

第三章 参数多项式的 插值与逼近

本章内容

- 几何不变性与参数变换
- 参数多项式插值与逼近的基本概念
- 参数多项式插值曲线与逼近曲线
- 张量积曲面
- 参数双三次曲面片

第一节 几何不变性和参数变换

- 一、几何不变性：

- 1、定义：指曲线曲面不依赖于坐标系的选择，或者说在旋转与平移变化下不变的性质。

- 2、曲线曲面的基表示：
$$\vec{P} = \sum_{i=0}^n \vec{a}_i \varphi_i$$

其中： \vec{a}_i 为矢量系数，修改它可以改变曲线曲面的形状

φ_i 为单参数（表示曲线时）或双参数（表示曲面时）的基函数，决定曲线曲面的几何性质

一、几何不变性:

3、基表示的分类:

(1) 规范基表示: 即满足**Cauchy**条件 $\sum_{i=0}^n \varphi_i \equiv 1$ 也称权性。这种表示下, 曲线 (面) 上的点是矢量系数的一个重心组合, 重心坐标是基函数。

我们常见的线性插值就是一种规范基表示。

(2) 部分规范基表示: 即满足 $\sum_{i=0}^k \varphi_i \equiv 1, 0 \leq k < n$

如: $\vec{p}(u) = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 u$ 其中 $\varphi_0 = 1$

一、几何不变性:

(3) 非规范基表示: 除规范基表示和部分规范基表示以外的其它基表示。

4、基表示与几何不变性的关系:

曲线曲面的规范基表示具有仿射不变性, 其余两种只具有几何不变性。

5、几何不变性的意义: (1) 方便局部坐标与整体坐标之间的转换; (2) 便于平移和旋转变换; (3) 节省了计算量。

二、参数变换（重新参数化）

- 1、概述

- 曲线的参数域总是有界的。
- 曲线的参数可能有某种几何意义，也可能没有。
- 曲线的参数化：即确定曲线上的点与参数域中的参数值之间的一种对应关系。
- 这种对应关系可以是一一对应的，也可以不是一一对应的，后者称为奇点（**Singular point**），如曲线的自交点。
- 同一条曲线的参数化方法并不唯一。

二、参数变换（重新参数化）

2、曲线的参数变换：设给定的一个正则曲线

$\vec{p} = \vec{p}(u), u \in [u_0, u_1]$ 若令 $u = u(t)$ 且满足

$\frac{du}{dt} \neq 0$ $[t_0, t_1] \Rightarrow [u_0, u_1]$ 则曲线方程变为：

$$\vec{p} = \vec{p}[u(t)]$$

因为原曲线是正则的，所以 $\frac{d\vec{p}}{du} \neq \vec{0}$ 又 $\frac{du}{dt} \neq 0$

所以 $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{du} \cdot \frac{du}{dt} \neq \vec{0}$

若重新参数化不合适，则可能导致新旧参数不是一一对应，曲线出现奇点。

二、参数变换（重新参数化）

特别的，如果 \mathbf{u} 是 \mathbf{t} 的线性函数，则将这种参数变换称为**域变换**。

例如：曲线 $\vec{p}(u) \ u \in [u_1, u_2]$ 要进行域变换，成为：

$$\vec{p} = \vec{p}[u(t)] \ t \in [0, 1] \quad \text{只需从 } t = \frac{u_2 - u}{u - u_1} \text{ 中解出 } u = u_1 + t(u_2 - u_1)$$

$$\text{代入 } \vec{p}(u) \text{ 即得 } \vec{p} = \vec{p}[u(t)] \ t \in [0, 1]$$

反之，若要将曲线 $\vec{p}(t), t \in [0, 1]$ 进行域变换，成为：

$$\vec{p}[t(u)], u \in [u_1, u_2] \quad \text{只需从 } u = u_1 + t(u_2 - u_1) \text{ 中解出 } t = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1}$$

$$\text{代入 } \vec{p}(t) \text{ 即得 } \vec{p}[t(u)], u \in [u_1, u_2]$$

上述方法常用于样条曲线在进行局部修改是涉及到整体参数和局部参数的变换



二、参数变换（重新参数化）

域变换不仅使曲线上的点和参数域内点的对应关系不变，而且若保持曲线的方向不变，即 $\frac{du}{dt} > 0$ 就可以保证高阶导矢的方向不变， $\frac{du}{dt}$ 仅模长发生变化。即：

$$\frac{d^k \vec{p}}{dt^k} = \frac{d^k \vec{p}}{du^k} \cdot \left(\frac{du}{dt} \right)^k$$

若 $u = u(t)$ 不是 t 的线性函数，则参数变换后高阶导矢的模长和方向都会发生变化，即：

$$\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{p}}{du^2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{d\vec{p}}{du} \cdot \frac{d^2 u}{dt^2}$$



二、参数变换（重新参数化）

3、曲面的参数变换：设给定的一个正则曲面：

$$\vec{P} = \vec{P}(u, v), (u, v) \in D \quad \text{令}$$

$$\begin{cases} u = u(\bar{u}, \bar{v}) \\ v = v(\bar{u}, \bar{v}) \end{cases}, (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{D} \quad \text{且Jacobi行列式}$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \bar{D} \Rightarrow D \quad \text{则可以得到以}$$

$(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{D}$ 为参数的曲面 $\vec{P} = \vec{P}[u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})] \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{D}$

$$\text{且由于 } \vec{P}_{\bar{u}} \times \vec{P}_{\bar{v}} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \cdot (\vec{P}_u \times \vec{P}_v)$$

所以参数变换后的曲面仍是正则的

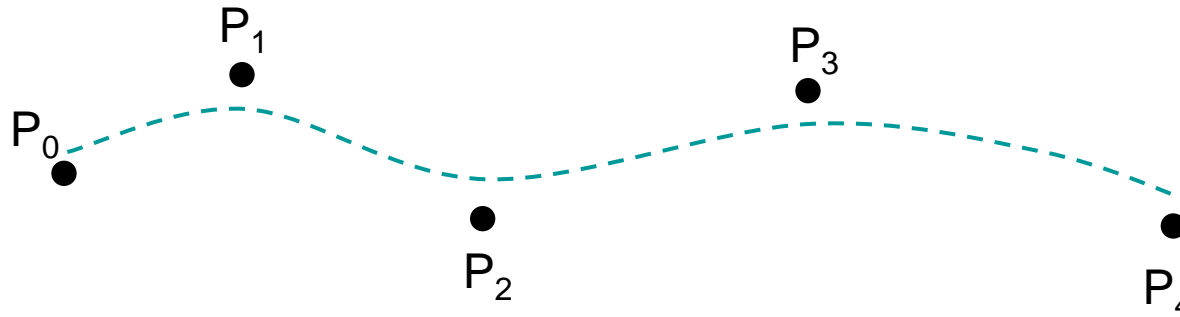
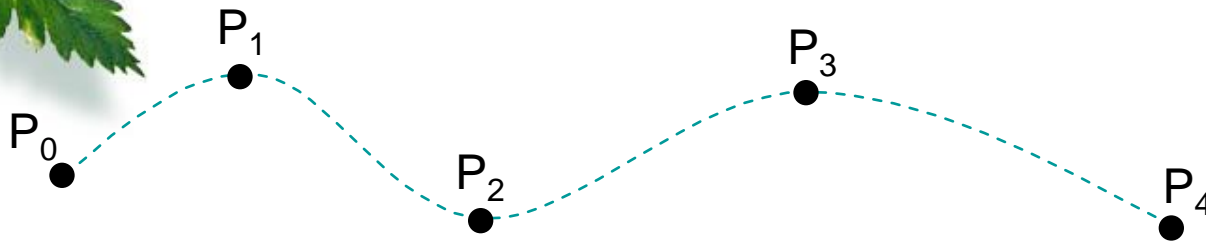
第二节 参数多项式插值与逼近的基本概念

一、基本概念

- 1、插值 (Interpolation)：给定一组有序的数据点，构造一条曲线顺序通过这些数据点，称为曲线插值。同理，若构造一张曲面通过这些数据点，就称作曲面插值。
- 2、逼近 (Approximation)：构造一条曲线（或一张曲面）使之在某种范数意义下最接近给定的数据点，称作曲线（曲面）逼近。
- 3、拟合：逼近和插值统称拟合。

一、基本概念

Interpolating Curve



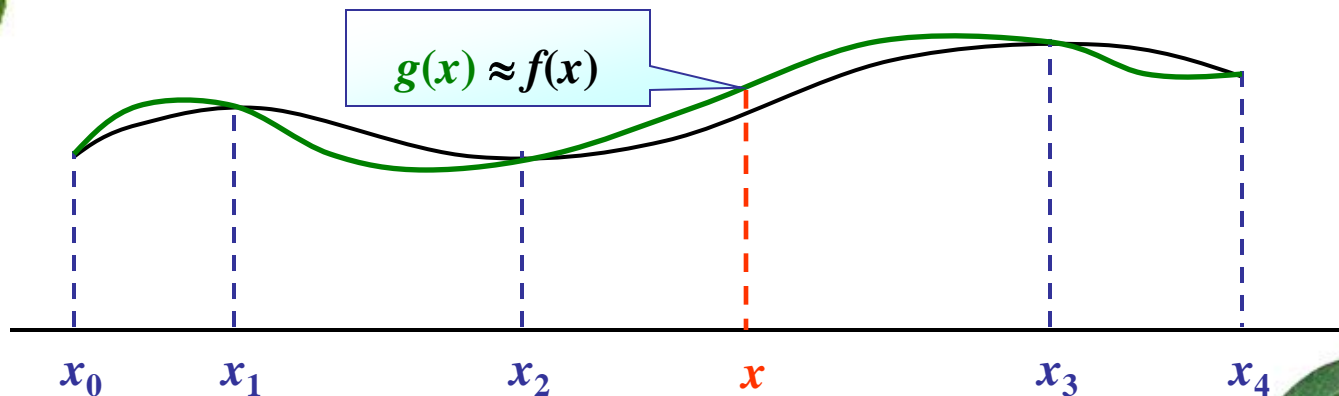
Approximating Curve

一、基本概念

- 4、多项式基：n次多项式的全体构成n次多项式空间，在此空间中任一组n+1个线性无关的多项式都可以作为这个空间的一组基，不同的基之间可以通过线性变换互相转换。
- 以多项式基作为参数曲线和曲面的基函数不仅形式简单，而且无穷次可微，曲线曲面足够光滑。
- 5、幂基：最简单的多项式基。

二、数据点的参数化

在采用多项式函数 $y=p(x)$ 进行插值时，给定X0Y坐标系内不同的 $n+1$ 个点可以唯一确定一个不超过 n 次的插值多项式。

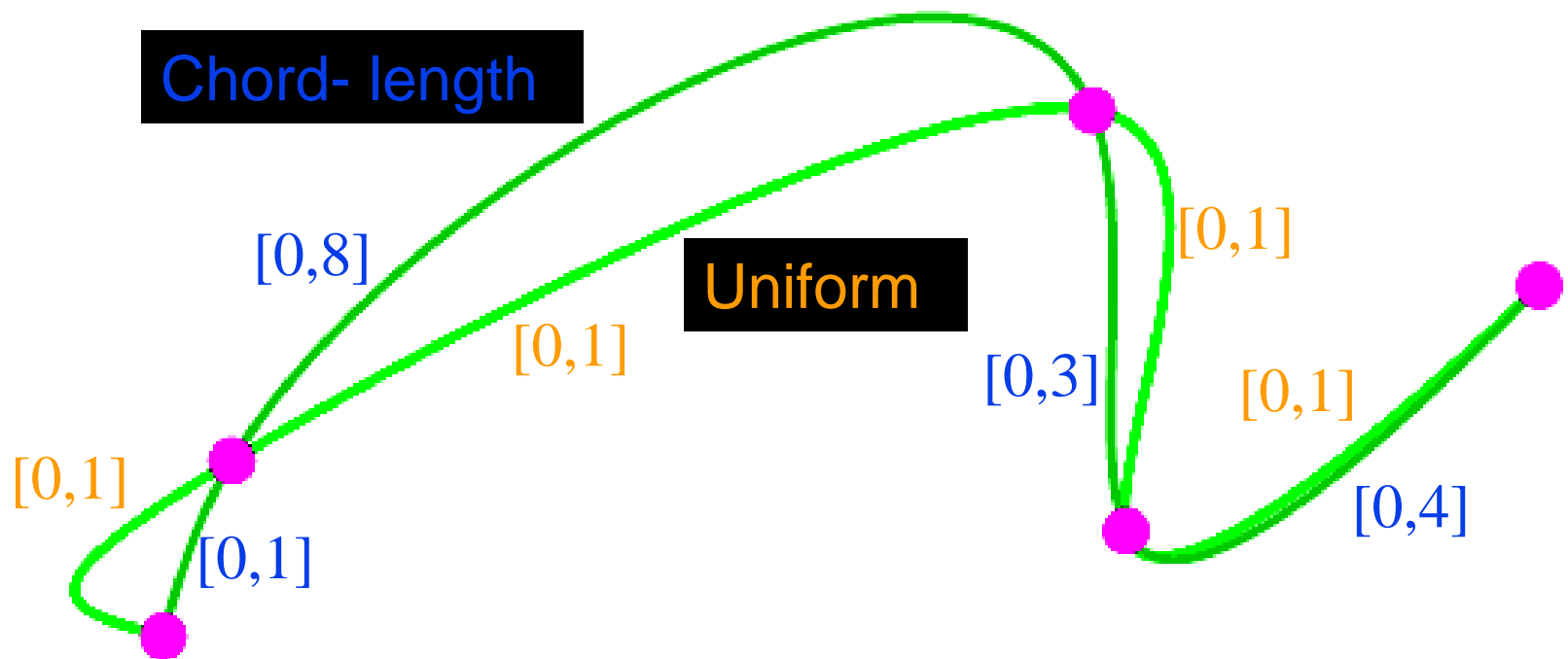


二、数据点的参数化

而用不超过 n 次的参数多项式曲线去插值给定的 $n+1$ 个点，必须首先给这 $n+1$ 个点赋予相应的参数值 u_i ，使其形成一个严格递增的序列： $\Delta u: u_0 < u_1 < \dots < u_n$ ，称作对于参数 u 的一个分割，对一组有序数据点决定一个参数分割与之对应的过程称为数据点的参数化。参数化的方法有多种，不同的参数化方法得到的插值曲线形状可能是不一致的。

二、数据点的参数化

不同的参数化方法得到的多项式参数曲线也不相同。



二、数据点的参数化

1、主要的参数化方法：

(1) 均匀 (Uniform) 参数化：

即：

$$\Delta_i = u_{i+1} - u_i = \text{正常数},$$
$$i = 0, 1, \dots, n-1.$$

这样的参数化使参数节点在参数轴上等距分布，但由于数据点之间的距离并不一定相等，所以导致弦长短的一段膨胀的很严重，甚至出现尖点或自交点；而弦长长的一段曲线较扁平。

二、数据点的参数化

(2) 累积弦长参数化方法:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_i = u_{i-1} + \|\Delta \vec{p}_{i-1}\| \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

优点：计算简单，能将数据点之间的距离与节点之间的步长联系起来，克服了均匀参数化的缺点。

二、数据点的参数化

- (3) 向心参数化

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_i = u_{i-1} + \|\Delta \vec{p}_{i-1}\|^{1/2} \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

(4) 福利参数化（修正弦长参数化方法）

二、数据点的参数化

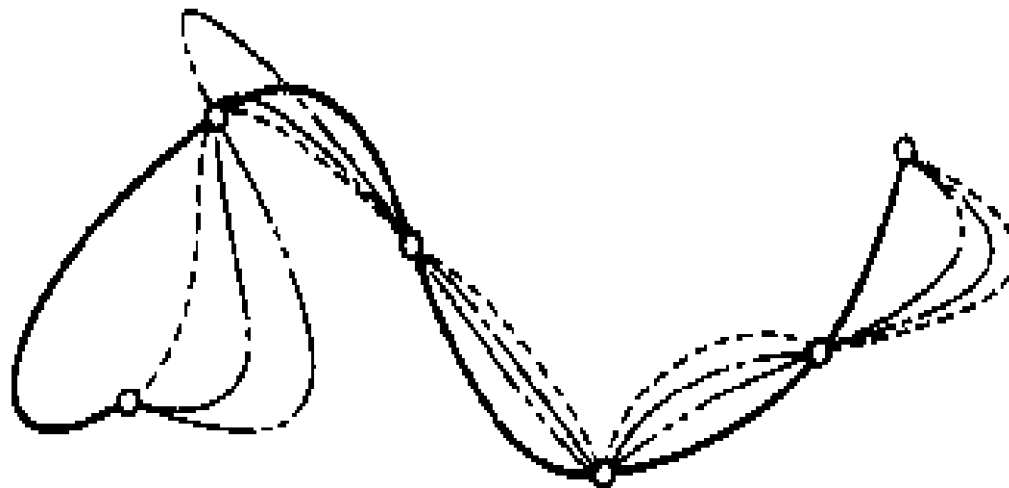


图 3.1 采用不同参数化法生成不同的参数多项式插值曲线
(虚线、实线、点划线与双点划线分别表示用均匀、弦
长、向心与修正弦长参数化法)

第三节 参数多项式插值曲线与逼近曲线

一、幂基插值曲线

形式:
$$\vec{p}(u) = \sum_{j=0}^n \vec{a}_j u^j$$

其中: \vec{a}_j $j=0, 1, \dots, n$ 为待定的矢量系数

首先, 对数据点进行参数化, 确定参数分割:

$$\Delta_u : u_0 < u_1 < \dots < u_n$$

根据插值条件:

$$\vec{p}(u_i) = \sum_{j=0}^n \vec{a}_j u_i^j = \vec{p}_i, i=0, 1, \dots, n$$

一、幂基插值曲线

即：

$$\begin{bmatrix} 1 & u_0 & \cdots & u_0^n \\ 1 & u_1 & \cdots & u_1^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & u_n & \cdots & u_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_0 \\ \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{p}_0 \\ \vec{p}_1 \\ \vdots \\ \vec{p}_n \end{bmatrix}$$

记作：

$$UA = P$$

一、幂基插值曲线

特点:

- 1) 矩阵 U 为Vandermond矩阵，因为参数分割是严格单调增加的，所以，矩阵 U 非奇异，矢量系数向量 A 存在唯一解。
- 2) 矢量系数的几何意义不明显。
- 3) 随着数据点的增加，矩阵 U 会很大，实际求解时，计算量较大。

二、Lagrange插值曲线

形式：

$$\vec{p}(u) = \sum_{i=0}^n \vec{p}_i L_i(u)$$

其中： \vec{p}_i 为待插值的数据点；

$L_i(u)$ 为拉格朗日基函数

在对数据点进行参数化，确定参数分割后，代入插值条件：

$$\vec{p}(u_j) = \sum_{i=0}^n \vec{p}_i L_i(u_j) = \vec{p}_j \quad j = 0, 1, \dots, n$$

二、Lagrange插值曲线

要求: $L_i(u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

拉格朗日基函数 $L_i(u)$ 为:

$$L_i(u) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{u - u_j}{u_i - u_j} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

可以证明:

$$\sum_{i=0}^n L_i(u) \equiv 1$$

二、Lagrange插值曲线

优点:

- 1) 规范性, 保证Lagrange插值曲线具有仿射不变性。
- 2) 无需解方程组。

缺点:

- 1) 不便于修改, 每当改动、增加、减少一个数据点, 基函数必须重新计算。
- 2) 随着数据点的增加, 曲线次数升高, 可能产生龙格现象, 曲线形状难以控制。

二、Lagrange插值曲线

n 越大，
端点附近抖动
越大，称为
Runge 现象

10个插值点构成的Lagrange插值曲线

三、Hermite插值曲线

形式:
$$\vec{p}(u) = \sum_{i=0}^1 \sum_{r=0}^k \vec{p}_i^{(r)} H_{ri}(u)$$

其中: $\vec{p}_i^{(r)}$ 为待插值数据点的 r 阶切矢;

$H_{ri}(u)$ 为 Hermite 基函数

上式表示一个 $2k+1$ 次多项式插值曲线, 其中的 Hermite 基函数由下式决定:

$$H_{ri}^{(s)}(u_j) = \delta_{ij} \delta_{rs}, \quad \text{其中 } u_0 = 0, u_1 = 1$$

Hermite 插值仅在两个数据点之间进行, 但它不仅插值两个数据点, 而且还插值两个数据点给定的直到 k 阶切矢。

三、Hermite插值曲线

下面推导三次Hermite基函数的表达式, 设三次Hermite插值曲线的幂基形式为:

$$\vec{P}(t) = \vec{a}_3 t^3 + \vec{a}_2 t^2 + \vec{a}_1 t + \vec{a}_0 \quad t \in [0, 1]$$

该曲线的首末端点必须插值给定的位置矢量:

$$\vec{p}_0 \text{ 和 } \vec{p}_1$$

该曲线在首末端点的切矢必须插值给定的切矢量:

$$\vec{p}'_0 \text{ 和 } \vec{p}'_1$$

三、Hermite插值曲线

即：

$$\begin{cases} \vec{p}(0) = \vec{p}_0 \\ \vec{p}(1) = \vec{p}_1 \\ \vec{p}'(0) = \vec{p}'_0 \\ \vec{p}'(1) = \vec{p}'_1 \end{cases}$$

代入曲线方程得：

$$\begin{cases} \vec{a}_0 = \vec{p}_0 \\ \vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{p}_1 \\ \vec{a}_1 = \vec{p}'_0 \\ \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 = \vec{p}'_1 \end{cases}$$

三、Hermite插值曲线

写成矩阵形式，得：

解得：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_0 \\ \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{p}_0 \\ \vec{p}_1 \\ \vec{p}'_0 \\ \vec{p}'_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_0 \\ \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p}_0 \\ \vec{p}_1 \\ \vec{p}'_0 \\ \vec{p}'_1 \end{bmatrix}$$

三、Hermite插值曲线

即：

$$\begin{cases} \vec{a}_0 = \vec{p}_0 \\ \vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{p}_1 \\ \vec{a}_1 = \vec{p}'_0 \\ \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 = \vec{p}'_1 \end{cases}$$

代入曲线方程得：

$$\vec{p}(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p}_0 \\ \vec{p}_1 \\ \vec{p}'_0 \\ \vec{p}'_1 \end{bmatrix}$$

$$t \in [0, 1]$$

三、Hermite插值曲线

将上述曲线方程，整理得：

$$\vec{p}(t) = F_0(t)\vec{p}_0 + F_1(t)\vec{p}_1 + G_0(t)\vec{p}'_0 + G_1(t)\vec{p}'_1 \quad t \in [0,1]$$

其中：

$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad F_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$
$$G_0(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad G_1(t) = t^3 - t^2$$

称为调和函数（或混合函数、Hermite基函数）

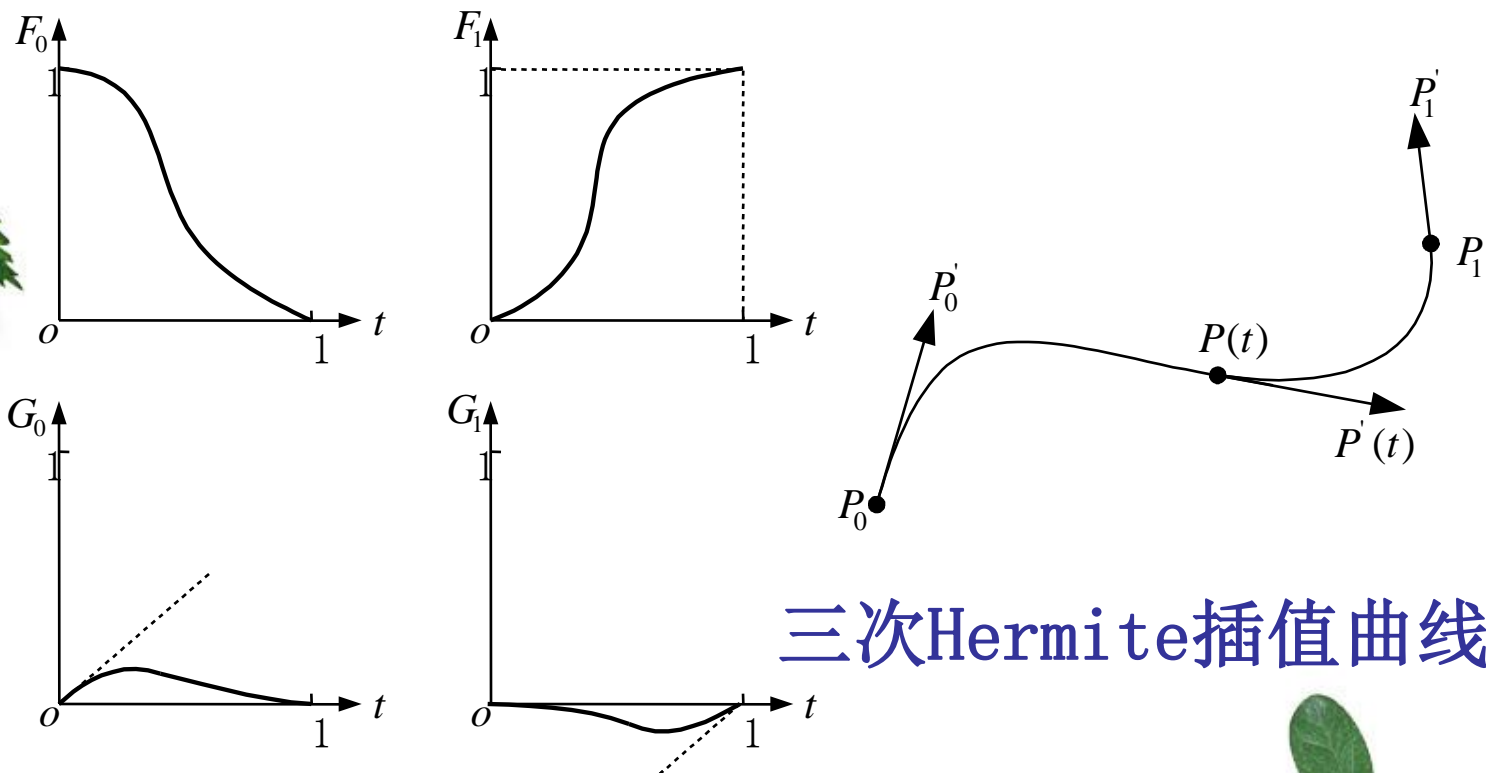
三、Hermite插值曲线

也可由求得的矢量系数将曲线方程改写成：

$$\vec{P}(t) = \vec{a}_3 t^3 + \vec{a}_2 t^2 + \vec{a}_1 t + \vec{a}_0 \quad t \in [0,1]$$

这样的幂基形式Hermite插值曲线称为**弗格森 (Ferguson) 曲线**。（1963，Boeing Co.）

三、Hermite插值曲线



三次Hermite插值曲线

三次混合函数的图象

三、Hermite插值曲线

三次混合函数的性质：

$$F_1(t) = 1 - F_0(t) \quad G_1(t) = -G_0(1-t)$$

可以验证：

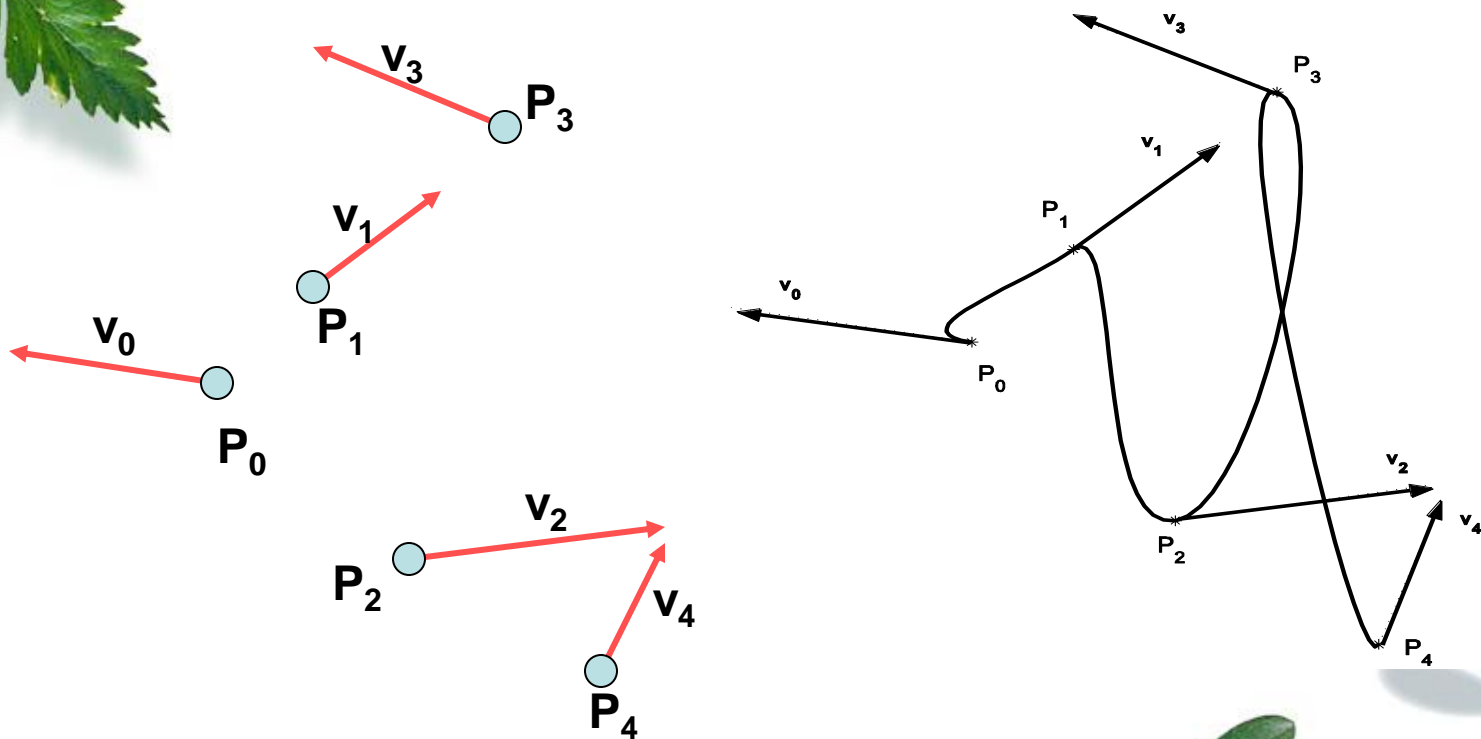
$$\begin{cases} F_i(j) = G'_i(j) = \delta_{ij} \\ F'_i(j) = G_i(j) = 0 \end{cases} \quad i, j = 0, 1$$

满足Hermite基函数的要求：

$$H_{ri}^{(s)}(u_j) = \delta_{ij} \delta_{rs}, \quad \text{其中 } u_0 = 0, u_1 = 1$$

三、Hermite插值曲线

利用Hermite插值曲线设计曲线：



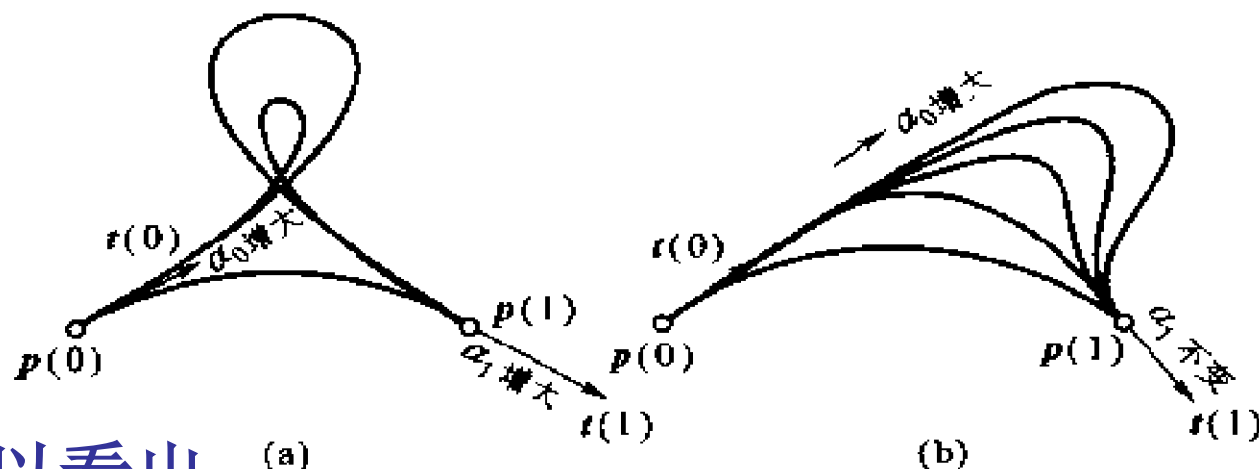
三、Hermite插值曲线

三次Hermite插值曲线（Ferguson曲线）的几何特征：

三次Hermite插值曲线的形状不仅与曲线起点和终点的位置，切矢量的方向有关，而且与切矢量的模长也有关系。

设 $\vec{p}'(0) = \alpha_0 \vec{t}(0)$, $\vec{p}'(1) = \alpha_1 \vec{t}(1)$, 其中 \vec{t}_0 和 \vec{t}_1 分别是曲线在 $\vec{p}(0)$ 和 $\vec{p}(1)$ 处的单位切向量。

三、Hermite插值曲线



从上图可以看出：

- 1) 单独增加 α_0 或 α_1 时，曲线会向另一侧“倾倒”。
- 2) 增加 α_0 和 α_1 ，曲线会由扁平变得更“鼓”，足够大时，会出现尖点或自交点。
- 3) 未避免出现尖点和自交点，Faux建议 $\alpha_0, \alpha_1 \leq 3 \left| \overrightarrow{p_0 p_1} \right|$

三、Hermite插值曲线

三次Hermite插值曲线的域变换：

在几何造型实践中（例如曲线拼接），经常需要建立定义在任意参数域 $[u_i, u_{i+1}]$ 上的三次Hermite插值曲线。

它可以通过对定义在参数域 $[0, 1]$ 上的三次Hermite插值曲线进行域变换来实现。

令 $t(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i}$ ，代入 $\vec{p} = \vec{p}(t), t \in [0, 1]$ ，得：

$$\vec{p} = \vec{p}[t(u)], u \in [u_i, u_{i+1}]$$

三、Hermite插值曲线

其中: $\vec{p}[t(u_i)] = \vec{p}(0), \vec{p}[t(u_{i+1})] = \vec{p}(1)$

$$\text{这时, } \frac{d\vec{p}}{du} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{1}{\Delta_i} \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\text{其中: } \Delta_i = u_{i+1} - u_i$$

$$\text{所以: } \vec{p}'(u_i) = \frac{1}{\Delta_i} \vec{p}'(0), \vec{p}'(u_{i+1}) = \frac{1}{\Delta_i} \vec{p}'(1)$$

可见, 经过域变换, 三次Hermite插值曲线在端点处的切矢量模长发生了变化。也就是说, 三次Hermite插值曲线对域变换具有依赖性, 这是不合人意的。

三、Hermite插值曲线

所以，一般域上的Hermite插值曲线为：

$$\vec{p} = \vec{p}[t(u)] = [F_0(t) \ F_1(t) \ \Delta_i G_0(t) \ \Delta_i G_1(t)] \cdot \begin{bmatrix} \vec{p}_i \\ \vec{p}_{i+1} \\ \vec{p}'_i \\ \vec{p}'_{i+1} \end{bmatrix}$$

其中 $\Delta_i = u_{i+1} - u_i, u_i \leq u \leq u_{i+1}$

三、Hermite插值曲线

其中：

$$[F_0(t) \quad F_1(t) \quad \Delta_i G_0(t) \quad \Delta_i G_1(t)] =$$

$$[1 \quad u - u_i \quad (u - u_i)^2 \quad (u - u_i)^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{\Delta_i^2} & \frac{3}{\Delta_i^2} & -\frac{2}{\Delta_i} & -\frac{1}{\Delta_i} \\ \frac{2}{\Delta_i^3} & -\frac{2}{\Delta_i^3} & \frac{1}{\Delta_i^2} & \frac{1}{\Delta_i^2} \end{bmatrix}$$

三、Hermite插值曲线

五次Hermite插值曲线:

Problem description:

we are given two points \vec{P}_0, \vec{P}_1 plus tangent vectors \vec{v}_0, \vec{v}_1 and second-order derivatives \vec{s}_0, \vec{s}_1 . We are asked to find a polynomial

$$\vec{P}(t) = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 t + \vec{a}_2 t^2 + \vec{a}_3 t^3 + \vec{a}_4 t^4 + \vec{a}_5 t^5$$

such that

$$\vec{P}(0) = \vec{P}_0, \quad \vec{P}(1) = \vec{P}_1,$$

$$\vec{P}'(0) = \vec{v}_0, \quad \vec{P}'(1) = \vec{v}_1,$$

$$\vec{P}''(0) = \vec{s}_0, \quad \vec{P}''(1) = \vec{s}_1.$$

三、Hermite插值曲线

五次Hermite插值曲线:

solution:

$$\vec{\mathbf{P}}(t) = \vec{\mathbf{p}}_0 H_{5,0}(t) + \vec{\mathbf{v}}_0 H_{5,1}(t) + \vec{\mathbf{s}}_0 H_{5,2}(t) + \vec{\mathbf{s}}_1 H_{5,3}(t) + \vec{\mathbf{v}}_1 H_{5,4}(t) + \vec{\mathbf{p}}_1 H_{5,5}(t)$$

where $H_{5,i}(t)$ are quintic Hermite polynomials.

$$H_{5,0}(t) = B_0^5(t) + B_1^5(t) + B_2^5(t)$$

$$H_{5,1}(t) = \frac{1}{5} [B_1^5(t) + 2B_2^5(t)]$$

$$H_{5,2}(t) = \frac{1}{20} B_2^5(t)$$

$$H_{5,3}(t) = \frac{1}{20} B_3^5(t)$$

$$H_{5,4}(t) = \frac{1}{5} [2B_3^5(t) + B_4^5(t)]$$

$$H_{5,5}(t) = B_3^5(t) + B_4^5(t) + B_5^5(t)$$

三、Hermite插值曲线

Hermite插值曲线的特点：

- 优点：插值的信息量大。
- 缺点：
 - 1) 高阶切矢的方向与模不具有明显的几何意义。
 - 2) 对域变换具有依赖性。
 - 3) 次数较高时，也会出现龙格现象。
 - 4) 三次Hermite插值曲线不具有对称性，即用 $1-t$ 替换 t 时，除了要将系数矢量首末倒置以外，首末端点的切矢也要反向。

四、牛顿均差形式插值曲线

形式：

$$\vec{p}(u) = \vec{a}_0 + \vec{a}_1(u - u_0) + \cdots + \vec{a}_n(u - u_0) \cdots (u - u_{n-1})$$

其中：矢量系数为待插值数据点的向前各阶均差。

u_i 为待插值数据点对应的参数。

四、牛顿均差形式插值曲线

要求满足的插值条件：

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p}(u_0) = a_0 = \vec{p}_0 \\ \vec{p}(u_1) = a_0 + a_1(u_1 - u_0) = \vec{p}_1 \\ \vec{p}(u_2) = a_0 + a_1(u_2 - u_0) + a_2(u_2 - u_0)(u_2 - u_1) = \vec{p}_2 \\ \vdots \\ \vec{p}(u_n) = a_0 + a_1(u_n - u_0) + \cdots + a_n(u_n - u_0) \cdots (u_n - u_{n-1}) = \vec{p}_n \end{array} \right.$$

四、牛顿均差形式插值曲线

由上述插值条件可得：

这样：

$$\vec{a}_0 = \vec{p}_0$$

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_0}{u_1 - u_0}$$

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{u_2 - u_1} \left(\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_0}{u_2 - u_0} - \vec{a}_1 \right)$$

$$\vec{a}_3 = \frac{1}{u_3 - u_2} \left(\left(\frac{\vec{p}_3 - \vec{p}_0}{u_3 - u_0} - \vec{a}_1 \right) \frac{1}{u_1 - u_0} - \vec{a}_2 \right)$$

四、牛顿均差形式插值曲线

均差的递推定义：

$$\vec{p}[u_0, u_1] = \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_0}{u_1 - u_0}$$

上式称为数据点在 $[u_0, u_1]$ 上的一阶均差

$$\vec{p}[u_0, u_1, u_2] = \frac{\vec{p}[u_1, u_2] - \vec{p}[u_0, u_1]}{u_2 - u_0}$$

上式称为数据点在 $[u_0, u_1, u_2]$ 上的二阶均差

四、牛顿均差形式插值曲线

一般的:

$$\vec{p}[u_0, u_1, \dots, u_{k+1}] = \frac{\vec{p}[u_1, u_2, \dots, u_{k+1}] - \vec{p}[u_0, u_1, \dots, u_k]}{u_{k+1} - u_0}$$

均差的对称性:

$$\begin{aligned}\vec{p}[u_0, u_1, \dots, u_k] &= \vec{p}[u_1, u_0, \dots, u_k] = \dots \\ &= \vec{p}[u_1, u_2, \dots, u_k, u_0]\end{aligned}$$

四、牛顿均差形式插值曲线

可以验证：

$$\vec{a}_0 = \vec{p}_0$$

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_0}{u_1 - u_0} = \Delta \vec{p}_0$$

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{u_2 - u_1} \left(\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_0}{u_2 - u_0} - \vec{a}_1 \right)$$

$$= \frac{1}{u_2 - u_1} (\vec{p}[u_2, u_0] - \vec{p}[u_1, u_0]) = \vec{p}[u_0, u_1, u_2]$$

$$\vec{a}_n = \vec{p}[u_0, \dots, u_n]$$

实际计算时，
可利用递推定
义，建立均差
表计算各阶均
差。

四、牛顿均差形式插值曲线

特点：

1、和Lagrange插值多项式比较，牛顿均差形式插值曲线具有较好的承袭性，即当数据点增加一个时，相应的插值多项式只要在原有多项式的基础上增加最后一项即可，无需全部重新计算。

2、次数较高时有可能出现龙格现象。

多项式插值曲线总结

优点：形式简单，计算简便。

缺点：1) 次数较高时，曲线出现过多的拐点，形状难以控制。

2) 不具有局部修改性，微小的变动可能导致曲线在别处形状有较大的改变。

3) 数据加密时，插值曲线不会收敛到被插值曲线。

4) 矢量系数的几何意义不明显，形状控制比较困难。

上述多项式插值曲线特点总结

优点：形式简单，计算简便。

缺点：1) 次数较高时，曲线出现过多的拐点，形状难以控制。

2) 不具有局部修改性，微小的变动可能导致曲线在别处形状有较大的改变。

3) 数据加密时，插值曲线不会收敛到被插值曲线。

4) 矢量系数的几何意义不明显，形状控制比较困难。

五、利用多项式曲线进行 最小二乘逼近

设插值问题用如下的方程描述：

$$\vec{p}(u_k) = \sum_{i=0}^n \vec{a}_i \varphi_i(u_k) = \vec{p}_k \quad k = 0, 1, \dots, m$$

其中 $\varphi_i(u), i = 0, 1, \dots, n$ 为基函数，

$\vec{p}_k = [x_k, y_k, z_k], k = 0, 1, \dots, m$ 为插值点；

$u_k, k = 0, 1, \dots, m$ 为插值点的参数值

将上述方程写成如下形式：

五、利用多项式曲线进行 最小二乘逼近

$$\Phi A = P \quad \text{其中 } \Phi = [\varphi_i(u_k)]_{(m+1) \times (n+1)}$$

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_0 \\ \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} \vec{p}_0 \\ \vec{p}_1 \\ \vdots \\ \vec{p}_m \end{bmatrix}$$

如果方程的个数 $m+1$ 大于未知数的个数 $n+1$,
这种方程组就称为**超定方程组或矛盾方程组**,
一般情况下, 它的解是不存在的。

五、利用多项式曲线进行最小二乘逼近

在几何造型中，除了插值问题，还经常需要寻求在某种范数意义下，与给定数据距离最近的参数多项式曲线，这就是一条多项式逼近曲线。如果采取的是2-范数，得到的就是最小二乘逼近曲线。

即：

$$\min J = \min \sum_{k=0}^m \left| \vec{p}(u_k) - \vec{p}_k \right|^2 = \min \sum_{k=0}^m \left(\sum_{i=0}^n \vec{a}_i \varphi_i(u_k) - \vec{p}_k \right)^2$$
$$\triangleq \min(J_x + J_y + J_z) \quad (*)$$

五、利用多项式曲线进行 最小二乘逼近

其中：

$$J_x = \sum_{k=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{ix} \varphi_i(u_k) - p_{kx} \right)^2$$

$$J_y = \sum_{k=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{iy} \varphi_i(u_k) - p_{ky} \right)^2$$

$$J_z = \sum_{k=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{iz} \varphi_i(u_k) - p_{kz} \right)^2$$

$$\vec{a}_i = [a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}], \quad \vec{p}_k = [p_{kx}, p_{ky}, p_{kz}]$$

五、利用多项式曲线进行 最小二乘逼近

为求解 (*) 式，必须使下列偏导数为零：

$$\text{即：} \frac{\partial J_x}{\partial a_{ix}} = \frac{\partial J_y}{\partial a_{iy}} = \frac{\partial J_z}{\partial a_{iz}} = 0$$

从上式可以得出如下方程：

$$\Phi^T \Phi A = \Phi^T P$$

上式称为**Gauss**正交方程组或法方程。

存在唯一解。

五、利用多项式曲线进行最小二乘逼近

注：

1) 最小二乘逼近曲线中的基函数可以是幂基、**Lagrange**基函数等，最常见的是构成**Bezier**曲线的**Bernstein**基函数或**B**样条基函数。

2) 最小二乘技术还有移动最小二乘、最小中值二乘回归等其它形式。

第四节 张量积曲面

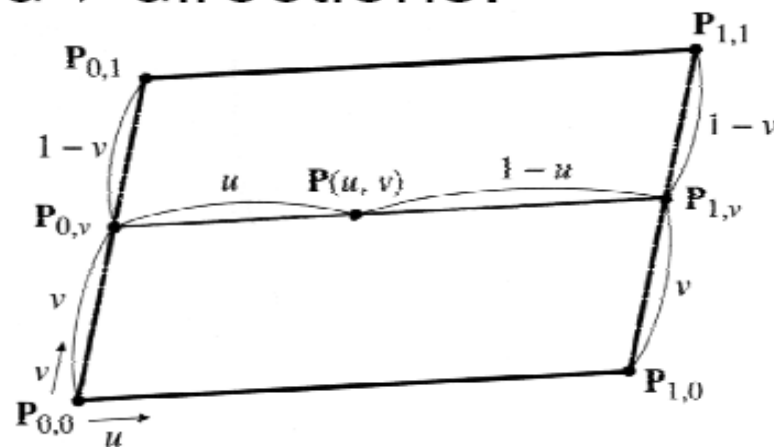
一、双线性插值曲面

A bilinear surface is a linear interpolation of the four corner points in the u and v directions.

$$\mathbf{P}_{0,v} = (1 - v)\mathbf{P}_{0,0} + v\mathbf{P}_{0,1}$$

$$\mathbf{P}_{1,v} = (1 - v)\mathbf{P}_{1,0} + v\mathbf{P}_{1,1}$$

$$\mathbf{P}(u, v) = (1 - u)\mathbf{P}_{0,v} + u\mathbf{P}_{1,v}$$



$$\mathbf{P}(u, v) = (1 - u)[(1 - v)\mathbf{P}_{0,0} + v\mathbf{P}_{0,1}] + u[(1 - v)\mathbf{P}_{1,0} + v\mathbf{P}_{1,1}]$$

$$= \begin{bmatrix} (1-u)(1-v) & u(1-v) & (1-u)v & uv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} \\ \mathbf{P}_{1,0} \\ \mathbf{P}_{0,1} \\ \mathbf{P}_{1,1} \end{bmatrix} \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1)$$

一、双线性插值曲面

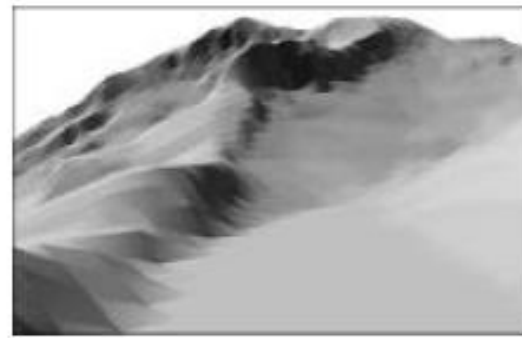
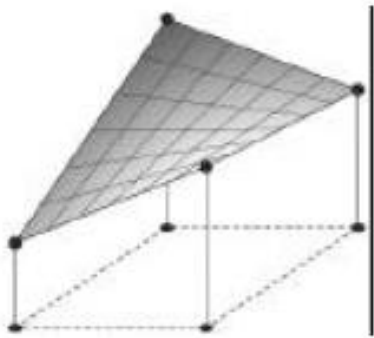
Advantage:

- Only four corner points need to be supplied.

Limitations:

- The boundaries of the bilinear surface are straight.
- Surfaces generally tend to be flat

一、双线性插值曲面

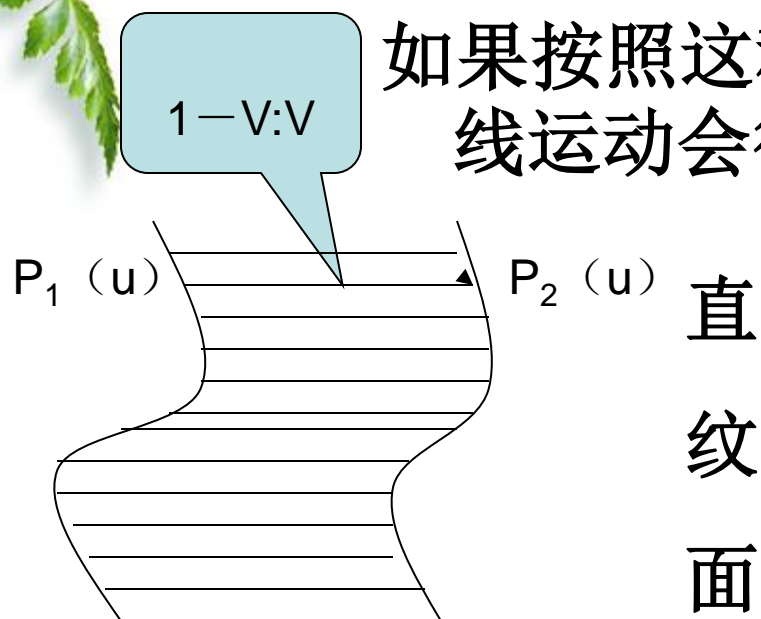


. Bilinear interpolation. Right: bilinear surface patch. Left: globally C_0 -continuous surface composed of bilinear surface patches.

思考

双线性插值曲面是一条直线沿着另两条直线运动得到的曲面，可以简单得用”线动成面“来总结。

如果按照这种方法将一条直线沿着两条曲线运动会得到什么样得曲面？



如果两族等参数线都是曲线，曲面的方程是什么？

二、张量积曲面 (Tensor Product Surface)

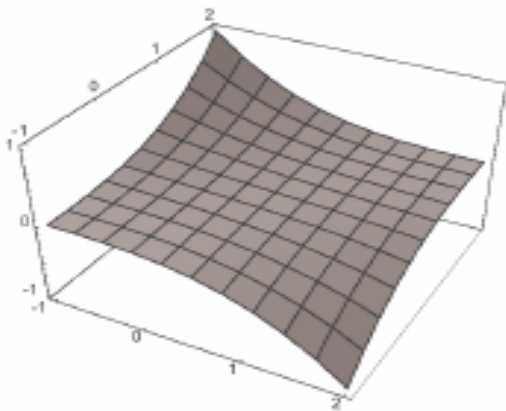
- Given: two curve schemes (Bézier curves or B -splines):

$$\text{I: } \mathbf{x}(u) = \sum_{i=0}^m F_i(u) \mathbf{b}_i, \quad u \in [a, b],$$

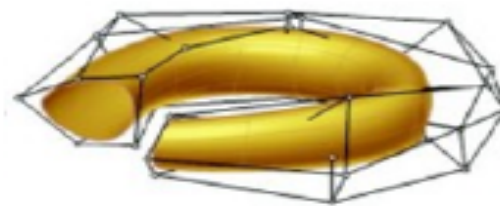
$$\text{II: } \mathbf{x}(v) = \sum_{j=0}^n G_j(v) \mathbf{c}_j, \quad v \in [c, d].$$

- Tensor product surface generated by the curve schemes I and II:

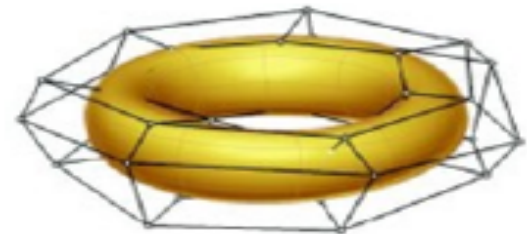
$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n F_i(u) G_j(v) \mathbf{b}_{ij}, \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d],$$



TP Bézier surface



TP B -spline surface



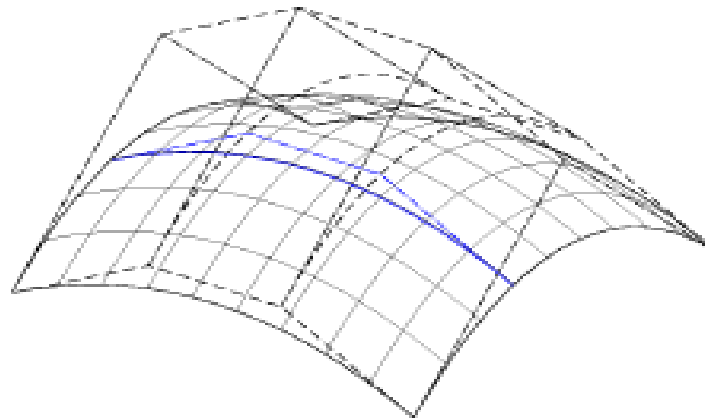
Torus-line TP surface

二、张量积曲面 (Tensor Product Surface)

- Factorization of the definition:

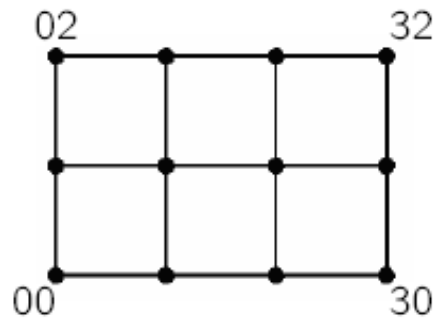
$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n F_i(u) G_j(v) \mathbf{b}_{ij} = \sum_{j=0}^n G_j(v) \left(\sum_{i=0}^m F_i(u) \mathbf{b}_{ij} \right)$$

- Each fixed u gives a control point of the v curve.
- TP surface is a "curve of curves".
- TP surfaces are generated by a "motion" of the boundary curves.

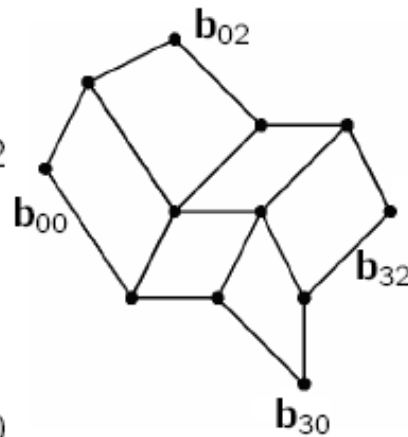


二、张量积曲面 (Tensor Product Surface)

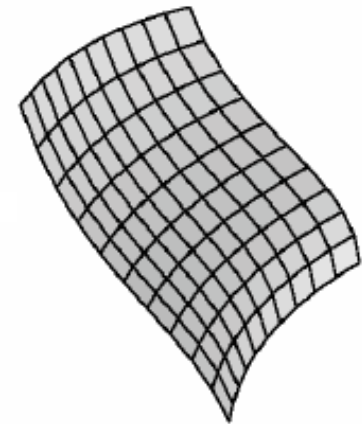
- b_{ij} : control net of the surface



Parameter grid



Control net



TP surface

二、张量积曲面 (Tensor Product Surface)

矩阵表示式:

$$\vec{P}(u, v) = [F_0(u) \ F_1(u) \ \cdots \ F_m(u)] \cdot \begin{bmatrix} \vec{b}_{00} & \vec{b}_{01} & \cdots & \vec{b}_{0n} \\ \vec{b}_{10} & \vec{b}_{11} & \cdots & \vec{b}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{b}_{m0} & \vec{b}_{m1} & \cdots & \vec{b}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0(v) \\ G_1(v) \\ \vdots \\ G_n(v) \end{bmatrix}$$

$$(u, v) \in [u_0, u_m] \times [v_0, v_n]$$

在上式中中间的矩阵与最后的列阵相乘，可得 **$m+1$** 条以 **v** 为参数的准线。对于一个给定的 **v** 值，在每条曲线上会有对应的一点，一共有 **$m+1$** 个点，将其看作系数矢量，再乘行向量，就定义了一条曲母线，当 **v** 从 **v_0** 连续

变化到 **v_n** 时，沿着 **$m+1$** 条准线运动的曲母线扫出一张曲面，这就是张量积曲面。

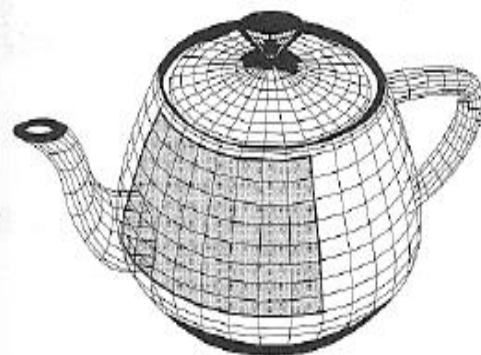
二、张量积曲面 (Tensor Product Surface)

优点：容易由曲线的性质推广得到曲面的性质。

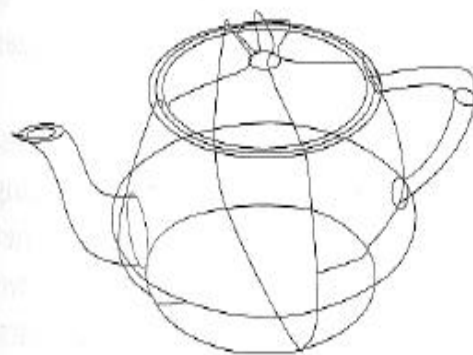
局限性：仅适用于矩形参数域。

常见的张量积曲面有：张量积Bezier曲面，张量积B样条曲面，张量积NURBS曲面等。

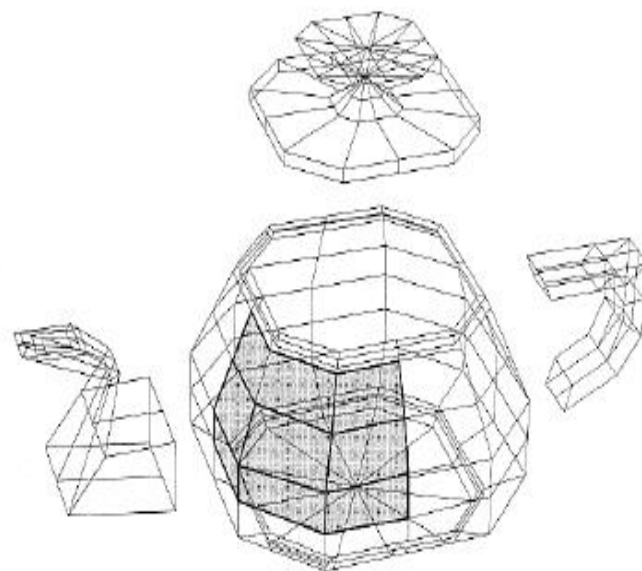
张量积曲面实例（一）



(a)

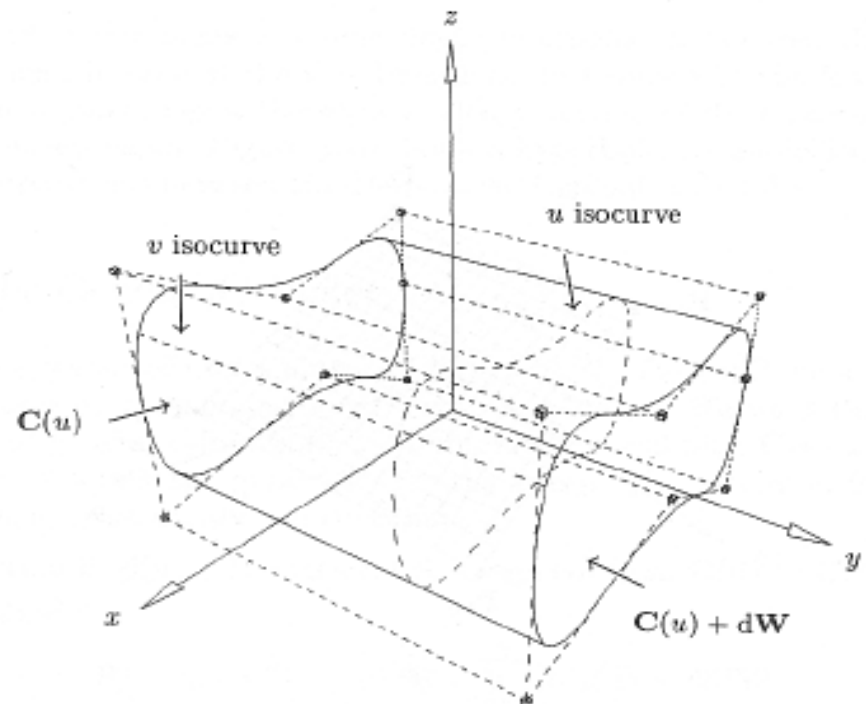
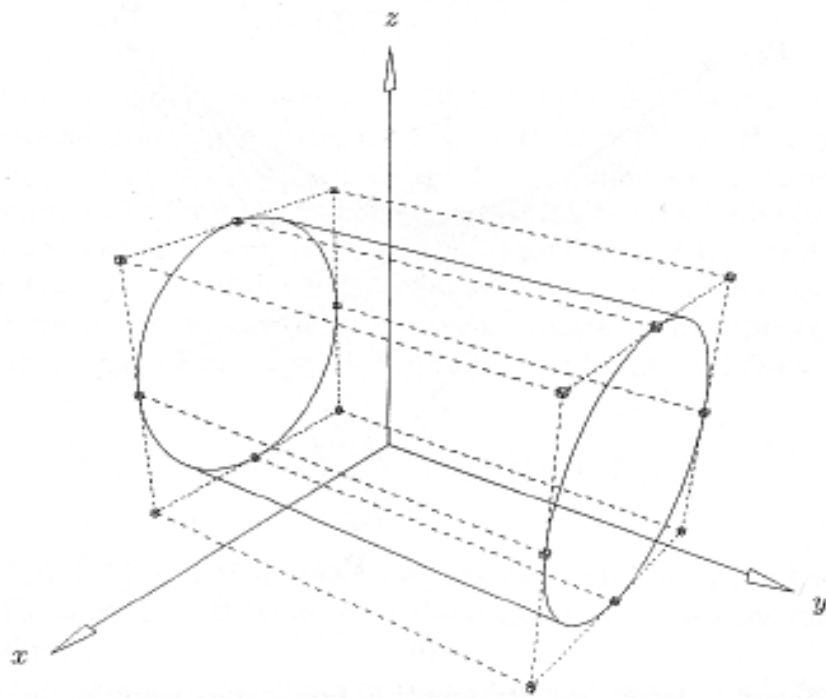


(b)



张量积曲面实例（二）

• Generalized Cylinder



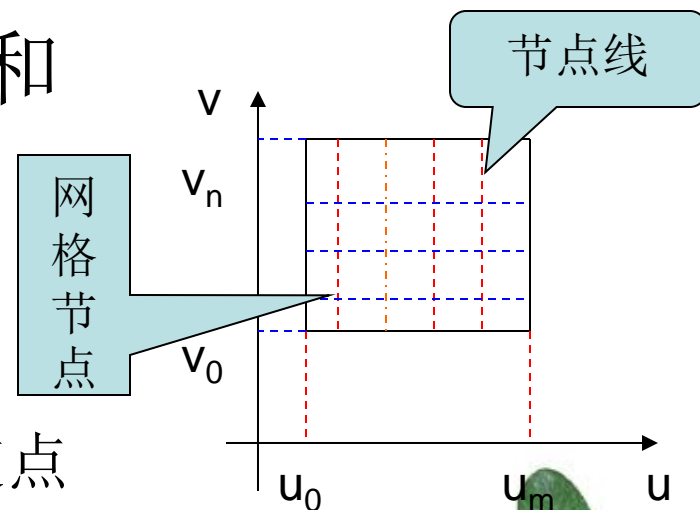
第五节 参数双三次曲面片

一、数据点的参数化

在两个参数方向上分别完成参数分割：

$$\triangle u: u_0 < u_1 < \dots < u_m \text{ 和}$$

$$\triangle v: v_0 < v_1 < \dots < v_n$$



参数域的矩形网格分割

节点线 \longleftrightarrow 曲线上的等参数线

网格节点 \longleftrightarrow 曲面上等参数线的交点

一、数据点的参数化

曲面数据点参数化的要求：

- 1) 所有的v向节点线具有相同的参数分割 Δv ，所有的u向节点线具有相同的参数分割 Δu 。
- 2) 要求同一条u向节点线具有相同的v值，同一条v向节点线具有相同的u值。
- 3) 从曲面光顺的角度要求表面上的等参数线必须是光顺的。

困难之处：沿同一参数方向，不同等参数线上数据点的分布情况可能不同。

解决方法：同一参数方向上公共的参数分割只可能是各种情况的混合和折衷，例如用算术平均值作为公共参数值

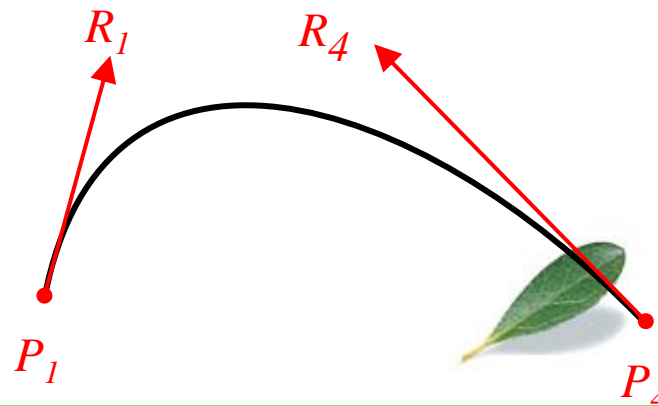
二、Ferguson 双三次曲面片

Hermite插值曲线:

$$Q(t) = T \cdot M_h \cdot G_h$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$\begin{aligned} Q(t) = & (2t^3 - 2t^2 + 1) \cdot P_1 \\ & + (-2t^3 + 2t^2) \cdot P_4 \\ & + (t^3 - 2t^2 + t) \cdot R_1 \\ & + (t^3 - t^2) \cdot R_4 \end{aligned}$$

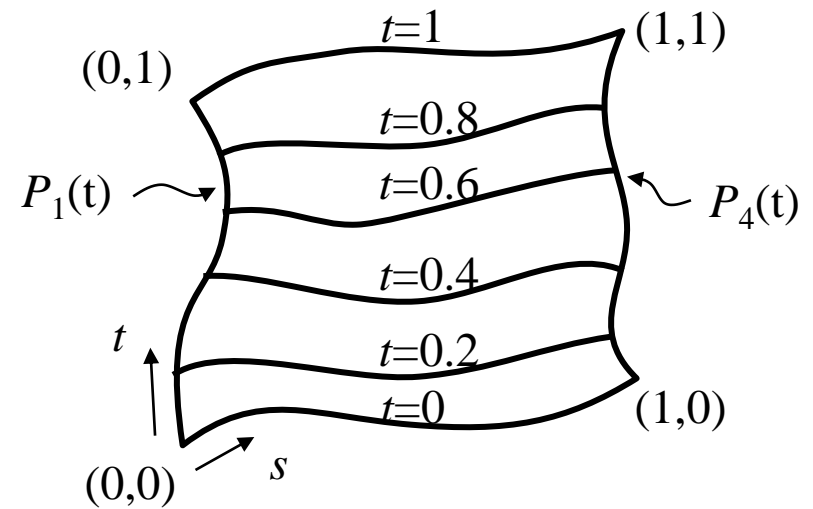


Hermite插值曲面

$$Y(s) = SM_h G_{h_y}$$




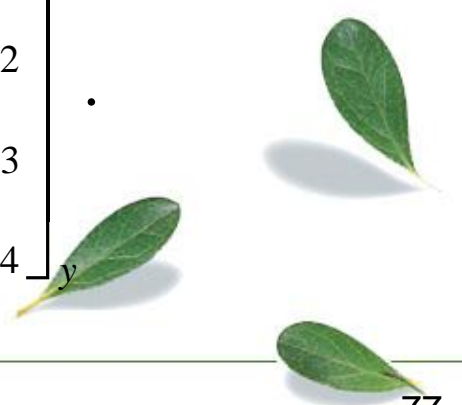
$$Y(s, t) = S \cdot M_h \cdot \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_4(t) \\ R_1(t) \\ R_4(t) \end{bmatrix}_y$$



下面, 将 $P_{1_y}(t), P_{4_y}(t), R_{1_y}(t), R_{4_y}(t)$
表示成Hermite形式

Hermite插值曲面


$$P_{1_y}(t) = TM_h \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \\ q_{14} \end{bmatrix}_y, \quad P_{4_y}(t) = TM_h \begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \\ q_{23} \\ q_{24} \end{bmatrix}_y,$$

$$R_{1_y}(t) = TM_h \begin{bmatrix} q_{31} \\ q_{32} \\ q_{33} \\ q_{34} \end{bmatrix}_y, \quad R_{4_y}(t) = TM_h \begin{bmatrix} q_{41} \\ q_{42} \\ q_{43} \\ q_{44} \end{bmatrix}_y.$$


Hermite 插值曲面

$$\begin{bmatrix} P_1(t) & P_4(t) & R_1(t) & R_4(t) \end{bmatrix}_y = T \cdot M_h \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} & q_{41} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} & q_{42} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{43} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{bmatrix}_y$$

转置, 得:

$$\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_4(t) \\ R_1(t) \\ R_4(t) \end{bmatrix}_y = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix}_y \cdot M_h^T \cdot T^T \equiv Q_y \cdot M_h^T \cdot T^T$$

因为 $Y(s,t) = S \cdot M_h \cdot \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_4(t) \\ R_1(t) \\ R_4(t) \end{bmatrix}$, 所以: $Y(s,t) = S \cdot M_h \cdot Q_y \cdot M_h^T \cdot T^T$

总之, $Y(s,t) = S \cdot M_h \cdot \mathbf{Q} \cdot M_h^T \cdot T^T$

Now, what is this?

Hermite 插值曲面

所以,

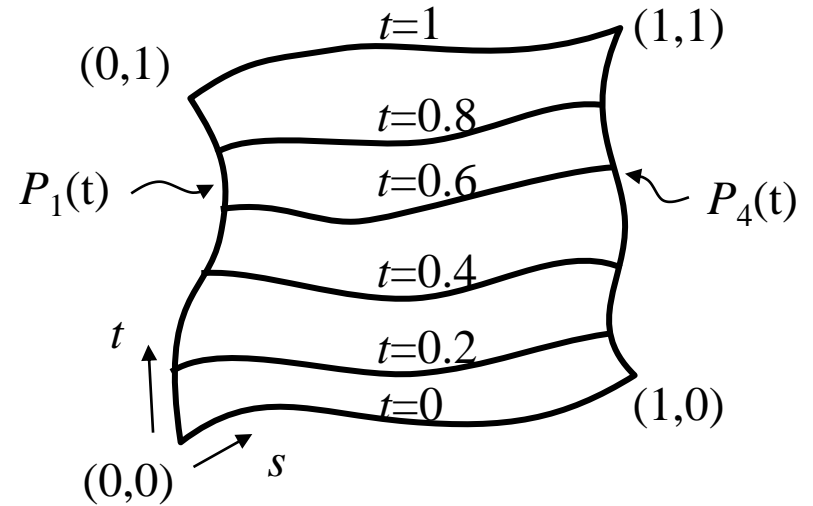
$$P_{1_y}(t) = T \cdot M_h \cdot \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \\ q_{14} \end{bmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{matrix}$$

$$q_{11} = Y(0,0) \equiv y_{00}$$

$$\therefore q_{12} = Y(0,1) \equiv y_{01}$$

$$q_{13} = \frac{\partial}{\partial t} Y(0,0) \equiv \frac{\partial y}{\partial t}_{00}$$

$$q_{14} = \frac{\partial}{\partial t} Y(0,1) \equiv \frac{\partial y}{\partial t}_{01}$$



$$\therefore \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \\ q_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{00} \\ y_{01} \\ \frac{\partial y}{\partial t}_{00} \\ \frac{\partial y}{\partial t}_{01} \end{bmatrix}$$



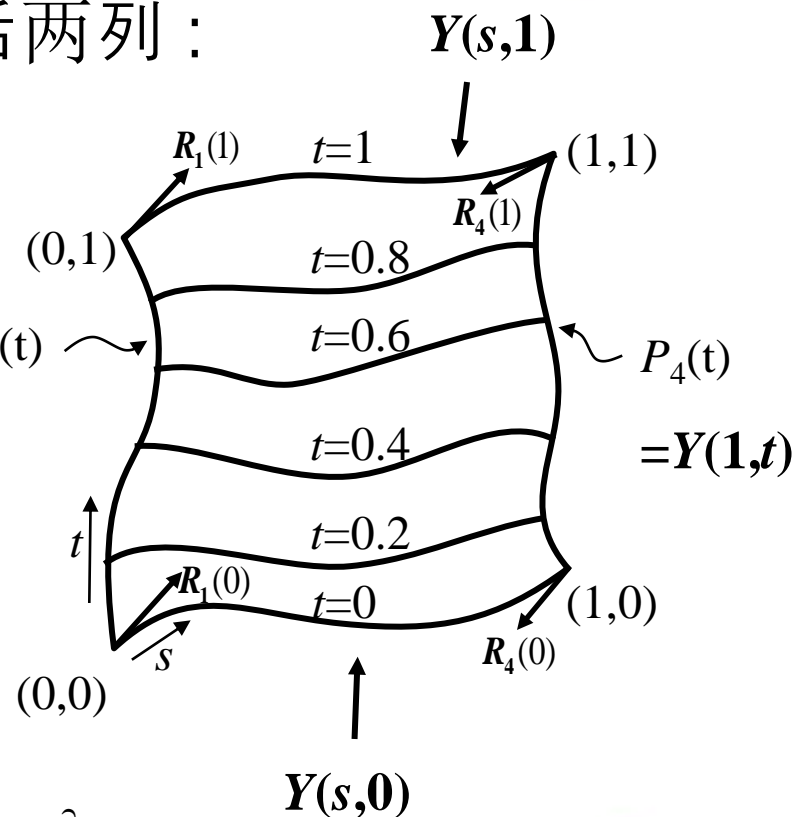
同理,

$$\begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \\ q_{23} \\ q_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{11} \\ \frac{\partial y}{\partial t} 10 \\ \frac{\partial y}{\partial t} 11 \end{bmatrix}$$

下面考虑矩阵 Q_y 的后两列：

$$R_1(t) = T \cdot M_h \cdot \begin{bmatrix} q_{31} \\ q_{32} \\ q_{33} \\ q_{34} \end{bmatrix}$$

$$R_1(t) = \frac{\partial}{\partial s} Y(0, t) \left[\equiv \frac{\partial}{\partial s_0} Y(s, t) \right]$$



$$\therefore q_{31} = R_1(0) = \frac{\partial}{\partial s} Y(0,0) \equiv \frac{\partial y}{\partial s}_{00}$$

$$q_{32} = R_1(1) = \frac{\partial}{\partial s} Y(0,1) \equiv \frac{\partial y}{\partial s}_{01}$$

$$q_{33} = \frac{\partial}{\partial t} R_1(0) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} Y(0,0) \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s}_{00}$$

$$q_{34} = \frac{\partial}{\partial t} R_1(1) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} Y(0,1) \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s}_{01}$$

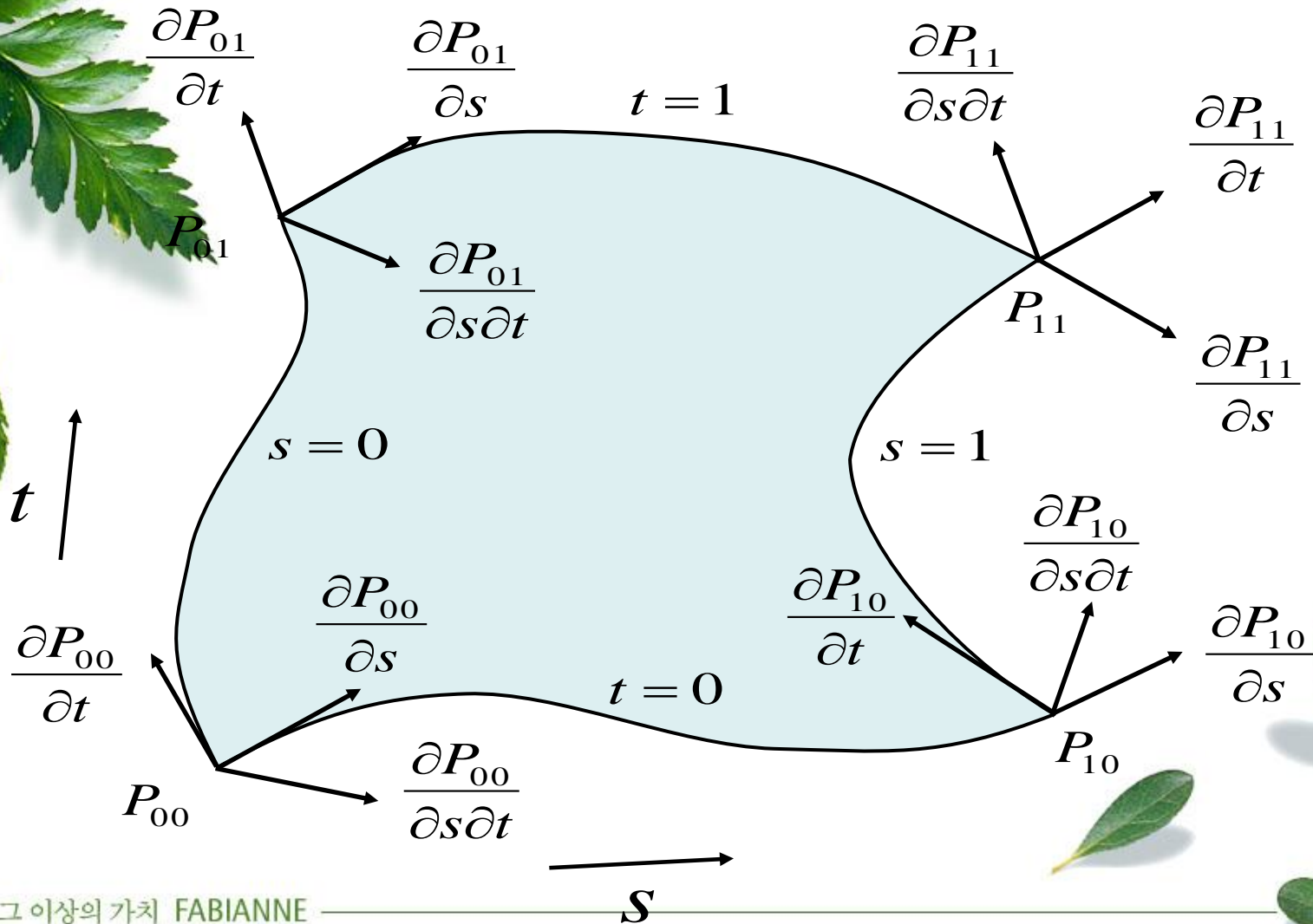
所以：

$$\begin{bmatrix} q_{31} \\ q_{32} \\ q_{33} \\ q_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & 00 \\ \frac{\partial y}{\partial s} & 01 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} & 00 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} & 01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & 00 \\ \frac{\partial y}{\partial s} & 01 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} & 00 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} & 01 \end{bmatrix}$$

同理，

$$\begin{bmatrix} q_{41} \\ q_{42} \\ q_{43} \\ q_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & 10 \\ \frac{\partial y}{\partial s} & 11 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} & 10 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} & 11 \end{bmatrix}$$

Hermite 插值曲面和Ferguson曲面



Hermite 插值曲面和Ferguson曲面

$$Q_y = \begin{bmatrix} y_{00} & y_{01} & \frac{\partial y}{\partial t}_{00} & \frac{\partial y}{\partial t}_{01} \\ y_{10} & y_{11} & \frac{\partial y}{\partial t}_{10} & \frac{\partial y}{\partial t}_{11} \\ \frac{\partial y}{\partial s}_{00} & \frac{\partial y}{\partial s}_{01} & \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t}_{00} & \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t}_{01} \\ \frac{\partial y}{\partial s}_{10} & \frac{\partial y}{\partial s}_{11} & \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t}_{10} & \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t}_{11} \end{bmatrix}$$

$$Y(s, t) = S \cdot M_h \cdot Q \cdot M_h^T \cdot T^T$$

扭矢，但与曲面扭曲无关

代入上式即得孔斯曲面

Ferguson双三次曲面片

困难之处：右下三角矩阵难以给出，所以**Ferguson**将其都取作零向量，即：

$$Q_y = \begin{bmatrix} y_{00} & y_{01} & \frac{\partial y}{\partial t}_{00} & \frac{\partial y}{\partial t}_{01} \\ y_{10} & y_{11} & \frac{\partial y}{\partial t}_{10} & \frac{\partial y}{\partial t}_{11} \\ \frac{\partial y}{\partial s}_{00} & \frac{\partial y}{\partial s}_{01} & \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t}_{00} & \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t}_{01} \\ \frac{\partial y}{\partial s}_{10} & \frac{\partial y}{\partial s}_{11} & \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t}_{10} & \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t}_{11} \end{bmatrix}$$

$$Q_y = \begin{bmatrix} y_{00} & y_{01} & \frac{\partial y}{\partial t}_{00} & \frac{\partial y}{\partial t}_{01} \\ y_{10} & y_{11} & \frac{\partial y}{\partial t}_{10} & \frac{\partial y}{\partial t}_{11} \\ \frac{\partial y}{\partial s}_{00} & \frac{\partial y}{\partial s}_{01} & 0 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial s}_{10} & \frac{\partial y}{\partial s}_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

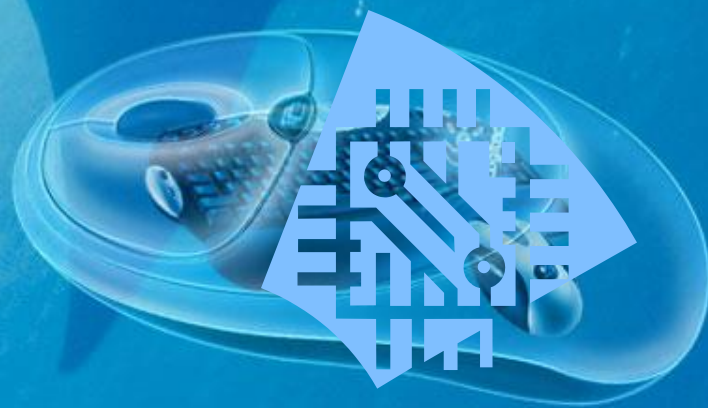
零扭矢导致**Ferguson**曲面在角点处局部平坦，即所谓的“平点”

任意矩形域上的双三次Hermite 插值曲面

$$\vec{P}[s(u, v), t(u, v)] = [F_0(s) \ F_1(s) \ \Delta_i G_0(s) \ \Delta_i G_1(s)] \cdot \begin{bmatrix} \vec{q}_{i,j} & \vec{q}_{i,j+1} & \vec{q}_{v_i,j} & \vec{q}_{v_i,j+1} \\ \vec{q}_{i+1,j} & \vec{q}_{i+1,j+1} & \vec{q}_{v_{i+1},j} & \vec{q}_{v_{i+1},j+1} \\ \vec{q}_{u_i,j} & \vec{q}_{u_i,j+1} & \vec{q}_{uv_i,j} & \vec{q}_{uv_i,j+1} \\ \vec{q}_{u_{i+1},j} & \vec{q}_{u_{i+1},j+1} & \vec{q}_{uv_{i+1},j} & \vec{q}_{uv_{i+1},j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(t) \\ F_1(t) \\ \Delta_j G_0(t) \\ \Delta_j G_1(t) \end{bmatrix}$$

其中: $u_i \leq u \leq u_{i+1}, v_j \leq v \leq v_{j+1}$

$$s = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \quad t = \frac{v - v_j}{v_{j+1} - v_j}$$



本章结束