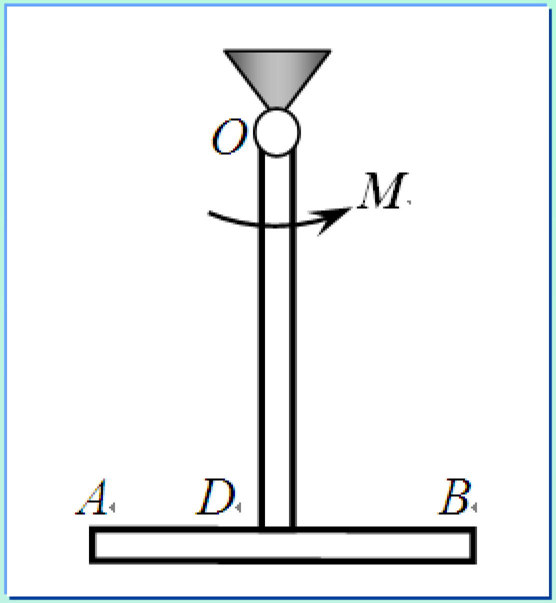
复习提要

杨成鹏
西北工业大学六院
E-mail：yang@mail.nwpu.edu.cn
Mobile：13484615864

1、质杆AB（质量为m）和OD（质量为2m），长度都为*l*，垂直固接成T字型，点D为AB杆的中点，置于铅垂平面内，该T型杆可绕光滑固定轴O转动，如图所示，开始时系统静止，OD杆铅垂。在常值力矩M=20mg*l*/π的作用下T型杆开始转动。求：

（1）OD杆至水平位置时的角速度和角加速度；

（2）轴承O处的约束力。



应用动能定理：

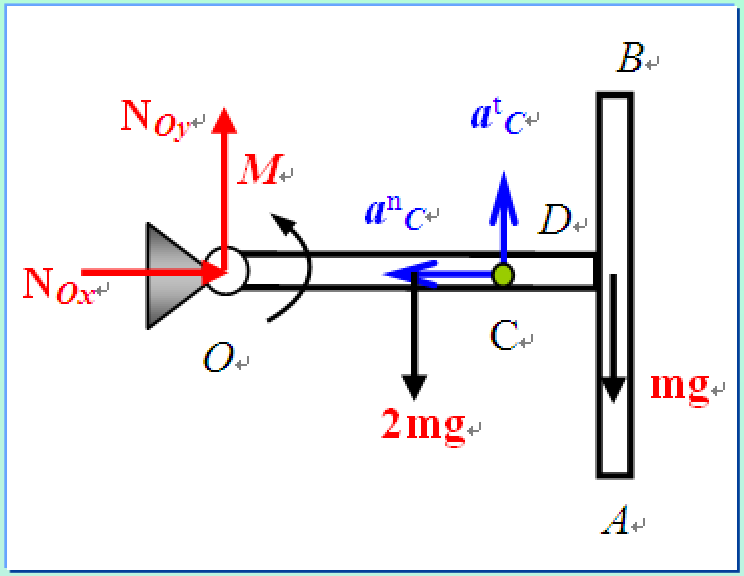
$$T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{1}{2} J_O \omega^2 = \frac{1}{2}(\frac{7}{4} m l^2)\omega^2$$

$$\sum W = M \times \frac{\pi}{2} - 2mg \cdot \frac{l}{2} - mgl = 8mgl$$

代入 $T_2 - T_1 = \sum W$

得 $$\frac{7}{8} m l^2 \omega^2 - 0 = 8mgl$$

$$\omega = 8\sqrt{\frac{g}{7l}}$$

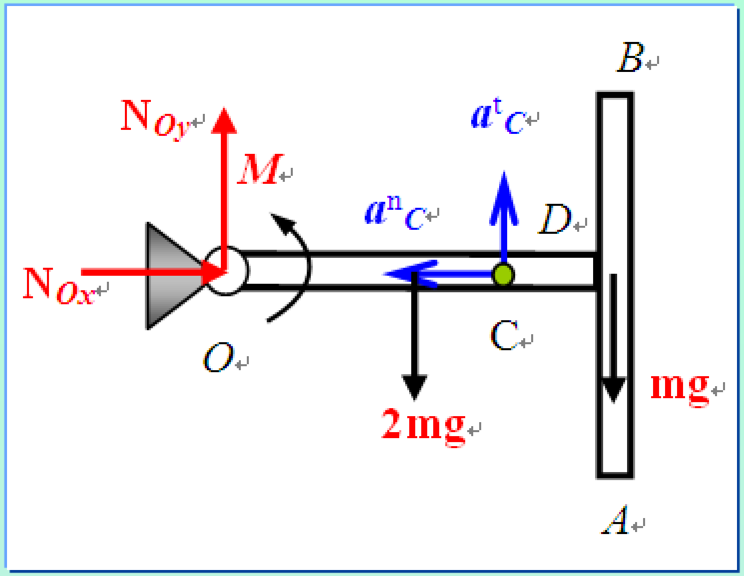


应用动量矩定理，当OD杆在水平位置时

$$J_O\varepsilon = M - 2mg\cdot\frac{l}{2} - mgl$$

$$\frac{7}{4}ml^2\varepsilon = \left(\frac{20}{\pi} - 2\right)mgl$$

$$\varepsilon = \frac{8g}{7\pi l}(10-\pi)$$



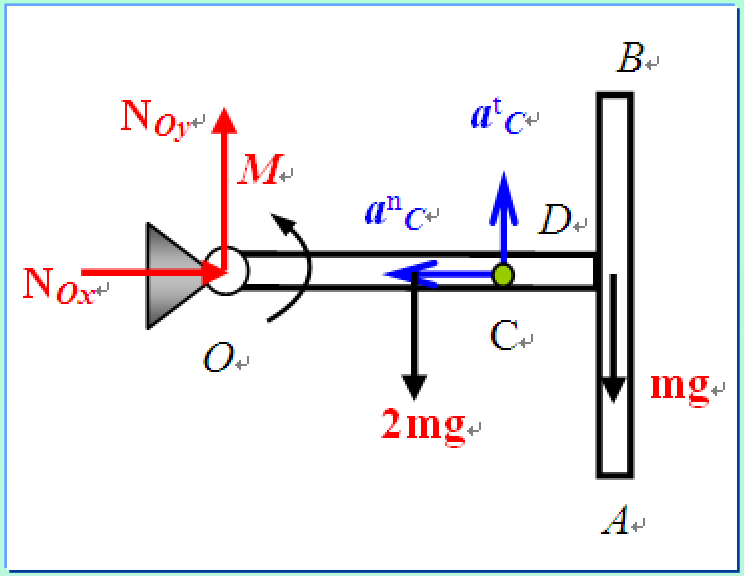
系统质心在图示C点处。

$$a_C^n = \frac{2l}{3}\cdot\omega^2 = \frac{128}{21}g, \qquad a_C^t = \frac{2}{3}l\cdot\varepsilon = \frac{16g}{21\pi}(10-\pi)$$

应用质心运动定理得

$$-3ma_C^n = N_{ox},$$

$$3ma_C^t = N_{oy} - 3mg$$



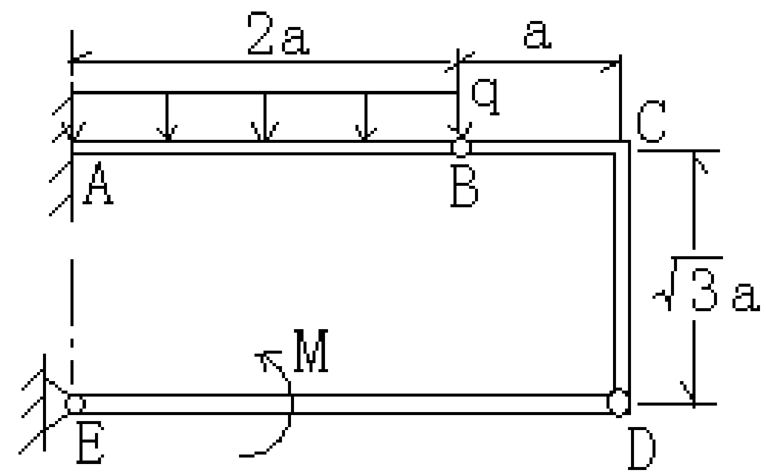
解得

$$N_{ox} = -\frac{128}{7}mg; \quad N_{oy} = 3mg + \frac{48mg}{21\pi}(10-\pi)$$

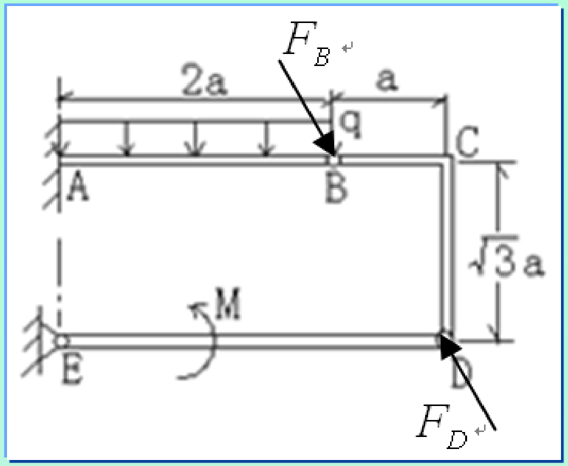
2. 在图示平面构架中，A处为固定端，E为固定铰链支座，杆AB，ED与直角曲杆BCD铰接。已知AB杆受均布载荷作用，载荷集度为*q*，杆ED处有一矩为*M*的力偶。不计杆重及摩擦，求：

（1）E处的约束力；

（2）A处的约束力。



（1）分析受力，BCD为二力杆，画BCD受力图。

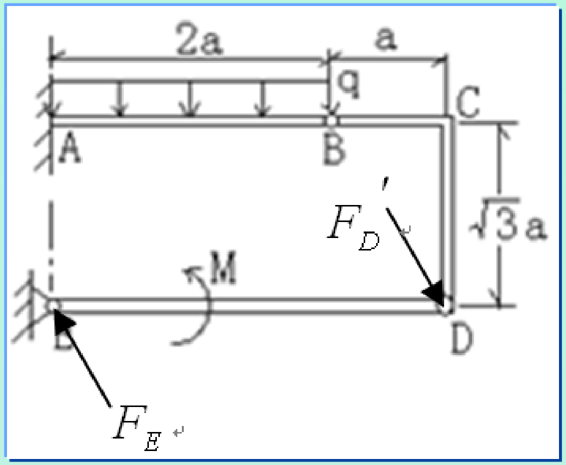


分析杆*DE*受力，画受力图。杆*DE*受平面力偶系平衡，其平衡方程为

$$\sum M(F_i) = 0, \quad M - F_E l = 0$$

其中*l*为力偶臂。

$$l = 3a \times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} a$$

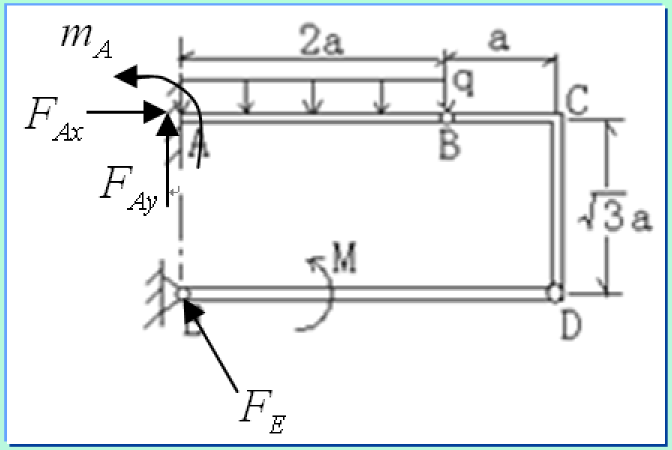


解得

$$F_E = \frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{M}{a}$$

（2）取整体做研究对象，画受力图。

列平衡方程：



$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} - F_E \times \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_E \times \sin 60^\circ - 2aq = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0 \quad m_A + M - F_E l' - 2aq \times a = 0$$

其中l'为A点到F_E的距离，

$$l' = \sqrt{3}a \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

解得

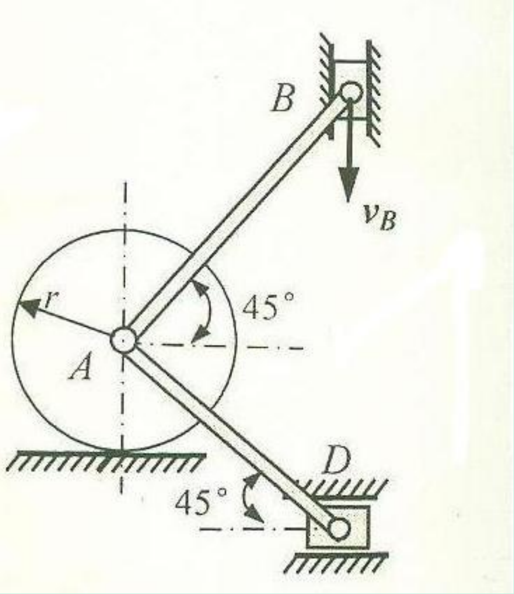
$$\begin{cases} F_{Ax} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}\dfrac{M}{a} \\ F_{Ay} = 2aq - \dfrac{M}{3a} \\ m_A = 2qa^2 - \dfrac{2M}{3} \end{cases}$$

3. 图中滑块B、D分别沿铅直和水平导槽滑动，AB杆和AD杆与圆轮中心A铰接，圆轮作纯滚动。图示瞬时滑块B速度 v_B=0.5m/s，加速度 a_B=0。已知 AB=0.5m，r=0.2m。试求：

（1）AB杆和圆轮的角速度；

（2）滑块D的速度；

（3）轮心A的加速度。



（1）A、D点速度均水平向左

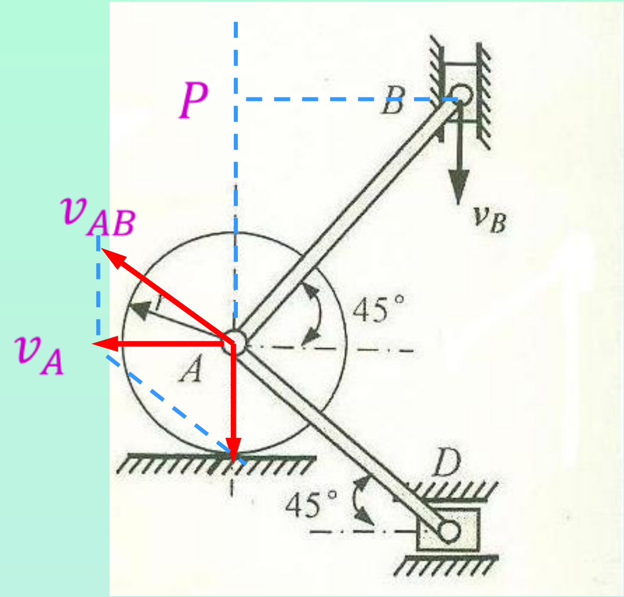
解法一：

作出AB杆的速度瞬心P，

AB杆的角速度$\omega_{AB}=v_B/PB=0.5/(\sqrt{2}/4)=\sqrt{2}\text{rad/s}$,

A点速度$v_A=\omega_{AB}\cdot PA=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}/4)=0.5\text{m/s}$,

圆轮角速度 $\omega_A=v_A/r=2.5\text{rad/s}$。



解法二：

以B为基点，作出A点速度分析图，

相对速度$v_{AB}=\sqrt{2}\cdot v_B=\sqrt{2}/2\text{m/s}$,

$\omega_{AB}=v_{AB}/AB=\sqrt{2}\text{rad/s}$,

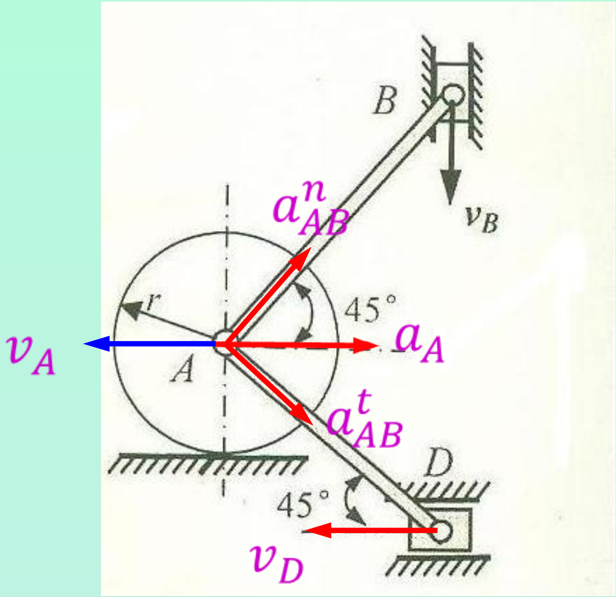
A点速度$v_A=v_B=0.5\text{m/s}$, 圆轮角速度$\omega_A=v_A/r=2.5\text{rad/s}$。

（2）判断出AD杆作平移运动，

滑块D速度$v_D= v_A$=0.5m/s,

（3）以B为基点，分析A点的加速度如下：

$$\boxed{\vec{a}_A=\vec{a}_B+\vec{a}_{AB}^t+\vec{a}_{AB}^n}$$



其中： $a_B=0$

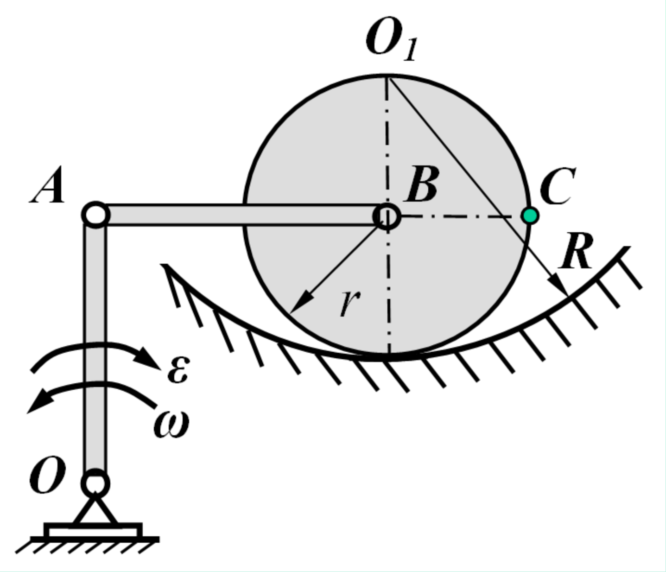
$$a_{AB}^n=\frac{v_{AB}^2}{AB}=\omega_{AB}^2\cdot\overline{AB}=1\mathrm{m/s^2}$$

$$a_A=\sqrt{2}a_{AB}^n=\sqrt{2}\,\mathrm{m/s^2}$$

4. 平面机构如图所示，曲柄OA绕轴O转动，角速度ω=2rad/s，角加速度ε=2rad/s^2，借助连杆AB驱动半径为*r*的轮子在半径为*R*的圆弧槽中作无滑动滚动。已知OA=AB=*R*=2*r*=1m，在图示瞬时，曲柄OA处于铅直位置，且OA⊥AB。试求:

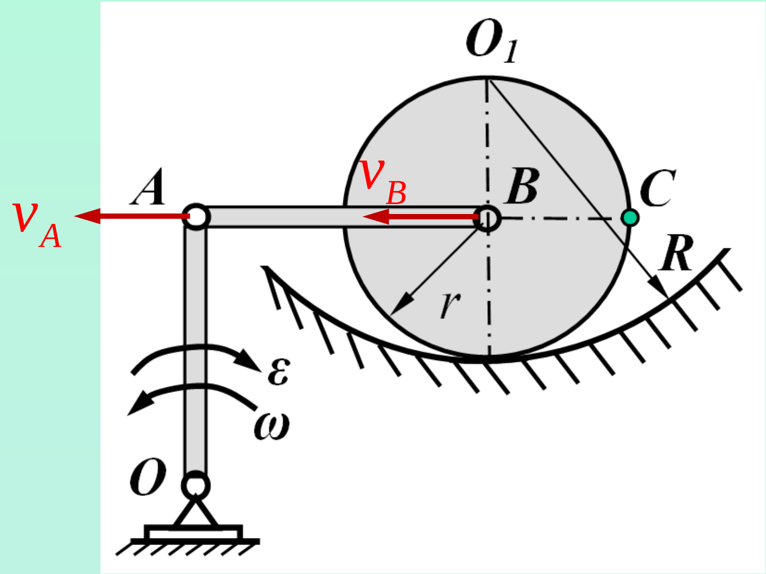
（1）该瞬时轮子中心B点的速度和加速度；

（2）水平直径端点C的速度和加速度。



解：（1）A点和B点的速度均水平向左，因此AB杆作瞬时平移。

$$v_B = v_A = \omega \cdot \overline{OA} = 2\text{m/s}$$



解：（1）A点和B点的速度均水平向左，因此AB杆作瞬时平移。

$$v_B = v_A = \omega \cdot \overline{OA} = 2\mathrm{m/s}$$

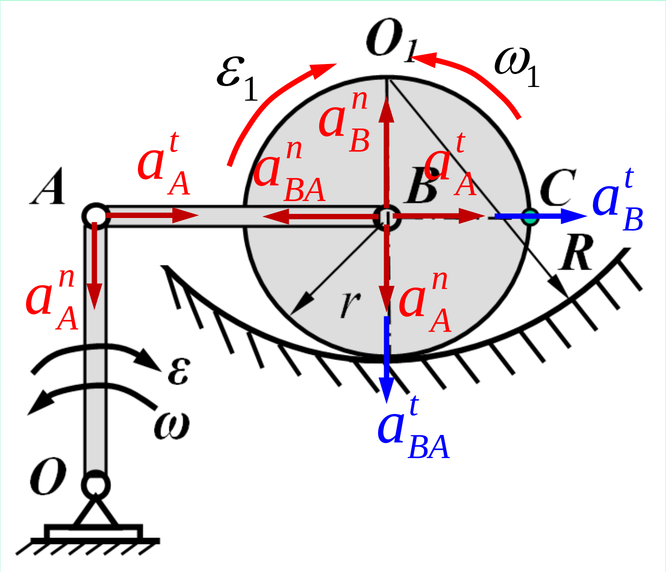
A点的加速度为 $a_A^n = \omega^2 \cdot \overline{OA} = 4\mathrm{m/s^2}$， $a_A^t = \varepsilon \cdot \overline{OA} = 2\mathrm{m/s^2}$

以A点为基点，分析B点的加速度： $\boxed{\vec{a}_B^t + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^t + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n}$

$$a_B^n = v_B^2 / r = 8\mathrm{m/s^2}$$

$$a_B^t = \varepsilon_B r = ?$$

$$a_{BA}^n = v_{BA}^2 / AB = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0$$



$\because v_B = \omega_1 \cdot r = \omega_B \cdot r$ $\therefore \omega_1 = \omega_B$， $\varepsilon_1 = \varepsilon_B$

将矢量式沿水平方向投影：

$a_B^t = a_A^t - a_{BA}^n = 2\mathrm{m/s^2}$ $\varepsilon_B = 4\mathrm{rad/s^2}$

$$a_B = \sqrt{(a_B^t)^2 + (a_B^n)^2} = 2\sqrt{17}\mathrm{m/s^2}$$

（2）B点的加速度为 $a_B^n = 8\text{m/s}^2$， $a_B^t = 2\text{m/s}^2$

以B为基点，分析C点的加速度： $\boxed{\vec{a}_C = \vec{a}_B^t + \vec{a}_B^n + \vec{a}_{CB}^t + \vec{a}_{CB}^n}$

$$a_{CB}^n = \omega_1^2 r = 8\text{m/s}^2 \qquad \omega_1 = v_B / r = 4\text{rad/s}$$

$$a_{CB}^t = \varepsilon_1 r = 2\text{m/s}^2 \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_B = 4\text{rad/s}^2$$

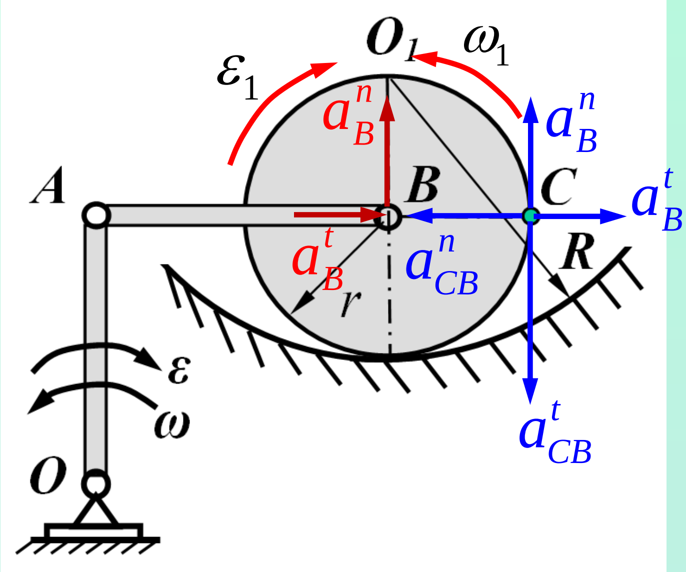
将矢量式沿x方向投影：

$$a_{Cx} = a_B^t - a_{CB}^n = -6\text{m/s}^2$$

将矢量式沿y方向投影：

$$a_{Cy} = a_B^n - a_{CB}^t = 6\text{m/s}^2$$

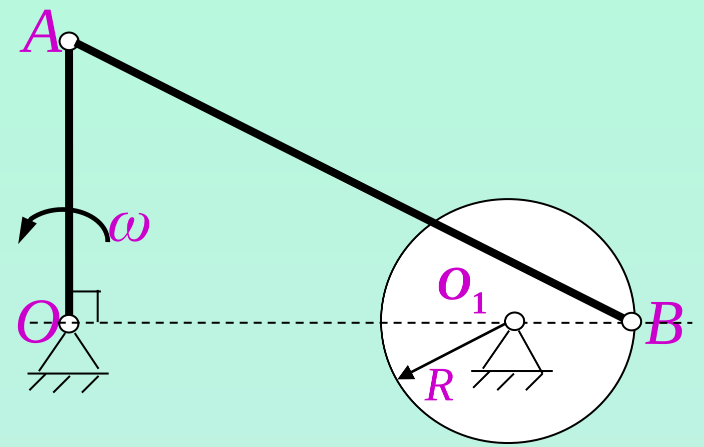
$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2} = 6\sqrt{2}\text{m/s}^2$$



5. 图示平面机构中，曲柄OA长为r，以匀角速度ω绕O轴转动；连杆AB长为l，通过销钉B带动圆轮绕O_1轴转动，圆轮半径为R。在图示位置时，求：

（1）B点的速度；

（2）B点的加速度。



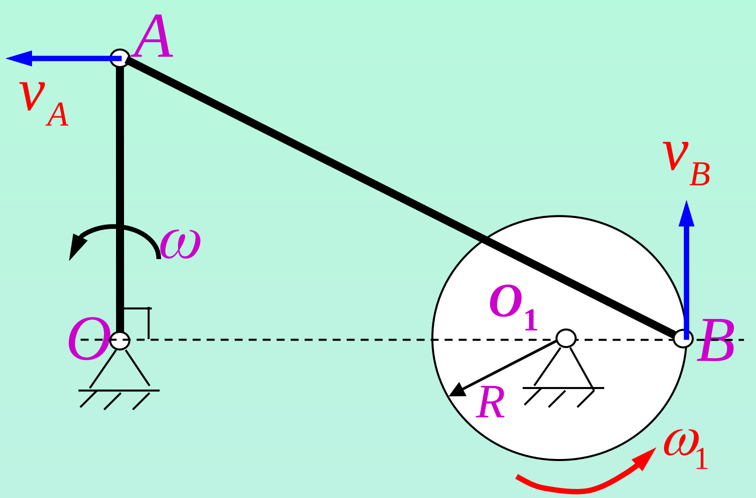
解：（1）杆OA作定轴转动，杆AB作平面运动

$$v_A=\omega\cdot\overline{OA}=\omega r$$

A点速度水平向左，B点的速度垂直向上，因此，AB杆的速度瞬心为O点，其角速度为

$$\omega_{AB}=v_A/r=\omega$$

$$v_B=\omega_{AB}\cdot OB=\omega\sqrt{l^2-r^2}$$



圆轮转动的角速度：

$$\omega_1=\frac{v_B}{R}=\frac{\sqrt{l^2-r^2}}{R}\omega$$

(2) B点作圆周运动。以A为基点分析B点的加速度

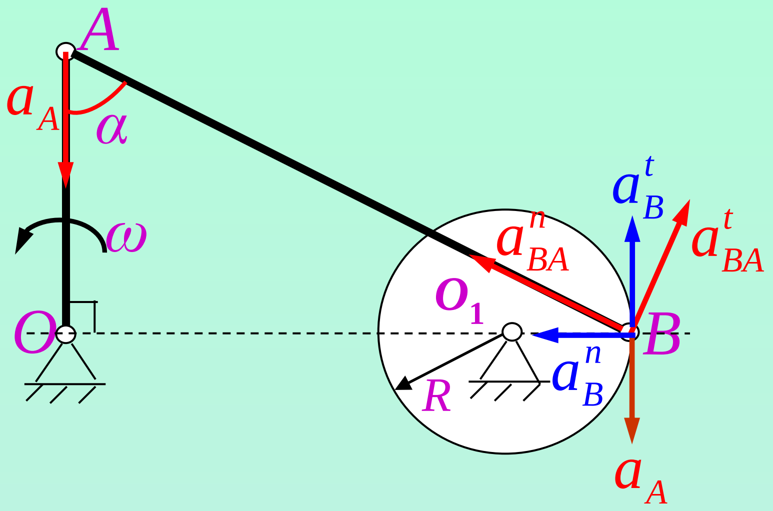
$$\boxed{\vec{a}_B^t + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n}$$

其中，

$$a_A = \omega^2 r$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \omega^2 l$$

$$a_B^n = \frac{v_B^2}{R} = \frac{\omega^2 (l^2 - r^2)}{R}$$



将矢量式沿AB杆方向投影：

$$a_B^t \cos\alpha + a_B^n \sin\alpha = -a_A \cos\alpha + a_{BA}^n$$

$$a_B^t = \frac{a_{BA}^n - a_B^n \sin\alpha - a_A \cos\alpha}{\cos\alpha}$$

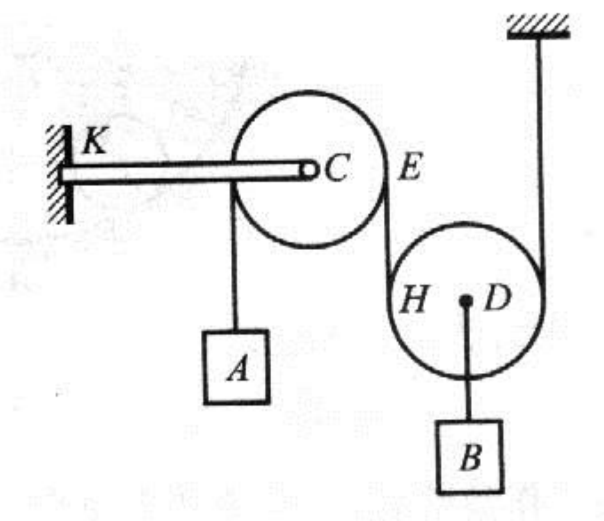
$$\boxed{a_B = \sqrt{(a_B^t)^2 + (a_B^n)^2}}$$

6. 图示机构中，物块A、B的质量均为m，两均质圆轮C、D的质量均为$2m$，半径均为R。轮C铰接于无重悬臂梁CK上，D为动滑轮，梁长度为$3R$，绳与轮间无滑动。系统由静止开始运动，求：

（1）A物块上升的加速度；

（2）HE段绳的拉力；

（3）固定端K处的约束反力。



解：（1）选整个系统为研究对象，初动能T_1为零。设物体A的位移y_A，则

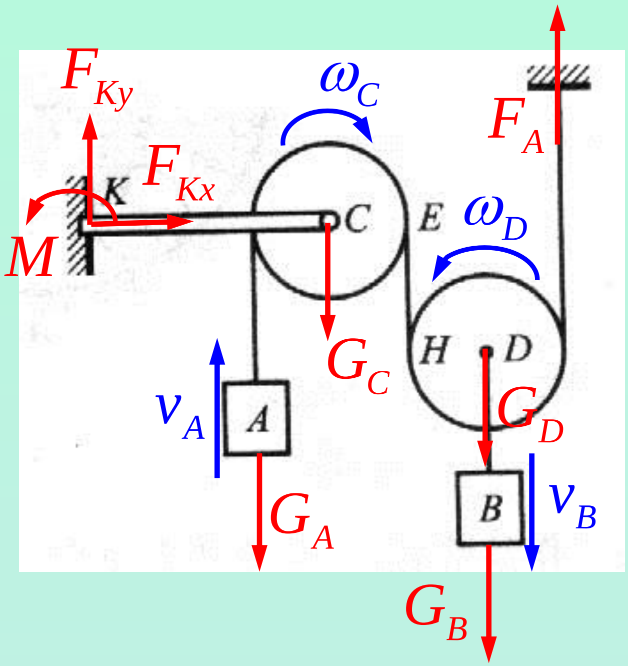
$$y_B=\frac{1}{2}y_A,\quad v_B=\frac{1}{2}v_A,\quad \omega_D=\frac{1}{2}\omega_C,\quad \omega_C=\frac{v_A}{R}$$

系统的末动能为

$$T_2=T_A+T_B+T_C+T_D$$
$$=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}2mR^2\cdot)\omega_C^2+\frac{1}{2}2mv_B^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cdot 2mR^2)\omega_D^2=\frac{3}{2}mv_A^2$$

重力做功为

$$W=(m_D+m_B)gy_B-m_Agy_A$$
$$=(2m+m)g\cdot\frac{y_A}{2}-mgy_A=\frac{1}{2}mgy_A$$



由动能定理$T_2-T_1=W$，有：

$$\frac{3}{2}mv_A^2=\frac{1}{2}mgy_A\Rightarrow 3mv_Aa_A=\frac{1}{2}mgv_A\Rightarrow a_A=\frac{1}{6}g$$

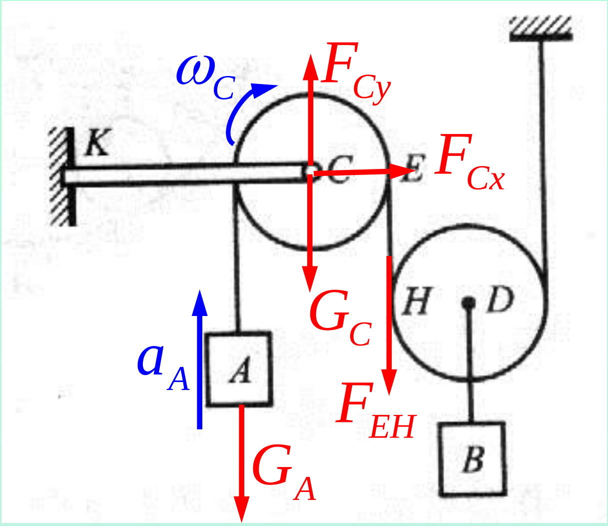
(2) 选滑轮C和物体A为研究对象，应用动量矩定理，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J_C\omega_c + mv_A R\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}2mR^2\omega_c + mv_A R\right] = F_{EH}R - mgR$$

有 $(F_{EH} - mg)R = mR^2\varepsilon_C + mRa_A$ $\qquad \varepsilon_C = \dfrac{a_A}{R}$

$$F_{EH} - mg = mR\cdot\frac{g}{6R} + m\cdot\frac{g}{6}$$

得出 $F_{EH} = \dfrac{4}{3}mg$



(3) 求K处约束力。应用质心运动定理，有

$$\begin{cases} ma_A = F_{Cy} - G_C - G_A - F_{EH} \\ F_{Cx} = 0 \end{cases}$$

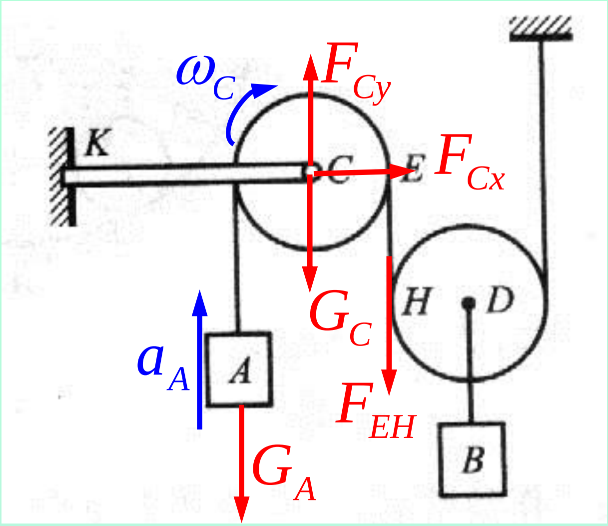
得出铰链C处的约束力为

$$\begin{cases} F_{Cx} = 0 \\ F_{Cy} = 9mg/2 \end{cases}$$

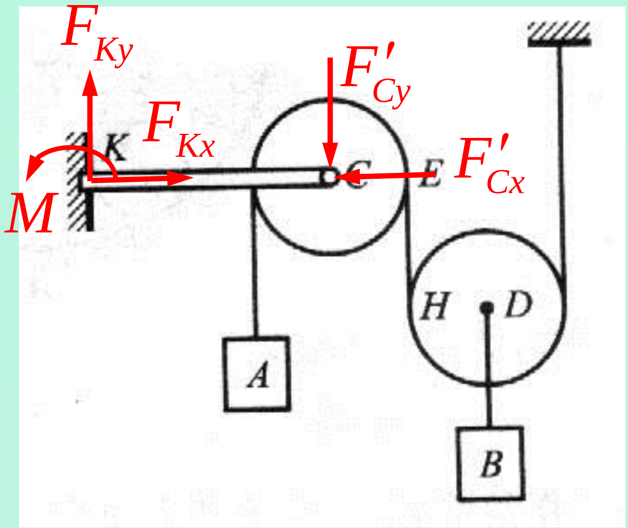
（3）应用质心运动定理，有

$$\begin{cases} ma_A = F_{Cy} - G_C - G_A - F_{EH} \\ F_{Cx} = 0 \end{cases}$$

得出铰链C处的约束力为 $\begin{cases} F_{Cx} = 0 \\ F_{Cy} = 9mg/2 \end{cases}$



分离杆CK作为研究对象，受力如图。列平衡方程求解K处约束力如下：



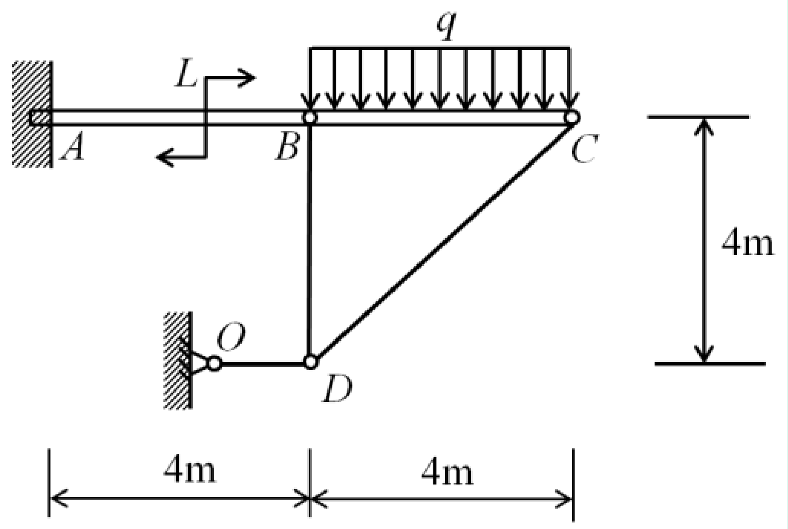
$$\begin{cases} \sum F_x = 0, \quad F_{Kx} - F'_{Cx} = 0 \\ \sum F_y = 0, \quad F_{Ky} - F'_{Cy} = 0 \\ \sum M_K = 0, \quad M - F'_{Cy} \cdot \overline{CK} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{F_{Kx} = 0, \quad F_{Ky} = 9mg/2, \quad M = 27mgR/2}$$

7. 在图示结构中，*O*、*B*、*C*、*D*处均为光滑铰链。已知：载荷集度q=1kN/m，主动力矩L＝2kN·m，各杆自重不计。求:

（1）杆BD的内力;

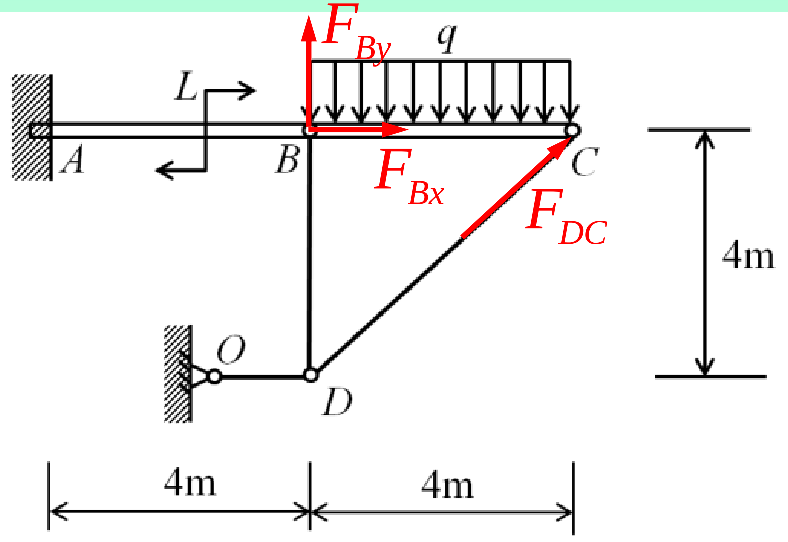
（2）固定端A处的约束力。



解：(1)杆OD、BD和CD均为二力杆。以杆BC为研究对象，画受力图

列平衡方程：$\sum M_B = 0,\quad F_{DC}\cos 45°\times 4 - 4q\times 2 = 0$

得出：$F_{DC} = 2\sqrt{2}\mathrm{KN}$



以铰链D为研究对象，画受力图

解：(1)杆**OD**、**BD**和**CD**均为二力杆。以杆**BC**为研究对象，画受力图

列平衡方程： $\sum M_B = 0,\quad F_{DC}\cos 45^\circ \times 4 - 4q \times 2 = 0$

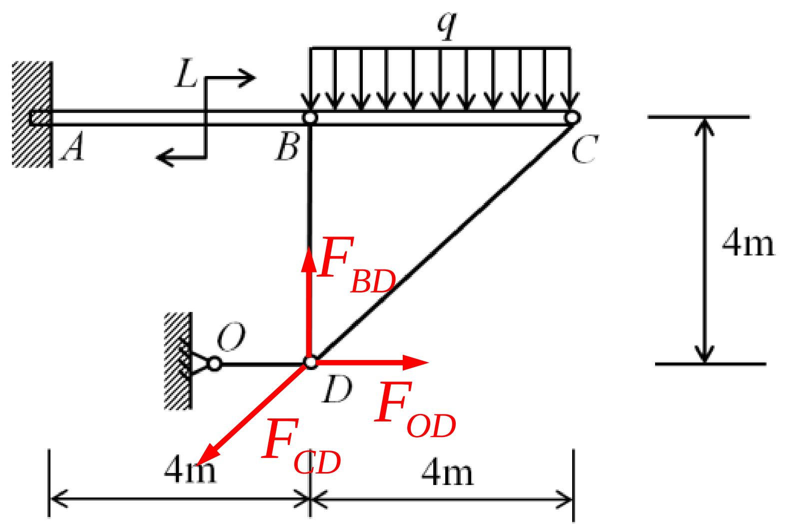
得出： $F_{DC} = 2\sqrt{2}\text{KN}$

以铰链**D**为研究对象，画受力图

列平衡方程： $\sum F_y = 0,\quad F_{BD} - F_{CD}\cos 45^\circ = 0$

得出： $F_{BD} = 2\text{KN}$

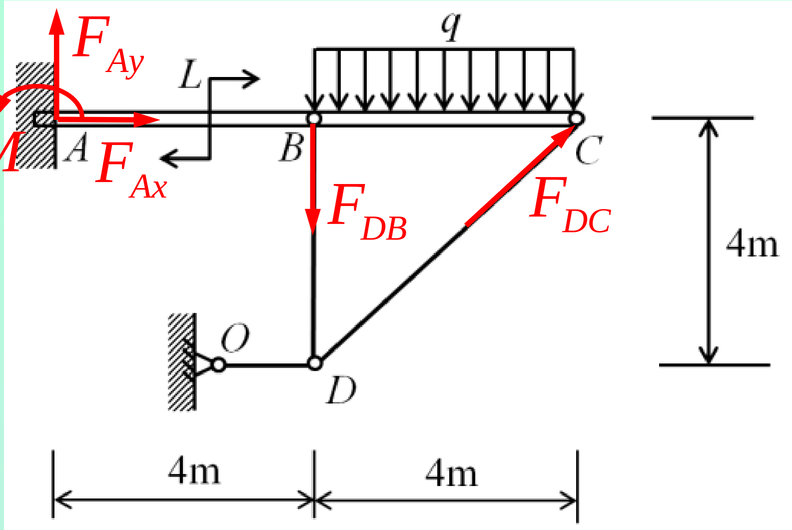
以杆**AB**和**BC**为研究对象，画受力图



解：(1)杆**OD**、**BD**和**CD**均为二力杆。以杆**BC**为研究对象，画受力图

列平衡方程： $\sum M_B = 0,\quad F_{DC}\cos 45° \times 4 - 4q \times 2 = 0$

得出： $F_{DC} = 2\sqrt{2}\text{KN}$



以铰链**D**为研究对象，画受力图

列平衡方程： $\sum F_y = 0,\quad F_{BD} - F_{CD}\cos 45° = 0$

得出： $F_{BD} = 2\text{KN}$

以杆**AB**和**BC**为研究对象，画受力图

列平衡方程：
$$\begin{cases} \sum F_x = 0, & F_{Ax} + F_{DC}\cos 45° = 0 \\ \sum F_y = 0, & F_{Ay} - F_{DB} - 4q + F_{DC}\sin 45° = 0 \\ \sum M_A = 0, & M - L - 4F_{DB} - 4q \cdot 6 + 8F_{DC}\sin 45° = 0 \end{cases}$$

得出： $F_{Ax} = -2\text{KN},\quad F_{Ay} = 4\text{KN},\quad M = 18\text{KN}\cdot\text{m}$

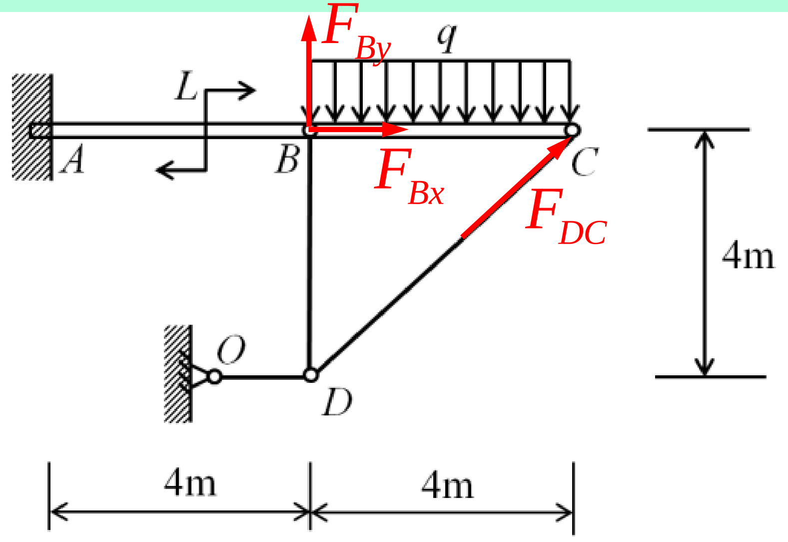
另解：（1）以杆BC（不带销钉）为研究对象，画受力图

列平衡方程：

$$\sum M_B = 0,\quad F_{DC}\cos 45^\circ \times 4 - 4q\times 2 = 0$$
$$\sum F_x = 0,\quad F_{Bx} + F_{DC}\cos 45^\circ = 0$$
$$\sum F_y = 0,\quad F_{By} + F_{DC}\sin 45^\circ - 4q = 0$$

得出：
$$\begin{cases} F_{DC} = 2\sqrt{2}\text{KN} \\ F_{Bx} = -2\text{KN} \\ F_{By} = 2\text{KN} \end{cases}$$

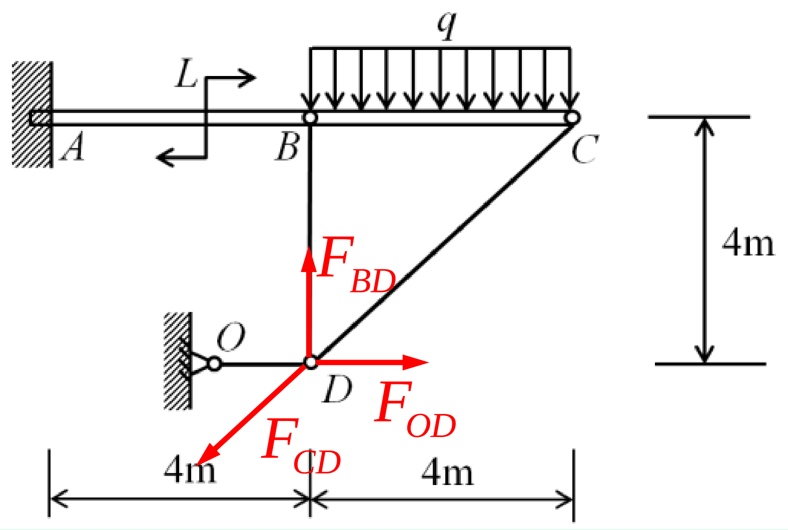
以销钉D为研究对象，画受力图



以铰链D为研究对象，画受力图

列平衡方程：$\sum F_y = 0,\ F_{BD} - F_{CD}\cos 45° = 0$

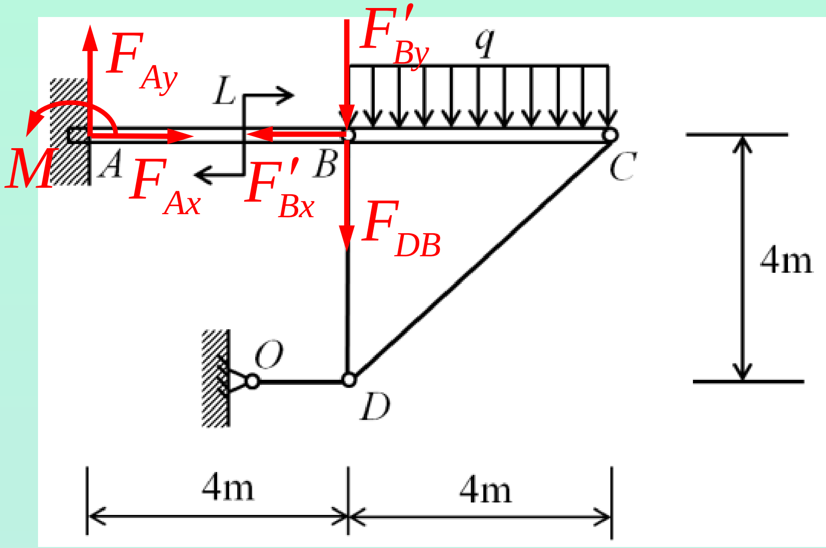
得出：$F_{BD} = 2\text{KN}$



以杆AB（带销钉）为研究对象，画受力图

列平衡方程：

$$\begin{cases} \sum F_x = 0,\ F_{Ax} - F'_{Bx} = 0 \\ \sum F_y = 0,\ F_{Ay} - F_{DB} - F'_{By} = 0 \\ \sum M_A = 0,\ M - L - 4F_{DB} - 4F'_{By} = 0 \end{cases}$$



$F_{Bx} = -2\text{KN},\quad F_{By} = 2\text{KN}$

得出固定端A的约束力为：

$F_{Ax} = -2\text{KN},\ F_{Ay} = 4\text{KN},\ M = 18\text{KN}\cdot\text{m}$

谢谢使用