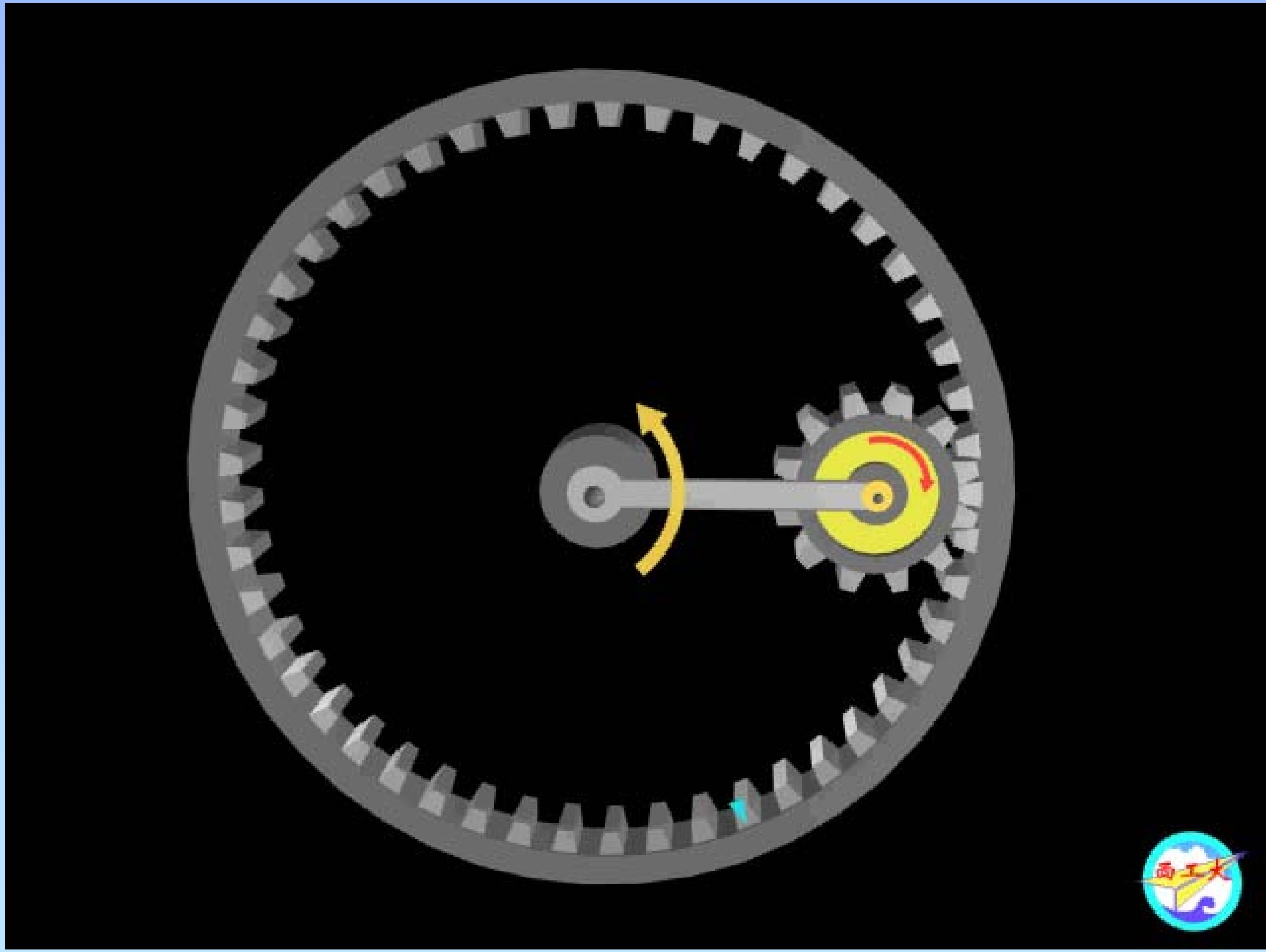


§4–1 刚体平面运动简化与分解



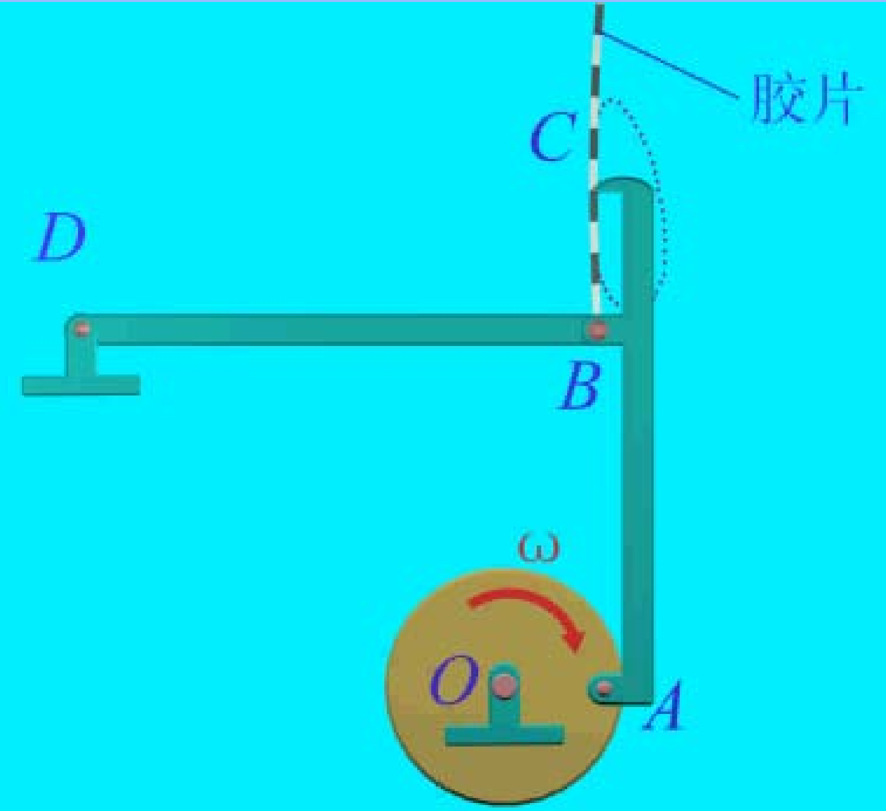
§ 4–1 刚体平面运动简化与分解

平面运动实例



§ 4–1 刚体平面运动简化与分解

平面运动实例



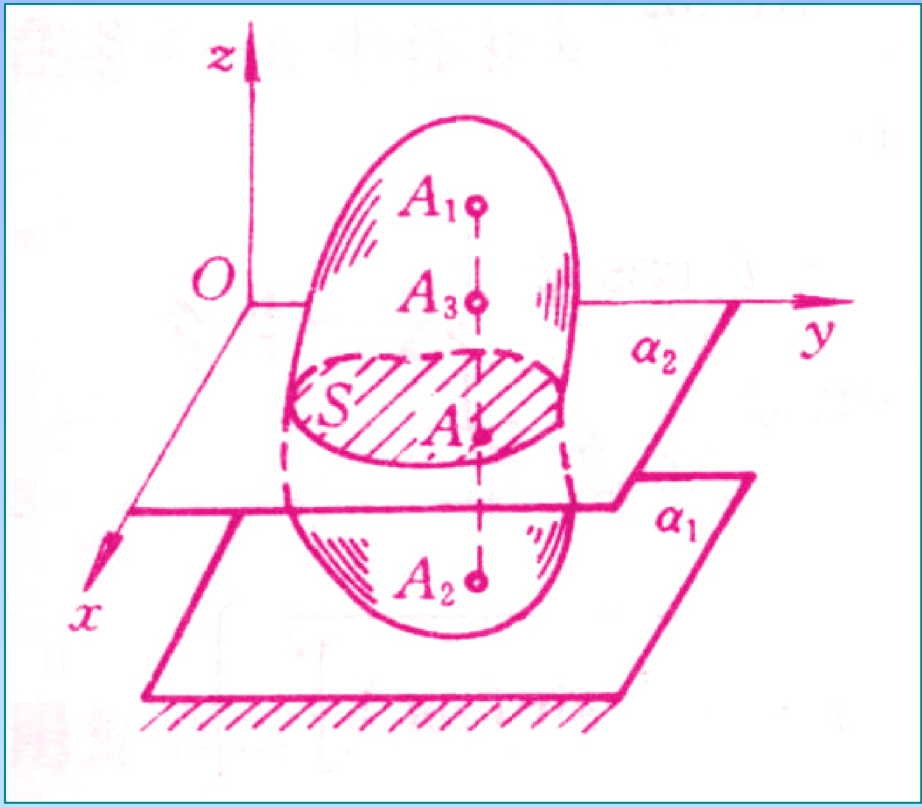
电影放映机中的四连杆机构

§4–1 刚体平面运动简化与分解

1. 刚体平面运动简化

刚体的平面运动— 运动过程中，刚体上**各点**到某一**固定平面**的距离保持不变。（或者说，刚体内各点都在平行于某一固定平面的一些平面内运动，具有这种特征的运动称为平面运动）

(1) 刚体平面运动特点

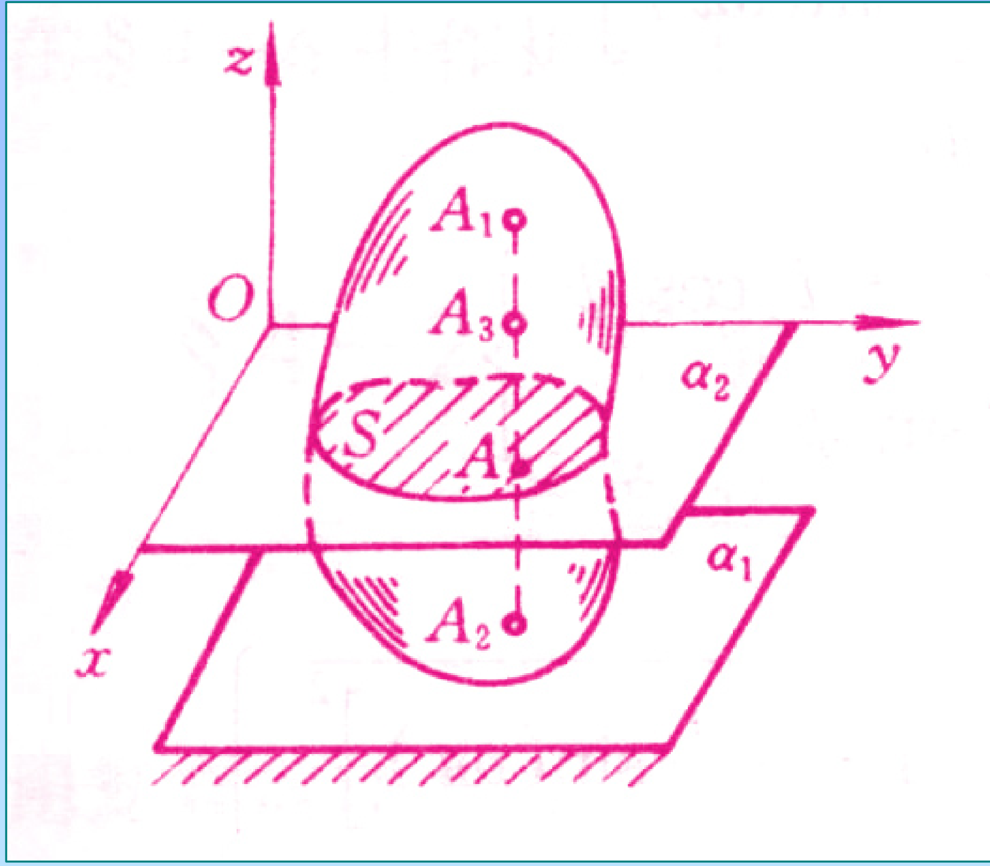


- 刚体上所有平行于固定平面的平面具有相同的运动规律；
- 这些平面上的对应的点（A1，A2，A3）具有相同运动轨迹、速度和加速度。

(2) 简化

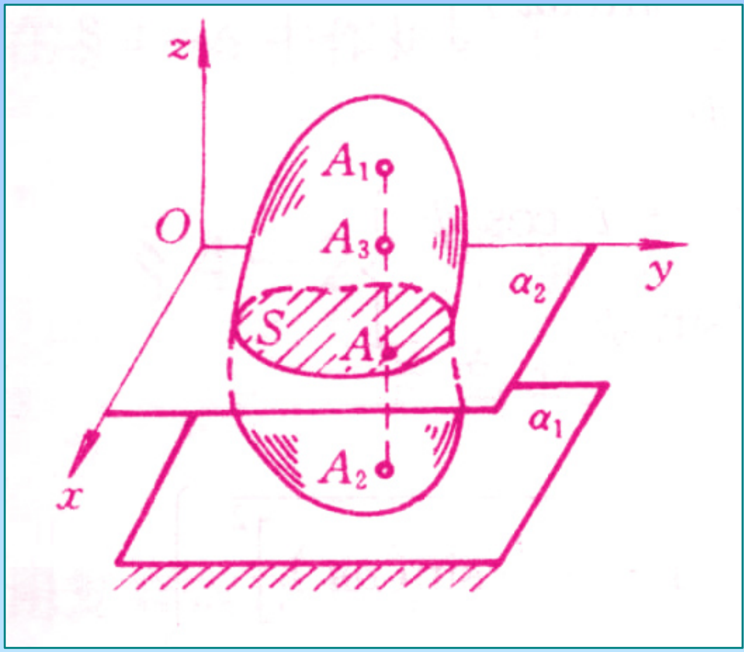
- 平面图形

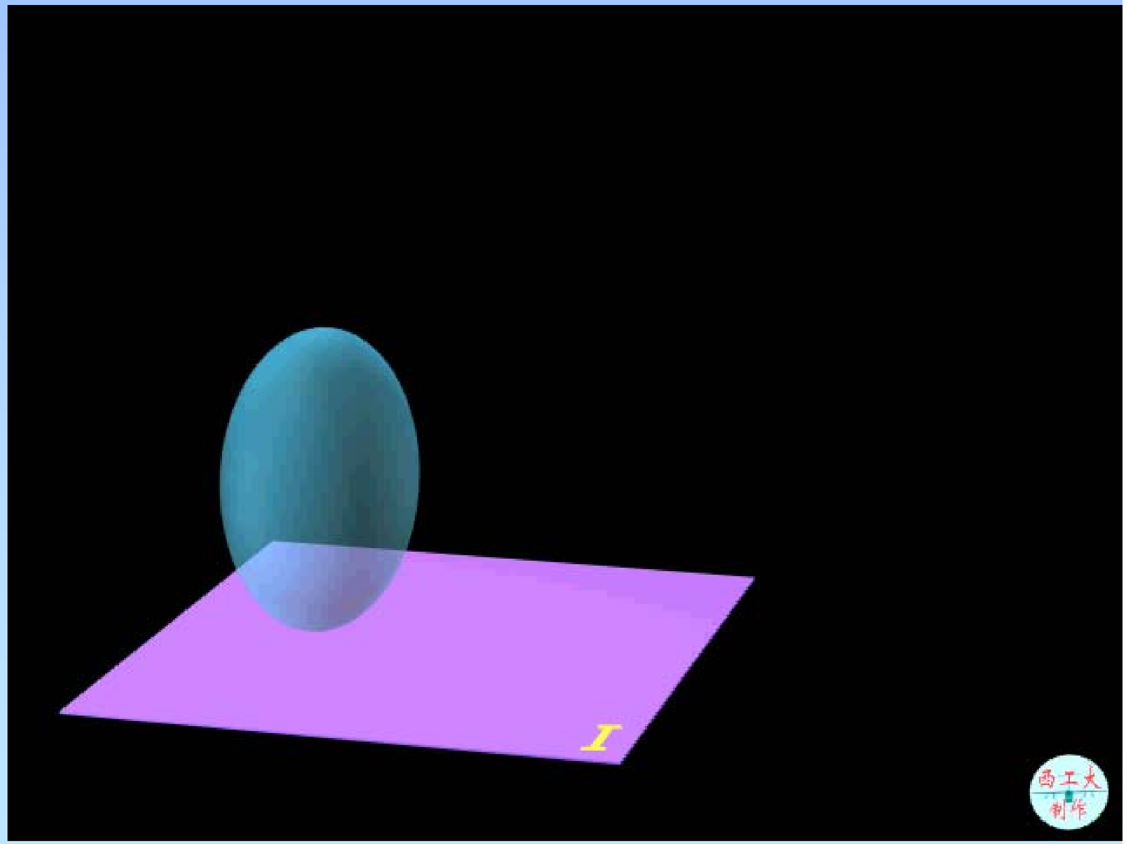
平面图形—在刚体上作平行于固定平面的平面，这样的平面与刚体轮廓的交线所构成的图形。



● 平面运动简化

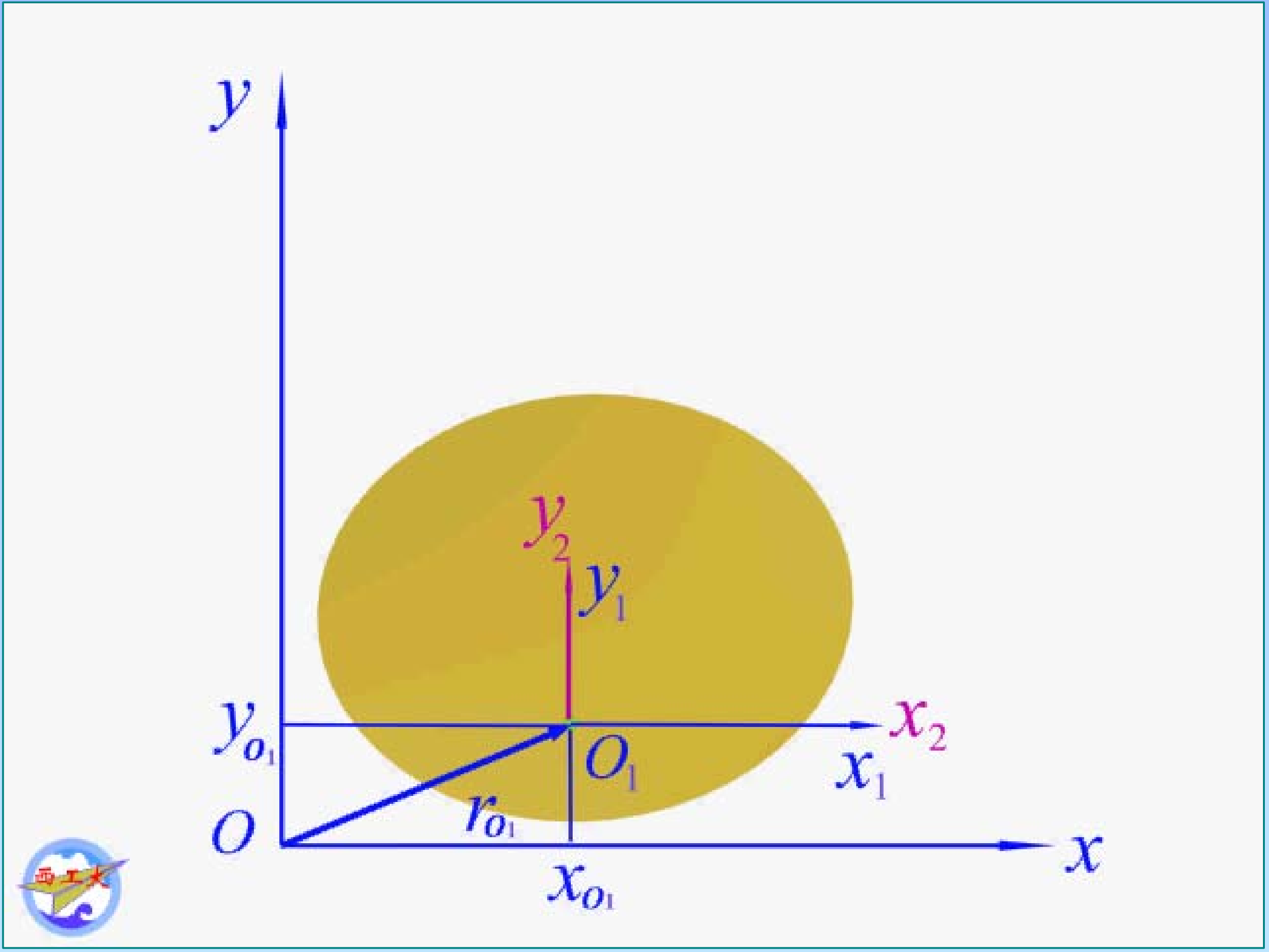
✓ 刚体的平面运动，可以简化为平面图形在其自身平面内的运动来研究。





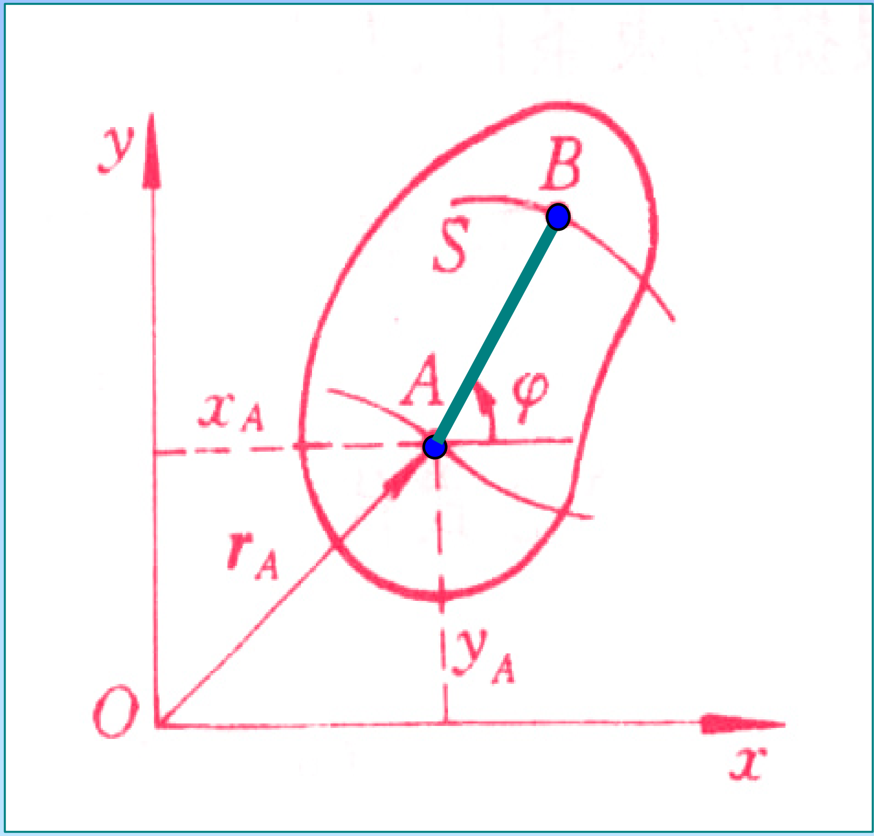
刚体平面运动简化实例

平面图形的运动



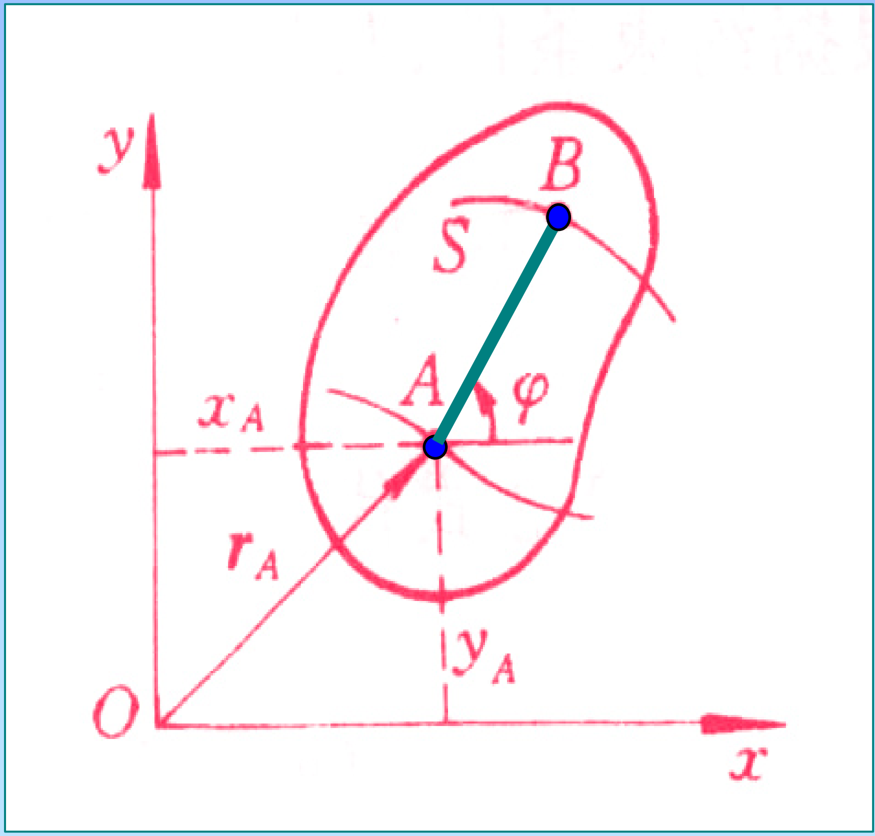
2. 刚体平面运动方程

- 平面图形位置的确定



✓ **平面图形上的任意直线**—这一直线的运动可以代表平面图形的运动，也就是可以代表刚体的平面运动。

● 刚体平面运动自由度



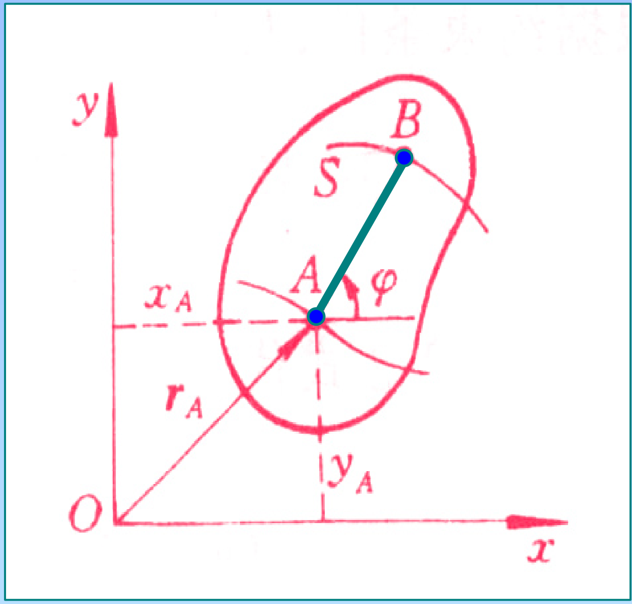
确定直线AB或平面图形在Oxy参考系中的位置，需要3个独立变量(x_A，y_A， ϕ)。其中x_A，y_A确定点A在平面内的位置； ϕ 确定直线AB在平面内的位置。

平面运动刚体的自由度

$$N=3$$

在任意时刻完全确定物体位置所需要的独立的广义坐标数。

- 刚体平面运动方程



3个独立变量随时间变化的函数，即为刚体平面运动方程：

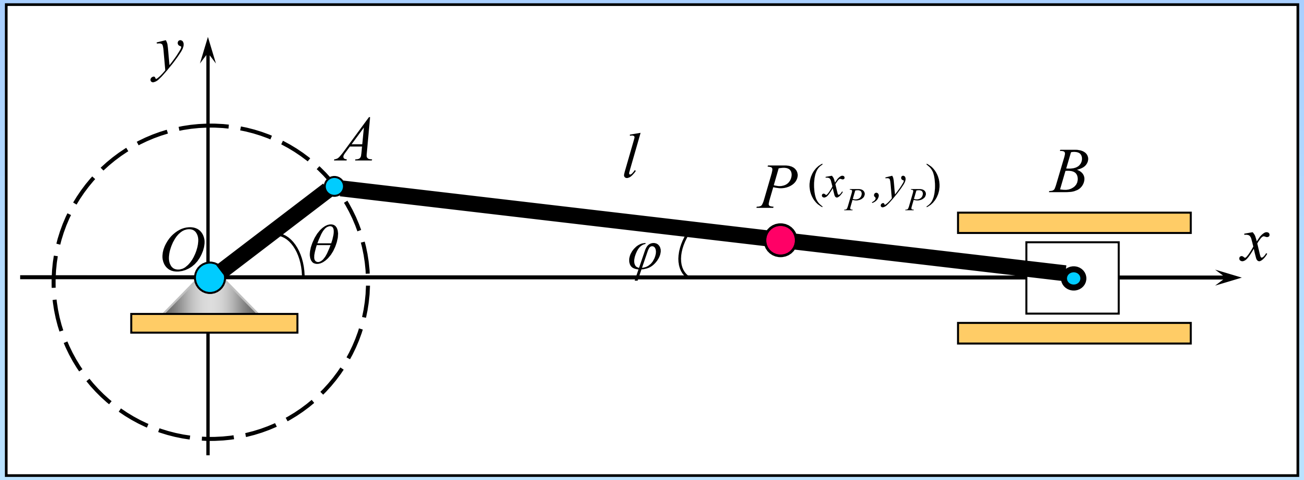
$$x_A = f_1(t)$$

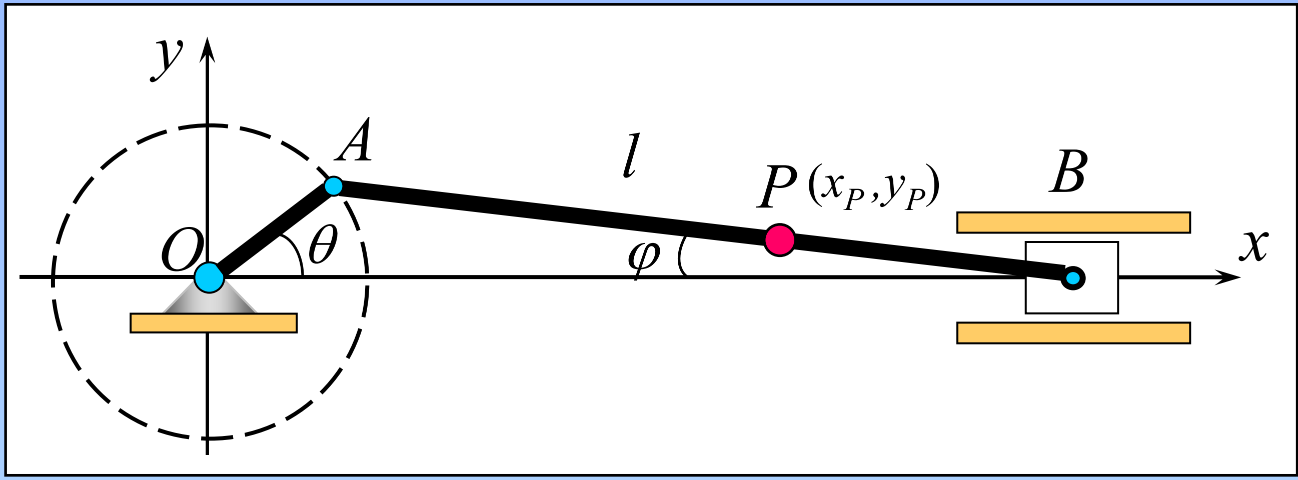
$$y_A = f_2(t)$$

$$\varphi = f_3(t)$$

点*A*称为**基点**，任意取得直线AB，称为**基线**。运动方程已知，整个图形的运动完全确定。

例4-1 已知曲柄—滑块机构中$OA=r$，$AB=l$;曲柄OA以等角速度 ω绕O轴转动。求（1）连杆的平面运动方程；（2）连杆上P点($AP=l_1$)的运动轨迹。

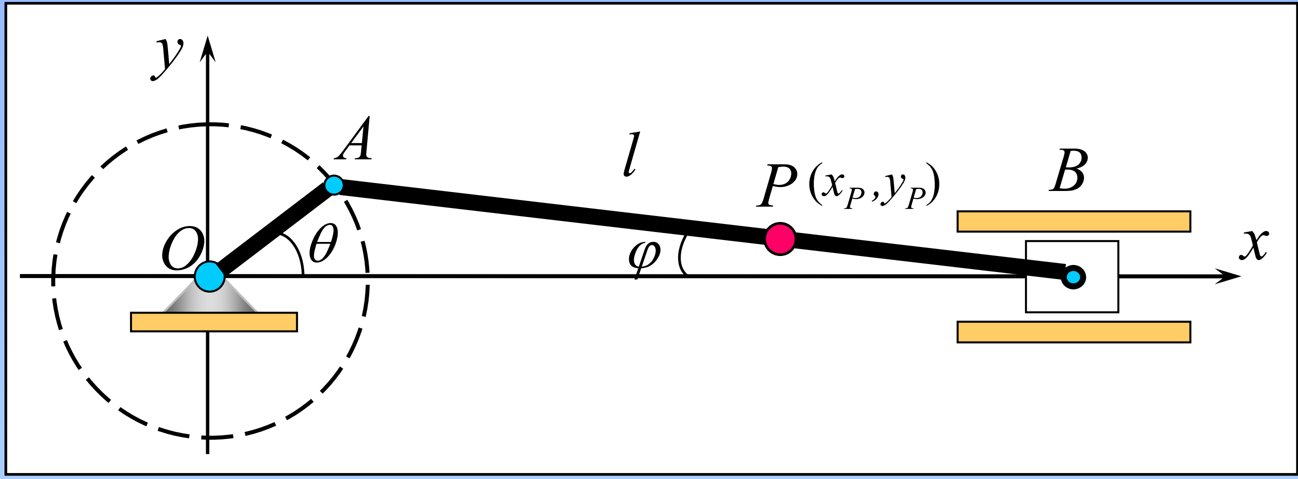




解： (1) 连杆的平面运动方程

由图中的几何关系，有

$$\frac{l}{\sin\theta} = \frac{r}{\sin\varphi}, \quad \sin\varphi = \frac{r}{l}\sin\omega t, \quad \omega t = \theta$$



连杆的平面运动方程为

$$x_A = r\cos\omega t,\quad y_A = r\sin\omega t,\quad \varphi = \arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)$$

(2) 连杆上P点的运动方程

$$x_P = r\cos\omega t + l_1\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2},\quad y_P = \frac{r(l-l_1)}{l}\sin\omega t,$$

$$x_P = r\cos\omega t + l_1\sqrt{1-(\frac{r}{l}\sin\omega t)^2}, \quad y_P = \frac{r(l-l_1)}{l}\sin\omega t,$$

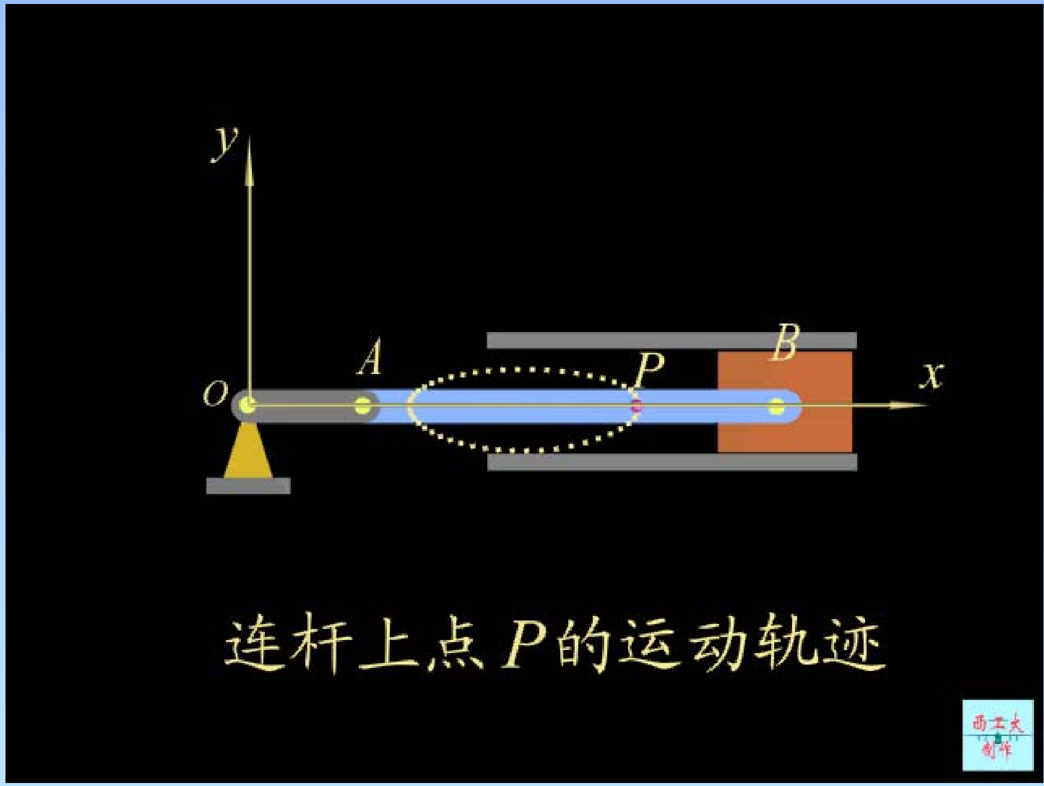
应用泰勒公式，忽略4次方以上的项

$$\sqrt{1-(\frac{r}{l}\sin\omega t)^2} = 1-\frac{1}{2}(\frac{r}{l})^2\sin^2\omega t+\cdots$$

$$\sin^2\omega t = \frac{1-\cos 2\omega t}{2}$$

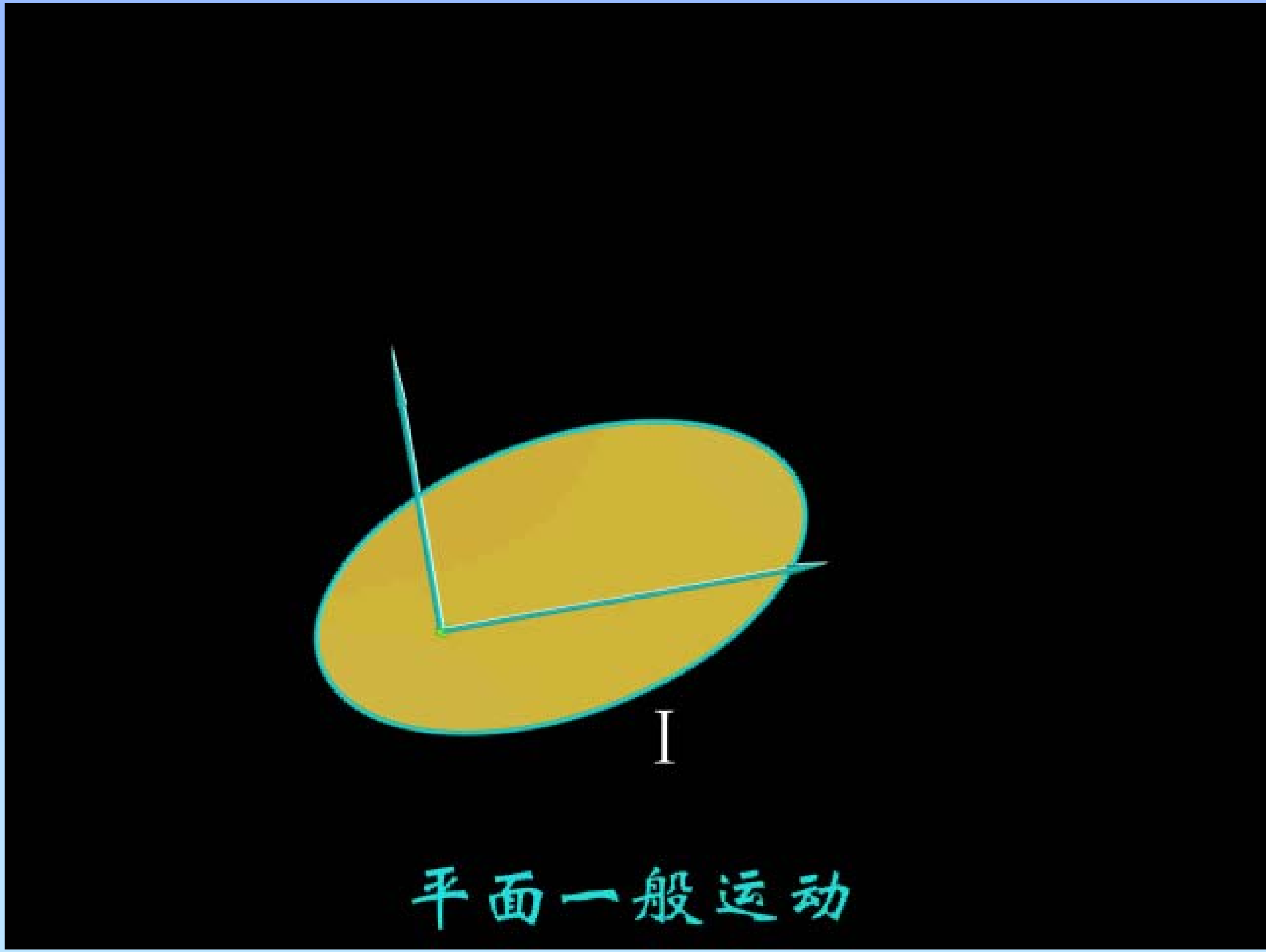
$$x_P = l_1\left[1-\frac{1}{4}(\frac{r}{l})^2+\frac{r}{l_1}\cos\omega t+\frac{1}{4}(\frac{r}{l})^2\cos 2\omega t\right].$$

$$y_P = \frac{r(l-l_1)}{l}\sin\omega t,$$

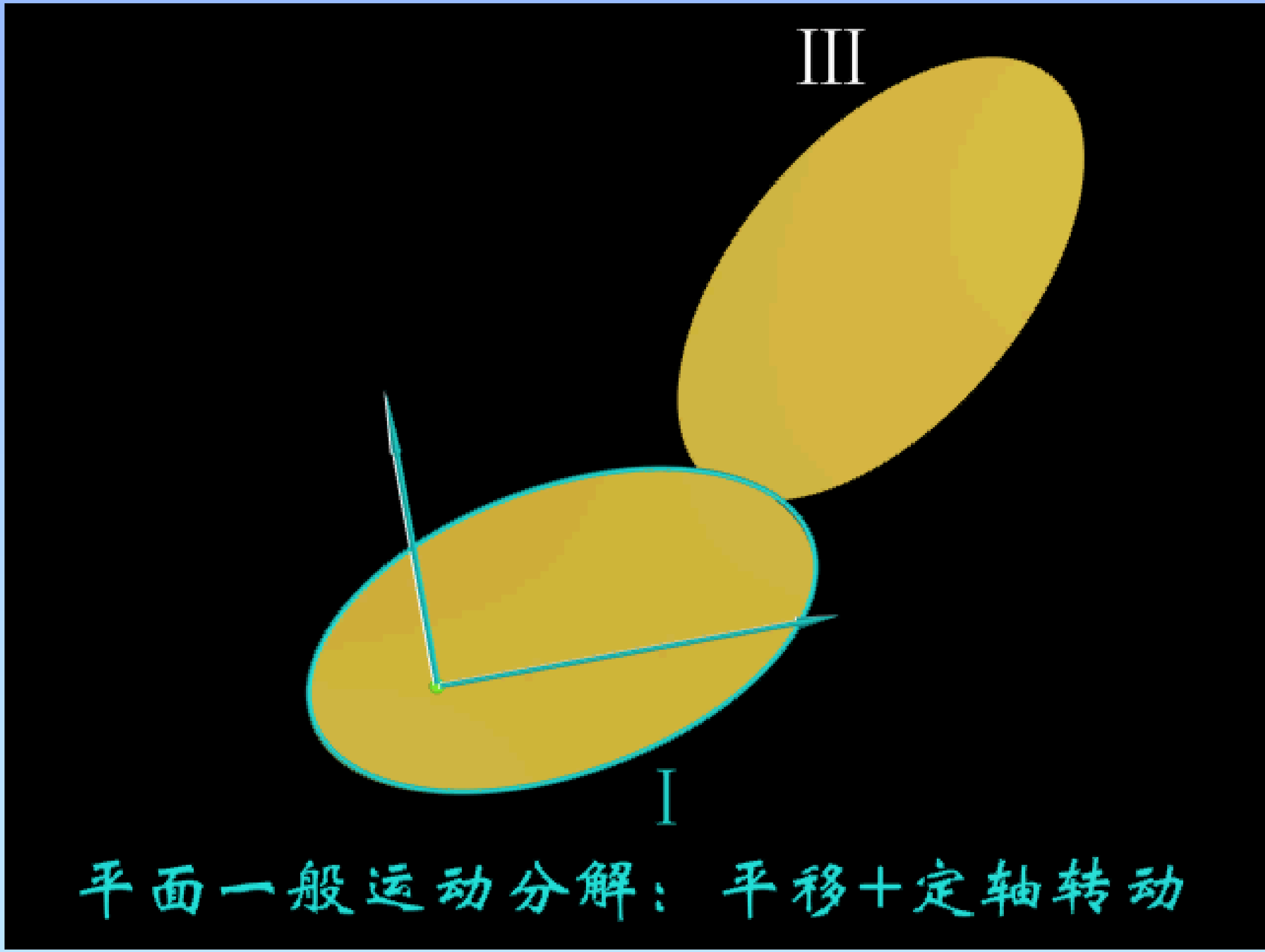

y
x
O
A
P
B
连杆上点 P 的运动轨迹

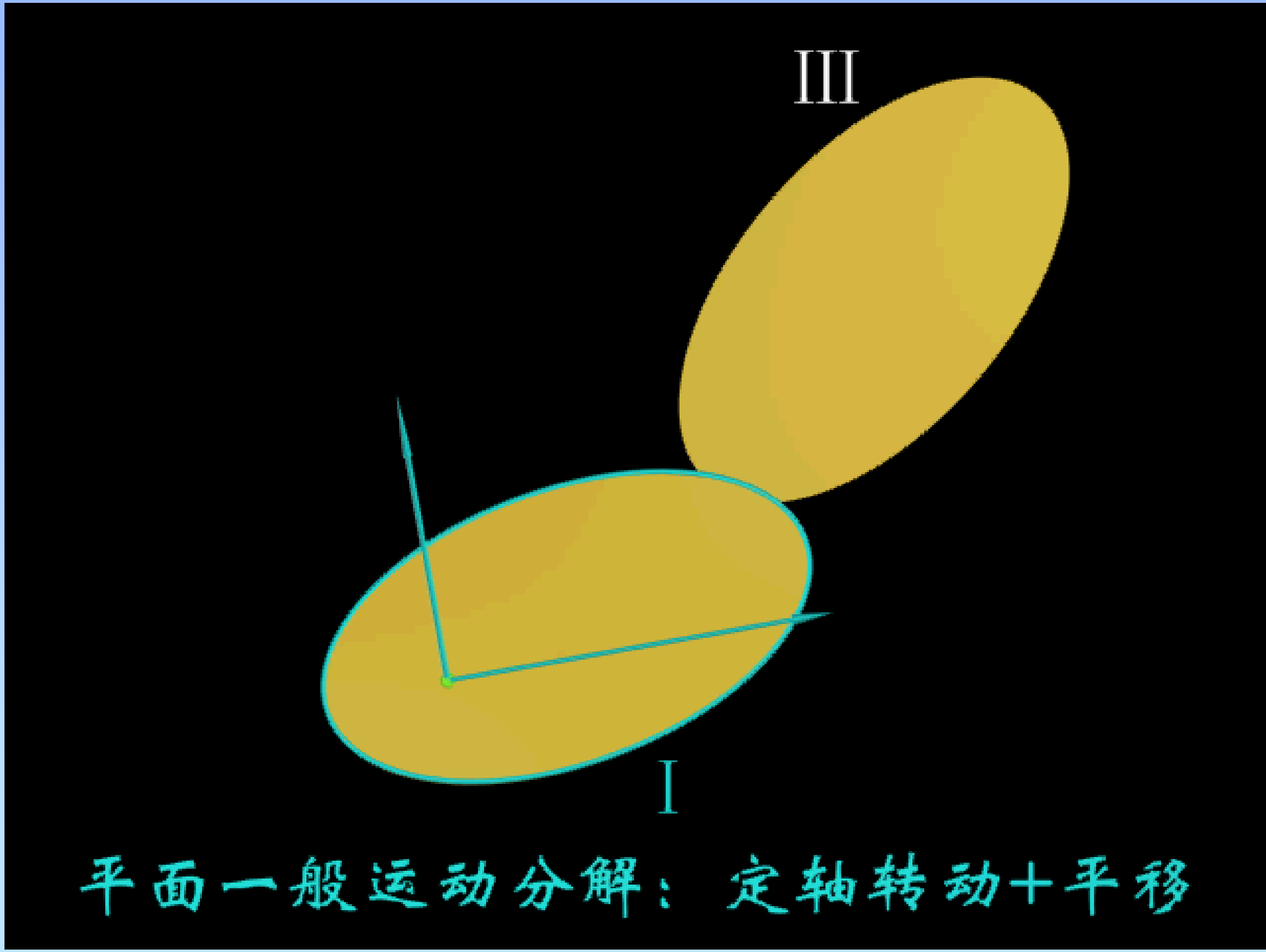
3. 平面运动分解

§4–1 刚体平面运动简化与分解



§4–1 刚体平面运动简化与分解




III
I
平面一般运动分解：定轴转动+平移

平移 (牵连运动)

平面运动

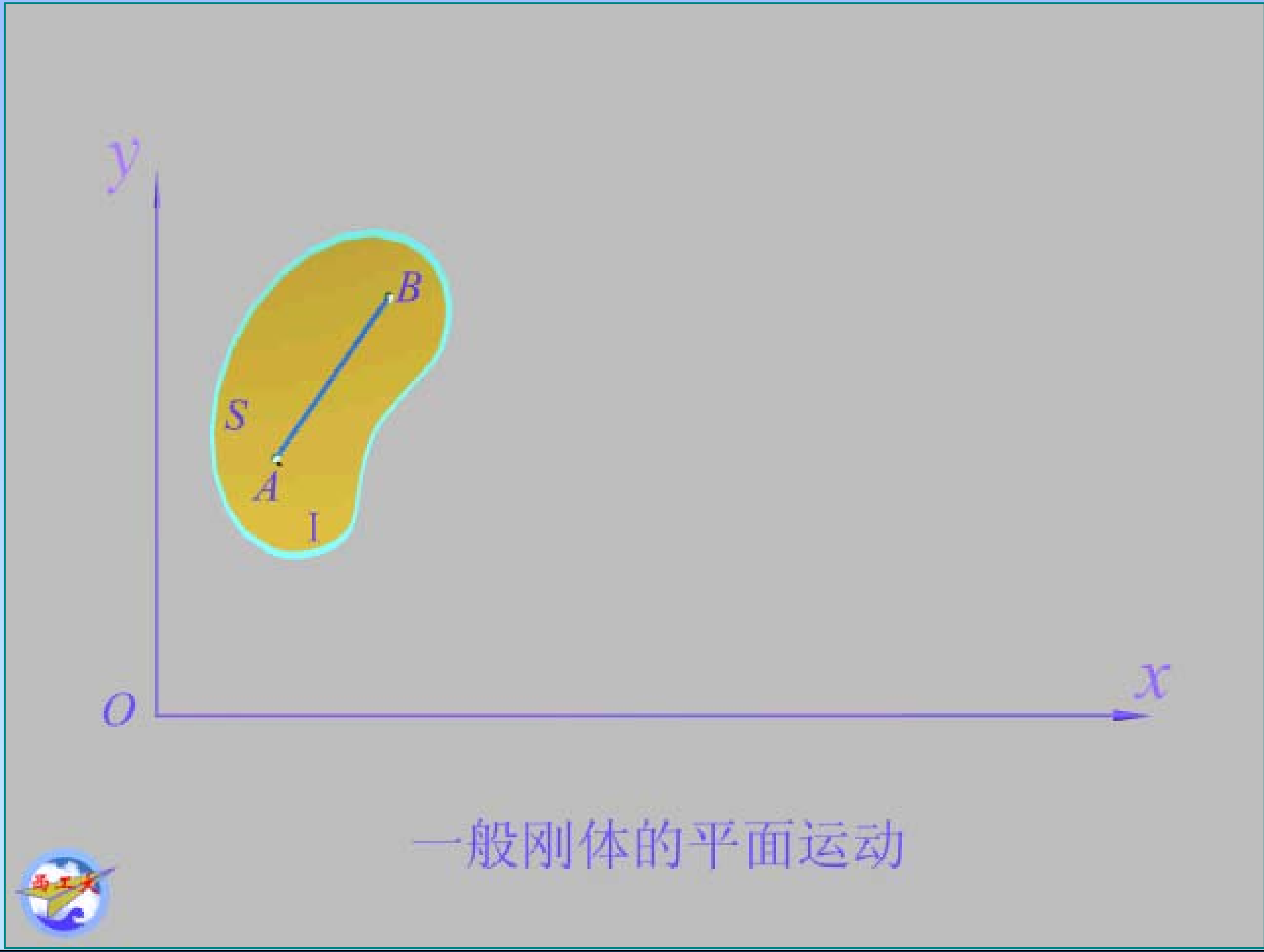
转动 (相对运动)

刚体的平面运动可分解为随同基点的平移和相对基点的转动。

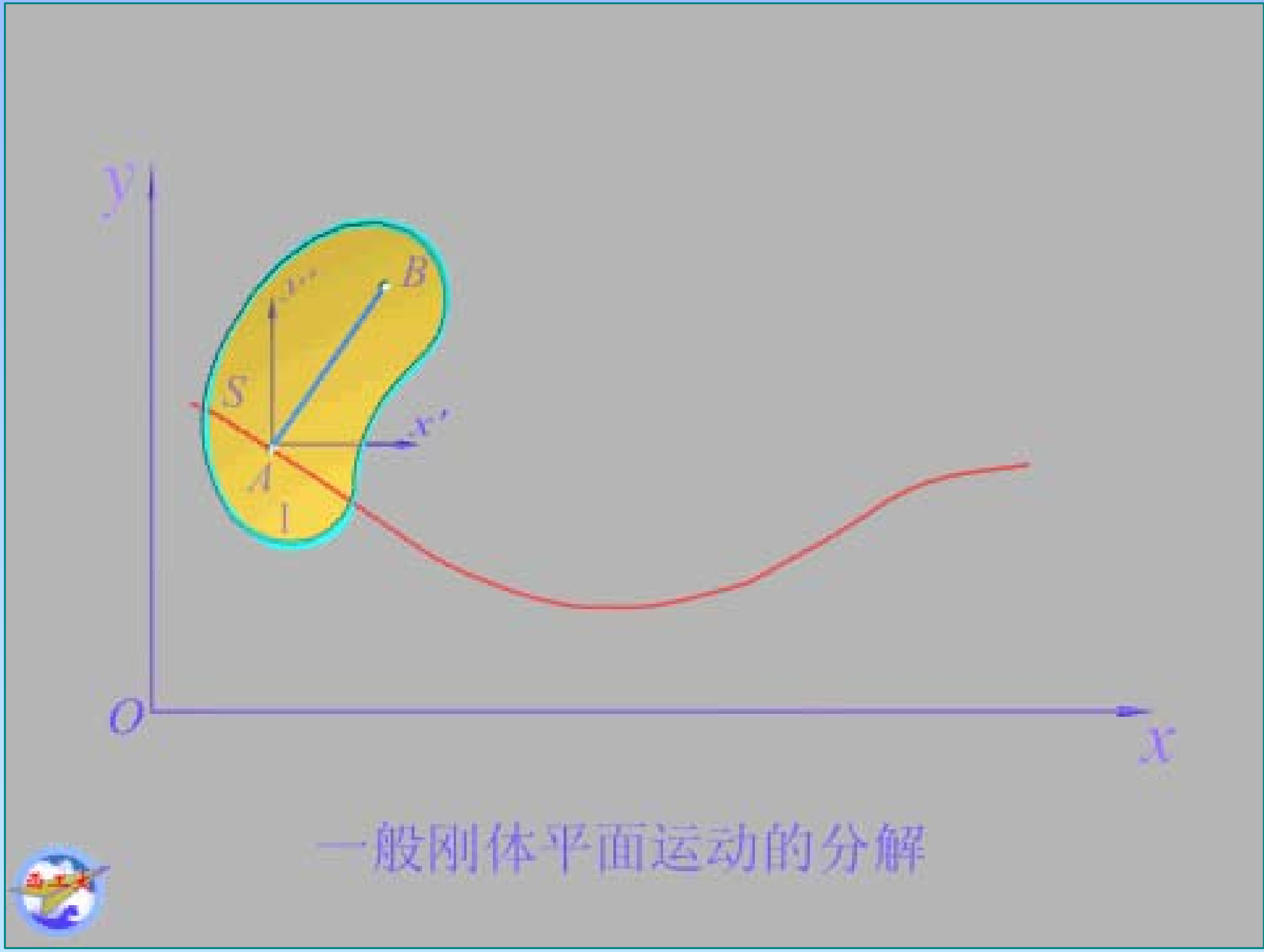
§ 4–1 刚体平面运动简化与分解

（1） 基点、平移系与平面图形的转动

图形的平面运动



● 以为A基点分解　　● 以B为基点分解



（2） 刚体平面运动分解为平移和转动的基本方法

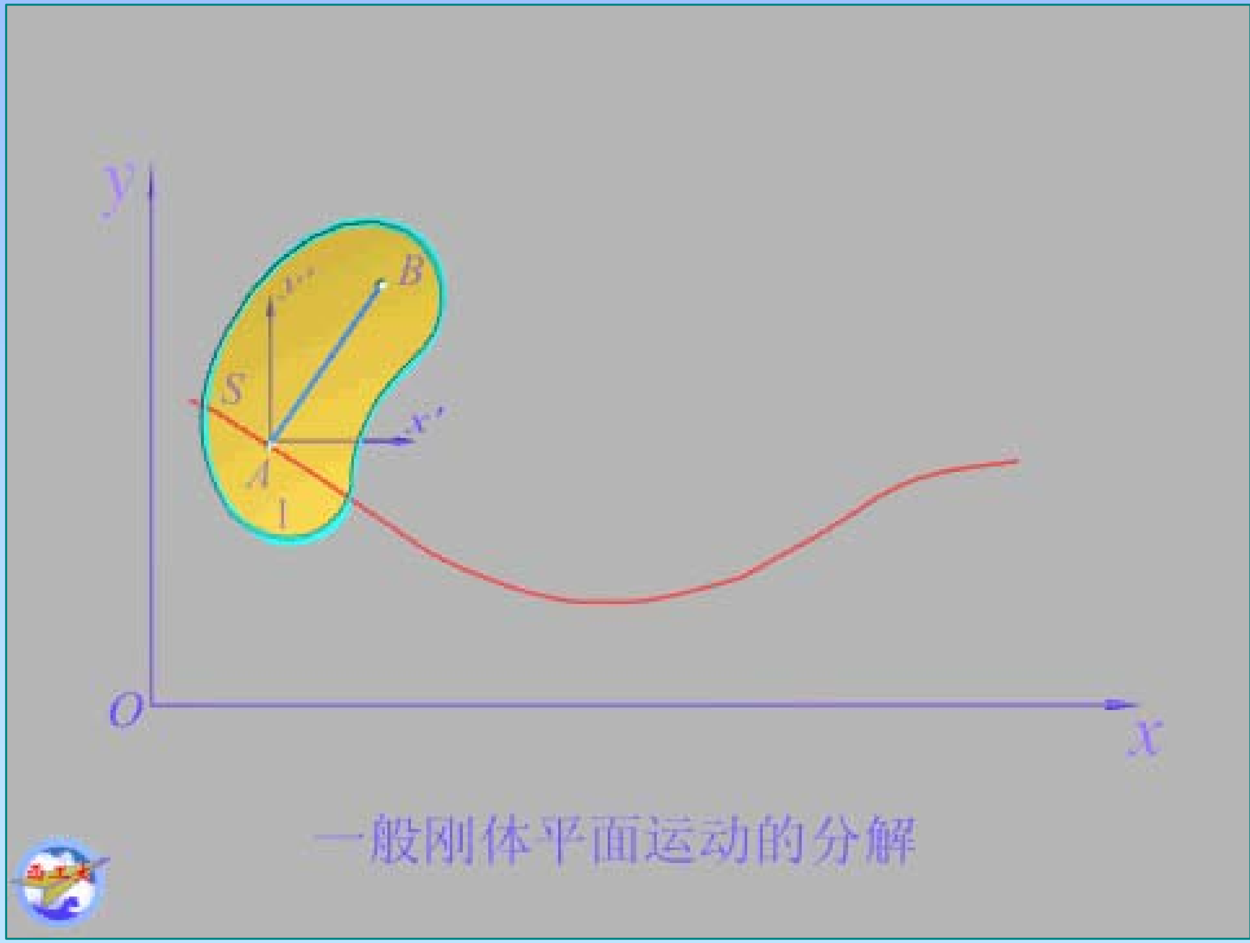
- 选择基点—任意选择;

- 在基点上建立平移系(特殊的动系)—在刚体平面运动 的过程中，平移系只发生平移;

- 刚体平面运动 (绝对运动)可以分解为跟随平移系的平　移 (牵连运动)，以及平面图形相对于平移系的转动(相对运动)。

（3） 平移和转动与基点之间的关系

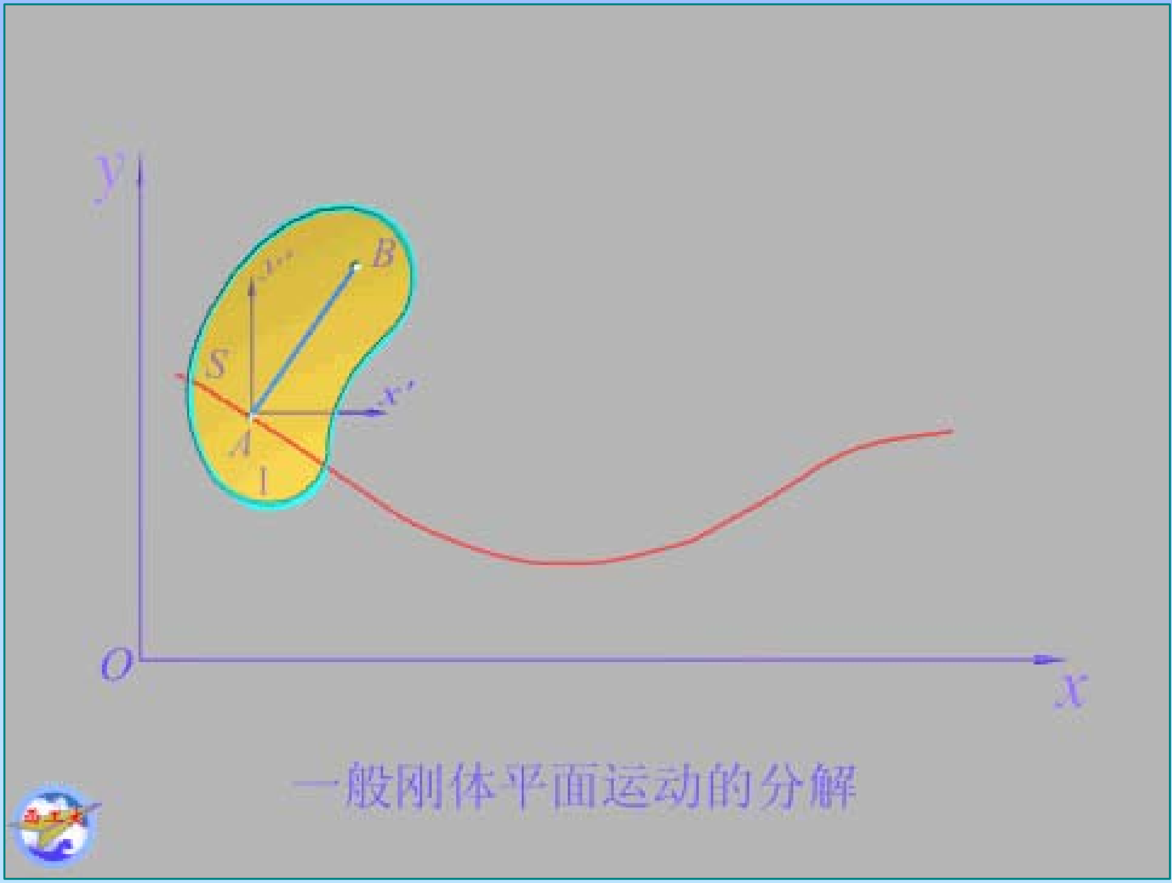
- 平移的轨迹、速度与加速度都与基点的 位置有关。



§ 4–1 刚体平面运动简化与分解

- 转动角速度与基点的位置无关

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi_2}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$



称为平面图形的**角速度**

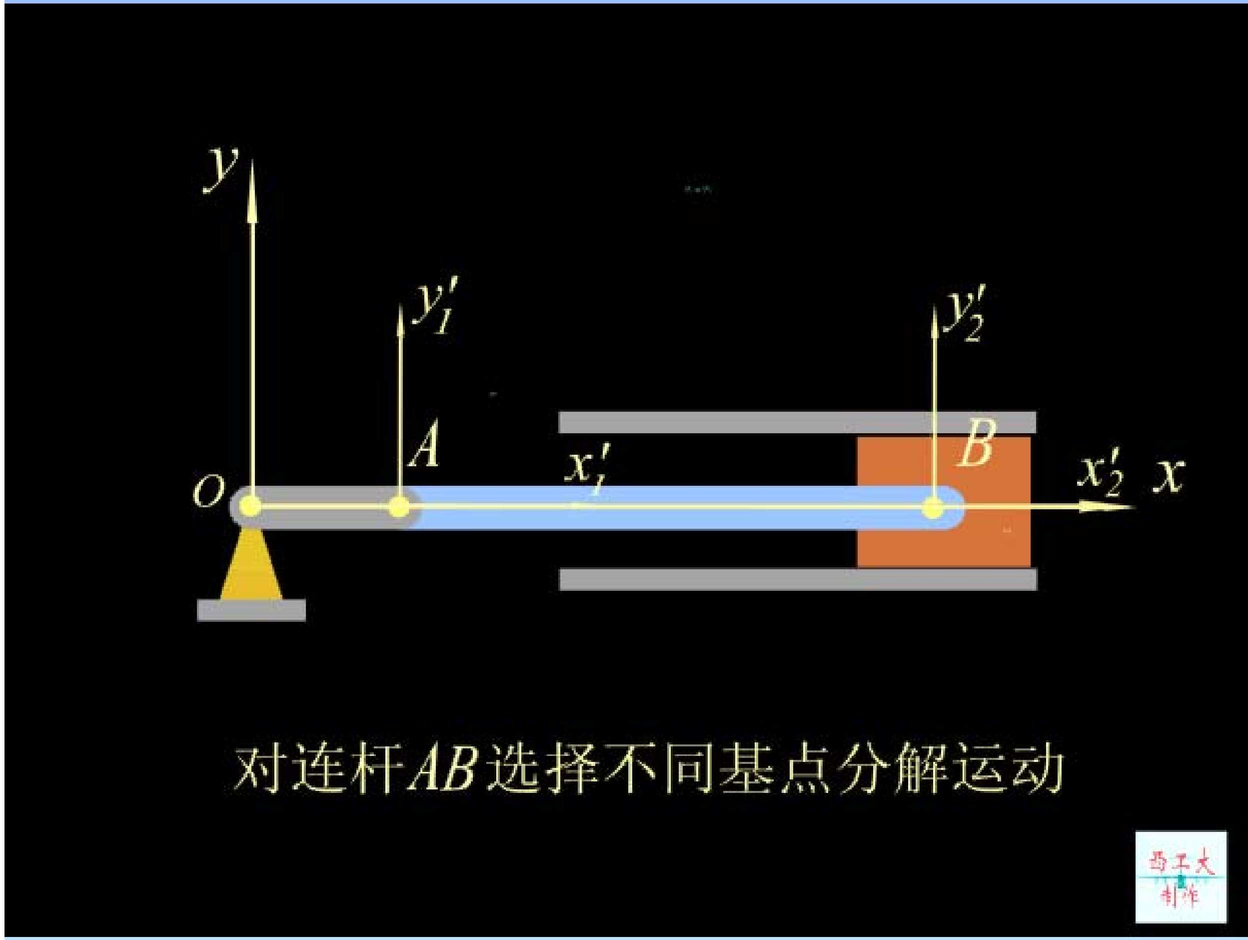
平面图形绕基点转动的角速度称为平面运动的角速度。

平面运动的角速度既是平面图形相对于相对平移坐标系的角速度，也是平面图形相对于固定参考系的角速度

§4–1 刚体平面运动简化与分解

● 转动角速度与基点的位置无关

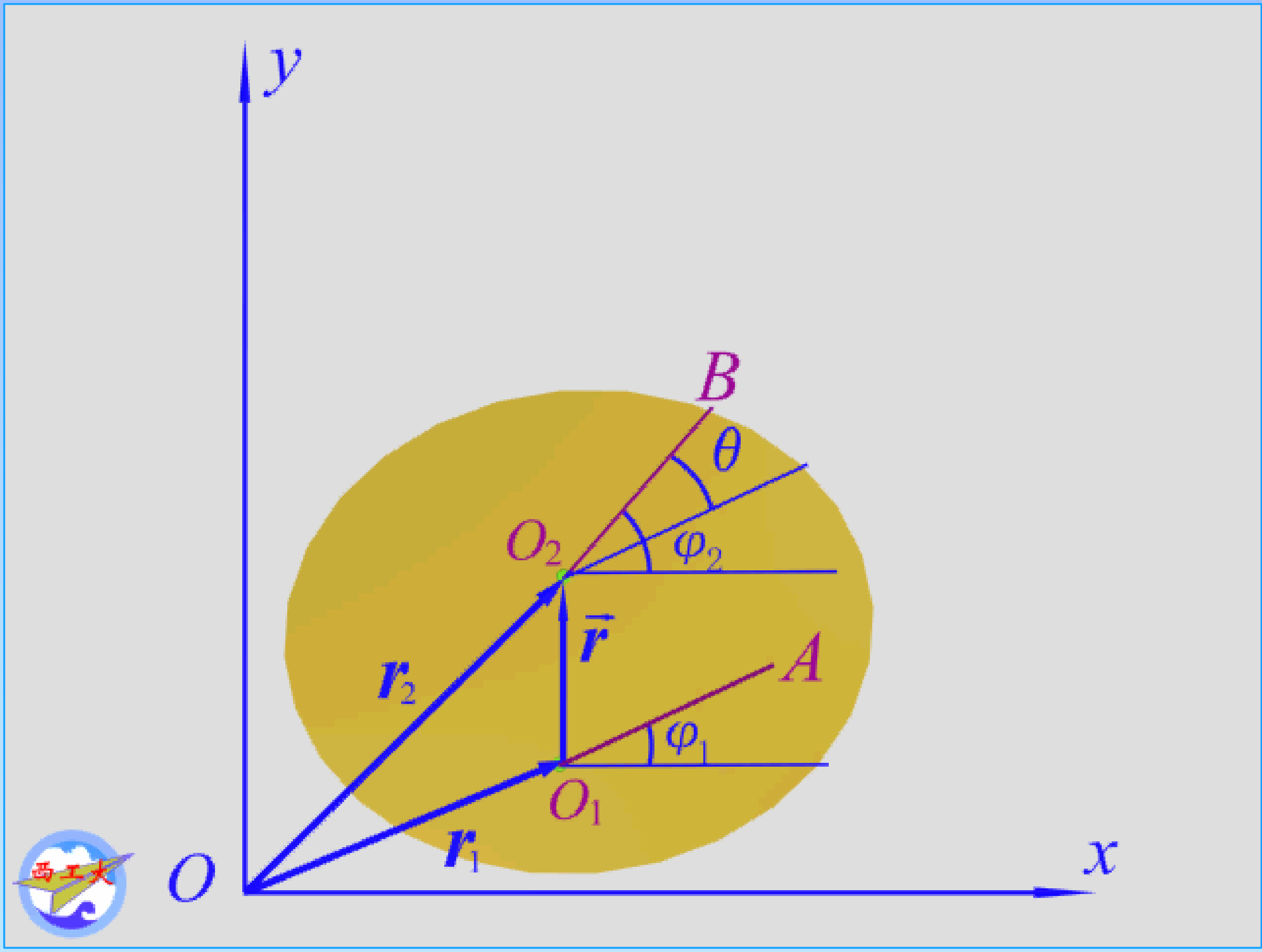
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$



注 意

因为平移系(动系)相对定参考系没有方位的变化，平面图形的角速度既是平面图形相对于平移系的**相对角速度**，也是平面图形相对于定参考系的**绝对角速度**。

● 转动角速度与基点的位置无关



$$\varphi_2 = \varphi_1 + \theta$$

$$\theta = 常量$$

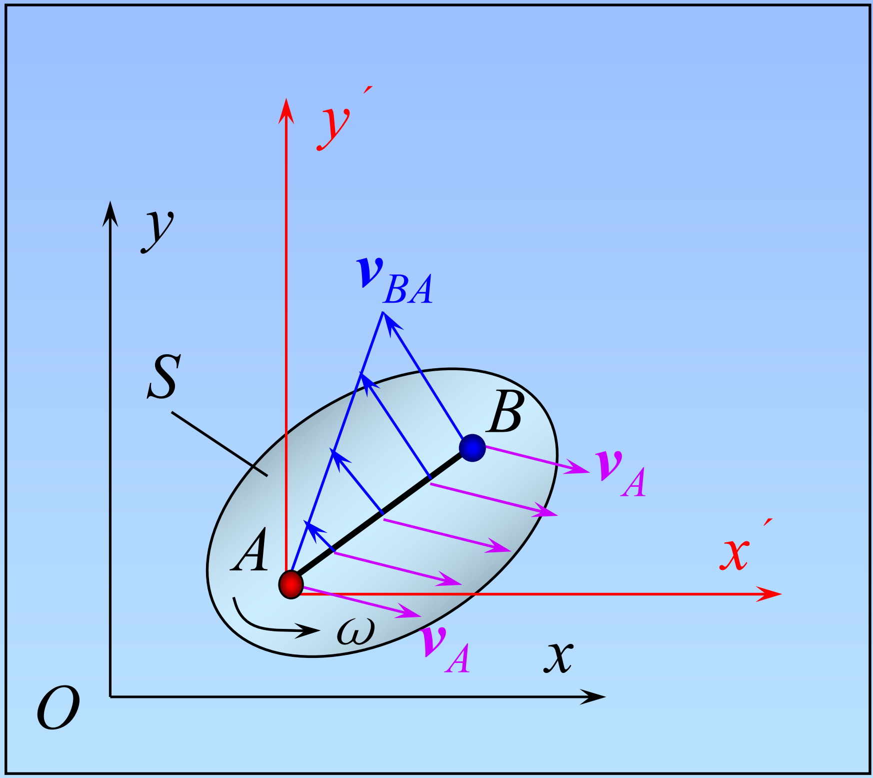
$$\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} = \omega$$

§4–2 平面运动的速度分析

- 基点法
- 速度投影法
- 速度瞬心法

§ 4–2 平面运动的速度分析

1. 基点法



平面图形－S

定系－Oxy

基点－A

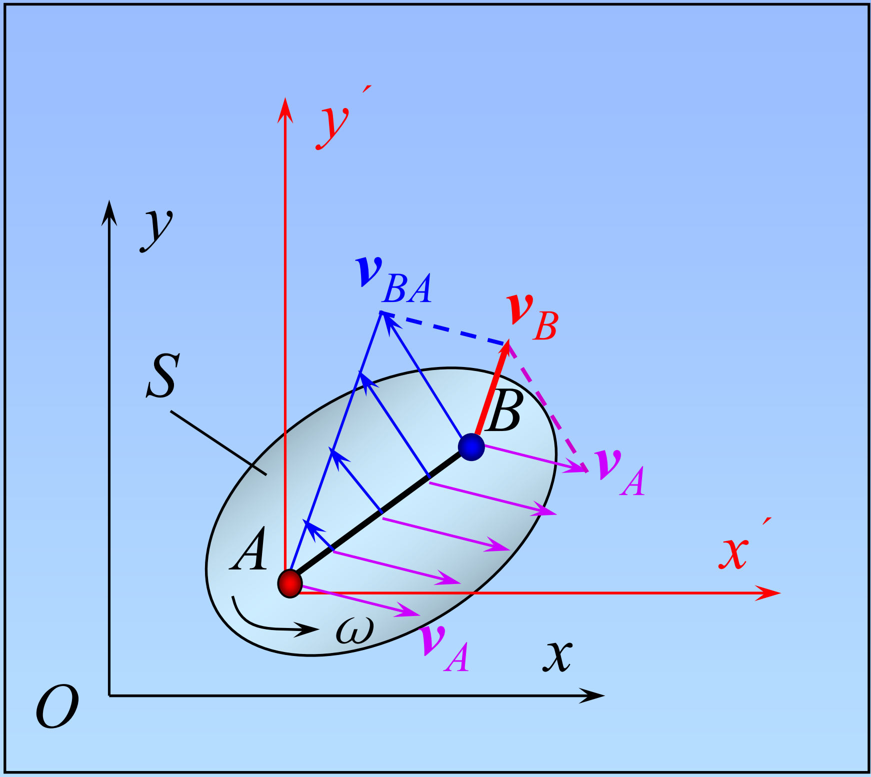
平移系－$Ax'y'$

平面图形的角速度－ ω

基点速度－ $\boldsymbol{v}_A$

点B绕点A转动的速度－ $\boldsymbol{v}_{BA}$

速度合成定理： $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$



速度合成定理： $\boldsymbol{v}_\mathrm{a} = \boldsymbol{v}_\mathrm{e} + \boldsymbol{v}_\mathrm{r}$

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{a} = \boldsymbol{v}_B$$

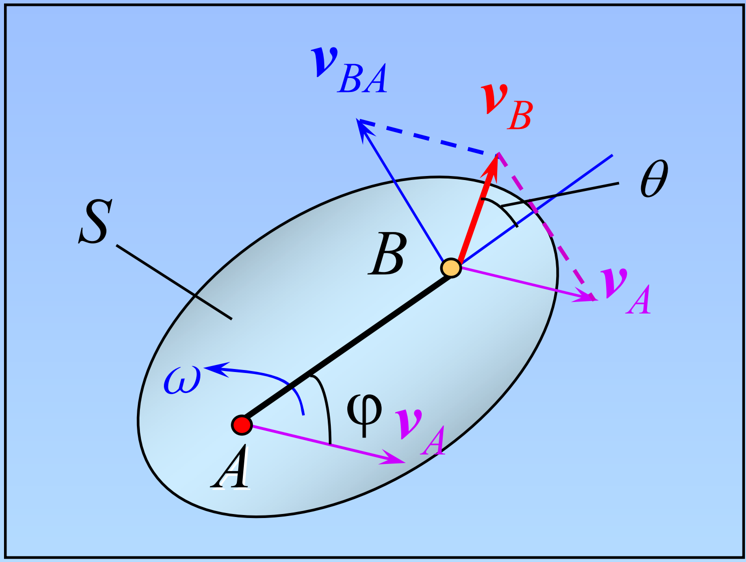
$$\boldsymbol{v}_\mathrm{e} = \boldsymbol{v}_A$$

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{r} = \boldsymbol{v}_{AB}$$

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

平面图形内任意点的速度，等于基点的速度与该点绕基点相对转动速度的矢量和。

2. 速度投影法



应用速度合成定理

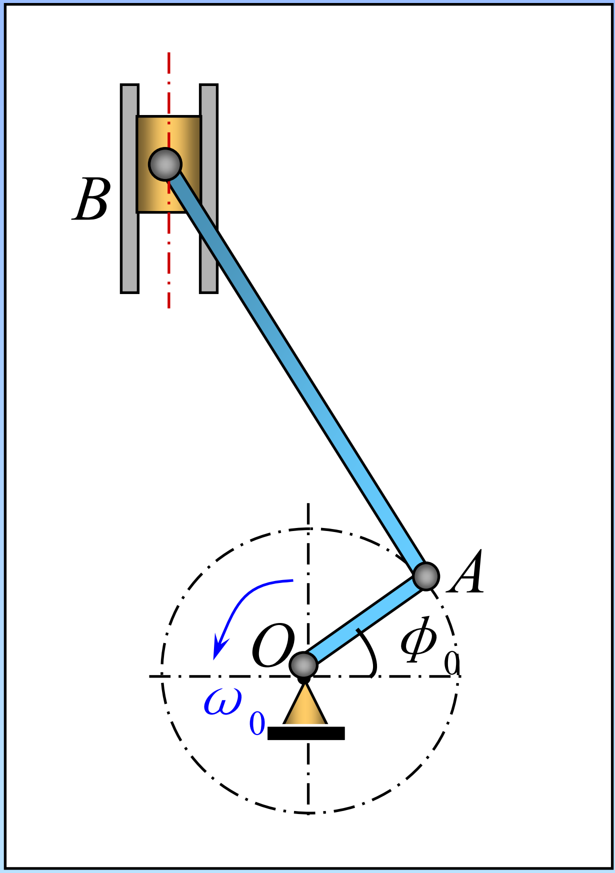
$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

上式等号两侧 分别向AB连线上投影，因为$\boldsymbol{v}_{BA}$垂直于AB，所以$\boldsymbol{v}_{BA}$在AB上投影等于零。

则 $$v_A\cos\varphi = v_B\cos\theta$$

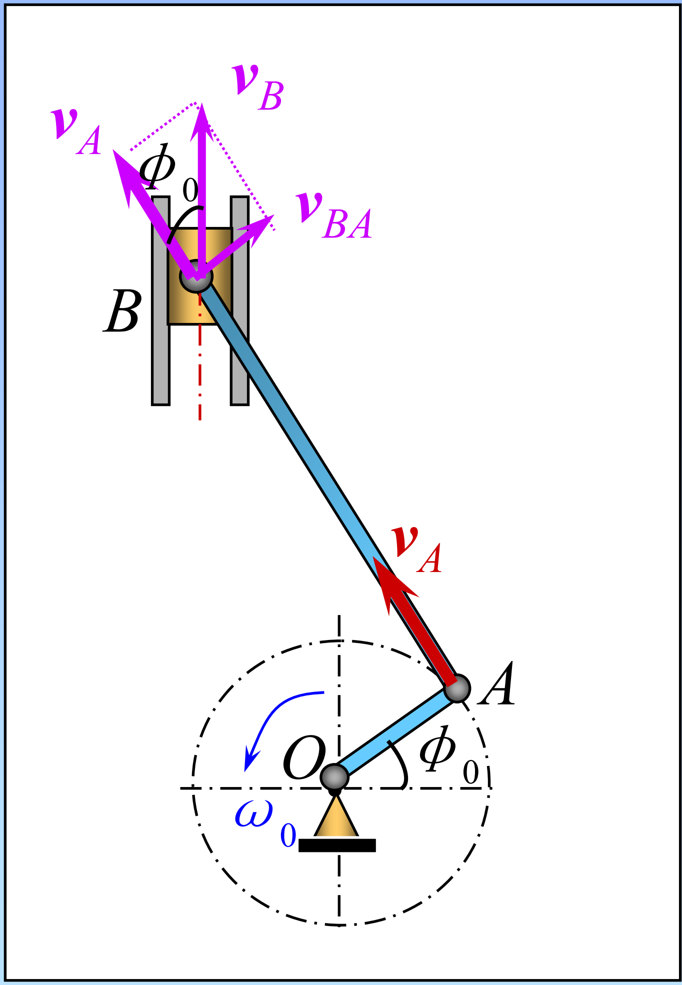
或 $$[\boldsymbol{v}_A]_{AB} = [\boldsymbol{v}_B]_{AB}$$

速度投影定理： 平面图形上任意两点的速度在这两点连线上的投影相等。



例4-2 已知曲柄—滑块机构中，曲柄$OA=r$，以等角速度ω_0绕O轴转动，连杆$AB=l$。在图示情形下连杆与曲柄垂直。求(1) 滑块的速度v_B；(2) 连杆AB的角速度ω_{AB}。

基点法



解： 选择A(速度已知)为基点：

$$v_A=r\omega_0$$

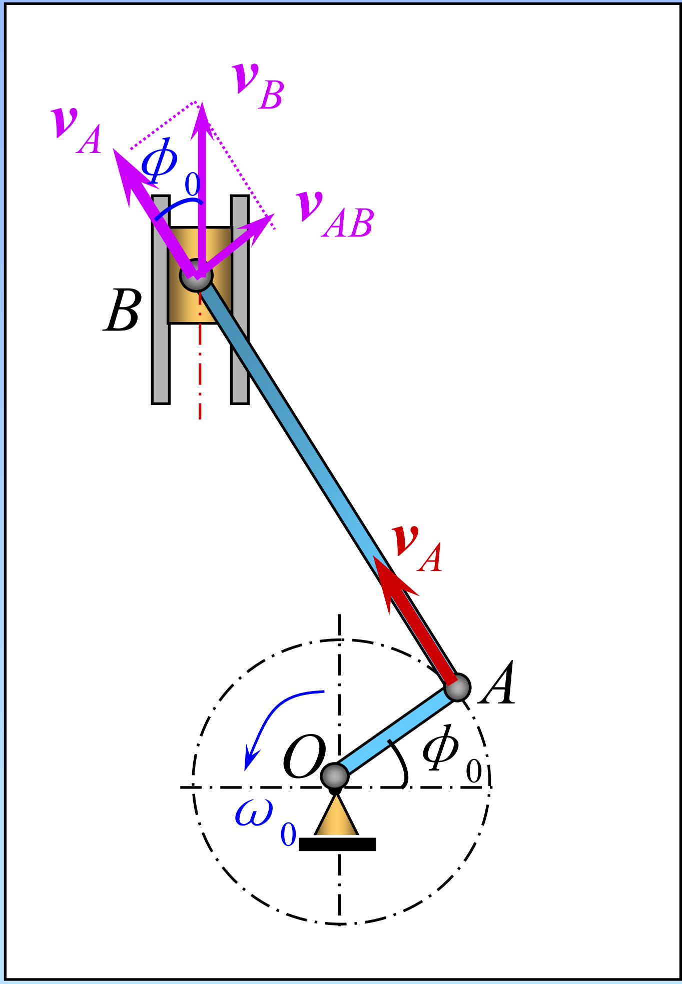
应用速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{BA}$$

其中$\boldsymbol{v}_A$的大小($v_A=r\omega_0$)和方向，以及$\boldsymbol{v}_B$与$\boldsymbol{v}_{BA}$方向都是已知的。

滑块的速度为

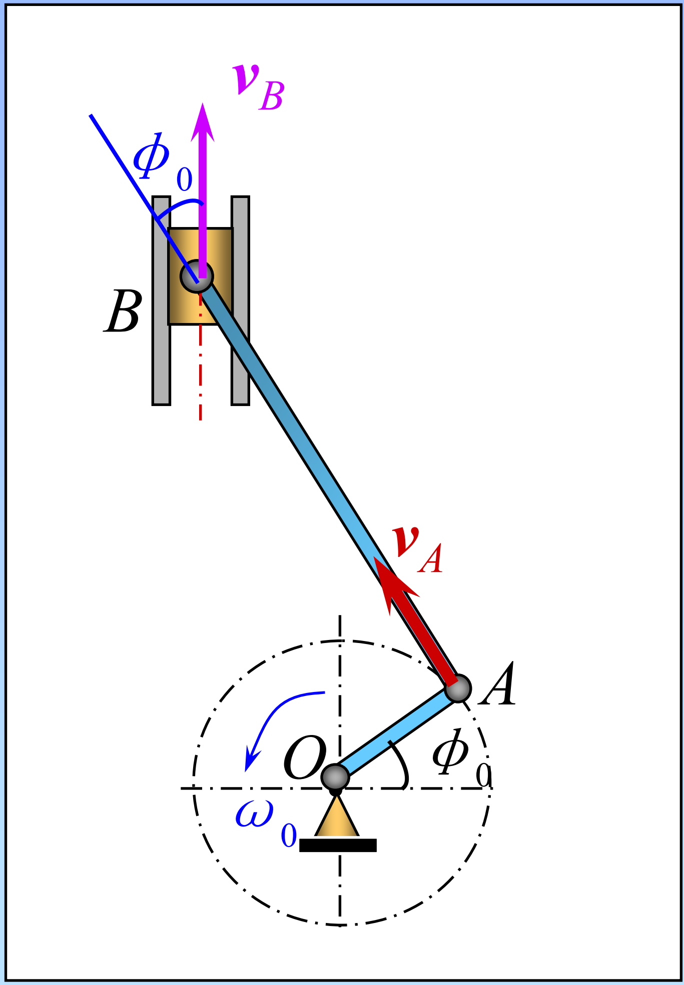
$$v_B=\frac{v_A}{\cos\varphi_0}=\frac{r\omega_0}{\cos\varphi_0}$$



连杆的瞬时角速度

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{l}$$

$$= \frac{v_A \tan\varphi_0}{l} = \frac{r\omega_0}{l}\tan\varphi_0$$



速度投影法

解： 应用速度投影定理

$$[\boldsymbol{v}_A]_{AB} = [\boldsymbol{v}_B]_{AB}$$

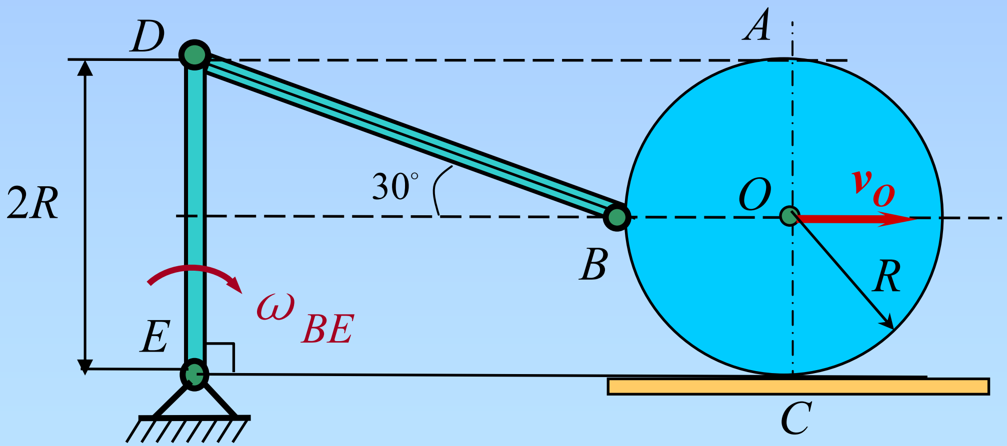
$$v_A = r\omega_0$$

$$v_A = v_B \cos\varphi_0$$

$$v_B = \frac{r\omega_0}{\cos\varphi_0}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{l} = \frac{r\omega_0}{l}\tan\varphi_0$$

例4-3 如图已知轮心以v_O匀速直线运动，且纯滚动。杆的DE长为$2R$。试求在这瞬时杆DE的角速度。



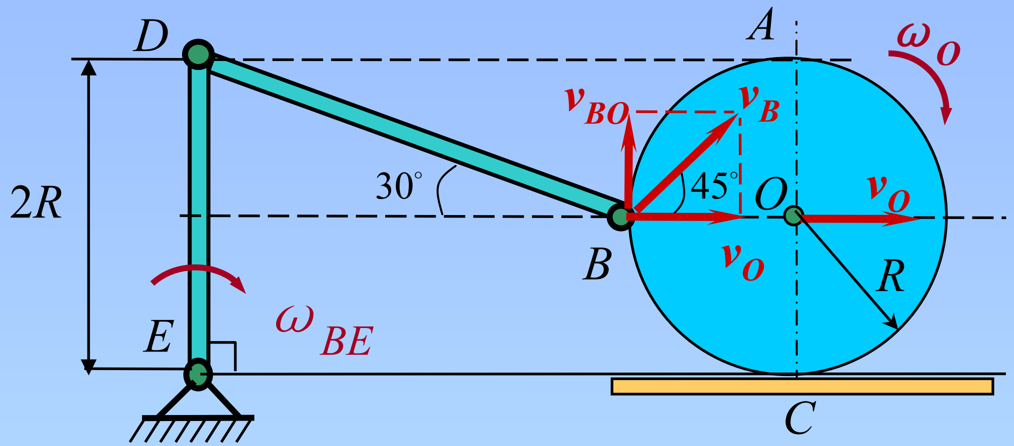
解：先求*B*点的速度。

以*O*点为基点分析*B* 点的速度，有

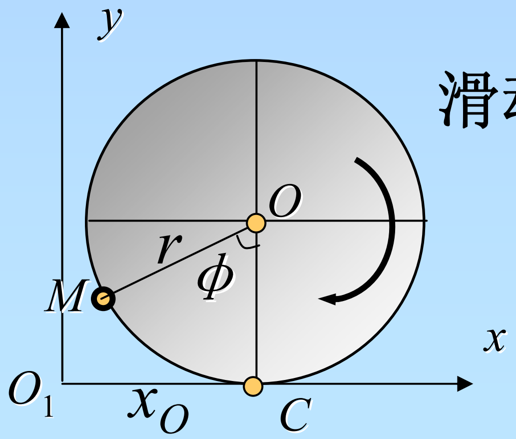
$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{BO}$$

$$v_{BO} = R\omega_O = R\frac{v_O}{R} = v_O$$

$$v_B = \sqrt{v_O^2 + v_{BO}^2} = \sqrt{2}v_O$$



考虑车轮在任意瞬时位置，因车轮滚动而不滑动，故有

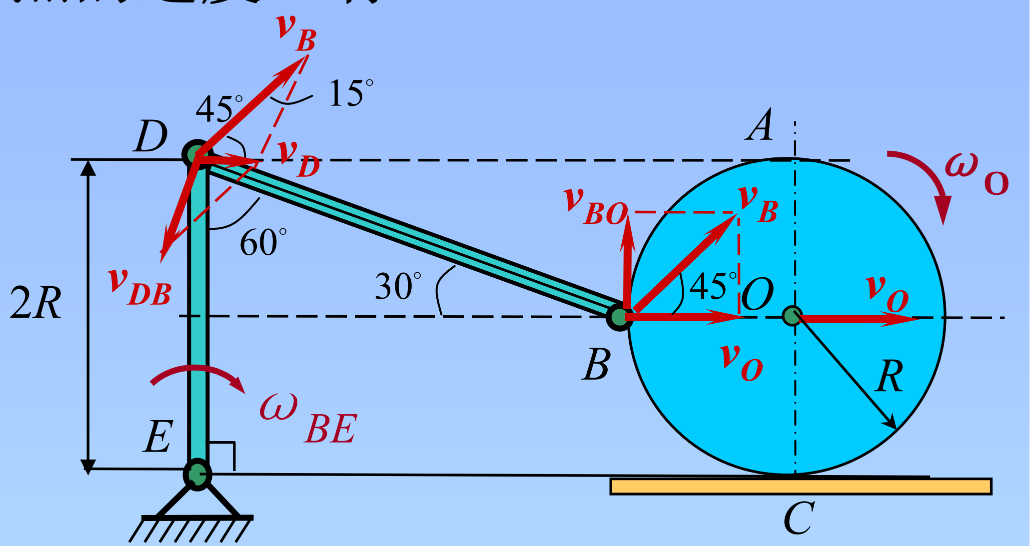


$$x_O = O_1C = \overset{\frown}{CM} = R\varphi$$

$$\varphi = \frac{x_O}{R},\qquad \omega_O = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{x}_O}{R} = \frac{v_O}{R}$$

另外，又以B作为基点分析D 点的速度，有

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{DB}$$



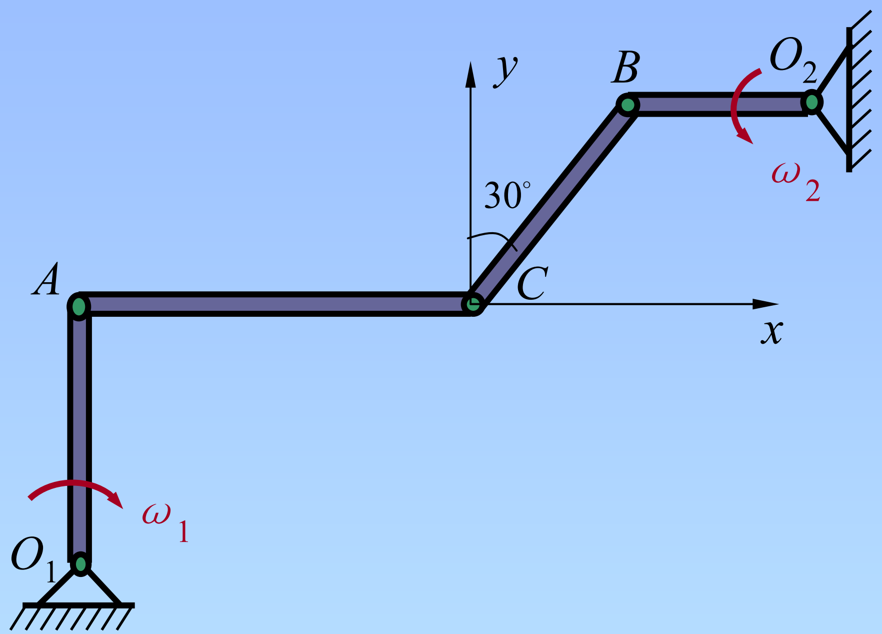
$$\frac{v_B}{\sin(180^\circ - 60^\circ)} = \frac{v_D}{\sin(60^\circ - 45^\circ)}$$

$$v_D \sin 60^\circ = v_B \sin 15^\circ$$

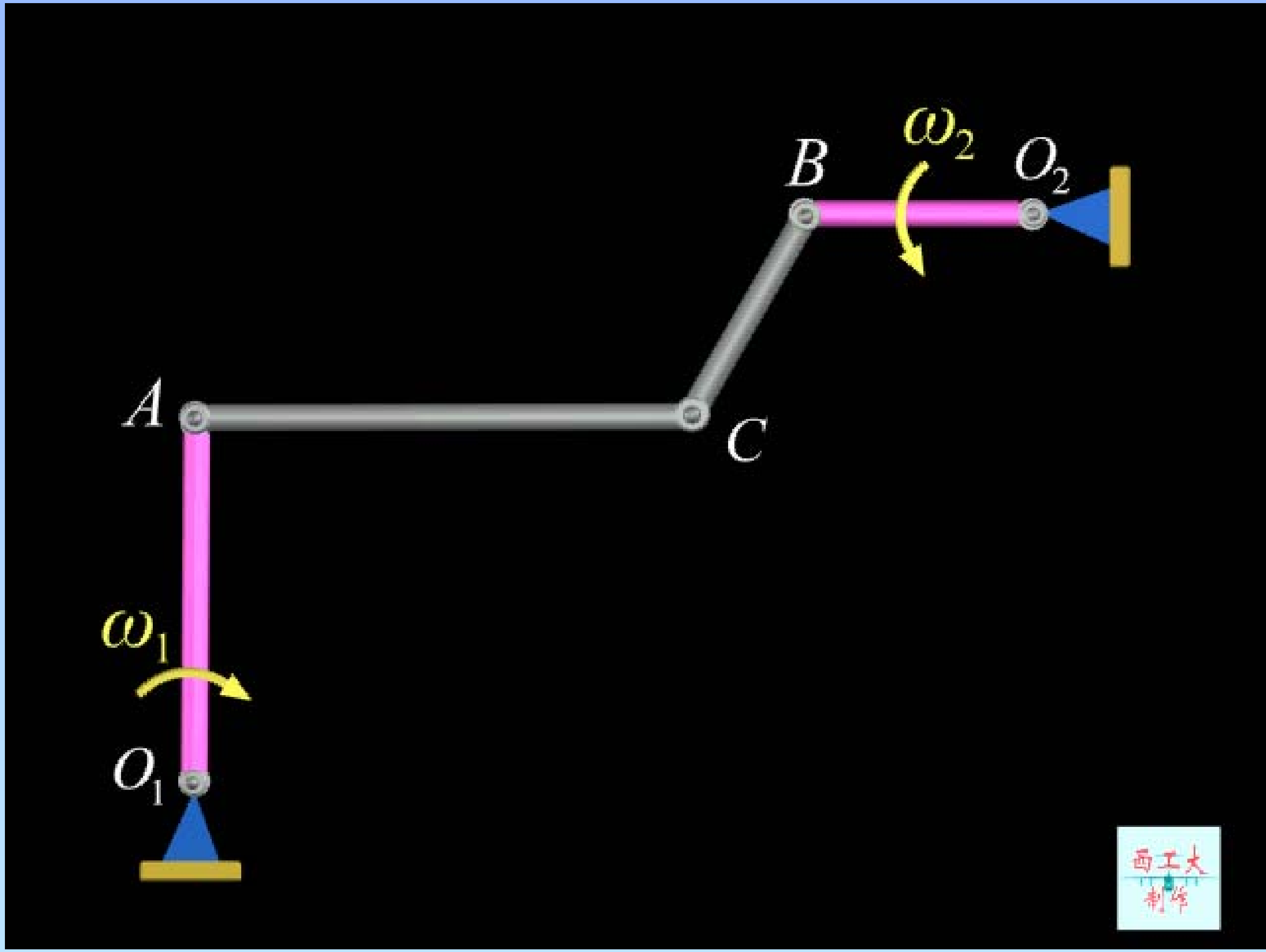
$$v_D = v_B \frac{\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}$$

也可以用投影法，有 $v_D \cos 30^\circ = v_B \cos 75^\circ$

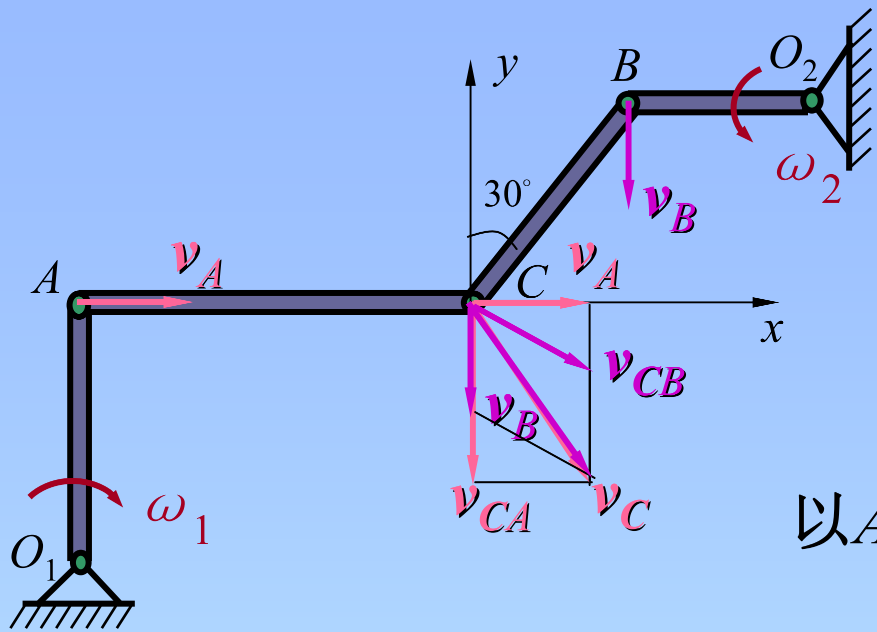
$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{2R}$$



例4–3 如图平面铰链机构。已知杆O_1A的角速度是ω_1，杆O_2B的角速度是ω_2，转向如图，且在图示瞬时，杆O_1A铅直，杆AC 和O_2B水平，而杆BC对铅直线的偏角30°；又$O_2B=b$，$O_1A=\sqrt{3}\ b$。试求在这瞬时C 点的速度。



运动演示



解： 先求出A点和B点的速度。有

$$v_A = \omega_1 O_1 A = \sqrt{3}\omega_1 b$$

$$v_B = \omega_2 O_2 B = \omega_2 b$$

$\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 的方向如图。

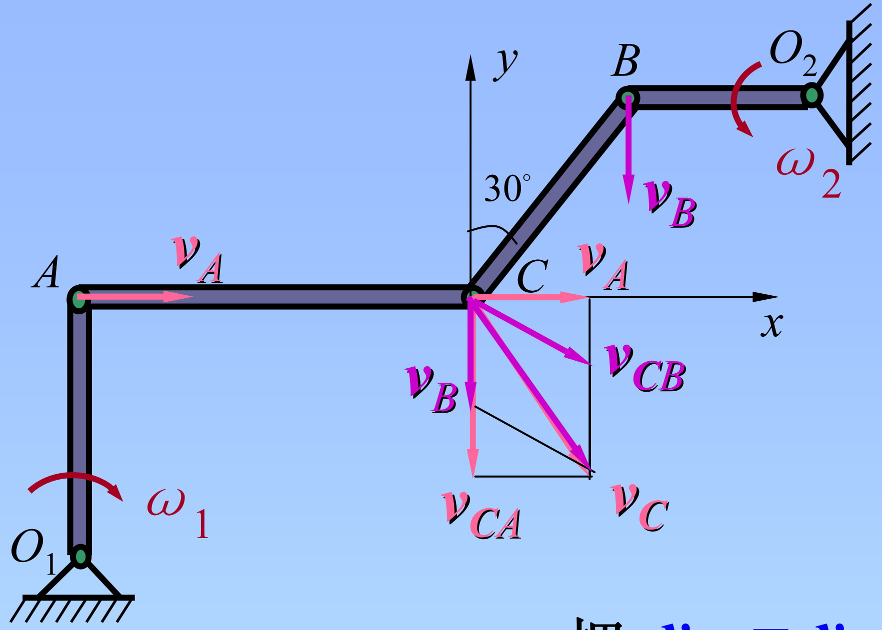
以A点为基点分析C 点的速度，有

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA} \quad (1)$$

另外，又以B作为基点分析C 点的速度，有

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB} \quad (2)$$

比较以上两式，有 $\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA} = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}$



$$\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA} = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}$$

上式投影到 x 轴得

$$v_A = v_{CB}\cos 30^\circ$$

$$v_{CB} = \frac{v_A}{\cos 30^\circ} = 2\omega_1 b$$ 方向如图

把 $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}$ 式分别投影到x，y轴上

$$v_{Cx} = 0 + v_{CB}\cos 30^\circ = \sqrt{3}\omega_1 b$$

$$v_{Cy} = -v_B - v_{CB}\sin 30^\circ = -(\omega_1 + \omega_2)b$$

$$v_{Cx} = 0 + v_{CB}\cos 30^\circ = \sqrt{3}\omega_1 b$$

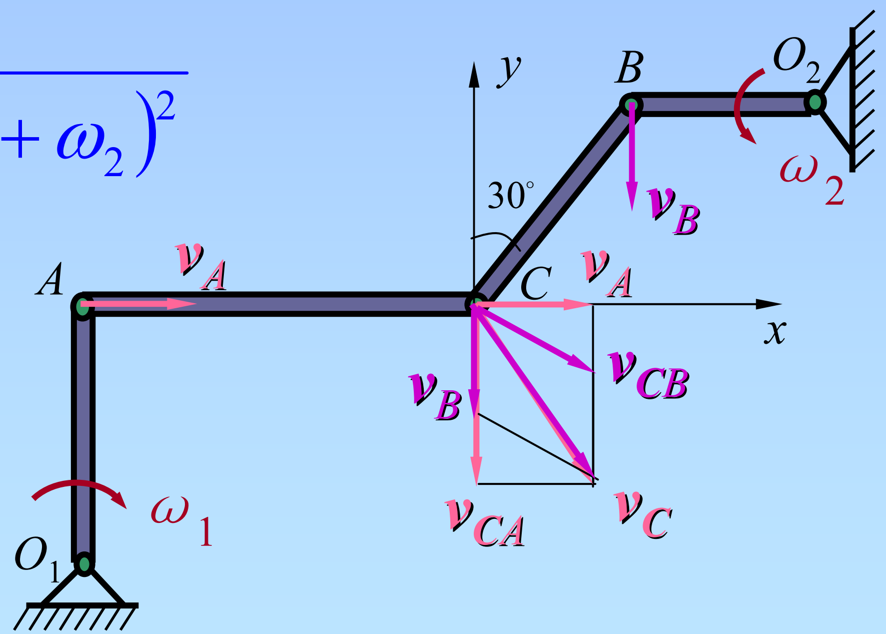
$$v_{Cy} = -v_B - v_{CB}\sin 30^\circ = -(\omega_1 + \omega_2)b$$

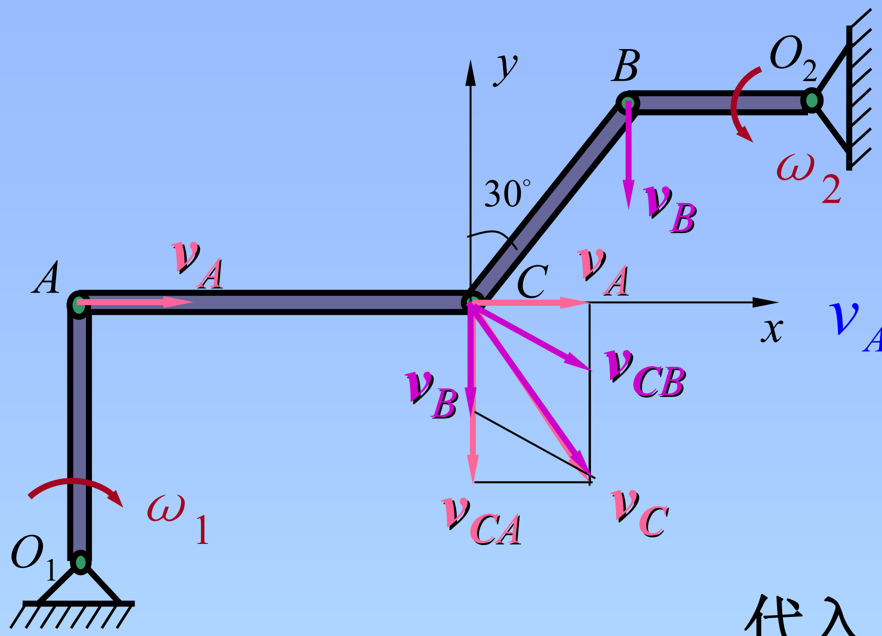
于是得

$$v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = b\sqrt{3\omega_1^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2}$$

$$= b\sqrt{4\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2}$$

$$\tan(\boldsymbol{v}_C, \boldsymbol{x}) = \frac{v_{Cy}}{v_{Cx}} = \frac{-(\omega_1 + \omega_2)}{\sqrt{3}\omega_1}$$





$$\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA} = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}$$

或者上式投影到 *CB* 方向得

$$v_A \sin 30° - v_{CA} \cos 30° = -v_B \cos 30°$$

$$v_{CA} = (\omega_1 + \omega_2) b \qquad \text{方向如图}$$

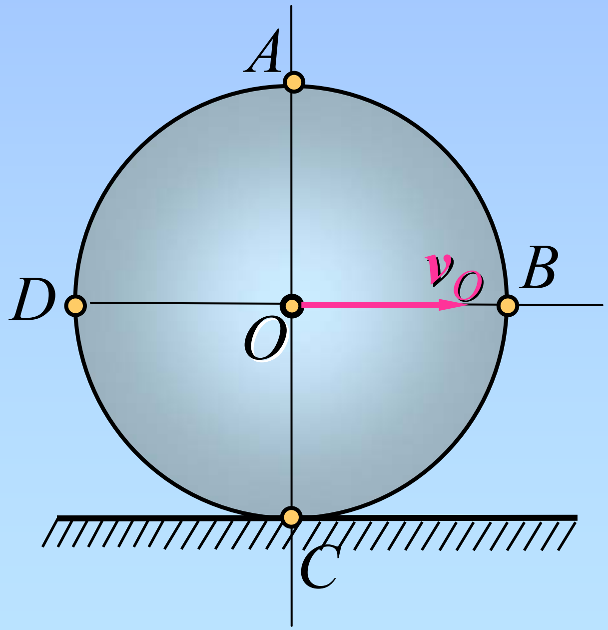
代入 $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA}$

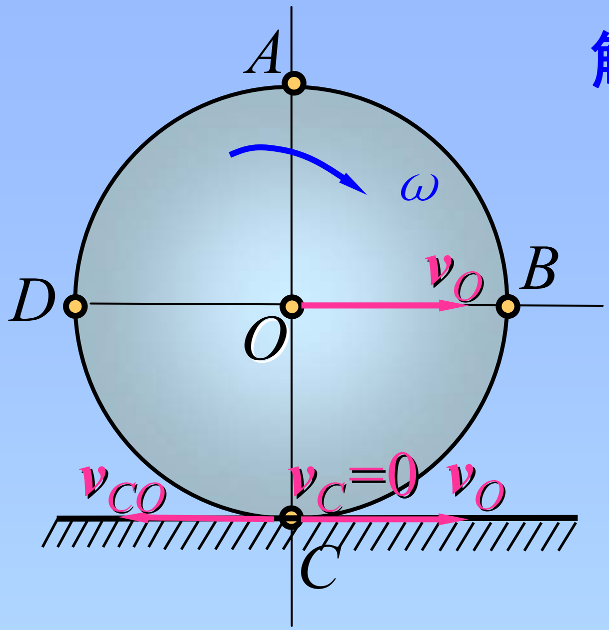
由于$\boldsymbol{v}_A$与$\boldsymbol{v}_{CA}$垂直,于是得

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + v_{CA}^2} = b\sqrt{3\omega_1^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2}$$

$$\tan(\boldsymbol{v}_C, \boldsymbol{x}) = \frac{v_{CA}}{v_A} = \frac{-(\omega_1 + \omega_2)}{\sqrt{3}\omega_1}$$

例4-4 如图所示，半径为R的车轮，沿直线轨道作无滑动的滚动，已知轮心O以匀速v_O前进。求轮缘上A，B，C和D各点的速度。





解： 基点法

因为轮心O点速度已知，故选O为基点。

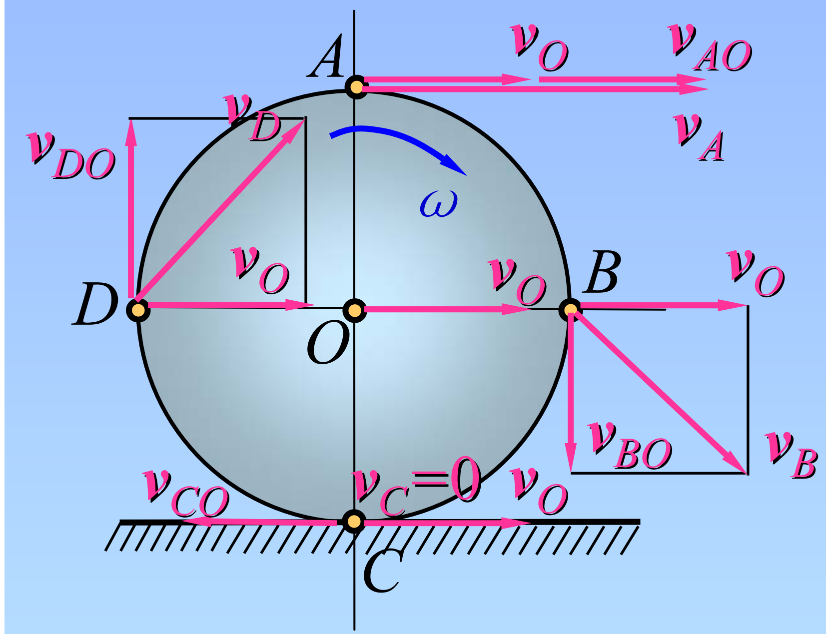
应用速度合成定理，轮缘上C点的速度可表示为 $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{CO}$

其中 $\boldsymbol{v}_{CO}$ 的方向已知，其大小$v_{CO}=R\,\omega$ 。

因为车轮作无滑动的滚动，则有 $\omega = \dfrac{v_O}{R}$ （顺时针）

因此 $v_{CO}=R\cdot\dfrac{v_O}{R}=v_O$ ，

解得 $v_C=v_O-v_{CO}=0$



$$\omega = \frac{v_O}{R}$$

其他各点的速度求得如下：

A点： $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{AO}$

$v_A = v_O + v_{AO}$， $v_{AO} = R\omega = v_O$

$v_A = 2v_O$

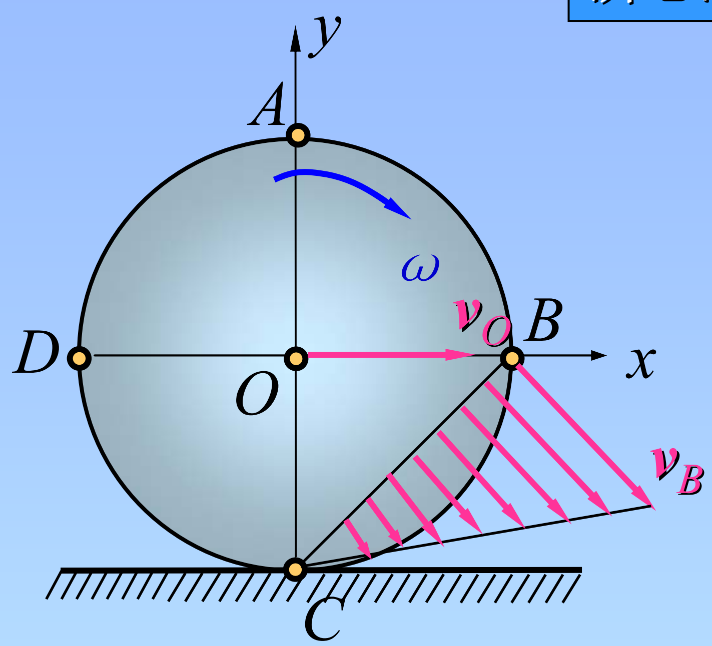
B点： $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{BO}$

$v_{BO} = R\omega = v_O$， $v_B = \sqrt{2}v_O$

D点： $\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{DO}$

$v_{DO} = R\omega = v_O$， $v_D = \sqrt{2}v_O$

瞬心法



车轮上与地面相接触的C点的速度为零即为车轮的瞬心。利用已知速度v_O，可求得车轮的角速度为

$$\omega = \frac{v_O}{OC} = \frac{v_O}{R} \quad \text{（顺时针）}$$

此ω与以O点为基点求出的角速度ω完全相同，说明图形的角速度与基点选择无关。

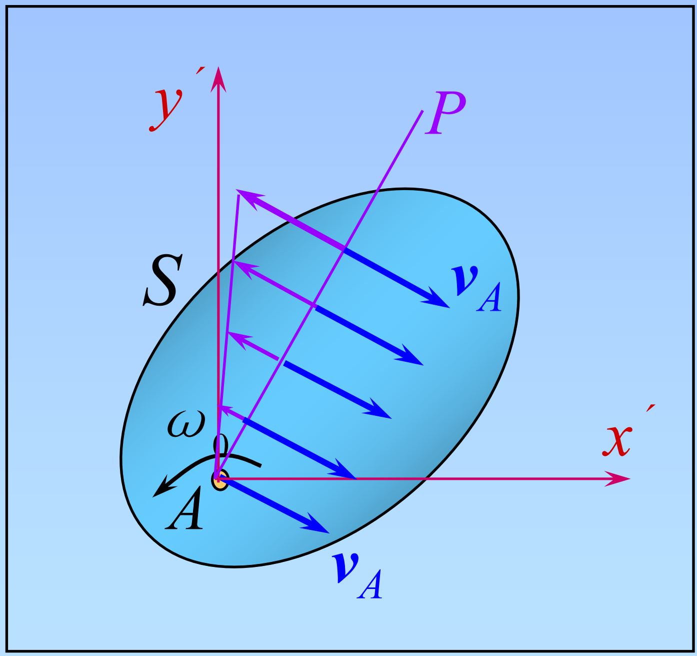
车轮上点B的速度方向垂直于连线CB，大小为

$$v_B = BC \cdot \omega = \sqrt{2}R \cdot \omega = \sqrt{2}v_O$$

同理，可求得轮缘上其它各点的速度，结果同前。

3. 速度瞬心法

（1）瞬时速度中心的概念

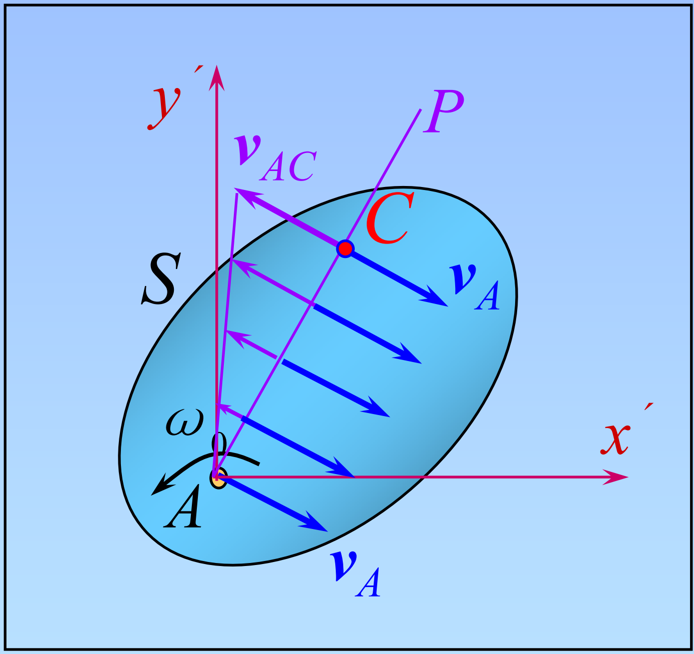


平面图形S，基点A，基点速度v_A,平面图形角速度 ω。

过A点作v_A的垂直线PA，PA上各点的速度由两部分组成：

跟随基点平移的速度v_A ——牵连速度，各点相同；

相对于平移系的速度v_{PA} ——相对速度，自A点起线性分布。



在直线PA上存在一点C，这一点的相对速度$\boldsymbol{v}_{AC}$与牵连速度$\boldsymbol{v}_A$矢量大小相等、方向相反。

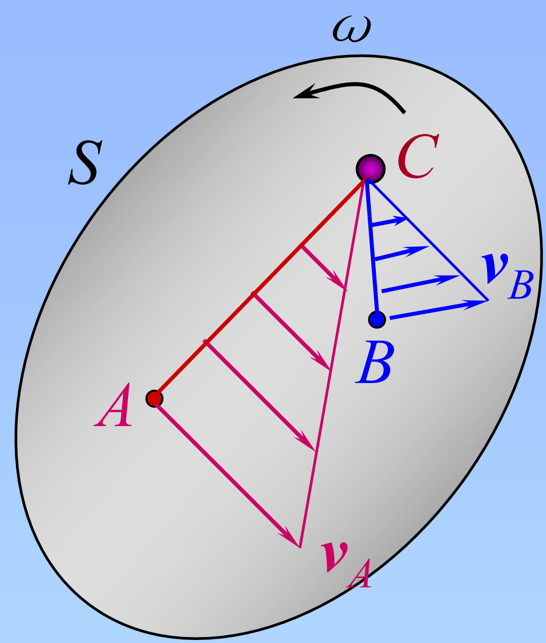
因此C点的绝对速度$\boldsymbol{v}_C=0$。

C点称为**瞬时速度中心**，简称为**速度瞬心**。

$$AC=\frac{v_A}{\omega}$$

（2）速度瞬心法

当平面图形在 t 瞬时的速度瞬心C以及瞬时角速度 ω均为已知时，可以以C为基点，建立平移系，进而分析平面图形上各点的运动。



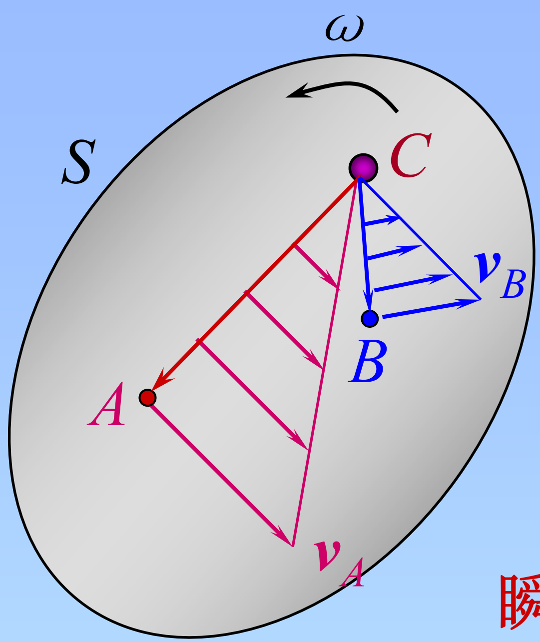
图形上的任意点的牵连速度等于零；绝对速度等于相对转动速度。

该瞬时图形内各点速度分布和定轴转动时的情形一样。

因此，图形在每一瞬时的绝对运动可以看成为绕速度瞬心的转动。

由于瞬心的位置是随时间而迁移的，故成为瞬时转轴，简称为瞬轴。

§4–2平面运动的速度分析



根据速度合成定理，平面图形上任意点(例如B点)为

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{BC}$$

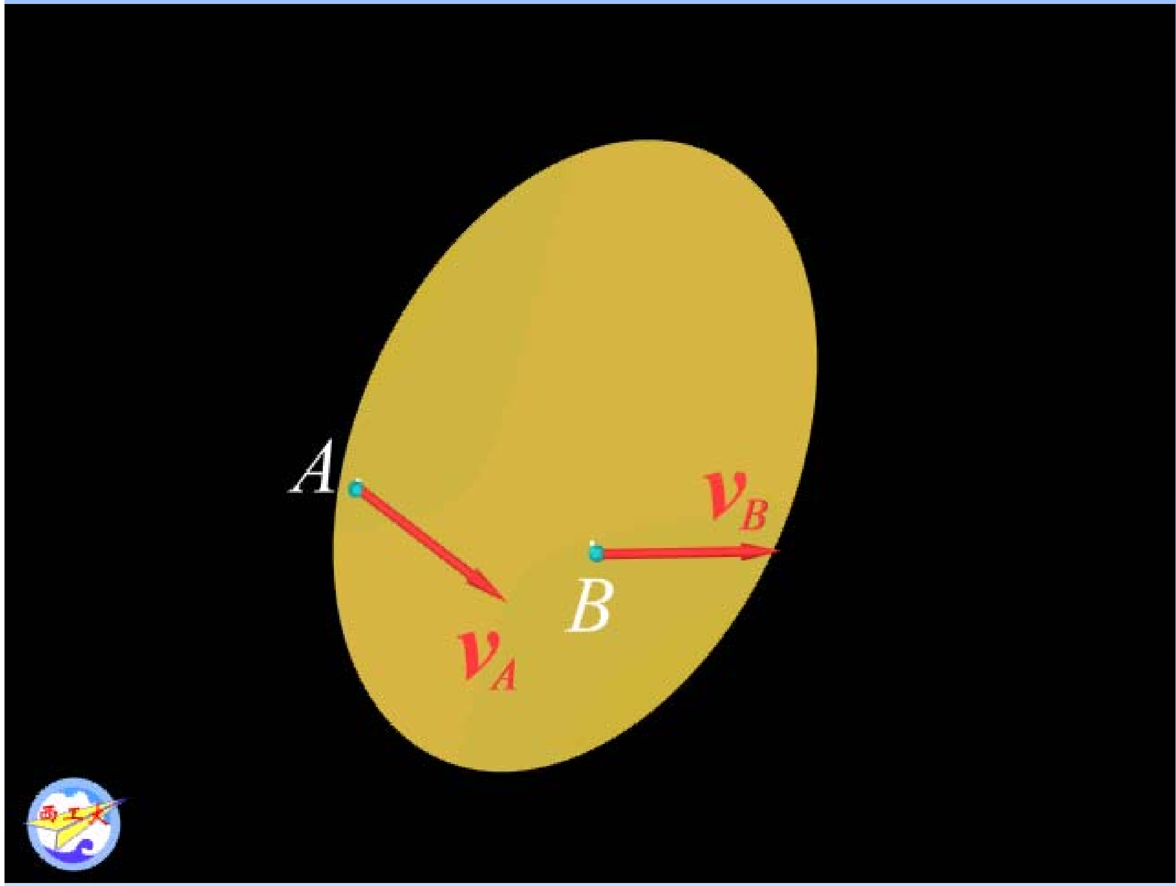
其中 $v_C=0$， $v_{BC}=\omega \cdot BC$

$$v_B = v_{BC} = \omega \cdot BC$$

图形内各点的速度的大小与该点到速度瞬心的距离成正比，其方向垂直于该点与速度瞬心的连线，指向转动前进的一方。

应用瞬时速度中心以及平面图形在某一瞬时绕速度瞬心作**瞬时转动**的概念，确定平面图形上各点在这一瞬时速度的方法，称为**速度瞬心法**。

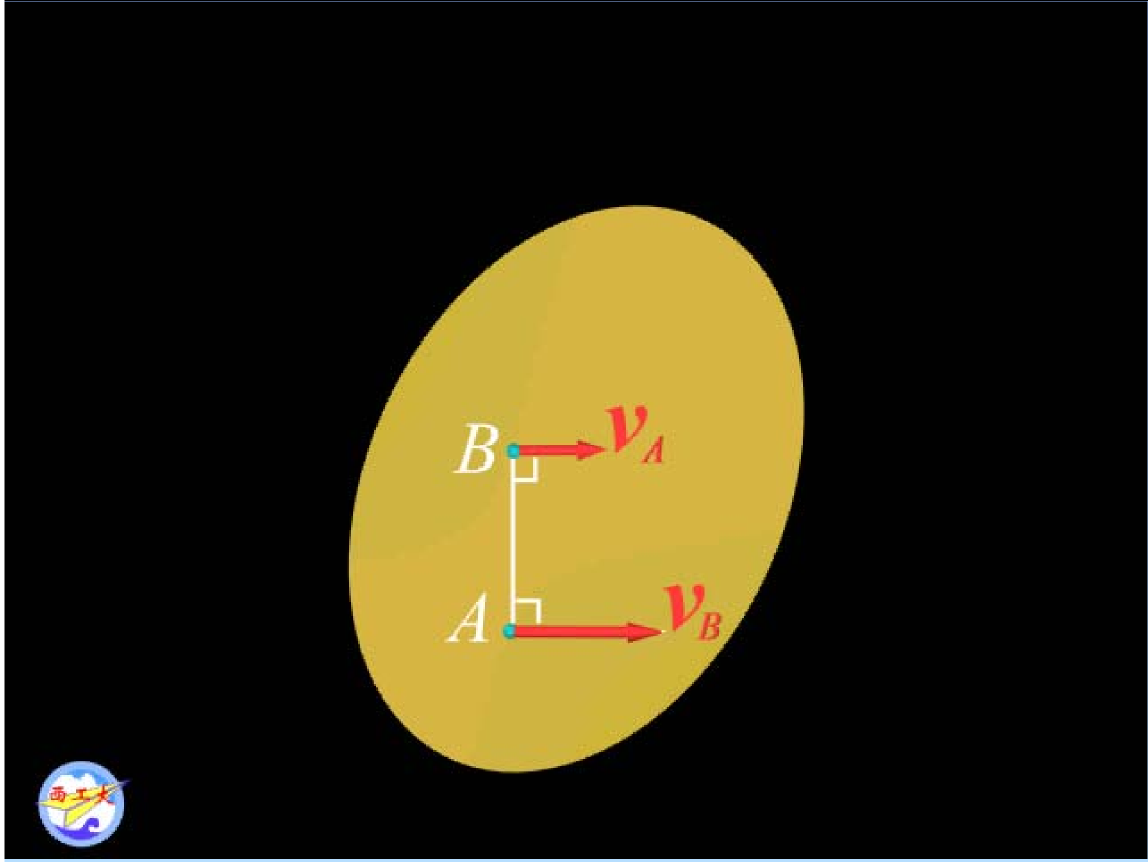
（3） 速度瞬心位置的确定



● 第一种情形

已知平面图形上两点的速度矢量的方向，这两点的速度矢量方向互不平行。

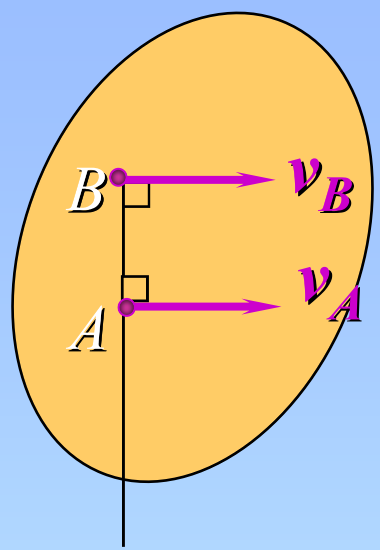
$$\omega = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{v_B}{BC_v}$$



● 第二种情形

已知平面图形上两点的速度矢量的大小与方向，而且二矢量互相平行，并且都垂直于两点的连线。

$$\omega=\frac{v_A}{AC_v}=\frac{v_B}{BC_v}=\frac{|v_A-v_B|}{AB}$$



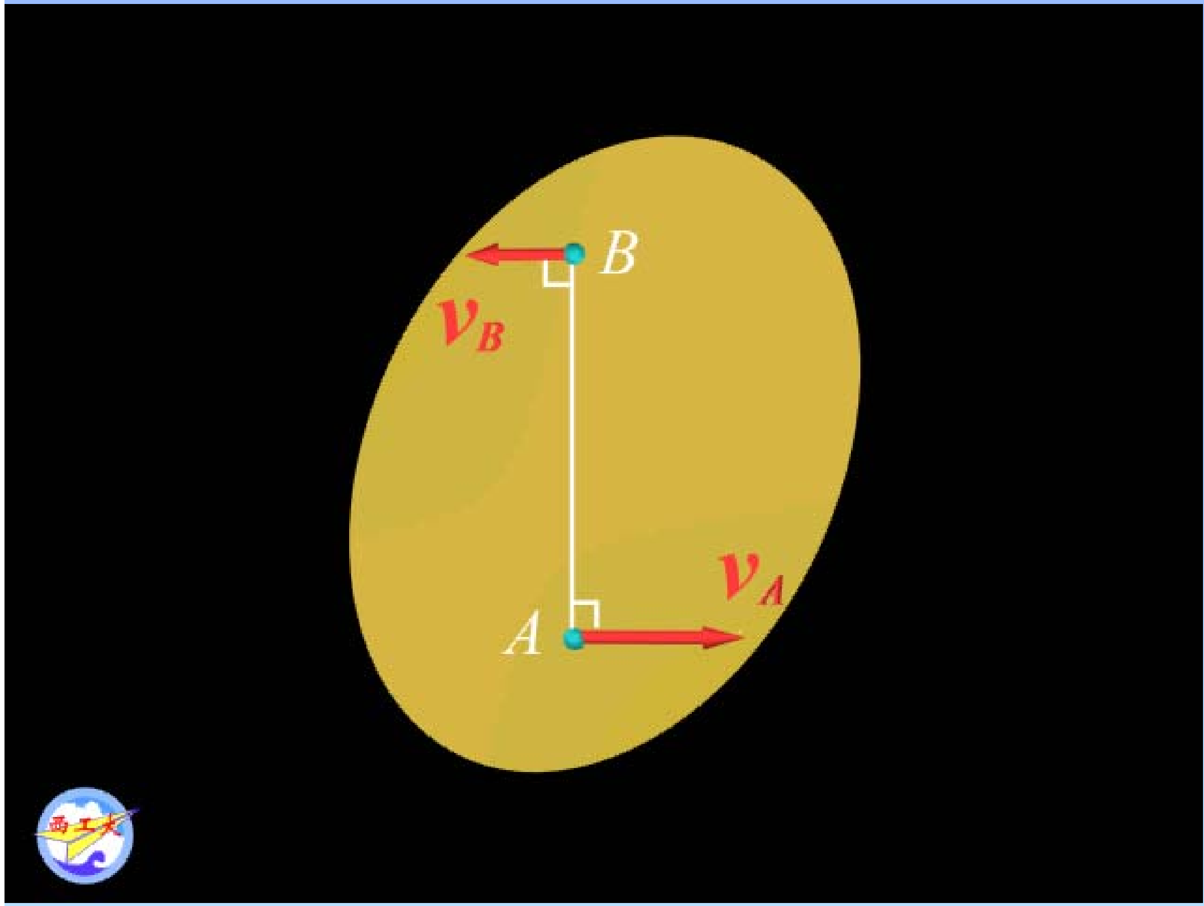
● 第二种情形

已知平面图形上两点的速度矢量的大小与方向，而且二矢量互相平行，并且都垂直于两点的连线。

特殊情况：

$v_A = v_B$,大小相等，指向相同。

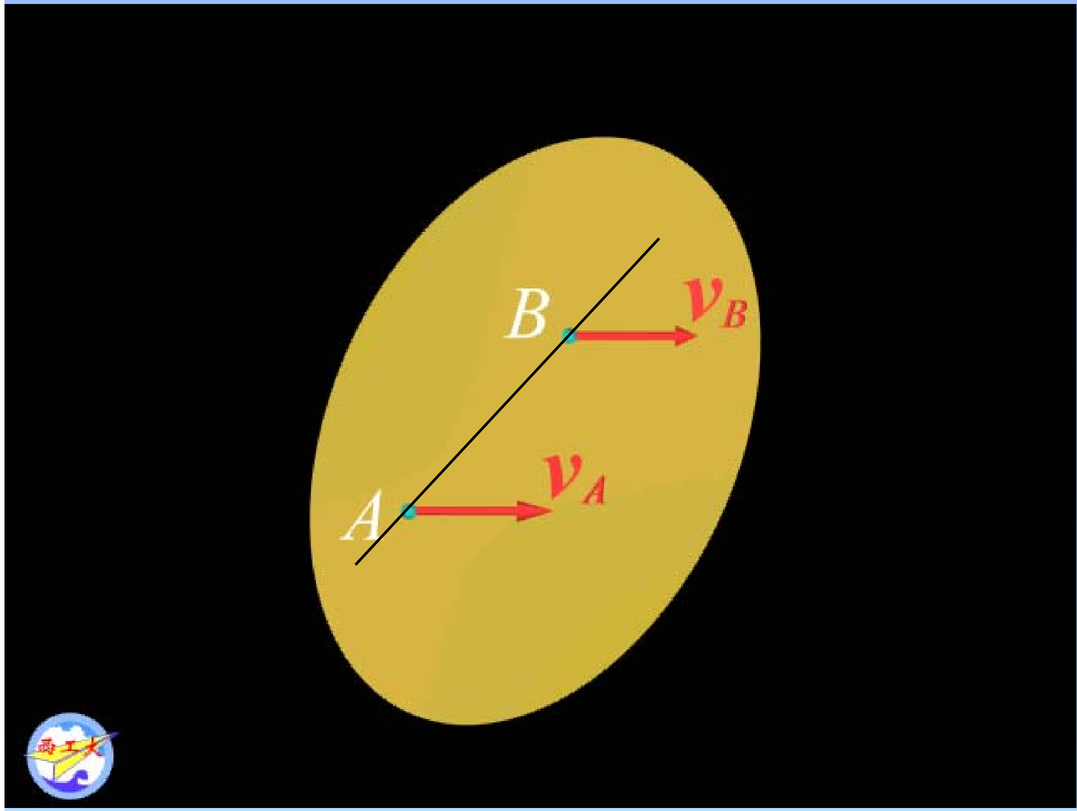
瞬心在无穷远处。



● 第三种情形

已知平面图形上两点的速度矢量的大小与方向，而且二矢量互相平行、方向相反，但二者都垂直于两点的连线。

$$\omega = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{v_B}{BC_v}$$



● 第四种情形

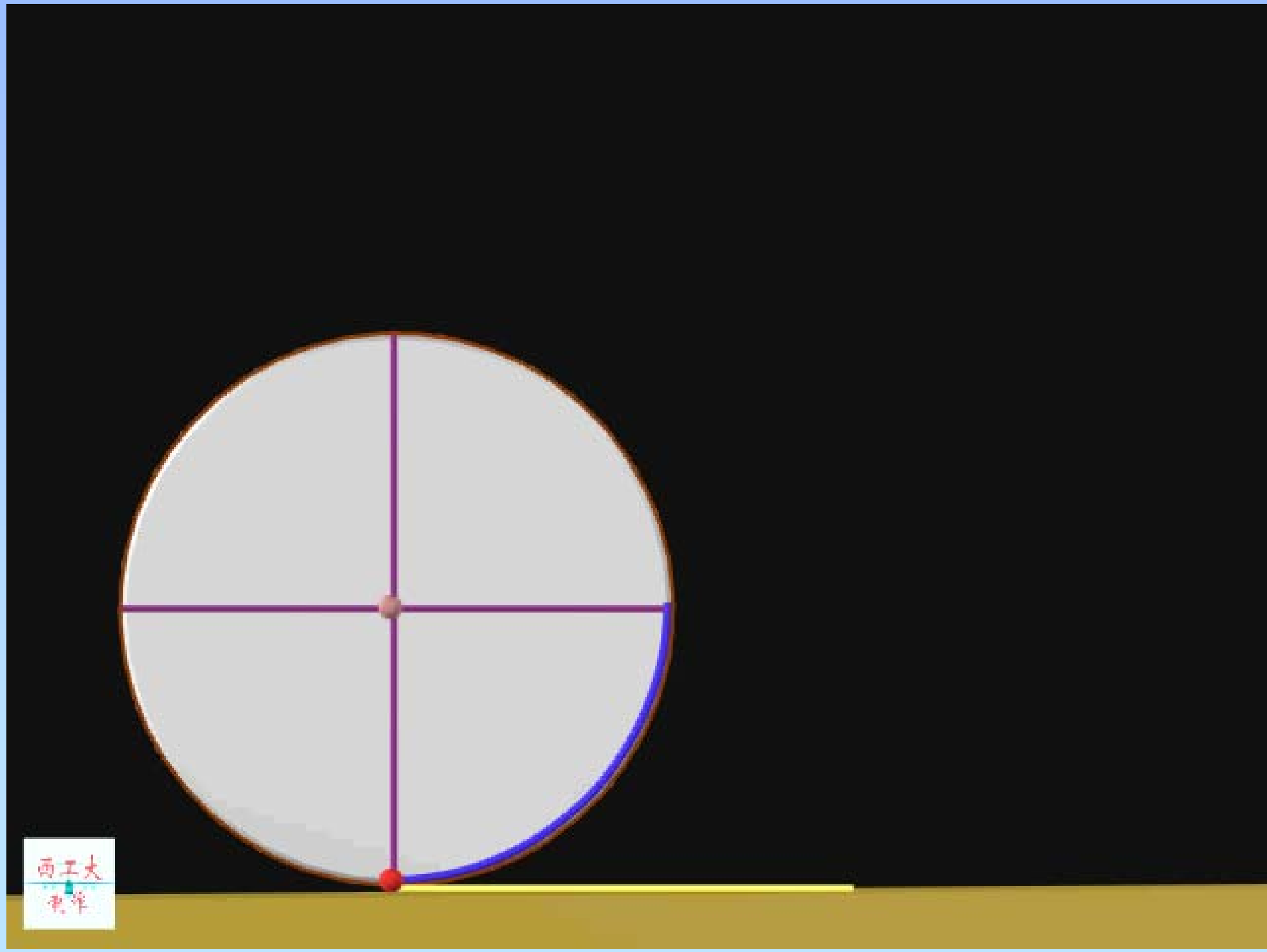
已知平面图形上两点的速度矢量的大小与方向，而且二矢量互相平行、方向相同，但二者都不垂直于两点的连线。

瞬心在无穷远处。

$$\omega = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{v_A}{\infty} = 0$$

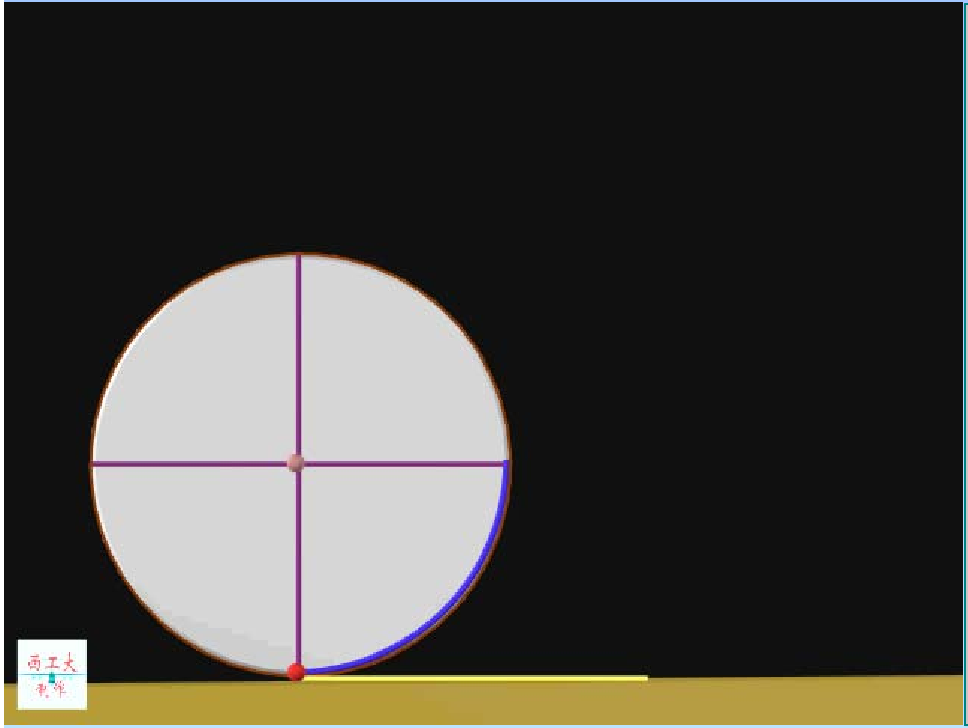
这种情况称为瞬时平移。

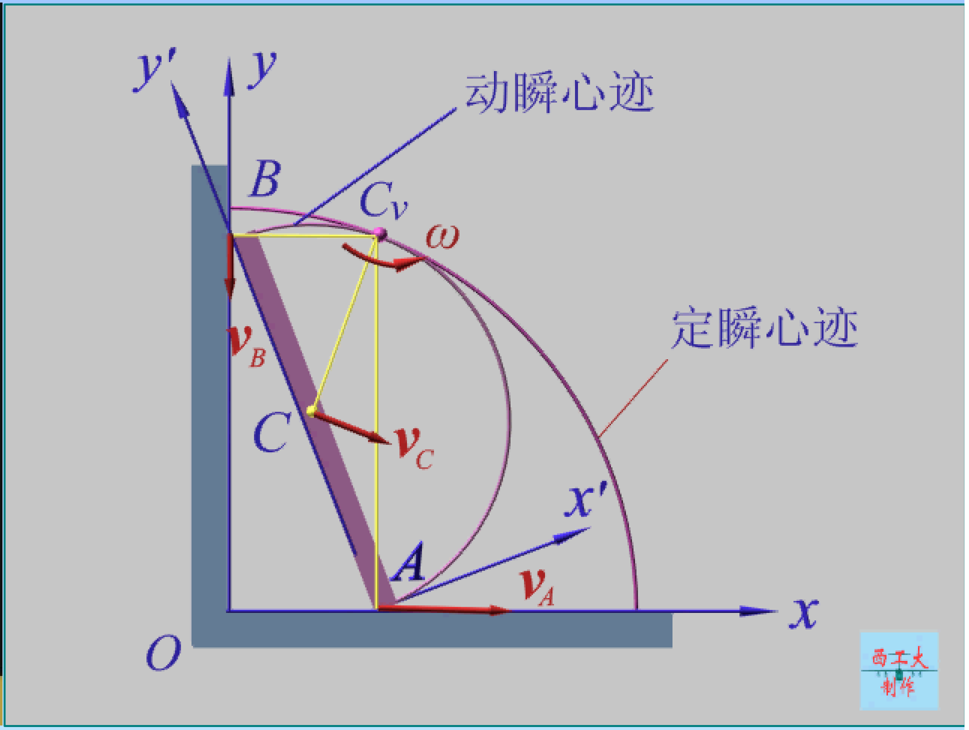
- 滚轮只滚不滑



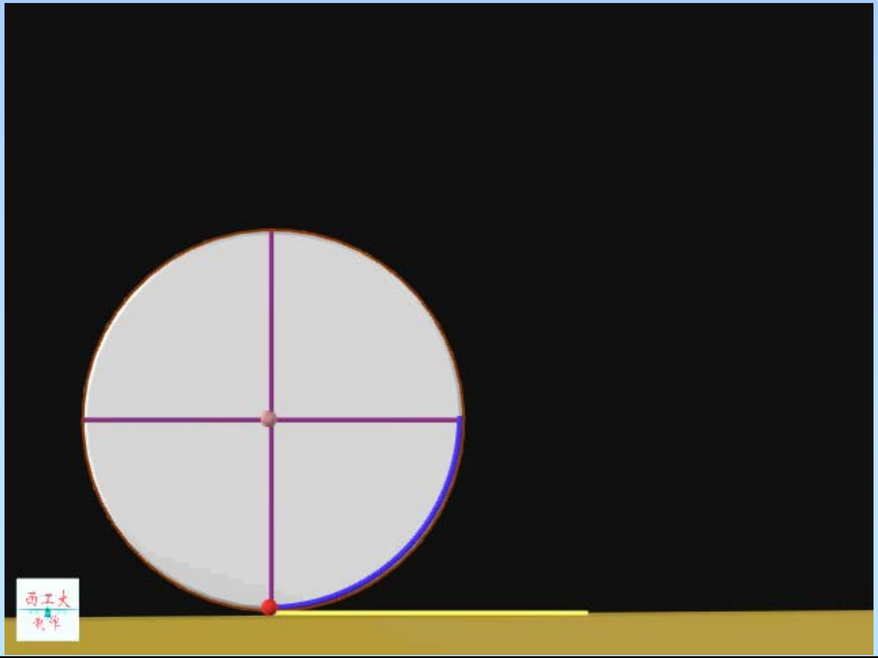
（4）速度瞬心的特点

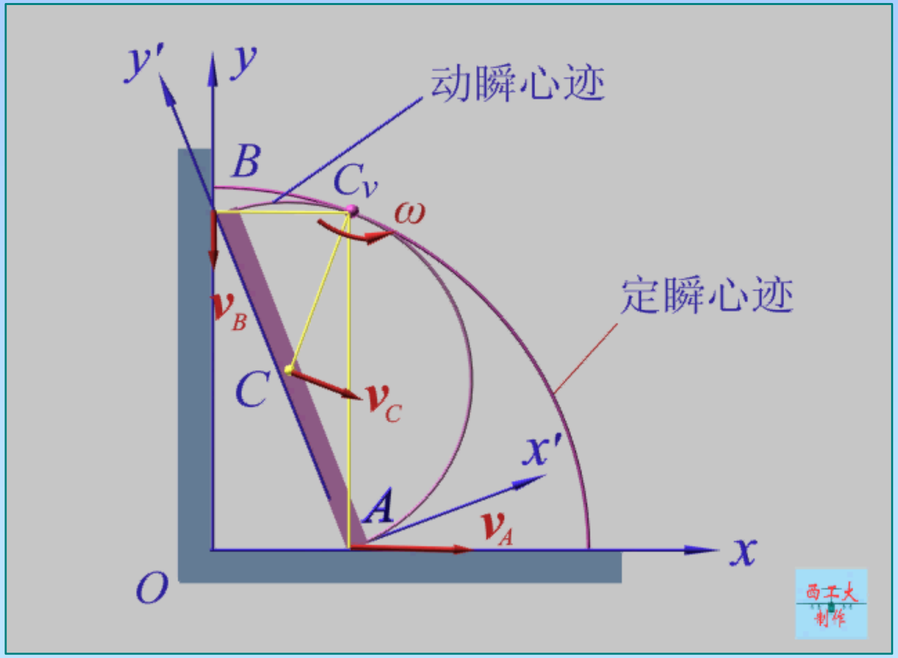
● 瞬时性：不同的瞬时，有不同的速度瞬心；因此瞬心具有加速度。





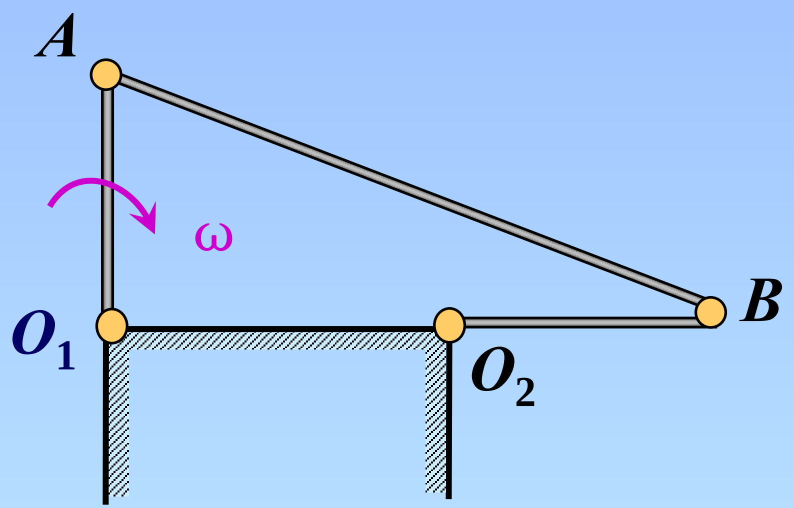
- **唯一性：** 某一瞬时只有一个速度瞬心；
- **瞬时转动特性：** 平面图形在某一瞬时的运动都可以视为绕这一瞬时的速度瞬心作瞬时转动.
- **注意瞬时平移与平移的区别：** 瞬时平移各点的速度相同，但是加速度不同。



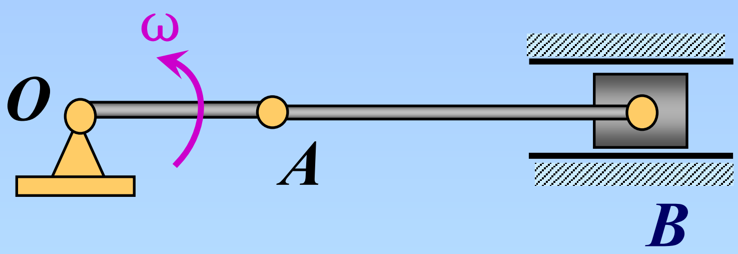


练习题

找出下列平面运动刚体的速度瞬心。



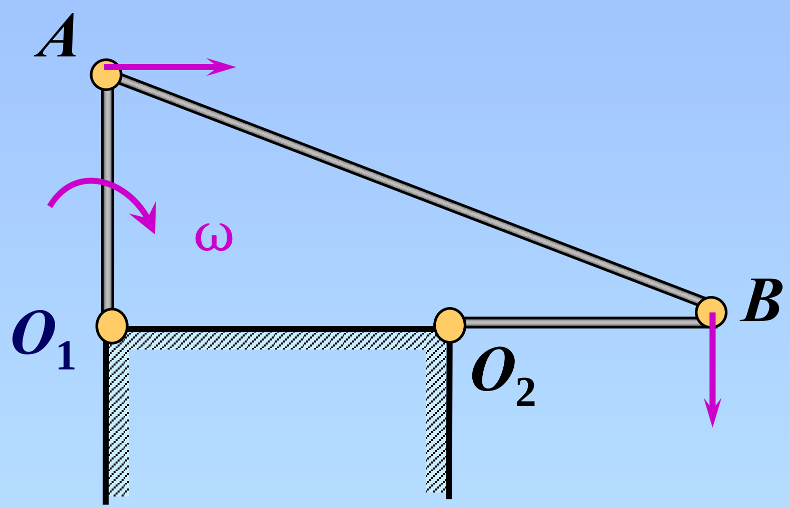
（1）



（2）

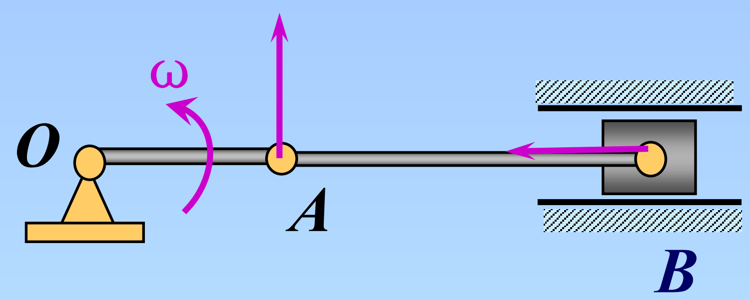
练习题

找出下列平面运动刚体的速度瞬心。



（1）

瞬心是O_1

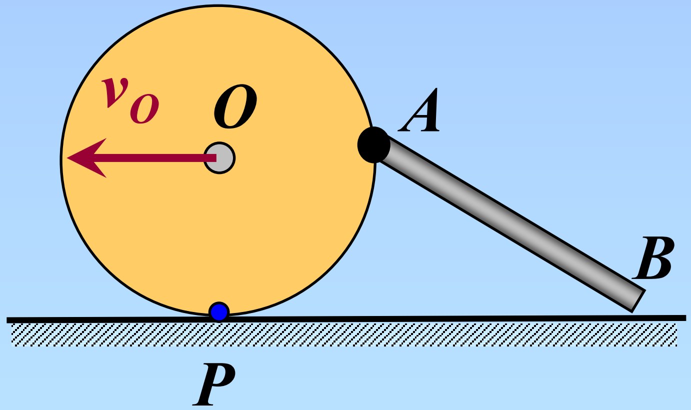


（2）

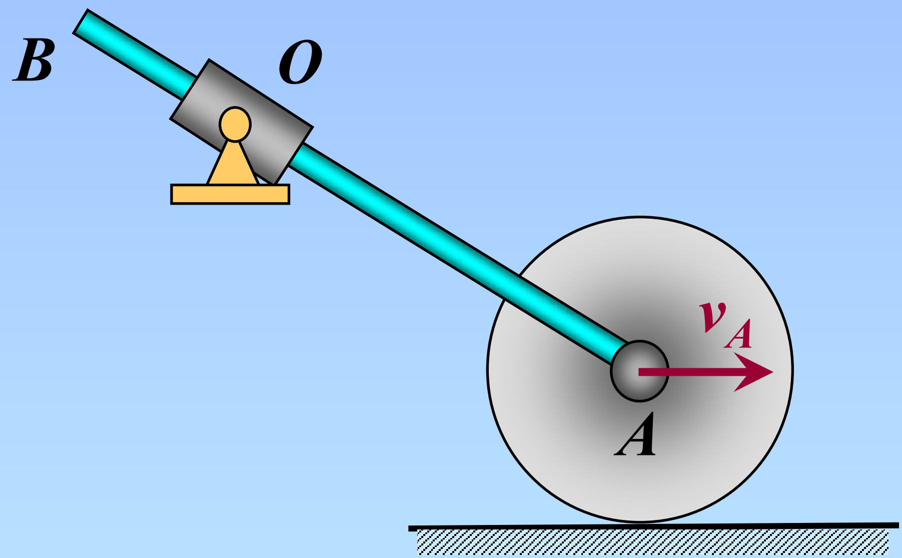
瞬心是B

练习题

找出下列平面运动刚体的速度瞬心。

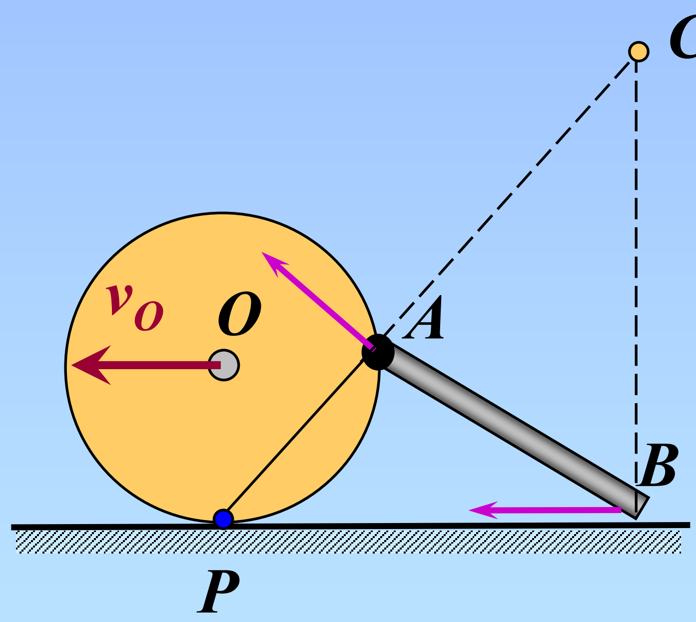


(3)

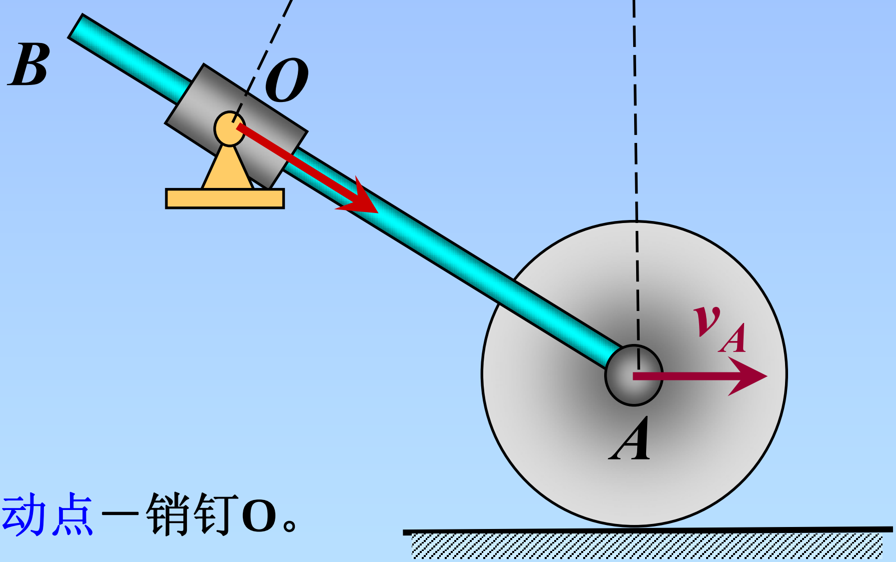


(4)

练习题　找出下列平面运动刚体的速度瞬心。



(3)



动点—销钉O。

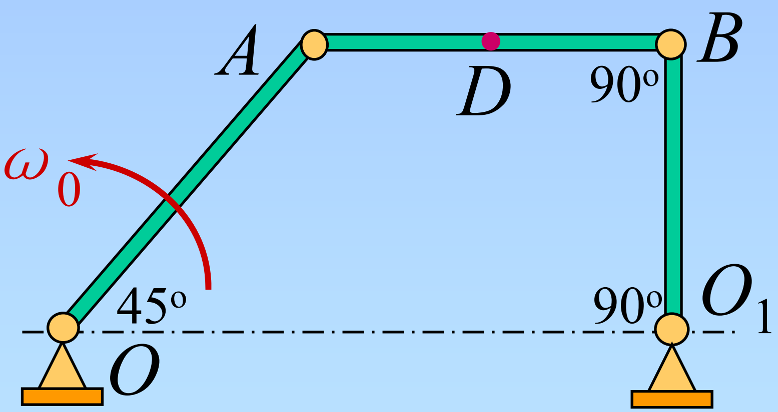
动系—固结在杆*AB*上。

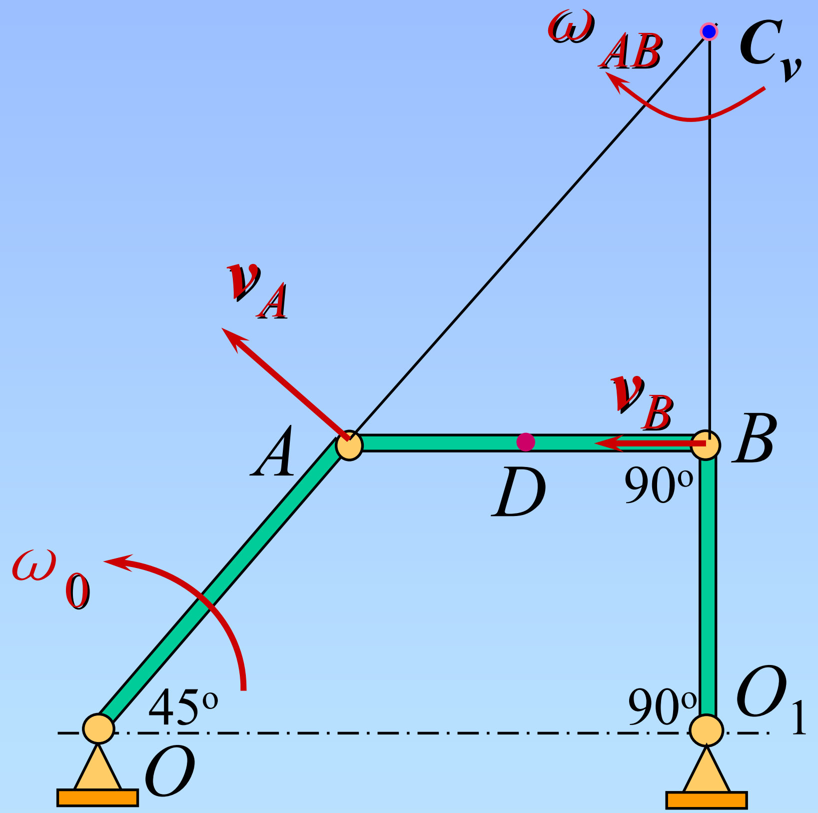
由　$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = 0$

(4)

得　$\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} = -\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$，

例4-5 已知四连杆机构中，$O_1B = l,\ AB = \dfrac{3}{2}l,\ AD = DB$。$OA$以 ω_0绕O轴转动。求（1）B和D点的速度；（2）AB杆的角速度。





解： 机构作平面运动，OA 和O_1B都作定轴转动。

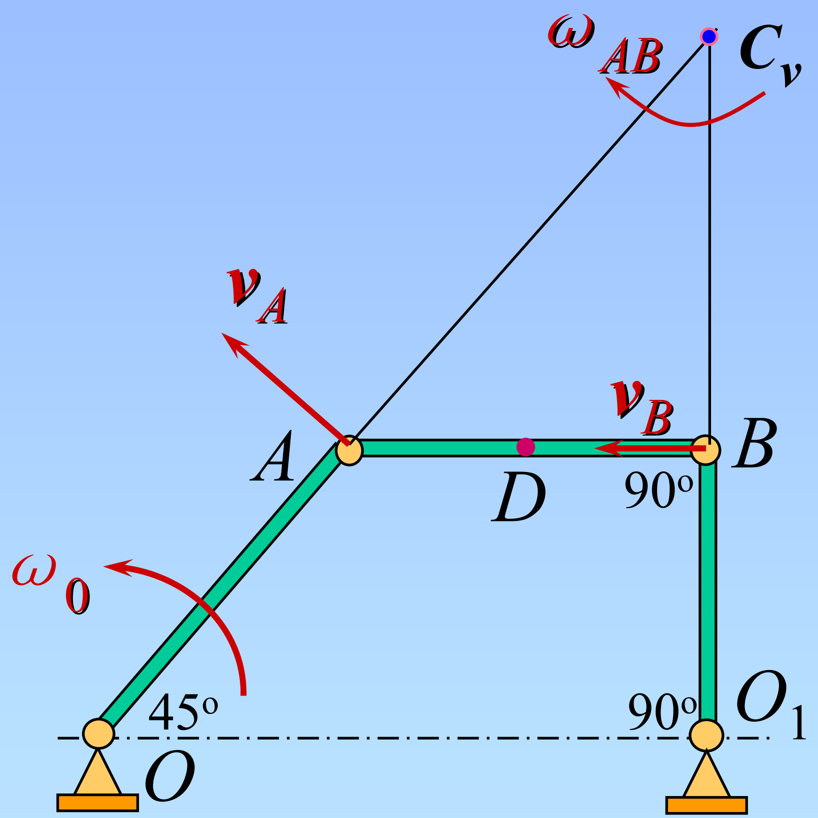
A，B二点的速度$\boldsymbol{v}_A$和$\boldsymbol{v}_B$的方向都可以确定。

作二者的垂直线，相交于C_v，此即速度瞬心。

图中的几何关系：

$$OA = \sqrt{2}l, AB = BC_v = \frac{3}{2}l,$$

$$AC_v = \frac{3\sqrt{2}}{2}l, DC_v = \frac{3\sqrt{5}}{4}l$$



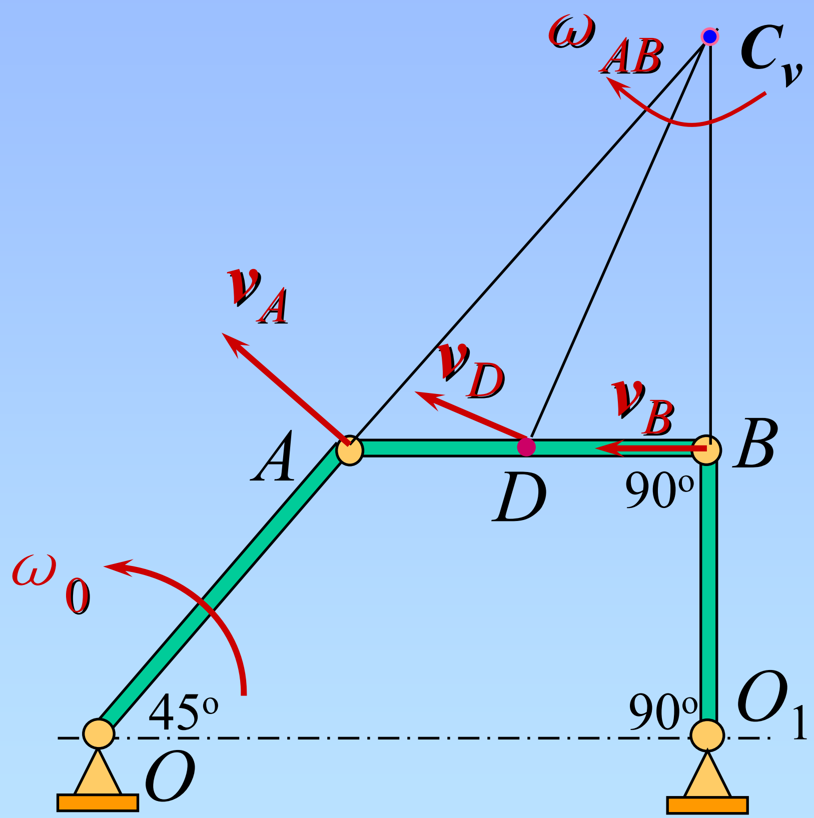
（1）求B和D点的速度。

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = \sqrt{2} l \omega_0$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{\sqrt{2} l \omega_0}{\frac{3\sqrt{2}}{2} l} = \frac{2}{3}\omega_0$$

$$v_B = BC_v \cdot \omega_{AB} = \frac{v_A}{AC_v}$$

$$= \frac{3}{2} l \times \frac{2}{3}\omega_0 = l\omega_0$$

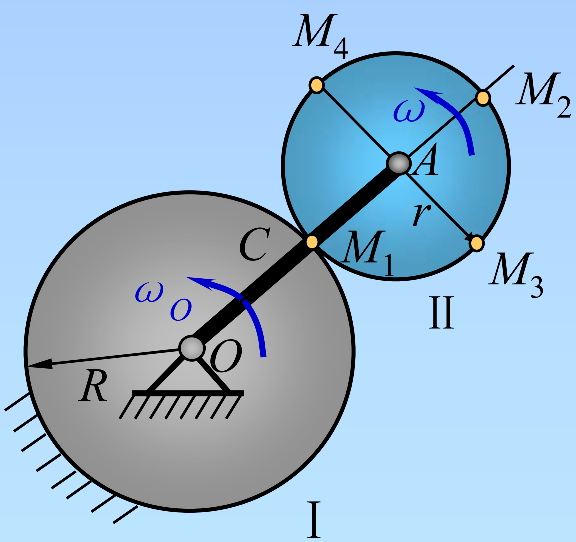


$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{\sqrt{2} l \omega_0}{\frac{3\sqrt{2}}{2} l} = \frac{2}{3}\omega_0$$

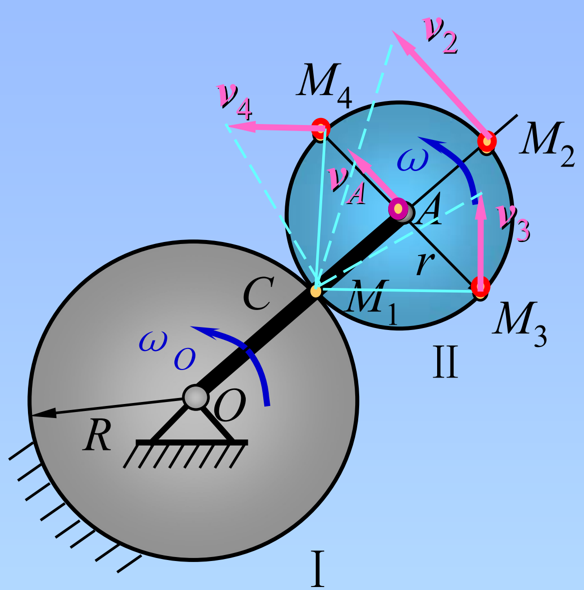
$$v_D = DC_v \cdot \omega_{AB} = \frac{3\sqrt{5}}{2} l \times \frac{2}{3}\omega_0$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} l \omega_0$$

例4-6 如图所示，节圆半径为r的行星齿轮II由曲柄OA带动在节圆半径为R 的固定齿轮 I 上作无滑动的滚动。已知曲柄OA以匀角速度 ω_O 转动。求在图示位置时，齿轮II节圆上M_1，M_2，M_3和M_4各点的速度。图中线段M_3M_4垂直于线段M_1M_2。



解： 行星齿轮 II 上与固定齿轮 I 的节圆相接触的C点是齿轮II的速度瞬心，所以可利用瞬心法求齿轮II 上各点的速度。为此先求轮 II 的角速度。



因为A点的速度 $v_A = OA \cdot \omega_O = (R+r)\cdot\omega_O$

$$v_A = AC \cdot \omega = r \cdot \omega$$

$$r\cdot\omega = (R+r)\cdot\omega_O$$

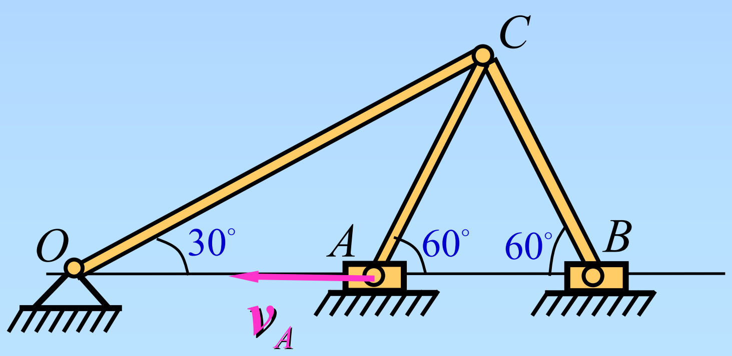
因此轮 II 的角速度 $\omega = \dfrac{R+r}{r}\omega_O$ （逆时针）

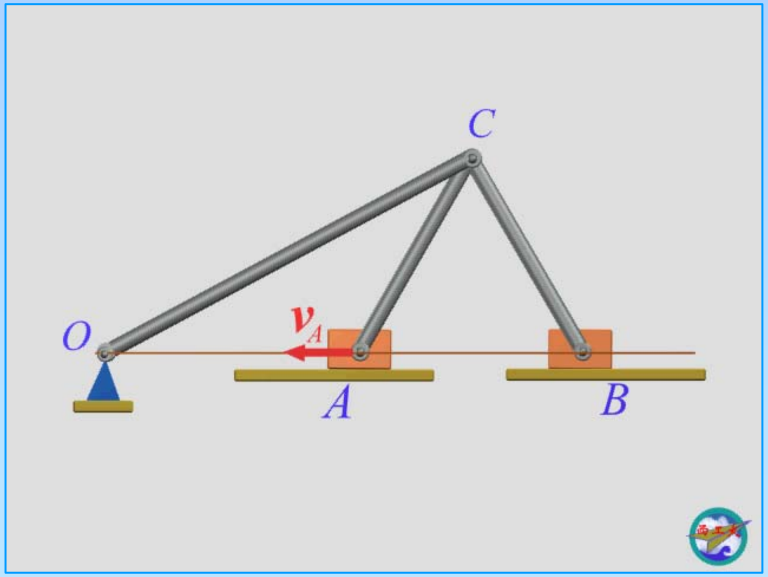
所以轮 II 上 M_1，M_2，M_3 和 M_4 各点的速度分别为：

$$v_1 = v_c = 0 \qquad v_2 = CM_2 \cdot \omega = 2(R+r)\omega_O$$

$v_3 = v_4 = CM_3 \cdot \omega = \sqrt{2}(R+r)\omega_O$ 各点的速度方向如图所示。

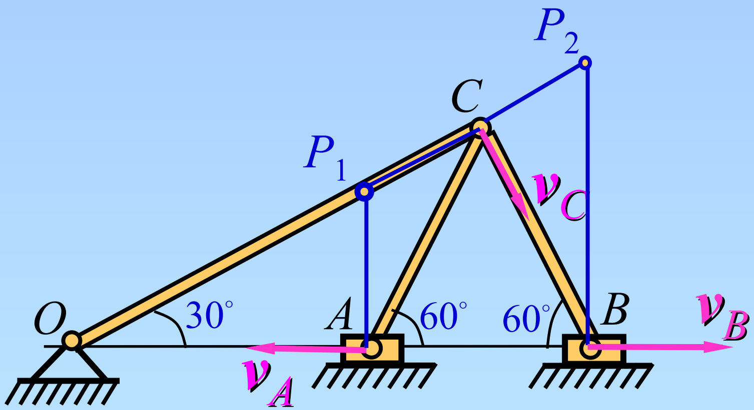
例4-7 在双滑块摇杆机构中，滑块A和B可沿水平导槽滑动，摇杆OC可绕定轴O转动，连杆CA和CB可在图示平面内运动，且$CB=l$。当机构处于图所示位置时，已知滑块A的速度$\boldsymbol{v}_A$，试求该瞬时滑块B的速度$\boldsymbol{v}_B$以及连杆CB的角速度ω_{CB}。试用速度瞬心法求解。





解： 速度瞬心法

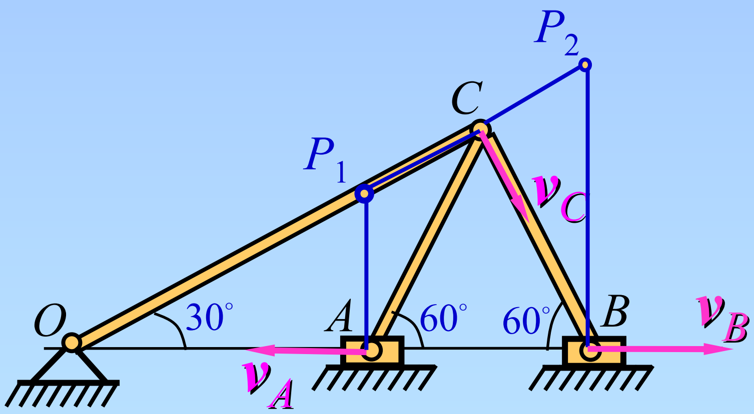
先求连杆AC的速度瞬心。由点A和C分别作出其速度$\boldsymbol{v}_A$和$\boldsymbol{v}_C$的垂线，得交点P_1，它就是杆AC的速度瞬心。



由图可知，$P_1A=P_1C$，所以

$$v_C = v_A$$

同样，由点C、B速度$\boldsymbol{v}_C$，$\boldsymbol{v}_B$的已知方向，可求出连杆CB的速度瞬心P_2。



因为 $P_2C = CB \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3} l$

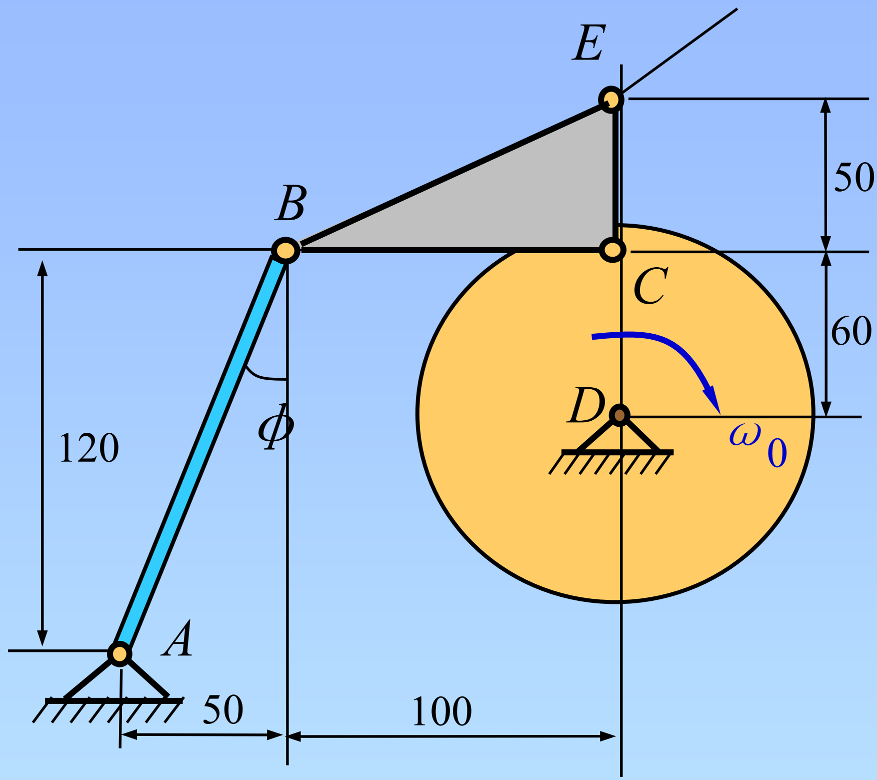
故得连杆CB角速度的大小

$$\omega_{CB} = \frac{v_C}{P_2C} = \frac{\sqrt{3}}{l} v_A$$

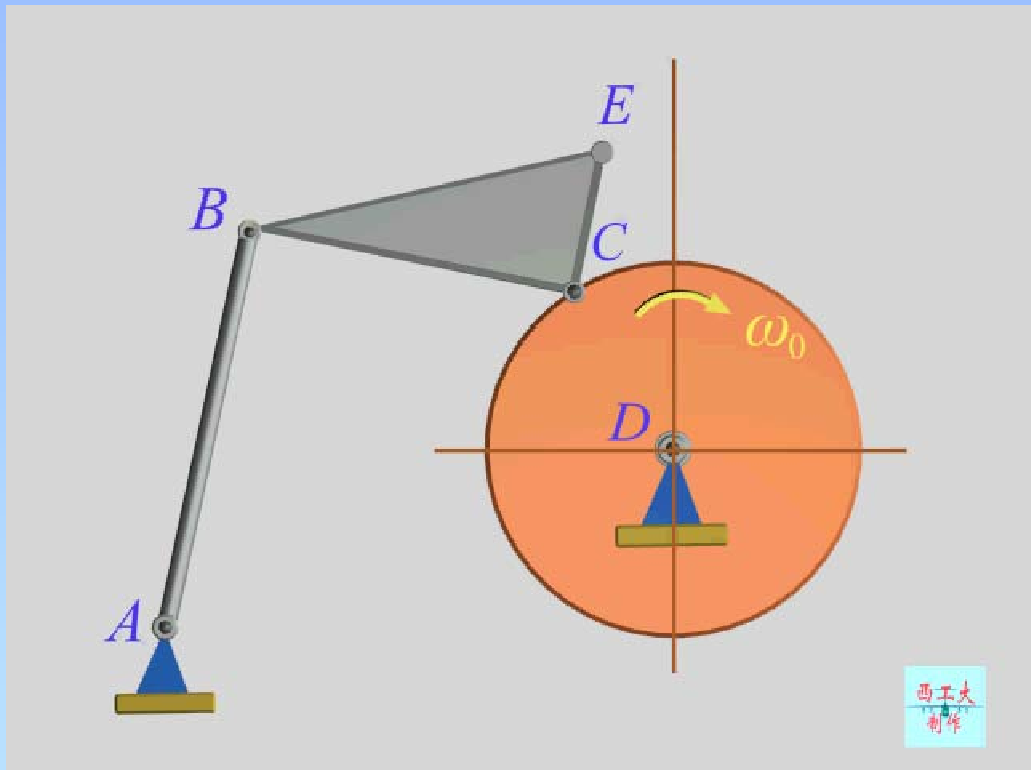
它的转向沿逆时针。于是滑块B 速度的大小为

$$v_B = P_2B \cdot \omega_{CB} = \frac{2}{\sqrt{3}} l \times \frac{\sqrt{3}}{l} v_A = 2v_A$$

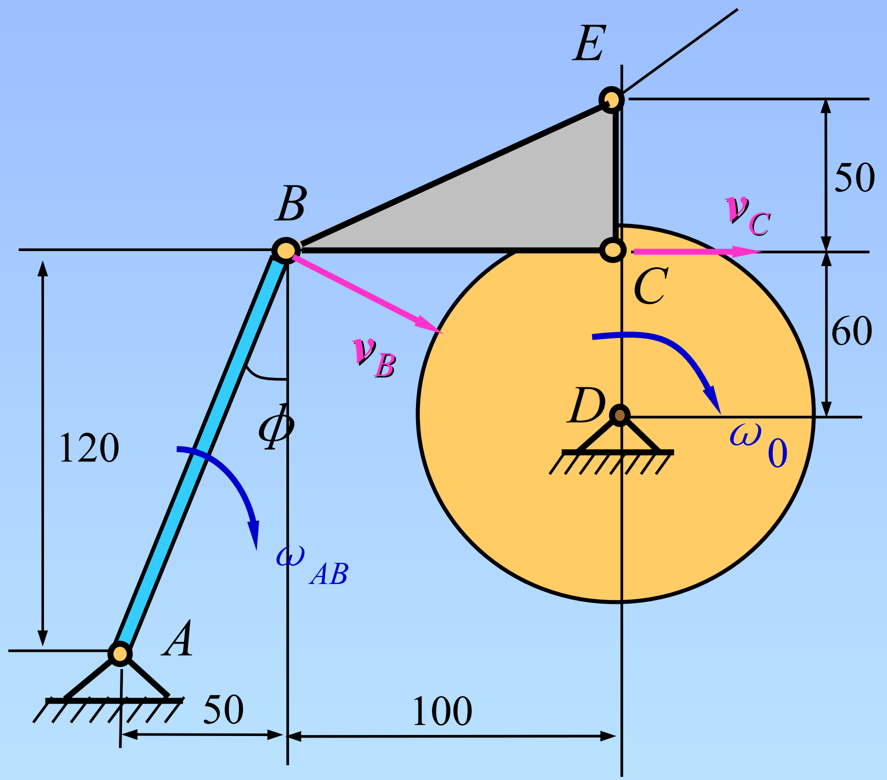
其方向水平向右。



例4-8 图示一连杆机构，曲柄AB和圆盘CD分别绕固定轴A和D转动。BCE为三角形构件，B，C为销钉连接。设圆盘以匀速n_0=40 r · min^{-1}顺时针转向转动，尺寸如图。试求图示位置时曲柄AB的角速度ω_{AB}和构件BCE上点E的速度$\boldsymbol{v}_E$。



运动演示



解： （1）求曲柄AB的角速度 ω_{AB}。

C点速度已知，$v_C = CD \cdot \omega_0$，B点速度垂直于曲柄AB。根据速度投影定理得

$$v_B \cos\varphi = v_C$$

根据已知数据，得到：

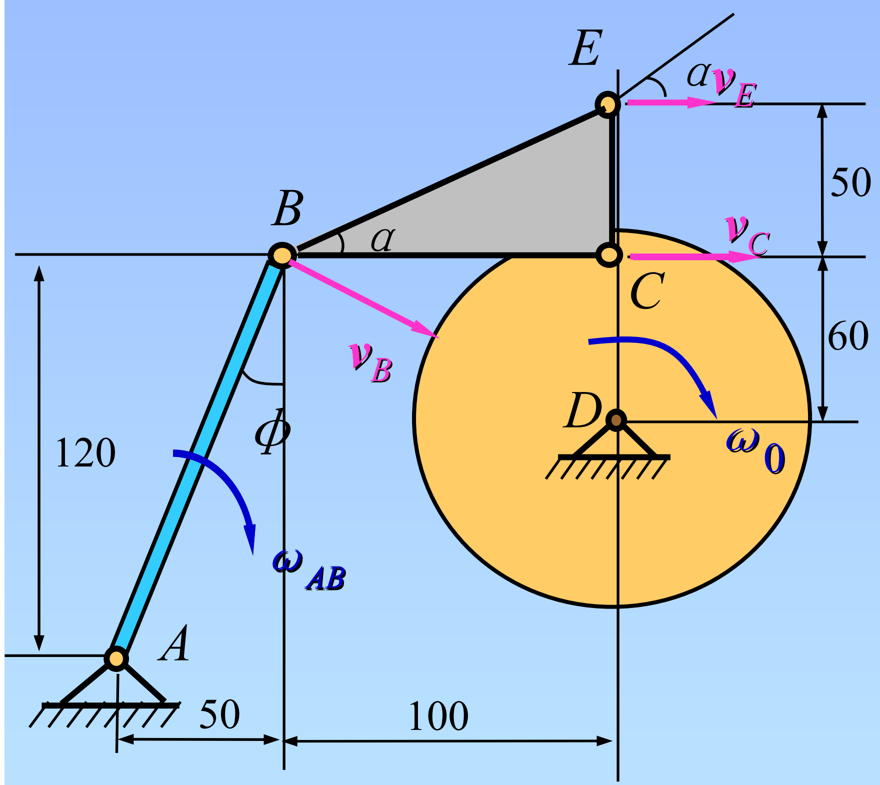
$$\omega_0 = \frac{2\pi n_0}{60} = 4.19 \quad \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\cos\varphi = \frac{120}{\sqrt{120^2 + 50^2}} = \frac{12}{13}, \quad \varphi = 22.6^\circ$$

故 $$v_B = \frac{\omega_0 \cdot CD}{\cos\varphi} = 272 \quad \text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$$

曲柄AB的角速度

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{AB} = 2.09 \quad \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$



（2）求*E*点的速度。

由于构件*BCE*上*C*点的速度v_C垂直于*CE*，根据速度投影定理可知*E*点的速度v_E也应垂直于*CE*。应用速度投影定理，v_B与v_E在*BE*连线上的投影相等，即

$$v_B\cos(\alpha+\varphi)=v_E\cos\alpha$$

式中

$$\alpha=\arctan\frac{CE}{BC}=26.6^\circ$$

所以

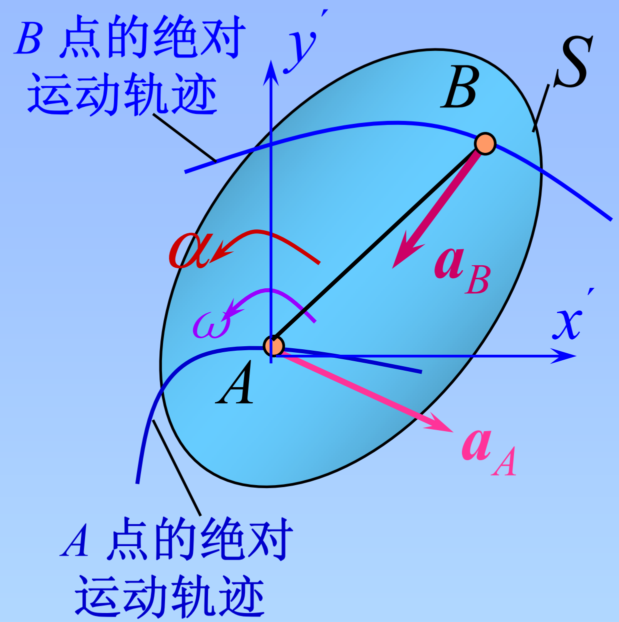
$$v_E=\frac{v_B\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha}=199\ \mathrm{mm\cdot s^{-1}}$$

§4–3 平面运动的加速度分析

- 加速度合成定理

加速度合成定理

如果已知平面图形上一点A的加速度$\boldsymbol{a}_A$、图形的角速度 ω 与角加速度$\boldsymbol{\alpha}$，应用加速度合成定理，可以确定平面图形上任意点B的加速度。



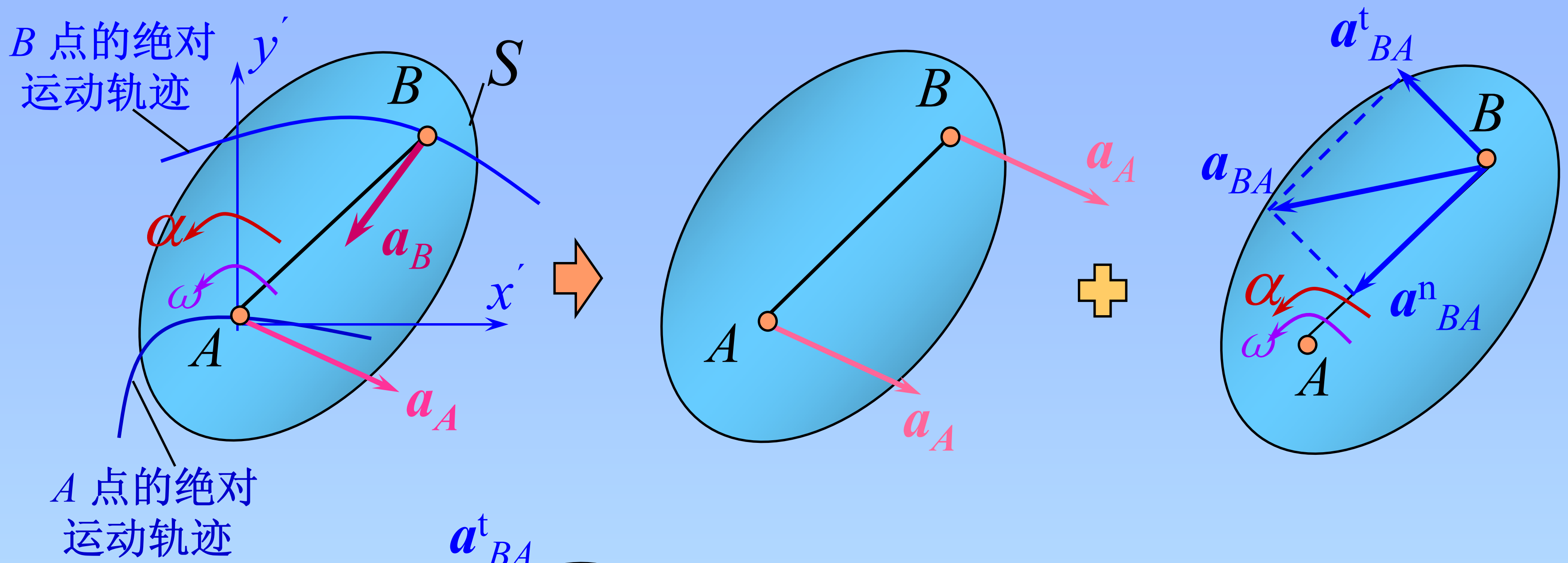
(1) 选择加速度已知的点A为基点；

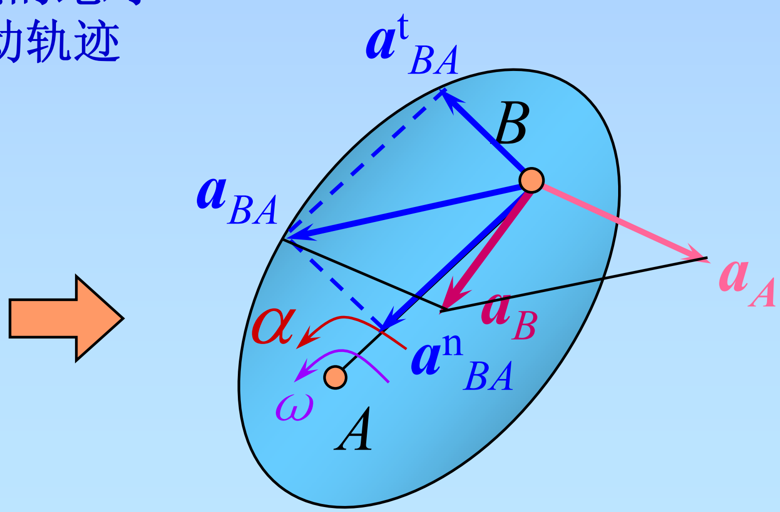
(2) 建立平移系；

(3) 应用牵连运动为平移的加速度合成定理 $\boldsymbol{a}_\mathrm{a}=\boldsymbol{a}_\mathrm{e}+\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ 可以确定图形上任意点的加速度。这时

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_\mathrm{a}\ ,\quad \boldsymbol{a}_\mathrm{e}=\boldsymbol{a}_A\ ,\quad \boldsymbol{a}_\mathrm{r}=\boldsymbol{a}_{BA}$$

§ 4–3 平面运动的加速度分析





$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

$$= \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}_{BA} + \boldsymbol{a}^{\mathrm{n}}_{BA}$$

§4–3 平面运动的加速度分析

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

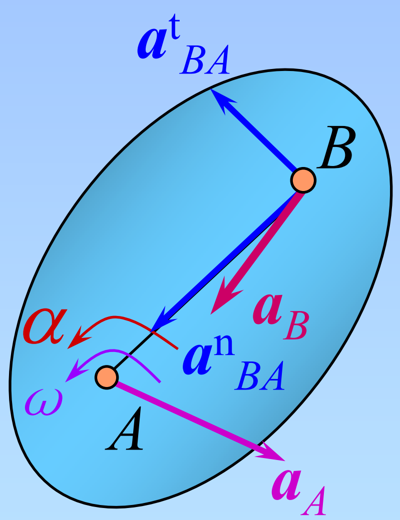
$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}}$$

平面图形上任意一点的加速度等于基点的加速度与这一点对于以基点为坐标原点的平移系的相对切向加速度和法向加速度的矢量和。

§ 4–3 平面运动的加速度分析

加速度分析有没有投影法？

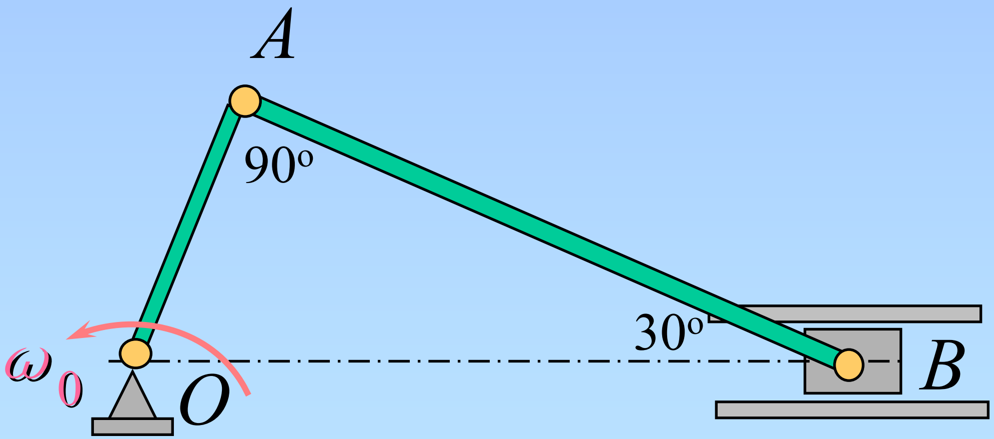
$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}}$$

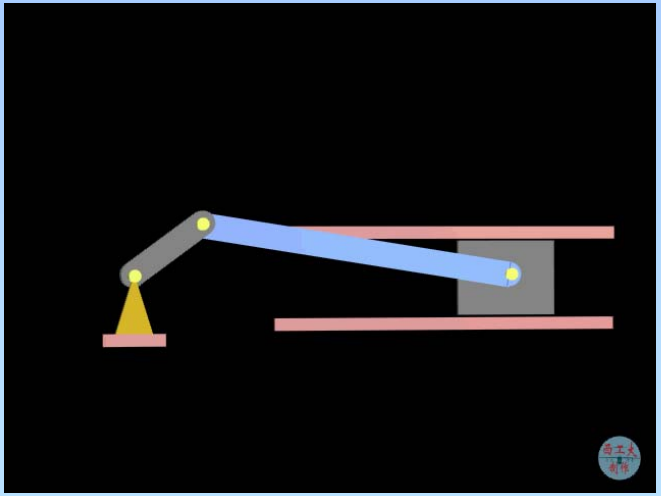


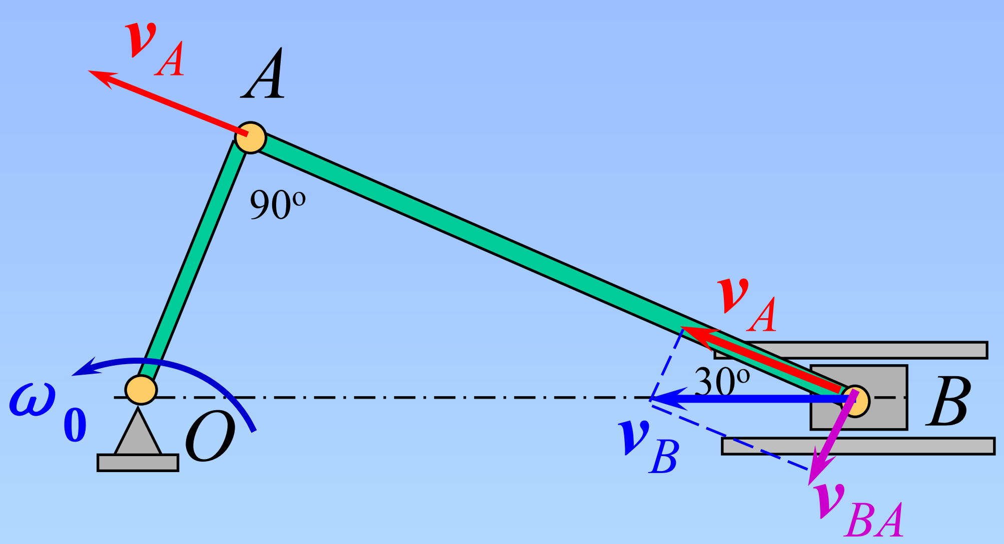
有没有加速度瞬心？

加速度瞬心如何确定？

例4-9 曲柄—滑块机构，$OA=r$，$AB=l$，曲柄以等角速度 ω_0 绕 O 轴旋转。求：图示瞬时，滑块 B 的加速度 $\boldsymbol{a}_B$ 和连杆 AB 的角加速度 $\boldsymbol{\alpha}_{AB}$。







解：

(1) 确定连杆的角速度

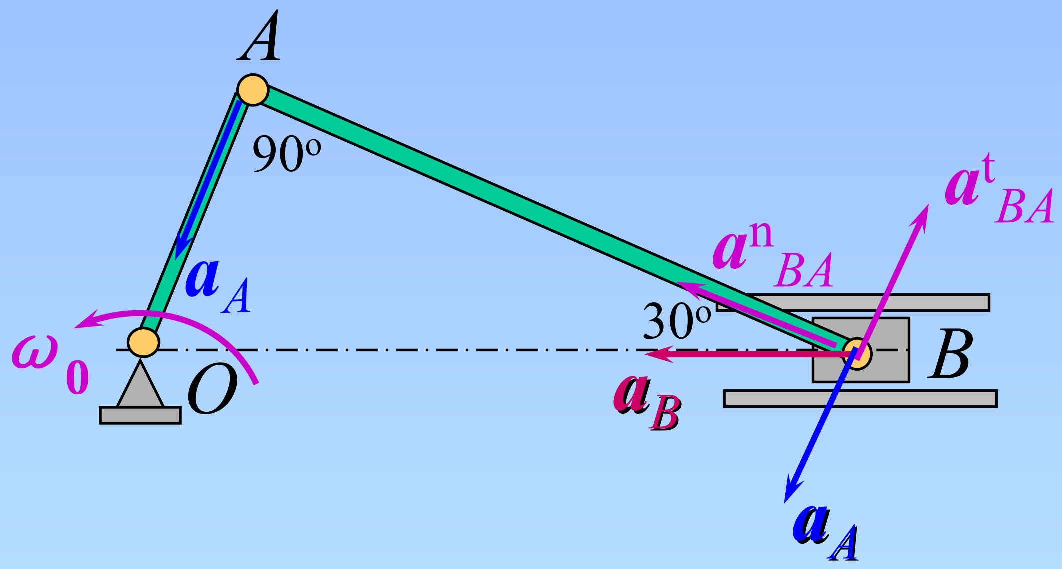
以A为基点

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

$$v_A = r\omega_0 , \quad v_{AB} = v_A \tan 30^\circ = r\omega_0 \tan 30^\circ$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{l} = \frac{r}{l}\omega_0 \tan 30^\circ = \frac{\omega_0}{3}$$

$$\omega_{AB}=\frac{\omega_0}{3}$$



(2) 加速度分析

A点的加速度：

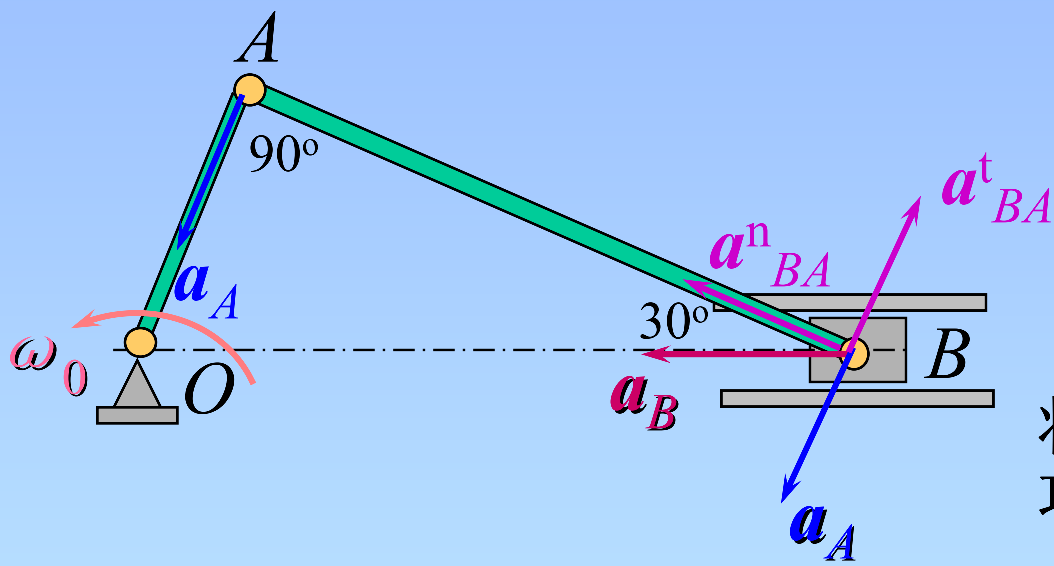
$$a_A=r\omega_0^2$$

B点的加速度：根据加速度合成定理 $\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}^t_{BA}+\boldsymbol{a}^n_{BA}$

$$a^t_{BA}=\alpha_{AB}l,\qquad a^n_{BA}=AB\times\omega_{AB}^2=\frac{l\omega_0^2}{9}$$

$$a_{BA}^{n} = AB \times \omega_{AB}^{2} = \frac{l\omega_0^2}{9},$$

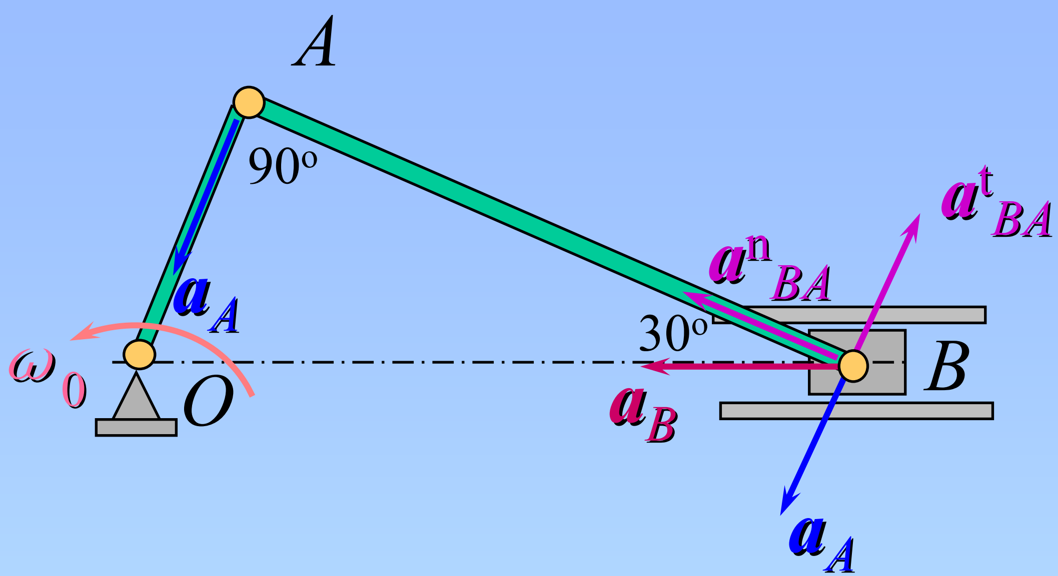
$$a_{BA}^{t} = \alpha_{AB} l$$



$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{t} + \boldsymbol{a}_{BA}^{n}$$

将加速度合成定理中各项向BA方向投影

$$a_B \cos 30^\circ = a_{AB}^{n} = \frac{l\omega_0^2}{9}, \qquad a_B = \frac{2\sqrt{3}}{27} l\omega_0^2$$



（3）角加速度分析

根据加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^t_{BA} + \boldsymbol{a}^n_{BA}$$

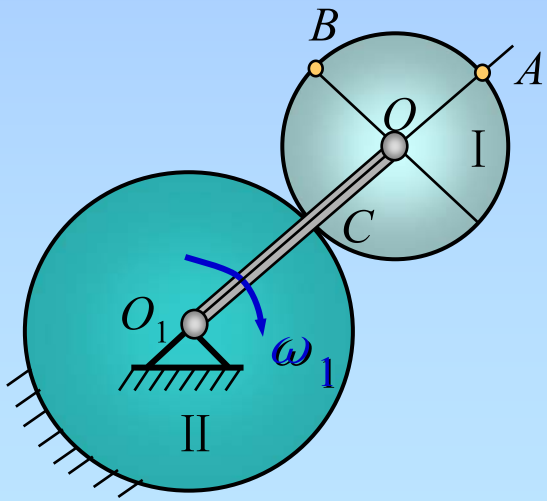
$$a^t_{BA} = \alpha_{AB} l$$

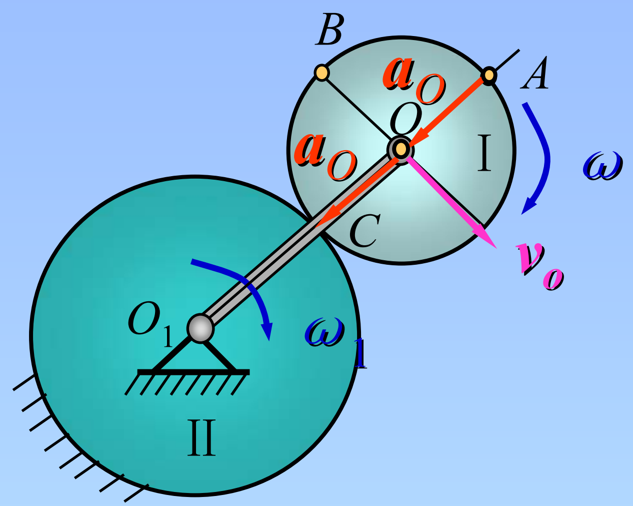
将加速度合成定理中各项向$\boldsymbol{a}_A$方向投影

$$a_B \sin 30^\circ = a_A - a^t_{AB}, \qquad a^t_{BA} = r\omega_0^2 - \frac{\sqrt{3}}{27} l\omega_0^2 = (r - \frac{\sqrt{3}}{27} l)\omega_0^2$$

$$\alpha_{AB} = \frac{a^t_{BA}}{l} = (\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{27})\omega_0^2 = \frac{8\sqrt{3}}{27}\omega_0^2$$

例4-10 如图所示，在外啮合行星齿轮机构中，系杆$O_1O=l$，以匀角速度ω_1绕O_1轴转动。大齿轮Ⅱ固定，行星轮Ⅰ半径为r，在轮Ⅱ上只滚不滑。设A和B是轮缘上的两点，A点在O_1O的延长线上，而B点则在垂直于O_1O的半径上。试求点A和B的加速度。





解： 轮 I 作平面运动，其中心O的速度和加速度分别为：

$$v_O = l\omega_1 \;,\; a_O = l\omega_1^2$$

轮 I 的速度瞬心在C点，则轮 I 的角速度

$$\omega = \frac{v_O}{r} = \frac{l}{r}\omega_1$$

(1) 求A点的加速度。

选O为基点，应用加速度合成定理

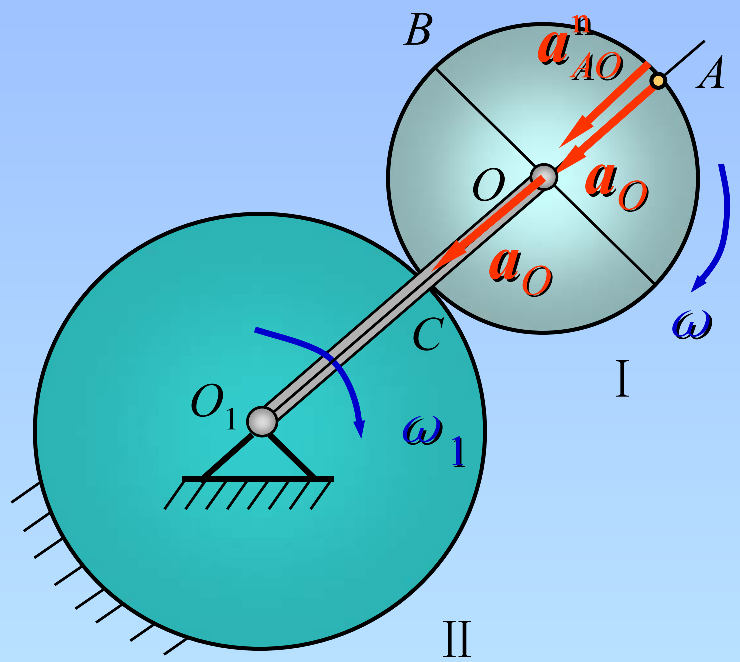
$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{AO}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{AO}^{\mathrm{n}}$$

因为 ω_1和 ω都为常量，所以轮 I 的角加速度为零，则有

$$a_{AO}^{\mathrm{t}} = 0$$

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{AO}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{AO}^{\mathrm{n}}$$

$$a_{AO}^{\mathrm{t}} = 0$$



A点相对于基点O的法向加速度沿半径OA，指向中心O，大小为

$$a_{AO}^{\mathrm{n}} = r\omega^2 = \frac{l^2}{r}\omega_1^2$$

所以由图可知A点的加速度的方向沿OA，指向中心O，它的大小为

$$a_A = a_O + a_{AO}^{\mathrm{n}}$$

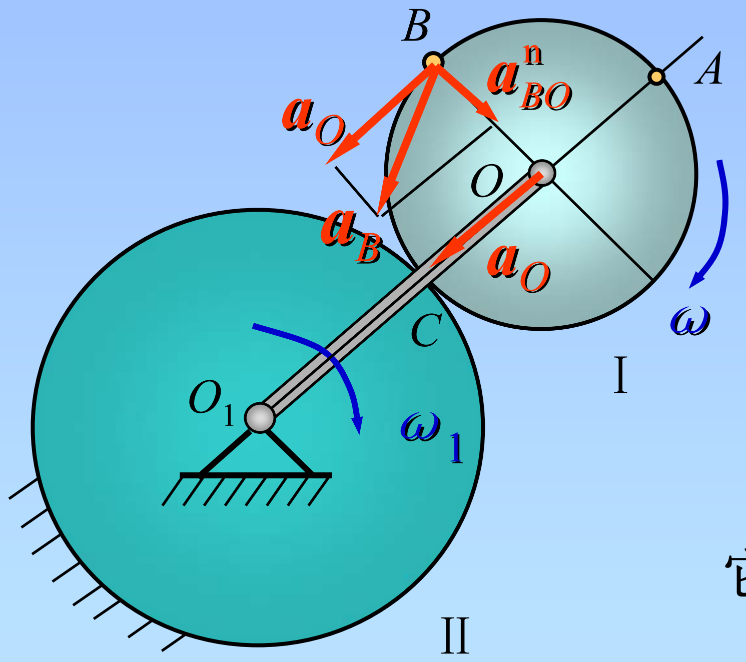
$$= l\omega_1^2 + \frac{l^2}{r}\omega_1^2$$

$$= l\omega_1^2\left(1 + \frac{l}{r}\right)$$

(2) 求B点的加速度。

选O为基点，应用加速度合成定理

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{BO}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{BO}^{\mathrm{n}}$$



其中 $a_O = l\omega_1^2 \quad a_{BO}^n = r\omega^2 = \dfrac{l^2}{r}\omega_1^2 \quad a_{BO}^{\mathrm{t}} = 0$

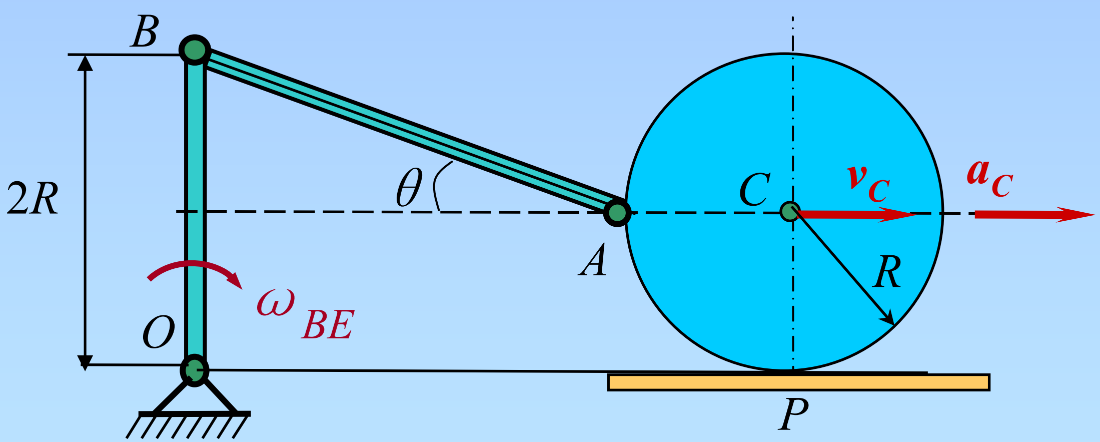
所以B点的加速度大小为

$$a_B = \sqrt{a_O^2 + \left(a_{BO}^{\mathrm{n}}\right)^2} = l\omega_1^2\sqrt{1 + \left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

它与半径OB间的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{a_O}{a_{BO}^{\mathrm{n}}} = \arctan\frac{l\omega_1^2}{\frac{l^2}{r}\omega_1^2} = \arctan\frac{r}{l}$$

例4-3 已知轮心v_C和a_C均为已知，且纯滚动。杆的DE长为$2R$， $\theta=30°$ 。试求在这瞬时杆OB的角速度和点A的加速度大小。



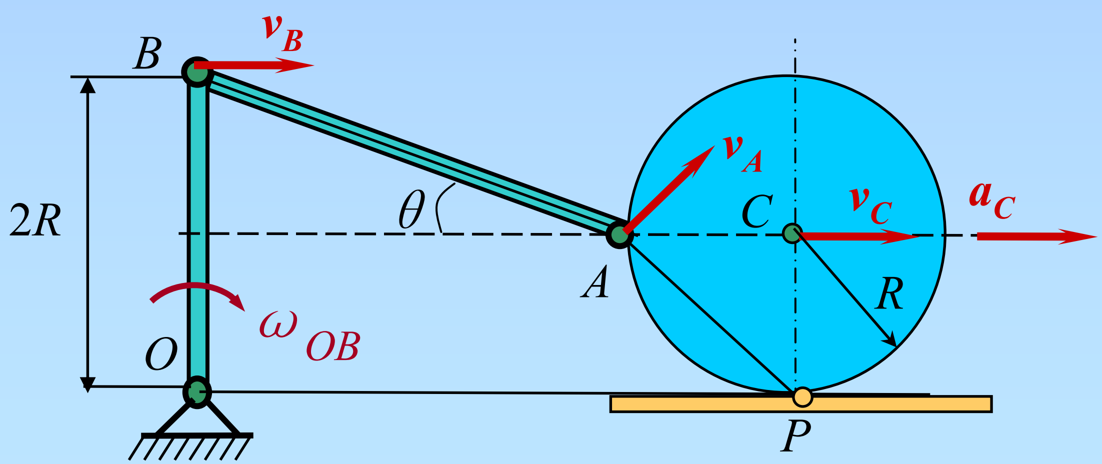
解： 1。求ω_{OB}

P为瞬心， $\omega_C = v_C/R$. $v_A = AP \cdot \omega_C = \sqrt{2} v_C$

应用速度投影定理 $[v_A]_{AB} = [v_B]_{AB}$

$$v_A \cos(45^\circ + \theta) = v_B \cos\theta$$

$$v_B = v_A \cos(45^\circ + \theta) / \cos\theta = 0.42 v_C \qquad \omega_{OB} = v_B / OB = 0.21 v_C / R$$



2。求a_A。

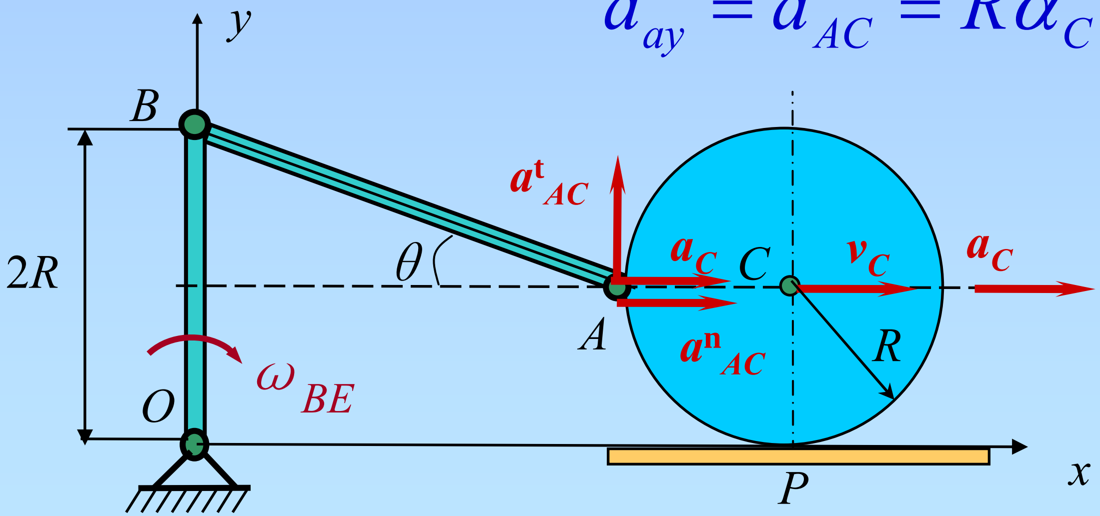
以C为基点

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_c + \boldsymbol{a}_{AC}^{t} + \boldsymbol{a}_{AC}^{n}$$

	$\boldsymbol{a}_A$	$\boldsymbol{a}_c$	$\boldsymbol{a}_{AC}^{t}$	$\boldsymbol{a}_{AC}^{n}$
方向:	?	水平	⊥AC	沿AC
大小:	?	✓	✓	v_C^2/R

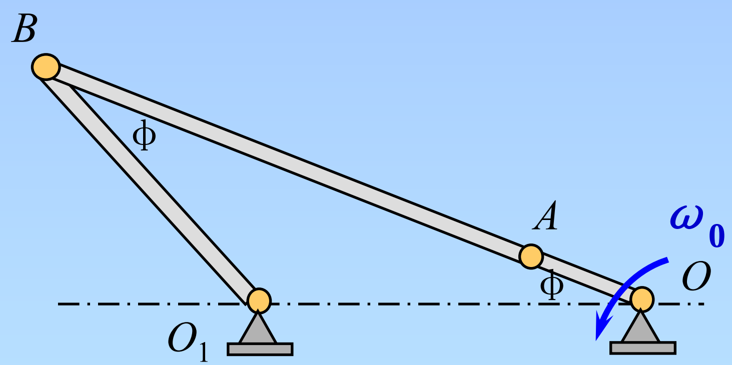
分别沿*x*、*y*方向投影：$a_{ax} = a_{AC}^{n} + a_C = a_C + \dfrac{v_C^2}{R}$

$$a_{ay} = a_{AC}^{t} = R\alpha_C = a_C$$



$$a_a = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2}$$

如图机构中，曲柄$OA=r$,以匀角速度ω_0作逆钟向转动。连杆$AB=l=4r$，当曲柄OA和连杆AB成一直线时，$\phi=30^o$，试求摇杆O_1B的角速度和角加速度。

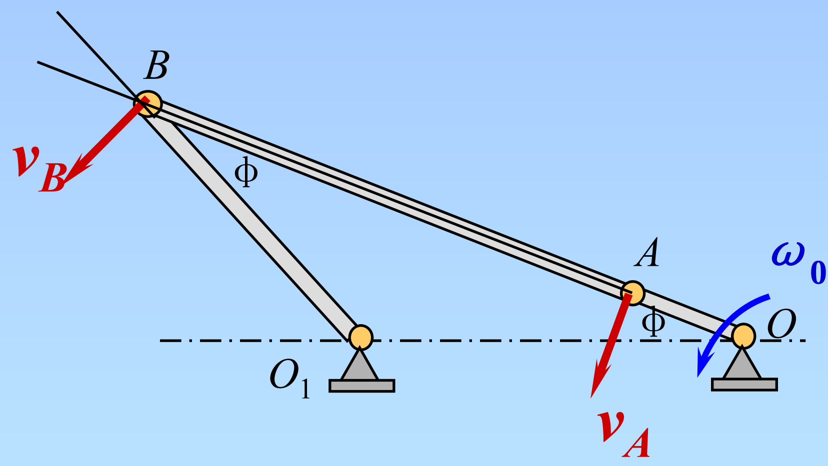


解：

1。求ω_{O1B}

***B*为瞬心，v_B=0。**

$$\omega_{O1B}=\frac{v_B}{O_1B}=0$$



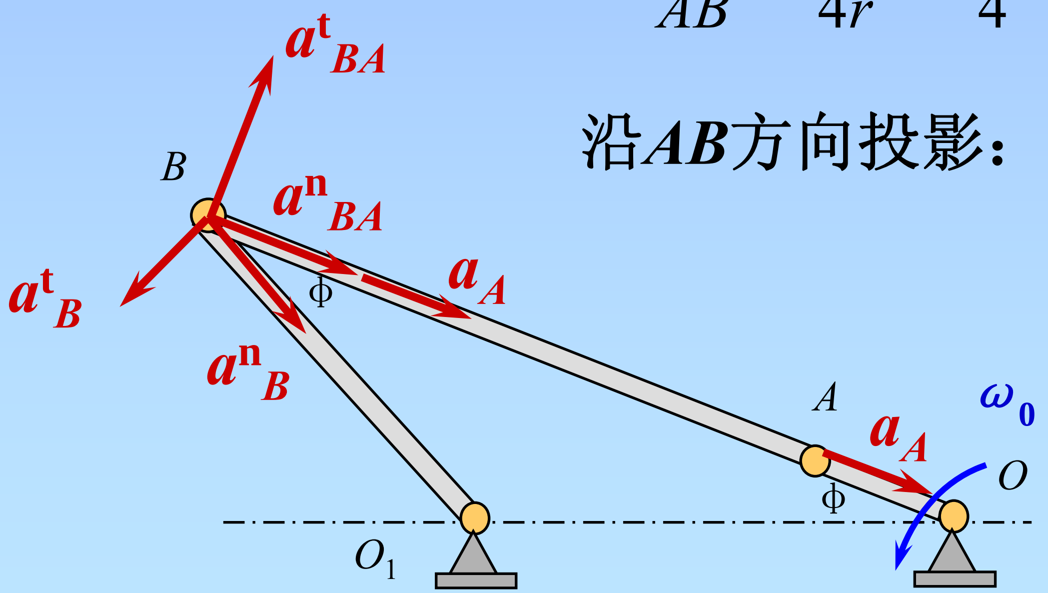
2。求 α_{O1B}

以A为基点.

$$\boldsymbol{a}_B^n + \boldsymbol{a}_B^t = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^n + \boldsymbol{a}_{BA}^t$$

方向:	沿BO_1	$\perp BO_1$	沿AO	沿AB	$\perp$AB
大小:	0	?	$r\omega_o^2$	$r\omega_o^2/4$	?

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AB} = \frac{r\omega_0}{4r} = \frac{\omega_0}{4}, \qquad a_{BA}^n = AB\cdot\omega_{AB} = \frac{1}{4}r\omega_0^2$$



沿*AB*方向投影:

$$a_B^t\cos 60° = -a_A - a_{BA}^n$$

$$a_B^t = -\frac{5}{2}r\omega_0^2$$

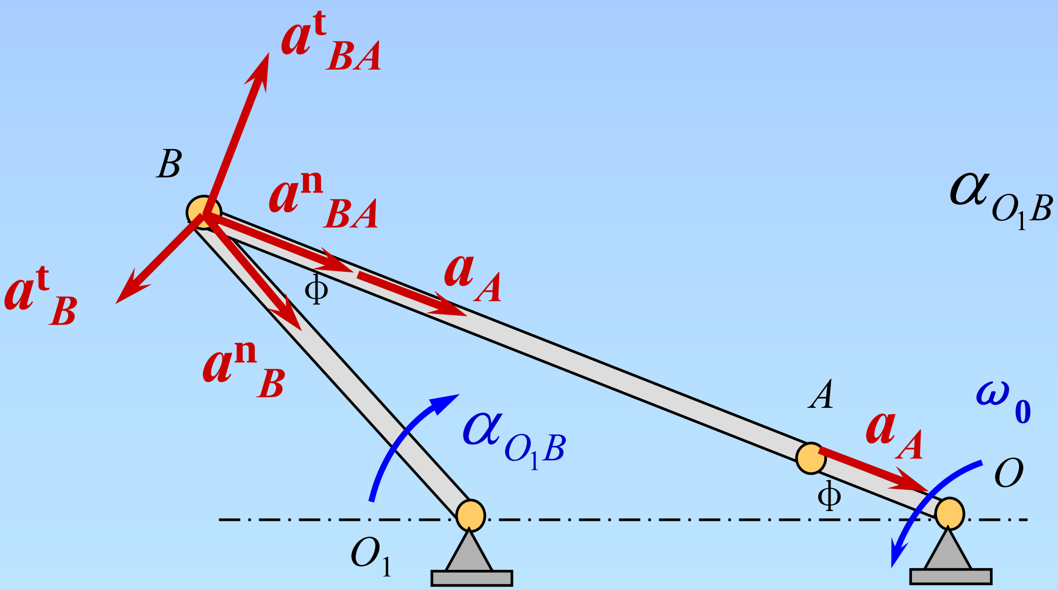
沿*AB*方向投影：

$$a_B^t \cos 60° = -a_A - a_{BA}^n$$

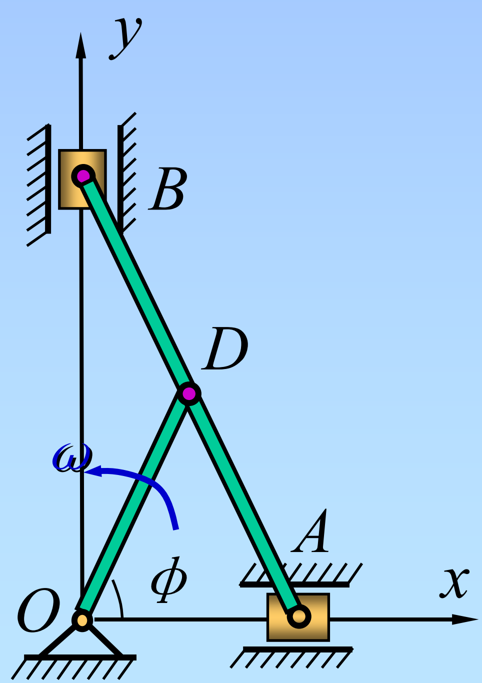
$$a_B^t = -\frac{5}{2} r\omega_0^2$$

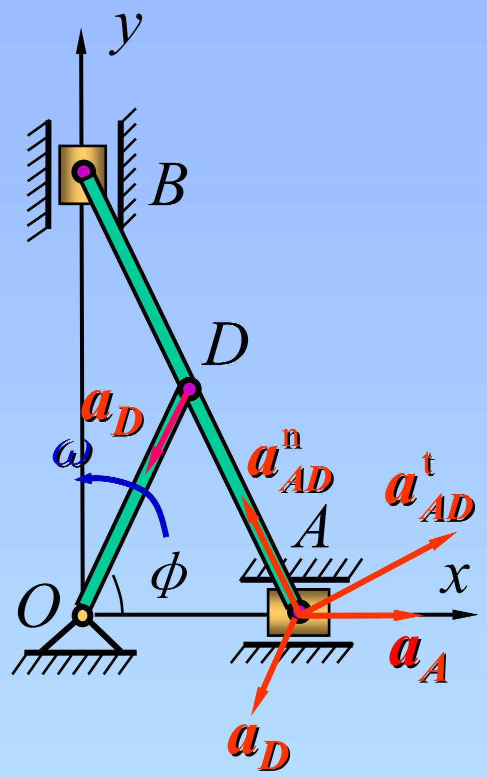
$$\alpha_{O_1B} = \frac{a_B^t}{BO_1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0^2$$

（顺时针）



例4-11 如图所示，在椭圆规的机构中，曲柄OD以匀角速度 ω绕O轴转动，$OD=AD=BD=l$，求当$\varphi=60^\circ$ 时，规尺AB的角加速度和A点的加速度。





解： 曲柄OD绕O轴转动，规尺AB作平面运动。AB上的D点加速度 $a_D = \omega^2 l$，

取AB上的D点为基点，A点的加速度

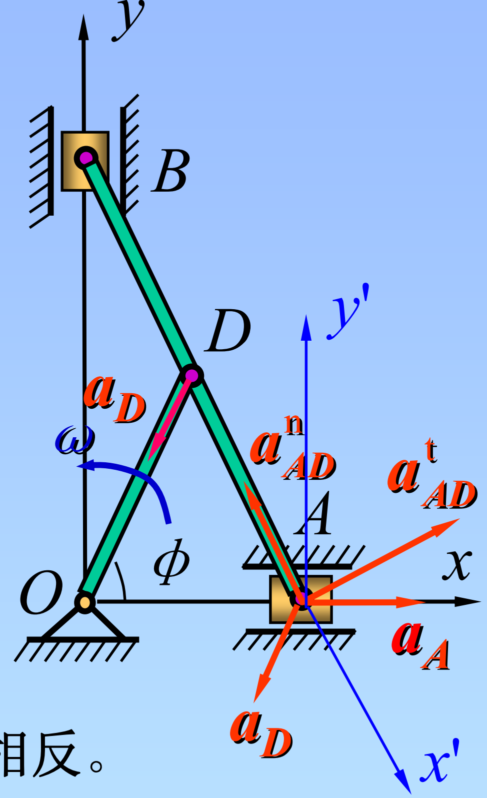
$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}_{AD}^{t} + \boldsymbol{a}_{AD}^{n}$$

其中 a_{AD}^{n} 的大小 $a_{AD}^{n} = \omega_{AB}^2 \cdot AD$， 方向沿$AB$ 。$\boldsymbol{a}_{AD}^{t}$大小未知，垂直于AD，其方向暂设如图。因为A点作直线运动，可设$\boldsymbol{a}_A$的方向如图所示。

设规尺 AB 的角速度为 ω_{AB}，可由基点法或瞬心法求得 $\omega_{AB} = \omega$

则 $$a_{AD}^{n} = \omega_{AB}^2 \cdot AD = \omega^2 l$$

对式 $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}_{AD}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{AD}^{\mathrm{n}}$



将上式在y'轴上投影，得

$$0 = -a_D \sin\varphi + a_{AD}^{\mathrm{t}} \cos\varphi + a_{AD}^{\mathrm{n}} \sin\varphi$$

将上式在x'轴上投影，得

$$a_A \cos\varphi = a_D \cos(\pi - 2\varphi) - a_{AD}^{\mathrm{n}}$$

由上式解得

$$a_A = \frac{a_D \cos(\pi - 2\varphi) - a_{AD}^{\mathrm{n}}}{\cos\varphi} = \frac{\omega^2 l \cos 60^\circ - \omega^2 l}{\cos 60^\circ} = -\omega^2 l$$

由于$\boldsymbol{a}_A$为负值，故$\boldsymbol{a}_A$的实际方向与原假设的方向相反。

$$a_{AD}^{\mathrm{t}} = \frac{a_D \sin\varphi - a_{AD}^{\mathrm{n}} \sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{(\omega^2 l - \omega^2 l)\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0$$

规尺 AB角加速度 $\alpha_{AB} = \dfrac{a_{AD}^{\mathrm{t}}}{AD} = 0$

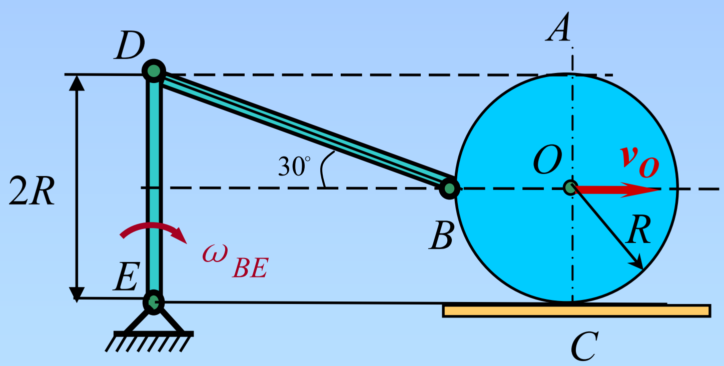
综合问题分析指导

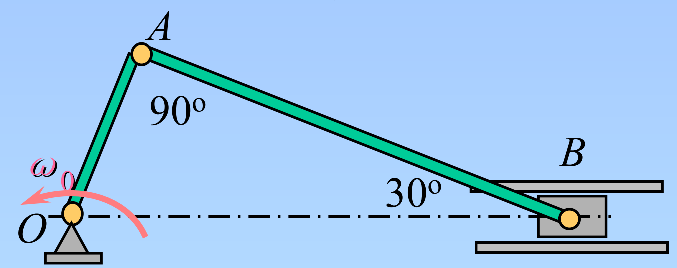
1. 首先正确分析判断个刚体的运动形式。

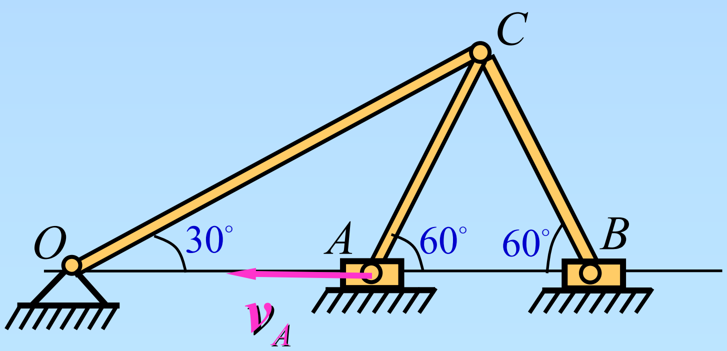
   --平移、定轴转动、平面运动。

2. 确定两相邻刚体接触与连接情况。

- 铰连接和齿轮啮合点，具有相同的速度和切向加速度。



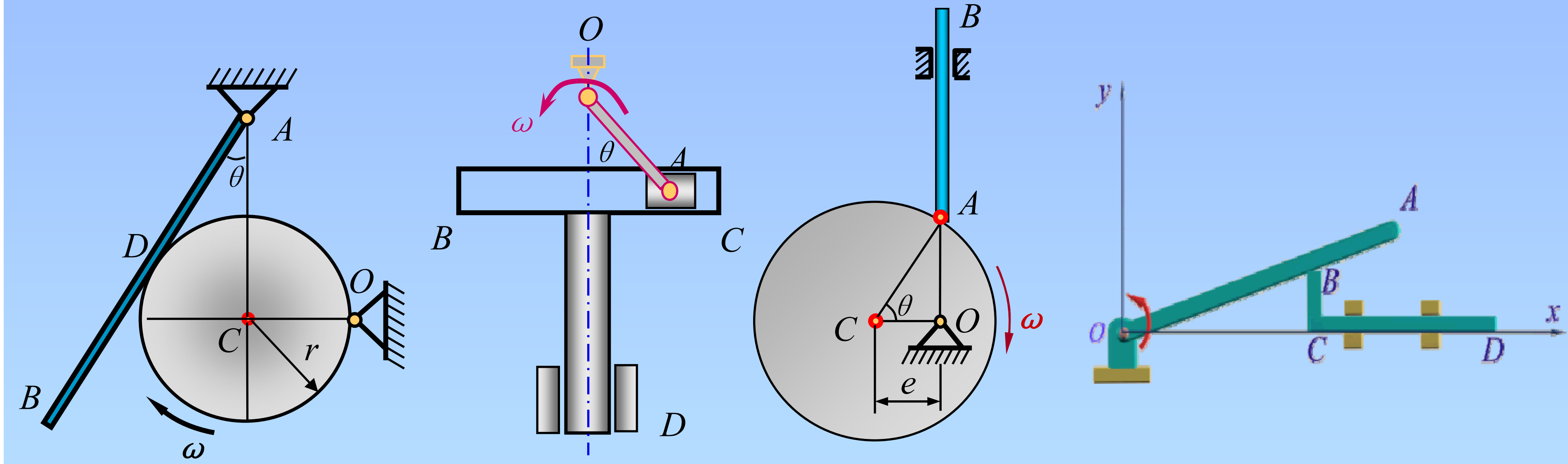




- 求解同一刚体上两点的速度和加速度问题。

综合问题分析指导

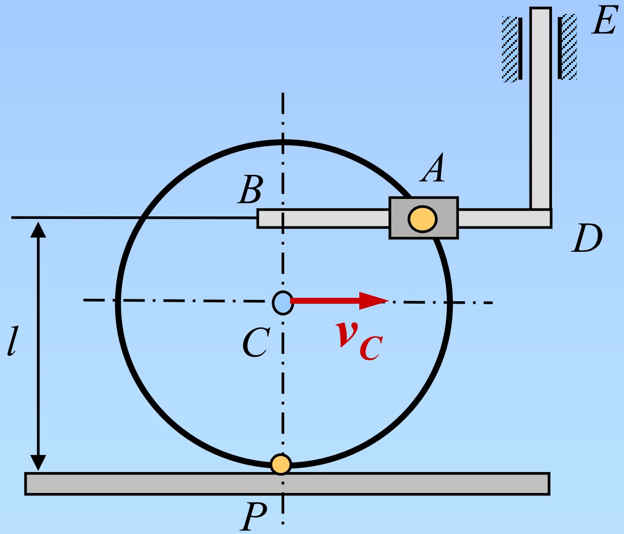
◆两相邻刚体接触处有相对移动。例如滑块连接和滑槽连接等。



● 求解不同刚体上两点的速度和加速度问题。

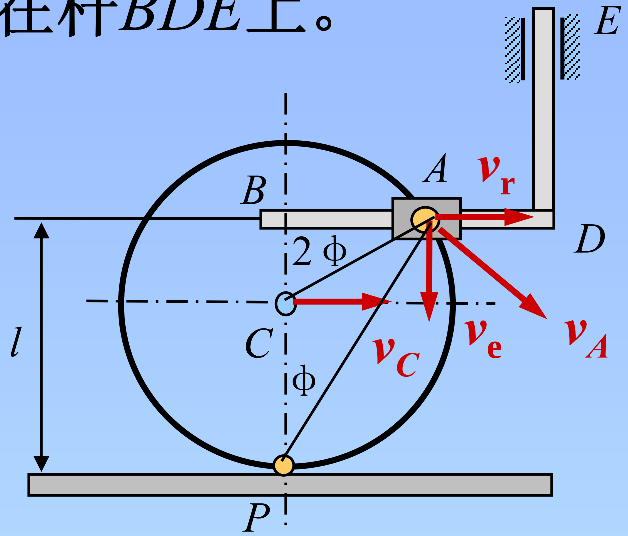
例如绝对速度和牵连速度是不同刚体上的两点的速度。

圆轮半径r =0.4 m，以匀速度v_C=0.8 m/s作纯滚动。l =0.6 m，试求曲杆的速度和加速度以及滑块相对杆的速度和加速度。



解：1。求速度。

(1)分析滑块。动点—滑块A。动系—固结在杆*BDE*上。



$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

方向： ？ ✓ ✓

大小： ？ ？ ？

(2)分析轮。 *P*为瞬心， $\omega=v_C/r=2$ ard/s

$$v_A = AP\cdot\omega = \frac{l\omega}{\cos\varphi},\qquad \phi = 30^\circ,\qquad v_A = \frac{l\omega}{\cos\varphi} = 0.8\sqrt{3}\ \ \text{m/s}$$

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_a$$

$$v_e = v_a\sin\varphi = 0.69\,\text{m/s},\qquad v_r = v_a\cos\varphi = 2.6\,\text{m/s}$$

2。求加速度。

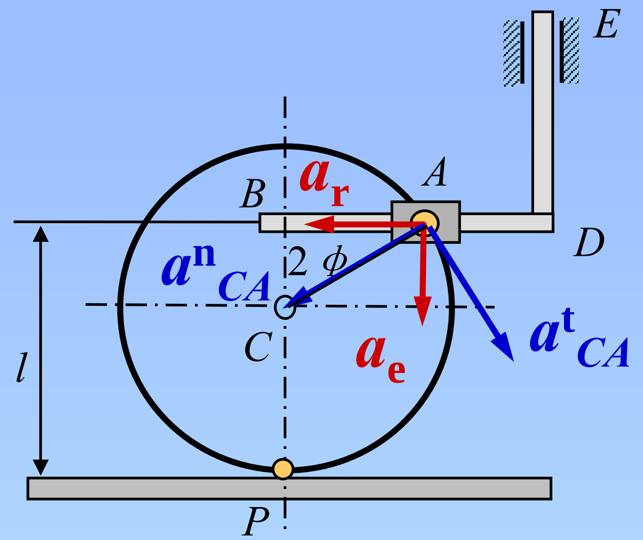
(1)分析滑块。

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r$$

方向： ？ ✓ ✓

大小： ？ ？ ？

(2)分析轮。 $a_C = 0,\ \alpha = 0$



以*C*为基点. $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}^n_{AC} + \boldsymbol{a}^t_{AC}$

0 $r\omega^2$ 0

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}^n_{AC}$$

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_a$$

$$\boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}^n_{AC} + \boldsymbol{a}^t_{AC}$$

？ ？ 0 $r\omega^2$ 0

$$\boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}^n_{AC}$$

？ ？ $r\omega^2$

$$\boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{AC}^n + \boldsymbol{a}_{AC}^t$$

? ? 0 $r\omega^2$ 0

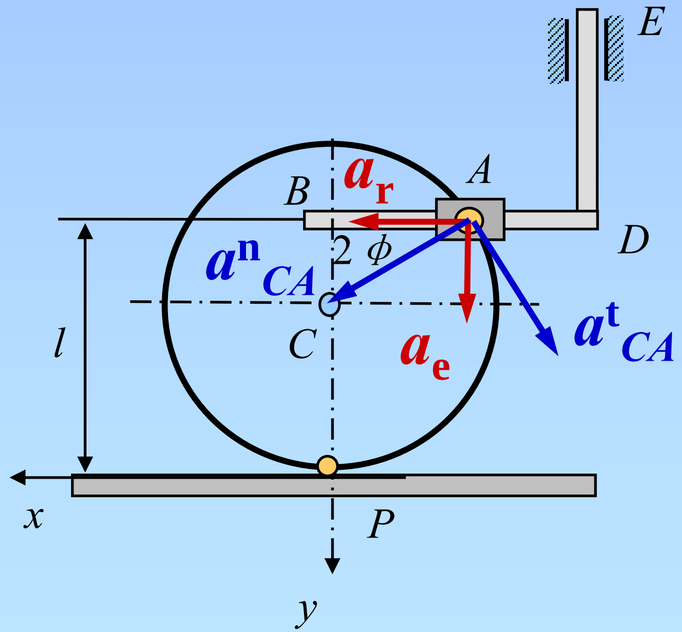
$$\boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_{AC}^n$$

? ? $r\omega^2$

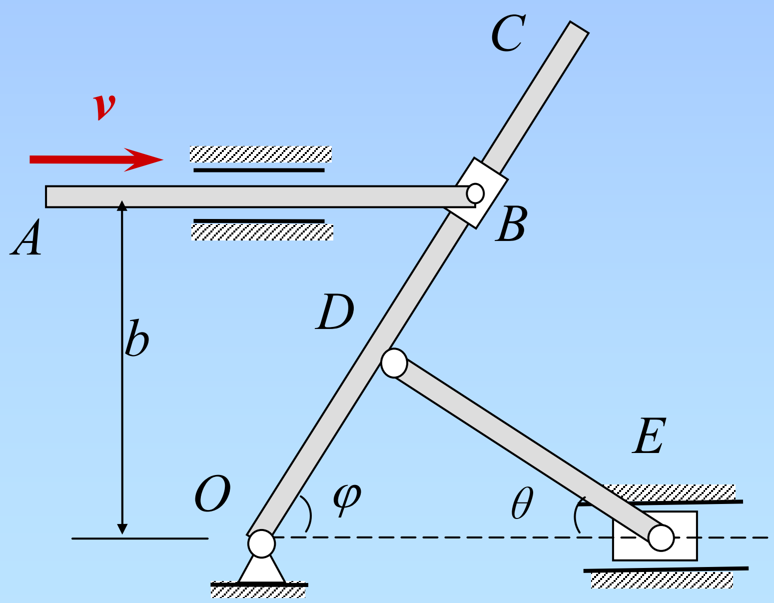
分别沿x、y方向投影：

$$a_r = a_{AC}^n \sin 2\varphi = 1.39\,\mathrm{m/s^2}$$

$$a_e = a_{AC}^n \cos 2\varphi = 0.8\,\mathrm{m/s^2}$$



例8-11 已知杆*AB* 的速度$\boldsymbol{v}$ =常量，尺寸*b*。如图瞬时，*OD*=*BD*，ϕ=60°，θ=30° 求此时杆*OC*的角速度和角加速度，滑块*E*的速度和加速度。



解： （1）速度分析和计算

取滑块B为动点，动系固连杆OC。 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

速度	$\boldsymbol{v}_B$	$\boldsymbol{v}_{Be}$	$\boldsymbol{v}_{Br}$
大小	v	$OB \cdot \omega_{OB}$（未知）	未知
方向	→	$\perp OB$	沿OC

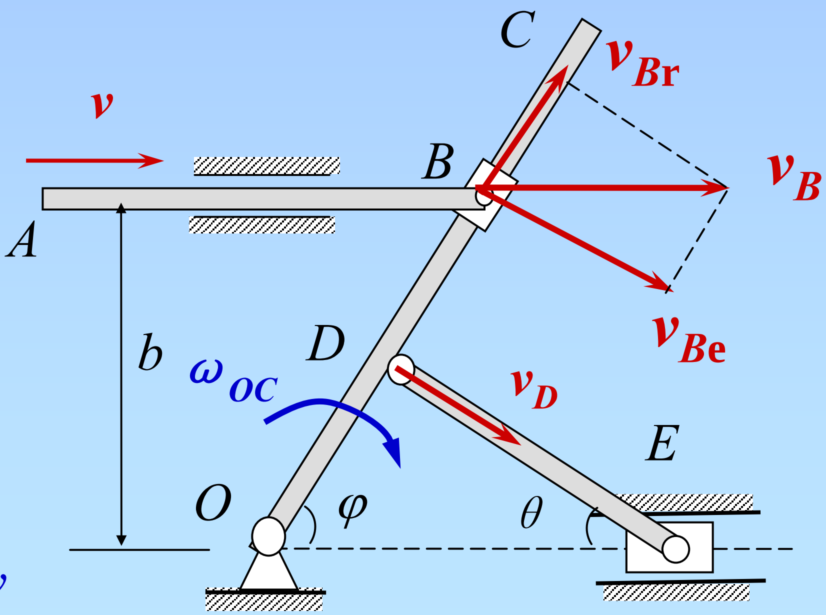
解得

$$v_{Be} = v_B \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} v$$

$$v_{Br} = v_B \cos 60° = \frac{1}{2} v$$

OC的角速度 $\omega_{OC} = \frac{v_{Be}}{OB} = \frac{3}{4}\frac{v}{b}$

$$v_D = OC \cdot \omega_{OC} = \frac{\sqrt{3}}{4} v$$

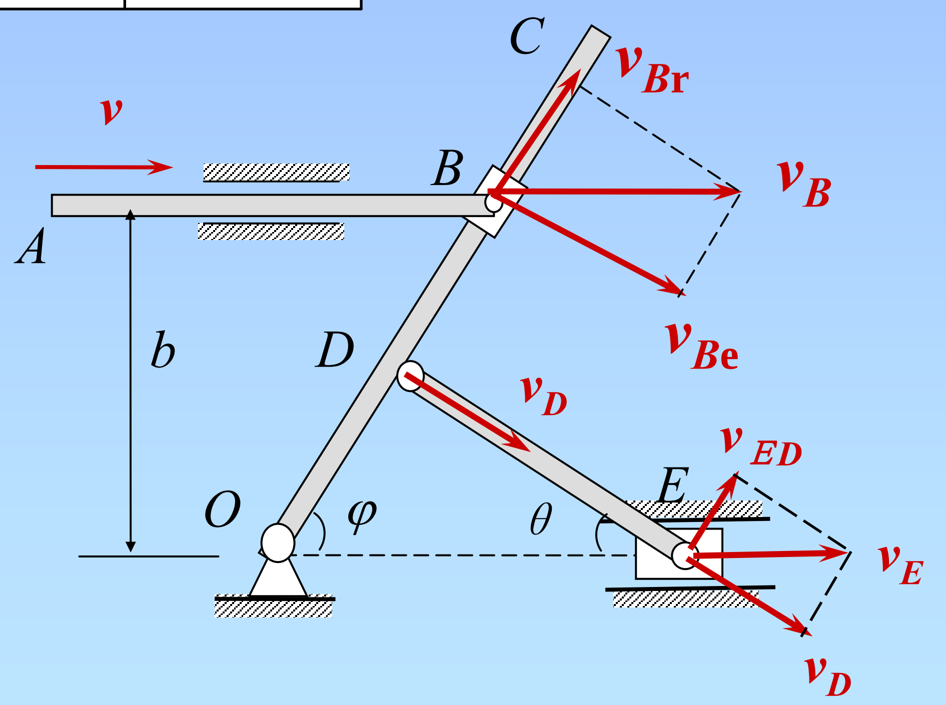


取C点为基点，滑块B的速度为 $\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{v}_{ED}$

速度	$\boldsymbol{v}_E$	$\boldsymbol{v}_D$	$\boldsymbol{v}_{ED}$
大小	未知	$OD \cdot \omega_{OC}$	未知
方向	水平	$\perp OD$	$\perp ED$

解得

$$v_E = \frac{v_D}{\cos\theta} = \frac{v_D}{\cos 30^\circ} = \frac{v}{2}$$



应用投影法亦可得

$$v_D = v_E \cos 30^\circ$$

$$v_E = \frac{v_D}{\cos 30^\circ} = \frac{v}{2}$$

（2）加速度分析和计算 $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$

加速度	a_B	a^t_{Be}	a^n_{Be}	a_{Br}	a_C
大小	0	$BO \cdot \alpha_{OC}$（未知）	$BO \cdot \omega_{OC}^2$	未知	$2\omega_{OC} \cdot v_{Br}$
方向		$\perp BO$	$B \to O$	沿OC	$\perp BO$

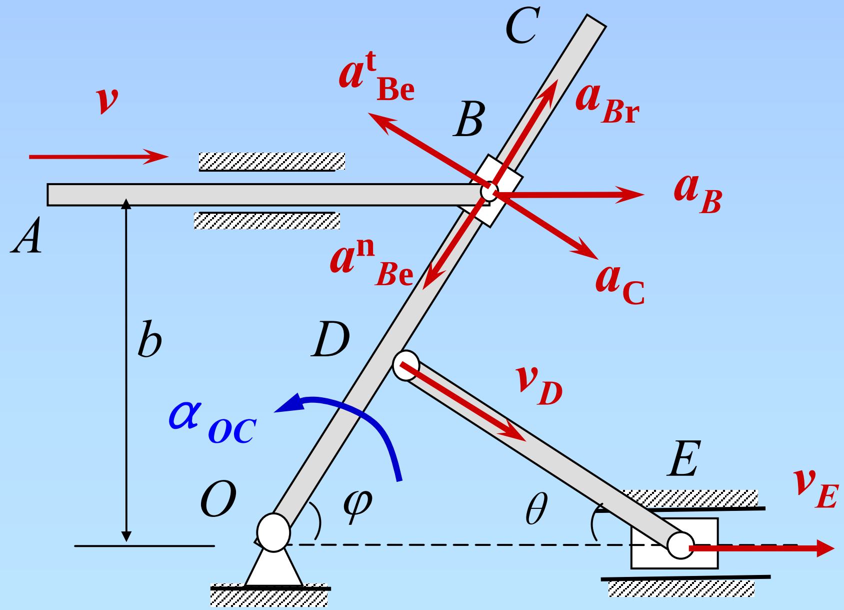
投影到a^t_{Be}方向得 $0 = a^t_{Be} - a_C$

$$a^t_{Be} = a_C = \frac{3v^2}{4b}$$

杆OC的角加速度

$$\alpha_{OC} = \frac{a^t_{Be}}{OB} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8b^2}$$

（逆时针）

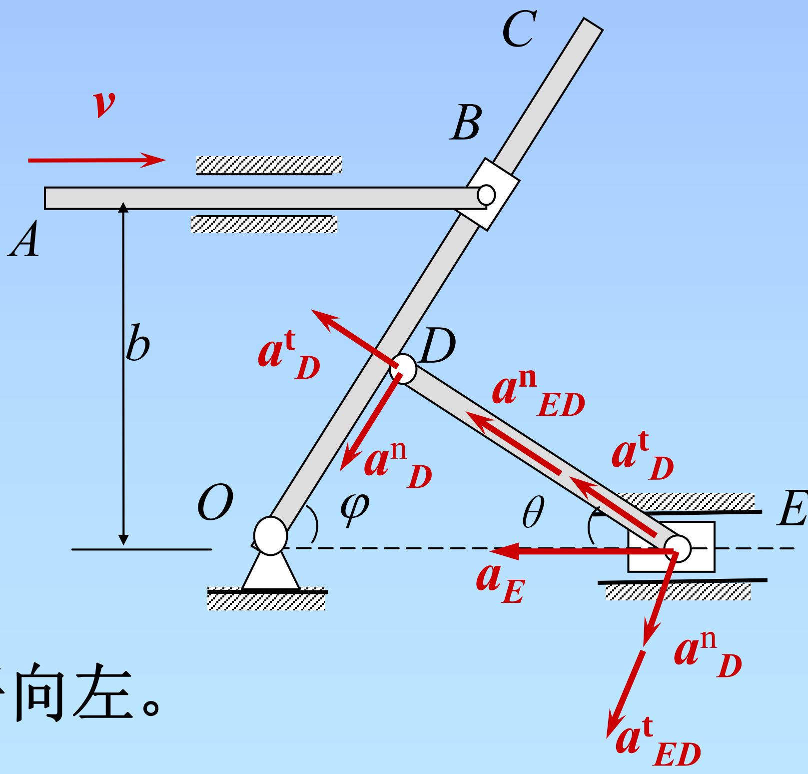


为求*E*点的加速度， 取*D*点为基点，则有 $\boldsymbol{a}_E = \boldsymbol{a}_D^t + \boldsymbol{a}_D^n + \boldsymbol{a}_{ED}^t + \boldsymbol{a}_{ED}^n$

加速度	$\boldsymbol{a}_E$	$\boldsymbol{a}^t_D$	$\boldsymbol{a}^n_D$	$\boldsymbol{a}^t_{ED}$	$\boldsymbol{a}^n_{ED}$
大小	未知	$OC\cdot\alpha_{OC}$	$OC\cdot\omega^2_{OC}$	未知	v^2_{ED}/ED
方向	水平向左	$\perp DO$	$D\rightarrow O$	$\perp ED$	$E\rightarrow D$

投影到*ED*方向得

$$a_E\cos\theta = a_D^t + a_{ED}^n$$



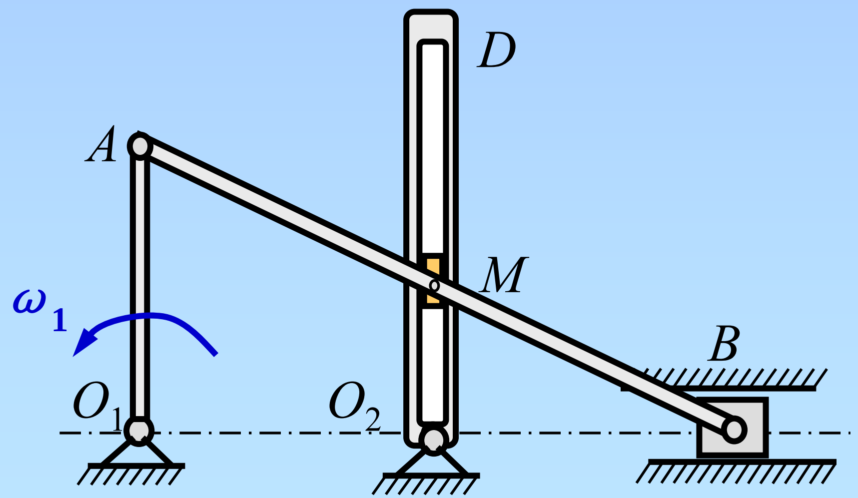
其中 $$a_D^t = OD\cdot\alpha_{OC} = \frac{3v^2}{8b}$$

$$a_{ED}^n = \frac{v_{ED}^2}{DE} = \frac{v^2}{16b}$$

解得

$$a_E = \frac{a_D^t + a_{ED}^n}{\cos\theta} = \frac{7\sqrt{3}v^2}{24}$$ 方向水平向左。

例8-12 如图所示平面机构中，曲柄O_1A长为r，以匀角速度ω_1绕水平固定轴O_1转动。通过长为l的连杆AB，带动滑块B在水平导轨内滑动。在连杆AB的中点用铰链连接一滑块M，它可带动滑道摇杆O_2D绕水平固定轴O_2转动，且O_1O_2和B在同一水平线上。试求O_1A和O_2D处于图示铅垂位置时摇杆O_2D的角速度ω_2和角加速度α_2。

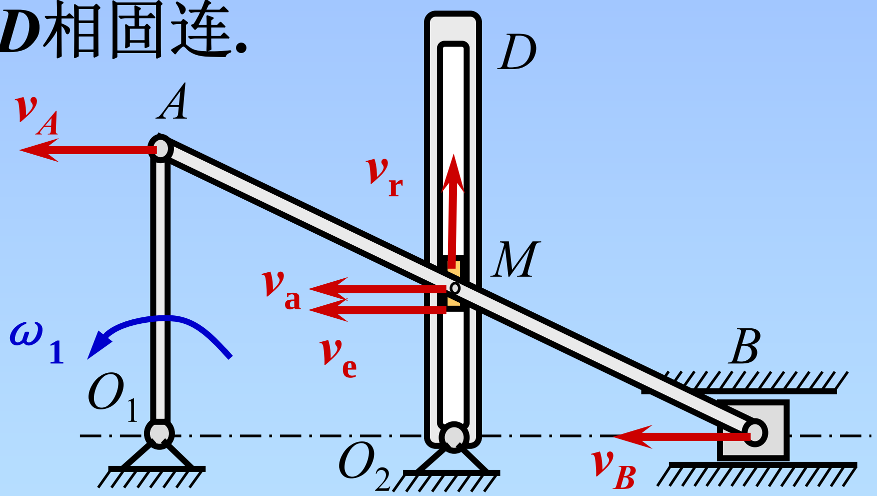


解：连杆AB作瞬时平动，有

$$v_A = v_M = v_B = r\omega_1, \quad \omega_{AB} = 0.$$

(1) 求摇杆O_2D的角速度

取滑块M为动点，动系与摇杆O_2D相固连.



根据速度合成定理，有

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r \qquad (1)$$

其中

速度	$\boldsymbol{v}_a$	$\boldsymbol{v}_e$	$\boldsymbol{v}_r$
大小	$r\omega_1$	未知	未知
方向	水平向左	水平方向	铅垂方向

因为图示瞬时$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$与$\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}$均垂直于$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$，故

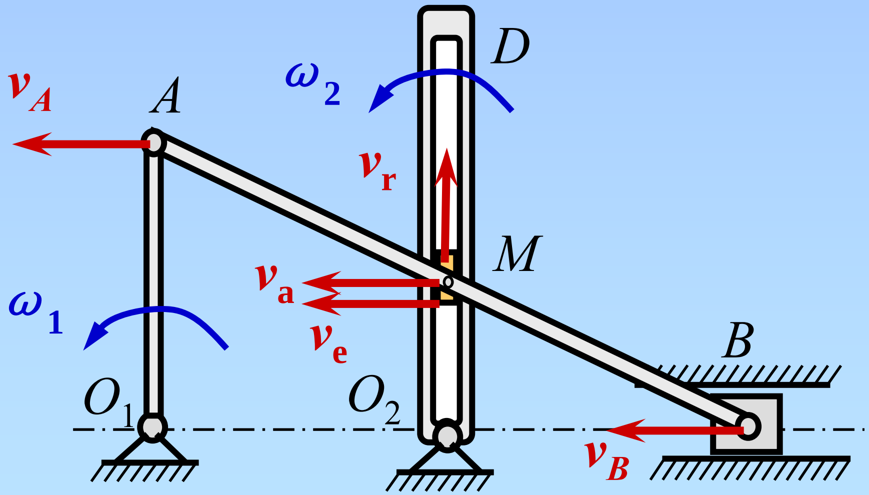
$$v_{\mathrm{r}} = 0, \qquad v_{\mathrm{a}} = v_{\mathrm{e}}$$

则有 $v_{\mathrm{e}} = v_{\mathrm{a}} = v_M = r\omega_1$

而摇杆$\boldsymbol{O_2D}$的角速度为

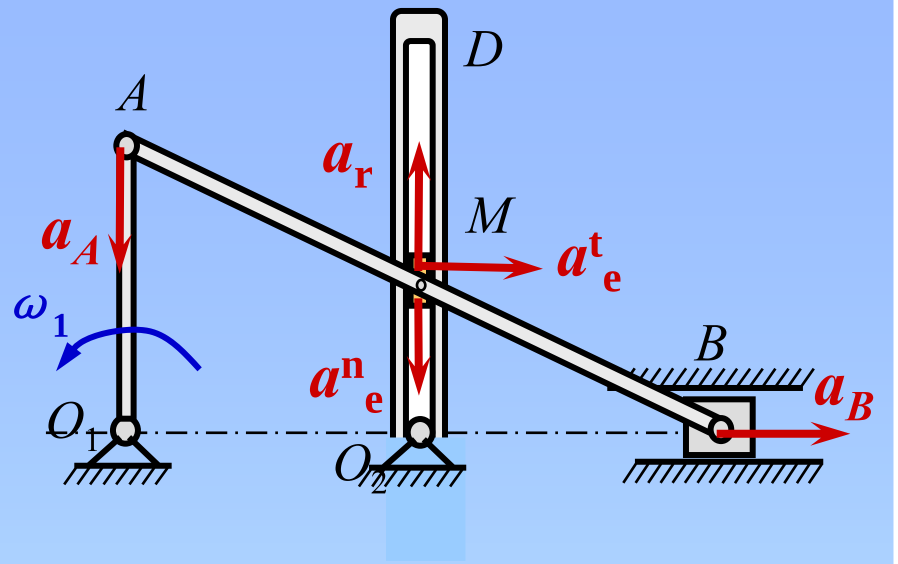
$$\omega_2 = \frac{v_e}{O_2M} = \frac{r\omega_1}{r/2} = 2\omega_1$$

（逆时针向）



(2) 求摇杆O_2D的角加速度

根据加速度合成定理，滑块M的绝对加速度为

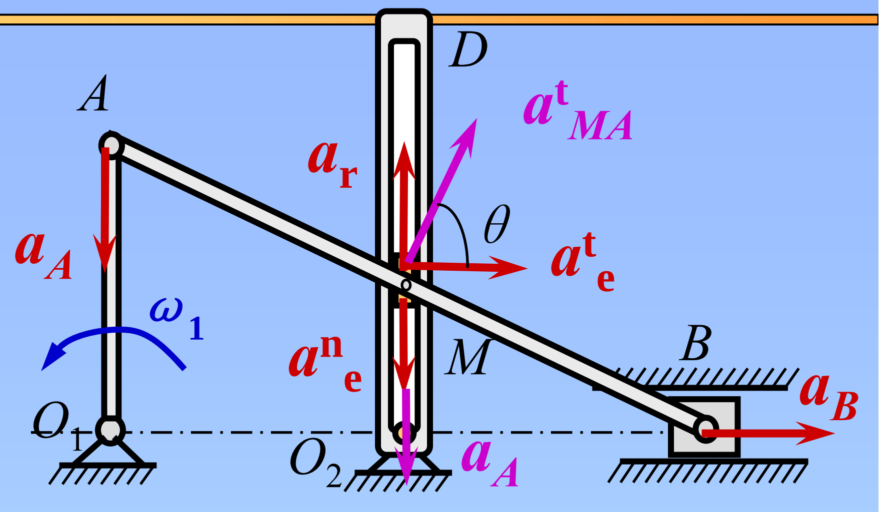


$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C \qquad (2)$$

其中

加速度	$\boldsymbol{a}_a$	$\boldsymbol{a}^t_e$	$\boldsymbol{a}^n_e$	$\boldsymbol{a}_r$	$\boldsymbol{a}_C$
大小	未知	$O_2M \cdot \alpha_2$（未知）	$O_2M \cdot \omega_2^2$	未知	$2\omega_2 \cdot v_r=0$
方向	未知	$\perp O_2M$	沿MO_2	沿O_2M	

式（2）中含有4个未知量，不能求解。取点A为基点，并考虑到杆AB的角速度在图示瞬时为零，则点M的加速度



$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}_{MA} \qquad (3)$$

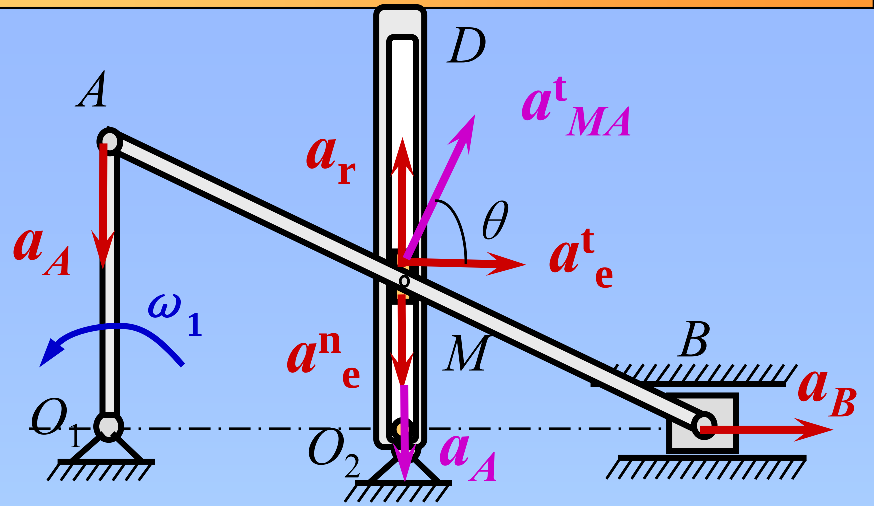
其中

加速度	$\boldsymbol{a}_M$	$\boldsymbol{a}_A$	$\boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}_{MA}$
大小	未知	$r\omega_1^2$	$MA\cdot\alpha_{AB}$
方向	未知	铅垂向下	$\perp MA$

联立（2）、（3）两式，可得

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}_{MA} \qquad (4)$$

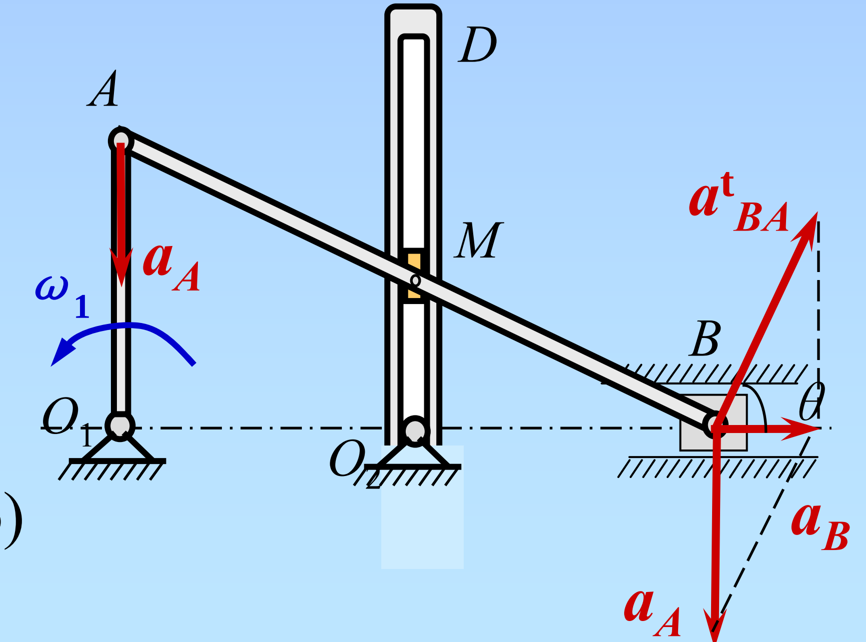
$$\boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{MA}^t \qquad (4)$$



将式（4）投影到与摇杆O_2D相垂直的方向上，得

$$a_e^t = a_{MA}^t \cos\theta = MA \cdot \alpha_{AB} \cos\theta \qquad (5)$$

式（5）中 α_{AB} 为未知量，可见，欲求a^t_e还须先求出连杆AB的角加速度 α_{AB}。



取点A为基点，则滑块B的加速度

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^t \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}} \qquad (6)$$

其中

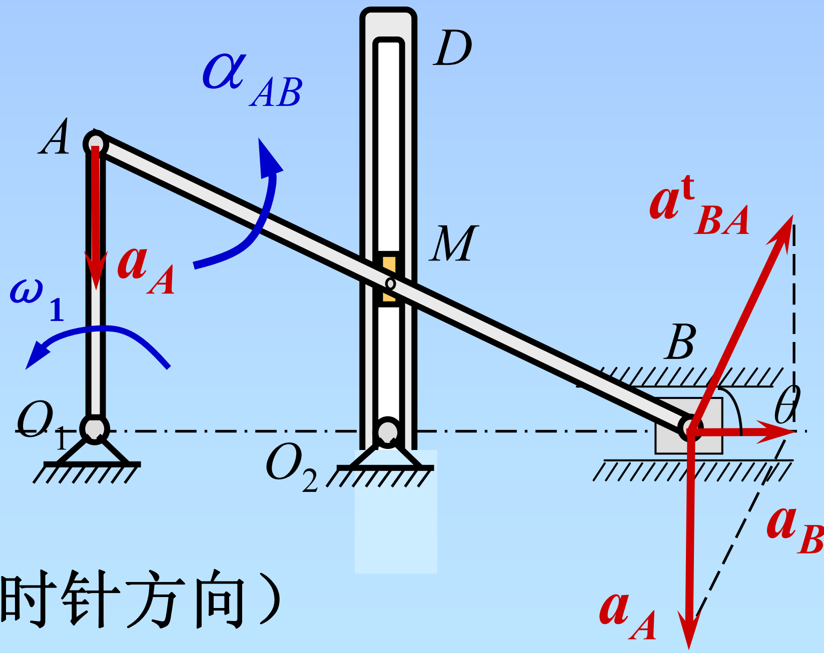
加速度	$\boldsymbol{a}_B$	$\boldsymbol{a}_A$	$\boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}_{BA}$
大小	未知	$r\omega_1^2$	$l\cdot\alpha_{AB}$
方向	水平	沿AO	$\perp AB$

将式（6）沿铅垂方向投影，得

$$0 = -a_A + a_{BA}^{\mathrm{t}}\sin\theta$$

即 $$a_{BA}^{\mathrm{t}} = \frac{a_A}{\sin\theta} = \frac{r\omega_1^2 l}{\sqrt{l^2 - r^2}}$$

故 $$\alpha_{AB} = \frac{a_{BA}^{\mathrm{t}}}{l} = \frac{r\omega_1^2}{\sqrt{l^2 - r^2}}$$ （逆时针方向）



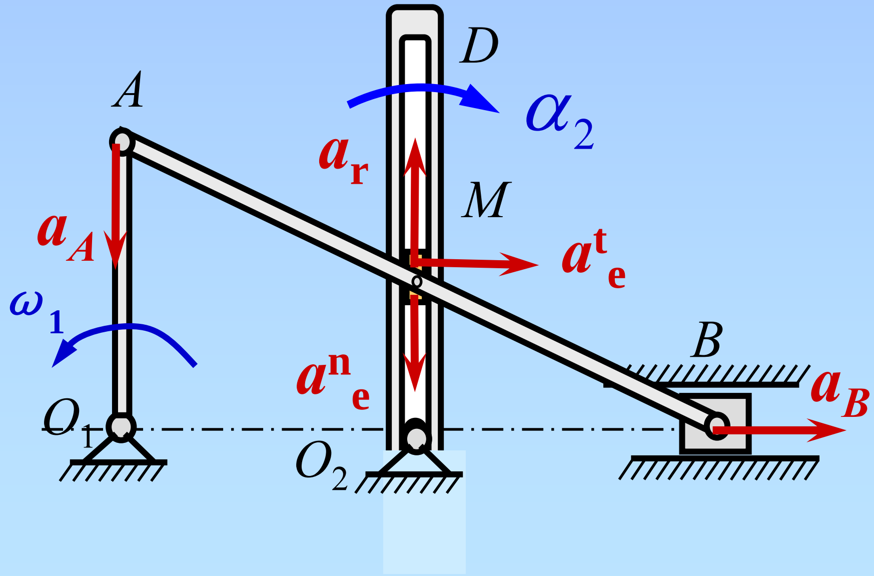
$$a_e^t = a_{MA}^t \cos\theta = MA \cdot \alpha_{AB} \cos\theta \qquad (5)$$

由式（5）得摇杆O_2D的角加速度

$$\alpha_2 = \frac{a_e^t}{O_2M} = \frac{MA}{O_2M}\cos\theta \cdot \alpha_{AB} = \frac{(l/2)r/l}{r/2}\alpha_{AB}$$

$$= \alpha_{AB} = \frac{r\omega_1^2}{\sqrt{l^2 - r^2}}$$

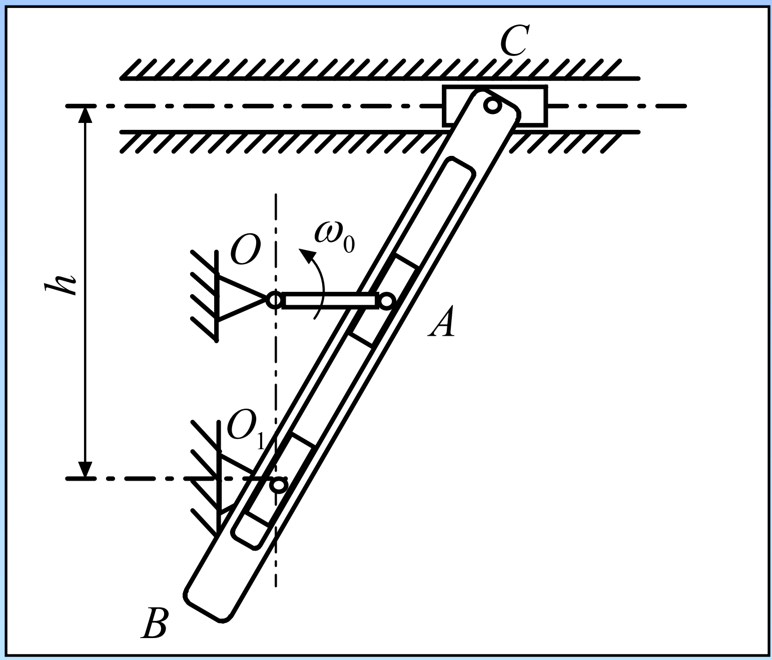
（顺时针方向）

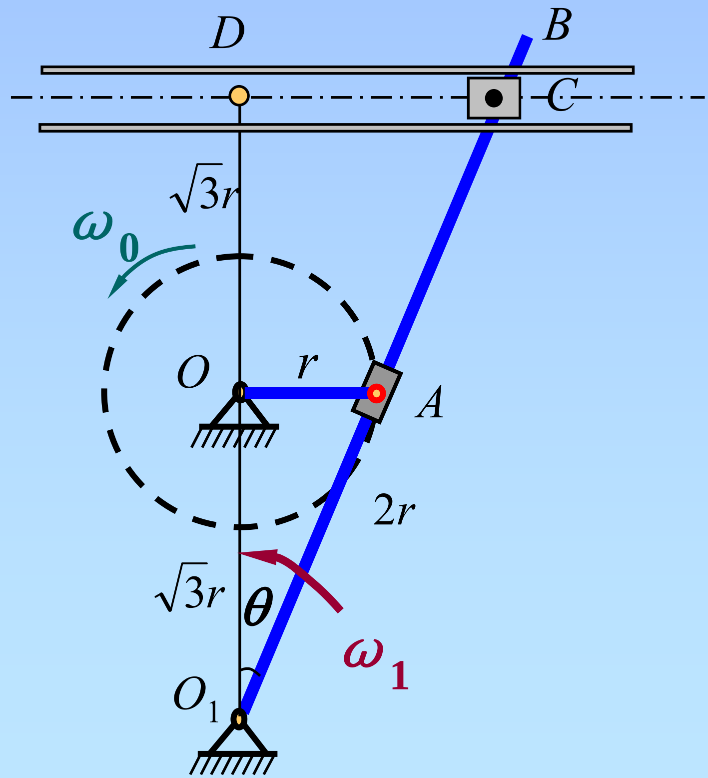


综合问题分析指导

课堂练习题1

牛头刨床的滑道摇杆机构中，曲柄OA以匀角速度ω_0作逆钟向转动。将动参考系固连于摇杆BC，当曲柄OA处于右边水平位置时，试求滑道C的速度和点A的科氏加速度大小，设$OA=r$，$OO_1=\sqrt{3}r$，$h=2\sqrt{3}r$，点O和O_1在同一铅直线上。

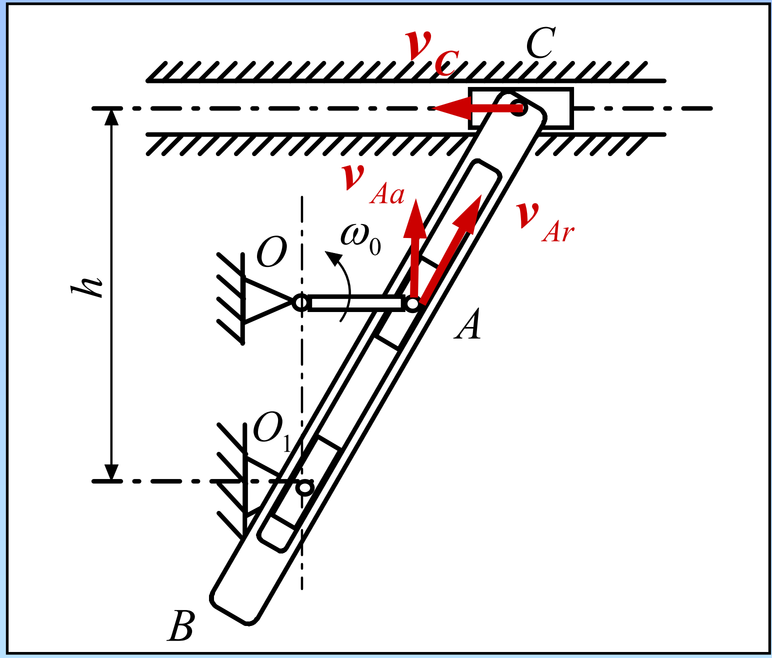




分析

OA作定轴转动，***BC***作平面运动。

选*A*为动点，动系与摇杆***BC***固连。



$$\vec{v}_{Aa} = \vec{v}_{Ae} + \vec{v}_{Ar}$$

	$\vec{v}_{Aa}$	$\vec{v}_{Ae}$	$\vec{v}_{Ar}$
方向:	✓	?	✓
大小:	✓	?	?

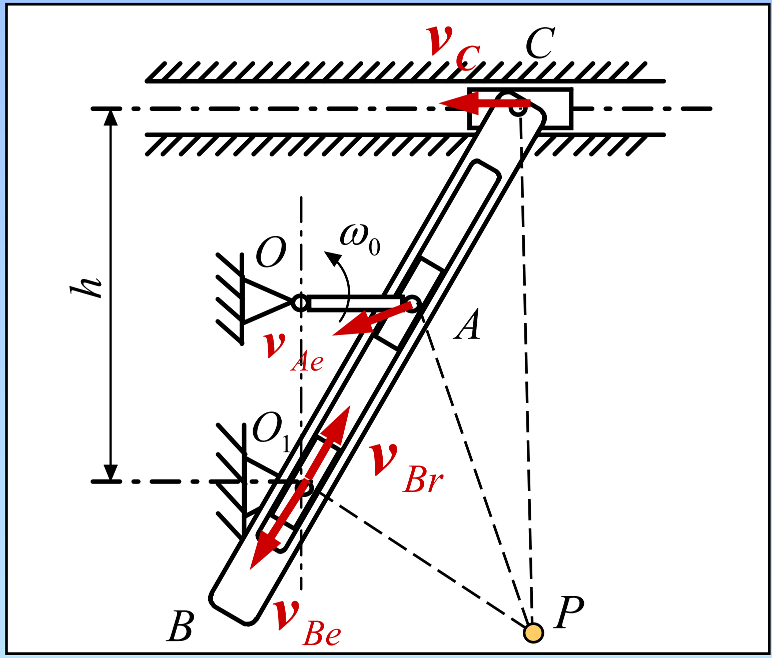
解：OA作定轴转动，BC作平面运动。

(1) 选滑块B为动点，动系与摇杆BC固连，相对运动沿槽运动，牵连运动为平面运动

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{Be} + \vec{v}_{Br}$$

因为 $v_B = 0$

所以 $\vec{v}_{Be} = -\vec{v}_{Br}$

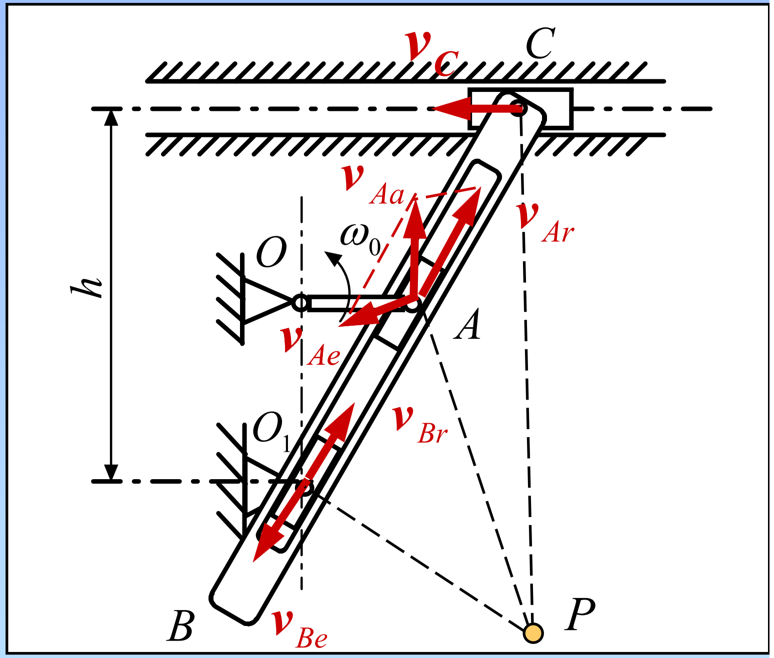


滑块C速度水平向右，由此可得瞬心P。

（2）再选A为动点，动系仍与摇杆BC固连。

$$\vec{v}_{Aa}=\vec{v}_{Ae}+\vec{v}_{Ar}\qquad v_{Ae}\text{方向}\perp AP\text{。}$$

投影到$\perp BC$轴上



$$v_{Aa}\cos 60^\circ = v_{Ae}\cos\theta$$

$$v_{Ae}=\frac{v_{Aa}\cos 60^\circ}{\cos\theta}=\frac{r\omega_O\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{7}}}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}r\omega_O$$

$$\omega_{BC}=\frac{v_{Ae}}{AP}=\frac{\omega_O}{4},\qquad v_C=PC\cdot\omega_{BC}=\frac{8}{\sqrt{3}}r\cdot\frac{\omega_O}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{3}r\omega_O$$

（3）求点A的科氏加速度大小 $a_C = 2\omega_{BC} v_{Ar}$

$$\vec{v}_{Aa} = \vec{v}_{Ae} + \vec{v}_{Ar}$$

投影到BC方向

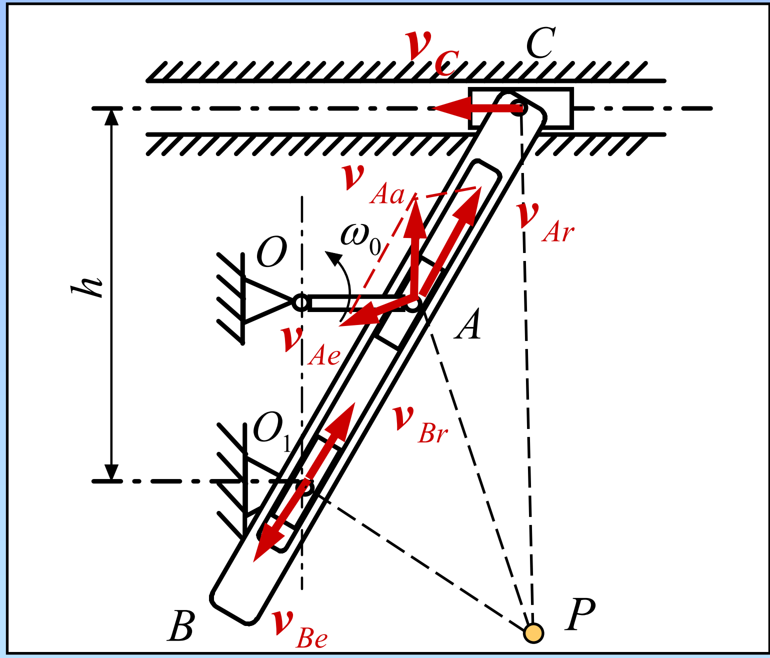
$$v_{Aa}\cos 30^\circ = -v_{Ae}\sin\theta + v_{Ar}$$

$$v_{Ar} = \frac{5\sqrt{3}}{6} r\omega_O$$

A点科氏加速度

$$a_C = 2\omega_{BC} v_{Ar} = 2\times\frac{\omega_O}{4}\times\frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{12} r\omega_O^2$$

（方向⊥BC）



谢谢使用