动 力 学

动量矩定理

西北工业大学
支希哲　朱西平　侯美丽

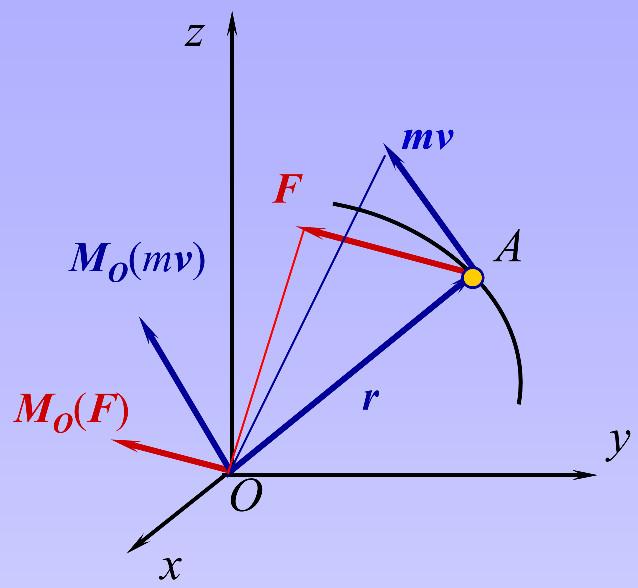
第四章 动量矩定理

§4-1 动 量 矩

- 质点的动量矩
- 质点系的动量矩
- 平动刚体对固定点的动量矩
- 定轴转动刚体对其转轴的动量矩
- 质点系对固定点的动量矩的另一种表示

§4-1 动 量 矩

一、质点的动量矩



1. 对点的动量 矩

质点*A*的动量 $m\boldsymbol{v}$ 对点 ***O*** 的矩，定义为质点*A*对点 ***O*** 的动量 矩。

$$\boldsymbol{M}_O(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

2. 对轴的动量 矩

上式投影到各坐标轴可得动量 $m\boldsymbol{v}$ 对各坐标轴的矩。

$$M_x(m\boldsymbol{v}) = y\,(mv_z) - z\,(mv_y)$$

$$M_y(m\boldsymbol{v}) = z\,(mv_x) - x\,(mv_z)$$

$$M_z(m\boldsymbol{v}) = x\,(mv_y) - y\,(mv_x)$$

二、质点系的动量矩

1. 对点的动量 矩

质点系内各质点对某点 O 的动量矩的矢量和，称为这质点系对该点 O 的动量主矩或动量矩。用 L_O 表示，有

$$\boldsymbol{L}_O = \sum \boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i) = \sum \boldsymbol{r} \times m_i\boldsymbol{v}_i$$

2. 对轴的动量 矩

类似的可得质点系对各坐标轴的动量矩表达式

$$L_x = \sum M_x(m_i\boldsymbol{v}_i)$$

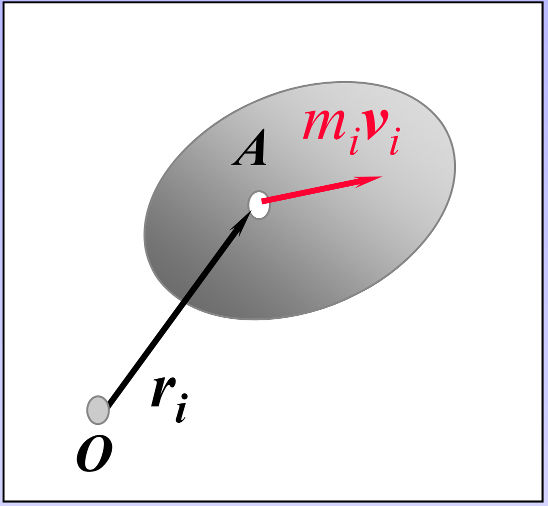
$$L_y = \sum M_y(m_i\boldsymbol{v}_i)$$

$$L_z = \sum M_z(m_i\boldsymbol{v}i)$$

三、平动刚体对固定点O的动量矩

设刚体以速度 $\boldsymbol{v}$ 平动，刚体内任一点 A 的矢径是 $\boldsymbol{r}_i$,该点的质量为m，速度大小是 $\boldsymbol{v}_i$ 。

该质点对点O 的动量矩为 $\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i$



从而整个刚体对点O 的动量矩

$$\boldsymbol{L}_O=\sum\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i$$

因为刚体平动 $\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_C$

$$\boldsymbol{L}_O=\sum\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum(m_i\boldsymbol{r}_i)\times\boldsymbol{v}_C$$

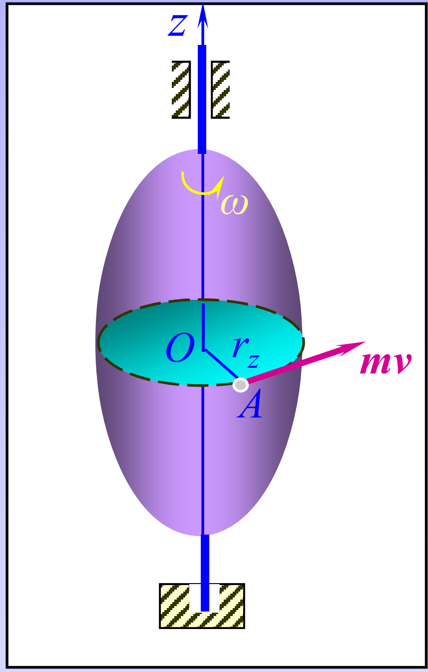
又因为 $\sum m_i\boldsymbol{r}_C=\sum m_i\boldsymbol{r}_i$

所以 $\boldsymbol{L}_O=\sum m_i\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{r}_C\times\sum m_i\boldsymbol{v}_C$

四、定轴转动刚体对其转轴的动量矩

设刚体以角速度 ω 绕固定轴 z 转动，刚体内任一点 A 的转动半径是 r_z。

该点的速度大小是 $v = r_z\,\omega$，方向同时垂直于轴 z 和转动半径 r_z，且指向转动前进的一方。



若用 m 表示该质点的质量，则其动量对转轴 z 的动量矩为

$$M_z(m\boldsymbol{v}) = r_z \cdot m\, r_z\, \omega = m r_z^2\, \omega$$

从而整个刚体对轴 z 的动量矩

$$L_z = \sum M_z(m_i \boldsymbol{v}_i) = \omega \sum m_i r_{iz}^2 = J_z\, \omega$$

即，**作定轴转动的刚体对转轴的动量矩，等于这刚体对该轴的转动惯量与角速度的乘积**。

§4-2 动量矩定理

- 动量矩定理
- 动量矩守恒定理

§4-2 动 量 矩 定 理

一、动量矩定理

1. 对定点的动量矩定理

因为质点系对定点O的动量矩为 $\boldsymbol{L}_O=\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)$

将其两端求时间的导数，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}\times m_i\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{r}_i\times m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}\right)=\sum(\overbrace{\boldsymbol{v}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i}^{0}+\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{a}_i)$$

$$=\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{a}_i)=\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i)$$

其中 $\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$ 可分为外力对O点的矩和内力对O点的矩二项

即 $\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)=\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})+\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})})$

而内力对O点的矩 $\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})})=0$ 所以有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})}$$

一、动量矩定理

1. 对定点的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

令 $\boldsymbol{M}_O=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$ ，则有 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_O$$

有 结 论

质点系对某固定点的动量矩随时间的变化率，等于作用于质点系的全部外力对同一点的矩的矢量和，这就是质点系对定点的动量矩定理。

§4-2 动 量 矩 定 理

一、动量矩定理

1. 对定点的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

2 .对定轴的动量矩定理

将上式投影到固定坐标轴系上，注意到导数的投影等于投影的导数，则得

$$\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}=\sum M_x(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})\equiv M_x$$

$$\frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}=\sum M_y(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})\equiv M_y$$

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})\equiv M_z$$

有 结 论

质点系对某固定轴的动量矩随时间的变化率, 等于作用于质点系的全部外力对同一轴的矩的代数和，这就是质点系对定轴的动量矩定理。

§4-2 动 量 矩 定 理

对定点的动量矩定理 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum M_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$

对定轴的动量矩定理 $\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(F^{(e)})$

二、动量矩守恒定理

1. 如果$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) \equiv 0$，则由上面第一式 可知，$\boldsymbol{L}_O=$常矢量。

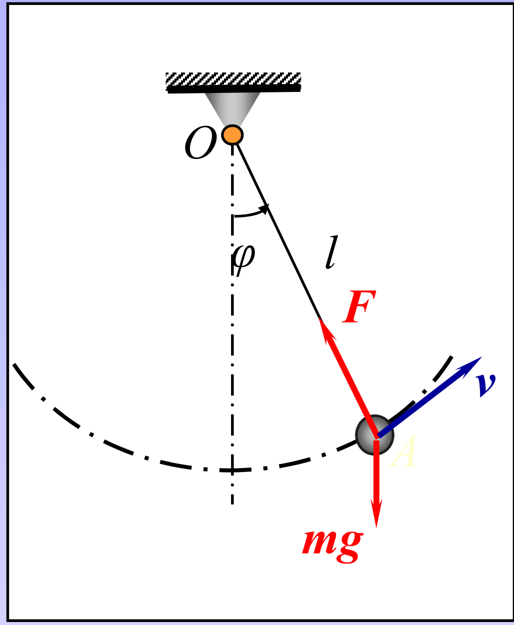
2. 如果$\sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)}) \equiv 0$，则由上面第二式 可知， $L_z=$常量。

有 结 论

如作用于质点系的所有外力对某固定点(或固定轴)的主矩始终等于零,则质点系对该点(或该轴)的动量矩保持不变。这就是质点系的动量矩守恒定理.它说明了质点系动量矩守恒的条件。

§4-2 动 量 矩 定 理

例题 4-1 试用动量矩定理导出单摆(数学摆)的运动微分方程。



解：把单摆看成一个在圆弧上运动的质点 A，设其质量为 m，摆线长 l。又设在任一瞬时质点 A 具有速度 v，摆线 OA 与铅垂线的夹角是 φ。

取通过悬点 O 而垂直于运动平面的固定轴 z 作为矩轴，对此轴应用质点的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M_z(m\boldsymbol{v})]=\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M_z(m\boldsymbol{v})]=\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

由于动量矩和力矩分别是

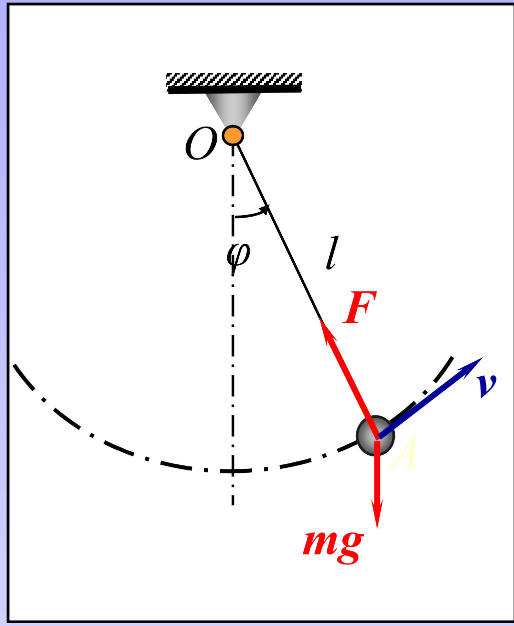
$$M_z(m\boldsymbol{v})=mvl=m(l\omega)l=ml^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

和
$$\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})=-mgl\sin\varphi$$

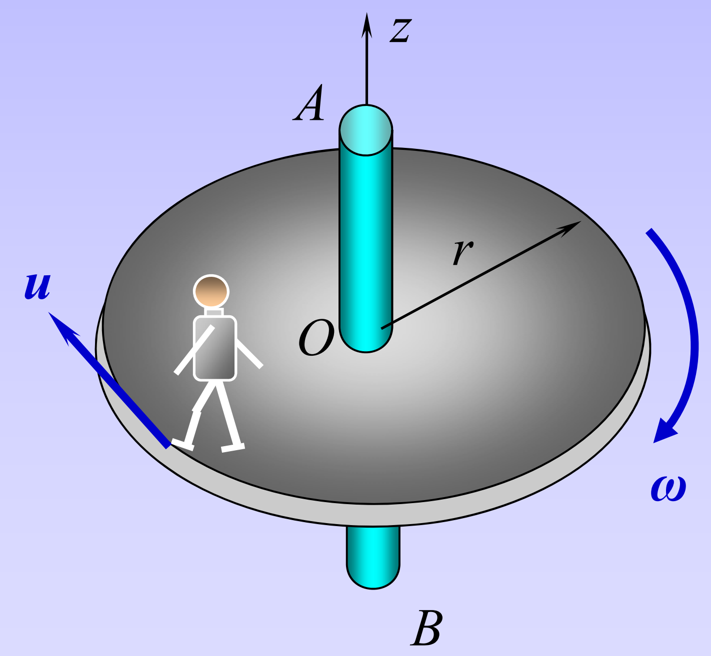
从而可得
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ml^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t})=-mgl\sin\varphi$$

化简即得单摆的运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$



例题 4-3 如图所示，在静止的水平匀质圆盘上，一人沿盘边缘由静止开始相对盘以速度$\boldsymbol{u}$行走，设人质量为m_2，盘的质量为m_1，盘半径r，摩擦不计。求盘的角速度。



解：以人和盘为研究对象。

$$L_z = J_z\omega + m_2 v\cdot r$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r\ ,\quad v=r\omega+u$$

$$L_z = J_z\omega + m_2 r(r\omega+u)$$

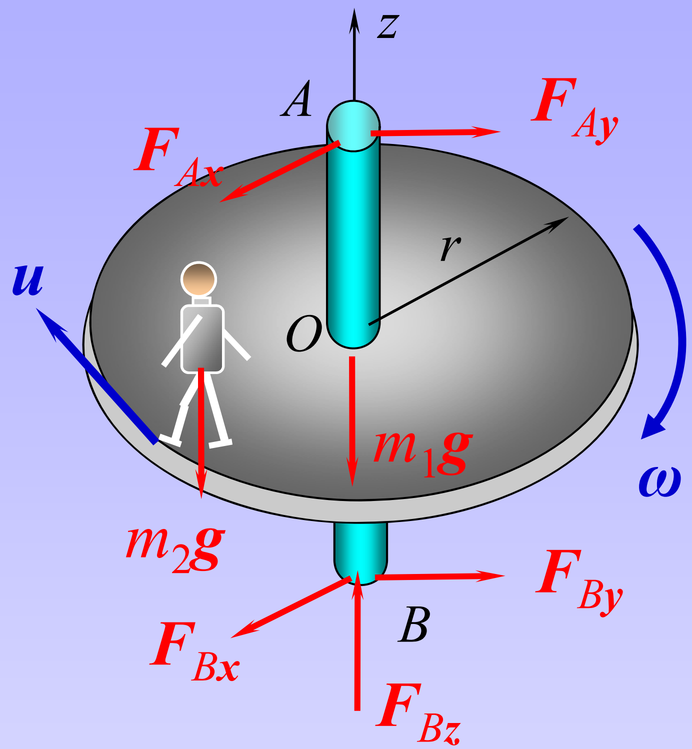
$$L_z = m_2 r u + (\frac{1}{2}m_1 r^2 + m_2 r^2)\omega$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})}$$

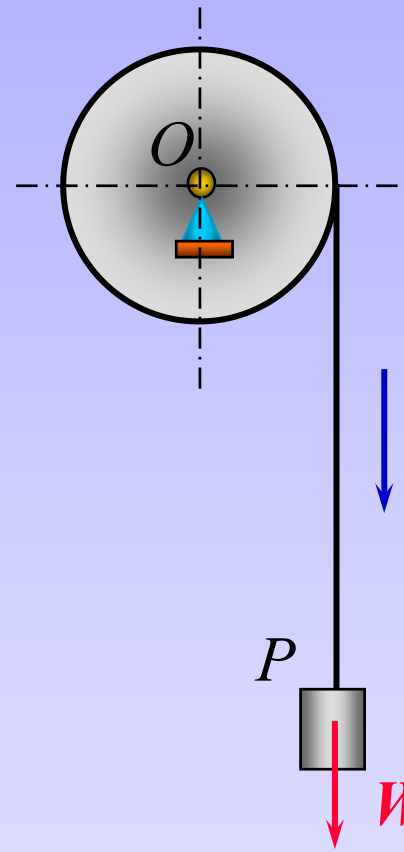
$m_z = 0$， 初始静止 $L_{z0}=0$

$$m_2 r u + (\frac{1}{2}m_1 r^2 + m_2 r^2)\omega = 0,$$

$$\omega = -\frac{2m_2}{2m_2+m_1}\cdot\frac{u}{r}$$

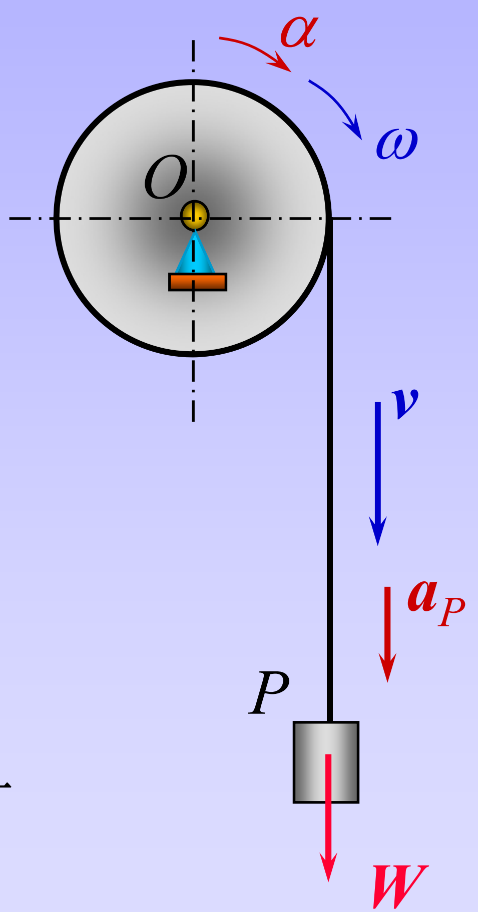


例题 4-4 匀质圆轮半径为R、质量为m。圆轮在重物P带动下绕固定轴O转动，已知重物重量为W。求重物下落的加速度。



解： 以整个系统为研究对象。

设圆轮的角速度和角加速度分别为ω和α，重物的加速度为a_P。



圆轮对轴O的动量矩

$$L_{O1}=J_O\omega=\frac{1}{2}mR^2\omega$$ 顺时针

重物对轴O的动量矩

$$L_{O2}=mvR=\frac{W}{g}vR$$ 顺时针

系统对轴O的总动量矩

$$L_O=L_{O1}+L_{O2}=\frac{1}{2}mR^2\omega+\frac{W}{g}vR$$ 顺时针

系统对轴O的总动量矩 $L_O = L_{O1} + L_{O2} = \dfrac{1}{2}mR^2\omega + \dfrac{W}{g}vR$

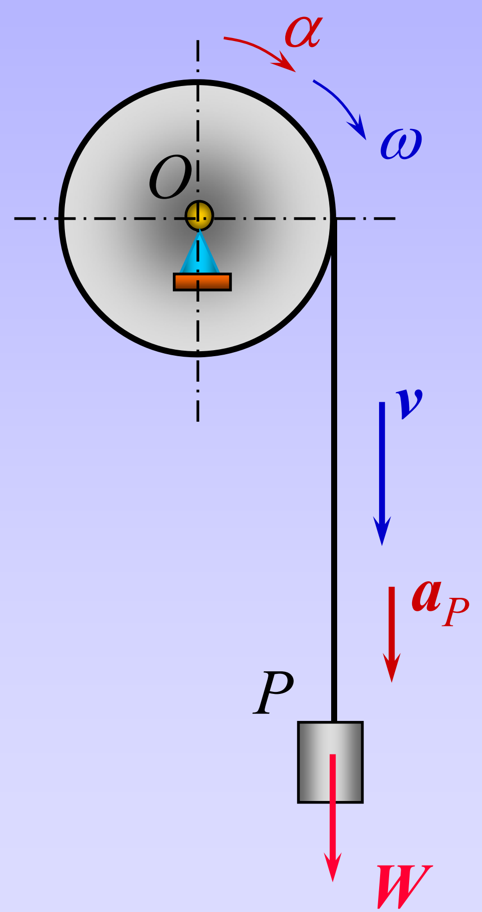
应用动量矩定理 $\dfrac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = M_O$

有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dfrac{1}{2}mR^2\omega + \dfrac{W}{g}vR) = WR$

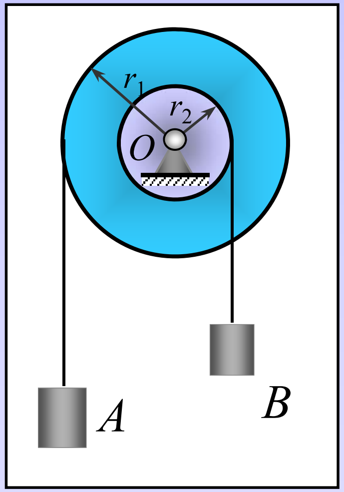
得 $\dfrac{1}{2}mR^2\alpha + \dfrac{W}{g}a_P R = WR$

其中 $a_P = R\alpha$

所以求得重物下落的加速度大小 $a_P = \dfrac{W}{\dfrac{m}{2} + \dfrac{W}{g}}$



例题 4-5 两个鼓轮固连在一起，其总质量是m，对水平转轴O的转动惯量是J_O。鼓轮的半径是r_1和r_2。绳端悬挂的重物A和B质量分别是m_1和m_2(图a)，且$m_1 > m_2$。试求鼓轮的角加速度。



解: 取鼓轮，重物 A，B 和绳索为研究对象(图b)。对鼓轮的转轴 z(垂直于图面，指向读者)应用动量矩定理，有

$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t}=M_{Oz}$$

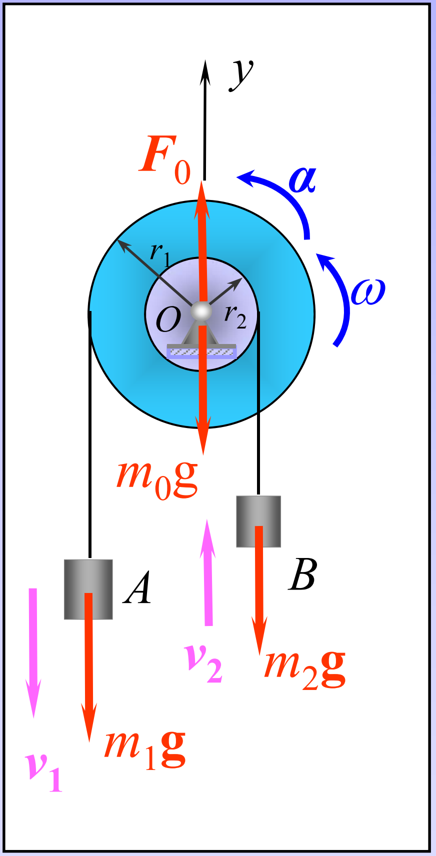
系统的动量矩由三部分组成，等于

$$L_{Oz}=J_O\omega+m_1v_1\,r_1+m_2v_2\,r_2$$

考虑到 $v_1=r_1\,\omega$，$v_2=r_2\,\omega$，则得

$$L_{Oz}=(J_O+m_1r_1^2+m_2r_2^2)\omega \qquad (1)$$

$$M_{Oz}=(m_1r_1-m_2r_2)g \qquad (2)$$



(b)

$$L_{Oz}=(J_O+m_1r_1^2+m_2r_2^2)\omega \qquad (1)$$

$$M_{Oz}=(m_1r_1-m_2r_2)g \qquad (2)$$

将式(2)和(3) 代入方程

$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t}=M_{Oz}$$

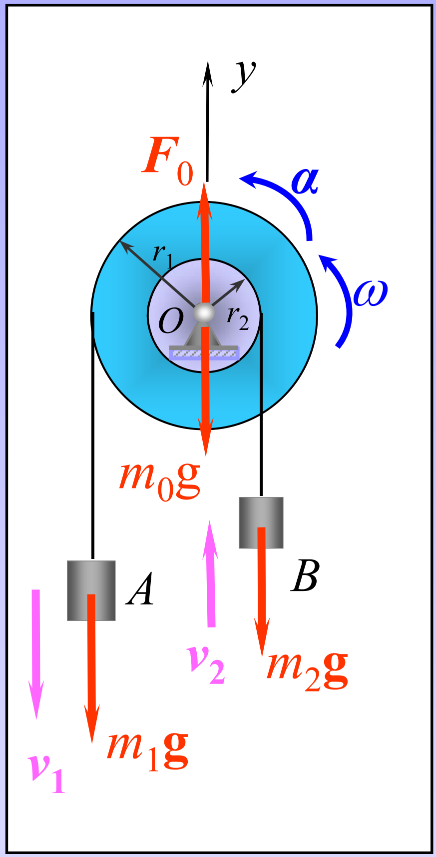
即得

$$(J_O+m_1r_1^2+m_2r_2^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=(m_1r_1-m_2r_2)g$$

从而求出鼓轮的角加速度

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{m_1r_1-m_2r_2}{J_O+m_1r_1^2+m_2r_2^2}g$$

方向为逆钟向。



(b)

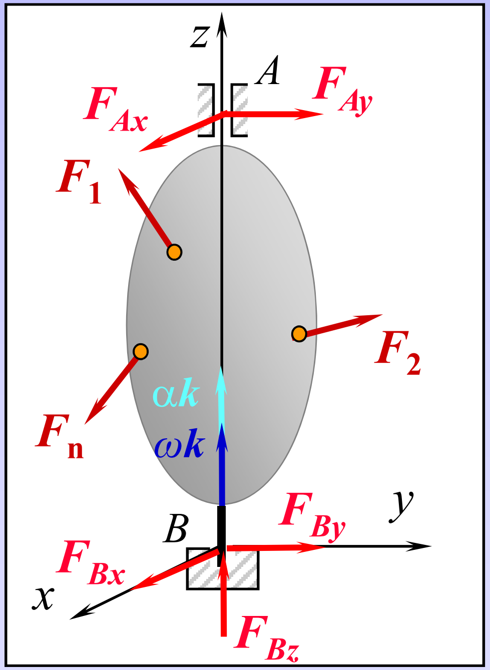
§4-3 刚体的定轴转动微分方程

§ 4-3 刚体的定轴转动微分方程

一、定轴转动微分方程

设刚体在主动力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 作用下绕定轴 z 转动，与此同时，轴承上产生了反力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$。

用 $M_z = \sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)})$ 表示作用在刚体上的外力对转轴 z 的主矩(反力 $\boldsymbol{F}_A, \boldsymbol{F}_B$ 自动消去)。



刚体对转轴 z 的动量矩 $\quad L_z = J_z\omega$

于是根据动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z}$$

可得 $$J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_z$$

§4-3 刚体的定轴转动微分方程

$$J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_z$$

考虑到

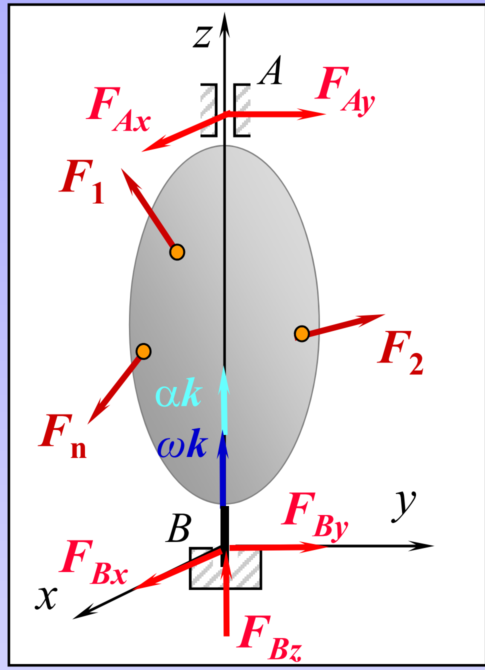
$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$$

则上式可写成

$$\boxed{J_z \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})}$$

或

$$J_z \ddot{\varphi} = M_z$$



即，定轴转动刚体对转轴的转动惯量与角速度的乘积，等于作用于刚体的外力对转轴的主矩。这就是刚体定轴转动微分方程。

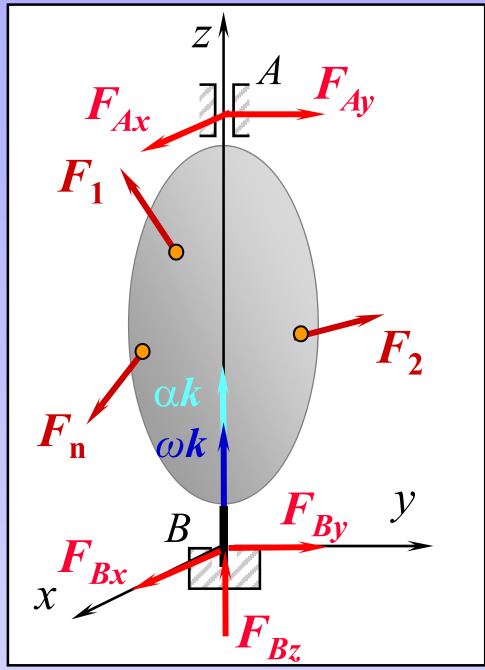
§ 4-3 刚体的定轴转动微分方程

定轴转动微分方程

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

或

$$J_z \ddot{\varphi} = M_z$$



二、几点讨论

1. 若外力矩M_z=0，刚体作匀速转动；

2. 若外力矩M_z=常量，则刚体作匀变速转动；

3. 若外力矩M_z相同，J_z越大，角加速度越小，即刚体转动状态变化的越慢，反之亦然，这正说明J_z是刚体转动时惯性的度量。

思考题 在什么条件下，$F_1=F_2$?

解： 由定轴转动微分方程

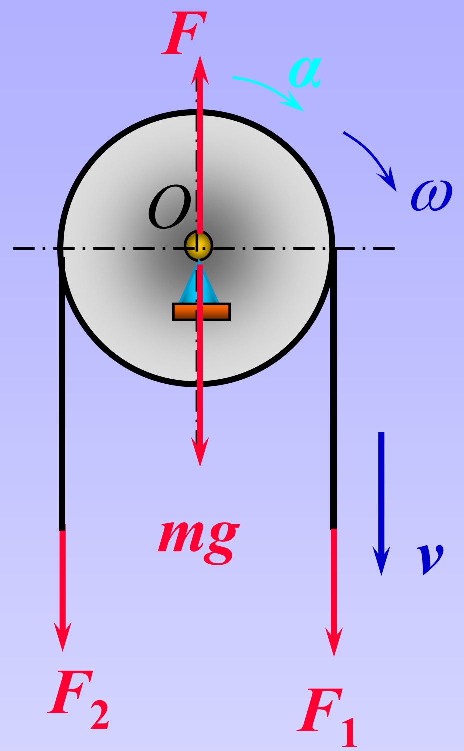
$$J_O\alpha = F_1R - F_2R$$

即

$$F_1 - F_2 = \frac{J_O\alpha}{R}$$

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2}mR\alpha$$

$$\boxed{J_O = \frac{1}{2}mR^2}$$



$F_1=F_2$ 条件为上式右端＝0，则

(1) $m = 0$

或 (2) $R = 0$

或 (3) $\boldsymbol{\alpha} = 0$

§4-4　相对于质心的动量矩定理

- 相对于质心的动量矩定理
- 相对于质心轴的动量矩定理

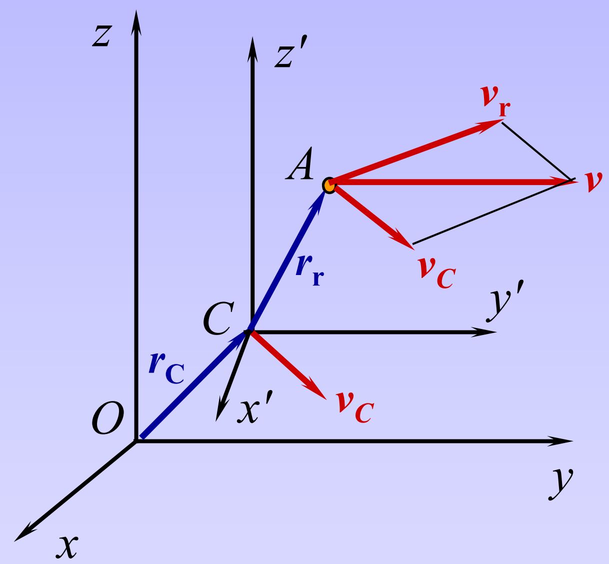
§ 4-4 相对于质心的动量矩定理

过固定点O建立固定坐标系$Oxyz$，以质点系的质心 C 为原点，取平动坐标系 $Cx'y'z'$，质点系对固定点O的动量矩。

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C, \quad \boldsymbol{L}_C = \sum (\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i \boldsymbol{v}_{ri})$$

$\boldsymbol{L}_C$—— 质点系相对质心$\boldsymbol{C}$ 的动量矩

一、相对于质心的动量矩定理



由对定点的动量矩定理

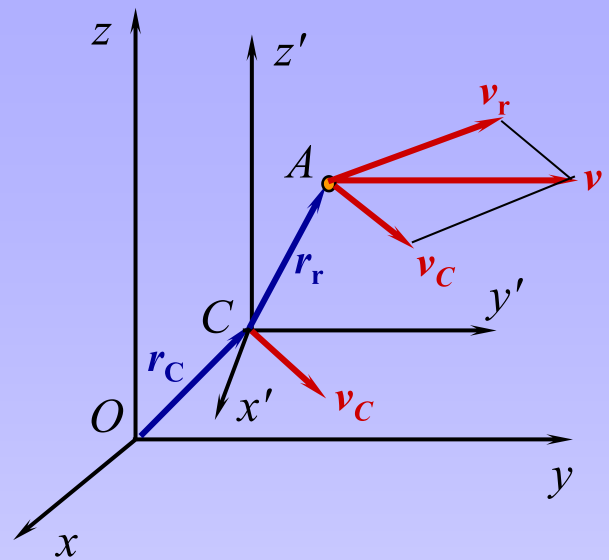
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum M_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) = \sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C) = \sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

§4-4 相对于质心的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C) = \sum(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) \qquad （1）$$



左端 $$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t} \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{v}_C \times m\boldsymbol{v}_C}_{0} + \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

$$= \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

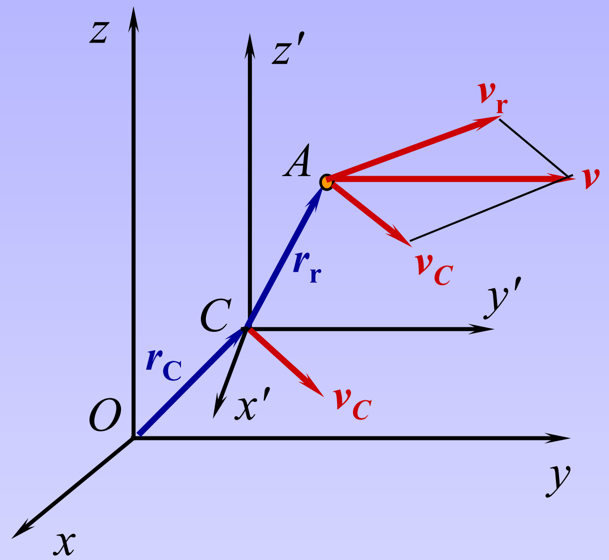
右端 $$= \sum[(\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_{ri}) \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}] = \sum(\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) + \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

代入（1）式有 $$\boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum(\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) + \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

§ 4-4 相对于质心的动量矩定理

$$\boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum (\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}) + \sum (\boldsymbol{r}_{ri} \times \boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

注意到由质心运动定理有 $m\boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$



所以上式为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum (\boldsymbol{r}_{ri} \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}) = \sum M_C(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) = \boldsymbol{M}_C}$$

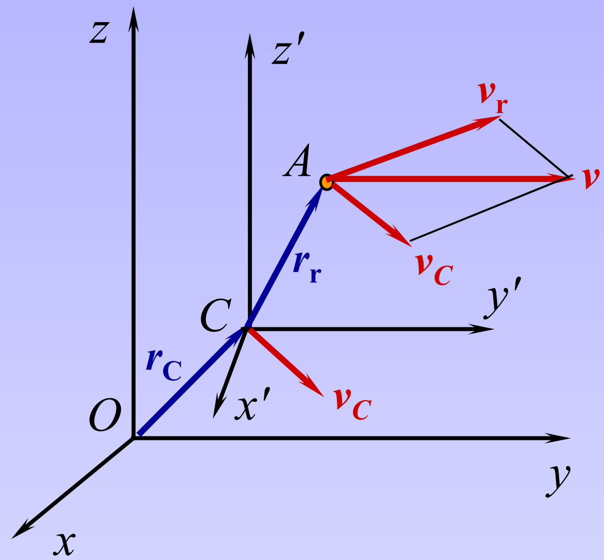
这就是相对于质心的动量矩定理的一般形式。

即，**质点系相对于质心的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的外力对质心的主矩.**

二、相对于质心轴的动量矩定理

将前面所得质点系相对于质心的动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\sum\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\boldsymbol{M}_C}$$



沿质心轴进行投影，得

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_{Cz'}}{\mathrm{d}t}=M_{Cz'}}$$

即，**质点系相对于质心轴的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的外力对该轴的主矩.**

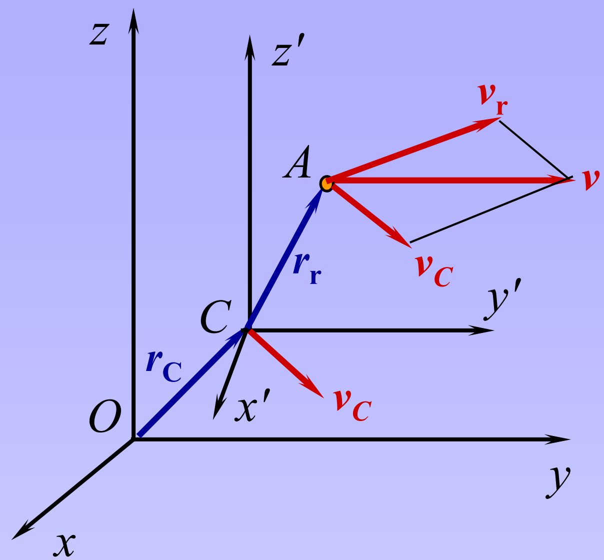
§4-4 相对于质心的动量矩定理

1. 对质心的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\sum M_C(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})=\boldsymbol{M}_C$$

2. 对质心轴的动量矩定理

$$\frac{dL_{Cz'}}{dt}=M_{Cz'}$$

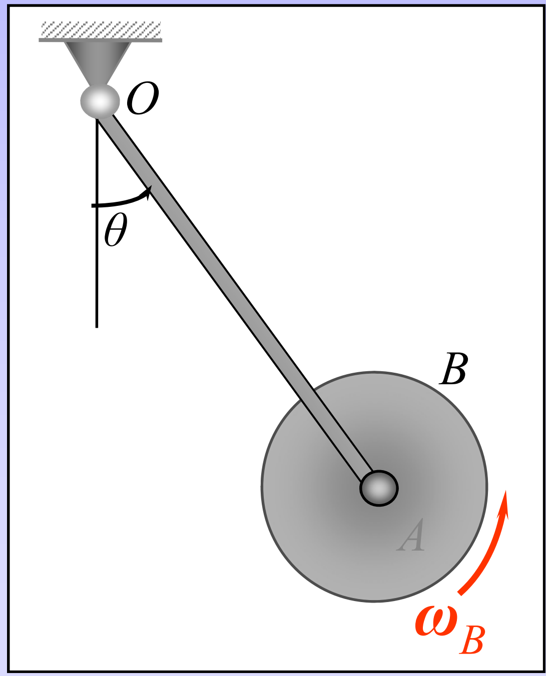


讨 论

1. 在以质心为原点的平动坐标系中，质点系对质心（或质心轴）的动量矩定理的形式与对定点（或定轴）的动量矩定理的形式相同；

2. 由该定理可见，质点系相对于质心（或质心轴）的动量矩的改变，只与质点系的外力有关，而与内力无关，即内力不能改变质点系对质心（或质心轴）的动量矩。

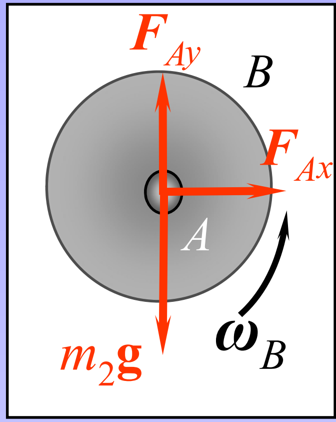
例题 4-8 长度为l，质量为m_1的均质杆OA与半径为R，质量为m_2的均质圆盘B在A处铰接，铰链O，A均光滑。初始时，杆OA有偏角θ_0，轮B有角速度ω_0（逆时针向）。求系统在重力作用下的运动。



解： 1. 考虑圆盘B，受力如图b所示，根据对质心的动量矩定理

$$J_B\dot{\omega}_B=0$$

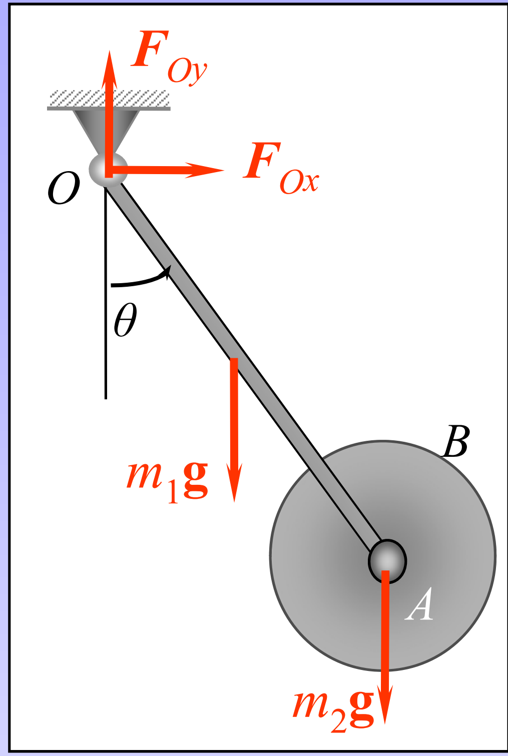
$$\omega_B=\omega_0$$



(b)

2. 考虑杆轮系统，受力如图c所示，应用对固定点O的动量矩定理，计算轮B动量矩时使用式

$$\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{L}_C+\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{p}$$



(c)

得
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J_{0A}\dot{\theta}+(J_B\omega_B+m_2l\dot{\theta}\cdot l\right]=-m_1g\frac{l}{2}\sin\ \theta-m_2gl\sin\ \theta$$

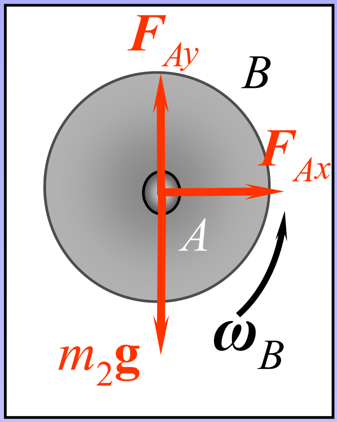
$$(\frac{1}{3}m_1+m_2)l\ddot{\theta}+(\frac{1}{2}m_1+m_2)g\sin\ \theta=0$$

微幅振动时的运动规律为

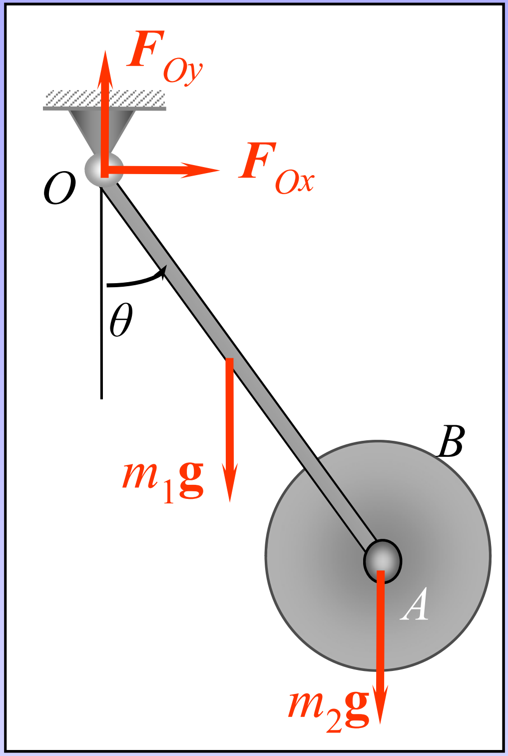
$$\theta = \theta_0 \cos \omega_0 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3m_1 + 6m_2}{2m_1 + 6m_2} \cdot \frac{g}{l}}$$

3. 运动特性：圆盘的转动不影响系统的摆动，而系统的摆动也不影响圆盘的转动。

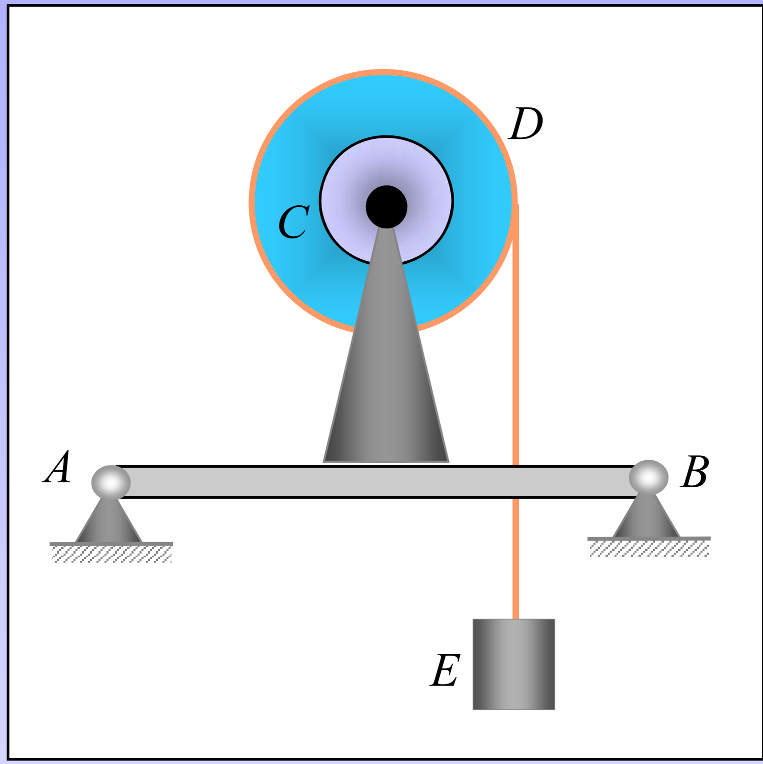


(b)



(c)

例题 4-9 起重装置由匀质鼓轮D（半径为R，重为$\boldsymbol{W}_1$）及均质梁AB（长$l=4R$，重$\boldsymbol{W}_2=\boldsymbol{W}_1$）组成，鼓轮通过电机$C$（质量不计）安装在梁的中点，被提升的重物$E$重$\boldsymbol{W}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{W}_1$。电机通电后的驱动力矩为$M$，求重物$E$上升的加速度$a$及支座$A$，$B$的约束力$\boldsymbol{F}_{NA}$及$\boldsymbol{F}_{NB}$。



解： **1. 求加速度*a*。**

考虑鼓轮D，重物E及与鼓轮固结的电机转子所组成的系统（图b），M为电机定子作用在转子的驱动力矩，对固定点O的应用动量矩定理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(J_D+\frac{W}{g}R^2)\omega\right]=M-WR$$

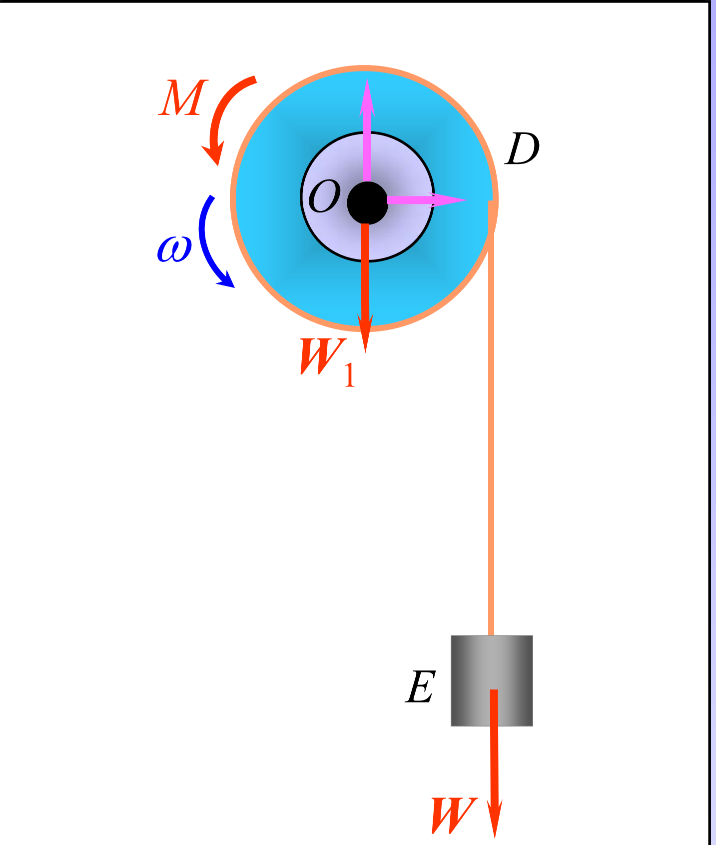
其中

$$J_D=\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}R^2$$

解得

$$a=\frac{4M/R-W_1}{3W_1}\cdot\frac{g}{R}$$

$$a=\frac{4M/R-W_1}{3W_1}g$$



(b)

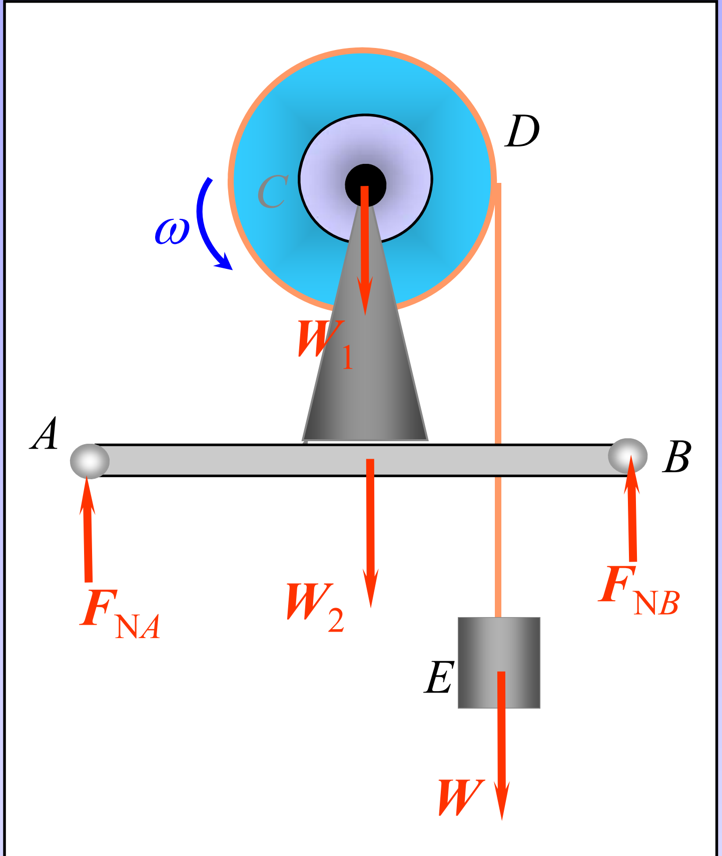
2. 考虑整个系统（图c），注意驱动力矩为M系统内力。对点B应用动量矩定理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J_D\omega-\frac{W}{g}R\omega(\frac{l}{2}-R)\right]=$$

$$(W_1+W_2)\frac{l}{2}+W(\frac{l}{2}-R)-F_{NA}l$$

解得 $$F_{NA}=\frac{1}{2}(W_1+W_2)+W(\frac{1}{2}-\frac{R}{l})-\left[J_D-\frac{W}{g}R(\frac{l}{2}-R)\right]\frac{a}{l}$$

$$F_{NA}=\frac{17}{16}W_1-\frac{1}{16}\frac{W_1}{g}R\alpha$$



(c)

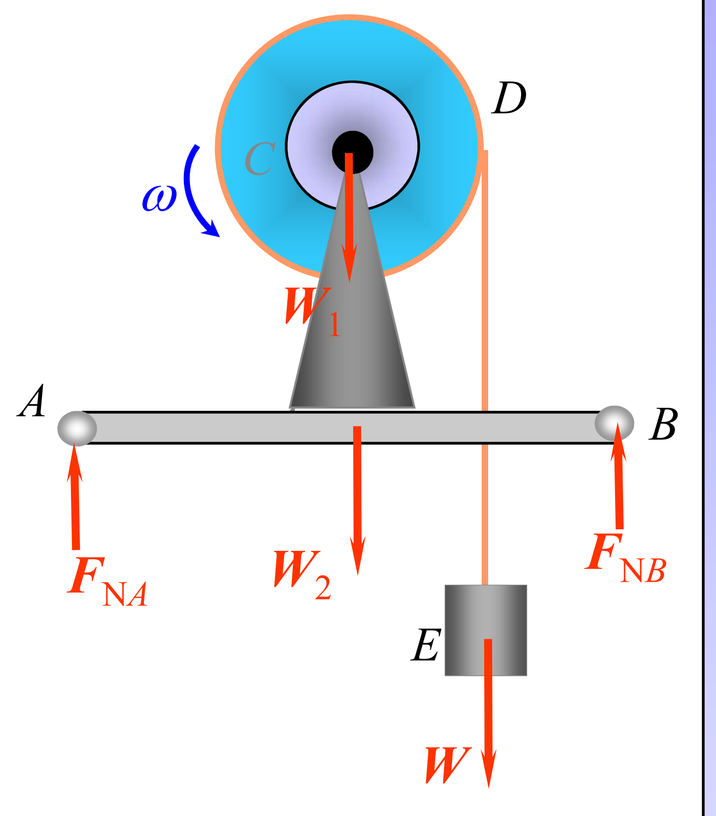
对整个系统应用动量定理得

$$\frac{W}{g}R\alpha = F_{NA} + F_{NB} - W_1 - W_2 - W$$

解得

$$F_{NB} = W_1 + W_2 + W - F_{NA} + \frac{W}{g}R\alpha$$

$$= \frac{19}{16}W_1 + \frac{5}{16}\frac{W_1}{g}a$$



(c)

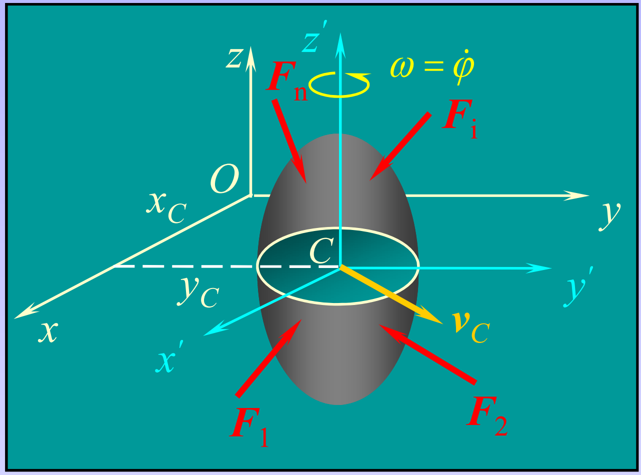
§4-5 刚体的平面运动微分方程

§ 4-5 刚体的平面运动微分方程

设刚体在外力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 作用下作平面运动。

取固定坐标系 $Oxyz$ ，使刚体平行于坐标面 Oxy 运动，且质心 C在这个平面内，再以质心为原点作平动坐标系 $Cx'y'z'$。

由运动学知，刚体的平面运动可分解成随质心的牵连平动和相对于质心的相对转动。



随质心的牵连平动规律可由质心运动定理来确定

即 $$\sum m_i \boldsymbol{a}_c = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

而相对于质心的相对转动规律可由相对质心的动量矩定理来确定

即 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_C$$

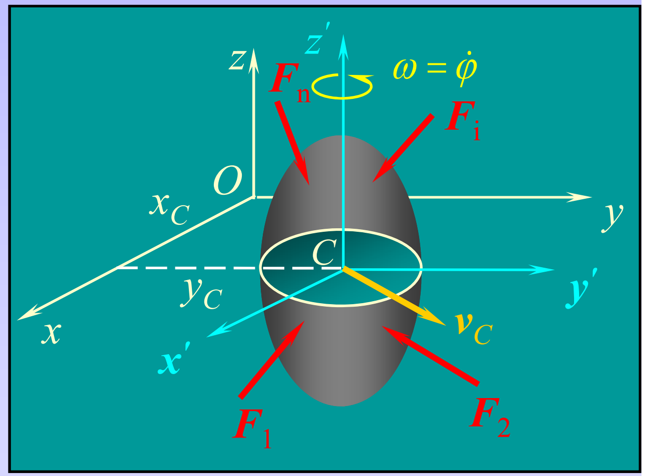
§ 4-5 刚体的平面运动微分方程

随质心的牵连平动规律可由质心运动定理来确定 $\sum m_i \boldsymbol{a}_c = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$

而相对质心的相对转动规律可由相对质心的动量矩定理来确定 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_C$

将前一式投影到轴 x，y 上，后一式投影到轴 Cz'上，可得

$$\sum m_i a_{Cx} = \sum F_x \ , \quad \sum m_i a_{Cy} = \sum F_y \ , \quad \frac{\mathrm{d}L_{Cz'}}{\mathrm{d}t} = M_{Cz'}$$



注意到 $a_{Cx} = \ddot{x}_C \ , \quad a_{Cy} = \ddot{y}_C \ , \quad L_{Cz'} = J_C \omega = J_C \dot{\varphi}$

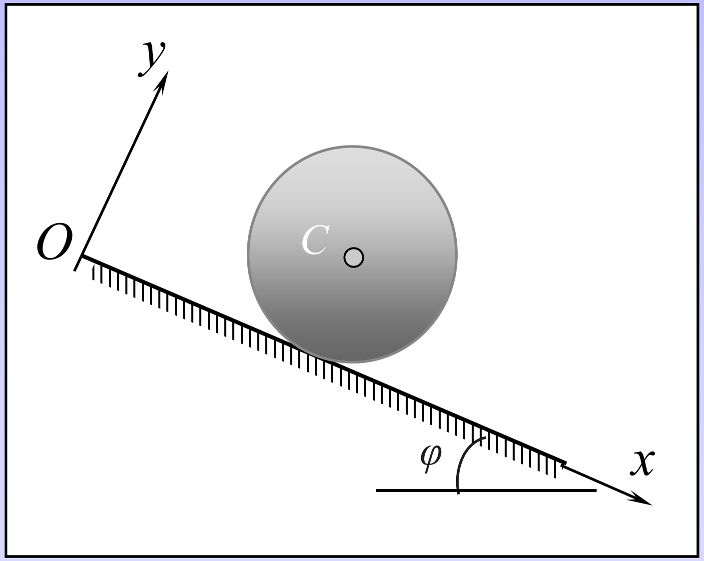
式中 J_C 表示刚体对轴 Cz' 的转动惯量。

则有

$$\boxed{\sum m_i \ddot{x}_C = \sum F_x \ , \quad \sum m_i \ddot{y}_C = \sum F_y \ , \quad J_C \ddot{\varphi} = M_C}$$

这就是刚体的平面运动微分方程。可以应用它求解刚体作平面运动时的动力学问题。

例题4-10 匀质圆柱的质量是 m，半径是 r，从静止开始沿倾角是φ 的固定斜面向下滚动而不滑动，斜面与圆柱的静摩擦系数是 f_s。试求圆柱质心 C 的加速度，以及保证圆柱滚动而不滑动的条件。



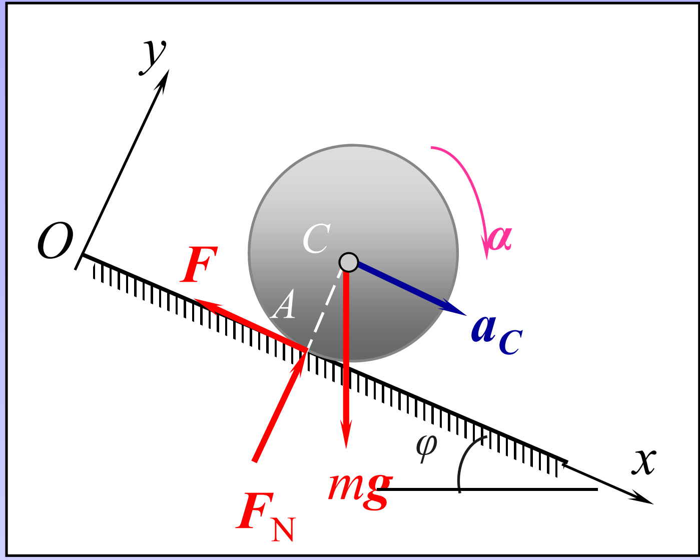
解： 以圆柱为研究对象，圆柱作平面运动。

由刚体平面运动微分方程，有

$$ma_C = mg\sin\varphi - F \qquad (1)$$

$$0 = F_N - mg\cos\varphi \qquad (2)$$

$$J_C\alpha = Fr \qquad (3)$$



由于圆柱只滚不滑，故有运动学关系

$$a_C = r\alpha \qquad (4)$$

联立求解以上四个方程，并考虑到 $J_C = Mr^2/2$，得到

$$a_C = \frac{2}{3}g\sin\varphi\ , \quad F = \frac{1}{3}mg\sin\varphi\ , \quad F_N = mg\cos\varphi$$

$$a_C = \frac{2}{3} g \sin\varphi\ ,\qquad F = \frac{1}{3} mg \sin\varphi\ ,\qquad F_{\mathrm{N}} = m\,g\cos\varphi$$

由保证圆柱滚动而不滑动的静力学条件：

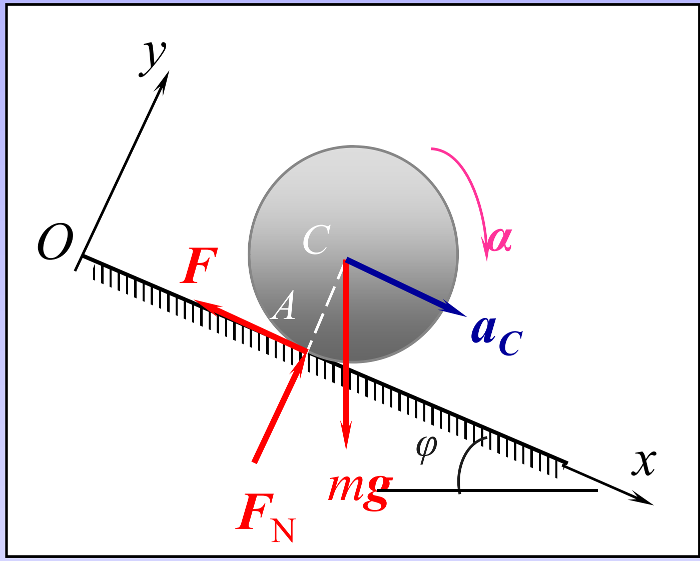
$$F \le f_{\mathrm{s}} F_{\mathrm{N}}$$

代入求出的 F 和 F_{N}，则得

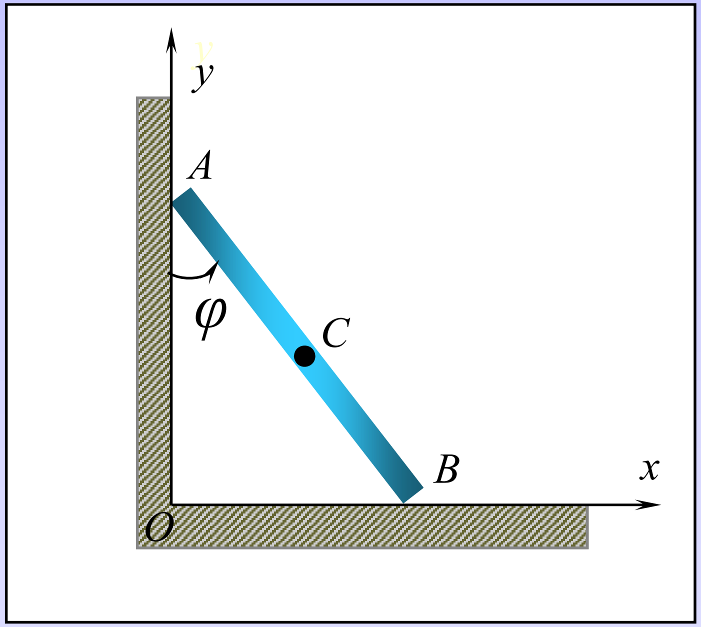
$$\frac{1}{3} mg \sin\varphi \le f_{\mathrm{s}} mg\cos\varphi$$

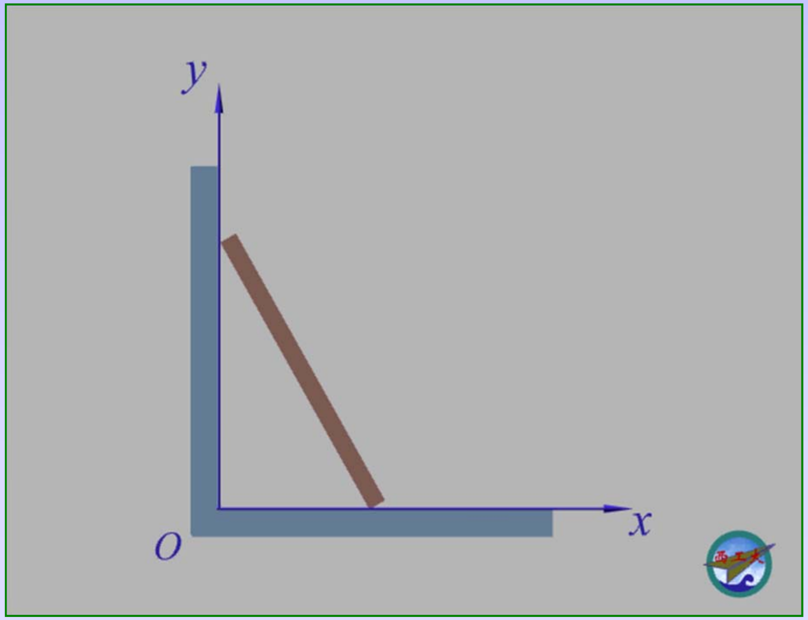
从而求得圆柱滚动而不滑动的条件

$$\tan\varphi \le 3 f_{\mathrm{s}}$$

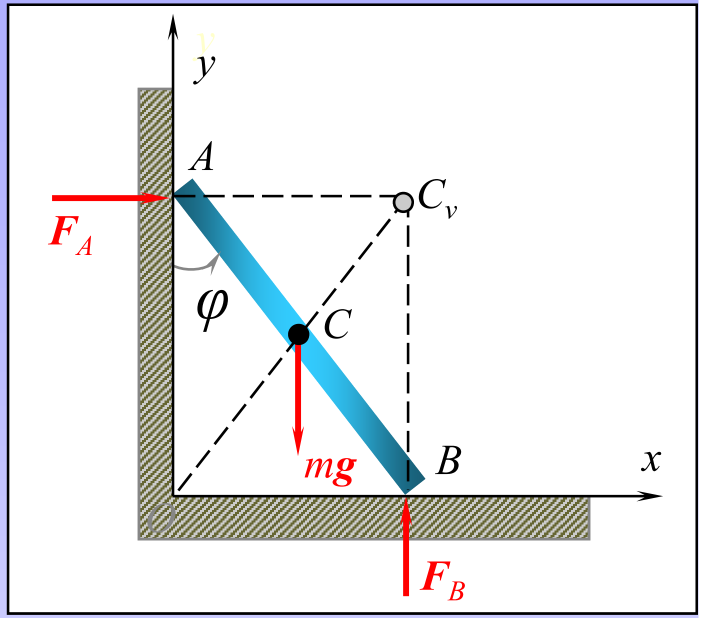


例题 4-11 匀质细杆 AB 的质量是 m，长度是 $2l$，放在铅直面内，两端分别沿光滑的铅直墙壁和光滑的水平地面滑动。假设杆的初位置与墙成交角 φ_0，初角速度等于零。试求杆沿铅直墙壁下滑时的角速度和角加速度，以及杆开始脱离墙壁时它与墙壁所成的角度 φ_1。





解： 在 A 端脱离墙壁以前，受力如图所示。杆作平面运动，取坐标系 Oxy，则杆的运动微分方程可写成



$$m\ddot{x}_C = F_A \quad \text{(a)}$$

$$m\ddot{y}_C = F_B - mg \quad \text{(b)}$$

$$J_C\ddot{\varphi} = F_B l\sin\varphi - F_A l\cos\varphi \quad \text{(c)}$$

由几何关系知

$$x_C = l\sin\varphi \quad \text{(d)}$$

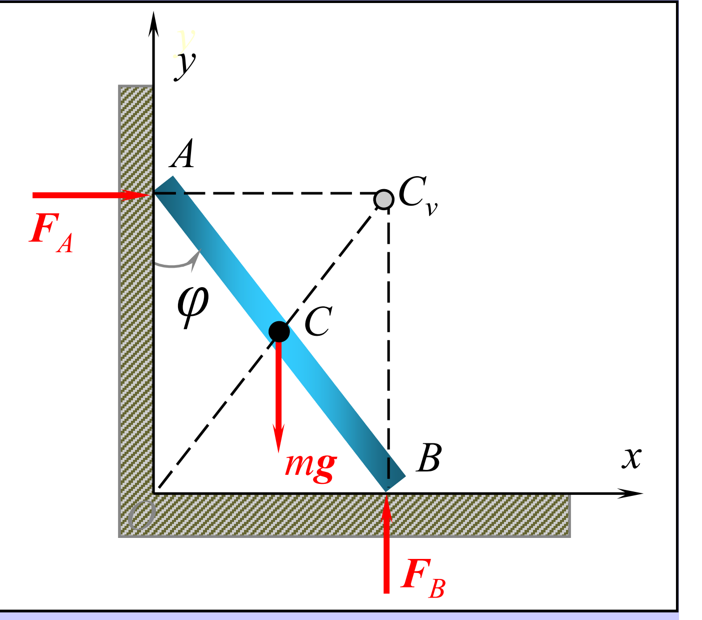
$$y_C = l\cos\varphi \quad \text{(e)}$$

将式(d)和(e)对时间求导，得

$$\dot{x}_C = l\dot{\varphi}\cos\varphi \quad , \quad \dot{y}_C = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\ddot{x}_C = l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi \qquad \text{(f)}$$

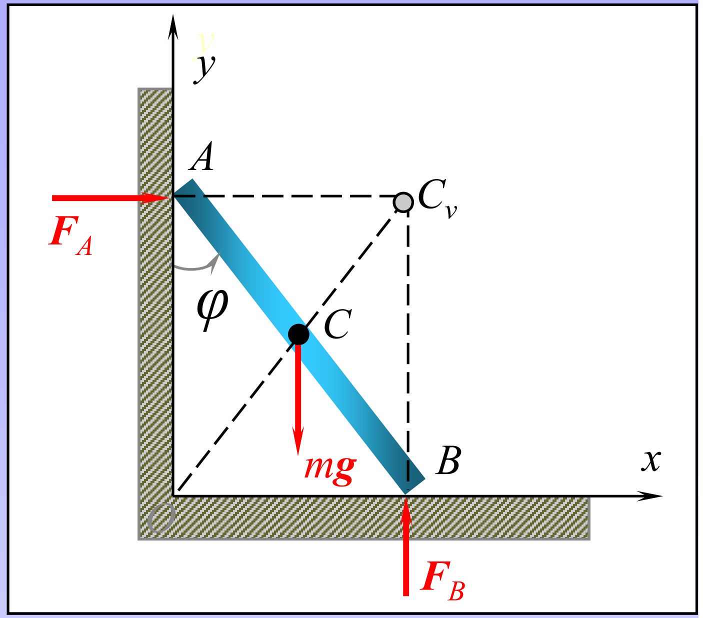
$$\ddot{y}_C = -l\ddot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi \qquad \text{(g)}$$



把 (f)和(g)分别代入 (a)和(b)，再把 F_A 和 F_B 的值代入 (c)

最后得杆 AB 的角加速度

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\sin\varphi \qquad \text{(h)}$$



利用关系 $$\ddot{\varphi}=\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{\dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}$$

把上式化成积分

$$\int_0^{\dot{\varphi}}\dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi}=\frac{3g}{4l}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

求得杆 *AB* 的角速度

$$\dot{\varphi}=\sqrt{\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0-\cos\varphi)} \qquad \text{(i)}$$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)} \qquad \text{(i)}$$

当杆即将脱离墙时，$F_A \to 0$。以$F_A = 0$代入(a)，再根据(f)得

$$l\ddot{\varphi}\cos\varphi_1 = l\dot{\varphi}^2\sin\varphi_1$$

把(h) 和(i)的表达式在 $\varphi = \varphi_1$ 时的值代入上式，得关系

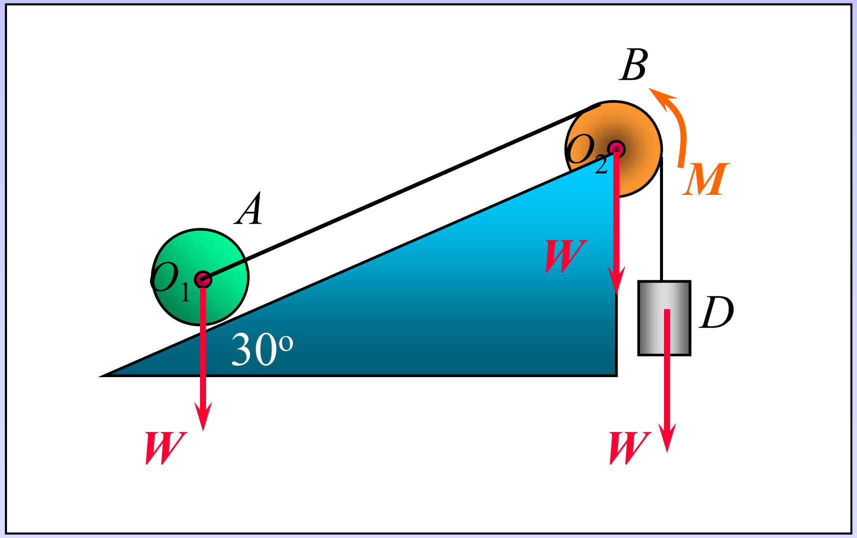
$$l\frac{3g}{4l}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 = l\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1)\sin\varphi_1$$

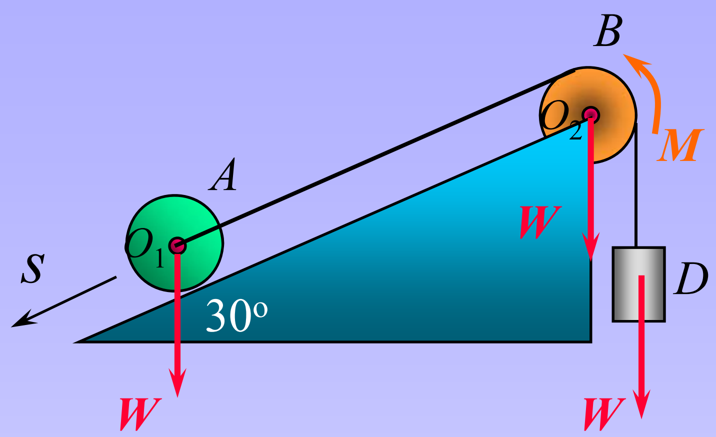
整理后，求得杆开始脱离墙时与墙所成的夹角

$$\varphi_1 = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\cos\varphi_0\right)$$

§4-6 动力学普遍定理的综合应用

例题12 匀质圆轮A和B的半径均为r，圆轮A和B以及物块D的重量均为$\boldsymbol{W}$，圆轮B上作用有力偶矩为M的力偶。圆轮A在斜面上向下作纯滚动，不计圆轮$\boldsymbol{B}$的轴承的摩擦力。求：1. 物块$\boldsymbol{D}$的加速度；2. 二圆轮之间的绳索所受拉力；3. 圆轮$\boldsymbol{B}$处的轴承约束力。





解：1. 确定物块的加速度

对系统整体应用动能定理

$$T_2 - T_1 = \sum W$$

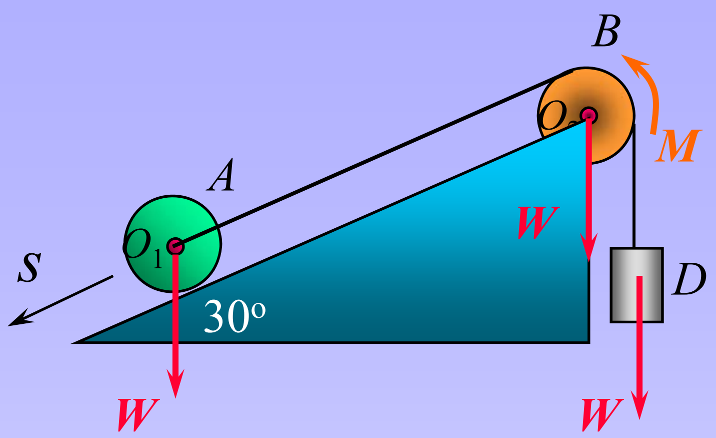
$$T_2 = \frac{1}{2}m_D v_D^2 + \frac{1}{2}J_{O_2}\omega_B^2 + \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}J_{O_1}\omega_A^2$$

$$\sum W = W_{GD} + W_{GA} + W_M$$

代入动能定理得

$$\frac{1}{2}\frac{W}{g}v_D^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{W}{g}r^2\right)\omega_B^2 + \frac{1}{2}\frac{W}{g}v_A^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{W}{g}r^2\right)\omega_A^2 - T_1$$

$$= -Ws + W\sin 30^\circ s + M\varphi_B$$



$$\frac{1}{2}\frac{W}{g}v_D^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{W}{g}r^2\right)\omega_B^2+\frac{1}{2}\frac{W}{g}v_A^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{W}{g}r^2\right)\omega_A^2-T_1$$

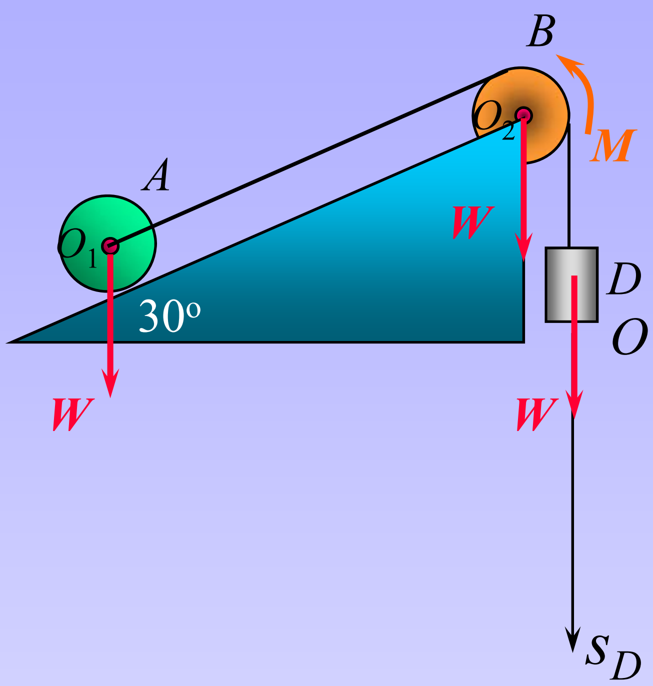
$$=-Ws\ +W\sin30^\circ s+M\varphi_B$$

将所有运动量都表示成广义坐标 s 的形式

$$\varphi_B=\frac{s}{r},\quad v_D=v_A=\dot{s},\quad \omega_A=\omega_B=\frac{v_D}{r}=\frac{\dot{s}}{r}$$

整理得

$$\frac{3}{2}\frac{W}{g}v_D^2-T_1=\left(\frac{M}{r}-\frac{W}{2}\right)s$$



$$\frac{3}{2}\frac{W}{g}v_D^2 - T_1 = (\frac{M}{r} - \frac{W}{2})s_D$$

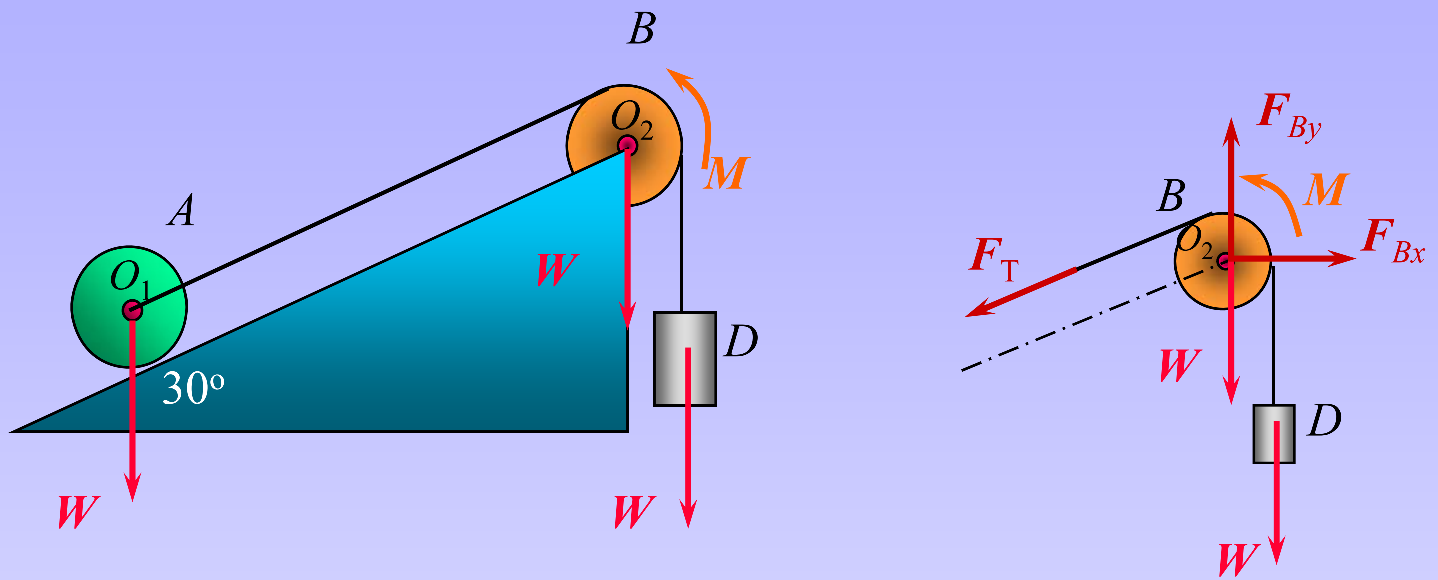
为求物块的加速度，将等式两边对时间求一阶导数，得到

$$3\frac{W}{g}v_D a_D = (\frac{M}{r} - \frac{W}{2})v_D$$

解得

$$a_D = \frac{2M - rW}{6rW}g$$

2. 确定圆轮A和B之间绳索的拉力



解除圆轮B轴承处的约束，将AB段绳索截开，对圆轮B、绳索和物块D组成的局部系统应用动量矩定理

$$\frac{1}{2}\frac{W}{g}r^2\alpha_B+\frac{W}{g}a_D r=M-(W-F_{\mathrm{T}})r$$

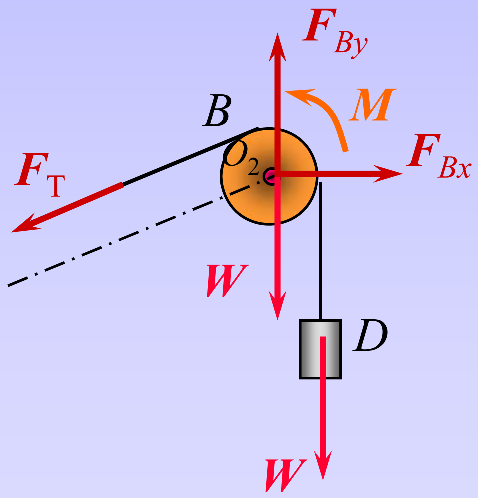
$$\frac{1}{2}\frac{W}{g}r^2\alpha_B+\frac{W}{g}a_D r=M-(W-F_{\mathrm{T}})r$$

根据运动学关系

$$a_D = r\alpha_B$$

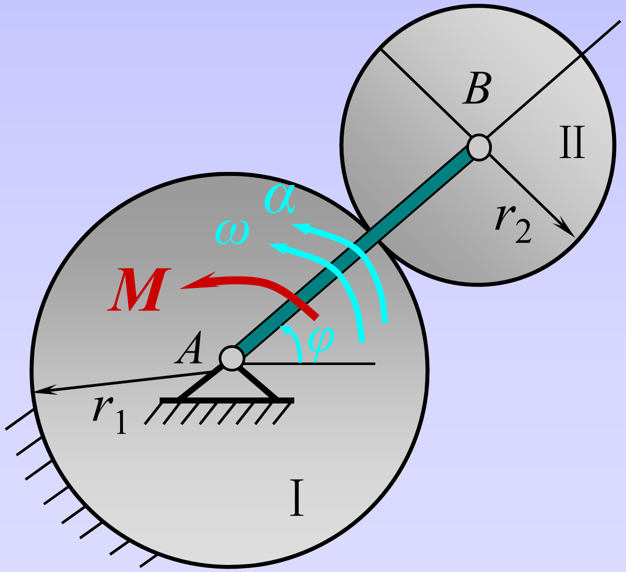
$$\frac{3}{2}\frac{W}{g}a_D=\frac{M}{r}-W+F_{\mathrm{T}}$$

$$F_{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}W-\frac{M}{r})$$



§4-6 动力学普遍定理的综合应用

例题4-13 行星齿轮机构在水平面内运动。质量为m的均质曲柄AB带动行星齿轮II在固定齿轮I上纯滚动。齿轮II的质量为m_2，半径为r_2。定齿轮I的半径为r_1。杆与轮铰接处的摩擦力忽略不计。当曲柄受力偶矩为M的常力偶作用时，求杆的角加速度α及轮II边缘所受切向力F。

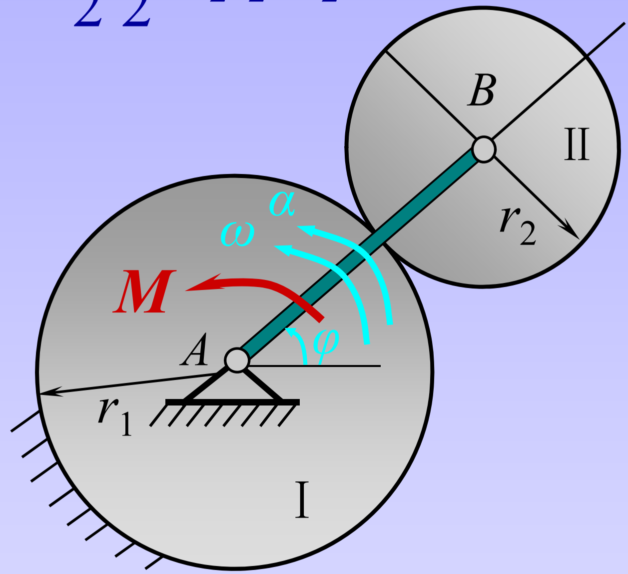


解:

1. 求杆的角加速度*α*

$$T=\frac{1}{2}\frac{1}{3}m(r_1+r_2)^2\omega^2+\frac{1}{2}m_2(r_1+r_2)^2\omega^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}m_2r_2^2\omega_2^2$$

运动学条件 $\omega_2=(r_1+r_2)\omega/r_2$



$$T=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m+\frac{3}{2}m_2)(r_1+r_2)^2\omega^2$$

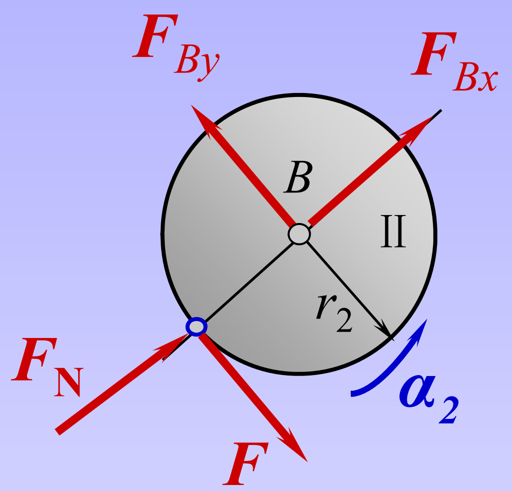
主动力系的元功为 $\mathrm{d}'W=M\mathrm{d}\varphi$

由动能定理得

$$(\frac{1}{3}m+\frac{3}{2}m_2)(r_1+r_2)^2\omega d\omega=Md\varphi$$

$$\alpha=\frac{6M}{(2m+9m)(r_1+r_2)^2}$$

2. 求轮II边缘所受切向力F



取轮II为研究对象，画受力图。

由对质心的动量矩定理得

$$\frac{1}{2}m_2r_2^2\alpha_2 = Fr_2$$

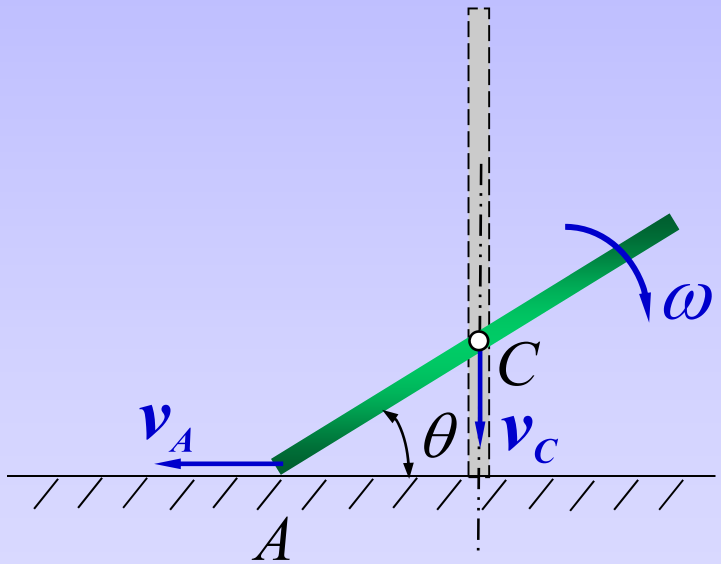
因为轮II作纯滚动，故有

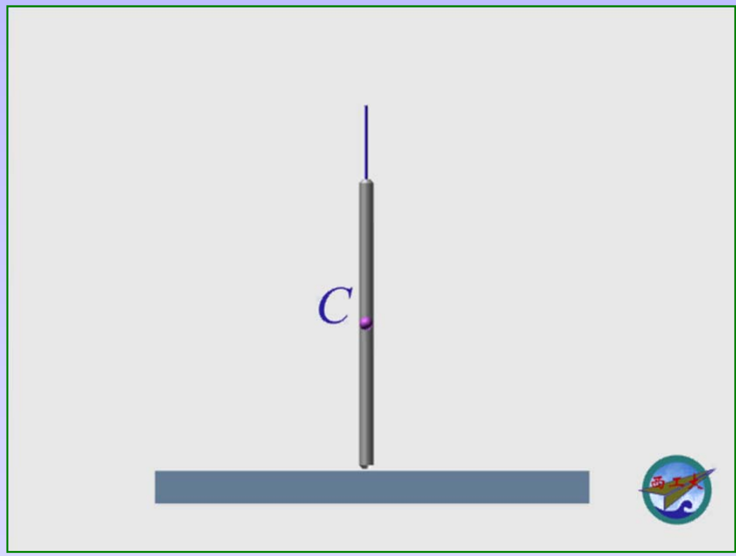
$$\alpha_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\alpha$$

$$F = \frac{3Mm_2}{(2m+9m_2)(r_1+r_2)}$$

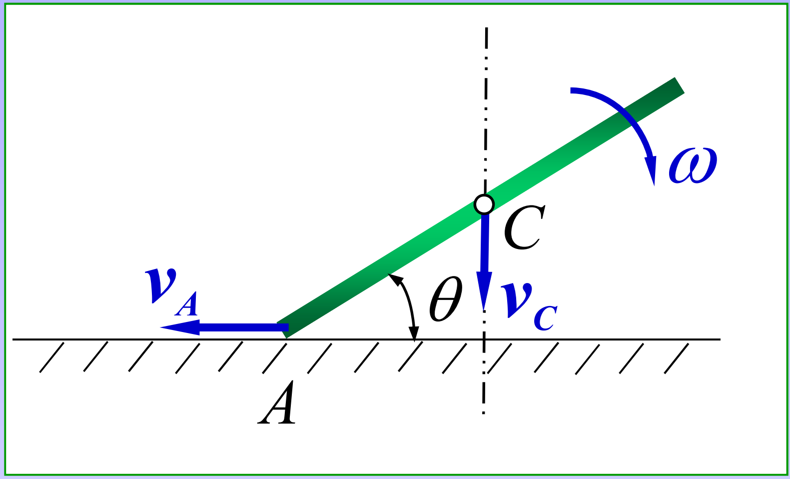
例题 4-14

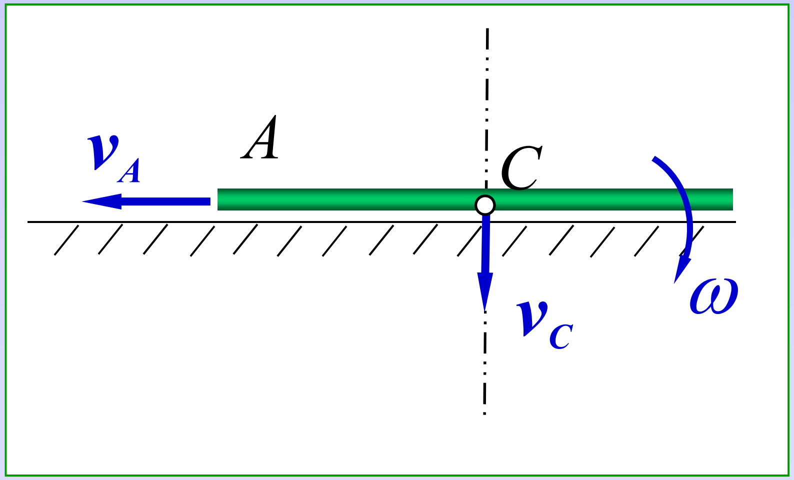
例题4-14 长为l、质量为m的均质细杆静止直立于光滑水平面上。当杆受微小干扰而倒下时，求杆刚刚到达地面时的角速度和地面约束力。





解： 由质心运动定理可知，直杆在倒下过程中其质心将铅直下落。





1. 求杆刚刚到达地面时的角速度

杆刚刚到达地面时，A点为瞬心

$$v_C = \frac{1}{2} l\omega$$

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 = \frac{1}{6} m l^2 \omega^2$$

由动能定理得： $\frac{1}{6} m l^2 \omega^2 = \frac{1}{2} mgl$

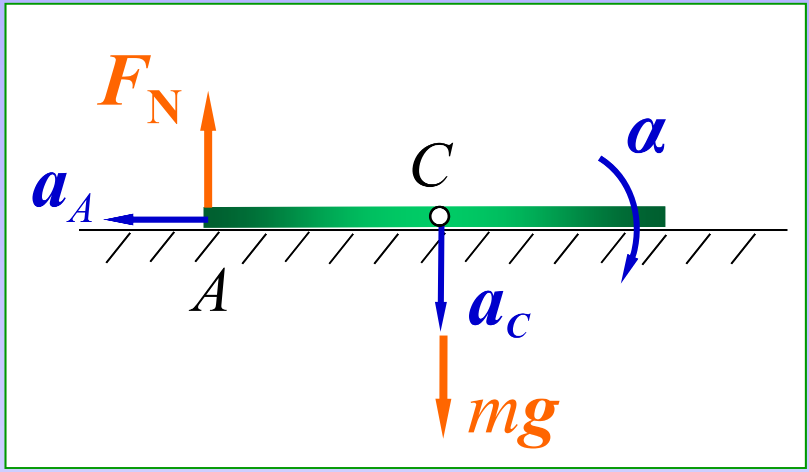
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

2. 求杆刚刚到达地面时的地面约束力

由刚体的平面运动微分方程得

$$mg - F_{\mathrm{N}} = ma_C$$

$$F_{\mathrm{N}} \frac{l}{2} = \frac{1}{12} ml^2 \alpha$$



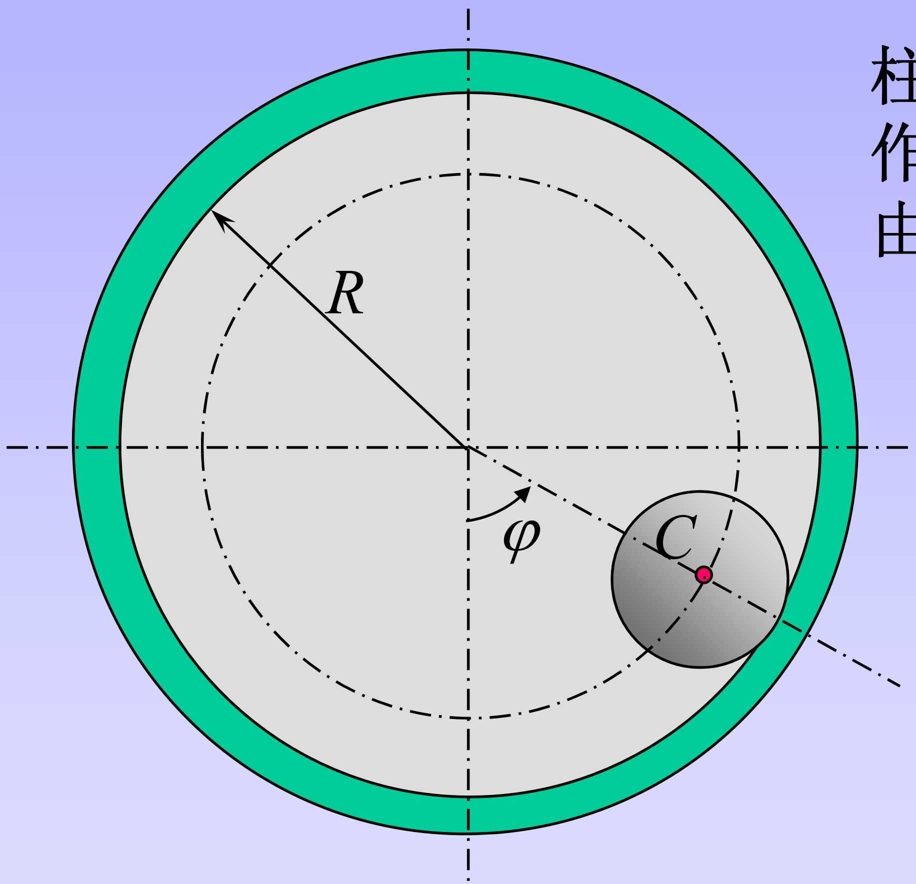
由运动学知识有

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{r\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{r\mathrm{n}}$$

将上式沿铅垂方向投影，得

$$a_C = a_{r\mathrm{t}} = \frac{1}{2} l \alpha$$

联立求解得 $$F_{\mathrm{N}} = \frac{1}{4} mg$$

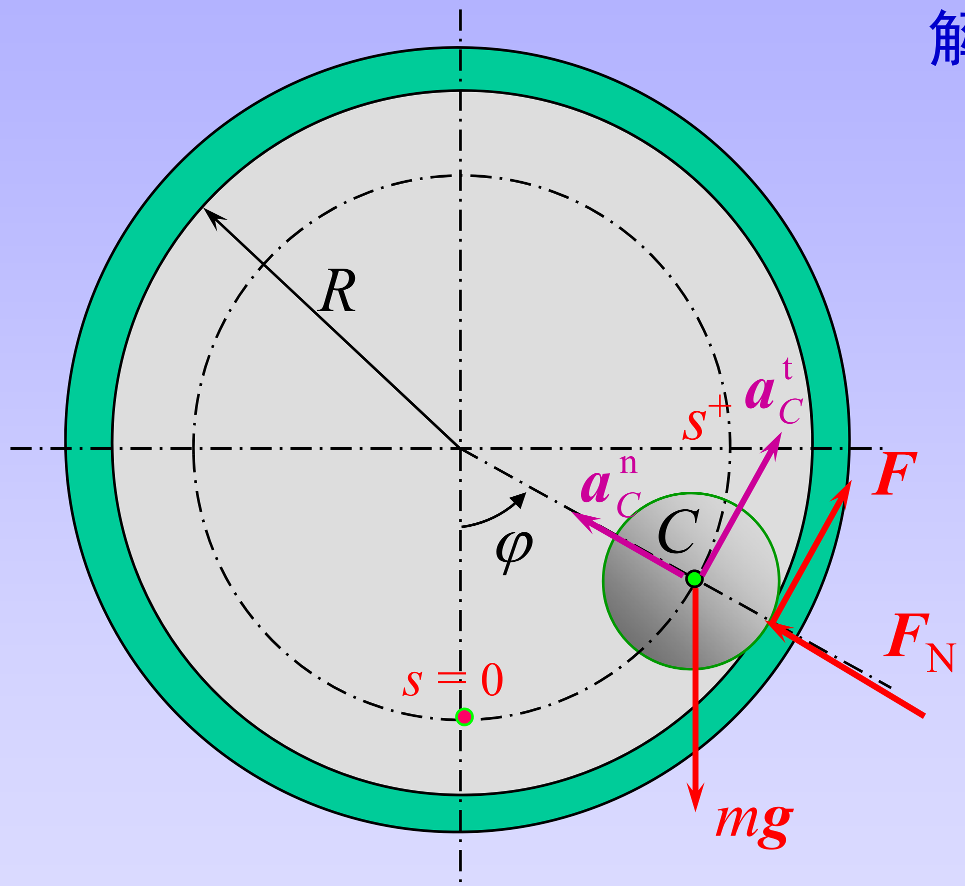


例题 4-15

半径为r、质量为 m的均质圆柱体，在半径为 R 的刚性圆槽内作纯滚动 。在初始位置$\varphi = \varphi_0$，由静止向下滚动。

试求：

1. 圆柱体的运动微分方程；
2. 圆槽对圆柱体的约束力；
3. 微振动周期与运动规律。



解： 圆柱体受力分析。

mg—重力；

F—滑动摩擦力；

F_N—圆槽对圆柱体的约束力。

圆柱体作平面运动，取弧坐标s与圆柱体质心轨迹重合。

1、圆柱体的运动微分方程

根据自然轴系中，质心运动定理的投影形式，圆柱体的平面运动微分方程

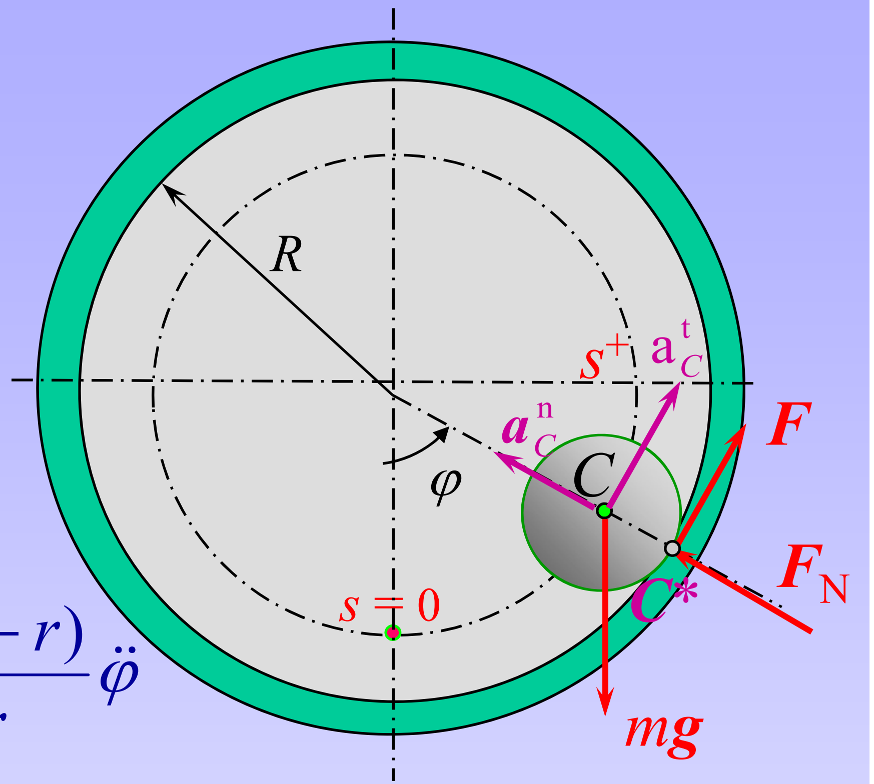
$$ma_C^{\mathrm{t}} = m(R-r)\ddot{\varphi} = F - mg\sin\varphi$$

$$ma_C^{\mathrm{n}} = m(R-r)\dot{\varphi}^2 = F_{\mathrm{N}} - mg\cos\varphi$$

$$J_C\alpha = -Fr$$

C^* 为瞬心，由运动学知识得

$$v_C = (R-r)\dot{\varphi}r = r\omega,\qquad \dot{\omega} = \alpha = \frac{(R-r)}{r}\ddot{\varphi}$$



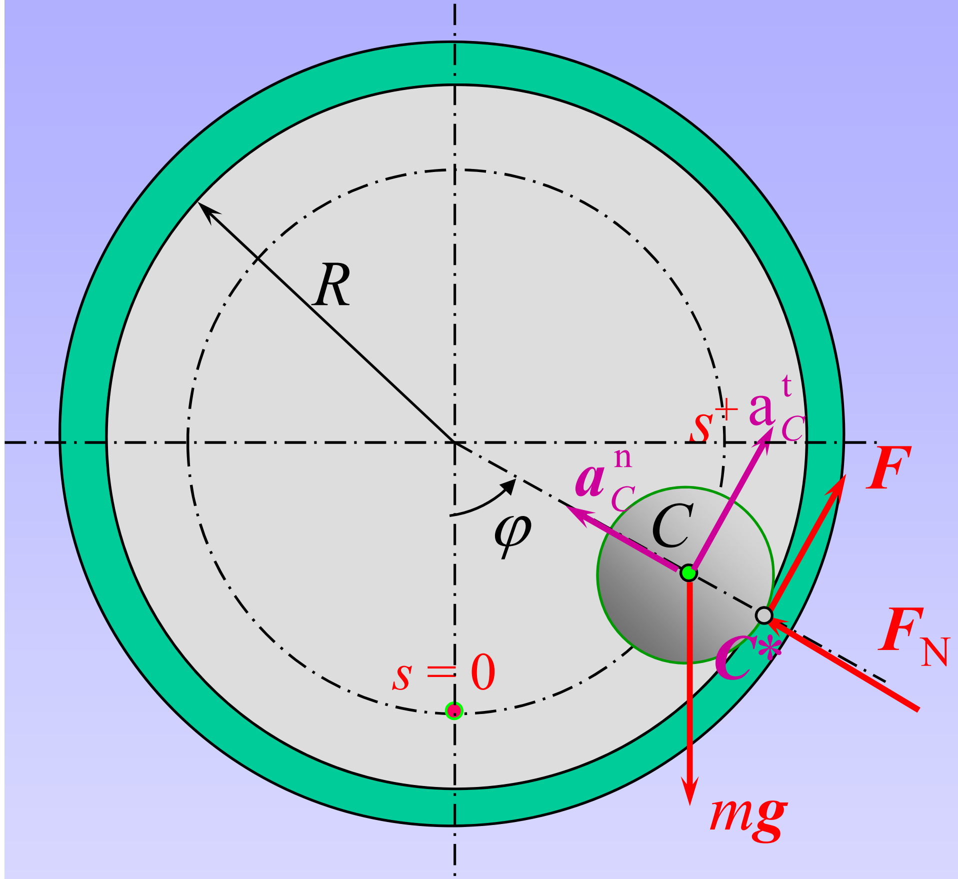
联立求解得

$$-\frac{1}{2}m(R-r)\ddot{\varphi} = F$$

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$

这是角度φ大小都适用的圆柱体非线性运动微分方程。

2. 圆槽对圆柱体的约束力



由第二个运动微分方程

$$ma_C^n = m(R-r)\dot{\varphi}^2 = F_N - mg\cos\varphi$$

圆槽对圆柱体的约束力为：

$$F_N = mg\cos\varphi + m(R-r)\dot{\varphi}^2$$

$$F = -\frac{1}{2}m(R-r)\ddot{\varphi}$$

F_N——法向力

F——摩擦力

3. 微振动的周期与运动规律

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi}+g\sin\varphi=0$$

φ很小时，$\sin\varphi\approx\varphi$ ， 非线性微分方程线性化

$$\ddot{\varphi}+\frac{2g}{3(R-r)}\varphi=0$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}\ , \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

线性微分方程的一般解为

$$\varphi = A\sin(\omega_0 t + \alpha)。$$

求导得

$$\dot{\varphi} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

A和α为待定常数，由运动的初始条件确定。

初始条件 $t = 0,\quad \varphi = \varphi_0,\quad \dot{\varphi}_0 = 0$

代入上式得 $\varphi_0 = A\sin\alpha,\qquad 0 = A\omega_0\cos\alpha$

$$A = \varphi_0,\qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = \varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}t\right)$$

谢谢使用