西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

运 动 学

刚体的平面运动

杨成鹏
力学与土木建筑学院

第九章 刚体的平面运动

§ 9–1 刚体平面运动简化与分解

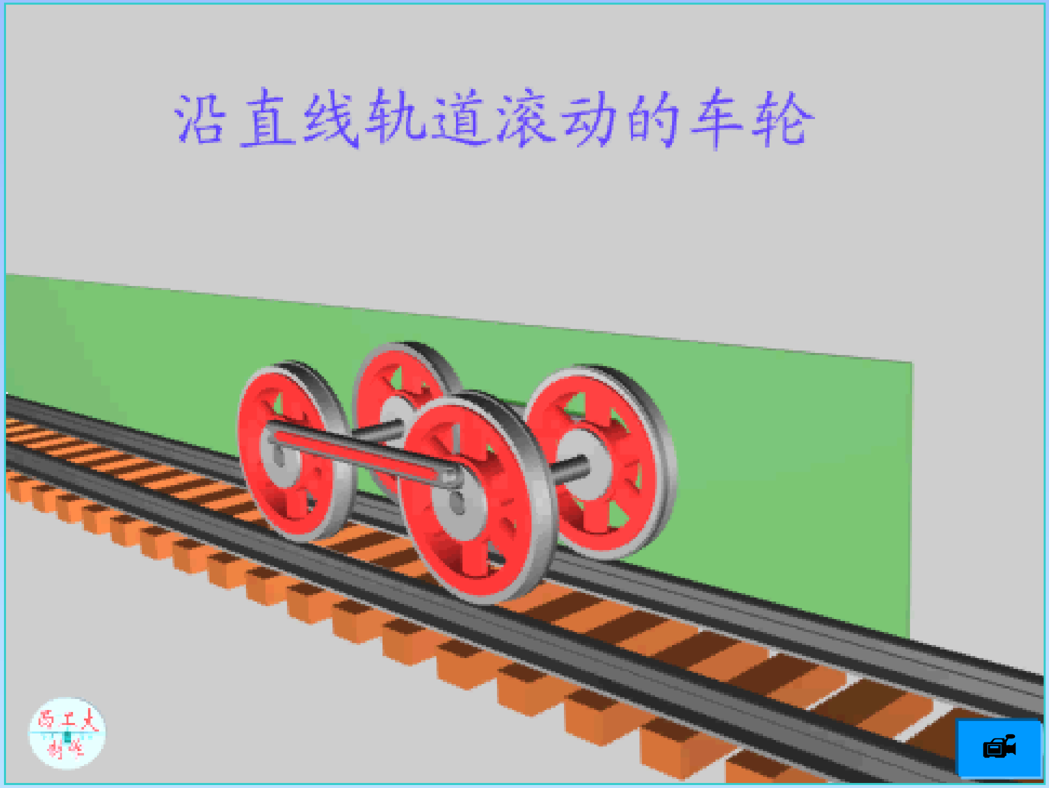
- 刚体平面运动简化
- 刚体平面运动方程
- 刚体平面运动的分解

1. 刚体平面运动简化

刚体的平面运动— 刚体运动过程中，其上任一点到某个固定平面间的距离始终保持不变。

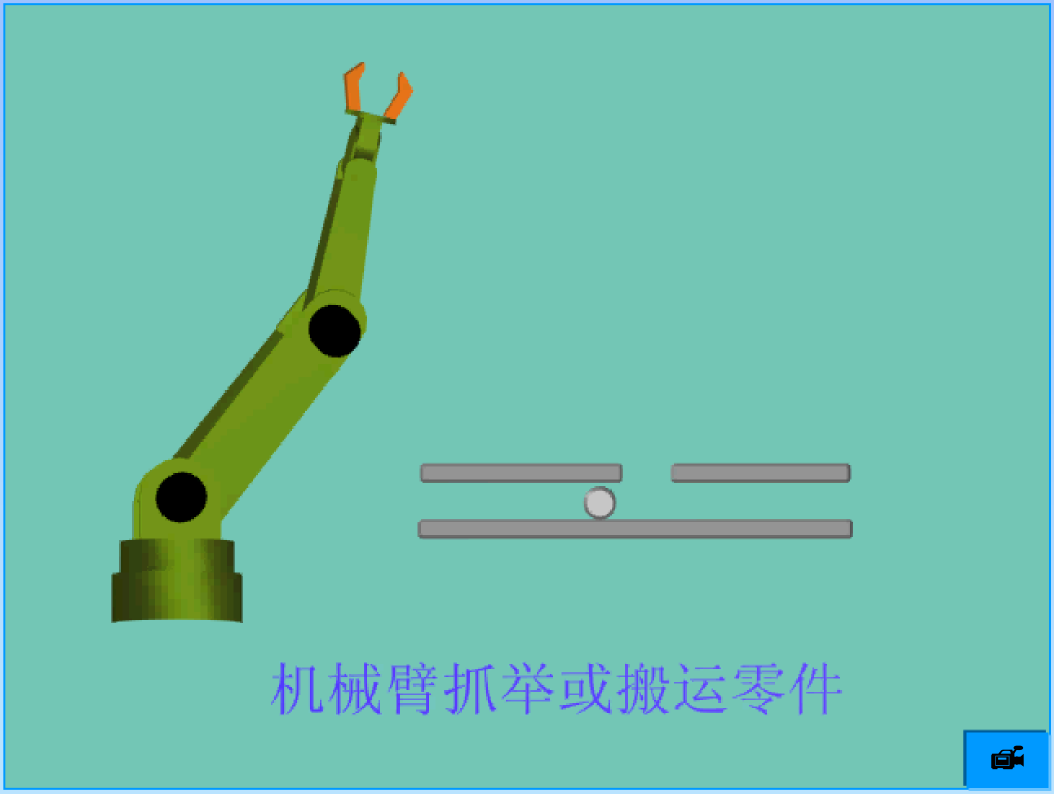
- 刚体平面运动实例

● 刚体平面运动实例



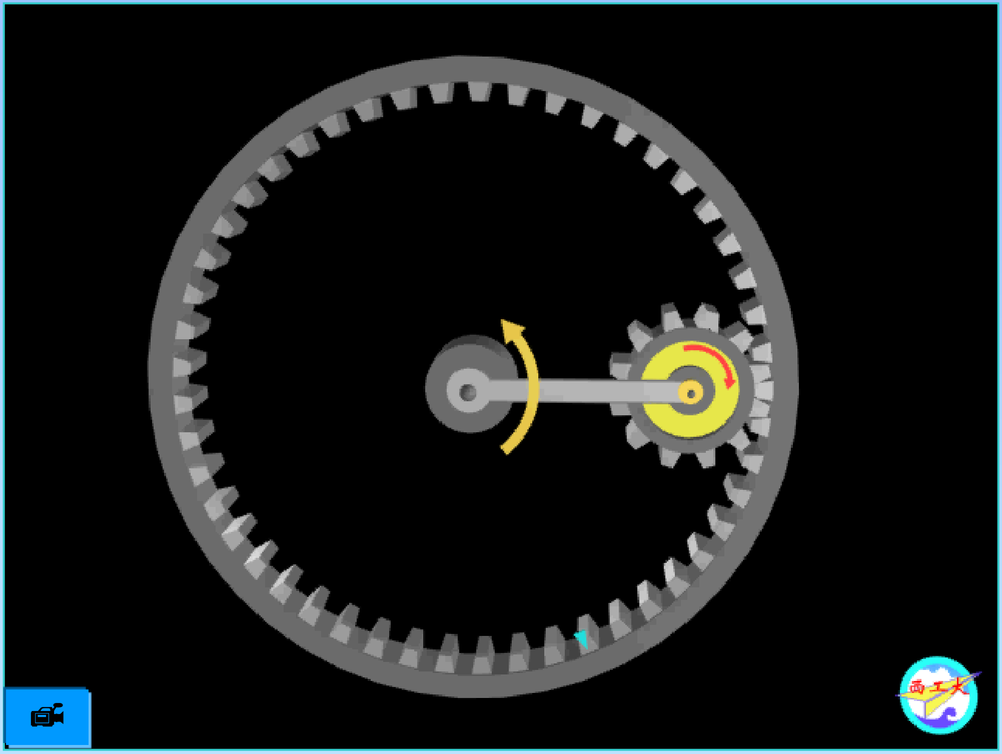
刚体的平面运动— 刚体上处于同一平面内各点到某一固定平面的距离保持不变。

● 刚体平面运动实例



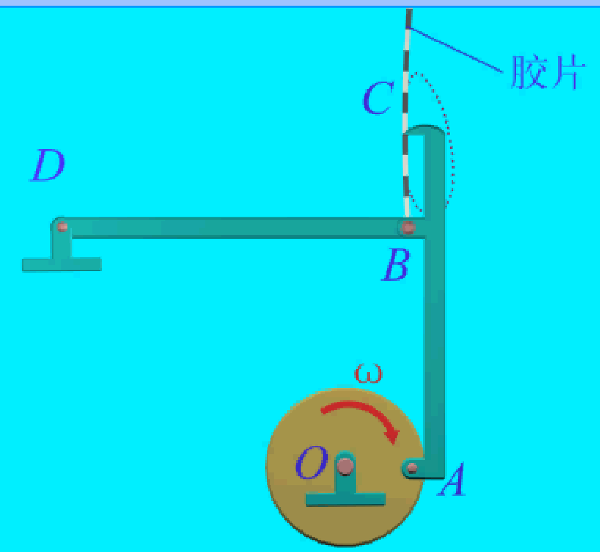
刚体的平面运动— 刚体上处于同一平面内各点到某一固定平面的距离保持不变。

刚体平面运动实例



刚体的平面运动— 刚体上处于同一平面内各点到某一固定平面的距离保持不变。

● 刚体平面运动实例

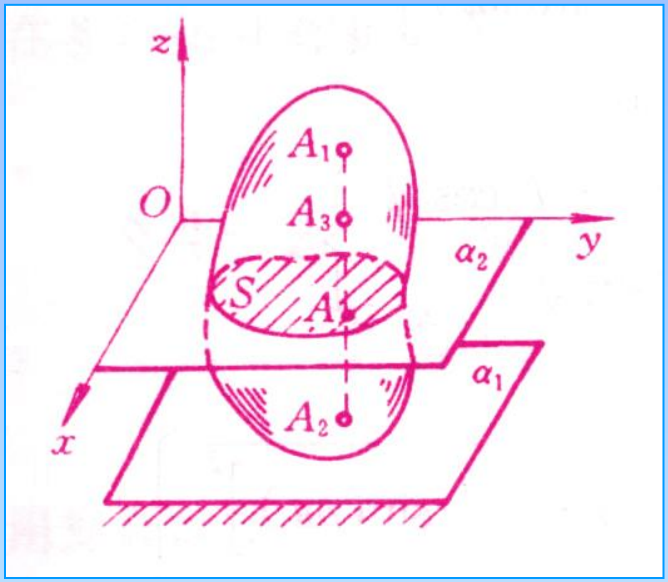


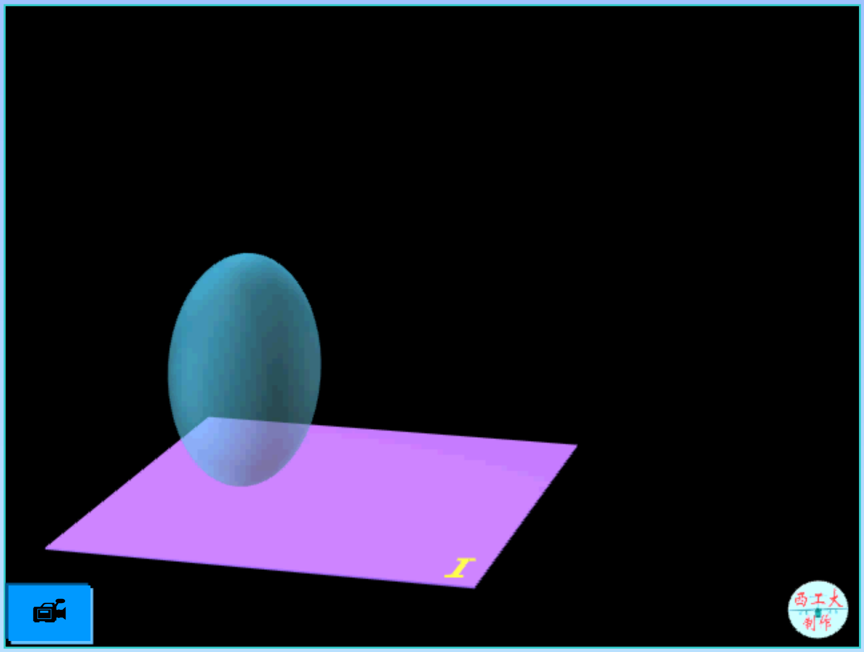
电影放映机中的四连杆机构

刚体的平面运动— 刚体上处于同一平面内各点到某一固定平面的距离保持不变。

(1) 刚体平面运动特点

- 刚体上所有各点均在平行于某固定平面的平面内运动。



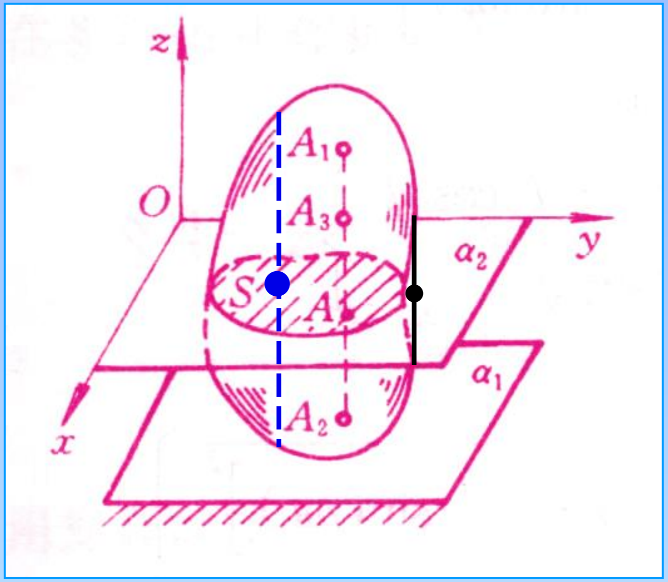


- 直线A_1A_2作什么运动?
- 点A、A_1、A_2、A_3的运动轨迹、速度和加速度有什么规律?

(2) 刚体平面运动简化

- 平面图形

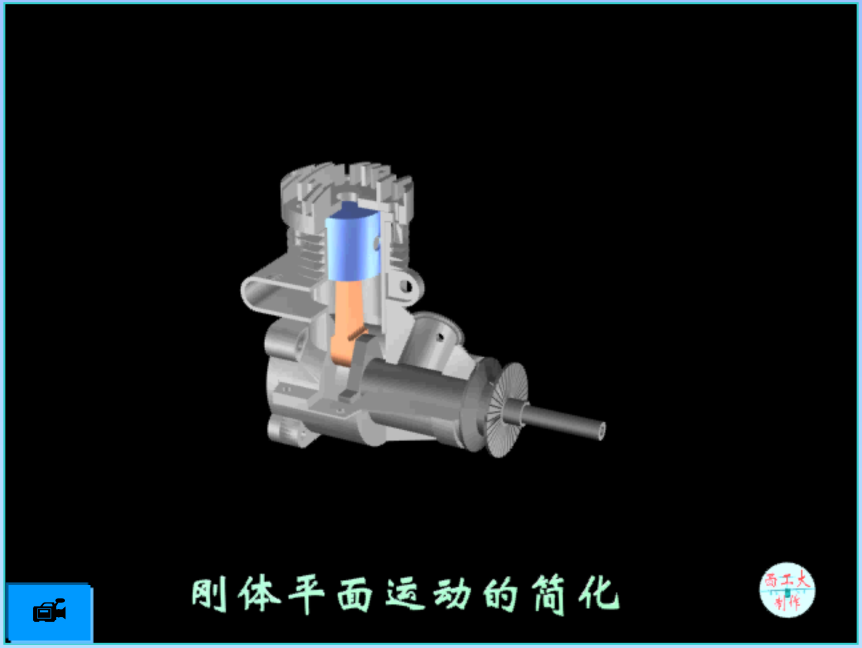
平面图形——刚体平行于某固定平面作平面运动，以平行于该固定平面的另一平面截割此刚体，得一截面*S*，称为平面图形。



平面图形S的运动可以表征整个刚体的运动规律吗？

答案是：刚体的平面运动，可以简化为平面图形*S*在其自身平面内的运动来研究（S可延展）。

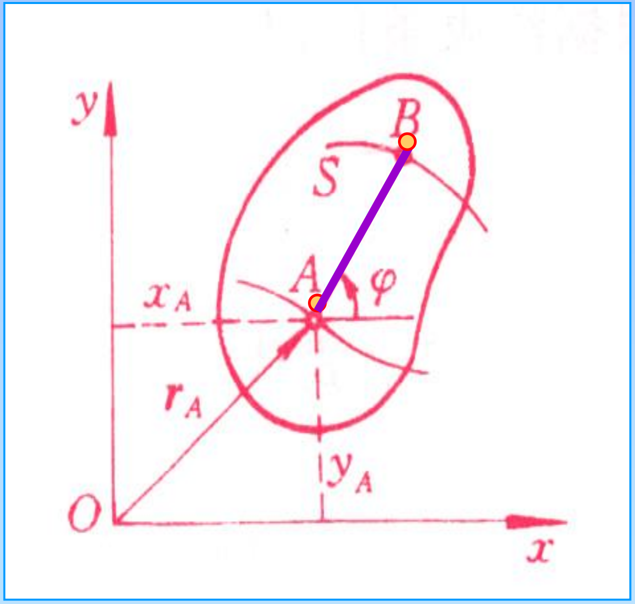
刚体平面运动简化实例



刚体的平面运动，可以简化为平面图形在其自身平面内的运动来研究。

2. 刚体平面运动方程

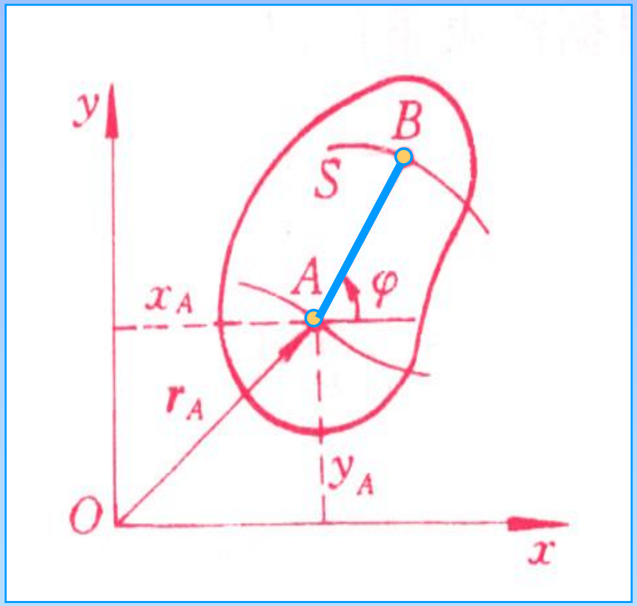
- 平面图形位置的确定



平面图形S的位置可用其上任一线段如AB 来确定，而线段AB的位置又可用A 点的坐标 x_A、y_A 和线段AB与 x 轴的夹角 φ 来确定。

点 A 称为基点。

● 刚体平面运动方程

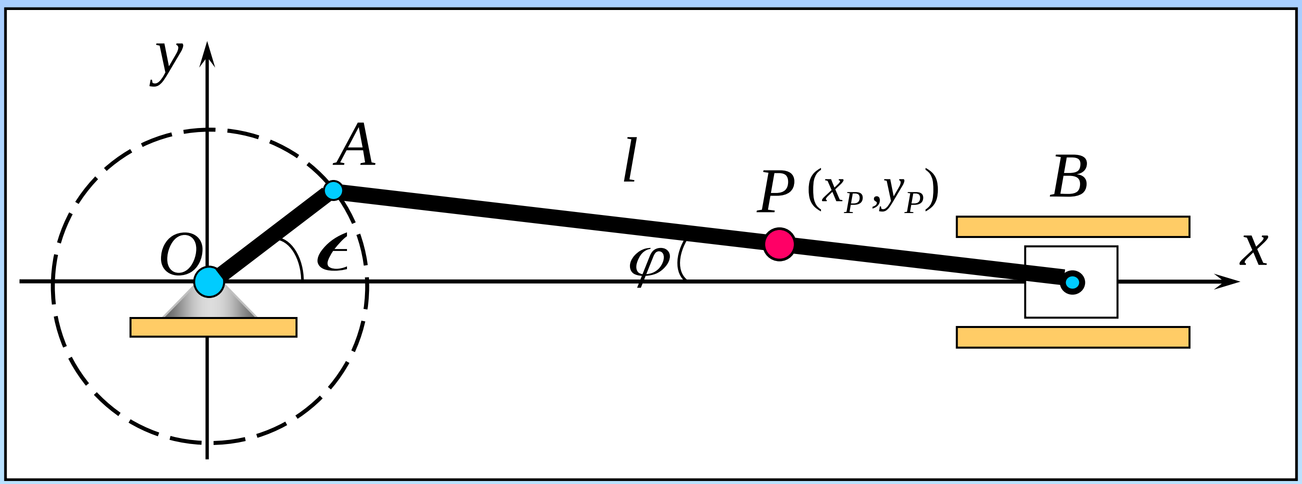


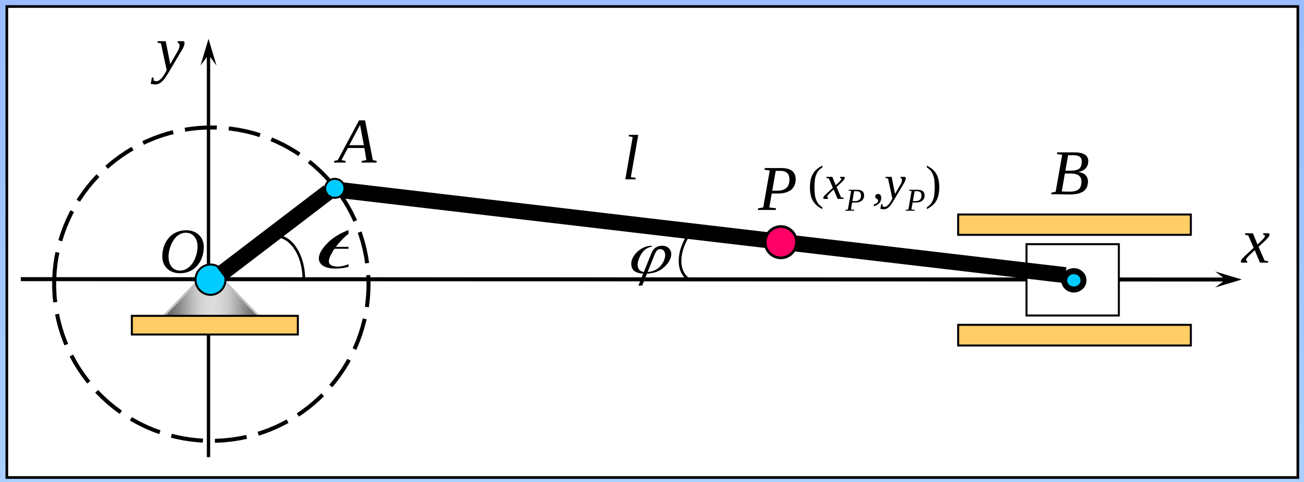
当平面图形 **S** 运动时，坐标 x_A 、y_A 和夹角 φ 一般都是随时间 t 而变化的，分别为时间 t 的单值连续函数，即

$$\begin{cases} x_A = f_1(t) \\ y_A = f_2(t) \\ \phi = f_3(t) \end{cases}$$

这就是平面图形*S* 的运动方程，也就是刚体平面运动的运动方程。

例9–1 已知曲柄一滑块机构中$OA=r$, $AB=l$， 曲柄OA以等角速度ω绕O轴转动。求（1）连杆的平面运动方程；（2）连杆上P点($AP=l_1$)的运动轨迹、速度与加速度。

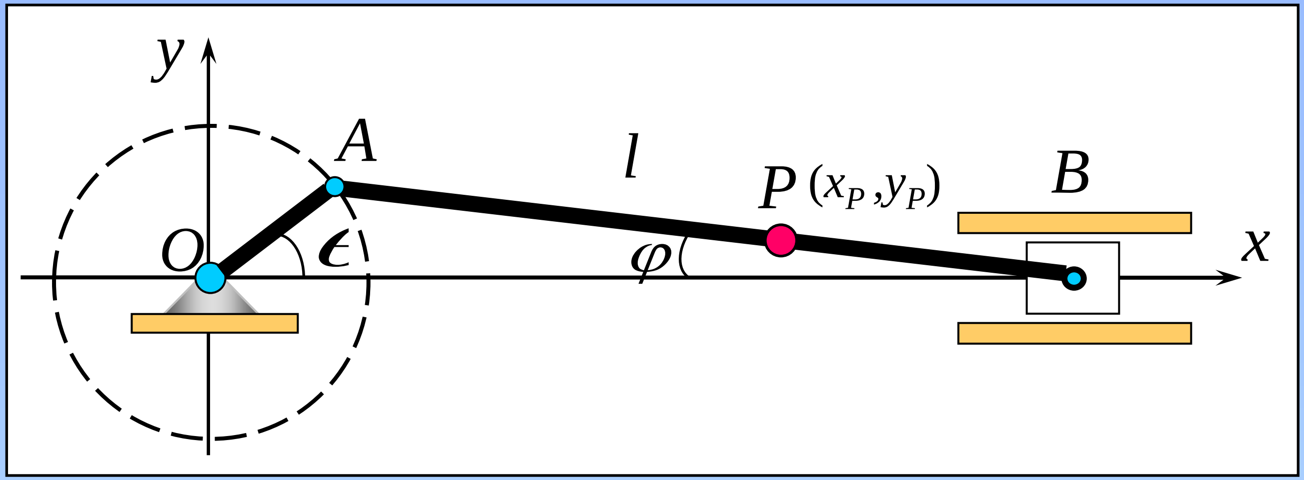




解： (1) 连杆的平面运动方程

由图中的几何关系，有

$$\frac{l}{\sin\theta} = \frac{r}{\sin\phi}, \quad \sin\phi = \frac{r}{l}\sin\omega t, \quad \omega t = \theta$$



连杆的平面运动方程为

$$x_A = r\cos\omega t,\ \ y_A = r\sin\omega t,\ \ \phi = \arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)$$

(2) 连杆上P点的运动方程（直角坐标法）

$$x_P = r\cos\omega t + l_1\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2},\ \ y_P = \frac{r(l-l_1)}{l}\sin\omega t$$

$$x_P = r\cos\omega t + l_1\sqrt{1-(\frac{r}{l}\sin\omega t)^2}\,,\quad y_P = \frac{r(l\text{-}l_1)}{l}\sin\omega t$$

应用泰勒公式，忽略4次方以上的项，有

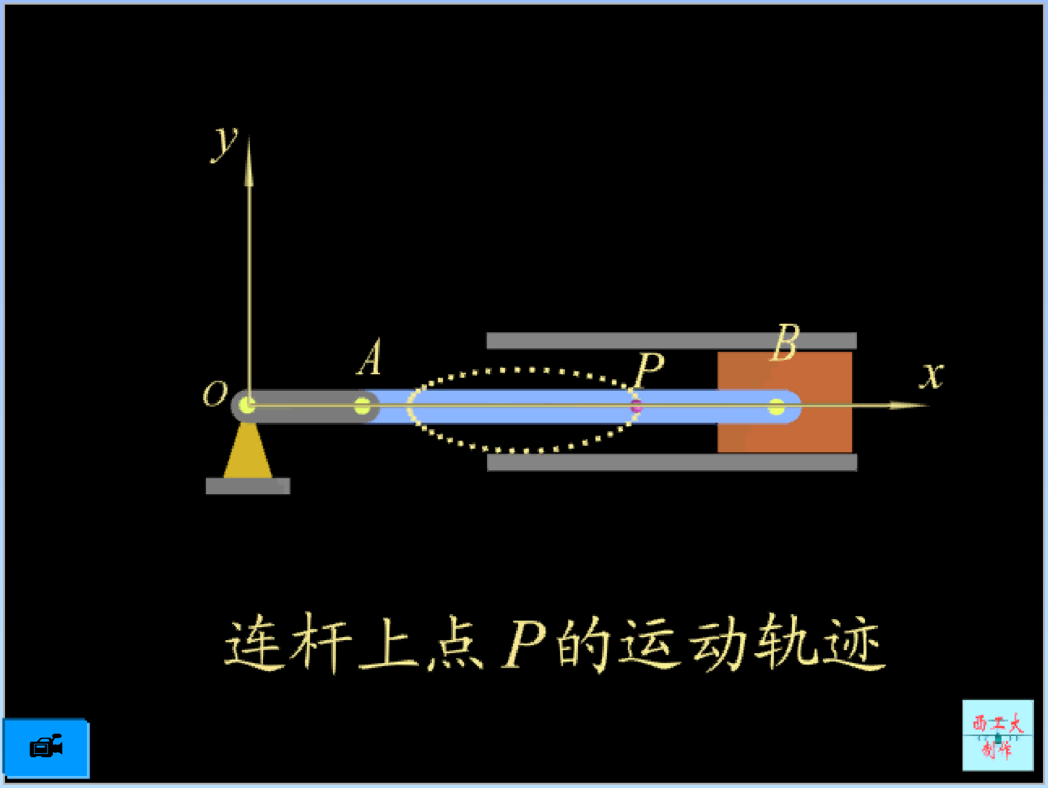
$$\sqrt{1-(\frac{r}{l}\sin\omega t)^2} = 1-\frac{1}{2}(\frac{r}{l})^2\sin^2\omega t+\cdots$$

$$\sin^2\omega t = \frac{1-\cos 2\omega t}{2}$$

所以得连杆上***P***点的运动方程为

$$x_P = l_1\left[1-\frac{1}{4}(\frac{r}{l})^2+\frac{r}{l_1}\cos\omega t+\frac{1}{4}(\frac{r}{l})^2\cos 2\omega t\right]\cdot$$

$$y_P = \frac{r(l\text{-}l_1)}{l}\sin\omega t$$


y
A
B
P
x
O
连杆上点 P 的运动轨迹

连杆的平面运动方程为

$$x_P = l_1\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{l}\right)^2+\frac{r}{l_1}\cos\omega t+\frac{1}{4}\left(\frac{r}{l}\right)^2\cos 2\omega t\right],\quad y_P=\frac{r(l-l_1)}{l}\sin\omega t$$

(3) 连杆上P点的速度与加速度

速　度

$$v_{Px}=\dot{x}_P=r\omega\left(\sin\omega t+\frac{1}{2}\frac{rl_1}{l^2}\sin 2\omega t\right),$$

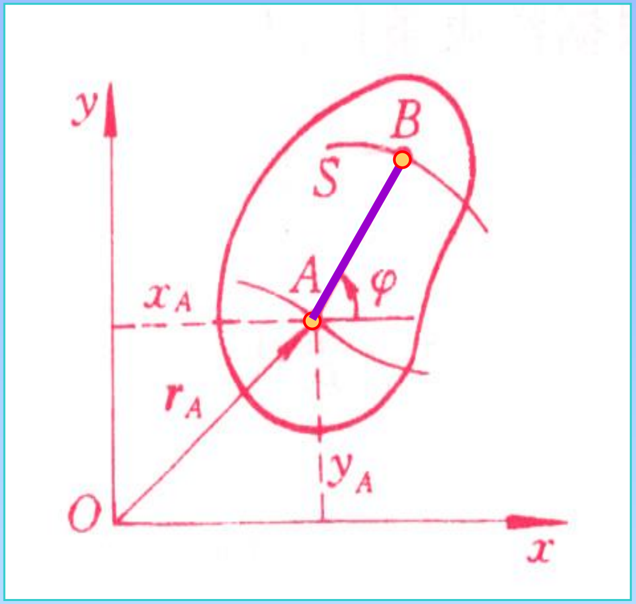
$$v_{Py}=\dot{y}_P=\frac{r\omega(l-l_1)}{l}\cos\omega t.$$

加速度

$$a_{Px}=\ddot{x}_P=-r\omega^2\left(\cos\omega t+\frac{rl_1}{l^2}\cos 2\omega t\right),$$

$$a_{Py}=\ddot{y}_P=\frac{r\omega^2(l-l_1)}{l}\sin\omega t.$$

3 . 刚体平面运动的分解



在左面的图中，如果平面图形 **S** 上的*A* 点固定不动，则刚体将作定轴转动。

又若在左面的图中，如果平面图形 **S** 上的 φ 角保持不变，则刚体作平移。

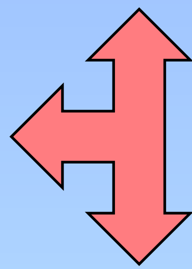
故由此可知

刚体的平面运动可以看成是平移和转动的合成运动。

§ 9–1 刚体平面运动简化与分解

平移（牵连运动）

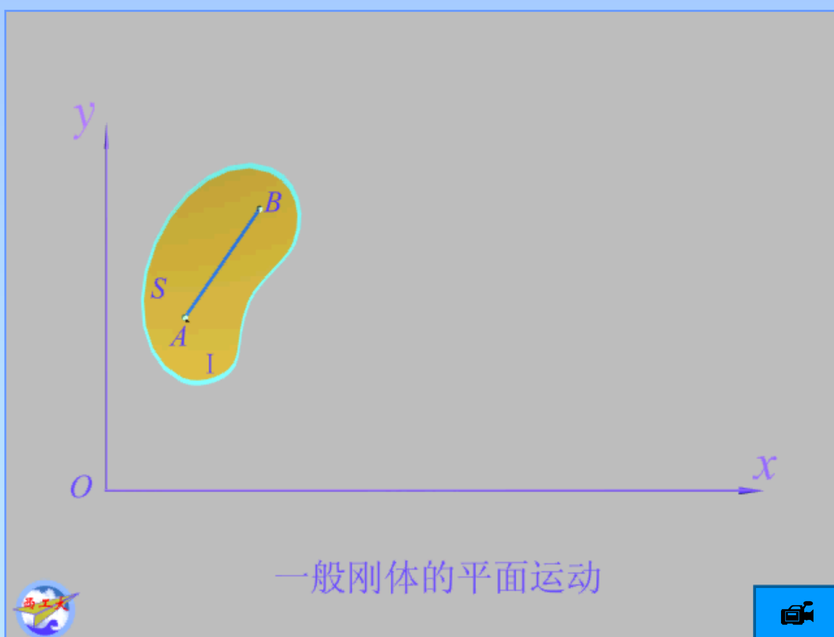
平面运动

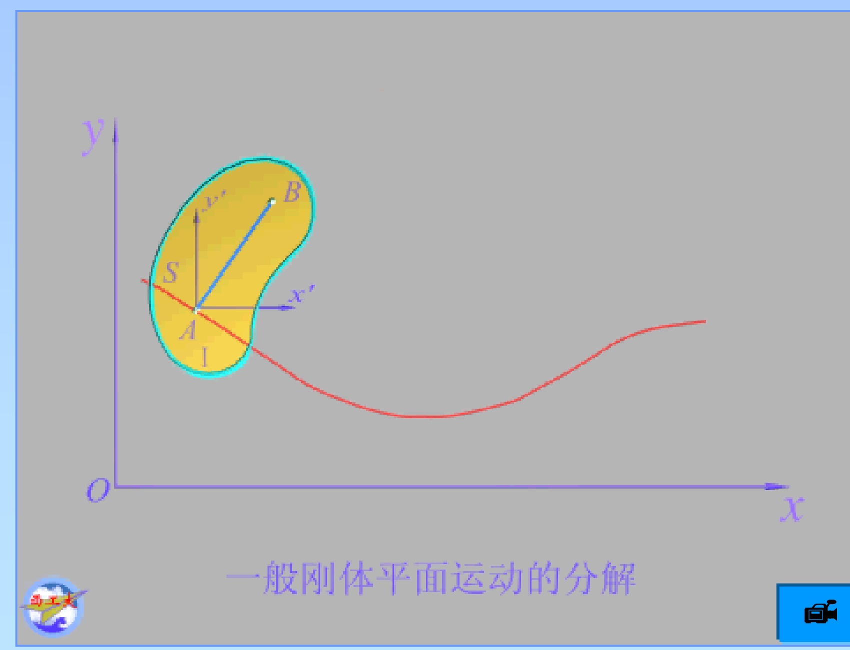


转动（相对运动）

刚体的平面运动可分解为随同基点的平移和相对基点的转动。

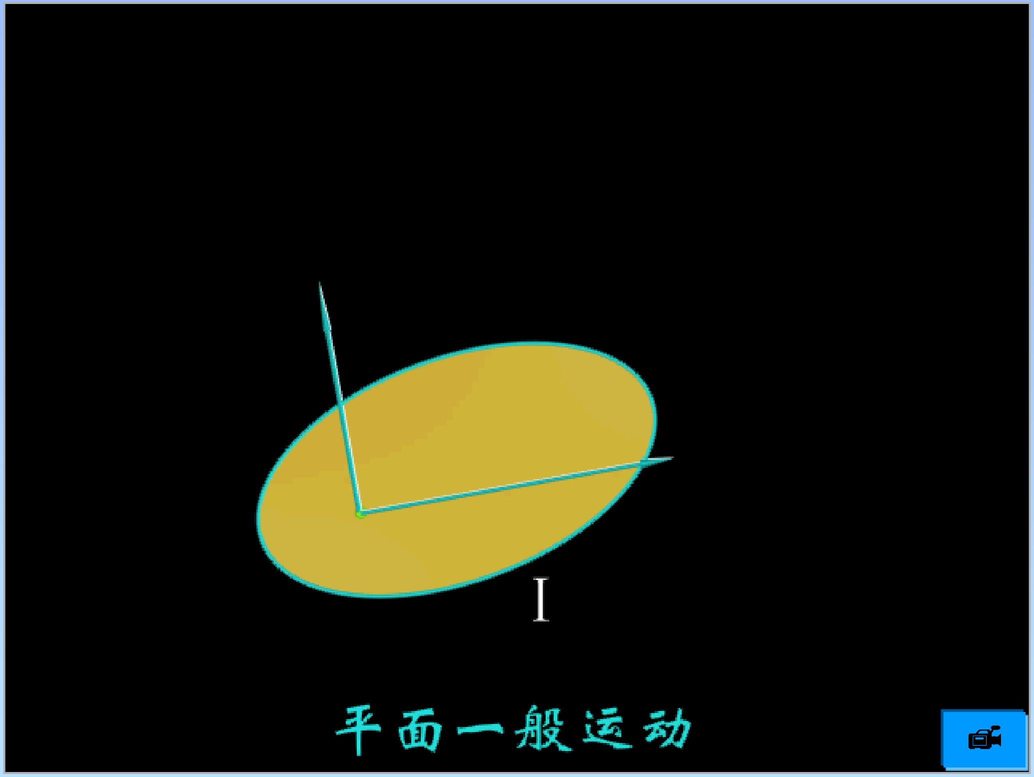
刚体的平面运动可分解为随同基点的平移和相对基点的转动。



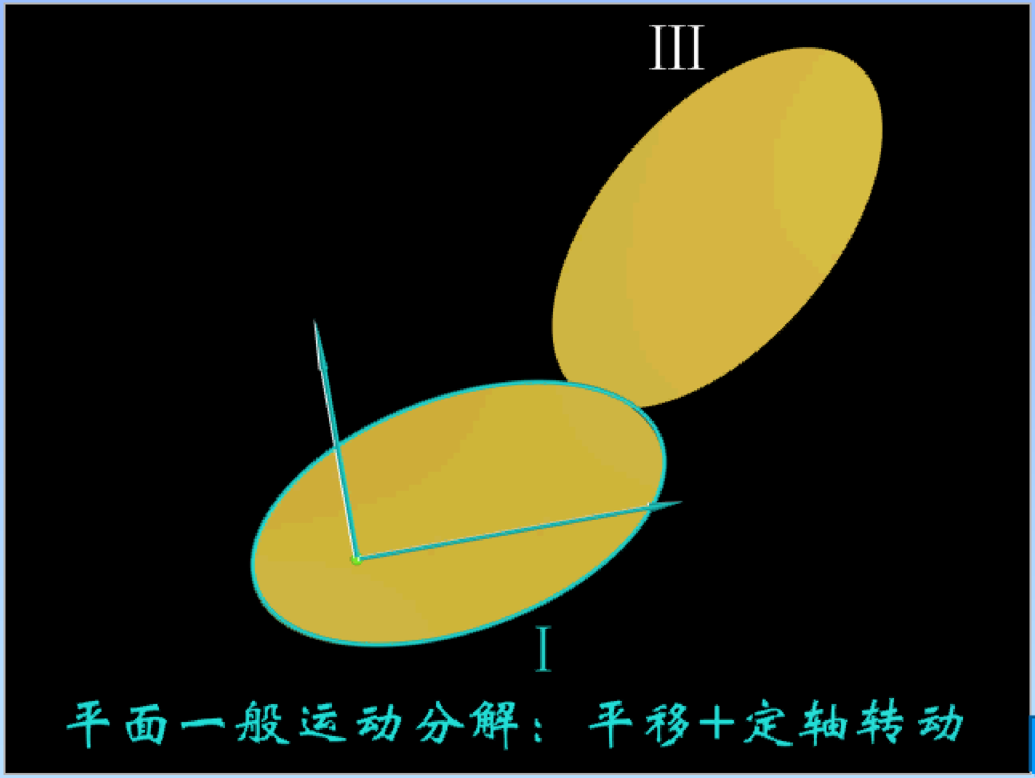


3. 平面运动分解

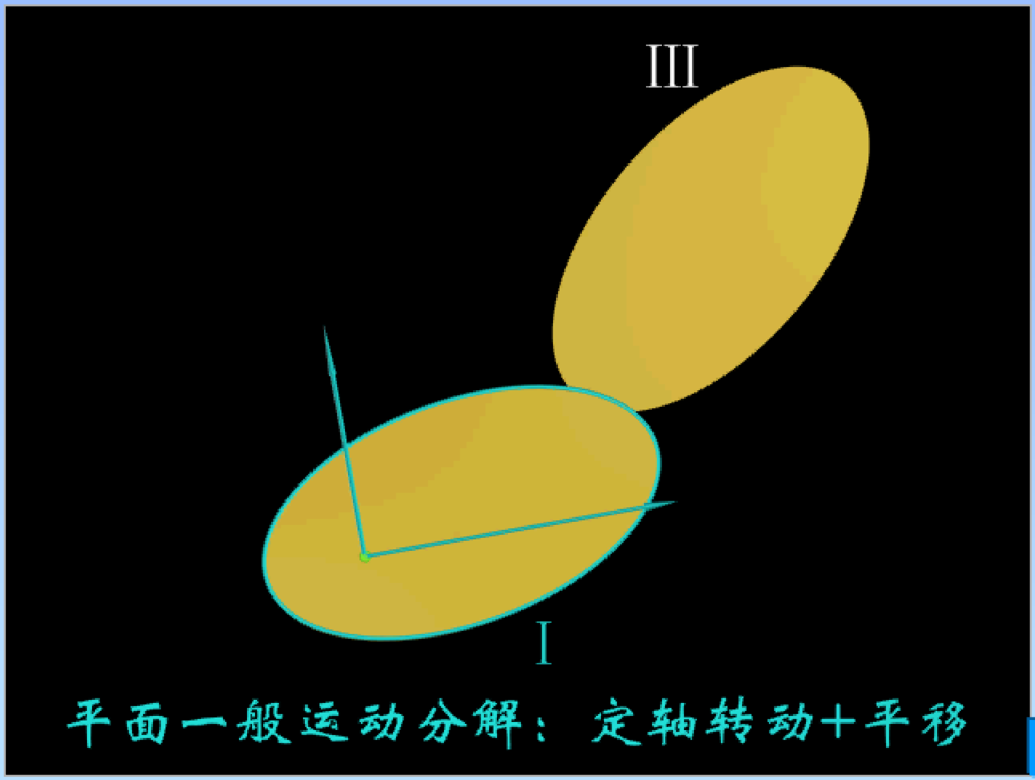
刚体平面运动的分解演示



刚体平面运动的分解演示



刚体平面运动的分解演示

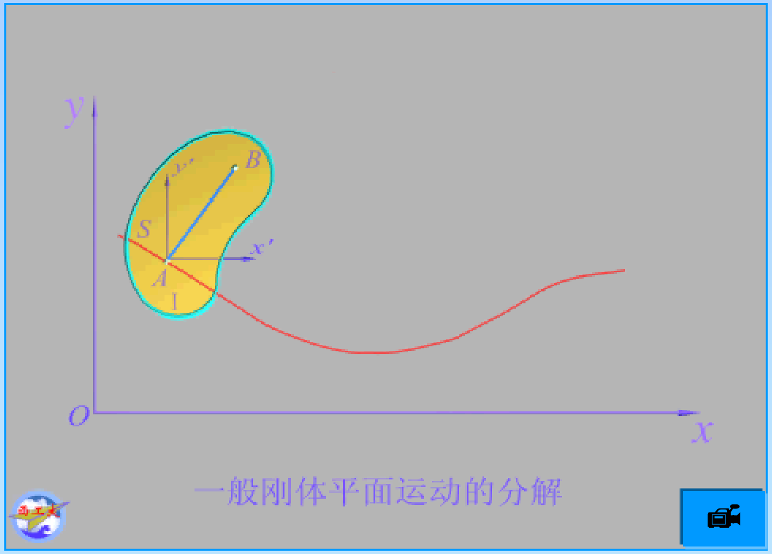


刚体平面运动的分解演示

特别强调

1. 刚体的平面运动分解成随基点的平移和相对于基点的转动时，基点的选择是任意的。

2. 刚体的平面运动分解成平动和转动时，其平动部分与基点的选择有关；而转动部分与基点的选择无关。



其含义是:

✦平移的轨迹、各点的速度和加速度都与基点的位置有关。

✦转动的角速度和角加速度都与基点的位置无关。

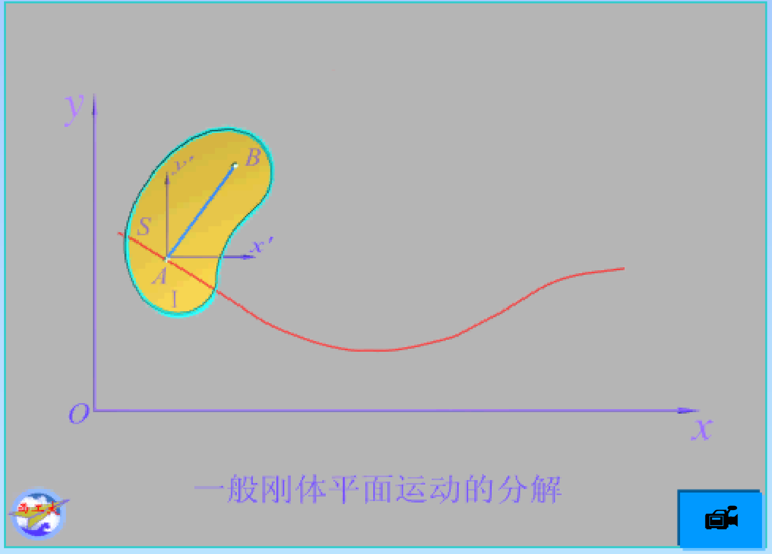
§ 9–1 刚体平面运动简化与分解

刚体的平面运动分解成平移和转动时，其平移部分与基点的选择有关；而转动部分与基点的选择无关。即平移的轨迹、各点的速度和加速度都与基点的位置有关。而转动的角速度和角加速度都与基点的位置无关。

证 明

1. 证明平移部分与基点的选择有关。

通过动画说明。



1、以 A为基点分解　2、以B为基点分解

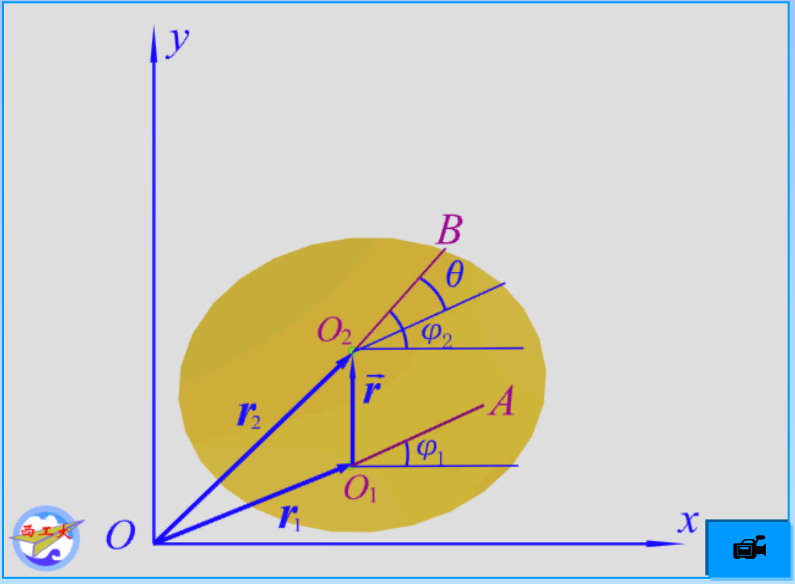
刚体的平面运动分解成平移和转动时，其平移部分与基点的选择有关；而转动部分与基点的选择无关。即平移的轨迹、各点的速度和加速度都与基点的位置有关。而转动的角速度和角加速度都与基点的位置无关。

2. 证明转动部分与基点的选择无关

设在平面图形上任选二点O_1、O_2为基点，图形相对于O_1和O_2二点的转角分别为 φ_1和φ_2，则有

$$\phi_2 = \phi_1 + \theta$$

而 $\theta =$ 常量

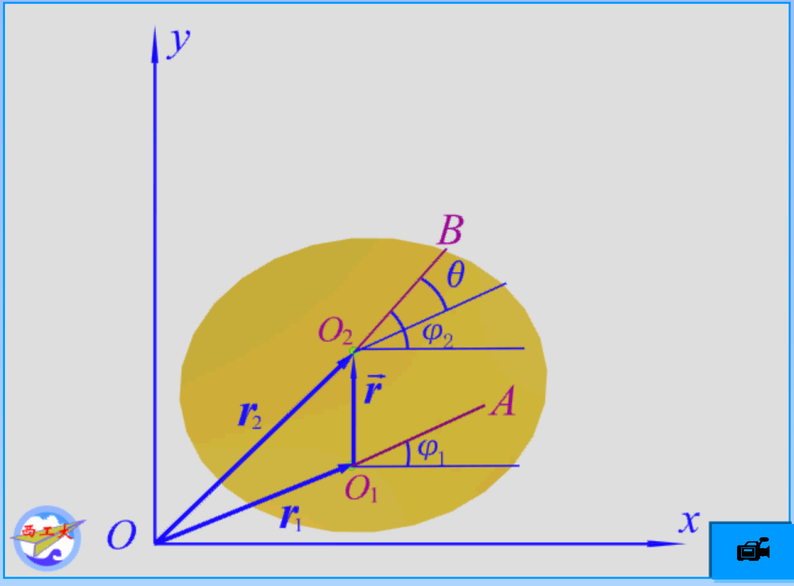


故求导可得 $\dfrac{d\phi_2}{dt} = \dfrac{d\phi_1}{dt} = \omega,\quad \dfrac{d^2\phi_2}{dt^2} = \dfrac{d^2\phi_1}{dt^2} = \alpha$

由上式

$$\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t} = \omega$$

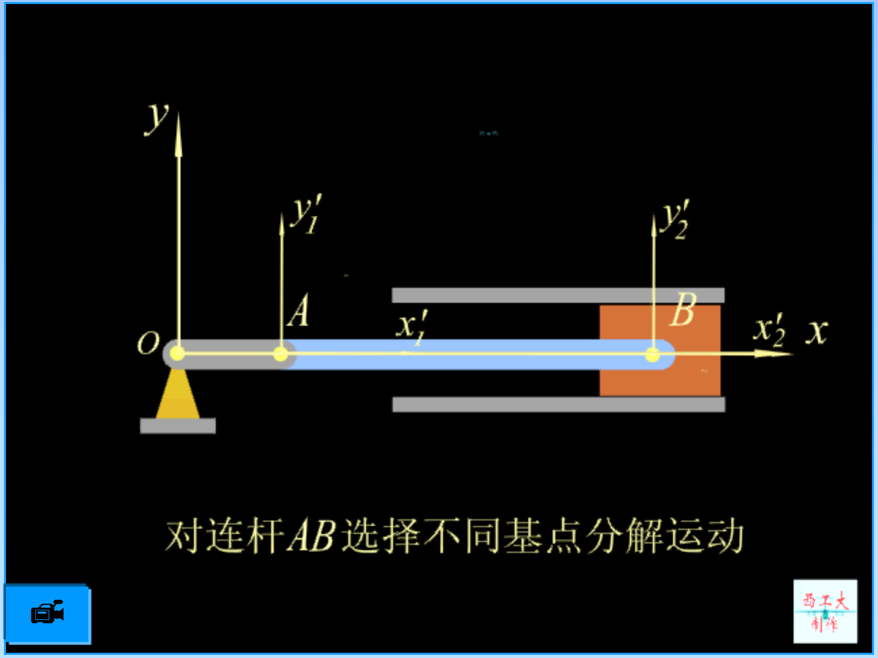
$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\phi_1}{\mathrm{d}t^2} = \alpha$$



由此可见，平面图形（也即平面运动刚体）在相对转动中的角速度和角加速度对不同基点是相同的，从而证得转动部分与基点的选择无关。

$$\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t}=\omega,\qquad \frac{\mathrm{d}^2\phi_2}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2\phi_1}{\mathrm{d}t^2}=\alpha$$

注 意



因为平移系（动系）相对定参考系没有方位的变化，平面图形的角速度和角加速度既是平面图形相对于平移系的相对角速度和角加速度，也是平面图形相对于定参考系的绝对角速度和角加速度。

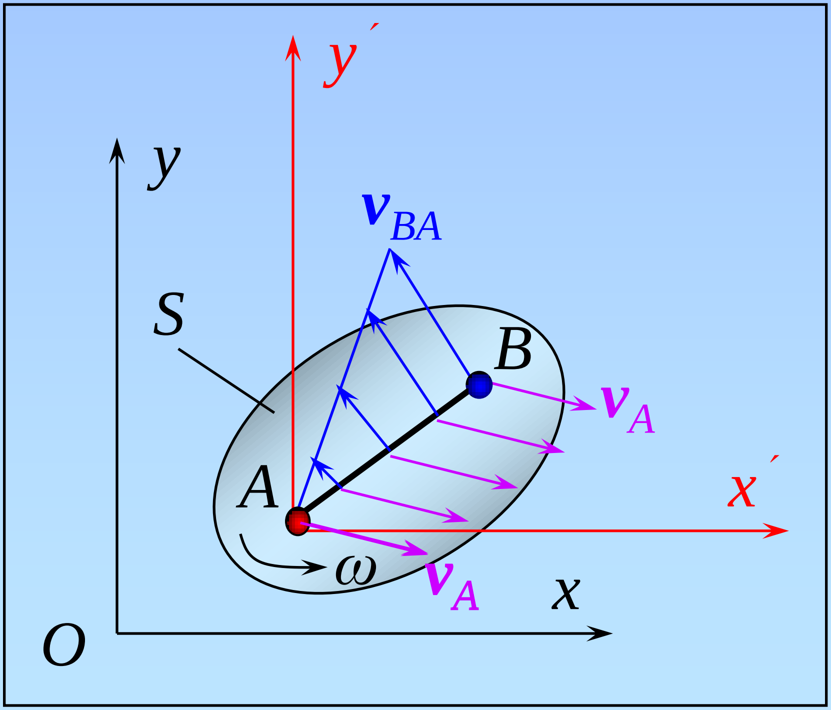
§9–2 平面运动的速度分析

- 基　点　法
- 速度投影法
- 速度瞬心法

§ 9–2 平面运动的速度分析

1. 基点法

设在平面运动刚体上取点A为基点，已知其速度为 $\boldsymbol{v}_A$，平面图形S也即平面运动刚体的角速度为 ω，分析图形上任一点B 的速度。



将B点的运动视为复合运动。

动点—B点 。

动系—以A点为原点的平移系 $Ax'y'$。

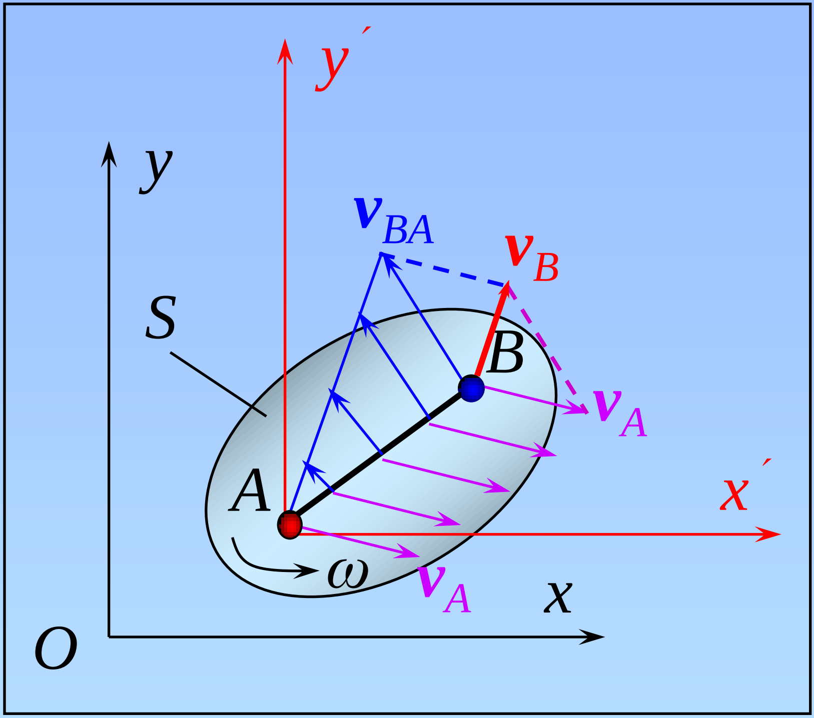
定系—固连于地球。

绝对运动 — 未知。

相对运动—绕基点 A的圆周运动。

$$v_r = v_{BA} = AB \cdot \omega$$

牵连运动—随基点A的平动， $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_A$。



根据速度合成定理 $v_a = v_e + v_r$

注意到

$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_B$， $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_A$， $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_{BA}$

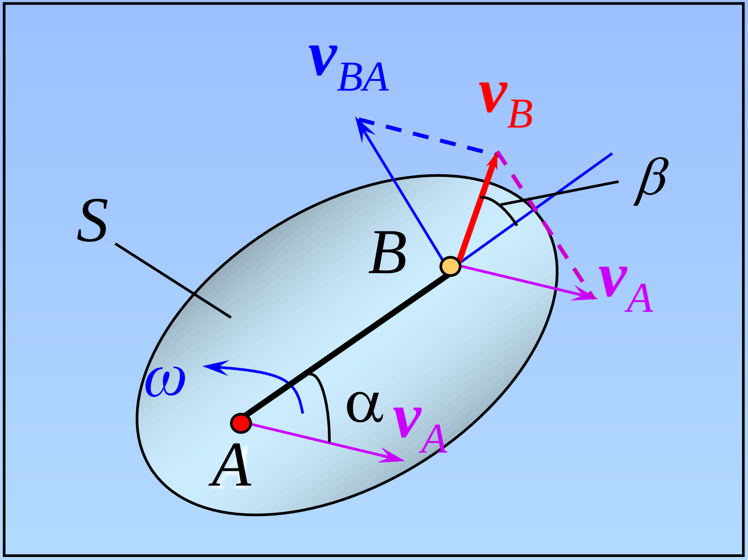
则有

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

有 结 论：

平面图形上任意点的速度等于基点的速度与该点绕基点转动的速度之矢量和。

2. 速度投影法



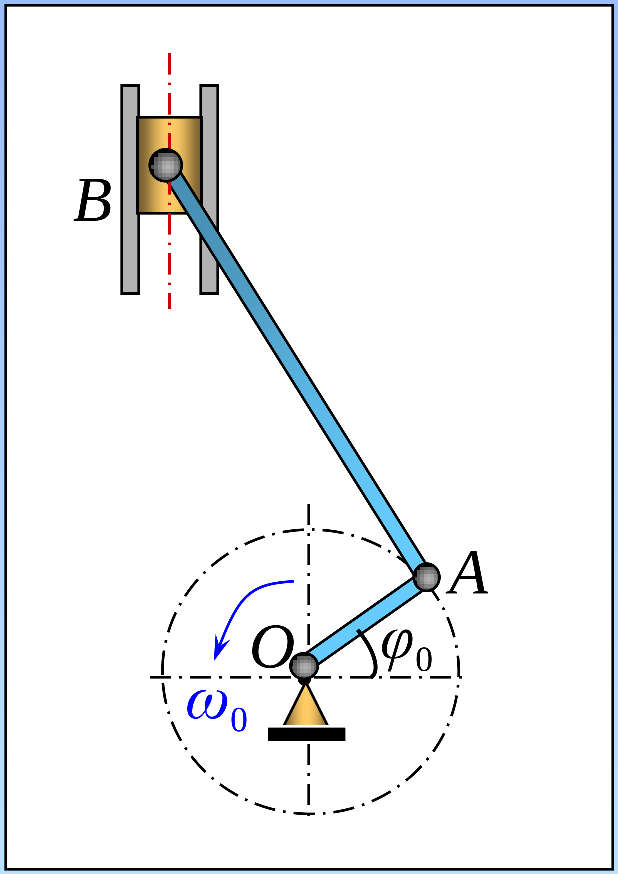
应用速度合成定理

$$v_B = v_A + v_{BA}$$

上式等号两侧 分别向AB连线上投影，因为v_{BA}垂直于AB，所以v_{BA}在AB上投影等于零。

则有 $v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$

速度投影定理： 平面图形上任意两点的速度在它们连线方向上的投影相等。

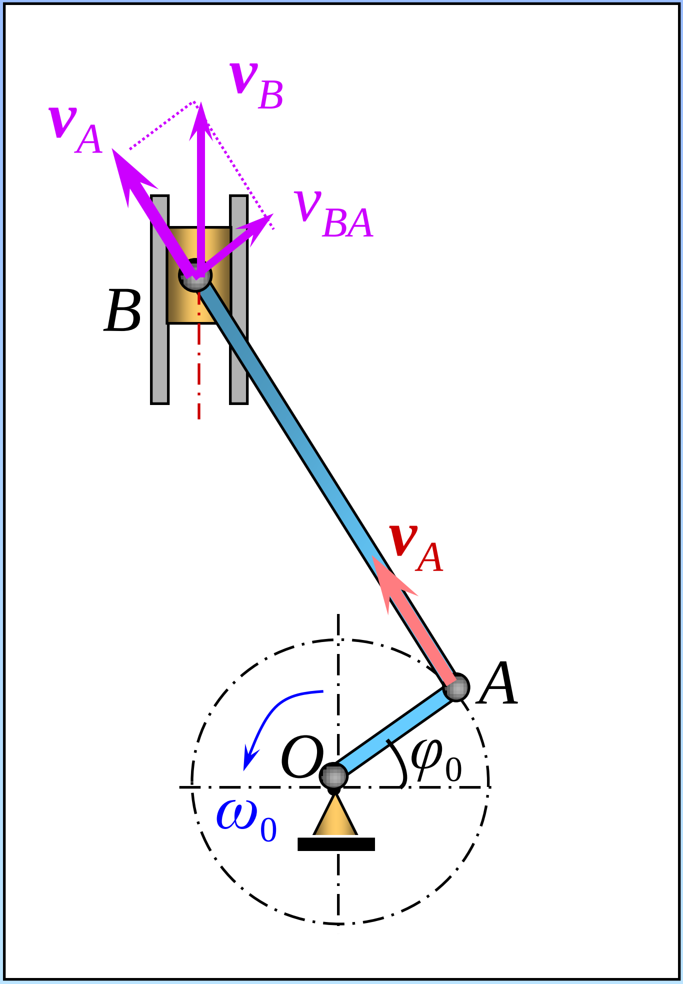


例9–2 已知曲柄滑块机构中，曲柄$OA=r$，以匀角速度 ω_0绕O 轴转动，连杆$AB=l$。在图示情形下连杆与曲柄垂直。求该瞬时：

（1）滑块的速度$\boldsymbol{v}_B$;

（2）连杆AB的角速度ω_{AB}。

解:



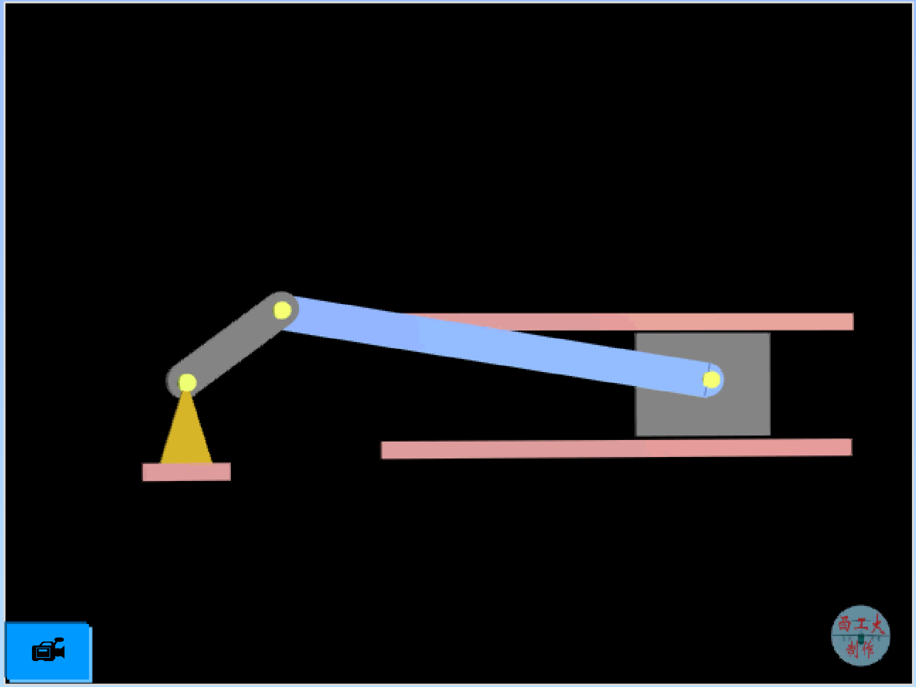
基点法

连杆AB作平面运动。A 点速度 $\boldsymbol{v}_A$ 已知， $v_A = r\,\omega_0$

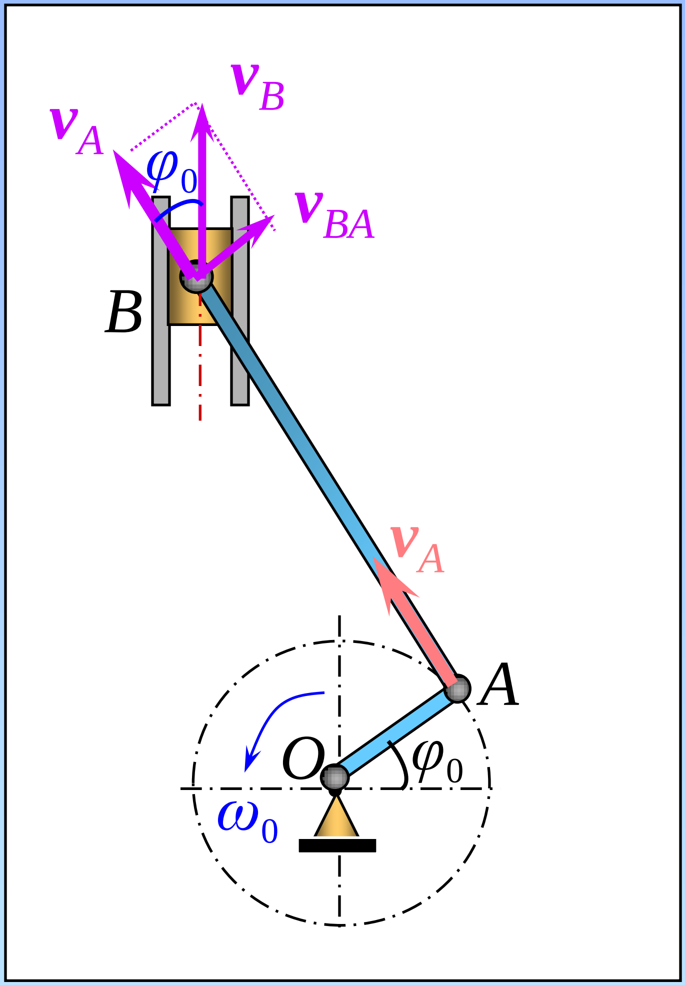
以A为基点。应用速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$$

画出速度合成矢量图。



运 动 演 示

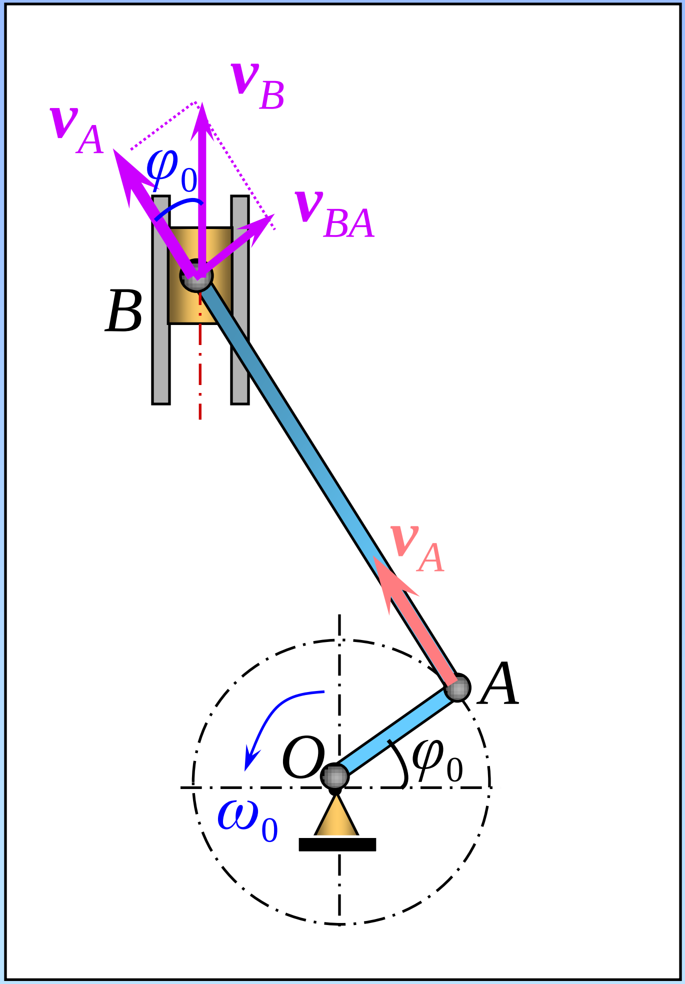


(1)求该瞬时滑块的速度$\boldsymbol{v}_B$

由速度合成矢量图可得滑块的速度：

$$v_B = \frac{v_A}{\cos\varphi_0} = \frac{r\omega_0}{\cos\varphi_0}$$

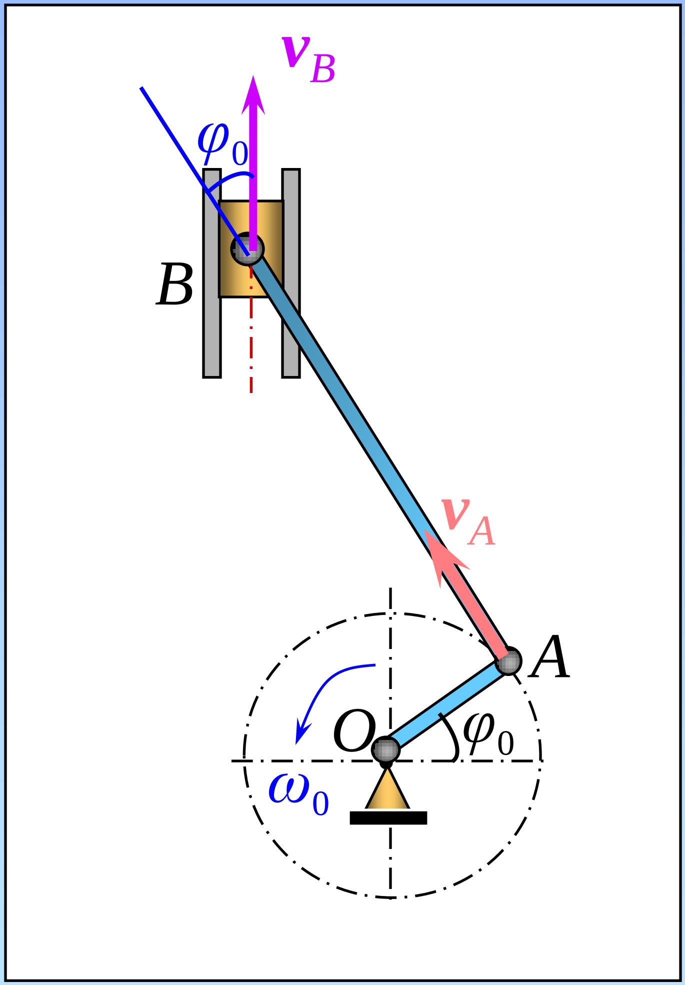
方向铅直向上。



(2) 求该瞬时连杆AB的角速度ω_{AB}

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{l} = \frac{v_A \tan\varphi_0}{l} = \frac{r\omega_0}{l}\tan\varphi_0$$

顺时针转向。



速度投影法

解： 应用速度投影定理

$$[v_A]_{AB} = [v_B]_{AB}$$

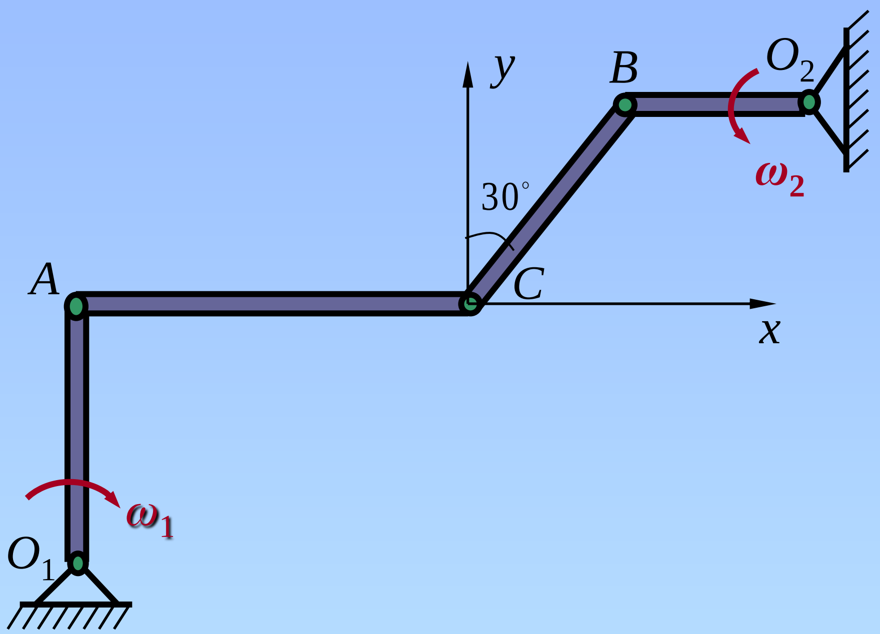
即 $v_A\cos\alpha = v_B\cos\beta$

因为 $v_A=r\,\omega_0$，$\alpha=0$，$\beta=\varphi_0$

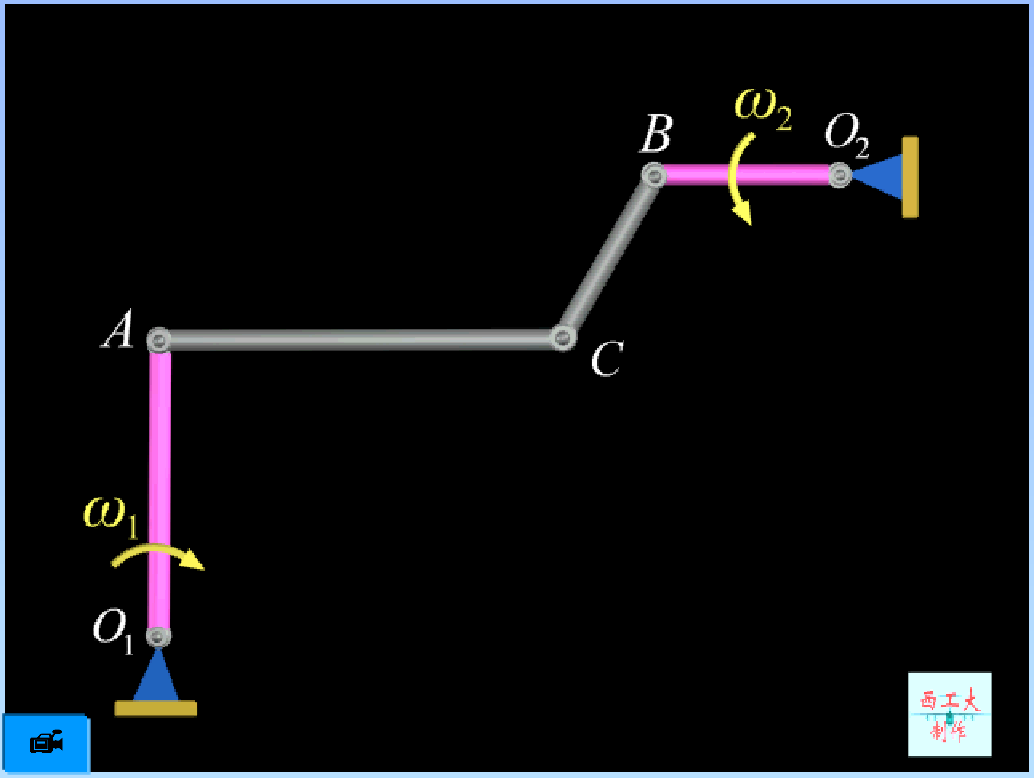
从而有 $v_A = v_B\cos\phi_0$

$$v_B = \frac{r\omega_0}{\cos\phi_0}$$

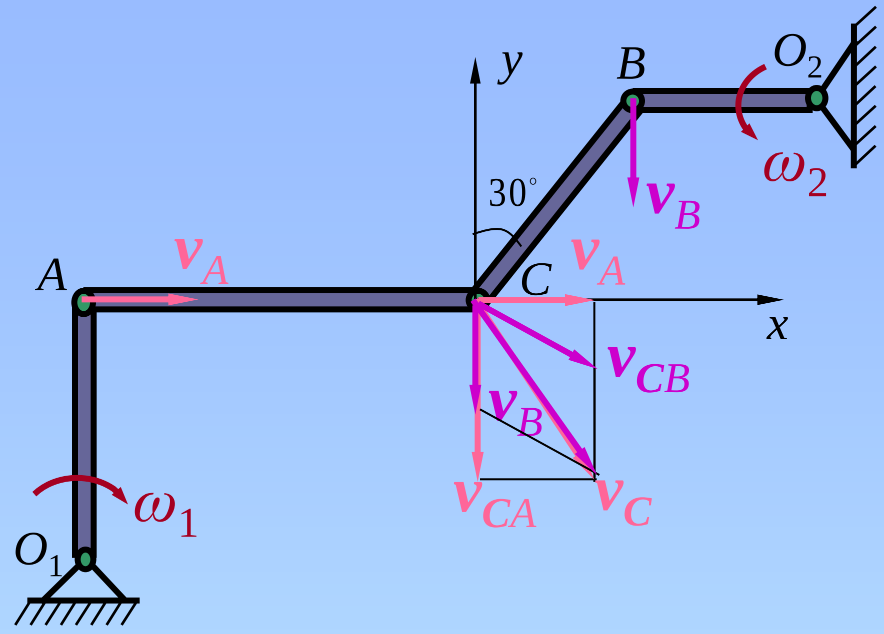
应用速度投影定理无法求得连杆AB的角速度。



例9-3 如图平面铰链机构。已知杆O_1A的角速度是ω_1，杆O_2B的角速度是ω_2，转向如图，且在图示瞬时，杆O_1A铅直，杆AC 和O_2B水平，而杆BC对铅直线的偏角30°；又$O_2B=b$，$O_1A=\sqrt{3}\,b$。试求在这瞬时C 点的速度。



运 动 演 示



解： 连杆AC和BC均作平面运动。

先求出A点和B点的速度。有

$$v_A = \omega_1 O_1 A = \sqrt{3}\omega_1 b$$

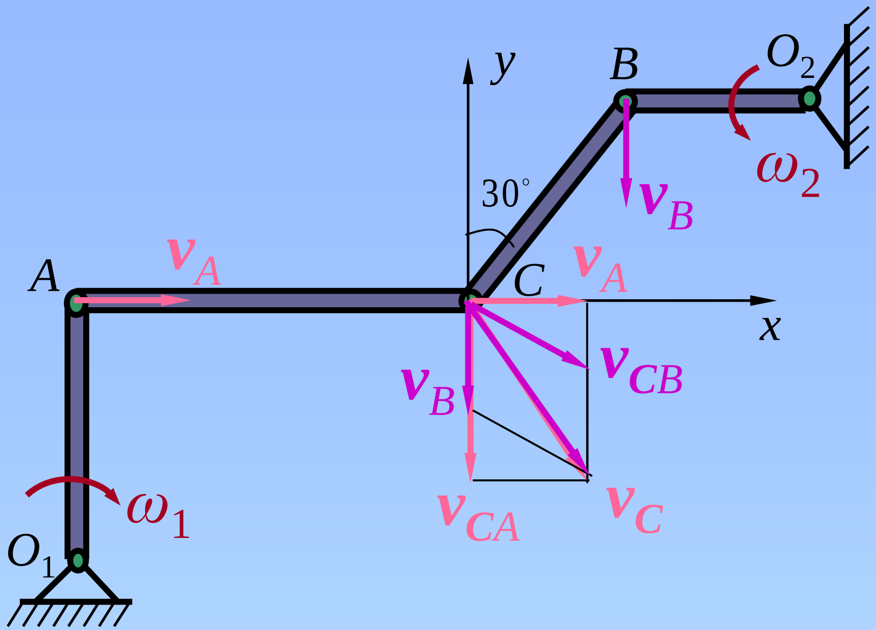
$$v_B = \omega_2 O_2 B = \omega_2 b$$

$\boldsymbol{v}_A$和$\boldsymbol{v}_B$的方向如图。

以A点为基点分析C点的速度，有 $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA}$ （1）

另外，又以B作为基点分析C点的速度，有 $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}$ （2）

比较以上两式，有 $\boxed{\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA} = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}}$



$$\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA} = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}$$

沿x轴投影上式， 得

$$v_A = v_{CB}\cos 30^\circ$$

由此求得

$$v_{CB} = \frac{v_A}{\cos 30^\circ} = 2\omega_1 b$$ 方向如图

把 $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}$ 式分别投影到x，y轴上，有

$$v_{Cx} = v_{Bx} + v_{CBx} = 0 + v_{CB}\cos 30^\circ = \sqrt{3}\omega_1 b$$

$$v_{Cy} = v_{By} + v_{CBy} = -v_B - v_{CB}\sin 30^\circ = -(\omega_1 + \omega_2)b$$

$$v_{Cx} = v_{Bx} + v_{CBx} = 0 + v_{CB}\cos 30^\circ = \sqrt{3}\omega_1 b$$

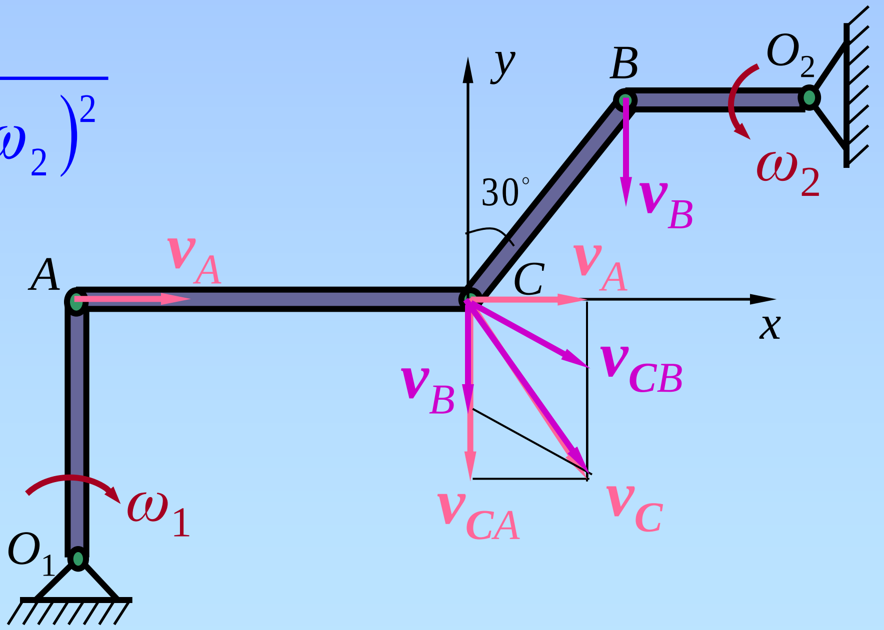
$$v_{Cy} = v_{By} + v_{CBy} = -v_B - v_{CB}\sin 30^\circ = -(\omega_1 + \omega_2)b$$

于是得

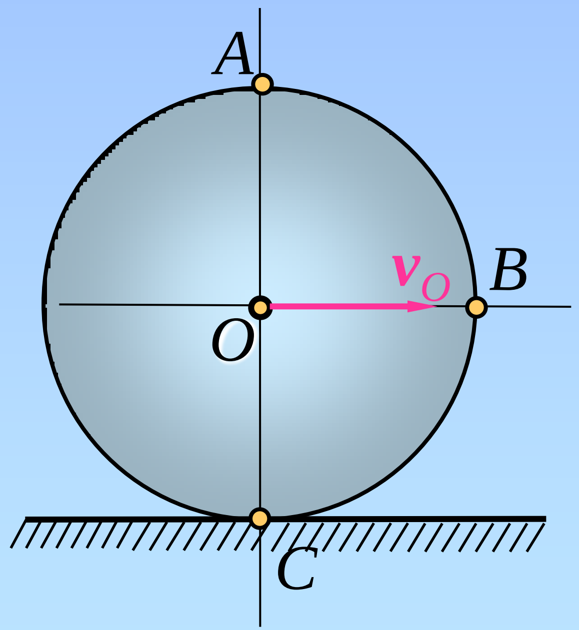
$$v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = b\sqrt{3\omega_1^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2}$$

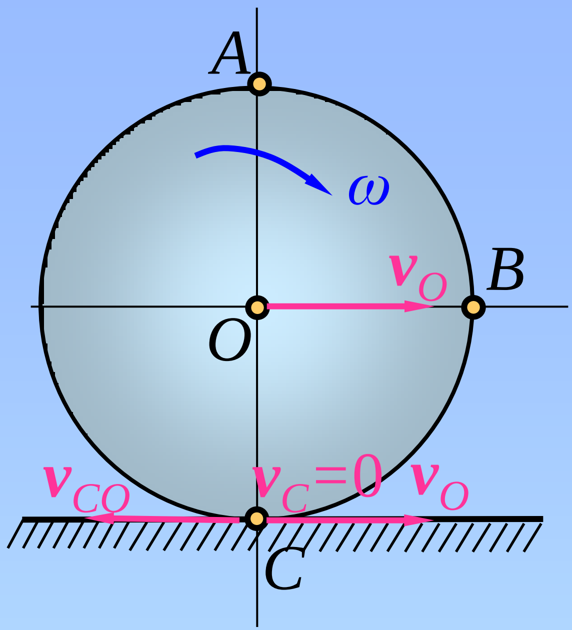
$$= b\sqrt{4\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2}$$

$$\tan(\boldsymbol{v}_C, \boldsymbol{x}) = \frac{v_{Cy}}{v_{Cx}} = \frac{-(\omega_1 + \omega_2)}{\sqrt{3}\omega_1}$$



例9-4 如图所示，半径为R的车轮，沿直线轨道作无滑动的滚动，已知轮心O以匀速v_O前进。求轮缘上A，B和C各点的速度。





解： 车轮作平面运动。用基点法分析求解。

因为轮心O的速度已知，故选O点为基点。

应用速度合成定理，轮缘上C点的速度可表示为

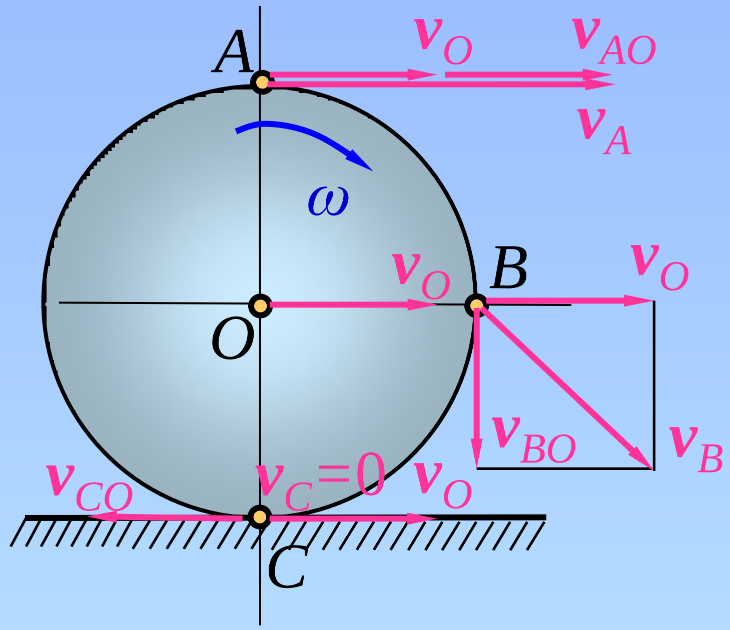
$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{CO}$$

其中 $\boldsymbol{v}_{CO}$ 的方向已知，其大小$v_{CO}=R\omega$。

由于车轮只滚不滑，所以车轮与地面的一对接触点应具有相同的速度。因地面上的点的速度为零，故轮缘上的点C的速度也为零，即

$$v_C = 0 \quad 且\ v_{CO} = v_O,\quad \omega = \frac{v_O}{R}。$$

以O点为基点，各点的速度求得如下：



A点：$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{AO}$

$v_A = v_O + v_{AO}$,

$v_{AO} = R\omega = v_O$

$v_A = 2v_O$

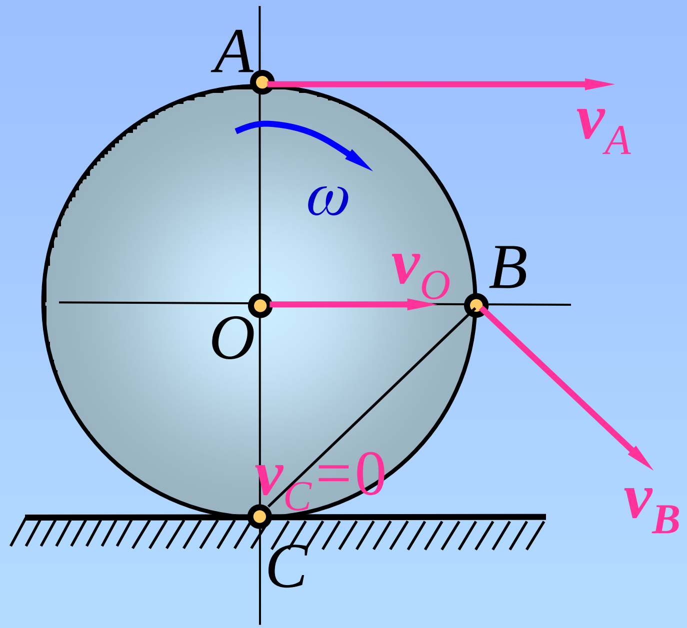
B点：$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{BO}$

$v_{BO} = R\omega = v_O$,

$v_B = \sqrt{2}v_O$

讨论

以C点为基点，各点的速度求得如下：



A点：$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{AC}$

$v_C = 0,$

$v_A = v_{AC} = 2R\omega = 2v_O$

B点：$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{BC}$

$v_B = \sqrt{2}R\omega = \sqrt{2}v_O$

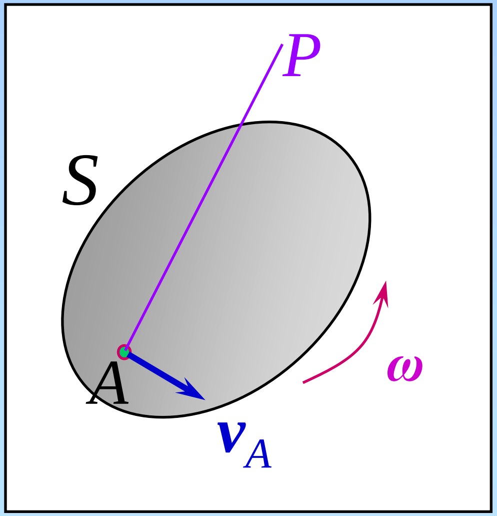
思考以C点为基点，求A、B两点速度时的特点？

3. 瞬心法

（1）瞬心的定义 ——某瞬时平面运动刚体上速度为零的点称为瞬时速度中心，简称为速度瞬心。

（2）瞬心的存在

设已知平面图形S上某点A的速度$\boldsymbol{v}_A$，平面图形的角速度 ω 。



请思考 速度为零的点可能在哪出现？

答：速度为零的点可能出现在 $\boldsymbol{v}_A$ 的垂直线AP上。

（2）瞬心的存在　　速度为零的点可能出现在 $\boldsymbol{v}_A$ 的垂直线 AP 上。

过 A 点作 $\boldsymbol{v}_A$ 的垂直线 PA，PA 上各点的速度由两部分组成：

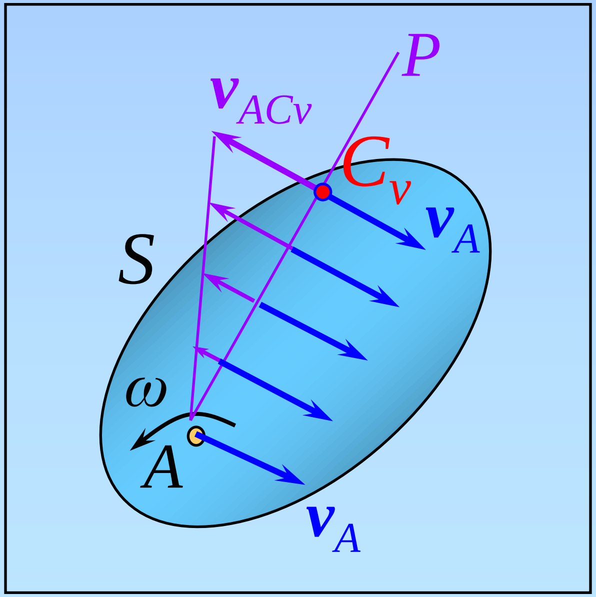
- 跟随基点平移的速度 $\boldsymbol{v}_A$——牵连速度，各点相同；
- 相对于基点转动的速度 $\boldsymbol{v}_{PA}$——相对速度，自 A 点起线性分布。

因为 PA 线上各点相对于基点转动的速度与 A 点的速度方向相反，其大小正比于该点到 A 点的距离，故必有一点 C_v 的速度满足

$$v_{C_v} = v_A - v_{C_vA} = v_A - C_vA \cdot \omega = 0$$

由此求得

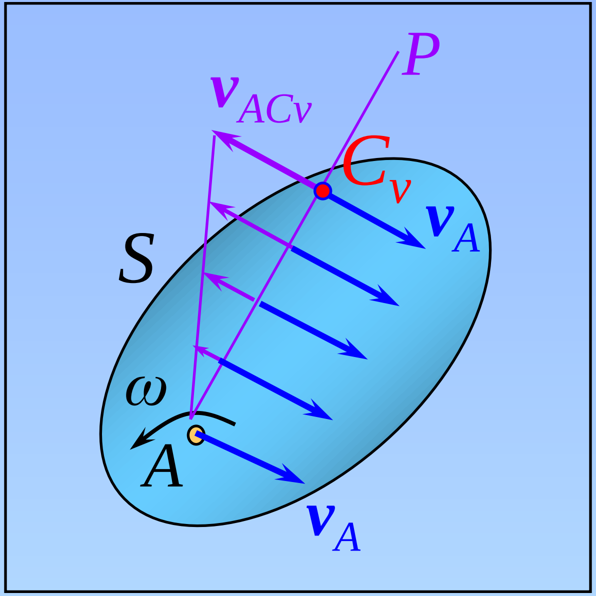
$$C_vA = \frac{v_A}{\omega}$$



速度为零的点 C_v 即为该瞬时平面图形的速度瞬心。

（2）瞬心的存在

$$C_v A = \frac{v_A}{\omega}$$



有结论:

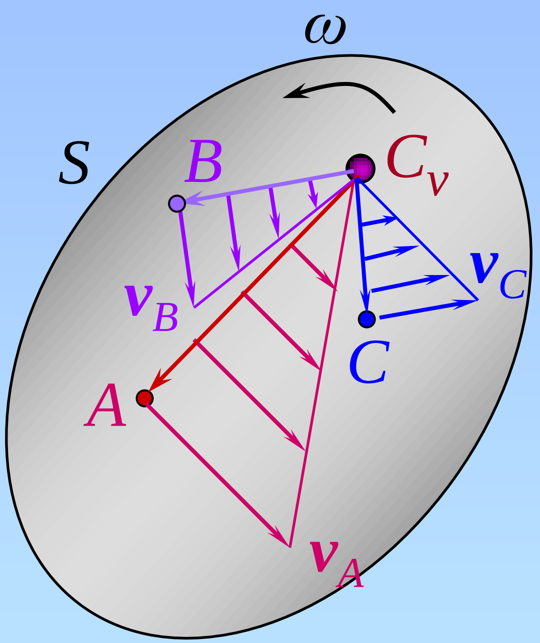
若平面图形的角速度不等于零，则在每一瞬时，该图形上（或其延展部分）总有一速度为零的点，即速度瞬心。

（3）速度瞬心法

若在某瞬时以速度瞬心C_v为基点，则平面图形上任一点A的速度大小

$$v_A = v_{AC_v} = AC_v \cdot \omega$$

其方向⊥AC_v，指向与ω转向一致。



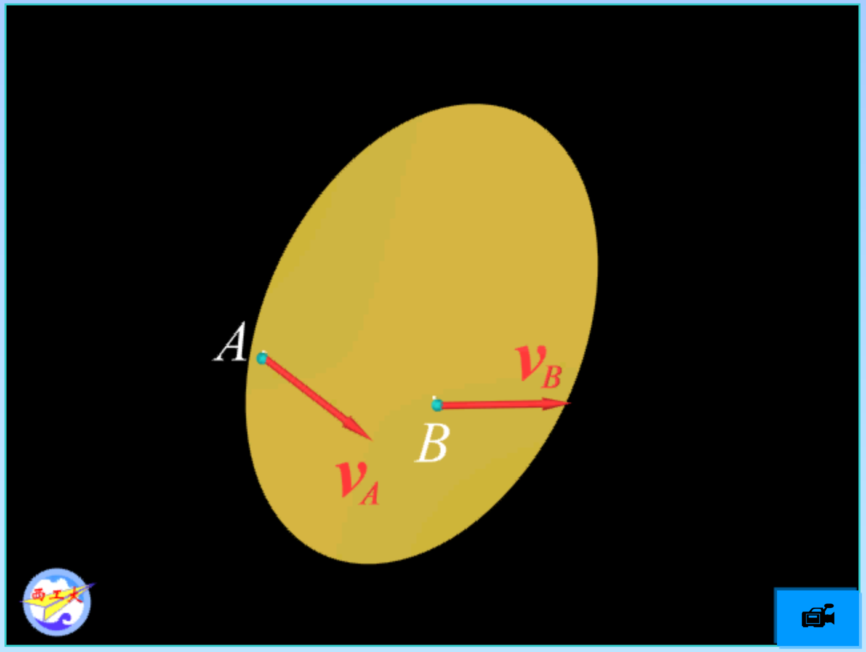
① 求出速度瞬心C_v的位置和平面图形的角速度 ω ，就可求得平面运动刚体上所有点的速度，这种方法称为速度瞬心法。

② 平面图形上各点的速度分布，与图形在该瞬时以角速度 ω绕速度瞬心C_v作定轴转动时一样。

（4） 速度瞬心位置的确定

● 第一种情形

已知某瞬时平面图形上A，B两点的速度方位，则这两点速度的垂线的交点就是速度瞬心。



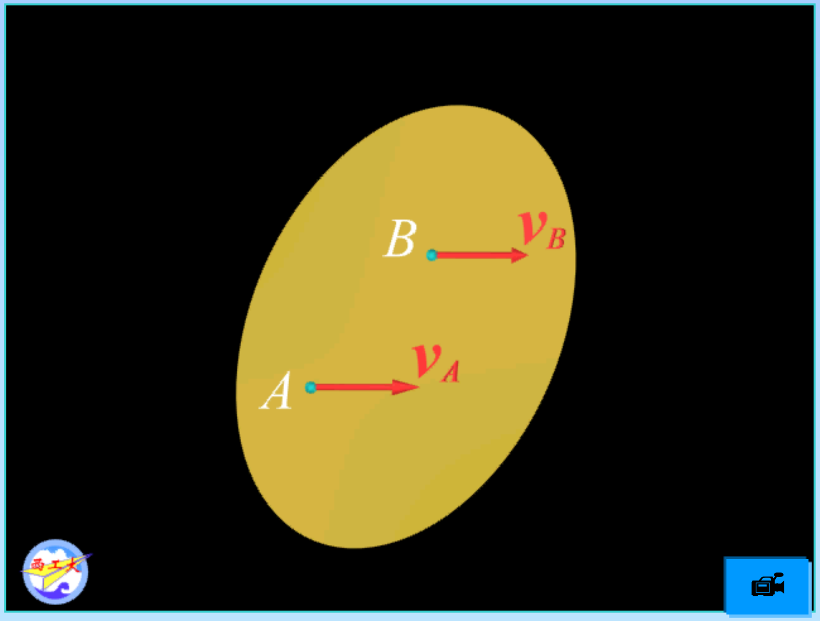
● 第二种情形

① 已知平面图形上两点的速度矢量的大小与方向，而且二矢量互相平行、方向相同，但二者都不垂直于两点的连线。则速度瞬心在无穷远处。

此时平面运动刚体的角速度

$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = 0$$

该瞬时各点速度均平行，且大小相等，其分布与平移时速度一样，这种情形称为瞬时平移。

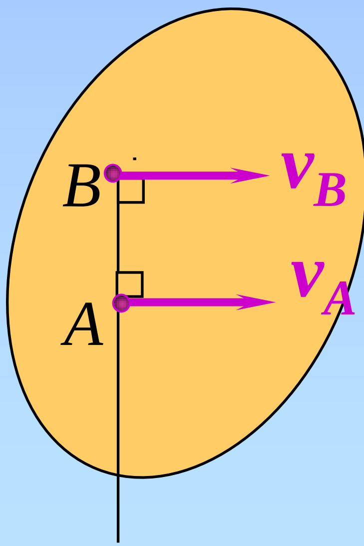


● 第二种情形

② 已知平面图形上两点的速度矢量的大小与方向，而且二矢量互相平行、方向相同、大小相等，都垂直于两点的连线，则速度瞬心仍在无穷远处。

此时平面运动刚体的角速度

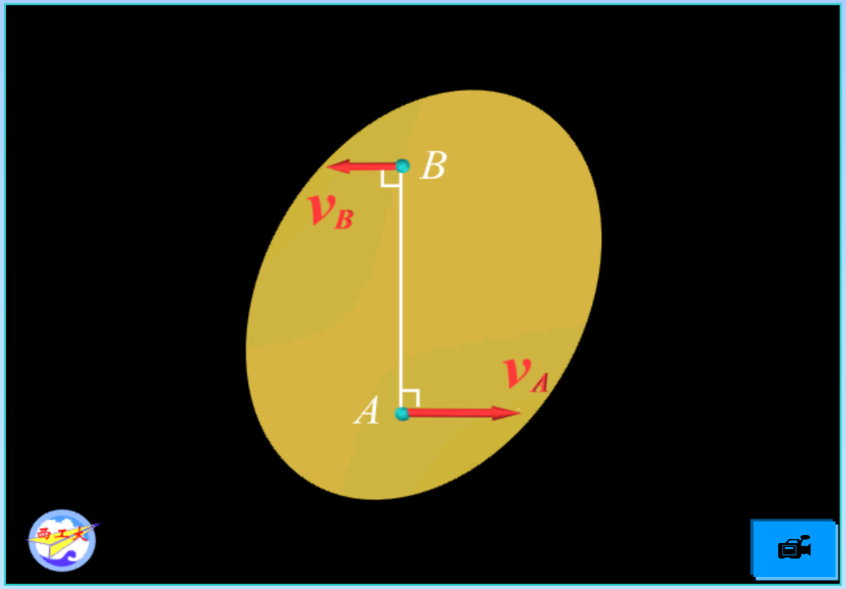
$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = 0$$

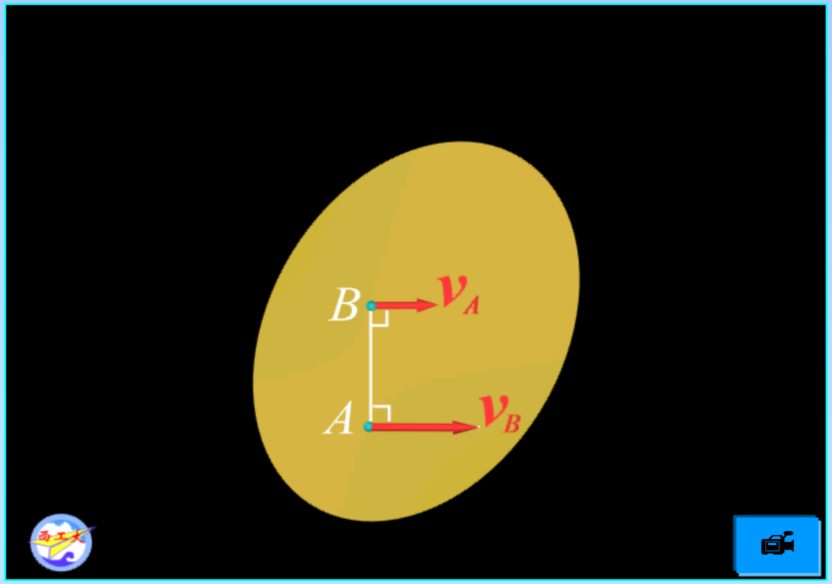


该瞬时平面运动刚体仍处于瞬时平移状态。

● 第三种情形

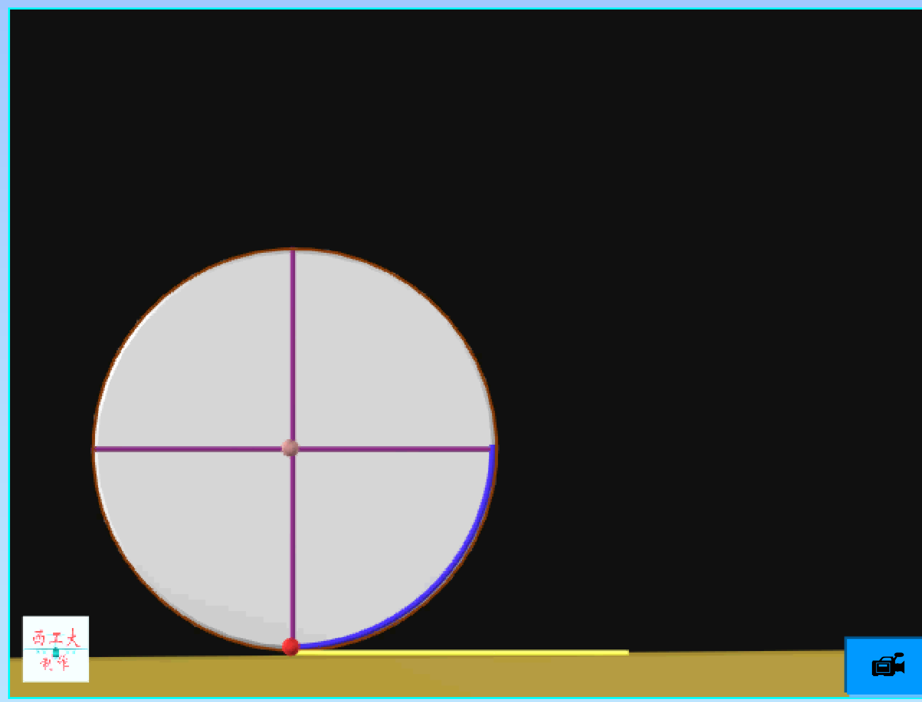
已知平面图形上两点的速度矢量的大小与方向，而且二矢量互相平行，并且都垂直于两点的连线。则速度瞬心在两点速度矢端连线与*AB*延长线的交点处。





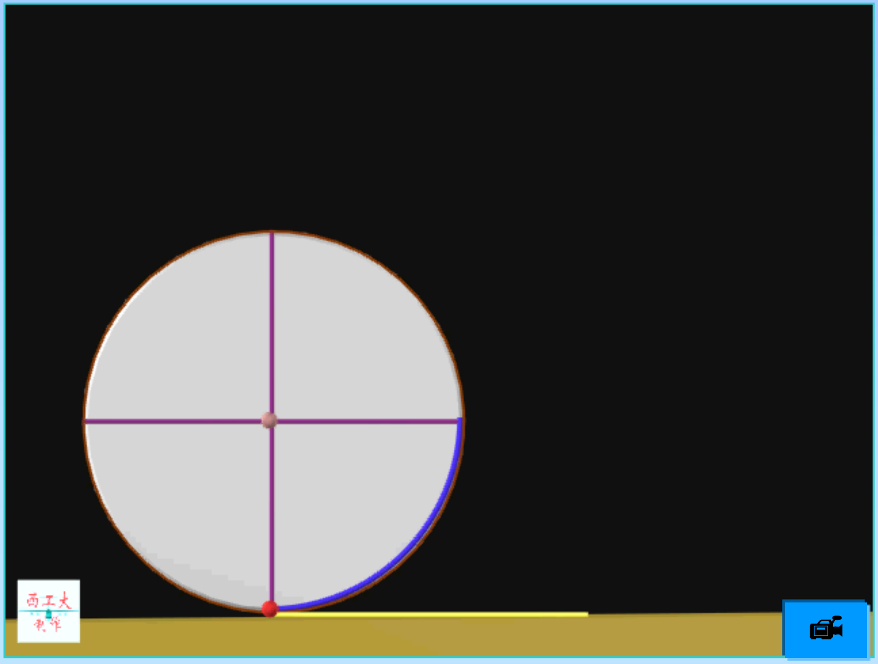
- 第四种情形

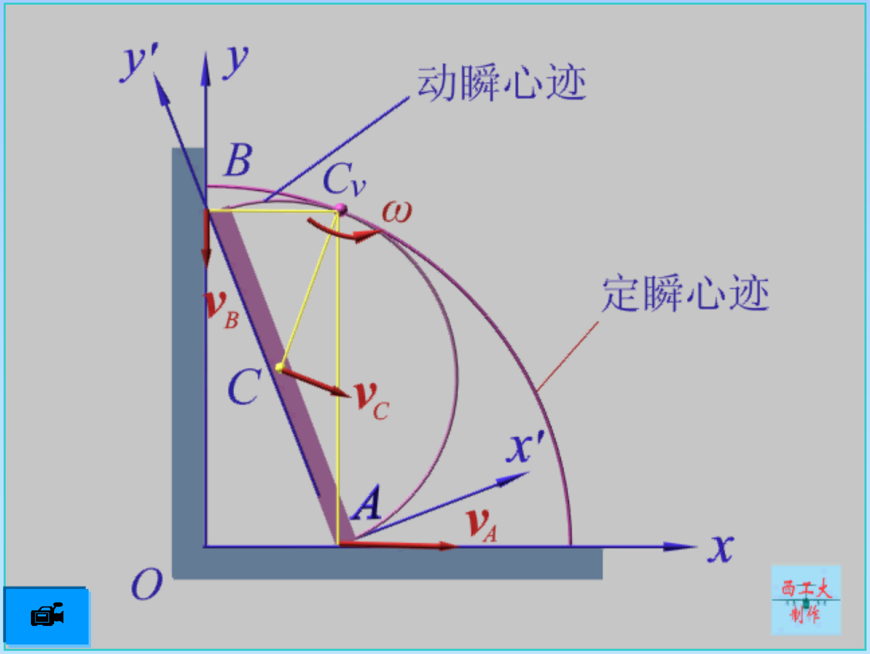
当平面运动刚体在一固定平面上作纯滚动时，其接触点即为速度瞬心。



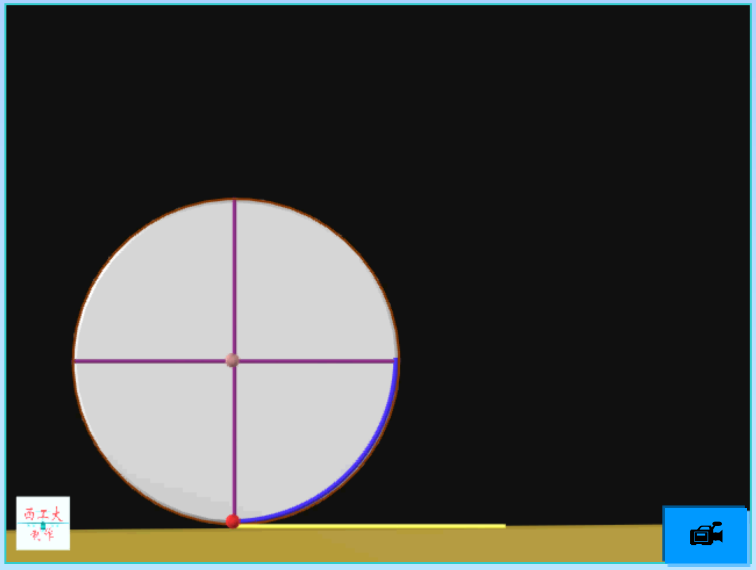
（5）速度瞬心的特点

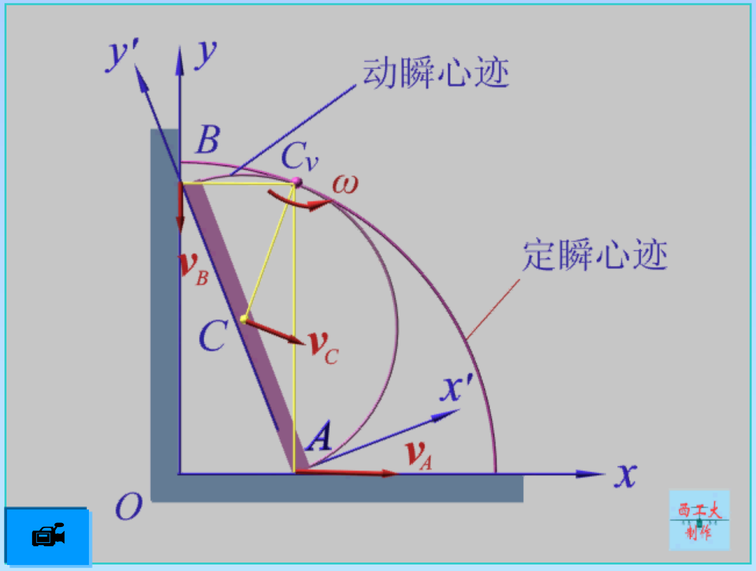
- **瞬时性：** 不同的瞬时，有不同的速度瞬心；因此瞬心具有加速度。





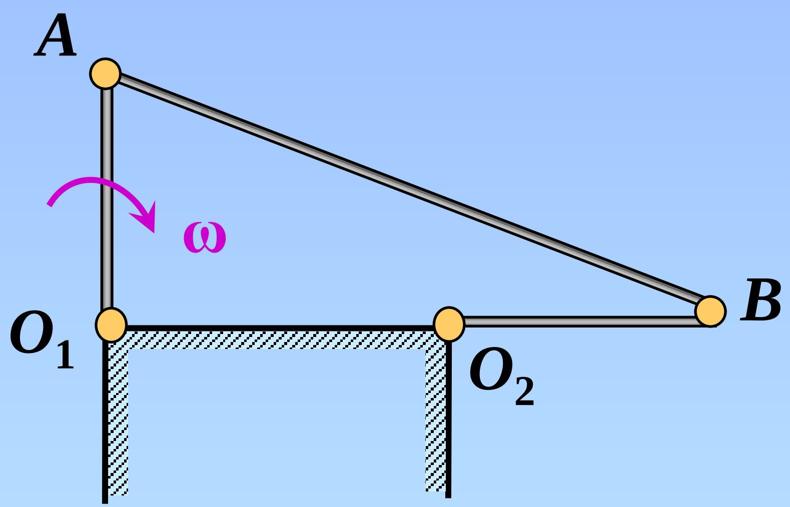
- **唯一性**：某一瞬时只有一个速度瞬心；
- **瞬时转动特性**：平面图形在某一瞬时的运动都可以视为绕这一瞬时的速度瞬心作瞬时转动。
- **注意瞬时平移与平移的区别**：瞬时平移各点的速度相同，但是加速度可能不同。



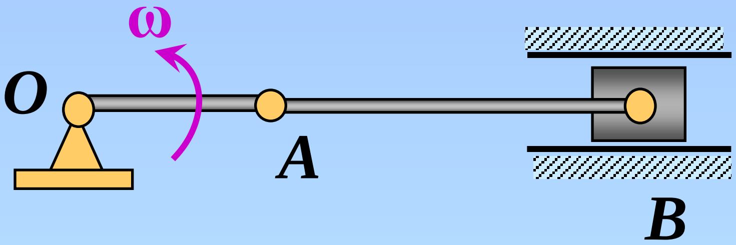


练习题

找出下列平面运动刚体的速度瞬心。



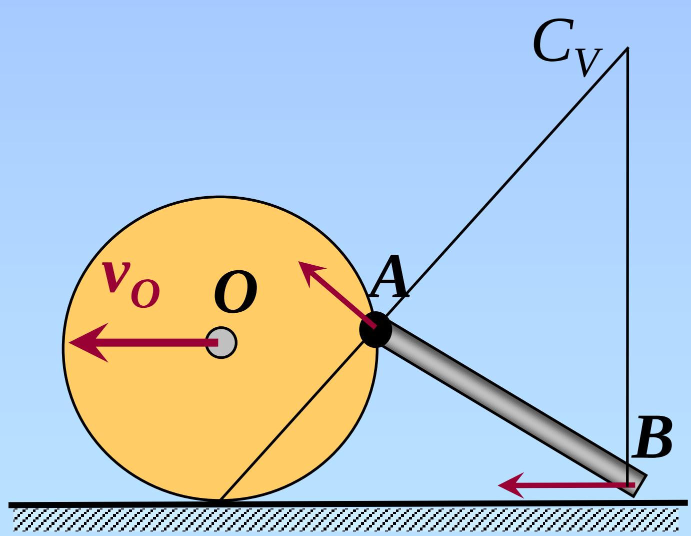
（1）



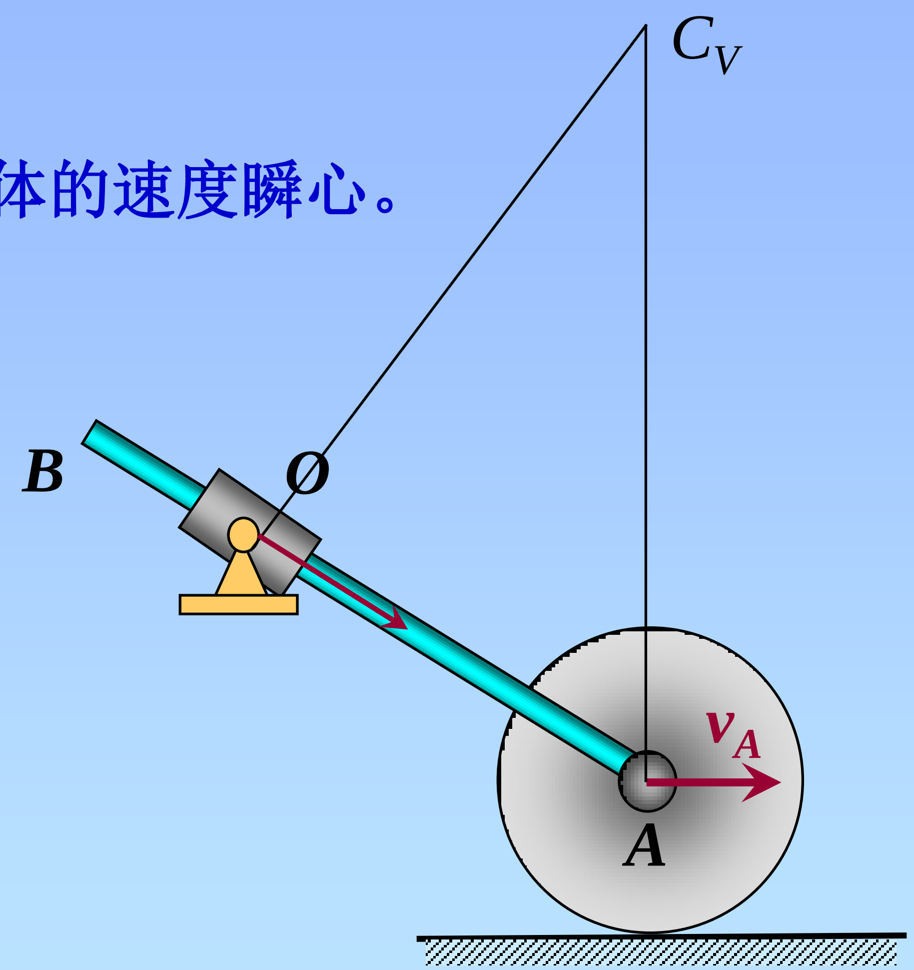
（2）

练习题

找出下列平面运动刚体的速度瞬心。

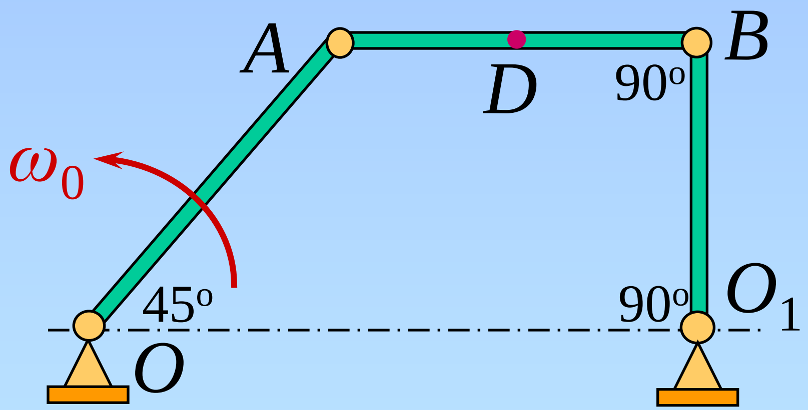


（3）

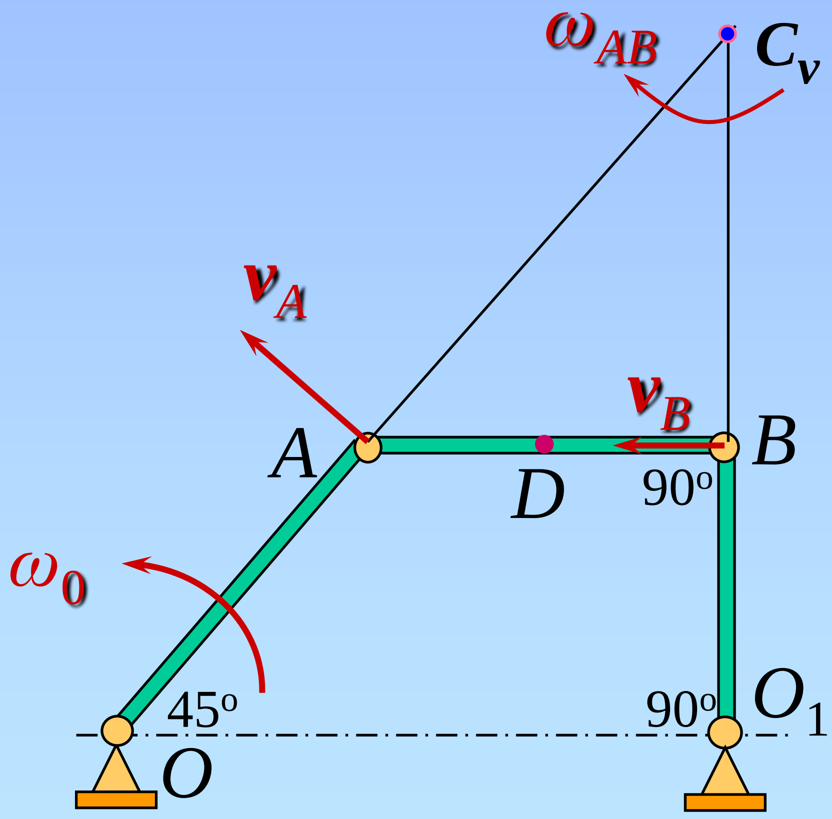


（4）

例9-5 已知四连杆机构中，$O_1B = l$，$AB = \frac{3}{2}l$，$AD = DB$ 。OA以角速度ω_0绕O轴转动。求（1）B和D点的速度；（2）AB杆的角速度。



解： 机构中杆AB作平面运动，杆OA和O_1B都作定轴转动。



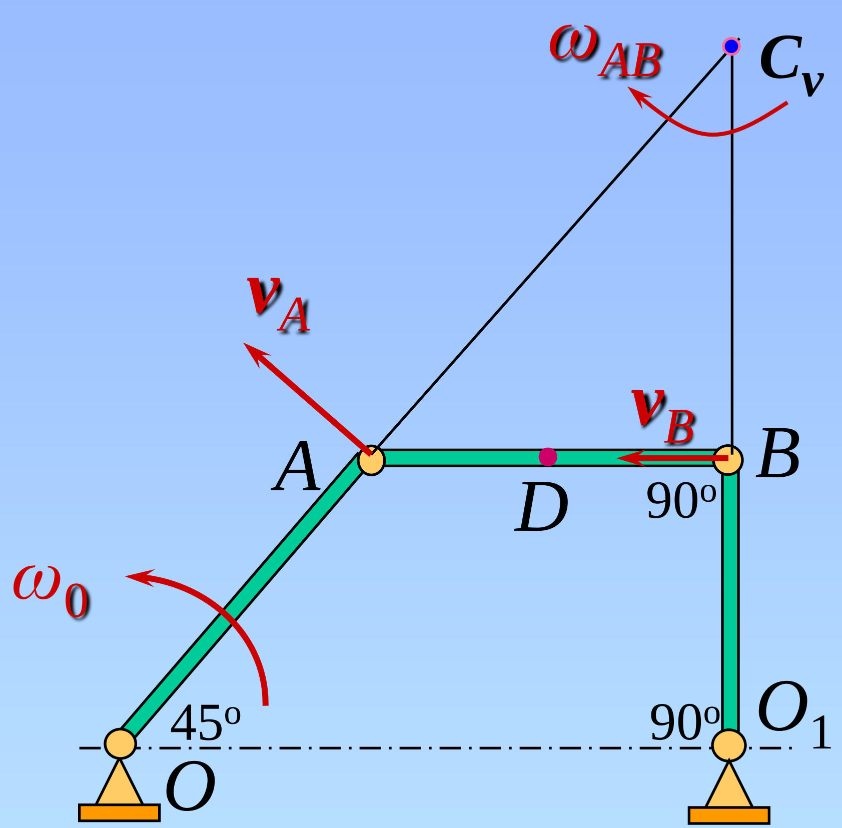
A，B二点的速度$\boldsymbol{v}_A$和$\boldsymbol{v}_B$的方向都可以确定。

作$\boldsymbol{v}_A$和$\boldsymbol{v}_B$的垂线，相交于C_v，此即杆AB的速度瞬心。

图中的几何关系：

$$OA = \sqrt{2}l\ ,\quad AB = BC_v = \frac{3}{2}l$$

$$AC_v = \frac{3\sqrt{2}}{2}l\ ,\quad DC_v = \frac{3\sqrt{5}}{4}l$$



$$OA = \sqrt{2}l \ , \ AB = BC_v = \frac{3}{2}l$$

$$AC_v = \frac{3\sqrt{2}}{2}l \ , \ DC_v = \frac{3\sqrt{5}}{4}l$$

（1）求B和D点的速度。

因为A点的速度 $v_A = OA \cdot \omega_0 = \sqrt{2}l\omega_0$

所以，连杆AB 的角速度

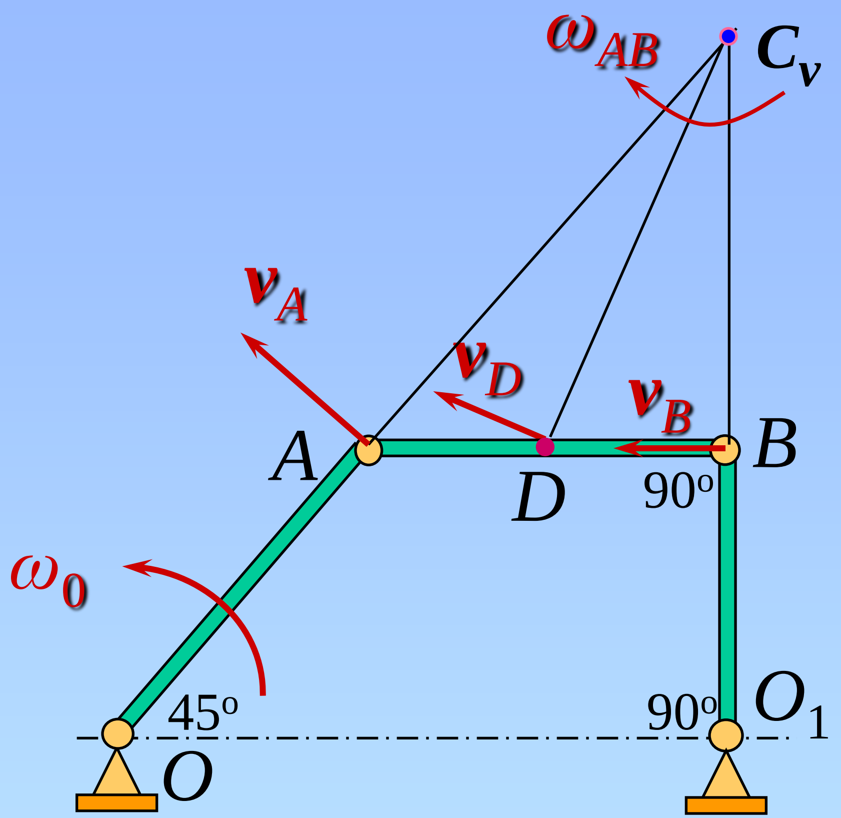
$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{\sqrt{2}l\omega_0}{\frac{3\sqrt{2}}{2}l} = \frac{2}{3}\omega_0$$

顺时针转向

B点的速度

$$v_B = BC_v \cdot \omega_{AB}$$

$$= \frac{3}{2}l \times \frac{2}{3}\omega_0 = l\omega_0$$



$$OA = \sqrt{2}l \ , \ AB = BC_v = \frac{3}{2}l$$

$$AC_v = \frac{3\sqrt{2}}{2}l \ , \ DC_v = \frac{3\sqrt{5}}{4}l$$

连杆*AB* 的角速度

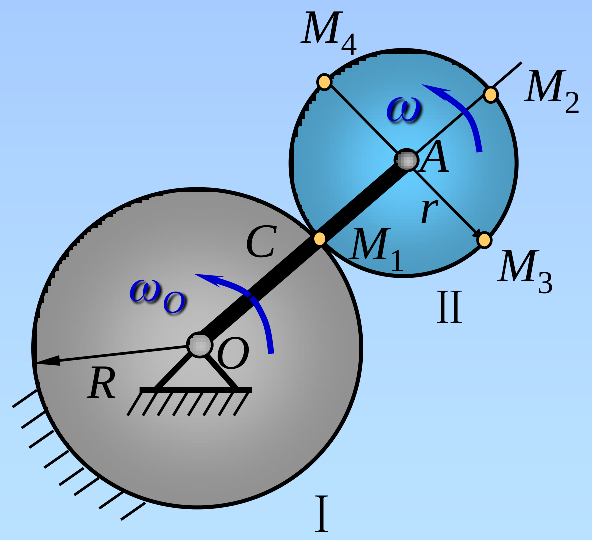
$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{\sqrt{2}l\omega_0}{\frac{3\sqrt{2}}{2}l} = \frac{2}{3}\omega_0$$

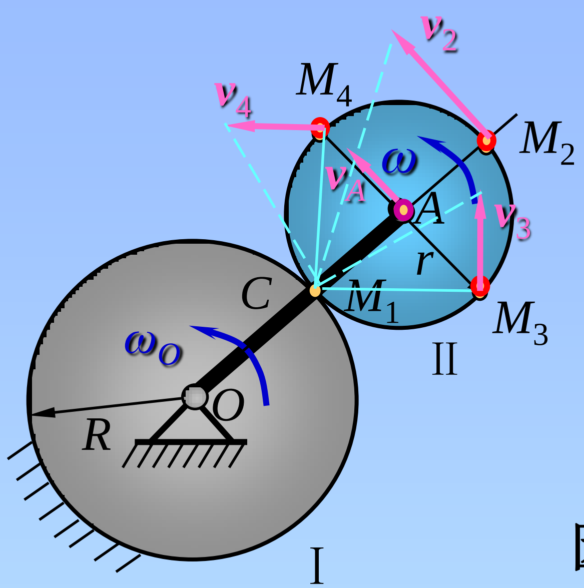
*D*点的速度

$$v_D = DC_v \cdot \omega_{AB} = \frac{3\sqrt{5}}{2}l \times \frac{2}{3}\omega_0$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}l\omega_0$$

例9-6 如图所示，节圆半径为r的行星齿轮II由曲柄OA带动在节圆半径为R 的固定齿轮 I 上作无滑动的滚动。已知曲柄OA以匀角速度ω_O转动。求在图示位置时，齿轮II节圆上M_1，M_2，M_3和M_4各点的速度。图中线段M_3M_4垂直于线段M_1M_2。





解： 行星齿轮 II 作平面运动。因为行星轮 II 滚而不滑，所以其速度瞬心在二轮接触点C处，利用瞬心法进行求解。为此先求轮 II 的角速度。

因为A点的速度

$$v_A = OA \cdot \omega_O = (R+r) \cdot \omega_O = AC \cdot \omega = r \cdot \omega$$

因此轮 II 的角速度 $\omega = \dfrac{R+r}{r}\omega_O$ （逆时针）

所以轮 II 上 M_1，M_2，M_3和 M_4各点的速度分别为：

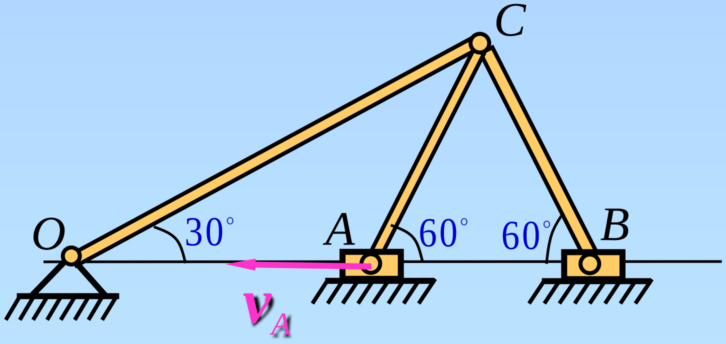
$$v_1 = v_c = 0\ , \qquad v_2 = CM_2 \cdot \omega = 2(R+r)\omega_O$$

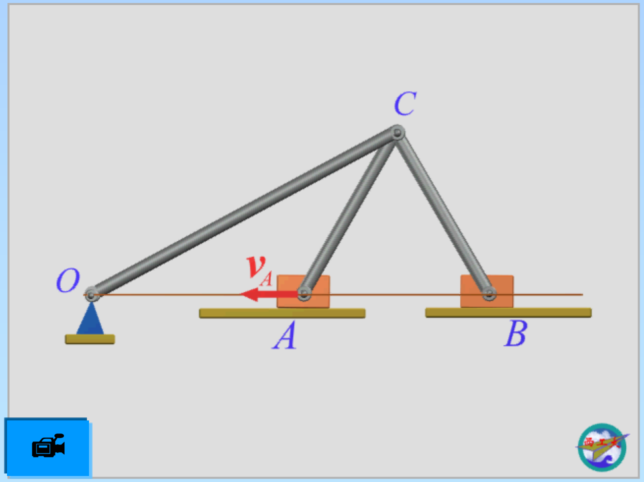
$$v_3 = v_4 = CM_3 \cdot \omega = \sqrt{2}(R+r)\omega_O\ ,$$

各点的速度方向如图所示。

例9–7 在双滑块摇杆机构中，滑块A和B可沿水平导槽滑动，摇杆OC可绕定轴O转动，连杆CA和CB可在图示平面内运动，且$CB=l$。当机构处于图所示位置时，已知滑块A的速度$\boldsymbol{v}_A$，试求该瞬时滑块B的速度$\boldsymbol{v}_B$以及连杆CB的角速度ω_{CB}。

试用速度瞬心法求解。





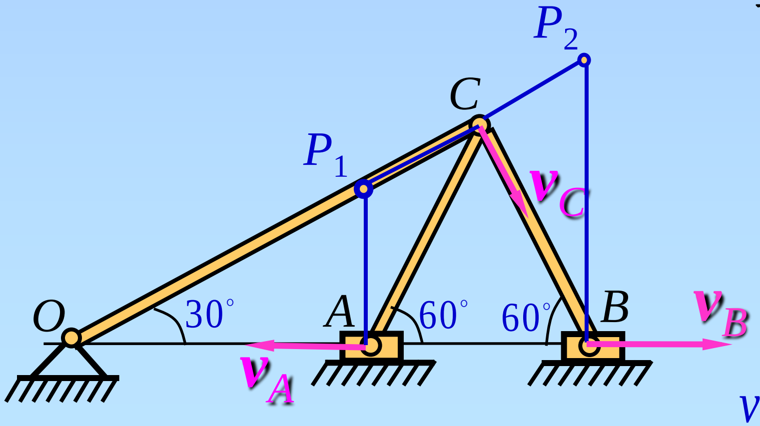
解： 连杆AC和BC均作平面运动。

对于连杆AC： 其速度瞬心在点A和C速度$\mathbf{v}_A$和$\mathbf{v}_C$垂线的交点P_1。

由图可知，$P_1A=P_1C$，所以 $v_C = v_A$

对于连杆BC： 其速度瞬心在点B和C速度$\mathbf{v}_B$和$\mathbf{v}_C$垂线的交点P_2。

因为 $$P_2C = CB \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} l$$



故得连杆CB角速度

$$\omega_{CB} = \frac{v_C}{P_2C} = \frac{\sqrt{3}}{l} v_A$$ （逆时针）

于是滑块B速度的大小为

$$v_B = P_2B \cdot \omega_{CB} = \frac{2}{\sqrt{3}} l \times \frac{\sqrt{3}}{l} v_A = 2v_A$$ （水平向右）

§ 9–3 平面运动的加速度分析

- 加速度合成定理

加速度合成定理

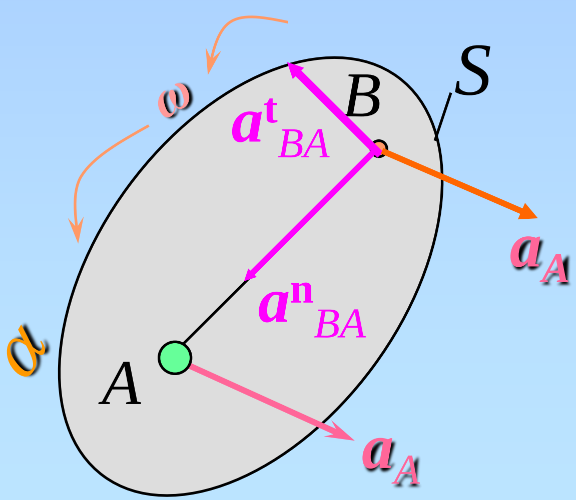
设在平面运动刚体上点A为基点，已知其加速度为 $\boldsymbol{a}_A$，平面图形S也即平面运动刚体的角速度为ω，角加速度为 α。分析图形上任一点B 的加速度。

将B点的运动视为复合运动。

动点—B点。 动系—以A点为原点的平移系。 定系—固连于地球。

绝对运动—未知。

相对运动—绕基点 A的圆周运动。



相对切向加速度 $a_r^t = a_{BA}^t = AB \cdot \alpha$

相对法向加速度 $a_r^n = a_{BA}^n = AB \cdot \omega^2$

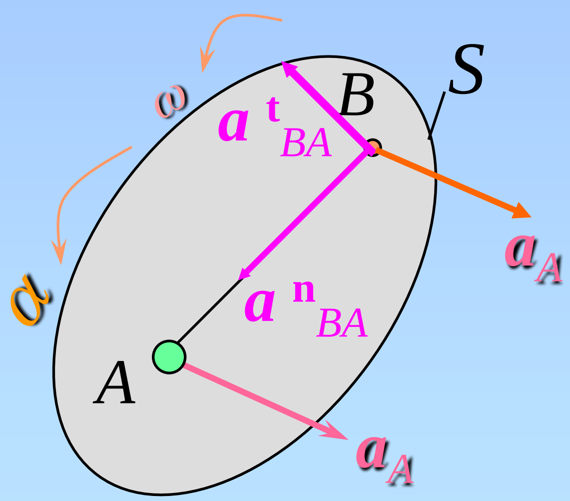
牵连运动—随基点A的平移。 $\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_A$

§ 9–3 平面运动的加速度分析

将B点的运动视为复合运动。

动点—B点 。 动系—以A点为原点的平移系 。 定系—固连于地球。

绝对运动—未知。 相对运动—绕基点 A的圆周运动。



相对切向加速度 $a_r^t = a_{BA}^t = AB \cdot \alpha$

相对法向加速度 $a_r^n = a_{BA}^n = AB \cdot \omega^2$

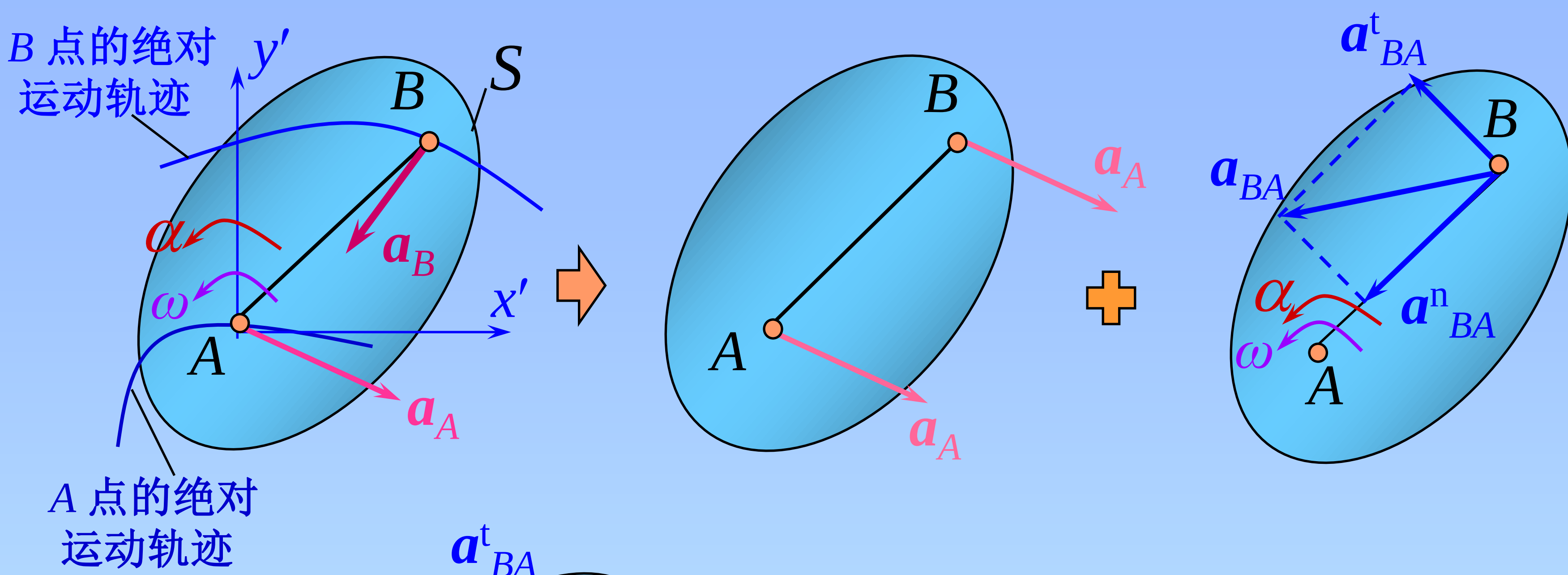
牵连运动—随基点A的平移。 $\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_A$

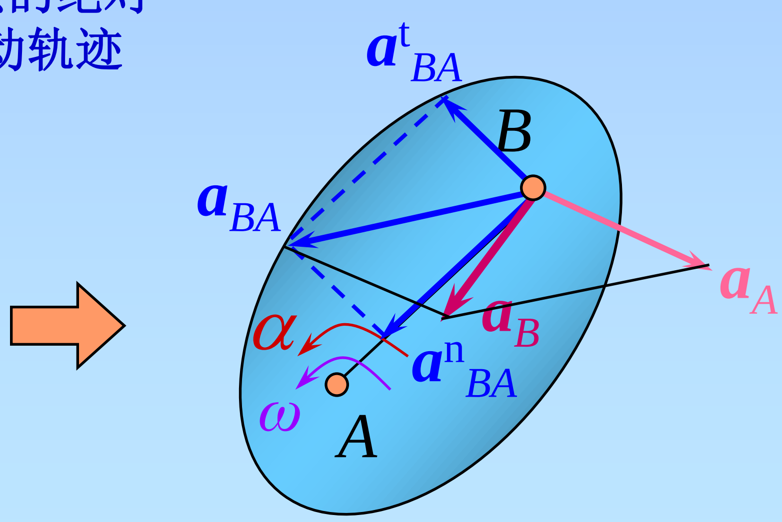
由点的加速度合成定理 $\boxed{\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r^t + \boldsymbol{a}_r^n}$

有 $$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^t + \boldsymbol{a}_{BA}^n$$

此式即用基点法求点的加速度的基本公式。

§ 9–3 平面运动的加速度分析





$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r$$

$$= \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^{t}_{BA} + \boldsymbol{a}^{n}_{BA}$$

§ 9–3 平面运动的加速度分析

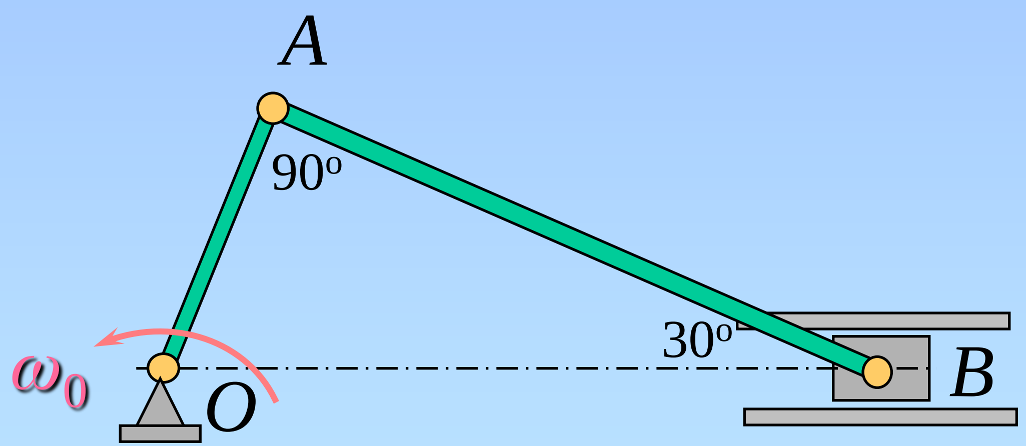
$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{t} + \boldsymbol{a}_{BA}^{n}$$

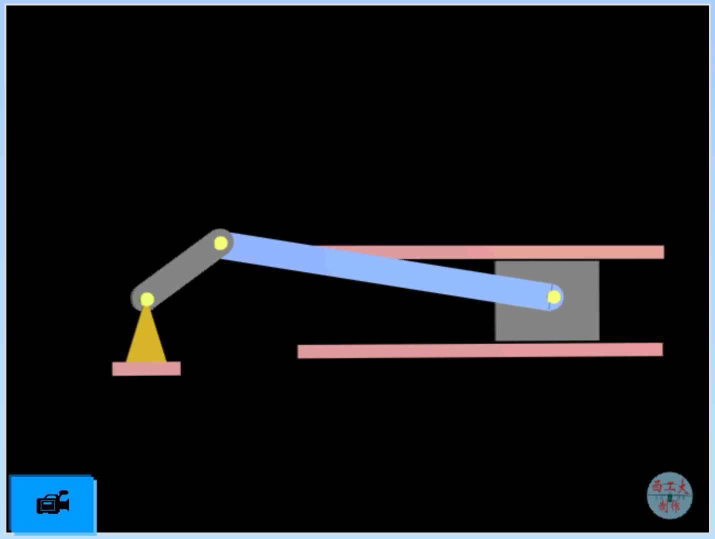
此式即用基点法求点的加速度的基本公式。

有结论：

平面图形上任意一点的加速度，等于基点的加速度与这一点对于以基点为坐标原点的平移系的相对切向加速度和法向加速度的矢量和。

例9-8 曲柄一滑块机构，$OA = r$，$AB = l$，曲柄以匀角速度 ω_0 绕 O 轴转动。求：图示瞬时，滑块 B 的加速度 $\boldsymbol{a}_B$ 和连杆 AB 的角加速度 $\boldsymbol{\alpha}_{AB}$。



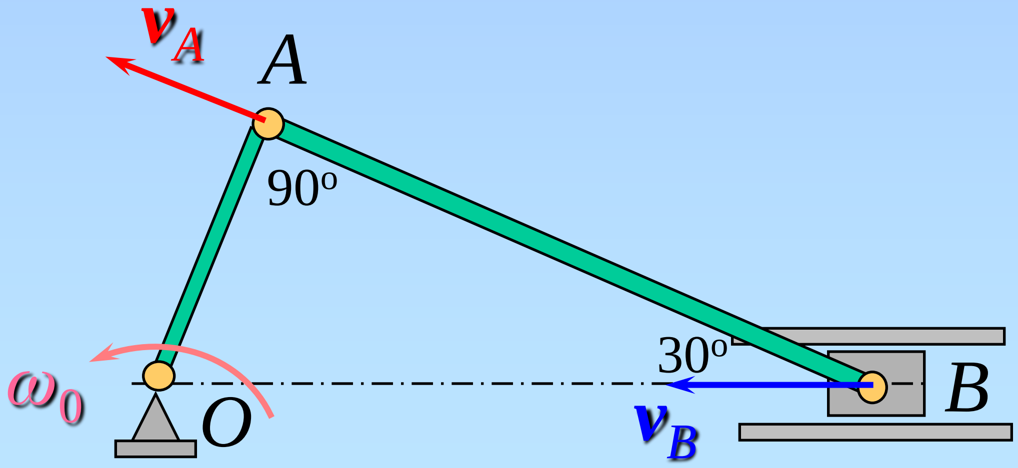


解： 1. 速度分析

连杆*AB*作平面运动。

应用速度分析的多种方法可求得连杆*AB* 的角速度ω_{AB}，此处视为已知。

$$\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{l} = \frac{r}{l}\omega_0 \tan 30^\circ = \frac{\omega_0}{3}$$



2 加速度分析

A点的加速度： $a_A = r\omega_0^2$

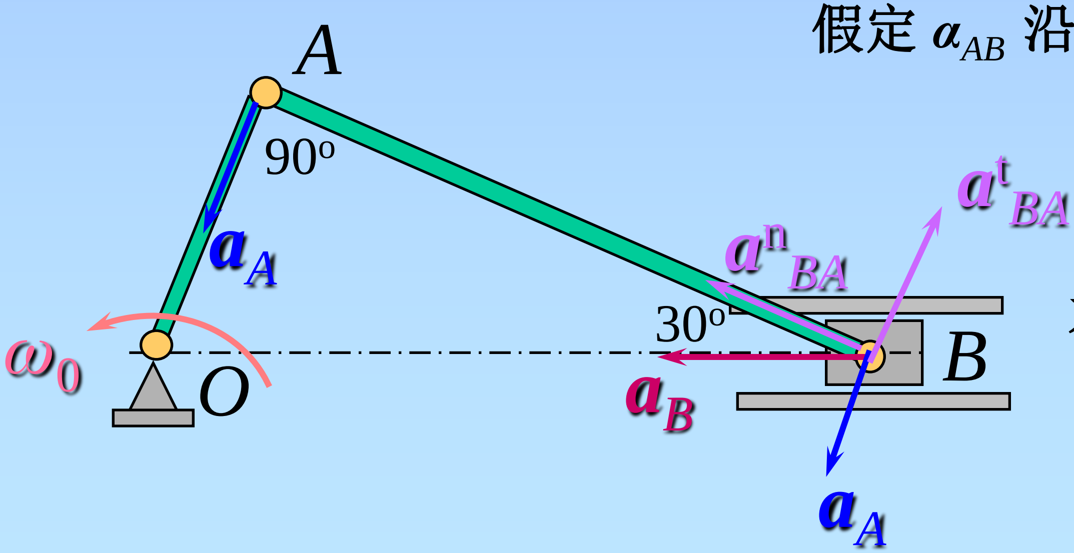
选点A为基点，则滑块B的加速度

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}}$$

其中， $a_A = a_A^{\mathrm{n}} = R\omega^2$ ， $a_{BA}^{\mathrm{t}} = AB\cdot\alpha_{AB}$ ， $a_{BA}^{\mathrm{n}} = AB\cdot\omega_{AB}^2$

各加速度如图所示。

连杆的角加速度 α_{AB} 尚属未知。暂时假定 α_{AB} 沿逆钟向，故 $\boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}}$ 如图所示。



滑块B 的加速度$\boldsymbol{a}_B$的方向为水平并假定向左，大小待求。

2. 加速度分析

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{t} + \boldsymbol{a}_{BA}^{n}$$

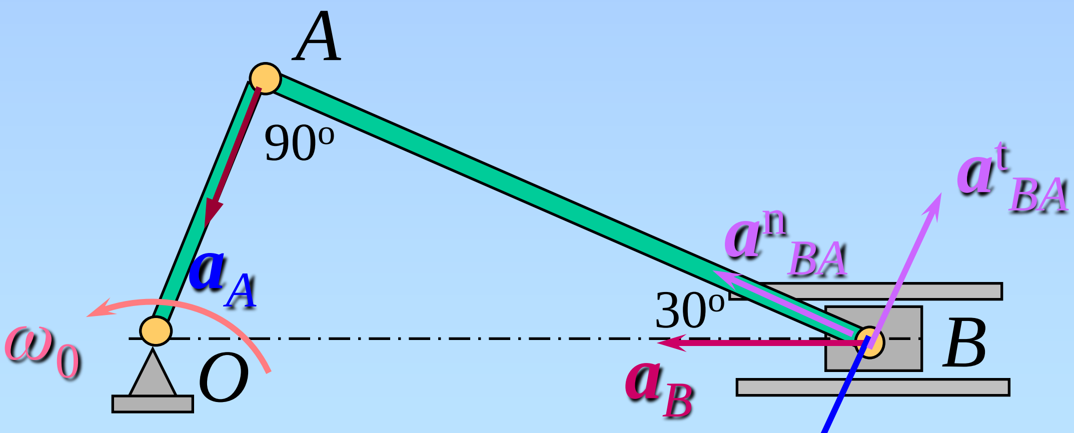
其中， $a_A = a_A^n = R\omega^2$ ， $a_{BA}^t = AB\cdot\alpha_{AB}$ ， $a_{BA}^n = AB\cdot\omega_{AB}^2$

分别沿*BA*和⊥*AB*的方向投影上式，得

$$a_B\cos 30^\circ = a_{BA}^n, \qquad a_B\sin 30^\circ = a_A - a_{BA}^t$$

由此求得滑块*B*的加速度

$$a_B = \frac{a_{AB}^n}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{27} l\omega_0^2$$



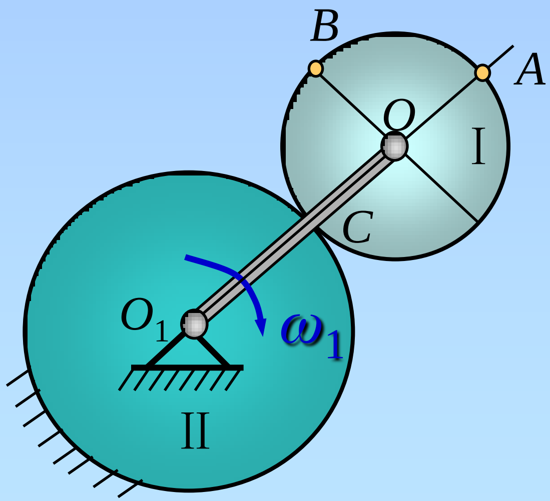
$$\omega_{AB} = \frac{\omega_0}{3}$$

连杆*AB*的角加速度

$$\alpha_{AB} = \frac{a_{BA}^t}{l} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{27}\right)\omega_0^2$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{27}\omega_0^2 \quad \text{（逆时针）}$$

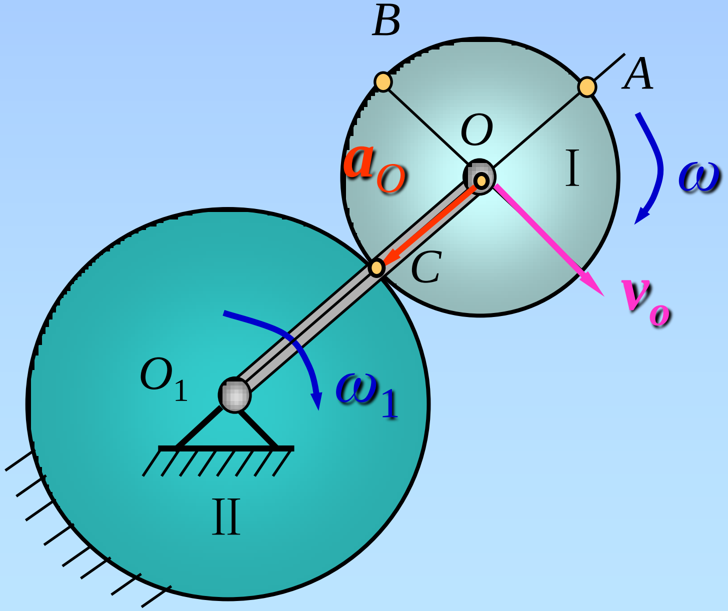
例9-9 如图所示，在外啮合行星齿轮机构中，系杆$O_1O=l$，以匀角速度ω_1绕O_1轴转动。大齿轮Ⅱ固定，行星轮Ⅰ半径为r，在轮Ⅱ上只滚不滑。设A和B是轮缘上的两点，A点在O_1O的延长线上，而B点则在垂直于O_1O的半径上。试求点A和B的加速度。



解： 轮 I 作平面运动，其中心O的速度和加速度分别为：

$$v_O = l\omega_1 \quad , \quad a_O = l\omega_1^{\;2}$$

轮 I 的速度瞬心在C点，则轮 I 的角速度



$$\omega = \frac{v_O}{r} = \frac{l}{r}\omega_1$$ （顺时针）

因为ω_1和ω都为常量，所以轮 I 的角加速度为零，则有

$$\alpha = 0$$

(1) 求A点的加速度。

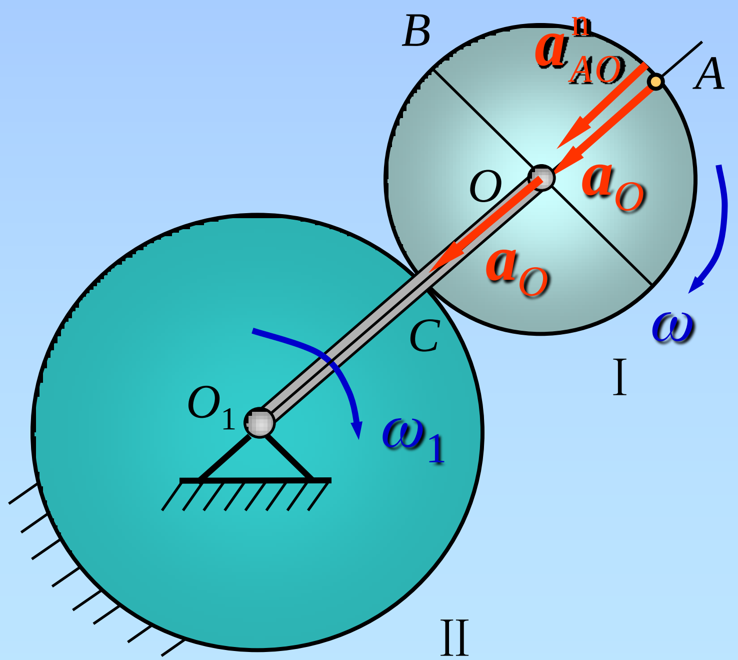
轮 I 的角速度 $\omega = \dfrac{v_O}{r} = \dfrac{l}{r}\omega_1$ 角加速度 $\alpha = 0$

选O为基点，应用加速度合成定理 $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{AO}^{t} + \boldsymbol{a}_{AO}^{n}$

各加速度的大小为

$$a_O = l\omega_1^2 \text{，} \quad a_{AO}^{n} = r\omega^2 = \frac{l^2}{r}\omega_1^2 \text{，} \quad a_{AO}^{t} = 0$$

方向如图。



所以由图可知A点的加速度的方向沿AO，它的大小为

$$a_A = a_O + a_{AO}^{n}$$

$$= l\omega_1^2 + \frac{l^2}{r}\omega_1^2$$

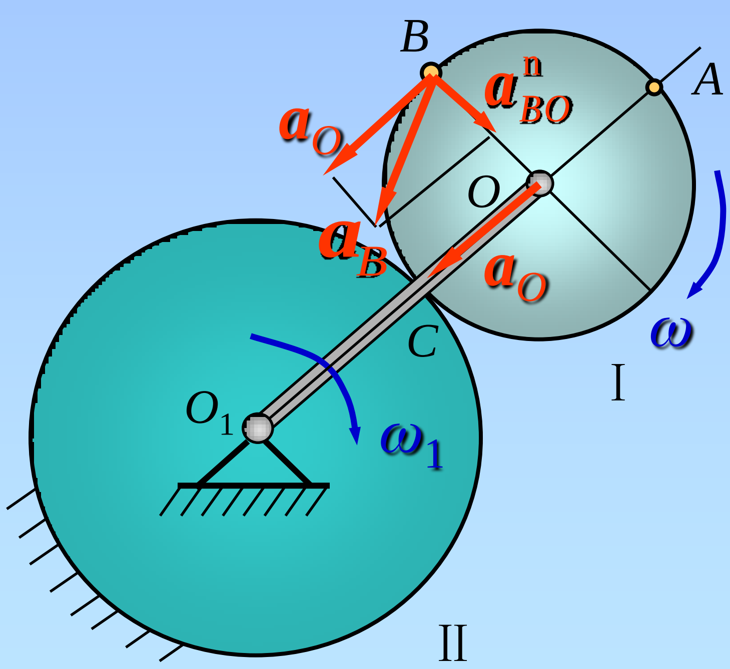
$$= l\omega_1^2\left(1 + \frac{l}{r}\right)$$

(2) 求B点的加速度。

选O为基点，应用加速度合成定理 $\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{BO}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{BO}^{\mathrm{n}}$

其中 $a_O = l\omega_1^2$， $a_{BO}^{\mathrm{n}} = r\omega^2 = \dfrac{l^2}{r}\omega_1^2$， $a_{BO}^{\mathrm{t}} = 0$

方向如图。



所以B点的加速度大小为

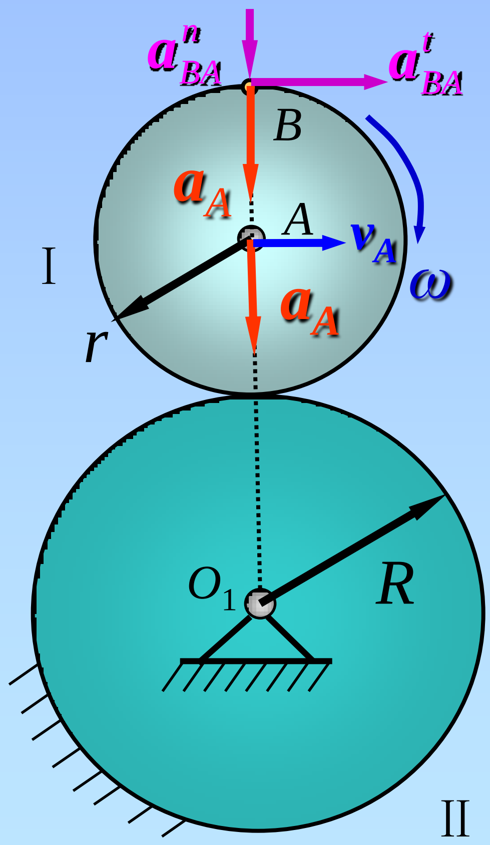
$$a_B = \sqrt{a_O^2 + \left(a_{BO}^{\mathrm{n}}\right)^2} = l\omega_1^2\sqrt{1 + \left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

它与半径OB间的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{a_O}{a_{BO}^{\mathrm{n}}} = \arctan\frac{l\omega_1^2}{\frac{l^2}{r}\omega_1^2} = \arctan\frac{r}{l}$$

思考题：

图中圆盘在圆周曲线外侧作纯滚动，角速度ω=常量。则轮心A点的加速度为_________，轮缘B点的加速度为_________。



其中 $v_A = \omega r,\ a_A^{\mathrm{n}} = \dfrac{v_A^2}{r+R} = \dfrac{r^2}{r+R}\omega^2,\ \ a_A^{\mathrm{t}} = 0$

方向如图。

以A为基点分析B点的加速度：

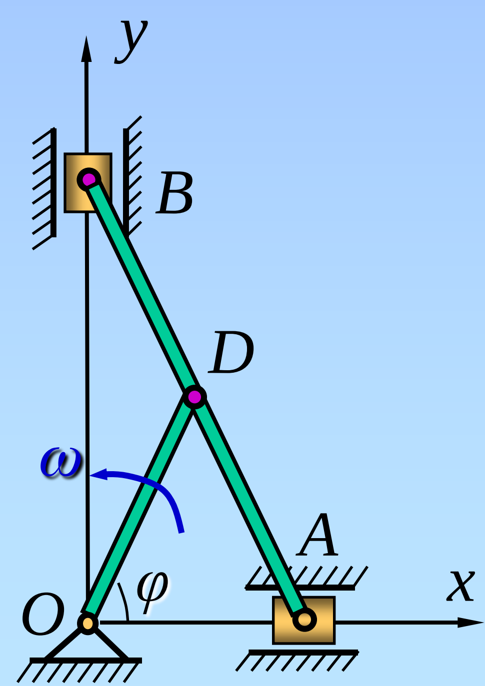
$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}}$$

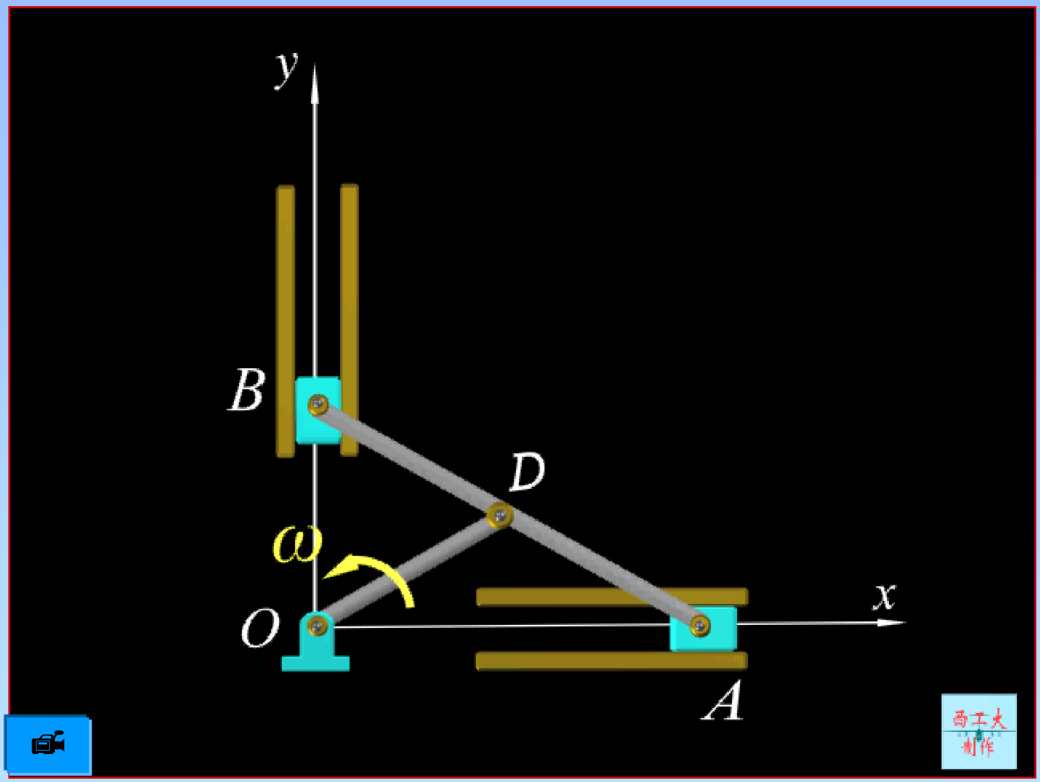
其中，

$$a_{BA}^{\mathrm{t}} = 0,\quad a_{BA}^{\mathrm{n}} = \omega^2 r$$

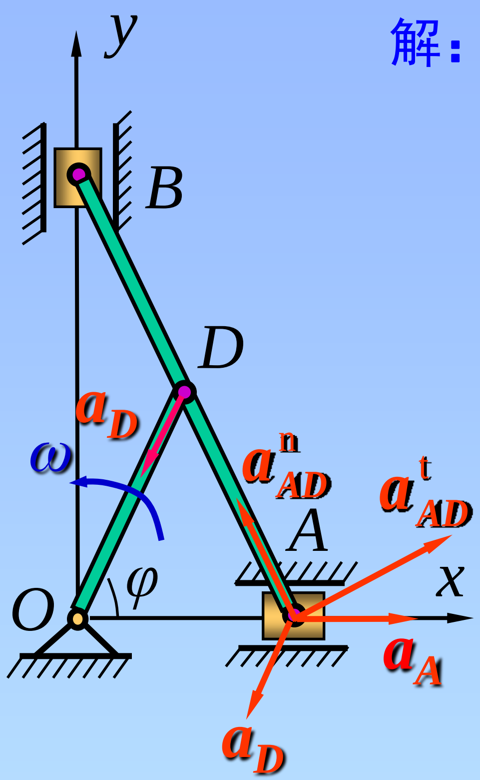
$$a_B = a_A + a_{BA}^{n} = \frac{r^2}{r+R}\omega^2 + r\omega^2 = \frac{r(2r+R)}{r+R}\omega^2$$

例9-10 如图所示，在椭圆规的机构中，曲柄OD以匀角速度ω绕O轴转动，$OD=AD=BD=l$，求当$\varphi=60^{\circ}$时，规尺AB的角加速度和A点的加速度。





运 动 演 示



解： 曲柄*OD* 绕*O*轴转动，规尺*AB*作平面运动。

*AB*上的 *D*点加速度 $a_D = \omega^2 l$.

取*AB*上的*D*点为基点，*A*点的加速度

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}^t_{AD} + \boldsymbol{a}^n_{AD}$$

其中 a^n_{AD} 的大小 $a^n_{AD} = \omega^2_{AB} \cdot AD$ ，方向沿*AB* 。 $\boldsymbol{a}^t_{AD}$ 大小未知，垂直于*AD*，其方向暂设如图。因为*A*点作直线运动，可设$\boldsymbol{a}_A$的方向如图所示。

设规尺 *AB* 的角速度为ω_{AB}，可由基点法或瞬心法求得 $\omega_{AB} = \omega$

则 $a^n_{AD} = \omega^2_{AB} \cdot AD = \omega^2 l$

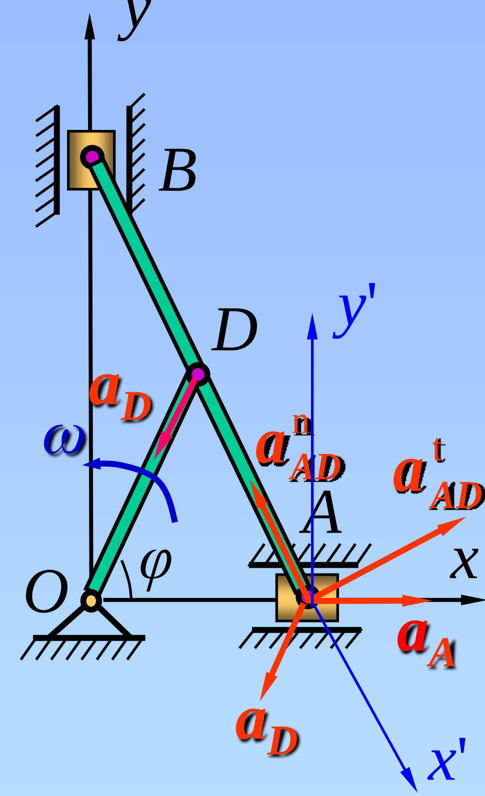
对式 $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}_{AD}^{t} + \boldsymbol{a}_{AD}^{n}$

将上式在y'轴上投影，得

$$0 = -a_D \sin\varphi + a_{AD}^{t}\cos\varphi + a_{AD}^{n}\sin\varphi$$

$$a_{AD}^{t} = \frac{a_D \sin\varphi - a_{AD}^{n}\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{(\omega^2 l - \omega^2 l)\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0$$

规尺 AB角加速度 $\alpha_{AB} = \dfrac{a_{AD}^{t}}{AD} = 0$



将矢量式在x'轴上投影，得

$$a_A \cos\varphi = a_D \cos(\pi - 2\varphi) - a_{AD}^{n}$$

由上式解得

$$a_A = \frac{a_D\cos(\pi - 2\varphi) - a_{AD}^{n}}{\cos\varphi} = \frac{\omega^2 l\cos 60^\circ - \omega^2 l}{\cos 60^\circ} = -\omega^2 l$$

由于$\boldsymbol{a}_A$为负值，故$\boldsymbol{a}_A$的实际方向与原假设的方向相反。

谢谢使用