第八章 B样条曲线曲面

（Ⅱ）

第一节　反算B样条插值曲线的控制顶点

一、反算的一般过程

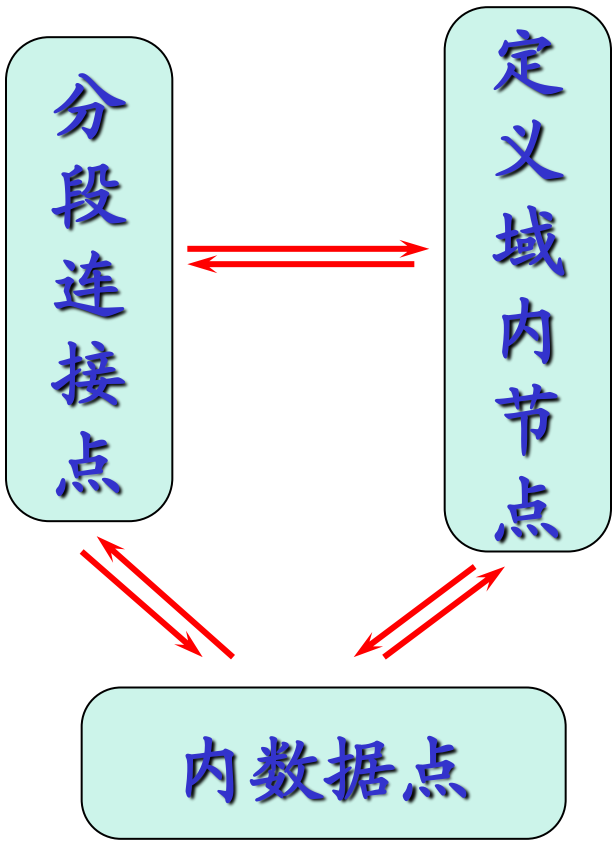
问题：

设计一条k次B样条曲线，插值给定的数据点，如何确定节点矢量、控制顶点的个数和位置？

解决方案：

一般地，将曲线的首末端点分别与首末数据点对应起来，为实现这一目的，需要将首末节点都取作k＋1重。另外，将曲线的分段连接点和内数据点（除首末数据点以外的数据点依次对应，根据上一章节点矢量的确定方法，曲线分段连接点和定义域内的内部节点也一一对应起来，所以：

一、反算的一般过程



建立了这种对应关系后，曲线的段数以及节点矢量的大小就可以确定了。

设有n个待插值的数据点$\vec{p}_i, i = 0, 1, \cdots, n$

首节点为k+1重，即：

$$u_0 = u_1 = \cdots = u_k$$

它们与第一个待插值点$\vec{p}_0$对应。

一、反算的一般过程

内部数据点与定义域内的节点一一对应，所以：

$\vec{p}_i$与节点值$u_{k+i}, i = 0,1,\cdots n$一一对应。

这样，插值曲线的定义域就是$[u_k, u_{n+k}]$

因为，一般情况下，对于m+1个控制顶点的k次B样条曲线，它的定义域为:$[u_k, u_{m+1}]$

所以，插值曲线应有n + k个控制顶点，记作：

$$\vec{d}_0, \vec{d}_1, \cdots \vec{d}_{n+k-1}$$

一、反算的一般过程

这样，节点矢量就确定为：$U=[u_0,u_1,\cdots,u_{n+2k}]$，一般情况下，取：$u_0=u_1=\cdots u_k=0; u_{n+k}=u_{n+k+1}=\cdots u_{n+2k}=1$。定义域内的节点矢量可以利用规范累积弦长参数化等方法确定。

至此，插值曲线的控制顶点个数、节点矢量已经确定，下面列出如下的插值方程：

$$\vec{p}(u_{k+i})=\sum_{j=0}^{n+k-1}\vec{d}_j N_{j,k}(u_{k+i})=\vec{p}_i \quad i=0,1,\cdots,n$$

一、反算的一般过程

显然，上述方程组共有n+1个方程，但共有n+k个未知数，需要补充k-1个根据边界条件确定的方程才能求解。

二、三次B样条插值曲线

1、节点矢量的确定

根据此前的分析可知，对于三次B样条曲线（k＝3）若插值数据点为：$\vec{p}_i, i=0,1,\cdots,n$。控制顶点应为n＋3个，设为$\vec{d}_i, i=0,1,\cdots,n+2$。

节点矢量为：$U=\left[u_0,u_1,\cdots,u_{n+6}\right]$,其中：

$u_0=u_1=u_2=u_3=0; u_{n+3}=u_{n+4}=u_{n+5}=u_{n+6}=1,$

定义域为$u\in\left[u_3,u_{n+3}\right]$

二、三次B样条插值曲线

2、反算控制顶点

插值条件确定的方程为：

$$\vec{p}(u_{i+3})=\sum_{j=0}^{n+2}\vec{d}_j N_{j,3}(u_{i+3})=\sum_{j=i}^{i+3}\vec{d}_j N_{j,3}(u_{i+3})=\vec{p}_i$$

$$\vec{p}(u)=\sum_{j=i-3}^{i}\vec{d}_j N_{j,3}(u)\quad u\in[u_{i+3},u_{i+4}]\subset[u_3,u_{n+3}],i=0,1,\cdots,n$$

二、三次B样条插值曲线

(1) 闭曲线

为了使封闭曲线($\vec{p}_0=\vec{p}_n$)达到C²连续，要求$\vec{d}_{n+i}=\vec{d}_i, i=0,1,2$。

这时，插值方程为：

$$\begin{bmatrix} N_{1,3}(u_3) & N_{2,3}(u_3) & & N_{0,3}(u_3) \\ N_{1,3}(u_4) & N_{2,3}(u_4) & N_{3,3}(u_4) & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & N_{n-2,3}(u_{n+1}) & N_{n-1,3}(u_{n+1}) & N_{n,3}(u_{n+1}) \\ N_{n+1,3}(u_{n+2}) & & N_{n-1,3}(u_{n+2}) & N_{n,3}(u_{n+2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \\ \vdots \\ \vec{d}_{n-1} \\ \vec{d}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{p}_0 \\ \vec{p}_1 \\ \vdots \\ \vec{p}_{n-2} \\ \vec{p}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_0=\vec{p}_n$$

二、三次B样条插值曲线

计算上述矩阵中各元素的值，可得：

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & \\ c_n & & a_n & b_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \\ \vdots \\ \vec{d}_{n-1} \\ \vec{d}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_{n-1} \\ \vec{e}_n \end{bmatrix}$$

其中：

$$a_i = \frac{(\Delta_{i+2})^2}{\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}} \qquad c_i = \frac{(\Delta_{i+1})^2}{\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3}}$$

二、三次B样条插值曲线

$$b_i = \frac{\Delta_{i+2}(\Delta_i + \Delta_{i+1})}{\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}} + \frac{\Delta_{i+1}(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})}{\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3}}$$

$$\vec{e}_i = (\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})\vec{p}_{i-1} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

(2) 开曲线

下面需要根据各种边界条件，添加两个方程才能求解。

常见的边界条件有：“切矢条件”、“自由端点条件”、“虚节点条件”、“抛物线条件”、“非节点条件”等。不同的边界条件补充的两个方程是不同的。

二、三次B样条插值曲线

以切矢条件为例，它确定的补充方程为：

$$\vec{d}_0 = \vec{p}_0 \quad \vec{d}_{n+2} = \vec{p}_n$$

$$\vec{p}_0' = \vec{p}'(u_3) = \frac{3}{\Delta_3}(\vec{d}_1 - \vec{d}_0)$$

$$\vec{p}_n' = \vec{p}'(u_{n+3}) = \frac{3}{\Delta_{n+2}}(\vec{d}_{n+2} - \vec{d}_{n+1})$$

这时方程组为：

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & a_n & b_n & c_n \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \\ \vdots \\ \vec{d}_n \\ \vec{d}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \\ \vec{e}_{n+1} \end{bmatrix}$$

二、三次B样条插值曲线

其中的a_i, b_i, c_i和$\vec{e}_i, i = 2,3,\cdots,n$与封闭曲线方程中的值完全相同，不同之处在于：

$$\vec{e}_1 = \vec{p}_0 + \frac{\Delta_3}{3}\vec{p}_0' \quad \vec{e}_{n+1} = \vec{p}_n - \frac{\Delta_{n+2}}{3}\vec{p}_n'$$

对于其它边界条件下的方程，详见课本p258～p259


第一节
结束

第二节　插入节点

一、插入节点

1、插入节点的作用

- 能简单证明B样条曲线的变差缩减性;
- 进一步改善B样条曲线的局部性质，增加修形的灵活性;
- 可以计算出B样条曲线上的一点;
- 可以生成每段曲线的Bezier点;
- 可以实现对曲线的分割;
- 在生成张量积B样条曲面时，可以统一不同的节点矢量。

一、插入节点

2、问题

已知k次B样条曲线： $\vec{p}(u)=\sum_{j=0}^{n}\vec{d}_j N_{j,k}(u)$,其节点矢量为

$U=[u_0,u_1,\cdots,u_{n+k+1}]$,在定义域$[u_k,u_{n+1}]$中的某个节点区间

$[u_i,u_{i+1}]$内插入一个节点u,这时新的节点矢量为：

$$\bar{U}=[u_0,u_1,u_2,\cdots,u_i,u,u_{i+1},\cdots,u_{n+k+1}]$$

将其重新编号后为：

$$\bar{U}=[u_0^1,u_1^1,\cdots,u_i^1,u_{i+1}^1,u_{i+2}^1,\cdots,u_{n+k+2}^1]$$

一、插入节点

显然，新旧节点之间的关系为：

$$u_j^1 = u_j \quad j = 0,1,\cdots,i \qquad u_{i+1}^1 = u \quad u_j^1 = u_{j-1} \quad j = i+2, i+3, \cdots, n+k+2$$

这时，建立在新节点矢量上的B样条基函数记为：

$$\bar{N}_{i,k}(u), \quad i = 0,1,\cdots n+1$$

原曲线在新节点上的表达式为：

问题：如何计算新的控制顶点？

$$\vec{p}(u) = \sum_{j=0}^{n+1} \vec{\bar{d}}_j \bar{N}_{j,k}(u)$$

一、插入节点

3、算法（Boehm 1980）

$$\vec{\bar{d}}_j=\begin{cases}\vec{d}_j & j=0,1,\cdots,i-k\\ \vec{\bar{d}}_j=(1-\alpha_j)\vec{d}_{j-1}+\alpha_j\vec{d}_j & j=i-k+1,\cdots,i-r\\ \text{其中：}\ \alpha_j=\dfrac{u-u_j}{u_{j+k}-u_j} & \\ \vec{\bar{d}}_j=\vec{d}_{j-1} & j=i-r+1,\cdots,n+1\end{cases}$$

其中：r表示所插入的节点u在旧节点矢量U中的重复度。

若u为一个全新的节点，即：$u_i<u<u_{i+1}$，则$r=0$。

一、插入节点

若重复度$r<k$,则有$u=u_i=u_{i-1}=\cdots=u_{i-r+1}$

注:

1）这个算法实际上就是求k次B样条曲线上一点p(u)的第一级递推过程。其中$u\in[u_i,u_{i+1}]\subset[u_k,u_{n+1}]$。

2）算法是只是局部几个控制顶点的内部线性插值，用线性插值生成的新顶点替代旧的控制顶点。涉及的控制顶点和节点只是有限的几个，而与其它控制顶点、节点无关。

一、插入节点

具体而言：

当$r=0$时，即插入了一个新的节点u,它涉及的节点有：

$$u_{i-k+1}, u_{i-k+2}, \cdots, u_{i+k}$$

涉及的控制顶点有：

$$\vec{d}_{i-k}, \vec{d}_{i-k+1}, \cdots, \vec{d}_{i}$$

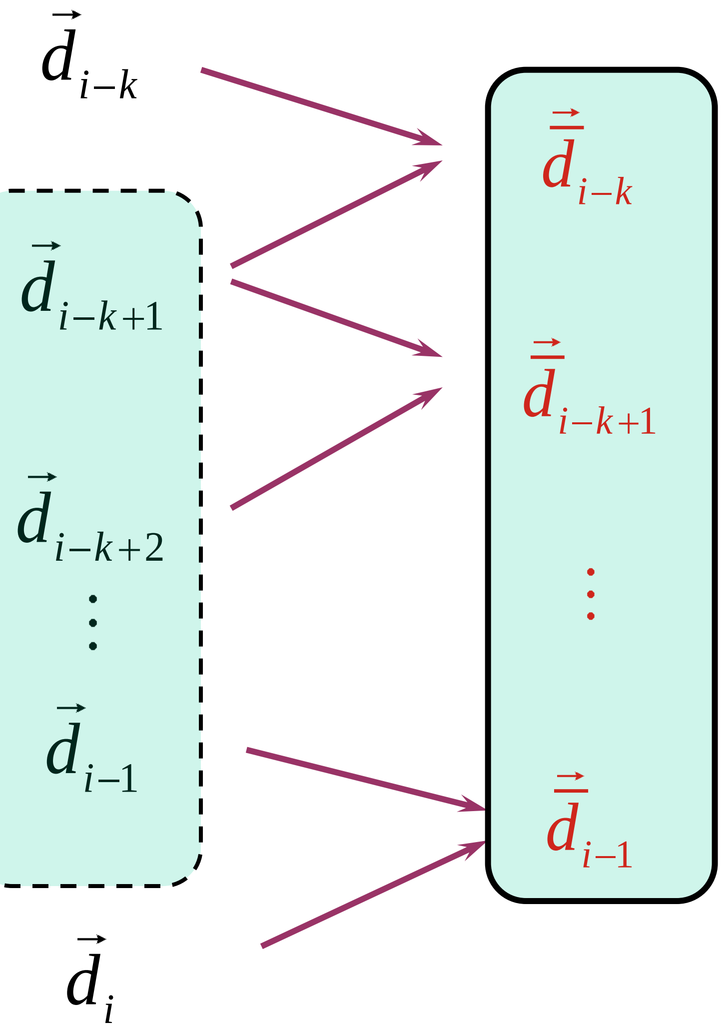
经线性插值，生成了新的控制顶点：$\bar{\vec{d}}_{i-k+1}, \bar{\vec{d}}_{i-k+2}, \cdots, \bar{\vec{d}}_{i}$,

共k个，用它们替代$k-1$个旧的控制顶点：$\vec{d}_{i-k+1}, \cdots \vec{d}_{i-1}$,

而其余控制顶点不变。

一、插入节点

如图所示：

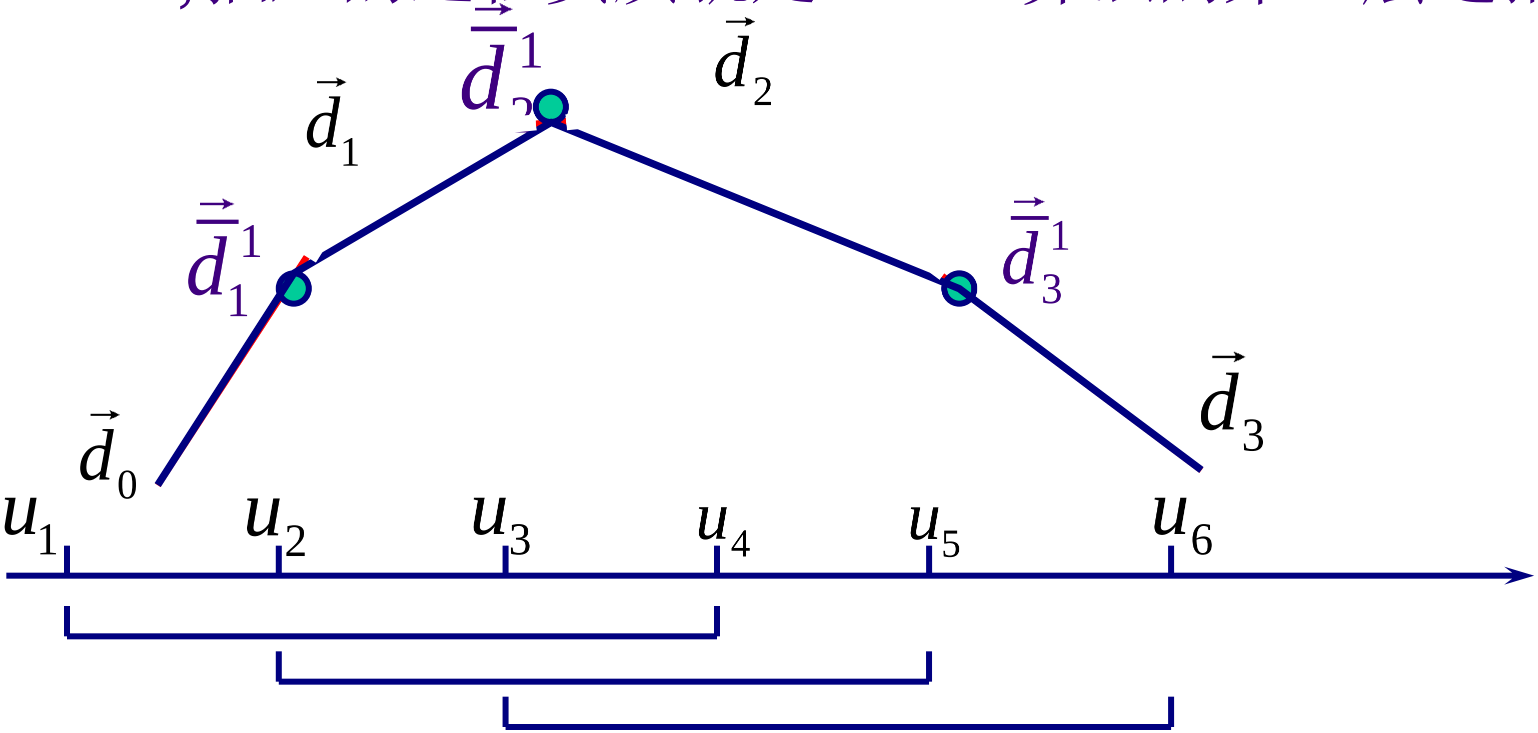


虚线框中的旧控制顶点被新控制顶点依次替代，其余控制顶点不变。

一、插入节点

实例1: 在三次B样条曲线$\vec{p}(u)$的节点区间$[u_3,u_4]$内插入一个节点u,且$u_3<u<u_4$,图示插入过程涉及的节点和控制顶点。

答:$r=0$,插入的过程实质就是deBoor算法的第一层递推过程。



一、插入节点

实例2：设一条三次B样条曲线的节点矢量如下表，在其中插入一个新的节点t＝0.5，求插入后的控制顶点。

u_0 to u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8 to u_{11}
0	0.2	0.4	0.6	0.8	1

解：因为$t=0.5\in[u_5,\ u_6]$，所以，插入过程涉及的控制顶点为P_2，P_3，P_4，P_5，根据节点插入公式，计算比例因子如下：

一、插入节点

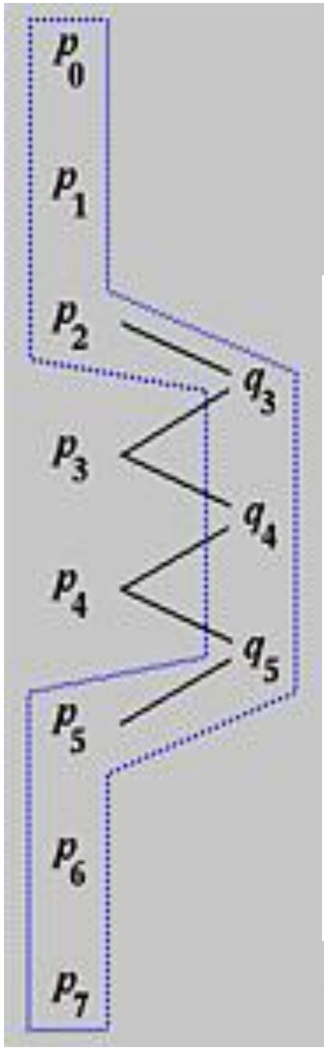
$$
\begin{aligned}
a_5 &= \frac{t-u_5}{u_8-u_5} = \frac{0.5-0.4}{1-0.4} = \frac{1}{6} \\
a_4 &= \frac{t-u_4}{u_7-u_4} = \frac{0.5-0.2}{0.8-0.2} = \frac{1}{2} \\
a_3 &= \frac{t-u_3}{u_6-u_3} = \frac{0.5-0}{0.6-0} = \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

生成的三个新的控制顶点为：

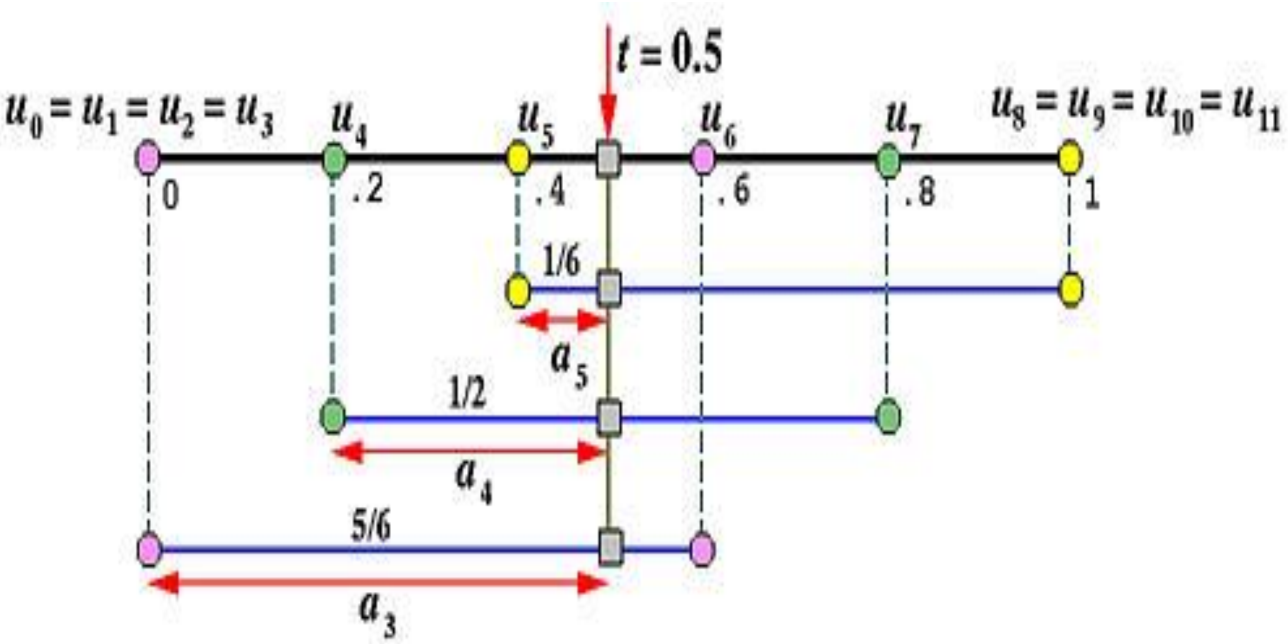
$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_5 &= \left(1-\frac{1}{6}\mathbf{P}_4\right)+\frac{1}{6}\mathbf{P}_5 \\
\mathbf{Q}_4 &= \left(1-\frac{1}{2}\mathbf{P}_3\right)+\frac{1}{2}\mathbf{P}_4 \\
\mathbf{Q}_3 &= \left(1-\frac{5}{6}\mathbf{P}_2\right)+\frac{5}{6}\mathbf{P}_3
\end{aligned}
$$

一、插入节点

新旧控制顶点的替代过程



插入节点在节点矢量中的位置

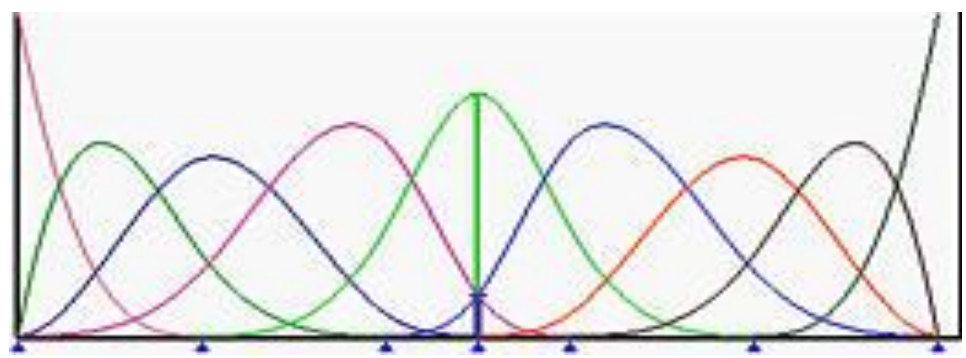


一、插入节点

插入后，重新编号得到的节点矢量

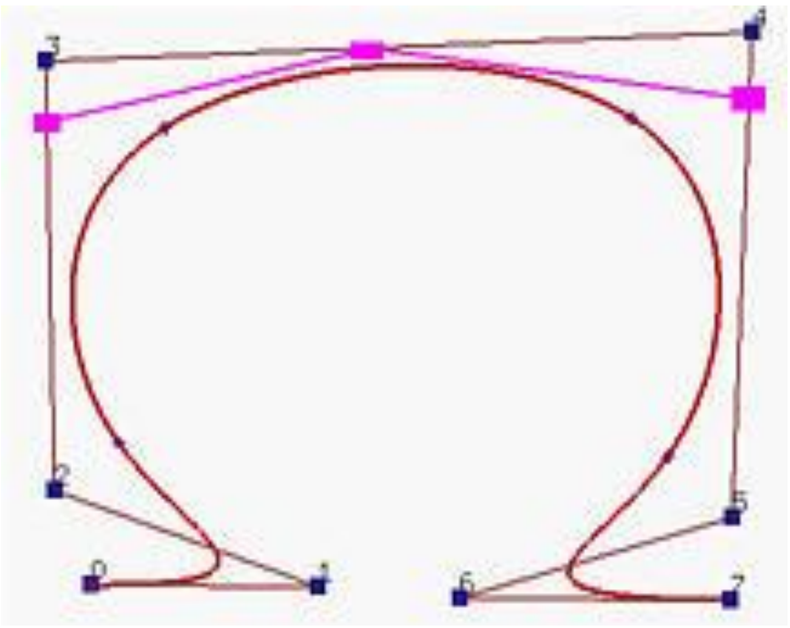
u_0 to u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9 to u_{12}
0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1

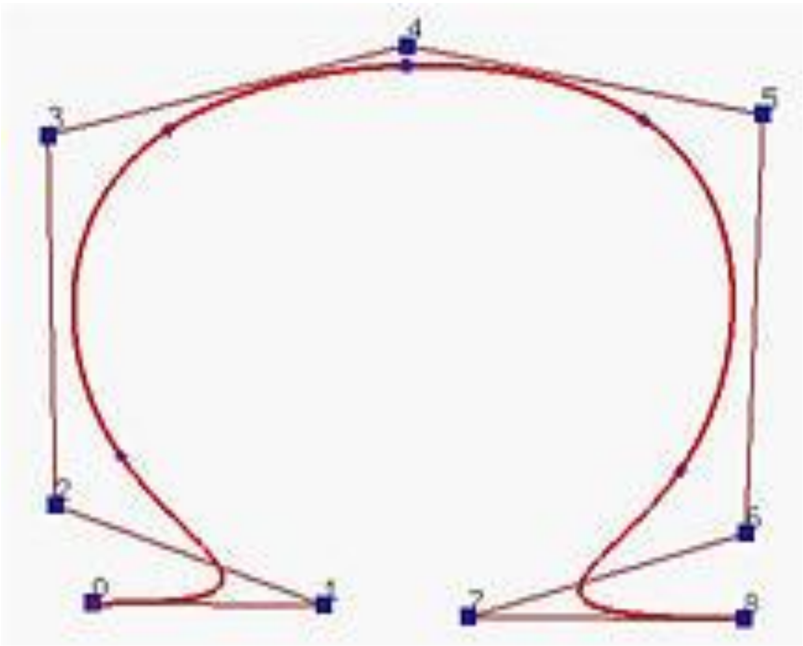
插入前的基函数



插入后的基函数

一、插入节点





插入该节点前后控制顶点的变化情况

一、插入节点

当$0<r<k$时，即$u=u_i=u_{i-1}=\cdots=u_{i-r+1}$,它涉及的节点有：

$$u_{i-k+1},u_{i-k+2},\cdots,u_{i+k-r}$$

涉及的控制顶点有：

$$\vec{d}_{i-k},\vec{d}_{i-k+1},\cdots,\vec{d}_{i-r}$$

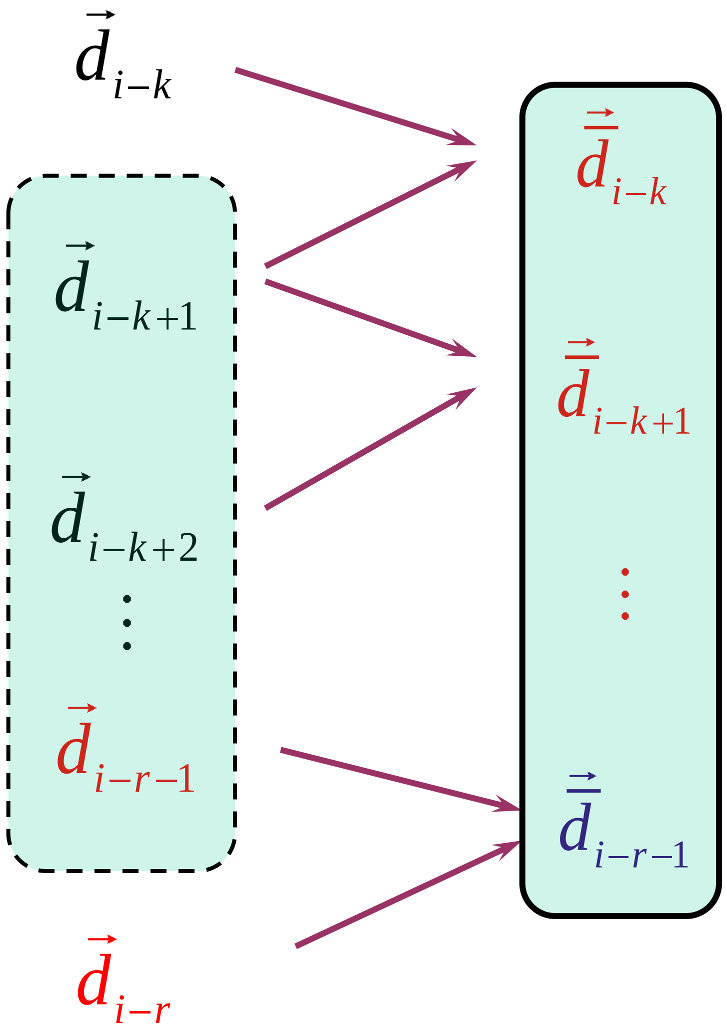
经线性插值，生成了新的控制顶点：$\vec{\bar{d}}_{i-k},\vec{\bar{d}}_{i-k+1},\cdots,\vec{\bar{d}}_{i-r-1}$,

共$k-r$个，用它们替代$k-r-1$个旧的控制顶点：$\vec{d}_{i-k+1},\cdots\vec{d}_{i-r-1}$,

而其余控制顶点不变。

一、插入节点

如图所示:

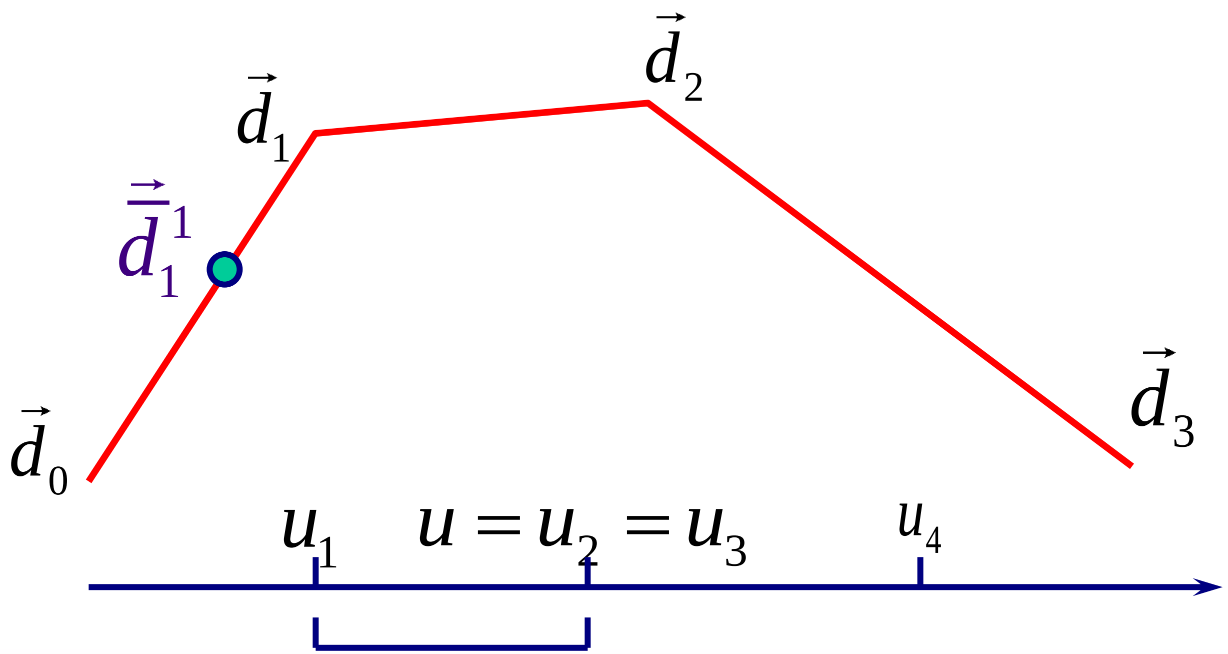


虚线框中的旧控制顶点被新控制顶点依次替代，其余控制顶点不变。

一、插入节点

实例3: 在三次B样条曲线$\vec{p}(u)$的节点区间$[u_3,u_4]$内插入一个节点u,且$u=u_2=u_3$,图示插入过程涉及的节点和控制顶点。

答：$r=2$,插入的过程中只有一个非零比例因子α_1^1，由$\vec{d}_0$和$\vec{d}_1$生成一个新顶点$\vec{\bar{d}}_1$,其余顶点不变。



一、插入节点

实例4：设一条三次B样条曲线的节点矢量如下表，在其中插入一个已经存在的节点t = 0.5，求插入后的控制顶点。

u_0 to u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12} to u_{16}
0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1

解：因为$t = 0.5 \in [u_8, u_9]$，所以，插入过程涉及的控制顶点为P_4，P_5，P_6，P_7，P_8，根据节点插入公式，计算比例因子如下：

一、插入节点

$$a_8 = \frac{t-u_8}{u_{12}-u_8} = \frac{0.5-0.5}{1-0.875} = 0$$

$$a_7 = \frac{t-u_7}{u_{11}-u_7} = \frac{0.5-0.375}{0.875-0.375} = \frac{1}{4}$$

$$a_6 = \frac{t-u_6}{u_{10}-u_6} = \frac{0.5-0.25}{0.75-0.25} = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = \frac{t-u_5}{u_9-u_5} = \frac{0.5-0.125}{0.625-0.125} = \frac{3}{4}$$

生成的新控制顶点为：

$$\mathbf{Q}_8 = (1-0\mathbf{P}_7) + 0\mathbf{P}_8$$

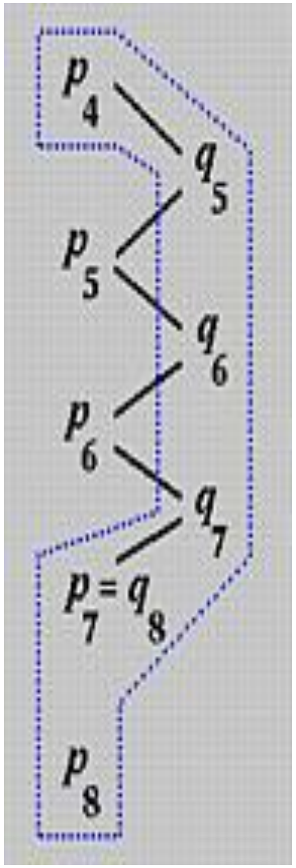
$$\mathbf{Q}_7 = \left(1-\frac{1}{4}\mathbf{P}_6\right) + \frac{1}{4}\mathbf{P}_7$$

$$\mathbf{Q}_6 = \left(1-\frac{1}{2}\mathbf{P}_5\right) + \frac{1}{2}\mathbf{P}_6$$

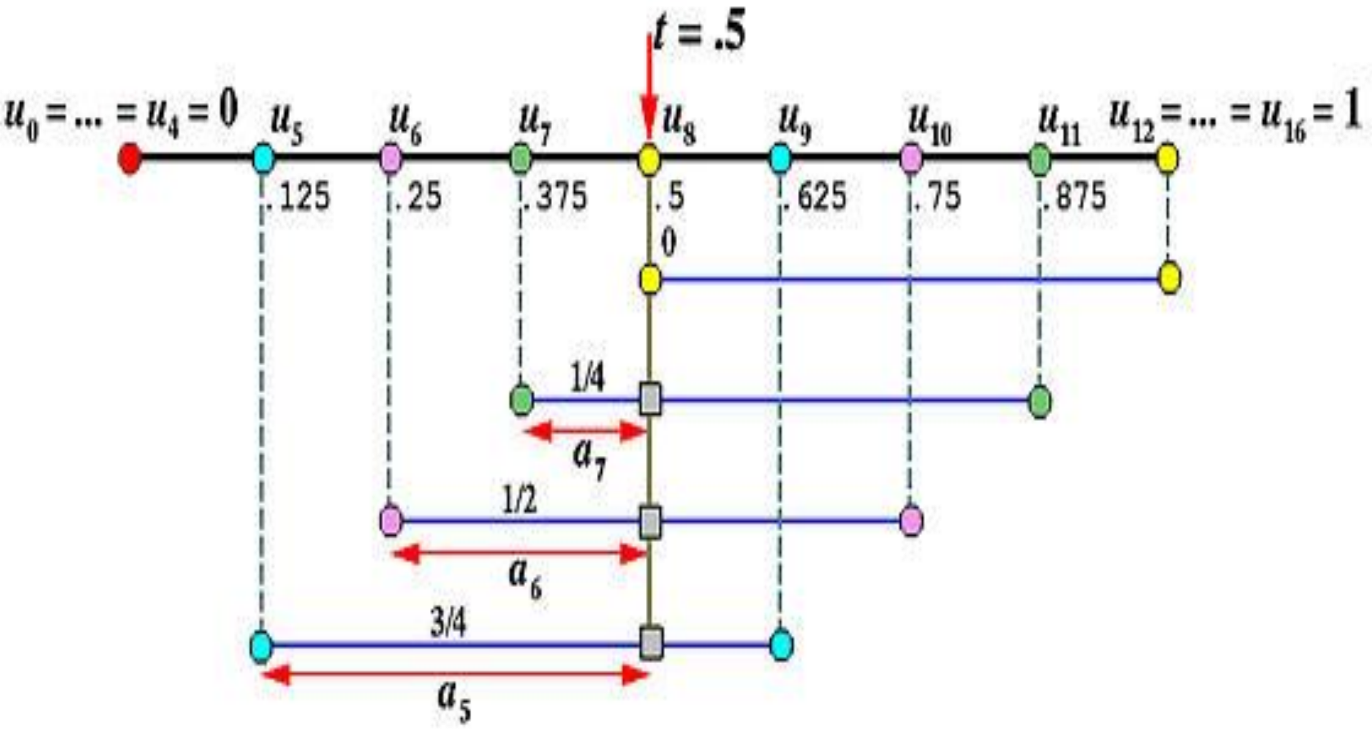
$$\mathbf{Q}_5 = \left(1-\frac{3}{4}\mathbf{P}_4\right) + \frac{3}{4}\mathbf{P}_5$$

一、插入节点

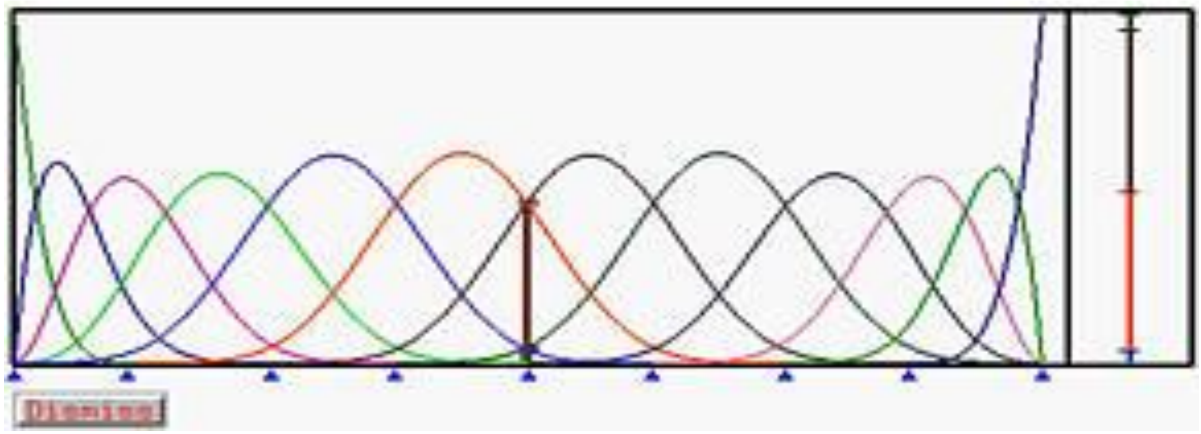
新旧控制顶点的替代过程



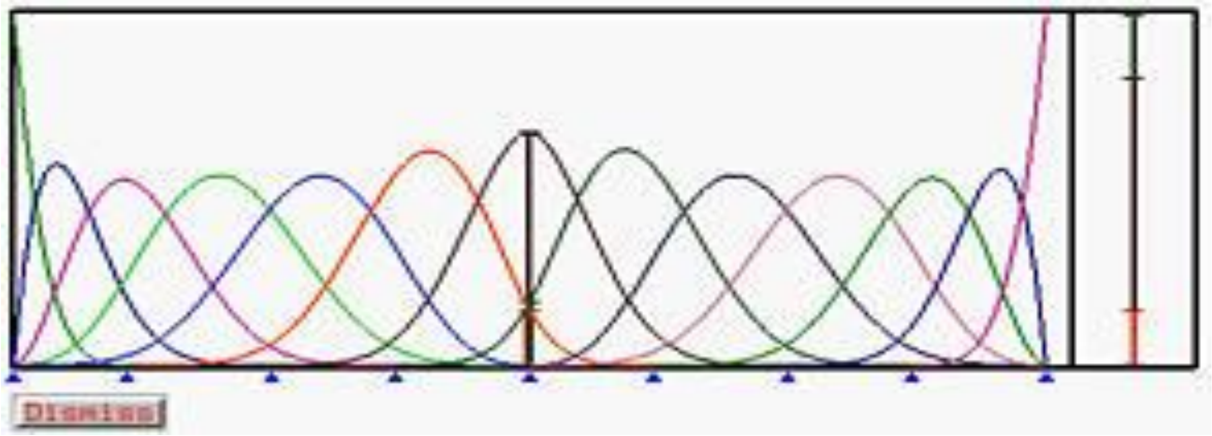
插入节点在节点矢量中的位置



一、插入节点

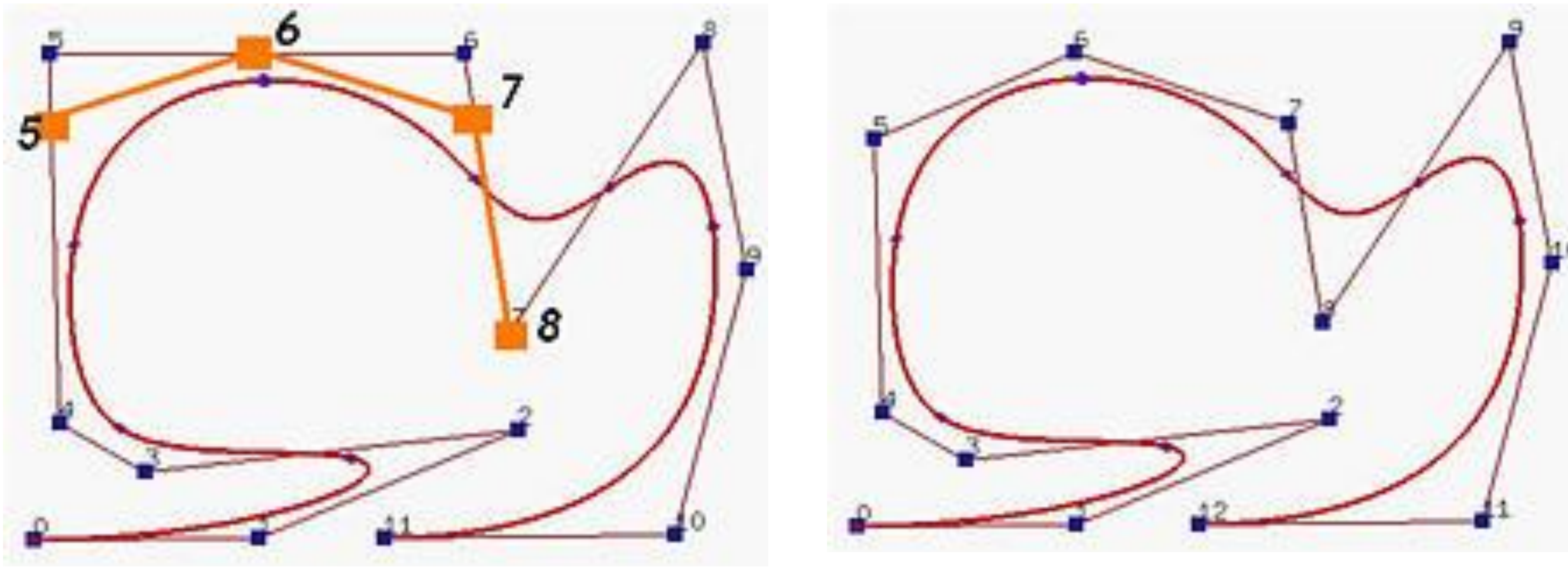


插入前的基函数



插入后的基函数

一、插入节点



插入前后控制顶点的变化情况

一、插入节点

4、重复插入同一节点

设节点u在旧节点矢量U中已有重复度r,即:

$$u = u_i = u_{i-1} = \cdots = u_{i-r+1}$$

将其重复插入s次，要求$r + s \le k$(曲线次数）

这时，新的节点矢量为:

$$U^s = \left[u_0^s, u_1^s, \cdots, u_{n+k+s+1}^s\right]$$

$$= \left[u_0, u_1, \cdots, \underbrace{u_{i-r+1}, \cdots u_i}_{r重}, \underbrace{u_i, \cdots u_i}_{s重}, u_{i+1}, \cdots u_{n+k+1}\right]$$

一、插入节点

在U^s上定义的一组新的B样条基函数，记作$N_{j,k}^s(u), j=0,1,\cdots n+s$

原B样条曲线在用这组基表示时，控制顶点为：$\vec{d}_j^s, j=0,1,\cdots n+s,$

即：$$\vec{p}(u)=\sum_{j=0}^{n+s}\vec{d}_j^s N_{j,k}^s(u)$$

重复插入同一个节点的过程，可以看作是迭代执行deBoor的第一级递推，将每一级递推的结果看作是“旧顶点”，再以它们为基础执行下一步递推，共执行s－1次。

一、插入节点

$\vec{d}_{i-k}$

$\vec{d}_{i-k+1}$
$\vec{d}_{i-k+2}$
$\vec{d}_{i-k+3}$
$\vdots$
$\vec{d}_{i-r-2}$
$\vec{d}_{i-r-1}$

$\vec{d}_{i-r}$

共k−r−1个

e=1

$\vec{d}_{i-k}$

$\vec{d}^{\,1}_{i-k}$
$\vec{d}^{\,1}_{i-k+1}$
$\vec{d}^{\,1}_{i-k+2}$
$\vdots$
$\vec{d}^{\,1}_{i-r-3}$
$\vec{d}^{\,1}_{i-r-2}$
$\vec{d}^{\,1}_{i-r-1}$

$\vec{d}_{i-r}$

共k−r个

e=2

$\vec{d}_{i-k}$

$\vec{d}^{\,1}_{i-k}$
$\vec{d}^{\,2}_{i-k}$
$\vec{d}^{\,2}_{i-k+1}$
$\vdots$
$\vec{d}^{\,2}_{i-r-2}$
$\vec{d}^{\,1}_{i-r-1}$

$\vec{d}_{i-r}$

共k−r＋1个

……

e=s

$\vec{d}_{i-k}$

$\vec{d}^{\,1}_{i-k}$
$\vec{d}^{\,2}_{i-k}$
$\vdots$
$\vec{d}^{\,s}_{i-k}$
$\vec{d}^{\,s}_{i-k+1}$
$\vdots$
$\vec{d}^{\,s}_{i-r-s}$
$\vec{d}^{\,s-1}_{i-r-s+1}$
$\vdots$
$\vec{d}^{\,1}_{i-r-1}$

共k − r−1+s个

一、插入节点

经过$s-1$次插入过程，$k-r-1$个旧顶点$\vec{d}_{i-k+1},\vec{d}_{i-k+2},\cdots,\vec{d}_{i-r-1}$被$k-r-1+s$个新顶点：

$$\vec{d}_{i-k}^{1},\vec{d}_{i-k}^{2},\cdots,\vec{d}_{i-k}^{s},\vec{d}_{i-k+1}^{s},\cdots,\vec{d}_{i-r-s}^{s},\vec{d}_{i-r-s+1}^{s-1},\cdots,\vec{d}_{i-r-1}^{1}$$

所替代，其余旧顶点不变。

插入过程的递推公式为：

$$\vec{d}_j^e=\begin{cases}\vec{d}_j & e=0\\ (1-\alpha_j^e)\vec{d}_j^{e-1}+\alpha_j^e\vec{d}_{j+1}^{e-1} & e=1,2,\cdots,s;\ j=i-k,\cdots,i-r-s\end{cases}$$

其中：$\alpha_j^s=\dfrac{u-u_{j+e}}{u_{j+k+1}-u_{j+e}}$

一、插入节点

特别的，当$r+s=k$(曲线次数)时，由于

$$\bar{N}_{j,k}(u_i)=\begin{cases}1 & j=i-k\\ 0 & j\neq i-k\end{cases}$$

于是 $$\vec{p}(u_i)=\sum_{j=0}^{n+s}\vec{\bar{d}}_j\bar{N}_{j,k}(u_i)=\vec{\bar{d}}_{i-k}=\vec{d}_{i-k}^{\,s}$$

这一点就是B样条曲线上对应于该参数的点，实际上这个插入过程就是计算B样条曲线上一点的deBoor算法的整个过程。

二、进一步的结论

1、插入节点是一个局部过程，实际上就是部分或整个的deBoor算法过程，它仅与相关的k-r+1个旧顶点有关。

2、插入多个结点时，最后的结果与插入顺序无关。

3、每插入节点一次，曲线在该节点的可微性就降一阶。

4、对于定义域内任一非零节点区间$[u_i, u_{i+1}]$，通过重复插入节点，使得u_i和u_{i+1}的重复度都达到k，即可得到定义该段B样条曲线的Bezier点。

二、进一步的结论

5、当插入节点无限加密时，其控制多边形序列将收敛到B样条曲线本身。

6、插入节点的过程说明了B样条曲线具有变差缩减性。

总结：B样条曲线和Bezier曲线的关系

1、不同之处

- B样条曲线是一种多项式样条曲线，而Bezier曲线是一种参数多项式曲线。
- B样条曲线的控制顶点个数与曲线次数无关，而Bezier曲线的控制顶点个数比曲线次数多1。
- B样条曲线具有比Bezier曲线更强的凸包性。
- 如果k次B样条曲线的端节点重复度没有达到k+1，曲线端点的几何性质与Bezier曲线端点的几何性质不同。

总结：B样条曲线和Bezier曲线的关系

2、联系

- 若干段k次Bezier曲线按照C^{k-1}的连续度首尾相连，可以表示成B样条曲线。
- B样条曲线中的每一段可以通过反复插入节点得到每段曲线的Bezier点。
- 如果选取特殊的节点矢量，B样条曲线就是一段Bezier曲线，所以，B样条曲线是Bezier曲线的一种推广。

3、相同之处

- Bezier曲线和B样条曲线都具有变差缩减性和仿射不变性。

总结：B样条曲线和Bezier曲线的关系

2、相同之处

➢Bezier曲线和B样条曲线都具有变差缩减性和仿射不变性。

3、联系

➢若干段k次Bezier曲线按照C^{k-1}的连续度首尾相连，可以表示成B样条曲线。

➢B样条曲线中的每一段可以通过反复插入节点得到每段曲线的Bezier点。

➢如果选取特殊的节点矢量，B样条曲线就是一段Bezier曲线，所以，B样条曲线是Bezier曲线的一种推广。


第二节
结束

第三节　B样条曲面

一、B样条曲面的方程及其性质

1、B样条曲面的方程

给定呈拓扑矩形网格分布的控制顶点$\vec{d}_{ij}, i=0,1,\cdots,m;$ $j=0,1,\cdots,n$。参数u的次数为k,对应的节点矢量为$U=[u_0,u_1,\cdots,u_{m+k+1}]$,另一参数$v$的次数为$l$,对应的节点为$V=[v_0,v_1,\cdots,v_{n+l+1}]$,则曲面方程为:

$$\vec{p}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\vec{d}_{ij}N_{i,k}(u)N_{j,l}$$

$$u_k \le u \le u_{m+1}; v_l \le v \le v_{n+1}$$

一、B样条曲面的方程及其性质

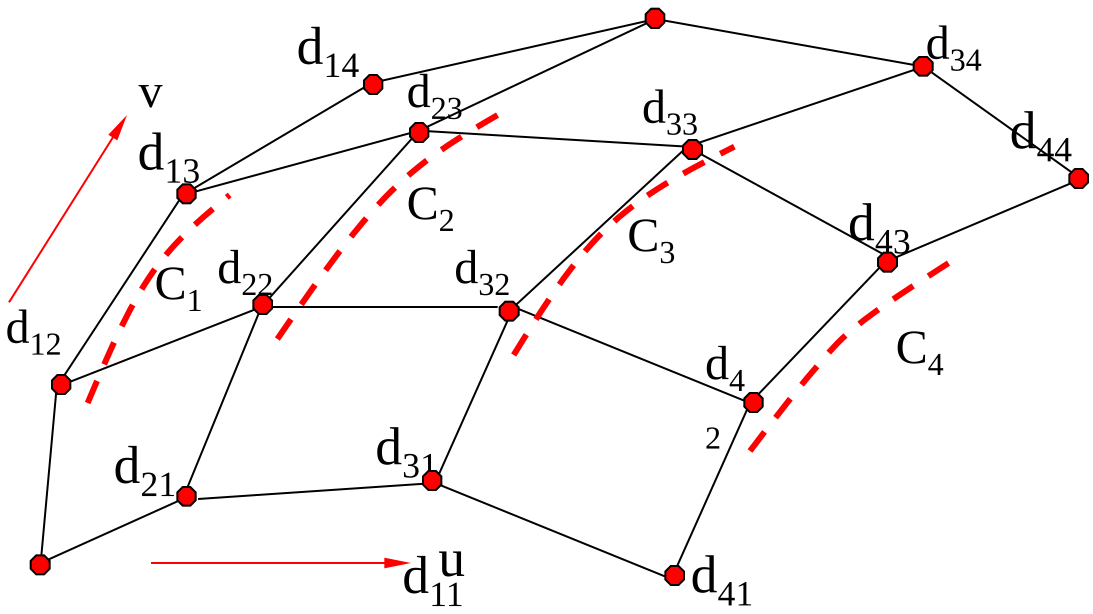
同B样条曲线一样，节点矢量对B样条曲面的几何性质有非常重要的影响。

可以根据节点矢量的不同，将B样条曲面分为均匀B样条曲面、准均匀B样条曲面、非均匀B样条曲面和分片Bezier形式等形式。

B样条曲面也是一种张量积B样条曲面，它的生成过程可以理解为如下过程:

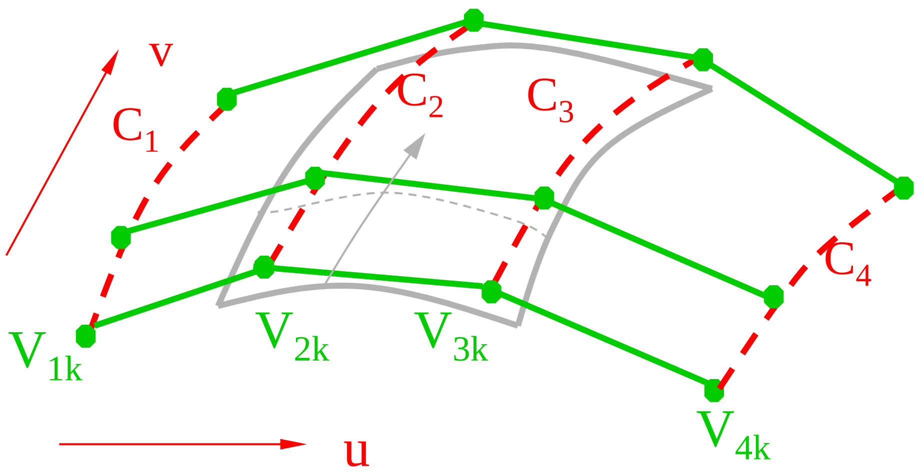
如：给定16个顶点d_{ij}(i=1,2,3,4 j=1,2,3,4)构成的特征网格，可以定义一张曲面片。用d_{i1}、d_{i2}、d_{i3}、d_{i4}(i=1,2,3,4)构建四条V向曲线C_1、C_2、C_3和C_4(图中虚线);

一、B样条曲面的方程及其性质



参数v在[0,1] 之间取值v_k，对应于v_k曲线C_1、C_2、C_3和C_4上可得到V_{1k}、V_{2k}、V_{3k}和V_{4k}四个点，该四点构成u向的一个特征多边形，定义一条新的曲线$P(u, v_k)$；

一、B样条曲面的方程及其性质



当参数v_k在[0, 1] 之间取不同值时，$P(u, v_k)$沿箭头方向扫描，即得到由给定特征网格d_{ij} $(i=1, 2, 3, 4;\ j=1, 2, 3, 4)$定义的双三次均匀B样条曲面片$P(u, v)$。

一、B样条曲面的方程及其性质

双三次均匀B样条曲线的矩阵表示：

$$p(u,v)=\begin{bmatrix}1 & u & u^2 & u^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14}\\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24}\\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34}\\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\ \frac{2}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ v\\ v^2\\ v^3\end{bmatrix}$$

一、B样条曲面的方程及其性质

2、B样条曲面的性质

1)局部性：定义在子区域：$u_e \le u \le u_{e+1}; v_f \le v \le v_{f+1}$上的B样条子曲面片，它仅与控制顶点：

$$\vec{d}_{ij}, i = e-k, e-k+1, \cdots, e; j = f-l, f-l+1, \cdots, f$$

有关，而与其它控制顶点无关。

2）仿射不变性

3）凸包性

二、B样条曲面的正算

1、两个节点矢量的确定

2、B样条曲面的正算：曲面上的deBoor算法

和张量积Bezier曲面上的deCasteljau算法一样，B样条曲面上的deBoor算法也可以按照先u后v，先v后u以及u、v两个方向同时进行等三种方式执行，最终都可以计算出B样条曲面上的一点。

无论采用的是上述三种方法中的哪一种，最后得到的结果都是相同的，但比较而言，按照单参数的递推方案比较简单。


Celestial Exploring
art by KAGAYA
©2003 KAGAYA / ©2003 Synforest / CD-ROM SW-008

本章

结束