§5 随机变量函数的分布

背 景

在许多实际问题中,常常需要研究随机变量的函数的分布问题, 例如:

- 测量得到的是圆轴截面的直径 d，关心的却是圆轴截面积 $S=\pi d^2/4$。
- 测量得到的是分子速度v，要获得分子运动的动能 $T=mv^2/2$。
- 测量得到的是飞机速度v，求飞机机翼受到的压力 $W=kv^2$。

上述问题中，d 和v 是RV，则S和T分别为 d 和v 的函数。

一般地，若RV X 的分布已知，$Y = g(X)$ (g 是普通函数），于是产生两个问题：

☞ Y 是不是RV？

一般， 当g 是分段连续、分段单调函数时，Y 就是RV，

如： $Y=aX+b$，$Y=\sin X$，$Y=|X-a|$，等。

☞ 如果Y 是RV，则Y 的分布是什么？

本节将在 $g(\cdot)$是连续函数的情况下，讨论

$Y = g(X)$ 的分布。

例1 离散型RV X 的分布律为

X	-1	0	1	2	3
p_k	$1/5$	$1/10$	$1/10$	$3/10$	$3/10$

求$Y=(X-1)^2$的分布律 。

解:关键要求出RV Y 的所有可能取值及其相应的概率

X	-1	0	1	2	3
Y					

X	-1	0	1	2	3
p_k	$1/5$	$1/10$	$1/10$	$3/10$	$3/10$
Y	4	1	0	1	4

$$P\{Y=0\}=P\{(X-1)^2=0\}=P\{X=1\}=1/10$$

$$P\{Y=1\}=P\{(X-1)^2=1\}=P\{(X=0)\cup(X=2)\}$$

$$=P\{X=0\}+P\{X=2\}=1/10+3/10=4/10$$

$$P\{Y=4\}=P\{(X-1)^2=4\}=P\{(X=-1)\cup(X=3)\}$$

$$=P\{X=-1\}+P\{X=3\}=1/5+3/10=5/10$$

一般求解离散型RV X 的函数$Y=g(X)$的分布律步骤:

① 由$y=g(x)$确定Y的所有可能取值$y_1, y_2, \ldots, y_k$;

② 确定Y取每一个可能取值y_k的概率。

$$P\{Y=y_k\}=P\{g(X)=y_k\}$$

$$\xlongequal{\text{等价于}} P\{X\in\{x_i \mid g(x_i)=y_k\}\}$$

$$=\sum_{x_i:g(x_i)=y_k} P\{X=x_i\}$$

例2 设RV *X* 的PDF为 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$

求 *Y*=*X*−4 的PDF 。

解: $F_Y(y)=\mathrm{P}\{Y\le y\}=\mathrm{P}\{X-4\le y\}=\mathrm{P}\{X\le y+4\}=F_X(y+4)$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=F_X{}'(y+4)\ \overset{\text{复合函数}}{\underset{\text{求导法则}}{=\!=\!=\!=}}\ f_X(y+4)\times(y+4)'$$

$$=f_X(y+4)=\begin{cases}2(y+4), & 0<(y+4)<1\\ 0, & else\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2y+8, & -4<y<-3\\ 0, & else\end{cases}$$

此例给出了连续型**RV**函数的分布的一般求解方法：**分布函数法**。

分布函数法

设RV X 的PDF为 $f_X(x)$，$g(\cdot)$是连续函数，则 $Y=g(X)$ 的PDF $f_Y(y)$ 可由如下步骤获得：

① 求$Y=g(X)$的CDF；

$$F_Y(y) \overset{\text{CDF定义}}{=\!=\!=} \mathrm{P}\{Y \le y\} = \mathrm{P}\{g(X) \le y\}$$

$$\overset{\text{等价}}{=\!=\!=} \mathrm{P}\left\{X \in \{x | g(x) \le y\}\right\}$$

$$= \int_{g(x) \le y} f_X(x)\,dx$$

- 用X的CDF形式表示
- 用积分上/下限函数表示

② $f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy}$

例3 设RV X的PDF为 $f_X(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，求$Y=X^2$的PDF。

解： $\because Y=X^2\geq 0$

$\therefore$当$y\leq 0$, $\{Y\leq y\}=\varnothing$ 故$F_Y(y)=0.$

而当$y>0$, $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\left\{X^2\leq y\right\}$

$$=P\left\{-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\right\}$$

$$=F_X\left(\sqrt{y}\right)-F_X\left(-\sqrt{y}\right)$$

$$y>0,\ F_Y(y)=F_X\left(\sqrt{y}\right)-F_X\left(-\sqrt{y}\right)$$

$$\therefore f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=f_X\left(\sqrt{y}\right)\times\left(\sqrt{y}\right)'-f_X\left(-\sqrt{y}\right)\times\left(-\sqrt{y}\right)'$$

$$=f_X\left(\sqrt{y}\right)\times\left(\frac{1}{2}y^{-1/2}\right)-f_X\left(-\sqrt{y}\right)\times\left(-\frac{1}{2}y^{-1/2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right]$$

故 $$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right], & y>0\\ 0, & else\end{cases}$$

结论

利用上述结论，特别地当 $X\sim N(0,1)$ 时，$Y=X^2$ 的PDF为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}\right], & y>0\\ 0, & else\end{cases}$$

即

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-1/2}e^{-y/2}, & y>0\\ 0, & else\end{cases}$$

Y 具有上式PDF，称Y 服从自由度为1的 χ^2分布

Kai-square Distribution，记为 $\chi^2(1)$ 。

标准正态分布的一个**重要结论：**

若$X \sim N(0,1)$，则 $X^2 \sim \chi^2(1)$ 。

下面给出求RV函数分布的一个定理：

定理： 设RV X 有PDF $f_X(x)$，$x\in R$，又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有$g'(x)>0$（或 $g'(x)<0$），则 $Y=g(X)$ 是连续型RV，其PDF为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left[h(y)\right]\cdot\left|h'(y)\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & else \end{cases}$$

其中 $\alpha=Min\{g(-\infty),g(+\infty)\}$,

$\beta=Max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$,

$h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数。

定理推广

☞ 若RV X 的PDF为 $f_X(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 上取值（区间外取值为0），只需设 $g'(x)$ 在 $[a, b]$ 恒大于0或恒小于0，则上述定理结论仍然成立，其中

$$\alpha = Min\{g(a), g(b)\}, \beta = Max\{g(a), g(b)\}。$$

☞ 若 $g(x)$ 是分段单调连续函数时，可以分段区间内利用上述定理求出每段区间上的 $f_k(x)$, 然后

$$f_Y(y) = \sum_k f_k(y)$$

上述定理也给出了求解连续型RV函数分布的一种方法，称为:

公式法

例4 设RV $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，试证：$Y = aX + b$（$a \neq 0$）也服从正态分布。

证：$y = g(x) = ax + b, \quad g'(x) = a$，单调

反函数$h(y) = \dfrac{y-b}{a}$，$h'(y) = \dfrac{1}{a}$，当$x \in R$时，有$y \in R$.

$$\therefore f_Y(y) = f_X\left[h(y)\right] \cdot \left|h'(y)\right|, \quad -\infty < y < \infty$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} e^{-\frac{\left[y-(a\mu+b)\right]^2}{2a^2\sigma^2}} \sim N\left(a\mu+b, a^2\sigma^2\right)$$

重要结论

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则

$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

特例

当若 $a = 1/\sigma, b = -\mu/\sigma$，则 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

即一般正态分布的标准化。

例5 设**RV** $X \sim U(-1,1)$, 求$Y=\sqrt{|X|}$的**PDF**. 分布函数法

解: $F_Y(y)=\mathrm{P}\{Y\le y\}=\mathrm{P}\left\{\sqrt{|X|}\le y\right\}=\begin{cases}0 & , y\le 0\\ \mathrm{P}\left\{-y^2<X<y^2\right\}, & y>0\end{cases}$

$$=\begin{cases}0\ , & y\le 0\\ F_X(y^2)-F_X(-y^2), & else\end{cases}$$

$$\therefore f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}0\ , & y\le 0\\ f_X(y^2)(y^2)'-f_X(-y^2)(-y^2)', & y>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0\ , & y\le 0\\ (1/2)2y-(1/2)(-2y)\ , & 0<y\le 1\\ 0\ , & y>1\end{cases}=\begin{cases}2y, & 0<y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

例5 设**RV** $X \sim U(-1,1)$, 求$Y=\sqrt{|X|}$的**PDF**.

公式法? $y=\sqrt{|x|}$ 为分段单调函数

$$\begin{cases} x \le 0,\ y=\sqrt{|x|} \text{ 为单调减函数} \\ x > 0,\ y=\sqrt{|x|} \text{ 为单调增函数} \end{cases}$$

$$\therefore f_Y(y)=\sum_{k=1}^{2} f_k(y) = \begin{cases} f_X\left(-y^2\right)\cdot\left|\left(-y^2\right)'\right|, & y>0 \\ 0 & ,y\le 0 \end{cases} + \begin{cases} f_X\left(y^2\right)\cdot\left|\left(y^2\right)'\right|, & y>0 \\ 0 & ,y\le 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} f_X(-y^2)(2y)+f_X(y^2)(2y), & y>0 \\ 0 & ,y\le 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2y, & 0<y\le 1 \\ 0, & else \end{cases}$$

分布函数法结果

$$f_Y(y)=\begin{cases} 0\ , & y\le 0 \\ f_X(y^2)(y^2)'-f_X(-y^2)(-y^2)', & y>0 \end{cases}$$

例7 离散型RV X 的分布律为

X	-1	0	1	2	3
p_k	1/5	1/10	1/10	3/10	3/10

求$Y=-2X$ 和$Y=X^2$的分布律 。

解:

X	-1	0	1	2	3
$Y=-2X$					
$Y=X^2$					

X	-1	0	1	2	3
p_k	$1/5$	$1/10$	$1/10$	$3/10$	$3/10$

$Y=-2X$ 和 $Y=X^2$ 的分布律为

$Y=-2X$	2	0	-2	-4	-6
p_k					

$Y=X^2$	0	1	4	9
$Y=X^2$				

例6 设**RV** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求$Y = e^X$的**PDF**。

公式法

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma} \exp\left\{-\dfrac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & 0 < y < \infty \\ 0, & else \end{cases}$$

小结

介绍了RV函数分布的求解方法:

- 离散型RV函数
- 连续型RV函数(两种)

分布函数法 最基本方法，能解决很多问题

公式法 针对RV函数是单调函数或分段单调函数

注意 在计算RV函数分布时，要正确写出$Y=g(X)$的取值范围！！！

作业

Page 59：

第33, 35, 36, 37, 38题