西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

计算方法

主讲人：　陶亮

课时量：　32学时

2018-2-2

目录

第一章　　绪论

学时：1.5个学时

内容：1.计算方法的任务与特点

2.误差知识、　3.应用原则

§1.1计算方法的任务与特点

计算方法（数值方法）：是将从工程与科学问题归纳出的数学问题，通过计算工具得出数学问题数值结果的方法与算法的科学。

实际问题 → 数学问题 → 提供计算方法

程序设计 → 上机计算 → 结果分析

计算方法的任务

①不能直接运算的问题化成计算机可执行的运算

②数值问题在计算机上执行且行之有效的公式

③误差分析，即研究数值问题和数值方法的稳定性

计算方法的特点

1.面向计算机：加减乘除和逻辑运算的基础

2.可靠的理论：建立在数学理论的基础上

3.计算复杂性：从运算时间和物理空间讲

4.数值的实验：需要证明计算方法行之有效

基本的数学问题

1.大型线性代数方程组Ax=b求解;
2.矩阵A的特征值和特征向量计算;
3.非线性方程求解(求根);
4.积分计算;
5.常微分方程初值问题求解;
6.其它。

§1.2 误差知识

一 .误差来源与分类

1. 模型误差：即数学模型近似引起的误差。

2. 观测误差：人为观察测量造成的误差**(本课不涉及)**

3. 截断误差：有限计算逼近无限过程的误差，如：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots,$$

$$\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots$$

右端是截断误差。

4. 舍入误差。计算机字长有限，一般实数不能精确存储，于是产生舍入误差。例如：在10位十进制数限制下：

$$1 \div 3 = 0.3333333333$$

$$(1.000002)^2 - 1.000004 = 0$$

$$(1.000002)^2 - 1.000004 = 4 \times 10^{-12}\text{实际}$$

舍入误差和截断误差的影响是本课程在学习过程中主要处理的误差分析内容，模型误差和观测误差不是本课重点。

二 .误差概念

设： x——准确值， x^* ——近似值。

1．绝对误差，有量纲，但不足以表示结果的精确度。

定义 $e(x^*)=x - x^*$ 为 x^*的绝对误差；

$|e(x^*)| \le \varepsilon$ 为 x^*的绝对误差限；

2．相对误差，无量纲。

定义 $e_r(x^*) = \dfrac{e(x^*)}{x}$ 为 x^*的相对误差；

实用中，常用 $\dfrac{e(x^*)}{x^*}$ 表示 x^*的相对误差。

称 $|e_r(x^*)| \le \varepsilon_r$ 为x^*的相对误差限。

3．有效数字（四舍五入的原则）

设 $x^* = \pm 10^m(a_1 \times 10^{-1} + a_2 \times 10^{-2} + \ldots + a_n \times 10^{-n})$

a_1非0的1到9数字
a_n是0到9的数字
m整数，n正整数

若 $$|x - x^*| \le \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

则说 x^*具有n位有效数字，分别是

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

则n称 x^*为有效数。

例1.1 设x*=0.0270是某数x*经“四舍五入”所得，则

误差 $|e(x^*)|$不超过x末位的半个单位，即：

$$|x - x^*| \le \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

又 $x^* = 10^{-1}(0.270)$，故该不等式又可写为

$$|x - x^*| \le \frac{1}{2} \times 10^{-1-3}$$

由定义可知有效数字有3位，分别是 2,7,0

例1.2　算式中的有效数字

x= 32.93,　　x*= 32.89,

$$|x - x^*| = 0.04 < 0.05 = \frac{1}{2} \times 10^{-1}$$

$$|x - x^*| \le \frac{1}{2} \times 10^{2-3}$$

故　x*有3位有效数字，分别是3，2，8。

这里 x*中的数字9不是有效数字（如果x=32.96…?）

定理1.1:近似数*x如果具有n位有效数字，则其相对误差限为:**

$$\left|e_{r(x^*)}\right| \le \frac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}$$

反之，若*x的相对误差限满足:**

$$\left|e_{r(x^*)}\right| \le \frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-(n-1)}$$

则*x至少具有n位有效数字。**

例1.3 取几位有效数字能够保证 $\sqrt{20}$ 的近似值相对误差小于1%？

解：

$$\sqrt{20}\text{的首位非零数字}a_1 = 4$$

$$|e_r(x^*)| \le \frac{1}{2\times a_1}\times 10^{-(n-1)} = \frac{1}{8}\times 10^{-(n-1)} \le 1\%$$

$$\Rightarrow n > 2\text{的正整数}$$

$$\Rightarrow n = 3$$

三 .数值运算的误差估计

设: x^* 是x的近似值，y的近似值 $y^* = f\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ 的误差用泰勒级数展开，得到绝对误差和相对误差为(忽略了高阶微分项得到的计算函数误差限)

$$e(y^*) \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^* \cdot \left(x_i - x_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^* \cdot e\left(x_i^*\right)$$

$$e_r(y^*) = \frac{e(y^*)}{y^*} \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^* \cdot \frac{e\left(x_i^*\right)}{y^*}$$

例1.4 测量课桌面积的近似值 $S^* = a^*b^*$ 得到 $a^*=120cm, b^*=60cm$。若已知 $|a-a^*| <= 0.2cm$；$|b-b^*| <= 0.1cm$，求近似面积的绝对和相对误差。

解：

$$e(S^*) \approx \left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^* \cdot e(a^*) + \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)^* \cdot e(b^*) = b^* \cdot e(a^*) + a^* \cdot e(b^*)$$

$$\Rightarrow e(S^*) \approx b^* \cdot e(a^*) + a^* \cdot e(b^*) \le 60 \times 0.2 + 120 \times 0.1 = 24cm^2$$

$$\Rightarrow |e_r(x^*)| = \frac{e(S^*)}{S^*} \le \frac{24}{7200} \approx 0.33\%$$

§1.3 计算方法应遵循的原则

1. 尽量简化计算步骤，减少乘除运算累积误差；
2. 防止大数“吃掉”小数，得到非真根；
3. 尽量避免相近数相减；
4. 避免绝对值很小的数做分母，误差放大；
5. 选用数值稳定性好的算法，以控制舍入误差高速增长。

第一章：绪论

第一章绪论的基本要求：

- 1．计算方法的研究内容；
- 2．误差及有关概念、定理；
- 3．数值计算中的若干原则；

作业：

习题一：2，3，4，5，6

第二章
方程的近似解法

学时：2.5学时

内容：1.二分法、　　2.迭代法

3.牛顿法、　　4. 弦截法

第二章：方程的近似解法

- 超越方程和5次以上的代数方程没有解法；
- 在一个隔根区间内求解方程的单实根；
- 隔根区间［a, b］的定义：如果在区间［a, b］方程$f(x) = 0$只有一个根，则称区间［a, b］为隔根区间；
- 取隔根区间的方法：描图法、逐步搜索法。

第二章: 方程的近似解法

- 求隔根区间

描图法: $f(x) = x - 1 = 0$; $f(x) = 2\cos x - e^x = 0$

幂函数隔根区间的上下限(设α为方程的根)

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

$$\begin{cases} \mu = \max\{|a_i|\} & (i = 0, \cdots n) \\ \nu = \dfrac{1}{a_0}\max\{1, |a_i|\} & (i = 1, \cdots n) \end{cases}$$

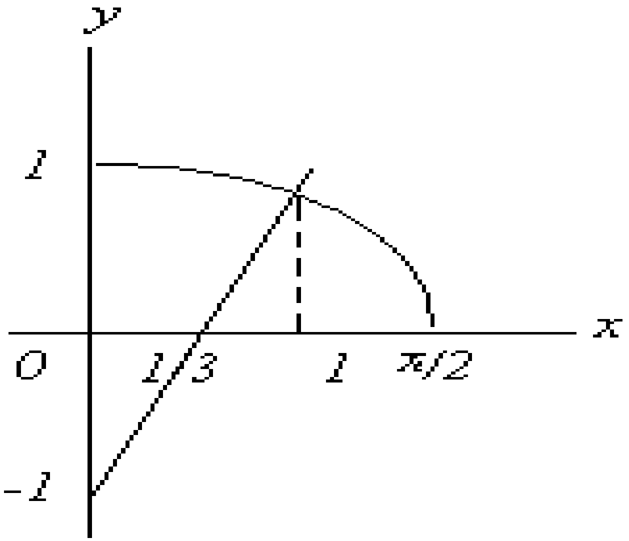
$$\Rightarrow \frac{1}{1+\nu} < |\alpha| < \mu + 1$$

逐步搜索法: 在隔根区间上下限内按一定步长搜索

- 描图法求隔根区间的算例

例2.1 求方程$3x-1-\cos x=0$在的隔根区间

解：方程等价变换，令$y=3x-1$和$y=\cos x$，作图如下，方程只有一个实根，隔根区间为［0.5，1］



- 逐步搜索法求隔根区间算例**2.2**
- 解：幂函数用搜索法，设方程根为α

$$\begin{cases} \mu = \max\{|a_i|\} = 3.2 \qquad (i = 0, \cdots n) \\ \nu = \dfrac{1}{a_0}\max\{1, |a_i|\} = 4.0 \qquad (i = 1, \cdots n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\nu} < |\alpha| < \mu + 1$$

$$0.2 < |\alpha| < 4.2$$

- 在此区间设步长h＝0.5，n＝8，计算如表2.1
- 存在三个隔根区间为［-0.7，-0.2］、［1.2，1.7］、［1.7，2.2］

谢谢大家！1

西北工业大学

航空学院

§2.1 区间二分法

1.基本思想：通过计算隔根区间中点，逐步二分缩小得到方程近似根数列 $\{x_n\}$ 。

2.定理2.1 设α是方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 的根，则二分法产生的数列 $\{x_n\}$ 收敛于方程的根α，且有误差估计为：

$$\left|x_{n+1}-\alpha\right| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \qquad (n=0,1,\cdots)$$

3.要求近似根绝对误差不超过ε的控制方法：

①计算对分次数后对分，求最少对分次数n+1

②事后估计误差，判断是否满足

$$\left|x_{n+1}-\alpha\right| \le \frac{b-a}{2^{n+1}} \le \varepsilon$$

③控制误差用不等式

$$\left|x_{n+1}-x_n\right| \le \varepsilon$$

§2.1 区间二分法

二分法图解说明：参见P16图2.2

例2.3 用二分法求方程$x^3+4x^2-10=0$在区间［1，2］内的根，要求绝对误差不超过$1/2\times10^{-2}$。

解：令 $$\frac{b-a}{2^{n+1}}\le\varepsilon=\frac{1}{2}\times10^{-2}\Rightarrow n+1\ge7.6$$

$\Rightarrow$ 至少对分8次，见下表 $\Rightarrow\alpha\approx1.363$

n	隔根区间	x_n	$f(x_n)$
1	[1,2]	1.5	+
2	[1,1.5]	1.25	-
3	[1.25,1.5]	1.375	+
4	[1.25,1.375]	1.3125	-
5	[1.312,1.375]	1.34375	-
6	[1.34375,1.375]	1.359375	-
7	[1.359375,1.375]	1.3671875	+
8	[1.359375,1.367188]	1.36328125	

§2.2 迭代法

1.基本思想：把方程$f(x)=0$等价变换$x=\varphi(x)$，有迭代公式$x_{n+1}=\varphi(x_n)$，通过反复迭代得到近似根数列$\{x_n\}$

- 迭代法是逐步逼近法，是代数方程、超越方程、微分方程、方程组求解的重要方法
- 注意迭代法的收敛性，数列$\{x_n\}$发散则称迭代法发散，迭代公式就没有价值
- 迭代法几何意义：求函数$y=x$和$y=\varphi(x)$的交点

§2.2 迭代法

- 参见图2.4，P20
- 图解说明过程、收敛与发散

例2.4 观察方程$x=10^x-2$在区间［0.3，0.4］一个根两种迭代方法的收敛性：① $x_{n+1}=10^{x_n}-2$; ② $x_{n+1}=\lg(x_n+2)$

解：计算结果见下表，可知公式①发散、②收敛收敛条件需要讨论。

n	①	②
0	$x_0=0.3$	$x_0=0.3$
1	$x_1=-0.0047$	$x_1=0.3617$
2	$x_2=-1.0108$	$x_2=0.3732$
3		$x_3=0.3753$
4		$x_4=0.3757$

2.定理2.2 设方程$x=\varphi(x)$，如果

(1)当$x \in [a,b]$时，$\phi(x) \in [a,b]$

(2)$\phi(x)$在区间$[a,b]$可导，且有$|\phi'(x)| \le L \le 1$

则有：（证明略）

方程$x=\phi(x)$在区间$[a,b]$有唯一的根

对任意初值$x_0 \in [a,b]$迭代公式$x_{n+1}=\phi(x_n)$收敛于方程根α

$$|x_n-\alpha| \le \frac{L}{1-L}|x_n-x_{n-1}|$$

误差估计$|x_n-\alpha| \le \dfrac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$

例2.5 求方程2x-lg$x$-7=0的最大根,要求精确到小数点后三位.

解：①定隔根区间，描图法知最大根在［3.5，4］

②建立迭代公式，判断收敛性：

$$\text{迭代函数}\ \phi(x)=(\lg x+7)/2$$

$$\Rightarrow \phi'(x)=\frac{1}{2\ln 10}\frac{1}{x}\ \text{区间可导}$$

$$\text{且}\ \phi(x)\in[3.5,4]$$

$$\text{另外有}\ L=\max|\phi'(x)|=0.06$$

$$\text{迭代公式}\ x_{n+1}=(\lg x_n+7)/2$$

③计算方程最大根，得α≈3.789

n	**x_n**
0	x_0=3.5
1	x_1=3.78989
2	x_2=3.78931
3	x_3=3.78928

3.定理2.3 设α是方程$x=\varphi(x)$ 的根,如果满足条件:

(1)迭代函数$\varphi(x)$在α的邻域可导

(2)在α某邻域$S=\{x \mid |x-\alpha| <= \delta\}$任意x有：

$$\left|\phi'(x)\right| \leq L < 1$$

则邻域S内任意初值x_0产生的数列$\{x_n\}$收敛于方程的根α

（又称局部收敛定理，证明略）

4.误差控制方法

①确定满足误差要求的迭代次数n，再迭代方法

$$|x_n-\alpha|\le\frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|\le\varepsilon$$

$$\to n\ge\ln\left[\frac{\varepsilon(1-L)}{x_1-x_0}-L\right]$$

②事后估计方法：

$$|x_n-\alpha|\le\frac{L}{1-L}|x_n-x_{n-1}|\le\varepsilon$$

$$\to|x_n-x_{n-1}|\le\varepsilon$$

例2.6 用迭代法求方程$x^3-x^2-1=0$在隔根区间［1.4，1.5］内的根,要求精确到小数点后四位.

解：构造迭代公式，并判断收敛性

$$\text{迭代函数}\ \phi(x)=\sqrt[3]{x^2+1}=x$$

$$\Rightarrow \phi'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}\ \text{区间可导}$$

$$\text{且}\ L=\max|\phi'(x)|\le 0.5<1$$

$$\Rightarrow \text{迭代函数收敛}$$

$$\text{迭代公式}\ x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n^2+1}$$

列表计算得α≈1.4656

n	x_n	$\lvert x_{n+-1}-x_n\rvert$
0	x_0=1.5	
1	1.4812480	0.02
2	1.4727057	0.009
3	1.4688173	0.004
4	1.4670480	0.002
5	1.4662340	0.0009
6	1.4658786	0.0004
7	1.457020	0.0002
8	1.4656344	0.00007
9	1.4656000	$<0.5\times10^{-4}$

5.迭代加速公式

①迭代-加速公式（2.10）：

②埃特金加速公式（2.11）：

注意误差补偿的思想

定理2.4： P29

谢谢大家！2

西北工业大学

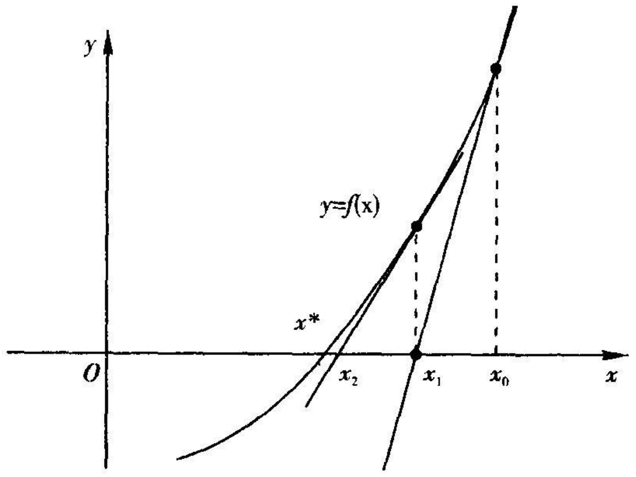
航空学院

§2.3 牛顿迭代法

1.基本思想：把非线性方程$f(x)=0$逐步变换成线性方程来求解.

- 牛顿迭代公式：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\qquad (n=0,1,2,\cdots$$



- 注意牛顿迭代法的收敛性
- 牛顿迭代法几何意义：切线方法

2.定理2.5 设α是方程$f(x)=0$的根,如果满足条件:

(1)迭代函数$f(x)$在α的邻域具有连续二阶导数

(2)在α某邻域任意x有$f'(x)\neq 0$

则存在α的某邻域$S=\{x \mid |x-\alpha|<=\delta\}$,对于任意邻域内初值$x_0$，牛顿迭代法产生的数列$\{x_n\}$收敛于方程的根$\alpha$.

（又称牛顿迭代法局部收敛定理，证明略）

邻域区间较小，初值x_0要求非常接近α，才收敛。

3.定理2.6 设α是方程$f(x)=0$ 在隔根区间［a, b］内的根,如果

(1) $f'(x)$、 $f''(x)$在区间内连续且不变号；

(2)在区间［a, b］内选取初始值x_0使$f(x_0)\, f''(x_0)>0$

则由牛顿迭代法产生的数列收敛于方程的根α。

（非局部收敛定理的证明略）

几何解释参见图2.6，P33

注意初值条件（2）的选取

例2.9 用牛顿迭代法求方程$x^3-x^2-1=0$在隔根区间［1.4, 1.5］内的根,要求精确到小数点后四位.

解：构造牛顿迭代公式，并判断收敛性

设函数$f(x)=x^3-x^2-1$

$$\Rightarrow 牛顿迭代公式 x_{n+1}=\frac{2x_n^3-x_n^2+1}{3x_n^2-2x_n}$$

对于$x_0=1.5$，满足$f(x_0)f''(x_0)>0$

$\Rightarrow$ 牛顿迭代公式收敛

列表计算得α≈1.4656

n	x_n	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
0	x_0=1.5	
1	1.466667	0.02
2	1.465572	0.009
3	1.465571	$<0.5\times10^{-4}$

例2.10 用牛顿迭代法建立平方根$\sqrt{c}$（c>0）的迭代公式.

解：构造牛顿迭代公式，并判断收敛性

设$x=\sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad x^2-c=0$

设函数$f(x)=x^2-c$　　如图2.7，P35

$\Rightarrow$ 牛顿迭代公式$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{c}{x_n}\right)$

$f'(x_0)$和$f''(x_0)$连续，并且$c>0$区间不变号

对于$x_0>\sqrt{c}>0$，$f(x_0)f''(x_0)=2x^2-2c>0$

$\Rightarrow$ 该牛顿迭代公式收敛

4. 迭代法的收敛阶

反映迭代收敛速度，引进迭代法的收敛阶。

定义：设数列｛x_n｝收敛于α，误差$e_n=x_n-\alpha$，如果存在某个实数 $p>=1$和正常数C，使得：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}=C$$

则称数列｛x_n｝为p阶收敛

- 当$p=1$且$0<C<1$,则称数列｛x_n｝为线性收敛
- 当$p=2$则称数列｛x_n｝为平方收敛
- 当$p>1$则称数列｛x_n｝为超线性收敛

5. 定理2.7

(1)在定理2.3条件下,且在根 α 的某个领域内有 $\varphi'(x) \neq 0$,则迭代法线性收敛

(2)在定理2.4条件下，牛顿迭代法平方收敛

§2.4 弦截法

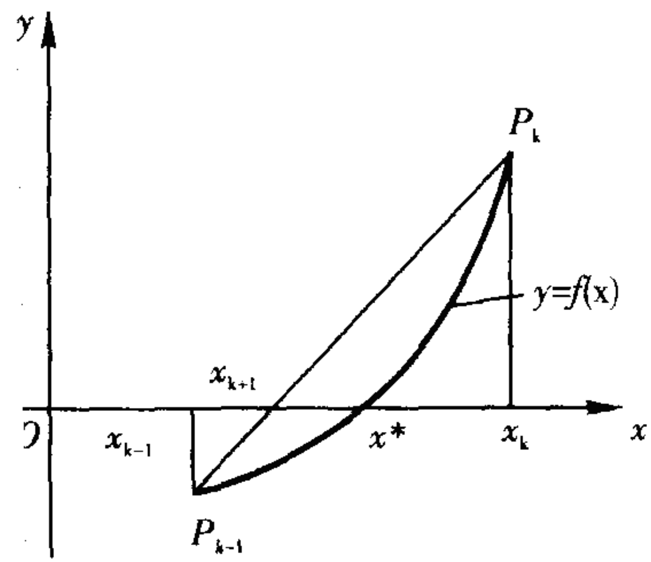
1.基本思想：割线方法的迭代公式

- 单点弦截法公式：

$$x_{n+1} = x_0 - \frac{(x_n - x_0)}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_0)$$

- 双点弦截法公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$



2. 定理2.8 设α是方程$f(x)=0$在隔根区间［a,b］的根如果

(1)对于x在［a,b］区间 ,$f'(x)$和$f''(x)$连续且不变号；

(2)在［a,b］区间选取初始值x_0，使$f(x_0)f''(x_0)>0$， x_0 选定a，b中的一个， x_1 为另一个；

则单点弦截法迭代公式单调收敛于根α。

单点弦截法线性收敛（收敛阶p=1）

3. 定理2.9 设方程$f(x)=0$，如果

(1) 函数$f(x)$在根α的某个领域内具有连续的二阶导数，且

$$f'(x) \neq 0$$

(2)在该领域任取初始值x_0，x_1，

则由双点弦截法迭代公式产生的序列$\{x_n\}$收敛于根α。

双点弦截法超线性收敛（收敛阶p=1.618）

第二章：方程的近似解法

第二章的基本要求

- 熟悉区间二分法；
- 熟悉迭代法，使用收敛定理；
- 熟悉Newton迭代法及其几何意义和收敛条件。

作业： 习题二 1、 5 、6、10

第三章
线性代数方程组的解法

学时：3学时

内容：1. 线性代数方程组的直接解法

2. 线性代数方程组的迭代解法

第三章:线性代数方程组的解法

- 解线性方程组$Ax=b$
- 直接法：理论解、精确解、（无回代过程）有限步骤。
- 迭代法：初始向量$x^{(0)}$、迭代格式、产生无穷向量序列、收敛到向量解x

§3.1 解线性方程组的直接法

1、高斯消去法

- 高斯消去法是对增广矩阵（$\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b}$）按顺序进行一系列初等变换，有回代过程的方法又称Gauss消去法；无回代过程的方法又称Gauss-Jordan消去法
- 问题是按顺序消元会出现违反算法原则，不实用
- 因此，提出主元素消去法

例3.1 用高斯（或Gauss-Jordan）消去法求解方程组

$$\begin{cases} x_1+4x_2-5x_3=3 \\ x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 6x_1-x_2+18x_3=2 \end{cases}$$

解:增广矩阵初等变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 6 & -1 & 18 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-6r_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -25 & 48 & -16 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-1\times r_2 \\ r_3-25r_2 \\ -r_3/27}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1-4r_2 \\ r_2+3r_3 \\ r_1-7r_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right] \text{得向量解} \{x\}=\left\{\frac{4}{3},0,-\frac{1}{3}\right\}^T$$

2、列主元素消去法

第一步

找行号r_1 使$\left|a_{r_1 1}\right| = \max\limits_{1\le i\le n}\left|a_{i1}\right|$，对调$1 \leftrightarrow r_1$行

消元：用a_{11}消a_{i1}为0：

1行$\times\left(-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$加到第$i$行,第$i$行第$j$个元素成为

$$a_{ij} + a_{1j}\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) \Rightarrow a_{ij}$$

$$b_i + b_1\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) \Rightarrow b_i$$

（$i = 2,3,\cdots,n$；$j = 1,2,\cdots,n+1$）

原方程组变换成如下形式:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_{1,1} \\
\qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_{2,1} \\
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_{i,1} \\
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_{n,1}
\end{cases}
$$

第二步

对2行2列以下矩阵作上述变换,消去3列以下元素

重复上述步骤的$n-1$步后，方程组化为如下形式

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_{1,n-1} \\
\qquad\qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_{2,n-1} \\
\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_{n,n-1}
\end{cases}
$$

上三角方程组

第三步

回代过程求解,回代公式为:

$$\begin{cases} x_n = b_{n,n-1} \big/ a_{nn} \\ x_k = \dfrac{1}{a_{kk}}[b_{k,n-1} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j] \end{cases}$$

$$(k = n-1, n-2, \dots, 1)$$

例3.2 用列主元素消去法求解方程组

$$\begin{cases} x_1+4x_2-5x_3=3 \\ x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 6x_1-x_2+18x_3=2 \end{cases}$$

解:增广矩阵初等变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ \triangleright 6 \triangleleft & -1 & 18 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \triangleright 6 \triangleleft & -1 & 18 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-r_1\cdot a_{31}/a_{11}]{r_2-r_1\cdot a_{21}/a_{11}} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 18 & 2 \\ 0 & 3.167 & -5 & 1.667 \\ 0 & \triangleright 4.167 \triangleleft & -8 & 2.667 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 18 & 2 \\ 0 & \triangleright 4.167 \triangleleft & -8 & 2.667 \\ 0 & 3.167 & -5 & 1.667 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-r_2\cdot a_{32}/a_{22}} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 18 & 2 \\ 0 & \triangleright 4.167 \triangleleft & -8 & 2.667 \\ 0 & 0 & 1.080 & -0.359 \end{array}\right]$$

回代求解得向量解$\{x\}^T=\begin{Bmatrix} 1.332 \\ 0.002 \\ -0.332 \end{Bmatrix}$与精确解比较，绝对误差0.001。

3、选主元素消去法的应用

- 求逆矩阵

即: $(A|E) \to \cdots \to (E|A^{-1})$

算例演练:

求$A=\begin{bmatrix} 11 & -3 & -2 \\ -23 & 11 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$的逆矩阵。

- 求行列式

用主元素消去法将矩阵化为上三角矩阵,则行列式**A:**

$$\det(A)=(-1)^m b_{11} b_{22} \cdots b_{nn}$$

m是行、列交换的次数

谢谢大家！3

西北工业大学

航空学院

4、矩阵三角分解法

- **Gauss**消元将增广矩阵（$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$）变换为上三角方程组（$\boldsymbol{U}|\boldsymbol{g}$）的形式

即: $(A|b) \to \cdots \to (U|g)$

$Gauss$消元过程用矩阵可以表示如下:

$$L_k \cdots L_2 L_1 (A|b) = (U|g)$$

于是有:

$$L_k \cdots L_2 L_1 A = U$$

$$A = LU$$

$L = (L_k \cdots L_2 L_1)^{-1}$是单位下三阶矩阵；U是上三角矩阵

定义3.1 如果L是下三角矩阵；U是上三角矩阵，则称$A=LU$是矩阵A的三角分解。

三角分解不唯一，为此引入

定义3.2 若L为单位下三角阵（对角元全为1），U为上三角阵，则称$A=LU$为Doolittle分解；若L为下三角阵，U为单位上三角阵，则称$A=LU$为Crout分解

定理3.1 n阶矩阵A（n>1）有唯一Doolittle (或Crout)分解的充要条件是A的前n-1个顺序主子式都不为零

第三章: 线性代数方程组的解法

- 若在消元法进行前能实现三角分解

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow (LU)x = b$$

等价于

$Ly = b$(下三角方程组)

$Ux = y$(上三角方程组)

矩阵三角分解法回代求解容易，求解公式如下

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$y_k = \frac{1}{l_{kk}}\left[b_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} y_j\right] \qquad (\mathrm{k} = 2,3,\cdots,\mathrm{n})$$

$$\begin{cases} x_n = y_n / u_{nn} \\ x_k = \left[b_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j\right] \Big/ u_{kk} \qquad (\mathrm{k} = \mathrm{n}-1,\cdots 2,1) \end{cases}$$

3.1直接三角分解法

设$A = LU$

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}
$$

(1) 1)求u的第1行：用L的第一行×u的第j列（$j=1,2,\cdots,n$)

$$1.\ u_{1j}=a_{1j}\Rightarrow u_{1j}=a_{1j}\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

2)求L的第1列：用L的第i行×u的第1列（$i=2,3,\cdots,n$)

$$l_{i1}\cdot u_{11}=a_{i1}\Rightarrow l_{i1}=\frac{a_{i1}}{u_{11}}\qquad (i=2,3,\cdots,n)$$

(2) 1)求u的第2行：用L的第2行×u的第j列（$j=2,\cdots,n$)

$$l_{21}\cdot u_{1j}+1\cdot u_{2j}=a_{2j}\Rightarrow u_{2j}=a_{2j}-l_{21}u_{1j}$$

2)求L的第2列：用L的第i行×u的第2列（$i=3,4,\cdots,n$)

$$l_{i1}\cdot u_{12}+l_{i2}\cdot u_{22}=a_{i2}\Rightarrow l_{i2}=(a_{i2}-l_{i1}u_{12})/u_{22}$$

(K)　(1)求u的第k行：用L的第k行$\times u$的第j列$(\mathrm{j}=\mathrm{k},\mathrm{k}+1,\cdots,\mathrm{n})$

$$(l_{k1},l_{k2},\cdots,l_{kk},0\cdots,0)\cdot\begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{kj} \\ \vdots \\ u_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=a_{kj}$$

$$\sum_{m=1}^{k-1} l_{km}u_{mj}+1\cdot u_{kj}=a_{kj}\Rightarrow u_{kj}=a_{kj}-\sum_{m=1}^{k-1} l_{km}u_{mj}$$

(2)求L的第k列：用L的第i行$\times u$的第k列$(\mathrm{i}=\mathrm{k}+1,\cdots,\mathrm{n})$，即

$$(l_{i1},\cdots,l_{ik},\cdots l_{kk}\ 0\cdots 0)\cdot\begin{bmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ \vdots \\ u_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=a_{ik}$$

$$\sum_{m=1}^{k-1} l_{im}u_{mk}+l_{ik}u_{kk}=a_{ik}$$

$$l_{ik}=\left[a_{ik}-\sum_{m=1}^{k-1} l_{im}u_{mk}\right]\Big/u_{kk}$$

矩阵A的Doolittle分解公式

$$u_{1j}=a_{1j}\quad (j=1,2,\cdots n)$$

$$l_{i1}=a_{i1}/u_{11}\quad (i=2,3,\cdots,n)$$

$$u_{kj}=a_{kj}-\sum_{m=1}^{k-1}l_{km}u_{mj}\Rightarrow a_{kj}\quad (j=k,k+1,\cdots,n)$$

$$l_{ik}=\left(a_{ik}-\sum_{m=1}^{k-1}l_{im}u_{mk}\right)\Big/u_{kk}\Rightarrow a_{ik}\quad (i=k+1,\cdots,n)$$

$$(k=2,3,\cdots,n)$$

计算特点:U元素按行求，L元素按列求；先U后L；一行一列交叉计算。参考P56图3.1

$A=LU$的计算机存储单元的方法(节约内存)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

例3.4 用直接三角分解法求解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 18 \\ 6x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

解：用三角分解法直接得到

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 18 \\ 6 & -3 & 5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

所以

$$x_3 = \frac{-1}{-1} = 1, \quad x_2 = (6 - 0x_3)/3 = 2$$

$$x_1 = (6 - 2x_3 - 1x_2)/2 = 1$$

3.2平方根三角分解法

- **定理3.2 设A对称正定，则有非奇异下三角阵L，使$A=LL^T$。当限定L的对角元全为正，该分解唯一。（证明略）**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn} \end{bmatrix}$$

其中$a_{ij}=a_{ji}$

由矩阵乘法

(1) 1) $l_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ (取正)

2) L第1行 $\times L^T$ 第j列 (j = 2, $\cdots$, n)

$$l_{11} l_{j1} = a_{1j} = a_{j1} \Rightarrow l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}$$

(2) 1) L第2行 $\times L^T$ 第2列

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

2) L第2行 $\times L^T$ 第j列 (j = 3,4, $\cdots$, n)

$$l_{21} l_{j1} + l_{22} l_{j2} = a_{2j} = a_{j2} \Rightarrow l_{j2} = \frac{a_{j2} - l_{21} l_{j1}}{l_{22}}$$

…………

(k) 可得： $l_{kk}=\sqrt{a_{kk}-\sum_{m=1}^{k-1}l_{km}^{2}}$ ， $l_{jm}=\frac{1}{l_{kk}}\left[a_{jk}-\sum_{m=1}^{k-1}l_{km}l_{jm}\right]$

$(j=k+1,\cdots,n)$

优点：1、计算量小

2、第k行×第k列： $a_{kk}=\sum_{m=1}^{k}l_{km}^{2}$

故 $l_{km}^{2}\le a_{kk}\le\max_{1\le k\le n}a_{kk}$

$$\left|l_{km}\right|\le\max_{1\le k\le n}\sqrt{a_{kk}}$$

这说明在分解过程中$\left|l_{km}\right|^{2}$的值不会超过A的最大元,所以说舍入误差的放大受到控制——→平方根法稳定，不必先主元。

缺点：开方运算。LDL^{T}及其改进分解。

§3.2 解线性方程组的迭代法

设方程组的矩阵形式$\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$，其中：$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$;

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2\ldots x_n)^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2\ldots b_n)^{\mathrm{T}}$.

- 基本思想:举例说明--P62例3.5收敛；P64不收敛
- 迭代收敛性:定义和定理
- 迭代法:简单迭代(雅可比(Jacobi)迭代法)、赛德尔（Seidel）迭代法、SOR迭代法

第三章: 线性代数方程组的解法

1. 简单迭代法

1.1 迭代法建立. 考虑 $\boldsymbol{Ax=b}$

$$\boldsymbol{Ax=b} \Leftrightarrow \boldsymbol{x = Bx + g}$$ (矩阵B不唯一)

对应写出
$$\begin{cases} x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g \quad (k = 0,1,2,\cdots) \\ \text{取定初始向量} x^{(0)} \end{cases}$$

产生向量序列 $\boldsymbol{x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \cdots}$

若收敛, 记 $\boldsymbol{\lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \bar{x}}$

则上式两端取极限有：

$$\bar{x} = B\bar{x} + g\,,$$

上式说明 $\bar{x}$ 是解向量，从而当k充分大时

$$x^{(k+1)} \approx \text{解向量 } x$$

上述方法叫简单迭代法，B叫迭代矩阵。

注意：迭代阵B不唯一，影响收敛性。

1.2 收敛性.

|A-λE|=0

定义3.3 称 $\rho(B) = \max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i(B)|$为矩阵$B$的谱半径。

定理3.3 简单迭代法$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ 对任意初始向量 $x^{(0)}$都收敛的充要条件是 $\Leftrightarrow \rho\,(B) < 1$ （证略）

定理3.4 对迭代法$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g \quad (k=0,1,2,\cdots)$， 若

$$\|B\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|<1 \quad \text{或} \quad \|B\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|<1$$

则其对任意$x^{(0)}$收敛。

证：以$\|B\|_\infty<1$为例。将$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$与$x=Bx+g$相减有

$$x_i^{(k+1)}-x_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(x_j^{(k)}-x_j)$$

$$|x_i^{(k+1)}-x_i|\le\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\cdot|x_j^{(k)}-x_j|\le\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\cdot|x_j^{(k)}-x_j|$$

记$\delta_k=\max_{1\le j\le n}|x_j^{(k)}-x_j|$，则$|x_i^{(k+1)}-x_i|\le\|B\|_\infty\cdot\delta_k \qquad (i=1,2,\cdots,n)$

由于$0\le\|B\|<1\Rightarrow\lim|x_i^{(k+1)}-x_i|=0$.证毕!

设有方程组（其中 $a_{ii} \neq 0$ ）Ax=b, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

作等价变形

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}[b_1 - 0x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n] \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1 - 0x_2 - \cdots - a_{2n}x_n] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}[b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2} - \cdots - 0x_n] \end{cases}$$

于是有迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}[b_1 - 0x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - \cdots\cdots\cdots - a_{1n}x_n^{(k)}] \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - 0x_2^{(k)} - \cdots\cdots\cdots - a_{2n}x_n^{(k)}] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}[b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots\cdots\cdots - 0x_n^{(k)}] \end{cases}$$

(k=0, 1, 2, …)

————————Jacobi迭代法

定义3.4 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$,如果矩阵A满足条件:

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}\right| \qquad (i=1,2,\dots,n)\text{或者}\left|a_{jj}\right| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left|a_{ij}\right| \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

则称A为严格对角占优矩阵

定理3.5 如果线性方程组的系数矩阵A严格对角占优，则雅可比迭代法对任意初始向量$x^{(0)}$和g都收敛。即

$$\sum\left|b_{ij}\right| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \qquad (i=1,2,\dots,n)\text{或者}\sum\left|b_{ij}\right| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{jj}}\right| \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

2. 赛德尔（*Seidel*）迭代法

设有简单迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ 即

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k)} + g_1 \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k)} + b_{22}x_2^{(k)} + \cdots + b_{2n}x_n^{(k)} + g_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k)} + b_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + b_{nn}x_n^{(k)} + g_n \end{cases}$$

则迭代
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k)} + g_1 \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k+1)} + b_{22}x_2^{(k)} + \cdots + b_{2n}x_n^{(k)} + g_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k+1)} + b_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + b_{nn}x_n^{(k)} + g_n \end{cases}$$
为赛德尔迭代法

赛德尔迭代法矩阵形式

$$x^{(k+1)} = B_1 x^{(k+1)} + B_2 x^{(k)} + g$$

其中：$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & b_{nn} \end{bmatrix}$$

定理3.6 设赛德尔迭代公式$x^{(k+1)}=B_1x^{(k+1)}+B_2x^{(k)}+g$

令矩阵$B=B_1+B_2=(b_{ij})_{n\times n}$，如果$\|B\|_1=\max\sum\limits_{i=1}^{n}|b_{ij}|<1$

或$\|B\|_\infty=\max\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|<1$，则赛德尔迭代法对任意初始向量

$x^{(0)}$和g都收敛

（证明下去练习）

Seidel 迭代法的收敛性

（1）*Seidel* 迭代法对任意 $x^{(0)}$收敛 $\Leftrightarrow \rho(B_s)<1;$

（2）若 $\|B_S\|_1<1$或$\|B_S\|_\infty<1$,则 *Seidel* 迭代法对任意 $x^{(0)}$收敛；

（3）若简单迭代法的迭代矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$满足$\|B\|_1<1$或 $\|B\|_\infty<1$，则Seidel迭代法对任意 $x^{(0)}$ 收敛（证略）

例3.4 用Seidel迭代法求方程组 $\begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$

取初始向量 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ ，要求 $\max\limits_{1\le i\le 3} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \le 10^{-3}$
时迭代终止。

解：因为系数矩阵严格对角占优，故Seidel方法对任意 $x^{(0)}$ 收敛。 Seidel迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.4x_2^{(k+1)} + 2 \end{cases} \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

计算结果可列表如下

k	$x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)})^T$		
0	(0	0	$0)^{\mathrm{T}}$
1	(0.30000	1.56000	$2.68400)^{\mathrm{T}}$
2	(0.88040	1.94448	$2.95387)^{\mathrm{T}}$
3	(0.98428	1.99224	$2.99375)^{\mathrm{T}}$
4	(0.99782	1.99894	$2.99914)^{\mathrm{T}}$
5	(0.99970	1.99985	$2.99988)^{\mathrm{T}}$
6	(0.99996	1.99998	$2.99998)^{\mathrm{T}}$

因为$|x_i^{(6)}-x_i^{(5)}|\le 10^{-3}\ (i=1,2,3)$,故$x^{(6)}$为近似解，即

$x_1\approx 0.99996$ ， $x_2\approx 1.99998$ ， $x_3\approx 2.99998$

注意：Jacobi方法与Seidel方法的收敛性不一致。

3. 逐次超松弛迭代法(SOR法)

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \omega \cdot \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

ω — 松弛因子, ω =1 即Seidel方法(3.10)

SOR方法是一种加权平均。

SOR方法的收敛性如下（不加证明）：

(1) SOR方法对任意 $x^{(0)}$ 都收敛的必要条件是：
$0<\omega<2$

(2) 若系数矩阵A对称正定，则 $0<\omega<2$ 时SOR方法求解 $Ax=b$ 对任意 $x^{(0)}$ 收敛；

(3) 若系数矩阵A按行（或按列）严格对角占优，则 $0<\omega\le 1$ 时SOR方法对任意 $x^{(0)}$ 收敛。

最佳松弛因子 ω_{opt} 选取问题，见参考文献。

第三章: 线性代数方程组的解法

第三章的基本要求:

■掌握高斯消去法、列选主元消去法、总体选主元消去法的基本原理

■掌握矩阵三角分解方法的基本原理和方法

■掌握简单迭代法、赛德尔迭代和超松弛迭代求解线性方程组的基本原理和方法。

■能够熟练运用各种解线性方程组的数值方法解决问题

作业：习题三 2，4，8，10（14）

谢谢大家！4

西北工业大学

航空学院

第五章 插值法

学时：3个学时

内容：1. 拉格朗日插值；2 牛顿插值；3埃米特插值；4 三次样条插值

第五章: 插值法

1. 插值问题

实际中$y = f(x)$存在但没有表达式，

只知区间$[a,b]$离散数据x_i的函数值

$$y_i = f(x_i) \qquad (i = 0.1.2.....n)$$

希望: 用简单函数$\phi(x)$近似代替$f(x)$, 使

$$\phi(x_i) = y_i \qquad (i = 0.1.2.....n)$$

则称$\phi(x)$为$f(x)$的插值函数； 点x_i叫插值结点； $R(x) = f(x) - \phi(x)$叫截断误差。

如果函数$\{\ \phi(x)\ \}$是三角函数$\rightarrow$插值问题是三角插值

如果函数$\{\ \phi(x)\ \}$是代数多项式$\rightarrow$则称为代数插值

2. 插值多项式的存在唯一性

寻找插值多项式函数就是确定次数为n的多项式

$p_n(x)=a_0+a_1x+......+a_nx^n$使得$p_n(x_i)=y_i$成立

定理5.1: 在互异的$n+1$个节点x_k处满足插值条件

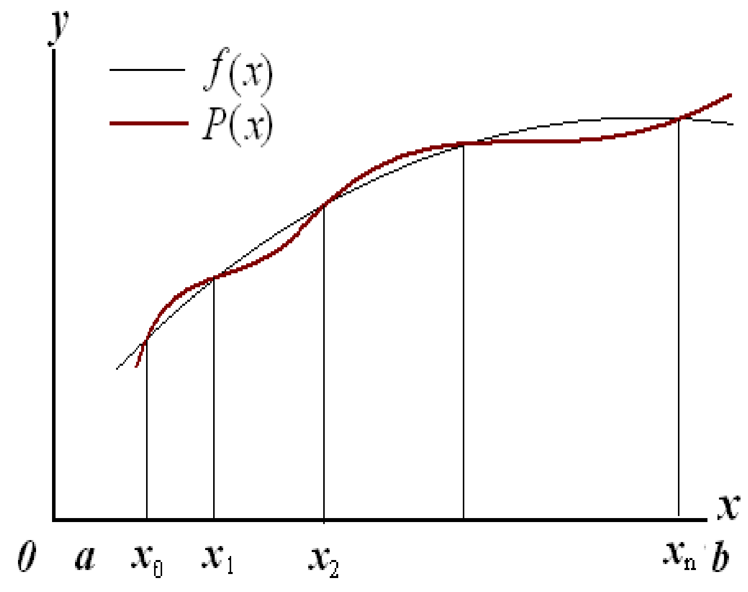
$p_n(x_k)=y_k \qquad (k=0,1,2,.....,n)$的次数不高于$n$的多项式 $p_n(x)$ 存在且唯一.

（证明略）

第五章: 插值法

3.几何意义

就是通过n+1个节点（x_i, y_i）的曲线$p_n(x)$近似于$f(x)$曲线如图所示



4.插值余项

插值多项式的余项又是截断误差，表示为:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

一般，$|R_n(x)|$ 越小近似程度越好。

§5.1 拉格朗日插值

- 基本思想:两点或多点构造线性或多次插值多项式
- 插值性质:定义和定理
- 基本要素:插值多项式的唯一性、插值基函数、插值多项式、插值余项

1. Lagrange插值基函数.

定义5.1:若$n+1$个n次多项式$l_k(x)\quad (k=0.1.2.\ldots.n)$

在$n+1$个结点x_i上满足

$$l_k(x_i)=\begin{cases}1 & \text{当}i=k\\ 0 & \text{当}i\neq k\end{cases}$$

则称其为插值基函数。显然:

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

2. Lagrange插值多项式

满足插值条件 $L_n(x_k)=y_k \quad (\mathrm{k}=0,1,2,\cdots,\mathrm{n})$

的次数n的多项式显然为:

$$L_n(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\cdots+l_n(x)y_n$$

这是因为 $L_n(x_k)=L_k(x_k)y_k=y_k \quad (\mathrm{k}=0,1,2,\cdots,\mathrm{n})$

注意: $L_n(x)\in \underline{\mathrm{P}}_n(x)=\{\mathrm{P}_n(x)\,|\,\mathrm{P}_n\text{为次数}\le n\text{多项式}\}$,

故可表为基函数 $l_0,l_1,\cdots,l_n$ 的线性组合。

线性插值多项式与抛物线插值多项式

- 线性插值（两点）

$$L_1(x) = l_k(x)y_k + l_{k+1}(x)y_{k+1} = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \cdot y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \cdot y_{k+1}$$

- 抛物线插值（三点）

$$L_2(x) = l_{k-1}(x)y_{k-1} + l_k(x)y_k + l_{k+1}(x)y_{k+1} = \frac{(x - x_{k+1})(x - x_k)}{(x_{k-1} - x_{k+1})(x_{k-1} - x_k)} \cdot y_{k-1}$$

$$+ \frac{(x - x_{k+1})(x - x_{k-1})}{(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k-1})} \cdot y_k + \frac{(x - x_k)(x - x_{k-1})}{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k-1})} \cdot y_{k+1}$$

3. Lagrange插值余项

定理5.2 $R(x)=f(x)-L_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$ $\omega_{n+1}=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

证： 因$R(x_i)=0 \quad (\mathrm{i}=0,1,\cdots,\mathrm{n})$故有形式

$$R(x)=k(x)(x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

引入 $\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-k(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$

显然在 $x_0,x_1,\cdots,x_n,x$为零。由$Rolle$定理(反复使用)

有$\xi\in(x_0,x_n)$,使$\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$，即$f^{(n+1)}(\xi)-k(x)(n+1)!=0$

故$k(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$，代入即得误差限

$$|\mathrm{R}(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|,\quad M_{n+1}=\max_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

第五章: 插值法

例5.1已知表中函数值，用线性和2次插值计算sin0.3367的值，并估计截断误差

x	0.32	0.34	0.36
Sin$x$	0.314567	0.333487	0.352274

解：$x_0=0.32, y_0=0.314;$
$x_1=0.34, y_1=0.333;$
$x_2=0.36, y_2=0.352.$

线性插值区间［x_0，x_1］：

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot y_1=0.330365$$

$$|R_1(x)|\le\frac{M_2}{2!}|(x-x_0)(x-x_1)|=\frac{\sin x_1}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|$$

$$=0.5(0.3335)(0.0167)(0.0033)\le 0.92\times10^{-5}$$

2次插值区间［x_0，x_2］：

$$L_2(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_1)}{(x_0-x_2)(x_0-x_1)}\cdot y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\cdot y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\cdot y_2=0.330374$$

$$|R_2(x)|\le\frac{M_3}{3!}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

$$=\frac{\cos x_0}{3!}\times(0.0167)(0.033)(0.0233)<0.178\times10^{-6}$$

例5.2　已知函数y=f(x)的观察数据为试构造f(x)的拉格朗日多项式Pn(x)，并计算f(−1)。

x_k	−2	0	4	5
y_k	5	1	−3	1

解 先构造基函数

$$l_0(x)=\frac{x(x-4)(x-5)}{(-2-0)(-2-4)(-2-5)}=-\frac{x(x-4)(x-5)}{84}\qquad l_1(x)=\frac{(x+2)(x-4)(x-5)}{(0-(-2))(0-4)(0-5)}=\frac{(x+2)(x-4)(x-5)}{40}$$

$$l_2(x)=\frac{(x+2)x(x-5)}{(4+2)(4-0)(4-5)}=-\frac{x(x+2)(x-5)}{24}\qquad l_3(x)=\frac{(x+2)x(x-2)(x-4)}{(5+2)(5-0)(5-4)}=\frac{(x+2)x(x-4)}{35}$$

所求三次多项式为

$$P_3(x)=\sum_{k=0}^{3}y_k l_k(x)=-5\times\frac{x(x-4)(x-5)}{84}+\frac{(x+2)(x-4)(x-5)}{40}+(-3)\times\frac{x(x+2)(x-5)}{24}+\frac{(x+2)x(x-4)}{35}$$

$$=\frac{5}{42}x^3-\frac{1}{14}x^2-\frac{55}{21}x+1$$

$$P_3(-1)=-\frac{5}{42}-\frac{1}{14}-\frac{55}{21}+1=\frac{24}{7}$$

第五章: 插值法

例5.3 设x_0,x_1,x_2,x_n是$n+1$个互异的插值节点, $l_k(x)(k=0,1,2,\dots,n)$

是拉格朗日插值基函数，证明$f(x)\equiv 1$时, $\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\equiv 1$

证明 $P_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\dots+y_nl_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$

$$\because \quad R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \quad \therefore \quad f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

当$f(x)\equiv 1$时, $1=P_n(x)+R_n(x)=\sum_{k=0}^{k} 1\times l_k(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

由于 $f^{(n+1)}(x)=0$, 故有 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\equiv 1$

例5.4 已知 e^{-x} 在 $x=1,2,3$ 的值如下

x	1	2	3
e^{-x}	0.367879441	0.135335283	0.049787068

试用二次 *Lagrange* 插值公式求 $e^{-2.1}$ 的近似值，并进行 误差估计.

解：二次插值多项式为

$$L_2(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}e^{-1}+\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}e^{-2}+\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}e^{-3}$$

$$e^{-2.1}\approx L_2(2.1)=\frac{(2.1-2)(2.1-3)}{(1-2)(1-3)}e^{-1}+\frac{(2.1-1)(2.1-3)}{(2-1)(2-3)}e^{-2}$$

$$+\frac{(2.1-1)(2.1-2)}{(3-1)(3-2)}e^{-3}=0.120165644$$

因 $\max\limits_{1\le x\le 2}\left|\left(e^{-x}\right)'''\right|\le e^{-1}$, 故有误差估计

$$|R(2.1)|=|e^{-2.1}-L_2(2.1)|\le\frac{e^{-1}}{3!}|(2.1-1)(2.1-2)(2.1-3)|$$

$$\approx 0.00607001$$

§5.2 牛顿插值

- 基本思想:利用差商的方法构造插值多项式
- 插值性质:定义和定理
- 基本要素:差商概念、插值公式、截断误差

第五章: 插值法

1. 差商 / 均差

定义5.2 函数在互异节点$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$的值分别为$f(x_i)$，称：

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$ 叫 $f(x)$在x_i, x_j的一阶差商（均差）

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$ 叫 f 在x_i, x_j, x_k二阶差商

……………………………

一般 $$f[x_0, x_1, \cdots x_k,] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}] - f[x_1, \cdots, x_k]}{x_0 - x_k}$$

叫 $f(x)$ 在$x_0, \cdots, x_k$的k阶差商，是由k-1阶差商定义的。

2. 差商的性质

性质1. $f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}$

可表为值 $f(x_j)$的线性组合形式。

（证 略，归纳法）

性质2. $f[\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots] = f[\cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots]$与结点排列无关

（对称 性）

性质3. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} f[x, x_0] = f'(x_0),$

故差商是微商的离散形式

3. 造差商表(实用)

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & > f[x_0,x_1] & & & \\
x_1 & f_1 & & > f[x_0,x_1,x_2] & & \\
 & & > f[x_1,x_2] & & > f[x_0,x_1,x_2,x_3] & \\
x_2 & f_2 & & > f[x_1,x_2,x_3] & \cdots\cdots & \\
 & & > f[x_2,x_3] & \cdots\cdots & & \\
x_3 & f_3 & \cdots & & & \\
\vdots & \vdots & & & &
\end{array}
$$

第五章: 插值法

4 牛顿插值多项式及其余项

求满足$N_n(x_i)=f(x_i) \quad (i=0,1,\cdots,n)$的多项式 $N_n(x)$.由差商定义.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0) \\
&= f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1) \\
&= f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_2)(x-x_1) \\
&\quad +f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_0)\cdots(x-x_2) \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
&\quad +\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \\
&\quad +f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)
\end{aligned}
$$

记 $N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$

$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$\rightarrow$ (n次多项式)

第五章: 插值法

$\overline{\mathrm{R}}(x) = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$，则

$f(x) = N_n(x) + \overline{\mathrm{R}}(x)$, 且 $f(x_i) = N_n(x_i) + \overline{\mathrm{R}}(x_i) = N_n(x_i)\quad (i = 0,1,\cdots,n)$

说明：该$N_n(x)$满足插值条件；故为欲　求多项式。

注：(1) 牛顿插值多项式中各项系数由差商表容　易得到;

(2) 相邻次数的插值多项式　有关系.

由惟一性，$R(x) = \overline{\mathrm{R}}(x)$, 故

$$f[x, x_0, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

故得差商与导数之间的关系

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \qquad \xi \in (x_0, x_n)$$

例5.5 已知 $f(x)=sh(x)$数值表如下：

x_k	0.40	0.55	0.65	0.80	0.90
$f(x_k)$	0.41075	0.57815	0.69675	0.88811	1.02652

用 *Newton* 插值公式求 $f(0.596)$ 的近似值。

解：先造差商表

0.40	0.41075				
		1.1160			
0.55	0.57815		0.2800		
		1.1860		0.197	
0.65	0.69675		0.3588		0.034
		1.2757		0.214	
0.80	0.88811		0.4336		
		1.3841			
0.90	1.02652				

由Newton公式得四次插值多项式为:

$$
\begin{aligned}
N_4 = 0.41075 + 1.1160(x-0.40) \\
&+ 0.2800(x-0.40)(x-0.55) \\
&+ 0.197(x-0.40)(x-0.55)(x-0.65) \\
&+ 0.034(x-0.40)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.80)
\end{aligned}
$$

将$x = 0.596$代入得:

$$f(0.596) \approx N_4(0.596) \approx 0.63192$$

谢谢大家！5

西北工业大学

航空学院

§5.3 等距节点插值

基本思想:利用差分的方法构造插值多项式

插值性质:定义和定理

基本要素:差分概念、插值公式、截断误差

第五章：插值法

一. 差分

1. 定义 设 $x_i = x_0 + ih \quad (i = 0,1,\cdots,n), \quad h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$ 叫步长

称 $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ 为 $y = f(x)$ 在 x_0 的以h为步长一阶向前差分

$\Delta y_1 = y_2 - y_1$ x_1 一阶

……

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$ x_0 二阶

……

一般：

$\Delta^m y_i = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i$ x_i m阶

2.性质:

（1） 差分可表为函数值的线性组合 （证略）

(2) $$f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}$$ (证明用归纳法,略)

(3) $$\Delta^n y_0 = h^n f^{(n)}(\xi) \qquad \xi \in (x_0, x_n)$$

3. 差分表 (实用)

x_i	y_i	一阶差分	二阶差分	三阶差分	$\cdots$
x_0	y_0				
x_1	y_1	Δy_0			
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$		
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

二 等矩结点插值公式：

设 $x = x_0 + th \quad (0 < t < n), x_i = x_0 + ih,$

将Newton插值公式

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

中的差商用性质(2)换为差分，可整理为如下的Newton向前插值公式

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th) = f(x_0) + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$
$$+ \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

截断误差可表示为

$$R(x)=R(x_0+th)=\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)$$

$$|R(x)|=|R(x_0+th)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\xi)|$$

$$\underset{0<t<n}{\text{Max}}|t(t-1)\cdots(t-n)|h^{n+1}\le\varepsilon$$

$$\Rightarrow h\le ?$$

Newton向后插值公式及Bessel 插值公式

——参考文献

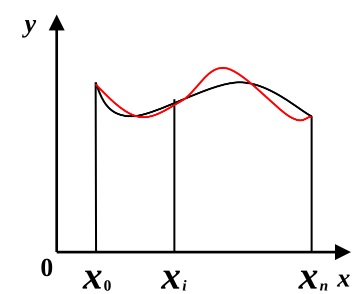
§5.4 埃米特插值

- 基本思想:利用Hermite的方法构造插值多项式
- 插值性质:插值多项式与在插值节点上的被插值函数和导数都相等
- 基本要素:插值公式、插值余项

前述插值问题：要求被插函数与插值多项式在结点取相同值，

Lagrange型插值条件 $\begin{cases} P_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0,1,\cdots,n) \\ \text{几何上：两曲线有公共交点} \end{cases}$

然而，实际许多问题还常常要求两曲线进一步有共同切线：插值条件为：求一次数 $\le 2n+1$ 多项式 $H_{2n+1}(x)$



，使之满足给定的Hermite型插值条件

$$\begin{cases} H_{2n+1}(x_i) = y_i \\ H'_{2n+1}(x_i) = m_i \end{cases} \quad (i = 0,1,\cdots,n) \qquad (5.8)$$

求 $H_{2n+1}(x)$ 不用待定系数法. 可设

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(x)y_j+\sum_{0}^{n}\beta_j(x)m_j$$

——插值基函数表示法

其中 $\alpha_j(x),\beta_j(x)\in \underline{p}^{2n+1}$，且

$$\alpha_j(x_i)=\begin{cases}1 & 当 i=j\\ 0 & 当 i\neq j\end{cases}\qquad \alpha_j'(x_i)=0$$

$$\beta_j(x_i)=0\qquad \beta_j'(x_i)=\begin{cases}1 & 当 i=j\\ 0 & 当 i\neq j\end{cases}$$

主要是求插值基函数 $\alpha_j(x), \beta_j(x)$

可借用Lagrange插值基函数 $l_j(x)$ 得公式

余项 $$R(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x)$$

——有规律

例5.3　给定函数值表如下:

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	2	4	12
$f`(x_i)$		3	

求一次数不超过3的多项式$H_3(x)$,

使之满足如下条件:

$$H_3(i) = f(i) \quad (i = 1,2,3) \ , \quad H_3'(2) = 3$$

并写出截断误差$R(x) = H_3(x) - f(x)$的表达式.

解: 方法1.先求满足插值条件

$p_2(i)=f(i) \quad (i=1,2,3)$ 的二次多项式，得

$$p_2(x)=3x^2-7x+6$$

设所求多项式为:

$$H_3(x)=p_2(x)+k(x-1)(x-2)(x-3)$$

由条件$H_3'(2)=3$, 得: $k=2$.

故. $H_3(x)=2x^3-9x^2+15x-6$

方法2.造重节点差商表

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & \underline{\underline{2}} & & & \\
 & & \underline{\underline{2}} & & \\
2 & 4 & & \underline{\underline{1}} & \\
 & & 3 & & \underline{\underline{2}} \\
2 & 4 & & 5 & \\
 & & 8 & & \\
3 & 12 & & &
\end{array}
$$

由 *Newton* 插值公式得:

$$H_3(x)$$

$$= 2 + 2(x-1) + 1\cdot(x-1)(x-2) + 2(x-1)(x-2)(x-2)$$

$$= 2x^3 - 9x^2 + 15x - 6$$

方法3.插值基函数表示法(略)

截断误差为:

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{(4)!}(x-1)(x-2)^2(x-3), \quad \xi \in (1,3)$$

§5.5 三次样条插值

- 基本思想:利用分段插值的方法构造三次样条插值多项式
- 插值性质:具有二阶连续导数
- 基本要素:三次样条函数定义、三次样条函数构造

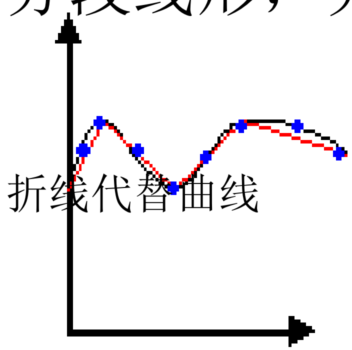
三次样条插值简介

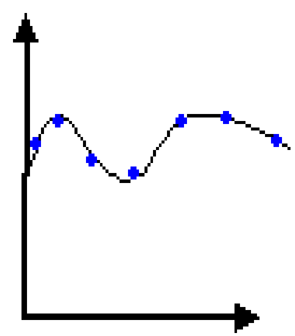
1. 分段插值法：

问题：结点增多，多项式次数增高，逼近精度越好？未必！多结点高次插值往往在局部误差更大——Runge现象。

实用：采用分段低次插值

有分段线形，分段二次插值等，几何上……

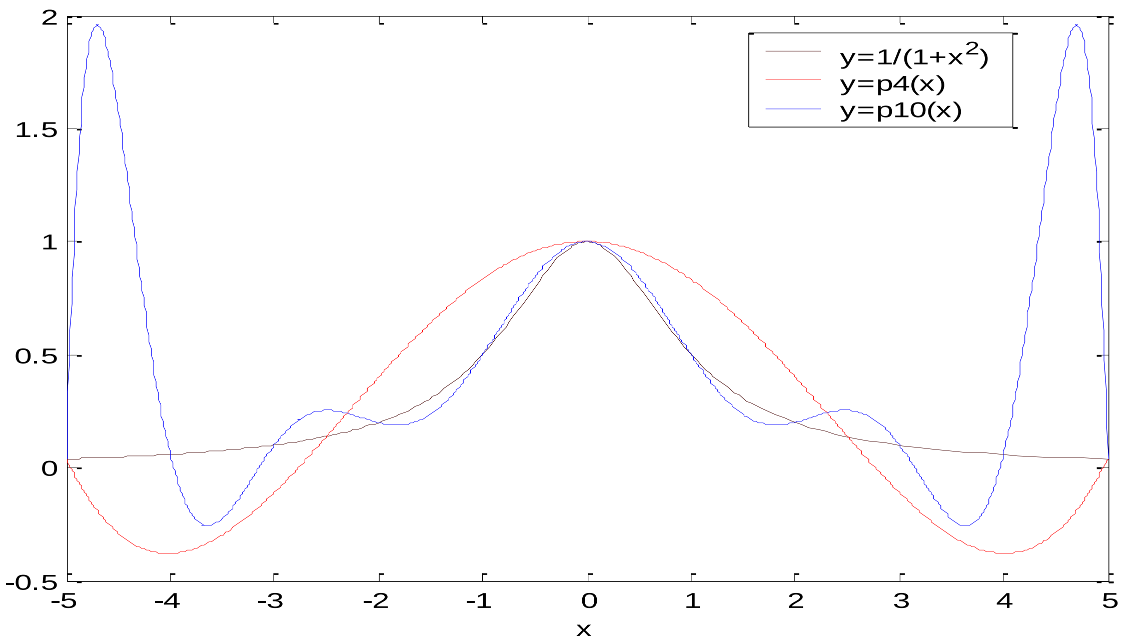




缺点：分段插值函数只能保证连续性，不能保证光滑性。

高次插值的龙格现象

对于代数插值来说，插值多项式的次数很高时，逼近效果往往很不理想。例如函数 $f(x)=1/\left(1+x^2\right),-5\le x\le 5$ ，将区间[−5, 5]分为n等份，$p_n(x)$表取n+1个等分点作节点的插值多项式，如下图所示，当n增大时， $p_n(x)$ 在两端会发出激烈的振荡，这就是所谓**龙格现象**。



2. 三次样条插值

分段插值可以得到整体连续函数，但在连接点处一般不光滑，而Hermite插值虽然在连节点处一阶光滑，但整体插值由于结点多，次数高而有可能发生龙格现象。

希望：

既想分段插值，又想在结点处保持光滑，甚至二阶光滑——三次样条。

样条来源：

第五章：插值法

1. 定义：在[a, b]上取n+1个点 $a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$

若函数S(x)满足：

(1) $S(x_i) = y_i$ ——此时S(x)叫插值函数；

(2) 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上是三次多项式；

(3) 在内结点或在整个区间上具二阶连续导数。
则称S(x)为y=f(x)的三次样条插值函数。

2．构造：有两种方法，导出三对角方程组，用追赶法。

第五章: 插值法

第五章的基本要求:

■掌握Lagrange插值、Newton插值的基本原理和基本实现方法

■了解其他各种插值方法的优缺点，了解分段插值的必要性

作业：习题五1、2、4

第四章 矩阵特征值和特征向量计算

学时：2个学时

内容：1. 乘幂法与反幂法

2. 雅可比方法

复习线性代数

1. 定义：若 $A\vec{x}=\lambda(\vec{x})\quad(x\neq 0)$，则 λ 称之为A的特征值

x 叫其相应的特征向量。

又 $A(\alpha\vec{x})=\lambda(\alpha\vec{x})\quad(\alpha\neq 0)$

说明 αx 还是特征向量。

2. 求法： $|A-\lambda E|=0\quad(A-\lambda E)\vec{x}=0$

十分困难;求近似解法,且简单、可行、有效。

第四章: 矩阵特征值与特征向量

工程实践中有多种振动问题，如桥梁或建筑物的振动，机械机件、飞机机翼的振动，及一些稳定性分析和相关分析可转化为求矩阵特征值与特征向量的问题。

但高次多项式求根精度偏低, 一般不作为求解方法。 目前方法是针对矩阵不同的特点给出不同的有效方法。

谢谢大家！6

西北工业大学

航空学院

§4.1乘幂法与反幂法

一．乘幂法——求A的主特征值（按模最大者）及其相应的特征向量

设A的特征值 $\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n$,且$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$

特征向量 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ （假定线性无关）

$$A\vec{x}_i = \lambda \vec{x}_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$\forall$初始向量$\vec{\ } \neq \mathbf{0}$,则有线性表示

$$\vec{u}_0 = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{x}_n$$

$$\vec{u}_1 = A\vec{u}_0 = \alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \vec{x}_n$$

$$\vec{u}_2 = A\vec{u}_0 = \alpha_1 \lambda_1^2 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^2 \vec{x}_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$\vec{u}_k = A\vec{u}_{k-1} = \alpha_1 \lambda_1^k \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k \vec{x}_n$$

$$\vec{u}_k = \lambda_1^k \left(\alpha_1 \vec{x}_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i\right) \quad (\text{设}\ \alpha_1 \neq 0) \qquad (4.1)$$

记$\left(\vec{u}_k\right)_j$为$\vec{u}_k$的第j个分量，则

$$\frac{\left(\vec{u}_k\right)_j}{\left(\vec{u}_{k-1}\right)_j}=\lambda_1\frac{\alpha_1\left(\vec{x}_1\right)_j+\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\left(\vec{x}_1\right)_j}{\alpha_1\left(\vec{x}_1\right)_j+\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k-1}\left(\vec{x}_1\right)_j} \qquad (4.2)$$

$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\left(\vec{u}_k\right)_j}{\left(\vec{u}_{k-1}\right)_j}=\lambda_1$ 故k充分大时，$\frac{\left(\vec{u}_k\right)_j}{\left(\vec{u}_{k-1}\right)_j}\approx\lambda_1$,$(j=1,2,\cdots,n)$

由（4.1）显然知k充分大时，$\sum\approx 0$，

故$\vec{u}_k\approx\lambda_1\alpha_1\vec{x}_1$就是$\lambda_1$的近似特征向量。

第四章：矩阵特征值与特征向量

算法：

(1) $\forall \vec{u}_0 \neq 0$

(2) 按 $\vec{u}_{k-1} = A\vec{u}_{k-1}$ 计算 $(k = 1,2,3\ldots.)$

(3) 固定一个分量标号 $= j_0$，若 k 充分大时

$$\frac{(\vec{u}_k)_j}{(\vec{u}_{k-1})_j} \approx c(\text{常数})$$

则取 $\lambda_1 \approx c$，而 $\vec{u}_k$ 就是相应的一个近似特征向量.

说明：

1. $\alpha_1 = 0$ 概率很小，也可换另外初始向量 $\tilde{u}_0$；

2. 若算法中分母 $(\vec{u}_{k-1})_j$ 为零，

则选择另一个不为零的分量 $(\vec{u}_{(k-1)})_{j_1}$ 计算 $\dfrac{(\vec{u}_k)_{j_1}}{(\vec{u}_{k-1})_{j_1}}$ $(j_1 \neq j_0)$

3. 由(4.1)可知,当K充分大时,若$|\lambda_1|>1$,则$(\vec{u}_k)$分量绝对值可能很大;

当$|\lambda_1|<1$时,$(\vec{u}_k)$分量绝对值过小,为防止此现象发生,

实用中常常是迭代m步后对$\vec{u}_m$作一次规范化,

如用$\vec{v}_m=\dfrac{\vec{u}_m}{(\vec{u}_m)_{\max}}$或$\vec{v}_m=\dfrac{\vec{u}_m}{(\vec{u}_m)_{\min}}$代替$\vec{u}_m$继续迭代,

这里$(\vec{u}_m)_{\max}$和$(\vec{u}_m)_{\min}$分别表示向量$(\vec{u}_m)$的绝对值最大的分量和最小分量;

4. 由(4.1)知,乘幂法的速度与比值$|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|$有关,该比值越小收敛越快.由此提示了原点平移法,*Rayleigh*高加速法---参考书.

5. 若主特征值λ_1是重特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots\ldots = \lambda_r$，

$|\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$，则由(4.2)得

$$\frac{(\vec{u}_k)_j}{(\vec{u}_{k-1})_j} = \lambda_1 \left[\frac{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i (\vec{x}_i) + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k (\vec{x}_i)_j}{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i (\vec{x}_i)_j + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k-1} (\vec{x}_i)_j} \right]$$

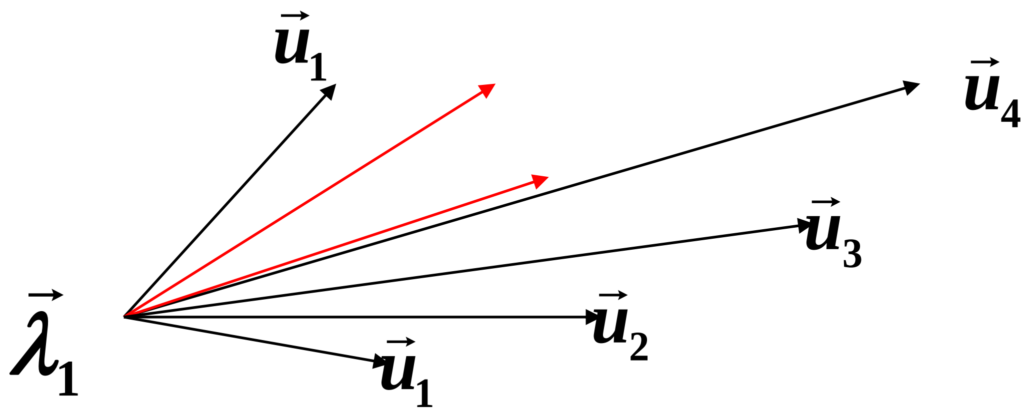
同样有$\lim\limits_{k \to \infty} \frac{(\vec{u}_k)}{(\vec{u}_{k-1})_j} = \lambda(j = 1,2,3,\ldots\ldots)$与前述算法相同.

只不过此时从不同的u_0出发

可能得到λ_1的n个不同的线性无关特征向量。

6. 几何解释

例4.1 求$A=\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ -21 & -3 & 24 \\ -12 & -12 & 51 \end{pmatrix}$的$\lambda_1$及$\vec{x}_1$



解:

k	$\vec{u}_k = A\vec{u}_{k-1}$	$\lambda_1^{(k)} = \dfrac{(\vec{u}_k)_3}{(\vec{u}_{k-1})_3}$
0	$(1\quad 0\quad 0)^T$	
1	$(6,\quad -21\quad -12)^T$	
2	$(216\quad -351\quad -432)^T$	36.000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
5	$(1023516\quad -21592251\quad -41019372)^T$	45.087
	$(-0.025\quad 0.526\quad 1)^T$	
	$(-0.462\quad 22.947\quad 44.988)^T$	44.988
	$\vdots$	$\vdots$
	$(-2668.140\quad 2052532.305\quad 4099715.208)^T$	45.000

$$\lambda_1 \approx 45.000$$

第四章: 矩阵特征值与特征向量

例： 用幂法求矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$的按模最大的特征值和相应的特征向量。

取$x^{(0)}=(0,0,1)^T, \varepsilon \le 10^{-3}$.

解： $y^{(0)}=x^{(0)}=(0,0,1)^T,$

$$x^{(1)}=Ay^{(0)}=(0,-1,2)^T, \quad \partial = 2,$$

$$y^{(1)}=\frac{x^{(1)}}{\partial}=(0,-0.5,1)^T,$$

$$x^{(2)}=Ay^{(1)}=(0.5,-2,2.5)^T, \quad \partial = 2.5,$$

……

第四章: 矩阵特征值与特征向量

$$x^{(8)} = Ay^{(7)} = (2.7650948, -2.9981848, 2.9990924)$$

$$\partial = 2.9990924$$

$$y^{(8)} = (0.9219772, -0.9996973, 1)$$

$$x^{(9)} = Ay^{(8)} = (2.8436517, -2.9993946, 2.9996973).$$

由 $2.9996973 - 2.9990924 = 0.0006049 < 10^{-3}.$

故$\lambda_1 \approx 2.9996973.$ 相应特征向量为

$u \approx (2.8436517, -2.9993946, 2.9996973)$。

事实上，A的特征值$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1,$

与λ_1对应的特征向量为 $(1, -1, 1)^T$。

此例中比值为 $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| = \dfrac{2}{3}.$

幂法小结

当A的特征值分布为$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$或$|\lambda_1|=|\lambda_2|=\cdots=|\lambda_m|>|\lambda_{m+1}|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$时，用幂法可以计算出$\lambda_1$及相应的特征向量。如果按$x^{(k+1)}=Ax^{(k)}$迭代所得向量序列$\left\{x^{(k)}\right\}$呈有规律的摆动，则可能为$\lambda_1=-\lambda_2$的情况。否则应考虑用别的方法求解。此外，当矩阵$A$无$n$个线性无关的特征量时，幂法收敛很慢，亦应考虑改用其他方法。

幂法计算简便易行，它是求大型稀疏矩阵按模最大特征值的常用方法。

二．反幂法——求A的按摸最小的特征值

反幂法是计算矩阵按模最小的特征值及特征向量的方法，也是修正特征值、求相应特征向量的最有效的方法。

设A为$n\times n$阶非奇异矩阵，λ, u为A的特征值与相应的特征向量，即

$$Au=\lambda u \quad \Rightarrow \quad u=\lambda A^{-1}u \quad \Rightarrow \quad A^{-1}u=\frac{1}{\lambda}u$$

此式表明，A^{-1}的特征值是A的特征值的倒数，而相应的特征向量不变。因此，若对矩阵A^{-1}用幂法，即可计算出A^{-1}的按模最大的特征值，其倒数恰为A的按模最小的特征值。这就是反幂法的基本思想。

因为A^{-1}的计算比较麻烦，而且往往不能保持矩阵A的一些好性质（如稀疏性），因此，反幂法在实际运算时以求解方程组

$$Ax^{(k+1)} = x^{(k)}$$

代替幂法迭代

$$x^{(k+1)} = A^{-1}x^{(k)}$$

求得$x^{(k+1)}$，每迭代一次要解一个线性方程组。由于矩阵在迭代过程中不变，故可对A先进行三角分解，每次迭代只要解两个三角形方程组。

反幂法计算的主要步骤：

1.对A进行三角分解$A = LU$

2.求整数r，使得$\left|x_r^{(k)}\right| = \max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)}\right|, \alpha = x_r^{(k)}$，计算$y^{(k)} = \dfrac{x^{(k)}}{\alpha}$

3.解方程组 $Lz = y^{(k)}$ $Ux^{(k+1)} = z$

反幂法的一个应用

用带原点移位的反幂法来修正特征值，并求相应的特征向量是非常有效的。

设已知A的一个特征值λ的近似值为λ^*，因λ^*接近λ，一般有

$$0<\left|\lambda-\lambda^*\right|<<\left|\lambda_i-\lambda^*\right| \qquad (\lambda_i \neq \lambda)$$

故$\lambda-\lambda^*$是矩阵$A-\lambda^* I$的按模最小的特征值，且由上式可知，比值$\left|\lambda-\lambda^*\right|/\left|\lambda_i-\lambda^*\right|$ $(\lambda_i \neq \lambda)$较小。因此，对$A-\lambda^* I$用反幂法求$\lambda-\lambda^*$一般收敛很快，通常只要经过二、三次迭代就能达到较高的精度。

第四章：矩阵特征值与特征向量

算法：

1.输入$A=(a_{ij})$,近似值λ^*，初始向量$x=(x_1,\cdots,x_n)$,误差限ε,最大迭代次数N。

2 .置$k=1,u=1$

3.作三角分解 $(A-\lambda^* I)=LU$

4. 求整数r，使$\left|x_r\right|=\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i\right|$， $x_r\Rightarrow\alpha$

5.计算 $y=\dfrac{x}{\alpha}$ $Lz=y$ $Ux=z$ 置$x_r\Rightarrow\beta$

6.若$\left|\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{u}\right|<\varepsilon$,则置$\lambda=\lambda^*+\dfrac{1}{\beta}$,输出$\lambda,x$,停机；否则，转7

7.若$k<N$,置$k+1\Rightarrow k,\beta\Rightarrow u$,转4;

否则，输出失败信息，停机。

第四章：矩阵特征值与特征向量

例：$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$，用反幂法求矩阵$A$接近2.93的特征值，并求相应的特征向量，取$x^{(0)}=(0,0,1)^T$.

解：对$A-2.93I$作三角分解得

$$A-2.93I=\begin{bmatrix}-0.93 & -1 & 0\\ 0 & -0.93 & -1\\ 0 & -1 & -0.93\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1/0.93 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.93 & -1 & 0\\ 0 & -0.93 & -1\\ 0 & 0 & -0.93+1/0.93\end{bmatrix}$$

按算法迭代3次，$\lambda\approx 3.0000954$, 与准确值3的误差小于10^{-4}，$u\approx (1,-0.9992431,0.9991478)^T$与准确值$(1,-1,1)^T$比较，残差$\|r\|_\infty<0.001$.

§4.2 雅可比旋转法

对任意实对称矩阵A的全部特征值及特征向量求解

——Jacobi旋转法

基本思想：

$$\boldsymbol{R}_k \cdots \boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{R}_1 A \boldsymbol{R}_1^T \boldsymbol{R}_2^T \cdots \boldsymbol{R}_k^T \to \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

求一般矩阵全部特征值和特征向量的QR方法

——参考书。

一、矩阵的旋转变换

设A为n阶实对称矩阵，考虑矩阵

$$V_{ij}(\varphi)=\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & \cos\varphi & & & & \sin\varphi & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & -\sin\varphi & & & & \cos\varphi & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}$$

第四章: 矩阵特征值与特征向量

$V_{ij}(\varphi)$是正交矩阵，若记 $A^{(1)}=V_{ij}AV_{ij}^T=(a_{ij}^{(1)})$

则有
$$\begin{cases} a_{ii}^{(1)}=a_{ii}\cos^2\varphi+a_{jj}\sin^2\varphi+a_{ij}\sin 2\varphi \\ a_{jj}^{(1)}=a_{ii}\sin^2\varphi+a_{jj}\cos^2\varphi-a_{ij}\sin 2\varphi \\ a_{ik}^{(1)}=a_{ki}^{(1)}=a_{ik}\cos\varphi+a_{jk}\sin\varphi \qquad (k\neq i,j) \\ a_{jk}^{(1)}=a_{kj}^{(1)}=-a_{ik}\sin\varphi+a_{jk}\cos\varphi \\ a_{kl}^{(1)}=a_{lk}^{(1)}=a_{kl} \qquad (k,l\neq i,j) \\ a_{ij}^{(1)}=a_{ji}^{(1)}=\dfrac{1}{2}(a_{jj}-a_{ii})\sin 2\varphi+a_{ij}\cos 2\varphi \end{cases}$$

如果$a_{ij}\neq 0$,取φ使得$tg2\varphi=2a_{ij}/(a_{ii}-a_{jj})$ $(|\varphi|<\pi/4)$则有 $a_{ij}^{(1)}=a_{ji}^{(1)}=0$,得到一个使$A$中非零的非对角元素$a_{ij}=a_{ji}$变成零的正交相似变换.

第四章: 矩阵特征值与特征向量

对$A^{(1)}$重复上述过程$\Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \cdots$,得到一个矩阵序列$\{A^{(k)}\}$。可证，虽然这种变换不一定能使矩阵中非对角元中零元素的个数单调增加，但可保证非对角元的平方和递减。

以A与$A^{(1)}$为例：设$E(A)=\sum_{k\neq l} a_{kl}^2$，$E(A^{(1)})=\sum_{k\neq l}(a_{kl}^{(1)})^2$

由 $a_{kl}=a_{kl}^{(1)} \quad (k,l\neq i,j) \qquad a_{ik}^{(1)}=a_{ki}^{(1)}=a_{ik}\cos\varphi+a_{jk}\sin\varphi$

$$a_{jk}^{(1)}=a_{kj}^{(1)}=-a_{ik}\sin\varphi+a_{jk}\cos\varphi \qquad (k\neq i,j) \quad \Rightarrow$$

$$E(A^{(1)})=\sum_{k\neq l\neq i,j}(a_{kl}^{(1)})^2+2\sum_{k\neq i,j}[(a_{ik}^{(1)})^2+(a_{jk}^{(1)})^2]$$

$$=\sum_{k\neq l\neq i,j} a_{kl}{}^2+2\sum_{k\neq i,j}(a_{ik}{}^2+a_{jk}{}^2)=E(A)-2a_{ij}^2<E(A)$$

上式表明，在上述旋转变换下，非对角元的平方和严格单调递减，因而对角元的平方和单调递增。正利用这点，导出了Jacobi方法。

第四章: 矩阵特征值与特征向量

二、古典雅可比方法——旋转法

通过一系列旋转相似变换将A变成$A^{(k+1)}$,求得A的全部特征值与特征向量的方法称为*Jacobi*方法。如果在对A作相似变换的过程中，每一步都选绝对值最大的非对角元素$a_{ij}^{(k)}$,以此确定旋转矩阵，这种方法称为古典*Jacobi*方法。其计算过程如下：

1. 令$k=0, A^{(k)}=A$

2.求整数i, j,使得$\left|a_{ij}^{(k)}\right| = \max\limits_{1\le l,m\le n,l\ne m}\left|a_{lm}^{(k)}\right|$

3.计算旋转矩阵

$$a = ctg2\varphi = \frac{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}{2a_{ij}^{(k)}}, \quad b = tg\varphi = sign(a)(\sqrt{a^2+1} - |a|),$$

$$c = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}, \quad d = \sin\varphi = bc, \quad V^{(k)} = V_{ij}(\varphi)$$

4.计算$A^{(k+1)}$

$$a_{ii}^{(k+1)}=c^2a_{ii}^{(k)}+d^2a_{jj}^{(k)}+2cda_{ij}^{(k)},\quad a_{jj}^{(k+1)}=d^2a_{ii}^{(k)}+c^2a_{jj}^{(k)}-2cda_{ij}^{(k)},$$

$$a_{il}^{(k+1)}=a_{li}^{(k+1)}=ca_{il}^{(k)}+da_{jl}^{(k)},\qquad a_{jl}^{(k+1)}=a_{lj}^{(k+1)}=-da_{il}^{(k)}+ca_{jl}^{(k)},$$

$$(l=1,2,\cdots,n,l\neq i,j)$$

$$a_{lm}^{(k+1)}=a_{ml}^{(k+1)}=a_{lm}^{(k)}\qquad (l,m=1,2,\cdots,n,\ l,m\neq i,j)$$

置$a_{ij}^{(k+1)}=a_{ji}^{(k+1)}=0$

5.计算$E(A^{(k+1)})=\sum\limits_{l\neq m}(a_{lm}^{(k+1)})^2$

6.若$E(A^{(k+1)})<\varepsilon$,则$a_{11}^{(k+1)},a_{22}^{(k+1)},\cdots,a_{nn}^{(k+1)}$为特征值，$Q=V^{(0)}V^{(1)}\cdots V^{(n)}$的各列为相应特征向量；否则，$k+1\Rightarrow k$返回2，重复上述过程。

一般地，古典Jacobi法不能在有限步内将A化成对角阵，但有以下收敛性结果。

古典*Jacobi*法是收敛的，进一步分析还可得出*Jacobi*法收敛较快。另外，这种方法对舍入误差有较强的稳定性，因而解的精度高，且所求得的特征向量正交性很好。

它的不足之处是运算量大，且不能保持矩阵的特殊形状（如稀疏性），因此*Jacobi*法是求中小型稠密实对称矩阵的全部特征值与特征向量的较好方法。

第四章: 矩阵特征值与特征向量

例：$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$用Jacobi方法求$A$的特征值。

解： 首先取$i=1,\ j=2$,因$ctg\,2\varphi=0$,故有$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$,于是

$\cos\varphi=\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$$V^{(0)}=V_{12}(\varphi)=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = V^{(0)} A^{(0)} V^{(0)T}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 3 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{bmatrix}$$

再取$i=1, j=3, tg2\varphi=\sqrt{2}, \cos\varphi=0.88807, \sin\varphi=0.45970$

$$V^{(1)}=\begin{bmatrix} 0.88807 & 0 & 0.45970 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.45970 & 0 & 0.88807 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)}=V^{(1)}A^{(1)}V^{(1)T}=\begin{bmatrix} 0.63397 & -0.32506 & 0 \\ -0.32506 & 3 & -0.62796 \\ 0 & -0.62796 & 2.36603 \end{bmatrix}$$

下面应取$i=2, j=3$,重复上述过程.如此继续下去,可得

$$A^{(5)}=\begin{bmatrix} 0.58579 & 0.0020383 & 0 \\ 0.0020383 & 3.41401 & 0.016758 \\ 0 & 0.016758 & 2.00020 \end{bmatrix}$$

$$E(A^{(5)})=2\times(0.0020383^2+0.016758^2)=0.00056997$$

第四章: 矩阵特征值与特征向量

所以A的特征值为

$$\lambda_1 \approx 3.41401, \quad \lambda_2 \approx 2.00020, \quad \lambda_3 \approx 0.58579$$

准确值

$$\lambda_1 = 2+\sqrt{2} \approx 3.4142136,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 2-\sqrt{2} \approx 0.5857864$$

最大误差为0.0002036

古典Jacobi法的改进:取定正序列$\{\varepsilon_k\}, \varepsilon_k \to 0(k \to \infty)$,以$\varepsilon_k$为限,逐行检查非对角元,若$|a_{ij}| < \varepsilon_k$就跳过,否则以$V_{ij}(\varphi)$消去元$a_{ij}$和$a_{ji}$,反复进行上述过程,直到所有非对角元的绝对值均小于ε_k,再以ε_{k+1}为限,进行第$k+1$轮循环消元。当ε_k充分小时,所得到的矩阵的对角元即为A的全部特征值。

第四章: 矩阵特征值与特征向量

基本要求:

1. 熟悉特征值和特征向量的定义;
2. 熟悉乘幂法求主特征值的计算过程;
3. 了解反幂法的思路;

作业: 习题1（1）、习题2
习题3就是本节例题

谢谢大家！7

西北工业大学

航空学院