第二章 基本力系

授课教师: 杨成鹏
手机: 13484615864
Email: yang@mail.nwpu.edu.cn
QQ: 371714439
群号: 585402615

基 本 力 系

第二章 基本力系

- § 2–1 共点力系合成的几何法及平衡的几何条件
- § 2–2 力的投影
- § 2–3 共点力系合成的解析法及平衡的解析条件
- § 2–4 力偶和力偶矩 ·力偶的等效条件
- § 2–5 力偶系的合成和平衡条件

第二章　基 本 力 系

平面力系 —— 各力的作用线都在同一平面内的力系，否则为空间力系。

汇交力系 —— 各力的作用线均汇交于一点的力系。

共点力系 —— 各力均作用于同一点的力系。

力　　偶 —— 作用线平行、指向相反而大小相等的两个力。

空间力系的类型
- 共点力系 } 基本力系
- 力 偶 系 } 基本力系
- 任意力系

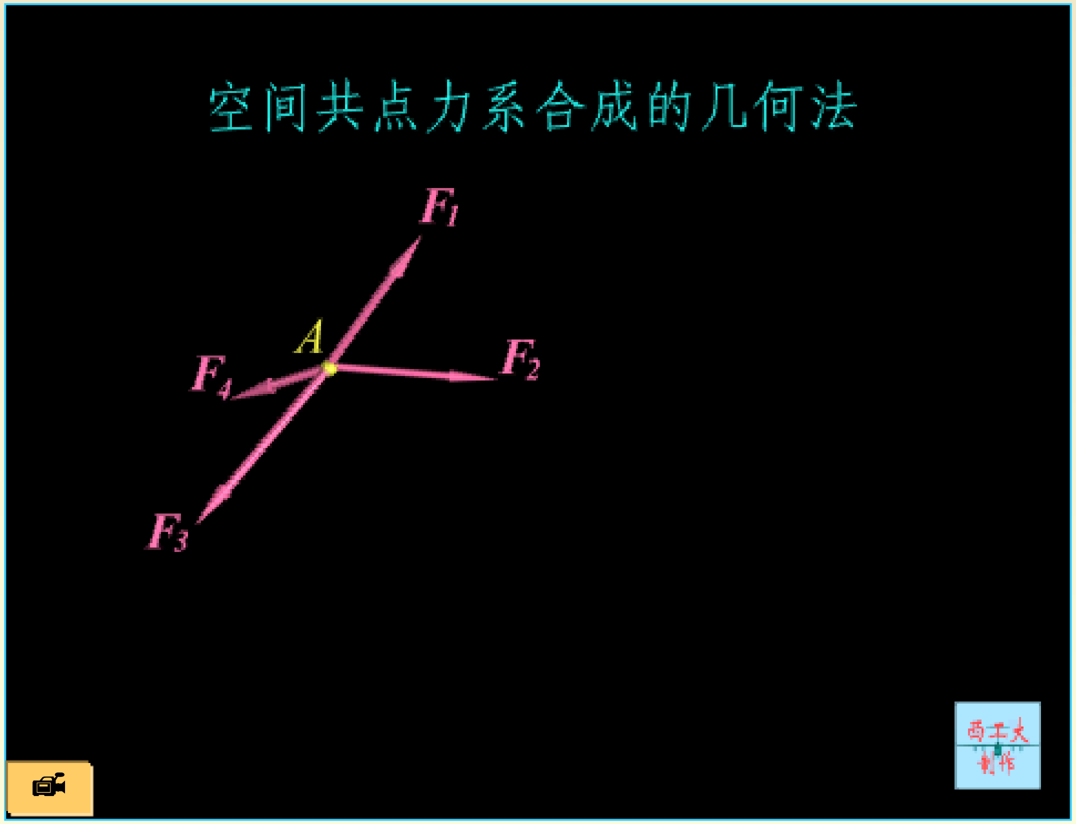
§2–1　共点力系合成的几何法及平衡的几何条件

- 共点力系合成的几何法
- 共点力系平衡的几何条件

1. 空间共点力系合成的几何法

结论：空间共点力系的合力等于力系中的各个力的矢量和。

或者说，合力是由这个力系的力多边形的闭合边来表示，即力多边形规则。



公式

$$F_R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum F_i$$

2. 空间共点力系平衡的几何条件

空间共点力系平衡的充要的几何条件是这力系的多边形自行闭合，即力系中各力的矢量和等于零。

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\sum \boldsymbol{F}_i=0$$

或 $$F_{\mathrm{R}}=F_1+F_2+\cdots+F_n=0$$

§2–2 力在轴上和平面上的投影

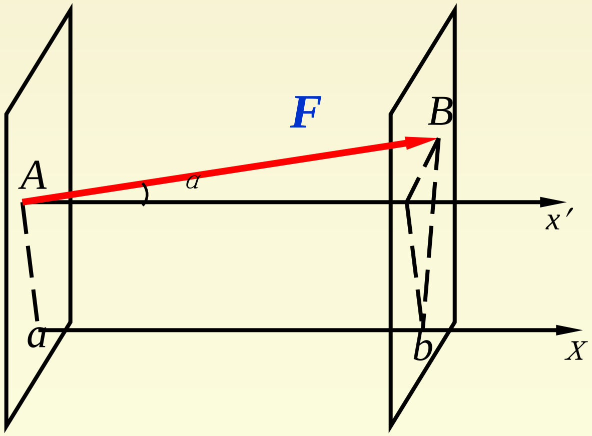
- 力在轴上的投影
- 力在平面上的投影

§ 2–2　力在轴上和平面上的投影

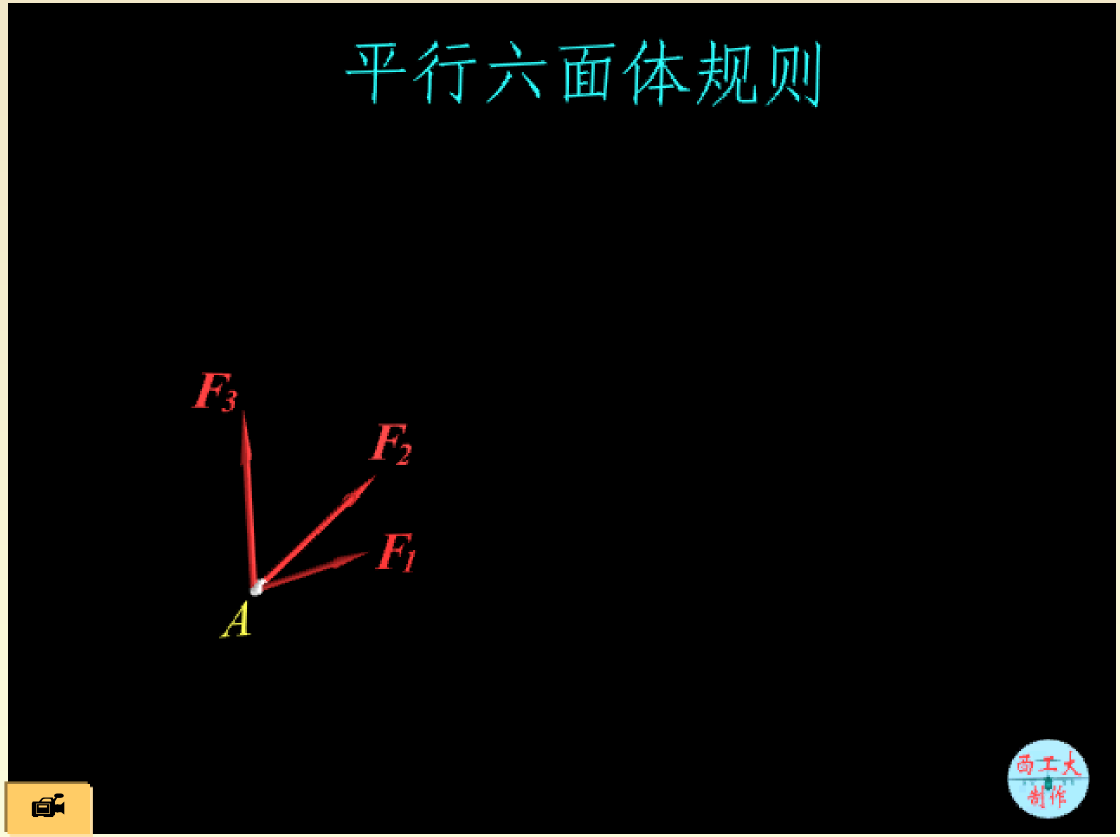
1. 力在轴上的投影

在空间情况下，力$\boldsymbol{F}$在x轴上投影，与平面情形相似，等于这个力的模乘以这个力与x轴正向间夹角α的余弦。

$$F_x = F \cdot \cos\alpha$$



§ 2–2　力在轴上和平面上的投影

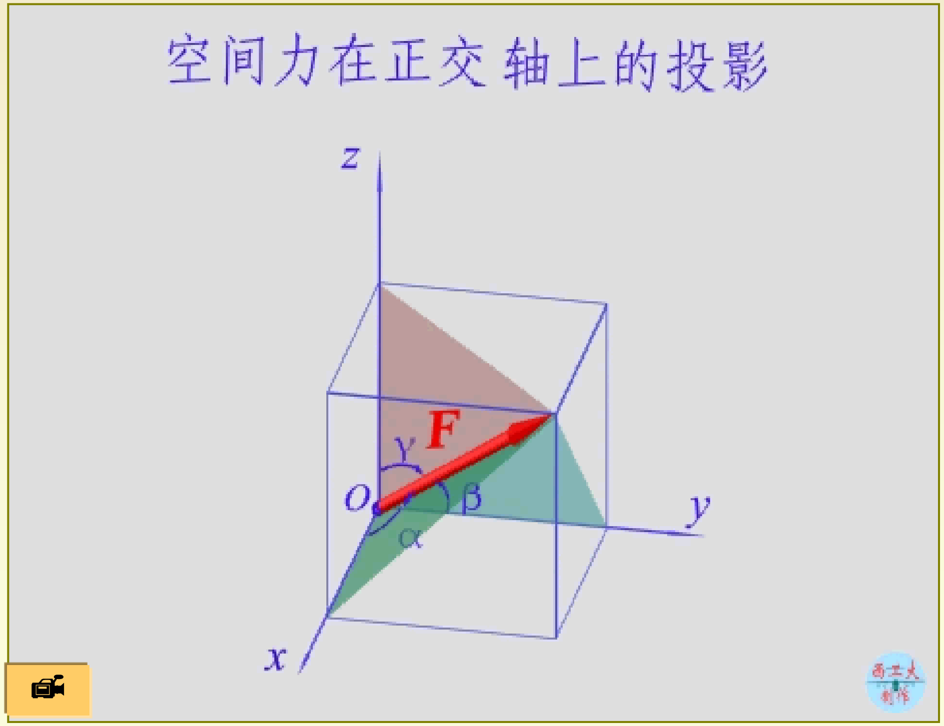


平
行
六
面
体
规
则

● 力的分解

设将力**F**按坐标轴x，y，z方向分解为空间三正交分量：$\boldsymbol{F}_x$，$\boldsymbol{F}_y$，$\boldsymbol{F}_z$。

则 $$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_x+\boldsymbol{F}_y+\boldsymbol{F}_z$$



引入x，y，z轴单位矢$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$。则有

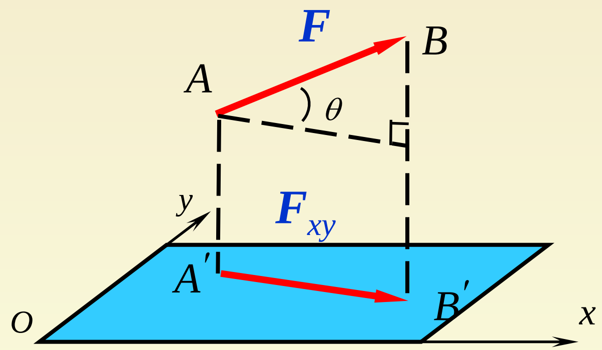
$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_x=F_x\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{F}_y=F_y\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{F}_z=F_z\boldsymbol{k}\end{cases}$$

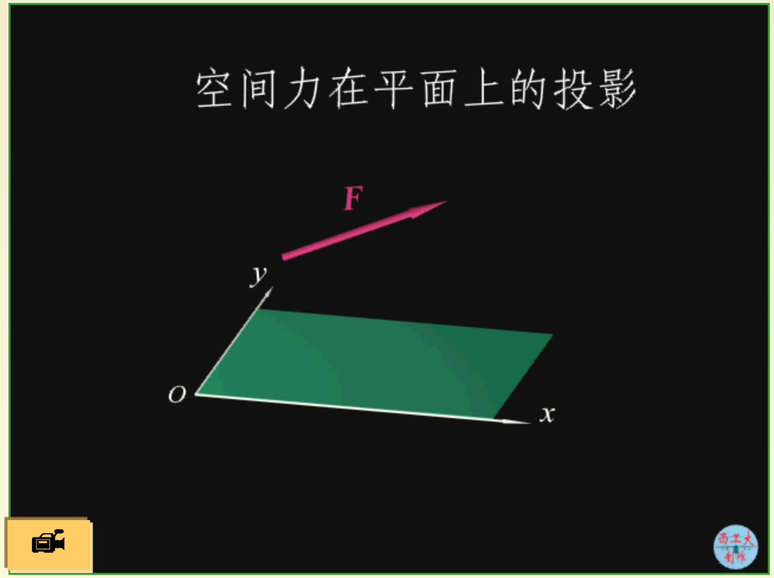
$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$$

2. 力在平面上的投影

由力矢$\boldsymbol{F}$的始端A和末端B向投影平面oxy引垂线，由垂足A'到B'所构成的矢量$A'B'$，就是力$\boldsymbol{F}$在平面Oxy上的投影，记为F_{xy}。

力F_{xy}的大小：$F_{xy} = F\cos\theta$





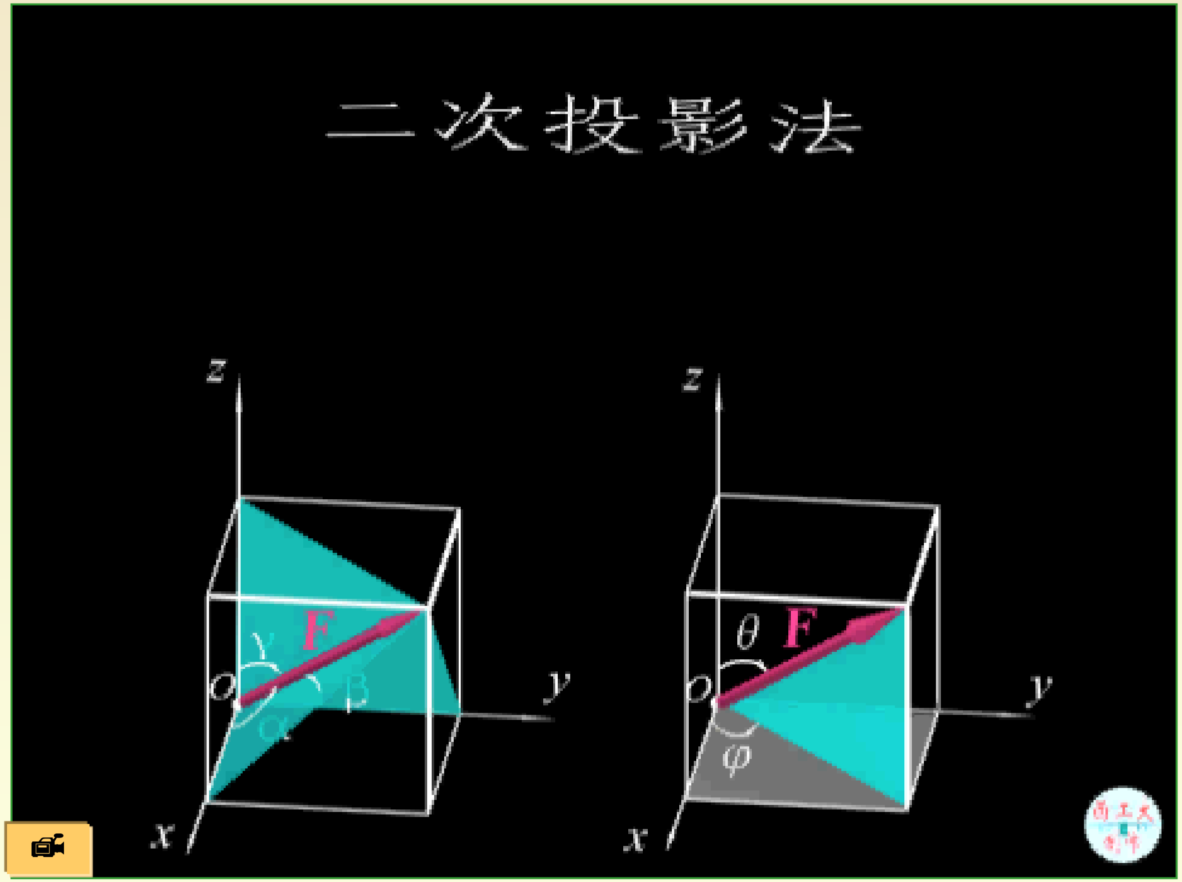
- 注意

力在轴上的投影是一代数量。

力在一平面上的投影仍是一矢量。

§ 2–2　力在轴上和平面上的投影

● 二次投影法

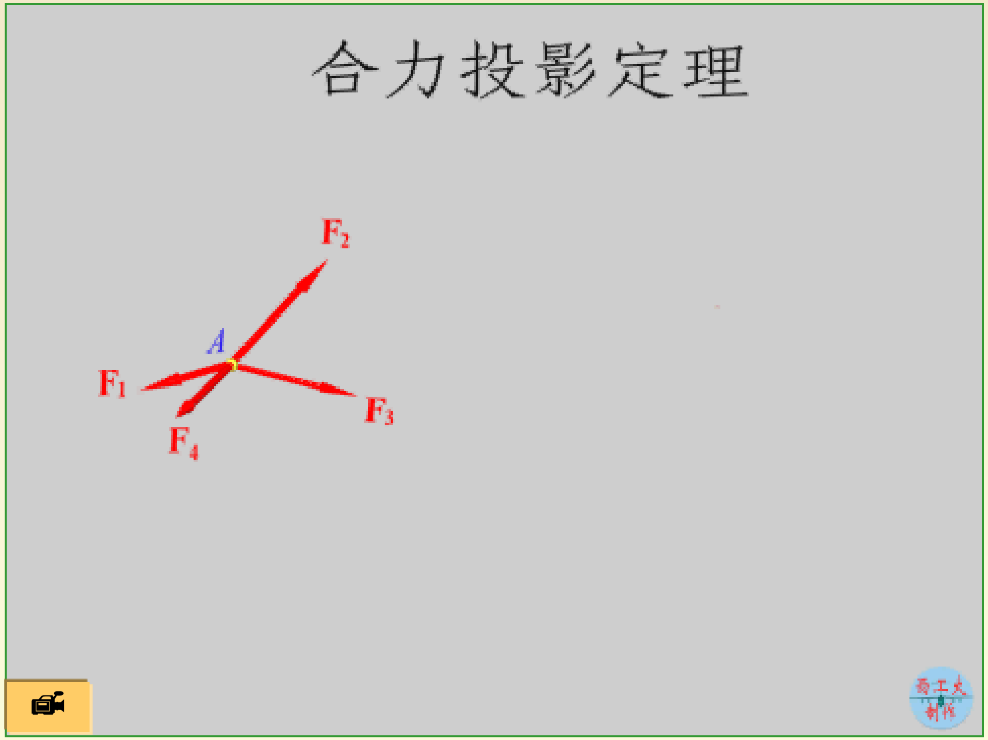


§2–3 共点力系合成的解析法及平衡的解析条件

- 合力投影定理
- 空间共点力系平衡的充要条件

1. 合力投影定理

共点力系的合力在某一轴上的投影，等于力系中所有各力在同一轴上投影的代数和。



$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = \sum F_{iy}$$

2. 共点力系合成的解析法

设在刚体上作用有*n*个力F_1、F_2、…、F_n，组成共点力系，取直角坐标系。设α、β、γ分别代表合力F_R与坐标轴*x*、*y*、*z*正向间的夹角。F_{Rx}、F_{Ry}、F_{Rz}代表合力F_R在坐标轴*x*、*y*、*z*上的投影。又F_{1x}、F_{1y}、F_{1z}，F_{2x}、F_{2y}、F_{2z}，…，F_{nx}、F_{ny}、F_{nz}分别为F_1、F_2、…、F_n在轴*x*、*y*、*z*上的投影，则由合力投影定理，可求得力系的合力在坐标轴上的投影

$$\left.\begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum F_{ix} \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum F_{iy} \\ F_{Rz} &= F_{1z} + F_{2z} + \cdots + F_{nz} = \sum F_{iz} \end{aligned}\right\}$$

于是，合力的大小

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} = \sqrt{\left(\sum F_{ix}\right)^2 + \left(\sum F_{iy}\right)^2 + \left(\sum F_{iz}\right)^2}$$

方向余弦

$$\cos\alpha = \frac{F_{Rx}}{F_R} = \frac{\sum F_{ix}}{F_R},\ \cos\beta = \frac{F_{Ry}}{F_R} = \frac{\sum F_{iy}}{F_R},\ \cos\gamma = \frac{F_{Rz}}{F_R} = \frac{\sum F_{iz}}{F_R}$$

3. 共点力系平衡的解析条件

共点力系平衡的充要条件是：力系中各力的矢量和等于零，即$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}= \mathbf{0}$。解析充要条件是：力系中各力在三个坐标轴中每一轴上的投影之代数和分别等于零。

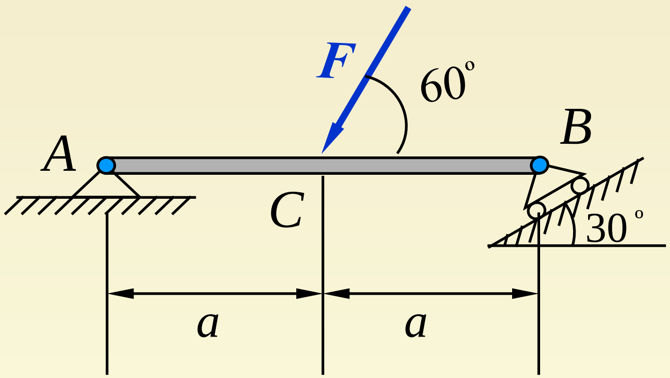
共点力系的平衡方程为

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

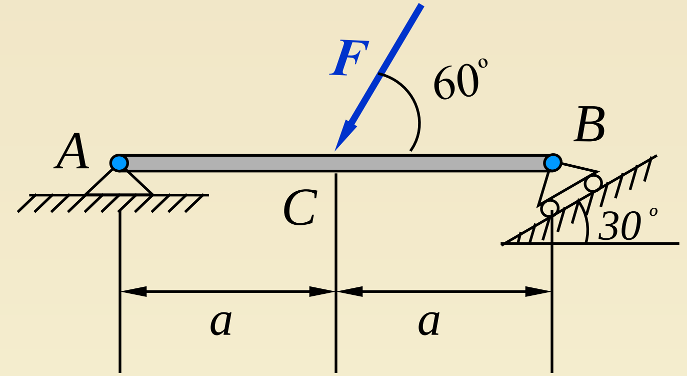
对于平面共点力系，其平衡方程简化为

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0$$

例 2–1 水平梁*AB*中点*C*作用着力***F***，其大小等于2 kN，方向与梁的轴线成60°角，支承情况如图所示，试求固定铰链支座*A*和活动铰链支座*B*的约束力，梁的自重不计。

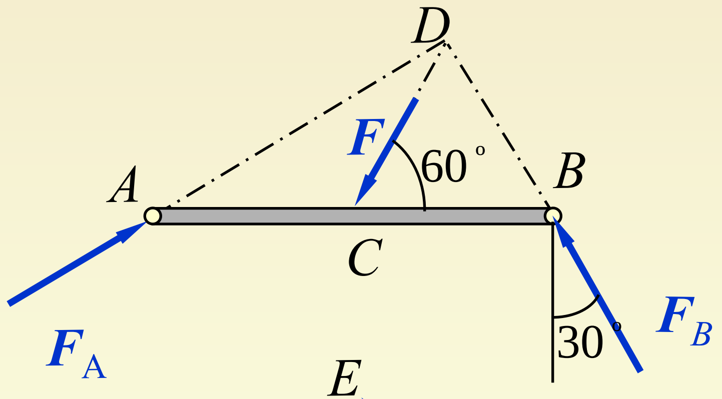


解： 1.　取梁*AB*作为研究对象。



2.　画出受力图。

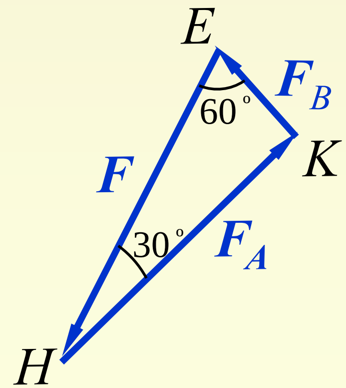
3.　应用平衡条件画出$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}_A$和$\boldsymbol{F}_B$的闭合力三角形。



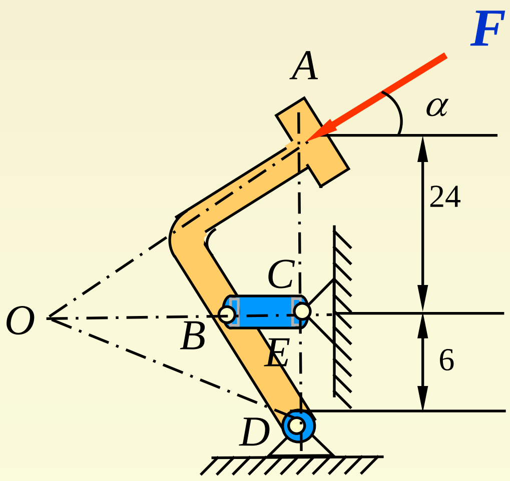
4.　解得

$$F_A=F\cos 30^\circ=17.3\ \text{kN}$$

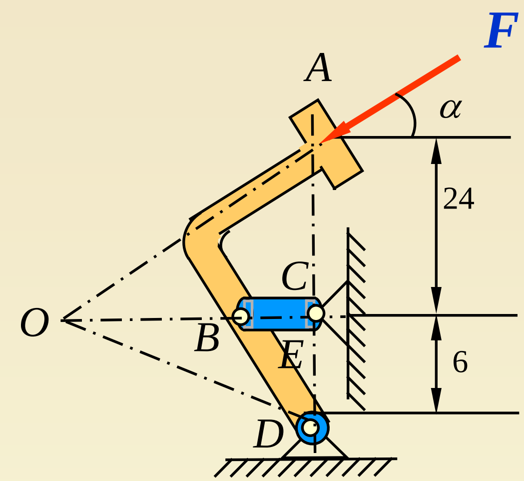
$$F_B=F\sin 30^\circ=10\ \text{kN}$$



例2–2　如图所示是汽车制动机构的一部分。司机踩到制动蹬上的力F=212 N，方向与水平面成α=45°。当平衡时，BC水平，AD铅直，试求拉杆所受的力。已知EA=24 cm，DE=6 cm(点E在铅直线DA上)，又B，C，D都是光滑铰链，机构的自重不计。



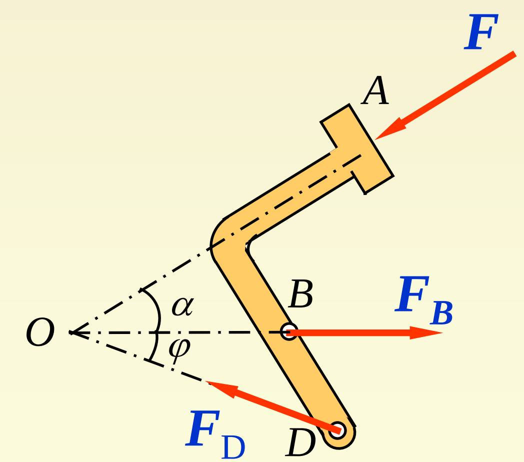
几何法：

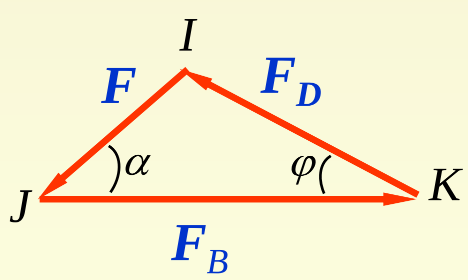


1. 取制动蹬*ABD*作为研究对象。

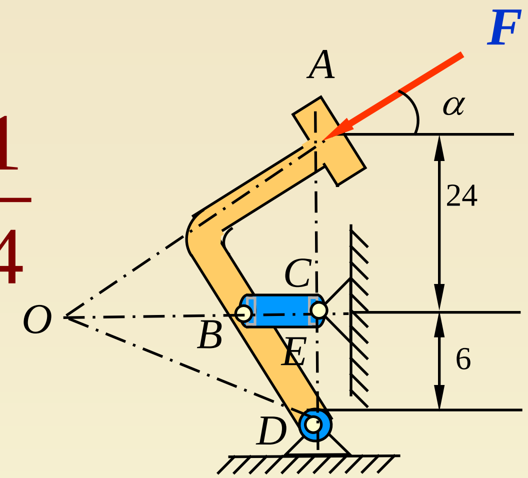
2. 画出受力图。

3. 应用平衡条件画出$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}_B$和$\boldsymbol{F}_D$的闭合力三角形。





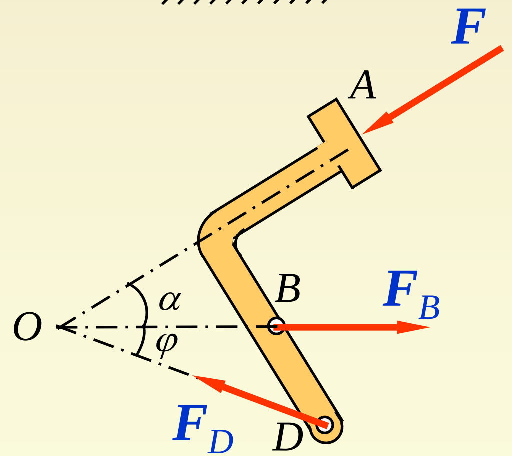
4. 由几何关系得 $OE=EA=24\ \text{cm}$



$$\Rightarrow \tan\phi=\frac{DE}{OE}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \varphi=\arctan\frac{1}{4}=14°2'$$

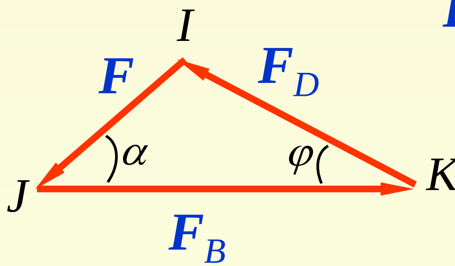
由力三角形可得 $F_B=\dfrac{\sin(180°-\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}F$



5. 代入数据求得

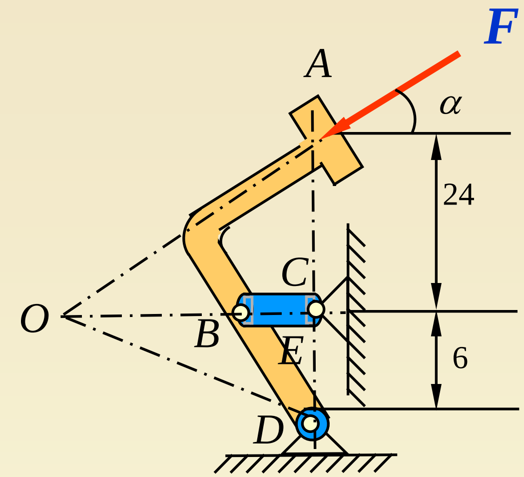
F_B=750 N

方向自左向右。



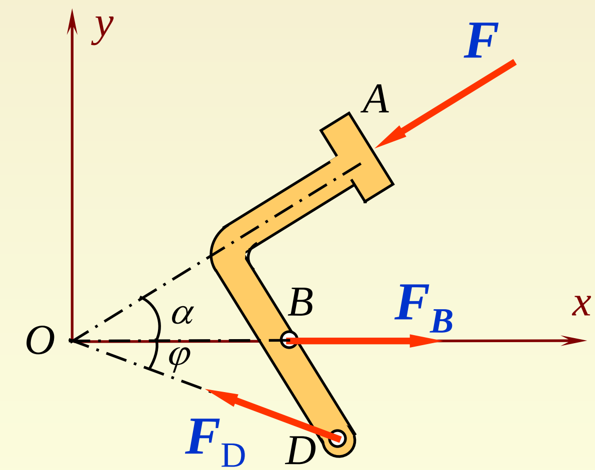
解析法：

1. 取制动蹬*ABD*作为研究对象。
2. 画出受力图。
3. 列平衡方程。



$$\sum F_x = 0,\quad F_B - F\cos 45^\circ - F_D\cos\varphi = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_D\sin\varphi - F\sin 45^\circ = 0$$



已知 $\varphi = 14^\circ 2'$

$\sin\varphi = 0.243$, $\cos\varphi = 0.969$

联立求解，得

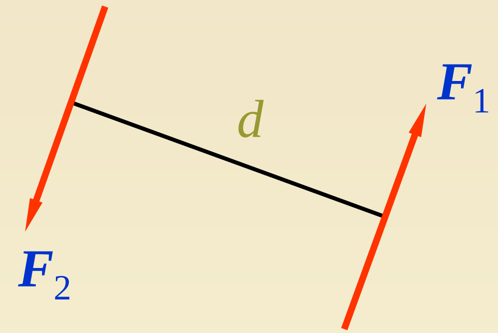
$$F_B = 750\ \text{N}$$

§2–4 力偶和力偶矩

- 力偶和力偶矩
- 力偶作用面的平移
- 力偶矩矢
- 力偶的等效条件

§ 2–4　力偶和力偶矩·力偶的等效条件

1.力偶和力偶矩



力偶 —— 大小相等的二反向平行力。

⑴ 作用效果：引起物体的转动。

⑵ 力和力偶是静力学的二基本要素。

力偶特性一：

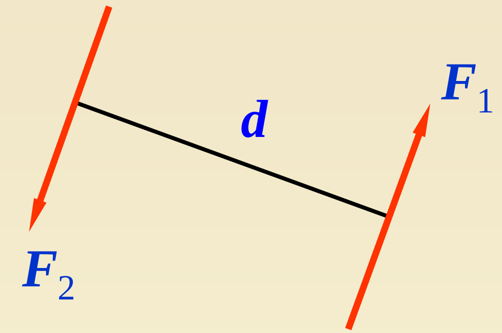
力偶中的二个力，既不平衡，也不可能合成为一个力。

力偶特性二：

力偶只能用力偶来代替（即只能和另一力偶等效），因而也只能与力偶平衡。

§ 2–4　力偶和力偶矩·力偶的等效条件

1.力偶和力偶矩



力偶 —— 大小相等的二反向平行力。

(1) 作用效果：引起物体的转动。

(2) 力和力偶是静力学的二基本要素。

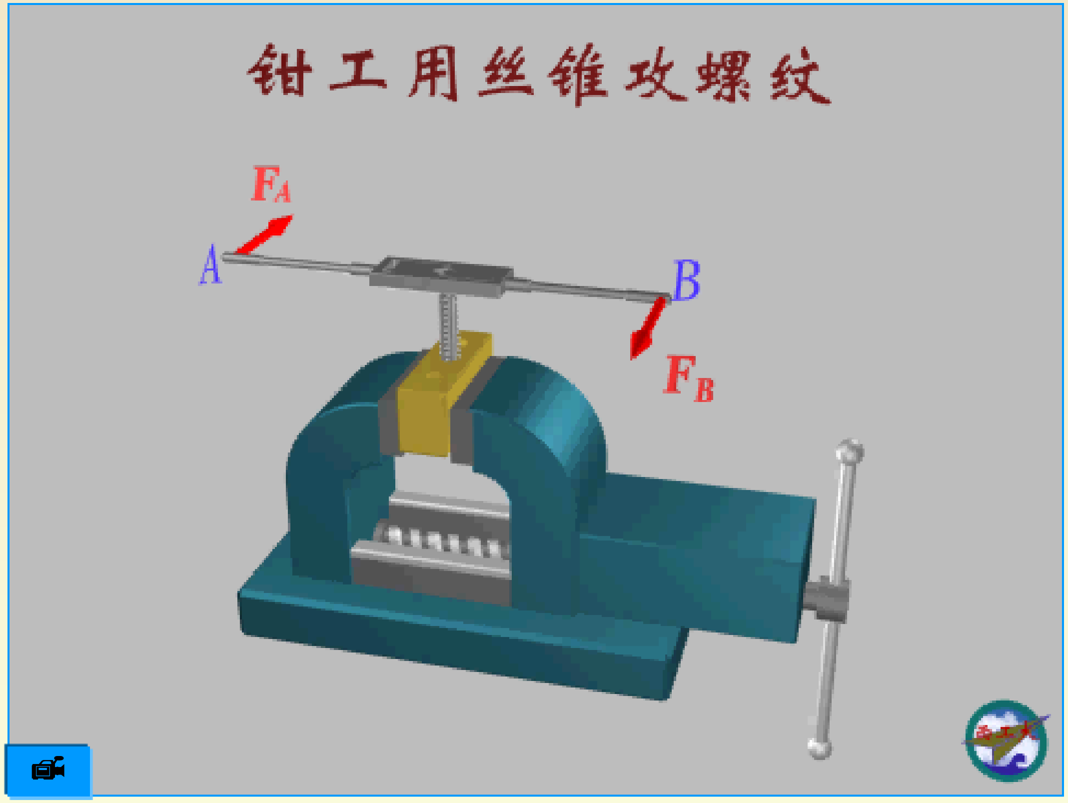
力偶特性三：

力偶中两力在任意坐标轴上投影的代数和为零。

力偶特性四：

力偶对任一点取矩都等于力偶矩矢，不因矩心的改变而改变。

§ 2–4　力偶和力偶矩·力偶的等效条件

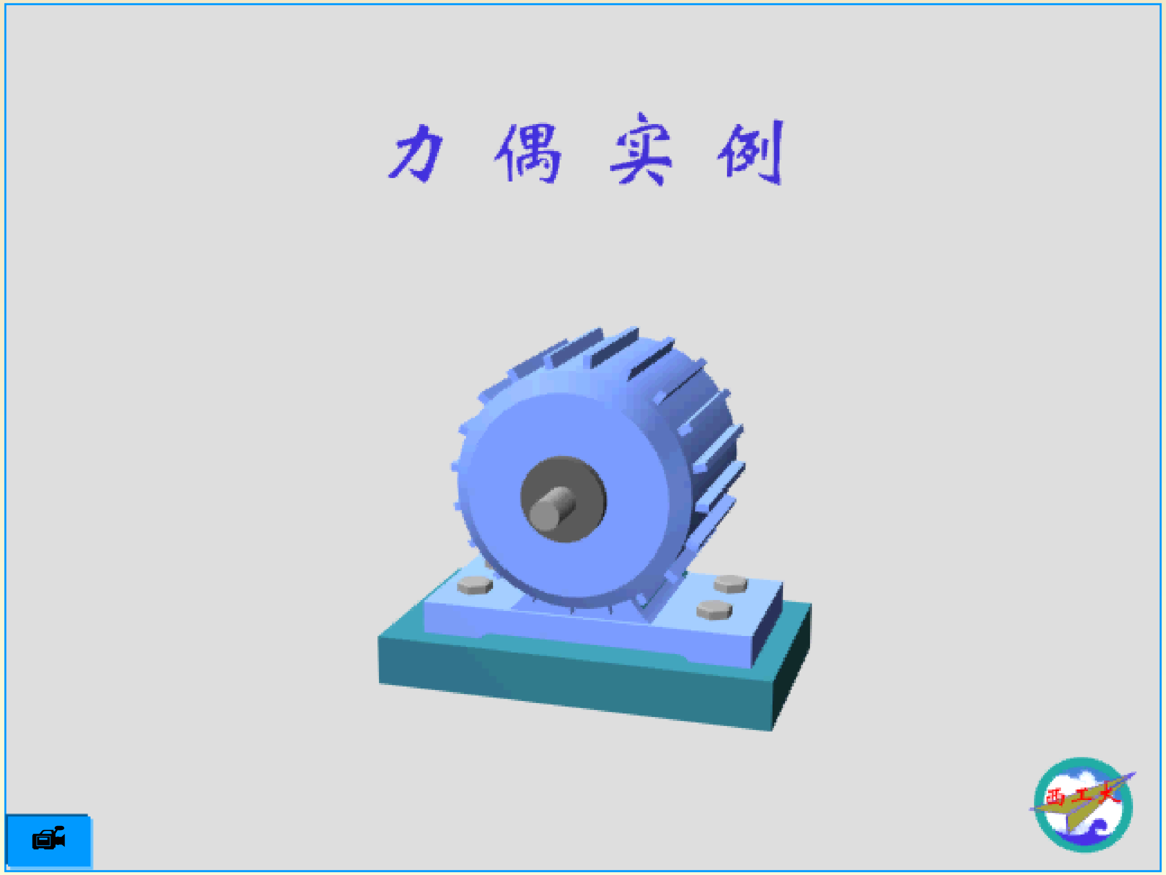


工　程　实　例

§2–4　力偶和力偶矩·力偶的等效条件

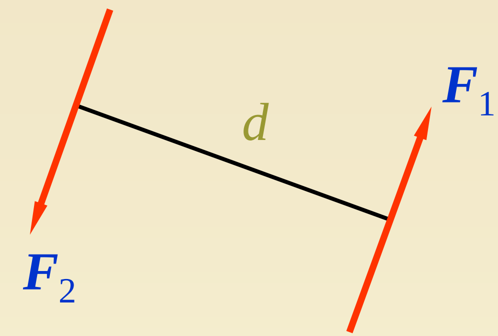
工　程　实　例

§2–4　力偶和力偶矩·力偶的等效条件



工　程　实　例

§ 2–4　力偶和力偶矩·力偶的等效条件



力偶臂 —— 力偶中两个力的作用线之间的距离。

力偶矩 —— 力偶中任何一个力的大小与力偶臂d 的乘积，加上适当的正负号。

$$M = \pm F_1 d$$

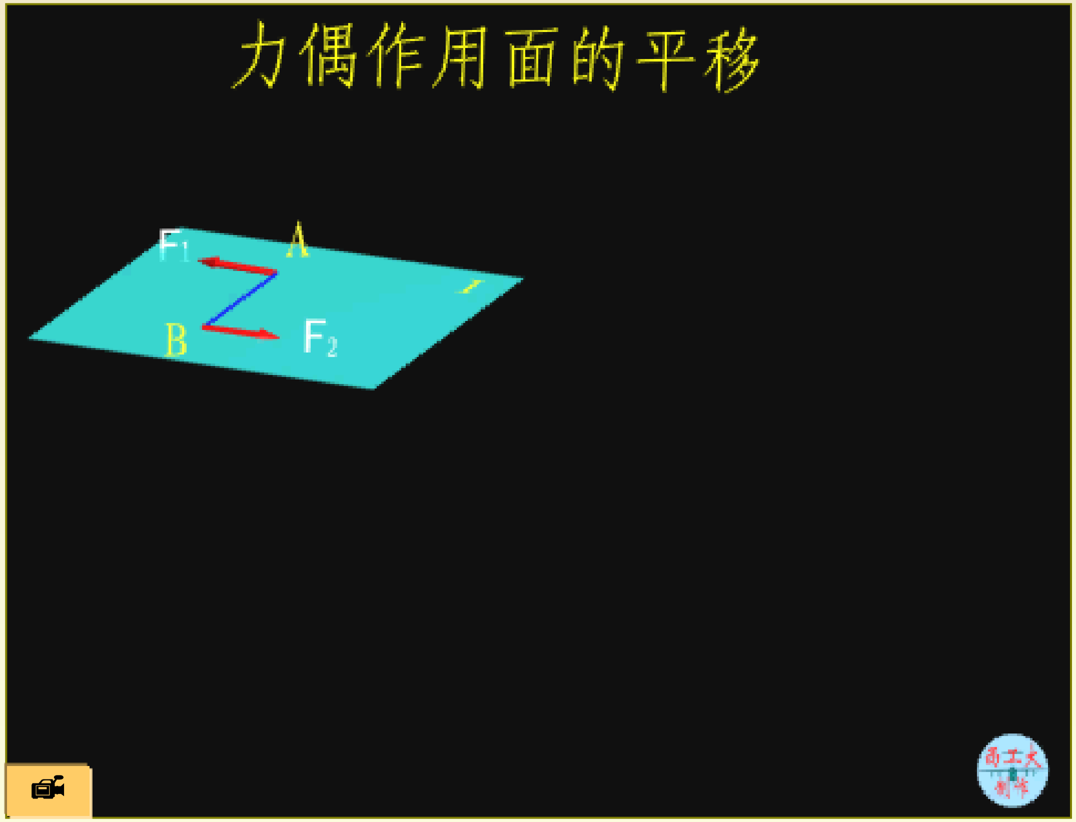
力偶矩正负规定：

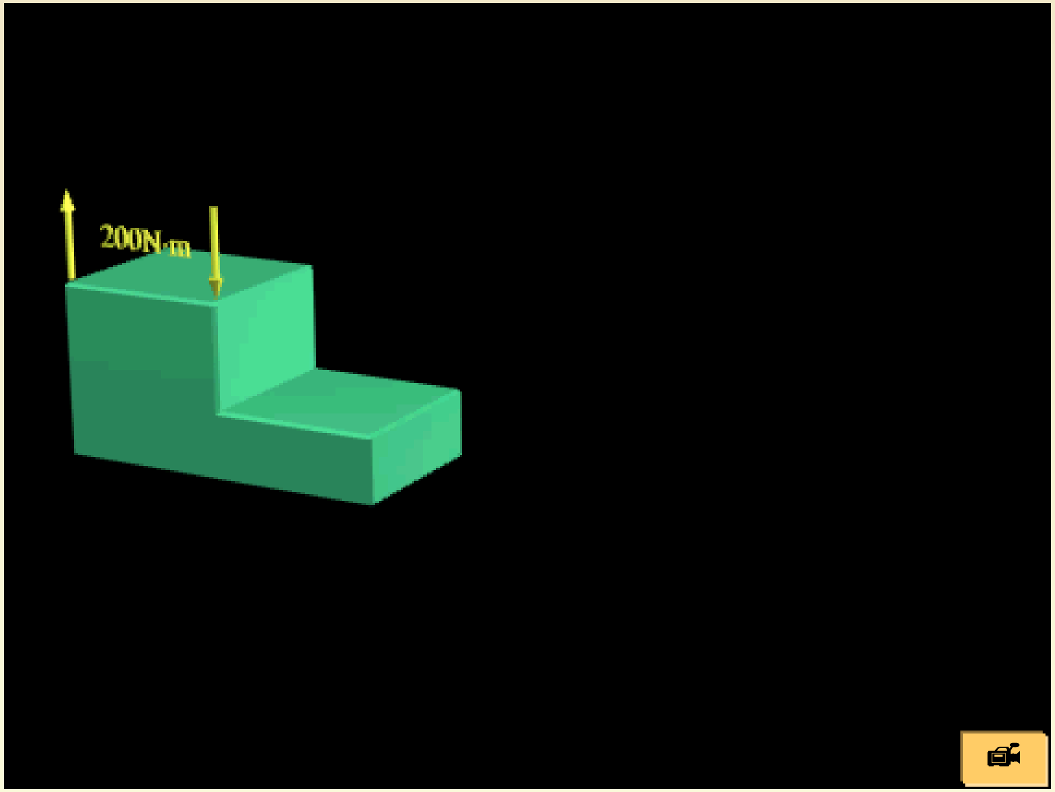
若力偶有使物体逆时针旋转的趋势，力偶矩取正号；反之，取负号。

2.力偶作用面的平移

力偶中两个力的作用线所在的平面称为力偶的作用面。

空间力偶作用面的平移并不改变该力偶对刚体的作用效应。





力偶作用面的平移

3. 力偶矩矢

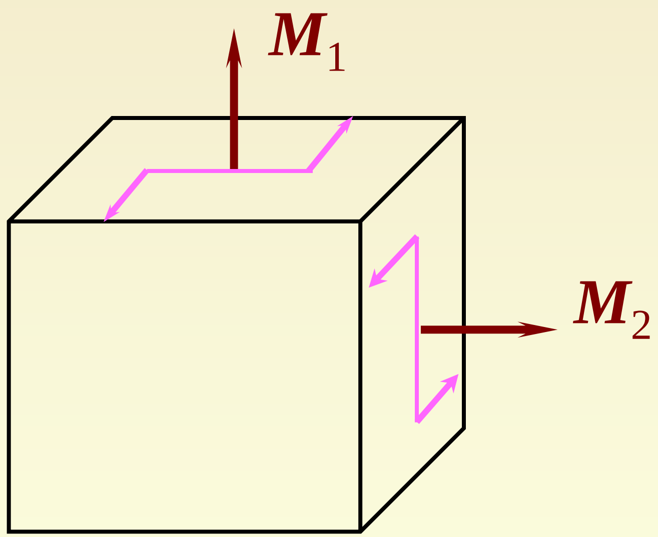
(1) 概念：

用来表示力偶矩的大小、转向、作用面方位的有向线段。

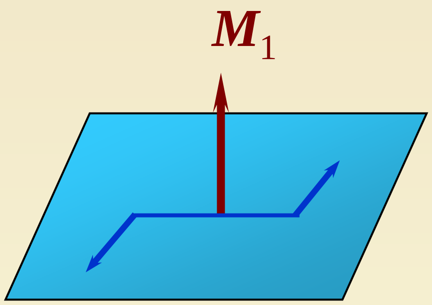
(2) 力偶的三要素：

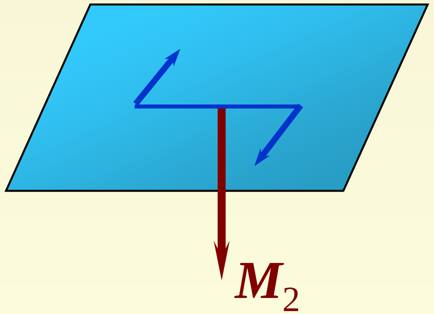
- 力偶矩的大小。
- 力偶的转向。
- 力偶作用面的方位

(3) 符号：$\boldsymbol{M}$



§ 2–4 力偶和力偶矩·力偶的等效条件





- 空间力偶可用一个矢量*M*表示，该矢量M称为力偶矩矢，一般从力偶矩中点画出。
- 矢量*M*的模表示力偶矩的大小；方位垂直于力偶作用平面；指向表示力偶的转向，符合右手螺旋规则。
- 力偶矩矢是自由矢量，力偶可以在其作用面内任意搬移，力偶作用面可以任意平移。
- 力偶对刚体的作用完全取决于力偶矩矢。

力偶矩矢与力矢的区别：

- 作用在刚体上的力偶矩矢是自由矢量，而力矢是滑动矢量；
- 力偶矩矢指向是人为规定的，力矢指向是由力本身所决定。

4. 力偶的等效条件

- 空间两个力偶等效的充要条件是：这两个力偶的力偶矩矢相等。

§2–4 力偶和力偶矩

● 同平面或平行平面内力偶的等效条件

- 力偶矩大小相等，转向相同。

力偶特性五：

- 力偶在作用面内的位置不是力偶效应的特征，力偶可以在其作用面内任意搬移。

力偶特性六：

- 唯一决定平面内力偶效应的特征量是力偶矩的代数值。即保持力偶矩不变，可以改变其力或力臂的大小。

● 若空间两个力偶等效（$\vec{M}_1 = \vec{M}_2$），则有

- 这两个力偶的作用面或平行、或重合；
- 转向相同；
- 力偶矩大小相等。

§2–5　力偶系的合成与平衡条件

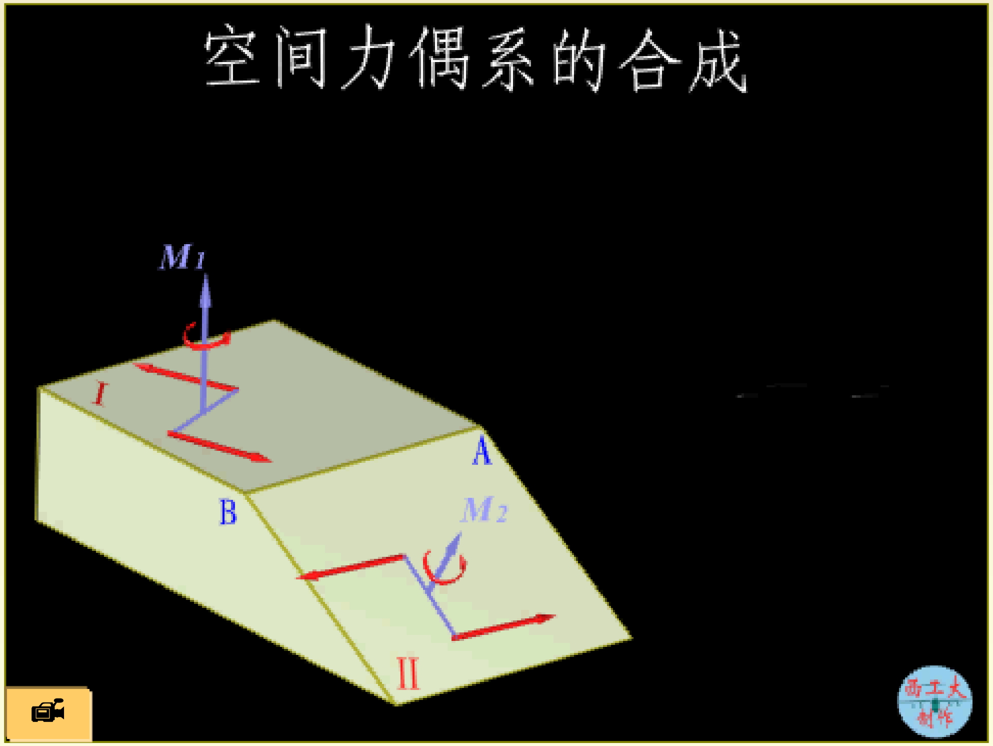
- 力偶系的合成
- 力偶系平衡的充要条件

§2–5　力偶系的合成与平衡条件

1. 空间力偶系的合成

力偶矩矢平行四边形定理：

作用于相交平面内两个力偶的合成结果是一个力偶，合力偶矩矢表示为以原有两力偶的矩矢为邻边的平行四边形的对角线矢量。



空间力偶系可以合成为一个力偶。合力偶的矩矢等于各分力偶矩矢的矢量和。即

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \cdots + \boldsymbol{M}_n = \sum \boldsymbol{M}_i$$

§ 2–5　力偶系的合成与平衡条件

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \cdots + \boldsymbol{M}_n = \sum \boldsymbol{M}_i$$

为了计算合力偶矩矢的大小和方向，可先求出该矩矢在直角坐标轴**x**、**y**、**z**上的投影

$$M_x = \sum M_{ix}, \qquad M_y = \sum M_{iy}, \qquad M_z = \sum M_{iz}$$

最后求得它的大小和方向

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{\left(\sum M_{ix}\right)^2 + \left(\sum M_{iy}\right)^2 + \left(\sum M_{iz}\right)^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{i}) = \frac{\sum M_{ix}}{M}, \cos(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{j}) = \frac{\sum M_{iy}}{M}, \cos(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{k}) = \frac{\sum M_{iz}}{M}$$

2. 空间力偶系平衡的充要条件

力偶矩矢多边形自行闭合，即力偶系中各力偶矩矢的矢量和等于零。

$$\sum \boldsymbol{M}_i = 0$$

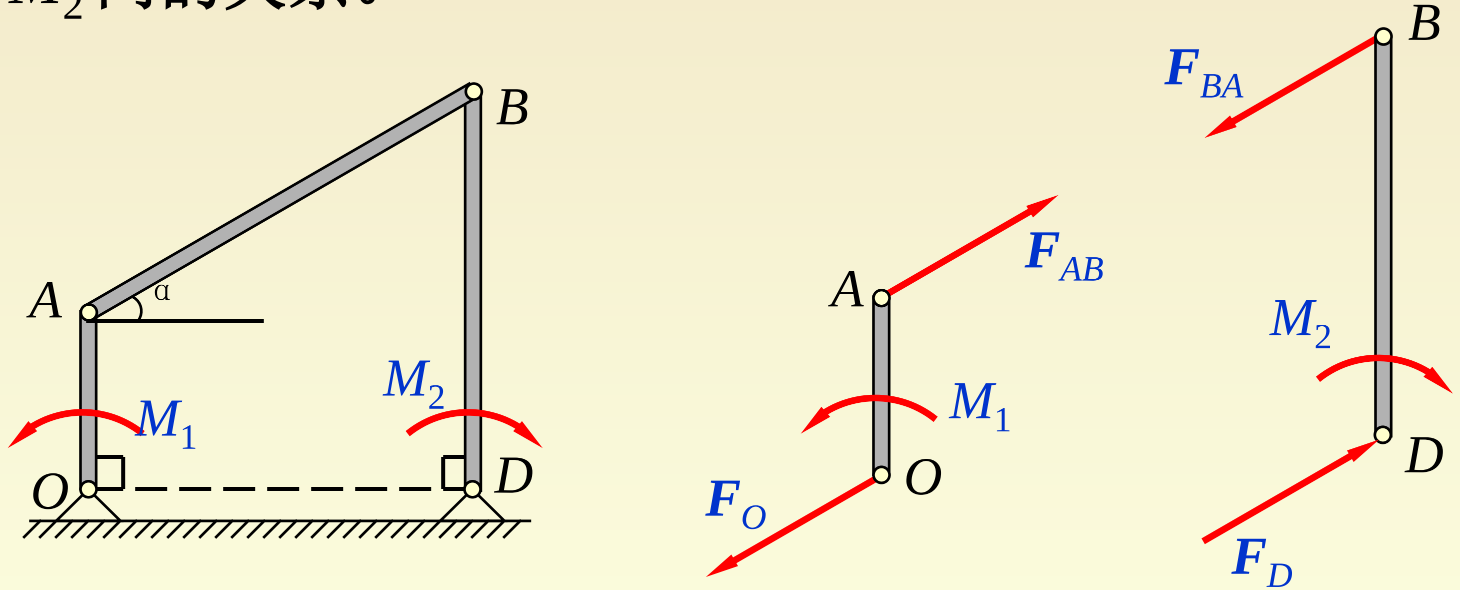
空间力偶系的平衡方程

$$\sum M_x = 0$$
$$\sum M_y = 0$$
$$\sum M_z = 0$$

而对于平面力偶系，其平衡的充要条件是

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i = 0$$

例2–3 如图所示的铰接四连杆机构*OABD*，在杆*OA*和*BD*上分别作用着矩为 M_1 和 M_2 的力偶，而使机构在图示位置处于平衡。已知*OA*= *r*，*DB*= 2*r*，α= 30°，不计杆重，试求 M_1 和 M_2 间的关系。



解： 杆*AB*为二力杆。

由于力偶只能与力偶平衡，　则*AO*杆与*BD*杆的受力如图所示。

分别写出杆*AO*和*BD*的平衡方程：

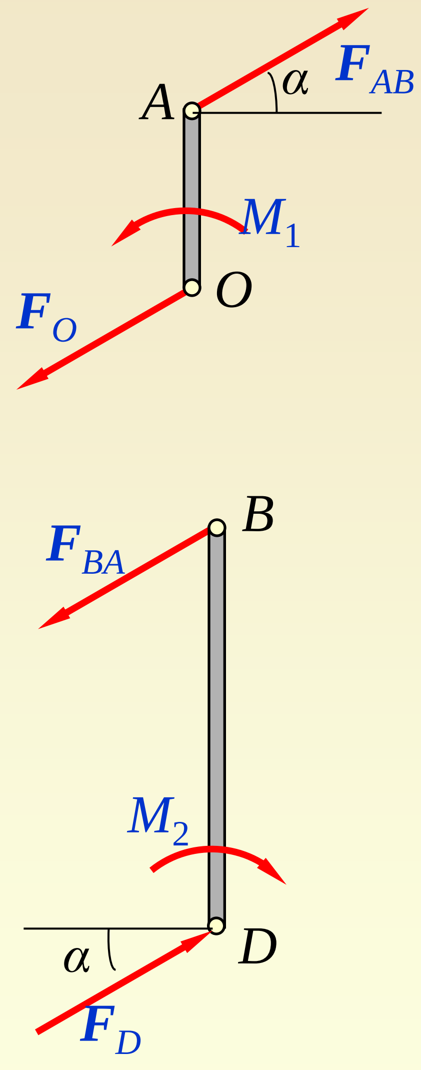
由　$\sum M_i = 0$

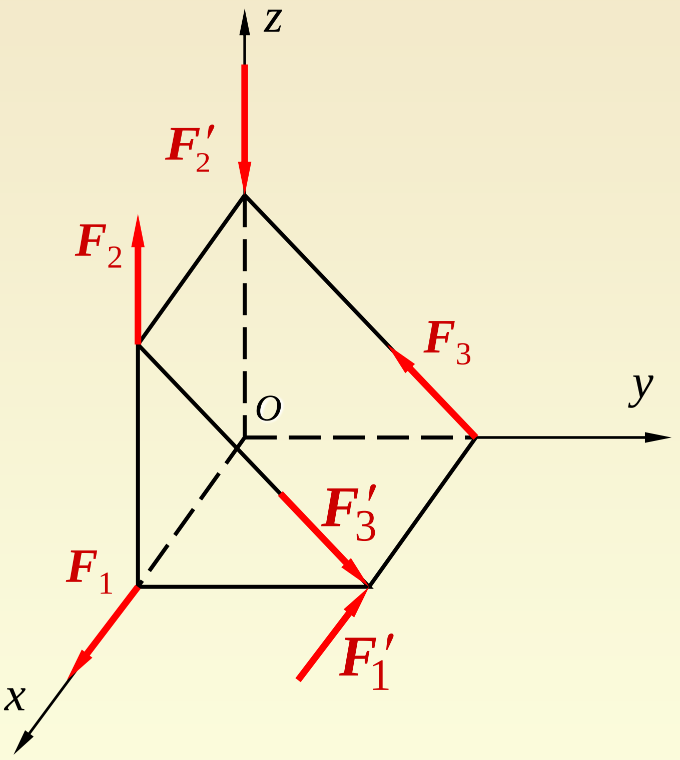
得　$M_1 - r\ F_{AB}\cos\alpha = 0$

$-M_2 + 2r\ F_{BA}\cos\alpha = 0$

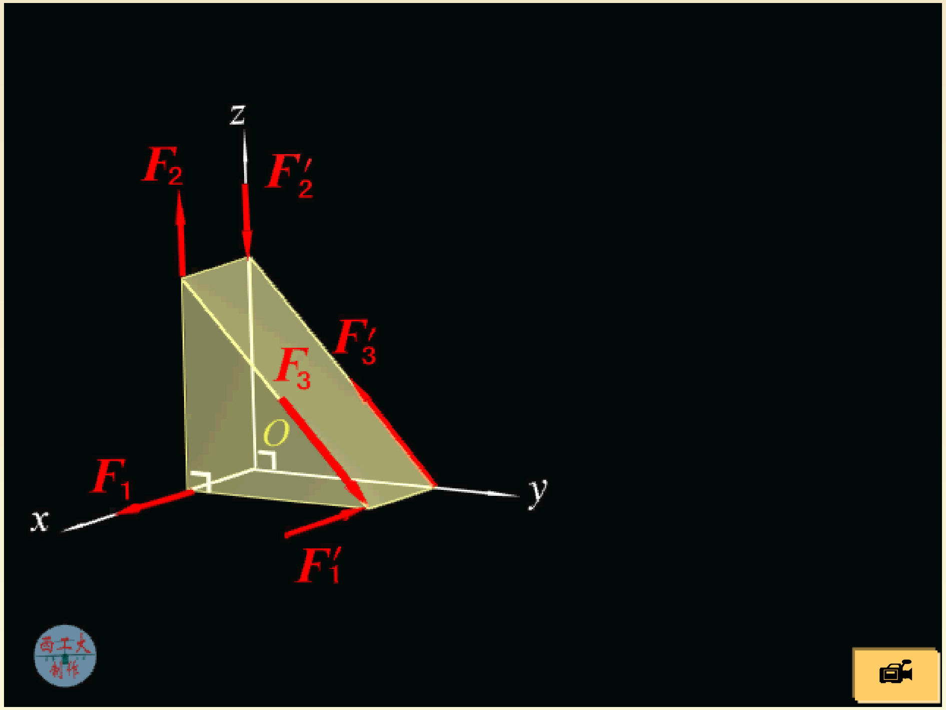
因为　$F_{AB} = F_{BA}$

则得　$M_2 = 2M_1$





例2-4 图示的三角柱刚体是正方体的一半。在其中三个侧面各自作用着一个力偶。已知力偶（F_1，F_1'）的矩M_1=20 N m；力偶（F_2， F_2'）的矩M_2=20 N m；力偶（F_3，F_3'）的矩M_3=20 N m。试求合力偶矩矢$\boldsymbol{M}$。又问使这个刚体平衡，还需要施加怎样一个力偶。



解：

1. 画出各力偶矩矢。（单击图面演示平移动画）

2. 合力偶矩矢***M*** 的投影。

$$M_x = M_{1x} + M_{2x} + M_{3x} = 0$$

$$M_y = M_{1y} + M_{2y} + M_{3y} = 11.2\ \mathrm{N \cdot m}$$

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} = 41.2\ \mathrm{N \cdot m}$$

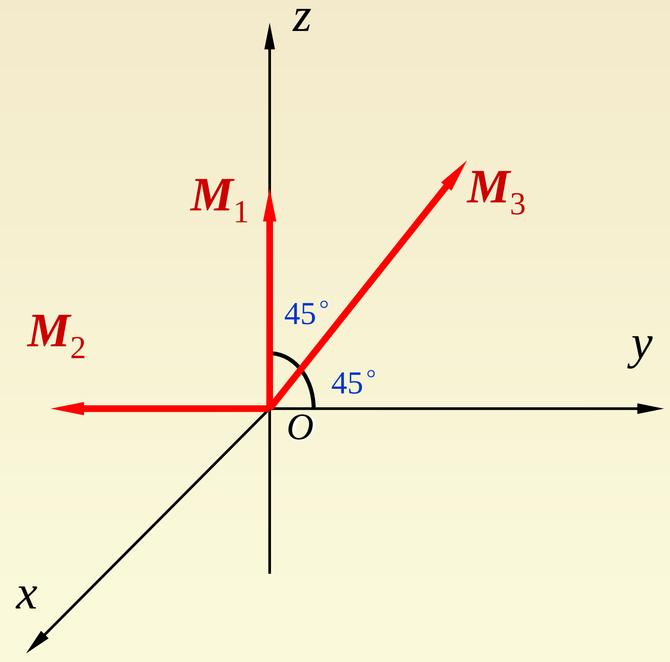
3. 合力偶矩矢$\boldsymbol{M}$ 的大小和方向。

$$M=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}=42.7\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$\cos(\boldsymbol{M},\boldsymbol{i})=\frac{M_x}{M}=0,\quad \angle(\boldsymbol{M},\boldsymbol{i})=90°$$

$$\cos(\boldsymbol{M},\boldsymbol{j})=\frac{M_y}{M}=0.262,\quad \angle(\boldsymbol{M},\boldsymbol{j})=74.8°$$

$$\cos(\boldsymbol{M},\boldsymbol{k})=\frac{M_z}{M}=0.965,\quad \angle(\boldsymbol{M},\boldsymbol{k})=15.2°$$



4. 为使这个刚体平衡，需加一力偶，其力偶矩矢为 $\boldsymbol{M}_4=-\boldsymbol{M}$ 。

谢谢使用