No.

Date

§1.1 主要任务

刚度、强度、稳定性

绗架的连接　用多少铆钉

具有足够的强度

§1.2 研究对象及其基本假定

研究对象：变形固体

基本假设：

1. 连续性假设　（数学）
2. 均匀性假设　（力学）
3. 各向同性假设　（物理）
4. 小变形假设

注意　1° 考虑变形　2° 原始尺寸

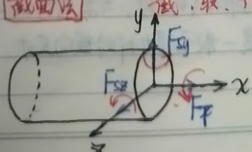
§1.3 基本概念—外力、内力和应力

1. 外力
2. 内力

☆ 构件内部由于外力作用而引起的各质点之间的相互作用力的改变量，称为附加内力，简称内力。

（物体本来存在内部作用力，外力引起了内部作用力的改变）

☆ 内力的求法：截面法　截、取、代、平

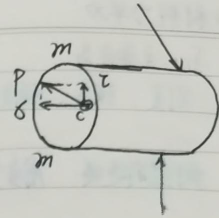


No.
Date

3. 应力——内力的集度（stress）

$$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta A}=\frac{dF}{dA}$$

σ——正应力　　τ——切应力/剪切力



§ 位移、变形及应变

$\boxed{应变}$　线应变、角应变

§1.5 构件的分类　杆件基本变形

杆：一个方向的尺寸 >> 其他两个方向的尺寸.

构件变形的基本形式

拉伸或压缩：外力方向沿构件轴线

剪切：一对相距很近、方向相反、大小相等且垂直于杆轴线作用力

扭转

弯曲

第2章 拉伸与压缩

外法线方向为正　　轴力图

2.3 截面上的应力

横截面上应力为均匀分布，以σ表示

$$F_N=\int_A \sigma\,dA=\sigma\int_A dA=\sigma A$$

$$\Rightarrow \sigma=\frac{F_N}{A}$$

$\boxed{圣维南原理}$　力作用于杆端的分布方式的不同，只影响杆端局部范围内的应力分布.
受影响区域的长度一般不超出杆的横向尺寸.

No.
Date

斜截面上的应力

$$p_\alpha=\frac{F}{A}\cos\alpha=\sigma\cos\alpha$$

$\boxed{正应力}$ $\sigma_\alpha=p_\alpha\cos\alpha=\sigma\cos^2\alpha=\frac{\sigma}{2}(1+\cos2\alpha)$

$\boxed{切应力}$ $\tau_\alpha=p_\alpha\sin\alpha=\sigma\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sigma}{2}\sin2\alpha$

☆ $\begin{cases}\alpha=0°时, & \sigma_{\alpha,max}=\sigma \\ \alpha=45°时, & \tau_{\alpha,max}=\frac{\sigma}{2}\end{cases}$

§2-4 材料拉伸时的力学性质

1、试件(试样)

1. 弹性阶段 ob

σ_p — 比例极限 $\sigma=E\varepsilon$

σ_e — 弹性极限 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\tan\alpha$

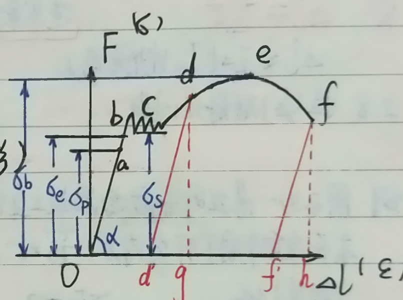
2. 屈服阶段 bd(出现永久变形—塑性变形)

σ_s — 屈服极限

3、强化阶段 de(恢复抵抗变形的能力)

σ_b — 强度极限

4、局部颈缩阶段 ef



2. 两个塑性指标

断后伸长率 $\delta=\frac{l_1-l_0}{l_0}\times100\%$ 断面收缩率 $\psi=\frac{A_0-A_1}{A_0}\times100\%$

3. 卸载定律及冷作硬化

将试件拉伸到超过弹性范围后的任一点处，逐渐卸载，应力与应变呈直线关系。第二次加载时，材料比例极限有所提高，断后伸长率有所降低.

☆对于没有明显屈服阶段的材料，以塑性应变的0.2%.

泊松比 μ

外力→内力→应力

$\boxed{\text{强度条件}}$

☆ $\sigma_{max}=\frac{F_N}{A}\le[\sigma]$

(1) 强度校核
(2) 设计截面
(3) 确定许可载荷（外力）

☆ 外力→内力→应力→强度校核

2.7 拉(压)杆的变形　胡克定律

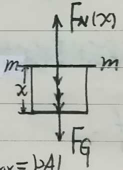
☆ $\Delta l=\frac{F_N l}{EA}$

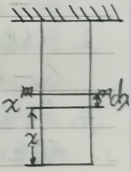
$\Delta l\le[\Delta l]$（许用变形）

$\boxed{\text{适用条件}}$ (1) 弹性范围内
(2) 轴力、截面、材料不变

2.8 拉(压)超静定问题

2.7 例 图示为一悬挂的等截面混凝土直杆求在自重作用下杆的内力. 已知 l. A, γ(比重) N/m,





$\Sigma F_x=0$

解 (1) 内力 $F_N(x)-\gamma Ax=0$

则 $F_N(x)=\gamma Ax$ ∴ $F_{N,max}=\gamma Al$

(2) 应力 $\sigma(x)=\frac{F_N(x)}{A}=\gamma x$ ∴ $\sigma_{max}=\sigma_{x=l}=\gamma l$

由强度条件: $\sigma_{max}\le[\sigma]$ ∴ $l\le\frac{[\sigma]}{\gamma}$

(3) 计算总变形量 由胡克定律 $dl=\frac{\gamma Ax}{EA}dx$

故 $\delta=\int_x^l\frac{F_N(x)dx}{EA}=\int_x^l\frac{\gamma Ax}{EA}dx$ (m-m处)

则 $\Delta l_{总}=\int_0^l\frac{\gamma Ax}{EA}dx=\frac{\gamma l^2}{2E}$

§2-8 拉、压超静定问题

(1) 超静定问题（静不定问题）

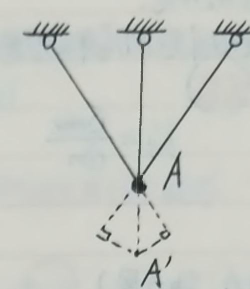
(2) 变形协调方程 — 几何

$\Delta l_3 \cos\alpha = \Delta l_1 = \Delta l_2$

本构方程

$\Delta l_1 = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1}$，$\Delta l_3 = \frac{N_3 L_3}{E_3 A_3}$

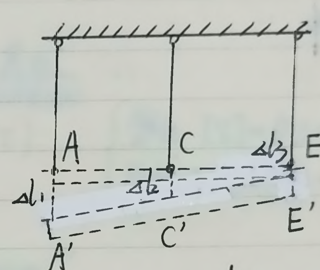
又由 $\Sigma F_x = 0$，$\Sigma F_y = 0$ 联立求解



例

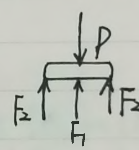
$\boxed{\text{几何关系}}$：$\frac{\Delta l_1 - \Delta E}{\Delta l_2 - \Delta E} = \frac{0.8}{0.4}$

补充



例 (1) 平衡方程：

$\Sigma Y = 4F_2 + F_1 - P = 0$



(2) 变形关系： $\Delta l_1 = \Delta l_2$

(3) 本构方程： 胡克定律，$\Delta l_1 = \frac{F_2 L}{E_1 A_1}$，$\Delta l_2 = \frac{F_1 L}{E_2 A_2}$

(4) 极限方程： $[\Delta_1] = L[\sigma_1]/E_1 = 0.8mm$

$[\Delta_2] = L[\sigma_2]/E_2 = 1.2mm$

四. 轴向拉压应变能

U(应变能) $= W$(外力所做的功)

$W = \frac{1}{2} P \times \Delta L = U$

$U = \frac{P^2 L}{2EA} = \frac{N^2 L}{2EA} = \frac{EA}{2L}(\Delta L)^2$

☆ 单位体积内的应变能 — 比能 u

$u = \frac{U}{V} = \frac{\frac{1}{2} P \times \Delta L}{AL} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$

§2-11 应力集中的概念.

☆ 由于截面骤变而引起的局部应力发生骤变的现象

△ 理论应力集中因数

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_m}$$

小结

1、轴向拉压（内力，轴力图）

2、基本实验

3、刚/塑性材料

第3章 剪切

受力特征：受一对大小相等，方向相反，相距很近，且垂直于杆件轴线的外力作用.

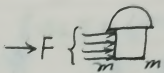
变形特征：横截面沿外力作用方向发生错动.

☆可能的破坏形式：

① 剪切破坏　② 挤压破坏　③ 钢板发生拉(压)破坏.

名义切应力

☆ 实用计算



(1) 假设剪应力在剪切面 m-m 上均匀分布

名义剪应力 $\tau = \dfrac{F_s}{A} = \dfrac{\text{剪力}}{\text{剪切面面积}}$

剪切强度条件 $\tau = \dfrac{F_s}{A} \leq [\tau]$

$\begin{cases} \text{塑性} & [\tau] = (0.5 \sim 0.7)[\sigma] \\ \text{脆性} & [\tau] = (0.8 \sim 1.0)[\sigma] \end{cases}$

(2) 挤压实用计算

假设挤压应力在等效挤压面上均匀分布

名义挤压应力 $\sigma_{bs} = \dfrac{F_{bs}}{A_{bs}}$

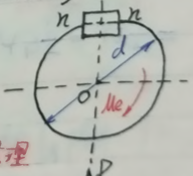
挤压强度条件 $\sigma_{bs} = \dfrac{F_{bs}}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]$

$\begin{cases} \text{塑性} & [\sigma_{bs}] = (1.5 \sim 2.5)[\sigma] \\ \text{脆性} & [\sigma_{bs}] = (0.9 \sim 1.5)[\sigma] \end{cases}$

△ 挤压面面积的计算

$\boxed{\text{柱面接触}}$

挤压面面积为实际的承压面积在其直径平面上的投影.

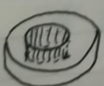


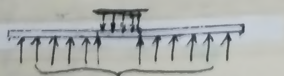
☆ $\begin{cases} \text{校核强度} \\ \text{设计尺寸} \\ \text{设计外载} \end{cases}$

$\sum M_o = 0$，$F\dfrac{d}{2} - M_e = 0$

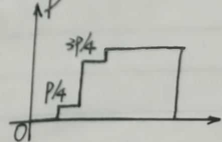
$\begin{cases} F_s = F \Rightarrow \tau \\ \sigma_{bs} \end{cases}$

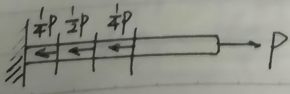
σ，τ 达到 $[\sigma]$，$[\tau]$，材料利用最合理





F　截面1





剪应力强度条件
挤压强度条件
拉伸强度

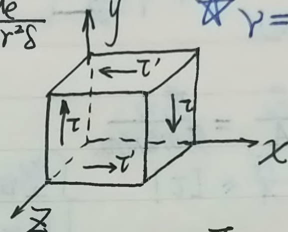
3.2 纯剪切 切应力互等定理 剪切胡克定律

一、纯剪切

$$M_e=\int_A \tau r dA=\tau r\cdot 2\pi r\delta=\tau\cdot 2\pi r^2\delta$$

故有 $\tau=\dfrac{M_e}{2\pi r^2\delta}$

☆ $\gamma=r\dfrac{\varphi}{l}$



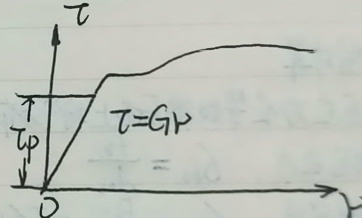
二、切应力互等定理

由 $\sum M_z=0$

可得：$\tau'=\tau$

☆ 单元体上两个互垂面上剪应力相等，方向相反

三、剪切胡克定律



$\tau\leq\tau_p$，$\tau=G\gamma$

△ $G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$

3.3 剪切应变能

$$v_s=\frac{V_s}{V}=\frac{\frac{1}{2}M_e\varphi}{2\pi r\delta l}=\frac{1}{2}\frac{M_e r\varphi}{2\pi r^2\delta l}$$

$$=\frac{1}{2}\tau\gamma=\frac{1}{2}G\gamma^2$$

第4章 扭转

☆本章中，主要讨论圆轴的强度和刚度问题.

△ 外加力偶矩计算

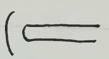
功率与转速

$$P=\frac{W}{t}=\frac{M\cdot\varphi}{t}=M\omega=M\cdot\frac{2\pi n}{60}$$

则 $M=\frac{60P(kW)}{2\pi n(r/min)}$

二、杆受扭时的内力计算

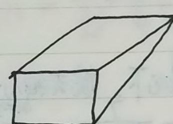
例题2



☆扭矩图

三、圆轴扭转时截面上的应力计算

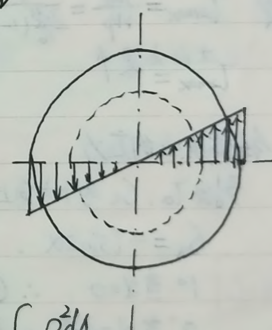
1. 变形几何关系



$$\gamma=R\frac{d\varphi}{dx}$$

$$\gamma_\rho=\rho\frac{d\varphi}{dx} \quad ①$$

2. 物理关系



△剪切胡克定律 $\tau=G\gamma$

距离圆心ρ处 $\tau_\rho=G\gamma_\rho$ ② 代入①可得

$$\tau_\rho=G\rho\frac{d\varphi}{dx}$$

3. 静力关系

$$\int_A\rho\tau_\rho dA=\int_A\rho^2G\frac{d\varphi}{dx}dA=T=G\frac{d\varphi}{dx}\int_A\rho^2dA$$

令 $\int_A\rho^2dA=I_p$ I_p—截面二次极矩（极惯性矩）

$$G\frac{d\varphi}{dx}I_p=T\Rightarrow\frac{d\varphi}{dx}=\frac{T}{GI_p}$$

则 $\tau_\rho=G\rho\cdot\frac{T}{GI_p}$

故 $\boxed{\tau_\rho=\frac{T\rho}{I_p}}$

☆最大切应力计算

$$\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p}$$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{TR}{I_p} = \frac{T}{\frac{I_p}{R}}$$

△抗扭截面系数

令 $\frac{I_p}{R} = W_p \Rightarrow \tau_{max} = \frac{T}{W_p}$

内力—T 扭矩图
↓
τ

强度、刚度

I_p 和 W_p 的计算 $\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p}$，$\tau_{max} = \frac{T}{W_p}$

☆ $\begin{cases} I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{D/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho = \frac{1}{32}\pi D^4 \\ W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{1}{16}\pi D^3 \end{cases}$

$\begin{cases} I_p(1-\alpha^4) \rightarrow \text{空心圆轴} \\ W_p(1-\alpha^4) \end{cases}$

△空心vs实心

半径15mm以内

$$M_r = \int_{A_1} \rho \cdot \tau dA = \int_0^r \rho \cdot \left(\frac{M_e}{I_p}\rho\right)(2\pi\rho d\rho) = \frac{2\pi M_e}{I_p} \cdot \frac{r^4}{4}$$

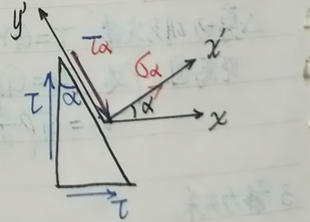
$$\triangle \frac{M_r}{M_e} = \frac{2\pi r^4}{4I_p} = \frac{2\pi r^4}{4 \cdot \frac{\pi d^4}{32}} = 16\left(\frac{r}{d}\right)^4 = \frac{1}{16} = 6.25\%$$

在扭矩相同的情况下，挖去轴心部分

☆ $\tau_{2max} = \frac{M_e}{W_p} = \frac{T}{\frac{\pi d^3}{16}(1-\alpha^4)} \overset{\alpha=\frac{1}{2}}{=\!=} \frac{\tau_{1max}}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)} \Rightarrow \frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\tau_{2max} - \tau_{1max}}{\tau_{1max}} = \frac{\alpha^4}{1-\alpha^4} = \frac{1}{15} = 6.67\%$

去除效果↑

斜截面上的应力



列出τα，σα两个方向上的平衡方程

$\sigma_\alpha = -\tau \sin 2\alpha$，$\tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha$

☆ 讨论

1° 当 $\alpha = 0$，$\therefore \sigma_\alpha = 0$，$\tau_\alpha = \tau_{max} = \tau$

2° 当 $\alpha = 45°$ $\therefore \sigma_\alpha = \sigma_{min} = -\tau$，$\tau_\alpha = 0$

3° 当 $\alpha = -45°$ $\therefore \sigma_\alpha = \sigma_{max} = \tau$，$\tau_\alpha = 0$

4° 当 $\alpha = 90°$ $\therefore \sigma_\alpha = 0$，$\tau_\alpha = -\tau = \tau_{min}$

☆拉应力是脆性材料破坏的主要原因

(Shear stress) $\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_p} \le [\tau]$

☆ 强度条件：

强度校核；选择截面；计算许可载荷

△非等截面轴 $\tau_{max} = \left(\frac{T}{W_p}\right)_{max} \le [\tau]$

(Rate of twist) 校核

五、扭转变形（刚度计算）

$$\begin{cases} d\varphi = \frac{T}{GI_p}dx \\ d\varphi = \frac{T(x)}{GI_p(x)}dx \end{cases}$$

$\varphi = \int_l d\varphi = \int_l \frac{T dx}{GI_p}$ ☆ $\begin{cases} \varphi & \text{相对扭转角} \\ GI_p & \text{抗扭刚度} \end{cases}$

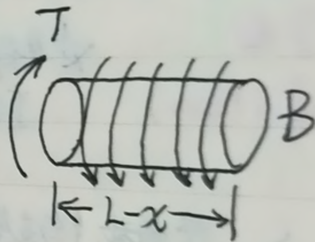
☆ $\boxed{\varphi = \frac{TL}{GI_p}}$ $\boxed{\Delta l = \frac{F_N l}{EA}}$

△台阶轴 $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i l_i}{GI_{pi}}$

☆单位长度扭转角 $\begin{cases} \varphi' = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_p} \text{ rad/m} \\ \varphi' = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180°}{\pi} \text{ °/m} \end{cases}$

△ $\varphi'_{max} \le [\varphi']$

☆单位要统一



☆弯扭组合变形问题 分清T的类型 扭转+剪切

六、圆轴扭转变形能

圆截面杆的变形能

$$U = W = \frac{1}{2}M\varphi = \frac{M^2L}{2GI_p} = \frac{GI_p}{2L}\varphi^2$$

七、非圆截面杆扭转

航空结构中广泛采用薄壁

△矩形杆扭转主要结论

$\begin{cases} \text{长边中点处} \\ \text{短边中点处} \end{cases}$ $\tau_{max} = \frac{T}{C_1 hb^2}$ 狭长矩形截面 $(C_1 = \frac{1}{3})$

$\tau'_{max} = C_1 \tau_{max}$

八.薄壁杆件扭转

开口 >> 闭口

切应力沿截面周边呈"环流"分布

☆工程实际中应尽量减少开口结构.

采用隔板或肋板

以显著提高开口薄壁性能.

△扭转静不定问题

☆
(1)建立静力平衡方程;
(2)变形协调关系;
(3)代入特征方程,得出补充方程 ☆(扭转角)

第5章 弯曲内力

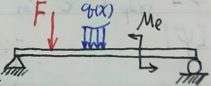
§1 力学模型

弯曲
梁(Beam)

☆具有纵对称面的等截面直杆 / 平面弯曲

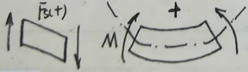
直线→平面曲线

§2 梁的载荷与支座



☆
悬臂梁、简支梁、外伸梁、固定梁
连续梁、静定组合梁、半固定梁
(中间铰)

二、平面弯曲的内力



☆左顺右逆,弯矩为正

☆截开后取左边为示力对象

(1)向上外力为正,向下外力为负;

(2)向上弯矩为正(顺时针),向下弯矩为负(逆时针)

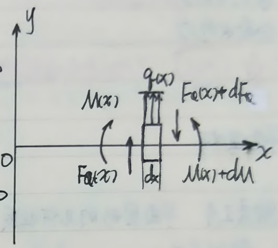
三、剪力图、弯矩图

$\boxed{F_S = F_S(x)\ ;\quad M = M(x)}$

载荷连续 → 内力连续、
集中载荷 → 突变

☆开区间 → 突变
☆注意凹凸向

四、弯矩、剪力和分布荷载集度之间的关系、



$\sum F_y=0 \Rightarrow F_S(x)+q(x)dx-[F_S(x)+dF_S]=0$

$$\boxed{\frac{dF_S(x)}{dx}=q(x)} \quad ①$$

$\sum M_1=0 \Rightarrow$

$$-M(x)-F_S(x)dx-q(x)dx\cdot\frac{dx}{2}+[M(x)+dM(x)]=0$$

略去二阶微量 $q(x)\cdot\frac{(dx)^2}{2}$

$$\boxed{\frac{dM(x)}{dx}=F_S(x)} \quad ②$$

由①②可得: $\frac{d^2M(x)}{dx^2}=q(x)$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2}=\frac{dF_S(x)}{dx}=q(x)$$

讨论

剪力图与弯矩图绘制方法

☆控制截面!

也可通过积分方法确定剪力、弯矩图上各点处的数值.

$$☆\begin{cases} F_S(b)=F_S(a)+A(q)\big|_a^b \\ M(b)=M(a)+A(F_S)\big|_a^b \end{cases}$$

五、按叠加原理作弯矩图

叠加原理的前提条件 (1) 小变形;(2) 线性本构关系

☆在能量法求变形的计算中有着更大的优越性

△ 结构对称,载荷对称, F_S 反对称, M 对称.

六、平面刚架和曲杆的内力

组成—横梁、立柱和刚结点。

☆刚性结点的特点：受力以后，刚点处夹角保持不变。刚结点处内力除剪力和轴力外还有弯矩

有刚结点的架—刚架

1. 求约束反力

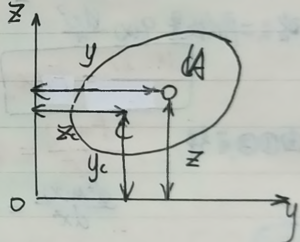
2. 分段求内力

☆ 规定 正内力画在刚架上侧或外侧

☆平面曲杆

附录IA 平面图形的几何性质

§1 静矩与形心



1. 静矩
$$\begin{cases} S_z=\int_A y\,dA \\ S_y=\int_A z\,dA \end{cases}$$ （单位：m^3）

⇔ 形心C： $y_c=\frac{S_z}{A}$， $z_c=\frac{S_y}{A}$

或 $S_z=Ay_c$， $S_y=Az_c$

§2 惯性矩 惯性积、惯性半径

惯性矩
$$\begin{cases} I_z=\int_A y^2 dA \\ I_y=\int_A z^2 dA \end{cases}$$ （单位，m^4）

$$\Rightarrow \begin{cases} I_z=Ai_z^2 \\ I_y=Ai_y^2 \end{cases}$$ i_y，i_z——惯性半径

惯性积 平面图形对y、z轴的截面二次矩

$$I_{yz}=\int_A yz\,dA$$

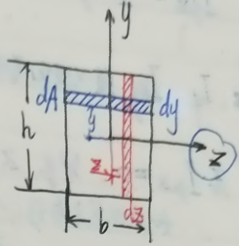
☆ 只要一个坐标轴为对称轴，惯性积为0。

极惯性矩

$$I_p=\int_A \rho^2 dA > 0 \quad (\text{unit: } m^4).$$

☆ $I_p = I_y + I_z \quad (\rho^2 = y^2 + z^2)$

☆ 矩形截面 $b\times h$

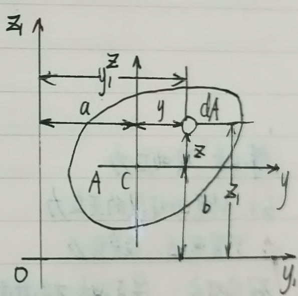


☆ $\begin{cases} I_z = \frac{1}{12}bh^3 \\ I_y = \frac{1}{12}b^3h \end{cases}$

☆ 圆截面直径d

☆ $\begin{cases} I_p = \frac{1}{32}\pi d^4 \\ I_y = I_z = \frac{1}{2}I_p = \frac{\pi}{64}d^4 \\ I_{yz} = 0 \end{cases}$

§3 平行移轴公式



引入

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA$$
$$= \int_A y^2 dy + \int_A 2ay\,dA + \int_A a^2 dA$$
$$= I_z + 2aS_z + a^2A$$

$\Rightarrow \quad I_{z_1} = I_z + a^2A$

类似地有 $I_{y_1} = I_y + b^2A$

$I_{y_1z_1} = I_{yz} + abA$

$\Rightarrow$ 平行移轴公式

△ 必须有一轴为形心轴

§4 转轴公式 主惯性矩

转轴公式

$$\begin{cases} I_{y_1} = \frac{I_y+I_z}{2} + \frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha \\ I_{z_1} = \frac{I_y+I_z}{2} - \frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha \end{cases}$$

并且有 ☆ $I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z = const$

$\Rightarrow$ 极惯性矩保持不变

$$I_{y_1z_1}=\frac{1}{2}(I_y-I_z)\sin 2\alpha+I_{yz}\cos 2\alpha$$

I_z、I_y、I_{zy} 随α变化而变化

☆ 若$I_{y_0z_0}=0$，则y_0、z_0轴称为主惯性轴(主轴)

如坐标原点与形心重合 ⇒ 形心主惯性轴

$$\therefore \tan 2\alpha_0=-\frac{2I_{yz}}{I_y-I_z}$$

取极大(极小)惯性矩时 ⇒ 主惯性矩

$$\begin{cases} I_{max}=\frac{1}{2}(I_y+I_z)+\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}; \\ I_{min}=\frac{1}{2}(I_y+I_z)+\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}. \end{cases}$$

第6章 弯曲应力

6.1 纯弯曲时梁的正应力

☆ 只有弯矩，没有剪力

研究对象：等直细长对称截面梁

前提：(a) 小变形；(b) 满足平面弯曲条件．(c) 纵向受拉压

$\begin{cases}\text{平面假设} \\ \text{纤维变形}\end{cases}$ (凹侧纤维缩短，突侧纤维伸长)

中间一层纤维长度不变 — 中性层

中间层与横截面的交线 — 中性轴

变形规律 ☆ $\boxed{\varepsilon=\frac{y}{\rho}}$ 纵向纤维 bb' 的应变

物理关系 $\sigma=E\varepsilon$ (Hook's Law)

变形几何关系 $\varepsilon=\frac{y}{\rho}$.

$\Rightarrow$ ☆ $\sigma=E\frac{y}{\rho}$

$\therefore \sigma\propto y$