# 2015 一 2016 学年第 1 学期试题 答案

二,**解**：（1）设 $A$ 表示事件“树还活着”，$W$ 表示事件“邻居记得给树浇水”。由题已知

$$P(W)=0.9,P(\bar{W})=0.1,P(A|W)=0.9,P(A|\bar{W})=0.1$$

则由全概率公式得

$$P(A)=P(W)P(A|W)+P(\bar{W})P(A|\bar{W})=0.9\times0.9+0.1\times0.1$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P(\bar{W}|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}|\bar{W})P(\bar{W})}{P(\bar{A})}=\frac{\left[1-P(A|\bar{W})\right]P(\bar{W})}{1-P(A)}=\frac{0.9\times0.1}{0.18}=0.5$$

三 解：（1）当 $x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=0$

当 $1\le x<e$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{1}0dx+\int_{1}^{x}\frac{1}{x}dx=\ln x$

当 $x\geqslant e$ 时 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{e}f(x)dx+\int_{e}^{x}f(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{1}0dx+\int_{1}^{e}\frac{1}{x}dx+\int_{e}^{x}0dx=1$$

故得分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \ln x, & 1\le x<e\\ 1, & x\ge e\end{cases}$

（2）$P\left\{2<X<\frac{5}{2}\right\}=P\left\{2<X\le\frac{5}{2}\right\}=F(\frac{5}{2})-F(2)=\ln\frac{5}{2}-\ln 2=\ln\frac{5}{4}$

（3）$D\left(2X^2+5\right)=4D(X^2)=4\left[E\left(X^4\right)-E^2\left(X^2\right)\right]$

$$E\left(X^4\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4f\left(x\right)dx=\int_{1}^{e}x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^e=\frac{e^4-1}{4}$$

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f\left(x\right)dx=\int_{1}^{e}xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^e=\frac{e^2-1}{2}$$

$$D\left(2X^2+5\right)=4\left[E\left(X^4\right)-E^2\left(X^2\right)\right]=4\left[\frac{e^4-1}{4}-\left(\frac{e^2-1}{2}\right)^2\right]=2e^2-2$$

（4） $y=g(x)=2x-3;\quad x=h(y)=\frac{y+3}{2}$，$h'(y)=\frac{1}{2}$

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left[h(y)\right]|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & else \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{y+3}{2}}\right), & 1<\frac{y+3}{2}<e \\ 0, & else \end{cases}=\begin{cases} \frac{1}{y+3}, & -1<y<2e-3 \\ 0, & else \end{cases}$$

四、解： $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta<x<1 \\ 0, & else \end{cases}$

（1） $\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{\theta}^{1}\frac{x}{1-\theta}dx=\frac{1+\theta}{2}$，

令 $\mu=\frac{1+\theta}{2}=\bar{X}$ 得 $\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M=2\bar{X}-1$.

（2）似然函数 $L(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases} \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\theta}=\frac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta<x_i\le 1 \\ 0 & ,else \end{cases}$

对数似然函数 $\ln L(x_i,\theta)=\begin{cases} -n\ln(1-\theta), & \theta<x_i\le 1 \\ 0 & ,else \end{cases}$

$\frac{\partial \ln L(x_i,\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{1-\theta}\neq 0$，故从极大似然估计的意义出发求 $\theta$ 的最大似然估计。

由似然函数 $L(x_i,\theta)$ 表达式知 $L(x_i,\theta)$ 是 $\theta$ 增函数，当 $\theta$ 取最大值时，$L(x_i,\theta)$ 达最大

又由于 $\theta<x_1,x_2,\ldots,x_n\le 1$，故得 $\theta$ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_{MLE}=X_{(1)}=\min(X_1,X_2,\ldots,X_n)$。

（3） $P(\theta<X\le\frac{1}{2})=F(\frac{1}{2})-F(\theta)=\frac{1-2\theta}{2-2\theta}$

由于函数 $u=\frac{1-2\theta}{2-2\theta}$ 具有单值反函数 $\theta=\frac{1-2u}{2-2u}$，由最大似然估计不变性知

$P(\theta < X \le \frac{1}{2}) = \frac{1-2\theta}{2-2\theta}$的最大似然估计值为：

$$\hat{P}(\theta < X \le \frac{1}{2}) = \frac{1-2\hat{\theta}_{MLE}}{2-2\hat{\theta}_{MLE}} = \frac{1-2X_{(1)}}{2-2X_{(1)}}$$

（4）$E\left(\hat{\theta}_M\right)=2E\left(\bar{X}\right)-1=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)-1=\frac{2}{n}\times n\times E(X)-1=2\times\frac{1+\theta}{2}-1=\theta$，

$\hat{\theta}_M$是$\theta$的无偏估计

$$D(X)=E(X^2)-E^2\left(X\right)=\int_\theta^1\frac{x^2}{1-\theta}dx-\left(\frac{1+\theta}{2}\right)^2=\frac{\left(1-\theta\right)^2}{12}$$

$$E\left(\hat{\theta}_M^2\right)=E\left[\left(2\bar{X}-1\right)^2\right]=E\left(4\bar{X}^2-4\bar{X}+1\right)=4E\left(\bar{X}^2\right)-4E\left(\bar{X}\right)+1$$

$$=4\left[\frac{\left(1-\theta\right)^2}{12n}+\left(\frac{1+\theta}{2}\right)^2\right]-4\left(\frac{1+\theta}{2}\right)+1=\frac{\left(1-\theta\right)^2}{3n}+\theta^2$$

$$D\left(\hat{\theta}_M\right)=E\left(\hat{\theta}_M^2\right)-E^2\left(\hat{\theta}_M\right)=\frac{\left(1-\theta\right)^2}{3n}+\theta^2-\theta^2=\frac{\left(1-\theta\right)^2}{3n}$$

或者 $D\left(\hat{\theta}_M\right)=D\left(2\bar{X}-1\right)=4D\left(\bar{X}\right)=4\times\frac{\left(1-\theta\right)^2}{12n}=\frac{\left(1-\theta\right)^2}{3n}$

$E\left(\hat{\theta}_M\right)=\theta,\ \lim_{n\to+\infty}D\left(\hat{\theta}_M\right)=0$ 故$\hat{\theta}_M$为$\theta$的相合估计。

方法二：由于$\bar{X}\xrightarrow{P}\mu=\frac{1+\theta}{2}$，则$2\bar{X}-1\xrightarrow{P}2\mu-1=\theta$，故$\hat{\theta}_M$为$\theta$的相合估计。

（5）$\hat{\theta}_{MLE}=X_{(1)}=\min(X_1,X_2,...,X_n)$

则$\hat{\theta}_{MLE}$的概率密度函数为

$$f(x_{(1)})=n\left(1-F(x)\right)^{n-1}f(x)=\begin{cases}\frac{n\left(1-x\right)^{n-1}}{\left(1-\theta\right)^n}, & \theta < x \le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

$E(\hat{\theta}_{MLE})=\int_\theta^1\frac{nx\left(1-x\right)^{n-1}}{\left(1-\theta\right)^n}dx=\theta+\frac{1-\theta}{n+1}\neq\theta$，故$\hat{\theta}_{MLE}$为$\theta$的有偏估计。

$$E(\hat{\theta}_{MLE}^2)=\int_\theta^1 \frac{nx^2(1\text{-}x)^{n-1}}{(1\text{-}\theta)^n}dx=\theta^2+\frac{2\theta(1-\theta)}{n+1}+\frac{2(1-\theta)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$D(\hat{\theta}_{MLE})=E(\hat{\theta}_{MLE}^2)\text{-}E^2(\hat{\theta}_{MLE})=\theta^2+\frac{2\theta(1-\theta)}{n+1}+\frac{2(1-\theta)^2}{(n+1)(n+2)}-\left(\theta+\frac{1-\theta}{n+1}\right)^2$$

$$=\frac{2(1-\theta)^2}{(n+1)(n+2)}\text{-}\frac{(1-\theta)^2}{(n+1)^2}=\frac{n(1-\theta)^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}E(\hat{\theta}_{MLE})=\theta,\ \lim\limits_{n\to+\infty}D(\hat{\theta}_{MLE})=0$，故$\hat{\theta}_{MLE}$为$\theta$的相合估计。

五、解：$n_1=10,\quad n_2=8,\quad \bar{x}=99.4, s_1^2=1.1$，$\bar{y}=98.875,\ s_2^2=0.6964$.

(1). 方差比$\sigma_1^2/\sigma_2^2$的检验假设　$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\ H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

检验统计量：$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

拒绝域：$F\geq F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或$F\leq F_{1\text{-}\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

$F\geq 4.82$或$F\leq\dfrac{1}{4.2}=0.2381$

$\dfrac{s_1^2}{s_2^2}=1.6954$不属于拒绝域，故接受原假设，即认为$\sigma_1^2=\sigma_2^2$。

均值差$\mu_1-\mu_2$的检验假设　$H_0:\mu_1-\mu_2\leq 0,\ H_1:\mu_1-\mu_2>0$

由方差比假设检验知$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，因此，可采用$t$检验法检验均值差$\mu_1-\mu_2$

检验统计量：$\mathrm{T}=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$　　$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$，$s_w^2=0.9547$

拒绝域：$t\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)$

$t\geq 1.7459$

$t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=1.1328$未落入拒绝域，故接受原假设$H_0$。

（2） a. 均值$\mu_1$的置信区间

枢轴量：$\dfrac{\bar{X}-\mu_1}{S_1/\sqrt{n_1}}\sim t(n_1-1)$

置信区间为：$\left(\bar{X} \pm \frac{S_1}{\sqrt{n_1}} t_{\alpha/2}(n_1 - 1)\right)$

代入样本观察值得出的置信区间为：(98.631，100.169)

b. 方差$\sigma_1^2$的单侧置信上限

枢轴量：$\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$

置信区间为：$\left(0, \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n_1 - 1)}\right)$

单侧置信上限为$\bar{\sigma}_1^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n_1 - 1)}$

代入样本观察值得出的单侧置信上限为$\bar{\sigma}_1^2$=3.1279

六、解：（1）由

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dydx = \int_1^{+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{A}{x^4 y} dydx = A\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} (\ln y|_{\frac{1}{x}}^{x})dx$$

$$= 2A\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4} dx = 2A\left[-\frac{\ln x}{3x^3}\bigg|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{3x^4} dx\right] = \frac{2}{9} A$$

得 $A = \frac{9}{2}$

(2) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y)dydx = \int_1^{+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{9}{2x^3 y} dydx = \frac{9}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} (\ln y|_{\frac{1}{x}}^{x})dx$

$$= 9\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx = 9\left[-\frac{\ln x}{2x^2}\bigg|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^3} dx\right] = \frac{9}{4}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y)dydx = \int_1^{+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{9}{2x^4} dydx = \frac{9}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\left(x - \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{9}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5} dx = \frac{9}{2}\left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^4}\right)\bigg|_1^{+\infty} = \frac{9}{8}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dydx = \int_1^{+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{9}{2x^3} dydx = \frac{9}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\left(x - \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{9}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} dx = \frac{9}{2}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3}\right)\bigg|_1^{+\infty} = 3$$

$$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=3-\frac{9}{4}\times\frac{9}{8}=\frac{15}{32}$$

$$(3)\quad f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{9}{2x^4y}dy=\frac{9}{2x^4}\ln y\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}=\frac{9\ln x}{x^4}, & x>1\\ 0, & ,else\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\frac{1}{y}}^{\infty}\frac{9}{2x^4y}dx=\frac{3}{2y}\left(-\frac{1}{x^3}\right)\Big|_{\frac{1}{y}}^{\infty}=\frac{3}{2}y^2, 0<y<1\\ \int_{y}^{\infty}\frac{9}{2x^4y}dx=\frac{3}{2y}\left(-\frac{1}{x^3}\right)\Big|_{y}^{\infty}=\frac{3}{2y^4}, y>1\end{cases}$$

因为 $f_X(x)\times f_Y(y)=\begin{cases}\frac{27y^2\ln x}{2x^4}, & 0<y<1,\ x>1\\ \frac{27\ln x}{2x^4y^4}, & ,y>1,\ x>1\\ 0, & else\end{cases}\neq f(x,y)$

所以 $X$ 与 $Y$ 不是相互独立的。

（4）当 0<$y$<1 时

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{9}{2x^4y}*\frac{2}{3y^2}=\frac{3}{x^4y^3} & ,x>\frac{1}{y}\\ 0 & ,else\end{cases}$$

当 $y$>1 时

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{9}{2x^4y}*\frac{2y^4}{3}=\frac{3y^3}{x^4} & ,x>y\\ 0 & ,else\end{cases}$$

当 $x$>1 时

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{9}{2x^4y}*\frac{x^4}{9\ln x}=\frac{1}{2y\ln x} & ,\frac{1}{x}<y<x\\ 0 & ,else\end{cases}$$

(5) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dy$，仅当$\begin{cases}x>1\\ \frac{1}{x}<\frac{z}{x}<x\end{cases}$即$\begin{cases}x>1\\ 1<z<x^2\end{cases}$时被积函数不为零，

因此 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx=\begin{cases}\int_{\sqrt{z}}^{\infty}\frac{9}{2x^4z}dx=\frac{3}{2z^{5/2}},z>1\\ 0 \qquad\qquad ,else\end{cases}$$