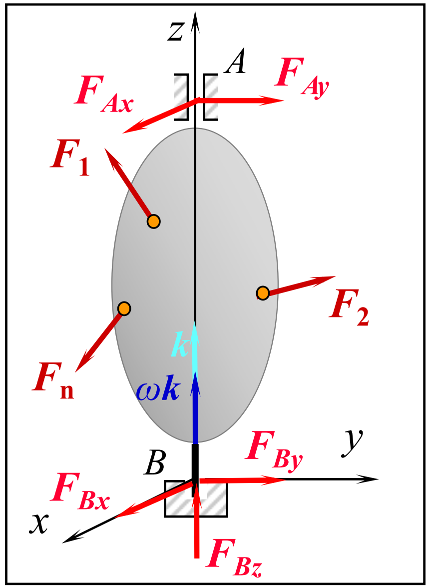
13.3 刚体的定轴转动微分方程

一、定轴转动微分方程

设刚体在主动力 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 作用下绕定轴 z 转动，与此同时，轴承上产生了反力 F_A 和 F_B。

用 $M_z = \sum M_z(F^{(e)})$ 表示作用在刚体上的外力对转轴 z 的主矩(反力 F_A, F_B 自动消去)。



刚体对转轴 z 的动量矩 $L_z = J_z \omega$

于是根据动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z}$$

可得

$$J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_z$$

$$J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_z$$

考虑到

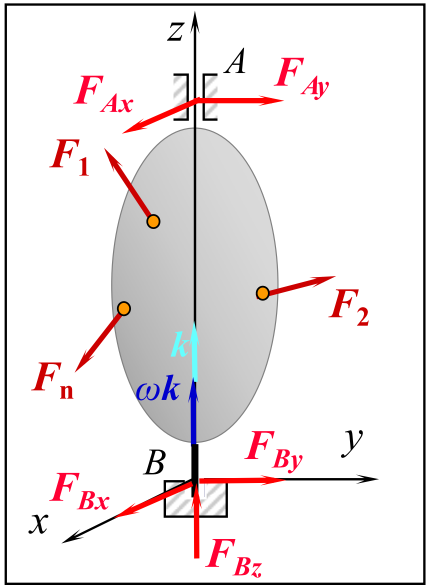
$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$$

则上式可写成

$$\boxed{J_z \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \sum M_z(F^{(e)})}$$

或

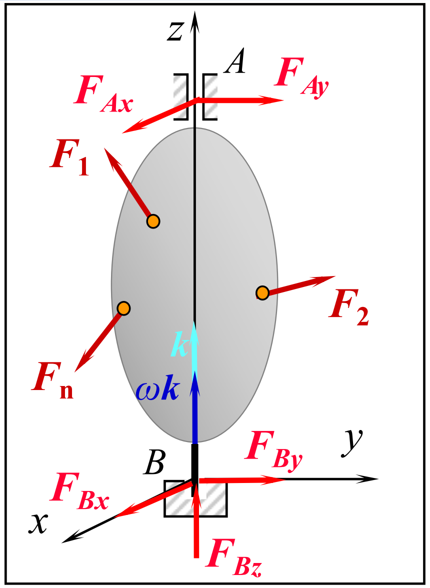
$$J_z \ddot{\varphi} = M_z$$



即，定轴转动刚体对转轴的转动惯量与角加速度的乘积,等于作用于刚体的外力对转轴的主矩。这就是刚体定轴转动微分方程。

定轴转动微分方程 $$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum M_z(F^{(e)})$$

或 $$J_z \ddot{\varphi} = M_z$$



二、几点讨论

1. 若外力矩M_z=0，刚体作匀速转动；

2. 若外力矩M_z=常量，则刚体作匀变速转动；

3. 若外力矩M_z相同，J_z越大，角加速度越小，即刚体转动状态变化的越慢，反之亦然，**这正说明J_z是刚体转动时惯性的度量**。

思考题

在什么条件下，$F_1=F_2$?

解：由定轴转动微分方程

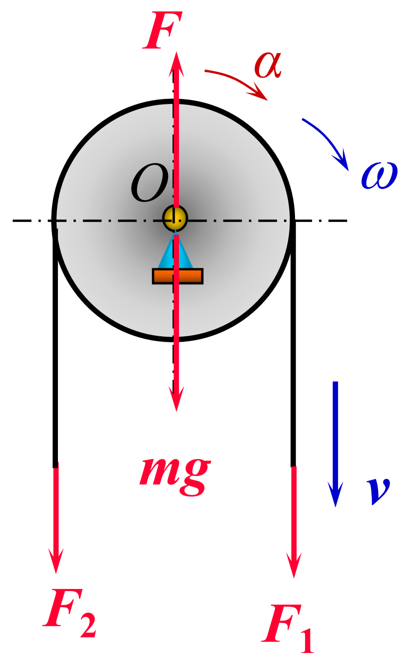
$$J_O\alpha = F_1R - F_2R$$

即

$$F_1 - F_2 = \frac{J_O\alpha}{R}$$

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2}mR\alpha$$

$$J_O = \frac{1}{2}mR^2$$



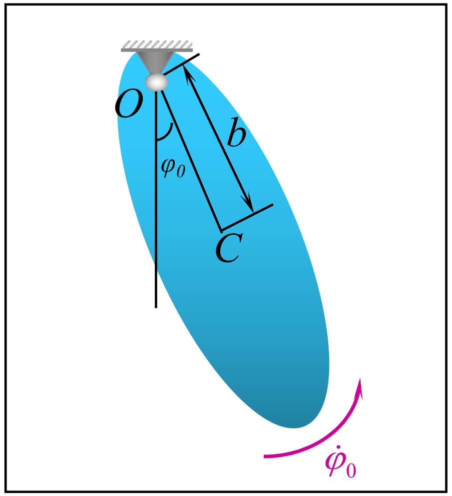
$F_1=F_2$ 条件为上式右端 = 0，则

(1) $m = 0$

或 (2) $R = 0$

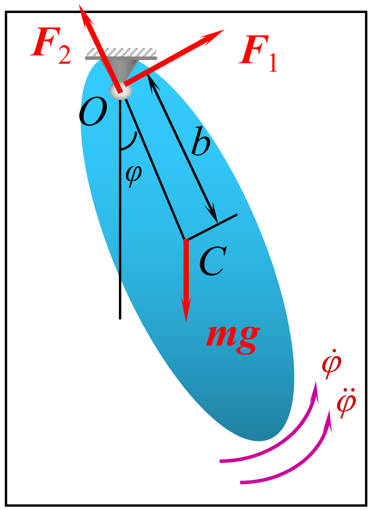
或 (3) $\alpha = 0$

例题 2 复摆由可绕水平轴转动的刚体构成。已知复摆的质量是 m，重心 C 到转轴 O 的距离 $OC = b$，复摆对转轴 O 的转动惯量是J_O，设摆动开始时 OC 与铅直线的偏角是 φ_0，且复摆的初角速度为零，试求复摆的微幅摆动规律。轴承摩擦和空气阻力不计。



解： 复摆在任意位置时，所受的外力有重力 mg 和轴承 O 的反力，为便于计算，把轴承反力沿质心轨迹的切线和法线方向分解成两个分力 F_1和 F_2。

根据刚体绕定轴转动的微分方程 $\boxed{J_z\ddot{\varphi} = M_z}$



有
$$J_O \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mgb\sin\varphi$$

重力mg对悬轴 O 产生恢复力矩。

从而
$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgb}{J_O}\sin\varphi = 0$$

当复摆作微摆动时，可令 $\sin\varphi \approx \varphi$ ，于是上式经过线性化后，可得复摆微幅摆动的微分方程
$$\ddot{\varphi} + \frac{mgb}{J_O}\varphi = 0$$

复摆微幅摆动的微分方程

$$\ddot{\varphi}+\frac{mgb}{J_O}\varphi=0$$

这是简谐运动的标准微分方程。可见复摆的微幅振动也是简谐运动。

考虑到复摆运动的初条件：当 $t=0$ 时

$$\varphi=\varphi_0\ ,\quad \dot{\varphi}=0$$

则复摆运动规律可写成

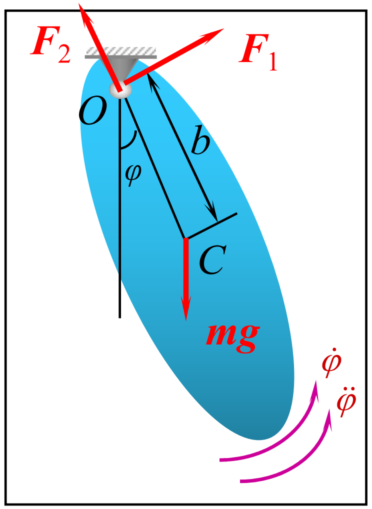
$$\varphi=\varphi_0\cos(\sqrt{\frac{mgb}{J_O}}t) \qquad \text{(a)}$$

摆动的频率 ω_0 和周期 T 分别是

$$\omega_0=\sqrt{\frac{mgb}{J_O}}\ ,\quad T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgb}} \qquad \text{(b)}$$

复摆运动规律可写成

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{mgb}{J_O}}t\right) \qquad \text{(a)}$$



摆动的频率 ω_0和周期 T 分别是

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgb}{J_O}}\,, \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgb}} \qquad \text{(b)}$$

工程上常利用关系(b) 测定形状不规则刚体的转动惯量。为此，把刚体做成复摆并用试验测出它的摆动频率 ω_0和周期T ，然后由(b)式求得转动惯量

$$J_O = \frac{mgbT^2}{4\pi^2} \qquad \text{(c)}$$

谢谢！