上节提要

条件概率计算方法

- a 利用缩减的样本空间
- b 等可能/几何概型中条件概率计算公式
- c 定义式 $P(B|A)=P(AB)/P(A)$

条件概率也是概率

因此，对概率所证明的一些重要结果都适用于条件概率。

乘法公式　设$P(A)>0$，则　$P(AB)=P(B|A)P(A)$

设$P(B)>0$，则　$P(AB)=P(A|B)P(B)$

上节提要

样本空间的一个划分

E的一组事件$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 需满足互斥性和完全性

全概率公式 $$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

贝叶斯公式 $$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},\ i=1,2,\ldots,n$$

§6 独立性 Independence

对A、B两事件，一般来说，事件A的发生对事件B发生的概率是有影响的，此时 $P(B|A)\neq P(B)$，只有当这种影响不存在时才有 $P(B|A)=P(B)$，这时有

$$P(AB)\xlongequal{\text{乘法公式}}P(B|A)P(A)=P(B)P(A)$$

于是给出如下直观性定义。

直观性定义

设A、B两事件，如果其中任何一个事件发生的概率**不受**另外一个事件发生与否的影响，则称事件A、B**相互独立**。

数学定义

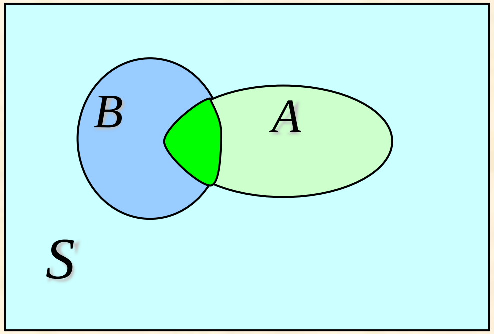
设A、B两事件，如果等式$P(AB)=P(A)P(B)$成立，称事件A、B**相互独立**，简称A、B**独立**。

区 别

A、B相互独立

事件的发生不受对方影响

$P(AB)=P(A)P(B)$



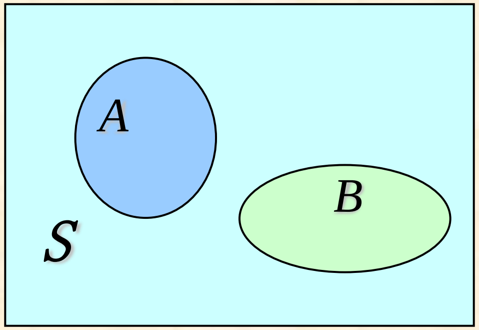
AB

A、B互不相容

两事件不能同时发生

$AB=\varnothing$，$P(AB)=0$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$



$AB=\varnothing$

结论

若P(A)>0，P(B)>0，则

A、B相互独立与A、B互不相容不能同时成立。

若A、B相互独立　P(AB)=P(A)P(B)　>0

而A、B互不相容有P(AB)=0，故A、B不是互不相容

若A、B互不相容　AB=∅，P(AB)=0

而P(A)P(B)　>0

则P(AB) ≠ P(A)P(B)，故A、B不是相互独立

举 例

设随机试验E是在相同条件下重复抛掷一枚均匀的硬币，观察正反面出现的情况，设，

A={第一次出现正面}　　B={第二次出现正面}

则 A与 $\overline{A}$ 是互不相容的？ 是

A与 $\overline{A}$ 是相互独立的？ 不是

则 A与B 是相互独立的？ 是

A与B 是互不相容的？ 不是

两事件独立性的性质

定理一

设A、B相互独立，且$P(A)>0$，则$P(B|A)=P(B)$；反之亦然。

说明：A、B独立时，B发生的概率与A无关

定理二（独立性关于逆运算封闭）

若A, B相互独立，则A与$\bar{B}$, $\bar{A}$与B, $\bar{A}$与$\bar{B}$也相互独立。

定理一 设A、B相互独立，且P(A)>0，则$P(B|A)=P(B)$；反之亦然。

证：

$$P(B|A) \xlongequal{\text{条件P定义}} \frac{P(AB)}{P(A)} \overset{\text{AB独立}}{=} \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

反之

$P(AB)=P(A)P(B)$ ⟶ A、B相互独立

得证

定理二 若A, B相互独立，则A与$\bar{B}$, $\bar{A}$与B, $\bar{A}$与$\bar{B}$也相互独立。

证： 1) A与$\bar{B}$独立，需证$P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})$

$$P(A\bar{B}) \overset{\text{差事件}}{=\!=\!=} P(A-AB) \overset{AB\subset A}{=\!=\!=} P(A)-P(AB)$$

$$\overset{A,B\text{独立}}{=\!=\!=} P(A)-P(A)P(B)= P(A)\left[1-P(B)\right]= P(A)P(\bar{B})$$

2) $\bar{A}$与$\bar{B}$独立，需证$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$

$$P(\bar{A}\bar{B}) \overset{\text{德摩根律}}{=\!=\!=} P\left(\overline{A\cup B}\right) = 1-P(A\cup B)$$

$$\overset{\text{加法公式}}{=\!=\!=} 1-\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right]$$

$$\overset{A,B\text{独立}}{=\!=\!=} 1-\left[P(A)+P(B)-P(A)P(B)\right]$$

$$\overset{\text{整理}}{=\!=\!=} \left[1-P(A)\right]\left[1-P(B)\right] =P(\bar{A})P(\bar{B})$$ 得证

可以将两事件独立性的概念推广到三事件情形：

定 义 设A、B、C三事件，如果满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$$P(BC)=P(B)P(C)$$

$$P(AC)=P(A)P(C)$$

称A、B、C事件**两两相互独立**。

若A、B、C事件两两相互独立，且还满足

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

称事件A、B、C**相互独立**。

例: 四卡片分别标1，2，3，4，随机抽取一张，

记事件 A={取到1或2}

B={取到1或3}

C={取到1或4}

可知 $P(A)=1/2$，$P(B)=1/2$，$P(C)=1/2$

$P(AB)=1/4$，$P(BC)=1/4$，$P(AC)=1/4$

$P(ABC)=1/4 \neq P(A)P(B)P(C)=1/8$

说明：A、B、C三事件？ 两两相互独立 

相互独立 

推广到n个事件独立情形：

定 义 设$n(\geqslant 2)$个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$，如果其中任意$k(2\leq k\leq n)$个事件的积事件的概率都等于各事件概率之积，则称事件$A_1, A_2, \cdots A_n$ **相互独立**。

若n事件$A_1, A_2, \cdots A_n$相互独立，即下列等式同时成立

$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$， $i\neq j$， $i, j=1, 2, \cdots, n$ $\quad C_n^2$

$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k)$， $i\neq j\neq k$， $i, j, k=1, 2, \cdots, n$ $\quad C_n^3$

$\vdots$

$\ldots P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$ $\quad C_n^n$

等式总数 $\quad 2^n-n-1$

由定义可以得到以下**推论**：

推论1

若事件$A_1, A_2, \cdots A_n$ ($n \geqslant 2$)相互独立，则其中任意k($2 \leq k \leqslant n$)个事件也是相互独立的。

推论2

若n个事件相互独立，则将其中任意多个事件换成他们各自的对立事件，所得的n个事件仍相互独立的。（**独立性关于逆运算封闭**）

由推论2可知下列等式成立：

等式数

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \qquad C_n^0$$

$$P(A_1A_2\cdots\overline{A}_i\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(\overline{A}_i)\cdots P(A_n),\quad i=1,2,\cdots,n \qquad C_n^1$$

$$P(A_1A_2\cdots\overline{A}_i\cdots\overline{A}_j\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(\overline{A}_i)\cdots P(\overline{A}_j)\cdots P(A_n),\quad i\neq j=1,2,\cdots,n \qquad C_n^2$$

$$\vdots$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n) \qquad C_n^n$$

等式总数 $=2^n$

一般常用上述最后一个等式。

如： n个事件$A_1, A_2, \cdots A_n$ 相互独立，则可以利用独立事件的性质计算其和事件的概率。

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P\left(A_i\right)\right)$$

特别地，当$P(A_i) = p$时， $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - (1 - p)^n$

说明：实际应用中，往往不是根据定义来判断事件是否独立，而是根据实际意义来判断的。

如：事件之间没有关联或关联很微弱时，则认为它们独立。

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{A}_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_i\right)\right)$$

证:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\overset{\text{逆事件}}{=\!=\!=}1-P\left(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}\right)$$

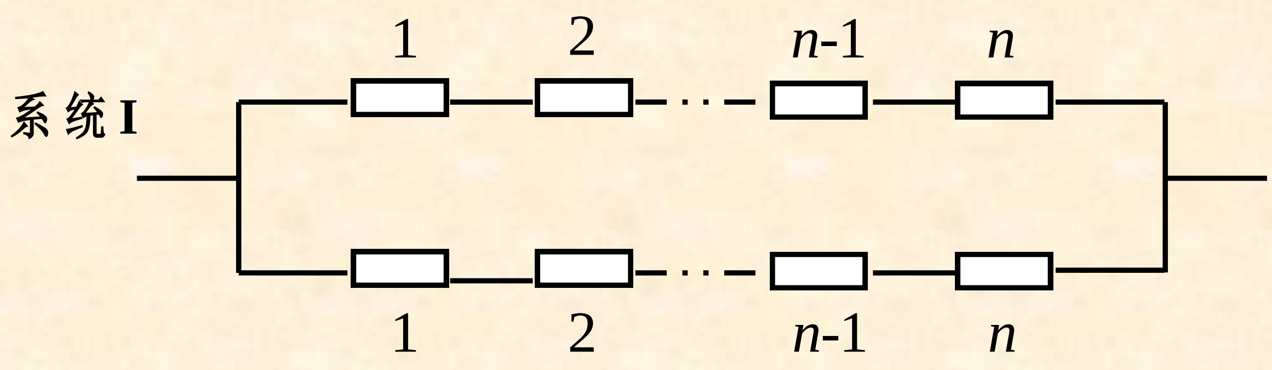
$$\overset{\text{德摩根律}}{=\!=\!=}1-P\left(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n\right)$$

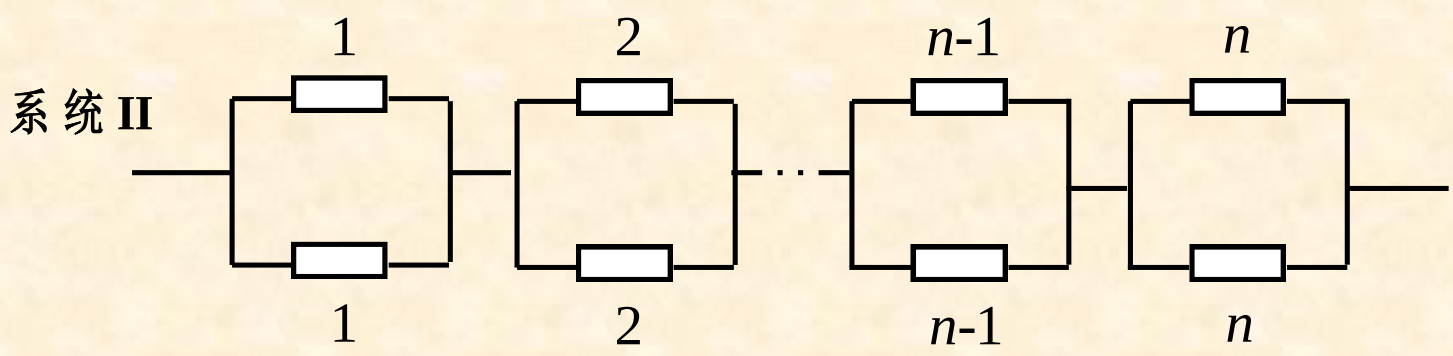
$$\overset{\text{事件独立}}{=\!=\!=}1-P\left(\bar{A}_1\right)P\left(\bar{A}_2\right)\cdots\cap P\left(\bar{A}_n\right)$$

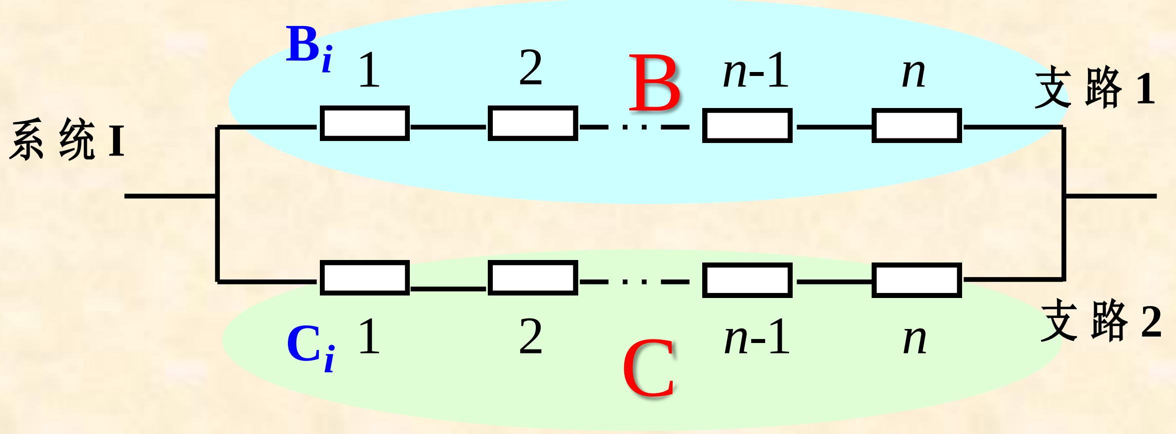
$$=1-P\left(1-A_1\right)P\left(1-A_2\right)\cdots P\left(1-A_n\right)$$

得证

例　一个元件(或系统)能正常工作的概率称为元件(或系统)的可靠度。如果一个系统由2*n*个元件组成，每个元件能否正常工作是相互独立的，且可靠度为*r*，求下列两个系统的可靠度。







解:设 B={支路1正常工作}， C={支路2正常工作}，

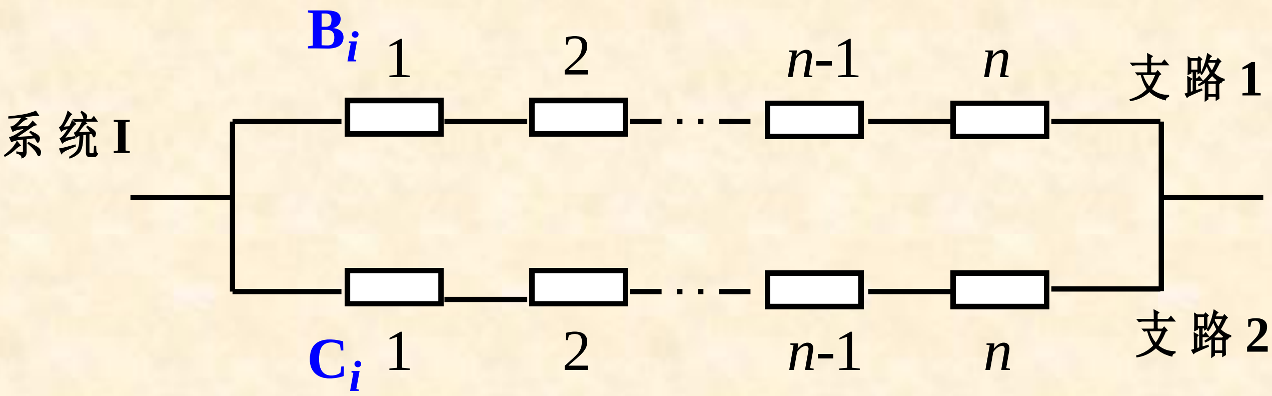
B_i ={支路1中元件i正常工作}， $i=1, 2, \cdots, n$

C_i ={支路2中元件i正常工作}， $i=1, 2, \cdots, n$

法1 $R^{I}=P(B\cup C)\overset{\text{加法公式}}{=\!=\!=}P(B)+P(C)-P(BC)$

$$\overset{\text{B,C独立}}{=\!=\!=}P(B)+P(C)-P(B)P(C)=r^n+r^n-r^nr^n=r^n(2-r^n)$$

$$R^B= P(B)=P(B_1B_2\cdots B_n)\overset{\text{独立}}{=\!=\!=}\prod_{i=1}^{n}P(B_i)=r^n\overset{\text{同理}}{=\!=\!=}P(C)$$



设 B={支路1正常工作}， C={支路2正常工作}，

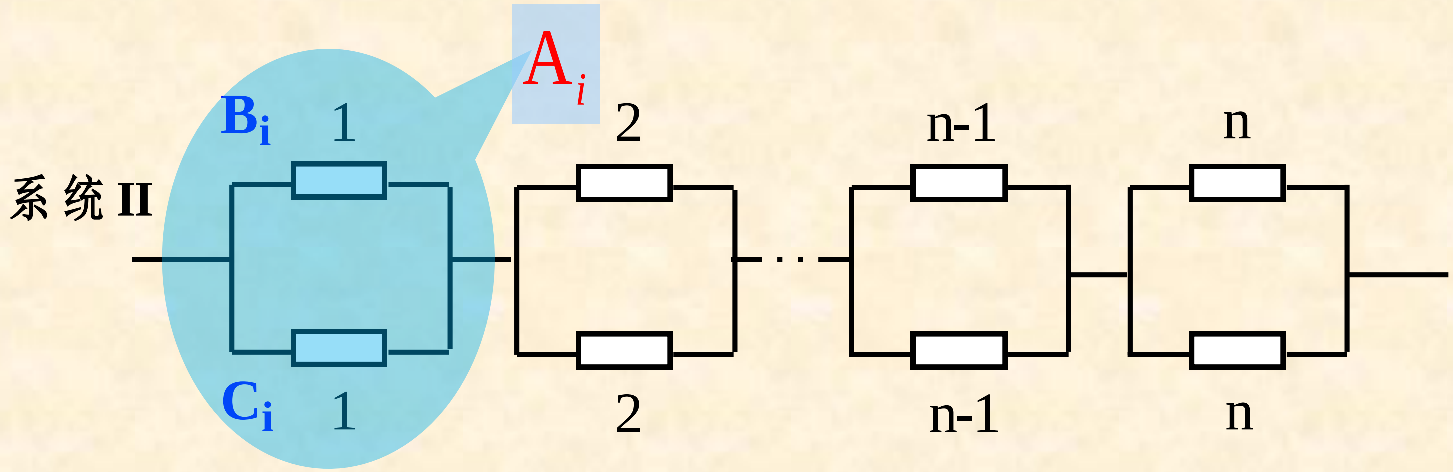
B_i ={支路1中元件i正常工作}， i=1, 2, …, n

C_i ={支路2中元件i正常工作}， i=1, 2, …, n

法2 $R^{\mathrm{I}} = P(B\cup C) \overset{\text{逆}}{=\!=} 1-P\left(\overline{B\cup C}\right) = 1-P(\bar{B}\bar{C})$

$\overset{\text{B,C独立}}{=\!=\!=} 1-P(\bar{B})P(\bar{C}) = 1-(1-r^n)(1-r^n) = r^n(2-r^n)$

即：独立事件和 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-P(A_i)\right)$



设 A_i ={第*i*个并联子系统正常工作}， *i* =1, 2, ⋯, *n*

B_i, C_i ={元件*i*正常工作}， *i* =1, 2, ⋯, *n*

$$R^{II} = P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

$$\underline{\underline{\text{独立}}} \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(B_i \cup C_i) = \prod_{i=1}^{n} r(2-r) = r^n (2-r)^n$$

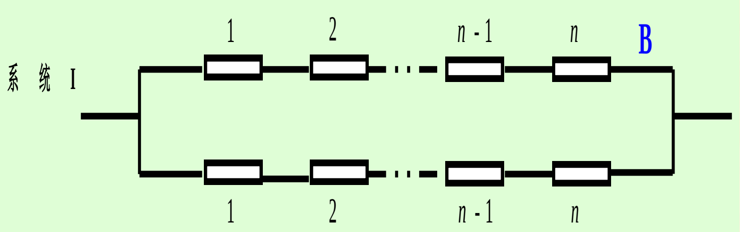
$(B_i \cup C_i)$

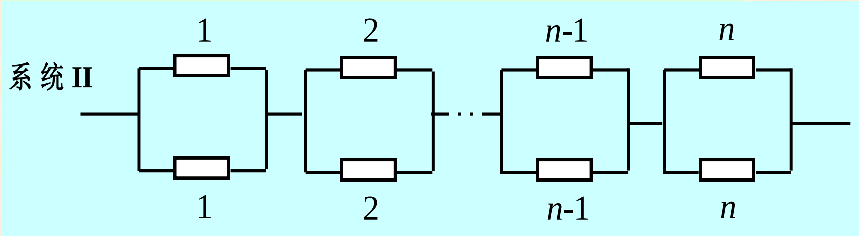
即：独立事件和

比较系统的可靠性

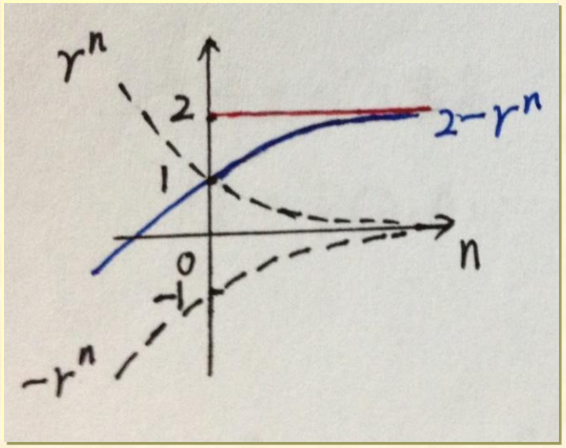
$$R^{\mathrm{I}}=r^n\left(2-r^n\right)$$

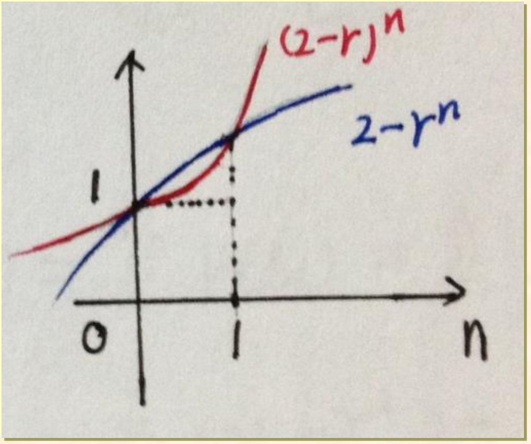
$$R^{\mathrm{II}}=r^n(2-r)^n$$





关键比较$\left(2-r^n\right)$和$(2-r)^n$的大小





当**n**≥1时， $R^{\mathrm{II}} \geqslant R^{\mathrm{I}} \geqslant R^{\mathrm{B}}=r^n$

小结

独立性的定义、结论、性质和应用。

作业

Page 28：

第35, 36, 37, 38, 40题

俗语"**三个臭皮匠，顶个诸葛亮**"是否正确?

假设诸葛亮解决问题的概率是0.9

臭皮匠A独立解决问题的概率为P(A)=0.5

臭皮匠B独立解决问题的概率为P(B)=0.6

臭皮匠C独立解决问题的概率为P(C)=0.6

三个臭皮匠解决问题的概率为 ?

$$P(\underline{A\cup B\cup C})=1-(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))$$

$$=0.92 \quad >0.9$$

即：独立事件和 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))$