概率论与数理统计教学设计

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 课程名称 | 经济应用数学C | | 课时 | 50+50=100分钟 | |
| 任课教师 | 蔡东平 | | 专业与班级 | 市营B1601班  人资B1601-02班 | |
| 课型 | 新授课 | | 课题 | 二维随机变量函数的分布 | |
| 学  习  目  标 | 知识与技能 | | 1. 引言  2 离散型随机向量的函数的分布  3 连续型随机向量的函数的分布  4 连续型随机向量函数的联合概率密度  5和的分布  6商的分布  7 积的分布  8最大、最小分布 | | |
| 过程与方法 | | 在实际应用中，有些随机变量往往是两个或两个以上随机变量的函数. 例如，考虑全国年龄在40岁以上的人群，用和分别表示一个人的年龄和体重，表示这个人的血压，并且已知与，的函数关系式  ,  现希望通过的分布来确定的分布. 此类问题就是我们将要讨论的两个随机向量函数的分布问题.  在本节中，我们重点讨论两种特殊的函数关系:  (i) ;  (ii) 和，其中与相互独立.  注：应指出的是，将两个随机变量函数的分布问题推广到个随机变量函数的分布问题只是表述和计算的繁杂程度的提高，并没有本质性的差异. | | |
| 情感态度与价值观 | | 1.培养学生解决问题的过程是由简单到复杂的过程。  2.让学生理解，一个真理的发现不是一蹴而就的，需要经过有简单到复杂，由具体到抽象的不断深入的过程. | | |
| 教学分析 | 教学内容 | | 1. 引言  2 离散型随机向量的函数的分布  3 连续型随机向量的函数的分布  4 连续型随机向量函数的联合概率密度  5和的分布  6商的分布  7 积的分布  8最大、最小分 | | |
| 教学重点 | | 1. 和的分布 ;  2. 积的分布;  3. 最大、最小分布; | | |
| 教学难点 | | 1. 和的分布 ;  2. 积的分布;  3. 最大、最小分布; | | |
| 教学方法与策略 | 课堂教学设计思路 | | 1对比一维随机变量函数的分布来了解多维随机变量离散型随机向量的函数的分布、连续型随机向量的函数的分布；  2、进一步理解和的分布、正态随机变量的线性组合、商的分、 积的分布、最大、最小分布 | | |
| 板书设计 | | 1. 引言  2 离散型随机向量的函数的分布  3 连续型随机向量的函数的分布  4 连续型随机向量函数的联合概率密度  5和的分布  6商的分布  7 积的分布  8最大、最小分 | | |
| 教学进程 | | | | | |
| 教学意图 | | 教学内容 | | | 教学环节 |
| **1．引言**（5分钟） | | | | | |
| 累计5分钟 | | 在实际应用中，有些随机变量往往是两个或两个以上随机变量的函数. 例如，考虑全国年龄在40岁以上的人群，用和分别表示一个人的年龄和体重，表示这个人的血压，并且已知与，的函数关系式  ,  现希望通过的分布来确定的分布. 此类问题就是我们将要讨论的两个随机向量函数的分布问题.  在本节中，我们重点讨论两种特殊的函数关系:  (i) ;  (ii) 和，其中与相互独立.  注：应指出的是，将两个随机变量函数的分布问题推广到个随机变量函数的分布问题只是表述和计算的繁杂程度的提高，并没有本质性的差异. | | | 时间：5分钟  应指出的是，将两个随机变量函数的分布问题推广到个随机变量函数的分布问题只是表述和计算的繁杂程度的提高，并没有本质性的差异. |
| 教学意图 | | 教学内容 | | | 教学环节 |
| 2. **离散型随机变量的函数的分布**：（25分钟） | | | | | |
| **离散型随机变量的函数的分布**  、  累计30分钟 | | **离散型随机变量的函数的分布**  设是二维离散型随机变量, 是一个二元函数, 则作为的函数是一个随机变量, 如果的概率分布为    设的所有可能取值为, 则的概率分布为    设是二维离散型随机变量, 是一个二元函数, 则作为的函数是一个随机变量, 如果的概率分布为    设的所有可能取值为, 则的概率分布为     |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *Y* X |  | 0 | 1 | 2 | |  | 0.2 | 0.15 | 0.1 | 0.3 | | 2 | 0.1 | 0 | 0.1 | 0.05 |   **例1** 设随机变量的概率分布如下表  求二维随机变量的函数*Z*的分布:  **解** 由的概率分布可得   |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | 0.2 | 0.15 | 0.1 | 0.3 | 0.1 | 0 | 0.1 | 0.05 | |  | (-1,-1) | (-1,0) | (-1,1) | (-1,2) | (2,-1) | (2,0) | (2,1) | （2,2） | |  | -2 | -1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | |  | 1 | 0 | -1 | -2 | -2 | 0 | 2 | 4 |   与一维离散型随机变量函数的分布的求法相同, 把值相同项对应的概率值合并可得:  的概率分布为   |  |  | | --- | --- | |  | -2 -1 0 1 2 3 4 | |  | 0.2 0.15 0.1 0.4 0 0.1 0.05 |   的概率分布为   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Z | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 | |  | 0.4 | 0.1 | 0.15 | 0.2 | 0.1 | 0.05 | |  |  |  |  |  |  |  |   **例**2 设和相互独立,  求的分布.  **解** 这里我们利用第二章中二项分布的直观解释求之. 若 则是在次独立重复试验中事件出现的次数, 每次试验中出现的概率都为  同样, 是在次独立重复试验中事件出现的次数, 每次试验中出现的概率为故是在次独立重复试验中事件出现的次数, 每次试验中出现的概率为 于是是以为参数的二项随机变量, 即  **例3** 若和相互独立, 它们分别服从参数为的泊松分布, 证明服从参数为的泊松分布.  **解**  由离散型卷积公式得        即服从参数为的泊松分布. | | | 时间:25分钟 |
| 3. 连续型随机向量的函数的分布（20分钟） | | | | | |
| 教学意图 | | 教学内容 | | | 教学环节 |
| 累计50分钟 | | 设是二维连续型随机向量, 其概率密度函数为, 令为一个二元函数, 则是的函数.  可用类似于求一元随机变量函数分布的方法来求的分布.  a) 求分布函数    其中,  b) 求其概率密度函数, 对几乎所有的*z*, 有    定理1 设是具有密度函数的连续型随机向量.  (1) 设是到自身的一一映射, 即存在定义在该变换的值域上的逆变换:    (2) 假设变换和它的逆都是连续的;  (3) 假设偏导数存在且连续;  (4) 假设逆变换的雅可比行列式  ,  即对于在变换的值域中的是不为0的. 则具有联合密度    定理2 设相互独立，且  则仍然服从正态分布，且    更一般地，可以证明：有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布, 即有  定理3 若且它们相互独立，则对任意不全为零的常数，有  .  **例4**  设随机变量与相互独立, 且同服从上的均匀分布, 试求的分布函数与密度函数.  **解** 先求的分布函数        于是的概率密度为 | | | 时间20分钟  有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布 |
| 4.和、商、积的分布（35分钟） | | | | | |
| 教学意图 | | 教学内容 | | | 教学环节 |
| 累计35分钟 | | **例5** 设的密度函数为 令    试用表示和的联合密度函数.  **和的分布**：设和的联合密度为, 求的密度.  **卷积公式:** 当和独立时, 设关于的边缘密度分别为 则上述两式化为    以上两个公式称为**卷积公式**.  **解** 令 则逆变换为    故由定理1知, 和的联合密度函数为  **例6** 设和是两个相互独立的随机变量. 它们都服从分布, 其概率密度为      **解** 由卷积公式得      即  **例7** **(讲义例5)** 设某种商品一周的需要量是一个随机变量, 其概率密度函数为    如果各周的需要量相互独立, 求两周需要量的概率密度函数.  **解** 分别用和表示第一、二周的需求量 则    从而两周需求量 利用卷积公式计算.  当时, 若 则 若 则 从而  当时, 若 则 若 即 则  故 从而  **例8** **(讲义例4)**设与相互独立, 且均在区间上服从均匀分布, 求的密度函数.  **解** 由卷积公式,对 有    因为 所以  作变量代换, 令 则 它表明  **注:** 进一步可以证明, 设 且和相互独立, 则  **例9** 设相互独立且分别服从参数为的分布(分别记成的概率密度分别为      试证明服从参数为的分布.  **证明** 由卷积公式, 知当时, 的概率密度 当时, 的概率密度      记为  其中 再来计算由概率密度性质, 有    即有 于是 亦即服从参数为的分布, 即  **商的分布**：设二维随机向量的密度函数为, 求的密度函数.  **例10** 在一简单电路中, 两电阻和串联连接, 设相互独立,它们的概率密度均为    求总电阻的概率密度.  **解** 的概率密度为    易知仅当 即时上述积分的被积函数不等于零(如图), 由此即得 将的表达式代入上式得    **例11** 设*X*与*Y*相互独立, 它们都服从参数为的指数分布. 求的密度函数.  **解** 依题意, 知  因与相互独立, 故  由商的分布, 知 当时,  当时,  故的密度函数为  **积的分布**： 设具有密度函数, 则的概率密度为    **例1**2 设二维随机向量在矩形上服从均匀分布, 试求边长为和的矩形面积的密度函数.  **解法1** 二维随机变量的密度函数为  令为的分布函数, 则  显然时,  时,  而当时(如图), 有    于是  从而  **解法2** 二维随机变量的密度函数为  于是  因为仅当时,  所以    其它情形**,** | | | 时间35分钟  ． |
| 5.极值分布（15分钟） | | | | | |
| 教学意图 | |  | | | 教学环节 |
| 累计48分钟 | | **及的分布**  设随机变量相互独立,其分布函数分别为和, 由于不大于*z*等价于和都不大于*z*, 故有    类似地, 可得的分布函数    **例13** 设随机变量相互独立, 并且有相同的几何分布:  ，  求的分布.  **解**一    **解二**      **例14 (讲义例6)** 设系统由两个相互独立的子系统联接而成，联接方式分别为串联、并联、备用（当系统损坏时，系统开始工作），如图3—3—6所示. 设的寿命分别为, 已知它们的概率密度分别为    其中且 试分别就以上三种联接方式写出寿命的概率密度.  **解** (1)串联的情况  由于当中有一个损坏时, 系统就停止工作, 所以这时的寿命为  由题设知的分布函数分别为    于是的分布函数为    的概率密度为  (2) 并联的情况  由于当且仅当都损坏时, 系统才停止工作, 所以这时的寿命  于是的分布函数为    于是的概率密度为    (3) 备用的情况  由于这时系统损坏时系统才开始工作, 故整个系统的寿命是两者寿命之和, 即 故当时, 的概率密度为      而当时,  于是的概率密度为 | | | 时间13分钟 |
|  | | | | | |
| 教学意图 | |  | | | 教学环节 |
| 本次课小结  累计49分钟 | | 1. 引言  2 离散型随机向量的函数的分布  3 连续型随机向量的函数的分布  4 连续型随机向量函数的联合概率密度  5和的分布  6商的分布  7 积的分布  8最大、最小分 | | | 时间1分钟  回顾总结 |
| 并引导学生  对下节课要  解决的问题  进行思考.  累计50分钟 | | 1. 已知的分布律为  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  | 0 | 1 | 2 | | 0 | 0.10 | 0.25 | 0.15 | | 1 | 0.15 | 0.20 | 0.15 |   求: （1）  （2）  （3）  （4）的分布律.  2. 若和独立, 具有共同的概率密度    求的概率密度. | | | 根据本节讲授内容，给出一些思考拓展的问题. |
| 作业布置：  1.复读课本第97至第104页；  2.完成书面作业：第113页第28-31题、  3.预习课本第115页至120页. | | | 要求学生认真完成作业. |
|  | | | | | |
| 教学评价 | | 在本节的教学过程中，公式难度大，对积分要求高，但学生均表现出较高的积极性和较大的情感投入，通过提问和交流说明学生已初步获得较理想的学习效果，也达到了本节的课的教学目标. | | | |