上节提要

等可能概型
- E的S包含有限个元素
- E中每个基本事件发生的可能性相同

$$\mathrm{P}(A)=\frac{A\text{中基本事件数}}{S\text{中基本事件总数}}$$

几何概型
- E的S包含无限个元素，具有有限几何度量
- E中每个基本事件发生的可能性相同

$$\mathrm{P}(A)=\frac{A\text{的几何度量}}{S\text{的几何度量}}$$

§5 条件概率 Conditional Probability

一般地，对概率的讨论总是在一组固定的条件限制下进行的。以前的讨论总是假定除此之外再无别的信息可供使用。可是，有时我们却会碰到这样的情况，即已知某一事件B已经发生，去求另一事件A发生的概率。

一、引例

考虑有两个孩子的家庭，假定男女出生率一样，则两个孩子(依大小排列)的性别为

(男，男)，(男，女)，(女，男)，(女，女)的可能性相同。

若事件 A={随机选取的这样一个家庭中有一男一女}

显然　　　　　　$P(A)= \quad 1/2$

若预先知道事件 B={这个家庭至少有一个女孩}，

此时　　　　　　$P(A)= \quad 2/3$

两种情况下算出的概率不同。这是因为在第二种情况下，我们多知道了一个条件——事件B发生，因此我们算得的概率事实上是在已知事件B发生的条件下，事件A发生的概率，记为 $P(A|B)$。

A={一男一女}， B={至少有一个女孩}

上例中，样本点总数n=4，n_A=2，n_B=3，而n_{AB}=2，因此

$$P(A|B)=\frac{2}{3}=\frac{n_{AB}}{n_B}=\frac{n_{AB}/n}{n_B/n}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

不难证明，上式对一般等可能概型问题也成立。

在几何概型中，若以m(A)，m(B)，m(AB)，m(S)分别表示事件A, B, AB, S 所对应点集的几何度量，且m (B)＞0, 则

$$P(A|B)=\frac{m(AB)}{m(B)}=\frac{m(AB)/m(S)}{m(B)/m(S)}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

一般地，我们把上述等式作为条件概率的定义。当然，这也给出了一种计算等可能/几何概型中条件概率的方法。

二、条件概率的定义

设**A, B**是两个事件, 且$P(A)>0$, 称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

为在事件**A**发生的条件下事件**B**发生的条件概率。

条件概率同样也满足概率定义中的三个条件:

(1) 非负性　对于任何事件B，有$P(B|A)\geq 0$;

(2) 规范性　对于必然事件S，有$P(S|A)=1$;

(3) 可列可加性　设B_1, B_2，… 两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$$

由此可见，条件概率也是概率，前面对概率所证明的一些重要结果都适用于条件概率。

例如：

$$P(\varnothing | \mathbf{A})=0$$

$$P\left(\overline{B}|A\right)=1-P\left(B|A\right)$$

$$P(B_1 \cup B_2 | \mathbf{A})=P(B_1 | \mathbf{A})+P(B_2 | \mathbf{A})-P(B_1B_2 | \mathbf{A})$$

特别当A=S时，条件概率化为无条件概率。

例2　盒中装有5只产品，其中有3只一等品，2只二等品。从中取产品两次，每次任取一只，作不放回抽样。设事件A={第1次取到的是一等品}，事件 B={第2次取到的是一等品}。

试求：条件概率P(B|A)。

解：法1　利用缩减的样本空间

A发生后，盒子中还有产品 2只一等品，2只二等品

这时，样本空间发生了缩减，则有 $P(B|A)=\dfrac{2}{4}$

法2　利用等可能概型中条件概率计算公式

$$P(B|A)=\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{3\times 2}{3\times 4}=\frac{1}{2}$$

例2　盒中装有5只产品，其中有3只一等品，2只二等品。从中取产品两次，每次任取一只，作不放回抽样。设事件A={第1次取到的是一等品}，事件 B={第2次取到的是一等品}。试求：条件概率P(B|A)。

法3 条件概率定义式

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3\times 2}{5\times 4}}{\frac{3\times 4}{5\times 4}}=\frac{1}{2}$$

条件概率计算方法
- a 利用缩减的样本空间
- b 等可能/几何概型中条件概率计算公式
- c 定义式

三、乘法定理

设 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(B|A)P(A)$

$P(B)>0$，则 $P(AB)=P(A|B)P(B)$

上述公式被称为**乘法公式**。

可以把乘法公式推广到多个事件的积事件情形：

3事件： 设A、B、C三事件，且$P(AB)>0$，则

$$P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

为何没有条件$P(A)>0$

n事件：

事件A_1，A_2，…，A_n，且$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则

$$P(A_1,A_2,\ldots,A_n)=P(A_n|A_1,A_2,\cdots,A_{n-1})\times P(A_{n-1}|A_1,A_2,\cdots,A_{n-2})\times\cdots\times P(A_2|A_1)P(A_1)$$

用 途

用于求n个事件的积事件发生的概率。

例3 设袋中装有r只红球，t只白球。每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入a只与所取出的那只球同色的球。若在袋中连续取球四次，试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率。

解：设$A_i=\{第i次取到的是红球\}$

$\overline{A_i}=\{第i次取到的是白球\}$，$i=1,2,3,4$

$P\left(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\right)$? 法1 利用乘法公式

$$P\left(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\right)=P\left(\overline{A}_4\middle|A_1A_2\overline{A}_3\right)P\left(\overline{A}_3\middle|A_1A_2\right)P\left(A_2\middle|A_1\right)P\left(A_1\right)$$

$$=\frac{t+a}{t+r+3a}\times\frac{t}{t+r+2a}\times\frac{r+a}{t+r+a}\times\frac{r}{t+r}$$

缩减的样本空间

例3 设袋中装有r只红球，t只白球。每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入a只与所取出的那只球同色的球。若在袋中连续取球四次，试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率。

解：设$A_i = \{$第i次取到的是红球$\}$　　$i = 1,2,3,4$

$\overline{A_i} = \{$第i次取到的是白球$\}$

法2 利用等可能概型中事件概率计算公式

从袋中连续取球4次，每种取法为一个基本事件

$$P\left(A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4\right) = \frac{r \times (r+a) \times t \times (t+a)}{(t+r) \times (t+r+a) \times (t+r+2a) \times (t+r+3a)}$$

取球共分4步：　第1步　第2步　第3步　第4步

例4　设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为1 / 2；若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为 7 / 10；若前两次落下未打破，第三次落下打破的概率为 9 / 10。试求透镜落下三次而未打破的概率。

解：设 $A_i = \{\text{透镜第}i\text{次落下打破}\}, i = 1,2,3$　　$P\left(A_3 \mid \bar{A}_1\bar{A}_2\right) = \frac{9}{10}$

$B = \{\text{透镜3次落下未打破}\}$　已知 $P(A_1) = \frac{1}{2}$，$P\left(A_2 \mid \bar{A}_1\right) = \frac{7}{10}$

$P(B) = P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\right)$?　法1　利用乘法公式

$$P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\right) = P\left(\bar{A}_3 \mid \bar{A}_1\bar{A}_2\right)P\left(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1\right)P\left(\bar{A}_1\right)$$

$$= \left(1 - \frac{9}{10}\right) \times \left(1 - \frac{7}{10}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{200}$$

解：设$A_i=\{透镜第i次落下打破\}, i=1,2,3$　$P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{9}{10}$

$B=\{透镜3次落下未打破\}$　已知$P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{7}{10}$

$P(B)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)$?　**法2　求逆事件**　$\bar{B}=\{有打破\}$

$\bar{B}$?　$=A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$　两两互不相容

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-P(A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$$=1-\left[P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)\right]$$

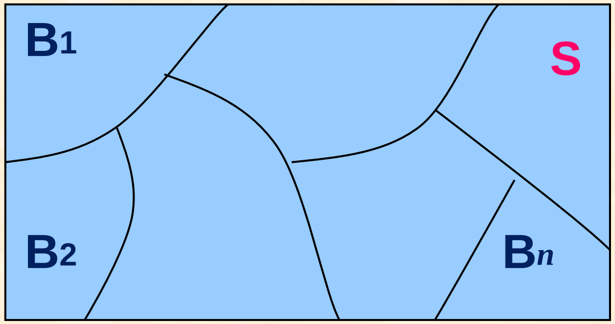
$$=1-\left[P(A_1)+P(A_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)+P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)\right]$$

$$=1-\left[\frac{1}{2}+\frac{7}{10}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{10}\left(1-\frac{7}{10}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{200}$$

四、全概率公式与贝叶斯公式

1. 样本空间的划分



定义 设试验E的样本空间为S，$B_1, B_2, \ldots, B_n$为E的一组事件，若

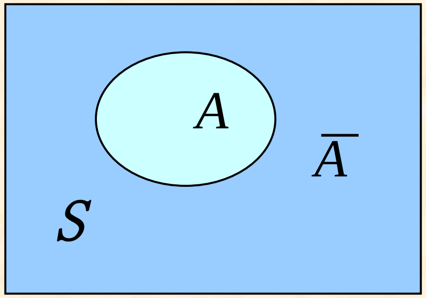
① $B_iB_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n$ 互斥性

必要条件

② $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S$ 完全性

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1$$

则称B_1，B_2，… B_n为样本空间S的一个划分。



一个事件及其逆事件可构成样本空间的一个划分。

推 论

若B_1，B_2，… B_n为样本空间的一个划分，则每次试验，事件B_1，B_2，… B_n中必有一个且仅有一个发生。

2. 全概率公式

定 理

设试验E的样本空间为S，A为E的事件，$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为S的一个划分，且$P(B_i)>0$，$i=1,\ldots,n$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

上式称为全概率公式。

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

思路:

等式右边 $\underset{\text{}}{\overset{\text{乘法公式}}{=\!=\!=}}$ $\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)$ 互不相容

$\overset{\text{P有限可加性}}{=\!=\!=}$ $P(AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n)$

$\overset{\text{分配律}}{=\!=\!=}$ $P(A\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n))$

$=P(AS)$ $=P(A)$

反过来就是证明过程

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

内 涵

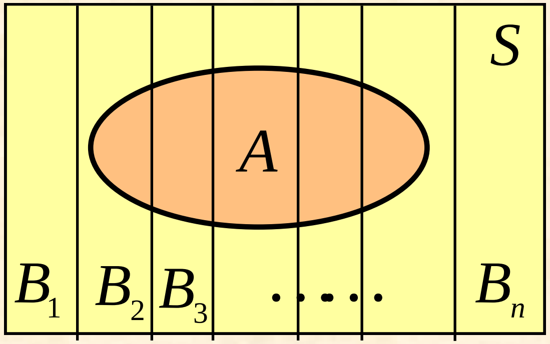
全概率公式运用<u>**化整为零**</u>的思想，将一个复杂事件的概率求解问题转化为在不同情况（原因, 前提）下发生的简单事情的概率求和问题。

本 质

全概率公式中的$\mathbf{P(A)}$是一种<u>**平均概率**</u>，是对条件概率$\mathbf{P(A|B_i)}$以概率$\mathbf{P(B_i)}$为权重的加权平均。

理 解

事件A是伴随另一组事件$B_1, B_2, \ldots, B_n$的发生而发生的



$P(B_1)$ B_1 $P(A|B_1)$

$P(B_2)$ B_2 $P(A|B_2)$

⋮

$P(B_n)$ B_n $P(A|B_n)$

A

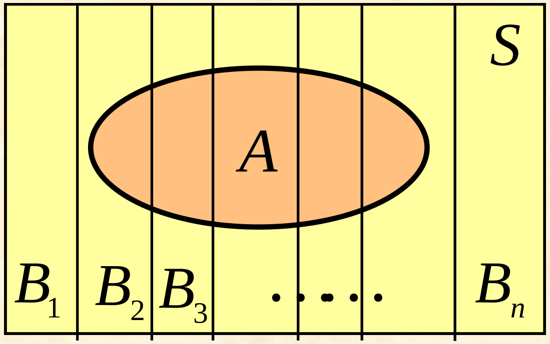
$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

原因 → 结果

全概率公式综合考虑各种原因的作用,作出**由因推果**的推断

使 用

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$



① 关键寻找一组事件$B_1, B_2, \ldots, B_n$构成S的一个划分。

② 使用全概率公式要合理选择事件$B_1, B_2, \ldots, B_n$使$P(B_i)$和$P(A|B_i)$易于求解。

3. 贝叶斯公式

定 理

设试验E的样本空间为S，A为E的事件，$B_1,B_2,\ldots, B_n$ 为S的一个划分，且P(A)＞0，$P(B_i)>0$，$i=1,\ldots,n$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}\quad,\ i=1,2,\ldots,n$$

上式称为贝叶斯(Bayes)公式。1763年Bayes提出

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$$

证： $P(B_i|A) \xlongequal{\text{条件P定义}} \dfrac{P(AB_i)}{P(A)}$

$$\xlongequal{\text{乘法公式}} \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

$$\xlongequal{\text{全概率公式}} \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$$ 得证

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$$

内 涵

Bayes公式求条件概率$P(B_i|A)$相当于由果寻因，即已知在其结果(事件A)发生条件下，求各原因发生的可能性大小，可帮助人们确定该结果发生的最可能原因。

结果　　原因

A $\longrightarrow$ B_1, B_2, ⋮, B_n　　$P(B_i|A)$

说 明

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$$

在Bayes公式中，直观地将B_i看成是导致事件A发生的原因，则$P(B_i)$可以理解为事件B_i发生的先验概率，如果知道事件A发生的这个新信息，则它可用于对事件B_i发生的概率进行重新估计，于是$P(B_i|A)$就是知道了新信息A发生后对事件B_i发生概率的重新认识，称为事件B_i的后验概率。

特别地

当$n=2$时，记$B_1=B$，$B_2=\overline{B}$

全概率公式

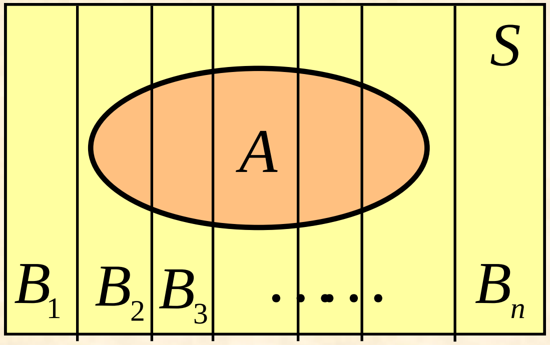
$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})$$

贝叶斯公式

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

使 用

$$P\left(B_i \middle| A\right)=\frac{P\left(A \middle| B_i\right)P\left(B_i\right)}{\sum_{j=1}^{n} P\left(A \middle| B_j\right)P\left(B_j\right)}$$



① 由结果分析产生原因时使用。

② 求条件概率并需要作信息转换的时候使用。

例5　某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的。根据以往的记录有以下的数据：

元件制造厂	次品率	提供原件份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的，且无区别的标志。(1)在仓库中随机地取一只元件，求它是次品的概率；(2)在仓库中随机地取一只元件，若已知取到的是次品，为分析此次品出自何厂，需求出此次品由三家工厂生产的概率分别是多少。试求这些概率。

解：设A=$\{$取到的是1只次品$\}$

$B_i=\{$所取产品是由第i次家工厂提供的$\}, i=1,2,3$

元件制造厂	次品率	提供原件份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

由题意可知 $P(B_1)=0.15$, $P(B_2)=0.8$, $P(B_3)=0.05$,

和 $P(A|B_1)=0.02$, $P(A|B_2)=0.01$, $P(A|B_3)=0.03$,

且 B_1, B_2, B_3 构成了样本空间的一个划分, 现在要求的是 $P(A)$ 和 $P(B_i|A)$。

$P(A)$ 全概率公式

$P(B_i|A)$ 贝叶斯公式

小结

1. 条件概率的定义与计算；

2. 乘法公式的应用；

3. 全概率公式与贝叶斯的应用。

作业

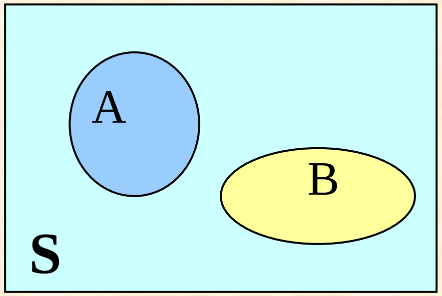
Page 26：

第14, 16, 19, 21, 23, 25题

练习　若事件A与B互斥，且$P(\bar{B})\neq 0$，则$P(A|\bar{B})=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}$.

解：法1 $P(A|\bar{B})=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(A\bar{B})}{1-P(B)}$,

由A,B事件文氏图关系知$A\bar{B}=A$，故得证。



$AB=\varnothing$

法2 $P(A|\bar{B})=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}\overset{\text{乘法公式}}{=\!=\!=}\dfrac{P(\bar{B}|A)P(A)}{1-P(B)}=\dfrac{[1-P(B|A)]P(A)}{1-P(B)}$

由题意知A与B互斥，则$P(B|A)=0$，故得证。

法3 $P(A|\bar{B})=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}\overset{\text{差事件}}{=\!=\!=}\dfrac{P(A-AB)}{1-P(B)}\overset{AB\subset A}{=\!=\!=}\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}$

或 $A\bar{B}=A-B$，由于$AB=\varnothing$，故$A-B=A$，得证。