西北工業大學
Northwestern Polytechnical University

运 动 学

第六章 点的运动学

- 杨成鹏
- 力学与土木建筑学院
- Email: yang@mail.nwpu.edu.cn
- Mobile: 13484615864

第六章 点的运动学

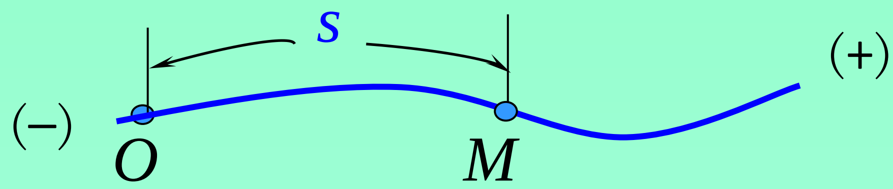
- §6–1确定点的运动的基本方法•点的运动方程
- §6–2用矢量法表示点的速度和加速度
- §6–3用直角坐标法表示点的速度和加速度
- §6–4用自然法表示点的速度和加速度

§6-1 确定点的运动的基本方法·点的运动方程

- 自然法
- 坐标法
- 矢量法

1. 自然法

要解决问题： 已知动点的运动轨迹，如何确定动点在任一瞬时的位置？



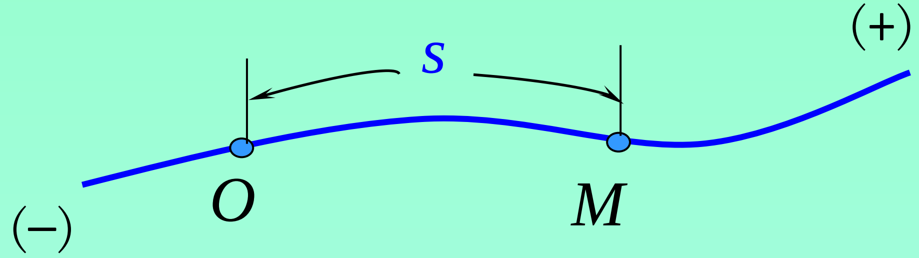
思路： 以动点的运动轨迹作为一条曲线形式的坐标轴，在轨迹曲线上任选一定点O作为量取弧长的起点，并规定由原点O向一方量得的弧长取正值，向另一方量得的弧长取负值。

动点M在轨迹上的位置可由弧长s完全确定。弧长s有正负之分，称为弧坐标，是一个代数量。

这种以动点的运动轨迹作为一条曲线形式的坐标轴来确定动点位置的方法称为自然法。

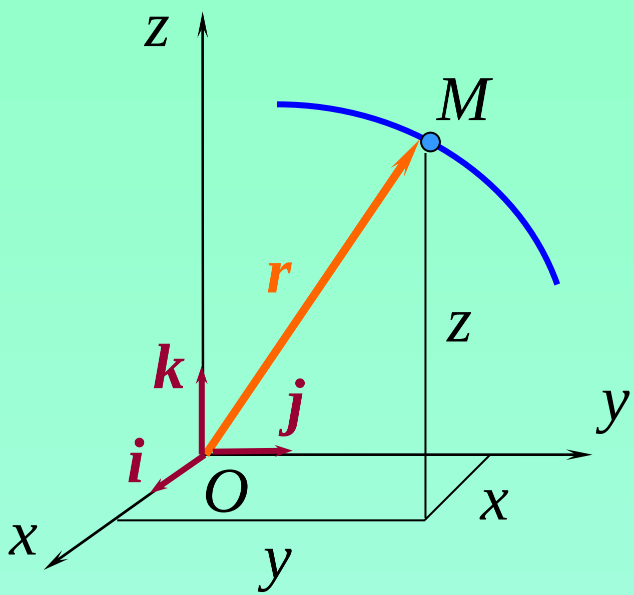
当点M沿已知轨迹运动时，弧坐标s随时间而变，并可表示为时间t的单值连续函数，即

$$s = f(t)$$



这个方程表示了点M沿已知轨迹的运动规律，称为自然法表示的点M的运动方程。

2. 坐标法—— 通常采用直角坐标。



动点M对于所选直角坐标系的位置，可由它的三个坐标x，y，z 决定。当点M 运动时，这些坐标一般地可以表示为时间t 的单值连续函数，即

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

这一组方程称为点M的直角坐标形式的运动方程。

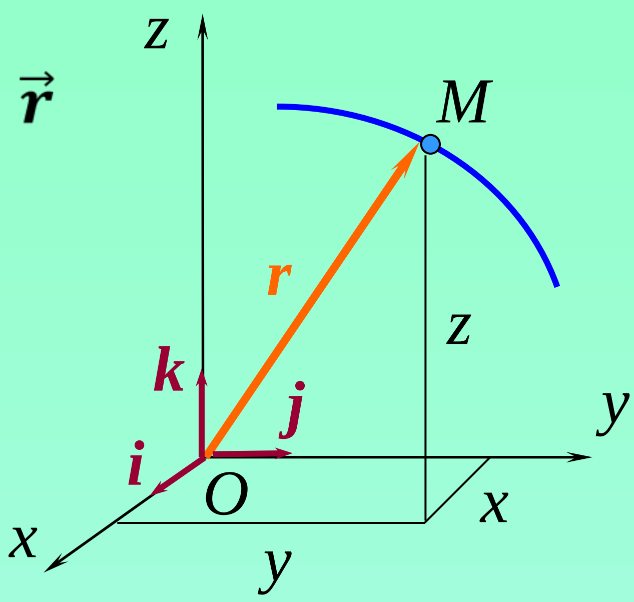
若函数f_1，f_2，f_3都是已知的，则动点M 对应于任一瞬间t 的位置即可完全确定。

在运动方程的三个式子中消去t 即得直角坐标形式的轨迹方程。

3. 矢量法

由定点O画到动点M的有向线段$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}=\vec{\boldsymbol{r}}$称为动点$M$的矢径，它的解析式为

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$



矢径$\boldsymbol{r}$唯一的决定了点M的位置。当点M运动时，矢径$\boldsymbol{r}$是随时间而变的矢量，一般可表示为时间t的单值连续函数

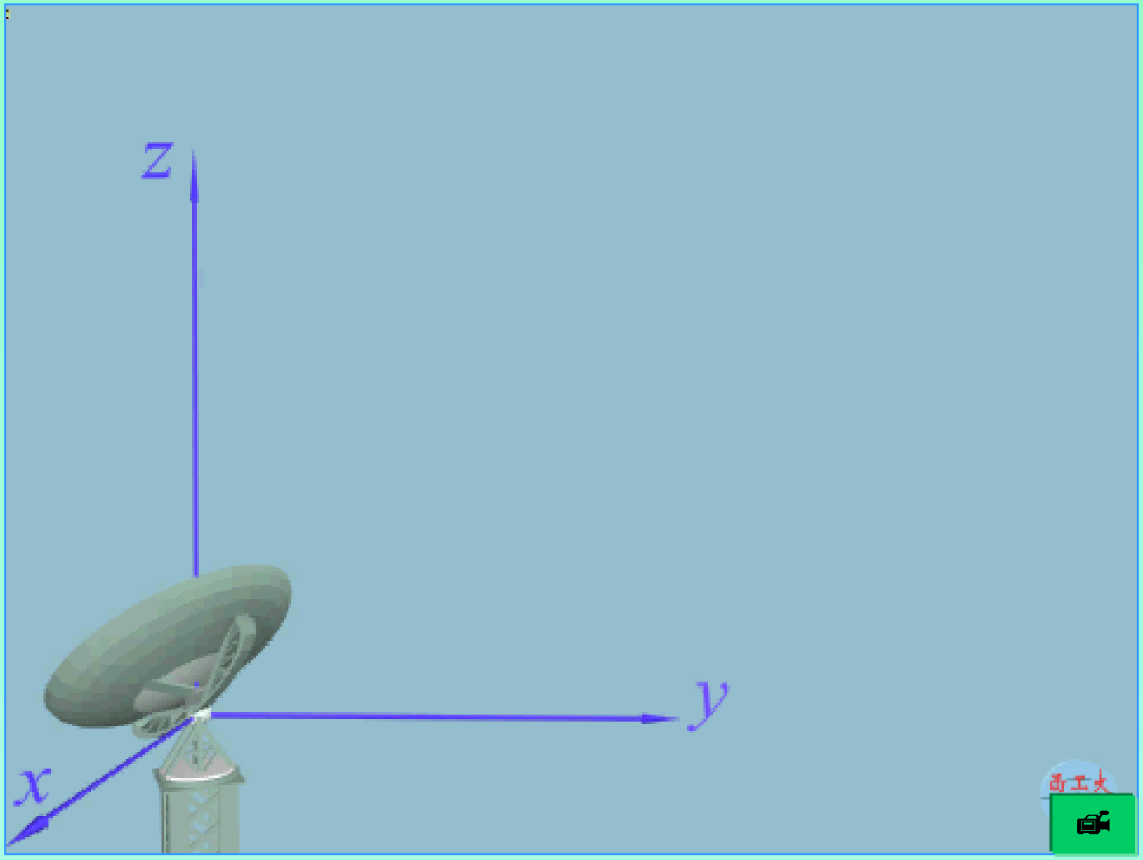
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

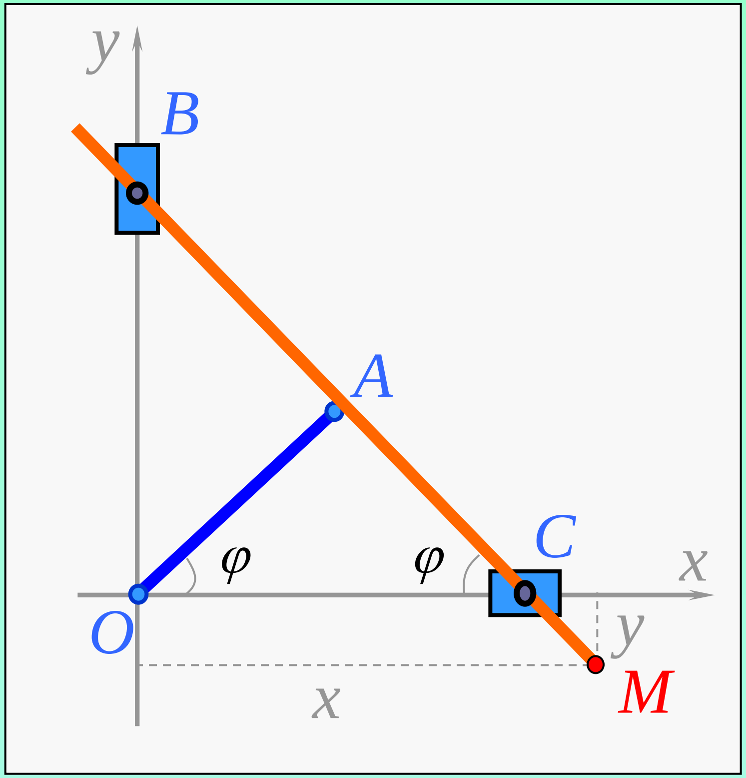
这方程称为点M的矢量形式的运动方程。

矢径端点在空间描出的曲线称为矢端图，它就是动点的轨迹。

矢量法确定点的位置比直角坐标法简明，理论推导时常用。

矢量法实例

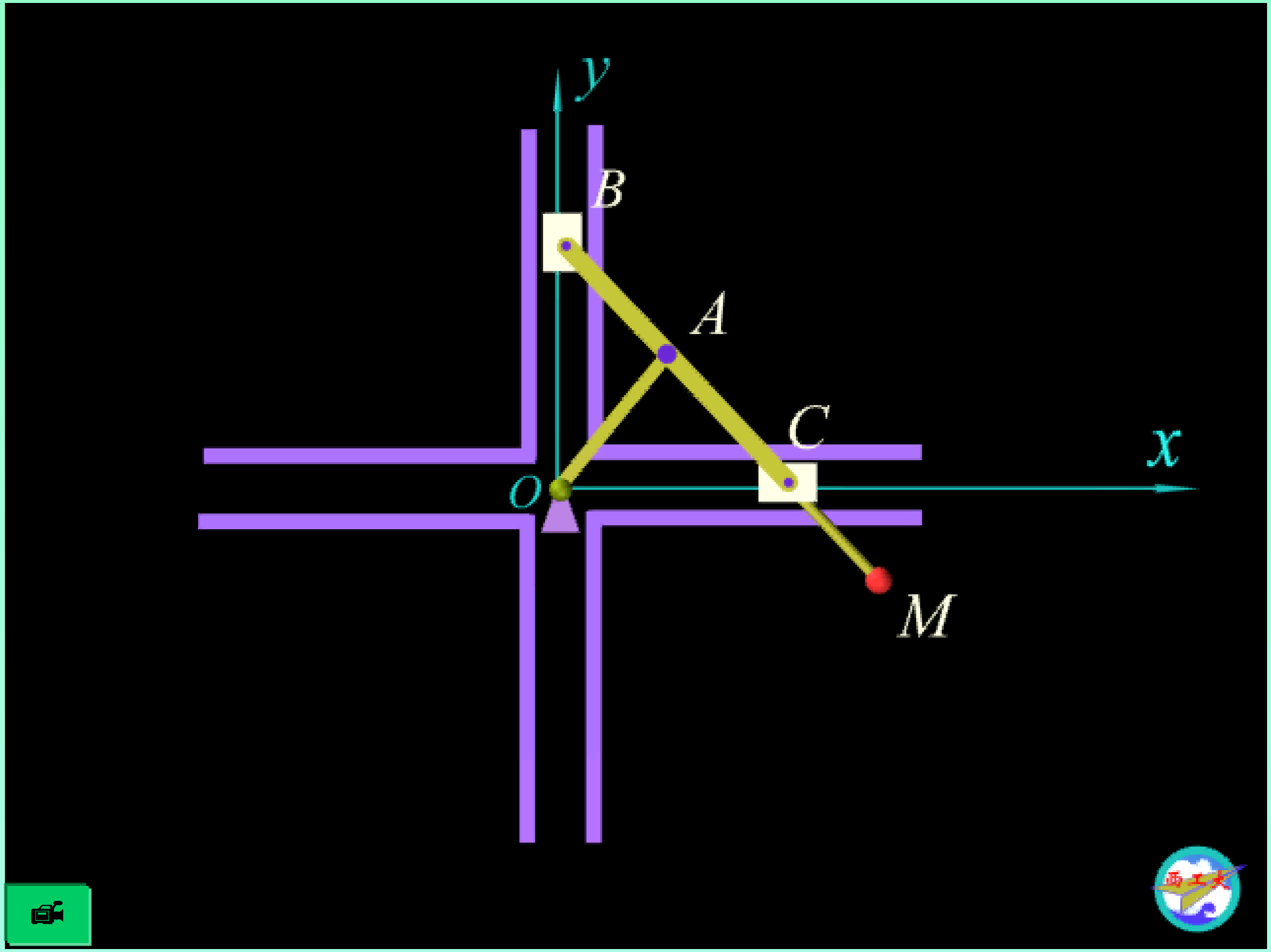




例6–1 椭圆规的曲柄OA可绕定轴O转动，端点A以铰链连接于规尺BC；规尺上的点B和C可分别沿互相垂直的滑槽运动。求规尺上任一点M 的轨迹方程。

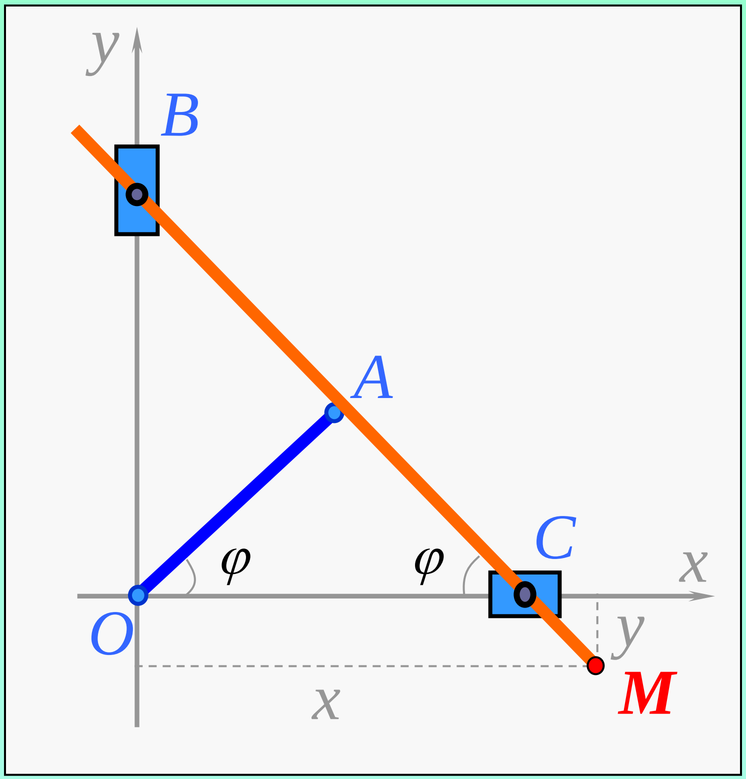
已知：$OA = AC = AB = \dfrac{a}{2}$

$CM = b.$



运 动 演 示

解: 考虑任意位置，M点的坐标 x，y可以表示成

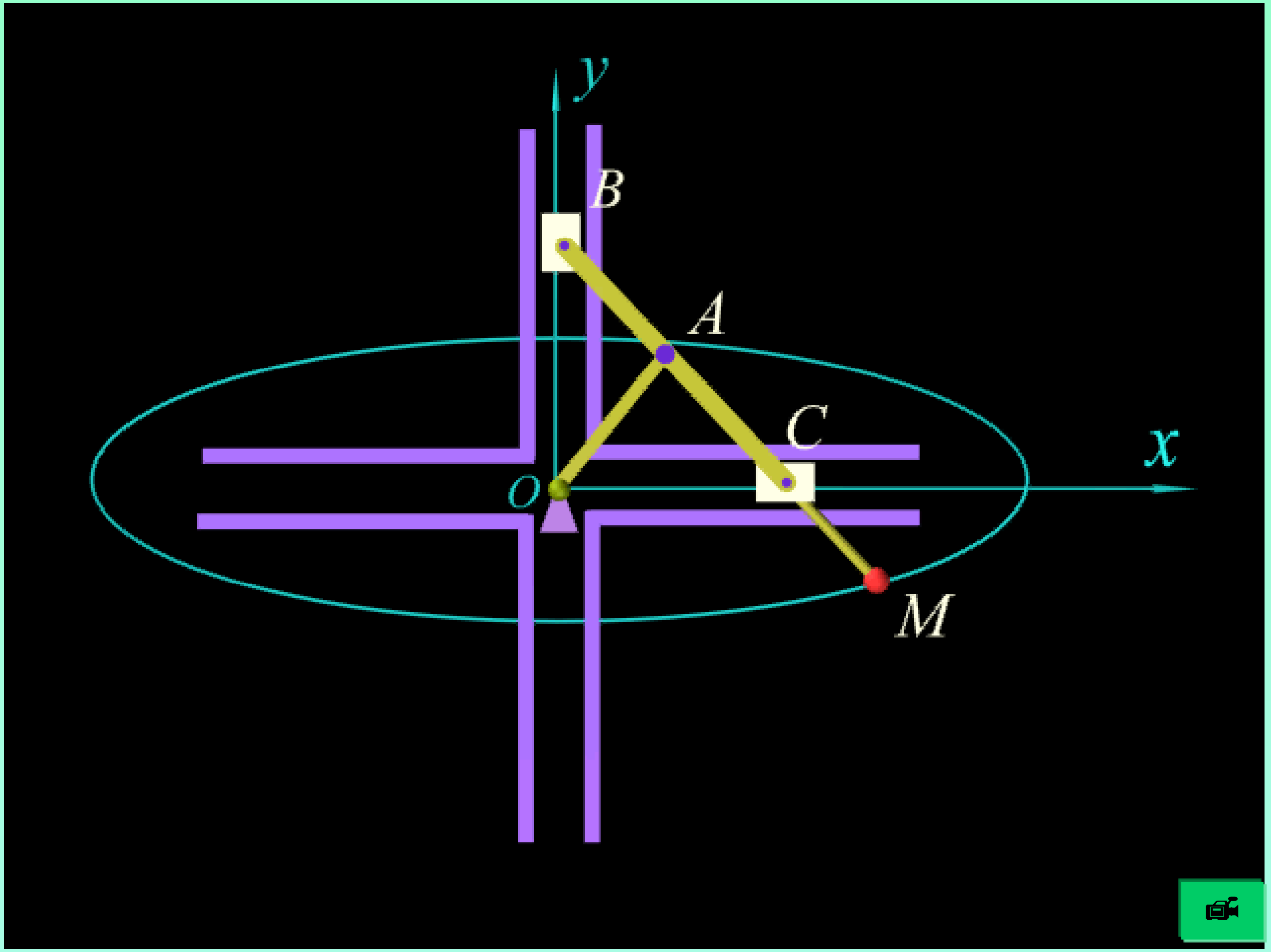


$$x = (a+b)\cos\varphi$$

$$y = -b\sin\varphi$$

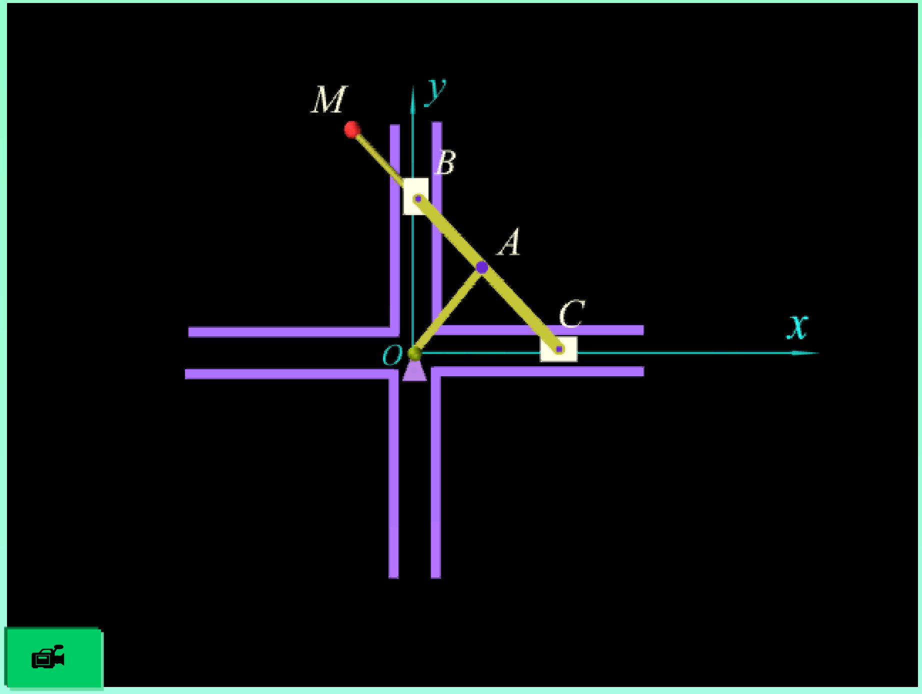
消去上式中的角φ，即得M点的轨迹方程:

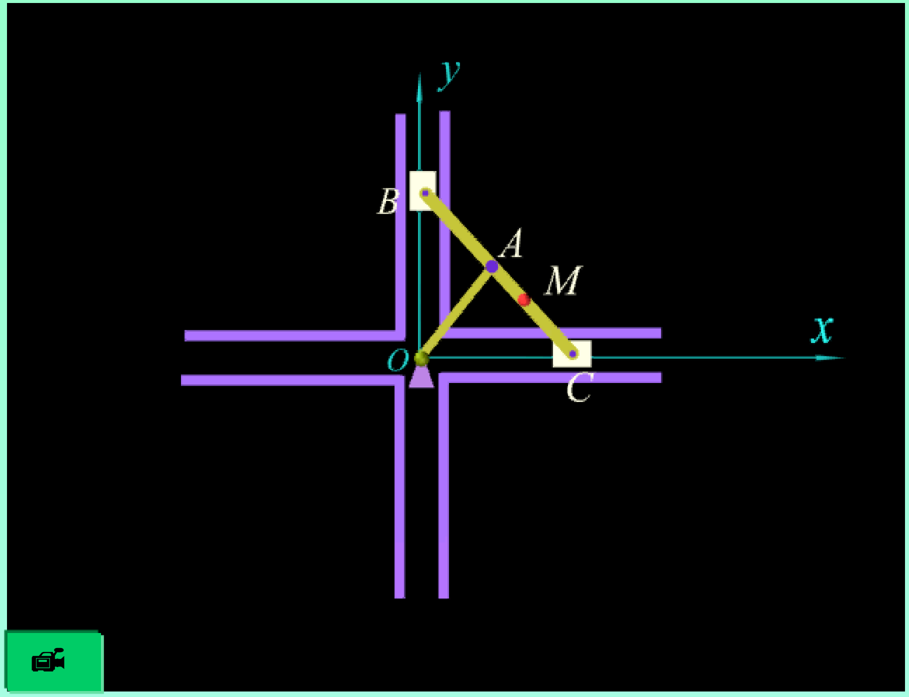
$$\frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



轨 迹 演 示

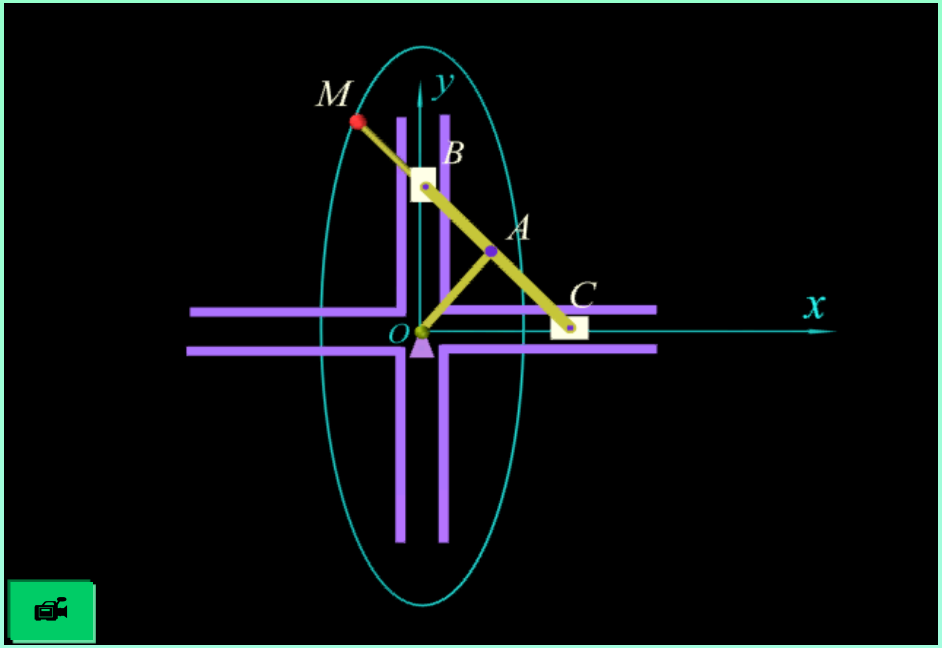
例题6-1

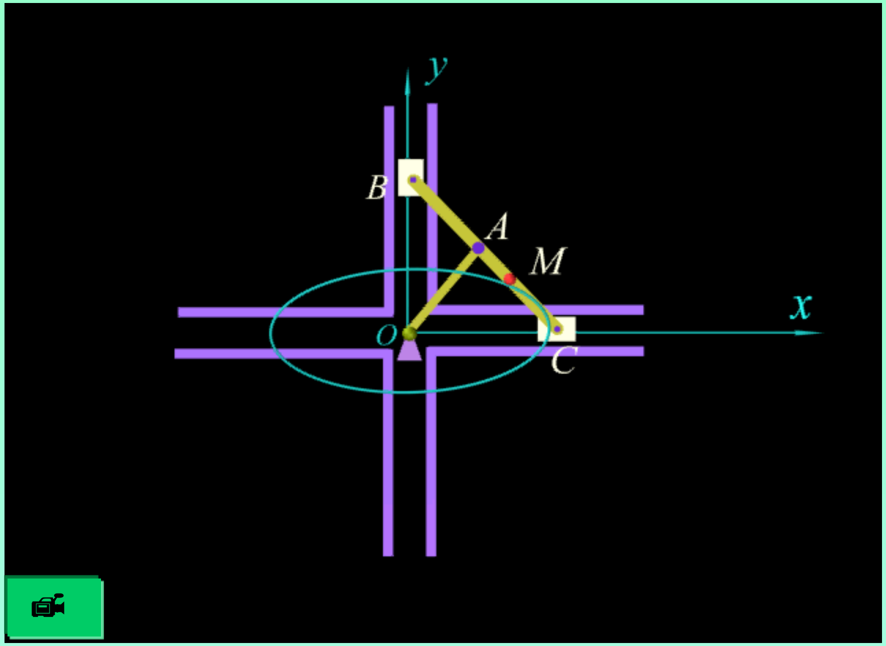




思考题

M点的轨迹是什么曲线 ?





轨 迹 演 示

§6-2 用矢量法表示点的速度和加速度

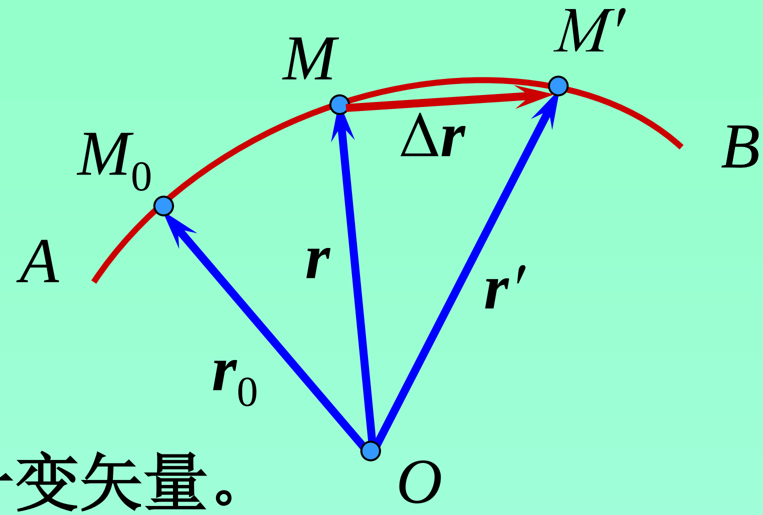
- 位移
- 速度
- 加速度

§ 6-2 用矢量法表示点的速度和加速度

1. 位 移

设有一点M沿曲线AB运动，在任一瞬时t，该点之位置可由如下矢径确定

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$



显然，当动点M沿 AB 运动时，$\boldsymbol{r}$是一变矢量。

从瞬时 t 到 $t+\Delta t$ ，动点位置由M改变到M'，其矢径分别为$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$。在时间间隔Δt内，$\boldsymbol{r}$ 之变化量为

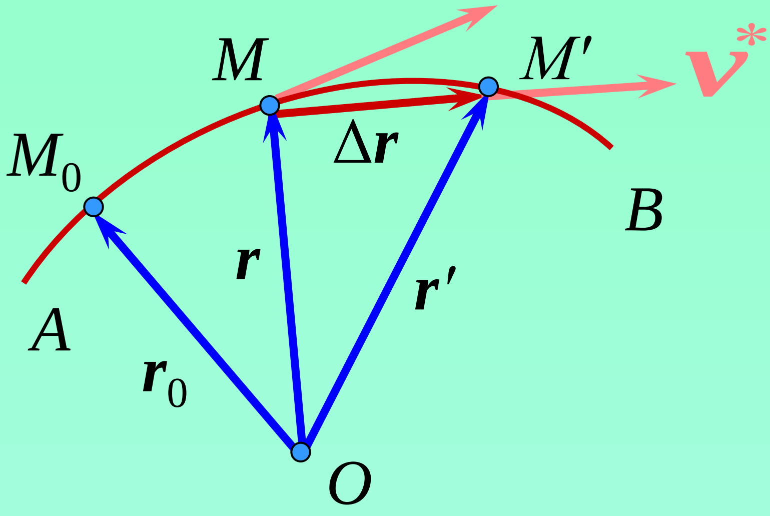
$$\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{MM'} = \Delta \boldsymbol{r}$$

它表示在Δt 时间内动点矢径之改变，称为动点在Δt 时间内的位移。

§6-2 用矢量法表示点的速度和加速度

2. 速 度

比值 $v^* = \dfrac{MM'}{\Delta t} = \dfrac{\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$



表示动点在Δt时间内的平均速度。

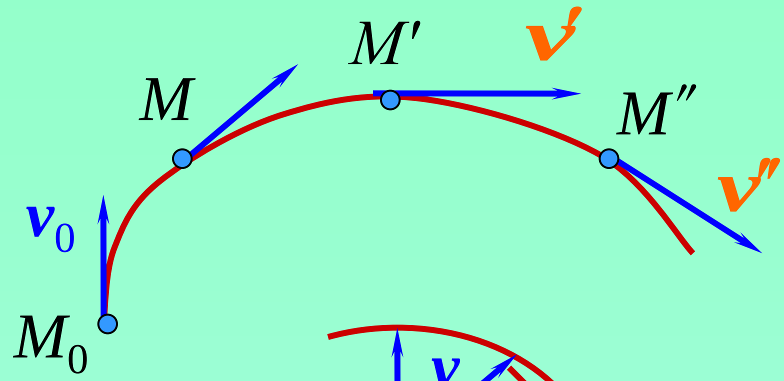
当$\Delta t \to 0$时，$\boldsymbol{v}^*$的极限值称为动点在瞬时t的瞬时速度

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}^* = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

即点的速度等于它之矢径对时间的一阶导数。

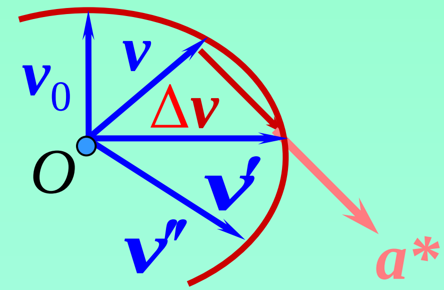
由矢导数定义知，动点瞬时速度$\boldsymbol{v}$的方向沿动点的矢端图（即轨迹曲线）的切线方向，并与此点的运动方向一致。

3. 加 速 度



设从某一固定点O画出动点在连续瞬间t_0，t， $t+\Delta t$、t_2…的速度矢

v_0 , v , v', v'' ……



连接各速度矢量之端点，可得一曲线，称为速度矢端图，此时可视v为一变矢量。

（1）、平均加速度

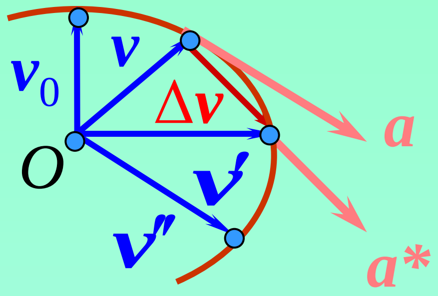
在Δt时间内，速度改变量为$\Delta \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}$，比值 $\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$ 称为在Δt时间内之平均加速度

$$\boldsymbol{a}^*=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

（2）、瞬时加速度

当$\Delta t\to 0$时，$\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$之极限称为动点在瞬时$t$之瞬时加速度。

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$



又　$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$　　则　$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

即动点的加速度等于它的速度对时间的一阶导数，或等于它的矢径对时间的二阶导数。其方向沿速度矢端图在该点的切线方向，并指向速度矢量变化的方向。

§6-3 用直角坐标法表示点的速度和加速度

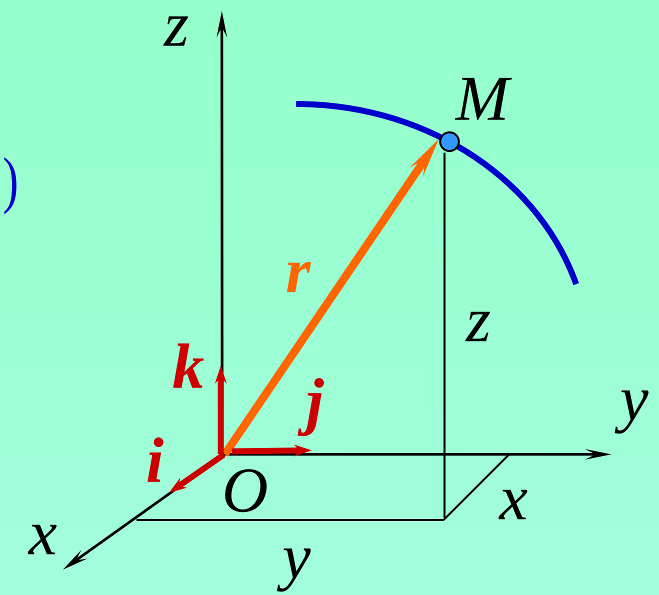
- 直角坐标法表示点的速度
- 直角坐标法表示点的加速度

§ 6-3 用直角坐标法表示点的速度和加速度

1. 直角坐标法表示点的速度

已知动点的直角坐标形式的运动方程

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t)$$



由坐标原点O画出动点的矢径

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

因而有速度的矢量法表达式

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$$

由于沿固定轴的单位矢$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$不随时间而变, 它们对时间的导数都等于零, 故得

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

§ 6-3 用直角坐标法表示点的速度和加速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

以v_x，v_y，v_z，代表速度$\boldsymbol{v}$在固定轴x，y，z上的投影，则有

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

与前式比较，得

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\qquad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\qquad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

即, 点的速度在固定直角坐标系各轴上的投影, 分别等于动点的对应坐标对时间的一阶导数。

已知动点速度的投影，可求出速度矢量*v*的大小和方向余弦。

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})=\frac{v_x}{v},\qquad \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})=\frac{v_y}{v},\qquad \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k})=\frac{v_z}{v}$$

2. 直角坐标法表示点的加速度

速度$\boldsymbol{v}$ 的矢量表达式

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

把速度$\boldsymbol{v}$ 的表达式对时间t 求导数，可得加速度的矢量表达式

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

另一方面，有分解式

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

加速度的矢量表达式 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$

加速度的分解式 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$

其中a_x，a_y，a_z是加速度$\boldsymbol{a}$ 在固定轴x，y，z上的投影。比较上述两式，得

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

即，点的加速度在固定直角坐标系各轴上的投影，分别等于点的速度的对应投影对时间的一阶导数，或者等于对应坐标对时间的二阶导数。

已知动点加速度的投影，可求出加速度$\boldsymbol{a}$ 的大小和方向余弦

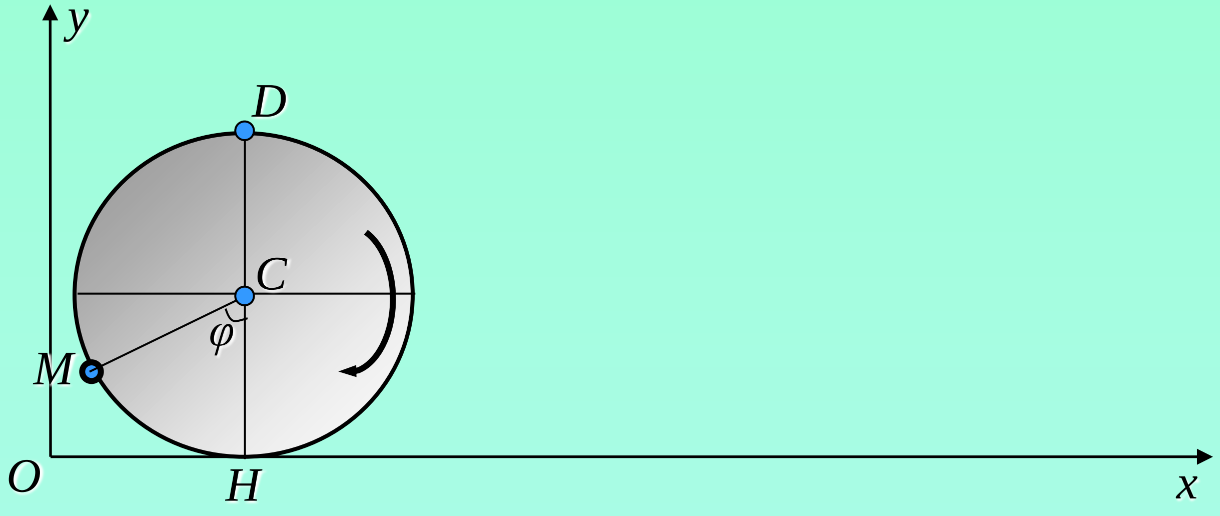
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$= \sqrt{(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t})^2}$$

$$= \sqrt{(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2})^2 + (\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}) + (\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2})^2}$$

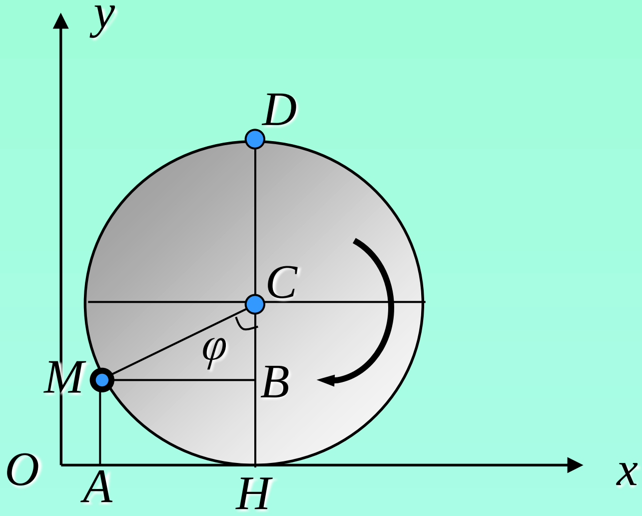
$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}) = \frac{a_z}{a}$$

例6-3 半径是 r 的车轮沿固定水平轨道滚动而不滑动（如图）。轮缘上一点M，在初瞬时与轨道上的O点叠合；在瞬时t半径MC与轨道的垂线HC组成交角$\varphi=\omega t$，其中ω是常量。试求在车轮滚一转的过程中该M点的运动方程，瞬时速度和加速度。



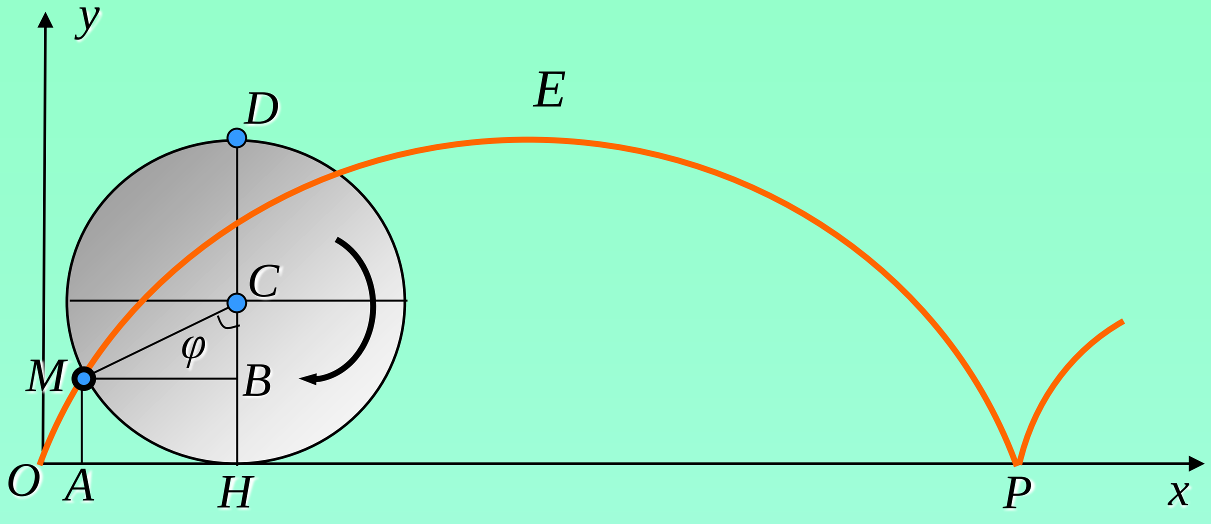
解： 1. 求M点的运动方程。

在M点的运动平面内取直角坐标系Oxy如图所示：轴 x 沿直线轨道，并指向轮子滚动的前进方向，轴 y 铅直向上。考虑车轮在任意瞬时位置，因车轮滚动而不滑动，故有$OH=\overset{\frown}{MH}$ 。于是，在图示瞬时动点M 的坐标为



$$x = OA = OH - AH = \overset{\frown}{MH} - MB$$
$$= r\varphi - r\sin\varphi$$

$$y = AM = HB = HC - BC$$
$$= r - r\cos\varphi$$



$$x = r\varphi - r\sin\varphi$$

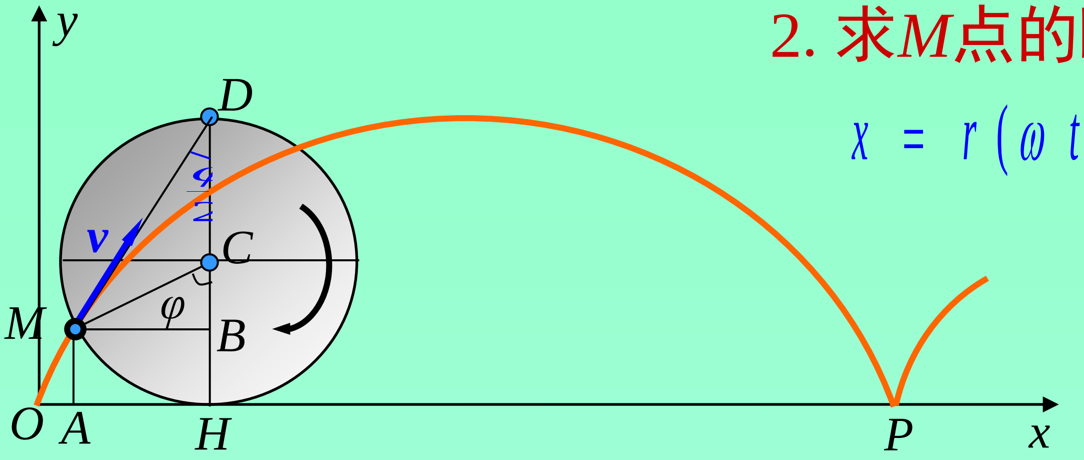
$$y = r - r\cos\varphi$$

以 $\varphi = \omega t$ 代入，得 M 点的运动方程

$$x = r(\omega t - \sin\omega t)$$

$$y = r(1 - \cos\omega t)$$

这方程说明 M 点的轨迹是滚轮线（即摆线）。车轮滚一圈的时间 $T=2\pi/\omega$ ，在此过程中，M 点的轨迹只占滚轮线的一环 OEP，其两端 O 和 P 是尖点。



2. 求M点的瞬时速度。

$$x = r(\omega t - \sin \omega t), \quad y = r(1 - \cos\omega t)$$

求坐标 x，y 对时间的一阶导数，得

$$v_x = r\omega(1 - \cos\omega t)$$

$$v_y = r\omega \sin\omega t$$

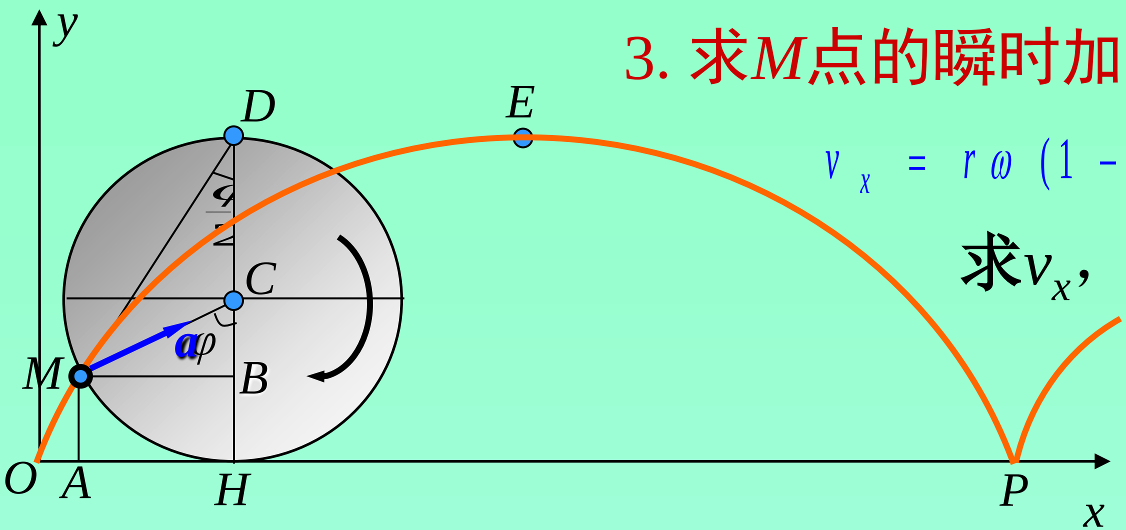
故得M点速度 v 的大小和方向，有

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega\sqrt{(1 - \cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t} = 2r\omega \sin\frac{\omega t}{2}$$

$$\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}) = \frac{v_x}{v} = \sin\frac{\omega t}{2} = \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{MB}{MD}$$

$$\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{j}) = \frac{v_y}{v} = \cos\frac{\omega t}{2} = \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{BD}{MD}$$

M点的速度矢恒通过轮子的最高点D。



3. 求M点的瞬时加速度。

$$v_x = r\omega(1-\cos\omega t) \qquad v_y = r\omega\sin\omega t$$

求v_x，v_y对时间的一阶导数，得

$$a_x = r\omega^2\sin\omega t$$

$$a_y = r\omega^2\cos\omega t$$

故得M点加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小和方向，有

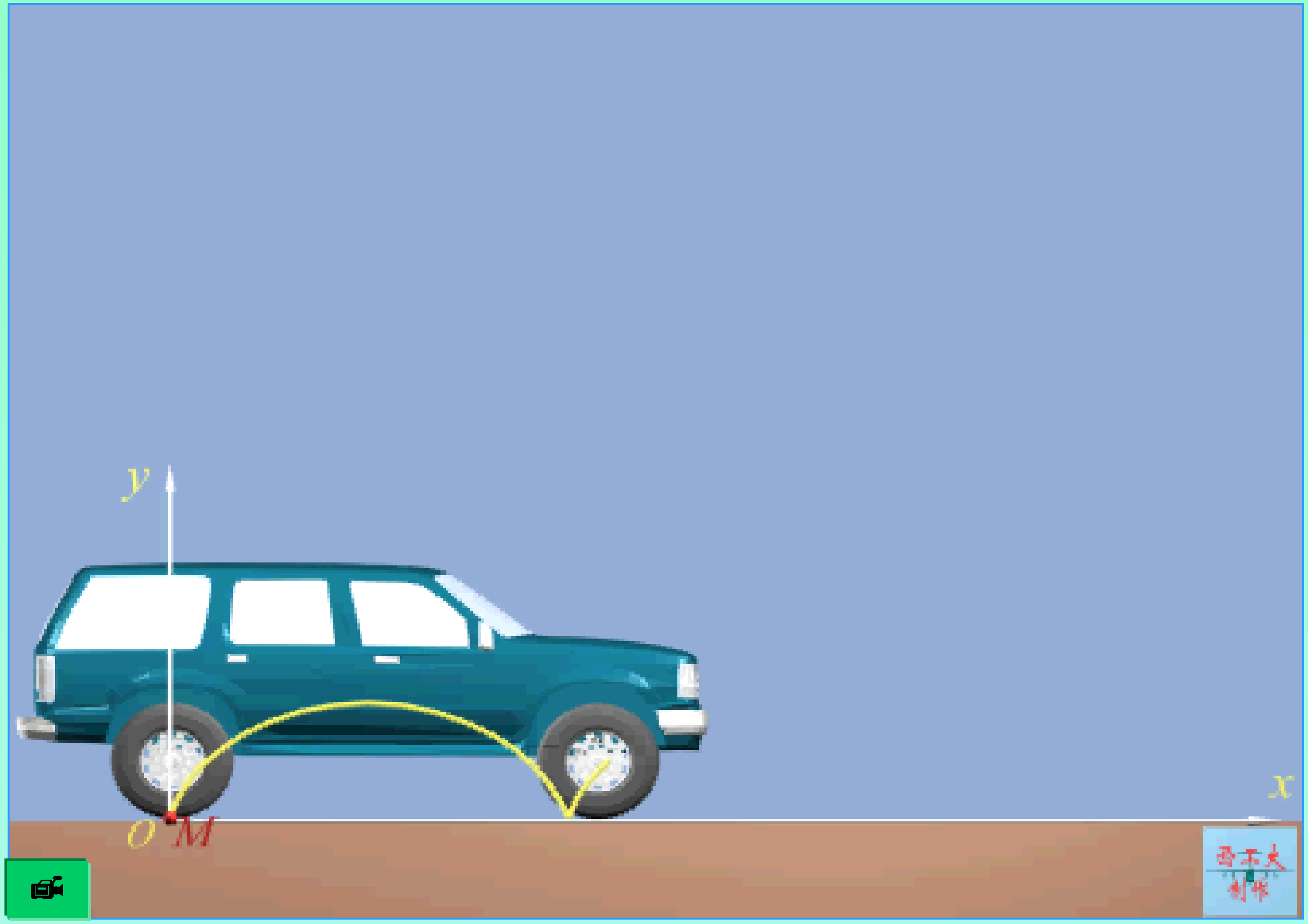
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2, \quad \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}) = \frac{a_y}{a} = \cos\varphi = \frac{BC}{MC}, \quad \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}) = \frac{a_x}{a} = \sin\varphi = \frac{MB}{MC}$$

当$t = 0$时，有　$x=0$，$y=0$；　$v_x = 0$，$v_y = 0$；$a_x = 0$，$a_y = r\omega^2$

这表示，当M点接触轨道时，它的速度等于零，而加速度垂直于轨道。这是轮子沿固定轨道滚而不滑的特征。

§ 6-3 用直角坐标法表示点的速度和加速度

例题6-3



轨 迹 演 示

§6-4 自然法表示点的速度和加速度

- 曲线的曲率 ·自然轴系
- 点的速度在自然轴上的投影
- 点的加速度在自然轴上的投影

§6-4 自然法表示点的速度和加速度

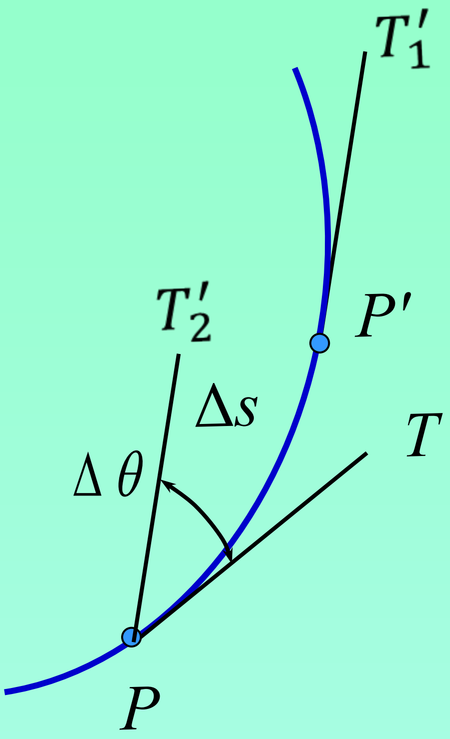
1. 曲线的曲率 ·自然轴系

- $\Delta\theta$（取绝对值）称为曲线对应于弧 PP'的**邻角**，可用来说明该曲线的弯曲程度。

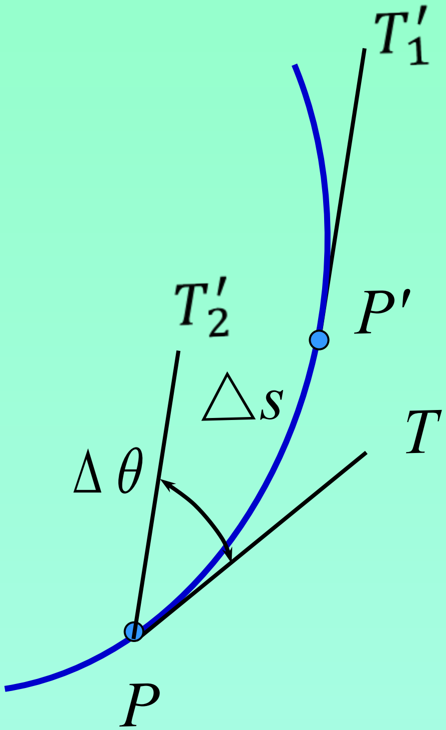
- 比值 $\Delta\theta/|\Delta s|$ 可用来表示弧PP'的平均弯曲程度，并称为**平均曲率**。

- 当点P'趋近于点P时，平均曲率的极限值称为曲线在点P处的**曲率**，用k表示，有

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$$



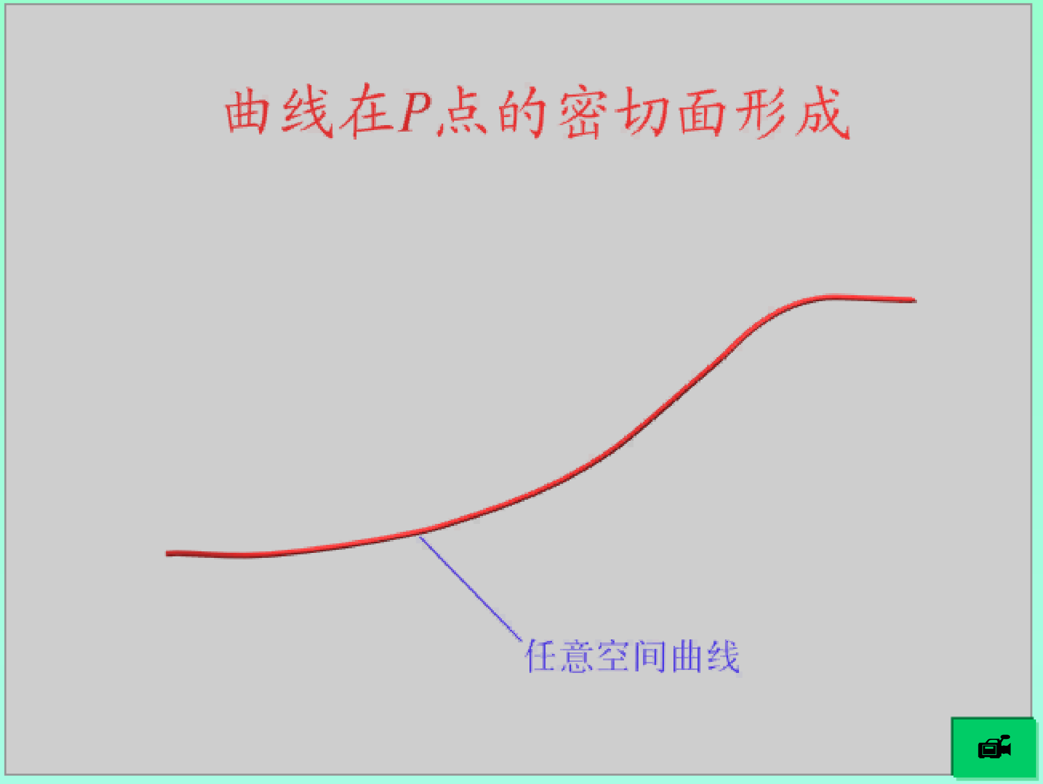
曲 率 $k=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$



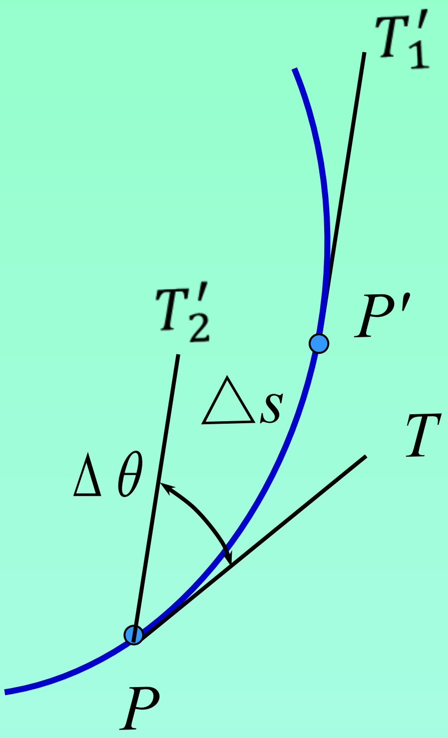
● 曲线在点P 的曲率的倒数，称为曲线在点M的**曲率半径**，用ρ表示，有

$$\rho=\frac{1}{k}$$

密切面



在图中，点P'趋近于P，即 $|\Delta s|$ 趋近于零的过程中，包含直线 PT 和 PT_2' 的平面，将绕PT转动而趋近于某一极限位置；在该极限位置的平面称为曲线在点P的密切面或曲率平面。



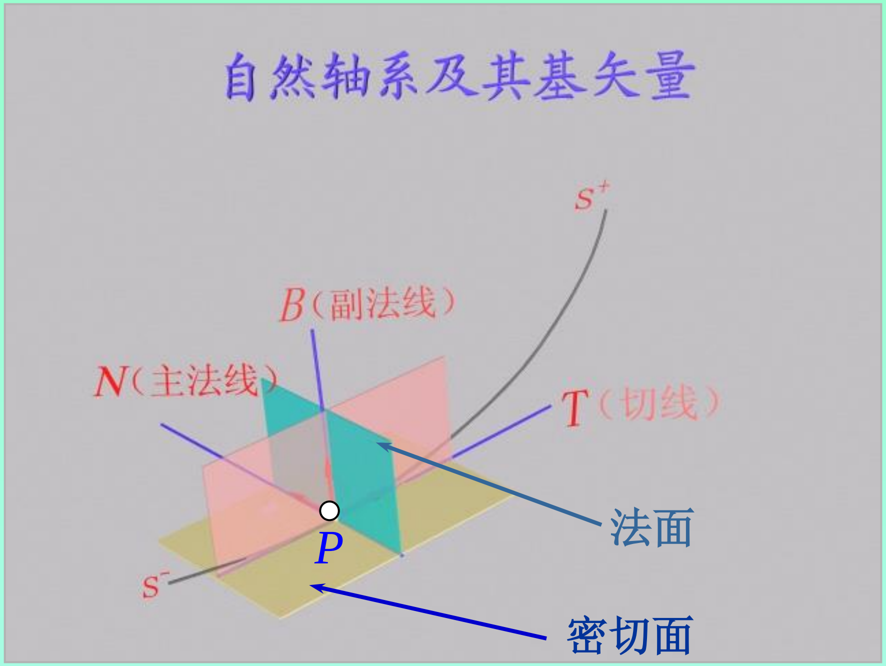
§6-4 自然法表示点的速度和加速度

法面 · 主法线 · 副法线

通过点P而与切线垂直的平面，称为曲线在点P的法面。

法面与密切面的交线PN称为主法线。

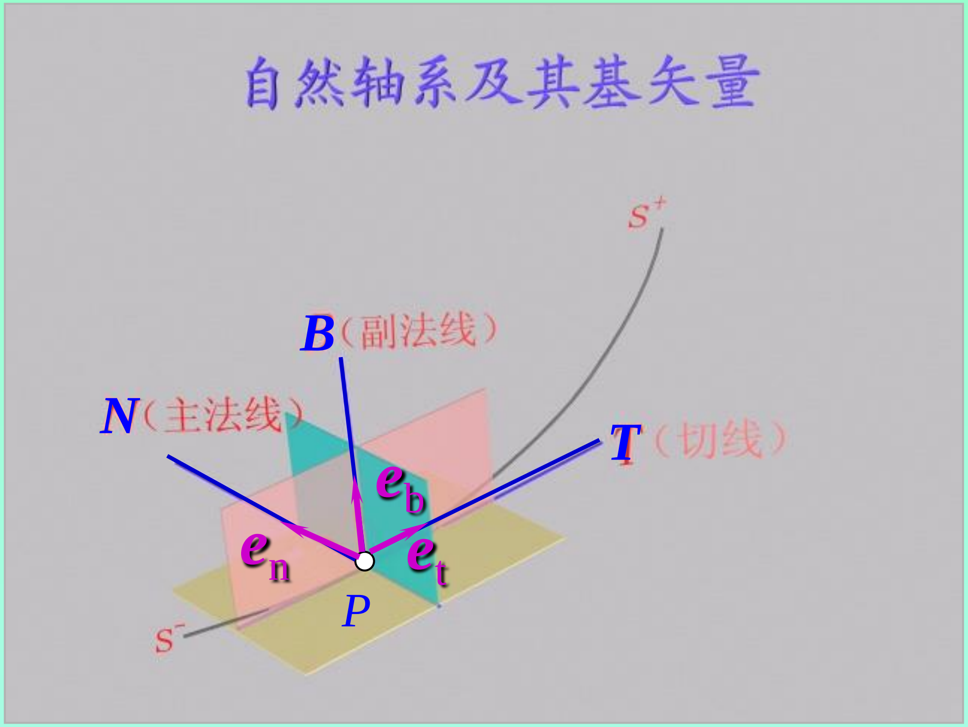
法面内与主法线垂直的直线PB称为副法线。



§ 6-4 自然法表示点的速度和加速度

● 自然轴系

在点P处曲线的切线、主法线和副法线组成一个空间坐标架，称为点P的自然轴系；

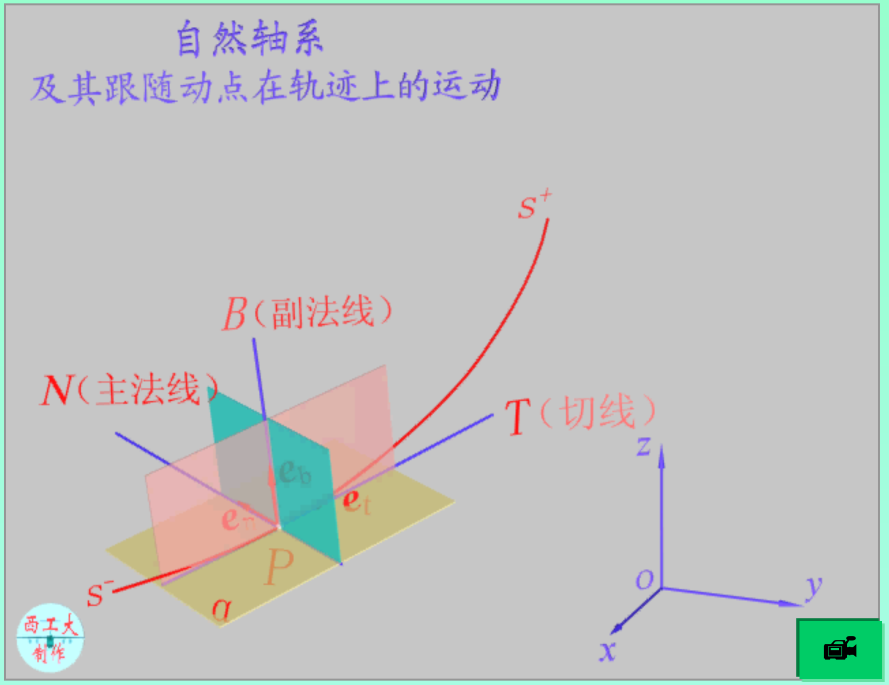


各轴的正向规定如下：设用$\boldsymbol{e}_t$, $\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{e}_b$代表这三个轴的轴向单位矢，则$\boldsymbol{e}_t$指向弧坐标增加的一方，$\boldsymbol{e}_n$指向曲线的凹边，而 $\boldsymbol{e}_b = \boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_n$；

§6-4 自然法表示点的速度和加速度

曲线上的点都具有自己的自然轴系，故$\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$，$\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$，$\boldsymbol{e}_\mathrm{b}$都是方向随点$P$的位置而改变的单位矢。

可见自然轴系是随点P的位置而改变的直角空间坐标架，它在研究点沿已知轨迹的运动时有重要的意义。



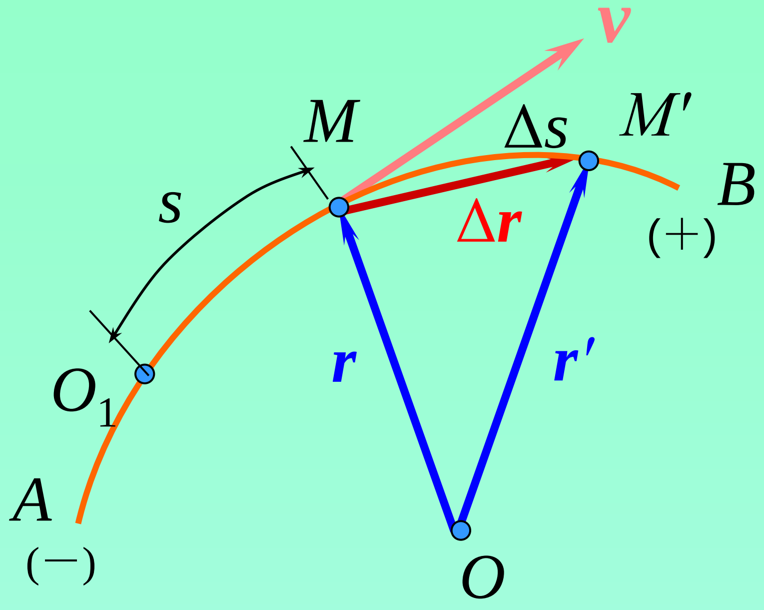
2. 点的速度在自然轴上的投影

设已知点M的运动轨迹和运动方程

$$s = f(t)$$

M点的速度（矢量）为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$



大小 $v = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right|\cdot\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| \qquad \left(\text{由于}\quad \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right| \to 1\right)$$

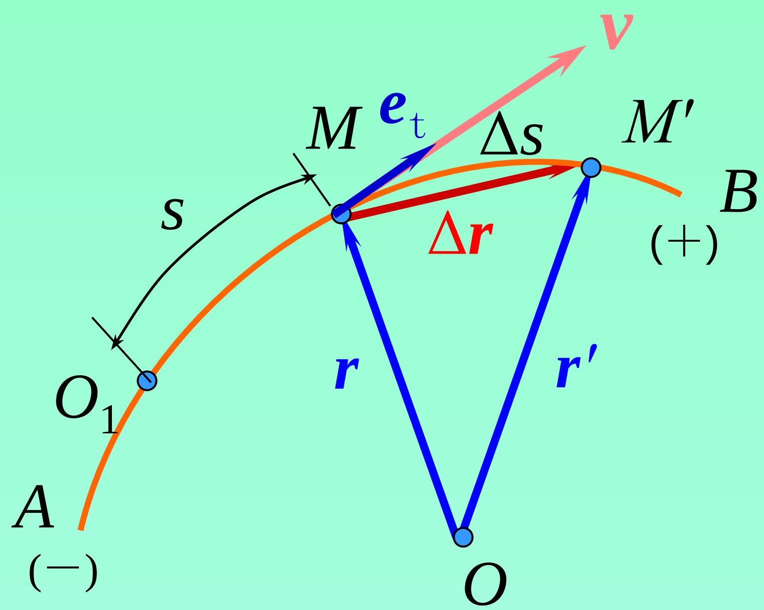
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$$

方向

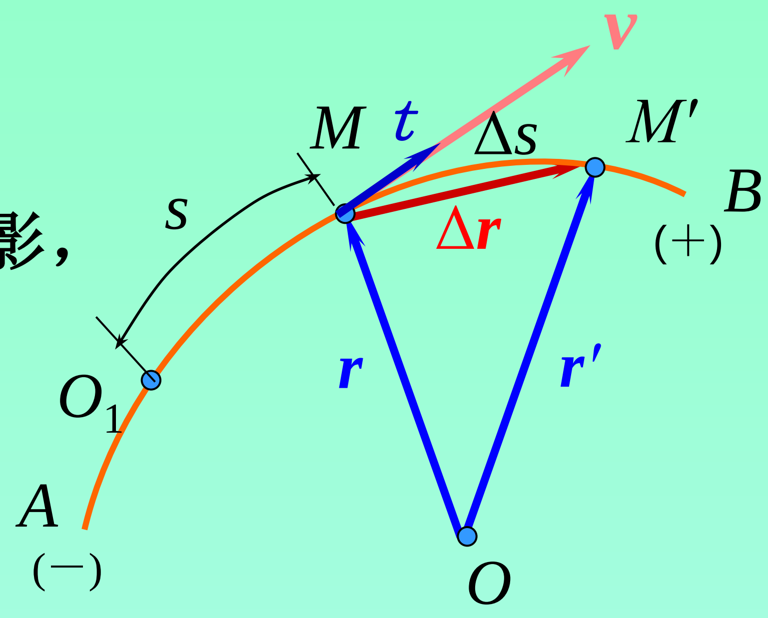
方向沿轨迹在M处的切线$\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$并指向弧坐标增加的一方。

可见，点M的速度是沿轨迹切线，并可表示为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}=v\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$$



$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}=v\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$$



其中v是速度矢量在切线正向的投影，大小等于

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

即：动点的速度在切线上的投影，等于它的弧坐标对时间的一阶导数。又沿轨迹切线，所以它在法线上的投影恒等于零。

3. 点的加速度在自然轴上的投影

根据加速度的定义以及弧坐标中速度的表达式

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}, \quad \boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$$

$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + v\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}}$$

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}} = ?}$$

$$a = \dot{v}e_t + v\dot{e}_t \qquad \dot{e}_t = ?$$

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_t}{dt}\cdot\frac{d\theta}{d\theta}\cdot\frac{ds}{ds}$$

$$= \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

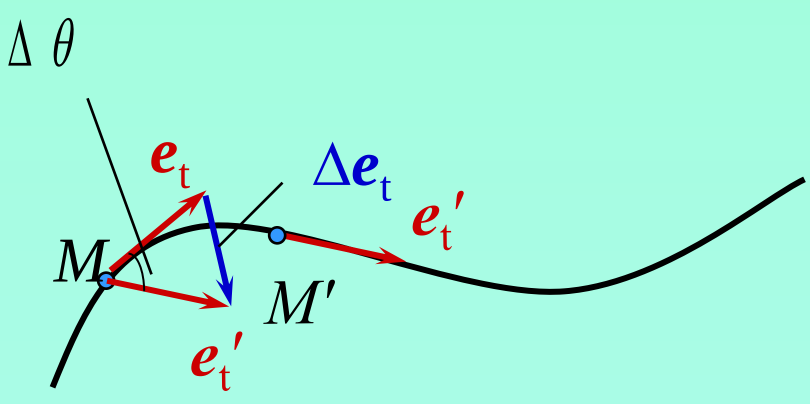
$$? \qquad \frac{1}{\rho} \qquad \dot{s} = v$$

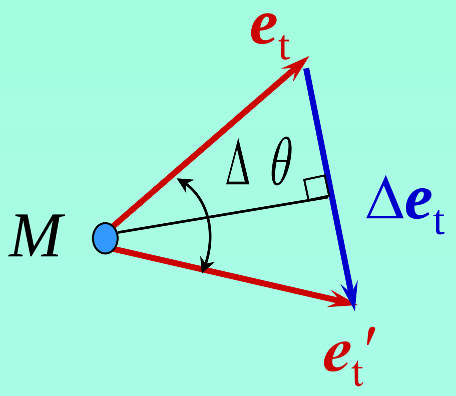
$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\theta}$ 大小

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\theta}\right| = \lim_{\Delta\theta\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\Delta\theta}\right|$$

因为 $\Delta e_{\mathrm{t}} = 2\left|\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}\right|\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}$ 所以

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\theta}\right| = \lim_{\Delta\theta\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\Delta\theta}\right| = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{2\left|\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}\right|\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}} = 1$$

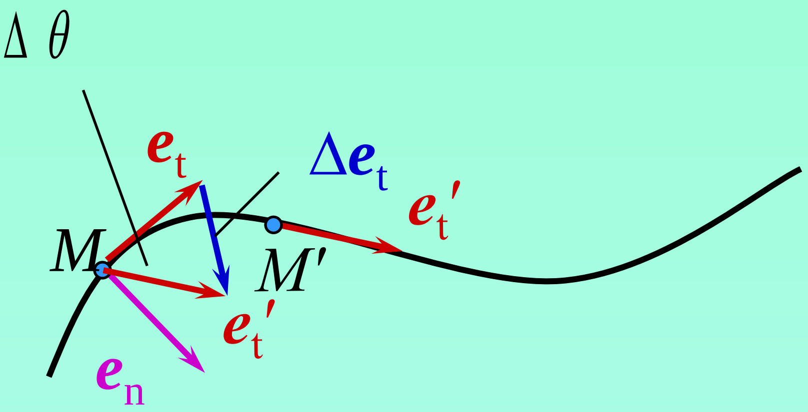




$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\theta}$ 方向

当 $\Delta\theta\to 0$时， $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ 和 $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}'$以及 $\Delta\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ 同处于M点的密切面内，这时， $\Delta\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ 的极限方向垂直于$\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ ，亦即沿 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$方向。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\theta}=\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$$



$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + v\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}} \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}} = ?$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\theta} = \mathbf{e}_{\mathrm{n}} \qquad \frac{1}{\rho} \qquad \dot{s} = v$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + \frac{v^{2}}{\rho}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$

- 加速度在自然轴系上的投影形式

$$\boldsymbol{a} = a_{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + a_{\mathrm{n}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} + a_{\mathrm{b}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{b}}$$

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \ddot{s}$$ 切向加速度

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^{2}}{\rho}$$ 法向加速度

$$a_{\mathrm{b}} = 0$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$$

讨论

● 切向加速度 $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t} = \ddot{s}$ 表示速度矢量大小的变化率；

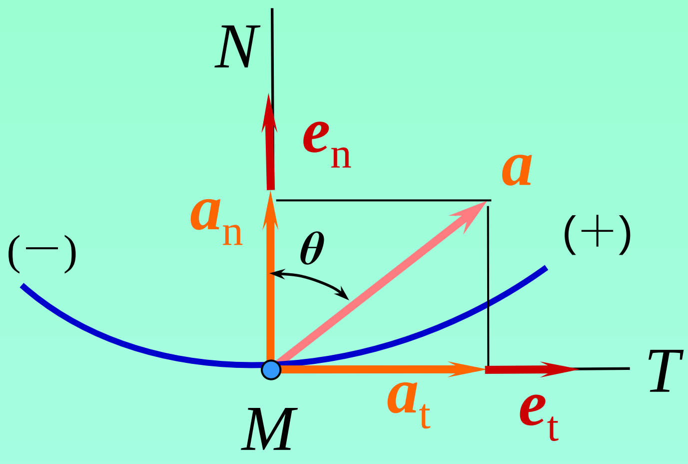
● 法向加速度 $a_n = \dfrac{v_t^2}{\rho}$ 表示速度矢量方向的变化率；

● $\boldsymbol{a}_b = 0$ 即 $a_b\boldsymbol{e}_b = 0$，表明加速度 $\boldsymbol{a}$ 在副法线方向没有分量；还表明速度矢量$\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量$\boldsymbol{a}$ 都位于密切面内。

●加速度大小和方向

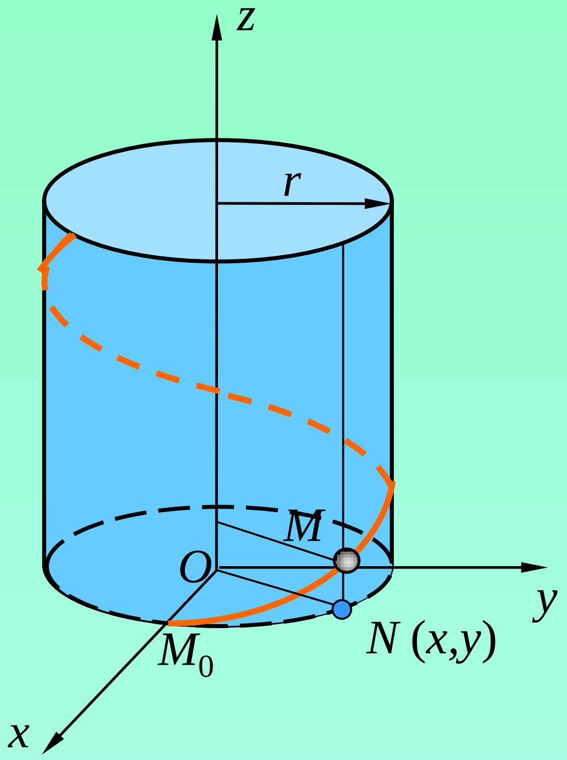
因为加速度的两个分量$\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ 与$\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ 是相互垂直的，故得加速度$\boldsymbol{a}$ 的大小为

$$a=\sqrt{a_\mathrm{t}^2+a_\mathrm{n}^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$



加速度$\boldsymbol{a}$与主法线所成的角度θ（恒取绝对值），由下式确定

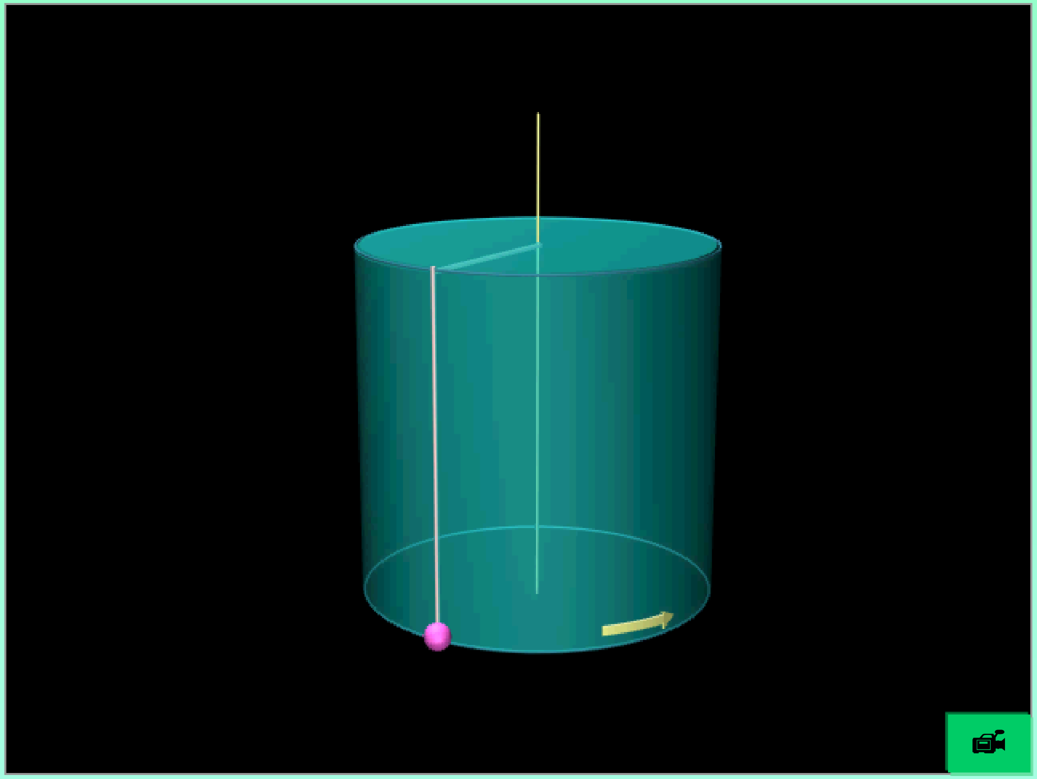
$$\tan\theta=\frac{|a_\mathrm{t}|}{a_\mathrm{n}}$$



例6-4 圆柱的半径为r，绕铅直固定轴 z 作匀速转动，周期为 T 秒。动点M以匀速 u 沿圆柱的一条母线NM运动（如图）试求M点的轨迹、速度和加速度，并求轨迹的曲率半径。

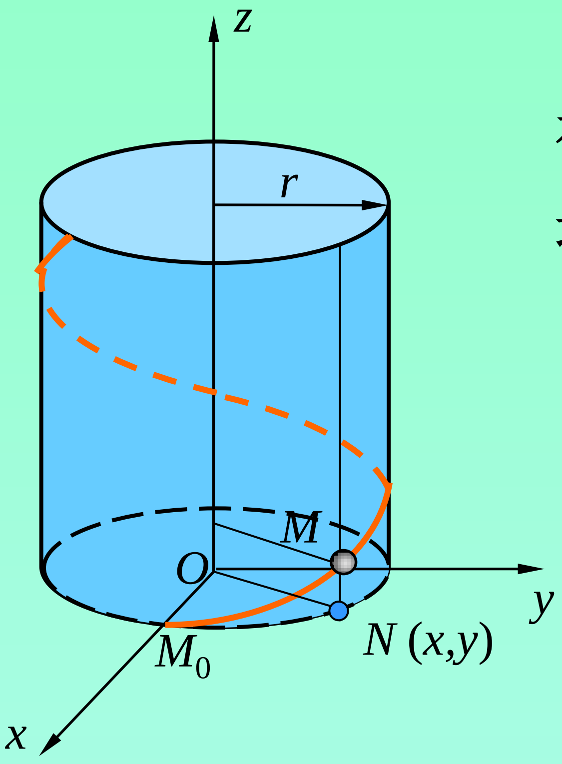
§ 6-4 自然法表示点的速度和加速度

例题6-4



运 动 演 示

解： 1. M点的运动方程和轨迹。



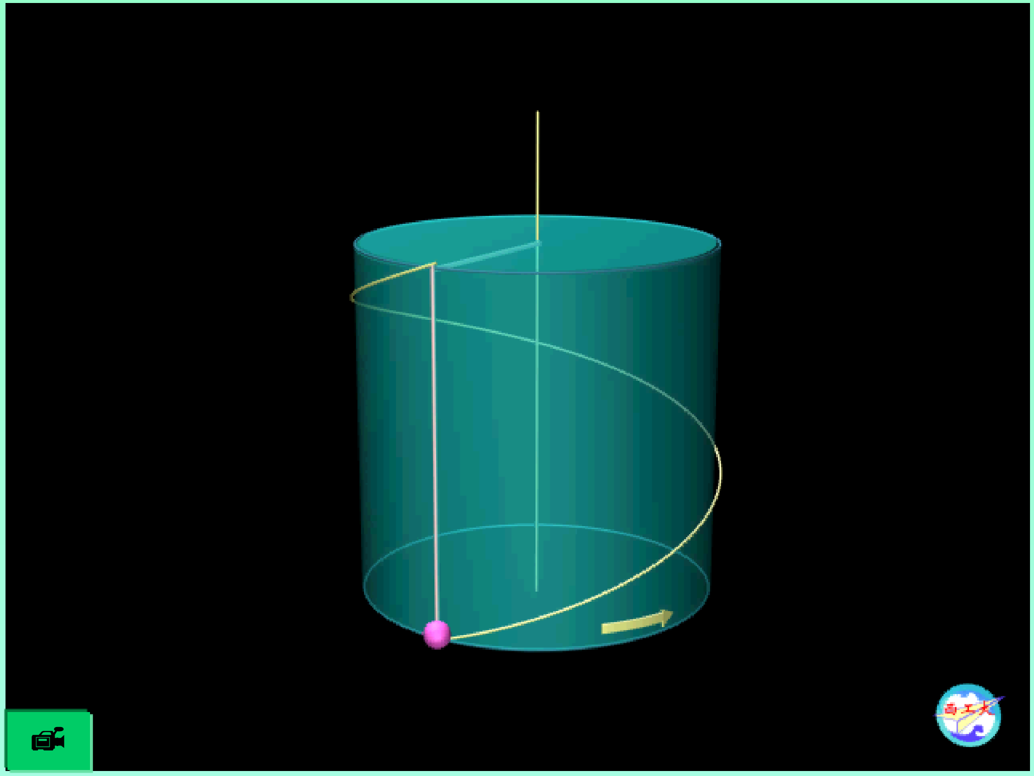
取固定直角坐标系$Oxyz$如图所示。设开始时M点在M_0位置，当圆柱转动时，角$\angle M_0ON$随时间成正比地增加，在瞬时t，它等于$\dfrac{2\pi}{T}t$，故M点的坐标为

$$x = r\cos(\frac{2\pi}{T}t), \quad y = r\sin(\frac{2\pi}{T}t), \quad z = ut$$

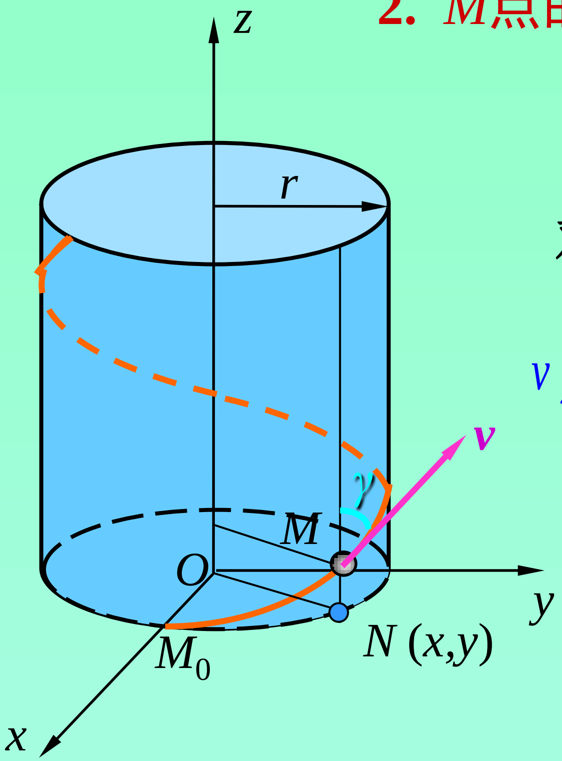
这就是M点的运动方程。

M点的轨迹方程 $x = r\cos(\dfrac{\omega z}{u}), \quad y = r\sin(\dfrac{\omega z}{u})$

这螺旋线方程就是M点在固定坐标系中的运动轨迹。



轨 迹 演 示



2. M点的速度。

$$x = r\cos(\frac{2\pi}{T}t), \quad y = r\sin(\frac{2\pi}{T}t), \quad z = ut$$

对运动方程求导得

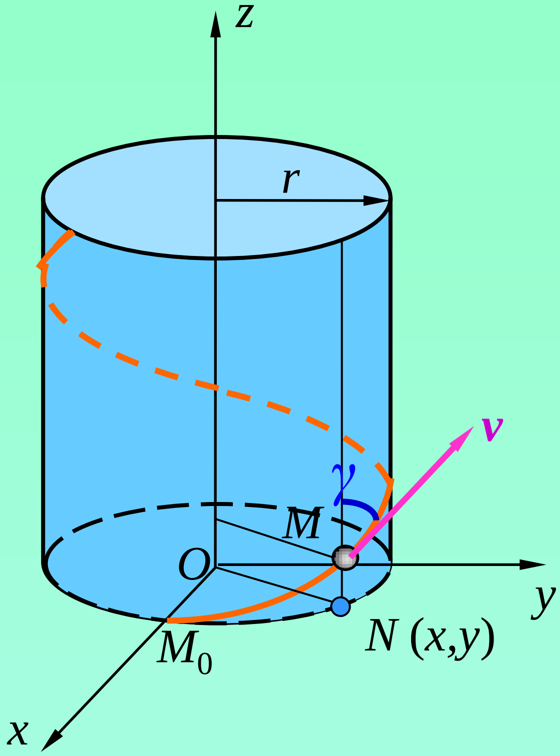
$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega\sin\omega t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = r\omega\cos\omega t, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = u$$

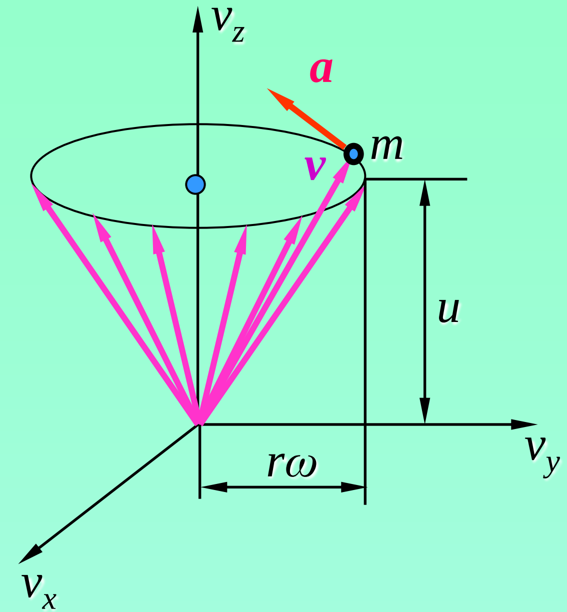
速度在平面Oxy上的投影大小等于 $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + u^2} = \text{常数}$$

$$\cos\gamma = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{u}{\sqrt{r^2\omega^2 + u^2}}$$

速度与圆柱母线的交角γ不变。





速度矢端图是一个半径为$r\omega$的圆周，且平行于平面Oxy。

3. 点M的加速度。

$$v_x = -r\omega \sin \omega t$$

$$v_y = r\omega \cos \omega t$$

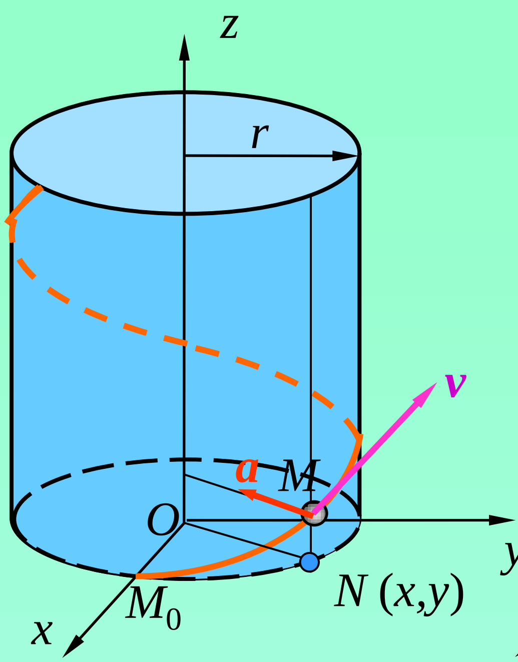
$$v_z = u$$

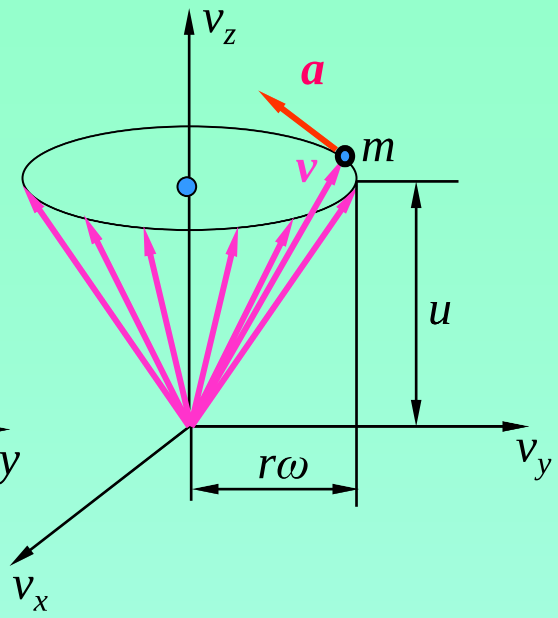
对速度方程求导得

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2 \cos\omega t$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -r\omega^2 \sin\omega t$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0$$

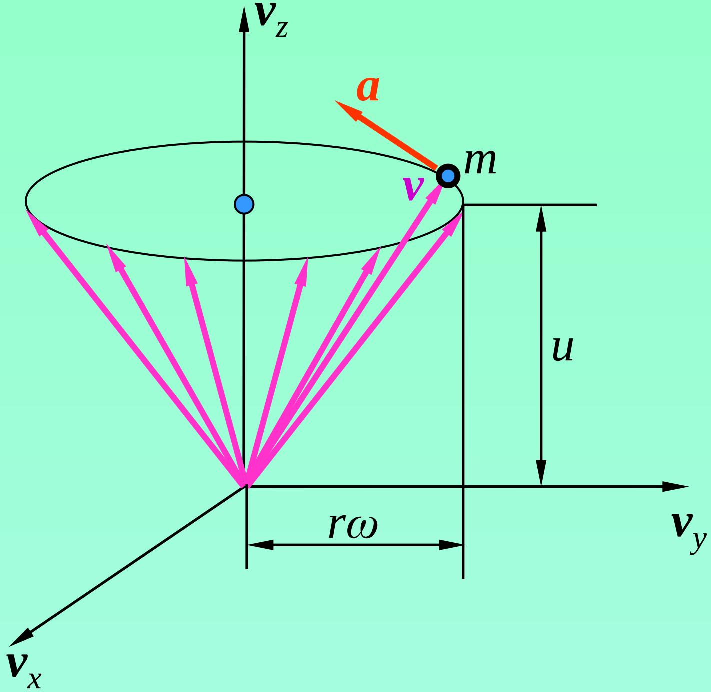




因$a_z = 0$，故加速度 a 垂直于 z 轴

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向指向 z 轴。



4. 曲率半径。

曲率半径 $\rho = v^2 / a_n$

$a_t = 0, \qquad a_n = |\boldsymbol{a}|$

$$\rho = \frac{v^2}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{r^2\omega^2 + u^2}{r\omega^2} = r + \frac{u^2}{r\omega^2}$$

曲率半径为常数

$$\rho = \frac{r}{\sin^2 \gamma}$$

谢谢使用