西北工業大學
Northwestern Polytechnical University

静 力 学

平面任意力系

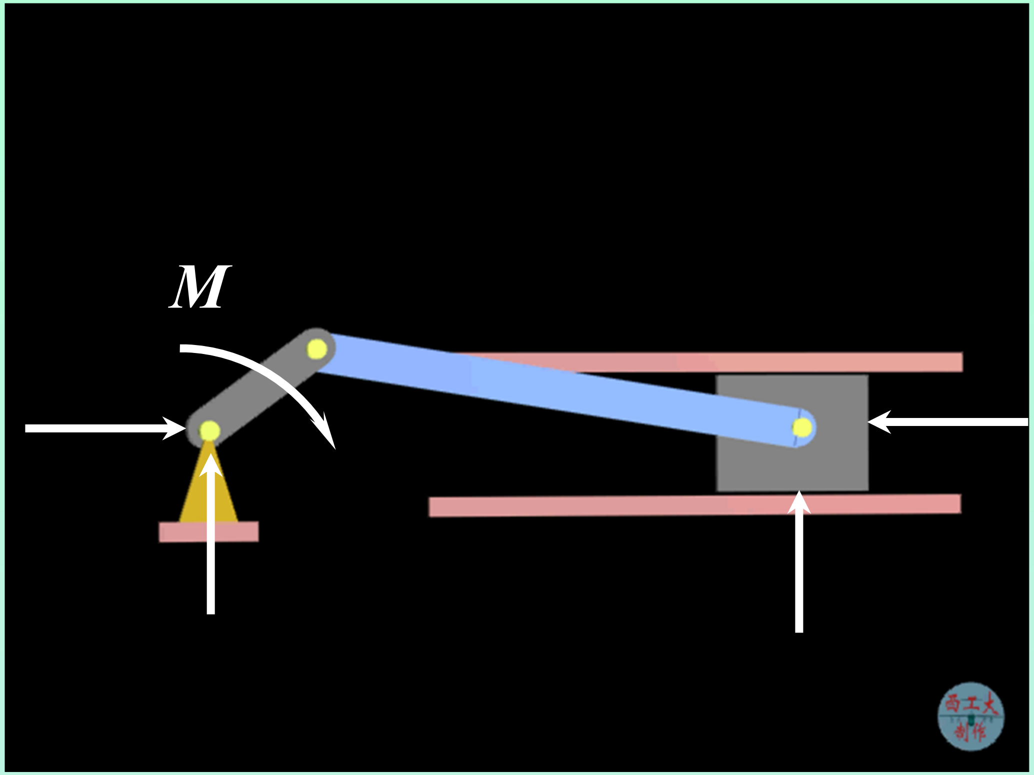
西北工业大学
支希哲　朱西平　侯美丽

平面任意力系

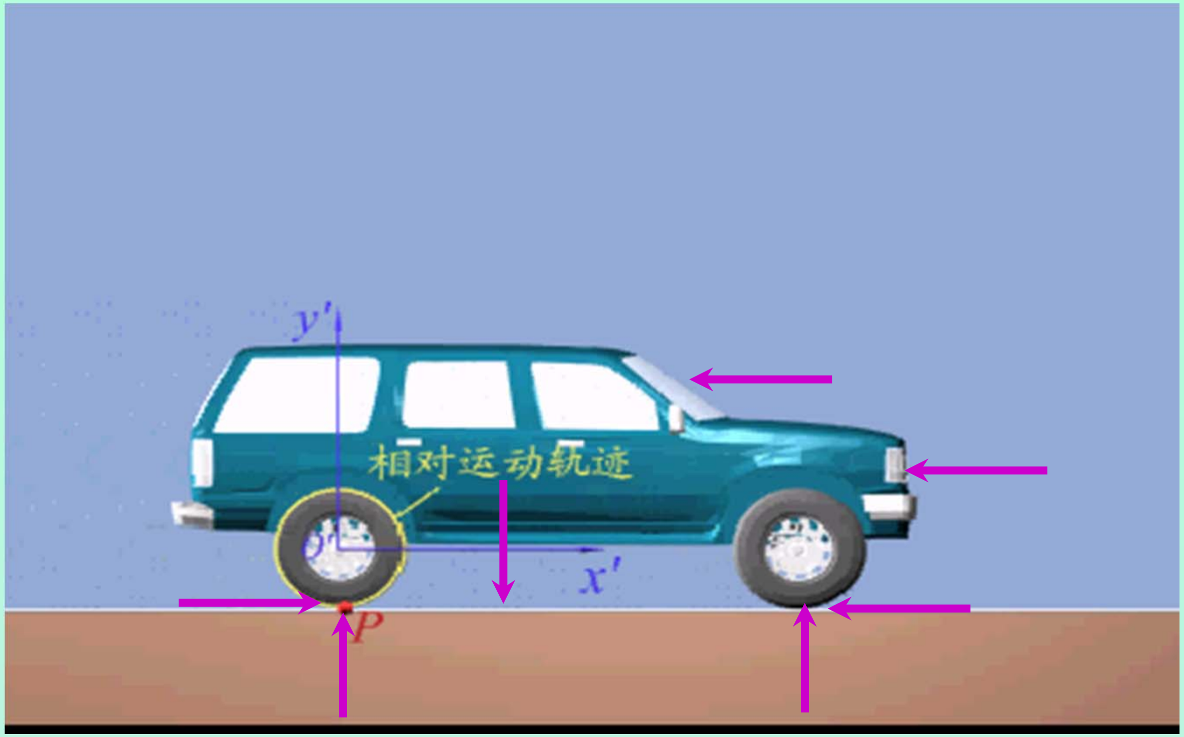
本章将在前面两章的基础上，详述平面任意力系的简化和平衡问题，并介绍平面简单桁架的内力计算。

第三章 平面任意力系

实 例



实 例



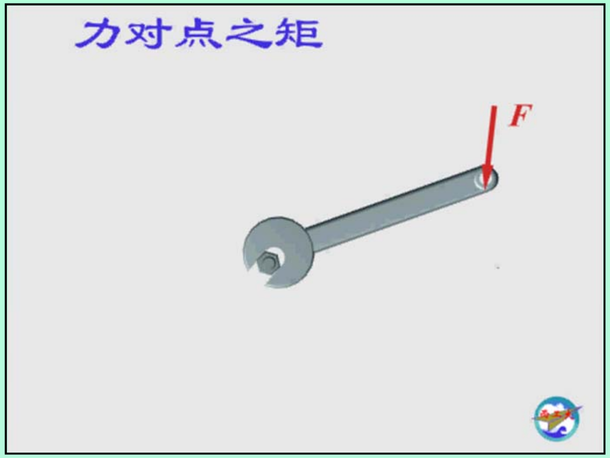
平面任意力系—— 作用线在同一平面内，但彼此不汇交一点，且不都平行的力系。

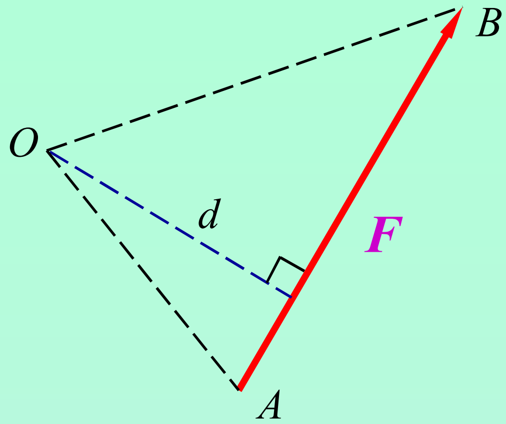
§3–1 力对点的矩

- 力对点的矩
- 力矩的性质

§ 3–1 力对点的矩

实例





1. 力对点的矩

力F的大小乘以该力作用线与某点O间距离d，并加上适当正负号，称为$\boldsymbol{F}$ 对O点的矩，简称力矩。

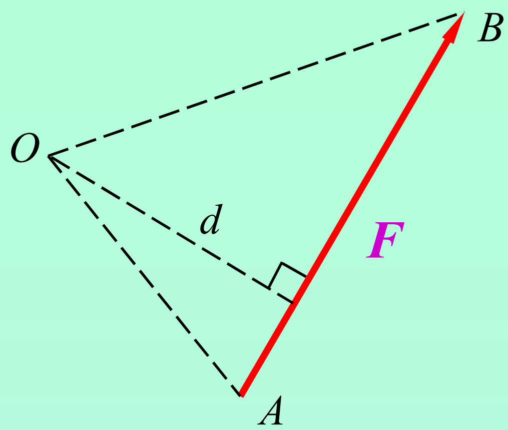
力矩的表达式

$$\boxed{M_O(\boldsymbol{F}) = \pm Fd}$$

O — 矩心， d —力臂。

§3–1 力对点的矩

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \pm Fd$$



● 力矩的正负号规定

当有逆时针转动的趋向时，力F对O点的矩取正值；反之，取负值。

力矩的值也可由三角形OAB面积的2倍表示

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \pm 2\Delta OAB\text{面积}$$

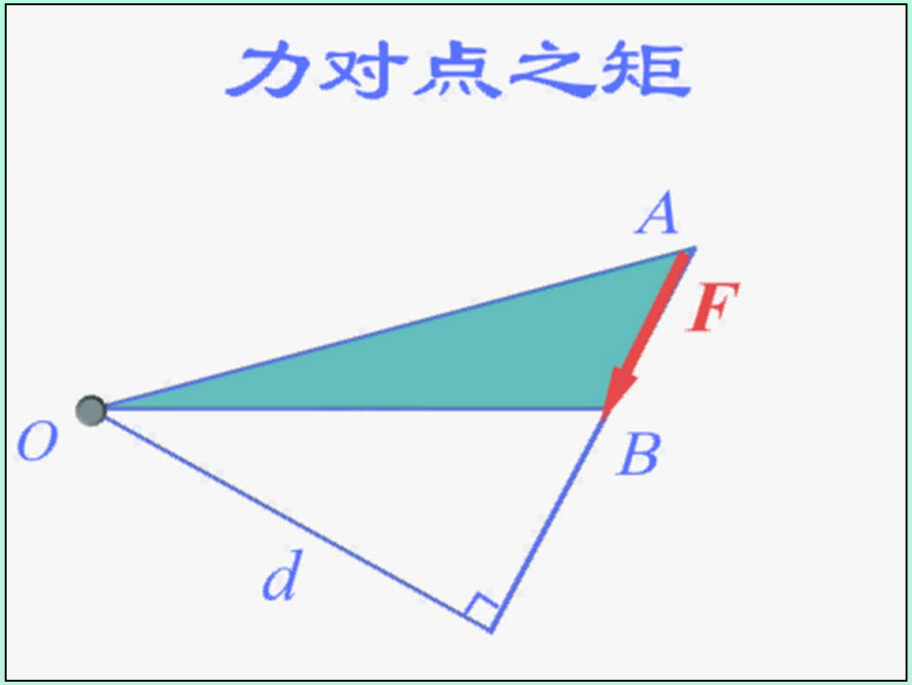
§3–1 力对点的矩

2. 力矩的性质

（1）力F的作用点沿作用线移动，不改变力对点O的矩。

（2）当力通过矩心时，此力对于矩心的力矩等于零。

（3）互成平衡的力对同一点的矩之和等于零。



● 力对点的矩与力偶矩的异同

相同处：力矩的量纲与力偶矩的相同。

牛顿•米（N • m）

不同处：力对点的矩可随矩心的位置改变而改变，但一个力偶的矩是常量。

联系：力偶中的两个力对任一点的矩之和是常量，等于力偶矩。

力偶中的两个力对任一点的之矩和是常量，等于力偶矩。

证明：

$$M_O(\boldsymbol{F}_1)+M_O(\boldsymbol{F}_2)$$

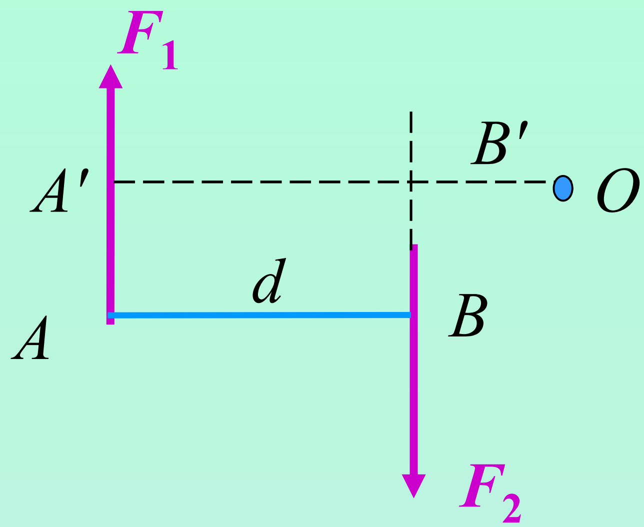
$$=-F_1\cdot OA'+F_2\cdot OB'$$

$$=-F_1(OA'-OB')$$

$$=-F_1\cdot(A'B')$$

$$=-F_1\cdot d$$

$$=M$$



§ 3–2

● 力线平移定理

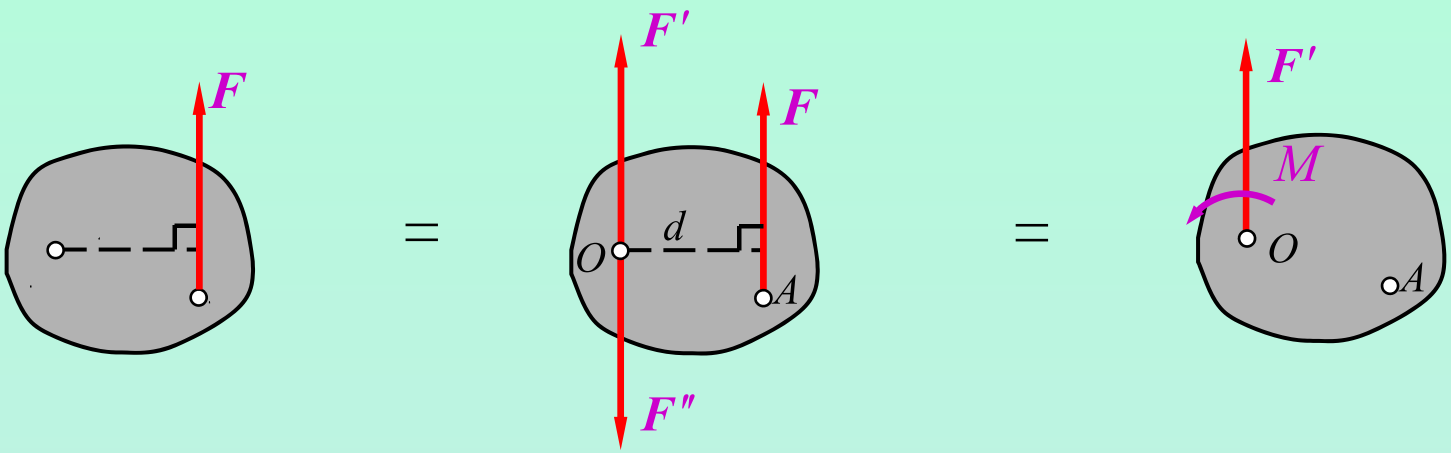
● 力系向给定点的简化

● 平面任意力系简化结果的讨论

● 合力矩定理•力矩的解析表达式

1. 力线平移定理

把力F 作用线向某点O平移时，须附加一个力偶，此附加力偶的矩等于原力$\boldsymbol{F}$ 对点O的矩。



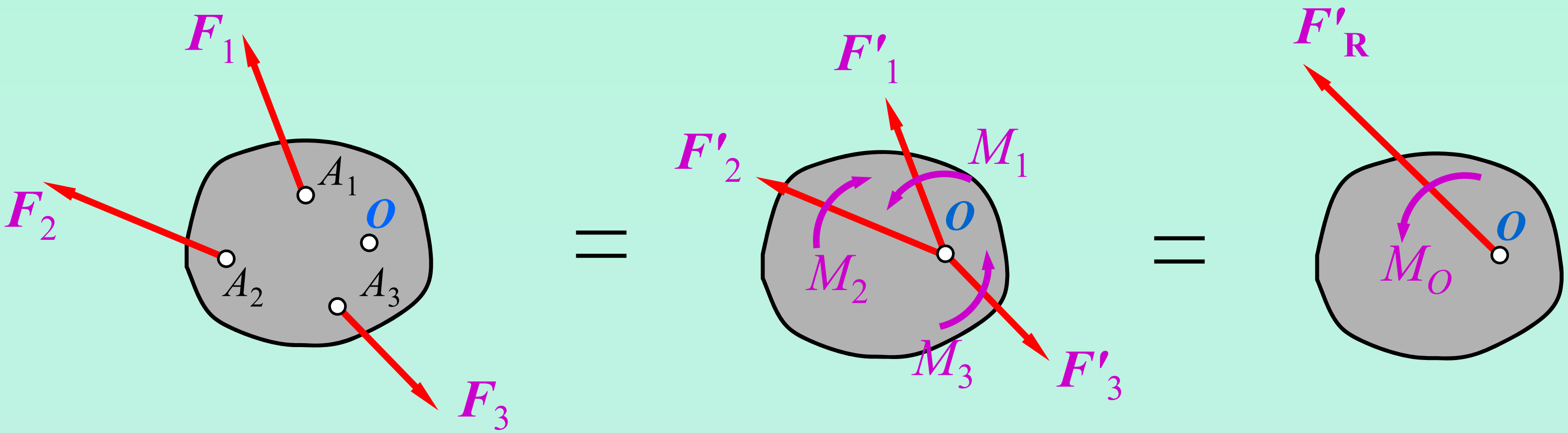
$$\boldsymbol{F}'=-\boldsymbol{F}''=\boldsymbol{F}, \qquad M=Fd=M_O(\boldsymbol{F})$$

2. 力系向给定点*O* 的简化

应用力系平移定理 (

给定点*O* 。从而这力系被分解为平面共点力系和平面力偶系。这种变换的方法称为力系向给定点*O* 的简化。点*O* 称为**简化中心**。

以三个力构成的平面任意力系为例说明如下：

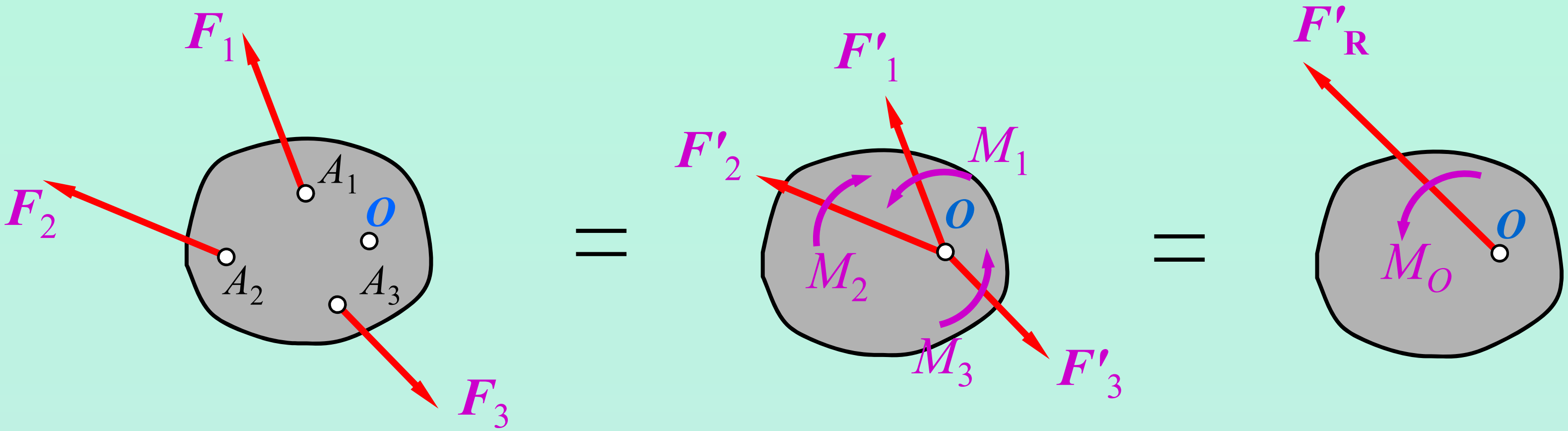


共点力系F_1'，F_2'，F_3'的合成结果为一作用点在点O的力F'_R。这个力矢F'_R称为原平面任意力系的**主矢**。

$$F'_R = F'_1 + F'_2 + F'_3 = F_1 + F_2 + F_3$$

附加力偶系的合成结果是作用在同平面内的力偶，这力偶的矩用M_O代表，称为原平面任意力系对简化中心O的**主矩**。

$$M_O = M_1 + M_2 + M_3 = M_O(F_1) + M_O(F_2) + M_O(F_3)$$



平面任意力系对简化中心O的

主矢　$F'_R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum F_i$

主矩　$M_O = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \cdots + M_O(F_3) = \sum M_O(F_i)$

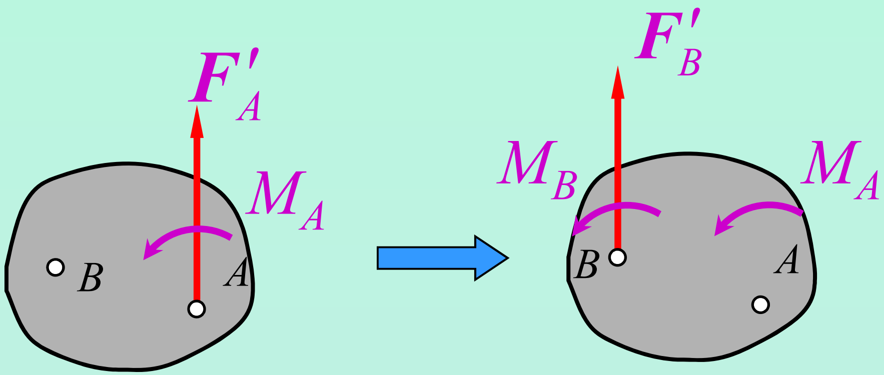
结论

平面任意力系向作用面内任一点O简化的结果，是**一个力和一个力偶**，这个力作用在简化中心O，它的力矢等于原力系中各力的矢量和，并称为原力系的**主矢**；这力偶的矩等于各附加力偶矩的代数和，它称为原力系对简化中心O的**主矩**，并在数值上等于原力系中各力对简化中心O的力矩的代数和。

● 几点说明

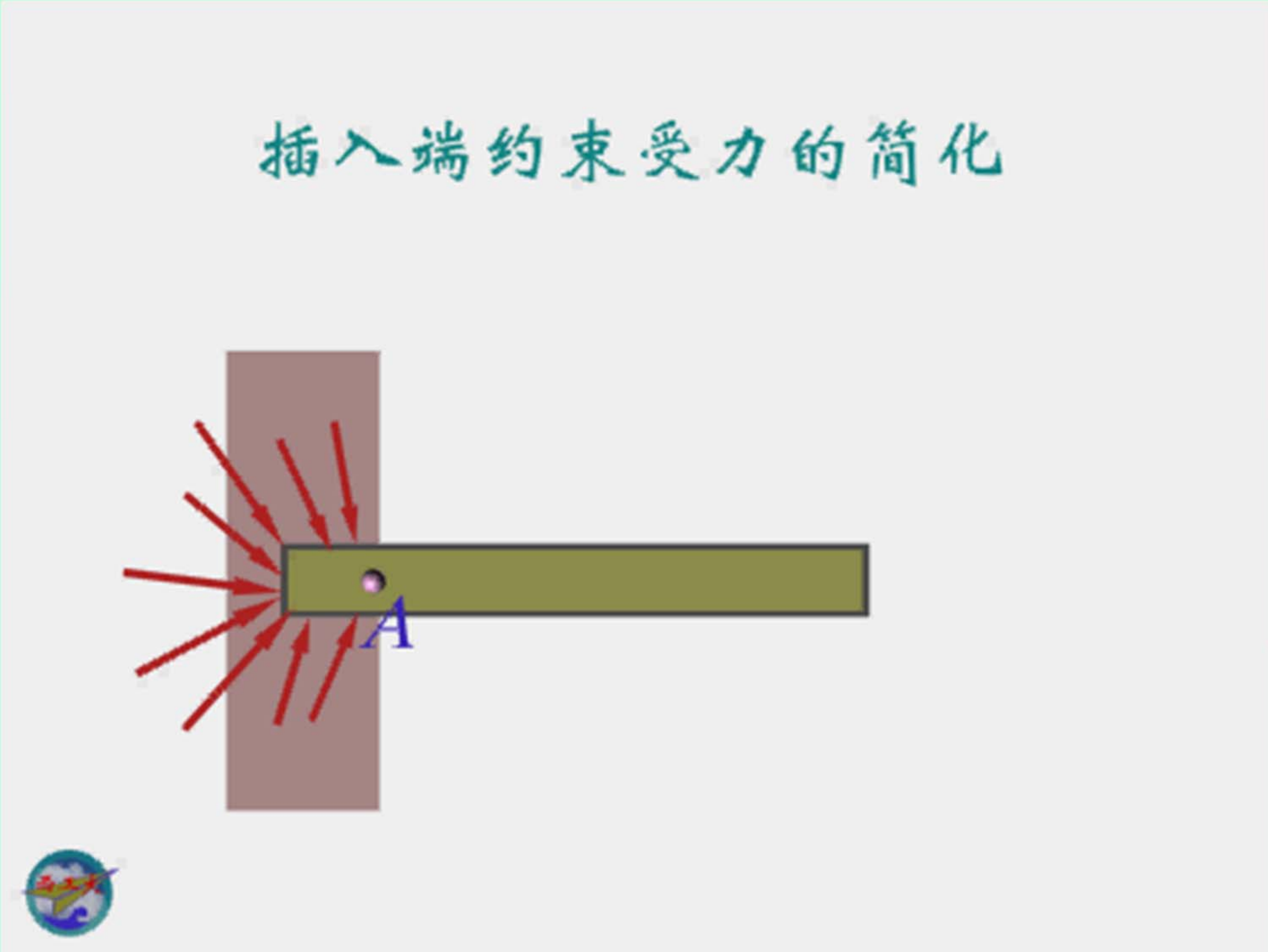
（1）平面任意力系的主矢的大小和方向与简化中心*O*的位置无关。

（2）平面任意力系的主矩一般与简化中心*O*的位置有关。因此，在说到力系的主矩时，一定要指明简化中心。



$$F'_B = F'_A$$

$$M = M_A + M_B(F'_A)$$



工程实例

● 主矢、主矩的求法

(1) 主矢可按力多边形规则作图求得，或用解析法计算。

$$F'_{\mathrm{R}} = \sqrt{F'^{\,2}_{\mathrm{R}x} + F'^{\,2}_{\mathrm{R}y}} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

方向余弦

$$\cos(\boldsymbol{F}', x) = \frac{(\sum F_x)}{F'_{\mathrm{R}}}$$

$$\cos(\boldsymbol{F}', y) = \frac{(\sum F_y)}{F'_{\mathrm{R}}}$$

(2) 主矩M_O可由下式计算。

$$M_O = M_O(\boldsymbol{F}_1) + M_O(\boldsymbol{F}_2) + \cdots + M_O(\boldsymbol{F}_3) = \sum M_O(\boldsymbol{F})$$

3. 平面任意力系简化结果的讨论

（1） $F'_{\mathrm{R}}=0$，而$M_O\neq 0$，原力系合成为力偶。

这时力系主矩M_O不随简化中心位置而变。

（2）$M_O=0$，而$F'_{\mathrm{R}}\neq 0$，原力系合成为一个力。

作用于点O的力F'_{R}就是原力系的合力。

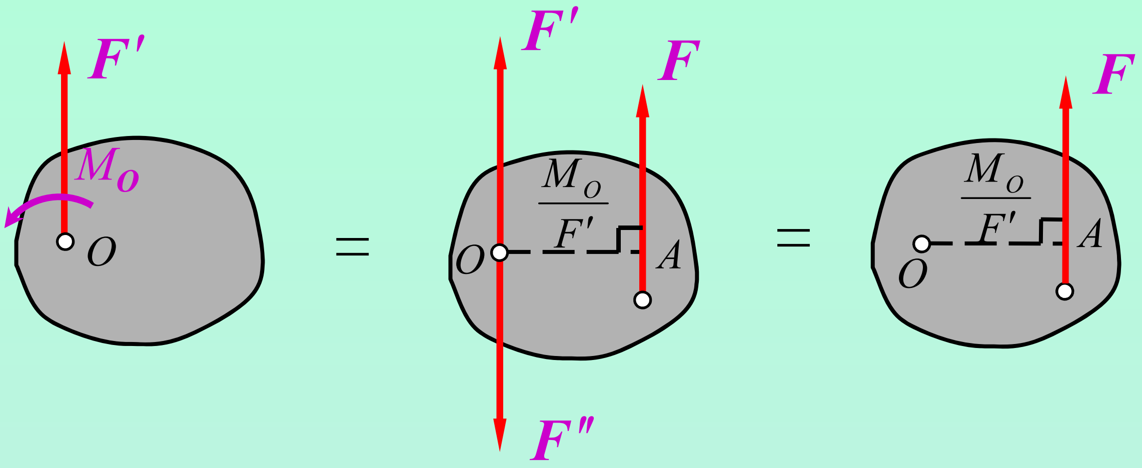
（3） $F'_{\mathrm{R}}\neq 0$，$M_O\neq 0$，原力系简化成一个力偶和一个作用于点O的力。

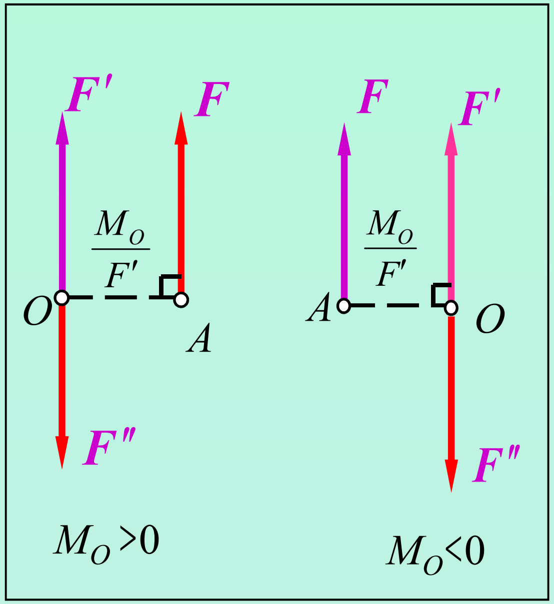
$F' \neq 0$，$M_O \neq 0$，原力系简化成一个力偶和一个作用于点O的力，这时力系也可合成为一个力。

证 明

$$\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}'' = \boldsymbol{F}$$

$$AO = \frac{M_O}{F'} = \frac{\sum M_O(\boldsymbol{F})}{F'}$$





至于点A在主矢$\boldsymbol{F}'$的那一边，则与主矩M_O的正负有关。下面列出二种可能性。

(4) $F'_R=0$，而$M_O=0$，原力系平衡。

综上所述，可见：

- 平面任意力系如不自成平衡，则当主矢$F'_R\neq 0$，该力系合成为一个力。
- 平面任意力系如不自成平衡，则当主矢$F'_R=0$，该力系合成为一个力偶。

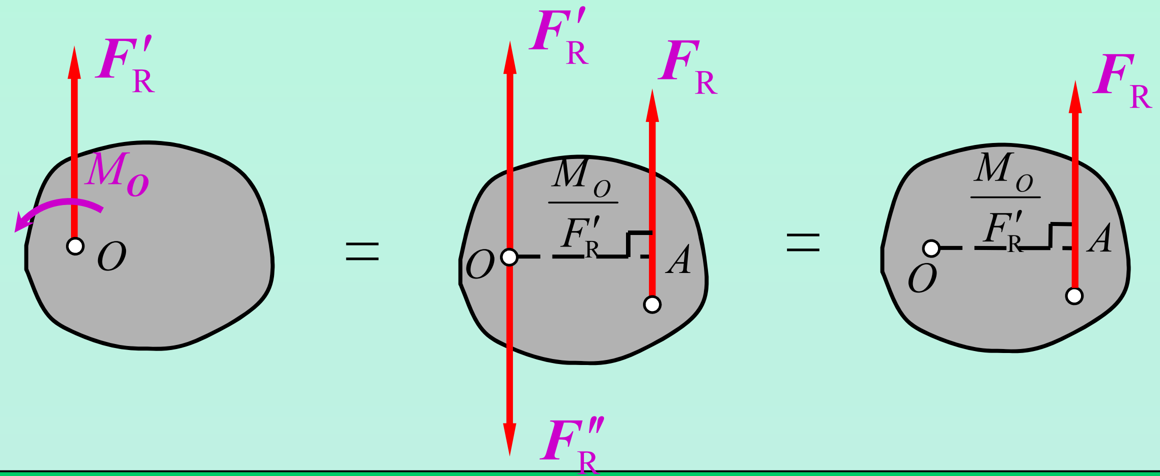
4. 合力矩定理（伐里农定理）

平面力系的合力对作用面内任一点的矩，等于这力系中的各力对同一点的矩的代数和。

表达式： $M_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}})=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i)$

证明： 因为 $M_O=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i)$ ， $M_O=F_{\mathrm{R}}\cdot d=M_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}})$

所以 $M_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}})=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i)$



● 力矩的解析表达式

F对原点***O***的力矩的解析表达式：$M_O(F) = xF_y - yF_x$

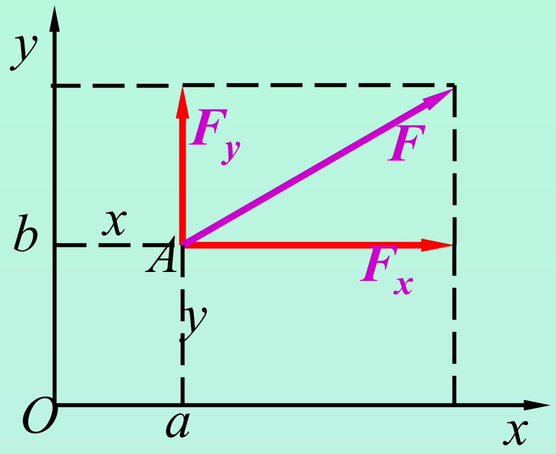
证　明：

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \sum M_O(\boldsymbol{F}_x) + \sum M_O(\boldsymbol{F}_y)$$

$$M_O(\boldsymbol{F}_x) = \pm Ob \cdot |\boldsymbol{F}_x| = -y\boldsymbol{F}_x$$

$$M_O(\boldsymbol{F}_y) = \pm Oa \cdot |\boldsymbol{F}_y| = x\boldsymbol{F}_y$$

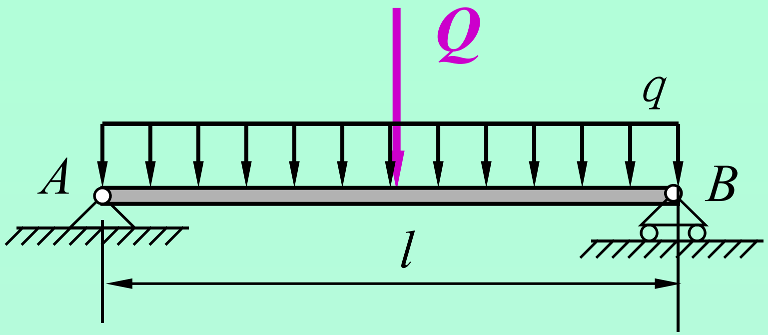
$$M_O(F) = xF_y - yF_x$$



5. 求分布力的合力

- 矩形分布

$$Q=ql$$



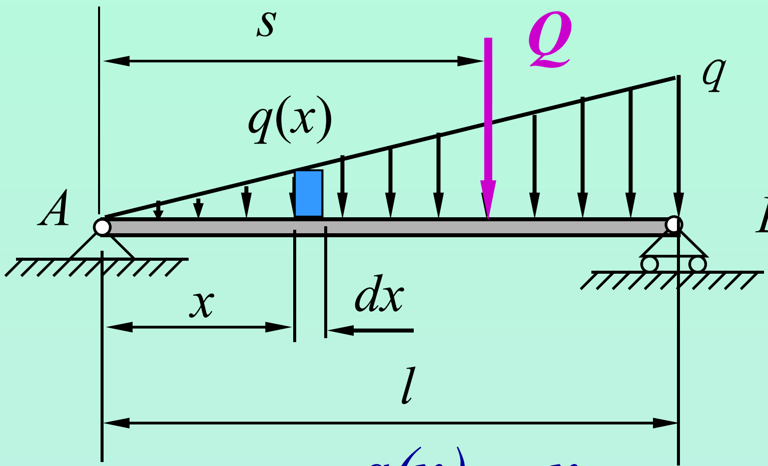
- 三角形分布

合力大小

$$dQ=q(x)dx$$

$$Q=\int_0^l dQ=\int_0^l q(x)dx$$

$$Q=\int_0^l \frac{q}{l}x\,dx=\frac{1}{2}ql$$



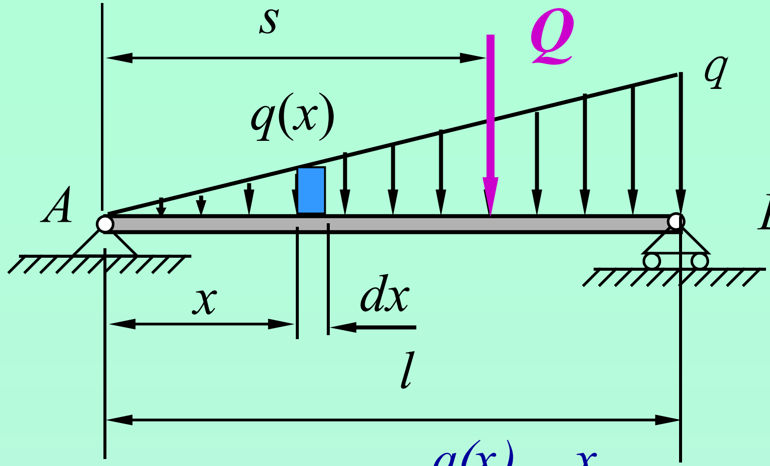
$$\frac{q(x)}{q}=\frac{x}{l}$$

合力作用线

应用合力矩定理

$$Q \cdot s = \int_0^l dQ \cdot x = \int_0^l \frac{q}{l} x^2 dx = \frac{1}{3} l^2 q$$

$$s = \frac{2}{3} l$$



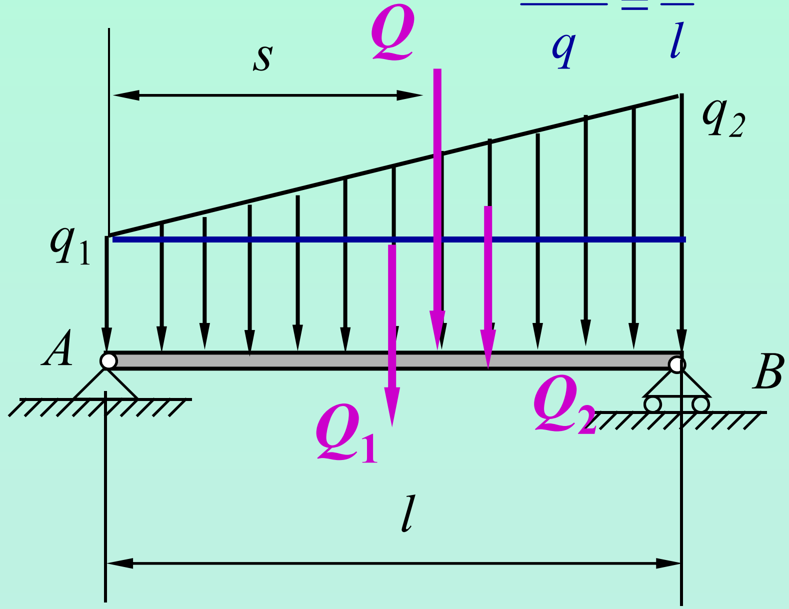
$$\frac{q(x)}{q} = \frac{x}{l}$$

- 梯形分布

$$Q_1 = ql, \quad Q_2 = \frac{1}{2} ql$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$Q \cdot \mathrm{s} = Q_1 \cdot \frac{1}{2} l + Q_2 \cdot \frac{2}{3} l$$



例3-1 在长方形平板的O，A，B，C点上分别作用着有四个力：F_1=1 kN，F_2=2 kN，F_3=F_4=3 kN（如图），试求以上四个力构成的力系对点O的简化结果，以及该力系的最后的合成结果。

解： 取坐标系Oxy。

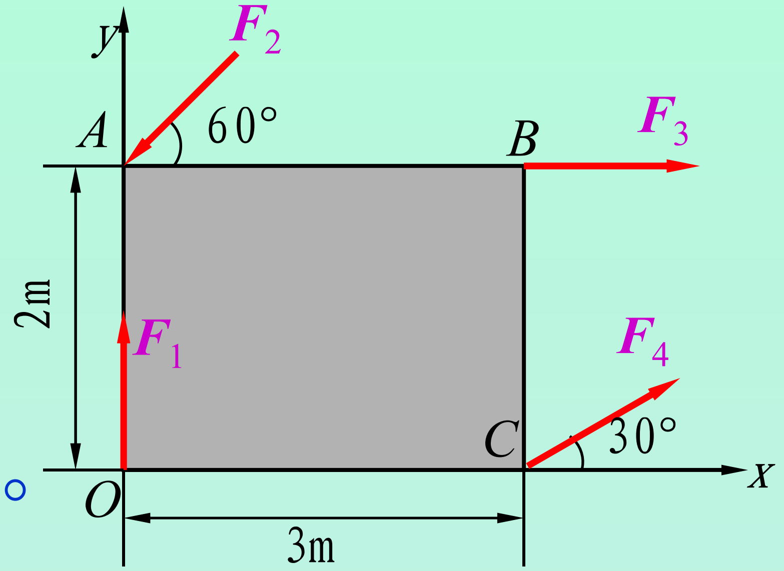
1. 求向O点简化结果。

● 求主矢F'_R 。

$$F'_{Rx}=\sum F_x$$

$$=-F_2\cos 60°+F_3+F_4\cos 30°$$

$$=0.598$$



$$F'_{\mathrm{R}y} = \sum F_y = F_1 - F_2 \sin 60^\circ + F_4 \sin 30^\circ$$
$$= 0.768$$

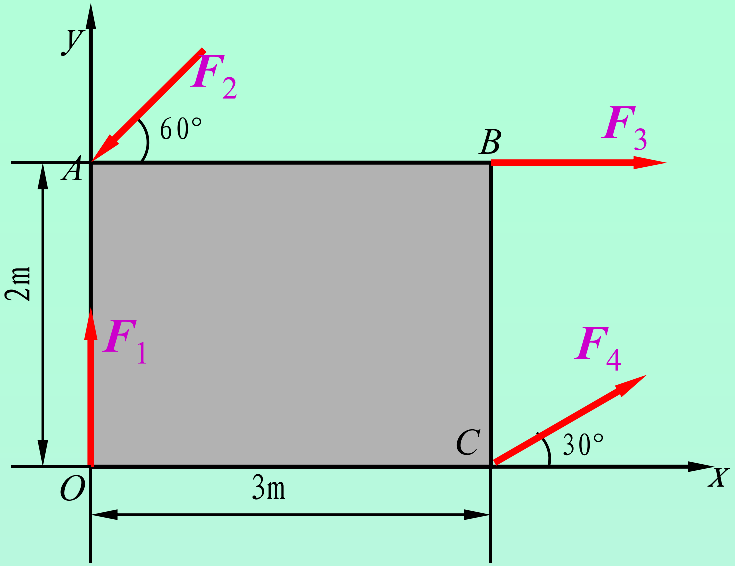
$$F'_R = \sqrt{F'^2_{Rx} + F'^2_{Ry}} = 0.794$$

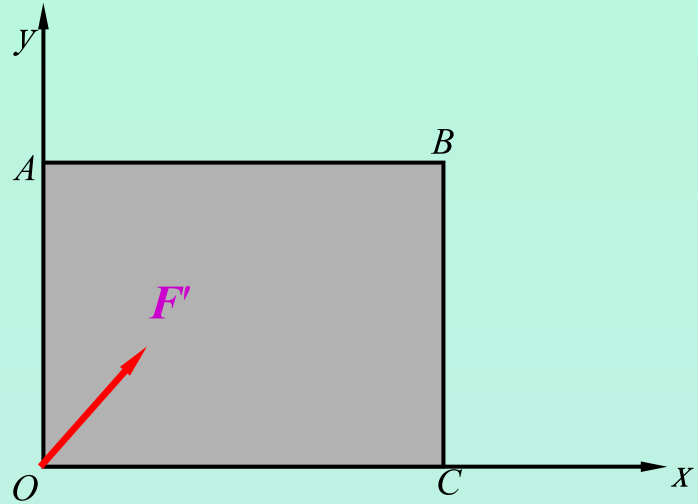
$$\cos(\boldsymbol{F}'_R, x) = \frac{F'_{Rx}}{F'_R} = 0.614$$

$$\Rightarrow \angle(\boldsymbol{F}', x) = 52^\circ 6'$$

$$\cos(\boldsymbol{F}'_R, y) = \frac{F'_{Ry}}{F'_R} = 0.789$$

$$\Rightarrow \angle(\boldsymbol{F}', y) = 37^\circ 54'$$

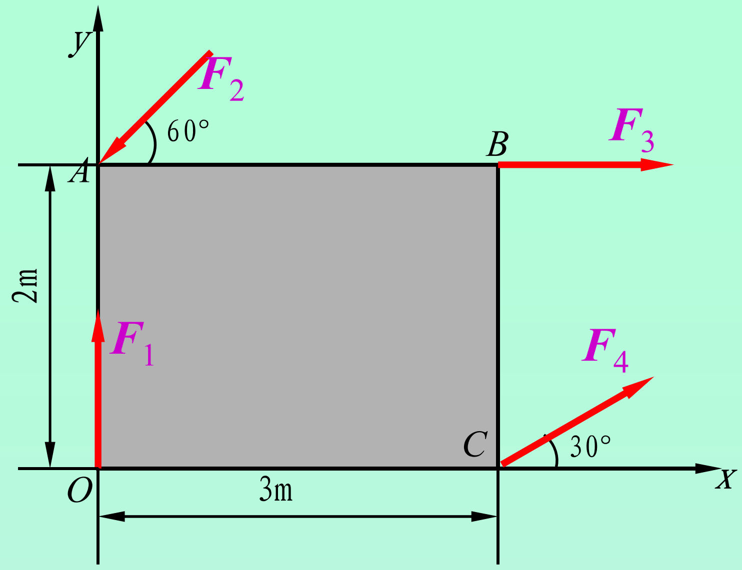




- 求主矩。

$$M_O=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i)$$

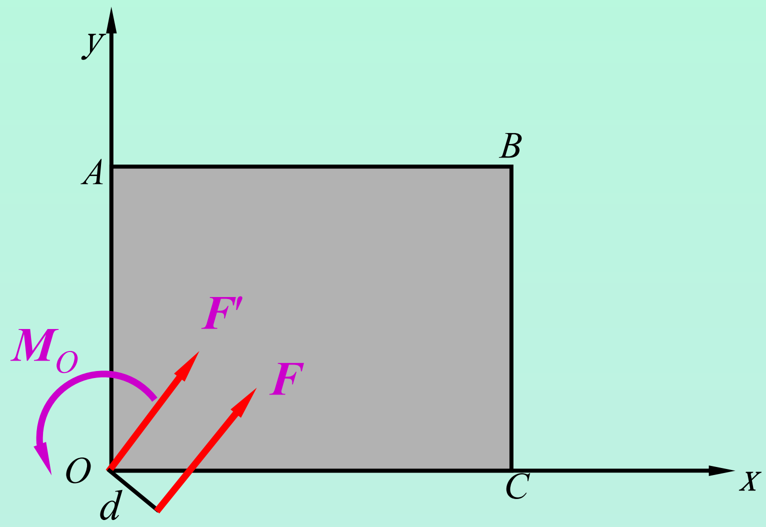
$$=2F_2\cos 60°-2F_3+3F_4\sin 30°=0.5$$



2. 求合成结果。

合成为一个合力$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}$的大小、方向与$\boldsymbol{F}'_R$相同。其作用线与O点的垂直距离为

$$d=\frac{M_O}{F'_R}=0.51\ \mathrm{m}$$



§3–3 平面任意力系平衡条件和平衡方程

- 平面任意力系的平衡条件和平衡方程
- 平面平行力系的平衡条件和平衡方程

§3–3 平面任意力系的平衡条件和平衡方程

1. 平面任意力系的平衡条件和平衡方程

(1) 平面任意力系平衡的充要条件

力系的主矢等于零 ，且力系对任一点的主矩也等于零。

$$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}=0, \qquad M_O=0$$

(2) 平面任意力系的平衡方程

$$F'_R=\sqrt{F'^{\,2}_{Rx}+F'^{\,2}_{Ry}}=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2}, \qquad M_O=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i)=0$$

$$\boxed{\sum F_x=0, \quad \sum F_y=0, \qquad \sum M_O(\boldsymbol{F})=0}$$

力系中的各力在其作用平面内两坐轴上的投影的代数和分别等于零，同时力系中的各力对任一点 矩的代数和也等于零。

（3） 平面任意力系的平衡方程其他形式

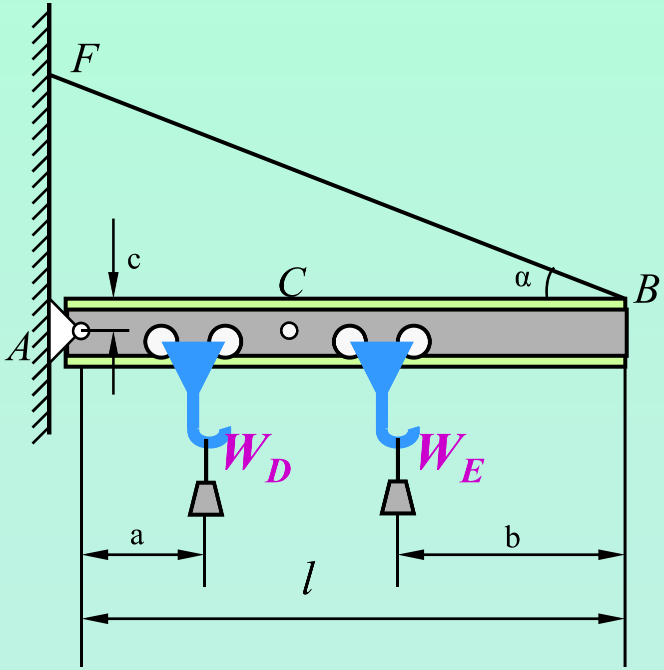
二矩式：$\sum F_x = 0,\quad \sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad \sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0$

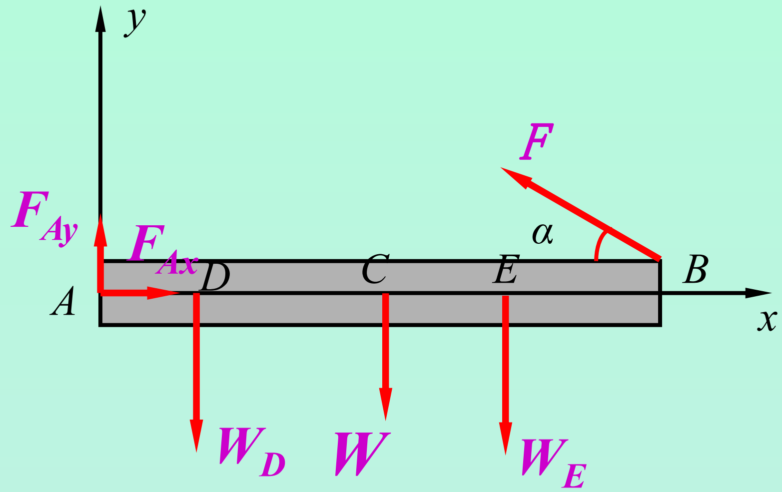
且A，B的连线不和x轴相垂直。

三矩式：$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad \sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\quad \sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0$

A，B，C三点不共线。

例3-2 伸臂式起重机如图所示，匀质伸臂AB重W=2200N，吊车D、E连同吊起重物各重W_D=W_E=4000N。有关尺寸为：l = 4.3m，a = 1.5m，b = 0.9m，c = 0.15m, α=25°。试求铰链A对臂AB的水平和垂直约束力，以及拉索BF的拉力。





解：

1. 取伸臂AB为研究对象。

2. 受力分析如图。

3. 选如图坐标系，列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \qquad F_{Ax} - F\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0, \qquad F_{Ay} - W_D - W - W_E + F\sin\alpha = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0,$$

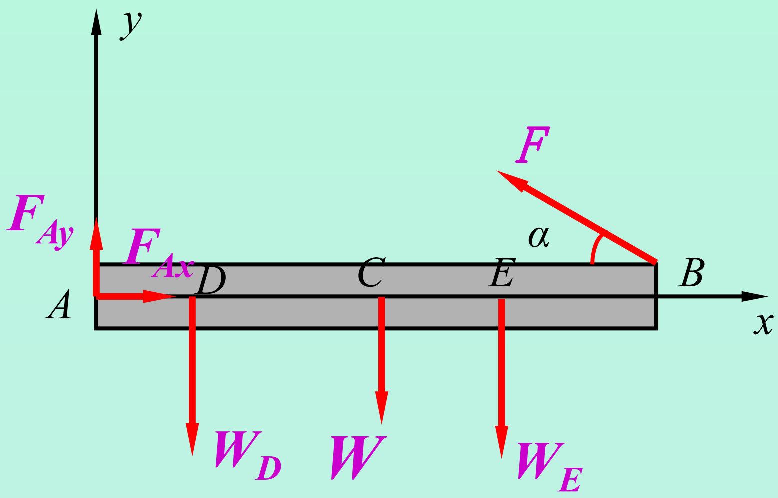
$$-W_D \times a - W \times \frac{l}{2} - W_E \times (l-b) + F\cos\alpha \times c + F\sin\alpha \times l = 0$$

4. 联立求解。

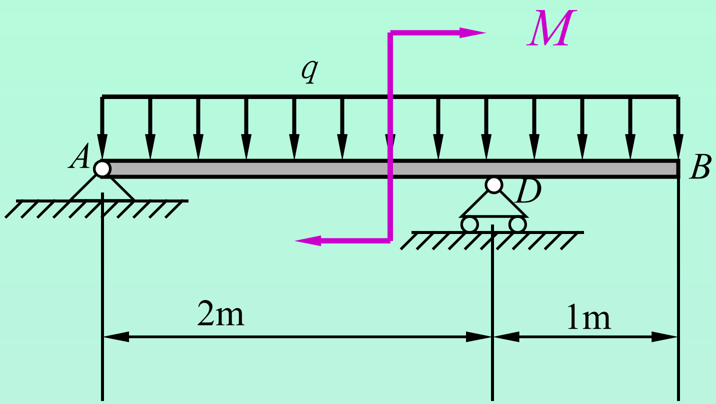
$F = 12\ 456$ N

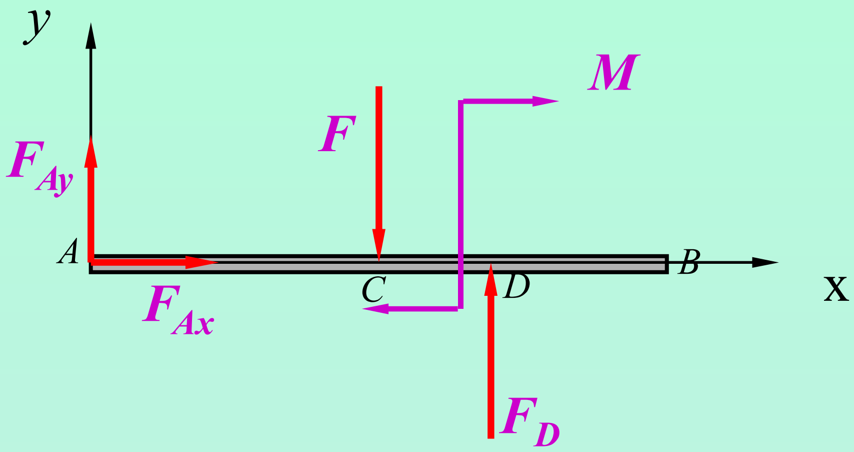
$F_{Ax} = 11\ 290$ N

$F_{Ay} = 4\ 936$ N



例3-3 梁AB上受到一个均布载荷和一个力偶作用，已知载荷集度（即梁的每单位长度上所受的力）q = 100 N/m，力偶矩大小M = 500 N•m。长度AB = 3 m，DB=1 m。求活动铰支D和固定铰支A的约束力。





解:

1. 取梁AB为研究对象。

2. 受力分析如图，其中$F = q \times AB = 100 \times 3 = 300$ N；作用在AB的中点C。

3. 选如图坐标系，列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \qquad F_{Ay} - F + F_D = 0$$

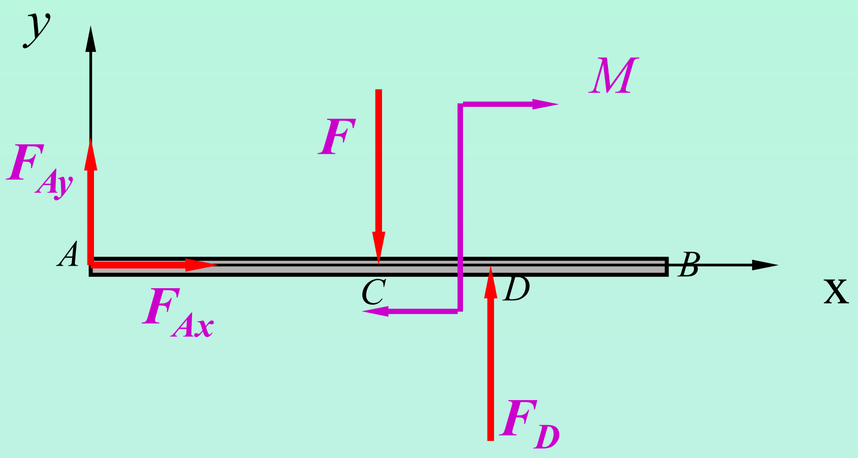
$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \qquad -F \times \frac{AB}{2} + F_D \times 2 - M = 0$$

4. 联立求解。

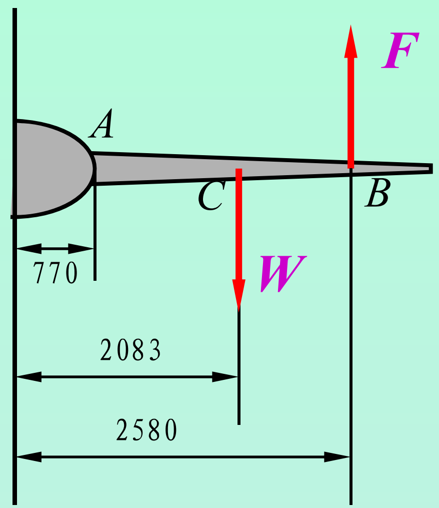
$F_D = 475\ \text{N}$

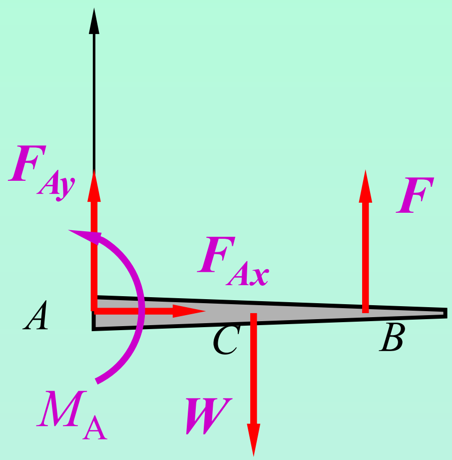
$F_{Ax} = 0$

$F_{Ay} = -175\ \text{N}$



例3-4 某飞机的单支机翼重 W=7.8 kN。飞机水平匀速直线飞行时，作用在机翼上的升力 F = 27 kN，力的作用线位置如图示，其中尺寸单位是mm。试求机翼与机身连接处的约束力。





解:

1. 取机翼为研究对象。

2. 受力分析如图。

3. 选如图坐标系，列平衡方程。

$$\sum F_x = 0: \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \qquad F_{Ay} - W + F = 0$$

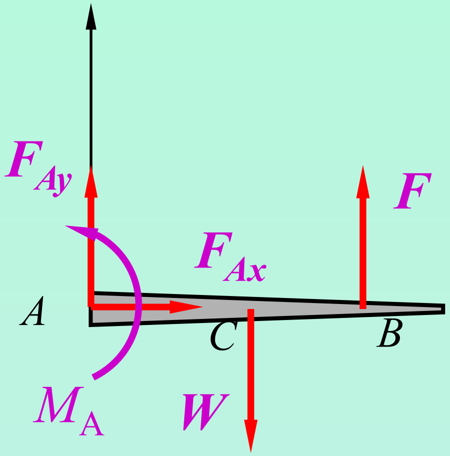
$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0: \qquad M_A - W \times AC + F \times AB = 0$$

4. 联立求解。

$M_A = -38.6\ \text{kN·m}$　(顺时针)

$F_{Ax} = 0$

$F_{Ay} = -19.2\ \text{kN}$ (向下)



2.平面平行力系的平衡条件和平衡方程

（1）平面平行力系平衡的充要条件

力系中各力的代数和等于零 ，以这些力对任一点的矩的代数和也等于零。

（2）平面平行力系的平衡方程

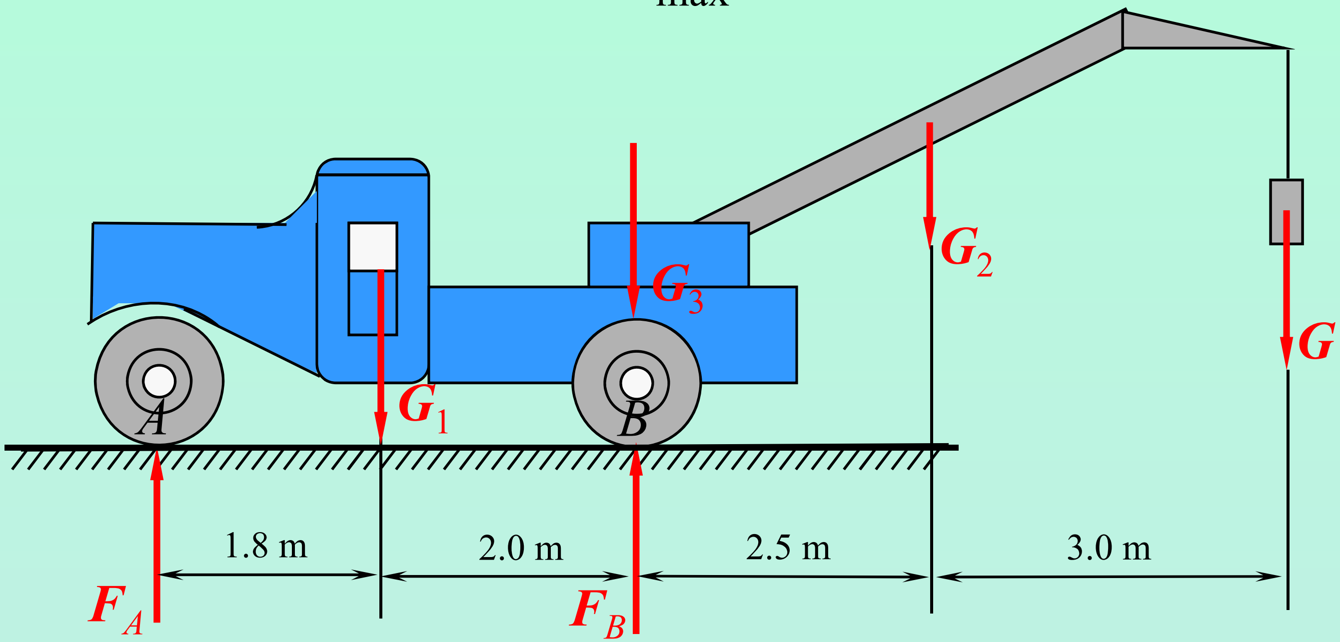
一矩式 $\sum F_y = 0，\sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0$

二矩式 $\sum m_A(\boldsymbol{F}) = 0，\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0$

且A、B的连线不平行于力系中各力。

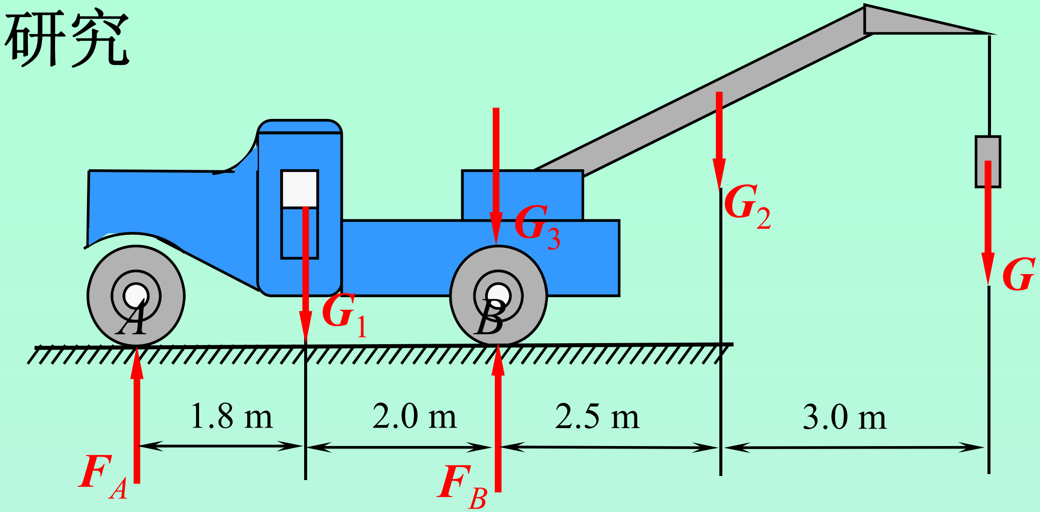
由此可见，在一个刚体受平面平行力系作用而平衡的问题中，利用平衡方程只能求解二个未知量。

例3-5 一种车载式起重机，车重G_1= 26 kN，起重机伸臂重G_2 = 4.5 kN，起重机的旋转与固定部分共重G_3 = 31 kN。尺寸如图所示。设伸臂在起重机对称面内，且放在图示位置，试求车子不致翻倒的最大起吊重量G_{max}。



解：

1. 取汽车及起重机为研究对象，受力分析如图。



2. 列平衡方程。

$$\sum F = 0,$$

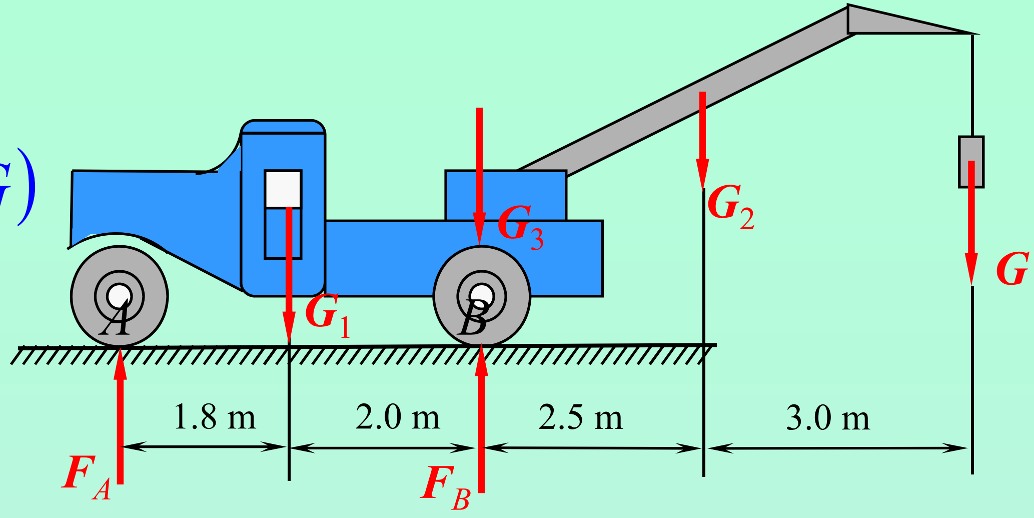
$$F_A + F_B - G - G_1 - G_2 - G_3 = 0$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$-G(2.5\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m}) - G_2 \times 2.5\,\mathrm{m} + G_1 \times 2\,\mathrm{m} - F_A(1.8\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{m}) = 0$$

3. 联立求解。

$$F_A = \frac{1}{3.8}(2G_1 - 2.5G_2 - 5.5G)$$



4. 不翻倒的条件是：$F_A \geq 0$，

所以由上式可得

$$G \leq \frac{1}{5.5}(2G_1 - 2.5G_2) = 7.5\ \text{kN}$$

故最大起吊重量为 $G_{max} = 7.5\ \text{kN}$

§3–4 物体系的平衡

- 几个概念
- 静定与静不定

§3–4 物体系的平衡

1. 几个概念

物体系 —— 由若干个物体通过约束组成的系统。

外　力 —— 物体系以外任何物体作用于该系统的力。

内　力 —— 物体系内部各物体间互相作用的力。

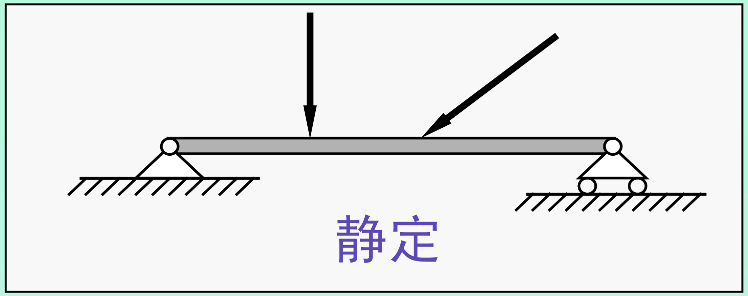
- 物体系平衡方程的数目

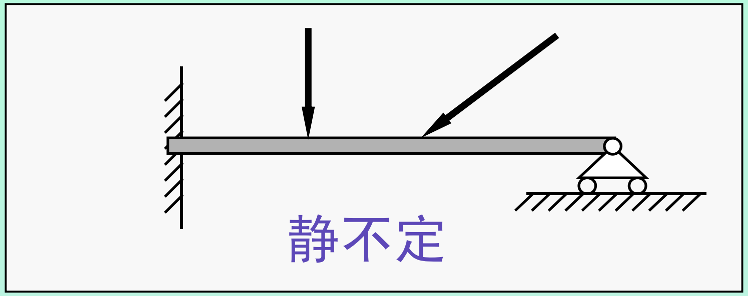
由n个物体组成的物体系，总共有不多于$3n$个独立的平衡方程。

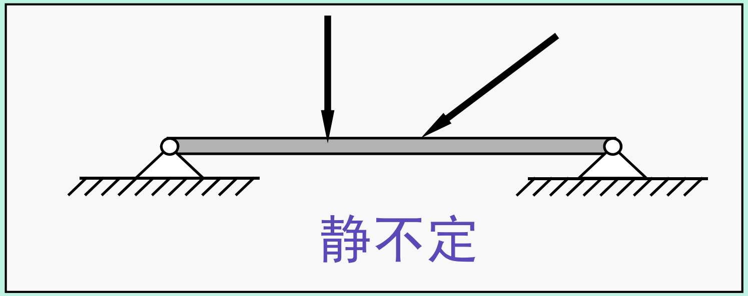
2. 静定与静不定

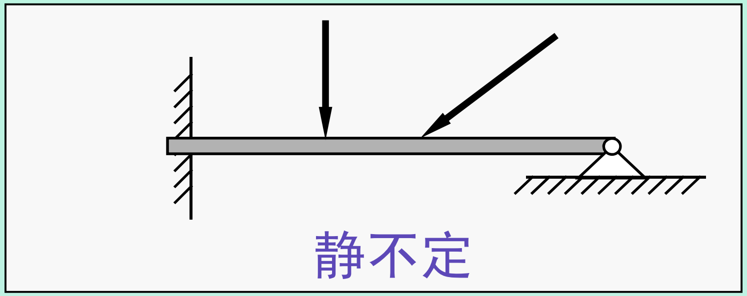
静定问题 ——当系统中未知量数目等于或少于独立平衡方程数目时的问题。

静不定问题 ——当系统中未知量数目多于独立平衡方程数目时，不能求出全部未知量的问题。

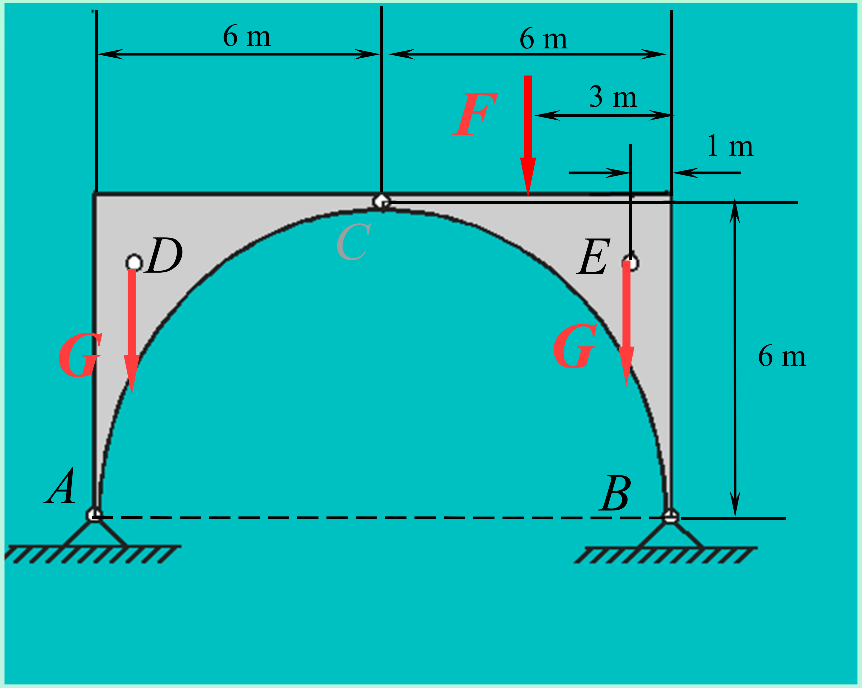








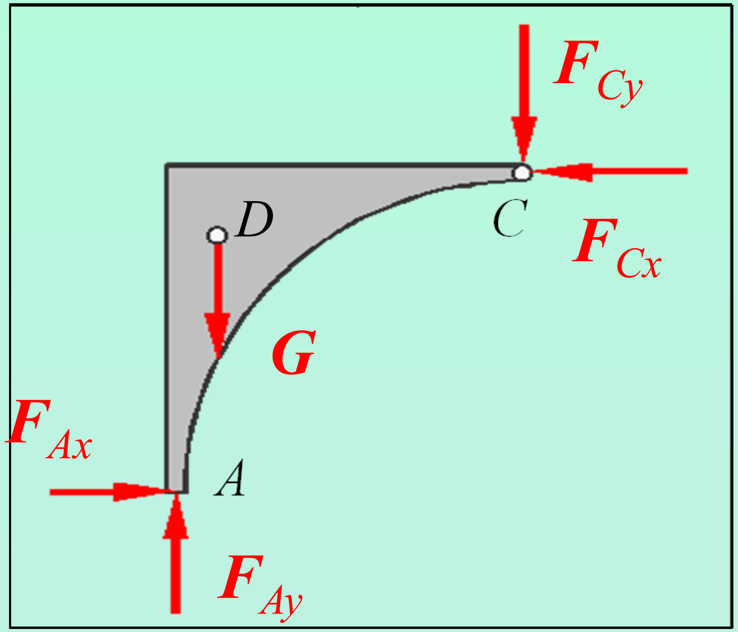
例3-6 三铰拱桥如图所示，由左右两段借铰链C连接起来，又用铰链A，B与基础相连接。已知每段重G = 40 kN，重心分别在D，E处，且桥面受一集中载荷F =10 kN。设各铰链都是光滑的，试求平衡时各铰链的约束力。尺寸如图所示。

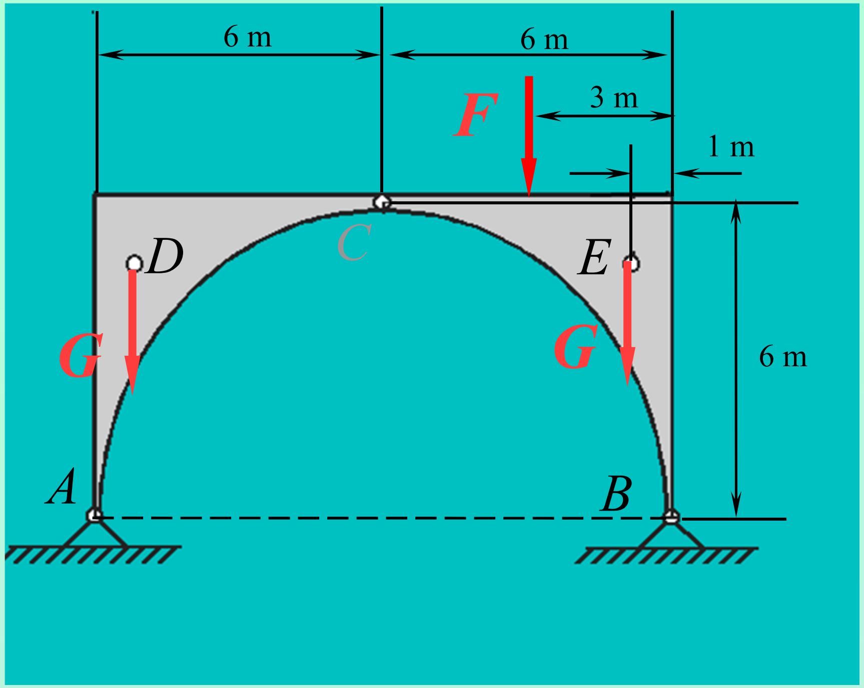


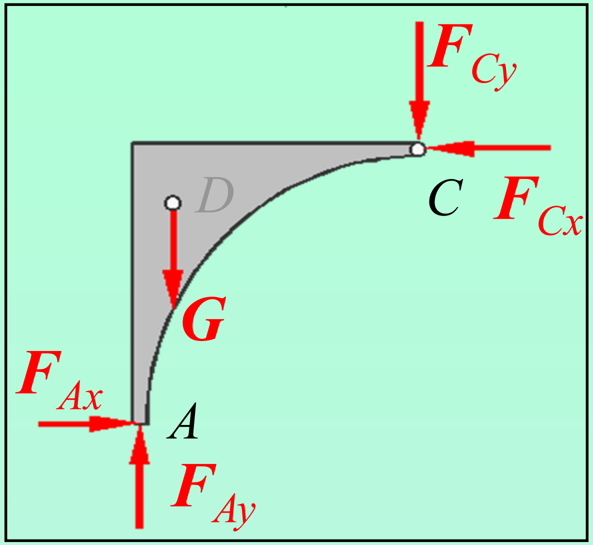
解:

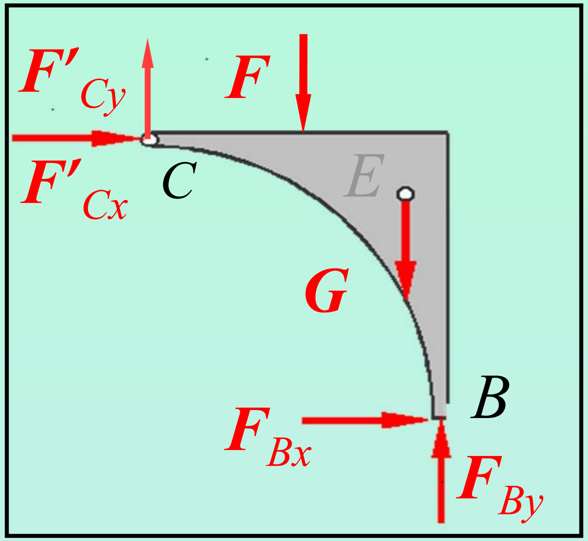
1. 取AC段为研究对象。

2. 受力分析如图。









3. 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \qquad F_{Ax} - F_{Cx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \qquad F_{Ay} - F_{Cy} - G = 0$$

$$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$F_{Ax} \times 6\,\mathrm{m} - F_{Ay} \times 6\,\mathrm{m} + G \times 5\,\mathrm{m} = 0$$

4. 再取BC段为研究对象，受力分析如图。

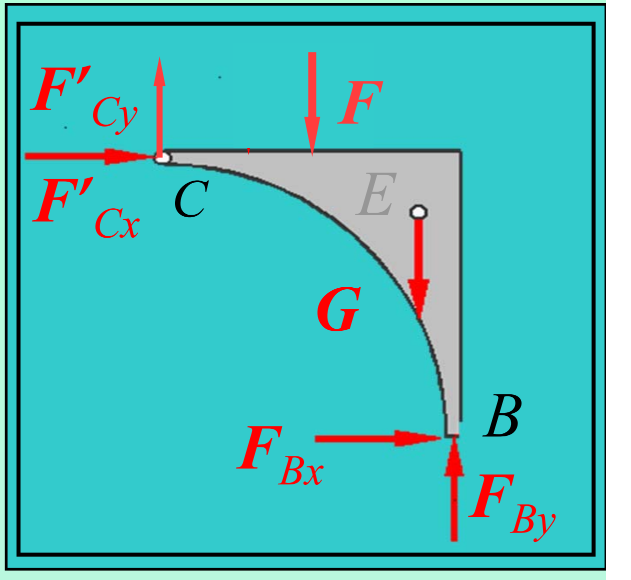
5. 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \qquad F'_{Cx} + F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \qquad F'_{Cy} + F_{By} - F - G = 0$$

$$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$-F \times 3\,\mathrm{m} - G \times 5\,\mathrm{m} + F_{By} \times 6\,\mathrm{m} + F_{Bx} \times 6\,\mathrm{m} = 0$$



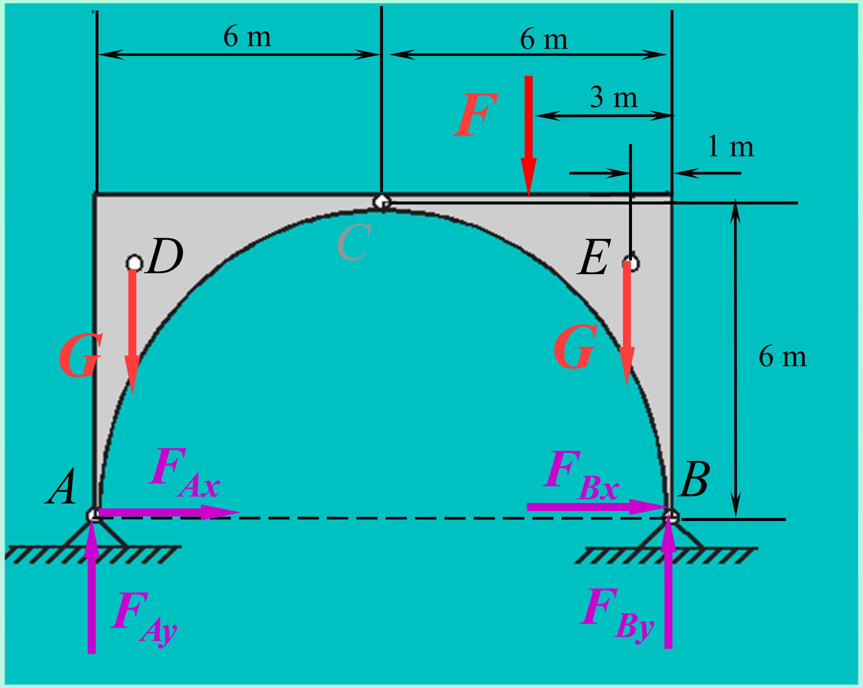
6. 联立求解。

$F_{Ax} = -F_{Bx} = F_{Cx} = 9.2\ \mathrm{kN}$

$F_{Ay} = 42.5\ \mathrm{kN}$， $F_{By} = 47.5\ \mathrm{kN}$ ， $F_{Cy} = 2.5\ \mathrm{kN}$

讨论

1. 取整体为研究对象，受力分析如图。



$$\sum M_A(F) = 0$$

$$-11G - 9F - G + 12F_{By} = 0$$

$$F_{By} = 47.5\ \text{kN}$$

$$\sum M_B(F) = 0$$

$$11G + 3F + G - 12F_{Ay} = 0$$

$$F_{Ay} = 42.5\ \text{kN}$$

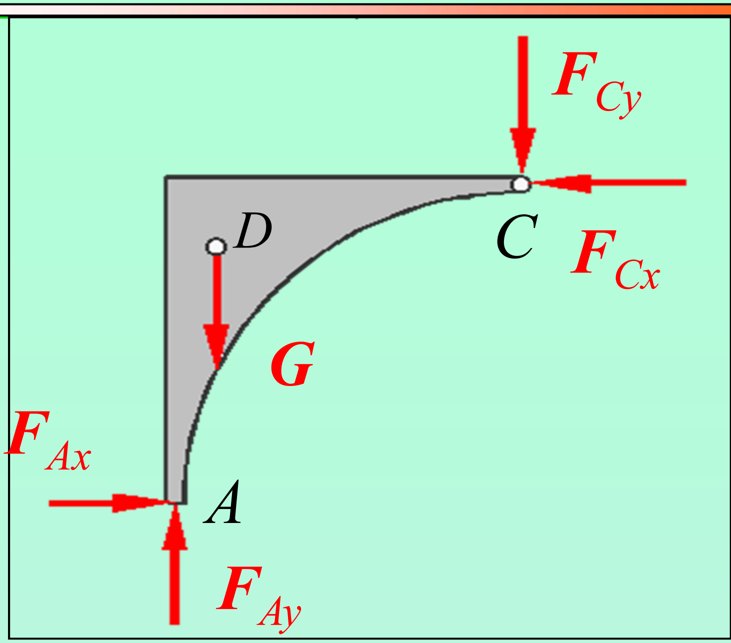
$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

$F_{Ay}= 42.5\ \text{kN}$ ， $F_{By}= 47.5\ \text{kN}$

$$F_{Ax}-F_{Bx}=0$$

2. 取AC段为研究对象，受力分析如图。



列平衡方程

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0\ ,\quad 6F_{Ax}-6F_{Ay}+5G=0$$

$$\sum F_x=0\ ,\quad F_{Ax}-F_{Cx}=0$$

$$\sum F_y=0\ ,\quad F_{Ay}-F_{Cy}-G=0$$

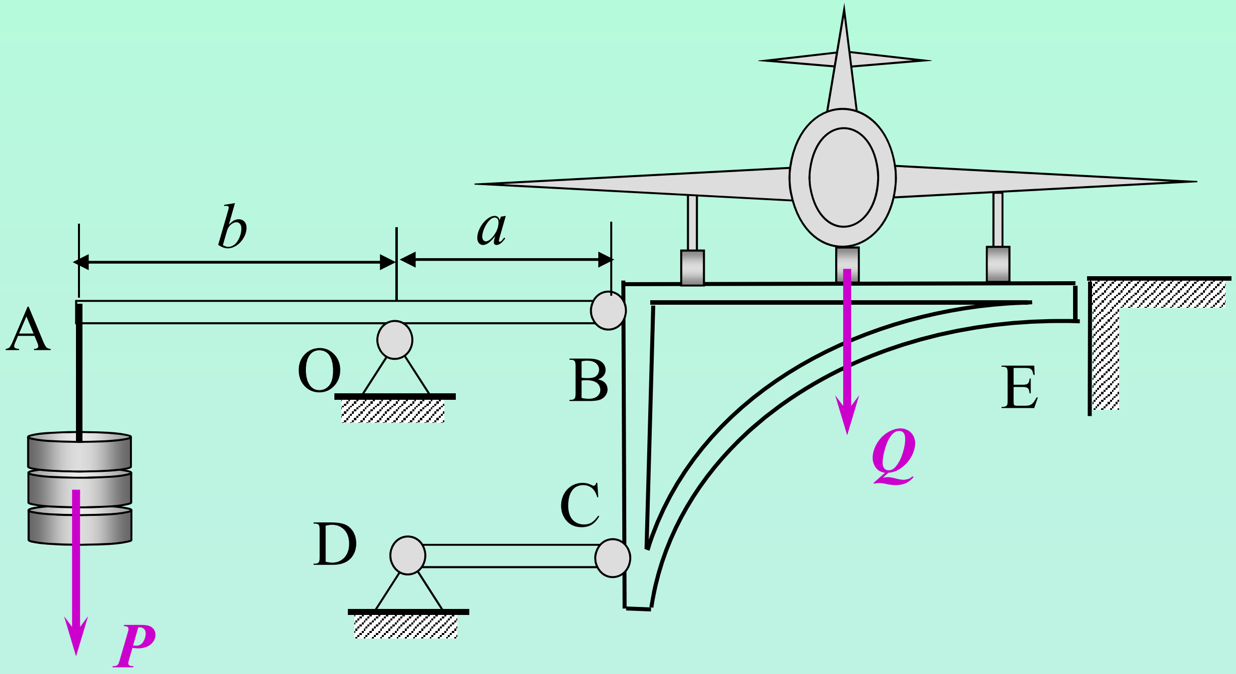
解得

$F_{Ax}= 9.2\ \text{kN}$ ， $F_{Cx}= 9.2\ \text{kN}$ ， $F_{Cy}= 2.5\ \text{kN}$

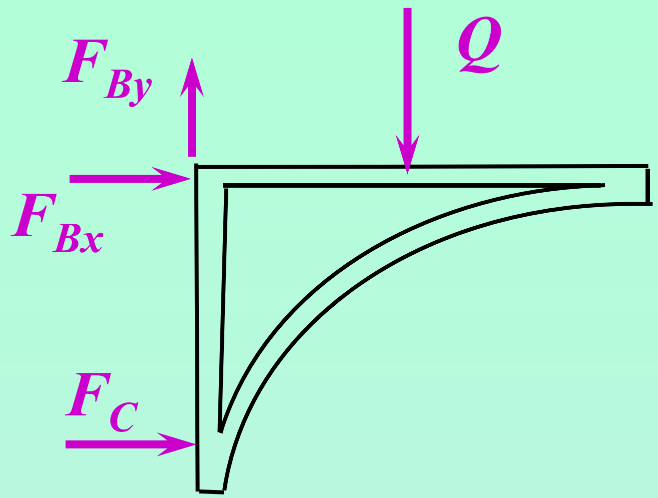
注意点A受力图。

§3–4 物体系的平衡

飞机秤重的地秤简化如图所示。其中**AOB**是杠杆，可绕轴**O**转动，**BCE**是台面。求平衡砝码的重量P和飞机重量Q之间的关系。



解：取BCE为研究对象。

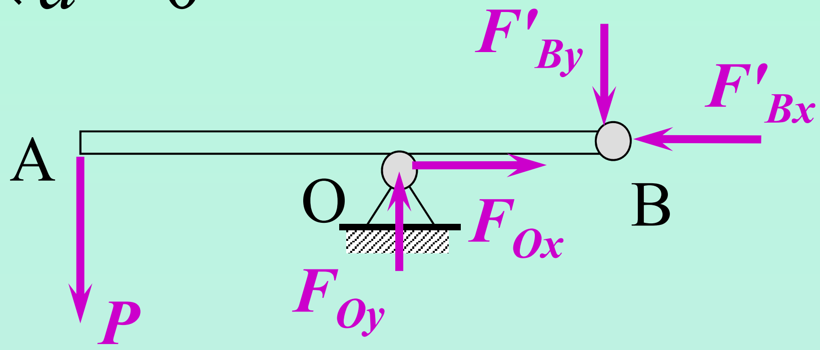


$$\sum F_y = 0, \qquad F_{By} - Q = 0$$

$$F_{By} = Q$$

取AOB为研究对象。

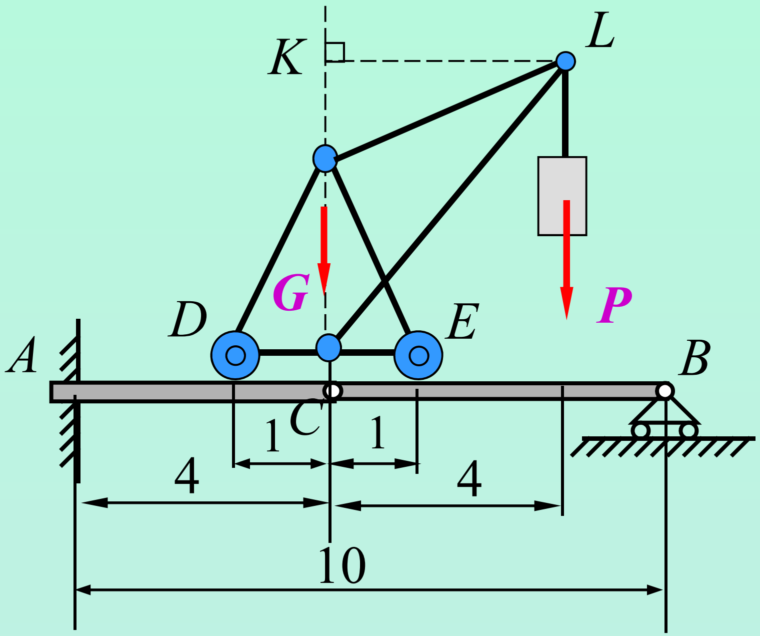
$$\sum M_O = 0, \qquad P\times b - F'_{By}\times a = 0$$



$$P\times b = Q\times a$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{a}{b}$$

例3-7 起重机放于组合梁AC和CB上，A端为固定端，B端为活动铰链支座。重物 P=10 kN，起重机重G=40 kN，其重心在铅垂线KC上。梁的自重不计，试求固端A支座B的反力。尺寸如图，单位为m。



解： 1.取起重机为研究对象，受力分析如图。

$$\sum M_E(\boldsymbol{F})=0\ ,$$

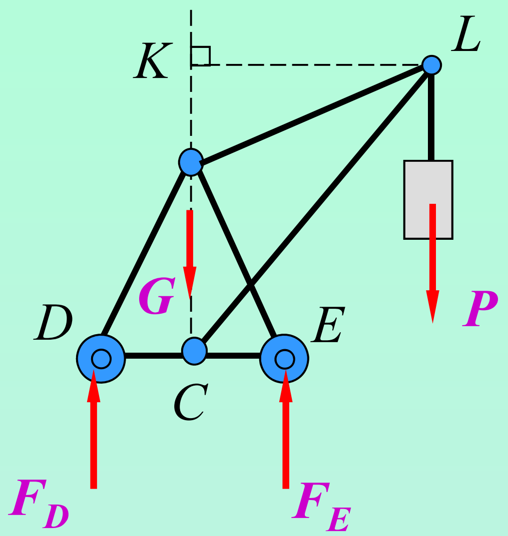
$$G\times1-F_D\times2-P\times3=0$$

$$F_D=5\ \ \text{kN}$$

$$\sum F_y=0\ ,$$

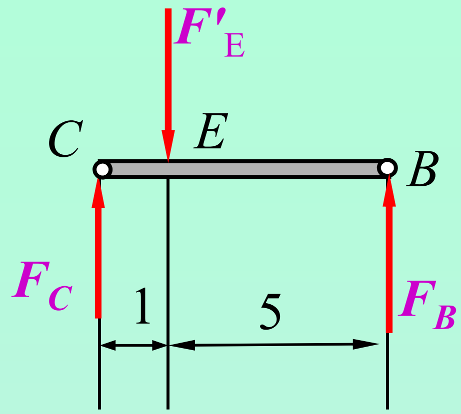
$$F_D+F_E-G-P=0$$

$$F_E=45\ \ \text{kN}$$



2. 取CB段为研究对象，受力分析如图。

列平衡方程



$$\sum M_C(F)=0\ ,$$

$$6\times F_B-F_E'\times 1=0$$

$$\sum F_y=0\ ,$$

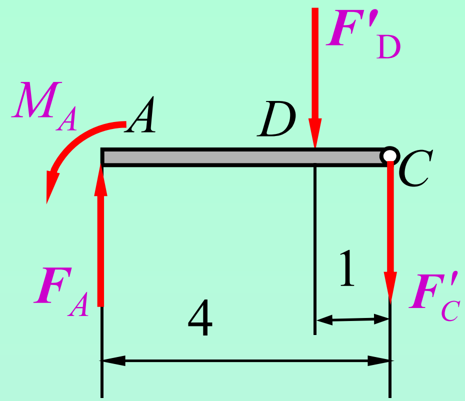
$$F_C+F_B-F_E'=0$$

联立求解, 可得

$F_B=7.5\ \text{kN}$（向上）

$F_C=37.5\ \text{kN}$（向上）

3、取AC段为研究对象，受力分析如图。



列平衡方程

$$\sum F_y = 0 \ , \qquad F_A - F'_C - F'_D = 0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0 \ ,$$

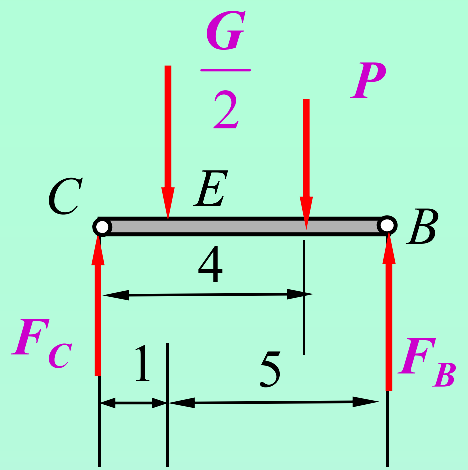
$$M_A - F'_D \times 3 - F'_C \times 4 = 0$$

联立求解：可得

$$M_A = 165\ \mathrm{kN{\cdot}m}$$

$$F_A = 42.5\ \mathrm{kN}$$

取CB段为研究对象，受力分析如图。



列平衡方程

$$\sum M_C(F)=0\ ,$$

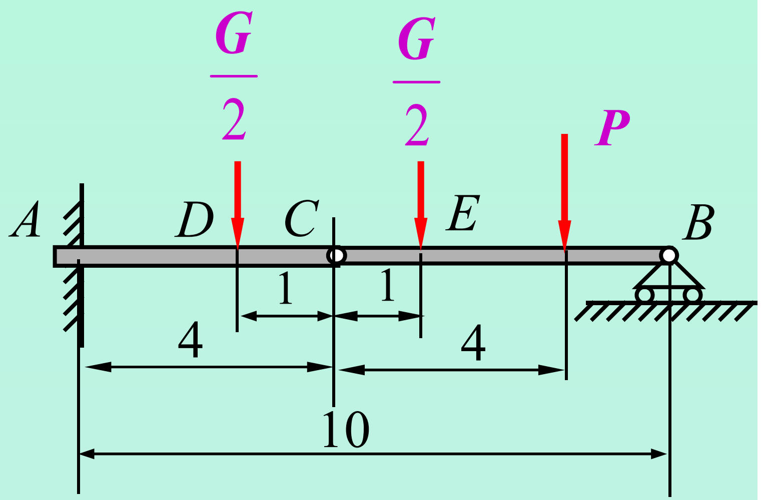
$$6\times F_B-\frac{G}{2}\times 1-P\times 4=0$$

$F_B=10$ kN（向上）

$$\sum F_y=0\ ,$$

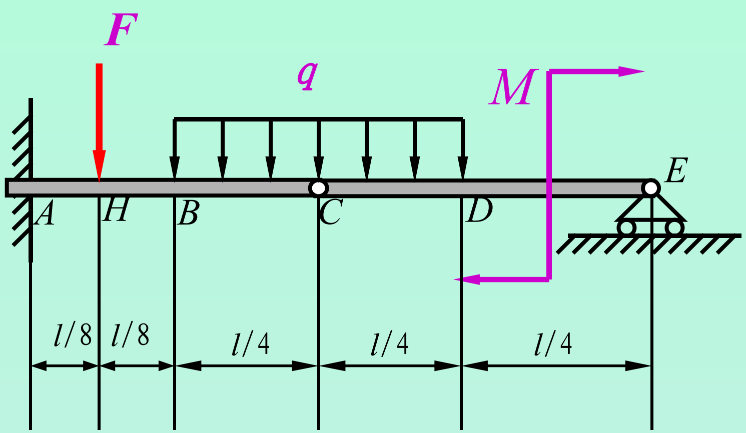
$$F_C+F_B-\frac{G}{2}-P=0$$

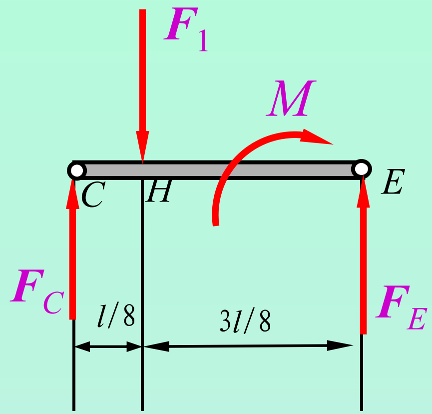
$F_C=20$ kN（向上）



(b)

例3-7 组合梁AC和CE用铰链C相连，A端为固定端，E端为活动铰链支座。受力如图所示。已知： l =8 m，F=5 kN，均布载荷集度q=2.5 kN/m，力偶矩的大小M= 5k N·m，试求固端A、铰链C和支座E的反力。





解:

$$F_1 = q \times \frac{l}{4}$$

1. 取CE段为研究对象，受力分析如图。

列平衡方程

$$\sum F_y = 0\ ,\qquad F_C - q\times\frac{l}{4} + F_E = 0$$

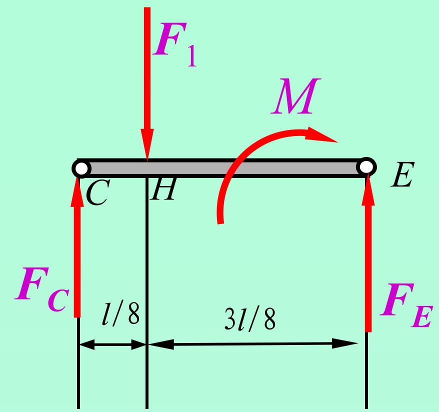
$$\sum M_C(F) = 0\ ,\qquad -q\times\frac{l}{4}\times\frac{l}{8} - M + F_E\times\frac{l}{2} = 0$$

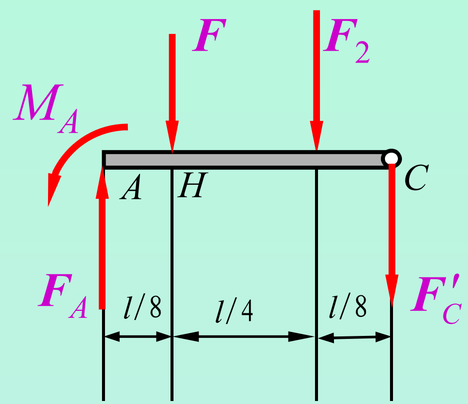
联立求解, 可得

F_E=2.5 kN（向上）

F_C=2.5 kN（向上）

2、取AC段为研究对象，受力分析如图。

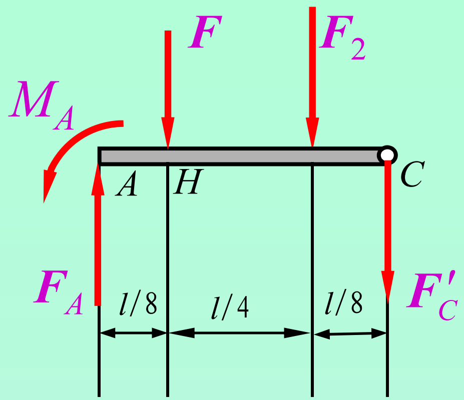




$$F_2 = q\times\frac{l}{4}$$

列平衡方程

$$\sum F_y = 0\,, \qquad F_A - F_C' - F - q\times\frac{l}{4} = 0$$



$$F_2 = q\times\frac{l}{4}$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0\,,$$

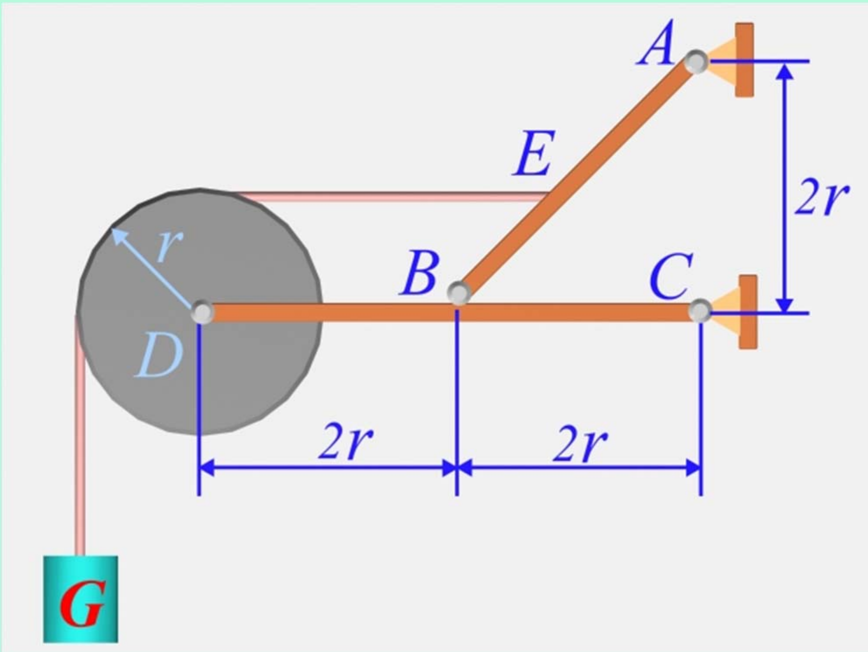
$$M_A - F\times\frac{l}{8} - q\times\frac{l}{4}\times\frac{3l}{8} - F_C'\times\frac{l}{2} = 0$$

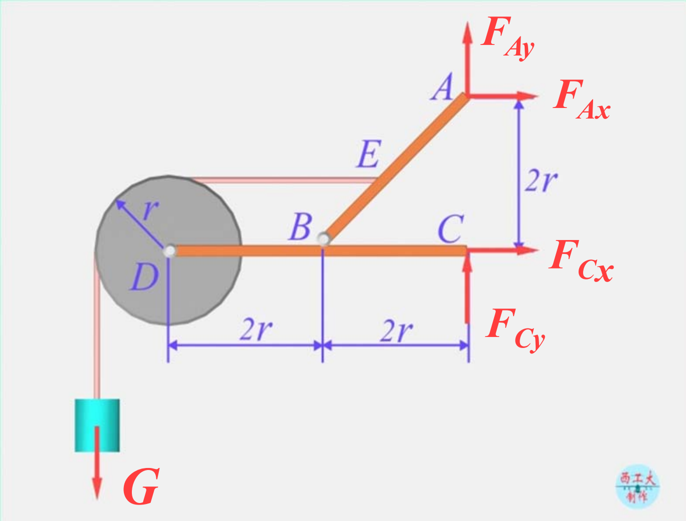
联立求解：可得

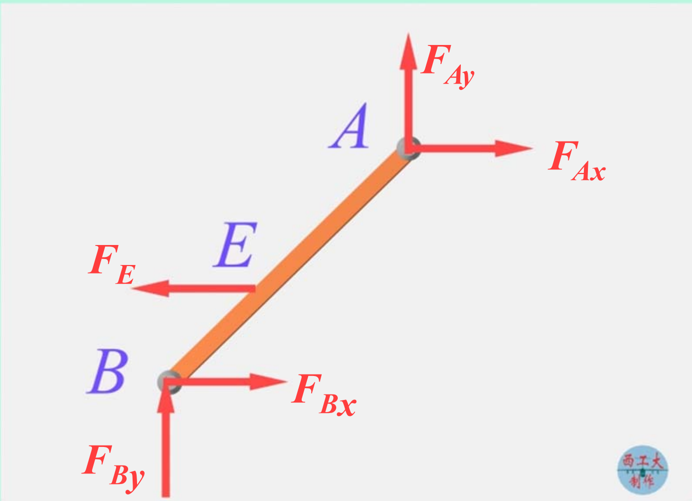
$M_A = 30\ \mathrm{kN\cdot m}$

$F_A = -12.5\ \mathrm{kN}$

例3-8 A，B，C，D处均为光滑铰链，物块重为G，通过绳子绕过滑轮水平地连接于杆AB的E点，各构件自重不计，试求B处的约束力。







解：1. 取整体为研究对象。

2. 受力分析如图。

3. 列平衡方程。

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0, \quad 5r\times G-2r\times F_{Ax}=0$$

解得 $F_{Ax}=2.5G$

4. 取杆AB为研究对象，受力分析如图。

列平衡方程

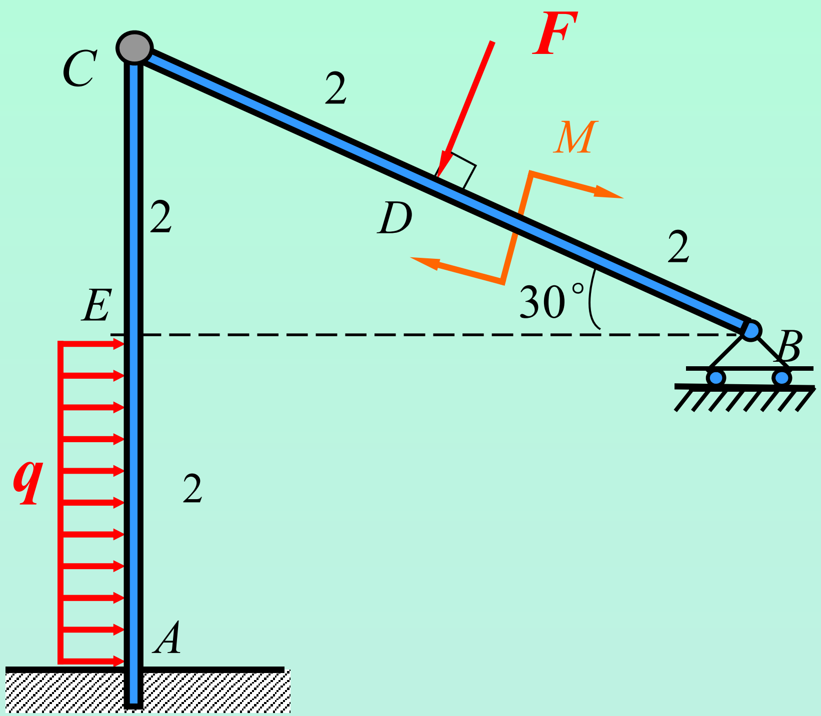
$$\sum F_x=0, \quad F_{Ax}-F_{Bx}-F_E=0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0, \quad 2r\times F_{Bx}-2r\times F_{By}-rF_E=0$$

联立求解可得

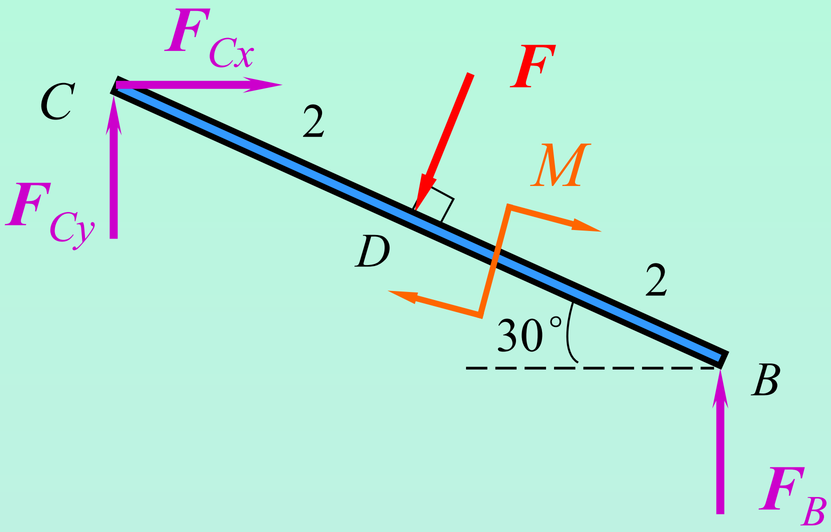
$$F_{Bx}=-1.5G, \quad F_{By}=-2G$$

例3-9 如图已知 q=3 kN/m，F=4 kN， M=2 kN·m。CD=BD, AC=4 m，CE=EA=2 m。各杆件自重不计，试求A和B处的支座约束力。



解：1. 取BC为研究对象，受力分析如图。

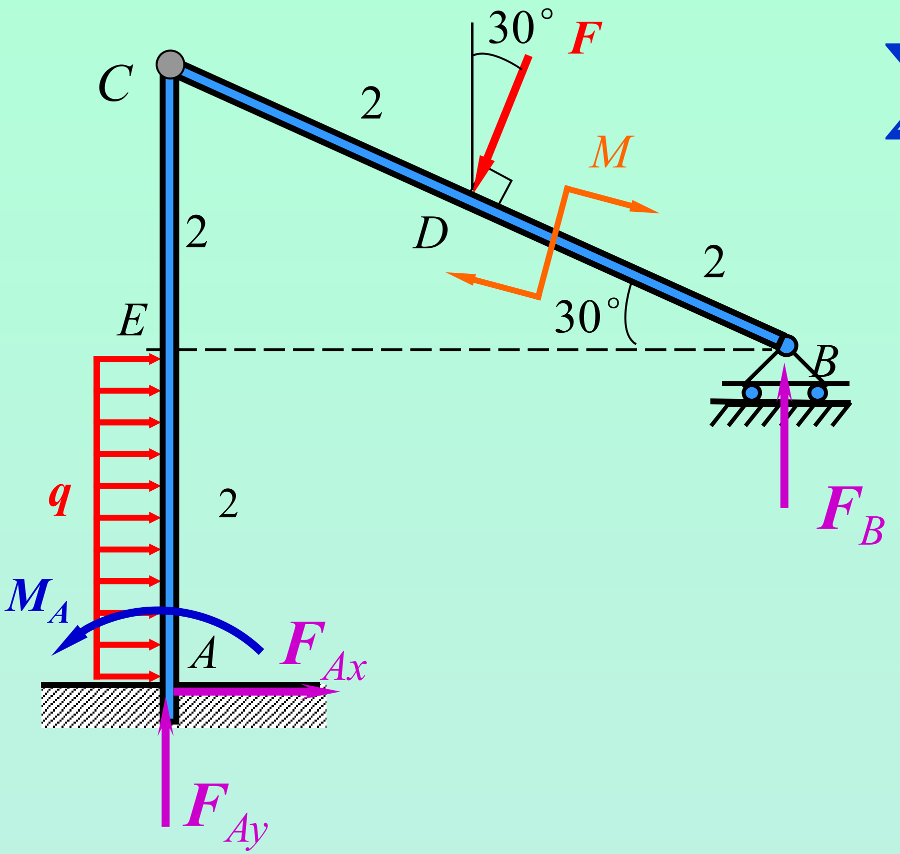
$$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0,$$



$$F_B \cdot 4\cos 30^\circ - 2F - M = 0$$

$$F_B = 2.89\ \text{kN}$$

2. 取整体为研究对象，受力分析如图。



$$\sum F_x = 0 \ ,$$

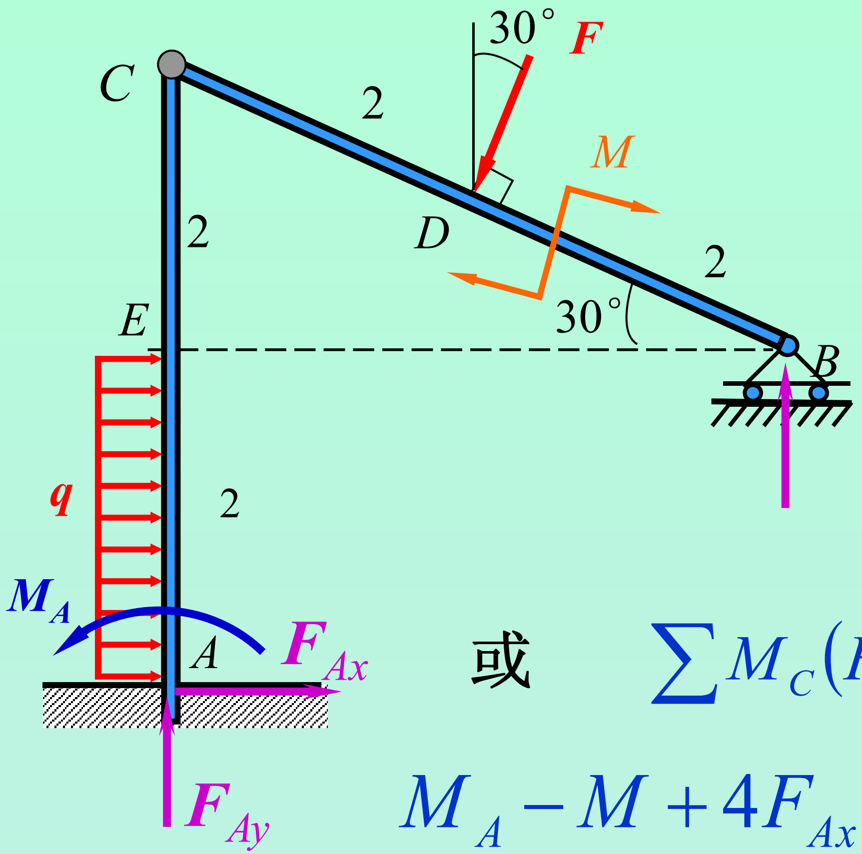
$$-F\cos 60° + 2q + F_{Ax} = 0$$

$$F_{Ax} = 47.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \ ,$$

$$-F\sin 60° + F_B + F_{Ay} = 0$$

$$F_{Ay} = 0.58 \text{ kN}$$



$$\sum M_A(F)=0,$$

$$M_A - M - 2q\times 1$$

$$+4F_B\cos 30°$$

$$+F\sin 30°(2+2\sin 30°)$$

$$-F\cos 30°\times 2\cos 30° = 0$$

$$M_A = -2\ \mathrm{kN\cdot m}$$

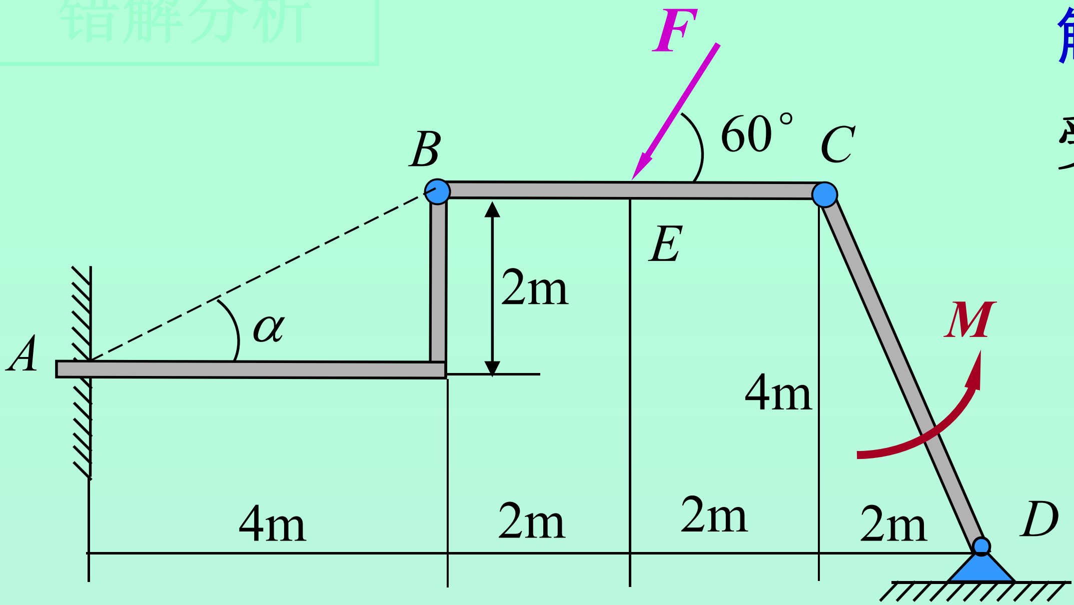
或 $\sum M_C(F)=0$

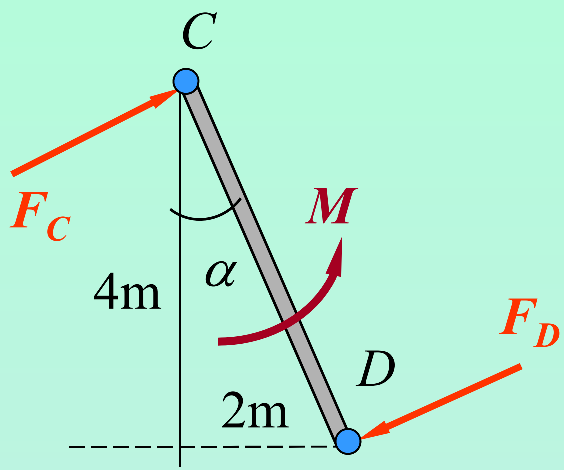
$$M_A - M + 4F_{Ax} + 2q\times 3 + 4F_B\cos 30° - 2F = 0$$

也可以取杆为AC研究对象,$\sum M_C=0$。

错解分析

解：1. 先取CD为研究对象，受力分析如图。

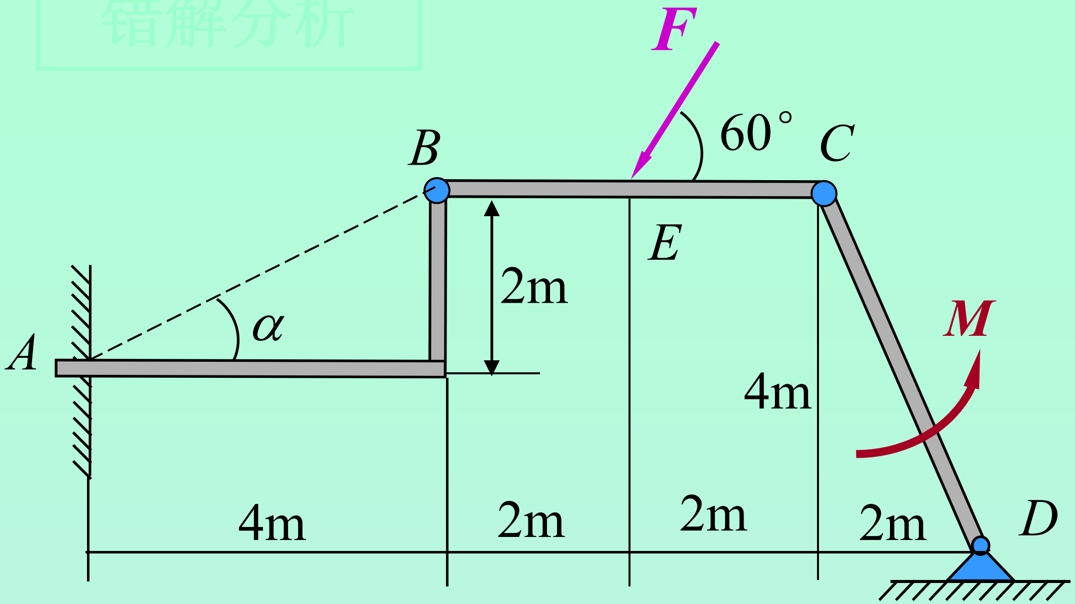


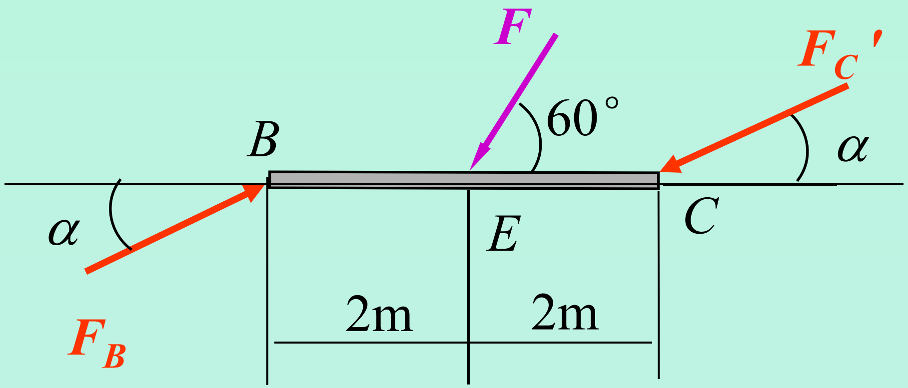


$$\sum M = 0, \quad M - F_D\sqrt{4^2 + 2^2} = 0$$

$$F_D = 8.95\ \text{kN}$$

错解分析



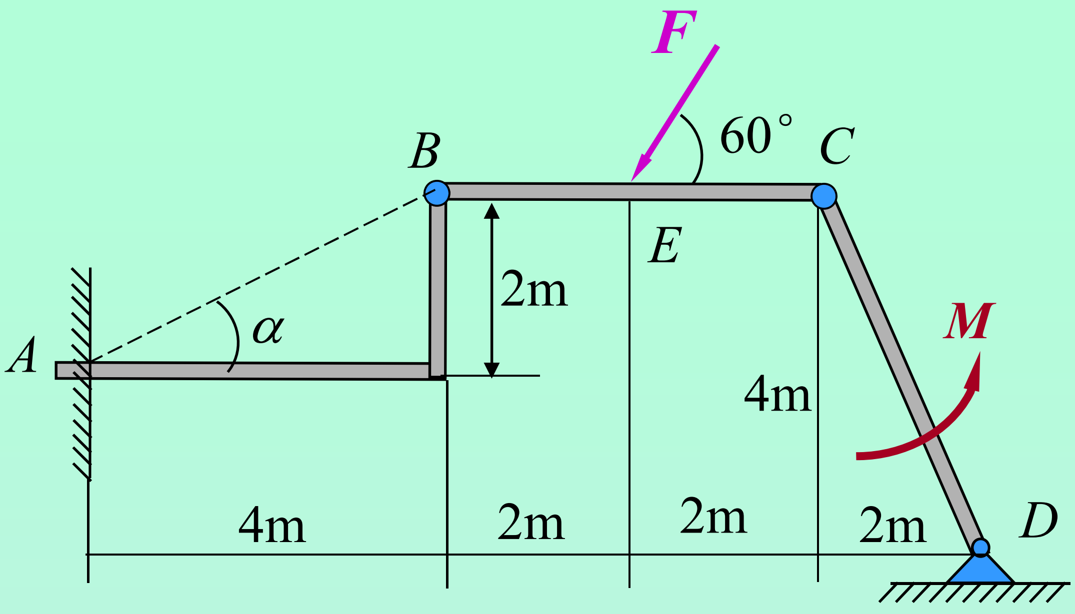


2. 再取BC为研究对象，受力分析如图。

$$\sum F_x = 0:$$

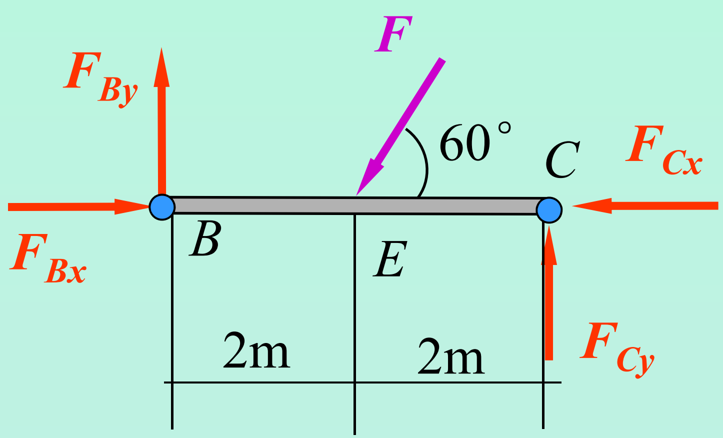
$$-F\cos 60° + F_B \cos\alpha - F_C' \cos\alpha = 0$$

$$F_B = 15.5 \text{ kN}$$



正确解答

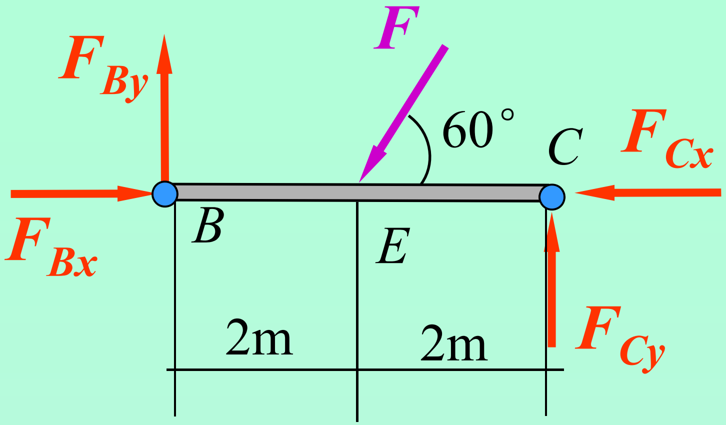
解：1. 先取BC为研究对象，受力分析如图。

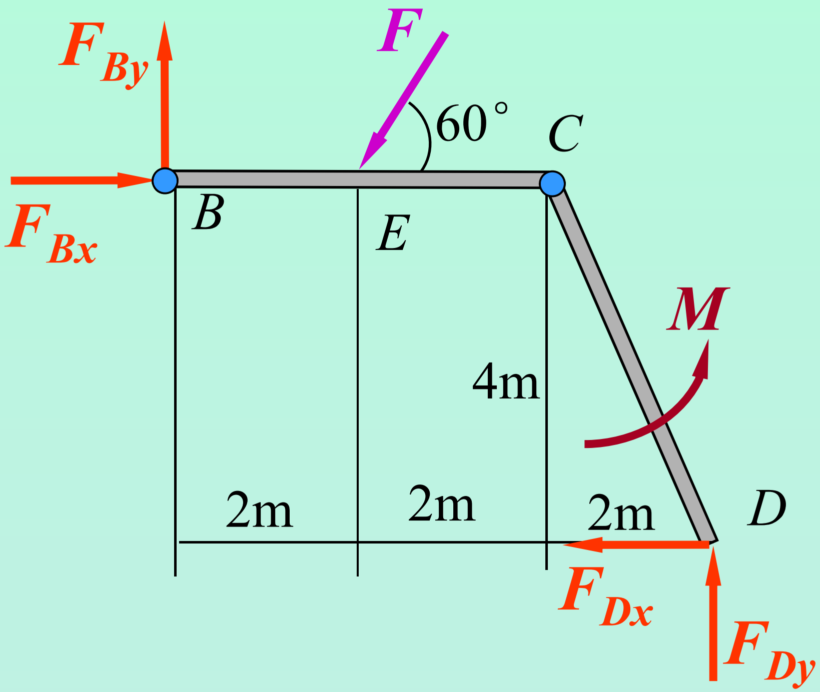


$$\sum M_C(F) = 0,$$

$$F\sin 60° \times 2 - F_{By} \times 4 = 0$$

$$F_{By} = 6.5 \ \text{kN}$$



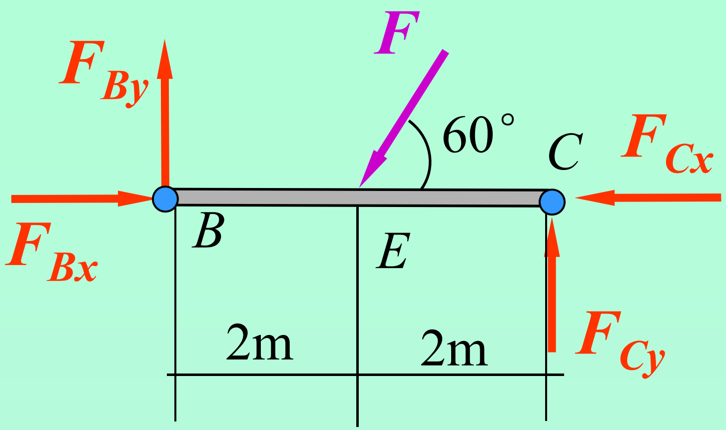


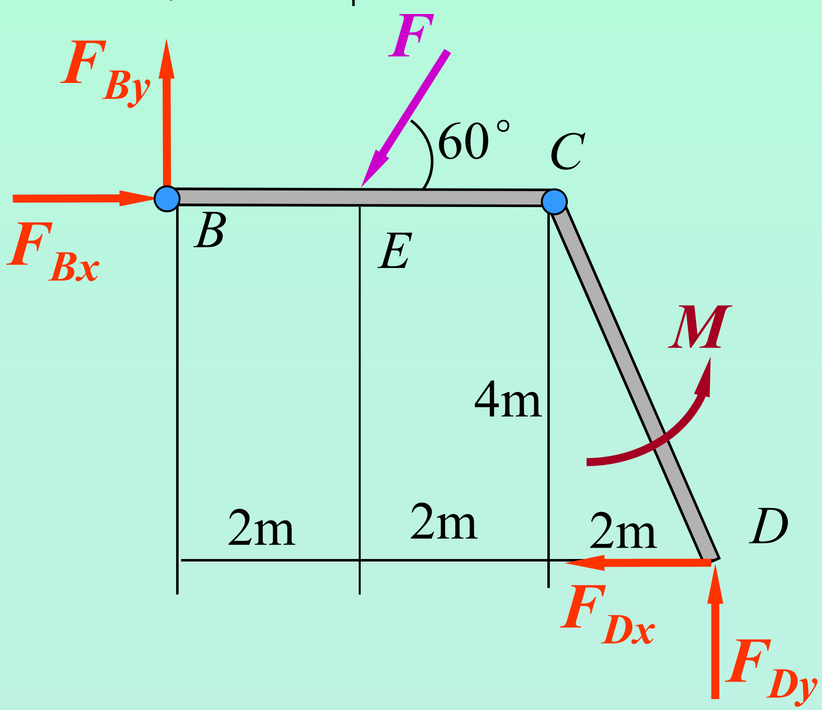
2. 再取BCD为研究对象，受力分析如图。

$$\sum M_D(F)=0:$$

$$M+F\sin 60°\times 4+F\cos 60°\times 4$$
$$-F_{By}\times 6-F_{Bx}\times 4=0$$

$$F_{Bx}=20.75\ \text{k N}$$





$$\sum F_x = 0,$$

$$F_{Bx} - F\cos 60° - F_{Dx} = 0$$

$$F_{Dx} = 13.25 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0,$$

$$F_{By} - F\sin 60° + F_{Dy} = 0$$

$$F_{Dy} = 6.5 \text{ kN}$$

§3-5 简单平面桁架的内力计算

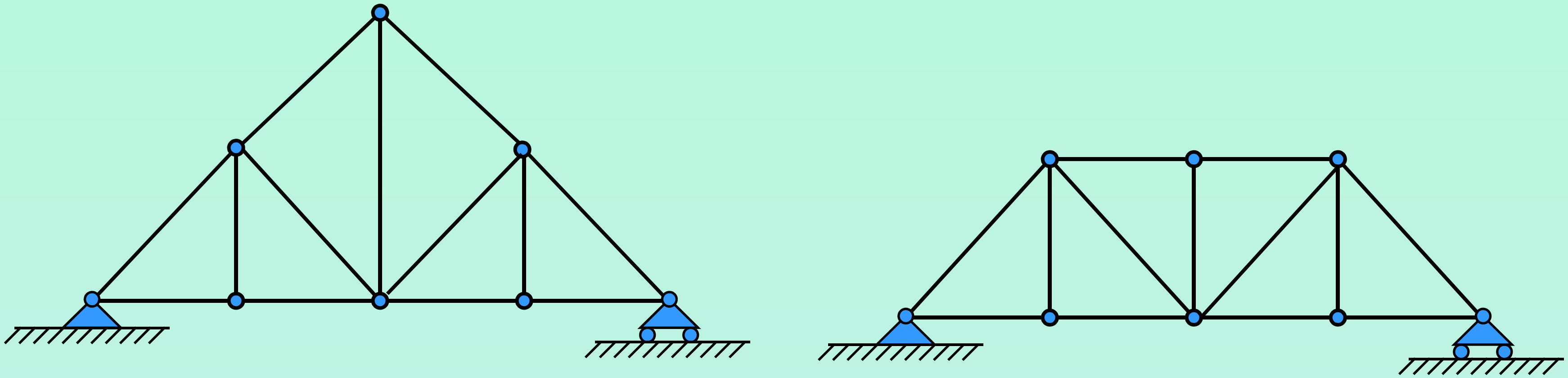
- 几个概念
- 桁架计算的常见假设
- 计算桁架杆件内力的方法

§3-5 简单平面桁架的内力计算

1. 几个概念

桁架 —— 一种由若干杆件彼此在两端用铰链连接而成，受力后几何形 状不变的结构。

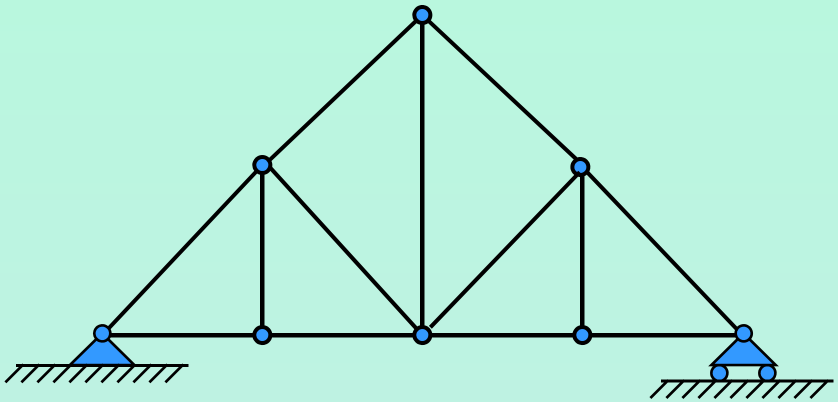
如图分别是普通屋顶桁架和桥梁桁架。



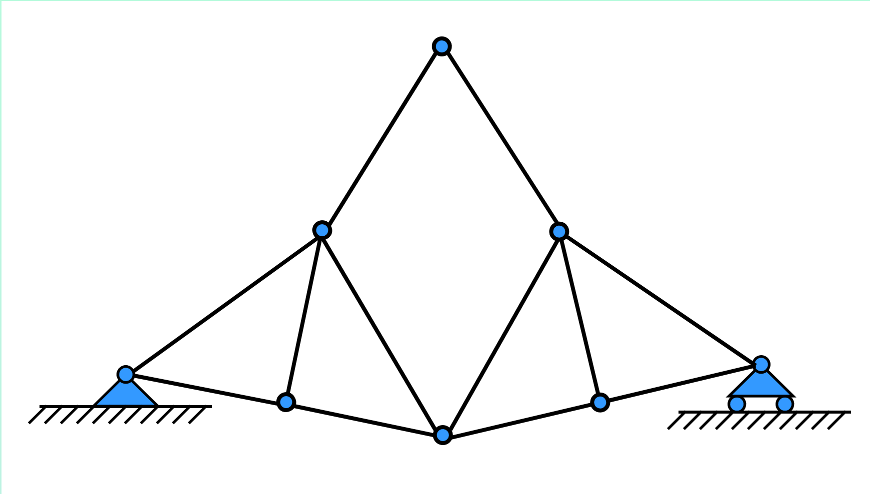
平面桁架—— 所有杆件都在同一平面内的桁架。

节点—— 桁架中杆件的铰链接头。

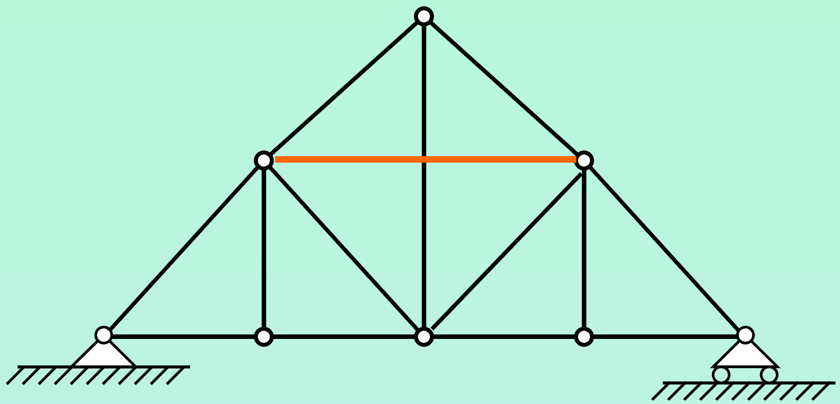
杆件内力—— 各杆件所承受的力。



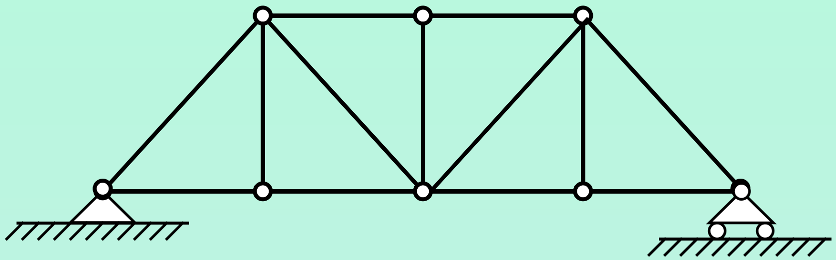
无余杆桁架—— 如果从桁架中任意抽去一根杆件，则桁架就会活动变形，即失去形状的固定性。



有余杆桁架—— 如果从桁架中抽去某几根杆件，桁架不会活动变形，即不会失去形状的固定性。



简单平面桁架—— 以一个铰链三角形框架为基础，每增加一个节点需增加二根杆件，可以构成无余杆的平面桁架。

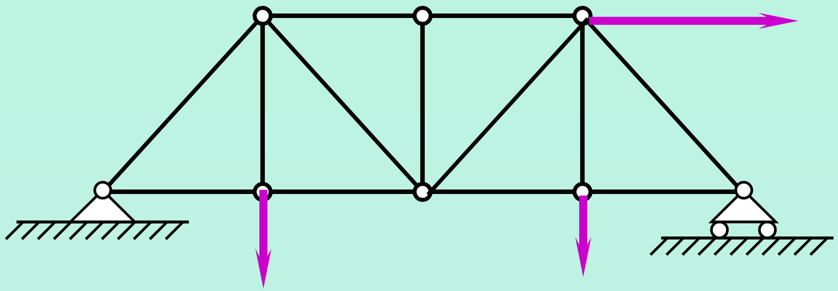


2. 桁架计算的常见假设

（1）桁架中的杆件都是直杆，并用光滑铰链连接。

（2）桁架受的力都作用在节点上，并在桁架的平面内。

（3）桁架的自重忽略不计，或被平均分配到杆件两端的节点上，这样的桁架称为理想桁架。



§3-5 简单平面桁架的内力计算

- 桁架结构的优点

可以充分发挥材料的作用，减轻结构的重量，节约材料。

- 简单平面桁架的静定性

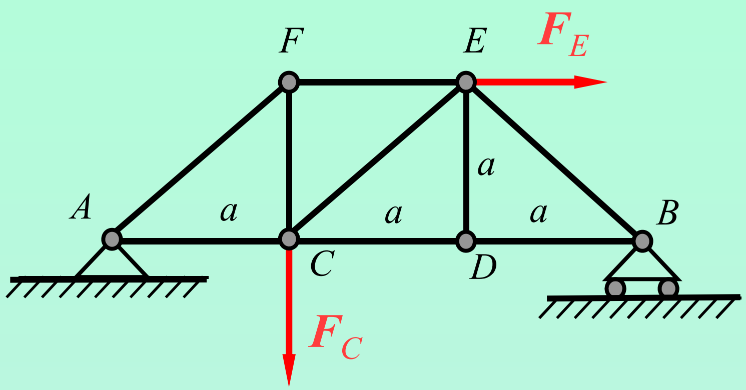
当简单平面桁架的支座反力不多于3个时，求其杆件内力的问题是静定的，否则不静定。

3. 计算桁架杆件内力的方法

节点法—— 应用共点力系平衡条件，逐一研究桁架上每个节点的平衡。

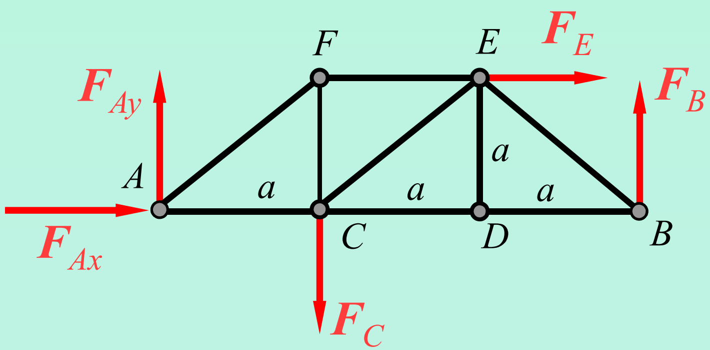
截面法—— 用应用平面任意力系的平衡条件，研究桁架由截面切出的某些部分的平衡。

例3-10 如图平面桁架，求各杆内力。已知铅垂力F_C=4 kN，水平力F_E=2 kN。



解： 节点法

1. 取整体为研究对象，受力分析如图。

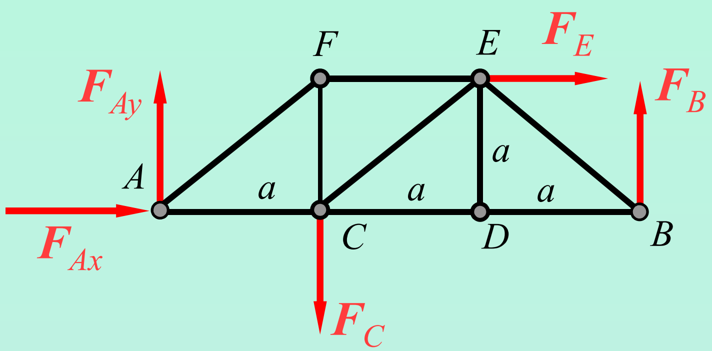


3. 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \qquad F_{Ax} + F_E = 0$$

$$\sum F_y = 0, \qquad F_B + F_{Ay} - F_C = 0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -F_C \times a - F_E \times a + F_B \times 3a = 0$$



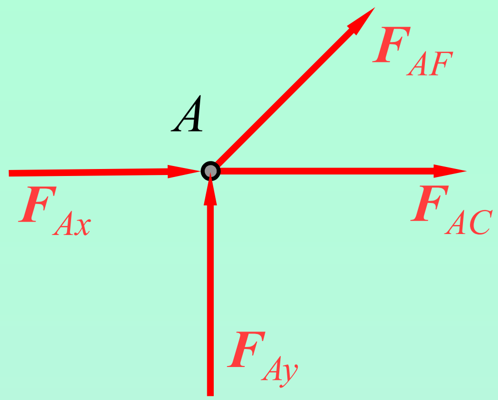
4. 联立求解。

$F_{Ax} = -2$ kN

$F_{Ay} = 2$ kN

$F_B = 2$ kN

5. 取节点A，受力分析如图。



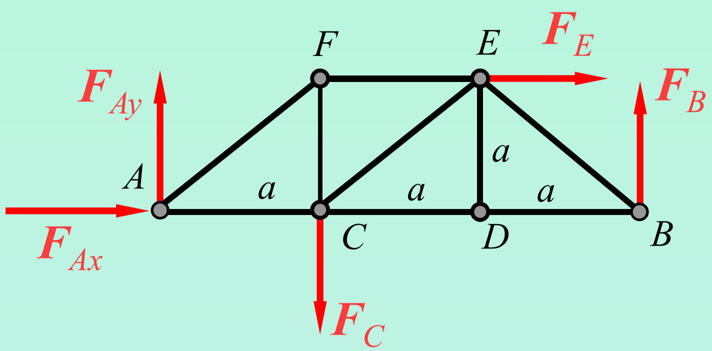
列平衡方程

$$\sum F_x = 0,$$

$$F_{Ax} + F_{AC} + F_{AF}\cos 45^\circ = 0$$

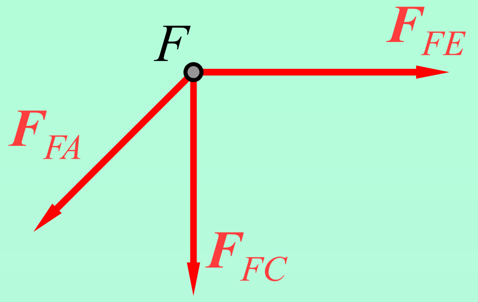
$$\sum F_y = 0,$$

$$F_{Ay} + F_{AF}\cos 45^\circ = 0$$



解得

$$F_{AF} = -2\sqrt{2}\ \text{kN}, \quad F_{AC} = 4\ \text{kN}$$



6. 取节点F，受力分析如图。

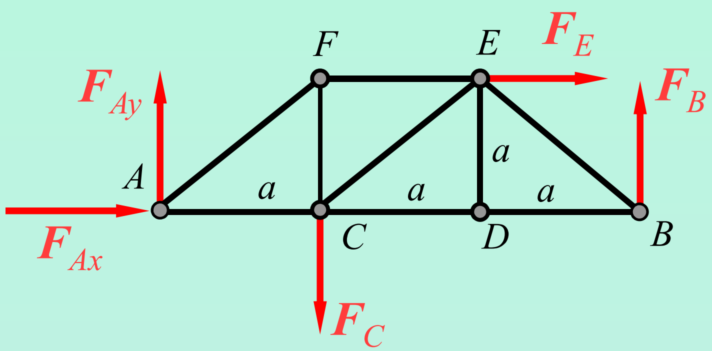
列平衡方程

$$\sum F_x = 0,$$

$$F_{FE} - F_{FA}\cos 45° = 0$$

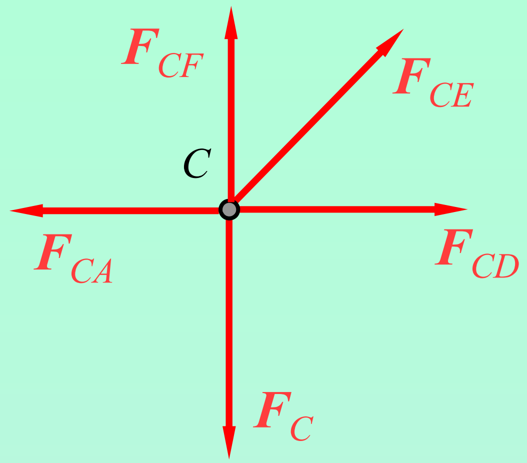
$$\sum F_y = 0,$$

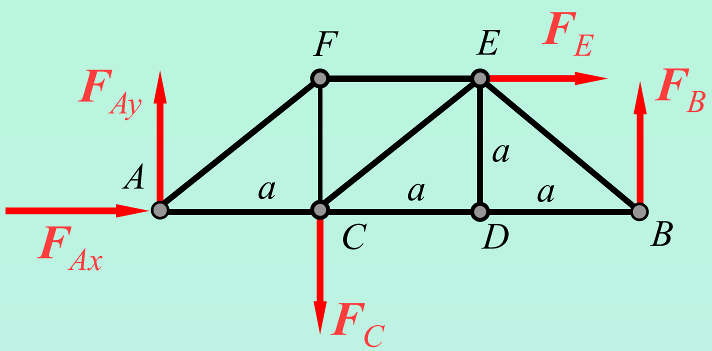
$$-F_{FC} - F_{FA}\cos 45° = 0$$



解得

$$F_{FE} = -2\ \text{kN}, \quad F_{FC} = 2\ \text{kN}$$





7. 取节点C，受力分析如图。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0,$$

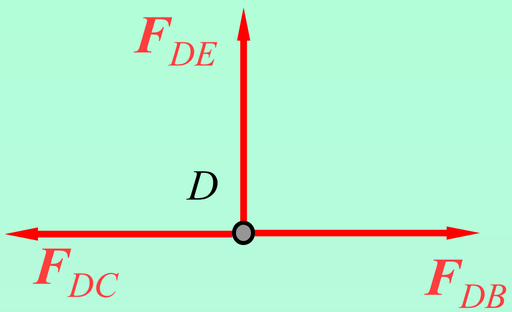
$$-F_{CA} + F_{CD} + F_{CE}\cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0,$$

$$-F_C + F_{CF} + F_{CE}\cos 45^\circ = 0$$

解得

$$F_{CE} = 2\sqrt{2}\ \text{kN}, \quad F_{CD} = 2\ \text{kN}$$



8. 取节点D，受力分析如图。

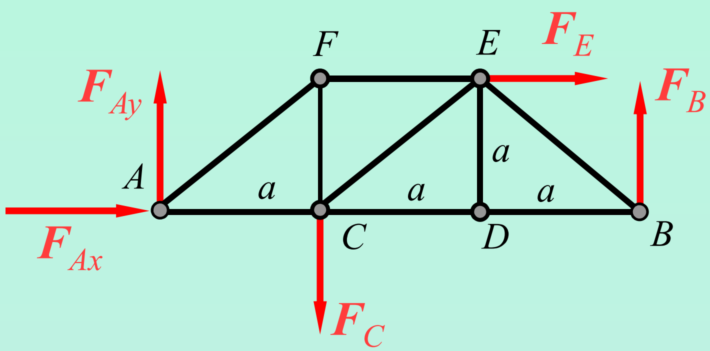
列平衡方程

$$\sum F_x = 0,$$

$$F_{DB} - F_{DC} = 0$$

$$\sum F_y = 0,$$

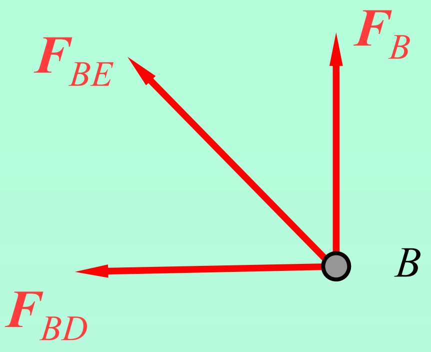
$$F_{DE} = 0$$



解得

$$F_{DB} = 3\ \text{kN}, \quad F_{DE} = 0$$

9. 取节点B，受力分析如图。



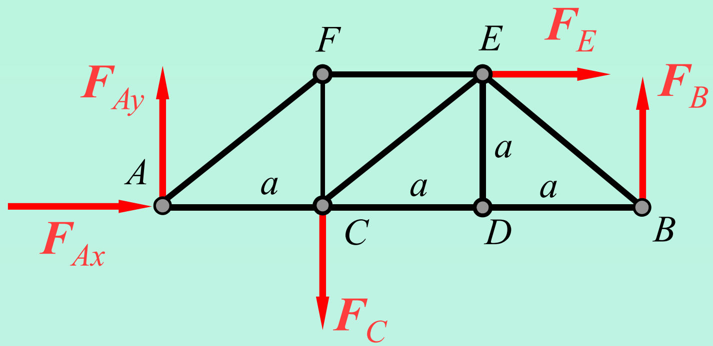
列平衡方程

$$\sum F_x = 0,$$

$$-F_{BD} - F_{BE}\cos 45° = 0$$

$$\sum F_y = 0,$$

$$F_B + F_{BE}\cos 45° = 0$$

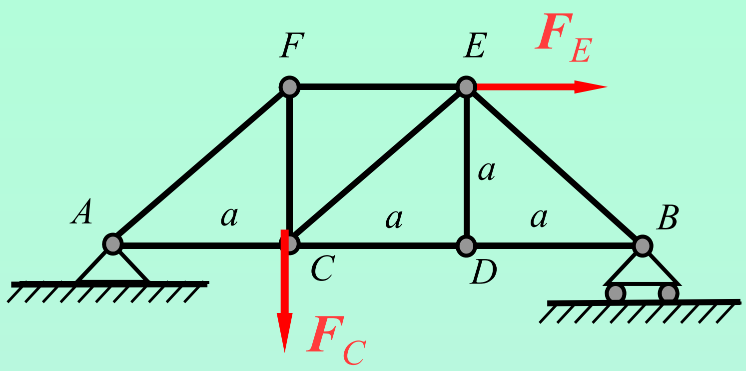


解得

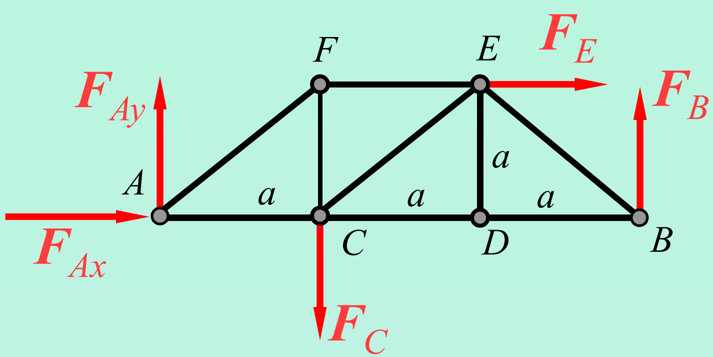
$$F_{BD} = -2\sqrt{2}\ \text{kN}$$

$$F_{BE} = -2\sqrt{2}\ \text{kN}$$

解：截面法



1. 取整体为研究对象，受力分析如图。



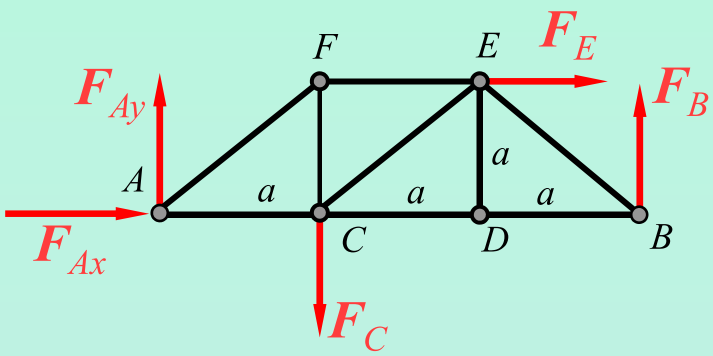
2. 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \qquad F_{Ax} + F_E = 0$$

$$\sum F_y = 0, \qquad F_B + F_{Ay} - F_C = 0$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \qquad -F_C \times a - F_E \times a + F_B \times 3a = 0$$

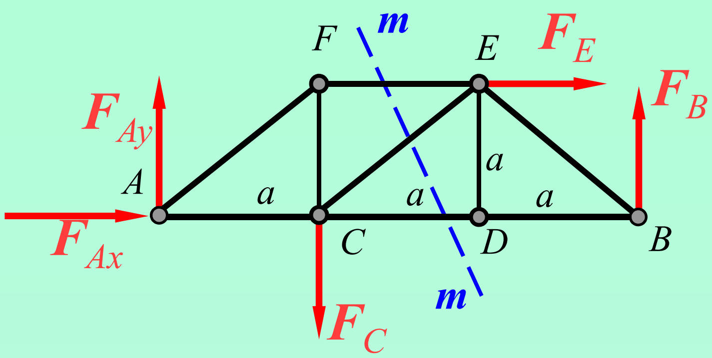
3. 联立求解。



$F_{Ax} = -2\ \text{kN}$

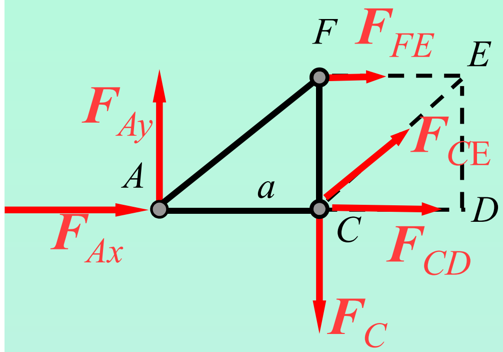
$F_{Ay} = 2\ \text{kN}$

$F_B = 2\ \text{kN}$



4. 作一截面m-m将三杆截断，取左部分为分离体，受力分析如图。

5. 列平衡方程。



$$\sum F_x = 0, \quad F_{CD} + F_{Ax} + F_{FE} + F_{CE}\cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F_C + F_{CE}\cos 45^\circ = 0$$

$$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -F_{FE}\times a - F_{Ay}\times a = 0$$

联立求解得 $F_{CE} = -2\sqrt{2}\ \text{kN}$, $F_{CD} = 2\ \text{kN}$, $F_{FE} = -2\ \text{kN}$

思考题

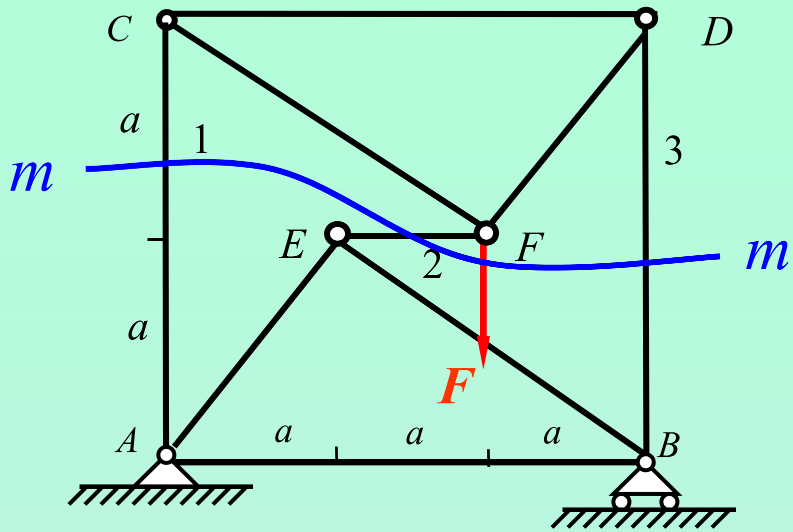
用截面法求杆1，2，3的内力。

用截面m，并取上半部分。

$\sum F_x = 0$, 求出杆2的内力F_2。

$\sum M_C = 0$, 求出杆3的内力F_3。

$\sum M_D = 0$, 求出杆1的内力F_1。



谢谢使用