17－18 学年第一学期答案

二、解：设 $\mathrm{A}_i=\{取第i个箱子\}(i=1,2)$，$B=\{取出的球是白球\}$

（1）由全概率公式，得 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B|A_1)+\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B|A_2)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{48}=\frac{23}{80}\quad \text{or } 0.2875$$

（2）由贝叶斯公式，得：

$$\mathrm{P}(A_1|B)=\frac{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B|A_1)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}}{\frac{23}{80}}=\frac{8}{23}\quad \text{or } 0.3478$$

$$\mathrm{P}(A_2|B)=\frac{\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B|A_2)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{18}{48}}{\frac{23}{80}}=\frac{15}{23}\quad \text{or } 0.6522$$

$$\mathrm{P}(A_2|B)=1-\mathrm{P}(A_1|B)=\frac{15}{23}$$

三、解：（1）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}\frac{1}{3}e^x, & x\le 0\\ \frac{1}{3}+\frac{x}{3}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

（2）$P(-3<X<1)=F(1)-F(-3)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3}=0.6501$

（3）$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\frac{1}{3}e^xdx+\int_{0}^{2}x\frac{1}{3}dx+\int_{2}^{\infty}0dx=\frac{1}{3}$　　Or　0.3333

（4）$y=e^x\Rightarrow x=\ln y$，故 $f_Y(y)=f(\ln y)\left|(\ln y)'\right|=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0<y\le 1\\ \frac{1}{3y}, & 1<y\le e^2\\ 0, & y>e^2\end{cases}$

四、解：(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_{-y}^{y}xdxdy=0$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_{-y}^{y}ydxdy=\int_0^1 2y^2dy=\frac{2}{3}$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_{-y}^{y}xydxdy=0$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0\Rightarrow\rho_{XY}=0$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{1} 1dy=1+x, & -1<x<0\\ \int_{x}^{1} 1dy=1-x, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$ 或 $f_X(x)=\begin{cases}1-|x|, & 0<|x|<1\\ 0, & else\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{y} 1dx=2y, & 0<y<1\\ 0, & else\end{cases}$$

(3) 因为 $f_X(x)\times f_Y(y)\neq f(x,y)$，所以 X 与 Y 不是相互独立的。

(4) $Y=y$ 条件下 X 的条件密度函数 $f_{X|Y}(x\mid y)$：

当$0<y<1$时，$f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2y}, & |x|<y\\ 0, & else\end{cases}$

(5) 法 1：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X-Y\le z\}=\iint\limits_{x-y\le z} f(x,y)dxdy$

$$=\begin{cases}0, & z\le -2\\ \int_{-\frac{z}{2}}^{1}\left(\int_{-y}^{z+y}1dx\right)dy, & -2<z<0\\ 1, & z\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0, & z\le -2\\ 1+z+\dfrac{1}{4}z^2, & -2<z<0\\ 1, & z\ge 0\end{cases}$$

或另一种积分域写法

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x-y\le z} f(x,y)dxdy=\begin{cases}0, & z\le -2\\ \int_{-1}^{\frac{z}{2}}\left(\int_{-x}^{1}1dy\right)dx+\int_{\frac{z}{2}}^{1+z}\left(\int_{x-z}^{1}1dy\right)dx, & -2<z<0\\ 1, & z\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0, & z\le -2\\ 1+z+\dfrac{1}{4}z^2, & -2<z<0\\ 1, & z\ge 0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{2}z, & -2<z<0\\ 0, & else\end{cases}$$

法 2：利用随机变量和的分布的 PDF 计算公式，可知$0<|z+y|<y<1\Rightarrow -2<-2y<z<0$故

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_{-\frac{z}{2}}^{1} f(z+y,y)\,dy, & -2<z<0\\ 0, & else\end{cases}=\begin{cases}1+\dfrac{1}{2}z, & -2<z<0\\ 0, & else\end{cases}$$

或利用随机变量和的分布的 PDF 计算公式的另一种形式可知$0<|x|<x-z<1\Rightarrow\begin{cases}-2<z<0\\ \dfrac{z}{2}<x<z+1\end{cases}$故

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_{\frac{z}{2}}^{1+z} f(x,x-z)\,dx, & -2<z<0\\ 0, & else\end{cases}=\begin{cases}1+\dfrac{1}{2}z, & -2<z<0\\ 0, & else\end{cases}$$

五、解：（1）$E\left(X\right)=0$，$D\left(X\right)=\sigma^2$ ，则 $E(X^2)=D\left(X\right)=\sigma^2$

令 $E\left(X^2\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2=\sigma^2$,故 $\hat{\sigma}_M=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}$

（2）似然函数 $L(\sigma^2)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right\}$ 令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=0$

解得 $\hat{\sigma}_{MLE}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$

（3）由于 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}E\left(X^2\right)=\sigma^2$，则 $\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}\xrightarrow{P}\sqrt{E\left(X^2\right)}=\sigma$

因此 $\hat{\sigma}_M$ 是 σ 的相合估计。

（4）$E\left(\hat{\sigma}_{MLE}^2\right)=E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)=E\left(X^2\right)=D\left(X\right)=\sigma^2$

故 $\hat{\sigma}_{MLE}^2$ 是 σ^2 的无偏估计。

相合性判断 方法一：由于 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}E\left(X^2\right)=\sigma^2$，因此 $\hat{\sigma}_M^2$ 和 $\hat{\sigma}_{MLE}^2$ 都是 σ^2 的相合估计。

方法二：由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$，

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=D\left(\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\right)=\frac{\sigma^4}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\right]=\frac{\sigma^4}{n^2}\times 2n=\frac{2\sigma^4}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\hat{\sigma}_{MLE}^2\right)=\sigma^2$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}D\left(\hat{\sigma}_{MLE}^2\right)=0$，故 $\hat{\sigma}_{MLE}^2$ 是 σ^2 的相合估计。

六、解：（1）已知 $n_1=8$，$\bar{x}=15.0125$，$s_1^2=0.0955$，

选取枢轴量 $W=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t\left(n-1\right)$，由于置信水平为 $1-\alpha=0.95$，则

$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(7)<\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(7)\right\}=0.95$，即 $P\left\{\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(7)<\mu<\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(7)\right\}=0.95$

故 μ 的一个置信水平为 0.95 的置信区间为$\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(7)\right)$=(14.7541, 15.2709).

（2）①采用 F 检验 ，$n_1=8$，$n_2=9$，$\alpha=0.05$，

由于检验统计量为 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$，故拒绝域为 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\ge F_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)$ 或 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)$

其中 $s_1^2=0.0955$，$s_2^2=0.0261$，

检验统计量的观察值为 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}=3.6590$，

$F_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)=F_{0.025}(7,8)=4.5286$， $F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)=1/F_{0.025}(8,7)=0.2041$

因为 $0.2041<\dfrac{s_1^2}{s_2^2}<4.5286$，故应接受 H_0，认为 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$

② 基于①的结果，即可认为两个总体方差是相同的，这样采用 t 检验

检验统计量为 $T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$， ${S_w}^2=\dfrac{\left(n_1-1\right)S_1^2+\left(n_2-1\right)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

故拒绝域为 $|t|=\dfrac{\left|\bar{x}-\bar{y}\right|}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\geq t_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1+n_2-2\right)=t_{0.025}\left(15\right)=2.1314$，

令 $n_1=8$，$n_2=9$，$\alpha=0.05$，$\bar{x}=15.0125$， $\bar{y}=14.9889$，$s_1^2=0.0955$，$s_2^2=0.0261$，

${s_w}^2=\dfrac{\left(n_1-1\right)s_1^2+\left(n_2-1\right)s_2^2}{n_1+n_2-2}=0.0585$

因为检验统计量的观察值为 $|t|=0.2002<2.1314$，

落在接受域，故应接受 H_0，认为 $\mu_1=\mu_2$