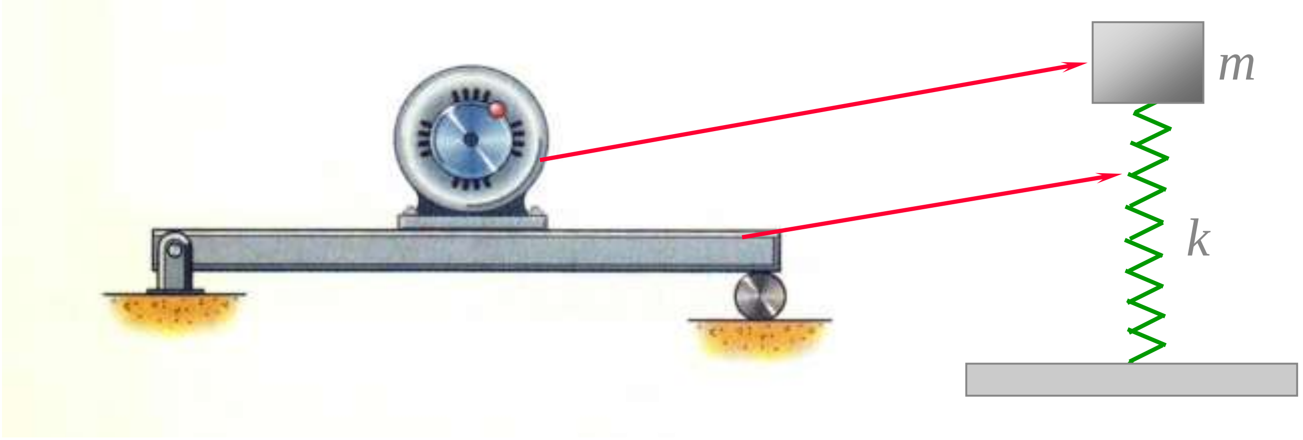
15.2 质点的无阻尼自由振动

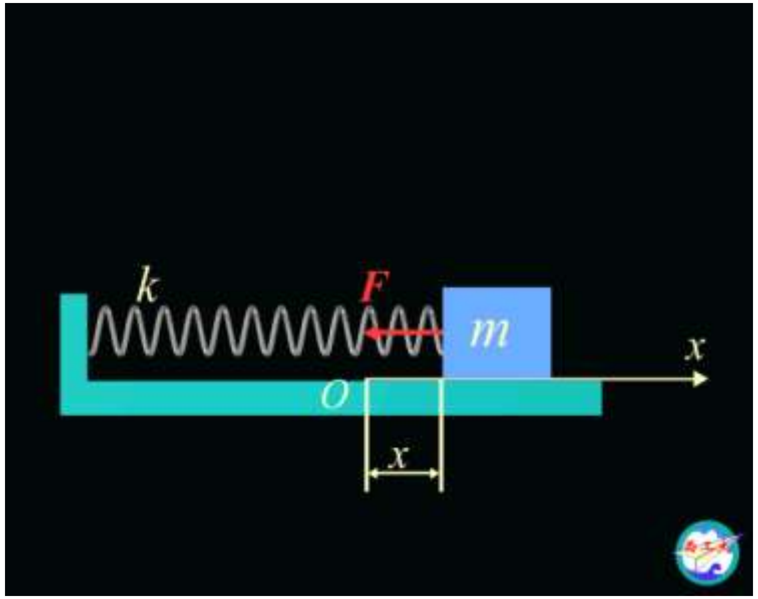
自由振动是质点仅在恢复力作用下进行的振动。

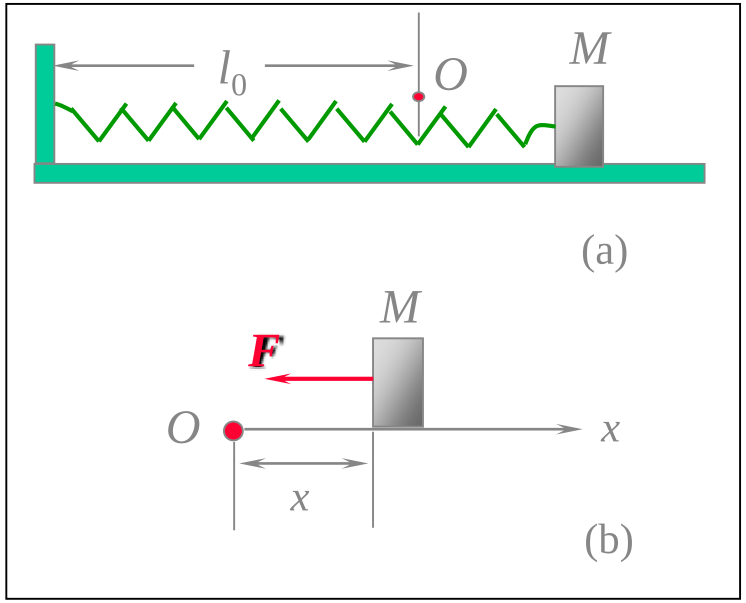
质量—弹簧系统

简单的模型为下面所示的质量—弹簧系统。



自由振动是质点仅在恢复力作用下进行的振动。简单的模型如图(a)所示的质量一弹簧系统。





质点受到初始扰动后，将得到初位移和初速度，此后质点在弹簧力维持下的运动，即为自由振动。

一、自由振动的微分方程及其解

取坐标轴Ox，原点O是质点M的平衡位置。如图（a）所示。当M的坐标是x时，弹簧作用于M的力F的大小表示成

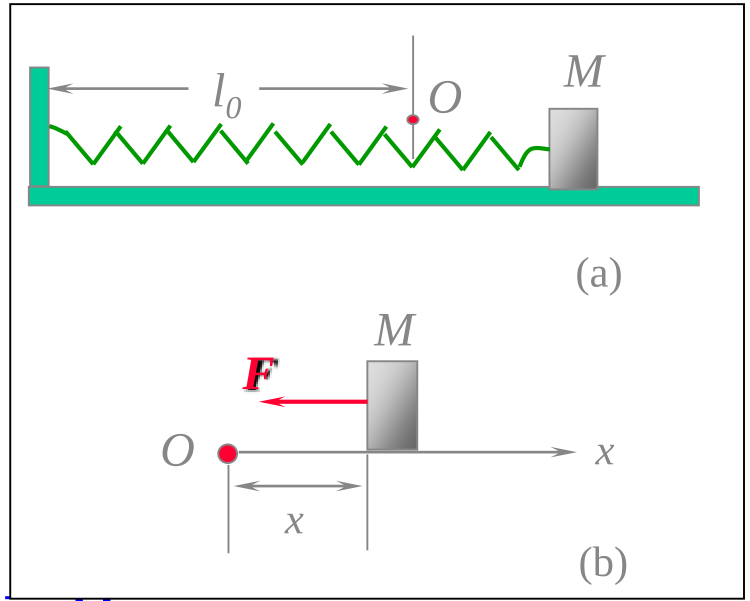
$$F = c|x|$$

式中c称为弹簧的刚度系数，简称刚度。

因F 恒指向平衡位置O，故它可写成

$$m\ddot{x} = -cx$$

于是，质点M的运动微分方程写成



$$m\ddot{x} = -cx \qquad \text{或} \qquad \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

引入参量

$$k^2 = \frac{c}{m}$$

则上式可写成标准形式

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \qquad (9\text{-}1)$$

这就是在线性恢复力单独作用下，质点受初扰动后的无阻尼自由振动微分方程，它是二阶常系数线性齐次微分方程。

其通解为

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \qquad (9\text{-}2)$$

把上式对时间求导数，得

$$v = \dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt \qquad (9\text{-}3)$$

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \qquad (9\text{-}2)$$

$$v = \dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt \qquad (9\text{-}3)$$

当t=0时，质点的初坐标和初速度

$$x = x_0, \qquad v = \dot{x}_0 \qquad (9\text{-}4)$$

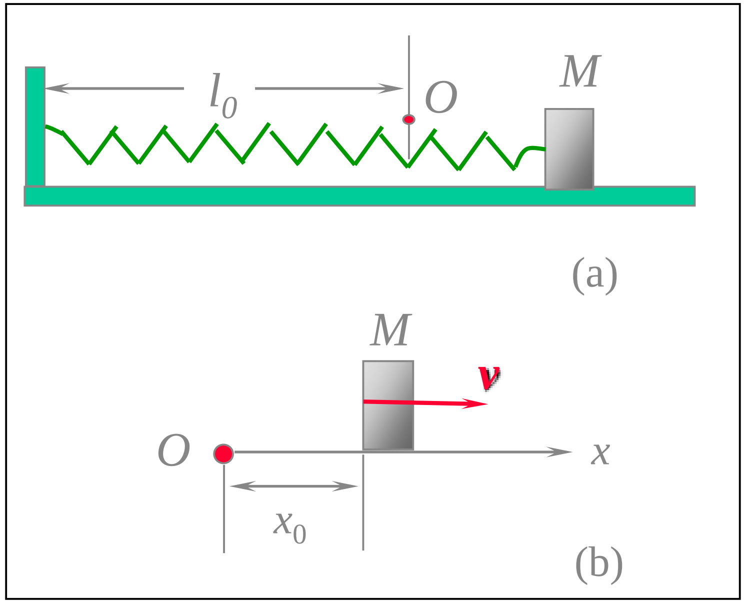
令t=0且 $x = x_0$ 和 $\dot{x} = \dot{x}_0$ ，就可以确定积分常数

$$C_1 = x_0 \quad \text{和} \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}$$

这样，质点无阻尼自由振动规律和速度变化规律分别是

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt \qquad (9\text{-}5a)$$

$$\dot{x} = -x_0 k \sin kt + \dot{x}_0 \cos kt \qquad (9\text{-}5b)$$



这样，质点无阻尼自由振动规律和速度变化规律分别是

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt \qquad (9\text{-}5a)$$

$$\dot{x} = -x_0 k \sin kt + \dot{x}_0 \cos kt \qquad (9\text{-}5b)$$

通常把上二式写成

$$x = A \sin(kt + \alpha) \qquad (9\text{-}6a)$$

$$\dot{x} = Ak \cos(kt + \alpha) \qquad (9\text{-}6b)$$

利用三角变换，可以确定

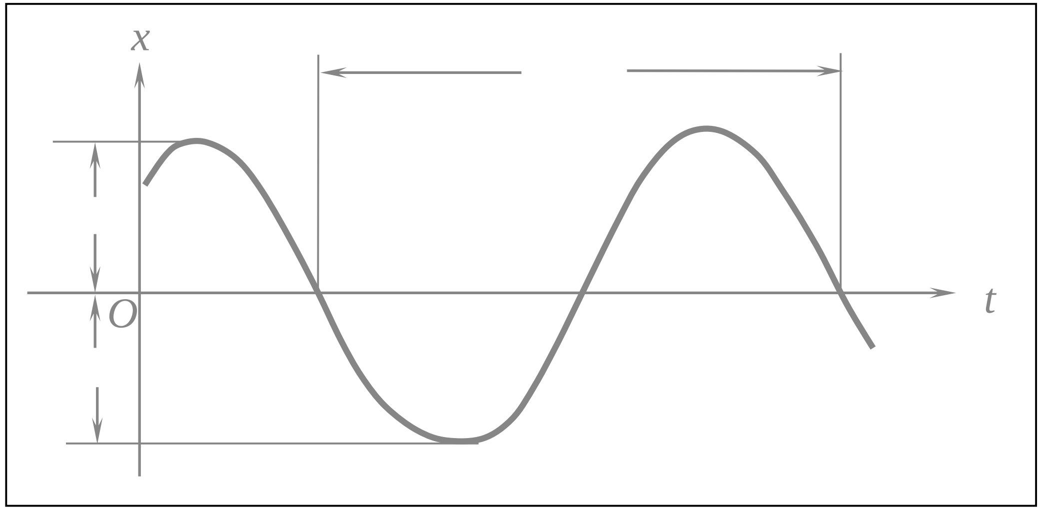
$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}, \qquad tg\alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}$$

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt \qquad (9\text{-}5a)$$

$$x = A \sin(kt + \alpha) \qquad (9\text{-}6a)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{\dot{x}_0}{k})^2}, \qquad tg\alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0} \qquad (9\text{-}7)$$

由式（9-5a）**或式**（9-6a）**可见，质点无阻尼自由振动是简谐振动，其运动如图所示。**



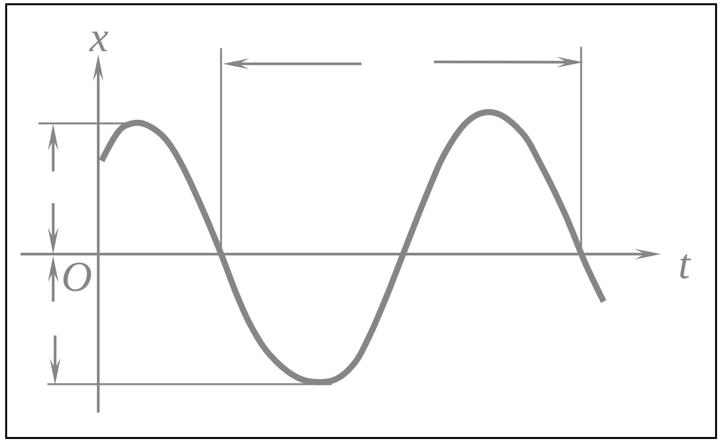
二、自由振动的基本参数

（1）振幅和相角

由式（9-6a）可见质点相对于振动中心（平衡位置）的最大偏离

$$x_{max} = A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{\dot{x}_0}{k})^2},$$

称为**振幅**。（$kt+\alpha$）称为**相角**，而α称为**初相角**。由式（9-7）可见，振幅和初相角都和运动的初始扰动（$x_0, \dot{x}_0$）有关。



$$x = A\sin(kt + \alpha)$$

（9-6a）

$$A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{\dot{x}_0}{k})^2},$$

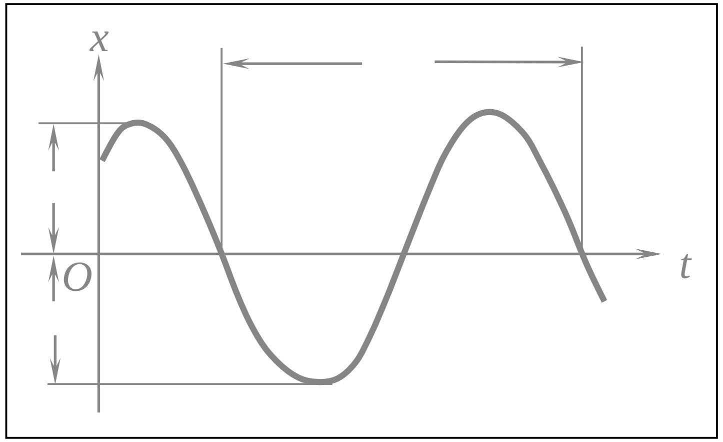
$$tg\alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}$$

（9-7）

（2）周期和频率

- **周期**

每重复一次运动状态所需的时间间隔，称为**周期**，并用T表示。



每隔一个周期T，相角应改变 $kT=2\pi$。因此，周期可以表示成

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \tag{9-8}$$

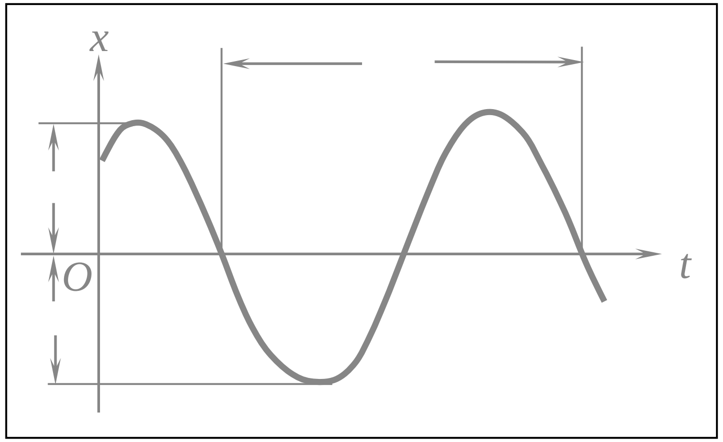
周期一般以s计。

周期仅和系统本身的固有参数（质量m与刚度c）有关，而和运动的初始条件无关。

- **频率**

单位时间内振动的次数，称为**频率**，记作 f。

$$f = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}$$



每2π秒内振动的次数称为**圆频率**，表示为

$$k = 2\pi f = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

k 只和系统的固有的性质有关，而和运动的初始条件无关系。因此，k 称为系统的**固有频率**或**自然频率**。

三、铅直悬挂质量—弹簧系统

用δ_s代表当物块在重力G和弹簧力F_0的作用下在平衡位置静止时弹簧所具有的变形，即**静变形**（如图a）。

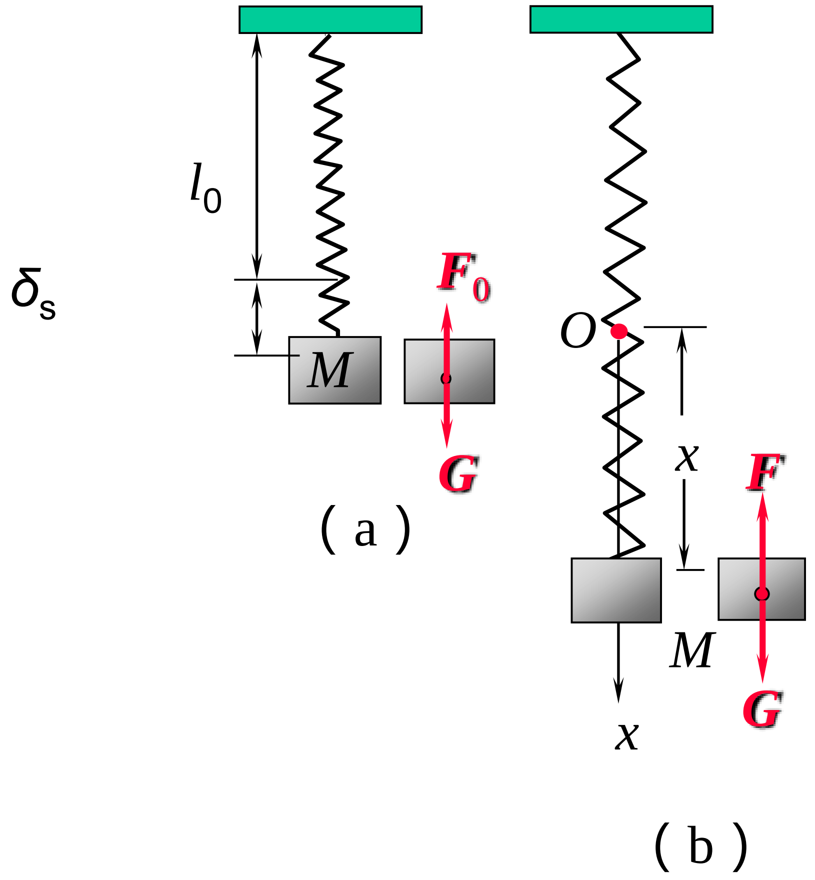
显然，由平衡条件$G-F_0=0$有

$$mg = c\delta_s \qquad (1)$$

以平衡位置O作为原点，令轴Ox铅直向下，则当物块在任意位置x时，弹簧力F在轴x上的投影$F_x=-c(\delta_s+x)$（如图b）。

可得物块的运动微分方程

$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_s + x)$$



$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_s + x)$$

考虑到关系式 $mg = c\delta_s$，上式写成

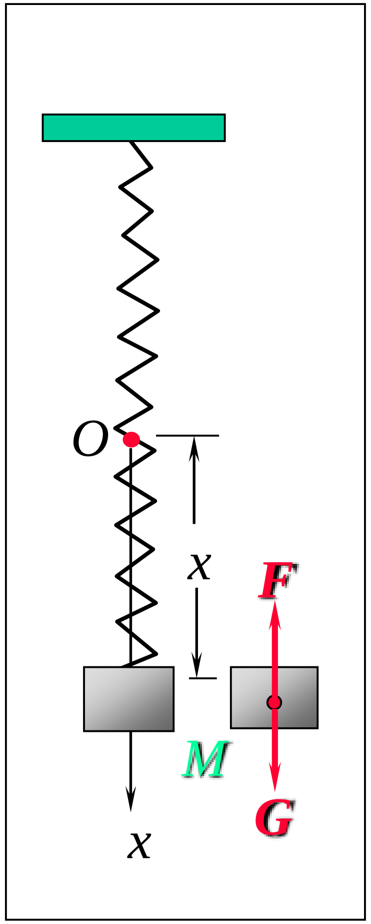
$$m\ddot{x} = -cx \quad \text{或} \quad \ddot{x} + k^2 x = 0$$

其中 $k^2 = c/m$，可见，M 仍在平衡位置附近作无阻尼自由振动。

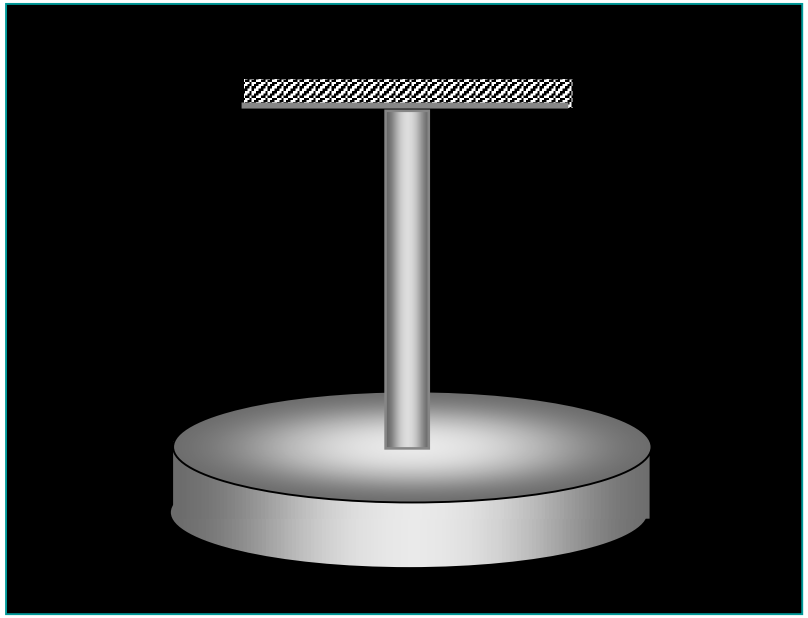
与水平质量—弹簧系统比较，铅直悬挂质量—弹簧系统质点上只有增加了一个常力，这力只引起平衡位置的改变，而不影响振动的规律（如周期、频率、相位）。

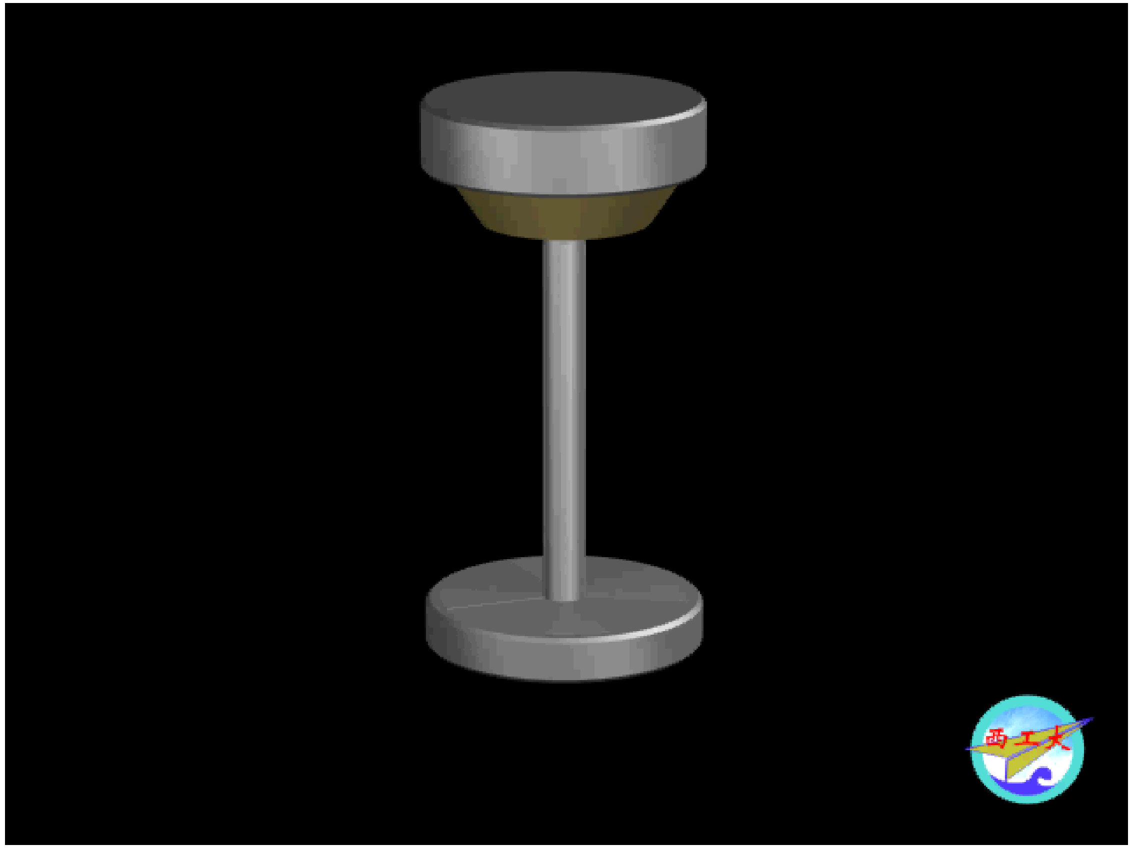
利用弹簧自由悬挂时的静伸长δ_s，来求出系统的固有频率，有

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{mg/c}}, \quad \text{即} \quad k = \sqrt{\frac{g}{\delta_s}}$$



例题1 如图所示为一弹性杆支持的圆盘，弹性杆扭转刚度为c_n，圆盘对杆轴的转动惯量为J。求系统的振动周期。




西工大

解： 圆盘绕杆轴转动微分方程为

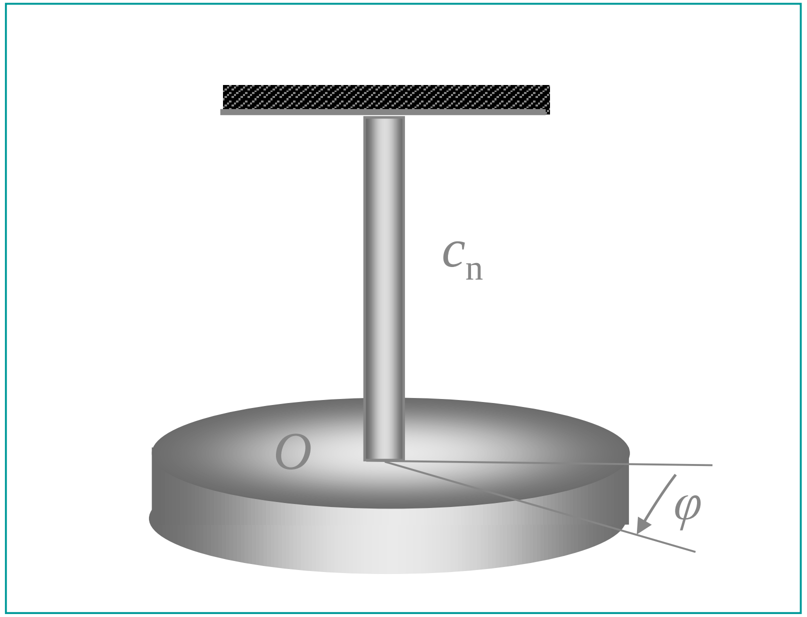
$$J\ddot{\varphi} = -c_{\mathrm{n}}\varphi$$

或

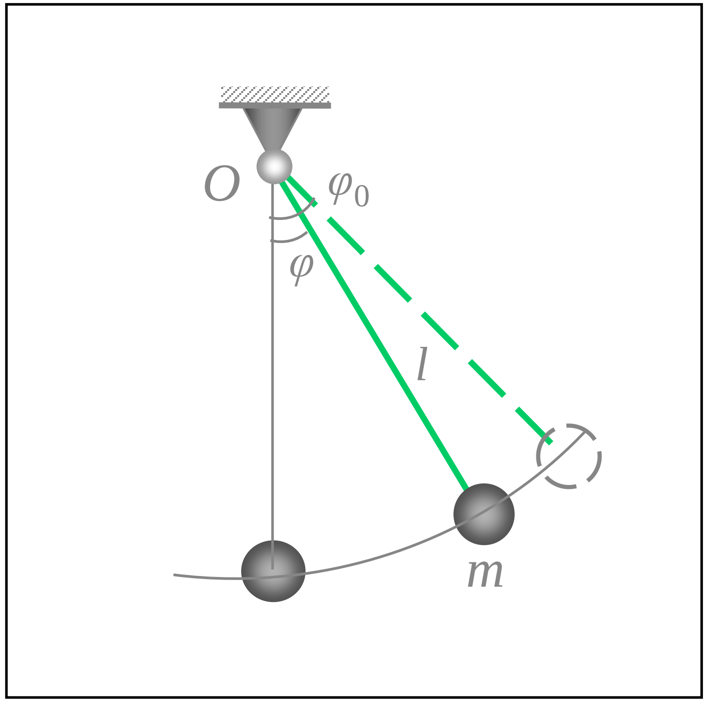
$$\ddot{\varphi} + \frac{c_{\mathrm{n}}}{J}\varphi = 0$$

振动周期

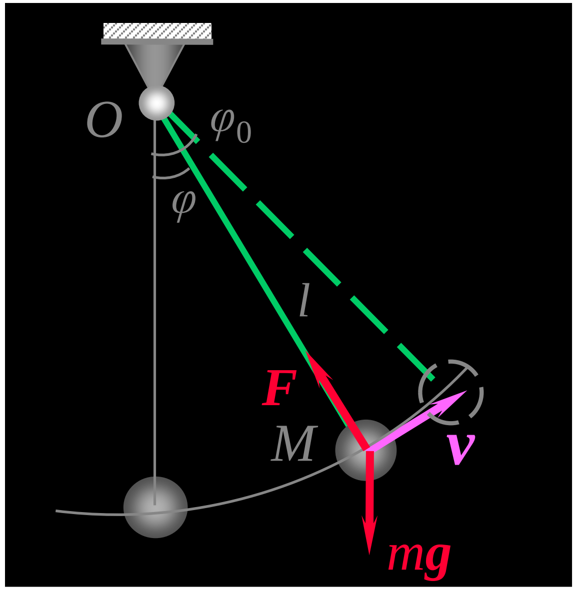
$$T_{\mathrm{n}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{c_{\mathrm{n}}}{J}}}$$



例题2 求单摆(数学摆)的运动规律。



解： 把单摆看成一个在圆弧上运动的质点 M，设其质量为 m，摆线长 l。又设在任一瞬时质点 M 具有速度 v，摆线 OM 与铅垂线的夹角是 φ。



通过悬点 O 而垂直于运动平面的固定轴 z 作为矩轴，对此轴应用质点的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} = M_{Oz}$$

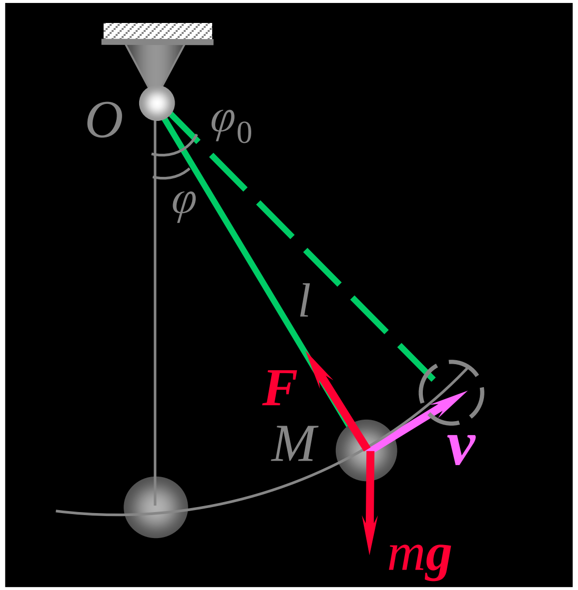
动量矩 $$L_{Oz} = mvl = m(l\omega)l = ml^2\frac{d\varphi}{dt}$$

力矩 $$M_{Oz} = -mgl\sin\varphi$$

动量矩定理 $$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t}=M_{Oz}$$

动量矩 $$L_{Oz}=ml^2\frac{d\varphi}{dt},$$

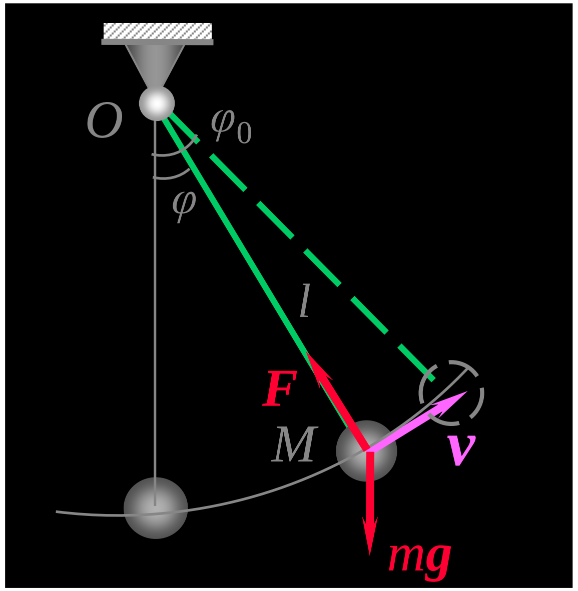
力矩 $$M_{Oz}=-mgl\sin\varphi$$



从而可得 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ml^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t})=-mgl\sin\varphi$$

化简即得单摆的运动微分方程 $$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

单摆的运动微分方程 $$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$



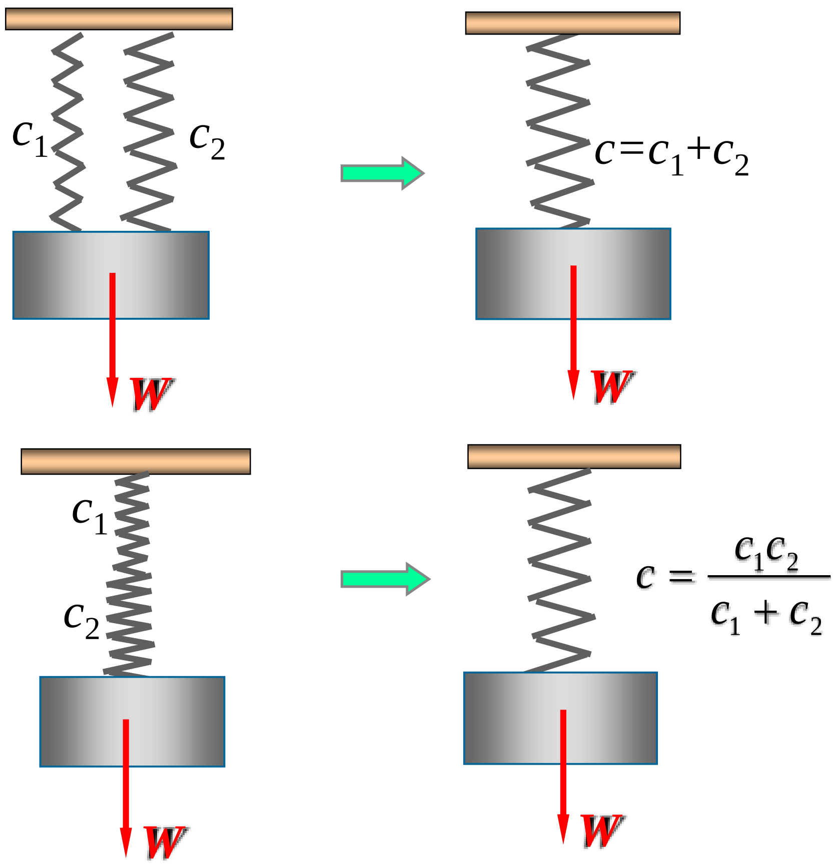
微小摆动中，φ 值始终很小，可以认为 $\sin\varphi\approx\varphi$,**则**

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0$$

考虑初始条件：$t=0,\ \varphi=\varphi_0,\ \dot{\varphi}=0$。**得单摆的运动规律**

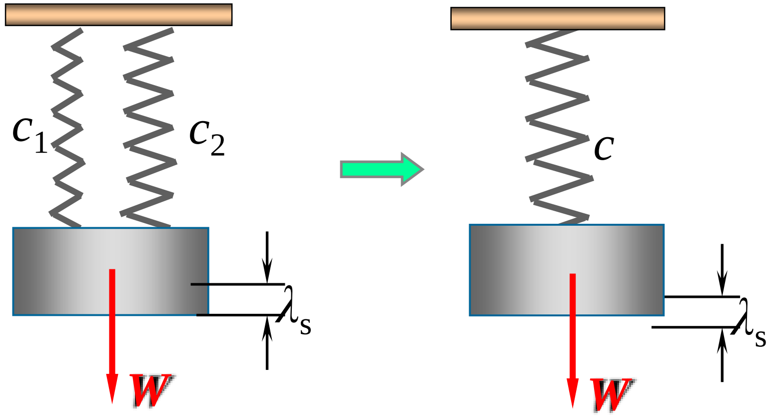
$$\varphi=\varphi_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

频率 $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$, 周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ **与幅角和初始条件无关。**



例3 利用静变形求并联弹簧和串联弹簧两种情形的直线振动系统的固有频率。

解： **1. 并联情形。**



设弹簧刚度系数分别为c_1和c_2，在W重力作用下作铅直平动，静变形为λ_s，有

$$W = c_1\lambda_s + c_2\lambda_s = (c_1 + c_2)\lambda_s$$

选择弹簧刚度系数为c的弹簧代替并联的两弹簧，使它在相等的变形下，产生与并联的两弹簧相等的恢复力，有

$$W = c\lambda_s = (c_1 + c_2)\lambda_s$$

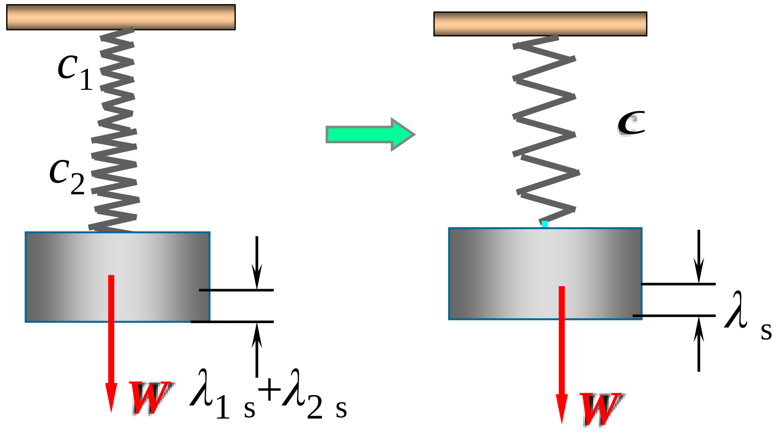
上式说明并联弹簧的等效刚度系数为

$$\boxed{c = c_1 + c_2}$$

固有频率 $$k = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$$

2. 串联情形。

设弹簧刚度系数分别为c_1和c_2，在W重力作用下，两弹簧的总静变形λ_s等于单个弹簧的静变形之和，有



$$\lambda_s = \lambda_{1s} + \lambda_{2s}$$

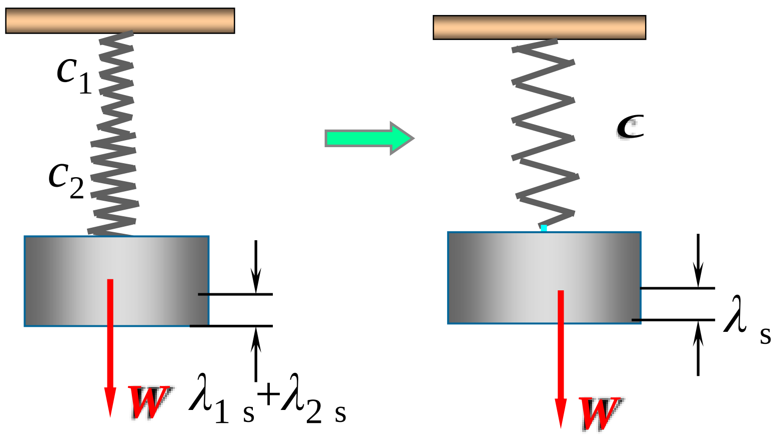
选择弹簧刚度系数为c的弹簧代替串联的两弹簧，使它的静变形λ_s等于串联的两弹簧静变形之和$\lambda_{1s}+\lambda_{2s}$。

由于弹簧是串连的，每个弹簧受的力W相等，于是

$$\lambda_{1s} = \frac{W}{c_1}, \quad \lambda_{2s} = \frac{W}{c_2}, \quad \lambda_s = \frac{W}{c},$$

$$\lambda_s = \lambda_{1s} + \lambda_{2s}$$

$$\lambda_s = \frac{W}{c}, \qquad \lambda_{1s} = \frac{W}{c_1}, \qquad \lambda_{2s} = \frac{W}{c_2}$$



得

$$\frac{W}{c} = \frac{W}{c_1} + \frac{W}{c_2}, \qquad \frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2},$$

串联弹簧的等效刚度系数为

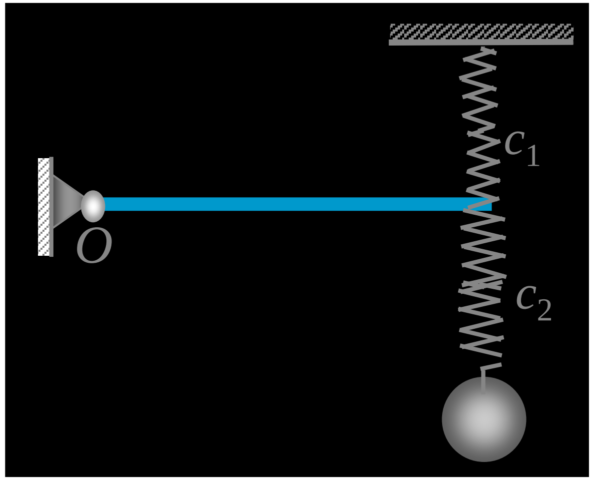
$$c = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

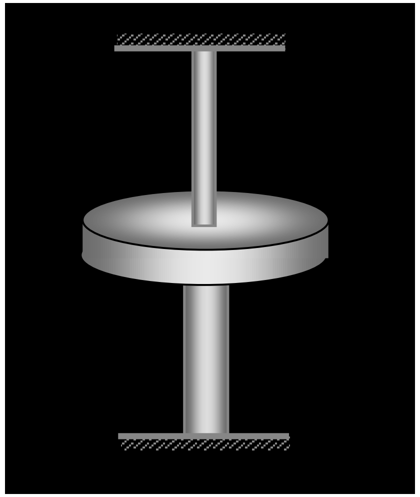
弹簧串联后的刚度系数减小，柔度系数增大。

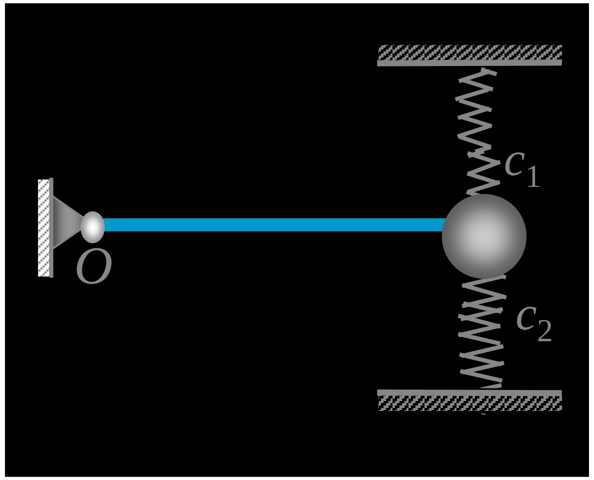
固有频率

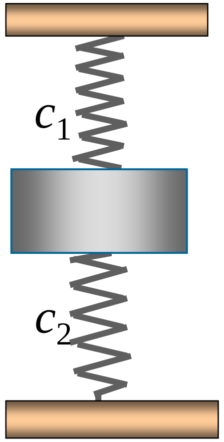
$$k = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}}$$

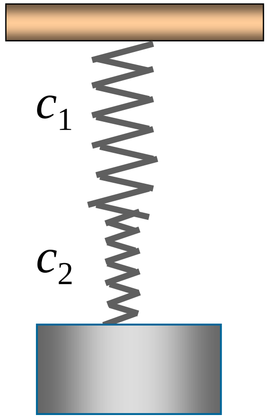
15.2 质点的无阻尼自由振动

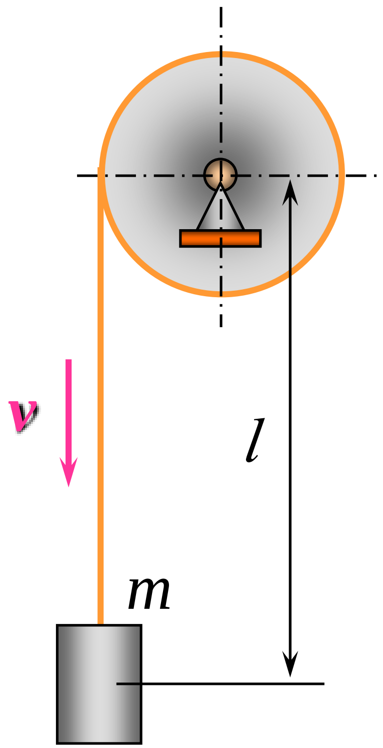




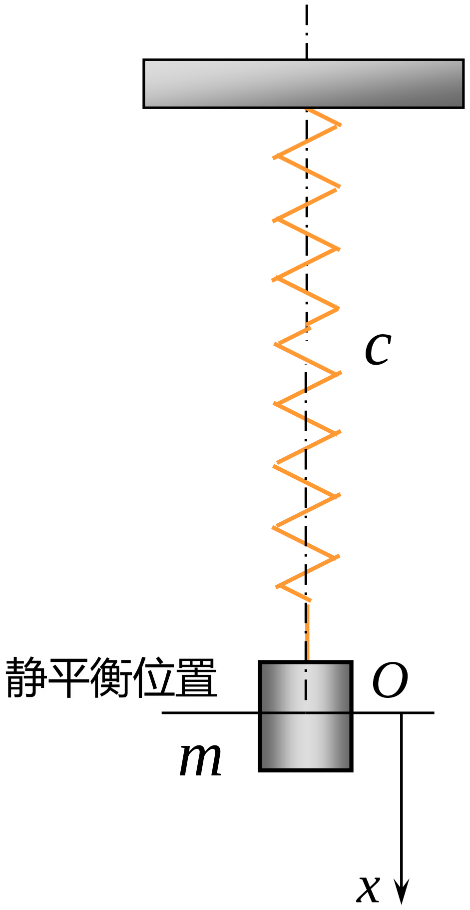








例题4 提升重物系统中，钢丝绳的横截面积$S = 2.89\quad 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$**，材料的弹性模量**$E = 200\ \mathrm{GPa}$。**重物的质量**$m = 6000\ \mathrm{kg}$**，以匀速**$v = 0.25\ \mathrm{m\ s^{-1}}$**下降。当重物下降到**$l = 25\ \mathrm{m}$**时，钢丝绳上端突然被卡住，求重物的振动规律。**



解： 钢丝绳 - 重物系统可以简化为弹簧 - 物块系统，弹簧的刚度为

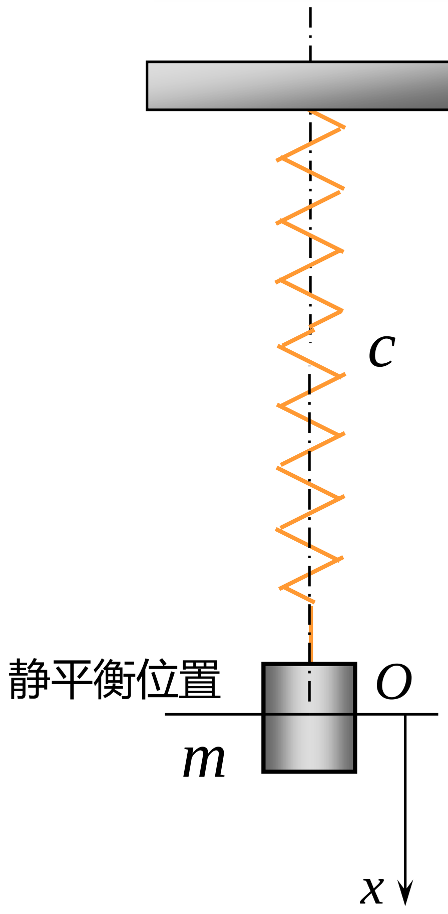
$$c=\frac{ES}{l}=2.312\times10^{6}\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$$

设钢丝绳被卡住的瞬时$t=0$，这时重物的位置为初始平衡位置；以重物在铅垂方向的位移x作为广义坐标，则系统的振动方程为

$$m\ddot{x}+cx=0$$

方程的解为

$$x=A\sin kt,\qquad k=\sqrt{\frac{c}{m}}$$



方程的解为

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

$$x = A\sin kt, \qquad k = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

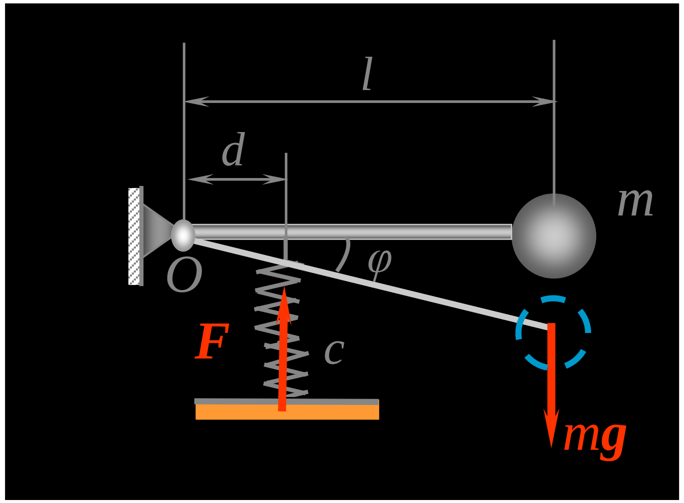
利用初始条件

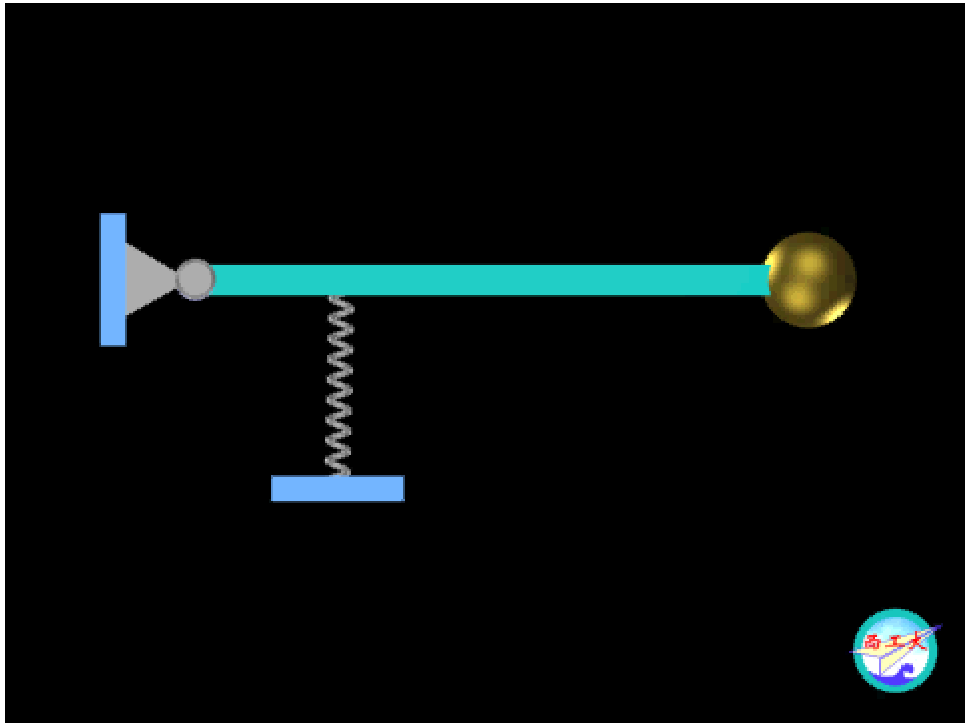
$$\dot{x}(0) = v(0) = v$$

求得

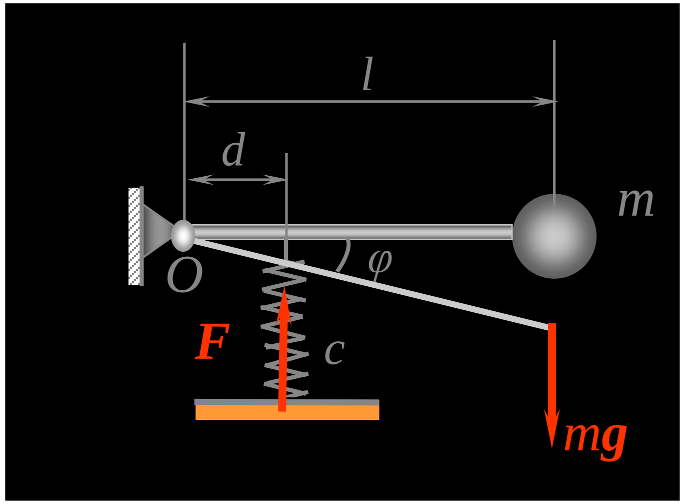
$$A = \frac{v}{k}$$

例题5 如图为一摆振系统，杆重不计，球质量为 m ，摆对轴 O 的转动惯量为 J。弹簧刚度系数为 c，杆于水平位置平衡，尺寸如图。求此系统微小振动的运动微分方程及振动频率。





解： 摆于水平位置处，弹簧已有压缩量δ_0，由平衡方程$\sum m_O(\boldsymbol{F}_i)=0$，有



$$mgl = c\delta_0 d \qquad (a)$$

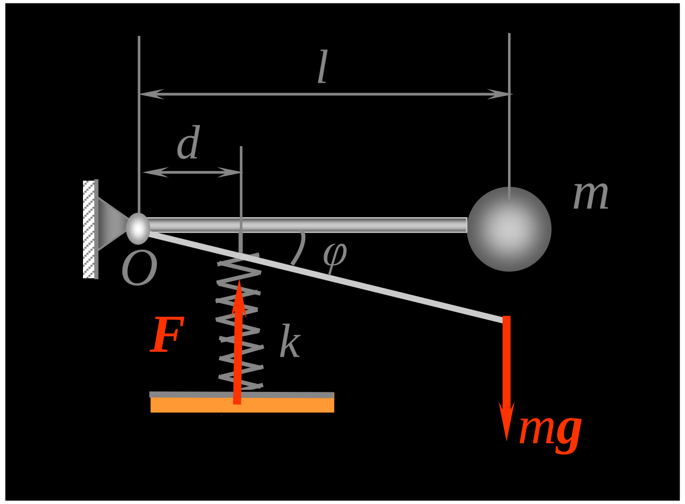
以平衡位置为原点，摆在任一小角度φ处，弹簧压缩量为$\delta_0+\varphi d$。摆绕轴的转动微分方程为

$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = mgl - c(\delta_0+\varphi d)\cdot d$$

将式(a)代入上式，得

$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -cd^2\varphi$$

$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-cd^2\varphi$$



上式移项，可化为标准形式的无阻尼自由振动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{cd^2}{J}\varphi=0 \qquad \text{(b)}$$

则此摆振系统的固有频率为

$$k=d\sqrt{\frac{c}{J}}$$

谢谢！