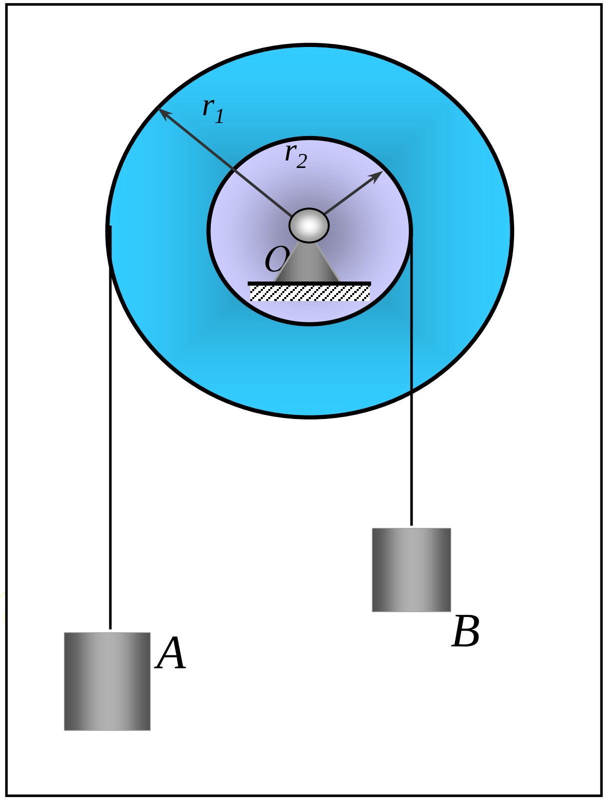
12.3质心运动定理（2）

12.3 质心运动定理

例题 1 两个鼓轮固连在一起，其总质量是 m ，对水平转轴 O 的转动惯量是 J_O。鼓轮的半径是 r_1 和 r_2 。绳端悬挂的重物 A 和 B 质量分别是 m_1 和 m_2 ，且 $m_1 > m_2$。试求O处的约束力。



12.3 质心运动定理

解: 取系统为研究对象，进行受力分析。

应用质心运动定理，有 $\sum_{j=1}^{N} M_j \boldsymbol{a}_{Cj} = \sum \boldsymbol{F}^{(e)}$

$$m_2 a_2 - m_1 a_1 = F_o - m_o g - m_1 g - m_2 g \quad (1)$$

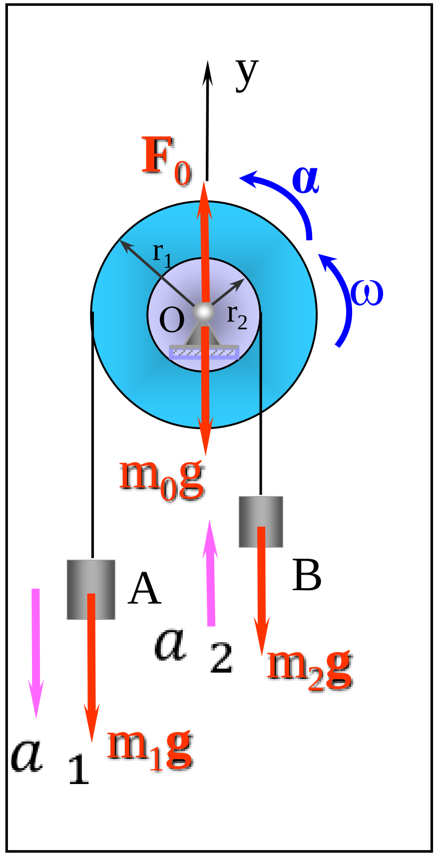
有 $F_o = m_o g + m_1 g + m_2 g + m_2 a_2 - m_1 a_1$

应用动能定理求解加速度，有

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_o \omega^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\sum W = m_1 g r_1 \varphi - m_2 g r_2 \varphi$$



根据 $T_2 - T_1 = \sum W$

考虑到 $v_1 = r_1\omega$ **，** $v_2 = r_2\omega$ **，则得**

$$\frac{1}{2}(J_O + m_1r_1^{\ 2} + m_2r_2^{\ 2})\omega^2 - 0 = (m_1r_1 - m_2r_2)g\varphi$$

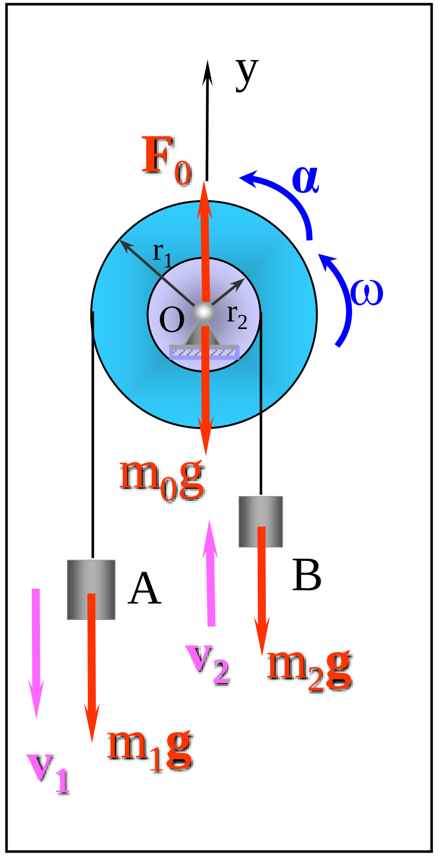
两边求导即得

$$(J_O + m_1r_1^{\ 2} + m_2r_2^{\ 2})\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = (m_1r_1 - m_2r_2)g$$

从而求出鼓轮的角加速度

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{m_1r_1 - m_2r_2}{J_O + m_1r_1^{\ 2} + m_2r_2^{\ 2}}g$$

方向为逆钟向。

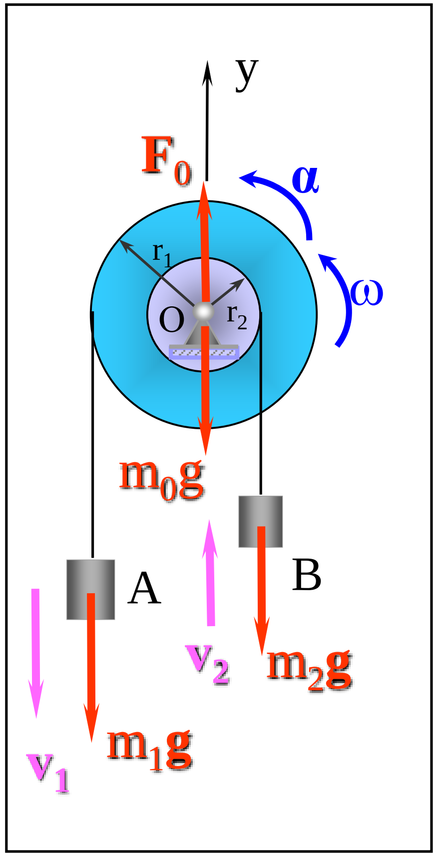


(b)

又知 $a_1 = \alpha r_1, a_2 = \alpha r_2$

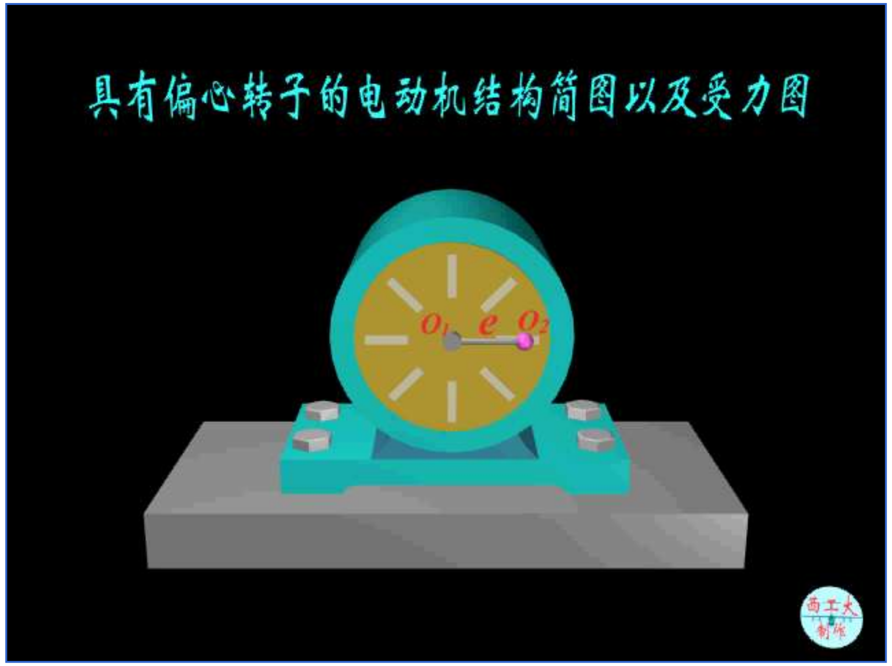
代入式（1）即可求出O处支座约束力

$$F_o = m_o g + m_1 g + m_2 g + m_2 a_2 - m_1 a_1$$



(b)

例题 2 电动机的外壳用螺栓固定在水平基础上，定子的质量是 m_1，转子的质量是 m_2，一般要求转子的轴线通过定子的质心 O_1。但是制造和安装的误差，使转子的质心 O_2对它的轴线有一个很小的偏心距 e（图中有意夸张）。求转子以匀角速度 ω 转动时，电动机所受的总水平反力和铅直反力。



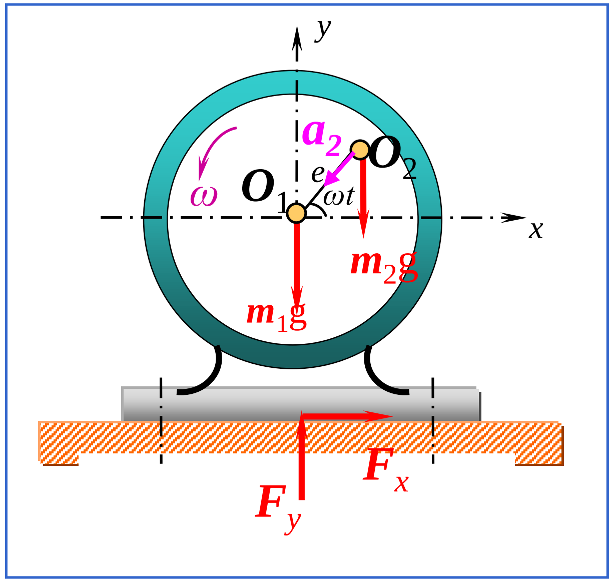
解： 取整个电动机（包括定子和转子）作为研究对象。

由质心运动定理有

$$\sum_{j=1}^{N} M_j \boldsymbol{a}_{Cj} = \sum \boldsymbol{F}^{(e)}$$

$$-m_2 a_2 \cos\omega t = F_x \qquad (1)$$

$$-m_2 a_2 \sin\omega t = F_y - m_1 g - m_2 g \qquad (2)$$

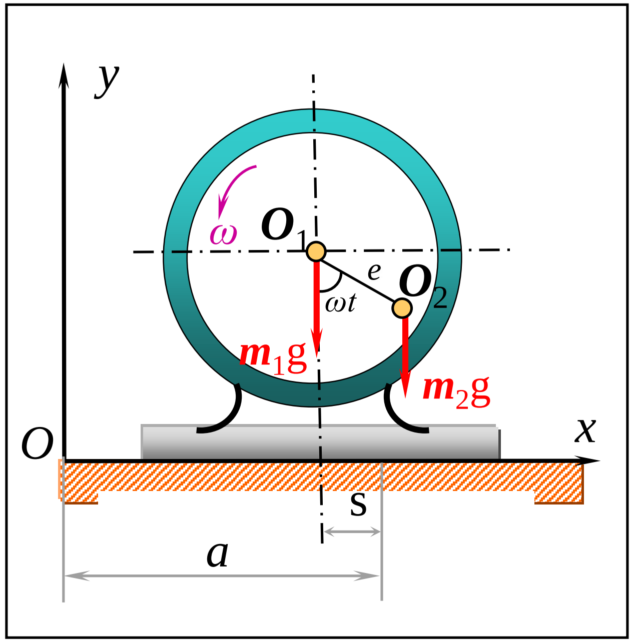


由此求得电动机所受的总水平反力和铅直反力

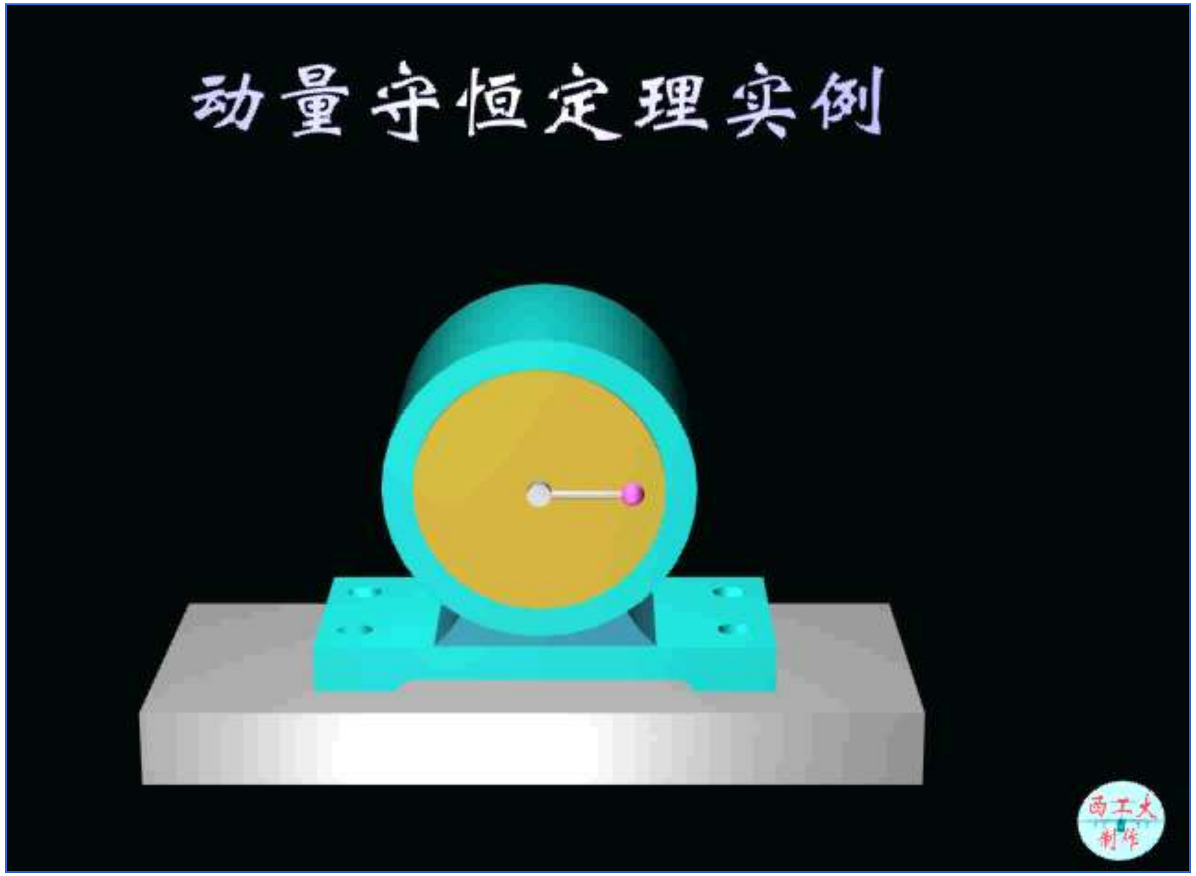
$$F_x = -m2e\omega^2\cos\omega t$$

$$F_y = (m1 + m2)g - m2e\omega^2\sin\omega t$$

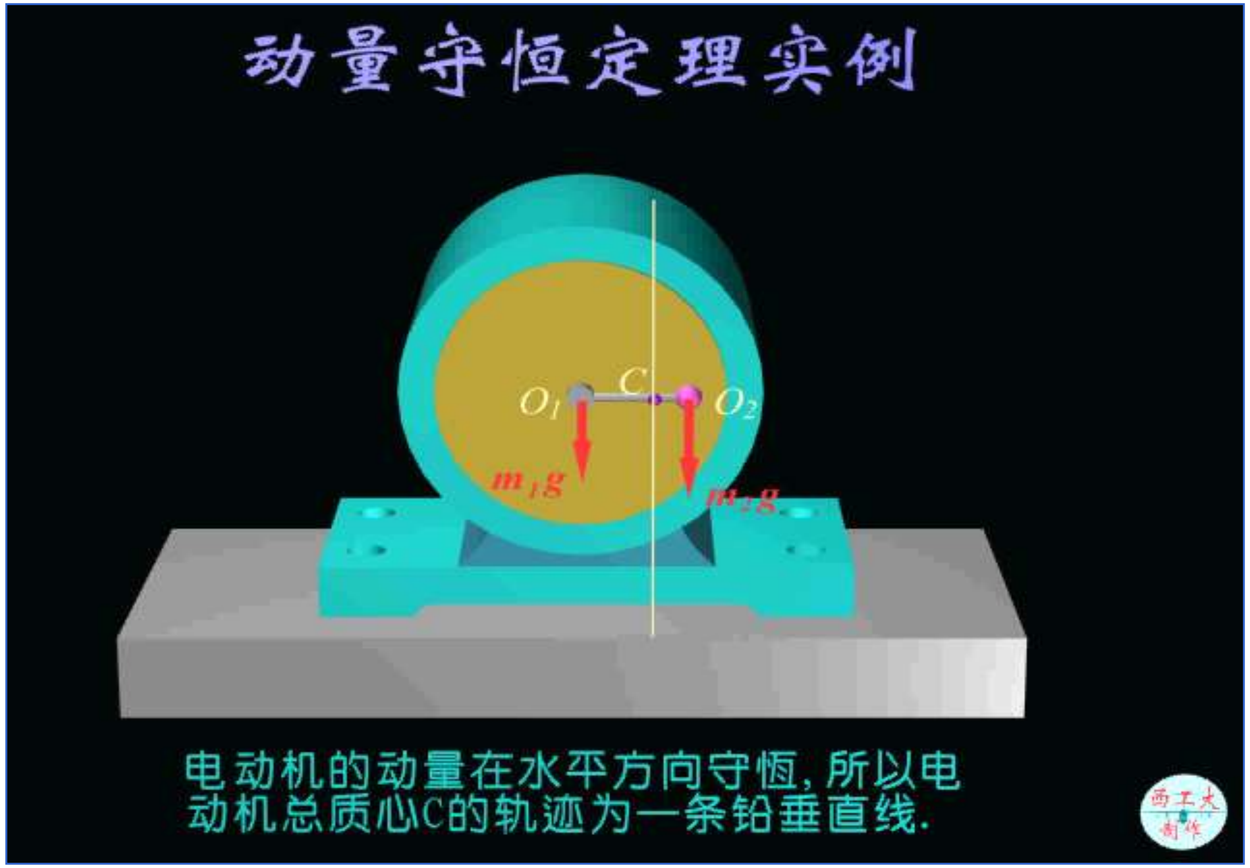
例题 3 若上例中电动机没有用螺栓固定，各处摩擦不计，初始时电动机静止。试求：（1）转子以匀角速ω转动时电动机外壳在水平方向的运动方程；（2）电动机跳起的最小角速度。



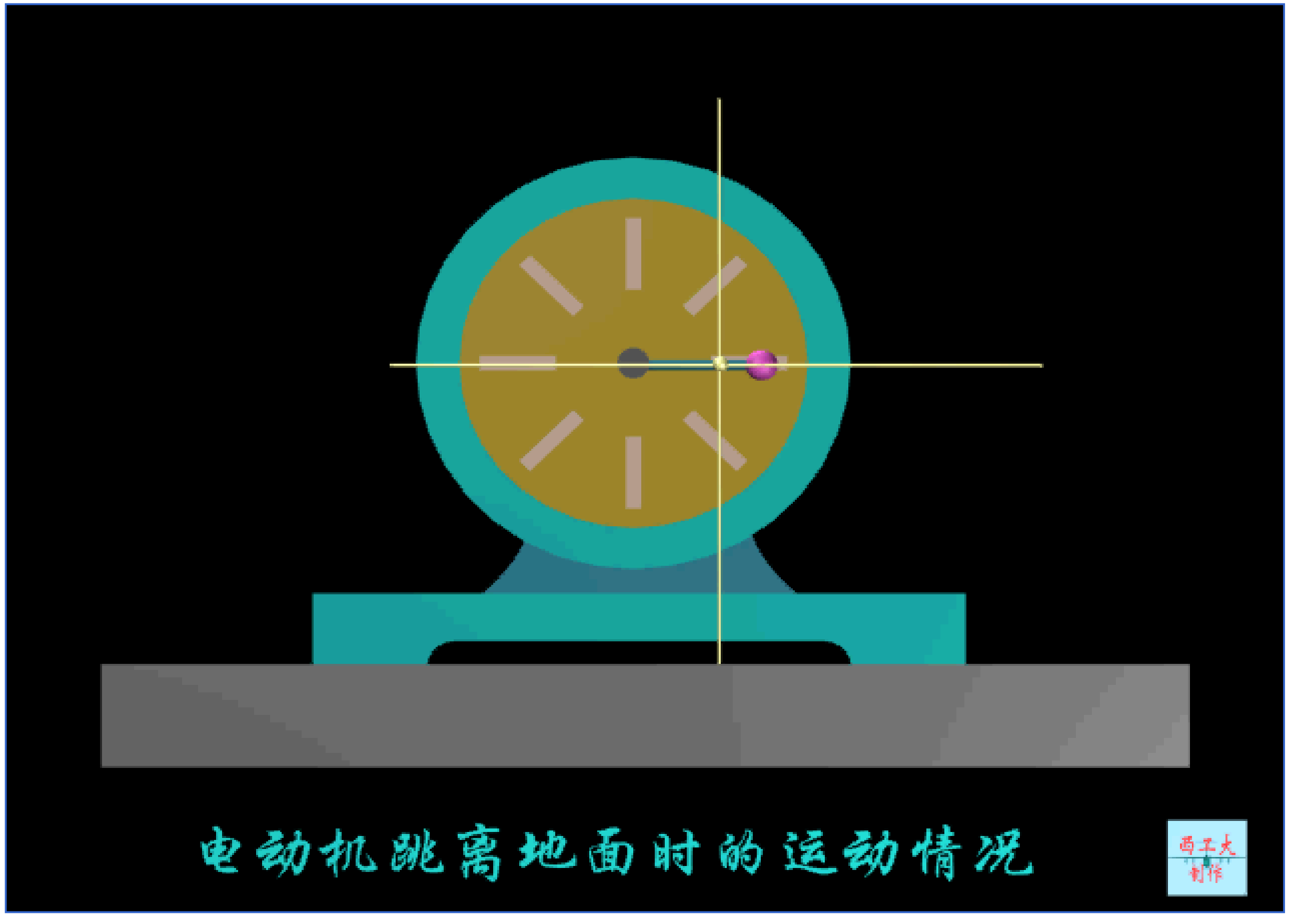
实例分析



实例分析


动量守恒定理实例
O_1
C
O_2
m_1g
m_2g
电动机的动量在水平方向守恒，所以电动机总质心C的轨迹为一条铅垂直线.

实 例 分 析



1. 电动机外壳在水平方向的运动方程

设电动机的水平位移为 s .

由于电动机不固定，且不计摩擦，故外力在水平轴上的投影之和等于零，即$\sum F_x \equiv 0$。则有

$$\dot{x}_C = \dot{x}_{C0} = \mathrm{constant}$$

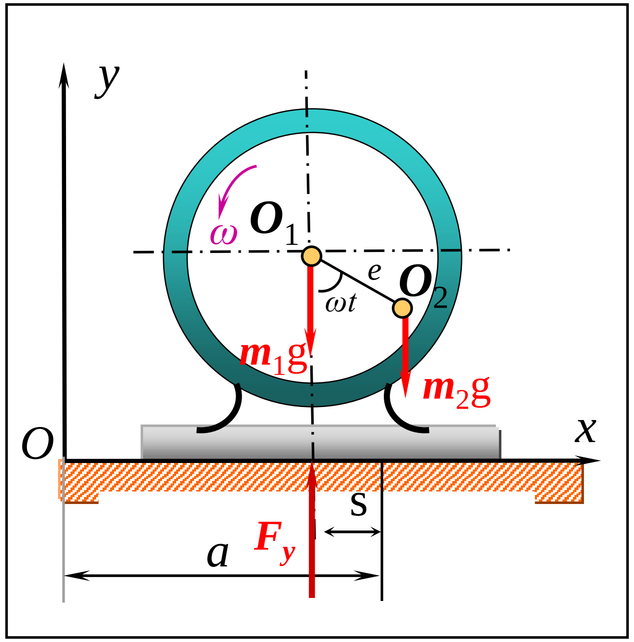
又因系统初瞬时静止，因此质心在水平轴上保持不变。即有

$$x_C = x_{C0} = \mathrm{constant}$$

已知

$$x_{C0} = a\ ,$$

$$x_C = \frac{m_1(a-s)+m_2(a-s+e\sin\omega t)}{m_1+m_2}$$

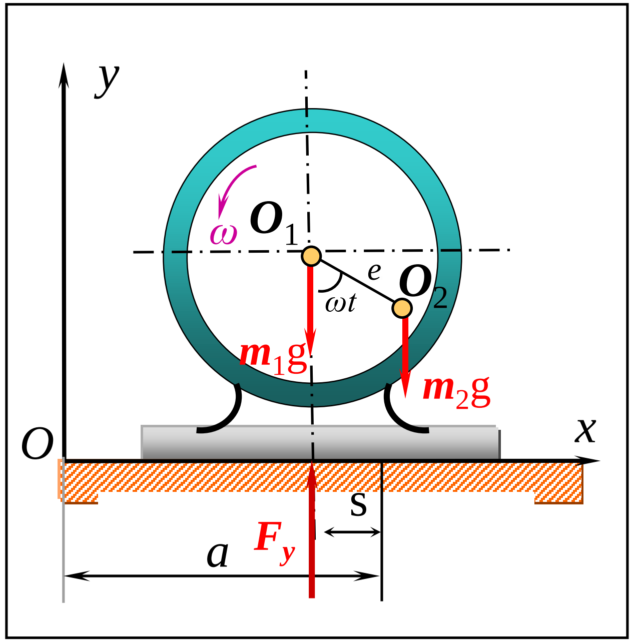


12.3 质心运动定理

$$x_C = x_{C0} = \text{constant}$$

已知 $x_{C0} = a$ ，

$$x_C = \frac{m_1(a-s) + m_2(a - s + e\sin\omega t)}{m_1 + m_2}$$



由 $x_C = x_{C0}$ 解得电动机外壳在水平方向的运动方程：

$$s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} e\sin\omega t$$

由此可见，当转子偏心的电动机未用螺栓固定时，将在水平面上作往复运动。

2. 求电动机起跳条件

由质心运动定理有

$$m_2 a_n \cos\omega t = F_y - m_1 g - m_2 g$$

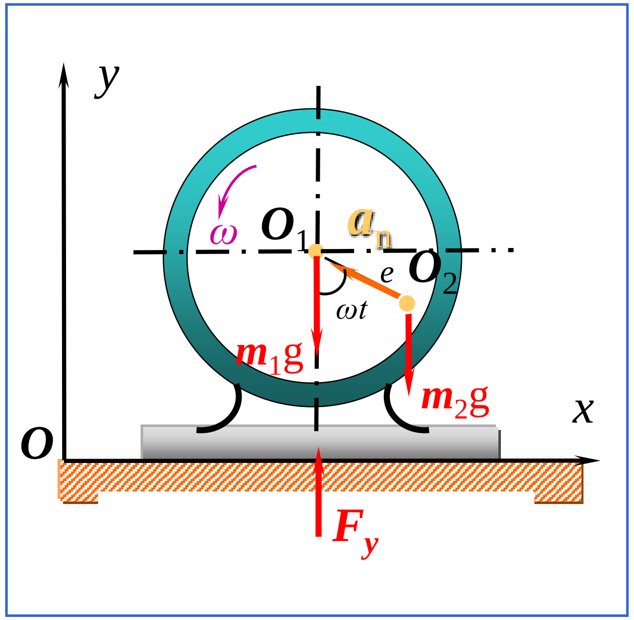
即 $$m_2 e\omega^2 \cos\omega t = F_y - m_1 g - m_2 g$$

因此求得机座的铅直反力：

$$F_y = m_1 g + m_2 g + m_2 e\omega^2 \cos\omega t$$

而机座铅直反力的最小值：

$$F_{y\min} = m_1 g + m_2 g - m_2 e\omega^2$$



思考题 电动机是否会起跳？起跳的条件是什么？

电动机起跳的条件为： $F_y = 0$

由此求得电动机起跳的最小角速度 $$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2 e} g}$$

实例分析

谢 谢！