



4.5 空间任意力系的平衡条件 和平衡方程



1. 空间任意力系平衡的充要条件

力系中所有各力的矢量和等于零，又这些力对任何一点的矩的矢量和也等于零。

2. 空间任意力系的平衡方程

矢量方程
$$\mathbf{F}'_R = \sum \mathbf{F}_i = 0, \quad \mathbf{M}_O = \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = 0$$

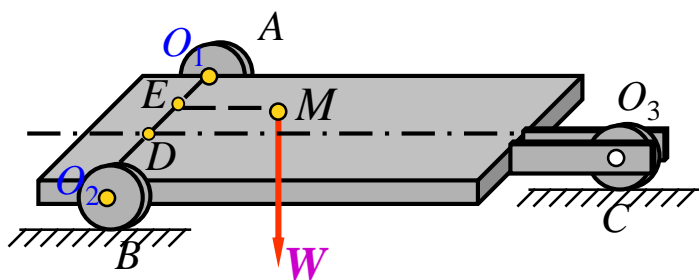
解析表达式

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x(\mathbf{F}) = 0, \quad \sum M_y(\mathbf{F}) = 0, \quad \sum M_z(\mathbf{F}) = 0$$

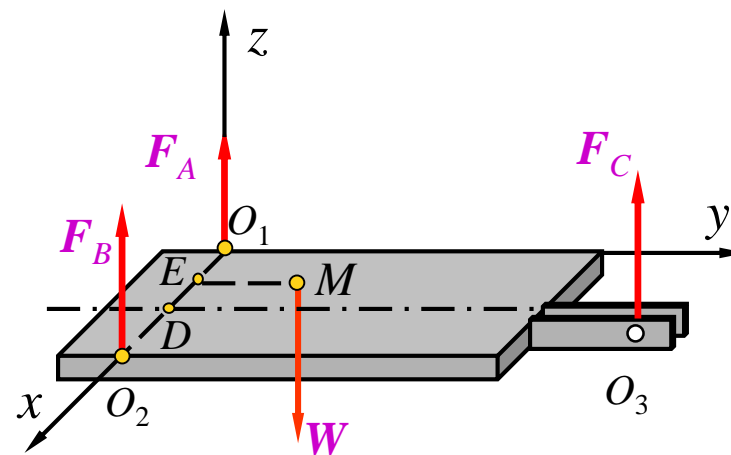


例题1 在三轮货车上放着一重 $W=1000\text{kN}$ 的货物，重力 W 的作用线通过矩形底板上的点 M 。已知 $O_1O_2=1\text{ m}$ ， $O_3D=1.6\text{ m}$ ， $O_1E=0.4\text{ m}$ ， $EM=0.6\text{ m}$ 。点 D 是线段 O_1O_2 的中点， $EM\perp O_1O_2$ 。试求 A ， B ， C ，各处地面的铅直反力。



解:

- 1.取货车为研究对象。
- 2.受力分析如图。





3. 列平衡方程。

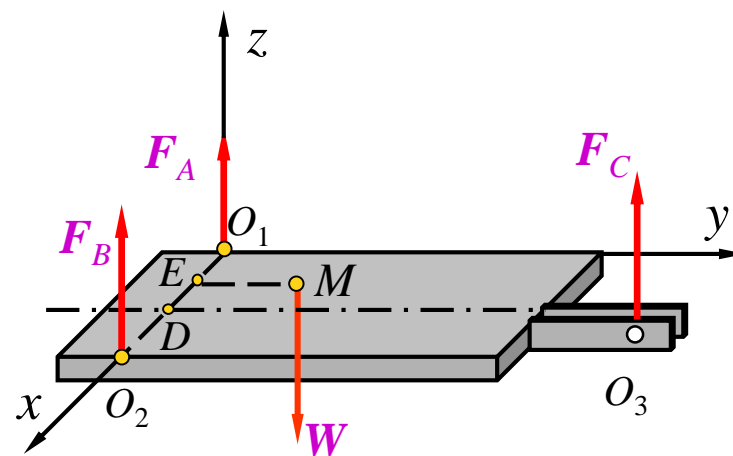
$$\sum F_z = 0, \quad F_A + F_B + F_C - W = 0$$

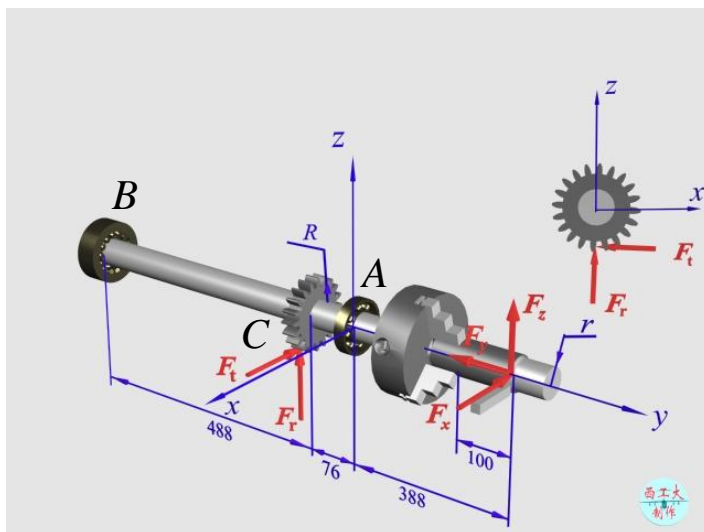
$$\sum M_x = 0, \quad F_C \cdot O_3D - W \cdot EM = 0$$

$$\sum M_y = 0, \quad W \cdot O_1E - F_C \cdot O_1D - F_B \cdot O_1O_2 = 0$$

4. 联立求解。

$$F_C = 375 \text{ N}, \quad F_B = 213 \text{ N}, \quad F_A = 412 \text{ N}$$





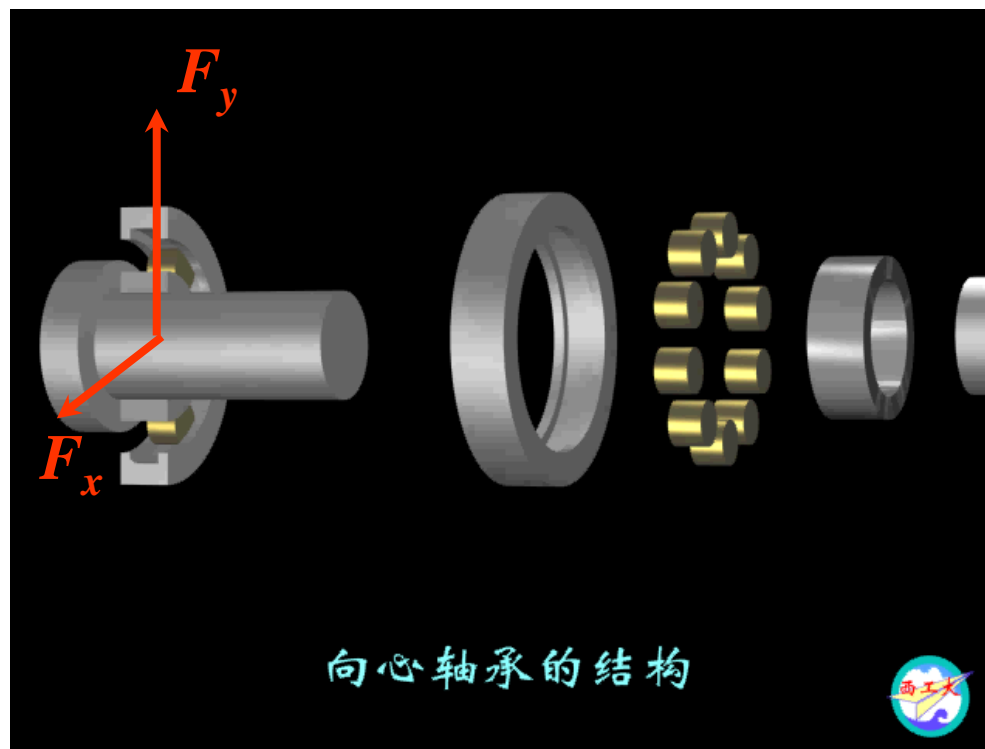
车床主轴受力图



例题2 车床主轴如图所示。已知车床对工件的切削力为：径向切削力 $F_x=4.25$ kN，纵向切削力 $F_y=6.8$ kN，主切削力 $F_z=17$ kN，方向如图所示。 F_t 与 F_r 分别为作用在直齿轮C上的切向力和径向力，且 $F_r=0.36F_t$ 。齿轮C的节圆半径为 $R=50$ mm，被切削工件的半径为 $r=30$ mm。卡盘及工件等自重不计，其余尺寸如图。求：(1) 齿轮啮合力 F_t 及 F_r ；(2) **圆柱滚子轴承A** 和 **圆锥滚子轴承B** 的约束力；(3) 三爪卡盘E在O处对工件的约束力。

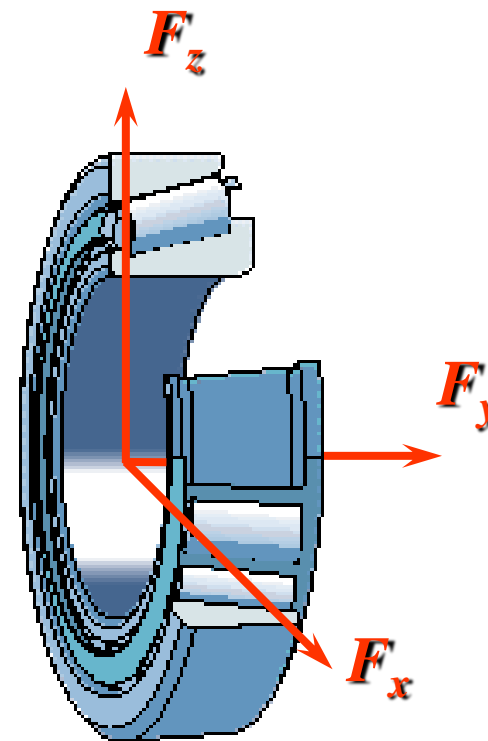


圆柱滚子轴承





圆锥滚子轴承



约束力



解： 1. 以整体为研究对象，主动力和约束反力组成空间任意力系。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Bx} - F_t + F_{Ax} - F_x = 0$$

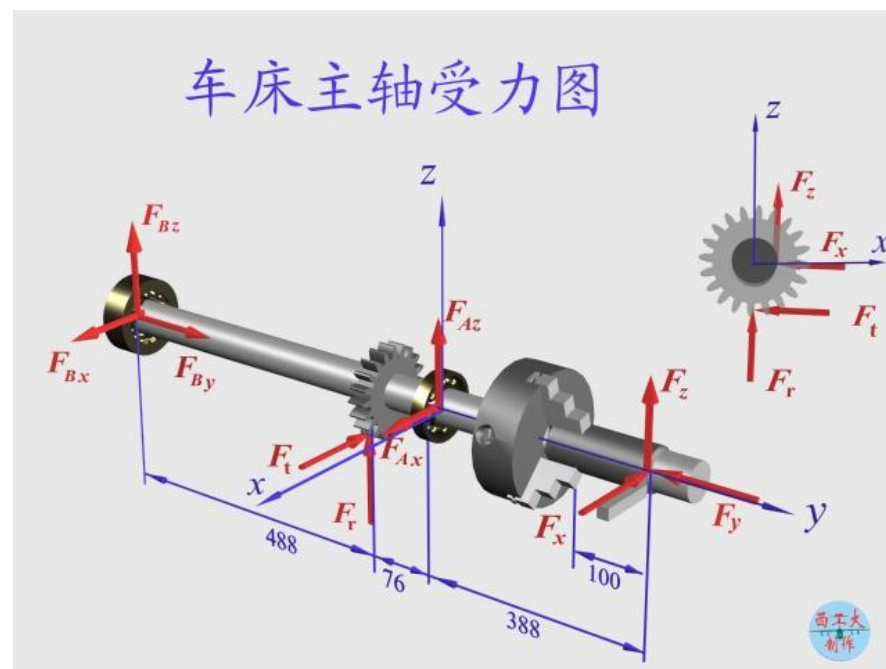
$$\sum F_y = 0, \quad F_{By} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0, \quad F_{Bz} + F_r + F_{Az} + F_z = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0, \quad -(488 + 76)F_{Bx} - 76F_r + 388F_z = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0, \quad F_t R - F_z r = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0, \quad (488 + 76)F_{Bx} - 76F_t - 30F_y + 388F_x = 0$$





由题意有 $F_r = 0.36 F_t$

解方程得

$$F_t = 10.2 \text{ kN}$$

$$F_r = 3.67 \text{ kN}$$

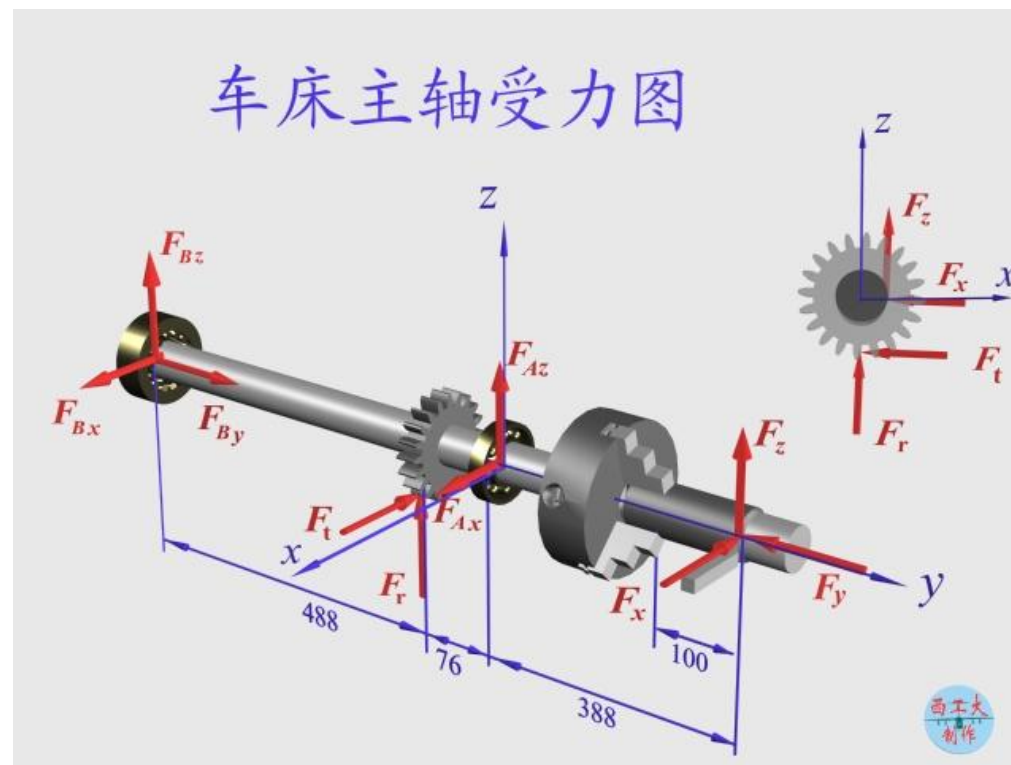
$$F_{Ax} = 15.64 \text{ kN}$$

$$F_{Az} = -31.87 \text{ kN}$$

$$F_{Bx} = -1.19 \text{ kN}$$

$$F_{By} = 6.8 \text{ kN}$$

$$F_{Bz} = 11.2 \text{ kN}$$





2. 取工件为研究对象，受力分析如图。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ox} - F_x = 0$$

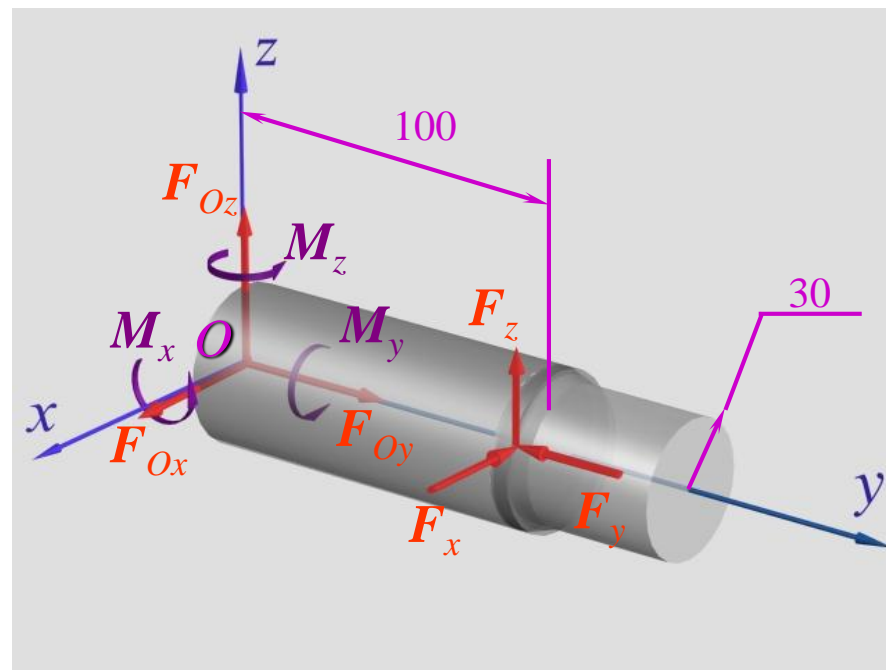
$$\sum F_y = 0, \quad F_{Oy} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0, \quad F_{Oz} + F_z = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0, \quad M_x + 100F_z = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0, \quad M_y - 30F_z = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0, \quad M_z + 100F_x - 30F_y = 0$$



解方程得

$$F_{Ox} = 4.25 \text{ kN}, \quad F_{Oy} = 6.8 \text{ kN}$$

$$F_{Oz} = -17 \text{ kN}, \quad M_x = -1.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_y = 0.51 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_z = -0.22 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



谢 谢 !