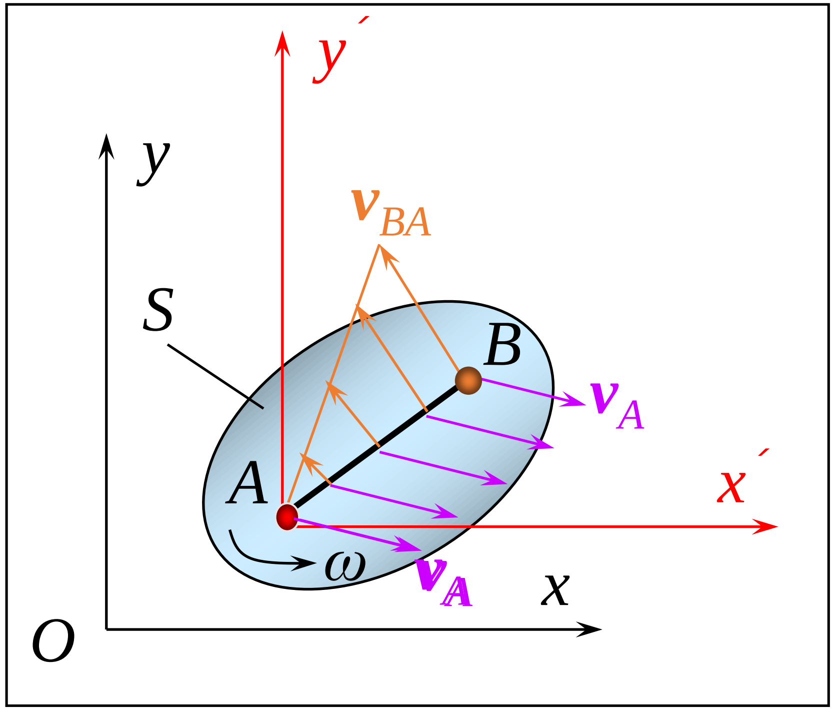
9.2 平面运动的速度分析

1. 基点法

设在平面运动刚体上取点A为基点，已知其速度为 v_A ，平面图形S也即平面运动刚体的角速度为 ω ，分析图形上任一点B 的速度。



将B点的运动视为复合运动。

动点 - B点 。

动系 - 以A点为原点的平移系 $Ax'y'$。

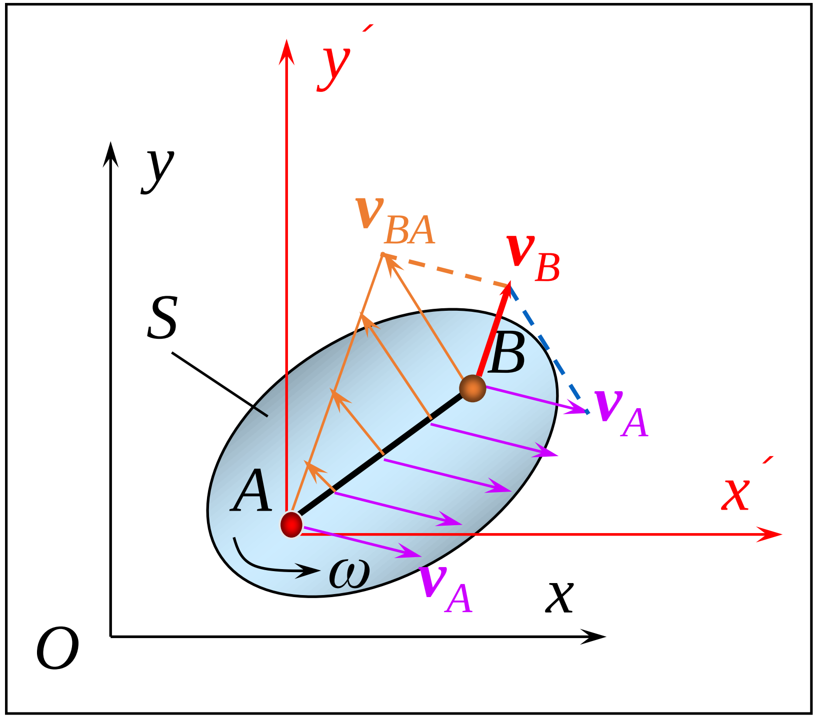
定系 - 固连于地球。

绝对运动 - 未知。

相对运动 - 绕基点 A的圆周运动。

$$v_r = v_{BA} = AB \cdot \omega$$

牵连运动 - 随基点A的平动， $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_A$。



根据速度合成定理 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

注意到

$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_B$，　$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_A$，　$\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_{BA}$

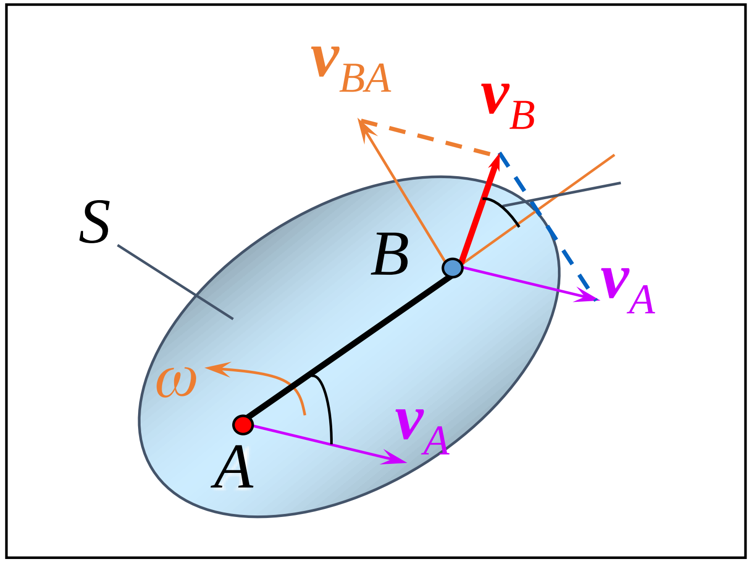
则有

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

有结论：

平面图形上任意点的速度，等于基点的速度，与这一点对于以基点为原点的平移系的相对速度的矢量和。

2. 速度投影法



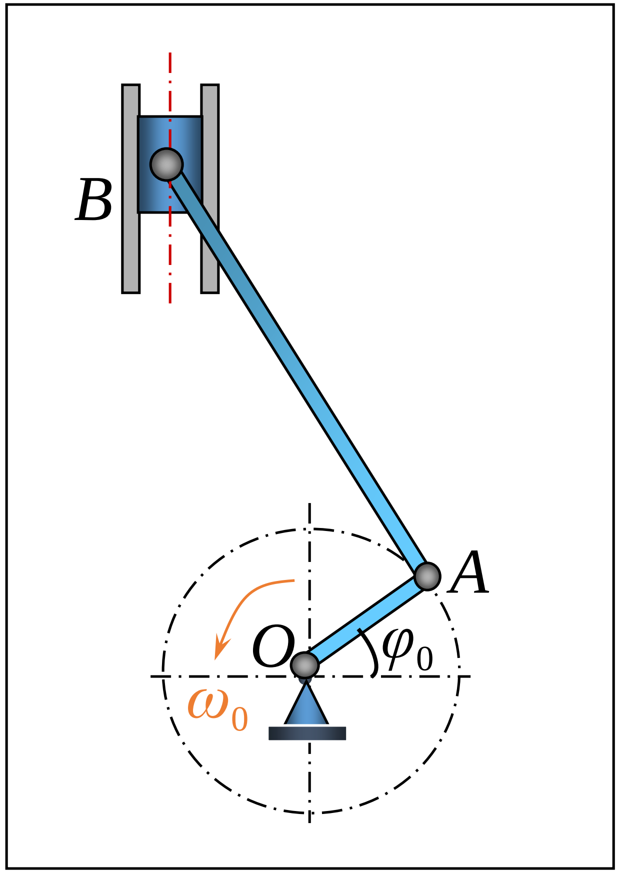
应用速度合成定理

$$v_B = v_A + v_{BA}$$

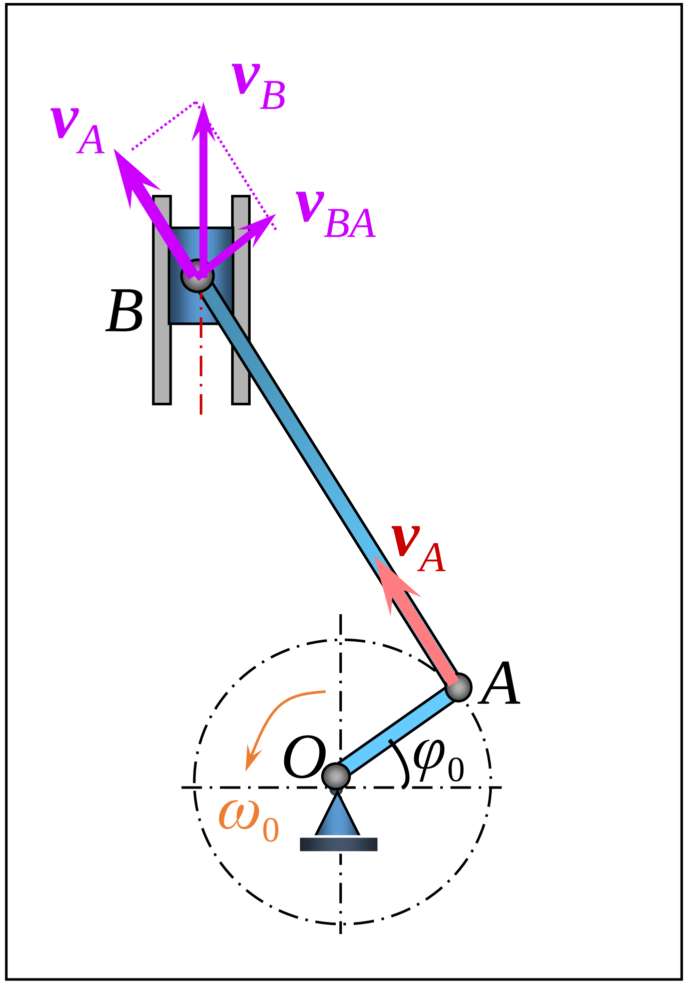
上式等号两侧 分别向AB连线上投影，因为v_{BA}垂直于AB，所以v_{BA}在AB上投影等于零。

则有 $v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$

速度投影定理：平面图形上任意两点的速度在这两点连线上的投影相等。



例题1 已知曲柄滑块机构中，曲柄$OA=r$，以匀角速度 ω_0绕O 轴转动，连杆$AB=l$。在图示情形下连杆与曲柄垂直。求该瞬时(1) 滑块的速度v_B；(2) 连杆AB的角速度ω_{AB}。



解：

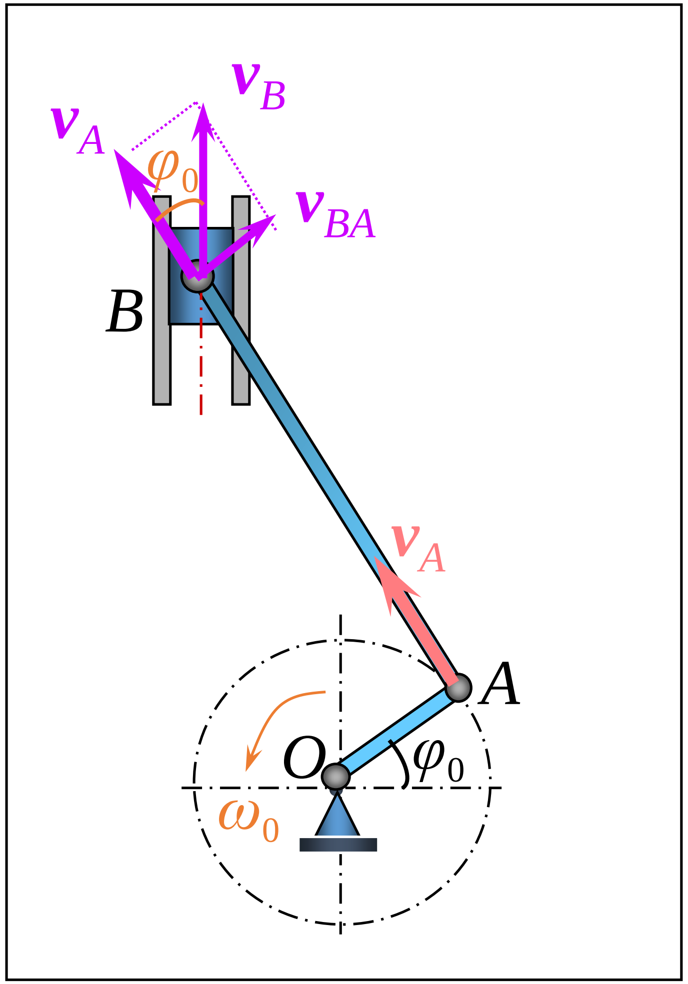
基点法

连杆AB作平面运动。A 点速度 v_A 已知，$v_A=r\omega_0$

以A为基点。应用速度合成定理

$$v_B = v_A + v_{BA}$$

画出速度合成矢量图。

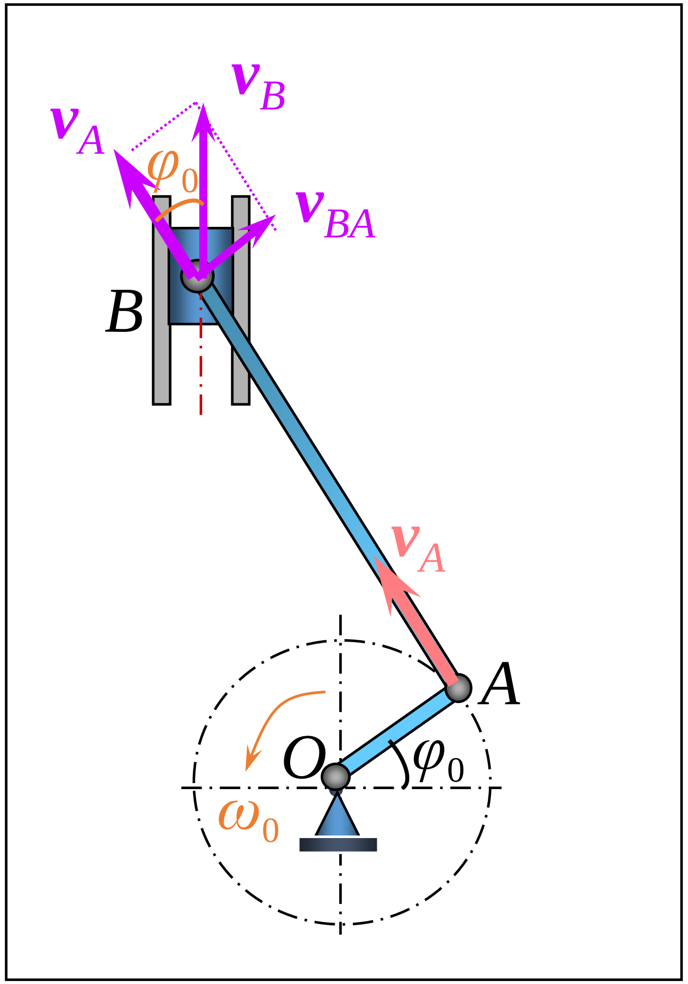


(1)求该瞬时滑块的速度v_B

由速度合成矢量图可得滑块的速度：

$$v_B = \frac{v_A}{\cos\varphi_0} = \frac{r\omega_0}{\cos\varphi_0}$$

方向铅直向上。



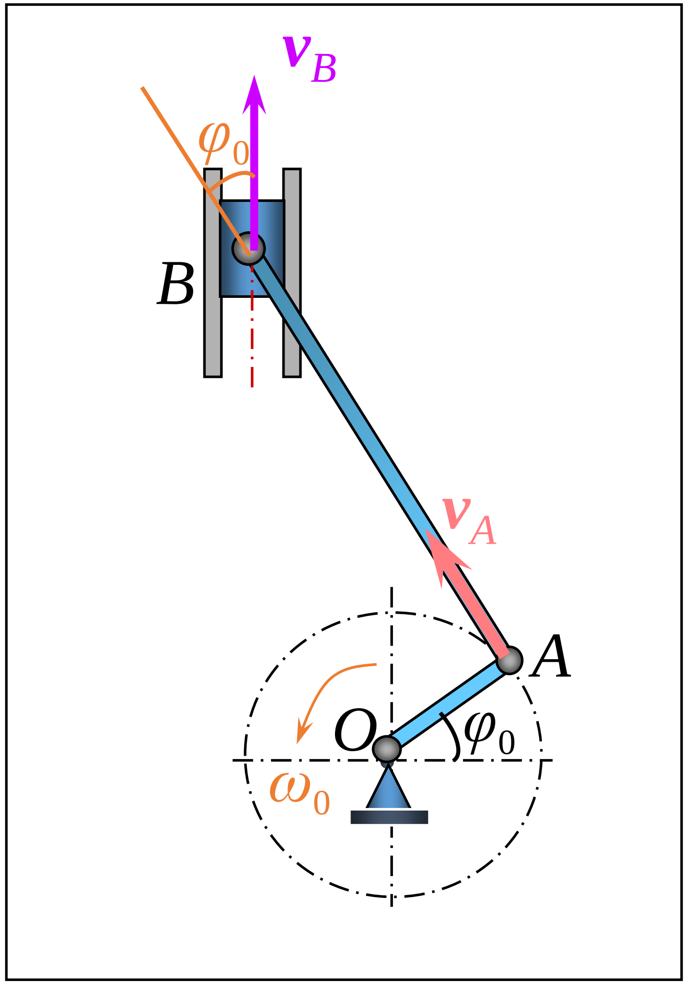
(2) 求该瞬时连杆AB的角速度ω_{AB}

$$\omega_{AB}=\frac{v_{BA}}{l}$$

$$=\frac{v_A\tan\varphi_0}{l}=\frac{r\omega_0}{l}\tan\varphi_0$$

顺时针转向。

速度投影法



解：应用速度投影定理

$$[v_A]_{AB} = [v_B]_{AB}$$

有 $v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$

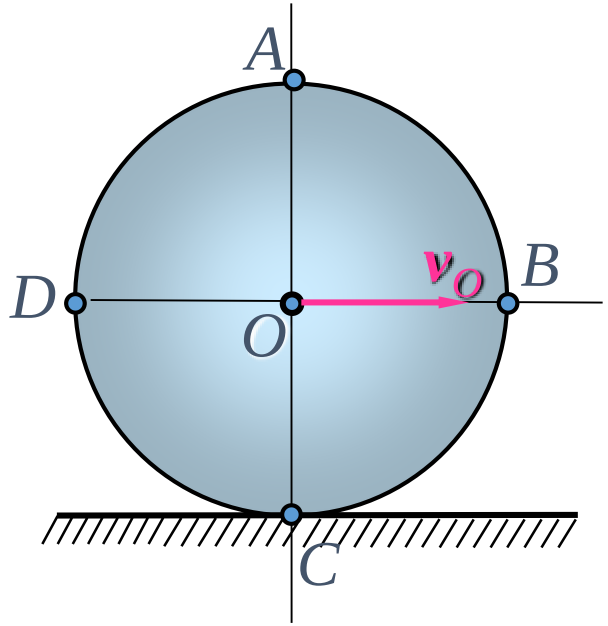
因为 $v_A = r\,\omega_0$ ， $= 0$ ， $= \varphi_0$

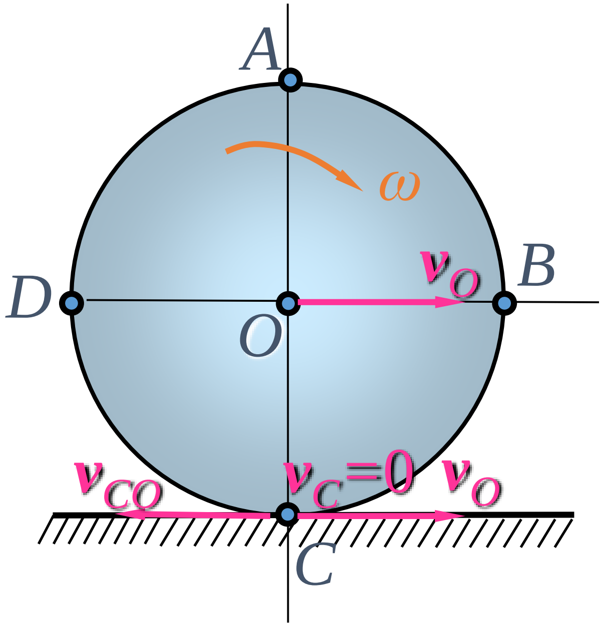
从而有 $v_A = v_B \cos\varphi_0$

$$v_B = \frac{r\omega_0}{\cos\varphi_0}$$

应用速度投影定理无法求得连杆*AB*的角速度。

例题2 如图所示，半径为R的车轮，沿直线轨道作无滑动的滚动，已知轮心O以匀速v_O前进。求轮缘上A，B，C和D各点的速度。





解：车轮作平面运动。用基点法分析求解。

因为轮心O的速度已知，故选O点为基点。

应用速度合成定理，轮缘上C点的速度可表示为

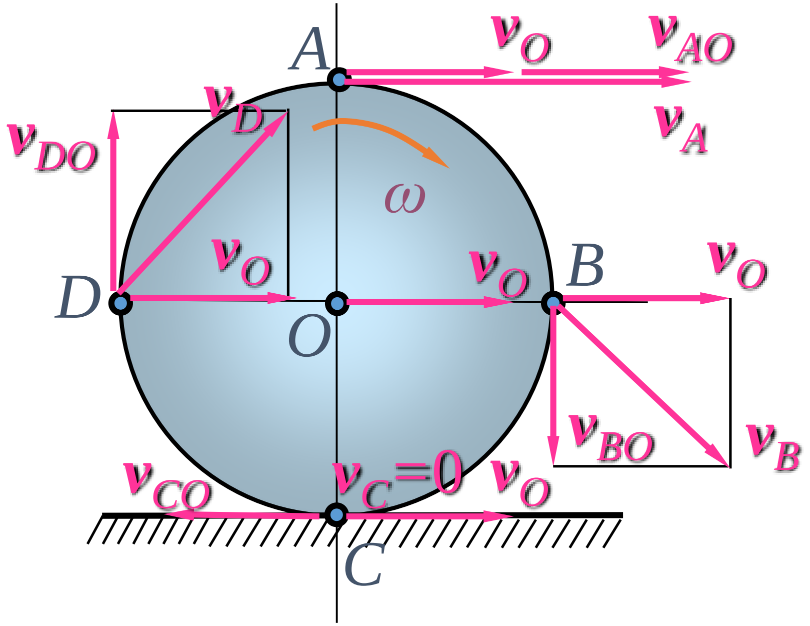
$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{CO}$$

其中 $\boldsymbol{v}_{CO}$的方向已知，其大小$v_{CO}=R\omega$。

由于车轮只滚不滑，因此车轮的角速度为 $\omega = \dfrac{v_O}{R}$ **（顺时针），**

$$v_{Cx} = v_O - v_{CO} = v_O - R\omega = v_O - v_O = 0$$

$$v_{Cy} = 0, \qquad v_C = 0$$



车轮的角速度 $\omega = \dfrac{v_O}{R}$ （顺时针）

应用基点法，各点的速度求得如下：

A点： $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{AO}$

$v_A = v_O + v_{AO}$， $v_{AO} = R\omega = v_O$

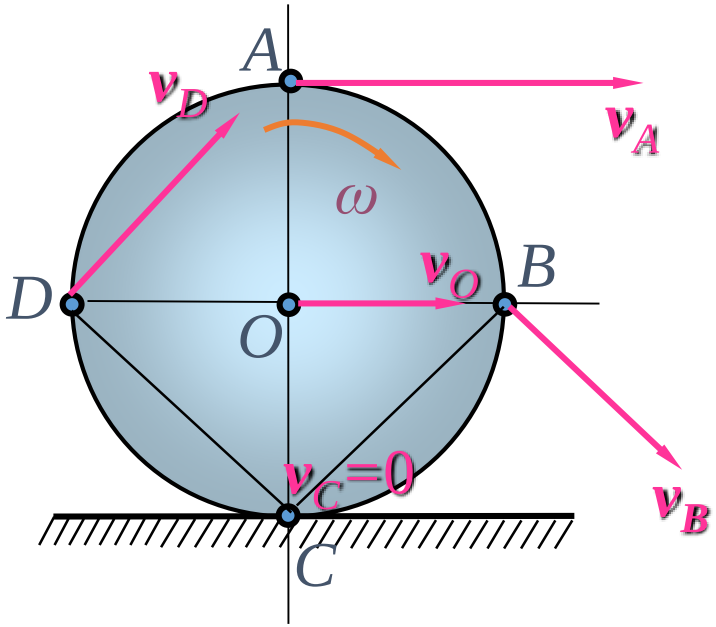
$v_A = 2v_O$

B点： $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{BO}$

$v_{BO} = R\omega = v_O$， $v_B = \sqrt{2}v_O$

D点： $\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{DO}$

$v_{DO} = R\omega = v_O$， $v_D = \sqrt{2}v_O$



车轮的角速度 $\omega = \dfrac{v_O}{R}$ （顺时针）

应用基点法，各点的速度求得如下：

A点： $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{AC}$

$v_C = 0,\quad v_A = v_{AC} = 2R\omega = 2v_O$

B点： $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{BC}$

$v_B = \sqrt{2}R\omega = \sqrt{2}v_O$

D点： $\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{DC}$

$v_D = \sqrt{2}R\omega = \sqrt{2}v_O$

3. 瞬心法

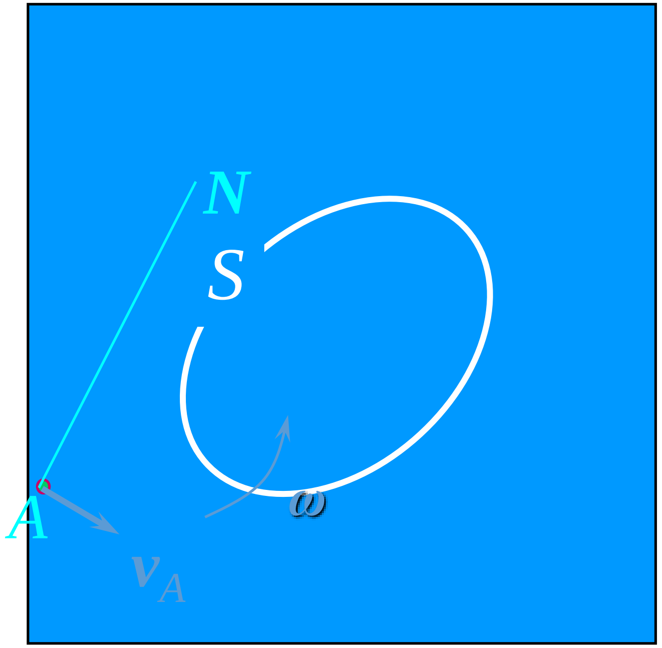
（1）瞬心的定义 —— 某瞬时平面运动刚体上速度为零的点称为**瞬时速度中心**，简称为**速度瞬心**。

（2）瞬心的存在性

设已知平面图形S上某点A的速度v_A，平面图形的角速度 ω 。

请思考 速度为零的点可能在哪出现？

答：速度为零的点可能出现在 v_A 的垂直线 AN上。



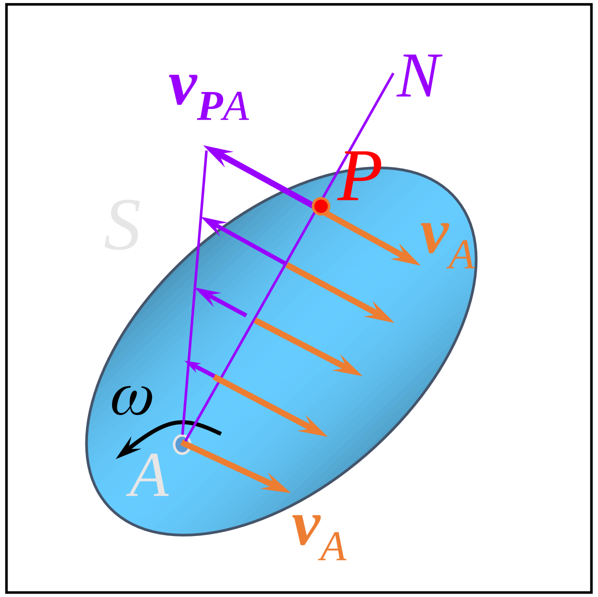
（2）瞬心的存在　速度为零的点可能出现在 v_A 的垂直线AN上。

过A点作v_A的垂直线AN，AN上各点的速度由两部分组成：

- 跟随基点平移的速度v_A——牵连速度，各点相同；
- 相对于基点转动的速度v_{PA}——相对速度，自A点起线性分布。

因为AN线上各点相对于基点转动的速度与A点的速度方向相反，其大小正比于该点到A点的距离，故必有一点P的速度满足

$$v_P = v_A - v_{PA} = v_A - PA \cdot \omega = 0$$



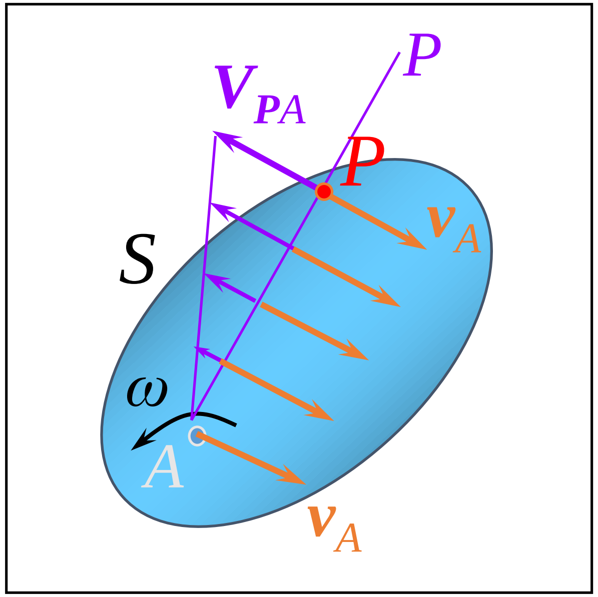
由此求得

$$PA = \frac{v_A}{\omega}$$

速度为零的点P即为该瞬时平面图形的速度瞬心。

（2）瞬心的存在

$$PA = \frac{v_A}{\omega}$$



有结论：

若平面图形的角速度不等于零，则在每一瞬时，该图形上（或其延展部分）总有一速度为零的点，即速度瞬心。

（3）速度瞬心法

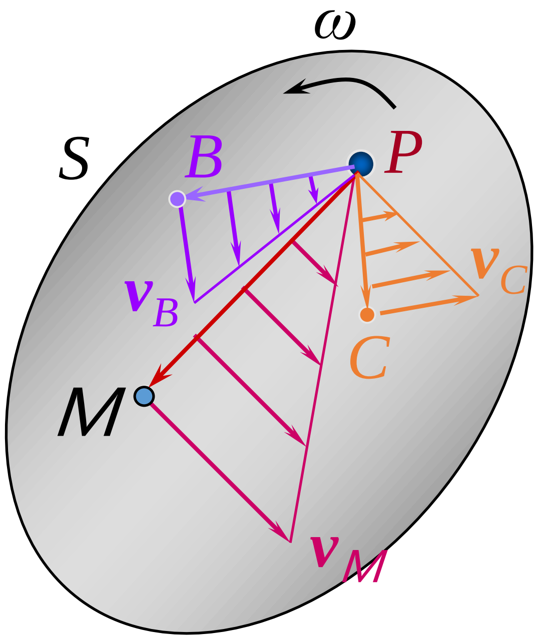
若在某瞬时以速度瞬心P为基点，则平面图形上任一点M的速度大小

$$v_M = v_{MP} = MP \cdot \omega$$

其方向$\perp MP$，指向与ω转向一致。

① 求出速度瞬心P 的位置和平面图形的角速度 ω ，就可求得平面运动刚体上所有点的速度，这种方法称为速度瞬心法。

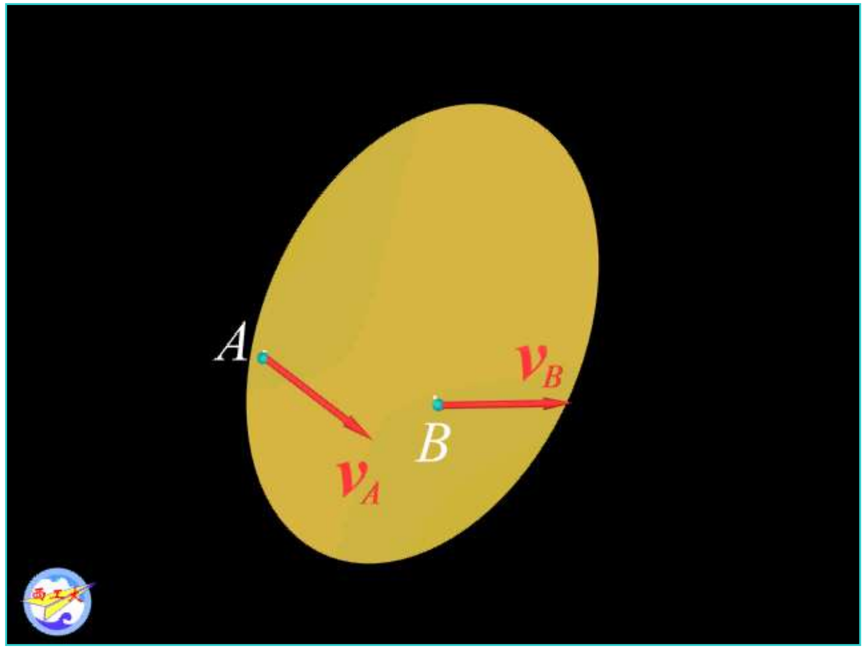
② 平面图形上各点的速度分布，与图形在该瞬时以角速度 ω绕速度瞬心P作定轴转动时一样。



（4）速度瞬心位置的确定

● 第一种情形

已知某瞬时平面图形上A，B两点的速度方位，则这两点速度的垂线的交点就是速度瞬心。

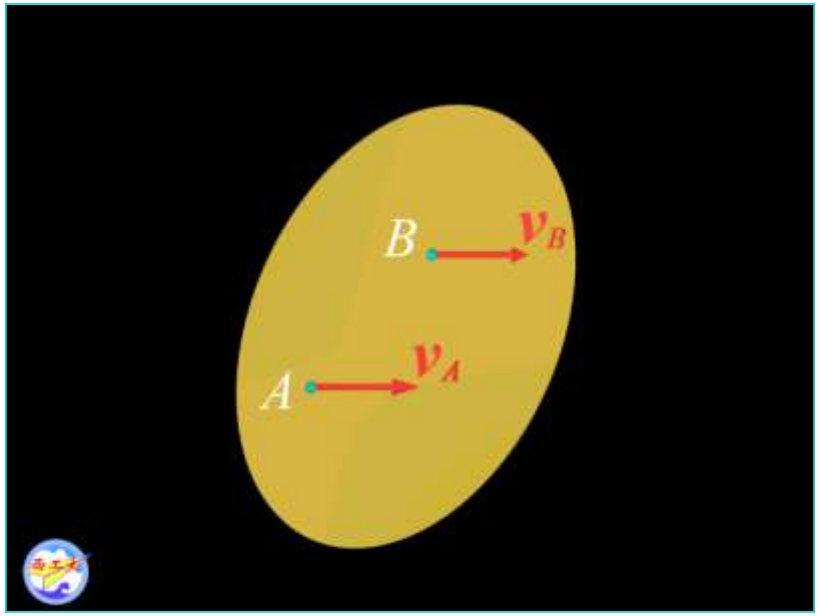


● 第二种情形

① 已知平面图形上两点的速度矢量的大小与方向，而且二矢量互相平行、方向相同，但二者都不垂直于两点的连线。则速度瞬心在无穷远处。此时平面运动刚体的角速度

$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = 0$$

该瞬时各点速度均平行，且大小相等，其分布与平移时速度一样，这种情形称为瞬时平动。

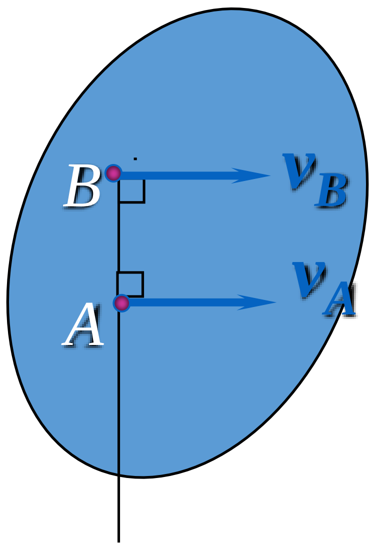


● 第二种情形

② 已知平面图形上两点的速度矢量的大小与方向，而且二矢量互相平行、方向相同、大小相等，都垂直于两点的连线，则速度瞬心仍在无穷远处。

此时平面运动刚体的角速度

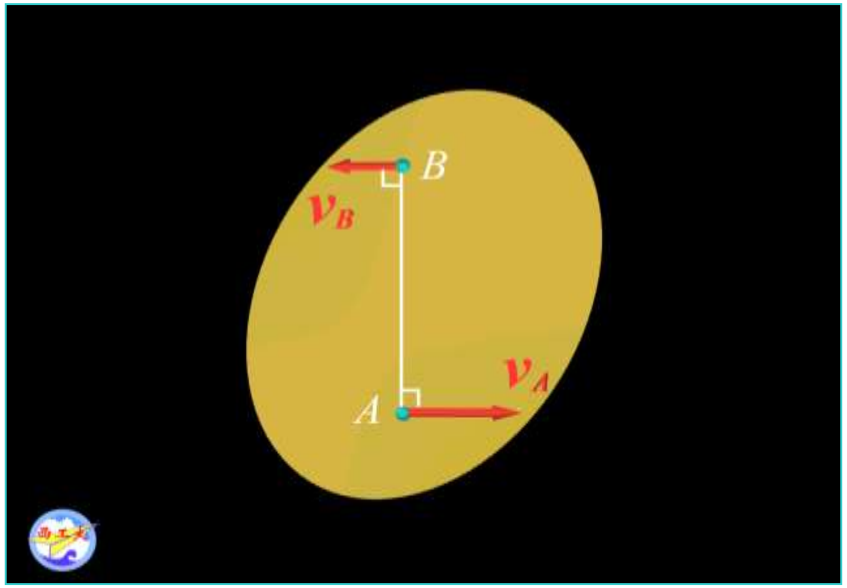
$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = 0$$

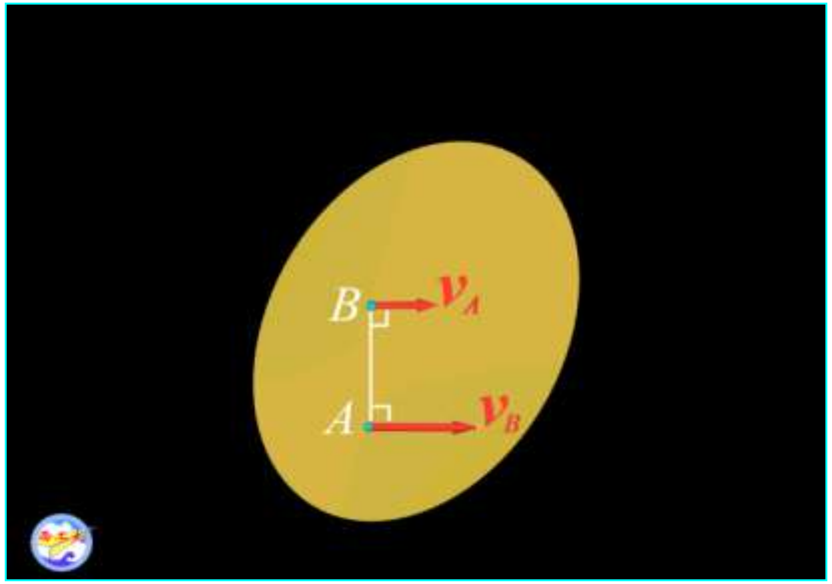


该瞬时平面运动刚体仍处于瞬时平动状态。

● 第三种情形

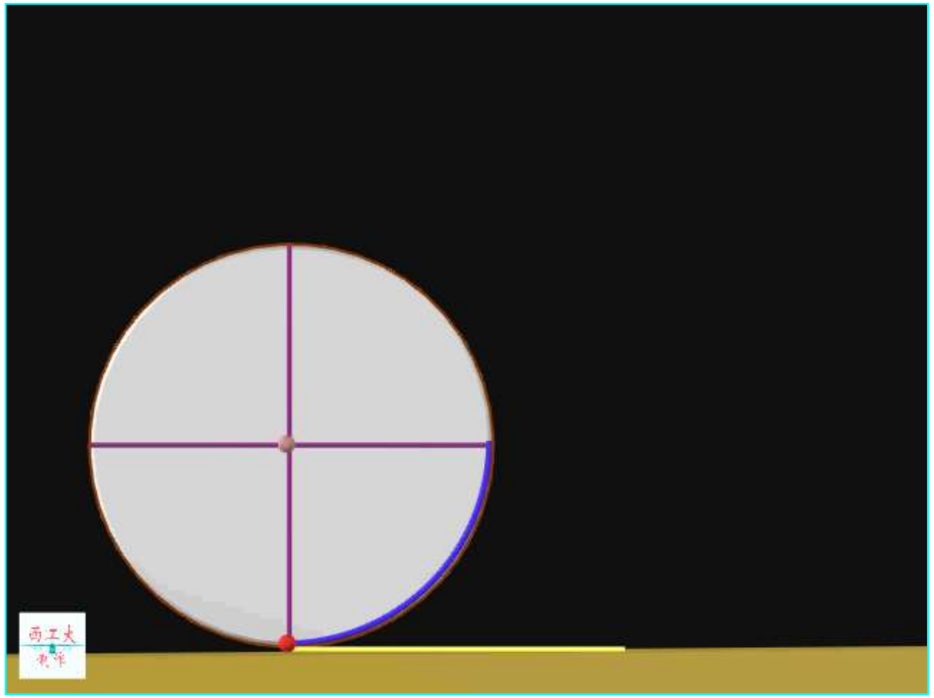
已知平面图形上两点的速度矢量的大小与方向，而且二矢量互相平行，并且都垂直于两点的连线。则速度瞬心在两点速度矢端连线与AB延长线的交点处。





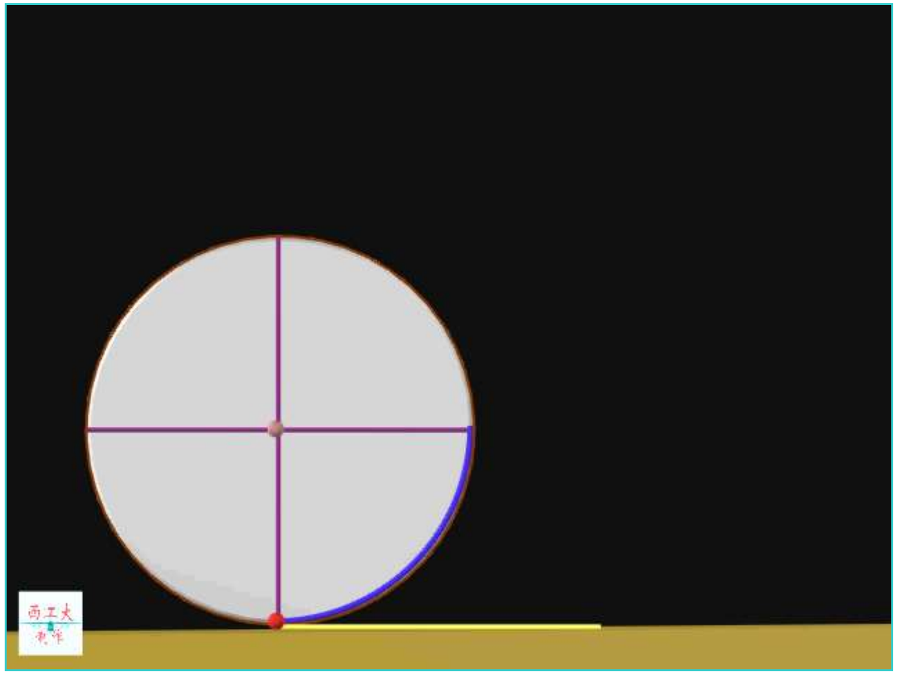
● 第四种情形

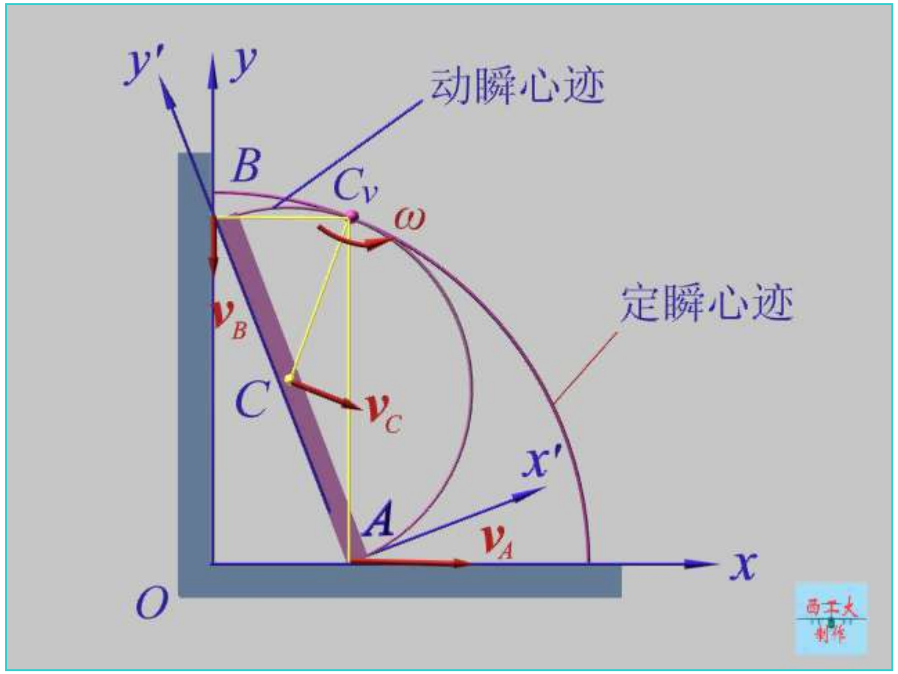
当平面运动刚体在一固定平面上作纯滚动时，其接触点即为速度瞬心。



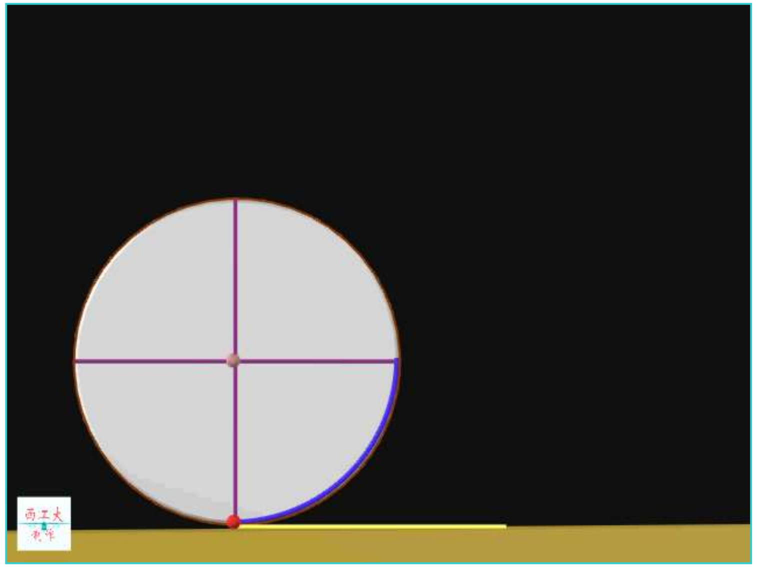
（5）速度瞬心的特点

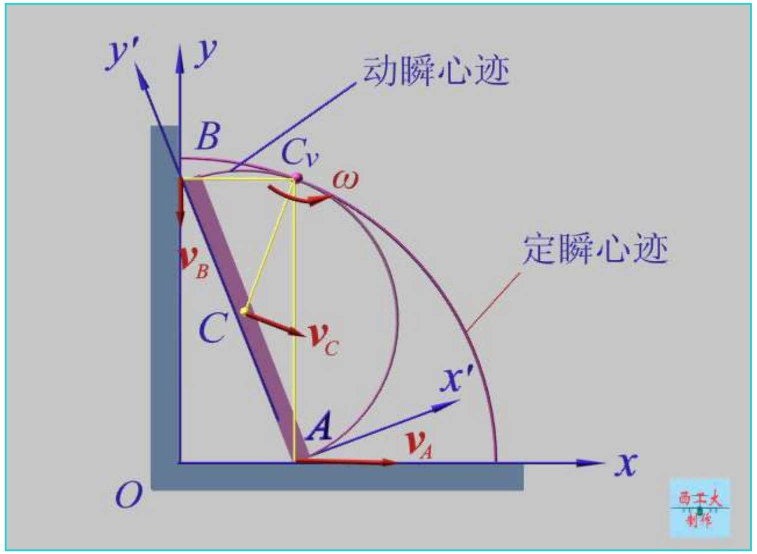
● **瞬时性**：不同的瞬时，有不同的速度瞬心；因此瞬心具有 加速度。





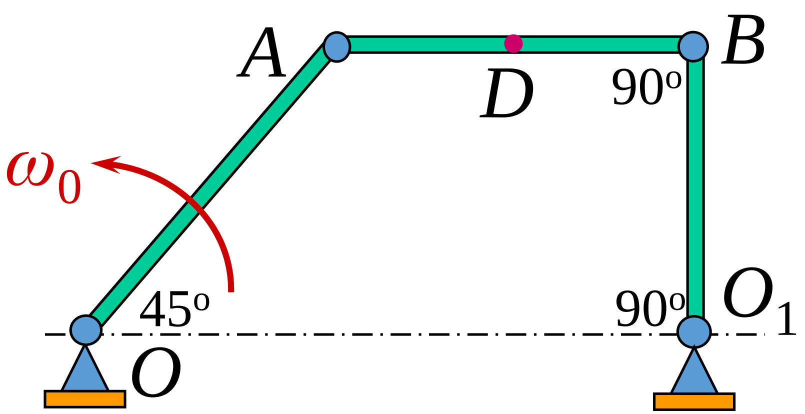
- **唯一性**：某一瞬时只有一个速度瞬心；
- **瞬时转动特性**：平面图形在某一瞬时的运动都可以视为绕这一瞬时的速度瞬心作瞬时转动。
- **注意瞬时平动与平动的区别**：瞬时平动各点的速度相同， 但是加速 度不同。



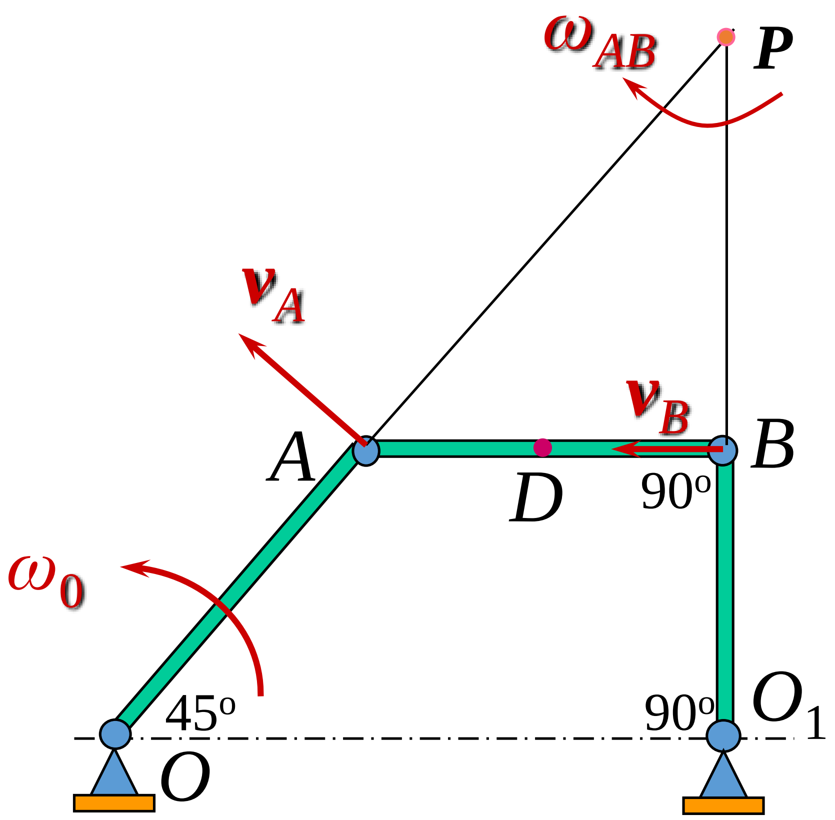


例题1 已知四连杆机构中，$O_1B=l,\ AB=\dfrac{3}{2}l,\ AD=DB$。

OA以角速度ω_0绕O轴转动。求（1）B和D点的速度；（2）AB杆的角速度。



解：机构中杆AB作平面运动，杆OA和O_1B都作定轴转动。



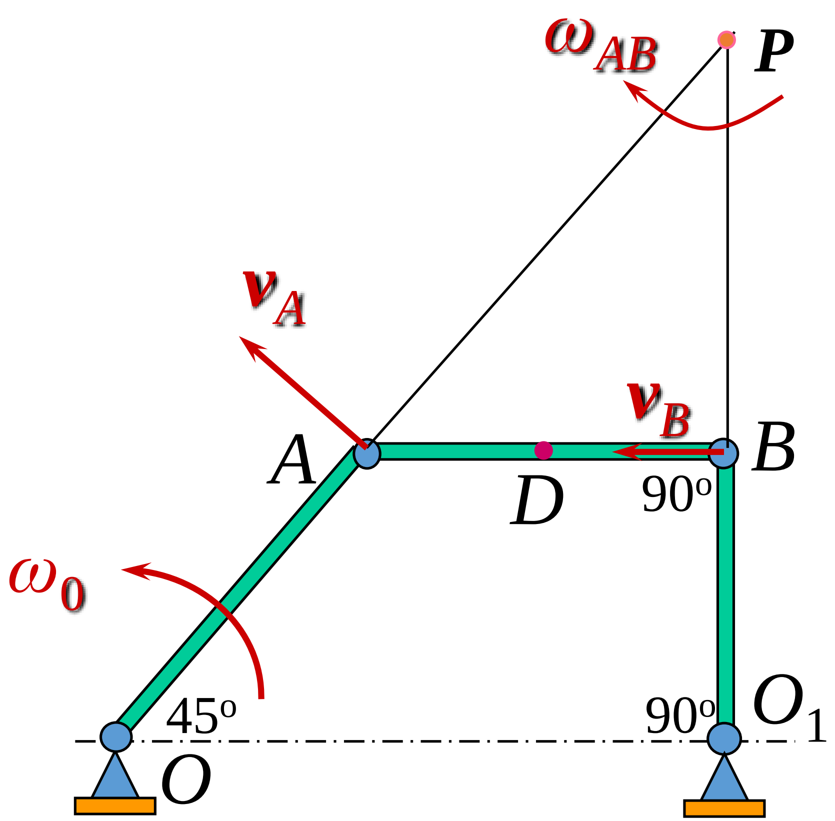
A，B二点的速度v_A和v_B的方向都可以确定。

作v_A和v_B的垂线，相交于C_v，此即杆AB的速度瞬心。

图中的几何关系：

$$OA=\sqrt{2}l\ ,\ AB=BP=\frac{3}{2}l$$

$$AP=\frac{3\sqrt{2}}{2}l\ ,\ DP=\frac{3\sqrt{5}}{4}l$$



$OA=\sqrt{2}l$ ，$AB=BP=\dfrac{3}{2}l$

$AP=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}l$ ，$DP=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}l$

（1）求B和D点的速度。

因为A点的速度 $v_A=OA\cdot\omega_0=\sqrt{2}l\omega_0$

所以，连杆AB 的角速度

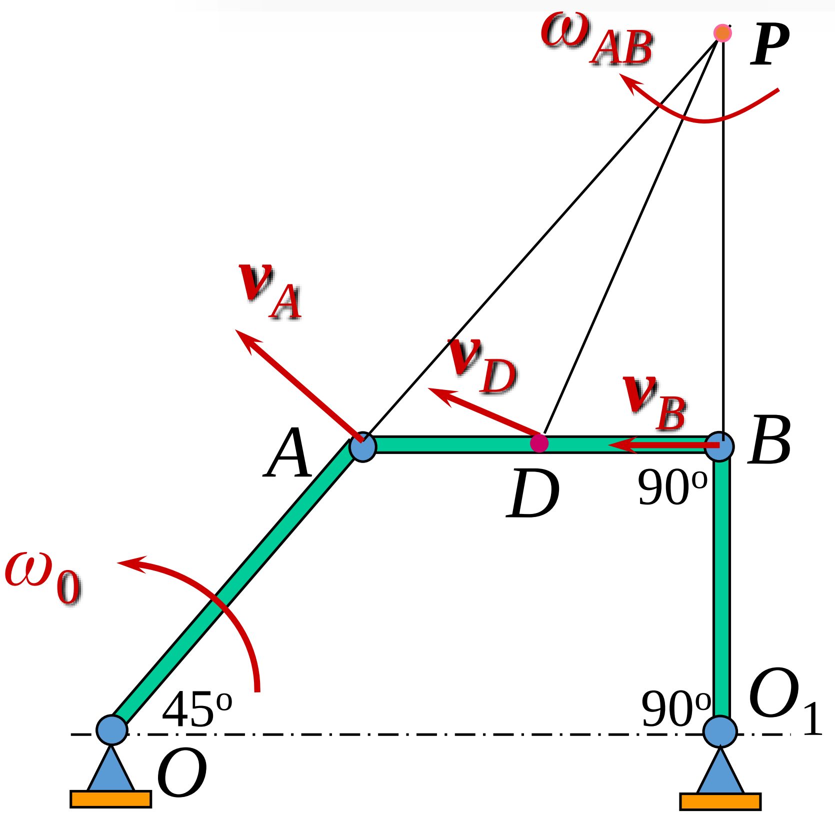
$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AP}=\frac{\sqrt{2}l\omega_0}{\frac{3\sqrt{2}}{2}l}=\frac{2}{3}\omega_0$$

顺时针转向

B点的速度

$$v_B=BP\cdot\omega_{AB}=\frac{v_A}{AP}$$

$$=\frac{3}{2}l\times\frac{2}{3}\omega_0=l\omega_0$$



$$OA=\sqrt{2}l\ ,\ AB=BP=\frac{3}{2}l$$

$$AP=\frac{3\sqrt{2}}{2}l\ ,\ DP=\frac{3\sqrt{5}}{4}l$$

连杆*AB* 的角速度

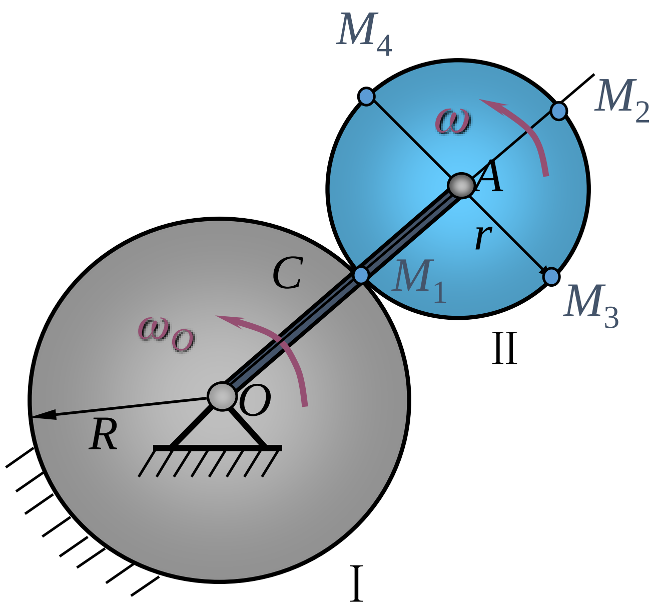
$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AP}=\frac{\sqrt{2}l\omega_0}{\frac{3\sqrt{2}}{2}l}=\frac{2}{3}\omega_0$$

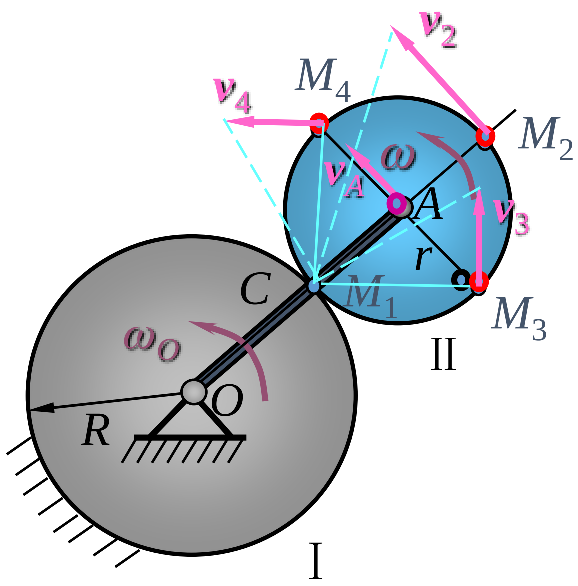
***D*点的速度**

$$v_D=DP\cdot\omega_{AB}=\frac{3\sqrt{5}}{2}l\times\frac{2}{3}\omega_0$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}l\omega_0$$

例4-6 如图所示，节圆半径为r的行星齿轮II由曲柄OA带动在节圆半径为R的固定齿轮I上作无滑动的滚动。已知曲柄OA以匀角速度ω_O转动。求在图示位置时，齿轮II节圆上M_1，M_2，M_3和M_4各点的速度。图中线段M_3M_4垂直于线段M_1M_2。





解： 行星齿轮 II 作平面运动。因为行星轮 II滚而不滑，所以其速度瞬心在二轮接触点C处，利用瞬心法进行求解。为此先求轮 II 的角速度。

因为A点的速度

$$v_A = OA \cdot \omega_O = (R + r) \cdot \omega_O = AC \cdot \omega = r \cdot \omega$$

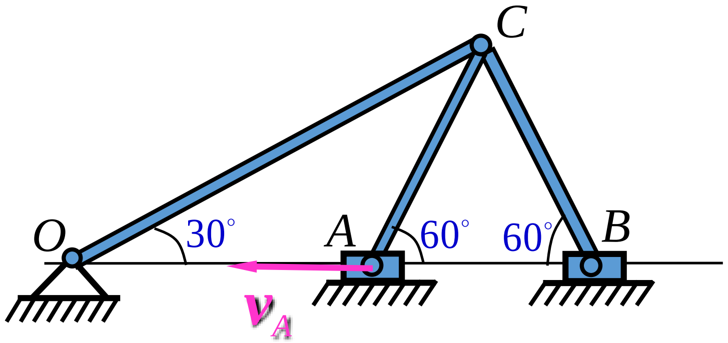
因此轮 II 的角速度 $\omega = \dfrac{R+r}{r}\omega_O$ （逆时针）

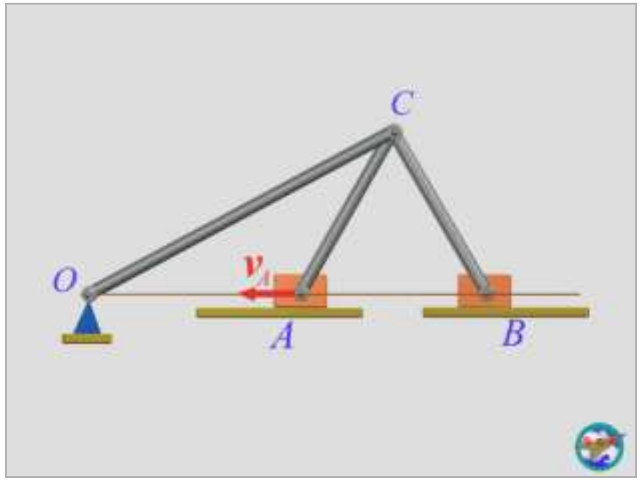
所以轮 II 上 M_1，M_2，M_3和 M_4各点的速度分别为：

$$v_1 = v_c = 0 \ , \quad v_2 = CM_2 \cdot \omega = 2(R + r)\omega_O$$

$v_3 = v_4 = CM_3 \cdot \omega = \sqrt{2}(R + r)\omega_O$， 各点的速度方向如图所示。

例4-7 在双滑块摇杆机构中，滑块A和B可沿水平导槽滑动，摇杆OC可绕定轴O转动，连杆CA和CB可在图示平面内运动，且$CB=l$。当机构处于图示位置时，已知滑块A的速度v_A，试求该瞬时滑块B的速度v_B以及连杆CB的角速度ω_{CB}。**试用速度瞬心法求解。**





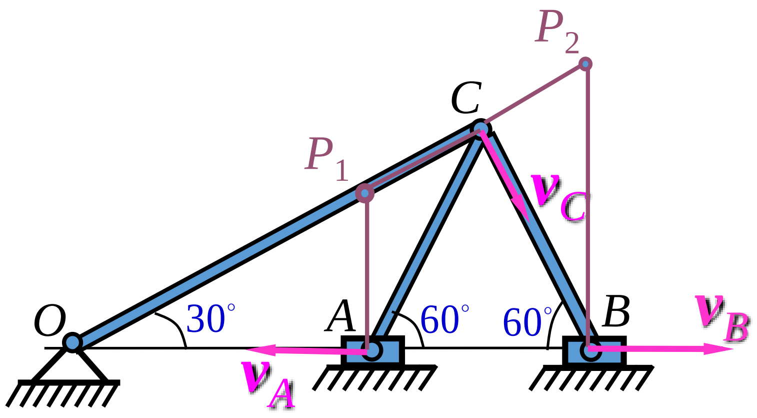
解： 连杆AC和BC均作平面运动。

对于连杆AC： 其速度瞬心在点A和C速度v_A和v_C垂线的交点P_1。

由图可知，$P_1A=P_1C$，所以 $v_C = v_A$

对于连杆BC： 其速度瞬心在点B和C速度v_B和v_C垂线的交点P_2。

因为 $$P_2C = CB \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} l$$

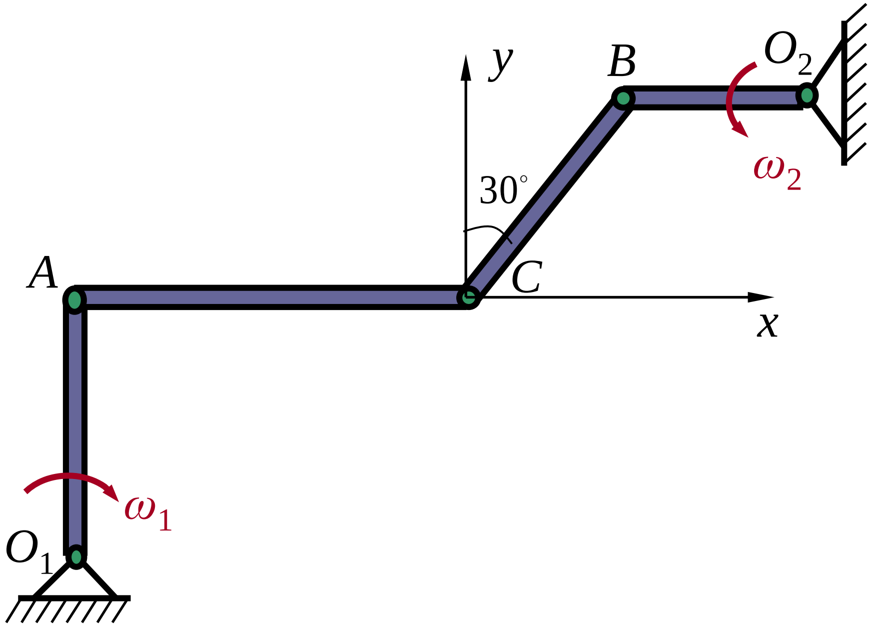


故得连杆CB角速度

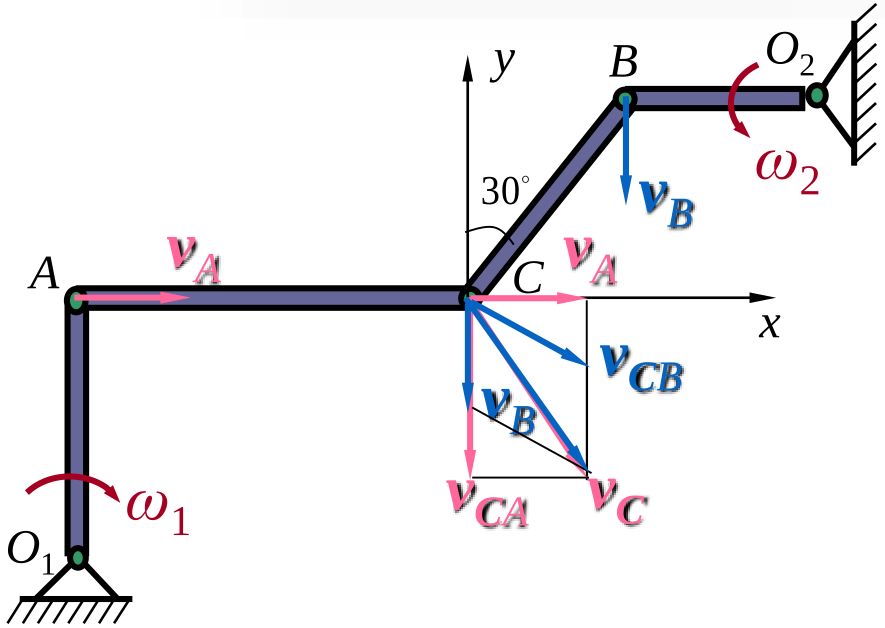
$$\omega_{CB} = \frac{v_C}{P_2C} = \frac{\sqrt{3}}{l} v_A$$ （逆时针）

于是滑块B速度的大小为

$$v_B = P_2B \cdot \omega_{CB} = \frac{2}{\sqrt{3}} l \times \frac{\sqrt{3}}{l} v_A = 2v_A$$ （水平向右）



例4-3 如图平面铰链机构。已知杆O_1A的角速度是ω_1，杆O_2B的角速度是ω_2，转向如图，且在图示瞬时，杆O_1A铅直，杆AC 和O_2B水平，而杆BC对铅直线的偏角30°；又$O_2B=b$，$O_1A=\sqrt{3}\,b$。试求在这瞬时C 点的速度。



解：连杆AC和BC均作平面运动。

先求出A点和B点的速度。有

$$v_A = \omega_1 O_1 A = \sqrt{3}\omega_1 b$$

$$v_B = \omega_2 O_2 B = \omega_2 b$$

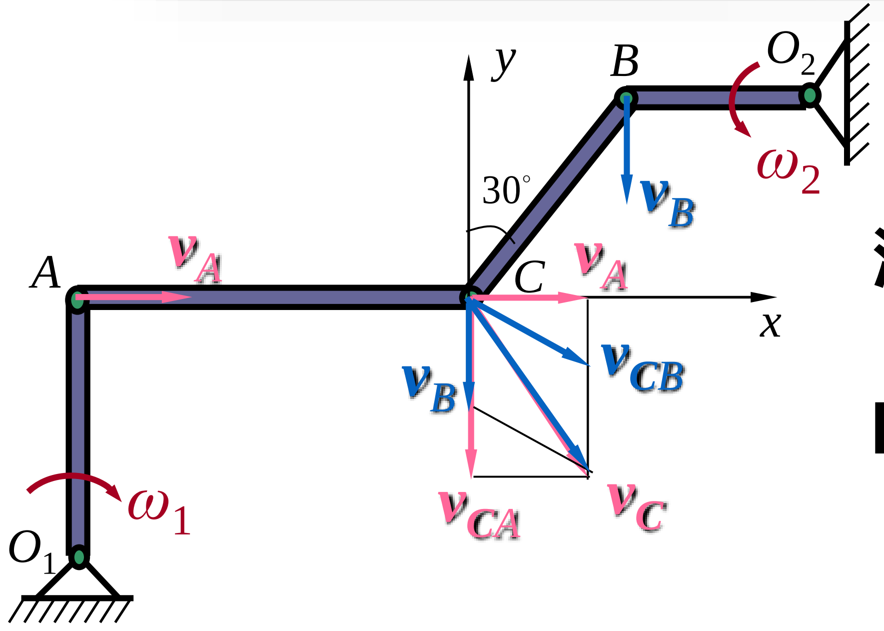
v_A 和 v_B的方向如图。

以A点为基点分析C 点的速度，有 $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA}$ （1）

另外，又以B作为基点分析C 点的速度，有

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB} \quad (2)$$

比较以上两式，有 $\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA} = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}$



$$\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA} = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}$$

沿x 轴投影上式，得

$$v_A = v_{CB}\cos 30^\circ$$

由此求得

$$v_{CB} = \frac{v_A}{\cos 30^\circ} = 2\omega_1 b$$

方向如图

把 $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}$ 式分别投影到x，y 轴上，有

$$v_{Cx} = v_{Bx} + v_{CBx} = 0 + v_{CB}\cos 30^\circ = \sqrt{3}\omega_1 b$$

$$v_{Cy} = v_{By} + v_{CBy} = -v_B - v_{CB}\sin 30^\circ = -(\omega_1 + \omega_2)b$$

（也可以向BC投影求v_{CA}。代入 $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA}$ ）

$$v_{Cx}=v_{Bx}+v_{CBx}=0+v_{CB}\cos 30^\circ=\sqrt{3}\omega_1 b$$

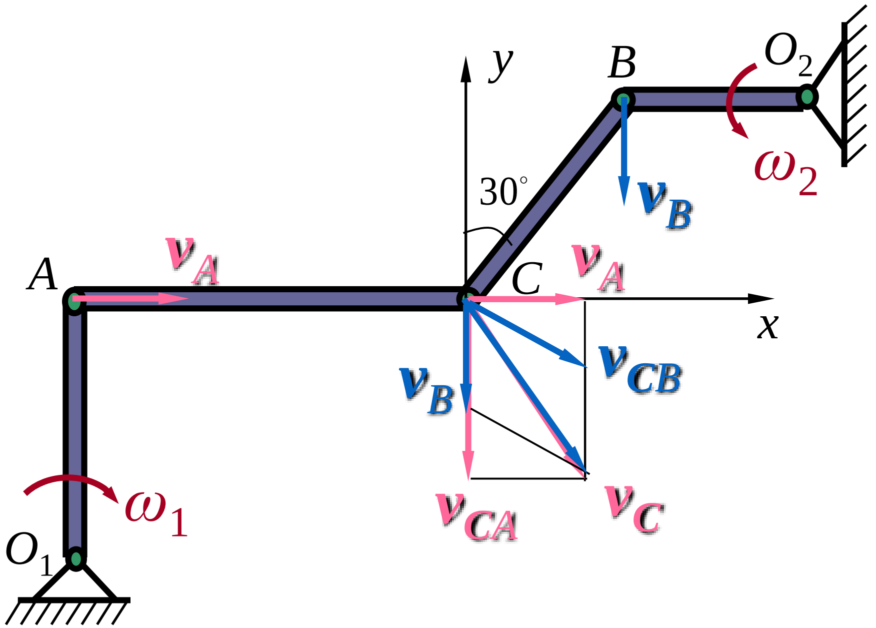
$$v_{Cy}=v_{By}+v_{CBy}=-v_B-v_{CB}\sin 30^\circ=-(\omega_1+\omega_2)b$$

于是得

$$v_C=\sqrt{v_{Cx}^2+v_{Cy}^2}=b\sqrt{3\omega_1^2+(\omega_1+\omega_2)^2}$$

$$=b\sqrt{4\omega_1^2+2\omega_1\omega_2+\omega_2^2}$$

$$\tan(\boldsymbol{v}_C,\boldsymbol{x})=\frac{v_{Cy}}{v_{Cx}}=\frac{-(\omega_1+\omega_2)}{\sqrt{3}\omega_1}$$



谢谢！